$\boxed{\text{Exercices du chapitre 6}}$

12. Déterminer les minimums de f sur C dans les cas suivants :

a) $f : (x, y, z) \mapsto 4x^2 + y^2 + z^2$ et $C = \{(x, y, z) \ ; \ 2x + 3y + z - 12 = 0\}$.

b) $f : (x, y, z) \mapsto xy + 2yz + 2xz$ et $C = \{(x, y, z) \ ; \ xyz = 32\}$.

c) $f : (x, y) \mapsto xy$ et $C = \{(x, y) \ ; \ xy > 0$ et $x^2 + y^2 = 8\}$.

---

13. Déterminer les maximums de f sur C dans les cas suivants :

a) $f : (x, y, z) \mapsto xy^2z^2$ et $C = \{(x, y, z) \in (\mathbb{R}_+^*)^3 \ ; \ x + y + z = 12\}$.

b) $f : (x, y) \mapsto x^2y$ et $C = \{(x, y) \ ; \ 0 \leq x \leq 1$ et $0 \leq y \leq 1\}$.

c) $f : (x, y) \mapsto xy$ et $C = \{(x, y) \ ; \ (x + 1)^2 + y^2 = 1\}$.

---

14. Déterminer les extrémums de f sur C dans les cas suivants :

a) $f : (x, y, z) \mapsto x^2 + y^2 + z^2$ et $C = \{(x, y, z) \ ; \ \frac{x^2}{64} + \frac{y^2}{36} + \frac{z^2}{25} = 1\}$.

b) $f : (x, y) \mapsto x^2 + 2y^2 - x$ et $C = \{(x, y) \ ; \ x^2 + y^2 \leq 1\}$.

c) $f : (x, y, z) \mapsto x^2 + y^2 + z^2$ et $C = \{(x, y, z) \ ; \ x^2 + 2y^2 - z^2 - 1 = 0\}$.

---

15. Déterminer la hauteur de C (*i.e.* $z_{\text{max}} - z_{\text{min}}$) ; C étant l'intersection de la sphère d'équation $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ et du cône d'équation $(x + 2z)^2 + y^2 = z^2$.

---

16. Déterminer les extrémums de $f : x \mapsto \|x\|^2$ sur $C = \{x \in \mathbb{R}^n \ ; \ \langle Ax, x\rangle = 1\}$ où la matrice est symétrique.
Application à $n = 2$ et $A = \begin{pmatrix} 1 & \sqrt{6} \\ \sqrt{6} & 2 \end{pmatrix}$.

---

17. Application à la géométrie.

a) Déterminer le point P du plan d'équation $ax + by + cz + d = 0$ dont la distance à O est minimale.

b) Calculer la distance du point $M_0(x_0, y_0, z_0)$ à la droite d'équation

$$\left\{ \begin{array}{l} ax + by + cz + d = 0 \\ a'x + b'y + c'z + d' = 0 \end{array} \right. .$$

$\boxed{\textbf{18.}}$ Soit $C = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \ ; \ x + y + z = -3 \text{ et } xy + xz + yz = 0\}$.

a) Montrer que C est borné et calculer les extrémums sur C de $f : (x, y, z) \mapsto xyz$.

b) Retrouver ce résultat en étudiant, pour $\lambda \in \mathbb{R}$, le nombre de racines réelles de

$$P_\lambda(x) = x^3 + 3x^2 - \lambda.$$