Corrigés des exercices du Chapitre 1

$\boxed{1}$ On peut remarquer que l'alliage 5 a la bonne composition ; son coût unitaire est de 7,6. Le mélange, à parts égales, des alliages 6, 7, 8 et 9 donne la composition souhaitée aussi :

- plomb : $\frac{1}{4}(60+40+10+10) = 30\%$
- zinc : $\frac{1}{4}(30+50+30+10) = 30\%$
- étain : $\frac{1}{4}(10+10+60+80) = 40\%$.

Coût unitaire : $\frac{1}{4}(6+5,8+4,3+4,1) = 5,05 < 7,6$.

On va procéder de façon plus systématique pour obtenir le mélange de coût minimal.

On note x_j la partie de l'alliage j dans le mélange recherché ($j = 1, \cdots, 9$),

$$x_j \geq 0, \qquad \sum_{j=1}^{9} x_j = 1.$$

Le coût unitaire du mélange recherché est le minimum de la fonction z, définie par :

$$z(x_1, x_2, \cdots, x_9) = 7,3x_1 + 6,9x_2 + \cdots + 4,1x_9$$

sous les contraintes :

- 30% de plomb : $0,2x_1 + 0,5x_2 + \cdots + 0,1x_9 = 0,3$
- 30% de zinc : $0,3x_1 + 0,4x_2 + \cdots + 0,1x_9 = 0,3$
- 40% d'étain : $0,5x_1 + 0,1x_2 + \cdots + 0,8x_9 = 0,4$.

Le programme linéaire peut ainsi s'écrire :

$$\left\{\begin{array}{ccccccccccccccccccc}
7,3x_1 & + & 6,9x_2 & + & 7,3x_3 & + & 7,5x_4 & + & 7,6x_5 & + & 6x_6 & + & 5,8x_7 & + & 4,3x_8 & + & 4,1x_9 & = & z[\max] \\
0,2x_1 & + & 0,5x_2 & + & 0,3x_3 & + & 0,3x_4 & + & 0,3x_5 & + & 0,6x_6 & + & 0,4x_7 & + & 0,1x_8 & + & 0,1x_9 & = & 0,3 \\
0,3x_1 & + & 0,4x_2 & + & 0,2x_3 & + & 0,4x_4 & + & 0,3x_5 & + & 0,3x_6 & + & 0,5x_7 & + & 0,3x_8 & + & 0,1x_9 & = & 0,3 \\
0,5x_1 & + & 0,1x_2 & + & 0,5x_3 & + & 0,3x_4 & + & 0,4x_5 & + & 0,1x_6 & + & 0,1x_7 & + & 0,6x_8 & + & 0,8x_9 & = & 0,4 \\
x_1 & + & x_2 & + & x_3 & + & x_4 & + & x_5 & + & x_6 & + & x_7 & + & x_8 & + & x_9 & = & 1 \\
x_1 & , & x_2 & , & x_3 & , & x_4 & , & x_5 & , & x_6 & , & x_7 & , & x_8 & , & x_9 & \geq & 0
\end{array}\right.$$

$\boxed{2}$ On note $x_{i,j}$ le nombre de containers transportés du dépôt i vers le magasin j ($i = 1, 2$; $j = A, B, C$).

Le programme linéaire s'énonce de la façon suivante : minimiser $z(x_{i,j}, i = 1, 2 \ ; \ j = A, B, C)$ sous les contraintes :

- de disponibilité :

$$\begin{array}{ccccccc} x_{1,A} & + & x_{1,B} & + & x_{1,C} & \leq & 250 \\ x_{2,A} & + & x_{2,B} & + & x_{2,C} & \leq & 450 \end{array}$$

- de demande :

$$\begin{array}{ccccc} x_{1,A} & + & x_{2,A} & = & 200 \\ x_{1,B} & + & x_{2,B} & = & 200 \\ x_{1,C} & + & x_{2,C} & = & 200 \\ x_{i,j} & \in & \mathbb{N} & & \end{array}$$

ce qui s'écrit :

$$\left\{ \begin{array}{ccccccccccccc} 3,4x_{1,A} & + & 2,2x_{1,B} & + & 2,9x_{1,C} & + & 3,4x_{2,A} & + & 2,4x_{2,B} & + & 2,5x_{2,C} & = & z[\text{min}] \\ x_{1,A} & + & x_{1,B} & + & x_{1,C} & & & & & & & \leq & 250 \\ & & & & & & x_{2,A} & + & x_{2,B} & + & x_{2,C} & \leq & 450 \\ x_{1,A} & & & & & + & x_{2,A} & & & & & = & 200 \\ & & x_{1,B} & & & & & + & x_{2,B} & & & = & 200 \\ & & & & x_{1,C} & & & & & + & x_{2,C} & = & 200 \end{array} \right.$$

$\boxed{3}$ Pour le problème plus général, le programme linéaire consiste à minimiser :

$$z(x_{i,j}, \ i = 1, \cdots, p_; \ = 1, \cdots, q) = \sum_{i=1}^{p} \sum_{j=1}^{q} f_{i,j} x_{i,j}$$

sous les contraintes :

- pour les dépôts : $\displaystyle\sum_{j=1}^{q} x_{i,j} = (\text{ ou } \leq) \ a_i \ ; \ i = 1, \cdots, p \, ;$

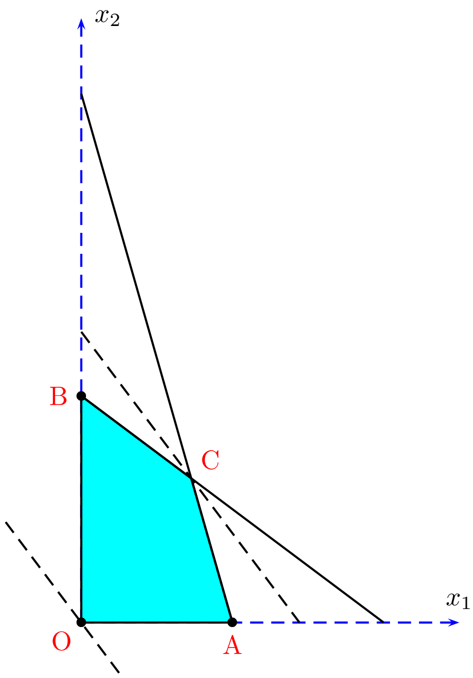
- pour les magasins : $\displaystyle\sum_{i=1}^{p} x_{i,j} = (\text{ ou } \geq) \ b_j \ ; \ j = 1, \cdots, q \, ;$

- $x_{i,j} \geq 0$ (éventuellement à valeurs entières).

Remarques : 1) Le choix du signe d'égalité ou d'inégalité dans les contraintes concernant les dépôts ou les magasins dépend du contexte concret.

2) On doit avoir $\displaystyle\sum_{i=1}^{p} a_i \geq \sum_{j=1}^{q} bj$ (quantité disponible $\geq$ quantité demandée).

4



L'intersection des demi-plans déterminés par les droites qui correspondent aux contraintes représente l'ensemble des solutions qui satisfont aux contraintes (domaine teinté) : c'est le polygone $OABC$. La direction qui correspond à la fonction objectif est donnée par :

$$z(x_1, x_2) = 4x_1 + 3x_2 = \text{ constante}$$

(ligne pointillée). On obtient la solution optimale en $C\left(\frac{16}{11}; \frac{21}{11}\right)$ en effectuant une translation parallèle de cette direction jusqu'à sortir du domaine. Le point C est un point extrémal de ce domaine. Il correspond à l'intersection des droites d'équation $3x_1+4x_2 = 12$ et $7x_1+2x_2 = 14$.