Couples aléatoires discrets

1. ($*$) On lance 2 dés. On appelle X la v.a.r. égale au résultat du premier dé et Y la v.a.r. égale à la valeur maximale obtenue.
Déterminer la loi du couple (X,Y) et en déduire la loi de Y.

$(X,Y)(\Omega) = \{(x,y)\ ;\ y \geq x\ ;\ x,y \in [\![1,6]\!]\}$. Si Z désigne le résultat du deuxième dé, on a :

$$P([(X,Y)=(x,y)]) = \begin{cases} P([X=x]\cap[Z=y]) & \text{si } y>x \\ P([X=x]\cap[Z\leq x]) & \text{si } y=x \end{cases}.$$

Comme X et Z sont indépendantes, on a :

$$\boxed{\begin{cases} P([(X,Y)=(x,y)]) = P([X=x])P([Z=y]) = \frac{1}{36} \text{ si } y>x \\ P([(X,Y)=(x,x)]) = P([X=x])P([Z\leq x]) = \frac{x}{36} \end{cases}}.$$

$P([Y=y]) = \sum\limits_{x} P([(X,Y)=(x,y)]) = \sum\limits_{x<y} \frac{1}{36} + \frac{y}{36} = \frac{2y-1}{36}$ pour $y>1$ (encore valable pour $y=1$ car $P([Y=1]) = P([X=1]\cap[Z=1]) = \frac{1}{36}$.)

On a donc $\boxed{Y(\Omega) = [\![1,6]\!] \text{ et } P([Y=y]) = \frac{2y-1}{36}}$.

---

2. ($**$) On lance 2 dés. Soit T la somme des points obtenus, X le reste de la division de T par 2 et Y le reste de la division de T par 5.

1. Donner la loi conjointe de (X,Y).
2. Donner les lois marginales de X et de Y.
3. Les v.a.r. X et Y sont-elles indépendantes?

On a $T(\Omega) = [\![2,12]\!]$, $X(\Omega) = \{0,1\}$ et $Y(Omega) = [\![0,4]\!]$. On note $p_{x,y} = P([X=x]\cap[Y=y])$. On a :

- pour $T=2$, $X=0$ et $Y=2$, avec $P([T=2]) = \frac{1}{36}$
- pour $T=3$, $X=1$ et $Y=3$, avec $P([T=3]) = \frac{2}{36}$
- pour $T=4$, $X=0$ et $Y=4$, avec $P([T=4]) = \frac{3}{36}$
- pour $T=5$, $X=1$ et $Y=0$, avec $P([T=5]) = \frac{4}{36}$
- pour $T=6$, $X=0$ et $Y=1$, avec $P([T=6]) = \frac{5}{36}$
- pour $T=7$, $X=1$ et $Y=2$, avec $P([T=7]) = \frac{6}{36}$
- pour $T=8$, $X=0$ et $Y=3$, avec $P([T=8]) = \frac{5}{36}$
- pour $T=9$, $X=1$ et $Y=4$, avec $P([T=9]) = \frac{4}{36}$
- pour $T=10$, $X=0$ et $Y=0$, avec $P([T=10]) = \frac{3}{36}$
- pour $T=11$, $X=1$ et $Y=1$, avec $P([T=11]) = \frac{2}{36}$
- pour $T=12$, $X=0$ et $Y=2$, avec $P([T=12]) = \frac{1}{36}$.

Ainsi, $\boxed{\begin{array}{lllll} p_{0,0}=\frac{3}{36} & p_{0,1}=\frac{5}{36} & p_{0,2}=\frac{2}{36} & p_{0,3}=\frac{5}{36} & p_{0,4}=\frac{3}{36} \\ p_{1,0}=\frac{4}{36} & p_{1,1}=\frac{2}{36} & p_{1,2}=\frac{6}{36} & p_{1,3}=\frac{2}{36} & p_{1,4}=\frac{4}{36} \end{array}}$.

2. $X(\Omega)=\{0,1\}$ avec $P([X=0])=\sum_{y=0}^{4} p_{0,y}=\frac{1}{2}$ et $P([X=1])=\sum_{y=0}^{4} p_{1,y}=\frac{1}{2}$.

$Y(\Omega)=[\![0,4]\!]$ avec $P([Y=0])=\frac{7}{36}$, $P([Y=1])=\frac{7}{36}$, $P([Y=2])=\frac{8}{36}$, $P([Y=3])=\frac{7}{36}$ et $P([Y=4])=\frac{7}{36}$.

3. $P([X=0]\cap[Y=0])=p_{0,0}=\frac{3}{36}$ alors que $P([X=0])P([Y=0])=\frac{1}{2}\times\frac{7}{36}\neq\frac{3}{36}$: les variables aléatoires X et Y ne sont donc pas indépendantes.

---

3. $(**)$ On considère n boîtes numérotées de 1 à n. La boîte k contient k boules numérotées de 1 à k. On choisit au hasard une boîte, puis une boule dans cette boîte. On note X le numéro de la boîte et Y le numéro de la boule.

1. Déterminer la loi du couple (X,Y), la loi de Y et $\mathbb{E}(Y)$.
2. Calculer $P([X=Y])$.

$X(\Omega)=[\![1,n]\!]$, $Y(\Omega)=[\![1,n]\!]$, avec $Y\leq X$.

$$P([X,Y)=(i,j)])=P([X=i]\cap[Y=i])=P([X=i])P([Y=j]/[X=i]).$$

Or $P([X=i])=\frac{1}{n}$ (boîte choisie au hasard) et $P([Y=j]/[X=i])=\frac{1}{i}$ si $j\leq i$, 0 sinon donc $\boxed{p_{ij}=\begin{cases}\frac{1}{in} & \text{pour } j\leq i\\ 0 & \text{pour } j>i\end{cases}}$.

<u>Loi de Y</u> : $p_{.j}=\sum_i p_{ij}=\sum_{i=j}^{n}\frac{1}{in}$: $\boxed{P([Y=j])=\frac{1}{n}\sum_{i=j}^{n}\frac{1}{i} \text{ pour } j\in[\![1,n]\!]}$.

$$\begin{aligned}\mathbb{E}(Y) &= \sum_{j=1}^{n} jP([Y=j])=\frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n}\sum_{i=j}^{n}\frac{j}{i}=\frac{1}{n}\sum_{1\leq j\leq i\leq n}\frac{j}{i}\\ &= \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{i}\frac{j}{i}=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\frac{i(i+1)}{2i}=\frac{1}{2n}\sum_{i=1}^{n}(i+1)\\ &= \frac{1}{2n}\left[\frac{n(n+1)}{2}+n\right]\end{aligned}$$

soit $\boxed{\mathbb{E}(Y)=\frac{n+3}{4}}$.

2. $P([X=Y])=\sum_{i=1}^{n}P([X=i]\cap[Y=i])=\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{in}$, soit $\boxed{P([X=Y])=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{i}}$.

---

4. $(**)$ Soit (X,Y) un couple de v.a.r. à valeurs dans $\mathbb{N}^2$ tel que:

$$P([X=j]\cap[Y=k])=\frac{(j+k)\lambda^{j+k}}{e\ j!\ k!}$$

1. Déterminer λ puis trouver les lois de X et de Y. Les v.a.r. X et Y sont-elles indépendantes?

2. Calculer $\mathbb{E}(2^{X+Y})$.

---

1. $p_{jk} = P([X=j]\cap[Y=k]) = \frac{(j+k)\lambda^{j+k}}{e\, j!\, k!} = \frac{1}{e}\left(\frac{j\lambda^{j+k}}{j!k!} + \frac{k\lambda^{j+k}}{j!k!}\right)$.

$$\begin{aligned} p_{j.} &= \sum_{k=0}^{+\infty} p_{jk} = \frac{1}{e}\frac{j\lambda^j}{j!}\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{\lambda^k}{k!} + \frac{1}{e}\frac{\lambda^j}{j!}\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{k\lambda^k}{k!} \\ &= e^{\lambda-1}\frac{j\lambda^j}{j!} + \frac{1}{e}\frac{\lambda^j}{j!}\sum_{k=1}^{+\infty}\frac{\lambda^k}{(k-1)!} = e^{\lambda-1}\frac{j\lambda^j}{j!} + \frac{1}{e}\frac{\lambda^j}{j!}\lambda e^{\lambda} \end{aligned}$$

soit $\boxed{P([X=j]) = e^{\lambda-1}(j+\lambda)\frac{\lambda^j}{j!} \text{ pour } j\in\mathbb{N}}$.
Comme j et k jouent le même rôle, les v.a. X et Y ont même loi.

On doit avoir $\sum\limits_{j=0}^{+\infty} p_{j.} = 1$. Or

$$\sum_{j=0}^{+\infty} p_{j.} = e^{\lambda-1}\left(\sum_{j=0}^{+\infty}\frac{j\lambda^j}{j!} + \lambda\sum_{j=0}^{+\infty}\frac{\lambda^j}{j!}\right) = e^{\lambda-1}\left(\sum_{j=1}^{+\infty}\frac{\lambda^j}{(j-1)!} + \lambda e^{\lambda}\right) = 2\lambda e^{2\lambda-1}.$$

On doit donc avoir $2\lambda e^{2\lambda} = e$, soit $g(2\lambda)=0$ avec $g : x\mapsto xe^x - e$. $g'(x) = e^x(x+1)$ donc g est strictement croissante sur $\mathbb{R}_+$, avec $g(1)=0$. C'est donc que $2\lambda = 1$, soit $\boxed{\lambda = \frac{1}{2}}$ et $\boxed{P([X=j]) = P([Y=j]) = e^{-\frac{1}{2}}\frac{\left(j+\frac{1}{2}\right)}{2^j\, j!} \text{ pour } j\in\mathbb{N}}$.

$p_{00} = 0$ alors que $p_{0.} = p_{.0} = \frac{1}{2}e^{-\frac{1}{2}} \neq 0$. Donc $p_{0.}p_{.0} \neq p_{00}$: X et Y ne sont pas indépendantes.

2. $\mathbb{E}\left[2^{X+Y}\right] = \sum\limits_{j=0}^{+\infty}\sum\limits_{k=0}^{+\infty} 2^{j+k}\frac{(j+k)\lambda^{j+k}}{ej!k!} = \sum\limits_{j=0}^{+\infty}\sum\limits_{k=0}^{+\infty}\frac{(j+k)(2\lambda)^{j+k}}{ej!k!} = 2(2\lambda)e^{2(2\lambda)-1}$ obtenu en remplaçant λ par 2λ dans le calcul du 1. Avec $\lambda = \frac{1}{2}$, on a alors $\boxed{\mathbb{E}\left[2^{X+Y}\right] = 2e}$.

---

5. $(*)$ Soient X et Y deux v.a.r. indépendantes vérifiant, pour tout $n\in\mathbb{N}$:

$$P([X=n]) = P([Y=n]) = \frac{1+a^n}{4(n!)}$$

1. Déterminer a, calculer $\mathbb{E}(X)$ et $\mathrm{var}(X)$.
2. Déterminer la loi de $S = X+Y$.

---

1. $G_X(s) = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} s^n P([X=n]) = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} s^n\frac{1+a^n}{4(n!)} = \frac{1}{4}\left[\sum\limits_{n=0}^{+\infty}\frac{s^n}{n!} + \sum\limits_{n=0}^{+\infty}\frac{(as)^n}{n!}\right] = \frac{1}{4}(e^s + e^{as})$.

On doit avoir $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} P([X=n]) = 1$, soit $G_X(1) = 1$. Or $G_X(1) = \frac{1}{4}(e+e^a)$, donc $e + e^a = 4$ et $\boxed{a = \ln(4-e)}$.

$G'_X(s) = \frac{1}{4}(e^s + ae^{as})$ donc $\mathbb{E}(X) = G'_X(1) = \frac{1}{4}(e + ae^a)$ et $G''_X(s) = \frac{1}{4}(e^s + a^2e^{as})$ donc

$$\begin{aligned}\mathrm{var}(X) &= G''_X(1) + G'_X(1) - G'_X(1)^2 = \frac{1}{4}\left(2e + a^2e^a + ae^a - \frac{1}{4}(e^2 + 2ae^{a+1} + a^2e^{2a})\right)\\ &= \frac{1}{16}\left[8e - e^2 + ae^a(4-2e) + a^2e^a(4-e^a)\right]\end{aligned}$$

donc, avec $a = \ln(4-e)$, $\boxed{\mathbb{E}(X) = \frac{1}{4}(e + (4-e)\ln(4-e))}$ et

$$\boxed{\mathrm{var}(X) = \frac{1}{16}\left[e(8-e) + (4-e)(4-2e)\ln(4-e) + e(4-e)\ln^2(4-e)\right].}$$

2. $P([S=n]) = \sum\limits_{k=0}^{n} P([X=k]\cap[Y=n-k]) = \sum\limits_{k=0}^{n} P([X=k])P([Y=n-k])$ par indépendance de X et de Y. On a donc

$$P([S=n]) = \frac{1}{16}\sum_{k=0}^{n}\frac{(1+a^k)(1+a^{n-k})}{k!(n-k)!} = \frac{1}{16n!}\sum_{k=0}^{n} C_n^k(1 + a^k + a^{n-k} + a^n)$$

avec $\sum\limits_{k=0}^{n} C_n^k = 2^n$ et $\sum\limits_{k=0}^{n} C_n^k a^k = \sum\limits_{k=0}^{n} C_n^k a^{n-k} = (a+1)^n$.

On a donc $P([S=n]) = \frac{1}{16n!}[2^n(1+a^n) + 2(a+1)^n]$, soit

$$\boxed{P([S=n]) = \frac{1}{16n!}\left[2^n\left(1 + (\ln(4-e))^n\right) + 2(\ln(4-e)+1)^n\right]}.$$

---

6. $(*)$ On pose, pour tout $(m,n)\in\mathbb{N}^2$, $p_{n,m} = \frac{e^{-1}}{2^{m+1}\,n!}$.

1. Montrer que l'on peut définir ainsi la loi d'un couple (X,Y).
2. Déterminer les lois marginales. Les v.a.r. X et Y sont-elles indépendantes?
3. Calculer l'espérance et la variance de X et de Y.

---

1. $p_{n.} = \sum\limits_m p_{nm} = \frac{1}{en!}\sum\limits_{m=0}^{+\infty}\frac{1}{2^{m+1}} = \frac{1}{2en!}\frac{1}{1-\frac{1}{2}} = \frac{1}{en!} = e^{-1}\frac{1}{n!}$ et

$$\sum_n p_{n.} = e^{-1}\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{1}{n!} = e^{-1}e = 1$$

donc (p_{nm}) définit bien la loi de probabilité d'un vecteur (X,Y).

2. $P([X=n]) = p_{n.} = e^{-1}\frac{1}{n!}$ donc $\boxed{X \text{ suit la loi de Poisson } \mathcal{P}(1)}$.

$p_{.m} = \sum\limits_n p_{nm} = \frac{e^{-1}}{2^{m+1}}\sum\limits_{n=0}^{+\infty}\frac{1}{n!} = \frac{1}{2}\frac{1}{2^m}$ donc $P([Y=m]) = \frac{1}{2}\frac{1}{2^m}$ et

$$\boxed{Y \text{ suit la loi géométrique } \mathcal{G}_0\left(\tfrac{1}{2}\right)}.$$

$p_{nm} = \frac{e^{-1}}{n!}\frac{1}{2^{m+1}} = p_{n.}p_{.m}$: les v.a.r. X et Y sont donc indépendantes.

3. Pour Z de loi $\mathcal{G}_0(p)$, on a $\mathbb{E}(Z) = \frac{q}{p}$ et $\text{var}(Z) = \frac{q}{p^2}$ donc $\boxed{\mathbb{E}(Y) = 1,\ \text{var}(Y) = 2}$, et pour Z de loi $\mathcal{P}(\lambda)$, on sait que $\mathbb{E}(Z) = \text{var}(Z) = \lambda$ donc $\boxed{\mathbb{E}(X) = \text{var}(X) = 1}$.

---

7. (∗) On pose, pour tout $(m, n) \in \mathbb{N}^{*2}$, $p_{n,m} = \frac{1}{2^{n-1}\,3^m}$.

1. Montrer que $(p_{n,m})_{(n,m)\in\mathbb{N}^{*2}}$ définit une probabilité Π.
2. Déterminer les lois marginales d'un couple (X, Y) de v.a.r. admettant Π comme probabilité.
3. Identifier la loi de X (resp. la loi de Y) et donner la valeur de $\mathbb{E}(X)$ et de $V(X)$. (resp. de $\mathbb{E}(Y)$ et de $V(Y)$).

---

1. $p_{n.} = \sum_m p_{nm} = \frac{1}{2^{n-1}}\frac{1}{3}\sum_{m=1}^{+\infty}\frac{1}{3^{m-1}} = \frac{1}{2^{n-1}}\frac{1}{3}\frac{1}{1-\frac{1}{3}} = \frac{1}{2}\frac{1}{2^{n-1}}$ et $\sum_n p_{n.} = \frac{1}{2}\frac{1}{1-\frac{1}{2}} = 1$ donc (p_{nm}) définit bien une probabilité π.

2. $p_{n.} = \frac{1}{2}\frac{1}{2^{n-1}}$ donc X suit la loi géométrique $\mathcal{G}\left(\frac{1}{2}\right)$.
$p_{.m} = \sum_n p_{nm} = \frac{1}{3^m}\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{2^{n-1}} = \frac{1}{3^m}\frac{1}{1-\frac{1}{2}} = \frac{2}{3}\left(\frac{1}{3}\right)^{m-1}$ donc Y suit la loi géométrique $\mathcal{G}\left(\frac{2}{3}\right)$.
Pour Z de loi $\mathcal{G}(p)$, on sait que $\mathbb{E}(Z) = \frac{1}{p}$ et $\text{var}(Z) = \frac{q}{p^2}$ donc $\boxed{\mathbb{E}(X) = \text{var}(X) = 2}$, $\boxed{\mathbb{E}(Y) = \frac{3}{2},\ \text{var}(Y) = \frac{3}{4}}$.

---

8. (∗∗) Soient X et Y deux v.a.r. indépendantes de lois respectives binomiales $\mathcal{B}(n, 1/2)$ et $\mathcal{B}(m, 1/2)$. Calculer $P([X = Y])$.

On suppose par exemple $n \le m$.
$P([X = Y]) = \sum_{k=0}^{n} P([X = k] \cap [Y = k]) = \sum_{k=0}^{n} P([X = k])P([Y = k])$ car X et Y sont indépendantes. Or $P([X = k]) = C_n^k\frac{1}{2^n}$ et $P([Y = k]) = C_m^k\frac{1}{2^m}$ puis, en posant $k = n - i$ (ou $i = n - k$) :

$$P([X = Y]) = \frac{1}{2^{m+n}}\sum_{i=0}^{n} C_n^{n-i}C_m^{n-i} = \frac{1}{2^{m+n}}\sum_{i=0}^{n} C_n^{i}C_m^{n-i} = \frac{1}{2^{m+n}}C_{m+n}^{n}$$

d'après l'exercice 1 du chapitre 2. Donc $\boxed{P([X = Y]) = \frac{1}{2^{m+n}}C_{m+n}^{n}}$.

---

9. (∗∗) Soient X et Y deux v.a.r. indépendantes de même loi géométrique $\mathcal{G}(p)$.

1. Déterminer la loi de $Z = X/Y$.
2. Calculer $\mathbb{E}(Z)$ et montrer que $\mathbb{E}(Z) > 1$.

---

1. $Z = \frac{X}{Y}$ donc $Z(\Omega) = \mathbb{Q}_+^*$ et, si $r \in \mathbb{Q}_+^*$, on peut écrire $r = \frac{s}{t}$ avec s et t premiers entre eux. On a alors :

$$\begin{aligned} P([Z = r]) &= \sum_{m=1}^{+\infty} P([X = ms] \cap [Y = mt]) = \sum_{m=1}^{+\infty} P([X = ms])P([Y = mt]) \\ &= \sum_{m=1}^{+\infty} pq^{ms-1}pq^{mt-1} = \frac{p^2}{q^2} \sum_{m=1}^{+\infty} q^{m(s+t)} = \frac{p^2 q^{s+t-2}}{1 - q^{s+t}} \end{aligned}$$

2. $\mathbb{E}(Z) = \mathbb{E}\left(\frac{X}{Y}\right) = \mathbb{E}\left(X \times \frac{1}{Y}\right) = \mathbb{E}(X) \times \mathbb{E}\left(\frac{1}{Y}\right)$ car X et Y sont indépendantes.
Or $\mathbb{E}(X) = \frac{1}{p}$ et $\mathbb{E}\left(\frac{1}{Y}\right) = \sum\limits_{m=1}^{+\infty} \frac{1}{m} pq^{m-1} = \frac{p}{q} \sum\limits_{m=1}^{+\infty} \frac{q^m}{m} = -\frac{p}{q}\ln(1-q) = -\frac{p \ln p}{1-p}$.
On a donc finalement $\boxed{\mathbb{E}(Z) = -\frac{\ln p}{1-p}}$.
A-t-on $-\ln p > 1-p$, c'est-à-dire $1-p+\ln p < 0$? Si $\Phi(p) = 1-p+\ln p$, $\Phi'(p) = -1+\frac{1}{p} > 0$ car $p \in]0,1[$. Donc Φ est strictement croissante sur $]0,1[$, avec $\Phi(1) = 0$, d'où $\Phi(p) < 0$ pour $p \in]0,1[$ et $\boxed{\mathbb{E}(Z) > 1}$.

---

10. (∗∗) Une urne contient n boules noires indiscernables et 2 boules rouges numérotées 1 et 2. L'expérience consiste à tirer $n+2$ fois une boule sans remise. On note:
N_1 la v.a.r. égale au rang de tirage de la première boule rouge;
N_2 la v.a.r. égale au rang de tirage de la deuxième boule rouge;
R_1 la v.a.r. égale au rang de tirage de la boule rouge numéro 1;
R_2 la v.a.r. égale au rang de tirage de la boule rouge numéro 2.

1. Trouver la loi du couple (R_1, R_2). En déduire les lois des v.a.r. R_1 et R_2.
2. Trouver la loi du couple (N_1, N_2). En déduire les lois des v.a.r. N_1 et $N_2 - N_1$, puis les espérances $\mathbb{E}(N_1)$ et $\mathbb{E}(N_2)$.

---

1. On s'intéresse au rang des 2 boules rouges, non identiques, puisque numérotées. Pour la 1, il y a $n+2$ rangs possibles, et pour la 2, il n'en reste que $n+1$. Comme tous les tirages sont équiprobables, il vient alors $\boxed{P([(R_1, R_2) = (i,j)]) = \frac{1}{(n+2)(n+1)} \text{ pour } i \neq j}$.
On a alors $P([R_1 = i]) = \sum\limits_{j \neq i} P([(R_1, R_2) = (i,j)]) = \frac{1}{n+2}$ et comme i et j jouent le même rôle, $\boxed{R_1 \text{ et } R_2 \text{ ont pour loi l'équiprobabilité sur } [\![1, n+2]\!]}$.

2. $P([(N_1, N_2) = (i,j)]) = P([(R_1, R_2) = (i,j)]) + P([(R_1, R_2) = (j,i)])$ pour $i < j$ et donc

$$\boxed{P([(N_1, N_2) = (i,j)]) = \frac{2}{(n+2)(n+1)} \text{ pour } i < j}.$$

On a alors $P([N_1 = i]) = \sum\limits_{j} P([(N_1, N_2) = (i,j)]) = \sum\limits_{j=i+1}^{n+2} \frac{2}{(n+2)(n+1)}$ pour $i \leq n+1$, soit

$$\boxed{N_1(\Omega) = [\![1, n+1]\!] \text{ et } P([N_1 = i]) = \frac{2(n+2-i)}{(n+2)(n+1)} \text{ pour } i \in [\![1, n+1]\!]}.$$

On a $N_2 - N_1(\Omega) = [\![1, n+1]\!]$ (écart le plus petit lorsque les 2 boules se suivent et le plus grand si l'une est la première et l'autre la dernière). On a de plus,

$$\begin{aligned} P([N_2 - N_1 = k]) &= \sum_{i=1}^{n+2-k} P([N_1 = i] \cap [N_2 - N_1 = k]) \\ &= \sum_{i=1}^{n+2-k} P([N_1 = i] \cap [N_2 = k+i]) = \frac{2(n+2-k)}{(n+2)(n+1)} \end{aligned}$$

donc $\boxed{N_2 - N_1 \text{ a même loi que } N_1}$.

$$\mathbb{E}(N_1) = \sum_{i=1}^{n+1} \frac{2i(n+2-i)}{(n+2)(n+1)} = \frac{2}{n+1} \sum_{i=1}^{n+1} i - \frac{2}{(n+2)(n+1)} \sum_{i=1}^{n+1} i^2$$

avec $\sum_{i=1}^{n+1} i = \frac{(n+1)(n+2)}{2}$ et $\sum_{i=1}^{n+1} i^2 = \frac{(n+1)(n+2)(2n+3)}{6}$ donc $\mathbb{E}(N_1) = n + 2 - \frac{2n+3}{3} = \frac{n+3}{3}$, et $\mathbb{E}(N_2 - N_1) = \mathbb{E}(N_1) = \mathbb{E}(N_2) - \mathbb{E}(N_1)$, soit $\mathbb{E}(2N_2) = 2\mathbb{E}(N_1)$.

Ainsi, $\boxed{\mathbb{E}(N_1) = \frac{1}{3}(n+3) \text{ et } \mathbb{E}(N_2) = \frac{2}{3}(n+3)}$.

---

11. $(*)$ Soient X et Y deux v.a.r. indépendantes. Trouver la loi conditionnelle de X sachant $X + Y = k$ dans les deux cas suivants:

1. X suit la loi binomiale $\mathcal{B}(n, p)$ et Y suit la loi binomiale $\mathcal{B}(m, p)$;
2. X suit la loi de Poisson $\mathcal{P}(\lambda)$ et Y suit la loi de Poisson $\mathcal{P}(\mu)$.

$$\begin{aligned} P([X = i]/[S = k]) &= \frac{P([X = i] \cap [S = k])}{P([S = k])} = \frac{P([X = i] \cap [Y = k - i])}{P([S = k])} \\ &= \frac{P([X = i])P([Y = k - i])}{P([S = k])}. \end{aligned}$$

en utilisant l'indépendance de X et de Y.

1. D'après le cours, si X et Y sont indépendantes, de lois respectives $\mathcal{B}(n, p)$ et $\mathcal{B}(m, p)$, alors $X + Y$ suit la loi binomiale $\mathcal{B}(n + m, p)$. On a alors, si $i \leq n$ et $k - i \leq m$:

$$P([X = i]/[S = k]) = \frac{C_n^i p^i (1-p)^{n-i} C_m^{k-i} p^{k-i} (1-p)^{m-k+i}}{C_{n+m}^k p^k (1-p)^{n+m-k}} = \frac{C_n^i C_m^{k-i}}{C_{n+m}^k}.$$

La loi conditionnelle de X sachant $[S = k]$ est donc la loi hypergéométrique $\mathcal{H}(n+m, k, n)$, c'est-à-dire :

$$\boxed{P([X = i]/[S = k]) = \frac{C_n^i C_m^{k-i}}{C_{n+m}^k} \text{ pour } i \in [\![\max(0, k-m), \min(n, k)]\!]}.$$

2. D'après le cours, si X et Y sont indépendantes, de lois respectives $\mathcal{P}(\lambda)$ et $\mathcal{P}(\mu)$, alors $X+Y$ suit la loi de Poisson $\mathcal{P}(\lambda+\mu)$. On a alors, si $i \leq k$:

$$P([X=i]/[S=k]) = \frac{e^{-\lambda}\frac{\lambda^i}{i!}e^{-\mu}\frac{\mu^{k-i}}{(k-i)!}}{e^{-(\lambda+\mu)}\frac{(\lambda+\mu)^k}{k!}} = C_k^i \frac{\lambda^i \mu^{k-i}}{(\lambda+\mu)^k} = C_k^i \left(\frac{\lambda}{\lambda+\mu}\right)^i \left(\frac{\mu}{\lambda+\mu}\right)^{k-i}.$$

La loi conditionnelle de X sachant $[S=k]$ est donc la loi binomiale $\mathcal{B}\left(k, \frac{\lambda}{\lambda+\mu}\right)$, c'est-à-dire :

$$\boxed{P([X=i]/[S=k]) = C_k^i \frac{\lambda^i \mu^{k-i}}{(\lambda+\mu)^k} \text{ pour } i \in [\![0,k]\!]}.$$

---

12. $(**)$ Soit X une v.a.r. de loi binomiale $\mathcal{B}(n,p)$ et Y une v.a.r. à valeurs dans $\mathbb{N}$ telle que la loi conditionnelle de Y sachant $[X=k]$ est la loi binomiale $\mathcal{B}(k,p')$.
Déterminer la loi de Y.

Pour $i \in [\![0,k]\!]$, $P([Y=i]/[X=k]) = C_k^i p'^i (1-p')^{k-i} = \dfrac{P([X=k]\cap[Y=i])}{P([X=k])}$ donc

$$P([X=k]\cap[Y=i]) = C_k^i p'^i (1-p')^{k-i} P([X=k]) = C_k^i p'^i (1-p')^{k-i} C_n^k p^k (1-p)^{n-k}$$

pour $0 \leq i \leq k \leq n$.

$$\begin{aligned}
P([Y=i]) &= \sum_{k=i}^{n} P([X=k]\cap[Y=i]) = \sum_{k=i}^{n} C_k^i C_n^k p'^i (1-p')^{k-i} p^k (1-p)^{n-k} \\
&= \sum_{k=i}^{n} \frac{n!}{k!(n-k)!}\frac{k!}{i!(k-i)!} p'^i (1-p')^{k-i} p^k (1-p)^{n-k} \\
&\underset{m=k-i}{=} \sum_{m=0}^{n-i} \frac{n!}{(n-m-i)!i!m!} p'^i (1-p')^m p^{m+i} (1-p)^{n-m-i} \\
&= C_n^i (pp')^i \sum_{m=0}^{n-i} C_{n-i}^m (p(1-p'))^m (1-p)^{n-m-i} \\
&= C_n^i (pp')^i [p(1-p')+1-p]^{n-i} = C_n^i (pp')^i (1-pp')^{n-i}
\end{aligned}$$

$P([Y=i]) = C_n^i (pp')^i (1-pp')^{n-i}$ pour $i \in [\![0,n]\!]$ donc $\boxed{Y \text{ suit la loi binomiale } \mathcal{B}(n,pp')}$.

---

13. $(**)$ Soient X et Y deux v.a.r. à valeurs dans $\mathbb{N}$ telles que la loi conditionnelle de X sachant $[Y=n]$ est l'équiprobabilité sur $[\![0,n]\!]$.

1. Exprimer la loi du couple (X,Y) en fonction de la loi de Y ;
2. Montrer que $P([X \leq Y]) = 1$.
3. Soit $a \in]0,1[$. On suppose que $P([Y=n]) = (1-a)^2\ (n+1)\ a^n$. Déterminer la loi de X, puis celle de $Y-X$.

1. $P([X=k]\cap[Y=n]) = P([X=k]/[Y=n])P([Y=n])$ avec :

$$P([X=k]/[Y=n]) = \begin{cases} \frac{1}{n+1} \text{ pour } k\in\{0,\cdots,n+1\} \\ 0 \text{ sinon.}\end{cases}.$$

On a donc $\boxed{P([X=k]\cap[Y=n]) = \frac{P([Y=n])}{n+1} \text{ si } 0\le k\le n \text{ et } 0 \text{ sinon}}$.

2. $P([X\le Y]) = \sum_{k\le n} P([X=k]\cap[Y=n]) = \sum_{n=0}^{+\infty}\sum_{k=0}^{n} P([X=k]\cap[Y=n])$. Or, d'après (a), on a $\sum_{k=0}^{n} P([X=k]\cap[Y=n]) = P([Y=n])$ donc $P([X\le Y]) = \sum_{n=0}^{+\infty} P([Y=n]) = 1$.

3. $P([X=k]) = \sum_{n} P([X=k]\cap[Y=n]) = \sum_{n=k}^{+\infty} \frac{P([Y=n])}{n+1} = (1-a)^2 \sum_{n=k}^{+\infty} a^n = (1-a)^2 \frac{a^k}{1-a}$, soit $P([X=k]) = (1-a)a^k$: $\boxed{X \text{ suit donc la loi } \mathcal{G}_0(1-a)}$.

$$\begin{aligned} P([Y-X=j]) &= \sum_{k=0}^{+\infty} P([X=k]\cap[Y-X=j]) = \sum_{k=0}^{+\infty} P([X=k]\cap[Y=k+j]) \\ &= \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{P([Y=k+j])}{k+j+1} = (1-a)^2 a^j \sum_{k=0}^{+\infty} a^k = (1-a)a^j \end{aligned}$$

Ainsi $\boxed{Y-X \text{ suit, comme } X, \text{ la loi } \mathcal{G}_0(1-a)}$.

---

14. (**) Soit $(a,b,c)\in]0,1[^3$ vérifiant $a+b+c=1$ et soit $(\alpha,\beta)\in]0,1[^2$ vérifiant $\alpha+\beta=1$.
On pose $p_{0,0} = \alpha+\beta a$ et pour $(n,m)\neq(0,0)$, $p_{n,m} = \beta a\, C_{n+m}^{n}\, b^n\, c^m$.

1. Vérifier que $(p_{n,m})_{(n,m)\in\mathbb{N}^2}$ définit la loi de probabilité d'un couple (X,Y).
2. Déterminer les lois marginales de X et de Y, les espérances et variances de X et de Y.
3. Déterminer la loi conditionnelle de Y sachant $[X=0]$, puis sachant $[X=n]$.

---

1. $p_{0.} = p_{00} + \sum_{m=1}^{+\infty} p_{0m} = \alpha+\beta a + \beta a \sum_{m=1}^{+\infty} c^m = \alpha + \beta a \sum_{m=0}^{+\infty} c^m = \alpha + \frac{\beta a}{1-c}$;

$$p_{n.} = \sum_{m=0}^{+\infty} p_{nm} = \beta a b^n \sum_{m=0}^{+\infty} C_{n+m}^{n} c^m = \frac{\beta a b^n}{n!} \sum_{m=0}^{+\infty} (m+1)\cdots(n+m)c^m$$

avec $\sum_{m=0}^{+\infty} (m+1)\cdots(n+m)x^m = \left[\sum_{k=0}^{+\infty} x^k\right]^{(n)} = \left[\frac{1}{1-x}\right]^{(n)} = \frac{n!}{(1-x)^{n+1}}$ donc,

$$\text{si } n\neq 0,\quad p_{n.} = \frac{\beta a b^n}{(1-c)^{n+1}}.$$

$$\begin{aligned}
p_{0.} + \sum_{n=1}^{+\infty} p_{n.} &= \alpha + \frac{\beta a}{1-c} + \frac{\beta a}{1-c} \sum_{n=1}^{+\infty} \left(\frac{b}{1-c}\right)^n \\
&= \alpha + \frac{\beta a}{1-c} \sum_{n=0}^{+\infty} \left(\frac{b}{1-c}\right)^n = \alpha + \frac{\beta a}{1-c} \frac{1}{1-\frac{b}{1-c}} \\
&= \alpha + \frac{\beta a}{1-b-c} = \alpha + \beta = 1
\end{aligned}$$

donc (p_{nm}) définit bien la loi de probabilité d'un vecteur (X, Y) avec :

$$\boxed{P([X=0]) = \alpha + \frac{\beta a}{a+b} \text{ et } P([X=n]) = \frac{\beta a b^n}{(a+b)^{n+1}} \text{ pour } n \in \mathbb{N}^*}$$

2. X suit donc la loi $\alpha\delta_0 + \beta\mathcal{G}_0\left(\frac{a}{a+b}\right)$ et Y suit la loi $\alpha\delta_0 + \beta\mathcal{G}_0\left(\frac{a}{a+c}\right)$, obtenue en échangeant les rôles de b et c.

On sait que, si X_0 a pour loi δ_0 et si X_1 a pour loi $\mathcal{G}_0\left(\frac{a}{a+b}\right)$, alors

$$\mathbb{E}(X^k) = \alpha\mathbb{E}(X_0^k) + \beta\mathbb{E}(X_1^k)$$

donc $\mathbb{E}(X) = \alpha \times 0 + \beta\frac{b}{a} = \frac{\beta b}{a}$ et $\mathbb{E}(X^2) = \alpha \times 0 + \beta\left[\frac{b(a+b)}{a^2} + \frac{b^2}{a^2}\right] = \beta\left[\frac{b}{a} + 2\frac{b^2}{a^2}\right]$, puis $\text{var}(X) = \beta\left[\frac{b}{a} + 2\frac{b^2}{a^2}\right] - \frac{\beta^2 b^2}{a^2}$, d'où $\boxed{\mathbb{E}(X) = \frac{\beta b}{a} \text{ et } \text{var}(X) = \frac{\beta b}{a}\left[1 + (2-\beta)\frac{b}{a}\right]}$.

De même, $\boxed{\mathbb{E}(Y) = \frac{\beta c}{a} \text{ et } \text{var}(Y) = \frac{\beta c}{a}\left[1 + (2-\beta)\frac{c}{a}\right]}$.

3. $P([Y=m]/[X=0]) = \frac{P([Y=m]\cap[X=0])}{P([X=0])} = \frac{p_{0m}}{p_{0.}}$ où $p_{0.} = \alpha + \frac{\beta a}{a+b} = \frac{a+\alpha b}{a+b}$. Ainsi,

$$\boxed{P([Y=m]/[X=0]) = \frac{(a+b)(\alpha+\beta a)}{a+\alpha b} \text{ et } P([Y=m]/[X=0]) = \frac{\beta a(a+b)c^m}{a+\alpha b} \text{ pour } m \in \mathbb{N}^*}.$$

D'autre part, $P([Y=m]/[X=n]) = \frac{p_{nm}}{p_{n.}} = \frac{\beta a C_{n+m}^n b^n c^m}{\frac{\beta a}{a+b}\left(\frac{b}{a+b}\right)^n}$, soit, pour tout $m \in \mathbb{N}$, $\boxed{P([Y=m]/[X=n]) = C_{n+m}^n (a+b)^{n+1}(1-a-b)^m}$: c'est la loi binomiale négative $\mathcal{BN}(n+1, a+b)$.

---

15. $(*)$ Soient X et Y deux v.a.r. indépendantes de même loi de Bernoulli $\mathcal{B}(p)$.

1. Quelle est la loi de $X+Y$? de $X-Y$?
2. Les v.a.r. $X+Y$ et $X-Y$ peuvent-elles être indépendantes?

---

1. $X+Y(\Omega) = \{0,1,2\}$ et, comme X et Y sont indépendantes,

$$\left\{\begin{array}{l}
P([X+Y=0]) = P([X=0])P([Y=0]) = q^2 \\
P([X+Y=1]) = P([X=1])P([Y=0]) + P([X=0])P([Y=1]) = 2pq \\
P([X+Y=2]) = P([X=1])P([Y=1]) = p^2
\end{array}\right. .$$

De même, $X-Y(\Omega)=\{-1,0,1\}$ et :

$$\left\{\begin{array}{l} P([X-Y=-1])=P([X=0])P([Y=1])=pq \\ P([X-Y=0])=P([X=1])P([Y=1])+P([X=0])P([Y=0])=p^2+q^2 \\ P([X-Y=1])=P([X=1])P([Y=0])=pq \end{array}\right. .$$

2. $P([X+Y=0]\cap[X-Y=1])=P([X=\frac{1}{2}]\cap[Y=-\frac{1}{2}])=0$ alors que $P([X+Y=0])=q^2\neq 0$ et $P([X-Y=1])=pq\neq 0$ si $p\in]0,1[$. Donc, si $p\in]0,1[$, $X-Y$ et $X+Y$ ne peuvent pas être indépendantes.

---

16. ($*$) Soient X et Y deux v.a.r. de loi de Bernoulli.
Montrer que $\text{cov}(X,Y)=0$ si et seulement si X et Y sont indépendantes.

Si X est de loi de Bernoulli $\mathcal{B}(p)$ et Y de loi de Bernoulli $\mathcal{B}(p')$, alors XY suit la loi de Bernoulli de paramètre $P([X=1]\cap[Y=1])$.
$\mathbb{E}(X)=P([X=1])=p$, $\mathbb{E}(Y)=P([Y=1])=p'$ et

$$\text{cov}(X,Y)=\mathbb{E}(XY)-\mathbb{E}(X)\mathbb{E}(Y)=P([X=1]\cap[Y=1])-P([X=1])P([Y=1]).$$

Si X et Y sont indépendantes, alors $\text{cov}(X,Y)=0$.
Si $\text{cov}(X,Y)=0$, alors $P([X=1]\cap[Y=1])=P([X=1])P([Y=1])$. D'autre part,

$$\begin{aligned} P([X=1]\cap[Y=0]) &= P([X=1])-P([X=1]\cap[Y=1]) \\ &= P([X=1])-P([X=1])P([Y=1]) \\ &= P([X=1])(1-P([Y=0]))=P([X=1])P([Y=0]). \end{aligned}$$

De même, X et Y jouant le même rôle, $P([X=0]\cap[Y=1])=P([X=0])P([Y=1])$ et

$$\begin{aligned} P([X=0]\cap[Y=0]) &= P([X=0])-P([X=0]\cap[Y=1]) \\ &= P([X=0])-P([X=0])P([Y=1]) \\ &= P([X=0])(1-P([Y=1]))=P([X=0])P([Y=0]). \end{aligned}$$

donc si $\text{cov}(X,Y)=0$, les v.a.r. de Bernoulli X et Y sont indépendantes.

---

17. ($**$) Soient X et Y deux v.a.r. d'ordre 2. On pose $S=X+Y$ et $D=X-Y$.

1. Montrer que si S et D sont indépendantes, alors $\text{var}(S)=\text{var}(D)$.
2. On suppose que X et Y sont indépendantes de même loi, l'équiprobabilité sur $[\![1,3]\!]$.
   (a) Montrer que $\text{var}(X)=\text{var}(Y)$.
   (b) Déterminer les lois de S et D. Les v.a.r. S et D sont-elles indépendantes?

---

1. Si S et D sont indépendantes, $\mathbb{E}(SD)=\mathbb{E}(S)\mathbb{E}(D)$. Or $SD=X^2-Y^2$ et alors $\mathbb{E}(SD)=\mathbb{E}(X^2)-\mathbb{E}(Y^2)$ et

$$\mathbb{E}(S)\mathbb{E}(D)=[\mathbb{E}(X)+\mathbb{E}(Y)][\mathbb{E}(X)-\mathbb{E}(Y)]=\mathbb{E}(X)^2-\mathbb{E}(Y)^2$$

donc $\boxed{\text{var}(X) = \text{var}(Y)}$.

2. Par définition de l'équiprobabilité, $P([X = 1]) = P([X = 2]) = P([X = 3]) = \frac{1}{3}$ et $P([Y = 1]) = P([Y = 2]) = P([Y = 3]) = \frac{1}{3}$.

(a) $\text{var}(X) = \text{var}(Y)$ car X et Y ont même loi.

(b) $S(\Omega) = [\![2, 6]\!]$ et $P([S = 2]) = p_{11} = \frac{1}{9}$, $P([S = 6]) = p_{33} = \frac{1}{9}$,

$$P([S = 3] = p_{12} + p_{21} = \frac{2}{9},\ P([S = 5]) = p_{23} + p_{32} = \frac{2}{9},$$

et $P([S = 4]) = p_{13} + p_{22} + p_{31} = \frac{3}{9}$. De même,
$D(\Omega) = [\![-2, 2]\!]$ et $P([D = 2]) = p_{31} = \frac{1}{9}$, $P([D = -2]) = p_{13} = \frac{1}{9}$,

$$P([D = 1] = p_{21} + p_{32} = \frac{2}{9},\ P([D = -1]) = p_{12} + p_{23} = \frac{2}{9},$$

et $P([D = 0]) = p_{11} + p_{22} + p_{33} = \frac{3}{9}$.
$P([S = 4] \cap [D = 1]) = P([X = 5/2] \cap [Y = 3/2]) = 0 \neq P([S = 4])P([D = 1])$: S et D ne sont pas indépendantes.

---

18. ($***$) Soient X_0, X_1,..., X_{2n-1}, $2n$ v.a.r. indépendantes de même loi de Bernoulli $\mathcal{B}(1/2)$.
On pose, pour $0 \leq m \leq n-1$, $Y_m = X_{2m} + X_{2m+1}$ et pour $k = 0, 1, 2$, on désigne par N_k le nombre de v.a.r. Y_m égales à k.

1. Déterminer la loi de N_0.
2. Déterminer la loi du couple (N_0, N_2).

---

1. N_0 nombre de v.a.r. Y_m égales à 0. $N_0(\Omega) = [\![0, n]\!]$.

$$[Y_m = 0] = [X_{2m} = 0] \cap [X_{2m+1} = 0]$$

$$P([Y_m = 0]) = \frac{1}{4},\quad P([Y_m = 2]) = \frac{1}{4},\quad P([Y_m = 1]) = \frac{1}{2}.$$

$P([N_0 = k]) = C_n^k \left(\frac{1}{4}\right)^k \left(\frac{3}{4}\right)^{n-k}$: $\boxed{N_0 \text{ suit la loi binomiale } \mathcal{B}\left(n, \frac{1}{4}\right)}$.

2. $P([N_0 = i] \cap [N_2 = j]) = C_n^i C_{n-i}^j \left(\frac{1}{4}\right)^i \left(\frac{1}{4}\right)^j \left(\frac{1}{2}\right)^{n-i-j}$ pour $i + j \leq n$, c'est-à-dire

$$\boxed{P([N_0 = i] \cap [N_2 = j]) = \frac{n!}{i!j!(n-i-j)!} \left(\frac{1}{4}\right)^{i+j} \left(\frac{1}{2}\right)^{n-i-j} \text{ pour } i + j \leq n.}$$

---

19. ($***$) Soit (X_n) une suite de v.a.r. indépendantes de même loi de Bernoulli $\mathcal{B}(p)$ et soit $Y_n = X_n\, X_{n+1}$. On pose $S_n = \sum_{i=1}^{n} X_i$ et $T_n = \sum_{i=1}^{n} Y_i$.
Calculer $\mathbb{E}(S_n)$, $\mathbb{E}(T_n)$, $\text{var}(S_n)$, $\text{var}(T_n)$ et $\text{cov}(S_n, T_n)$.

$\mathbb{E}(S_n) = \sum\limits_{i=1}^{n} \mathbb{E}(X_i) = np$, $\mathbb{E}(T_n) = \sum\limits_{i=1}^{n} \mathbb{E}(Y_i)$ avec $\mathbb{E}(Y_i) = \mathbb{E}(X_i)\mathbb{E}(X_{i+1}) = p^2$ donc $\boxed{\mathbb{E}(T_n) = np^2 \text{ et } \mathbb{E}(S_n) = np}$.

$\text{var}(S_n) = \sum_{i=1}^{n} \text{var}(X_i)$ car les X_i sont indépendantes, donc $\boxed{\text{var}(S_n) = np(1-p)}$.

$$\mathbb{E}(T_n^2) = \mathbb{E}\left(\sum_{i=1}^{n} Y_i^2 + \sum_{i \neq j} Y_i Y_j\right) = \sum_{i=1}^{n} \mathbb{E}(Y_i^2) + 2\sum_{i<j} \mathbb{E}(Y_i Y_j)$$

$$\mathbb{E}(Y_i^2) = \mathbb{E}(X_i^2 X_{i+1}^2) = \mathbb{E}(X_i^2)^2 = p^2$$

$$\mathbb{E}(Y_i Y_{i+1}) = \mathbb{E}(X_i X_{i+1}^2 X_{i+2}) = p^3 \text{ pour } i \in [\![1, n-1]\!]$$

$$\mathbb{E}(Y_i Y_j) = \mathbb{E}(X_i X_{i+1} X_j X_{j+1}) = p^4 \text{ pour } j > i+1.$$

Puis $\mathbb{E}(T_n^2) = np^2 + 2(n-1)p^3 + (n^2 - n - 2(n-1))p^4$ et

$$\text{var}(T_n) = \mathbb{E}(T_n^2) - \mathbb{E}(T_n)^2 = np^2 + 2(n-1)p^3 + (n^2 - 3n + 2)p^4 - n^2p^4,$$

soit $\boxed{\text{var}(T_n) = np^2 + 2(n-1)p^3 + (2-3n)p^4}$.

$\text{cov}(S_n, T_n) = \sum_{i=1}^{n} \text{cov}(X_i, T_n) = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} \text{cov}(X_i, X_j X_{j+1})$. Comme les X_i sont indépendantes, $\text{cov}(X_i, X_j X_{j+1}) = 0$ si $i \notin \{j, j+1\}$.

$$\begin{aligned} \text{cov}(X_j, X_j X_{j+1}) &= \mathbb{E}(X_j^2 X_{j+1}) - \mathbb{E}(X_j)\mathbb{E}(X_j X_{j+1}) \\ &= \mathbb{E}(X_j^2)\mathbb{E}(X_{j+1}) - \mathbb{E}(X_j)^2\mathbb{E}(X_{j+1}) = p^2 - p^3. \end{aligned}$$

De même,

$$\begin{aligned} \text{cov}(X_{j+1}, X_j X_{j+1}) &= \mathbb{E}(X_{j+1}^2 X_j) - \mathbb{E}(X_{j+1})\mathbb{E}(X_j X_{j+1}) \\ &= \mathbb{E}(X_j)\mathbb{E}(X_{j+1}^2) - \mathbb{E}(X_j)\mathbb{E}(X_{j+1})^2 = p^2 - p^3 \end{aligned}$$

donc $\text{cov}(S_n, T_n) = \sum_{j=1}^{n} [\text{cov}(X_j, X_j X_{j+1}) + \text{cov}(X_{j+1}, X_j X_{j+1})] = 2np^2(1-p)$.

---

20. (∗∗) Soit (X_n) une suite de v.a.r. indépendantes qui vérifient $P([X_n = -1]) = P([X_n = 1]) = 1/2$. On définit une suite (Y_n) par $Y_1 = X_1$ et $Y_n = \alpha Y_{n-1} + X_n$.

1. Exprimer Y_n en fonction de X_1, X_2,..., X_n.
2. Calculer $\mathbb{E}(Y_n)$, $V(Y_n)$ puis $\text{cov}(Y_n, Y_{n+m})$.

---

1. $Y_1 = X_1$, $Y_2 = \alpha Y_1 + X_2 = X_2 + \alpha X_1$, $Y_3 = X_3 + \alpha X_2 + \alpha^2 X_1$. On peut montrer facilement par récurrence que $\boxed{Y_n = X_n + \alpha X_{n-1} + \alpha^2 X_{n-2} + \cdots \alpha^{n-1} X_1 = \sum_{k=0}^{n-1} \alpha^k X_{n-k}}$.

2. On utilise l'indépendance des X_k. $\mathbb{E}(X_k) = 0$, $\text{var}(X_k) = 1$. L'espérance étant linéaire, on a donc $\mathbb{E}(Y) = \sum_{k=0}^{n-1} \alpha^k \mathbb{E}(X_{n-k}) = 0$. De plus, les X_k étant indépendantes,

$$\text{var}(Y_n) = \text{var}\left(\sum_{k=0}^{n-1} \alpha^k X_{n-k}\right) = \sum_{k=0}^{n-1} \alpha^{2k} \text{var}(X_{n-k}) = \sum_{k=0}^{n-1} \alpha^{2k} = \frac{1 - \alpha^{2n}}{1 - \alpha^2}.$$

On a donc $\boxed{\mathbb{E}(Y) = 0 \text{ et } \mathrm{var}(Y) = \frac{1-\alpha^{2n}}{1-\alpha^2}}$.

On peut également écrire $Y_n = \sum\limits_{i=1}^{n} \alpha^{n-i} X_i$ et, en utilisant $\mathrm{cov}(X_i, X_j) = 0$ si $i \neq j$,

$$\begin{aligned}
\mathrm{cov}(Y_n, Y_{n+m}) &= \mathrm{cov}\left(\sum_{i=1}^{n} \alpha^{n-i} X_i, \sum_{j=1}^{n+m} \alpha^{n+m-j} X_j\right) \\
&= \sum_{i=1}^{n} \alpha^{n-i} \alpha^{n+m-i} \mathrm{var}(X_i) = \sum_{i=1}^{n} \alpha^{2n+m-2i} \\
&= \alpha^m \sum_{i=1}^{n} \alpha^{2(n-i)} \underset{k=n-i}{=} \alpha^m \sum_{k=0}^{n-1} \alpha^{2k}
\end{aligned}$$

et donc $\boxed{\mathrm{cov}(Y_n, Y_{n+m}) = \alpha^m \frac{1-\alpha^{2n}}{1-\alpha^2}}$.

---

21. $(*)$ Soit X une v.a.r. suivant la loi de Bernoulli $\mathcal{B}(p)$ et Y une v.a.r. suivant la loi de Poisson $\mathcal{P}(\lambda)$. On suppose les v.a.r. X et Y indépendantes et on pose $Z = XY$.

1. Calculer $\mathbb{E}(Z)$.
2. Déterminer la loi de Z, puis calculer sa variance.

---

1. $\mathbb{E}(Z) = \mathbb{E}(XY) = \mathbb{E}(X)\mathbb{E}(Y)$ car X et Y sont indépendantes, donc $\boxed{\mathbb{E}(Z) = p\lambda}$.

2. $P([Z = k]) = P([X = 1] \cap [Y = k]) = P([X = 1])P([Y = k]) = pe^{-\lambda} \frac{\lambda^k}{k!}$ pour $k \in \mathbb{N}^*$ et $P([Z = 0]) = P([X = 0] \cup [Y = 0]) = P([X = 0]) + P([Y = 0]) - P([X = 0] \cap [Y = 0])$, soit $P([Z = 0] = 1 - p + pe^{-\lambda}$.

$\mathbb{E}(Z^2) = \mathbb{E}(X^2)\mathbb{E}(Y^2) = p(\mathrm{var}(Y) + \mathbb{E}(Y)^2) = p(\lambda + \lambda^2)$ donc $\boxed{\mathrm{var}(Z) = p\lambda(1 + \lambda - \lambda p)}$.

---

22. $(***)$ Soient X_1, X_2,..., X_n, n v.a.r. discrètes indépendantes de même loi, à valeurs dans $[\![1, k]\!]$. On pose, pour tout $j \in [\![1, k]\!]$, $p_j = P([X_i = j])$.
Soit X la v.a.r. égale au nombre de v.a.r. X_i telles que $X_i = 1$ et Y la v.a.r. égale au nombre de v.a.r. X_i telles que $X_i = 2$.
Calculer le coefficient de corrélation $\rho(X, Y)$.

X suit la loi binomiale $\mathcal{B}(n, p_1)$ car $X = \sum\limits_{i=1}^{n} \mathbb{1}_{[X_i=1]}$ et Y suit la loi binomiale $\mathcal{B}(n, p_2)$ car $Y = \sum\limits_{j=1}^{n} \mathbb{1}_{[X_j=2]}$. On a donc $\mathbb{E}(X) = np_1$, $\mathbb{E}(Y) = np_2$, $\mathrm{var}(X) = np_1(1 - p_1)$ et $\mathrm{var}(Y) = np_2(1 - p_2)$.

$$P([X = i] \cap [Y = j]) = C_n^i C_{n-i}^j p_1^i p_2^j (1 - p_1 - p_2)^{n-i-j}.$$

$$\mathbb{E}(XY) = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} \mathbb{E}(\mathbb{1}_{[X_i=1]} \mathbb{1}_{[X_j=2]}) = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} P([X_i = 1] \cap [X_j = 2]).$$

Or $P([X_i = 1] \cap [X_j = 2]) = p_1p_2$ si $i \neq j$, donc $\mathbb{E}(XY) = p_1p_2(n^2 - n)$ et $\text{cov}(X,Y) = -np_1p_2$, donc $\boxed{\rho_{X,Y} = -\sqrt{\dfrac{p_1p_2}{(1-p_1)(1-p_2)}}}$.

---

23. (**) Soient X et Y deux v.a.r. discrètes telles que $\mathbb{E}(X) = \mathbb{E}(Y) = m$; $V(X) = \sigma_1^2$; $V(Y) = \sigma_2^2$; $\text{cov}(X,Y) = \mu$ et $V(X-Y) \neq 0$. On pose $Z = aX + bY$.
Déterminer a et b pour que $\mathbb{E}(Z) = m$ et $V(Z)$ soit maximale.

$\mathbb{E}(Z) = a\mathbb{E}(X) + b = (a+b)m$, donc nécessairement $a + b = 1$.

$$\begin{aligned}
\text{var}(Z) &= a^2\text{var}(X) + (1-a)^2\text{var}(Y) + 2a(1-a)\text{cov}(X,Y) \\
&= a^2\sigma_1^2 + (1 - 2a + a^2)\sigma_2^2 + (2a - 2a^2)\mu \\
&= a^2(\sigma_1^2 + \sigma_2^2 - 2\mu) + 2a(\mu - \sigma_2) + \sigma_2^2 = f(a)
\end{aligned}$$

$f'(a) = 2a(\sigma_1^2 + \sigma_2^2 - 2\mu) + 2(\mu - \sigma_2^2)$ et

$$\text{var}(X - Y) = \text{var}(X) + \text{var}(Y) - 2\text{cov}(X,Y) = \sigma_1^2 + \sigma_2^2 - 2\mu \neq 0$$

donc $f'(a) = 0$ pour $a_0 = \frac{\sigma_2^2 - \mu}{\sigma_1^2 + \sigma_2^2 - 2\mu}$, $f'(a) > 0$ pour $a < a_0$ et $f'(a) < 0$ pour $a > a_0$. Donc $\text{var}(Z)$ est minimale pour $\boxed{a = \dfrac{\text{var}(Y) - \text{cov}(X,Y)}{\text{var}(X) + \text{var}(Y) - 2\text{cov}(X,Y)} \text{ et } b = 1 - a}$.

---

24. (**) On considère 3 urnes contenant chacune n boules numérotées de 1 à n. On tire une boule dans chaque urne. Les v.a.r. X, Y et Z représentent les 3 numéros tirés.

1. Calculer $P([Z = X + Y])$.
2. Déterminer $\text{cov}(X,Y)$.

---

1. $P([Z = X + Y]) = \sum_{i,j;i+j \leq n} P([X = i] \cap [Y = j] \cap [Z = i + j]) = \frac{1}{n^3} \times \text{card}(A)$ où $A = \{(i,j) \in [\![1,n]\!]^2,\ i + j \leq n\} = \bigcup_{k=2}^{n} A_k$ où $A_k = \{(i,j) \in [\![1,n]\!]^2,\ i + j = k\}$. On a $\text{card}A_k = k - 1$ donc $\text{card}(A) = 1 + 2 + \cdots + (n-1) = \frac{n(n-1)}{2}$ et $\boxed{P([Z = X + Y]) = \frac{n-1}{2n^2}}$.

2. $\text{cov}(X,Y) = 0$ car X et Y sont indépendantes.

---

25. (**) Soient X et Y deux v.a.r. indépendantes à valeurs dans $\mathbb{N}$, X suivant la loi géométrique $\mathcal{G}(p)$.
Soit Z la v.a.r. telle que $Z = X - Y$ si $X > Y$ et $Z = 0$ sinon.
Exprimer la loi de Z en fonction de celle de Y et montrer qu'elle ne dépend que de $\alpha = \mathbb{E}((1-p)^Y)$.

$Z(\Omega) = \mathbb{N}$. Si $k > 0$,

$$P([Z = k]) = P([X - Y = k]) = \sum_{n=0}^{+\infty} P([Y = n] \cap [X = k + n]) = \sum_{n=0}^{+\infty} P([Y = n])pq^{k+n-1}$$

d'où $P([Z=k]) = pq^{k-1} \sum\limits_{n=0}^{+\infty} q^n P([Y=n])$ et

$$\sum_{n=0}^{+\infty} q^n P([Y=n]) = G_Y(q) = \mathbb{E}(q^Y) = \mathbb{E}((1-p)^Y) = \alpha$$

donc $\boxed{P([Y=k]) = \alpha p q^{k-1} \text{ pour } k \geq 1 \text{ et } P([Y=0]) = 1 - \sum\limits_{k=1}^{+\infty} P([Y=k]) = 1-\alpha}$.

---

26. $(**)$ Soient X et Y deux v.a.r. indépendantes, X suivant la loi géométrique $\mathcal{G}(p)$ et Y suivant la loi de Poisson $\mathcal{P}(\lambda)$. Soit Z la v.a.r. telle que $Z=0$ si $X=0$ et $Z=Y$ si $X=1$.
Calculer la loi de Z, $g_Z(t)$, $\mathbb{E}(Z)$, $V(Z)$ et $P([X=1]/[Z=0])$.

$Z(\Omega) = \mathbb{N}$ et

$$P([Z=n]) = P([Z=n]/[X=0])P([X=0]) + P([Z=n]/[X=1])P([X=1])$$

avec $P([Z=n]/[X=0]) = P([0=n]/[X=0]) = 1$ si $n=0$ et 0 si $n \neq 0$, et
$P([Z=n]/[X=1]) = P([Y=n]/[X=1]) = P([Y=n])$ car X et Y sont indépendantes
donc $\boxed{P([Z=0]) = 1-p+pe^{-\lambda} \text{ et pour } n \geq 1,\ P([Z=n]) = pe^{-\lambda}\, \frac{\lambda^n}{n!}}$.

$g_Z(t) = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} t^n P([Z=n]) = 1-p+pe^{-\lambda} + \sum\limits_{n=1}^{+\infty} pe^{-\lambda}\, \frac{(\lambda t)^n}{n!}$ soit $\boxed{g_Z(t) = 1-p+pe^{-\lambda}e^{\lambda t}}$.
On en déduit $g'_Z(t) = pe^{-\lambda}\lambda e^{\lambda t}$, $g''_Z(t) = pe^{-\lambda}\lambda^2 e^{\lambda t}$, puis $g'_Z(1) = p\lambda$ et $g''_Z(1) = p\lambda^2$.
Finalement, comme $\mathbb{E}(Z) = g'_Z(1)$ et $\text{var}(Z) = g''_Z(1) + g'_Z(1) - g'^2_Z(1)$, on obtient :

$$\boxed{\mathbb{E}(Z) = p\lambda \text{ et } \text{var}(Z) = p\lambda[1+\lambda(1-p)].}$$

$P([X=1]/[Z=0]) = \frac{P([X=1]\cap[Z=0])}{P([Z=0])} = \frac{P([Z=0]/[X=1])P([X=1])}{P([Z=0])}$, soit

$$\boxed{P([X=1]/[Z=0]) = \frac{pe^{-\lambda}}{1-p+pe^{-\lambda}}.}$$

---

27. $(**)$ Soient X_1 et X_2 deux v.a.r. indépendantes de même loi telles que, pour $k \in \mathbb{N}$, $P([X_1=k]) = P([X_2=k]) = \frac{1}{2^{k+1}}$.
Déterminer, à l'aide de la fonction de répartition, la loi de $X = \max(X_1, X_2)$ et calculer $\mathbb{E}(X)$.

$$\begin{aligned} P([X \leq n]) &= P([\max(X_1,X_2) \leq n]) = P([X_1 \leq n] \cap [X_2 \leq n]) \\ &= P([X_1 \leq n])P([X_2 \leq n]) \end{aligned}$$

car X_1 et X_2 sont indépendantes. Or $P([X_i \leq n]) = \frac{1}{2}\sum\limits_{k=0}^{n} \frac{1}{2^k} = \frac{1}{2}\frac{1-\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}}{1-\frac{1}{2}} = 1 - \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}$.

Ainsi, $P([X \leq n]) = \left(1 - \frac{1}{2^{n+1}}\right)^2$. On a donc $P([X=0]) = \frac{1}{4}$ et, pour $n \geq 1$,

$$\begin{aligned} P([X=n]) &= P([X \leq n]) - P([X \leq n-1]) = \left(1 - \frac{1}{2^{n+1}}\right)^2 - \left(1 - \frac{1}{2^n}\right)^2 \\ &= 1 + \frac{1}{2^{2n+2}} - \frac{1}{2^n} - 1 - \frac{1}{2^{2n}} + \frac{1}{2^{n-1}} = -\frac{3}{2^{2n+2}} + \frac{1}{2^n} \end{aligned}$$

Ainsi, $\boxed{\text{pour tout } n \in \mathbb{N},\ P([X=n]) = \frac{1}{2^n} - \frac{3}{4}\frac{1}{4^n}}$.

$G_X(s) = \frac{1}{1-\frac{s}{2}} - \frac{3}{4}\frac{1}{1-\frac{s}{4}} = \frac{2}{2-s} - \frac{3}{4-s}$.

On en déduit $G'_X(s) = \frac{2}{(2-s)^2} - \frac{3}{(4-s)^2}$ et $G'_X(1) = 2 - \frac{1}{3}$, soit $\boxed{\mathbb{E}(X) = \frac{5}{3}}$.

---

28. (∗∗) Soit X une v.a.r. suivant la loi géométrique $\mathcal{G}(p)$ et soit $n \in \mathbb{N}$.

1. Déterminer les lois suivies par les v.a.r. $Y = \max(n, X)$ et $Z = \min(n, X)$.
2. Soit T une v.a.r. indépendante de X suivant aussi la loi géométrique $\mathcal{G}(p)$. Déterminer les lois suivies par $X+T$, $\max(X,T)$ et $\min(X,T)$.

---

1. $Y(\Omega) = \{k \in \mathbb{N}\ ;\ k \geq n\}$. Pour $k > n$, $P([Y=k]) = P([X=k]) = pq^{k-1}$ et $P([Y=n]) = P([X \leq n]) = p(1+q+\cdots+q^{n-1}) = 1-q^n$.
De même, $Z(\Omega) = \{1,\cdots,n\}$. Pour $k \in \{1,\cdots,n-1\}$, $P([Z=k]) = P([X=k]) = pq^{k-1}$ et $P([Z=n]) = P([X \geq n]) = 1 - P([X \leq n-1]) = q^{n-1}$.

2. $X+T(\Omega) = \mathbb{N}\backslash\{0,1\}$ et $P([X+T=n]) = \sum_{k=1}^{n-1} P([X=k]\cap[T=n-k]) = p^2 \sum_{k=1}^{n-1} q^{n-2}$ soit $\boxed{P([X+T=n]) = (n-1)p^2q^{n-2} \text{ pour } n \geq 2}$.

$P([\max(X,T) \leq n]) = P([X \leq n] \cap [T \leq n]) = P([X \leq n])P([T \leq n]) = (1-q^n)^2$ d'après 1. et d'après l'indépendance de X et T.
$P([\max(X,T)=n]) = P([\max(X,T) \leq n]) - P([\max(X,T) \leq n-1])$ pour $n \geq 2$ (et aussi pour $n=1$ car $P([\max(X,T)=1]) = P([\max(X,T) \leq 1])$ et $P([\max(X,T) \leq 0]) = 0$). On a donc

$$\boxed{P([\max(X,T)=n]) = (1-q^n)^2 - (1-q^{n-1})^2 = q^{2n} - q^{2(n-1)} + 2pq^{n-1} \text{ si } k \in \mathbb{N}^*}.$$

De même, $P([\min(X,T) \geq n]) = P([X \geq n] \cap [T \geq n]) = P([X \geq n])P([T \geq n]) = q^{2n-2}$ d'après 1. et d'après l'indépendance de X et T.
$P([\min(X,T)=n]) = P([\min(X,T) \geq n]) - P([\max(X,T) \geq n+1]) = q^{2n-2} - q^{2n}$, soit $P([\min(X,T)=n]) = (1-q^2)(q^2)^{n-1}$ pour $n \in \mathbb{N}^*$:

$$\boxed{\min(X,T) \text{ suit la loi géométrique } \mathcal{G}(1-q^2)}.$$

---

29. (∗∗) Soient X et Y deux v.a.r. indépendantes de même loi, à valeurs dans $\mathbb{N}$.

1. On suppose que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $P([X=n]) = P([Y=n]) = pq^n$ où $p \in]0,1[$ et $q = 1-p$. Montrer qu'alors les v.a.r. $V = \inf(X,Y)$ et $W = X-Y$ sont indépendantes.
2. Réciproquement, on suppose que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $P(X=n) \neq 0$ et que les v.a.r. $V = \inf(X,Y)$ et $W = X-Y$ sont indépendantes. Déterminer les lois de X et de Y en fonction de $r = \frac{P([W=1])}{P([W=0])}$.
(*on calculera de deux façons différentes le rapport* $\frac{P([X=n+1]\cap[Y=n])}{P([X=n]\cap[Y=n])}$ *pour* $n \in \mathbb{N}$).

---

1. $V = \min(X,Y)$, $W = X-Y$, donc $V(\Omega) = \mathbb{N}$ et $W(\Omega) = \mathbb{Z}$.

$$\begin{aligned} P([V=n]\cap[W=m]) &= P([\min(X,Y)=n]\cap[X-Y=m]) \\ &= \left\{\begin{array}{l} P([X=n]\cap[Y=n-m]) = p^2q^{2n-m} \text{ si } m \leq 0 \\ P([Y=n]\cap[X=n+m]) = p^2q^{2n+m} \text{ si } m \geq 0 \end{array}\right. . \end{aligned}$$

On a donc, $\boxed{\text{pour } n \in \mathbb{N} \text{ et } m \in \mathbb{Z},\ P([W=n]) = p^2 q^{2n+|m|}}$.

• $P([V=n]) = \sum\limits_{m\in\mathbb{Z}} P([V=n]\cap[W=m]) = p^2 q^{2n}\left(2\sum\limits_{m=0}^{+\infty} q^m - 1\right) = p^2 q^{2n}\left(2\frac{1}{1-q} - 1\right)$ avec $p^2\left(2\frac{1}{1-q}-1\right) = p(1+q) = 1-q^2$. On a donc, pour $n\in\mathbb{N}$, $P([V=n]) = (1-q^2)q^{2n}$: $\boxed{V \text{ suit la loi } \mathcal{G}_0(1-q^2)}$.

• $P([W=m]) = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} P([V=n]\cap[W=m]) = p^2 q^{|m|}\sum\limits_{n=0}^{+\infty} q^{2n} = \frac{p^2}{1-q^2}q^{|m|}$.

On a donc, $\boxed{\text{pour } m\in\mathbb{Z},\ P([W=m]) = \frac{p^2}{1-q^2}q^{|m|}}$.

On a $P([V=n])P([W=m]) = P([V=n]\cap[W=m])$ pour tout $(n,m)\in\mathbb{N}\times\mathbb{Z}$: $\boxed{\text{les variables aléatoires } V \text{ et } W \text{ sont donc indépendantes}}$.

2. $\dfrac{P([X=n+1]\cap[Y=n])}{P([X=n]\cap[Y=n])} = \dfrac{P([X=n+1])}{P([X=n])}$ car X et Y sont indépendantes.

Or $\dfrac{P([X=n+1]\cap[Y=n])}{P([X=n]\cap[Y=n])} = \dfrac{P([V=n]\cap[W=1])}{P([V=n]\cap[W=0])} = \dfrac{P([W=1])}{P([W=0])} = r$ car V et W sont indépendantes et, par suite, $P([X=n+1]) = rP([X=n])$, puis

$$P([X=n]) = r^n P([X=0]).$$

Avec $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} P([X=n]) = \frac{P([X=0])}{1-r} = 1$ on a bien $\boxed{P([X=n]) = (1-r)r^n \text{ pour tout } n\in\mathbb{N}}$.