Couples aléatoires à densité

1. $(*)$ Soit f la fonction définie par:

$$f(x,y) = kxe^y \, \mathbb{1}_{[0,1]}(x) \, \mathbb{1}_{[0,1]}(y).$$

1. Déterminer k pour que f soit la densité d'un couple (X,Y).
2. Déterminer les lois de X et de Y.
3. Les v.a.r. X et Y sont-elles indépendantes?

---

1. $\int f(x,y)\,dx = k\,e^y\,\mathbb{1}_{[0,1]}(y)\int_0^1 x\,dx = \frac{1}{2}k\,e^y\,\mathbb{1}_{[0,1]}(y)$.
$\int \left[\int f(x,y)\,dx\right]\,dy = \frac{1}{2}k\,[e^y]_0^1 = \frac{1}{2}k(e-1) = 1$ d'où $\boxed{k = \frac{2}{e-1}}$.

2. $f_X(x) = \int f(x,y)\,dy = k\,x\,\mathbb{1}_{[0,1]}(x)(e-1)$ d'où $\boxed{f_X(x) = 2x\,\mathbb{1}_{[0,1]}(x)}$.
$f_Y(y) = \int f(x,y)\,dx = \frac{1}{2}k\,e^y\,\mathbb{1}_{[0,1]}(y)$ d'où $\boxed{f_Y(y) = \frac{1}{e-1}\,e^y\,\mathbb{1}_{[0,1]}(y)}$.

3. $f_{X,Y}(x,y) = f(x,y) = f_X(x)f_Y(y) = \frac{2}{e-1}\,xe^y\,\mathbb{1}_{[0,1]}(x)\,\mathbb{1}_{[0,1]}(y)$ donc les v.a. X et Y sont indépendantes.

---

2. $(**)$ Soit f la fonction définie par:

$$f(x,y) = k(1-\max(|x|,|y|))\,\mathbb{1}_{[-1,1]}(x)\,\mathbb{1}_{[-1,1]}(y)$$

Déterminer k pour que f soit la densité d'un couple (X,Y), préciser les lois marginales et calculer $\mathrm{cov}(X,Y)$.

$\int f(x,y)dy = 2k\mathbb{1}_{[-1,1]}(x)\int_0^1(1-\max(|x|,y))dy$ par parité de $y \mapsto 1-\max(|x|,|y|)$ et $\int_0^1 \max(|x|,y)dy = \int_0^{|x|}|x|dy + \int_{|x|}^1 ydy = |x|^2 + \frac{1}{2}(1-x^2) = \frac{1}{2}(1+x^2)$ pour $x \in [-1,1]$. On a donc $\int\left(\int f(x,y)dy\right)dx = 2k\left(2-\int_0^1(1+x^2)dx\right) = 2k(1-\frac{1}{3}) = \frac{4k}{3}$ donc $\boxed{k = \frac{3}{4}}$.

x et y jouant le même rôle, X et Y ont même loi et $\boxed{f_X(x) = \frac{3}{4}(1-x^2)\mathbb{1}_{[-1,1]}(x)}$.
$\mathbb{E}(XY) = \int\int xyf(x,y)dxdy = \int x\left(\int yf(x,y)dy\right)dx = 0$ par imparité de $y \mapsto yf(x,y)$. De même, $\mathbb{E}(X) = 0$ par imparité de $x \mapsto xf_X(x)$. Donc $\boxed{\mathrm{cov}(X,Y) = 0}$.

---

3. $(**)$ Soit (X,Y) un couple de v.a.r. de densité f définie par:

$$f(x,y) = k\,\mathbb{1}_D(x,y)$$

où $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2; |x|+|y| \le 1\}$.

1. Déterminer k et les lois marginales de X et Y.
2. Déterminer $\mathrm{cov}(X,Y)$ et étudier l'indépendance de X et de Y.

$D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \; ; \; x \in [-1,1], \; y \in [|x|-1, 1-|x|]\}$.
$\int f(x,y)dy = 2k\mathbb{1}_{[-1,1]}(x)(1-|x|)$ et $\int \left(\int f(x,y)dy\right) dx = 4k\int_0^1 (1-x)dx = 2k$ donc $\boxed{k = \frac{1}{2}}$ et $\boxed{f_X(x) = (1-|x|)\mathbb{1}_{[-1,1]}(x)}$. De plus, x et y jouant le même rôle, X et Y ont même loi.
$f_X(x)f_Y(y) \neq f(x,y)$ donc $\boxed{X \text{ et } Y \text{ ne sont pas indépendantes}}$.
$\mathbb{E}(XY) = \int\int xyf(x,y)dxdy = \int x \left(\int yf(x,y)dy\right) dx = 0$ par imparité de $y \mapsto yf(x,y)$.
De même, $\mathbb{E}(X) = 0$ par imparité de $x \mapsto xf_X(x)$. Donc $\boxed{\mathrm{cov}(X,Y) = 0}$.

---

4. (∗∗) Soient X et Y deux v.a.r. indépendantes, de même loi exponentielle $\mathcal{E}(\lambda)$. Déterminer la loi du couple (U,V) et étudier l'indépendance des v.a.r. U et V dans les cas suivants:

1. $U = X + Y$ et $V = \frac{X}{Y}$;
2. $U = X + Y$ et $V = \frac{X}{X+Y}$.

$f_{X,Y}(x,y) = \lambda^2 e^{-\lambda(x+y)}\mathbb{1}_{]0,+\infty[}(x)\mathbb{1}_{]0,+\infty[}(y)$.

1. Soit $\varphi : (x,y) \mapsto (u,v) = (x+y, \frac{x}{y})$. Alors $\varphi^{-1} : (u,v) \mapsto (x,y) = \left(\frac{uv}{v+1}, \frac{u}{v+1}\right)$ et $J_{\varphi^{-1}}(u,v) = \begin{vmatrix} \frac{v}{v+1} & \frac{u}{(v+1)^2} \\ \frac{1}{v+1} & -\frac{u}{(v+1)^2} \end{vmatrix} = -\frac{u}{(v+1)^2}$ et $f_{U,V}(u,v) = f_{X,Y}\left(\frac{uv}{v+1}, \frac{u}{v+1}\right)\frac{|u|}{(v+1)^2}$. $\frac{uv}{v+1} > 0$ et $\frac{u}{v+1} > 0$ équivaut à $v > 0$ et $u > 0$ donc $f_{U,V}(u,v) = \frac{\lambda^2 u}{(v+1)^2}e^{-\lambda u}\mathbb{1}_{]0,+\infty[}(u)\mathbb{1}_{]0,+\infty[}(v)$.
$\int f_{U,V}(u,v)dv = \lambda^2 ue^{-\lambda u}\mathbb{1}_{]0,+\infty[}(u)\left[-\frac{1}{v+1}\right]_0^{+\infty} = \lambda^2 ue^{-\lambda u}\mathbb{1}_{]0,+\infty[}(u)$ donc

$$\boxed{U \text{ suit la loi } \gamma(\lambda, 2)}.$$

$\int f_{U,V}(u,v)du = \frac{1}{(v+1)^2}\mathbb{1}_{]0,+\infty[}(v)\int_0^{+\infty}\lambda^2 ue^{-\lambda u}du$, soit $\boxed{f_V(v) = \frac{1}{(v+1)^2}\mathbb{1}_{]0,+\infty[}(v)}$.
$f_U(u)f_V(v) = f_{U,V}(u,v)$ donc U et V sont indépendantes.

2. Soit $\varphi : (x,y) \mapsto (u,v) = (x+y, \frac{x}{x+y})$. Alors $\varphi^{-1} : (u,v) \mapsto (x,y) = (uv, u(1-v))$ et $J_{\varphi^{-1}}(u,v) = \begin{vmatrix} v & u \\ 1-v & -u \end{vmatrix} = -u$ et $f_{U,V}(u,v) = f_{X,Y}(uv, u(1-v))|u|$.
$uv > 0$ et $u(1-v) > 0$ équivaut à $v(1-v) > 0$ (*i.e.* $v \in]0,1[$) et $u > 0$ donc $f_{U,V}(u,v) = \lambda^2 ue^{-\lambda u}\mathbb{1}_{]0,+\infty[}(u)\mathbb{1}_{]0,1[}(v)$.
$\int f_{U,V}(u,v)du = \mathbb{1}_{]0,1[}(v)\int_0^{+\infty}\lambda^2 ue^{-\lambda u}du$, soit $\boxed{f_V(v) = \mathbb{1}_{]0,1[}(v)}$: V suit la loi uniforme sur $]0,1[$. $f_U(u)f_V(v) = f_{U,V}(u,v)$ donc U et V sont indépendantes.

---

5. (∗∗) Soient X et Y deux v.a.r. indépendantes de même loi uniforme sur $[0,2]$.
Déterminer la loi de $Z = X - Y$, de $S = X + Y$ et de $T = XY$.

$f_{X,Y}(x,y) = \frac{1}{4}\mathbb{1}_{[0,2]}(x)\mathbb{1}_{[0,2]}(y)$.

Soit $\varphi : (x,y) \mapsto (u,v) = (x-y,y)$. Alors $\varphi^{-1} : (u,v) \mapsto (x,y) = (u+v,v)$, d'où $J_{\varphi^{-1}}(u,v) = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 1$ et $f_{Z,Y}(u,v) = f_{X,Y}(u+v,v) = \frac{1}{4}\mathbb{1}_{[0,2]}(u+v)\mathbb{1}_{[0,2]}(v)$, et

$$f_Z(u) = \int \frac{1}{4}\mathbb{1}_{[0,2]}(u+v)\mathbb{1}_{[0,2]}(v)\,dv = \int \frac{1}{4}\mathbb{1}_{[-u,2-u]\cap[0,2]}(v)\,dv.$$

Or $[-u,2-u]\cap[0,2] = \begin{cases} \emptyset \text{ si } -u > 2 \text{ ou } 2-u<0 & \text{soit } u \notin [-2,2] \\ [-u,2] \text{ si } 0 \le -u \le 2 & \text{soit } u \in [-2,0] \\ [0,2-u] \text{ si } 0 \le 2-u \le 2 & \text{soit } u \in [0,2] \end{cases}$ donc

$$f_{Z,Y}(u,v) = \frac{1}{4}\mathbb{1}_{[-u,2-u]\cap[0,2]}(v) = \frac{1}{4}\left[\mathbb{1}_{[-u,2]}(v)\mathbb{1}_{[-2,0[}(u) + \mathbb{1}_{[0,2-u]}(v)\mathbb{1}_{[0,2]}(u)\right]$$

et $f_Z(u) = \int f_{U,V}(u,v)dv = \frac{1}{4}\left[(2+u)\mathbb{1}_{[-2,0[}(u) + (2-u)\mathbb{1}_{[0,2]}(u)\right] = \frac{1}{4}(2-|u|)\mathbb{1}_{[-2,2]}(u)$.

Ainsi, $\boxed{f_Z(z) = \frac{1}{4}(2-|z|)\mathbb{1}_{[-2,2]}(z)}$.

Soit $\varphi : (x,y) \mapsto (u,v) = (x+y,y)$. Alors $\varphi^{-1} : (u,v) \mapsto (x,y) = (u-v,v)$, d'où $J_{\varphi^{-1}}(u,v) = \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 1$ et $f_{S,Y}(u,v) = f_{X,Y}(u-v,v) = \frac{1}{4}\mathbb{1}_{[0,2]}(u-v)\mathbb{1}_{[0,2]}(v)$, et

$$f_S(u) = \int \frac{1}{4}\mathbb{1}_{[0,2]}(u-v)\mathbb{1}_{[0,2]}(v)\,dv = \int \frac{1}{4}\mathbb{1}_{[u-2,u]\cap[0,2]}(v)\,dv.$$

Or $[u-2,u]\cap[0,2] = \begin{cases} \emptyset \text{ si } u<0 \text{ ou } u>4 & \text{soit } u \notin [0,4] \\ [0,u] \text{ si } 0 \le u \le 2 & \text{soit } u \in [0,2] \\ [u-2,2] \text{ si } 0 \le u-2 \le 2 & \text{soit } u \in [2,4] \end{cases}$ donc

$$f_{S,Y}(u,v) = \frac{1}{4}\mathbb{1}_{[-u,2-u]\cap[0,2]}(v) = \frac{1}{4}\left[\mathbb{1}_{[0,u]}(v)\mathbb{1}_{[0,2[}(u) + \mathbb{1}_{[u-2,2]}(v)\mathbb{1}_{[2,4]}(u)\right]$$

et $f_S(u) = \int f_{U,V}(u,v)dv = \frac{1}{4}\left[u\mathbb{1}_{[0,2[}(u) + (4-u)\mathbb{1}_{[2,4]}(u)\right] = \frac{1}{4}(2-|2-u|)\mathbb{1}_{[0,4]}(u)$.

Ainsi, $\boxed{f_S(s) = \frac{1}{4}(2-|2-s|)\mathbb{1}_{[0,4]}(s)}$.

Soit $\varphi : (x,y) \mapsto (u,v) = (xy,y)$. Alors $\varphi^{-1} : (u,v) \mapsto (x,y) = \left(\frac{u}{v},v\right)$, d'où $J_{\varphi^{-1}}(u,v) = \begin{vmatrix} \frac{1}{v} & -\frac{u}{v^2} \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = \frac{1}{v}$ et $f_{T,Y}(u,v) = f_{X,Y}\left(\frac{u}{v},v\right) = \frac{1}{4}\mathbb{1}_{[0,2]}\left(\frac{u}{v}\right)\mathbb{1}_{]0,2]}(v)$, et

$$f_Z(u) = \int \frac{1}{4}\mathbb{1}_{[0,2]}\left(\frac{u}{v}\right)\mathbb{1}_{[0,2]}(v)\,dv = \int \frac{1}{4}\mathbb{1}_{\left[\frac{u}{2},+\infty\right[\cap[0,2]}(v)\,dv.$$

Or $\left[\frac{u}{2},+\infty\right[\cap[0,2] = \begin{cases} \emptyset \text{ si } \frac{u}{2} > 2 & \text{soit } u \notin [4,+\infty[\\ \left[\frac{u}{2},2\right] \text{ si } 0 \le \frac{u}{2} \le 2 & \text{soit } u \in [0,4] \end{cases}$ donc

$$f_{T,Y}(u,v) = \frac{1}{4}\mathbb{1}_{\left[\frac{u}{2},2\right]}(v)\mathbb{1}_{[0,4]}(u)$$

et $f_T(u) = \int f_{U,V}(u,v)dv = \frac{1}{4}\left(2 - \frac{u}{2}\right) \mathbb{1}_{[0,4]}(u)$. Ainsi, $\boxed{f_T(t) = \frac{1}{8}(4-t)\mathbb{1}_{[0,4]}(t)}$.

---

6. $(*)$ Soit (X,Y) un couple de v.a.r. de densité f définie par:

$$f(x,y) = k\ (x^2+y^2)\mathbb{1}_{[-1,1]}(x)\ \mathbb{1}_{[-1,1]}(y)$$

1. Déterminer k.
2. Déterminer $\operatorname{cov}(X,Y)$ et étudier l'indépendance de X et de Y.
3. Déterminer la loi de $S = X+Y$.

---

1. $\int f(x,y)\,dy = k\,\mathbb{1}_{[-1,1]}(x)\int_{-1}^{1}(x^2+y^2)\,dy = 2k\,\mathbb{1}_{[-1,1]}(x)\int_0^1(x^2+y^2)\,dy$ par parité de $y \mapsto x^2+y^2$ et $\int_0^1(x^2+y^2)\,dy = \left[x^2y + \frac{y^3}{3}\right]_0^1 = x^2 + \frac{1}{3}$ donc

$$\int\left(\int f(x,y)\,dy\right)dx = 2k\int_{-1}^{1}\left(x^2+\frac{1}{3}\right)dx = 4k\int_0^1\left(x^2+\frac{1}{3}\right)dx = 4k\left[\frac{x^3}{3}+\frac{x}{3}\right]_0^1$$

ce qui donne $\int\left(\int f(x,y)\,dy\right)dx = \frac{8}{3}k = 1$ d'où $\boxed{k = \frac{3}{8}}$.

2. X et Y ont même loi et, d'après les calculs effectués au 1.,

$$\boxed{f_X(x) = \frac{3}{4}\left(x^2+\frac{1}{3}\right)\mathbb{1}_{[-1,1]}(x)}.$$

$f_{X,Y}(x,y) \neq f_X(x)f_Y(y)$ donc X et Y ne sont pas indépendantes.

$\mathbb{E}(X) = \mathbb{E}(Y) = 0$ car f_X et f_Y sont paires. De plus, $y \mapsto yf(x,y)$ étant aussi impaire,

$$\operatorname{cov}(X,Y) = \mathbb{E}(XY) = \int x\left[\int yf(x,y)\,dy\right]dx = 0$$

donc $\boxed{\operatorname{cov}(X,Y) = 0}$.

3. Soit $\varphi : (x,y) \mapsto (s,y) = (x+y,y)$. Alors $\varphi^{-1} : (s,y) \mapsto (x,y) = (s-y,y)$, d'où $J_{\varphi^{-1}}(u,v) = \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 1$ et

$$f_{S,Y}(s,y) = f_{X,Y}(s-y,y) = \frac{3}{8}\left[(s-y)^2+y^2\right]\mathbb{1}_{[-1,1]}(s-y)\mathbb{1}_{[-1,1]}(y).$$

On a alors

$$\begin{aligned} f_S(s) &= \int\frac{3}{8}\left[(s-y)^2+y^2\right]\mathbb{1}_{[-1,1]}(s-y)\mathbb{1}_{[-1,1]}(y)\,dy \\ &= \int\frac{3}{8}\left[(s-y)^2+y^2\right]\mathbb{1}_{[s-1,s+1]\cap[-1,1]}(y)\,dy. \end{aligned}$$

Or $[s-1,s+1]\cap[-1,1] = \begin{cases} \emptyset \text{ si } s<-2 \text{ ou } s>2 & \text{soit } s\notin[-2,2] \\ [-1,s+1] \text{ si } -1\le s+1\le 1 & \text{soit } s\in[-2,0] \\ [s-1,1] \text{ si } -1\le s-1\le 1 & \text{soit } s\in[0,2] \end{cases}$ donc

$$f_{S,Y}(s,y) = \frac{3}{8}\left[(s-y)^2+y^2\right]\left[\mathbb{1}_{[-1,s+1]}(y)\mathbb{1}_{[-2,0[}(s) + \mathbb{1}_{[s-1,1]}(y)\mathbb{1}_{[0,2]}(y)\right].$$

On en déduit

$$\begin{aligned}
f_S(s) &= \int f_{S,Y}(s,y)dy \\
&= \frac{1}{8}\left(\left[-(s-y)^3+y^3\right]_{-1}^{s+1}\mathbb{1}_{[-2,0[}(s)+\left[-(s-y)^3+y^3\right]_{s-1}^{1}\mathbb{1}_{[0,2]}(s)\right) \\
&= \frac{1}{8}(\left[-(-1)^3+(s+1)^3+(s-(-1))^3-(-1)^3\right]\mathbb{1}_{[-2,0[}(s) \\
&\quad +\left[-(s-1)^3+1+(s-(s-1))^3-(s-1)^3\right]\mathbb{1}_{[0,2]}(s))
\end{aligned}$$

Ainsi, $f_S(s)=\frac{1}{4}\left([(s+1)^3+1]\mathbb{1}_{[-2,0[}(s)+[1-(s-1)^3]\mathbb{1}_{[0,2]}(s)\right)$, soit

$$\boxed{f_S(s)=\frac{1}{4}\left[1+(1-|s|)^3\right]\mathbb{1}_{[-2,2]}(s)}.$$

---

7. (**) Soit f la fonction définie par:

$$f(x,y)=e^{-y}\,\mathbb{1}_D(x,y)$$

où $D=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2\ ;\ 0<x\le y\}$.

1. Vérifier que f est la densité d'un couple (X,Y).
2. Quelles sont les lois des v.a.r. X et Y. Ces v.a.r. sont-elles indépendantes?
3. Les v.a.r. X et $X-Y$ sont-elles indépendantes?
4. Les v.a.r. Y et X/Y sont-elles indépendantes?

---

1. $f\ge 0$, f est continue sauf sur la frontière de D et

$$\int\left(\int f(x,y)\,dx\right)dy=\int_0^{+\infty} ye^{-y}\,dy=\Gamma(2)=1$$

donc f est bien la densité d'un couple (X,Y).

2. $f_Y(y)=\int f(x,y)\,dx=e^{-y}\mathbb{1}_{]0,+\infty[}(y)\int\mathbb{1}_{]0,y[}(x)\,dx=ye^{-y}\mathbb{1}_{]0,+\infty[}(y)$ et

$f_X(x)=\int f(x,y)\,dy=\int f(x,y)\,dy=\mathbb{1}_{]0,+\infty[}(x)\int_x^{+\infty}e^{-y}\,dy=e^{-x}\mathbb{1}_{]0,+\infty[}(x)$.

Ainsi, $\boxed{X \text{ suit la loi exponentielle } \mathcal{E}(1) \text{ et } Y \text{ la loi Gamma } \gamma(1,2)}$.
$f(x,y)\neq f_X(x)f_Y(y)$ donc X et Y ne sont pas indépendantes.

3. Soit $Z=X-Y$ et $\varphi:(x,y)\mapsto(x,z)=(x,x-y)$. Alors $\varphi^{-1}:(x,z)\mapsto(x,y)=(x,x-z)$, d'où $J_{\varphi^{-1}}(x,z)=\begin{vmatrix}1&0\\1&-1\end{vmatrix}=-1$ et $f_{X,Z}(x,z)=f_{X,Y}(x,x-z)=e^{z-x}\mathbb{1}_D(x,x-z)$ avec $\mathbb{1}_D(x,x-z)=1$ si $0<x<x-z$, soit $x>0$ et $z<0$. On a donc :

$$\boxed{f_{X,X-Y}(x,z)=e^{z-x}\mathbb{1}_{]0,+\infty[}(x)\mathbb{1}_{]-\infty,0[}(z)}$$

$f_{X-Y}(z)=\int f_{X,X-Y}(x,z)\,dx = e^z \mathbb{1}_{]-\infty,0[}(z)$ et on a bien $f_{X,X-Y}(x,z)=f_X(x)f_{X-Y}(z)$ donc $\boxed{X \text{ et } X-Y \text{ sont indépendantes}}$.

4. Soit $T=\frac{X}{Y}$ et $\varphi : (x,y)\mapsto (t,y)=\left(\frac{x}{y},y\right)$. Alors $\varphi^{-1} : (t,y)\mapsto (x,y)=(ty,y)$, d'où $J_{\varphi^{-1}}(t,y)=\begin{vmatrix} y & 0 \\ t & 1 \end{vmatrix}=y$ et $f_{T,Y}(t,y)=f_{X,Y}(ty,y)=e^{-y}\mathbb{1}_D(ty,y)$ avec $\mathbb{1}_D(ty,y)=1$ si $0<ty<y$, soit $y>0$ et $0<t<1$. On a donc :

$$\boxed{f_{X/Y,Y}(t,y)=ye^{-y}\mathbb{1}_{]0,+\infty[}(y)\mathbb{1}_{]0,1[}(t)}$$

$f_{X/Y}(t)=\int f_{X/Y,Y}(t,y)\,dy=\mathbb{1}_{]0,1[}(t)$ et on a bien $f_{X/Y,Y}(t,y)=f_{X/Y}(t)f_Y(y)$ donc $\boxed{X/Y \text{ et } Y \text{ sont indépendantes}}$ (et X/Y suit la loi uniforme $\mathcal{U}(]0,1[)$).

---

8. (**) Deux personnes se donnent rendez-vous entre 13 heures et 14 heures: X et Y représentent l'instant d'arrivée de chacune ; Z est le temps d'attente de la première arrivée.
Quelle est la loi de Z et son espérance?

Si X est l'heure d'arrivée de la personne A et Y celle de la personne B, X et Y sont des variables aléatoires indépendantes de même loi uniforme sur $[13,14]$, et si Z est le temps d'attente de la première arrivée, alors $Z=|X-Y|$. On commence par déterminer la loi de $U=X-Y$, comme loi marginale du couple $(U,V)=(X-Y,Y)=h(X,Y)$.
h est une bijection sur $\mathbb{R}^2$, avec $h^{-1}(u,v)=(u+v,v)$ et $J_{h^{-1}}(u,v)=1$ donc

$$f_{U,V}(u,v)=\mathbb{1}_{[13,14]}(u+v)\mathbb{1}_{[13,14]}(v)=\mathbb{1}_{[13-u,14-u]}(v)\mathbb{1}_{[13,14]}(v)=\mathbb{1}_{[13-u,14-u]\cap[13,14]}(v).$$

Or $[13-u,14-u]\cap[13,14]=\begin{cases} \emptyset \text{ si } 13-u>14 \text{ ou } 14-u<13 \text{ soit } u\notin[-1,1] \\ [13-u,14] \text{ si } 13\leq 13-u\leq 14 \text{ soit } u\in[-1,0] \\ [13,14-u] \text{ si } 13\leq 14-u\leq 14 \text{ soit } u\in[0,1] \end{cases}$ donc

$$f_{U,V}(u,v)=\mathbb{1}_{[13-u,14-u]\cap[13,14]}(v)=\mathbb{1}_{[13-u,14]}\mathbb{1}_{[-1,0[}(u)+\mathbb{1}_{[13,14-u]}\mathbb{1}_{[0,1]}(u)$$

et $f_U(u)=\int f_{U,V}(u,v)dv=(1+u)\mathbb{1}_{[-1,0[}(u)+(1-u)\mathbb{1}_{[0,1]}(u)=(1-|u|)\mathbb{1}_{[-1,1]}(u)$.

Or $Z=|U|$ donc
$F_Z(z)=P([|U|\leq z])=P([-z\leq U\leq z])\mathbb{1}_{[0,+\infty[}(z)=(F_U(z)-F_U(-z))\mathbb{1}_{[0,+\infty[}(z)$ et $f_Z(z)=(f_U(z)+f_U(-z))\mathbb{1}_{[0,+\infty[}(z)=2(1-|z|)\mathbb{1}_{[-1,1]\cap[0,+\infty[}(z)$: $\boxed{f_Z(z)=2(1-z)\mathbb{1}_{[0,1]}(z)}$.
$\mathbb{E}(Z)=\int zf_Z(z)dz=\int_0^1(2z-2z^2)dz=[z^2-2\frac{z^3}{3}]_0^1$, soit $\boxed{\mathbb{E}(Z)=\frac{1}{3}}$

---

9. (**) Soient X et Y deux v.a.r. indépendantes de même loi admettant pour densité f définie par:

$$f(x)=ke^{-|x|}.$$

1. Déterminer k.
2. Déterminer la loi de $Q=Y/X$ et, si elles existent, l'espérance et la variance de Q.
3. Déterminer la loi de $S=X-Y$.

1. $\int f(x)dx = k\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-|x|}\,dx = 2k\int_0^{+\infty} e^{-x}\,dx = 2k = 1$ donc $\boxed{k=\frac{1}{2}}$.

2. Soit $T=\frac{Y}{X}$ et $\varphi:(x,y)\mapsto(x,t)=\left(x,\frac{y}{x}\right)$. Alors $\varphi^{-1}:(x,t)\mapsto(x,y)=(x,tx)$, d'où $J_{\varphi^{-1}}(x,tx)=\begin{vmatrix}1 & t\\ 0 & x\end{vmatrix}=x$ et $f_{X,T}(x,t)=f_{X,Y}(x,tx)|x|=\frac{1}{4}|x|e^{-|x|-|t||x|}$. On a donc :

$$\begin{aligned}
f_T(t) &= \int f_{X,T}(x,t)dx = \frac{1}{4}\int_{-\infty}^{+\infty}|x|e^{-|x|-|t||x|}dx\\
&= \frac{1}{2}\int_0^{+\infty} xe^{-(1+|t|)x}dx \underset{u=(1+|t|)x}{=} \frac{1}{2}\frac{1}{(1+|t|)^2}\int_0^{+\infty} ue^{-u}du\\
&= \frac{\Gamma(2)}{2(1+|t|)^2} = \frac{1}{2(1+|t|)^2}
\end{aligned}$$

Ainsi, $\boxed{f_T(t)=\dfrac{1}{2(1+|t|)^2}}$.

$\int |t|f_T(t)\,dt$ est divergente car, au voisinage de $+\infty$, $\frac{t}{(1+t^2)}\sim\frac{1}{t}$ donc Q n'admet ni espérance ni variance.

3. Soit $Z=X-Y$ et $\varphi:(x,y)\mapsto(x,z)=(x,x-y)$. Alors $\varphi^{-1}:(x,z)\mapsto(x,y)=(x,x-z)$, d'où $J_{\varphi^{-1}}(x,z)=\begin{vmatrix}1 & 0\\ 1 & -1\end{vmatrix}=-1$ et

$$f_{X,Z}(x,z)=f_{X,Y}(x,x-z)=\frac{1}{4}e^{-|x|}e^{-|z-x|}=\frac{1}{4}e^{-(|x|+|z-x|)}$$

Pour déterminer $|x|+|z-x|$, on distingue 2 cas suivant le signe de z. On a donc :

Pour $z\geq 0$:

x	$-\infty$		0		z		$+\infty$
$\lvert x\rvert$		$-x$	0	x		x	
$\lvert x-z\rvert$		$z-x$		$z-x$	0	$x-z$	
$\lvert x\rvert+\lvert x-z\rvert$		$z-2x$		z		$2x-z$	

On a alors $f_{X,Z}(x,z)=\frac{1}{4}\left(e^{-z+2x}\mathbb{1}_{]-\infty,0[}(x)+e^{-z}\mathbb{1}_{[0,z[}(x)+e^{-2x+z}\mathbb{1}_{[z,+\infty[}(x)\right)$ et

$$\begin{aligned}
f_Z(z) &= \int f_{X,Z}(x,z)\,dx = \frac{1}{4}\left(e^{-z}\left[\frac{e^{2x}}{2}\right]_{-\infty}^{0}+ze^{-z}+e^{z}\left[-\frac{e^{-2x}}{2}\right]_{z}^{+\infty}\right)\\
&= \frac{1}{4}\left(\frac{1}{2}e^{-z}+ze^{-z}+e^{z}\frac{e^{-2z}}{2}\right)=\frac{1}{4}(z+1)e^{-z}
\end{aligned}$$

Pour $z\leq 0$:

x	$-\infty$		z		0		$+\infty$
$\lvert x\rvert$		$-x$		$-x$	0	x	
$\lvert x-z\rvert$		$z-x$	0	$x-z$		$x-z$	
$\lvert x\rvert+\lvert x-z\rvert$		$z-2x$		$-z$		$2x-z$	

On a alors $f_{X,Z}(x,z) = \frac{1}{4}\left(e^{-z+2x}\mathbb{1}_{]-\infty,z[}(x) + e^{z}\mathbb{1}_{[z,0[}(x) + e^{-2x+z}\mathbb{1}_{[0,+\infty[}(x)\right)$ et

$$\begin{aligned} f_Z(z) &= \int f_{X,Z}(x,z)\,dx = \frac{1}{4}\left(e^{-z}\left[\frac{e^{2x}}{2}\right]_{-\infty}^{z} - ze^{z} + e^{z}\left[-\frac{e^{-2x}}{2}\right]_{0}^{+\infty}\right) \\ &= \frac{1}{4}\left(e^{-z}\frac{e^{2z}}{2} - ze^{z} + \frac{1}{2}e^{z}\right) = \frac{1}{4}(1-z)e^{z} \end{aligned}$$

Finalement,

$$\boxed{f_Z(z) = \frac{1}{4}(1+|z|)e^{-|z|}}$$

---

10. (∗) Soit (X,Y) un couple de v.a.r. de densité f définie par:

$$f(x,y) = kxy\; e^{-(x^2+y^2)}\,\mathbb{1}_{\mathbb{R}_+^2}(x,y)$$

1. Déterminer k et les lois marginales de X et de Y.
2. Déterminer la loi de $Z = \sqrt{X^2+Y^2}$.

---

1. X et Y suivent la même loi car x et y jouent le même rôle dans f.

$$f(x,y) = kxe^{-x^2}\mathbb{1}_{[0,+\infty[}(x)\; ye^{-y^2}\mathbb{1}_{[0,+\infty[}(y)$$

donc $\int\int f(x,y)\,dx\,dy = k\;\left[-\frac{1}{2}e^{-x^2}\right]_0^{+\infty}\left[-\frac{1}{2}e^{-y^2}\right]_0^{+\infty} = \frac{k}{4} = 1$, d'où $\boxed{k=4}$.

$f_X(x) = \int f(x,y)dy = kxe^{-x^2}\mathbb{1}_{[0,+\infty[}(x)\left[-\frac{1}{2}e^{-y^2}\right]_0^{+\infty}$ d'où $\boxed{f_X(x) = 2xe^{-x^2}\mathbb{1}_{[0,+\infty[}(x)}$.

2. On passe en coordonnées polaires :
soit $\varphi : (x,y) \mapsto (z,\theta)$, bijection de $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ sur $]0,+\infty[\times[0,2\pi[$, $\varphi^{-1} : (z,\theta) \mapsto (x,y) = (z\cos\theta, z\sin\theta)$. $J_{\varphi^{-1}}(z,\theta) = \begin{vmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -z\sin\theta & z\cos\theta \end{vmatrix} = z.$

$$\begin{aligned} f_{Z,\Theta}(z,\theta) &= f_{X,Y}(\varphi^{-1}(z,\theta)|J_{\varphi^{-1}}(z,\theta)|\mathbb{1}_{]0,+\infty[}(z)\mathbb{1}_{[0,2\pi[}(\theta) \\ &= 4z^2\cos\theta\sin\theta\, e^{-z^2}\,|z|\,\mathbb{1}_{]0,+\infty[}(z)\mathbb{1}_{[0,\pi/2[}(\theta) \\ &= 2z^3e^{-z^2}\sin 2\theta\,\mathbb{1}_{]0,+\infty[}(z)\mathbb{1}_{[0,\pi/2[}(\theta) \end{aligned}$$

donc

$$f_Z(z) = \int f_{Z,\Theta}(z,\theta)d\theta = 2z^3e^{-z^2}\,\mathbb{1}_{]0,+\infty[}(z)\int_0^{\pi/2}\sin 2\theta\,d\theta$$

avec $\int_0^{\pi/2}\sin 2\theta\,d\theta = \left[-\frac{1}{2}\cos 2\theta\right]_0^{\pi/2} = 2\times\frac{1}{2} = 1$. D'où $\boxed{f_Z(z) = 2z^3e^{-z^2}\,\mathbb{1}_{]0,+\infty[}(z)}$.

---

11. (∗∗) Soit (X,Y) un couple de v.a.r. de densité f définie par:

$$f(x,y) = k\;\mathbb{1}_D(x,y)$$

où $D = \{(x,y)\in\mathbb{R}^2;\; x^2+y^2\le 1\}$

1. Déterminer k et les lois de X et de Y.

2. Déterminer les lois de $Q = X/Y$ et de $Z = (X^2+Y^2)^{-1/2}$.

Soit $\varphi : (x,y) \mapsto (r,\theta)$, bijection de $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ sur $]0,+\infty[\times[0,2\pi[$, $\varphi^{-1} : (r,\theta) \mapsto (x,y) = (r\cos\theta, r\sin\theta)$. $J_{\varphi^{-1}}(r,\theta) = \begin{vmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -r\sin\theta & r\cos\theta \end{vmatrix} = r$.

$$f_{R,\Theta}(z,\theta) = f_{X,Y}(\varphi^{-1}(r,\theta)|J_{\varphi^{-1}}(r,\theta)|\mathbb{1}_{]0,+\infty[}(r)\mathbb{1}_{[0,2\pi[}(\theta) = kr\mathbb{1}_{]0,1[}(r)\mathbb{1}_{[0,2\pi[}(\theta).$$

On en déduit $f_R(r) = \int f_{R,\Theta}(r,\theta)\,d\theta = 2\pi kr\mathbb{1}_{]0,1[}(r)$ puis $\int f_R(r)\,dr = 1 = k\pi$, soit

$$\boxed{k = \tfrac{1}{\pi}}.$$

X et Y ont même loi car x et y jouent le même rôle dans $f_{X,Y}$ où

$$f_{X,Y}(x,y) = \frac{1}{\pi}\mathbb{1}_{]-\sqrt{1-x^2},\sqrt{1-x^2}[}(y)\mathbb{1}_{]-1,1[}(x).$$

On a alors $f_X(x) = \int f_{X,Y}(x,y)\,dy = \frac{2}{\pi}\sqrt{1-x^2}\mathbb{1}_{]-1,1[}(x)$.

2. $f_{R,\Theta}(r,\theta) = \frac{r}{\pi}\mathbb{1}_{]0,1[}(r)$. $Q = \frac{X}{Y} = \text{cotan}\Theta$ et $Z = R^{-1}$ avec $f_R(r) = 2r\mathbb{1}_{]0,1[}(r)$ et $f_\Theta(\theta) = \frac{1}{2\pi}\mathbb{1}_{[0,2\pi[}(\theta)$.

Pour la loi de Z, on considère l'application $\varphi :]0,1[\to]1,+\infty[$, $r \mapsto \frac{1}{r}$, qui est une bijection strictement décroissante, vérifiant $\varphi \circ \varphi^{-1} = \text{id}$.

$$f_Z(z) = f_{R^{-1}}(z) = f_R(z^{-1})\left|-\frac{1}{z^2}\right| = \frac{2}{z}\frac{1}{z^2}\mathbb{1}_{]1,+\infty[}(z), \text{ soit } \boxed{f_Z(z) = \frac{2}{z^3}\mathbb{1}_{]1,+\infty[}(z)}.$$

Pour la loi de Q, il y a un problème car cotan n'est une bijection que de $]0,\pi[$ sur $\mathbb{R}$ (ou de $]k\pi,(k+1)\pi[$ sur $\mathbb{R}$). Il faut donc décomposer l'intervalle $]0,2\pi[$ en 2 pour avoir une bijection. On a alors, vu que $\text{cotan}' = -(1+\text{cotan}'^2)$, $f_Q(t) = \frac{1}{\pi(1+t^2)}$:

$$\boxed{Q \text{ suit la loi de Cauchy}}.$$

---

12. (**) Soit (X,Y) un couple de v.a.r. de densité f définie par:

$$f(x,y) = \frac{1}{x^2y^2}\mathbb{1}_{[1,+\infty[}(x)\ \mathbb{1}_{[1,+\infty[}(y)$$

Soient $U = XY$ et $V = X/Y$.

1. Déterminer les lois de U et de V.
2. Les v.a.r. U et V sont-elles indépendantes?

Soit $\varphi : [1,+\infty[^2 \to [1,+\infty[\times]0,+\infty[$, $(x,y) \mapsto (u,v) = (xy, \frac{x}{y})$.
Alors $\varphi^{-1} : (u,v) \mapsto (x,y) = \left(\sqrt{uv}, \sqrt{\frac{u}{v}}\right) = (u^{1/2}v^{1/2}, u^{1/2}v^{-1/2})$, d'où

$$J_{\varphi^{-1}}(u,v) = \begin{vmatrix} \frac{1}{2}u^{-1/2}v^{1/2} & \frac{1}{2}u^{-1/2}v^{-1/2} \\ \frac{1}{2}u^{1/2}v^{-1/2} & -\frac{1}{2}u^{1/2}v^{-3/2} \end{vmatrix} = -\frac{1}{4}v^{-1} - \frac{1}{4}v^{-1} = -\frac{1}{2}v^{-1}$$

et $f_{U,V}(u,v) = f_{X,Y}(\varphi^{-1}(u,v)\,|J_{\varphi^{-1}}(u,v)| = f_{X,Y}\left(\sqrt{uv}, \sqrt{\frac{u}{v}}\right)\frac{1}{2v}$, soit

$$f_{U,V}(u,v) = \frac{1}{2u^2v}\mathbb{1}_{[1,+\infty[}(\sqrt{uv})\mathbb{1}_{[1,+\infty[}\left(\sqrt{\frac{u}{v}}\right).$$

On doit donc avoir $uv \geq 1$ et $\frac{u}{v} \geq 1$, soit $u \geq 1$ et $\frac{1}{u} \leq v \leq u$ et réciproquement, si $u \geq 1$ et $\frac{1}{u} \leq v \leq u$, on a bien $uv \geq 1$ et $\frac{u}{v} \geq 1$ donc $f_{U,V}(u,v) = \dfrac{1}{2u^2v}\mathbb{1}_D(u,v)$ où

$$D = \{(u,v)\ ;\ u \geq 1 \text{ et } \frac{1}{u} \leq v \leq u\}.$$

$$f_U(u) = \int f_{U,V}(u,v)\,dv = \frac{1}{2u^2}\mathbb{1}_{[1,+\infty[}(u)\int_{\frac{1}{u}}^{u}\frac{1}{v}\,dv, \text{ soit } \boxed{f_U(u) = \frac{\ln u}{u^2}\,\mathbb{1}_{[1,+\infty[}(u)}.$$

Pour déterminer f_V et donc intégrer par rapport à u, il va falloir dans D, exprimer u en fonction de v. On a $u \geq 1$, $u \geq v$ et $u \geq \frac{1}{v}$ donc :
- si $v \in]0,1]$, alors $\frac{1}{v} \geq 1 \geq v$ et $u \geq \frac{1}{v}$;
- si $v \in]1,+\infty[$, alors $\frac{1}{v} < 1 < v$ et $u \geq v$;

ainsi $\mathbb{1}_D(u,v) = \mathbb{1}_{]0,1]}(v)\mathbb{1}_{[\frac{1}{v},+\infty[}(u) + \mathbb{1}_{]1,+\infty[}(v)\mathbb{1}_{[v,+\infty[}(u)$ et

$$f_V(v) = \int f_{U,V}(u,v)\,du = \frac{1}{2v}\left(\left[-\frac{1}{u}\right]_{\frac{1}{v}}^{+\infty}\mathbb{1}_{]0,1]}(v) + \left[-\frac{1}{u}\right]_{v}^{+\infty}\mathbb{1}_{[1,+\infty[}(v)\right)$$

soit $\boxed{f_V(v) = \dfrac{1}{2}\mathbb{1}_{]0,1]}(v) + \dfrac{1}{2v^2}\mathbb{1}_{[1,+\infty[}(v)}$.

2. $f_{U,V}(u,v) \neq f_U(u)f_V(v)$ donc $\boxed{U \text{ et } V \text{ ne sont pas indépendantes}}$.

---

13. (**) Soit (X,Y) un couple de v.a.r. de densité f définie par:

$$f(x,y) = k\frac{1}{x^2y}\mathbb{1}_D(x,y)$$

où $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2\ ;\ x \geq 1 \text{ et } x^{-1} \leq y \leq x\}$

1. Déterminer k.
2. Déterminer les densités marginales et conditionnelles de X et de Y.

---

1. $\int f(x,y)\,dy = \frac{k}{x^2}\mathbb{1}_{[1,+\infty[}(x)\int_{x^{-1}}^{x}\frac{dy}{y} = \frac{2k\ln x}{x^2}\,\mathbb{1}_{[1,+\infty[}(x)$, puis

$$\begin{aligned}\int\left(\int f(x,y)\,dy\right)dx &= \int_1^{+\infty}\frac{2k\ln x}{x^2}\,dx \underset{u=\ln x}{=} 2k\int_0^{+\infty}ue^{-2u}\times e^u\,du \\ &= 2k\int_0^{+\infty}ue^{-u}\,du = 2k\Gamma(2) = 2k\end{aligned}$$

donc $\boxed{k = \frac{1}{2}}$ et $\boxed{f_X(x) = \dfrac{\ln x}{x^2}\,\mathbb{1}_{[1,+\infty[}(x)}$.

$(x,y) \in D$ équivaut à $x \geq 1$, $x \geq y^{-1}$ et $x \geq y$, avec $y > 0$, soit $x \geq y^{-1}$ si $y \in]0,1]$ et $x \geq y$ si $y > 1$. On a donc

$$f_Y(y) = \int f(x,y)\,dx = \frac{1}{2y}\left(\left[-\frac{1}{x}\right]_{\frac{1}{y}}^{+\infty} \mathbb{1}_{]0,1]}(y) + \left[-\frac{1}{x}\right]_{y}^{+\infty} \mathbb{1}_{[1,+\infty[}(y)\right)$$

soit $\boxed{f_Y(y) = \frac{1}{2}\mathbb{1}_{]0,1]}(y) + \frac{1}{2y^2}\mathbb{1}_{[1,+\infty[}(y)}$.

On a $f_Y^{X=x}(y) = \frac{f(x,y)}{f_X(x)}$ pour x tel que $f_X(x) \neq 0$. Or, pour $x > 1$, $f_X(x) = \frac{\ln x}{x^2}$ et $f(x,y) = \frac{1}{2x^2y}\mathbb{1}_{[x^{-1},x]}(y)$ donc $\boxed{f_Y^{X=x}(y) = \frac{1}{2y\ln x}\mathbb{1}_{[x^{-1},x]}(y) \text{ pour } x \in]1,+\infty[}$.

$f_X^{Y=y}(x) = \frac{f(x,y)}{f_Y(y)}$ pour y tel que $f_Y(y) \neq 0$.

- Pour $y \in]0,1]$, $f_Y(y) = \frac{1}{2}$ et $f(x,y) = \frac{1}{2x^2y}\mathbb{1}_{[y^{-1},+\infty[}(x)$ donc

$$\boxed{f_X^{Y=y}(x) = \frac{1}{x^2y}\mathbb{1}_{[y^{-1},+\infty[}(x) \text{ si } y \in]0,1]}$$

- Pour $y \in]1,+\infty[$, $f_Y(y) = \frac{1}{2y^2}$ et $f(x,y) = \frac{1}{2x^2y}\mathbb{1}_{[y,+\infty[}(x)$ donc

$$\boxed{f_X^{Y=y}(x) = \frac{y}{x^2}\mathbb{1}_{[y,+\infty[}(x) \text{ si } y \in]1,+\infty[}$$

---

14. $(* * *)$ Soient X et Y deux v.a.r. indépendantes de même loi admettant pour densité f définie par:

$$f(x) = \frac{1}{2}\cos x\ \mathbb{1}_{[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}]}(x).$$

Déterminer la loi de $S = X + Y$.

$$f(x,y) = \frac{1}{4}\cos x\ \cos y\ \mathbb{1}_{[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}]}(x)\ \mathbb{1}_{[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}]}(y).$$

Soit $\varphi : (x,y) \mapsto (s,y) = (x+y,y)$. Alors $\varphi^{-1} : (s,y) \mapsto (x,y) = (s-y,y)$, d'où $J_{\varphi^{-1}}(u,v) = \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 1$ et

$$f_{S,Y}(s,y) = f_{X,Y}(s-y,y) = \frac{1}{4}\cos(s-y)\ \cos y\ \mathbb{1}_{[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}]}(s-y)\ \mathbb{1}_{[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}]}(y)$$

avec $\mathbb{1}_{[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}]}(s-y) = 1$ si et seulement si $-\frac{\pi}{2} \leq s-y \leq \frac{\pi}{2}$, soit $y \in \left[s-\frac{\pi}{2}, s+\frac{\pi}{2}\right]$ et

$$\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right] \cap \left[s-\frac{\pi}{2}, s+\frac{\pi}{2}\right] = \begin{cases} \emptyset & \text{si } s < -\pi \text{ ou si } s > \pi \\ \left[-\frac{\pi}{2}, s+\frac{\pi}{2}\right] & \text{si } -\pi \leq s \leq 0 \\ \left[s-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right] & \text{si } 0 \leq s \leq \pi \end{cases}$$

et $\cos(s-y)\cos y = \frac{1}{2}[\cos s + \cos(2y-s)]$ donc

$$f_{S,Y}(s,y) = \frac{1}{8}[\cos s + \cos(2y-s)]\left(\mathbb{1}_{[-\frac{\pi}{2},s+\frac{\pi}{2}]}(y)\mathbb{1}_{[-\pi,0[}(s) + \mathbb{1}_{[s-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}]}(y)\mathbb{1}_{[0,\pi]}(s)\right)$$

$$
\begin{aligned}
f_S(s) &= \int f_{S,Y}(s,y)\,dy \\
&= \frac{1}{8}\left[\int_{-\frac{\pi}{2}}^{s+\frac{\pi}{2}} [\cos s+\cos(2y-s)]\,dy\right] \mathbb{1}_{[-\pi,0[}(s) \\
&\quad + \frac{1}{8}\left[\int_{s-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} [\cos s+\cos(2y-s)]\,dy\right] \mathbb{1}_{[0,\pi]}(s) \\
&= \frac{1}{8}\left[(\pi+s)\cos s+\frac{1}{2}[\sin(2y-s)]_{-\frac{\pi}{2}}^{s+\frac{\pi}{2}}\right] \mathbb{1}_{[-\pi,0[}(s) \\
&\quad + \frac{1}{8}\left[(\pi-s)\cos s+\frac{1}{2}[\sin(2y-s)]_{s-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\right] \mathbb{1}_{[0,\pi]}(s) \\
&= \frac{1}{8}\left[(\pi+s)\cos s+\frac{1}{2}[\sin(s+\pi)-\sin(-\pi-s)]\right] \mathbb{1}_{[-\pi,0[}(s) \\
&\quad + \frac{1}{8}\left[(\pi-s)\cos s+\frac{1}{2}[\sin(\pi-s)-\sin(s-\pi)]\right] \mathbb{1}_{[0,\pi]}(s) \\
&= \frac{1}{8}\,[(\pi+s)\cos s+\sin(s+\pi)]\,\mathbb{1}_{[-\pi,0[}(s)+\frac{1}{8}\,[(\pi-s)\cos s+\sin(\pi-s)]\,\mathbb{1}_{[0,\pi]}(s)
\end{aligned}
$$

d'où finalement $\boxed{f_S(s)=\frac{1}{8}\,[(\pi-|s|)\cos s+\sin|s|]\;\mathbb{1}_{[-\pi,\pi]}(s)}$.

---

15. (∗∗) Soit f la fonction définie par :

$$f(x,y)=\frac{1}{2}\;\mathbb{1}_{]-1,0[}(x)\;\mathbb{1}_{]0,1[}(y)+\mathbb{1}_D(x,y)$$

où $D=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2\ ;\ x\geq 0,\ y\geq 0 \text{ et } x+y<1\}$.

1. Vérifier que f est la densité d'un couple (X,Y) ; déterminer les lois marginales de X et de Y ainsi que la densité de la loi conditionnelle de Y sachant $(X=x)$ pour tout x tel que $f_X(x)\neq 0$.
2. Les v.a.r. X et Y sont-elles indépendantes? Calculer $\mathrm{cov}(X,Y)$.
3. Soient $U=X+Y$ et $V=X-Y$. Déterminer la densité du couple (U,V).

$$f(x,y)=\frac{1}{2}\;\mathbb{1}_{]-1,0[}(x)\;\mathbb{1}_{]0,1[}(y)+\mathbb{1}_{]0,1[}(x)\;\mathbb{1}_{]0,1-x[}(y)=\frac{1}{2}\;\mathbb{1}_{]-1,0[}(x)\;\mathbb{1}_{]0,1[}(y)+\mathbb{1}_{]0,1[}(y)\;\mathbb{1}_{]0,1-y[}(x)$$

$$\int f(x,y)\,dy=\frac{1}{2}\;\mathbb{1}_{]-1,0[}(x)+(1-x)\;\mathbb{1}_{]0,1[}(x)$$

$$\int\left(\int f(x,y)\,dy\right)dx=\frac{1}{2}+\left[-\frac{(1-x)^2}{2}\right]_0^1=1$$

donc f est bien la densité d'un couple (X,Y) et $\boxed{f_X(x)=\frac{1}{2}\;\mathbb{1}_{]-1,0[}(x)+(1-x)\;\mathbb{1}_{]0,1[}(x)}$.

$f_Y(y)=\int f(x,y)\,dx=\frac{1}{2}\;\mathbb{1}_{]0,1[}(y)+(1-y)\;\mathbb{1}_{]0,1[}(y)$, soit $\boxed{f_Y(y)=\left(\frac{3}{2}-y\right)\;\mathbb{1}_{]0,1[}}$.

Pour déterminer la loi conditionnelle de Y sachant $(X=x)$, on distingue 2 cas :

• Si $x \in]-1,0[$, $f_X(x) = \frac{1}{2}$ et $f_Y^{X=x}(y) = \mathbb{1}_{]0,1[}(y)$,
• si $x \in]0,1[$, $f_X(x) = (1-x)$ et $f_Y^{X=x}(y) = \frac{1}{1-x}\,\mathbb{1}_{]0,1-x[}(y)$.

La loi conditionnelle de Y sachant $X = x$ est donc la loi uniforme $\left\{\begin{array}{l} \text{sur }]0,1[\text{ si } x \in]-1,0[\\ \text{sur }]0,1-x[\text{ si } x \in]0,1[\end{array}\right.$.

2. $f(x,y) \neq f_X(x)f_Y(y)$ donc X et Y ne sont pas indépendantes.

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}(X) &= \int x f_X(x)\,dx = \frac{1}{2}\int_{-1}^{0} x\,dx + \int_0^1 (x-x^2)\,dx = \left[\frac{x^2}{4}\right]_{-1}^{0} + \left[\frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3}\right]_0^1 \\
&= -\frac{1}{4} + \frac{1}{2} - \frac{1}{3} = -\frac{1}{12}
\end{aligned}$$

$$\mathbb{E}(Y) = \int y f_Y(y)\,dy = \int_0^1 \left(\frac{3}{2}y - y^2\right)dy = \left[\frac{3}{4}y^2 - \frac{y^3}{3}\right]_0^1 = \frac{3}{4} - \frac{1}{3} = \frac{5}{12}$$

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}(XY) &= \int x\left[\int y f(x,y)\,dy\right]dx = \frac{1}{2}\int_{-1}^{0} x\left[\int_0^1 y\,dy\right]dx + \int_0^1 x\left[\int_0^{1-x} y\,dy\right] \\
&= \frac{1}{4}\left[\frac{x^2}{2}\right]_{-1}^{0} + \int_0^1 x\left[\frac{y^2}{2}\right]_0^{1-x} dx = -\frac{1}{8} + \frac{1}{2}\int_0^1 (x - 2x^2 + x^3)\,dx \\
&= -\frac{1}{8} + \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2} - \frac{2}{3} + \frac{1}{4}\right) = -\frac{1}{8} + \frac{1}{24} = -\frac{1}{12}
\end{aligned}$$

$\mathrm{cov}(X,Y) = \mathbb{E}(XY) - \mathbb{E}(X)\mathbb{E}(Y) = -\frac{1}{12}\left(1 - \frac{5}{12}\right)$, soit $\boxed{\mathrm{cov}(X,Y) = -\frac{7}{144}}$.

3. Soit $\varphi : (x,y) \mapsto (u,v) = (x+y, x-y)$. Alors $\varphi^{-1} : (u,v) \mapsto (x,y) = \left(\frac{u+v}{2}, \frac{u-v}{2}\right)$, d'où $J_{\varphi^{-1}}(u,v) = \begin{vmatrix} 1/2 & 1/2 \\ 1/2 & -1/2 \end{vmatrix} = -1/2$ et

$$f_{U,V}(u,v) = f_{X,Y}\left(\frac{u+v}{2}, \frac{u-v}{2}\right)|J_{\varphi^{-1}}(u,v)| = \frac{1}{2} f_{X,Y}\left(\frac{u+v}{2}, \frac{u-v}{2}\right).$$

Or, $f_{X,Y}\left(\frac{u+v}{2}, \frac{u-v}{2}\right) = \frac{1}{2}$ si $-1 < \frac{u+v}{2} < 0$ et $0 < \frac{u-v}{2} < 1$, soit $-2 < u+v < 0$ et $0 < u-v < 2$, c'est-à-dire $u \in]-v-2,-v[\cap]v, v+2[= \left\{\begin{array}{l} \emptyset \text{ si } v > 0 \text{ ou } v < -2 \\ ]v,-v[\text{ si } v \in]-1,0[\\ ]-v-2, v+2[\text{ si } v \in]-2,-1[\end{array}\right.$

et $f_{X,Y}\left(\frac{u+v}{2}, \frac{u-v}{2}\right) = 1$ si $0 < \frac{u+v}{2} < 1$ et $0 < \frac{u-v}{2} < 1$, soit $0 < u+v < 2$ et $0 < u-v < 2$, c'est-à-dire $u \in]-v, 2-v[\cap]v, v+2[= \left\{\begin{array}{l} \emptyset \text{ si } v > 1 \text{ ou } v < -1 \\ ]v, 2-v[\text{ si } v \in]0,1[\\ ]-v, v+2[\text{ si } v \in]-1,0[\end{array}\right.$

On a alors :

$$\boxed{f_{U,V}(u,v) = \left\{\begin{array}{ll} \frac{1}{4}\mathbb{1}_{]-v-2,v+2[}(u) & \text{si } v \in]-2,-1[\\ \frac{1}{4}\mathbb{1}_{]v,-v[}(u) + \frac{1}{2}\mathbb{1}_{]-v,v+2[}(u) & \text{si } v \in]-1,0[\\ \frac{1}{2}\mathbb{1}_{]v,2-v[}(u) & \text{si } u \in]0,1[\end{array}\right. .}$$

16. ($*$) Soit $a \in]0,1[$ et (X,Y) un couple de v.a.r. de densité f définie par:

$$f(x,y) = ((1+ax)(1+ay) - a)\ e^{-(x+y+ax)}\ \mathbb{1}_{\mathbb{R}_+^2}(x,y)$$

1. Vérifier que f est une densité de probabilité et déterminer les lois marginales de X et de Y ; calculer $\mathbb{E}(X)$ et $\mathbb{E}(Y)$.
2. Déterminer la loi conditionnelle de X sachant $(Y = y)$.

$\int f(x,y)dy = e^{-(1+a)x}\mathbb{1}_{\mathbb{R}_+^*}(x)\int_0^{+\infty} e^{-y}((1-a+ax)+a(1+ax)y)dy$ et $\Gamma(1) = \Gamma(2) = 1$, d'où $\int_0^{+\infty} e^{-y}dy = \int_0^{+\infty} ye^{-y}dy = 1$ et $\int f(x,y)dy = e^{-(1+a)x}(1+a(1+a)x)\mathbb{1}_{\mathbb{R}_+^*}(x)$. On a alors $\int\left(\int f(x,y)dy\right)dx = \frac{1}{1+a}+\frac{a(1+a)}{(1+a)^2} = 1$ et $f \geq 0$ car $a \in]0,1[$. Donc $\boxed{f \text{ est une densité}}$.
On a aussi $\int f(x,y)dx = e^{-y}\mathbb{1}_{\mathbb{R}_+^*}(y)\int_0^{+\infty} e^{-(1+a)x}((1-a+ay)+a(1+ay)x)dx$, ce qui donne $f_Y(y) = e^{-y}\left(\frac{1-a+ay}{1+a}+\frac{a(1+ay)}{(1+a)^2}\right)\mathbb{1}_{\mathbb{R}_+^*}(y)$, soit $\boxed{f_Y(y) = e^{-y}\left(\frac{(1+a-a^2)+a(1+2a)y}{(1+a)^2}\right)\mathbb{1}_{\mathbb{R}_+^*}(y)}$.

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}(Y) &= \int yf_Y(y)dy = \int_0^{+\infty} e^{-y}\left(\frac{(1+a-a^2)y + a(1+2a)y^2}{(1+a)^2}\right)dy \\
&= \frac{(1+a-a^2)+2a(1+2a)}{(1+a)^2}
\end{aligned}$$

ce qui donne $\boxed{\mathbb{E}(Y) = \frac{1+3a+3a^2}{(1+a)^2}}$.

De même, $\boxed{f_X(x) = e^{-(1+a)x}(1+a(1+a)x)\mathbb{1}_{\mathbb{R}_+^*}(x)}$ et $\mathbb{E}(X) = \int xf_X(x)dx$, ce qui donne $\mathbb{E}(X) = \int_0^{+\infty} e^{-(1+a)x}(x+a(1+a)x^2)dx$: $\boxed{\mathbb{E}(X) = \frac{1+2a}{(1+a)^2}}$.

Pour $y > 0$, on a $f_X^{Y=y}(x) = \frac{f(x,y)}{f_Y(y)}$, soit

$$\boxed{f_X^{Y=y}(x) = (1+a)^2\frac{(1+ax)(1+ay)-a}{(1+a-a^2)+a(1+2a)y}e^{-(1+a)x}\mathbb{1}_{\mathbb{R}_+^*}(x)}.$$

---

17. ($**$) Soient X et Y deux v.a.r. indépendantes de même loi uniforme sur $[-1,1]$.

1. Déterminer la loi de $Z = X - Y$.
2. Déterminer la loi de $T = \min(X, Y^3)$

---

1. $f_{X,Y}(x,y) = \frac{1}{4}\mathbb{1}_{[-1,1]}(x)\mathbb{1}_{[-1,1]}(y)$.

Soit $\varphi : (x,y) \mapsto (u,v) = (x-y,y)$. Alors $\varphi^{-1} : (u,v) \mapsto (x,y) = (u+v,v)$, d'où $J_{\varphi^{-1}}(u,v) = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 1$ et $f_{Z,Y}(u,v) = f_{X,Y}(u+v,v) = \frac{1}{4}\mathbb{1}_{[0,2]}(u+v)\mathbb{1}_{[0,2]}(v)$, et

$$f_Z(u) = \int \frac{1}{4}\mathbb{1}_{[-1,1]}(u+v)\mathbb{1}_{[-1,1]}(v)\,dv = \int \frac{1}{4}\mathbb{1}_{[-1-u,1-u]\cap[-1,1]}(v)\,dv.$$

Or $[-1-u,1-u]\cap[-1,1]=\begin{cases}\emptyset \text{ si } -1-u>1 \text{ ou } 1-u<-1 & \text{soit } u\notin[-2,2]\\ [-1-u,1] \text{ si } -1\leq -1-u\leq 1 & \text{soit } u\in[-2,0]\\ [-1,1-u] \text{ si } -1\leq 1-u\leq 1 & \text{soit } u\in[0,2]\end{cases}$
donc

$$f_{Z,Y}(u,v)=\frac{1}{4}\mathbb{1}_{[-1-u,1-u]\cap[-1,1]}(v)=\frac{1}{4}\left[\mathbb{1}_{[-1-u,1]}(v)\mathbb{1}_{[-2,0[}(u)+\mathbb{1}_{[-1,1-u]}(v)\mathbb{1}_{[0,2]}(u)\right]$$

et $f_Z(u)=\int f_{U,V}(u,v)dv=\frac{1}{4}\left[(2+u)\mathbb{1}_{[-2,0[}(u)+(2-u)\mathbb{1}_{[0,2]}(u)\right]=\frac{1}{4}(2-|u|)\mathbb{1}_{[-2,2]}(u)$.

Ainsi, $\boxed{f_Z(z)=\frac{1}{4}(2-|z|)\mathbb{1}_{[-2,2]}(z)}$.

2. $P([T>t])=P([\min(X,Y^3)>t])=P([X>t]\cap[Y^3>t])=P([X>t]\cap[Y>t^{1/3}])$ car $t\mapsto t^{1/3}$ est une bijection strictement croissante de $\mathbb{R}$ sur $\mathbb{R}$/

On a alors $P([T>t])=P([X>t])P([Y>t^{1/3}])$ car X et Y^3 sont indépendantes. On a alors

$$\begin{aligned}F_T(t) &= 1-P([T>t])=1-(1-F_X(t))\left(1-F_Y(t^{1/3})\right)\\ &= F_X(t)+F_Y(t^{1/3})-F_X(t)F_Y(t^{1/3})\end{aligned}$$

puis, en dérivant,

$$f_T(t)=f_X(t)+\frac{1}{3}t^{-2/3}f_Y(t^{1/3})-f_X(t)F_Y(t^{1/3})-\frac{1}{3}t^{-2/3}f_Y(t^{1/3})F_X(t)$$

Or $f_X(t)=f_Y(t)=\frac{1}{2}\mathbb{1}_{[-1,1]}(t)$ et $F_X(t)=\int_{-\infty}^t f_X(u)\,du=\frac{1}{2}(t+1)\mathbb{1}_{[-1,1[}(t)+\mathbb{1}_{[1,+\infty[}(t)$.

On a donc

$$\begin{aligned}f_T(t) &= \frac{1}{2}\mathbb{1}_{[-1,1]}(t)+\frac{1}{6}t^{-2/3}\mathbb{1}_{[-1,1]}(t^{1/3})\\ &\quad -\frac{1}{2}\mathbb{1}_{[-1,1]}(t)\left(\frac{1}{2}(t^{1/3}+1)\mathbb{1}_{[-1,1[}(t^{1/3})+\mathbb{1}_{[1,+\infty[}(t^{1/3})\right)\\ &\quad -\frac{1}{6}t^{-2/3}\mathbb{1}_{[-1,1]}(t^{1/3})\left(\frac{1}{2}(t+1)\mathbb{1}_{[-1,1[}(t)+\mathbb{1}_{[1,+\infty[}(t)\right)\end{aligned}$$

Or $t^{1/3}\in[-1,1]$ équivaut à $t\in[-1,1]$ et donc $\mathbb{1}_{[-1,1]}(t^{1/3})=\mathbb{1}_{[-1,1]}(t)$, ce qui permet de simplifier l'écriture de $f_T(t)$. On a donc

$$f_T(t)=\mathbb{1}_{[-1,1]}(t)\left[\frac{1}{2}+\frac{1}{6}t^{-2/3}-\frac{1}{4}(t^{1/3}+1)-\frac{1}{12}(t^{1/3}+t^{-2/3})\right]$$

soit $\boxed{f_T(t)=\left(\frac{1}{4}-\frac{1}{3}t^{1/3}+\frac{1}{12}t^{-2/3}\right)\mathbb{1}_{[-1,1]}(t)}$.

---

18. (**) Soit $\alpha>0$ et soient X et Y deux v.a.r. indépendantes de même loi uniforme sur $[0,\alpha[$. On pose $U=\min(X,Y)$, $V=\max(X,Y)$, $Z=V-U$ et $T=U/V$.
Déterminer les lois de Z et de T.

On commence par chercher la loi de $W=X-Y$ et la loi de $Q=\frac{X}{Y}$. On aura alors $Z=|W|$ et $T=\min\left(Q,\frac{1}{Q}\right)$.

Soit $\varphi : (x,y) \mapsto (u,v) = (x-y,y)$. Alors $\varphi^{-1} : (u,v) \mapsto (x,y) = (u+v,v)$, d'où $J_{\varphi^{-1}}(u,v) = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 1$ et $f_{W,Y}(u,v) = f_{X,Y}(u+v,v) = \frac{1}{\alpha^2}1\!\!1_{[0,\alpha]}(u+v)1\!\!1_{[0,\alpha]}(v)$, et

$$f_W(u) = \int \frac{1}{\alpha^2}1\!\!1_{[0,\alpha]}(u+v)1\!\!1_{[0,\alpha]}(v)\,dv = \int \frac{1}{\alpha^2}1\!\!1_{[-u,\alpha-u]\cap[0,\alpha]}(v)\,dv.$$

Or $[-u,\alpha-u]\cap[0,\alpha] = \begin{cases} \emptyset \text{ si } -u > \alpha \text{ ou } \alpha - u < 0 & \text{soit } u \notin [-\alpha,\alpha] \\ [-u,\alpha] \text{ si } 0 \leq -u \leq \alpha & \text{soit } u \in [-\alpha, 0] \\ [0,\alpha-u] \text{ si } 0 \leq \alpha - u \leq \alpha & \text{soit } u \in [0,\alpha] \end{cases}$ donc

$$f_{W,Y}(u,v) = \frac{1}{\alpha^2}1\!\!1_{[-u,\alpha-u]\cap[0,\alpha]}(v) = \frac{1}{\alpha^2}\left[1\!\!1_{[-u,\alpha]}(v)1\!\!1_{[-\alpha,0[}(u) + 1\!\!1_{[0,\alpha-u]}(v)1\!\!1_{[0,\alpha]}(u)\right]$$

et $f_W(u) = \int f_{W,Y}(u,v)dv = \frac{1}{\alpha^2}\left[(\alpha+u)1\!\!1_{[-\alpha,0[}(u) + (\alpha-u)1\!\!1_{[0,\alpha]}(u)\right] = \frac{1}{\alpha^2}(\alpha - |u|)1\!\!1_{[-\alpha,\alpha]}(u)$.

Puis $F_Z(z) = P([Z \leq z]) = P([|T| \leq z]) = P([-z \leq T \leq z])1\!\!1_{]0,+\infty[}(z)$, d'où

$$F_Z(z) = (F_T(z) - F_T(-z))1\!\!1_{]0,+\infty[}(z)$$

et $f_Z(z) = F_Z'(z) = (f_T(z) + f_T(-z))1\!\!1_{]0,+\infty[}(z) = 2f_T(z)1\!\!1_{]0,+\infty[}(z)$ car f_T est paire et finalement, $\boxed{f_Z(z) = \frac{2}{\alpha^2}(\alpha - z)1\!\!1_{[-\alpha,\alpha]}(z)}$.

Soit maintenant, $Q = \frac{X}{Y}$ et soit $\varphi : (x,y) \mapsto (s,y) = \left(\frac{x}{y}, y\right)$. Alors $\varphi^{-1} : (s,y) \mapsto (x,y) = (sy,y)$, d'où $J_{\varphi^{-1}}(s,y) = \begin{vmatrix} y & 0 \\ s & 1 \end{vmatrix} = y$ et

$$f_{Q,Y}(s,y) = f_{X,Y}(sy,y) = \frac{1}{\alpha^2}|y|1\!\!1_{[0,\alpha]}(sy)1\!\!1_{[0,\alpha]}(y) = \frac{y}{\alpha^2}1\!\!1_{[0,\alpha]}(sy)1\!\!1_{[0,\alpha]}(y)$$

avec $1\!\!1_{[0,\alpha]}(sy)1\!\!1_{[0,\alpha]}(y) = 1$ si et seulement si $sy > 0$, $sy < \alpha$, $y > 0$ et $y < \alpha$, c'est-à-dire $s > 0$, $y > 0$ et $y < \min\left(\alpha, \frac{\alpha}{s}\right)$ avec $\min\left(\alpha, \frac{\alpha}{s}\right) = \begin{cases} \alpha \text{ si } s \leq 1 \\ \frac{\alpha}{s} \text{ si } s \geq 1 \end{cases}$, d'où

$$f_{Q,Y}(s,y) = \frac{y}{\alpha^2}\left(1\!\!1_{]0,\alpha[}(y)1\!\!1_{]0,1[}(s) + 1\!\!1_{]0,\frac{\alpha}{s}[}(y)1\!\!1_{[1,+\infty[}(s)\right)$$

puis $f_Q(s) = \int f_{Q,Y}(s,y)\,dy = \frac{1}{2}1\!\!1_{]0,1[}(s) + \frac{1}{2s^2}1\!\!1_{]1,+\infty[}(s)$. On a alors

$$P([T > t]) = P([\min(Q, \frac{1}{Q}) > t]) = P([Q > t] \cap [\frac{1}{Q} > t]) = P([Q > t] \cap [Q < \frac{1}{t}])$$

On a donc $P([T > t]) = \left(F_Q\left(\frac{1}{t}\right) - F_Q(t)\right)1\!\!1_{[0,1[}(t) + 1\!\!1_{]-\infty,0[}(t) = 1 - F_T(t)$, puis

$$f_T(t) = F_Q'(t) = \left(f_Q(t) + \frac{1}{t^2}f_Q\left(\frac{1}{t}\right)\right)1\!\!1_{]0,1[}(t).$$

Or, si $t \in]0,1[$, $f_Q(t) = \frac{1}{2}$ et $f_Q\left(\frac{1}{t}\right) = \frac{t^2}{2}$ donc$f_T(t) = f_Q(t) + \frac{1}{t^2}f_Q\left(\frac{1}{t}\right) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1$.

Ainsi, $f_T(t) = \mathbb{1}_{]0,1[}(t)$: $\boxed{T \text{ suit la loi uniforme sur }]0,1[}$.

---

19. (∗∗) Soient X et Y deux v.a.r. indépendantes, de lois exponentielles respectivement $\mathcal{E}(\lambda)$ et $\mathcal{E}(\mu)$. Déterminer les lois de $U = \min(X,Y)$ et $V = \max(X,Y)$.

U et V sont toutes les deux à valeurs dans $\mathbb{R}_+^*$ et pour $x > 0$,

$$P([X > x]) = \int_x^{+\infty} \lambda e^{-\lambda t}\,dt = \left[-e^{-\lambda t}\right]_x^{+\infty} = e^{-\lambda x}.$$

$P([U > u]) = P([\min(X,Y) > u]) = P([X > u] \cap [Y > u]) = P([X > u])P([Y > u])$ car X et Y sont indépendantes, soit $P([U > u]) = e^{-(\lambda+\mu)u}$ pour $u > 0$. Or $P([U > u]) = 1 - F_U(u)$ donc, en dérivant, on obtient $f_U(u) = (\lambda+\mu)e^{-(\lambda+\mu)u}$ pour $u > 0$ et 0 sinon. Ainsi, $\boxed{U = \min(X,Y) \text{ suit la loi exponentielle } \mathcal{E}(\lambda+\mu)}$.

De même,
$P([V \le v]) = P([\max(X,Y) \le v]) = P([X \le v] \cap [Y \le v]) = P([X \le v])P([Y \le v])$, soit $F_V(v) = (1 - e^{-\lambda v})(1 - e^{-\mu v})$ pour $v > 0$ et 0 sinon.
En dérivant, on obtient alors

$$\boxed{f_V(v) = \left(\lambda e^{-\lambda v}(1 - e^{-\mu v}) + \mu e^{-\mu v}(1 - e^{-\lambda v})\right) \mathbb{1}_{]0,+\infty[}(v).}$$

---

20. (∗∗) Soit $\theta > 0$ et soient X et Y deux v.a.r. indépendantes, de même loi de densité f définie par:

$$f(x) = \frac{3x^2}{\theta^3}\,\mathbb{1}_{[0,\theta]}$$

On pose $S = X + Y$ et $T = \max(X,Y)$

1. Déterminer $\mathbb{E}(S)$ et $V(S)$.
2. Déterminer la loi de T.

---

1. $\int x f(x)dx = \frac{3}{4}\theta$ et $\int x^2 f(x)dx = \frac{3}{5}\theta^2$ donc $\mathbb{E}(X) = \frac{3}{4}\theta$ et $\text{var}(X) = \frac{3}{5}\theta^2 - \frac{9}{16}\theta^2 = \frac{3}{80}\theta^2$. On a donc $\mathbb{E}(X+Y) = \mathbb{E}(X) + \mathbb{E}(Y) = \frac{3}{2}\theta$ et, comme X et Y sont indépendantes, $\text{var}(X+Y) = \text{var}(X) + \text{var}(Y) = \frac{3}{40}\theta^2$.

2. $F_T(t) = P([T \le t]) = P([\max(X,Y) \le t]) = P([X \le t] \cap [Y \le t]) = F_X(t)F_Y(t) = F_X(t)^2$ car X et Y sont indépendantes de même loi. On a alors $f_T(t) = 2F_X(t)f_X(t)$, soit

$$\boxed{f_T(t) = \tfrac{6t^5}{\theta^6}\,\mathbb{1}_{[0,\theta]}(t)}.$$

---

21. (∗∗) Soient X et Y deux v.a.r. indépendantes de même loi exponentielle $\mathcal{E}(\lambda)$. On pose $Z = \min(X,Y)$ et $S = X + Y$.

1. Déterminer la loi, l'espérance et la variance de Z.
2. Déterminer la loi de S.

$f_{X,Y}(x,y) = \lambda^2 e^{-\lambda(x+y)} 1\!\!\mathrm{I}_{]0,+\infty[}(x) 1\!\!\mathrm{I}_{]0,+\infty[}(y)$.

1. $F_Z(z) = P([Z \leq z]) = 1 - P([\min(X,Y) > t]) = 1 - P([X > t])P([Y > t])$ car X et Y sont indépendantes et $F_Z(z) = 1 - (1 - F_X(t))^2$ car elles ont même loi.
On a donc $f_Z(z) = 2(1 - F_X(t))f_X(t) = 2\lambda e^{-2\lambda t} 1\!\!\mathrm{I}_{]0,+\infty[}(t)$: $\boxed{Z \text{ suit la loi } \mathcal{E}(2\lambda)}$.

2. $f_S(s) = \int f_X(u)f_Y(s-u)du = \left(\int_0^s \lambda^2 e^{-\lambda s} du\right) 1\!\!\mathrm{I}_{]0,+\infty[}(s) = \lambda^2 s e^{-\lambda s} 1\!\!\mathrm{I}_{]0,+\infty[}(s)$:

$$\boxed{S \text{ suit la loi } \gamma(\lambda, 2).}$$

---

22. $(***)$ On casse une baguette de bois de longueur 1 en deux endroits au hasard.
Quelle est la probabilité de pouvoir former un triangle en repliant les deux morceaux extrêmes?

Soient X et Y les abscisses des points où l'on casse la baguette. X et Y sont indépendantes, de loi uniforme sur $[0, l]$. On pourra former un triangle dans des conditions à déterminer.

Pour cela, on pose $a = \min(X,Y)$, $b = \max(X,Y) - \min(X,Y) = |X - Y|$, $c = l - \max(X,Y)$. On doit alors avoir $a \leq b + c = l - a$, $b \leq a + c = l - b$ et $c \leq a + b = l - c$, soit $a \leq \frac{l}{2}$, $b \leq \frac{l}{2}$ et $c \leq \frac{l}{2}$, soit $\min(X,Y) \leq \frac{l}{2}$, $|X - Y| \leq \frac{l}{2}$ et $\max(X,Y) \geq \frac{l}{2}$.

Soit $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \ ; \ \min(x,y) \leq \frac{l}{2}, \ |x-y| \leq \frac{l}{2} \text{ et } \max(x,y) \geq \frac{l}{2}\}$. On a alors :

$$p = P([(X,Y) \in D]) = \frac{\text{Aire de } D}{l^2}.$$

On décompose D en deux, suivant que $x \leq y$ ou bien $x > y$. $D = D' \cup D''$ avec

$$D' = \{(x,y) \ ; \ 0 \leq x \leq y \leq l, \ y - x \leq \frac{l}{2}, \ y \geq \frac{l}{2}, \ x \leq \frac{l}{2}\}$$

$$\text{et } D'' = \{(x,y) \ ; \ 0 \leq y \leq x \leq l, \ x - y \leq \frac{l}{2}, \ x \geq \frac{l}{2}, \ l \leq \frac{l}{2}\}.$$

En échangeant les rôles de x et y, on a Aire de D' = Aire de D''

$$\begin{aligned} D' &= \{(x,y) \ ; \ 0 \leq x \leq \frac{l}{2} \leq y \leq l, \ y \leq x + \frac{l}{2}\} \\ &= \{(x,y) \ ; \ 0 \leq x \leq \frac{l}{2}, \ \frac{l}{2} \leq y \leq x + \frac{l}{2}\} \end{aligned}$$

car $x + \frac{l}{2} \leq l$. Donc Aire de $D' = \int_0^{\frac{l}{2}} \left(\int_{\frac{l}{2}}^{x+\frac{l}{2}} dy\right) dx = \int_0^{\frac{l}{2}} x\, dx = \frac{1}{2}\left(\frac{l}{2}\right)^2$.

Ainsi, Aire de $D = \frac{l^2}{4}$ et $\boxed{\text{la probabilité de former un triangle est } p = \frac{1}{4}}$.

---

23. $(**)$ Soient X et Y deux v.a.r. indépendantes de même loi exponentielle $\mathcal{E}(\lambda)$. On pose $U = X - Y$, $V = \min(X,Y)$ et $Z = |X - Y|$.

Déterminer les lois de U, V et Z ; examiner l'indépendance éventuelle de U et V ainsi que de Z et V.

Si F est la fonction de répartition de (U,V), $F(u,v) = P([U \leq u] \cap [V \leq v])$ soit

$$F(u,v) = P([X-Y \leq u] \cap [\min(X,Y) \leq v]) = \int\int_{D(u,v)} f_{X,Y}(x,y)dxdy$$

avec $D = D(u,v) = \{(x,y)\ ;\ x-y \leq u \text{ et } \min(x,y) \leq v\}$ et $f_{X,Y}(x,y) = f_X(x)f_Y(y)$ (X et Y sont indépendantes), soit $f_{X,Y}(x,y) = \lambda^2 e^{-\lambda(x+y)} 1\!\!1_{\mathbb{R}_+^{*2}}(x,y)$.

- Si $v \leq 0$, alors $F = 0$ ($V = \min(X,Y)$ à valeurs dans $\mathbb{R}_+$).
- Si $u \leq 0$, alors pour $(x,y) \in D$, $x \leq y+u \leq y$ et donc $\min(x,y) = x$. On a donc

$$D = \{(x,y)\ ;\ x \leq v \text{ et } y \geq x-u\}.$$

$$\begin{aligned} F(u,v) &= \lambda^2 \int_0^v e^{-\lambda x} \int_{x-u}^{+\infty} e^{-\lambda y} dy = \lambda \int_0^v e^{-\lambda x} e^{-\lambda(x-u)} dx = e^{\lambda u} \int_0^v \lambda e^{-2\lambda x} dx \\ &= e^{\lambda u} \left[-\frac{1}{2} e^{-2\lambda x} \right]_0^v = \frac{1}{2} e^{\lambda u} \left(1 - e^{-2\lambda v}\right) = \frac{1}{2} e^{\lambda u} - \frac{1}{2} e^{\lambda u - 2\lambda v} \end{aligned}$$

et, comme $f_{U,V} = \frac{\partial^2 F_{U,V}}{\partial u \partial v}$, $f_{U,V}(u,v) = \lambda^2 e^{\lambda u - 2\lambda v}$.
- Si $u > 0$, pour $y > v$, $\min(x,y) = x$ et $x \leq v$, et pour $y \leq v$, $\min(x,y) \leq v$ et $x \leq y+u$

$$\begin{aligned} F(u,v) &= \int_0^v \lambda e^{-\lambda y} \left[\int_0^{y+u} \lambda e^{-\lambda x} dx \right] dy + \int_v^{+\infty} \lambda e^{-\lambda y} \left[\int_0^v \lambda e^{-\lambda x} dx \right] dy \\ &= \int_0^v \lambda e^{-\lambda y} \left(1 - e^{-\lambda(y+u)}\right) dy + e^{-\lambda v} \left(1 - e^{-\lambda v}\right) \end{aligned}$$

et $\int_0^v \lambda e^{-\lambda y} \left(1 - e^{-\lambda(y+u)}\right) dy = (1-e^{-\lambda v}) - e^{-\lambda u} \int_0^v \lambda e^{-2\lambda y} dy = (1-e^{-\lambda v}) - \frac{1}{2} e^{-\lambda u}(1-e^{-2\lambda v})$
d'où $F(u,v) = (1-e^{-2\lambda v})\left(1 - \frac{1}{2}e^{-\lambda u}\right)$ et $f_{U,V}(u,v) = \lambda^2 e^{-\lambda u - 2\lambda v}$.
Finalement $\boxed{f_{U,V}(u,v) = \lambda^2 e^{-\lambda|u| - 2\lambda v} 1\!\!1_{\mathbb{R}_+^*}(v)}$, puis $f_U(u) = \int f_{U,V}(u,v)dv = \frac{\lambda}{2} e^{-\lambda|u|}$ et $f_V(v) = \int f_{U,V}(u,v)du = \lambda^2 e^{-2\lambda v} 1\!\!1_{\mathbb{R}_+^*}(v) \int e^{-\lambda|u|} du = 2\lambda e^{-2\lambda v} 1\!\!1_{\mathbb{R}_+^*}(v)$ (parité de $u \mapsto e^{-\lambda|u|}$).
Donc V suit la loi exponentielle $\mathcal{E}(2\lambda)$, $f_U(u) = \frac{\lambda}{2} e^{-\lambda|u|}$ et $f_{U,V}(u,v) = f_U(u) f_V(v)$, donc $\boxed{U \text{ et } V \text{ sont indépendantes, et il en est de même de } Z = |U| \text{ et de } V}$.
D'autre part, $F_Z(z) = P(|U| \leq z) = P(-z \leq U \leq z) 1\!\!1_{\mathbb{R}_+}(z) = (F_U(z) - F_U(-z)) 1\!\!1_{\mathbb{R}_+}(z)$ et $f_Z(z) = (f_U(z) + f_U(-z)) 1\!\!1_{\mathbb{R}_+}(z) = 2\frac{\lambda}{2} e^{-\lambda|z|} 1\!\!1_{\mathbb{R}_+}(z) = \lambda e^{-\lambda z} 1\!\!1_{\mathbb{R}_+}(z)$:

$$\boxed{Z = |U| \text{ suit aussi la loi exponentielle } \mathcal{E}(\lambda).}$$

---

24. (**) Soient X et Y deux v.a.r. indépendantes de même loi Gamma $G(2,\lambda)$.

1. Calculer les moments $\mathbb{E}(X^n)$ et préciser $\mathrm{var}(X)$.
2. Calculer $\mathbb{E}(e^{-\alpha X})$ pour $\alpha > 0$.

3. Déterminer la loi de $T = \min(X, Y)$.

.

1. $\mathbb{E}(X^n) = \lambda^2 \int_0^{+\infty} x^n e^{-\lambda x} x\, dx \underset{u=\lambda x}{=} \frac{\lambda^2}{\lambda^{n+2}} \int_0^{+\infty} u^{n+1} e^{-u}\, du = \frac{\Gamma(n+2)}{\lambda^n} = \frac{(n+1)!}{\lambda^n}$.

En particulier, $\boxed{\mathbb{E}(X) = \frac{2}{\lambda}}$ et $\mathbb{E}(X^2) = \frac{6}{\lambda^2}$ donc $\boxed{\mathrm{var}(X) = \frac{2}{\lambda^2}}$.

2. $\mathbb{E}\left(e^{-\alpha X}\right) = \int_0^{+\infty} e^{-\alpha x} \lambda^2 x e^{-\lambda x}\, dx = \int_0^{+\infty} e^{-(\lambda+\alpha)x} \lambda^2 x\, dx \underset{u=(\lambda+\alpha)x}{=} \frac{\lambda^2}{(\lambda+\alpha)^2} \int_0^{+\infty} e^{-u} u\, du$

et comme $\int_0^{+\infty} e^{-u} u\, du = \Gamma(2) = 1$, $\boxed{\mathbb{E}\left(e^{-\alpha X}\right) = \dfrac{\lambda^2}{(\lambda+\alpha)^2}}$.

3. $P([T > t]) = P([X > t] \cap [Y > t]) = P([X > t])P([Y > t])$ car X et Y sont indépendantes.

Ainsi, $1 - F_T(t) = (1 - F(t))^2$ et $f_T(t) = 2f(t)(1 - F(t))$ avec $F(t) = 0$ si $t \leq 0$ et si $t > 0$,

$$\begin{aligned} F_T(t) &= \int_0^t \lambda^2 u e^{-\lambda u}\, du = \left[-\lambda e^{-\lambda u} u\right]_0^t + \int_0^{+\infty} \lambda e^{-u} u\, du \\ &= -\lambda t e^{-\lambda t} + \left[-e^{-\lambda u}\right]_0^t = 1 - e^{-\lambda t} - \lambda t e^{-\lambda t} \end{aligned}$$

donc $1 - F_T(t) = (1 + \lambda t)e^{-\lambda t}$ si $t > 0$ et $\boxed{f_T(t) = 2\lambda^2 t(1 + \lambda t)e^{-2\lambda t}\, \mathbb{1}_{]0,+\infty[}(t)}$.

25. (**) On prend un point M au hasard sur le cercle C de centre O et de rayon 1. Soient X et Y les coordonnées de M.
Calculer $\mathrm{cov}(X, Y)$ et montrer que X et Y ne sont pas indépendantes.

On a $X^2 + Y^2 = 1$ et on pose $X = \cos\Theta$ et $Y = \sin\Theta$. Le point étant choisi au hasard sur le cercle, Θ suit la loi uniforme sur $[0, 2\pi[$.

$$\mathbb{E}(X) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \cos\theta\, d\theta = 0, \quad \mathbb{E}(Y) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \sin\theta\, d\theta = 0,$$
$$\mathbb{E}(XY) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \cos\theta \sin\theta\, d\theta = \frac{1}{2}\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \sin(2\theta)\, d\theta = 0.$$

Ainsi, $\boxed{\mathrm{cov}(X, Y) = 0}$: les v.a.r. X et Y sont décorrélées. On a par ailleurs

$$\mathbb{E}(X^2) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \cos^2\theta\, d\theta = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \frac{\cos 2\theta + 1}{2}\, d\theta = \frac{1}{2}, \quad \mathbb{E}(Y^2) = 1 - \mathbb{E}(X^2) = \frac{1}{2}$$

$$\mathbb{E}(X^2Y^2) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \cos^2\theta \sin^2\theta\, d\theta = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \frac{\sin^2 2\theta}{4}\, d\theta = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \frac{1 - \cos 4\theta}{8}\, d\theta = \frac{1}{8}.$$

Ainsi, $\mathrm{cov}(X^2, Y^2) = \frac{1}{8} - \frac{1}{4} = -\frac{1}{8} \neq 0$, donc $\boxed{X \text{ et } Y \text{ ne sont pas indépendantes}}$.

26. (***) Soient A et B deux v.a.r. indépendantes de même loi.
Quelle est la probabilité que l'équation $x^2 - 2Ax + B = 0$ ait:

(a) 2 solutions réelles ;

(b) 2 solutions complexes ;

(c) 1 solution double ;

dans les cas suivants:

1. A et B sont de loi exponentielle $\mathcal{E}(\lambda)$;

2. A et B sont de loi uniforme sur $[0, 1]$.

On a $p_a = P([A^2 - B > 0])$, $p_b = P([A^2 - B < 0])$ et $p_c = P([A^2 - B = 0])$.
$p_c = 0$ car A et B sont absolument continues (et il en est donc de même pour $A^2 - B$).
On pose $\Delta = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \ ; \ x^2 > y\}$. On a alors

$$p_a = P([(A, B) \in \Delta]) = \int\int 1\!\!1_\Delta(x, y)\Delta f_{A,B}(x, y)dx\,dy = \int\int_\Delta f_{A,B}(x, y)dx\,dy$$

et $p_b = 1 - p_a$.

1. $f_{A,B}(x, y) = \lambda e^{-\lambda x}\, 1\!\!1_{]0,+\infty[}(x) \times \lambda e^{-\lambda y}\, 1\!\!1_{]0,+\infty[}(y)$ car A et B sont indépendantes. On a donc

$$\begin{aligned} p_a &= \int_0^{+\infty} \lambda e^{-\lambda x} \left(\int_0^{x^2} \lambda e^{-\lambda y}\, dy\right) dx = \int_0^{+\infty} \lambda e^{-\lambda x} \left(1 - e^{-\lambda x^2}\right) dx \\ &= \int_0^{+\infty} \lambda e^{-\lambda x}\, dx - \int_0^{+\infty} \lambda e^{-\lambda(x^2+x)}\, dx = 1 - e^{\frac{\lambda}{4}} \int_0^{+\infty} \lambda e^{-\lambda(x+\frac{1}{2})^2}\, dx \end{aligned}$$

On pose alors $\lambda(x+\frac{1}{2})^2 = \frac{u^2}{2}$ où $x = -\frac{1}{2}+\frac{u}{\sqrt{2\lambda}}$ et $u = \sqrt{2\lambda}(x+\frac{1}{2})$. On a alors $dx = \frac{1}{\sqrt{2\lambda}}\, du$ et $\int_0^{+\infty} \lambda e^{-\lambda(x+\frac{1}{2})^2}\, dx = \frac{\lambda}{\sqrt{2\lambda}} \int_{\frac{\sqrt{2\lambda}}{2}}^{+\infty} e^{-\frac{u^2}{2}}\, du = \lambda\frac{\sqrt{2\pi}}{\sqrt{2\lambda}}\left(1 - \Phi\left(\frac{\sqrt{2\lambda}}{2}\right)\right)$ où Φ est la fonction de répartition de la loi Normale $\mathcal{N}(0, 1)$. On en déduit que :

$$\boxed{p_a = 1 - e^{\frac{\lambda}{4}}\sqrt{\frac{\pi}{\lambda}}\left(1 - \Phi\left(\sqrt{\frac{\lambda}{2}}\right)\right),\quad p_b = e^{\frac{\lambda}{4}}\sqrt{\frac{\pi}{\lambda}}\left(1 - \Phi\left(\sqrt{\frac{\lambda}{2}}\right)\right),\ \text{et } p_c = 0.}$$

2. $f_{A,B}(x, y) = 1\!\!1_{]0,1[}(x)1\!\!1_{]0,1[}(y)$ et $p_a = \int_0^1 \left(\int_0^{x^2} dy\right) dx = \int_0^1 x^2\, dx = \frac{1}{3}$. On a donc dans ce cas $\boxed{p_a = \frac{1}{3},\ p_b = \frac{2}{3} \text{ et } p_c = 0}$.

---

27. $(*)$ Soit X une v.a.r. de loi normale $\mathcal{N}(0, 1)$ et Y une v.a.r. telle que $P([X = 1]) = P([X = -1]) = \frac{1}{2}$.
On suppose que X et Y sont indépendantes et on pose $Z = XY$.

1. Déterminer la loi de Z.

2. Calculer $\text{cov}(X, Z)$.

1. $F_Z(z) = P([Z \leq z]) = P([Z \leq z] \cap [X = -1]) + P([Z \leq z] \cap [X = 1])$. Or

$$\begin{aligned} P([Z \leq z] \cap [X = -1]) &= P([XY \leq z] \cap [X = -1]) = P([-Y \leq z] \cap [X = -1]) \\ &= P([-Y \leq z])P([X = -1]) = P([Y \geq -z])P([X = -1]) \end{aligned}$$

car X et Y sont indépendantes. De même,

$$\begin{aligned} P([Z \leq z] \cap [X = 1]) &= P([XY \leq z] \cap [X = 1]) = P([Y \leq z] \cap [X = 1]) \\ &= P([Y \leq z])P([X = 1]) \end{aligned}$$

$F_Z(z) = \frac{1}{2}(P([Y \leq z]) + P([Y \geq -z]) = \frac{1}{2}(\Phi(z) + 1 - \Phi(-z))$ où Φ est la fonction de répartition de la loi $\mathcal{N}(0,1)$. Donc Z est absolument continue (F_Z de classe C^1) et $f_Z(z) = \frac{1}{2}(f(z) + f(-z)) = f(z)$ car f densité de la loi $\mathcal{N}(0,1)$ est paire.

Ainsi, $\boxed{Z = XY, \text{ comme } Y, \text{ suit la loi normale } \mathcal{N}(0,1)}$.

2. $\text{cov}(X,Z) = \mathbb{E}(XZ) - \mathbb{E}(X)\mathbb{E}(Z) = \mathbb{E}(X^2Y) = \mathbb{E}(X^2)\mathbb{E}(Y) = \mathbb{E}(Y) = 0$.

Ainsi, $\boxed{\text{cov}(X,Z) = 0}$.

---

28. (**) On considère une cible circulaire de centre O et de rayon R. Le point d'impact d'une flèche est représenté par ses coordonnées X et Y que l'on suppose indépendantes de même loi normale $\mathcal{N}(0,(2R)^2)$.

1. Quelle est la probabilité que la flèche atteigne la cible?
2. Combien de flèches sont nécessaires pour que la probabilité que l'une d'entre elles au moins atteigne la cible soit supérieure à 0,9?

---

1. On cherche $P([X^2 + Y^2 \leq R^2]) = P([Z \leq R])$ avec $X = Z\cos\Theta$ et $Y = Z\sin\Theta$. Si $(Z,\Theta) = h(X,Y)$, on a h bijective de $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ sur $]0,+\infty[\times[0,2\pi[$. On a : $h^{-1}(Z,\Theta) = (Z\cos\Theta, Z\sin\Theta)$ et $f_{Z,\Theta}(z,\theta) = f_{X,Y}(z\cos\theta, z\sin\theta)z\,\mathbb{1}_{]0,+\infty[}(z)\mathbb{1}_{[0,2\pi[}(\theta)$. Or X et Y sont supposées indépendantes de même loi de densité $u \mapsto \frac{1}{2R\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{u^2}{8R^2}}$.
On a donc $f_{Z,\Theta}(z,\theta) = \frac{1}{4R^2.2\pi}e^{-\frac{z^2}{8R^2}}z\,\mathbb{1}_{]0,+\infty[}(z)\mathbb{1}_{[0,2\pi[}(\theta)$ puis $f_Z(z) = \frac{1}{4R^2}e^{-\frac{z^2}{8R^2}}z\,\mathbb{1}_{]0,+\infty[}(z)$ et $P([Z \leq R]) = \int_0^R f_Z(z)dz = \left[-e^{-\frac{z^2}{8R^2}}\right]_0^R$, soit $\boxed{P([Z \leq R]) = p = 1 - e^{-\frac{1}{8}}}$.

2. Si X est le nombre de flèches dans la cible après n lancers, X suit la loi binomiale $\mathcal{B}(n,p)$. Or on cherche n pour lequel $P([X \geq 1]) = 1 - P([X = 0]) \geq 0,9$, c'est-à-dire $P([X = 0]) \leq 0,1$. Or $P([X = 0]) = (1-p)^n = e^{-\frac{n}{8}} \leq 0,1$ équivaut à $-\frac{n}{8} \leq \ln 10^{-1} = -\ln 10$, d'où $n \geq 8\ln 10$, soit $\boxed{n \geq 19}$.

---

29. (**) Soient X_1 et X_2 deux v.a.r. indépendantes de lois normales respectives $N(m^1, \sigma_1^2)$ et $N(m^2, \sigma_2^2)$. Déterminer la loi de $X_1 + X_2$.

Cet exercice est traité dans le cours, à la fin du chapitre 7 (pages 57-58).

---

30. (**) Soit (X,Y) un couple de densité f définie par:

$$f(x,y) = \lambda\, e^{-(\frac{y^2}{2} - xy + x^2)}$$

1. Déterminer λ et les lois marginales du couple (X, Y).
2. Calculer $\mathrm{cov}(X, Y)$ et étudier l'éventuelle indépendance de X et de Y.

---

1. $\int f(x,y)\,dy = \lambda \int_{-\infty}^{+\infty} \exp\left[-\frac{1}{2}(y^2 - 2xy + 2x^2)\right]\,dy$.
On écrit $y^2 - 2xy + 2x^2 = (y-x)^2 + x^2$. On a alors :

$$\begin{aligned} \int f(x,y)\,dy &= \lambda \int_{-\infty}^{+\infty} \exp\left[-\frac{1}{2}((y-x)^2 + x^2)\right]\,dy \\ &= \lambda e^{-\frac{1}{2}x^2} \int_{-\infty}^{+\infty} \exp\left[-\frac{1}{2}(y-x)^2\right]\,dy \\ &= \lambda e^{-\frac{1}{2}x^2} \times \sqrt{2\pi} \end{aligned}$$

(en utilisant la densité de la loi $\mathcal{N}(x,1)$). Puis

$$\int \left(\int f(x,y)\,dy\right)\,dx = 1 = \lambda\sqrt{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{1}{2}x^2}\,dx = \lambda \times 2\pi.$$

On en déduit que $\boxed{\lambda = \frac{1}{2\pi}}$ et que $\boxed{X \text{ suit la loi normale } \mathcal{N}(0,1)}$.

$$\begin{aligned} f_Y(y) &= \int f(x,y)\,dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \exp\left[-(x^2 - xy + 2y^2)\right]\,dx \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \exp\left[-\left(x - \frac{y}{2}\right)^2 - \frac{1}{4}y^2)\right]\,dx \\ &= \frac{1}{2\pi}\, e^{-\frac{y^2}{4}} \int_{-\infty}^{+\infty} \exp\left[-\left(x - \frac{y}{2}\right)^2\right]\,dx \end{aligned}$$

et $\int_{-\infty}^{+\infty} \exp\left[-\left(x - \frac{y}{2}\right)^2\right]\,dx = \sqrt{2\pi} \times \frac{1}{\sqrt{2}}$ en utilisant la densité de la loi $\mathcal{N}\left(\frac{y}{2}, \frac{1}{2}\right)$ et donc $f_Y(y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sqrt{2}}\, e^{-\frac{y^2}{4}}$: $\boxed{Y \text{ suit la loi } \mathcal{N}(0,2)}$.

2. $f(x,y) \neq f_X(x) f_Y(y)$ donc X et Y ne sont pas indépendantes.

$\mathrm{cov}(X,Y) = \mathbb{E}(XY)$ car $\mathbb{E}(X) = 0$.

$$\mathbb{E}(XY) = \int\int xy f(x,y)dxdy = \int x f_X(x) \left(\int y f_Y^{X=x}(y)dy\right) dx.$$

Or $f_Y^{X=x}(y) = \frac{f(x,y)}{f_X(x)} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left[-\frac{1}{2}(y+x)^2\right]$ d'après les calculs du 1. C'est la densité de la loi Normale $\mathcal{N}(x,1)$. On en déduit que $\int y f_Y^{X=x}(y)\,dy = x$ et en reportant dans $\mathbb{E}(XY)$, $\mathbb{E}(XY) = \int x^2 f_X(x)\,dx = 1$, car X suit la loi Normale $\mathcal{N}(0,1)$. Donc $\boxed{\mathrm{cov}(X,Y) = 1}$.