Corrigés des exercices du Chapitre 4

$\boxed{14}$ Comme dans la section 4.2.5. on va procéder en plusieurs étapes.

• On commence par résoudre (P) $\left\{\begin{array}{ccccccccc} 8x_1 & + & 11x_2 & + & 6x_3 & + & 4x_2 & = & z[\max] \\ 5x_1 & + & 7x_2 & + & 4x_3 & + & 3x_4 & \leq & 14 \\ x_1 & , & x_2 & , & x_3 & , & x_4 & \geq & 0 \end{array}\right.$ à l'aide du simplexe (sans tenir compte de la contrainte x_1, x_2 à valeurs entières mais seulement $x_1 \geq 0$ et $x_2 \geq 0$).
On trouve la solution optimale $x_1 = x_2 = 1$, $x_3 = 0,5$, $x_4 = 0$, $z = 22$, ce qui ne fournit pas une solution entière.

• On relance :

$$(P) \wedge (x_3 \leq 0) \ (I)$$

c'est-à-dire qu'on ajoute la contrainte $x_3 \leq 0$ à (P) et on résout ce nouveau programme linéaire sans tenir compte de la contrainte x_1, x_2 à valeurs entières (seulement $x_1 \geq 0$ et $x_2 \geq 0$).
On trouve la solution optimale non entière $z = 21,65$ et

$$(P) \wedge (x_3 \geq 1) \ (II)$$

donne aussi une solution non entière $x_1 = x_3 = 1$, $x_4 = 0$ et $x_2 = 5/7$, ce qui donne alors $z = 21,85$.

• On développe (II) en

$$(III) = (II) \wedge (x_2 \leq 0)$$

qui donne $x_1 = x_3 = x_4 = 1$, $x_2 = 0$ et $z = 18$ qui donne une première borne 18 et

$$(IV) = (II) \wedge (x_2 \geq 1)$$

qui donne $x_2 = x_3 = 1$, $x_4 = 0$, $x_1 = 3/5$ et $z = 21,8$.

• On développe (IV) en

$$(IV) \wedge (x_1 \leq 0)$$

qui donne $x_1 = 0$, $x_2 = x_3 = x_4 = 1$ et $z = 21$ qui est une meilleure borne que permet de couper le problème (I) (les coefficients étant entiers, on ne peut pas avoir de solution meilleure que 21 puisque z vaut au mieux 21,65 et

$$(IV) \wedge (x_1 \geq 1)$$

n'a pas de solution.

Donc le développement est fini et on a une solution pour un optimum $z = 21$. On a examiné 7 noeuds de l'arbre et résulu 7 problèmes de simplexes (à comparer aux 16 possibilités pour les valeurs).

$\boxed{15}$ Le problème est le $(PLNE)$ suivant :

$$\left\{\begin{array}{ccccccccccccc} 15x_1 & + & 18x_2 & + & 4x_3 & + & 7x_4 & + & 2x_5 & + & x_6 & = & z[\max] \\ 3x_1 & + & 4x_2 & + & x_3 & + & 3x_4 & + & x_5 & + & x_6 & \leq & 5 \\ x_1 & , & x_2 & , & x_3 & , & x_4 & , & x_5 & , & x_6 & \in & \{0,1\} \end{array}\right.$$

• La solution du (PL) en variables continues (avec les contraintes $x_i \in [0,1]$) donne une borne supérieure de la solution optimale.

Ainsi, pour l'ensemble de toutes les solutions S_0, on obtient l'évaluation $E(S_0) = 24$ obtenu pour $x_1 = 1$, $x_2 = 1/2$, $x_3 = x_4 = x_5 = x_6 = 0$.

• On sépare alors S_0 en deux sous-ensembles :
→ S_1 $(x_2 = 1)$: on trouve $E(S_1) = 23$ pour $x_1 = 1/3$, $x_2 = 1$, $x_3 = x_4 = x_5 = x_6 = 0$;
→ S_2 $(x_2 = 0)$: on trouve $E(S_2) = 21$ pour $x_1 = 1$, $x_2 = 0$, $x_3 = 1$, $x_4 = 1/3$, $x_5 = x_6 = 0$;
• Le sommet S_1 qui a la meilleure évaluation, est partagé en :
→ S_3 $(x_1 = 1)$: pas de solution.
→ S_4 $(x_1 = 0)$: on trouve $E(S_4) = 22$ pour $x_1 = 0$; $x_2 = 1$, $x_3 = 1$, $x_4 = x_5 = x_6 = 0$.

• Le sommet S_2 a une évalution moins bonne que celle du sommet S_4. On a donc trouvé la solution entière optimale.

$\boxed{16}$ • On commence par résoudre avec le simplexe le programme linéaire correspondant sans tenir compte de la condition $x_1, x_2 \in \mathbb{N}$, c'est-à-dire, sous forme standard :

$$(PL)\left\{\begin{array}{rcrcrcrcl} 2x_1 & + & x_2 & & & & & = & z[\max] \\ -x_1 & + & x_2 & + & x_3 & & & = & 0 \\ 5x_1 & + & 2x_2 & & & + & x_4 & = & 18 \\ x_1 & , & x_2 & , & x_3 & , & x_4 & \geq & 0 \end{array}\right.$$

Premier tableau :

	c_i	$i\downarrow$	$j\rightarrow$	1	2	3	4	β	$\beta_i/\alpha_{i,e}$
	0	3		-1	1	1	0	0	0
$s\leftarrow$	0	4		$\boxed{5}$	2	0	1	18	$18/5$
			c_j	2	1	0	0		
			Δ_j	2	1	0	0	$z-0$	
				$\uparrow e$					

Deuxième tableau :

	c_i	$i\downarrow$	$j\rightarrow$	1	2	3	4	β	$\beta_i/\alpha_{i,e}$
$s\leftarrow$	0	3		0	$\boxed{7/5}$	1	$1/5$	$18/5$	$18/7$
	2	1		1	$2/5$	0	$1/5$	$18/5$	9
			c_j	2	1	0	0		
			Δ_j	0	$1/5$	0	$-2/5$	$z-36/5$	
					$\uparrow e$				

Troisième tableau :

c_i	$i\downarrow$	$j\rightarrow$	1	2	3	4	β
1	2		0	1	$5/7$	$1/7$	$18/7$
2	1		1	0	$-2/7$	$1/7$	$18/7$
		c_j	2	1	0	0	
		Δ_j	0	0	$-1/7$	$-3/7$	$z-54/7$

On trouve ainsi la solution optimale $x_1 = x_2 = 18/7$, $x_3 = x_4 = 0$.

On va maintenant utiliser la méthode des coupes de Gomory. Pour $i = 1$, on rajoute la contrainte :

$$\frac{5}{7}x_1 + \frac{1}{7}x_2 \geq \frac{4}{7} \tag{S_1}$$

Pour exprimer (S_1) en termes des variables initiales x_1 et x_2, on observe que

$$\frac{18}{7} = x_2 + \frac{5}{7}x_3 + \frac{1}{7}x_4 \geq x_2 + \frac{4}{7},$$

ce qui implique $x_2 \leq 2$.

• On va maintenant résoudre $(PL) \wedge (S_1)$, par le simplexe, ce qui va exiger le passage par un programme auxiliaire (et l'introduction d'une variable artificielle y).

<u>Programme auxiliaire, tableau initial</u>

c_i	$i \downarrow$	$j \rightarrow$	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	y	β
0	x_2		0	1	5/7	1/7	0	0	18/7
0	x_1		1	0	−2/7	1/7	0	0	18/7
0	y		0	0	$\boxed{5/7}$	1/7	−1	1	4/7
		c_j	0	0	0	0	−1	−1	
		Δ_j	0	0	5/7	1/7	−1	0	$z'' + 4/7$

En effet, la fonction-objectif du programme auxiliaire est donné par :

$$\text{maximiser } z'' = -y = -\frac{4}{7} + \frac{5}{7}x_3 + \frac{1}{7}x_4 - x_5$$

On parvient alors, en une étape, au tableau final du programme auxiliaire, où on supprime la colonne correspondant à y.

<u>Programme auxiliaire, tableau final</u>

c_i	$i \downarrow$	$j \rightarrow$	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	β
0	x_2		0	1	0	0	1	2
0	x_1		1	0	0	1/5	−2/5	14/5
5/7	x_3		0	0	1	1/5	−7/5	4/5
		c_j	0	0	5/7	1/7	−1	
		Δ_j	0	0	0	0	0	z''

Comme $\max z'' = 0$, le programme $(P) \wedge (S_1)$ possède une solution réalisable. Elle est donnée par ${}^t(x_1, x_2, x_3) = {}^t\left(\frac{14}{5}; 2; \frac{4}{5}\right)$.

<u>Tableau final de la deuxième phase :</u>

c_i	$i \downarrow$	$j \rightarrow$	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	β
0	x_2		0	1	0	0	1	2
0	x_1		1	0	0	1/5	−2/5	14/5
0	x_3		0	0	1	1/5	−7/5	4/5
		Δ_j	0	0	0	−2/5	−1/5	$z - 38/5$

La fonction objectif, exprimée en terme des variables hors-base, est donnée par

$$z(x_1, x_2) = 2x_1 + x_2 = \frac{38}{5} - \frac{2}{5}x_4 - \frac{1}{5}x_5.$$

La solution optimale est égale à ${}^t(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5) = {}^t\left(\frac{14}{5}; 2; \frac{4}{5}; 0; 0\right)$.

On ajoute alors la nouvelle contrainte, donnée par :

$$\frac{1}{5}x_4 + \frac{3}{5}x_5 \geq \frac{4}{5} \tag{S_2}$$

Pour exprimer en termes de x_1 et de x_2, on observe avec

$$\begin{cases} x_1 + \frac{1}{5}x_4 - \frac{2}{5}x_5 = \frac{14}{5} \\ x_2 + x_5 = 2 \end{cases}$$

que, en additionnant,

$$\frac{24}{5} = x_1 + x_2 + \frac{1}{5}x_4 + \frac{3}{5}x_5 \geq x_1 + x_2 + \frac{4}{5}$$

donc $x_1 + x_2 \leq 4$ (voir graphique).

• On résout alors $(P) \wedge (S_1) \wedge (S_2)$ inclus, ce qui exige à nouveau le passage par un programme auxiliaire.

<u>Deuxième phase du simplexe, tableau final :</u>

c_i	$i \downarrow$	$j \rightarrow$	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	β
0	x_2		0	1	0	$-1/3$	0	$5/3$	$2/3$
0	x_1		1	0	0	$1/3$	0	$-2/3$	$10/3$
0	x_3		0	0	1	$2/3$	0	$-7/3$	$8/3$
0	x_5		0	0	0	$1/3$	1	$-5/3$	$4/3$
		Δ_j	0	0	0	$-1/3$	0	$-1/3$	$z - 22/3$

La solution optimale est égale à ${}^t x = {}^t\left(\frac{10}{3}; \frac{2}{3}; \frac{8}{3}; 0; \frac{4}{3}; 0\right)$.

On ajoute alors la contrainte :

$$x_4 + x_6 \geq 1 \tag{S_3}$$

Exprimé en termes de x_1, x_2, (S_3) se lit : $2x_1 + x_2 \leq 7$ (voir le graphique).

• On résout alors $(P) \wedge (S_1) \wedge (S_2) \wedge (S_3)$ inclus, ce qui exige à nouveau e passage par un programme auxiliaire et mène, cette fois, à une solution optimale à valeurs entières, qui est

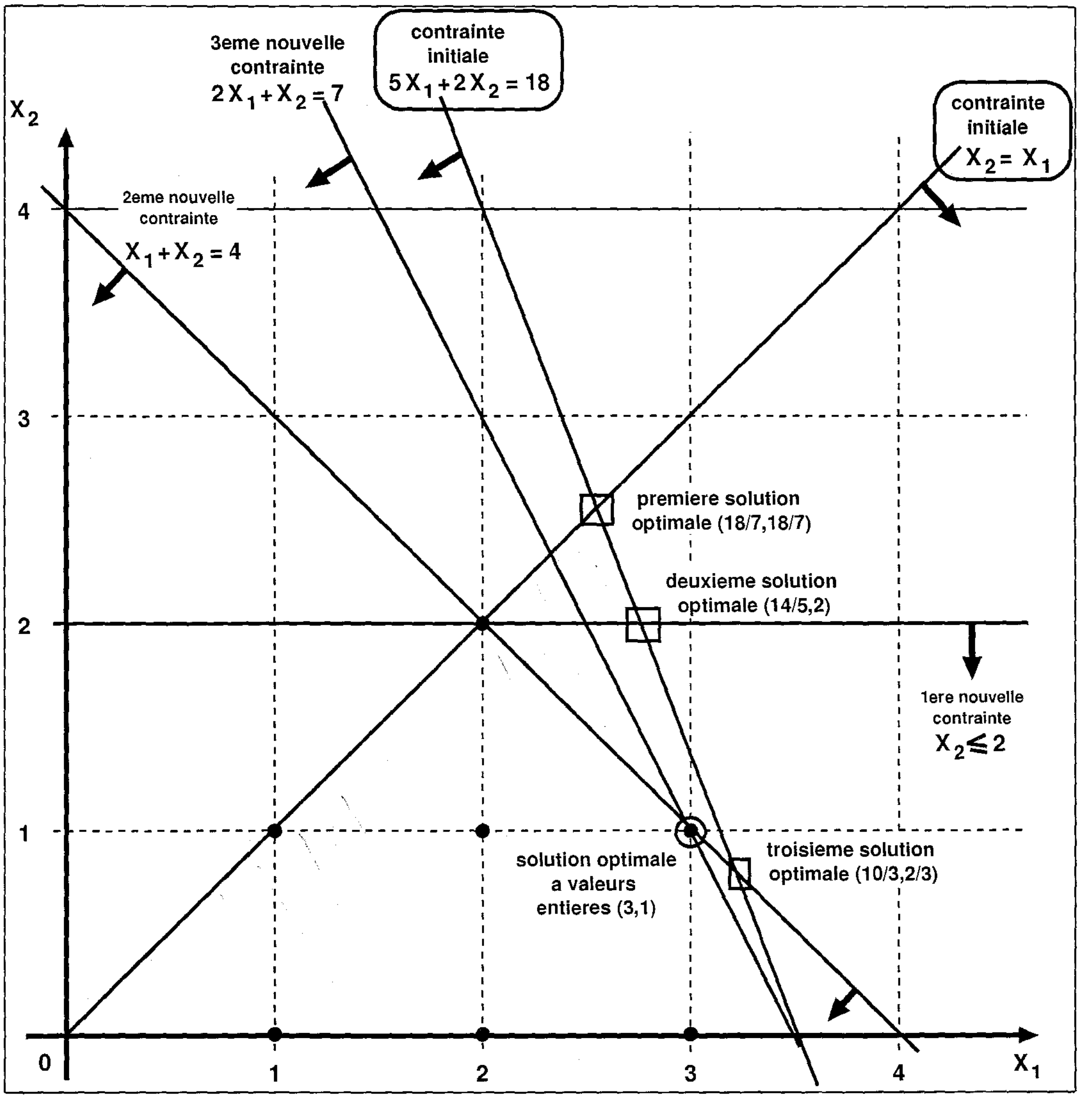
$${}^t x = {}^t(3; 1; 2; 0; 1; 1; 0).$$

La solution optimale à valeurs entières de (P) est donc donnée par $x_1 = 3$, $x_2 = 1$, $z(x_1, x_2) = 7$.

<u>tableau final de la deuxième phase du simplexe</u>

c_i	$i \downarrow$	$j \rightarrow$	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	β
0	x_2		0	1	0	0	0	2	$-1/2$	1
0	x_1		1	0	0	0	0	-1	$1/2$	3
0	x_3		0	0	1	0	0	-3	1	2
0	x_5		0	0	0	0	1	-2	$1/2$	1
0	x_6		0	0	0	1	0	1	$-3/2$	1
		Δ_j	0	0	0	0	0	0	$-1/2$	$z-7$

Sur le graphique, on voit que, en ajoutant successivement (S_1), (2_2) et (S_3), on n'écarte pas de solutions à variables entières, et on coupe l'ensemble des solutions réalisables de façon que la solution optimale à valeurs entières apparaît comme point extrémal.


3eme nouvelle contrainte
2 X1 + X2 = 7
contrainte initiale
5 X1 + 2 X2 = 18
contrainte initiale
X2 = X1
X2
2eme nouvelle contrainte
X1 + X2 = 4
premiere solution optimale (18/7,18/7)
deuxieme solution optimale (14/5,2)
1ere nouvelle contrainte
X2 ≤ 2
solution optimale a valeurs entieres (3,1)
troisieme solution optimale (10/3,2/3)
0
1
2
3
4
X1