Corrigé de l'Examen d'Optimisation du 12 juin 2018

Exercice I- [8 points] $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $(x,y) \mapsto -x^2y + \frac{1}{2}y^2 + y$ est de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}^2$.

1. $\partial_1 f(x,y) = -2xy$ et $\partial_2 f(x,y) = -x^2+y+1$. Un point critique (x,y) vérifie donc $\begin{cases} xy = 0 \\ -x^2+y+1=0 \end{cases}$.

- Si $x = 0$, alors $y+1=0$ et $y=-1$.
- Si $y=0$, alors $x^2=1$, soit $x=-1$ ou $x=1$.

On a donc 3 points critiques $\boxed{(0,-1),\ (-1,0) \text{ et } (1,0)}$ [*2pts*].

On a alors $\partial_1^2 f(x,y) = -2y$, $\partial_1\partial_2 f(x,y) = -2x$ et $\partial_2^2 f(x,y) = 1$.

- $\nabla^2 f(0,-1) = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$: on a deux valeurs propres strictement positives, donc un minimum local en $(0,-1)$ [*1pt*].
- $\nabla^2 f(-1,0) = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$: le déterminant est strictement négatif (-4) donc on a deux valeurs propres de signes opposés et donc $(-1,0)$ est un point selle. De même, $\nabla^2 f(1,0) = \begin{pmatrix} 0 & -2 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$ de déterminant $-4<0$ donc $(1,0)$ est aussi un point selle [*1pt*].

$f(x,x) = -x^3 + \frac{1}{2}x^2 + x \sim -x^3$ quand $x \to \pm\infty$ donc, $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x,x) = -\infty$ et $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x,x) = +\infty$, donc $\boxed{f \text{ n'admet pas d'extrémums globaux}}$ [*1pt*].

2. $K = [0,1]^2$ est un fermé borné, donc f qui est continue y admet un maximum global et un minimum global. Il n'y a pas d'extrémum local de f à l'intérieur de K donc les extrémums sont sur le bord de K.

- On a $f(x,0) = 0$ donc $f=0$ sur $[0,1]\times\{0\}$.
- $f(x,1) = -x^2 + \frac{3}{2}$; $x \mapsto f(x,1)$ décroît sur $[0,1]$, donc $f(1,1) = \frac{1}{2} \le f(x,1) \le f(0,1) = \frac{3}{2}$ sur $[0,1]\times\{1\}$.
- $f(0,y) = \frac{1}{2}y^2 + y$; $y \mapsto f(0,y)$ croît sur $[0,1]$ donc $f(0,0) = 0 \le f(0,y) \le f(0,1) = \frac{3}{2}$ sur $\{0\}\times[0,1]$.
- $f(1,y) = \frac{1}{2}y^2$; $y \mapsto f(1,y)$ croît sur $[0,1]$ donc $f(1,0) = 0 \le f(1,y) \le \frac{1}{2}$ sur $\{1\}\times[0,1]$.

Finalement, $\boxed{\min\limits_K f = 0}$, avec $\boxed{\mathrm{argmin}_K f = [0,1]\times\{0\}}$; $\boxed{\max\limits_K f = \frac{3}{2}}$ et $\boxed{\mathrm{argmax}_K f = \{(0,1)\}}$. [*3pts*].

Exercice II- [8 points]

1. Dessin [*1pt*]. Si $M(x,y)$ alors $d^2(A,M) = \|\overrightarrow{AM}\|^2 = \left(x - \frac{7}{4}\right)^2 + (y-2)^2 = f(x,y)$. On a $D = \bigcap\limits_{i=1}^{4} \varphi_i^{-1}(]-\infty,0])$ avec $\varphi_1(x,y) = 1-x$, $\varphi_2(x,y) = x+y-3$ et $\varphi_3(x,y) = (x-1)^2 - y$. Ces fonctions contraintes sont donc de classe C^1 comme f. On a donc D fermé comme intersection de fermés (l'image réciproque d'un fermé par une application continue étant un fermé). C'est aussi un ensemble borné (inclus dans $[1, 3] \times [0, 3]$), donc D est un fermé borné et on a bien l'existence d'extrémums sur D [*0,5pt*].

2. Les 2 premières contraintes sont linéaires, la troisième convexe, donc elles sont qualifiées en tout point et les extrémums $u = (x, y)$ vérifient les conditions du théorème de Kuhn-Tucker : il existe λ_i, $1 \leq i \leq 3$ tels que $\begin{cases} \nabla_u f + \sum_{i=1}^{3} \lambda_i \nabla_u \varphi_i = 0 \\ \lambda_i \varphi_i(u) = 0 \text{ pour } 1 \leq i \leq 3 \\ \varphi_i(u) \leq 0 \text{ pour } 1 \leq i \leq 3 \end{cases}$, avec $\nabla_u f = \begin{pmatrix} 2\left(x - \frac{7}{4}\right) \\ 2y \end{pmatrix}$, $\nabla_u \varphi_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\nabla_u \varphi_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ et $\nabla_u \varphi_3 = \begin{pmatrix} 2(x-1) \\ -1 \end{pmatrix}$ [*1,5 pt*].

3. • Si aucune contrainte n'est saturée, on a $\nabla_u f = 0$ qui donne $x = \frac{7}{4}$ et $y = 0$, soit $M = A$, ce qui est impossible car $A \notin D$ ($\left(\frac{7}{4} - 1\right)^2 > 0$) [*0,5pt*].

• Si une seule contrainte est saturée,

→ pour φ_1, $x = 1$ et $2 \begin{vmatrix} x - \frac{7}{4} & -1 \\ y & 0 \end{vmatrix} = 2y = 0$, mais alors φ_3 est aussi saturée.

→ pour φ_2, $x + y = 3$ et $2 \begin{vmatrix} x - \frac{7}{4} & 1 \\ y & 1 \end{vmatrix} = 2\left(x - \frac{7}{4} - y\right) = 0$, donc $x = \frac{19}{8}$ et $y = \frac{5}{8} < (x-1)^2$, donc $(x, y) \notin D$.

→ pour φ_3, $y = (x-1)^2$ et $2 \begin{vmatrix} x - \frac{7}{4} & 2(x-1) \\ y & -1 \end{vmatrix} = 2\left(-x + \frac{7}{4} - 2y(x-1)\right) = 0$, d'où $2(x-1)^3 + x - \frac{7}{4} = 0 = 2x^3 - 6x^2 + 7x - \frac{15}{4} = (2x-3)\left(x^2 - \frac{3}{2}x + \frac{5}{4}\right)$, donc $x = \frac{3}{2}$ car $\Delta = \frac{9}{4} - 5 < 0$. On a alors $y = \frac{1}{4}$; $\left(\frac{3}{2}, \frac{1}{4}\right) \in D$ et $f\left(\frac{3}{2}, \frac{1}{4}\right) = \left(\frac{3}{2} - \frac{7}{4}\right)^2 + \left(\frac{1}{4}\right)^2 = \frac{1}{8} = 0,125$ [*2pts*].

• Si 2 contraintes exactement sont saturées,

→ φ_1 et φ_2 donne $(1, 2) \in D$ et $f(1, 2) = \left(1 - \frac{7}{4}\right)^2 + 2^2 = \frac{9}{16} + 4 = 4,5625$.

→ φ_1 et φ_3 donne $(1, 0) \in D$ et $f(1, 0) = \left(\frac{7}{4} - 1\right)^2 = \frac{9}{16} = 0,5625$.

→ φ_2 et φ_3 donne $x + y = 3$ et $y = (x-1)^2 = (2-y)^2 = y^2 - 4y + 4$, soit $y^2 - 5y + 4 = 0$. $\Delta = 25 - 16 = 9$ d'où $y = \frac{5+3}{2} = 4$ qui est impossible puisque $y \leq 3$, donc $y = \frac{5-3}{2} = 1$ et $(x-1)^2 = 1$ donne $x = 0$ (impossible) ou $x = 2$: $(2, 1) \in D$ et $f(2, 1) = \left(2 - \frac{7}{4}\right)^2 + 1^2 = \frac{1}{16} + 1 = 1,0625$ [*1,5pt*].

Il reste donc à comparer les valeurs trouvées.

On a clairement $\min_D f = 0,125$ et donc $\boxed{d(A, B) = \sqrt{0,125} \approx 0,35}$ réalisée au point $M\left(\frac{3}{2}, \frac{1}{4}\right)$ et $\max_D f = 4,5625$ et donc $\boxed{d(A, C) = \sqrt{4,5625} \approx 2,14}$ réalisée au point $M(1, 2)$ [*0,5pt*].

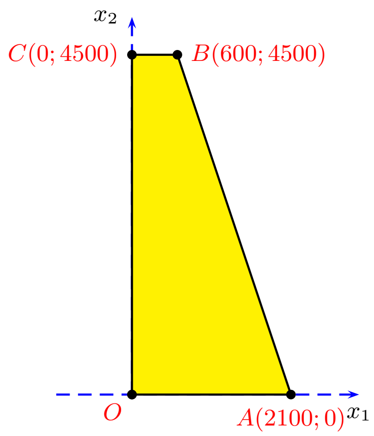
4. On peut vérifier que les résultats obtenus sont compatibles avec le graphique. De même, le graphique peut permettre de visualiser immédiatement les contraintes saturées aux différents points de D [*0,5pt*].

<u>Exercice III-</u> [9 points]

1. [*0,5pt*] On note x_i, $1 \leq i \leq 2$ la quantité de vin V_i produite (en litres). Le chiffre d'affaire est alors $40x_1 + 16x_2 = z$. On a des contraintes de disponibilités des matières premières (les cépages) : $x_1 + \dfrac{1}{3}x_2 \leq 2100$ (quantité de C1 utilisée) et $\dfrac{2}{3}x_2 \leq 3000$ (quantité de C2 utilisée), soit, en multipliant les contraintes par 3 pour éviter les fractions (et en simplifiant la deuxième contraite par 2 :

$$(P)\left\{\begin{array}{ccccc} 40x_1 & + & 16x_2 & = & z[\max] \\ 3x_1 & + & x_2 & \leq & 6300 \\ & & x_2 & \leq & 4500 \\ x_1 & , & x_2 & \geq & 0 \end{array}\right.$$

Le domaine des solutions admissibles satisfaisant les contraintes est le polygône de sommets $O(0;0)$, $A(2100;0)$, $B(600;4500)$ et $C(0;4500)$. On sait que le maximum existe (domaine fermé borné), et qu'il se trouve en l'un des sommets du polygône. On a $z_O = 0$, $z_A = 84000$, $z_B = 96000$ et $z_C = 72000$. On a donc $\boxed{\max(z) = z^* = 96000}$ atteint en B, pour une fabrication de $\boxed{\text{600 litres de } V_1 \text{ et 4500 litres de } V_2}$ [*1pt*].



2. <u>Calcul de l'optimum avec le simplexe</u>

<u>Premier tableau</u> :

	$i\downarrow$	$j\rightarrow$	x_1	x_2	$x_{\bar{1}}$	$x_{\bar{2}}$	β	$\beta_i/\alpha_{i,e}$
$\leftarrow$	$\bar{1}$		$\boxed{3}$	1	1	0	6300	2100
	$\bar{2}$		0	1	0	1	4500	∞
	Δ_j		40	16	0	0	$z - 0$	
			$\uparrow e$					

<u>Deuxième tableau</u> : x_1 entre dans la base et $x_{\bar{1}}$ en sort

	$i\downarrow$	$j\rightarrow$	x_1	x_2	$x_{\bar{1}}$	$x_{\bar{2}}$	β	$\beta_i/\alpha_{i,e}$
	1		1	1/3	1/3	0	2100	6300
$\leftarrow$	$\bar{2}$		0	$\boxed{1}$	0	1	4500	4500
	Δ_j		0	8/3	$-40/3$	0	$z - 84000$	
				$\uparrow e$				

Troisième tableau : x_2 entre dans la base et $x_{\bar{2}}$ en sort

$$\begin{array}{c c c c c c c}
i\downarrow & j\rightarrow & x_1 & x_2 & x_{\bar{1}} & x_{\bar{2}} & \beta \\
\boxed{1} & & 1 & 0 & 1 & 1/2 & 600 \\
\boxed{2} & & 0 & 1 & 0 & 3/2 & 4500 \\
\\
 & \Delta_j & 0 & 0 & -40/3 & -8/3 & z-96000
\end{array}$$

Il n'y a plus de terme positif dans la dernière ligne donc on est à l'optimum. La solution est donc $\boxed{x_1^* = 600,\ x_2^* = 4500}$ et la valeur à l'optimum est $\boxed{z^* = 96000}$ [*2 pts*].

3. On écrit le programme primal $\begin{cases} 40x_1 + 16x_2 = z[\max] \\ 3x_1 + x_2 \leq 6300 \\ x_2 \leq 4500 \\ x_1 \geq 0,\ x_2 \geq 0 \end{cases}$

duquel on déduit le programme dual : $\begin{cases} 6300y_1 + 4500y_2 = \omega[\min] \\ 3y_1 \geq 40 \\ y_1 + y_2 \geq 16 \\ y_1,\ y_2 \geq 0. \end{cases}$ [*0.5pt*].

On écrit alors les relations d'exclusivité :

$$\begin{cases} y_1^*(6300 - 3x_1^* - x_2^*) = 0 \\ y_2^*(4500 - x_2^*) = 0 \end{cases} \quad \text{et} \quad \begin{cases} x_1^*(40 - 3y_1^*) = 0 \\ x_2^*(16 - y_1^* - y_2^*) = 0 \end{cases}$$

avec $x_2^* = 4500$ et $x_1^* = 600$, on obtient $\boxed{y_1^* = 40/3}$ puis $y_2^* = 16 - 40/3 = 8/3$ donc $\boxed{y_1^* = 40/3 \text{ et } y_2^* = 8/3}$, avec $\boxed{\omega^* = z^* = 96000}$ [*1pt*].

4. [*2pts*] Le nouveau programme s'écrit, si le profit de V_2 est p (au lieu de 16),

$$\boxed{\begin{cases} 40x_1 & + & px_2 & = & z'[\max] \\ 3x_1 & + & x_2 & \leq & 6300 \\ & & x_2 & \leq & 4500 \\ x_1 & , & x_2 & \geq & 0 \end{cases}}.$$

(Pour $p = 16$, on retrouve le cas du début).

Le domaine des solutions admissibles est exactement le même. Seule la fonction objectif change. On a maintenant $z'_{p,O} = 0$, $z'_{p,A} = 84000$, $z'_{p,B} = 24000 + 4500p$ et $z'_{p,C} = 4500p$. On a toujours $z'_{p,O} < z'_{p,C} \leq z'_{p,B}$ et $z'_{p,B} < z'_{p,A}$ équivaut à $24000 + 4500p < 84000$, soit $4500p < 60000$, c'est-à-dire $p < 40/3 \approx 13,3$. Ainsi :

- Pour $\underline{p < 13,33 \text{ euros}}$, on a intérêt à fabriquer $\boxed{\text{aucun } V_2 \text{ et 2100 litres de } V_1}$;
- Pour $\underline{p > 13,33 \text{ euros}}$, on a intérêt à fabriquer $\boxed{\text{600 litres de } V_1 \text{ et 4500 litres de } P_2}$;
- Pour $\underline{p = 13,33 \text{ euros}}$, n'importe quel point du segment $[AB]$ fournit la solution optimale.

5. [*2pts*] Dans ce cas, c'est la deuxième contrainte qui change. Le nouveau programme s'écrit

$$\boxed{\begin{cases} 40x_1 & + & 16x_2 & = & z[\max] \\ 3x_1 & + & x_2 & \leq & 6300 \\ & & 2x_2 & \leq & 3q \\ x_1 & , & x_2 & \geq & 0 \end{cases}}.$$

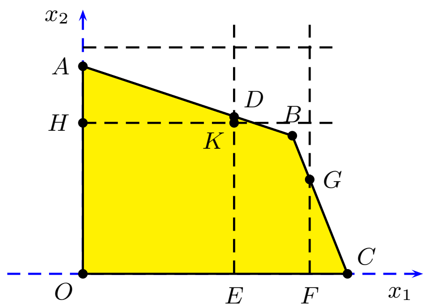
La droite (BC) est remplacée par une droite parallèle, la droite d'équation $x_2 = 3q/2$.
(On retrouve le cas du début pour $q = 3000$).

- Si $3q/2 \geq 6300$, soit $q \geq 4200$, le domaine est le triangle OAC' avec $C'(0; 6300)$. On a alors $z_{C'} = 16 \times 6300 = 100800$ alors que $z_A = 40 \times 2100 = 84000$. Dans ce cas, il vaut mieux produire que du V_2 avec $\boxed{z^* = 100800 \text{ obtenu pour } x_1^* = 0 \text{ et } x_2^* = 6300}$.

- Si $q < 4200$, le domaine est le quadrilatère $OAB'C'$ avec $C'(0; 3q/2)$ et $B'(2100 - q/2; 3q/2)$ avec $z^* = z^*_{B'} = 84000 + 4q$. On a donc $\boxed{z^* = 84000 + 4q \text{ obtenu pour } x_1^* = 2100 - q/2 \text{ et } x_2 = 3q/2}$.

<u>Exercice IV-</u> [**5 points**]

On commence par résoudre (P_0) $\left\{\begin{array}{ccccc} 2x_1 & + & 3x_2 & = & z[\max] \\ 4x_1 & + & 12x_2 & \leq & 33 \\ 10x_1 & + & 4x_2 & \leq & 35 \\ x_1 & , & x_2 & \geq & 0 \end{array}\right.$, sans tenir compte de la contrainte x_1, x_2 à valeurs entières mais seulement $x_1 \geq 0$ et $x_2 \geq 0$.
Le domaine est le quadrilatère $OABC$ avec $O(0,0)$, $A(0; 2,75)$, $B(36/13 \approx 2,77; 95/52 \approx 1,83)$, $C(3,5; 0)$. On sait que la valeur maximale de z est atteinte en l'un de ces sommets.
On a $z(O) = 0$, $z(A) = 8,25$, $z(B) = 573/52 \approx 11,02$ et $z(C) = 7$.
La solution optimale est donc $\boxed{x_1^* = 36/13 \approx 2,77,\ x_2^* = 95/52 \approx 1,83,\ z_0^* = 573/52 \approx 11,02}$, ce qui ne fournit pas une solution entière.
Dessin [*1pt*]



- Comme $2 < x_1 < x_3$, <u>on branche (P_0) par rapport à x_1</u> en

$$(P_0) \wedge (x_1 \leq 2) = (P_1)$$

et en

$$(P_0) \wedge (x_2 \geq 3) = (P_2)$$

et on résout ces nouveaux programmes linéaires sans tenir compte de la contrainte x_1, x_2 à valeurs entières.

<u>Pour (P_1)</u>, le nouveau domaine est le trapèze $OADE$ où $D(2; 25/12 \approx 2,08)$ et $E(2; 0)$.
On a ici $z(E) = 4$ et $z(D) = 10,25$, $z(O)$ et $z(A)$ ayant déjà été calculés. On trouve la solution optimale non entière en D : $\boxed{x_1^* = 2,\ x_2^* \approx 2,08 \text{ avec } z_1^* = 10,25}$.
<u>Pour (P_2)</u>, le nouveau domaine est le triangle FGC avec $F(3; 0)$ et $G(3; 1,25)$.
On a alors $z(F) = 6$ et $z(G) = 9,75$.

- <u>On branche maintenant (P_1) par rapport à x_2</u> en

$$(P_1) \wedge (x_2 \leq 2) = (P_3)$$

Le nouveau domaine est le carré $OHKE$ avec $H(0;2)$ et $K(2;2)$ qui donne $z(H) = 6$ et $z(K) = 10$, ce qui donne une solution entière $\boxed{x_1^* = 2,\ x_2^* = 2, \text{ avec } z_3^* = 10}$, qui fournit une première borne et

$$(P_1) \wedge (x_2 \geq 3) = (P_4)$$

qui n'a pas de solution car le domaine est vide...
Il est inutile de continuer l'exploration après (P_2) car déjà, la solution maximale non entière de (P_2) est moins bonne que la solution entière de (P_3) donc on ne fera pas mieux [*2pts*].

Ainsi, on peut construire l'arbre [*2pt*].

On a obtenu l'optimum du PLNE initial qui est $\boxed{x^* = (2;2) \text{ avec } z^* = 10}$.