
Exercices du chapitre 2

1. Les applications f suivantes sont-elles continues? différentiables? de classe \mathcal{C}^1 ?

a) $f(x, y) = \frac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}}$ si $(x, y) \neq (0, 0)$, et $f(0, 0) = 0$.

b) $f(x, y) = \frac{xy}{x^2+y^2}$ si $(x, y) \neq (0, 0)$, et $f(0, 0) = 0$.

c) $f(x, y) = \frac{(y^2-x)^2}{x^2+y^4}$ si $(x, y) \neq (0, 0)$, et $f(0, 0) = 0$.

d) $f(x, y) = y^2 \sin\left(\frac{x}{y}\right)$ si $y \neq 0$, et $f(x, 0) = 0$.

e) $f(x, y) = \frac{x^3-y^3}{x^2+y^2}$ si $(x, y) \neq (0, 0)$, et $f(0, 0) = 0$.

f) $f(x, y) = \frac{x^2y}{x^2+y^2}$ si $(x, y) \neq (0, 0)$, et $f(0, 0) = 0$.

g) $f(x, y) = \frac{x^2y^2}{x^2+y^2}$ si $(x, y) \neq (0, 0)$, et $f(0, 0) = 0$.

2. Soit f définie sur \mathbb{R}^2 par $f(x, y) = xy \sin\left(\frac{\pi}{2} \left(\frac{x-y}{x+y}\right)\right)$ si $x+y \neq 0$, et $f(x, -x) = 0$.

a) Etudier la continuité et la différentiabilité de f .

b) Calculer $D_1D_2f(0, 0)$ et $D_2D_1f(0, 0)$. f est-elle de classe \mathcal{C}^2 ?

3. Soit $A \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ et $f : \mathbb{R}^n \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{R}$, $x \mapsto \frac{\langle Ax, x \rangle}{\|x\|^2}$. Calculer $\nabla f(x)$ et le comparer à la projection orthogonale de Ax sur $(\mathbb{R}x)^\perp$.

4. Soit $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ espace euclidien muni du produit scalaire $\langle\langle A, B \rangle\rangle = \text{tr}({}^tA B)$; soit Ω l'ouvert de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ constitué des matrices inversibles. Déterminer les différentielles des applications suivantes (si elles existent) :

a) $\text{tr} : A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \rightarrow \text{tr}(A) \in \mathbb{R}$;

b) $\det : A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \rightarrow \det(A) \in \mathbb{R}$;

c) $g : A \in \Omega \mapsto \ln |\det A| \in \mathbb{R}$;

d) $f_{-1} : A \in \Omega \rightarrow A^{-1} \in \Omega$;

e) $p \in \mathbb{N}^*$, $f_p : A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \rightarrow A^p \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$;

f) $p \in \mathbb{N}^*$, $f_{-p} : A \in \Omega \rightarrow A^{-p} \in \Omega$.
