CHAPITRE 7

COUPLES ALEATOIRES A DENSITE

I- LOI DE PROBABILITE D'UN COUPLE

Soit $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ un espace de probabilité et X et Y deux v.a.r. définies sur $(\Omega, \mathcal{A}, P)$.

D1 : On appelle fonction de répartition du couple (X, Y) la fonction $F_{X,Y}$ définie sur $\mathbb{R}^2$ par :

$$F_{X,Y}(x, y) = P([X \leq x] \cap [Y \leq y]).$$

Propriété : Les fonctions de répartition des v.a.r. X et Y vérifient

$$F_X(x) = \lim_{y \to +\infty} F_{X,Y}(x, y) \text{ et } F_Y(y) = \lim_{x \to +\infty} F_{X,Y}(x, y).$$

D2 : La loi du couple (X, Y) est dite absolument continue s'il existe une application $f_{X,Y}$ de $\mathbb{R}^2$ sur $\mathbb{R}_+$, appelée densité du couple (X, Y), continue sur l'intérieur d'un sous-ensemble D de $\mathbb{R}^2$ et nulle sur son complémentaire, telle que, pour tout $(x, y) \in \mathbb{R}^2$:

$$F_{X,Y}(x, y) = \int_{-\infty}^{x} \int_{-\infty}^{y} f_{X,Y}(u, v) du dv.$$

Remarque : Il existe des couples (X, Y) non discrets n'admettant pas non plus de densité (lorsque, par exemple, X est discrète et Y absolument continue!).

Propriétés :
1) $\int_{-\infty}^{+\infty} \left(\int_{-\infty}^{+\infty} f_{X,Y}(u, v) du \right) dv = \int_{-\infty}^{+\infty} \left(\int_{-\infty}^{+\infty} f_{X,Y}(u, v) dv \right) du = 1.$
2) Les lois marginales de X et de Y admettent les densités f_X et f_Y définies par

$$f_X(u) = \int_{-\infty}^{+\infty} f_{X,Y}(u, v) dv \text{ et } f_Y(v) = \int_{-\infty}^{+\infty} f_{X,Y}(u, v) du.$$

3) En tout (x_0, y_0) où $f_{X,Y}$ est continue, on a $f_{X,Y}(x_0, y_0) = \frac{\partial^2 F_{X,Y}}{\partial x \partial y}(x_0, y_0)$.

Lois conditionnelles :

D3 : Pour tout $x \in \mathbb{R}$ tel que $f_X(x) \neq 0$, la densité conditionnelle de Y sachant $(X = x)$ est la fonction g_x, notée $f_Y^{(X=x)}$ définie par $g_x(y) = \frac{f_{X,Y}(x,y)}{f_X(x)}$.

Remarque : la fonction g_x est bien une densité.

II- OPERATEURS.

Si h est une fonction de $\mathbb{R}^2$ sur $\mathbb{R}$ telle que $h(X, Y)$ admette une espérance, alors :

$$\mathbb{E}(h(X, Y)) = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} h(x, y) f_{X,Y}(x, y) dx dy.$$

En particulier, $\mathbb{E}(XY) = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} xy f_{X,Y}(x, y) dx dy$ si cette espérance existe.

Les résultats démontrés pour les couples discrets au sujet des opérateurs restent valables.

III- INDEPENDANCE.

D4 : Deux v.a.r. X et Y sont dites indépendantes si, pour tout $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, on a :

$$F_{X,Y}(x, y) = F_X(x)F_Y(y).$$

On admet que ceci équivaut à $f_{X,Y}(x, y) = f_X(x)f_Y(y)$ pour tout $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ ou bien à $\mathbb{E}(g(X)h(Y)) = \mathbb{E}(g(X))\mathbb{E}(h(Y))$ pour toutes fonctions g et h pourvu que ces espérances existent.

Propriété : Si X et Y sont indépendantes, alors $f_Y^{(X=x)} = f_Y$ pour tout x tel que $f_X(x) \neq 0$ et $f_X^{(Y=y)} = f_X$ pour tout y tel que $f_Y(y) \neq 0$.

IV- CHANGEMENT DE VARIABLES.

TH1 : Soit (X, Y) un couple aléatoire de densité $f_{X,Y}$ et φ une fonction de $\mathbb{R}^2$ sur $\mathbb{R}^2$. Si $f_{X,Y}$ est continue sur l'intérieur d'un ensemble D et nulle sur son complémentaire, si φ est une bijection de D sur $E = \varphi(D)$ telle que les dérivées partielles de φ et de φ^{-1} existent et soient continues, et si, de plus, $J(\varphi^{-1}) = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} \end{vmatrix} \neq 0$ sur E, alors le couple aléatoire $(U, V) = \varphi(X, Y)$ admet pour densité la fonction $f_{U,V}$ définie par :

$$f_{U,V}(u, v) = f_{X,Y}(\varphi^{-1}(u, v)) \left|J(\varphi^{-1})(u, v)\right| \text{ si } (u, v) \in E.$$

V- SOMME DE DEUX V.A.R..

TH2 : Soit (X, Y) un couple aléatoire de densité $f_{X,Y}$. Alors :
1) la v.a.r. $X + Y$ a pour densité la fonction f_{X+Y} définie par :

$$f_{X+Y}(w) = \int_{-\infty}^{+\infty} f_{X,Y}(w - v, v)dv = \int_{-\infty}^{+\infty} f_{X,Y}(u, w - u)du.$$

2) Si X et Y sont indépendantes, alors :

$$f_{X+Y}(w) = \int_{-\infty}^{+\infty} f_X(w - v)f_Y(v)dv = \int_{-\infty}^{+\infty} f_X(u)f_Y(w - u)du.$$

Application aux lois normales :

TH3 : Si X et Y sont deux v.a.r. indépendantes de lois respectives $\mathcal{N}(m_1, \sigma_1^2)$ et $\mathcal{N}(m_2, \sigma_2^2)$, alors la v.a.r. $X + Y$ suit la loi normale $\mathcal{N}(m_1 + m_2, \sigma_1^2 + \sigma_2^2)$.

Exercices chapitre 7

Couples aléatoires à densité

212. * Soit f la fonction définie par:

$$f(x,y) = kxe^y \, \mathbb{1}_{[O,1]}(x) \, \mathbb{1}_{[O,1]}(y)$$

.

(a) Déterminer k pour que f soit la densité d'un couple (X,Y).

(b) Déterminer les lois de X et de Y.

(c) Les v.a.r. X et Y sont-elles indépendantes?

213. ** Soit f la fonction définie par:

$$f(x,y) = k(1 - \max(|x|,|y|)) \, \mathbb{1}_{[-1,1]}(x) \, \mathbb{1}_{[-1,1]}(y)$$

Déterminer k pour que f soit la densité d'un couple (X,Y), préciser les lois marginales et calculer $\mathrm{cov}(X,Y)$.

214. ** Soit (X,Y) un couple de v.a.r. de densité f définie par:

$$f(x,y) = k \, \mathbb{1}_D(x,y)$$

où $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2; |x| + |y| \leq 1\}$.

(a) Déterminer k et les lois marginales de X et Y.

(b) Déterminer $\mathrm{cov}(X,Y)$ et étudier l'indépendance de X et de Y.

215. ** Soient X et Y deux v.a.r. indépendantes, de même loi exponentielle $\mathcal{E}(\lambda)$. Déterminer la loi du couple (U,V) et étudier l'indépendance des v.a.r. U et V dans les cas suivants:

(a) $U = X + Y$ et $V = \frac{X}{Y}$;

(b) $U = X + Y$ et $V = \frac{X}{X+Y}$.

216. ** Soient X et Y deux v.a.r. indépendantes de même loi uniforme sur $[0,2]$.
Déterminer la loi de $Z = X - Y$, de $S = X + Y$ et de $T = XY$.

217. * Soit (X,Y) un couple de v.a.r. de densité f définie par:

$$f(x,y) = k\,(x^2 + y^2)\mathbb{1}_{[-1,1]}(x) \, \mathbb{1}_{[-1,1]}(y)$$

(a) Déterminer k.

(b) Déterminer $\mathrm{cov}(X,Y)$ et étudier l'indépendance de X et de Y.

(c) Déterminer la loi de $S = X + Y$.

218. ** Soit f la fonction définie par:

$$f(x,y) = e^{-y} \, \mathbb{1}_D(x,y)$$

où $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \; ; \; 0 < x \leq y\}$.

(a) Vérifier que f est la densité d'un couple (X,Y).

(b) Quelles sont les lois des v.a.r. X et Y. Ces v.a.r. sont-elles indépendantes?

(c) Les v.a.r. X et $X - Y$ sont-elles indépendantes?

(d) Les v.a.r. Y et X/Y sont-elles indépendantes?

219. ** Deux personnes se donnent rendez-vous entre 13 heures et 14 heures: X et Y représentent l'instant d'arrivée de chacune ; Z est le temps d'attente de la première arrivée.
Quelle est la loi de Z et son espérance?

220. ** Soient X et Y deux v.a.r. indépendantes de même loi admettant pour densité f définie par:

$$f(x) = ke^{-|x|}$$

.

(a) Déterminer k.

(b) Déterminer la loi de $Q = Y/X$ et, si elles existent, l'espérance et la variance de Q.

(c) Déterminer la loi de $S = X - Y$.

221. * Soit (X, Y) un couple de v.a.r. de densité f définie par:

$$f(x, y) = kxy\ e^{-(x^2+y^2)}\, \mathbb{1}_{\mathbb{R}_+^2}(x, y)$$

(a) Déterminer k et les lois marginales de X et de Y.

(b) Déterminer la loi de $Z = \sqrt{X^2 + Y^2}$.

222. ** Soit (X, Y) un couple de v.a.r. de densité f définie par:

$$f(x, y) = k\ \mathbb{1}_D(x, y)$$

où $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2;\ x^2 + y^2 \leq 1\}$

(a) Déterminer k et les lois de X et de Y.

(b) Déterminer les lois de $Q = X/Y$ et de $Z = (X^2 + Y^2)^{-1/2}$.

223. ** Soit (X, Y) un couple de v.a.r. de densité f définie par:

$$f(x, y) = \frac{1}{x^2y^2}\mathbb{1}_{[1,+\infty[}(x)\ \mathbb{1}_{[1,+\infty[}(y)$$

Soient $U = XY$ et $V = X/Y$.

(a) Déterminer les lois de U et de V.

(b) Les v.a.r. U et V sont-elles indépendantes?

224. ** Soit (X, Y) un couple de v.a.r. de densité f définie par:

$$f(x, y) = k\frac{1}{x^2y}\mathbb{1}_D(x, y)$$

où $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2\ ;\ x \geq 1 \text{ et } x^{-1} \leq y \leq x\}$

(a) Déterminer k.

(b) Déterminer les densités marginales et conditionnelles de X et de Y.

225. *** Soient X et Y deux v.a.r. indépendantes de même loi admettant pour densité f définie par:

$$f(x) = \frac{1}{2}\ \cos x\ \mathbb{1}_{[-\pi/2,\pi/2]}(x)$$

. Déterminer la loi de $S = X + Y$.

226. ** Soit f la fonction définie par :

$$f(x,y) = \frac{1}{2}\ \mathbb{1}_{]-1,0[}(x)\ \mathbb{1}_{]0,1[}(y) + \mathbb{1}_D(x,y)$$

où $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2\ ;\ x \geq 0,\ y \geq 0 \text{ et } x+y < 1\}$.

(a) Vérifier que f est la densité d'un couple (X,Y) ; déterminer les lois marginales de X et de Y ainsi que la densité de la loi conditionnelle de Y sachant $(X = x)$ pour tout x tel que $f_X(x) \neq 0$.

(b) Les v.a.r. X et Y sont-elles indépendantes? Calculer $\text{cov}(X,Y)$.

(c) Soient $U = X+Y$ et $V = X-Y$. Déterminer la densité du couple (U,V).

---

227. * Soit $a \in]0,1[$ et (X,Y) un couple de v.a.r. de densité f définie par:

$$f(x,y) = ((1+ax)(1+ay) - a)\ e^{-(x+y+ax)}\ \mathbb{1}_{\mathbb{R}_+^2}(x,y)$$

(a) Vérifier que f est une densité de probabilité et déterminer les lois marginales de X et de Y ; calculer $\mathbb{E}(X)$ et $\mathbb{E}(Y)$.

(b) Déterminer la loi conditionnelle de X sachant $(Y = y)$.

---

228. ** Soient X et Y deux v.a.r. indépendantes de même loi uniforme sur $[-1,1]$.

(a) Déterminer la loi de $Z = X - Y$.

(b) Déterminer la loi de $T = \min(X, Y^3)$

---

229. ** Soit $\alpha > 0$ et soient X et Y deux v.a.r. indépendantes de même loi uniforme sur $[0,\alpha[$. On pose $U = \min(X,Y)$, $V = \max(X,Y)$, $Z = V - U$ et $T = U/V$.
Déterminer les lois de Z et de T.

---

230. ** Soient X et Y deux v.a.r. indépendantes, de lois exponentielles respectivement $\mathcal{E}(\lambda)$ et $\mathcal{E}(\mu)$. Déterminer les lois de $U = \min(X,Y)$ et $V = \max(X,Y)$.

---

231. ** Soit $\theta > 0$ et soient X et Y deux v.a.r. indépendantes, de même loi de densité f définie par:

$$f(x) = \frac{3x^2}{\theta^3}\ \mathbb{1}_{[0,\theta]}$$

On pose $S = X + Y$ et $T = \max(X,Y)$

(a) Déterminer $\mathbb{E}(S)$ et $V(S)$.

(b) Déterminer la loi de T.

---

232. ** Soient X et Y deux v.a.r. indépendantes de même loi exponentielle $\mathcal{E}(\lambda)$. On pose $Z = \min(X,Y)$ et $S = X+Y$.

(a) Déterminer la loi, l'espérance et la variance de Z.

(b) Déterminer la loi de S.

---

233. *** On casse une baguette de bois de longueur 1 en deux endroits qu hasard.
Quelle est la probabilité de pouvoir former un triangle en repliant les deux morceaux extrêmes?

---

234. ** Soient X et Y deux v.a.r. indépendantes de même loi exponentielle $\mathcal{E}(\lambda)$. On pose $U = X - Y$, $V = \min(X, Y)$ et $Z = |X - Y|$.
Déterminer les lois de U, V et Z ; examiner l'indépendance éventuelle de U et V ainsi que de Z et V.

---

235. ** Soient X et Y deux v.a.r. indépendantes de même loi Gamma $G(2, \lambda)$.

(a) Calculer les moments $\mathbb{E}(X^n)$ et préciser $V(X)$.

(b) Calculer $\mathbb{E}(e^{-\alpha X})$ pour $\alpha > 0$.

(c) Déterminer la loi de $T = \min(X, Y)$.

---

236. ** On prend un point M au hasard sur le cercle C de centre O et de rayon 1. Soient X et Y les coordonnées de M.
Calculer $\mathrm{cov}(X, Y)$ et montrer que X et Y ne sont pas indépendantes.

---

237. *** Soient A et B deux v.a.r. indépendantes de même loi.
Quelle est la probabilité que l'équation $x^2 - 2Ax + B = 0$ ait:

1) 2 solutions réelles ;

2) 2 solutions complexes ;

3) 1 solution double ;

dans les cas suivants:

(a) A et B sont de loi exponentielle $\mathcal{E}(\lambda)$;

(b) A et B sont de loi uniforme sur $[0, 1]$.

---

238. * Soit X une v.a.r. de loi normale $N(0, 1)$ et Y une v.a.r. telle que $P(X = 1) = P(X = -1) = \frac{1}{2}$.
On suppose que X et Y sont indépendantes et on pose $Z = XY$.

(a) Déterminer la loi de Z.

(b) Calculer $\mathrm{cov}(X, Z)$.

---

239. ** On considère une cible circulaire de centre O et de rayon R. Le point d'impact d'une flèche est représenté par ses coordonnées X et Y que l'on suppose indépendantes de même loi normale $N(0, (2R)^2)$.

(a) Quelle est la probabilité que la flèche atteigne la cible?

(b) Combien de flèches sont nécessaires pour que la probabilité que l'une d'entre elles au moins atteigne la cible soit supérieure à 0,9?

---

240. ** Soient X_1 et X_2 deux v.a.r. indépendantes de lois normales respectives $N(m^1, \sigma_1^2)$ et $N(m^2, \sigma_2^2)$.
Déterminer la loi de $X_1 + X_2$.

---

241. ** Soit (X, Y) un couple de densité f définie par:

$$f(x, y) = \lambda \, e^{-(\frac{y^2}{2} - xy + x^2)}$$

(a) Déterminer λ et les lois marginales du couple (X, Y).

(b) Calculer $\mathrm{cov}(X, Y)$ et étudier l'éventuelle indépendance de X et de Y.