$\boxed{\text{Exercices du chapitre 4}}$

$\boxed{\textbf{9.}}$ Soit $a \in \mathbb{R}^n$ tel que $\|a\| < 1$ et soit $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, $x \mapsto (1 + \|x\|^2)^{\frac{1}{2}} - \langle a, x\rangle$. Montrer que f est convexe et déterminer $\mathrm{Arg}_{\mathbb{R}^n} \min f$.

$\boxed{\textbf{10.}}$ Soit $\varphi : \Omega \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$. Pour tout $y \in \mathbb{R}^n$, on pose $\varphi^*(y) = \sup_{x\in\Omega}(\langle y, x\rangle - \varphi(x))$.

a) Montrer que φ^* est convexe.

b) Soit $p \in]1, +\infty[$ et $\varphi(x) = \frac{\|x\|^p}{p}$. Montrer que φ est convexe ; déterminer $\varphi^*(y)$ et montrer que $\varphi^{**} = \varphi$. (*On utilisera q tel que* $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$).

c) Soit $\varphi(x) = \frac{1}{2}\langle Ax, x\rangle + \langle b, x\rangle + c$ où A est une matrice symétrique définie positive. Montrer que φ est convexe ; déterminer $\varphi^*(y)$ et montrer que $\varphi^{**} = \varphi$.

$\boxed{\textbf{11.}}$ Soit $C \subset \mathbb{R}^n$ un convexe fermé non vide et $b \in \mathbb{R}^n$. Soit $\pi = \mathrm{Arg}_C \min N$ où $N(x) = \|x - b\|^2$.

a) Montrer que :
i) π est non vide ;
ii) si $p \in \pi$, pour tout $c \in C$, $\langle p - b, p - c\rangle \leq 0$.
(*On utilisera* $F(\lambda) = \|\lambda c + (1 - \lambda)p - b\|^2$).
iii) π contient exactement 1 élément, noté $p(b)$.
iv) Si $\langle u - b, u - c\rangle \leq 0$ pour tout $c \in C$, alors $u = p(b)$.

b) Déduire de a) que, $b \notin C$ si et seulement si il existe $w \in \mathbb{R}^n$ tel que

$$\langle w, b\rangle < \inf_{c\in C}\langle w, c\rangle.$$