CHAPITRE 5

OPERATION SUR LES V.A.R. ET CALCULS DE LOIS

I- V.A.R. DISCRETES.

Soit X une v.a.r. discrète définie sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, P)$.
On pose $X(\Omega) = \{x_i \ ; \ i \in \mathbb{N}\}$ (le cas fini est similaire au cas infini dénombrable et présente moins de difficultés).

1- Espérance.

D1 : On dit que X possède une espérance si la série $\sum\limits_{n \geq 0} |x_n| P([X = x_n])$ converge ; on appelle alors espérance de X et on note $\mathbb{E}(X)$ le nombre défini par :

$$\mathbb{E}(X) = \sum_{n \geq 0} x_n P([X = x_n]).$$

EXEMPLES D'ESPERANCES DE V.A.R. AYANT DES LOIS CLASSIQUES :

a) Loi de Bernoulli $\mathcal{B}(p)$: $\mathbb{E}(X) = p$;

b) Loi binomiale $\mathcal{B}(n,p)$: $\mathbb{E}(X) = np$;

c) Loi hypergéométrique $\mathcal{H}(n, M, N)$: $\mathbb{E}(X) = \frac{nM}{N}$;

d) Loi géométrique sur $\mathbb{N}^*$ $\mathcal{G}(p)$: $\mathbb{E}(X) = \frac{1}{p}$;

e) Loi de Poisson $\mathcal{P}(\lambda)$: $\mathbb{E}(X) = \lambda$.

2- Moments d'ordre r.

D2 : i) On appelle moment d'ordre r de X le nombre $m_r(X)$ défini par $m_r(X) = \sum\limits_{n \geq 0} x_n^r P([X = x_n])$ pourvu que cette série converge absolument.
ii) On appelle moment centré d'ordre r de X le nombre $\mu_r(X) = \sum\limits_{n \geq 0} (x_n - \mathbb{E}(X))^r P([X = x_n])$ pourvu que cette série converge absolument.
iii) On appelle variance de X et on note $\mathrm{var}(X)$ le moment centré d'ordre 2 : $\mu_2(X)$.
iv) Si X admet une variance, on appelle écart-type de X le nombre $\sigma(X)$ défini par $\sigma(X) = \sqrt{\mathrm{var}(X)}$.

Propriété : Si X est d'ordre r, les moments et les moments centrés d'ordre $k \leq r$ existent.

3- Calcul de $\mathbb{E}(h(X))$.

TH1 : Soit h une fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ telle que $h(X)$ admette une espérance. Alors :

$$\mathbb{E}(h(X)) = \sum_{n \geq 0} h(x_n) P([X = x_n]).$$

Conséquences :

1) $\mathbb{E}(aX+b) = a\mathbb{E}(X)+b$ si $\mathbb{E}(X)$ existe ;

2) $\mathrm{var}(X) = \mathbb{E}(X^2) - \mathbb{E}(X)^2$;

3) $\mathrm{var}(aX+b) = a^2\mathrm{var}(X)$.

4- Fonctions génératrices.

La fonction génératrice est un outil de calcul permettant de calculer les moments d'une v.a.r. discrète à valeurs dans $\mathbb{N}$, et plus particulièrement l'espérance et la variance.

TH2 : Soit $G_X(t) = \mathbb{E}(t^X) = \sum_{n\geq 0} t^n P([X=n])$. Alors :

$$\mathbb{E}(X) = \lim_{t\to 1_-} G'_X(t) \text{ et } \mathrm{var}(X) = \lim_{t\to 1_-} \left(G''_X(t) + G'_X(t) - (G'_X(t))^2\right).$$

Application aux lois classiques :

a) Loi binomiale $\mathcal{B}(n,p)$:

$$G_X(t) = (pt+1-p)^n \ ; \ \mathbb{E}(X) = np \ ; \ \mathrm{var}(X) = np(1-p).$$

b) Loi géométrique sur $\mathbb{N}^*$ $\mathcal{G}(p)$:

$$G_X(t) = \frac{p}{1-p}\left(\frac{1}{1-t(1-p)} - 1\right) \ ; \ \mathbb{E}(X) = \frac{1}{p} \ ; \ \mathrm{var}(X) = \frac{1-p}{p^2}.$$

c) Loi binomiale négative $\mathcal{BN}(r,p)$:

$$G_X(t) = \left(\frac{p}{1-t(1-p)}\right)^r \ ; \ \mathbb{E}(X) = \frac{r(1-p)}{p} \ ; \ \mathrm{var}(X) = \frac{r(1-p)}{p^2}.$$

d) Loi de Pascal $\mathcal{P}(r,p)$: ($X = Y + r$ avec Y de loi $\mathcal{BN}(r,p)$)

$$\mathbb{E}(X) = \frac{r}{p} \ ; \ \mathrm{var}(X) = \frac{r(1-p)}{p^2}$$

e) Loi de Poisson $\mathcal{P}(\lambda)$:

$$G_X(t) = \exp(\lambda(t-1)) \ ; \ \mathbb{E}(X) = \lambda \ ; \ \mathrm{var}(X) = \lambda.$$

II- V.A.R. ABSOLUMENT CONTINUES.

1- Moments d'une v.a.r. absolument continue.

D3 : Soit X une v.a.r. absolument continue, de densité f_X.
i) Soit $r \in \mathbb{N}^*$. On appelle moment d'ordre r de X et on note $m_r(X)$ le réel défini par :
$m_r(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} t^r f_X(t)dt$; pourvu que cette intégrale converge absolument.
ii) En particulier, on appelle espérance de X, le moment d'ordre 1 de X, s'il existe.
iii) Si X admet une espérance, on appelle moment centré d'ordre r de X le moment d'ordre r, s'il existe, de $X - \mathbb{E}(X)$. On le note $\mu_r(X)$.

iv) En particulier, si $\mu_2(X)$ existe, $\mu_2(X)$ est appelé variance de X et noté var(X). Si X admet une variance, on appelle écart-type de X le nombre $\sigma(X)$ défini par $\sigma(X) = \sqrt{\text{var}(X)}$.

Propriétés :
1) Soit X une v.a.r. de densité f_X admettant une espérance et soit $(a, b) \in \mathbb{R}^* \times \mathbb{R}$. Alors $aX + b$ admet une espérance et $\mathbb{E}(aX + b) = a\mathbb{E}(X) + b$.
2) Si $\int_{-\infty}^{+\infty} x^2 f_X(x)dx$ converge, alors X^2 admet une espérance et $\mathbb{E}(X^2) = \int_{-\infty}^{+\infty} x^2 f_X(x)dx$.

Plus généralement, on admet le théorème suivant :

TH3 : Soit X une v.a.r. absolument continue de densité f_X et h une fonction numérique continue et dérivable sur $X(\Omega)$, alors $h(X)$ est une v.a.r. absolument continue et, si elle admet une espérance, alors

$$\mathbb{E}(h(X)) = \int_{-\infty}^{+\infty} h(x) f_X(x)dx.$$

Application aux lois classiques :

a) Loi uniforme $\mathcal{U}([a, b])$:

$$\mathbb{E}(X) = \frac{a + b}{2} \qquad ; \qquad \text{var}(X) = \frac{(a - b)^2}{12}.$$

b) Loi exponentielle $\mathcal{E}(\lambda)$:

$$\mathbb{E}(X) = \frac{1}{\lambda} \qquad ; \qquad \text{var}(X) = \frac{1}{\lambda^2}.$$

c) Loi Gamma $\Gamma(a, \lambda)$:

$$\mathbb{E}(X) = \frac{a}{\lambda} \qquad ; \qquad \text{var}(X) = \frac{a}{\lambda^2}.$$

d) Loi Normale $\mathcal{N}(m, \sigma^2)$:

$$\mathbb{E}(X) = m \qquad ; \qquad \text{var}(X) = \sigma^2.$$

2- Calcul de la loi de $\varphi(X)$.

a) Cas où φ est bijective :

TH4 : Soit X une v.a.r. absolument continue de densité f_X et φ une fonction numérique continue et dérivable sur un intervalle I contenant $X(\Omega)$, telle que φ' ne s'annule en aucun point de I ; alors $\varphi(X)$ est une v.a.r. absolument continue et elle admet la densité g définie par :

$$g(y) = \frac{f_X(\varphi^{-1}(y))}{|\varphi'(\varphi^{-1}(y))|}.$$

b) Cas où φ n'est pas bijective :

Utiliser les fonctions de répartition.

Exercices chapitre 5

Calculs sur les v.a.r. discrètes

142. ** Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et $\beta \in \mathbb{R}$ et soit X une v.a.r. à valeurs dans $[0, n]$ telle que:

$$P([X = k]) = \beta \, \frac{C_n^k}{k+1} \text{ pour } k \in [0, n]$$

Déterminer β puis calculer $\mathbb{E}(X)$ et $V(X)$.

---

143. ** On lance 2 dés et on appelle Z la v.a.r. égale à la valeur absolue de la différence des numéros obtenus.
Déterminer la loi de Z, sa fonction de répartition, son espérance et sa variance.

---

144. * A l'arrivée d'une course, il y a 9 chevaux: 4 noirs et 5 alezans. On appelle X la v.a.r. égale au nombre de chevaux alezans précédant le premier cheval noir.
Déterminer la loi de X, son espérance et sa variance.

---

145. *** Une urne contient n boules numérotées de 1 à n. On tire toutes les boules une par une sans remise et on note X la v.a.r. égale au nombre de boules dont le rang de sortie est égal au numéro.
Calculer $\mathbb{E}(X)$ et $V(X)$.

---

146. *** Une urne contient n boules numérotées de 1 à n. On tire des boules avec remise et on s'arrête dès que l'on a obtenu un numéro supérieur ou égal à ceux qui précèdent. Soit X la v.a.r. égale au nombre de tirages effectués.
Déterminer $\mathbb{E}(X)$ ainsi que sa limite quand n tend vers $+\infty$.

---

147. ** Soient N urnes numérotées de 1 à N. L'urne k contient k boules numérotées de 1 à k. On choisit une urne au hasard puis on tire une boule dans l'urne choisie. Soit X la v.a.r. égale au numéro de la boule tirée.
Déterminer la loi de X et exprimer $\mathbb{E}(X)$.

---

148. ** Une urne contient n boules numérotées de 1 à n. On en tire 2 au hasard sans remise. Soit X la v.a.r. égale au plus grand numéro tiré.

(a) Calculer $P([X \leq k])$ et en déduire la loi de X.

(b) Calculer $\mathbb{E}(X)$.

---

149. ** On considère une urne contenant 1 boule rouge, 2 boules noires et 3 boules jaunes. On effectue des tirages successifs sans remise jusqu'à ce qu'il ne reste plus dans l'urne que des boules de 2 couleurs différentes. On note X la v.a.r. égale au nombre de tirages effectués.
Déterminer la loi de X, son espérance et sa variance.

---

150. *** Une boîte A contient 2 jetons portant le numéro 0 et une boîte B contient 2 jetons portant le numéro 1. On tire au hasard un jeton dans chaque boîte et on les échange. On fait n fois l'opération. Soit X_n la v.a.r. égale à la somme des numéros des jetons de la boîte A à l'issue du n-ème échange.
Déterminer la loi de X_n et son espérance.

---

151. ** Soit X une v.a.r. de loi binomiale $\mathcal{B}(2n, p)$ et soit Y la partie entière de $X/2$.
Déterminer la loi de Y, $\mathbb{E}(Y)$ et $V(Y)$.

---

152. *** Dans une usine, n automobiles arrivent au même instant devant N ateliers de peinture. Chaque véhicule, et de façon indépendante des autres, est dirigé vers un atelier de peinture de manière équiprobable. Soit X la v.a.r. égale au nombre d'ateliers sans véhicules.
Calculer $\mathbb{E}(X)$ et $V(X)$.

---

153. *** Pour ouvrir 1 porte, un gardien dispose d'un trousseau de 10 clefs différentes. Quand il est ivre, il remélange les clefs après chaque essai ; sinon, il retire la mauvaise clef du lot. On note X le nombre de clefs nécessaires pour ouvrir la porte dans le premier cas et Y dans le second cas.

(a) Déterminer les lois de X et de Y ainsi que leur espérance.

(b) Sachant que le gardien est ivre 1 jour sur 3 et qu'aujourd'hui il a essayé au moins 9 clefs pour ouvrir la porte, quelle est la probabilité qu'il soit ivre aujourd'hui?

154. ** Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et $p \in]0,1[$ et soit X une v.a.r. de loi binomiale $\mathcal{B}(n,p)$. On définit Y par $Y = X$ si $X \neq 0$ et, si $X = 0$, alors Y prend une valeur quelconque dans $[0,n]$.
Déterminer la loi de Y et calculer $\mathbb{E}(Y)$.

155. * On lance n fois une pièce. Soit X la v.a.r. égale au nombre de "piles" obtenus et soit $Y = \frac{a^X}{2^n}$ où $a \in \mathbb{R}_+$.
Calculer $\mathbb{E}(Y)$.

156. ** Soient $a \in \mathbb{R}$ et X une v.a.r. à valeurs dans $\mathbb{N}^*$ telle que, pour $k \in \mathbb{N}^*$:

$$P([X = k]) = a/(k(k+1)(k+2)).$$

Déterminer a, puis calculer $\mathbb{E}(X)$.

157. ** Soit $p \in]0,1[$. On pose $q = 1 - p$ et on considère une v.a.r. X à valeurs dans $\mathbb{N}^*$, dont la loi est définie par $P([X = k]) = ckq^{k-1}$ pour tout $k \in \mathbb{N}^*$.
Déterminer c. Calculer $\mathbb{E}(X)$ et $V(X)$.

158. * Soit X une v.a.r. suivant la loi de Poisson $\mathcal{P}(\lambda)$.
Calculer $\mathbb{E}(1/(1+X))$.

159. * Soit X une v.a.r. suivant la loi de Pascal $\mathcal{P}(r,p)$.
Montrer que $\mathbb{E}((r-1)/(X-1)) = p$ et en déduire $\mathbb{E}(r/X) > p$.

160. * Une suite d'épreuves de Bernoulli de paramètre p est répétée de façon indépendante jusqu'à l'obtention de k succès. Soit X la v.a.r. égale au nombre d'essais nécessaires.

(a) Déterminer la loi de X.

(b) Pour $k = 2$, calculer $\mathbb{E}(X)$ ainsi que $\mathbb{E}(2/X)$.

161. ** Soit X une v.a.r. à valeurs dans $\mathbb{N}$.
Montrer que $\mathbb{E}(X)$ existe si et seulement si la série de terme général $P([X \geq k])$ est convergente et qu'alors on a:

$$\mathbb{E}(X) = \sum_{k \geq 1} P([X \geq k])$$

162. ** Le nombre de clients d'un grand magasin suit une loi de Poisson $\mathcal{P}(\lambda)$. Dans le magasin, chaque client a la probabilité p de se faire voler son portefeuille. Soit Y la v.a.r. égale au nombre de portefeuilles volés.
Déterminer la loi de Y et calculer $\mathbb{E}(Y)$.

163. ** Soit X une v.a.r. à valeurs dans $\mathbb{N}$ et soit Y la v.a.r. définie par $Y = X/2$ si X est pair et $Y = (1-X)/2$ si X est impair.
Déterminer la loi de Y et son espérance dans les cas suivants:

(a) X suit la loi géométrique $\mathcal{G}(p)$;

(b) X suit la loi de Poisson $\mathcal{P}(\lambda)$.

164. ** Même exercice que l'exercice 163 avec $Y = X/2$ si X est pair et $Y = 0$ si X est impair. Calculer de plus $V(Y)$.

165. ** On pose $\mu_k = \mathbb{E}((X - \mathbb{E}(X))^k)$.
Calculer $\gamma = \mu_3/\sigma^3$ et $\delta = \mu_4/\sigma^4$ dans les cas suivants:

(a) X suit la loi binomiale $\mathcal{B}(n, p)$;

(b) X suit la loi de Poisson $\mathcal{P}(\lambda)$.

166. ** Soit $p \in]0, 1[$ et X une v.a.r. à valeurs dans $\mathbb{N}$ telle que, pour tout $k \in \mathbb{N}$:

$$P([X = k]) = \frac{-p^{k+1}}{(k+1)\ln(1-p)}$$

(a) Vérifier qu'il s'agit bien d'une loi de probabilité.

(b) Calculer $\mathbb{E}(X)$ et $V(X)$.

Calculs sur les v.a.r. absolument continues

167. * Soit f définie par $f(x) = \frac{1}{3}(1 + |x|)\ \mathbb{1}_{[-1,1]}(x)$.
Montrer que f est la densité d'une v.a.r. X dont on déterminera l'espérance et la variance.

168. * Soit X une v.a.r. de densité f définie par $f(x) = (x + 1)\mathbb{1}_{[-k,k]}(x)$.

(a) Déterminer k et la fonction de répartition de X.

(b) Soit $Y = X^2$. Préciser la densité de probabilité, l'espérance et la variance de Y.

169. * Soit f la fonction définie par:

$$f(x) = k(x^2\ e^x\ \mathbb{1}_{]-\infty,0[}(x) + x\ e^{-x^2}\ \mathbb{1}_{[0,+\infty[}(x))$$

(a) Déterminer k pour que f soit la densité d'une v.a.r. X.

(b) Montrer que X admet une espérance et une variance et calculer celles-ci.

170. * Soit $n \in \mathbb{N}$, $k_n \in \mathbb{R}$ et f_n la fonction définie par:

$$f_n(x) = k_n\ |x|^n\ e^{-|x|}$$

(a) Déterminer k_n pour que f_n soit la densité d'une v.a.r. X_n.

(b) Déterminer alors $\mathbb{E}(X_n)$ et $V(X_n)$.

171. *** Soit $\alpha \in \mathbb{R}$ et f la fonction définie par:

$$f(x) = \alpha(1 + \cos x)\ e^{-|x|}$$

(a) Déterminer α pour que f soit la densité d'une v.a.r. X.

(b) Déterminer alors $\mathbb{E}(X)$ et $V(X)$.

172. ** Soit X une v.a.r. suivant une loi normale $N(0,2)$. Soit $\alpha > 0$ et soit Y la v.a.r. définie par $Y = e^{-\alpha X^2}$.
Déterminer la loi de Y ainsi que son espérance.

---

173. ** Une puce M se promène dans une sphère de centre O et de rayon R. La probabilité que la puce se trouve dans une portion de la sphère est proportionnelle au volume de cette portion.
Déterminer la loi de la distance OM ainsi que son espérance.

---

174. ** Soit X une v.a.r. de fonction de répartition F continue et strictement croissante et soit $Y = F(X)$.
Déterminer la fonction de répartition de Y et en déduire la loi de Y.

---

175. * Soit X une v.a.r. de densité f nulle sur $]-\infty, 0[$. On suppose qu'il existe λ tel que $\int_0^{+\infty} f(t)\, e^{\lambda t}\, dt$ soit convergente.

(a) Montrer que pour tout $\alpha \in [0, \lambda]$, $\mathbb{E}(e^{\alpha x})$ existe.

(b) Montrer qu'alors $P([X \geq a]) \leq e^{-a\alpha}\mathbb{E}(e^{\alpha x})$ pour tout $a > 0$.

---

176. * Soit X une v.a.r. de densité f nulle sur $]-\infty, 0[$ et soit Y la v.a.r. égale à la partie entière de X.

(a) Exprimer la loi de Y en fonction de celle de X.

(b) Montrer que $\mathbb{E}(Y)$ existe si et seulement si $\mathbb{E}(X)$ existe et qu'alors $\mathbb{E}(Y) \leq \mathbb{E}(X) \leq \mathbb{E}(Y) + 1$.

---

177. ** Même exercice que l'exercice 164 si X suit:

(a) la loi exponentielle $\mathcal{E}(\lambda)$;

(b) la loi normale $N(m, \sigma^2)$;

(c) la loi de Laplace de densité f définie par $f(x) = \frac{1}{2}\, e^{-|x|}$.

---

178. * Calculer $\mathbb{E}(X)$ et $V(X)$ lorsque X suit la loi Gamma de densité f définie pour $a > 0$ et $\lambda > 0$ par:

$$f(x) = \frac{\lambda^a}{\Gamma(a)}\, e^{-\lambda x}\, x^{a-1}\, \mathbb{1}_{]0,+\infty[}(x)$$

---

179. * Soient p et $q \in \mathbb{R}_+^*$. On pose $\beta(p,q) = \int_0^1 t^{p-1}(1-t)^{q-1}\, dt$.

(a) Justifier l'existence de $\beta(p,q)$. En supposant $q > 1$, établir une relation de récurrence entre $\beta(p,q)$ et $\beta(p+1, q-1)$ et en déduire la valeur de $\beta(p,q)$ lorsque p et $q \in \mathbb{N}^*$.

(b) Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par:

$$f(x) = \frac{1}{\beta(p,q)}\, x^{p-1}(1-x)^{q-1}\, \mathbb{1}_{]0,1[}(x)$$

Vérifier que f est une densité.

(c) Soit X une v.a.r. de densité f. Montrer l'existence de $\mathbb{E}(X)$ et de $V(X)$ et les calculer lorsque p et $q \in \mathbb{N}^*$.

---

180. ** Soit X une v.a.r. de densité f définie par:

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}x}\, e^{-\frac{1}{2}(\ln x - 1)^2}\, \mathbb{1}_{]0,+\infty[}(x)$$

(a) Vérifier que f est une densité de probabilité et exprimer la fonction de répartition de X en fonction de celle d'une v.a.r. de loi normale $N(0,1)$.

(b) Calculer $\mathbb{E}(X)$ et $V(X)$.

(c) Soit U une v.a.r. de loi normale $N(m, \sigma^2)$ et soit $Z = e^U$. Calculer $\mathbb{E}(U)$ et $V(U)$.

---

181. * Soient a et α deux réels vérifiant $a > 0$ et $\alpha > 1$ et soit f la fonction définie par:

$$f(x) = \frac{\lambda}{x^\alpha}\, \mathbb{1}_{[a,+\infty[}.$$

(a) Déterminer λ pour que f soit la densité d'une v.a.r. X.

(b) Déterminer, lorsqu'ils existent, les moments d'ordre r de X.

---

182. * Soit $\sigma > 0$ et soit X une v.a.r. de densité f définie par:

$$f(x) = \frac{x}{\sigma^2}\, e^{-x^2/2\sigma^2}\, \mathbb{1}_{[0,+\infty[}(x)$$

Calculer $P([-1 \leq X \leq 1])$, $\mathbb{E}(X)$, $V(X)$ et déterminer la loi de X^2.
