Année Préparatoire

Examen de Probabilités du 21 mars 2016

5 exercices indépendants (Durée : 2 heures)

Exercice I-

On considère une urne qui contient exactement 3 boules : une boule numérotée 1 et deux boules numérotées 2. On effectue, dans cette urne deux tirages successifs, sans remise de la première boule tirée. On note T_1 (resp. T_2) la variable aléatoire représentant le numéro de la première (resp. deuxième) boule tirée.

1. Déterminer la loi de T_1 et son espérance.

2. Déterminer $P^{[T_1=k]}([T_2 = j])$ pour tout couple (j, k). En déduire, à l'aide des probabilités totales, la loi de T_2 et la comparer à celle de T_1.

3. Si la deuxième boule tirée porte le numéro 2, quelle est la probabilité que la première boule tirée soit aussi numérotée 2 ?

4. Montrer que $\mathbb{E}^{T_1}(T_2) = \dfrac{3\mathbb{E}(T_1) - T_1}{2}$.

5. Les variables T_1 et T_2 sont-elles indépendantes ? Déterminer $\text{cov}(T_1, T_2)$.

Exercice II-

Toutes les variables aléatoires sont définies sur le même espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, P)$. Soit X une variable aléatoire à valeurs dans $\mathbb{N}$ telle que $P([X \geq n]) > 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. On appelle *taux de panne* de X la suite réelle $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ des probabilités conditionnelles définies par $x_n = P([X = n]/[X \geq n])$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

1. Vérifier que $P([Y = n]) = \dfrac{1}{n(n+1)}$ définit bien une loi de probabilité sur $\mathbb{N}^*$ [*on pourra déterminer deux réels a et b tels que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on ait* $\dfrac{1}{n(n+1)} = \dfrac{a}{n} + \dfrac{b}{n+1}$].

2. Déterminer le taux de panne de la variable aléatoire Y.

3. Dans le cas général, montrer par récurrence que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$P([X \geq n]) = \prod_{k=0}^{n-1}(1 - x_k) = (1 - x_0)(1 - x_1)\cdots(1 - x_{n-1}),$$

puis exprimer $p_n = P([X = n])$ en fonction des x_k.

4. Déterminer les lois de variables à valeurs dans $\mathbb{N}^*$ ayant un taux de panne constant pour $n > 0$.

Exercice III-

Soit $f(x) = xe^{-x^2/2}\,\mathbb{I}_{]0,+\infty[}(x)$.

1. Vérifier que f est une densité de probabilité et déterminer la fonction de répartition F d'une variable aléatoire X de densité f. En déduire la médiane de X, c'est-à-dire le réel m tel que $P([X \leq m]) = \frac{1}{2}$.

2. Établir que $\mathbb{E}(X) = \sqrt{\frac{\pi}{2}}$ en utilisant la variance de la loi normale $\mathcal{N}(0,1)$.

3. En faisant le changement de variable $u = \frac{x^2}{2}$, exprimer $\mathbb{E}(X^n)$ à l'aide de la fonction Γ et vérifier ainsi que $\Gamma\left(\frac{3}{2}\right) = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$. [*On rappelle que, pour* $a > 0$, $\Gamma(a) = \int_0^{+\infty} x^{a-1}\,e^{-x}\,dx$].

4. Déterminer et reconnaître la loi de $Z = X^2$. En déduire $\mathbb{E}(X^2)$.

Exercice IV-

Soit X et Y des variables aléatoires indépendantes de lois exponentielles respectivement $\mathcal{E}(1)$ et $\mathcal{E}(3)$. On pose $U = X + Y$ et $V = X - Y$.

1. Déterminer la loi du couple (X, Y) et calculer $P([X > Y])$.

2. Déterminer la loi du couple (U, V), ainsi que les lois et espérances de U et de V. Retrouver $P([X > Y])$.

3. Calculer $\mathbb{E}(|V|)$.

4. Déterminer $\mathbb{E}^V(U)$, puis retrouver $\mathbb{E}(|V|)$.

[*On rappelle qu'une variable aléatoire de loi* $\mathcal{E}(\lambda)$ *a pour densité* $f : t \mapsto \lambda\,e^{-\lambda t}\,\mathbb{I}_{]0,+\infty[}(t)$].

Exercice V-

60 personnes veulent retirer de l'argent à un distributeur. La somme moyenne demandée par chaque personne est de 80 euros, avec un écart-type de 40 euros. Les sommes demandées par chaque personne sont indépendantes et de même loi.

Combien d'argent doit contenir le distributeur pour que les 60 personnes retirent la somme qu'ils souhaitent, avec une probabilité supérieure à 0,95 ?