M1 UE2

Exercices des chapitres 9 à 11

Compléments sur les matrices

1. Soit $A = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 1 \\ 1 & 3 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \end{pmatrix}$. Vérifier que $\lambda = 1$ est valeur propre de A et trouver une matrice orthogonale O telle que $O^{-1}AO = T$ soit triangulaire.

2. Soit A une matrice carrée.
a) Montrer que $\mathrm{Sp}(A) \subset \bigcup_i D'(a_{ii}, \rho_i)$ avec $\rho_i = \sum_{j \neq i} |a_{ij}|$.
b) Montrer que $B = \begin{pmatrix} 3 & 2 & & (0) \\ 1 & \ddots & \ddots & \\ & \ddots & \ddots & 2 \\ (0) & & 1 & 3 \end{pmatrix}$ est inversible.
c) Trouver D diagonale telle que DBD^{-1} soit symétrique. Retrouver l'inversibilité de B.
d) Déterminer $\mathrm{Sp}(B)$.

3. Soit $A \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{R})$ de rang $r > 0$.
a) Dire tout sur ${}^tAA$, notamment sur ses valeurs propres.
b) Pour λ valeur propre strictement positive de ${}^tAA$, on pose $\sigma = \sqrt{\lambda}$. Soit alors Σ la matrice diagonale $\mathrm{Diag}(\sigma_1, \ldots, \sigma_r)$. Montrer que $A = V \begin{pmatrix} \Sigma & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} {}^tU$ avec V et U des matrices orthogonales.

4. Pour $A = (a_{ij}) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, on pose $\|A\|_2 = \sum_{i,j} |a_{ij}|^2$.
a) Montrer que, pour $(A, B) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})^2$, $\|AB\|_2 \leq \|A\|_2 \|B\|_2$.
b) Trouver les matrices pour lesquelles $\|AB\|_2 = \|A\|_2 \|B\|_2$.

5. Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ symétrique, et soient $\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \cdots \geq \lambda_n$ ses valeurs propres. Montrer que $\lambda_{r+1} = \inf_{F_r \in \mathcal{F}_r} \sup\{(Ax|x),\ x \in F_r\ ,\ \|x\| = 1\}$, où $\mathcal{F}_r$ désigne l'ensemble des sous espaces vectoriels de dimension $n - r$.

Méthodes itératives de résolution de systèmes linéaires

6. Soit A une matrice d'ordre $n \geq 2$, inversible et à coefficients réels. On écrit la matrice A sous la forme $A = M - N$, où M est "facilement inversible" et on s'intéresse à la résolution du système linéaire $Ax = b$. Dans ce but, on introduit la suite $(x_k)_{k \in \mathbb{N}}$ définie par :

$$x_0 \text{ donné dans } \mathbb{R}^n \text{ et } x_{k+1} = M^{-1}Nx_k + M^{-1}b.$$

1) Résultats généraux :

a) Montrer que si la suite converge, c'est nécessairement vers la solution de $Ax = b$.

b) Soit $B = M^{-1}N$ et $\rho(B)$ son rayon spectral. Montrer l'équivalence des deux assertions suivantes :

i. Pour tout $x_0 \in \mathbb{R}^n$, $\lim\limits_{k\to+\infty} x_k = x$ avec $Ax = b$

ii. $\rho(B) < 1$.

c) Montrer que, s'il existe une norme matricielle subordonnée $\| \ \|$ telle que $\|B\| < 1$, alors la méthode itérative ci-dessus est convergente.

2) On suppose que tous les termes diagonaux de A sont non nuls et on considère la méthode itérative définie par le choix de $M = D$ avec D matrice diagonale de A : $d_{ii} = a_{ii}$ pour $1 \leq i \leq n$ et $d_{ij} = 0$ pour $i \neq j$.

a) Quel est le nom de cette méthode ?

b) Montrer que si A est à diagonale strictement dominante, c'est-à-dire si, pour tout $i \in \{1, \cdots, n\}$, $|a_{ii}| > \sum\limits_{j\neq i} |a_{ij}|$, alors cette méthode converge.

3) On suppose que tous les termes diagonaux de A sont non nuls et on considère la méthode itérative définie pour une matrice M telle que :

$$m_{ij} = 0 \text{ pour } 1 \leq i < j \leq n \text{ et } m_{ij} = a_{ij} \text{ pour } 1 \leq j \leq i \leq n.$$

a) Quel est le nom de cette méthode ?

b) Montrer que si A est à diagonale strictement dominante, alors cette méthode converge.

4) Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 1 \end{pmatrix}$; que peut-on dire de la convergence des deux méthodes proposées précédemment ?

$\boxed{7.}$ Soit A une matrice tridiagonale de taille $n \geq 3$ dont les termes diagonaux sont non nuls. Soit D la matrice diagonale de A, E (resp. F) la matrice triangulaire inférieure (resp. supérieure) stricte de A. On a donc $A = D-E-F$; on pose $J = D^{-1}(E+F)$ et $G = (D-E)^{-1}F$.

1) Pour toute matrice $M = (m_{ij})_{1\leq i,j\leq n}$, on définit, pour tout réel non nul t, la matrice $M(t) = (m_{ij}(t))_{1\leq i,j\leq n}$, avec $m_{ij}(t) = t^{i-j} m_{ij}$ pour $1 \leq i, j \leq n$. Montrer alors que :

$$\text{pour tout } t \in \mathbb{R}^*, \quad \det(M(t)) = \det(M).$$

2) On pose $M = F + \lambda^2(D + E)$. En utilisant les notations de la questions 1), écrire la matrice $M(1/\lambda)$ en fonction de D, E, F et λ.

3) Montrer que si P_J est le polynôme caractéristique de J et P_G celui de G, alors on a $P_G(\lambda^2) = \lambda^n P_J(\lambda)$. En déduire que $\rho(G) = (\rho(J))^2$ et conclure.

Méthodes directes de résolution de systèmes linéaires

---

8. Méthode de Gauss
Résoudre par la méthode de Gauss le système linéaire suivant :

$$\left\{\begin{array}{rcrcrcrcl} & & x_1 & - & 3x_2 & - & x_3 & & & = & 2 \\ - & & x_1 & + & x_2 & & & + & 2x_4 & = & 3 \\ & & & & x_2 & - & x_3 & & & = & 1 \\ & & 2x_1 & + & x_2 & & & - & x_4 & = & 0 \end{array}\right.$$

---

9. Décomposition LU

On pose

$$A = \begin{pmatrix} -2 & 1 & -1 & 1 \\ 2 & 0 & 4 & -3 \\ -4 & -1 & -12 & 9 \\ -2 & 1 & 1 & -4 \end{pmatrix}.$$

1) Donner la décomposition LU de la matrice A (*i.e.* $A = LU$ avec L triangulaire inférieure et U triangulaire supérieure).

2) En déduire la solution du système linéaire $Ax = b$ où $b = {}^t(1.5, 4, -14, -6.5)$.

3) Soit $B = {}^tU\, A\, {}^tL$. Sans calculs supplémentaires, donner une décomposition LU de la matrice B.

---

10. Décomposition LU

1) Réaliser la décomposition LU de la matrice :

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 1 & -3 & 0 \\ 1 & 1 & 3 & 8 \\ -2 & 2 & -5 & -1 \\ 3 & 1 & 8 & 13 \end{pmatrix}.$$

2) En déduire la solution du système linéaire $Ax = b$ avec $b = {}^t(0, 2, -1, 5)$.

3) Sans calculer A^2, résoudre le système linéaire $A^2x = b$.

---

11. Décomposition de Cholesky.
Donner la factorisation de Cholesky des matrices :

1) $A_1 = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 \\ -2 & 8 & -6 \\ 0 & -6 & 25 \end{pmatrix}$

2) $A_2 = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 12 & -6 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \\ 12 & 2 & 49 & -4 \\ -6 & 1 & -4 & 51 \end{pmatrix}.$

$\boxed{\textbf{12.}}$ Décomposition QR

Chercher la décomposition QR de la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -46/5 & -43/5 \\ 2 & 8 & 23 \\ -2 & -28/5 & 26/5 \end{pmatrix}$$

$\boxed{\textbf{13.}}$ Calcul de déterminant et décomposition LU

1) Expliquer comment on peut calculer le déterminant d'une matrice A d'ordre n à partir de sa factorisation LU.

2) Appliquer cette méthode à la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ -4 & 1 & -4 \\ -2 & 2 & 4 \end{pmatrix}.$$

$\boxed{\textbf{14.}}$ Soit $M = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 3 & 4 & 5 & 1 \\ 3 & 4 & 5 & 1 & 2 \end{pmatrix}$.

La matrice J_r étant l'élément (α_{ij}) de $\mathcal{M}_{np}(\mathbb{K})$ telle $\alpha_{ij} = 1$ si $i = j \leq r$ et $\alpha_{ij} = 0$ sinon, trouver r, R et S avec $J_r = RMS$.