Coefficients binomiaux

1. $(***)$ On appelle chemin une suite de segments de longueur 1, dirigés soit vers le haut, soit vers la droite.

1. Dénombrer tous les chemins allant d'un point $(0,0)$ d'un réseau carré à un point (n,n).En déduire que:
$$C_{2n}^n = \sum_{i=0}^n (C_n^i)^2 \quad \text{et} \quad (C_{2n}^n)^2 = \sum_{i=0}^n \frac{(2n)!}{(i!(n-i)!)^2}.$$
2. Par une méthode analogue, montrer que, pour $k \in \{0, 1, \cdots, n\}$:
$$C_{n+k}^n = \sum_{i=0}^k C_k^i C_n^{k-i}$$
3. Retrouver le résultat du (b) en développant de 2 façons différentes $(1+x)^k(1+x)^n$.

---

1. Pour aller de $(0,0)$ à (n,n), il faut faire exactement $2n$ pas : n vers le haut et n vers la droite. Les chemins de $(0,0)$ à (n,n) sont donc des $2n$-uplets contenant n "H" et n "D" et par conséquent, il y en a C_{2n}^n (on choisit la place des H par exemple).

On regarde après n pas (à la mi-temps !) combien on a fait alors de pas vers le haut : si on en a fait k ($k \in [\![0,n]\!]$), il en restera $n-k$ à faire. Ainsi,

$$\boxed{C_{2n}^n = \sum_{k=0}^n C_n^k C_n^{n-k} = \sum_{k=0}^n (C_n^k)^2.}$$

2. De même, pour aller de $(0,0)$ à (n,k), il faut $n+k$ pas, dont k vers le haut. On regarde après k pas combien on en a fait vers le haut : si on en a fait i ($i \in [\![0,k]\!]$), il en restera $k-i$ à faire. (On a bien $k-i \leq n$ car on a pris $k \leq n$). Ainsi,

$$\boxed{C_{n+k}^k = \sum_{i=0}^k C_k^i C_n^{k-i} \text{ pour } k \leq n.}$$

3. Par la formule du binôme de Newton, $(1+x)^k(1+x)^n = (1+x)^{n+k} = \sum\limits_{j=0}^{n+k} C_{n+k}^j x^j$. Mais on a aussi :

$$(1+x)^k(1+x)^n = \left(\sum_{p=0}^k C_k^p x^p\right)\left(\sum_{q=0}^n C_n^q x^q\right) = \sum_{j=0}^{n+k}\left(\sum_{(p,q);p+q=j} C_k^p C_n^q\right) x^j.$$

On a alors, en identifiant les coefficients de x^j : $C_{n+k}^j = \sum\limits_{p=0}^k C_k^p C_n^{j-p}$, en posant par convention $C_n^q = 0$ si $q < 0$.

Ainsi, en particulier, pour $j = k$, $\boxed{C_{n+k}^k = \sum_{p=0}^{k} C_k^p C_n^{k-p}}$.

---

2. ($**$) Montrer que, pour tout $p \geq 1$ et pour tout $n \geq p$, on a:

$$\sum_{k=p}^{n} C_k^p = C_{n+1}^{p+1} \quad \text{et} \quad \sum_{k=p}^{2p} C_k^p = C_{2p+1}^{p+1}.$$

On démontre la première formule par récurrence pour $n \geq p$.

• Pour $n = p$, $\sum\limits_{k=p}^{n} C_k^p = C_p^p = 1$ et $C_{p+1}^{p+1} = C_{n+1}^{p+1} = 1$.

• Si la formule est vraie au rang n, alors

$$\sum_{k=p}^{n+1} C_k^p = \sum_{k=p}^{n} C_k^p + C_{n+1}^p = C_{n+1}^{p+1} + C_{n+1}^p$$

par hypothèse de récurrence. Puis, par la formule de Pascal,

$$C_{n+1}^{p+1} + C_{n+1}^p = C_{n+2}^{p+1},$$

et la formule est bien vérifiée au rang $n + 1$.

Ainsi, $\boxed{\sum_{k=p}^{n} C_k^p = C_{n+1}^{p+1}}$ et en particulier, $\boxed{\sum_{k=p}^{2p} C_k^p = C_{2p+1}^{p+1}}$.

---

3. ($**$) A partir du développement de $(1 + x)^n$, calculer:

1.

$$\sum_{k=0}^{n} C_n^k \quad ; \quad \sum_{k=0}^{n} (-1)^k C_n^k \quad ; \quad \sum_{k=0}^{E(n/2)} C_n^{2k} \quad ; \quad \sum_{k=0}^{E((n-1)/2)} C_n^{2k+1}.$$

2.

$$\sum_{k=1}^{n} k \, C_n^k \quad ; \quad \sum_{k=2}^{n} k(k-1) C_n^k.$$

3.

$$\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k+1} C_n^k \quad ; \quad \sum_{k=0}^{n} (-1)^{k+1} \frac{1}{k+1} C_n^k.$$

On part de la formule du binôme de Newton $(1 + x)^n = \sum\limits_{k=0}^{n} C_n^k x^k \qquad (*)$.

1. Pour $x = 1$, $\boxed{\sum_{k=0}^{n} C_n^k = 2^n}$; pour $x = -1$, $\boxed{\sum_{k=0}^{n} C_n^k (-1)^k = 0}$.

On faisant la somme et la différence des 2 égalités précédentes, on a :

$$2^n = \sum_{k=0}^{n} C_n^k [1 + (-1)^k] = \sum_{k=0}^{n} C_n^k [1 - (-1)^k].$$

• Si k est pair, $1 + (-1)^k = 2$, $1 - (-1)^k = 0$.

• Si k est impair, $1 + (-1)^k = 0$, $1 - (-1)^k = 2$. Ainsi,

$$\boxed{\sum_{k=0}^{E(n/2)} C_n^{2k} = 2^{n-1}} \text{ et } \boxed{\sum_{k=0}^{E((n-1)/2)} C_n^{2k+1} = 2^{n-1}}$$

2. On dérive $(*)$ par rapport à x : $n(x+1)^{n-1} = \sum\limits_{k=1}^{n} C_n^k \, kx^{k-1}$ et pour $x = 1$, on a alors

$$\boxed{\sum_{k=1}^{n} k\, C_n^k = n\, 2^{n-1}}.$$

On dérive $(*)$ une deuxième fois : $n(n-1)(x+1)^{n-2} = \sum\limits_{k=2}^{n} C_n^k \, k(k-1)x^{k-1}$ et pour $x = 1$, on a alors

$$\boxed{\sum_{k=2}^{n} k(k-1)\, C_n^k = n(n-1)\, 2^{n-2}}.$$

3. On intègre $(*)$ entre 0 et u :

$$\int_0^u (1+x)^n \, dx = \left[\frac{(1+x)^{n+1}}{n+1}\right]_0^u = \frac{1}{n+1}\left[(1+u)^{n+1} - 1\right] = \sum_{k=0}^{n} C_n^k \, \frac{x^{k+1}}{k+1}.$$

Pour $u = 1$, on obtient $\boxed{\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k+1}\, C_n^k = \frac{1}{n+1}\,(2^{n+1} - 1)}$.

Pour $u = -1$, on obtient $\boxed{\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^{k+1}}{k+1}\, C_n^k = -\frac{1}{n+1}}$.

---

4. $(**)$ Soient $(u_n)_{n\geq 0}$ une suite arithmétique, $(A_i)_{i\geq 0}$ et $(B_i)_{i\geq 0}$ les suites définies par:

$$A_i = \sum_{k=0}^{n} (C_n^k)^i \quad \text{et} \quad B_i = \sum_{k=0}^{n} u_k (C_n^k)^i$$

1. Calculer A_0, A_1 et A_2.
2. Montrer que $B_i = \sum_{k=0}^{n} u_{n-k}(C_n^k)^i$ et en déduire une expression de B_i en fonction de A_i, u_0 et la raison r de la suite (u_n).
3. Calculer $\sum_{k=0}^{n}(ak+b)(C_n^k)^2$ et $\sum_{k=0}^{n} k(C_n^k)^2$.

---

1. $\boxed{A_0 = \sum\limits_{k=0}^{n} (C_n^k)^0 = n+1}$, $\boxed{A_1 = \sum\limits_{k=0}^{n} C_n^k = 2^n}$ d'après l'exercice 3,

$\boxed{A_2 = \sum\limits_{k=0}^{n} (C_n^k)^2 = C_{2n}^n}$ d'après l'exercice 1.

2. Dans $B_i = \sum\limits_{k=0}^{n} u_k (C_n^k)^i$, on fait le changement d'indice $p = n - k$ (qui donne $k = n - p$). On a alors $B_i = \sum\limits_{p=0}^{n} u_{n-p}(C_n^{n-p})^i = \sum\limits_{p=0}^{n} u_{n-p}(C_n^p)^i$ car $C_n^{n-p} = C_n^p$.

On a également $B_i = \sum\limits_{p=0}^{n} u_p (C_n^p)^i$ donc, en faisant la somme, on obtient :

$$2B_i = \sum_{p=0}^{n} (u_p + u_{n-p})(C_n^p)^i.$$

Si la suite (u_n) est arithmétique, $u_p = u_0 + pr$ et $u_{n-p} = u_0 + (n-p)r$.
On a donc $u_p + u_{n-p} = 2u_0 + nr$ et $B_i = \left(u_0 + \frac{nr}{2}\right) A_i$.

3. On applique ce qui précède à $u_0 = b$ et $r = a$. On a donc :

$$\boxed{\sum_{k=0}^{n} (ak+r)(C_n^k)^2 = \left(b + \frac{na}{2}\right) C_{2n}^n.}$$

Dans le cas particulier où $a = 1$ et $b = 0$, on trouve $\boxed{\sum_{k=0}^{n} k(C_n^k)^2 = \frac{n}{2} C_{2n}^n}$.

Combinatoire

5. $(*)$ Vingt chevaux sont au départ d'une course et on suppose qu'il n'y a pas d'ex-aequo.

1. Combien y-a-t-il de trios possibles?
2. Combien y-a-t-il de tiercés dans l'ordre possibles?

1. Pour le trio, il faut trouver 3 chevaux parmi 20 (sans ordre) :

$$\boxed{C_{20}^3 = \frac{20 \times 19 \times 18}{6} = 1140}.$$

2. Pour le tiercé, non seulement il faut les 3 chevaux, mais en plus, il faut l'ordre. Avec les mêmes chevaux, il y a $3! = 6$ ordres possibles donc le nombre de tiercés est :

$$\boxed{A_{20}^3 = 20 \times 19 \times 18 = 6840}.$$

6. $(**)$ De combien de manière peut-on classer 4 individus en supposant qu'il puisse y avoir des ex-aequo ?

La difficulté vient ici du fait qu'il puisse y avoir des ex-aequo.
• Sans ex-aequo : il y a $4! = 24$ classements possibles.
• Tous ex-aequo : il n'y a qu'1 classement possible.
• 3 ex-aequo et 1 tout seul : on choisit le "tout seul" : $C_4^1 = 4$ choix possibles et il peut être tout seul devant ou tout seul derrière, d'où 8 classements.
• 2 ex-aequo et 2 tous seuls : on choisit les ex-aequo : il y a $C_4^2 = 6$ choix possibles. On choisit ensuite la place qu'ils occupent : 3 choix (premier deuxième ou troisième). Il reste alors à classer les 2 autres entre eux : 2 choix. On a donc dans ce cas 36 classements.
• 2 fois 2 ex-aequo : on choisit les 2 premiers : $C_4^2 = 6$ choix, les 2 autres sont alors imposés.

On a donc un total de 24+1+8+36+6, soit $\boxed{\text{75 classements différents de 4 personnes}}$.

7. $(*)$ Combien de mots différents peut-on écrire en permutant les lettres du mot "PIERRE"?

"PIERRE" contient 1 P, 1 I, 2 E et 2 R. Il faut placer ces lettres aux 6 places d'un mot (ayant un sens ou pas).

• On choisit la place du P : il y a C_6^1 choix possibles (choix d'1 place parmi 6).
• On choisit la place du I : il reste C_5^1 choix possibles (choix d'1 place parmi 5).
• On choisit la place des 2 R : il reste C_4^2 choix possibles (choix de 2 places parmi 4.
• La place des E est alors imposée : en effet il reste $C_2^2 = 1$ seul choix possible (2 places pour 2 lettres).

On a donc $C_6^1 \times C_5^1 \times C_4^2 \times C_2^2 = 6 \times 5 \times 6 \times 1$, soit $\boxed{\text{180 mots possibles}}$.

---

8. (∗∗) $2n$ personnes doivent s'asseoir autour d'une table ronde.

1. De combien de façons différentes peuvent-elles être placées?
2. Si on a n hommes et n femmes, de combien de façons différentes peuvent-ils être placés en respectant l'alternance?

---

1. On obtient la même configuration par rotation (chaque personne a même voisin de droite et même voisin de gauche). Ainsi, s'il y a $2n$ places, il y a $2n$ configurations identiques.
Première méthode : on numérote les individus (par exemple, selon leur ordre d'arrivée). À chaque individu, on associe une chaise et une seule (celle qu'il choisit) : il y a alors $(2n)!$ possibilités mais chaque configuration est obtenue $2n$ fois.

$$\boxed{\text{nombre de configurations différentes : } \frac{(2n)!}{2n} = (2n-1)!.}$$

Deuxième méthode : pour éviter les configurations identiques, on fixe la première personne sur la chaise qu'il a choisie et pour les autres, on a $\boxed{(2n-1)! \text{ possibilités}}$.

2. On respecte l'alternance.
Première méthode : Le premier a $2n$ choix, puis les places des hommes et des femmes sont imposées : n possibles pour ceux de l'autre sexe, d'où $n!$ possibilités et $n-1$ possibles pour ceux du même sexe, d'où $(n-1)!$ possibilités. Finalement, $2n \times (n!) \times (n-1)!$ possibilités, dont $2n$ qui donnent la même configuration.

$$\boxed{\text{nombre de configurations respectant l'alternance : } n!(n-1)!}$$

Deuxième méthode : Une fois le premier placé, il reste $n!$ possibilités pour les personnes de l'autre sexe et $(n-1)!$ pour celle du même sexe. D'où $\underline{n!(n-1)!}$ configurations directement.

---

9. (∗∗) On effectue n contrôles successifs sur une population de N individus, un individu pouvant être contrôlé plusieurs fois.

1. Décrire l'ensemble Ω des résultats possibles. Que vaut card Ω ?
2. Trouver le nombre de résultats pour lesquels un individu est contrôlé:
   (a) k fois ($k \leq n$) ?
   (b) m fois au cours des r premiers contrôles ($m \leq r \leq n$) ?
   (c) pour la s-ième fois au t-ième contrôle ($s \leq t \leq n$)?

1. À chaque contrôle, on associe la personne contrôlée (N choix à chaque fois). Il y a n contrôles, donc un résultat est un n-uplet avec à chaque place N choix possibles. Ainsi

$$\boxed{\text{card}\Omega = N^n}.$$

2. (a) On choisit les k places parmi n où notre individu est contrôlé : il y a pour cela C_n^k choix. On complète alors les $n-k$ autres places à l'aide des $N-1$ autres individus : $(N-1)^{n-k}$ choix. Ainsi $\boxed{C_n^k(N-1)^{n-k} \text{ possibilités pour 1 individu donné d'être contrôlé } k \text{ fois}}$.

(b) On choisit parmi les r premiers contrôles, les m où sera contrôlé l'individu (C_m^r choix). Sur les $m-r$ autres contrôles, il peut y avoir l'un quelconque des $N-1$ autres individus ($(N-1)^{r-m}$ choix) et sur les $n-r$ derniers contrôles, il peut y avoir n'importe qui (N^{n-r} choix).

Ainsi, on a $\boxed{C_r^m(N-1)^{r-m}N^{n-r} \text{ résultats}}$ où 1 individu est contrôlé m fois au cours des r premiers contrôles.

(c) Le t-ième contrôle est déterminé. Parmi les $t-1$ premiers contrôles, on choisit les $s-1$ contrôles de l'individu (C_{t-1}^{s-1} choix). On complète alors les $(t-1)-(s-1)$ autres avec les $N-1$ autres individus ($(N-1)^{t-s}$ choix), puis les $n-t$ derniers contrôles avec n'importe qui (N^{n-t} choix).

Ainsi, on a $\boxed{C_{t-1}^{s-1}(N-1)^{t-s}N^{n-t} \text{ résultats}}$ où 1 individu est contrôlé pour la s-ième fois au t-ième contrôle.

---

10. ($*$) Combien y-a-t-il de nombres écrits avec 3 chiffres tous différents pris parmi les chiffres:

1. $\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$?
2. $\{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$?

---

1. Les nombres ont des chiffres tous différents donc il y en a $A_9^3 = 9 \times 8 \times 7$, soit

$$\boxed{504 \text{ nombres}}.$$

2. Il y a A_{10}^3 nombres formés de 3 chiffres différents mais parmi ceux-ci, il y en a A_9^2 qui commencent par “0” et qui n'ont en fait que 2 chiffres, soit $A_{10}^3 - A_9^2 = 10 \times 9 \times 8 - 9 \times 8$ choix, c'est-à-dires $\boxed{648 \text{ nombres}}$.

---

11. ($* * *$) Déterminer le cardinal de l'ensemble des nombres de 4 chiffres que l'on peut écrire avec les 6 chiffres 1, 2, 3, 4, 5, 6 et calculer la somme de tous les nombres de cet ensemble dans les cas suivants:

1. un chiffre peut être utilisé plusieurs fois ;
2. les 4 chiffres doivent être distincts.

---

1. Pour chacune des 4 places, on a 6 chiffres possibles, d'où $6^4 = 1296$ nombres.

Les chiffres sont tous écrits le même nombre de fois à la place des unités, des dizaines, des centaines et des milliers. Comme il y a en tout 6^4 nombre, ces chiffres sont écrit $\frac{6^4}{6} = 6^3 = 216$ fois à chacune des places.

Pour faire la somme de ces nombres, tout ce passe comme si on avait 216 fois 1111,... et 216 fois 6666. D'où $S_1 = 216 \times 1111 \times [1 + 2 + \cdots + 6] = 216 \times 1111 \times 21$, soit

$$\boxed{S_1 = 5\ 039\ 496}.$$

2. Il y a $A_6^4 = 6 \times 5 \times 4 \times 3 = 360$ nombres avec 4 chiffres tous différents parmi $[\![1, 6]\!]$. Chaque chiffre est écrit $\frac{360}{6} = 60$ fois donc $S_2 = 60 \times 1111 \times 21$, soit $\boxed{S_2 = 1\ 399\ 860}$.

---

12. ($*$) Combien de mots de 7 lettres toutes différentes peut-on former :

1. avec les lettres A, B, C, D, E, F, G ?
2. avec les lettres A, B, C, D, E, F, G et tels que les lettres C, D et E soient toujours ensemble:
   (a) dans cet ordre ;
   (b) dans un ordre quelconque.

---

1. On a 7 lettres différentes à ordonner pour faire un mot de 7 lettres (ayant un sens ou pas). Il y a donc 7! ordres possibles, soit $\boxed{\text{5 040 mots différents}}$.

2. (a) On a CDE indissociable : tout ce passe comme si ceci était 1 lettre : on a alors à ordonner 5 lettres, soit $\boxed{5! = 120 \text{ mots contenant la chaîne "CDE"}}$.

(b) Les lettres "CDE" doivent être ensemble, mais peuvent être permutées. Pour chaque mot de (a), il y en a donc $3! = 6$ dans (b). D'où ici $\boxed{\text{720 mots}}$.

---

13. ($**$) Une association de 12 hommes et 8 femmes désire former un comité de 5 personnes dans lequel doivent se trouver au moins 2 hommes et 2 femmes.

1. De combien de façon peut-on former ce comité?
2. Même question en supposant que Monsieur A et Madame B ne peuvent faire partie simultanément du comité.

---

1. Le comité doit se composer de 3 hommes et 2 femmes ou bien de 2 hommes et 3 femmes.
• <u>3 hommes et 2 femmes</u> : $C_{12}^3 \times C_8^2$ choix ;
• <u>2 hommes et 3 femmes</u> : $C_{12}^2 \times C_8^3$ choix ;
d'où finalement, $220 \times 28 + 66 \times 56$, soit $\boxed{\text{9 856 comités possibles}}$.

2. Parmi les comités de 1., il faut enlever ceux qui contiennent Monsieur A parmi les hommes et Madame B parmi les femmes. Nombres de tels comités :
• Dans le premier cas, il y en a $C_{11}^2 \times C_7^1 = 55 \times 7$;
• dans le deuxième cas, il y en a $C_{11}^1 \times C_7^2 = 11 \times 21$;
d'où 616 comités exclus, et $9\ 856 - 616$, soit $\boxed{\text{8 840 comités possibles}}$.

---

14. ($**$) Déterminer le nombre d'applications surjectives de $\{1, 2, 3, 4, 5\}$ dans $\{1, 2, 3, 4\}$.

Tout élément de $B = [\![1,4]\!]$ doit avoir un antécédant dans $A = [\![1,5]\!]$ donc, nécessairement 2 éléments de A ont même image dans B et les autres ont tous une image distincte.
• On choisit les éléments de A ayant même image : $C_5^2 = 10$ choix.
• On choisit l'image commune des 2 éléments précédents : $C_4^1 = 4$ choix.
• Pour les 3 autres éléments de A, il reste alors 3 images distinctes, soit $3! = 6$ choix.

Finalement, il y a $10 \times 4 \times 6$, soit $\boxed{240 \text{ surjections de } [\![1,5]\!] \text{ sur } [\![1,4]\!]}$.

---

15. (∗∗) Dans un jeu de 32 cartes, on tire au hasard 6 cartes.

1. Quel est le nombre de tirages possibles ?
2. Dans combien de cas obtient-on entre autre 2 dames et 3 trèfles exactement?

---

1. il y a $\boxed{C_{32}^6 \text{ tirages possibles}}$ de 6 cartes parmi 32.

2. Il faut distinguer 2 cas suivant que l'on a la dame de trèfle ou pas.
• <u>Avec la dame de trèfle :</u> on doit avoir 1 autre dame ($C_3^1 = 3$ choix), 2 autres trèfles ($C_7^2 = 21$ choix) et 2 autres cartes parmi $32 - 8 - 3 = 21$ qui ne soient ni des dames, ni des trèfles ($C_{21}^2 = 210$ choix).
• <u>Sans la dame de trèfle :</u> on doit avoir 2 dames parmi 3 ($C_3^2 = 3$ choix), 3 trèfles parmi 7 ($C_7^3 = 35$ choix) et 1 autre carte parmi $32 - 8 - 3 = 21$ qui ne soit ni une dame, ni un trèfle ($C_{21}^1 = 21$ choix).

On a donc ici $3 \times 21 \times 210 + 3 \times 35 \times 21$, soit $\boxed{15\,435 \text{ cas}}$.

---

16. (∗∗) Une main est un ensemble de 13 cartes prises dans un jeu de 52. Combien y-a-t-il de mains contenant:

1. au moins un pique ?
2. au plus un pique ?
3. exactement 1 as et au plus 2 piques ?

---

1. $\text{card}\Omega = C_{52}^{13}$ et $\text{card}(\overline{A}) = C_{39}^{13}$ donc $\boxed{\text{card}(A) = C_{52}^3 - C_{39}^{13}}$.

2. $B = \overline{A} \cup B_1$ donc $\boxed{\text{card}B = C_{39}^{13} + C_{13}^1 \times C_{39}^{12}}$ (où B_1:"1 pique").

3. Il faut distinguer 2 cas : l'as de pique (et au plus 1 autre pique) ou bien 1 autre as (et au plus 2 piques autres que l'as). Les autres cartes sont prises parmi les 36 qui ne sont ni des as, ni des piques. Donc $\boxed{\text{card}C = C_{36}^{12} + C_{12}^1 \times C_{36}^{11} + C_3^1 \times (C_{36}^{12} + C_{12}^1 \times C_{36}^{11} + C_{12}^2 \times C_{36}^{10})}$.

Calculs classiques de probabilités

---

17. (∗) Dans une course de chevaux de 20 partants, quelle est la probabilité d'avoir:

1. le tiercé dans l'ordre ?
2. le tiercé dans le désordre ?

3. ni l'ordre, ni le désordre ?

Un résultat est une arrivée de 3 chevaux dans l'ordre, donc

$$\text{card}\Omega = A_{20}^3 = 20 \times 19 \times 18 = 6\ 840.$$

1. Il n'y a qu'1 seul tiercé possible dans l'ordre, donc $\boxed{p_1 = \frac{1}{A_{20}^3} \approx 1,46.10^{-3}}$.

2. Il y a $3! = 6$ façons de permuter les 3 chevaux, mais une correspond à l'ordre, et les 5 autres au désordre. Ainsi, $\boxed{p_2 = \frac{5}{A_{20}^3} = \frac{1}{1\ 368} \approx 7,31.10^{-4}}$.

3. On a ni l'ordre ni le désordre dans tous les autres cas, soit $\boxed{p_3 = 1 - p_1 - p_2 \approx 0,9991}$.

---

18. (∗∗) Quelle est la probabilité d'avoir les 6 bons numéros sur une grille simple de loto ? D'en avoir exactement 3 ?

Dans une grille de loto, il faut donner 6 numéros parmi 49, l'ordre n'ayant pas d'importance. Ainsi, $\text{card}\Omega = C_{49}^6$.

Il n'y a qu'une grille simple qui donne les 6 bons numéros, donc la probabilité est

$$\boxed{p_1 = \frac{1}{C_{49}^6} \approx 7,15.10^{-8}.}$$

Pour avoir exactement 3 bons numéros, il faut en choisir 3 parmi 6 (C_6^3 choix), et les 3 autres parmi les $49 - 6$ mauvais (C_{43}^3 choix), donc finalement ici $\boxed{p_2 = \dfrac{C_6^3 \times C_{43}^3}{C_{49}^6}}$.

---

19. (∗∗) On prend 5 cartes au hasard dans un jeu de 32.

1. Quelle est la probabilité qu'elles soient toutes de hauteurs différentes ?
2. Quelle est la probabilité d'avoir un full ? (c'est-à-dire 2 cartes d'une même hauteur et les 3 autres cartes d'une autre même hauteur).

Il y a C_{32}^5 façons de choisir 5 cartes parmi 32 (l'ordre des cartes n'a pas d'importance) ; donc $\text{card}\Omega = C_{32}^5$.

1. Il y a 8 hauteurs différentes. On choisit les 5 hauteurs, puis, dans chaque hauteur, on a 4 cartes possibles. Donc $\boxed{p_1 = \frac{C_8^5 \times 4^5}{C_{32}^5} \approx 0,507}$.

2. On choisit la hauteur du brelan ($C_8^1 = 8$ choix), puis les 3 cartes qui le composent parmi 4 ($C_4^3 = 4$ choix). On choisit ensuite la hauteur de la paire (il n'en reste que 7 possibles), puis les 2 cartes qui la composent ($C_4^2 = 6$ choix). On a alors

$$\boxed{p_2 = \frac{8 \times 4 \times 7 \times 6}{C_{32}^5} \approx 0,012.}$$

---

20. (∗) Dans un jeu de 32 cartes, on a remplacé une autre carte que l'as de pique par un autre as de pique. Une personne prend au hasard 3 cartes du jeu. Quelle est la probabilité qu'elle s'aperçoive de la supercherie ?

Il y a C_{32}^3 façons de choisir 3 cartes parmi 32 (l'ordre des cartes n'a pas d'importance) ; donc card$\Omega = C_{32}^3$.

Pour s'apercevoir de la supercherie, il faut tirer les 2 as de pique du paquet et une autre carte parmi les 30 autres, soit 30 choix. Ainsi, $\boxed{p = \frac{30}{C_{32}^3} = \frac{30\times 6}{32\times 31\times 30} = \frac{3}{16\times 31} \approx 6,05.10^{-3}}$.

---

21. (**) On distribue 8 cartes d'un jeu de 32. Calculer les probabilités d'avoir:

1. exactement 2 cœurs et au moins un valet ;
2. au moins un cœur et au moins un valet ;
3. exactement un cœur et au moins un valet.

Il y a C_{32}^8 façons de choisir 8 cartes parmi 32 (l'ordre des cartes n'a pas d'importance) ; donc card$\Omega = C_{32}^8$.

1. Soit A l'événement "au moins un valet" et B "exactement 2 cœurs". On cherche $P(A\cap B)$. On a $P(B) = P(A\cap B) + P(\overline{A}\cap B)$ avec card$B = C_8^2 \times C_{24}^6$ et card$(\overline{A}\cap B) = C_7^2 \times C_{21}^6$. On a alors $\boxed{P(A\cap B) = \dfrac{C_8^2\times C_{24}^6 - C_7^2\times C_{21}^6}{C_{32}^8}}$.

2. Soit C l'événement "au moins un cœur". On cherche $P(C\cap A)$. On a

$$P(C\cap A) = 1 - P(\overline{C}\cup\overline{A}) = 1 - P(\overline{C} - P(\overline{A}) + P(\overline{C}\cap\overline{A})$$

avec card$\overline{C} = C_{24}^8$ (pas de cœur), card$\overline{A} = C_{28}^8$ (pas de valet) et card$(\overline{C}\cap\overline{A}) = C_{21}^8$ (ni cœur, ni valet).

Ainsi, $\boxed{p_2 = 1 - \frac{C_{24}^8 + C_{28}^8 - C_{21}^8}{C_{32}^8} \approx 0,654}$.

3. On décompose en deux suivant qu'on a le valet de cœur ou pas.
Avec le valet de cœur, on a pas d'autre cœur, donc C_{24}^7 choix pour les autres cartes.
Sans le valet de cœur, on a 7 choix possibles pour le cœur, puis pour les 7 autres cartes $C_{24}^7 - C_{21}^7$ choix. On a donc $p_3 = \frac{C_{24}^7 + 7(C_{24}^7 - C_{21}^7)}{C_{32}^8}$.

---

22. (**) On lance 4 dés et on considère les éléments A_i, $i\in\{1,2,3,4\}$ associés au nombre de faces distinctes obtenues. Calculer les $P(A_i)$.

Ω est l'ensemble des résultats des 4 dés. card$\Omega = 6^4$.
Soit A_1 l'événement "on obtient 1 seule face". On a 6 choix pour cette face, donc

$$\boxed{P(A_1) = \frac{6}{6^4} = \frac{1}{216} \approx 4,63.10^{-3}.}$$

Soit A_4 l'événement "on obtient 4 faces différentes". On a A_6^4 choix pour ces faces, donc $\boxed{P(A_4) = \frac{6\times5\times4\times3}{6^4} = \frac{60}{216} \approx 0,278}$.

Soit A_3 l'événement "on obtient 3 faces différentes". On choisit les 2 dés qui ont la même face ($C_4^2 = 6$ choix), puis cette face (6 choix). Il reste alors 5 faces pour le 3-ième dé et 4 pour le 4-ième donc $\boxed{P(A_3) = \frac{6\times6\times5\times4}{6^4} = \frac{120}{216} \approx 0,556}$.

Soit enfin A_2 l'événement "on obtient 2 faces différentes". On peut avoir 2 fois 2 dés avec 2 faces identiques (il y a alors 6 choix de faces pour le premier dé, 3 dés possibles pour aller avec, puis 5 choix de faces pour les autres), ou bien 3 dés donnant la même face (il y a alors $C_4^3 = 4$ choix pour ces dés, 6 choix pour leur face et 5 pour la face du dernier dé). On a donc $\boxed{P(A_2) = \frac{6\times3\times5+4\times6\times5}{6^4} = \frac{35}{216} \approx 0,162}$.

Remarque : on a bien $P(A_1) + P(A_2) + P(A_3) + P(A_4) = 1$.

---

23. $(*)$ Est-il plus probable d'obtenir au moins 1 as en lançant 4 fois un dé ou au moins 1 double as en lançant 24 fois 2 dés ?

---

2 expériences différentes et 2 événements différents associés à celle-ci.
Expérience 1 : lancer d'un dé 4 fois de suite. $\Omega_1 = \{(x_1, x_2, x_3, x_4)\ ;\ 1 \leq x_i \leq 6\}$, A_1 : "faire au moins un 6". Tous les résultats ont même chance de se réaliser donc $P(A_1) = \frac{\text{card}A_1}{\text{card}\Omega_1}$.
Il est plus pratique de déterminer $P(\overline{A_1})$ où $\overline{A_1}$ est l'événement "pas de 6".
$P(\overline{A_1}) = 1 - P(A_1)$ avec $\overline{A_1} = \{(x_1, x_2, x_3, x_4)\ ;\ 1 \leq x_i \leq 5\}$.
$P(\overline{A_1}) = \frac{\text{card}\overline{A_1}}{\text{card}\Omega}$ avec $\text{card}\overline{A_1} = 5^4$ et $\text{card}\Omega_1 = 6^4$ d'où $P(\overline{A_1}) = \left(\frac{5}{6}\right)^4$ et

$$\boxed{P(A_1) = 1 - \left(\frac{5}{6}\right)^4 \approx 0,518.}$$

Expérience 2 : lancer de 2 dés 24 fois de suite.

$$\Omega_2 = \{((x_1, y_1), \cdots, (x_{24}, y_{24}))\,,\ 1 \leq x_i,\ y_i \leq 6\},$$

A_2 : "faire au moins un double 6". Tous les résultats ont même chance de se réaliser donc $P(A_2) = \frac{\text{card}A_2}{\text{card}\Omega_2}$.
Il est plus pratique de déterminer $P(\overline{A_2})$ où $\overline{A_2}$ est l'événement "pas de double 6".
$P(\overline{A_2}) = 1 - P(A_2)$ avec $\overline{A_2} = \{((x_1, y_1), \cdots (x_{24}, y_{24}))\ ;\ (x_i, y_i) \neq (6, 6)\}$.
On a 35 choix pour chaque (x_i, y_i) donc $\text{card}\overline{A_2} = (35)^{24}$.

Finalement $P(\overline{A_2}) = \frac{\text{card}\overline{A_2}}{\text{card}\Omega_2} = \left(\frac{35}{36}\right)^{24}$ et

$$\boxed{P(A_2) = 1 - P(\overline{A_2}) = 1 - \left(\frac{35}{36}\right)^{24} \approx 0,491.}$$

Conclusion : il est donc plus probable de faire au moins un 6 en 4 lancers.

---

24. $(*)$ Au poker d'as (5 dés), quelle est la probabilité d'avoir un brelan ?(c'est-à-dire 3 figures identiques, les 2 autres différentes entre elles et différentes des précédentes)

On a ici card$\Omega = 6^5$. On choisit les dés ayant la même face ($C_5^3 = 10$ choix), puis on choisit cette face (6 choix), puis la face du 4-ième dé (5 choix) et la face du 5-ième dé (4 choix). On a donc $\boxed{p = \frac{10\times6\times5\times4}{6^5} = \frac{25}{162} \approx 0,154}$.

---

25. ($***$) Un point P se déplace dans le plan. A chaque instant, il a une probabilité p d'aller de (x,y) à $(x,y+1)$ et une probabilité q d'aller de (x,y) à $(x+1,y)$. ($x,y \in \mathbb{N}$ et $p+q=1$).

1. Quelle est la probabilité qu'en partant de $(0,0)$, le point P atteigne le point A (a,b) ?
2. Quelle est la probabilité qu'en partant de $(0,0)$, le point P atteigne le segment MN ; (M $(n,0)$; N (n,n)) ?

---

1. Pour aller de $(0,0)$ à $A(a,b)$, il faut qu'en $a+b$ pas, le point P ait fait a pas vers la droite et b vers le haut. Donc $\boxed{p_1 = C_{a+b}^a q^a p^b}$.

2. On décompose l'événement "atteindre le segment MN" en $n+1$ événements disjoints "atteindre le segment MN au point $N_k(n,k)$" où $0 \leq k \leq n$: $p_2 = \sum\limits_{k=0}^{n} P(N_k)$.
Pour atteindre le segment MN en $N_k(n,k)$, il faut qu'en $n+k$ pas, on soit en N_k, mais qu'en $n+k-1$ pas, on ne soit pas sur MN. Donc, le dernier pas est nécessairement horizontal et il reste à choisir $n-1$ pas horizontaux parmi $n-1+k$. Donc $\boxed{p_2 = \sum\limits_{k=0}^{n} C_{n-1+k}^{n-1} q^n p^k}$.

---

26. ($**$) 10 livres discernables sont rangés sur une étagère. Quelle est la probabilité pour que 3 livres donnés soient placés l'un à côté de l'autre ?

Les 3 livres étant l'un à côté de l'autre, dans un premier temps, c'est comme s'ils n'en formaient qu'un, donc 8! rangements. Mais les 3 livres peuvent être rangés entre eux de 3! façons.
On a donc $p = \frac{3!\times8!}{10!} = \frac{3\times2}{10\times9}$, soit $\boxed{p = \frac{1}{15} \approx 0,07}$.

---

27. ($**$) On a mélangé 10 paires de chaussettes et on choisit au hasard 4 chaussettes. Quelle est la probabilité d'obtenir :

1. 2 paires ?
2. au moins une paire ?
3. exactement une paire ?

Un résultat est ici un ensemble de 4 chaussettes parmi 20. Ainsi, card$\Omega = C_{20}^4 = \frac{20\times19\times18\times17}{4\times3\times2} = 15\times17\times19$.

1. Pour avoir 2 paires, il faut les choisir parmi 10, soit $C_{10}^2 = 45$ choix et $p_1 = \frac{45}{15\times17\times19} = \frac{3}{17\times19} \approx 0,00929$.

2. Pour ne pas avoir de paire, il faut choisir 4 paires parmi 10 ($C_{10}^4 = \frac{10\times9\times8\times7}{4\times3\times2} = 210$ choix) et dans chaque paire, on a 2 chaussettes possibles d'où $C_{10}^4 \times 2^4 = 210\times16$ façons de ne pas avoir de paire et $p_2 = 1 - \frac{C_{10}^4\times2^4}{C_{20}^4} \approx 0,306$.

3. On a au moins une paire si on a exactement 1 paire ou bien exactement 2 paires (probabilité p_1. Ainsi $p_2 = p_3 + p_1$ et $p_3 = p_2 - p_1 \approx 0,297$.

---

28. (**) Un domino porte 2 nombres de $\{0,1,2,3,4,5,6\}$, éventuellement identiques.

1. Combien y-a-t-il de dominos dans un jeu ?
2. Quelle est la probabilité que 2 dominos tirés au hasard soient compatibles ?
3. Quelle est la probabilité d'avoir au moins un double parmi 5 dominos tirés au hasard ?

---

1. Les dominos sont composés de 2 côtés, chacun marqué de 0 à 6 points. Il y a donc 7 "doubles" et $\frac{7\times 6}{2} = 21$ dominos dont les 2 côtés sont différents, soit un total de 28 dominos.

2. On a $C_{28}^2 = 14 \times 27$ choix possibles de 2 dominos. Pour que 2 dominos soient compatibles, il faut qu'ils aient un numéro en commun. On choisit le numéro en commun (7 choix), puis on choisit 2 dominos parmi les 7 qui comportent ce numéro, soit $C_7^2 = 21$ choix possibles.
Ainsi, $p_2 = \frac{7\times C_7^2}{C_{28}^2} = \frac{7\times 21}{14\times 27} = \frac{7}{18} \approx 0,39$.

3. On tire 5 dominos ici. Donc card$\Omega = C_{28}^5$. Pour ne pas avoir de double, il faut choisir les 5 dominos parmi les 21 dont les 2 côtés sont différents (C_{21}^5 choix) et $p_3 = 1 - \frac{C_{21}^5}{C_{28}^5} \approx 0,79$.

---

29. (*) Une urne contient N boules numérotées de 1 à N. On tire simultanément n de ces boules. Soit $k \in \{1,\cdots,N\}$.

1. Calculer la probabilité que tous les numéros tirés soient inférieurs ou égaux à k.
2. Calculer la probabilité que le plus grand des numéros tirés soit égal à k.
3. En déduire que $\sum_{k=n}^N C_{k-1}^{n-1} = C_N^n$.

Un résultat est un ensemble de n boules parmi N donc card$\Omega = C_N^n$.

1. Pour que tous les numéros tirés soient inférieurs ou égaux à k, il faut tirer les n boules parmi les k "premiers numéros". Ainsi $p_1 = \frac{C_k^n}{C_N^n}$.

2. Le plus grand numéro tiré est k, donc le numéro k est tiré et il faut tirer les $n-1$ autres boules parmi les $k-1$ premiers numéros. Ainsi $p_2 = \frac{C_{k-1}^{n-1}}{C_N^n}$.

3. On décompose Ω en événements disjoints B_k "le plus grand numéro tiré est k. Il y a n boules tirées donc le plus petit k possible est n et le plus grand k possible est N. On a alors $P(B_k)$ donné par 2 et $\sum\limits_{k=n}^{N} P(B_k) = 1$ qui donne bien $C_N^n = \sum\limits_{k=n}^{N} C_{k-1}^{n-1}$.

---

30. (**) Une urne contient N boules numérotées de 1 à N. On considera le cas où les tirages se font avec remise, puis le cas où les tirages se font sans remise.

1. On tire successivement 2 de ces boules. Quelle est la probabilité que la deuxième boule tirée ait un numéro supérieur ou égal à celui de la première boule tirée ?
2. On tire successivement p de ces boules. Quelle est la probabilité que la p-ième boule tirée ait un numéro supérieur ou égal à celui des $p-1$ premières boules tirées ?

3. Déterminer la limite de ces probabilités lorsque N tend vers $+\infty$.

---

1. a) On considère le cas avec remise. $\text{card}\Omega = N^2$.

Si la première boule tirée porte le numéro k (avec $1 \leq k \leq N$), on a $N-k+1$ choix possibles pour la deuxième. On décompose ainsi l'événement en événements disjoints et on a alors

$$p_1(N) = \frac{1}{N^2}\sum_{k=1}^{N}(N-k+1) = \frac{1}{N^2}\left(N(N+1) - \frac{N(N+1)}{2}\right)$$

soit $\boxed{p_1(N) = \frac{N+1}{2N} \text{ et } \lim_{N\to+\infty} p_1(N) = \frac{1}{2}}$.

b) On considère le cas sans remise. $\text{card}\Omega = N(N-1)$.

Si la première boule tirée porte le numéro k (avec $1 \leq k \leq N-1$), on a $N-k$ choix possibles pour la deuxième. On décompose ainsi l'événement en événements disjoints et on a alors

$$p_1(N) = \frac{1}{N(N-1)}\sum_{k=1}^{N-1}(N-k) = \frac{1}{N(N-1)}\left(N(N-1) - \frac{N(N-1)}{2}\right)$$

soit $\boxed{p_1 = \frac{1}{2} \text{ indépendant de } N}$.

2. a) On considère le cas avec remise. $\text{card}\Omega = N^p$.

On décompose suivant le numéro de la p-ième boule (N numéros possibles). Si la p-ième boule tirée porte le numéro k, on a k choix possibles pour chacune des $p-1$ autres (avec $1 \leq k \leq N$), on a $N-k+1$ choix possibles pour la deuxième. On a alors

$$p_2(N) = \frac{1}{N^p}\sum_{k=1}^{N} k^{p-1} = \frac{1}{N}\sum_{k=1}^{N}\left(\frac{k}{N}\right)^{p-1}$$

et $\lim_{N\to+\infty} p_2(N) = \int_0^1 x^{p-1}\,dx = \frac{1}{p}$.

b) On considère le cas sans remise. $\text{card}\Omega = A_N^p$.

On décompose suivant le numéro de la p-ième boule. Si la p-ième boule tirée porte le numéro k, on a A_{k-1}^{p-1} façons de choisir les $p-1$ autres (ce qui exige $k \geq p$). On a alors

$$p_2(N) = \frac{1}{A_N^p}\sum_{k=p}^{N} A_{k-1}^{p-1} = \frac{1}{p!C_N^p}\sum_{k=p}^{N}(p-1)!C_{k-1}^{p-1} = \frac{1}{p\,C_N^p}\sum_{k=p}^{N} C_{k-1}^{p-1}.$$

Or, d'après l'exercice 29, $\sum_{k=p}^{N} C_{k-1}^{p-1} = C_N^p$ et donc $p_2 = \frac{1}{p}$, indépendant de N.

---

31. ($**$) Une urne contient 10 boules numérotées de 1 à 10. On tire 3 fois de suite une boule avec remise. Quelle est la probabilité d'obtenir 3 nombres dans un ordre:

1. strictement croissant ?
2. croissant au sens large ?

Un résultat est ici un triplet formé de numéros de 1 à 10. On fait des tirages successifs avec remise, donc card$\Omega = 10^3 = 1\ 000$.

1. Dans ce cas, les 3 nombres sont tous distincts, donc on a $C_{10}^3 = \frac{10\times 9\times 8}{3\times 2} = 120$ façons de les choisir. Avec ces nombres, 1 seul ordre correspond à des nombres croissants, donc

$$\boxed{p_1 = \frac{120}{1000} = 0,12.}$$

2. Il faut ajouter aux cas précédents, les cas où plusieurs nombres sont égaux. Avec 3 nombres égaux, on a 10 choix et avec 2 nombres égaux, les résultats possibles sont de la forme (x, x, y) ou bien (x, y, y) avec $x < y$. On a donc $2 \times C_{10}^2 = 90$ choix.

Ainsi, $\boxed{p_2 = \frac{120+10+90}{1000} = 0,22}$.

---

32. $(*)$ On compose au hasard un numéro de téléphone à 8 chiffres. Quelle est la probabilité que :

1. tous les chiffres soient distincts ?
2. le produit des chiffres soit divisible par 2 ? Par 3 ?
3. les chiffres forment une suite strictement croissante ?

Un résultat est ici une suite de 8 chiffres (de 0 à 9) et card$(\Omega) = 10^8$.

1. On a A_{10}^8 numéros dont les chiffres sont tous distincts. Donc $\boxed{p_1 = \frac{A_{10}^8}{10^8} \approx 0,018}$.

2. Le produit est divisible par 2 si l'un au moins des chiffres qui le compose est divisible par 2. Il est plus simple de considérer l'événement contraire "aucun chiffre divisible par 2" c'est-à-dire tous les chiffres dans $\{1, 3, 5, 7, 9\}$.

Ainsi, $\boxed{p_2 = 1 - \frac{5^8}{10^8} = 1 - \left(\frac{1}{2}\right)^8 \approx 0,996}$.

De même, le produit est divisible par 3 si l'un au moins des chiffres est divisible par 3 et aucun chiffre n'est divisible par 3 si tous les chiffres sont dans $\{1, 2, 4, 5, 7, 8\}$.

Ainsi, $\boxed{p_2' = 1 - \frac{6^8}{10^8} = 1 - \left(\frac{3}{5}\right)^8}$.

3. On a une suite strictement croissante si les 8 chiffres sont distincts (C_{10}^8 choix), et il n'y a alors qu'un ordre possible. Ainsi $\boxed{p_3 = \frac{C_{10}^8}{10^8}}$.

---

33. $(**)$ On considère le mot ATTACHANT.

1. Donner le nombre d'anagrammes de ce mot.
2. On tire au hasard et sans remise 4 lettres de ce mot. Quelle est la probabilité de pouvoir écrire le mot CHAT avec les lettres obtenues ? D'écrire directement le mot CHAT ?
3. Reprendre les questions du (b) dans le cas de tirages avec remise.

ATTACHANT comporte 3 “A”, 3 “T”, 1 “C”, 1 “H” et 1 “N”.

1. Les anagrammes de ce mot sont les mots de 9 lettres ayant même composition. On place les “A” (C_9^3 choix), puis les “T” parmi les 6 places restantes(C_6^3 choix), puis le “C” parmi les 3 places restantes, le “H” parmi les 2 places restantes et enfin le “N”.
On a donc $\boxed{C_9^3 \times C_6^3 \times 3 \times 2 = 10080 \text{ anagrammes}}$.

2. Le nombre total de tirages en tenant compte de l'ordre est $9 \times 8 \times 7 \times 6$.
Le nombre de tirages permettant d'écrire directement le mot CHAT est $1 \times 1 \times 3 \times 3$ et la probabilité d'écrire directement le mot CHAT est $\boxed{p_2 = \frac{3\times3}{9\times8\times7\times6} = \frac{1}{336} \approx 0,003}$.
Pour pouvoir écrire le mot CHAT, il suffit de tirer les lettres de ce mot dans n'importe quel ordre (soit 4! permutations) et $\boxed{p_1 = 4!p_2 = \frac{1}{14} \approx 0,071}$.

3. Le nombre total de tirages de 4 lettres avec remises est 9^4.

$$\boxed{p'_2 = \frac{9}{9^4} = \frac{1}{729} \approx 1,37.10^{-3}} \text{ et } \boxed{p'_1 = 4!p'_2 = \frac{8}{243} \approx 0,033}.$$

---

34. (∗∗) Un sac contient 10 billes: x blanches et les autres rouges $(x \in \{2, \cdots, 8\})$.

1. Calculer la probabilité pour que, en tirant simultanément 2 billes du sac, celles-ci soient les 2 de même couleur.
2. Quel doit être le nombre x pour que cette probabilité soit minimale et quel est ce minimum ?

On tire simultanément 2 billes parmi 10 donc $\text{card}\Omega = C_{10}^2 = 45$.

1. On veut 2 billes de même couleurs, soit toutes les 2 blanches (C_x^2 choix), soit toutes les 2 rouges (C_{10-x}^2 choix). Ainsi, $p = \frac{x(x-1)+(10-x)(9-x)}{90}$, soit $p(x) = \frac{x^2-10x+45}{45}$.

2. On a $p'(x) = \frac{2x-10}{45}$ et p admet un minimum pour $x = 5$ (la moitié des billes de chaque couleur). On a alors $p(5) = \frac{20}{45} = \frac{4}{9} \approx 0,444$.

---

35. (∗∗) Un ascenseur prend 6 personnes au rez-de-chaussée d'un immeuble de 8 étages. Quelle est la probabilité que :

1. 2 personnes descendent au même étage, les autres descendent chacune à des étages différents et différents du précédent ?
2. 1 personne descende à un étage, 2 à un autre et 3 à un autre ?

À chaque personne, on associe l'étage auquel elle descend et un résultat est donc un 6-uplet formé de nombres entre 1 et 8, d'où $\text{card}\Omega = 8^6$.

1. On choisit les 2 personnes qui descendent au même étage ($C_6^2 = 15$ choix), puis on choisit leur étage (8 choix), puis les étages distincts des 4 autres personnes (soit A_7^4 choix).
Ainsi, $\boxed{p_1 = \frac{15\times7\times6\times5\times4}{8^6} = \frac{1575}{4096} \approx 0,38}$.

2. On choisit les 3 personnes qui descendent au même étage ($C_6^3 = 20$ choix), puis leur étage (8 choix), puis les 2 personnes qui descendent ensemble ($C_3^2 = 3$ choix), puis leur étage (7 choix) et enfin, on choisit l'étage de la dernière personne qui reste (6 choix).

Ainsi, $\boxed{p_2 = \frac{C_6^3 \times C_3^2 \times 8 \times 7 \times 6}{8^6} = \frac{315}{4096} \approx 0,07}$.

---

36. ($* * *$) Une urne contient a boules rouges et b noires. Deux joueurs tirent à tour de rôle une boule sans la remettre ; celui qui tire la première boule rouge a gagné. Quelle est la probabilité de gain de chacun des joueurs ?
En déduire la valeur de:

$$S = 1 + \frac{b}{a+b-1} + \frac{b(b-1)}{(a+b-1)(a+b-2)} + \cdots$$

Le joueur A joue en premier, puis B, puis de nouveau A et ainsi de suite jusqu'à ce qu'il y ait un gagnant. Ainsi, A joue les parties impaires et B les parties paires. On considère les événements A_k "le joueur A gagne la k-ième partie" (k impair) et B_k "le joueur B gagne la k-ième partie" (k pair).

On a alors $P(A_1) = \frac{a}{a+b}$, $P(B_2) = \frac{b}{a+b} \times \frac{a}{a+b-1}$, $P(A_3) = \frac{b}{a+b} \times \frac{b-1}{a+b-1} \times \frac{a}{a+b-2}$,...Ainsi

$$P(A \text{ gagne }) = \frac{a}{a+b}\left(1 + \frac{b(b-1)}{(a+b-1)(a+b-2)} + \cdots\right)$$

$$P(B \text{ gagne }) = \frac{a}{a+b}\left(\frac{b}{a+b-1} + \frac{b(b-1)(b-2)}{(a+b-1)(a+b-2)(a+b-3)} \cdots\right).$$

Le nombre de boules étant fini, il y aura toujours un gagnant, c'est-à-dire $P(A \text{ gagne })+ P(B \text{ gagne }) = 1$, soit

$$\boxed{S = 1 + \frac{b}{a+b-1} + \frac{b(b-1)}{(a+b-1)(a+b-2)} + \cdots = \frac{a+b}{a}}$$

---

37. ($**$) Dans une classe de $N+1$ élèves, la solution d'un exercice est donnée par un élève à un de ses camarades. Celui-ci la transmet à l'un de ses camarades, le processus étant répété k fois. Quelle est la probabilité pour que la solution ne soit pas répétée:

1. à celui qui l'a trouvée ?
2. à un élève l'ayant transmise ?
3. même question que (a) dans le cas où, au lieu de transmettre la solution à un élève, on la transmet à n élèves.

À chaque transmission, on associe celui qui est informé $\text{card}\Omega = N^k$ (celui qui est informé ne peut pas être celui qui informe).

1. L'élève qui a trouvé peut communiquer le résultat à N personnes, les autres ne peuvent le communiquer qu'à $N-1$ personnes. Donc $p_1 = \frac{N \times (N-1)^{k-1}}{N^k}$, soit $\boxed{p_1 = \left(1 - \frac{1}{N}\right)^{k-1}}$.

2. A chaque fois, il y a une personne de plus à éviter : $p_2 = \frac{N \times (N-1) \times \cdots \times (N-k+1)}{N^k}$, soit

$$\boxed{p_2 = \frac{N!}{(N-k)! \times N^k}}.$$

3. Le premier élève a C_N^n choix ; les autres en ont C_{N-1}^n et card$\Omega = (C_N^n)^k$ donc $p_3 = \left(\frac{C_{N-1}^n}{C_N^n}\right)^{k-1} = \left(\frac{N-n}{N}\right)^{k-1}$, soit $\boxed{p_3 = \left(1 - \frac{n}{N}\right)^{k-1}}$.

---

38. $(***)$ On considère le système:

$$\begin{cases} x - 2y = 3 \\ ax - by = c \end{cases}$$

dont les coefficients a, b et c sont déterminés en lançant 3 fois un dé. Quelles sont les probabilités pour que le système admette:

1. une solution ? une infinité de solutions ? pas de solution ?
2. la solution unique $(3,0)$?

On a card$\Omega = 6^3 = 216$.

1. Le système admet une solution unique si son déterminant est non nul :

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & -2 \\ a & -b \end{vmatrix} = 2a - b.$$

$b = 2a$ n'est possible que si $(a,b) \in \{(1,2),(2,4),(3,6)\}$. Dans ce cas, il y a une infinité de solutions si $c = 3a$, donc pour $(a,b,c) \in \{(1,2,3),(2,4,6)\}$.

$$\boxed{\text{La probabilité qu'il y ait une infinité de solutions est donc } \frac{2}{216} = \frac{1}{108} \approx 0,00926.}$$

Il n'y a pas de solution si $(a,b) = (1,2)$ et $c \neq 3$ (5 choix), si $(a,b) = (2,4)$ et $c \neq 6$ (5 choix) et si $(a,b) = (3,6)$ (6 choix). Soit au total 16 triplets (a,b,c). Ainsi,

$$\boxed{\text{la probabilité qu'il n'y ait pas de solution est donc } \frac{16}{216} = \frac{8}{108} \approx 0,074.}$$

Dans les autres cas, il y a une solution unique, avec la probabilité $1 - \frac{9}{108} = \frac{11}{12} \approx 0,917$.

2. On a la solution unique $(3,0)$ (qui est déjà solution de $x - 2y = 3$ si $3a = c$ (et $b \neq 2a$, sinon infinité de solutions). Donc $(a,c) = (1,3)$ et $b \neq 2$ (5 choix) ou $(a,c) = (2,6)$ et $b \neq 4$ (5 choix). Ainsi, $\boxed{\text{la probabilité que } (3,0) \text{ soit unique solution est } \frac{10}{216} = \frac{5}{108} \approx 0,046}$.

---

39. $(**)$ On tire successivement p boules parmi n^2 numérotées de 1 à n^2. Quelle est la probabilité d'avoir:

1. une seule boule dont le numéro est un carré ?
2. au moins une boule dont le numéro soit un carré ?
3. ayant tiré 2 boules, 2 boules dont la différence des numéros soit un carré ?

On utilisera $\sum_{k=1}^{n} k^2 = n(n+1)(2n+1)/6$.

Ona card$\Omega = C_{n^2}^p$.

1. Il y a exactement n carrés d'où $\boxed{p_1 = \frac{n \times C_{n^2-n}^{p-1}}{C_{n^2}^p}}$.

2. On passe par l'événement contraire "pas de carré" de probabilité $\frac{C_{n^2-n}^p}{C_{n^2}^p}$. D'où

$$\boxed{p_2 = 1 - \frac{C_{n^2-n}^p}{C_{n^2}^p}}.$$

3. Si le plus petit numéro tiré est ℓ, l'autre est de la forme $\ell + k^2$. Pour k donné dans $[\![1, n-1]\!]$, on doit avoir $\ell \in [\![1, n^2 - k^2]\!]$, soit $n^2 - k^2$ choix. Le nombre de cas possibles est donc :

$$\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{n-1}(n^2 - k^2) &= n^2(n-1) - \frac{(n-1)n(2(n-1)+1)}{6} \\
&= n(n-1)\left[n - \frac{n}{3} + \frac{1}{6}\right] = \frac{n(n-1)(4n+1)}{6}
\end{aligned}$$

d'où $\boxed{p_3 = \frac{n(n-1)(4n+1)}{6C_{n^2}^2} = \frac{(4n+1)}{3n(n+1)}}$.