M1 UE2

Espaces préhilbertiens : exercices du chapitre 7)

Résultats dans un espace préhilbertien

---

1. * Soit E un espace préhilbertien réel et n points $x_1, x_2, \cdots, x_n$ de E ($n \geq 2$). Établir la formule

$$\sum_{1 \leq i < j \leq n} \|x_i - x_j\|^2 = n \sum_{i=1}^{n} \|x_i\|^2 - \|\sum_{i=1}^{n} x_i\|^2.$$

---

2. *** Soit E euclidien et $\mathcal{A} = \{\alpha / \forall (x,y) \in E^2,\ \|x\| + \|y\| \leq \alpha \max(\|x-y\|,\ \|x+y\|)\}$.
a) Montrer que $\mathcal{A}$ est un intervalle inclus dans $[1, +\infty[$.
b) Si $\dim E = 1$, montrer que $\mathcal{A} = [1, +\infty[$.
c) Si $\dim E \geq 2$, montrer que $\mathcal{A} = [\sqrt{2}, +\infty[$.

---

3. * Soit E euclidien, F un sous-espace vectoriel de E et $x \in E$. Montrer que x est orthogonal à F si, et seulement si, $\|x\| \leq \|x - y\|$ pour tout $y \in F$.

---

4. *** Soit, dans E préhilbertien, $(e_1, \cdots, e_n)$ libre et telle que, pour tout $x \in E$, $\|x\|^2 = \sum_{i=1}^{n} |(e_i|x)|^2$. Montrer que cette famille est une base orthonormale de E.

---

5. ** Soit E euclidien et $e_1, \ldots, e_n$ des vecteurs de E tels que $\|x\|^2 = \sum_{i=1}^{n} (x|e_i)^2$ pour tout $x \in E$.
a) On suppose que les e_i sont unitaires : montrer que $(e_1, \ldots, e_n)$ est une base orthonormale de E.
b) On suppose que $\dim(E) = n$.
i) Montrer que $(e_1, \ldots, e_n)$ est une base de E. En déduire que la matrice $[(e_i|e_j)]_{1 \leq i,j \leq n}$ est inversible.
ii) Montrer que, pour tout $(x,y) \in E^2$, $(x|y) = \sum_{i=1}^{n} (x|e_i)(y|e_i)$. En déduire que $(e_1, \ldots, e_n)$ est une base orthonormale de E.

---

6. * Soit E un espace vectoriel euclidien de dimension n et soit $(a_i)_{1 \leq i \leq p} \in E^p$. Soit $f : E \to E,\ x \mapsto \sum_{i=1}^{p} (x|a_i) a_i$. Montrer que f est bijective si et seulement si $(a_i)_{1 \leq i \leq p}$ est génératrice.

---

7. ** Soit E un espace préhilbertien réel et $(e_1, \cdots, e_p)$ une famille d'éléments de E telle que $p \geq 2$ et $(e_i|e_j) < 0$ pour $1 \leq i < j \leq p$. Montrer que toute sous-famille à $p-1$ termes de cette suite est libre [on pourra commencer par montrer que $\sum_{k=1}^{p-1} \lambda_k e_k = 0$ implique $\sum_{k=1}^{p-1} |\lambda_k| e_k = 0$].

$\boxed{\textbf{8.}}$ *** Soit E euclidien et $f \in \mathcal{L}(E)$ tel que $\|f(x)\| \leq \|x\|$ pour tout $x \in E$. Montrer que $E = \ker(f - id_E) \oplus \operatorname{im}(f - id_E)$.

Produits scalaires, familles orthonormalisées

$\boxed{\textbf{9.}}$ * Soit $n \geq 2$ et $E = \{P \in \mathbb{R}_n[X]/P(0) = P(1) = 0\}$.

a) Montrer que E est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}_n[X]$, et en donner la dimension.

b) Soit, pour $P \in E$, $\phi(P) = -\int_{[0,1]} PP''$. Montrer que $\sqrt{\phi}$ est une norme euclidienne.

$\boxed{\textbf{10.}}$ ** Soit $E = \mathcal{C}^\infty([a,b], \mathbb{R})$.

a) Montrer que $(f,g) \mapsto \int_{[a,b]} [fg + f'g'] = (f|g)$ est un produit scalaire sur E.

b) Trouver les orthogonaux des deux sous-espaces vectoriels suivants :

i) $F = \{f \in E / \int_{[a,b]} f = 0\}$.

ii) $G = \{f \in E / f(a) = f(b) = 0\}$.

$\boxed{\textbf{11.}}$ * Soit $\varphi : (\mathbb{R}[X])^2 \to \mathbb{R}$, $(f,g) \mapsto f(0)g(0) + \int_0^1 f'(t)g'(t)dt$.

a) Montrer que φ est un produit scalaire.

b) Trouver 3 polynômes P_0, P_1, P_2 de degrés respectifs 0, 1, et 2 formant une base orthonormale pour φ.

c) Cette base est-elle orthonormale pour $\psi(f,g) = \int_0^1 f(t)g(t)dt$?

$\boxed{\textbf{12.}}$ ** Soit $E = \{f \in \mathcal{F}([-1,1], \mathbb{R}) / f_{|[-1,0]}$ et $f_{|[0,1]}$ soient affines $\}$.

a) Montrer que E est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{F}([-1,1], \mathbb{R})$, qui est de dimension 3 et dont une base est $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3)$, où $e_1(x) = 1$, $e_2(x) = x$ et $e_3(x) = |x|$.

b) Montrer que $(f,g) \mapsto \int_{[-1,1]} fg$ est un produit scalaire sur E et orthonormaliser $\mathcal{B}$ pour ce produit scalaire.

Projecteurs orthogonaux

$\boxed{\textbf{13.}}$ * On se place dans l'espace vectoriel euclidien $\mathbb{R}^3$. Soit $V_t = \operatorname{vect}((1,1,1),(1,t,t^2))$, P_t la projection orthogonale sur V_t et M_t la matrice qui lui est canoniquement associée.

a) Que dire de $\operatorname{tr}(M_t)$?

b) Calculer M_t en distinguant deux cas.

$\boxed{\textbf{14.}}$ * Dans $\mathbb{R}^4$ euclidien canonique, soit $F \left\{ \begin{array}{l} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 0 \\ x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 4x_4 = 0 \end{array} \right.$. Donner $\dim F$ et une base orthonormale de F, ainsi que $p_F(x)$ pour $x \in \mathbb{R}^4$.

$\boxed{\textbf{15.}}$ * Trouver la matrice canoniquement associée au projecteur orthogonal de $\mathbb{R}^3$ sur le plan engendré par les vecteurs $(2,1,0)$ et $(1,0,-1)$.

Problèmes de distance

16. * Soit $F = \{P \in \mathbb{R}_3[X] / P(0) = P'(0) = 0\}$. Trouver $\inf_{P \in F} \int_0^1 [2 + 3t - P(t)]^2 dt$ et $\inf_{P \in F} \int_{-1}^1 [2 + 3t - P(t)]^2 dt$.

17. ** Soit $E = \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$, muni de $(A|B) = \mathrm{tr}({}^tAB)$. Pour $A \in E$, trouver $d(A, F)$ dans les deux cas suivants :

a) $F = \mathbb{R}I_2$.

b) $F = \mathcal{S}_2(\mathbb{R})$, sous-espace vectoriel des matrices symétriques.

18. * Trouver $\inf_{(a,b) \in \mathbb{C}^2} \int_0^1 |x^2 + ax + b|^2 dx$.

19. * Trouver $m = \min_{(a,b) \in \mathbb{R}^2} \int_0^\pi [\sin(t) - at^2 - bt]^2 dt$.

20. * Trouver $\min_{(a,b) \in \mathbb{R}^2} \int_0^1 [t \ln t - at - b]^2 dt$.

Inégalités

21. * Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Montrer que $\mathrm{tr}({}^tAA) \geq 0$ et $|\mathrm{tr} A| \leq \sqrt{n \mathrm{tr}^t AA}$. Cas d'égalité ?

22. ** Pour $A = (a_{ij}) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, on pose $\|A\|_2 = \sum_{i,j} |a_{ij}|^2$.

a) Montrer que, pour $(A, B) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})^2$, $\|AB\|_2 \leq \|A\|_2 \|B\|_2$.

b) Trouver les matrices pour lesquelles $\|AB\|_2 = \|A\|_2 \|B\|_2$.

23. ** a) Soit $a \in \mathbb{R}$. Justifier l'existence d'un unique $P_a \in \mathbb{R}_3[X]$ tel que $P(a) = \int_{-1}^1 P(t) P_a(t)\, dt$ pour tout $P \in \mathbb{R}_3[X]$ et calculer P_a.

b) Soit $P \in \mathbb{R}_3[X]$ tel que $\int_{-1}^1 P(t)^2 dt = 1$. Montrer que $\sup_{x \in [-1,1]} |P(x)| \leq 2\sqrt{2}$.