Année Préparatoire

Examen d'Algèbre Linéaire du mardi 21 mars 2017

4 exercices indépendants (Durée : 2 heures)

Exercice I-

Soit E un espace vectoriel de dimension 3, muni d'une base $\mathcal{B}$. Soit l'endomorphisme u de E, défini par sa matrice $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ dans la base $\mathcal{B}$. On considère un endomorphisme f de E vérifiant $f^2 = u$.

1. Déterminer les matrices de f^4 et f^6 dans la base $\mathcal{B}$.

2. Montrer que $\dim(\ker f^2) = 1$ et que f n'est pas bijective.

3. Montrer que $\ker(f) \subset \ker(f^2)$, puis que $\ker(f) = \ker(f^2)$.

4. Établir $\ker(f^k) = \ker(f^{k+1})$ pour tout entier $k \geq 1$.

5. Montrer qu'il y a une contradiction. Conclusion ?

Exercice II-

Soit $A = \begin{pmatrix} 0 & 3/4 & 0 \\ 3/4 & 0 & 1 \\ 1/4 & 1/4 & 0 \end{pmatrix}$.

1. Montrer que A est diagonalisable et trouver ses valeurs propres.

2. Soit $P = \begin{pmatrix} 12 & -1 & -3 \\ 16 & 1 & 1 \\ 7 & 0 & 2 \end{pmatrix}$.

a) Montrer que P est inversible.

b) Sans calculer P^{-1}, montrer que $P^{-1}AP = \operatorname{diag}(1, -3/4, -1/4)$.

3. Soit $\Phi : M \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R}) \mapsto P^{-1}MP \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$.

a) Montrer que Φ est continue et montrer que (A^n) converge. On note Q sa limite.

b) Soit q l'endomorphisme associé à Q. Montrer que q est un projecteur et en donner l'image et le noyau. En déduire Q.

Exercice III-

Soit u l'endomorphisme de $\mathbb{R}^4$ associé à $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

$\mathbb{R}^4$ étant muni de sa structure euclidienne canonique, montrer qu'il existe p et q, projecteurs orthogonaux, et λ et μ réels tels que $u = \lambda p + \mu q$, $p \circ q = 0$ et $id_E = p + q$.

Exercice IV-

On considère le système $Ax = b$ où $A = \begin{pmatrix} \alpha & 0 & \gamma \\ 0 & \alpha & \beta \\ 0 & \delta & \alpha \end{pmatrix}$ et $b = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$, avec α, β, γ et δ des paramètres réels et $\alpha \neq 0$.

1. Écrire la matrice J de Jacobi et la matrice G de Gauss-Siedel.

2. Déterminer le spectre de J et donner une condition sur les paramètres intervenant dans A pour que la méthode de Jacobi converge. Déterminer de même le spectre de G et donner une condition pour que la méthode de Gauss-Siedel converge.

3. Déduire de la question précédente que les méthodes de Jacobi et de Gauss-Siedel sont, soit toutes les deux convergentes, soit toutes les deux divergentes. Dans le cas de convergence, quelle est la méthode qui converge le plus vite ?

4. On prend ici $\alpha = 4$, $\beta = \delta = 1$ et $\gamma = 0$.

a) Donner les 3 premières itérations de Jacobi et de Gauss-Siedel si $x^{(0)} = {}^t(0, 0, 0)$.

b) Calculer les valeurs propres de A et en déduire qu'elle est définie positive. Donner les valeurs de $w \in \mathbb{R}$ pour lesquelles la méthode de relaxation est convergente.