Introduction

Ce cours d'algèbre linéaire est destiné aux étudiants en Master de Sciences Economiques de l'Université Toulouse 1. Il se compose de deux parties.

La première partie, constituée des chapitres 1 à 8, permet de réviser les principales notions acquises en premier cycle universitaire. Les définitions et les principaux résultats y figurent, mais pas les démonstrations, dans un premier temps. Des exercices permettent de s'assurer que ces pré-requis sont bien acquis. Il sera bien évidemment possible de revenir sur cette partie de façon plus approfondie si nécessaire.

La deuxième partie, constituée des chapitres 9 à 11, est consacrée plus particulièrement à l'analyse numérique matricielle. On y aborde les notions de normes sur les espaces de matrices, de décompositions matricielles, et on étudie quelques méthodes directes ou itératives de résolution de systèmes linéaires.

Le chapitre 11 (consacré à quelques méthodes de résolutions directes de systèmes linéaires à partir de décompositions de matrices) ne nécessite que très peu de pré-requis et il est donc quasiment indépendant du reste. De plus, il plaît généralement bien aux étudiants.

Table des matières

1 Espaces vectoriels **7**
1.1 Espace vectoriel . . . 7
1.2 Sous-espaces vectoriels . . . 8
1.3 Familles de vecteurs, bases . . . 8
1.3.1 Familles finies . . . 8
1.3.2 Extension à une indexation quelconque . . . 9
1.4 Dimension d'un espace vectoriel . . . 9
1.5 Sommes de sous-espaces vectoriels . . . 10
1.5.1 Sommes de r sous-espaces vectoriels . . . 10
1.5.2 Somme directe . . . 11
1.5.3 Cas de la dimension finie . . . 11
1.5.4 Sous-espaces vectoriels supplémentaires . . . 11

2 Applications linéaires **13**
2.1 Premières notions . . . 13
2.2 Noyau et image d'une application linéaire . . . 13
2.3 Projecteurs . . . 14
2.4 Notions liées au rang . . . 15

3 Matrices **17**
3.1 Introduction, notations . . . 17
3.2 Opérations sur les matrices . . . 17
3.2.1 L'espace vectoriel des matrices . . . 17
3.2.2 Produit de matrices . . . 18
3.2.3 Matrice transposée . . . 18
3.3 Matrices par blocs . . . 18
3.4 Matrices carrées . . . 19
3.5 Matrices semblables . . . 20

4 Représentations matricielles **21**
4.1 Représentation des vecteurs . . . 21
4.2 Matrices d'une application linéaire . . . 21
4.3 Intervention des produits matriciels . . . 22
4.4 Problèmes de changements de bases . . . 22
4.4.1 Changements de bases . . . 22
4.4.2 Effets des changements de bases . . . 23
4.4.3 Formes linéaires sur E, trace . . . 23

5 Déterminants **25**
5.1 Déterminant de n vecteurs 25
5.1.1 Formes n-linéaires alternées 25
5.1.2 Déterminant de n vecteurs 25
5.1.3 Caractérisation des bases 26
5.2 Déterminant d'un endomorphisme 26
5.3 Déterminant d'une matrice 26
5.3.1 Le matériel 26
5.3.2 Changement de base 27
5.4 Calcul des déterminants 27
5.4.1 Déterminant d'une matrice triangulaire 27
5.4.2 Utilisation d'opérations élémentaires 28
5.4.3 Développement suivant une ligne ou une colonne 28
5.4.4 Application au calcul de l'inverse d'une matrice 29
5.4.5 Déterminant par blocs 29

6 Réduction des endomorphismes **31**
6.1 Éléments propres d'un endomorphisme 31
6.1.1 Le matériel 31
6.1.2 Polynôme caractéristique d'un endomorphisme en dimension finie 32
6.1.3 Éléments propres d'une matrice carrée 33
6.1.4 Effets de l'inclusion $\mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \subset \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ 33
6.2 Diagonalisabilité 34
6.2.1 Somme directe de sous-espaces propres 34
6.2.2 Diagonalisabilité d'un endomorphisme 34
6.3 Diagonalisabilité d'une matrice carrée 35
6.3.1 Matrices semblables 35
6.3.2 Matrices carrées diagonalisables 36
6.4 Trigonalisation 38

7 Espaces préhilbertiens réels et complexes **41**
7.1 Produit scalaire et norme associée 41
7.1.1 Produit scalaire 41
7.1.2 Orthogonalité de vecteurs et de sous-espaces vectoriels 42
7.2 Norme associée à un produit scalaire 44
7.3 Intervention de la dimension finie 45
7.3.1 Familles orthonormales 45
7.3.2 Représentation des formes linéaires en dimension finie 46
7.3.3 Intervention des sous-espaces vectoriels de dimension finie 46
7.3.4 Procédé d'orthonormalisation de Gram-Schmidt 46
7.3.5 Distance à un sous-espace vectoriel 47

8 Endomorphismes d'un espace euclidien **49**
8.1 Automorphismes orthogonaux et matrices orthogonales 49
8.1.1 Groupe orthogonal de E 49
8.1.2 Matrices orthogonales 49
8.1.3 Matrices M-orthogonales 50
8.1.4 Projection M-orthogonale 50
8.2 Réduction des endomorphismes symétriques 50

9 Compléments sur les matrices 53
9.1 Compléments sur la réduction des matrices 53
9.2 Quotient de Raleigh 56
9.3 Normes vectorielles et normes matricielles 58
9.3.1 Normes vectorielles 58
9.3.2 Normes matricielles 58
9.3.3 Suites de vecteurs et de matrices 63

10 Méthodes itératives de résolution de systèmes linéaires 65
10.1 Introduction 65
10.2 Convergence des méthodes itératives 65
10.2.1 Critères de convergence 65
10.2.2 Comparaison des méthodes itératives 66
10.3 Quelques méthodes itératives particulières 68
10.3.1 Méthode de Jacobi 68
10.3.2 Méthode de Gauss-Seidel 68
10.3.3 Méthode de relaxation 69

11 Méthodes directes de résolution de systèmes linéaires 71
11.1 Introduction 71
11.2 Méthode de Gauss 72
11.2.1 Exemple introductif 72
11.2.2 Méthode générale 76
11.2.3 Remarque sur le choix du pivot 77
11.2.4 Décompte du nombre d'opérations 78
11.3 Factorisation LU 79
11.3.1 Factorisation dans un cas particulier 79
11.3.2 Factorisation *LU* d'une matrice tridiagonale 83
11.4 Méthode de Cholesky 84
11.5 Factorisation QR et méthode de Househölder 86

Chapitre 1

Espaces vectoriels

Dans tout le cours, $\mathbb{K}$ désignera l'ensemble des réels $\mathbb{R}$ ou des complexes $\mathbb{C}$, muni des opérations usuelles d'addition et de multiplication : c'est le corps des <u>*scalaires*</u>.

1.1 Espace vectoriel

Définition 1.1. *Un <u>espace vectoriel</u> sur $\mathbb{K}$ est un ensemble E muni :*
a) d'une addition $E \times E \to E, (x, y) \mapsto x + y$, telle que $(E, +)$ est un groupe commutatif. On note 0 l'élément neutre, et $-x$ l'opposé de x.
b) d'une multiplication dite externe $\mathbb{K} \times E \to E, (\lambda, x) \mapsto \lambda x$, vérifiant les règles suivantes :
Pour tout $(\lambda, \mu, x, y) \in \mathbb{K} \times \mathbb{K} \times E \times E$:
i. $\lambda(\mu x) = (\lambda\mu)x$.
ii. $(\lambda + \mu)x = \lambda x + \mu x$.
iii. $\lambda(x + y) = \lambda x + \lambda y$.
iv. $1x = x$.

Attention : ne pas confondre addition de deux vecteurs ou de deux scalaires, même si ces opérations sont notées de la même façon (+). De même, ne pas confondre multiplication d'un vecteur par un scalaire et multiplication de deux scalaires.

Remarque 1.1. On a $\lambda x = 0$ si et seulement si $\lambda = 0$ ou $x = 0$.

On peut citer quelques cas extrêmement classiques d'espaces vectoriels :

Exemple 1.1. a) $\mathbb{K}^n$ avec $(x_1, \dots, x_n) + (y_1, \dots, y_n) = (x_1 + y_1, \dots, x_n + y_n)$ et $\lambda(x_1, \dots, x_n) = (\lambda x_1, \dots, \lambda x_n)$.

b) $\mathcal{F}(X, E)$, ensemble des fonctions de X dans E espace vectoriel, avec $(f + g)(x) = f(x) + g(x)$ et $(\lambda f)(x) = \lambda(f(x))$.

c) $E^{\mathbb{N}}$ ensemble des suites à valeurs dans E, avec $(u_n) + (v_n) = (u_n + v_n)$ et $\lambda(u_n) = (\lambda u_n)$ (cas particulier du b) avec $X = \mathbb{N}$).

1.2 Sous-espaces vectoriels

Définition 1.2. *Une partie E_1 d'un espace vectoriel E est un sous-espace vectoriel de E si et seulement si elle est non vide et, pour tout $(\lambda, x, y) \in \mathbb{K} \times E_1 \times E_1$, alors $\lambda x + y \in E_1$ (stabilité pour l'addition et la multiplication par un scalaire).*

Remarque 1.2. a) E_1 possède alors elle aussi la structure d'espace vectoriel.

b) Le singleton $\{0\}$ est un sous-espace vectoriel de E.

c) Si $(E_i)_{i\in I}$ une famille de sous-espaces vectoriels de E, alors, $\bigcap_{i\in I} E_i$ est un sous-espace vectoriel de E.

Attention : la réunion $E_1 \cup E_2$ de deux sous-espaces vectoriels de E n'en est pas toujours un !

1.3 Familles de vecteurs, bases

1.3.1 Familles finies

Définition 1.3. *Dans E, une combinaison linéaire de $(e_1, \ldots, e_p) \in E^p$ est un vecteur de la forme $\sum_{i=1}^{p} x_i e_i$, avec $(x_1, \ldots, x_p) \in \mathbb{K}^p$;* $\mathrm{vect}(e_1, \ldots, e_p)$ *est l'ensemble des combinaisons linéaires de la famille $(e_1, \ldots, e_p) \in E^p$.*

Proposition 1.1. $\mathrm{vect}(e_1, \ldots, e_p)$ est le plus petit sous-espace vectoriel de E (pour l'inclusion) contenant chaque e_i. C'est donc l'intersection de tous les sous-espaces vectoriels de E contenant chaque e_i.

Définition 1.4. *On dit que* $\mathrm{vect}(e_1, \ldots, e_p)$ *est le sous-espace vectoriel engendré par* $(e_1, \ldots, e_p)$.

Définition 1.5. $(e_1, \ldots, e_p)$ *est une famille génératrice de E si $E = \mathrm{vect}(e_1, \ldots, e_p)$, c'est-à-dire si tout élément de E est combinaison linéaire de $(e_1, \ldots, e_p)$.*

Définition 1.6. $(e_1, \ldots, e_p)$ *est libre (ses vecteurs sont linéairement indépendants) si, pour tout $(\lambda_1, \ldots, \lambda_p) \in \mathbb{K}^p$, $\sum_{i=1}^{p} \lambda_i e_i = 0$ équivaut à $\lambda_i = 0$ pour tout i. Si elle n'est pas libre, $(e_1, \ldots, e_p)$ est liée (ses vecteurs sont linéairement dépendants).*

Proposition 1.2. a) $(e_1, \ldots, e_p)$ est liée si et seulement si il existe i_0 tel que $e_{i_0} \in \mathrm{vect}(e_i, i \neq i_0)$.

b) Toute famille contenant le vecteur nul est liée.

c) Toute famille contenant deux vecteurs égaux est liée.

d) Toute sur-famille d'une famille liée est liée.

e) Toute sous-famille d'une famille libre est libre.

Définition 1.7. *$(e_1, \ldots, e_p)$ est une base de E si elle est libre et génératrice.*

Théorème 1.1. Si $(e_1, \ldots, e_p)$ est une base de E, pour tout x de E, l'écriture $x = \sum_{i=1}^{p} x_i e_i$ existe et est unique.

Définition 1.8. *Si $(e_1, \ldots, e_p)$ est une base de E et si $x = \sum_{i=1}^{p} x_i e_i$, les x_i sont les coordonnées ou composantes de x dans la base $\mathcal{B} = (e_1, \ldots, e_p)$.*

La base canonique de $\mathbb{K}^n$ est $((1, 0, \cdots, 0), (0, 1, 0, \cdots, 0), \cdots, (0, \cdots, 0, 1))$.

1.3.2 Extension à une indexation quelconque

E est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel. A est un ensemble d'indices non vide. Soit $(e_\alpha)_{\alpha \in A}$ une famille de vecteurs de E.

Définition 1.9. *a) $(e_\alpha)_{\alpha \in A}$ est libre si, pour toute partie $B \subset A$, finie et non vide, la famille $(e_\alpha)_{\alpha \in B}$ est libre. La famille $(e_\alpha)_{\alpha \in A}$ est liée si elle n'est pas libre.*
b) Soit X une partie d'un espace vectoriel E. L'intersection des sous-espaces vectoriels contenant X est le sous-espace vectoriel engendré par X noté $\mathrm{vect}(X)$: c'est le plus petit sous-espace vectoriel contenant X et c'est aussi l'ensemble des $x = \sum_{\alpha \in B} x_\alpha e_\alpha$ où $B \subset A$ est finie non vide et où $x_\alpha \in \mathbb{K}$.
c) $(e_\alpha)_{\alpha \in A}$ est génératrice de E si $E = \mathrm{vect}(e_\alpha, \alpha \in A)$, c'est-à-dire si, pour tout $x \in E$, il existe $B \subset A$ finie et non vide, et $(x_\alpha)_{\alpha \in B}$ famille d'éléments de $\mathbb{K}$, telle que $x = \sum_{\alpha \in B} x_\alpha e_\alpha$.

1.4 Dimension d'un espace vectoriel

Définition 1.10. *Un $\mathbb{K}$-espace vectoriel $E \neq \{0\}$ admettant une famille génératrice finie est dit de dimension finie.*

Le résultat suivant est le théorème de la base incomplète.

Théorème 1.2. Si $\mathcal{L} = (u_1, \ldots, u_p)$ est une famille libre qui n'est pas une base de E et $(f_1, \ldots, f_n)$ une famille génératrice de E, alors on peut compléter $\mathcal{L}$ par des f_i, en une base de E.

On en déduit les résultats importants suivants :

Théorème 1.3. a) Tout espace vectoriel $E \neq \{0\}$ de dimension finie admet des bases.
b) De toute famille finie génératrice de E, on peut extraire une base de E.

On s'intéresse maintenant au cardinal d'une base.

Théorème 1.4. Toutes les bases de E sont finies et ont le même nombre d'éléments.

Définition 1.11. *La* dimension *de E, notée* $\dim(E)$ *est le nombre d'éléments d'une de ses bases. On complète par* $\dim(\{0\}) = 0$.

Les propriétés énoncées ci-dessous permettent de voir que les bases sont les plus grandes des familles libres, et les plus petites des familles génératrices :

Proposition 1.3. Soit $\dim(E) = n \geqslant 1$ et soit $(u_1, \ldots, u_p) \in E^p$.
a) Si $(u_1, \ldots, u_p)$ est libre, alors $p \leqslant n$.
b) Si $(u_1, \ldots, u_p)$ est génératrice, alors $p \geqslant n$.
Dans les deux cas, $p = n$ si et seulement si $(u_1, \ldots, u_p)$ est une base de E.

Théorème 1.5. $\dim(E) = n \geqslant 1$. Tout sous-espace vectoriel E_1 de E est de dimension finie, et on a $\dim(E_1) \leqslant \dim(E)$, avec égalité si et seulement si $E_1 = E$.

Exemple 1.2. $\mathbb{K}^n$ est en fait le modèle d'espace vectoriel de dimension n.

Le résultat suivant fait appel à la notion d'isomorphisme, qui sera vue au chapitre 2.

Théorème 1.6. a) $\dim(\mathbb{K}^n) = n$.
b) E est de dimension $n \geqslant 1$ si et seulement si E est isomorphe à $\mathbb{K}^n$.
c) E et F sont de même dimension si et seulement si ils sont isomorphes.

Théorème 1.7. a) Soit E et F des espaces vectoriels de dimension finie. Alors $E \times F$ est de dimension finie avec

$$\dim(E \times F) = \dim(E) + \dim(F).$$

b) Plus généralement, soit $(E_i)_{1 \leqslant i \leqslant r}$ des espaces vectoriels de dimension finie. Alors $\prod_{i=1}^{r} E_i$ est de dimension finie, avec

$$\dim(\prod_{i=1}^{r} E_i) = \sum_{i=1}^{r} \dim(E_i).$$

1.5 Sommes de sous-espaces vectoriels

E est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel.

1.5.1 Sommes de r sous-espaces vectoriels

Définition 1.12. $\left\{ \sum_{i=1}^{r} x_i, \forall (x_1, \ldots, x_r) \in \prod_{i=1}^{r} E_i \right\}$ *est un sous-espace vectoriel de E, dit* somme *des E_i, et noté $E_1 + \ldots + E_r$, ou $\sum_{i=1}^{r} E_i$. C'est le plus petit sous-espace vectoriel de E qui contient chaque E_i, donc $\bigcup_{i=1}^{r} E_i$.*

1.5.2 Somme directe

Définition 1.13. *$\sum_{i=1}^{r} E_i$ est directe si, pour tout $x \in \sum_{i=1}^{r} E_i$, l'écriture $x = \sum_{i=1}^{r} x_i$ est unique. $\sum_{i=1}^{r} E_i$ est alors noté $\bigoplus_{i=1}^{r} E_i$.*

Théorème 1.8. $\sum_{i=1}^{r} E_i$ est directe si et seulement si pour tout $(x_1, \ldots, x_r) \in \prod_{i=1}^{r} E_i$, $\sum_{i=1}^{r} x_i = 0$ est équivalent à $x_i = 0$ pour tout i.

Proposition 1.4. Si la somme $\sum_{i=1}^{r} E_i$ est directe, et si $(x_1, \ldots, x_r) \in \prod_{i=1}^{r} E_i$ est tel que $x_i \neq 0$ pour tout i, alors la famille $(x_1, \ldots, x_r)$ est libre.

Proposition 1.5. $E_1 + E_2$ est directe si et seulement si $E_1 \cap E_2 = \{0\}$.

Le résultat précédent est utile, mais attention à ne pas généraliser abusivement...

1.5.3 Cas de la dimension finie

Théorème 1.9. Lorsque E est de dimension finie et que $\sum_{i=1}^{r} E_i$ est directe, alors

a) $\dim\left(\bigoplus_{i=1}^{r} E_i\right) = \sum_{i=1}^{r} \dim(E_i)$

b) $E = \bigoplus_{i=1}^{r} E_i$ si et seulement si $\dim(E) = \sum_{i=1}^{r} \dim(E_i)$.

1.5.4 Sous-espaces vectoriels supplémentaires

Définition 1.14. *Si $E = E_1 \oplus E_2$, on dit que E_1 et E_2 sont supplémentaires dans E (E_2 est un supplémentaire de E_1 dans E). Cela équivaut à $E = E_1 + E_2$ et $E_1 \cap E_2 = \{0\}$.*

Remarque 1.3. Ne pas confondre *UN* supplémentaire avec *LE* complémentaire.

a) Le complémentaire d'un sous-espace vectoriel de E n'est pas un sous-espace vectoriel de E : il ne contient pas 0.

b) Il n'y a pas unicité pour la notion de supplémentaire. Par exemple, $\mathbb{C} = \mathbb{R} \oplus \mathbb{R}i = \mathbb{R} \oplus \mathbb{R}j$.

Exemple 1.3. Soit B un polynôme non constant de $\mathbb{K}[X]$. Alors $\mathbb{K}[X] = B\mathbb{K}[X] \oplus \mathbb{K}_{\deg B - 1}[X]$.

Démonstration. Les deux ensembles en jeu sont bien deux sous-espaces vectoriels de $\mathbb{K}[X]$, dont l'intersection est nulle, puisqu'un multiple non nul de B a un degré supérieur ou égal à celui de B. Par ailleurs, l'existence pour tout polynôme A d'une écriture $A = BQ + R$ n'est rien d'autre que le résultat de la division euclidienne de A par B, donc $\mathbb{K}[X]$ est bien la somme cherchée. □

Théorème 1.10. Si $\dim(E)$ est finie, tout sous-espace vectoriel E_1 de E admet un supplémentaire dans E.

Ceci résulte du théorème de la base incomplète. On termine ce chapitre par la formule de Grassmann :

Théorème 1.11. Si E_1 et E_2 sont de dimension finie dans E, alors

$$\boxed{\dim(E_1 + E_2) = \dim E_1 + \dim E_2 - \dim(E_1 \cap E_2).}$$

Chapitre 2

Applications linéaires

2.1 Premières notions

Définition 2.1. *Soit E et F deux espaces vectoriels sur $\mathbb{K}$. Une application $u : E \to F$ est linéaire si, pour tout $(\lambda, x, y) \in \mathbb{K} \times E \times E$, alors $u(\lambda x + y) = \lambda u(x) + u(y)$. Si $E = F$, on dit que u est un endomorphisme de E.*

On note $\mathcal{L}(E, F)$ l'ensemble des applications linéaires de E dans F : c'est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel. Lorsque $E = F$, on écrit $\mathcal{L}(E)$ au lieu de $\mathcal{L}(E, E)$.

Proposition 2.1. a) Si u est linéaire, on a $u(0) = 0$.

b) Soit E, F et G trois espaces vectoriels sur $\mathbb{K}$, $u \in \mathcal{L}(E, F)$ et $v \in \mathcal{L}(F, G)$. Alors, $v \circ u \in \mathcal{L}(E, G)$.

c) Si $u \in \mathcal{L}(E, F)$ est bijective, alors $u^{-1} \in \mathcal{L}(F, E)$. On dit alors que u est un *isomorphisme*. Si $E = F$, on parle alors d'*automorphisme* de E.

2.2 Noyau et image d'une application linéaire

Théorème 2.1. Soit E et F deux espaces vectoriels sur $\mathbb{K}$, u une application linéaire de E dans F. Alors :

a) si E_1 est un sous-espace vectoriel de E, $u(E_1) = \{u(x), x \in E_1\}$ est un sous-espace vectoriel de F ;

b) si F_1 est un sous-espace vectoriel de F, $u^{-1}(F_1) = \{x \in E/u(x) \in F_1\}$ est un sous-espace vectoriel de E.

Définition 2.2. *Soit E et F deux espaces vectoriels sur $\mathbb{K}$, u une application linéaire de E dans F. Alors :*
a) on appelle noyau de u, et on note $\ker(u)$, le sous-espace vectoriel (de E) $u^{-1}(\{0\}) = \{x \in E/u(x) = 0\}$;
b) on appelle image de u, et on note $\mathrm{im}(u)$, le sous-espace vectoriel (de F) $u(E) = \{u(x), x \in E\}$.

Théorème 2.2. Soit E et F deux espaces vectoriels sur $\mathbb{K}$, u une application linéaire de E dans F. Alors :

a) u est injective si et seulement si $\ker(u) = \{0\}$.

b) u est surjective de E sur F si et seulement si $\mathrm{im}(u) = F$.

Proposition 2.2. Soit E, F et G trois espaces vectoriels sur $\mathbb{K}$, $u \in \mathcal{L}(E, F)$ et $v \in \mathcal{L}(F, G)$. Alors $\ker(u) \subset \ker(v \circ u)$ et $\mathrm{im}(v \circ u) \subset \mathrm{im}(v)$.

2.3 Projecteurs

Définition 2.3. *$E = E_1 \oplus E_2$ permet de définir $p_{E_1,E_2} : E \to E, x = x_1 + x_2 \mapsto x_1$. C'est la projection sur E_1, parallèlement à E_2.*

Théorème 2.3. On a $p_{E_1,E_2} \in \mathcal{L}(E)$, $p^2_{E_1,E_2} = p_{E_1,E_2}$, $E_1 = \mathrm{im} p_{E_1,E_2} = \ker(p_{E_1,E_2} - Id_E)$ et $E_2 = \ker p_{E_1,E_2}$.

Remarquons que, si $p(x) = x_1$, alors $(Id_E - p)(x) = x_2$, donc :

Théorème 2.4. Si p est la projection sur E_1, parallèlement à E_2, alors $q = Id_E - p$ est la projection sur E_2, parallèlement à E_1. On dit que p et q sont *associées*, et on a $p + q = Id_E$, ainsi que $p \circ q = q \circ p = 0$.

En fait, la propriété la plus importante est l'équation fonctionnelle $p^2 = p$.

Définition 2.4. *$p \in \mathcal{L}(E)$ tel que $p^2 = p$ est appelé projecteur de E.*

Donc, une projection est un projecteur. La réciproque est vraie :

Théorème 2.5. Un projecteur p est une projection : $p = p_{\mathrm{im} p, \ker p}$. La décomposition associée à $E = \mathrm{im} p \oplus \ker p$ est $x = p(x) + [x - p(x)]$.

Exemple 2.1. B étant non constant dans $\mathbb{K}[X]$, $\mathbb{K}[X] = B\mathbb{K}[X] \oplus \mathbb{K}_{\deg B-1}[X]$ fournit le projecteur

$$p_{\mathbb{K}_{\deg B-1}[X], B\mathbb{K}[X]} : P \mapsto R,$$

où R est le reste de la divsion euclidienne de P par B.

On peut généraliser à une somme directe de r sous-espaces vectoriels :

Définition 2.5. *Si $E = \bigoplus_{j=1}^{r} E_j$, on définit $p_i : E \to E, x = \sum_{j=1}^{r} x_j \mapsto x_i$. p_i est la projection sur E_i parallélement à $\bigoplus_{j \neq i} E_j$.*

Théorème 2.6. On a $\sum_{i=1}^{r} p_i = Id_E$, et, dès que $i \neq j$, $p_i \circ p_j = 0$.

2.4 Notions liées au rang

Définition 2.6. *a) Le rang d'une famille* $(x_1, \ldots, x_p)$ *de* E^p*, noté* $\mathrm{rg}(x_1, \ldots, x_p)$*, est la dimension de* $\mathrm{vect}(x_1, \ldots, x_p)$*.*
b) Si $\dim E$ *est finie, le rang de l'application linéaire* $u \in \mathcal{L}(E, F)$*, noté* $\mathrm{rg}(u)$*, est* $\dim(\mathrm{im} u)$*.*

Théorème 2.7. Si $(e_1, \ldots, e_n)$ est une base de E, alors $\mathrm{rg}(u) = \mathrm{rg}(u(e_1), \ldots, u(e_n))$.

Exemple 2.2. Pour u, $v \in \mathcal{L}(E, F)$ ($\dim E$ finie), montrer que $\mathrm{rg}(u + v) \leqslant \mathrm{rg}(u) + \mathrm{rg}(v)$.

Démonstration. On a $\mathrm{im}(u + v) \subset \mathrm{im} u + \mathrm{im} v$, car, d'un côté, on a les $(u + v)(x)$, et de l'autre les $u(x') + v(x'')$. Donc, par Grassmann : $\mathrm{rg}(u + v) \leqslant \mathrm{rg} u + \mathrm{rg} v - \dim(\mathrm{im} u \cap \mathrm{im} v) \leqslant \mathrm{rg} u + \mathrm{rg} v$. □

Théorème 2.8. Soit $u \in \mathcal{L}(E, F)$: alors, tout supplémentaire de $\ker u$ est isomorphe à $\mathrm{im} u$. En fait, si $E = \ker u \oplus E_1$, l'application $\overline{u} : E_2 \to \mathrm{im} u, x \mapsto u(x)$ est un isomorphisme.

Théorème 2.9. Tous les supplémentaires d'un même sous-espace vectoriel sont isomorphes.

Théorème 2.10. Si $(e_1, \ldots, e_n)$ est une base de E, adaptée à $\ker u$, lui-même de base $(e_{r+1}, \ldots, e_n)$, alors $(u(e_1), \ldots, u(e_r))$ est une base de $\mathrm{im} u$.

On a alors la formule dite du rang suivante :

Théorème 2.11. Si $\dim E$ est finie et $u \in \mathcal{L}(E, F)$, on a $\boxed{\dim E = \mathrm{rg} u + \dim \ker u}$.

Attention : même avec $E = F$, il ne faut pas en déduire que E est la somme directe de l'image et du noyau de u.

Exemple 2.3. *Soit* $u \in \mathcal{L}(E, F)$ *et* $v \in \mathcal{L}(F, G)$*,* E *et* F *étant de dimensions finies. Montrer que* $\mathrm{rg}(v \circ u) \leqslant \min(\mathrm{rg} v, \mathrm{rg} u)$*.*

Démonstration. Les inclusions $\mathrm{im}(v \circ u) \subset \mathrm{im} v$ et $\ker u \subset \ker(v \circ u)$ montrent que $\mathrm{rg}(v \circ u) \leqslant \mathrm{rg} v$ et $\dim E - \mathrm{rg} u \leqslant \dim E - \mathrm{rg}(v \circ u)$, cette dernière en appliquant la formule du rang, d'où le résultat. □

Chapitre 3

Matrices

3.1 Introduction, notations

Les matrices constituent un outil mathématique très utile, permettant entre autre de présenter de façon pratique et concise certains calculs dans les espaces vectoriels de dimension finie.

Définition 3.1. *Une matrice A à n lignes et m colonnes, à coefficients dans $\mathbb{K}$ est un tableau de $n \times m$ éléments :*

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1m} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2m} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nm} \end{pmatrix}.$$

Si $n = m$, la matrice est dite carrée.

On note $\mathcal{M}_{n,m}(\mathbb{K})$ (resp. $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$), l'ensemble des matrices à n lignes et m colonnes (resp. carrées à n lignes et n colonnes, dites aussi d'ordre n), à coefficients dans $\mathbb{K}$.

L'élément de A qui se trouve à l'intersection de la ligne i et de la colonne j est ici noté a_{ij}, mais il est parfois plus pratique de le noter $[A]_{ij}$. On rencontre également les notations a_i^j ou $[A]_i^j$.

Plutôt que d'écrire chaque fois le tableau, il est plus économique d'écrire $A = (a_{ij})_{1 \leqslant i \leqslant n; 1 \leqslant j \leqslant m}$.
Une matrice est dite *matrice ligne* (resp. *matrice colonne*) si $n = 1$: une seule ligne (resp. $m = 1$: une seule colonne).

3.2 Opérations sur les matrices

3.2.1 L'espace vectoriel des matrices

Soit $A = (a_{ij})_{1 \leqslant i \leqslant n; 1 \leqslant j \leqslant m}$, $B = (b_{ij})_{1 \leqslant i \leqslant n; 1 \leqslant j \leqslant m}$ deux matrices de $\mathcal{M}_{n,m}(\mathbb{K})$ et $\lambda \in \mathbb{K}$.
On définit :
• la somme des deux matrices A et B par $A + B = ([A + B]_{ij})_{1 \leqslant i \leqslant n; 1 \leqslant j \leqslant m}$ avec $[A + B]_{ij} = a_{ij} + b_{ij}$
• le produit de la matrice A par le scalaire λ par $\lambda A = ([\lambda A]_{ij})_{1 \leqslant i \leqslant n; 1 \leqslant j \leqslant m}$ avec $[\lambda A]_{ij} = \lambda a_{ij}$.

Théorème 3.1. L'ensemble $\mathcal{M}_{n,m}(\mathbb{K})$ est un espace vectoriel sur $\mathbb{K}$, de dimension $n \times m$.

3.2.2 Produit de matrices

Définition 3.2. *Soit $A \in \mathcal{M}_{n,m}(I\!K)$ et $B \in \mathcal{M}_{m,p}(I\!K)$, $A = (a_{ij})$, $B = (b_{jk})$, le produit AB des deux matrices A et B est défini par $AB = ([AB]_{ik})_{1 \leqslant i \leqslant n; 1 \leqslant k \leqslant p}$ avec*

$$[AB]_{ik} = \sum_{j=1}^{m} a_{ij} b_{jk}.$$

Attention : Pour pouvoir effectuer le produit d'une matrice A et d'une matrice B, il faut que le nombre de colonnes de A soit égal au nombre de lignes de B. Ainsi, il se peut que $A \times B$ soit définie alors que $B \times A$ ne l'est pas...

3.2.3 Matrice transposée

Définition 3.3. *Si $A \in \mathcal{M}_{n,m}(I\!K)$, on appelle matrice transposée de A, la matrice ${}^tA$ de $\mathcal{M}m, n(I\!K)$ définie de manière unique par ${}^tA = ([{}^tA]_{ij})_{1 \leqslant i \leqslant m; 1 \leqslant j \leqslant n}$ avec*

$$[{}^tA]_{ij} = [A]_{ji}$$

Proposition 3.1. a) ${}^t({}^tA) = A$
b) $A \mapsto {}^tA$ est une application linéaire : ${}^t(A + B) = {}^tA + {}^tB$ et ${}^t(\lambda A) = \lambda\, {}^tA$
c) ${}^t(AB) = {}^tB\, {}^tA$.

3.3 Matrices par blocs

Définition 3.4. *Une matrice par blocs est une matrice dont les coefficients sont eux-mêmes des matrices.*

Par exemple,

$$A(n \times m) = \begin{pmatrix} A_{11}(r \times s) & A_{12}(r \times (m - s)) \\ A_{21}((n - r) \times s) & A_{22}((n - r) \times (m - s)) \end{pmatrix}.$$

Plus généralement, on peut considérer la décomposition par blocs d'une matrice

$$A = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} & & A_{1N} \\ \vdots & & & \vdots \\ A_{n1} & A_{n2} & & A_{nN} \end{pmatrix}.$$

Proposition 3.2. Si $A = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} & & A_{1N} \\ \vdots & & & \vdots \\ A_{n1} & A_{n2} & & A_{nN} \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} B_{11} & B_{12} & & A_{1M} \\ \vdots & & & \vdots \\ B_{N1} & B_{N2} & & B_{NM} \end{pmatrix}$, alors

a) AB est la matrice par blocs, donc le bloc $[AB]_{ij}$ vaut $\displaystyle\sum_{k=1}^{N} A_{ik} B_{kj}$ pour $1 \leqslant i \leqslant n$ et $1 \leqslant j \leqslant M$.

b) $${}^tA = \begin{pmatrix} {}^tA_{11} & {}^tA_{21} & & {}^tA_{n1} \\ \vdots & & & \vdots \\ {}^tA_{1N} & {}^tA_{2N} & & {}^tA_{nN} \end{pmatrix}.$$

3.4 Matrices carrées

Dans ce qui suit, on se place sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, l'ensemble des matrices carrées d'ordre n, c'est-à-dire les matrices carrées à n lignes et n colonnes.

On dit que $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ est :

- *diagonale* si $A = (a_{ij})$ avec $a_{ij} = 0$ si $i \neq j$. On note alors $A = \text{diag}(a_{ii})$.
- *triangulaire supérieure* si $a_{ij} = 0$ pour tout $i > j$
- *triangulaire inférieure* si $a_{ij} = 0$ pour tout $i < j$.

- *inversible* si il existe $A^{-1} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ telle que $A^{-1}A = AA^{-1} = I_n$; où $[I_n]_{ij} = \delta_{ij}$ (1 si $i = j$, 0 si $i \neq j$).

- *symétrique* si $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ et ${}^tA = A$; *hermitienne* si $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ et $A^* = A$ avec $A^* = {}^t\overline{A}$ où $[\overline{A}_{ij}] = \overline{[A]_{ij}}$.

- *orthogonale* si $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ et ${}^tA = A^{-1}$; *unitaire* si $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ et $A^* = A^{-1}$.

- *positive* si $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ et, pour tout $v \in \mathbb{R}^n$, ${}^tvAv \geqslant 0$;
- *définie positive* si $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ et, pour tout $v \in \mathbb{R}^n$, ${}^tvAv \geqslant 0$, avec ${}^tvAv = 0$ si et seulement si $v = 0$.

- *normale* si $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ et $A\,A^* = A^*A$.

Proposition 3.3. Si A et B sont deux matrices inversibles alors

a) AB est inversible et $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$;

b) ${}^tA$ (resp. $\overline{A}$, A^*) est inversible et $({}^tA)^{-1} = {}^t(A^{-1})$ (resp. $(\overline{A})^{-1} = \overline{A^{-1}}$ et $(A^*)^{-1} = (A^{-1})^*$).

On note $GL_n(\mathbb{K})$ le sous-ensemble de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ des matrices inversibles. Cet ensemble a une structure de groupe non commutatif pour la multiplication des matrices.

Définition 3.5. *Si $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, on définit la trace de A par* $\text{tr}A = \sum_{i=1}^{n} a_{ii}$.

Proposition 3.4. a) Si $A \in \mathcal{M}_{n,m}(\mathbb{K})$ et $B \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{K})$, alors $\text{tr}(AB) = \text{tr}(BA)$.

b) $A \mapsto \text{tr}(A)$ est une application linéaire : $\text{tr}(A + B) = \text{tr}(A) + \text{tr}(B)$ et $\text{tr}(\lambda A) = \lambda\text{tr}(A)$.

c) Si $A \in \mathcal{M}_{n,m}(\mathbb{K})$, $\text{tr}(A\,A^*) = \text{tr}(A^*A) = \displaystyle\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m} |a_{ij}|^2$.

On fera attention aux manipulations internes : si $\text{tr}(ABC) = \text{tr}(BCA) = \text{tr}(CAB)$, on ne sait rien de $\text{tr}(ACB)$.

3.5 Matrices semblables

Théorème 3.2. Soit $P \in GL_n(\mathbb{K})$, et $\varphi_P : \mathcal{M}_n(\mathbb{K}) \to \mathcal{M}_n(\mathbb{K}), M \mapsto PMP^{-1}$.

a) φ_P est un automorphisme de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, avec $\varphi_P^{-1} = \varphi_{P^{-1}}$.

b) Si M et N sont dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, $\varphi_P(MN) = \varphi_P(M)\varphi_P(N)$. En particulier, pour tout $k \in \mathbb{N}$, $(\star)[PMP^{-1}]^k = PM^kP^{-1}$. De plus, $M \in GL_n(\mathbb{K})$ si et seulement si $PMP^{-1} \in GL_n(\mathbb{K})$ et $(\star)$ est alors vraie pour tout $k \in \mathbb{Z}$.

Définition 3.6. *Soit $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. Elles sont dites semblables s'il existe $P \in GL_n(\mathbb{K})$ avec $B = P^{-1}AP$.*

On a alors $A = (P^{-1})^{-1}BP^{-1}$: on peut bien dire "sont semblables". On a aussi la propriété de transitivité : si A et B sont semblables, soit $B = P^{-1}AP$, et si B et C sont semblables, soit $C = Q^{-1}BQ$, alors A et C sont semblables car $C = (PQ)^{-1}A(PQ)$. Enfin, si A et B sont semblables, A^k et B^k le sont car $B^k = P^{-1}A^kP$.

Chapitre 4

Représentations matricielles

4.1 Représentation des vecteurs

Théorème 4.1. $\dim E = n \geqslant 1$. Soit $\mathcal{B} = (e_1, \ldots, e_n)$ une base de E. L'application :

$$E \to \mathcal{M}_{n1}(\mathbb{K}), x = \sum_{i=1}^{n} x_i e_i \mapsto \mathcal{M}_{\mathcal{B}}(x) = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$$

est un isomorphisme.

On notera cependant que l'identification entre un vecteur et une matrice colonne (par exemple, dans $\mathbb{K}^n$ canonique, $(x_1, \ldots, x_n)$ est identifié à $\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$) repose sur le choix d'une base.

Définition 4.1. $\dim E = n \geqslant 1$. *Soit* $\mathcal{B} = (e_1, \ldots, e_n)$ *une base de* E *et* $(a_1, \ldots, a_m) \in E^m$, *avec* $a_j = \sum_{i=1}^{n} a_{ij} e_i$. *On définit*

$$\mathcal{M}_{\mathcal{B}}(a_1, \ldots, a_m) = (a_{ij}) \in \mathcal{M}_{n,m}(\mathbb{K}).$$

Réciproquement, si $A = (a_{ij}) \in \mathcal{M}_{n,m}(\mathbb{K})$, *les vecteurs* $c_j = (a_{1j}, \ldots, a_{nj})$ *de* $\mathbb{K}^n$ *sont les* *vecteurs colonnes* *de* A. *Si* $\mathcal{B}$ *est la base canonique de* $\mathbb{K}^n$, *on a* $A = \mathcal{M}_{\mathcal{B}}(a_1, \ldots, a_m)$.

De même, on dispose dans $\mathbb{K}^m$, des vecteurs lignes de A qui sont les vecteurs colonnes de ${}^tA$.

4.2 Matrices d'une application linéaire

Définition 4.2. *Si* $\dim E = m \geqslant 1$, *et* $\dim F = n \geqslant 1$, *avec* $\mathcal{B} = (e_1, \ldots, e_m)$ *une base de* E, *et* $\mathcal{C} = (\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_n)$ *une base de* F, *on définit* $\mathcal{M}_{\mathcal{BC}}(u) = \mathcal{M}_{\mathcal{C}}(u(e_1), \ldots, u(e_m))$. *En posant* $u(e_j) = \sum_{i=1}^{n} a_{ij} \varepsilon_i$, *on a donc* $\mathcal{M}_{\mathcal{BC}}(u) = (a_{ij}) \in \mathcal{M}_{n,m}(\mathbb{K})$. *On note* $\mathcal{M}_{\mathcal{B}}(u)$ *si* $E = F$ *et* $\mathcal{B} = \mathcal{C}$.

Théorème 4.2. L'application $\mathcal{L}(E,F) \to \mathcal{M}_{n,m}(\mathbb{K}), u \mapsto \mathcal{M}_{\mathcal{BC}}(u)$ est un isomorphisme.

Définition 4.3. *Soit $\mathcal{B}$ et $\mathcal{C}$ les bases canoniques de $I\!K^m$ et $I\!K^n$. $u \in \mathcal{L}(I\!K^m, I\!K^n)$ et $M \in \mathcal{M}_{n,m}(I\!K)$ qui sont liés bijectivement par $M = \mathcal{M}_{\mathcal{BC}}(u)$ sont dits canoniquement associés. Si $\mathcal{B} = (e_1, \ldots, e_m)$, $u(e_1), \ldots, u(e_m)$ sont les vecteurs colonnes de M. On définit alors* $\ker M = \ker u$ *et* $\mathrm{im} M = \mathrm{im} u$.

On a alors $\mathrm{im} u$ qui est le sous-espace vectoriel de $\mathbb{K}^n$ engendré par les vecteurs colonnes de M.

Théorème 4.3. Si $\dim E = m \geqslant 1$, et $\dim F = n \geqslant 1$, alors $\dim \mathcal{L}(E,F) = n \times m$. De plus, si $\mathcal{B} = (e_1, \ldots, e_m)$ est une base de E et $\mathcal{C} = (\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_n)$ une base de F, une base de $\mathcal{L}(E,F)$ s'obtient avec la famille (u_{ij}), où u_{ij} est caractérisée par $u_{ij}(e_c) = \delta_{jc}\varepsilon_i$ pour tout $c \in \{1, \ldots, m\}$.

4.3 Intervention des produits matriciels

Théorème 4.4. E et F étant de dimensions finies, soit $\mathcal{B}$ une base de E, $\mathcal{C}$ une base de F, $x \in E$ et $u \in \mathcal{L}(E,F)$. Alors $\mathcal{M}_{\mathcal{C}}(u(x)) = \mathcal{M}_{\mathcal{BC}}(u)\mathcal{M}_{\mathcal{B}}(x)$.

Écriture matricielle d'un système linéaire. Dans le contexte précédent, $u(x) = b$ ($b \in F$) s'écrit $\mathcal{M}_{\mathcal{BC}}(u)\mathcal{M}_{\mathcal{B}}(x) = \mathcal{M}_{\mathcal{C}}(b)$. Réciproquement, $AX = B$ correspond à $u(x) = b \in \mathbb{K}^n$, avec les associations canoniques.

Théorème 4.5. E, F, G étant de dimensions finies, munis des bases respectives $\mathcal{B}$, $\mathcal{C}$, $\mathcal{D}$, si $u \in \mathcal{L}(E,F)$ et $v \in \mathcal{L}(F,G)$, on a $\mathcal{M}_{\mathcal{BD}}(v \circ u) = \mathcal{M}_{\mathcal{CD}}(v)\mathcal{M}_{\mathcal{BC}}(u)$.

Théorème 4.6. E, F étant de même dimension, $u \in \mathcal{L}(E,F)$ est inversible si et seulement si $\mathcal{M}_{\mathcal{BC}}(u)$ est inversible, et alors $\mathcal{M}_{\mathcal{BC}}(u)^{-1} = \mathcal{M}_{\mathcal{CB}}(u^{-1})$.

Théorème 4.7. $\dim E = n \geqslant 1$. Soit $\mathcal{B}$ une base de E.

a) $\mathcal{L}(E) \to \mathcal{M}_n(\mathbb{K}), u \mapsto \mathcal{M}_{\mathcal{B}}(u)$ est un isomorphisme.

b) Si $u, v \in \mathcal{L}(E)$, $\mathcal{M}_{\mathcal{B}}(v \circ u) = \mathcal{M}_{\mathcal{B}}(v)\mathcal{M}_{\mathcal{B}}(u)$. Notamment, on a, pour tout $k \in \mathbb{N}$, $\mathcal{M}_{\mathcal{B}}(u^k) = [\mathcal{M}_{\mathcal{B}}(u)]^k$ $(\star)$.

c) $u \in GL(E)$ si et seulement si $\mathcal{M}_{\mathcal{B}}(u) \in GL_n(\mathbb{K})$, avec alors $\mathcal{M}_{\mathcal{B}}(u^{-1}) = [\mathcal{M}_{\mathcal{B}}(u)]^{-1}$. L'application $GL(E) \to GL_n(\mathbb{K}), u \mapsto \mathcal{M}_{\mathcal{B}}(u)$ est un isomorphisme de groupes, et $(\star)$ est vraie pour $k \in \mathbb{Z}$.

4.4 Problèmes de changements de bases

4.4.1 Changements de bases

Définition 4.4. $\dim E = n \geqslant 1$. *Soit $\mathcal{B} = (e_1, \ldots, e_n)$ et $B' = (e'_1, \ldots, e'_n)$ deux bases de E. $P_{\mathcal{BB}'} = \mathcal{M}_{\mathcal{B}}(e'_1, \ldots, e'_n)$ est la <u>matrice de passage</u> de $\mathcal{B}$ à $\mathcal{B}'$. Si $e'_j = \displaystyle\sum_{i=1}^{n} a_{ij}e_i$, on a $P_{\mathcal{BB}'} = (a_{ij}) \in \mathcal{M}_n(I\!K)$.*

Ainsi, $P_{\mathcal{BB}'} = \mathcal{M}_{\mathcal{B}}(u)$, où u est défini par $u(e_j) = e'_j$. Donc, $u \in GL(E)$, et $u^{-1}(e'_j) = e_j$, soit :

Théorème 4.8. $P_{\mathcal{B}\mathcal{B}'} \in GL_n(\mathbb{K})$, et $P_{\mathcal{B}\mathcal{B}'}^{-1} = P_{\mathcal{B}'\mathcal{B}}$.

Théorème 4.9. $\dim E = n \geqslant 1$. Soit $\mathcal{B} = (e_1, \ldots, e_n)$. Alors $X = (x_1, \ldots, x_n) \in E^n$ est une base de E si et seulement si $\mathcal{M}_{\mathcal{B}}(x_1, \ldots, x_n)$ est inversible. Cette matrice est alors $P_{\mathcal{B},X}$. Réciproquement, une matrice inversible $P = (p_{ij})$ définit une base $X = (x_1, \ldots, x_n)$ par $P = P_{\mathcal{B},X}$ en posant $x_j = \sum_{i=1}^{n} p_{ij} e_i$.

Une autre interprétation est importante : $P_{\mathcal{B}\mathcal{B}'} = \mathcal{M}_{\mathcal{B}'\mathcal{B}}(id_E)$, puisque $e'_j = id_E(e'_j) = \sum_{i=1}^{n} a_{ij} e_i$.

Théorème 4.10. Soit $B, \mathcal{B}', \mathcal{B}''$ des bases de E. Alors $P_{\mathcal{B}\mathcal{B}''} = P_{\mathcal{B}\mathcal{B}'} P_{\mathcal{B}'\mathcal{B}''}$.

4.4.2 Effets des changements de bases

Théorème 4.11. Si $x \in E$, $\mathcal{M}_{\mathcal{B}}(x) = P_{\mathcal{B}\mathcal{B}'} \mathcal{M}_{\mathcal{B}'}(x)$.

Théorème 4.12. Soit E (avec les bases $\mathcal{B}, \mathcal{B}'$) et F (avec les bases $\mathcal{C}, \mathcal{C}'$) de dimensions finies, et $u \in \mathcal{L}(E, F)$. Alors $\mathcal{M}_{\mathcal{B}'\mathcal{C}'}(u) = P_{\mathcal{C}\mathcal{C}'}^{-1} \mathcal{M}_{\mathcal{B}\mathcal{C}}(u) P_{\mathcal{B}\mathcal{B}'}$. Notamment, si $E = F$, $\mathcal{B} = \mathcal{C}$, $\mathcal{B}' = \mathcal{C}'$, et $u \in \mathcal{L}(E)$, alors $\mathcal{M}_{\mathcal{B}'}(u) = P_{\mathcal{B}\mathcal{B}'}^{-1} \mathcal{M}_{\mathcal{B}}(u) P_{\mathcal{B}\mathcal{B}'}$.

Théorème 4.13. $\dim E = n \geqslant 1$. Soit $u \in \mathcal{L}(E)$ et $\mathcal{B}$ une base de E où $A = \mathcal{M}_{\mathcal{B}}(u)$. Alors $B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ est semblable à A si et seulement si il existe $\mathcal{B}'$ base de E avec $B = \mathcal{M}_{\mathcal{B}'}(u)$.

On retrouve les propriétés de la similitude déjà vues, avec $A^k = \mathcal{M}_{\mathcal{B}}(u^k)$ et $B^k = \mathcal{M}_{\mathcal{B}'}(u^k)$. On note aussi que la seule matrice semblable à λI_n est λI_n car, pour toute base $\mathcal{B}$ de E, $\lambda I_n = \mathcal{M}_{\mathcal{B}}(\lambda id_E)$.

4.4.3 Formes linéaires sur E, trace

Définition 4.5. *Une forme linéaire sur E est un élément de $\mathcal{L}(E, \mathbb{K})$, lui-même appelé espace dual de E, et noté E^*.*

Exemple 4.1. $\delta_a : F(A, \mathbb{K}) \to \mathbb{K}, f \mapsto f(a)$ est une forme linéaire ($a \in A$).

Théorème 4.14. Si $\dim E = n$, alors $\dim E^* = n$.

Théorème 4.15. Soit $\mathcal{B} = (e_1, \ldots, e_n)$ une base de E. Les formes linéaires sur E sont les applications $E \to \mathbb{K}, x = \sum_{i=1}^{n} x_i e_i \mapsto \sum_{i=1}^{n} x_i u_i$, pour tout $(u_1, \ldots, u_n) \in \mathbb{K}^n$. Matriciellement, si $X = \mathcal{M}_{\mathcal{B}}(x)$ et si U est la matrice colonne des u_i, alors $\varphi(x) = {}^tXU = {}^tUX$. De plus, $x \mapsto \sum_{i=1}^{n} x_i u_i$ est la forme nulle si et seulement si $u_i = 0$ pour tout i.

Exemple 4.2. *Les formes linéaires sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ sont les applications $M \mapsto \mathrm{tr}(AM)$. De plus, A est alors unique.*

Démonstration. Soit la base des E_{ij} de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. $\varphi \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})^*$ est donc de la forme $(m_{ij}) \mapsto \sum_{i,j} u_{ij} m_{ij}$, d'où $\varphi(M) = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} m_{ij} u_{ji}^*$, et c'est $\mathrm{tr}(AM)$, en posant $A = {}^t(u_{ij})$.

On a A unique, car, si $\mathrm{tr}(AM) = \mathrm{tr}(BM)$ pour tout M, et $C = A - B$, on a donc $\sum_{i,j} c_{ij} m_{ij} = 0$, ce qui conduit à prendre $M = {}^tC$ si $\mathbb{K} = \mathbb{R}$, et $M = C^*$ si $\mathbb{K} = \mathbb{C}$, pour avoir $C = 0$. □

Théorème-Définition. $\dim E = n \geqslant 1$. *Soit* $u \in \mathcal{L}(E)$. *Alors,* $\mathrm{tr}\mathcal{M}_{\mathcal{B}}(u)$ *ne dépend pas du choix de* $\mathcal{B}$. *C'est* $\mathrm{tr}u$.

Exemple 4.3. $\dim E = n \geqslant 1$. *Soit* $u, v \in \mathcal{L}(E)$ *: on ne peut avoir* $uv - vu = id_E$.

Démonstration. En effet, $\mathrm{tr}(uv - vu) = \mathrm{tr}(uv) - \mathrm{tr}(vu) = 0$, et $\mathrm{tr}id_E = 0$.
Attention : dans $E = \mathbb{K}[X]$, si $u(P) = P'$ et $v(P) = XP$, on a $uv - vu = id_E$. □

Chapitre 5

Déterminants

On se place dans E de dimension $n \geqslant 1$.

5.1 Déterminant de n vecteurs

5.1.1 Formes n-linéaires alternées

Définition 5.1. *$f : E^n \to I\!K$ est une forme n-linéaire si f est séparément linéaire en chaque variable, c'est-à-dire, si, pour tous $(x_1, \ldots, x_n) \in E^n, (y_1, \ldots, y_n) \in E^n, (\lambda, \mu) \in I\!K^2$, et $i \in \{1, \ldots, n\}$, $f(x_1, \ldots, x_{i-1}, \lambda x_i + \mu y_i, x_{i+1}, \ldots, x_n)$ vaut :*

$$\lambda f(x_1, \ldots, x_{i-1}, x_i, x_{i+1}, \ldots, x_n) + \mu f(x_1, \ldots, x_{i-1}, y_i, x_{i+1}, \ldots, x_n)$$

Théorème 5.1. Pour $f : E^n \to \mathbb{K}$, n-linéaire, il y a, pour tout $(x_1, \ldots, x_n) \in E^n$, équivalence entre :

a) $f(x_1, \ldots, x_n) = 0$ dès que $x_i = x_j$ avec $i \neq j$.

b) $f(x_1, \ldots, x_n) = -f(x_1, \ldots, x_j, \ldots, x_i, \ldots, x_n)$, avec échange des contenus des places i et j, les autres restant les mêmes.

Définition 5.2. *Si pour $f : E^n \to I\!K$, n-linéaire, $f(x_1, \ldots, x_n) = 0$ dès que $x_i = x_j$ avec $i \neq j$, on dit que f est alternée.*

Remarque 5.1. On en déduit alors que, si $(x_1, \ldots, x_n)$ est liée, $f(x_1, \ldots, x_n) = 0$.

5.1.2 Déterminant de n vecteurs

Le cas $n = 2$

Soit $\mathcal{B} = (e_1, e_2)$ une base de E.

Si $f : E^2 \to \mathbb{K}$ est 2-linéaire alternée, on a $f(e_i, e_i) = 0$ et $f(e_2, e_1) = -f(e_1, e_2)$. En développant, on a donc, si $x_1 = x_{11}e_1 + x_{21}e_2$ et $x_2 = x_{12}e_1 + x_{22}e_2$, $f(x_1, x_2) = [x_{11}x_{22} - x_{12}x_{21}]f(e_1, e_2)$.

L'application $E^2 \to \mathbb{K}, (x_1, x_2) \mapsto x_{11}x_{22} - x_{12}x_{21}$ est 2-linéaire, car, par exemple, si x_2 est fixé, $x_1 \mapsto \alpha x_{11} + \beta x_{21}$ est linéaire, et elle est clairement alternée. De plus, les autres formes

2-linéaires alternées sont les applications qui lui sont proportionnelles, avec le coefficient de proportion qui vaut $f(e_1, e_2)$: c'est la seule qui vaut 1 sur la base $\mathcal{B}$.

Plus généralement,

Théorème 5.2. a) Soit $\mathcal{B} = (e_1, \ldots, e_n)$ une base de E. Il existe une unique forme n-linéaire alternée f sur E valant 1 en $(e_1, \ldots, e_n)$.

b) Les autres formes linéaires alternées sur E sont les $g = \lambda f$ (et $\lambda = g(e_1, \ldots, e_n)$).

Définition 5.3. *Si $\mathcal{B} = (e_1, \ldots, e_n)$ est une base de E, l'unique forme n-linéaire alternée sur E valant 1 en $(e_1, \ldots, e_n)$ est notée $\det_{\mathcal{B}}$. Si $x_j = \sum_{i=1}^{n} x_{ij} e_i$, on note*

$$\det_{\mathcal{B}}(x_1, \ldots, x_n) = \begin{vmatrix} x_{11} & \ldots & x_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ x_{n1} & \ldots & x_{nn} \end{vmatrix}.$$

5.1.3 Caractérisation des bases

Théorème 5.3. $(x_1, \ldots, x_n) \in E^n$ est libre (et c'est une base de E) si et seulement si il existe une base $\mathcal{B}$ de E où $\det_{\mathcal{B}}(x_1, \ldots, x_n) \neq 0$, et c'est alors vrai pour toute base de E.

5.2 Déterminant d'un endomorphisme

Théorème 5.4. Soit $u \in \mathcal{L}(E)$. Il existe un unique $\lambda \in \mathbb{K}$ vérifiant, pour toute f n-linéaire alternée, et tout $(x_1, \ldots, x_n) \in E^n$, $f(u(x_1), \ldots, u(x_n)) = \lambda f(x_1, \ldots, x_n)$.

Définition 5.4. *Si $u \in \mathcal{L}(E)$, on note $\det u$ l'unique élément λ de $\mathbb{K}$ vérifiant, pour toute f n-linéaire alternée, et tout $(x_1, \ldots, x_n) \in E^n$, $f(u(x_1), \ldots, u(x_n)) = \lambda f(x_1, \ldots, x_n)$.*

Théorème 5.5. Si $\mathcal{B} = (e_1, \ldots, e_n)$ est une base de E, on a

a) pour tout $(x_1, \ldots, x_n) \in E^n$, $\det_{\mathcal{B}}(u(x_1), \ldots, u(x_n)) = \det u \det_{\mathcal{B}}(x_1, \ldots, x_n)$.

b) $\det u = \det_{\mathcal{B}}(u(e_1), \ldots, u(e_n))$.

Proposition 5.1. a) $\det(\lambda id_E) = \lambda^n$.

b) Si $u, v \in \mathcal{L}(E)$, $\det(u \circ v) = \det(v \circ u) = \det v \det u$.

c) $u \in GL(E)$ si et seulement si $\det u \neq 0$, et alors $\det u^{-1} = \dfrac{1}{\det u}$.

5.3 Déterminant d'une matrice

5.3.1 Le matériel

Définition 5.5. *Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ et $c_1, \ldots, c_n$ ses vecteurs colonnes. Si $\mathcal{C}$ est la base canonique de $\mathbb{K}^n$, $\det A = \det_{\mathcal{C}}(c_1, \ldots, c_n)$.*

Ainsi, $\det I_n = 1$, puisque ses vecteurs colonnes sont les éléments de $\mathcal{C}$.

Si $A = (a_{ij}) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, $\det A = \begin{vmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}$.

Théorème 5.6. Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. Si $A = \mathcal{M}_{\mathcal{B}}$, avec $u \in \mathcal{L}(E)$ et $\mathcal{B}$ une base de E, alors $\det A = \det u$.

Cela conduit aux propriétés suivantes :

Proposition 5.2. a) $\det(\lambda I_n) = \lambda^n$.
b) Si $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, $\det(AB) = \det(BA) = \det A \det B$.
c) $A \in GL_n(\mathbb{K})$ si et seulement si $\det A \neq 0$, et alors $\det A^{-1} = \dfrac{1}{\det A}$.

On admet la propriété supplémentaire suivante, évidente dans le cas $n = 2$:

Théorème 5.7. Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. Alors, $\det A = \det {}^tA$.

Enfin, on admettra aussi le résultat général suivant :

Théorème 5.8. Si $A = (a_{i,j})_{1 \leqslant i,j \leqslant n}$, alors $\det(A) = \sum_{\sigma} \varepsilon(\sigma) a_{1,\sigma(1)} \cdots a_{n,\sigma(n)}$, où σ parcours l'ensemble des $n!$ permutations de $\{1, 2, \cdots, n\}$ et où $\varepsilon(\sigma)$ vaut 1 (resp. -1) si σ peut être construite à partir d'un nombre pair (resp. impair) de permutations de deux termes consécutifs de $\{1, 2, \cdots, n\}$.

5.3.2 Changement de base

Théorème 5.9. Soit $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$ et $\mathcal{B}' = (e'_1, \dots, e'_n)$ deux bases de E. On a, pour tout $(x_1, \dots, x_n) \in E^n$,

$$\det_{\mathcal{B}}(x_1, \dots, x_n) = \det P_{\mathcal{B}\mathcal{B}'} \det_{\mathcal{B}'}(x_1, \dots, x_n).$$

Remarque 5.2. On en déduit, avec $x_i = e_i$, que $1 = \det P_{\mathcal{B}\mathcal{B}'} \det_{\mathcal{B}'}(e_1, \dots, e_n) = \det P_{\mathcal{B}\mathcal{B}'} \det P_{\mathcal{B}'\mathcal{B}}$, donc $\det P_{\mathcal{B}\mathcal{B}'} \neq 0$, et $\det P_{\mathcal{B}'\mathcal{B}} = \dfrac{1}{\det P_{\mathcal{B}\mathcal{B}'}}$.

5.4 Calcul des déterminants

On sait donc que $\boxed{\begin{vmatrix} x_{11} & x_{12} \\ x_{21} & x_{22} \end{vmatrix} = x_{11}x_{22} - x_{12}x_{21}}$.

5.4.1 Déterminant d'une matrice triangulaire

Théorème 5.10. $\det A = \begin{vmatrix} \lambda_1 & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ 0 & & & \\ \vdots & & B & \\ 0 & & & \end{vmatrix} = \lambda_1 \det B.$

Puis, par récurrence, on a le résultat important suivant :

Théorème 5.11. Le déterminant d'une matrice triangulaire est le produit des éléments diagonaux.

5.4.2 Utilisation d'opérations élémentaires

Les propriétés liées à la n-linéarité et au caractère alterné du déterminant permettent alors d'exploiter les opérations élémentaires et la méthode du pivot.

a) $\mathcal{C}_j \leftarrow \mathcal{C}_j + \sum_{i \neq j} \mathcal{C}_i$ conserve le déterminant, ainsi, par transposition, que $\mathcal{L}_j \leftarrow \mathcal{L}_j + \sum_{i \neq j} \mathcal{L}_i$.

b) $\mathcal{C}_j \leftrightarrow \mathcal{C}_i$ et $\mathcal{L}_j \leftrightarrow \mathcal{L}_i$ $(i \neq j)$ transforment $\det A$ en $-\det A$.

c) $\mathcal{C}_j \leftarrow \lambda \mathcal{C}_j$ et $\mathcal{L}_j \leftarrow \lambda \mathcal{L}_j$ transforment $\det A$ en $\lambda \det A$.

d) De plus, $\det A = 0$ dès que $\mathcal{C}_j = \mathcal{C}_i$ ou $\mathcal{L}_j = \mathcal{L}_i$ avec $i \neq j$, ou d` es qu$\mathcal{C}_j$ est une combinaison linéaire des autres $\mathcal{C}_i$.

Remarque 5.3. Si la somme des éléments d'une ligne est une constante c, il peut être utile de faire $\mathcal{C}_1 \leftarrow \sum \mathcal{C}_i$, et il vient $c \begin{vmatrix} 1 & \\ \vdots & \star \\ 1 & \end{vmatrix} = c \begin{vmatrix} 1 & \\ 0 & \star \\ \vdots & \end{vmatrix}$, en finissant par $\mathcal{L}_i \leftarrow \mathcal{L}_i - \mathcal{L}_1$.

5.4.3 Développement suivant une ligne ou une colonne

Théorème 5.12. Soit $A = (a_{ij}) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. On note $A_{ij} \in \mathcal{M}_{n-1}(\mathbb{K})$ la matrice obtenue à partir de A en enlevant $\mathcal{L}_i$ et $\mathcal{C}_j$, et en gardant l'ordre des autres termes. Alors, on a les développements, pour tout (i, j) :

a) suivant $\mathcal{C}_j$: $\det A = \sum_{i=1}^{n} a_{ij}(-1)^{i+j} \det A_{ij}$,

b) suivant $\mathcal{L}_i$: $\det A = \sum_{j=1}^{n} a_{ij}(-1)^{i+j} \det A_{ij}$.

Par exemple :

$$\begin{vmatrix} x_{11} & x_{12} & x_{13} \\ x_{21} & x_{22} & x_{23} \\ x_{31} & x_{32} & x_{33} \end{vmatrix} = x_{11} \begin{vmatrix} x_{22} & x_{23} \\ x_{32} & x_{33} \end{vmatrix} - x_{21} \begin{vmatrix} x_{12} & x_{13} \\ x_{32} & x_{33} \end{vmatrix} + x_{31} \begin{vmatrix} x_{12} & x_{13} \\ x_{22} & x_{23} \end{vmatrix}.$$

Ce développement est souvent utile pour obtenir des relations de récurrence.

Exemple 5.1 (Déterminant de Vandermonde). *Soit* $(x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{K}^n$. *Alors :*

$$V(x_1, \ldots, x_n) = \begin{vmatrix} 1 & \ldots & \ldots & 1 \\ x_1 & & & x_n \\ \vdots & & & \vdots \\ x_1^{n-1} & \ldots & \ldots & x_n^{n-1} \end{vmatrix} = \prod_{1 \leqslant i < j \leqslant n} (x_j - x_i).$$

Démonstration. C'est vrai si $x_i = x_j$ avec $i \neq j$, car le déterminant est alors nul, ayant deux colonnes égales. On suppose maintenant que les x_i sont deux à deux distincts. Soit $P(x) = V(x_1, \ldots, x_{n-1}, x)$. En développant suivant $\mathcal{C}_n$, $P(x) = V(x_1, \ldots, x_{n-1})x^{n-1} + \sum_{k=0}^{n-2} a_k x^k$, donc P est polynomiale, de degré inférieur à $n-1$. $P(x_1) = \ldots = P(x_{n-1}) = 0$, donc $P(x) = \lambda \prod_{i=1}^{n-1} (x - x_i)$. λ est donc le coefficient de x^{n-1}, c'est $V(x_1, \ldots, x_{n-1})$, d'où $V(x_1, \ldots, x_n) = V(x_1, \ldots, x_{n-1}) \prod_{i=1}^{n-1} (x_n - x_i)$, et $V(x_1, x_2) = x_2 - x_1$. $\square$

5.4.4 Application au calcul de l'inverse d'une matrice

Définition 5.6. *Soit $A = (a_{ij}) \in \mathcal{M}_n(I\!K)$. Si A_{ij} est la matrice de $\mathcal{M}_{n-1}(I\!K)$ obtenue à partir de A en enlevant $\mathcal{L}_i$ et $\mathcal{C}_j$, et en gardant l'ordre des autres termes, $(-1)^{i+j}\det A_{ij}$ est appelé le* <u>*cofacteur*</u> *de (a_{ij}). La* <u>*comatrice*</u> *de A est la matrice $\operatorname{cof}(a)$ obtenue à partir de A en remplaçant chaque coefficient par son cofacteur.*

La formule suivante permet d'exprimer l'inverse d'une matrice à partir de sa comatrice, mais il est en général peu conseillé de l'utiliser pour déterminer l'inverse d'une matrice.

Théorème 5.13. Si $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, on a $A\,{}^t\mathrm{cof}(A) = {}^t\mathrm{cof}(A)\,A = (\det A)\,I_n$. En particulier, si A est inversible, c'est-à-dire si $\det A \neq 0$, on a

$$A^{-1} = \frac{1}{\det A}\,{}^t\mathrm{cof}(A).$$

5.4.5 Déterminant par blocs

Théorème 5.14. Soit $A \in \mathcal{M}_r(\mathbb{K})$, et $D \in \mathcal{M}_{n-r}(\mathbb{K})$, avec $1 \leqslant r \leqslant n-1$. Alors $\det \begin{pmatrix} A & C \\ 0 & D \end{pmatrix} = \det A \det D$, pour toute matrice $C \in \mathcal{M}_{r,n-r}(\mathbb{K})$.

Chapitre 6

Réduction des endomorphismes

E est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel.

6.1 Éléments propres d'un endomorphisme

6.1.1 Le matériel

Définition 6.1. *$u \in \mathcal{L}(E)$. $\lambda \in \mathbb{K}$ est une valeur propre de u si $\ker(u - \lambda id_E) \neq \{0\}$. Ce noyau est noté $E_\lambda(u)$, et c'est le sous-espace propre associé à λ, et tout $x \neq 0$ dans $E_\lambda(u)$ (ie avec $u(x) = \lambda x$) est un vecteur propre de u associé à λ.*

Exemple 6.1. a) $h_\lambda : E \to E, x \mapsto \lambda x$, soit $h_\lambda = \lambda id_E$ est l'homothétie de rapport λ. h_λ n'a qu'une valeur propre mais $E_\lambda(h_\lambda) = E$.

b) $E = \mathbb{K}[X]$ et $u : E \to E, P \mapsto XP$. $u(P) = \lambda P$ équivaut à $(X - \lambda)P = 0$, donc à $P = 0$, par intégrité de $\mathbb{K}[X]$. u n'a pas de valeur propre.

c) $E = \mathbb{K}^{\mathbb{N}}$. Soit $\tau : E \to E, (u_n) \mapsto (v_n)$, où $v_n = u_{n+1}$. $\tau(u_n) = \lambda(u_n)$ équivaut à $u_{n+1} = \lambda u_n$ pour tout n, *i.e.* à $u_n = \lambda^n u_0$: tout $\lambda \in \mathbb{K}$ est valeur propre, avec $E_\lambda(\tau) = K(\lambda^n)$ (si $\lambda = 0$, c'est $\mathbb{K}(1, 0, \cdots)$).

d) $E = \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R})$, et $u : E \to E$, $f \mapsto f'$. $f' = \lambda f$ équivaut à $f \in \mathbb{C}(x \mapsto e^{\lambda x})$: tout $\lambda \in \mathbb{C}$ est valeur propre, et $E_\lambda(u) = \mathbb{C}(x \mapsto e^{\lambda x})$ est une droite vectorielle.

e) Soit $E = \mathcal{C}(\mathbb{R})$, et $u : E \to E$, avec $u(f)(x) = \displaystyle\int_0^x f(t)dt$. u est bien un endomorphisme car f est continue, donc en fait u est $\mathcal{C}^1$ et on a $u(f)' = f$. Si $u(f) = \lambda f$, et si $\lambda = 0$, on dérive et $f = 0$. Si $\lambda \neq 0$, $f = \dfrac{1}{\lambda} u(f)$ est donc $\mathcal{C}^1$ avec $f = \lambda f'$, donc $f(x) = Ce^{\frac{x}{\lambda}}$. Mais $u(f)(0) = 0$, donc $f(0) = 0$ et $C = 0$: donc u n'a pas de valeur propre.

f) Soit $E = E_1 \oplus E_2$ avec $E_i \neq \{0\}$ et l'affinité $a : x = x_1 + x_2 \mapsto x_1 + kx_2$ où $k \neq 1$. Si $x \neq 0$, $a(x) = \lambda x$ équivaut à $\begin{cases} x_1 = \lambda x_1 \\ kx_2 = \lambda x_2 \end{cases}$.

$\triangleright$ $\lambda = 1$ donne $x_2 = 0$, soit $E_1(a) = E_1$.

$\triangleright$ $\lambda \neq 1$ donne $\lambda = k$ et $x_1 = 0$, soit $E_k(a) = E_2$.

Remarque 6.1. Soit $\lambda = 0$ et alors $E_0(u) = \ker(u)$, soit $\lambda \neq 0$ et alors $x = u\left(\dfrac{x}{\lambda}\right)$ donc dans ce cas $E_\lambda(u) \subset \mathrm{im}(u)$.

Théorème 6.1. Une droite $D = \mathbb{K}e$ est stable par $u \in \mathcal{L}(E)$ si et seulement si e est un vecteur propre pour u.

Théorème 6.2. Si $u, v \in \mathcal{L}(E)$ commutent, alors les sous-espaces propres de u sont stables par v.

Notamment, $E_\lambda(u)$ est stable par u. L'endomorphisme de $E_\lambda(u)$ est alors $\lambda id_{E_\lambda(u)}$.

6.1.2 Polynôme caractéristique d'un endomorphisme en dimension finie

Dans ce paragraphe, $\dim E = n \geqslant 1$, et $u \in \mathcal{L}(E)$.

Théorème 6.3. $\lambda \in \mathbb{K}$ est une valeur propre de u si et seulement si $u - \lambda id_E \notin GL(E)$, ou encore $\det(u - \lambda id_E) \neq 0$.

$\mathbb{K} \to \mathbb{K}$, $\lambda \mapsto \det(u - \lambda id_E)$ est polynomiale de degré n. Elle détermine donc de façon unique un polynôme de $\mathbb{K}[X]$, noté χ_u.

Définition 6.2. $\chi_u = \det(u - \lambda id_E)$ *est le* <u>*polynôme caractéristique*</u> *de* u.

On connaît trois coefficients remarquables de χ_u :

$$\chi_u = (-1)^n X^n + (-1)^{n-1}(\mathrm{tr} u)X^{n-1} + \cdots + (\det u).$$

Les valeurs propres de u sont donc exactement les racines de χ_u dans $\mathbb{K}$.

Exemple 6.2. $\chi_{h_{\lambda_0}} = (\lambda_0 - X)^n$.

Si $\dim E = n \geqslant 1$, et $u \in \mathcal{L}(E)$: u a un nombre fini (peut- être nul), inférieur à n, de valeurs propres.

Définition 6.3. *Le* <u>*spectre*</u> *de* u*, noté* $\mathrm{sp}(u)$*, est l'ensemble de ses valeurs propres.*

Si $\mathbb{K} = \mathbb{C}$, u a au moins une valeur propre. Par contre, **attention** : lorsque $\mathbb{K} = \mathbb{R}$, où il est possible d'avoir $\mathrm{sp} u = \emptyset$. Ainsi, une rotation d'angle $\theta \neq 0[\pi]$ du plan n'a pas de valeur propre, car il est impossible que $(u(x), x)$ soit liée si $x \neq 0$.

Exemple 6.3. $u \in GL(E)$ si et seulement si $0 \notin \mathrm{sp} u$. Alors, $\mathrm{sp} u^{-1} = \{\frac{1}{\lambda}, \lambda \in \mathrm{sp} u\}$.

Définition 6.4. *Soit* $\lambda \in \mathrm{sp} u$*. La* <u>*multiplicité*</u> $m_\lambda(u)$ *de* λ *comme valeur propre de* u *est celle de* λ *comme racine de* χ_u*.*

Théorème 6.4. Supposons χ_u scindé (c'est le cas si $\mathbb{K} = \mathbb{C}$). Alors :

a) $\chi_u = \prod_{\lambda \in \mathrm{sp} u} (\lambda - X)^{m_\lambda(u)}$.

b) $n = \sum_{\lambda \in \mathrm{sp} u} m_\lambda(u)$.

c) $\det(u) = \prod_{\lambda \in \mathrm{sp} u} \lambda^{m_\lambda(u)}$ et $\mathrm{tr}(u) = \sum_{\lambda \in \mathrm{sp} u} \lambda^{m_\lambda(u)}$.

On parle de produit et de somme des valeurs propres de u comptées avec leur ordre de multiplicité.

6.1.3 Éléments propres d'une matrice carrée

Définition 6.5. *Soit $A \in \mathcal{M}_n(I\!K)$, et $u \in \mathcal{L}(I\!K^n)$, canoniquement associés. Les valeurs propres, les vecteurs propres et les sous-espaces propres de A sont ceux de u.*

On note $E_\lambda(A)$ pour $E_\lambda(u)$. Soit $\mathcal{C}$ la base canonique de $\mathbb{K}^n$. $\lambda \in \mathbb{K}$ est valeur propre de A s'il existe $x \neq 0$ tel que $u(x) = \lambda x$, soit $X \in \mathcal{M}_{n1}(\mathbb{K})$, non nulle, telle que $AX = \lambda X$ ($X = \mathcal{M}_{\mathcal{C}}(x)$).

Définition 6.6. *Si $A \in \mathcal{M}_n(I\!K)$, et $u \in \mathcal{L}(I\!K^n)$, canoniquement associés, $\chi_A = \chi_u \in I\!K[X]$ est le polynôme caractéristique de A. On a alors $\chi_A(\lambda) = \det(A - \lambda I_n)$. Le spectre de A est celui de u, et c'est l'ensemble des racines $\lambda_i(A)$ de χ_A dans $I\!K$.*
On appelle rayon spectral de A, noté $\rho(A)$, le réel positif $\rho(A) = \max\{|\lambda_i(A)|,\ 1 \leqslant i \leqslant n\}$.

Remarque 6.2. On a aussi $\chi_A = \chi_{{}^tA}$.

Comme $\mathrm{tr}A = \mathrm{tr}u$ et $\det A = \det u$, on a $\chi_A = (-1)^n X^n + (-1)^{n-1}(\mathrm{tr}A)X^{n-1} + \cdots + (\det A)$. En reprenant la preuve précédente avec $A = \mathcal{M}_{\mathcal{B}}(u)$, on a :

Théorème 6.5. Si $\dim E = n \geqslant 1$, $u \in \mathcal{L}(E)$, et $A = \mathcal{M}_{\mathcal{B}}(u)$, alors $\chi_u = \chi_{\mathcal{M}_{\mathcal{B}}(u)}$. Si $B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ est semblable à A, alors $\chi_B = \chi_A$.

Dans ce contexte, $u(x) = \lambda x$ équivaut à $\mathcal{M}_{\mathcal{B}}(u)\mathcal{M}_{\mathcal{B}}(x) = \lambda \mathcal{M}_{\mathcal{B}}(x)$.

Remarque 6.3. $A = 0$ et $B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & & & \ddots & 1 \\ 0 & \dots & \dots & \dots & 0 \end{pmatrix}$ ont même polynôme caractéristique, mais ne sont pas semblables, car $\mathrm{rg}A = 0 \neq \mathrm{rg}B = n - 1$

Exemple 6.4. Soit $T = \begin{pmatrix} t_{11} & & & & \\ 0 & t_{22} & & (*) & \\ \vdots & \ddots & \ddots & & \\ \vdots & & \ddots & \ddots & \\ 0 & \dots & \dots & 0 & t_{nn} \end{pmatrix}$ une matrice triangulaire. On a alors, $\chi_T = \displaystyle\prod_{i=1}^{n}(t_{ii} - X)$ et les valeurs propres de T sont exactement ses éléments diagonaux.

Théorème 6.6. Soit F un sous-espace vectoriel de E stable par u. Alors, si u_F est l'endomorphisme de F induit par u, χ_{u_F} divise χ_u.

Remarque 6.4. Si $\lambda \in \mathrm{sp}(u)$ et $F = E_\lambda(u)$, $u_F = \lambda id_{E_\lambda(u)}$ donc $\chi_{u_F} = (\lambda - X)^{\dim E_\lambda(u)}$ divise χ_u.

6.1.4 Effets de l'inclusion $\mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \subset \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$

Pour $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, $\mathrm{sp}A = \mathrm{sp}u$, avec $u \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n)$ canoniquement associé à A, et on a $\mathrm{sp}A$ qui est l'ensemble des racines réelles de $\chi_A \in \mathbb{R}[X]$ dans $\mathbb{R}$. Mais $\mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \subset M_n(\mathbb{C})$ et $\mathbb{R}[X] \subset \mathbb{C}[X]$. avec, si λ est racine complexe de $P \in \mathbb{R}[X]$, alors, $\overline{\lambda}$ l'est aussi, avec la même multiplicité.

Définition 6.7. *Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. On peut aussi considérer A dans $A \in M_n(\mathbb{C})$. On pose alors :*

a) $\mathrm{sp}_{\mathbb{R}} A$ est l'ensemble des valeurs propres de $A \in M_n(\mathbb{R})$. C'est l'ensemble des racines réelles de χ_A.

b) $\mathrm{sp}_{\mathbb{C}} A$ est l'ensemble des valeurs propres de $A \in M_n(\mathbb{C})$. C'est l'ensemble des racines complexes de χ_A.

On a $\mathrm{sp}_{\mathbb{R}} A \subset \mathrm{sp}_{\mathbb{C}} A$. Le premier peut-être vide, pas le second. De plus, si $\lambda \in \mathrm{sp}_{\mathbb{C}} A \setminus \mathbb{R}$, alors $\overline{\lambda} \in \mathrm{sp}_{\mathbb{C}} A \setminus \mathbb{R}$, avec $m_\lambda(A) = m_{\overline{\lambda}}(A)$.

Remarque 6.5. On notera, de plus, que, si $AX = \lambda X$, avec $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \neq 0$, Si on note $\overline{X} = \begin{pmatrix} \overline{x_1} \\ \vdots \\ \overline{x_n} \end{pmatrix}$, on a $A\overline{X} = \overline{\lambda X}$, car les relations linéaires $\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j = \lambda x_i$ se conjuguent en $\sum_{j=1}^{n} a_{ij}\overline{x_j} = \overline{\lambda}\overline{x_i}$.

Exemple 6.5. Étudier le cas de $A = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$.

Démonstration. $\chi_A = X^2 + 1$, donc $\mathrm{sp}_{\mathbb{R}} A = \emptyset$ et $\mathrm{sp}_{\mathbb{C}} A = \{-i, i\}$. $A - iI_2 = \begin{pmatrix} -i & -1 \\ 1 & -i \end{pmatrix}$, donc cette matrice est de rang 1, avec $ic_1 + c_2 = 0$, soit $E_i(A) = \mathbb{C}(i, 1)$. De même, $A + iI_2 = \begin{pmatrix} i & -1 \\ 1 & i \end{pmatrix}$, et $E_{-i}(A) = \mathbb{C}(-i, 1) = \mathbb{C}\overline{(i, 1)}$. □

6.2 Diagonalisabilité

6.2.1 Somme directe de sous-espaces propres

Théorème 6.7. Soit $u \in \mathcal{L}(E)$ et $\lambda_1, \dots, \lambda_p$ des valeurs propres distinctes deux à deux de u.

a) $\sum_{i=1}^{p} E_{\lambda_i}(u)$ est une somme directe.

b) Si $x_1, \dots, x_p$ de E sont tels que, pour tout i, x_i est un vecteur propre de u associé à λ_i, alors $(x_1, \dots, x_p)$ est libre.

Exemple 6.6. a) Dans $E = \mathbb{K}^n$, p suites géométriques de raisons $\lambda_1, \cdots, \lambda_p$ distinctes 2 à 2 forment une famille libre, comme vecteurs propres de $\tau : E \to E$, $(u_n) \mapsto (u_{n+1})$.

b) La famille $(f_\lambda)_{\lambda \in \mathbb{C}}$, où $f_\lambda : x \mapsto e^{\lambda x}$ est libre dans $E = \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R})$, car la liberté d'une famille quelconque revient à la liberté de toute famille finie extraite, et f_λ est alors un vecteur propre pour λ de $u : E \to E$, $f \mapsto f'$.

6.2.2 Diagonalisabilité d'un endomorphisme

Si $\dim E = n \geqslant 1$, et $u \in \mathcal{L}(E)$, on sait que $\bigoplus_{\lambda \in \mathrm{sp} u} E_\lambda(u)$ est directe, mais que vaut-elle ?

Exemple 6.7. Soit $u : \mathbb{K}[X] \to \mathbb{K}_n[X], P \mapsto P'$. $u(P) = \lambda P$ équivaut à $P' = \lambda P$, donc $\lambda = 0$, sinon il y a un problème de degrés, et alors $E_0(u) = \mathbb{K}$.

Définition 6.8. *Soit* $\dim E = n \geqslant 1$, *et* $u \in \mathcal{L}(E)$. u *est diagonalisable si* $\bigoplus_{\lambda \in \mathrm{sp}(u)} E_\lambda(u) = E$.

Théorème 6.8. Soit $\dim E = n \geqslant 1$, et $u \in \mathcal{L}(E)$. Il y a équivalence entre :
a) u est diagonalisable.
b) E admet une base de vecteurs propres de u, dite base propre pour u.
c) Il existe $\mathcal{B}$ base de E, où $\mathcal{M}_\mathcal{B}(u)$ est diagonale.

Remarque 6.6. Les bases dans lesquelles la matrice de u est diagonale sont exactement les bases propres pour u. Soit $\lambda_1, \dots, \lambda_p$ les valeurs propres distinctes de u. On a donc $E = \bigoplus_{i=1}^{p} E_{\lambda_i}(u)$ et, dans $\mathcal{B}$ adaptée,

$$\mathcal{M}_\mathcal{B}(u) = \mathrm{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_1, \dots, \lambda_p, \dots, \lambda_p),$$

λ_i apparaissant $\dim E_{\lambda_i}(u)$ fois. On en déduit $\chi_u = \prod_{i=1}^{p} (\lambda_i - X)^{\dim E_{\lambda_i}(u)}$, soit encore $\chi_u = \prod_{\lambda \in \mathrm{sp}(u)} (\lambda - X)^{\dim E_\lambda(u)}$.

Exemple 6.8. Soit $\dim E = n \geqslant 1$, $p \in \mathcal{L}(E)$ un projecteur et $s \in \mathcal{L}(E)$ une symétrie. Alors, p et s sont diagonalisables.

Démonstration. Dans $\mathcal{B}$ adaptée à $E = \mathrm{im}(p) \oplus \ker(p)$, $\mathcal{M}_\mathcal{B}(p) = \begin{pmatrix} I_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ est bien diagonale.

De même, $\mathcal{C}$ adaptée à $E = \ker(s - id_E) \oplus \ker(s + id_E)$, $\mathcal{M}_\mathcal{C}(s) = \begin{pmatrix} I_r & 0 \\ 0 & -I_{n-r} \end{pmatrix}$. □

Théorème 6.9. $\dim E = n \geqslant 1$. Une condition suffisante pour que u soit diagonalisable est que u ait n valeurs propres distinctes, soit encore que χ_u soit scindé aux racines simples. On a alors, pour tout $\lambda \in \mathrm{sp}(u)$, $\dim E_\lambda(u) = 1$.

Remarque 6.7. À l'inverse, si u est diagonalisable et n'a qu'une valeur propre λ, alors $u = h_\lambda$. En effet, u et λId_E sont égales sur une base, donc partout.

Théorème 6.10. Soit $\dim E = n \geqslant 1$, et $u \in \mathcal{L}(E)$. u est diagonalisable si et seulement si $n = \sum_{\lambda \in \mathrm{sp} u} \dim E_\lambda(u)$.

6.3 Diagonalisabilité d'une matrice carrée

6.3.1 Matrices semblables

Rappel : Soit $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. Elles sont dites semblables s'il existe $P \in GL_n(\mathbb{K})$ avec $B = P^{-1}AP$.

Deux matrices semblables ont même rang, car $\mathrm{rg}(P^{-1}AP) = \mathrm{rg}A$ ou via $\mathrm{rg}u = \mathrm{rg}\mathcal{M}_\mathcal{B}(u)$, mais *attention* la réciproque est fausse. Ainsi, I_n est la seule matrice semblable à elle-même, alors que les matrices de rang n dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ sont toutes les matrices inversibles. Plus généralement que la seule matrice semblable à λI_n est λI_n avec, pour toute base $\mathcal{B}$ de E, $\lambda I_n = \mathcal{M}_{\mathcal{B}}(\lambda id_E)$.

Deux matrices semblables ont même trace, même déterminant et même polynôme caractéristique : ceux de l'endomorphisme commun qu'elles représentent. Elles ont donc également même spectre.

Exemple 6.9. Une matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ telle que $A^2 = A$ est semblable à $\begin{pmatrix} I_r & 0 \\ 0 & 0_{n-r} \end{pmatrix} = J_{rn}$ et on a $\mathrm{tr}(A) = \mathrm{rg}(A)$.

Démonstration. L'endomorphisme canoniquement associé à A et un projecteur et $\mathcal{M}_{\mathcal{B}}(p) = \begin{pmatrix} I_r & 0 \\ 0 & 0_{n-r} \end{pmatrix}$ dans $\mathcal{B}$ est adaptée à la somme directe $E = \mathrm{im} p \oplus \ker p$. $r = \mathrm{rg} p = \mathrm{rg}(A)$, et aussi $r = \mathrm{tr} p$. □

Remarque 6.8. Lorsque $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ et $r = \mathrm{rg}(A)$, $A = RJ_{rn}S$, mais cela ne signifie pas que $A^2 = A$, car il n'y a pas similitude. Il faudrait pour cela avoir $R = S^{-1}$.

6.3.2 Matrices carrées diagonalisables

Définition 6.9. *$A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ est diagonalisable si et seulement si $u \in \mathcal{L}(\mathbb{K}^n)$ canoniquement associé à A l'est.*

Théorème 6.11. $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ est diagonalisable si et seulement si A et semblable à une matrice diagonale : il existe $P \in GL_n(\mathbb{K})$ et $D \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ diagonale avec $D = P^{-1}AP$.

Remarque 6.9. a) $A = P\mathrm{diag}(\lambda_1, \ldots, \lambda_n)P^{-1}$ donne $\mathrm{sp}(A) = \mathrm{sp}(D) = \{\lambda_1, \ldots, \lambda_n\}$ (les λ_i distincts ou non).

b) $A = P\mathrm{diag}(\lambda_1, \ldots, \lambda_n)P^{-1}$ donne $A^k = P\mathrm{diag}(\lambda_1^k, \ldots, \lambda_n^k)P^{-1}$, *a priori* pour $k \in \mathbb{N}$, et même pour $k \in \mathbb{Z}$ lorsque $\lambda_i \neq 0$ pour tout i.

On peut remplacer $\mathbb{K}^n$ par E de dimension n et $\mathcal{C}$ par une base quelconque et on obtient :

Théorème 6.12. $\dim E = n \geqslant 1$, $u \in \mathcal{L}(E)$ et $\mathcal{C}$ une base de E. $A = \mathcal{M}_{\mathcal{C}}(u)$ est diagonalisable si et seulement si u l'est.

Méthode pratique. D'une manière générale, on peut donc envisager la méthode systématique suivante.

- On détermine les valeurs propres de A en calculant χ_A. On essaie de le factoriser le plus rapidement possible en employant la méthode du pivot. un cas favorable est le suivant.
  - ▷ Lorsque la somme des éléments d'une ligne est une constante C, ce nombre est valeur propre et un vecteur propre associé est $(1, \ldots, 1)$. L'opération élémentaire $c_1 \hookleftarrow \sum_{j=1}^{n} c_j$ dans χ_A permet de mettre $\lambda - C$ en facteur.
- Pour chaque valeur propre λ, on détermine $\ker(A - \lambda I_n)$. On a deux approches pour cela.
  - ▷ Soit on contemple $A - \lambda I_n$ et on trouve des combinaisons linéaires nulles entre les colonnes de cette matrice, ce qui fournit des vecteurs du noyau (si $\sum_{j=1}^{n} a_j c_j(A - \lambda I_n) = 0$, alors $(a_1, \ldots, a_n) \in E_\lambda(A)$), en conjonction avec son rang pour en avoir suffisamment.
  - ▷ Soit on résout $AX = \lambda X$.
- On regarde si $n = \sum_{\lambda \in \mathrm{sp}(A)} \dim E_\lambda(A)$, propriété qui est acquise *a priori* s'il y a n valeurs propres distinctes.

Exemple 6.10. Diagonaliser $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$.

Démonstration. $\chi_A = (1-X)(2-X)(3-X)$(matrice triangulaire) : A est diagonalisable car ayant 3 valeurs propres simples. Soit $\mathcal{C} = (e_1, e_2, e_3)$ canonique de $\mathbb{R}^3$, et $u \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^3)$ associé à A. On sait que les espaces propres sont des droites.

$E_1(u) = \mathbb{R}e_1$, $E_2(u) = \mathbb{R}e_2$ au vu des deux premières colonnes. $A - 3I_3 = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, d'où $c_1 + 2c_3 + 4c_2 = 0$. Ainsi $E_3(u) = \mathbb{R}(1,4,2) = \mathbb{R}\varepsilon_3$. Soit $\mathcal{B} = (\varepsilon_1 = e_1, \varepsilon_2 = e_2, \varepsilon_3)$. Si $P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$, $P^{-1}AP = D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} = \mathcal{M}_{\mathcal{B}}(u)$. □

Remarque 6.10. Si A est diagonalisée en D, alors $D = P^{-1}AP$ avec P qui passe de la base initiale à une base propre. L'ordre des valeurs propres sur la diagonale de D correspond à l'ordre de report des vecteurs propres en tant que colonnes de P. On a par ailleurs $A = PDP^{-1}$ et on notera que $\mathrm{sp}(A) = \mathrm{sp}(D)$.

Exemple 6.11. Diagonaliser $A = \begin{pmatrix} -2 & 8 & 6 \\ -4 & 10 & 6 \\ 4 & -8 & -4 \end{pmatrix}$.

Démonstration.

$$\begin{aligned}
\chi_A(\lambda) &= \begin{vmatrix} -2-\lambda & 8 & 6 \\ -4 & 10-\lambda & 6 \\ 4 & -8 & -4-\lambda \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -2-\lambda & 8 & 6 \\ -4 & 10-\lambda & 6 \\ 0 & 2-\lambda & 2-\lambda \end{vmatrix} \\
&= \begin{vmatrix} -2-\lambda & 8 & 6 \\ -2+\lambda & 2-\lambda & 0 \\ 0 & 2-\lambda & 2-\lambda \end{vmatrix} = (2-\lambda)^2 \begin{vmatrix} -2-\lambda & 8 & 6 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix} \\
&= (2-\lambda)^2 \begin{vmatrix} -2-\lambda & 8 & -2 \\ -1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{vmatrix} = -(2-\lambda)^2[2+\lambda-2]
\end{aligned}$$

Donc, $\chi_A(X) = -X(X-2)^2$.

- Dans A, $c_1 - c_3 = -c_2$ donne $E_0(A) = \mathbb{R}(1,1,-1)$ car, de plus, $\mathrm{rg}(A) = 2$.
- Dans $A - 2I_3$, les vecteurs colonnes sont tous proportionnels à $(-1,-1,1)$, donc $\mathrm{rg}(A - I_3) = 1$ et $\dim(E_2(A)) = 2$: $E_2(A)$ est le plan $-2x + 4y + 3z = 0$, dont une base est $((3,0,2),(0,-3,4))$.

$1 + 2 = 3$: A est diagonalisable. Si $P = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 1 & 0 & -3 \\ -1 & 2 & 4 \end{pmatrix}$, $P^{-1}AP = D = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$. □

On peut enfin donner un résultat pratique de condition nécessaire et suffisante de diagonalisabilité :

Théorème 6.13. $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ est diagonalisable si et seulement si A est annulée par un polynôme non nul, scindé, aux racines simples.

De manière plus générale, si P est un polynôme tel que $P(A) = 0$, alors les valeurs propres de A figurent PARMI les racines de P.

Exemple 6.12. $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ telle qu'il existe $q \in \mathbb{N}^*$ avec $A^q = I_n$ est diagonalisable.

Démonstration. A annule $X^q - 1 = \prod_{k=0}^{q-1}(X - \omega_k)$, où $\omega_k = \mathrm{e}^{\frac{2i\pi k}{q}}$. Les valeurs propres de A figurent donc parmi les racines q-ièmes de l'unité. □

Exemple 6.13. Étudier la diagonalisabilité de la matrice $A = \begin{pmatrix} a & b & c \\ c & a & b \\ b & c & a \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_3(\mathbb{C})$.

Démonstration. Soit $J = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$. On a $A = aI_3 + bJ + cJ^2 = Q(J)$ où $Q = a + bX + cX^2$, alors que $J^3 = I_3$. Ainsi, J est diagonalisable, car annulée par un polynôme non nul, scindé, aux racines simples. On calcule d'ailleurs facilement $\chi_J(\lambda) = \begin{vmatrix} -\lambda & 1 & 0 \\ 0 & -\lambda & 1 \\ 1 & 0 & -\lambda \end{vmatrix} = -\lambda^3 + 1$. $J - I_3 = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$: la somme des trois colonnes est nulle, et $E(J, 1) = \mathbb{C}(1, 1, 1)$. De la même manière, $J - jI_3 = \begin{pmatrix} -j & 1 & 0 \\ 0 & -j & 1 \\ 1 & 0 & -j \end{pmatrix}$, et on a $E(J, j) = \mathbb{C}(1, j, j^2)$. Enfin, par conjugaison, par exemple, $E(J, j^2) = \mathbb{C}(1, j^2, j)$, donc, si on note $P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & j & j^2 \\ 1 & j^2 & j \end{pmatrix}$, on a $J = P \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & j & 0 \\ 0 & 0 & j^2 \end{pmatrix} P^{-1}$. Cela donne $J^2 = P \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & j^2 & 0 \\ 0 & 0 & j \end{pmatrix} P^{-1}$, puis

$$A = P \begin{pmatrix} a + b + c = Q(1) & 0 & 0 \\ 0 & a + bj + cj^2 = Q(j) & 0 \\ 0 & 0 & a + bj^2 + cj = Q(j^2) \end{pmatrix} P^{-1}$$

est donc diagonalisable avec une même matrice de passage. □

On peut aussi utiliser des propriétés géométriques, notamment le rang, de la matrice pour conclure plus vite.

6.4 Trigonalisation

Si on ne peut pas diagonaliser A, on peut essayer de la trigonaliser, c'est-à-dire de trouver une matrice triangulaire qui lui soit semblable. Si $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ est semblable à $T = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & & \\ & \lambda_2 & (\star) & \\ & (0) & \ddots & \\ & & & \lambda_n \end{pmatrix}$, alors $\chi_A = \chi_T = \prod_{k=1}^{n}(\lambda_k - X)$, donc le spectre de A est constitué des éléments diagonaux de T, et χ_A est scindé sur $\mathbb{K}$. Notons aussi que λ_k figure donc m_{λ_k} fois sur la diagonale. En fait, on dispose du théorème suivant, que l'on admettra :

Théorème 6.14. a) Soit E de dimension $n \geqslant 1$ et $u \in \mathcal{L}(E)$ tel que χ_u soit scindé. Il existe une base $\mathcal{B}$ telle que $\mathcal{M}_{\mathcal{B}}(u)$ soit triangulaire supérieure.

b) Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ telle que χ_A soit scindé. Alors A est trigonalisable : elle est semblable à une matrice triangulaire supérieure.

C'est donc forcément le cas lorsque $\mathbb{K} = \mathbb{C}$.

Exemple 6.14. Étude du cas $n = 2$ lorsque χ_A est scindé.

Démonstration. Soit $A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{K})$ et $u \in \mathcal{L}(\mathbb{K}^2)$, canoniquement associé à A. On suppose que χ_A est scindé et vaut $(X-\lambda_1)(X-\lambda_2)$.
• Si $\lambda_1 \neq \lambda_2$, alors A est diagonalisable.
• Si $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_0$, A est diagonalisable si et seulement si $E_{\lambda_0}(u) = \mathbb{K}^2$ soit encore $A = \lambda_0 I_2$.
• Il reste le cas où $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_0$ et $\dim E_{\lambda_0}(u) = 1$. Notons $E_{\lambda_0}(u) = \mathbb{K}e_1$. Complétons par e_2 en une base $\mathcal{B}$, et $\mathcal{M}_{\mathcal{B}}(u) = \begin{pmatrix} \lambda_0 & \alpha \\ 0 & \beta \end{pmatrix}$. Forcément, $\beta = \lambda_0$ par χ_A, et on a la forme triangulaire, avec, d'ailleurs, $\alpha \neq 0$ car A n'est pas diagonalisable. □

Une application figure dans le résultat suivant :

Exemple 6.15. Si $T = \begin{pmatrix} \lambda_0 & \alpha \\ 0 & \lambda_0 \end{pmatrix}$, alors $T^k = \begin{pmatrix} \lambda_0^k & k\alpha\lambda_0^{k-1} \\ 0 & \lambda_0^k \end{pmatrix}$ pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, et même tout $k \in \mathbb{Z}$ si $\lambda_0 \neq 0$.

Démonstration. On a $T = \lambda_0 I_2 + \alpha_0 N$, avec $N^2 = 0$. Comme I_2 et N commutent, on peut appliquer la formule de Newton, et, avec $N^2 = 0$ et $\binom{k}{1} = k$, il vient $T^k = \lambda_0^k I_2 + k\alpha\lambda_0^{k-1}N$, d'où le résultat pour $k \in \mathbb{N}^*$. Si $\lambda_0 \neq 0$, T est inversible, avec $T^{-1} = \dfrac{1}{\lambda_0^2}\begin{pmatrix} \lambda_0 & -\alpha \\ 0 & \lambda_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \dfrac{1}{\lambda_0} & -\dfrac{\alpha}{\lambda_0^2} \\ 0 & \dfrac{1}{\lambda_0} \end{pmatrix}$, donc, pour $k \in \mathbb{N}^*$,

$T^{-k} = \begin{pmatrix} \dfrac{1}{\lambda_0^k} & -k\dfrac{\alpha}{\lambda_0^{k+1}} \\ 0 & \dfrac{1}{\lambda_0^k} \end{pmatrix}$, et c'est la formule voulue. □

Si $A = PTP^{-1}$, on calculera encore $A^k = PT^kP^{-1}$.

Exemple 6.16. Soit $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$. Montrer que A n'est pas diagonalisable. Trigonaliser A.

Démonstration. On a $\chi_A(\lambda) = \begin{vmatrix} -\lambda & 0 & 1 \\ 2 & 1-\lambda & 0 \\ 0 & 0 & 1-\lambda \end{vmatrix} = -\lambda(1-\lambda)^2$ et $\mathrm{rg}(A) = 2$, avec $c_1 - 2c_2 = 0$, donc $\ker(A) = \mathbb{R}(1,-2,0) = \mathbb{R}e_1$. On a aussi $A - I_3 = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, de rang 2 avec $c_2 = 0$, donc $E(A,1) = \mathbb{R}(0,1,0) = \mathbb{R}e_2$. La somme des dimensions vaut 2, donc A n'est pas diagonalisable.

Cependant, on peut compléter (e_1, e_2) par e_3 en une base : si P est la matrice de passage, on aura forcément $P^{-1}AP = T = \begin{pmatrix} 0 & 0 & a \\ 0 & 1 & b \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, le troisième venant de l'invariance de la trace ou de χ_A par similitude. Prenons $e_3 = (0,0,1)$ par exemple. Alors, (e_1,e_2,e_3) est libre car $\det(P) = \det\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \neq 0$, et $Ae_3 = (1,0,1) = e_1 + 2e_2 + e_3$, soit $T = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. □

Chapitre 7

Espaces préhilbertiens réels et complexes

E est une $\mathbb{K}$-espace vectoriel.

7.1 Produit scalaire et norme associée

7.1.1 Produit scalaire

Définition 7.1. *Un produit scalaire sur un $\mathbb{R}$-espace vectoriel E est une application de $E \times E$ dans $\mathbb{R}$, notée $(x, y) \mapsto \langle x, y\rangle$, et vérifiant :*
a) Pour tout $(x, y) \in E^2$, $\langle x, y\rangle = \langle y, x\rangle$.
b) Pour tout $x \in E$, $E \to \mathbb{R}, y \mapsto \langle x, y\rangle$ est linéaire.
c) Pour tout $x \in E$, $\langle x, x\rangle \geqslant 0$, et $\langle x, x\rangle = 0$ équivaut à $x = 0$.

En combinant a) et b), on voit que, pour tout $y \in E$, $E \to \mathbb{R}, x \mapsto \langle x, y\rangle$ est linéaire aussi.

Exemple 7.1. a) Sur $\mathbb{R}^n$, on pose $\langle x, y\rangle = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i$, où $x = (x_1, \ldots, x_n)$ et $y = (y_1, \ldots, y_n)$. Il s'agit du produit scalaire canonique sur $\mathbb{R}^n$. Matriciellement, si $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ et $Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$, on a $\langle x, y\rangle = {}^tXY$.

b) Plus généralement, si $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est une matrice symétrique définie positive, on peut définir sur $\mathbb{R}^n$ un produit scalaire en posant, matriciellement,

$$\langle x, y\rangle_M = {}^tXMY$$

et on retrouve le produit scalaire classique du a) avec $M = I_n$.

c) Lorsque $E = \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, on peut, sur le même modèle avec la base des E_{ij}, poser, pour $A = (a_{ij})$ et $B = (b_{ij})$, $\langle A, B\rangle = \sum_{i,j} a_{ij} b_{ij}$. Alors, selon le principe de Fubini : $\langle A, B\rangle = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} a_{ij} b_{ij}$, et on reconnaît ainsi que $\langle A, B\rangle = \mathrm{tr}(A\,{}^tB) = \mathrm{tr}({}^tAB)$.

d) Lorsque $E = \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{R})$, si $M \in \mathcal{M}_m(\mathbb{R})$ et $N \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ sont deux matrices symétriques définies positives, on peut définir sur E un produit scalaire en posant :

$$\langle A, B\rangle_{N,M} = \mathrm{tr}(AN\,{}^tBM).$$

Dans le cas particulier où $M = I_m$ et $N = I_n$, on a alors :

$$\langle A, B\rangle_{I_n,I_m} = \mathrm{tr}(A\,{}^tB) = \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} a_{i,j}b_{i,j}$$

et on retrouve le produit scalaire du c) lorsque $m = n$.

Définition 7.2. *Un produit scalaire sur un $\mathbb{C}$-espace vectoriel E est une application de $E \times E$ dans $\mathbb{C}$, notée $(x, y) \mapsto \langle x, y\rangle$, et vérifiant :*
a) Pour tout $(x, y) \in E^2$, $\langle y, x\rangle = \overline{\langle x, y\rangle}$.
b) Pour tout $x \in E$, $E \to \mathbb{C}, y \mapsto \langle x, y\rangle$ est linéaire.
c) Pour tout $x \in E$, $\langle x, x\rangle \geqslant 0$, et $\langle x, x\rangle = 0$ équivaut à $x = 0$.

On perd, par contre, la linéarité du côté gauche, avec :

Proposition 7.1. Pour tout $(x_1, x_2, y) \in E^2$, pour tout $(\lambda_1, \lambda_2) \in \mathbb{C}^2$, $\langle \lambda_1x_1 + \lambda_2x_2, y\rangle = \overline{\lambda_1}\langle x_1, y\rangle + \overline{\lambda_2}\langle x_2, y\rangle$.

On dit alors que $E \to \mathbb{C}, x \mapsto \langle x, y\rangle$ est *semi-linéaire*. Par ailleurs, la vérification de la propriété (c) est facilitée par le fait que $\langle x, x\rangle \in \mathbb{R}$ pour tout x, car $\langle x, x\rangle = \overline{\langle x, x\rangle}$.

Exemple 7.2. a) Sur $\mathbb{C}^n$, on pose $\langle x, y\rangle = \sum_{i=1}^{n} \overline{x_i}y_i$, où $x = (x_1, \ldots, x_n)$ et $y = (y_1, \ldots, y_n)$. Il s'agit du produit scalaire canonique sur $\mathbb{C}^n$. Matriciellement, si $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ et $Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$, on a $\langle x, y\rangle = {}^t\overline{X}Y$.

b) Lorsque $E = \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, on peut, sur le même modèle, poser, pour $A = (a_{ij})$ et $B = (b_{ij})$, $\langle A, B\rangle = \sum_{i,j} \overline{a_{ij}}b_{ij}$. On obtient que $\langle A, B\rangle = \mathrm{tr}(\overline{A}\,{}^tB) = \mathrm{tr}({}^t\overline{A}B) = \mathrm{tr}(A^*B)$.

Définition 7.3. *Un $\mathbb{K}$-espace vectoriel E muni d'un produit scalaire est un espace préhilbertien, réel ou complexe selon le corps $\mathbb{K}$. S'il est de dimension finie, c'est un espace euclidien si $\mathbb{K} = \mathbb{R}$, et un espace hermitien si $\mathbb{K} = \mathbb{C}$.*

7.1.2 Orthogonalité de vecteurs et de sous-espaces vectoriels

Soit E un espace préhilbertien, muni d'un produit scalaire, noté $\langle ., .\rangle$.

Définition 7.4. *On dit que x et y sont orthogonaux si $\langle x, y\rangle = 0$.*

Remarque 7.1. Pour $(x, y) \in E^2$, il y a équivalence entre $\langle x, y\rangle = 0$ et $\langle y, x\rangle = 0$.

Définition 7.5. *Pour F un sous-espace vectoriel de E, $F^\perp = \{x \in E / \forall a \in F, \langle a, x\rangle = 0\}$.*

Exemple 7.3. $E^\perp = \{0\}$ et $\{0\}^\perp = E$.

Proposition 7.2. Soit F un sous-espace vectoriel de E. Alors :
a) $F^\perp$ est un sous-espace vectoriel de E.
b) $F \subset [F^\perp]^\perp$ et $F \cap F^\perp = \{0\}$.
c) Si $\dim F = p \geqslant 1$, et si $(e_1, \ldots, e_p)$ est une base de E, alors $x \in F^\perp$ si et seulement si $\langle e_i, x\rangle = 0$ pour tout i.

Théorème 7.1. Pour deux sous-espaces vectoriels de E, soit F et G, il y équivalence entre :
a) $\langle y, z\rangle = 0$ pour tout $(y, z) \in F \times G$.
b) $G \subset F^\perp$.
c) $F \subset G^\perp$.
On a alors F et G qui sont en somme directe.

Définition 7.6. *Deux sous-espaces vectoriels de E, F et G sont dit orthogonaux si $\langle y, z\rangle = 0$ pour tout $(y, z) \in F \times G$. F et G sont dits supplémentaires orthogonaux s'ils sont orthogonaux, et si $E = F \oplus G$.*

Remarque 7.2. a) On a alors $G = F^\perp$ et $F = G^\perp$, ainsi que $F = [F^\perp]^\perp$ et $G = [G^\perp]^\perp$.
b) On dispose alors de la projection sur F parallélement à $F^\perp$, appelée *projection orthogonale* sur F, et notée p_F (et $p_{F^\perp} = Id_E - p_F$), et de la symétrie $s_{F,F^\perp}$, notée s_F, et plus précisément appelée *symétrie orthogonale* par rapport à F. On a $s_F = 2p_F - Id_E$, $F = \ker(s_F - Id_E)$ et $F^\perp(s_F + Id_E)$ et $s_{F^\perp} = -s_F$.

Théorème 7.2. Si $E = F \oplus F^\perp$, $p_F(x) = y$ est l'unique vecteur de E tel que $y \in F$ ET $x - y \in F^\perp$.

On a le résultat suivant, très utile, de projection sur une droite :

Théorème 7.3. Soit a un vecteur non nul de E. Alors, $E = \mathbb{K}a \oplus [\mathbb{K}a]^\perp$, et $p_{\mathbb{K}a}(x) = \dfrac{\langle a, x\rangle}{\langle a, a\rangle} a$.

Exemple 7.4. $\mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ et $\mathcal{A}_n(\mathbb{R})$ sont supplémentaires orthogonaux dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ muni de $\langle A, B\rangle = \mathrm{tr}({}^tAB)$.

Démonstration. Si ${}^tA = A$, et ${}^tB = -B$, alors :

$$\langle A, B\rangle = \mathrm{tr}(AB) = -\mathrm{tr}(A^tB) = -\mathrm{tr}({}^tBA) = -\langle B, A\rangle = -\langle A, B\rangle$$

Donc, $\langle A, B\rangle = 0$. □

Théorème 7.4. Soit r sous-espaces vectoriels E_j $(1 \leqslant j \leqslant r)$. Si les E_j sont orthogonaux deux à deux, leur somme est directe. On dit que $\displaystyle\bigoplus_{j=1}^{r} E_j$ est orthogonale.

7.2 Norme associée à un produit scalaire

Rappel. *Une norme sur E est une application usuellement notée $E \to \mathbb{R}, x \mapsto \|x\|$ (ou $x \mapsto N(x)$) vérifiant :*

a1) $\|x\| \geqslant 0$ pour tout $x \in E$.

a2) $\|x\| = 0$ équivaut à $x = 0$.

b) Pour tout $(\lambda, x) \in \mathbb{K} \times E$, $\|\lambda x\| = |\lambda| \|x\|$.

c) Pour tout $(x, y) \in E^2$, $\|x + y\| \leqslant \|x\| + \|y\|$.

Théorème 7.5. Si E un espace préhilbertien muni d'un produit scalaire, noté $\langle ., . \rangle$, l'application $E \to \mathbb{R}, x \mapsto \|x\| = \sqrt{\langle x, x \rangle}$ est une norme sur E, dite *norme associée au produit scalaire* $\langle ., . \rangle$.

Exemple 7.5. a) Sur $\mathbb{R}^n$, $\|x\|_2 = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} x_i^2}$ vient de $\langle x, y \rangle = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i$.

b) Sur $\mathbb{C}^n$, $\|x\|_2 = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} |x_i|^2}$ vient de $\langle x, y \rangle = \sum_{i=1}^{n} \overline{x_i} y_i$.

c) Sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, $\|A\|_2 = \sqrt{\mathrm{tr}({}^tAA)}$ vient de $\langle A, B \rangle = \mathrm{Tr}({}^tAB)$.

Exemple 7.6. Sur $\mathbb{K}^n$, en notant $x = (x_1, \ldots, x_n)$, la norme définie par $\|x\|_\infty = \max_{1 \leqslant i \leqslant n}$ n'est pas associée à un produit scalaire si $n \geqslant 2$.

Démonstration. Si elle l'était, elle vérifierait "l'identité du parallélogramme" :

$$\|x + y\|^2 + \|x - y\|^2 = 2[\|x\|^2 + \|y\|^2].$$

Or, en prenant $x = (1, 0, \ldots, 0)$ et $y = (0, 1, 0, \ldots, 0)$, on a $\|x+y\|_\infty^2 + \|x-y\|_\infty^2 = 2 \neq 2[\|x\|_\infty^2 + \|y\|_\infty^2] = 4$. □

Les égalités et inégalités qui suivent sont extrêmement classiques.

Théorème 7.6. (Pythagore)
Si x et y sont orthogonaux, alors :

$$\|x + y\|^2 = \|x\|^2 + \|y\|^2 = \|x - y\|^2$$

Si $\mathbb{K} = \mathbb{R}$, x et y sont orthogonaux si et seulement si $\|x + y\|^2 = \|x\|^2 + \|y\|^2$.

Théorème 7.7. (Cauchy-Schwarz)
Pour tout $(x, y) \in E^2$, on a $|\langle x, y \rangle| \leqslant \|x\| \|y\|$, avec égalité si et seulement si (x, y) est liée, soit $x = 0$ ou $y = \lambda x$, $\lambda \in \mathbb{K}$.

Conséquences :

a) Lorsque $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ et si x et y sont non nuls, alors $\dfrac{\langle x, y \rangle}{\|x\| \|y\|} \in [-1, 1]$. On définit alors l'écart angulaire de x et y comme étant $\mathrm{Arccos} \dfrac{\langle x, y \rangle}{\|x\| \|y\|} \in [0, \pi]$.

b) Si $(x_1, \ldots, x_n, y_1, \ldots, y_n) \in \mathbb{C}^{2n}$, Alors, $\left| \sum_{i=1}^{n} x_i y_i \right| \leqslant \sqrt{\sum_{i=1}^{n} |x_i|^2} \sqrt{\sum_{i=1}^{n} |y_i|^2}$, avec égalité si et seulement si $x_i = 0$ pour tout i, ou $(y_1, \ldots, y_n) = \lambda(\overline{x_i}, \ldots, \overline{x_n})$.

Théorème 7.8. (Minkowski)
Pour tout $(x, y) \in E^2$, on a $\|x+y\| \leqslant \|x\| + \|y\|$, avec égalité si et seulement si $x = 0$ ou $y = \lambda x$, avec λ réel positif.

7.3 Intervention de la dimension finie

7.3.1 Familles orthonormales

Définition 7.7. *Une famille $(e_i)_{i\in I}$ est orthogonale si $\langle e_i, e_j\rangle = 0$ dès que $i \neq j$.*

Théorème 7.9. Soit $(e_1, \ldots, e_r)$ une famille orthogonale. Alors :
a) Les droites $\mathbb{K}e_i$ $(1 \leqslant i \leqslant r)$ sont en somme directe orthogonale.
b) Si aucun des e_i n'est nul, $(e_1, \ldots, e_r)$ est libre.
c) $\|\sum_{i=1}^{r} e_i\|^2 = \sum_{i=1}^{r} \|e_i\|^2$.

Définition 7.8. *$x \in E$ est unitaire si $\|x\| = 1$. Une famille $(e_i)_{i\in I}$ est orthonormale si elle est orthogonale, et si tous ses vecteurs sont unitaires, soit si $\langle e_i, e_j\rangle = \delta_{ij}$ pour tout $(i, j) \in I^2$.*

Remarque 7.3. On dira qu'une famille $(e_i)_{i\in I}$ est *M-orthonormale* si elle est orthonormale pour $\langle\ .,.\ \rangle_M$, c'est-à-dire si ${}^te_i M e_j = \delta_{ij}$ pour tout $(i, j) \in I^2$.

Proposition 7.3. Une famille orthonormale $(e_1, \ldots, e_r)$ est libre, et les droites $\mathbb{K}e_i$ $(1 \leqslant i \leqslant r)$ sont en somme directe orthogonale.

Théorème 7.10. Tout sous-espace vectoriel F de E de dimension finie admet des bases orthonormales.

Exemple 7.7. Dans E de dimension $n \geqslant 1$, muni d'une base $\mathcal{B} = (e_1, \ldots, e_n)$, on dispose de $\|x\|_2 = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} |x_i|^2}$ issue de $\langle x, y\rangle = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i$ ou de $\langle x, y\rangle = \sum_{i=1}^{n} \overline{x_i} y_i$ selon $\mathbb{K}$, et $\mathcal{B}$ est orthonormale pour le produit scalaire ainsi défini.

Par exemple, si $x_0, \ldots, x_n$ sont des réels distincts deux à deux, $\langle P, Q\rangle = \sum_i P(x_i)Q(x_i)$ est un produit scalaire sur $\mathbb{R}_n[X]$ car il correspond au choix de la base des polynômes de Lagrange $L_i = \prod_{j\neq i} \dfrac{X - x_j}{x_i - x_j}$, base qui est alors orthonormale.

Les calculs dans E muni d'une base orthonormale se ramènent d'ailleurs à ce cas.

Théorème 7.11. Soit $(e_1, \ldots, e_r)$ une famille orthonormale, et F le sous-espace vectoriel de E qu'elle engendre : en fait, elle en est une base $\mathcal{B}$. Alors,

a) Pour $x \in F$, $x = \sum_{i=1}^{r} \langle e_i, x\rangle e_i$ et $\|x\|^2 = \sum_{i=1}^{r} |\langle e_i, x\rangle|^2$.

b) Pour $x = \sum_{i=1}^{r} x_i e_i$ et $y = \sum_{i=1}^{r} y_i e_i$, ainsi que $X = \mathcal{M}_{\mathcal{B}}(x)$ et $Y = \mathcal{M}_{\mathcal{B}}(y)$, on a :

i) lorsque $\mathbb{K} = \mathbb{R}$, $\langle x, y\rangle = \sum_{i=1}^{r} x_i y_i = {}^t XY$.

ii) lorsque $\mathbb{K} = \mathbb{C}$, $\langle x, y\rangle = \sum_{i=1}^{r} \overline{x_i} y_i = {}^t \overline{X} Y$.

c) Si $u \in \mathcal{L}(F)$, et $\mathcal{M}_{\mathcal{B}}(u) = M = (m_{ij})$, on a $m_{ij} = \langle e_i, u(e_j)\rangle$.

7.3.2 Représentation des formes linéaires en dimension finie

E est supposé de dimension finie.

Théorème 7.12. Soit $a \in E$. On sait que $\varphi_a : E \to \mathbb{K}, x \mapsto \langle a, x\rangle$ est une forme linéaire sur E. Réciproquement, si φ est une forme linéaire sur E, il existe $a \in E$, unique, tel que $\varphi = \varphi_a$.

Exemple 7.8. Dans $E = \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, pour toute forme linéaire sur E, il existe $M \in E$, unique, telle que $\varphi(X) = \mathrm{tr}(MX)$ pour toute matrice X.

Démonstration. On a donc $\varphi(X) = \langle A, X\rangle$ (A unique), où, si $\mathbb{K} = \mathbb{R}$, $\langle A, X\rangle = \mathrm{tr}({}^t AX)$ ($M = {}^t A$), et si $\mathbb{K} = \mathbb{C}$, $\langle A, X\rangle = \mathrm{tr}({}^t \overline{A} X)$ ($M = {}^t \overline{A}$). □

7.3.3 Intervention des sous-espaces vectoriels de dimension finie

Théorème 7.13. Soit F un sous-espace vectoriel de dimension finie de E. Alors :

a) $E = F \oplus F^{\perp}$ et $F = [F^{\perp}]^{\perp}$.

b) Si $(e_1, \dots, e_r)$ est une base orthonormale de F, alors, pour tout $x \in E$, $p_F(x) = \sum_{i=1}^{r} \langle e_i, x\rangle e_i$.

On généralise ainsi le résultat vu avec $F = \mathbb{K}a$, et aussi $\mathbb{K}a = [\mathbb{K}a^{\perp}]^{\perp}$.

Théorème 7.14. Si $\dim E$ est finie, toute famille orthonormale peut-être complétée en une base orthonormale de E.

7.3.4 Procédé d'orthonormalisation de Gram-Schmidt

Théorème 7.15. Soit $(\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_r)$ une famille libre dans E. Il existe une famille orthonormale $(e_1, \dots, e_r)$ telle que, pour tout $k \in \{1, \dots, r\}$, $F_k = \mathrm{vect}(e_1, \dots, e_k) = \mathrm{vect}(\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_k)$. On peut construire $(e_1, \dots, e_r)$ de la façon suivante : $e_1 = \dfrac{\varepsilon_1}{\|\varepsilon_1\|}$ et, pour $k \geqslant 2$, $e_k = \dfrac{\varepsilon_k - p_{F_{k-1}}(\varepsilon_k)}{\|\varepsilon_k - p_{F_{k-1}}(\varepsilon_k)\|}$.

Exemple 7.9. Soit, dans $\mathbb{R}^3$ euclidien canonique, la famille des vecteurs $\varepsilon_1 = (1, 2, 1)$, $\varepsilon_2 = (3, 4, 1)$ et $\varepsilon_3 = (1, -3, -1)$. Montrer que cette famille est libre et construire une famille orthonormale associée par le procédé de Gram-Schmidt.

Démonstration. Le déterminant dans la base canonique de la famille $(\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3)$ vaut :

$$\begin{vmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 2 & 4 & -3 \\ 1 & 1 & -1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & -1 \\ 1 & 0 & 0 \end{vmatrix} = -4 \neq 0,$$

donc on a bien une base.

On prend $e_1 = \dfrac{\varepsilon_1}{\|\varepsilon_1\|} = \dfrac{1}{\sqrt{6}}(1, 2, 1)$.

La projection orthogonale de ε_2 sur $\mathbb{R}e_1$ est $\langle e_1, \varepsilon_2\rangle e_1 = 2(1,2,1)$. On l'enlève à ε_2 dx 'où un vecteur orthogonal à e_1 : $f_2 = (1,0,-1)$ puis $e_2 = \dfrac{1}{\sqrt{2}}(1,0,-1)$. On a $\mathrm{vect}(\varepsilon_1, \varepsilon_2) = \mathrm{vect}(e_1, e_2) = F_2$.

La projection orthogonale de ε_3 sur F_2 est

$$\langle e_1, \varepsilon_3\rangle e_1 + \langle e_2, \varepsilon_3\rangle e_2 = -(1,2,1) + (1,0,-1) = (0,-2,-2).$$

On l'enlève à ε_3 d'où $f_3 = (1,-1,1)$ orthogonal à F_2. On prend pour finir $e_3 = \dfrac{1}{\sqrt{3}}(1,-1,1)$. □

Remarque 7.4. Ce procédé peut continuer indéfiniment à partir d'une famille libre $(\varepsilon_i)_{i\in\mathbb{N}}$.

Exemple 7.10. $\mathbb{R}[X]$ étant muni d'un produit scalaire quelconque, montrer qu'il existe une famille orthonormale (P_n) de $\mathbb{R}[X]$, avec $\deg(P_n) = n$ pour tout n.

Démonstration. Si on applique le procédé d'orthonormalisation de Schmidt à la famille libre canonique (X^n) de $\mathbb{R}[X]$, on obtient une famille orthonormale (P_n) telle que $\mathrm{vect}(P_0, \dots, P_n) = \mathrm{vect}(1, \dots, X^n)$ pour tout n. Notamment, P_0 est constant (non nul) de degré nul, et, si $n \geqslant 1$, $\deg(P_n) \leqslant n$, avec si $\deg(P_n) \leqslant n-1$, $P_n \in \mathrm{vect}(1, \dots, X^{n-1}) = \mathrm{vect}(P_0, \dots, P_{n-1})$, ce qui n'est pas possible, donc $\deg(P_n) = n$. □

7.3.5 Distance à un sous-espace vectoriel

Théorème 7.16. Soit F un sous-espace vectoriel de E, et $x \in E$. Alors, l'ensemble $\{\|x-t\| \; ; \; t \in F\}$ est non vide, minoré par 0.

Définition 7.9. *Si F un sous-espace vectoriel de E, et $x \in E$, on note*

$$d(x,F) = \inf\{\|x-t\| \; ; \; t \in F\}.$$

Théorème 7.17. Soit F un sous-espace vectoriel de dimension finie de E, et $x \in E$. Alors, pour tout $t \in F$, $\|x-t\| \geqslant \|x - p_F(x)\|$, avec égalité si et seulement si $t = p_F(x)$.

Donc, $d(x,F) = \|x - p_F(x)\|$, et $p_F(x)$ est l'unique élément de F réalisant cela. De plus, $\|x\|^2 = \|p_F(x)\|^2 + d(x,F)^2$ et $d(x,F) = \|p_{F^\perp}(x)\|$.

C'est donc, en particulier, le cas quand F est de dimension finie, et on a alors l'inégalité de Bessel :

Théorème 7.18. Si $(e_1, \dots, e_r)$ est orthonormale, et $x \in E$, alors $\displaystyle\sum_{i=1}^{r} |\langle e_i, x\rangle|^2 \leqslant \|x\|^2$.

Exemple 7.11. Dans $\mathbb{R}^4$ euclidien canonique, soit $F \left\{ \begin{array}{l} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 0 \\ x_1 - x_2 + x_3 - x_4 = 0 \end{array} \right.$. Donner $d(x,F)$ pour $x \in \mathbb{R}^4$.

Démonstration. Tout de suite, $F \left\{ \begin{array}{l} x_1 + x_3 = 0 \\ x_2 + x_4 = 0 \end{array} \right.$. On a $\dim F = 2$, et (e_1, e_2) une base orthonormale de F, avec $e_1 = \dfrac{1}{\sqrt{2}}(1,0,-1,0)$ et $e_2 = \dfrac{1}{\sqrt{2}}(0,1,0,-1)$. Alors, $p_F(x) = \langle e_1, x\rangle e_1 + \langle e_2, x\rangle e_2$.

$$p_F(x) = \frac{1}{2}(x_1 + x_3, x_2 + x_4, x_1 + x_3, x_2 + x_4)$$

donc $d(x,F)^2 = \|x - p_F(x)\|^2 = \dfrac{1}{2}[(x_1 + x_3)^2 + (x_2 + x_4)^2]$. □

Remarque 7.5. En pratique, on pourra aussi utiliser la simplification suivante, pour $x \in E$:

$$\|x - p_F(x)\|^2 = \langle x - p_F(x), x - p_F(x)\rangle = \langle x, x - p_F(x)\rangle$$

car $x - p_F(x)$ est orthogonal à $p_F(x)$.

Chapitre 8

Endomorphismes d'un espace euclidien

Soit E un espace euclidien (donc $\mathbb{K} = \mathbb{R}$), de dimension $n \geqslant 1$, muni d'un produit scalaire, noté $\langle ., . \rangle$, associé à la norme notée $\|.\|$.

8.1 Automorphismes orthogonaux et matrices orthogonales

8.1.1 Groupe orthogonal de E

Définition 8.1. *$u \in \mathcal{L}(E)$ est un automorphisme orthogonal de E si, pour tout $(x, y) \in E^2$, $\langle u(x), u(y) \rangle = \langle x, y \rangle$.*

Théorème 8.1. $u \in \mathcal{L}(E)$ est un automorphisme orthogonal de E si et seulement si, pour tout $x \in E$, $\|u(x)\| = \|x\|$.

Proposition 8.1. L'ensemble des automorphismes orthogonaux de E est un groupe pour la composition, dit *groupe orthogonal* de E.

Le groupe orthogonal de E est noté $O(E)$.

Théorème 8.2. $u \in \mathcal{L}(E)$. $u \in O(E)$ si et seulement si il existe une base orthonormale $\mathcal{B} = (e_1, \ldots, e_n)$ de E, telle que $(u(e_1), \ldots, u(e_n))$ est orthonormale. Alors, c'est vrai pour toute base orthonormale $\mathcal{B}$ de E.

8.1.2 Matrices orthogonales

Définition 8.2. *$\Omega \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est orthogonale si $u_\Omega \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n)$ canoniquement associé à Ω est un automorphisme orthogonal pour la structure euclidienne canonique de $\mathbb{R}^n$.*

Théorème 8.3. Soit $\Omega \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Alors, Ω est orthogonale si et seulement si Ω vérifie l'une des trois conditions équivalentes

a) $\Omega {}^t\Omega = I_n$.
b) ${}^t\Omega\Omega = I_n$.
c) $\Omega \in Gl_n(\mathbb{R})$, et $\Omega^{-1} = {}^t\Omega$.

L'ensemble des matrices orthogonales de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est un groupe pour la multiplication, dit *groupe orthogonal* d'ordre n, et noté $O(n)$.

Théorème 8.4. Soit $u \in L(E)$. $u \in O(E)$ si et seulement si il existe une base orthonormale $\mathcal{B}$ de E, telle que $\mathcal{M}_{\mathcal{B}}(u)$ est orthogonale. Alors, c'est vrai dans toute base orthonormale $\mathcal{B}$ de E.

Théorème 8.5. Soit $\mathcal{B}$ une base orthormale de E, et $\mathcal{C}$ une autre base. Alors $P_{\mathcal{BC}}$ est une matrice orthogonale si et seulement si $\mathcal{C}$ est une base orthonormale.

Ainsi, les matrices orthogonales sont :
a) les matrices des automorphismes orthogonaux dans les bases orthonormales.
b) les matrices de passages entre les bases orthonormales de E.

8.1.3 Matrices M-orthogonales

Définition 8.3. *Une matrice $V \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est dite M-orthogonale (avec toujours M symétrique définie positive) si ses vecteurs colonnes $(v_1, \cdots, v_n)$ forment une base M-orthonormale de $\mathbb{R}^n$, c'est-à-dire si ${}^tVMV = I_n$.*

Remarque 8.1. si V est M-orthogonale, on a alors, en prenant les inverses (V est bien inversible car matrice de passage d'une base à une autre), $V^{-1}M^{-1}({}^tV)^{-1} = I_n$ et en composant à gauche par V et à droite par ${}^tV$, on obtient également $\boxed{V\,{}^tV = M^{-1}}$ qui est une autre formulation de la définition.

Les matrices M-orthogonales sont donc les matrices inversibles vérifiant $V\,{}^tV = M^{-1}$ ou ${}^tVMV = I_n$.

8.1.4 Projection M-orthogonale

Soit F un sous-espace vectoriel de E et $\langle .,. \rangle_M$ un produit scalaire sur E construit à partir d'une matrice M symétrique définie positive.

Définition 8.4. *p est une projection M-orthogonale sur F si et seulement si, pour tout $x \in E$, $p(x) \in F$ ET $\langle p(x), x - p(x) \rangle_M = 0$.*

Le théorème 7.13 donne donc ici, si $(b_1, \ldots, b_r)$ est une base M-orthonormale de F, alors, pour tout $x \in E$, $p(x) = \displaystyle\sum_{i=1}^{r} \langle b_i, x \rangle_M b_i$, ce qui s'écrit matriciellement, si $B = \begin{pmatrix} b_1 & \cdots & b_r \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{n,r}(\mathbb{R})$ et si P est matrice de la projection M-orthogonale sur F, $\boxed{P = B\,{}^tBM}$.

En effet $\langle b_i, x \rangle_M = {}^tb_iMX$ qui est un scalaire, donc il commute avec b_i et on a donc $PX = \displaystyle\sum_{i=1}^{r} b_i\,{}^tb_iMX$ pour tout X, soit $P = \displaystyle\sum_{i=1}^{r} b_i\,{}^tb_iM$, avec $\displaystyle\sum_{i=1}^{r} b_i\,{}^tb_i = \begin{pmatrix} b_1 & \cdots & b_r \end{pmatrix} \begin{pmatrix} {}^tb_1 \\ \vdots \\ {}^tb_r \end{pmatrix} = B\,{}^tB$.

8.2 Réduction des endomorphismes symétriques

Définition 8.5. *$u \in \mathcal{L}(E)$ est symétrique si, pour tout $(x, y) \in E$, $\langle u(x), y \rangle = \langle x, u(y) \rangle$.*

Théorème 8.6. $u \in \mathcal{L}(E)$ est symétrique si et seulement si il existe $\mathcal{B}$, base orthonormale de E, telle que $\mathcal{M}_{\mathcal{B}}(u)$ est symétrique (c'est alors vrai dans toute base orthonormale).

Les endomorphismes symétriques de E forment un sous-espace vectoriel de $\mathcal{L}(E)$.

Remarque 8.2. On a un résultat analogue en considérant le produit scalaire $\langle\, .\, , .\, \rangle_M$ construit à partir d'une matrice M symétrique définie positive : un endomorphisme *M-symétrique* doit vérifier $\langle u(x), y\rangle_M = \langle x, u(y)\rangle_M$ pour tout (x, y), soit matriciellement ${}^tX{}^tAMY = {}^tXMAY$ pour tout (X, Y), c'est-à-dire ${}^tAM = MA$ ou encore $\boxed{{}^t(MA) = MA}$ (puisque M est symétrique et vérifie donc ${}^tM = M$).

Théorème 8.7. a) Soit $u \in \mathcal{L}(E)$, symétrique. E est la somme directe orthogonale des sous-espaces propres de u. En particulier, u est diagonalisable dans une base orthonormale de E.

b) Soit $u \in \mathcal{L}(E)$. u est symétrique si et seulement si u est diagonalisable dans une base orthonormale.

On écrit la version matricielle de cette dernière propriété :

Théorème 8.8. $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est symétrique si et seulement si elle est diagonalisable au moyen d'une matrice orthogonale, soit si et seulement si il existe D diagonale et $\Omega \in O(n)$ telles que $A = \Omega D{}^t\Omega$.

Remarque 8.3. On a le même résultat pour les matrices hermmitiennes en remplaçant les matrices orthogonales par les matrices unitaires. Ainsi, si $A^* = A$ alors il existe U unitaire et D diagonale, telles que $A = UDU^*$. Ce résultat est connu sous le nom de *Théorème spectral*.

Remarque 8.4. On a le même résultat pour les matrices M-symétriques ; toute matrice A réelle M-symétrique admet n valeurs propres réelles, les vecteurs propres pouvant être choisis pour constituer une base M-orthonormale de E : $Av_i = \lambda_i v_i$, soit $AV = VD$ avec $V\,{}^tV = M^{-1}$ où $D = \mathrm{diag}(\lambda_1, \cdots, \lambda_n)$. Ceci donne $A = VDV^{-1}$ et $V\,{}^tV = M^{-1}$, c'est-à-dire $V^{-1} = {}^tVM$, soit finalement $\boxed{A = VD\,{}^tVM}$.

Exemple 8.1. Diagonaliser $J = \begin{pmatrix} 1 & \dots & 1 \\ \vdots & & \vdots \\ 1 & \dots & 1 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ avec une matrice orthogonale.

Démonstration. Soit $u \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n)$ canoniquement associé à J dans $\mathbb{R}^n$ euclidien canonique. $J^2 = nJ$, donc $u = np$, où p est le projecteur orthogonal sur $\mathrm{im}(p) = \mathrm{im}(u) = E_1(p) = E_n(u)$, parallélement à $\ker(p) = \ker(u) = E_0(u)$. $\mathrm{rg}(p) = \mathrm{rg}(u) = 1$, et $\mathrm{im}(u) = \mathbb{R}\frac{1}{\sqrt{n}}(1, \dots, 1)$, et $\ker(u) = \mathrm{im}(u)^\perp$ est l'hyperplan $\sum_i x_i = 0$. Une base orthonormale en est formée par les $\frac{1}{\sqrt{k(k-1)}}(1, \dots, 1, -k+1, 0, \dots, 0)$ pour $2 \leqslant k \leqslant n$. □

Exemple 8.2. Diagonaliser la matrice $M = \begin{pmatrix} 0 & -\frac{1}{2} & 0 \\ -\frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ avec une matrice orthogonale.

Démonstration. On a, par blocs, le polynôme caractéristique

$$\chi_M(\lambda) = (1-\lambda)\begin{vmatrix} -\lambda & -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & -\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 - \frac{1}{4}.$$

Bien sûr, $E_1(M) = \mathbb{R}(0,0,1) = \mathbb{R}\varepsilon_1$. Au vu des deux premières colonnes, $E_{-1/2}(M) = \mathbb{R}\varepsilon_2$, avec $\varepsilon_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}(1,1,0)$ et, par orthogonalité, $E_{1/2}(M) = \mathbb{R}\varepsilon_3$, avec $\varepsilon_3 = \varepsilon_1 \wedge \varepsilon_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}(-1,1,0)$. □

Méthode pratique. Si $A \in \mathcal{S}_3(\mathbb{R})$ avec $A \notin \mathbb{R}I_3$, deux cas se présentent :

• A a trois valeurs propres distinctes. Dans ce cas, on détermine $E_{\lambda_1}(A) = \mathbb{R}\varepsilon_1$ et $E_{\lambda 2}(A) = \mathbb{R}\varepsilon_2$ (avec ε_1 et ε_2 unitaires) et on aura $E_{\lambda_3}(A) = \mathbb{R}\varepsilon_3$ où $\varepsilon_3 = \varepsilon_1 \wedge \varepsilon_2$.

• A a une valeur propre double λ_2 et une simple λ_1. Dans ce cas, on détermine $E_{\lambda_1}(A) = \mathbb{R}\varepsilon_1$ puis on choisit un vecteur unitaire ε_2 orthogonal à ε_1 et $\varepsilon_3 = \varepsilon_1 \wedge \varepsilon_2$. On a alors $E_{\lambda_2}(A) = \mathrm{vect}(\varepsilon_2, \varepsilon_3)$.

Remarque 8.5. Une matrice symétrique complexe peut ne pas être diagonalisable : soit $A = \begin{pmatrix} a & b \\ b & d \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{C})$. On a donc $\chi_u(\lambda) = \lambda^2 - (a+d)\lambda + ad - b^2$, dont le discriminant est $\Delta = (a-d)^2 + 4b^2$. On le choisit nul sans que b ne soit nul : il n'y a qu'une valeur propre, mais A, n'étant pas de la forme λI_2, n'est pas diagonalisable. C'est le cas pour $a = 2i$, $b = 1$, $d = 0$.

Chapitre 9

Compléments sur les matrices

9.1 Compléments sur la réduction des matrices

Dans le chapitre 6, on a vu la diagonalisation et la trigonalisation de matrices dans le cadre général. Dans le chapitre 8, on a vu la diagonalisation des matrices symétriques. Ici, on va voir d'autres réductions, dans des cadres souvent plus particuliers.

Théorème 9.1. a) Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ une matrice carrée. Alors, il existe une matrice unitaire U et une matrice triangulaire supérieure R telle que $A = URU^*$ (décomposition de Schur)
b) Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ une matrice normale. Alors, il existe une matrice unitaire U telle que U^*AU soit diagonale.

Démonstration. a) Par récurrence sur n. Le cas $n = 1$ est immédiat. Supposons que le théorème soit vérifié pour les matrices de taille $(n-1) \times (n-1)$. Soit λ une valeur propre de A et $x \in \mathbb{C}^n$ un vecteur propre associé avec $\|x\|_2 = 1$. Soit $V = \begin{pmatrix} x & Z \end{pmatrix}$ une matrice unitaire (de taille n, dont la première colonne est x). On a, par blocs,

$$V^*AV = \begin{pmatrix} x^* \\ Z^* \end{pmatrix} A \begin{pmatrix} x & Z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x^*Ax & x^*AZ \\ Z^*Ax & Z^*AZ \end{pmatrix}$$

Puisque $Ax = \lambda x$ et que V est unitaire, on a $Z^*x = 0$ et donc $Z^*Ax = \lambda Z^*x = 0$. Ceci prouve que

$$V^*AV = \begin{pmatrix} \lambda & x^*AZ \\ 0 & Z^*AZ \end{pmatrix}$$

On applique alors l'hypothèse de récurrence à la matrice $B = Z^*AZ \in \mathcal{M}_{n-1}(\mathbb{C})$. Il existe des matrices unitaire et triangulaire supérieure W et T telles que $B = WTW^*$. Ainsi,

$$V^*AV = \begin{pmatrix} \lambda & x^*AZ \\ 0 & WTW^* \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & W \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda & x^*AZW \\ 0 & T \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & W^* \end{pmatrix}$$

On obtient la décomposition de Schur $A = URU^*$ en prenant :

$$R = \begin{pmatrix} \lambda & x^*AZW \\ 0 & T \end{pmatrix} \qquad \text{et} \qquad U = V \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & W \end{pmatrix}$$

b) On a donc $A = URU^*$ et donc $R = U^*AU$.
Si la matrice A est normale ($AA^* = A^*A$), la matrice R l'est aussi, puisque

$$R^*R = U^*A^*UU^*AU = U^*A^*AU = U^*AA^*U = RR^*.$$

La matrice R étant triangulaire supérieure,

$$\sum_{k=1}^{n} |r_{1,k}|^2 = (RR^*)_{1,1} = (R^*R)_{1,1} = |r_{1,1}|^2, \quad \text{d'où } r_{1,k} = 0, \quad 2 \leqslant k \leqslant n,$$

$$\sum_{k=2}^{n} |r_{2,k}|^2 = (RR^*)_{2,2} = (R^*R)_{2,2} = |r_{2,2}|^2, \quad \text{d'où } r_{2,k} = 0, \quad 3 \leqslant k \leqslant n,$$

etc..., ce qui montre que la matrice R est diagonale. □

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ (resp. $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$) une matrice symétrique (resp. hermitienne). Alors les valeurs propres de A sont réelles. (Si $Ax = \lambda x$, alors $\langle x, Ax\rangle = \lambda\|x\|^2 = {}^t\overline{X}AX = {}^t\overline{X}\,{}^t\overline{A}X = {}^t(\overline{AX})X = \overline{\lambda}\|x\|^2$).

Si de plus, A est <u>positive</u> (resp. <u>définie positive</u>) *i.e.* si, pour tout $v \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K}) \setminus \{0\}$, $\langle Av, v\rangle \geqslant 0$ (resp. $\langle Av, v\rangle > 0$), les valeurs propres de A sont positives (resp. strictement positives).

On appelle <u>*valeurs singulières*</u> de $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ les racines carrées positives des valeurs propres de A^*A (ou ${}^tAA$ si $\mathbb{K} = \mathbb{R}$). Les valeurs singulières sont réelles et positives car, si $A^*Av = \lambda v$, $\langle v, A^*Av\rangle = \|Av\|_2^2 = \lambda\|v\|_2^2$.

Théorème 9.2. Soit $A \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{C})$. Alors, il existe deux matrices unitaires $U \in \mathcal{M}_m(\mathbb{C})$ et $V \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ et une matrice $\Sigma \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{C})$ telles que

$$A = U\Sigma V^*, \qquad \Sigma = \begin{pmatrix} \Delta & 0_{r,n-r} \\ 0_{m-r,r} & 0_{m-r,n-r} \end{pmatrix}, \qquad \Delta = \operatorname{diag}(\sigma_1, \cdots, \sigma_r) \in \mathcal{M}_r(\mathbb{R})$$

où $\sigma_1 \geqslant \cdots \geqslant \sigma_r > 0$ sont les <u>*valeurs singulières*</u> de A.
Cette décomposition s'appelle <u>*décomposition en valeurs singulières*</u> de A (ou SVD).

Démonstration. Puisque $A^*A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ est hermitienne et que ses valeurs propres sont $\geqslant 0$, d'après le théorème spectral, il existe une matrice unitaire $V \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ telle que

$$V^*A^*AV = \operatorname{diag}(\sigma_1^2, \cdots, \sigma_r^2, 0, \cdots, 0),$$

les nombres σ_i étant les valeurs singulières de la matrice A. Notons $v_1, \cdots, v_n$ les colonnes de V. L'écriture précédente prouve que les vecteurs Av_i, $1 \leqslant i \leqslant n$ sont deux à deux orthogonaux, que $\|Av_i\|_2 = \sigma_i$ si $1 \leqslant i \leqslant r$ et que $Av_i = 0$ si $r + 1 \leqslant i \leqslant n$.

Posons $u_i = Av_i/\sigma_i$ pour $1 \leqslant i \leqslant r$. Ces r vecteurs de $\mathbb{C}^m$ sont orthonormés. On peut les compléter pour en faire une base orthonormée de $\mathbb{C}^m$. On obtient une matrice unitaire $U \in \mathcal{M}_m(\mathbb{C})$ dont les colonnes sont $u_1, \cdots, u_m$ et, par construction, $AV = U\Sigma$. Cette identité prouve aussi que le rang de A est égal au nombre de valeurs singulières. □

Remarque 9.1. Lorsque A est une matrice réelle, on peut prendre pour U et V des matrices orthogonales.

Changement de métrique

On reprend sur $\mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{R})$ le produit scalaire défini dans le chapitre 7 :

$$\langle A, B\rangle_{M,D} = \mathrm{tr}(AM\,{}^tBD)$$

où M est une matrice symétrique définie positive de $\mathcal{M}_n(\mathrm{I\!R})$ et où D est une matrice diagonale définie positive de $\mathcal{M}_m(\mathrm{I\!R})$. La distance associée à cette norme est alors, si $D = \mathrm{diag}(w_1, \cdots, w_m)$,

$$d^2(A,B) = \|A - B\|^2_{M,D} = \sum_{i=1}^{m} w_i \|a_i - b_i\|^2_M$$

où les a_i (resp. les b_i) sont ici les vecteurs formés à partir des lignes de A (resp. de B).

La décomposition en valeurs singulières devient ici :

Théorème 9.3. Une matrice $A \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathrm{I\!R})$ de rang r peut s'écrire :

$$A = U\Sigma\,{}^tV = \sum_{k=1}^{r} \sigma_i u_k\, tv_k$$

où $U \in \mathcal{M}_{m,r}(\mathrm{I\!R})$ contient les vecteurs propres D-orthonormés (${}^tUDU = I_r$) de la matrice D-symétrique positive $AM\,{}^tAD$ associés aux valeurs propres non nulles σ_i^2 rangées par ordre décroissant dans la matrice diagonale $\Lambda \in \mathcal{M}_r(\mathrm{I\!R})$; $V \in \mathcal{M}_{n,r} \in \mathcal{M}_{n,r}(\mathrm{I\!R})$ contient les vecteurs propres M-orthonormés (${}^tVMV = I_r$) de la matrice M-symétrique positive ${}^tADAM$ associés aux mêmes valeurs propres. De plus $U = AMV\Delta^{-1}$ et $V = {}^tADU\Delta^{-1}$, où $\Delta = \mathrm{diag}(\sigma_1, \cdots, \sigma_r)$.

Application à l'approximation de matrices

On suppose A de rang r est on cherche la matrice Z_q de rang $q < r$, qui soit la plus proche possible de A. On a alors le résultat suivant :

Théorème 9.4. La solution du problème :

$$\min_Z \{\|A - Z\|^2_{M,D}\ ;\ Z \in \mathcal{M}_{m,n},\ \mathrm{rg}(Z) = q < r\}$$

est donnée par :

$$Z_q = \sum_{k=1}^{q} \sigma_k u_k\,{}^tv_k.$$

Le minimum atteint est :

$$\|A - Z_q\|^2_{M,D} = \sum_{k=q+1}^{r} \sigma_k^2$$

Les matrices U_q, Λ_q et V_q contiennent les q premiers vecteurs et valeurs propres données par la DVS de A si $\sigma_1 \geqslant \sigma_2 \geqslant \cdots \geqslant \sigma_r$; Z_q est appelée *approximation de rang q de A*.

Autrement dit, si $\widehat{P_q}$ (resp. $\widehat{Q_q}$) sont les matrices associées aux projections M-orthogonales sur $E_q = \mathrm{im}(V_q)$ (resp. D orthogonales sur $F_q = \mathrm{im}(U_q)$:

$$\widehat{P_q} = \sum_{k=1}^{q} v_k\,{}^tv_k M = V_q\,{}^tV_q\, M$$

$$\widehat{Q_q} = \sum_{k=1}^{q} u_k\, {}^t\!u_k D = U_q\, {}^t\!U_q\, D$$

$$Z_q = \widehat{Q_q} A = A\, {}^t\widehat{P_q}.$$

Avec ces notations, on a alors :

$$\widehat{P_q} = \operatorname{argmax} \lim_{P_q} \{\|A\, {}^tP_q\|^2_{M,D}\ ;\ P_q \text{ projetion } M\text{-orthogonale de rang } q < r\},$$

$$\widehat{Q_q} = \operatorname{argmax} \lim_{Q_q} \{\|Q_q A\|^2_{M,D}\ ;\ Q_q \text{ projetion } D\text{-orthogonale de rang } q < r\}.$$

Ces résultats seront très utiles en Statistiques, notamment lors des Analyses en Composantes Principales.

9.2 Quotient de Raleigh

Théorème 9.5. Soit A une matrice symétrique (resp. hermitienne) de valeurs propres $\lambda_1 \leqslant \lambda_2 \leqslant \cdots \leqslant \lambda_n$, de vecteurs propres associés $v_1, v_2, \cdots, v_n$ tels que

$$\langle v_i, v_j \rangle = \delta_{ij} = \begin{cases} 0 \text{ si } i \neq j \\ 1 \text{ si } i = j \end{cases}$$

Posons $V_0 = \{0\}$, $\mathcal{V}_0 = \{V_0\}$
Pour $1 \leqslant k \leqslant n$, $V_k = \mathrm{vect}(v_1, \cdots, v_k)$, $\mathcal{V}_k = \{$sous-espaces vectoriels de dimension $k\}$

$$R_A : E \setminus \{0\} \to \mathbb{K},\ v \mapsto \frac{\langle Av, v\rangle}{\langle v, v\rangle} = \frac{v^*Av}{v^*v}$$

le <u>*quotient de Rayleigh*</u>. Alors,

- $\lambda_k = R_A(v_k) = \max\limits_{v \in V_k} R_A(v) = \min\limits_{v \in V_{k-1}^{\perp}} R_A(v)$ pour tout $k = 1, \cdots, n$.
- $\lambda_k = \min\limits_{W \in \mathcal{V}_k} \max\limits_{v \in W} R_A(v) = \max\limits_{W \in \mathcal{V}_{k-1}} \min\limits_{v \in W^{\perp}} R_A(v)$
- pour tout $v \in E$, $R_A(v) \in [\lambda_1, \lambda_n] \subset \mathbb{R}$.

Démonstration. Soit U la matrice unitaire dont les vecteurs colonnes sont les vecteurs propres $v_1, \cdots, v_n$, de sorte que

$$U^*AU = \mathrm{diag}(\lambda_i) = D$$

et soit v un vecteur non nul de E. Posant $v = Uw$, il s'ensuit :

$$R_A(v) = \frac{v^*Av}{v^*v} = \frac{w^*U^*AUw}{w^*U^*Uw} = \frac{w^*Dw}{w^*w} = R_D(w).$$

Un vecteur $v \in V_k$ étant de la forme $v = \sum_{i=1}^{k} \alpha_i v_i$, le vecteur w correspondant est donc de la forme :

$$w = \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \vdots \\ \alpha_k \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix},$$

ce qui se voit immédiatement à partir de l'égalité $v = Uw$. Par suite,

$$R_A\left(\sum_{i=1}^{k} \alpha_i v_i\right) = \frac{\sum_{i=1}^{k} \lambda_i |\alpha_i|^2}{\sum_{i=1}^{k} |\alpha_i|^2}.$$

Avec $\alpha_k = 1$ et $\alpha_i = 0$ pour $i \neq k$, on a bien $\lambda_k = R_A(v_k)$. De plus, pour $i \leqslant k$, on a $\lambda_i \leqslant \lambda_k$ donc, pour $v \in V_k$, $R_A(v) \leqslant \lambda_k$ (avec égalité pour $v = v_k$).

De la même façon, tout vecteur orthogonal à V_{k-1} étant de la forme $v = \sum_{i=k}^{n} \alpha_i v_i$, avec

$$R_A\left(\sum_{i=k}^{n} \alpha_i v_i\right) = \frac{\sum_{i=k}^{n} \lambda_i |\alpha_i|^2}{\sum_{i=1}^{k} |\alpha_i|^2},$$

on a alors, pour $v \in V_{k-1}^{\perp}$, $R_A(v) \geqslant \lambda_k$ (avec égalité pour $v = v_k$).

On a ainsi :

$$\lambda_k = \max_{v \in V_k} R_A(v) \geqslant \min_{W \in \mathcal{V}_k} \max_{v \in W} R_A(v).$$

Il reste à établir l'inégalité opposée, c'est-à-dire à montrer que, pour tout $W \in \mathcal{V}_k$,

$$\lambda_k \leqslant \max_{v \in W} R_A(v).$$

Définissant l'espace vectoriel

$$V_{k-1}^{\perp} = \{v \in V \ ; \ v \perp V_{k-1}\},$$

qui est de dimension $n - k + 1$, il suffit de démontrer que, si W est un sous-espace vectoriel quelconque de dimension k de V, le sous-espace vectoriel $W \cap V_{k-1}^{\perp}$ contient d'autres vecteurs que le vecteur nul, c'est-à-dire que

$$\dim(W \cap V_{k-1}^{\perp}) \geqslant 1.$$

En effet, on aura alors, pour $v \in W \cap V_{k-1}^{\perp} \setminus \{0\}$,

$$\lambda_k \leqslant R_A(v) \leqslant \max_{v \in W} R_A(v).$$

Comme

$$\dim(W \cap V_{k-1}^{\perp}) = \dim(W) + \dim(V_{k-1}^{\perp}) - \dim(W + V_{k-1}^{\perp}),$$

où

$$W + V_{k-1}^{\perp} = \{z \in V \ ; \ z = w + v, \ w \in W, \ v \in V_{k-1}^{\perp}\},$$

les relations

$$\dim(W) = k, \quad \dim(V_{k-1}^{\perp}) = n - k + 1, \quad \dim(W + V_{k-1}^{\perp}) \leqslant \dim(V) = n,$$

montrent que $\dim(W \cap V_{k-1}^{\perp}) \geqslant 1$.

L'autre égalité se démontre de façon analogue. Enfin, la dernière relation découle des inégalités, pour tout $v \in E \setminus \{0\}$

$$\lambda_1 \leqslant R_A(v) \leqslant \lambda_n.$$

□

9.3 Normes vectorielles et normes matricielles

9.3.1 Normes vectorielles

Les normes usuelles de $\mathbb{K}^n$ sont :

- $\|v\|_1 = \sum_{i=1}^{n} |v_i|$
- $\|v\|_2 = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} |v_i|^2} = \sqrt{\langle v, v\rangle}$ (norme euclidienne si $\mathbb{K} = \mathbb{R}$)
- $\|v\|_p = \left(\sum_{i=1}^{n} |v_i|^p\right)^{1/p}$
- $\|v\|_\infty = \max_{1 \leqslant i \leqslant n} |v_i|$.
- $\|v\|_M = \sqrt{{}^t v M v}$ où M est une matrice symétrique, définie positive, de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ (si $\mathbb{K} = \mathbb{R}$).

Proposition 9.1. Soit $\|\ \|$ et $\|\ \|'$ deux normes définies sur un même $\mathbb{K}$-espace vectoriel E de dimension finie. Alors $\|\ \|$ et $\|\ \|'$ sont équivalentes : il existe C et $C' \in \mathbb{R}_+^*$ tels que, pour tout $v \in E$, $C'\|v\| \leqslant \|v\|' \leqslant C\|v\|$.

9.3.2 Normes matricielles

Définition 9.1. *On appelle norme matricielle toute norme $\|\ \| : \mathcal{M}_n(\mathbb{K}) \to \mathbb{R}_+$ telle que : pour toutes $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, $\|AB\| \leqslant \|A\|\|B\|$ (la norme est dite multiplicative).*
Étant donnée une norme vectorielle sur $\mathbb{K}^n$, l'application :

$$|\!|\!|\ |\!|\!| : \mathcal{M}_n(\mathbb{K}) \to \mathbb{R}_+,\ A \to \sup_{v \in \mathbb{K}^n, v \neq 0} \frac{\|Av\|}{\|v\|} = \sup_{v \in \mathbb{K}^n, \|v\| \leqslant 1} \frac{\|Av\|}{\|v\|} = \sup_{v \in \mathbb{K}^n, \|v\| = 1} \|Av\|$$

est appelée norme matricielle subordonnée à la norme vectorielle $\|\ \|$.

Remarque 9.2. On a $\{v \in \mathbb{K}^n\ ;\ \|v\| = 1\} \subset \{v \in \mathbb{K}^n\ ;\ \|v\| \leqslant 1\} \subset \{v \in \mathbb{K}^n\ ;\ \|v\| \neq 0\}$, donc, *a priori*,

$$\sup_{v \in \mathbb{K}^n, v \neq 0} \frac{\|Av\|}{\|v\|} \geqslant \sup_{v \in \mathbb{K}^n, \|v\| \leqslant 1} \frac{\|Av\|}{\|v\|} \geqslant \sup_{v \in \mathbb{K}^n, \|v\| = 1} \|Av\|,$$

mais, si $v \neq 0$, $\dfrac{v}{\|v\|} \in \{v' \in \mathbb{K}^n \; ; \; \|v'\| = 1\}$ donc $\left\|A\left(\dfrac{v}{\|v\|}\right)\right\| \leqslant \sup_{v' \in \mathbb{K}^n, \|v'\|=1} \|Av'\|$, avec $A\left(\dfrac{v}{\|v\|}\right) = \dfrac{1}{\|v\|}\|Av\|$, c'est-à-dire $\dfrac{\|Av\|}{\|v\|} \leqslant \sup_{v' \in \mathbb{K}^n, \|v'\|=1} \|Av'\|$, d'où les inégalités inverses dans la définition.

Il résulte immédiatement de cette définition, la proposition suivante :

Proposition 9.2. Si $|\!|\!|\ |\!|\!|$ est une norme matricielle subordonnée, alors,

$$\text{pour toute } A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K}), \text{ pour tout } v \in \mathbb{K}^n, \ \|Av\| \leqslant |\!|\!|A|\!|\!|\, \|v\|.$$

[Plus généralement, une norme matricielle N_M et une norme vectorielle N_V sont dites *compatibles* si pour toute $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ et pour tout $v \in \mathbb{K}^n$, $N_V(Av) \leqslant N_M(A)N_V(v)$.]

Théorème 9.6. Soit $A = (a_{ij}) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. Alors

a) $|\!|\!|A|\!|\!|_1 = \sup \dfrac{\|Av\|_1}{\|v\|_1} = \max_{1 \leqslant j \leqslant n} \displaystyle\sum_{i=1}^{n} |a_{ij}|$

b) $|\!|\!|A|\!|\!|_2 = \sup \dfrac{\|Av\|_2}{\|v\|_2} = \sqrt{\rho(A^*A)} = |\!|\!|A^*|\!|\!|_2$.

$|\!|\!|\ |\!|\!|_2$ est invariante par transformation unitaire ; si A est normale, $|\!|\!|A|\!|\!|_2 = \rho(A)$.

c) $|\!|\!|A|\!|\!|_\infty = \sup \dfrac{\|Av\|_\infty}{\|v\|_\infty} = \max_{1 \leqslant i \leqslant n} \displaystyle\sum_{j=1}^{n} |a_{ij}|$.

Démonstration. Pour tout vecteur v,

$$\|Av\|_1 = \sum_i \left|\sum_j a_{ij} v_j\right| \leqslant \sum_j |v_j| \sum_i |a_{ij}| \leqslant \left(\max_j \sum_i |a_{ij}|\right) \|v\|_1.$$

Pour montrer que le nombre $\max_j \sum_i |a_{ij}|$ est effectivement le plus petit nombre α pour lequel l'inégalité $\|Av\|_1 \leqslant \alpha \|v\|_1$ a lieu pour tout vecteur v, construisons un vecteur u (qui, bien entendu, dépend de la matrice A), tel que l'on ait l'égalité

$$\|Au\|_1 = \left(\max_j \sum_i |a_{ij}|\right) \|u\|_1.$$

Il suffit de considérer le vecteur u de composantes

$$u_i = 0 \text{ pour } i \neq j_0, \quad u_{j_0} = 1,$$

où j_0 est un indice vérifiant

$$\max_j \sum_i |a_{ij}| = \sum_i |a_{ij_0}|.$$

De la même façon,

$$\|Av\|_\infty = \max_i \left|\sum_j a_{ij} v_j\right| \leqslant \left(\max_i \sum_j |a_{ij}|\right) \|v\|_\infty.$$

Soit i_0 un indice vérifiant
$$\max_i \sum_j |a_{ij}| = \sum_j |a_{i_0 j}|.$$
Le vecteur u de composantes
$$u_j = \frac{\overline{a_{i_0,j}}}{|a_{i_0,j}|} \quad \text{si } a_{i_0,j} \neq 0, \quad u_j = 1 \ \text{ si } a_{i_0,j} = 0,$$
vérifie
$$\|Au\|_\infty = \left(\max_i \sum_j |a_{ij}| \right) \|u\|_\infty,$$
ce qui règle le cas de la norme $\| \ \|_\infty$.

Puisque
$$|||A|||_2^2 = \sup \frac{v^* A^* A v}{v^* v} = \sup R_{A^*A}(v),$$
le théorème 9.5 permet d'affirmer que la borne supérieure du quotient de Rayleigh de la matrice hermitienne A^*A est la plus grande valeur propre de cette matrice, qui se trouve être aussi son rayon spectral puisqu'elle est positive.

Montrons ensuite que $\rho(A^*A) = \rho(AA^*)$. Si $\rho(A^*A) > 0$, il existe un vecteur v tel que
$$v \neq 0, \text{ et } A^*Av = \rho(A^*A)v,$$
et on a $Av \neq 0$ car $\rho(A^*A) > 0$. Comme alors
$$Av \neq 0, \text{ et } AA^*(Av) = \rho(A^*A)Av,$$
il s'ensuit que
$$0 < \rho(A^*A) \leqslant \rho(AA^*),$$
et donc $\rho(AA^*) = \rho(A^*A)$ puisque $(A^*)^* = A$. Si $\rho(A^*A) = 0$, on a aussi $\rho(AA^*) = 0$, sans quoi le raisonnement précédent montrerait que $\rho(A^*A) > 0$. On a donc, dans tous les cas,
$$|||A|||_2^2 = \rho(A^*A) = \rho(A^*A) = |||A^*|||_2^2.$$
L'invariance de la norme $||| \ |||_2$ par transformation unitaire n'est que la traduction des égalités
$$\rho(A^*A) = \rho(U^*A^*AU) = \rho(A^*UU^*A) = \rho(U^*A^*UU^*AU).$$
Enfin, si la matrice A est normale, il existe une matrice unitaire U telle que
$$U^*AU = \operatorname{diag}(\lambda_i(A)) = D.$$
Dans ces conditions,
$$A^*A = (UDU^*)^*UDU^* = UD^*DU^*,$$
ce qui montre que
$$\rho(A^*A) = \rho(D^*D) = \max_i |\lambda_i(A)|^2 = (\rho(A))^2.$$
□

Théorème 9.7. i) Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ et $\| \ \|$ une norme matricielle. Alors $\rho(A) \leqslant \|A\|$.
ii) Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ et $\varepsilon > 0$. Il existe une norme matricielle subordonnée $||| \ |||$ telle que
$$\rho(A) \leqslant |||A||| \leqslant \rho(A) + \varepsilon.$$

Démonstration. i) Soit $u \neq 0$ tel que $Au = \lambda u$ avec $|\lambda| = \rho(A)$.
Soit v tel que $u\,{}^t v \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K}) \setminus \{0\}$.
On a, d'une part,

$$\|A(u\,{}^t v)\| \leqslant \|A\|\,\|u\,{}^t v\| \tag{1}$$

D'autre part,

$$\rho(A)\|u\,{}^t v\| = |\lambda|\,\|u\,{}^t v\| = \|\overline{\lambda} u\,{}^t v\| = \|(Au)\,{}^t v\|. \tag{2}$$

En combinant (1) et (2), on a alors $\rho(A)\|u\,{}^t v\| \leqslant \|A\|\,\|u\,{}^t v\|$ et comme $\|u\,{}^t v\| \neq 0$, $\rho(A) \leqslant \|A\|$.

ii) D'après la section 1, on sait qu'il existe une matrice U telle que $U^{-1}AU$ soit triangulaire, supérieure par exemple :

$$U^{-1}AU = \begin{pmatrix} \lambda_1 & t_{12} & t_{13} & \cdots & t_{1,n} \\ & \lambda_2 & t_{23} & \cdots & t_{2,n} \\ & & \ddots & & \vdots \\ & & & \lambda_{n-1} & t_{n-1,n} \\ & & & & \lambda_n \end{pmatrix},$$

les scalaires λ_i étant les valeurs propres de la matrice A. À tout scalaire $\delta \neq 0$, associons la matrice

$$D_\delta = \mathrm{diag}(1, \delta, \delta^2, \cdots, \delta^{n-1}),$$

de sorte que

$$(UD_\delta)^{-1}A(UD_\delta) = \begin{pmatrix} \lambda_1 & \delta t_{12} & \delta^2 t_{13} & \cdots & \delta^{n-1} t_{1,n} \\ & \lambda_2 & \delta t_{23} & \cdots & \delta^{n-2} t_{2,n} \\ & & \ddots & & \vdots \\ & & & \lambda_{n-1} & \delta t_{n-1,n} \\ & & & & \lambda_n \end{pmatrix}.$$

Étant donné $\varepsilon > 0$, fixons le nombre δ de telle façon que

$$\sum_{j=i+1}^{n} |\delta^{j-i} t_{i,j}| \leqslant \varepsilon, \quad 1 \leqslant i \leqslant n-1.$$

Alors l'application

$$\|\ \| : B \to \|B\| = \|\!|(UD_\delta)^{-1}B(UD_\delta)\|\!|_\infty,$$

qui, naturellement, dépend de la matrice A et du nombre ε, répond à la question. En effet, on a, d'une part,

$$\|A\| \leqslant \rho(A) + \varepsilon,$$

d'après le choix de δ et de la définition de la norme matricielle $\|\!|\ \|\!|_\infty$ ($\|\!|(c_{i,j})\|\!|_\infty = \max_i \sum_j |c_{ij}|$), et, d'autre part, c'est bien une norme matricielle ; on vérifie en effet que c'est la norme matricielle subordonnée à la norme vectorielle

$$v \in \mathbb{K}^n \mapsto \|(UD_\delta)^{-1}v\|_\infty.$$

□

Théorème 9.8. L'application $\|\ \|_E : \mathcal{M}_n(\mathbb{K}) \to \mathbb{R}_+$, $A = (a_{ij}) \mapsto \sqrt{\mathrm{Tr}(A^*A)} = \sqrt{\sum_{1\leqslant i,j\leqslant n} |a_{i,j}|^2}$ est une norme matricielle non subordonnée invariante par transformation unitaire et appelée <u>*norme de Frobenius*</u>. Elle vérifie :

$$\text{pour tout } A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K}),\ \|\!|A\|\!|_2 \leqslant \|A\|_E \leqslant \sqrt{n}\|\!|A\|\!|_2.$$

Démonstration. 1) • $\|A\|_E = 0$ si et seulement si $\displaystyle\sum_{1\leqslant i,j\leqslant n} |a_{ij}|^2 = 0$, c'est-à-dire $a_{ij} = 0$ pour tous i, j.

• $\|\lambda A\|_E = \left(\displaystyle\sum_{1\leqslant i,j\leqslant n} |\lambda a_{ij}|^2\right)^{1/2} = \left(\displaystyle\sum_{1\leqslant i,j\leqslant n} |\lambda|^2|a_{ij}|^2\right)^{1/2} = |\lambda| \left(\displaystyle\sum_{1\leqslant i,j\leqslant n} |a_{ij}|^2\right)^{1/2} = |\lambda|\,\|A\|_E$

•

$$\begin{aligned}
\|A+B\| &\leqslant \left(\sum_{1\leqslant i,j\leqslant n} |a_{ij}+b_{ij}|^2\right)^{1/2} \leqslant \left(\sum_{1\leqslant i,j\leqslant n} (|a_{ij}|+|b_{ij}|)^2\right)^{1/2} \\
&\leqslant \left(\sum_{1\leqslant i,j\leqslant n} |a_{ij}|^2\right)^{1/2} + \left(\sum_{1\leqslant i,j\leqslant n} |b_{ij}|^2\right)^{1/2} \quad \text{par Cauchy-Schwarz} \\
&= \|A\|_E + \|B\|_E
\end{aligned}$$

•

$$\begin{aligned}
\|AB\|_E &= \left(\sum_{i,j} \left|\sum_{k=1}^{n} a_{ik}b_{kj}\right|^2\right)^{1/2} \\
&\leqslant \left(\sum_{i,i',j,j'} |a_{ij}|^2|b_{i'j'}|^2\right)^{1/2} = \left(\sum_{i,j} |a_{ij}|^2\right)^{1/2} \left(\sum_{i,j} |b_{ij}|^2\right)^{1/2} \\
&= \|A\|_E\,\|B\|_E
\end{aligned}$$

donc $\|\ \|_E$ est bien une norme matricielle.

<u>$\|\ \|_E$ n'est pas une norme subordonnée</u> car toute norme subordonnée vérifie $\|I\| = \sup\limits_{\|u\|=1} \|Iu\| = 1$ alors qu'ici $\|I\|_E = n$.

2) Montrons que, pour tout $u \in \mathbb{K}^n$, $\|Au\|_2 \leqslant \|A\|_E\,\|u\|_2$.

$\|Au\|_2 = \left(\displaystyle\sum_{i=1}^{n}\left(\sum_{k=1}^{n} a_{ik}u_k\right)^2\right)^{1/2} \leqslant \left(\displaystyle\sum_{i=1}^{n}\left[\left(\sum_{k=1}^{n}|a_{ik}|^2\right)\left(\sum_{k=1}^{n}|u_k|^2\right)\right]\right)^{1/2}$ par Cauchy-Schwarz.

Or $\left(\displaystyle\sum_{i=1}^{n}\left[\left(\sum_{k=1}^{n}|a_{ik}|^2\right)\left(\sum_{k=1}^{n}|u_k|^2\right)\right]\right)^{1/2} = \left(\displaystyle\sum_{k=1}^{n}|u_k|^2\right)^{1/2} \times \left(\displaystyle\sum_{1\leqslant i,j\leqslant n}|a_{ij}|^2\right)^{1/2} = \|u\|_2\|A\|_E$.

Ainsi, $|\!|\!|A|\!|\!|_2 = \sup\limits_{\|u\|_2=1} \dfrac{\|Au\|_2}{\|u\|_2} \leqslant \|A\|_E$.

Si $\lambda_1, \cdots, \lambda_n$ sont les valeurs propres de A^*A, alors, pour tout i, $\lambda_i \leqslant \rho(A^*A)$ et

$$\sum_{i=1}^{n} \lambda_i = \mathrm{Tr}(A^*A) = \|A\|_E^2 \leqslant n\rho(A^*A) = n|\!|\!|A|\!|\!|_2^2$$

donc $\|A\|_E \leqslant \sqrt{n}|\!|\!|A|\!|\!|_2$. □

Remarque 9.3. Si U une matrice unitaire, $\|UA\|_E = \sqrt{\mathrm{Tr}(A^*U^*UA)} = \sqrt{\mathrm{Tr}(A^*A)} = \|A\|_E$.

Théorème 9.9. a) Soit $\|\ \|$ une norme matricielle et $B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ telle que $\|B\| < 1$. Alors $I + B$ est inversible et $\|(I+B)^{-1}\| \leqslant \dfrac{1}{1-\|B\|}$.
b) Si une matrice de la forme $I + B$ est <u>*singulière*</u> (non inversible), alors $\|B\| \geqslant 1$ pour toute norme matricielle $\|\ \|$.

Démonstration. a) Posons $A = -B$, $\|A\| = \|B\| < 1$.

Par récurrence sur n et parce que la norme $\| \ \|$ est matricielle, on a : $\|A^k\| \leqslant \|A\|^k$.

Or, comme $\|A\| < 1$, $\sum_{k\geqslant 0} \|A\|^k$ converge et $\sum_{k\geqslant 0} A^k$ est normalement convergente. On pose $C = \sum_{k\geqslant 0} A^k$.

On a, pour tout $N \geqslant 0$, $I - A^N = (I - A)\sum_{k=0}^{N} A^k$. En faisant $N \to +\infty$, on obtient $I = (I - A)C$ donc $(I - A) = I + B$ est inversible, d'inverse C.

$$\|C\| \leqslant \sum_{k\geqslant 0} \| - B\|^k = \frac{1}{1 - \|B\|}.$$

b) Si $(I + B)$ n'est pas inversible, alors $\|B\| \geqslant 1$ (c'est la contraposée de du a)). □

9.3.3 Suites de vecteurs et de matrices

Théorème 9.10. Soit $B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. Les conditions suivantes sont équivalentes :

$$\lim_{k\to+\infty} B^k = 0 \tag{1}$$

$$\lim_{k\to+\infty} B^k v = 0 \text{ pour tout } v \in \mathbb{K}^n \tag{2}$$

$$\rho(B) < 1 \tag{3}$$

$$\|B\| < 1 \text{ pour au moins une norme matricielle} \tag{4}$$

Démonstration. • Montrons que (1) implique (2).

Soit $\| \ \|$ une norme vectorielle et $\||\ \||$ la norme matricielle subordonnée. Alors

$$\text{pour tout } v \in \mathbb{K}^n,\ \|B^k v\| \leqslant \||B^k\|| \, \|v\| \text{ avec } \lim_{k\to+\infty} \||B^k\|| = 0.$$

Ainsi, $\lim_{k\to+\infty} \|B^k v\| = 0$ et donc $\lim_{k\to+\infty} B^k v = 0$.

• Montrons que (2) implique (3).

Supposons, par contraposée, que $\rho(B) \geqslant 1$. Alors, il existe $\lambda \in \mathbb{K}$, $|\lambda| \geqslant 1$ et $u \in \mathbb{K}^n$, $u \neq 0$ tel que $Bu = \lambda u$.

Par récurrence sur $k \geqslant 1$, on montre que

$$B^k u = B^{k-1}(Bu) = \lambda B^{k-1} u = \cdots = \lambda^k u$$

donc $\|B^k u\| = |\lambda|^k \|u\|$ pour toute norme vectorielle $\| \ \|$. Or, $\lim_{k\to+\infty} |\lambda|^k = +\infty$ ou 1, donc $\lim_{k\to+\infty} B^k u \neq 0$.

• Montrons que (3) implique (4).

Comme $\rho(B) < 1$, $1 - \rho(B) > 0$. Posons $\varepsilon = \dfrac{1 - \rho(B)}{2}$. Par le théorème 9.7 ii), il existe une norme matricielle subordonnée telle que $\|B\| \leqslant \rho(B) + \varepsilon = \dfrac{1 + \rho(B)}{2} < 1$.

• Montrons que (4) implique (1).

Par récurrence sur k, on voit que, pour tout $k \geqslant 1$,

$$\|B^k\| \leqslant \|B\| \, \|B^{k-1}\| \leqslant \cdots \leqslant \|B\|^k$$

donc, puisque $\|B\| < 1$, $\lim_{k\to+\infty} \|B^k\| = 0$, ce qui prouve que $\lim_{k\to+\infty} B^k = 0$.

□

Théorème 9.11. Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ et $\| \ \|$ une norme matricielle. Alors $\lim_{k\to+\infty} \|A^k\|^{1/k} = \rho(A)$.

Démonstration. • Soit $\| \ \|_\varepsilon$ une norme matricielle telle que

$$\|A\|_\varepsilon \leqslant \rho(A) + \frac{\varepsilon}{2}.$$

Alors, si $A_\varepsilon = \dfrac{1}{\rho(A)+\varepsilon}A$, $\|A_\varepsilon\|_\varepsilon = \dfrac{1}{\rho(A)+\varepsilon}\|A\|_\varepsilon \leqslant \dfrac{\rho(A)+\frac{\varepsilon}{2}}{\rho(A)+\varepsilon} < 1$.

On a donc $\lim_{n\to+\infty} A_\varepsilon^n = 0$ et $\lim_{n\to+\infty} \|A_\varepsilon^n\| = 0$.

• Soit $\lambda \in \mathrm{Sp}(A)$ telle que $|\lambda| = \rho(A)$ et $u \in \mathbb{K}^n \setminus \{0\}$ tel que $Au = \lambda u$.

On a, pour $p \geqslant 1$, $A^p u = A^{p-1}Au = \lambda A^{p-1}u$ et on montre par récurrence que $A^p u = \lambda^p u$, donc λ^p est valeur propre de A^p. On a donc $|\lambda^p| \leqslant \rho(A^p)$. Or $|\lambda^p| = |\lambda|^p = \rho(A)^p$ et donc $\rho(A)^p \leqslant \rho(A^p)$ puis $\rho(A) \leqslant (\rho(A^p))^{1/p} \leqslant \|A^p\|^{1/p}$ d'après le théorème 9.7 i).

• $\|A_\varepsilon^p\| = \dfrac{\|A^p\|}{(\rho(A)+\varepsilon)^p} \underset{p\to+\infty}{\longrightarrow} 0$ donc il existe p_0 tel que, pour tout $p \geqslant p_0$, $\|A^p\| \leqslant \varepsilon(\rho(A)+\varepsilon)^p$. On a alors

$$\|A^p\|^p \leqslant \varepsilon^{1/p}(\rho(A)+\varepsilon)$$

avec $\varepsilon^{1/p}(\rho(A)+\varepsilon) \underset{p\to+\infty}{\longrightarrow} (\rho(A)+\varepsilon)$ donc il existe p_1 tel que, pour tout $p \geqslant p_1$, $\|A^p\|^{1/p} \leqslant \rho(A) + 2\varepsilon$.

On a donc, pour $p \geqslant p_1$, $\rho(A) \leqslant \|A^p\|^{1/p} \leqslant \rho(A) + 2\varepsilon$ et $\lim_{p\to+\infty} \|A^p\|^{1/p} = \rho(A)$. □

Remarque 9.4. Si A est symétrique, on a $\|A\|_E = \rho(A)$. En effet, A est alors diagonalisable dans une base orthonormée, soit $A = {}^t\!O\,D\,O$ avec O orthogonale et $D = \mathrm{diag}(\lambda_1, \cdots, \lambda_n)$. $\mathrm{Sp}(A) = \{\lambda_1, \cdots, \lambda_n\}$ où l'on suppose $|\lambda_1| \geqslant \cdots \geqslant |\lambda_n|$.

$A^2 = {}^t\!ODO\,{}^t\!ODO = {}^t\!O\,D^2O$ où $D^2 = \mathrm{diag}(\lambda_1^2, \cdots, \lambda_n^2)$, qui prouve que $\mathrm{Sp}(A^2) = \{\lambda_1^2, \cdots, \lambda_n^2\}$.

On a alors $\rho(A^2) = |\lambda_1^2| = |\lambda_1|^2 = \rho(A)^2$ (car $|\lambda_1|^2 \geqslant \cdots \geqslant |\lambda_n|^2$).

Or $\|A\| = \sqrt{\rho({}^t\!AA)} = \sqrt{\rho(A^2)}$ car A est symétrique, soit $\|A\| = \sqrt{\rho(A)^2} = \rho(A)$.

Chapitre 10

Méthodes itératives de résolution de systèmes linéaires

10.1 Introduction

Principe : Soit un système linéaire $Ax = b$ avec $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, $\det A \neq 0$ et $b \in \mathbb{K}^n$. Une méthode itérative se présente sous la forme

$$u_0 \in \mathbb{K}^n \text{ et pour tout } k \geqslant 0,\ u_{k+1} = Bu_k + c \qquad (*)$$

avec $B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ dite *matrice d'itération*, construite à partir de A, et $c \in \mathbb{K}^n$ est construit à partir de A et b.

Définition 10.1. *La méthode itérative* $(*)$ $(u_0,\ u_{k+1} = Bu_k + c)$ *est dite convergente si*

$$\text{pour tout } u_0 \in \mathbb{K}^n,\ \lim_{k \to +\infty} u_k = x^*$$

où x^* *est la solution de* $Ax = b$.

Remarque 10.1. En passant à la limite dans $u_{k+1} = Bu_k + c$, on a alors $x^* = Bx^* + c$.

Il reste alors à construire B et c tels que la méthode converge. Pour cela, on va supposer que $A = M - N$ avec M facile à inverser (diagonale ou triangulaire). Alors

$$Ax = b \text{ si et seulement si } (M - N)x = b, \text{ soit } x = M^{-1}Nx + M^{-1}b$$

et on va s'intéresser à la méthode itérative telle que $\boxed{B = M^{-1}N = I - M^{-1}A}$ et $\boxed{c = M^{-1}b}$.

Pratiquement, on résoudra les systèmes linéaires successifs :

$$\text{pour tout } k,\ Mu_{k+1} = Nu_k + b.$$

10.2 Convergence des méthodes itératives

10.2.1 Critères de convergence

On commence par énoncer un critère très général.

Théorème 10.1. Les propositions suivantes sont équivalentes :
i) La méthode itérative $(*)$ est convergente vers x^* tel que $x^* = Bx^* + c$;
ii) $\rho(B) < 1$;
iii) $\|B\| < 1$ pour au moins une norme matricielle $\| \ \|$.

Démonstration. Par définition, la méthode itérative $(*)$ est convergente vers x^* si et seulement si il existe une suite (u_k) qui converge vers x^*. Alors x^* vérifie

$$x^* = Bx^* + c.$$

On note $\varepsilon_k = u_k - x^*$ la <u>*variable d'écart*</u> ou erreur à l'étape k. La convergence de (u_k) vers x^* équivaut à celle de (ε_k) vers 0.

En faisant la différence membre à membre de l'équation d'itération $u_{k+1} = Bu_k + c$ avec l'équation $x^* = Bx^* + c$, on obtient la relation :

$$u_{k+1} - x^* = B(u_k - x^*)$$

c'est-à-dire $\varepsilon_{k+1} = B\varepsilon_k$. On en déduit par récurrence que $\varepsilon_k = B^k \varepsilon_0$.

La proposition résulte alors directement du théorème 9.10.

□

On donne ensuite un second critère, dans un cas plus particulier.

Théorème 10.2. Soit A une matrice hermitienne définie positive, décomposée sous la forme $A = M - N$ avec M inversible. Si $M^* + N$ est définie positive, alors $\rho(M^{-1}N) < 1$.

Démonstration. Soit la norme vectorielle $\| \ \| : u \in \mathbb{K}^n \mapsto \sqrt{u^*Au}$ (qui est une norme car A est hermitienne définie positive) et $||| \ |||$ la norme matricielle subordonnée.

On a $M^* + N$ hermitienne car $M^* + N = A^* + N^* + N = A + N + N^* = M + N^*$.

Or, $|||M^{-1}N||| = |||I - M^{-1}A||| = \sup\limits_{\|u\|=1} \|u - M^{-1}Au\|$.

Mais $\|u - M^{-1}Au\| = \|u - w\|$ avec $w = M^{-1}Au$ si et seulement si $u = A^{-1}Mw$, si et seulement si $u^* = w^*M^*A^{-1}$ ($w \neq 0$ si $u \neq 0$) . D'où

$$\begin{aligned} \|u - M^{-1}Au\|^2 &= (u - w)^*A(u - w) \\ &= u^*Au - w^*Au - u^*Aw + w^*Aw \\ &= 1 - w^*Mw - w^*M^*w + w^*Aw \\ &= 1 - w^*(M^* + M - A)w = 1 - w^*(M^* + N)w \end{aligned}$$

avec $w^*(M^* + N)w > 0$ car $M^* + N$ est hermitienne définie positive. Donc $\|u - M^{-1}Au\| < 1$.

Or, sur le compact $\mathcal{S}(0, 1)$, $u \mapsto \|u - M^{-1}Au\|$ est continue et atteint donc ses bornes : il existe u_0 tel que $\|u_0\| = 1$ et $|||I - M^{-1}A||| = \|u_0 - M^{-1}Au_0\| < 1$.

□

10.2.2 Comparaison des méthodes itératives

On rappelle que si ε_k est le risque d'erreur à l'étape k, on a $\varepsilon_k = B^k \varepsilon_0$, c'est-à-dire que B^k est responsable de la réduction de l'erreur lorsque la méthode converge. Le nombre $\|B^k\|$ est parfois appelé <u>*facteur de réduction de l'erreur*</u>, pour k itérations. Le taux moyen de réduction de l'erreur est défini par $\|B^k\|^{1/k}$.

Par conséquent, lorsque l'on compare deux méthodes itératives, correspondant à deux matrices B et $\tilde{B}$, on est tenté de comparer $\|B^k\|^{1/k}$ à $\|\tilde{B}^k\|^{1/k}$. Mais ces nombres dépendent de la norme choisie et de k. Par contre, comme k est souvent grand, on peut considérer $\lim\limits_{k\to+\infty} \|B^k\|^{1/k}$ qui est le taux asymptotique de réduction de l'erreur par itération et qui vaut $\rho(B)$ d'après le théorème 9.11.

Ainsi, on dira que la méthode itérative associée à la matrice d'itération B converge plus vite que la méthode associée à $\tilde{B}$ si $\rho(B) < \rho(\tilde{B})$.

Plus techniquement, on a le résultat suivant :

Théorème 10.3. • Soit $\| \ \|$ une norme vectorielle et soit $x^* \in \mathbb{K}^n$ tel que $x^* = Bx^* + c$. Soit la méthode itérative $(*)$. Alors

$$\lim_{k\to+\infty} \left(\sup_{\|u_0-x^*\|=1} \|u_k - x^*\|^{1/k} \right) = \rho(B)$$

• Soit $\| \ \|$ une norme vectorielle et soit $x^* \in \mathbb{K}^n$ tel que $x^* = Bx^* + c = \tilde{B}x^* + \tilde{c}$. Soit les méthodes itératives $(*)$ et

$$\tilde{u}_0 = u_0 \in \mathbb{K}^n \text{ et } \tilde{u}_{k+1} = \tilde{B}\tilde{u}_k + \tilde{c} \text{ pour tout } k \geqslant 0. \tag{$**$}$$

Alors, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $k_\varepsilon > 0$ tel que,

$$\text{si } k \geqslant k_\varepsilon, \text{ alors } \sup_{\|u_0-x^*\|=1} \left(\frac{\|\tilde{u}_k - x^*\|}{\|u_k - x^*\|} \right)^{1/k} \geqslant \frac{\rho(\tilde{B})}{\rho(B)+\varepsilon}.$$

Démonstration. •

$$\sup_{\|u_0-x^*\|=1} \|u_k - x^*\|^{1/k} = \sup_{\|u_0-x^*\|=1} \|B^k(u_0 - x^*)\|^{1/k} = \|\!|B^k|\!\|^{1/k} \to \rho(B)$$

d'après le théorème 9.11.

•

$$\begin{aligned}
\sup_{\|u_0-x^*\|=1} \left(\frac{\|\tilde{u}_k - x^*\|}{\|u_k - x^*\|} \right)^{1/k} &= \sup_{\|u_0-x^*\|=1} \left(\frac{\|\tilde{B}^k(u_0 - x^*)\|}{\|B^k(u_0 - x^*)\|} \right)^{1/k} \\
&\geqslant \sup_{\|u_0-x^*\|=1} \frac{1}{\rho(B)} \|\tilde{B}^k(u_0 - x^*)\|^{1/k} = \frac{1}{\rho(B)} \|\!|\tilde{B}^k|\!\|^{1/k} \to \frac{\rho(\tilde{B})}{\rho(B)}
\end{aligned}$$

Soit $\varepsilon > 0$ et $\varepsilon' = \varepsilon \dfrac{\rho(\tilde{B})}{\rho(B)(\rho(B)+\varepsilon)} > 0$. Il existe k_ε tel que, si $k \geqslant k_\varepsilon$, alors

$$\sup_{\|u_0-x^*\|=1} \left(\frac{\|\tilde{u}_k - x^*\|}{\|u_k - x^*\|} \right)^{1/k} \geqslant \frac{\rho(\tilde{B})}{\rho(B)} - \varepsilon' = \frac{\rho(\tilde{B})}{\rho(B)} \left(1 - \varepsilon \frac{1}{\rho(B)+\varepsilon} \right) = \frac{\rho(\tilde{B})}{\rho(B)} \times \frac{\rho(B)}{\rho(B)+\varepsilon} = \frac{\rho(\tilde{B})}{\rho(B)+\varepsilon}$$

□

10.3 Quelques méthodes itératives particulières

10.3.1 Méthode de Jacobi

$A = D - E - F$ avec $D = \mathrm{diag}(a_{kk})$ et $a_{kk} \neq 0$ pour $1 \leqslant k \leqslant n$, $E = -\begin{pmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 \\ a_{21} & 0 & & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ a_{n,1} & \cdots & a_{n,n-1} & 0 \end{pmatrix}$ (triangulaire inférieure) et $F = -\begin{pmatrix} 0 & a_{12} & \cdots & a_{1,n} \\ 0 & 0 & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & a_{n-1,n} \\ 0 & \cdots & 0 & 0 \end{pmatrix}$ (triangulaire supérieure), qui est la décomposition par points de la matrice A.

Définition 10.2. *On appelle* <u>*méthode itérative de Jacobi par points*</u> *la méthode itérative :*

$$u_0 \in I\!K^n \text{ et } u_{k+1} = D^{-1}(E+F)u_k + D^{-1}b$$

$J = D^{-1}(E+F) = I - D^{-1}A$ *est appelée* <u>*matrice de Jacobi par points*</u>.

En posant $u_k = (u_1^k, \cdots, u_n^k)$, on est conduit à résoudre $Du_{k+1} = (D-A)u_k + b$, c'est-à-dire

$$\begin{cases} a_{11}u_1^{k+1} = -a_{12}u_2^k - a_{13}u_3^k \cdots - a_{1,n}u_n^k + b_1 \\ a_{22}u_2^{k+1} = -a_{21}u_1^k - a_{23}u_3^k \cdots - a_{2,n}u_n^k + b_2 \\ \vdots \\ a_{nn}u_n^{k+1} = -a_{n,1}u_1^k - a_{n,2}u_2^k \cdots - a_{n,n-1}u_{n-1}^k + b_n \end{cases}$$

10.3.2 Méthode de Gauss-Seidel

On peut améliorer la méthode précédente en utilisant les quantités déjà calculées :

$$\begin{cases} a_{11}u_1^{k+1} = -a_{12}u_2^k - a_{13}u_3^k \cdots - a_{1,n}u_n^k + b_1 \\ a_{22}u_2^{k+1} = -a_{21}\underline{u_1^{k+1}} - a_{23}u_3^k \cdots - a_{2,n}u_n^k + b_2 \\ \vdots \\ a_{nn}u_n^{k+1} = -a_{n,1}\underline{u_1^{k+1}} - a_{n,2}\underline{u_2^{k+1}} \cdots - a_{n,n-1}\underline{u_{n-1}^{k+1}} + b_n \end{cases}$$

ce qui s'écrit aussi $Du_{k+1} = Eu_{k+1} + Fu_k + b$, soit $u_{k+1} = (D-E)^{-1}Fu_k + (D-E)^{-1}b$ pour tout $k \geqslant 0$. ($D - E$ est inversible car $a_{kk} \neq 0$ pour tout k).

Définition 10.3. *On appelle* <u>*méthode itérative de Gauss-Seidel par points*</u> *la méthode :*

$$u_0 \in I\!K^n \text{ et, pour tout } k \geqslant 0,\ u_{k+1} = (D-E)^{-1}Fu_k + (D-E)^{-1}b.$$

La matrice $G = (D-E)^{-1}F$ *est appelée* <u>*matrice de Gauss-Seidel par points*</u>.

10.3.3 Méthode de relaxation

L'idée est de dire que u_{k+1} est une combinaison barycentrique de u_k, valeur à l'itération précédente, et de $\tilde{u}_{k+1}$, calculé par la méthode de Gauss-Seidel.

Définition 10.4. *On appelle méthode itérative de relaxation par points la méthode définie pour $w \neq 0$ par :*

$$u_0 \in \mathbb{K}^n \text{ et, pour tout } k \geqslant 0,\ u_{k+1} = \left(\frac{D}{w} - E\right)^{-1}\left(\frac{1-w}{w}D + F\right)u_k + \left(\frac{D}{w} - E\right)^{-1} b.$$

La matrice $R_w = \left(\frac{D}{w} - E\right)^{-1}\left(\frac{1-w}{w}D + F\right)$ est appelée matrice de relaxation par points.

Remarques :
- Pour $w = 1$, $R_w = G$.
- Comme $a_{kk} \neq 0$ pour tout k, $\left(\frac{D}{w} - E\right)$ est inversible.

Lorsque $w > 1$, on parle de *sur-relaxation*
Lorsque $w < 1$, on parle de *sous-relaxation*.

De manière pratique, la méthode de relaxation correspond à :

$$Du_{k+1} = (1-w)Du_k + wEu_{k+1} + wFu_k + wb$$

$$\begin{cases} a_{11}u_1^{k+1} = a_{11}u_1^k - w(a_{11}u_1^k + a_{12}u_2^k + \cdots + a_{1,n}u_n^k) + wb_1 \\ a_{22}u_2^{k+1} = a_{22}u_2^k - w(a_{21}u_1^{k+1} + a_{22}u_2^k + \cdots + a_{2,n}u_n^k) + wb_2 \\ \vdots \\ a_{nn}u_n^{k+1} = a_{nn}u_n^k - w(a_{n,1}u_1^{k+1} + a_{n,2}u_2^{k+1} + \cdots + a_{nn}u_n^k) + wb_n \end{cases}$$

Le problème principal sera de déterminer w_0 tel que $w_0 = \operatorname*{argmin}_{w \in \mathbb{R}^*} \rho(R_w)$, afin d'optimiser la convergence (si $\rho(R_w) < 1$).

Le théorème suivant fournit une condition suffisante de convergence de la méthode par relaxation.

Théorème 10.4. (Ostrowski-Reich)
Si la matrice A est hermitienne définie positive, la méthode de relaxation converge pour $w \in]0, 2[$.

Démonstration. $A = M - N = \left(\frac{D}{w} - E\right) - \left(\frac{1-w}{w}D + F\right)$. On pose $M = \frac{D}{w} - E$ et $N = \frac{1-w}{w}D + F$.

Alors $M^* + N = \frac{D}{w} - E^* + \frac{1-w}{w}D + F = \frac{2-w}{w}D - E^* + F$.

Or, comme A est hermitienne, $E^* = F$ donc $M^* + N = \frac{2-w}{w}D$.

Puisque A est hermitienne, ${}^t e_k A e_k = a_{kk} > 0$ implique que $D = \operatorname{diag}(a_{11}, \cdots, a_{nn})$ est définie positive donc $M^* + N$ est définie positive si et seulement si $w \in]0, 2[$.

Le théorème 10.2 permet de conclure. $\square$

Enfin, le dernier théorème fournit une condition nécessaire de convergence de la méthode par relaxation.

Théorème 10.5. • Le rayon spectral de la matrice de relaxation est tel que $\rho(R_w) \geqslant |w-1|$.
• Ainsi, si $w \notin]0,2[$, la méthode de relaxation ne converge pas.

Démonstration. $R_w = \left(\frac{D}{w} - E\right)^{-1}\left(\frac{1-w}{w}D + F\right)$. On a

$$\prod_{k=1}^{n} \lambda_k(R_w) = \det(R_w) = \left[\det\left(\frac{D}{w} - E\right)\right]^{-1} \det\left(\frac{1-w}{w}D + F\right) = \frac{\left(\frac{1-w}{w}\right)^n \det(D)}{\frac{1}{w^n}\det D} = (1-w)^n.$$

Or, $\rho(R_w)^n \geqslant \prod_{k=1}^{n} |\lambda_k(R_w)| = |1-w|^n$, ce qui entraîne les deux affirmations du théorème. □

Chapitre 11

Méthodes directes de résolution de systèmes linéaires

11.1 Introduction

On s'intéresse à la résolution du système linéaire :

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1,n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2,n}x_n = b_2 \\ \vdots \\ a_{n,1}x_1 + a_{n,2}x_2 + \cdots + a_{n,n}x_n = b_n \end{cases}$$

que l'on peut mettre sous la forme $Ax = b$ avec $A = (a_{ij}) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, $b \in \mathbb{K}^n$ et x un vecteur inconnu de $\mathbb{K}^n$.

On supposera que le système admet une solution unique, ce qui est équivalent à A est inversible. La solution du système peut donc s'obtenir en calculant A^{-1} puis $A^{-1}b$, mais calculer A^{-1} nécessite la résolution de n systèmes linéaires d'ordre n :

$$\sum_{k=1}^{n} a_{ik}c_{kj} = \delta_{ij} \text{ pour tout } i, j \text{ où } (c_{ij}) = A^{-1}.$$

On n'utilise jamais la méthode des déterminants, dite méthode de Cramer, pour résoudre un système linéaire : le calcul d'un seul déterminant représente $n!$ additions et $(n-1)n!$ multiplications, soit $n \times n!$ opérations élémentaires. Sachant que $69! \approx 1.71 \times 10^{98}$, les machines actuellement les plus puissantes mettraient environ 8.55×10^{87} secondes, soit environ 2.7×10^{80} années pour calculer un déterminant d'ordre 69...

On essaie donc, par des opérations élémentaires de se ramener à un système triangulaire :

$$\begin{cases} \tilde{a}_{11}x_1 + & \tilde{a}_{12}x_2 + & \cdots + & \tilde{a}_{1n}x_n = & \tilde{b}_1 \\ & \tilde{a}_{22}x_2 + & \cdots + & \tilde{a}_{2n}x_n = & \tilde{b}_2 \\ & & & \vdots & \\ & & & \tilde{a}_{nn}x_n = & \tilde{b}_n \end{cases} \quad \text{avec} \prod_{k=1}^{n} \tilde{a}_{kk} \neq 0$$

que l'on résout par la méthode de remontée

$$\left\{\begin{aligned} x_n &= \frac{\tilde{b}_n}{\tilde{a}_{nn}} \\ x_{n-1} &= \frac{\tilde{b}_{n-1} - \tilde{a}_{n-1,n}x_n}{\tilde{a}_{n-1,n-1}} \\ &\vdots \\ x_1 &= \frac{\tilde{b}_1 - \tilde{a}_{1,n}x_n - \cdots - \tilde{a}_{12}x_2}{\tilde{a}_{11}} \end{aligned}\right. .$$

11.2 Méthode de Gauss

La méthode de Gauss est une méthode générale de résolution d'un système linéaire $Ax = b$ avec A inversible. La méthode procède en deux étapes :

$\boxed{1}$ procédure d'éliminations successives des inconnues qui revient à déterminer une matrice inversible M telle que MA soit triangulaire supérieure et calcul simultané de Mb,

$\boxed{2}$ résolution du système $MAx = Mb$ par la méthode de remontée.

11.2.1 Exemple introductif

Soit le système de 4 équations à 4 inconnues :

$$\left\{\begin{array}{rrrrrrrrr} 2x_1 & + & 1x_2 & + & 0x_3 & + & 4x_4 & = & 2 \\ -\ 4x_1 & - & 2x_2 & + & 3x_3 & - & 7x_4 & = & -9 \\ 4x_1 & + & 1x_2 & - & 2x_3 & + & 8x_4 & = & 2 \\ 0x_1 & - & 3x_2 & - & 12x_3 & - & 1x_4 & = & 2 \end{array}\right.$$

que l'on peut écrire sous forme vectorielle $Ax = b$ où

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & 4 \\ -4 & -2 & 3 & -7 \\ 4 & 1 & -2 & 8 \\ 0 & -3 & -12 & -1 \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} 2 \\ -9 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix}$$

On appellera aussi A_1 la matrice A et b_1 le vecteur b.

On cherche à éliminer x_1 dans les équations 2, 3 et 4. Pour cela, on multiplie la première équation par 2 et on l'ajoute à la deuxième équation qui devient :

$$0x_1 \;+\; 0x_2 \;+\; 3x_3 \;+\; 1x_4 \;=\; -5$$

De même, on multiplie la première équation par -2 et on l'ajoute à la troisième équation pour obtenir :

$$0x_1 \;-\; 1x_2 \;-\; 2x_3 \;+\; 0x_4 \;=\; -2\ .$$

Étant donné que x_1 n'intervient pas dans la quatrième équation, puisque son coefficient est nul, on ne modifie pas la quatrième équation.

À la fin de cette étape - l'élimination de x_1 - on obtient le système équivalent $A_2x = b_2$, avec

$$A_2 = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 3 & 1 \\ 0 & -1 & -2 & 0 \\ 0 & -3 & -12 & -1 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad b_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ -5 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

Pour éliminer x_2 dans les équations 3 et 4, il est impossible d'utiliser la deuxième équation, puisque le coefficient de x_2, que l'on appelle le pivot, y est nul. Par contre, on peut utiliser l'une des deux dernières équations. On choisit par exemple la troisième et, dans ce cas, c'est le coefficient -1 qui joue le rôle du pivot.

Puisque le coefficient de x_2 dans la deuxième équation est nul, x_2 est déjà éliminé de cette équation. On multiplie maintenant la troisième équation par -3 et on l'ajoute à la quatrième qui devient :

$$0x_2 \quad - \quad 6x_3 \quad - \quad 1x_4 \quad = \quad 8 \ .$$

Si l'on permute les équations 2 et 3, on obtient le système linéaire équivalent : $A_3x = b_3$, avec

$$A_3 = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & 4 \\ 0 & -1 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & -6 & -1 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad b_3 = \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ -5 \\ 8 \end{pmatrix}.$$

Il ne reste plus qu'à éliminer x_3 dans la dernière équation. Comme le coefficient de x_3 dans la troisième équation est non nul (il est égal à 3), on le choisit comme pivot. On multiplie alors la troisième équation par 2 et on l'ajoute à la quatrième pour obtenir :

$$0x_3 \quad + \quad 1x_4 \quad = \quad -2 \ .$$

Le système d'équations linéaires équivalent obtenu finalement est $A_4x = b_4$, où

$$A_4 = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & 4 \\ 0 & -1 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad b_4 = \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ -5 \\ -2 \end{pmatrix}.$$

La matrice A_4 est triangulaire supérieure. Pour obtenir la solution du système $A_4x = b_4$, on résout les équations "en remontant" dans l'ordre 4, 3, 2, 1, ce qui permet de calculer successivement les inconnues dans cet ordre.

La dernière équation est $x_4 = -2$.
La troisième équation $3x_3 + x_4 = -5$ donne alors $x_3 = -1$.
La deuxième équation $-x_2 - 2x_3 = -2$ donne $x_2 = 2 - 2x_3 = 4$.
Enfin, la première équation $2x_1 + x_2 + 4x_4 = 2$ donne $x_1 = \dfrac{1}{2}(2 - x_2 - 4x_4) = 3$.

On obtient ainsi la solution $\overline{x} = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ -1 \\ -2 \end{pmatrix}$.

(On peut vérifier que le vecteur résidu $r = b - A\overline{x}$ est bien nul, comme il se doit.)

On peut maintenant donner une écriture matricielle aux opérations d'élimination qui ont été effectuées.

La transformation consistant à multiplier la première composante b_1 d'un vecteur b par un nombre α et à l'ajouter à sa deuxième composante b_2 se traduit par la multiplication à gauche de ce vecteur b par la matrice E_1 où :

$$E_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ \alpha & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

En effet, $E_1 b = \begin{pmatrix} b_1 \\ \alpha b_1 + b_2 \\ b_3 \\ b_4 \end{pmatrix}$.

De même, multiplier b_1 par β et l'ajouter à b_3 revient à multiplier le vecteur b par la matrice E_2 où :

$$E_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ \beta & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

En effet, $E_2 b = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \beta b_1 + b_3 \\ b_4 \end{pmatrix}$.

Effectuer les deux transformations successivement (on remarque que l'ordre dans lequel on les effectue n'a pas d'importance) revient donc à multiplier le vecteur b par :

$$M_1 = E_2 E_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ \alpha & 1 & 0 & 0 \\ \beta & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Les transformations précédentes sont inversibles et :

$$E_1^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -\alpha & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad ; \quad E_2^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -\beta & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

ce qui traduit le fait que, si l'on a ajouté αb_1 à b_2 pour obtenir $\alpha b_1 + b_2$, il faut maintenant lui retrancher αb_1 pour obtenir b_2.

On a $M_1^{-1} = E_1^{-1} E_2^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -\alpha & 1 & 0 & 0 \\ -\beta & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. Appelons L_1 cette matrice.

À partir du système d'équations $A_1x = b_1$ et en choisissant $\alpha = 2$ et $\beta = -2$, on a obtenu le système $A_2x = b_2$ avec $A_2 = M_1A_1$ et $b_2 = M_1b_1$. On en déduit donc les relations

$$A_1 = L_1A_2 \quad \text{et} \quad b_1 = L_1b_2.$$

À la deuxième étape, on a effectué une permutation des lignes 2 et 3 pour obtenir un pivot non nul. Cela se traduit par la multiplication par la matrice élémentaire de permutation P où :

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Puis, on a éliminé x_2, ce qui se traduit par la multiplication par la matrice M_2 où :

$$M_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -3 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad L_2 = M_2^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Le système obtenu est $A_3x = b_3$, avec $A_3 = M_2PA_2$ et $b_3 = M_2Pb_2$.
On en déduit alors $PA_2 = L_2A_3$ et $Pb_2 = L_2b_3$.

Finalement, la dernière étape a conduit au système $A_4x = b_4$ où $A_4x = b_4$ où $A_4 = M_3A_3$ et $b_4 = M_3b_3$, soit encore $A_3 = L_3A_4$ et $b_3 = L_3b_4$, avec :

$$L_3 = M_3^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 1 \end{pmatrix}.$$

En posant $A_4 = U$ et $b_4 = c$, on aboutit finalement au système équivalent :

$$Ux = c.$$

Posons $L_1' = PL_1\,{}^tP = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -\beta & 1 & 0 & 0 \\ -\alpha & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, où $\alpha = 2$ et $\beta = -2$, et $L = L_1'L_2L_3$. Un calcul simple donne :

$$L = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 0 \\ -2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 0 \\ -2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & -2 & 1 \end{pmatrix}.$$

On remarque que, pour obtenir L, il suffirait de recopier à leurs places dans L les coefficients sous la diagonale des matrices L_1', L_2 et L_3.

Calculons le produit LU ; on a :

$$LU = L_1'L_2(L_3A_4) = L_1'(L_2A_3) = (L_1'P)A_2 = P(L_1A_2) = PA_1 = PA.$$

On a ainsi obtenu la factorisation de la matrice PA en le produit de matrices triangulaires L et U, l'une inférieure avec des coefficients diagonaux égaux à 1, l'autre supérieure.

(On peut vérifier aisément que le produit $LU = LA_4$ redonne bien la matrice A dont les lignes 2 et 3 ont été permutées.)

Le calcul de P, L et U peut se faire indépendamment du second membre b. Ensuite, pour résoudre le système $Ax = b$, on résoudra $Pb = PAx = LUx$ grâce aux deux systèmes triangulaires $Ly = Pb$, puis $Ux = y$. (On peut vérifier que la solution du système $Ly = Pb$ est le vecteur $c = b_4$.)

11.2.2 Méthode générale

Étape 1 : Premières éliminations

• A est inversible donc il existe $i_0 \in \{1, \cdots, n\}$ tel que $a_{i_0,1} \neq 0$. On choisit un de ces nombres et on l'appelle *pivot de l'élimination.*

• On échange la ligne du pivot (ligne i_0) et la première ligne. Cette opération est équivalente à effectuer le produit $P_1 A$ où P_1 est la *matrice de permutation* : $P_1 = \begin{cases} T(i_0, 1) & \text{si } i_0 \neq 1 \\ I_n & \text{si } i_0 = 1 \end{cases}$ avec, plus généralement, pour $i, j \in \{1, \cdots, n\}$,

$$T(i,j) = \begin{pmatrix} I_{i-1} & & & (0) & & & (0) \\ & 0 & \cdots & \cdots & 0 & 1 & \\ & 0 & 1 & & (0) & 0 & \\ (0) & \vdots & & \ddots & & \vdots & (0) \\ & 0 & (0) & & 1 & \vdots & \\ & 1 & 0 & \cdots & \cdots & 0 & \\ (0) & & & (0) & & & I_{n-j} \end{pmatrix}$$

On note $P_1 A = \left(\tilde{a}_{ij}^{(1)}\right)$ (matrice obtenue en permutant les lignes 1 et i_0 de A) avec $\tilde{a}_{11}^{(1)} \neq 0$.

• On élimine tous les $\tilde{a}_{i,1}^{(1)}$ pour $i \in \{2, \cdots, n\}$.

Notons

$$E_1 = \begin{pmatrix} 1 & & (0) \\ -\tilde{a}_{21}^{(1)}/\tilde{a}_{11}^{(1)} & \ddots & \\ \vdots & & \ddots \\ -\tilde{a}_{n,1}^{(1)}/\tilde{a}_{11}^{(1)} & (0) & 1 \end{pmatrix}$$

alors

$$E_1 P_1 A = \begin{pmatrix} \tilde{a}_{11}^{(1)} & \tilde{a}_{12}^{(1)} & \cdots & \tilde{a}_{1,n}^{(1)} \\ 0 & a_{22}^{(2)} & \cdots & a_{2,n}^{(2)} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & a_{n,2}^{(2)} & \cdots & a_{n,n}^{(2)} \end{pmatrix}$$

où pour $i, j \in \{2, \cdots, n\}$, $a_{ij}^{(2)} = -\dfrac{\tilde{a}_{i,1}^{(1)}}{\tilde{a}_{11}^{(1)}} \times \tilde{a}_{1,j}^{(1)} + \tilde{a}_{ij}^{(1)}$ et pour $i \in \{2, \cdots, n\}$, $-\dfrac{\tilde{a}_{i,1}^{(1)}}{\tilde{a}_{11}^{(1)}} \times \tilde{a}_{11}^{(1)} + \tilde{a}_{i,1}^{(1)} = 0$.

Comme $\det(E_1) = 1$, $\det(E_1P_1A) = \pm\det(A) \neq 0$ (car $\det T(i,j) = -1$ et $\det(I_n) = 1$), donc E_1P_1 et E_1P_1A sont inversibles.

Étape 2 : Deuxièmes éliminations

$\det \begin{pmatrix} a_{22}^{(2)} & \cdots & a_{2,n}^{(2)} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n,2}^{(2)} & \cdots & a_{n,n}^{(2)} \end{pmatrix} \neq 0$ donc il existe $i_0 \in \{2, \cdots, n\}$ tel que $a_{i_0,2}^{(2)} \neq 0$ et on peut trouver $\tilde{E}_2$ et $\tilde{P}_2$ (matrice de permutation) telles que $P_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \tilde{P}_2 \end{pmatrix}$ et $E_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \tilde{E}_2 \end{pmatrix}$.

$$E_2P_2E_1P_1A = \begin{pmatrix} \tilde{a}_{11}^{(1)} & \tilde{a}_{12}^{(1)} & \tilde{a}_{13}^{(1)} & \cdots & \tilde{a}_{1,n}^{(1)} \\ 0 & \tilde{a}_{22}^{(2)} & \tilde{a}_{23}^{(2)} & \cdots & \tilde{a}_{2,n}^{(2)} \\ \vdots & 0 & a_{33}^{(3)} & \cdots & a_{3,n}^{(3)} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & a_{n,3}^{(3)} & \cdots & a_{n,n}^{(3)} \end{pmatrix}$$

Étape $k-1$:

$$E_{k-1}P_{k-1}\cdots E_1P_1A = \begin{pmatrix} \tilde{a}_{11}^{(1)} & \cdots & \cdots & \tilde{a}_{1,k-1}^{(1)} & \tilde{a}_{1,k}^{(1)} & \tilde{a}_{1,k+1}^{(1)} & \cdots & \tilde{a}_{1,n}^{(1)} \\ 0 & \tilde{a}_{2,2}^{(2)} & \cdots & \tilde{a}_{2,k-1}^{(2)} & \tilde{a}_{2,k}^{(2)} & \tilde{a}_{2,k+1}^{(2)} & \cdots & \tilde{a}_{2,n}^{(2)} \\ \vdots & \ddots & \ddots & & & & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \tilde{a}_{k-1,k-1}^{(k-1)} & \tilde{a}_{k-1,k}^{(k-1)} & \tilde{a}_{k-1,k+1}^{(k-1)} & \cdots & \tilde{a}_{k-1,n}^{(k-1)} \\ & & & 0 & a_{kk}^{(k)} & a_{k,k+1}^{(k)} & \cdots & a_{k,n}^{(k)} \\ \vdots & & & \vdots & \vdots & & & \vdots \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & a_{n,k}^{(k)} & a_{n,k+1}^{(k)} & \cdots & a_{n,n}^{(k)} \end{pmatrix}$$

Théorème 11.1. Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ inversible. Il existe au moins une matrice inversible M telle que MA soit triangulaire supérieure.

11.2.3 Remarque sur le choix du pivot

La construction de la méthode de Gauss repose sur le fait qu'à chaque étape, le terme diagonal, appelé pivot, est non nul. Si ce n'est pas le cas, on a vu qu'il suffisait de permuter deux lignes puisque A est inversible. Cependant, ceci ne résout pas complètement le problème lorsqu'on travaille avec des arrondis comme va le prouver l'exemple suivant.

On considère le système :

$$\left\{ \begin{array}{rcrcl} 10^{-4}x & + & y & = & 1 \\ x & + & y & = & 2 \end{array} \right.$$

dont la solution vaut, à 10^{-4} près, $x = 1.0001$ et $y = 0.9999$.

On considère la méthode de Gauss appliquée à ce système sur une machine à arithmétique flottante à 3 décimales, c'est-à-dire, si un nombre est représenté avec une mantisse à 3 chiffres et un exposant. Alors, on écrit $10^{-4} = 0.100 \times 10^{-3}$ et $1 = 0.1 \times 10^{+1}$. Sur une telle machine, si on calcule $1 + 10^{-4}$, on obtient 1, de même que pour $1 + 10^4$, on obtient 10^4.

L'application stricte de la méthode de Gauss donne alors, pour la deuxième équation, $y(10^{-4} - 1) = 2 \times 10^{-4} - 1$, soit, avec les arrondis, $-y = -1$, d'où $y = 1$ et, en remontant, $10^{-4}x = 0$, soit $x = 0$, ce qui est FAUX !!!

Par contre, en permutant les 2 lignes du système, c'est-à-dire en partant du système équivalent

$$\left\{ \begin{array}{rcrcr} x & + & y & = & 2 \\ 10^{-4}x & + & y & = & 1 \end{array} \right. ,$$

la méthode de Gauss donne, pour la deuxième équation, $y(1 - 10^{-4}) = 1 - 2 \times 10^{-4}$, soit, avec les arrondis, $y = 1$ et, en remontant $x + 1 = 2$, soit $x = 1$, ce qui est JUSTE !!!

Ce problème vient du fait que dans le premier cas, le pivot 10^{-4} n'est pas nul, mais presque : il est trop petit !!!

Ainsi, si on veut éviter les erreurs d'arrondis, on peut utiliser, pour le choix du pivot,

→ la <u>stratégie du pivot partiel</u> : à chaque étape k, on choisit $\tilde{a}_{i,k}^{(k)} = \max\limits_{k \leqslant j \leqslant n} |\tilde{a}_{jk}^{(k)}|$;

→ la <u>stratégie du pivot total</u> : à chaque étape k, on choisit pour pivot $\tilde{a}_{i,j}^{(k)} = \max\limits_{k \leqslant \ell, \ell' \leqslant n} |\tilde{a}_{\ell,\ell'}^{(k)}|$. Si le pivot choisi n'est pas sur la k-ième ligne, il faut aussi effectuer une permutation des colonnes.

Ces stratégies n'éliminent pas les pivots petits, puisque le produit $\prod\limits_{i=1}^{n} \tilde{a}_{ii}$ est égal (au signe près) à $\det A$, mais elles diminuent leur influence, en les rejetant à la fin.

11.2.4 Décompte du nombre d'opérations

À l'étape k, on calcule, pour i et j compris entre $k+1$ et n :

$m_{ik}^{(k)} = \tilde{a}_{ik}^{(k)} / \tilde{a}_{kk}^{(k)}$: $n - k$ divisions ;

$\tilde{a}_{ij}^{(k+1)} = \tilde{a}_{ij}^{(k)} - m_{ik}^{(k)} \times \tilde{a}_{kj}^{(k)}$: $(n-k)^2$ additions (soustractions en fait) et $(n-k)^2$ multiplications

$\tilde{b}_{i}^{(k+1)} = \tilde{b}_{i}^{(k)} - m_{ik}^{(k)} \times \tilde{b}_{i}^{(k)}$: $n - k$ additions et $n - k$ multiplications.

On somme, pour k allant de 1 à $n - 1$ et on obtient :

→ Pour les divisions : $\displaystyle\sum_{k=1}^{n-1} (n-k) = \sum_{j=1}^{n-1} j = \frac{(n-1)n}{2}$

→ Pour les additions et les multiplications : $\displaystyle\sum_{k=1}^{n-1} [(n-k) + (n-k)^2] = \sum_{j=1}^{n-1} (j + j^2)$ avec $\displaystyle\sum_{j=1}^{n-1} j = \frac{(n-1)n}{2}$ et $\displaystyle\sum_{j=1}^{n-1} j^2 = \frac{(n-1)n(2n-1)}{6}$, ce qui fait donc $\displaystyle\frac{n(n^2-1)}{3}$ additions et multiplications.

Il faut ensuite ajouter à ces opérations, les opérations de remontées. Le système obtenu :

$$\left\{\begin{array}{ccccccccc} \tilde{a}_{11}^{(1)}x_1 & + & \tilde{a}_{12}^{(1)}x_2 & + & \cdots & + & \tilde{a}_{1n}^{(1)}x_n & = & \tilde{b}_1^{(1)} \\ & & \tilde{a}_{22}^{(2)}x_2 & + & \cdots & + & \tilde{a}_{2n}^{(2)} & = & \tilde{b}_2^{2)} \\ & & & & \ddots & & & \vdots & \\ & & & & & & \tilde{a}_{nn}^{(n)}x_n & = & \tilde{b}_n^{(n)} \end{array}\right.$$

se résout par remontées successives $x_n = \tilde{b}_n^{(n)}/\tilde{a}_{nn}^{(n)}$; $x_{n-1} = (\tilde{b}_{n-1}^{(n-1)} - \tilde{a}_{n-1,n}^{(n-1)}x_n)/\tilde{a}_{n-1,n-1}^{(n-1)}$,... ce qui donne, à l'étape k, 1 division, $k-1$ multiplications et $k-1$ additions.

En sommant pour k allant de 1 à n, la remontée nécessite n divisions, $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}(k-1) = \sum_{j=1}^{n-1} j = \frac{(n-1)n}{2}$ multiplications et additions.

Finalement, pour la méthode de Gauss, le nombre d'opérations élémentaires est de $\dfrac{n(n+1)}{2}$ divisions et de $\dfrac{n(n^2-1)}{3} + \dfrac{(n-1)n}{2}$ additions et multiplications, ce qui donne un coût total de l'ordre de $2n^3/3$ opérations lorsque n est grand (226067 pour $n = 69$ par exemple).

11.3 Factorisation LU

11.3.1 Factorisation dans un cas particulier

On reprend les notations du pivot de Gauss.

→ Existence de la décomposition LU

Si

$$\begin{array}{l} a_{11} \neq 0, \text{ alors } P_1 = I_n \\ \tilde{a}_{22}^{(2)} \neq 0, \text{ alors } P_2 = I_n \\ \vdots \\ \tilde{a}_{n-1,n-1}^{(n-1)} \neq 0, \text{ alors } P_{n-1} = I_n \end{array}$$

Dans ce cas, la matrice de transformation du pivot de Gauss est $M = E_{n-1}E_{n-2}\cdots E_2E_1$ qui est triangulaire inférieure, et MA est triangulaire supérieure.

Posons alors $L = M^{-1}$ et $U = MA$. Alors, on a :

• U est triangulaire supérieure (par construction) ;

• L est triangulaire inférieure : en effet, en notant $L = (\ell_{ij})_{1\leqslant i,j\leqslant n}$ et $M = (m_{ij})_{1\leqslant i,j\leqslant n}$ avec $m_{i,j} = 0$ si $i < j$ (car M est triangulaire inférieure), on a

$$\begin{pmatrix} \ell_{11} & \ell_{12} & \cdots & \ell_{1,n} \\ \ell_{21} & \ell_{22} & \cdots & \ell_{2,n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \ell_{n,1} & \ell_{n,2} & \cdots & \ell_{n,n} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} m_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & & 0 \\ \vdots & & \ddots & 0 \\ m_{n,1} & m_{n,2} & \cdots & m_{n,n} \end{pmatrix} = I_n$$

qui équivaut à :

$$\begin{array}{l} \text{pour } k=1,\cdots,n-1,\ \ell_{k,n}m_{n,n}=0 \text{ donc } \ell_{k,n}=0 \\ \text{pour } k=1,\cdots,n-2,\ \ell_{k,n-1}m_{n-1,n-1}=0 \text{ donc } \ell_{k,n-1}=0 \\ \vdots \\ \text{pour } k=1,\ \ell_{1,2}m_{22}=0 \text{ donc } \ell_{1,2}=0 \end{array}$$

et donc, finalement, $\ell_{ij}=0$ dès que $i<j$, ce qui prouve bien que L est triangulaire inférieure et

$$A=LU$$

avec L triangulaire inférieure et U triangulaire supérieure.

→ <u>Calcul de la matrice L</u>

La matrice L est : $L=(E_{n-1}\ldots E_2E_1)^{-1}=E_1^{-1}E_2^{-1}\ldots E_{n-1}^{-1}$, avec

$$E_k=\begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & & & & & \vdots \\ \vdots & \ddots & 1 & \ddots & & & & \vdots \\ \vdots & & 0 & 1 & 0 & & & \vdots \\ \vdots & & 0 & e_{k+1,k} & 1 & \ddots & & \vdots \\ \vdots & & \vdots & \vdots & 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & 0 & e_{n-1,k} & \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & e_{n,k} & 0 & \cdots & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

où $e_{j,k}=-\dfrac{\tilde{a}_{j,k}^{(k)}}{\tilde{a}_{k,k}^{(k)}}$ pour tout $j=k+1,\ldots,n$.

Montrons que l'inverse de E_k est la matrice

$$L_k=\begin{pmatrix} 1 & & (0) & \cdots & \cdots & 0 \\ & \ddots & & & & \\ (0) & & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \ldots 0 & -e_{k+1,k} & 1 & & (0) \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \ddots & \\ 0 & \ldots 0 & -e_{n,k} & (0) & & 1 \end{pmatrix}.$$

Pour cela, notons $E_k=(e_{i,j})_{i,j=1,\ldots,n}$ et $L_k=(\ell_{i,j})_{i,j=1,\ldots,n}$; alors,

$$\begin{array}{rcl} (E_kL_k)_{i,j} & = & \displaystyle\sum_{h=1}^{n} e_{i,h}\ell_{h,j} \\ & = & \left\{\begin{array}{ll} 1\times\ell_{i,j}=\delta_{i,j} & \text{si } i\leqslant k, \\ e_{i,k}\times\ell_{k,j}+1\times\ell_{i,j}=(*) & \text{si } i\geqslant k+1 \end{array}\right. \end{array}$$

avec :

$$\begin{array}{ll} \text{si } j=k, & (*)=e_{i,k}\times 1+(-e_{i,k})=0=\delta_{i,j} \\ \text{si } j=i, & (*)=e_{i,k}\times 0+1=1=\delta_{i,j} \\ \text{si } j\neq i,k, & (*)=e_{i,k}\times 0+0=\delta_{i,j}, \end{array}$$

et donc, finalement, pour tous $i, j = 1, \ldots, n$, $(E_k L_k)_{i,j} = \delta_{i,j}$, ce qui prouve bien que $E_k L_k = I_n$ et donc que L_k est l'inverse de E_k.

Ainsi, on peut calculer $L = L_1 L_2 \ldots L_{n-1}$:

$$L_1 L_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ -e_{2,1} & 1 & & (0) \\ \vdots & & \ddots & \\ -e_{n,1} & (0) & & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & -e_{3,2} & 1 & & (0) \\ \vdots & \vdots & & \ddots & \\ 0 & -e_{n,2} & (0) & & 1 \end{pmatrix}$$

qui est une matrice dont le terme (i, j) est égal à :

$$\sum_{k=1}^{n} \ell_{i,k}^{(1)} \ell_{k,j}^{(2)} = \begin{cases} 1 \times \ell_{1,j}^{(2)} = \delta_{1,j} & \text{si } i = 1 \\ l_{i,1}^{(1)} \times \ell_{1,j}^{(2)} + \ell_{i,i}^{(1)} \times \ell_{i,j}^{(2)} = (*) & \text{si } i \geqslant 2 \end{cases}$$

Or,

$$\begin{array}{ll} \text{si } j = i, & (*) = -e_{i,1} \times 0 + 1 \times 1 = 1 = \delta_{i,j} \\ \text{si } j = 2, & (*) = -e_{i,1} \times 0 + 1 \times (-e_{i,2}) = -e_{i,2} \\ \text{si } j \neq i, 2, & (*) = -e_{i,1} \times \delta_{i,1} + 1 \times 0 = -e_{i,1} \times \delta_{i,1}, \end{array}$$

et donc

$$L_1 L_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ -e_{2,1} & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ -e_{3,1} & -e_{3,2} & 1 & & (0) \\ \vdots & \vdots & & \ddots & \\ -e_{n,1} & -e_{n,2} & (0) & & 1 \end{pmatrix}$$

ce qui donne, en répétant le processus,

$$L_1 L_2 \ldots L_{n-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ -e_{2,1} & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ -e_{3,1} & -e_{3,2} & 1 & & (0) \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \\ -e_{n,1} & -e_{n,2} & -e_{n,3} & \cdots & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & & (0) \\ & \ddots & \\ (-e_{ij})_{i>j} & & 1 \end{pmatrix}.$$

Exercice Trouver la décomposition LU de A par application de la méthode de Gauss à

$$A = \begin{pmatrix} 5 & 2 & 1 \\ 5 & -6 & 2 \\ -4 & 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

$$E_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 4/5 & 0 & 1 \end{pmatrix} \text{ donc } E_1 A = \begin{pmatrix} 5 & 2 & 1 \\ 0 & -8 & 1 \\ 0 & 18/5 & 9/5 \end{pmatrix}$$

$$E_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 9/20 & 1 \end{pmatrix} \text{ donc } E_2 E_1 A = \begin{pmatrix} 5 & 2 & 1 \\ 0 & -8 & 1 \\ 0 & 0 & 9/4 \end{pmatrix} = U.$$

Par ailleurs $L_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ -4/5 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ et $L_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & -9/20 & 1 \end{pmatrix}$ donc

$$L = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ -4/5 & -9/20 & 1 \end{pmatrix}.$$

Théorème 11.2. Soit $A = (a_{i,j})_{i,j=1,\dots,n} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ telle que les n matrices $\Delta_k = \begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \cdots & a_{1,k} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & \cdots & a_{2,k} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{k,1} & a_{k,2} & \cdots & a_{k,k} \end{pmatrix}$ (pour $k = 1, \dots, n$) soient inversibles. Alors, il existe L, matrice triangulaire inférieure, et U, matrice triangulaire supérieure, telles que $A = LU$.
De plus, cette factorisation est unique à une matrice diagonale près.

Démonstration. $\rightarrow$Existence Montrons, par récurrence sur $k = 1, \dots, n-1$ que (HRk) : $\tilde{a}_{k,k}^{(k)} \neq 0$:

- pour $k = 1$, (HR1) est vérifiée car $a_{1,1} = \det \Delta_1 \neq 0$ par hypothèse ;
- supposons l'hypothèse (HRj) vérifiée pour tout $j \leqslant k-1$ pour un certain $k \leqslant n-1$. Alors, cela signifie que, pour tout $j = 1, \dots, k-1$, $P_j = I_n$ et donc que la méthode de Gauss a donné :

$$E_{k-1} \dots E_2 E_1 A = \begin{pmatrix} \tilde{a}_{1,1}^{(1)} & \tilde{a}_{1,2}^{(1)} & \cdots & \tilde{a}_{1,k}^{(1)} & \cdots & \tilde{a}_{1,n}^{(1)} \\ 0 & \tilde{a}_{2,2}^{(2)} & \cdots & \tilde{a}_{2,k}^{(2)} & \cdots & \tilde{a}_{2,n}^{(2)} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{k,k}^{(k)} & \cdots & a_{k,n}^{(k)} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{n,k}^{(k)} & \cdots & a_{n,n}^{(k)} \end{pmatrix}.$$

En faisant le produit par blocs des matrices $E_{k-1} \cdots E_1$ et A et en regardant le bloc $k \times k$ supérieur gauche, il vient :

$$[E_{k-1} \dots E_2 E_1]_{k \times k} \times \Delta_k = \begin{pmatrix} \tilde{a}_{1,1}^{(1)} & \tilde{a}_{1,2}^{(1)} & \cdots & \tilde{a}_{1,k}^{(1)} \\ 0 & \tilde{a}_{2,2}^{(2)} & \cdots & \tilde{a}_{2,k}^{(2)} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{k,k}^{(k)} \end{pmatrix}$$

ce qui, en prenant le déterminant donne : $1 \times \det \Delta_k = \prod_{i=1}^{k-1} \tilde{a}_{i,i}^{(i)} \times a_{k,k}^{(k)}$. Comme, $\det \Delta_k \neq 0$, on conclut que $a_{k,k}^{(k)} \neq 0$ ce qui finit la preuve de la récurrence.

Ainsi, pour tout $k = 1, \dots, n$, $\tilde{a}_{k,k}^{(k)} \neq 0$ ce qui prouve qu'on peut effectuer la méthode de Gauss pour déterminer la factorisation LU de A.

$\rightarrow$ Unicité : Supposons qu'il existe deux décompositions LU de A : $A = L_1 U_1 = L_2 U_2$ avec L_i $(i = 1, 2)$ triangulaire inférieure, et U_i $(i = 1, 2)$, triangulaire supérieure. Alors,

$$\begin{aligned} L_1 U_1 = L_2 U_2 \quad &\Leftrightarrow \quad U_1 = L_1^{-1} L_2 U_2 \\ &\Leftrightarrow \quad \underbrace{U_1 U_2^{-1}}_{\text{triangulaire supérieure}} = \underbrace{L_1^{-1} L_2}_{\text{triangulaire inférieure}} \end{aligned}$$

ce qui prouve que $U_1 U_2^{-1}$ et $L_1^{-1} L_2$ sont des matrices diagonales et conclut donc la preuve du théorème. $\square$

Conséquence : Résolution d'un système linéaire.

Si on connait la décomposition LU de A, on résout le système $Ax = b$ par :

1) résolution de $L\tilde{x} = b$;

2) résolution de $Ux = \tilde{x}$.

11.3.2 Factorisation LU d'une matrice tridiagonale

Théorème 11.3. Soit

$$A = \begin{pmatrix} b_1 & c_1 & \cdots & 0 & 0 \\ a_2 & b_2 & \ddots & 0 & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \ddots & b_{n-1} & c_{n-1} \\ 0 & 0 & \cdots & a_n & b_n \end{pmatrix}$$

une matrice tridiagonale et soit la suite

$$\delta_0 = 1, \qquad \delta_1 = b_1, \qquad \text{et, pour } k = 2, \ldots, n, \ \delta_k = b_k\delta_{k-1} - a_k c_{k-1}\delta_{k-2}$$

Alors,

1. Pour $k = 1, \ldots, n$, $\delta_k = \det \Delta_k$;
2. Si pour $k = 1, \ldots, n$, $\delta_k \neq 0$, la décomposition LU de A est :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ a_2\dfrac{\delta_0}{\delta_1} & 1 & \ddots & & \vdots \\ 0 & a_3\dfrac{\delta_1}{\delta_2} & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & a_n\dfrac{\delta_{n-2}}{\delta_{n-1}} & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \dfrac{\delta_1}{\delta_0} & c_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \dfrac{\delta_2}{\delta_1} & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & & \ddots & \dfrac{\delta_{n-1}}{\delta_{n-2}} & c_{n-1} \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & \dfrac{\delta_n}{\delta_{n-1}} \end{pmatrix}.$$

Démonstration. 1. En développant suivant la dernière ligne, $\det \Delta_k = b_k \det \Delta_{k-1} - a_k \det \tilde{\Delta}_{k-1}$ où

$$\tilde{\Delta}_{k-1} = \begin{pmatrix} b_1 & c_1 & \cdots & 0 & 0 \\ a_2 & b_2 & \ddots & 0 & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \ddots & b_{k-2} & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & a_{k-1} & c_{k-1} \end{pmatrix} \qquad \Rightarrow \qquad \det \tilde{\Delta}_{k-1} = c_{k-1} \det \Delta_{k-2}.$$

Ainsi, par récurrence sur $k = 1, \ldots, n$, on montre la propriété (HR_k) : $\delta_k = \det \Delta_k$:
- $\delta_1 = b_1 = \det \Delta_1$ et $\delta_2 = b_2 b_1 - a_2 c_1 = \det \Delta_2$;
- Supposons que (HR_{k-1}) et (HR_{k-2}) soient vérifiées pour un $k \geqslant 3$. Alors, $\delta_k = b_k\delta_{k-1} - a_k c_{k-1}\delta_{k-2} = b_k \det \Delta_{k-1} - a_k c_{k-1} \det \Delta_{k-2} = \det \Delta_k$ par la remarque préliminaire.

Par le principe de récurrence, la première partie du théorème est démontrée.

2. Calculons, pour les matrices L et U proposées, le produit LU : $(LU)_{i,j} = \sum_{k=1}^{n} L_{i,k}U_{k,j}$
   - Pour $i = 1$, $(LU)_{1,j} = U_{1,j}$ donc $(LU)_{1,1} = \frac{\delta_1}{\delta_0} = b_1$, $(LU)_{1,2} = U_{1,2} = c_1$ et pour $j \geqslant 3$, $(LU)_{1,j} = U_{1,j} = 0$
   - Pour $2 \leqslant i \leqslant n-1$, $(LU)_{i,j} = L_{i,i-1}U_{i-1,j} + U_{i,j}$ donc $(LU)_{i,i-1} = a_i \frac{\delta_{i-2}}{\delta_{i-1}} \times \frac{\delta_{i-1}}{\delta_{i-2}} + 0 = a_i$; $(LU)_{i,i} = a_i \frac{\delta_{i-2}}{\delta_{i-1}} \times c_{i-1} + \frac{\delta_i}{\delta_{i-1}} = \frac{b_i \delta_{i-1}}{\delta_{i-1}} = b_i$; $(LU)_{i,i+1} = U_{i,i+1} = c_i$ et $(LU)_{i,j} = 0$ si $j < i-1$ ou $j > i+1$
   - Pour $i = n$, $(LU)_{n,k} = L_{n,n-1}U_{n-1,k} + U_{n,k}$ donc $(LU)_{n,n-1} = a_n \frac{\delta_{n-2}}{\delta_{n-1}} \times \frac{\delta_{n-1}}{\delta_{n-2}} + 0 = a_n$; $(LU)_{n,n} = a_n \frac{\delta_{n-2}}{\delta_{n-1}} \times c_{n-1} + \frac{\delta_n}{\delta_{n-1}} = \frac{b_n \delta_{n-1}}{\delta_{n-1}} = b_n$ et $(LU)_{n,k} = 0$ pour $k < n-1$.

   Ainsi, $LU = A$.

□

Conséquence : Résolution d'un système linéaire

Pour résoudre le système linéaire $Ax = d$ où A est tridiagonale, on construit les suites suivantes :

$$\begin{cases} \text{pour } k = 1, \ldots, n, \ z_k = c_k \dfrac{\delta_{k-1}}{\delta_k} \\ w_1 = \dfrac{d_1}{b_1} \text{ et pour } k = 2, \ldots, n, \ w_k = \dfrac{d_k - a_k w_{k-1}}{b_k - a_k z_{k-1}} \\ x_n = w_n \text{ et pour } k = 1, \ldots, n-1, x_k = w_k - z_k x_{k+1} \end{cases}$$

.

Idée : On procède par la méthode de remontée deux fois : $(L\Delta)w = d$ avec $\Delta = \mathrm{Diag}\left(\frac{\delta_1}{\delta_0}, \ldots, \frac{\delta_n}{\delta_{n-1}}\right)$ puis $(\Delta^{-1}U)x = w$.

11.4 Méthode de Cholesky

On s'intéresse au cas particulier où A est une matrice réelle symétrique définie positive.

Théorème 11.4. Si A est symétrique définie positive alors, il existe $B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ triangulaire inférieure telle que $A = B\,{}^tB$.

De plus, si on impose que les éléments diagonaux de B soient positifs, alors la factorisation est unique.

Démonstration. → Existence Montrons tout d'abord que, pour $k = 1, \ldots, n$, $\det(\Delta_k) > 0$: en effet, soit $w = {}^t(w_1, \ldots, w_k) \in \mathbb{R}^k$; on pose $v = {}^t(w\ 0 \ldots 0) \in \mathbb{R}^n$. Alors, ${}^tw\Delta_k w = {}^tvAv > 0$ (car A est définie positive et si $w \neq 0$, alors $v \neq 0$). Ainsi, par le Théorème 11.2, il existe

$$L = \begin{pmatrix} 1 & & & (0) \\ \ell_{21} & \ddots & & \\ \vdots & \ddots & \ddots & \\ \ell_{n,1} & \cdots & \ell_{n,n-1} & 1 \end{pmatrix} \qquad \text{et} \qquad U = \begin{pmatrix} u_{11} & \cdots & u_{1n} \\ & \ddots & \vdots \\ (0) & & u_{nn} \end{pmatrix}$$

où pour $k = 1, \ldots, n$, $u_{kk} > 0$, telles que $A = LU$. Soit alors $\Sigma = \operatorname{diag}(\sqrt{u_{11}}, \ldots, \sqrt{u_{nn}})$; on a $A = (L\Sigma)(\Sigma^{-1}U)$ ce qui donne $A = BC$ avec

$$B = L\Sigma = \begin{pmatrix} \sqrt{u_{11}} & & (0) \\ \vdots & \ddots & \\ \sqrt{u_{11}}\ell_{n,1} & \cdots & \sqrt{u_{nn}} \end{pmatrix} \qquad \text{et} \qquad C = \Sigma^{-1}U = \begin{pmatrix} \sqrt{u_{11}} & \cdots & u_{1,n}/\sqrt{u_{11}} \\ & \ddots & \vdots \\ (0) & & \sqrt{u_{nn}} \end{pmatrix}.$$

Par hypothèse, A est symétrique donc

$$\begin{aligned} {}^tA = A \quad &\Leftrightarrow \quad {}^tC\,{}^tB = BC \\ &\Leftrightarrow \quad B^{-1}\,{}^tC = C({}^tB)^{-1} \end{aligned}$$

Or,

$$B^{-1}\,{}^tC = \begin{pmatrix} 1 & & (0) \\ & \ddots & \\ (*) & & 1 \end{pmatrix} \qquad \text{et} \qquad C({}^tB)^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & & (*) \\ & \ddots & \\ (0) & & 1 \end{pmatrix}$$

ce qui prouve donc que $B^{-1}\,{}^tC = C({}^tB)^{-1} = I_n$. Ainsi, $C = {}^tB$ et $A = B\,{}^tB$ avec B triangulaire inférieure.

→ Unicité : Supposons que $A = B_1\,{}^tB_1 = B_2\,{}^tB_2$ avec B_i $(i = 1, 2)$ triangulaires inférieures à éléments diagonaux positifs. Par unicité de la décomposition LU (à matrice diagonale près), il existe une matrice diagonale Λ telle que $B_1 = B_2\Lambda$, ce qui implique $B_2\,{}^tB_2 = B_1\,{}^tB_1 = B_2\Lambda\Lambda\,{}^tB_2$ et donc $\Lambda^2 = I_n$. Ainsi, $\Lambda = \operatorname{diag}(\pm 1, \pm 1, \ldots, \pm 1)$.

Or, pour $k = 1, \ldots, n$, $(B_1)_{kk} = (B_2)_{kk} \times \Lambda_{kk}$ et $(B_1)_{kk}$ et $(B_2)_{kk}$ sont strictement positifs donc $\Lambda_{kk} = 1$ et finalement, $\Lambda = I_n$ ce qui permet de conclure que $B_1 = B_2$. □

De manière pratique, on pose, *a priori*, $B = \begin{pmatrix} b_{11} & & (0) \\ \vdots & \ddots & \\ b_{n,1} & \cdots & b_{n,n} \end{pmatrix}$.

La relation $A = B\,{}^tB = \begin{pmatrix} b_{11} & & (0) \\ \vdots & \ddots & \\ b_{n,1} & \cdots & b_{n,n} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_{11} & \cdots & b_{n,1} \\ & \ddots & \vdots \\ (0) & & b_{n,n} \end{pmatrix}$ implique :

$b_{11}^2 = a_{11}$ donc $b_{11} = \sqrt{a_{11}}$:

$b_{21} \times b_{11} = a_{12}$ donc $b_{21} = \dfrac{a_{12}}{b_{11}}$;

Pour $i = 3, \cdots, n$, $b_{i,1} \times b_{11} = a_{1,i}$ donc $b_{i,1} = \dfrac{a_{1,i}}{b_{1,1}}$;

$b_{21}^2 + b_{22}^2 = a_{22}$ donc $b_{22} = \sqrt{a_{22} - b_{21}^2}$;

Pour $i = 3, \cdots, n$, $b_{21} \times b_{i,1} + b_{22} \times b_{i,2} = a_{2,i}$ donc $b_{i,2} = \dfrac{a_{2,i} - b_{21} \times b_{i,1}}{b_{22}}$;

$\vdots$

Pour $j = 3, \cdots, n$, $\displaystyle\sum_{k=1}^{j-1} b_{jk}^2 + b_{jj}^2 = a_{jj}$ donc $b_{jj} = \sqrt{a_{jj} - \displaystyle\sum_{k=1}^{j-1} b_{jk}^2}$

Pour $i = j + 1, \cdots, n$, $\displaystyle\sum_{k=1}^{j} b_{jk} b_{ik} = a_{ji}$ donc $b_{ij} = \dfrac{a_{ji} - \sum_{k=1}^{j-1} b_{jk} b_{ik}}{b_{jj}}$.

Application :
• Méthode de Cholesky pour la résolution du système $Ax = b$, avec A définie positive et symétrique :
1) On détermine B telle que $A = B\,{}^tB$ et pour $k = 1, \cdots, n$, $B_{kk} > 0$;
2) On résout les systèmes $By = b$ puis ${}^tBx = y$.

• Méthode de Cholesky pour le calcul de $\det A$ avec A symétrique et définie positive :

$$\det(A) = (\det B)^2 = \left(\prod_{k=1}^{n} b_{kk} \right)^2 .$$

Remarque 11.1. Dans la méthode de Cholesky, on obtient les termes diagonaux à partir d'une extraction de racine carrée, ce qui n'est pas une opération élémentaire. Souvent, on préfère éviter cette opération, dans la mesure où cela est possible.

On a $A = B\,{}^tB = BD^{-1}.D\,{}^tB = LU$ si $D = \mathrm{diag}(b_{1,1}, \cdots, b_{n,n})$, avec $L = BD^{-1}$. Or, D étant diagonale, ${}^tD = D$ et ${}^tB = {}^tD\,{}^tL = D\,{}^tL$, d'où $A = LD^2\,{}^tL = L\tilde{D}\,{}^tL$, où L est triangulaire inférieure à diagonale unité, et où $\tilde{D}$ est diagonale strictement positive. Cette factorisation s'appelle *factorisation de Crout*.

11.5 Factorisation QR et méthode de Househölder

Définition 11.1. *On appelle matrice de Househölder une matrice qui a la forme* $H(v) = I_n - 2\dfrac{v\,v^*}{v^*\,v}$ *où* $v \in \mathbb{C}^n \setminus \{0\}$.

Remarque 11.2. Par convention, I_n est une matrice de Househölder.

Proposition 11.1. $H(v)$ est hermitienne et unitaire.

Démonstration. $[H(v)]^* = \left[I_n - 2\dfrac{v\,v^*}{v^*\,v} \right]^* = I_n^* - 2\dfrac{v^{**}\,v^*}{v^*\,v} = I_n - 2\dfrac{v\,v^*}{v^*\,v} = H(v)$.

Montrons que $H(v)$ est unitaire.

$$[H(v)]^*H(v) = H(v)H(v) = \left(I_n - 2\frac{v\,v^*}{v^*\,v} \right)\left(I_n - 2\frac{v\,v^*}{v^*\,v} \right) = I_n - 4\frac{v\,v^*}{v^*\,v} + 4\frac{vv^*vv^*}{(v^*v)^2} = I_n$$

□

Théorème 11.5. Soit $a = {}^t(a_1, \cdots, a_n) \in \mathbb{C}^n$ tel que $\displaystyle\sum_{i=2}^{n} |a_i| > 0$. Alors, il existe deux matrices de Householder H_1 et H_2 telles que H_ia $(i = 1, 2)$ soit de la forme ${}^t(*, \underbrace{0, \cdots, 0}_{n-1})$.

De manière plus précise, soit $\alpha \in \mathbb{R}$ tel que $e^{i\alpha}|a_1| = a_1$; on a :
• si $H_1 = H(a + \|a\|_2 e^{i\alpha} e_1)$, $H_1 a = -\|a\|_2 e^{i\alpha} e_1$
• si $H_2 = H(a - \|a\|_2 e^{i\alpha} e_1)$, $H_2 a = \|a\|_2 e^{i\alpha} e_1$.
où e_1 est le premier vecteur de la base canonique.

Démonstration. Comme $\sum_{i=2}^{n} |a_i| > 0$, $a \pm \| a \|_2 \, e^{i\alpha} e_1 = {}^t(a_1 \pm \|a\|_2 e^{i\alpha}, a_2, \ldots, a_n) \neq 0$. On peut donc définir H_1 et H_2 comme dans l'énoncé du Théorème 11.5. Ainsi, pour tout $i \in \{1, 2\}$,

$$H_i a = \left[I_n - 2 \frac{(a \pm \|a\|_2 e^{i\alpha} e_1)(a \pm \|a\|_2 \, e^{i\alpha} e_1)^*}{(a \pm \|a\|_2 e^{i\alpha} e_1)^* (a \pm \|a\|_2 \, e^{i\alpha} e_1)} \right] a,$$

où α vérifie $e^{i\alpha} |a_1| = a_1$. Or,

$$\begin{array}{rcll} (a \pm \|a\|_2 e^{i\alpha} e_1)(a \pm \|a\|_2 e^{i\alpha} e_1)^* a & = & (a \pm \|a\|_2 e^{i\alpha} e_1)(\|a\|_2^2 \pm \|a\|_2 e^{-i\alpha} a_1) & \text{car } (e^{i\alpha})^* = e^{-i\alpha} \\ & = & \|a\|_2 (a \pm \|a\|_2 e^{i\alpha} e_1)(\|a\|_2 \pm e^{-i\alpha} a_1) & \end{array}$$

et,

$$\begin{array}{rcll} (a \pm \|a\|_2 e^{i\alpha} e_1)^* (a \pm \|a\|_2 e^{i\alpha} e_1) & = & \|a\|_2^2 \pm \|a\|_2 (e^{-i\alpha} a_1 + e^{i\alpha} \overline{a_1}) + \|a\|_2^2 & \text{car } e^{i\alpha} e^{-i\alpha} = 1 \\ & = & \|a\|_2^2 \pm 2 \|a\|_2 e^{-i\alpha} a_1 + \|a\|_2^2 \quad \text{car } a_1 e^{-i\alpha} = \overline{a_1} e^{i\alpha} = |a_1| & \\ & = & 2 \|a\|_2 (\|a\|_2 \pm e^{-i\alpha} a_1) & \end{array}$$

donc,

$$\begin{array}{rcl} H_i a & = & \left[a - 2 \dfrac{\|a\|_2 (\|a\|_2 \pm e^{-i\alpha} a_1)(a \pm \|a\|_2 e^{i\alpha} e_1)}{2 \|a\|_2 (\|a\|_2 \pm e^{-i\alpha} a_1)} \right] \\ & = & a - (a \pm \|a\|_2 e^{i\alpha} e_1) = \mp \|a\|_2 e^{i\alpha} e_1 \end{array}$$

□

<u>Application à la réduction de Householder d'une matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$</u>

Soit $A = (a_{ij})_{i,j=1,\ldots,n} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ (avec $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$).

→ <u>1ère étape</u> On pose $a_1 = {}^t(a_{11}, \ldots, a_{n1})$ (la première colonne de la matrice A). Deux cas se présentent :

– Si $\sum_{i=2}^{n} |a_{i1}| = 0$, alors, on pose $H_1 = I_n$;
– Si $\sum_{i=2}^{n} |a_{i1}| > 0$, alors, on pose $H_1 = H(a_1 - \|a_1\|_2 e^{i\alpha_1} e_1)$ où α_1 vérifie $e^{i\alpha_1} |a_{11}| = a_{11}$. Dans ce cas, on a

$$H_1 A = \begin{pmatrix} \|a_1\|_2 e^{i\alpha_1} & \tilde{a}_{12}^{(1)} & \cdots & \tilde{a}_{1n}^{(1)} \\ 0 & \tilde{a}_{22}^{(1)} & \cdots & \tilde{a}_{2n}^{(1)} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \tilde{a}_{n2}^{(1)} & \cdots & \tilde{a}_{nn}^{(1)} \end{pmatrix}.$$

→ <u>Étape k ($k \leqslant n-1$)</u> On suppose qu'on a obtenu $k-1$ matrice de Householder (éventuellement égales à l'identité), $H_1, \dots, H_{k-1}$, telles que

$$H_{k-1}\dots H_1 A = \left(\begin{array}{cccccccc} \|a_1\|_2 e^{i\alpha_1} & \tilde{a}_{12}^{(1)} & \cdots & \tilde{a}_{1,k-1}^{(1)} & \tilde{a}_{1k}^{(1)} & \cdots & \tilde{a}_{1n}^{(1)} \\ 0 & \|a_2\|_2 e^{i\alpha_2} & \cdots & \tilde{a}_{2,k-1}^{(2)} & \tilde{a}_{2k}^{(2)} & \cdots & \tilde{a}_{2n}^{(2)} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \|a_{k-1}\|_2 e^{i\alpha_{k-1}} & \tilde{a}_{k-1,k}^{(k-1)} & \cdots & \tilde{a}_{k-1,n}^{(k-1)} \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & \tilde{a}_{kk}^{(k-1)} & \cdots & \tilde{a}_{kn}^{(k-1)} \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & \tilde{a}_{k+1,k}^{(k-1)} & \cdots & \tilde{a}_{k+1,n}^{(k-1)} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & \tilde{a}_{nk}^{(k-1)} & \cdots & \tilde{a}_{nn}^{(k-1)} \end{array}\right).$$

On introduit alors le vecteur $a_k = {}^t(\tilde{a}_{kk}^{(k-1)}, \dots, \tilde{a}_{nk}^{(k-1)}) \in \mathbb{K}^{n-k+1}$ (première colonne de la sous-matrice entourée). Deux cas se présentent :

- Si $\displaystyle\sum_{i=k+1}^{n} |\tilde{a}_{ik}^{(k-1)}| = 0$, alors, on pose $H_k = I_n$;
- Si $\displaystyle\sum_{i=k+1}^{n} |\tilde{a}_{ik}^{(k-1)}| > 0$, alors, on pose $\tilde{H}_k = H(a_k - \|a_k\|_2 e^{i\alpha_k} e_k) \in \mathcal{M}_{n-k+1}(\mathbb{K})$ où α_k vérifie $e^{i\alpha_k}|\tilde{a}_{kk}^{(k-1)}| = \tilde{a}_{kk}^{(k-1)}$ et

$$H_k = \begin{pmatrix} I_{k-1} & 0_{n-k+1,k-1} \\ 0_{k-1,n-k+1} & \tilde{H}_k \end{pmatrix} \qquad \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K}).$$

La matrice H_k est de Househölder (pour le vecteur ${}^t(0_{1,k-1},\, {}^t a_k)$) et vérifie

$$H_k\dots H_1 A = \begin{pmatrix} \|a_1\|_2 e^{i\alpha_1} & \tilde{a}_{12}^{(1)} & \cdots & \tilde{a}_{1k}^{(1)} & \tilde{a}_{1,k+1}^{(1)} & \cdots & \tilde{a}_{1n}^{(1)} \\ 0 & \|a_2\|_2 e^{i\alpha_2} & \cdots & \tilde{a}_{2k}^{(2)} & \tilde{a}_{2,k+1}^{(2)} & \cdots & \tilde{a}_{2n}^{(2)} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \|a_k\|_2 e^{i\alpha_k} & \tilde{a}_{k,k+1}^{(k)} & \cdots & \tilde{a}_{kn}^{(k)} \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & \tilde{a}_{k+1,k+1}^{(k)} & \cdots & \tilde{a}_{k+1,n}^{(k)} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & \tilde{a}_{n,k+1}^{(k)} & \cdots & \tilde{a}_{nn}^{(k)} \end{pmatrix}.$$

→ Étape n L'étape $n-1$ a conduit à l'obtention de $n-1$ matrice de Househölder, H_1, …, H_{n-1}, éventuellement égales à l'identité, et qui vérifient

$$H_{n-1}\dots H_1 A = \begin{pmatrix} \|a_1\|_2 & \tilde{a}_{12}^{(1)} & \cdots & \tilde{a}_{1,n-1}^{(1)} & \tilde{a}_{1n}^{(1)} \\ 0 & \|a_2\|_2 & \cdots & \tilde{a}_{2,n-1}^{(2)} & \tilde{a}_{2n}^{(2)} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \|a_{n-1}\|_2 & \tilde{a}_{n-1,n}^{(n)} \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & \tilde{a}_{nn}^{(n-1)} \end{pmatrix}$$

Enfin, soit α_n tel que $e^{i\alpha_n}\tilde{a}_{nn}^{(n-1)} = |\tilde{a}_{nn}^{(n-1)}|$

• on pose $H_n = \mathrm{Diag}(e^{-i\alpha_1}, \dots, 1, e^{-i\alpha_n}) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, qui est une matrice diagonale unitaire.

On a, finalement

$$H_n \dots H_1 A = \begin{pmatrix} \|a_1\|_2 & \tilde{\alpha}_{12}^{(1)} & \cdots & \tilde{\alpha}_{1,n-1}^{(1)} & \tilde{\alpha}_{1n}^{(1)} \\ 0 & \|a_2\|_2 & \cdots & \tilde{\alpha}_{2,n-1}^{(2)} & \tilde{\alpha}_{2n}^{(2)} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \|a_{n-1}\|_2 & \tilde{\alpha}_{n-1,n}^{(n)} \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & |\tilde{a}_{nn}^{(n-1)}| \end{pmatrix}$$

et donc, il existe $n-1$ matrices de Househölder, $H_1, \dots, H_{n-1}$, et une matrice diagonale unitaire, H_n, telles que $H_n \dots H_1 A$ soit triangulaire supérieure à diagonale positive.

Théorème 11.6. Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ inversible. Alors, il existe une matrice unitaire Q et une matrice triangulaire supérieure R telles que $A = QR$.

De plus, on peut trouver R à éléments diagonaux strictement positifs. La factorisation est alors unique.

Démonstration. → Existence D'après la démonstration que l'on vient de faire, il existe $n-1$ matrices de Househölder, $H_1, \dots, H_{n-1}$, et une matrice diagonale unitaire, H_n, telles que $R = H_n \dots H_1 A$ soit triangulaire supérieure à diagonale positive. Si, de plus, A est inversible, comme les H_k $(k = 1, \dots, n)$ le sont, la matrice R est à diagonale strictement positive.

Posons alors $Q = (H_n \dots H_1)^{-1} = H_1 \dots H_{n-1} H_n^*$; puisque les H_k $(k = 1, \dots, n)$ sont unitaires, la matrice Q ainsi définie est unitaire et on obtient la décomposition attendue $A = QR$ avec Q unitaire et R triangulaire supérieure à diagonale strictement positive.

→ Unicité Supposons que $A = Q_1 R_1 = Q_2 R_2$ avec Q_k $(k = 1, 2)$ unitaire et R_k $(k = 1, 2)$ triangulaire supérieure à diagonale strictement positive (*i.e.*, si $R_k = (r_{ij}^{(k)})_{i,j=1,\dots,n}$ alors, $\forall\, i = 1, \dots, n$, $r_{ii}^{(k)} > 0$). Posons alors $B = R_2 R_1^{-1} = (b_{ij})_{i,j=1,\dots,n}$; on a :
- B est triangulaire supérieure (car R_2 et R_1^{-1} le sont) ; donc B^* est triangulaire inférieure
- $B^* B = (R_2 R_1^{-1})^* (R_2 R_1^{-1}) = (Q_1 Q_2^{-1})^* (Q_1 Q_2^{-1}) = Q_2 Q_1^* Q_1 Q_2^* = Q_2 Q_2^* = I_n$ car $Q_k Q_k^* = I_n$ puisque les matrice Q_k $(k = 1, 2)$ sont unitaires ;
- Pour $i = 1, \dots, n$, $b_{ii} = r_{ii}^{(2)} / r_{ii}^{(1)} > 0$ donc la matrice B est de diagonale positive. Ainsi, $I_n = B^* B$ est la décomposition de Cholesky de I_n et, par unicité de cette décomposition (établie dans le cas réel au Théorème 14. ; l'extension au cas complexe est immédiate), $B = I_n$ et $R_2 = R_1$, $Q_2 = Q_1$.

□

Remarque 11.3. Par le même procédé, on pourrait transformer une matrice $A \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{R})$ en une matrice $R = \begin{pmatrix} \tilde{R}_n \\ 0_{m-n,n} \end{pmatrix}$ avec $\tilde{R}_n$ triangulaire supérieure dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

Exercice traité : Chercher la décomposition QR de la matrice $A = \begin{pmatrix} 1/3 & 2 & 1 \\ 2/3 & 2 & 5 \\ -2/3 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

→ 1$^{\text{ère}}$ étape : On pose $a_1 = {}^t \begin{pmatrix} 1/3 & 2/3 & -2/3 \end{pmatrix}$.

Alors $\|a_1\|_2 = \dfrac{1}{3}\sqrt{1+4+4} = 1$ et $e^{i\alpha_1} = 1$ d'où $v_1 = {}^t\begin{pmatrix} -2/3 & 2/3 & -2/3 \end{pmatrix}$. On a alors

$$\begin{aligned} H_1 &= I_3 - 2\frac{v_1\, v_1^*}{v_1^*\, v_1} = I_3 - 2\frac{\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -1 & 1 & -1 \end{pmatrix}}{\begin{pmatrix} -1 & 1 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}} \\ &= I_3 - \frac{2}{3}\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/3 & 2/3 & -2/3 \\ 2/3 & 1/3 & 2/3 \\ -2/3 & 2/3 & 1/3 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Donc $H_1 A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$.

$\rightarrow$ 2ème étape : On pose $a_2 = {}^t\begin{pmatrix} 2 & 0 \end{pmatrix}$. Comme $a_2[2] = 0$, on choisit $H_2 = I_3$. On a alors

$$H_2 H_1 A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} = R$$

et $Q = H_1 H_2 = H_1 I_3 = \begin{pmatrix} 1/3 & 1/3 & -2/3 \\ 2/3 & 1/3 & 2/3 \\ -2/3 & 2/3 & 1/3 \end{pmatrix}$.