M1 UE2

Espaces euclidiens (Corrigé des exercices du chapitre 8)

Transformations de $\mathbb{R}^2$ et de $\mathbb{R}^3$

---

1. ** a) Soit E l'ensemble des $\lambda \in \mathbb{R}$ tels que, pour toutes les matrices $M \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$, on ait $\det(M) \leq \lambda \text{tr}({}^tMM)$. Calculer $\inf E$.

b) Soit F l'ensemble des $\lambda \in \mathbb{R}$ tels que, pour toutes les matrices $M \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$, on ait $[\text{tr}(M)]^2 \leq \lambda \text{tr}({}^tMM)$. Calculer $\inf F$.

---

a) Posons $M = \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix}$. lors, $\text{tr}({}^tMM) =^2 + b^2 + c^2 + d^2$ et $det(M) = ad - bc$. On sait que $ad \leq \dfrac{1}{2}(a^2 + d^2)$ avec égalité pour $a = d$ (on exploite $(a-d)^2$), et que $-bc \leq \dfrac{1}{2}(b^2 + c^2)$ avec égalité pour $b = -c$. Cela conduit à $\det(M) \leq \dfrac{1}{2}\text{tr}({}^tMM)$, et il y a égalité quand $a = d$ et $b = -c$, soit $M = \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}$ (matrice de similitude directe), donc $\inf E = \dfrac{1}{2}$.

b) De même,

$$[\text{tr}(M)]^2 = (a+d)^2 \leq 2(a^2 + d^2) \leq 2\text{tr}({}^tMM),$$

et il y a égalité lorsque $a = d$ et $b = c = 0$, soit lorsque M est la matrice d'une homothétie.

---

2. * Donner la matrice de la symétrie orthogonale s_P par rapport à $2x - y + z = 0$ dans une base orthonormale.

Soit $P : 2x - y + z = 0 = (\mathbb{R}\varepsilon)^\perp$, $\varepsilon = \dfrac{1}{\sqrt{6}}(2i - j + k)$. On a $\overrightarrow{u} = u_1 + u_2$ sur $\mathbb{R}^3 = P \oplus P^\perp$, et $s_P(\overrightarrow{u}) = u_1 - u_2$. Or $u_2 = p_{\mathbb{R}\varepsilon}(\overrightarrow{u}) = (\overrightarrow{u}|\varepsilon)\varepsilon$. $\overrightarrow{u} = xi + yj + zk$; $s_P(\overrightarrow{u}) = \overrightarrow{u} - \dfrac{1}{3}(2x-y+z)(2i-j+k) = \dfrac{1}{3}[(-x+2y-2z)i + (2x+2y+z)j + (-2x+y+2z)k]$.

D'où $M_{(i,j,k)}(s_P) = \dfrac{1}{3}\begin{pmatrix} -1 & 2 & -2 \\ 2 & 2 & 1 \\ -2 & 1 & 2 \end{pmatrix}$.

---

3. *** Soit $M = \begin{pmatrix} a & b & c \\ b & x & y \\ c & y & z \end{pmatrix}$. Établir une condition sur a, b, c pour qu'il existe (x, y, z) tel que $M \in \mathcal{O}_3(\mathbb{R})$.

Il faut que $a^2+b^2+c^2 = 1$ et qu'il existe (x, y, z) avec $\begin{cases} ab + bx + cy = 0 \\ bc + xy + yz = 0 \\ ac + by + cz = 0 \end{cases}$, $\begin{cases} b^2 + x^2 + y^2 = 1 \\ c^2 + y^2 + z^2 = 1 \end{cases}$.

Supposons cela vérifié.

• $b=c=0$ donc $a^2=1$. Il existe (x,y,z) tel que $\left\{\begin{array}{l} y(x+z)=0 \\ x^2+y^2=1 \\ y^2+z^2=1 \end{array}\right.$. Par exemple, $(1,0,1)$, et $\begin{pmatrix} \epsilon & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ est orthogonale. Pour les avoir toutes, $\left\{\begin{array}{l} y=0 \\ x=\epsilon' \\ z=\epsilon'' \end{array}\right.$ ou bien $\left\{\begin{array}{l} x=-z \\ x^2+y^2=1 \end{array}\right.$, alors $x=\cos\theta$, $y=\sin\theta$, et on trouve $\begin{pmatrix} \epsilon & 0 & 0 \\ 0 & \cos\theta & \sin\theta \\ 0 & \sin\theta & -\cos\theta \end{pmatrix}$.

• $b\neq 0$ et $c=0$ donc $a^2+b^2=1$, $(a=\cos\theta,\ b=\sin\theta)$, $\left\{\begin{array}{l} a+x=0 \\ (x+y)z=0 \\ by=0 \end{array}\right.$ donc $x=-a$, $y=0$. $\left\{\begin{array}{l} b^2+x^2+y^2=1 \\ y^2+z^2=1 \end{array}\right.$: la première équation est compatible avec $a^2+b^2=1$ et la deuxième donne $z=\epsilon$. On trouve les $\begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta & 0 \\ \sin\theta & -\cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & \epsilon \end{pmatrix}$.

• $b=0$ et $c\neq 0$ donc $a^2+c^2=1$. On trouve les $\begin{pmatrix} \cos\theta & 0 & \sin\theta \\ 0 & \epsilon & 0 \\ \sin\theta & 0 & -\cos\theta \end{pmatrix}$

• $bc\neq 0$ Soit $\mathcal{D}$:$\left\{\begin{array}{l} ab+bx+cy=0 \\ ac+by+cz=0 \end{array}\right.$, $\begin{pmatrix} b \\ c \\ 0 \end{pmatrix}\wedge\begin{pmatrix} 0 \\ b \\ c \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} c^2 \\ -bc \\ b^2 \end{pmatrix}$ et $\mathcal{D}$: $\begin{pmatrix} -a \\ 0 \\ -a \end{pmatrix}+\mathbb{R}\begin{pmatrix} c^2 \\ -bc \\ b^2 \end{pmatrix}$ paramétrée par $\left\{\begin{array}{l} x=-a+c^2\lambda \\ y=-bc\lambda \\ z=-a+b^2\lambda \end{array}\right.$.

$\rightarrow$ Equation de rencontre avec $bc+xy+yz=0$: $0=bc-bc\lambda(-2a+(b^2+c^2)\lambda)$ soit $0=bc+2abc\lambda-bc(b^2+c^2)\lambda$, donc $1+2a\lambda-(b^2+c^2)\lambda^2=0$. $\Delta=4(a^2+b^2+c^2)=4$, donc il y a 2 racines distinctes λ_1 et λ_2.

$\rightarrow$ Equation de rencontre avec $b^2+x^2+y^2=1$:

$$b^2+(-a+c^2\lambda)^2+b^2c^2\lambda^2=1=a^2+b^2+c^2$$

$$b^2+a^2-2ac^2\lambda+c^2(b^2+c^2)\lambda^2=a^2+b^2+c^2$$

donc $1+2a\lambda-(b^2+c^2)\lambda^2=0$.

$\rightarrow$ Equation de rencontre avec $b^2+y^2+z^2=1$: la même.

Donc, si (a,b,c) vérifie $a^2+b^2+c^2=1$ et $bc\neq 0$, il existe (x,y,z) (donné par λ_1 et λ_2) tel que M est orthogonale.

Automorphismes orthogonaux

---

4. *** Soit $\mathcal{B}=(e_1,\dots,e_n)$ une base orthonormale de E euclidien.

a) Soit $x_1,\dots,x_n$ des vecteurs de E tels que $\sum_{i=1}^{n}\|x_i\|^2<1$. Si $y_i=x_i+e_i$, montrer que $(y_1,\dots,y_n)$ est une base de E.

b) Soit $\varepsilon_1,\dots,\varepsilon_n$ des vecteurs unitaires de E tels que $\sum_{i=1}^{n}(e_i|\varepsilon_i)>n-\dfrac{1}{2}$. Montrer qu'ils forment une base de E.

---

a) Partons de $\sum_i \alpha_i = 0$, donc $\sum_i \alpha_i e_i = -\sum_i \alpha_i x_i$. On prend la norme, d'où, avec Cauchy-Schwarz,

$$\sum_i |\alpha_i|^2 = \| \sum_i \alpha_i x_i \|^2 \leq \sum_i \alpha_i^2 \sum_i \|x_i\|^2.$$

Il faut donc que $\sum_i \alpha_i^2 = 0$, donc que $\alpha_i = 0$.

b) Posons $x_i = \varepsilon_i - e_i$. D'où

$$\sum_i \|x_i\|^2 = \sum_i [\|\varepsilon_i\|^2 + \|e_i\|^2 - 2(\varepsilon_i|e_i) = 2n - 2\sum_i (\varepsilon_i|e_i) < 1,$$

donc on peut appliquer a).

$\boxed{\textbf{5.}}$ * Soit A et B symétriques réelles. Montrer que $[\mathrm{tr}(AB+BA)]^2 \leq 4\mathrm{tr}A^2\mathrm{tr}B^2$.

$(A|B) = \mathrm{tr}(AB)$ est un produit scalaire sur $\mathcal{S}_n(\mathbb{R})$, et, par Cauchy-Schwarz : .$|(A|B)|^2 \leq (\mathrm{tr}A^2)(\mathrm{tr}B^2)$ Or $[\mathrm{tr}(AB+BA)]^2 = 4(\mathrm{tr}AB)^2 = 4(A|B)^2$, d'où le résultat.

$\boxed{\textbf{6.}}$ * Soit $A = (a_{ij}) \in \mathcal{O}(n)$ et $\varphi(A) = \sum_{1\leq i,j\leq n} a_{ij}$. Trouver $\min_{A\in\mathcal{O}(n)} \varphi$ et $\max_{A\in\mathcal{O}(n)} \varphi$.

$J = (1)$. On écrit $\varphi(A) = \mathrm{tr}(AJ)$. $J = \Omega D\, {}^t\Omega$, $\Omega \in \mathcal{O}(n)$, $D = \begin{pmatrix} n & & (0) \\ & 0 & \\ & & \ddots & \\ (0) & & & 0 \end{pmatrix}$.

$\mathrm{tr}(AJ) = \mathrm{tr}({}^t\Omega A \Omega D)$, d'où on est ramené à $\varphi(B) = \mathrm{tr}(BD)$, $B \in \mathcal{O}(n)$. $\Psi(B) = nb_{11}$, donc $-n \leq \Psi(B) \leq n$, et c'est atteint pour I et $-I$.

$\boxed{\textbf{7.}}$ * Soit E euclidien et $u : E \to E$ avec $u(0) = 0$ et, $\|u(x)-u(y)\|^2 = \|x-y\|^2$ pour tout $(x,y) \in E^2$. Montrer que $u \in \mathcal{O}(E)$.

$\|u(x)\| = \|x\|$ avec $y = 0$. Si $z = \lambda x + \mu y$,

$\|u(z)-\lambda u(x)-\mu u(y)\|^2 = \|u(z)\|^2+\lambda^2\|u(x)\|^2+\mu^2\|u(y)\|^2-2\lambda(u(x)|u(z))-2\mu(u(y)|u(z))-2\lambda\mu(u(x)|u(y))$

et $(u(a)|u(b)) = -\frac{1}{2}(\|u(a)-u(b)\|^2 - \|u(a)\|^2 - \|u(b)\|^2) = (a|b)$, d'où

$$\|u(\lambda x+\mu y) - \lambda u(x) - \mu u(y)\|^2 = \|\lambda x + \mu y - \lambda x - \mu y\|^2 = 0$$

et u est linéaire. Dés lors, $u \in \mathcal{O}(E)$.

$\boxed{\textbf{8.}}$ ** $\dim E = n \geq 1$, E est euclidien.

a) Soit $H \in GL(E)$ qui commute avec tous les éléments de $O(E)$. Montrer que tout $x \neq 0$ est vecteur propre de H, puis que $H \in \mathbb{R}Id_E$.

b) Montrer que ${}^tUU \in \mathbb{R}Id_E$ si, et seulement si, pour tout $V \in O(E)$, $UVU^{-1} \in O(E)$.

---

a) $H\Omega = \Omega H$ donc les sous-espaces propres de Ω sont stables par H. Soit $x \in E \setminus \{0\}$, et $\Omega = s_{\mathbb{R}x}$ la symétrie orthogonale par rapport à $\mathbb{R}x$. Alors $\mathbb{R}x$ est stable par h, donc $H(x) = \lambda_x x$.

Si $\dim E = 1$, c'est fini ($\mathcal{L}(E) = \mathbb{R}\mathrm{id}$).

Si $\dim E \geq 2$, soient $x \neq 0$ et $y \neq 0$. Supposons que $\lambda_x \neq 0$ et $\lambda_y \neq 0$. Alors, (x, y) est libre, car x et y sont associés à des valeurs propres distinctes. Dans ce cas, $h(x+y) = \lambda_{x+y}(x+y) = \lambda_x x + \lambda_y y$ implique $\lambda_x = \lambda_y = \lambda_{x+y}$, d'où une contradition, qui conduit à $\lambda_x = \lambda_y = \lambda$, soit à $H = \lambda Id_E$.

b) Si ${}^tUU = \lambda I_n$, alors $U^{-1} = \dfrac{1}{\lambda}\,{}^tU$. Donc $UVU^{-1} = \dfrac{1}{\lambda}UV\,{}^tU$, et ${}^t(UVU^{-1}) = \dfrac{1}{\lambda}U\,{}^tV\,{}^tU$. On a alors $(UVU^{-1})\,{}^t(UVU^{-1}) = \dfrac{1}{\lambda^2}U\,{}^tV(\lambda I_n)V\,{}^tU = \dfrac{1}{\lambda}U\,{}^tU$. Or ${}^tU = \lambda U^{-1}$, donc c'est I_n.

Réciproquement, si pour tout $V \in O(E)$, $UVU^{-1} \in O(E)$, alors $UV = WU$, avec $W \in O(E)$, ${}^tV\,{}^tU = {}^tU\,{}^tW$, donc ${}^tU\,{}^tWWU = {}^tV\,{}^tUUV = {}^tUU = V^{-1}\,{}^tUUV$, soit ${}^tUUV = V\,{}^tUU$, puis, d'après a), ${}^tUU \in \mathbb{R}I_n$.

$\boxed{\textbf{9.}}$ ** Soit $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ muni du produit scalaire $(A|B) = \mathrm{tr}({}^tAB)$.

a) Soit $P \in O(n)$. Montrer que les applications $\varphi_P : A \mapsto AP$ et $\psi_P : A \mapsto P^{-1}AP$ sont orthogonales.

b) Réciproquement, si $P \in GL_n(\mathbb{R})$ et si φ_P ou ψ_P sont orthogonales, est-ce que $P \in O(n)$?

---

a) On a $\|\varphi_P(A)\|^2 = \mathrm{tr}({}^tP{}^tAAP) = \mathrm{tr}({}^tAAP{}^tP) = \mathrm{tr}({}^tAA) = \|A\|^2$ et

$$\|\psi_P(A)\|^2 = \mathrm{tr}({}^tP{}^tAP{}^tPAP) = \mathrm{tr}({}^tAAP{}^tP) = \mathrm{tr}({}^tAA) = \|A\|^2.$$

b) • Si φ_P est orthogonale, $(\varphi_P(A)|\varphi_P(B)) = (A|B)$ donc $\mathrm{tr}(P{}^tP{}^tAB) = \mathrm{tr}({}^tAB)$ pour toutes matrices A, B, donc $P{}^tP{}^tA - {}^tA \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})^\perp$, et cette matrice est nulle pour tout A, donc $P{}^tP = I_n$, et P est orthogonale.

• Si ψ_P est orthogonale, on a donc cette fois $P{}^tP{}^tA{}^t(P^{-1})P^{-1} - {}^tA \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})^\perp$, donc cette matrice est nulle pour toute matrice A. Cela fait donc que $Q = {}^tPP$ commute avec toute matrice A. On sait alors que $Q = \lambda I_n$, donc P est une matrice de similitude.

$\boxed{\textbf{10.}}$ * Soit $u \in E \setminus \{0\}$ (E est préhilbertien réel) et $\lambda \in \mathbb{R}$. On pose $f(x) = x + \lambda(x|u)u$. Déterminer λ pour que $f \in O(E)$, et reconnaître alors f.

$\|f(x)\|^2 = \|x\|^2 + 2\lambda(x|u)^2 + \lambda^2(x|u)^2\|u\|^2$. Donc, $f \in O(E)$ (f est bien linéaire) si, et seulement si, pour tout $x \in E$, $\lambda(x|u)^2[2 + \lambda\|u\|^2] = 0$.

• $\lambda = 0$ donne $f = id_E$.

• Sinon, on prend $x = u$ d'où $\lambda = -\dfrac{2}{\|u\|^2}$ et alors f est la réflexion par rapport à l'hyperplan $[\mathbb{R}u]^\perp$.

$\boxed{\textbf{11.}}$ ** a) Soit $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ deux matrices orthogonales. Montrer que $A + B = I_n$ équivaut à $\begin{cases} A = {}^tB \\ -1 \notin \mathrm{sp}(A) \\ A^3 = -I_n \end{cases}$.

b) Lorsque $n = 2, 3$, trouver les matrices A orthogonales telles que $A^3 = -I_n$ et $-1 \notin \mathrm{sp}(A)$.

---

a) • Si $A + B = I_n$, comme ${}^tBB = I_n$ et que ${}^tB = I_n - {}^tA$, on a $I_n = I_n - (A + {}^tA) + {}^tAA = 2I_n - (A + {}^tA)$, donc $A + {}^tA = I_n$, soit $B = {}^tA$.

Si $AX=-X$, $BX=2X$, mais, comme B est orthogonale, $\mathrm{sp}(B)\subset\{-1,1\}$, donc $X=0$, et $-1\notin\mathrm{sp}(A)$.

En multipliant $A+{}^tA=I_n$ par A, il vient $A^2+I_n=A$, puis $A^2-A+I_n=0$, que l'on peut à nouveau multiplier par $A+I_n$, ce qui donne bien $A^3+I_n=0$.

• Si on a les trois conditions, comme $A^3+I_n=(A+I_n)(A^2-A+I_n)=0$, et que $A+I_n$ est inversible, on peut la simplifier en multipliant par son inverse, d'où $A^2-A+I_n=0$, que l'on multiplie pr ${}^tA$ pour obtenir $A-I_n+{}^tA=0$, ce qui donne bien $A+B=I_n$ car $B={}^tA$.

b) Si $n=2$, alors A n'est pas la matrice d'une réflexion, qui a obligatoirement la valeur propre -1, donc A est la matrice d'une rotation, soit $A=R_\theta$, avec $R_{3\theta}=-I_2=R_\pi$, donc $\theta=\dfrac{\pi}{3}+\dfrac{2k\pi}{3}$, $k=0,1,2$. $k=1$ donne $\theta=\pi$, ce qui est exclu car $-1\notin\mathrm{sp}(A)$. Il reste $A=R_{\frac{\pi}{3}}$ ou sa transposée (inverse) $A=R_{5\frac{\pi}{3}}$.

Si $n=3$, on a alors, comme on l'a vu, $A^2-A+I_n=0$, donc $\mathrm{sp}_{\mathbb{C}}(A)\subset\{-j,-j^2\}$. Cependant, χ_A a obligatoirement une racine réelle car il est réel de degré 3 (on peut par exemple employer le théorème des valeurs intermédiaires en profitant des limites opposées aux infinis), donc il y a une contradiction et ainsi il n'y a pas de solution.

Endomorphismes et matrices symétriques

---

12. * Soit $A\in\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, nilpotente, et telle que ${}^tAA=A{}^tA$. Montrer que A est nulle.

On a $A^p=0$ ($p\geq 1$). Par commutation, $({}^tAA)^p={}^tA^pA^p=0$. Donc, ${}^tAA$ est aussi nilpotente. Mais, par ailleurs, elle est symétrique réelle, donc diagonalisable. Son spectre est réduit à $\{0\}$, car elle est annulée par X^p, donc elle est semblable à la matrice nulle, d'où ${}^tAA=0$. Pour toute X, ${}^tAAX=0$, donc ${}^tX{}^tAAX=0$. Or, c'est $\|u_A(x)\|^2$, dans $\mathbb{R}^n$ euclidien canonique, et cela conduit à $A=0$.

---

13. * Soit E euclidien de base $(\epsilon_1,\cdots,\epsilon_n)$. Soit $u:E\to E$, $x\mapsto\displaystyle\sum_{k=1}^n(\epsilon_k|x)\epsilon_k$.

a) Montrer que $u\in\mathcal{L}(E)$ est symétrique, et que $\mathrm{sp}(u)\subset\mathbb{R}_+^*$.
b) Montrer qu'il existe $v\in\mathcal{L}(E)$ symétrique tel que $v^2=u^{-1}$.
c) Montrer que $(v(\epsilon_1),\cdots,v(\epsilon_n))$ est une base orthonormée de E.

---

a) $(u(x)|y)=\displaystyle\sum_{k=1}^n(\epsilon_k|x)(\epsilon_k|y)=(x|u(y))$. Si $u(x)=\lambda x$; $(x|u(x))=\displaystyle\sum_{k=1}^n(\epsilon_k|x)^2=\lambda\|x\|$, donc $\lambda\geq 0$ et $\lambda=0$ si et seulement si pour tout k, $(\epsilon_k|x)^2=0$ i.e. $x\in E^\perp=\{0\}$.

b) Soit $\mathcal{B}=(e_1,\cdots,e_n)$ orthonormée, diagonalisant u. $M_{\mathcal{B}}(u)=\begin{pmatrix}\lambda_1 & & (0)\\ & \ddots & \\ (0) & & \lambda_n\end{pmatrix}$, $\lambda_i>0$.

v tel que $M_{\mathcal{B}}(v)=\begin{pmatrix}\dfrac{1}{\sqrt{\lambda_1}} & & (0)\\ & \ddots & \\ (0) & & \dfrac{1}{\sqrt{\lambda_n}}\end{pmatrix}$ vérifie $v^2=u^{-1}$ et v est symétrique car sa matrice dans une base orthonormale est symétrique.

c) On a $u(u^{-1})(\varepsilon_j)=\varepsilon_j=\displaystyle\sum_{k=1}^n(\varepsilon_k|u^{-1})(\varepsilon_j)\varepsilon_k$ donc $(\varepsilon_k|u^{-1})(\varepsilon_j)=\delta_{kj}$ (base).

$(v(\epsilon_i)|v(\epsilon_j)) = (\epsilon_i|v^2(\epsilon_j)) = (\epsilon_i|u^{-1}(\epsilon_j)) = \delta_{ij}$ donc $(v(\epsilon_i)|v(\epsilon_j)) = \delta_{ij}$.

$\boxed{\textbf{14.}}$ ** Soit $A \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{R})$ de rang $r > 0$.

a) Dire tout sur ${}^tAA$, notamment sur ses valeurs propres.

b) Pour λ valeur propre strictement positive de ${}^tAA$, on pose $\sigma = \sqrt{\lambda}$. Soit alors Σ la matrice diagonale $\mathrm{Diag}(\sigma_1, \dots, \sigma_r)$. Montrer que $A = V \begin{pmatrix} \Sigma & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} {}^tU$ avec V et U des matrices orthogonales.

---

a) En identifiant matrices et applications linéaires, et matrices colonnes et vecteurs dans la structure euclidienne canonique de $\mathbb{R}^n$, on a :

• ${}^tAAX = \lambda X$ implique $\|AX\|^2 = \lambda\|X\|^2$, donc $\lambda \geq 0$.

• $\ker A \subset \ker {}^tAA$, et, si ${}^tAAX = 0$, $\|AX\|^2 = 0$, donc $AX = 0$, soit $\ker A = \ker {}^tAA$ et $\mathrm{rg}A = \mathrm{rg}{}^tAA = r$.

• ${}^tAA$ est de plus symétrique.

b) Soit $(e_1, \dots, e_n)$ une base orthonormale propre pour ${}^tAA$, et telle que $(e_{r+1}, \dots, e_n)$ soit une base de $\ker A = \ker {}^tAA$. ${}^tAAe_i = \lambda_i e_i$, donc $({}^tAAe_i|e_j) = \lambda_i(e_i|e_j)$ donc $(Ae_i|Ae_j) = \lambda_i\delta_{ij}$, et $(\dfrac{Ae_1}{\sigma_1}, \dots, \dfrac{Ae_r}{\sigma_r})$ est une famille orthonormale.

Analyse. si $A = V \begin{pmatrix} \Sigma & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} {}^tU$, alors ${}^tAA = U \begin{pmatrix} \Sigma^2 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} {}^tU$, donc U diagonalise ${}^tAA$. Puis $V \begin{pmatrix} \Sigma & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = AU$, donc, si $(c_1, \dots, c_n)$ est la base canonique de $\mathbb{R}^n$, ayant $Uc_i = e_i$ et $\Sigma e_i = \sigma_i e_i$ si $i \leq r$ et 0 si $i > r$, on a $V\Sigma c_i = \sigma_i V c_i = AUc_i = Ae_i$.

Synthèse. On complète $(\dfrac{Ae_1}{\sigma_1}, \dots, \dfrac{Ae_r}{\sigma_r})$ en une base orthonormale de $\mathbb{R}^n$, soit $(e'_1, \dots, e'_n)$. On définit U par $Uc_i = e_i$, donc U diagonalise ${}^tAA$ et V par $Vc_i = e'_i$. On a bien U et V orthogonales, $V\Sigma c_i = \sigma_i V c_i = Ae_i = AUc_i$ si $i \leq r$ et $AUc_i = 0$ si $i > r$, donc $V \begin{pmatrix} \Sigma & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = AU$.

$\boxed{\textbf{15.}}$ * Réduction et éléments propres de $C = (a_i b_j + a_j b_i) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

C est symétrique réelle, donc diagonalisable. Par ailleurs,

$$C = A\,{}^tB + B\,{}^tA \text{ où } A = \begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} \text{ et } B = \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}.$$

Soit $a = (a_1, \cdots, a_n)$ et $b = (b_1, \cdots, b_n)$.

$\rightarrow$ Si $a = 0$ ou $b = 0$, alors $C = 0$. On supposera donc $a \neq 0$ et $b \neq 0$.

$\rightarrow$ $CX = \lambda X$ s'écrit $A\,{}^tBX + B\,{}^tAX = \lambda X$, d'où $(b|x)a + (a|x)b = \lambda x$.

D'autre part, $C_j = b_j A + a_j B$, donc $\mathrm{im} u_C \subset \mathrm{Vect}(a, b)$.

i) (a, b) libre. $\mathrm{rg}C = 2$, car $\ker u_C = (\mathrm{Vect}(a, b))^\perp$ ou parce que $(b|x)a + (a|x)b = 0$ équivaut à $(b|x) = (a|x) = 0$, et donc $\ker u_C = (\mathbb{R}a)^\perp \cap (\mathbb{R}b)^\perp$. Si $\lambda \neq 0$ et si $x \in E_\lambda(u_C)$, $x \in \mathrm{Vect}(a, b)$: $x = \alpha a + \beta b$ puis $\begin{cases} (b|x) = \alpha(a|b) + \beta\|b\|^2 \\ (a|x) = \alpha\|a\|^2 + \beta(b|a) \end{cases}$ soit $\begin{cases} \alpha\lambda = \alpha(a|b) + \beta\|b\|^2 \\ \beta\lambda = \alpha\|a\|^2 + \beta(b|a) \end{cases}$ d'où $\begin{cases} \alpha[(a|b) - \lambda] + \beta\|b\|^2 = 0 \\ \alpha\|a\|^2 + \beta[(b|a) - \lambda] = 0 \end{cases}$. Il y a une solution $\neq (0, 0)$, donc $[(a|b) - \lambda]^2 = \|a\|^2\|b\|^2$, soit

$\lambda_\varepsilon = (a|b) + \varepsilon\|a\|\|b\|$ et alors $\varepsilon\alpha\|a\| = \beta\|b\|$, donc $(\alpha,\beta) = \left(\dfrac{1}{\|a\|}, \dfrac{\varepsilon}{\|b\|}\right)$. Ainsi, $E_{\lambda_\varepsilon}(u_C) = \mathbb{R}\left(\dfrac{a}{\|a\|} + \dfrac{\varepsilon b}{\|b\|}\right)$ (bissectrices de $(\mathbb{R}a, \mathbb{R}b)$.

ii) (a,b) liée : $b = \mu a$ (car $a \neq 0$ et $b \neq 0$). $\mathrm{im} u_C = \mathbb{R}a$, $\ker u_C = (\mathbb{R}a)^\perp$. On a $B = \mu A$, donc $C = 2\mu A\,{}^tA$. $u_C(a) = 2\mu\|a\|^2 a$, donc $\lambda = 2\mu\|a\|^2$, avec $E_\lambda(u_C) = \mathbb{R}a$.

---

16. * Soit $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, avec A symétrique positive. On suppose que $AB + BA = 0$. Montrer que $AB = BA = 0$. Trouver un exemple où A et B ne sont pas nulles.

On associe u et v à A et B, dans la structure euclidienne canonique de $\mathbb{R}^n$.

Soit $\mathcal{B} = (e_1, \ldots, e_n)$ une base orthonormale de réduction de A, avec $u(e_i) = \lambda_i e_i$ où $\lambda_i \geq 0$.

Alors, $uv(e_i) = -\lambda_i v(e_i)$. Si $v(e_i) \neq 0$, $-\lambda_i$ se retrouve valeur propre de u, donc elle est positive...comme λ_i, donc $\lambda_i = 0$ et $uv(e_i) = 0$. On a toujours $uv(e_i) = 0$, donc $uv = 0$. $vu = -uv$ est nul aussi.

Si on prend $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, on a $AB = BA = 0$ et A est bien symétrique positive.

---

17. ** Soit E euclidien et $u \in \mathcal{L}(E)$, symétrique , tel que $\mathrm{tr}(u) = 0$.
a) Montrer qu'il existe $x \neq 0$ tel que $(u(x)|x) = 0$.
b) En déduire qu'il existe une base orthonormale $(e_1, \ldots, e_n)$ telle que $(u(e_i)|e_i) = 0$ pour tout i.

---

a) Soit $(\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_n)$ orthonormale réduisant u avec $u(\varepsilon_i) = \lambda_i\varepsilon_i$. Donc, $(u(x)|x) = \displaystyle\sum_{i=1}^n x_i\lambda_i x_i^2$ si $x = \displaystyle\sum_{i=1}^n x_i\varepsilon_i$. Or, $\displaystyle\sum_{i=1}^n \lambda_i = 0$, donc $x = \displaystyle\sum_{i=1}^n \varepsilon_i$ convient.

b) Remarquons que la propriété équivaut à construire une base orthonormale où la matrice de u a une diagonale nulle.

La propriété est vraie en dimension 1 car tout endomorphisme est alors une homothétie et seul $u = 0$ a une trace nulle. Supposons la propriété vérifiée et soit u en dimension n. Posons $e_1 = \dfrac{x}{\|x\|}$ et $F = [\mathbb{R}e_1]^\perp$, qui est euclidien avec la restriction du produit scalaire de E. Dans $\mathcal{B}' = (e_1, e'_2, \ldots, e'_n)$ adaptée à $E = \mathbb{R}e_1 \oplus F$, $A' = \mathcal{M}_{\mathcal{B}'}(u) = \begin{pmatrix} 0 & (*) \\ (*) & B \end{pmatrix}$ avec ${}^tB = B$ car ${}^tA' = A'$ et $\mathrm{tr}(B) = \mathrm{tr}(A') = 0$. Par l'hypothèse de récurrence, il existe $\Omega' \in O(n-1)$ telle que ${}^t\Omega' B\Omega' = C$ ait une diagonale nulle. Posons alors $\Omega = \begin{pmatrix} 1 & (0) \\ (0) & \Omega' \end{pmatrix}$. Elle est orthogonale et il vient $\Omega A'\Omega = \begin{pmatrix} 0 & (*) \\ (*) & C \end{pmatrix}$, donc cette matrice a ses éléments diagonaux nuls, et Ω détermine une base orthonormale du type cherché.

---

18. ** Soit E euclidien, h symétrique, $x_0 \in E$ unitaire, p la projection orthogonale de sur $\mathbb{R}x_0$ et $u = h + p$. On note $\lambda_1 \leq \ldots \leq \lambda_n$ les valeurs propres de h, et $\mu_1 \leq \ldots \leq \mu_n$ celles de u. Montrer que $\lambda_1 \leq \mu_1 \leq \ldots \leq \lambda_n \leq \mu_n$.

Soit (h_i) une base orthonormale de réduction de h avec $h(h_i) = \lambda_i h_i$, ainsi que $H_i = \mathrm{vect}(h_1, \ldots, h_i)$, et de même pour u : f_i, F_i.

Pour $x \in F_k \cap H_{k-1}^{\perp}$, $\lambda_k\|x\|^2 + (x|x_0)^2 \leq (h(x)|x) + (x|x_0)^2 = (u(x)|x) \leq \mu_k\|x\|^2$.
Pour $x \in F_k^{\perp} \cap H_{k+1} \cap \mathbb{R}x_0^{\perp}$, $\mu_k\|x\|^2 \leq (u(x)|x) = (h(x)|x) \leq \lambda_{k+1}\|x\|^2$.

---

19. * Résoudre $A^tAA = I_n$ dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

A est inversible avec $A^{-1} = {}^tAA$ (l'inverse à droite suffit) ou $A^{-1} = A^tA$ (inverse à gauche). Donc, A^{-1} est symétrique, et ainsi A l'est, et elle est diagonalisable. Ainsi, $A^3 = I_n$, donc $X^3 - 1$ annule A, et A n'a que 1 comme valeur propre, soit $A = I_n$.

---

20. * Soit E euclidien de dimension $n \geq 1$ et $p \in \mathcal{L}(E)$ un projecteur. Montrer qu'il est orthogonal si, et seulement si, pour tout $x \in E$, $\|p(x)\| \leq \|x\|$.

$\rightarrow$ p est orthogonal : $x = p_F(x) + p_{F^\perp}(x)$ et,

$$\|x\|^2 = \|p_F(x)\|^2 + \|p_{F^\perp}(x)\|^2 \geq \|p_F(x)\|^2.$$

$\rightarrow$ Si, pour tout $x \in E$, $\|p(x)\| \leq \|x\|$ et $p = p_{F,G}$, s'il existe $y \in F$ et $z \in G$, avec $(y|z) \neq 0$, en notant $x_\lambda = y + \lambda z$,

$$\|x\|^2 = \|y\|^2 + \lambda^2\|z\|^2 + 2\lambda(y|z) = \|y\|^2 + \lambda\|z\|^2\left[\frac{2(y|z)}{\|z\|^2} + \lambda\right]$$

donc, si $\lambda \in \left]0, -\dfrac{2(y|z)}{\|z\|^2}\right[$, $\|x_\lambda\| < \|y\| = \|p(x_\lambda)\|$.

---

21. ** Soit A et S dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telles que $A^3 = A^2$ et ${}^tAA = A^tA = S$. Montrer que $S^2 = S$ puis que $A^2 = A$.

La commutation de A et ${}^tA$ fait qu'en général on peut regrouper pour avoir $S^p = {}^tA^pA^p$. Donc, comme $A^3 = A^2$ donc ${}^tA^3 = {}^tA^2$, il vient $S^3 = S^2$.

Par ailleurs, S est symétrique réelle donc diagonalisable, et, comme $X^3 - X^2$ l'annule, ses valeurs propres sont 0 ou 1, donc sa diagonalisabilité fait que $X^2 - X$ l'annule, donc $S^2 = S$.

Mais alors $S = {}^tBB = {}^tAA$ avec $B = A^2$. D'une manière générale, $\ker(M) \subset \ker({}^tMM)$ et, si ${}^tMMX = 0$, il vient ${}^tX{}^tMMX = 0 = \|MX\|^2$ (norme euclidienne canonique), et finalement, $\ker({}^tMM) = \ker(M)$, donc ici $\ker(S) = \ker(A) = \ker(A^2)$. Mais $A^2(A - I_n) = 0$ donc il vient que $A(A - I_n) = 0$, soit $A^2 = A$.

---

22. * Soit $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telle que $M^2 + {}^tM = I_n$.
a) Trouver un polynôme annulateur de M, et montrer que M est diagonalisable.
b) 0 et 1 sont-elles valeurs propres de M ?
c) Montrer que M est symétrique.

---

a) En transposant l'égalité, il vient $[{}^tM]^2 = I_n - M$. Or, ${}^tM = I_n - M^2$, donc $(I_n - M)^2 - I_n + M = 0 = M^4 - 2M^2 + M = 0$.

$$P = X^4 - 2X^2 + X = X(X^3 - 2X + 1) = X(X-1)(X^2 + X - 1),$$

donc M est annulée par un polynôme scindé sur $\mathbb{R}$, aux racines simples (celles de $X^2 - X - 1$ sont $\dfrac{1}{2}(1 \pm \sqrt{5})$) : elle est diagonalisable.

b) Elles pourraient être valeurs propres, mais, comme ${}^tXM^2X + {}^tX{}^tMX = {}^tXX$,
• Si $MX = 0$, ${}^tX{}^tM = 0$ et $M^2X = 0$, donc ${}^tXX = 0$,
• Si $MX = X$, ${}^tX{}^tM = {}^tX$ et $M^2X = X$, donc $2{}^tXX = {}^tXX$, soit encore ${}^tXX = 0$,
et, si X est une colonne réelle, ${}^tXX = \sum_i x_i^2 > 0$ dès que $X \neq 0$, donc ni 0 ni 1 ne sont valeurs propres.

c) M et $M - I_n$ sont inversibles, et, dans $M(M-I_n)(M^2+M-I_n) = 0$, on peut les simplifier en multipliant par leur inverse, d'où il vient $M^2 + M - I_n = 0$. C'est donc que $M^2 + M = I_n$, d'où $M = {}^tM$.

Les matrices M solutions sont donc les ${}^tPDP$, avec P orthogonale et D diagonale ayant p $\dfrac{1}{2}(1+\sqrt{5})$ et $n-p$ $\dfrac{1}{2}(1-\sqrt{5})$ sur la diagonale.

$\boxed{\textbf{23.}}$ * Soit $X \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telle que $\mathrm{Sp}(X\,{}^tX - {}^tXX) \subset \mathbb{R}_+$. Montrer que $X\,{}^tX = {}^tXX$.

$A = X\,{}^tX - {}^tXX$ est symétrique réelle, donc diagonalisable. Dès lors, A est nulle si et seulement si $\mathrm{Sp}(A) = \{0\}$, puisqu'alors, elle est semblable à la matrice nulle. A étant de la forme $XY - YX$, on a $\mathrm{tr}A = 0$. Or, $\mathrm{tr}A = \sum_{\lambda \in \mathrm{Sp}(A)} m_\lambda(A)\lambda$ car χ_A est scindé, donc $\mathrm{tr}A$ est la somme de quantités positives, donc forcément nulles : c'est bien que $\mathrm{Sp}(A) = \{0\}$, donc $A = 0$.

$\boxed{\textbf{24.}}$ * Que dire de $A \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ telle que $A^3 - 2A^2 + 3A = 0$?

A est diagonalisable sur $\mathbb{R}$ et ses valeurs propres sont parmi les racines de $X^3 - 2X^2 + 3X = X(X^2 - 2X + 3)$. Or ce polynôme n'a que 0 comme racine réelle donc A est semblable à la matrice nulle et $A = 0$.

$\boxed{\textbf{25.}}$ * Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telle que $\mathrm{sp}(A + {}^tA) \subset \mathbb{R}_+$. Montrer que $\ker {}^tA = \ker A$.

Notons que $(A(x)|x) = {}^tX{}^tAX = (x|{}^tA(x)) = ({}^tA(x)|x)$.

${}^tA + A$ est symétrique. Soit $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$ une base orthonormale de réduction de ${}^tA + A$, avec $({}^tA + A)(e_i) = \lambda_i e_i$ où $\lambda_i \geq 0$.

Si $x = \sum_i x_i e_i$, alors $(({}^tA + A)(x)|x) = \sum_i \lambda_i x_i^2$. Plus précisément, on suppose que $\lambda_1 = \ldots = \lambda_p = 0$ et $\lambda_i > 0$ ensuite. Si $(A(x)|x) = 0$, alors $(({}^tA + A)(x)|x) = 0$, soit forcément $x_i = 0$ pour $i > p$. Donc, $x = \sum_{i=1}^{p} x_i e_i \in \ker({}^tA + A)$, et, comme $A(x) = 0$, on a ${}^tA(x) = 0$. Si $({}^tA + A)(x) = 0$, on a de même ${}^t({}^tA)(x) = 0$, soit $A(x) = 0$.

$\boxed{\textbf{26.}}$ ** Soit, dans E euclidien, u symétrique tel que tous les coefficients de la matrice de u dans une certaine base orthonormale $\mathcal{B}_0$ soit strictement positifs.

a) Soit α la plus grande valeur propre de u. Montrer que $(u(x)|x) \leq \alpha\|x\|^2$ pour tout x. Pour quels x a-t-on l'égalité ?

b) Si x a pour coordonnées $(x_1, \dots, x_n)$ dans $\mathcal{B}_0$, montrer à l'aide de x' de coordonnées $(|x_1|, \dots, |x_n|)$ que $|(u(x)|x)| \leq \alpha\|x\|^2$.

c) Montrer que $\alpha > 0$ et que pour tout $\lambda \in \mathrm{sp}(u)$, $|\lambda| \leq \alpha$.

d) Montrer que, si $x \in E_\alpha(u)$, alors $x' \in E_\alpha(u)$, puis que $\dim(E_\alpha(u)) = 1$.

---

a) Soit α la plus grande valeur propre de u. Montrer que $(u(x)|x) \leq \alpha\|x\|^2$ pour tout x. Pour quels x a-t-on l'égalité ?

b) Si x a pour coordonnées $(x_1,\ldots,x_n)$ dans $\mathcal{B}_0$, montrer à l'aide de x' de coordonnées $(|x_1|,\ldots,|x_n|)$ que $|(u(x)|x)| \leq \alpha\|x\|^2$.

c) Montrer que $\alpha > 0$ et que pour tout $\lambda \in \mathrm{sp}(u)$, $|\lambda| \leq \alpha$.

d) Montrer que, si $x \in E_\alpha(u)$, alors $x' \in E_\alpha(u)$, puis que $\dim(E_\alpha(u)) = 1$.

---

a) Soit $\mathcal{C} = (\epsilon_1,\ldots,\epsilon_n)$ une base orthonormale de E, propre pour u, avec $u(\epsilon_i) = \lambda_i\epsilon_i$. Alors, si $x = \sum_{i=1}^n X_i\epsilon_i$, la base étant orthonormale,

$$(u(x)|x) = (\sum_{i=1}^n \lambda_i X_i \epsilon_i | \sum_{i=1}^n X_i\epsilon_i) = \sum_{i=1}^n \lambda_i X_i^2 \leq [\max_{1\leq i\leq n} \lambda_i] \sum_{i=1}^n X_i^2 = \lambda\|x\|^2.$$

L'égalité conduit à $\sum_{i=1}^n [\alpha - \lambda_i]X_i^2 = 0$, soit, pour i donné, à $\alpha = \lambda_i$ ou, sinon, à $X_i = 0$, donc l'égalité équivaut à l'appartenance de x à $E_\alpha(u)$.

b) La base $\mathcal{B}_0$ étant orthonormale :

$$\begin{aligned}(u(x)|x) &= (\sum_{i=1}^n x_i \sum_{k=1}^n a_{ik}e_k | \sum_{j=1}^n x_j e_j) \\ &= (\sum_{k=1}^n \sum_{i=1}^n a_{ik}x_i e_k | \sum_{j=1}^n x_j e_j) \\ &= \sum_{i=1}^n a_{ij}x_i x_j.\end{aligned}$$

Donc, si les a_{ij} sont tous positifs pour $i \neq j$:

$$|(u(x)|x)| = |\sum_{i=1}^n a_{ii}x_i^2 + \sum_{i\neq j}^n a_{ij}x_i x_j| \leq \sum_{i=1}^n a_{ii}x_i^2 + \sum_{i\neq j}^n a_{ij}|x_i||x_j| = (u(|x|)||x|).$$

Par a), $(u(|x|)||x|) \leq \alpha\|x\|^2$ donc $|(u(x)|x)| \leq \alpha\|x\|^2$.

c) u n'est pas nul car sa matrice du début ne l'est pas. Or si on avait $(u(x)|x) = 0$ pour tout x, $\lambda_i = (u(\varepsilon_i)|\varepsilon_i) = 0$ donnerait $u = 0$ car u est diagonalisable. Donc il existe x tel que $|(u(x)|x)| > 0$ d'où $\alpha > 0$.

De même, $x = \varepsilon_i$ donne $|\lambda_i| \leq \alpha$.

d) Si $u(x) = \alpha x$, avec $x \neq 0$, on a aussi $|x| \neq 0$, et $\alpha\|x\|^2 = (u(x)|x) \leq (u(|x|)||x|)$. Comme $\|x\|^2 = \||x|\|^2$, on obtient $\alpha\||x|\|^2 = (u(|x|)||x|)$, et donc, par le cas d'égalité de a), $|x|$ est vecteur propre pour α.

De plus, en reprenant la base d'origine, $\sum_{i,j} a_{ij}[|x_i||x_j| - x_i x_j] = 0$ donc, comme somme de termes positifs et avec $a_{ij} > 0$, $x_i x_j = |x_i x_j|$. Fixant $x_{i_0} \neq 0$ on voit donc que $x_i x_{i_0} \geq 0$ donc que les x_i sont tous de même signe. De plus, $u(x) = \alpha x$ donne $\sum_{j=1}^n a_{ij}x_j = \alpha x_i$ pour tout i donc $x_i = 0$ implique que tous les x_j sont nuls. Si $x \neq 0$, toutes ses coordonnées sont > 0 ou sont > 0.

Dès lors, si $\dim(E_\alpha(u)) \geq 2$, on peut trouver dans ce sous-espace deux vecteurs non nuls et orthogonaux, ce qui est contradictoire avec le fait qu'ils ont tous les deux leurs coordonnées de même signe et non nulles.

$\boxed{\textbf{27.}}$ ** Soit $A = (a_{ij}) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, symétrique, de valeurs propres (distinctes ou non) $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$, et de trace nulle. Montrer que $\max(\lambda_1^2, \ldots, \lambda_n^2) \leq \left(1 - \dfrac{1}{n}\right) \displaystyle\sum_{i,j} a_{ij}^2$.

On a facilement $\displaystyle\sum_{i,j} a_{ij}^2 = \mathrm{tr}(A^2) = \sum_i \lambda_i^2$ après diagonalisation. On a aussi $\displaystyle\sum_i \lambda_i = 0$, donc $\lambda_j^2 = \left(\displaystyle\sum_{i \neq j} \lambda_i\right)^2$. Par Cauchy-Schwarz, on obtient

$$\lambda_j^2 \leq (n-1) \sum_{i \neq j} \lambda_i^2 = (n-1) \sum_i \lambda_i^2 - (n-1)\lambda_j^2.$$

C'est bien que $n\lambda_j^2 \leq (n-1) \displaystyle\sum_i \lambda_i^2$.