Compléments sur le conditionnement.

Loi conditionnelle

- Si X est discrète, $P_Y^{[X=x]}(B) = \frac{P([X=x]\cap[Y\in B])}{P([X=x])}$;
- Si X et Y sont absolument continues, $P_Y^{(X=x)}$ loi absolument continue de densité

$$f_Y^{(X=x)}(y) = \frac{f_{X,Y}(x,y)}{f_X(x)} \text{ pour } x \underline{\text{ fixé}} \text{ tel que } f_X(x) \neq 0.$$

Remarque : Pour la loi conditionnelle de Y à $X = x$, le réel x est fixé et donc il ne doit pas y avoir d'indicatrice dans $f_X(x)$ et dans $f_{X,Y}(x,y)$, c'est y qui doit être exprimé en fonction de x et non l'inverse.

Espérance conditionnelle à un événement : si $P(A) > 0$, $\mathbb{E}^A(Y) = \frac{\mathbb{E}(Y\,\mathbb{I}_A)}{P(A)}$.

Espérance conditionnelle de Y à $(X = x)$: espérance d'une variable de loi $P_Y^{(X=x)}$.
C'est un **réel** qui est fonction de x.

- Si (X,Y) est discret, $\mathbb{E}^{[X=x]}(Y) = \sum_{y\in Y(\Omega)} yP^{[X=x]}([Y=y])$;
- si (X,Y) est absolument continu, $\mathbb{E}^{(X=x)}(Y) = \int y \frac{f_{X,Y}(x,y)}{f_X(x)}dy$.

$\mathbb{E}^X(Y)$ est la **variable aléatoire** $h(X)$ fonction de X avec $h(x) = \mathbb{E}^{(X=x)}(Y)$.

Propriétés :
- Si Y admet une espérance, $\mathbb{E}^X(Y)$ aussi et alors $\boxed{\mathbb{E}(\mathbb{E}^X(Y)) = \mathbb{E}(Y)}$.
- $\mathbb{E}^X(\psi(X)Y) = \psi(X)\mathbb{E}^X(Y)$ pour toute variable bornée $\psi(X)$.

Régressions : si $X, Y \in L^2$ (espace des v.a. ayant un moment d'ordre 2),

- $\mathbb{E}(Y)$ est la constante qui minimise $\mathbb{E}((Y-a)^2)$
- $\frac{\mathrm{cov}(X,Y)}{\mathrm{var}(X)}(X-\mathbb{E}(X))+\mathbb{E}(Y)$ est la fonction affine de X qui minimise $\mathbb{E}((Y-(aX+b))^2)$.
- $\mathbb{E}^X(Y)$ est la fonction de X qui minimise $\mathbb{E}((Y-\psi(X))^2)$.

$\mathbb{E}^X(Y)$ est la projection orthogonale de Y sur $L^2(X)$ (on a donc $\mathbb{E}(Y\psi(X)) = \mathbb{E}(\mathbb{E}^X(Y)\psi(X))$ et en particulier $\mathbb{E}(\mathbb{E}^X(Y)) = \mathbb{E}(Y)$).

Conditionnement discret

1. * Soient X et Y deux v.a.r. indépendantes. Déterminer la loi conditionnelle de X sachant $[X+Y=n]$, puis $\mathbb{E}^{[X+Y=n]}(X)$ ainsi que $\mathbb{E}^{X+Y}(X)$ dans les cas suivants :

(a) X et Y suivent respectivement les lois de Poisson $\mathcal{P}(\lambda)$ et $\mathcal{P}(\mu)$;
(b) X et Y suivent respectivement les lois binomiales $\mathcal{B}(m,p)$ et $\mathcal{B}(n,p)$.

---

2. ** Soit a, b, c trois réels de $]0,1[$ tels que $a+b+c=1$ et α, β deux réels de $]0,1[$ tels que $\alpha+\beta=1$.

(a) Montrer que la famille $(p_{m,n})$ définie par:

$$\begin{cases} p_{0,0} = \alpha + \beta a \\ p_{m,n} = \beta a \frac{(m+n)!}{m!n!}\, b^m c^n \text{ si } (m,n) \neq (0,0) \end{cases}$$

est une probabilité sur $\mathbb{N}^2$.
(b) On considère un couple (X,Y) de v.a.r. à valeurs dans $\mathbb{N}^2$ tel que :

$$P([X=m] \cap [Y=n]) = p_{m,n}.$$

Déterminer les lois conditionnelles de Y sachant $[X=0]$, puis sachant $[X=m]$ pour tout $m \in \mathbb{N}^*$. Déterminer $\mathbb{E}^X(Y)$.

---

3. * Soit $\lambda > 0$ et (X,Y) un couple à valeurs dans $\mathbb{N}^2$ de loi conjointe définie par :

$$P([X=m] \cap [Y=k]) = \frac{1}{\lambda}\, C_{m+k}^{k} (\frac{\lambda}{2\lambda+1})^{m+k+1}$$

(a) Déterminer la loi de $Z = X+Y$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$, la loi conditionnelle de X sachant $[Z=n]$.

(b) Déterminer $\mathbb{E}^Z(X)$ et retrouver $\mathbb{E}(X)$.

---

4. ** On considère le vecteur aléatoire $U=(X,Y)$ équiréparti sur $\{(0,0),(0,2),(1,1)\}$. Les v.a. X et Y sont-elles indépendantes ? Déterminer $\mathbb{E}(Y)$ et $\mathbb{E}^X(Y)$.

---

5. *** Soit Y et Z deux v.a. indépendantes, de loi l'équiprobabilité dans $\{-1,1\}$.

(a) Montrer que $X = \mathbb{I}_{[Y+Z=0]}$ est indépendante de Y et de Z. Les v.a. X, Y, Z sont-elles mutuellement indépendantes ?

(b) Déterminer $\mathbb{E}^Y(X)$ et $\mathbb{E}^Z(X)$. Ces v.a. sont-elles indépendantes de Y et Z ?

(c) Déterminer $\mathbb{E}^{(Y,Z)}(X)$. Est-elle indépendante de (Y,Z) ?

(d) Est-il vrai que, lorsqu'une v.a. Z est indépendante de la v.a.r. U et de la v.a. Y, on a p.s. $\mathbb{E}^{(Y,Z)}(U) = \mathbb{E}^{Y}(U)$?

---

6. ** Soit X une v.a. équiprobable dans $\{-1,1\}$ et $Y = X^2$.

(a)Les v.a. X et Y sont-elles indépendantes ? non corrélées ?

(b) Déterminer $\mathbb{E}^{X}(Y)$. Deux v.a.r. liées par une relation fonctionnelle sont-elles toujours dépendantes ?

---

7. ** (a) Déterminer l'espérance et la variance d'une v.a. Y dont la loi est définie par :

$$\forall\ m \in \mathbb{N},\ \ P([Y = m]) = \frac{2}{3^{m+1}}.$$

Si X une v.a. entière dont la loi conditionnelle à $[Y = m]$, pour chaque m de $\mathbb{N}$, est l'équiprobabilité sur $\{m, m+1\}$. Déterminer $\mathbb{E}^{Y}(X)$. En déduire que X admet une espérance que l'on indiquera.

(b) Déterminer la loi conjointe des v.a. X et Y.

(c) Préciser la loi de X, sa variance et l'espérance conditionnelle de Y à X.

(d) Calculer $\operatorname{cov}(X,Y)$ et le coefficient de corrélation linéaire $\rho_{X,Y}$ des v.a. X et Y. Déterminer les droites de régression linéaire de X en Y et de Y en X.

---

8. ** Soit U une indicatrice d'espérance p ($p \in]0,1[$) et X une v.a. à valeurs dans $\mathbb{N}$ (avec $P([X = n]) \neq 0$ pour tout n), ayant un moment d'ordre 2. On suppose U et X indépendantes. On note φ la fonction génératrice de X ($\varphi(s) = \mathbb{E}(s^X)$). Tous les résultats demandés (sauf au (2)) sont à exprimer en fonction de p et φ.

(a) On rappelle que l'on pose par convention : $0^0 = 1$. Calculer $\mathbb{E}\left(0^X\right)$ et $\mathbb{E}\left(X^0\right)$.

(b) Montrer que, pour toute fonction numérique f, on peut écrire : $f \circ U = A\,U + B$, où A et B sont des constantes à préciser en fonction de f.

(c) Calculer $\mathbb{E}^{U}\left(U^X\right)$ et en déduire $\mathbb{E}\left(U^X\right)$, puis calculer $\mathbb{E}^{X}\left(U^X\right)$ et retrouver $\mathbb{E}\left(U^X\right)$.

(d) Calculer $\mathbb{E}^{X}\left(X^U\right)$ et en déduire $\mathbb{E}\left(X^U\right)$, puis calculer $\mathbb{E}^{U}\left(X^U\right)$ et retrouver $\mathbb{E}\left(X^U\right)$.

---

9. * Soit λ_1 et λ_2 deux éléments de $]0,1[$ vérifiant l'inégalité :

$$\lambda_1 + \lambda_2 < 1.$$

On considère un couple (X,Y) de v.a.r. dont la loi est définie par :

$$\forall\ (n,m) \in \mathbb{N}^2 - \{(0,0)\},\ \ P([X = n] \cap [Y = m]) = -\frac{(n+m-1)!}{n!\,m!}\,\frac{\lambda_1^n\,\lambda_2^m}{\ln\,(1-\lambda_1-\lambda_2)}.$$

(a) Calculer $P([X=0])$ et, pour tout n de $\mathbb{N}^*$, $P([X=n])$. Déterminer les lois de X et Y. Préciser les espérances et les variances de ces v.a.

(b) Identifier la loi de Y conditionnelle à l'événement $[X=n]$ (distinguer les cas $n=0$ et $n \in \mathbb{N}^*$). Calculer $\mathbb{E}^{[X=n]}(Y)$. En déduire $\mathbb{E}^X(Y)$. Vérifier, à partir de là, que l'on a :

$$\mathbb{E}(Y) - \frac{\lambda_2}{1-\lambda_2}\mathbb{E}(X) = -\frac{\lambda_2}{(1-\lambda_2)\,\ln\,(1-\lambda_1-\lambda_2)}.$$

Conditionnement continu

---

10. * Soit (X,Y) un couple de v.a.r. définies sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ tel que la loi de X soit donnée par la densité :

$$f_X(x) = \begin{cases} 4x^3 \text{ si } 0 < x < 1, \\ 0 \text{ sinon.} \end{cases}$$

Les lois conditionnelles de Y à X sont définies, pour chaque x de $]0,1[$, par :

$$f_Y^{X=x}(y) = \begin{cases} \frac{2y}{x^2} \text{ si } 0 < y < x, \\ 0 \text{ sinon.} \end{cases}$$

(a) Déterminer la denstité de la loi de Y, puis $\mathbb{E}(Y)$.

(b) Déterminer $\mathbb{E}^X(Y)$ puis retrouver $\mathbb{E}(Y)$.

(c) Calculer $\text{cov}(X,Y)$.

---

11. * On considère un couple (X,Y) de v.a.r. absolument continu de densité :

$$f_{X,Y} : (x,y) \in \mathbb{R}^2 \ \mapsto \ \frac{a^{p+q}}{\Gamma(p)\,\Gamma(q)}\, x^{p-1}\,(y-x)^{q-1}\,\mathrm{e}^{-ay}\,\mathbb{I}_\Delta(x,y),$$

où l'on a posé : $\Delta = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \ ; \ 0 < x < y\}$ et où (p,q) est un couple de réels strictement supérieurs à 1.

(a) Déterminer (et identifier) la loi de X. Préciser l'espérance et la variance de X.

(b) Expliciter (et identifier) les lois conditionnelles de Y à X. Écrire $\mathbb{E}^X(Y)$. En déduire l'espérance de Y. Calculer la variance d'une v.a. ayant pour loi $P_Y^{X=x}$ $(x > 0)$.

(c) Déterminer (et identifier) la loi de Y. Écrire son espérance et sa variance.

(d) Calculer $\mathbb{E}^Y(X)$.

(e) Écrire la matrice des covariances de X et Y. Calculer le coefficient $\rho_{X,Y}$ de corrélation linéaire de X et Y.

(f) Déterminer la droite de régression linéaire de Y en X.

---

12. Soient X, Y et Z trois v.a.r. telles que :

i. X suit la loi uniforme sur $]0,1[$;

ii. $f_Y^{(X=x)}(y) = (y-x)e^{-(y-x)}\ \mathbb{I}_{]x,+\infty[}(y)$;

iii. $f_Z^{(X=x)\cap(Y=y)}(z) = (y-x)e^{-z(y-x)}\ \mathbb{I}_{]0,+\infty[}(z)$ pour $x \in]0,1[$ et $y > x$.

(a) Déterminer la loi conjointe de (X,Y,Z) et la loi de Z.

(b) Déterminer la loi conditionnelle de (X,Y) sachant $(Z=z)$.

(c) Calculer $\mathbb{E}^{(Z=z)}(\sqrt{Y-X})$ puis $\mathbb{E}(\sqrt{Y-X})$.

---

13. Soient $X_1, X_2, \cdots, X_n$ des v.a.r. absolument continues, indépendantes, de même loi de densité f. On pose $X = \max(X_1, X_2, \cdots, X_n)$ et $Y = \min(X_1, X_2, \cdots, X_n)$.

(a) Exprimer en fonction de f la loi conditionnelle de Y sachant $(X=x)$ et $\mathbb{E}^X(Y)$.

(b) Appliquer ce qui précède au cas où les X_i suivent la loi uniforme sur $]0,1[$.

---

14. ** Soit θ un réel donné et $(X_1, \cdots, X_i, \cdots, X_n)$ un n-échantillon de la loi $\mathcal{N}(\theta, 1)$. On note G la fonction de répartition de la loi $\mathcal{N}(0,1)$ et on pose : $\overline{X}_n = \dfrac{1}{n}\displaystyle\sum_{i=1}^{n} X_i$.

(a) Déterminer l'espérance de $Y = \mathbb{I}_{]-\infty,c]}(X_1)$.

(b) Identifier la loi de $\overline{X}_n$.

(c) Montrer que le couple $\left(X_1, \overline{X}_n\right)$ admet pour densité :

$$(x, \overline{x}) \ \mapsto \ \frac{n}{2\pi\sqrt{n-1}} \exp\left(-\frac{n}{2(n-1)}\left[(x-\theta)^2 - 2(x-\theta)(\overline{x}-\theta) + n(\overline{x}-\theta)^2\right]\right).$$

(d) Calculer $\mathbb{E}^{\overline{X}_n}(Y)$. La suite $\left(\mathbb{E}^{\overline{X}_n}(Y)\right)_n$ est-elle convergente ?

---

15. Considérant un n-échantillon $(X_1, ..., X_i, ..., X_n)$ de loi de Poisson $\mathcal{P}(\lambda)$ $(\lambda > 0)$, on pose :

$$U_n = \sum_{i=1}^{n} X_i \ \text{ et } \ T_n = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} \mathbb{I}_{[X_i=0]}.$$

Déterminer $\mathbb{E}^{U_n}\left(\mathbb{I}_{[X_1=0]}\right)$, puis $Z_n = \mathbb{E}^{U_n}(T_n)$. Calculer $\operatorname{var} Z_n$.

Conditionnement pouvant être mixte

---

16. ** Soit (X_n) une suite de v.a.r. indépendantes de même loi avec $\mathbb{E}(X_n) = \mu$ et $V(X_n) = v$ et soit N une v.a.r. entière, indépendante des X_n avec $\mathbb{E}(N) = \nu$ et $V(N) = w$.

On pose $S_k = X_1 + \cdots + X_k$ et on note S_N l'application, qui à ω associe $S_{N(\omega)}(\omega)$.

(a) Montrer que S_N est une v.a.r. et que $\mathbb{E}^{(N=n)}(S_N) = \mathbb{E}(S_n)$.

(b) En déduire l'espérance et la variance de S_N.

---

17. * Soient X une v.a.r. de loi uniforme sur $[0,1]$ et Y une v.a.r. entière telle que, pour tout $x \in [0,1]$, la loi conditionnelle de Y sachant $(X = x)$ soit la loi binomiale $\mathcal{B}(n, x)$.

(a) Déterminer la loi et l'espérance de Y.

(b) Déterminer $\mathbb{E}^{(X=x)}(Y)$, puis $\mathbb{E}^X(Y)$ et retrouver $\mathbb{E}(Y)$.

---

18. *** Soient a et b deux réels strictement positifs et $n \in \mathbb{N}^*$. Soient Y une v.a.r. absolument continue de loi Béta $\beta(a,b)$ et X une v.a.r. entière telle que la loi conditionnelle de X sachant $(Y = y)$ soit la loi binomiale $\mathcal{B}(n, y)$.

(a) Déterminer la loi de X, que l'on appellera loi Béta-binomiale $\beta B(a,b,n)$.

(b) Déterminer $\mathbb{E}^{(Y=y)}(X)$, puis $\mathbb{E}^Y(X)$, puis $\mathbb{E}(X)$. Déterminer également $\mathbb{E}^{(Y=y)}(X^2)$, puis $\mathbb{E}^Y(X^2)$, puis $\mathbb{E}(X^2)$ et $V(X)$.

(c) Soient $N \geq n$, U une v.a.r. de loi Béta-binomiale $\beta B(a,b,N)$ et V une v.a.r. telle que, pour tout $i \in \{0,1,\cdots,N\}$, la loi conditionnelle de V sachant $[U = i]$ soit la loi hypergéométrique $\mathcal{H}(n, i, N-i)$ (définie par $p_j = \frac{C_i^j C_{N-i}^{n-j}}{C_N^n}$).

i. Déterminer $P([U = i] \cap [V = j])$, puis $P([U - V = k] \cap [V = j])$. En déduire que V suit la loi Béta-binomiale $\beta B(a,b,n)$ et que la loi conditionnelle de $U - V$ sachant $[V = j]$ est la loi Béta-binomiale $\beta B(a+j, b+n-j, N-n)$.

ii. Calculer $\mathbb{E}^{[V=j]}(U - V)$ et montrer que $\mathbb{E}^{[V=j]}(U) = \frac{(N-n)a+(N+a+b)j}{a+b+n}$.
