Année Préparatoire

Examen d'Algèbre Linéaire du mardi 22 mars 2016

3 exercices indépendants (Durée : 2 heures)

Exercice I-

On note $(e_1, \cdots, e_6)$ la base canonique de $\mathbb{R}^6$. Pour k de 1 à 6, on note E_k le sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^6$ engendré par les 5 vecteurs de la base autres que e_k.
On définit les 3 vecteurs suivants par leurs coordonnées dans la base canonique $(e_1, \cdots, e_6)$:

$$a = (8, 0, 0, 5, 0, 3) \qquad b = (4, 4, 4, 1, 0, 3) \qquad c = (1, 7, 4, 1, 3, 0).$$

Soit f l'unique application linéaire de $\mathbb{R}^6$ dans lui-même vérifiant :

$$\begin{cases} f(e_5) = e_1 - e_2 + e_6 \\ f(e_q) = e_q \text{ pour } q = 1, 2, 3, 4, 6 \end{cases}$$

1. a) Représenter la matrice M de f dans la base canonique de $\mathbb{R}^6$.
b) Donner la valeur du déterminant de M.
c) Montrer que le rang de M est inférieur ou égal à 5.
d) Montrer que l'image de f contient tous les vecteurs de E_5.
e) Pour k quelconque entre 1 et 6, quelle est la dimension de E_k ?
f) Montrer que l'image de f est E_5 et que le noyau de f est de dimension 1.

2. Trouver un vecteur u dirigeant le noyau de f, ayant des coordonnées simples.

3. a) Former le polynôme caractéristique de M.
b) Quelles sont les valeurs propres de M ? Quels sont les ordres de multiplicité ?
c) Justifier que les sous-espaces propres de f sont $\ker(f)$ et E_5.
d) Montrer que f est diagonalisable et donner une base de $\mathbb{R}^6$ sur laquelle la matrice de f est diagonale.

4. a) Montrer que l'application linéaire f est le projecteur sur le sous-espace vectoriel E_5 parallèlement à la droite dirigée par u.
b) Ce projecteur est-il un projecteur orthogonal ?
c) Exprimer M^2 en fonction de M.

5. On considère l'équation $f(x) = b$, où le vecteur x est l'inconnue.
a) Montrer que b lui-même est une solution particulière de l'équation.
b) Montrer que la solution générale est le vecteur $x = b + \lambda u$, où le réel λ est arbitraire.
c) Montrer que le vecteur c est la seule solution de l'équation différente de b et dont une coordonnée est nulle, les autres coordonnées étant positives ou nulles.

Exercice II-

Soit A une matrice fixée de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Soit f définie sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ par $f(X) = X - 2\text{tr}(X)A$.

1. a) Montrer que f est linéaire, que $f(A) = 0$ si, et seulement si, $A = 0$ ou $\text{tr}(A) = 1/2$.

On suppose à présent $A \neq 0$.

b) Montrer que, si $\mathrm{tr}(A) \neq 1/2$, $\ker(f)$ est réduit au vecteur nul.

2. Montrer que f est bijective si, et seulement si, $\mathrm{tr}(A) \neq 1/2$.

3. On suppose dans cette question $\mathrm{tr}(A) = 1/2$. On pose $H = \ker(\mathrm{tr})$. Montrer que $\mathcal{M}_n(\mathbb{R}) = H \oplus \mathrm{vect}(A)$ et que f est la projection de H parallèlement à $\mathrm{vect}(A)$.

4. On suppose $\mathrm{tr}(A) = 1$. Montrer que f est une symétrie et déterminer ses sous-espaces propres.

5. Donner une condition nécessaire et suffisante pour diagonaliser f.

Exercice III-

On considère le système $Ax = b$ où $A = \begin{pmatrix} 3 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 0 \\ -1 & 0 & 3 \end{pmatrix}$ et $b = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}$.

1. Résoudre le système $Ax = b$.

2. a) Montrer sans calcul que les méthodes de Jacobi et de Gauss-Siedel sont convergentes.
b) Écrire la matrice J de Jacobi et la matrice G de Gauss-Siedel. Quelle est la méthode qui converge le plus vite ? (on calculera $\rho(J)$ et $\rho(G)$).
c) Donner les 3 premières itérations de Jacobi et de Gauss-Siedel si $x^{(0)} = {}^t(0,0,0)$.

3. Calculer les valeurs propres de A et en déduire qu'elle est définie positive. Donner les valeurs de $w \in \mathbb{R}$ pour lesquelles la méthode de relaxation est convergente.

4. On considère la méthode d'itération $\left\{ \begin{array}{l} x^{(0)} \text{ donné dans } \mathbb{R}^3 \\ x^{(k+1)} = (I_3 - rA)x^{(k)} + rb, \ k \geq 0 \end{array} \right.$.

a) Pour quelles valeurs de r, cet algorithme converge-t-il ? Donner la valeur r^* pour laquelle il converge le plus vite.
b) On prend $x^{(0)} = {}^t(0,0,0)$ et $r = 1/3$. Donner l'expression de $x^{(k)}$. Que vaut $\lim\limits_{k \to +\infty} x^{(k)}$?
c) On prend $x^{(0)} = {}^t(0,0,0)$ et $r = 1/2$. Calculer les 3 premiers termes de $(x^{(k)})_{k \geq 1}$ et en déduire $x^{(k)}$. La suite $(x^{(k)})$ admet-elle une limite ?