Devoir d'Optimisation n°4 pour le mardi 28 mai 2019

1. Donner le problème dual du progamme linéaire suivant :

$$\left\{\begin{array}{rcrcrcl} 2x_1 & + & x_2 & - & x_3 & = & z[\max] \\ 5x_1 & - & x_2 & + & x_3 & \leq & 3 \\ 3x_1 & + & 2x_2 & - & x_3 & = & 7 \\ x_1 & - & x_2 & - & 3x_3 & \geq & -1 \\ x_1 & & & & & \leq & 0. \\ & & x_2 & & & \geq & 0. \\ & & & & x_3 & \in & \mathbb{R}. \end{array}\right.$$

2. Résoudre le programme linéaire suivant :

$$\left\{\begin{array}{rcrcrcl} x_1 & + & x_2 & + & 2x_3 & = & z[\max] \\ x_1 & + & x_2 & + & x_3 & \leq & 4 \\ 2x_1 & + & x_2 & + & x_3 & \geq & 2 \\ x_1 & , & x_2 & , & x_3 & \geq & 0. \end{array}\right.$$

3. Une usine fabrique des produits P_1 et P_2, en quantités x_1 et x_2, qui sont vendus respectivement 4 unités monétaires (u.m.) pour 1 kg de P_1, et 8 u.m. pour 1 kg de P_2. On dispose de 48kg d'une ressource R et d'un temps total d'usinage de 24h. La fabrication d'1kg de P_1 nécessite 2kg de R et 3h d'usinage, celle d'1 kg de P_2 nécessite 6kg de R et 1h d'usinage. De plus, la quantité totale de produits fabriqués ne doit pas excéder 10kg.

a) Modéliser ce problème de production. [*On pourra faire un dessin*].

b) Déterminer, par la méthode du simplexe, quelles quantités de chaque produit il faut fabriquer pour obtenir un bénéfice maximal.

c) Écrire le programme dual, en donner les valeurs optimales et compléter le tableau du simplexe optimal pour le programme dual.

d) On reprend le problème initial, mais avec la fonction objectif $z = 4x_1 + p_2x_2$ (p_2 au lieu de 8). Déterminer les valeurs de p_2 pour lesquelles les valeurs des variables pour l'optimum restent inchangées. Faire ensuite l'étude complète pour $p_2 \in]0, +\infty[$ et donner une représentation graphique de z en fonction de p_2.

e) On revient à la fonction objectif initiale mais maintenant on remplace la contrainte de production maximale par $x_1 + x_2 \leq q$ (q au lieu de 10). Déterminer les valeurs de q pour lesquelles les valeurs des variables pour l'optimum restent inchangées.

$\boxed{\textbf{4.}}$ Soit le problème en nombres entiers :

$$\left\{\begin{array}{ccccc} -x_1 & + & 2x_2 & = & z[\max] \\ -4x_1 & + & 6x_2 & \leq & 9 \\ x_1 & + & x_2 & \leq & 4 \\ x_1 & , & x_2 & \in & \mathbb{N} \end{array}\right.$$

Donner, pour ce problème, un arbre de résolution par Séparation et Évaluation. Pour chaque noeud de l'arbre, identifier clairement le sous-problème associé ainsi que la solution de ce sous-problème (une résolution graphique est suffisante).