Corrigé de l'Examen d'Optimisation du 13 juin 2017

Exercice I- [8 points] $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $(x, y) \mapsto (x + y)^2 - (x^4 + y^4)$.

1. $\partial_1 f(x, y) = 2(x + y) - 4x^3$ et, par symétrie, $\partial_2 f(x, y) = 2(x + y) - 4y^3$. Un point critique (x, y) vérifie donc $\begin{cases} x + y - 2y^3 = 0 \\ x + y - 2x^3 = 0 \end{cases}$.
En particulier, $x^3 = y^3$ et, comme $x \mapsto x^3$ est bijective, $x = y$. On a alors $2x - 2x^3 = 0 = 2x(1 - x^2) = 0$.

On a donc les 3 points critiques : $\boxed{(0; 0),\ (1; 1),\ (-1; -1)}$ [*2 pts*].

On a alors $\partial_1^2 f(x, y) = 2 - 12x^2$, $\partial_1\partial_2 f(x, y) = 2$ et $\partial_2^2 f(x, y) = 2 - 12y^2$.

• $\nabla^2 f(0, 0) = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}$: une valeur propre nulle, donc on ne peut pas conclure de la sorte. Par contre, $f(h, 0) = 2h - 4h^3 = 2h(1 - 2h^2)$ du signe de h, donc $(0, 0)$ est un point selle [*1pt*].

• $\nabla^2 f(-1, -1) = \nabla^2 f(-1, -1) = \begin{pmatrix} -10 & 2 \\ 2 & -10 \end{pmatrix}$: le déterminant est positif (96) et la trace négative (-20), donc on a deux valeurs propres négatives et donc des maximums locaux [*1pt*].

2. $(x + y)^2 = x^2 + y^2 + 2xy$, avec $(x - y)^2 = x^2 + y^2 - 2xy \geq 0$, donc $2xy \leq x^2 + y^2$ et $\boxed{(x + y)^2 \leq 2(x^2 + y^2)}$. De même, $(x^2 + y^2)^2 \leq 2(x^4 + y^4)$, donc $-(x^4 + y^4) \leq -\frac{1}{2}(x^2 + y^2)^2$ puis $\boxed{f(x, y) \leq 2u - \frac{1}{2}u^2 = \varphi(u)}$ où $u = x^2 + y^2$, par sommation des inégalités [*1pt*].

3. $\varphi'(u) = 2 - u$ donc φ est croissante sur $[0, 2]$ et décroissante sur $[2, +\infty[$, avec $\varphi(0) = 0$, $\varphi(2) = 4 - 2 = 2$ et $\lim\limits_{u \to +\infty} \varphi(u) = -\infty$ [*1pt*]. Ainsi, $\varphi(u) \leq 2$ pour tout $u \in \mathbb{R}_+$, et donc $f(x, y) \leq 2$ pour tout $(x, y) \in \mathbb{R}^2$. Or $f(-1, -1) = f(1, 1) = 2$. Donc $\boxed{\max f = 2 \text{ et } \operatorname{argmax} f = \{(1, 1); (-1, -1)\}}$ [*1pt*]. Un minimum global serait aussi minimum local, donc, $\boxed{f \text{ n'admet pas de minimum global}}$ [*1pt*].

Exercice II- [**8 points**]

II- a) C est le domaine limité par le disque de centre $(0, 0)$ et de rayon 2 et la droite $x + y = 2$ [*1pt*]. Plus précisément, $C = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2\ ; g_1(x, y) \leq 0 \text{ et } g_2(x, y) \leq 0\}$ avec $g_1(x, y) = x^2 + y^2 - 4$ et $g_2(x, y) = x + y - 2$. Ces fonctions contraintes sont donc de classe C^1, donc C est un fermé, comme intersection de 2 fermés (disque fermé et demi-plan fermé). C est aussi un ensemble borné, car inclus dans le disque de centre $(0, 0)$ et de rayon 2. Donc, $\boxed{C \text{ est fermé borné}}$ et, comme f est continue, $\boxed{f \text{ admet un minimum et un maximum sur } C}$ [*0,5pt*].

b) Les fonctions f et g_i pour $1 \leq i \leq 2$ sont toutes de classe $\mathcal{C}^1$. De plus, g_1 est convexe, et g_2 est linéaire, donc les contraintes sont qualifiées en tout point et on peut appliquer Kuhn-Tucker [*0,5pt*].

On a $\nabla f(x,y) = \begin{pmatrix} 2(x-2) \\ 2(y-2) \end{pmatrix}$, $\nabla g_1(x,y) = \begin{pmatrix} 2x \\ 2y \end{pmatrix}$ et $\nabla g_2(x,y) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$. Il existe λ_i, $1 \leq i \leq 2$, $\lambda_i \geq 0$ (resp. ≤ 0) pour le minimum (resp. pour le maximum) tels que

$$\begin{cases} \nabla f(u) + \displaystyle\sum_{i=1}^{2} \lambda_i \nabla g_i(u) = 0 \\ \lambda_i g_i(u) = 0 \text{ pour } 1 \leq i \leq 2 \\ g_i(u) \leq 0 \text{ pour } 1 \leq i \leq 2 \end{cases},$$

soit $\begin{cases} 2(x-2) + 2x\lambda_1 + \lambda_2 = 0 \\ 2(y-2) + 2y\lambda_1 + \lambda_2 = 0 \\ \lambda_1(x^2+y^2-4) = 0\,;\ \lambda_2(x+y-2) = 0\ ; \\ x^2+y^2-4 \leq 0\ ;\ x+y-2 \leq 0 \end{cases}$ [*1,5pt*].

c) • <u>Si aucune contrainte n'est saturée</u>, on a $\nabla f(u) = 0$ qui donne $x = 2$ et $y = 2$ mais $(2,2) \notin C$ [*0,5pt*].

• <u>Si les deux contraintes sont saturées</u>, on calcule les interserctions.

$\rightarrow$ $x+y = 2$ et $x^2+y^2 = 4$ donne $x+y = 2$ et $x^2 + (2-x)^2 = 4$, soit $x^2 + 4 - 4x + x^2 = 4$, soit $2x^2 - 4x = 2x(x-2) = 0$ qui donne $x = 0$ et $y = 2$ et $x = 2$ et $y = 0$. On a alors $f(2,0) = (2-2)^2 + (2-0)^2 = 4$ et $f(0,2) = (0-2)^2 + (2-2)^2 = 4$ [*1pt*].

• <u>Si une seule contrainte est saturée</u>,

$\rightarrow$ pour g_1, $x^2+y^2-4 = 0$ et $\begin{vmatrix} x-2 & x \\ y-2 & y \end{vmatrix} = 0$, soit $xy - 2y - xy + 2x = 0$, ce qui donne $x = y$, puis $2x^2 = 4$, soit $x = y = \sqrt{2}$ ou $x = y = -\sqrt{2}$. On a $(\sqrt{2}, \sqrt{2}) \notin C$ car $2\sqrt{2} \geq 2$ et $f(-\sqrt{2}, -\sqrt{2}) = 2(-\sqrt{2}-2)^2 = 2(2 + 4\sqrt{2} + 4) = 12 + 8\sqrt{2}$ [*1pt*].

$\rightarrow$ pour g_2, $x+y = 2$ et $\begin{vmatrix} x-2 & 1 \\ y-2 & 1 \end{vmatrix} = 0$, soit $x-2 = y-2$, donc $x = y = 1$ et $f(1,1) = 2(1-2)^2 = 2$ [*0,5pt*].

Il faut donc comparer 2, 4 et $12 + 8\sqrt{2}$, 8, donc $\boxed{\min f = 2}$ avec $\boxed{\text{argmin}_C(f) = \{(1,1)\}}$ et $\boxed{\max f = 12 + 8\sqrt{5}}$ avec $\boxed{\text{argmax}_C(f) = \left\{\left(-\sqrt{2}, -\sqrt{2}\right)\right\}}$ [*1pt*].

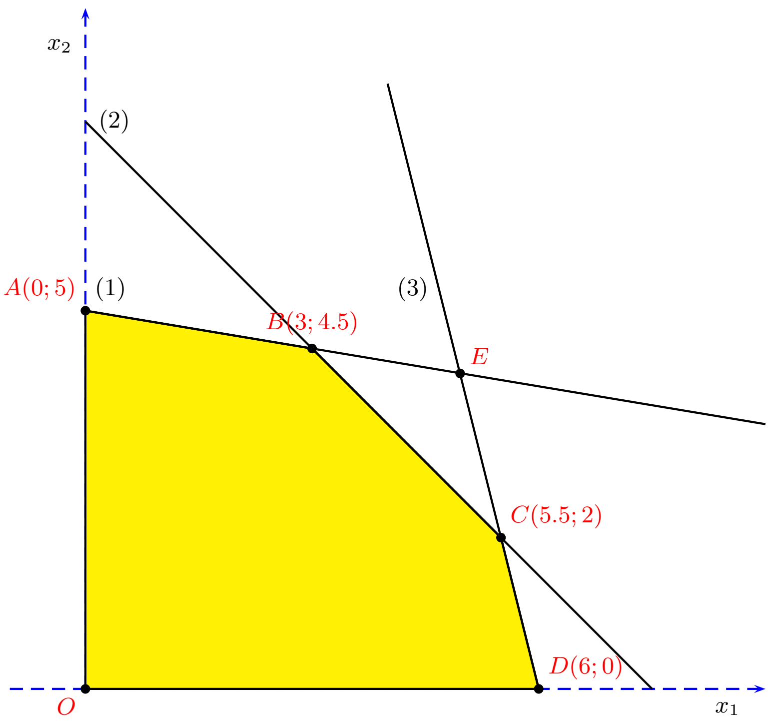
Remarque On peut vérifier sur le dessin que c'est bien le point $(1,1)$ du domaine C qui est le plus proche du point $(2,2)$ et le point $\left(-\sqrt{2}, -\sqrt{2}\right)$ le plus loin du point $(2,2)$ [*0,5pt*].

<u>**Exercice III-**</u> [**7 points**]

1. [*0,5pt*] On note x_i, $1 \leq i \leq 2$ la quantité de produit P_i fabriquée (en kg, pour une journée). Le chiffre d'affaire quotidien est alors $2x_1 + 3x_2 = z$. On a une contrainte pour la main d'oeuvre : $x_1 + 6x_2 \leq 30$ et pour la disponibilité des matières premières : $2x_1 + 2x_2 \leq 15$ pour R_1, et $4x_1 + x_2 \leq 24$ pour R_2. Le problème s'écrit donc :

$$(P) \begin{cases} 2x_1 & + & 3x_2 & = & z[\max] \\ x_1 & + & 6x_2 & \leq & 30 \\ 2x_1 & + & 2x_2 & \leq & 15 \\ 4x_1 & + & x_2 & \leq & 24 \\ x_1 & , & x_2 & \geq & 0 \end{cases}$$

Le domaine des solutions admissibles satisfaisant les contraintes est le polygône de sommets $O(0;0)$, $A(0;5)$, $B(3;4,5)$, $C(5,5;2)$ et $D(6;0)$. On sait que le maximum existe (domaine fermé borné), et qu'il se trouve en l'un des sommets du polygône. On a $z_O = 0$, $z_A = 15$, $z_B = 19,5$, $z_C = 17$, et $z_D = 12$. On a donc $\boxed{\max(z) = z^* = 19,5}$ atteint en B, pour une fabrication de $\boxed{\text{3kg de } P_1 \text{ et 4,5kg de } P_2}$ [*1pt*].



2. Calcul de l'optimum avec le simplexe

Premier tableau :

$$
\begin{array}{ccc|ccccc|c|c}
 & i\downarrow & j\rightarrow & x_1 & x_2 & x_{\bar{1}} & x_{\bar{2}} & x_{\bar{3}} & \beta & \beta_i/\alpha_{i,e} \\
\leftarrow & \bar{1} & & 1 & \boxed{6} & 1 & 0 & 0 & 30 & 5 \\
 & \bar{2} & & 2 & 2 & 0 & 1 & 0 & 15 & 7,5 \\
 & \bar{3} & & 4 & 1 & 0 & 0 & 1 & 24 & 24 \\
\hline
 & \Delta_j & & 2 & 3 & 0 & 0 & 0 & z-0 & \\
 & & & & \uparrow e & & & & &
\end{array}
$$

Deuxième tableau : x_2 entre dans la base et $x_{\bar{1}}$ en sort

$$
\begin{array}{ccc|ccccc|c|c}
 & i\downarrow & j\rightarrow & x_1 & x_2 & x_{\bar{1}} & x_{\bar{2}} & x_{\bar{3}} & \beta & \beta_i/\alpha_{i,e} \\
 & 2 & & 1/6 & 1 & 1/6 & 0 & 0 & 5 & 30 \\
\leftarrow & \bar{2} & & \boxed{5/3} & 0 & -1/3 & 1 & 0 & 5 & 3 \\
 & \bar{3} & & 23/6 & 0 & -1/6 & 0 & 1 & 19 & 114/23 \\
\hline
 & \Delta_j & & 3/2 & 0 & -1/2 & 0 & 0 & z-15 & \\
 & & & \uparrow e & & & & & &
\end{array}
$$

Troisième tableau : x_1 entre dans la base et $x_{\bar{2}}$ en sort

$$
\begin{array}{c c c c c c c c}
i\downarrow & j\rightarrow & x_1 & x_2 & x_{\bar 1} & x_{\bar 2} & x_{\bar 3} & \beta \\
2 & & 0 & 1 & 1/5 & -1/10 & 0 & 9/2 \\
1 & & 1 & 0 & -1/5 & 3/5 & 0 & 3 \\
\bar 3 & & 0 & 0 & 3/5 & -23/10 & 1 & 15/2 \\
 & \Delta_j & 0 & 0 & -1/5 & -9/10 & 0 & z-39/2
\end{array}
$$

Il n'y a plus de terme positif dans la dernière ligne donc on est à l'optimum. La solution est donc $\boxed{x_1^* = 3,\ x_2^* = 4,5}$ et la valeur à l'optimum est $\boxed{z^* = 19,5}$ [*2 pts*].

3. On écrit le programme primal $\left\{\begin{array}{l} 2x_1 + 3x_2 = z[\max] \\ x_1 + 6x_2 \leq 30 \\ 2x_1 + 2x_2 \leq 415 \\ 4x_1 + x_2 \leq 24 \\ x_1 \geq 0,\ x_2 \geq 0 \end{array}\right.$

duquel on déduit le programme dual : $\left\{\begin{array}{l} 30y_1 + 15y_2 + 24y_3 = \omega[\min] \\ y_1 + 2y_2 + 4y_3 \geq 2 \\ 6y_1 + 2y_2 + y_3 \geq 3 \\ y_1,\ y_2,\ y_3 \geq 0. \end{array}\right.$ [*0.5pt*].

On écrit alors les relations d'exclusivité :

$$
\left\{\begin{array}{l} y_1^*(30 - x_1^* - 6x_2^*) = 0 \\ y_2^*(15 - 2x_1^* - 2x_2^*) = 0 \\ y_3^*(24 - 4x_1^* - x_2^*) = 0 \end{array}\right. \quad \text{et} \quad \left\{\begin{array}{l} x_1^*(2 - y_1^* - 2y_2^* - 4y_3^*) = 0 \\ x_2^*(3 - 6y_1^* - 2y_2^* - y_3^*) = 0 \end{array}\right.
$$

avec $x_1^* = 3$ et $x_2^* = 9/2$, on obtient $\boxed{y_3^* = 0}$ puis $y_1^* + 2y_2^* = 2$ et $6y_1^* + 2y_2^* = 3$, donc $\boxed{y_1^* = 1/5,\ y_2^* = 9/10 \text{ et } y_3^* = 0}$, avec $\boxed{\omega^* = z^* = 39/2 = 19,5}$ [*1pt*].

4. [*1pt*] Le nouveau programme s'écrit, si le profit de P_2 est p (au lieu de 3),

$$
\boxed{\left\{\begin{array}{ccccc} 2x_1 & + & px_2 & = & z'[\max] \\ x_1 & + & 6x_2 & \leq & 30 \\ 2x_1 & + & 2x_2 & \leq & 15 \\ 4x_1 & + & x_2 & \leq & 24 \\ x_1 & , & x_2 & \geq & 0 \end{array}\right.}.
$$

(Pour $p = 3$, on retrouve le cas du début).

Le domaine des solutions admissibles est exactement le même. Seule la fonction objectif change. On a maintenant $z'_{p,O} = 0$, $z'_{p,A} = 5p$, $z'_{p,B} = 6 + 4,5p$, $z'_{p,C} = 11 + 2p$ et $z'_{p,D} = 12$. $z'_{p,B} \geq z'_{p,C}$ équivaut à $6 + 4,5p \geq 11 + 2p$, soit $2,5p \geq 5$, c'est-à-dire $p \geq 2$. De même, $z'_{p,B} \geq z'_{p,A}$ équivaut à $6+4,5p \geq 5p$, soit $0,5p \leq 6$ ($p \leq 12$) et $z'_{p,C} \leq z'_{p,D}$ équivaut à $11+2p \geq 12$, soit $p \geq 0,5$. Ainsi :

- Pour $\underline{p < 0,5}$, on a intérêt à fabriquer $\boxed{\text{aucun } P_2 \text{ et } 6\ P_1}$;
- Pour $\underline{0,5 \leq p < 2}$, on a intérêt à fabriquer $\boxed{5,5\ P_1 \text{ et } 2\ P_2}$;
- Pour $\underline{2 \leq p < 12}$, on a intérêt à fabriquer $\boxed{3\ P_1 \text{ et } 4,5\ P_2}$;
- Pour $\underline{p > 12}$, on a intérêt à fabriquer $\boxed{5\ P_1 \text{ et aucun } P_2}$;

• Pour $p = 2$, n'importe quel point du segment $[BC]$ fournit la solution optimale ; pour $p = 12$, c'est n'importe quel point du segment $[AB]$ et pour $p = 0,5$, c'est n'importe quel point du segment $[CD]$.

5. [*1pt*] Dans ce cas, c'est la première contrainte qui change. Le nouveau programme s'écrit

$$\boxed{\left\{\begin{array}{ccccc} 2x_1 & + & 3x_2 & = & z[\max] \\ x_1 & + & 6x_2 & \leq & q \\ 2x_1 & + & 2x_2 & \leq & 15 \\ 4x_1 & + & x_2 & \leq & 24 \\ x_1 & , & x_2 & \geq & 0 \end{array}\right.}.$$

La droite (AC) est remplacée par une droite parallèle, la droite d'équation $x_1 + 6x_2 = q$. (On retrouve le cas du début pour $q = 30$).

• Si $q/6 \geq 7,5$, soit $q > 45$, la droite correspondant à la contrainte (1) est au dessus du polygône et alors $z^* = 17$ obtenu en $u^* = (5,5; 2)$.

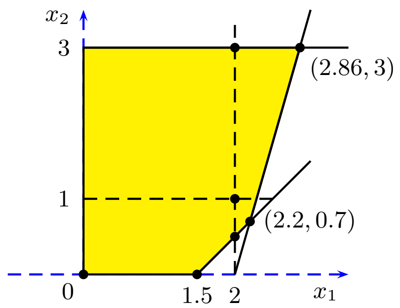
• Si $q < 45$, on a un nouveau polygône $OA'B'CD$ avec $A'(0; q/6)$ et $B'(9 - q/5; q/5 - 1,5)$ si de plus, $q/5 - 1,5 > 2$, soit $q > 17,5$. On montre alors que, $z^* = z_{B'} = q/5 + 13,5$.

• Si $6 \leq q \leq 17,5$, on a un nouveau polygône $OA'E'D$ où E est à l'intersection des droites (1) et (3), soit $E\left((144 - q)/23; (4q - 24)/23\right)$ et on a alors $z^* = z_E = (216 + 10q)/23$.

• Si $q < 6$, il ne peut pas y avoir de P_2. On a alors $z^* = 2q$ obtenu en $u^* = (q; 0)$.

<u>Exercice IV-</u> [5 points]

On commence par résoudre (P_0) $\left\{\begin{array}{ccccc} 4x_1 & - & x_2 & = & z[\max] \\ 7x_1 & - & 2x_2 & \leq & 14 \\ 2x_1 & - & 2x_2 & \leq & 3 \\ & & x_2 & \leq & 3 \\ x_1 & , & x_2 & \geq & 0 \end{array}\right.$, sans tenir compte de la contrainte x_1, x_2 à valeurs entières mais seulement $x_1 \geq 0$ et $x_2 \geq 0$. On trouve graphiquement [*1pt*] la solution optimale $\boxed{x_1^* = 20/7 \approx 2,86,\ x_2^* = 3,\ z_0^* = 59/7 \approx 8,43}$, ce qui ne fournit pas une solution entière.



• <u>On branche (P_0) par rapport à x_1</u> en

$$(P_0) \wedge (x_1 \leq 2) = (P_1)$$

et on résout ce nouveau programme linéaire sans tenir compte de la contrainte x_1, x_2 à valeurs entières. On trouve la solution optimale non entière $\boxed{x_1^* = 2,\ x_2^* = 1/2 \text{ avec } z_1^* = 7.5}$ et

$$(P_0) \wedge (x_2 \geq 3) = (P_2)$$

qui n'a $\boxed{\text{pas de solution}}$ car alors on aurait $2x_2 \geq 21 - 14 = 7$, soit $x_2 \geq 3.5$, ce qui est faux.

- On branche (P_1) par rapport à x_1 en

$$(P_1) \wedge (x_2 \geq 1) = (P_3)$$

qui donne une solution entière $\boxed{x_1^* = 2,\ x_2^* = 1,\ \text{avec } z_3^* = 7}$, qui fournit une première borne et

$$(P_1) \wedge (x_2 = 0) = (P_4)$$

qui donne une solution non entière $\boxed{x_1^* = 1.5,\ x_2^* = 0,\ \text{avec } z_4^* = 6}$.

Il est inutile de continuer l'exploration après (P_4) car déjà, la solution maximale non entière de (P_4) est moins bonne que la solution entière de (P_3) donc on ne fera pas mieux [*2pts*].

Ainsi, on peut construire l'arbre [*1pt*].

On a obtenu l'optimum du PLNE initial qui est $\boxed{x^* = (2;1) \text{ avec } z^* = 7}$ [*1pt*].