Corrigé de l'Examen d'Algèbre Linéaire du mardi 21 mars 2017

Exercice I- [7 points]

1. On a $A^2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ et $A^3 = 0$, donc, comme $f^4 = u^2$ et $f^6 = u^3$, $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(f^4) = A^2$ et $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(f^6) = 0$ [*1pt*].

2. $\mathrm{rg}(u) = \mathrm{rg}(A) = 2$, car $C_3 = 0$ et (C_1, C_2) est libre (vecteurs canoniques e_2 et e_3). Par la formule du rang, $\dim\ker(u) = \dim\ker(f^2) = 1$.
On a $\det A = 0 = \det(u) = (\det f)^2$, donc $\det f = 0$ et $f \notin GL_3(\mathbb{R})$ [*2pts*].

3. Si $f(x) = 0$, alors $f(f(x)) = f(0) = 0$, donc $\ker f \subset \ker(f^2)$.
On a $\dim\ker f \geq 1$ car $f \notin GL_3(\mathbb{R})$, donc $1 \leq \dim\ker f \leq \dim\ker(f^2) = 1$ donne $\dim\ker f = \dim\ker(f^2)$, soit, avec l'inclusion, $\ker f = \ker(f^2)$ [*2pts*].

4. La propriété est vraie pour $k = 1$. Si elle l'est pour un $k \in \mathbb{N}^*$, soit $x \in \ker(f^{k+2})$. On a $f^{k+1}(f(x)) = 0$, donc $f(x) \in \ker(f^{k+1})$, soit $f(x) \in \ker(f^k)$. Donc $f^k(f(x)) = 0$ et $x \in \ker(f^{k+1})$, soit $\ker(f^{k+2}) \subset \ker(f^{k+1})$. Comme $f^{k+1}(x) = 0$ implique toujours $f^{k+2}(x) = 0$, on a l'inclusion réciproque, donc l'égalité $\ker(f^{k+2}) = \ker(f^{k+1})$. La propriété est aussi héréditaire, donc vraie par récurence pour tout k [*1pt*].

5. Ceci contredit $f^4 \neq 0$ et $f^6 = 0$, donc $\ker(f^4) = \ker(f^6) (= E)$, car on aurait $\ker(f^4) = \ker(f^5) = \ker(f^6)$. Finalement, f n'existe pas [*1pt*].

Exercice II- [8 points]

1.

$$\begin{aligned}
\chi_A &= \begin{vmatrix} -\lambda & 3/4 & 0 \\ 3/4 & -\lambda & 1 \\ 1/4 & 1/4 & -\lambda \end{vmatrix} = -\lambda\left(\lambda^2 - \frac{1}{4}\right) - \frac{3}{4}\begin{vmatrix} 3/4 & 1 \\ 1/4 & -\lambda \end{vmatrix} \\
&= -\lambda\left(\lambda^2 - \frac{1}{4}\right) - \frac{3}{4}\left(-\frac{3\lambda}{4} - \frac{1}{4}\right) = -\lambda^3 + \frac{13}{16}\lambda + \frac{3}{16} \\
&= -(\lambda - 1)\left(\lambda^2 + \lambda + \frac{3}{16}\right) = -(\lambda - 1)\left(\lambda + \frac{3}{4}\right)\left(\lambda + \frac{1}{4}\right),
\end{aligned}$$

donc $\mathrm{sp}(A) = \{1, -1/4, -3/4\}$. A a trois valeurs propres distinctes, donc A est diagonalisable (et les sous-espaces propres sont des droites) [*2pts*].

2. • $A\begin{pmatrix} 12 \\ 16 \\ 7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 48/4 \\ 36/4 + 7 \\ 12/4 + 16/4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 12 \\ 16 \\ 7 \end{pmatrix}$, donc $(12, 16, 7) \in E_1(A)$.

• $A\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3/4 \\ -3/4 \\ 0 \end{pmatrix} = -\frac{3}{4}\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, donc $(-1, 1, 0) \in E_{-3/4}(A)$.

• $A\begin{pmatrix} -3 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3/4 \\ -9/4 + 2 \\ -3/4 + 1/4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3/4 \\ -1/4 \\ -2/4 \end{pmatrix} = -\frac{1}{4}\begin{pmatrix} -3 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$, donc $(-3, 1, 2) \in E_{-1/4}(A)$.

On a trois vecteurs propres associés à trois valeurs propres distinctes, donc ils sont libres. Donc $P \in GL_3(\mathbb{R})$ et elle vérifie $P^{-1}AP = D = \text{diag}(1, -3/4, 1/4)$ [*2pts*].

3. a) $\Phi \in \mathcal{L}(\mathcal{M}_3(\mathbb{R}))$, donc Φ est continue [*1pt*].

b) [*3pts*] On a $D^n = \text{diag}\,(1, (-3/4)^n, (1/4)^n) \to \text{diag}(1, 0, 0) = \Delta$ par les suites coordonnées dans la base des $E_{i,j}$. Donc, $A^n = \Phi(D^n) \to Q = P\Delta P^{-1}$.
On a $Q^2 = Q$, donc q est un projecteur. C'est celui d'image $E_1(A)$ et de noyau $E_{-3/4}(A) \oplus E_{-1/4}(A)$.
On a $q(12, 16, 7) = (12, 16, 7)$ et $q(-1, 1, 0) = q(-3, 1, 2) = 0$. Il vient $q(1, 0, 0) = q(0, 1, 0)$ puis $2q(0, 0, 1) = 2q(1, 0, 0)$. Cela donne $35q(1, 0, 0) = (12, 16, 7)$. Finalement, $Q = \frac{1}{35}\begin{pmatrix} 12 & 12 & 12 \\ 16 & 16 & 16 \\ 7 & 7 & 7 \end{pmatrix}$.

Exercice III- **[4 points]**

$$\chi_u(\lambda) = \begin{vmatrix} 1-\lambda & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1-\lambda & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 1-\lambda & 0 \\ 2 & 0 & 0 & 1-\lambda \end{vmatrix} = (1-\lambda)\begin{vmatrix} 1-\lambda & 2 & 0 \\ 2 & 1-\lambda & 0 \\ 0 & 0 & 1-\lambda \end{vmatrix} - 2\begin{vmatrix} 0 & 0 & 2 \\ 1-\lambda & 2 & 0 \\ 2 & 1-\lambda & 0 \end{vmatrix}$$
$$= (1-\lambda)^2[(1-\lambda)^2 - 4] - 4[(1-\lambda)^2 - 4] = (1+\lambda)^2(3-\lambda)^2$$

puis $A+I_4 = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ est de rang 2, avec $c_1 = c_4$ et $c_2 = c_3$, donc $E_{-1}(A) = \text{vect}(e_1, e_2)$

où $e_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}(1, 0, 0, -1)$ et $e_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}(0, 1, -1, 0)$ et $A-3I_4 = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & -2 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & -2 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}$ est de rang 2, avec $c_1 = -c_4$ et $c_2 = -c_3$, donc $E_5(A) = \text{vect}(e_3, e_4)$ où $e_3 = \frac{1}{\sqrt{2}}(1, 0, 0, 1)$ et $e_4 = \frac{1}{\sqrt{2}}(0, 1, 1, 0)$.
$\mathcal{C} = (e_1, e_2, e_3, e_4)$ est une base orthonormale de $\mathbb{R}^4$, dans laquelle $M_{\mathcal{C}}(u) = \text{diag}(-1, -1, 3, 3)$.
Définissons p par $M_{\mathcal{C}}(p) = \text{diag}(1, 1, 0, 0)$ et q par $M_{\mathcal{C}}(q) = \text{diag}(0, 0, 1, 1)$: alors $u = -p + 3q$, p et q sont des projecteurs, avec $p + q = id_E$ et $pq = qp = 0$.
On a donc $p = \frac{-u+3id_E}{4}$ et $q = \frac{u+id_E}{4}$, ce qui conduit à leurs matrices canoniquement associées $P = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ et $Q = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Exercice IV- **[10 points]**

1. Pour Jacobi, $A = M - N$ avec $M = \alpha I_3$ et $N = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -\gamma \\ 0 & 0 & -\beta \\ 0 & -\delta & 0 \end{pmatrix}$ donc $J = M^{-1}N$, soit

$\boxed{J = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -\gamma/\alpha \\ 0 & 0 & -\beta/\alpha \\ 0 & -\delta/\alpha & 0 \end{pmatrix}}$ [*1pt*].

Pour Gauss-Seidel, $A = M - N$ avec $M = \begin{pmatrix} \alpha & 0 & 0 \\ 0 & \alpha & 0 \\ 0 & \delta & \alpha \end{pmatrix}$ et $N = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -\gamma \\ 0 & 0 & -\beta \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$. On calcule

M^{-1} en résolvant $MX = X'$, soit $\left\{ \begin{array}{l} \alpha x = x' \\ \alpha y = y' \\ \delta y + \alpha z = z' \end{array} \right.$, c'est-à-dire $\left\{ \begin{array}{l} x = x'/\alpha \\ y = y'/\alpha \\ z = -\delta/\alpha^2 y' + z'/\alpha \end{array} \right.$, donc

$$M^{-1}N = \begin{pmatrix} 1/\alpha & 0 & 0 \\ 0 & 1/\alpha & 0 \\ 0 & -\delta/\alpha^2 & 1/\alpha \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & -\gamma \\ 0 & 0 & -\beta \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \boxed{\begin{pmatrix} 0 & 0 & -\gamma/\alpha \\ 0 & 0 & -\beta/\alpha \\ 0 & 0 & \beta\delta/\alpha^2 \end{pmatrix} = G} \ [\textit{1pt}]$$

2. $\chi_J(\lambda) = \det(J - \lambda I) = \begin{vmatrix} -\lambda & 0 & 0 \\ 0 & -\lambda & -\frac{\beta}{\alpha} \\ 0 & -\frac{\delta}{\alpha} & -\lambda \end{vmatrix} = (-\lambda)\left(\lambda^2 - \frac{\beta\delta}{\alpha^2}\right)$ donc

$$\boxed{\mathrm{sp}(J) = \left\{ \begin{array}{ll} \left\{0, \pm\frac{\sqrt{\beta\delta}}{\alpha}\right\} & \text{si } \beta\delta \geq 0 \\ \left\{0, \pm i\frac{\sqrt{-\beta\delta}}{\alpha}\right\} & \text{si } \beta\delta < 0. \end{array} \right.}$$

La méthode de Jacobi converge si $\rho(J) < 1$. Or $\rho(J) = \frac{\sqrt{|\beta\delta|}}{|\alpha|}$. Il y a donc convergence si $\boxed{|\beta\delta| < \alpha^2}$.

$\chi_G(\lambda) = \det(G - \lambda I_3) = \begin{vmatrix} -\lambda & 0 & -\gamma/\alpha \\ 0 & -\lambda & -\beta/\alpha \\ 0 & 0 & \beta\delta/\alpha^2 - \lambda \end{vmatrix} = \lambda^2\left(\frac{\beta\delta}{\alpha^2} - \lambda\right)$ donc $\boxed{\mathrm{sp}(G) = \left\{0, \frac{\beta\delta}{\alpha^2}\right\}}$. La méthode de Gauss-Siedel converge si $\rho(G) < 1$. Or $\rho(G) = \frac{|\beta\delta|}{\alpha^2}$, donc la méthode de Jacobi converge si $\boxed{|\beta\delta| < \alpha^2}$ [*2pts*].

3. On a $\rho(G) = (\rho(J))^2$. Si $\rho(J) < 1$, alors $\rho(G) < \rho(J) < 1$ donc si Jacobi converge, Gauss-Siedel converge encore plus vite. Réciproquement, si Gauss-Siedel diverge, alors $\rho(G) > 1$ et $\rho(J) = \sqrt{\rho(G)} > 1$ aussi et Jacobi diverge aussi [*2pts*].

4. a) [*2pts*] $A = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 1 \\ 0 & 1 & 4 \end{pmatrix}$; $J = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1/4 \\ 0 & -1/4 & 0 \end{pmatrix}$ et $M^{-1} = \frac{1}{4}I_3$. On a donc $x^{(1)} = \frac{1}{4}b = \begin{pmatrix} 1/4 \\ 2/4 \\ 3/4 \end{pmatrix}$; $x^{(2)} = \begin{pmatrix} 0 + 1/4 \\ -3/16 + 2/4 \\ -1/8 + 3/4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/4 \\ 5/16 \\ 5/8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.25 \\ 0.3125 \\ 0.625 \end{pmatrix}$ et $x^{(3)} = \begin{pmatrix} 0 + 1/4 \\ -5/32 + 16/32 \\ -5/64 + 48/64 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/4 \\ 11/32 \\ 43/64 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.25 \\ 0.34375 \\ 0.671875 \end{pmatrix}$.

Pour Gauss-Siedel, on a $G = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1/4 \\ 0 & 0 & 1/16 \end{pmatrix}$ et $M^{-1} = \begin{pmatrix} 1/4 & 0 & 0 \\ 0 & 1/4 & 0 \\ 0 & -1/16 & 1/4 \end{pmatrix}$. On a alors $x^{(1)} = M^{-1}b = \begin{pmatrix} 1/4 \\ 2/4 \\ 5/8 \end{pmatrix}$, $x^{(2)} = \begin{pmatrix} 0 + 1/4 \\ -5/32 + 1/2 \\ 5/8(5/16 + 1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/4 \\ 11/32 \\ 85/128 \end{pmatrix}$ et $x^{(3)} = \begin{pmatrix} 1/4 \\ 172/512 \\ 1365/2048 \end{pmatrix}$.

b) $\chi_A(\lambda) = \det(A - \lambda I_3) = \begin{vmatrix} 4 - \lambda & 0 & 0 \\ 0 & 4 - \lambda & 1 \\ 0 & 1 & 4 - \lambda \end{vmatrix} = (4-\lambda)((4-\lambda)^2 - 1) = (4-\lambda)(5-\lambda)(3-\lambda)$ donc $\boxed{\mathrm{sp}(A) = \{3; 4; 5\}}$. La matrice A est donc ici symétrique, définie positive. Donc, d'après le cours, la méthode de relaxation est convergente si, et seulement si $\boxed{w \in]0, 2[}$ [*2pts*].