Corrigé du Devoir d'Optimisation n°3 (14 mai 2019)

1. [11 points]

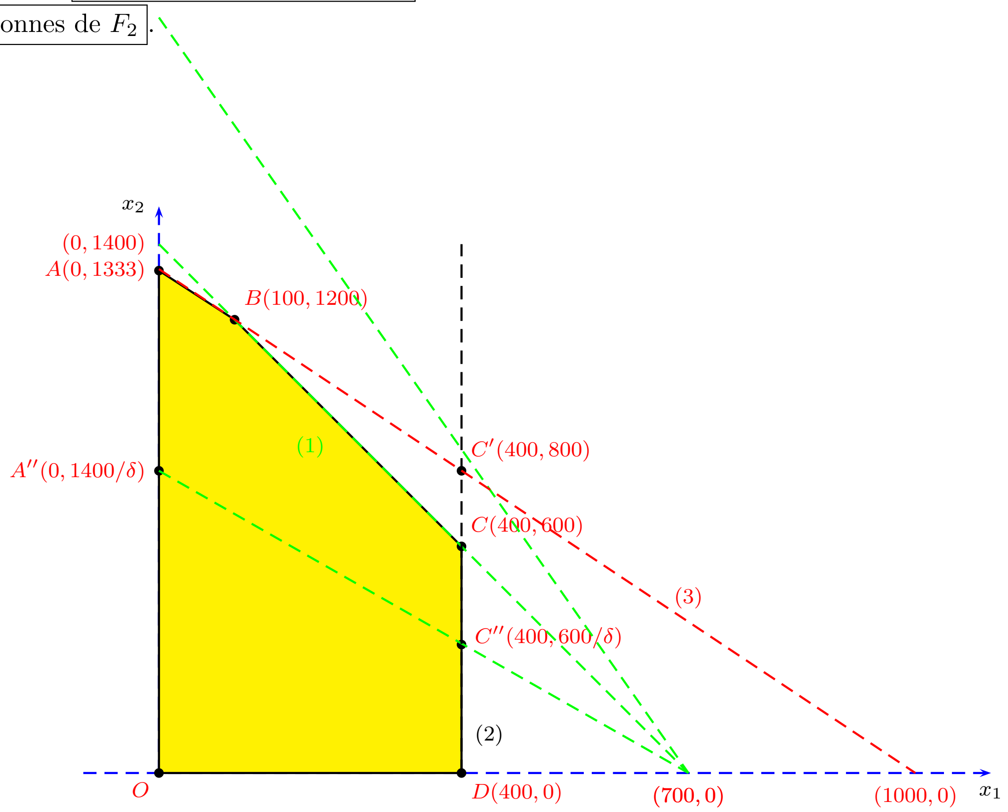
a) i. On note x_i, $1 \le i \le 2$ les quantités de fromages F_1 et F_2 produites (en tonnes). Le profit global est alors $3x_1+x_2 = z$ (en kilo-euros). On a une contrainte de temps de fabrication : $30x_1+15x_2 \le 21\,000$, soit, en simplifiant par 15, $2x_1+x_2 \le 1400$ et des contraintes pour la disponibilité du lait : $10\,000x_1 \le 4\,000\,000$, soit $x_1 \le 400$ et $7\,500x_2 \le 10\,000\,000 - 10\,000x_1$, soit, en simplifiant, $4x_1 + 3x_2 \le 4000$. Le problème s'écrit donc :

$$(P)\left\{\begin{array}{ccccc} 3x_1 & + & x_2 & = & z[\max] \\ 2x_1 & + & x_2 & \le & 1400 \\ x_1 & & & \le & 400 \\ 4x_1 & + & 3x_2 & \le & 4000 \\ x_1 & , & x_2 & \ge & 0 \end{array}\right.$$

Remarque : On peut aussi considérer qu'il n'est pas judicieux d'utiliser le lait AOC pour le fromage $F2$ qui est vendu moins cher et alors la contrainte $10\,000x_1 + 7500x_2 \le 10\,000\,000$ peut-être remplacée plus simplement par $7500x_2 \le 6\,000\,000$, soit $x_2 \le 800$. On retrouvera la même solution optimale dans les deux modèles linéaires.

ii. Le domaine des solutions admissibles satisfaisant les contraintes est le polygône de sommets $O(0;0)$, $A(0;4000/3)$, $B(100;1200)$, $C(400;600)$ et $D(400;0)$. On sait que le maximum existe (domaine fermé borné), et qu'il se trouve en l'un des sommets du polygône. On a $z_O = 0$, $z_A = 4000/3 \approx 1333$, $z_B = 1500$, $z_C = 1800$, et $z_D = 1200$.

On a donc $\boxed{\max(z) = z^* = 1800 \text{ k-euros}}$ atteint en C, pour une production de $\boxed{400 \text{ tonnes de } F_1}$ et $\boxed{600 \text{ tonnes de } F_2}$.



b) Le nouveau programme s'écrit, si le profit de F_1 est p,

$$\boxed{\left\{\begin{array}{ccccc} px_1 & + & x_2 & = & z'[\max] \\ 2x_1 & + & x_2 & \leq & 1400 \\ x_1 & & & \leq & 400 \\ 4x_1 & + & 3x_2 & \leq & 4000 \\ x_1 & , & x_2 & \geq & 0 \end{array}\right.}.$$

(Pour $p = 3$, on retrouve le cas du début).

Le domaine des solutions admissibles est exactement le même. Seule la fonction objectif change. On a maintenant $z'_{p,O} = 0$, $z'_{p,A} = 4000/3 \approx 1333$, $z'_{p,B} = 100p + 1200$, $z'_{p,C} = 400p + 600$ et $z'_{p,D} = 400p$. $z'_{p,B} \geq z'_{p,C}$ équivaut à $100p + 1200 \geq 400p + 600$, soit $300p \leq 600$, c'est-à-dire $p \leq 2$. De même, $z'_{p,B} \geq z'_{p,A}$ équivaut à $4000/3 \leq 100p + 1200$, soit $100p \geq 400/3$ ($p \geq 4/3$) et $z'_{p,C} \leq z'_{p,D}$ équivaut à $400p + 600 \leq 100p + 1200$, soit $300p \leq 600$, soit $p \leq 2$. Ainsi :

- Pour $\underline{p < 4/3}$, on a intérêt à fabriquer $\boxed{\text{aucun } F_1 \text{ et 1333 tonnes de } F_2}$;

- Pour $\underline{4/3 < p < 2}$, on a intérêt à fabriquer $\boxed{\text{100 tonnes de } F_1 \text{ et 1200 tonnes de } F_2}$;

- Pour $\underline{p > 2}$, on a intérêt à fabriquer $\boxed{\text{400 tonnes de } F_1 \text{ et 600 tonnes de } F_2}$;

- Pour $p = 4/3$, n'importe quel point du segment $[AB]$ fournit la solution optimale et pour $p = 2$, c'est n'importe quel point du segment $[BC]$.

d) Dans ce cas, c'est la première contrainte qui change. Le nouveau programme s'écrit

$$\boxed{\left\{\begin{array}{c} 3x_1 + x_2 = z[\max] \\ 2x_1 + \delta x_2 \leq 1400 \\ x_1 \leq 400 \\ 4x_1 + 3x_2 \leq 4000 \\ x_1 \geq 0,\ x_2 \geq 0 \end{array}\right.}.$$

(On retrouve le cas du début pour $\delta = 1$).
Suivant la valeur de δ, on obtient différents polygones. Les droites (2) et (3) (en pointillés noirs et rouges sur le schéma) ne varie pas, mais la droite (1) (en pointillés verts) oui.

- Si (1) coupe (3) en un point d'ordonnée supérieure à celle de C', on a le polygone $OAC'D$ qui ne dépend pas de (1) et alors $z_{\max} = 3 \times 400 + 800 = 2000$ obtenu en $C'(400, 800)$. Ceci dans le cas où $\dfrac{1400 - 2 \times 400}{\delta} \geq 800$, soit $\delta \leq \dfrac{3}{4} = 0.75$.

- Si (1) coupe (Ox_2) en $A''(0, 1400/\delta)$ d'ordonnée inférieure à celle de A, soit $\dfrac{1400}{\delta} \leq \dfrac{4000}{3}$, où $\delta \geq 1.05$, on a le polygone $OA''C''D$ avec $C''\left(400, \dfrac{600}{\delta}\right)$. On a alors $z'_{A''} = \dfrac{1400}{\delta}$, $z'_{C''} = \dfrac{1200\delta + 600}{\delta}$ et $z'_D = 1200$. Donc, comme $\delta > 1$, le maximum est est atteint en C''.

- Si $0.75 \leq \delta \leq 1.05$, on a un nouveau polygône $OAB'C'D$ avec $B'\left(\dfrac{2100 - 2000\delta}{3 - 2\delta}; \dfrac{1200}{3 - 2\delta}\right)$ et $C'\left(400, \dfrac{600}{\delta}\right)$ si δ , avec $z'_{B'} = \dfrac{7500 - 6000\delta}{3 - 2\delta}$ et $z'_{C'} = \dfrac{1200\delta + 1800}{\delta}$ donc

$$z'_{B'} - z'_{C'} = \frac{7500 - 6009\delta}{3 - 2\delta} - \frac{1200\delta + 1800}{\delta} = 300 \times \frac{-12\delta^2 + 25\delta - 18}{\delta(3 - 2\delta)}$$

avec $25^2 - 4 \times 12 \times 18 < 0$ donc $-12\delta^2 + 25\delta - 18 < 0$ et, comme $3 - 2\delta > 0$, on a $z'_{B'} < z'_{C'}$. Ainsi, on a intérêt à produire $\boxed{\text{400 tonnes de } F_1}$ quel que soit le nombre d'heures de travail pour F_2.

e) Cette question est un cas particulier du b). On est dans le cas $4/3 < p < 2$ donc on a intérêt à fabriquer $\boxed{\text{100 tonnes de } F_1 \text{ et 1200 tonnes de } F_2}$.

---

2. [11 points]

a) [*6pts*] Dans les 2 cas, on va définir les grandeurs caractéristiques du problème.

<u>Pour le premier problème :</u>

Dimensions :

- N = nombre de produits P_i ($i = 1, \cdots, N$) avec $N = 4$.
- M = nombre de lignes L_j ($j = 1, \cdots, M$) avec $M = 5$.

Données :

- Capacité de la ligne L_j : K_j, $1 \leq j \leq 5$.
- Temps de fabriacation du produit P_i sur la ligne L_j : $T_{i,j}$ pour $1 \leq i \leq 4$ et $1 \leq j \leq 5$.
- Prévisions de vente des produits P_i : V_i pour $1 \leq i \leq 4$.
- Profits pour chaque produit P_i : Pro_i pour $1 \leq i \leq 4$.

Variables :

- Quantité du produit P_i sur la ligne L_j : $x_{i,j}$ pour $1 \leq i \leq 4$, $1 \leq j \leq 5$.
- Quantité du produit spécial P_i sur la ligne L_j : $x'_{i,j}$ pour $1 \leq i \leq 4$, $1 \leq j \leq 5$.

Objectif :

- Maximiser $z = \displaystyle\sum_{i=1}^{4} Pro_i \times \left(\sum_{j=1}^{5} x_{i,j}\right)$.

Contraintes :

- Positivité : $x_{i,j} \geq 0$ pour $1 \leq i \leq 4$, $1 \leq j \leq 5$.
- Capacité par ligne : $\displaystyle\sum_{i=1}^{4} x_{i,j} \times t_{i,j} \leq K_j$ pour $1 \leq j \leq 5$
- Vente au client : $\displaystyle\sum_{j=1}^{5} x_{i,j} \leq V_i$ pour tout $1 \leq i \leq 4$.

Avec les données de l'énoncé, on a alors à maximiser

$$z = 7\left(\sum_{j=1}^{5} x_{1,j} + \sum_{j=1}^{5} x_{4,j}\right) + 8\left(\sum_{j=1}^{5} x_{2,j}\right) + 9\left(\sum_{j=1}^{5} x_{3,j}\right)$$

sous les contraintes :

$$x_{i,j} \geq 0 \quad \text{pour } 1 \leq i \leq 4, \; 1 \leq j \leq 5$$

$$\begin{array}{c}
1,3x_{1,1} + 1,8x_{2,1} + 1,3x_{3,1} + 0,9x_{4,1} \leq 4500 \\
0,9x_{1,2} + 1,7x_{2,2} + 1,2x_{3,2} + 1,1x_{4,2} \leq 5000 \\
2,0x_{1,3} + 1,4x_{2,3} + 1,3x_{3,3} + 1,0x_{4,3} \leq 4500 \\
0,3x_{1,4} + 0,6x_{2,4} + 1,0x_{3,4} + 0,9x_{4,4} \leq 1500 \\
0,9x_{1,5} + 1,1x_{2,5} + 1,4x_{3,5} + 1,0x_{4,5} \leq 2500
\end{array}$$

$$\sum_{j=1}^{5} x_{1,j} \leq 6000 \; ; \; \sum_{j=1}^{5} x_{2,j} \leq 5000 \; ; \; \sum_{j=1}^{5} x_{3,j} \leq 4000 \; ; \; \sum_{j=1}^{5} x_{4,j} \leq 6000.$$

Caractéristiques suppémentaires pour le deuxième problème :

Données supplémentaires :

- Prévisions de ventes spéciales du produit P_i : V'_i pour $1 \leq i \leq 4$.
- Rabais pour les produits P_i supplémentaires : R_i pour $1 \leq i \leq 4$.
- Profits spéciaux pour chaque produit P_i : $Pro'_i = Pro_i - R_i$ pour $1 \leq i \leq 4$.

Variables supplémentaires :

- Quantité du produit spécial P_i sur la ligne L_j : $x'_{i,j}$ pour $1 \leq i \leq 4$, $1 \leq j \leq 5$.

Nouvel objectif :

- Maximiser $z' = \displaystyle\sum_{i=1}^{4} Pro_i \times \left(\sum_{j=1}^{5} x_{i,j}\right) + \sum_{i=1}^{4} Pro'_i \times \left(\sum_{j=1}^{5} x'_{i,j}\right)$.

Nouvelles contraintes :

- Positivité : $x_{i,j} \geq 0$ et $x'_{i,j} \geq 0$ pour $1 \leq i \leq 4$, $1 \leq j \leq 5$.
- Capacité par ligne : $\displaystyle\sum_{i=1}^{4} (x_{i,j} + x'_{i,j}) \times t_{i,j} \leq K_j$ pour $1 \leq j \leq 5$
- Vente au client : $\displaystyle\sum_{j=1}^{5} x_{i,j} \leq V_i$ et $\displaystyle\sum_{j=1}^{5} x'_{i,j} \leq V'_i$ pour tout $1 \leq i \leq 4$.

b) [*5 pts*] On peut traiter ces problèmes avec le solveur d'Excel par exemple. On obtient les résultats suivants :

- Pour le premier problème

Produits	$P1$	$P2$	$P3$	$P4$
Total sur les lignes	6000	4231, 061	4000	6000
Prix	7	8	9	7
Fonction obj.	153848, 485			

- Pour le deuxième problème

Produits	$P1$	$P2$	$P3$	$P4$	$P'1$	$P'2$	$P'3$	$P'4$
Total sur les lignes	6000	2272, 727	4000	6000	1000	0	1000	466, 667
Prix	7	8	9	7	6	7	8	6
Fonction obj.	154981, 818							