Corrigé de l'Examen de Probabilités du 20 mars 2017

Exercice I- [6 points]

1. Il s'agit de tirage avec remise de boules, dont une proportion $\frac{2}{10} = \frac{1}{5}$ est blanche. On a $X(\Omega) = \{0,1,2,3,4,5\}$ et $P([X=k]) = \binom{5}{k}\left(\frac{1}{5}\right)^k\left(\frac{4}{5}\right)^{5-k}$: $\boxed{X \text{ suit la loi binomiale } \mathcal{B}\left(5;\frac{1}{5}\right)}$.

On a donc $\mathbb{E}(X) = 5\times\frac{1}{5}$ et $\mathrm{Var}(X) = 5\times\frac{1}{5}\times\frac{4}{5}$, soit $\boxed{\mathbb{E}(X) = 1 \text{ et } \mathrm{Var}(X) = \frac{4}{5}}$ [*2pts*].

2. On a, $Y = 2\times X + (-3)\times(5-X)$, soit $\boxed{Y = 5X - 15}$. Ainsi, $\mathbb{E}(Y) = 5\mathbb{E}(X) - 15$ et $\mathrm{Var}(Y) = 25\times\mathrm{Var}(X)$, soit $\boxed{\mathbb{E}(Y) = -10 \text{ et } \mathrm{Var}(Y) = 20}$. De plus $Y(\Omega) = \{5k-15\ ;\ 0\le k\le 5\} = \{-15;-10;-5;0;;5;10\}$ avec $P([Y = 5k-15]) = P([X=k]) = \binom{5}{k}\left(\frac{1}{5}\right)^k\left(\frac{4}{5}\right)^{5-k}$ [*2pts*].

3. a) $P([Z_k = 1]) = \frac{1}{5}$ et $S_n = \sum_{k=1}^{n} Z_k$ suit la loi $\mathcal{B}\left(n;\frac{1}{5}\right)$ donc $\mathbb{E}(S_n) = \frac{n}{5} = n\mathbb{E}(Z_1)$ et $\mathrm{Var}(S_n) = \frac{4n}{25} = n\mathrm{Var}(Z_1)$. On a donc, par propriétés sur l'espérance et la variance, $\mathbb{E}\left(\frac{S_n}{n}\right) = \mathbb{E}(Z_1)$ et $\mathrm{Var}\left(\frac{S_n}{n}\right) = \frac{\mathrm{Var}(Z_1)}{n}$.

D'après l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev, pour tout $a > 0$, $P([|X - \mathbb{E}(X)| \ge a]) \le \frac{1}{a^2}\mathrm{Var}(X)$.
En l'appliquant à $X = \frac{S_n}{n}$, on a $\boxed{P\left(\left|\frac{S_n}{n} - \mathbb{E}(Z_1)\right| \ge a\right) \le \frac{\mathrm{Var}(Z_1)}{na^2}}$ [*1pt*].

b) On a ici $\mathbb{E}(Z_1) = \frac{1}{5}$ et $\mathrm{Var}(Z_1) = \frac{4}{25}$. La proportion de boules blanches étant $\frac{S_n}{n}$, on cherche alors n tel que $\frac{\mathrm{Var}(Z_1)}{na^2} \le 0,05$ avec $a = 0,05$ aussi (car $|0,2-0,15| = |0,2-0,25| = 0,05$). On veut donc n tel que $\frac{4}{25n\times 25.10^{-4}} \le 5.10^{-2}$, soit $n \ge \frac{4.10^6}{5\times 25\times 25} = 1280$. Il faut donc prendre $\boxed{n_0 \ge 1280}$ [*1pt*].

Exercice II- [9 points]

1. $P([Y\ge y]\cap[Z\le q]) = P\left(\bigcap_{k=1}^{n}[y\le U_k\le z]\right) = \prod_{k=1}^{n} P([y\le U_k\le z])$ car les U_k sont des variables aléatoires indépendantes. De plus, les U_k sont toutes de même loi uniforme sur $[0,1]$ donc $P([y\le U_k\le z]) = z - y$ pour $0\le y\le z\le 1$.
On a donc $\boxed{P([y\le Y]\cap[Z\le z]) = (z-y)^n \text{ pour } 0\le y\le z\le 1}$ [*1pt*].

2. $P([Y\ge y]\cap[Z\le z]) = \int_{-\infty}^{z}\left(\int_{y}^{+\infty} f_{Y,Z}(u,v)du\right)dv$ donc $\frac{\partial}{\partial z}P([Y\ge y]\cap[Z\le z]) = \int_{y}^{+\infty} f_{Y,Z}(u,z)\,du$, puis $\frac{\partial}{\partial y}\frac{\partial}{\partial z}P([Y\ge y]\cap[Z\le z]) = -f_{Y,Z}(y,z)$.

On a donc $\boxed{f_{Y,Z}(y,z) = -\frac{\partial}{\partial y}\frac{\partial}{\partial z}P([Y\ge y]\cap[Z\le z])}$ [*0,5pt*].

D'après la question 1., $\dfrac{\partial}{\partial z}P([Y \geq y] \cap [Z \leq z]) = n(z-y)^{n-1}$ pour $0 \leq y \leq z \leq 1$, puis $\dfrac{\partial}{\partial y}\dfrac{\partial}{\partial z}P([Y \geq y] \cap [Z \leq z]) = -n(n-1)(z-y)^{n-2}$ pour $0 \leq y \leq z \leq 1$,
donc $\boxed{f_{Y,Z}(y,z) = n(n-1)(z-y)^{n-2}\mathbb{I}_{0\leq y\leq z\leq 1}}$ [*1pt*].

3. $f_Z(z) = \displaystyle\int f_{Y,Z}(y,z)\,dy = \left(\int_0^z n(n-1)(z-y)^{n-2}\,dy\right)\mathbb{I}_{[0,1]}(z) = \Big[-n(z-y)^{n-1}\Big]_0^z \mathbb{I}_{[0,1]}(z)$, soit $\boxed{f_Z(z) = nz^{n-1}\mathbb{I}_{[0,1]}(z)}$. On a alors $\mathbb{E}(Z) = \displaystyle\int z f_Z(z)\,dz = \int_0^1 nz^n\,dz$, soit $\boxed{\mathbb{E}(Z) = \dfrac{n}{n+1}}$.
On a aussi $\mathbb{E}(Z^2) = \displaystyle\int z^2 f_Z(z)\,dz = \int_0^1 nz^{n+1}\,dz = \dfrac{n}{n+2}$, donc $\mathrm{Var}(Z) = \mathbb{E}(Z^2) - \mathbb{E}(Z)^2 = \dfrac{n}{n+2} - \dfrac{n^2}{(n+1)^2}$, soit $\boxed{\mathrm{Var}(Z) = \dfrac{n}{(n+2)(n+1)^2}}$ [*2pts*].

4. $P([Y > z]) = P\left(\displaystyle\bigcap_{k=1}^n [U_k > z]\right) = \prod_{k=1}^n P([U_k > z]) = (1-z)^n$ et $P([1-Z > z]) = P([Z < 1-z]) = P\left(\displaystyle\bigcap_{k=1}^n [U_k < 1-z]\right) = (1-z)^k$, donc $F_Y(y) = 1 - P([Y > z]) = 1 - P([1-Z > z]) = F_{1-Z}(z)$ pour tout z.
Ainsi, $\boxed{Y \text{ et } 1-Z \text{ ont même loi}}$. On a donc $\mathbb{E}(Y) = \mathbb{E}(1-Z) = 1 - \mathbb{E}(Z)$ par linéarité de l'espérance, soit $\boxed{\mathbb{E}(Y) = \dfrac{1}{n+1}}$. De plus, $\mathrm{Var}(Y) = \mathrm{Var}(1-Z) = \mathrm{Var}(Z)$ (avec $\mathrm{Var}(aX+b) = a^2\mathrm{Var}(X)$) et donc $\boxed{\mathrm{Var}(Y) = \dfrac{n}{(n+2)(n+1)^2}}$ [*2pts*].

5. $f_Y^{Z=z}(y) = \dfrac{f_{Y,Z}(y,z)}{f_Z(z)}$ donc, pour $z \in]0,1[$ fixé, $f_Y^{Z=z}(y) = \dfrac{n(n-1)(z-y)^{n-2}}{nz^{n-1}}\mathbb{I}_{]0,z[}(y)$. On a alors $\mathbb{E}(Y|Z=z) = \displaystyle\int y f_Y^{Z=z}(y)\,dy = \frac{(n-1)}{z^{n-1}}\int_0^z y(z-y)^{n-2}\,dy$, avec, en posant $u = z-y$, $\displaystyle\int_0^z y(z-y)^{n-2}\,dy = \int_0^z (z-u)u^{n-2}\,du = \left[\frac{zu^{n-1}}{n-1} - \frac{u^n}{n}\right]_0^z = z^n\left[\frac{1}{n-1} - \frac{1}{n}\right] = \frac{z^n}{n(n-1)}$ et finalement, $\mathbb{E}(Y|Z=z) = \dfrac{(n-1)}{z^{n-1}} \times \dfrac{z^n}{n(n-1)} = \dfrac{z}{n}$ et donc $\boxed{\mathbb{E}(Y/Z) = \dfrac{Z}{n}}$. On a alors, d'après le théorème de l'espérance totale, $\mathbb{E}(\mathbb{E}(E/Z)) = \mathbb{E}(Y) = \dfrac{\mathbb{E}(Z)}{n}$, soit $\boxed{\mathbb{E}(Y) = \dfrac{1}{n+1}}$ [*1,5pt*].

6. $\mathbb{E}(YZ/Z) = Z\mathbb{E}(Y/Z) = \dfrac{Z^2}{n}$, donc, toujours avec le théorème de l'espérance totale, $\mathbb{E}(YZ) = \mathbb{E}(\mathbb{E}(YZ/Z)) = \dfrac{1}{n}\mathbb{E}(Z^2) = \dfrac{1}{n+2}$, puis $\mathrm{Cov}(Y,Z) = \mathbb{E}(YZ) - \mathbb{E}(Y)\mathbb{E}(Z) = \dfrac{1}{n+2} - \dfrac{n}{(n+1)^2}$, soit $\boxed{\mathrm{Cov}(Y,Z) = \dfrac{1}{(n+2)(n+1)^2}}$ [*1pt*].

<u>Exercice III-</u> [8 points]

1. $f_X(x) = \displaystyle\int f(x,y)\,dy = \int_0^1 e^{-x/(1-y)}\frac{x}{(1-y)^2}\,dy\,\mathbb{I}_{]0,+\infty[}(x) = \Big[-e^{-x/(1-y)}\Big]_{y=0}^{y\to 1}\mathbb{I}_{]0,+\infty[}(x)$.
Or, pour $x > 0$, $\displaystyle\lim_{y\to 1} e^{-x/(1-y)} = 0$ donc $f_X(x) = e^{-x}\,\mathbb{I}_{]0,+\infty[}(x)$ et $\boxed{X \text{ suit la loi exponentielle } \mathcal{E}(1)}$ [*1pt*].

2. $f_Y(y) = \displaystyle\int f(x,y)\,dx = \int_0^{+\infty} e^{-x/(1-y)} \frac{x}{(1-y)^2}\,dx\,\mathbb{I}_{]0,1[}(y)$. En posant $u = \dfrac{x}{1-y}$, on obtient $f_Y(y) = \displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-u}\,u\,du\,\mathbb{I}_{]0,1[}(y) = \Gamma(2)\,\mathbb{I}_{]0,1[}(y) = \mathbb{I}_{]0,1[}(y)$ donc, $\boxed{Y \text{ suit la loi uniforme sur }]0,1[}$ [*1pt*].

3. Pour $y \in]0,1[$, $f_X^{Y=y}(x) = \dfrac{f(x,y)}{f_Y(y)} = \dfrac{1}{(1-y)^2} e^{-x/(1-y)} \times x\,\mathbb{I}_{]0,+\infty[}(x)$ et on reconnaît la loi Gamma $\gamma\left(\dfrac{1}{1-y}, 2\right)$, donc $\mathbb{E}^{Y=y}(X) = 2(1-y)$, puis $\boxed{\mathbb{E}(X/Y) = 2(1-Y)}$ [*1,5 pt*]. On a $f_X(x)f_Y(y) = e^{-x}\mathbb{I}_{]0,+\infty[}(x)\mathbb{I}_{]0,1[}(y) \neq f(x,y)$ donc X et Y ne sont pas indépendantes [*0,5pt*].

4. [*2pts*] $h(x,y) = (u,v) = \left(\dfrac{x}{1-y}, \dfrac{xy}{1-y}\right)$ donc $y = \dfrac{v}{u}$ et $x = u(1-y) = u - v$, soit $h^{-1}(u,v) = (x,y) = \left(u - v, \dfrac{v}{u}\right)$ et $J_{h^{-1}}(u,v) = \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ -\dfrac{v}{u^2} & \dfrac{1}{u} \end{vmatrix} = \dfrac{u-v}{u^2}$. D'autre part $\dfrac{x}{1-y} = u$ et $\dfrac{x}{(1-y)^2} = \dfrac{u^2}{u-v}$ donc

$$f_{U,V}(u,v) = f_{X,Y}(h^{-1}(u,v))|J_{h^{-1}}(u,v)| = e^{-u}\mathbb{I}_{]0,+\infty[}(u-v)\,\mathbb{I}_{]0,1[}\left(\frac{v}{u}\right).$$

Cette densité est non nulle pour $0 < \dfrac{v}{u} < 1$ et $v < u$, donc, en multipliant par u^2, $vu < u^2$, soit $u(u-v) > 0$ donc on a aussi $u > 0$ et $0 < v < u$ et réciproquement, si $u > 0$ et $0 < v < u$, on a bien $v < u$ et $0 < \dfrac{v}{u} < 1$. Finalement, $\boxed{f(u,v) = e^{-u}\,\mathbb{I}_\Delta(u,v) \text{ où } \Delta = \{(u,v) \in \mathbb{R}^2 \ ;\ 0 < v < u\}}$.

5. $f_U(u) = \displaystyle\int f_{U,V}(u,v)\,dv$ donc, pour $f_U(u) = ue^{-u}\mathbb{I}_{]0,+\infty[}(u)$, donc U suit la loi Gamma $\gamma(1,2)$ [*1pt*] et, pour $u > 0$, $f_V^{U=u}(v) = \dfrac{f_{U,V}(u,v)}{f_U(u)} = \dfrac{1}{u}\mathbb{I}_{]0,u[}(v)$ donc la loi conditionnelle de V sachant $U = u$ est la loi uniforme $\mathcal{U}(]0,u[)$ [*1pt*].

Exercice IV- [10 points]

- On a $\boxed{N_1 = 1}$ (une série en un lancer!), donc $\boxed{\mathbb{E}(N_1) = 1}$ [*1pt*].

- En deux lancers, il peut y avoir une ou deux séries. On a $[N_2 = 1] = \{\mathrm{FF}, \mathrm{PP}\}$, donc

$$P([N_2 = 1]) = P(\{\mathrm{FF}\}) + P(\{\mathrm{PP}\}) = P(\{\mathrm{F}\})^2 + P(\{\mathrm{P}\})^2 = \frac{1}{4} + \frac{1}{4},$$

soit $\boxed{P([N_2 = 1]) = \dfrac{1}{2}}$ (les lancers sont indépendants).

De même, $[N_2 = 2] = \{\mathrm{PF}, \mathrm{FP}\}$ et on a $\boxed{P([N_2 = 2]) = \dfrac{1}{2}}$.

On peut remarquer que $\boxed{N_2 - 1 \hookrightarrow \mathcal{B}(1/2)}$, donc $\mathbb{E}(N_2 - 1) = \dfrac{1}{2}$, soit, par linéarité de l'espérance, $\boxed{\mathbb{E}(N_2) = \dfrac{3}{2}}$ [*1pt*].

- $[N_3 = 1] = \{\mathrm{FFF}, \mathrm{PPP}\}$ donne $P([N_3 = 1]) = \dfrac{1}{2^3} + \dfrac{1}{2^3}$, soit $\boxed{P([N_3 = 1]) = \dfrac{1}{4}}$. De même,

$[N_3 = 3] = \{\mathrm{PFP}, \mathrm{FPF}\}$ donne $\boxed{P([N_3 = 3]) = \frac{1}{4}}$ aussi. Alors, $P([N_3 = 2]) = 1 - P([N_3 = 1]) - P([N_3 = 3])$ conduit à $\boxed{P([N_3 = 2]) = \frac{1}{2}}$.
On a $\mathbb{E}(N_3) = 1 \times \frac{1}{4} + 2 \times \frac{1}{2} + 3 \times \frac{1}{4}$, soit $\boxed{\mathbb{E}(N_3) = 2}$ [*1pt*].

2. On a $\boxed{N_n(\Omega_n) = [\![1, n]\!]}$ car on va de une série (toujours le même résultat) à n (résultats "alternés").

- $[N_n = 1] = \{\mathrm{P} \cdots \mathrm{P}, \mathrm{F} \cdots \mathrm{F}\}$ et donc $\boxed{P([N_n = 1]) = \frac{1}{2^n} + \frac{1}{2^n} = \frac{1}{2^{n-1}}}$.
- $[N_n = n] = \{\mathrm{PFP} \cdots, \mathrm{FPF} \cdots\}$, donc $\boxed{P([N_n = n]) = \frac{1}{2^{n-1}}}$ encore [*2pts*].

3. a) On a $G_n(s) = \mathbb{E}(s^{N_n}) = \sum_{k=1}^{n} P([N_n = k])s^k$, ceci pour tout $s \in \mathbb{R}$ car les sommes sont finies ($R = +\infty$!!!). On a aussi $\boxed{\mathbb{E}(N_n) = G'_n(1)}$ car G_n est dérivable en 1 [*0,5pt*].

b) $[N_n = k] \cap \mathrm{P}_n = ([N_n = k] \cap \mathrm{P}_n \cap \mathrm{P}_{n-1}) \cup ([N_n = k] \cap \mathrm{P}_n \cap \mathrm{F}_{n-1})$ car $\mathrm{P}_{n-1} \cup \mathrm{F}_{n-1} = \Omega_n$.

• Si $\omega \in [N_n = k] \cap \mathrm{P}_n \cap \mathrm{P}_{n-1}$, on a forcément $N_{n-1}(\omega) = k$ car les deux derniers lancers sont identiques, donc $[N_n = k] \cap \mathrm{P}_n \cap \mathrm{P}_{n-1} \subset [N_{n-1} = k] \cap \mathrm{P}_n \cap \mathrm{P}_{n-1}$. Réciproquement, si $\omega \in [N_{n-1} = k] \cap \mathrm{P}_n \cap \mathrm{P}_{n-1}$, le nombre de séries n'augmente pas et on a $[N_n = k] \cap \mathrm{P}_n \cap \mathrm{P}_{n-1} = [N_{n-1} = k] \cap \mathrm{P}_n \cap \mathrm{P}_{n-1}$.

• Si $\omega \in [N_n = k] \cap \mathrm{P}_n \cap \mathrm{F}_{n-1}$, on a $N_{n-1}(\omega) = k - 1$ car la série de F s'est terminée au $n-1$-ième lancer. Réciproquement, si $\omega \in [N_{n-1} = k] \cap \mathrm{P}_n \cap \mathrm{F}_{n-1}$, on a $N_n(\omega) = k$ de même, donc $[N_n = k] \cap \mathrm{P}_n \cap \mathrm{F}_{n-1} = [N_{n-1} = k - 1] \cap \mathrm{P}_n \cap \mathrm{F}_{n-1}$.
Les deux événements de la réunion sont incompatibles car $\mathrm{P}_{n-1} \cap \mathrm{F}_{n-1} = \emptyset$ donc

$$P([N_n = k] \cap \mathrm{P}_n) = P([N_{n-1} = k] \cap \mathrm{P}_n \cap \mathrm{P}_{n-1}) + P([N_{n-1} = k - 1] \cap \mathrm{P}_n \cap \mathrm{F}_{n-1})$$

L'indépendance des lancers conduit à celle des événements $[N_{n-1} = k] \cap \mathrm{P}_{n-1}$ (resp. $[N_{n-1} = k - 1] \cap \mathrm{F}_{n-1}$) avec l'événement P_n, qui est tel que $P(\mathrm{P}_n) = \frac{1}{2}$, donc

$$P([N_n = k] \cap \mathrm{P}_n) = \frac{1}{2} P([N_{n-1} = k] \cap \mathrm{P}_{n-1}) + \frac{1}{2} P([N_{n-1} = k - 1] \cap \mathrm{F}_{n-1})$$

On a $[N_n = k] = ([N_n = k] \cap \mathrm{P}_n) \cup ([N_n = k] \cap \mathrm{F}_n)$ de manière incompatible, donc

$$\begin{aligned} P([N_n = k]) &= P([N_n = k] \cap \mathrm{P}_n) + P([N_n = k] \cap \mathrm{F}_n) \\ &= \frac{1}{2} \left[P([N_{n-1} = k] \cap \mathrm{P}_{n-1}) + P([N_{n-1} = k] \cap \mathrm{F}_{n-1}) \right] \\ &\quad + \frac{1}{2} \left[P([N_{n-1} = k - 1] \cap \mathrm{P}_{n-1}) + P([N_{n-1} = k - 1] \cap \mathrm{F}_{n-1}) \right] \\ &= \frac{1}{2} P([N_{n-1} = k]) + \frac{1}{2} P([N_{n-1} = k - 1]), \end{aligned}$$

en reconstituant les deux probabilités comme cela a été fait pour $P([N_n = k])$ [*1,5pt*].

c) Pour tout $s \in \mathbb{R}$, on a donc, en multipliant par s^k et en sommant (et en posant $P([N_{n-1} = 0]) = P([N_{n-1} = n]) = 0$)

$$G_n(s) = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{n} P([N_{n-1} = k])s^k + \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{n} P([N_{n-1} = k - 1])s^k = \frac{1}{2} G_{n-1}(s) + \frac{1}{2} s G_{n-1}(s),$$

soit $\boxed{G_n(s) = \frac{1}{2}(s+1)G_{n-1}(s)}$.

$(G_n(s))_{n\geq 1}$ est une suite géométrique de raison $\frac{1+s}{2}$ donc, avec $G_1(s) = P([N_1 = 1])s = s$, il vient $\boxed{G_n(s) = s\left(\frac{s+1}{2}\right)^{n-1}}$ [*2pts*].

d) On a $G'_n(s) = \left(\frac{s+1}{2}\right)^{n-1} + s\frac{n-1}{2}\left(\frac{s+1}{2}\right)^{n-2}$ avec $\frac{s+1}{2} = 1$ pour $s = 1$, donc $G'_n(1) = 1 + \frac{n-1}{2}$, soit $\boxed{\mathbb{E}(N_n) = \frac{n+1}{2}}$. (C'était le cas pour $n = 1$, $n = 2$ et $n = 3$) [*1pt*].