M1 UE2

Espaces euclidiens : exercices du chapitre 8

Transformations de $\mathbb{R}^2$ et de $\mathbb{R}^3$

1. ** a) Soit E l'ensemble des $\lambda \in \mathbb{R}$ tels que, pour toutes les matrices $M \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$, on ait $\det(M) \leq \lambda \mathrm{tr}({}^tMM)$. Calculer $\inf E$.

b) Soit F l'ensemble des $\lambda \in \mathbb{R}$ tels que, pour toutes les matrices $M \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$, on ait $[\mathrm{tr}(M)]^2 \leq \lambda \mathrm{tr}({}^tMM)$. Calculer $\inf F$.

2. * Donner la matrice de la symétrie orthogonale s_P par rapport à $2x - y + z = 0$ dans une base orthonormale.

3. *** Soit $M = \begin{pmatrix} a & b & c \\ b & x & y \\ c & y & z \end{pmatrix}$. Établir une condition sur a, b, c pour qu'il existe (x, y, z) tel que $M \in \mathcal{O}_3(\mathbb{R})$.

Automorphismes orthogonaux

4. *** Soit $\mathcal{B} = (e_1, \ldots, e_n)$ une base orthonormale de E euclidien.

a) Soit $x_1, \ldots, x_n$ des vecteurs de E tels que $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} \|x_i\|^2 < 1$. Si $y_i = x_i + e_i$, montrer que $(y_1, \ldots, y_n)$ est une base de E.

b) Soit $\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_n$ des vecteurs unitaires de E tels que $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} (e_i|\varepsilon_i) > n - \frac{1}{2}$. Montrer qu'ils forment une base de E.

5. * Soit A et B symétriques réelles. Montrer que $[\mathrm{tr}(AB + BA)]^2 \leq 4\mathrm{tr}A^2\mathrm{tr}B^2$.

6. * Soit $A = (a_{ij}) \in \mathcal{O}(n)$ et $\varphi(A) = \displaystyle\sum_{1 \leq i,j \leq n} a_{ij}$. Trouver $\displaystyle\min_{A \in \mathcal{O}(n)} \varphi$ et $\displaystyle\max_{A \in \mathcal{O}(n)} \varphi$.

7. * Soit E euclidien et $u : E \to E$ avec $u(0) = 0$ et, $\|u(x) - u(y)\|^2 = \|x - y\|^2$ pour tout $(x, y) \in E^2$. Montrer que $u \in \mathcal{O}(E)$.

8. ** $\dim E = n \geq 1$, E est euclidien.

a) Soit $H \in GL(E)$ qui commute avec tous les éléments de $O(E)$. Montrer que tout $x \neq 0$ est vecteur propre de H, puis que $H \in \mathbb{R}Id_E$.

b) Montrer que ${}^tUU \in \mathbb{R}Id_E$ si, et seulement si, pour tout $V \in O(E)$, $UVU^{-1} \in O(E)$.

9. ** Soit $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ muni du produit scalaire $(A|B) = \mathrm{tr}({}^tAB)$.

a) Soit $P \in O(n)$. Montrer que les applications $\varphi_P : A \mapsto AP$ et $\psi_P : A \mapsto P^{-1}AP$ sont orthogonales.

b) Réciproquement, si $P \in GL_n(\mathbb{R})$ et si φ_P ou ψ_P sont orthogonales, est-ce que $P \in O(n)$?

---

10. * Soit $u \in E \setminus \{0\}$ (E est préhilbertien réel) et $\lambda \in \mathbb{R}$. On pose $f(x) = x + \lambda(x|u)u$. Déterminer λ pour que $f \in O(E)$, et reconnaître alors f.

---

11. ** a) Soit $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ deux matrices orthogonales. Montrer que $A + B = I_n$ équivaut à $\left\{ \begin{array}{l} A = {}^tB \\ -1 \notin \mathrm{sp}(A) \\ A^3 = -I_n \end{array} \right.$.

b) Lorsque $n = 2, 3$, trouver les matrices A orthogonales telles que $A^3 = -I_n$ et $-1 \notin \mathrm{sp}(A)$.

Endomorphismes et matrices symétriques

---

12. * Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, nilpotente, et telle que ${}^tAA = A{}^tA$. Montrer que A est nulle.

---

13. * Soit E euclidien de base $(\epsilon_1, \cdots, \epsilon_n)$. Soit $u : E \to E$, $x \mapsto \displaystyle\sum_{k=1}^{n} (\epsilon_k|x)\epsilon_k$.

a) Montrer que $u \in \mathcal{L}(E)$ est symétrique, et que $\mathrm{sp}(u) \subset \mathbb{R}_+^*$.

b) Montrer qu'il existe $v \in \mathcal{L}(E)$ symétrique tel que $v^2 = u^{-1}$.

c) Montrer que $(v(\epsilon_1), \cdots, v(\epsilon_n))$ est une base orthonormée de E.

---

14. ** Soit $A \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{R})$ de rang $r > 0$.

a) Dire tout sur ${}^tAA$, notamment sur ses valeurs propres.

b) Pour λ valeur propre strictement positive de ${}^tAA$, on pose $\sigma = \sqrt{\lambda}$. Soit alors Σ la matrice diagonale $\mathrm{Diag}(\sigma_1, \ldots, \sigma_r)$. Montrer que $A = V \begin{pmatrix} \Sigma & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} {}^tU$ avec V et U des matrices orthogonales.

---

15. * Réduction et éléments propres de $C = (a_ib_j + a_jb_i) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

---

16. * Soit $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, avec A symétrique positive. On suppose que $AB + BA = 0$. Montrer que $AB = BA = 0$. Trouver un exemple où A et B ne sont pas nulles.

---

17. ** Soit E euclidien et $u \in \mathcal{L}(E)$, symétrique , tel que $\mathrm{tr}(u) = 0$.

a) Montrer qu'il existe $x \neq 0$ tel que $(u(x)|x) = 0$.

b) En déduire qu'il existe une base orthonormale $(e_1, \ldots, e_n)$ telle que $(u(e_i)|e_i) = 0$ pour tout i.

---

18. ** Soit E euclidien, h symétrique, $x_0 \in E$ unitaire, p la projection orthogonale de sur $\mathbb{R}x_0$ et $u = h + p$. On note $\lambda_1 \leq \ldots \leq \lambda_n$ les valeurs propres de h, et $\mu_1 \leq \ldots \leq \mu_n$ celles de u. Montrer que $\lambda_1 \leq \mu_1 \leq \ldots \leq \lambda_n \leq \mu_n$.

---

19. * Résoudre $A{}^tAA = I_n$ dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

$\boxed{\textbf{20.}}$ * Soit E euclidien de dimension $n \geq 1$ et $p \in \mathcal{L}(E)$ un projecteur. Montrer qu'il est orthogonal si, et seulement si, pour tout $x \in E$, $\|p(x)\| \leq \|x\|$.

$\boxed{\textbf{21.}}$ ** Soit A et S dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telles que $A^3 = A^2$ et ${}^tAA = A{}^tA = S$. Montrer que $S^2 = S$ puis que $A^2 = A$.

$\boxed{\textbf{22.}}$ * Soit $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telle que $M^2 + {}^tM = I_n$.

a) Trouver un polynôme annulateur de M, et montrer que M est diagonalisable.

b) 0 et 1 sont-elles valeurs propres de M ?

c) Montrer que M est symétrique.

$\boxed{\textbf{23.}}$ * Soit $X \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telle que $\mathrm{Sp}(X\,{}^tX - {}^tXX) \subset \mathbb{R}_+$. Montrer que $X\,{}^tX = {}^tXX$.

$\boxed{\textbf{24.}}$ * Que dire de $A \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ telle que $A^3 - 2A^2 + 3A = 0$?

$\boxed{\textbf{25.}}$ * Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telle que $\mathrm{sp}(A + {}^tA) \subset \mathbb{R}_+$. Montrer que $\ker {}^tA = \ker A$.

$\boxed{\textbf{26.}}$ ** Soit, dans E euclidien, u symétrique tel que tous les coefficients de la matrice de u dans une certaine base orthonormale $\mathcal{B}_0$ soit strictement positifs.

a) Soit α la plus grande valeur propre de u. Montrer que $(u(x)|x) \leq \alpha\|x\|^2$ pour tout x. Pour quels x a-t-on l'égalité ?

b) Si x a pour coordonnées $(x_1, \ldots, x_n)$ dans $\mathcal{B}_0$, montrer à l'aide de x' de coordonnées $(|x_1|, \ldots, |x_n|)$ que $|(u(x)|x)| \leq \alpha\|x\|^2$.

c) Montrer que $\alpha > 0$ et que pour tout $\lambda \in \mathrm{sp}(u)$, $|\lambda| \leq \alpha$.

d) Montrer que, si $x \in E_\alpha(u)$, alors $x' \in E_\alpha(u)$, puis que $\dim(E_\alpha(u)) = 1$.

$\boxed{\textbf{27.}}$ ** Soit $A = (a_{ij}) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, symétrique, de valeurs propres (distinctes ou non) $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$, et de trace nulle. Montrer que $\max(\lambda_1^2, \ldots, \lambda_n^2) \leq \left(1 - \dfrac{1}{n}\right) \displaystyle\sum_{i,j} a_{ij}^2$.
