Table des matières

Chapitre 1

Programmation linéaire

1.1 Généralités sur la programmation linéaire

L'optimisation est une branche à part entière des mathématiques. Son application à l'économie est récente (c'est dans les années 30-40 que l'économiste soviétique Kantorovich a introduit la première fois les modèles linéaires pour la planification et l'optimisation de la production). Elle offre des possibilités de modélisation et un ensemble de méthodes permettant d'aboutir à des solutions cohérentes des modèles. Le champ actuel des applications de l'optimisation à l'économie est très vaste. Un domaine important concerne la gestion et l'utilisation des ressources rares pour accroître la productivité. Ces méthodes incluent des problèmes opérationnels tels que la distribution de biens, l'ordonnancement de la production, la sélection de portefeuilles, la conception et l'analyse de réseaux de transport.

Dans le cas d'un problème général d'optimisation sous contraintes, il n'existe **aucune méthode générale de résolution !**
Par contre, pour un programme linéaire quelconque, il existe des méthode de résolution générales et efficaces, aussi bien en théorie qu'en pratique (il existe de nombreux logiciels de résolution, par exemple Excel, Mathematica, mais aussi CPLEX, LP-Solve, Eclipse,...)

Soit un phénomène économique y, résultant de plusieurs effets élémentaires :

$$e_1, e_2, \cdots, e_n.$$

Si l'on suppose que les effets élémentaires considérés sont additifs, on a :

$$y = e_1 + e_2 + \cdots + e_n.$$

Par exemple, y pourrait représenter une quantité de produit, qui est fabriqué dans n ateliers.
Si l'on suppose, en outre, que chacun des effets élémentaires est proportionnel à sa cause x_i, on peut écrire :

$$y = a_1x_1 + a_2x_2 + \cdots + a_nx_n \tag{1}$$

$a_1, a_2, \cdots, a_n$ étant les coefficients de proportionnalité.

Pour l'exemple ci-dessus, e_i représenterait la quantité fabriquée dans un atelier i, qui, elle même, est proportionnelle au temps de fabrication x_i (a_i étant une vitesse de fabrication) : $e_i = a_ix_i$.

L'égalité (1) est du premier degré par rapport aux variables $x_1, x_2, \cdots, x_n$: on dit encore qu'elle est une fonction ***linéaire*** de ces variables.

Il arrive, dans beaucoup de problèmes, que les effets soient tous proportionnels aux causes (au moins de façon suffisamment approchée) ; le problème peut alors se décrire uniquement au moyen d'équations linéaires :

$$\begin{array}{rcl} y_1 & = & a_{1,1}x_1 + a_{1,2}x_2 + \cdots + a_{1,n}x_n \\ & \vdots & \\ y_m & = & a_{m,1}x_1 + a_{m,2}x_2 + \cdots + a_{m,n}x_n \end{array}$$

En limitant supérieurement ou inférieurement les m premiers effets $y_1 \leq b_1$ ou $y_1 \geq b_1$; $y_2 \leq b_2$ ou $y_2 \geq b_2$, $\cdots$, $y_m \leq b_m$ ou $y_m \geq b_m$, c'est-à-dire en écrivant m ***contraintes***, on permet l'optimisation de la fonction économique du problème, lorsque celle-ci est elle-même linéaire et peut s'écrire

$$z = c_1x_1 + c_2x_2 + \cdots + c_nx_n.$$

Les m contraintes, si elles sont compatibles, délimitent dans un espace à n dimensions (autant que de variables) un hypervolume convexe à l'intérieur ou à la périphérie duquel se trouve(nt) le (ou les) point(s) dont les coordonnées $(x_1, x_2, \cdots, x_n)$ satisfont aux contraintes. En outre, $x_1, x_2, \cdots, x_n$ sont positives ou nulles.

La programmation linéaire a pour objet de résoudre le problème d'optimisation qui consiste à maximiser une fonction linéaire (la "fonction économique") dans le domaine ainsi défini.

1.2 Exemple de programme linéaire

1.2.1 Énoncé d'un problème de production

Une entreprise peut fabriquer, sur une machine donnée, travaillant 45 heures par semaine, 3 produits différents P_1, P_2 et P_3. Cette machine peut fabriquer un seul type de produits à la fois : ses temps de réglage sont négligeables. Une unité du produit P_1 laisse un profit net de 4 euros, une de P_2, un profit de 12 euros, et enfin, pour P_3, de 3 euros. Les rendements de la machine sont, respectivement pour les 3 produits, et dans le même ordre : 50, 25 et 75 unités par heures. On sait d'autre part, grâce à une étude de marché, que les possibilités de vente ne dépassent pas 1000 unités de P_1, 500 unités de P_2 et 1500 unités de P_3 par semaine. On se pose le problème de répartir la capacité de production entre les 3 produits, de manière à maximiser le profit hebdomadaire.

1.2.2 Modélisation du problème

On appelle x_1, x_2 et x_3 les quantités respectives (inconnues) des produits P_1, P_2 et P_3 que l'on doit fabriquer pour obtenir le profit maximal. Les quantités des produits P_1, P_2 et P_3 ne doivent pas dépasser, respectivement 1000, 500 et 1500 par semaine. On peut donc écrire :

1) $x_1 \leq 1000$
2) $x_2 \leq 500$
3) $x_3 \leq 1500$.

D'autre part, le temps employé pour produire x_1 unités de P_1 est en heures $x_1 \times \dfrac{1}{50}$: celui qui correspond à la fabrication de x_2 unités de P_2 est : $x_2 \times \dfrac{1}{25}$; enfin, pour confectionner x_3 unités de P_3, il faudra $x_3 \times \dfrac{1}{75}$ heures. Or, la somme des temps de fabrication ne doit pas dépasser 45 heures, disponibilité totale de la machine. On aura donc :

$$\frac{1}{50}x_1 + \frac{1}{25}x_2 + \frac{1}{75}x_3 \leq 45$$

ou encore, en multipliant les deux membres de cette inégalité par le dénominateur commun 150 :

4) $3x_1 + 6x_2 + 2x_3 \leq 6750.$

Les inégalités 1), 2), 3) et 4) sont les contraintes exprimées par l'énoncé ; les variables x_1, x_2, x_3 y figurent au premier degré : ces contraintes sont pour cela appelées linéaires.

En réalité, il y a encore dans l'énoncé, trois contraintes cachées ; les quantités x_1, x_2 et x_3 ont un sens physique précis : ce sont des nombres d'unités de produits dont la fabrication est envisagée ; elles ne peuvent donc qu'être positives ou nulles ou, comme on dit, ***non négatives***. On écrira :
5) $x_1 \geq 0$;
6) $x_2 \geq 0$;
7 $x_3 \geq 0$.

Il reste enfin à exprimer l'objectif du problème, qui est de choisir x_1, x_2 et x_3 de manière à ce que le profit hebdomadaire soit maximal. Le profit (en euros) n'étant autre que :

$$4x_1 + 12x_2 + 3x_3,$$

cette exigence pourra être notée :

8) $[\max] z = 4x_1 + 12x_2 + 3x_3.$

La fonction z, appelée ***foncion économique***, est encore une fonction linéaire.

1.2.3 Raisonnement économique

Un raisonnement purement économique suffit ici, à résoudre la question. En effet, les rendements horaires peuvent aussi être exprimés en unités monétaires ; ils ont respectivement, pour les objets P_1, P_2 et P_3 : 4 euros $\times 50 = 200$ euros/h, 12 euros $\times 25 = 300$ euros/h ; 3 euros $\times 75 = 225$ euros/h. Il apparaît donc que, si l'on désire maximiser le profit, il faut fabriquer d'abord la plus grande quantité possible du produit P_2, puisqu'il fournit le profit horaire le plus élevé ; s'il reste du temps, on fabriquera ensuite des unités P_3, dont le rendement monétaire vient au second rang ; en dernier lieu, si on n'a pas épuisé le temps de production (45h), il faudra produire des unités de P_1.

En fait, ce raisonnement s'appuie sur le fait que, si l'on voulait fabriquer les quantités maximales de tous les objets, on devrait faire fonctionner la machine pendant 60 heures. Comme on dispose de 45 heures seulement, il est indispensable de les employer au mieux.

Il n'est pas difficile de voir que la solution consiste à fabriquer toutes les unités P_2, ce qui occupe la machine pendant 20 heures, puis toutes les unités de P_3, ce qui occupe encore la machine pendant 20 heures ; finalement, il ne reste plus que 5 heures pour fabriquer des unités de P_1, ce qui correspond à une quantité de $5 \times 50 = 250$ unités de P_1. Le résultat s'établit donc ainsi :

$$\text{unités de } P_1 : 250\,;\ \text{unités de } P_2 : 500\,;\ \text{unités de } P_3 : 1500\,;$$

$$\text{profit total} : (250 \times 4) + (500 \times 12) + (1500 \times 3) = 11\,500 \text{ euros/semaine.}$$

Mais la méthode utilisée ici ne s'applique que dans quelques cas particuliers alors que le but ce cours est d'introduire un algorithme permettant la résolution générale des programmes linéaires.

1.3 Premières définitions

• Un problème de ***programmation linéaire*** correspond à la minimisation (ou la maximisation) d'une fonction linéaire

$$z : x \in \mathbb{R}^n \mapsto z(x) = \sum_{i=1}^{n} c_i x_i = {}^t c.x$$

où $c = (c_i)$ est un vecteur donné de $\mathbb{R}^n$, lorsque le vecteur x décrit un ensemble de la forme

$$\mathcal{D} = \{x \in \mathbb{R}^n \ ;\ \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \leq b_i,\ 1 \leq i \leq m\} = \{x \in \mathbb{R}^n \ ;\ Ax \leq b\}$$

où $A = (a_{ij})$ est une matrice donnée de taille $m \times n$, et $b = (b_i)$ est un vecteur de $\mathbb{R}^m$.

• Les x_i, composantes du vecteur x sont appelées ***variables*** de décision du problème.

• Les inéquations $\displaystyle\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \leq b_i$ pour $1 \leq i \leq m$ sont appelées ***contraintes*** du problème.

• Un vecteur $x = (x_i)_{1 \leq i \leq n}$ satisfaisant toutes les contraintes est dit ***solution réalisable*** ou ***admissible***.

• L'ensemble des solutions réalisables $\mathcal{D}$ est appelé ***domaine admissible*** (ou région admissible).

1.4 Différentes formes de programmes linéaires

Selon le type de question étudiée, on sera amené à distinguer différentes formes d'un problème de programmation linéaire :

→ on peut avoir à minimiser ou à maximiser la fonction économique z ;

→ les b_i peuvent être tous non négatifs ou bien de signe quelconque ;

→ les variables x_i doivent être toutes non négatives ou pas ;

$\rightarrow$ les contraintes peuvent être des inéquations ou des équations.

• Un programme linéaire et dit ***sous forme canonique*** (FC) s'il est du type :

$$\begin{cases} c_1x_1 & + & \cdots & + & c_nx_n & = & z[\max] \\ a_{i,1}x_1 & + & \cdots & + & a_{i,n}x_n & \leq & b_i \ ; \ 1 \leq i \leq m, \ b_i \geq 0 \\ x_1 & , & \cdots & , & x_n & \geq & 0 \end{cases}$$

Les contraintes du type $x_j \geq 0$ sont dites ***contraintes implicites***.
Les contraintes du type $\sum\limits_{1 \leq j \leq n} a_{i,j}x_j \leq b_i$ sont dites ***contraintes explicites***.

• Un programme linéaire et dit ***sous forme standard*** (FS) s'il est du type :

$$\begin{cases} c_1x_1 & + & \cdots & + & c_nx_n & = & z[\max] \\ a_{i,1}x_1 & + & \cdots & + & a_{i,n}x_n & = & b_i \ ; \ 1 \leq i \leq m, \ b_i \geq 0 \\ x_1 & , & \cdots & , & x_n & \geq & 0 \end{cases}$$

On considère aussi les problèmes suivants :

$$(P) \begin{cases} c_1x_1 & + & \cdots & + & c_nx_n & = & z[\max] \\ a_{i,1}x_1 & + & \cdots & + & a_{i,n}x_n & \leq & b_i \ ; \ 1 \leq i \leq m \\ x_1 & , & \cdots & , & x_n & \in & \mathbb{R} \end{cases}$$

(contrairement à la forme canonique, ici, les x_j et les b_i ne sont pas nécessairement positifs)

$$(P') \begin{cases} c_1x_1 & + & \cdots & + & c_nx_n & = & z[\max] \\ a_{i,1}x_1 & + & \cdots & + & a_{i,n}x_n & \leq & b_i \ ; \ 1 \leq i \leq m \\ x_1 & , & \cdots & , & x_n & \geq & 0 \end{cases}$$

(contrairement à la forme canonique, ici, les b_i ne sont pas nécessairement positifs)

$$(P'') \begin{cases} c_1x_1 & + & \cdots & + & c_nx_n & = & z[\max] \\ a_{i,1}x_1 & + & \cdots & + & a_{i,n}x_n & = & b_i \ ; \ 1 \leq i \leq m \\ x_1 & , & \cdots & , & x_n & \geq & 0 \end{cases}$$

(contrairement à la forme standard, ici les b_i ne sont pas nécessairemet positifs).

1.4.1 Liens entre les différentes formes

Proposition : Les trois formes de programmes linéaires (P), (P') et (P''), ainsi que la forme standard sont équivalentes, au sens suivant : partant d'un problème posé sous l'une des formes, on peut toujours lui faire correspondre un problème posé sous l'une quelconque des autres formes. Un problème sous forme canonique peut aussi se mettre sous forme standard.

Démonstration. • Équivalence de (FS) et de (P'') :
Un programme sous forme standard est clairement un cas particulier de (P'').
Maintenant, si on a un programe sous forme (P''), on multiple par (-1) les équations pour lesquelles $b_i < 0$, qui deviennent alors :

$$(-a_{i,1})x_1 + \cdots + (-a_{i,n})x_n = -b_i.$$

avec $-b_i > 0$. La fonction économique reste identique.

• Équivalence de (P'') et de (P') :
On remarque tout d'abord que $y = b$ équivaut à $[y \leq b$ et $y \geq b]$ soit aussi à $[y \leq b$ et $-y \leq -b]$ donc, étant donné un problème posé sous la forme (P''), on lui associe un problème posé sous la forme (P'), avec $2m$ contraintes, en transformant l'équation

$$a_{i,1}x_1 + \cdots + a_{i,n}x_n = b_i$$

en deux inéquations

$$\left\{ \begin{array}{ccccccc} a_{i,1}x_1 & + & \cdots & + & a_{i,n}x_n & \leq & b_i \\ (-a_{i,1})x_1 & + & \cdots & + & (-a_{i,n})x_n & \leq & -b_i \end{array} \right.$$

La fonction économique reste inchangée.
Pour la réciproque, on pose $x_{\bar{i}} = b_i - \sum_j a_{i,j}x_j \geq 0$.
La contrainte $\sum_j a_{i,j}x_j \leq b_i$ devient $\sum_j a_{i,j}x_j + x_{\bar{i}} = b_i$ et la fonction économique est inchangée.

• Équivalence de (P') et de (P) :
Un programme sous la forme (P') est clairement un cas particulier de (P).
Maintenant, si on a un programe sous forme (P), on pose $x_i^+ = \max(x_i, 0) \geq 0$ et $x_i^- = \max(-x_i, 0) \geq 0$. On a alors $x_i = x_i^+ - x_i^-$ et ainsi, à un problème posé sous la forme (P), on associe un problème de la forme (P'), avec $2n$ variables et m contraintes :

$$\left\{ \begin{array}{ccccccccccccc} c_1x_1^+ & + & \cdots & + & c_nx_n^+ & - & c_1x_1^- & - & \cdots & - & c_nx_n^- & = & z[\max] \\ a_{i,1}x_1^+ & + & \cdots & + & a_{i,n}x_n^+ & - & a_{i,1}x_1^- & - & \cdots & - & a_{i,n}x_n^- & \leq & b_i,\ 1 \leq i \leq m\ ; \\ x_1^+ & , & \cdots & , & x_n^+ & , & x_1^- & , & \cdots & , & x_n^- & \geq & 0 \end{array} \right.$$

• Passage de (FC) à (FS) :
Étant donné un problème sous la forme canonique, on lui associe un problème de la forme standard, avec $n+m$ variables, en introduisant m variables non négatives $x_{\bar{i}}$ définies par

$$x_{\bar{i}} = b_i - (a_{i,1}x_1 + \cdots + a_{i,n}x_n)$$

L'équation $\sum_j a_{i,j}x_j \leq b_i$ devient $\sum_j a_{i,j}x_j + x_{\bar{i}} = b_i$.
La fonction économique reste identique. □

Remarque. Il n'est pas toujours possible de passer de (FS) à (FC) à cause du signe des b_i. On verra au chapitre suivant comment remédier à ce problème.

1.4.2 Minimiser la fonction économique

Supposons que le programme soit du type :

$$\left\{ \begin{array}{ccccccc} c_1x_1 & + & \cdots & + & c_nx_n & = & z[\min] \\ a_{i,1}x_1 & + & \cdots & + & a_{i,n}x_n & \leq & b_i\ ;\ 1 \leq i \leq m \\ x_1 & , & \cdots & , & x_n & \geq & 0 \end{array} \right.$$

On cherche donc ici à minimiser la fonction linéaire $x \mapsto c_1x_1 + \cdots + c_nx_n$ dans l'ensemble des solutions réalisables. Or minimiser la fonction $x \mapsto c_1x_1 + \cdots + c_nx_n$ revient à maximiser la fonction linéaire $x \mapsto -c_1x_1 - \cdots - c_nx_n$ avec $\min z(x) = -\max(-z(x))$. Le programme est donc équivalent au programme canonique :

$$\left\{\begin{array}{ccccccl} -c_1x_1 & - & \cdots & - & c_nx_n & = & -z[\max] \\ a_{i,1}x_1 & + & \cdots & + & a_{i,n}x_n & \leq & b_i \ ; \ 1 \leq i \leq m \\ x_1 & , & \cdots & , & x_n & \geq & 0 \end{array}\right.$$

1.5 Approche géométrique de la programmation linéaire

1.5.1 Rappel de quelques définitions

Un ***vecteur*** de $\mathbb{R}^n$ est un n-uplet de réels.

Un ***sous-espace vectoriel*** de $\mathbb{R}^n$ est un sous-ensemble de $\mathbb{R}^n$ stable par addition et multiplication par un réel.

Une ***base*** d'un sous-espace vectoriel V de $\mathbb{R}^n$ est un ensemble fini de vecteurs $e_1, \cdots, e_p$ tel que :

i) tout vecteur $v \in V$ est combinaison linéaire des e_i ;

ii) une combinaison linéaire des e_i est nulle si et seulement si ses coefficients sont nuls.

On dit alors que V est de dimension p.

Un ***espace affine*** est un ensemble $\{u = u_0 + v \ ; \ v \in V\}$ avec u_0 un point particulier de $\mathbb{R}^n$ et V un sous-espace vectoriel V. La dimension de l'espace affine est celle du sous-espace vectoriel V.

Un ***hyperplan*** H est un sous-espace affine de dimension $n-1$ et se décrit par une équation

$$a_1x_1 + \cdots + a_nx_n = K.$$

Un ***demi-espace fermé*** délimité par H est défini par

$$a_1x_1 + \cdots + a_nx_n \geq K \text{ ou } a_1x_1 + \cdots + a_nx_n \leq K.$$

Un ***polyèdre*** est une intersection de demi-espaces fermés.

Un ***polytope*** est un polyèdre borné. C'est donc un compact (fermé, borné).

Avant d'énoncer quelques résultats géométriques généraux, on va traiter deux programmes linéaires particuliers, dans le cas de $n = 2$ variables, puis dans le cas de $n = 3$ variables.

1.5.2 Illustration géométrique pour $n = 2$ variables

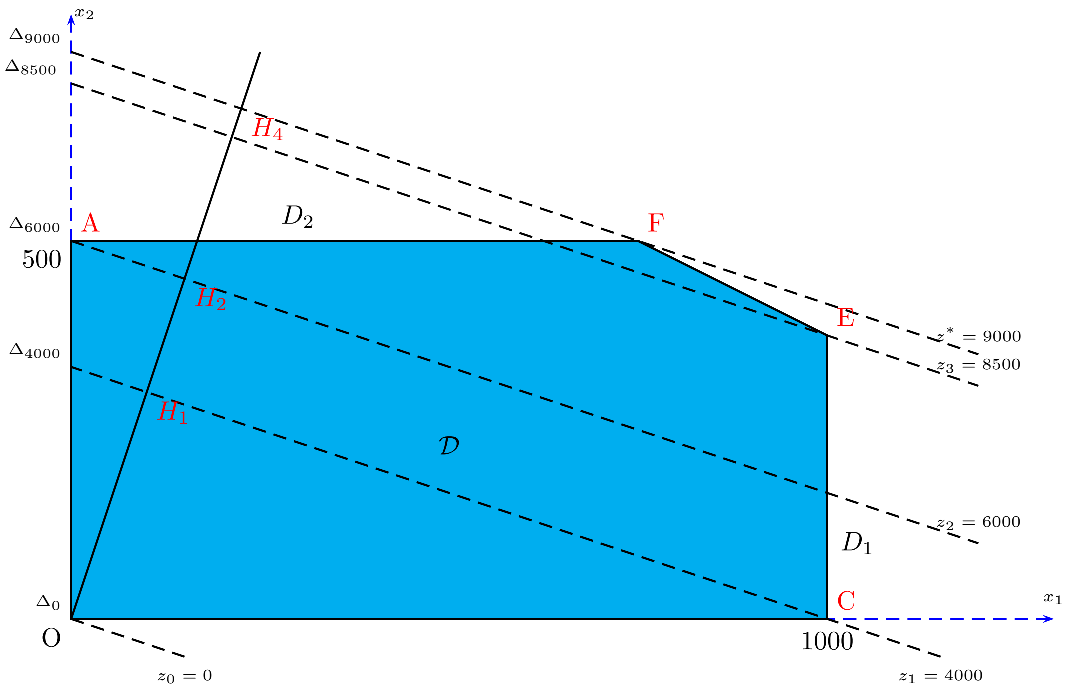
On commence par examiner un sous-problème de l'exemple de la section 1.2.1. Supposons que l'entreprise ait éliminé le produit P_3 de sa gamme et ait réduit l'activité de l'atelier à 35 heures par semaine. Le problème devient :

$$\left\{\begin{array}{ccccl} 4x_1 & + & 12x_2 & = & z[\max] \\ \dfrac{1}{50}x_1 & + & \dfrac{1}{25}x_2 & \leq & 35 \\ x_1 & & & \leq & 1000 \\ & & x_2 & \leq & 500 \\ x_1 & , & x_2 & \geq & 0 \end{array}\right. \quad \text{soit} \quad \left\{\begin{array}{ccccl} 4x_1 & + & 12x_2 & = & z[\max] \\ x_1 & + & 2x_2 & \leq & 1750 \\ x_1 & & & \leq & 1000 \\ & & x_2 & \leq & 500 \\ x_1 & , & x_2 & \geq & 0 \end{array}\right.$$

On n'a ici que deux variables et il est facile de représenter le problème dans l'espace à deux dimensions (le plan) dont les axes porteront les quantités x_1 et x_2. Toute solution du problème est représentée par un point du plan, de coordonnées x_1 et x_2. Les contraintes $x_1 \geq 0$ et $x_2 \geq 0$ font que l'on peut se contenter du premier quadrant du plan.

Les contraintes sont aisées à représenter. Ainsi, la contrainte $x_1 \leq 1000$ signifie que dans le quadrant positif, les points dont la coordonnée x_1 excède 1000 sont exclus du domaine des solutions. Or $x_1 = 1000$ représente une droite D_1 verticale, orthogonale à l'axe Ox_1 au point $x_1 = 1000$: à toutes les solutions respectant cette contrainte, sont associés des points compris entre D_1 et l'axe Ox_2 (et au dessus de l'axe Ox_1).

On raisonnerait de même pour la contrainte $x_2 \leq 500$ (la droite D_2 horizontale, a pour équation $x_2 = 500$).



Si le problème ne comportait que les contraintes $0 \leq x_1 \leq 1000$ et $0 \leq x_2 \leq 500$, le domaine "admissible" c'est-à-dire le domaine des points associés aux solutions vérifiant ces contraintes, serait le rectangle $OABC$ avec $A(0; 500)$, $B(1000; 500)$ et $C(1000; 0)$. Mais $x_1 + 2x_2 = 1750$ est aussi l'équation d'une droite D_3 dont l'intersection avec la droite D_1 est le point E ($x_1 = 1000$, $x_2 = 375$) et l'intersection avec D_2 est le point F ($x_1 = 750$, $x_2 = 500$). Le domaine des solutions admissibles $\mathcal{D}$ de ce problème est donc le polytope convexe $OAFEC$, à la frontière ou à l'intérieur duquel se trouvent les points associés à ces solutions admissibles.

Jusqu'à présent, on ne s'est occupé que des contraintes ; pour choisir parmi les solutions admissibles une solution qui soit optimale, on doit chercher à maximiser la fonction $z = 4x_1 + 12x_2$.

L'ensemble (ou "lieu") des points tels que $z = 0$, est la droite Δ_0 d'équation $x_2 = -\dfrac{1}{3}x_1$; elle n'a qu'un seul point commun avec le domaine admissible : c'est le point O (production nulle et donc bénéfice nul !). Le lieu des points tels que $z = 4000$ est la droite Δ_{4000} parallèle à Δ_0 et passant par le point C ($x_1 = 1000$, $x_2 = 0$).

Pour une valeur donnée arbitrairement à la fonction économique, soit $z = \alpha$, on peut montrer que la distance de l'origine à la droite Δ_α est $\overline{OH} = \dfrac{\alpha}{\sqrt{4^2 + 12^2}}$.

Ainsi, la valeur α de la fonction économique est-elle proportionnelle à $\overline{OH}$. Dès lors, pour maximiser z, il suffira de tracer une droite parallèle à Δ_0 dont la distance à l'origine soit la plus grande possible, et qui ait encore au moins en commun avec le polytope $\mathcal{D}$ des solutions admissibles.

Il est facile de voir graphiquement que cette droite est obtenue pour $\alpha = 9000$; cette droite a un seul point en commun avec le polytope ; c'est le point F. D'où la solution optimale :

$$\boxed{x_1^* = 750,\ x_2^* = 500 \text{ et } z^* = 9000 \text{ euros}}$$

Cette méthode géométrique permet de résoudre tous les programmes linéaires à deux variables ; en résumé, elle consiste à écarter la droite de fonction économique passant par le point initial évident (ici O), parallèlement à elle-même, tant que l'intersection de la droite courante avec le polytope $\mathcal{D}$ des solutions admissibles n'est pas vide. La résolution s'arrête lorsque la droite courante n'a plus qu'un seul point de contact (ou une arête de contact) avec ce polytope (on a évidemment supposé que $\mathcal{D}$ n'est pas vide).

1.5.3 Illustration géométrique pour $n = 3$ variables

Rien ne nous empêche ici de recourir encore à la méthode géométrique puisqu'on n'a que trois variables et qu'il est possible de représenter en clair les trois axes (orthonormés) qui porteront les quantités x_1, x_2 et x_3.

A priori, toute solution du problème est représentée par un point de l'espace, de coordonnées x_1, x_2 et x_3. On se reporte à la formulation du problème initial de la section 1.2.1.

Les contraintes 5), 6) et 7) signifient d'ailleurs que l'on peut se contenter de représenter l'octant positif de ce système de coordonnées, puisque l'on a :

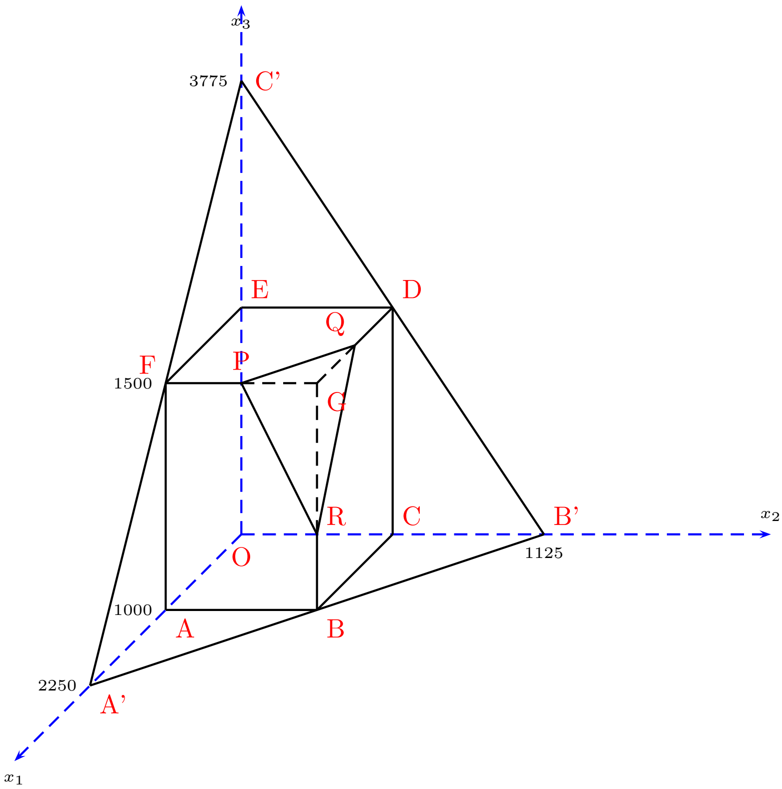
$$x_1 \geq 0,\ \ x_2 \geq 0 \text{ et } x_3 \geq 0.$$

On va voir que les contraintes 1) à 4) s'interprètent également d'une manière très aisée. Par exemple, la contrainte 1) signifie que, dans l'octant positif, les points dont la coordonnée x_1 excède 1000 sont exclus de l'espace des solutions. Or $x_1 = 1000$ représente un plan P_1 orthogonal à l'axe Ox_1, le coupant au point A de coordonnées $x_1 = 1000$, $x_2 = 0$, $x_3 = 0$; toutes les solutions éventuelles du problème seront donc comprises, dans l'octant positif, entre le plan de base x_2Ox_3 et le plan $x_1 = 1000$.

On raisonnerait de même pour les contraintes 2) et 3). En fait, les plans

$$P_1 : x_1 = 1000,\ \ P_2 : x_2 = 500,\ \ P_3 : x_3 = 1500$$

délimitent un parallélépipède $OABCDEFG$, à l'intérieur ou à la surface duquel se trouve la (ou les) solution(s) éventuelle(s).



D'autre part, $3x_1 + 6x_2 + 2x_3 = 6750$ est aussi l'équation d'un plan P_4 dans l'espace à trois dimensions et la contrainte 4) signifie que les points-solutions doivent nécessairement se trouver à l'intérieur ou à la surface du tétraèdre $OA'B'C'$ fomés par les trois plans de coordonnées et le plan P_4. Le plan P_4 coupe Ox_1 en $A'(2250; 0; 0)$, Ox_2 en $B'(0; 1125; 0)$ et Ox_3 en $C'(0; 0; 3375)$. Il est facile de voir que le plan P_4 coupe la droite FG au point $P(1000; 125; 1500)$. En effet, FG est l'intersection des plans :

$$\begin{cases} x_1 = 1000 \\ x_3 = 1500 \end{cases}$$

et P_4 a comme équation :

$$3x_1 + 6x_2 + 2x_3 = 6750\ ;$$

si l'on remplace, dans cette équation, x_1 et x_2 par leur valeur, on obtient :

$$3000 + 6x_2 + 3000 = 6750$$

d'où $6x_2 = 750$ et $x_2 = 125$.

On établirait de même que P_4 coupe GD en $Q(250, 500, 1500)$ et GB en $R(1000, 500, 375)$.
C'est le solide commun au parallélépipède $OABCDEF$ et au tétraèdre (pyramide triangulaire de sommet O) $OA'B'C'$ qui contiendra les solutions ; on constate qu'il faut enlever au parallélépipède le (petit) tétraèdre $GPQR$.

Finalement, pour satisfaire aux contraintes, un point solution doit nécessairement se trouver à l'intérieur ou à la surface du polytope $OABCDEFPQR$.

Jusqu'à présent, on ne s'est occupé que des contraintes ; pour choisir entre les solutions que l'on vient de déterminer celle (celles) qui est (sont) optimale(s), on doit chercher à maximiser la fonction

$$z = 4x_1 + 12x_2 + 3x_3.$$

Pour chaque point $M(x_1 = \zeta; x_2 = \eta; x_3 = \theta)$ de l'espace des solutions, z a une valeur donnée :

$$z(\zeta, \eta, \theta) = 4\zeta + 12\eta + 3\theta.$$

Par exemple, pour le point $C(0; 500; 0)$, on a :

$$z = (4 \times 0) + (12 \times 500) + (3 \times 0) = 6000.$$

Mais, les points qui, tel C, donnent à z valeur 6000, forment un plan $P_{(z=6000)}$ d'équation :

$$4x_1 + 12x_2 + 3x_3 = 6000.$$

On pourrait représenter ce plan, qui coupe les axes Ox_1, Ox_2 et Ox_3 aux points $I(1500; 0; 0)$, $C(0; 500; 0)$ et$J(0; 0; 2000)$.

Tout plan P_z, quelle que soit la valeur de z :

$$z = 4x_1 + 12x_2 + 3x_3$$

représente un plan parallèle au plan $P_{(z=6000)}$.

La distance de l'origine au plan P_z est

$$\overline{OH} = \frac{z}{\sqrt{4^2 + 12^2 + 3^2}} = \frac{z}{13}.$$

On a donc $z = 13\overline{OH}$.

Dès lors, pour maximiser z, il suffira de trouver un plan parallèle au plan ICJ, dont la distance à l'origine soit la plus grande possible et qui ait encore au moins un point commun avec le polyèdre $OABCDEFPQR$.

On pourrait voir que ce plan est obtenu pour $z = 11500$.

Il coupe Ox_1 en $\alpha(2875; 0; 0)$, Ox_2 en $\beta(0; 958; 0)$ et Ox_3 en $\gamma(0; 0; 3833, 33...)$. Son unique point de contact avec le polytope des solutions est le point $Q(250; 500; 1500)$, d'où la solution optimale :

$$\boxed{x_1^* = 250,\ x_2^* = 500,\ x_3^* = 1500 \text{ et } z^* = 11500.}$$

Difficultés de généralisation
La solution géométrique ne peut évidemment pas s'étendre au cas d'un nombre de variables supérieur à trois, puisqu'il n'est pas possible d'effectuer des représentations géométriques dans un espace à n dimensions ($n > 3$).
D'autre part, le raisonnement économique échoue lorsque le nombre de contraintes augmente.

1.5.4 Résultats plus généraux

Il faut donc essayer d'utiliser les informations obtenues jusqu'ici pour tenter de généraliser le problème par une voie autre que graphique.

Pour les exemples que l'on a résolu graphiquement, la ou les solutions optimales se trouvaient toujours sur le bord de l'ensemble des solutions réalisables. Si la solution optimale était unique, il s'agissait d'un point "extrémal". Ceci n'est pas un hasard : c'est en fait toujours le cas, comme on va l'énoncer dans ce qui suit.

Avant d'énoncer un résultat général d'existence, on peut faire deux remarques préliminaires très simples :

1) Il est clair qu'aucun point intérieur à l'ensemble $\mathcal{D}$ ne saurait être solution, sauf si la fonction z est nulle. Soit en effet x un point intérieur à l'ensemble $\mathcal{D}$ et $\varepsilon > 0$ le rayon d'une boule fermée de $\mathbb{R}^n$ centrée en x, et contenue entièrement dans l'ensemble $\mathcal{D}$. La linéarité de la fonction $z : x \mapsto {}^t c.x$ montre que, pour un maximum, pa exemple,

$$z\left(x + \frac{\varepsilon}{\|c\|}c\right) = z(x) + \varepsilon\|c\| > z(x) \quad \text{si } c \neq 0,$$

et comme le point $x + \dfrac{\varepsilon}{\|c\|}c$ appartient à l'ensemble $\mathcal{D}$, la conclusion en découle.

2) Il se peut que le problème n'ait pas de solution lorsque l'ensemble $\mathcal{D}$ est non borné : considérer l'exemple de la fonction $z(x) = x$ et de l'ensemble $\mathcal{D} = \mathbb{R}_+$.

Étant donné un polyèdre $\mathcal{D}$, un hyperplan H et HS un demi-espace fermé correspondant à H, si $HS \cap \mathcal{D} \subset H$, alors $HS \cap \mathcal{D}$ est une ***face*** de $\mathcal{D}$.

Une face de dimension 0 (donc un point) est appelé un ***sommet*** de $\mathcal{D}$.

Une face de dimension 1 est appelé une ***arête*** de $\mathcal{D}$.

Une face de dimension $n-1$ est appelé une ***facette*** de $\mathcal{D}$.

Un ensemble $\mathcal{C} \subset \mathbb{R}^n$ est ***convexe*** si, pour tous $x', x'' \in \mathcal{C}$ et pour tout $\lambda \in [0,1]$, on a alors $\lambda x' + (1-\lambda)x'' \in \mathcal{C}$ (c'est à dire que pour tout couple de points M', M'', le segment $[M'M'']$ est inclus dans $\mathcal{C}$.

On admettra le résultat suivant :

Proposition : Un polytope $\mathcal{D}$ n'a qu'un nombre fini de sommets s_i, $i \in I$, et tout point x de $\mathcal{D}$ s'écrit comme combinaison linéaire convexe des sommets, c'est-à-dire qu'il existe une famille $(\lambda_i)_{i\in I}$ telle que :

$$x = \sum_{i\in I} \lambda_i s_i.$$

avec $\lambda_i \in [0,1]$, avec $\displaystyle\sum_{i\in I} \lambda_i = 1$.

Une fonction $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ est dite ***convexe*** si, pour tous $x', x'' \in \mathbb{R}^n$ et pour tout $\lambda \in [0,1]$, on a :

$$f(\lambda x' + (1-\lambda)x'') \leq \lambda f(x') + (1-\lambda) f(x'').$$

Une fonction est dite ***concave*** si $-f$ est convexe.

Une fonction linéaire est à la fois convexe et concave. On s'intéresse à calculer le minimum d'une fonction convexe sur un ensemble convexe, plus particulièrement sur un polytope, ce qui équivaut à calculer le maximum de $-f$ sur le même ensemble.

Proposition : Une fonction convexe f sur un polytope $\mathcal{D}$ admet un maximum et celui-ci est obtenu sur un sommet.

Démonstration. On utilise le fait que tout point du polytope est combinaison linéaie convexe de ses sommets.
Soit $(s_i)_{i\in I}$ l'ensemble des sommets de $\mathcal{D}$. Si $x \in \mathcal{D}$, soit $(\lambda_i)_{i\in I}$ tels que

$$x = \sum_{i\in I} \lambda_i s_i$$

avec $\lambda_i \in [0,1]$ et $\sum_{i\in I} \lambda_i = 1$.
On a alors, par convexité de f :

$$f(x) = f\left(\sum_{i\in I} \lambda_i s_i\right) \leq \sum_{i\in I} \lambda_i f(s_i)$$

On a $f(s_i) \leq \max_{j\in I} f(s_j) = f(s_{i_0})$ pour tout $i \in I$ donc

$$f(x) \leq \left(\sum_{i\in I} \lambda_i\right) f(s_{i_0}) = f(s_{i_0})$$

Comme $s_{i_0} \in \mathcal{D}$, $f(s_{i_0})$ est une valeur particulière de f sur $\mathcal{D}$, et c'est bien que f atteint son maximum sur $\mathcal{D}$. $\square$

Attention ! Le maximum peut-ête atteint aussi sur des points qui ne sont pas des sommets. Par exemple, si $\mathcal{D}$ est le carré défini par $0 \leq x_1 \leq 1$, $0 \leq x_2 \leq 1$ et si $z = x_2$, le maximum est obtenu sur tout un segment de droite (le segment $[0;1] \times \{1\}$).

L'ensemble des contraintes d'un (PL) ne forme pas toujours un polytope. En effet, il peut arriver que cet ensemble ne soit pas borné (et comporte des points à l'infini). Dans ce dernier cas, bien que des solutions réalisables du (PL) existent, il n'existe pas nécessairement de solution optimale (les solutions optimales peuvent être rejetées à l'infini).

Alors, si une solution optimale finie existe, on peut montrer aussi qu'il existe une solution optimale située en un sommet du polytope.

Dans d'autres cas, les contraintes peuvent être contradictoires : alors le polyèdre est vide et le (PL) est impossible.

On pourrait alors en déduire qu'il suffit de déterminer les coordonnées de tous les sommets du polyèdre et de calculer la valeur de la fonction économique qui correspond à chacun d'eux : il resterait à choisir la plus grande de ces valeurs. Mais, s'il y a n variables et m contraintes, il y a $n+m$ plans, dont les intersections n à n sont au nombre de :

$$C_{n+m}^{n} = \binom{n+m}{n} = \frac{(m+n)!}{m!n!}.$$

Pour $n = 15$ et $m = 10$, on a 3268760 points d'intersection et pourtant il ne s'agit encore que d'un petit programme linéaire. Même avec de très puissants ordinateurs d'aujourd'hui ou de demain, l'énumération de tous les sommets est impraticable dès que n et m dépassent 20 : elle conduirait à des durées prohibitives sur des (PL) de taille industrielle, pouvant dépasser des milliards d'années ou plus ! Il est donc exclu d'énumérer dans le combinatoire !

L'algorithme le plus connu pour la résolution des programmes linéaires, l'algorithme du simplexe, au lieu de calculer la valeur de z pour tous les sommets (donc en les énumérant), la calcule seulement pour une suite de sommets telle que la valeur de z pour le k-ième ne soit pas inférieure à la valeur de z pour le $(k-1)$-ième. Ainsi, on est sûr de parvenir à l'optimum au bout d'un nombre de pas fini, puisque le nombre de sommets est fini, à condition que la valeur de la fonction économique augmente strictement pour un certain nombre de ces pas.

Les sommets qui constituent la suite envisagée sont adjacents, c'est-à-dire que le k-ième et le $(k+1)$-ième sont des extrémités d'une même arête ; il est donc nécessaire que, quelque soit le sommet de départ, on puisse toujours trouver, étant donné un sommet auquel on est parvenu, un sommet adjacent dont les coordonnées donnent une valeur non inférieure à z, tant qu'on n'est pas arrivé à l'optimum.

Or ceci est possible, en raison de la convexité des polyèdres engendrés par des contraintes linéaires.
On peut trouver au moins un chemin qui, à partir de n'importe quel sommet, conduise (de sommets en sommets adjacents) au sommet donnant la valeur maximale à la fonction économique (autrement dit : il existe toujours au moins un sommet adjacent, situé, par rapport à l'origine au-delà du plan (ou sur le plan) de la fonction économique correspondant à un sommet quelconque, à moins que ce dernier ne soit l'optimum).

En bref, l'algorithme du simplexe a un fondement purement géométrique : il consiste, en disposant d'un point de départ, qui est sommet du polyèdre, supposé connu, lors de toute itération de passer d'un sommet M à un sommet voisin M', c'est-à-dire à décrire une arête du polyèdre en lequel la valeur de la fonction économique est meilleure (ou au moins aussi bonne) qu'en M. Lorsqu'on atteint un sommet Q pour lequel aucun sommet voisin n'est meilleur, alors l'algorithme s'arrête : le sommet Q est optimal.

1.6 Introduction de la méthode du Simplexe

L'algorithme du simplexe est dû au mathématicien américan G.B.Dantzig, qui l'a développé dans les années 50. C'est un algorithme itératif permettant de résoudre un problème de programmation linéaire. Il est basé sur un principe d'amélioration locale : à partir d'un sommet, on cherche un sommet voisin qui améliore l'objectif, comme on l'a dit dans la section précédente. En effet, si x est un sommet non optimum, alors il existe un sommet voisin x' tel que $z(x') > z(x)$.

Méthode de résolution : on part d'un sommet x quelconque, on passe à un sommet voisin pour lequel z augmente, et ainsi de suite.

Remarque : on passe d'un problème continu (variables réelles) à un problème discret (nombre fini de sommets)...

On commence par ramener, si besoin, le programme linéaire (PL) à une forme "standard", pour laquelle toutes les contraintes sont en ***égalités*** et les seconds membres sont ***non négatifs*** (ceci moyennant l'introduction de nouvelles variables, les ***variables d'écart***).

Toutes les variables sont positives ou nulles. La fonction économique est à maximiser (ce qui n'est pas restrictif car on a vu que minimiser une fonction équivaut à maximiser son opposée). On se reporte au (PL) formulé dans l'exemple introductif de la section 1.2.1.
Ainsi, la contrainte $x_1 \leq 1000$ signifie que x_1 étant inférieur (resp. égal) à 1000, il lui faut ajouter une quantité positive (resp. nulle) que l'on note $x_{\bar{1}}$ pour amener sa valeur à 1000.

$x_1 \leq 1000$ équivaut à : $x_1 + x_{\bar{1}} = 1000$ et $x_{\bar{1}} \geq 0$.

La variable $x_{\bar{1}}$ est nommée "variable d'écart" et représente, dans le contexte de l'exemple, l'écart à la saturation du marché en produit P_1.

Les variables d'écart ont ici un sens physique bien aisé à découvrir : ce sont, respectivement, les différences entre les quantités limites et les quantités fabriquées des produits P_1, P_2 et P_3 en ce qui concerne $x_{\bar{1}}$, $x_{\bar{2}}$ et $x_{\bar{3}}$, et le temps utilisé (en $\frac{1}{150}$-ème de minutes) à la fabrication, pour ce qui est de $x_{\bar{4}}$. Dans ces conditions, les variables d'écart sont aussi non négatives. Les contraintes (1) à (5) peuvent s'écrirent sous la forme du système (I) suivant, les contraintes (1) à (4) devenant donc des équations en introduisant des variables d'écart $x_{\bar{1}}, x_{\bar{2}}, x_{\bar{3}}$ et $x_{\bar{4}}$:

$$\left\{\begin{array}{ccccccccccccccl}
x_1 & & & & & + & x_{\bar{1}} & & & & & & & = & 1000 \quad (1) \\
 & & x_2 & & & & & + & x_{\bar{2}} & & & & & = & 500 \quad (2) \\
 & & & & x_3 & & & & & + & x_{\bar{3}} & & & = & 1500 \quad (3) \\
3x_1 & + & 6x_2 & + & 2x_3 & & & & & & & + & x_{\bar{4}} & = & 6750 \quad (4) \\
x_1 & , & x_2 & , & x_3 & , & x_{\bar{1}} & , & x_{\bar{2}} & , & x_{\bar{3}} & , & x_{\bar{4}} & \geq & 0 \quad (5)
\end{array}\right. \qquad (I)$$

($x_{\bar{4}}$ représente 150 fois le nombre d'heures de travail par semaine non employées : l'atelier est disponible 45 heures par semaines ; le facteur 150 vient du fait que, pour chasser les dénominateurs de (4), on a multiplié chaque membre par 150 ; ainsi : $6750 = 45 \times 150$).

Les variables d'écart ont une contribution nulle à la fonction économique :

$$z = 4x_1 + 12x_2 + 3x_3 + 0x_{\bar{1}} + 0x_{\bar{2}} + 0x_{\bar{3}} + 0x_{\bar{4}}.$$

En effet, ne pas saturer un marché, ou encore ne pas utiliser des machines à 100%, cela ne rapporte aucun bénéfice.

Le système (I) a pour solution évidente $x_1 = x_2 = x_3 = 0$, $x_{\bar{1}} = 1000$, $x_{\bar{2}} = 500$, $x_{\bar{3}} = 1500$ et $x_{\bar{4}} = 6750$. On prend donc comme sommet initial le sommet O : $x_1 = 0$, $x_2 = 0$, $x_3 = 0$ (c'est la solution "du mois d'août" : on ne fabrique rien, on ne gagne rien ; mais cette solution est ***admissible*** au sens mathématique puisque les contraintes du (PL) sont vérifiées).

Les $m = 4$ variables qui sont alors positives (autant que de contraintes) sont $x_{\bar{1}}, x_{\bar{2}}, x_{\bar{3}}$ et $x_{\bar{4}}$. On les nomme ***variables de base*** en O. De même, les variables nulles au sommet O : x_1, x_2 et x_3 sont nommées ***variables hors-base*** en O (on écarte de cet exposé introductif les cas de dégénérescence - dits de "seconde espèce" - où une variable de base serait nulle : tel serait le cas si, par exemple, 4 plans délimitant des contraintes étaient concourants en un même sommet. Ce cas sera traité en détail plus loin, au chapitre 2).

On peut exprimer facilement les variables de base en O en fonction des variables hors-base en O, de même que la fonction économique z :

$$O \left\{ \begin{array}{rcrcrcrcr} x_{\bar{1}} & = & 1000 & - & x_1 & & & & \\ x_{\bar{2}} & = & 500 & & & - & x_2 & & \\ x_{\bar{3}} & = & 1500 & & & & & - & x_3 \\ x_{\bar{4}} & = & 6750 & - & 3x_1 & - & 6x_2 & - & 2x_3 \\ z & = & 0 & + & 4x_1 & + & 12x_2 & + & 3x_3 \end{array} \right.$$

L'examen de z montre que, pour augmenter sa valeur numérique, il faut donner à l'une des variables hors-base, actuellement nulle au sommet considéré (O), une valeur positive. Puisque dans z, x_2 a le coefficient (bénéfice marginal) le plus élevé, on choisit d'accroître x_2 en posant $x_2 = \theta$, où θ est un paramètre que l'on prend positif croissant ; on garde, pour cette itération, les autres variables hors-base nulles : $x_1 = x_3 = 0$.

Le système devient :

$$\left\{ \begin{array}{rcrcr} x_{\bar{1}} & = & 1000 & & \\ x_{\bar{2}} & = & 500 & - & \theta \\ x_{\bar{3}} & = & 1500 & & \\ x_{\bar{4}} & = & 6750 & - & 6\theta \\ z & = & 0 & + & 12\theta \end{array} \right.$$

Jusqu'à quelle valeur peut-on accroître θ (c'est-à-dire x_2) ?
Le bénéfice global z est proportionnel à θ : l'entreprise peut-elle devenir très riche en donnant à θ une valeur très élevée ? En fait non, car il ne faut pas oublier que toutes les variables sont positives ou nulles et doivent le demeurer ("contraintes implicites") :

$x_{\bar{2}} \geq 0$ entraîne $\theta \leq 500$

$x_{\bar{4}} \geq 0$ entraîne $\theta \leq 6750/6 = 1125$.

Ainsi, la plus grande valeur de θ qui respecte la positivité de toutes les variables est $\theta = 500$ (et non pas 1125 qui rendrait $x_{\bar{2}}$ négatif). Si on pose donc $\theta = 500$, il vient numériquement :

$$\left\{ \begin{array}{rcrrcr} x_{\bar{1}} & = & 1000 & x_1 & = & 0 \\ x_{\bar{2}} & = & 0 & x_2 & = & 500 \\ x_{\bar{3}} & = & 1500 & x_3 & = & 0 \\ x_{\bar{4}} & = & 3750 & & & \\ z & = & 6000 & & & \end{array} \right.$$

On reconnaît alors les coordonnées du sommet $C(0; 500; 0)$: le programme de production correspondant engendre un bénéfice $z = 6000$ euros.

On vient donc de trouver un procédé algébrique qui a permis de passer d'un sommet (O) d'un polyèdre à un sommet "voisin" (C), en décrivant une arête de ce polyèdre : l'arête OC.

Pour pouvoir encore progresser, il convient d'exprimer les variables de base en C, c'est-à-dire celles qui sont positives en C, en fonction des variables hors-base en C.

Or, désormais, x_2 est devenue positive et $x_{\bar{2}}$ s'est annulée : il va donc falloir procéder à un échange, la variable x_2 entrant dans la base et la variable $x_{\bar{2}}$ sortant de la base.

On repart du système associé au sommet O

$$O\left\{\begin{array}{rcrcrcrcr} x_{\bar{1}} & = & 1000 & - & x_1 & & & & \\ x_{\bar{2}} & = & 500 & & & - & x_2 & & \\ x_{\bar{3}} & = & 1500 & & & & & - & x_3 \\ x_{\bar{4}} & = & 6750 & - & 3x_1 & - & 6x_2 & - & 2x_3 \\ z & = & 0 & + & 4x_1 & + & 12x_2 & + & 3x_3 \end{array}\right. \quad (*)$$

et on va le transformer pour obtenir celui associé au sommet C.

On commence, à partir de l'équation de l'échange $(*)$, qui est la relation qui a fixé la valeur maximale à donner à la variable entrante (ici x_2), à exprimer la variable entrante en fonction de la variable sortante (ici $x_{\bar{2}}$) (et éventuellement des autres variables hors-base). Il vient :

$$x_2 = 500 - x_{\bar{2}}$$

Puis, chacune des autres variables qui restent en base : $x_{\bar{1}}, x_{\bar{3}}, x_{\bar{4}}$, de même que z doit être exprimée en fonction des variables hors-base en C, c'est-à-dire x_1, $x_{\bar{2}}$ et x_3.

Pour ce faire, il suffit dans l'expression de chacune des autres variables en O de substituer à la variable x_2 (la variable entrante) son expression issue de l'équation de l'échange (ici $x_2 = 500 - x_{\bar{2}}$). Ici, seules $x_{\bar{4}}$ et z sont concernées (x_2 étant absente de l'expression de $x_{\bar{1}}$ et $x_{\bar{3}}$ ci-dessus). Il vient donc :

$$C\left\{\begin{array}{rcrcrcrcr} x_{\bar{1}} & = & 1000 & - & x_1 & & & & \\ x_2 & = & 500 & & & & & - & x_{\bar{2}} \\ x_{\bar{3}} & = & 1500 & & & - & x_3 & & \\ x_{\bar{4}} & = & 6700 & - & 3x_1 & - & 2x_3 & - & 6(500 - x_{\bar{2}}) \\ & = & 3750 & - & 3x_1 & - & 2x_3 & + & 6x_{\bar{2}} \\ z & = & 0 & + & 4x_1 & + & 3x_3 & + & 12(500 - x_{\bar{2}}) \\ & = & 6000 & + & 4x_1 & + & 3x_3 & - & 12x_{\bar{2}} \end{array}\right. \quad (*)$$

On peut alors, partant du sommet C (où le bénéfice est de 6000 euros), pratiquer une nouvelle itération afin d'accroître ce bénéfice. La variable entrante est la variable hors-base qui a le plus grand coefficient positif dans l'expression de z en fonction des variables hors-base ; soit ici x_1. On pose donc $x_1 = \theta$ où θ est positif croissant, en gardant $x_3 = x_{\bar{2}} = 0$ (x_3 et $x_{\bar{2}}$ étaient nulles en C). Il vient :

$$\left\{\begin{array}{rcrcr} x_{\bar{1}} & = & 1000 & - & \theta \\ x_2 & = & 500 & & \\ x_{\bar{3}} & = & 1500 & & \\ x_{\bar{4}} & = & 3750 & - & 3\theta \\ z & = & 6000 & + & 4\theta \end{array}\right.$$

L'accroissement du bénéfice étant proportionnel à θ, on a intérêt à prendre θ le plus grand possible.

Pour respecter la positivité des variables, on prend au mieux $\theta = 1000$: $x_{\bar{1}}$ alors s'annule et sort de la base ; l'équation de l'échange $(*)$ est $x_{\bar{1}} = 1000 - x_1$. En substituant dans les autres équations du système associé au sommet C, à x_1 la valeur $1000 - x_{\bar{1}}$, il vient :

$$B \left\{ \begin{array}{rcrcrcrcrl} x_1 & = & 1000 & & & - & x_{\bar{1}} & & & \\ x_2 & = & 500 & & & & & - & x_{\bar{2}} & \\ x_{\bar{3}} & = & 1500 & - & x_3 & & & & & \\ x_{\bar{4}} & = & 3750 & - & 2x_3 & - & 3(1000 - x_{\bar{1}}) & + & 6x_{\bar{2}} & \\ & = & 750 & - & 2x_3 & + & 3x_{\bar{1}} & + & 6x_{\bar{2}} & (*) \\ z & = & 6000 & + & 3x_3 & + & 4(1000 - x_{\bar{1}}) & - & 12x_{\bar{2}} & \\ & = & 10000 & + & 3x_3 & - & 4x_{\bar{1}} & - & 12x_{\bar{2}} & \end{array} \right.$$

On reconnaît en effet le système associé au sommet $B(1000; 500; 0)$: c'est l'expression des variables de base en B : x_1, x_2, $x_{\bar{3}}$, $x_{\bar{4}}$ en fonction des variables hors-base en B : x_3, $x_{\bar{1}}$, $x_{\bar{2}}$.

Puisque z, ainsi exprimé, comporte encore un coefficient positif (3), sur une variable hors-base (x_3), on peut appliquer une nouvelle itération ; on pose $x_3 = \theta$ positif et croissant, et on garde $x_{\bar{1}} = x_{\bar{2}} = 0$. Il vient :

$$\left\{ \begin{array}{rcrcr} x_1 & = & 1000 & & \\ x_2 & = & 500 & & \\ x_{\bar{3}} & = & 1500 & - & \theta \\ x_{\bar{4}} & = & 750 & - & 2\theta \\ z & = & 10000 & + & 3\theta \end{array} \right.$$

On prend $\theta = 375$. En effet, la variable $x_{\bar{4}}$ est la première à s'annuler quand θ croît ; $x_{\bar{4}}$ est donc la variable sortante. L'équation d'échange est

$$x_{\bar{4}} = 750 - 2x_3 + 3x_{\bar{1}} + 6x_{\bar{2}}$$

d'où $x_3 = 375 + 3/2\, x_{\bar{1}} + 3x_{\bar{2}} - 1/2\, x_{\bar{4}}$.
En substituant à x_3 cette valeur dans les autres équations du système associé à B, il vient :

$$R \left\{ \begin{array}{rcrcrcrcrl} x_1 & = & 1000 & - & x_{\bar{1}} & & & & & \\ x_2 & = & 500 & & & - & x_{\bar{2}} & & & \\ x_{\bar{3}} & = & 1125 & - & 3/2 x_{\bar{1}} & - & 3x_{\bar{2}} & + & 1/2\, x_{\bar{4}} & (*) \\ x_3 & = & 375 & + & 3/2\, x_{\bar{1}} & + & 3x_{\bar{2}} & - & 1/2\, x_{\bar{4}} & \\ z & = & 11125 & + & 1/2\, x_{\bar{1}} & - & 3x_{\bar{2}} & - & 3/2\, x_{\bar{4}} & \end{array} \right.$$

En effet, on a bien

$$\begin{aligned} z &= 10000 + 3(375 + 3/2\, x_{\bar{1}} + 3x_{\bar{2}} - 1/2\, x_{\bar{4}}) - 4x_{\bar{1}} - 12x_{\bar{2}} \\ &= 10000 + 1125 + (9/2 - 4)x_{\bar{1}} + (9 - 12)x_{\bar{2}} - 3/2\, x_{\bar{4}} \\ &= 11125 + 1/2 x_{\bar{1}} - 3x_{\bar{2}} - 3/2\, x_{\bar{4}} \end{aligned}$$

On reconnaît le sommet $R(1000; 500; 375)$ où le bénéfice vaut 11125 euros.

Nouvelle (et dernière) itération : la variable hors base $x_{\bar{1}}$ ayant dans z un coefficient positif (1/2), entre en base : on pose $x_{\bar{1}} = \theta$, positif croissant, et on garde $x_{\bar{2}} = x_{\bar{4}} = 0$. Il vient :

$$\left\{\begin{array}{rcrcl} x_1 & = & 1000 & - & \theta \\ x_2 & = & 500 & & \\ x_{\bar{3}} & = & 1125 & - & 3/2\,\theta \\ x_3 & = & 375 & + & 3/2\,\theta \\ z & = & 11125 & + & 1/2\,\theta \end{array}\right.$$

La variable sortante est donc $x_{\bar{3}}$ (avec $\theta = 1125/(3/2) = 2250/3 = 750$).

L'équation d'échange est : $x_{\bar{3}} = 1125 - 3/2\,x_{\bar{1}} - 3x_{\bar{2}} + 1/2\,x_{\bar{4}}$ d'où, en l'inversant :

$$3/2\,x_{\bar{1}} = 1125 - 3x_{\bar{2}} - x_{\bar{3}} + 1/2\,x_{\bar{4}}$$

et donc

$$x_{\bar{1}} = 750 - 2x_{\bar{2}} - 2/3\,x_{\bar{3}} + 1/3\,x_{\bar{4}}.$$

En substituant à $x_{\bar{1}}$ cette valeur dans les autres équations du système associé à R, il vient :

$$Q\left\{\begin{array}{rcrcrcrcl} x_1 & = & 250 & + & 2x_{\bar{2}} & + & 2/3\,x_{\bar{3}} & - & 1/3\,x_{\bar{4}} \\ x_2 & = & 500 & - & x_{\bar{2}} & & & & \\ x_3 & = & 1500 & & & - & x_{\bar{3}} & & \\ x_{\bar{1}} & = & 750 & - & 2x_{\bar{2}} & - & 2/3\,x_{\bar{3}} & + & 1/3\,x_{\bar{4}} \\ z & = & 11500 & - & 4x_{\bar{2}} & - & 1/3\,x_{\bar{3}} & - & 4/3x_{\bar{4}} \end{array}\right.$$

En effet,

$$\begin{aligned} z &= 11125 + 1/2(750 - 2x_{\bar{2}} - 2/3\,x_{\bar{3}} + 1/3\,x_{\bar{4}}) - 3x_{\bar{2}} - 3/2\,x_{\bar{4}} \\ &= (11125 + 375) - 4x_{\bar{2}} - 1/3\,x_{\bar{3}} + (1/6 - 3/2)x_{\bar{4}} \\ &= 11500 - 4x_{\bar{2}} - 1/3\,x_{\bar{3}} - 4/3\,x_{\bar{4}} \end{aligned}$$

On reconnaît le sommet Q : $x_1 = 250$, $x_2 = 500$, $x_3 = 1500$ avec un bénéfice de $z = 11500$ euros. Le sommet est optimal : il n'est pas possible d'améliorer z par le procédé ci-dessus car tous les coefficients des variables (hors-base) figurant dans z sont négatifs. On peut alors démontrer, en utilisant un argument de convexité et de dualité que, dans ces conditions, l'optimum est effectivement atteint : on y reviendra plus tard, dans le chapitre 3 consacrée à la dualité.

Dans le chapitre 2, cette procédure va être systématisée et on verra comment, grâce à l'algorithme du simplexe, on peut résoudre aisément un programme linéaire.

1.7 Aspect matriciel

On rappelle la ***forme standard*** (FS) d'un programme linéaire (PL) :

$$\left\{\begin{array}{ccccccl} c_1x_1 & + & \cdots & + & c_nx_n & = & z[\max] \\ a_{i,1}x_1 & + & \cdots & + & a_{i,n}x_n & = & b_i\ ;\ 1 \le i \le m,\ b_i \ge 0 \\ x_1 & , & \cdots & , & x_n & \ge & 0 \end{array}\right.$$

On pose $A = [a_{i,j}]$ la matrice de taille $m \times n$ des coefficients des premiers membres des contraintes explicites ; b le vecteur colonne $m \times 1$ des seconds membres de ces contraintes ; c le vecteur $n \times 1$ des coefficients de la fonction économique ; x le vecteur colonne $n \times 1$ des variables du (PL). La forme standard s'écrit matriciellement :

$$(FS)\ \max\{z = {}^tc.x\ ;\ Ax = b\ (\text{où } b \ge 0)\}.$$

En désignant par A^j la j-ième colonne de la matrice A ($j = 1, 2, \cdots, n$), le système des contraintes explicites peut s'écrire sous forme d'une combinaison linéaire des vecteurs colonnes extraits de A :

$$x_1A^1 + x_2A^2 + \cdots + x_nA^n = b.$$

On a vu dans la section 1.4 que tout (PL) peut se ramener à un programme sous forme standard.

Les variables d'écart, tout comme les variables "principales" (c'est-à-dire les variables d'origine, introduites pour formuler le problème) sont toutes *positives ou nulles.* Ainsi, lors de la résolution, on ne fera pas de distinction entre les variables d'écart et les variables principales.

On fera les deux hypothèses suivantes sur la forme standard (FS) :

1) Le nombre de lignes de A (contraintes explicites) est inférieur au nombre de colonnes de A (qui est égal au nombre de variables) : $\boxed{m < n}$.

On peut remarquer que, si les contraintes explicites du (PL) étaient initialement des inégalités, on introduit une variable d'écart dans chacune, soit en tout m variables d'écart. Alors le nombre total de variables $(n + m)$ devient nécessairement supérieur à m. Cette hypothèse est donc, en pratique, peu limitative.

2) On supposera que l'on peut extraire de A, m colonnes différentes qui, regroupées dans une matrice carrée B, sont telles que le déterminant de B n'est pas nul (ce qui équivaut à dire que les m vecteurs-colonnes ainsi extraits, sont indépendants (c'est-à-dire aussi que $\boxed{A \text{ est de rang } m}$).

On remarque à nouveau que, si les contraintes explicites du (PL) étaient initialement des inégalités, les m colonnes de A associées aux variables d'écart forment la matrice $m \times m$:

$$\begin{pmatrix} \pm 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & \pm 1 \end{pmatrix}$$

Cette matrice diagonale a pour déterminant le produit des éléments diagonaux, qui vaut donc $+1$ ou -1 : il est donc non nul.

À nouveau, cette hypothèse est, en pratique, peu restrictive. En effet, si le rang est $< m$, il y a des contraintes redondantes qui peuvent être éliminées, ou bien des contraintes contradictoires (cas inintéressant car alors $\mathcal{D}$ serait vide).

Dans ces conditions ($m < n$ et A de rang m), le système $Ax = b$ de m équations et n inconnues a au moins une solution (et en général une infinité). C'est un système "sous-déterminé" comportant plus d'inconnues que d'équations. Notons que si l'on connaît deux solutions différentes x' et x'' de ce système, alors tout x de la forme $x = \lambda x' + (1 - \lambda)x''$, où $0 \leq \lambda \leq 1$ est aussi solution du système ; (x est nommé "combinaison linéaire convexe" de x' et de x'').

1.7.1 Base

Par définition, une ***base*** est un ensemble de m vecteurs colonnes indépendants, extraits de A. Ainsi, si l'on découpe A en colonnes :

$$A = \begin{array}{|c|c|c|c|c|}\hline A^1 & A^2 & A^3 & \cdots & A^n \\ \hline\end{array}$$

et que l'on ait extrait de A les m colonnes d'indices $j_1, j_2, \cdots, j_m$ à la *base* B est associée une matrice carrée $m \times m$, de déterminant non nul :

$$B = \begin{array}{|c|c|c|c|}\hline A^{j_1} & A^{j_2} & \cdots & A^{j_m} \\ \hline\end{array} \qquad X_B = \begin{bmatrix} x_{j_1} \\ x_{j_2} \\ \vdots \\ x_{j_m} \end{bmatrix}$$

Les ***variables de base*** sont les variables $x_{j_1}, x_{j_2}, \cdots, x_{j_m}$ associées aux colonnes constituant la base ; on note X_B le vecteur colonne des m variables de base. Les $n - m$ autres variables sont dites ***hors-base*** et on note X_N leur vecteur colonne.

1.7.2 Réécriture du programme linéaire associée à une base B

Par permutation des colonnes de A, on place, à droite, les colonnes de base qui forment la sous-matrice B, puis on place à gauche de celles-ci les colonnes hors-base (qui forment la sous-matrice N). On permute dans le même ordre les variables ; ainsi $A = (N|B)$ et $x = \begin{pmatrix} X_N \\ X_B \end{pmatrix}$.

Alors, le système des contraintes explicites $Ax = b$, calculé par blocs, devient :

$$(N, B).\begin{pmatrix} X_N \\ X_B \end{pmatrix} = b \text{ soit } N.X_N + B.X_B = b.$$

Exemple de cette réécriture avec $m = 2$ contraintes :

$$\left\{ \begin{array}{ccccccccccc} 2x_1 & + & 3x_2 & - & x_3 & + & x_4 & + & 3x_5 & = & 12 \\ 7x_1 & - & x_2 & + & 2x_3 & + & 5x_4 & + & x_5 & = & 6 \end{array} \right.$$

soit

$$\begin{array}{ccccc} A^1 & A^2 & A^3 & A^4 & A^5 \\ \hline \multicolumn{1}{|c}{2} & 3 & -1 & 1 & \multicolumn{1}{c|}{3} \\ \multicolumn{1}{|c}{7} & -1 & 2 & 5 & \multicolumn{1}{c|}{1} \\ \hline \end{array} . \begin{array}{|c|}\hline x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \\ \hline\end{array} = \begin{array}{|c|}\hline 12 \\ 6 \\ \hline\end{array} \text{ soit } A.x = b$$

Les $m = 2$ colonnes A^2 et A^5 forment une base $B = (A^2, A^5) = \begin{pmatrix} 3 & 3 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$ puisque le déterminant de cette matrice n'est pas nul : $\det B = 6$. La réécriture fournit

$$\begin{array}{ccccc} A^1 & A^3 & A^4 & A^2 & A^5 \\ \hline \multicolumn{1}{|c}{2} & -1 & \multicolumn{1}{c|}{1} & 3 & \multicolumn{1}{c|}{3} \\ \multicolumn{1}{|c}{7} & 2 & \multicolumn{1}{c|}{5} & -1 & \multicolumn{1}{c|}{1} \\ \hline \end{array} . \begin{array}{|c|}\hline x_1 \\ x_3 \\ x_4 \\ \hline x_2 \\ x_5 \\ \hline\end{array} = \begin{array}{|c|}\hline 12 \\ 6 \\ \hline\end{array}$$

soit : $\boxed{\begin{matrix} 2 & -1 & 1 \\ 7 & 2 & 5 \end{matrix}} \cdot \boxed{\begin{matrix} x_1 \\ x_3 \\ x_4 \end{matrix}} + \boxed{\begin{matrix} 3 & 3 \\ -1 & 1 \end{matrix}} \cdot \boxed{\begin{matrix} x_2 \\ x_5 \end{matrix}} = \boxed{\begin{matrix} 12 \\ 6 \end{matrix}}$.

1.7.3 Solution de base

Si $X_N = 0$, il reste alors $B.X_B = b$, qui est un système de m équations à m inconnues de déterminant non nul (système de Cramer), admettant une solution unique :

$$X_B = B^{-1}.b$$

Si X_B vérifie aussi les contraintes “implicites” de positivité, c'est-à-dire si X_B est positif ou nul, X_B est alors une ***solution de base admissible***.

Retour à l'exemple ci-dessus :

Pour la base $B = (A^2, A^5)$, on obtient la solution de base associée en posant $x_1 = x_3 = x_4 = 0$, soit $X_N = 0$.
Il reste le système

$$\boxed{\begin{matrix} 3 & 3 \\ -1 & 1 \end{matrix}} \cdot \boxed{\begin{matrix} x_2 \\ x_5 \end{matrix}} = \boxed{\begin{matrix} 12 \\ 6 \end{matrix}},$$

or $B^{-1} = \dfrac{1}{6}\begin{bmatrix} 1 & -3 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}$, d'où $\begin{bmatrix} x_2 \\ x_5 \end{bmatrix} = \dfrac{1}{6}\begin{bmatrix} 1 & -3 \\ 1 & 3 \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} 12 \\ 6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ 5 \end{bmatrix} = X_B$: on n'a **pas** $X_B \geq 0$: cette solution de base n'est **pas** admissible car $x_2 = -1 < 0$. Par contre, avec la base $B' = (A^2, A^3)$ on obtient une solution de base admissible car $X_B = \begin{bmatrix} 6 \\ 6 \end{bmatrix}$ (on a bien $X_B \geq 0$).

On rappelle que, d'une manière générale, une ***solution admissible*** est une solution (pas nécessairement de base) du système $A.x = b$ avec $x \geq 0$.

Le théorème suivant (admis sans démonstration) précise la correspondance entre les sommets du polyèdre $\mathcal{D}$ et les solutions de base admissibles : il fait le lien entre l'aspect géométrique et l'aspect algébrique en programmation linéaire.

> **Théorème :** À toute solution de base admissible correspond un sommet du polyèdre des solutions admissibles et un seul.

La réciproque n'est vraie qu'en l'absence de dégénérescence de deuxième espèce, c'est-à-dire, comme on le verra au chapitre 2, si X_B est strictement positif (aucune variable de base nulle).

À titre d'exemple, on reprend maintenant le problème restreint de l'atelier de la section 1.5.2. (deux produits, 35 heures de travail hebdomadaire)

$$\left\{ \begin{array}{lllllll} x_1 & & & + \; x_{\bar{1}} & & & = 1000 \\ & & x_2 & & + \; x_{\bar{2}} & & = \;\;500 \\ x_1 & + & 2x_2 & & & + \; x_{\bar{3}} & = 1750 \end{array} \right.$$

où $x_{\bar{1}}$, $x_{\bar{2}}$ et $x_{\bar{3}}$ sont des variables d'écart. On pourra poser, pour simplifier les écritures et puisqu'il n'y a pas de confusions possibles $x_{\bar{i}} = x_{2+i}$ (c'est-à-dire $x_{\bar{1}} = x_3$, $x_{\bar{2}} = x_4$ et $x_{\bar{3}} = x_5$).

On pourra vérifier que :

- au sommet $O(0;0)$ correspond la base $B_O = \begin{array}{c} \begin{matrix}3 & 4 & 5\end{matrix} \\ \begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix}\end{array}$ et $X_{B_O} = \begin{bmatrix}1000\\ 500\\ 1750\end{bmatrix}\begin{matrix}3\\ 4\\ 5\end{matrix}$

- au sommet $A(0;500)$ correspond la base $B_A = \begin{array}{c} \begin{matrix}2 & 3 & 5\end{matrix} \\ \begin{bmatrix}0 & 1 & 0\\ 1 & 0 & 0\\ 2 & 0 & 1\end{bmatrix}\end{array}$ et $X_{B_A} = \begin{bmatrix}500\\ 1000\\ 750\end{bmatrix}\begin{matrix}2\\ 3\\ 5\end{matrix}$

- au sommet $F(750;500)$ correspond la base $B_F = \begin{array}{c} \begin{matrix}1 & 2 & 3\end{matrix} \\ \begin{bmatrix}1 & 0 & 1\\ 0 & 1 & 0\\ 1 & 2 & 0\end{bmatrix}\end{array}$ et $X_{B_F} = \begin{bmatrix}750\\ 500\\ 250\end{bmatrix}\begin{matrix}1\\ 2\\ 3\end{matrix}$

- au sommet $E(1000;375)$ correspond la base $B_E = \begin{array}{c} \begin{matrix}1 & 2 & 4\end{matrix} \\ \begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 1\\ 1 & 2 & 0\end{bmatrix}\end{array}$ et $X_{B_E} = \begin{bmatrix}1000\\ 375\\ 125\end{bmatrix}\begin{matrix}1\\ 2\\ 4\end{matrix}$

- au sommet $C(1000;0)$ correspond la base $B_C = \begin{array}{c} \begin{matrix}1 & 4 & 5\end{matrix} \\ \begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 1 & 0 & 1\end{bmatrix}\end{array}$ et $X_{B_C} = \begin{bmatrix}1000\\ 500\\ 750\end{bmatrix}\begin{matrix}1\\ 4\\ 5\end{matrix}$.

On peut remarquer qu'aux points G, H et I (I étant l'intersection de la droite FE avec l'axe Ox_1) qui sont à l'extérieur du domaine admissible $\mathcal{D}$, correspondent des bases *non admissibles* c'est-à-dire pour lesquelles certaines variables de bases seraient négatives :

$$B_G = \begin{array}{c} \begin{matrix}1 & 2 & 5\end{matrix} \\ \begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 1 & 2 & 1\end{bmatrix}\end{array} \text{ et } X_{B_G} = \begin{bmatrix}1000\\ 500\\ -250\end{bmatrix}\begin{matrix}1\\ 2\\ 5\end{matrix} \text{ où } G(1000;500) = B$$

$$B_H = \begin{array}{c} \begin{matrix}2 & 3 & 4\end{matrix} \\ \begin{bmatrix}0 & 1 & 0\\ 1 & 0 & 1\\ 2 & 0 & 0\end{bmatrix}\end{array} \text{ et } X_{B_H} = \begin{bmatrix}875\\ 1000\\ -375\end{bmatrix}\begin{matrix}2\\ 3\\ 4\end{matrix} \text{ où } H(0;875)$$

$$B_I = \begin{array}{c} \begin{matrix}1 & 3 & 4\end{matrix} \\ \begin{bmatrix}1 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\\ 1 & 0 & 0\end{bmatrix}\end{array} \text{ et } X_{B_I} = \begin{bmatrix}1750\\ -750\\ 500\end{bmatrix}\begin{matrix}1\\ 3\\ 4\end{matrix} \text{ où } I(1750;0)$$

1.7.4 Fonction économique

Matriciellement z peut s'écrire $z = {}^t c.x$, où ${}^t c$ est le vecteur ligne $1 \times n$ des coefficients (initiaux) de la fonction économique. (On rappelle que les coefficients initiaux des variables d'écart sont nuls, et que x est le vecteur colonne $n \times 1$ des variables du (PL)).

Dans le problème de l'atelier (3 produits, 45 h/semaine) de la section 1.2.1., on a :

$${}^t c = [4, 12, 3, 0, 0, 0, 0] \text{ et } {}^t x = {}^t[x_1, x_2, x_3, x_{\bar{1}}, x_{\bar{2}}, x_{\bar{3}}, x_{\bar{4}}].$$

On peut aussi séparer, dans le vecteur ${}^t c$, les coefficients associés aux variables de base qui forment un sous-vecteur ligne $1 \times m$ noté ${}^t C_B$, des autres coefficients qui eux, sont associés aux variables hors-base et forment le sous-vecteur colonne $1 \times (n-m)$, noté ${}^t C_N$.

Ainsi, $z = {}^t c.x = ({}^t C_N, {}^t C_B) \ . \begin{pmatrix} X_N \\ X_B \end{pmatrix} = {}^t C_N.X_N + {}^t C_B.X_B$.

Pour exprimer z seulement en fonction des variables hors-base, il suffit de tirer l'expression de X_B à partir du système : $N.X_N + B.X_B = b$. En multipliant à gauche par B^{-1} chaque membre, il vient :

$$B^{-1}N.X_N + B^{-1}B.X_B = B^{-1}.b \text{ d'où } \boxed{X_B = B^{-1}.b - B^{-1}N.X_N}$$

qui est la forme matricielle de l'expression des variables de base en fonction des variables hors-base.

On substitue alors à X_B cette expression dans la relation $z = {}^t C_N.X_N + {}^t C_B.X_B$.

Il vient $z = {}^t C_B.(B^{-1}.b - B^{-1}N.X_N) + {}^t C_N.X_N$, soit

$$\boxed{z = {}^t C_B.B^{-1}.b + ({}^t C_N - {}^t C_B.B^{-1}.N)X_N = \widetilde{z}_B + {}^t \Delta_N.X_N}$$

La valeur numérique $\widetilde{z}_B$ de la fonction économique pour la solution de base X_B s'obtient en faisant $X_N = 0$: elle est donc $\boxed{\widetilde{z}_B = {}^t C_B.B^{-1}.b}$.

Puisque z est désormais exprimé seulement en fonction des variables hors-base, le coefficient de toute variable hors-base x_j, dans cette dernière expression de z n'est autre que le coefficient noté plus haut Δ_j.

Ainsi, le vecteur $1 \times (n-m)$ des Δ_j, noté ${}^t \Delta_N$ est :

$${}^t \Delta_N = {}^t C_N - {}^t C_B.B^{-1}.N$$

soit, composante par composante : $\Delta_j = c_j - {}^t C_N.(B^{-1}.N)^j$ où $y^j = (B^{-1}.N)^j$ est la colonne associée à la variable x_j dans la matrice $B^{-1}.N$ (on verra au chapitre 2 que, dans la méthode des tableaux, c'est la colonne associée à la variable hors-base x_j). On a donc

$$\Delta_j = c_j - \sum_i c_i.\alpha_{i,j},$$

où la sommation est faite pour tous les indices i des m variables de base, et $\alpha_{i,j}$ est l'élément i du vecteur colonne $y^j = (B^{-1}.N)^j$.

Cette forme matricielle sera reprise au début du chapitre 2, pour la méthode du simplexe.

Chapitre 2

Algorithme du simplexe

On rappelle qu'on cherche à résoudre le programme linéaire sous-forme standard :

$$\left\{\begin{array}{ccccccl} c_1x_1 & + & \cdots & + & c_nx_n & = & z[\max] \\ a_{i,1}x_1 & + & \cdots & + & a_{i,n}x_n & = & b_i \; ; \; 1 \leq i \leq m, \; b_i \geq 0 \\ x_1 & , & \cdots & , & x_n & \geq & 0 \end{array}\right.$$

soit, si on note $A = [a_{i,j}]$ la matrice $m \times n$ des coefficients des premiers membres des contraintes explicites,

$$(FS) \;\; \max\{z = {}^tc.x \; ; \; Ax = b \text{ (où } b \geq 0)\}$$

en supposant de plus que A est de rang m, avec $m < n$.

2.1 La méthode du simplexe

On a vu au chapitre 1 que l'on peut décomposer le problème, en introduisant une base B, constituée de m colonnes indépendantes de A, un vecteur X_B, constitué des n variables correspondant à ces colonnes (N étant la matrice constituée des autres colonnes de A et X_N le vecteur des $n-m$ variables correspondant à ces colonnes) : $Ax = b$ s'écrit $N.X_N + B.X_B = b$ et $z = {}^tc.x$ s'écrit $z = {}^tC_N.X_N + {}^tC_B.X_B$.
On peut alors exprimer les variables de base et la fonction objectif en fonction des variables hors-base grâce aux formules :

$$X_B = B^{-1}.b - B^{-1}.N.X_N \text{ et } z = {}^tC_B.B^{-1}.b - ({}^tC_B.B^{-1}.N - {}^tC_N)X_N.$$

La deuxième formule peut s'écrire

$$z = \widetilde{z}_B - \sum_{i \in I_N} (z_i - c_i)x_i$$

où I_N est l'ensemble des indices correspondant aux variables hors-base.

On a vu aussi que l'algorithme du simplexe consiste à progresser d'un sommet initial vers un sommet adjacent en ayant soin de ne pas diminuer la valeur de la fonction économique ; d'autre part, on sait aussi que toutes les variables (principales ou d'écart) doivent rester non-négatives.

2.1.1 Changement de base admissible

On va reprendre ici, dans le cadre le plus général, la méthode développée au chapitre 1 sur l'exemple de l'atelier.

Soit x une solution de base admissible associée à une base B (on a donc $X_N = 0$). On a alors

$$z = {}^t c.x = {}^t C_B.X_B = \sum_{i \in I_B} c_i x_i$$

où I_B est l'ensemble des indices des variables de base.

Le but est de trouver une autre base B' et une solution de base admissible associée x' telle que $z(x') > z(x)$.
La méthode du simplexe consiste à remplacer une variable de base, notée x_s (s comme "sortante"), par une variable hors-base, notée x_e (e comme "entrante").
On aura donc $I_{B'} = (I_B \setminus \{s\}) \cup \{e\}$.

Comment choisir s et e ?

- <u>Choix de s</u>

Tout d'abord, comme rang$A = m$, toutes les colonnes de A s'écrivent comme combinaisons linéaires des colonnes de B. En particulier,

$$A^e = \sum_{i \in I_B} \alpha_{i,e} A^i = \sum_{i \in I_B \setminus \{s\}} \alpha_{i,e} A^i + \alpha_{s,e} A^s$$

En supposant $\alpha_{s,e} \neq 0$, on a alors

$$A^s = \frac{1}{\alpha_{s,e}} \left(A^e - \sum_{i \in I_B \setminus \{s\}} \alpha_{i,e} A^i \right).$$

On a ensuite

$$\begin{aligned}
B.X_B &= b = \sum_{i \in I_B} A^i x_i = \sum_{i \in I_B \setminus \{s\}} A^i x_i + A^s x_s \\
&= \sum_{i \in I_B \setminus \{s\}} A^i x_i + \frac{1}{\alpha_{s,e}} \left(A^e - \sum_{i \in I_B \setminus \{s\}} \alpha_{i,e} A^i \right) x_s \\
&= \sum_{i \in I_B \setminus \{s\}} A^i \left(x_i - \frac{\alpha_{i,e}}{\alpha_{s,e}} x_s \right) + A^e \frac{x_s}{\alpha_{s,e}} = \sum_{i \in I_{B'}} A^i x'_i = B'.X_{B'}
\end{aligned}$$

avec $x'_i = x_i - \dfrac{\alpha_{i,e}}{\alpha_{s,e}} x_s$ pour $i \in I_{B'} \setminus \{e\}$ et $x'_e = \dfrac{x_s}{\alpha_{s,e}}$.
Comme x' doit aussi être une solution de base admissible, on doit avoir $x'_i \geq 0$, soit

$$x_i \geq \frac{\alpha_{i,e}}{\alpha_{s,e}} x_s$$

ce qui équivaut, si $\alpha_{i,e} > 0$, à $\dfrac{x_i}{\alpha_{i,e}} \geq \dfrac{x_s}{\alpha_{s,e}}$.

$$\frac{x_s}{\alpha_{s,e}} = \min\left\{\frac{x_i}{\alpha_{i,e}}\ ;\ \alpha_{i,e} > 0,\ i \in I_B\right\}.$$

- Choix de e

Soit x' une solution de base admissible associée à la base B'. Alors

$$\begin{aligned} z(x') &= \sum_{i \in I_{B'}} c_i x'_i = \sum_{i \in I_B \setminus \{s\}} c_i \left(x_i - \frac{\alpha_{i,e}}{\alpha_{s,e}} x_s\right) + c_e \frac{x_s}{\alpha_{s,e}} \\ &= \sum_{i \in I_B} c_i x_i - c_s x_s - \sum_{i \in I_B \setminus \{s\}} c_i \frac{\alpha_{i,e}}{\alpha_{s,e}} x_s + c_e \frac{x_s}{\alpha_{s,e}} \\ &= z(x) + \frac{x_s}{\alpha_{s,e}} \left(c_e - \sum_{i \in I_B} c_i \alpha_{i,e}\right) \end{aligned}$$

Pour avoir $z(x') > z(x)$, il faut donc, si $\alpha_{s,e} > 0$, choisir e tel que $c_e - \sum_{i \in I_B} c_i \alpha_{i,e} > 0$, soit, en notant $z_e = \sum_{i \in I_B} c_i \alpha_{i,e}$, $c_e - z_e > 0$. On a même intérêt, pour que $z(x')$ soit le plus grand possible, à prendre e tel que $z_e - c_e$ soit le plus petit possible.

Ainsi, si $\alpha_{i,e} > 0$, on choisit e tel que

$$z_e - c_e = \min\{z_k - c_k\ ;\ z_k < c_k \text{ et il existe } i \in I_B \text{ tel que } \alpha_{i,k} > 0\}.$$

Comme tout ceci est un peu abstrait, on va voir ce que ça donne sur l'exemple initial de l'atelier.

On va présenter les résultats sous forme de tableaux.

On part du sommet initial O, $A = (A^1, A^2, A^3 | I_4)$, $B = I_4$.
Pour simplifier les écritures, on pose aussi $x_{3+i} = x_{\bar{i}}$, pour $1 \leq i \leq 4$.

On reprend, dans ces conditions, la représentation matricielle initiale et on dote les colonnes d'un indice $j = 1, 2, \cdots, 7$, de manière que les vecteurs colonnes puissent être dénommés A^1, A^2, $\cdots$, A^7 ; on note aussi, à droite, le vecteur second membre β.
On inscrit ensuite, à gauche et face à la valeur qu'elle a dans la solution de base initiale, l'indice i de la variable x_i. Ici, au départ : $x_4 = 1000$, $x_5 = 500$, $x_6 = 1500$, $x_7 = 6750$; les indices i sont donc : 4, 5, 6 et 7. Ces indices i pourront servir à désigner les lignes de la matrice. Ils sont associés aux variables de base : la colonne tout à gauche est donc un *descriptif de la base*.

Lors de toute itération, l'élément de la matrice "centrale" situé à l'intersection d'une ligne i et d'une colonne j sera désigné par $\alpha_{i,j}$; l'élément de la colonne β situé sur la ligne i sera simplement désigné par β_i. Initialement, la colonne β coïncide avec la colonne b des seconds membres des contraintes.

Enfin, on ajoute la ligne de la fonction économique : $z = 4x_1 + 12x_2 + 3x_3$, dont on écrit les coefficients dans la ligne du bas ; le coefficient en colonne A^j sera noté dans la suite Δ_j.

N.B. Sur la ligne des Δ_j dans les colonnes A^4, A^5, A^6, A^7, on écrit des 0, car la fonction économique peut s'écrire :

$$4x_1 + 12x_2 + 3x_3 + 0 \times x_4 + 0 \times x_5 + 0 \times x_6 + 0 \times x_7 = z - 0,$$

les variables d'écart étant de profit nul. De plus, initialement, $z = 0$.

$i \downarrow$	$j \rightarrow$	A^1	A^2	A^3	A^4	A^5	A^6	A^7	β
4		1	0	0	1	0	0	0	1000
5		0	1	0	0	1	0	0	500
6		0	0	1	0	0	1	0	1500
7		3	6	2	0	0	0	1	6750
	$\Delta_j \rightarrow$	4	12	3	0	0	0	0	$z - 0$

On va établir les formules du changement de coordonnnées, réalisées par la sortie d'un vecteur A^s de la base et l'entrée d'un vecteur A^e (x_s est la variable sortante et x_e la variable entrante). On veut faire apparaître dans la colonne e des 0 partout sauf à la ligne s où l'on veut 1, c'est pourquoi, on fait $\ell_i \leftarrow \ell_i - \dfrac{\alpha_{i,e}}{\alpha_{s,e}}\ell_s$ et $\ell_s \leftarrow \dfrac{1}{\alpha_{s,e}}\ell_s$) :

nouvelle valeur de la fonction économique :

$$z' = z + \frac{\beta_s}{\alpha_{s,e}}\Delta_e,$$

z étant l'ancienne valeur (on fait aussi $\ell_\Delta \leftarrow \ell_\Delta - \dfrac{\Delta_e}{\alpha_{s,e}}\ell_s$ et on regarde la colonne β).

$\alpha_{s,e}$ est nommé ***pivot*** ;

nouvelles valeurs des variables de base (l'élément de la ligne k dans la colonne β est la valeur de x_k) :

$$\beta'_k = \beta_k - \frac{\alpha_{i,e}}{\alpha_{s,e}}\beta_s, \ (k \neq s) \text{ et } \beta'_s = \frac{\beta_s}{\alpha_{s,e}}$$

β_k (resp. β_s) étant l'ancienne valeur, β'_s étant la valeur de la variable entrante x_e ;

nouvelle valeur de l'élément de la ligne k de la colonne A^ℓ :

$$\alpha'_{k,\ell} = \alpha_{k,\ell} - \frac{\alpha_{k,e}}{\alpha_{s,e}}\alpha_{s,\ell}, \ (k \neq s),$$

$\alpha_{k,\ell}$ étant l'ancienne valeur ;

nouvelle valeur de l'élément de la ligne s de la colonne A^ℓ :

$$\alpha'_{s,\ell} = \frac{\alpha_{s,\ell}}{\alpha_{s,e}}, \ (k = s),$$

$\alpha_{s,\ell}$ étant l'ancienne valeur (on divise la ligne s, celle du pivot, par le pivot $\alpha_{s,e}$ qui est > 0). Dans ces conditions, comme, à chaque pas, on désire que z' soit supérieur (ou égal) à z, il faudra prendre Δ_e positif ($\dfrac{\beta_s}{\alpha_{s,e}}$ sera positif, car $\beta_s > 0$ ou - exceptionnellement - nul et le pivot $\alpha_{s,e}$

sera pris positif). Heuristiquement, on a intérêt à prendre $\Delta_e > 0$ le plus élevé possible.

C'est pourquoi, le premier critère de Dantzig (admis ici) s'énonce ainsi :

> "Pour déterminer la colonne A^e qui doit entrer dans la base, on choisit celle qui comporte le Δ_j positif le plus grand."
>
> Si tous les Δ_j sont négatifs ou nuls : fin, l'optimum est atteint.

Le premier critère de Dantzig vise à minimiser le nombre d'itérations effectuées au cours du déroulement de l'algorithme. Mais ceci n'est pas toujours le cas, il existe même des exemples, certes rares, pour lesquels l'utilisation de ce critère peut être désastreuse et l'algorithme ne jamais se terminer. C'est pourquoi, d'autres critères (Bland, par exemple) ont été donnés évitant ceci. On ne les développera pas dans ce cours.

On veut encore que, pour tout k, β_k soit non-négatif :

$$\beta'_k = \beta_k - \frac{\alpha_{k,e}}{\alpha_{s,e}}\beta_s \geq 0.$$

Cela s'écrit aussi :

$$\beta_k \geq \alpha_{k,e}.\frac{\beta_s}{\alpha_{s,e}}.$$

Si l'on prend $\dfrac{\beta_s}{\alpha_{s,e}}$ positif, alors β_k, qui est positif, est sûrement plus grand que $\alpha_{k,e}.\dfrac{\beta_s}{\alpha_{s,e}}$ lorsque $\alpha_{k,e}$ est négatif.
Au contraire, lorsque $\alpha_{k,e}$ est positif, on peut diviser les deux membres de l'inégalité par $\alpha_{k,e}$ et l'on a :

$$\frac{\beta_s}{\alpha_{k,e}} \leq \frac{\beta_k}{\alpha_{k,e}}.$$

La condition sera donc réalisée si l'on prend, parmi les quotients $\dfrac{\beta_k}{\alpha_{k,e}}$ obtenus pour toutes les valeurs k, le plus petit positif d'entre eux.

D'où, le deuxième critère de Dantzig :

> "Pour déterminer la colonne A^s qui doit sortir de la base, on choisit celle d'indice s tel que $\dfrac{\beta_k}{\alpha_{k,e}}$ soit le plus petit positif (l'indice e ayant été déterminé par l'application du premier critère "(en posant $\dfrac{1}{0} = \infty$).
>
> Si tous ces rapports sont négatifs, alors l'optimum est rejeté à l'infini : fin (ce cas ne se présente pas dans les (PL) ayant un contexte économique).

Tels sont les deux critères sur lesquels est fondé l'***algorithme de Dantzig***. L'optimum sera atteint lorsque tous les Δ_j relatifs aux variables hors-base seront négatifs ou nuls, ceux relatifs aux variables de base étant nécessairement nuls.

2.1.2 Algorithme

1. Test des Δ_j : si tous les $\Delta_j \leq 0$ (pour le max), arrêt : optimum.
S'il existe $\Delta_j > 0$, le plus grand $\Delta_j \rightarrow$ n° e de la variable rentrante dans la base.

2. Deuxième règle de Dantzig : min $\left(\dfrac{\beta_k}{\alpha_{k,e}}\right)$ pour $k \in I_B$ tels que $\alpha_{k,e} > 0 \rightarrow$ n° s de la variable sortante de la base, $\alpha_{s,e}$=pivot.

3. Calcul du nouveau tableau du simplexe par combinaison de lignes :
Sur la ligne s du pivot, $\alpha_{s,\ell} \rightarrow \dfrac{1}{\alpha_{s,e}} \times \alpha_{s,\ell}$ et $\beta_s \rightarrow \dfrac{\beta_s}{\alpha_{s,e}}$.
Sur autres lignes, $\alpha_{k,\ell} \rightarrow \alpha_{k,\ell} - \dfrac{\alpha_{k,e}}{\alpha_{s,e}}\alpha_{s,\ell}$ et $\beta_k \rightarrow \beta_k - \dfrac{\alpha_{k,e}}{\alpha_{s,e}}\beta_s$.
$\rightarrow$ retour au 1.

Remarque : Le premier critère est *heuristique* (on tente localement de s'approcher au plus vite de l'optimum, c'est une démarche "gourmande") : ce critère est donc "facultatif". Le second, en revanche, est obligatoire pour aller de solution réalisable en solution réalisable, (c'est-à-dire pour préserver la positivité des variables de base).

2.1.3 Règle pratique : méthode des tableaux

Pour rendre pratique l'application manuelle des critères de Dantzig, on perfectionne le tableau initial en lui ajoutant une colonne où seront indiqués les c_i (coefficients de la fonction économique sous sa forme initiale, pour chaque valeur i des indices de ligne figurant dans le tableau) et une ligne où seront notés les c_j (coefficients de la fonction économique sous sa forme initiale, correspondant cette fois aux indices j immuables, des colonnes). Dans le tableau de droite, pour la colonne β, on indique les valeurs des variables de la base courante (pour la base initiale associée au sommet O, on rappelle qu'on a $\beta^{(0)} = b$).

Le repérage de la colonne A^e qui doit entrer dans la base est simple : il suffit de lire la ligne des Δ_j et de sélectionner celui des Δ_j qui est le plus grand et positif, si on applique le premier critère de Dantzig.

Ici, c'est $\Delta_2 = 12$, dans la colonne 2. On a donc $e = 2$ et c'est A^2 la deuxième colonne, qui entrera dans la base, la variable associée étant x_2.

	c_i	$i\downarrow$	$j \rightarrow$	A^1	A^2	A^3	A^4	A^5	A^6	A^7	β	$\beta_i/\alpha_{i,e}$
	0	4		1	0	0	1	0	0	0	1000	∞
$s = 5$	0	$\boxed{5}$		0	$\boxed{1}$	0	0	1	0	0	500	500(*)
	0	6		0	0	1	0	0	1	0	1500	∞
	0	7		3	6	2	0	0	0	1	6750	1125
			c_j	4	12	3	0	0	0	0		
			Δ_j	4	12	3	0	0	0	0	$z - 0$	
					$\uparrow e = 2$							

Dans la suite, on n'écrit que rarement la ligne c_j (car il s'agit de données initiales). De même, on remplacera souvent A^j par j s'il n'y a pas d'ambigüité.

On calcule les quotients $\dfrac{\beta_i}{\alpha_{i,e}}$, c'est-à-dire $\dfrac{\beta_i}{\alpha_{i,2}}$, puisque e est désormais connu $\boxed{e=2}$; les valeurs de i sont : 4, 5, 6 et 7 et on a donc (on ne s'inquiétera pas du fait qu'on pose, par exemple : $\dfrac{1000}{0}=\infty$; c'est une simple convention, qui se justifie si 0 représente aussi bien ε très petit, positif) :

$$\frac{\beta_4}{\alpha_{4,2}}=\frac{1000}{0}=\infty,\quad \frac{\beta_5}{\alpha_{5,2}}=\frac{500}{1}=500,\quad \frac{\beta_6}{\alpha_{6,2}}=\frac{1500}{0}=\infty,\quad \frac{\beta_7}{\alpha_{7,2}}=\frac{6750}{6}=1125\ ;$$

on peut écrire ces résultats sur une nouvelle colonne $\dfrac{\beta_i}{\alpha_{i,e}}$ (e, indice de la colonne entrante), immédiatement à droite de β, le vecteur courant des seconds membres.

On prend alors le rapport le plus petit positif ; c'est 500, qui correspond à l'indice $i=5$; ce sera donc la cinquième colonne (soit A^5) qui sortira de la base ; l'indice de la variable sortant de la base est donc $\boxed{s=5}$.

Il faut maintenant appliquer les formules de changement de coordonnées (avec $e=2$ et $s=5$) :

$$z'=z+\frac{\beta_5}{\alpha_{5,2}}\Delta_2,\quad \beta'_k=\beta_k-\alpha_{k,2}\frac{\beta_5}{\alpha_{5,2}}$$

$$\alpha'_{k,\ell}=\alpha_{k,\ell}-\alpha_{k,2}\frac{\alpha_{5,\ell}}{\alpha_{5,2}}\quad (k\neq 5)$$

$$\alpha'_{5,\ell}=\frac{\alpha_{5,\ell}}{\alpha_{5,2}}\text{ et }\beta'_5=\frac{\beta_5}{\alpha_{5,2}}.$$

L'élément $\alpha_{s,e}$ (ici $\alpha_{5,2}$) est le pivot de la transformation.

Plutôt que d'appliquer, élément par élément, les formules ci-dessus, on emploie les règles pratiques de transformation du tableau très simples (qui leur sont équivalentes) suivantes :

1) on repère le pivot à l'intersection la ligne s (indice de ligne correspondant à l'indice de la colonne qui sort de la base) et de la colonne e (indice de la colonne qui rentre dans la base) ;

2) on divise les éléments de la ligne s par le pivot $\alpha_{s,e}$ (c'est-à-dire que dans le tableau central, pour $j=1,2,\cdots,7$, et la colonne de droite, on remplace l'indice s du tableau de gauche, deuxième colonne, par l'indice e de la colonne qui entre dans la base ; on remplace le coefficient c_s du tableau de gauche, première colonne, par la valeur c_e du coefficient de la fonction économique, e étant l'indice de la colonne qui rentre dans la base) ;

3) parmi les autres lignes du tableau, celles qui comportent un 0 dans la colonne e qui entre dans la base ($\alpha_{k,e}=0$ où $k\neq s$), ne sont pas modifiées ; la variable entrante x_e est absente dans l'expression de la variable de l'ancienne base x_k (qui reste dans la nouvelle base) ;

4) les éléments des autres lignes du tableau qui comportent un élément différent de 0 dans la colonne qui entre dans la base ($\alpha_{k,e}\neq 0$ où $k\neq s$), sont modifiés comme suit :
- on multiplie les éléments de la nouvelle ligne du pivot (désormais ligne e) par cet élément $\alpha_{k,e}$ différent de 0 et on soustrait les résultats aux éléments correspondants de la ligne à modifier ;
- ce traitement est applicable aux éléments du vecteur des seconds membres (colonne β) ;

- il s'applique également aux éléments de la ligne z de la fonction économique ; en particulier, pour le second membre de la ligne z, on inscrit $z - \dfrac{\beta_s}{\alpha_{s,e}}\Delta_e$.

En appliquant ceci au tableau précédent, on aura :

1) le pivot est le 1 de la ligne 5 et de la colonne 2 ;

2) la ligne 5, divisée par le pivot égal à 1, reste donc la même ; on remplace, dans le tableau de gauche, 5 par 2 (c'est-à-dire s par e) et immédiatement à gauche 0 par 12 (c'est-à-dire c_5 par c_2) ;

3) les lignes 4 et 6 ne subissent pas de modification (car elles comportent un 0 dans la colonne entrante, c'est-à-dire la colonne 2) ;

4) pour la ligne 7, on prend les anciens éléments de la ligne 7 auxquels on enlève les éléments de la ligne 5 multipliés par 6 et pour la ligne critère, on enlève les éléments de la ligne 5 multipliés par 12, soit

$$
\begin{array}{rccccccccc}
 & & \downarrow & & & & & & & \\
 & \boxed{3} & 6 & 2 & 0 & 0 & 0 & 1 & & \boxed{6750} \\
- & 0 & 6 & 0 & 0 & 6 & 0 & 0 & & 3000 \\
\hline
 & 3 & 0 & 2 & 0 & -6 & 0 & 1 & & 3750
\end{array}
$$

et

$$
\begin{array}{rccccccccc}
 & & \downarrow & & & & & & & \\
 & 4 & 12 & 3 & 0 & 0 & 0 & 0 & & z-0 \\
- & 0 & 12 & 0 & 0 & 12 & 0 & 0 & & 6000 \\
\hline
 & 4 & 0 & 3 & 0 & -12 & 0 & 0 & & z-6000
\end{array}
$$

Dans ces conditions, le nouveau tableau se présente ainsi :

c_i	$i \downarrow$	$j \rightarrow$	A^1	A^2	A^3	A^4	A^5	A^6	A^7	$\beta^{(1)}$
0	4		1	0	0	1	0	0	0	1000
12	2		0	1	0	0	1	0	0	500
0	6		0	0	1	0	0	1	0	1500
0	7		3	0	2	0	-6	0	1	3750
		Δ_j	4	0	3	0	-12	0	0	$z - 6000$

et on est prêt pour une nouvelle itération.

	c_i	$i\downarrow$	$j\rightarrow$	A^1	A^2	A^3	A^4	A^5	A^6	A^7	$\beta^{(1)}$	$\beta_i/\alpha_{i,e}$
$s=4$	0	4		$\boxed{1}$	0	0	1	0	0	0	1000	1000
	12	2		0	1	0	0	1	0	0	500	∞
	0	6		0	0	1	0	0	1	0	1500	∞
	0	7		3	0	2	0	-6	0	1	3750	1250
			Δ_j	4	0	3	0	-12	0	0	$z-6000$	
				$\uparrow e=1$								

Deuxième itération

	c_i	$i\downarrow$	$j\rightarrow$	A^1	A^2	A^3	A^4	A^5	A^6	A^7	$\beta^{(2)}$	$\beta_i/\alpha_{i,e}$
	4	1		1	0	0	1	0	0	0	1000	∞
	12	2		0	1	0	0	1	0	0	500	∞
	0	6		0	0	1	0	0	1	0	1500	1500
$s=7$	0	7		0	0	$\boxed{2}$	-3	-6	0	1	750	375
			Δ_j	0	0	3	-4	-12	0	0	$z-10000$	
						$\uparrow e=3$						

Troisième itération

	c_i	$i\downarrow$	$j\rightarrow$	A^1	A^2	A^3	A^4	A^5	A^6	A^7	$\beta^{(3)}$	$\beta_i/\alpha_{i,e}$
	4	1		1	0	0	1	0	0	0	1000	1000
	12	2		0	1	0	0	1	0	0	500	∞
$s=6$	0	6		0	0	0	$\boxed{3/2}$	3	1	$-1/2$	1125	750
	3	3		0	0	1	$-3/2$	-3	0	$1/2$	375	négatif
			Δ_j	0	0	0	$1/2$	-3	0	$-3/2$	$z-11125$	
							$\uparrow e=4$					

Quatrième itération

c_i	$i\downarrow$	$j\rightarrow$	A^1	A^2	A^3	A^4	A^5	A^6	A^7	$\beta^{(4)}$
4	1		1	0	0	0	-2	$-2/3$	$1/3$	250
12	2		0	1	0	0	1	0	0	500
0	4		0	0	0	1	2	$2/3$	$-1/3$	750
3	3		0	0	1	0	0	1	0	1500
		Δ_j	0	0	0	0	-4	$-1/3$	$-4/3$	$z-11500$

L'optimum est atteint, puisque tous les Δ_j, relatifs aux variables hors-base, sont négatifs.

On est évidemment parvenu à la même solution que celle trouvée précédemment par d'autres voies :

$$\boxed{x_1 = 250, \quad x_2 = 500, \quad x_3 = 1500, \quad z = 11500.}$$

On a pu résoudre ce problème manuellement uniquement parce que le nombre de variables est très petit. Lorsque le nombre de variables dépasse la dizaine, il ne peut être question de calculer à la main ; l'algorithme s'implémente informatiquement et il est capable de résoudre des programmes linéaires comportant des centaines de milliers de variables et des dizaines de milliers de contraintes. Le cas échéant, on fait appel à des méthodes de décomposition lorsque le problème est de trop grande taille.

Ces résultats témoignent de la puissance de l'outil d'exploration du combinatoire constitué par la programmation linéaire et l'algorithme du simplexe.

2.2 Paramétrage des coefficients de la fonction économique

Critique de la programmation linéaire

1) De par la nature mathématique du problème, s'il comporte n variables principales et m contraintes, d'où l'introduction de m variables d'écart, la solution devra comporter :

$$(n+m)-m=n$$

variables nulles au moins. Ces variables nécessairement nulles sont, indistinctement, des variables principales ou des variables d'écart. Il en résulte que, parmi les activités qu'on se proposait, un certain nombre peuvent être réduites à néant, ce qui peut comporter dans certains cas, des inconvénients économiques.

2) La solution optimale du programme linéaire est une solution "isolée", laissant tout ignorer des solutions voisines.

3) Toute modification de la valeur des coefficients de la fonction économique, du second membre ou de la matrice est susceptible de provoquer un changement de solution (passage à un autre sommet du polyèdre).

Or d'où ces coefficients proviennent-ils ?

- des documents de la comptabilité pour tout ce qui concerne prix de revient, profits, quantités de matières,...
- d'analyses spéciales (temps de fabrication, de réaction, ...)
- d'enquêtes, d'études de marché (goûts de la clientèle, limites supérieures de vente...)

Il est bien clair, en conséquence, même en ce qui concerne les données extraites de la comptabilité, que les chiffres ainsi obtenus sont sujets à caution et ne peuvent être considérés comme suffisamment exacts pour garantir une solution "isolée", "exceptionnelle" du problème.

Cet ensemble de critiques a heureusement conduit les mathématiciens à fournir un tableau plus complet des solutions optimales admissibles, en fonction des variations des paramètres qui peuvent être contestés, grâce aux techniques de paramétrisation.

On n'envisagera pas ici le paramétrage des coefficients de la matrice, mais seulement celui des coefficients de la fonction économique (ceux du second membre des contraintes étant un problème qui se ramène au précédent par dualité).

On suppose, par exemple, que le coefficient c_1 de la fonction économique, soit 4 (on rappelle que chaque article P_1 laissait un profit de 4 unités monétaires), ne paraisse pas suffisamment bien déterminé pour figurer comme tel dans le programme.

On va poser : $c_1' = 4(1+\lambda)$; en faisant varier λ de -1 à $+\infty$, c_1 variera de 0 à $+\infty$; cette vue mathématique des choses recouvre largement l'indétermination économique du coefficient contesté.

On part de nouveau du tableau optimal, mais en remplaçant c_1 par $4(1+\lambda)$. Seuls les Δ_j et la valeur de z se trouvent modifiés :

c_i	i	1	2	3	4	5	6	7	$\beta(4)$
$4(1+\lambda)$	1	1	0	0	0	-2	$-\frac{2}{3}$	$\frac{1}{3}$	250
12	2	0	1	0	0	1	0	0	500
0	4	0	0	0	1	2	$\frac{2}{3}$	$-\frac{1}{3}$	750
3	3	0	0	1	0	0	1	0	1500
	c_j	$4(1+\lambda)$	12	3	0	0	0	0	
	Δ_j	0	0	0	0	$-4+8\lambda$	$-\frac{1}{3}+\frac{8}{3}\lambda$	$-\frac{4}{3}-\frac{4}{3}\lambda$	$z-11500-1000\lambda$

Le nouveau tableau n'est plus nécessairement optimal, puisque les Δ_j dépendent désormais de λ ; il faut donc étudier comparativement ces nouveaux Δ_j afin de connaître les valeurs de λ pour lesquelles certains sont positifs et déterminer, dans cette hypothèse, lequel d'entre eux est le plus grand, ce manière à continuer le calcul selon les critères de Dantzig.

Un tableau peut résumer cette recherche :

λ	-1		$\frac{1}{8}$		$\frac{1}{2}$		$+\infty$
$-4+8\lambda$		$-$		$-$	0	$+$	
$-\frac{1}{3}+\frac{8}{3}\lambda$		$-$	0	$+$		$+$	
$-\frac{4}{3}-\frac{4}{3}\lambda$		$-$		$-$		$-$	
	sol	antérieure	$\Vert$	calcul	à	poursuivre	

On en déduit que, si $\lambda < \frac{1}{8}$, tous les Δ_j sont négatifs, donc qu'on a bien atteint l'optimum. Cet optimum est constitué par la solution antérieure (point Q du polyèdre). On voit en outre que $-4+8\lambda > -\frac{1}{3}+\frac{8}{3}\lambda$ si $\lambda > \frac{11}{16}$; par conséquent, pour : $\frac{1}{8} < \lambda < \frac{11}{16}$, on doit faire entrer la colonne 6 dans la base ; et, pour $\lambda > \frac{11}{16}$, c'est la colonne 5 qui doit y entrer.

Mais, si on fait le calcul, on constate (dans le cas présent) qu'on aboutit néanmoins à une seule nouvelle solution optimale pour $\lambda > \frac{1}{8}$: $x_1 = 1000$, $x_2 = 500$, $x_3 = 375$, $x_6 = 1125$, $z = 11125 + 4000\lambda$ (point R du polyèdre).

Si $\lambda = \frac{1}{8}$, tout point de l'arête QR du polyèdre est solution optimale et $z = 11625$; on a $x_2 = 500$ et toutes valeurs telles que $3x_1 + 2x_3 = 3750$, avec, comme limites, pour x_1 : 250 et 1000, et, pour x_3 : 1500 et 375 conviennent et donnent le même résultat.

2.3 Dégénérescences

2.3.1 Dégénérescences de première espèce

Pour certains programmes linéaires, l'optimum peut être réalisé en plusieurs points de la frontière du domaine admissible : tous les points d'une arête ou d'une facette sont alors optimaux.

Ainsi, soit le programme :

$$\left\{\begin{array}{rcrcl} 6x_1 & + & 4x_2 & = & z[\max] \\ -3x_1 & + & 2x_2 & \leq & 4 \\ 3x_1 & + & 2x_2 & \leq & 16 \\ x_1 & & & \leq & 3 \\ x_1 & , & x_2 & \geq & 0 \end{array}\right.$$

$$\text{soit}\left\{\begin{array}{rcrcrcrcrcl} 6x_1 & + & 4x_2 & & & & & & & = & z[\max] \\ -3x_1 & + & 2x_2 & + & x_3 & & & & & = & 4 \\ 3x_1 & + & 2x_2 & & & + & x_4 & & & = & 16 \\ x_1 & & & & & & & + & x_5 & = & 3 \\ x_1 & , & x_2 & , & x_3 & , & x_4 & , & x_5 & \geq & 0 \end{array}\right. .$$

Les tableaux successifs conduisant à la solution se présentent de la manière suivante :

$$\begin{array}{r|cc|c|ccccc|c|c|} & c_i & i & & A^1 & A^2 & A^3 & A^4 & A^5 & & \beta^{(0)} = b \\ & 0 & 3 & & -3 & 2 & 1 & 0 & 0 & & 4 \\ & 0 & 4 & & 3 & 2 & 0 & 1 & 0 & & 16 \\ s \leftarrow & 0 & 5 & & \boxed{1} & 0 & 0 & 0 & 1 & & 3 \\ & & & \Delta_j & 6 & 4 & 0 & 0 & 0 & & z - 0 \\ & & & & \uparrow e & & & & & & \end{array}$$

$$\begin{array}{r|cc|c|ccccc|c|c|} & c_i & i & & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & & \beta^{(1)} \\ & 0 & 3 & & 0 & 2 & 1 & 0 & 3 & & 13 \\ s \leftarrow & 0 & 4 & & 0 & \boxed{2} & 0 & 1 & -3 & & 7 \\ & 6 & 1 & & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & & 3 \\ & & & \Delta_j & 0 & 4 & 0 & 0 & -6 & & z - 18 \\ & & & & & \uparrow e & & & & & \end{array}$$

$$\begin{array}{r|cc|c|ccccc|c|c|} & c_i & i & & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & & \beta^{(2)} \\ s \leftarrow & 0 & 3 & & 0 & 0 & 1 & -1 & \boxed{6} & & 6 \\ & 4 & 2 & & 0 & 1 & 0 & 1/2 & -3/2 & & 7/2 \\ & 6 & 1 & & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & & 3 \\ & & & \Delta_j & 0 & 0 & 0 & -2 & 0 & & z - 32 \\ & & & & & & & & \uparrow e & & \end{array}$$

	c_i	i	1	2	3	4	5	$\beta^{(3)}$
	0	5	0	0	1/6	−1/6	1	1
	4	2	0	1	1/4	1/4	0	5
	6	1	1	0	−1/6	1/6	0	2
Δ_j			0	0	0	−2	0	$z-32$

Sur le troisième tableau, on constate que $\Delta_5 = 0$, alors que la colonne est hors-base. Bien qu'on ait atteint la valeur optimale de la fonction économique, si l'on considère que Δ_5 est le plus grand des Δ_j non négatifs correspondant aux variables hors-base (troisième tableau), on peut faire entrer la variable x_5 dans la base, d'où sort la variable x_3, et on a alors $\Delta_3 = 0$ (quatrième tableau).

Ce fait traduit que la fonction économique $z = 6x_1 + 4x_2$ est parallèle à l'hyperplan (ici la droite) limitant le demi-plan déterminé par la contrainte $3x_1 + 2x_2 \leq 16$; les sommets $B(2; 5)$ et $C(3; 7/2)$ sont tous deux optimaux.

L'enveloppe convexe de ces sommets, c'est-à-dire le segment $[BC]$, est telle que chacun de ses points donne à z la valeur optimale 32. C'est le cas dit de ***dégénérescence de première espèce***.

2.3.2 Dégénérescence de deuxième espèce

Pour certains programmes linéaires, une (ou plusieurs) variables de la base optimale peut être nulle. Voici un exemple détaillé : on ajoute au programme précédent la contrainte $x_1 + 4x_2 \leq 22$, soit

$$x_1 + 4x_2 + x_6 = 22$$

et on prend comme fonction économique à maximiser :

$$z = x_1 + x_2$$

(au lieu de $z = 6x_1 + 4x_2$).

On va à nouveau traiter le programme par la méthode des tableaux. On obtient les résultats suivants, ayant choisi arbitrairement, au deuxième tableau, de faire sortir la variable x_6 de la base (on avait le choix entre x_4 et x_6).

	c_i	$i\downarrow$	$j\rightarrow$ 1	2	3	4	5	6	β
$s\leftarrow$	0	3	−3	$\boxed{2}$	1	0	0	0	4
	0	4	3	2	0	1	0	0	16
	0	5	1	0	0	0	1	0	3
	0	6	1	4	0	0	0	1	22
Δ_j			1	1	0	0	0	0	$z-0$
				$\uparrow e$					

	c_i	$i\downarrow$	$j\rightarrow$	1	2	3	4	5	6	β	$\beta_i/\alpha_{i,e}$
	1	2		$-3/2$	1	$1/2$	0	0	0	2	<0
	0	4		6	0	-1	1	0	0	12	$2*$
	0	5		1	0	0	0	1	0	3	3
$s\leftarrow$	0	6		$\boxed{7}$	0	-2	0	0	1	14	$2*$
			Δ_j	$5/2$	0	$-1/2$	0	0	0	$z-2$	
				$\uparrow e$							

	c_i	$i\downarrow$	$j\rightarrow$	1	2	3	4	5	6	β	$\beta_i/\alpha_{i,e}$
	1	2		0	1	$1/14$	0	0	$3/14$	2	70
$s\leftarrow$	0	4		0	0	$\boxed{5/7}$	1	0	$-6/7$	0	$0*$
	0	5		0	0	$2/7$	0	1	$-1/7$	1	$7/2$
	1	1		1	0	$-2/7$	0	0	$1/7$	2	<0
			Δ_j	0	0	$3/14$	0	0	$-5/14$	$z-7$	
						$\uparrow e$					

c_i	$i\downarrow$	$j\rightarrow$	1	2	3	4	5	6	β
1	2		0	1	0	$-1/10$	0	$3/10$	5
0	3		0	0	1	$7/5$	0	$-6/5$	0
0	5		0	0	0	$-2/5$	1	$1/5$	1
1	1		1	0	0	$2/5$	0	$-1/5$	22
		Δ_j	0	0	0	$-3/10$	0	$-1/10$	$z-7$

Au troisième tableau apparaît une valeur nulle pour l'une des variables de base : x_4. Le plus petit des rapport $\dfrac{\beta_i}{\alpha_{i,3}}$ positifs ou nuls est, évidemment : $0 = \dfrac{0}{5/7}$. Après pivotage, on retrouve une autre variable de base nulle, c'est x_3. Notons aussi que la base associée à ce troisième tableau est optimale ($z = 7$), mais pourtant Δ_3 est positif ! C'est un effet de la dégénérescence.

Chaque fois qu'on obtient une ou plusieurs variables de base nulles, on est dans le cas de dégénérescence de seconde espèce. La raison géométrique en est qu'il passe, par un des sommets au moins, un ou plusieurs hyperplans (ici droites) supplémentaires (ici, par le sommet B, au lieu de passer $n = 2$ droites, il en passe 3).

Remarques :

1. Au cas où l'on aurait, au deuxième pas, fait sortir la variable x_4 au lieu de la variable x_6 :

c_i	$i\downarrow$	$j\rightarrow$	1	2	3	4	5	6	β
1	2		0	1	$1/4$	$1/4$	0	0	5
1	1		1	0	$-1/6$	$1/6$	0	0	2
0	5		0	0	$1/6$	$-1/6$	1	0	1 ,
0	6		0	0	$-5/6$	$-7/6$	0	1	0
		Δ_j	0	0	$-1/12$	$-5/12$	0	0	$z-7$

on ne se serait pas aperçu de la dégénérescence autrement que par l'apparition de la valeur $x_6 = 0$, Δ_3 et Δ_4 étant négatifs. Cela montre que la ligne 6 et la colonne 6 pouvaient être supprimées (la contrainte (4) est redondante : *cf* la remarque 2.).

2. Si on multiplie la première inéquation : $-3x_1+2x_2 \leq 4$ par $5/6$ et la seconde : $3x_1+2x_2 \leq 16$ par $7/6$ et si on les ajoute, on trouve la dernière contrainte : $x_1+4x_2 \leq 22$ qui est une conséquence des deux autres. Cette dernière inéquation ne joue en fait aucun rôle dans le problème et peut-être supprimée.

2.4 Démarrage de l'algorithme du simplexe : problème de la base initiale

2.4.1 Cas "favorable"

On se place dans le cas où toutes les m contraintes d'un programme linéaire sont initialement sous forme d'inéquations, comportant p *variables principales*, du type :

$$\sum_{j=1}^{p} a_{i,j} x_j \leq b_i \text{ où } b_i \geq 0 \ (i = 1, 2, \cdots, m).$$

Tel est le cas dans l'exemple du problème de l'atelier, traité dans la section précédente.

Dans chacune des m contraintes, on ajoute une variable d'écart :

$$\sum_{j=1}^{p} a_{i,j} x_j + x_{\bar{i}} = b_i.$$

Les m variables d'écart $x_{\bar{i}}$ forment une base de matrice I_m dont les éléments diagonaux sont égaux à 1 et les non diagonaux égaux à 0. Les $p = n - m$ variables principales $x_1, x_2, \cdots, x_p$ sont hors-base.

Le sommet associé est l'origine O (dans l'espace des variables principales : $\mathbb{R}^p$).

L'expression des variables de base en fonction des variables hors-base est immédiate :

$$x_{\bar{i}} = b_i - \sum_{j=1}^{p} a_{i,j} x_j \ (i = 1, 2, \cdots, m).$$

Enfin, l'expression initiale de la fonction économique : $z = \sum_{j=1}^{p} c_j . x_j$ fait que z est directement exprimée uniquement en fonction des variables hors-base :

$$z = \sum_{j=1}^{p} c_j . x_j + (0.x_{\bar{1}} + 0.x_{\bar{2}} + \cdots + 0.x_{\bar{m}}).$$

Le tableau associé à cette base initiale est :

$$
\begin{array}{c}
i \\
\boxed{\begin{array}{c} \bar{1} \\ \bar{2} \\ \vdots \\ \bar{m} \end{array}}
\end{array}
\quad
\begin{array}{cccc|cccc}
1 & 2 & \cdots & p & \bar{1} & \bar{2} & \cdots & \bar{m} \\
\hline
a_{1,1} & a_{1,2} & \cdots & a_{1,p} & 1 & 0 & \cdots & 0 \\
a_{2,1} & a_{2,2} & \cdots & a_{2,p} & 0 & 1 & \ddots & \vdots \\
\vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\
a_{m,1} & a_{m,2} & \cdots & a_{m,p} & 0 & \cdots & 0 & 1 \\
\hline
c_1 & c_2 & \cdots & c_p & 0 & 0 & \cdots & 0
\end{array}
\quad
\begin{array}{c}
\beta^{(0)} = b \\
\hline
b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \\
\hline
z - 0
\end{array}
$$

On peut se reporter à l'exemple de l'atelier pour l'illustration de ce cas.

2.4.2 Cas où une solution est connue à l'avance

Il arrive fréquemment qu'un "système" dont on veut optimiser la marche possède déjà un point de fonctionnement, c'est-à-dire dans le cadre du programme linéaire une *solution admissible* (on rappelle qu'une telle solution vérifie les $m+n$ contraintes du (PL)). Cette solution ne sera utilisable pour la résolution de l'algorithme du simplexe, que s'il s'agit d'une solution de base réalisable, c'est-à-dire comportant, au plus, m variables positives (les autres étant nulles) et telles que les m colonnes de la matrice A associées à ces variables forment une matrice régulière (inversible), notée B.

Le démarrage de l'algorithme du simplexe nécessite de connaître l'expression des m variables de base et de z, en fonction des variables hors-base.

On rappelle que le programme linéaire (après introduction des variables d'écart) s'écrit : $A.x = b$, $x \geq 0$, $\max z = {}^t c.x$. Avec la base, de matrice B, il vient :

$$N.X_N + B.X_B = b \text{ et } z = {}^tC_N.X_N + {}^tC_B.X_B.$$

Si on connaît B^{-1}, il vient l'expression cherchée

$$\left\{ \begin{array}{l} X_B = B^{-1}.b - B^{-1}.N.X_N \\ z = {}^tC_B.B^{-1}.b + ({}^tC_N - {}^tC_B.B^{-1}.N)X_N = \widetilde{z}_B + {}^t\Delta_N.X_N \end{array} \right.$$

à partir de laquelle on peut démarrer la résolution. Le tableau associé s'écrit (sous forme matricielle) :

$$\left\{ \begin{array}{l} B^{-1}.N.X_N + I_m.X_B = B^{-1}.b \\ {}^t0.X_B + {}^t\Delta_N.X_N = z - \widetilde{z}_B \ (\widetilde{z}_B = {}^tC_B.B^{-1}.b) \end{array} \right.$$

On remarque que, pour obtenir les expressions ci-dessous, il suffit de connaître $B^{-1}.N$ et $B^{-1}.b$ (et donc pas nécessairement B^{-1} explicitement).

Voici un exemple de ce cas, avec le (PL) ci-dessous :

$$\left\{ \begin{array}{ccccccccccc} x_1 & + & 3x_2 & + & 5x_3 & + & x_4 & + & 4x_5 & = & z[\max] \\ x_1 & + & x_2 & - & x_3 & + & x_4 & & & = & 1 \\ 2x_1 & & & + & 4x_3 & + & 2x_4 & + & x_5 & = & 7 \\ x_1 & + & 6x_2 & + & x_3 & & & + & 2x_5 & = & 19 \\ x_1 & , & x_2 & , & x_3 & , & x_4 & , & x_5 & \geq & 0 \end{array} \right.$$

Soit la “solution parachutée” : $x_1 = 0$, $x_2 = 2$, $x_3 = 1$, $x_4 = 0$ et $x_5 = 3$. On vérifie aisément qu'il s'agit bien d'une solution admissible.

On examine s'il s'agit d'une solution de base ; elle comporte bien $m = 3$ variables positives : x_2, x_3 et x_5 (une solution qui comporterait plus de m variables positives ne saurait être de base). La matrice B associée est formée des colonnes A^2, A^3 et A^5 de la matrice A :

$$B = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 4 & 1 \\ 6 & 1 & 2 \end{bmatrix} ;$$

on vérifie que B est régulière, puisque $\det B = 1$. Le calcul de B^{-1} fournit :

$$B^{-1} = \begin{bmatrix} 7 & 2 & -1 \\ 6 & 2 & -1 \\ -24 & -7 & 4 \end{bmatrix}.$$

Le système de contraintes explicites : $N.X_N + B.X_B = b$ s'écrit :

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 2 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} x_1 \\ x_4 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 4 & 1 \\ 6 & 1 & 2 \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} x_2 \\ x_3 \\ x_5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 7 \\ 19 \end{bmatrix}.$$

Le produit à gauche par B^{-1} fournit : $B^{-1}.N.X_N + I_3.X_B = B^{-1}.b$, soit :

$$\begin{bmatrix} 10 & 11 \\ 9 & 10 \\ -34 & -38 \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} x_1 \\ x_4 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} x_2 \\ x_3 \\ x_5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{bmatrix}.$$

On retrouve dans le second membre $\beta = B^{-1}.b = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{bmatrix}$, c'est-à-dire les valeurs propres dans la solution “parachutée” plus haut.

Sous forme algébrique, ce système s'écrit :

$$\left\{ \begin{array}{rcrcrcrcrcl} 10x_1 & + & 11x_4 & + & x_2 & & & & & = & 2 \\ 9x_1 & + & 10x_4 & & & + & x_3 & & & = & 1 \\ -34x_1 & - & 38x_4 & & & & & + & x_5 & = & 3 \end{array} \right.$$

Reste à exprimer $z = x_1 + 3x_2 + 5x_3 + x_4 + 4x_5$ uniquement en fonction des variables hors-base, ce qui est aisé, puisque le système ci-dessus fournit l'expression de chaque variable de base en fonction des variables hors-base :

$$z = x_1 + (2 - 10x_1 - 11x_4) + 5(1 - 9x_1 - 10x_4) + x_4 + 4(3 + 34x_1 + 38x_4)$$

soit $z = 23 + 62x_1 + 70x_4$.

Pour ce faire, on aurait aussi pu procéder matriciellement :

$$z = {}^tC_B.B^{-1}.b + [{}^tC_N - {}^tC_B.B^{-1}.N].X_N \ ;$$

or on a déjà calculé ci-dessus $B^{-1}.N = \begin{bmatrix} 10 & 11 \\ 9 & 10 \\ -34 & -38 \end{bmatrix}$ et $B^{-1}.b = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{bmatrix}$; puisque ${}^tC_B = [3,4,5]$ et ${}^tC_N = [1,1]$, il vient :

$$z = [3,4,5].\begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{bmatrix} + \left\{ [1,1] - [3,4,5].\begin{bmatrix} 10 & 11 \\ 9 & 10 \\ -34 & -38 \end{bmatrix} \right\}.\begin{bmatrix} x_1 \\ x_4 \end{bmatrix} = 23 + 62x_1 + 70x_4.$$

Le tableau correspondant à cette solution de base est le suivant :

i	1	2	3	4	5	$\beta^{(0)} = B^{-1}.b$
2	10	1	0	11	0	2
3	9	0	1	10	0	1
5	-34	0	0	-38	1	3
	62	0	0	70	0	$z - 23$

La base proposée n'est pas optimale ; en faisant entrer x_4 en base, on obtient l'optimum en une seule itération : $\boxed{z = 30 \text{ et } x_1 = 0,\ x_2 = 0{,}9,\ x_3 = 0,\ x_4 = 0{,}1 \text{ et } x_5 = 6{,}8}$.

2.4.3 Cas d'une base "évidente" : $B = I$

Soit le programme linéaire :

$$\begin{cases} -1000y_1 - 500y_2 - 1500y_3 - 750y_4 = z[\max] \\ y_1 + 3y_4 - y_{\bar{1}} = 4 \\ y_2 + 6y_4 - y_{\bar{2}} = 12 \\ y_3 + 2y_4 - y_{\bar{3}} = 3 \\ y_1\ ,\ y_2\ ,\ y_3\ ,\ y_4\ ,\ y_{\bar{1}}\ ,\ y_{\bar{2}}\ ,\ y_{\bar{3}} \geq 0 \end{cases}$$

Les variables d'écart $y_{\bar{1}}$, $y_{\bar{2}}$ et $y_{\bar{3}}$ forment certes une base de matrice $B' = -I$; mais cette base n'est pas admissible. En effet, si on annule les variables hors-base : y_1, y_2, y_3 et y_4, il vient $y_{\bar{1}} = -4$, $y_{\bar{2}} = -12$, $y_{\bar{3}} = -3$, ce qui viole les contraintes de non-négativité des variables (les contraintes dites "implicites").

En revanche, les variables y_1, y_2 et y_3 forment une base "évidente", c'est-à-dire de matrice $B = I$. Après avoir exprimé z en fonction des variables hors-base :

$$z = -14500 + 2250y_4 - 1000y_{\bar{1}} - 500y_{\bar{2}} - 1500y_{\bar{3}},$$

on obtient alors l'optimum en une itération.

Le programme ci-dessus est en fait le "dual" du programme linéaire associé à l'exemple de l'atelier ; il sera traité ultérieurement dans le chaptitre 3, consacré à la dualité.

Il arrive que l'on puisse se ramener au cas d'une base évidente. Aussi pour le programme ci-dessous :

$$\begin{cases} 16y_1 + 27y_2 + 10y_3 = z[\min] \\ 3y_1 + y_2 \geq 36 \\ y_2 + 2y_3 \geq 24 \\ y_1\ ,\ y_2\ ,\ y_3 \geq 0 \end{cases}$$

Il suffit de diviser la première contrainte par 3 et la deuxième par 2 pour avoir une base $B = I$, associée aux variables y_1 et y_3 :

$$\left\{\begin{array}{ccccccccccc} -16y_1 & - & 27\,y_2 & - & 10y_3 & & & & & = & -z[\max] \\ y_1 & + & 1/3\,y_2 & & & - & y_{\bar{1}} & & & = & 12 \\ & & 1/2\,y_2 & + & y_3 & & & - & y_{\bar{2}} & = & 12 \\ y_1 & , & y_2 & , & y_3 & , & y_{\bar{1}} & , & y_{\bar{2}} & \geq & 0 \end{array}\right.$$

L'expression de $-z$ en fonction des variables hors-base fournit

$$-z = -16(12 - 1/3y_2 + y_{\bar{1}}) - 27y_2 - 10(12 - 1/2y_2 + y_{\bar{2}}) = -312 - 50/3y_2 - 16y_{\bar{1}} - 10y_{\bar{2}}.$$

Ainsi, ici, c'est la base “évidente” qui se révèle être l'optimum... trouvé en 0 itération!!!

2.4.4 Cas général : emploi de variables artificielles

Un programme linéaire peut comporter 3 types de contraintes (P), (Q), (R) :

- les contraintes du type (P) sont de la forme : $\sum_{j=1}^{p} a_{i,j}x_j \leq b_i$ où b_i est positif ou nul ; après introduction d'une variable d'écart $x_{\bar{i}}$, il vient :

$$\sum_{j=1}^{p} a_{i,j}x_j + x_{\bar{i}} = b_i \ ;$$

- les contraintes du type (Q) sont de la forme : $\sum_{j=1}^{p} a_{k,j}x_j \geq b_k$ (où b_k est positif ou nul) ; après introduction d'une variable d'écart $x_{\bar{k}}$, il vient :

$$\sum_{j=1}^{p} a_{k,j}x_j - x_{\bar{k}} = b_k \ ;$$

- enfin, les contraintes de type (R) sont celles qui, à l'origine, sont en équation :

$$\sum_{j=1}^{p} a_{\ell,j}x_j = b_\ell \ ; \ (b_\ell \geq 0),$$

donc dans lesquelles on n'introduit pas de variables d'écart.

Voici un exemple avec $m = 3$ contraintes explicites : la première de type (P), la deuxième de type (Q), la troisième de type (R).

$$\left\{\begin{array}{cccccccl} 4x_1 & + & 5x_2 & + & 3x_3 & = & z[\max] & \\ x_1 & + & 2x_2 & + & x_3 & \leq & 5 & (P) \\ 2x_1 & + & x_2 & + & x_3 & \geq & 1 & (Q) \\ x_1 & + & x_2 & & & = & 4 & (R) \\ x_1 & , & x_2 & , & x_3 & \geq & 0 & \end{array}\right.$$

soit

$$\left\{\begin{array}{ccccccccccc} 4x_1 & + & 5x_2 & + & 3x_3 & + & 0x_{\bar{1}} & + & 0x_{\bar{2}} & = & z[\max] \\ x_1 & + & 2x_2 & + & x_3 & + & x_{\bar{1}} & & & = & 5 \\ 2x_1 & + & x_2 & + & x_3 & & & - & x_{\bar{2}} & = & 1 \\ x_1 & + & x_2 & & & & & & & = & 4 \\ x_1 & , & x_2 & , & x_3 & , & x_{\bar{1}} & , & x_{\bar{2}} & \geq & 0 \end{array}\right.$$

Si toutes les contraintes étaient de type (P), on serait dans le cas “favorable” traité plus haut.

On va constituer une base initiale de matrice $B = I$; on peut inclure dans cette base les variables d'écart ajoutées dans les contraintes de type (P) ; en effet, la colonne associée à chacune de ces variables d'écart est *unitaire*. Ainsi, dans l'exemple ci-dessus, la colonne associée à $x_{\bar{1}}$ est $\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$.

On complète cette base en introduisant dans chaque contrainte de type (Q) ou (R), une nouvelle variable, de coefficient égal à 1, nommée “variable artificielle” dont la colonne associée est unitaire.

Ainsi, pour l'exemple ci-dessus, en notant $x_{a'}$ et $x_{a''}$ les deux variables artificielles nécessaires pour constituer une base de matrice $B = I$, il vient :

$$\left\{\begin{array}{ccccccccccccccc} x_1 & + & 2x_2 & + & x_3 & + & x_{\bar{1}} & & & & & & & = & 5 \\ 2x_1 & + & x_2 & + & x_3 & & & - & x_{\bar{2}} & + & x_{a'} & & & = & 1 \\ x_1 & + & x_2 & & & & & & & & & + & x_{a''} & = & 4 \\ x_1 & , & x_2 & , & x_3 & , & x_{\bar{1}} & , & x_{\bar{2}} & , & x_{a'} & , & x_{a''} & \geq & 0 \end{array}\right.$$

Les variables artificielles, comme les autres variables du programme linéaire sont positives ou nulles. Cependant, on remarque que :
- si $x_{a'}$ n'est pas nulle, on a : $2x_1 + x_2 + x_3 - x_{\bar{2}} \neq 1$ et que
- si $x_{a''}$ n'est pas nulle, on a $x_1 + x_2 \neq 4$.

Ainsi, la positivité d'une variable artificielle fait que la contrainte dans laquelle elle a été introduite est violée... On va maintenant indiquer comment traiter un tel cas.

2.4.5 Méthode des deux phases

Il convient alors, partant d'une base comportant une ou plusieurs variables artificielles, d'obtenir, en itérant l'algorithme du simplexe, si possible une base sans variable artificielle (dans cette solution de base, les variables artificielles seront nulles car hors-base, et l'on obtiendra un sommet admissible du polyèdre $\mathcal{D}$).

Pour tenter d'atteindre ce but, on substitue à la fonction économique z, une autre fonction économique z', qui est la **somme des variables artificielles** ($z' = x_{a'} + x_{a''}$) dans l'exemple. L'objectif sera de **minimiser** z'. À l'optimum de ce nouveau programme linéaire, deux cas sont possibles, puisque, pour toute solution admissible, z' est positif ou nul :
- soit $z' = 0$: on a obtenu alors un sommet du polyèdre $\mathcal{D}$, à partir duquel on reprend la résolution du (PL) initial (donc avec la fonction économique z, à maximiser) ;
- soit $z' > 0$: toute base admissible du nouveau (PL) comporte au moins une variable artificielle de valeur strictement positive ; alors le (PL) d'origine est impossible (le polyèdre $\mathcal{D}$ est vide car les contraintes sont contradictoires).

Ainsi, pour l'exemple, il convient d'abord d'exprimer la fonction économique z' en fonction des variables hors-base (sachant que la base initiale est formée des variables $x_{\bar{1}}$, $x_{a'}$ et $x_{a''}$) :

$$z' = x_{a'} + x_{a''} = (1 - 2x_1 - x_2 - x_3 + x_{\bar{2}}) + (4 - x_1 - x_2) = 5 - 3x_1 - 2x_2 - x_3 + x_{\bar{2}}.$$

On maximisera donc

$$z'' = -z' = -5 + 3x_1 + 2x_2 + x_3 - x_{\bar{2}}.$$

	i	1	2	3	$\bar{1}$	$\bar{2}$	a'	a''	$\beta^{(0)}$
	$\bar{1}$	1	2	1	1	0	0	0	5
$s \leftarrow$	a'	$\boxed{2}$	1	1	0	-1	1	0	1
	a''	1	1	0	0	0	0	1	4
	Δ''_j	3	2	1	0	-1	0	0	$z'' - (-5)$
		$e \uparrow$							

	i	1	2	3	$\bar{1}$	$\bar{2}$	a'	a''	$\beta^{(1)}$
	$\bar{1}$	0	$3/2$	$1/2$	1	$1/2$	$-1/2$	0	$9/2$
	1	1	$1/2$	$1/2$	0	$-1/2$	$1/2$	0	$1/2$
$s \leftarrow$	a''	0	$1/2$	$-1/2$	0	$\boxed{1/2}$	$-1/2$	1	$7/2$
	Δ''_j	0	$1/2$	$-1/2$	0	$1/2$	$-3/2$	0	$z'' + 7/2$
						$e \uparrow$			

i	1	2	3	$\bar{1}$	$\bar{2}$	a'	a''	$\beta^{(2)}$
$\bar{1}$	0	1	1	1	0	0	-1	1
1	1	1	0	0	0	0	1	4
$\bar{2}$	0	1	-1	0	1	-1	2	7
Δ''_j	0	0	0	0	0	-1	-1	$z'' + 0$

À l'optimum de la phase 1, on est dans le premier cas : $z' = 0$ (car $z' = -z''$). C'est-à-dire que la base associée aux variables $x_{\bar{1}}$, x_1 et $x_{\bar{2}}$ est admissible pour le programme d'origine ; c'est à partir de cette base que l'on va résoudre le (PL) d'origine, dont la fonction économique est : $z = 4x_1 + 5x_2 + 3x_3$. Il suffit alors d'exprimer z en fonction des variables hors-base, après avoir annulé (définitivement) les variables artificielles, soit $x_{a'} = x_{a''} = 0$:

$$z = 4(4 - x_2) + 5x_2 + 3x_3 = 16 + x_2 + 3x_3.$$

Voici le tableau associé (où les colonnes a' et a'' ne figurent plus) :

	i	1	2	3	$\bar{1}$	$\bar{2}$	$\beta^{(0)}$
$s \leftarrow$	$\bar{1}$	0	1	$\boxed{1}$	1	0	1
	1	1	1	0	0	0	4
	$\bar{2}$	0	1	-1	0	1	7
	Δ_j	0	1	3	0	0	$z - 16$
				$e \uparrow$			

i	1	2	3	$\bar{1}$	$\bar{2}$	$\beta^{(1)}$
3	0	1	1	1	0	1
1	1	1	0	0	0	4
$\bar{2}$	0	2	0	1	1	8
Δ_j	0	-2	0	-3	0	$z - 19$

On a obtenu, en une itération, lors de la phase 2, l'optimum du PL d'origine :

$$\boxed{x_1 = 4,\ x_2 = 0,\ x_3 = 1 \text{ et } z = 19}\ (x_{\bar{2}} = 8,\ x_{\bar{1}} = 0)$$

2.4.6 Variante. Méthode du "grand M"

Cette variante est donnée à titre d'exercice seulement : elle est facile à mettre en oeuvre ici, mais les logiciels de (PL) utilisent toujours la méthode des 2 phases.

On peut combiner les deux phases 1 et 2 en introduisant les variables artificielles comme ci-dessus dans les contraintes, puis en les introduisant aussi dans la fonction économique : chaque variable artificielle y sera munie d'un coefficient $-M$, "très négatif" : c'est-à-dire qu'on peut prendre la valeur M arbitrairement supérieure à tout autre coefficient intervenant dans le (PL).

Ainsi, si une variable artificielle n'est pas nulle, elle donnera à cette nouvelle fonction économique une valeur numérique très "mauvaise" car très négative (de valeur absolue très grande).

En maximisant la nouvelle fonction économique, notée $\widehat{z}$, on aura tendance à faire sortir les variables artificielles de la base. Si, à l'optimum de ce (PL), toutes les variables artificielles sont nulles, alors $\widehat{z}$ coïncide avec la fonction économique d'origine z. Mais si à l'optimum du (PL), avec la fonction économique $\widehat{z}$, une ou plusieurs variable(s) artificielle(s) est(sont) en base (et non nulles), cela signifie que le (PL) d'origine est impossible.

Ainsi, pour l'exemple introduit dans la section 2.3.4., $\widehat{z} = z - Mx_{a'} - Mx_{a''}$, soit

$$\widehat{z} = 4x_1 + 5x_2 + 3x_3 - Mx_{a'} - Mx_{a''}.$$

La base initiale étant associée aux variables $x_{\bar{1}}$, $x_{a'}$ et $x_{a''}$, l'expression de $\widehat{z}$, en fonction des variables hors-base initialement, est :

$$\begin{aligned} \widehat{z} &= 4x_1 + 5x_2 + 3x_3 - M(1 - 2x_1 - x_2 - x_3 + x_{\bar{2}}) - M(4 - x_1 - x_2) \\ &= -5M + (3M+4)x_1 + (2M+5)x_2 + (M+3)x_3 - Mx_{\bar{2}} \end{aligned}$$

La valeur initiale de la fonction économique est donc $-5M$: très négative. D'où le tableau :

	i	1	2	3	$\bar{1}$	$\bar{2}$	a'	a''	$\beta^{(0)}$
	$\bar{1}$	1	2	1	1	0	0	0	5
$s \leftarrow$	a'	$\boxed{2}$	1	1	0	-1	1	0	1
	a''	1	1	0	0	0	0	1	4
	$\widehat{\Delta}_j$	$3M+4$	$2M+5$	$M+3$	0	$-M$	0	0	$\widehat{z}+5M$
		$e\uparrow$							

	c_i	i	1	2	3	$\bar{1}$	$\bar{2}$	a'	a''	$\beta^{(1)}$
	0	$\bar{1}$	0	$3/2$	$1/2$	1	$1/2$	$-1/2$	0	$9/2$
	4	1	1	$1/2$	$1/2$	0	$-1/2$	$1/2$	0	$1/2$
$s \leftarrow$	$-M$	a''	0	$1/2$	$-1/2$	0	$\boxed{1/2}$	$-1/2$	1	$7/2$
		c_j	4	5	3	0	0	$-M$	$-M$	
		$\widehat{\Delta}_j$	0	$M/2+3$	$-M/2+1$	0	$M/2+2$	$-3M/2-2$	0	$\widehat{z}-2+7M/2$
							$e\uparrow$			

On fait entrer $x_{\bar{2}}$, plutôt que x_2, en base car, alors, la variable artificielle $x_{a''}$ sort de la base :

$$
\begin{array}{r|cc|c|ccccc|cc|c|c|}
\multicolumn{1}{r}{} & \multicolumn{1}{c}{c_i} & \multicolumn{1}{c}{i} & \multicolumn{1}{c}{} & \multicolumn{1}{c}{1} & 2 & 3 & \bar{1} & \multicolumn{1}{c}{\bar{2}} & a' & \multicolumn{1}{c}{a''} & \multicolumn{1}{c}{} & \multicolumn{1}{c}{\beta^{(2)}} \\
\cline{2-3}\cline{5-11}\cline{13-13}
s \leftarrow & 0 & \bar{1} & \multicolumn{1}{c|}{} & 0 & 1 & \boxed{1} & 1 & 0 & 0 & -1 & \multicolumn{1}{c|}{} & 1 \\
 & 4 & 1 & \multicolumn{1}{c|}{} & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & \multicolumn{1}{c|}{} & 4 \\
 & 0 & \bar{2} & \multicolumn{1}{c|}{} & 0 & 1 & -1 & 0 & 1 & -1 & 2 & \multicolumn{1}{c|}{} & 7 \\
\cline{2-3}\cline{5-11}\cline{13-13}
\multicolumn{1}{r}{} & \multicolumn{1}{c}{} & \multicolumn{1}{c}{} & \multicolumn{1}{c}{c_j} & \multicolumn{1}{c}{4} & 5 & 3 & 0 & \multicolumn{1}{c}{0} & -M & \multicolumn{1}{c}{-M} & \multicolumn{1}{c}{} & \multicolumn{1}{c}{} \\
\cline{5-11}\cline{13-13}
\multicolumn{1}{r}{} & \multicolumn{1}{c}{} & \multicolumn{1}{c}{} & \multicolumn{1}{c|}{\widehat{\Delta}_j} & 0 & 1 & 3 & 0 & 0 & -M & -M-4 & \multicolumn{1}{c|}{} & \widehat{z}-16 \\
\cline{5-11}\cline{13-13}
\multicolumn{1}{r}{} & \multicolumn{1}{c}{} & \multicolumn{1}{c}{} & \multicolumn{1}{c}{} & \multicolumn{1}{c}{} & & e\uparrow & & \multicolumn{1}{c}{} & & \multicolumn{1}{c}{} & \multicolumn{1}{c}{} & \multicolumn{1}{c}{}
\end{array}
$$

On observe qu'à ce stade les variables artificielles sont sorties de la base : on peut les annuler définitivement (ce qui revient à supprimer les colonnes a' et a'' dans le tableau ci-dessus) ; on remarque aussi qu'alors, $\widehat{z}$ et z coïncident. La dernière itération étant alors identique à celle de la phase 2 du paragraphe précédent, n'est pas reproduite ici.

Remarque : En pratique, les logiciels de programmation linéaire implémentant l'algorithme du simplexe utilisent la méthode en deux phases. En effet, lors de la phase 1, en minimisant la somme des variables artificielles, la variante dite du "grand M" conduit à utiliser des nombres dont les ordres de grandeur sont très différents, ce qui est source de difficultés numériques.

Chapitre 3

Dualité

3.1 Exemples introductifs

Avant de donner la définition formelle d'un problème dual, on va illustrer par deux exemples, comment il s'explique en terme de problème de production.

3.1.1 Premier exemple

Une entreprise I fabrique n produits et le bénéfice par unité du produit P_j est c_j. Pour fabriquer les produits, l'entreprise utilise m matières premières, et la quantité totale de matière i est b_i. Par unité de produit P_j, il faut $a_{i,j}$ quantité de matière i. Pour I, maximiser le bénéfice $z(x) = {}^t c.x$ sous les contraintes de disponibilité $\sum_{j=1}^{n} a_{i,j} x_j \leq b_i$, $i = 1, \cdots, m$, $x_j \geq 0$ $(j = 1, \cdots, n)$ revient à résoudre

$$\left\{ \begin{array}{rcl} {}^t c.x & = & z[\max] \\ Ax & \leq & b \\ x & \geq & 0 \end{array} \right.$$

En effet, sous forme matricielle, les contraintes se lisent : $Ax \leq b$, $x \geq 0$ où $A = [a_{i,j}]$, $1 \leq i \leq m$, $1 \leq j \leq n$, $b = {}^t(b_1, \cdots, b_m)$ et ${}^t x = (x_1, \cdots, x_n)$.

On suppose maintenant qu'une entreprise II essaie de s'emparer du marché et veut racheter les ressources de I pour sa propre production. Quand est-ce que la transaction peut se faire ? Quand I ne perd pas à vendre ses matières premières plutôt que de fabriquer ses produits. L'entreprise I est donc prête à céder les matières premières à un prix qui est au moins aussi élevé que le bénéfice qu'elle fera en vendant ses produits.
De plus, l'entreprise II veut payer le prix le plus bas possible.

Soit y_i le prix que l'entreprise II devra payer pour une unité de M_i $(1 \leq i \leq m)$. Les contraintes traduisent que, pour I, le prix de vente (par unité de produit) à II est plus élevé ou égal au bénéfice pour chaque produit. Pour une unité de produit P_j, $1 \leq j \leq n$, on doit donc avoir

$$\sum_{i=1}^{m} y_i a_{i,j} \geq c_j$$

et évidemment, $y_j \geq 0$ pour tout j, ce qui donne en forme matricielle ${}^t y.A \geq {}^t c$, $y \geq 0$, où ${}^t y = (y_1, \cdots, y_m)$ et ${}^t c = (c_1, \cdots, c_n)$.

Le coût pour II est

$$w = \sum_{i=1}^{m} y_i b_i = {}^t y.b(\text{ ou } {}^t b.y).$$

Le programme linéaire pour l'entreprise II est donc de minimiser $w(y) = {}^t y.b = \sum_{i=1}^{m} y_i b_i$ sous les contraintes ${}^t y.A \geq {}^t c$, $y \geq 0$, qu'on appelle le ***problème dual***.
Cela s'écrit :

$$\begin{cases} {}^t y.b & = & w[\min] \\ {}^t y.A & \geq & {}^t c \\ y & \geq & 0 \end{cases}$$

Le dual modélise ainsi le fait qu'il est plus intéressant pour I de vendre que de fabriquer et aussi que II cherche à proposer le prix le plus bas possible.

Comme on le verra, il y a un lien étroit entre les deux programmes linéaires.

3.1.2 Deuxième exemple

On peut acheter 4 types d'aliments dont les teneurs en calories, en vitamines, et le prix (exprimés pour chaque type dans la même unité), sont donnés dans le tableau suivant :

	type 1	type 2	type 3	type 4
calories	2	1	0	1
vitamines	3	4	3	5
prix	2	2	1	8

Le problème, connu sous le nom du problème du consommateur, consiste à obtenir au moindre coût au moins 12 calories et 7 vitamines. Appelant x_i la quantité à acheter de l'aliment de type i, on est ainsi amené à chercher le minimum de la fonction

$$z(x) = 2x_1 + 2x_2 + x_3 + 8x_4 = {}^t c.x,$$

avec les contraintes $2x_1 + x_2 + x_4 \geq 12$ pour les calories et $3x_1 + 4x_2 + 3x_3 + 5x_4 \geq 7$ pour les vitamines.

On notera que, à la différence du problème précédent, l'ensemble des solutions admissibles est ici *non borné*.

Problème du "concurrent" : un vendeur concurrent souhaite s'approprier le marché alimentaire avec deux nouveaux types d'aliments, dont les teneurs respectives en calories et vitamines (par unité de volume) sont les suivantes :

	type I	type II
calories	1	0
vitamines	0	1

Le concurrent cherche à déterminer les prix y_1^* et y_2^* d'une unité de volume de chacun de ces nouveaux aliments, de façon à maximiser le prix de vente total. Il est donc conduit à chercher le maximum de la fonction

$$z'(y) = 12y_1 + 7y_2$$

(on suppose naturellement que le consommateur n'achète que le strict nécessaire) avec les contraintes

$$2y_1 + 3y_2 \leq 2, \quad y_1 + 4y_2 \leq 2, \quad 3y_2 \leq 1, \quad y_1 + 5y_2 \leq 8, \quad y_1 \geq 0 \text{ et } y_2 \geq 0.$$

(On exprime simplement l'objectif naturel du concurrent d'offrir la même quantité de calories et de vitamines que dans chacun des aliments de type 1 à 4 à un prix inférieur ou égal ; sinon il n'a aucune chance de vendre ses nouveaux aliments à des consommateurs intelligents, toute question de goût mise à part, bien entendu...)

On notera que le problème du consommateur et le problème du concurrent s'écrivent respectivement :

$$(P)\left\{\begin{array}{rcl} {}^tc.x & = & z[\min] \\ Ax & \geq & b \\ x & \geq & 0 \end{array}\right. , \quad (D)\left\{\begin{array}{rcl} {}^ty.b & = & z'[\max] \\ {}^ty.A & \leq & {}^tc \\ y & \geq & 0 \end{array}\right.$$

avec

$${}^tc = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 1 & 8 \end{pmatrix}, \quad A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & 1 \\ 3 & 4 & 3 & 5 \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} 12 \\ 7 \end{pmatrix}.$$

3.2 Définition du dual

Définition : Soit (P) un programme de programmation linéaire sous la forme canonique :

$$\left\{\begin{array}{rcl} {}^tc.x & = & z[\max] \\ Ax & \leq & b \\ x & \geq & 0 \end{array}\right.$$

avec $A \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{R})$, $c \in \mathbb{R}^n$, $x \in \mathbb{R}^n$ et $b \in \mathbb{R}^m$, que l'on appelle aussi "*forme standard de passage au dual*"(dans ce cas, les composantes du vecteur b ne sont pas astreintes à être positives). Alors le ***problème dual*** est :

$$\left\{\begin{array}{rcl} {}^ty.b & = & z'[\min] \\ {}^ty.A & \geq & {}^tc \\ y & \geq & 0 \end{array}\right.$$

Exemple : On reprend le programme linéaire de l'atelier (voir chapitre 1) :

$$\left\{\begin{array}{ccccccrr} 4x_1 & + & 12x_2 & + & 3x_3 & = & z[\max] \\ x_1 & & & & & \leq & 1000 \\ & & x_2 & & & \leq & 500 \\ & & & & x_3 & \leq & 1500 \\ 3x_1 & + & 6x_2 & + & 2x_3 & \leq & 6750 \\ x_1 & , & x_2 & , & x_3 & \geq & 0 \end{array}\right.$$

que l'on peut écrire matriciellement :

$$\begin{cases} [4,\ 12,\ 3].\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = z[\max] \\ \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 3 & 6 & 2 \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} \leq \begin{bmatrix} 1000 \\ 500 \\ 1500 \\ 6750 \end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} \geq 0 \end{cases} ;$$

Il est de la forme :

$$\begin{cases} {}^t c.x & = & z[\max] \\ A.x & \leq & b, \\ x & \geq & 0 \end{cases} ,$$

Par définition, son programme dual est :

$$\begin{cases} 1000y_1 & + & 500y_2 & + & 1500y_3 & + & 6750y_4 & = & z'[\min] \\ y_1 & & & & & + & 3y_4 & \geq & 4 \\ & & y_2 & & & + & 6y_4 & \geq & 12 \\ & & & & y_3 & + & 2y_4 & \geq & 3 \\ y_1 & , & y_2 & , & y_3 & , & y_4 & \geq & 0 \end{cases}$$

que l'on peut écrire matriciellement :

$$\begin{cases} [y_1,\ y_2,\ y_3,\ y_4]\begin{bmatrix} 1000 \\ 500 \\ 1500 \\ 6750 \end{bmatrix} = z'[\min] \ ; \\ [y_1,\ y_2,\ y_3,\ y_4]\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 3 & 6 & 2 \end{bmatrix} \geq [4,\ 12,\ 3] \ ; \\ [y_1,\ y_2,\ y_3,\ y_4] \geq 0. \end{cases}$$

Ainsi, le primal comporte $n = 3$ variables, positives ou nulles, et $m = 4$ contraintes explicites. Dans le programme dual, on a $n' = m = 4$ variables, elles aussi positives ou nulles, et $m' = n = 3$ contraintes explicites. L'objectif du primal est une *maximisation*, celui du dual est une *minimisation*. Les "seconds membres" du dual ne sont autres que les coefficients de la fonction économique du primal, c'est-à-dire le vecteur ${}^t c$ (transposé de c) ; de même, les coefficients de la fonction économique du dual ne sont autres que les "seconds membres" du primal, c'est-à-dire le vecteur ${}^t b$ (transposé de b).

Enfin, on remarque que les contraintes, dans la forme standard du primal, sont des inégalités de sens : $\leq$, soit

$$\sum_{j=1}^{n} a_{i,j} x_j \leq b_i \text{ où } i = 1, 2, \cdots, m.$$

Celles du dual sont de sens inverse : $\geq$, soit

$$\sum_{i=1}^{m} y_i a_{i,j} \geq c_j \text{ où } j = 1, 2, \cdots, n.$$

Remarque : en transposant, le problème dual peut aussi s'écrire :

$$\left\{ \begin{array}{rcl} {}^t b.y & = & z'[\min] \\ {}^t A.y & \geq & c \\ y & \geq & 0 \end{array} \right. .$$

3.3 Liens entre le primal et le dual

On a vu, dans la section précédente, les liens suivants :
m = nombre de contraintes de (P) = nombre de variables de (D) ;
n = nombre de variables de (P) = nombre de contraintes de (D).

Si (P) contient deux contraintes, (D) contient deux variables et peut être résolu graphiquement quelque soit le nombre de variables de (P).

Quelle est la forme de (D) si (P) n'est pas en forme canonique ? On détermine (D) en ramenant (P) à la forme canonique, comme le montre l'exemple suivant :

Exemple : $(P) \left\{ \begin{array}{rcl} {}^t c.x & = & z[\max] \\ Ax & = & b \\ x & \geq & 0 \end{array} \right. .$

On remarque que $Ax = b$ équivaut à $Ax \leq b$ et $Ax \geq b$, soit $Ax \leq b$ et $-Ax \leq -b$, soit matriciellement à $\begin{pmatrix} A \\ -A \end{pmatrix} .x \leq \begin{pmatrix} b \\ -b \end{pmatrix}$.

Par définition, le dual de (P) est alors donné par :

$$(D) \left\{ \begin{array}{rcl} ({}^t u, {}^t v) \begin{pmatrix} b \\ -b \end{pmatrix} = {}^t(u-v).b & = & z'(u,v)[\min] \\ ({}^t u, {}^t v) \begin{pmatrix} A \\ -A \end{pmatrix} = {}^t(u-v)A & \geq & {}^t c, \\ u \in \mathbb{R}_+^m \quad v \in \mathbb{R}_+^m & & \end{array} \right. .$$

En posant $y = u - v$, on obtient :

$$(D) \left\{ \begin{array}{rcl} {}^t y.b & = & z'[\min] \\ {}^t y.A & \geq & {}^t c, \\ y & & \text{sans restriction de signe.} \end{array} \right.$$

Le résultat général est le suivant. Pour comprendre précisément son message, il convient d'étudier sa preuve.

Théorème : Les liens entre le primal et son dual sont les suivants :

Primal	Dual
maximisation	minimisation
coefficients de z	second membre des contraintes
second membre des contraintes	coefficients de z'
contraintes $\begin{cases} = \\ \leq \\ \geq \end{cases}$	variable $\begin{cases} \text{sans contrainte de signe} \\ \geq 0 \\ \leq 0 \end{cases}$
variable $\begin{cases} \text{sans contrainte de signe} \\ \geq 0 \\ \leq 0 \end{cases}$	contraintes $\begin{cases} = \\ \geq \\ \leq \end{cases}$

Démonstration. On se donne :

$$(\bar{P}) : \text{maximiser } z(x,y) = {}^tc.x + {}^td.y \text{ sous } Ax + By \leq a,\ Cx + Dy = b,\ x \geq 0,\ y \text{ quelconque},$$

où $c, x \in \mathbb{R}^s$, $d, y \in \mathbb{R}^{n-s}$, A matrice de taille $r \times s$, B matrice de taille $r \times (n-s)$, C matrice de taille $(m-r) \times s$, D matrice de taille $(m-r) \times (n-s)$.

On démontre que le dual de $(\bar{P})$ est donné par :

$$(\bar{D}) : \text{minimiser } z'(x,y) = {}^tu.a + {}^tv.b \text{ sous } {}^tu.Ax + {}^tv.B \geq c,\ {}^tu.B + {}^tv.D = d,\ u \geq 0,\ v \text{ quelconque}.$$

En effet, on remplace dans le primal $Cx + Dy = b$ par $Cx + Dy \leq b$ et $Cx + Dy \geq b$, et, comme y est quelconque, on remplace aussi y par $y = y_1 - y_2$ avec $y_1 \geq 0$ et $y_2 \geq 0$. On a alors

$$(\bar{P}) \left\{ \begin{array}{ccccccccc} {}^tc.x & + & {}^td.y_1 & - & {}^td.y_2 & = & z[\max] \\ Ax & + & By_1 & - & By_2 & \leq & a \\ Cx & + & Dy_1 & - & Dy_2 & \leq & b \\ -Cx & - & Dy_1 & + & Dy_2 & \leq & -b \\ x & , & y_1 & , & y_2 & \geq & 0 \end{array} \right.$$

ce qui s'écrit matriciellement :

$$\max z(x, y_1, y_2) = ({}^tc, {}^td, -{}^td) \begin{pmatrix} x \\ y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}$$

avec les contraintes : $\begin{pmatrix} A & B & -B \\ C & D & -D \\ -C & -D & D \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} \leq \begin{pmatrix} a \\ b \\ -b \end{pmatrix}$.

On peut alors passer au dual : minimiser $z'(u, v_1, v_2) = ({}^tu, {}^tv_1, {}^tv_2) \begin{pmatrix} a \\ b \\ -b \end{pmatrix}$ avec les contraintes :

$$({}^tu, {}^tv_1, {}^tv_2) \begin{pmatrix} A & B & -B \\ C & D & -D \\ -C & -D & D \end{pmatrix} \geq ({}^tc, {}^td, -{}^td) \ ;\ u \geq 0,\ v_1 \geq 0,\ v_2 \geq 0$$

ce qui s'écrit

$$\left\{ \begin{array}{ccc} {}^tu.a + {}^tv_1.b - {}^tv_2.b = {}^tu.a + {}^t(v_1 - v_2).b & = & \min w(u, v_1, v_2) \\ {}^tu.A + {}^tv_1.C - {}^tv_2.C = {}^tu.A + {}^t(v_1 - v_2).C & \geq & {}^tc \\ {}^tu.B + {}^tv_1.D - {}^tv_2.D = {}^tu.B + {}^t(v_1 - v_2).D & \geq & {}^td \\ -{}^tu.B - {}^tv_1.D + {}^tv_2.D = -{}^tu.B - {}^t(v_1 - v_2).D & \geq & -{}^td \\ u \geq 0,\ v_1 \geq 0,\ v_2 \geq 0 & & \end{array} \right. ,$$

et alors, en posant $v = v_1 - v_2$,

$$\left\{\begin{array}{lcl} {}^tu.a + {}^tv.b & = & \min w(u,v) \\ {}^tu.A + {}^tv.C & \geq & {}^tc \\ {}^tu.B + {}^tv.D & = & {}^td \\ u \geq 0, v \text{ quelconque} & & \end{array}\right. .$$

L'interprétation est alors la suivante : la contrainte égalité de $(\overline{P})$ est $Cx + Dy = b$, et b est lié à v dans $(\overline{D})$ qui est une variable sans contrainte de signe. La variable y est sans contrainte de signe dans $(\bar{P})$. Elle est facteur de B et D qui forment la contrainte égalité dans $(\bar{D})$. □

On va maintenant donner les propriétés importantes liant le primal et le dual.

Théorème 1 : le dual du dual d'un programme linéaire coïncide avec le primal.

Démonstration. On rappelle que la transposée d'une matrice de taille $m \times n$ $A = [a_{i,j}]$ est la matrice de taille $n \times m$ ${}^tA = [a_{j,i}]$. On a ${}^t({}^tA) = A$, ${}^t(AB) = {}^tB{}^tA$, ${}^t(-A) = -{}^tA$ et, si $A \leq B$, alors ${}^tA \leq {}^tB$. On met le dual sous forme canonique

$$(D)\left\{\begin{array}{ccc} -{}^ty.b & = & -z'[\max] \\ -{}^ty.A & \leq & -{}^tc \\ y & \geq & 0 \end{array}\right.$$

puis

$$(D)\left\{\begin{array}{ccc} {}^t(-b).y & = & -z'[\max] \\ {}^t(-A).y & \leq & -c \\ y & \geq & 0 \end{array}\right.$$

on l'on a transposé. On va maintenant calculer le dual de (D) :

$$(D')\left\{\begin{array}{ccc} {}^tv.(-c) & = & -z''[\min] \\ {}^tv.{}^t(-A) & \geq & {}^t(-b) \\ v & \geq & 0. \end{array}\right.$$

On élimine alors les -1 :

$$(D')\left\{\begin{array}{ccc} {}^tv.c & = & z''[\max] \\ {}^tv.{}^tA & \leq & {}^tb \\ v & \geq & 0. \end{array}\right.$$

On transpose et on obtient, en posant $x = v$:

$$(D')\left\{\begin{array}{ccc} {}^tc.x & = & z''[\max] \\ A.x & \leq & b \\ v & \geq & 0 \end{array}\right.$$

donc le programme (D') est en fait le problème P. □

Exemple. En revenant au cas étudié en “fil rouge” dans ce cours, l'exemple de l'atelier, il va falloir commencer par ramener les contraintes du dual à des inéquations de la forme $\leq$, et la fonction économique à une maximisation :

Dual :

$$\left\{\begin{array}{ccccccccccc} -1000y_1 & - & 500y_2 & - & 1500y_3 & - & 6750y_4 & = & z'[\max] \\ -y_1 & & & & & - & 3y_4 & \leq & -4 \\ & & -y_2 & & & - & 6y_4 & \leq & -12 \\ & & & & -y_3 & - & 2y_4 & \leq & -3 \\ y_1 & , & y_2 & , & y_3 & , & y_4 & \geq & 0 \end{array}\right.$$

Dual du dual :

$$\begin{cases} -4t_1 & - & 12t_2 & - & 3t_3 & = & z''[\min] \\ -t_1 & & & & & \geq & -1000 \\ & & -t_2 & & & \geq & -500 \\ & & & & -t_3 & \geq & -1500 \\ -3t_1 & - & 6t_2 & - & 2t_3 & \geq & -6750 \\ t_1 & , & t_2 & , & t_3 & \geq & 0 \end{cases}$$

Dans le dual de ce dual, les variables ont été notées : t_1, t_2 et t_3.

En multipliant par -1 chacune des contraintes du “dual du dual”, ainsi que sa fonction économique (ce qui ramène à une maximisation), on reconnaît le primal (au nom près des variables : nommées t_j ici au lieu de x_j précédemment).

3.4 Comparaison des solutions

On prend (P) sous forme canonique et (D) son dual, et on considère x et y deux solutions quelconques du primal et du dual. Comme $x \geq 0$ et $y \geq 0$, on peut multiplier les contraintes du primal à droite par ${}^t y$ et celles du dual à gauche par x pour obtenir :

$${}^t c.x \leq {}^t y.Ax \leq {}^t y.b.$$

Ceci est valable pour toutes solutions x du primal, y du dual. Donc, l'optimum du primal est forcément inférieur ou égal à celui du dual.

3.4.1 Théorème de dualité

On admet le résultat suivant : étant donné une matrice A, et deux vecteurs b et c, alors :

$$\max\{{}^t c.x \mid Ax \leq b\} = \min\{{}^t y.b \mid {}^t y.A = {}^t c,\ y \geq 0\}$$

si les ensembles existent.

Donc, quand les optimums des problèmes correspondants sont finis, ils sont égaux.

Remarque : avoir pris un problème primal sous la forme

$$\begin{cases} {}^t c.x & = & z[\max] \\ Ax & \leq & b \\ x & & \text{quelconque} \end{cases}$$

n'est pas restrictif, car on peut ramener un problème standard ou canonique à cette forme en préservant l'optimum.

On admet donc que, pour deux programmes linéaires en dualité (un primal et un dual), un et un seul des trois cas suivants se trouve réalisé :

• Cas 1. Le primal et le dual ont des solutions optimales finies, respectivement x^* et y^*. Alors, à l'optimum, les valeurs des fonctions économiques du primal et du dual sont égales :

$$z^* = z' \text{ soit } {}^t c.x^* = {}^t y^*.b$$

Ce cas est, de loin, le plus fréquent dans les applications concrètes.

• Cas 2. L'un des deux (PL) n'a pas de solution admissible (c'est-à-dire qu'il est impossible), l'autre en admettant au moins une, mais son optimum est rejeté à l'infini.

• Cas 3. Ni le primal, ni le dual n'ont de solutions admissibles.

Le tableau suivant récapitule la situation (le théorème de dualité) :

	optimum fini	pas d'optimum fini	pas de solution
optimum fini	cas 1	impossible	impossible
pas d'optimum fini	impossible	impossible	cas 2
pas de solution	impossible	cas 2	cas 3

Illustration du cas 1. : c'est le cas de l'exemple du problème de l'atelier, comme on va le voir plus loin.

Autre exemple : $$(P)\left\{\begin{array}{ccccc} x_1 & + & x_2 & = & z[\max] \\ -x_1 & + & x_2 & = & 1 \\ x_1 & - & 1/2x_2 & = & 0 \\ x_1 & , & x_2 & \geq & 0 \end{array}\right.$$

et le dual
$$(D)\left\{\begin{array}{ccccc} y_1 & & & = & z'[\min] \\ -y_1 & + & y_2 & \geq & 1 \\ y_1 & - & 1/2y_2 & \geq & 1 \\ y_1 & , & y_2 & & \text{quelconques} \end{array}\right.$$

${}^t x^* = (1,2)$, ${}^t y^* = (3,4)$ sont admissibles et $z^* = z'^* = 3$ donc optimales.

Illustration du cas 2. :

$$(P)\left\{\begin{array}{ccccc} 3x_1 & + & 3x_2 & = & z[\max] \\ -x_1 & + & x_2 & \leq & 1 \\ -x_1 & - & 2x_2 & \leq & -2 \\ x_1 & , & x_2 & \geq & 0 \end{array}\right. \qquad (D)\left\{\begin{array}{ccccc} y_1 & - & 2y_2 & = & z'[\min] \\ -y_1 & - & y_2 & \geq & 3 \\ y_1 & - & 2y_2 & \geq & 3 \\ y_1 & , & y_2 & \geq & 0 \end{array}\right.$$

On vérifie, par exemple graphiquement, que l'optimum de (P) est rejeté à l'infini. Le dual est impossible (son polyèdre est vide) car la somme de ses deux contraintes fournit $-3y_2 \geq 6$, soit $y_2 \leq -2$, qui est contradictoire avec $y_2 \geq 0$.

Autre exemple :
$$(P)\left\{\begin{array}{ccccc} x_1 & - & x_2 & = & z[\max] \\ -x_1 & + & x_2 & = & 1 \\ x_1 & - & x_2 & = & 0 \\ x_1 & , & x_2 & \geq & 0 \end{array}\right.$$

et le dual
$$(D)\left\{\begin{array}{ccccc} y_1 & & & = & z'[\min] \\ -y_1 & + & y_2 & \geq & 1 \\ y_1 & - & 2y_2 & \geq & -1 \\ y_1 & , & y_2 & & \text{quelconques} \end{array}\right.$$

Pas de solution au primal, mais possibilité de solution admissible $y_1 = \alpha$, $y_2 = \alpha + 1$ pour le dual, avec α aussi petit que voulu, donc pas d'optimum fini.

Illustration du cas 3.

$$(P)\left\{\begin{array}{rcrcl} 2x_1 & + & x_2 & = & z[\max] \\ x_1 & - & x_2 & \leq & 3\ (1) \\ -x_1 & + & x_2 & \leq & -4\ (2) \\ x_1 & , & x_2 & \geq & 0 \end{array}\right. \qquad (D)\left\{\begin{array}{rcrcl} 3y_1 & - & 4y_2 & = & z'[\min] \\ y_1 & - & y_2 & \geq & 2\ (1') \\ -y_1 & + & y_2 & \geq & 1\ (2') \\ y_1 & , & y_2 & \geq & 0 \end{array}\right.$$

(P) n'a pas de solution admissible : $(1) + (2)$ entraîne $0 \leq -1$ qui est impossible. (D) non plus car $(1') + (2')$ entraîne $0 \geq 3$ qui est aussi impossible.

Autre exemple :

$$(P)\left\{\begin{array}{rcrcl} x_1 & + & x_2 & = & z[\max] \\ -x_1 & + & x_2 & = & 1 \\ x_1 & - & x_2 & = & 0 \\ x_1 & , & x_2 & \geq & 0 \end{array}\right.$$

et le dual

$$(D)\left\{\begin{array}{rcrcl} y_1 & & & = & z'[\min] \\ -y_1 & + & y_2 & \geq & 1 \\ y_1 & - & y_2 & \geq & 1 \\ y_1 & , & y_2 & & \text{quelconques} \end{array}\right.$$

Pas de solution, ni au primal, ni au dual.

3.4.2 Relations d'exclusion

On considère un problème primal sous forme canonique

$$(P)\left\{\begin{array}{rcl} {}^t c.x & = & z[\max] \\ Ax & \leq & b \\ x & \geq & 0 \end{array}\right.$$

et son dual

$$(D)\left\{\begin{array}{rcl} {}^t y.b & = & z'[\min] \\ {}^t y.A & \geq & {}^t c \\ y & \geq & 0. \end{array}\right.$$

Proposition : Soit x^* et y^* deux solutions admissibles du primal et du dual. Alors x^* et y^* sont optimales si et seulement si les conditions suivantes sont réalisées :

$$y_i^* \left(b_i - \sum_{j=1}^{m} a_{i,j} x_j^* \right) = 0 \text{ pour tout } i = 1, \cdots, m\ ;$$

$$\left(\sum_{i=1}^{m} y_i^* a_{i,j} - c_j \right) x_j^* = 0 \text{ pour tout } j = 1, \cdots, n.$$

Attention : L'hypothèse x^* et y^* solutions admissibles est nécessaire !

Démonstration. Si x^*, y^* solutions, alors elles satisfont les contraintes :

$$^ty^*.A \geq {}^tc \text{ et } A.x^* \leq b.$$

On multiplie la première inégalité à droite par $x^* \geq 0$ et la seconde à gauche par $^ty^* \geq 0$, ce qui donne :

$$^ty^*.Ax^* \geq {}^tc.x^* \text{ et } {}^ty^*.Ax^* \leq {}^ty^*.b$$

c'est-à-dire

$$^tc.x^* \leq {}^ty^*.Ax^* \leq {}^ty^*.b$$

Condition nécessaire : si x^* et y^* sont optimales, alors l'optimum est le même, d'après le théorème de dualité :

$$^tc.x^* = {}^ty^*.b$$

d'où

$$^tc.x^* = {}^ty^*.Ax^* = {}^ty^*.b$$

d'où l'on tire les deux égalités :

$$^ty^*.(b - Ax^*) = 0 \text{ et } ({}^ty^*.A - {}^tc).x^* = 0.$$

Tous les y_i^* et x_j^* sont ≥ 0 et $b - Ax \geq 0$, tout comme $^ty^*.A - {}^tc \geq 0$ donc tous les termes des deux produits sont nécessairement nuls, ce qui donne les deux séries d'égalités.

Condition suffisante : si les conditions sont vraies, on a :

$$^ty^*.b = {}^ty^*.Ac^* \text{ et } {}^ty^*.Ax^* = {}^tc.x^*$$

donc les deux fonctions objectifs sont égales et donc x^* et y^* sont optimales. □

Remarque : si le primal est en forme standard, alors la première égalité est évidente car $Ax^* = b$ et donc tous les coefficients de y_i^* sont nuls.

On va appliquer ces relations, dites d'***exclusion*** à l'exemple de l'atelier :

$$(1)\left\{\begin{array}{c} y_1(1000 - x_1) = 0\,; \\ y_2(500 - x_2) = 0\,; \\ y_3(1500 - x_3) = 0\,; \\ y_4(6750 - 3x_1 - 6x_2 - 2x_3) = 0 \end{array}\right. \qquad (2)\left\{\begin{array}{c} (y_1 + 3y_4 - 4)x_1 = 0\,; \\ (y_2 + 6y_4 - 12)x_2 = 0\,; \\ (y_3 + 2y_4 - 3)x_3 = 0 \end{array}\right.$$

Les relations d'exclusion permettent :
• de trouver aisément l'optimum de dual, si on connaît l'optimum du primal et réciproquement (on suppose évidemment ici que l'on ne connaît pas le tableau optimal, sinon on appliquerait la règle de correspondance du paragraphe précédent !), comme suit :
En reprenant le sous-problème de l'exemple de l'atelier à $n = 2$ variables (P) et son dual (D) :

$$(P)\left\{\begin{array}{ccccc} 4x_1 & + & 12x_2 & = & z[\max] \\ x_1 & & & \leq & 1000\,, \\ & & x_2 & \leq & 500\,, \\ x_1 & + & 2x_2 & \leq & 1750\,, \\ x_1 & , & x_2 & \geq & 0 \end{array}\right. \qquad (D)\left\{\begin{array}{ccccccc} 1000y_1 & + & 500y_2 & + & 1750y_3 & = & z'[\min] \\ y_1 & & & + & y_3 & \geq & 4\,, \\ & & y_2 & + & 2y_3 & \geq & 12\,, \\ y_1 & , & y_2 & , & y_3 & \geq & 0 \end{array}\right.$$

Les relations d'exclusion s'écrivent :

$$(1)\left\{\begin{array}{c} y_1(1000 - x_1) = 0\,; \\ y_2(500 - x_2) = 0\,; \\ y_3(1750 - x_1 - 2x_2) = 0 \end{array}\right. \qquad (2)\left\{\begin{array}{c} (y_1 + y_3 - 4)x_1 = 0\,; \\ (y_2 + 2y_3 - 12)x_2 = 0 \end{array}\right. .$$

On a résolu (graphiquement) (P) : $x_1^* = 750$, $x_2^* = 500$, $z^* = 9000$.
En reportant ces valeurs dans les relations d'exclusion ; il vient le système :

$$(1) \left\{ \begin{array}{c} y_1(1000 - 750) = 0\,; \\ y_2(500 - 500) = 0\,; \\ y_3(1750 - 1750) = 0 \end{array} \right. \qquad (2) \left\{ \begin{array}{c} (y_1 + y_3 - 4).750 = 0\,; \\ (y_2 + 2y_3 - 12).500 = 0 \end{array} \right. .$$

On trouve aisément : $y_1 = 0$ et, en reportant dans (2) : $y_3 = 4$, $y_2 = 4$. On sait en outre qu'à l'optimum $z' = z$, d'où $z' = 9000$. L'optimum de (D) a donc été facilement obtenu.

• Les relations d'exclusion permettent aussi de tester si une solution admissible du primal (ou du dual) est optimale ou pas. Il suffit de reporter les valeurs des variables du primal (resp. du dual) dans le système des relations d'exclusion, puis de déterminer si l'on obtient une solution *admissible* du dual (resp. du primal) : si *oui*, la solution testée du primal est optimale, *sinon* elle ne l'est pas. Ainsi, sur le même exemple, on peut tester si la solution admissible $x_1 = 850$, $x_2 = 450$ est optimale (certes, on connaît d'avance le résultat, puisque la solution optimale du problème de l'atelier est unique, mais on va l'oublier provisoirement). Il vient :

$$\left\{ \begin{array}{l} y_1(1000 - 850) = 0 \\ y_2(500 - 450) = 0 \\ y_3(1750 - 1750) = 0, \end{array} \right.$$

d'où $y_1 = y_2 = 0$. Puis $\left\{ \begin{array}{l} (y_3 - 4).850 = 0 \\ (2y_3 - 12).450 = 0 \end{array} \right.$. Il y a contradiction : y_3 ne saurait être égal à la fois à 4 et à ...6.

La solution admissible de (P) : $x_2 = 850$ et $x_2 = 450$ n'est donc pas optimale.

Pour terminer, on peut souligner que les relations d'exclusion s'appliquent à des solutions admissibles de (P) et (D), mais pas nécessairement de base (comme dans le calcul ci-dessus).

3.5 Correspondance entre l'optimum du primal et celui du dual

Ceci concerne le cas 1. envisagé plus haut. On va tout d'abord résoudre le programme dual du problème de l'atelier. Pour cela, on fait quelques observations.

• Les variables d'écart doivent présenter un coefficient -1, en raison du sens des inégalités au dual : $\geq$, puisqu'on impose que ces variables d'écart soient non négatives.

• Dans ces conditions, il n'existe pas de solution de "départ" évidente. Dans la résolution du primal, on avait annulé les variables x_1, x_2 et x_3 (variables hors-base) et obtenu $x_4 = 1000$, $x_5 = 500$, $x_6 = 1500$ et $x_7 = 6750$, c'est-à-dire que la base initiale était formée des $m = 4$ variables d'écart. De plus, les colonnes A^4, A^5, A^6 et A^7 étaient unitaires (et juxtaposées, constituant une matrice identité 4×4). Mais, au dual, si on procédait de même, on aurait $y_5 = -4$, $y_6 = -12$ et $y_7 = -3$: non admissible. Toutefois, pour la résolution du dual, on a une base initiale admissible évidente puisque les colonnes 1, 2 et 3 du dual sont unitaires : les variables y_1, y_2 et y_3 forment cette base et la matrice de base est $B = I_3$.

• Enfin, au lieu de minimiser z', on va maximiser son opposé (ce qui est équivalent), $z'' = -z'$.

Il convient alors d'exprimer z' uniquement en fonction des variables hors-base, c'est-à-dire y_4, y_5, y_6 et y_7 :

$$\begin{aligned} z' &= 1000y_1 + 500y_2 + 1500y_3 + 6750y_4 \\ &= 1000(4 - 3y_4 + y_5) + 500(12 - 6y_4 + y_6) + 1500(3 - 2y_4 + y_7) + 6750y_4 \\ &= 14500 - 2250y_4 + 1000y_5 + 500y_6 + 1500y_7 \end{aligned}$$

$$z'' = -z' = -14500 + 2250y_4 - 1000y_5 - 500y_6 - 1500y_7.$$

Le tableau initial pour ce dual est le suivant :

	$i \downarrow$ $j \rightarrow$	y_1	y_2	y_3	y_4	y_5	y_6	y_7	β	$\beta_i/\alpha_{i,e}$
$s \leftarrow$	y_1	1	0	0	$\boxed{3}$	-1	0	0	4	$4/3*$
	y_2	0	1	0	6	0	-1	0	12	$12/6$
	y_3	0	0	1	2	0	0	-1	3	$3/2$
	Δ'_j	0	0	0	2250	-1000	-500	-1500	$z'' + 14500$	
					$\uparrow e$					

Remarque. Si on n'avait pas trouvé une base évidente pour démarrer le programme dual, on aurait pu utiliser la méthode du "grand M".

En posant $z'' = -z' = -1000y_1 - 500y_2 - 1500y_3 - 6750y_4 - My_8 - My_{10}$, on écrit alors le tableau initial :

	y_1	y_2	y_3	y_4	y_5	y_6	y_7	y_8	y_9	y_{10}	β
8	1	0	0	3	-1	0	0	1	0	0	4
9	0	1	0	6	0	-1	0	0	1	0	12
10	0	0	1	2	0	0	-1	0	0	1	3
c_j	-1000	-500	-1500	-6750	0	0	0	$-M$	$-M$	$-M$	
Δ_j	-1000 $+M$	-500 $+M$	-1500 $+M$	-6750 $+11M$	$-M$	$-M$	$-M$	0	0	0	$-19M$

Dans les deux cas, on parvient au tableau optimal suivant :

					$y_{\bar{1}}$	$y_{\bar{2}}$	$y_{\bar{3}}$	
	y_1	y_2	y_3	y_4	y_5	y_6	y_7	$\beta^{(2)}$
y_4	$1/3$	0	0	1	$-1/3$	0	0	$4/3$
y_2	-2	1	0	0	2	-1	0	4
y_3	$-2/3$	0	1	0	$2/3$	0	-1	$1/3$
Δ'_j	-750	0	0	0	-250	-500	-1500	$z'' + 11500$

On a atteint l'optimum : $y_1 = 0$, $y_2 = 4$, $y_3 = 1/3$, $y_4 = 4/3$, $y_{\bar{1}} = 0$, $y_{\bar{2}} = 0$, $y_{\bar{3}} = 0$; $z'' = -11500$. Puisque $z'' = -11500$, on a $z' = 11500$.

On rappelle le tableau optimal du primal :

				$x_{\bar{1}}$	$x_{\bar{2}}$	$x_{\bar{3}}$	$x_{\bar{4}}$	
	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	
x_1	1	0	0	0	-2	$-2/3$	$1/3$	250
x_2	0	1	0	0	1	0	0	500
$x_{\bar{1}}$	0	0	0	1	2	$2/3$	$-1/3$	750
x_3	0	0	1	0	0	1	0	1500
Δ_j	0	0	0	0	-4	$-1/3$	$-4/3$	$z - 11500$

On a renommé les variables d'écart du dual : $y_{\bar{1}}$, $y_{\bar{2}}$ et $y_{\bar{3}}$ (au lieu de y_5, y_6 et y_7) ; de même pour celles du primal : $x_{\bar{1}}$, $x_{\bar{2}}$, $x_{\bar{3}}$ et $x_{\bar{4}}$ (au lieu de x_4, x_5, x_6 et x_7).

On constate alors à l'optimum du primal et du dual que :

• la valeur de $z' = 11500$ de l'optimum du dual est égale à celle de l'optimum du primal (ce qui était attendu, avec le théorème de dualité) ;

• les valeurs des variables de base du dual : y_2, y_3 et y_4 sont égales, au signe près, aux valeurs de $\Delta_{\bar{2}}$, $\Delta_{\bar{3}}$ et $\Delta_{\bar{4}}$ au primal ;

• les valeurs des Δ'_j du dual : Δ'_1, $\Delta'_{\bar{1}}$, $\Delta'_{\bar{2}}$ et $\Delta'_{\bar{3}}$ sont égales, au signe près, aux valeurs de $x_{\bar{1}}$, x_1, x_2 et x_3 au primal.

On montre que cette correspondance entre l'optimum du primal et l'optimum du dual est générale :

$$\begin{cases} y_i = -\Delta_{\bar{i}} \text{ et } x_{\bar{i}} = -\Delta'_{\bar{i}} \text{ pour } i = 1, 2, \cdots, m \\ y_{\bar{j}} = -\Delta_j \text{ et } x_j = -\Delta'_{\bar{j}} \text{ pour } j = 1, 2, \cdots, n \end{cases}$$

De plus, si x_j est dans la base optimale du primal (resp. hors-base), alors $y_{\bar{j}}$ est hors-base du dual (resp. dans la base). De même, si y_i est dans la base du dual (resp. hors-base), alors $x_{\bar{i}}$ est hors-base du primal (resp. dans la base).

• On peut donner aussi une correspondance entre les coefficients $\alpha_{k,\ell}$ du tableau optimal du primal et $\alpha'_{k,\ell}$, ceux du tableau optimal du dual, en se limitant aux colonnes hors-base (les colonnes de base sont triviales, puisque unitaires) :

$$\alpha_{k,\ell} = -\alpha'_{\bar{\ell},\bar{k}}.$$

Une manière pratique d'appliquer cette règle de correspondance est de condenser en un tableau unique le tableau optimal du primal et celui du dual :

→ On réordonne la base optimale du primal : x_1, x_2, x_3, $x_{\bar{1}}$; $x_{\bar{2}}$, $x_{\bar{3}}$, $x_{\bar{4}}$ (en mettant en tête les variables de base, puis les variables hors-base) et le tableau optimal du primal en conséquence (en échangeant sa troisième et sa quatrième ligne) et on fait figurer la ligne de la fonction économique à l'optimum du primal (les Δ_j et z) au dessus du tableau (au lieu d'au dessous).

→ On réordonne aussi la base optimale du dual : $y_{\bar{1}}$, $y_{\bar{2}}$, $y_{\bar{3}}$, y_1 ; y_2, y_3, y_4 (en mettant en tête les variables hors-base, puis les variables de base) et le tableau optimal du dual en conséquence (en plaçant en dernière ligne sa première ligne, puis en réordonnant les colonnes dans l'ordre ci-dessus). Enfin, le vecteur des seconds membres est placé à gauche du tableau plutôt qu'à droite.

$\rightarrow$ Le tableau optimal du dual est alors placé immédiatement au-dessous de celui du primal.

$\rightarrow$ On déduit alors le sous-tableau non trivial du tableau optimal du dual (c'est-à-dire les colonnes hors-base, les seconds membres et les Δ' des variables hors-base), à partir du sous-tableau non trivial du tableau optimal du primal, en transposant ce dernier sous-tableau, puis en multipliant par -1 tous les éléments du sous-tableau transposé ; les deux sous-tableaux non triviaux, respectivement du primal et du dual, sont encadrés en haut, à droite et en bas, à gauche.

$$
\begin{array}{cc|cccc||ccc|c||cc}
 & & x_1 & x_2 & x_3 & x_{\bar{1}} & x_{\bar{2}} & x_{\bar{3}} & x_{\bar{4}} & & & \\
\hline
 & \Delta & 0 & 0 & 0 & 0 & -4 & -1/3 & -4/3 & 11500 & z & \\
\hline
 & & 1 & 0 & 0 & 0 & -2 & -2/3 & 1/3 & 250 & x_1 & \\
 & & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 500 & x_2 & \\
 & & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1500 & x_3 & \text{Primal} \\
 & & 0 & 0 & 0 & 1 & 2 & 2/3 & -1/3 & 750 & x_{\bar{1}} & \\
\hline
y_2 & 4 & 2 & -1 & 0 & -2 & 1 & 0 & 0 & & & \\
y_3 & 1/3 & 2/3 & 0 & -1 & -2/3 & 0 & 1 & 0 & & & \text{Dual} \\
y_4 & 4/3 & -1/3 & 0 & 0 & 1/3 & 0 & 0 & 1 & & & \\
\hline
z'' & -11500 & -250 & -500 & -1500 & -750 & 0 & 0 & 0 & \Delta' & & \\
\hline
 & & y_{\bar{1}} & y_{\bar{2}} & y_{\bar{3}} & y_1 & y_2 & y_3 & y_4 & & &
\end{array}
$$

Les sous-tableaux relatifs aux variables de base, respectivement du primal (x_1, x_2, x_3 et $x_{\bar{1}}$) et du dual (y_2, y_3 et y_4), sont qualifiés de "triviaux" car constitués de colonnes unitaires (formant une matrice identité, de format $m \times m$ au primal et $n \times n$ au dual), et de la partie de ligne des coefficients de la fonction économique (resp. Δ et Δ') associée à ces variables de base ; ces coefficients sont donc tous nuls.

3.6 Algorithme dual du simplexe

Soit le programme linéaire

$$
\left\{
\begin{array}{rcl}
{}^t c.x & = & z[\max] \\
Ax & \leq & b \\
x & \geq & 0
\end{array}
\right.
$$

Une solution de base du primal est dite ***duale admissible*** si les coûts marginaux c_j correspondant aux variables hors-base sont tous négatifs ou nuls. Cela signifie que la solution de base duale correspondante est admissible pour le programme dual (la valeur d'une variable de base duale est égale à l'opposé de la valeur du coût marginal de la variable d'écart de la i-ème contrainte du primal...)

La détermination d'une solution de base duale admissible pour le primal est identique à la recherche d'une solution de base admissible du dual.

Algorithme dual du simplexe

1. Partir d'une base initiale telle que $c \leq 0$.

2. Critère d'optimalité (cas d'une maximisation) : si les composantes du vecteur second membre β sont toutes positives, la solution de base est optimale.

3. Si il existe des $\beta_i < 0$, la variable qui sort de la base x_s est déterminée par

$$\min_{i \in I_B} \{\beta_i \mid \beta_i < 0\}$$

(variable de plus petite valeur négative sur la base)

4. La variable qui entre dans la base x_e est telle que :

$$\frac{\Delta_e}{y_{s,e}} = \min_{j \in I_N} \left\{ \frac{\Delta_j}{y_{s,j}} \mid y_{s,j} < 0 \right\}.$$

5. Pivotage : x_e devient variable de base, x_s variable hors base. Aller en 2.

Pour une illustration de cette méthode, il est conseillé de faire l'exercice 12.

Chapitre 4

Programmation Linéaire en Nombres Entiers

La Programmation Linéaire en Nombres Entiers ($PLNE$) est un domaine très riche de la programmation mathématique. Les recherches dans ce domaine sont nombreuses et ont vraiment commencé avec Gomory en 1958.

On distingue 4 familles de méthodes de résolution des ($PLNE$) :

→ les recherches arborescentes : procédure de séparation et évaluation (ou Branch and Bound) ;

→ les méthodes de coupes (ou troncatures) : troncature de Gomory ;

→ la programmation dynamique : plus court chemin, sac à dos ;

→ les méthodes approchées : tabou, recuit simulé, algorithme génétique, colonie de fourmis.

Dans ce cours, seules les deux premières familles de méthodes seront étudiées, les deux autres le seront en Master1 ISMAG.

4.1 Introduction

En pratique, il arrive fréquemment que dans un programme linéaire, certaines variables soient astreintes à être entières. On parle alors de ***programmation linéaire en nombres entiers*** ($PLNE$).

Ainsi, une entreprise ne saurait construire $x_1 = 1,45$ entrepôts, acquérir $x_2 = 2,37$ camions ou encore affréter $x_3 = 0,41$ avion... comme pourrait lui indiquer la solution d'un (PL) en variables continues ! Malheureusement l'arrondi des variables, que ce soit par excès ou par défaut, peut ne pas être optimal ou, pire, ne pas être admissible. Ainsi, ne pourra-t-on pas se contenter d'arrondir les variables pour passer de l'optimum du (PL) continu à celui du ($PLNE$).

Il existe des modèles classiques importants pour les applications en logistique comme dans les plannings de transports de personnes (autobus, métros, trains, avions). On va en citer quelques-uns.

4.1.1 Exemples

Exemple 1. Un camion peut transporter une charge maximale de $b = 14$ tonnes, de $n = 4$ marchandises différentes. Le poids de chacune des marchandises est respectivement de 4, 6, 8 et 10 tonnes. Enfin, le bénéfice de la vente de chacune des marchandises, après son transport, vaut respectivement 2000, 2700, 3600 et 4400 euros. Déterminer le chargement du camion permettant de maximiser le bénéfice.

Le problème s'écrit

$$\left\{\begin{array}{ccccccccc} 2000x_1 & + & 2700x_2 & + & 3600x_3 & + & 4400x_4 & = & z[\max] \\ 4x_1 & + & 6x_2 & + & 8x_3 & + & 10x_4 & \leq & 14 \\ x_1 & , & x_2 & , & x_3 & , & x_4 & = & 0 \text{ ou } 1 \end{array}\right.$$

et plus généralement :

$$\left\{\begin{array}{ccccccccc} c_1x_1 & + & c_2x_2 & + & \cdots & + & c_nx_n & = & z[\max] \\ a_1x_1 & + & a_2x_2 & + & \cdots & + & a_nx_n & \leq & b \\ x_1 & , & x_2 & , & \cdots & , & x_n & = & 0 \text{ ou } 1 \end{array}\right.$$

Pour l'exemple ci-dessus, on pourrait montrer que l'optimum est $x_1 = x_4 = 1$, $x_2 = x_3 = 0$, $z^* = 6400$ euros.

Exemple 2. Soit 4 points e_1, e_2, e_3, e_4 représentant 4 clients à qui on doit livrer respectivement 2, 4, 8 et 10 tonnes de marchandise, à partir d'un entrepôt central e_0, ceci avec un camion de capacité $C = 16$ tonnes. Le tableau (symétrique) des distances (en km) est le suivant :

	e_0	e_1	e_2	e_3	e_4
e_0	0	15	8	12	9
e_1	15	0	12	25	5
e_2	8	12	0	10	20
e_3	12	25	10	0	6
e_4	9	5	20	6	0

On peut ici énumérer toutes les tournées "admissibles" P_j, c'est-à-dire respectant la contrainte de capacité (la somme des quantités livrées aux clients d'une même tournée doit être inférieure ou égale à 16 tonnes) :

	P_1	P_2	P_3	P_4	P_5	P_6	P_7	P_8	P_9	P_{10}	P_{11}
e_1	1	0	0	0	1	1	1	0	0	1	1
e_2	0	1	0	0	1	0	0	1	1	1	1
e_3	0	0	1	0	0	1	0	1	0	1	0
e_4	0	0	0	1	0	0	1	0	1	0	1
c_j	30	16	24	18	35	52	29	30	37	49	34

Cette énumération des 11 tournées admissibles n'a été possible que parce que cet exemple est de très petite taille. On va donner le détail du calcul du coût de la tournée P_j dans un cas non trivial. Par exemple, la tournée P_{11} concerne les clients e_1, e_2 et e_4 (puisque $a_{1,11} = a_{2,11} = a_{3,11} = 1$). On cherche l'itinéraire de longueur (en km) minimale qui, partant de e_0, permet de passer une fois et une seule chez ces 3 clients, puis de revenir à e_0. Ceci revient à résoudre le "***problème du voyageur de commerce***" pour une instance de petite taille, puisque comportant 4 points. On calcule les différentes longueurs des 6 itinéraires :

pour $[e_0, e_1, e_2, e_4, e_0]$ et $[e_0, e_4, e_2, e_1, e_0]$: $15 + 12 + 20 + 9 = 56$;
pour $[e_0, e_1, e_4, e_2, e_0]$ et $[e_0, e_2, e_4, e_1, e_0]$: $15 + 5 + 20 + 8 = 48$;
pour $[e_0, e_2, e_1, e_4, e_0]$ et $[e_0, e_4, e_1, e_2, e_0]$: $8 + 12 + 5 + 9 = 34$.

Voici la formulation du problème de tournées en tant que problème linéaire avec 11 variables binaires :

$$\left\{\begin{array}{ccccccccccccccccccccccc}
30x_1 & + & 16x_2 & + & 24x_3 & + & 18x_4 & + & 35x_5 & + & 52x_6 & + & 29x_7 & + & 30x_8 & + & 37x_9 & + & 49x_{10} & + & 34x_{11} & = & z \\
x_1 & & & & & & & + & x_5 & + & x_6 & + & x_7 & & & & & + & x_{10} & + & x_{11} & = & 1 \\
 & & x_2 & & & & & + & x_5 & & & & & + & x_8 & + & x_9 & + & x_{10} & + & x_{11} & = & 1 \\
 & & & & x_3 & & & & & + & x_6 & & & + & x_8 & & & + & x_{10} & & & = & 1 \\
 & & & & & & x_4 & & & & & + & x_7 & & & + & x_9 & & & + & x_{11} & = & 1
\end{array}\right.$$

La solution optimale de ce problème est : $x_3 = x_{11} = 1$; elle a pour coût $z^* = 58$. Elle correspond aux deux tournées $[e_0, e_2, e_1, e_4, e_0]$ et $[e_0, e_3, e_0]$.

Exemple 3. Un établissement de restauration spécialisé en "produits de la mer" propose 2 types d'assiettes-repas :

a) 5 oursins, 2 douzaines de moules, 1 huitre en nombre x_1 : bénéfice 8 euros pour le restaurant ;

b) 3 oursins, 3 douzaines de moules, 3 huitres en nombre x_2 : bénéfice 6 euros pour le restaurant.

L'approvisionnement du restaurant est de 30 oursins, 24 douzaines de moules, 18 huitres. On cherche à réaliser le bénéfice maximum :

$$\left\{\begin{array}{ccccl}
8x_1 & + & 6x_2 & = & z[\max] \\
5x_1 & + & 3x_2 & \leq & 30 \text{ (oursins) } (1) \\
2x_1 & + & 3x_2 & \leq & 24 \text{ (moules) } (2) \\
x_1 & + & 3x_2 & \leq & 18 \text{ (huitres) } (3) \\
x_1 & , & x_2 & \in & \mathbb{N}
\end{array}\right.$$

<u>Solution empirique :</u> la recherche d'une solution se décompose en deux phases :

- Phase 1 $\rightarrow$ on cherche une solution admissible par rapport aux contraintes
- Phase 2 $\rightarrow$ on cherche à optimiser le critère z.

On cherche par exemple x_1 si $x_2 = 0$:

(1) $\rightarrow x_1 \leq \dfrac{30}{5} = 6$
(2) $\rightarrow x_1 \leq \dfrac{24}{2} = 12$
(3) $\rightarrow x_1 \leq 18$.

a_1 : $x_1 = 6$ et $x_2 = 0 \rightarrow z = 48$

a_2 : si $x_1 = 5$, que vaut x_2 ?

(1) $\rightarrow 3x_2 \leq 30 - 25 = 5$ donne $x_2 \leq \dfrac{5}{3}$ soit $x_2 \leq 1$ (entier...)
(2) $\rightarrow 3x_2 \leq 24 - 10 = 14$
(3) $\rightarrow 3x_2 \leq 18 - 5 = 13$

On a alors $x_2 = 1$ et $z = 5 \times 8 + 6 \times 1 = 46$.

a_3 : si $x_1 = 4$,

(1) $\rightarrow 3x_2 \leq 30 - 20 = 10$ donne $x_2 \leq \dfrac{10}{3}$ soit $x_2 \leq 3$ (entier...)
(2) $\rightarrow 3x_2 \leq 24 - 8 = 16$

(3) $\rightarrow 3x_2 \leq 18 - 4 = 14$
On a alors, avec $x_2 = 3$, $z = 4 \times 8 + 6 \times 3 = 50$.

a_4 : si $x_1 = 3$,
(1) $\rightarrow 3x_2 \leq 30 - 15 = 15$ donne $x_2 \leq 5$
(2) $\rightarrow 3x_2 \leq 24 - 6 = 18$
(3) $\rightarrow 3x_2 \leq 18 - 3 = 15$
On a alors, avec $x_2 = 5$, $z = 3 \times 8 + 6 \times 5 = 54$.

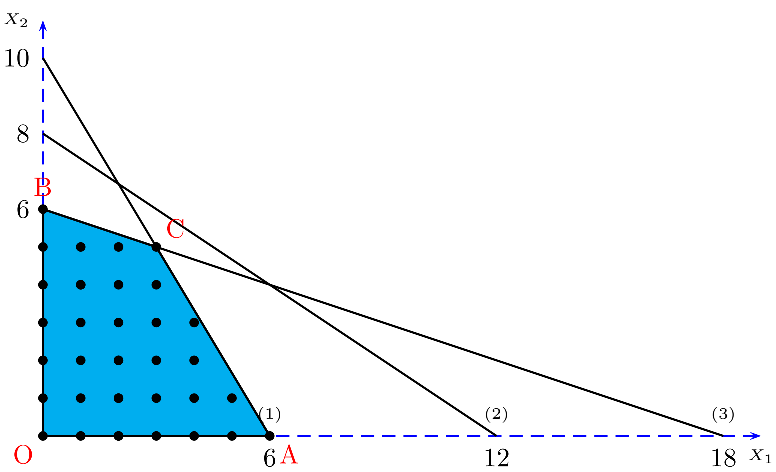
a_5 : si $x_1 = 2$,
(1) $\rightarrow 3x_2 \leq 30 - 10 = 20$ donne $x_2 \leq 6$
(2) $\rightarrow 3x_2 \leq 24 - 4 = 20$
(3) $\rightarrow 3x_2 \leq 18 - 2 = 16$ donne $x_2 \leq 5$
On a alors, avec $x_2 = 5$, $z = 2 \times 8 + 6 \times 5 = 46$.

a_6 : si $x_1 = 1$,
(1) $\rightarrow 3x_2 \leq 30 - 5 = 25$ donne $x_2 \leq 8$
(2) $\rightarrow 3x_2 \leq 24 - 2 = 22$ donne $x_2 \leq 7$
(3) $\rightarrow 3x_2 \leq 18 - 1 = 17$ donne $x_2 \leq 5$
On a alors, avec $x_2 = 5$, $z = 8 + 6 \times 5 = 38$.

a_7 : enfin, si $x_1 = 0$
(1) $\rightarrow 3x_2 \leq 30$, $x_2 = 10$
(2) $\rightarrow 3x_2 \leq 24$, $x_2 = 8$
(3) $\rightarrow 3x_2 \leq 18$, $x_2 = 6$
On a donc, avec $x_2 = 6$, $z = 6 \times 6 = 36$.
On retient donc $\boxed{x_1 = 3 \text{ et } x_2 = 5}$.

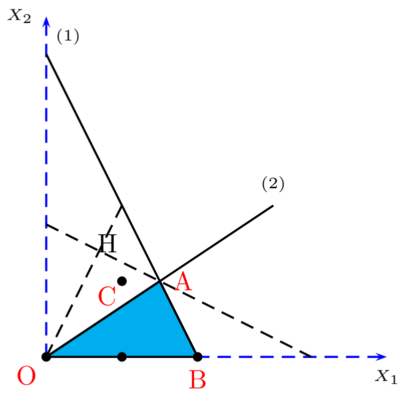
Approche géométrique :

On trace les 3 droites (1) : $y = 10 - \frac{5}{3}x$; (2) : $y = 8 - 12x$; (3) : $y = 6 - \frac{1}{3}x$. La solution doit se situer en dessous des 3 droites (partie hachurée).
On obtient un quadrilatère de sommets $O(0,0)$, $A(6,0)$, $B(0,6)$ et $C(3,5)$.



Exemple 4. Maximiser $z = x_1 + 2x_2$ sous $2x_1 + x_2 \leq 4$, $2x_1 - 3x_2 \leq 0$, avec x_i entiers positifs.

Le polyèdre des solutions admissibles est le triangle OAB où $O(0,0)$, $A(3/2,1)$ et $B(2,0)$.



On pourrait résoudre le problème réel correspondant. On constaterait que l'optimum réel est obtenu pour $x_1 = 1,5$ et $x_2 = 1$, qui correspond au point A, et c'est $z = 3,5$.

On constate que la solution "arrondie" C ($x_1 = E(3/2) = 1$, $x_2 = 1$) n'est pas dans le polyèdre des contraintes et n'est donc pas une solution admissible. Les seules solutions à coordonnées entières dans le triangle OAB sont $(0,0)$, $(1,0)$ et $(2,0)$.

On trace en O la droite représentant z et on l'éloigne de O parallèlement à elle-même. On cherche alors le dernier point d'intersection avec un point entier du triangle OAB : c'est A.

4.1.2 Définition d'un Programme Linéaire en Nombres Entiers

On considère le programme suivant :

Minimiser (ou maximiser) $z = {}^tc.x$ sous les contraintes $A.x = b$, $x \geq 0$, x_j entiers $(j = 1, \cdots, n)$

où A est une matrice de taille $m \times n$ et ses coefficients $a_{i,j}$ sont entiers, c est un vecteur de taille $n \times 1$ et les c_j sont entiers, b est un vecteur de taille $m \times 1$ et les b_i sont entiers.

Si on résout ce (PL) tel quel, on va trouver généralement une solution optimale à composantes non entières. Mais il arrive assez souvent qu'une telle mise en équation représente un problème bien concret, comme un problème d'optimisation de production en fonction de produits ou de machines. On ne peut alors pas parler d'une solution en huitième de machine...

On va donc introduire des nouvelles contraintes, celles d'intégrité. On obtient alors un Programme Linéaire en Nombres Entiers $(PLNE)$:

$$(PLNE) \left\{ \begin{array}{rcl} {}^tc.x & = & z[\max] \\ A.x & = & b \\ x & \in & \mathbb{N}^n \end{array} \right.$$

Comment résoudre un $(PLNE)$? Une des premières idées que l'on pourrait avoir serait de d'abord résoudre le programme linéaire continu, puis de prendre la valeur entière la plus proche, un arrondi de la solution optimale non entière que l'on aurait trouvé. Malheureusement, cette méthode est complètement fausse, comme on l'a vu dans l'exemple 4. On peut également s'en convaincre dans l'exemple suivant :

Exemple : Soit le problème $\left\{\begin{array}{ccccc} 10x_1 & + & 11x_2 & = & z[\max] \\ 10x_1 & + & 12x_2 & \leq & 59 \\ x_1 & , & x_2 & \in & \mathbb{N} \end{array}\right.$.

Il est équivalent de résoudre le problème :

$$\left\{\begin{array}{ccccc} -10x_1 & - & 11x_2 & = & z[\min] \\ 10x_1 & + & 12x_2 & \leq & 59 \\ x_1 & , & x_2 & \in & \mathbb{N} \end{array}\right.$$

La solution optimale x^* si on remplace $x_1, x_2 \in \mathbb{N}$ par $x_1 \geq 0$ et $x_2 \geq 0$ est $x^* = (5,9;0)$. En effet, $x_1 \leq 5,9 - 1,2x_2$ et on obtient la solution optimale en posant $x_1 = 5,9$ et $x_2 = 0$.
Un arrondi de cette solution serait $x_1 = 6$ et $x_2 = 0$. Ce n'est en aucun cas une solution du $(PLNE)$ pour deux raisons : premièrement, cette solution ne satisfait pas les contraintes ; deuxièmement, ce n'est pas la solution entière du problème !
La solution $(x_1 = 5; x_2 = 0)$ n'est pas non plus optimale parmi les solutions à valeus entières.
La solution optimale à valeurs entières est donnée par $\widetilde{x} = (1;4)$. On remarque même qu'elle est très éloignée de la solution optimale continue.

On a donc bel et bien besoin de méthodes propres au $(PLNE)$ pour pouvoir les résoudre.

On revient au problème général évoqué plus haut :

$$(PLNE)\left\{\begin{array}{ccl} {}^t c.x & = & z[\max] \\ Ax & = & b \\ x & \in & \mathbb{N}^n \end{array}\right.$$

et on considère que l'ensemble

$$\mathcal{D}\ \{x\ ;\ x \in \mathbb{R}^n,\ A.x = b\}$$

est **borné et non vide** (cette hypothèse d'étude n'est en fait pas restrictive).

Dès lors, on en déduit que chaque x_j est borné, soit

$$m_j \leq x_j \leq M_j.$$

Comme x_j est en plus à valeurs entières, on en déduit que x_j ne peut prendre qu'un nombre fini de valeurs.
On peut alors écrire x_j de la façon suivante :

$$x_j = y_0 + 2y_1 + \cdots + 2^p y_p$$

avec $y_i = 0$ ou 1.
En outre, dans la modélisation de nombreux problèmes de recherche opérationnelle, il se révèle nécessaire d'introduire des variables binaires (à valeur 0 ou 1), pour représenter des contraintes non classiques, comme par exemple des discontinuités dans une courbe de tarifs d'un transporteur ou bien dans le cas de charges fixes, s'ajoutant à un coût d'activité proportionnel au niveau

de cette activité, dès lors que ce niveau n'est pas nul ; ou aussi, plus classiquement, pour le choix d'entrepôts à construire sur des sites à déterminer dans une liste des sites possibles ; ou encore pour le choix de matériels à acquérir ou pas.

Ainsi, on ramène donc le $(PLNE)$ initial à un Programme de variables Bivalentes (PB) :

(PB) Minimiser $z = {}^t c.x$ sous les contraintes $A.x = b$, $x_j = 0$ ou 1 $(j = 1, \cdots, n)$ soit :

$$\begin{cases} {}^t c.x &= z[\min] \\ A.x &= b \\ x_j &= 0 \text{ ou } 1 \ (j = 1, \cdots, n). \end{cases}$$

Ce problème a un nombre fini de n-vecteurs solutions (car x ne peut de toutes façons prendre que 2^n valeurs possibles au plus).

Tout le problème est en fait de trouver parmi ces solutions possibles la solution optimale. On peut penser à faire une énumération, mais pour donner un ordre d'idée, dès que $n > 50$, cela prend des siècles. D'autant qu'on peut remarquer en passant que le passage de variables entières à variables bivalentes peut très facilement augmenter d'un nombre considérable le nombre de variables du système.

Il faut donc trouver un moyen de pouvoir trouver la solution optimale parmi toutes ces solutions sans avoir à les examiner toutes.

4.2 Les méthodes de recherches arborescentes par séparation et évaluation

4.2.1 Préambule

La première grande famille de méhodes que l'on va voir pour résoudre les $(PLNE)$ est celle des méthodes de recherches arborescentes par "séparation et évaluation".

Les Procédures de Séparation et Evaluation (PSE) font partie des méthodes énumératives : si $\mathcal{F} = \{S_1, S_2, \cdots, S_N\}$ est l'ensemble des solutions, comme cet ensemble est fini mais généralement gigantesque, il faut trouver un moyen pour déterminer la meilleure solution possible sans parcourir toutes les solutions.

Une énumération implicite consiste à éliminer *a priori* des solutions.
On va essayer de "détecter" que des solutions sont "mauvaises" ou irréalisables sans les évaluer explicitement. C'est ce qu'apporte le concept de séparation et évaluation.

4.2.2 Le principe de séparation

On a donc un Programme de variables Bivalentes x_i.
Le principe de séparation est très simple :
• Soit S l'ensemble des n-vecteurs à composantes 0 ou 1. On va construire un arbre de sous-ensembles de S qui forment un partition de S.

• À chaque itération de la construction de l'arbre, on va choisir une des composantes x_i du vecteur. Une des branches que l'on construira correspondra au sous-ensemble des vecteurs où $x_i = 1$ et l'autre au cas où $x_i = 0$.

Exercice : Représenter l'arbre pour $n = 3$.

On note par exemple $S_{1_0} = \{x \in S \ ; \ x_1 = 0\}$, $S_{1_1,2_0} = \{x \in S \ ; \ x_1 = 1 \text{ et } x_2 = 0\}$,...
Clairement, S_{1_0} et S_{1_1} forment une partition de S.
Pour plus de clarté, on peut arbitrairement choisir de séparer les sous-ensembles dans l'ordre lexicographique des variables x_i, mais ce n'est pas une obligation.

4.2.3 Principe d'évaluation

On va maintenant chercher à ne pas parcourir tout l'arbre pour trouver la solution optimale.

Supposons qu'on ait une fonction f dite fonction d'évaluation, qui, pour un sommet $S_{i,j}$, nous donne un minorant du coût $z = {}^t c.x$ de la meilleure solution contenue dans S_i :

$$f(S_{i,j}) \leq \min_{x \in S_{i,j}} {}^t c.x$$

Pour chaque sommet de l'arbre, on a alors une minoration de ce que peut contenir ce sous-ensemble comme solution.

Soit x_s une solution du problème (qu'on détermine par une méthode heuristique/astucieuse/chanceuse quelconque, ou qu'au pire, on met à $+\infty$), et $z_s = {}^t c.x_s$ le coût associé.

Si, quand on parcourt l'arbre, on a $f(S_{i,j}) > z_s$, alors $S_{i,j}$ ne peut pas contenir de meilleure solution que x_s, puisque $f(S_{i,j})$ était déjà un minorant de ce que pouvait contenir $S_{i,j}$ comme solution.

On ne parcourt donc les sommets de l'arbre que si on a $f(S_{i,j}) \leq z_s$, et on réduit ainsi beaucoup le nombre de sommets à examiner, ce qui est bien ce que l'on cherchait.

4.2.4 Détails pratiques

En pratique, il reste quelques petits "détails" à règler pour pouvoir appliquer cette méthode, en particulier :

→ Comment choisit ou trouve-t-on la fonction d'évaluation f ? Une des possibilités est de calculer la solution du (PL) continu restreinte au $S_{i,j}$, et le coût associé sera alors la valeur de f en ce sommet. Cette méthode donnera une bonne évaluation, mais pourra être coûteuse et longue à calculer. Suivant le problème, on pourra essayer de trouver une méthode heuristique/astucieuse/chanceuse. Bien souvent, il y aura un compromis à faire entre vitesse d'obtention de la valeur d'évaluation et fiabilité de la valeur d'évaluation.

→ Quel sommet explore-t-on à chaque étape de la recherche de la solution optimale ? Là, il n'y a pas de bonne méthode, c'est suivant le problème en question. On peut citer, à titre d'exemples, la recherche en profondeur, en largeur ou en meilleur d'abord (non traité dans ce cours).

→ Enfin, suivant quel ordre des x_i construit-on l'arbre ? Ce choix peut être déterminant pour la rapidité d'obtention de la solution optimale. Dans le cas du "problème du sac à dos", par exemple, il est plus efficace de prendre l'ordre des x_i par utilité décroissante. La détermination des x_i

peut même être dynamisée : on détermine le prochain x_i à séparer en fonction des évaluations de la rangée d'avant.

Remarque. On peut élargir le concept de séparation. Par exemple, on peut imaginer qu'au lieu de variables bivalentes, on ait des variables trivalentes, ou plus. On fait alors la séparation suivant $x_i = 0, 1, 2, ...$ On peut aussi envisager de garder des valeurs réelles et que la séparation soit ensembliste : si l'optimum est par exemple à $x_1 = 12,3$, on sépare alors l'arbre avec une branche pour laquelle x_1 ne pourra prendre que des valeurs inférieures ou égales à 12, et une autre pour laquelle x_1 ne pourra prendre que des valeurs supérieures ou égales à 13, etc... C'est ce qui sera fait dans l'exemple qui suit.

4.2.5 Exemple d'application

On considère le problème suivant :

$$(P)\left\{\begin{array}{ccccc} x_1 & + & 4x_2 & = & z[\max] \\ 5x_1 & + & 8x_2 & \leq & 40 \\ -2x_1 & + & 3x_2 & \leq & 9 \\ x_1 & , & x_2 & \in & \mathbb{N} \end{array}\right.$$

Étapes :

1. Résoudre (P) à l'aide du simplexe sans tenir compte de la contrainte x_1, x_2 à valeurs entières (seulement $x_1 \geq 0$ et $x_2 \geq 0$).
On trouve la solution optimale $x^* = (x_1^* = 1,55\ ;\ x_2^* = 4,03)$ et $z(x^*) = 17,67$.
→ Brancher par rapport à x_1 : $x_1 \leq 1$ ou $x_1 \geq 2$.

2. Ajouter la contrainte $x_1 \leq 1$ à (P) et résoudre ce programme linéaire sans tenir compte de la contrainte x_1, x_2 à valeurs entières (seulement $x_1 \geq 0$ et $x_2 \geq 0$).
On trouve la solution optimale $x = (x_1 = 1\ ;\ x_2 = 3,67)$, $z(x) = 15,67$.
→ Brancher par rapport à x_2 : $x_2 \leq 3$ ou $x_2 \geq 4$.

3. Ajouter à (P) les contraintes $x_1 \leq 1$ et $x_2 \leq 3$.
La solution optimale de ce programme est à valeurs entières : $x = (x_1 = 1\ ;\ x_2 = 3)$ et $z(x) = 13$.
→ Borner à 13 (c'est-à-dire ne pas poursuivre le branchement si on obtient des solutions optimales < 13).

4. Ajouter à (P) les contraintes $x_1 \leq 1$ et $x_2 \geq 4$.
Ce programme n'a pas de solutions réalisables.

5. Ajouter à (P) la contrainte $x_1 \geq 2$.
La solution optimale est alors $x = (x_1 = 2\ ;\ x_2 = 3,75)$, $z(x) = 17$.
→ Brancher par rapport à x_2 : $x_2 \leq 3$ et $x_2 \geq 4$.

6. Ajouter à (P) les contraintes $x_1 \geq 2$ et $x_2 \leq 3$.
Solution optimale $x = (x_1 = 3,2\ ;\ x_2 = 3)$, $z(x) = 15,2$.
→ Brancher par rapport à x_1 : $x_1 \leq 3$ ou $x_1 \geq 4$.

7. Ajouter à (P) les contraintes $2 \leq x_1 \leq 3$ et $x_2 \leq 3$.
Solution optimale $x = (x_1 = 3\ ;\ x_2 = 3)$, $z(x) = 15$.
$\rightarrow$ Borner à 15.

8. Ajouter (P) les contraintes $x_1 \geq 4$ et $x_2 \leq 3$.
Sans intérêt parce que $z(x) = 14 < 15$ pour la solution optimale x.

9. Ajouter à (P) les contraintes $x_1 \geq 2$ et $x_2 \geq 4$.
Pas de solutions réalisables.

La solution optimale à valeurs entières est donc celle trouvée en 7. : $x_1 = x_2 = 3$, $z = 15$.

Voilà les grandes lignes des méthodes de parcours d'arbres par séparation et évaluation. Il en existe bien sûr de multiples améliorations, plus adaptées chaque fois à tel ou tel type de cas.

La méthode par séparation et évaluation n'intervient pas seulement en programmation linéaire, mais dans tous les problèmes d'optimisation, où on travaille avec des arbres de décision.

4.3 Les méthodes de coupe

4.3.1 Principe

Ce sont des méthodes bien souvent itératives. À chaque tour :
$\rightarrow$ On essaie de résoudre le (PL) continu. Si on trouve une solution extrême entière, on a gagné.
$\rightarrow$ Sinon, on va chercher une contrainte supplémentaire qui va éliminer la solution extrême sans éliminer de solutions entières : cela s'appelle une "coupe". Avec cette contrainte supplémentaire, on obtient un "(PL) augmenté", et on recommence.

Exemple On reprend celui utilisé dans l'introduction de ce chapitre :

$x_1 \leq 5$ est une coupe : cette contrainte élimine la solution optimale sans toucher aux solutions entières. De même, toute inéquation du type $x_1 + x_2 \leq \alpha$ avec $5 \leq \alpha \leq 5,9$ est une coupe.

À force de coupes successives, on peut obtenir l'enveloppe convexe des solutions entières, au moins au voisinage de la solution optimale. À ce moment-là, lorsqu'à l'itération suivante, on résoudra le (PL) augmenté, on obtiendra une solution optimale entière.

Dans l'exemple précédent, avec les coupes $x_1 + x_2 \leq 5$ et $x_2 \leq 4$, on obtient l'enveloppe convexe du problème.

Comme on peut s'en douter, le choix des coupes parmi celles possibles est déterminant pour arriver à obtenir la solution optimale. Dans l'exemple précédent, si on avait pris la suite de coupes : $\alpha_k = \alpha_{k-1} - \dfrac{1}{10^k}$, on se serait rapproché de l'enveloppe convexe sans jamais l'atteindre, et on n'aurait pas trouvé la solution optimale entière en résolvant le (PL).
Il faut donc trouver des coupes efficaces.

4.3.2 Les coupes de Gomory

La méthode des troncatures de Gomory est une méthode permettant de traiter des Programmes Linéaires en Nombres Entiers sans utiliser de recherche arborescente.

On considère le programme linéaire suivant :

$$(PL)\left\{\begin{array}{rcc} {}^t c.x & = & z[\min] \\ A.x & = & b \\ x & \geq & 0 \end{array}\right.$$

où les coefficients de A, b et c sont entiers.

Soit B la matrice de base optimale (carrée, de rang m, inversible) extraite de A. B a ici la même définition que dans la version matricielle de l'algorithme du simplexe : B est la matrice formée par les colonnes de A correspondant aux variables de base. Ces variables de base sont celles qui s'expriment de façon unique et affine en fonction des autres variables (ceci est équivalent aux contraintes d'égalité initiales).

Géométriquement, les variables de base correspondent aux variables mises en cause dans l'intersection des hyperplans représentant les contraintes. De plus, B correspond, non seulement à une base réalisable, mais c'est en plus la base optimale.

On appelle X_B le sous-vecteur des variables de base et X_N celui des variables hors-base (${}^t X_B = (x_i)_{i \in I_B}$ et ${}^t X_N = (x_i)_{i \in I_N}$ où I_B est l'ensemble des indices des variables de base et I_N celui des indices des variables hors-base).
En écrivant $A = (B|N)$, $Ax = b$ équivaut à $B.X_B + N.X_N = b$, soit $B.X_B = b - N.X_N$ puis, puisque B est inversible,

$$X_B = B^{-1}b - B^{-1}N.X_N.$$

On pose $\widetilde{A} = B^{-1}N = (\alpha_{i,j})$ de taille $m \times n - m$ et $\beta = B^{-1}b$. Ainsi, $X_B = \beta - \widetilde{A}X_N$.

De même, avec ${}^t c = ({}^t C_B, {}^t C_N)$, on a $z = {}^t c.x = {}^t C_B.X_B + {}^t C_N.X_N$, soit

$$z = {}^t C_B.(B^{-1}b - B^{-1}N.X_N) + {}^t C_N.X_N = {}^t C_B.B^{-1}b - ({}^t C_B.B^{-1}N - {}^t C_N).X_N$$

soit encore, en posant $\widetilde{z} = {}^t C_B.B^{-1}b$ et ${}^t\Delta = {}^t C_B.B^{-1}N - {}^t C_N$, $z = \widetilde{z} - \sum_{j \in I_N} \Delta_j x_j$.

Ainsi, on a, à l'optimum du (PL) continu :

$$\left\{\begin{array}{lcccccl} (1) & x_i & + & \sum_{j \in I_N} \alpha_{i,j} x_j & = & \beta_i & \text{pour tout } i \in I_B \\ (2) & z & + & \sum_{j \in I_N} \Delta_j x_j & = & \widetilde{z}. & \end{array}\right.$$

Remarque. Comme B est à coefficients entiers, et que l'inverse de B s'écrit $B^{-1} = \dfrac{1}{\det B}{}^t\mathrm{cof}(B)$ (où $\mathrm{cof}(B)_{i,j} = (-1)^{i+j} \det B_{i,j}$, avec $B_{i,j}$ matrice de $\mathcal{M}_{m-1}(\mathbb{N})$ obtenue à partir de B en enlevant $\mathcal{L}_i$ et $\mathcal{C}_j$, et en gardant l'ordre des autres termes), les coefficients $\alpha_{i,j}$ de $B^{-1}N$, les β_i et les Δ_i sont des nombres rationnels.

On introduit alors, pour un nombre rationnel, sa ***partie entière*** $E(x)$ (plus grand entier relatif $\leq x$) et sa ***partie fractionnaire*** $f(x)$ (égale à $x - E(x)$). Par exemple $\frac{19}{7} = 2 + \frac{5}{7}$ donc $E\left(\frac{19}{7}\right) = 2$ et $f\left(\frac{19}{7}\right) = \frac{5}{7}$.

On pose $f_i = f(\beta_i)$ et $f_{i,j} = f(\alpha_{i,j})$. On a donc $\beta_i = E(\beta_i) + f_i$, où $0 \leq f_i < 1$ et $\alpha_{i,j} = E(\alpha_{i,j}) + f_{i,j}$ où $0 \leq f_{i,j} < 1$.

Propriété : La solution "entière" du problème initial vérifie

$$\sum_{j \in I_N} f_{i,j} x_j \geq f_i$$

Démonstration. On a toujours $\alpha_{i,j} \geq E(\alpha_{i,j})$ car $E(\alpha_{i,j})$ est le plus grand entier inférieur ou égal à $\alpha_{i,j}$.

On prend une variable hors-base x_j ; puisqu'elle est positive ou nulle, on a $\alpha_{i,j} x_j \geq E(\alpha_{i,j}) x_j$.

On somme toutes ces relations pour $j \in I_N$; il vient :

$$\sum_{j \in I_N} \alpha_{i,j} x_j \geq \sum_{j \in I_N} E(\alpha_{i,j}) x_j.$$

Par ajout de x_i à chaque membre, il vient :

$$\beta_i = x_i + \sum_{j \in I_N} \alpha_{i,j} x_j \geq x_i + \sum_{j \in I_N} E(\alpha_{i,j}) x_j.$$

On a aussi $\beta_i \geq E(\beta_i)$. Si x est une solution entière, on doit avoir $x_i + \sum_{j \in I_N} E(\alpha_{i,j}) x_j \in \mathbb{N}$ donc, comme $E(\beta_i)$ est le plus grand entier $\leq \beta_i$:

$$E(\beta_i) \geq x_i + \sum_{x_j \in \mathcal{N}} E(\alpha_{i,j}) x_j.$$

On introduit alors une variable d'écart $s_i \geq 0$ dans cette relation :

$$x_i + \sum_{j \in I_N} E(\alpha_{i,j}) x_j + s_i = E(\beta_i)$$

que l'on soustrait membre à membre à la relation (1) :

$$x_i + \sum_{j \in I_N} \alpha_{i,j} x_j = \beta_i$$

La soustraction fournit :

$$\sum_{j \in I_N} f_{i,j} x_j - s_i = f_i$$

et, comme $s_i \geq 0$, on a donc bien $\sum_{j \in I_N} f_{i,j} x_j \geq f_i$. □

Considérons maintenant une variable de base x_i qui, à l'optimum du (PL) continu, ne serait pas entière ; on a alors : $f_i > 0$. Pour passer aux valeurs numériques des variables à cet optimum, on annule les variables hors-base : $x_j = 0$ pour $j \in I_N$. On aurait alors $-s_i = f_i$, or $-s_i$ est négatif ou nul, tandis que f_i est strictement positif. Ainsi, la contrainte $\sum_{j \in I_N} f_{i,j} x_j \geq f_i$ n'est pas vérifiée à l'optimum du (PL) continu ; si on la rajoute aux contraintes du (PL), elle suprime une partie du domaine admissible $\mathcal{D}$, d'où son nom de "troncature". On peut démontrer que la partie supprimée ne contient pas de points à coordonnées qui seraient toutes entières.

Si z qui n'est pas à valeur entière, on va procéder de la même manière pour trouver une coupe pour rendre z entier.

On peut, en effet, faire subir à l'expression (2) de la fonction économique :

$$z + \sum_{j \in I_N} \Delta_j x_j = \widetilde{z}$$

un traitement analogue à celui de la relation (1).

On parvient ainsi à une coupe (de Gomory) qui rende entier z au tour suivant.

On peut donc utiliser une coupe de Gomory, soit pour rendre x entier, soit pour rendre z entier.

Il faudrait maintenant utiliser ces coupes dans un algorithme qui converge de façon finie, de façon à disposer d'une vraie méthode de recherche de la solution optimale.

C'est le but de l'algorithme dual de Gomory.

4.3.3 L'algorithme dual de Gomory

On va ici expliquer les grandes lignes de l'algorithme de Gomory utilisant les coupes de même nom.

Supposons que l'on puisse trouver une coupe de Gomory garantissant la décroissance stricte de z. Dès lors :

• Tant que z n'est pas entier, on fabrique une coupe de Gomory adéquate. Le pivot x_j de l'algorithme correspond alors à un Δ_j non nul et on a une décroissance stricte de z.

• Si z est entier, on rajoute une coupe de Gomory sur l'intégralité des variables de base. z décroît alors strictement, mais peut devenir fractionnaire. On se retrouve alors dans le cas précédent.

• Et ainsi de suite, jusqu'à obtenir un minimum entier de z.

On obtient alors un algorithme qui converge. En fait, il y a juste un petit problème : par rapport à la supposition initiale, on n'arrive justement pas toujours à trouver une coupe qui engendre une décroissance stricte de z.

Que fait-on alors ?

Dans le cas où z est entier, on est dans un cas de dégénérescence où le pivot x_j a un Δ_j nul.

Il faut alors considérer l'ensemble $\mathcal{D}' = \{x' \in \mathbb{R}^{n'} \ ; \ A'.x' = b, \ x' \geq 0\}$, où A' est la sous-matrice de A dont les colonnes correspondent aux n' variables dont les Δ sont nuls (n' est trouvé en additionnant le cardinal de I_B et de I'_N, sous-ensemble de I_N pour lequel les variables hors-base x_j ont leur Δ_j nul). Si $\mathcal{D}'$ a un point extrême entier, alors c'est la solution cherchée. Sinon, on est certain qu'il n'y a pas de combinaison pour rendre les variables entières. On peut alors rajouter la coupe suivante :

$$\sum_{j \in I_N \setminus I'_N} x_j \geq 1.$$

Dans le nouveau problème augmenté, les coefficients non nuls correspondent alors à des variables pour lesquels le Δ est non nul, et en pivotant dessus, on retrouve une stricte décroissance de z.

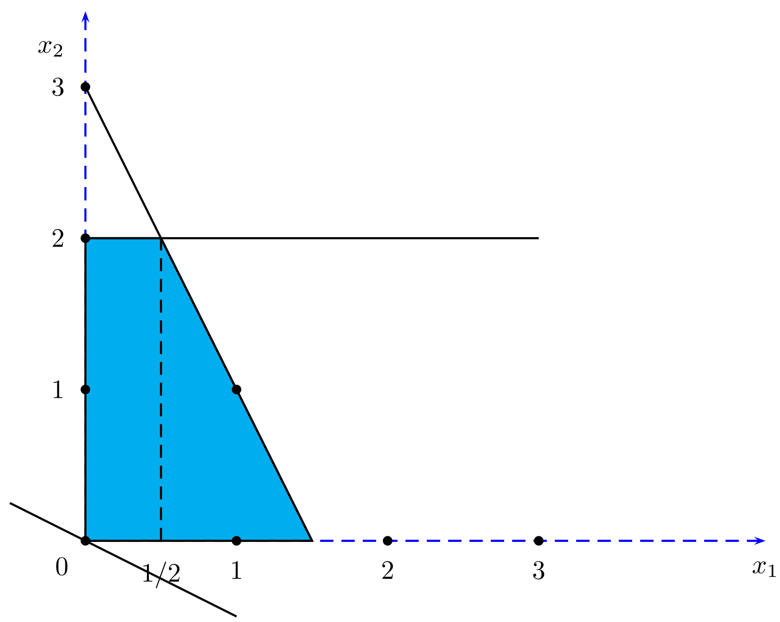
On a donc un algorithme qui converge en un nombre fini d'étapes.

Remarque : le nombre d'opérations de pivotage peut très vite devenir considérable. À l'état brut, cette méthode manque donc un peu d'efficacité. De nombreuses améliorations depuis l'ont enrichie, et elle est aujourd'hui bien utilisée.

4.3.4 Deux exemples traités

Exemple 1. Résoudre le $(PLNE)$ suivant :

$$\left\{ \begin{array}{ccccc} x_1 & + & 2x_2 & = & z[\max] \\ 2x_1 & + & x_2 & \leq & 3 \\ & & x_2 & \leq & 2 \\ x_1 & , & x_2 & \in & \mathbb{N} \end{array} \right.$$



Ce problème est suffisamment simple pour être traité directement. En effet, il n'y a que 5 points à coordonnées entières dans le domaine : les points de coordonnées $(0,0)$, $(0,1)$, $(0,2)$, $(1,0)$ et $(1,1)$.
Pour ces points, on calcule $x_1 + 2x_2$: on trouve respectivement 0, 2, 4, 1, 3. Le maximum est donc 4 et il est atteint au point de coordonnées $(0,2)$.

On va maintenant résoudre ce problème par les méthodes de $(PLNE)$ (utilisées lorsqu'il est difficile d'énumérer tous les points du domaine à coordonnées entières.

Tableau du simplexe à l'optimum et interprétation graphique :

$$
\begin{array}{cc c cccc c c}
c_i & i\downarrow & j\rightarrow & 1 & 2 & \bar{1} & \bar{2} & & \tilde{x}_i \\
\hline
1 & x_1 & & 1 & 0 & 1/2 & -1/2 & & 1/2 \\
2 & x_2 & & 0 & 1 & 0 & 1 & & 2 \\
\hline
 & & c_j & 1 & 2 & 0 & 0 & & \\
 & & & & & & & & \\
 & & \Delta_j & 0 & 0 & -1/2 & -3/2 & & z-9/2
\end{array}
$$

On a donc à l'optimum :

$$
\begin{cases}
x_1 + \left(\dfrac{1}{2}x_{\bar{1}} - \dfrac{1}{2}x_{\bar{2}}\right) = \dfrac{1}{2} \\
x_2 + x_{\bar{2}} = 2
\end{cases}
$$

La troncature de Gomory correspondant à la variable de base x_1 s'écrit :

$$\frac{1}{2}x_{\bar{1}} + \frac{1}{2}x_{\bar{2}} \geq \frac{1}{2}$$

car $\dfrac{1}{2} = 0 + \dfrac{1}{2}$ et $-\dfrac{1}{2} = -1 + \dfrac{1}{2}$.

$$\frac{1}{2}x_{\bar{1}} + \frac{1}{2}x_{\bar{2}} - x_1 = \frac{1}{2}$$

On va exprimer cette relation en fonction seulement de x_1 et x_2.

$x_2 + x_{\bar{2}} = 2$ donc $x_{\bar{2}} = 2 - x_2$

$x_1 + \left(\dfrac{1}{2}x_{\bar{1}} - \dfrac{1}{2}x_{\bar{2}}\right) = \dfrac{1}{2}$ donc $x_{\bar{1}} - x_{\bar{2}} - 2x_1 = 1$, soit

$$x_{\bar{1}} = 1 + x_{\bar{2}} - 2x_1 = 1 + 2 - x_2 - 2x_1 = 3 - 2x_1 - x_2$$

La troncature donne alors l'inéquation :

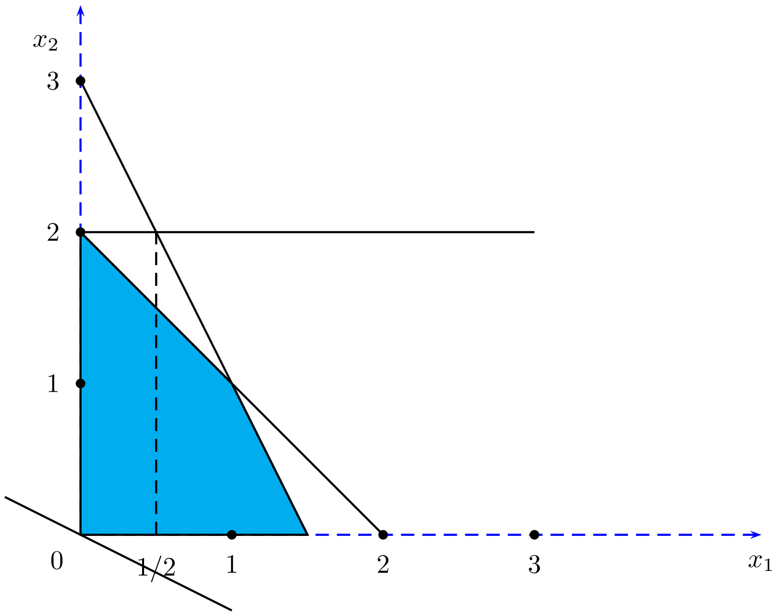
$$3 - 2x_1 - x_2 + 2 - x_2 \geq 1$$

$$5 - 2x_1 - 2x_2 \geq 1$$

$$2x_1 + 2x_2 \leq 4$$

$$x_1 + x_2 \leq 2$$

Cette nouvelle contrainte ne supprime aucun point entier du domaine.



On ajoute cette contrainte au tableau optimal

$$\frac{1}{2}x_{\bar{1}} + \frac{1}{2}x_{\bar{2}} - s_1 = \frac{1}{2}, \quad s_1 \in \mathbb{N}.$$

Le problème linéaire à résoudre est représenté par le tableau suivant :

$i \downarrow$ $j \rightarrow$	x_1	x_2	$x_{\bar{1}}$	$x_{\bar{2}}$	s_1	$\beta_i = \widetilde{x}_i$
x_1	1	0	$1/2$	$-1/2$	0	$1/2$
x_2	0	1	0	1	0	2
s_1	0	0	$-1/2$	$-1/2$	1	$-1/2$
	0	0	$-1/2$	$-3/2$	0	$z - 9/2$

$x_{\bar{1}} = x_{\bar{2}} = 0$ donne $x_1 = \frac{1}{2}$, $x_2 = 2$, $s_1 = -\frac{1}{2}$ et on n'a pas une solution de base admissible. On ne peut pas appliquer l'algorithme du simplexe. On pourrait utiliser la méthode des pénalités, dite du "grand M" comme dans l'exemple qui va suivre, mais pour changer, on va utiliser le dual.

En effet, les coefficients des variables hors-base dans la fonction économique sont tous négatifs ; on peut donc appliquer aisément l'algorithme dual du simplexe pour résoudre ce problème.

s_1 est la variable sortante puisque $\widetilde{s_1}$ est négatif.

$x_{\bar{1}}$ est la variable entrante puisque $\min\left(\frac{-1/2}{-1/2}, \frac{-3/2}{-1/2}\right) = 1$.

On obtient le tableau suivant qui correspond à l'optimum :

$i \downarrow$ $j \rightarrow$	x_1	x_2	$x_{\bar{1}}$	$x_{\bar{2}}$	s_1	$\widetilde{x}_i$
x_1	1	0	0	-1	1	0
x_2	0	1	0	1	0	2
$x_{\bar{1}}$	0	0	1	1	-2	1
	0	0	0	-1	-1	$z - 4$

On a donc la solution entière $\boxed{x_1 = 0,\ x_2 = 2,\ \text{avec } z = 4}$.

Exemple 2. Soit à résoudre le Programme Linéaire :

$$\begin{cases} x_1 & + & x_2 & = & z[\max] \\ 12x_1 & - & 8x_2 & \leq & 3 \\ & & 2x_2 & \leq & 3 \\ x_1 & , & x_2 & \in & \mathbb{N} \end{cases}$$

On introduit deux variables d'écart x_3 et x_4. Après deux itérations, on obtient l'optimum du (PL) "continu" (c'est-à-dire pour lequel les variables ne sont pas astreintes à être entières) :

	1	2	3	4	β
x_1	1	0	1/12	1/3	5/4
x_2	0	1	0	1/2	3/2
Δ_j	0	0	$-1/12$	$-5/6$	$z - 11/4$

L'optimum du (PL) continu : $x_1 = 5/4$, $x_2 = 3/2$ n'est pas entier. En outre, si on arrondit x_1 par défaut à 1 ; $E(5/4) = 1$ et de même pour x_2 : $E(3/2) = 1$, on obtient un point P : ($x_1 = 1$, $x_2 = 1$) qui n'est pas admissible (en dehors du domaine $\mathcal{D}$) ; il en va de même pour l'arrondi par excès : $E^*(5/4) = 2$ et $E^*(3/2) = 2$ car le point Q ($x_1 = 2$, $x_2 = 2$) n'est pas non plus admissible.

Pour la base optimale du (PL) continu, on exprime les variables de base (ici x_1 et x_2) et la fonction économique z en fonction des variables hors-base :

$$\begin{cases} x_1 & + & \left(\dfrac{1}{12}x_3 + \dfrac{1}{3}x_4\right) & = & \dfrac{5}{4} \\[2ex] x_2 & + & \left(\dfrac{1}{2}x_4\right) & = & \dfrac{3}{2} \\[2ex] z & + & \left(\dfrac{1}{12}x_3 + \dfrac{5}{6}x_4\right) & = & \dfrac{11}{4} \end{cases}$$

On écrit ensuite les relations faisant intervernir les parties fractionnaires :

- pour $i = 1$: $\dfrac{1}{12}x_3 + \dfrac{1}{3}x_4 - s_1 = f\left(\dfrac{5}{4}\right) = \dfrac{1}{4}$
- pour $i = 2$: $\dfrac{1}{2}x_4 - s_2 = f\left(\dfrac{3}{2}\right) = \dfrac{1}{2}$.

On choisit d'intégrer la seconde : $\dfrac{1}{2}x_4 - s_2 = \dfrac{1}{2}$ dans le programme linéaire ; pour cette nouvelle contrainte, la solution courante du primal n'est pas admissible. Mais on peut l'intégrer au primal, à condition d'ajouter dans cette nouvelle contrainte une variable artificielle, notée a_2, pour compléter la base précédente $\mathcal{B} = \{x_1, x_2\}$. En effet, on a désormais 3 contraintes explicites.

La nouvelle contrainte devient : $\dfrac{1}{2}x_4 - s_2 + a_2 = \dfrac{1}{2}$ et la fonction économique : $z' = x_1 + x_2 - Ma_2$ (où M est un coefficient positif très grand) ; a_2 étant une variable de base, il convient d'abord d'exprimer z' en fonction des variables hors-base, soit x_3, x_4 et s_2, ce qui donne :

$$z' = \left(\frac{11}{4} - \frac{M}{2}\right) - \frac{1}{12}x_3 + \left(\frac{M}{2} - \frac{5}{6}\right)x_4.$$

	c_i	x_i	x_1	x_2	x_3	x_4	s_2	a_2	
	1	x_1	1	0	$1/12$	$1/3$	0	0	$5/4$
	1	x_2	0	1	0	$1/2$	0	0	$3/2$
$s \leftarrow$	$-M$	a_2	0	0	0	$1/2$	-1	1	$1/2$
		c_j	1	1	0	0	0	$-M$	
			0	0	$-1/12$	$\left(\frac{M}{2}-\frac{5}{6}\right)$	$-M$	0	$z'-\left(\frac{11}{4}-\frac{M}{2}\right)$
						$e \uparrow$			

En une itération, on fait sortir de la base courante la variable artificielle a_2 et on obtient une base sans variable artificielle (a_2 sera donc prise nulle ultérieurement) :

c_i	x_i	x_1	x_2	x_3	x_4	s_2	a_2	
1	x_1	1	0	$1/12$	0	$2/3$	$-2/3$	$11/12$
1	x_2	0	1	0	0	1	-1	1
0	x_4	0	0	0	1	-2	2	1
	c_j	1	1	0	0	0	$-M$	
		0	0	$-1/12$	0	$-5/3$	$-M+5/3$	$z'-23/12$

(comme la variable artificielle a_2 est nulle, on a z qui coïncide désormais avec z'). Dans la suite, on supprimera donc la colonne a_2 de ce tableau.

La variable de base x_1 vaut $\frac{11}{12}$; x_1 n'étant pas entière, on peut en déduire une nouvelle troncature :

$$\frac{1}{12}x_3 + \frac{2}{3}s_2 - t_1 = \frac{11}{12},$$

où t_1 est une nouvelle variable d'écart. À ce niveau, cette contrainte n'est pas "primal-admissible". Pour l'intégrer au primal, on y ajoute une variable artificielle, notée a_1. Elle devient :

$$\frac{1}{12}x_3 + \frac{2}{3}s_2 - t_1 + a_1 = \frac{11}{12}$$

et la fonction économique est $z'' = x_1 + x_2 - M.a_1$ (à maximiser).

Le nouveau tableau est le suivant :

	c_i	x_i	x_1	x_2	x_3	x_4	s_2	t_1	a_1	
	1	x_1	1	0	$1/12$	0	$2/3$	0	0	$11/12$
	1	x_2	0	1	0	0	1	0	0	1
	0	x_4	0	0	0	1	-2	0	0	1
$s \leftarrow$	$-M$	a_1	0	0	$1/12$	0	$2/3$	-1	1	$11/12$
		c_j	1	1	0	0	0	0	$-M$	
		Δ_j	0	0	$\frac{M-1}{12}$	0	$\frac{2M-5}{3}$	$-M$	0	$z''-\left(\frac{23-11M}{12}\right)$
					$e \uparrow$					

En faisant entrer en base x_3, la variable artificielle a_1 sort de la base :

c_i	x_i		x_1	x_2	x_3	x_4	s_2	t_1	a_1	
1	x_1		1	0	0	0	0	1	-1	0
1	x_2		0	1	0	0	1	0	0	1
0	x_4		0	0	0	1	-2	0	0	1
0	x_3		0	0	1	0	8	-12	12	11
		c_j	1	1	0	0	0	0	$-M$	
		Δ_j	0	0	0	0	-1	-1	$-M+1$	$z''-1$

ici $z'' = z$ car $a_1 = 0$.
Puisque désormais $a_1 = 0$, on peut supprimer la colonne a_1. On est alors à l'optimum de $(PLNE)$ puisque toutes les variables sont entières :

$$\boxed{x_1 = 0,\ x_2 = 1,\ x_3 = 11,\ x_4 = 1\,;\ z = 1.}$$

4.4 Conclusion

Il existe bien sûr d'autres méthodes, des améliorations des méthodes présentées ou bien des méthodes complètement différentes.
Mais au final, il n'y a pas de solution miracle ! C'est bien normal, la résolution d'un $(PLNE)$ est un problème dit "NP-difficile" (pas d'algorithme très efficace connu).
Donc, la méthode à utiliser est à choisir au cas par cas, suivant les problèmes. Puis il faut essayer de l'affiner, de trouver des astuces par rapport au problème à résoudre, pour arriver à un maximum d'efficacité.