M1 UE2

Exercices de Réductions (chapitre 6)

$\boxed{\textbf{1.}}$ * Soit $E = \mathcal{C}(\mathbb{R})$ et $\varphi : f \in E \mapsto \varphi(f)$ où $\varphi(f)(x) = \displaystyle\int_0^x tf(t)dt$.

a) Montrer que $\varphi \in \mathcal{L}(E)$. φ est-il injectif ? surjectif ?

b) Etudier les valeurs propres de φ.

$\boxed{\textbf{2.}}$ ** $E = \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R})$. Pour $f \in E$, on pose $L(f)(x) = 3f(0) + \displaystyle\int_1^x f(t)dt$. Montrer que $L \in \mathcal{L}(E)$. Donner $\ker L$, $\mathrm{im} L$, ainsi que les éléments propres de L.

$\boxed{\textbf{3.}}$ * Soit $E = \mathcal{C}(\mathbb{R})$. Pour $f \in E$, on définit $u(f) : x \mapsto \displaystyle\int_{-x}^x f(t)dt$. Montrer que u est un endomorphisme de E, et donner ses éléments propres.

$\boxed{\textbf{4.}}$ ** Soit $E = \mathbb{R}^{\mathbb{N}^*}$ et $\varphi : E \to E$; $(u_n) \mapsto (v_n)$ où $v_n = \dfrac{1}{n^2}\displaystyle\sum_{p=1}^n pu_p$. Montrer que $\varphi \in \mathcal{L}(E)$. Quels sont ses éléments propres ?

$\boxed{\textbf{5.}}$ *** Soit $A : \mathcal{C}([-1,1],\mathbb{R}) \to \mathcal{F}([-1,1],\mathbb{R})$, $f \mapsto Af : x \mapsto \displaystyle\int_{-1}^{-x} f(t)dt$.

a) Montrer que A est un endomorphisme de $\mathcal{C}([-1,1],\mathbb{R})$; déterminer son noyau et son image.

b) Déterminer les éléments propres de A.

$\boxed{\textbf{6.}}$ ** Soit $(a,b) \in \mathbb{C}^2 \setminus \{(0,0)\}$. Soit u l'endomorphisme de $\mathbb{C}[X]$ défini par $u(P) = [(aX+b)P]'$. Déterminer les éléments propres de u. Que peut-on dire de la restriction de u à $\mathbb{C}_n[X]$?

$\boxed{\textbf{7.}}$ * Soit $E = K_3[X]$, $A = X^4 - 1$, $B = X^4 - X$ et $\varphi : E \to E$; $P \to$ reste de la division euclidienne de AP par B. Montrer que $\varphi \in \mathcal{L}(E)$ et trouver les éléments propres de φ.

$\boxed{\textbf{8.}}$ ** Soit $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & & (0) \\ n-1 & \ddots & \ddots & \\ & \ddots & \ddots & n-1 \\ (0) & & 1 & 0 \end{pmatrix} \in M_n(K)$.

a) Trouver $u \in \mathcal{L}(K_{n-1}[X])$ tel que $M_{\mathcal{B}}(u) = A$ (où $\mathcal{B} = (1, \cdots, X^n)$).

b) A est-elle diagonalisable ?

$\boxed{\textbf{9.}}$ * Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, non nulle, et $u : \mathcal{M}_n(\mathbb{C}) \to \mathcal{M}_n(\mathbb{C}), M \mapsto \mathrm{tr}(A)M + \mathrm{tr}(M)A$.

a) Montrer que u est un endomorphisme de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$.

b) Déterminer les éléments propres de u.

c) u est-il diagonalisable ?

$\boxed{\textbf{10.}}$ * Soit $A = \begin{pmatrix} a^2 & ab & ac \\ ab & b^2 & bc \\ ac & bc & c^2 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_3(\mathbb{C})$ $((a,b,c) \neq (0,0,0))$. Étudier la diagonalisabilité de A.

$\boxed{\textbf{11.}}$ ** Diagonalisabilité de $A = \begin{pmatrix} 0 & a & b \\ a & 0 & b \\ a & b & 0 \end{pmatrix}$.

$\boxed{\textbf{12.}}$ ** Soit $M = \begin{pmatrix} a & c & b \\ c & a+b & c \\ b & c & a \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$.

a) Montrer que M est diagonalisable.
b) Trouver $\alpha \in \mathbb{R}$ et $J \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ tels que $M = \alpha I_3 + cJ + bJ^2$.
c) Trouver les éléments propres de M.

$\boxed{\textbf{13.}}$ * Diagonalisabilité de $A = \begin{pmatrix} 0 & -1 & \cdots & -1 \\ 1 & \ddots & & (0) \\ \vdots & (0) & \ddots & \\ 1 & & & 0 \end{pmatrix}$.

$\boxed{\textbf{14.}}$ * Réduction de $A = \begin{pmatrix} & & & 1 \\ & (0) & & \vdots \\ & & & \vdots \\ 1 & \ldots & \ldots & 1 \end{pmatrix}$.

$\boxed{\textbf{15.}}$ * $A = \begin{pmatrix} 1 & \cdots & 1 \\ \vdots & (0) & \vdots \\ 1 & \cdots & 1 \end{pmatrix}$: valeurs propres et dimension des sous espaces propres de A.

$\boxed{\textbf{16.}}$ * Diagonalisabilité de $A = \begin{pmatrix} 1 & -a_1 & \cdots & -a_n \\ a_1 & \ddots & & (0) \\ \vdots & (0) & \ddots & \\ a_n & & & 1 \end{pmatrix}$.

$\boxed{\textbf{17.}}$ *** Soit A une matrice carrée.

a) Montrer que $\mathrm{Sp}(A) \subset \bigcup_i \overline{D}(a_{ii}, \rho_i)$ avec $\rho_i = \sum_{j \neq i} |a_{ij}|$.

b) Montrer que $A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & & (0) \\ 1 & \ddots & \ddots & \\ & \ddots & \ddots & 2 \\ (0) & & 1 & 3 \end{pmatrix}$ est inversible.

c) Trouver D diagonale telle que DAD^{-1} soit symétrique. Retrouver l'inversibilité de A.

---

18. ** Soit $x \in \mathbb{R}$. À quelle condition sur x la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & x \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ est-elle diagonalisable ?

---

19. ** Soit

$$A = \begin{pmatrix} 1 & \cdots & 1 & a \\ \vdots & & \ddots & 1 \\ \vdots & & & \vdots \\ 1 & \cdots & \cdots & 1 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C}),$$

avec $a \in \mathbb{C} \setminus \{1\}$.

a) Montrer que A est diagonalisable si et seulement si $a \neq 1 - n^2/4$.

b) On se place dans le cas où $a = 1 - n^2/4$. Soit u l'endomorphisme de $\mathbb{C}^n$ canoniquement associé à A, et $\mathcal{C} = (e_1, \dots, e_n)$ la base canonique de $\mathbb{C}^n$. Calculer $(u - n/2Id_{\mathbb{C}^n})^2(e_1)$, et en déduire que A est semblable à $\begin{pmatrix} 0 & 0 & & & \\ & \ddots & \ddots & (0) & \\ & & 0 & 0 & \\ & (0) & & \frac{n}{2} & 1 \\ & & & & \frac{n}{2} \end{pmatrix}$.

---

20. ** Soit $A = \begin{pmatrix} a & b & a & b & \dots & b \\ b & a & b & a & \dots & a \\ a & & \ddots & & & \\ \vdots & & & \ddots & & \\ \vdots & & & & \ddots & b \\ b & a & \dots & \dots & b & a \end{pmatrix} \in M_{2n}(K)$ (où $a \neq b$). Eléments propres et diagonalisabilité de A.

---

21. *** Déterminer les sous-espaces de $\mathbb{R}^3$ stables par u_A où $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \in M_3(\mathbb{R})$.

---

22. *** Soit $S_n = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \ddots & 1 \\ 1 & 0 & \dots & \dots & 0 \end{pmatrix}$ et $A_n = I_n + 2S_n + \cdots + nS_n^{n-1}$.

a) Montrer que $n(n+1)/2 \in \mathrm{Sp}(A_n)$.

b) Montrer que toute autre valeur propre de A_n a une partie réelle égale à $-n/2$.

c) Montrer que $\mathrm{Tr}(A_n^2)$ est un polynôme de degré 4 en n.

---

23. ** Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ et $B = \begin{pmatrix} 0 & I_n \\ 2A & A \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{2n}(\mathbb{C})$.

a) Montrer que $-2 \notin \mathrm{sp}(B)$.

b) Montrer que $\lambda \in \mathrm{sp}(B)$ si et seulement si $\dfrac{\lambda^2}{\lambda+2} \in \mathrm{sp}(A)$.
c) Donner une condition nécessaire et suffisante pour que B soit diagonalisable.

---

24. ** Soit $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.
a) Montrer que A n'est pas diagonalisable. Trigonaliser A.
b) Trouver les matrices $M \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ telles que $M^2 = A$.

---

25. Déterminer $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telle que $M^3 - 2M^2 + M = 0$ et $\mathrm{tr}(M) = 0$.

---

26. * Déterminer $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telle que $M^3 - 2M^2 + M = 0$ et $\mathrm{tr}(M) = 0$.

---

27. Soit $A, B, C \in M_n(\mathbb{K})$ telles que $B \neq 0$, $C \neq 0$ et il existe λ, μ non nuls et distincts avec $A^p = \lambda^p B + \mu^p C$ pour $p \in \{1, 2, 3\}$. Montrer que A est diagonalisable et calculer A^p pour tout $p \in \mathbb{N}$.

---

28. ** Soit A, B dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ telle que $AB - BA = A$.
a) Montrer que A est non inversible.
b) Montrer que, pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, $A^k B - BA^k = kA^k$.
c) En déduire que A est nilpotente.

---

29. ** On donne $\phi : \mathcal{M}_n(\mathbb{C}) \to \mathbb{C}$ ayant les deux propriétés suivantes :
a) $\phi(XY) = \phi(X)\phi(Y)$.
b) $\phi\left(\begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\right) = \lambda$.
Montrer que $\phi(X) = \det X$ [on pourra d'abord comparer $\phi(X)$ et $\phi(Y)$ quand X et Y sont semblables, puis discuter suivant la diagonalisabilité].

---

30. ** Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telle que A soit symétrique, à coefficients dans $\{0, 1\}$, de trace nulle, et avec $A^2 + A - (d-1)I = J$ où $d \in \mathbb{N}^*$ et $J = (1)$. Soit $U = \begin{pmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{n1}(\mathbb{R})$.
a) Montrer que $AU = dU$. En déduire que $n = d^2 + 1$.
b) Soit a, b les racines de $X^2 + X - (d-1)$. Montrer que $\mathrm{sp}(A) \in \{a, b, d\}$.
c) Montrer que $d \in \{1, 2, 3, 7, 57\}$.
