Examen de Probabilités du 20 mars 2017

4 exercices indépendants (Durée : 2 heures)

Exercice I-

Une urne contient 2 boules blanches et 8 boules noires. Un joueur tire successivement, avec remise, 5 boules dans cette urne. Pour chaque boule blanche tirée, il gagne 2 points et pour chaque boules noire tirée, il perd 3 points. On note X la variable aléatoire représentant le nombre de boules blanches tirées et Y le nombre de points obtenus par le joueur.

1. Déterminer la loi de X, son espérance et sa variance.

2. Déterminer la loi de Y, son espérance et sa variance.

3. Le joueur fait maintenant n tirages avec remise dans cette urne. Soit Z_k la variable de Bernoulli qui vaut 1 si le joueur tire une boule blanche et 0 sinon. On pose $S_n = \sum_{k=1}^{n} Z_k$.

a) Montrer, en utilisant l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev, que, pour tout $a > 0$,

$$P\left(\left|\frac{S_n}{n} - \mathbb{E}(Z_1)\right| \geq a\right) \leq \frac{\text{Var}(Z_1)}{na^2}.$$

b) À partir de quel nombre n de tirages peut-on garantir, à plus de 95%, que la proportion de boules blanches obtenues sera comprise entre 0,15 et 0,25 ?

Exercice II-

On considère une suite (U_n) de variables aléatoires indépendantes de même loi uniforme $\mathcal{U}([0,1])$. On note $Y = \min\limits_{1\leq k\leq n} U_k$ et $Z = \max\limits_{1\leq k\leq n} U_k$.

1. Montrer que $P([Y \geq y] \cap [Z \leq q]) = (z-y)^n$ pour $0 \leq y \leq z \leq 1$.

2. Vérifier que $f_{Y,Z}(y,z) = -\frac{\partial}{\partial y}\frac{\partial}{\partial z}P([Y \geq y] \cap [Z \leq z])$ et en déduire que, pour $y, z \in \mathbb{R}$,

$$f_{Y,Z}(y,z) = n(n-1)(z-y)^{n-2}\mathbb{I}_{0\leq y\leq z\leq 1}.$$

3. En déduire que $f_Z(z) = nz^{n-1}\mathbb{I}_{[0,1]}(z)$ et que $\mathbb{E}(Z) = \frac{n}{n+1}$. Calculer $\text{Var}(Z)$.

4. Montrer que Y et $1-Z$ ont même loi et en déduire l'espérance et la variance de Y.

5. Montrer que $\mathbb{E}(Y/Z) = \frac{Z}{n}$ et retrouver $\mathbb{E}(Y)$ en utilisant la question 3.

6. Déterminer $\mathbb{E}(YZ/Z)$ puis calculer $\text{Cov}(Y,Z)$.

Exercice III-

Soit (X,Y) un vecteur aléatoire dans $\mathbb{R}^2$ de densité f définie par :

$$f(x,y) = e^{-x/(1-y)} \frac{x}{(1-y)^2} \mathbb{I}_{]0,+\infty[}(x) \, \mathbb{I}_{]0,1[}(y).$$

1. Montrer que X suit une loi exponentielle dont on donnera le paramètre.

2. Montrer que Y suit une loi uniforme.

3. Vérifier que la loi conditionnelle de X sachant $Y = y$ est une loi Gamma dont on précisera les paramètres. En déduire que $\mathbb{E}(X/Y) = 2(1-Y)$. Les variables X et Y sont-elles indépendantes ?

4. Montrer que la densité du couple $(U,V) = \left(\frac{X}{1-Y}, \frac{XY}{1-Y}\right)$ est g défine par :

$$g(u,v) = e^{-u} \, \mathbb{I}_{\Delta}(u,v) \text{ où } \Delta = \{(u,v) \in \mathbb{R}^2 \ ; \ 0 < v < u\}.$$

5. En déduire que U suit une loi Gamma dont on précisera les paramètres et déterminer la loi conditionnelle de V sachant $U = u$.

Exercice IV-

On suppose que l'on effectue n lancers indépendants d'une pièce de monnaie équilibrée et on note N_k, à valeurs dans Ω_n, le nombre de séries lors des k premiers lancers ($k \leq n$). Par exemple, si on prend $n = 11$ et si les lancers successifs donnent $\omega = \text{FFPPPPPFFPPP} \in \Omega_{11}$ (F désignant face et P pile), on a : $N_1(\omega) = N_2(\omega) = 1$, $N_3(\omega) = N_4(\omega) = N_5(\omega) = N_6(\omega) = 2$, $N_7(\omega) = N_8(\omega) = 3$ et $N_9(\omega) = N_{10}(\omega) = N_{11}(\omega) = 4$.

1. Déterminer les lois de N_1, N_2 et N_3 et donner leurs espérances.

2. Déterminer $N_n(\Omega_n)$, puis calculer les valeurs de $P([N_n = 1])$ et $P([N_n = n])$.

3. On pose, pour $n \in \mathbb{N}^*$ et pour $s \in [0,1]$, $G_n(s) = \sum_{k=1}^{n} P([N_n = k])s^k$.

a) Pour $s \in [0,1]$, comparer l'espérance de la variable aléatoire s^{N_n} avec $G_n(s)$. Que représente $G_n'(1)$?

b) Montrer que, pour tout $n \geq 2$ et tout $k \in [\![1, n]\!]$, on a :

$$P([N_n = k] \cap \mathrm{P}_n) = \frac{1}{2} P([N_{n-1} = k] \cap \mathrm{P}_{n-1}) + \frac{1}{2} P([N_{n-1} = k-1] \cap \mathrm{F}_{n-1})$$

et de même en intervertissant P et F. En déduire alors que :

$$P([N_n = k]) = \frac{1}{2} P([N_{n-1} = k]) + \frac{1}{2} P([N_{n-1} = k-1]).$$

c) Soit $n \geq 2$. Montrer que $G_n(s) = \frac{1+s}{2} G_{n-1}(s)$. Calculer $G_1(s)$ et en déduire que

$$G_n(s) = s \left(\frac{1+s}{2}\right)^{n-1}.$$

d) Déterminer le nombre moyen de séries dans les n lancers.
