Corrigés des exercices du chapitre 3

$\boxed{\textbf{5.}}$ Soit $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ telle que $f(x,y,z) = x^2 + y^2 + (x+y-3z)^2 + z^4 + 2z^3 - 5z^2$. Déterminer les minimums locaux de f. L'un d'eux est-il global ?

---

f est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}^3$. Si $u = (x,y,z)$, on a :

$$\nabla f(u) = \begin{pmatrix} 2x + 2(x+y-3z) \\ 2y + 2(x+y-3z) \\ -6(x+y-3z) + 4z^3 + 6z^2 - 10z \end{pmatrix} \text{ et } \nabla^2 f(u) = \begin{pmatrix} 4 & 2 & -6 \\ 2 & 4 & -6 \\ -6 & -6 & 8+12z+12z^2 \end{pmatrix}.$$

Pour trouver les points critiques, on résout $\nabla f(u) = 0$. En faisant d'abord la différence des deux premières lignes, on obtient $x = y$, puis en reportant dans la deuxième, on obtient $x = z$, soit $x = y = z$ et enfin, en reportant dans la troisième, il reste $4z^3+6z^2-4z = 0 = 2z(2z^2+3z-2)$, soit $z = 0$, ou bien $z = \dfrac{-3 \pm \sqrt{9+16}}{4}$, c'est-à-dire $z = -2$ ou bien $z = \dfrac{1}{2}$.

Les candidats sont donc $(0,0,0)$, $(-2,-2,-2)$ et $\left(\dfrac{1}{2}, \dfrac{1}{2}, \dfrac{1}{2}\right)$.

On détermine alors les valeurs propres de la hessienne et, pour cela, on pose $\psi(z) = 8 + 12z + 12z^2$.

$$\begin{aligned}
\det(\nabla^2 f(u) - \lambda I) &= \begin{vmatrix} 4-\lambda & 2 & -6 \\ 2 & 4-\lambda & -6 \\ -6 & -6 & \psi(z)-\lambda \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2-\lambda & 2 & -6 \\ \lambda-2 & 4-\lambda & -6 \\ 0 & -6 & \psi(z)-\lambda \end{vmatrix} \\
&= (2-\lambda) \begin{vmatrix} 1 & 2 & -6 \\ -1 & 4-\lambda & -6 \\ 0 & -6 & \psi(z)-\lambda \end{vmatrix} = (2-\lambda) \begin{vmatrix} 1 & 2 & -6 \\ 0 & 6-\lambda & -12 \\ 0 & -6 & \psi(z)-\lambda \end{vmatrix}
\end{aligned}$$

où l'on a fait $C_1 \leftarrow C_1 - C_2$ dans un premier temps, puis $L_1 \leftarrow L_1 - L_2$ en dernier lieu.

Les valeurs propres de $\nabla^2 f(u)$ sont donc 2 et celles de $\begin{pmatrix} 6 & -12 \\ -6 & \psi(z) \end{pmatrix}$ de déterminant $6(\psi(z) - 12)$ et de trace $6 + \psi(z)$.

• Pour $z = 0$, $\psi(0) = 8$, le déterminant est négatif donc on a 2 valeurs propres de signes opposés et $(0,0,0)$ n'est pas un extrémum.

• Pour $z = -2$, $\psi(-2) = 8 - 24 + 48 > 12$, le déterminant et la trace sont positives donc, dans ce cas, on a 3 valeurs propres positives et $\boxed{(-2,-2,-2) \text{ est un minimum local}}$.

• Pour $z = \dfrac{1}{2}$, $\psi\left(\dfrac{1}{2}\right) = 8 + 6 + 3 > 12$, le déterminant et la trace sont positives donc, dans ce cas aussi, on a 3 valeurs propres positives et $\boxed{\left(\dfrac{1}{2}, \dfrac{1}{2}, \dfrac{1}{2}\right) \text{ est un minimum local}}$.

f est continue sur $\mathbb{R}^3$ qui est aussi fermé. Si f est coercive, on aura existence d'un minimum global.

$\displaystyle\lim_{\|u\| \to +\infty} f(u) = +\infty$ si, pour tout $A > 0$, il existe α, tel que, si $\|u\| > \alpha$, alors $f(u) > A$.

$\|u\|^2 = x^2 + y^2 + z^2$ d'où, si $\|u\| > \alpha$, alors $x^2 + y^2 > \dfrac{\alpha^2}{2}$ ou bien $z^2 > \dfrac{\alpha^2}{2}$.

• Si $x^2+y^2 \geq \dfrac{\alpha^2}{2}$, $f(u) \geq \dfrac{\alpha^2}{2} + \varphi(z)$ où $\varphi(z) = z^4+2z^3-5z^2 = z^2(z^2+2z-5) = z^2((z+1)^2-6)$.

$\to$ Si $|z| \geq 1 + \sqrt{6}$, alors $f(u) \geq \dfrac{\alpha^2}{2}$ car $\varphi(z) > 0$

$\rightarrow$ Si $|z| \leq 1+\sqrt{6}$, alors $|\varphi(z)| \leq m$ (φ continue, bornée sur un compact), donc $\varphi(z) \geq -m$ et $f(u) \geq \dfrac{\alpha^2}{2} - m$.

• Si $x^2 + y^2 \leq \dfrac{\alpha^2}{2}$, alos $z^2 \geq \dfrac{\alpha^2}{2}$ et comme $\lim\limits_{z\to+\infty} \varphi(z) = +\infty$, il existe β tel que, si $|z| \geq \beta$, alors $\varphi(z) \geq A$ et alors $f(u) \geq \varphi(z) \geq A$ donc, si $\dfrac{\alpha^2}{2} \geq \beta$ et $\dfrac{\alpha^2}{2} - m \geq A$, soit $\alpha \geq \max(\sqrt{2\beta}, \sqrt{2(m+A)})$, alors, pour $\|u\| > \alpha$, $f(u) > A$

D'où f est coercive et le minimum global existe.

$f(z,z,z) = -2z^2+2z^3+z^4$ qui vaut -8 si $z=-2$ et $-\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{4}+\dfrac{1}{16}$ si $z=\dfrac{1}{2}$ donc $\boxed{\min f = -8}$ et $\boxed{(-2,-2,-2) \text{ est un minimum global}}$.

---

6. Déterminer les extrémums locaux de f dans les cas suivants :

a) $f(x,y) = x^3 + y^3 - 3x - 12y + 20$;

b) $f(x,y) = x^4 + y^4 - 2(x-y)^2$;

c) $f(x,y) = x^3y^2(1-x-y)$.

---

a) $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x,0) = -\infty$, $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x,0) = +\infty$: il n'y a donc pas d'extrémum global.

$\begin{cases} D_1f(x,y) = 3x^2 - 3 = 0 \\ D_2f(x,y) = 3y^2 - 12 = 0 \end{cases}$ équivaut à $\begin{cases} x^2 = 1 \\ y^2 = 4 \end{cases}$, ce qui donne les candidats $(1,2)$, $(1,-2)$, $(-1,2)$ et $(2,2)$.

$D_1^2f(x,y) = 6x$, $D_1D_2f(x,y) = D_2D_1f(x,y) = 0$, $D_2^2f(x,y) = 6y$. La hessienne en (x,y) est donc diagonale, de valeurs propres $6x$ et $6y$.

• En $(1,-2)$ et en $(-1,2)$, on a deux valeurs propres de signe différent donc pas d'extrémum local en ces points.

• En $(1,2)$ on a 2 valeurs propres strictement positive donc minimum local en $(1,2)$.

• En $(-1,-2)$, on a 2 valeurs propres strictement négative donc maximum local en $(-1,-2)$.

b) $f(x,x) = 2x^4 \to +\infty$ quand $x \to +\infty$, donc il n'y a pas de maximum absolu.

f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^2$. Cherchons les points critiques.

$D_1f(x,y) = 4[x^3 - (x-y)]$ et $D_2f(x,y) = 4[y^3 + (x-y)]$ donc $x^3 + y^3 = 0$,soit $y = -x$. D'où $(0,0)$ et $x^2 = 2$, soit $(\sqrt{2}, -\sqrt{2})$ et $(-\sqrt{2}, \sqrt{2})$.

Déjà, $f(0,0) = 0$ puis $f(x,x) = 2x^4$ et $f(x,0) = x^4 - 2x^2 \sim -2x^2$ au voisinage de $(0,0)$, donc $(0,0)$ n'est même pas un extrémum relatif.

Par ailleurs, $f(\sqrt{2}, -\sqrt{2}) = f(-\sqrt{2}, \sqrt{2}) = -8$.

Si $a, b \in \mathbb{R}$, $2(a^2+b^2) - (a+b)^2 = (a-b)^2 \geq 0$, donc, pour tout (x,y),

$$f(x,y) \geq \frac{1}{2}(x^2+y^2)^2 - 4(x^2+y^2) = \frac{1}{2}[(x^2+y^2)^2 - 8(x^2+y^2)] = \frac{1}{2}[(x^2+y^2-4)^2 - 16],$$

donc $f(x,y) \geq -8$ et il y a un minimum absolu en $(\sqrt{2}, -\sqrt{2})$ et $(-\sqrt{2}, \sqrt{2})$.

c) $f(1,y) = -y^3$ donc $\lim\limits_{y\to-\infty} f(1,y) = +\infty$ et $\lim\limits_{y\to+\infty} f(1,y) = -\infty$: il n'y a donc pas d'extrémum global.

$f(x,y) = x^3y^2 - x^4y^2 - x^3y^3$ donc $f \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^2, \mathbb{R})$ avec :

$$D_1f(x,y) = 3x^2y^2 - 4x^3y^2 - 3x^2y^3 = x^2y^2(3 - 4x - 3y),$$

$$D_2f(x,y) = 2x^3y - 2x^4y - 3x^3y^2 = x^3y(2-2x-3y)$$
$$D_1^2 f(x,y) = 6xy^2 - 12x^2y^2 - 6xy^3,$$
$$D_1D_2f(x,y) = D_2D_1f(x,y) = 6x^2y - 8x^3y - 9x^2y^2,$$
$$D_2^2 f(x,y) = 2x^3 - 2x^3y - 6x^3y.$$

Les points critiques sont donc les $(x,0)$, $x \in \mathbb{R}$, les $(0,y)$, $y \in \mathbb{R}$ et $(1/2,1/3)$.
Le déterminant de la hessienne est nul sauf pour $(1/2,1/3)$.

• On a alors $\nabla^2 f(1/2,1/3) = \begin{pmatrix} -\frac{1}{9} & -\frac{1}{12} \\ -\frac{1}{12} & -\frac{1}{8} \end{pmatrix}$ de déterminant positif $(1/72 > 1/144)$ donc 2 valeurs propres de même signe, et de trace négative, donc 2 valeurs propres négatives et on a un maximum local en $(1/2,1/3)$.

• En $(x,0)$, $f(x+h,k) = (x+h)^3k^2(1-x-h-k)$, $f(x+h,0) = 0$ et si $k \neq 0$, $f(x+h,k) \sim x^3(1-x)k^2$ pour $x \notin \{0,1\}$, du signe de $x(1-x)$, c'est-à-dire positif si $x \in]0,1[$ et négatif si $x<0$ ou si $x>1$. On a donc un maximum local en $(x,0)$ pour $x<0$ et $x>1$ et un minimum local en $(x,0)$ pour $x \in]0,1[$.

• En $(0,0)$, $f(h,k) = h^3k^2$ qui change de signe avec h donc pas d'extrémum local en $(0,0)$.

• En $(1,0)$, $f(1+h,-2h) \sim 4h^3$ qui change de signe avec h donc pas d'extrémum local en $(1,0)$.

• En $(0,y)$, $f(h,y+k) \sim h^3y^2(1-y)$ si $y \notin \{0,1\}$ qui change de signe avec h donc pas d'extrémum local en $(0,y)$ si $y \notin \{0,1\}$.

• En $(0,1)$, $f(h,1+k) \sim -kh^3$ qui change de signe avec h (et avec k) donc pas d'extrémum local en $(0,1)$.

---

7. Soient C et C' les courbes de $\mathbb{R}^3$ paramétrées par:

$$C = \{(s, s-1, s^2-2)\ ;\ s \in \mathbb{R}\} \qquad \text{et} \qquad C' = \{(t, -t-1, t^2)\ ;\ t \in \mathbb{R}\}.$$

Calculer la distance de C à C'.

$d^2(C,C') = \inf\{\|\overrightarrow{MM'}\|^2,\ M \in C,\ M' \in C'\}$ avec

$$\|\overrightarrow{MM'}\|^2 = (t-s)^2 + (-t-1-s+1)^2 + (t^2-s^2+2)^2 = f(s,t).$$

$f(s,t) = (t-s)^2 + (t+s)^2 + (t^2-s^2+2)^2 = 2(t^2+s^2) + (t^2-s^2+2)^2$.
$D_1f(s,t) = 4s - 4s(t^2-s^2+2) = 4s(s^2-t^2-1)$ et $D_2f(s,t) = 4t + 4t(t^2-s^2+2) = 4t(t^2-s^2+3)$.
• Si $s=0$, nécessairement $t=0$.
• Si $t=0$, on peut avoir $s=0$, $s=1$ ou $s=-1$.
• Si $st \neq 0$, $s^2-t^2=1$ et $s^2-t^2=3$ est impossible.

Puisque $\mathbb{R}^2$ est un fermé et que $f(s,t) \geq 2\|(s,t)\|^2 \to +\infty$ quand $\|(s,t)\| \to +\infty$, f est coercive et le minimum existe bien.

On a $f(0,0) = 4$, $f(1,0) = 3 = f(-1,0)$ donc $\boxed{d(C,C') = \sqrt{3}}$ (atteinte en $M_1(1,0,-1)$, $M_2(-1,-2,-1)$ et $M'(0,-1,0)$).

---

8. Soit $\alpha \in \mathbb{R}$ et $F_\alpha : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ définie par $F_\alpha(x,y) = e^{\alpha x + 2y} - \alpha e^x - 2e^y$.
Discuter, suivant les valeurs de α, l'existence éventuelle de minimums locaux de F_α sur $\mathbb{R}^2$.

$F_\alpha \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^2, \mathbb{R})$ avec :

$$D_1F_\alpha(x,y) = \alpha e^{\alpha x + 2y} - \alpha e^x = \alpha(e^{\alpha x + 2y} - e^x),$$

$$D_2F_\alpha(x,y) = 2e^{\alpha x+2y} - 2e^y = 2(e^{\alpha x+2y} - e^y),$$
$$D_1^2F_\alpha(x,y) = \alpha^2 e^{\alpha x+2y} - \alpha e^x = \alpha(\alpha e^{\alpha x+2y} - e^x),$$
$$D_1D_2F_\alpha(x,y) = D_2D_1F_\alpha(x,y) = 2\alpha e^{\alpha x+2y},$$
$$D_2^2F_\alpha(x,y) = 4e^{\alpha x+2y} - 2e^y = 2(2e^{\alpha x+2y} - e^y).$$

• Pour $\alpha = 0$, $F_0(x,y) = e^{2y} - 2e^y = t^2 - 2t = \varphi(t)$ où $t = e^y \in \mathbb{R}_+^*$. On a $\varphi'(t) = 2(t-1)$ donc φ décroît sur $]0,1[$ et croît sur $]1,+\infty[$, avec un minimum pour $t = e^y = 1$, qui est un minimum local et global. Ainsi, F_0 admet un minimum global et local en tout point $(x,0)$.

Pour $\alpha \neq 0$, les points critiques vérifient $e^{\alpha x+2y} = e^x = e^y$, soit $x = y = \alpha x + 2y$, ce qui donne $x = y$ et $(\alpha+1)x = 0$.

• Pour $\alpha \notin \{-1,0\}$, le seul point critique est $(0,0)$. On a alors $\nabla^2F_\alpha(0,0) = \begin{pmatrix} \alpha(\alpha-1) & 2\alpha \\ 2\alpha & 2 \end{pmatrix}$ de déterminant $2\alpha(\alpha-1-2\alpha) = -2\alpha(\alpha+1) \neq 0$ et de trace $\alpha^2 - \alpha + 2 = (\alpha - 1/2)^2 + 3/4 > 0$.

→ Si $\alpha \in]-1,0[$, le déterminant est positif, donc F_α admet en $(0,0)$ un minimum local.

→ Si $\alpha < -1$ ou si $\alpha > 0$, le déterminant est négatif donc F_α n'admet pas d'extrémum local.

• Pour $\alpha = -1$, $F_{-1}(x,y) = e^{-x+2y} + e^x - 2e^y = e^{-x}(e^{2y} - 2e^xe^y + e^{2x}) = e^{-x}(e^y - e^x)^2 \geq 0$, avec $F_{-1}(x,y) = 0$ si et seulement si $x = y$. Ainsi, F_{-1} admet un minimum global et local en tout point (x,x).