M1 UE2

Corrigés des exercices de Réductions (chapitre 6)

1. * Soit $E = \mathcal{C}(\mathbb{R})$ et $\varphi : f \in E \mapsto \varphi(f)$ où $\varphi(f)(x) = \displaystyle\int_0^x tf(t)dt$.
a) Montrer que $\varphi \in \mathcal{L}(E)$. φ est-il injectif ? surjectif ?
b) Etudier les valeurs propres de φ.

---

a) $\varphi(f) \in E$ car $x \mapsto xf(x)$ est continue (et même $\varphi(f)$ est $\mathcal{C}^1$).
$\varphi(\lambda f + \mu g)(x) = \displaystyle\int_0^x t(\lambda f(t) + \mu g(t))dt = \lambda\varphi(f)(x) + \mu\varphi(g)(x)$ donc $\varphi \in \mathcal{L}(E)$.

Si $\varphi(f) = 0$, $\displaystyle\int_0^x tf(t)dt = 0$ pour tout x, donc, en dérivant, $xf(x) = 0$ soit $f(x) = 0$ si $x \neq 0$, mais f est continue en 0, donc $f = 0$ et φ est injective.

Analyse. Soit $g \in E$ et $f \in E$ avec $\varphi(f) = g$. Donc g est $\mathcal{C}^1$ et $g'(x) = xf(x)$. On a aussi $g(0) = 0$, et $g'(0) = 0$.

$\dfrac{g'(x) - g'(0)}{x - 0} = \dfrac{g'(x)}{x}$ doit donc avoir une limite en 0, donc g doit être 2 fois dérivable en 0.

Synthèse. Soit $g \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R})$ avec $g(0) = g'(0) = 0$ et g deux fois dérivable en 0. Si $f : \begin{cases} x \neq 0 \mapsto \dfrac{g'(x)}{x} \\ 0 \mapsto g''(0) \end{cases}$, $f \in E$ et $\displaystyle\int_0^x tf(t)dt = \int_0^x g'(t)dt = g(x) - g(0) = g(x)$, *i.e.* $\varphi(f) = g$.

Donc im$g$ est l'ensemble de telles g. (φ est injective, non surjective - on est en dimension infinie).

b) $\to$ 0 n'est pas valeur propre.

$\to$ Si $\lambda \neq 0$, $\varphi(f) = \lambda f$ implique d'abord que f est $\mathcal{C}^1$, et que $\lambda f'(x) = xf(x)$, donc $e^{-\frac{x^2}{2\lambda}} f'(x) - \dfrac{x}{\lambda} e^{-\frac{x^2}{2\lambda}} f(x) = 0 = \left(e^{-\frac{x^2}{2\lambda}} f(x)\right)'$ et $f(x) = Ce^{-\frac{x^2}{2\lambda}}$. Mais $f(0) = 0$, car $\varphi(f) = \lambda f$, donc $C = 0$... et $f = 0$. Ainsi, φ n'a pas de valeur propre.

---

2. * Soit $E = \mathcal{C}(\mathbb{R})$. Pour $f \in E$, on définit $u(f) : x \mapsto \displaystyle\int_{-x}^x f(t)dt$. Montrer que u est un endomorphisme de E, et donner ses éléments propres.

La linéarité de u est liée à celle de l'intégrale. Par ailleurs, soit, pour $f \in E$, $F(x) = \displaystyle\int_0^x f(t)dt$. La continuité de f implique la classe $\mathcal{C}^1$ de F, donc $u(f)(x) = F(x) - F(-x)$ définit bien une fonction continue car de classe $\mathcal{C}^1$. Notons que $u(f)$ est impaire.

Si $u(f) = 0$, $F(x) = F(-x)$ donne en dérivant $f(x) = -f(-x)$, donc f est impaire. Réciproquement, si f est impaire, on a bien $u(f) = 0$.

Si $u(f) = \lambda f$, avec $\lambda \neq 0$, alors $f = \dfrac{1}{\lambda} u(f)$ donc f est impaire, et alors $u(f) = 0$: il n'y a pas d'autre valeur propre que 0.

---

3. ** Soit $E = \mathbb{R}^{\mathbb{N}^*}$ et $\varphi : E \to E$; $(u_n) \mapsto (v_n)$ où $v_n = \dfrac{1}{n^2} \displaystyle\sum_{p=1}^n pu_p$. Montrer que $\varphi \in \mathcal{L}(E)$. Quels sont ses éléments propres ?

$$\varphi((\alpha u_n+\alpha' u'_n))=(\frac{1}{n^2}\sum_{p=1}^{n}p(\alpha u_p+\alpha' u'_p))=\alpha\varphi((u_n))+\alpha'\varphi((u'_n)).$$

$\varphi((u_n))=\lambda(u_n)$ si et seulement si, pour tout n, on a $(L_n)\ :\ \dfrac{1}{n^2}\displaystyle\sum_{p=1}^{n}pu_p=\lambda u_n$. On a $(L_1) : u_1(1-\lambda)=0$, $(L_{n+1}) : \dfrac{1}{(n+1)^2}\displaystyle\sum_{p=1}^{n+1}pu_p=\lambda u_{n+1}=\dfrac{1}{(n+1)^2}[n^2\lambda u_n+(n+1)u_{n+1}]$, soit $n^2\lambda u_n=(n+1)^2[\lambda-\dfrac{1}{n+1}]u_{n+1}$ pour $n\geq 1$.

a) $\lambda\notin\{\dfrac{1}{n}\ ;\ n\in\mathbb{N}^*\}$, alors $u_1=0$ et $u_{n+1}=\psi(\lambda,n)u_n$ donne par récurrence, $u_n=0$.

b) $\lambda=\dfrac{1}{n_0}$

• Si $n_0=1$, u_1 est quelconque et $u_{n+1}=\dfrac{n}{n+1}u_n$, d'où $nu_n=\text{cte}=u_1$ i.e. $u_n=\dfrac{u_1}{n}$. Finalement $E_1(\varphi)=\mathbb{R}((\dfrac{1}{n})_{n\geq 1})$.

• Si $n_0\geq 2$, $u_1=0$ et, pour $2\leq n\leq n_0-1$, alors $(\lambda-\dfrac{1}{n})u_n=\dfrac{(n-1)^2}{n^2}\lambda u_{n-1}$ donc $u_n=0$. Par contre, si $n\geq n_0$, $\dfrac{n^2}{n_0}u_n=(n+1)^2\dfrac{n+1-n_0}{n_0(n+1)}u_{n+1}$, soit $u_{n+1}=\dfrac{n^2}{(n+1)(n+1-n_0)}u_n$, puis $u_{n+1}=\dfrac{n^2}{(n+1)(n+1-n_0)}\dfrac{(n-1)^2}{n(n-n_0)}\cdots\dfrac{n_0^2}{(n_0+1)\times 1}u_{n_0}=(\dfrac{n!}{(n_0-1)!})^2\dfrac{n_0!}{(n+1)!(n+1-n_0)!}u_{n_0}=\dfrac{n_0^2(n+1)!}{(n+1)^2n_0!(n+1-n_0)!}u_{n_0}=(\dfrac{n_0}{n+1})^2C_{n+1}^{n_0}u_{n_0}$. Donc $E_{\frac{1}{n_0}}(\varphi)=\mathbb{R}u^{(n_0)}$ où $u_n^{(n_0)}=0$ si $n<n_0$ et $u_n^{(n_0)}=(\dfrac{n_0}{n})^2C_n^{n_0}$ si $n\geq n_0$.

$\boxed{\textbf{4.}}$ ** $E=\mathcal{C}^\infty(\mathbb{R})$. Pour $f\in E$, on pose $L(f)(x)=3f(0)+\displaystyle\int_1^x f(t)dt$. Montrer que $L\in\mathcal{L}(E)$. Donner $\ker L$, $\mathrm{im}L$, ainsi que les éléments propres de L.

• $L(f)\in\mathcal{C}^\infty$, par récurrence : si $g=L(f)$, g est $\mathcal{C}^1$, avec $g'=f$, donc $g'\in\mathcal{C}^\infty$, soit g est $\mathcal{C}^\infty$.

• Si $L(f)(x)=0$: $g(x)=0$, donc $g'=0=f$: $\ker L=\{0\}$.

• Soit $g=L(f)$: $g'=f$, puis $L(f)(x)=3g'(0)+g(x)-g(1)$, d'où $3g'(0)=g(1)$, et $\mathrm{im}L=\{g\in E\ ;\ 3g'(0)=g(1)\}$.

• $L(f)=\lambda f$ donne, $\lambda\neq 0$ et $\lambda f'=f$, d'où $f(x)=Ce^{\frac{x}{\lambda}}$.

Réciproquement, $3-\lambda e^{\frac{1}{\lambda}}=0$, en injectant, ou parce que $f\in\mathrm{im}L$. Or $3=te^{\frac{1}{t}}$ ou $3X=e^X$ ($X=\dfrac{1}{t}$). On pose $\varphi(t)=-3t+e^t$, $\varphi'(t)=-3+e^t$,

t	$-\infty$		$\ln 3$		$+\infty$
$\varphi(t)$	$+\infty$	$\searrow$	$3-3\ln 3$	$\nearrow$	$+\infty$

avec $3-3\ln 3<0$: il y a donc 2 valeurs propres et $E_\lambda(L)=\mathbb{R}(x\mapsto e^{\frac{x}{\lambda}})$.

$\boxed{\textbf{5.}}$ *** Soit $A:\mathcal{C}([-1,1],\mathbb{R})\to\mathcal{F}([-1,1],\mathbb{R})$, $f\mapsto Af : x\mapsto\displaystyle\int_{-1}^{-x}f(t)dt$.

a) Montrer que A est un endomorphisme de $\mathcal{C}([-1,1],\mathbb{R})$; déterminer son noyau et son image.

b) Déterminer les éléments propres de A.

---

a) • Si $x \in [-1,1]$, $-x \in [-1,1]$ et $\displaystyle\int_{-1}^{-x} f(t)dt$ est bien défini. Si F est une primitive de f, on a $Af(x) = F(-x) - F(-1)$. f est continue, donc F est de classe $\mathcal{C}^1$ donc $x \mapsto F(-x) - F(-1)$ est également de classe $\mathcal{C}^1$. En particulier, $Af \in \mathcal{C}([-1,1], \mathbb{R})$ et A est évidemment linéaire. Donc A est un endomorphisme de $\mathcal{C}([-1,1], \mathbb{R})$.

• $\ker A = \{f \ ; \ Af = 0\}$. Si $Af = 0$, alors $(Af)'(x) = 0$ pour tout $x \in [-1,1]$. Or $(Af)'(x) = -f(-x)$ donc $f(-x) = 0$ pour tout $x \in [-1,1]$, d'où $f(u) = 0$ pour tout $u \in [-1,1]$ ($u = -x$)et $f = 0$ donc $\ker A = \{0\}$.

• Si $Af = g$, alors $g'(x) = -f(-x)$ et $f(x) = -g'(-x)$. On doit donc avoir $g(1) = 0$ car $Af(1) = 0$ et g de classe $\mathcal{C}^1$ car $g'(x) = -f(-x)$ avec f continue. Réciproquement, si g est de classe $\mathcal{C}^1$ et vérifie $g(1) = 0$, soit $f(x) = -g'(-x)$: f est continue de $[-1,1]$ sur $\mathbb{R}$ et

$$Af(x) = \int_{-1}^{-x} f(u)du = \int_{-1}^{-x} -g'(-u)du = \int_{1}^{x} g'(t)dt = g(x) - g(1) = g(x)$$

donc $\mathrm{Im}A = \{g \in \mathcal{C}^1([-1,1], \mathbb{R}) \ ; \ g(1) = 0\}$.

b) On cherche les couples (λ, f) vérifiant $Af = \lambda f$, soit $\displaystyle\int_{-1}^{-x} f(t)dt = \lambda f(x)$ pour tout $x \in [-1,1]$. Nécessairement, $f(1) = 0$ et $f \in \mathcal{C}^1([-1,1], \mathbb{R})$, c'est-à-dire $f \in \mathrm{Im}A$. En dérivant, on obtient $-f(-x) = \lambda f'(x)$: $\lambda \neq 0$ car $\ker A = \{0\}$, donc $f'(x) = -\dfrac{1}{\lambda} f(-x)$ d'où f' est de classe $\mathcal{C}^1$ au moins. En redérivant, on obtient $f''(x) = -\dfrac{1}{\lambda} \times (-f'(-x)) = -\dfrac{1}{\lambda^2} f(x)$.

Soit (E) : $y'' + \dfrac{1}{\lambda^2} y = 0$: f doit être solution de (E) et vérifier $f(1) = 0$ et $f(-x) + \lambda f'(x) = 0$.

$$f(x) = C\cos\frac{x}{\lambda} + D\sin\frac{x}{\lambda} \text{ avec } \left\{\begin{array}{l} C\cos\dfrac{1}{\lambda} + D\sin\dfrac{1}{\lambda} = 0 \\ C\cos\dfrac{x}{\lambda} - D\sin\dfrac{x}{\lambda} - C\sin\dfrac{x}{\lambda} + D\cos\dfrac{x}{\lambda} = 0 \end{array}\right.,$$

donc $D = -C$ et $\tan\dfrac{1}{\lambda} = 1$, soit $\dfrac{1}{\lambda} = \dfrac{\pi}{4} + k\pi$. Finalement, $\mathrm{Sp}A = \{\dfrac{1}{\pi}(\dfrac{1}{4} + k)^{-1} \ ; \ k \in \mathbb{Z}\}$ avec, pour $\lambda \in \mathrm{Sp}A$, $\mathrm{Vect}(x \mapsto \cos\dfrac{x}{\lambda} - \sin\dfrac{x}{\lambda})$.

$\boxed{\textbf{6.}}$ ** Soit $(a,b) \in \mathbb{C}^2 \setminus \{(0,0)\}$. Soit u l'endomorphisme de $\mathbb{C}[X]$ défini par $u(P) = [(aX+b)P]'$. Déterminer les éléments propres de u. Que peut-on dire de la restriction de u à $\mathbb{C}_n[X]$?

• Si $a = 0$, $u(P) = bP'$. Pour des raisons de degré, la seule valeur propre est 0 et $E(0,u) = \mathbb{C}$.

• On suppose maintenant $a \neq 0$. $u(P) = \lambda P$ avec $P \neq 0$ équivaut sur $\mathbb{C}[X]$ à $\dfrac{\lambda - a}{aX + b} = \dfrac{P'}{P}$. Sur $\mathbb{C}$, P est scindé, et, si $P = \mu \displaystyle\prod_{i=1}^{r} (X - a_i)^{n_i}$, on a $\dfrac{P'}{P} = \displaystyle\sum_{i=1}^{r} \frac{n_i}{X - a_i}$. L'unicité de la décomposition en éléments simples implique alors que $r = 1$, $a_1 = -\dfrac{b}{a}$ et $\lambda - a = ka$ avec $k \in \mathbb{N}$. Réciproquement, les valeurs propres sont les $\lambda_k = a(k+1)$ pour $k \in \mathbb{N}$, avec $E(\lambda_k, u) = \mathbb{C}P_k$ où $P_k = (X + \dfrac{b}{a})^k$.

Il est clair que $\mathbb{C}_n[X]$ est stable par u. Soit u_n l'endomorphisme de cet espace induit par u. u_n a $n+1$ valeurs propres distinctes (prendre $0 \leq k \leq n$), donc u_n est diagonalisable.

$\boxed{\textbf{7.}}$ * Soit $E = K_3[X]$, $A = X^4 - 1$, $B = X^4 - X$ et $\varphi : E \to E$; $P \to$ reste de la division euclidienne de AP par B. Montrer que $\varphi \in \mathcal{L}(E)$ et trouver les éléments propres de φ.

$AP = BQ + R$ avec $\deg R < \deg B = 4$ d'où $\varphi(E) \subset E$. $A(\lambda_1 P_1 + \lambda_2 P_2) = B(\lambda_1 Q_1 + \lambda_2 Q_2) + (\lambda_1 R_1 + \lambda_2 R_2)$, avec $\deg(\lambda_1 R_1 + \lambda_2 R_2) \leq \max(\deg R_1, \deg R_2) < 4$ d'où $\varphi \in \mathcal{L}(E)$.

$\varphi(1) = X - 1$ car $X^4 - 1 = X^4 - X + (X - 1)$.

$\varphi(X) = X^2 - X$; $\varphi(X^2) = X^3 - X^2$ (en multipliant par X, car $\deg R < 4$).

$\varphi(X^3) = -X^3 + X$ car $X^7 - X^3 = (X^4 - X)(X^3 + 1) + (-X^3 + X)$. D'où $M_{\mathcal{B}}(\varphi) = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$ et $\chi_M(\lambda) = \begin{vmatrix} -1-\lambda & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -1-\lambda & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1-\lambda & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1-\lambda \end{vmatrix}$. On développe d'abord par rapport à (L_1) : $\chi_M(\lambda) = -(1+\lambda)\begin{vmatrix} -1-\lambda & 0 & 1 \\ 1 & -1-\lambda & 0 \\ 0 & 1 & -1-\lambda \end{vmatrix}$. On fait ensuite $L_1 \leftarrow L_1 + (1+\lambda)L_2$: $\chi_M(\lambda) = -(1+\lambda)\begin{vmatrix} 0 & -(1+\lambda)^2 & 1 \\ 1 & -1-\lambda & 0 \\ 0 & 1 & -1-\lambda \end{vmatrix} = (1+\lambda)\begin{vmatrix} -(1+\lambda)^2 & 1 \\ 1 & -(1+\lambda) \end{vmatrix}$.

D'où $\chi_M(\lambda) = (1+\lambda)((1+\lambda)^3 - 1) = \lambda(1+\lambda)(\lambda^2 + 3\lambda + 3)$.

- $\lambda = 0$; $E_0(\varphi) = \ker(\varphi) = K(X + X^2 + X^3)$ (résolution matricielle).
- $\lambda = -1$; $M_{\mathcal{B}}(\varphi) + I_4 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$. Donc $E_{-1}(\varphi) = K(X^3 - 1)$.

Si $K = \mathbb{R}$, c'est fini ! φ n'est donc pas diagonalisable. Si $K = \mathbb{C}$, $\lambda^2 + 3\lambda + 3 = \dfrac{(\lambda+1)^3 - 1}{\lambda}$, d'où $\lambda \in \{j - 1, j^2 - 1\}$ et φ est diagonalisable avec $E_{j-1}(\varphi) = K(X^3 + jX^2 + j^2 X)$ et $E_{j^2-1}(\varphi) = K(X^3 + j^2 X^2 + jX)$.

$\boxed{\textbf{8.}}$ ** Soit $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & & (0) \\ n-1 & \ddots & \ddots & \\ & \ddots & \ddots & n-1 \\ (0) & & 1 & 0 \end{pmatrix} \in M_n(K)$.

a) Trouver $u \in \mathcal{L}(K_{n-1}[X])$ tel que $M_{\mathcal{B}}(u) = A$ (où $\mathcal{B} = (1, \cdots, X^n)$).

b) A est-elle diagonalisable ?

---

a) $u(1) = (n-1)X$, $u(X^j) = jX^{j-1} + (n-j-1)X^{j+1}$ pour $1 \leq j \leq n-2$ et $u(X^{n-1}) = (n-1)X^{n-2}$.

On remarque que $u(X^j) = (n-1)X^{j+1} + (1-X^2)jX^{j-1}$, soit $u(P) = (n-1)XP + (1-X^2)P'$ pour $P \in \{X, \cdots, X^{n-2}\}$ et que cette relation est encore vraie pour $P = 1$ et pour $P = X^{n-1}$, donc elle est vraie pour tout élément de la base.On a donc $u(P) = (n-1)XP + (1-X^2)P'$.

b) $\lambda \in \mathrm{sp}(u)$ si et seulement si $(n-1)XP + (1-X^2)P' = \lambda P$, soit $((n-1)X - \lambda)P + (1 - X^2)P' = 0$ ou bien $\dfrac{P'}{P} = \dfrac{(n-1)X - \lambda}{X^2 - 1} = \dfrac{\lambda + n - 1}{2(X+1)} + \dfrac{-\lambda + n - 1}{2(X-1)}$. Or, si $P = \displaystyle\prod_{i=0}^{r}(X - a_i)^{n_i}$, alors $\dfrac{P'}{P} = \displaystyle\sum_{i=0}^{r} \dfrac{n_i}{X-a_i}$. Pour $0 \leq k \leq n-1$, prenons $\lambda_k = 2k-(n-1)$. On a alors $\dfrac{\lambda_k+n-1}{2} = k$ et $\dfrac{-\lambda_k+n-1}{2} = -k+(n-1)$ et $P_k = (X+1)^k(X-1)^{n-1-k}$ qui est de degré $n-1$ vérifie bien $u(P_k) = \lambda_k P_k$. On a ainsi n valeurs propres distinctes et A est bien diagonalisable.

$\boxed{\textbf{9.}}$ * Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, non nulle, et $u : \mathcal{M}_n(\mathbb{C}) \to \mathcal{M}_n(\mathbb{C}), M \mapsto \mathrm{tr}(A)M + \mathrm{tr}(M)A$.
a) Montrer que u est un endomorphisme de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$.
b) Déterminer les éléments propres de u.
c) u est-il diagonalisable ?

---

a) $M \mapsto \mathrm{tr}(A)M$ est un endomorphisme de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, de même que $M \mapsto \mathrm{tr}(M)A$ par la linéarité de la trace. Donc, u est un endomorphisme de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$.

b) *Analyse.* Si $u(M) = \lambda M$, on a $[\lambda - \mathrm{tr}(A)]M = \mathrm{tr}(M)A$. Donc, soit $\lambda = \mathrm{tr}(A)$, et dans ce cas $\mathrm{tr}(M) = 0$, soit $M = \dfrac{\mathrm{tr}(M)}{\lambda - \mathrm{tr}(A)} A \in \mathbb{C}A$.

Synthèse. • $u(M) = \mathrm{tr}(A)M$ équivaut à $\mathrm{tr}(M) = 0$, donc $\mathrm{tr}(A)$ est valeur propre, et le sous-espace propre associé est $\ker(\mathrm{tr})$, qui est un hyperplan de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ puisque tr est une forme linéaire non nulle.

• $u(A) = 2\mathrm{tr}(A)A$, donc, si $\mathrm{tr}(A) \neq 0$, on obtient une deuxième valeur propre qui est $2\mathrm{tr}(A)$. Le sous-espace propre associé est $\mathbb{C}A$ par l'analyse.

c) • Si $\mathrm{tr}(A) \neq 0$, u a deux valeurs propres qui sont $\mathrm{tr}(A)$ et $2\mathrm{tr}(A)$. Au niveau des dimensions des sous-espaces propres, on a $n^2 - 1 + 1 = n^2$, donc u est diagonalisable.

• Si $\mathrm{tr}(A) = 0$, 0 est la seule valeur propre et u n'est pas diagonalisable car $n^2 - 1 < n^2$.

$\boxed{\textbf{10.}}$ * Soit $A = \begin{pmatrix} a^2 & ab & ac \\ ab & b^2 & bc \\ ac & bc & c^2 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_3(\mathbb{C})$ $((a,b,c) \neq (0,0,0))$. Étudier la diagonalisabilité de A.

A ayant c_1, c_2, c_3 comme vecteurs colonnes, si $e = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$, on a $c_1 = ae$, $c_2 = be$, $c_3 = ce$, donc $\mathrm{im}\, A \subset \mathbb{R}e$, et comme $(a,b,c) \neq (0,0,0)$, $\mathrm{im}\, A = \mathbb{C}e$ et $\mathrm{rg}(A) = 1$.

Donc, 0 est valeur propre avec $\dim(\ker(A)) = \dim(E_0(A)) = 2$ et $E_0(A)$ est le plan de $\mathbb{C}^3$ d'équation $ax + by + cz = 0$.

S'il y a une valeur propre non nulle λ, $E_\lambda(A) \subset \mathrm{im}(A)$ donc $E_\lambda(A) = \mathrm{im}(A)$ par la dimension. Or, $Ae = (a^2 + b^2 + c^2)e$ donc :

• $a^2 + b^2 + c^2 = 0$: $\mathrm{sp}(A) = \{0\}$ et A n'est pas diagonalisable.

• $a^2 + b^2 + c^2 \neq 0$: $\mathrm{sp}(A) = \{0, a^2 + b^2 + c^2\}$ avec $E_{a^2+b^2+c^2} = \mathbb{C}e$ et A est diagonalisable car $1 + 2 = 3$.

$\boxed{\textbf{11.}}$ ** Diagonalisabilité de $A = \begin{pmatrix} 0 & a & b \\ a & 0 & b \\ a & b & 0 \end{pmatrix}$.

La somme des colonnes est constante donc, avec $\sum C_i \to C_1$,

$$\chi_A(\lambda) = (a+b-\lambda) \begin{vmatrix} 1 & a & b \\ 1 & -\lambda & b \\ 1 & b & -\lambda \end{vmatrix} = (a+b-\lambda) \begin{vmatrix} 1 & a & b \\ 0 & -a-\lambda & 0 \\ 0 & b-a & -\lambda-b \end{vmatrix} = (a+b-\lambda)(b+\lambda)(a+\lambda).$$

Notons que cette propriété sur la somme des colonnes assure aussi que $(1,1,1)$ est vecteur propre pour $a+b$.

• Si $a=b=0$, $A=0$.

• Si $a=b\neq 0$, $2a$ est valeur propre simple et $-a$ est valeur propre double. On a $A+aI_3=a(1)$ qui est de rang 1, donc la multiplicité de $-a$ est égale à $\dim E(a,A)$, soit 2, et, comme c'est aussi le cas pour $2a$ qui est simple, on en déduit que A est diagonalisable.

• Si $b=-2a\neq 0$, $-a$ est valeur propre double et $2a$ est simple.

$$A+2aI_3=\begin{pmatrix} a & a & -2a \\ a & a & -2a \\ a & -2a & a \end{pmatrix}$$

est de rang 2, donc A n'est pas diagonalisable, et elle ne l'est pas non plus si $a=-2b\neq 0$.

• Dans les autres cas, A a trois valeurs propres distinctes, donc elle est diagonalisable.

---

12. ** Soit $M=\begin{pmatrix} a & c & b \\ c & a+b & c \\ b & c & a \end{pmatrix}\in\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$.

a) Montrer que M est diagonalisable.

b) Trouver $\alpha\in\mathbb{R}$ et $J\in\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ tels que $M=\alpha I_3+cJ+bJ^2$.

c) Trouver les éléments propres de M.

---

a) M est symétrique réelle donc diagonalisable.

b) Si $J=\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$, alors $J^2=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ et $\alpha I_3+cJ+bJ^2=\begin{pmatrix} \alpha+b & c & b \\ c & \alpha+2b & c \\ b & c & \alpha+b \end{pmatrix}$ donc $\alpha=a-b$ convient.

c) Étudions d'abord J. On a $\chi_J=2X-X^3=X(2-X^2)$ donc J est diagonalisable et ses sous-espaces propres sont des droites.

▷ Dans J, $c_1-c_3=0$ donc $E_0(J)=\mathbb{R}(1,0,-1)$.

▷ Dans $J-\sqrt{2}I_3$, $c_1+\sqrt{2}c_2+c_3=0$ donc $E_{\sqrt{2}}(J)=\mathbb{R}(1,\sqrt{2},1)$.

▷ Dans $J+\sqrt{2}I_3$, $c_1-\sqrt{2}c_2+c_3=0$ donc $E_{-\sqrt{2}}(J)=\mathbb{R}(1,-\sqrt{2},1)$.

Si $P=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & \sqrt{2} & -\sqrt{2} \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ et $D=\operatorname{diag}(0,\sqrt{2},-\sqrt{2})$, $J=PDJ^{-1}$ donc $A=PBP^{-1}$ où $B=(a-b)I_3+bD+cD^2=\operatorname{diag}(a-b,a+b+c\sqrt{2},a+b-c\sqrt{2})$. Hormis le cas $a=b=c=0$, on a les cas suivants.

▷ $c=0$ et $(a,b)\neq(0,0)$. Alors $\operatorname{sp}(A)=\{a-b,a+b\}$ et $E_{a-b}(A)=E_0(J)$, $E_{a+b}(J)=E_{\sqrt{2}}(J)\oplus E_{-\sqrt{2}}(J)$ (plan $x=y$).

▷ $c=-\sqrt{2}b\neq 0$. Alors $\operatorname{sp}(A)=\{a-b,a+b-c\sqrt{2}=a+3b\}$ et $E_{a-b}(A)=E_0(J)\oplus E_{\sqrt{2}}(J)$, $E_{a+3b}(J)=E_{-\sqrt{2}}(J)$.

▷ $c=\sqrt{2}b\neq 0$. Alors $\operatorname{sp}(A)=\{a-b,a+b+c\sqrt{2}=a+3b\}$ et $E_{a-b}(A)=E_0(J)\oplus E_{-\sqrt{2}}(J)$, $E_{a+3b}(J)=E_{\sqrt{2}}(J)$.

▷ $c\neq 0$ et $c^2\neq 2b^2$. Alors $\operatorname{sp}(A)=\{a-b,a+b+c\sqrt{2},a+b-c\sqrt{2}\}$ et $E_{a-b}(A)=E_0(J)$, $E_{a+b+c\sqrt{2}}=E_{\sqrt{2}}(J)$, $E_{a+b-c\sqrt{2}b}(J)=E_{-\sqrt{2}}(J)$.

$\boxed{\textbf{13.}}$ * Diagonalisabilité de $A = \begin{pmatrix} 0 & -1 & \cdots & -1 \\ 1 & \ddots & & (0) \\ \vdots & (0) & \ddots & \\ 1 & & & 0 \end{pmatrix}$.

On a $\text{rg}(A) = 2$, et $E_0(A) : \begin{cases} \displaystyle\sum_i^n x_i = 0 \\ x_0 = 0 \end{cases}$.

Pour $\lambda \neq 0$, comme A contient beaucoup de 0, on regarde $AX = \lambda X$: $\begin{cases} -\displaystyle\sum_1^n x_i = \lambda x_0 \\ x_0 = \lambda x_1 \\ \vdots \\ x_0 = \lambda x_n \end{cases}$,

$x_i = \dfrac{1}{\lambda} x_0$ pour $i \in \{1, \cdots, n\}$ et $x_0 \neq 0$ (sinon $X = 0$). D'où $-\displaystyle\sum_1^n \frac{1}{\lambda} = \lambda$, *i.e.* $\lambda^2 = -n$.

- Si $K = \mathbb{R}$, on arrête : il n'y a pas de valeur propre supplémentaire et $\mathbb{R}^n \neq E_0(A)$.
- Si $K = \mathbb{C}$: Soit $\omega = i\sqrt{n}$, $\lambda_1 = -\omega$, $\lambda_2 = \omega$, $(\lambda = \varepsilon\omega)$, et $E_{\varepsilon\omega} = \mathbb{C} \begin{pmatrix} \varepsilon\omega \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}$: A est diagonalisable,

$$A = P \begin{pmatrix} -\omega & & & & \\ & \omega & & & \\ & & 0 & & \\ & & & \ddots & \\ & & & & 0 \end{pmatrix} P^{-1}$$

où $P = \begin{pmatrix} -\omega & \omega & 0 & \cdots & 0 \\ 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ \vdots & \vdots & -1 & & (0) \\ \vdots & \vdots & & \ddots & \\ 1 & 1 & (0) & & -1 \end{pmatrix}$.

$\boxed{\textbf{14.}}$ * Réduction de $A = \begin{pmatrix} & & & 1 \\ & (0) & & \vdots \\ & & & \vdots \\ 1 & \cdots & \cdots & 1 \end{pmatrix}$.

$\text{rg}A = n - 2$, donc $0 \in \text{sp}(A)$, et $\dim E_0(A) = n - 2$. $E_0(A)$ est l'intersection de 2 hyperplans de K^n $\begin{cases} x_n = 0 \\ x_1 + \cdots + x_n = 0 \end{cases}$, avec $\text{rg} \begin{pmatrix} 0 & \cdots & 0 & 1 \\ 1 & \cdots & 1 & 1 \end{pmatrix} = 2 \left(\begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} \neq 0 \right)$, donc c'est un sous-espace de dimension $n - 2$, de base $(e_1 - e_2, \cdots, e_1 - e_{n-1})$ ($\mathcal{C} = (e_1, \cdots, e_n)$ canonique).

Comme il y a beaucoup de "0" dans A, on peut regarder $AX = \lambda X$, $\begin{cases} x_n = \lambda x_1 \\ \vdots \\ x_n = \lambda x_{n-1} \\ x_1 + \cdots + x_n = \lambda x_n \end{cases}$,

pour $\lambda \neq 0$. D'où $x_1 = \cdots = x_{n-1} = \dfrac{x_n}{\lambda}$, puis $\dfrac{n-1}{\lambda} x_n + x_n = \lambda x_n$. $x_n = 0$ implique $X = 0$, donc

$x_n \neq 0$ et $\lambda^2 - \lambda - (n-1) = 0$. $\Delta = 4n-3 > 0$, d'où $\lambda_1 = \dfrac{1+\sqrt{4n-3}}{2}$ et $\lambda_2 = \dfrac{1-\sqrt{4n-3}}{2}$, et aussi $X_k = x_1(1, \cdots, 1, \lambda_k)$, donc $E_{\lambda_k} = K(1, \cdots, 1, \lambda_k)$. $n = (n-2)+1+1$, donc A est diagonalisable, avec $A = P \begin{pmatrix} \lambda_1 & & & & \\ & \lambda_2 & & & \\ & & 0 & & \\ & & & \ddots & \\ & & & & 0 \end{pmatrix} P^{-1}$, où $P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ \vdots & \vdots & -1 & & (0) \\ \vdots & \vdots & & \ddots & \\ 1 & 1 & (0) & & -1 \\ \lambda_1 & \lambda_2 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}$.

$\boxed{\textbf{15.}}$ * $A = \begin{pmatrix} 1 & \cdots & 1 \\ \vdots & (0) & \vdots \\ 1 & \cdots & 1 \end{pmatrix}$: valeurs propres et dimension des sous espaces propres de A.

→ A est symétrique réelle donc diagonalisable.

→ $\mathrm{rg} A = 2$ et $\mathrm{im} A = \mathrm{Vect}(c_1, c_2) = \mathrm{Vect}\left(\sum_{i=1}^{n} e_i, e_1 + e_n\right)$ et $\dim \ker A = n-2$: $\ker A$ est l'intersection de 2 hyperplans $\begin{cases} x_1 + x_2 + \cdots + x_n = 0 \\ x_1 + x_n = 0 \end{cases}$, soit $\begin{cases} x_2 + \cdots + x_{n-1} = 0 \\ x_1 + x_n = 0 \end{cases}$.

→ $AX = \lambda X$ équivaut à $\begin{cases} x_1 + x_2 + \cdots + x_n = \lambda x_1 \\ x_1 + x_n = \lambda x_2 \\ \vdots \\ x_1 + x_n = \lambda x_{n-1} \\ x_1 + x_2 + \cdots + x_n = \lambda x_n \end{cases}$. Pour $\lambda \neq 0$, cela donne $x_2 = \cdots = x_{n-1}$ et $x_1 = x_n$, donc $2x_1 + (n-2)x_2 = \lambda x_1$ et $2x_1 = \lambda x_2$ donc $2x_1 + (n-2)\dfrac{2}{\lambda}x_1 = \lambda x_1$. Si $x_1 = 0$, alors $X = 0$, donc $x_1 \neq 0$ et $\lambda^2 - 2\lambda - 2(n-2) = 0$. $\Delta = 4 + 8(n-2) = 8n - 12 > 0$ d'où $\lambda_1 = \dfrac{2+\sqrt{8n-12}}{2} = 1 + \sqrt{2n-3}$ et $\lambda_2 = 1 - \sqrt{2n-3}$. L'espace propre associé à λ_i est $\mathbb{R}\left(1, \dfrac{2}{\lambda_i}, \cdots, \dfrac{2}{\lambda_i}, 1\right) = \mathbb{R}(\lambda_i, 2, \cdots, 2, \lambda_i)$.

$\boxed{\textbf{16.}}$ * Diagonalisabilité de $A = \begin{pmatrix} 1 & -a_1 & \cdots & -a_n \\ a_1 & \ddots & & (0) \\ \vdots & (0) & \ddots & \\ a_n & & & 1 \end{pmatrix}$.

$B = A - I = \begin{pmatrix} 0 & -a_1 & \cdots & -a_n \\ a_1 & \ddots & & (0) \\ \vdots & (0) & \ddots & \\ a_n & & & 0 \end{pmatrix}$: $\mathrm{rg}(B) = 2$ car il existe i_0 tel que $a_{i_0} \neq 0$, d'où $0 \in \mathrm{sp}(B)$, et $E_0(B)$: $\begin{cases} \sum_{i}^{n} a_i x_i = 0 \\ x_0 = 0 \end{cases}$.

Pour $\lambda \neq 0$, $BX = \lambda X$ équivaut à $\begin{cases} -\displaystyle\sum_1^n a_i x_i = \lambda x_0 \\ a_1 x_0 = \lambda x_1 \\ \vdots \\ a_n x_0 = \lambda x_n \end{cases}$, $x_i = \dfrac{a_i}{\lambda} x_0$ pour $i \in \{1, \cdots, n\}$ et $x_0 \neq 0$ (sinon $X = 0$). D'où $-\displaystyle\sum_1^n \frac{a_i^2}{\lambda} = \lambda$, *i.e.* $\lambda^2 = -\displaystyle\sum_1^n a_i^2$.

- <u>Si $K = \mathbb{R}$</u>, on arrête, (B est antisymétrique...)
- <u>Si $K = \mathbb{C}$</u> : Soit ω une racine de $-\displaystyle\sum_1^n a_i^2$, $\lambda_1 = -\omega$, $\lambda_2 = \omega$, ($\lambda = \varepsilon\omega$), et $E_{\varepsilon\omega} = \mathbb{C}\begin{pmatrix} \varepsilon\omega \\ a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix}$

: B est diagonalisable, $B = P \begin{pmatrix} -\omega & & & & \\ & \omega & & & \\ & & 0 & & \\ & & & \ddots & \\ & & & & 0 \end{pmatrix} P^{-1}$,

d'où $A = P \begin{pmatrix} -\omega+1 & & & & \\ & \omega+1 & & & \\ & & 1 & & \\ & & & \ddots & \\ & & & & 1 \end{pmatrix} P^{-1}$, où $P = \begin{pmatrix} -\omega & \omega & 0 & \cdots & 0 \\ a_1 & a_1 & a_2 & \cdots & a_n \\ \vdots & \vdots & -a_1 & & (0) \\ \vdots & \vdots & & \ddots & \\ a_n & a_n & (0) & & -a_1 \end{pmatrix}$, par exemple, si $a_1 \neq 0$.

$\boxed{\textbf{17.}}$ *** Soit A une matrice carrée.

a) Montrer que $\mathrm{Sp}(A) \subset \displaystyle\bigcup_i \overline{D}(a_{ii}, \rho_i)$ avec $\rho_i = \displaystyle\sum_{j \neq i} |a_{ij}|$.

b) Montrer que $A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & & (0) \\ 1 & \ddots & \ddots & \\ & \ddots & \ddots & 2 \\ (0) & & 1 & 3 \end{pmatrix}$ est inversible.

c) Trouver D diagonale telle que DAD^{-1} soit symétrique. Retrouver l'inversibilité de A.

---

a) Soit $AX = X$ avec $X \neq 0$. On a donc $\displaystyle\sum_j a_{ij} x_j = \lambda x_i$, soit $\displaystyle\sum_{j \neq i} a_{ij} x_j = (\lambda - a_{ii}) x_i$. Si $|x_{i_0}| = \max\{|x_i|, 1 \leq i \leq n\}$, alors $|x_{i_0}| > 0$ car $X \neq 0$, et $|\lambda - a_{i_0 i_0} = \displaystyle\sum_{j \neq i_0} |a_{i_0 j}| \frac{|x_j|}{|x_{i_0}|} \leq \displaystyle\sum_{j \neq i_0} |a_{i_0 j}| = \rho_{i_0}$. Donc $\lambda \in D'(a_{i_0 i_0}, \rho_{i_0})$, soit $\lambda \in \displaystyle\bigcup_{i=1}^n D'(a_{ii}, \rho_i)$.

b) On a $\rho_1 = 2$, $\rho_n = 1$ et $\rho_i = 3$ si $i \in \{2, \cdots, n-1\}$, ainsi que $a_{ii} = 3$ donc $\displaystyle\bigcup_{i=1}^n D'(a_{ii}, \rho_i) = D'(3, 3)$, soit $\mathrm{Sp}(A) \subset D'(3, 3)$.

Malheureusement, $O \in D'(3, 3)$ donc cela ne dit pas si A est inversible.

$AX=0$ équivaut à $\begin{cases} 3x_1+2x_2=0 \\ x_{j-1}+3x_j+2x_{j+1}=0 \text{ pour } 2\leq j\leq n-1 \\ x_{n-1}+3x_n=0 \end{cases}$. Complètons par $x_0=0$ et $x_{n+1}=0$. Alors $x_{j-1}+3x_j+x_{j+1}=0$ pour tout $j\in\{1,\cdots,n\}$. Or, puisque $r^3+3r+2=(r+1)(r+2)$, les suites (y_j) telles que $y_{j-1}+3y_j+2y_{j+1}=0$ pour tout $f\in\mathbb{N}^*$ sont celles de $\mathrm{Vect}((-1)^j,(-2)^j)$. On utilise alors celle qui est telle que $y_j=x_j$ si $j\in\{0,\cdots,n+1\}$, puis $y_{j+1}=-\dfrac{1}{2}[y_{j-1}+3y_j]$ si $j\geq n+1$ et elle fournit $x_j=\alpha(-1)^j+\beta(-2)^j$ si $j\in\{0,\cdots,n+1\}$. $x_0=0$ donne $\alpha+\beta=0$ soit $\alpha=-\beta$ puis $x_{n+1}=0$ donne $\alpha+\beta 2^{n+1}=0$ donc $\alpha=\beta=0$ et $X=0$, ainsi $0\notin\mathrm{Sp}(A)$.

c) Cherchons $D=\begin{pmatrix}\lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n\end{pmatrix}$ avec $\lambda_i\neq 0$: ainsi $D^{-1}=\begin{pmatrix}\dfrac{1}{\lambda_1} & & \\ & \ddots & \\ & & \dfrac{1}{\lambda_n}\end{pmatrix}$ et $DA=\begin{pmatrix}3\lambda_1 & 2\lambda_1 & & (0) \\ \lambda_2 & 3\lambda_2 & 2\lambda_2 & \\ & \ddots & \ddots & \ddots \\ (0) & & \lambda_n & 3\lambda_n\end{pmatrix}$ puis $DAD^{-1}=\begin{pmatrix}3 & 2\dfrac{\lambda_1}{\lambda_2} & & (0) \\ \dfrac{\lambda_2}{\lambda_1} & \ddots & \ddots & \\ & \ddots & \ddots & 2 \\ (0) & & \dfrac{\lambda_n}{\lambda_{n-1}} & 3\end{pmatrix}$. DAD^{-1} est symétrique si et seulement si $\dfrac{2\lambda_{i-1}}{\lambda_i}=\dfrac{\lambda_i}{\lambda_{i-1}}$ pour tout $i\in\{2,\cdots,n\}$, soit $\lambda_i^2=2\lambda_{i-1}^2$. Donc, si on prend $\lambda_i=2^{\frac{i-1}{2}}$ pour $1\leq i\leq n$, on a bien cette relation, et $DAD^{-1}=\begin{pmatrix}3 & \sqrt{2} & & (0) \\ \sqrt{2} & \ddots & \ddots & \\ & \ddots & \ddots & \sqrt{2} \\ (0) & & \sqrt{2} & 3\end{pmatrix}$ est symétrique. Cette fois, $\rho_i\in\{\sqrt{2},2\sqrt{2}\}$, donc $\mathrm{Sp}A\subset D'(3,2\sqrt{2})$ et $0\notin D'(3,2\sqrt{2})$ car $2\sqrt{2}<3$.

Bonus. On peut calculer $\mathrm{Sp}(A)$. Soit $P_n(\lambda)=\chi_A(\lambda)$ (A dépend de n). Suivant la première colonne, il vient $P_n(\lambda)=(3-\lambda)P_{n-1}(\lambda)-2P_{n-2}(\lambda)$. Donc, on retrouve une récurrence linéaire. Si $f(r)=r^2-(3-\lambda)r+2$, $\Delta=(3-\lambda)^2$. Dans l'immédiat, on ne regarde que $\lambda\in]3-2\lambda,3+2\lambda[$ et on pose $\lambda-3=-2\sqrt{2}\cos\theta$, $\theta\in]0,\pi[$, donc

$$f(r)=r^2-2r\sqrt{2}\cos\theta+2=(r-\sqrt{2}e^{i\theta})(r-\sqrt{2}e^{-i\theta})$$

Ainsi, $P_n(\lambda)=(\sqrt{2})^n[\alpha e^{in\theta}+\beta e^{-in\theta}]=(\sqrt{2})^n[\gamma\cos(n\theta)+\delta\sin(n\theta)]$.

Or $P_1(\lambda)=3-\lambda=2\sqrt{2}\cos\theta=\sqrt{2}[\gamma\cos\theta+\delta\sin\theta]$ et

$$\begin{aligned} P_2(\lambda) &= (3-\lambda)^2-2=8\cos^2-2=4(\cos 2\theta+1)-2 \\ &= 4\cos 2\theta+2=2(\gamma\cos 2\theta+\delta\sin 2\theta) \end{aligned}$$

$$\begin{cases} \gamma\cos\theta+\delta\sin\theta=2\cos\theta \\ \gamma\cos 2\theta+\delta\sin 2\theta=2\cos 2\theta+1=4\cos^2\theta-1 \end{cases}$$

donc $\gamma[2\cos^2\theta-\cos 2\theta]=4\cos^2\theta-2\cos 2\theta-1$, soit $\gamma=1$, puis $\delta=\dfrac{\cos\theta}{\sin\theta}$ donc

$$P_n(\lambda)=(\sqrt{2})^n\left[\cos(n\theta)+\frac{\cos\theta}{\sin\theta}\sin(n\theta)\right]=(\sqrt{2})^n\frac{\sin(n+1)\theta}{\sin\theta}$$

Pour $\theta \in]0,\pi[$, on a donc $P_n\left(3-2\sqrt{2}\cos\left(\dfrac{k\pi}{n+1}\right)\right) = 0$ si $1 \leq k \leq n$, d'où les n valeurs propres distinctes. $\lambda_k = 3-2\sqrt{2}\cos\left(\dfrac{k\pi}{n+1}\right)$. Il n'y en a donc pas d'autres.

---

18. ** Soit $x \in \mathbb{R}$. À quelle condition sur x la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & x \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ est-elle diagonalisable ?

$A(0) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ n'est pas diagonalisable car $\mathrm{sp}(A(0)) = \{1\}$ et $A(0) \neq I_3$.

On suppose $x \neq 0$. $\chi_{A(x)}(\lambda) = \begin{vmatrix} 1-\lambda & 0 & x \\ 1 & 1-\lambda & 0 \\ 1 & 1 & 1-\lambda \end{vmatrix} = (1-\lambda)^3 + x - x(1-\lambda)$.

Soit $P(t) = t^3 - tx + x$. $P'(t) = 3t^2 - x$.

Si $x < 0$, $P' > 0$ d'où

t	$-\infty$		$+\infty$
$P(t)$	$-\infty$	$\nearrow$	$+\infty$

P s'annule une fois et une seule , en λ_0 de multiplicité 1, donc $A(x)$ n'est pas diagonalisable.

Si $x > 0$, $P(t) = 0$ en $t^2 = \dfrac{x}{3}$.

t	$-\infty$		$-\sqrt{\dfrac{x}{3}}$		0		$\sqrt{\dfrac{x}{3}}$		$+\infty$
$P(t)$	$-\infty$	$\nearrow$		$\searrow$	$x > 0$	$\searrow$		$\nearrow$	$+\infty$

$P\left(\sqrt{\dfrac{x}{3}}\right) = \sqrt{\dfrac{x}{3}}\left(\dfrac{x}{3} - x\right) + x = -\dfrac{2x}{3}\sqrt{\dfrac{x}{3}} + x = x\left(1 - \dfrac{2}{3}\sqrt{\dfrac{x}{3}}\right)$ est du signe de $1 - \dfrac{2}{3}\sqrt{\dfrac{x}{3}}$ ou encore de $1 - \dfrac{4}{9}\dfrac{x}{3} = 1 - \dfrac{4x}{27}$.

$\rightarrow$ Si $x > \dfrac{27}{4}$, $P\left(\sqrt{\dfrac{x}{3}}\right) < 0$ donc P s'annule en trois valeurs distinctes et $A(x)$ est diagonalisable.

$\rightarrow$ Si $x < \dfrac{27}{4}$, $P\left(\sqrt{\dfrac{x}{3}}\right) > 0$ et P n'a qu'une racine simple (sur $\left]-\infty, -\sqrt{\dfrac{x}{3}}\right[$)

$\rightarrow$ Si $x = \dfrac{27}{4}$, $\sqrt{\dfrac{x}{3}} = \dfrac{3}{2}$ est racine double avec $P(t) = (t+3)\left(t - \dfrac{3}{2}\right)^2$. Donc, comme $t = 1 - \lambda$, $\mathrm{sp}(A) = \left\{4, -\dfrac{1}{2}\right\}$, $-\dfrac{1}{2}$ étant double.

$$A\left(\frac{27}{4}\right) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \frac{27}{4} \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \qquad B = A\left(\frac{27}{4}\right) + \frac{1}{2}I_3 = \begin{pmatrix} \frac{3}{2} & 0 & \frac{27}{4} \\ 1 & \frac{3}{2} & 0 \\ 1 & 1 & \frac{3}{2} \end{pmatrix}.$$

Vu ses 2 dernières colonnes, $\mathrm{rg}(B) = 2$ donc $\dim E_{-1/2}\left(A\left(\dfrac{27}{4}\right)\right) = 1$ et $A\left(\dfrac{27}{4}\right)$ n'est pas diagonalisable.

Ainsi, $A(x)$ est diagonalisable (sur $\mathbb{R}$) si et seulement si $x > \dfrac{27}{4}$.

$\boxed{\textbf{19.}}$ ** Soit

$$A = \begin{pmatrix} 1 & \cdots & 1 & a \\ \vdots & & \ddots & 1 \\ \vdots & & & \vdots \\ 1 & \cdots & \cdots & 1 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C}),$$

avec $a \in \mathbb{C} \setminus \{1\}$.

a) Montrer que A est diagonalisable si et seulement si $a \neq 1 - n^2/4$.

b) On se place dans le cas où $a = 1 - n^2/4$. Soit u l'endomorphisme de $\mathbb{C}^n$ canoniquement associé à A, et $\mathcal{C} = (e_1, \ldots, e_n)$ la base canonique de $\mathbb{C}^n$. Calculer $(u - n/2Id_{\mathbb{C}^n})^2(e_1)$, et en déduire que A est semblable à $\begin{pmatrix} 0 & 0 & & & \\ & \ddots & \ddots & (0) & \\ & & 0 & 0 & \\ & (0) & & \frac{n}{2} & 1 \\ & & & & \frac{n}{2} \end{pmatrix}$.

---

a) Si x est vecteur propre associé à la valeur propre λ, on a

$$\begin{cases} x_1 + \cdots + x_{n-1} + ax_n = \lambda x_1 \\ x_1 + \cdots + x_{n-1} + x_n = \lambda x_2 = \cdots = \lambda x_n \end{cases}.$$

On pose $s = x_1 + \cdots + x_n$. On a alors $s = \lambda x_2 = \cdots = \lambda x_n = \lambda x_1 + (1-a)x_n$.

• $\lambda = 0$ donne $s = 0$ et $x_n = 0$ puisque $a \neq 1$ ($\dim E_0 = n-2$ car $\mathrm{rg} A = 2$).

• Si $\lambda \neq 0$, $x_2 = \cdots = x_n = \dfrac{s}{\lambda}$ et $s = x_1 + (n-1)x_n = \lambda x_1 + (1-a)x_n = x_1 + (n-1)\dfrac{s}{\lambda} = \lambda x_1 + (1-a)\dfrac{s}{\lambda}$ d'où $x_1 = \dfrac{s}{\lambda}\left[1 + \dfrac{a-1}{\lambda}\right]$. Si $s = 0$, alors $x_2 = \cdots = x_n$, puis $x_1 = 0$: impossible. D'où $s \neq 0$ et $\dfrac{1}{\lambda}\left[1 + \dfrac{a-1}{\lambda}\right] + (n-1)\dfrac{1}{\lambda} = 1$, soit $\lambda^2 - n\lambda - (a-1) = 0$. $\Delta = n^2 + 4(a-1) = n^2 + 4a - 4$.

i) $\underline{a \neq 1 - \dfrac{n^2}{4}}$: il y a 2 valeurs propres distinctes et non nulles (le produit vaut $1-a$) : A_n est alors diagonalisable.

Espace propre associé : $x_2 = \cdots = x_n$, $x_n = 1$ donne alors $s = \lambda$ et $x_1 = \lambda - (n-1)$. D'où

$$E_\lambda(A) = \mathbb{C}\begin{pmatrix} \lambda - (n-1) \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}.$$

ii) $\underline{a = 1 - \dfrac{n^2}{4}}$: il y a une seule valeur propre non nulle $\lambda = \dfrac{n}{2}$.

On a alors $X = \dfrac{s}{\lambda}\begin{pmatrix} \lambda - (n-1) \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{n}{2} + 1 \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}$, d'où une droite propre et A n'est pas diagonalisable.

b) $(u - \dfrac{n}{2}\mathrm{Id})^2(e_1) = (u - \dfrac{n}{2}\mathrm{Id})(\sum e_i - \dfrac{n}{2}e_1) = 0$ car $\sum e_i - \dfrac{n}{2}e_1$ dirige $E_\lambda(A)$. Soit $(\varepsilon_1, \cdots, \varepsilon_{n-2}, (u - \dfrac{n}{2}\mathrm{Id})(e_1), e_1)$, famille de n vecteurs. Est-elle libre ?

Supposons $\sum_i \alpha_i\varepsilon_i+\alpha_{n-1}(u-\frac{n}{2}\mathrm{Id})(e_1)+\alpha_n e_1=0$. On applique $(u-\frac{n}{2}\mathrm{Id})$, d'où $-\sum_i \alpha_i\frac{n}{2}\varepsilon_i+\alpha_n(u-\frac{n}{2}\mathrm{Id})(e_1)=0$, car $u(\varepsilon_i)=0$. Mais $\varepsilon_i\in E_0(A)$ et $(u-\frac{n}{2}\mathrm{Id})(e_1)\in E_\lambda(A)$. Donc $\alpha_n(u-\frac{n}{2}\mathrm{Id})(e_1)\in E_0(A)\cap E_\lambda(A)=\{0\}$, d'où $\alpha_n=\alpha_1=\cdots=\alpha_{n-2}$, puis $\alpha_{n-1}=0$. La famille est donc libre et dans cette base, la matrice est $\begin{pmatrix} 0 & & & & \\ & \ddots & & & \\ & & 0 & & \\ & & & \frac{n}{2} & 1 \\ & & & & \frac{n}{2}\end{pmatrix}$, car $u(e_1)=\frac{n}{2}e_1+(u-\frac{n}{2}Id_{\mathbb{C}^n})(e_2)$.

$\boxed{\textbf{20.}}$ ** Soit $A=\begin{pmatrix} a & b & a & b & \ldots & b \\ b & a & b & a & \ldots & a \\ a & & \ddots & & & \\ \vdots & & & \ddots & & \\ \vdots & & & & \ddots & b \\ b & a & \ldots & \ldots & b & a\end{pmatrix}\in M_{2n}(K)$ (où $a\neq b$). Eléments propres et diagonalisabilité de A.

On a $C_1=C_3=\cdots=C_{2n-1}$ et $C_2=C_4=\cdots=C_{2n}$, donc $\mathrm{rg}A\leq 2$. ($\mathrm{im}u_A=\mathrm{Vect}(C_1,C_2)$).

On pose $u_1=\begin{pmatrix}1\\0\\1\\\vdots\\0\end{pmatrix}$ et $u_2=\begin{pmatrix}0\\1\\0\\\vdots\\1\end{pmatrix}$. Alors $C_{2k+1}=au_1+bu_2$, $C_{2k}=bu_1+au_2$. (u_1,u_2) est libre, et $\begin{cases} aC_1-bC_2=(a^2-b^2)u_1\\ aC_2-bC_1=(a^2-b^2)u_2\end{cases}$

• $a^2=b^2$ soit $a=-b$; (C_1,C_2) est liée ($C_2=-C_1$) et $\mathrm{rg}A=1$. On a en réalité $\mathrm{im}u_A=K(u_1-u_2)$ et $\begin{cases} u_A(u_1)=u_A(e_1+e_3+\cdots+e_{2n-1})=C_1+C_3+\cdots+C_{2n-1}\\ u_A(u_2)=u_A(e_2+e_4+\cdots+e_{2n})=C_2+C_4+\cdots+C_{2n}\end{cases}$. D'où alors $u_A(u_1-u_2)=C_1-C_2+\cdots+C_{2n-1}-C_{2n}=2nC_1=2na(u_1-u_2)$. Finalement $\mathrm{sp}(A)=\{0,2na\}$ avec $\begin{cases} E_0(u_A)=\ker u_A \text{ de dimension } 2\mathrm{n}-1\\ E_{2na}(u_A)=\mathbb{R}(u_1-u_2)\end{cases}$ (A est diagonalisable).

• $a^2\neq b^2$; $\mathrm{im}u_A=\mathrm{Vect}(u_1,u_2)$ avec :

$$\begin{cases} u_A(u_1)=u_A(e_1+e_3+\cdots+e_{2n-1})=C_1+C_3+\cdots+C_{2n-1}=n(au_1+bu_2)\\ u_A(u_2)=u_A(e_2+e_4+\cdots+e_{2n})=C_2+C_4+\cdots+C_{2n}=n(bu_1+au_2)\end{cases}.$$

De plus, $\ker u$ est de dimension $2n-2$, et engendré par $u_3=e_1-e_3$, $u_4=e_2-e_4$, $u_{2n-1}=e_1-e_{2n-1}$ et $u_{2n}=e_2-e_{2n}$. Soit $\mathcal{C}=(u_1,u_2,e_3,\cdots,e_{2n})$.

$$M_{\mathcal{B}}(u_1,u_2,e_3,\cdots,e_{2n})=\begin{pmatrix} 1 & 0 & & & (0)\\ 0 & 1 & & & \\ 1 & 0 & 1 & & \\ \vdots & \vdots & & \ddots & \\ 0 & 1 & & & 1\end{pmatrix}\in GL_{2n}(K)\text{, donc on a une base de } K^{2n}$$

et $M_{\mathcal{C}}(u_A) = \begin{pmatrix} na & nb & a & \dots & b \\ nb & na & b & \dots & a \\ 0 & 0 & & & \\ \vdots & \vdots & & (0) & \\ 0 & 0 & & & \end{pmatrix}$.

Par blocs, $\chi_A(\lambda) = \lambda^{2n-2}(\lambda^2 - 2na\lambda + n^2(a^2-b^2)) = \lambda^{2n-2}(\lambda - n(a+b))(\lambda - n(a-b))$. Donc $\mathrm{sp}(A) = \{0, n(a+b), n(a-b)\}$, avec $\dim \ker u_A = 2n-2$ et : $\begin{cases} u_A(u_1+u_2) = n(a+b)(u_1+u_2) \\ u_A(u_1-u_2) = n(a-b)(u_1-u_2) \end{cases}$. Donc A est diagonalisable.

---

21. *** Déterminer les sous-espaces de $\mathbb{R}^3$ stables par u_A où $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \in M_3(\mathbb{R})$.

$\chi_A(\lambda) = (1-\lambda)(\lambda^2-1) = -(\lambda+1)(\lambda-1)^2$.

$A - I_3 = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, de rang 2, avec $c_1 + c_2 = 0$: $E_1(u_A) = \mathbb{R}(1,1,0)$.

$A + I_3 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$, de rang 2, avec $c_1 - c_2 = 0$: $E_{-1}(u_A) = \mathbb{R}(1,-1,0)$.

Les droites stables sont les droites propres.

Les plans stables : on a déjà $F = E_1(u_A) \oplus E_{-1}(u_A)$ $(= \mathrm{im}(u_A - \mathrm{id}))$. Si F est stable et si $F \neq E_1(u_A) \oplus E_{-1}(u_A)$, alors F ne contient pas e_1 ou bien e_{-1} et dans $\mathcal{C}$ adaptée à $\mathbb{R}^3 = F \oplus \mathbb{R}e_\epsilon$, on a $M_{\mathcal{C}}(u_A) = \begin{pmatrix} A' & & 0 \\ & & 0 \\ 0 & 0 & \epsilon \end{pmatrix}$.

- Si $\epsilon = 1$, $\chi_{A'}(\lambda) = (\lambda^2 - 1)$ et A' est diagonalisable donc A aussi !
- Si $\epsilon = -1$, $M_{\mathcal{C}}(u_A + I_3) = \begin{pmatrix} A' + I_2 & & 0 \\ & & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

Donc $\mathrm{im}(u_A + \mathrm{id}) \subset F$ et $\mathrm{im}(u_A + \mathrm{id}) = F$, par les dimensions $(= E_1(u_A) + \mathbb{R}(1,1,2))$.

---

22. *** Soit $S_n = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \ddots & 1 \\ 1 & 0 & \dots & \dots & 0 \end{pmatrix}$ et $A_n = I_n + 2S_n + \dots + nS_n^{n-1}$.

a) Montrer que $n(n+1)/2 \in \mathrm{Sp}(A_n)$.

b) Montrer que toute autre valeur propre de A_n a une partie réelle égale à $-n/2$.

c) Montrer que $\mathrm{Tr}(A_n^2)$ est un polynôme de degré 4 en n.

---

a) On a facilement $A_n = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & \dots & n \\ n & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & 3 \\ \vdots & \vdots & & \ddots & 2 \\ 2 & 3 & \dots & \dots & 1 \end{pmatrix}$. Si $e = (1, \dots, 1)$, la somme des vecteurs colonnes de A_n vaut $[\sum_{k=1}^{n} k]e = \dfrac{n(n+1)}{2}e$, donc $n(n+1)/2$ est valeur propre de A_n et un vecteur propre est e.

b) On a $S_n^n = I_n$, donc S_n est diagonalisable, et ses valeurs propres figurent parmi les racines n-ièmes de l'unité. Si $S_n = P_n D_n P_n^{-1}$ avec D_n diagonale, alors $S_n^k = P_n D_n^k P_n^{-1}$, donc $A_n = P_n \sum_{k=0}^{n-1}(k+1)D_n^k P_n^{-1}$ est diagonalisable, et ses valeurs propres figurent parmi les $\sum_{k=0}^{n-1}(k+1)\omega^k$ avec $\omega^n = 1$. Or $\sum_{k=0}^{n-1} kX^k = X[\sum_{k=0}^{n} X^k]'$, et, dans le corps des fractions $\mathbb{C}(X)$,

$$X[\sum_{k=0}^{n} X^k]' = X\left[\frac{X^n-1}{X-1}\right]' = X\frac{(n-1)X^n - nX^{n-1}+1}{(x-1)^2}.$$

Si $\omega \neq 1$, la valeur de cette expression en ω est $\lambda = -n\omega\dfrac{\omega^{n-1}-1}{(\omega-1)^2} = -\dfrac{n}{1-\omega}$. Si $\omega = e^{i\theta}$, $|1-\omega|^2 = 2(1-\cos\theta) = 4\cos^2\dfrac{\theta}{2}$,et $\Re(1-\overline{\omega}) = 2\cos^2\dfrac{\theta}{2}$, donc $\Re(\lambda) = -n/2$.

On peut même préciser : $S_n - \omega I_n$ est de rang supérieur à $n-1$ car en supprimant la première colonne et la dernière ligne, on a une matrice triangulaire supérieure inversible, donc les espaces propres sont des droites, et, comme leur somme directe est $\mathbb{C}^n$, il y en a n, et chaque valeur propre est simple, donc ce sont exactement les racines n-ièmes de l'unité.

c) Par commutation des puissances de J_n, il vient

$$A_n^2 = \sum_{k=0}^{2n-2}\sum_{p=0}^{k}(p+1)(k-p+1)J_n^k = \sum_{k=0}^{2n-2}\sum_{p=0}^{k}(p+1)(k-p+1)J_n^k.$$

Par ailleurs, $\mathrm{Tr}(J_n^k) = 0$ si k n'est pas un multiple de n, et n s'il en est un. Donc, seuls $k=0$ et $k=n$ comptent dans les sommes ci-dessus et

$$\begin{aligned}
\mathrm{Tr}(A_n^2) &= n[1+\sum_{p=0}^{n}(p+1)(n-p+1)] \\
&= n + \frac{n^2(n+1)(n+2)}{2} - \frac{n^2(n+1)(2n+1)}{6} + n(n+1) \\
&= \frac{n(n+4)(n^2+2n+3)}{6},
\end{aligned}$$

et on a le résultat.

---

23. ** Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ et $B = \begin{pmatrix} 0 & I_n \\ 2A & A \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{2n}(\mathbb{C})$.

a) Montrer que $-2 \notin \mathrm{sp}(B)$.

b) Montrer que $\lambda \in \mathrm{sp}(B)$ si et seulement si $\dfrac{\lambda^2}{\lambda+2} \in \mathrm{sp}(A)$.

c) Donner une condition nécessaire et suffisante pour que B soit diagonalisable.

---

a) Soit $X = \begin{pmatrix} X_1 \\ X_2 \end{pmatrix}$, avec $X_k \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{C})$. $BX = \begin{pmatrix} X_2 \\ 2AX_1 + AX_2 \end{pmatrix}$ donc $BX = \lambda X$ équivaut à $\begin{cases} X_2 = \lambda X_1 \\ 2AX_1 + AX_2 = \lambda X_2 \end{cases}$, soit à $\begin{cases} X_2 = \lambda X_1 \\ (2+\lambda)AX_1 = \lambda^2 X_1 \end{cases}$.

Si $\lambda = -2$, $0 = \lambda^2 X_1$ donne $X_1 = 0$, puis $X_2 = 0$, donc $-2 \notin \mathrm{sp}(B)$.

b) • Si $\lambda \in \mathrm{sp}B$, $\lambda \neq -2$ et il existe $X \neq 0$ avec $BX = \lambda X$. Alors $AX_1 = \dfrac{\lambda^2}{2+\lambda} X_1$ (et $X_2 = \lambda X_1$) : $X_1 \neq 0$, sinon $X = 0$, soit $\dfrac{\lambda^2}{\lambda+2} \in \mathrm{sp}(A)$.

• soit $\lambda \in \mathbb{C} \setminus \{-2\}$ tel que $\dfrac{\lambda^2}{\lambda+2} \in \mathrm{sp}(A)$. Il existe X_1 tel que $AX_1 = \dfrac{\lambda^2}{2+\lambda} X_1$ et alors $B \begin{pmatrix} X_1 \\ \lambda X_1 \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} X_1 \\ \lambda X_1 \end{pmatrix}$ donc $X = \begin{pmatrix} X_1 \\ \lambda X_1 \end{pmatrix} \neq 0$ est bien vecteur propre de B pour λ : $\lambda \in \mathrm{sp}(B)$.

c) Par les calculs précédents, l'application $X_1 \mapsto \begin{pmatrix} X_1 \\ \lambda X_1 \end{pmatrix}$ est un isomorphisme de $E\left(\dfrac{\lambda^2}{\lambda+2}, A\right)$ sur $E(\lambda, B)$, donc $\dim E(\lambda, B) = \dim E\left(\dfrac{\lambda^2}{\lambda+2}, A\right)$.

Par ailleurs, regardons $\dfrac{\lambda^2}{\lambda+2} = \mu$, soit $\lambda^2 - \mu\lambda - 2\mu = 0$.

$\Delta = \mu(\mu+8)$ donc :

• si $\mu \notin \{-8, 0\}$, il y a 2 valeurs (complexes) de λ, soit $\lambda_1(\mu)$ et $\lambda_2(\mu)$, avec $\dfrac{\lambda_k^2(\mu)}{\lambda_k(\mu)+2} = \mu$. On a alors, si $\mu \in \mathrm{sp}(A)$, $\lambda_k(\mu) \in \mathrm{sp}(B)$ et $2\dim E(\mu, A) = \dim E(\lambda_1(\mu), B) + \dim E(\lambda_2(\mu), B)$. Si $-8, 0 \notin \mathrm{sp}(A)$, $2 \displaystyle\sum_{\mu \in \mathrm{sp}(A)} \dim E(\mu, A) = \sum_{\lambda \in \mathrm{sp}(B)} \dim E(\lambda, B)$ et cette somme vaut $2n$ si et seulement si $\displaystyle\sum_{\mu \in \mathrm{sp}(A)} \dim E(\mu, A) = n$ donc B est diagonalisable si et seulement si A l'est.

• En fait, $2 \displaystyle\sum_{\mu \in \mathrm{sp}(A) \setminus \{-8,0\}} \dim E(\mu, A) + \dim E(-8, A) + \dim E(0, A) = \sum_{\lambda \in \mathrm{sp}(B) \setminus \{-4,0\}} \dim E(\lambda, B) + \dim E(-4, B) + \dim E(0, B)$, donc, si $0 \in \mathrm{sp}(A)$ (resp. $-8 \in \mathrm{sp}(A)$), donc $0 \in \mathrm{sp}(B)$, (resp. $-4 \in \mathrm{sp}(B)$), on ne peut avoir $\displaystyle\sum_{\lambda \in \mathrm{sp}(B)} \dim E(\lambda, B) = 2n$ car alors $\displaystyle\sum_{\mu \in \mathrm{sp}(A) \setminus \{-8,0\}} \dim E(\mu, A) + \frac{1}{2} \dim E(-8, A) + \frac{1}{2} \dim E(0, A) = n \geq \sum_{\mu \in \mathrm{sp}(A)} \dim E(\mu, A)$ donc $\dim E(-8, A) + \dim E(0, A) \leq 0$ et les 2 dimensions sont nulles. Donc B est diagonalisable si et seulement si A l'est,et $-8 \notin \mathrm{sp}(A)$ et $0 \notin \mathrm{sp}(A)$.

---

24. ** Soit $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

a) Montrer que A n'est pas diagonalisable. Trigonaliser A.

b) Trouver les matrices $M \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ telles que $M^2 = A$.

---

a) On a

$$\chi_A(\lambda) = \begin{vmatrix} -\lambda & 0 & 1 \\ 2 & 1-\lambda & 0 \\ 0 & 0 & 1-\lambda \end{vmatrix} = -\lambda(1-\lambda)^2,$$

et $\mathrm{rg}(A) = 2$, avec $c_1 - 2c_2 = 0$, donc $\ker(A) = \mathbb{R}(1, -2, 0) = \mathbb{R}e_1$. On a aussi $A - I_3 = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, de rang 2 avec $c_2 = 0$, donc $E(A, 1) = \mathbb{R}(0, 1, 0) = \mathbb{R}e_2$. La somme des dimensions vaut 2, donc A n'est pas diagonalisable.

Cependant, on peut compléter (e_1, e_2) par e_3 en une base : si P est la matrice de passage, on aura forcément $P^{-1}AP = T = \begin{pmatrix} 0 & 0 & a \\ O & 1 & b \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, le troisième venant de l'invariance de la trace ou de χ_A par similitude. Prenons $e_3 = (0,0,1)$ par exemple. Alors, (e_1, e_2, e_3) est libre car $\det(P) = \det \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \neq 0$, et $Ae_3 = (1,0,1) = e_1 + 2e_2 + e_3$, soit $T = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

b) Si $M^2 = A$, alors $M^3 = AM = MA$, donc les sous-espaces propres de A sont stables par M. Or, ce sont $\mathbb{R}e_1$ et $\mathbb{R}e_2$, donc, si $i = 1, 2$, $Me_i \in \mathbb{R}e_i$, et e_i est un vecteur propre pour M aussi, soit PMP^{-1} de la forme $N = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & a \\ 0 & \lambda_2 & b \\ 0 & 0 & \lambda_3 \end{pmatrix}$, avec $N^2 = T$, soit, comme $N^2 = \begin{pmatrix} \lambda_1^2 & 0 & a(\lambda_1 + \lambda_3) \\ 0 & \lambda_2^2 & b(\lambda_2 + \lambda_3) \\ 0 & 0 & \lambda_3^2 \end{pmatrix}$, donc $\lambda_1 = 0$, $\lambda_2 = \varepsilon$ et $\lambda_3 = \varepsilon'$, puis $a\varepsilon' = 1$ et $b(\varepsilon + \varepsilon') = 2$, donc $\varepsilon = \varepsilon'$, car sinon leur somme est nulle, et alors $a = \varepsilon = b$, soit $N = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \varepsilon \\ 0 & \varepsilon & \varepsilon \\ 0 & 0 & \varepsilon \end{pmatrix}$, les solutions étant les $P^{-1}NP$, avec $\varepsilon \in \{-1, 1\}^2$, soit deux solutions.

---

25. * Déterminer $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telle que $M^3 - 2M^2 + M = 0$ et $\text{tr}(M) = 0$.

On a $M(M - I_n)^2 = 0$ donc $\text{sp}(M) \in \{0, 1\}$.

Or M est trigonalisable sur $\mathbb{C}$ et $\text{tr}(M) = m_0(M) \times 0 + m_1(M) \times 1 = m_1(M)$ (y compris les multiplicités nulles). Ainsi $m_1(M) = 0$ et $1 \notin \text{sp}(M)$: $M - I_n \in GL_n(\mathbb{R})$ donc $(M - I_n)^2 \in GL_n(\mathbb{R})$ et cette matrice est simplifiable, d'où $M = 0$.

---

26. Soit $A, B, C \in M_n(\mathbb{K})$ telles que $B \neq 0$, $C \neq 0$ et il existe λ, μ non nuls et distincts avec $A^p = \lambda^p B + \mu^p C$ pour $p \in \{1, 2, 3\}$. Montrer que A est diagonalisable et calculer A^p pour tout $p \in \mathbb{N}$.

De $\left\{ \begin{array}{l} A = \lambda B + \mu C \\ A^2 = \lambda^2 B + \mu^2 C \end{array} \right.$, on déduit, en particulier, $\left\{ \begin{array}{l} A^2 - \mu A = \lambda(\lambda - \mu)B \\ A^2 - \lambda A = \mu(\mu - \lambda)C \end{array} \right.$ Comme $\lambda \neq \mu$ et $\lambda\mu \neq 0$, la troisième relation $(A^3 = \lambda^3 B + \mu^3 C)$ donne alors : $A^3 = \dfrac{\lambda^3}{\lambda(\lambda - \mu)}(A^2 - \mu A) + \dfrac{\mu}{\mu^3(\mu - \lambda)}(A^2 - \lambda A) = \dfrac{\lambda^2 - \mu^2}{\lambda - \mu} A^2 + \dfrac{\mu\lambda}{\lambda - \mu}(-\lambda + \mu)A = (\lambda + \mu)A^2 - \mu\lambda A$. Donc $A(A - \lambda I)(A - \mu I) = 0$ et A est diagonalisable.

Par récurrence, si pour $p \geq q$, on a $A^p = \lambda^p B + \mu^p C$, alors $A^{p+1} = (\lambda + \mu)A^p - \mu\lambda A^{p-1} = (\lambda + \mu)(\lambda^p B + \mu^p C) - \mu\lambda(\lambda^{p-1} B + \mu^{p-1} C) = \lambda^{p+1} B + \mu^{p+1} C$.

---

27. ** Soit A, B dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ telle que $AB - BA = A$.

a) Montrer que A est non inversible.

b) Montrer que, pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, $A^k B - BA^k = kA^k$.

c) En déduire que A est nilpotente.

---

a) Si A était inversible, on aurait $B = A^{-1}BA + I_n$ et B serait semblable à $B + I_n$. On aurait $\mathrm{tr}(B) = \mathrm{tr}(B + I_n)$, ce qui est faux donc A n'est pas inversible.

b) C'est vrai pour $k = 1$. Si $A^kB - BA^k = kA^k$, $A^{k+1}B = ABA^k + kA^{k+1}$. Or $AB = BA + A$ donc $ABA^k = BA^{k+1} + A^{k+1}$ ce qui donne bien $A^{k+1}B = BA^{k+1} + (k+1)A^{k+1}$.

c) Si A^k n'était jamais nulle, l'endomorphisme $M \mapsto MB - BM$ de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ aurait une infinité de valeurs propres car tout k en serait une avec A^k comme vecteur propre associé. C'est impossible en dimension finie donc il existe k tel que $A^k = 0$.

$\boxed{\textbf{28.}}$ ** On donne $\phi : \mathcal{M}_n(\mathbb{C}) \to \mathbb{C}$ ayant les deux propriétés suivantes :

a) $\phi(XY) = \phi(X)\phi(Y)$.

b) $\phi\left(\begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\right) = \lambda$.

Montrer que $\phi(X) = \det X$ [on pourra d'abord comparer $\phi(X)$ et $\phi(Y)$ quand X et Y sont semblables, puis discuter suivant la diagonalisabilité].

On a $\phi\left(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\right) = 1$, donc, pour T inversible, on aura $\phi(T^{-1}) = (\phi(T))^{-1}$. Si X et Y sont semblables, $Y = T^{-1}XT$ et $\phi(Y) = (\phi(T))^{-1}\phi(X)\phi(T) = \phi(X)$.

Si X est diagonalisable, elle est semblable à $\begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \mu \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \mu \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \mu \end{pmatrix}$ est semblable à $\begin{pmatrix} \mu & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \mu \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, donc $\phi\left(\begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \mu \end{pmatrix}\right) = \lambda\mu$. Pour X diagonalisable, on a donc $\phi(X) = \det X$.

Si X est non diagonalisable, elle est semblable à $\begin{pmatrix} \lambda & \mu \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}$. Pour $\lambda \neq 0$, $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \lambda & \mu \\ 0 & \lambda \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda & \mu \\ 0 & 2\lambda \end{pmatrix}$, et comme $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} \lambda & \mu \\ 0 & 2\lambda \end{pmatrix}$ sont diagonalisables, on aura encore $\phi(X) = \det X$.

Reste le cas où X est semblable à $\begin{pmatrix} 0 & \mu \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$. Comme $\begin{pmatrix} 0 & \mu \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & \mu \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, on aura $\phi\left(\begin{pmatrix} 0 & \mu \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\right)^2 = \phi\left(\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\right)$. Enfin,

$$\phi\left(\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\right) = \phi\left(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}\right)\phi\left(\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\right) = 2\phi\left(\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\right)$$

donc $\phi\left(\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\right) = 0$. On obtient bien $\phi(X) = \det X$ pour tout X de $\mathcal{M}_2(\mathbb{C})$.

$\boxed{\textbf{29.}}$ ** Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telle que A soit symétrique, à coefficients dans $\{0,1\}$, de trace nulle, et avec $A^2 + A - (d-1)I = J$ où $d \in \mathbb{N}^*$ et $J = (1)$. Soit $U = \begin{pmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{n1}(\mathbb{R})$.

a) Montrer que $AU = dU$. En déduire que $n = d^2 + 1$.

b) Soit a, b les racines de $X^2 + X - (d-1)$. Montrer que $\mathrm{sp}(A) \in \{a, b, d\}$.

c) Montrer que $d \in \{1, 2, 3, 7, 57\}$.

---

a) On a $A^2 = \left(\sum_k a_{ik}a_{jk}\right)$ car $A = {}^tA$, donc $A^2_{ii} = \sum_k a^2_{ik} = \sum_k a_{ik}$ car $a_{ik} \in \{0,1\}$.

Donc, en regardant le terme $i-i$ de $A^2+A-(d-1)I$, il vient $\displaystyle\sum_k a_{ik}+a_{ii}-d+1-1=0$. Mais $\mathrm{tr}A=\displaystyle\sum_i a_{ii}=0$, donc $a_{ii}=0$, car $a_{ii}\geq 0$ et ainsi $\displaystyle\sum_k a_{ik}=d$, soit $AU=dU$ car $AU=\left(\displaystyle\sum_k a_{ik}\right)_i$. On a donc $d^2U+dU-(d-1)U=JU=nU$ soit, car $U\neq 0$, $n=d^2+1$.

b) $\mathrm{rg}J=1$ donc $0\in\mathrm{sp}(J)$, avec $m_0=\dim E_0(J)=n-1$ car J est diagonalisable (symétrique). Il manque une valeur propre : c'est n car $\mathrm{tr}(J)=n$.

Si $AX=\lambda X$, $X\neq 0$, $JX=(\lambda^2+\lambda-(d-1))X$ donc $\lambda^2+\lambda-d+1=0$, soit $\lambda\in\{a,b\}$, ou $\lambda^2+\lambda-d+1=n$, mais alors $X\in E_n(J)=\mathbb{R}U$, donc $\lambda=d$ par **a)**.

c) Déjà $a\neq b$, car le discriminant Δ de $X^2+X-d+1$ vaut $4d-3\neq 0$ ($d\in\mathbb{N}^*$). En fait, $a=\dfrac{1}{2}(-1-\sqrt{4d-3})$ et $b=\dfrac{1}{2}(-1+\sqrt{4d-3})$. $AX=dX$ implique $JX=(d^2+1)X=nX$ donc $E_d(A)\subset E_n(J)=\mathbb{R}U$, soit $E_d(A)=E_n(J)$, car $U\in E_d(A)$. Si m_1 (resp. m_2) est la multiplicité de a (resp. b) (y compris 0), comme A est diagonalisable (symétrique), on a $n=m_1+m_2+1$ (donc $d^2=m_1+m_2$).

$\mathrm{tr}(A)=m_1a+m_2b+d$ en diagonalisant, donc $d=-m_1a-m_2b=\dfrac{1}{2}[m_1+m_2+(m_1-m_2)\sqrt{4d-3}]=\dfrac{1}{2}[d^2+(m_1-m_2)\sqrt{4d-3}]$, soit $d^2-2d+(m_1-m_2)\sqrt{4d-3}=0$.

→ Si $m_1=m_2$, $d=2$.

→ Si $m_1\neq m_2$, on a $r=\sqrt{4d-3}\in\mathbb{Q}$, avec $r^2\in\mathbb{N}$, donc $r\in\mathbb{N}$, avec $\dfrac{r^2+3}{4}=d$ donc

$$\frac{r^4+6r^2+9}{16}-\frac{r^2+3}{2}+(m_1-m_2)r=0$$

soit $r^4-2r^2+16(m_1-m_2)r=15$, donc r divise 15, soit $r\in\{1,3,5,15\}$, puis $d\in\{1,3,7,57\}$.