$\boxed{\text{Corrigé du Devoir d'Optimisation n}^\circ\text{1 (23-04-2019)}}$

1. a) [4 points]

$f : (x, y) \mapsto x^3 + 3xy^2 - 15x - 12y$ est $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}^2$ qui est ouvert, donc un extrémum local est un point critique. $\nabla f(x, y) = \begin{pmatrix} 3x^2 + 3y^2 - 15 \\ 6xy - 12 \end{pmatrix}$ et $\nabla^2 f(x, y) = \begin{pmatrix} 6x & 6y \\ 6y & 6x \end{pmatrix}$, de déterminant $36(x^2 - y^2)$ et de trace $12x$.

Un point critique vérifie $x^2 + y^2 = 5$ et $xy = 2$, soit $(x + y)^2 = 9$ et $(x - y)^2 = 1$.

Pour $\begin{cases} x + y = 3 \\ x - y = 1 \end{cases}$, on a $(x, y) = (2, 1)$; pour $\begin{cases} x + y = 3 \\ x - y = -1 \end{cases}$, on a $(x, y) = (1, 2)$; pour $\begin{cases} x + y = -3 \\ x - y = 1 \end{cases}$, on a $(x, y) = (-1, -2)$ et pour $\begin{cases} x + y = -3 \\ x - y = -1 \end{cases}$, on a $(x, y) = (-2, -1)$.

Les points critiques sont donc $\boxed{(1, 2),\ (-1, -2),\ (2, 1) \text{ et } (-2, 1)}$ [*1pt*].

Pour $(1, 2)$ et $(-1, -2)$, le déterminant de la hessienne est < 0, donc 2 valeurs propres de signe opposé donc $\boxed{(1, 2) \text{ et } (-1, -2) \text{ ne sont pas des extrémums locaux}}$. Pour $(2, 1)$, on a 2 valeurs propres stictement positives donc $\boxed{(2, 1) \text{ est un minimum local}}$, et pour $(-2, -1)$ on a 2 valeurs propres strictement négatives donc $\boxed{(-2, -1) \text{ est un maximum local}}$ [*2pts*].

D'autre part, $f(x, 0) = x^3 - 15x$ donc $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x, 0) = +\infty$ et $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x, 0) = -\infty$, donc $\boxed{f \text{ n'a pas d'extrémums globaux}}$ [*1pt*].

b) [5 points]

g est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}^3$ (foncion polynôme) avec $\nabla g(u) = \begin{pmatrix} 2(x - yz) \\ 2(y - xz) \\ 2(z - xy) \end{pmatrix}$ et $\nabla^2 g(u) = \begin{pmatrix} 2 & -2z & -2y \\ -2z & 2 & -2x \\ -2y & -2x & 2 \end{pmatrix}$. Les points critiques sont les solutions de $\begin{cases} x = yz \\ y = xz \\ z = xy \end{cases}$. Comme x, y, z jouent le même rôle, on va travailler sur x, puis on permutera.

- Si $x = 0$, alors $y = 0$ et $z = 0$.
- Si $x \neq 0$, alors $y \neq 0$ et $z \neq 0$, puis, en multipliant la deuxième et la troisième équations, $yz = x^2yz$ donc, comme $yz \neq 0$, $x^2 = 1$.
  - ▷ Si $x = 1$, alors $y = z$ et $1 = y^2$, d'où les points $(1, 1, 1)$ et $(1, -1, -1)$.
  - ▷ Si $x = -1$, alors $y = -z$ et $x = -y^2$ donc encore $y^2 = 1$ et les points $(-1, 1, -1)$ et $(-1, -1, 1)$.

Finalement, les points critiques sont

$$\boxed{u_0 = (0, 0, 0),\ u_1 = (1, 1, 1),\ u_2 = (-1, -1, 1),\ u_3 = (-1, 1, -1) \text{ et } u_4 = (1, -1, -1)}\ [\textit{1,5pt}].$$

- $\nabla^2 g(u_0) = 2I_3$ donc $\boxed{(0, 0, 0) \text{ minimum local}}$ (3 valeurs propres positives) [*1pt*].
- $\nabla^2 g(u_1) = \begin{pmatrix} 2 & -2 & -2 \\ -2 & 2 & -2 \\ -2 & -2 & 2 \end{pmatrix} = 4I - 2U$ où U matrice de rang 1 avec des 1 partout. U a pour valeurs propres 0 (valeur propre double) et 3 (valeur propre simple obtenue par la trace). Donc $\nabla^2 g(u_1)$ a pour valeurs propres $4 - 0 = 4$ et $4 - 6 = -2$. On a des valeurs propres de signes opposés, donc $\boxed{\text{pas d'extrémum local en } (1, 1, 1)}$ [*1pt*].

• $\nabla^2 g(u_2) = \begin{pmatrix} 2 & -2 & 2 \\ -2 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 2 \end{pmatrix}$. On remarque ici que, $\nabla^2 g(u_1) - 4I = \begin{pmatrix} -2 & -2 & 2 \\ -2 & -2 & 2 \\ 2 & 2 & -2 \end{pmatrix}$ est de rang 1, donc que 4 est valeur propre double. On obtient la troisième valeur propre par la trace $2+2+2-2\times 4 = -2$. On a encore des valeurs propres de signes opposés, donc $\boxed{\text{pas d'extrémum local en } (-1,-1,1),\ (-1,1,-1) \text{ et } (1,-1,-1)}$ [*1pt*].

$g(x,x,x) = 3x^2 - 2x^3 = -2x^3\left(1 - \frac{3}{2x}\right)$ donc $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x,x,x) = -\infty$ et $\lim\limits_{x\to-\infty} g(x,x,x) = +\infty$ donc $\boxed{g \text{ n'admet pas d'extrémum global}}$ [*0,5pt*].

---

2. [5 points]

a) $\nabla f(x,y) = \begin{pmatrix} 2x + y^2 \\ 2xy + 6y^5 \end{pmatrix}$ et $\nabla^2 f(x,y) = \begin{pmatrix} 2 & 2y \\ 2y & 2x + 30y^4 \end{pmatrix}$.

Les points critiques sont les solutions de $\begin{cases} y^2 = -2x \\ 2y(x+3y^4) = 0 \end{cases}$.

• Si $y = 0$, alors $x = 0$.

• Si $y \neq 0$, alors $x = -3y^4$ et $y^2 = 6y^4$, soit $y^2 = \frac{1}{6}$ et $x = -\frac{1}{12}$.

Finalement, $\boxed{(0,0),\ \left(-\frac{1}{12}, -\frac{1}{\sqrt{6}}\right) \text{ et } \left(-\frac{1}{12}, \frac{1}{\sqrt{6}}\right) \text{ sont les points critiques}}$ [*1pt*].

$\nabla^2 f\left(-\frac{1}{12}, \frac{\varepsilon}{\sqrt{6}}\right) = \begin{pmatrix} 2 & \frac{2\varepsilon}{\sqrt{6}} \\ \frac{2\varepsilon}{\sqrt{6}} & \frac{4}{6} \end{pmatrix}$, de déterminant $\frac{8}{6} - \frac{4}{6} = \frac{2}{3} > 0$ et de trace > 0 donc $\boxed{f \text{ possède bien 2 minimums locaux } \left(-\frac{1}{12}, -\frac{1}{\sqrt{6}}\right) \text{ et } \left(-\frac{1}{12}, \frac{1}{\sqrt{6}}\right)}$ avec $f\left(-\frac{1}{12}, -\frac{1}{\sqrt{6}}\right) = \frac{1}{12\times 12} - \frac{1}{12\times 6} + \frac{1}{12\times 3\times 6} = \frac{3-6+2}{12\times 36}$, soit $\boxed{f\left(-\frac{1}{12}, \frac{\varepsilon}{\sqrt{6}}\right) = -\frac{1}{432}}$ [*1pt*].

$f(y^3, y) = y^6 + y^5 + y^6 = y^5(1+2y)$ avec $1 + 2y > 0$ pour $y > -\frac{1}{2}$ donc, au voisinage de $(0,0)$, $f(y^3,y)$ est du signe de y^5, c'est-à-dire de y (> 0 pour $y > 0$ et < 0 pour $y < 0$) donc $\boxed{\text{pas d'extrémum local en } (0,0)}$ [*0,5pt*].
Il n'y a donc aucun maximum local, puisqu'on n'a pas d'autres points critiques que les 3 considérés.

b) Supposons $f(x,y) = (xy^2 + y^6) + x^2 \leq 0$ avec $x^2 \geq 0$, donc, si $xy^2 + y^6 > 0$, $f(x,y) > 0$, ce qui est faux, donc $\boxed{xy^2 + y^6 \leq 0}$. De même, $f(x,y) = (xy^2 + x^2) + y^6$ avec $y^6 \geq 0$, donc, si $f(x,y) \leq 0$, $\boxed{xy^2 + x^2 \leq 0}$.

• Si $y = 0$, alors $x^2 \leq 0$, soit $x = 0$.

• Si $y \neq 0$, en simplifiant la première inégalité par y^2, on obtient $x \leq -y^4 < 0$. Puis, en simplifiant la deuxième par $x < 0$, on obtient $y^2 + x \geq 0$, d'où finalement $\boxed{-y^2 \leq x \leq -y^4}$. On a donc, en particulier $y^2 - y^4 = y^2(1-y^2) \geq 0$, soit $y \in [-1,1]$ et, comme $-y^2 \leq x \leq 0$, on a aussi $x \in [-1,0]$. Finalement , $\boxed{\text{si } f(x,y) \leq 0, \text{ alors } (x,y) \in [-1,0]\times[-1,1]}$ [*1,5pt*].

On a alors, $\inf\limits_{\mathbb{R}^2} f = \min\limits_{[-1,0]\times[-1,1]} f$ (on est sûr que ce minimum existe, puisque $[-1,0]\times[-1,1]$ est un compact sur lequel f est continue). Donc f admet aussi un minimum sur $\mathbb{R}^2$, atteint en fait sur $[-1,0]\times[-1,1]$. Le minimum global est aussi un minimum local car $\mathbb{R}^2$ est un ouvert.

Ainsi, $\boxed{\min\limits_{\mathbb{R}^2} f = -\frac{1}{432} \text{ et } \operatorname{argmin}_{\mathbb{R}^2} f = \left\{\left(-\frac{1}{12}, -\frac{1}{\sqrt{6}}\right), \left(-\frac{1}{12}, \frac{1}{\sqrt{6}}\right)\right\}}$. Comme $\mathbb{R}^2$ est ouvert, un maximum global serait aussi un maximum local, donc $\boxed{f \text{ n'admet pas de maximum global}}$ [*1pt*].

---

3. [4 points]
On pose $u = (x, y)$ et $u_0 = (a, b)$. $f(u) = \|u\|^2 + 2\|u - u_0\| = \|u\|^2 + 2(\|u - u_0\|^2)^{\frac{1}{2}}$.
f est coercive continue, $\mathbb{R}^2$ est fermé, d'où l'existence d'un minimum [*0,5pt*]. De plus, f est différentiable sur $\mathbb{R}^2 \setminus \{u_0\}$ ouvert. Le minimum est donc :
- soit en u_0,
- soit en u_1, solution de $\nabla f(u_1) = 0$ (un min sur un ouvert est aussi un min local).

Or $\nabla f(u) = 2u + \frac{2(u-u_0)}{\|u-u_0\|}$ donc $\nabla f(u_1) = 0$ équivaut à $u_1\left[1 + \frac{1}{\|u-u_0\|}\right] = \frac{u_0}{\|u-u_0\|}$. On a alors $u_1 = \alpha u_0$ avec $\alpha > 0$. Mais $u = -\frac{u-u_0}{\|u-u_0\|}$ donne, en prenant la norme, $\|u\| = 1$ donc $\alpha\|u_0\| = 1$ et $\boxed{u_1 = \frac{u_0}{\|u_0\|}}$.
Or on a $f(u_0) = \|u_0\|^2$ et $f(u_1) = 1 + 2\|u_0\left(\frac{1}{\|u_0\|} - 1\right)\| = 1 + 2\,|1 - \|u_0\||$.
- Si $\|u_0\| < 1$, $f(u_1) > 1$ et $f(u_0) < 1$ donc $\min\limits_{\mathbb{R}^2} f = \|u_0\|^2$ atteint en u_0.
- Si $\|u_0\| \geq 1$, $f(u_1) = 2\|u_0\| - 1$ et $f(u_0) - f(u_1) = (\|u_0\| - 1)^2 \geq 1$. d'où :

$$\boxed{\begin{cases} \bullet \text{ si } a^2 + b^2 < 1\ ;\ \min\limits_{\mathbb{R}^2} f = a^2 + b^2 \text{ et } \mathrm{Arg}_{\mathbb{R}^2} \min f = \{(a, b)\} \\ \bullet \text{ si } a^2 + b^2 \geq 1\ ;\ \min\limits_{\mathbb{R}^2} f = 2\sqrt{a^2 + b^2} - 1 \text{ et } \mathrm{Arg}_{\mathbb{R}^2} \min f = \{\left(\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}, \frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}\right)\} \end{cases}}$$ [*2pts*].

---

4. [7 points]
F_α est de classe $\mathcal{C}^\infty$ et $\mathbb{R}^2$ est un ouvert donc les extrémums globaux sont également des extrémums locaux qui figurent parmi les points critiques.
Si $u = (x, y)$, on a $\nabla F_\alpha(u) = \begin{pmatrix} \alpha y e^{xy} - 2x \\ \alpha x e^{xy} - 2y \end{pmatrix}$ et $\nabla^2 F_\alpha(u) = \begin{pmatrix} \alpha y^2 e^{xy} - 2 & \alpha e^{xy}(1 + xy) \\ \alpha e^{xy}(1 + xy) & \alpha x^2 e^{xy} - 2 \end{pmatrix}$.

<u>Étude des extrémums globaux</u> [*1,5pts*].

- Le cas $\boxed{\alpha = 0}$, ($F_0(u) = -\|u\|^2$) a peu d'intérêt et se traite rapidement : $\boxed{\max_{\mathbb{R}^2} F_0 = 0}$, $\mathrm{Argmax}_{\mathbb{R}^2} F_0 = \{(0, 0)\}$ et $\inf_{\mathbb{R}^2} F_0 = -\infty$: $\boxed{\text{pas de minimum}}$. Par ailleurs, $(0, 0)$ seul point critique donc $\boxed{\text{pas d'autres extrémums locaux que } (0,0)}$.

- Le cas $\boxed{\alpha < 0}$ donne $F_\alpha(u) \leq -\|u\|^2$ donc on a ici aussi $\inf_{\mathbb{R}^2} F_0 = -\infty$: $\boxed{\text{pas de minimum}}$. Par contre, $-F_\alpha(u) \geq \|u\|^2$, donc $-F_\alpha$ est coercive et comme $\mathbb{R}^2$ est aussi un fermé, $-F_\alpha$ admet un minimum global, et $\boxed{F_\alpha \text{ admet un maximum global}}$.

- Le cas $\boxed{\alpha > 0}$ donne $F_\alpha(n, n) \sim \alpha e^{n^2} \to +\infty$ quand $n \to +\infty$ et $F_\alpha(n, 0) = \alpha - n^2 \to -\infty$ quand $n \to +\infty$: $\boxed{\text{pas d'extrémums globaux}}$ [*1,5pt*].

<u>Recherche des points critiques</u> [*2pts*].

- $\boxed{\text{Pour tout } \alpha \in \mathbb{R},\ (0, 0) \text{ est un point critique}}$ mais il peut y en avoir d'autres !

On a $2xy = \alpha y^2 e^{xy} = \alpha x^2 e^{xy}$ donc $x^2 = y^2$ et $2x = \alpha y e^{xy}$:

$\to$ Si $\alpha < 0$, $y = -x$ et $e^{-x^2} = \frac{2}{-\alpha}$, d'où $x^2 = \ln\frac{-\alpha}{2}$ qui n'est > 0 que si $-\alpha > 2$, soit $\alpha < -2$.
On a alors 2 autres points critiques : $\boxed{\left(\varepsilon\sqrt{\ln\left(\frac{-\alpha}{2}\right)}, -\varepsilon\sqrt{\ln\left(\frac{-\alpha}{2}\right)}\right) \text{ pour } \varepsilon \in \{-1, 1\} \text{ si } \alpha < -2}$.

$\to$ Si $\alpha > 0$, $y = x$ et $e^{x^2} = \frac{2}{\alpha}$, d'où $x^2 = \ln\frac{2}{\alpha}$ qui n'est > 0 que si $\alpha < 2$. On a alors 2 autres points critiques $\boxed{\left(\varepsilon\sqrt{\ln\left(\frac{2}{\alpha}\right)}, \varepsilon\sqrt{\ln\left(\frac{2}{\alpha}\right)}\right) \text{ pour } \varepsilon \in \{-1, 1\} \text{ si } \alpha \in]0, 2[}$.

Étude des extrémums locaux :

• $\boxed{\text{Le cas de } (0,0)}$ [*2pts*] : $\nabla^2 F_\alpha(0,0) = \begin{pmatrix} -2 & \alpha \\ \alpha & -2 \end{pmatrix}$, de déterminant $4-\alpha^2$ et de trace -4 :

$\triangleright$ Si $\boxed{|\alpha|<2}$, $\nabla F_\alpha(0,0)$ a 2 valeurs propres strictement négatives : $\boxed{(0,0) \text{ maximum local}}$;

$\triangleright$ Si $\boxed{|\alpha|>2}$, $\nabla F_\alpha(0,0)$ a 2 valeurs propres de signes opposés et $(0,0)$ n'est pas un extrémum local ;

$\triangleright$ Si $\boxed{|\alpha|=2}$, $\nabla F_\alpha(0,0)$ a au moins une valeur propre nulle et il faut étudier directement le signe de $F_\alpha(h,k)-F_\alpha(0,0)$.

$\rightarrow$ Si $\underline{\alpha=2}$, $F_2(h,k)-F_2(0,0) = 2(e^{hk}-1)-(h^2+k^2) = 2hk+h^2k^2-(h^2+k^2)+o(\|(h,k)\|^4) = -(h-k)^2+h^2k^2+o(\|(h,k)\|^4)$ qui est >0 si $h=k$ et <0 si $k=0$ et $h\neq 0$ donc $(0,0)$ n'est pas extrémum local.

$\rightarrow$ Si $\underline{\alpha=-2}$, $F_{-2}(h,k)-F_{-2}(0,0) = -2(e^{hk}-1)-(h^2+k^2) = -(h+k)^2-h^2k^2+o(\|(h,k)\|^4) \leq 0$ et $\boxed{(0,0) \text{ maximum local}}$, ce que l'on pouvait prévoir, puisque $(0,0)$ est dans ce cas le seul point critique et que l'on a un maximum global.

• $\boxed{\text{Les autres points critiques}}$ [*1,5pt*]

$\triangleright$ Si $\underline{\alpha<-2}$, on est dans un cas où $(0,0)$ n'est pas extrémum local et où l'on a un maximum global (et par conséquent aussi local) : ce maximum est donc nécessairement atteint en les points $\left(\varepsilon\sqrt{\ln\left(\frac{-\alpha}{2}\right)}, -\varepsilon\sqrt{\ln\left(\frac{-\alpha}{2}\right)}\right)$, pour $\varepsilon\in\{-1,1\}$ qui sont donc $\boxed{\text{maximums globaux et locaux}}$. On peut aussi le vérifier à l'aide de $\nabla^2 F_\alpha(u)$.

$\triangleright$ Si $\underline{0<\alpha<2}$, $\nabla^2 F_\alpha(x,x) = \begin{pmatrix} 2(x^2-1) & 2(1+x^2) \\ 2(1+x^2) & 2(x^2-1) \end{pmatrix}$ car $\alpha e^{x^2}=2$. $\nabla^2 F_\alpha(x,x)$ est de déterminant $-16x^2<0$ donc pas d'extrémum local en (x,x), où $x\neq 0$.

Finalement, il n'y a jamais de minimum local ni global et pas non plus de maximum local et global si $\alpha\geq 2$. Pour $\alpha\in[-2,2[$, seul $(0,0)$ est maximum local et maximum global pour $\alpha\in[-2,0]$. Enfin, pour $\alpha<-2$, $\left(\sqrt{\ln\left(\frac{-\alpha}{2}\right)}, -\sqrt{\ln\left(\frac{-\alpha}{2}\right)}\right)$ et $\left(-\sqrt{\ln\left(\frac{-\alpha}{2}\right)}, \sqrt{\ln\left(\frac{-\alpha}{2}\right)}\right)$ sont maximums globaux et locaux.