Corrigés des exercices du Chapitre 9

1. * Déterminer la fonction génératrice d'une v.a. Z de loi de Poisson $\mathcal{P}(\lambda)$ et d'une v.a. X_n de loi Binomiale $\mathcal{B}(n, p_n)$.
Montrer que, si $\lim\limits_n p_n = 0$ et si $\lim\limits_n np_n = \lambda$, la suite $(X_n)_n$ converge en loi vers Z.

Application : Une entreprise fabrique des produits dont 1% sont défectueux ; les produits sont vendus par paquets de 100 et garantis à 98%. Quelle est la probabilité p que cette garantie tombe en défaut ?

- $G_Z(s) = \mathbb{E}\left(s^Z\right) = \sum\limits_{k=0}^{+\infty} s^k \, e^{-\lambda} \frac{\lambda^k}{k!} = e^{-\lambda} \sum\limits_{k=0}^{+\infty} \frac{(\lambda s)^k}{k!} = e^{-\lambda} e^{\lambda s}$, soit

$$\boxed{G_Z(s) = e^{\lambda(s-1)}}.$$

- $G_{X_n}(s) = \mathbb{E}\left(s^{X_n}\right) = \sum\limits_{k=0}^{n} C_n^k p_n^k (1-p_n)^{n-k} s^k = (sp_n + 1 - p_n)^n$, soit

$$\boxed{G_{X_n}(s) = (1 - p_n(1-s))^n}.$$

- $G_{X_n}(s) = e^{n \ln(1-p_n(1-s))}$.

$p_n \to 0$ donc $\ln(1 - p_n(1-s)) \sim -p_n(1-s)$ et $n \ln(1 - p_n(1-s)) \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} -\lambda(1-s)$ car $np_n \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} \lambda$, donc $G_{X_n}(s) \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} e^{\lambda(s-1)} = G_Z(s)$ et $\boxed{X_n \xrightarrow{L} Z}$.

Application : La garantie tombe en défaut si le nombre X de produits défectueux est > 2.
On a :

$$P([X = k]) = C_{100}^k \left(\frac{1}{100}\right)^k \left(\frac{99}{100}\right)^{100-k}$$

c'est-à-dire $P_X = \mathcal{B}\left(100, \dfrac{1}{100}\right)$. On a alors

$$\begin{aligned}
P([X > 2]) &= 1 - [P([X=0]) + P([X=1]) + P([X=2])] \\
&= 1 - \left[\left(\frac{99}{100}\right)^{100} + 100 \times \frac{1}{100} \times \left(\frac{99}{100}\right)^{99} + \frac{100 \times 99}{2} \left(\frac{1}{100}\right)^2 \left(\frac{99}{100}\right)^{98}\right]
\end{aligned}$$

expression qui s'avère compliquée !

En appliquant l'approximation qui précède, on a, comme $\frac{1}{100}$ est petit et $100 \times \frac{1}{100} = 1$, $\mathcal{B}\left(100, \frac{1}{100}\right) \approx \mathcal{P}(1)$ et alors :

$$P([X > 2]) \approx 1 - e^{-1}\left(\frac{1^0}{0!} + \frac{1^1}{1!} + \frac{1^2}{2!}\right) = 1 - \frac{5}{2e} \approx 1 - 0,926 \approx 7,4\%.$$

2. (**) Soit X_n une v.a.r. de loi binomiale négative de paramètres n et p_n définie, pour tout $k \in \mathbb{N}$, par:

$$P([X_n = k]) = C_{n+k}^k p_n^n (1-p_n)^k$$

On suppose que $\lim_{n\to\infty} n(1-p_n) = \lambda > 0$.
Montrer que la suite $(X_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge en loi vers une v.a.r. de loi de Poisson $\mathcal{P}(\lambda)$.

$P([X_n = k]) = \frac{(n+k)!}{k!n!} p_n^n (1-p_n)^k$ avec $1 - p_n \underset{+\infty}{\sim} \frac{\lambda}{n}$ donc

$$P([X_n = k]) = \frac{1}{k!}(n+1)\cdots(n+k)p_n^n(1-p_n)^k \sim \frac{1}{k!}n^k\left(1+\frac{1}{n}\right)\cdots\left(1+\frac{k}{n}\right)\left(1-\frac{\lambda}{n}\right)^n\frac{\lambda^k}{n^k}.$$

Or, pour k fixé, $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)\cdots\left(1+\frac{k}{n}\right) = 1$ et $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(1-\frac{\lambda}{n}\right)^n = \lim\limits_{n\to+\infty} e^{n\ln\left(1-\frac{\lambda}{n}\right)} = e^{-\lambda}$ donc $\lim\limits_{n\to+\infty} P([X_n = k]) = e^{-\lambda}\frac{\lambda^k}{k!}$.

Pour tout $x \notin \mathbb{N}$, $F_{X_n}(x) = \sum\limits_{k=0}^{[x]} P([X_n = k]) \to \sum\limits_{k=0}^{[x]} e^{-\lambda}\frac{\lambda^k}{k!} = F_X(x)$ où X suit la loi de Poisson $\mathcal{P}(\lambda)$ donc $\boxed{(X_n) \xrightarrow{L} X \text{ de loi } \mathcal{P}(\lambda)}$.

---

3. ** Déterminer la fonction caractéristique d'une v.a. Z de loi uniforme sur $[0,1]$ et d'une v.a. discrète X_n de loi équiprobable sur $\left\{0, \frac{1}{n}, \cdots, \frac{n-1}{n}, 1\right\}$.

Montrer que la suite $(X_n)_n$ converge en loi vers Z.

- $\Phi_Z(t) = \int e^{itz}\,\mathbb{I}_{]0,1[}(z)\,dz = \left[\frac{e^{itz}}{it}\right]_{z=0}^{z=1}$, soit $\boxed{\Phi_Z(t) = \frac{e^{it}-1}{it}}$.
- $\Phi_{X_n}(t) = \sum\limits_{k=0}^{n} e^{it\frac{k}{n}} \times \frac{1}{n+1}$, soit $\boxed{\Phi_{X_n}(t) = \dfrac{1}{n+1}\dfrac{1-e^{\frac{it(n+1)}{n}}}{1-e^{\frac{it}{n}}}}$.

$1 - e^{\frac{it}{n}} = -\frac{it}{n} + o\left(\frac{1}{n}\right)$; $1 - e^{it\left(1+\frac{1}{n}\right)} = 1 - e^{it}\left(1 + \frac{it}{n} + o\left(\frac{1}{n}\right)\right) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 1 - e^{it}$ et

$$\frac{1}{n+1} \times \frac{1}{1-e^{\frac{it}{n}}} = \frac{1}{1+\frac{1}{n}}\frac{1}{n\left(1-e^{\frac{it}{n}}\right)} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} -\frac{1}{it}.$$

Finalement, $\Phi_{X_n}(t) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \frac{e^{it}-1}{it} = \Phi_Z(t)$ et $\boxed{X_n \xrightarrow{L} Z}$.

On voit donc ici qu'une suite de v.a.r. discrètes peut converger vers une v.a.r. absolument continue.

---

4. * Soit f la densité d'une v.a.r. absolument continue X et soit f_n la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f_n(t) = nf(nt)$$

(a) Montrer que f_n est une densité.

(b) Soit X_n une v.a.r. absolument continue de densité f_n. Montrer que la suite de v.a.r. $(X_n)_{n\geq 1}$ converge en loi vers la v.a.r. nulle.

1. $f_n \geq 0$ car $f \geq 0$;

$t \mapsto nt$ est continue, f est continue (sauf éventuellement en un nombre fini ou dénombrable de points) donc, par composition, $t \mapsto nf(nt)$ est continue (sauf éventuellement en un nombre fini ou dénombrable de points) ;

en posant $u = nt$, on obtient $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} nf(nt)dt = \int_{-\infty}^{+\infty} f(u)du = 1$ car f est une densité.

Ainsi, f_n est bien la densité d'une v.a.r. absolument continue X_n.

2. Toujours avec $u = nt$, on a $F_n(x) = P([X_n \leq x]) = \int_{-\infty}^{x} f_n(t)dt = \int_{-\infty}^{nx} f(u)du = F(nx)$ où F est la fonction de répartition d'une v.a.r. de densité f. On a donc :

- si $x < 0$, $nx \to -\infty$ et $F_n(x) \to 0$;
- si $x > 0$, $nx \to +\infty$ et $F_n(x) \to 1$.

Ainsi, pour tout $x \neq 0$, $(F_n(x))_n$ converge vers la valeur de la fonction de répartition de la variable constante égale à 0. C'est donc que $X_n \xrightarrow{L} 0$.

---

5. ** Soit $\alpha \in]0,1[$ et $(X_n)_{n\geq 1}$ une suite de v.a.r. de lois géométriques $\mathcal{G}(\alpha/n)$.

Montrer que la suite $(\frac{X_n}{n})_{n\geq 1}$ converge en loi vers une v.a.r. dont on précisera la loi.

$P([X_n = k]) = \frac{\alpha}{n}\left(1 - \frac{\alpha}{n}\right)^{k-1}$ pour $k \in \mathbb{N}^*$.

$$P([X_n > k]) = \sum_{j=k+1}^{+\infty} \frac{\alpha}{n}\left(1 - \frac{\alpha}{n}\right)^{j-1} \underset{i=j-k}{=} \left(1 - \frac{\alpha}{n}\right)^{k} \sum_{i=1}^{+\infty} \left(\frac{\alpha}{n}\right)\left(1 - \frac{\alpha}{n}\right)^{i-1} = \left(1 - \frac{\alpha}{n}\right)^{k}$$

et $P([X_n \leq k]) = 1 - P([X_n > k]) = 1 - \left(1 - \frac{\alpha}{n}\right)^k$ donc, si $E(x)$ est la partie entière de x, on a, pour tout $x > 0$

$$F_n(x) = P([X_n \leq E(x)]) = 1 - \left(1 - \frac{\alpha}{n}\right)^{E(x)}$$

puis, $F_{\frac{X_n}{n}}(x) = P\left(\left[\dfrac{X_n}{n} \leq x\right]\right) = P([X_n \leq nx]) = 1 - \left(1 - \dfrac{\alpha}{n}\right)^{E(nx)}$ avec

$$1 - \left(1 - \frac{\alpha}{n}\right)^{E(nx)} = 1 - e^{E(nx)\ln\left(1 - \frac{\alpha}{n}\right)}.$$

On a $E(nx) \leq nx < E(nx) + 1$, donc $nx - 1 < E(nx) \leq nx$ et, comme $\ln\left(1 - \frac{\alpha}{n}\right) \sim -\frac{\alpha}{n}$, on obtient, par encadrement,

$$\lim_{n\to+\infty} E(nx)\left(1 - \frac{\alpha}{n}\right) = -\alpha x$$

et $\boxed{\displaystyle\lim_{n\to+\infty} F_{\frac{X_n}{n}}(x) = 1 - e^{-\alpha x} \text{ pour tout } x > 0}$ (et $F_{\frac{X_n}{n}}(x) = 0$ pout $x < 0$). On reconnait la fonction de répartition de la loi exponentielle $\mathcal{E}(\alpha)$ donc $\left(\frac{X_n}{n}\right)_n$ converge en loi vers une v.a.r. de loi exponentielle $\mathcal{E}(\alpha)$.

---

6. ** Soit $(X_n)_{n\geq 1}$ une suite de v.a.r. indépendantes de même loi de Poisson $\mathcal{P}(\lambda)$.

(a) Déterminer la loi de $U_n = X_1 + \cdots + X_n$ et calculer $P([U_n \leq n])$.

(b) On pose $Z_n = \frac{U_n - \lambda n}{\sqrt{\lambda n}}$. Montrer que la suite $(Z_n)_{n\geq 1}$ converge en loi vers une v.a.r. dont on précisera la loi. En remarquant que l'on a :

$$P([U_n \leq n]) = P\left(\left[Z_n \leq \frac{(1-\lambda)n}{\sqrt{\lambda n}}\right]\right)$$

en déduire :

$$\lim_{n\to\infty} e^{-n} \sum_{k=0}^{n} \frac{n^k}{k!} = \frac{1}{2}$$

(a) Puisque les X_i sont indépendantes et de même loi $\mathcal{P}(\lambda)$, la v.a. U_n est de loi de Poisson de paramètre $n\lambda$ (cf. cours), et, par suite,

$$P([U_n \leq n]) = \sum_{k=0}^{n} P([U_n = k]) = \sum_{k=0}^{n} \frac{n^k \lambda^k \mathrm{e}^{-n\lambda}}{k!}.$$

(b) Les X_k étant des v.a. indépendantes de même loi, de moyenne et variance λ, le théorème de la limite centrale s'applique et montre que $(P_{Z_n})_n$ converge vers la loi normale $\mathcal{N}(0,1)$.

De l'égalité indiquée (qui est évidente), on déduit :

$$\mathrm{e}^{-n\lambda} \sum_{k=0}^{n} \frac{n^k \lambda^k}{k!} = P\left(\left[Z_n \leq \frac{n(1-\lambda)}{\sqrt{n\lambda}}\right]\right).$$

Il vient alors, pour λ égal à 1, puisque $\lim_{n\to+\infty} P([Z_n \leq 0]) = \int_{-\infty}^{0} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \mathrm{e}^{-x^2/2} dx = \frac{1}{2}$,

$$\lim_{n\to+\infty} \mathrm{e}^{-n} \sum_{k=0}^{n} \frac{n^k}{k!} = \lim_{n\to+\infty} P([Z_n \leq 0]) = \frac{1}{2}.$$

---

7. * Soit X une v.a.r. à valeurs dans $[1, +\infty[$. On suppose qu'il existe un réel λ strictement positif tel que, pour tout $x \geq 1$, on ait $P([X \geq x]) = x^{-\lambda}$.

(a) Montrer que les v.a.r. X et $Y = \ln X$ sont absolument continues et déterminer leur densité.

(b) Soit $(X_n)_{n\geq 1}$ une suite de v.a.r. indépendantes de même loi que X et soit

$$U_n = (X_1 X_2 \cdots X_n)^{1/n}.$$

Montrer que les suites $(\ln U_n)_{n\geq 1}$ et $(U_n)_{n\geq 1}$ convergent en loi.

(a) L'application $F_X : x \in \mathbb{R} \mapsto P([X \leq x]) = (1 - x^{-\lambda})\mathbb{I}_{[1,+\infty[}(x)$ vérifie les propriétés d'une fonction de répartition. C'est de plus une fonction dérivable sauf en 1 et sa dérivée coïncide sauf en ce point avec la fonction $f_X : x \in \mathbb{R} \mapsto \lambda x^{-\lambda-1}\, \mathbb{I}_{[1,+\infty[}(x)$. Or, cette dernière fonction est clairement une densité de probabilité et on a : pour tout $x \in \mathbb{R}$, $F_X(x) = \int_{-\infty}^{x} f_X(u) du$.

La variable aléatoire X est donc absolument continue de densité f_X. La variable aléatoire $Y = \ln X$ est elle aussi absolument continue. On peut le voir en utilisant le théorème de changement de variable ou directement :

$$F_Y(y) = P([X \leq \mathrm{e}^y]) = \begin{cases} 0 & \text{si } y \leq 0 \\ 1 - \mathrm{e}^{-\lambda y} & \text{si } y > 0 \end{cases}.$$

On reconnait la fonction de répartition d'une loi exponentielle $\mathcal{E}(\lambda)$.

(b) Les variables X_i étant indépendantes et de même loi, il en est de même pour les v.a. $\ln X_i$ qui admettent donc comme espérance mathématique $\frac{1}{\lambda}$ et ont une variance. La loi faible des grands nombres permet donc de conclure que $\left(\ln U_n = \frac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n} \ln X_i\right)_n$ converge en loi vers $\frac{1}{\lambda}$. Comme on passe de $\ln U_n$ à U_n par l'application continue strictement croissante$x \mapsto \mathrm{e}^x$, on peut en déduire que $(U_n)_n$ converge en loi vers $\mathrm{e}^{1/\lambda}$.

---

8. ** Soit $(X_n)_{n\geq 1}$ une suite de v.a.r. indépendantes de même loi de Bernoulli $\mathcal{B}(1/2)$. On pose:

$$T_n = \sum_{i=1}^{n} \frac{X_i}{2^i}$$

Montrer que $(T_n)_{n\geq 1}$ converge en loi vers une v.a.r. de loi uniforme sur $[0, 1]$.

$T_1 = \frac{X_1}{2}$, $T_1(\Omega) = \{0, \frac{1}{2}\}$, $P([T_1 = 0]) = P([T_1 = \frac{1}{2}]) = \frac{1}{2}$.

$T_2 = \frac{X_1}{2} + \frac{X_2}{4}$, $T_2(\Omega) = \{0, \frac{1}{4}, \frac{1}{2}, \frac{3}{4}\}$, $P([T_2 = t_i]) = \frac{1}{4}$ pour $t_i \in T_2(\Omega)$.

$T_3 = \frac{X_1}{2} + \frac{X_2}{4} + \frac{X_3}{8}$, $T_3(\Omega) = \{0, \frac{1}{8}, \frac{1}{4}, \frac{3}{8}, \frac{1}{2}, \frac{5}{8}, \frac{3}{4}, \frac{7}{8}\}$, $P([T_3 = t_i]) = \frac{1}{8}$ pour $t_i \in T_3(\Omega)$.

Par récurrence, on montre que $T_n(\Omega) = \{\frac{k}{2^n}\ ;\ k \in [\![0, 2^n - 1]\!]\}$ avec $P([T_n = \frac{k}{2^n}]) = \frac{1}{2^n}$ et donc $P([T_n \leq \frac{k}{2^n}]) = \frac{k+1}{2^n}$. Dans tous les cas,

- si $x < 0$, $P([T_n \leq x]) = 0$;
- si $x \geq 1$, $P([T_n \leq x]) = 1$;
- si $x \in [0, 1[$, il existe k tel que $\frac{k}{2^n} \leq x < \frac{k+1}{2^n}$ ($k = E(2^n x)$) et alors

$$P([T_n \leq x]) = P([T_n \leq \frac{k}{2^n}]) = \frac{k+1}{2^n} = \frac{E(2^n x) + 1}{2^n}$$

et donc $F_{T_n}(x) = \frac{E(2^n x)+1}{2^n}\mathbb{I}_{[0,1[}(x) + \mathbb{I}_{[1,+\infty[}(x)$.

On a $E(2^n x) \leq 2^n x < E(2^n x) + 1$, donc $2^n x - 1 < E(2^n x) \leq 2^n x$ et $x < \frac{E(2^n x)+1}{2^n} \leq x + \frac{1}{2^n}$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{E(2^n x)+1}{2^n} = x$ et finalement $\lim\limits_{n\to+\infty} F_{T_n}(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ x & \text{si } x \in [0, 1[\\ 1 & \text{si } x \geq 1 \end{cases}$ qui est la fonction de répartition de la loi uniforme $\mathcal{U}(]0, 1[)$ donc (T_n) converge en loi vers une v.a.r. de loi uniforme sur $]0, 1[$.

---

9. * Soit $(X_n)_{n\geq 1}$ une suite de v.a.r. telles que $X_n(\Omega) = [1, n]$ et $P([X_n = k]) = \lambda_n k$.

(a) Déterminer λ_n.

(b) Quelle est la limite en loi de la suite $(Y_n)_{n\geq 1}$ où $Y_n = \frac{X_n}{n}$?

(a) $\sum_{k=1}^{n} P([X_n = k]) = 1 = \lambda_n \sum_{k=1}^{n} k = \lambda_n \frac{n(n+1)}{2}$ donc $\boxed{\lambda_n = \dfrac{2}{n(n+1)}}$.

(b) $F_{X_n}(k) = \lambda_n \sum_{i=1}^{k} i = \lambda_n \frac{k(k+1)}{2} = \frac{k(k+1)}{n(n+1)}$ et

$$F_{Y_n}(y) = P\left(\left[\frac{X_n}{n} \leq y\right]\right) = P([X_n \leq ny]) = \begin{cases} 0 & \text{si } y \leq 0 \\ \frac{E(ny)(E(ny)+1)}{n(n+1)} & \text{si } y \in]0,1] \\ 1 & \text{si } y > 1 \end{cases}.$$

Or $E(ny) \leq ny < E(ny)+1$ donc $ny-1 < E(ny) \leq ny$ et $ny < E(ny)+1 \leq ny+1$ donc

$$\frac{y(ny-1)}{n+1} < \frac{E(ny)(E(ny)+1)}{n(n+1)} < \frac{y(ny+1)}{n+1}$$

d'où $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{E(ny)(E(ny)+1)}{n(n+1)} = y^2$ pour $y \in]0,1[$. On a donc $\lim\limits_{n\to+\infty} F_{Y_n}(y) = F(y)$ pour tout $y \in \mathbb{R} \setminus \{0,1\}$ où $F(y) = y^2 \mathbb{I}_{]0,1[}(y) + \mathbb{I}_{[1,+\infty[}(y)$ qui est la fonction de répartition de la v.a.r. de densité $f : y \mapsto 2y\mathbb{I}_{]0,1[}(y)$: $\boxed{(Y_n) \text{ converge en loi vers une v.a.r. de densité } f}$.

---

10. (∗∗) Un sac contient 100 billes dont 36 sont rouges et les autres sont bleues. Une épreuve consiste à tirer 16 fois de suite une bille avec remise. Soit X la v.a.r. égale au nombre de boules rouges tirées.
Estimer $P([|X - \mathbb{E}(X)| \geq 2\sqrt{\text{var}(X)}])$.

$X = \sum_{i=1}^{16} X_i$ où $X_i = 1$ si la boule tirée au i-ième tirage est rouge et $X_i = 0$ sinon. La loi de X_i est la loi de Bernoulli $\mathcal{B}(0.36)$ et les X_i sont indépendantes, avec $\mathbb{E}(X_i) = 0.36$ et $\text{var}(X_i) = 0.36 \times 0.64$, donc $\mathbb{E}(X) = m = 16 \times 0.36$ et $\text{var}(X) = 16 \times 0.36 \times 0.64$.

On ne peut pas appliquer le théorème central limite car $16 < 30$, mais on peut utiliser l'inégalité de Bienaymé-Tchebytchev :

$$P([|X - \mathbb{E}(X)| \geq 2\sqrt{\text{var}(X)}]) = P([|X - m| \geq 2\sigma) \leq \frac{1}{4\sigma^2}\text{var}(X) = \frac{1}{4}.$$

C'est tout ce qu'on peut dire.

---

11. (∗∗) Une urne contient 3 boules numérotées 1, 2, 3. On effectue une suite de 100 tirages indépendants avec remise. On note X_i le numéro de la boule tirée au i-ème tirage et on pose $S = \sum_{i=1}^{100} X_i$.
Indiquer le plus petit nombre s que l'on peut trouver au moyen du théorème de la limite centrale tel que:

$$P([200 - s \leq S \leq 200 + s]) \geq 0.9$$

$P([X_i = 1]) = P([X_i = 2]) = P([X_i = 3]) = \frac{1}{3}$, $\mathbb{E}(X) = 2$, $\mathbb{E}(X^2) = \frac{1}{3}[1+4+9] = \frac{14}{3}$ et $\text{var}(X) = \frac{14}{3} - \frac{12}{3} = \frac{2}{3}$ (ou directement, $\text{var}(X) = (1-2)^2 \times \frac{1}{3} + (2-2)^2 \times \frac{1}{3} + (3-2)^2 \times \frac{1}{3}$).
On pose $S = \sum_{i=1}^{100} X_i$. On a alors $\mathbb{E}(S) = 200$ et $\text{var}S = \frac{200}{3}$.

$100 > 30$ donc on peut appliquer le théorème central limite qui donne ici :

$$P([200 - s \leq S \leq 200 + s]) = P\left(\left[\left|\frac{S - \mathbb{E}(S)}{\sqrt{\text{var}(X)}}\right| \leq \frac{s}{\sqrt{\text{var}(X)}}\right]\right) \approx 2\Phi\left(\frac{s}{\sqrt{\text{var}(X)}}\right) - 1$$

où Φ est la fonction de répartition de la loi Normale $\mathcal{N}(0,1)$.

On cherche s tel que $2\Phi\left(\frac{s}{\sqrt{\text{var}(X)}}\right) - 1 \approx 0.9$,

soit $\Phi\left(\frac{s}{\sqrt{\text{var}(X)}}\right) \approx 0.95$ d'où $\frac{s}{\sqrt{\frac{200}{3}}} \approx 1.645$ et $\boxed{s \approx 13.4}$.

---

12. * Une enquète statistique portant sur 100 000 automobilistes débutants a révélé que 10 d'entre eux avaient provoqué un accident mortel dans leur première année de conduite.
On choisit 100 débutants au hasard et on désigne par X le nombre d'entre eux qui ont provoqué un accident mortel au cours de leur première année de conduite.

Calculer $P([X = 0])$ et $P([X = 2])$.

$X_i = 1$ si le i-ième débutant a un accident mortel. $X = \sum_{i=1}^{100} X_i$ avec $P([X_i = 1]) = \frac{10}{10\ 000} = 0.001$. X suit la loi Binomiale $\mathcal{B}(100, 0.001)$ avec $\begin{cases} n = 100 > 50 \\ p = 0.001 \\ np = 0.1 < 5 \end{cases}$. On peut donc approximer la loi de X par la loi de Poisson $\mathcal{P}(0.1)$ donc

$$\boxed{\begin{array}{l} P([X = 0]) \approx e^{-0.1}\frac{0.1^0}{0!} \approx 0.9 \\ P([X = 2]) \approx e^{-0.1}\frac{0.1^2}{2!} \approx 0.0045 \end{array}}.$$

---

13. ** Un joueur lance une pièce équilibrée. Lorsqu'il obtient "pile", il gagne 1 euro et lorsqu'il obtient "face", il perd 1 euro.
Quel est le nombre maximal de lancers à effectuer pour que le joueur ait 95% de chances de perdre au plus 20 euros ?

$X_i = 1$ si pile (proba $\frac{1}{2}$) et $X_i = -1$ si face (proba $\frac{1}{2}$), $\mathbb{E}(X_i) = 0$, et $\text{var}(X_i) = 1$. Le gain relatif (il peut être négatif!) après n parties est $S_n = \sum_{i=1}^{n} X_i$ et on cherche n tel que $P([S_n \geq -20]) \geq 0.95$ ou plutôt, avec la correction de continuité, $P([S_n > -20.5]) \geq 0.95$.

Or, $\frac{S_n}{\sqrt{n}}$ suit approximativement la loi $\mathcal{N}(0,1)$ et

$$P([S_n > -20.5]) = P\left(\left[\frac{S_n}{\sqrt{n}} > -\frac{20.5}{\sqrt{n}}\right]\right) = 1 - \Phi\left(-\frac{20.5}{\sqrt{n}}\right) = \Phi\left(\frac{20.5}{\sqrt{n}}\right)$$

où Φ est la fonction de répartition de la loi Normale $\mathcal{N}(0,1)$.

On trouve donc $\frac{20.5}{\sqrt{n}} \approx 1.645$, d'où $n \approx 154 \geq 30$ donc l'approximation est justifiée. Il faut donc $\boxed{n \leq 154 \text{ pour avoir au moins 95\% des chances de perdre au plus 20 euros}}$ (avec $n \geq 30$).

---

14. *** À la veille d'une élection, 49% de la population votent pour A et 51% votent pour B. On effectue une enquète sur $2n+1$ personnes afin de pouvoir faire un pronostic sur le résultat des élections.

(a) Quelle est la probabilité p_n pour que le pronostic soit faux?

(b) Montrer que pour n assez grand, il existe a_n tel que $p_n \simeq \Phi(a_n)$.

(c) Déterminer n pour que $p_n \geq 0,1$.

On suppose les tirages faits avec remise (une personne peut être sondée plusieurs fois). Il y a $2n+1$ tirage et on pose $X_i = 1$ si la i-ième personne sondée vote pour B et $X_i = 0$ si elle vote pour A. Ainsi, $X = \sum\limits_{i=1}^{2n+1} X_i$ et X suit la loi binomiale $\mathcal{B}(2n+1, 0.51)$.

(a) Le pronostic est faux si $X \leq n$ donc $\boxed{p_n = P([X \leq n]) = \sum\limits_{i=0}^{n} C_{2n+1}^{i} 0.51^i \ 0.49^{2n+1-i}}$.

(b) $\mathbb{E}(X) = (2n+1) \times 0.51$ et $\mathrm{var}(X) = (2n+1) \times 0.51 \times 0.49$.
Avec l'hypothèse de correction de continuité,

$$p_n = P\left(\left[\frac{X - \mathbb{E}(X)}{\sqrt{\mathrm{var}(X)}} \leq \frac{n + 0.5 - \mathbb{E}(X)}{\sqrt{\mathrm{var}(X)}}\right]\right) \approx \Phi(a_n)$$

où Φ est la fonction de répartition de la loi Normale $\mathcal{N}(0,1)$. On prend

$$a_n = \frac{n + 0.5 - \mathbb{E}(X)}{\sqrt{\mathrm{var}(X)}} = \frac{\frac{1}{2}(2n+1) - (2n+1) \times 0.51}{\sqrt{2n+1}\sqrt{0.51 \times 0.49}},$$

soit $\boxed{a_n = -\frac{\sqrt{2n+1} \times 0.01}{\sqrt{0.51 \times 0.49}}}$.

(c) $\Phi(a_n) \geq 0.1$ donne $1-\Phi(a_n) \leq 0.9$ avec $1-\Phi(a_n) = \Phi(-a_n)$, donc $\frac{\sqrt{2n+1}\times 0.01}{\sqrt{0.51\times 0.49}} \leq 1.29$ et $n \leq 2078.79$. On doit aussi avoir $n \geq 30$ pour que l'approximation soit légitime d'où, $\boxed{\text{si } 30 \leq n \leq 2078,\ p_n \geq 0.1}$.

---

15. * Un dé régulier est lancé 9000 fois.

Déterminer la probabilité d'obtenir entre 1400 et 1600 fois la face 6.

Si X est le nombre de 6, $X = \sum\limits_{i=1}^{9000} X_i$ où X_i suit la loi de Bernoulli $\mathcal{B}\left(\frac{1}{6}\right)$, donc $\mathbb{E}(X) = \frac{9000}{6} = 1500$ et $\mathrm{var}(X) = 9000 \times \frac{1}{6} \times \frac{5}{6} = 250 \times 5 = 1250$.

$$\begin{aligned} P([1400 \leq X \leq 1600]) &= P([|X - \mathbb{E}(X)| \leq 100]) = P\left(\left[\left|\frac{X - \mathbb{E}(X)}{\sqrt{\mathrm{var}(X)}}\right| \leq \frac{100.5}{\sqrt{1250}}\right]\right) \\ &= 2\Phi\left(\frac{100.5}{\sqrt{1250}}\right) - 1 \approx 0.9954 \end{aligned}$$

où Φ est la fonction de répartition de la loi Normale $\mathcal{N}(0,1)$. (On a pris 100.5 au lieu de 100 pour appliquer la correction de continuité).

D'où $\boxed{P([1400 \leq X \leq 1600]) \approx 0.9954}$.

---

16. * On dispose de 1000 pots de peinture. La probabilité qu'un pot soit défectueux est de 0,2%.

Donner la probabilité qu'au moins 4 pots soient défectueux.

Le nombre de pots défectueux X suit la loi Binomiale $\mathcal{B}\left(1000; \frac{0,2}{100}\right)$ avec

$$\left\{\begin{array}{l} 1000 \geq 30 \\ \frac{0,2}{100} \leq 0,1 \\ 1000 \times \frac{0,2}{100} = 2 < 15 \end{array}\right. ,$$

donc on peut approximer la loi de X par la loi $\mathcal{P}(2)$. On cherche $P([X \geq 4])$ qui est aussi $1-P([X \leq 3]) \approx 0,1429$ d'après la table de la loi de Poisson. Ainsi, $\boxed{P([X \geq 4]) \approx 0,1429}$.

---

17. * On fait n parties de "pile ou face".

A l'aide de l'approximation Normale de la loi Binomiale, déterminer n pour que l'on puisse affirmer que la fréquence d'apparition de "pile" soit comprise entre 0,45 et 0,55 avec une probabilité au moins égale à 0,9.

Si X est le nombre de piles, $X = \sum\limits_{i=1}^{n} X_i$ où X_i suit la loi de Bernoulli $\mathcal{B}\left(\frac{1}{2}\right)$. La fréquence des piles est $\frac{X}{n}$. $\mathbb{E}\left(\frac{X}{n}\right) = \frac{1}{2} = 0.5$, $\operatorname{var}\left(\frac{X}{n}\right) = \frac{1}{n}\frac{1}{4}$.

$$\begin{aligned} P\left(\left[0.45 \leq \frac{X}{n} \leq 0.55\right]\right) &= P\left(\left[-0.05 \leq \frac{X}{n} - \mathbb{E}\left(\frac{X}{n}\right) \leq 0.05\right]\right) \\ &= P\left(\left[\left|\frac{X}{n} - \mathbb{E}\left(\frac{X}{n}\right)\right| \leq 0.05\right]\right) \\ &= 1 - P\left(\left[\left|\frac{X}{n} - \mathbb{E}\left(\frac{X}{n}\right)\right| > 0.05\right]\right) \end{aligned}$$

et, par l'inégalité de Bienaymé-Tchebytchev, $P\left(\left[\left|\frac{X}{n} - \mathbb{E}\left(\frac{X}{n}\right)\right| > 0,05\right]\right) \leq \frac{1}{(0,05)^2}\operatorname{var}\left(\frac{X}{n}\right)$

Pour avoir n tel que $P\left(\left[0.45 \leq \frac{X}{n} \leq 0.55\right]\right)$, il suffit donc de trouver n tel que

$$\frac{1}{(0.05)^2}\operatorname{var}\left(\frac{X}{n}\right) \leq 0.1,$$

soit $\frac{1}{4n} \leq (0.05)^2 \times 0.1$ et $n \geq \frac{1}{4 \times 25.10^{-5}}$, soit $\boxed{n \geq 1000}$.

---

18. ** Une entreprise compte 300 employés. Chacun d'eux téléphone en moyenne 6 minutes par heure.

Quelle est le nombre de lignes que l'entreprise doit installer pour que la probabilité que toutes les lignes soient utilisées au même instant soit au plus égale à 0,025 ?

Soit n le nombre de ligne à installer et X le nombre d'employés qui téléphonent à l'instant t. On cherche n tel que $P([X \leq n]) \leq 0.025$. Les appels étant indépendants X suit la loi Binomiale $\mathcal{B}\left(300; \frac{1}{10}\right)$. $\begin{cases} 300 \geq 30 \\ 300 \times \frac{1}{10} = 30 \geq 15 \\ 300 \times \frac{1}{10} \times \frac{9}{10} = 27 > 5 \end{cases}$, donc on peut appoximer la loi de X par la loi Normale $\mathcal{N}(m, \sigma^2)$ où $m = 30$ et $\sigma^2 = 27$.

On cherche n tel que $P([X > n]) \leq 0.025$, c'est-à-dire

$$P\left(\left[\frac{X-m}{\sigma} > \frac{n-m}{\sigma}\right]\right) = 1 - \Phi\left(\frac{n-30}{\sqrt{27}}\right) \leq 0.025$$

où Φ est la fonction de répartition de la loi Normale $\mathcal{N}(0,1)$.

On cherche donc n tel que $\Phi\left(\frac{n-30}{\sqrt{27}}\right) \geq 0.975 = \Phi(1.96)$.

Donc $n \geq 30 + 1.96 \times \sqrt{27}$, soit $\boxed{n \geq 41}$.

---

19. *** On procède à des lancers successifs d'une paire de dés non pipés. Soit X_i la v.a.r. égale à la somme des 2 numéros obtenus à la suite du i-ème lancer.

Combien de lancers sont nécessaires pour obtenir avec une probabilité supérieure à 0,95 une moyenne des résultats X_i différant de 7 de moins de 0,1?

$X_i = U_i + V_i$ où U_i (resp. V_i) est le résultat du premier (resp. deuxième) dé au i-ième lancer : $X_i = U_i + V_i$ où U_i et V_i sont indépendantes de loi l'équiprobabilité sur $[\![1, 6]\!]$. $X_i(\Omega) = [\![2, 12]\!]$, $\mathbb{E}(X_i) = 2\mathbb{E}(U_i)$ et $\text{var}(X_i) = 2\text{var}(U_i)$ avec $\mathbb{E}(U_i) = \frac{1}{6}\left(\sum_{k=1}^{6} k\right) = \frac{7}{2}$, et $\mathbb{E}(U_i^2) = \frac{1}{6}\left(\sum_{k=1}^{6} k^2\right) = \frac{6\times7\times13}{6\times6} = \frac{91}{6}$ et $\text{var}(U_i) = \frac{91}{6} - \frac{49}{4} = \frac{182-147}{12} = \frac{35}{12}$. Ainsi, $\boxed{\mathbb{E}(X_i) = 7 \text{ et } \text{var}(X_i) = \frac{35}{6}}$ et si $Z_n = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i$, Z_n suit approximativement la loi normale $\mathcal{N}(\mathbb{E}(Z_n), \text{var}(Z_n))$ où $\mathbb{E}(Z_n) = \mathbb{E}(X_i) = 7 = m$ et $\text{var}(Z_n) = \frac{1}{n}\text{var}(X_i) = \frac{35}{6n} = \sigma^2$.

On cherche n tel que $P([|Z_n - 7| > 0,1]) \leq 0,05$. Or Par l'inégalité de Bienaymé-Tchebytchev, $P([|Z_n - \mathbb{E}(Z_n)| > 0,1]) \leq 100\text{var}(Z_n) = \frac{3500}{6n}$. Il suffit donc de prendre n tel que $\frac{3500}{6n} \leq 0.05$, soit $n \geq \frac{70\,000}{6} \approx 11\,667$.

Plus précisément, $P([|Z_n - 7| \leq 0.1]) = P\left(\left|\frac{Z_n - \mathbb{E}(Z_n)}{\sqrt{\text{var}Z_n}}\right| \leq \frac{0.1}{\sqrt{\text{var}Z_n}}\right) \approx 2\Phi\left(0,1\sqrt{\frac{6n}{35}}\right) - 1$ où Φ est la fonction de répartition de la loi normale $\mathcal{N}(0,1)$. On cherche n tel que $2\Phi\left(0.1\sqrt{\frac{6n}{35}}\right) - 1 \geq 0.95$, soit $\Phi\left(0.1\sqrt{\frac{6n}{35}}\right) \geq 0.975 = \Phi(1.96)$, d'où $0.1\sqrt{\frac{6n}{35}} \geq 1.96$ et $\frac{6n}{35} \geq 19.6^2$, soit $n \geq \frac{19.6^2\times35}{6}$, soit $\boxed{n \approx 2240}$. On a bien $n \geq 30$ et donc, l'approximation est légitime.

---

20. * Dans un programme de calcul, on décide d'utiliser k chiffres significatifs après la virgule et d'arrondir tous les résultats à $\frac{1}{2}10^{-k}$ près. On suppose que l'on effectue 10^6 opérations successives, que les erreurs commises pour chacune sont indépendantes, de loi uniforme sur $[-a, a]$, où $a = \frac{1}{2}10^{-k}$. On note S l'erreur commise sur le résultat final et on veut calculer $P([|S| \leq 10^3 a])$.

Soit X_i l'erreur commise à la i-ème opération (donc $S = \sum_{i=1}^{10^6} X_i$).

En considérant 10^6 comme "grand", montrer que $\frac{\sqrt{3}S}{10^3 a}$ suit approximativement la loi Normale $\mathcal{N}(0,1)$ et conclure.

X_i erreur à la i-ème opération, $S = \sum_{i=1}^{10^6} X_i$. Les X_i étant indépendantes, de même loi, d'après le théorème central limite,

$$P_{\left(\frac{S-\mathbb{E}(S)}{\sqrt{\mathrm{var}(S)}}\right)} \approx \mathcal{N}(0,1).$$

Or $\mathbb{E}(S) = 10^6 \mathbb{E}(X_i)$, avec $\mathbb{E}(X_i) = 0$ car X_i, erreur due à l'arrondi à $\frac{1}{2}10^{-k}$ près, suit la loi uniforme sur $\left]-\frac{1}{2}10^{-k}, \frac{1}{2}10^{-k}\right[$, *i.e.* $]-a, a[$.

$\mathrm{var}(S) = 10^6 \mathrm{var}(X_i)$ (variables indépendantes), et $\mathrm{var}(X_i) = \mathbb{E}(X_i^2) = \frac{1}{2a}\int_{-a}^{a} x^2\,dx = \frac{a^2}{3}$ donc $\sqrt{\mathrm{var}(S)} = 10^3 \frac{a}{\sqrt{3}}$ et $\boxed{P_{\frac{\sqrt{3}S}{10^3 a}} \approx \mathcal{N}(0,1)}$.

On a alors

$$\begin{aligned} P([|S| \leq 10^3 a]) &= P\left(\left[\frac{|S|}{10^3 a} \leq 1\right]\right) = P\left(\left[\frac{|S\sqrt{3}|}{10^3 a} \leq \sqrt{3}\right]\right) \\ &= \Phi(\sqrt{3}) - \Phi(-\sqrt{3}) = 2\Phi(\sqrt{3}) - 1. \end{aligned}$$

or $\Phi(\sqrt{3}) \approx \Phi(1,732) \approx 0,958$, donc $\boxed{P([|S| \leq 10^3 a]) \approx 0,916}$.

---

21. ** Soit f définie sur $[a, b]$, à valeurs dans $[m, M] \subset \mathbb{R}_+$.
On note $D = [a,b] \times [m, M]$, $A = \{(x,y) \in D \;;\; f(x) \geq y\}$ et $p = \frac{\textit{aire de } A}{\textit{aire de } D}$.
Pour $k \in \mathbb{N}^*$, on considère un couple de v.a. (X_k, Y_k) de loi uniforme sur D, et on définit Z_k par : $Z_k = \begin{cases} 1 \text{ si } Y_k \leq f(X_k) \\ 0 \text{ sinon.} \end{cases}$. On pose $\overline{Z_n} = \frac{Z_1 + \cdots + Z_n}{n}$.
Les v.a. $X_1, \cdots, X_n, \cdots, Y_1, \cdots, Y_n, \cdots$ sont supposées indépendantes.

(a) Calculer $\mathbb{E}(Z_k)$, $\mathrm{var}(Z_k)$, $\mathbb{E}(\overline{Z_n})$, $\mathrm{var}(\overline{Z_n})$.

(b) En utilisant la loi des grands nombres, montrer que $\overline{Z_n} \to p$.

(c) Avec l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev, trouver n tel que $P\left(\left[|\overline{Z_n} - p| > \frac{1}{100}\right]\right) < \frac{5}{100}$.

(d) Avec le théorème central limite, déterminer pour n "grand" la loi approximative de $\overline{Z_n}$.

(a) $Z_k = 1$ si $f(X_k) \geq Y_k$, soit (X_k, Y_k) au dessous de la courbe (dans A).

$$P([Z_k = 1]) = \frac{\text{aire de } A}{\text{aire de } D} = p$$

avec aire de $D = (M - m) \times (b - a)$ et

$$\text{aire de } A = \int_a^b (f(x) - m)\, dx = \int_a^b f(x)\, dx - m(b - a).$$

$\mathbb{E}(Z_k) = p$ et $\text{var}(Z_k) = p(1 - p)$ car $P_{Z_k} = \mathcal{B}(p)$ et

$\mathbb{E}(\bar{Z}_n) = \dfrac{\sum_{i=1}^{n} \mathbb{E}(Z_i)}{n} = p$ et $\text{var}(\bar{Z}_n) = \frac{1}{n^2}\text{var}\left(\sum_{i=1}^{n} Z_i\right) = \frac{1}{n}\text{var}(Z_i) = \frac{p(1-p)}{n}$ car les Z_i sont indépendantes. D'où, finalement

$$\boxed{\mathbb{E}(\bar{Z}_n) = p \text{ et } \text{var}(\bar{Z}_n) = \tfrac{1}{n}p(1 - p).}$$

(b) Par la loi des grands nombres, $\boxed{\bar{Z}_n \xrightarrow{P} \mathbb{E}(Z_i) = p}$.

(c) $P\left([|\bar{Z}_n - p| \leq 10^{-2}]\right) \geq 0,95$ équivaut à $P\left([|\bar{Z}_n - p| > 10^{-2}]\right) < 0,05 = 5.10^{-2}$.

Or $P\left([|\bar{Z}_n - p| > 10^{-2}]\right) \leq \dfrac{1}{10^{-4}}\mathbb{E}((\bar{Z}_n - p)^2) = \dfrac{\text{var}(\bar{Z}_n)}{10^{-4}} = \dfrac{p(1 - p)}{10^{-4}n}$.

On cherche n tel que $\dfrac{p(1 - p)}{10^{-4}n} < 5.10^{-2}$, soit $n > \dfrac{p(1 - p)}{5.10^{-6}}$.

Si $\varphi(p) = p(1 - p) = p - p^2$, $\varphi'(p) = 1 - 2p$ donc φ admet un maximum en $p = 1/2$ avec $\varphi(1/2) = 1/4$.

Ainsi, pour avoir $n > \frac{p(1-p)}{5.10^{-6}}$ avec p quelconque, il suffit de prendre $n > \frac{1}{4}\frac{1}{5.10^{-6}}$, soit $n > \frac{10^6}{20} = 5.10^4$: $\boxed{n > 50\,000}$.

(d) D'après le théorème central limite, $\bar{Z}_n$ suit approximativement la loi $\mathcal{N}\left(p; \frac{p(1-p)}{n}\right)$.

---

22. *** Un point matériel se déplace dans $\mathbb{R}^2$ en effectuant à chaque instant n, un trajet de longueur a fixée dans une direction choisie arbitrairement. Ainsi, si les v.a. X_n et Y_n sont les coordonnées du point à l'instant n, on a $\begin{cases} X_{n+1} - X_n = a\cos\Theta_{n+1} \\ Y_{n+1} - Y_n = a\sin\Theta_{n+1} \end{cases}$, où les v.a. Θ_n sont indépendantes de loi uniforme sur $[0, 2\pi[$. On suppose que $X_0 = Y_0 = 0$.

(a) Calculer $\mathbb{E}(\cos\Theta_k)$, $\mathbb{E}(\sin\Theta_k)$, $\mathbb{E}(\cos^2\Theta_k)$, $\text{var}(\cos\Theta_k)$. En déduire $\mathbb{E}(X_n)$, $\mathbb{E}(Y_n)$, $\text{var}(X_n)$, $\text{var}(Y_n)$, $\text{cov}(X_n, Y_n)$.

(b) On suppose maintenant n "grand", et on pose $\begin{cases} X_n = R_n\cos T_n \\ Y_n = R_n\sin T_n \end{cases}$. Déterminer la loi approximative de (X_n, Y_n) [*On généralisera le Théorème Central Limite*]. En déduire celle de (R_n, T_n), celle de R_n et celle de T_n. Calculer $\mathbb{E}(R_n)$, $\text{var}(R_n)$ et $P([R_n > r])$.

$P_{\Theta_k} = \mathcal{U}([0, 2\pi[)$ donc $f_{\Theta_k}(\theta) = \frac{1}{2\pi}\mathbb{I}_{[0,2\pi[}(\theta)$.

(a) $\mathbb{E}(\cos\Theta_k) = \int \cos\theta\, f_{\Theta_k}(\theta)\,d\theta = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\cos\theta\,d\theta = 0$. De même,

$$\mathbb{E}(\sin\Theta_k) = \int \sin\theta\, f_{\Theta_k}(\theta)\,d\theta = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\sin\theta\,d\theta = 0,$$

$$\mathbb{E}(\cos^2\Theta_k) = \int \cos^2\theta\, f_{\Theta_k}(\theta)\,d\theta = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\cos^2\theta\,d\theta = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\frac{\cos 2\theta + 1}{2}\,d\theta = \frac{1}{2},$$

$$\operatorname{var}(\cos\Theta_k) = \mathbb{E}(\cos^2\Theta_k) - \mathbb{E}(\cos\Theta_k)^2 = \frac{1}{2},$$

$$\mathbb{E}(\sin^2\Theta_k) = \mathbb{E}(1-\cos^2\Theta_k) = \frac{1}{2} \text{ et } \operatorname{var}(\sin\Theta_k) = \frac{1}{2}.$$

$$\boxed{\mathbb{E}(\cos\Theta_k) = \mathbb{E}(\sin\Theta_k) = 0,\ \operatorname{var}(\cos\Theta_k) = \operatorname{var}(\sin\Theta_k) = \frac{1}{2}.}$$

$X_0 = 0$, $X_1 = a\cos\Theta_1$, $X_2 = a\cos\Theta_1 + a\cos\Theta_2$, soit, par récurrence, $X_n = a\sum\limits_{k=1}^{n}\cos\Theta_k$ et $Y_n = a\sum\limits_{k=1}^{n}\sin\Theta_k$.

Par linéarité de l'espérance, on en déduit $\boxed{\mathbb{E}(X) = \mathbb{E}(Y) = 0}$.

Puis $\operatorname{var}(X_n) = a^2\operatorname{var}\left(\sum\limits_{k=1}^{n}\cos\Theta_k\right) = a^2\sum\limits_{k=1}^{n}\operatorname{var}(\cos\Theta_k) = a^2\,\frac{n}{2}$ car les Θ_k sont indépendantes donc les $\cos\Theta_k$ aussi et de même, $\operatorname{var}(Y_n) = a^2\,\frac{n}{2}$, d'où $\boxed{\operatorname{var}(X_n) = \operatorname{var}(Y_n) = \frac{a^2 n}{2}}$.

$X_nY_n = \sum\limits_{1\le i,j\le n} a^2\cos\Theta_i\sin\Theta_j$, avec

- si $i \neq j$, $\mathbb{E}(\cos\Theta_i\sin\Theta_j) = \mathbb{E}(\cos\Theta_i)\mathbb{E}(\sin\Theta_j) = 0$;
- $\mathbb{E}(\cos\Theta_i\sin\Theta_i) = \mathbb{E}\left(\frac{1}{2}\sin 2\Theta_i\right) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\sin\theta\cos\theta\,d\theta = \frac{1}{2\pi}\left[\frac{\sin^2\theta}{2}\right]_0^{2\pi} = 0$

donc $\mathbb{E}(X_nY_n) = 0$ et comme $\mathbb{E}(X_n) = 0$, $\boxed{\operatorname{cov}(X_n, Y_n) = 0}$.

(b) On applique le théorème central limite généralisé à $\mathbb{R}^2$ à la suite $(X_n, Y_n) = \left(\sum\limits_{k=1}^{n} a\cos\Theta_k, \sum\limits_{k=1}^{n} a\sin\Theta_k\right)$:

$$P_{(X_n,Y_n)} \approx \mathcal{N}\left((\mathbb{E}(X_n), \mathbb{E}(Y_n)),\ \Gamma_{X_n,Y_n} = \begin{pmatrix} \operatorname{var}(X_n) & \operatorname{cov}(X_n,Y_n) \\ \operatorname{cov}(X_n,Y_n) & \operatorname{var}(Y_n)\end{pmatrix}\right)$$

donc ici $P_{(X_n,Y_n)} \approx \mathcal{N}\left((0,0),\ \begin{pmatrix} \frac{na^2}{2} & 0 \\ 0 & \frac{na^2}{2}\end{pmatrix}\right)$ de densité

$$f_n : (x,y) \mapsto \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\frac{1}{\sqrt{\frac{na^2}{2}}}e^{-\frac{x^2}{2\frac{na^2}{2}}} \times \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\frac{1}{\sqrt{\frac{na^2}{2}}}e^{-\frac{y^2}{2\frac{na^2}{2}}} = \frac{1}{\pi n a^2}e^{-\frac{(x^2+y^2)}{na^2}}.$$

On utilise les coordonnées polaires classiques. Soit $h : (x,y) \mapsto (r,t)$ la bijection de $\mathbb{R}^2\setminus\{(0,0)\}$ sur $]0,+\infty[\times[0,2\pi[$, de bijection réciproque $h^{-1} : (r,t) \mapsto (x,y) = (r\cos t, r\sin t)$. $J_{h^{-1}}(r,t) = \begin{vmatrix} \cos t & -r\sin t \\ \sin t & r\cos t\end{vmatrix} = r$ et

$$f_{R_n,T_n}(r,t) = f_{X_n,Y_n}(r\cos t, r\sin t) \times r\,\mathbb{I}_{]0,+\infty[}(r)\,\mathbb{I}_{]0,2\pi[}(t),$$

soit $\boxed{f_{R_n,T_n}(r,t) = \frac{1}{\pi n a^2}\, e^{-\frac{r^2}{na^2}}\, r\, \mathbb{I}_{]0,+\infty[}(r)\, \mathbb{I}_{]0,2\pi[}(t)}$, puis $f_{R_n}(r) = \int f_{R_n,T_n}(r,t)\, dt$, soit

$$\boxed{f_{R_n}(r) = \frac{2}{na^2}\, r e^{-\frac{r^2}{na^2}}\, \mathbb{I}_{]0,+\infty[}(r).}$$

$f_{T_n}(t) = \int f_{R_n,T_n}(r,t)\, dr = \frac{1}{2\pi}\left[-e^{-\frac{r^2}{na^2}}\right]_0^{+\infty} \mathbb{I}_{]0,2\pi[}(t)$, soit $f_{T_n}(t) = \frac{1}{2\pi}\, \mathbb{I}_{]0,2\pi[}(t)$:

$$\boxed{P_{T_n} = \mathcal{U}(]0,2\pi[).}$$

$\mathbb{E}(R_n) = \int r f_{R_n}(r)\, dr = \frac{2}{na^2}\int_0^{+\infty} r^2 e^{-\frac{r^2}{na^2}}\, dr = \frac{2}{na^2} \times \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{+\infty} r^2 e^{-\frac{r^2}{na^2}}\, dr$. Or, si Z est une v.a.r. de loi $\mathcal{N}\left(0, \frac{na^2}{2}\right)$, on a $\mathrm{var}(Z) = \frac{na^2}{2} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sqrt{\frac{na^2}{2}}}\int_{-\infty}^{+\infty} z^2 e^{-\frac{z^2}{na^2}}\, dz$, d'où $\int_{-\infty}^{+\infty} z^2 e^{-\frac{z^2}{na^2}}\, dz = \frac{na^2}{2} \times a\sqrt{\pi n}$ et $\boxed{\mathbb{E}(R_n) = \frac{a}{2}\sqrt{n\pi}}$.

$$\mathbb{E}(R_n^2) = \int r^2 f_{R_n}(r)\, dr = \frac{2}{na^2}\int_0^{+\infty} r^3 e^{-\frac{r^2}{na^2}}\, dr \underset{u=\frac{r^2}{na^2}}{=} \int_0^{+\infty} na^2 u e^{-u}\, du = na^2\, \Gamma(2) = na^2$$

et $\mathbb{E}(X_n^2) = \mathrm{var}(X_n) = \frac{na^2}{2}$ (on retrouve ainsi que $\mathbb{E}(R_n^2) = \mathbb{E}(X_n^2) + \mathbb{E}(Y_n^2) = na^2$). On a alors $\mathrm{var}(R_n) = na^2 - \frac{a^2}{4} n\pi$, soit $\boxed{\mathrm{var}(R_n) = na^2\left(1 - \frac{\pi}{4}\right)}$.

$P([R_n > r]) = \int_r^{+\infty} f_{R_n}(u)\, du = \left[-e^{-\frac{u^2}{na^2}}\right]_r^{+\infty}$, soit $\boxed{P([R_n > r]) = e^{-\frac{r^2}{na^2}}}$.