Convergence

Inégalité de Bienaymé-Tchebitchev : $P([|X| > \varepsilon]) \leq \frac{1}{\varepsilon^2}\mathbb{E}(X^2)$

Convergences

• $(X_n)_n$ converge en probabilité vers X si $\lim\limits_{n\to+\infty} P([|X_n - X| > \varepsilon]) = 0$ pour tout $\epsilon > 0$.

• $(X_n)_n$ converge en loi vers X si $\lim\limits_{n\to+\infty} F_{X_n}(x) = F_X(x)$ pour tout x en lequel F_X est continue, ce qui équivaut à $\Phi_{X_n}(t) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \Phi_X(t)$ pour tout t lorsque Φ_X est continue en 0 (ou bien à $G_{X_n}(s) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} G_X(s)$ pour tout $s \in]-1,1[$, mais ceci seulement si X_n et X sont entières), où l'on a posé $\Phi_X(t) = \mathbb{E}(e^{itX})$ (et $G_X(s) = \mathbb{E}(s^X)$).

• $(X_n)_n$ converge en moyenne quadratique vers X si $\lim\limits_{n\to+\infty} \mathbb{E}((X_n - X)^2) = 0$.

• $(X_n)_n$ converge presque sûrement vers X si $P(C) = 0$ où $C = \{\omega\ ;\ X_n(\omega) \not\to X(\omega)\}$.

Propriété : La convergence p.s. et la convergence m.q. entraînent la convergence en probabilité, qui entraîne la convergence en loi.
La convergence en loi vers une variable aléatoire constante équivaut à la convergence en probabilité vers cette constante.

Propriété : Si $X_n \to X$, $Y_n \to Y$ p.s. (resp. en probabilité) et si $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ est continue, alors $g(X_n, Y_n) \to g(X, Y)$ p.s. (resp. en probabilité).

Th de Scheffé : Si pour tout n, X_n est absolument continue de densité f_{X_n}, si Q est absolument continue de densité f et si $f_{X_n} \to f$, alors $(X_n)_n$ converge en loi vers une variable X de loi Q.

Loi forte des grands nombres : Si $(X_n)_n$ est une suite de v.a.r. indépendantes de même loi, d'ordre 2 et d'espérance m, si $Z_n = \frac{1}{n}(X_1 + \cdots + X_n)$, alors $(Z_n)_n$ converge p.s. vers m.

Théorème Central Limite : Si $(X_n)_n$ est une suite de v.a.r. indépendantes de même loi d'espérance μ et de variance σ^2, si $Z_n = \frac{1}{n}(X_1 + \cdots + X_n)$, alors $\left(\frac{\sqrt{n}(Z_n - \mu)}{\sigma}\right)_n$ converge en loi vers une variable V de loi Normale $\mathcal{N}(0,1)$.

Approximations

• de la loi hypergéométrique $\mathcal{H}(n, Np, N)$ par la loi binomiale $\mathcal{B}(n,p)$ si $N \geq 10n$.

• de la loi binomiale $\mathcal{B}(n,p)$ par la loi de Poisson $\mathcal{P}(np)$ si $p \leq 0,1$, $n \geq 30$ et $np < 15$.

• de la loi de Poisson $\mathcal{P}(\lambda)$ par la loi normale $\mathcal{N}(\lambda,\lambda)$ si $\lambda \geq 15$.

• de la loi binomiale $\mathcal{B}(n,p)$ par la loi normale $\mathcal{N}(np, np(1-p))$ si $n \geq 30$, $np \geq 15$ et $np(1-p) > 5$.

Exercices Chapitre 9

---

1. * Déterminer la fonction génératrice d'une v.a. Z de loi de Poisson $\mathcal{P}(\lambda)$ et d'une v.a. X_n de loi Binomiale $\mathcal{B}(n, p_n)$.
Montrer que, si $\lim\limits_n p_n = 0$ et si $\lim\limits_n np_n = \lambda$, la suite $(X_n)_n$ converge en loi vers Z.

Application : Une entreprise fabrique des produits dont 1% sont défectueux ; les produits sont vendus par paquets de 100 et garantis à 98%. Quelle est la probabilité p que cette garantie tombe en défaut ?

---

2. ** Soit X_n une v.a.r. de loi binomiale négative de paramètres n et p_n définie, pour tout $k \in \mathbb{N}$, par :

$$P([X_n = k]) = C_{n+k}^k p_n^n (1 - p_n)^k$$

On suppose que $\lim_{n\to\infty} n(1 - p_n) = \lambda > 0$.

Montrer que la suite $(X_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge en loi vers une v.a.r. de loi de Poisson $\mathcal{P}(\lambda)$.

---

3. ** Déterminer la fonction caractéristique d'une v.a. Z de loi uniforme sur $[0, 1]$ et d'une v.a. discrète X_n de loi équiprobable sur $\left\{0, \frac{1}{n}, \cdots, \frac{n-1}{n}, 1\right\}$.

Montrer que la suite $(X_n)_n$ converge en loi vers Z.

---

4. * Soit f la densité d'une v.a.r. absolument continue X et soit f_n la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f_n(t) = nf(nt)$$

(a) Montrer que f_n est une densité.

(b) Soit X_n une v.a.r. absolument continue de densité f_n. Montrer que la suite de v.a.r. $(X_n)_{n\geq 1}$ converge en loi vers la v.a.r. nulle.

---

5. ** Soit $\alpha \in]0, 1[$ et $(X_n)_{n\geq 1}$ une suite de v.a.r. de lois géométriques $\mathcal{G}(\alpha/n)$.

Montrer que la suite $(\frac{X_n}{n})_{n\geq 1}$ converge en loi vers une v.a.r. dont on précisera la loi.

---

6. ** Soit $(X_n)_{n\geq 1}$ une suite de v.a.r. indépendantes de même loi de Poisson $\mathcal{P}(\lambda)$.

(a) Déterminer la loi de $U_n = X_1 + \cdots + X_n$ et calculer $P([U_n \leq n])$.

(b) On pose $Z_n = \frac{U_n - \lambda n}{\sqrt{\lambda n}}$. Montrer que la suite $(Z_n)_{n\geq 1}$ converge en loi vers une v.a.r. dont on précisera la loi. En remarquant que l'on a :

$$P([U_n \leq n]) = P\left(\left[Z_n \leq \frac{(1-\lambda)n}{\sqrt{\lambda n}}\right]\right)$$

en déduire :

$$\lim_{n\to\infty} e^{-n} \sum_{k=0}^{n} \frac{n^k}{k!} = \frac{1}{2}$$

7. * Soit X une v.a.r. à valeurs dans $[1,+\infty[$. On suppose qu'il existe un réel λ strictement positif tel que, pour tout $x \geq 1$, on ait $P([X \geq x]) = x^{-\lambda}$.

(a) Montrer que les v.a.r. X et $Y = \ln X$ sont absolument continues et déterminer leur densité.

(b) Soit $(X_n)_{n\geq 1}$ une suite de v.a.r. indépendantes de même loi que X et soit $U_n = (X_1 X_2 \cdots X_n)^{1/n}$. Montrer que les suites $(\ln U_n)_{n\geq 1}$ et $(U_n)_{n\geq 1}$ convergent en loi.

---

8. ** Soit $(X_n)_{n\geq 1}$ une suite de v.a.r. indépendantes de même loi de Bernoulli $\mathcal{B}(1/2)$. On pose:

$$T_n = \sum_{i=1}^{n} \frac{X_i}{2^i}$$

Montrer que $(T_n)_{n\geq 1}$ converge en loi vers une v.a.r. de loi uniforme sur $[0,1]$.

---

9. * Soit $(X_n)_{n\geq 1}$ une suite de v.a.r. telles que $X_n(\Omega) = [1,n]$ et $P([X_n = k]) = \lambda_n k$.

(a) Déterminer λ_n.

(b) Quelle est la limite en loi de la suite $(Y_n)_{n\geq 1}$ où $Y_n = \frac{X_n}{n}$?

---

10. ** Un sac contient 100 billes dont 36 sont rouges et les autres sont bleues. Une épreuve consiste à tirer 16 fois de suite une bille avec remise. Soit X la v.a.r. égale au nombre de boules rouges tirées.

Estimer $P([|X - \mathbb{E}(X)| \geq 2\sqrt{V(X)}])$.

---

11. ** Une urne contient 3 boules numérotées 1, 2, 3. On effectue une suite de 100 tirages indépendants avec remise. On note X_i le numéro de la boule tirée au i-ème tirage et on pose $S = \sum_{i=1}^{100} X_i$.

Indiquer le plus petit nombre s que l'on peut trouver au moyen du théorème de la limite centrale tel que:

$$P([200 - s \leq S \leq 200 + s]) \geq 0,9$$

---

12. * Une enquète statistique portant sur 100 000 automobilistes débutants a révélé que 10 d'entre eux avaient provoqué un accident mortel dans leur première année de conduite.
On choisit 100 débutants au hasard et on désigne par X le nombre d'entre eux qui ont provoqué un accident mortel au cours de leur première année de conduite.

Calculer $P([X = 0])$ et $P([X = 2])$.

---

13. ** Un joueur lance une pièce équilibrée. Lorsqu'il obtient "pile", il gagne 1euro et lorsqu'il obtient "face", il perd 1euro.
Quel est le nombre maximal de lancers à effectuer pour que le joueur ait 95% de chances de perdre au plus 20euros ?

---

14. *** À la veille d'une élection, 49% de la population votent pour A et 51% votent pour B. On effectue une enquète sur $2n+1$ personnes afin de pouvoir faire un pronostic sur le résultat des élections.

(a) Quelle est la probabilité p_n pour que le pronostic soit faux?

(b) Montrer que pour n assez grand, il existe a_n tel que $p_n \simeq \Phi(a_n)$.

(c) Déterminer n pour que $p_n \geq 0,1$.

---

15. * Un dé régulier est lancé 9000 fois.

Déterminer la probabilité d'obtenir entre 1400 et 1600 fois la face 6.

---

16. * On dispose de 1000 pots de peinture. La probabilité qu'un pot soit défectueux est de 0,2%.

Donner la probabilité qu'au moins 4 pots soient défectueux.

---

17. * On fait n parties de "pile ou face".

A l'aide de l'approximation Normale de la loi Binomiale, déterminer n pour que l'on puisse affirmer que la fréquence d'apparition de "pile" soit comprise entre 0,45 et 0,55 avec une probabilité au moins égale à 0,9.

---

18. ** Une entreprise compte 300 employés. Chacun d'eux téléphone en moyenne 6 minutes par heure.

Quelle est le nombre de lignes que l'entreprise doit installer pour que la probabilité que toutes les lignes soient utilisées au même instant soit au plus égale à 0,025 ?

---

19. *** On procède à des lancers successifs d'une paire de dés non pipés. Soit X_i la v.a.r. égale à la somme des 2 numéros obtenus à la suite du i-ème lancer.

Combien de lancers sont nécessaires pour obtenir avec une probabilité supérieure à 0,95 une moyenne des résultats X_i différant de 7 de moins de 0,1?

---

20. * Dans un programme de calcul, on décide d'utiliser k chiffres significatifs après la virgule et d'arrondir tous les résultats à $\frac{1}{2}10^{-k}$ près. On suppose que l'on effectue 10^6 opérations successives, que les erreurs commises pour chacune sont indépendantes, de loi uniforme sur $[-a, a]$, où $a = \frac{1}{2}10^{-k}$. On note S l'erreur commise sur le résultat final et on veut calculer $P([|S| \leq 10^3 a])$.

Soit X_i l'erreur commise à la i-ème opération (donc $S = \sum\limits_{i=1}^{10^6} X_i$).

En considérant 10^6 comme "grand", montrer que $\frac{\sqrt{3}S}{10^3 a}$ suit approximativement la loi Normale $\mathcal{N}(0,1)$ et conclure.

---

21. ** Soit f définie sur $[a,b]$, à valeurs dans $[m,M] \subset \mathbb{R}_+$.
On note $D = [a,b] \times [m,M]$, $A = \{(x,y) \in D \; ; \; f(x) \geq y\}$ et $p = \frac{\textit{aire de } A}{\textit{aire de } D}$.
Pour $k \in \mathbb{N}^*$, on considère un couple de v.a. (X_k, Y_k) de loi uniforme sur D, et on définit Z_k par : $Z_k = \begin{cases} 1 \text{ si } Y_k \leq f(X_k) \\ 0 \text{ sinon.} \end{cases}$. On pose $\overline{Z_n} = \frac{Z_1 + \cdots + Z_n}{n}$.
Les v.a. $X_1, \cdots, X_n, \cdots, Y_1, \cdots, Y_n, \cdots$ sont supposées indépendantes.

(a) Calculer $\mathbb{E}(Z_k)$, $\mathrm{var}(Z_k)$, $\mathbb{E}(\overline{Z_n})$, $\mathrm{var}(\overline{Z_n})$.

(b) En utilisant la loi des grands nombres, montrer que $\overline{Z_n} \to p$.

(c) Avec l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev, trouver n tel que $P\left(\left[|\overline{Z_n} - p| > \frac{1}{100}\right]\right) < \frac{5}{100}$.

(d) Avec le théorème central limite, déterminer pour n "grand" la loi approximative de $\overline{Z_n}$.

---

22. *** Un point matériel se déplace dans $\mathbb{R}^2$ en effectuant à chaque instant n, un trajet de longueur a fixée dans une direction choisie arbitrairement. Ainsi, si les v.a. X_n et Y_n sont les coordonnées du point à l'instant n, on a $\begin{cases} X_{n+1} - X_n = a\cos\Theta_{n+1} \\ Y_{n+1} - Y_n = a\sin\Theta_{n+1} \end{cases}$, où les v.a. Θ_n sont indépendantes de loi uniforme sur $[0, 2\pi[$. On suppose que $X_0 = Y_0 = 0$.

(a) Calculer $\mathbb{E}(\cos\Theta_k)$, $\mathbb{E}(\sin\Theta_k)$, $\mathbb{E}(\cos^2\Theta_k)$, $\mathrm{var}(\cos\Theta_k)$. En déduire $\mathbb{E}(X_n)$, $\mathbb{E}(Y_n)$, $\mathrm{var}(X_n)$, $\mathrm{var}(Y_n)$, $\mathrm{cov}(X_n, Y_n)$.

(b) On suppose maintenant n "grand", et on pose $\begin{cases} X_n = R_n \cos T_n \\ Y_n = R_n \sin T_n \end{cases}$. Déterminer la loi approximative de (X_n, Y_n) [*On généralisera le Théorème Central Limite*]. En déduire celle de (R_n, T_n), celle de R_n et celle de T_n. Calculer $\mathbb{E}(R_n)$, $\mathrm{var}(R_n)$ et $P([R_n > r])$.
