CHAPITRE 3

VARIABLES ALEATOIRES
LOIS DE PROBABILITE CLASSIQUES

I- GENERALITES.

Soit $\mathcal{E}$ une expérience aléatoire et $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ l'espace probabilisé qui en rend compte.
Il arrive très souvent qu'à chaque résultat de $\mathcal{E}$, on associe une valeur numérique : on définit ainsi une application X de Ω vers $\mathbb{R}$.
On sera amené à considérer l'ensemble des résultats $\omega \in \Omega$ tel que $X(\omega) = a$, ou encore $X(\omega) < a$, ou encore $X(\omega) \in [a, b[$... Mais, pour pouvoir considérer la probabilité de ces ensembles, il faut que ceux-ci soient dans la tribu $\mathcal{A}$.

Notations :

1) $X^{-1}(I) = \{\omega \in \Omega \; ; \; X(\omega) \in I\}$ noté par commodité $(X \in I)$.
On écrira ainsi $[a < X \leq b]$ pour $X^{-1}(]a, b])$; $[X \leq x]$ pour $X^{-1}(] - \infty, x])$ et $[X = x]$ pour $X^{-1}(\{x\})$.
2) Si $A \subset \Omega$, $X(A) = \{X(\omega) \; ; \; \omega \in A\}$; ainsi $X(\Omega)$ désigne l'ensemble des valeurs susceptibles d'être prises par X.

D1 : Soit $(\Omega, \mathcal{A})$ un espace probabilisable. On appelle variable aléatoire réelle (en abrégé v.a.r.) toute application X de Ω vers $\mathbb{R}$ telle que $X^{-1}(I) \in \mathcal{A}$ pour tout intervalle I de $\mathbb{R}$.

Cas particulier important : Si $\mathcal{A} = \mathcal{P}(\Omega)$, toute application de Ω vers $\mathbb{R}$ est une v.a.r..

D2 : On appelle variable aléatoire réelle toute application X de Ω vers $\mathbb{R}$ telle que, pour tout $x \in \mathbb{R}$, on ait $[X \leq x] \in \mathcal{A}$.

TH1 : Les définitions 1 et 2 sont équivalentes.

II- FONCTIONS DE REPARTITION.

D3 : Soit X une v.a.r. définie sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, P)$. On appelle fonction de répartition de X l'application F_X de $\mathbb{R}$ sur $\mathbb{R}$ définie par $F_X(x) = P([X \leq x])$.

Propriétés :
1) Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $F_X(x) \in [0, 1]$;
2) F_X est croissante ;
3) F_X est continue à droite ;
4) $\lim\limits_{x \to -\infty} F_X(x) = 0$; $\lim\limits_{x \to +\infty} F_X(x) = 1$;
5) pour tout $(a, b) \in \mathbb{R}^2$, si $a < b$, alors $P([a < X \leq b]) = F_X(b) - F_X(a)$;
6) $P([X = x]) = F_X(x) - F_X(x_-)$ ($= 0$ si F_X est continue en x).

Recommandation : L'étude d'une v.a.r. commence toujours par la détermination de l'ensemble $X(\Omega)$ des valeurs prises par X.

III V.A.R. DISCRETES.

D4 : Une v.a.r. X sur $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ est dite discrète si $X(\Omega)$ est fini ou dénombrable.

On note $X(\Omega) = \{x_1, \cdots, x_n\}$ ou bien $X(\Omega) = \{x_i \; ; \; i \in \mathbb{N}\}$ et $p_i = P([X = x_i])$.

D5 : On appelle loi de probabilité d'une v.a.r. discrète X, l'ensemble des couples (x_i, p_i).

Fonction de répartition : $F_X(x) = \sum_{i; x_i \leq x} p_i$.
La fonction F_X est une fonction en escalier, présentant des sauts de p_i en chaque x_i.

Loi d'une fonction d'une v.a.r. :

TH2 : Soit X une v.a.r. discrète et g une fonction numérique définie sur $X(\Omega)$; alors $Y = g(X)$ est une v.a.r. discrète vérifiant $Y(\Omega) = g(X(\Omega))$ et, pour tout $y \in Y(\Omega)$, on a :

$$P([Y = y]) = \sum_{x_i; g(x_i) = y} P([X = x_i]).$$

Lois discrètes classiques.

1) Lois discrètes finies.

a) Loi de Bernoulli $\mathcal{B}(p)$ (ou $\mathcal{B}(1, p)$) :

$$X(\Omega) = \{0, 1\} \; ; \; P([X = 1]) = p \; ; \; P([X = 0]) = 1 - p.$$

b) Loi binomiale $\mathcal{B}(n, p)$:

$$X(\Omega) = \{0, \cdots, n\} \; ; \; P([X = k]) = C_n^k p^k (1 - p)^{n-k} \text{ pour tout } k \in X(\Omega).$$

c) Loi hypergéométrique $\mathcal{H}(n, M, N)$:

$$X(\Omega) = \{\max(0, \; n - N + M), \cdots, \min(n, \; M)\} \; ; \; P([X = k]) = \frac{C_M^k C_{N-M}^{n-k}}{C_N^n} \text{ pour tout } k \in X(\Omega).$$

d) Loi équiprobable $\mathcal{U}(\{x_1, \cdots, x_n\})$:

$$X(\Omega) = \{x_1, \cdots, x_n\} \; ; \; P([X = x_k]) = \frac{1}{n} \text{ pour tout } x_k \in X(\Omega).$$

2) Lois discrètes infinies.

a) Loi géométrique sur $\mathbb{N}^*$ $\mathcal{G}(p)$ (ou $\mathcal{P}(1, p)$) :

$$X(\Omega) = \mathbb{N}^* \; ; \; P([X = k]) = p(1 - p)^{k-1} \text{ pour } k \in \mathbb{N}^*.$$

b) Loi de Pascal $\mathcal{P}(r, p)$:

$$X(\Omega) = \mathbb{N} \setminus \{0, \cdots, r - 1\} \; ; \; P([X = k]) = C_{k-1}^{r-1} p^r (1 - p)^{k-r} \text{ pour } k \geq r.$$

c) Loi géométrique sur $\mathbb{N}$ $\mathcal{G}_0(p)$ (ou $\mathcal{BN}(1, p)$) :

$$X(\Omega) = \mathbb{N} \; ; \; P([X = k]) = p(1 - p)^k \text{ pour } k \in \mathbb{N}.$$

d) Loi binomiale négative $\mathcal{BN}(r,p)$:

$$X(\Omega) = \mathbb{N}\ ;\ P([X=k]) = C_{k+r-1}^{r-1} p^r (1-p)^k \text{ pour } k \in \mathbb{N}.$$

e) Loi de Poisson $\mathcal{P}(\lambda)$:

$$X(\Omega) = \mathbb{N}\ ;\ P([X=k]) = \exp(-\lambda)\frac{\lambda^k}{k!} \text{ pour } k \in \mathbb{N}.$$

IV- V.A.R. ABSOLUMENT CONTINUES

D6 : Une v.a.r. X de fonction de répartition F_X est dite <u>absolument continue</u> s'il existe une fonction numérique f définie sur $\mathbb{R}$, appelée <u>densité</u> de X telle que :
i) $f(x) \geq 0$ pour tout $x \in \mathbb{R}$;
ii) f est continue sur $\mathbb{R}$, sauf peut-être en un nombre fini de points en lesquels elle admet des limites à droite et à gauche ;
iii) $\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)dt$ existe et vaut 1 ;
iv) $F_X(x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)dt$.

Remarques :
1) La connaissance de f détermine entièrement F_X mais la connaissance de F_X ne détermine pas f de façon unique : on peut modifier à son gré f sur un ensemble fini sans changer $\int_{-\infty}^{x} f(t)dt$.
2) Si X est une v.a.r. absolument continue, alors F_X est continue, mais la réciproque est fausse.
3) Il existe des v.a.r. qui ne sont ni discrètes, ni absolument continues (celles, par exemple, dont la fonction de répartition est strictement croissante et présente des sauts en certains points).

Comment reconnaître la fonction de répartition d'une v.a.r. absolument continue ?

Une fonction de répartition F est celle d'une v.a.r. X absolument continue si F est continue sur $\mathbb{R}$, dérivable sur $\mathbb{R} \setminus I$, où I est un sous-ensemble fini de $\mathbb{R}$, si F' est continue sur $\mathbb{R} \setminus I$ et si F' admet des limites à droite et à gauche en tout point de I.

<u>Lois absolument continues classiques.</u>

Rappel : Si I est un sous-ensemble de $\mathbb{R}$, alors $\mathbb{1}_I(x) = \begin{cases} 1 \text{ si } x \in I \\ 0 \text{ si } x \notin I \end{cases}$.

a) Loi uniforme $\mathcal{U}([a,b])$ **:**

$$\text{loi de densité } f \text{ définie par } f(x) = \tfrac{1}{b-a}\mathbb{1}_{[a,b]}(x).$$

b) Loi exponentielle $\mathcal{E}(\lambda)$ **:**

$$\text{loi de densité } f \text{ définie par } f(x) = \lambda\exp(-\lambda x)\mathbb{1}_{]0,+\infty[}(x).$$

c) Loi Gamma $\Gamma(a,\lambda)$ **:**

$$\text{loi de densité } f \text{ définie par } f(x) = \tfrac{\lambda^a}{\Gamma(a)}\exp(-\lambda x)x^{a-1}\mathbb{1}_{]0,+\infty[}(x) \text{ où } \Gamma(a) = \int_0^{+\infty} \exp(-t)t^{a-1}dt.$$

d) Loi Beta $B(a,b)$ **:**

$$\text{loi de densité } f \text{ définie par } f(x) = \tfrac{1}{B(a,b)}x^{a-1}(1-x)^{b-1}\mathbb{1}_{]0,1[}(x) \text{ où } B(a,b) = \tfrac{\Gamma(a)\Gamma(b)}{\Gamma(a+b)}.$$

e) Loi de Cauchy $\mathcal{C}(\alpha)$ **:**

$$\text{loi de densité } f \text{ définie par } f(x) = \tfrac{\alpha}{\pi(\alpha^2+x^2)}.$$

f) Loi Normale $\mathcal{N}(m, \sigma^2)$:

$$\text{loi de densité } f \text{ définie par } f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{(x-m)^2}{2\sigma^2}\right).$$

TH3 : Une v.a.r. X a pour loi la loi normale $\mathcal{N}(m, \sigma^2)$ si et seulement si $X^* = \frac{X-m}{\sigma}$ est une v.a.r. de loi normale $\mathcal{N}(0, 1)$.

Conséquence : Tout calcul de probabilité faisant intervenir la loi normale $\mathcal{N}(m, \sigma^2)$ se ramène à un calcul faisant intervenir la loi normale $\mathcal{N}(0, 1)$.

TH4 : Soit X une v.a.r. de loi normale $\mathcal{N}(0, 1)$, de fonction de répartition Φ. Alors :
1) pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\Phi(x) = 1 - \Phi(-x)$; en particulier $\Phi(0) = \frac{1}{2}$;
2) pour tout $x \in \mathbb{R}$, $P([|X| \leq x]) = 2\Phi(x) - 1$ et $P([|X| \geq x]) = 2(1 - \Phi(x))$.

Formule à retenir : $\int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{e}^{-\frac{t^2}{2}} dt = \sqrt{2\pi}$ (ne pas chercher à calculer!)

Exercices chapitre 3

Fonctions de répartition

63. * On lance 2 dés et on appelle X la somme des points obtenus. Donner la représentation graphique de la fonction de répartition de X. (On précisera, en particulier les points de discontinuité et leur nature).

64. * On considère la fonction F définie sur $\mathbb{R}$ par:
$F(x) = 0$ si $x < 0$; $F(x) = x/8$ si $0 \leq x < 2$; $F(x) = x/4$ si $2 \leq x < 4$; $F(x) = 1$ si $x \geq 4$.
Tracer la représentation graphique de F et montrer que F peut être considérée comme la fonction de répartition d'une v.a.r. X .

65. * Soient $a, b \in \mathbb{R}$ tels que $a < b$.
Exprimer $P([a < X < b])$, $P([a < X < b])$, $P([a \leq X \leq b])$, $P([a \leq X < b])$ à l'aide de F_X .

66. ** Trois urnes A, B et C contiennent respectivement 1 boule blanche et 3 noires, 2 blanches et 2 noires, 3 blanches et 1 noire. On tire au hasard une boule dans chacune des 3 urnes, et on désigne par X le nombre de boules blanches obtenues.
Donner la loi de X et sa fonction de répartition.

67. * Montrer que la fonction F définie par:

$$F(x) = \mathrm{e}^x/2\mathbb{1}_{]-\infty,0[}(x) + \mathbb{1}_{[0,+\infty[}(x)$$

est une fonction de répartition. La fonction F' est-elle une densité de probabilité ?

68. ** Déterminer $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ tel que la fonction F définie par:

$$F(x) = \frac{a(x+4)}{b+|x|}\mathbb{1}_{]-4,+\infty[}(x)$$

soit une fonction de répartition.

Variables aléatoires discrètes

69. * Soit X une v.a.r. discrète prenant les valeurs 3, 4, 5 et 6. Déterminer la loi de probabilité de X sachant que:

$$P([X < 5]) = 1/3 \ ; \ P([X > 5]) = 1/2 \ ; \ P([X = 3]) = P([X = 4]).$$

70. * A et B sont deux avions ayant respectivement 4 et 2 moteurs. Chaque moteur a la probabilité p de tomber en panne et les moteurs sont indépendants les uns des autres.
Sachant que chaque avion arrive à destination si moins de la moitié de ses moteurs tombent en panne, quel avion choisissez-vous ?

71. ** Deux joueurs lancent une pièce de monnaie parfaitement équilibrée, n fois chacun. Calculer la probabilité qu'ils obtiennent le même nombre de fois "pile" .

72. *** On tire 9 cartes dans un jeu de 52 cartes. On appelle X la v.a.r. égale au nombre de carrés obtenus.
Trouver la loi de X .

73. ** Une urne contient 5 boules toutes distinctes. On tire 3 boules une à une avec remise. Soit X la v.a.r. égale au nombre de boules différentes tirées.
Déterminer la loi de X .

74. ** Une urne contient n boules numérotées de 1 à n. Déterminer la loi de la v.a.r. X dans les cas suivants:

(1) On tire k boules au hasard ; X est le plus petit numéro obtenu.

(2) On tire successivement 3 boules, sans remise ; X est le numéro de la 3-ième boule tirée.

(c) On tire 3 boules au hasard ; X est le numéro intermédiaire.

---

75. *** Une urne contient des jetons numérotés de 1 à n. On tire tous les jetons successivement et sans remise. Soit $p \leq n$. Quelle est la probabilité de tirer les jetons numérotés de 1 à p :

(a) dans l'ordre des numéros et consécutivement ?

(b) dans l'ordre ?

---

76. *** Une urne contient des boules numérotés de 1 à n. On tire les boules de l'urne, une à une et avec remise. On s'arrête lorsque, pour la première fois le numéro tiré est supérieur ou égal aux numéros tirés précédemment. Soit X la v.a.r. égale au nombre de tirages effectués.
Déterminer la loi de X.

---

77. * Soit X une v.a.r. à valeurs dans $\mathbb{N}$, telle que, pour tout $k \in \mathbb{N}$, $P([X = k]) = \lambda 3^{-k}$.

(a) Déterminer λ .

(b) X a-t-elle plus de chances d'être paire ou impaire ?

---

78. * On lance une pièce truquée jusqu'à obtenir pour la première fois "face". Quelle est la probabilité pour que le nombre de lancers soit impair ? Pair ?

---

79. ** On lance une pièce truquée et on note p la probabilité de voir apparaître "pile". Soit X le temps d'attente du premier "pile". Trouver un entier s tel que $P([X \leq s]) \geq 1 - \alpha$, où α est un réel donné tel que $\alpha \in]0, 1[$. *Application* $\alpha = 0,01$ *et* $p = 1/6$.

---

80. ** Combien une famille doit-elle avoir d'enfants pour avoir au moins un garçon et une fille avec une probabilité supérieure à 0,95 ?

---

81. ** Soit X une v.a.r. de loi géométrique de paramètre p et soit $M \in \mathbb{N}^*$. Déterminer les lois de $Z = \inf(X, M)$ et de $Y = \sup(X, M)$.

---

82. * Un sauteur tente de franchir les hauteurs successives $1, 2, \cdots, n, \cdots$. Les sauts sont indépendants et la probabilité de succès à la hauteur n, $n \in \mathbb{N}^*$ est $1/n$. Le sauteur est éliminé à son premier échec . On note X la v.a.r. "numéro du dernier saut réussi".
Trouver la loi de X et vérifier que $\sum_{n=1}^{\infty} P([X = n]) = 1$.

---

83. * Soit X une v.a.r. entière telle que $P([X = k]) = \mathrm{e}^{-2}(1 + \alpha k)\frac{2^k}{4(k!)}$ pour tout $k \in \mathbb{N}$. Déterminer α.

---

84. *** On lance 5 dés: à chaque lancer, on met de côté ceux qui donnent un as et on relance les autres jusqu'à obtenir 5 as. Soit X la v.a.r. égale au nombre de lancers et Y la v.a.r. égale au nombre de dés lancés .

(a) Calculer $P([X \leq k])$ puis $P([X = k])$ pour tout $k \in \mathbb{N}$.

(b) Calculer $P([Y = k])$ pour tout $k \in \mathbb{N}$.

---

85. *** Dans une urne, il y a 10 boules blanches et 5 noires. On appelle X le rang de la r-ième boule blanche tirée ($1 \leq r \leq 10$). Déterminer la loi de X dans le cas de tirages sans remise puis dans le cas de tirage avec remise .

---

86. *** Une succession de parties indépendantes de "pile ou face" est représentée par une suite de v.a.r. X_n telles que:

$$P([X_n = 0]) = P([X_n = 1]) = 1/2$$

On pose $S_n = \sum_{i=1}^{n} X_i$.

(a) Quelle est la loi suivie par S_n ?

(b) Si $k > 0$, soit T la v.a.r. égale au premier instant où "pile" est tombé k fois. Quelle est la loi de T?

(c) Pierre et Paul jouent à "pile ou face". Pierre choisit "pile" et Paul "face". Soit U la v.a.r. égale au premier instant où l'un des joueurs gagne k parties . Quelle est la loi de U ?

---

87. ** Soit X une v.a.r. suivant une loi de Poisson.
Montrer que $P([X \text{ impair}]) < P([X \text{ pair}])$.

---

88. * Soit X à valeurs dans $\mathbb{N}$ telle que $P([X = n]) = (\lambda/n)P([X = n-1])$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$. Trouver la loi de X .

---

89. ** Soit f une fonction définie sur $\mathbb{Z}$ par :
$f(n) = (4/n)f(n-1)$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et $f(-n) = f(n)$ pour tout $n \in \mathbb{Z}$.
Déterminer f pour qu'elle définisse la loi de probabilité d'une v.a.r. X à valeurs dans $\mathbb{Z}$.

---

90. * Dans une verrerie, on fabrique des abats-jour en verre qui admettent en moyenne 3 défauts. La probabilité du nombre de défauts par abat-jour est déterminée par une loi de Poisson. Calculer la probabilité pour qu'un abat-jour :

(a) ne contienne aucun défaut ;

(b) contienne 2 défauts au plus .

---

91. * Sachant que le nombre moyen de communications téléphoniques reçues par un standard entre 10h et 11h est de 1,8 par minute, et que le nombre X d'appels reçus par minute est une v.a.r. qui suit une loi de Poisson, calculer la probabilité pour qu'entre 10h53 et 10h54 il y ait aucun appel ; 1 appel ; 2 appels ; au moins 2 appels ; plus de 2 appels ; 2,3 ou 4 appels.

---

92. ** Soit X une v.a.r. prenant ses valeurs dans $\mathbb{N}$. On suppose que pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $4P([X = n+2]) = 5P([X = n+1]) - P([X = n])$.
Montrer que X suit une loi binomiale négative dont on précisera les paramètres .

Variables aléatoires absolument continues

---

93. * Vérifier que les fonctions f suivantes sont des densités de probabilité:

(a) $f(x) = (1 - |1-x|)\mathbb{1}_{]0,2[}(x)$

(b) $f(x) = \frac{1}{2\sigma}\, e^{-\frac{|x-\mu|}{\sigma}}$

(c) $f(x) = \frac{x}{4}\, e^{-\frac{x}{2}}\ \mathbb{1}_{]0,+\infty[}(x)$

(d) $f(x) = \frac{b}{\pi(b^2+(x-a)^2)}$

---

94. * Soit f la fonction définie par:

$$f(x) = cx\ \mathbb{1}_{[0,3[}(x) + c(6-x)\ \mathbb{1}_{[3,6[}(x)$$

(a) Montrer que pour une constante c convenable, que l'on déterminera, f est une densité de probabilité.

(b) Soit X une v.a.r. de densité f. Soit A l'événement $[X > 3]$ et B l'événement $[1,5 < X < 4,5]$. Calculer $P(A)$ et $P(B)$. Les événements A et B sont-ils indépendants?

---

95. ** Soit X une v.a.r. de densité f.
Soit $a \neq 0$ et $b \in \mathbb{R}$ et soit $Y = aX + b$.

(a) Exprimer la densité de Y à l'aide de f.

(b) Même question avec $Y = |X|$.

(c) Même question avec $Y = X^p$; $p \in \mathbb{N}^*$. (on distinguera les cas p impair et p pair).
Application: Si X suit la loi normale $N(0,1)$, quelle est la loi de $Y = X^2$?

---

96. * Soient a et λ des réels strictement positifs. On pose:

$$\Gamma(a) = \int_0^{+\infty} e^{-x}\, x^{a-1}\, dx$$

(a) Montrer que $\Gamma(a) < +\infty$.

(b) Montrer que $\Gamma(a+1) = a\Gamma(a)$ et en déduire que, pour $n \in \mathbb{N}^*$, on a $\Gamma(n) = (n-1)!$.

(c) On considère f définie par:

$$f(x) = \frac{\lambda^a}{\Gamma(a)}\, e^{-\lambda x}\, x^{a-1}\, \mathbb{1}_{]0,+\infty[}(x)$$

Vérifier que f est une densité de probabilité et représenter, selon les valeurs de a, l'allure de la courbe de densité.

---

97. * Soit X une v.a.r. de loi normale $N(0,1)$.
Montrer, en utilisant les exercices 33 et 34 que la loi de $Z = X^2/2$ est la loi Gamma de paramètres $\lambda = 1$ et $a = 1/2$ et que $\Gamma(1/2) = \sqrt{\pi}$.

---

98. On suppose que la durée d'une communication téléphonique est une v.a.r. de loi exponentielle $\mathrm{E}(k)$.

(a) Calculer, pour $k = 0,8$, la probabilité pour qu'une communication dure:

(α) : plus de 4 minutes;

(β) : entre 3 et 5 minutes.

(b) Quelle valeur faut-il donner à k pour que la probabilité qu'une communication dure plus de 3 minutes soit égale à 0,1?

---

99. * Soit X une v.a.r. de densité f définie par:

$$f(x) = (1+x)^{-2}\, \mathbb{1}_{[0,+\infty[}(x)$$

(a) Déterminer la fonction de répartition F de X.

(b) Soit $Y = \mathrm{Arctan}X$. Montrer que Y est une v.a.r. absolument continue et déterminer sa densité.

---

100. ** Soit X une v.a.r. strictement positive et $\lambda > 0$. On définit les v.a.r. U et V par $U = 1 - X$ et $V = -\ln X/\lambda$.

(a) Déterminer les lois de U et de V si X suit la loi uniforme sur $]0,1[$.

(b) Déterminer la loi de X pour que V suivent la loi exponentielle $\mathrm{E}(\lambda)$.

---

101. *** Trouver la loi de $Y = e^{1/X}$ si X suit la loi uniforme sur $[-1,1]$.

---

102. ** Soit X une v.a.r. de densité f définie par:

$$f(x) = \cos x\, \mathbb{1}_{]0,\pi/2[}(x)$$

Déterminer la fonction de répartition de la v.a.r. $Y = \tan X$.

---

103. ** Soit X une v.a.r. absolument continue.

(a) Déterminer la loi de $Y = \sin(\pi X)$ si X suit la loi uniforme sur $]0, 1[$.

(b) Déterminer la loi de $Z = \tan X$ si X suit la loi uniforme sur $]-\pi/2, \pi/2[$.

104. *** Soit X une v.a.r. de fonction de répartition F définie par:

$$F(x) = (1 + e^{-x})^{-1}$$

Déterminer la fonction de répartition de la v.a.r. Y définie par:

$$Y = \frac{e^X + 1}{e^X - 1}$$

105. ** Soit X une v.a.r. de loi normale $N(0, 1)$. Soit $n \geq 2$ et $a > 0$.

(a) Pour quelle valeur du réel a, la probabilité $P([a < X < na])$ est-elle maximale?

(b) Soit $T = |X| + a$. Calculer la fonction de répartition F de T en fonction de la fonction de répartition Φ de X et en déduire la densité f de T.

106. * Soit X une v.a.r. de loi normale $N(0, 1)$ et soit Φ sa fonction de répartition. Montrer que:

(a) Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\Phi(-x) = 1 - \Phi(x)$. (En particulier $\Phi(0) = 1/2$.

(b) Pour tout $x \in \mathbb{R}_+$, $P([|X| \leq x]) = 2\Phi(x) - 1$ et $P([|X| \geq x]) = 2(1 - \Phi(x))$.

Utilisation de tables

107. * On jette 10 pièces de monnaie truquées de telle sorte que, pour chacune, la probabilité d'obtenir “pile” soit 0,3. Soit X le nombre de “piles” obtenus au cours de ce lancer.

(a) Déterminer la loi de X.

(b) Quelle est la probabilité d'obtenir 3 “piles”? au plus 3 “piles”?

108. * Dans un garage, le nombre de voitures vendues en une semaine suit la loi de Poisson de paramètre 8.

(a) Déterminer la probabilité des événements A ”en une semaine, 8 voitures ont été vendues” et B ”en une semaine, au moins 2 voitures ont été vendues”.

(b) Quelle est la probabilité qu'en une semaine il y ait eu au moins 6 et au plus 10 voitures vendues?

109. * On suppose que le poids d'un bébé est une v.a.r. X de loi normale $N(3, 2; 0, 16)$.
Calculer $P([X \geq 4])$, $P([X \leq 3])$ et $P([2, 8 \leq X \leq 3, 6])$.

110. ** Sur un échantillon de population, on note que 11% des personnes mesurent moins de 1,60m et 8% plus de 1,80m.
En admettant que la taille d'une personne est une v.a.r. de loi normale, préciser les paramètres de cette loi.

111. ** La distribution des notes obtenues à un concours admet approximativement la loi normale de moyenne 32,5 et d'écart-type 8,5 (les notes allant de 0 à 60).
Sachant que 30% des élèves ne sont pas admissibles et que 10% sont admis sans oral, quelles sont les barres d'admissibilité et d'admission?

112. * Soit X une v.a.r. de densité f définie par:

$$f(x) = Ax^2 \, e^{-x^2/3} \, \mathbb{1}_{]0,+\infty[}(x)$$

Déterminer A, la fonction de répartition de X et calculer $P([X > 1])$ à l'aide d'une table.

---

113. ** La longueur L du côté d'un cube suit une loi normale de moyenne 10cm et d'écart-type 1mm. Soit V le volume du cube et S l'aire totale de ses 6 faces.

(a) Calculer $P([V < 1030\text{cm}^3])$ et $P([S < 624\text{cm}^2])$.

(b) Déterminer la densité de V et celle de S.

---

114. ** Une confiture est qualifiée "pur sucre" si elle contient entre 420g et 520g de sucre par kg. Le poids en sucre d'un pot suit une loi normale de moyenne 465g et d'écart-type 30g.

(a) Calculer le pourcentage de la production qui ne doit pas porter la mention "pur sucre".

(b) Afin d'améliorer la qualité "pur sucre", le fabricant souhaite éliminer 15% de sa production. Déterminer un intervalle $[a, b]$ tel que $P([a \leq X \leq b]) = 0,85$.

(c) Un magasin diététique propose d'acheter les pots de moins de 495g mais d'au moins Yg de sucre. Déterminer Y sachant que le fabricant refusera la vente au dessus de 20% de chute.