Exercices de Révisions (chapitres 1 à 5)

Espaces vectoriels

1. Notons E l'espace vectoriel des fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. On considère les ensembles de fonctions F_i définis ci-dessous. Déterminer pour chaque i si F_i est un espace vectoriel ou pas (pour montrer que F_i est un espace vectoriel, il suffit de vérifier que c'est un sous-espace vectoriel de E).

a) $F_1 = \mathbb{R}[x]$ (l'ensemble des fonctions polynômes)
b) $F_2 = \{P \in \mathbb{R}[x]\ ;\ P \text{ est unitaire }\}$
c) $F_3 = \{P \in \mathbb{R}[x]\ ;\ \deg(P) \leq 3\}$
d) $F_4 = \{P \in \mathbb{R}[x]\ ;\ \deg(P) = 4\}$
e) $F_5 = \{P \in \mathbb{R}[x]\ ; P(0) = 0\}$
f) $F_6 = \{f \in E\ ;\ f(0) = 0\}$
g) $F_7 = \{P \in \mathbb{R}[x]\ ;\ P(0) = 1\}$
h) $F_8 = \{P \in \mathbb{R}[x]\ ;\ P(1) = 0\}$
i) $F_9 = \{f \in E\ ;\ f \text{ est continue }\}$
j) $F_{10} = \{f \in E\ ;\ f \text{ est croissante }\}$
k) $F_{11} = \{f \in E\ ;\ f \text{ est monotone }\}$
l) $F_{12} = \{f \in E\ ;\ \text{pour tout } x \in \mathbb{R},\ f(x + 2\pi) = f(x)\}$
m) $F_{13} = \{f \in E\ ;\ \text{pour tout } x \in \mathbb{R},\ \alpha f''(x) + \beta f'(x) + \gamma f(x) = 0\}$.

---

2. Soit E un espace vectoriel sur $\mathbb{K}$ ($\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$). Soit F et G deux sous-espaces vectoriels de E. Les ensembles suivants sont-ils des sous-espaces vectoriels de E ?

a) Le complémentaire de F dans E, noté $\overline{F}$
b) La réunion $\overline{F} \cup \{0\}$
c) L'intersection $F \cap G$;
d) La réunion $F \cup G$
e) La somme $F + G = \{z \in E\ ;\text{il existe } x \in F \text{ et } y \in G \text{ tels que } z = x + y\}$.

---

3. On se place dans l'espace vectoriel $\mathbb{R}^2$.
On définit les vecteurs $e_1 = (1, 0)$, $e_2 = (0, 1)$, $v_1 = (1, 1)$, $v_2 = (2, 2)$ et $v_3 = (1, 2)$.
a) Les familles suivantes sont-elles libres ? sont-elles génératrices ?
(e_1, e_2), (v_1, v_2), (e_1, v_1), (v_3), (v_1, v_2, v_3), (e_2, v_1, v_3), (e_1, v_1, v_3).
b) Donner une condition nécessaire portant sur le nombre de vecteurs pour qu'une famille de vecteurs de $\mathbb{R}^2$ soit libre.
c) Donner une condition nécessaire portant sur le nombre de vecteurs pour qu'une famille de vecteurs de $\mathbb{R}^2$ soit génératrice.
d) Donner une condition suffisante portant sur le nombre de vecteurs pour qu'une famille de vecteurs de $\mathbb{R}^2$ soit liée.

---

4. On se place dans l'espace vectoriel $\mathbb{R}^3$. Les deux familles ci-dessous sont-elles libres ou liées ?

$$\mathcal{F}_1 = ((1, 2, -1), (3, 1, 2), (7, 4, 3)) \qquad \mathcal{F}_2 = ((2, 2, -1), (0, 1, 3), (0, 0, 7))$$

$\boxed{\mathbf{5.}}$ Dans le $\mathbb{R}$-espace vectoriel $\mathbb{R}^4$, on considère les sous-ensembles :

$$F = \{(x,y,z,t) \in \mathbb{R}^4 \ ; \ x + 3y + 3z + 3t = 0\} \qquad G = \{(x,y,z,t) \in \mathbb{R}^4 \ ; \ x - y + z - t = 0\}$$

a) Démontrer que F et G sont des sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}^4$ et trouver une base et la dimension de F et de G.
b) Trouver une base et la dimension de $F \cap G$.
c) Montrer que $\mathbb{R}^4 = F + G$.
d) Déterminer deux supplémentaires de G puis un supplémentaire de $F \cap G$.

$\boxed{\mathbf{6.}}$ Soit $V = (v_1, v_2, v_3)$ une famille libre d'un espace vectoriel E. Posons $x = \alpha v_1 + \beta v_2 + \gamma v_3$ et $W = (v_1 + x, v_2 + x, v_3 + x)$.
Démontrer que W est libre si et seulement si $\alpha + \beta + \gamma \neq -1$.

$\boxed{\mathbf{7.}}$ On considère l'espace vectoriel $\mathbb{R}^3$ muni de la base canonique (e_1, e_2, e_3).
Soit $F = \{\alpha e_1 + \beta e_2 + \gamma e_3 \ ; \ \alpha = \beta\}$ et $G = \{\alpha e_1 + \beta e_2 + \gamma e_3 \ ; \ \alpha + \beta = 0\}$.
a) Démontrer que F et G sont des sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}^3$ et donner une base de F et de G.
b) Trouver deux supplémentaires de F dans $\mathbb{R}^3$.
c) Donner une base de $H = F \cap G$.
d) Trouver des sous-espaces vectoriels de L, M et N tels que :
i) $H \oplus L = F$ ii) $H \oplus M = G$ iii) $H \oplus N = \mathbb{R}^3$.

$\boxed{\mathbf{8.}}$ On se place dans le $\mathbb{R}$-espace vectoriel de $\mathbb{R}^{2n}$ où n est un entier naturel non nul. On considère les deux sous-ensembles définis ci-dessous :

$$E = \{(x_1, \cdots, x_n, x_{n+1}, \cdots, x_{2n}) \ \ x_i = 0 \text{ pour tout } i \leq n\}$$

$$F = \{(x_1, \cdots, x_n, x_{n+1}, \cdots, x_{2n}) \ \ x_i = x_{n+i} \text{ pour tout } i \leq n\}$$

a) Démontrer que E et F sont des sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}^{2n}$.
b) Démontrer que $\mathbb{R}^{2n} = E \oplus F$.

$\boxed{\mathbf{9.}}$ Soit $E = \mathcal{C}^2([0,1], \mathbb{R})$, $E_1 = \{y \in E / y'' + xy = 0\}$, $E_2 = \{y \in E / y'' - xy = 0\}$ et $E_3 = \{y \in E / y \text{ est polynomiale}\}$. Montrer que E_1, E_2 et E_3 sont en somme directe.

$\boxed{\mathbf{10.}}$ Soit $E = \mathbb{K}_3[X]$, $E_1 = \{P \in E / P(0) = P(1) = P(2) = 0\}$, $E_2 = \{P \in E / P(1) = P(2) = P(3) = 0\}$ et $E_3 = \{P \in E / P(X) = P(-X)\}$. Montrer que les E_i sont des sous-espaces vectoriels de E et que $E = E_1 \oplus E_2 \oplus E_3$.

$\boxed{\mathbf{11.}}$ On se place dans $\mathbb{R}_3[X]$, l'espace vectoriel des polyômes de degré inférieur ou égal à 3.
Soit $U = \{P \in \mathbb{R}_3[X] \ ; \ P(0) = 0\}$.
a) Démontrer que U est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}_3[X]$.
b) Déterminer un supplémentaire de U.

$\boxed{\mathbf{12.}}$ On considère le $\mathbb{C}$-espace vectoriel $\mathbb{C}^4$.
Soit $F = \{(a, 2a + b, -b, -a) \in \mathbb{C}^4 \ ; \ a, b \in \mathbb{C}\}$ et $G = \{(a, 3a = b, -b, -2a + b) \in \mathbb{C}^4 \ ; \ a, b \in \mathbb{C}\}$.
a) Montrer que F est G sont des sous-espaces vectoriels de $\mathbb{C}^4$ en mettant en évidence pour chacun d'eux une base.

b) Montrer que $\mathbb{C}^4 = F \oplus G$.

$\boxed{\textbf{13.}}$ Soit $E = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3\ ;\ x + y + 2z = 0\}$ et $F = \{(a, -a, 3a)\ ;\ a \in \mathbb{R}\}$
a) Montrer que E et F sont des sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}^3$ dont on déterminera la dimension
b) Montrer que $\mathbb{R}^3 = E \oplus F$.

$\boxed{\textbf{14.}}$ Soit F le sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^4$ engendré par :

$$u_1 = (1, 4, -1, 0) \qquad u_2 = (6, 10, 1, 0) \qquad u_3 = (2, 2, 1, 1) \qquad u_4 = (1, 0, 1, -4)$$

Trouver une base de F, puis un supplémentaire de F dans $\mathbb{R}^4$.

Applications linéaires

$\boxed{\textbf{15.}}$ Les applications suivantes sont-elles linéaires ?
a) $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, $(x, y) \mapsto (x + y, 8y)$
b) $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, $(x, y) \mapsto (x + y, xy)$
c) $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, $(x, y, z) \mapsto (2x + 1, y + z, x)$
d) $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$, $(x, y, z) \mapsto (2x + y, -z)$
a) $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$, $(x, y, z) \mapsto \sin(x)$
a) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x \mapsto xe^x$.

$\boxed{\textbf{16.}}$ Soit l'application linéaire $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, $(x, y, z) \mapsto (x + y + z, 2y + z, x - y)$. Calculer $\mathrm{im}(f)$ et $\ker(f)$.

$\boxed{\textbf{17.}}$ Soit $f : \mathbb{R}[X] \to \mathbb{R}$, $P \mapsto P(1)$.
Montrer que f est linéaire et déterminer son noyau et son image.

$\boxed{\textbf{18.}}$ Soit E l'espace vectoriel de l'ensemble des fonctions de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$ et $\varphi : E \to E$ définie par $\varphi(f) = f' + f$.
a) Montrer que φ est linéaire et calculer son noyau.
b) φ est-elle injective ?

$\boxed{\textbf{19.}}$ Soit E un espace vectoriel de dimension $n \geq 1$. Soit $u,\ v \in \mathcal{L}(E)$ avec $u \circ v = v \circ u$ ainsi que $E = \ker u \oplus \mathrm{im} u = \ker v \oplus \mathrm{im} v$. Montrer que $E = \ker(u \circ v) \oplus \mathrm{im}(u \circ v)$.

$\boxed{\textbf{20.}}$ Soit E un espace vectoriel, et $u \in \mathcal{L}(E)$. Montrer que :
a) $E = \mathrm{Im} u + \ker u$ si et seulement si $\mathrm{Im} u = \mathrm{Im} u^2$.
b) $\ker u \cap \mathrm{Im} u = \{0\}$ si et seulement si $\ker u = \ker u^2$. .
Que conclut-on si E est de dimension finie ?

$\boxed{\textbf{21.}}$ Soit E un espace vectoriel de dimension $n \geq 1$ et soient $u,\ v \in \mathcal{L}(E)$ vérifiant $E = \mathrm{im} u + \mathrm{im} v = \ker u + \ker v$. Montrer l'équivalence entre :
a) Les deux sommes sont directes

b) $E = \mathrm{im}(u+v)$ et $\mathrm{rg}(u+v) = \mathrm{rg}u + \mathrm{rg}v = n$.

$\boxed{\textbf{22.}}$ Soit E un espace vectoriel de dimension $n \geq 1$ et soient $u,\ v \in \mathcal{L}(E)$ vérifiant $\mathrm{rg}u = \mathrm{rg}v = 1$. Montrer l'équivalence entre :

a) $\mathrm{rg}(u+v) \leq 1$.

b) $\mathrm{im}u = \mathrm{im}v$ ou $\ker u = \ker v$ [on pourra montrer, et utiliser, que, si $u \in \mathcal{L}(E)$ est de rang 1, il existe un vecteur non nul e et une forme linéaire $\lambda \in E^*$ avec $u = \lambda e$].

$\boxed{\textbf{23.}}$ Soit E un espace vectoriel de dimension finie, et $u \in \mathcal{L}(E)$. Montrer l'équivalence entre :

a) $u^2 = 0$.

b) Il existe un projecteur p de E tel que $pu = u$ et $up = 0$.

c) Il existe un projecteur p de E tel que $pu - up = u$.

$\boxed{\textbf{24.}}$ Soit $p \in \mathcal{L}(E)$. Montrer que p est un projecteur de E si, et seulement si, $p^2 = p^3$ et $E = \ker p \oplus \mathrm{im}p$.

Matrices

$\boxed{\textbf{25.}}$ La transposée d'une matrice A s'obtient en échangeant les lignes et colonnes, on la note ${}^tA$. Autrement dit, si $A = (a_{ij})$, alors ${}^tA = (a'_{ij})$ avec $a'_{ij} = a_{ji}$.

Soit $A = \begin{pmatrix} 7 & 2 & 3 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. Écrire la transposée de A. Calculer $A\,{}^tA$, puis ${}^tAA$.

$\boxed{\textbf{26.}}$ Soit A et B dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. Résoudre, dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, $M = (\mathrm{tr}M)A + B$.

$\boxed{\textbf{27.}}$ Soit $A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 5 \\ 0 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$.

a) Écrire A sous la forme $\alpha I_3 + J$.

b) Calculer $(\alpha I_3)^{100}$, calculer J^3 puis J^n pour $n \geq 3$.

c) Calculer A^{100}.

$\boxed{\textbf{28.}}$ On se place dans $E = \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ l'espace vectoriel des matrices carrées d'ordre n.

Soit $\mathcal{S} = \{A \in E\ ;\ {}^tA = A\}$ l'ensemble des matrices symétriques

Soit $\mathcal{A} = \{A \in E\ ;\ {}^tA = -A\}$ l'ensemble des matrices antisymétriques.

a) Donner, pour $n = 3$ des exemples de matrices symétriques et des exemples de matrices antisymétriques.

b) Démontrer que $\mathcal{S}$ et $\mathcal{A}$ sont des sous-espaces vectoriels de E.

c) Vérifier que pour toute matrice $A \in E$, $A + {}^tA$ est symétrique et $A - {}^tA$ est antisymétrique.

d) Démontrer que $E = \mathcal{S} \oplus \mathcal{A}$.

$\boxed{\textbf{29.}}$ Dans $\mathbb{R}^3$, notons $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3)$ la base canonique.

Soit $\mathcal{B}' = (e'_1, e'_2, e'_3) = ((1,1,0),(1,1,1),(0,3,1))$ une famille de $\mathbb{R}^3$.

a) Montrer que $\mathcal{B}'$ est une base de $\mathbb{R}^3$.

b) Écrire la matrice de passage de $\mathcal{B}$ à $\mathcal{B}'$.

c) Déterminer la matrice de passage de $\mathcal{B}'$ à $\mathcal{B}$.

d) Quelles sont les coordonnées d'un triplet (x, y, z) dans la nouvelle base $\mathcal{B}'$?

$\boxed{\textbf{30.}}$ Soit $A, B \in \mathcal{M}_{2n+1}(\mathbb{K})$ telles que $AB = 0$. Montrer que l'une au moins des deux matrices $A + {}^tA$ et $B + {}^tB$ n'est pas inversible.

$\boxed{\textbf{31.}}$ Calculer l'inverse de chacune des matrices ci-dessous :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & -1 & 3 \end{pmatrix} \qquad C = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \qquad D = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$\boxed{\textbf{32.}}$ Inverser $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots & n \\ & \ddots & \ddots & \vdots \\ (0) & & \ddots & 2 \\ & & & 1 \end{pmatrix}$.

Applications linéaires et matrices

$\boxed{\textbf{33.}}$ On se place dans le $\mathbb{R}$-espace vectoriel $\mathbb{R}^3$.

Soit f l'application linéaire définie par $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, $w = (x, y, z) \mapsto (2x + 3y - z, x - y, 4z)$.

Soit $\mathcal{E}$ la base canonique de $\mathbb{R}^3$.

a) Donner la matrice de f dans la base canonique. Soit g l'application linéaire définie par la matrice $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 0 \\ 2 & -1 & 0 \end{pmatrix}$.

b) Calculer $g(w)$ avec $w = (x, y, z)$.

c) Calculer $g \circ f$ en utilisant deux méthodes différentes.

$\boxed{\textbf{34.}}$ On se place dans le $\mathbb{R}$-espace vectoriel $\mathbb{R}_3[X]$. Soit f l'application de $\mathbb{R}_3[X]$ dans $\mathbb{R}_3[X]$ qui à un polynôme associe le reste de sa division euclidienne par $P(X) = X^2 - 1$.

a) Montrer que f est une application linéaire.

b) Donner la matrice M de f dans la base canonique. En déduire une base du noyau et de l'image de f.

c) Montrer que la famille $(1, X - 1, X^2 - 1, (X^2 - 1)(X - 1))$ est une base de $\mathbb{R}_3[X]$. On notera cette base $\mathcal{B}$.

d) Donner la matrice N de f dans $\mathcal{B}$ et en déduire une base du noyau et de l'image de f.

e) f est-il un projecteur ?

f) Donner la matrice de passage P de la base canonique à la base $\mathcal{B}$ et la matrice de passage entre la base $\mathcal{B}$ et la base canonique.

g) Quelle relation doit-on avoir entre les matrices M, N et P ? Vérifier cette relation.

$\boxed{\textbf{35.}}$ Soit f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ défini par la matrice $M = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

a) f est-ell inversible ?
b) Soit A et B deux matrices qui commutent. Calculer $(A+B)^n$.
c) Calculer f^n (pour cela, on pourra décomposer la matrice M en $M = I + N$).

---

36. Soit f l'application linéaire de $\mathbb{R}^3$ définie par $f(x, y, z) = (2x + y, x + z, y - 2z)$.
a) Calculer $\mathrm{im}(f)$ et $\ker(f)$. Quel est le rang de f ?
b) Écrire la matrice M de f dans la base canonique.
c) Quel est le rang de la matrice M ?

---

37. Soit la matrice $P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 0 \\ 4 & -2 & -1 \end{pmatrix}$ et soit $\mathcal{E}$ la base canonique de $\mathbb{R}^3$.

a) Montrer que P est la matrice de passage de la base $\mathcal{E}$ à une autre base de $\mathbb{R}^3$ que l'on notera $\mathcal{B}$ et que l'on explicitera.
b) Calculer la matrice de passage de la base $\mathcal{B}$ à la base $\mathcal{E}$.
c) En déduire P^{-1}.
Soit f l'application linéaire sur $\mathbb{R}^3$ définie par $f(x, y, z) = (z, y + z, x - y)$
d) Écrire la matrice de f dans la base $\mathcal{E}$.
e) Écrire la matrice de f dans la base $\mathcal{B}$.

---

38. Soit f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ dont la matrice dans la base canonique est :

$$M = \begin{pmatrix} 2 & -3 & 1 \\ -1 & 3 & -5 \\ -5 & 9 & -7 \end{pmatrix}$$

Donner une base et la dimension de $\ker f$ et de $\mathrm{im}(f)$.

---

39. Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, $A \neq 0$, telle que $A^3 = -A$.
a) Montrer que $E = \mathbb{R}^3 = \ker\ A \oplus \ker(A^2 + \mathrm{id}_E)$. Donner le projecteur associé à cette somme directe.
b) Montrer que A est semblable à $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.

---

40. a) Montrer que $M_n(\mathbb{K})$ a une base de matrices de projecteurs [si (E_{ij}) est la base canonique de $M_n(\mathbb{K})$, on pourra calculer $(E_{ii} + E_{ij})^2$ pour $i \neq j$].
b) Montrer que $\{M = (m_{ij}) \in M_n(\mathbb{K}) / m_{11} = 0\}$ est l'hyperplan $\ker(M \mapsto \mathrm{tr}(ME_{11}))$.
c) Soit $A \in M_n(\mathbb{K})$ telle que, pour tout $P \in GL_n(\mathbb{K})$, si $M = PAP^{-1} = (m_{ij})$, on ait $m_{11} = 0$. Montrer que $\mathrm{tr}(AX) = 0$ pour toute matrice X semblable à E_{11}. En déduire que $\mathrm{tr}(AX) = 0$ pour toute matrice X de projecteur, puis que $A = 0$.

---

41. Soit $f \in \mathcal{L}(E)$, E étant de dimension 3, qui vérifie $f^2 \neq 0$, et $f^3 = 0$. Soit $\mathcal{C}$ l'ensemble des endomorphismes de E qui commutent avec f.
a) Montrer qu'il existe un vecteur e tel que $(e, f(e), f^2(e))$ soit une base de E.
b) Montrer que $\mathcal{C} = \mathrm{Vect}(Id_E, f, f^2)$.

Déterminants

---

42. Calculer le déterminant des matrices ci-dessous :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 1 & 6 & 6 \\ 0 & 0 & 1 \\ 4 & 2 & 1 \end{pmatrix} \qquad C = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 6 \\ 2 & 5 & 9 \\ 3 & 6 & 12 \end{pmatrix} \qquad D = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 6 & 2 \\ 2 & 2 & 6 & 1 \\ 4 & 5 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

---

43. Calculer le déterminant des matrices ci-dessous en fonction des paramètres x, y et z. En déduire, dans chaque cas, des conditions nécessaires et suffisantes portant sur les paramètres pour que ces matrices soient inversibles.

$$A = \begin{pmatrix} x & \pi & 1 \\ 0 & y & \sqrt{2} \\ 0 & 0 & z \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ x & y & z \\ y+z & x+z & x+y \end{pmatrix}$$

$$C = \begin{pmatrix} 1 & x & x^2 \\ 1 & y & y^2 \\ 1 & z & z^2 \end{pmatrix} \qquad D = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & x & y \\ 1 & -x & 0 & z \\ 1 & -y & z & 0 \end{pmatrix}.$$

---

44. Calculer le déterminant d'ordre n ci-dessous (en fonction de a, b et n)

$$D_n = \begin{vmatrix} a & b & \cdots & b \\ b & a & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & b \\ b & \cdots & b & a \end{vmatrix}$$

---

45. Soit $a \in \mathbb{C}$. Calculer $\det(a^{|i-j|})_{1 \leq i,j \leq n}$.

---

46. Calculer le déterminant :

$$D_n = \begin{vmatrix} 1 & n & n-1 & \cdots & 2 \\ 2 & 1 & n & \cdots & 3 \\ 3 & 2 & 1 & \cdots & 4 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ n & n-1 & \cdots & 2 & 1 \end{vmatrix}.$$

---

47. Calculer $\Delta_n = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 1 & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 & 1 \\ 0 & \cdots & 0 & 1 & 1 \end{vmatrix}$.

$\boxed{\textbf{48.}}$ Soit $a_1, \ldots, a_n, b_1, \ldots, b_n$ des éléments de $\mathbb{K}$. Calculer le déterminant :

$$D_n = \begin{vmatrix} a_1+b_1 & b_1 & b_1 & \cdots & b_1 \\ b_2 & a_2+b_2 & b_2 & \cdots & b_2 \\ b_3 & b_3 & a_3+b_3 & \cdots & b_3 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ b_n & \cdots & \cdots & b_n & a_n+b_n \end{vmatrix}.$$

$\boxed{\textbf{49.}}$ Soit $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$, et $M = \begin{pmatrix} 0 & & & \\ & \ddots & (\alpha) & \\ & (\beta) & \ddots & \\ & & & 0 \end{pmatrix}$. Calculer le déterminant et le rang de M [lorsque $\alpha \neq \beta$, on pourra calculer $\begin{vmatrix} x & & (\alpha+x) \\ & \ddots & \\ (\beta+x) & & x \end{vmatrix}$ par multilinéarité pour $x \in \mathbb{R}$] .

$\boxed{\textbf{50.}}$ Soit E un espace vectoriel de dimension n et f un endomorphisme de E.

a) On dit que f est un projecteur si $f \circ f = f$. Quelles sont les valeurs possibles pour $\det f$ lorsque f est un projecteur ?

b) On dit que f est nilpotent si il existe un entier naturel k tel que $f^k = 0$. Quelles sont les valeurs possibles pour $\det f$ lorsque f est nilpotent ?

c) On dit que f est involutif si $f \circ f = id$. Quelles sont les valeurs possibles pour $\det f$ lorsque f est involutif ?

d) On dit que f est une homothétie de rapport λ si, pour tout x, $f(x) = \lambda x$. Quel est le déterminant d'une homothétie de rapport λ ?
