Corrigé de l'Examen d'Algèbre Linéaire du mardi 22 mars 2016

Exercice I- [**12 points**]

1. a) On a donc $\boxed{M = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}}$ [*1pt*].

b) La ligne 5 est nulle, donc $\boxed{\det M = 0}$ [*0,5pt*].

c) $M \in \mathcal{M}_6(\mathbb{R})$ et $M \notin GL_6(\mathbb{R})$, donc $\mathrm{rg}(M) < 6$, soit $\boxed{\mathrm{rg}(M) \leq 5}$ [*0,5pt*].

d) On a $\mathrm{im}(f) = \mathrm{vect}(f(e_k),\ 1 \leq k \leq 6)$. Comme $f(e_k) = e_k$ si $k \neq 5$, on a $e_k \in \mathrm{im}(f)$. Comme $E_5 = \mathrm{vect}(e_k, k \neq 5)$, il vient $\boxed{E_5 \subset \mathrm{im}(f)}$ [*0,5pt*].

e) $(e_q)_{1 \leq q \leq 6, q \neq k}$ est libre, en tant que sous-famille d'une famille libre, donc $\boxed{\dim E_k = 5}$, cette famille étant une base de E_k [*0,5pt*].

f) On a $E_5 \subset \mathrm{im}(f)$ et $5 = \dim(E_5) \leq \mathrm{rg}(f) \leq 5$, donc $\mathrm{rg}(f) = 5$ et $\boxed{E_5 = \mathrm{im}(f)}$ par inclusion et égalité des dimensions.
Par la formule du rang, $\dim(\mathbb{R}^6) = \mathrm{rg}(f) + \dim(\ker(f))$, donc $\boxed{\dim(\ker f) = 1}$ [*1pt*].

2. $MX = 0$ équivaut à $\begin{cases} x_1 + x_5 = 0 \\ x_2 - x_5 = 0 \\ x_3 = x_4 = 0 \\ x_5 + x_6 = 0 \end{cases}$, soit à $\begin{cases} x_1 = -x_5 \\ x_2 = x_5 \\ x_3 = x_4 = 0 \\ x_6 = -x_5 \end{cases}$.
Donc $\ker f = \{(-x_5, x_5, 0, 0, x_5, -x_5), x_5 \in \mathbb{R}\}$ et $u = (-1, 1, 0, 0, 1, -1)$ dirige $\ker f$ [*1pt*].

3. a) On a, par blocs,

$$\begin{aligned} \chi_M(\lambda) &= \begin{vmatrix} \lambda-1 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & \lambda-1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda-1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda-1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & \lambda-1 \end{vmatrix} \\ &= \begin{vmatrix} \lambda-1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda-1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda-1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda-1 \end{vmatrix} \times \begin{vmatrix} \lambda & 0 \\ -1 & \lambda-1 \end{vmatrix} \\ &= (\lambda-1)^4[\lambda(\lambda-1)] = \lambda(\lambda-1)^5 \ [\mathit{1pt}] \end{aligned}$$

b) Donc, $\boxed{\mathrm{sp}(M) = \{0, 1\}}$ avec $\boxed{m_1(M) = 5}$ et $\boxed{m_0(M) = 1}$ [*0,5pt*].

c) On a $f(e_q) = e_q$ si $q \neq 5$, donc $E_5 \subset E_1(M)$. Comme $\dim(E_1(M)) \leq m_1(M) = 5$, et $\dim(E_5) = 5$, il vient (comme avec $\mathrm{im}(M)$), $\boxed{E_1(M) = E_5}$. On a $\boxed{E_0(M) = \ker(f)}$ par définition [*0,5pt*].

d) Ainsi, $6 = \dim(E_1(M)) + \dim(E_0(M))$, donc M est diagonalisable et $\boxed{f \text{ est diagonalisable}}$ [*0,5pt*].

Dans la base $\mathcal{C} = (e_1, e_2, e_3, e_4, e_6, u)$, on a $\mathrm{Mat}_{\mathcal{C}}(f) = \mathrm{diag}(1,1,1,1,1,0) = D$ *[0,5pt]*.

4. a) $D^2 = D$, donc $\boxed{f^2 = f}$ et f est le projecteur sur $\mathrm{im}(f) = E_5 = E_1(f)$ parallèlement à $\ker(f) = \mathrm{vect}(u)$ *[1pt]*.
b) $(u|e_1) = -1 \neq 0$, donc f n'est pas un projecteur orthogonal *[0,5pt]*.
c) On a donc $\boxed{M^2 = M}$ *[0,5pt]*.

5. a) $b \in \mathrm{vect}(e_1, e_2, e_3, e_4, e_6) = E_5 = E_1(f)$, donc $\boxed{f(b) = b}$ *[0,5pt]*.
b) $f(x) = b$ équivaut à $f(x) = f(b)$, donc à $f(x-b) = 0$, c'est-à-dire $x - b \in \ker(f) = \mathrm{vect}(u)$. Donc, $\boxed{x = b + \lambda u}$, où $\lambda \in \mathbb{R}$ est quelconque *[0,5pt]*.
c) On a $b + \lambda u = (4+\lambda, 4-\lambda, 4, 1, -\lambda, 3+\lambda)$ donc les coordonnées sont toutes positives ou nulles si, et seulement si, $\lambda \in [-3, 0]$. Si le vecteur est différent de b, $\lambda \in [-3, 0[$ et seule $\boxed{\lambda = -3}$ donne une coordonnée nulle, avec alors $\boxed{b - 3u = c}$ *[1pt]*.

<u>Exercice II-</u> [5 points]
1. a) On a $f(\alpha X + Y) = \alpha X + Y - 2\mathrm{tr}(\alpha X + Y)A = \alpha X + Y - 2(\alpha \mathrm{tr}(X) + \mathrm{tr}(Y))A = \alpha f(X) + f(Y)$ par linéarité de la trace. Donc $\boxed{f \text{ est linéaire}}$ *[0,5pt]*. On a $f(A) = A - 2\mathrm{tr}(A)A = (1 - 2\mathrm{tr}(A))A$ donc $\boxed{f(A) = 0 \text{ si et seulement si } A = 0 \text{ ou } \mathrm{tr}(A) = 1/2}$ *[0,5pt]*.
b) Si $f(X) = 0$, $X - 2(\mathrm{tr}(X))A = 0$, donc, par la trace, $\mathrm{tr}(X)(1 - 2\mathrm{tr}(A)) = 0$ et, comme $\mathrm{tr}(A) \neq 0$, $\mathrm{tr}(X) = 0$, puis $X = 0$. Ainsi, $\boxed{\text{si } \mathrm{tr}(A) \neq 1/2, \text{ alors } \ker(f) = \{0\}}$ *[0,5pt]*.

2. On est en dimension finie ($E = \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, de dimension n^2) donc f est bijective si, et seulement si, $\ker(f) = \{0\}$. On a vu au 1.b) que, si $\mathrm{tr}(A) \neq 1/2$, alors $\ker(f) = \{0\}$. Réciproquement, si $\ker(f) = \{0\}$, $f(A) \neq 0$ car $A \neq 0$, et donc, d'après 1.a) $\boxed{\mathrm{tr}(A) \neq 1/2 \text{ si } \ker(f) = \{0\}}$ *[0,5pt]*.

3. *Analyse.* Si $X = M + \alpha A$ avec $\mathrm{tr}(M) = 0$, on a $\mathrm{tr}(X) = \mathrm{tr}(M) + \alpha \mathrm{tr}(A) = \alpha/2$, donc $\alpha = 2\mathrm{tr}(X)$, puis $M = X - 2\mathrm{tr}(X)A$.
Si elle existe, la décomposition est unique, donc la somme $\ker(\mathrm{tr}) + \mathbb{R}A$ est directe.
Synthèse. Soit, pour $X \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, $M = X - 2\mathrm{tr}(X)A$. On a $\mathrm{tr}(M) = \mathrm{tr}(X) - 2\mathrm{tr}(X)\mathrm{tr}(A) = 0$ et $X = M + 2\mathrm{tr}(X)A$, donc $\mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \subset \ker(\mathrm{tr}) \oplus \mathbb{R}A \subset \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, soit $\mathcal{M}_n(\mathbb{R}) = \ker(\mathrm{tr}) \oplus \mathbb{R}A$. La composante de X sur $\ker(\mathrm{tr})$ est $f(X)$ donc $\boxed{f \text{ est la projection sur } \ker(\mathrm{tr}) \text{ parallèlement à } \mathbb{R}A}$ *[1pt]*.

4. On a $\mathrm{tr}(f(X)) = \mathrm{tr}(X) - 2\mathrm{tr}(X)\mathrm{tr}(A) = -\mathrm{tr}(X)$, donc $f(f(X)) = f(X) - 2\mathrm{tr}(f(X))A = X - 2(\mathrm{tr}(X))A + 2(\mathrm{tr}(X))A = X$, soit $f \circ f = \mathrm{id}$. Donc, f est une symétrie.
- $f(X) = X$ équivaut à $0 = -2(\mathrm{tr}(X))A$, donc $E_1(f) = H$.
- $f(X) = -X$ équivaut à $X = (\mathrm{tr}(X))A$. Si c'est le cas, $X = \alpha A$ et, réciproquement, $f(\alpha A) = \alpha A - 2\alpha(\mathrm{tr}(A))A = -\alpha A$, donc $\boxed{E_{-1}(f) = \mathbb{R}A}$ *[1pt]*.

5. Notons que $f(X) = X$ équivaut encore à $-2(\mathrm{tr}(X))A = 0$, donc $1 \in \mathrm{sp}(f)$ et $E_1(f) = H$.
Si $\lambda \in \mathbb{R} \setminus \{1\}$, alors $f(X) = \lambda X$ équivaut à $(\lambda - 1)X = 2(\mathrm{tr}(X))A$, donc cela implique $X = \alpha A$. Réciproquement, $f(\alpha A) = \alpha A - 2\alpha(\mathrm{tr}(A))A = (1 - 2\mathrm{tr}(A))(\alpha A)$ donc $\lambda = 1 - 2\mathrm{tr}(A)$.
- Si $\mathrm{tr}(A) \neq 0$, f a deux valeurs propres qui sont 1 et $1 - 2\mathrm{tr}(A)$, avec $E_{1-2\mathrm{tr}(A)}(f) = \mathbb{R}A$.

Comme en 3., on a $\mathcal{M}_n(\mathbb{R}) = H \oplus \mathbb{R}A$, la décomposition unique étant $X = \left(X - \frac{\mathrm{tr}(X)}{\mathrm{tr}(A)}A\right) + \frac{\mathrm{tr}(X)}{\mathrm{tr}(A)}A$ avec la même démarche d'analyse synthèse. Donc, $\mathcal{M}_n(\mathbb{R}) = E_1(f) \oplus E_{1-\mathrm{tr}(A)}(f)$ et f est diagonalisable.
- Si $\mathrm{tr}(A) = 0$, $\mathrm{sp}(f) = \{1\}$, mais $E_1(f) \neq \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ (par exemple, $\mathrm{tr}(I_n) \neq 0$), donc f n'est pas diagonalisable.

La condition de diagonalisabilité est donc $\boxed{\mathrm{tr}(A) \neq 0}$ *[1pt]*.

__Exercice III-__ [8 points]

1. On remarque, de manière évidente, que $\boxed{x = {}^t(1,1,1) \text{ est la solution du système}}$ [*1pt*].

2. a) La matrice $\boxed{A \text{ est à diagonale strictement dominante}}$ donc les méthodes de Jacobi et de Gauss-Siedel sont convergentes [*0,5pt*].

b) On obtient immédiatement $\boxed{J = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1/3 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1/3 & 0 & 0 \end{pmatrix}}$ [*0,5pt*]. De plus,

$$\det(\lambda D - (E+F)) = \begin{vmatrix} 3\lambda & 0 & -1 \\ 0 & 2\lambda & 0 \\ -1 & 0 & 3\lambda \end{vmatrix} = 2\lambda(9\lambda^2 - 1) = 2\lambda(3\lambda - 1)(3\lambda + 1)$$

donc $\mathrm{sp}(J) = \{0; -1/3; 1/3\}$ et $\boxed{\rho(J) = \frac{1}{3}}$.

On a $G = (D-E)^{-1}F$ et, pour déterminer $(D-E)^{-1}$, on résout le système $(D-E)X = X'$, soit $\begin{cases} 3x = x' \\ 2y = y' \\ -x + 3z = z' \end{cases}$, donc $\begin{cases} x = x'/3 \\ y = y'/2 \\ z = x'/9 + z'/3 \end{cases}$, d'où $G = \begin{pmatrix} 1/3 & 0 & 0 \\ 0 & 1/2 & 0 \\ 1/9 & 0 & 1/3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, soit $\boxed{G = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1/3 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1/9 \end{pmatrix}}$ [*1pt*]. De plus,

$$\det(\lambda(D-E) - F) = \begin{vmatrix} 3\lambda & 0 & -1 \\ 0 & 2\lambda & 0 \\ -\lambda & 0 & 3\lambda \end{vmatrix} = 2\lambda(9\lambda^2 - \lambda) = 2\lambda^2(9\lambda - 1)$$

donc $\mathrm{sp}(G) = \{0; 1/9\}$ et $\boxed{\rho(G) = \frac{1}{9}}$. Les deux méthodes convergent car $\rho(J) < 1$ et $\rho(G) < 1$, mais la méthode de Gauss-Siedel converge plus vite, car $\rho(G) < \rho(J)$ [*0,5pt*].

c) Pour la méthode de Jacobi, on a $\begin{cases} x_1^{(k+1)} = x_3^{(k)}/3 + 2/3 \\ x_2^{(k+1)} = 1 \\ x_3^{(k+1)} = x_1^{(k)}/3 + 2/3 \end{cases}$.

Ainsi, $\boxed{x^{(1)} = {}^t(2/3, 1, 2/3),\ x^{(2)} = {}^t(8/9, 1, 8/9) \text{ et } x^{(3)} = {}^t(26/27, 1, 26/27)}$ [*0,5pt*].

Pour la méthode de Gauss-Siedel, on a $\begin{cases} x_1^{(k+1)} = x_3^{(k)}/3 + 2/3 \\ x_2^{(k+1)} = 1 \\ x_3^{(k+1)} = x_1^{(k)}/9 + 8/9 \end{cases}$.

Ainsi, $\boxed{x^{(1)} = {}^t(2/3, 1, 8/9),\ x^{(2)} = {}^t(26/27, 1, 80/81) \text{ et } x^{(3)} = {}^t(242/243, 1, 728/729)}$ [*0,5pt*].

3. $\det(A - \lambda I_3) = \begin{vmatrix} 3-\lambda & 0 & -1 \\ 0 & 2-\lambda & 0 \\ -1 & 0 & 3-\lambda \end{vmatrix} = (2-\lambda)((3-\lambda)^2 - 1) = (2-\lambda)^2(4-\lambda)$. On a donc $\boxed{\mathrm{sp}(A) = \{2, 4\}}$. Les valeurs propres de A étant toutes > 0, A est définie positive [*1,5pt*]. De plus, elle est aussi symétrique donc, d'après le cours, la méthode de relaxation est convergente pour $\boxed{\omega \in]0, 2[}$ [*0,5pt*].

4. a) La méthode itérative considérée ici a pour matrice $B = I_3 - rA$ dont les valeurs propres sont, d'après la question précédente, $1 - 2r$ et $1 - 4r$. La méthode est convergente si, et seulement si $\rho(B) < 1$, c'est-à-dire $\max(|1-2r|, |1-4r|) < 1$.

• Pour $r < 1/4$, $|1-4r| = 1-4r$ et $|1-2r| \leq |1-4r|$ équivaut à $4r-1 \leq 1-2r \leq 1-4r$, soit $6r \leq 2$ (vérifié ici) et $2r \leq 0$, c'est-à-dire $r \leq 0$ et alors $\rho(B) = 1-4r \geq 1$; sinon, pour $0 < r < 1/4$, $\rho(B) = |1-2r| = 1-2r < 1$.

• Pour $r \geq 1/4$, $|1-4r| = 4r-1$ et $|1-2r| \leq |1-4r|$ équivaut à $1-4r \leq 1-2r \leq 4r-1$, soit $6r \geq 2$ et $2r \geq 0$ (vérifié ici), soit $r \geq 1/3$ et alors $\rho(B) = 4r-1 < 1$ si $r < 1/2$; sinon, pour $1/4 \leq r < 1/3$, $\rho(B) = |1-2r| = 1-2r < 1$.

Finalement, $\boxed{\text{la méthode est convergente pour } r \in]0, 1/2[}$ avec $\rho(B) = 1-2r$ pour $0 < r \leq 1/3$ et $\rho(B) = 4r-1$ si $1/3 \leq r < 1/2$. La fonction $r \mapsto \rho(B)$ est donc décroissante sur $]0; 1/3]$ et croissante sur $[1/3; 1/2[$, donc le rayon spectral est minimum pour $r = 1/3$ et donc $\boxed{\text{la méthode converge le plus vite pour } r^* = 1/3}$ [*1pt*].

b) On a ici $I_3 - rA = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1/3 \\ 0 & 1/3 & 0 \\ 1/3 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ et donc $\begin{cases} x_1^{(k+1)} = 1/3 x_3^{(k)} + 2/3 \\ x_2^{(k+1)} = 1/3 x_2^{(k)} + 2/3 \\ x_3^{(k+1)} = 1/3 x_1^{(k)} + 2/3 \end{cases}$. Cette suite est convergente puisque $1/3 \in]0, 1/2[$ et la limite de cette suite est la solution de $Ax = b$, soit $\boxed{\lim_{k \to +\infty} x^{(k)} = {}^t(1,1,1)}$ [*0,5pt*].

c) On a ici $I_3 - rA = \begin{pmatrix} -1/2 & 0 & 1/2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1/2 & 0 & -1/2 \end{pmatrix}$ et donc $\begin{cases} x_1^{(k+1)} = 1/2(-x_1^{(k)} + x_3^{(k)}) + 1 \\ x_2^{(k+1)} = 1 \\ x_3^{(k+1)} = 1/2(x_1^{(k)} - x_3^{(k)}) + 1 \end{cases}$.
Ainsi, $x^{(1)} = {}^t(1,1,1)$, $x^{(2)} = {}^t(1,1,1)$ et $x^{(3)} = {}^t(1,1,1)$. On peut ainsi montrer par récurrence que, $x^{(k)} = {}^t(1,1,1)$ et on a aussi ici $\boxed{\lim_{k \to +\infty} x^{(k)} = {}^t(1,1,1)}$ [*0,5pt*].

Remarque : Ceci n'est pas contradictoire car pour que la méthode converge, il faut qu'il y ait une limite pour tout x_0, ce qui ne serait pas le cas ici. Par exemple, avec $x^{(0)} = {}^t(2,1,0)$, on a $x^{(2k)} = {}^t(2,1,0)$ et $x^{(2k+1)} = {}^t(0,1,2)$ et la suite ne converge pas.