Année Préparatoire

Examen d'Optimisation du mardi 18 juin 2019

4 exercices indépendants (durée : 2 heures)

Exercice I- Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}^2$ par $f(x,y) = (1-x)(1-y)(x+y-1)$.

1. Déterminer le gradient et la matrice Hessienne de f en tout $(x,y) \in \mathbb{R}^2$.
2. Déterminer les points critiques de f (*on en trouvera 4*), puis les extrémums locaux éventuels de f.
3. Y a-t-il des extrémums globaux ?

Exercice II- On cherche les extrémums de la fonction f définie par $f(x,y) = (x-2)^2 + (y-1)^2$ sur

$$D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \ ; \ x^2 + y^2 \leq 1, \ x + y \geq 1\}.$$

1. Représenter D. Justifier pourquoi f admet des extrémums sur D.
2. Écrire avec soin les relations de Kuhn-Tucker.
3. Trouver les extrémums de f et les points en lesquels ils sont atteints.
4. Interpréter géométriquement les résultats trouvés.

Exercice III- Un agriculteur dispose de 200 hectares pour y faire pousser du maïs et du colza. La maïs rapporte 600 euros à l'hectare et le colza 500 euros. Mais il doit respecter diverses contraintes environnementales :

- il ne pourra pas utiliser plus de 30 tonnes d'engrais en tout et pour tout ;
- il ne doit pas puiser plus de 200 000 m^3 d'eau pour l'arrosage de ses cultures.

Or, pour une année normale, l'agriculteur doit :

- puiser 2 000 m^3 d'eau et utiliser 100 kg d'engrais par hectare de maïs ;
- puiser 1 000 m^3 d'eau et utiliser 250 kg d'engrais par hectare de colza.

Il veut déterminer quelles quantités x_1 et x_2 de maïs et de colza il faut produire pour obtenir un gain maximal.

1. Modéliser ce problème de production. Faire un dessin et résoudre graphiquement le problème.
2. Déterminer, par la méthode du simplexe, quelles quantités de maïs et de colza il faut produire pour obtenir un gain maximal.
3. Écrire le programme dual, en donner les valeurs optimales et compléter le tableau du simplexe optimal pour le programme dual.
4. On reprend le problème initial, mais avec la fonction objectif $z = 600x_1 + px_2$ (p euros au lieu de 500 euros). Déterminer pour quels p les valeurs des variables pour l'optimum restent inchangées.
5. On revient aux prix de vente initiaux, mais le négociant dispose maintenant de q tonnes d'engrais (au lieu de 30). Étudier l'effet d'un tel changement en envisagent éventuellement une modification du graphique.

Exercice IV- Résoudre le Programme Linéaire en Nombres Entiers suivant :

$$\left\{\begin{array}{rrcrcc} \max z = & 4x_1 & + & 3x_2 & & \\ s.c. & 3x_1 & + & 4x_2 & \leq & 12 \\ & 4x_1 & + & 2x_2 & \leq & 9 \\ & x_1 & , & x_2 & \in & \mathbb{N} \end{array}\right.$$

On utilisera des résolutions graphiques et on représentera l'arbre correspondant.