



UNIVERSITÉ
LIBRE
DE BRUXELLES



ECOLE
POLYTECHNIQUE
DE BRUXELLES

MA1 IRCI Physicien

MATH-H401 - Numerical methods

Résolution numérique d'une équation différentielle par la méthode multigrid

Prof. Artem NAPOV

Prof. Yvan NOTAY

Auteur: Christophe LANNOY

1 Fonctionnement général

La méthode multi-grille implémentée dans ce projet procède de la sorte :

- Génération de la matrice A et du vecteur b pour la grille la plus fine.
- Une itération de pré-smoothing utilisant Gauss-Seidel symétrique.
- Résolution du problème grossier (correspondant à un maillage 2 fois plus gros) par appel récursif de la fonction `multi_grid`.
- Une itération de post-smoothing (Gauss-Seidel symétrique).

La géométrie du problème est modifiable dans `main.h` où la forme et la taille du problème peuvent y être modifiés. Les paramètres que l'utilisateur est le plus susceptible de devoir modifier sont rassemblés dans les premières lignes de `main.c`

- `x` : définit le nombre de sous-niveaux que le multigrid utilisera
- `coarsest_level` : définit le maillage du niveau le plus bas (le plus grossier)
(Les deux paramètres précédents définissent donc indirectement le maillage de la grille la plus fine.)
- `τ` : définit le facteur de relaxation (=1 par défaut)
- `print_level` : définit le niveau de verbosité

Afin d'économiser de l'emplacement mémoire (qui pour ce code, est le facteur limitant bien plus que la puissance de calcul), les matrices de prolongation et de restriction ne sont pas explicitement générées lors de l'exécution du programme. La géométrie du problème est exploitée afin de pouvoir passer d'un maillage à un autre sans devoir créer ces matrices.

Le critère d'arrêt du multigrid est basé sur la norme résiduelle de la solution calculée. Si la norme de ce résidu commence à stagner, le multi-grille est arrêté et le facteur de convergence asymptotique est calculé. Sur base de ce dernier résultat, un facteur de relaxation τ est proposé pour améliorer la convergence (et ce, seulement si un τ n'est pas déjà implémenté). Un second critère d'arrêt limitant le nombre d'itération du multigrid est également mis en place.

Différents graphiques sont proposés à l'utilisateur :

- Affichage de l'évolution de la norme résiduelle
- Affichage de la solution du problème de diffusion stationnaire (Figure 1)
- Affichage du mode fondamental (problème aux valeurs propres) (figure 4)

La figure 1 a été générée pour $m = 4097$ (12 million d'inconnues $x=9$, `coarsest_level` = 8)

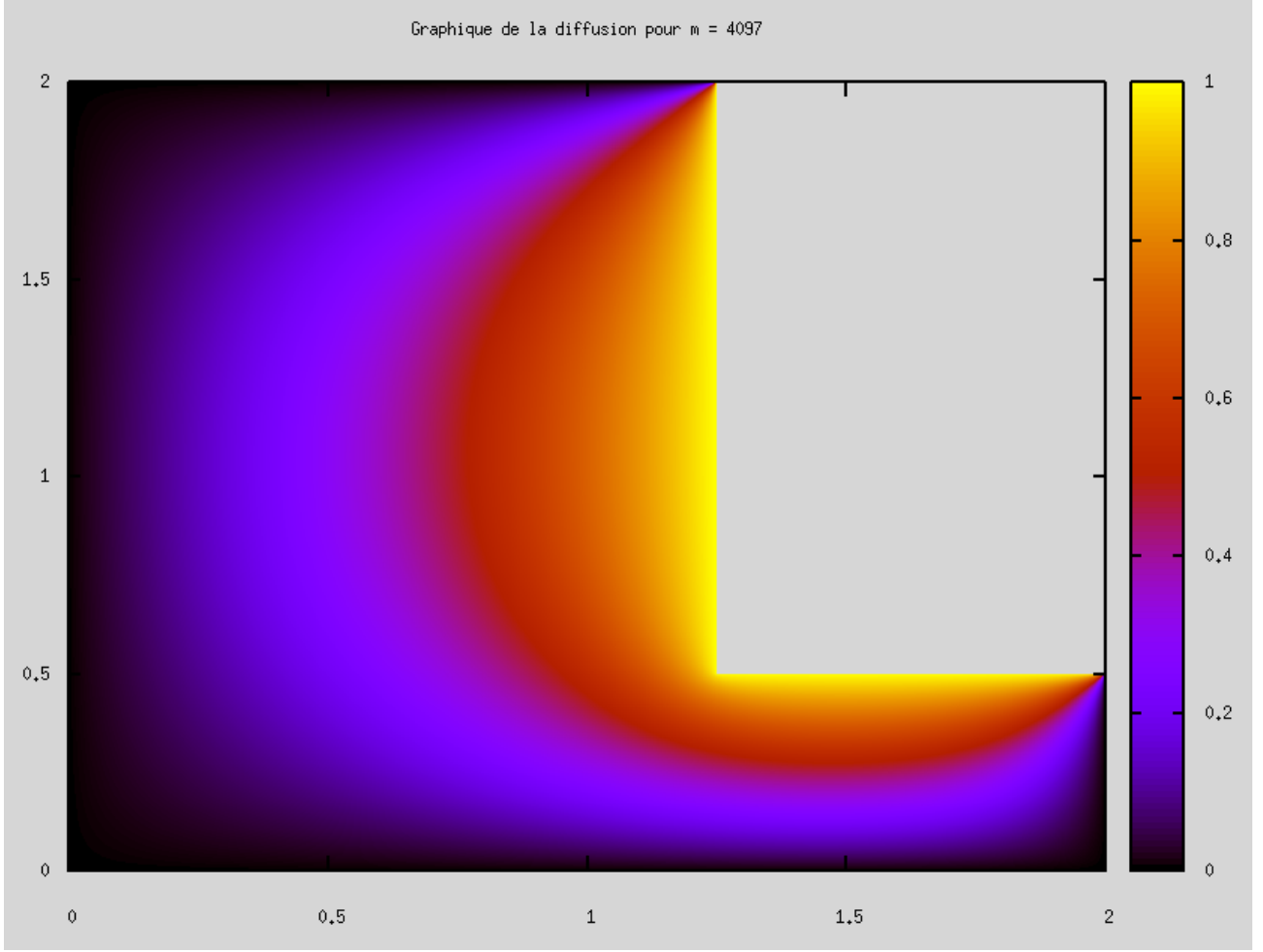


FIGURE 1

2 Stabilité directe

Le critère de stabilité direct est satisfait si

$$\frac{\|\mathbf{r}\|}{\|\mathbf{b}\|} \approx O(u) \cdot \|A\| \cdot \frac{\|\mathbf{u}\|}{\|\mathbf{b}\|} \quad (1)$$

Où $\|A\| = \lambda_{max}$. On peut estimer λ_{max} à l'aide du théorème de Gershgorin

$$\lambda_{max} \leq \frac{8D}{h^2} \quad (2)$$

La facteur D ayant été ignoré dans le code, cela revient à prendre $D = 1$. Le critère de stabilité devient

$$\frac{\|\mathbf{r}\| \cdot h^2}{\|\mathbf{u}\| \cdot 8} \leq O(u) = Cst. 1, 1 \cdot 10^{-16} \quad (3)$$

Pour $m = 5121$ (19 million d'inconnues $x=7$ coarsest_level = 40), nous avons bien $2, 39 \cdot 10^{-17} \leq O(u)$

Pour $m = 1024$ (7.5 million d'inconnues $x=7$ coarsest_level = 8), nous avons bien $2, 40 \cdot 10^{-17} \leq O(u)$

3 Implémentation de la relaxation optimale

Lorsque le code tourne pour $m = 5121$ (19 millions d'inconnues), le facteur de convergence asymptotique est $\rho = 0.214$. En supposant $\lambda_{max} \approx 1$, on en déduit $\lambda_{min} = 1 - \rho = 0.786$. La relaxation optimale vaut donc

$$\tau = \frac{2}{\lambda_{max} + \lambda_{min}} = 1.120 \quad (4)$$

On peut estimer la convergence théorique via

$$\rho_{theorique} = \frac{\lambda_{max} - \lambda_{min}}{\lambda_{max} + \lambda_{min}} = 0.120 \quad (5)$$

En implémentant ce facteur τ on retombe comme attendu sur un meilleur facteur de convergence asymptotique $\rho = 0.120$

Similairement, pour $m = 1025$, le taux de convergence $\rho = 0.221$, le facteur de relaxation optimal vaut $\tau = 1.118$, et la convergence théorique prévue avec ce facteur de relaxation est $\rho_{theorique} = 0.118$. Comme attendu, on retrouve bien expérimentalement $\rho = 0.118$.

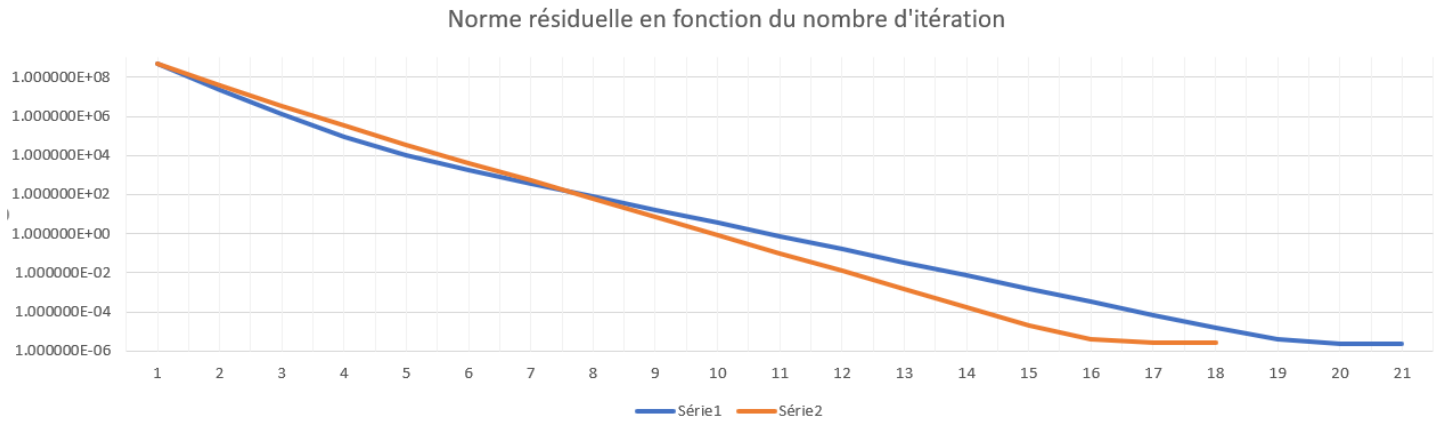


FIGURE 2 – Série 1 $\tau = 1$, Série 2 $\tau = 1.120$ ($m=5121$)

4 Temps de résolution

On peut s'intéresser au temps de résolution du solveur multigrad et à la manière dont ce temps évolue en fonction du nombre d'inconnues du système. Le graphique bi-logarithmique ci-dessous montre que le temps de résolution évolue en $O(n)$, c'est à dire est directement proportionnel au nombre d'inconnues.

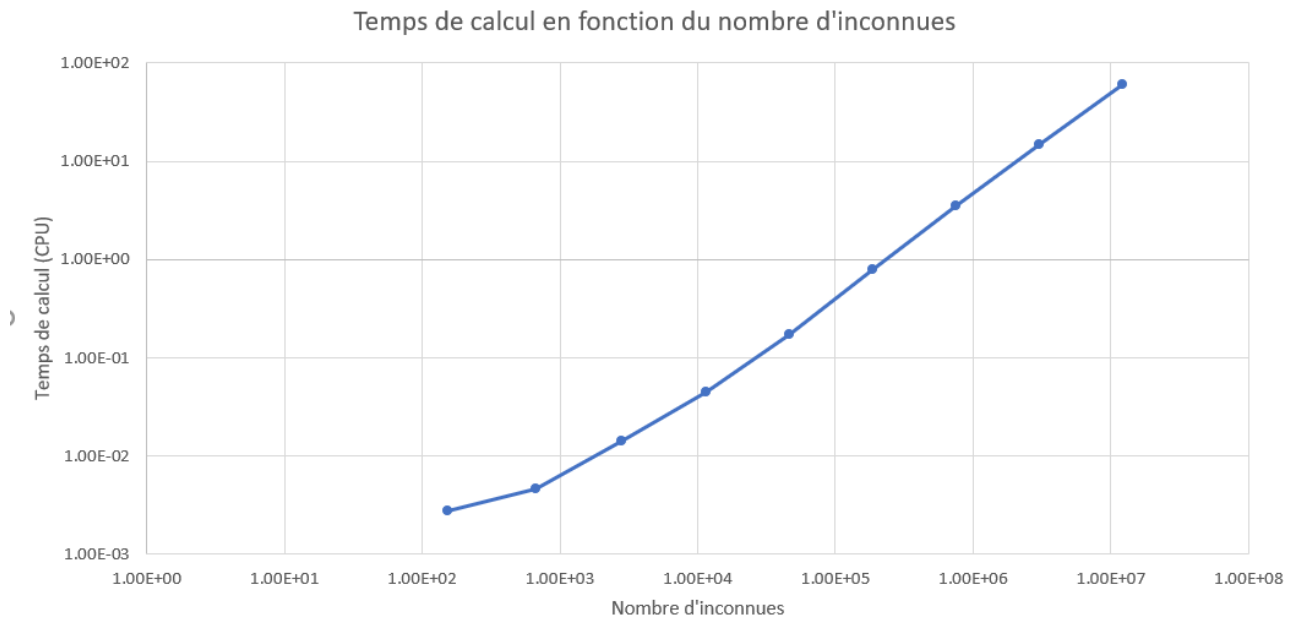


FIGURE 3

5 Problème aux valeurs propres

Le solveur aux valeurs propres PRIMME a été accéléré en utilisant une itération du solveur multigrid comme préconditionneur. Le gain en temps est significatif puisqu'il permet de passer de 567 secondes à 13,7 secondes lorsque l'on utilise ce préconditionneur sur un problème à 3 millions d'inconnues ($m = 2049$). La figure 4 affiche les modes fondamentaux d'une membrane pour $m = 65$ et $m = 129$.

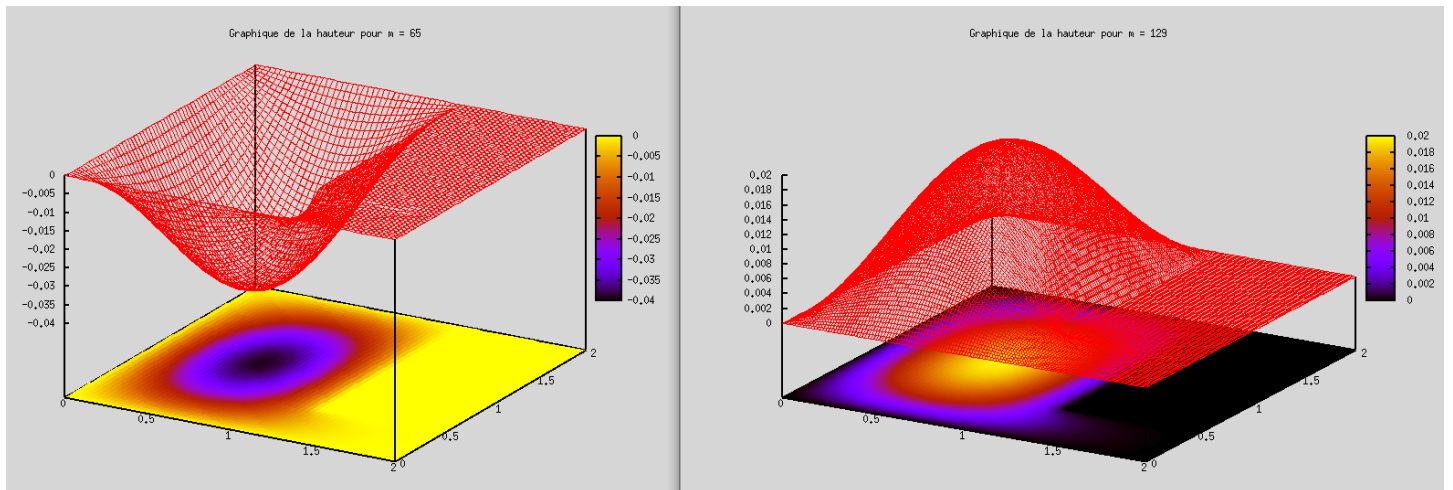


FIGURE 4 – Solveur PIMME accéléré par un préconditionneur