Corrigé du Devoir d'Optimisation n°2 (07-05-2019)

1. [4 points]

a) $\|X-\frac{\mathrm{tr}X}{n}I_n\|^2=\|X\|^2-2\frac{\mathrm{tr}X}{n}\langle X,I_n\rangle+\frac{(\mathrm{tr}X)^2}{n^2}\|I_n\|^2$ avec $\langle X,I_n\rangle=\mathrm{tr}X$ et $\|I_n\|^2=\mathrm{tr}I_n=n$ d'où $f(X)=\frac{1}{n}\|X-\frac{\mathrm{tr}X}{n}I_n\|^2$ *[1pt]*.

L'application $\Phi : X\mapsto X-\frac{\mathrm{tr}X}{n}I_n$ étant linéaire sur $\mathcal{S}_n(\mathbb{R})$, $U\mapsto\|U\|$ convexe de $\mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ sur $\mathbb{R}_+$ et $h_2 : t\mapsto t^2$ convexe croissante sur $\mathbb{R}_+$, on a

$$\begin{aligned}
f(\alpha X+(1-\alpha)Y) &= \frac{1}{n}h_2\left(\|\Phi(\alpha X+(1-\alpha)Y)\|\right)=\frac{1}{n}h_2\left(\|\alpha\Phi(X)+(1-\alpha)\Phi(Y)\|\right)\\
&\leq \frac{1}{n}h_2\left(\alpha\|\Phi(X)\|+(1-\alpha)\|\Phi(Y)\|\right)\\
&\leq \frac{1}{n}\left(\alpha h_2(\|\Phi(X)\|)+(1-\alpha)h_2(\|\Phi(Y)\|)\right)=\alpha f(X)+(1-\alpha)f(Y)
\end{aligned}$$

donc $\boxed{f\text{ est bien convexe}}$ *[1pt]*.

b) $f^*(S)=-\inf_{X\in E}\theta_S(X)$ où $\theta_S : X\mapsto f(X)-\langle S,X\rangle$ est convexe. Donc θ_S admet un minimum en $\bar{X}$ si et seulement si $\nabla_{\bar{X}}\theta_S=0$. Il faut donc déterminer $\nabla_X\theta_S$ et pour cela, on calcule $\theta_S(X+H)-\theta_S(X)=f(X+H)-f(X)-\langle S,H\rangle$. Or

$$\begin{aligned}
f(X+H) &= \frac{1}{n}(\mathrm{tr}(X+H)^2)-\frac{1}{n^2}(\mathrm{tr}(X+H))^2\\
&= \frac{1}{n}(\mathrm{tr}(X^2)+2\mathrm{tr}(XH)+\mathrm{tr}(H^2))-\frac{1}{n^2}\left((\mathrm{tr}X)^2+2(\mathrm{tr}X)(\mathrm{tr}H)+(\mathrm{tr}H)^2\right)\\
&= f(X)+\frac{2}{n}\langle X,H\rangle-\frac{2\mathrm{tr}X}{n^2}\langle I_n,H\rangle+f(H)
\end{aligned}$$

et comme $|f(H)|\leq\frac{1}{n}\|H\|^2+\frac{1}{n^2}|\mathrm{tr}H|^2$ avec $|\mathrm{tr}H|=|\langle H,I_n\rangle|\leq\|H\|\ \|I_n\|$, on a bien $f(H)=\|H\|\varepsilon(H)$ et finalement :

$$\nabla_X\theta_S=\frac{2}{n}\left(X-\frac{\mathrm{tr}X}{n}I_n\right)-S.$$

On a donc $\bar{X}-\frac{\mathrm{tr}\bar{X}}{n}I_n=\frac{n}{2}S$ et, en prenant la trace des 2 membres, une condition nécessaire est que $\mathrm{tr}S=0$.

Réciproquement, si $\mathrm{tr}S=0$, pour $X=\gamma I_n+\frac{n}{2}S$ ($\gamma\in\mathbb{R}$), $\mathrm{tr}X=n\gamma$ et $\nabla_X\theta_S=0$. Ainsi, $\boxed{\mathrm{Argmin}_E\theta_S=\{\gamma I_n+\frac{n}{2}S\ ;\ \gamma\in\mathbb{R}\}}$ et $\theta_S\left(\frac{n}{2}S\right)=f\left(\frac{n}{2}S\right)-\frac{n}{2}\|S\|^2=\frac{1}{n}\frac{n^2}{4}\|S\|^2-\frac{n}{2}\|S\|^2$ d'où $\boxed{f^*(S)=-\theta_S\left(\frac{n}{2}S\right)=\frac{n}{4}\|S\|^2\text{ si }\mathrm{tr}S=0}$ *[2pts]*.

---

2. a) [5 points] On a $C=\bigcap_{i=1}^{3}\varphi_i^{-1}(]-\infty,0])$ avec $\varphi_1(x,y)=-y$, $\varphi_2(x,y)=x-y$ et $\varphi_3(x,y)=x^2+y^2-1$. Ces fonctions contraintes sont donc de classe C^1 comme f. On a donc C fermé comme intersection de fermés (l'image réciproque d'un fermé par une application continue étant un fermé). C'est aussi un ensemble borné (inclus dans $B_F((0,0),1)$), donc C est un fermé borné et on a bien l'existence d'extrémums sur C. Les 2 premières contraintes sont linéaires, la troisième convexe, donc elles sont qualifiées en tout point et les extrémums $u=(x,y)$ vérifient les conditions du théorème de Kuhn-Tucker : il existe λ_i, $1\leq i\leq 3$ tels que

$$\left\{\begin{array}{c}
\nabla_u f+\sum_{i=1}^{3}\lambda_i\nabla_u\varphi_i=0\\
\lambda_i\varphi_i(u)=0\text{ pour }1\leq i\leq 3\\
\varphi_i(u)\leq 0\text{ pour }1\leq i\leq 3
\end{array}\right.\quad\text{avec}$$

$$\nabla_u f = \begin{pmatrix} 2x+y \\ x \end{pmatrix}, \nabla_u \varphi_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \nabla_u \varphi_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \nabla_u \varphi_3 = \begin{pmatrix} 2x \\ 2y \end{pmatrix} \quad [\textit{2pts}].$$

• Si aucune contrainte n'est saturée, on a $\nabla_u f = 0$ qui donne $x = y = 0$ impossible car en ce point les contraintes φ_1 et φ_2 sont saturées.

• Si une seule contrainte est saturée,

→ pour φ_1, $y = 0$ et $f(x, 0) = x^2 \in]0, 1[$ pour $x \in] - 1, 0[$.

→ pour φ_2, $x = y$ et $f(x, x) = 2x^2 \in]0, 1[$ pour $x \in]0, 1/\sqrt{2}[$.

→ pour φ_3, $x^2 + y^2 = 1$ et $\begin{cases} 2x + y = -2\lambda x \\ x = -2\lambda y \end{cases}$ donc $(-4\lambda(1 + \lambda) + 1)y = 0$ avec $y \neq 0$, soit $4\lambda^2 + 4\lambda - 1 = 0$ et $\lambda = \frac{-4+\varepsilon\sqrt{32}}{8} = \frac{-1+\varepsilon\sqrt{2}}{2}$. On a alors $y^2(4\lambda^2 + 1) = 1$ et $x = -2\lambda y < y$, soit $2\lambda + 1 = \varepsilon\sqrt{2} > 0$ et $\varepsilon = 1$. Alors $f(x, y) = (4\lambda^2 - 2\lambda)y^2 = \frac{4\lambda^2-2\lambda}{4\lambda^2+1} = \frac{4-3\sqrt{2}}{4-2\sqrt{2}}$.

• Si 2 contraintes exactement sont saturées,

→ φ_1 et φ_2 donne $(0, 0)$ et $\underline{f(0, 0) = 0}$;

→ φ_1 et φ_3 donne dans C $(-1, 0)$, avec $\underline{f(-1, 0) = 1}$;

→ φ_2 et φ_3 donne dans C $(1/\sqrt{2}, 1/\sqrt{2})$, avec $\underline{f(1/\sqrt{2}, 1/\sqrt{2}) = 1}$.

Il n'y a pas d'autres cas possibles car les 3 contraintes ne peuvent pas être saturées en même temps et comme $\frac{4-3\sqrt{2}}{4-2\sqrt{2}} < 0 < 1$, $\boxed{\min_C f = \frac{4-3\sqrt{2}}{4-2\sqrt{2}}}$ avec $\boxed{\text{argmin}_C f = \left\{\left(\frac{1-\sqrt{2}}{\sqrt{4-2\sqrt{2}}}, \frac{1}{\sqrt{4-2\sqrt{2}}}\right)\right\}}$ et $\boxed{\max_C f = 1}$ avec $\boxed{\text{argmax}_C f = \{(-1, 0), (1/\sqrt{2}, 1/\sqrt{2})\}}$ [*3pts*].

b) [4 points] C est ici la boule unité fermée de $\mathbb{R}^3$ qui est bien compacte et f continue admet donc des extrémums sur C. La contrainte est convexe, donc elle est qualifiée en tout point et les extrémums $u = (x, y, z)$ vérifient les conditions du théorème de Kuhn-Tucker. Il existe donc λ tel que :

$$\nabla_u f + \lambda \nabla_u \varphi = 0 \text{ avec } \nabla_u f = \begin{pmatrix} 2x - 2y - z \\ y - 2x \\ z - x \end{pmatrix} \text{ et } \nabla_u \varphi = \begin{pmatrix} 2x \\ 2y \\ 2z \end{pmatrix} \quad [\textit{1pt}].$$

• Si la contrainte n'est pas saturée, on a $\nabla_u f = 0$ qui donne $z = x$, $y = 2x$ et $-3x = 0$, soit $(0, 0, 0)$ avec $f(0, 0, 0) = 0$.

• Si la contrainte est saturée, on a alors $\begin{cases} 2x - 2y - z = -2\lambda x \\ y - 2x = -2\lambda y \\ z - x = -2\lambda z \end{cases}$, soit déjà $x = (2\lambda + 1)z$.

→ Si $\lambda = -1/2$, alors $x = 0$, $z = -2y$ et $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ donne $5y^2 = 1$, soit les points $\pm(0, 1/\sqrt{5}, -2/\sqrt{5})$ en lesquels f vaut $\frac{1}{2}$.

→ Si $\lambda \neq -1/2$, on obtient $y(1 + 2\lambda) = 2x$ donc $y = 2z$ et $z(2(1 + \lambda)(1 + 2\lambda) - 5) = 0$. Comme $z \neq 0$ (sinon, $x = y = 0$ impossible), on a $4\lambda^2 + 6\lambda - 3 = 0$, soit $\lambda = \frac{-3+\varepsilon\sqrt{21}}{4}$, puis $z^2((2\lambda + 1)^2 + 5) = z^2(4\lambda^2 + 4\lambda + 6) = 1$, soit $z^2 = \frac{1}{9-2\lambda} = \frac{2}{21-\varepsilon\sqrt{21}}$. On a alors $f(x, y, z) = z^2\left[(2\lambda + 1)^2 + \frac{5}{2} - 5(2\lambda + 1)\right] = z^2\left(4\lambda^2 - 6\lambda - \frac{3}{2}\right) = z^2\left(\frac{3}{2} - 12\lambda\right) = \frac{\sqrt{21}-6\varepsilon}{\sqrt{21}-\varepsilon}$. Pour $\varepsilon = 1$, $\frac{\sqrt{21}-6}{\sqrt{21}-1} \approx -0,396$ et pour $\varepsilon = -1$, $\frac{\sqrt{21}+6}{\sqrt{21}+1} \approx 1,896$ donc $\boxed{\min_C f = \frac{\sqrt{21}-6}{\sqrt{21}-1}}$ et $\boxed{\max_C f = \frac{\sqrt{21}+6}{\sqrt{21}+1}}$ avec $\text{argmin}_C f = \left\{\pm\frac{(-1+\sqrt{21},4,2)}{\sqrt{42-2\sqrt{21}}}\right\}$ et $\text{argmax}_C f = \left\{\pm\frac{(-1-\sqrt{21},4,2)}{\sqrt{42+2\sqrt{21}}}\right\}$ [*3pts*].

---

3. a) [5 points] Si $M(x, y)$ alors $d^2(A, M) = \|\overrightarrow{AM}\|^2 = \left(x - \frac{9}{4}\right)^2 + (y - 2)^2$. On pose donc $f(x, y) = \left(x - \frac{9}{4}\right)^2 + (y - 2)^2$ et on est amené à déterminer $\min_X f$. On a $X = \bigcap_{i=1}^{4} \varphi_i^{-1}(] - \infty, 0])$ avec $\varphi_1(x, y) = -x$, $\varphi_2(x, y) = -y$, $\varphi_3(x, y) = x + y - 6$ et $\varphi_4(x, y) = x^2 - y$. Ces fonctions contraintes sont donc de classe C^1 comme f. On a donc X fermé comme intersection de fermés (l'image réciproque d'un fermé par une application continue étant un fermé). C'est aussi un ensemble borné (inclus dans $[0,6]\times[0,6]$), donc X est un fermé borné et on a bien l'existence d'extrémums sur X. Les 3 premières contraintes sont linéaires, la quatrième convexe, donc elles sont qualifiées en tout point et les extrémums $u=(x,y)$ vérifient les conditions du théorème de Kuhn-Tucker : il existe λ_i, $1\le i\le 4$ tels que

$$\left\{\begin{array}{c}\nabla_u f+\sum\limits_{i=1}^{4}\lambda_i\nabla_u\varphi_i=0\\ \lambda_i\varphi_i(u)=0 \text{ pour } 1\le i\le 4\\ \varphi_i(u)\le 0 \text{ pour } 1\le i\le 4\end{array}\right.$$

avec $\nabla_u f=\begin{pmatrix}2\left(x-\frac{9}{4}\right)\\2(y-2)\end{pmatrix}$, $\nabla_u\varphi_1=\begin{pmatrix}-1\\0\end{pmatrix}$, $\nabla_u\varphi_2=\begin{pmatrix}0\\-1\end{pmatrix}$, $\nabla_u\varphi_3=\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}$ et $\nabla_u\varphi_4=\begin{pmatrix}2x\\-1\end{pmatrix}$ *[2pts]*.

• Si aucune contrainte n'est saturée, on a $\nabla_u f=0$ qui donne $x=\frac{9}{4}$ et $y=2$, soit $M=A$, ce qui est impossible car $A\notin X$ $\left(\left(\frac{9}{4}\right)^2>2\right)$.

• Si une seule contrainte est saturée,

→ pour φ_1, $x=0$ et $2\begin{vmatrix}x-\frac{9}{4} & -1\\ y-2 & 0\end{vmatrix}=2(y-2)=0$, et $f(0,2)=\left(\frac{9}{4}\right)^2$.

→ pour φ_2, $y=0$ et $2\begin{vmatrix}x-\frac{9}{4} & 0\\ y-2 & -1\end{vmatrix}=-2\left(x-\frac{9}{4}\right)=0$, et $\left(\frac{9}{4},0\right)\notin X$. $\left(\left(\frac{9}{4}\right)^2>0\right)$.

→ pour φ_3, $x+y=6$ et $2\begin{vmatrix}x-\frac{9}{4} & 1\\ y-2 & 1\end{vmatrix}=2\left(x-\frac{9}{4}-y+2\right)=0$, d'où $x-y=\frac{1}{4}$, puis $x=\frac{25}{8}$ et $y=\frac{23}{8}$. Mais $\left(\frac{25}{8},\frac{23}{8}\right)\notin X$. $\left(\left(\frac{25}{8}\right)^2>\frac{23}{8}\right)$.

→ pour φ_4, $y=x^2$ et $2\begin{vmatrix}x-\frac{9}{4} & 2x\\ y-2 & -1\end{vmatrix}=-2\left(x-\frac{9}{4}+2xy-4x\right)=0$.

Or $\left(x-\frac{9}{4}+2xy-4x\right)=\left(2x^3-3x-\frac{9}{4}\right)=\left(x-\frac{3}{2}\right)\left(2x^2+3x+\frac{3}{2}\right)$. La seule racine réelle est $x=\frac{3}{2}$, puisque pour le deuxième facteur, $\Delta=9-12<0$. On a $\left(\frac{3}{2},\frac{9}{4}\right)\in X$ et

$$f\left(\frac{3}{2},\frac{9}{4}\right)=\left(\frac{3}{2}-\frac{9}{4}\right)^2+\left(\frac{9}{4}-2\right)^2=\frac{9}{16}+\frac{1}{16}=\frac{10}{16}.$$

• Si 2 contraintes exactement sont saturées,

→ φ_1 et φ_3 donne $(0,6)\in X$ et $f(0,6)=\frac{81}{16}+16$;

→ φ_2 et φ_3 donne $(6,0)\notin X$;

→ φ_4 et φ_3 donne $x+y=6$ et $y=x^2$, d'où $x^2+x-6=0=(x-2)(x+3)$: $(-3,9)\notin X$ et $(2,4)\in X$, avec $f(2,4)=\frac{1}{16}+4$

Il n'y a pas d'autres cas possibles car 2 des contraintes φ_1, φ_2 ou φ_4 saturées entraînent que la troisième contrainte est également saturée.

• Si 3 contraintes exactement sont saturées,

→ φ_1, φ_2 et φ_4 donne $x=0$ et $y=0$, avec $f(0,0)=\frac{81}{16}+4$

Il n'y a pas d'autres cas possibles puisque si 2 des contraintes φ_1, φ_2 ou φ_4 sont saturées, $x=y=0$ et φ_3 ne peut pas l'être. Ainsi, on ne peut pas non plus avoir les 4 contraintes saturées.

Il reste donc à comparer $f(0,2)=\left(\frac{9}{4}\right)^2$, $f(0,6)=\frac{81}{16}+16$, $f\left(\frac{3}{2},\frac{9}{4}\right)=\frac{10}{16}$, $f(2,4)=\frac{1}{16}+4$, et $f(0,0)=\frac{81}{16}+4$ pour trouver le minimum. On a clairement $\min\limits_X f=\frac{10}{16}$ et donc $\boxed{d(A,X)=\frac{\sqrt{10}}{4}}$ réalisée au point $M\left(\frac{3}{2},\frac{9}{4}\right)$.

On peut vérifier que les résultats obtenus sont compatibles avec le graphique. De même, le graphique peut permettre de visualiser immédiatement les contraintes saturées aux différents points de X [*3pts*].

b) $C = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \ ; \ z \geq \sqrt{x^2+y^2}\} = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \ ; \ z \geq 0 \text{ et } x^2+y^2-z^2 \leq 0\}$. Si $M(x,y,z)$ et $u=(x,y,z)$, on considère ici $f : u \mapsto \|\overrightarrow{PM}\|^2 = (x-a)^2+(y-b)^2+(z-c)^2$ et $\varphi : u \mapsto x^2+y^2-z^2$. On a ici :

$\rightarrow$ C fermé car $C = \left(\mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}_+\right) \cap \varphi^{-1}(]-\infty,0])$

$\rightarrow$ f coercive car $f(u) = \|\overrightarrow{PM}\|^2 \geq \left(\|\overrightarrow{OM}\| - \|\overrightarrow{OP}\|\right)^2 \underset{\|u\|\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$

$\rightarrow$ f et φ sont continues (et même C^∞).

On a donc prouvé l'existence d'un minimum sur C.

• Si $z=0$, alors nécessairement $x=y=0$ puisque $\varphi(u) \leq 0$ et $f(0) = a^2+b^2+c^2$.

• Si $z \neq 0$, seule la contraine φ peut être saturée. Elle est qualifiée puisque $\nabla_u \varphi = \begin{pmatrix} 2x \\ 2y \\ -2z \end{pmatrix} \neq 0$ et, d'après le théorème de Kuhn-Tucker, il existe $\lambda \geq 0$ tel que

$$\left\{ \begin{array}{c} \nabla_u f + \lambda \nabla_u \varphi = 0 \\ \lambda \varphi(u) = 0 \\ \varphi(u) \leq 0 \end{array} \right. \quad \text{soit} \quad \left\{ \begin{array}{c} 2(x-a)+2\lambda x = 0 \\ 2(y-b)+2\lambda y = 0 \\ 2(z-c)-2\lambda z = 0 \\ \lambda(x^2+y^2-z^2) = 0 \\ x^2+y^2-z^2 \leq 0 \end{array} \right. \quad [\mathit{2pts}].$$

• Si $\lambda = 0$, alors $M = P$, possible uniquement si $P \in C$, c'est-à-dire si $c \geq \sqrt{a^2+b^2}$, et on a alors, bien évidemment $\boxed{d(P,C) = 0}$.

• Si $\lambda = 1$ (possible que si $c=0$), on a alors $x = \frac{a}{2}$, $y = \frac{b}{2}$ et $z = \sqrt{\frac{a^2+b^2}{4}}$, donc

$$f(u) = (x-a)^2+(y-b)^2+z^2 = \frac{a^2}{4}+\frac{b^2}{4}+\frac{a^2+b^2}{4} = \frac{a^2+b^2}{2}.$$

• Si $\lambda \notin \{0,1\}$, $x = \frac{a}{1+\lambda}$, $y = \frac{b}{1+\lambda}$ et $z = \frac{c}{1-\lambda} > 0$ avec $\sqrt{\frac{a^2}{(1+\lambda)^2}+\frac{b^2}{(1+\lambda)^2}} = \frac{c}{1-\lambda}$, soit, compte-tenu de $\lambda > 0$, $(1-\lambda)\sqrt{a^2+b^2} = c(1+\lambda)$ et $\lambda = \dfrac{\sqrt{a^2+b^2}-c}{\sqrt{a^2+b^2}+c}$, qui est bien strictement positif si $P \notin C$. On a alors

$$\begin{aligned} f(u) &= a^2\left(\frac{1}{1+\lambda}-1\right)^2 + b^2\left(\frac{1}{1+\lambda}-1\right)^2 + c^2\left(\frac{1}{1-\lambda}-1\right)^2 \\ &= (a^2+b^2)\frac{\lambda^2}{(1+\lambda)^2} + c^2\frac{\lambda^2}{(1-\lambda)^2}, \end{aligned}$$

puis, en posant $\delta = \sqrt{a^2+b^2}$, on a $\lambda = \frac{\delta-c}{\delta+c}$, $1+\lambda = \frac{2\delta}{\delta+c}$, $1-\lambda = \frac{2c}{\delta+c}$ et $a^2+b^2 = \delta^2$, donc $f(u) = \delta^2\dfrac{(\delta-c)^2}{4\delta^2} + c^2\dfrac{(\delta-c)^2}{4c^2} = \dfrac{(\delta-c)^2}{2}$ (pour $c=0$, on retrouve le même résultat).

Il ne reste plus qu'à comparer $f(u) = \frac{(\delta-c)^2}{2}$ à $f(0) = \delta^2+c^2$:

$$f(0)-f(u) = \frac{1}{2}\left(2\delta^2+2c^2-(\delta^2+c^2-2\delta c)\right) = \frac{1}{2}(\delta^2+c^2+2\delta c) = \frac{1}{2}(\delta+c)^2 \geq 0.$$

Finalement, on a :

$$\boxed{\text{si } c \geq \sqrt{a^2+b^2}, \text{ alors } d(P,C) = 0 \text{ et si } c < \sqrt{a^2+b^2}, \text{ alors } d(P,C) = \frac{\sqrt{a^2+b^2}-c}{\sqrt{2}}} \ [\mathit{3pts}]$$

4. [5 points]

a) Le problème est, de minimiser $x \mapsto \|x-u\|$, (plutôt $x \mapsto \|x-u\|^2$ pour des calculs plus faciles) sur C avec $C = \{x \in \mathbb{R}^n \; ; \; x_i \geq 0 \text{ et } \sum_{i=1}^{n} x_i = 1\}$ [*1 pt*].

On pose $f(x) = \|x-u\|^2$, $\varphi_i(x) = -x_i$ et $\psi(x) = \sum_{i=1}^{n} x_i - 1$, on a alors $C = \bigcap_{i=1}^{n} \varphi_i^{-1}(]-\infty, 0]) \cap \psi^{-1}(\{0\})$. C est donc fermé comme intersection de fermés (images réciproques de fermés par des applications continues). De plus, C est borné, car $C \subset [0,1]^n$. Ainsi, C est compact et f qui est continue y admet bien des extrémums.

Les contraintes sont linéaires ou affines donc qualifiées. Toutes les fonctions sont de classe $\mathcal{C}^1$ avec $\nabla f(x) = 2(x-u)$, $\nabla \varphi_i = -e_i$ et $\nabla \psi = \sum_{i=1}^{n} e_i$. Les relations de Kuhn-Tucker s'écrivent donc :

$$\begin{cases} 2x_i - 2u_i + \lambda_i + \mu = 0 \; ; 1 \leq i \leq n \\ \lambda_i x_i = 0 \; ; \; -x_i \leq 0 \\ \sum_{i=1}^{n} x_i = 1 \end{cases} \qquad [\textit{1pt}].$$

En multipliant la ligne i par x_i on a, compte-tenu de $\lambda_i x_i = 0$: $2x_i^2 - 2x_i u_i + \mu x_i = 0$, donc $x_i = 0$ ou bien $x_i = u_i - \mu/2$. Ainsi, les x_i sont, soit nul, soit égaux à $u_i - \mu/2$.

b) Pour l'application, supposons que k des x_i sont non nuls ($k \geq 1$ car $\sum_i x_i = 1$).

• Pour $k = 3$, on a $x_1 = 5 - \mu/2$, $x_2 = 1 - \mu/2$, $x_3 = 4 - \mu/2$ et, en faisant la somme, $10 - 3\mu/2 = 1$, soit $\mu/2 = 3$. On a alors le candidant $(2, -2, 1)$ qui n'est pas dans C car $x_2 < 0$.

• Pour $k = 2$, si $x_1 = 0$, on a $5 - 2\mu/2 = 1$, soit $\mu/2 = 2$ et on obtient le candidat $(0, -1, 2) \notin C$; si $x_2 = 0$, on a $9 - 2\mu/2 = 1$, soit $\mu/2 = 4$ et $x = (1, 0, 0)$ impossible dans ce cas ; si $x_3 = 0$, on a $6 - 2\mu/2 = 1$ et $(5/2, -3/2, 0) \notin C$.

• Pour $k = 1$, on a $f(1,0,0) = 16 + 1 + 16 = 33$, $f(0,1,0) = 25 + 16 = 41$ et $f(0,0,1) = 25 + 1 + 9 = 35$.

Donc finalement, $\boxed{\text{le point de } C \text{ le plus proche de } M(5,1,4) \text{ est le point } (1,0,0)}$ [*3 pts*].