Examen de Probabilités du lundi 26 mars 2018

4 exercices indépendants (Durée : 2 heures)

Exercice I-

Une urne contient initialement 1 boule rouge et 3 boules bleues, indiscernables au toucher. On effectue des tirages successifs avec remise, en rajoutant à chaque fois 2 boules de la couleur de la boule tirée. Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on note X_n la variable aléatoire égale à 1 si la boule tirée au n-ième tirage est rouge et 0 sinon.

1. Déterminer la loi de X_1 et son espérance.

2. a) Justifier que $P([X_1 = 0] \cap [X_2 = 0]) = \dfrac{5}{8}$.

b) Déterminer la loi conjointe du couple (X_1, X_2) (*on pourra faire un tableau*) et en déduire la loi de X_2. Les variables X_1 et X_2 sont-elles indépendantes ?

c) Déterminer la loi de $S_2 = X_1 + X_2$ et calculer son espérance $\mathbb{E}(S_2)$.

3. On pose $S_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} X_k$ pour $n \in \mathbb{N}^*$.

a) Que représente S_n ? Déterminer l'ensemble des valeurs prises par la variable aléatoire S_n.

b) Montrer que $P([X_{n+1} = 1]/[S_n = k]) = \dfrac{2k+1}{2n+4}$ pour $0 \leq k \leq n$ et en déduire que $P([X_{n+1} = 1]) = \dfrac{1}{2n+4} \displaystyle\sum_{k=0}^{n} (2k+1) P([S_n = k])$ puis que $P[(X_{n+1} = 1]) = \dfrac{2\mathbb{E}(S_n) + 1}{2n+4}$.

c) Déterminer $\mathbb{E}(X_{n+1})$ en fonction de $\mathbb{E}(S_n)$ et en déduire que

$$\mathbb{E}(S_{n+1}) = \frac{n+3}{n+2} \mathbb{E}(S_n) + \frac{1}{2n+4}.$$

d) Montrer par récurrence que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a $\mathbb{E}(S_n) = \dfrac{n}{4}$.

e) Déterminer la loi de X_n.

Exercice II-

Un joueur joue à Pile ou Face contre un casino, la pièce étant truquée pour que la probabilité d'obtenir Pile soit $p \in]0, 1[$. La mise initiale est $a \in \mathbb{N}^*$. Tant que la pièce donne Face, le joueur perd sa mise et, au coup suivant, il parie $k \geq 2$ fois sa dernière mise. S'il obtient Pile, il gagne k fois sa dernière mise et arrête. Soit T la variable aléatoire retournant le numéro du lancer donnant pour la première fois Pile et G celle qui donne le gain (algèbrique) du joueur.

1. Quelle loi suit T ? Quelle est la probabilité que les lancers ne donnent jamais Pile ?

2. Montrer que G est une fonction de T, soit $G = f(T)$ où $f(n) = \dfrac{a}{k-1} + k^n a \dfrac{k-2}{k-1}$ pour $n \in \mathbb{N}^*$.

3. Montrer que $\mathbb{E}(G) = a \dfrac{pk - 1}{1 - k(1-p)}$.

Exercice III-

1. Soit X une variable aléatoire de densité de probabilité f définie par :

$$f(x) = k(2x+1)\,\mathbb{I}_{]0,1[}(x).$$

a) Montrer que $k = \frac{1}{2}$, puis déterminer l'espérance et la variance de X.
b) Déterminer la fonction de répartition F_X de X.

c) Soit $Z = X^2$. Vérifier que $F_Z(t) = \frac{1}{2}(t+\sqrt{t})\,\mathbb{I}_{[0,1[}(t) + \mathbb{I}_{[1,+\infty[}(t)$. En déduire la densité de Z et déterminer son espérance.

2. Soit (X, Y) un couple de variables aléatoires de densité de probabilité g définie par :

$$g(x,y) = (x+y)\,\mathbb{I}_{]0,1[}(x)\,\mathbb{I}_{]0,1[}(y)$$

a) Déterminer les densités de X et de Y.
b) Écrire la densité conditionnelle de Y sachant $X = x$. Calculer alors $\mathbb{E}(Y|X=x)$ puis vérifier que $\mathbb{E}(Y|X) = \dfrac{3X+2}{3(2X+1)}$.
c) Les variables X et Y sont-elles indépendantes ? Calculer $\mathrm{cov}(X, Y)$.
d) On pose $S = X + Y$. Déterminer $[0,1] \cap [s-1, s]$ lorsque $s \in [0,1]$ et lorsque $s \in [1,2]$ et montrer que $f_S(s) = s^2\,\mathbb{I}_{]0,1[}(s) + s(2-s)\,\mathbb{I}_{]1,2[}(s)$. Que vaut $\mathbb{E}(S)$?

Exercice IV-

On admet que le poids en kg d'un utilisateur potentiel d'un ascenceur est une variable aléatoire X qui suit une loi normale de moyenne $\mu = 80$ et d'écart-type $\sigma = 15$.
L'ascenseur ne peut supporter une charge supérieure à 1 000 kg.
On note $S_n = \sum_{i=k}^{n} X_k$ la variable aléatoire associée au poids de n individus.

1. Calculer $P([X > 50])$, $P([65 < X < 95])$ et $P([X > 110])$.

2. On admet que S_n suit aussi une loi normale. Déterminer, en fonction de n, l'espérance et l'écart-type de cette loi. [*Utiliser* $\mathbb{E}(S_n) = \sum_{k=1}^{n} \mathbb{E}(X_k)$ *et* $\mathrm{var}(S_n) = \sum_{k=1}^{n} \mathrm{var}(X_k)$.]

3. Quel nombre maximum de personnes le constructeur doit-il afficher pour que la probabilité de surcharge ne dépasse pas 1% ?
[*On sera amené à résoudre une équation du deuxième degré en* $\sqrt{n}$*...*]

Si $\Phi(\alpha) = \int_0^{\alpha} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-x^2/2}\,dx$, *on donne* $\Phi(1) = 0,341$, $\Phi(2) = 0,477$ *et* $\Phi^{-1}(0,49) = 2,31$.
