**Thème :**

Comparaison des méthodes BME (Bayesian Maximum Entropy) et HASM(High Accuracy Surface Modeling) pour la modélisation en géostatistique.

**N’oublie pas de vérifier dans ton développement que BME n’est pas moderne**

**Méthodes déterministes et méthodes stochastiques**

**Méthodes géostatistiques et méthodes non géostatistiques**

**INTRODUCTION GENERALE**

La modélisation et l'interpolation spatiale ou spatio-temporelle sont importantes pour de nombreux domaines d'étude de la science de l'environnement tels que la géographie (Souris,2019 ; Dragićević,1999), la géologie (ABDENNOUR,2021 ; RATA,2010), la biologie (Li, 2015 ; GUEROUI,2014), la météorologie (Lebel et al.,1996 ; Louvet et al., 2011 ; Coman,2008), la conception de réseaux de capteurs (Dahlström,2003 ; Poupry,2023), etc.

Par exemple, en géographie, Souris (2019) décrit les objectifs, les principes, les méthodes et les outils de l'analyse spatiale et des systèmes d'information géographique (SIG) appliqués au domaine de la santé. Il s'agit d'une introduction pratique à l'analyse spatiale et spatio-temporelle pour l'épidémiologie et la géographie de la santé. En géologie, ABDENNOUR (2021) étudie la variabilité spatio-temporelle de la salinisation des sols dans le périmètre irrigué du Ziban, situé dans la région de Biskra en Algérie par l’analyse de la dynamique de la salinisation des sols en utilisant des techniques de géostatistique et de télédétection.

En biologie, GUEROUI (2014) traite de la caractérisation hydro chimique et bactériologique des eaux souterraines de l'aquifère superficiel de la plaine de Tamlouka, située dans le nord-est de l'Algérie par l’évaluation de la qualité physico-chimique et microbiologique des eaux souterraines de l'aquifère superficiel, l’identification des paramètres chimiques (pH, conductivité, dureté, etc.) et bactériologiques (bactéries coliformes, streptocoques, etc.),la détermination des sources de pollution et des facteurs influençant la dégradation de la qualité des eaux, et la proposition de mesures de gestion et de protection de la ressource en eau souterraine. En météorologie, Lebel et al. Se concentre sur l'étude de la distribution spatio-temporelle des précipitations dans la région du Sahel, en Afrique de l'Ouest, à partir des données recueillies lors de l'expérience EPSAT-Niger.

Enfin, dans le domaine de la conception de réseaux de capteurs, Poupry (2023) propose un système de surveillance de la qualité de l’air : application à la surveillance de la qualité de l'air dans les vallées des Gaves (Doctoral dissertation, Institut National Polytechnique de Toulouse-INPT).

Dans l'ensemble, ces domaines font appel à des méthodes avancées de modélisation et d'interpolation spatiale ou spatio-temporelle pour mieux comprendre et prédire les phénomènes (considérés comme des variables continues) en tout point discret de l'espace autre que ses valeurs échantillonnées (observées).

Diverses méthodes classiques sont utilisées en géostatistique pour la modélisation et l’interpolation spatiale. Il s’agit de Trend Surface Analyis (TSA) qui utilise des données pour ajuster une surface de tendance par régression aux moindres carrés sur les coordonnées spatiales , Inverse Distance Weighted (IDW) qui utilise une fonction de pondération inverse à la distance pour déterminer la valeur d'interpolation en tout point à l'intérieur de la zone calculée, Triangulated Irregular Network (TIN) qui calcule la valeur de chaque point à l'intérieur d'un triangle par une fonction linéaire en fonction de sa position, kriging (sensible à l’hypothèse de Normalité) qui minimise le résidu moyen et la variance des erreurs , et les Splines qui utilise les splines-bases cubiques univariées pour simuler des surfaces.

Cependant de nouvelles méthodes comme le Bayesian Maximum Entropy (BME) et le High Accuracy Surface Modeling (HASM) révolutionne les méthodes classiques grâce à leur fiabilité, performance et précision dans l’estimation et prédiction des variables étudiées en des points discrétisés.

Beaucoup d’études ont montré la supériorité des deux méthodes modernes aux techniques classiques de modélisation suivant les métriques de comparaison. Concernant le BME, Gao et al. (2022) montre qu’en utilisant les données ‘Argo’ comme base de comparaison, la couverture et la précision de l'interpolation BME du jeu de données de la température de surface de la mer (SST) du satellite FY-3 C/VIRR ont été comparées numériquement avec celles de l'interpolation par Krigeage Ordinaire (OK) du même jeu de données et de l'Interpolation Optimale de la SST (OISST) du jeu de données SST du satellite AVHRR. Il a été constaté que l'interpolation BME offrait la meilleure performance parmi les trois méthodes, avec le biais moyen le plus faible et le coefficient de corrélation le plus élevé.

Christakos (1998) atteste que BME est une approche plus rigoureuse que le krigeage indicatif pour l'incorporation des softs data comme dans les travaux de (Douaik et al.,2005). Ils démontrent également que le BME est une approche générale qui ne fait aucune hypothèse concernant la linéarité de l'estimateur, la normalité des lois de probabilité sous-jacentes ou l'homogénéité de la distribution spatiale contrairement au krigeage.

Adam-Poupart et al. (2014) montre que Le modèle BME combiné au LUR (Land-Use Regression) est le meilleur modèle prédictif (R2 = 0,653) avec la plus faible erreur quadratique moyenne (RMSE ; 7,06 ppb), suivi par le modèle LUR (R2 = 0,466, RMSE = 8,747) et le modèle de krigeage BME (R2 = 0,414, RMSE = 9,164).

Les résultats de Bayat et al. (2015) par la validation croisée ont prouvé la supériorité de BME par rapport au krigeage ordinaire (OK).

Les résultats de Kang et al. (2024) indiquent que : 1) Dans l'analyse des tremblements de terre au Japon, les hard data ont prédit des valeurs d'intensité plus élevées dans les zones sinistrées. BME a corrigé ce phénomène, surtout près de l'épicentre. Par ailleurs, pour les tremblements de terre aux États-Unis, BME a rectifié la prédiction erronée de la direction de la rupture en utilisant des hard data. 2) Comparée à d'autres méthodes d'interpolation spatiale, les résultats des profils des tremblements de terre au Japon et en Turquie montrent que BME est plus cohérent avec les résultats de ShakeMap que IDW et Krigeage. 3) La méthode BME surmonte le phénomène où les résultats de l'évaluation de la force ne correspondent pas à la situation réelle de la défaillance lorsque la magnitude du moment est faible.

D’après Karami et al. (2019) la comparaison entre la profondeur d'affouillement calculée et observée montre que les méthodes géostatistiques (OK et BME) peuvent estimer la profondeur maximale d'affouillement de manière plus fiable et précise que la méthode IDW.

Les travaux de Yue (2011) comme ceux de Zhao et Yue (2021) montre que les méthodes de HASM sont supérieures aux approches classiques, la TSA (Trend Surface Analysis), l'IDW (Inverse Distance Weighted), le TIN (Triangular Irregular Network), le krigeage et le spline en termes de comparaison des métriques d’erreurs : MAE (Mean Absolute Error), MRE (Mean Relative Error) et RMSE (Root Mean Square Error). Quant au HASM, les tests numériques d'une surface synthétique gaussienne montrent que l'erreur quadratique moyenne de la méthode HASM est bien inférieure à celle des méthodes classiques, telles que le réseau triangulé irrégulier, les splines, la pondération par la distance inverse et le krigeage. La méthode HASM apporte une solution au problème d'erreur qui a longtemps troublé les générations de modèles numériques de terrain (Yue et al., 2010).

Un exemple concret de modélisation de surface de modèles DEMs ( Digital Elevation Models ) avec diverses résolutions montre que HASM-SA est en moyenne plus précis et beaucoup plus rapide que les méthodes d'interpolation couramment utilisées, telles que IDW (Inverse Distance Weighted), le krigeage, et trois versions des Splines, à savoir les RSpline (Regularized Spline), les (TPS) Thin-Plate Spline et ANUDEM, en termes d'erreur quadratique moyenne (RMSE), d'erreur absolue moyenne (MAE) et d'erreur moyenne (ME) (Chen et al., 2013).

Les résultats de Shi et al. (2011) ont montré que la méthode de High Accuracy Surface Modeling combiné avec Land-Use (HASM\_LU) performe généralement mieux que HASM, Ordinary kriging avec Land Use (OK\_LU), Stratified Kriging (SK) et Regression-Kriging utilisant a Generalized Linear Model (RK\_GLM) avec un biais d'estimation plus faible, une MAE et une RMSE plus basses ainsi qu'une Prediction Efficiency (PE) plus grande.

Le test numérique étudié par Yue et Wang (2010) indique que HASM-AC a la plus haute précision et que sa précision est respectivement 20,67, 15,67 et 14,67 fois supérieure à celle de la pondération par Inverse Distance Weighted (IDW), du krigeage et des splines.

En dépit des confrontations entre les méthodes de modélisation en géostatistique, nos recherches montrent qu’aucune étude scientifique n’a été faite pour la comparaison des deux méthodes modernes (BME && HASM). Notre défi et objectif s’avère de mener une étude comparative des deux méthodes au vu de contribuer à la recherche scientifique et d’en bénéficier de ces applications.

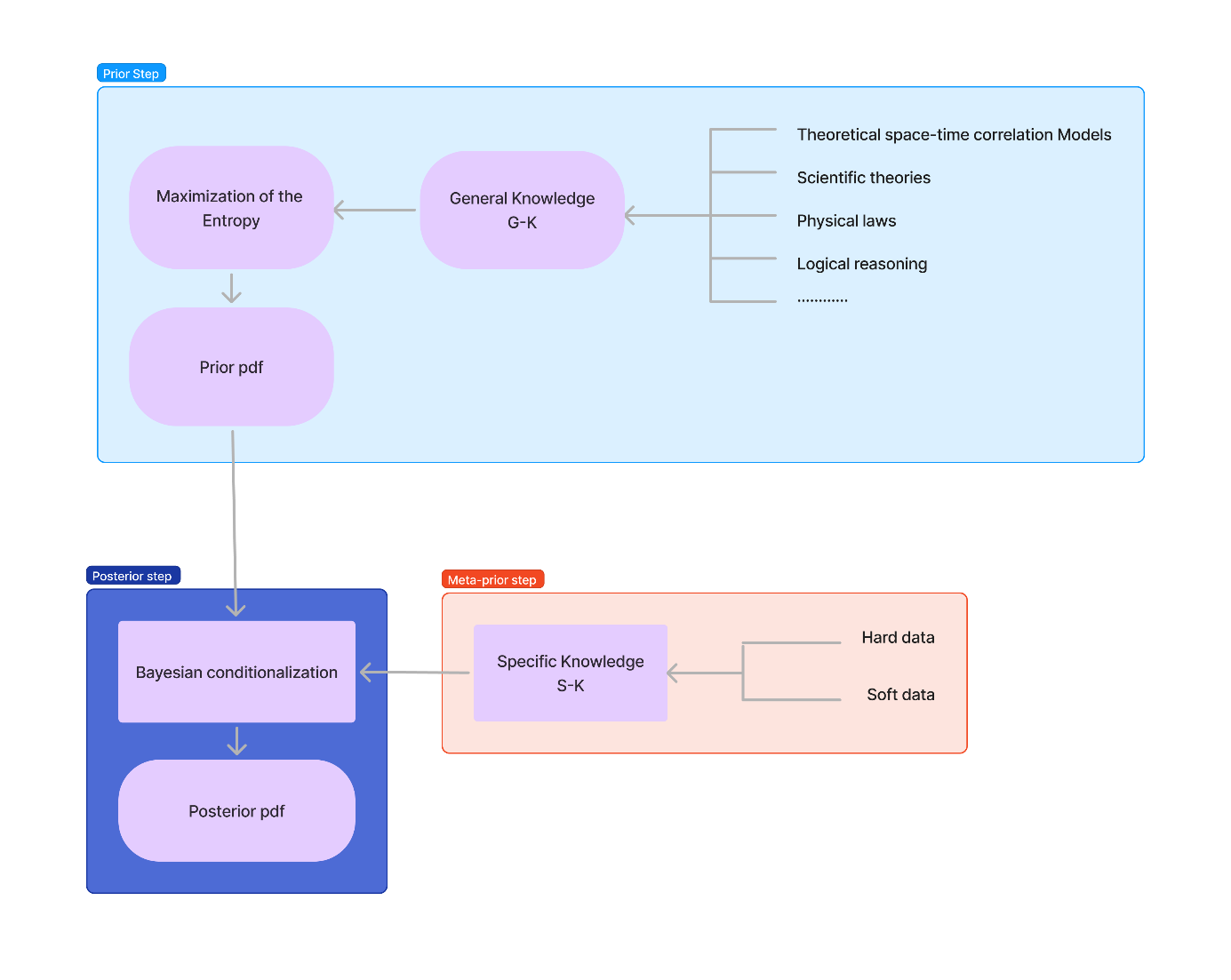
Conformément aux hypothèses en géostatistique, certains articles et journaux discutent ou critiquent l'impact de la robustesse du BME en fonction de la taille de l'échantillon, du degré d'asymétrie (skewness), et du niveau de dépendance spatiale. On peut citer Vihotogbé (2022) qui a examiné empiriquement l'effet de l'asymétrie, de la taille de l'échantillon et du niveau de dépendance spatiale en utilisant des données symétriques, des données avec une asymétrie positive de 1, 3, 6 et 9, des données avec des niveaux de dépendance spatiale faibles, modérés et forts, et des tailles d'échantillons allant de 100 à 500 avec un intervalle de 50. Gongnet et al. (2023) aborde les effets des caractéristiques des données, telles que la taille de l'échantillon et la skewness, sur la performance des méthodes de BME.Wang et al. (2023) présente un cadre BME développé spécifiquement pour les modèles probabilistes, abordant comment les données et leur distribution (y compris la skewness) interagissent avec le modèle. Kang et al. (2021) aborde l'utilisation de BME pour traiter des problèmes spécifiques d'analyse spatiale, y compris des considérations sur la dépendance spatiale et la distribution des données

Afin de réaliser un travail de qualité sans omettre aucun détail, nous allons intégrer ces paramètres dans la comparaison des deux méthodes.

**Chapitre 1 : Cadre théorique**

**La méthode de BME (Bayesian Maximum Entropy)**

La théorie du Bayesian Maximum Entropy (BME) en géostatistique spatiotemporelle se concentre sur la modélisation, l'estimation et la cartographie des attributs naturels (tels que les variables physiques, les processus écologiques, les paramètres de santé et les indicateurs sociaux) (Christakos et Li 1998). La méthode de (BME) est largement utilisée dans l’analyse de données spatiales pour l’estimation de polluants atmosphériques comme l’exposition environnementale aux particules fines et à l'ozone troposphérique (Ramos,2017), pour l’estimation des précipitations dans un grand bassin (Bayat et al.,2014), pour la spatialisation de la mesure de la teneur en eau du sol (Henine et al.,2015), pour la prévision spatiale de la matière organique du sol (Gongnet et al., 2022), pour la Spatialisation de la conductivité hydraulique (Rabouli et al.,2021) ,pour la cartographie à petite échelle de la distribution des poissons (Vignaux et al.,1998) . C’est une méthode d’interpolation non linéaire avec une précise qui combine la théorie de l’incertitude de l’entropie maximale et l’inférence bayésienne le tout divisé en trois étape : Prior Stage, Meta Prior stage et le Posterior stage. Au Prior Stage, on déduit la PDF (Probability Density Function) à priori à partir des connaissances Générales GK (General Knowledge) de la variable physique, Cette distribution à priori est censé suivre la distribution gaussienne. Cette étape correspond au mieux à ME (Maximisation de l’Entropie) au vu de trouver une PDF à priori. Au Meta Prior stage, les données c’est-à-dire hard et soft sont collectées, arrangées et peut-être transformées pour finir d’informations spécifiques dans la détermination de la PDF à posteriori. Et la dernière étape Posterior stage correspond à IB (Inférence Bayésienne) qui met à jour la PDF à priori à partir des informations de Meta Prior stage.



**ME (Maximum Entropy)**

La partie entropie maximale de la méthode BME a pour objectif de quantifier l'incertitude maximale des données observées, elle cherche à identifier, parmi toutes les distributions de probabilités pouvant représenter ces données, celle qui a la plus grande entropie au sens de Shannon (He et Christakos,2023 ; Soize,2008). Cette distribution d'entropie maximale est déterminée en respectant les contraintes imposées par les caractéristiques des données, telles que leur moyenne ou leur variance et d’autre moment d’ordre supérieur, mais sans incorporer d'autres informations a priori (Christakos et Li,1998). Il s'agit donc de la distribution la moins informative possible tout en étant compatible avec les observations. En choisissant la distribution ayant la plus forte entropie parmi celles satisfaisant aux contraintes des données, on sélectionne celle contenant la quantité d'information ajoutée de manière arbitraire la plus faible. Cette distribution d'entropie maximale, qui modélise l'incertitude inhérente au phénomène observé de manière neutre et objective, sera ensuite utilisée comme probabilité a priori dans l'étape d'inférence bayésienne.

D’après (Guiasu et Shenitzer ,1985 ; Christakos et Li,1998 ; He et Christakos,2023) on a :

pour une distribution de probabilité discrète sur l’ensemble dénombrable , avec , l’entropie de est définie comme suit :

Pour une fonction de densité de probabilité continue sur un intervalle , son entropie est définie comme suit :

Au cas ou

Cette définition de l’entropie, introduite par Shannon. Dans notre contexte probabiliste, est considère comme une mesure de l’information portée par , une entropie plus élevée correspondant à moins d’information (plus d’incertitude, ou plus de manque d’information).

Le concept d'entropie maximale est utilisé dans divers domaines, tels que la reconnaissance de formes, la thermodynamique, la théorie de l'information, les statistiques et les séries temporelles (Kullback, 1968 ; Burg, 1972 ; Shore and Johnson, 1980 ; Jaynes, 1982),

Considérons un ensemble fini .Si tandis que pour , alors . Dans ce cas, les statistiques gouvernées par produisent presque sûrement un seul résultat possible, . Nous avons une connaissance complète de ce qui va se passer. En revanche, si est la fonction de densité uniforme, ou pour tous les , alors .

L’entropie de la densité gaussienne sur avec une moyenne et une variance est :

La moyenne n’entre pas dans la formule finale, donc toutes les gaussiennes avec un commun ont la même entropie.

L’entropie de la densité exponentielle sur avec une moyenne est :

Cette entropie devient négative pour de petites valeurs de λ.

Notre défi réside plutôt dans le processus contraire, en utilisant la maximisation de l’entropie pour trouver la fonction de densité de probabilité(PDF)

Soit un champ aléatoire représentant une quantité physique distribuée spatialement, et supposons que les valeurs observées de cette quantité soient disponibles aux points dans l'espace. Soit l'estimateur de en un point , où aucune observation n'est disponible.

Soit ou les sont relatifs des données quantitatives ponctuelles et sont relatif aux données quantitatives groupées en d’intervalle.

Autrement , on peut écrire : avec les données disponibles de **Méta Prior Stage** c’est-à-dire les

Donc

Désignons par la fonction de densité de probabilité conjointe des variables aléatoires associées avant l'observation des données .

Comme est la fonction de densité de probabilité , on a alors par définition:

Etant donné que est l’ensemble des variables aléatoires , donc l’intégrale est une imbrication de plusieurs intégrales suivant chaque composante de Ces intégrations imbriquées sont effectuées sur les intervalles des variables aléatoires mentionnées ci-dessus. Ces intervalles seront supposées varier de à

L’équation est la contrainte fondamentale de normalisation.

La densité de probabilité a priori doit être dérivée au moyen d'un processus d'estimation prenant en compte des contraintes physiques. Ces contraintes représentent soit les connaissances a priori que l'on possède sur la grandeur physique à estimer, soit les propriétés spécifiques que l'on souhaite intégrer dans l'estimateur .

D’après Shannon (1948) , l’information contenue dans l'ensemble peut être quantifiée par :

Selon l'équation :

La diminution de , de sorte que implique,

plus contient d'information, moins sa survenue est probable.

On considère une forte information a priori (ou de manière équivalente, une faible probabilité a priori) concernant la variabilité spatiale de la grandeur physique étudiée. Dans un contexte stochastique, cela peut être atteint en considérant la valeur attendue de la mesure d'information appropriée et en cherchant à la maximiser.

L'idée est de modéliser une bonne connaissance a priori de la répartition spatiale de la grandeur physique, ce qui se traduit mathématiquement par une faible probabilité a priori. Pour formaliser cela dans le cadre stochastique, on s'intéressera à la valeur espérée de la mesure d'information utilisée, et on cherchera à la maximiser afin de refléter un haut niveau d'information a priori.

En relation avec la mesure d'information , l'information attendue considérée sera l’espérance de l’information :

Soit

La fonction correspond à l'entropie de Shannon de la grandeur physique estimée. Elle permet de quantifier le degré d'incertitude contenu dans la densité de probabilité a priori .

En cherchant à maximiser l'information attendue par rapport à cette densité de probabilité a priori, sous des contraintes liées aux connaissances physiques du système et aux propriétés souhaitées de l'estimateur, on vise en réalité à maximiser l'entropie associée. Cela permet d'obtenir une densité de probabilité a priori reflétant au mieux le manque d'information initial sur la répartition spatiale de la grandeur physique, tout en respectant les contraintes du problème.

Les estimateurs sont définis statistiquement en termes d'espérances basées sur le champ aléatoire spatial . Il est donc judicieux de définir des contraintes physiques a priori compatibles avec cette formulation, sous la forme d'expressions mathématiques similaires impliquant des espérances de fonctions de .

En supposant que nous avons contraintes

où sont des fonctions appropriées de

Si on a :

, de sorte que définisse la contrainte de normalisation .

**Inférence Bayésiennes**

La partie inférence bayésienne de la méthode BME a pour but de mettre à jour la distribution de probabilité obtenue par entropie maximale avec les nouvelles données observées (Schmidt et al.,1999). En s'appuyant sur le théorème de (Bayes,1763), elle calcule la distribution a posteriori à partir de la distribution a priori fournie par l'entropie maximale et des nouvelles observations. Cette distribution a posteriori représente la révision des probabilités des différentes hypothèses à la lumière des nouvelles données. À chaque ajout d'observations, l'inférence bayésienne affine la distribution en la recalculant, permettant d'améliorer progressivement l'estimation. Par cette mise à jour successive intégrant les nouvelles mesures, la méthode BME fournit une estimation probabiliste de plus en plus précise du processus étudié.

Jusqu'à présent, on a considéré la probabilité a priori qui inclut un modèle a priori sur la relation entre et les . Ce modèle se rapporte à nos connaissances sur la variabilité spatiale avant de prendre en compte des mesures spécifiques de la grandeur physique.

Comme avec , la probabilité a posteriori

(Probabilité conditionnelle) fait référence à nos connaissances une fois que ces mesures ont été incorporées dans le processus d'estimation.

En effet, l'inférence bayésienne est une approche probabiliste pour réviser nos connaissances à la lumière de nouvelles données. Elle repose sur le principe fondamental du théorème de Bayes(Bayes,1763), qui permet de mettre à jour nos croyances de manière cohérente en combinant une probabilité a priori avec une vraisemblance des données. Concrètement, l'inférence bayésienne commence par modéliser les connaissances initiales sur la quantité qui nous intéresse sous la forme d'une probabilité a priori. Cette probabilité reflète ce que l'on sait du phénomène avant d'analyser de nouvelles observions. En appliquant le théorème de Bayes, il est alors possible de mettre à jour la probabilité a priori initiale en une probabilité a posteriori, qui tient compte à la fois des connaissances préalables et des nouvelles observations. Cette probabilité a posteriori correspond donc à la distribution de probabilité révisée de la quantité étudiée, compte tenu de l'ensemble des informations désormais disponibles.

En considérant les points suivants :

* et  sont deux évènements ;
* 𝑃(𝐴) et  sont la probabilité des deux évènements ;
* est la probabilité que les deux évènements se réalisé.
* est la probabilité conditionnelle que l'évènement  se réalise étant donné que l'évènement  s'est réalisé.

En vertu de théorème de Bayes (Bayes,1763), on a :

De manière analogue à notre variable physique d’étude, on a :

Soit la fonction de Bayes associée à

La probabilité a posteriori , ou de manière équivalente la fonction de Bayes , doit être maximisée par rapport à . Notons que dans ce cas, est considéré comme un paramètre de la probabilité a posteriori ou de la fonction de Bayes du champ aléatoire spatial sous-jacent.

**Estimation de fonction densité de probabilité (PDF)**

Formulons le problème d'estimation comme suit : Soit un champ aléatoire spatial. Nous cherchons à trouver des estimateurs de en des points à partir des données, , de telle sorte que :

La fonction de Bayes est maximisée par rapport à . Cette valeur maximale sera la valeur attendue pour l’estimateur en le point .

L'entropie du modèle a priori de l’équation est maximisée par rapport à, sous la contrainte de normalisation et les contraintes physiques de l’équation .Ainsi on définit le Lagrangien de la formule de l’entropie maximale sous les contraintes. La maximisation de ce Lagrangien permet de trouver la distribution de probabilité correspondante :

**Preuve 1**

Soit le Lagrangien associé à l’entropie

Maximiser reviens à minimiser sous les contraintes alors on peut exprimer le Lagrangien associé à l’entropie

, sont les multiplicateurs de Lagrange associés au contrainte de normalisation et des autres contraintes

L’entropie atteint son maximum lorsque la dérivée fonctionnelle s’annule :

Etant donné que est l’imbrication de plusieurs intégrales sur alors on ajoute une constante

Posons sous la forme :

D’après la contrainte de normalisation (équation 5) on a :

D’où

En fournissant les paramètres d’une distribution Gaussienne, on trouve la fonction densité de probabilité gaussienne, preuve que la distribution à priori suit la distribution gaussienne.

**Démonstation**

La densité de probabilité est généralement non gaussienne. donc en multipliant maintenant l'équation par , on obtient :

Par conséquent :

Cela exprime en fonction des autres multiplicateurs de Lagrange . Puisque est maintenant considéré comme une fonction de

Soit

Différentions l'équation par rapport à un quelconque multiplicateurs de Lagrange

et multiplier par :

D’après l’équation on a :

Et en remplaçant la fonction de densité de probabilité de l’équation dans l’équation

D’où

Le système d'équations et peut être résolu par rapport aux inconnues .Les solutions seront insérées dans la fonction de densité de probabilité pour obtenir la forme requise du modèle a priori

Pour estimer nous allons maximiser la fonction de Bayes par rapport ,autrement dire :

D’après l’équation , si :

est la valeur de l'estimateur en le point . En utilisant la densité de probabilité finale trouver avec ses paramètres et en maximisant l’équation on obtient l’équation :

L’équation est résolue par rapport à l'estimateur

De la même manière comme démontré précédemment dans l’équation , on peut écrire :

Dans le cas la fonction de densité de probabilité à priori est connu, l’équation est utilisée pour estimer la variable physique

L’équation du maximum de vraisemblance est ainsi :

**HASM**

**Introduction au HASM**

L'approche de modélisation de surfaces par équations aux dérivées partielles (EDP) suscite un intérêt croissant depuis ses débuts dans les années 1970. Cette technique consiste à représenter les surfaces comme solutions d'EDP. Elle présente l'avantage de pouvoir faire varier la forme de la surface modélisée en changeant les conditions aux limites et paramètres de l'équation (Protopopescu et al., 1989).

Depuis, de nombreuses études se sont penchées sur le potentiel de cette approche EDP. Pasadas et Rodríguez (2009) ont notamment souligné ses atouts pour le mélange de surfaces, la modélisation de formes libres ou les spécifications fonctionnelles. Grâce à sa flexibilité géométrique supérieure aux méthodes d'interpolation, elle s'est révélée utile dans divers domaines de recherche.

Parmi ces méthodes basées sur les EDP, la technique de modélisation de surfaces à haute précision (High Accuracy Surface Modeling) a démontré sa capacité à représenter des surfaces complexes avec une grande fidélité géométrique (Yue et Wang,2010). En s'appuyant sur une résolution numérique avancée des EDP, elle offre une alternative prometteuse pour la modélisation de formes de haute qualité.

La méthode High Accuracy Surface Modeling (HASM) est basée sur le théorème fondamental des surfaces et a été développée pour résoudre les problèmes liés à la modélisation de surface (Yue et Wang,2010 ; Yue, 2011). L’objectif de la modélisation de surfaces est de décrire la variation spatiale d’une variable donnée. Dans la plupart des procédures numériques pour résoudre des équations aux dérivées partielles, le problème est d’abord discrétisé en choisissant des équations algébriques sur un espace d’approximation `a dimension finie. Ensuite, une méthode numérique est conçue pour résoudre ce système d’équations discrètes. De nombreuses études ont été menées pour montrer que la méthode HASM est plus précise que les méthodes classiques. Il a été montré que la précision de la simulation de HASM est plus élevée que celle des méthodes d’interpolation classiques (krigeage, méthodes d’interpolation de distance inverse, Splines, etc)

**Formulation des EDP basique de HASM**

Selon le théorème fondamental des surfaces, une surface est entièrement définie par ses coefficients fondamentaux du premier et du second ordre. Les coefficients du premier ordre décrivent comment la surface hérite des propriétés géométriques intrinsèques de la surface telles que les longueurs de courbes, les angles entre vecteurs tangents ou les aires de régions (Toponogov, 2006). Les coefficients du second ordre reflètent quant à eux les déformations locales de la surface par rapport à son plan tangent en chaque point (Liseikin, 2006). Bien que la pente, l'aspect ou la courbure soient importants pour décrire localement une surface (Evans, 1968), selon la géométrie différentielle ces éléments ne déterminent que les lignes de hachures et non la surface elle-même. Celle-ci ne peut être entièrement définie que par ses formes fondamentales du premier et du second ordre (Toponogov, 2006).

Ainsi, les deux groupes de coefficients fondamentaux permettent de caractériser complètement la géométrie d'une surface de manière intrinsèque, indépendamment de sa configuration dans l'espace. Cette approche différentielle est à la base de la modélisation géométrique des surfaces.

Zhao et Yue (2021) nous donnent les deux formes fondamentales d’une surface

**La première forme fondamentale d'une surface**

Considérons une surface définie par les paramètres : et deux points adjacents de .

Leur distance intrinsèque s'exprime en fonction des variations infinitésimales et des paramètres :

Lorsque est infiniment proche de, les termes d'ordre supérieur à 2 en et peuvent être omis, et . Dans ce cas, , la partie principale de la norme du vecteur , est définie comme la distance entre les deux points infiniment adjacents sur la surface S.

En posant :

L'équation correspond à la première forme fondamentale d'une surface S. Les coefficients E, F et G sont appelés coefficients fondamentaux de première espèce. La quantité étant une forme quadratique définie positive, cela implique

Les coefficients de la première forme fondamentale sont des quantités qui définissent les propriétés géométriques intrinsèques de la surface (la longueur d'une courbe, l'angle entre deux courbes, l'aire d'une région ou la courbure d'une géodésique), indépendantes de sa place dans l’espace.

**La deuxième forme fondamentale d'une surface**

Pour étudier le degré de courbure en un point de la surface, on calcule la distance verticale entre le point et le plan tangent en .

Les termes d'ordre supérieur à 3 de et sont omis, alors :

est le vecteur normal à

En posons on a :

Quand , la partie significative de

Cette équation est qui est considéré comme la seconde forme fondamentale d'une surface, où L, M, N sont les coefficients de la seconde forme fondamentale et sont également appelés les coefficients fondamentaux de second ordre.

Puisque les dérivées par rapport à sont prises des deux côtés

Donc

La deuxième forme fondamentale peut être écrire sous la forme :

La seconde forme fondamentale décrit la forme de la surface et reflète la variation locale de courbure de la surface.

**Théorème fondamental des surfaces**

D'après le théorème principal de la théorie des surfaces (Su et Hu 1979), si les coefficients fondamentaux de première et seconde espèce de la surface sont symétriques, si sont définis positifs (satisfont au système d'équations de Gauss-Codazzi) , alors on considère la surface comme le graphe d'une fonction soumis à la condition initiale .

D’après Yue (2011) :

Les coefficients fondamentaux de première espèce E, F et G peuvent être formulés comme :

Les coefficients fondamentaux de première espèce L, M et N peuvent être formulés comme :

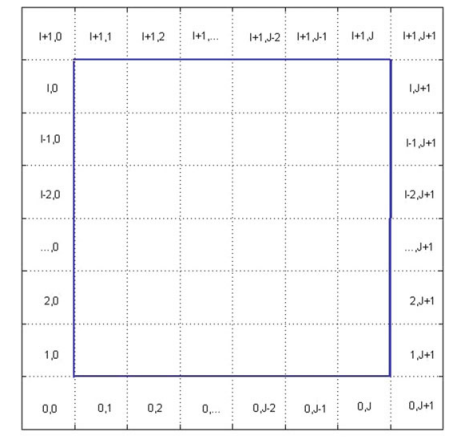
L’équation de Gauss peut être reformulée comme suit :

Où

Les symboles de Christoffel du second type dépendent uniquement des coefficients fondamentaux de première espèce et de leurs dérivées.

Pour le calcul, on prend le cas d'un maillage d’un domaine orthogonal avec

le pas de discrétisation ,sont les nombres de points respectifs suivant la direction de et la direction représente l’ensemble des points sur les mailles.



**Titre :**

Tout cela permet d'exprimer les dérivées partielles de en fonction des valeurs aux nœuds du maillage, en vue d'une discrétisation des équations aux dérivées partielles régissant la surface.

Nous allons procéder aux différences finies centrées pour approximer les dérivées partielles d’ordre 1, d’ordre 2 , et la dérivée croisée de

peuvent être formulés par un développement de Taylor en série autour de tel que:

En faisant la soustraction de l’équation par l’équation on a :

Donc :

Pour un suffisamment petit, l'approximation aux différences finies de peut s'exprimer comme:

De la même manière, on a :

Cette fois-ci, faisons la somme des équations

Donc :

Pour un suffisamment petit, l'approximation aux différences finies de peut s'exprimer comme:

De la même manière, on aura :

Analogiquement on a :

**Forme discrétisée de (27) (système d’équations de Gauss)**

En multipliant les deux premières équations du système par et la troisième par , on a :

D’après les études de Yue (2011) La troisième équation de ce système produit une estimation biaisée des résultats Cette équation a été mise à l’écart du système pour l’efficacité de la méthode

Donc nous allons tenir compte seulement des deux premières équations du système :

Il reste à définir les symboles de Christoffel du second type

On avait :

Les expressions des coefficients fondamentaux de première espèce étant connues, il reste définir celles de leurs dérivées

Nous allons appliquer comme précédemment les différences finies centrées :

En remplaçant ces expressions de dérivées des coefficients fondamentaux de première espèce dans les expressions des symboles de Christoffel, nous avons par simplification :

La formulation itérative de l'équation (36) peut s'exprimer comme :

Avec

,

Certains documents utilisent les méthodes itératives comme celle de Gauss Seidel, Gauss Seidel modifié et bien d’autre pour résoudre le système constitué des inconnus en des points discrétisés d’un domaine choisi

Nous allons exploiter ici la forme discrétisée directe du système pour la transformer en une matrice générale constituée d’un premier et second membre

Considérons le vecteur des inconnus ,

Les conditions initiales tout au long des bords (les quatre côtés) du domaine doivent être fournir pour la prédiction au d’autres points du domaine

Toujours à l’intérieur du domaine des points échantillonnés doivent être donné pour la prédiction en des autres points non échantillonnés restant.

Alors, la première équation du système d'équations peut s'écrire sous la forme matricielle suivante:

Avec :

est le vecteur de second membre et est matrice des coefficients de la première équation du système

On avait posé comme inconnus, les valeurs à l’intérieur du domaine, comme l’indique figure de maille en fixant à chaque fois la variable et en variant la variable

Donc

Pour l’équation garde sa forme expressive intacte

Dans le cas contraire où , les conditions initiales interviennent ,

Après récurrences des itérations nous trouvons une formulation générale des paramètres de l’équation

Pour

La matrice A est défini par :

Les représentent des matrices nulles

est la matrice unité

Pareillement , la deuxième équation du système d'équations peut s'écrire sous la forme matricielle suivante:

Avec :

est le vecteur de second membre et est matrice des coefficients de la deuxième équation du système

Les représentent des matrices nulles

Pour garantir que la vraie valeur du point d’échantillonnage soit égale ou proche de la valeur estimée du point d’échantillonnage, l’expression de HASM est transformée en un problème des moindres carrés avec des contraintes d’égalité.

Le modèle de surface basé sur l'Équation , peut être exprimé comme une approximation par moindres carrés avec contraintes suivant :

Où sont respectivement les points d'échantillonnage et les valeurs correspondantes de aux points d'échantillonnage signifie ; qui est ‘’ subject to ’’ c’est-à-dire "sous contrainte’’.

Pareillement, le modèle de surface basé sur l'Équation , peut être exprimé comme une approximation par moindres carrés avec contraintes :

La combinaison des systèmes donne :

Etant donné que représentent respectivement la matrice de coefficients des points d’échantillonnage et les valeurs de ces points d’échantillonnage , ils peuvent être exprimés comme c’est-`a-dire , la valeur du point d’´échantillonnage .

Pour résoudre le problème des moindres carrés contraints dans l’équation , un paramètre positif , qui est le poids des points d’échantillonnage est inclus suivant la contribution des points d’échantillonnage à la surface simulée, est introduit (Yue, 2011). Pour un donné, peut être transformé en un problème des moindres carrés non contraint :

Dans certains cas , plus grand est la valeur de , plus l’accent est mis dans les calcul sur les valeurs de l’attribut aux points échantillonnés , plus fiables seront les résultats.

En multipliant par le vecteur suivant , on a :

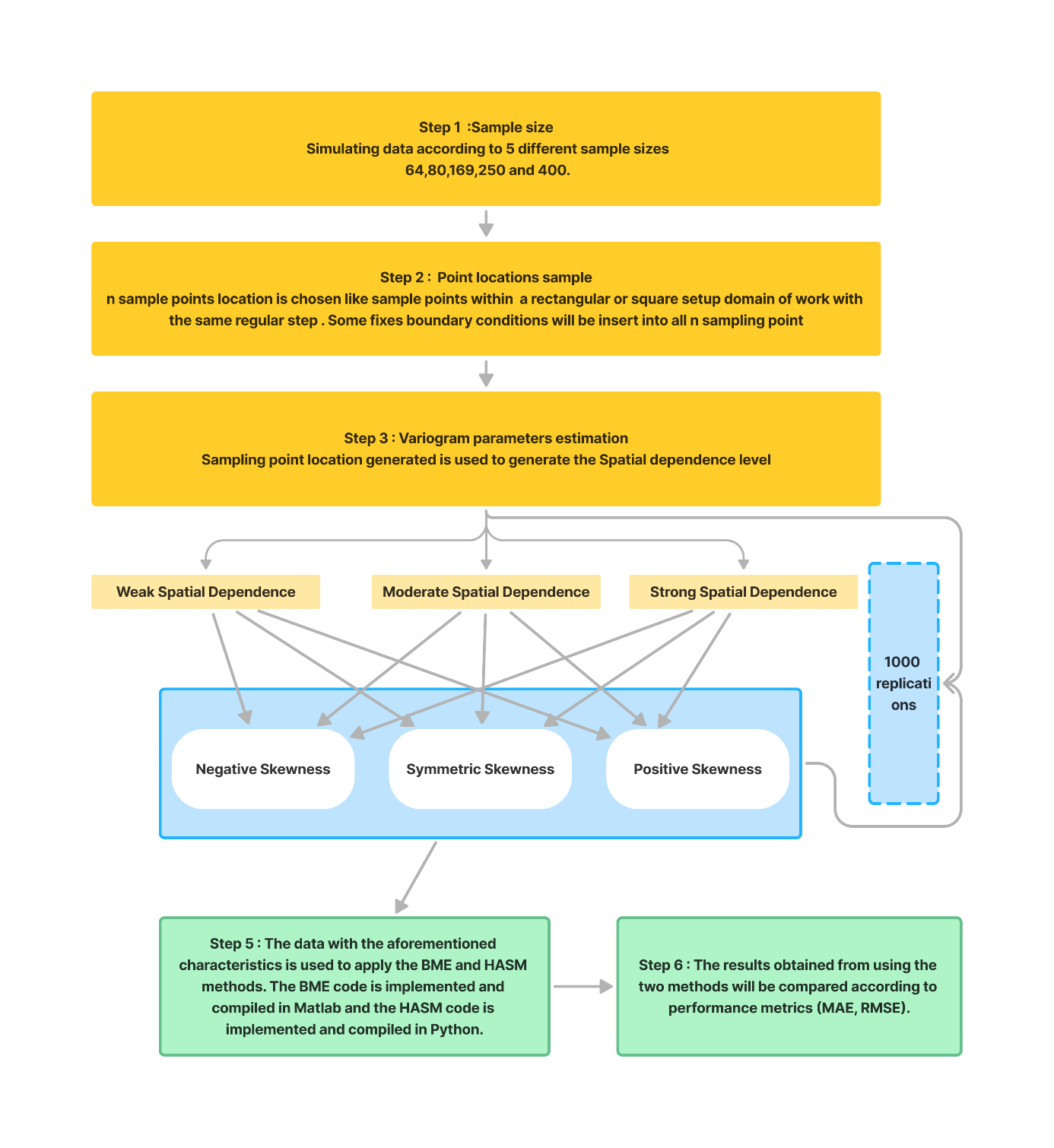
Ce qui équivaut à :

D’où :

L’équation est la solution au vecteur d’inconnus des valeurs de l’attribut en tout point à l’intérieur du domaine y compris les points échantillonnés sauf les points aux 04 bords du domaine.

Les vérifications peuvent être faites en évaluant l’erreur de prédiction des valeurs au points échantillonnés.

**Chapitre 2 :** Application à la comparaison des deux méthodes

****

**Référence**

1. Souris, M. (2019). *Épidémiologie et géographie: Principes, méthodes et outils de l’analyse spatiale*. ISTE Group.
2. Dragićević, S. (1999). Application de la logique floue dans l'interpolation spatio-temporelle à l'aide d'un système d'information géographique.
3. ABDENNOUR, M. A. (2021). *Variabilité spatio-temporelle de la salinisation des sols du périmètre irrigué du Ziban (Biskra)–Apport de la géostatistique et de la télédétection* (Doctoral dissertation, Université Mohamed Khider de Biskra).
4. RATA, M. (2010). *Variabilité spatio-temporelle de la salinité des sols dans la plaine du Bas Chélif-Etablissement d’une Banque de Données* (Doctoral dissertation, DOUAOUI A).
5. Li, S. (2015). *Modélisation spatio-temporelle pour l'esca de la vigne à l'échelle de la parcelle* (Doctoral dissertation, Université de Bordeaux).
6. GUEROUI, Y. (2014). *Caractérisation Hydrochimique et Bactériologique des Eaux Souterraines de L’aquifère Superficiel de la Plaine de Tamlouka (Nord-Est Algérien)* (Doctoral dissertation).
7. Lebel, T., Amani, A., Cazenave, F., Lecocq, J., Taupin, J. D., Elguero, E., ... & Robin, J. (1996). La distribution spatio-temporelle des pluies au Sahel: apports de l'expérience EPSAT-Niger. *IAHS PUBLICATION*, 77-98.
8. Louvet, S., Paturel, J. E., Mahé, G., Vigaud, N., Roucou, P., Rouché, N., & Koite, M. (2011). Variabilité spatio-temporelle passée et future de la pluie sur le basin du Bani en Afrique de l’Ouest. *Hydro-climatology: variability and change*, *344*, 125-130.
9. Coman, A. (2008). *Modélisation spatio-temporelle de la pollution atmosphérique urbaine à partir d'un réseau de surveillance de la qualité de l'air* (Doctoral dissertation, Université Paris-Est).
10. Dahlström, B. (2003). La conception d'un réseau d'observation climatologique-Un point de vue européen. *La Météorologie*, *2003*(40), 59-63.
11. Poupry, S. (2023). *Contribution à la conception et à la mise en oeuvre d'un système de surveillance de la qualité de l'air: application à la surveillance de la qualité de l'air dans les vallées des Gaves* (Doctoral dissertation, Institut National Polytechnique de Toulouse-INPT).
12. Gao, Z., Jiang, Y., He, J., Wu, J., & Christakos, G. (2022). Bayesian maximum entropy interpolation of sea surface temperature data: a comparative assessment. *International Journal of Remote Sensing*, *43*(1), 148-166.
13. Christakos, G., & Li, X. (1998). Bayesian maximum entropy analysis and mapping: a farewell to kriging estimators?. *Mathematical Geology*, *30*, 435-462.
14. Douaik, A., Van Meirvenne, M., & Tóth, T. (2005). Soil salinity mapping using spatio-temporal kriging and Bayesian maximum entropy with interval soft data. *Geoderma*, *128*(3-4), 234-248.
15. Adam-Poupart, A., Brand, A., Fournier, M., Jerrett, M., & Smargiassi, A. (2014). Spatiotemporal modeling of ozone levels in Quebec (Canada): a comparison of kriging, land-use regression (LUR), and combined Bayesian maximum entropy–LUR approaches. *Environmental health perspectives*, *122*(9), 970-976.
16. Bayat, B., Nasseri, M., & Zahraie, B. (2015). Identification of long-term annual pattern of meteorological drought based on spatiotemporal methods: evaluation of different geostatistical approaches. *Natural Hazards*, *76*, 515-541.
17. Kang, D., Chen, W., & Jia, Y. (2024). Bayesian maximum entropy interpolation analysis for rapid assessment of seismic intensity using station and ground motion prediction equations. *Frontiers in Earth Science*, *12*, 1394937.
18. Karami, H., Bayat, B., Hosseini, K., & Nasseri, M. (2019). Prediction of scour pattern around hydraulic structures using geostatistical methods. *Arabian Journal of Geosciences*, *12*, 1-14.
19. Yue, T. X., Song, D. J., Du, Z. P., & Wang, W. (2010). High-accuracy surface modelling and its application to DEM generation. *International Journal of Remote Sensing*, *31*(8), 2205-2226.
20. Chen, C., Li, Y., & Yue, T. (2013). Surface modeling of DEMs based on a sequential adjustment method. *International Journal of Geographical Information Science*, *27*(7), 1272-1291.
21. Shi, W., Liu, J., Du, Z., Stein, A., & Yue, T. (2011). Surface modelling of soil properties based on land use information. *Geoderma*, *162*(3-4), 347-357.
22. Yue, T. X., & Wang, S. H. (2010). Adjustment computation of HASM: a high-accuracy and high-speed method. *International Journal of Geographical Information Science*, *24*(11), 1725-1743.
23. Yue, T. X. (2011). *Surface modeling: high accuracy and high speed methods*. CRC press.
24. Zhao, N., & Yue, T. (2021). *High Accuracy Surface Modeling Method: The Robustness*. Springer.
25. Vihotogbé, R. (2022). On the impacts of hard data patterns on Bayesian maximum entropy performance: Simulation-based analysis.
26. Gongnet, E. E., Vihotogbé, R., Antoine, T. A. S., & Kakaï, R. G. (2023). Practical considerations on data patterns in Bayesian maximum entropy estimation: a systematic and critical review.
27. Wang, C., Yang, L., Xie, M., Valdebenito, M., & Beer, M. (2023). Bayesian maximum entropy method for stochastic model updating using measurement data and statistical information. *Mechanical Systems and Signal Processing*, *188*, 110012.
28. Kang, J., Jeong, S. O., Pae, C., & Park, H. J. (2021). Bayesian estimation of maximum entropy model for individualized energy landscape analysis of brain state dynamics. *Human brain mapping*, *42*(11), 3411-3428.
29. Christakos, G., & Li, X. (1998). Bayesian maximum entropy analysis and mapping: a farewell to kriging estimators?. *Mathematical Geology*, *30*, 435-462.
30. Ramos, Y. (2017). Développement et évaluation d'approches géostatistiques à l'échelle urbaine pour l'estimation de l'exposition aux particules fines et à l'ozone troposphérique.
31. Bayat, B., Nasseri, M., & Naser, G. (2014). Improving Bayesian maximum entropy and ordinary Kriging methods for estimating precipitations in a large watershed: a new cluster-based approach. *Canadian Journal of Earth Sciences*, *51*(1), 43-55.
32. Henine, H., Clement, R., Jaegler, H., Forquet, N., & Lauvernet, C. (2015). Spatialisation de la mesure de la teneur en eau du sol à l'échelle du champ agricole, en utilisant le suivi géoélectrique et la méthode géostatistique.
33. Gongnet, E. E., Agbangba, C. E., Affossogbe, T. S. A., & Kakaï, R. G. (2022). Spatial prediction of soil organic matter in Adingnigon (Benin) using Bayesian Maximum Entropy (BME). *African Journal of Applied Statistics*, *9*(1), 1279-1295.
34. Rabouli, S., Serre, M., Dubois, V., Gance, J., Henine, H., Molle, P., ... & Clément, R. (2021). Spatialization of saturated hydraulic conductivity using the Bayesian Maximum Entropy method: Application to wastewater infiltration areas. *Water Research*, *204*, 117607.
35. Vignaux, M., Vignaux, G. A., Lizamore, S., & Gresham, D. (1998). Fine-scale mapping of fish distribution from commercial catch and effort data using maximum entropy tomography. *Canadian Journal of Fisheries and Aquatic Sciences*, *55*(5), 1220-1227.
36. Guiasu, S., & Shenitzer, A. (1985). The principle of maximum entropy. *The mathematical intelligencer*, *7*, 42-48.
37. Kullback, S. (1968). Probability densities with given marginals. *The Annals of Mathematical Statistics*, *39*(4), 1236-1243.
38. Burg, J. P. (1972). The relationship between maximum entropy spectra and maximum likelihood spectra. *Geophysics*, *37*(2), 375-376.
39. Shore, J., & Johnson, R. (1980). Axiomatic derivation of the principle of maximum entropy and the principle of minimum cross-entropy. *IEEE Transactions on information theory*, *26*(1), 26-37.
40. Jaynes, E. T. (1982). On the rationale of maximum-entropy methods. *Proceedings of the IEEE*, *70*(9), 939-952.
41. Christakos, G., & Li, X. (1998). Bayesian maximum entropy analysis and mapping: a farewell to kriging estimators?. *Mathematical Geology*, *30*, 435-462.
42. He, J., & Christakos, G. (2023). Bayesian maximum entropy. In *Encyclopedia of Mathematical Geosciences* (pp. 71-79). Cham: Springer International Publishing.
43. Gamboa, F. (1989). *Méthode du maximum d'entropie sur la moyenne et applications* (Doctoral dissertation, Université Paris-Sud).
44. Soize, C. (2008). Construction of probability distributions in high dimension using the maximum entropy principle: Applications to stochastic processes, random fields and random matrices. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, *76*(10), 1583-1611.
45. Schmidt, D. M., George, J. S., & Wood, C. C. (1999). Bayesian inference applied to the electromagnetic inverse problem. *Human brain mapping*, *7*(3), 195-212.
46. Bayes, R. T. (1763). Bayes' Theorem. *An essay towards solving a problem in the doctrine of chances, Philosophical*, 370-418.
47. Protopopescu, V., Santoro, R. T., & Dockery, J. (1989). Combat modeling with partial differential equations. *European Journal of Operational Research*, *38*(2), 178-183.
48. Pasadas, M., & Rodríguez, M. L. (2009). An approximation method with data selection process. *Mathematics and Computers in Simulation*, *79*(12), 3567-3576.
49. Toponogov, V. A. (2006). *Differential geometry of curves and surfaces*. Basel: Birkhũser-Verlag.
50. Liseikin, V. D. (2006). *A computational differential geometry approach to grid generation*. Springer Science & Business Media.
51. Evans, D. J. (1968). The use of pre-conditioning in iterative methods for solving linear equations with symmetric positive definite matrices. *IMA Journal of Applied Mathematics*, *4*(3), 295-314.