Corrigés des exercices du chapitre 2

1. Les applications f suivantes sont-elles continues? différentiables? de classe $\mathcal{C}^1$?

a) $f(x,y) = \dfrac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}}$ si $(x,y) \neq (0,0)$, et $f(0,0) = 0$.

b) $f(x,y) = \dfrac{xy}{x^2+y^2}$ si $(x,y) \neq (0,0)$, et $f(0,0) = 0$.

c) $f(x,y) = \dfrac{(y^2-x)^2}{x^2+y^4}$ si $(x,y) \neq (0,0)$, et $f(0,0) = 0$.

d) $f(x,y) = y^2 \sin\left(\dfrac{x}{y}\right)$ si $y \neq 0$, et $f(x,0) = 0$.

e) $f(x,y) = \dfrac{x^3-y^3}{x^2+y^2}$ si $(x,y) \neq (0,0)$, et $f(0,0) = 0$.

f) $f(x,y) = \dfrac{x^2y}{x^2+y^2}$ si $(x,y) \neq (0,0)$, et $f(0,0) = 0$.

g) $f(x,y) = \dfrac{x^2y^2}{x^2+y^2}$ si $(x,y) \neq (0,0)$, et $f(0,0) = 0$.

Sauf pour d), les applications considérées sont toutes de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ comme quotients de fonctions $\mathcal{C}^1$ dont le dénominateur ne s'annulle pas. Reste à faire l'étude en $(0,0)$.

a) Soit $(x,y) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ et (ρ,θ) un système de coordonnées polaires de (x,y). On a alors $f(x,y) = \rho\cos\theta\sin\theta$, donc $|f(x,y)| \leq |\rho|$, soit $|f(x,y)| \leq \sqrt{x^2+y^2}$, d'où $\lim\limits_{(0,0)} f(x,y) = 0 = f(0,0)$, et f est continue en $(0,0)$. Finalement, f est continue sur $\mathbb{R}^2$.

$f(x,0) = 0 = f(0,y)$ d'où $D_1f(0,0) = D_2f(0,0) = 0$ donc f admet des dérivées partielles en $(0,0)$ et, si elle est différentiable en $(0,0)$, sa différentielle sera la fonction nulle.

On a $\dfrac{|f(x,y)|}{\|(x,y)\|} = \dfrac{|f(\rho\cos\theta,\rho\sin\theta)|}{\rho} = |\cos\theta\sin\theta|$ qui ne tend pas vers 0 quand $\|(x,y)\| \to 0$ (par exemple $\dfrac{|f(x,x)|}{\|(x,x)\|} = 1/2$ si $x > 0$). Donc f n'est pas différentiable en $(0,0)$ (et donc pas de classe $\mathcal{C}^1$).

b) $f(x,x) = \dfrac{1}{2}$ donc f n'est pas continue en $(0,0)$ (et donc ni différentiable, ni de classe $\mathcal{C}^1$). (Par contre $D_1f(0,0) = D_2f(0,0) = 0$.)

c) $f(x,0) = 1 = f(0,y)$ donc f n'est pas continue en $(0,0)$. Elle n'admet pas non plus de dérivées partielles en $(0,0)$.

d) Avec les opérations usuelles, f est $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}\times\mathbb{R}^*$, qui est bien un ouvert.

$|f(x,y)| \leq y^2 \leq (x-x_0)^2+y^2$ donc $\lim\limits_{(x,y)\to(x_0,0)} f(x,y) = 0 = f(x_0,0)$. Ainsi, $f \in \mathcal{C}(\mathbb{R}^2,\mathbb{R})$.

Si $(x,y) \neq (x_0,0)$, $D_1f(x,y) = y\cos\dfrac{x}{y}$ et $D_2f(x,y) = 2y\sin\dfrac{x}{y} - x\cos\dfrac{x}{y}$.

Alors $f(x,0) = 0$ pour tout $x \in \mathbb{R}$, donc $\dfrac{f(x_0+h,0)-f(x_0,0)}{h} = 0$ et $D_1f(x_0,0) = 0$.

$$f(x_0,k) = \begin{cases} k^2\sin\dfrac{x_0}{k} \text{ si } k \neq 0 \\ 0 \text{ si } k = 0 \end{cases}.$$

$\dfrac{f(x_0,k)-f(x_0,0)}{k} = k\sin\dfrac{x}{k}$ et $|k\sin\dfrac{x}{k}| \leq |k|$, donc $\lim\limits_{k\to 0}\dfrac{f(x_0,k)-f(x_0,0)}{k} = 0 = D_2f(x_0,0)$.

Si $(x,y) \neq (x_0,0)$, $|D_1 f(x,y)| \leq |y| \leq \sqrt{(x-x_0)^2+y^2}$, d'où $D_1 f$ est continue en $(x_0,0)$ et $D_1 f \in \mathcal{C}(\mathbb{R}^2,\mathbb{R})$.

Si $x_0 \neq 0$, $D_2 f(x_0, \dfrac{x_0}{2n\pi}) = -x_0$.

On a $\lim\limits_{n\to+\infty}(x_0, \dfrac{x_0}{2n\pi}) = (x_0,0)$, et $\lim\limits_{n\to+\infty} D_2 f(x_0, \dfrac{x_0}{2n\pi}) = -x_0 \neq D_2 f(x_0,0)$: $D_2 f$ n'est pas continue en $(x_0,0)$, $x_0 \neq 0$ (et $f \notin \mathcal{C}^1(\mathbb{R}^2,\mathbb{R})$).
$|D_2 f(x,y)| \leq 2|y| + |x|$, donc $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} D_2 f(x,y) = 0 = D_2 f(0,0)$: $D_2 f$ est continue en $(0,0)$.

e) $|f(x,y)| = |f(\rho\cos\theta, \rho\sin\theta)| \leq 2\rho = 2\sqrt{x^2+y^2} = 2\|(x,y)\|_2$ conduit à la continuité de f sur $\mathbb{R}^2$.

$f(x,0) = x$ donc $D_1 f(0,0) = \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{f(x,0)-f(0,0)}{x} = 1$ et

$f(0,y) = -y$ donc $D_2 f(0,0) = \lim\limits_{y\to 0} \dfrac{f(0,y)-f(0,0)}{y} = -1$. Donc f admet des dérivées partielles en $(0,0)$.

$f(x,y) - f(0,0) - xD_1 f(0,0) - yD_2 f(0,0) = \dfrac{x^3-y^3}{x^2+y^2} - x + y = \dfrac{-xy^2+yx^2}{x^2+y^2}$.

On a alors $\dfrac{|f(x,y) - f(0,0) - xD_1 f(0,0) - yD_2 f(0,0)|}{\|(x,y)\|} = |\cos\theta\sin\theta(\cos\theta - \sin\theta)|$ qui ne tend pas vers 0 quand $\|(x,y)\| \to 0$ (par exemple, pour $y=-x$, cette quantité vaut $\pm 1/\sqrt{2}$). Donc f n'est pas différentiable en $(0,0)$ (et donc pas de classe $\mathcal{C}^1$).

f) $|f(\rho\cos\theta, \rho\sin\theta)| \leq \rho = \sqrt{x^2+y^2} = \|(x,y)\|_2$ conduit à la continuité de f sur $\mathbb{R}^2$.

$f(x,0) = 0$ donc $D_1 f(x,0) = 0$ et $f(0,y) = 0$ donc $D_2 f(0,y) = 0$. En particulier $D_1 f(0,0) = D_2 f(0,0) = 0$.

On a $\dfrac{|f(x,y)|}{\|(x,y)\|} = \dfrac{|f(\rho\cos\theta, \rho\sin\theta)|}{\rho} = \cos^2\theta\sin\theta$ qui ne tend pas vers 0 quand $\|(x,y)\| \to 0$ (par exemple $\dfrac{|f(x,x)|}{\|(x,x)\|} = 1/2\sqrt{2}$ si $x > 0$). Donc f n'est pas différentiable en $(0,0)$ (et donc pas de classe $\mathcal{C}^1$).

g) $|f(\rho\cos\theta, \rho\sin\theta)| \leq \rho^2 = x^2+y^2$ conduit à la continuité de f sur $\mathbb{R}^2$.

$f(x,0) = 0$ donc $D_1 f(x,0) = 0$.

Si $y \neq 0$, la fonction $x \mapsto \dfrac{x^2y^2}{x^2+y^2}$ est dérivable en tout x, donnant $D_1 f(x,y) = \dfrac{2xy^4}{(x^2+y^2)^2}$, cette formule étant en fait vraie dès que $(x,y) \neq (0,0)$.

$|D_1 f(\rho\cos\theta, \rho\sin\theta)| \leq 2\rho = 2\sqrt{x^2+y^2}$ donc $D_1 f$ est continue sur $\mathbb{R}^2$. Il en est de même (formule symétrique) pour $D_2 f$ donc f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^2$.

$\boxed{\textbf{2.}}$ Soit f définie sur $\mathbb{R}^2$ par $f(x,y) = xy\sin\left(\dfrac{\pi}{2}\left(\dfrac{x-y}{x+y}\right)\right)$ si $x+y \neq 0$, et $f(x,-x) = 0$.

a) Etudier la continuité et la différentiabilité de f.

b) Calculer $D_1D_2 f(0,0)$ et $D_2D_1 f(0,0)$. f est-elle de classe $\mathcal{C}^2$?

---

a) Avec les opérations usuelles, f est $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}^2 \setminus \{(x,-x)\ ;\ x \in \mathbb{R}\}$, qui est bien un ouvert.

• $|f(x,y)| \leq |xy| \leq \|(x,y)\|_\infty^2$ donc $\lim\limits_{\|(x,y)\|\to 0} f(x,y) = 0 = f(0,0)$ et même $\lim\limits_{\|(x,y)\|\to 0} \dfrac{|f(x,y)|}{\|(x,y)\|} = 0$.

Ceci prouve tout d'abord la continuité de f en $(0,0)$, puis que f est différentiable en $(0,0)$ de différentielle nulle.

Pour la classe $\mathcal{C}^1$, on a $D_1 f(x,y) = y\sin\left(\frac{\pi}{2}\left(\frac{x-y}{x+y}\right)\right) + xy\cos\left(\frac{\pi}{2}\left(1-\frac{2y}{x+y}\right)\right)\times\frac{\pi y}{(x+y)^2}$
Ainsi, $|D_1 f(h+h^2,-h)| = -h\sin\left(\frac{\pi}{2}\left(\frac{2h+h^2}{h^2}\right)\right) - h(h+h^2)\cos\left(\frac{\pi}{2}\left(\frac{2h+h^2}{h^2}\right)\right)\times\frac{-\pi h}{h^4}$ qui ne tend pas vers 0 quand h tend vers 0 (prendre $h=1/n$). Ainsi, f n'est pas de classe $\mathcal{C}^1$ en $(0,0)$.

• Si $x\neq 0$, $f\left(x,-x+\frac{2x}{n}\right) = x\left(-x+\frac{2x}{n}\right)\sin\left(\frac{2x-\frac{2x}{n}}{\frac{2x}{n}}\frac{\pi}{2}\right)\sim -x^2\sin\left(\frac{n\pi}{2}\right)\in\{-x^2,x^2\}$
pour n impair. Donc on n'a pas $\lim\limits_{n\to+\infty} f\left(x,-x+\frac{2x}{n}\right) = f(x,-x)$, et donc f n'est pas continue en $(x,-x)$ si $x\neq 0$ (et donc pas différentiable, ni de classe $\mathcal{C}^1$).

b) $D_1D_2f(0,0) = \lim\limits_{x\to 0}\frac{D_2f(x,0)-D_2f(0,0)}{x}$ avec $D_2f(0,0)=0$ et

$$D_2f(x,0) = \lim_{y\to 0}\frac{f(x,y)-f(x,0)}{y}.$$

Or $f(x,0)=0$ et $\frac{f(x,y)}{y} = x\sin\left(\frac{\pi}{2}\left(\frac{x-y}{x+y}\right)\right)\to x\sin\left(\frac{\pi}{2}\right) = x$ quand $y\to 0$.

Donc $D_2f(x,0)=x$ et $D_1D_2f(0,0)=\lim\limits_{x\to 0}\frac{x}{x}$, soit $D_1D_2f(0,0)=1$.

De même, $D_2D_1f(0,0) = \lim\limits_{y\to 0}\frac{D_1f(0,y)-D_1f(0,0)}{y}$ avec $D_1f(0,0)=0$ et

$$D_1f(0,y) = \lim_{x\to 0}\frac{f(x,y)-f(0,y)}{x}.$$

Or $f(0,y)=0$ et $\frac{f(x,y)}{x} = y\sin\left(\frac{\pi}{2}\left(\frac{x-y}{x+y}\right)\right)\to y\sin\left(-\frac{\pi}{2}\right) = -y$ quand $x\to 0$.

Donc $D_1f(0,y) = -y$ et $D_2D_1f(0,0) = \lim\limits_{y\to 0}\frac{-y}{y}$, soit $D_2D_1f(0,0)=-1$.

Ainsi, on a $D_1D_2f(0,0)\neq D_2D_1f(0,0)$ et nécéssairement, f n'est pas de classe $\mathcal{C}^2$ d'après le théorème de Schwarz.

$\boxed{\textbf{3.}}$ Soit $A\in\mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ et $f:\mathbb{R}^n\setminus\{0\}\to\mathbb{R}$, $x\mapsto\frac{\langle Ax,x\rangle}{\|x\|^2}$. Calculer $\nabla f(x)$ et le comparer à la projection orthogonale de Ax sur $(\mathbb{R}x)^\perp$.

On a $\langle A(x+h),x+h\rangle = \langle Ax,x\rangle+\langle Ah,x\rangle+\langle Ax,h\rangle+\langle Ah,h\rangle$ où $\langle Ah,x\rangle = \langle h,{}^tAx\rangle = \langle Ax,h\rangle$ puisque A est symétrique, avec $|\langle Ax,h\rangle|\leq |||A|||\,\|x\|\,\|h\|$ et $|\langle Ax,h\rangle|\leq |||A|||\,\|h\|^2$.

On a le même développement pour le dénominateur, en remplaçant A par I car $\|x\|^2=\langle x,x\rangle$.

On a alors, pour $x\neq 0$:

$$\begin{aligned} f(x+h) &= \frac{\langle Ax,x\rangle\left(1+2\frac{\langle Ax,h\rangle}{\langle Ax,x\rangle}+o(h)\right)}{\langle x,x\rangle\left(1+2\frac{\langle x,h\rangle}{\langle x,x\rangle}+o(h)\right)} = f(x)\left(1+2\frac{\langle Ax,h\rangle}{\langle Ax,x\rangle}+o(h)\right)\left(1-2\frac{\langle x,h\rangle}{\langle x,x\rangle}+o(h)\right)\\ &= f(x)\left(1+2\frac{\langle Ax,h\rangle}{\langle Ax,x\rangle}-2\frac{\langle x,h\rangle}{\langle x,x\rangle}+o(h)\right) = f(x)+2\frac{\langle Ax,h\rangle}{\langle x,x\rangle}-2f(x)\frac{\langle x,h\rangle}{\langle x,x\rangle}+o(h)\\ &= f(x)+\langle\frac{2Ax}{\|x\|^2}-f(x)\frac{2x}{\|x\|^2},h\rangle+o(h)\end{aligned}$$

Ainsi, f est différentiable en x et $\boxed{\nabla f(x) = \dfrac{2}{\|x\|^2}(Ax - f(x)x)}$.

Pour déterminer la projection y de Ax sur $(\mathbb{R}x)^\perp$, on écrit $Ax = y + \lambda x$ et on détermine λ en écrivant $\langle y, x\rangle = 0$, soit $\langle Ax, x\rangle - \lambda\|x\|^2 = 0$, soit $\lambda = \dfrac{\langle Ax, x\rangle}{\|x\|^2} = f(x)$ et donc $y = Ax - f(x)x$. Par suite,

$$\boxed{\nabla f(x) = \frac{2}{\|x\|^2}\mathrm{pr}_{(\mathbb{R}x)^\perp}(Ax)}.$$

$\boxed{\mathbf{4.}}$ Soit $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ espace euclidien muni du produit scalaire $\langle\langle A, B\rangle\rangle = \mathrm{tr}({}^tA\,B)$; soit Ω l'ouvert de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ constitué des matrices inversibles. Déterminer les différentielles des applications suivantes (si elles existent) :

a) $\mathrm{tr} : A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \to \mathrm{tr}(A) \in \mathbb{R}$;

b) $\det : A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \to \det(A) \in \mathbb{R}$;

c) $g : A \in \Omega \mapsto \ln|\det A| \in \mathbb{R}$;

d) $f_{-1} : A \in \Omega \to A^{-1} \in \Omega$;

e) $p \in \mathbb{N}^*$, $f_p : A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \to A^p \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$;

f) $p \in \mathbb{N}^*$, $f_{-p} : A \in \Omega \to A^{-p} \in \Omega$.

---

a) $\mathrm{tr}(A + H) = \mathrm{tr}(A) + \mathrm{tr}(H)$ avec $\mathrm{tr}(H) = \mathrm{tr}({}^tI\,H) = \langle\langle I, H\rangle\rangle$.
Ceci donne $f(A + H) = f(A) + \langle\langle I, H\rangle\rangle$ donc $\boxed{\nabla\mathrm{tr}(A) = I}$ indépendant de A.

Remarque : $\langle\langle A, B\rangle\rangle = \mathrm{tr}({}^tA\,B) = \displaystyle\sum_{k=1}^n c_{kk}$ où $c_{kk} = \displaystyle\sum_{i=1}^n a^*_{ki}b_{ik} = \sum_{i=1}^n a_{ik}b_{ik}$ donc

$$\langle\langle A, B\rangle\rangle = \sum_{i,j} a_{ij}b_{ij}.$$

b) Si A_j (resp. H_j) est la colonne j de A (resp. de H), on a :

$$\det(A+H) = \det(A_1+H_1, \cdots, A_n+H_n) = \det A + \sum_{j=1}^n \det(A_1, \cdots, A_{j-1}, H_j, A_{j+1}, \cdots, A_n) + o(\|H\|).$$

En développant $\det(A_1, \cdots, A_{j-1}, H_j, A_{j+1}, \cdots, A_n)$ par rapport à la colonne j, on obtient :

$$\det(A_1, \cdots, A_{j-1}, H_j, A_{j+1}, \cdots, A_n) = \sum_{i=1}^n h_{ij}\begin{vmatrix} a_{1,1} & \cdots & a_{1,j-1} & 0 & a_{1,j+1} & \cdots & a_{1,n} \\ & & & \vdots & & & \\ & & & 0 & & & \\ a_{i,1} & \cdots & a_{i,j-1} & 1 & a_{i,j+1} & \cdots & a_{i,n} \\ & & & 0 & & & \\ & & & \vdots & & & \\ a_{n,1} & \cdots & a_{n,j-1} & 0 & a_{n,j+1} & \cdots & a_{n,n} \end{vmatrix} = \sum_{i=1}^n h_{ij}(-1)^{i+j}A_{ij}$$

où $A_{ij} \in M_{n-1}(\mathbb{R})$ est la mineure de a_{ij} (matrice obtenue en supprimant dans A la ligne i et la colonne j. Or $\mathrm{cof}(A) = (\alpha_{ij})$ où $\alpha_{ij} = (-1)^{i+j}A_{ij}$, donc

$$\det(A + H) = \det A + \langle\langle\mathrm{cof}(A), H\rangle\rangle + o(\|H\|).$$

On a donc bien det différentiable, avec $\boxed{\nabla \det(A) = \mathrm{cof}(A)}$.

c) Le logarithme étant multiplicatif, on a :

$$\begin{aligned}
\ln|det(A+H)| &= \ln\left[|\det A| \times \left(1 + \frac{1}{\det A}\langle\langle \mathrm{cof}(A), H\rangle\rangle + o(\|H\|\right)\right] \\
&= \ln|\det A| + \ln\left(1 + \langle\langle \frac{\mathrm{cof}(A)}{\det A}, H\rangle\rangle + o(\|H\|)\right)
\end{aligned}$$

soit $g(A+H) = g(A) + \langle\langle \frac{\mathrm{cof}(A)}{\det A}, H\rangle\rangle + o(\|H\|)$. Or $A^{-1} = \frac{1}{\det A}\,{}^t\mathrm{cof}(A)$ donc g est différentiable et

$$\boxed{\nabla g(A) = {}^tA^{-1}}.$$

d) Si f_{-1} est différentiable en A, on doit avoir $(A+H)^{-1} = A^{-1} + d_A f_{-1}(H) + o(\|H\|)$. On a alors

$$\begin{aligned}
(A+H)^{-1}(A+H) = I &= (A^{-1} + d_A f_{-1}(H) + o(\|H\|))(A+H) \\
&= I + A^{-1}H + d_A f_{-1}(H)A + o(\|H\|)
\end{aligned}$$

d'où, par identification, $A^{-1}H + d_A f_{-1}(H)A = 0$, soit $d_A f_{-1}(H) = -A^{-1}HA^{-1}$. $H \mapsto -A^{-1}HA^{-1}$ étant linéaire, on a bien f_{-1} différentiable en A et $\boxed{d_A f_{-1}(H) = -A^{-1}HA^{-1}}$.

Remarque : Ici $f_{-1} : A \mapsto A^{-1}$ n'est pas de $\mathbb{R}^{n^2}$ dans $\mathbb{R}$ mais de $\mathbb{R}^{n^2}$ dans $\mathbb{R}^{n^2}$. Il n'est donc pas inquiétant que $d_A f_{-1}(H)$ soit une matrice (et non pas un réel).

e) $(A+H)^p = (A+H)\cdots(A+H) = A^p + HA^{p-1} + AHA^{p-2} + \cdots + A^{p-1}H + o(\|H\|)$ car le produit matriciel n'est pas commutatif. $H \mapsto HA^{p-1} + AHA^{p-2} + \cdots + A^{p-1}H$ est linéaire donc f_p est bien différentiable en A avec $\boxed{d_A f_p(H) = \sum_{i=1}^{p} A^{i-1}HA^{p-i}}$.

f) Si f_{-p} est différentiable en A, on doit avoir $(A+H)^{-p} = A^{-p} + d_A f_{-p}(H) + o(\|H\|)$. On a alors, en utilisant e),

$$\begin{aligned}
(A+H)^{-p}(A+H)^p = I &= (A^{-p} + d_A f_{-p}(H) + o(\|H\|))(A^p + d_A f_p(H) + o(\|H\|)) \\
&= I + A^{-p}d_A f_p(H) + d_A f_{-p}(H)A^p + o(\|H\|)
\end{aligned}$$

d'où, par identification, $A^{-p}d_A f_p(H) + d_A f_{-p}(H)A^p = 0$, soit $d_A f_{-p}(H) = -A^{-p}d_A f_p(H)A^{-p}$. L'application $H \mapsto -A^{-p}d_A f_p(H)A^{-p}$ étant linéaire, on a bien f_{-p} différentiable en A et :

$$\boxed{d_A f_{-p}(H) = -\sum_{i=1}^{p} A^{i-1-p}HA^{-i}}.$$