Année Préparatoire

# Examen d'Optimisation du mardi 13 juin 2017

*4 exercices indépendants* (durée : 2 heures)

**Exercice I-** Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $(x, y) \mapsto (x + y)^2 - (x^4 + y^4)$.

**1.** Déterminer les points critiques de $f$, puis les extrémums locaux de $f$.
**2.** Vérifier que $(x + y)^2 \leq 2(x^2 + y^2)$, puis que $f(x, y) \leq 2u - \frac{1}{2}u^2 = \varphi(u)$ où $u = x^2 + y^2$.
**3.** Après avoir étudié les variations de $\varphi$ sur $\mathbb{R}_+$, en déduire que $f$ admet un maximum global sur $\mathbb{R}^2$ et déterminer les points où il est atteint. Y a-t-il un minimum global ?

**Exercice II-** On veut trouver les extrémums de la fonction $f : (x, y) \mapsto (x - 2)^2 + (y - 2)^2$ sur $C = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \ ; \ x^2 + y^2 \leq 4, \ x + y \leq 2\}$.

**1.** Représenter $C$. Justifier pourquoi $f$ admet des extrémums sur $C$.
**2.** Écrire avec soin les relations de Kuhn-Tucker.
**3.** Trouver les extrémums de $f$ et les points en lesquels ils sont atteints. Vérifier sur le dessin.

**Exercice III-** Une entreprise fabrique deux produits agro-alimentaires différents $P_1$ et $P_2$, à partir de deux ressources $R_1$ et $R_2$, disponibles en quantités limitées : 15 kg pour $R_1$ et 24 kg pour $R_2$, pour une journée. La main d'oeuvre est, elle aussi limitée, à 30 heures pour une journée.
→ Pour fabriquer 1 kg de $P_1$, il faut 1 heure de main d'oeuvre, 2 kg de $R_1$ et 4 kg de $R_2$.
→ Pour fabriquer 1 kg de $P_2$, il faut 6 heures de main d'oeuvre, 2 kg de $R_1$ et 1 kg de $R_2$.
→ Les prix de vente sont de 2 euros le kg de $P_1$, et 3 euros le kg de $P_2$.
Le directeur de l'entreprise souhaite organiser sa production de manière à maximiser son chiffre d'affaire quotitien.

**1.** Modéliser ce problème de production. [*On pourra faire un dessin et s'en aider durant tout l'exercice*].
**2.** Déterminer, par la méthode du simplexe, quelles quantités $x_1$ et $x_2$ de chaque produit il faut fabriquer pour obtenir un bénéfice maximal.
**3.** Écrire le programme dual et en donner les valeurs optimales.
**4.** On reprend le problème initial, mais avec la fonction objectif $z = 2x_1 + px_2$ ($p$ euros au lieu de 3 euros). Déterminer les valeurs de $p$ pour lesquelles les valeurs des variables pour l'optimum restent inchangées.
**5.** On revient à la fonction objectif initiale mais maintenant on remplace le nombre quotidien maximal d'heures de main d'oeuvre par $q$ (au lieu de 30). Déterminer les valeurs de $q$ pour lesquelles les valeurs des variables pour l'optimum restent inchangées.

**Exercice IV-** Résoudre le Programme Linéaire en Nombres Entiers suivant :

$$\left\{\begin{array}{rrcrcr} \max z = & 4x_1 & - & x_2 & & \\ s.c. & 7x_1 & - & 2x_2 & \leq & 14 \\ & 2x_1 & - & 2x_2 & \leq & 3 \\ & & & x_2 & \leq & 3 \\ & x_1 & , & x_2 & \in & \mathbb{N} \end{array}\right.$$

On utilisera des résolutions graphiques et on représentera l'arbre correspondant.