CHAPITRE 1

CONCEPTS DE BASE

On fait appel aux probabilités pour décrire une expérience dont le résultat est impossible à prévoir avec certitude, mais dont on connait quand-même l'ensemble des résultats possibles.
La notion de résultat d'une expérience n'est pas claire : c'est l'expérimentateur qui décide de ce qui mérite le nom de résultat en fonction de ses propres motivations.
Il est donc très important de définir avec précision les motivations de l'expérience et, par suite, ce que l'on entend par résultat.

I- INTRODUCTION DE LA NOTION D'EVENEMENT.

Si, lorsqu'on répète l'expérience dans des conditions identiques, le résultat observé est susceptible de changer, l'expérience est dite aléatoire.
Lorsqu'on effectue une expérience aléatoire, certains faits liés à cette expérience peuvent se produire ou non : on les appelle événements.
L'ensemble de tous les résultats possibles ou états est appelé univers de l'expérience : on le notera Ω.
Chaque résultat possible est appelé événement simple.

Les événements susceptibles d'intéresser ne sont pas seulement les événements simples.
Un événement est lié à une expérience associée à Ω si, pour tout résultat $\omega \in \Omega$, on sait dire si cet événement a lieu ou non. On convient d'identifier un tel événement à l'ensemble des $\omega \in \Omega$ pour lequel il a lieu. Un événement sera donc identifié à une partie de Ω.
Plus généralement, à chaque expérience, on peut associer un ensemble Ω tel que chaque événement puisse être représenté par une partie de Ω.

Rappel sur le vocabulaire ensembliste :

1- Soit A une partie de Ω.
On note $\overline{A}$ le complémentaire de A : c'est l'ensemble de tous les états qui ne sont pas dans A.

Propriété : $\overline{\overline{A}} = A$.

2- Soient A et B deux parties de Ω.
On note $A \cap B$ l'intersection de A et de B : c'est l'ensemble des états qui sont à la fois dans A et dans B.
On note $A \cup B$ la réunion de A et de B : c'est l'ensemble des états qui sont dans A ou dans B (ils peuvent être dans les deux).
On note $A \subset B$ et on dit que A est inclus dans B si tous les états de A sont dans B.

Propriétés :
1) $\cap$ et $\cup$ sont commutatives et associatives.
2) Si $A \subset B$, alors $A \cap B = A$ et $A \cup B = B$.

3- Si $A_1, \cdots, A_n, \cdots$ sont une infinité dénombrable de parties de Ω, on note $\bigcup_n A_n$ (ou, de façon plus précise, $\bigcup_{n=1}^{+\infty} A_n$ la réunion dénombrable des A_n : c'est l'ensemble des états qui sont au moins dans l'un des A_n et on note $\bigcap_n A_n$ l'intersection dénombrable des A_n : c'est l'ensemble des états qui sont dans tous les A_n à la fois.

Propriétés :
1) $\overline{\bigcup_n A_n} = \bigcap_n \overline{A_n}$; $\overline{\bigcap_n A_n} = \bigcup_n \overline{A_n}$.
2) $A \cap \left(\bigcup_n A_n\right) = \bigcup_n (A \cap A_n)$: distributivité de l'intersection par rapport à la réunion ;
$A \cup \left(\bigcap_n A_n\right) = \bigcap_n (A \cup A_n)$: distributivité de la réunion par rapport à l'intersection.

On appelle $\emptyset$ l'événement impossible car il n'est jamais réalisé et Ω l'événement certain car il est toujours réalisé.
Si $A \cap B = \emptyset$, on dit que A et B sont incompatibles car ils ne peuvent avoir lieu en même temps.

Tribu :

D1 : On appelle tribu $\mathcal{A}$ sur Ω, tout sous-ensemble de parties de Ω tel que :
i) $\Omega \in \mathcal{A}$;
ii) si $A \in \mathcal{A}$, alors $\overline{A} \in \mathcal{A}$;
iii) si pour tout $n \in \mathbb{N}$, $A_n \in \mathcal{A}$, alors $\bigcup_{n=0}^{+\infty} A_n \in \mathcal{A}$.

Propriétés :
1) $\emptyset \in \mathcal{A}$;
2) si, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $A_n \in \mathcal{A}$, alors $\bigcap_{n=0}^{+\infty} A_n \in \mathcal{A}$.

Le couple $(\Omega, \mathcal{A})$ est appelé espace probabilisable.

Cas particulier très important : lorsque Ω est fini ou infini dénombrable, on prend toujours $\mathcal{A} = \mathcal{P}(\Omega)$.

Système complet d'événements :

On appelle système complet d'événements de Ω, toute famille finie ou dénombrable $(A_i)_{i\in I}$ telle que:
i) $A_i \in \mathcal{A}$ pour tout $i \in I$;
ii) $\bigcup_{i\in I} A_i = \Omega$;
iii) si $i \neq j$, alors $A_i \cap A_j = \emptyset$.

II- INTRODUCTION DE LA NOTION DE PROBABILITÉ.

D2 : Soit $(\Omega, \mathcal{A})$ un espace probabilisable. On appelle probabilité sur $(\Omega, \mathcal{A})$ toute application P de $\mathcal{A}$ vers $[0, 1]$ telle que :
i) $P(\Omega) = 1$;
ii) pour toute suite d'événements $A_n \in \mathcal{A}$, incompatibles deux à deux, on a $P\left(\bigcup_n A_n\right) = \sum_n P(A_n)$.

Le triplet $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ est appelé espace probabilisé.

Propriétés :
1) Si $A \subset B$, alors $P(A) \leq P(B)$;
2) $P(\overline{A}) = 1 - P(A)$; $P(\emptyset) = 0$;
3) $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$;
4) $P\left(\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right) = \sum_{i=1}^{n} P(A_i) + \cdots + (-1)^{k+1} \sum_{1\leq i_1 \cdots < i_k \leq n} P(A_{i_1} \cap \cdots \cap A_{i_k}) + \cdots + (-1)^{n+1} P(A_1 \cap \cdots \cap A_n)$;
5) si $(A_n)_n$ est une suite croissante de $\mathcal{A}$, alors $P\left(\bigcup_n A_n\right) = \lim_{n\to+\infty} P(A_n)$;
6) si $(B_n)_n$ est une suite décroissante de $\mathcal{A}$, alors $P\left(\bigcap_n B_n\right) = \lim_{n\to+\infty} P(B_n)$.

Cas particuliers très importants :

1- Ω fini : $\Omega = \{\omega_1, \cdots, \omega_n\}$ et $\mathcal{A} = \mathcal{P}(\Omega)$.
Soient $p_1, \cdots, p_n$, n nombres réels. Il existe une probabilité P sur $(\Omega, \mathcal{A})$ telle que, pour tout $i \in \{1, \cdots, n\}$, $p_i \geq 0$ et $\sum\limits_{i=1}^{n} p_i = 1$.
La probabilité P est alors unique et, pour tout $A \in \mathcal{A}$, $P(A) = \sum\limits_{i;\omega_i \in A} p_i$.

D3 : On dit qu'il y a équiprobabilité lorsque les probabilités de tous les événements simples sont égales.

TH1 : S'il y a équiprobabilité, alors, pour tout événement A, on a $P(A) = \frac{\text{card}A}{\text{card}\Omega}$.

2- Ω infini dénombrable : $\Omega = \{\omega_i\ ;\ i \in \mathbb{N}\}$ et $\mathcal{A} = \mathcal{P}(\Omega)$.

Il existe une probabilité P sur $(\Omega, \mathcal{A})$ telle que, pour tout $i \in \mathbb{N}$, $P(\{\omega_i\}) = p_i$ si et seulement si, pour tout $i \in \mathbb{N}$, $p_i \geq 0$ et $\sum\limits_{i=0}^{+\infty} p_i = 1$.
La probabilité P est alors unique et alors, pour tout $A \in \mathcal{P}$, $P(A) = \sum\limits_{i;\omega_i \in A} p_i$.

III EVENEMENTS INDEPENDANTS.

D4 : Soit $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ un espace probabilisé.
1) Deux événements A et B de $\mathcal{A}$ sont indépendants si $P(A \cap B) = P(A)P(B)$.
2) Une famille d'événements $(A_n)_n$ est dite famille d'événements indépendants si, pour tout $p \in \mathbb{N}^*$ et pour tout $\{i_1, \cdots, i_p\} \subset \mathbb{N}$, $P(A_{i_1} \cap \cdots \cap A_{i_p}) = P(A_{i_1}) \cdots P(A_{i_p})$. (*)

Mise en garde :
1- Ne pas confondre événements incompatibles et événements indépendants.
2- L'indépendance dépend de la probabilité considérée.
3- Il faut vérifier (*) pour toutes les sous-familles : en particulier, l'indépendance 2 à 2 d'événements n'implique pas leur indépendance.

TH2 : Si (A, B) est un couple d'événements indépendants, il en est de même des couples $(\overline{A}, B)$, $(A, \overline{B})$ et $(\overline{A}, \overline{B})$.

Plus généralement,

TH3 : Si $(A_n)_n$ est une famille d'événements indépendants, il en est de même de $(A'_n)_n$, avec $A'_n = A_n$ ou bien $A'_n = \overline{A_n}$.

Exercices Chapitre 1

Ensembles, événements

1. * Donner les expressions simplifiées des ensembles suivants:

(a) $(A \cup B) \cap (A \cup C)$;

(b) $(\overline{A} \cup B) \cap (A \cup B)$;

(c) $(\overline{A} \cup B) \cap (A \cup B) \cap (\overline{A} \cup \overline{B})$.

---

2. ** Exprimer chacun des événements suivants à l'aide des événements A, B et C et des opérateurs réunion, intersection et complémentation:

(a) au moins un des trois événements a lieu ;

(b) au plus un des trois événements a lieu ;

(c) aucun des trois événements n'a lieu ;

(d) les trois événements ont lieu ;

(e) exactement un seul des trois événements a lieu ;

(f) A et B ont lieu, mais pas C ;

(g) A a lieu, sinon B n'a pas lieu non plus.

---

3. * On lance une pièce trois fois et on considère les événements suivants:

(a) A : "pile apparaît exactement deux fois" ;

(b) B : "pile apparaît au moins deux fois" ;

(c) C : "pile apparaît quand face est apparu au moins une fois" ;

Exprimer Ω , A, B et C ainsi que $\overline{A} \cap B$, $\overline{A} \cap \overline{B}$ et $A \cap C$.

---

4. ** Dans chacun des cas suivants, donner le nombre d'éléments de Ω et des événements considérés :

(a) Une famille a 4 enfants. A : "les filles et les garçons sont alternés" ; B : "le premier et le quatrième sont des garçons" ; C :"il y a autant de filles que de garçons" ; D : "il y a 3 enfants en suivant du même sexe".

(b) Un représentant doit visiter 2 fois 3 villes a, b et c. A : "il visite a en premier et en dernier".

(c) Un ascenseur porte 2 personnes et il y a 3 niveaux. A : "elles s'arrêtent à 2 niveaux différents" ; B : "une personne s'arrête au premier niveau".

---

5. * On lance deux dés, l'un bleu, l'autre rouge. Soit x le nombre obtenu par le dé bleu et y le nombre obtenu par le dé rouge. On appelle Ω l'ensemble de tous les couples (x, y) possibles.

(a) Donner un diagramme cartésien de Ω.

(b) Soient les événements A, B, C et D définis respectivement par: $x + y \leq 3$; $x + y = 4$ ou 5 ; $6 \leq x + y \leq 7$ et $x + y > 7$.
Représenter graphiquement ces événements. Forment-ils un système complet d'événements?

Propriétés des probabilités

6. * Soit $a = P(A)$; $b = P(B)$ et $c = P(A \cap B)$. Exprimer $P(\overline{A})$, $P(\overline{A} \cup B)$, $P(A \cap \overline{B})$, $P(\overline{A} \cup \overline{B})$ en fonction de a, b et c.

7. ** Etant donné $P(A) = 3/4$ et $P(B) = 3/8$, montrer que $P(A \cup B) \geq 3/4$ et $1/8 \leq P(A \cap B) \leq 3/8$.

8. * Montrer que:

$$P(A \cap B) - P(A)P(B) = P(\overline{A})P(B) - P(\overline{A} \cap B) = P(A)P(\overline{B}) - P(A \cap \overline{B}).$$

9. ** Montrer par récurrence l'inégalité suivante:

$$P(A_1 \cap A_2 \cap \cdots \cap A_n) \geq \sum_{i=1}^{n} P(A_i) - (n-1) = 1 - \sum_{i=1}^{n} P(\overline{A_i})$$

10. * Montrer la formule suivante:

$$P(A \cup B \cup C) = P(A) + P(B) + P(C) - P(A \cap B) - P(A \cap C) - P(B \cap C) + P(A \cap B \cap C)$$

11. ** Une boîte contient n boules numérotées de 1 à n. On tire au hasard une boule. Quelle est la probabilité que son numéro soit divisible par 3 ou par 4? Etudier la limite de cette probabilité lorsque $n \to \infty$.

12. *** Exprimer en fonction de $P(A)$, $P(B)$, $P(C)$, $P(A \cap B)$, $P(A \cap C)$, $P(B \cap C)$, $P(A \cap B \cap C)$ et pour $k \in \{0, 1, 2, 3\}$ les probabilités que:

(a) exactement k des 3 événements aient lieu ;

(b) au moins k des 3 événements aient lieu .

13. *** On pose $A \Delta B = (\overline{A} \cap B) \cup (A \cap \overline{B})$ et $d(A, B) = P(A \Delta B)$.
Montrer que $d(A, B) = P(A) + P(B) - 2P(A \cap B)$ et que $d(A, C) \leq d(A, B) + d(B, C)$.

14. *** On jette 3 dés. On note X la somme des points obtenus. Calculer la probabilité d'avoir $X = 11$ et $X = 12$.

Evénements indépendants

15. * Soient A, B et C trois événements indépendants.

(a) A est-il indépendant de lui-même? A et $\overline{A}$ sont-ils indépendants?

(b) Montrer que $(A, \overline{B})$, $(\overline{A}, B)$ et $(\overline{A}, \overline{B})$ sont des couples d'événements indépendants.

(c) Montrer que $(A, B \cap C)$ est un couple d'événements indépendants.

16. ** Soit $(A_i)_{1 \leq i \leq n}$ une famille d'événements indépendants tels que $P(A_i) = p$ pour tout $i \in \{1, 2, \cdots, n\}$. Quelles sont les probabilités que:

(a) au moins un des événements ait lieu ?

(b) au moins m événements aient lieu ?

(c) exactement m événements aient lieu ?

---

17. * Un atelier comporte 3 machines A, B et C.
Les probabilités de défaillence sont respectivement $P(A) = 0,1$; $P(B) = 0,2$; $P(C) = 0,3$.
Quelle est la probabilité d'avoir une machine en panne?

---

18. * Soit $\Omega = \{\omega_i \,; 1 \leq i \leq 6\}$. On définit sur l'espace probabilisable $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega))$ deux probabilités P et P' telles que:
$P(\{\omega_1\}) = 3/10$; $P(\{\omega_2\}) = 1/5$; $P(\{\omega_3\}) = 1/20$; $P(\{\omega_4\}) = 3/20$; $P(\{\omega_5\}) = 1/20$; $P(\{\omega_6\}) = 1/4$
et, pour tout $i \in \{1, 2, \cdots, 6\}$; $P'(\{\omega_i\}) = 1/6$.
On considère les événements $A = \{\omega_1, \omega_2, \omega_5, \omega_6\}$ et $B = \{\omega_2, \omega_3\}$.
Etudier l'indépendance de A et de B relativement à P, puis relativement à P'.

---

19. ** Une boîte A contient 1 boule blanche et 3 boules rouge. Une boîte B contient 5 boules blanches et 3 boules rouge.
On tire au hasard une boule de A et une boule de B, puis on les change de boîte.

(a) Quelle est la probabilité pour qu'après l'échange la boîte A ne contienne que des boules rouges?

(b) Quelle est la probabilité pour qu'après l'échange chaque boîte ait retrouvé, en nombre de boules de chaque couleur, sa composition initiale.

---

20. ** On considère les différentes répartitions possibles des sexes des n enfants d'une famille. Soit Ω l'ensemble des états et soient les événements H : "la famille a des enfants des 2 sexes" et F : "la famille a au plus une fille".

(a) Décrire Ω ; calculer $P(H)$, $P(F)$ et $P(H \cap F)$.

(b) H et F sont-ils indépendants? (on considèrera $n = 2$, $n = 3$ puis n quelconque).

---

21. ** Deux personnes lancent une pièce n fois chacun ($n \geq 1$). Quelle est la probabilité qu'ils obtiennent le même nombre de "faces"?

---

22. *** Deux joueurs A et B jouent avec 2 dés. A gagnera avec un total de 7 et B avec un total de 6. B joue le premier et ensuite, (s'il y a une suite), A et B jouent alternativement. Le jeu s'arrête dès que l'un d'entre eux gagne.
Calculer la probabilité de succès de chaque joueur.

---

23. *** Soient A, B et C trois événements indépendants tels que $P(A) = a$, $P(A \cup B \cup C) = 1 - b$ $P(A \cap B \cap C) = 1 - c$ et $P(\overline{A} \cap \overline{B} \cap C) = x$.

(a) Montrer que:
$$P(B) = \frac{(1-c)(x+b)}{ax} \quad \text{et} \quad P(C) = \frac{x}{x+b}.$$

(b) Montrer que x satisfait l'équation:
$$ax^2 + (ab - (1-a)(a-c-1))x + b(1-a)(1-c) = 0.$$

En déduire que:
$$c > \frac{(1-a)^2 + ab}{1-a}.$$
