Année Préparatoire

Examen d'Optimisation du mardi 12 juin 2018

---

4 exercices indépendants (durée : 2 heures)

Exercice I- Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}^2$ par $f(x,y) = -x^2y + \frac{1}{2}y^2 + y$.

1. Déterminer les points critiques de f, puis les extrémums locaux de f. Y a-t-il des extrémums globaux ?
2. Déterminer les extrémums globaux de la fonction f sur $K = [0,1]^2$ et déterminer les points où ils sont atteints.

Exercice II- Bastien et Corentin sont enfermés dans une garderie d'enfants à la campagne modélisée par le domaine $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \ ; \ x \geq 1, \ x+y \leq 3, \ (x-1)^2 \leq y\}$.
Un âne les observe depuis le point $A\left(\frac{7}{4}, 0\right)$.
Corentin, craintif, s'éloigne de l'âne autant qu'il peut. Bastien, curieux et amical, s'approche au plus près de l'âne.
On veut déterminer les positions choisies par Bastien et Corentin, ce qui revient à trouver les extrémums de la fonction f définie par $f(x,y) = \left(x - \frac{7}{4}\right)^2 + y^2$ sur D.

1. Représenter D. Justifier pourquoi f admet des extrémums sur D.
2. Écrire avec soin les relations de Kuhn-Tucker.
3. Trouver les extrémums de f et les points en lesquels ils sont atteints.
On utilisera la factorisation $2x^3 - 6x^2 + 7x - \frac{15}{4} = (2x-3)\left(x^2 - \frac{3}{2}x + \frac{5}{4}\right)$.
4. Vérifier sur le dessin.

Exercice III- Un négociant viticole dispose de 2100 litres d'un cépage C1 et de 3000 litres d'un cépage C2. À partir de ces cépages, il peut constituer deux types de vins : le vin V1, constitué uniquement du cépage C1, qu'il vent 40 euros le litre, et le vin V2 qu'il vent 16 euros le litre et qui est constitué de 1/3 du cépage C1 et 2/3 du cépage C2. Il veut déterminer quelles quantités x_1 et x_2 de chaque vin il faut produire pour obtenir un bénéfice maximal.

1. Modéliser ce problème de production. [*Faire un dessin et s'en aider durant tout l'exercice*].
2. Résoudre le problème par la méthode du simplexe.
3. Écrire le programme dual et en donner les valeurs optimales.
4. On reprend le problème initial, mais avec la fonction objectif $z = 40x_1 + px_2$ (p euros au lieu de 16 euros). Déterminer pour quels p les valeurs des variables pour l'optimum restent inchangées.
5. On revient aux prix de vente initiaux, mais le négociant dispose maintenant de q litres du cépage C2 (au lieu de 3000). Étudier l'effet d'un tel changement.

Exercice IV- Résoudre le Programme Linéaire en Nombres Entiers suivant :

$$\left\{\begin{array}{rrcrcl} \max z = & 2x_1 & + & 3x_2 & & \\ s.c. & 4x_1 & + & 12x_2 & \leq & 33 \\ & 10x_1 & + & 4x_2 & \leq & 35 \\ & x_1 & , & x_2 & \in & \mathbb{N} \end{array}\right.$$

On utilisera des résolutions graphiques et on représentera l'arbre correspondant.