Calculs sur les v.a.r. discrètes

1. (∗∗) Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et $\beta \in \mathbb{R}$ et soit X une v.a.r. à valeurs dans $[0, n]$ telle que:

$$P([X = k]) = \beta \, \frac{C_n^k}{k+1} \text{ pour } k \in [\![0, n]\!]$$

Déterminer β puis calculer $\mathbb{E}(X)$ et $V(X)$.

$$\begin{aligned} G_X(s) &= \sum_{k=0}^{n} s^k P([X = k]) = \beta \sum_{k=0}^{n} \frac{n!}{(k+1)!(n+1-k-1)!} s^k = \frac{\beta}{s(n+1)} \sum_{k=0}^{n} C_{n+1}^{k+1} s^{k+1} \\ &= \frac{\beta}{s(n+1)} \sum_{i=1}^{n} C_{n+1}^{i} s^i = \frac{\beta}{s(n+1)} \left[(s+1)^{n+1} - 1\right] \end{aligned}$$

Pour avoir la valeur de β, on écrit $G_X(1) = 1$, soit $\boxed{\beta = \frac{n+1}{2^{n+1}-1}}$.

$$G'_X(s) = \frac{\beta}{(n+1)} \left[\frac{(n+1)(s+1)^n}{s} - \frac{(s+1)^{n+1} - 1}{s^2}\right]$$

$$G''_X(s) = \frac{\beta}{(n+1)} \left[\frac{(n+1)n(s+1)^{n-1}}{s} - 2\frac{(n+1)(s+1)^n}{s^2} + 2\frac{(s+1)^{n+1} - 1}{s^3}\right].$$

On a donc $G'_X(1) = \frac{\beta}{n+1} \left[2^n(n+1) - 2^{n+1} + 1\right]$, soit $\boxed{\mathbb{E}(X) = \dfrac{2^n(n-1)+1}{2^{n+1}-1}}$.

$$G''_X(1) = \frac{\beta}{(n+1)} \left[(n+1)n2^{n-1} - 2(n+1)2^n + 2(2^{n+1} - 1)\right].$$

$$\begin{aligned} \mathbb{E}(X^2) &= G''_X(1) + G'_X(1) = \frac{\beta}{(n+1)} \left[2^{n-1}(n^2 + n - 4n - 4 + 8 + 2n + 2 - 4) - 2 + 1\right] \\ &= \frac{\beta}{(n+1)} \left[2^{n-1}(n^2 - n + 2) - 1\right] = \frac{2^{n-1}(n^2 - n + 2) - 1}{2^{n+1} - 1} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \operatorname{var}(X) &= \mathbb{E}(X^2) - \mathbb{E}(X)^2 = \frac{2^{n-1}(n^2 - n + 2) - 1}{2^{n+1} - 1} - \frac{(2^n(n-1)+1)^2}{(2^{n+1}-1)^2} \\ &= \frac{2^{2n}(n^2 - n + 2) - 2^{n+1} - 2^{n-1}(n^2 - n + 2) + 1 - 2^{2n}(n-1)^2 - 2^{n+1}(n-1) - 1}{(2^{n+1}-1)^2} \\ &= \frac{2^{2n}(n+1) - 2^{n-1}(n^2 + 3n - 2)}{(2^{n+1}-1)^2} \end{aligned}$$

soit $\boxed{\mathrm{var}(X) = \dfrac{(n+1)2^{n-1}(2^{n+1}-n-2)}{(2^{n+1}-1)^2}}$.

---

2. $(**)$ On lance 2 dés et on appelle Z la v.a.r. égale à la valeur absolue de la différence des numéros obtenus.
Déterminer la loi de Z, sa fonction de répartition, son espérance et sa variance.

$Z(\Omega) = [\![0,5]\!]$ avec $[Z=0] = \{(1,1),(2,2),(3,3),(4,4),(5,5),(6,6)\}$
$[Z=1] = \{(1,2),(2,3),(3,4),(4,5),(5,6),(6,5),(5,4),(4,3),(3,2),(2,1)\}$
$[Z=2] = \{(1,3),(2,4),(3,5),(4,6),(6,4),(5,3),(4,2),(3,1)\}$
$[Z=3] = \{(1,4),(2,5),(3,6),(6,3),(5,2),(4,1)\}$
$[Z=4] = \{(1,5),(2,6),(6,2),(5,1)\}$ et $[Z=5] = \{(1,6),(6,1)\}$.

On a alors $P([Z=0]) = \frac{6}{36} = \frac{3}{18}$, $P([Z=1]) = \frac{10}{36} = \frac{5}{18}$, $P([Z=2]) = \frac{8}{36} = \frac{4}{18}$, $P([Z=3]) = \frac{6}{36} = \frac{3}{18}$, $P([Z=4]) = \frac{4}{36} = \frac{2}{18}$, $P([Z=5]) = \frac{2}{36} = \frac{1}{18}$.

$F_Z(x) = \frac{3}{18}\mathbb{1}_{[0,1[}(x) + \frac{8}{18}\mathbb{1}_{[1,2[}(x) + \frac{12}{18}\mathbb{1}_{[2,3[}(x) + \frac{15}{18}\mathbb{1}_{[3,4[}(x) + \frac{17}{18}\mathbb{1}_{[4,5[}(x) + \mathbb{1}_{[5,+\infty[}(x)$

$$\mathbb{E}(Z) = \sum_{k=0}^{5} kP([Z=k]) = \frac{1}{18}\left[1\times 5 + 2\times 4 + 3\times 3 + 4\times 2 + 5\times 1\right] = \frac{35}{18}$$

$$\mathbb{E}(Z^2) = \sum_{k=0}^{5} k^2P([Z=k]) = \frac{1}{18}\left[1\times 5 + 4\times 4 + 9\times 3 + 16\times 2 + 25\times 1\right] = \frac{105}{18} = \frac{35}{6}$$

et $\mathrm{var}(Z) = \mathbb{E}(Z^2) - \mathbb{E}(Z)^2 = \frac{35}{6}\left[1 - \frac{35}{54}\right]$ soit $\boxed{\mathrm{var}(Z) = \frac{35\times 34}{18\times 18} = \frac{595}{162}}$.

---

3. $(*)$ A l'arrivée d'une course, il y a 9 chevaux: 4 noirs et 5 alezans. On appelle X la v.a.r. égale au nombre de chevaux alezans précédant le premier cheval noir.
Déterminer la loi de X, son espérance et sa variance.

$X(\Omega) = [\![0,5]\!]$ avec $P([X=0]) = \frac{4}{9} = \frac{56}{126}$,
$P([X=1]) = \frac{5}{9}\times\frac{4}{8} = \frac{5}{18} = \frac{35}{126}$,
$P([X=2]) = \frac{5}{9}\times\frac{4}{8}\times\frac{4}{7} = \frac{10}{63} = \frac{20}{126}$,
$P([X=3]) = \frac{5}{9}\times\frac{4}{8}\times\frac{3}{7}\times\frac{4}{6} = \frac{5}{63} = \frac{10}{126}$,
$P([X=4]) = \frac{5}{9}\times\frac{4}{8}\times\frac{3}{7}\times\frac{2}{6}\times\frac{4}{5} = \frac{2}{63} = \frac{4}{126}$,
$P([X=5]) = \frac{5}{9}\times\frac{4}{8}\times\frac{3}{7}\times\frac{2}{6}\times\frac{1}{5} = \frac{1}{126}$

$$\mathbb{E}(X) = \sum_{k=0}^{5} kP([X=k]) = \frac{1}{126}\left[1\times 35 + 2\times 20 + 3\times 10 + 4\times 4 + 5\times 1\right] = 1$$

$$\mathbb{E}(X^2) = \sum_{k=0}^{5} k^2P([X=k]) = \frac{1}{126}\left[1\times 35 + 4\times 20 + 9\times 10 + 16\times 4 + 25\times 1\right] = \frac{294}{126}$$

$$\mathrm{var}(X) = \mathbb{E}(X^2) - \mathbb{E}(X)^2 = \frac{294}{126} - 1 = \frac{168}{126} = \frac{26}{21}$$

---

4. $(***)$ Une urne contient n boules numérotées de 1 à n. On tire toutes les boules une par une sans remise et on note X la v.a.r. égale au nombre de boules dont le rang de sortie est égal au numéro. Calculer $\mathbb{E}(X)$ et $V(X)$.

Soit X_i la variable aléatoire telle que $X_i = 1$ si la i-ième boule tirée est à la place i, et $X_i = 0$ sinon.

On remarque que $X = X_1 + \cdots + X_n$ donc $\mathbb{E}(X) = \mathbb{E}(X_1) + \cdots + \mathbb{E}(X_n)$. Or $P([X_i = 1]) = \frac{(n-1)!}{n!} = \frac{1}{n}$ et $P([X_i = 0]) = 1 - \frac{1}{n}$ donc $\mathbb{E}(X) = n \times \frac{1}{n}$, soit $\boxed{\mathbb{E}(X) = 1}$.

$X^2 = \sum_{i,j} X_i X_j = \sum_{i=1}^{n} X_i^2 + \sum_{i \neq j} X_i X_j$ avec $X_i^2 = X_i$ et, pour $i \neq j$, $X_i X_j(\Omega) = \{0, 1\}$, avec

$$P([X_i X_j = 1]) = P([X_i = 1] \cap [X_j = 1]) = \frac{(n-2)!}{n!} = \frac{1}{n(n-1)}$$

donc $\mathbb{E}(X_i^2) = \frac{1}{n}$ et $\mathbb{E}(X_i X_j) = \frac{1}{n(n-1)}$, d'où $\mathbb{E}(X^2) = 1 + \frac{n^2-n}{n(n-1)} = 2$ et $\boxed{\mathrm{var}(X) = 1}$.

---

5. $(***)$ Une urne contient n boules numérotées de 1 à n. On tire des boules avec remise et on s'arrête dès que l'on a obtenu un numéro supérieur ou égal à ceux qui précèdent. Soit X la v.a.r. égale au nombre de tirages effectués.
Déterminer $\mathbb{E}(X)$ ainsi que sa limite quand n tend vers $+\infty$.

$X(\Omega) = [\![2, n+1]\!]$ (avec au pire $n, n-1, \cdots, 2, 1, k$)

$[X > j]$ signifie que les j premiers numéros tirés sont dans l'ordre décroissant strict. Il y a C_n^j façons de choisir ces numéros et, une fois ceux-ci choisis, il n'y a qu'un ordre possible. Ainsi $P([X > j]) = \frac{C_n^j}{n^j}$ et $\boxed{P([X = j]) = P([X > j-1]) - P([X > j]) = \frac{C_n^{j-1}}{n^{j-1}} - \frac{C_n^j}{n^j}}$ pour $j \in [\![2, n]\!]$ et $P([X = n+1]) = P([X > n]) = \frac{C_n^n}{n^n}$.

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}(X) &= \sum_{j=2}^{n+1} jP([X = j]) = \sum_{j=2}^{n} j \left(\frac{C_n^{j-1}}{n^{j-1}} - \frac{C_n^j}{n^j} \right) + (n+1)\frac{C_n^n}{n^n} \\
&= \sum_{j=1}^{n} (j+1)\frac{C_n^j}{n^j} - \sum_{j=2}^{n} j\frac{C_n^j}{n^j} = \sum_{j=1}^{n} \frac{C_n^j}{n^j} + 1 = \sum_{j=0}^{n} \frac{C_n^j}{n^j}
\end{aligned}$$

soit $\boxed{\mathbb{E}(X) = \left(\frac{1}{n} + 1\right)^n}$ et $\boxed{\lim_{n \to +\infty} \mathbb{E}(X) = 1}$ (car $\left(\frac{1}{n} + 1\right)^n = e^{n \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right)} \to e$).

---

6. $(**)$ Soient N urnes numérotées de 1 à N. L'urne k contient k boules numérotées de 1 à k. On choisit une urne au hasard puis on tire une boule dans l'urne choisie. Soit X la v.a.r. égale au numéro de la boule tirée.
Déterminer la loi de X et exprimer $\mathbb{E}(X)$.

$X(\Omega) = [\![1, N]\!]$ et $P([X = k]) = \sum\limits_{j=1}^{N} P([X = k]/U_j)P(U_j)$ avec $P(U_j) = \frac{1}{N}$.

$P([X = k]/U_j) = 0$ si $j < k$ et $P([X = k]/U_j) = \frac{1}{j}$ si $j \geq k$ (j boules dans U_j).

On a donc $\boxed{P([X = k]) = \frac{1}{N} \sum\limits_{j=k}^{N} \frac{1}{j}}$.

$$\begin{aligned} \mathbb{E}(X) &= \sum_{k=1}^{N} kP([X = k]) = \frac{1}{N} \sum_{k=1}^{N} \sum_{j=k}^{N} \frac{k}{j} = \frac{1}{N} \sum_{1 \leq k \leq j \leq N} \frac{k}{j} = \frac{1}{N} \sum_{j=1}^{N} \sum_{k=1}^{j} \frac{k}{j} \\ &= \frac{1}{N} \sum_{j=1}^{N} \frac{j(j+1)}{2j} = \frac{1}{2N} \sum_{j=1}^{N} (j+1) = \frac{1}{2N} \left[\frac{N(N+1)}{2} + N \right] = \frac{N+3}{4} \end{aligned}$$

donc $\boxed{\mathbb{E}(X) = \frac{N}{4} + \frac{3}{4}}$.

---

7. (∗∗) Une urne contient n boules numérotées de 1 à n. On en tire 2 au hasard sans remise. Soit X la v.a.r. égale au plus grand numéro tiré.

1. Calculer $P([X \leq k])$ et en déduire la loi de X.
2. Calculer $\mathbb{E}(X)$.

---

1. $X(\omega) = [\![2, n]\!]$. $[X \leq k]$ signifie que les 2 numéros tirés sont inférieurs ou égaux à k. Ainsi, $P([X \leq k]) = \frac{k(k-1)}{n(n-1)}$ et $P([X = k]) = P([X \leq k]) - P([X \leq k-1])$.

Ainsi, $P([X = 2]) = P([X \leq 2]) = \frac{2}{n(n-1)}$ et, pour $k \geq 3$

$$P([X = k]) = \frac{k(k-1)}{n(n-1)} - \frac{(k-1)(k-2)}{n(n-1)} = \frac{(k-1)(k-k+2)}{n(n-1)} = \frac{2(k-1)}{n(n-1)}$$

(valable aussi pour $k = 2$). On a donc $\boxed{P([X = k]) = \frac{2(k-1)}{n(n-1)} \text{ pour tout } k \in [\![2, n]\!]}$.

2. $\mathbb{E}(X) = \sum\limits_{k=2}^{n} kP([X = k]) = \frac{2}{n(n-1)} \sum\limits_{k=2}^{n} k(k-1) = \frac{2}{n(n-1)} \sum\limits_{k=1}^{n-1} k(k+1)$.

Or $\sum\limits_{k=1}^{n-1} k = \frac{(n-1)n}{2}$ et $\sum\limits_{k=1}^{n-1} k^2 = \frac{(n-1)n(2(n-1)+1)}{6} = \frac{(n-1)n(2n-1)}{6}$ donc

$$\sum_{k=1}^{n-1} k(k+1) = \frac{n(n-1)}{2} \left(1 + \frac{2n-1}{3}\right) = \frac{n(n-1)}{2} \frac{2n+2}{3}$$

et $\boxed{\mathbb{E}(X) = \frac{2}{3}(n+1)}$.

---

8. (∗∗) On considère une urne contenant 1 boule rouge, 2 boules noires et 3 boules jaunes. On effectue des tirages successifs sans remise jusqu'à ce qu'il ne reste plus dans l'urne que des boules de 2 couleurs différentes. On note X la v.a.r. égale au nombre de tirages effectués.
Déterminer la loi de X, son espérance et sa variance.

On a 1 boule rouge, 2 boules noires et 3 boules jaunes, donc, pour qu'il ne reste plus que 2 couleurs, on doit faire, au minimum 1 tirage et au maximum 4 tirages. En effet,

• $X = 1$ si on tire la boule rouge ;

• $X = 2$ si on tire les 2 boules noires ou bien une noire puis la rouge ou encore une jaune puis la rouge ;

• $X = 3$ si on tire une noire puis une jaune puis, soit la rouge, soit l'autre noire, ou bien une jaune puis une noire puis, soit la rouge, soit l'autre noire, ou bien les 3 jaunes, ou encore 2 jaunes puis la rouge ;

• $X = 4$ si on tire 2 jaunes et une noire dans n'importe quel ordre. Ainsi,

$$P([X = 1]) = \frac{1}{6} \ ;$$

$$P([X = 2]) = \frac{2}{6} \times \frac{1}{5} + \frac{2}{6} \times \frac{1}{5} + \frac{3}{6} \times \frac{1}{5} = \frac{2+2+3}{30} = \frac{7}{30} \ ;$$

$$P([X = 3]) = \frac{2}{6} \times \frac{3}{5} \times \left(\frac{1}{4} + \frac{1}{4}\right) + \frac{3}{6} \times \frac{2}{5} \times \left(\frac{1}{4} + \frac{1}{4}\right) + \frac{3}{6} \times \frac{2}{5} \times \frac{1}{4} + \frac{3}{6} \times \frac{2}{5} \times \frac{1}{4} = \frac{3 \times 12}{120} = \frac{3}{10} \ ;$$

$$P([X = 4]) = \frac{3}{6} \times \frac{2}{5} \times \frac{1}{4} + 3 \times \frac{3}{6} \times \frac{2}{5} \times \frac{2}{4} = \frac{3 \times 12}{120} = \frac{3}{10}.$$

On a donc $\boxed{P([X = 1]) = \frac{5}{30},\ P([X = 2]) = \frac{7}{30},\ P([X = 3]) = P([X = 4]) = \frac{9}{30}}$.

(On vérifie au passage que $P([X = 1]) + P([X = 2]) + P([X = 3]) + P([X = 4]) = 1$).

$$\mathbb{E}(X) = \sum_{k=1}^{4} kP([X = k]) = \frac{1}{30}\left[1 \times 5 + 2 \times 7 + 3 \times 9 + 4 \times 9\right] = \frac{82}{30} = \frac{41}{15}$$

$$\begin{aligned} \mathbb{E}(X^2) &= \sum_{k=1}^{4} k^2 P([X = k]) = \frac{1}{30}\left[1 \times 5 + 4 \times 7 + 9 \times 9 + 16 \times 9\right] \\ &= \frac{5 + 28 + 81 + 144}{30} = \frac{258}{30} = \frac{129}{15} = \frac{43}{5} \end{aligned}$$

$\mathbb{E}(X^2) - \mathbb{E}(X)^2 = \frac{129}{15} - \frac{41^2}{15^2} = \frac{1935-1681}{225}$, d'où $\boxed{\mathbb{E}(X) = \frac{41}{15} \text{ et } \mathrm{var}(X) = \frac{254}{225}}$.

---

9. $(***)$ Une boîte A contient 2 jetons portant le numéro 0 et une boîte B contient 2 jetons portant le numéro 1. On tire au hasard un jeton dans chaque boîte et on les échange. On fait n fois l'opération. Soit X_n la v.a.r. égale à la somme des numéros des jetons de la boîte A à l'issue du n-ème échange. Déterminer la loi de X_n et son espérance.

$X_n(\Omega) = \{0, 1, 2\}$. On commence par exprimer la loi de X_n en fonction de celle de X_{n-1}, en utilisant les probabilités totales. Pour simplifier, on pose $p_n(k) = P([X_n = k])$. On a alors :

$$p_n(k) = P^{[X_{n-1}=0]}([X_n = k])p_{n-1}(0) + P^{[X_{n-1}=1]}([X_n = k])p_{n-1}(1) + P^{[X_{n-1}=2]}([X_n = k])p_{n-1}(2)$$

avec $P^{[X_{n-1}=0]}([X_n = 0]) = 0$, $P^{[X_{n-1}=0]}([X_n = 1]) = 1$, $P^{[X_{n-1}=0]}([X_n = 2]) = 0$;

$$P^{[X_{n-1}=1]}([X_n = 0]) = \frac{1}{4},\quad P^{[X_{n-1}=1]}([X_n = 1]) = \frac{1}{4} + \frac{1}{4} = \frac{1}{2},\quad P^{[X_{n-1}=1]}([X_n = 2]) = \frac{1}{4}\ ;$$

$$P^{[X_{n-1}=2]}([X_n = 0]) = 0,\quad P^{[X_{n-1}=2]}([X_n = 1]) = 1,\quad P^{[X_{n-1}=2]}([X_n = 2]) = 0\ .$$

On peut écrire ces relations matriciellement, ce qui donne :

$$\begin{bmatrix} p_n(0) \\ p_n(1) \\ p_n(2) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{4} & 0 \\ 1 & \frac{1}{2} & 1 \\ 0 & \frac{1}{4} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} p_{n-1}(0) \\ p_{n-1}(1) \\ p_{n-2}(2) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{4} & 0 \\ 1 & \frac{1}{2} & 1 \\ 0 & \frac{1}{4} & 0 \end{bmatrix}^n \begin{bmatrix} p_0(0) \\ p_0(1) \\ p_0(2) \end{bmatrix}.$$

Comme $p_0(0) = 1$, $p_0(1) = 0$ et $p_0(2) = 0$, il ne reste plus qu'à calculer M^n, où

$$M = \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{4} & 0 \\ 1 & \frac{1}{2} & 1 \\ 0 & \frac{1}{4} & 0 \end{bmatrix}.$$

Ceci est un exercice d'algèbre linéaire classique : il s'agit de diagonaliser M, $M = PDP^{-1}$ et alors $M^n = PD^nP^{-1}$. On a $\chi_M(\lambda) = \lambda(\lambda - 1)(\lambda + 1/2)$, $E_0(M) = \mathbb{R}\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix}$, $E_1(M) = \mathbb{R}\begin{bmatrix} 1 \\ 4 \\ 1 \end{bmatrix}$ et $E_{-1/2}(M) = \mathbb{R}\begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix}$. Si on prend $P = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 4 & -2 \\ -1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$, on a alors $P^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & 0 & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{6} & \frac{1}{6} & \frac{1}{6} \\ \frac{1}{3} & -\frac{1}{6} & \frac{1}{3} \end{bmatrix}$ et donc

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} p_n(0) \\ p_n(1) \\ p_n(2) \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 4 & -2 \\ -1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \left(-\frac{1}{2}\right)^n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & 0 & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{6} & \frac{1}{6} & \frac{1}{6} \\ \frac{1}{3} & -\frac{1}{6} & \frac{1}{3} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 0 & 1 & \left(-\frac{1}{2}\right)^n \\ 0 & 4 & -2\left(-\frac{1}{2}\right)^n \\ 0 & 1 & \left(-\frac{1}{2}\right)^n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{1}{2} \\ \frac{1}{6} \\ \frac{1}{3} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{6} + \frac{1}{3}\left(-\frac{1}{2}\right)^n \\ \frac{2}{3} - \frac{2}{3}\left(-\frac{1}{2}\right)^n \\ \frac{1}{6} + \frac{1}{3}\left(-\frac{1}{2}\right)^n \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

On a donc $\boxed{\left\{ \begin{array}{l} P([X_n = 0]) = \frac{1}{6} + \frac{1}{3}\left(-\frac{1}{2}\right)^n \\ P([X_n = 1]) = \frac{2}{3} - \frac{2}{3}\left(-\frac{1}{2}\right)^n \\ P([X_n = 2]) = \frac{1}{6} + \frac{1}{3}\left(-\frac{1}{2}\right)^n \end{array} \right.}$.

On a alors $\mathbb{E}(X_n) = 1 \times P([X_n = 1]) + 2 \times P([X_n = 2])$, soit $\boxed{\mathbb{E}(X_n) = 1}$.

---

10. (∗∗) Soit X une v.a.r. de loi binomiale $\mathcal{B}(2n, p)$ et soit Y la partie entière de $X/2$. Déterminer la loi de Y, $\mathbb{E}(Y)$ et $\text{var}(Y)$.

$X(\Omega) = [\![0, 2n]\!]$ donc $Y(\Omega) = [\![0, n]\!]$ avec

$$\begin{aligned} P([Y=k]) &= P\left(\left[E\left(\frac{X}{2}\right) = k\right]\right) = P\left(\left[k \leq \frac{X}{2} < k+1\right]\right) \\ &= P([2k \leq X < 2k+2]) = P([X=2k]) + P([X=2k+1]). \end{aligned}$$

On a donc :

$$\boxed{P([Y=k]) = C_{2n}^{2k} p^{2k} q^{2n-2k} + C_{2n}^{2k+1} p^{2k+1} q^{2n-2k-1} \text{ si } k < n \text{ et } P([Y=n]) = p^{2n}.}$$

$$\mathbb{E}(Y) = \sum_{k=1}^{n} kP([Y=k]) = \sum_{k=1}^{n} kP([X=2k]) + \sum_{k=1}^{n-1} kP([X=2k+1])$$

$$G_X(s) = \sum_{k=0}^{2n} s^k P([X=k]) = (ps+q)^{2n}$$

$$G'_X(s) = \sum_{k=1}^{2n} ks^{k-1} P([X=k]) = 2np(ps+q)^{2n-1}$$

En remplaçant s par 1 et par -1, on obtient :

$$\sum_{k=0}^{2n} P([X=k]) = 1 \text{ et } \sum_{k=0}^{2n} (-1)^k P([X=k]) = (q-p)^{2n}$$

$$\sum_{k=1}^{2n} kP([X=k]) = 2np \text{ et } \sum_{k=1}^{2n} k(-1)^{k-1} P([X=k]) = 2np(q-p)^{2n-1}$$

On a donc

$$\begin{aligned} 2np(1+(q-p)^{2n-1}) &= \sum_{k=1}^{2n} k(1+(-1)^{k-1}) P([X=k]) = 2\sum_{k=0}^{n-1} (2k+1) P([X=2k+1]) \\ &= 4\sum_{k=0}^{n-1} kP([X=2k+1]) + 2\sum_{k=0}^{n-1} P([X=2k+1]) \end{aligned}$$

avec $1-(q-p)^{2n} = 2\sum\limits_{k=0}^{n-1} P([X=2k+1])$ et

$$2np(1-(q-p)^{2n-1}) = \sum_{k=1}^{2n} k(1-(-1)^{k-1}) P([X=k]) = 4\sum_{k=1}^{n} kP([X=2k]).$$

On a alors

$$\begin{aligned} \mathbb{E}(Y) &= \sum_{k=0}^{n} kP([X=2k]) + \sum_{k=0}^{n-1} kP([X=2k+1]) \\ &= \frac{1}{2}np(1-(q-p)^{2n-1}) + \frac{1}{2}np(1+(q-p)^{2n-1}) - \frac{1}{4}(1-(q-p)^{2n}) \end{aligned}$$

Ainsi, $\boxed{\mathbb{E}(Y) = np - \frac{1}{4}\left(1-(q-p)^{2n}\right)}$.

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}(Y^2) &= \sum_{k=0}^{n-1} k^2\left[P([X=2k]) + P([X=2k+1])\right] + n^2 P([X=2n]) \\
&= \sum_{k=0}^{n} k^2 P([X=2k]) + \sum_{k=0}^{n-1} k^2 P([X=2k+1])
\end{aligned}$$

$$G_X''(s) = \sum_{k=2}^{2n} k(k-1)s^{k-2}P([X=k]) = 2n(2n-1)p^2(ps+q)^{2n-2}$$

En remplaçant s par 1 et par -1, on obtient :

$$\sum_{k=0}^{2n} k(k-1)P([X=k]) = 2n(2n-1)p^2$$

$$\sum_{k=0}^{2n} k(k-1)(-1)^k P([X=k]) = 2n(2n-1)p^2(q-p)^{2n-2}$$

$$\begin{aligned}
2\sum_{k=0}^{n} 2k(2k-1)P([X=2k]) &= 8\sum_{k=0}^{n} k^2 P([X=2k]) - 4\sum_{k=0}^{n} kP([X=2k]) \\
&= 2n(2n-1)p^2\left[1+(q-p)^{2n-2}\right]
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
2\sum_{k=0}^{n-1} 2k(2k+1)P([X=2k+1]) &= 8\sum_{k=0}^{n} k^2 P([X=2k]) + 4\sum_{k=0}^{n} kP([X=2k]) \\
&= 2n(2n-1)p^2\left[1-(q-p)^{2n-2}\right]
\end{aligned}$$

Ainsi,

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}(Y^2) &= \frac{1}{4}n(2n-1)p^2\left[1+(q-p)^{2n-2}\right] + \frac{1}{4}np\left[1-(q-p)^{2n-1}\right] \\
&\quad + \frac{1}{4}n(2n-1)p^2\left[1-(q-p)^{2n-2}\right] - \frac{1}{4}np\left[1+(q-p)^{2n-1}\right] \\
&\quad + \frac{1}{8}\left[1-(q-p)^{2n}\right] \\
&= \frac{1}{2}n(2n-1)p^2 - \frac{1}{2}np(q-p)^{2n-1} + \frac{1}{8}\left(1-(q-p)^{2n}\right)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\mathrm{var}(Y) &= n^2p^2 - \frac{1}{2}np^2 - \frac{1}{2}np(q-p)^{2n-1} + \frac{1}{8}\left(1-(q-p)^{2n}\right) \\
&\quad - n^2p^2 + \frac{1}{2}np\left(1-(q-p)^{2n}\right) - \frac{1}{16}\left(1+(q-p)^{4n} - 2(q-p)^{2n}\right) \\
&= np(1-p)\left(\frac{1}{2} - (q-p)^{2n-1}\right) + \frac{1}{16}\left(1-(q-p)^{4n}\right)
\end{aligned}$$

11. $(***)$ Dans une usine, n automobiles arrivent au même instant devant N ateliers de peinture. Chaque véhicule, et de façon indépendante des autres, est dirigé vers un atelier de peinture de manière équiprobable. Soit X la v.a.r. égale au nombre d'ateliers sans véhicules.
Calculer $\mathbb{E}(X)$ et $\mathrm{var}(X)$.

On pose $X_i = 1$ si l'atelier i est vide et $X_i = 0$ sinon. Le nombre d'ateliers sans véhicule est donc $X = \sum_{i=1}^{N} X_i$ et $\mathbb{E}(X) = \sum_{i=1}^{N} \mathbb{E}(X_i) = NP([X_i = 1])$ car les X_i ont tous même loi, avec $P([X_i = 1]) = \left(\frac{N-1}{N}\right)^n$ donc $\boxed{\mathbb{E}(X) = N\left(1 - \frac{1}{N}\right)^n}$.

$X^2 = \left(\sum_{i=1}^{N} X_i\right) = \sum_{i=1}^{N} X_i^2 + \sum_{i \neq j} X_i X_j$. Or $X_i^2 = X_i$ (0 ou 1) et $X_i X_j$ suit également une loi de Bernoulli avec $P([X_i X_j = 1]) = P([X_i = 1] \cap [X_j = 1]) = \left(\frac{N-2}{N}\right)^n = \left(1 - \frac{2}{N}\right)^n$. On a alors $\mathbb{E}(X^2) = N\left(1 - \frac{1}{N}\right)^n + (N^2 - N)\left(1 - \frac{2}{N}\right)^n$ et $\mathbb{E}(X)^2 = N^2\left(1 - \frac{1}{N}\right)^{2n}$ donc

$$\boxed{\mathrm{var}(X) = N\left(1 - \frac{1}{N}\right)^n + (N^2 - N)\left(1 - \frac{2}{N}\right)^n - N^2\left(1 - \frac{1}{N}\right)^{2n}}.$$

---

12. $(***)$ Pour ouvrir 1 porte, un gardien dispose d'un trousseau de 10 clefs différentes. Quand il est ivre, il remélange les clefs après chaque essai ; sinon, il retire la mauvaise clef du lot. On note X le nombre de clefs nécessaires pour ouvrir la porte dans le premier cas et Y dans le second cas.

1. Déterminer les lois de X et de Y ainsi que leur espérance.
2. Sachant que le gardien est ivre 1 jour sur 3 et qu'aujourd'hui il a essayé au moins 9 clefs pour ouvrir la porte, quelle est la probabilité qu'il soit ivre aujourd'hui?

---

1. Dans le premier cas, on a des tirages avec remise donc $X(\Omega) = \mathbb{N}^*$ et

$$P([X = k]) = \left(\frac{9}{10}\right)^{k-1} \frac{1}{10} \ :$$

$$\boxed{X \text{ suit la loi géométrique } \mathcal{G}\left(\tfrac{1}{10}\right)}.$$

Dans le deuxième cas, on a des tirages sans remise donc, dans le pire des cas, on prendra la bonne clef en dernier, d'où $Y(\Omega) = [\![1, 10]\!]$ avec $P([Y = 1]) = \frac{1}{10}$, $P([Y = 2]) = \frac{9}{10} \times \frac{1}{9} = \frac{1}{10}$, $P([Y = 3]) = \frac{9}{10} \times \frac{8}{9} \times \frac{1}{8} = \frac{1}{10}$, ... $P([Y = k]) = \frac{1}{10}$ pour tout k (la bonne clef a autant de chance d'être choisie en premier, deuxième,..., dernier).

$$\boxed{Y \text{ suit la loi équiprobabilité sur } [\![1, 10]\!]}.$$

On a donc $\boxed{\mathbb{E}(X) = 10}$ et $\boxed{\mathbb{E}(Y) = 5.5}$.

2. Soit A l'événement "le gardien est ivre" et B "le gardien essaie au moins 9 clefs pour ouvrir la porte". On cherche $P(A/B)$ et pour cela, on utilise la formule de Bayes ;

$$P(A/B) = \frac{P(B/A)P(A)}{P(B/A)P(A) + P(B/\overline{A})P(\overline{A})}.$$

On a $P(A)=\frac{1}{3}$, $P(B/\overline{A})=P([Y\geq 9])=\frac{2}{10}=\frac{1}{5}$ et

$$P(B/A)=P([X\geq 9])=\sum_{k=9}^{+\infty}\left(\frac{9}{10}\right)^{k-1}\frac{1}{10}\underset{j=k-8}{=}\sum_{j=1}^{+\infty}\left(\frac{9}{10}\right)^{j-1+8}\frac{1}{10}=\left(\frac{9}{10}\right)^{8}$$

Ainsi, $P(A/B)=\frac{\left(\frac{9}{10}\right)^8\times\frac{1}{3}}{\left(\frac{9}{10}\right)^8\times\frac{1}{3}+\frac{1}{5}\times\frac{2}{3}}$, soit $\boxed{P(A/B)=\dfrac{\left(\frac{9}{10}\right)^8}{\left(\frac{9}{10}\right)^8+\frac{2}{5}}}$.

---

13. (∗∗) Soient $n\in\mathbb{N}^*$ et $p\in]0,1[$ et soit X une v.a.r. de loi binomiale $\mathcal{B}(n,p)$. On définit Y par $Y=X$ si $X\neq 0$ et, si $X=0$, alors Y prend une valeur quelconque dans $[\![0,n]\!]$.
Déterminer la loi de Y et calculer $\mathbb{E}(Y)$.

On a $Y(\Omega)=[\![0,n]\!]$.
Si $k\neq 0$, $P([Y=k])=\sum\limits_{i=0}^{n}P([Y=k]/[X=i])P([X=i])$ avec $P([Y=k]/[X=k])=1$ et $P([Y=k]/[X=i])=0$ si $i\notin\{0,k\}$ et $P([Y=k]/[X=0])=\frac{1}{n+1}$.
Si $k=0$, $P([Y=0]/[X=i])=0$ si $i\neq 0$ et $P([Y=0]/[X=0])=\frac{1}{n+1}$. Ainsi,

$$\boxed{\begin{array}{l}P([Y=k])=\frac{1}{n+1}P([X=0])+P([X=k])\text{ si }k\in[\![1,n]\!]\\ P([Y=0])=\frac{1}{n+1}P([X=0])\end{array}}.$$

$$\begin{aligned}\mathbb{E}(Y)&=\sum_{k=1}^{n}kP([Y=k])=\sum_{k=1}^{n}k\left[\frac{1}{n+1}P([X=0])+P([X=k])\right]\\&=\frac{1}{n+1}P([X=0])\sum_{k=1}^{n}k+\sum_{k=1}^{n}kP([X=k])\\&=\frac{1}{n+1}P([X=0])\times\frac{n(n+1)}{2}+\mathbb{E}(X)=\frac{n}{2}P([X=0])+\mathbb{E}(X)\end{aligned}$$

Or $\mathbb{E}(X)=np$ et $P([X=0])=(1-p)^n$ donc $\boxed{\mathbb{E}(Y)=\frac{n}{2}\left((1-p)^n+2p\right)}$.

---

14. (∗) On lance n fois une pièce. Soit X la v.a.r. égale au nombre de "piles" obtenus et soit $Y=\frac{a^X}{2^n}$ où $a\in\mathbb{R}_+$.
Calculer $\mathbb{E}(Y)$.

X suit la loi binomiale $\mathcal{B}\left(n,\frac{1}{2}\right)$: $P([X=k])=C_n^k\frac{1}{2^n}$ pour $0\leq k\leq n$.
$\mathbb{E}[Y]=\mathbb{E}\left(\frac{a^X}{2^n}\right)=\frac{1}{2^n}\sum\limits_{k=0}^{n}a^kP([X=k])=\frac{1}{4^n}\sum\limits_{k=0}^{n}C_n^ka^k$, soit $\boxed{\mathbb{E}(X)=\frac{(a+1)^n}{4^n}}$.

---

15. (∗∗) Soient $a\in\mathbb{R}$ et X une v.a.r. à valeurs dans $\mathbb{N}^*$ telle que, pour $k\in\mathbb{N}^*$:

$$P(X=k)=a/(k(k+1)(k+2)).$$

Déterminer a, puis calculer $\mathbb{E}(X)$.

$\frac{1}{k(k+1)(k+2)} = \frac{\alpha}{k} + \frac{\beta}{k+1} + \frac{\gamma}{k+2}$ avec $\alpha = \frac{1}{2}$, $\beta = -1$ et $\gamma = \frac{1}{2}$. Ainsi,

$$P([X=k]) = \frac{a}{2}\left[\frac{1}{k} - \frac{2}{k+1} + \frac{1}{k+2}\right] = \frac{a}{2}\left[\left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}\right) - \left(\frac{1}{k+1} - \frac{1}{k+2}\right)\right].$$

On doit avoir $\sum_{k=1}^{+\infty} P([X=k]) = \lim_{N\to+\infty} \sum_{k=1}^{N} P([X=k]) = 1$ avec

$$\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{N} P([X=k]) &= \frac{a}{2}\sum_{k=1}^{N}\left[\left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}\right) - \left(\frac{1}{k+1} - \frac{1}{k+2}\right)\right] \\
&= \frac{a}{2}\left[\sum_{k=1}^{N}\left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}\right) - \sum_{k=2}^{N+1}\left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}\right)\right] \\
&= \frac{a}{2}\left[1 - \frac{1}{2} - \left(\frac{1}{N+1} - \frac{1}{N+2}\right)\right] \to \frac{a}{4}
\end{aligned}$$

donc $\boxed{a = 4}$.

$$\mathbb{E}(X) = \sum_{k=1}^{+\infty} kP([X=k]) = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{4}{(k+1)(k+2)} = \sum_{k=2}^{+\infty} \frac{4}{k(k+1)} = \lim_{N\to+\infty} \sum_{k=2}^{N} \frac{4}{k(k+1)}$$

avec $\sum_{k=2}^{N} \frac{4}{k(k+1)} = \sum_{k=2}^{N} \frac{4}{k} - \sum_{k=2}^{N} \frac{4}{k+1} = \frac{4}{2} - \frac{4}{N+1} \to 2$ donc $\boxed{\mathbb{E}(X) = 2}$.

---

16. (**) Soit $p \in]0,1[$. On pose $q = 1-p$ et on considère une v.a.r. X à valeurs dans $\mathbb{N}^*$, dont la loi est définie par $P([X=k]) = ckq^{k-1}$ pour tout $k \in \mathbb{N}^*$.
Déterminer c. Calculer $\mathbb{E}(X)$ et $\mathrm{var}(X)$.

$G_X(s) = \sum_{k=1}^{+\infty} s^k P([X=k]) = \sum_{k=1}^{+\infty} cks^kq^{k-1} = cs\sum_{k=1}^{+\infty} k(qs)^{k-1}$.

Or $\sum_{k=1}^{+\infty} kx^{k-1} = \left(\sum_{k=0}^{+\infty} x^k\right)' = \left(\frac{1}{1-x}\right)' = \frac{1}{(1-x)^2}$ donc $\boxed{G_X(s) = \frac{cs}{(1-qs)^2}}$.

On doit avoir $G_X(1) = 1$ donc $\boxed{c = p^2}$.

$$G'_X(s) = \frac{c}{(1-qs)^2} + \frac{2qcs}{(1-qs)^3} \text{ et } G''_X(s) = \frac{4qc}{(1-qs)^3} + \frac{6q^2cs}{(1-qs)^4}$$

donc $G'_X(1) = \frac{c}{p^2} + \frac{2qc}{p^3} = 1 + \frac{2q}{p}$ et $G''_X(1) = \frac{4qc}{p^3} + \frac{6q^2c}{p^4} = \frac{4q}{p} + \frac{6q^2}{p^2}$ puis, en utilisant $q = 1-p$, $G'_X(1) = \frac{2}{p} - 1$, $G''_X(1) = \frac{4}{p} - 4 + \frac{6}{p^2} - \frac{12}{p} + 6 = 2 - \frac{8}{p} + \frac{6}{p^2}$ et $G''_X(1) + G'_X(1) = 1 - \frac{6}{p} + \frac{6}{p^2}$ donc $\boxed{\mathbb{E}(X) = \frac{2}{p} - 1}$ et $\mathrm{var}(X) = G''_X(1) + G'_X(1) - {G'_X}^2(1) = 1 - \frac{6}{p} + \frac{6}{p^2} - 1 + \frac{4}{p} - \frac{4}{p^2}$, soit $\boxed{\mathrm{var}(X) = \frac{2}{p^2} - \frac{2}{p} = \frac{2q}{p^2}.}$

---

17. (*) Soit X une v.a.r. suivant la loi de Poisson $\mathcal{P}(\lambda)$.
Calculer $\mathbb{E}(1/(1+X))$.

$P([X=k]) = e^{-\lambda}\frac{\lambda^k}{k!}$ et

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}\left(\frac{1}{1+X}\right) &= \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{1+k} P([X=k]) = e^{-\lambda} \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{\lambda^k}{(k+1)!} \\
&= \frac{e^{-\lambda}}{\lambda} \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{\lambda^{k+1}}{(k+1)!} = \frac{e^{-\lambda}}{\lambda} \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{\lambda^k}{k!} = \frac{e^{-\lambda}}{\lambda}\left[e^{\lambda}-1\right].
\end{aligned}$$

Ainsi, $\boxed{\mathbb{E}\left(\frac{1}{1+X}\right) = \frac{e^{-\lambda}}{\lambda}\left[e^{\lambda}-1\right] = \frac{1-e^{-\lambda}}{\lambda}}$.

---

18. $(*)$ Soit X une v.a.r. suivant la loi de Pascal $\mathcal{P}(r,p)$.
Montrer que $\mathbb{E}((r-1)/(X-1)) = p$ et en déduire $\mathbb{E}(r/X) > p$.

$X(\Omega) = [\![r,+\infty[$ et $P([X=k]) = C_{k-1}^{r-1} p^r q^{k-r}$ avec $q = 1-p$.

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}\left(\frac{r-1}{X-1}\right) &= \sum_{k=r}^{+\infty} \frac{r-1}{k-1} \frac{(k-1)!}{(r-1)!(k-r)!} p^r q^{k-r} = \sum_{k=r}^{+\infty} \frac{(k-2)!}{(r-2)!(k-r)!} p^r q^{k-r} \\
&\underset{j=k-1}{=} \sum_{j=r-1}^{+\infty} \frac{(j-1)!}{(r-2)!(j-r+1)!} p^r q^{j-r+1} = p \sum_{j=r-1}^{+\infty} C_{j-1}^{r-1} p^{r-1} q^{j-(r-1)} = p
\end{aligned}$$

car $\sum\limits_{j=r-1}^{+\infty} C_{j-1}^{r-1} p^{r-1} q^{j-(r-1)} = 1$ comme somme des probabilités pour la loi de Pascal $\mathcal{P}(r-1,p)$ donc $\boxed{\mathbb{E}\left(\frac{r-1}{X-1}\right) = p}$.

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}\left(\frac{r}{X}\right) - p &= \mathbb{E}\left(\frac{r}{X} - \frac{r-1}{X-1}\right) \\
&= \mathbb{E}\left(\frac{r(X-1)-(r-1)X}{X(X-1)}\right) = \mathbb{E}\left(\frac{X-r}{X(X-1)}\right)
\end{aligned}$$

Or $X(\Omega) = [\![r,+\infty[$ donc $\frac{X-r}{X(X-1)} \geq 0$ et $P\left(\left[\frac{X-r}{X(X-1)} \neq 0\right]\right) > 0$ donc $\boxed{\mathbb{E}\left(\frac{r}{X}\right) > p}$.

---

19. $(*)$ Une suite d'épreuves de Bernoulli de paramètre p est répétée de façon indépendante jusqu'à l'obtention de k succès. Soit X la v.a.r. égale au nombre d'essais nécessaires.

1. Déterminer la loi de X.
2. Pour $k=2$, calculer $\mathbb{E}(X)$ ainsi que $\mathbb{E}(2/X)$.

---

1. On veut k succès donc $X(\Omega) = \{n \in \mathbb{N}\ ;\ n \geq k\}$ et, si $X=n$, le n^{ieme} essai est un succès et il y a $k-1$ autres succès parmi les $n-1$ autres essais.
$P([X=n]) = C_{n-1}^{k-1} p^k q^{n-k}$: $\boxed{X \text{ suit la loi de Pascal } \mathcal{P}(k,p)}$.

2. Pour $k=2$, $P([X=2]) = (n-1)p^2q^{n-2}$ si $n \geq 2$ et $\mathbb{E}(X) = \sum\limits_{n=2}^{+\infty} nP([X=n])$, soit :

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}(X) &= \sum_{n=2}^{+\infty} n(n-1)p^2q^{n-2} = p^2 \sum_{n=2}^{+\infty} \frac{d^2}{dq^2}(q^n) = p^2 \frac{d^2}{dq^2}\left(\sum_{n=2}^{+\infty} q^n\right) \\
&= p^2 \frac{d^2}{dq^2}\left(\frac{1}{1-q} - 1 - q\right) = p^2 \frac{d}{dq}\left(\frac{1}{(1-q)^2} - 1\right) = p^2 \frac{2}{(1-q)^3} = \frac{2p^2}{p^3}
\end{aligned}$$

Donc finalement $\boxed{\mathbb{E}(X) = \frac{2}{p}}$.

$\mathbb{E}(\frac{2}{X}) = \sum\limits_{n=2}^{+\infty} \frac{2}{n} P(X=n) = \sum\limits_{n=2}^{+\infty} \frac{2}{n}(n-1)p^2q^{n-2} = 2p^2\left(\sum\limits_{n=2}^{+\infty} q^{n-2} - \sum\limits_{n=2}^{+\infty} \frac{1}{n}q^{n-2}\right)$, avec $\sum\limits_{n=2}^{+\infty} q^{n-2} = \frac{1}{1-q} = \frac{1}{p}$ et $\sum\limits_{n=2}^{+\infty} \frac{1}{n}q^{n-2} = \frac{1}{q^2}\left(\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \frac{q^n}{n} - q\right) = -\frac{1}{q^2}(\ln(1-q)+q) = -\frac{1}{q^2}(q+\ln p)$

donc $\mathbb{E}(\frac{2}{X}) = 2p + \frac{2p^2}{q} + \frac{2p^2}{q^2}\ln p = \frac{2p}{q} + \frac{2p^2}{q^2}\ln p$, soit $\boxed{\mathbb{E}\left(\frac{2}{X}\right) = \frac{2p}{q}\left(1 + \frac{p}{q}\ln p\right)}$.

---

20. (∗∗) Soit X une v.a.r. à valeurs dans $\mathbb{N}$.
Montrer que $\mathbb{E}(X)$ existe si et seulement si la série de terme général $P([X \geq k])$ est convergente et qu'alors on a:

$$\mathbb{E}(X) = \sum_{k \geq 1} P([X \geq k])$$

$\mathbb{E}(X)$ existe si et seulement si $\sum\limits_{k=1}^{+\infty} kP([X=k])$ converge.

$$\begin{aligned}
S_N &= \sum_{k=1}^{N} P([X \geq k]) = \sum_{k=1}^{N}\sum_{j=k}^{N} P([X=j]) \\
&= \sum_{1 \leq k \leq j \leq N} P([X=j]) = \sum_{j=1}^{N}\sum_{k=1}^{j} P([X=j]) \\
&= \sum_{j=1}^{N} jP([X=j])
\end{aligned}$$

Ainsi, $\sum\limits_{k=1}^{+\infty} P([X \geq k])$ converge si et seulement si $(S_N)_N$ est majorée, c'est-à-dire si $\sum\limits_{k=1}^{+\infty} kP([X=k])$ converge.

On a alors $\mathbb{E}(X) = \lim\limits_{N\to+\infty} S_N$ donc $\boxed{\mathbb{E}(X) = \sum\limits_{k=1}^{+\infty} P([X \geq k])}$.

---

21. (∗∗) Le nombre de clients d'un grand magasin suit une loi de Poisson $\mathcal{P}(\lambda)$. Dans le magasin, chaque client a la probabilité p de se faire voler son portefeuille. Soit Y la v.a.r. égale au nombre de portefeuilles volés.

Déterminer la loi de Y et calculer $\mathbb{E}(Y)$.

Si X est le nombre de clients du magasin, $P([X=k]) = e^{-\lambda}\frac{\lambda^k}{k!}$.

$$P([Y=j]) = \sum_{k=0}^{+\infty} P([Y=j]/[X=k])P([X=k])$$

avec $P([Y=j]/[X=k]) = \begin{cases} 0 & \text{si } j > k \\ C_k^j p^j (1-p)^{k-j} & \text{si } j \leq k \end{cases}$. On a alors

$$\begin{aligned} P([Y=j]) &= \sum_{k=j}^{+\infty} e^{-\lambda}\frac{\lambda^k}{k!}\frac{k!}{j!(k-j)!}p^j(1-p)^{k-j} \\ &= e^{-\lambda}\frac{(\lambda p)^j}{j!}\sum_{k=j}^{+\infty}\frac{\lambda^{k-j}(1-p)^{k-j}}{(k-j)!} = e^{-\lambda}\frac{(\lambda p)^j}{j!}e^{\lambda(1-p)} = e^{-\lambda p}\frac{(\lambda p)^j}{j!} \end{aligned}$$

---

22. (**) Soit X une v.a.r. à valeurs dans $\mathbb{N}$ et soit Y la v.a.r. définie par $Y = X/2$ si X est pair et $Y = (1-X)/2$ si X est impair.
Déterminer la loi de Y et son espérance dans les cas suivants:

1. X suit la loi géométrique $\mathcal{G}(p)$;
2. X suit la loi de Poisson $\mathcal{P}(\lambda)$.

---

1. Si $X = 2k$ avec $k \in \mathbb{N}^*$, alors $Y = k$ et si $X = 2k+1$ avec $k \in \mathbb{N}$, alors $Y = -k$.
Donc $Y(\Omega) = \mathbb{Z}$ et $\begin{cases} P([Y=k]) = P([X=2k]) = pq^{2k-1} \text{ pour } k \in \mathbb{N}^* \\ P([Y=-k]) = P([X=2k+1]) = pq^{2k} \text{ pour } k \in \mathbb{N} \end{cases}$.
$\mathbb{E}(Y) = \sum_{k\in\mathbb{Z}} kP(Y=k) = \sum_{k=1}^{+\infty} kpq^{2k-1} - \sum_{k=0}^{+\infty} kpq^{2k} = (1-q)p\sum_{k=1}^{+\infty} kq^{2k-1} = \frac{p^2}{q}\sum_{k=1}^{+\infty} k(q^2)^{k-1}$.
Or $\sum_{k=1}^{+\infty} kx^{k-1} = \frac{1}{(1-x)^2}$ donc $\mathbb{E}(Y) = \frac{p^2}{q}\frac{1}{(1-q^2)^2} = \frac{(1-q)^2}{q(1-q)^2(1+q)^2}$ soit $\boxed{\mathbb{E}(Y) = \frac{1}{q(1+q)^2}}$.

2. Si $X = 2k$ avec $k \in \mathbb{N}$, alors $Y = k$ et si $X = 2k+1$ avec $k \in \mathbb{N}$, alors $Y = -k$.
Donc $Y(\Omega) = \mathbb{Z}$ et $\begin{cases} P([Y=k]) = P([X=2k]) = e^{-\lambda}\frac{\lambda^{2k}}{(2k)!} & \text{pour } k \in \mathbb{N}^* \\ P([Y=-k]) = P([X=2k+1]) = e^{-\lambda}\frac{\lambda^{2k+1}}{(2k+1)!} & \text{pour } k \in \mathbb{N}^* \\ P([Y=0]) = P([X=0]) + P([X=1]) = e^{-\lambda}(1+\lambda) & \end{cases}$.

$$\begin{aligned} \mathbb{E}(Y) &= \sum_{k=1}^{+\infty} ke^{-\lambda}\frac{\lambda^{2k}}{(2k)!} - \sum_{k=1}^{+\infty} ke^{-\lambda}\frac{\lambda^{2k+1}}{(2k+1)!} \\ &= \frac{1}{2}e^{-\lambda}\sum_{k=1}^{+\infty}\frac{\lambda^{2k}}{(2k-1)!} - \frac{1}{2}e^{-\lambda}\sum_{k=1}^{+\infty}\frac{(2k+1-1)\lambda^{2k+1}}{(2k+1)!} \\ &= \frac{1}{2}e^{-\lambda}\left[\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{\lambda^{2k+2}}{(2k+1)!} - \sum_{k=1}^{+\infty}\frac{\lambda^{2k+1}}{(2k)!} + \sum_{k=1}^{+\infty}\frac{\lambda^{2k+1}}{(2k+1)!}\right] \\ &= \frac{1}{2}e^{-\lambda}\left[\lambda\text{sh}\lambda - \lambda(\text{ch}\lambda - 1) + \text{sh}\lambda - \lambda\right], \end{aligned}$$

soit $\boxed{\mathbb{E}(Y)=\frac{1}{2}e^{-\lambda}\left[-\lambda e^{-\lambda}+\text{sh}\lambda\right]}$.

23. (**) Même exercice que l'exercice 163 avec $Y=X/2$ si X est pair et $Y=0$ si X est impair. Calculer de plus $\text{var}(Y)$.

Pour $k\in\mathbb{N}^*$, $P([Y=k])=P([X=2k])$ et $P([Y=0])=1-\sum\limits_{k=1}^{+\infty}P([X=2k])$.

1. $P_X=\mathcal{G}(p)$ et $q=1-p$. On a alors $P([Y=k])=pq^{2k-1}$ pour $k\neq 0$ et

$$\begin{aligned}
P([Y=0]) &= 1-\sum_{k=1}^{+\infty}pq^{2k-1}\underset{j=k-1}{=}1-\sum_{j=0}^{+\infty}pq^{2j+1}\\
&= 1-pq\frac{1}{1-q^2}=1-\frac{q}{1+q}=\frac{1}{1+q}=\frac{1}{2-p}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
G_Y(s) &= P([Y=0])+\sum_{k=1}^{+\infty}s^kpq^{2k-1}=P([Y=0])+\frac{p}{q}\sum_{k=1}^{+\infty}(sq^2)^k\\
&= P([Y=0])+\frac{p}{q}\left(\frac{1}{1-sq^2}-1\right)=P([Y=0])-\frac{p}{q}+\frac{p}{q}\frac{1}{1-sq^2}
\end{aligned}$$

On a alors $G'_Y(s)=\frac{pq}{(1-sq^2)^2}$ et $G''_Y(s)=\frac{2pq^3}{(1-sq^2)^3}$ donc $G'_Y(1)=\frac{pq}{p^2(1+q)^2}=\frac{q}{p(1+q)^2}$ et $G''_Y(1)=\frac{2q^3}{p^2(1+q)^3}$ puis

$$\begin{aligned}
G''_Y(1)+G'_Y(1)-G'_Y(1)^2 &= \frac{2q^3}{p^2(1+q)^3}+\frac{q}{p(1+q)^2}-\frac{q^2}{p^2(1+q)^4}\\
&= \frac{q}{p^2(1+q)^4}\left[2q^2(1+q)+(1-q)(1+q)^2-q\right]\\
&= \frac{q}{p^2(1+q)^4}\left[2q^2+2q^3+1+2q+q^2-q-2q^2-q^3-q\right]\\
&= \frac{q(q^3+q^2+1)}{p^2(1+q)^4}
\end{aligned}$$

donc $\boxed{\mathbb{E}(Y)=\dfrac{q}{p(1+q)^2}\text{ et }\text{var}(Y)=\dfrac{q(q^3+q^2+1)}{p^2(1+q)^4}}$.

2. $P_X=\mathcal{P}(\lambda)$. On a alors $P([Y=k])=e^{-\lambda}\frac{\lambda^{2k}}{(2k)!}$ pour $k\neq 0$ et

$$P([Y=0])=1-\sum_{k=1}^{+\infty}e^{-\lambda}\frac{\lambda^{2k}}{(2k)!}=1-e^{-\lambda}\left[\text{ch}\lambda-1\right]$$

$$\begin{aligned}
G_Y(s) &= P([Y=0])+\sum_{k=1}^{+\infty}e^{-\lambda}\frac{s^k\lambda^{2k}}{(2k)!}=P([Y=0])+e^{-\lambda}\left(\text{ch}(\lambda\sqrt{s})-1\right)\\
&= P([Y=0])-e^{-\lambda}+e^{-\lambda}\text{ch}(\lambda\sqrt{s})
\end{aligned}$$

$$G_Y'(s) = e^{-\lambda}\mathrm{sh}(\lambda\sqrt{s})\frac{\lambda}{2\sqrt{s}}$$

$$G_Y''(s) = e^{-\lambda}\mathrm{ch}(\lambda\sqrt{s})\frac{\lambda^2}{4s} - e^{-\lambda}\mathrm{sh}(\lambda\sqrt{s})\frac{\lambda}{4s\sqrt{s}}$$

$G_Y'(1) = \frac{\lambda}{2}e^{-\lambda}\mathrm{sh}\lambda$ et $G_Y''(1) = \frac{\lambda^2}{4}e^{-\lambda}\mathrm{ch}\lambda - \frac{\lambda}{4}e^{-\lambda}\mathrm{sh}\lambda$ et $G_Y''(1)+G_Y'(1) = \frac{\lambda^2}{4}e^{-\lambda}\mathrm{ch}\lambda + \frac{\lambda}{4}e^{-\lambda}\mathrm{sh}\lambda$

donc $\boxed{\mathbb{E}(Y) = \frac{\lambda}{2}e^{-\lambda}\mathrm{sh}\lambda \text{ et } \mathrm{var}(Y) = \frac{\lambda^2}{4}e^{-\lambda}\mathrm{ch}\lambda + \frac{\lambda}{4}e^{-\lambda}\mathrm{sh}\lambda - \frac{\lambda^2}{4}e^{-2\lambda}\mathrm{sh}^2\lambda}$.

---

24. (**) On pose $\mu_k = \mathbb{E}((X - \mathbb{E}(X))^k)$.
Calculer $\gamma = \mu_3/\sigma^3$ et $\delta = \mu_4/\sigma^4$ dans les cas suivants:

1. X suit la loi binomiale $\mathcal{B}(n,p)$;
2. X suit la loi de Poisson $\mathcal{P}(\lambda)$.

On pose $m = \mathbb{E}(X)$ et $\sigma^2 = \mathbb{E}((X-m)^2)$ et $g(s) = G_X(s) = \mathbb{E}(s^X) = \sum s^k P([X=k])$.

$$\mu_3 = \mathbb{E}((X-m)^3) = \mathbb{E}(X^3 - 3mX^2 + 3m^2X - m^3) = \mathbb{E}(X^3) - 3m\mathbb{E}(X^2) + 2m^3)$$

$$\mu_4 = \mathbb{E}((X-m)^4) = \mathbb{E}(X^4 - 4mX^3 + 6m^2X^2 - 4m^3X + m^4) = \mathbb{E}(X^4) - 4m\mathbb{E}(X^3) + 6m^2\mathbb{E}(X^2) - 3m^4$$

$$g'(1) = \mathbb{E}(X) = m, \quad g''(1) = \mathbb{E}(X(X-1)) = \mathbb{E}(X^2) - m,$$
$$g^{(3)}(1) = \mathbb{E}(X(X-1)(X-2)) = \mathbb{E}(X^3 - 3X^2 + 2X) = \mathbb{E}(X^3) - 3(g''(1) + m) + 2m$$

$$\begin{aligned} g^{(4)}(1) &= \mathbb{E}(X(X-1)(X-2)(X-3)) = \mathbb{E}(X^4 - 3X^3 + 2X^2 - 3X^3 + 9X^2 - 6X) \\ &= \mathbb{E}(X^4 - 6X^3 + 11X^2 - 6X) \\ &= \mathbb{E}(X^4) - 6(g^{(3)}(1) + 3g''(1) + m) + 11(g''(1) + m) - 6m \end{aligned}$$

On a donc $\mathbb{E}(X) = g'(1)$, $\mathbb{E}(X^2) = g''(1) + g'(1)$, $\mathbb{E}(X^3) = g^{(3)}(1) + 3g''(1) + g'(1)$,

$$\mathbb{E}(X^4) = g^{(4)}(1) + 6g^{(3)}(1) + 7g''(1) + g'(1)$$

1. $g(s) = (ps+q)^n$, $g'(s) = np(ps+q)^{n-1}$, $g''(s) = n(n-1)p^2(ps+q)^{n-2}$

$$g^{(3)}(s) = n(n-1)(n-2)p^3(ps+q)^{n-3}, \quad g^{(4)}(s) = n(n-1)(n-2)(n-3)p^4(ps+q)^{n-4}$$

On a alors

$$\begin{aligned} \mu_3 &= n(n-1)(n-2)p^3 + 3n(n-1)p^2 + np - 3np(n(n-1)p^2 + np) + 2n^3p^3 \\ &= np^3(n^2 - 3n + 2 - 3n^2 + 3n + 2n^2) + np^2(3n - 3 - 3n) + np \\ &= 2np^3 - 3np^2 + np = np(1-p)(1-2p) \end{aligned}$$

donc $\boxed{\gamma = \frac{\mu_3}{\sigma^3} = \frac{1-2p}{\sqrt{np(1-p)}}}$ et pour le calcul de μ_4 et δ, on procède de même.

2. $g(s) = e^{-\lambda}e^{\lambda s}$, $g'(s) = \lambda e^{-\lambda}e^{\lambda s}$, $g''(s) = \lambda^2 e^{-\lambda}e^{\lambda s}$

$$g^{(3)}(s) = \lambda^3 e^{-\lambda}e^{\lambda s}, \quad g^{(4)}(s) = \lambda^4 e^{-\lambda}e^{\lambda s}$$

On a alors

$$\mu_3 = \lambda^3 + 3\lambda^2 + \lambda - 3\lambda(\lambda^2 + \lambda) + 2\lambda^3 = \lambda$$

donc $\boxed{\gamma = \frac{\mu_3}{\sigma^3} = \frac{1}{\sqrt{\lambda}}}$ et pour le calcul de μ_4 et δ, on procède de même.

---

25. (∗∗) Soit $p \in]0, 1[$ et X une v.a.r. à valeurs dans $\mathbb{N}$ telle que, pour tout $k \in \mathbb{N}$:

$$P([X = k]) = \frac{-p^{k+1}}{(k + 1)\ln(1 - p)}$$

1. Vérifier qu'il s'agit bien d'une loi de probabilité.
2. Calculer $\mathbb{E}(X)$ et $\mathrm{var}(X)$.

On commence par déterminer $G_X(s)$.

$$G_X(s) = \sum_{k=0}^{+\infty} s^k P([X = k]) = -\frac{1}{\ln(1-p)} \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{s^k p^{k+1}}{k+1} = -\frac{1}{s\ln(1-p)} \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(sp)^{k+1}}{k+1}.$$

Or, pour $|x| < 1$, en admettant les interversions des sommes et des intégrales vues dans les cours sur les séries entières :

$$\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{x^{k+1}}{k+1} = \sum_{k=0}^{+\infty} \int_0^x t^k\,dt = \int_0^x \left(\sum_{k=0}^{+\infty} t^k\right) dt = \int_0^x \frac{dt}{1-t} = [-\ln(1-t)]_0^x = -\ln(1-x).$$

Ainsi, $G_X(s) = \frac{\ln(1-ps)}{s\ln(1-p)}$ et on a bien $\sum\limits_{k=1}^{+\infty} P([X = k]) = G_X(1) = 1$.

$$G'_X(s) = \frac{1}{\ln(1-p)}\left[-\frac{\ln(1-ps)}{s^2} - \frac{p}{s(1-ps)}\right]$$

$$G''_X(s) = \frac{1}{\ln(1-p)}\left[\frac{2\ln(1-ps)}{s^3} + \frac{2p}{s^2(1-ps)} - \frac{p^2}{s(1-ps)^2}\right]$$

$G'_X(1) = -1 - \frac{p}{(1-p)\ln(1-p)}$, $G''_X(1) = 2 + \frac{p(2-3p)}{(1-p)^2\ln(1-p)}$, $G''_X(1) + G'_X(1) = 1 + \frac{p(1-2p)}{(1-p)^2\ln(1-p)}$ et $G''_X(1) + G'_X(1) - G'_X(1)^2 = -\frac{p}{(1-p)^2\ln(1-p)} - \frac{p^2}{(1-p)^2(\ln(1-p))^2}$. On a donc :

$$\boxed{\mathbb{E}(X) = -1 - \frac{p}{(1-p)\ln(1-p)} \text{ et } \mathrm{var}(X) = -\frac{p[\ln(1-p)+p]}{(1-p)^2(\ln(1-p))^2}}$$

Calculs sur les v.a.r. absolument continues

---

26. (∗) Soit f définie par $f(x) = \frac{1}{3}(1 + |x|)\,\mathbb{1}_{[-1,1]}(x)$.
Montrer que f est la densité d'une v.a.r. X dont on déterminera l'espérance et la variance.

---

f est positive, continue sauf en -1 et en 1 et

$$\int f(x)\,dx = \frac{1}{3}\int_{-1}^{1}(1 + |x|)\,dx = \frac{2}{3}\int_0^1 (1 + x)\,dx = \frac{1}{3}[(1 + x)^2]_0^1 = 1$$

donc f est bien une densité de probabilité.

$\mathbb{E}(X) = \int_{-1}^{1} \frac{1}{3}x(1+|x|)\,dx = 0$ (intégrale sur $[-1,1]$ d'une fonction impaire).

$\mathbb{E}(X^2) = \int_{-1}^{1} \frac{1}{3}x^2(1+|x|)\,dx = \frac{2}{3}\int_0^1 (x^2+x^3)\,dx = \frac{2}{3}\left[\frac{x^3}{3}+\frac{x^4}{4}\right]_0^1 = \frac{2}{3}\left[\frac{1}{3}+\frac{1}{4}\right] = \frac{7}{18}$.

Ainsi, $\boxed{\mathbb{E}(X) = 0 \text{ et } \mathrm{var}(X) = \frac{7}{18}}$.

---

27. $(*)$ Soit X une v.a.r. de densité f définie par $f(x) = (x+1)\mathbb{1}_{[-k,k]}(x)$.

1. Déterminer k et la fonction de répartition de X.
2. Soit $Y = X^2$. Préciser la densité de probabilité, l'espérance et la variance de Y.

---

1. $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = \left[\frac{x^2}{2}+x\right]_{-k}^{k} = 2k = 1$ d'où $\boxed{k = \frac{1}{2}}$.

$F_X(x) = \int_{-\infty}^{x}(t+1)\mathbb{1}_{[-\frac{1}{2},\frac{1}{2}]}(t)dt$, soit $\boxed{F_X(x) = \left(\frac{x^2}{2}+x+\frac{3}{8}\right)\mathbb{1}_{[-\frac{1}{2},\frac{1}{2}]}(x) + \mathbb{1}_{]\frac{1}{2},+\infty[}(x)}$.

2. $F_Y(y) = P(X^2 \leq y) = (F_X(\sqrt{y}) - F_X(-\sqrt{y}))\mathbb{1}_{]0,+\infty[}(y)$ et
$f_Y(y) = \frac{1}{2\sqrt{y}}(f(\sqrt{y}) + f(-\sqrt{y}))\mathbb{1}_{]0,+\infty[}(y) = \frac{1}{2\sqrt{y}}(\sqrt{y}+1-\sqrt{y}+1)\mathbb{1}_{]0,\frac{1}{4}[}(y)$.
D'où $\boxed{f_Y(y) = y^{-\frac{1}{2}}\mathbb{1}_{]0,\frac{1}{4}[}(y)}$.
$\mathbb{E}(Y) = \int_{-\infty}^{+\infty} y f_Y(y)dy = \int_0^{\frac{1}{4}} y^{\frac{1}{2}}dy = \frac{2}{3}\left[y^{\frac{3}{2}}\right]_0^{\frac{1}{4}} = \frac{2}{3}\times\frac{1}{8}$ soit $\boxed{\mathbb{E}(Y) = \frac{1}{12}}$.
De même, $\mathbb{E}(Y^2) = \int_{-\infty}^{+\infty} y^2 f_Y(y)dy = \int_0^{\frac{1}{4}} y^{\frac{3}{2}}dy = \frac{2}{5}\left[y^{\frac{5}{2}}\right]_0^{\frac{1}{4}} = \frac{2}{5}\times\frac{1}{32} = \frac{1}{80}$.
On a alors $\mathrm{var}(Y) = \mathbb{E}(Y^2) - \mathbb{E}(Y)^2 = \frac{1}{80} - \frac{1}{144} = \frac{64}{80\times 144}$, soit $\mathrm{var}(Y) = \frac{1}{180}$.

---

28. $(*)$ Soit f la fonction définie par:

$$f(x) = k(x^2\, e^x\, \mathbb{1}_{]-\infty,0[}(x) + x\, e^{-x^2}\, \mathbb{1}_{[0,+\infty[}(x))$$

1. Déterminer k pour que f soit la densité d'une v.a.r. X.
2. Montrer que X admet une espérance et une variance et calculer celles-ci.

---

1. On a $f \geq 0$ pour $k \geq 0$, f continue sur $\mathbb{R}$ et

$$\begin{aligned}\int f(x)\,dx &= k\left[\int_{-\infty}^{0} x^2e^x\,dx + \int_0^{+\infty} xe^{-x^2}\,dx\right] = k\left[\int_0^{+\infty} x^2e^{-x}\,dx + \left[-\frac{1}{2}e^{-x^2}\right]_0^{+\infty}\right]\\ &= k\left[\Gamma(3)+\frac{1}{2}\right] = \frac{5k}{2}\end{aligned}$$

d'où $\boxed{k = \frac{2}{5}}$.

2. $\int |x|\,f(x)\,dx$ et $\int x^2\,f(x)\,dx$ sont des intégrales convergentes donc $\mathbb{E}(X)$ et $\mathbb{E}(X^2)$ existent, avec

$$\mathbb{E}(X) = \frac{2}{5}\left[\int_{-\infty}^{0} x^3e^x\,dx + \int_0^{+\infty} x^2e^{-x^2}\,dx\right]$$

$$\mathbb{E}(X^2) = \frac{2}{5}\left[\int_{-\infty}^{0} x^4 e^x\, dx + \int_0^{+\infty} x^3 e^{-x^2}\, dx\right]$$

$$\int_{-\infty}^{0} x^3 e^x\, dx = -\int_0^{+\infty} x^3 e^{-x}\, dx = -\Gamma(4) = -3! = -6 \ ;$$

$$\int_{-\infty}^{0} x^4 e^x\, dx = \int_0^{+\infty} x^4 e^{-x}\, dx = \Gamma(5) = 4! = 24.$$

En posant $x = \frac{u}{\sqrt{2}}$, on a $\int_0^{+\infty} x^2 e^{-x^2}\, dx = \int_0^{+\infty} \frac{u^2}{2} e^{-\frac{u^2}{2}}\, \frac{du}{\sqrt{2}} = \frac{1}{4\sqrt{2}} \int_{-\infty}^{+\infty} u^2 e^{-\frac{u^2}{2}}\, du$ et en utilisant la variance de la loi $N(0,1)$, il vient $\int_{-\infty}^{+\infty} u^2 e^{-\frac{u^2}{2}}\, du = \sqrt{2\pi}$.
De même, en posant $u = x^2$, $du = 2x\, dx$, on a $\int_0^{+\infty} x^3 e^{-x^2}\, dx = \frac{1}{2}\int_0^{+\infty} u e^{-u}\, du = \frac{\Gamma(2)}{2} = \frac{1}{2}$ et ainsi, $\mathbb{E}(X) = \frac{2}{5}\left[-6 + \frac{\sqrt{\pi}}{4}\right]$ et $\mathbb{E}(X^2) = \frac{2}{5}\left[24 + \frac{1}{2}\right] = \frac{49}{5}$, soit $\boxed{\mathbb{E}(X) = -\frac{12}{5} + \frac{\sqrt{\pi}}{10}}$ et $\mathrm{var}(X) = \frac{49}{5} - \frac{144}{25} + \frac{12\sqrt{\pi}}{25} - \frac{\pi}{100}$, soit $\boxed{\mathrm{var}(X) = \frac{101}{25} + \frac{12\sqrt{\pi}}{25} - \frac{\pi}{100}}$.

---

29. $(*)$ Soit $n \in \mathbb{N}$, $k_n \in \mathbb{R}$ et f_n la fonction définie par:

$$f_n(x) = k_n\, |x|^n\, e^{-|x|}$$

1. Déterminer k_n pour que f_n soit la densité d'une v.a.r. X_n.
2. Déterminer alors $\mathbb{E}(X_n)$ et $V(X_n)$.

---

1. f_n est une fonction paire, positive si $k_n \geq 0$ et continue sur $\mathbb{R}$.

$$\int f_n(t)\, dt = 2k_n \int_0^{+\infty} t^n e^{-t}\, dt = 2k_n \Gamma(n+1) = 2n! k_n$$

donc $\boxed{k_n = \frac{1}{2n!}}$.

2. $\mathbb{E}(X_n) = 0$ (intégrale d'une fonction impaire sur $\mathbb{R}$).

$$\mathbb{E}(X_n^2) = 2k_n \int_0^{+\infty} t^{n+2} e^{-t}\, dt = 2k_n \Gamma(n+3) = \frac{(n+2)!}{n!}$$

donc $\boxed{\mathbb{E}(X_n) = 0 \text{ et } \mathrm{var}(X_n) = (n+1)(n+2)}$.

---

30. $(* * *)$ Soit $\alpha \in \mathbb{R}$ et f la fonction définie par:

$$f(x) = \alpha(1 + \cos x)\, e^{-|x|}$$

1. Déterminer α pour que f soit la densité d'une v.a.r. X.
2. Déterminer alors $\mathbb{E}(X)$ et $V(X)$.

---

1. f est paire, positive pour $\alpha \geq 0$ et continue sur $\mathbb{R}$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} (1 + \cos x) e^{-|x|} dx = 2\int_0^{+\infty} \left(1 + \frac{1}{2}(e^{ix} + e^{-ix})\right) e^{-x} dx = 2 + \frac{1}{1-i} + \frac{1}{1+i} = 3$$

donc $\int_{-\infty}^{+\infty} \alpha(1+\cos x)e^{-|x|}dx = 3\alpha$ et $\boxed{\alpha = \frac{1}{3}}$.

2. $\mathbb{E}(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} \alpha x(1+\cos x)e^{-|x|}dx = 0$ comme intégrale sur $\mathbb{R}$ d'une fonction impaire.

$$\begin{aligned}\mathbb{E}(X^2) &= \int_{-\infty}^{+\infty} x^2\alpha(1+\cos x)e^{-|x|}dx = 2\alpha \int_0^{+\infty} x^2(1+\cos x)e^{-x}dx \\ &= 2\alpha\Gamma(3) + 2\alpha \int_0^{+\infty} x^2 \cos x e^{-x}dx.\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\int_0^{+\infty} x^2 \cos x e^{-x}dx &= \left[-e^{-x}x^2 \cos x\right]_0^{+\infty} + \int_0^{+\infty} e^{-x}(2x\cos x - x^2 \sin x)dx \\ &= \int_0^{+\infty} e^{-x}(2x\cos x - x^2\sin x)dx\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\int_0^{+\infty} x^2 \sin x e^{-x}dx &= \left[-e^{-x}x^2 \sin x\right]_0^{+\infty} + \int_0^{+\infty} e^{-x}(2x\sin x + x^2 \cos x)dx \\ &= \int_0^{+\infty} e^{-x}(2x\sin x + x^2\cos x)dx\end{aligned}$$

puis, par différence, $\int_0^{+\infty} x^2\cos x e^{-x}dx = \int_0^{+\infty} x(\cos x - \sin x)e^{-x}dx$. De même,

$$\begin{aligned}\int_0^{+\infty} x \cos x e^{-x}dx &= \left[-e^{-x}x \cos x\right]_0^{+\infty} + \int_0^{+\infty} e^{-x}(\cos x - x \sin x)dx \\ &= \int_0^{+\infty} e^{-x}(\cos x - x\sin x)dx\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\int_0^{+\infty} x \sin x e^{-x}dx &= \left[-e^{-x}x \sin x\right]_0^{+\infty} + \int_0^{+\infty} e^{-x}(\sin x + x \cos x)dx \\ &= \int_0^{+\infty} e^{-x}(\sin x + x\cos x)dx\end{aligned}$$

d'où $\int_0^{+\infty} x\cos x e^{-x}dx = \frac{1}{2}\int_0^{+\infty}(\cos x - \sin x)e^{-x}dx$
et $\int_0^{+\infty} x\sin x e^{-x}dx = \frac{1}{2}\int_0^{+\infty}(\cos x + \sin x)e^{-x}dx$. Enfin,

$$\left\{\begin{array}{l}\int_0^{+\infty} \cos x e^{-x}dx = \frac{1}{2}\int_0^{+\infty}\left(e^{-(1-i)x} + e^{-(1+i)x}\right)dx = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{1-i} + \frac{1}{1+i}\right) = \frac{1}{2} \\ \int_0^{+\infty} \sin x e^{-x}dx = \frac{1}{2i}\int_0^{+\infty}\left(e^{-(1-i)x} - e^{-(1+i)x}\right)dx = \frac{1}{2i}\left(\frac{1}{1-i} - \frac{1}{1+i}\right) = \frac{1}{2}\end{array}\right. ,$$

d'où $\int_0^{+\infty} x\cos x e^{-x}dx = 0$, $\int_0^{+\infty} x \sin x e^{-x}dx = \frac{1}{2}$, $\int_0^{+\infty} x^2\cos x e^{-x}dx = -\frac{1}{2}$ et $\mathbb{E}(X^2) = 3\alpha = 1$ d'où

$$\boxed{\mathbb{E}(X) = 0 \text{ et } \mathrm{var}(X) = 1.}$$

31. (**) Soit X une v.a.r. suivant une loi normale $N(0,4)$. Soit $\alpha > 0$ et soit Y la v.a.r. définie par $Y = e^{-\alpha X^2}$.
Déterminer la loi de Y ainsi que son espérance.

$m = 0$ et $\sigma^2 = 4$.

$$F_Y(y) = P([Y \le y]) = P\left(\left[e^{-\alpha X^2} \le y\right]\right) = \begin{cases} 0 \text{ si } y \le 0 \\ P([-\alpha X^2 \le \ln y]) \text{ si } y > 0 \end{cases}$$

Si $y > 0$, $F_Y(y) = P\left(\left[X^2 \ge -\frac{\ln y}{\alpha}\right]\right)$, soit

$$F_Y(y) = \begin{cases} 1 \text{ si } y \ge 1 \\ P\left(\left[X \le -\sqrt{-\frac{\ln y}{\alpha}}\right]\right) + P\left(\left[X \ge \sqrt{-\frac{\ln y}{\alpha}}\right]\right) \text{ si } y \in]0,1[\end{cases}.$$

Ainsi, $F_Y(y) = \left[F_X\left(-\sqrt{-\frac{\ln y}{\alpha}}\right) + 1 - F_X\left(\sqrt{-\frac{\ln y}{\alpha}}\right)\right] \mathbb{1}_{]0,1[}(y) + \mathbb{1}_{[1,+\infty[}(y)$ et

$$f_Y(y) = \left[f_X\left(-\sqrt{-\frac{\ln y}{\alpha}}\right) + f_X\left(\sqrt{-\frac{\ln y}{\alpha}}\right)\right]\left(-\frac{1}{2}\right)\frac{1}{\sqrt{-\frac{\ln y}{\alpha}}}\left(-\frac{1}{\alpha y}\right)\mathbb{1}_{]0,1[}(y)$$

Or $f_X(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\frac{1}{\sigma}e^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}}$ donc

$$f_Y(y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\frac{1}{\sigma}e^{\frac{\ln y}{2\alpha\sigma^2}}\frac{1}{y\sqrt{-\alpha\ln y}}\mathbb{1}_{]0,1[}(y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\frac{1}{\sqrt{-\alpha\ln y}}\frac{1}{\sigma}y^{\frac{1}{2\alpha\sigma^2}-1}\mathbb{1}_{]0,1[}(y)$$

soit $\boxed{f_Y(y) = \frac{1}{\sigma\sqrt{-2\pi\alpha\ln y}}y^{\frac{1}{2\alpha\sigma^2}-1}\mathbb{1}_{]0,1[}(y)}$

$$\begin{aligned} \mathbb{E}(Y) &= \mathbb{E}\left[e^{-\alpha X^2}\right] = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\alpha x^2} f_X(x)\,dx = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\alpha x^2}e^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}}\,dx \\ &= \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{x^2}{2}\left(2\alpha+\frac{1}{\sigma^2}\right)}\,dx = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\sqrt{\frac{2\pi}{2\alpha+\frac{1}{\sigma^2}}} \end{aligned}$$

d'où $\boxed{\mathbb{E}(Y) = \frac{1}{\sqrt{1+2\alpha\sigma^2}}}$.

Pour $\sigma = 2$, $\boxed{f_Y(y) = \frac{1}{2\sqrt{-2\pi\alpha\ln y}}y^{\frac{1}{8\alpha}-1}\mathbb{1}_{]0,1[}(y) \text{ et } \mathbb{E}(Y) = \frac{1}{\sqrt{1+8\alpha}}}$.

---

32. (**) Une puce M se promène dans une sphère de centre O et de rayon R. La probabilité que la puce se trouve dans une portion de la sphère est proportionnelle au volume de cette portion.
Déterminer la loi de la distance OM ainsi que son espérance.

Soit X la distance de M à O, $0 \leq X \leq R$ avec $P([X \leq x]) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \leq 0 \\ \left(\frac{x}{R}\right)^3 & \text{si } 0 < x < R \\ 1 & \text{si } x \geq R \end{cases}$

donc $\boxed{f_X(x) = \dfrac{3x^2}{R^3}\, 1\!\!1_{]0,R[}(x)}$.

$\mathbb{E}(X) = \int x f_X(x)\, dx = \frac{3}{R^3}\int_0^R x^3\, dx$, soit $\boxed{\mathbb{E}(X) = \frac{3}{4}R}$.

---

33. (∗∗) Soit X une v.a.r. de fonction de répartition F continue et strictement croissante et soit $Y = F(X)$.
Déterminer la fonction de répartition de Y et en déduire la loi de Y.

$F_Y(y) = P([Y \leq y]) = P([F(X) \leq y])$. F est continue et strictement croissante avec $\lim\limits_{-\infty} F = 0$ et $\lim\limits_{+\infty} F = 1$ donc F est une bijection strictement croissante de $\mathbb{R}$ sur $]0,1[$. Ainsi, $F_Y(y) = 0$ si $y \leq 0$, $F_Y(y) = 1$ si $y \geq 1$ et si $y \in]0,1[$,

$$F_Y(y) = P([X \leq F^{-1}(y)]) = F(F^{-1}(y)) = y$$

donc $F_Y(y) = y 1\!\!1_{]0,1[}(y) + 1\!\!1_{[1,+\infty[}(y)$ et $f_Y(y) = 1\!\!1_{]0,1[}(y)$: $\boxed{Y \text{ suit la loi uniforme sur }]0,1[}$.

---

34. (∗) Soit X une v.a.r. de densité f nulle sur $]-\infty, 0[$. On suppose qu'il existe λ tel que $\int_0^{+\infty} f(t)\, e^{\lambda t}\, dt$ soit convergente.

1. Montrer que pour tout $\alpha \in [0, \lambda]$, $\mathbb{E}(e^{\alpha x})$ existe.
2. Montrer qu'alors $P([X \geq a]) \leq e^{-a\alpha}\mathbb{E}(e^{\alpha x})$ pour tout $a > 0$.

---

1. $\mathbb{E}(e^{\alpha X}) = \int_0^{+\infty} f(t)e^{\alpha t}\, dt$ mais $|f(t)e^{\alpha t}| \leq f(t)e^{\lambda t}$ pour $t > 0$ et $\int_0^{+\infty} f(t)e^{\lambda t}\, dt$ est convergente, donc $\boxed{\mathbb{E}(e^{\alpha X}) \text{ existe}}$.

2. $P([X \geq a]) = \int_a^{+\infty} f(t)\, dt$ et

$$\begin{aligned} \mathbb{E}(e^{\alpha X}) &= \int_0^{+\infty} f(t)e^{\alpha t}\, dt = \int_0^a f(t)e^{\alpha t}\, dt + \int_a^{+\infty} f(t)e^{\alpha t}\, dt \\ &\geq \int_a^{+\infty} f(t)e^{\alpha t}\, dt \geq e^{\alpha a}\int_a^{+\infty} f(t)\, dt \end{aligned}$$

d'où $\boxed{P([X \geq a]) \leq e^{-\alpha a}\mathbb{E}(e^{\alpha X})}$ pour tout $a > 0$.

---

35. (∗) Soit X une v.a.r. de densité f nulle sur $]-\infty, 0[$ et soit Y la v.a.r. égale à la partie entière de X.

1. Exprimer la loi de Y en fonction de celle de X.
2. Montrer que $\mathbb{E}(Y)$ existe si et seulement si $\mathbb{E}(X)$ existe et qu'alors $\mathbb{E}(Y) \leq \mathbb{E}(X) \leq \mathbb{E}(Y) + 1$.

---

1. $Y(\Omega) = \mathbb{N}$ et, pour tout $k \in \mathbb{N}$, $P([Y = k]) = P([\mathbb{E}(X) = k]) = P([k \leq X < k+1])$, soit

$$\boxed{P([Y = k]) = \int_k^{k+1} f(x)dx}.$$

2. On a, pour tout $\omega \in \Omega$, $Y(\omega) \leq X(\omega) < Y(\omega)+1$:
• Si $\mathbb{E}(X)$ existe, alors $\mathbb{E}(Y)$ existe car $0 \leq Y \leq X$;
• Si $\mathbb{E}(Y)$ existe, alors $\mathbb{E}(X)$ existe car $0 \leq X < Y+1$, avec $\mathbb{E}(Y+1) = \mathbb{E}(Y)+1$.
Donc $\mathbb{E}(Y)$ existe si et seulement si $\mathbb{E}(X)$ existe, et alors $\boxed{\mathbb{E}(Y) \leq \mathbb{E}(X) \leq \mathbb{E}(Y)+1}$.

---

36. (∗∗) Même exercice que l'exercice 164 si X suit:

1. la loi exponentielle $\mathcal{E}(\lambda)$;
2. la loi normale $N(m, \sigma^2)$;
3. la loi de Laplace de densité f définie par $f(x) = \frac{1}{2}\, e^{-|x|}$.

---

1. en posant $u = \lambda x$, on a $\mathbb{E}(X) = \int_0^{+\infty} \lambda e^{-\lambda x} x\, dx = \frac{1}{\lambda}\int_0^{+\infty} u e^{-u}\, du = \frac{\Gamma(2)}{\lambda} = \frac{1}{\lambda} = m$

$$\mathbb{E}(X^2) = \int_0^{+\infty} \lambda e^{-\lambda x} x^2\, dx = \frac{1}{\lambda^2}\int_0^{+\infty} u^2 e^{-u}\, du = \frac{\Gamma(3)}{\lambda^2} = \frac{2}{\lambda^2}$$

$$\mathbb{E}(X^3) = \int_0^{+\infty} \lambda e^{-\lambda x} x^3\, dx = \frac{1}{\lambda^3}\int_0^{+\infty} u^3 e^{-u}\, du = \frac{\Gamma(4)}{\lambda^3} = \frac{6}{\lambda^3}$$

$$\mathbb{E}(X^4) = \int_0^{+\infty} \lambda e^{-\lambda x} x^4\, dx = \frac{1}{\lambda^4}\int_0^{+\infty} u^4 e^{-u}\, du = \frac{\Gamma(5)}{\lambda^4} = \frac{24}{\lambda^4}$$

$$\mathbb{E}((X-m)^2) = \mathbb{E}(X^2) - \mathbb{E}(X)^2 = \frac{2}{\lambda^2} - \frac{1}{\lambda^2} = \frac{1}{\lambda^2}$$

$$\mathbb{E}((X-m)^3) = \mathbb{E}(X^3 - 3mX^2 + 3m^2X - m^3) = \frac{6}{\lambda^3} - \frac{6}{\lambda^3} + \frac{3}{\lambda^3} - \frac{1}{\lambda^3} = \frac{2}{\lambda^3}$$

$$\begin{aligned}\mathbb{E}((X-m)^4) &= \mathbb{E}(X^4 - 4mX^3 + 6m^2X^2 - 4mX^3 + X^4) \\ &= \frac{24}{\lambda^4} - \frac{24}{\lambda^4} + \frac{12}{\lambda^4} - \frac{4}{\lambda^4} + \frac{1}{\lambda^4} = \frac{9}{\lambda^4}.\end{aligned}$$

Ainsi, $\boxed{\gamma = 2 \text{ et } \delta = 9}$.

2. $\mathbb{E}((X-m)^3) = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-m)^2}{2\sigma^2}} (x-m)^3\, dx \underset{u=\frac{x-m}{\sigma}}{=} \sigma^3 \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} u^3\, e^{-\frac{u^2}{2}}\, du = 0$ (intégrale d'une fonction impaire), donc $\boxed{\gamma = 0}$. De même,

$$\begin{aligned}\mathbb{E}((X-m)^4) &= \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-m)^2}{2\sigma^2}} (x-m)^4\, dx \underset{u=\frac{x-m}{\sigma}}{=} \sigma^4 \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} u^4\, e^{-\frac{u^2}{2}}\, du \\ &= \frac{\sigma^4}{\sqrt{2\pi}} \left(\left[-u^3 e^{-\frac{u^2}{2}}\right]_{-\infty}^{+\infty} + 3\int_{-\infty}^{+\infty} u^2\, e^{-\frac{u^2}{2}}\, du \right) = 3\sigma^4\end{aligned}$$

donc $\boxed{\delta = 3}$.

3. f étant une fonction paire, $x \mapsto xf(x)$ et $x \mapsto x^3 f(x)$ sont impaires et donc $\mathbb{E}(X) = \mathbb{E}(X^3) = 0$.

$\mathbb{E}(X^2) = \int_0^{+\infty} x^2 e^{-x}\, dx = \Gamma(3) = 2$ et $\mathbb{E}(X^4) = \int_0^{+\infty} x^4 e^{-x}\, dx = \Gamma(5) = 24$ donc $\sigma^2 = 2$, $\boxed{\gamma = 0 \text{ et } \delta = 6}$.

---

37. $(*)$ Calculer $\mathbb{E}(X)$ et $V(X)$ lorsque X suit la loi Gamma de densité f définie pour $a > 0$ et $\lambda > 0$ par:

$$f(x) = \frac{\lambda^a}{\Gamma(a)}\, e^{-\lambda x}\, x^{a-1}\, \mathbb{I}_{]0,+\infty[}(x)$$

$\mathbb{E}(X) = \frac{\lambda^a}{\Gamma(a)} \int_0^{+\infty} x^a e^{-\lambda x}\, dx = \frac{\lambda^a}{\Gamma(a)} \times \frac{\Gamma(a+1)}{\lambda^{a+1}}$ avec $\Gamma(a+1) = a\Gamma(a)$ et $\boxed{\mathbb{E}(X) = \frac{a}{\lambda}}$.
$\mathbb{E}(X^2) = \frac{\lambda^a}{\Gamma(a)} \int_0^{+\infty} x^{a+1} e^{-\lambda x}\, dx = \frac{\lambda^a}{\Gamma(a)} \times \frac{\Gamma(a+2)}{\lambda^{a+2}}$ avec $\Gamma(a+2) = (a+1)a\Gamma(a)$ donc $\mathbb{E}(X^2) = \frac{a(a+1)}{\lambda^2}$ et $\boxed{\mathrm{var}(X) = \frac{a}{\lambda^2}}$.

---

38. $(*)$ Soient p et $q \in \mathbb{R}_+^*$. On pose $\beta(p,q) = \int_0^1 t^{p-1}(1-t)^{q-1}\, dt$.

1. Justifier l'existence de $\beta(p,q)$. En supposant $q > 1$, établir une relation de récurrence entre $\beta(p,q)$ et $\beta(p+1, q-1)$ et en déduire la valeur de $\beta(p,q)$ lorsque p et $q \in \mathbb{N}^*$.
2. Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par:

$$f(x) = \frac{1}{\beta(p,q)}\, x^{p-1}(1-x)^{q-1}\, \mathbb{I}_{]0,1[}(x)$$

Vérifier que f est une densité.

3. Soit X une v.a.r. de densité f. Montrer l'existence de $\mathbb{E}(X)$ et de $V(X)$ et les calculer lorsque p et $q \in \mathbb{N}^*$.

---

1. Au voisinage de 0, $t^{p-1}(1-t)^{q-1} \sim t^{p-1}$. Il y a convergence pour $p - 1 > -1$, c'est-à-dire pour $p > 0$.

Au voisinage de 1, $t^{p-1}(1-t)^{q-1} \sim (1-t)^{q-1}$. Il y a convergence pour $q - 1 > -1$, c'est-à-dire pour $q > 0$.

On procède à une intégration par parties en posant $u = t^p$ et $v' = (1-t)^{q-2}$

$$\beta(p+1, q-1) = \int_0^1 t^p (1-t)^{q-2}\, dt = \left[-\frac{t^p (1-t)^{q-1}}{q-1} \right]_0^1 + \frac{p}{q-1} \int_0^1 t^{p-1}(1-t)^{q-1}\, dt$$

donc $\boxed{\beta(p+1, q-1) = \frac{p}{q-1}\beta(p,q)}$.

$$\begin{aligned}
\beta(p,q) &= \frac{q-1}{p}\beta(p+1,q-1) = \frac{(q-1)(q-2)}{p(p+1)}\beta(p+2,q-2) \\
&= \frac{(q-1)(q-2)\cdots 1}{p(p+1)\cdots(p+q-2)}\beta(p+q-1,1) = \frac{(q-1)(q-2)\cdots 1}{p(p+1)\cdots(p+q-2)} \int_0^1 t^{p+q-2}\, dt \\
&= \frac{(q-1)(q-2)\cdots 1}{p(p+1)\cdots(p+q-2)(p+q-1)} = \frac{(q-1)!(p-1)!}{(p+q-1)!}
\end{aligned}$$

Ainsi, $\boxed{\beta(p,q) = \frac{(q-1)!(p-1)!}{(p+q-1)!} \text{ si } p \in \mathbb{N}^* \text{ et } q \in \mathbb{N}^*}$.

(Plus généralement, $\beta(p,q) = \frac{\Gamma(p)\Gamma(q)}{\Gamma(p+q)}$).

2. $f \geq 0$, f est continue sur $\mathbb{R}$ et $\int f(x)\,dx = 1$ donc f est bien une densité.

3. $\mathbb{E}(X) = \frac{1}{\beta(p,q)} \int_0^1 t^p (1-t)^{q-1}\,dt = \frac{\beta(p+1,q)}{\beta(p,q)}$,

$$\mathbb{E}(X^2) = \frac{1}{\beta(p,q)} \int_0^1 t^{p+1}(1-t)^{q-1}\,dt = \frac{\beta(p+2,q)}{\beta(p,q)}.$$

Si $p \in \mathbb{N}^*$ et $q \in \mathbb{N}^*$, $\mathbb{E}(X) = \frac{p!(q-1)!}{(p+q)!} \frac{(p+q-1)!}{(p-1)!(q-1)!} = \frac{p}{p+q}$

$$\mathbb{E}(X^2) = \frac{(p+1)!(q-1)!}{(p+q+1)!} \frac{(p+q-1)!}{(p-1)!(q-1)!} = \frac{p(p+1)}{(p+q)(p+q-1)}$$

et $\mathrm{var}(X) = \mathbb{E}(X^2) - \mathbb{E}(X)^2 = \frac{p}{p+q}\left[\frac{p+1}{p+q-1} - \frac{p}{p+q}\right] = \frac{p(p^2+p+pq+q-p^2-pq-p)}{(p+q)^2(p+q+1)}$ d'où finalement

$$\boxed{\mathbb{E}(X) = \frac{p}{p+q} \text{ et } \mathrm{var}(X) = \frac{pq}{(p+q)^2(p+q+1)}}.$$

---

39. (**) Soit X une v.a.r. de densité f définie par:

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}x}\, e^{-\frac{1}{2}(\ln x - 1)^2}\, \mathbb{1}_{]0,+\infty[}(x)$$

1. Vérifier que f est une densité de probabilité et exprimer la fonction de répartition de X en fonction de celle d'une v.a.r. de loi normale $N(0,1)$.
2. Calculer $\mathbb{E}(X)$ et $V(X)$.
3. Soit U une v.a.r. de loi normale $N(m,\sigma^2)$ et soit $Z = e^U$. Calculer $\mathbb{E}(U)$ et $\mathrm{var}(U)$.

---

1. $f \geq 0$, f est continue sur $\mathbb{R}^*$ et, en posant $u = \ln x - 1$,

$$\int f(x)\,dx = \int_0^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}x}\, e^{-\frac{1}{2}(\ln x-1)^2}\,dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{u^2}{2}}\,du = 1$$

(intégrale de la densité de la loi $N(0,1)$), donc f est bien une densité.

Si $x \leq 0$, $F_X(x) = 0$ et si $x > 0$,

$$F_X(x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)\,dt = \int_0^x \frac{1}{\sqrt{2\pi}t}\, e^{-\frac{1}{2}(\ln t-1)^2}\,dt = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\ln x - 1} e^{-\frac{u^2}{2}}\,du = \Phi(\ln x - 1)$$

où Φ est la fonction de répartition de la loi normale $N(0,1)$.

Ainsi, $\boxed{F_X(x) = \Phi(\ln x - 1)\mathbb{1}_{]0,+\infty[}(x)}$.

2. Pour le calcul de $\mathbb{E}(X)$ et de $\mathbb{E}(X^2)$, on fait le changement de variable $u = \ln x$, $x = e^u$, $dx = e^u\,du$.

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}(X) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^{+\infty} e^{-\frac{1}{2}(\ln x-1)^2}\,dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^u e^{-\frac{1}{2}(u-1)^2}\,du \\
&= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{1}{2}(u^2-2u+1-2u)}\,du = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{1}{2}[(u-2)^2-3]}\,du = e^{3/2}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\mathbb{E}(X^2) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_0^{+\infty} e^{-\frac{1}{2}(\ln x-1)^2}\,dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{2u}e^{-\frac{1}{2}(u-1)^2}\,du \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{1}{2}(u^2-2u+1-4u)}\,du = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{1}{2}[(u-3)^2-8]}\,du = e^4\end{aligned}$$

donc $\boxed{\mathbb{E}(X) = e^{3/2} \text{ et } \mathrm{var}(X) = e^4 - e^3}$.

3. $Z = e^U$ avec $f_U(u) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{(u-m)^2}{2\sigma^2}}$

$$\begin{aligned}\mathbb{E}(Z) &= \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty} e^u e^{-\frac{(u-m)^2}{2\sigma^2}}\,du = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{1}{2\sigma^2}(u^2-2mu+m^2-2\sigma^2 u)}\,du \\ &= \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{1}{2\sigma^2}[(u-(m+\sigma^2))^2+m^2-m^2-\sigma^4-2m\sigma^2]}\,du = e^{m+\frac{\sigma^2}{2}}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\mathbb{E}(Z^2) &= \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{2u} e^{-\frac{(u-m)^2}{2\sigma^2}}\,du = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{1}{2\sigma^2}(u^2-2mu+m^2-4\sigma^2 u)}\,du \\ &= \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{1}{2\sigma^2}[(u-(m+2\sigma^2))^2+m^2-m^2-4\sigma^4-4m\sigma^2]}\,du = e^{2m+2\sigma^2}\end{aligned}$$

donc $\boxed{\mathbb{E}(Z) = e^{m+\frac{\sigma^2}{2}} \text{ et } \mathrm{var}(U) = e^{2m+2\sigma^2} - e^{2m+\sigma^2}}$.

---

40. ($*$) Soient a et α deux réels vérifiant $a > 0$ et $\alpha > 1$ et soit f la fonction définie par:

$$f(x) = \frac{\lambda}{x^\alpha}\ \mathbb{I}_{[a,+\infty[}.$$

1. Déterminer λ pour que f soit la densité d'une v.a.r. X.
2. Déterminer, lorsqu'ils existent, les moments d'ordre r de X.

---

1. f est positive pour $\lambda \geq 0$, continue sur $\mathbb{R} \setminus \{a\}$ et

$$\int f(x)\,dx = \lambda\int_a^{+\infty} x^{-\alpha}\,dx = \lambda\left[\frac{x^{-\alpha+1}}{-\alpha+1}\right]_a^{+\infty} = \frac{\lambda}{\alpha-1}\frac{1}{a^{\alpha-1}}$$

donc $\boxed{\lambda = (\alpha-1)a^{\alpha-1}}$.

2. $\mathbb{E}(X^r) = \lambda\int_a^{+\infty} x^{r-\alpha}\,dx$ existe pour $\alpha - r > 1$, c'est-à-dire $\boxed{r < \alpha - 1}$. On a alors

$$\mathbb{E}(X^r) = \lambda\left[\frac{x^{r-\alpha+1}}{r-\alpha+1}\right]_a^{+\infty} = \lambda\frac{a^{r-\alpha+1}}{\alpha-1-r} = \frac{(\alpha-1)a^r}{\alpha-1-r}.$$

---

41. ($*$) Soit $\sigma > 0$ et soit X une v.a.r. de densité f définie par:

$$f(x) = \frac{x}{\sigma^2}\ e^{-x^2/2\sigma^2}\ \mathbb{I}_{[0,+\infty[}(x)$$

Calculer $P(-1 \leq X \leq 1)$, $\mathbb{E}(X)$, $V(X)$ et déterminer la loi de X^2.

$$P([-1 \leq X \leq 1]) = \int_{-1}^{1} f(x)\,dx = \int_0^1 \frac{x}{\sigma^2} e^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}}\,dx = \left[-e^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}}\right]_0^1 = 1 - e^{-\frac{1}{2\sigma^2}}.$$

$$\mathbb{E}(X) = \int_0^{+\infty} \frac{x^2}{\sigma^2} e^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}}\,dx = \frac{1}{2\sigma^2}\int_{-\infty}^{+\infty} x^2 e^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}}\,dx \underset{u=\frac{x}{\sigma}}{=} \frac{\sigma}{2}\int_{-\infty}^{+\infty} u^2 e^{-\frac{u^2}{2}}\,du = \sqrt{\frac{\pi}{2}}\sigma.$$

$$\mathbb{E}(X^2) = \int_0^{+\infty} \frac{x^3}{\sigma^2} e^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}}\,dx = \left[-xe^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}}\right]_0^{+\infty} + 2\int_0^{+\infty} xe^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}}\,dx = \left[-2\sigma^2 e^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}}\right]_0^{+\infty} = 2\sigma^2$$

donc $\boxed{\mathbb{E}(X) = \sqrt{\frac{\pi}{2}}\sigma \text{ et } \mathrm{var}(X) = \sigma^2\left(2 - \frac{\pi}{2}\right)}$.

$$P([X^2 \leq y]) = P([-\sqrt{y} \leq X \leq \sqrt{y}])\,\mathbb{1}_{]0,+\infty[}(y) = (F_X(\sqrt{y}) - F_X(-\sqrt{y}))\,\mathbb{1}_{]0,+\infty[}(y)$$

$$f_{X^2}(y) = \frac{1}{2\sqrt{y}} f_X(\sqrt{y})\mathbb{1}_{]0,+\infty[}(y) = \frac{1}{2\sqrt{y}}\frac{\sqrt{y}}{\sigma^2}e^{-\frac{y}{2\sigma^2}}\,\mathbb{1}_{]0,+\infty[}(y) = \frac{1}{2\sigma^2}e^{-\frac{y}{2\sigma^2}}\,\mathbb{1}_{]0,+\infty[}(y)$$

donc $\boxed{X^2 \text{ suit la loi exponentielle } \mathcal{E}\left(\frac{1}{2\sigma^2}\right)}$.