Analyse des données
Chapitre 3 : Analyse factorielle des correspondances (AFC)

Auteur : Sandrine Casanova

Principe :
Ce document constitue des notes de cours illustrées sur un jeu de données. Chaque concept est complété par un exemple qui contient des commentaires de sorties obtenues avec le logiciel R (package FactoMineR, fonction CA) données en annexe. Les sorties R sont repérées par des numéros (AFC1, AFC2,...,AFC16). Les sorties SAS commentées, ainsi que le code SAS, sont également fournis à la fin du document. SAS et données en annexe.

1 Généralités

1.1 Objectif général

– Objectif identique à celui de l'ACP : identifier un petit nombre de dimensions pour simplifier et interpréter un ensemble de données peu lisibles au premier abord.
– Différence :
  - l'AFC ne concerne pas le même type de données que l'ACP.
  - l'AFC traite des *tableaux de contingence*, résultat d'un tri croisé entre 2 variables qualitatives X et Y.

1.2 Tableaux de contingence

Exemple
- Un chef de produit désire cibler la clientèle d'une nouvelle lessive écologique. Il voudrait notamment savoir quelle est la tranche d'âge la plus réceptive à ce produit.

- Echantillon de 391 personnes.

- Tri croisé entre les différentes classes d'âge (six tranches codées 1 pour les 15-19 ans, 2 pour les 20-24 ans, 3 pour les 25-34 ans, 4 pour les 35-44 ans, 5 pour les 45-59 ans et 6 pour les 60 ans et plus) des répondants et une variable "Achat de produits écologiques" comportant 4 modalités (systématiquement, la plupart du temps, occasionnellement, jamais).

Tableau variable/variable avec 2 variables qualitatives (âge et fréquence d'achat) à respectivement $L = 6$ et $C = 4$ modalités

Exemple 1 *Voir AFC1*

Question : le comportement d'achat de produits écologique est-il lié à l'âge ?

- le χ^2 permet de tester cette hypothèse.

- l'AFC propose une analyse graphique pour approfondir l'analyse lorsque l'hypothèse d'indépendance est rejetée.

Notations :
- n_{ij} : effectif conjoint,

- $n_{i.} = \sum_{j=1}^{C} n_{ij}$, $n_{.j} = \sum_{i=1}^{L} n_{ij}$.

Remarque 1 *Contrairement au tableau individus/variables, les lignes et colonnes en AFC jouent un rôle symétrique (pas de notion d'indinvidus et de variables mais uniquement des* modalités*).*

2 Le χ^2 de contingence

2.1 Mesure de la dépendance

– En probabilité, l'indépendance se traduit par

$$p_{ij} = p_{i.} \times p_{.j}$$

– avec
$p_{ij} = \frac{n_{ij}}{n}$
$p_{i.} = \frac{n_{i.}}{n}$
$p_{.j} = \frac{n_{.j}}{n}$
L'indépendance correspond à un tableau de données tel que

$$\frac{n_{ij}}{n} = \frac{n_{i.}}{n} \times \frac{n_{.j}}{n}$$

$$\Leftrightarrow n_{ij} = \frac{n_{i.} \times n_{.j}}{n} \ \forall i, \forall j$$

– Dans la réalité, les n_{ij} sont donnés.

– Le χ^2 permet de mesurer l'écart entre les données réelles et des données indépendantes.

$$\chi^2 = \sum_{i=1}^{L} \sum_{j=1}^{C} \frac{(n_{ij} - \frac{n_{i.}n_{.j}}{n})^2}{\frac{n_{i.}n_{.j}}{n}}$$

Test :
– H_0 : X et Y sont indépendantes

– On rejette H_0 au niveau $\alpha = 5\%$ si
$$\chi^2_{\text{obs}} > \chi^2_{5\%}(k)$$
où $k = (L-1)(C-1)$.

Exemple 2 *Voir AFC2é : $p = 1.425.10^{-5} < 5\%$ donc on rejette $H0$ et les variables sont liées.*

2.2 Analyse des contributions au χ^2

– Supposons que l'on **rejette** H_0 et que les deux variables sont donc **dépendantes**.

– On cherche alors à expliquer cette dépendance.

– Le χ^2 est une somme de nombres positifs.

– On peut s'intéresser aux cases qui ont le plus contribué au χ^2.

⇔ aux cases qui ont donné des
$$\alpha_{ij} \equiv \frac{(n_{ij} - \frac{n_{i.}n_{.j}}{n})^2}{\frac{n_{i.}n_{.j}}{n}}$$
élevés.

– Les α_{ij} sont appelés **contributions** au χ^2 $(= \sum_{i=1}^{L}\sum_{j=1}^{C}\alpha_{ij})$.

Analyser les contributions

⇔ commenter les grands α_{ij}

⇔ expliquer d'où provient l'écart à l'indépendance (fortes contributions au χ^2) et dans quel sens est cet écart (comparaison entre effectif observé et effectif attendu).

Exemple 3 *Voir AFC4 et AFC3*
- *6× Syst +*
- *1× Lpdt -*
- *6× Occas +*
- *5× Syst -*

Analyse intéressante mais :
– lecture difficile du tableau

– ne permet pas de comparer les lignes entre elles ou les colonnes entre elles

3 Nuages de points associés à un tableau de contingence

3.1 Tableaux des profils lignes et des profils colonnes

- Profils lignes : $\frac{n_{ij}}{n_{i.}}$

$\Rightarrow$ Tableau des profils lignes qui donne pour chaque ligne la répartition selon les colonnes.

$\Rightarrow$ On obtient un tableau $L \times C$ tel que la somme des lignes est égale à 100% et l'on considère que l'on a L individus et C variables.

- Profils colonnes : $\frac{n_{ij}}{n_{.j}}$

$\Rightarrow$ Tableau des profils colonnes qui donne pour chaque colonne la répartition selon les lignes.

$\Rightarrow$ On obtient un tableau avec C individus et L variables.

Exemple 4 *Voir AFC5 et AFC6*
Tableau des Profils lignes
- *Une ligne : distribution pour une classe d'âge, des fréquences de consommation de produits écologiques*

- *Première ligne : comment se répartissent les 15-19 ans, ...*

Tableau des Profils colonnes
- *Une colonne : distribution, pour une fréquence d'achat donnée, des classes d'âge.*

- *Première colonne : comment se répartissent les consommateurs systématiques, ...*

3.2 Point moyen des profils lignes et des profils colonnes

- Le point moyen (le centre de gravité du nuage de points) des profils lignes est noté g_L ($\in \mathbb{R}^C$).

$$g_{Lj} = \sum_{i=1}^{L} \frac{n_{ij}}{n_{i.}} \times \frac{n_{i.}}{n} = \frac{n_{.j}}{n}$$

$\Rightarrow$ C'est le profil marginal.

- Le point moyen des profils colonnes est noté g_C ($\in \mathbb{R}^L$).

$$g_{Ci} = \frac{n_{i.}}{n}$$

- L'étude de la forme de ces nuages permet de rendre de compte de la structure des écarts à l'indépendance.

$\Rightarrow$ Il faut choisir une métrique pour chacun des espaces.

- Remarque :

  Dans le cas de l'indépendance,

$$\frac{n_{ij}}{n_{i.}} = \frac{n_{.j}}{n} \text{ et } \frac{n_{ij}}{n_{.j}} = \frac{n_{i.}}{n}$$

  $\Rightarrow$ les deux nuages sont réduits chacun à un point.

3.3 Distance du χ^2

1. **Entre 2 profils lignes i et i'**

$$d^2_{\chi^2}(i, i') = \sum_{j=1}^{C} \frac{n}{n.j}(\frac{n_{ij}}{n_{i.}} - \frac{n_{i'j}}{n_{i'.}})^2$$

   - $d^2_{\chi^2}$ est différent de la distance euclidienne à cause de terme de pondération $\frac{n}{n.j}$

   - La métrique usuelle favorise les colonnes à forts effectifs ($n_{.j}$ grand) pour lesquelles les fortes variations sont fréquentes.

   - La distance du χ^2 évite ce phénomène en pondérant plus faiblement les colonnes à fort effectif.

- $d^2_{\chi^2}$ est appelée distance du χ^2 car avec cette distance, l'inertie totale du nuage des profils-lignes (au sens de l'information contenue dans ce nuage) est définie par :

$$I_L = \sum_{i=1}^{L} \frac{n_{i.}}{n} d^2_{\chi^2}(i, g_L)$$

$$\Rightarrow I_L = \frac{\chi^2}{n}$$

Remarque 2 *On peut définir l'inertie du profil (ou modalité) i par :*

$$I(i) = \frac{n_{i.}}{n} d^2_{\chi^2}(i, g_L)$$

D'où

$$I_L = \sum_{i=1}^{L} I(i)$$

2. **Entre 2 profils colonnes j et j'**

$$d^2_{\chi^2}(j, j') = \sum_{i=1}^{L} \frac{n}{ni.} (\frac{n_{ij}}{n_{.j}} - \frac{n_{ij'}}{n_{.j'}})^2$$

$\Rightarrow$ Inertie du nuage des profils colonnes

$$I_C = \frac{\chi^2}{n} = I_L = I$$

Remarque 3 *On peut définir l'inertie du profil (ou modalité) j par :*

$$I(j) = \frac{n_{.j}}{n} d^2_{\chi^2}(j, g_C)$$

D'où

$$I_C = \sum_{j=1}^{C} I(j)$$

Exemple 5 *Voir tableaux AFC 11 et AFC 15*

4 Étapes de l'analyse

4.1 Calculs de type ACP

- L'AFC est une méthode de type "ACP".
- On réalise 2 ACP, une sur le tableau des profils lignes, une sur le tableau des profils colonnes.
- On calcule les valeurs propres et les vecteurs propres des matrices S et T (à la place de la matrice des corrélations R) définies par :

$$S_{i,l} = \sum_{j=1}^{C} \frac{n_{ij}}{\sqrt{n_{i.}n_{.j}}} \times \frac{n_{lj}}{\sqrt{n_{l.}n_{.j}}}$$

$$T_{j,k} = \sum_{i=1}^{L} \frac{n_{ij}}{\sqrt{n_{i.}n_{.j}}} \times \frac{n_{ik}}{\sqrt{n_{i.}n_{.k}}}$$

– Propriétés de l'AFC :

  - Les résultats de l'ACP sur le tableau des profils colonnes peuvent être obtenus à partir des résultats de l'ACP sur le tableau des profils lignes.

  - On obtient les mêmes valeurs propres dans les 2 ACP.

– On obtient un nombre de valeurs propres égal à $\min(L, C) - 1$

  avec $1 > \lambda_1 > \lambda_2 > ... > \lambda_{\min(L,C)-1}$

– Les valeurs propres ont la même notion d'inertie qu'en ACP :

$$I = \sum_{i=1}^{\min(L,C)-1} \lambda_i$$

– Inertie associée à l'axe principal i : λ_i

Exemple 6 *Voir AFC7*

- $L = 6$, $C = 4$, $\min(L, C) = 4$, $\min(L, C) - 1 = 3$

- $I = \sum_{i=1}^{\min(L,C)-1} \lambda_i = 0.1267$

Remarque 4 *R ne donne pas directement l'inertie (il faut additionner les valeurs propres) mais SAS la donne*

4.2 Choix de la dimension

– On obtient les mêmes valeurs propres pour les lignes et les colonnes ⇒ on choisit une seule fois la dimension.

– Centrer et réduire les variables n'a aucun sens en AFC ⇒ la valeur 1 ne représente rien ⇔ le critère de Kaiser n'a pas de sens.

⇒ il faut utiliser le critère de la part d'inertie expliquée.

Exemple 7 *Voir AFC7*

On choisit de retenir k=2 axes avec plus de 84% d'inertie expliquée.

4.3 Interprétation des axes : les contributions

– En AFC, on dispose de variables qualitatives

⇒ pas de notion de corrélations

⇒ pas de graphique des corrélations

– Pour interpréter une nouvelle variable, on utilise la notion de contribution $CTR_i(j)$ d'un profil j à l'inertie d'un axe i et on repère les fortes contributions.

Remarque 5 *Pour un axe donné, la somme des contributions des profils (lignes ou colonnes) est égale à 100%.*

Exemple 8 *Voir AFC13 pour les contributions des profils-colonnes*
- *1^{er} axe : Syst*

- *$2^{ème}$ axe : LPDT*

Voir AFC9 pour les contributions des profils-lignes
- *1^{er} axe : 6*

- *$2^{ème}$ axe : 1*

4.4 Représentation graphique

– On retient k (petit) axes principaux ou axes factoriels sur lesquels on projette toutes les modalités.

– Dans SAS, Les coordonnées des individus après projection sont données par les tableaux *Coordonnées des lignes et coordonnées des colonnes.*

Exemple 9 *Voir tableaux AFC8 et AFC12*

– Il faut donc projeter 2 nuages de points.

- On peut les projeter *successivement* : on obtient 2 graphiques. Sur le graphique des profils lignes, la distance entre 2 profils lignes correspond à la distance du χ^2 entre ces 2 profils.

- On peut les projeter simultanément (ce qui est fait avec R et SAS).

Exemple 10 *Voir AFC16*

Pour interpréter :
– Il faut interpréter la position des profils en prenant en compte l'interprétation des axes.

- Il faut interpreter successivement la proximité des profils lignes puis des profils colonnes.

- Deux profils lignes proches représentent 2 modalités de X avec des repartitions (distributions) suivant les modalités de Y assez semblables.

- Comme en ACP, il ne faut interpréter que les individus bien représentés.

- Même mesure qu'en ACP : % de la norme de l'individu reconstituée sur chacun des axes.

- Ces % sont fournis directement par SAS dans les tableaux *Cosinus carrés pour les points-lignes et cosinus carrés pour les points-colonnes.*

Exemple 11 *Voir AFC10 et AFC14*
- *axe 1 (cos^2>50%) : 2, 6, SYST, OCCAS.*
- *axe 2 (cos^2>25%) :1, 3, 5, LPDT, JAMAIS*

Commentaire de l'AFC
Pour un axe donné, on interprète les profils ayant fortement contibué à l'axe **et** étant bien représentés sur cet axe.
- Axe 1 : Les + de 60 ans sont associés à un effort systématique d'achat de produits écologiques.
- Axe 2 : Les 15-19 ans s'opposent à un comportement régulier d'achat de produits écologiques.

5 Conclusion

Justifications de l'AFC :
- Données sous formes de *tableau de contingence*, i.e. 2 variables qualitatives.

- *Beaucoup de modalités* pour les 2 variables (grand tableau).

- 2 variables qualitatives *dépendantes.*

ANNEXE 1 : SORTIES R (package FactoMineR, fonction CA)

Tableau AFC 1

	syst	lpdt	occas	jamais
1	6	6	24	9
2	2	25	37	6
3	5	17	25	9
4	12	29	37	3
5	3	45	36	12
6	11	19	9	4

Tableau AFC 2

```
        Pearson's Chi-squared test

data:  .Table
X-squared = 49.5509, df = 15, p-value = 1.425e-05
```

Tableau AFC 3

```
> .Test$expected # Expected Counts
```

	syst	lpdt	occas	jamais
1	4.488491	16.22762	19.33504	4.948849
2	6.982097	25.24297	30.07673	7.698210
3	5.585678	20.19437	24.06138	6.158568
4	8.079284	29.20972	34.80307	8.907928
5	9.575448	34.61893	41.24808	10.557545
6	4.289003	15.50639	18.47570	4.728900

Tableau AFC 4

```
> round(.Test$residuals^2, 2) # Chi-square Components
```

	syst	lpdt	occas	jamais
1	0.51	6.45	1.13	3.32
2	3.55	0.00	1.59	0.37
3	0.06	0.51	0.04	1.31
4	1.90	0.00	0.14	3.92
5	4.52	3.11	0.67	0.20
6	10.50	0.79	4.86	0.11

Tableau AFC 5

```
> rowPercents(.Table) # Row Percentages
```

	syst	lpdt	occas	jamais	Total	Count
1	13.3	13.3	53.3	20.0	99.9	45
2	2.9	35.7	52.9	8.6	100.1	70
3	8.9	30.4	44.6	16.1	100.0	56
4	14.8	35.8	45.7	3.7	100.0	81
5	3.1	46.9	37.5	12.5	100.0	96
6	25.6	44.2	20.9	9.3	100.0	43

Tableau AFC 6

```
> colPercents(.Table) # Column Percentages
       syst  lpdt occas jamais
1      15.4   4.3  14.3   20.9
2       5.1  17.7  22.0   14.0
3      12.8  12.1  14.9   20.9
4      30.8  20.6  22.0    7.0
5       7.7  31.9  21.4   27.9
6      28.2  13.5   5.4    9.3
Total 100.0 100.1 100.0  100.0
Count  39.0 141.0 168.0   43.0
```

Tableau AFC 7

```
> res$eig
        eigenvalue percentage of variance cumulative percentage of variance
dim 1 6.257418e-02           4.937646e+01                          49.37646
dim 2 4.405526e-02           3.476343e+01                          84.13989
dim 3 2.009933e-02           1.586011e+01                         100.00000
dim 4 2.031616e-33           1.603122e-30                         100.00000
```

Tableau AFC 8

```
> res$row
$coord
        Dim 1       Dim 2       Dim 3
1 -0.07049537  0.49304658  0.07210591
2 -0.24571980 -0.05282357 -0.12557302
3 -0.08229516  0.13179860  0.10020191
4  0.16344750 -0.01651419 -0.21588418
5 -0.14598104 -0.22618665  0.12648678
6  0.59897998 -0.06554885  0.12274248
```

Tableau AFC 9

```
$contrib
       Dim 1      Dim 2     Dim 3
1  0.9140328 63.5058677  2.977118
2 17.2745370  1.1339108 14.045348
3  1.5501178  5.6472241  7.154541
4  8.8444256  0.1282405 48.036174
5  8.3616538 28.5121909 19.543541
6 63.0552329  1.0725660  8.243279
```

Tableau AFC 10

$cos2

	Dim 1	Dim 2	Dim 3
1	0.01962222	0.959848743	0.02052904
2	0.76488996	0.035348750	0.19976129
3	0.19812006	0.508161086	0.29371885
4	0.36300736	0.003705727	0.63328691
5	0.24087848	0.578281157	0.18084036
6	0.94879569	0.011362613	0.03984170

Tableau AFC 11

$inertia

1	2	3	4	5	6
0.029148007	0.014131968	0.004895887	0.015245770	0.021721477	0.041585661

Tableau AFC 12

> res$col
$coord

	Dim 1	Dim 2	Dim 3
syst	0.69562002	0.2338009	-0.03228070
lpdt	0.04497942	-0.2711430	0.03802493
occas	-0.15842603	0.1086131	-0.11504550
jamais	-0.15943505	0.2526960	0.35407155

Tableau AFC 13

$contrib

	Dim 1	Dim 2	Dim 3
syst	77.132396	12.37606	0.5171211
lpdt	1.165937	60.17852	2.5941660
occas	17.234172	11.50534	28.2937397
jamais	4.467496	15.94009	68.5949732

Tableau AFC 14

$cos2

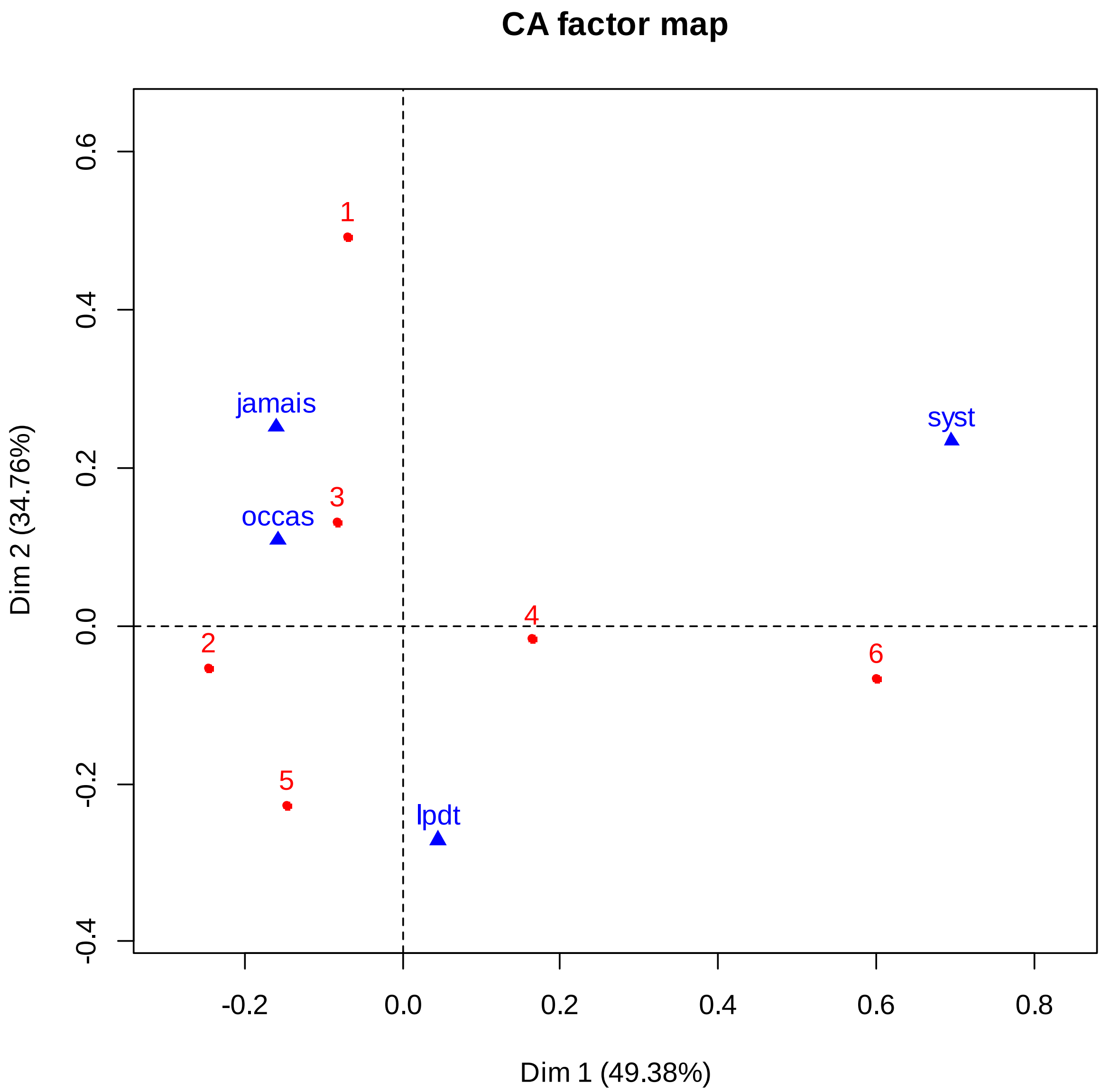
	Dim 1	Dim 2	Dim 3
syst	0.89676480	0.1013040	0.001931169
lpdt	0.02627889	0.9549402	0.018780888
occas	0.50066353	0.2353193	0.264017187
jamais	0.11842788	0.2974974	0.584074717

Tableau AFC 15

$inertia

syst	lpdt	occas	jamais
0.05382121	0.02776279	0.02153970	0.02360507

Graphe AFC 16



Sorties SAS

Tableau AFC1

The CORRESP Procedure

Table de contingence

	syst	lpdt	occas	jamais	Sum
1	6	6	24	9	45
2	2	25	37	6	70
3	5	17	25	9	56
4	12	29	37	3	81
5	3	45	36	12	96
6	11	19	9	4	43
Sum	39	141	168	43	391

Tableau AFC2

Valeurs attendues de la statistique du Khi 2

	syst	lpdt	occas	jamais
1	4.4885	16.2276	19.3350	4.9488
2	6.9821	25.2430	30.0767	7.6982
3	5.5857	20.1944	24.0614	6.1586
4	8.0793	29.2097	34.8031	8.9079
5	9.5754	34.6189	41.2481	10.5575
6	4.2890	15.5064	18.4757	4.7289

Tableau AFC3

Valeurs observées moins valeurs attendues

	syst	lpdt	occas	jamais
1	1.5115	-10.2276	4.6650	4.0512
2	-4.9821	-0.2430	6.9233	-1.6982
3	-0.5857	-3.1944	0.9386	2.8414
4	3.9207	-0.2097	2.1969	-5.9079
5	-6.5754	10.3811	-5.2481	1.4425
6	6.7110	3.4936	-9.4757	-0.7289

Tableau AFC4

Contributions à la statistique du khi-2 totale

	syst	lpdt	occas	jamais	Sum
1	0.5090	6.4461	1.1255	3.3163	11.3969
2	3.5550	0.0023	1.5936	0.3746	5.5256
3	0.0614	0.5053	0.0366	1.3110	1.9143
4	1.9026	0.0015	0.1387	3.9183	5.9611
5	4.5154	3.1129	0.6677	0.1971	8.4931
6	10.5007	0.7871	4.8598	0.1124	16.2600
Sum	21.0441	10.8553	8.4220	9.2296	49.5509

Tableau AFC5

Profils de lignes

	syst	lpdt	occas	jamais
1	0.133333	0.133333	0.533333	0.200000
2	0.028571	0.357143	0.528571	0.085714
3	0.089286	0.303571	0.446429	0.160714
4	0.148148	0.358025	0.456790	0.037037
5	0.031250	0.468750	0.375000	0.125000
6	0.255814	0.441860	0.209302	0.093023

Tableau AFC6

Profils de colonnes

	syst	lpdt	occas	jamais
1	0.153846	0.042553	0.142857	0.209302
2	0.051282	0.177305	0.220238	0.139535
3	0.128205	0.120567	0.148810	0.209302
4	0.307692	0.205674	0.220238	0.069767
5	0.076923	0.319149	0.214286	0.279070
6	0.282051	0.134752	0.053571	0.093023

Tableau AFC7

Décomposition de l'inertie et du Khi 2

Valeur singulière	Inertie principale	Khi 2	Pourcentage	Pourcent. cumulé	10 20 30 40 50 ----+----+----+----+----+---
0.25015	0.06257	24.4665	49.38	49.38	*************************
0.20989	0.04406	17.2256	34.76	84.14	*****************
0.14177	0.02010	7.8588	15.86	100.00	********
Total	0.12673	49.5509	100.00		

Tableau AFC8

Coordonnées des lignes

	Dim1	Dim2
1	-0.0705	0.4930
2	-0.2457	-0.0528
3	-0.0823	0.1318
4	0.1634	-0.0165
5	-0.1460	-0.2262
6	0.5990	-0.0655

Tableau AFC9

Carré des cosinus pour les points des lignes

	Dim1	Dim2
1	0.0196	0.9598
2	0.7649	0.0353
3	0.1981	0.5082
4	0.3630	0.0037
5	0.2409	0.5783
6	0.9488	0.0114

Tableau AFC10 Contributions partielles à l'inertie des points des lignes

	Dim1	Dim2
1	0.0091	0.6351
2	0.1727	0.0113
3	0.0155	0.0565
4	0.0884	0.0013
5	0.0836	0.2851
6	0.6306	0.0107

Tableau AFC11 Coordonnées des colonnes

	Dim1	Dim2
syst	0.6956	0.2338
lpdt	0.0450	-0.2711
occas	-0.1584	0.1086
jamais	-0.1594	0.2527

Tableau AFC12 Carré des cosinus pour les points des colonnes

	Dim1	Dim2
syst	0.8968	0.1013
lpdt	0.0263	0.9549
occas	0.5007	0.2353
jamais	0.1184	0.2975

Tableau AFC13 Contributions partielles à l'inertie des points des colonnes

	Dim1	Dim2
syst	0.7713	0.1238
lpdt	0.0117	0.6018
occas	0.1723	0.1151
jamais	0.0447	0.1594

Graphe AFC14

```
      Dim2 |
       0.5 |           1
           |
           |
           |
           |         j
           |                               s
           |
           |         o 3
           |
       0.0 |                 4
           |       2                     6
           |
           |
           |         5
           |              l
           |
           |
           |
      -0.5 |
          ------------------------------------------------
        -0.5          0.0          0.5          1.0    Dim 1
```

Code SAS

```
/*AFC avec sauvegarde des résultats*/
proc corresp data=anadon.lessive out=anadon.resafc all;
var syst lpdt occas jamais;
id age;
run;
/*dessin*/
proc plot data=anadon.resafc;
plot dim2*dim1=age /hpos=40 vpos=20;
run;
```

Data Mining 1

Chapitre 3 (suite) : Analyse factorielle des correspondances multiples (AFCM)

Principe :
Ce document constitue des notes de cours illustrées sur un jeu de données. Chaque concept est complété par un exemple qui contient des commentaires de sorties obtenues avec le logiciel R (package FactoMineR, fonction MCA) données en annexe. Les sorties R sont repérées par des numéros (AFCM1, AFC2,...,AFCM15).

1 Généralités

1.1 Objectif général

- L'AFCM est une généralisation de l'AFC pour l'étude de $p > 2$ variables qualitatives.
- Objectif identique à celui de l'AFC : étude des liaisons entre plusieurs variables qualitatives.

1.2 Tableau disjonctif complet

- On considère p variables qualitatives notées X^1, ..., X^p.
- Soit m_j le nombre de modalités de la variable X^j.
- On appelle *variable indicatrice* de la $k-$ième modalité de X^j $(k = 1, ..., m_j)$ la variable $X^j_{(k)}$ définie par :

$$X^j_{(k)}(i) = \begin{cases} 1 & \text{si } \; X^j = X^j_k \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

- On appelle matrice des indicatrices des modalités de X^j, la matrice $n \times m_j$ de terme général $X^j_{(k)}(i)$.

	$X^1_{(1)}$	$\ldots$	$X^1_{(m_1)}$	$\ldots\ldots$	$X^p_{(1)}$	$\ldots$	$X^p_{(m_p)}$
1	1	0	0		1	0	0
$\vdots$							
n	0	1	0		1	0	0

- La somme de chaque ligne est égale à p (nombre de variables).
- La somme de chaque colonne correspond à l'effectif marginal de chaque modalité.

1.3 Principe de l'AFCM

- On réalise une AFC (simple) sur le tableau disjonctif complet interprété comme une table de contingence entre la variable "individus" et une variable à $m = \sum_{j=1}^{p} m_j$ modalités.

$\Rightarrow$ Pour chaque tableau (ligne et colonne), on fait une ACP sur la matrice d'inertie du nuage de points par rapport à son centre de gravité.

Remarque 1 *Les données peuvent donc être étudiées non seulement à partir des variables et des modalités mais aussi à partir des individus. L'étude des individus aide à comprendre les ressemblances entre individus du point de vue de l'ensemble des variables (d'où la définition d'une distance entre individus). On représentera donc le nuage des individus selon la démarche de l'analyse factorielle : maximiser l'inertie du nuage des individus projetés sur une suite d'axes orthogonaux. Cependant, cette démarche exploratoire peut être lourde à cause du nombre important d'individus et se généralise par l'étude des modalités à travers les individus qu'elles représentent.*

En ce qui concerne les variables, celles-ci sont représentées en calculant les rapports de corrélation entre les coordonnées des individus sur un axe et chacune des variables qualitatives. Si ce rapport est proche de 1 (liaison entre l'axe et la variable qualitative) alors les individus possédant la même modalité ont des coordonnées semblables sur l'axe.

Dans la suite, on se restreindra aux commentaires sur les modalités.

- Inertie apportée au nuage par une modalité j :

$$I(k) = \frac{1}{p}(1 - \frac{n_j}{n})$$

⇒ L'inertie est d'autant plus forte que l'effectif de la modalité est faible.
⇒ En AFCM, il faut éviter que les modalités possèdent un faible effectif ($\simeq$ 3 à 5% de l'effectif total). Il est alors nécessaire de regrouper les modalités.

- Inertie apportée au nuage par une variable j :

$$I(X^j) = \frac{(m_j - 1)}{p}$$

- L'inertie d'une variable qualitative est d'autant plus grande que son nombre de modalités est élevé.

⇒ En AFCM, il faut éviter les trop grandes disparités entre le nombre de modalités des variables.

- Inertie des nuages de points : $I = \frac{m}{p} - 1$.
- L'inertie totale du nuage ne dépend donc que du nombre total de modalités m vis à vis du nombre de variables qualitatives p.

2 Les étapes de l'AFCM

2.1 Valeurs propres et choix de la dimension

- On calcule les valeurs propres et les vecteurs propres des deux matrices.
- On obtient $m - p$ valeurs propres avec $\lambda_1 > \lambda_2 > ... > \lambda_{m-p}$
- Les valeurs propres ont toujours la même notion d'inertie :

$$I = \sum_{i=1}^{m-p} \lambda_i$$

- Inertie associée à l'axe principal i : λ_i
- En général, les pourcentages d'inertie expliquée par chaque axe sont assez faibles ⇒ la recherche d'une valeur seuil devient complexe.
- Critère de sélection : retenir les axes correspondant aux valeurs propres supérieures à $\frac{1}{p}$ (moyenne des valeurs propres).

2.2 Interprétation des axes : les contributions

– Pour interpréter un nouvel axe, on utilise la notion de contribution.
  - Contribution d'une modalité k à l'inertie d'un axe i $CTR_i(k)$.
  - Contribution d'une variable X^j à l'inertie d'un axe i $CTR_i(X^j) = \sum_{k=1}^{m_j} CTR_i(k)$.

2.3 Représentation graphique

– Les représentations graphiques sont interprétées de manière analogue à celle d'une AFC.
  - On n'interprète que les modalités bien représentés.
  - On interprète globalement les proximités et les oppositions entre les modalités des différentes variables.

3 Exemple

- Données décrivant les caractéristiques de races de chien au moyen de 6 variables qualitatives (taille TA, poids PO, vélocité VE, intelligence IN, affection AF, agressivité AG).
- Echantillon de 27 chiens.

	RACE	TA	VE	PO	IN	AF
1	beauceron	3	3	2	3	2
2	basset	1	1	1	1	1
3	berger	3	3	2	3	2
4	boxer	2	2	2	2	2
5	bulldog	1	1	1	2	2
6	bullmas	3	1	1	3	1
7	caniche	1	2	2	3	2
8	chihuaha	1	1	1	1	2
9	cocker	2	1	1	2	2
10	colley	3	3	3	2	2
11	dalmatien	2	2	2	2	2
12	doberman	3	3	3	3	1
13	dogue	3	3	3	1	1
14	epagneulbre	2	2	2	3	2
15	epagneulfra	3	2	2	2	1
16	foxhound	3	3	2	1	1
17	foxterrier	1	2	1	2	2
18	grandbleu	3	2	2	1	1
19	labrador	2	2	2	2	2
20	levrier	3	3	2	1	1
21	mastiff	3	1	3	1	1
22	pekinois	1	1	1	1	2
23	pointer	3	3	2	3	1
24	saintbernard	3	1	3	2	1
25	setter	3	3	2	2	1
26	teckel	1	1	1	2	2
27	terreneuve	3	1	3	2	1

Et le tableau disjonctif complet correspondant

TA1	TA2	TA3	PO1	PO2	PO3	VE1	VE2	VE3	IN1	IN2	IN3	AF1	AF2	AG1	AG2
0	0	1	0	1	0	0	0	1	0	0	1	0	1	0	1
1	0	0	1	0	0	1	0	0	1	0	0	1	0	0	1
0	0	1	0	1	0	0	0	1	0	0	1	0	1	0	1
0	1	0	0	1	0	0	1	0	0	1	0	0	1	0	1
1	0	0	1	0	0	1	0	0	0	1	0	0	1	1	0
0	0	1	1	0	0	1	0	0	0	0	1	1	0	0	1
1	0	0	0	1	0	0	1	0	0	0	1	0	1	1	0
1	0	0	1	0	0	1	0	0	1	0	0	0	1	1	0
0	1	0	1	0	0	1	0	0	0	1	0	0	1	0	1
0	0	1	0	0	1	0	0	1	0	1	0	0	1	1	0
0	1	0	0	1	0	0	1	0	0	1	0	0	1	1	0
0	0	1	0	0	1	0	0	1	0	0	1	1	0	0	1
0	0	1	0	0	1	0	0	1	1	0	0	1	0	0	1
0	1	0	0	1	0	0	1	0	0	0	1	0	1	1	0
0	0	1	0	1	0	0	1	0	0	1	0	1	0	1	0
0	0	1	0	1	0	0	0	1	1	0	0	1	0	0	1
1	0	0	1	0	0	0	1	0	0	1	0	0	1	0	1
0	0	1	0	1	0	0	1	0	1	0	0	1	0	0	1
0	1	0	0	1	0	0	1	0	0	1	0	0	1	1	0
0	0	1	0	1	0	0	0	1	1	0	0	1	0	1	0
0	0	1	0	0	1	1	0	0	1	0	0	1	0	0	1
1	0	0	1	0	0	1	0	0	1	0	0	0	1	1	0
0	0	1	0	1	0	0	0	1	0	0	1	1	0	1	0
0	0	1	0	0	1	1	0	0	0	1	0	1	0	0	1
0	0	1	0	1	0	0	0	1	0	1	0	1	0	1	0
1	0	0	1	0	0	1	0	0	0	1	0	0	1	1	0
0	0	1	0	0	1	1	0	0	0	1	0	1	0	1	0

Résultats et interprétation de l'AFCM avec FactoMineR sur cet exemple

Attention, il faut que les variables soient de type "caractère".

- Choix de la dimension : voir tableau AFCM1
  On sélectionne les axes correspondant au valeurs propres $> 1/p = 1/6 = 0.167$.
  On retient donc les 4 premiers axes.
- Interprétation des axes retenus à l'aide des contributions : voir tableau AFCM3 Pour un axe donné, les modalités qui ont fortement contribué à l'axe, sont celles dont la contribution dépasse largement la contribution "uniforme" $1/m = 1/16 = 6.25\%$.
  - axe 1 : TA1, TA3, VE3, AF1, AF2,
  - axe 2 : TA1, TA2, VE1, VE2, PO1, PO2
  - axe 3 : PO3, IN2, IN3
  - axe 4 : TA2, AG1, AG.
- Modalités bien représentées sur les axes retenus à l'aide des cos^2 : voir tableau AFCM4
  - axe 1 ($> 30\%$) : TA1, TA2, TA3, VE3, PO1, AF1, AF2,
  - axe 2 ($> 30\%$) : TA1, TA2, VE1, VE2, PO1, PO2, IN1,
  - axe 3 ($> 20\%$) : PO3, IN2, IN3

  - axe 4 ($> 10\%$) : TA2, AG1, AG2
- Interprétation de l'AFCM à l'aide des graphiques des modalités voir graphique AFCM et graphique AFCM Pour un axe donné, on interprète seulement les modalités qui ont fortement contribué l'axe et qui sont bien représentés sur l'axe.
  - axe 1 : dans cet échantillon, les chiens de petite taille sont affectueux et s'opposent aux chiens de gande taille qui sont rapides
  - axe 2 : dans cet échantillon, les chiens de petite taille sont peu rapides et légers et s'opposent aus chiens de taille moyenne qui sont assez rapides et de poids moyen.
  - axe 3 : dans cet échantillon, les chiens qui pèsent lourd sont moyennement intelligents mais ne sont pas très intelligents.
  - axe 4 : dans cet échantillon, les chiens de taille moyenne sont agressifs et s'opposent aux chiens peu agressifs.

Sorties R (package FactoMineR, fonction MCA)

```
Tableau AFCM 1
> res$eig
       eigenvalue percentage of variance cumulative percentage of variance
dim 1  0.46380699             27.8284196                          27.82842
dim 2  0.38500535             23.1003212                          50.92874
dim 3  0.20367291             12.2203743                          63.14912
dim 4  0.16647217              9.9883300                          73.13745
dim 5  0.15795245              9.4771469                          82.61459
dim 6  0.09151571              5.4909427                          88.10553
dim 7  0.07881481              4.7288887                          92.83442
dim 8  0.07687612              4.6125671                          97.44699
dim 9  0.02682392              1.6094353                          99.05643
dim 10 0.01572624              0.9435742                         100.00000

Tableau AFCM2
> res$var
$coord
           Dim 1       Dim 2        Dim 3        Dim 4       Dim 5
TA_1  1.03789486  0.93598139  0.640138718 -0.248968074 -0.12321820
TA_2  1.04066297 -1.16431027 -0.675652562  0.753131888  0.07231433
TA_3 -0.83123859 -0.04868789 -0.073513881 -0.134858861  0.03339705
VE_1  0.34256905  1.06620576 -0.253667996  0.038381833  0.19936151
VE_2  0.68318422 -0.97500248 -0.138107377  0.408848950 -0.46433642
VE_3 -0.98790714 -0.31800420  0.404615442 -0.406067770  0.19123070
PO_1  0.88558106  1.06717150  0.311224535  0.175485720  0.20926264
PO_2 -0.07957125 -0.87377727  0.303904944 -0.004678729 -0.34620185
PO_3 -1.00837038  0.47028875 -1.073426759 -0.223843714  0.47108717
IN_1 -0.40585072  0.73982616  0.343241098  0.362665622 -1.04000028
IN_2  0.49379255 -0.15037738 -0.813185027 -0.266852430  0.12961096
IN_3 -0.38267212 -0.58772581  1.001755934  0.042986313  0.96638153
AF_1 -0.79995773  0.22145070 -0.167288178  0.030787175 -0.32960020
AF_2  0.74281789 -0.20563280  0.155339022 -0.028588091  0.30605732
AG_1  0.38704365 -0.17405603  0.004067168 -0.788957124 -0.23694027
AG_2 -0.41681624  0.18744496 -0.004380027  0.849646133  0.25516644

Tableau AFCM3
$contrib
          Dim 1       Dim 2        Dim 3        Dim 4       Dim 5
TA_1 10.0358106  9.83219963 8.693566e+00  1.608898753  0.41534250
TA_2  7.2067241 10.86740064 6.917809e+00 10.516117527  0.10218269
TA_3 13.7940040  0.05701005 2.456867e-01  1.011564523  0.06538319
VE_1  1.5618666 18.22637368 1.950218e+00  0.054625419  1.55324956
VE_2  4.9695073 12.19325468 4.624614e-01  4.958600429  6.74084153
VE_3 11.6902138  1.45923904 4.465593e+00  5.502789558  1.28622331
PO_1  8.3501508 14.60752515 2.348494e+00  0.913517571  1.36908998
```

PO_2	0.1095477	15.91340276	3.638904e+00	0.001055219	6.08920719
PO_3	8.1196835	2.12764243	2.095308e+01	1.114767790	5.20370205
IN_1	1.7537606	7.02049231	2.856540e+00	3.901630343	33.81547755
IN_2	3.8941978	0.43507538	2.404981e+01	3.168596404	0.78781333
IN_3	1.3642670	3.87673200	2.128990e+01	0.047962497	25.54782363
AF_1	11.0719758	1.02215251	1.102619e+00	0.045690549	5.51920977
AF_2	10.2811204	0.94914162	1.023861e+00	0.042426938	5.12498050
AG_1	2.7912300	0.68002427	7.018817e-04	32.313067935	3.07159823
AG_2	3.0059400	0.73233383	7.558726e-04	34.798688545	3.30787502

Tableau AFCM4

$cos2

	Dim 1	Dim 2	Dim 3	Dim 4	Dim 5
TA_1	0.377029012	0.306621409	0.1434221525	0.0216947857	0.005313953
TA_2	0.246131684	0.308095092	0.1037514511	0.1289108275	0.001188491
TA_3	0.863696996	0.002963139	0.0067553634	0.0227336406	0.001394204
VE_1	0.069031504	0.668702783	0.0378514426	0.0008665677	0.023379418
VE_2	0.196522391	0.400265194	0.0080310096	0.0703820899	0.090782448
VE_3	0.487980262	0.050563336	0.0818568282	0.0824455169	0.018284591
PO_1	0.330212133	0.479517900	0.0407834574	0.0129664160	0.018438253
PO_2	0.005879327	0.708951950	0.0857611997	0.0000203269	0.111294599
PO_3	0.290517378	0.063191859	0.3292128594	0.0143160024	0.063406605
IN_1	0.069353602	0.230460102	0.0496060847	0.0553795172	0.455410772
IN_2	0.195064865	0.018090686	0.5290159103	0.0569681757	0.013439201
IN_3	0.051253283	0.120897568	0.3512302332	0.0006467381	0.326862643
AF_1	0.594222919	0.045537527	0.0259863820	0.0008801465	0.100876554
AF_2	0.594222919	0.045537527	0.0259863820	0.0008801465	0.100876554
AG_1	0.161326078	0.032625926	0.0000178143	0.6703343696	0.060459205
AG_2	0.161326078	0.032625926	0.0000178143	0.6703343696	0.060459205

Tableau AFCM5

$v.test

	Dim 1	Dim 2	Dim 3	Dim 4	Dim 5
TA_1	3.1309351	2.8235008	1.93105566	-0.75104223	-0.3717026
TA_2	2.5297082	-2.8302778	-1.64241826	1.83075982	0.1757862
TA_3	-4.7387891	-0.2775637	-0.41909360	-0.76881380	0.1903925
VE_1	1.3397086	4.1696849	-0.99203705	0.15010250	0.7796569
VE_2	2.2604385	-3.2259720	-0.45695322	1.35275066	-1.5363410
VE_3	-3.5619499	-1.1465805	1.45886172	-1.46409817	0.6894921
PO_1	2.9301050	3.5309298	1.02974263	0.58062623	0.6923833
PO_2	-0.3909764	-4.2933379	1.49324854	-0.02298911	-1.7010760
PO_3	-2.7483544	1.2817911	-2.92566819	-0.61009513	1.2839672
IN_1	-1.3428305	2.4478486	1.13567522	1.19994477	-3.4410289
IN_2	2.2520405	-0.6858264	-3.70869433	-1.21703433	0.5911169
IN_3	-1.1543766	-1.7729458	3.02191761	0.12967340	2.9152065
AF_1	-3.9306228	1.0881065	-0.82197684	0.15127396	-1.6195031

```
AF_2  3.9306228 -1.0881065  0.82197684 -0.15127396  1.6195031
AG_1  2.0480425 -0.9210180  0.02152143 -4.17476869 -1.2537700
AG_2 -2.0480425  0.9210180 -0.02152143  4.17476869  1.2537700
```

Tableau AFCM6

```
$eta2
       Dim 1      Dim 2        Dim 3        Dim 4       Dim 5
TA 0.8636978 0.47948436 0.1937792346 0.1312125039 0.005524308
VE 0.5070780 0.73641208 0.0840550597 0.1050374320 0.090794047
PO 0.4613780 0.75419246 0.3292226865 0.0202697234 0.119999626
IN 0.1951392 0.26177976 0.5889762566 0.0710988231 0.570060946
AF 0.5942229 0.04553753 0.0259863820 0.0008801465 0.100876554
AG 0.1613261 0.03262593 0.0000178143 0.6703343696 0.060459205
```

Tableau AFCM7

```
> res$ind
$coord
         Dim 1       Dim 2       Dim 3       Dim 4       Dim 5
1  -0.47853414 -0.49594916  0.66020980  0.13007810  0.58963130
2   0.15746167  1.13300083  0.32102281  0.49345130 -0.34766007
3  -0.47853414 -0.49594916  0.66020980  0.13007810  0.58963130
4   0.60302202 -0.85461101 -0.43285233  0.69912816 -0.01987308
5   0.95191048  0.68206865  0.01621844 -0.45730013  0.20302575
6  -0.29429147  0.51192482  0.30066030  0.40947865  0.55941138
7   0.58457631 -0.50503609  0.72645415 -0.25299900  0.04266643
8   0.73174438  0.92118247  0.44328937 -0.20015037 -0.28746080
9   0.75586249  0.21501941 -0.47282600  0.62139205  0.49139318
10 -0.29461633 -0.11455219 -0.51558456 -0.75536055  0.37509235
11  0.79974743 -0.95171227 -0.42973276  0.02978050 -0.22624227
12 -1.08339273 -0.02020815  0.03241091  0.06480612  0.66580003
13 -1.08906514  0.33637999 -0.21078019  0.19539087 -0.17559347
14  0.58525374 -1.06918659  0.24052928  0.15634551  0.12466468
15 -0.03591284 -0.53733254 -0.32650850 -0.30869791 -0.50913102
16 -0.86176384 -0.02464392  0.29787170  0.28491686 -0.51833066
17  0.83854245  0.23088956  0.05577568  0.36337843  0.13106749
18 -0.45280435 -0.20111746  0.09744287  0.61779951 -0.79324838
19  0.79974743 -0.95171227 -0.42973276  0.02978050 -0.22624227
20 -0.66503843 -0.12174518  0.30099127 -0.38443080 -0.72469985
21 -0.76346303  0.70818680 -0.45388584  0.37694263 -0.17218375
22  0.73174438  0.92118247  0.44328937 -0.20015037 -0.28746080
23 -0.65936603 -0.47833332  0.54418237 -0.51501555  0.11669365
24 -0.54329693  0.46907297 -0.88095677  0.11979287  0.31830280
25 -0.44487234 -0.36085900 -0.12607966 -0.64158056 -0.23421330
26  0.95191048  0.68206865  0.01621844 -0.45730013  0.20302575
27 -0.34657152  0.37197172 -0.87783720 -0.54955479  0.11193362
```

Tableau AFCM8

$contrib

	Dim 1	Dim 2	Dim 3	Dim 4	Dim 5
1	1.82862559	2.366158261	7.926234411	0.37644624	8.152126877
2	0.19799246	12.348946884	1.874022288	5.41730387	2.834128304
3	1.82862559	2.366158261	7.926234411	0.37644624	8.152126877
4	2.90379052	7.025972346	3.407081232	10.87447246	0.009260623
5	7.23587666	4.475335942	0.004783228	4.65261638	0.966522822
6	0.69159889	2.521052201	1.643823357	3.73041476	7.337911499
7	2.72886073	2.453659519	9.596644151	1.42407293	0.042685714
8	4.27580348	8.163206779	3.573366946	0.89126608	1.937613456
9	4.56230728	0.444759055	4.065422345	8.59064933	5.661977402
10	0.69312662	0.126233980	4.833956982	12.69413774	3.299030211
11	5.10745617	8.713262630	3.358148494	0.01973144	1.200210344
12	9.37283081	0.003928463	0.019102293	0.09343867	10.394353840
13	9.47123590	1.088503356	0.807909221	0.84938217	0.722980511
14	2.73518899	10.997056890	1.052056055	0.54383287	0.364415413
15	0.01029908	2.777510796	1.938616734	2.12012752	6.078116111
16	5.93028385	0.005842371	1.613472127	1.80605465	6.299755181
17	5.61499081	0.512835466	0.056570859	2.93773681	0.402809630
18	1.63726930	0.389106984	0.172664506	8.49160373	14.754628043
19	5.10745617	8.713262630	3.358148494	0.01973144	1.200210344
20	3.53177016	0.142584731	1.647444434	3.28799357	12.314767459
21	4.65452064	4.824642290	3.746245583	3.16115006	0.695175053
22	4.27580348	8.163206779	3.573366946	0.89126608	1.937613456
23	3.47177905	2.201054201	5.385077011	5.90113150	0.319303981
24	2.35707525	2.116656043	14.112767092	0.31926884	2.375695664
25	1.58040994	1.252692731	0.289063368	9.15792325	1.286272465
26	7.23587666	4.475335942	0.004783228	4.65261638	0.966522822
27	0.95914593	1.331034472	14.012994204	6.71918499	0.293785898

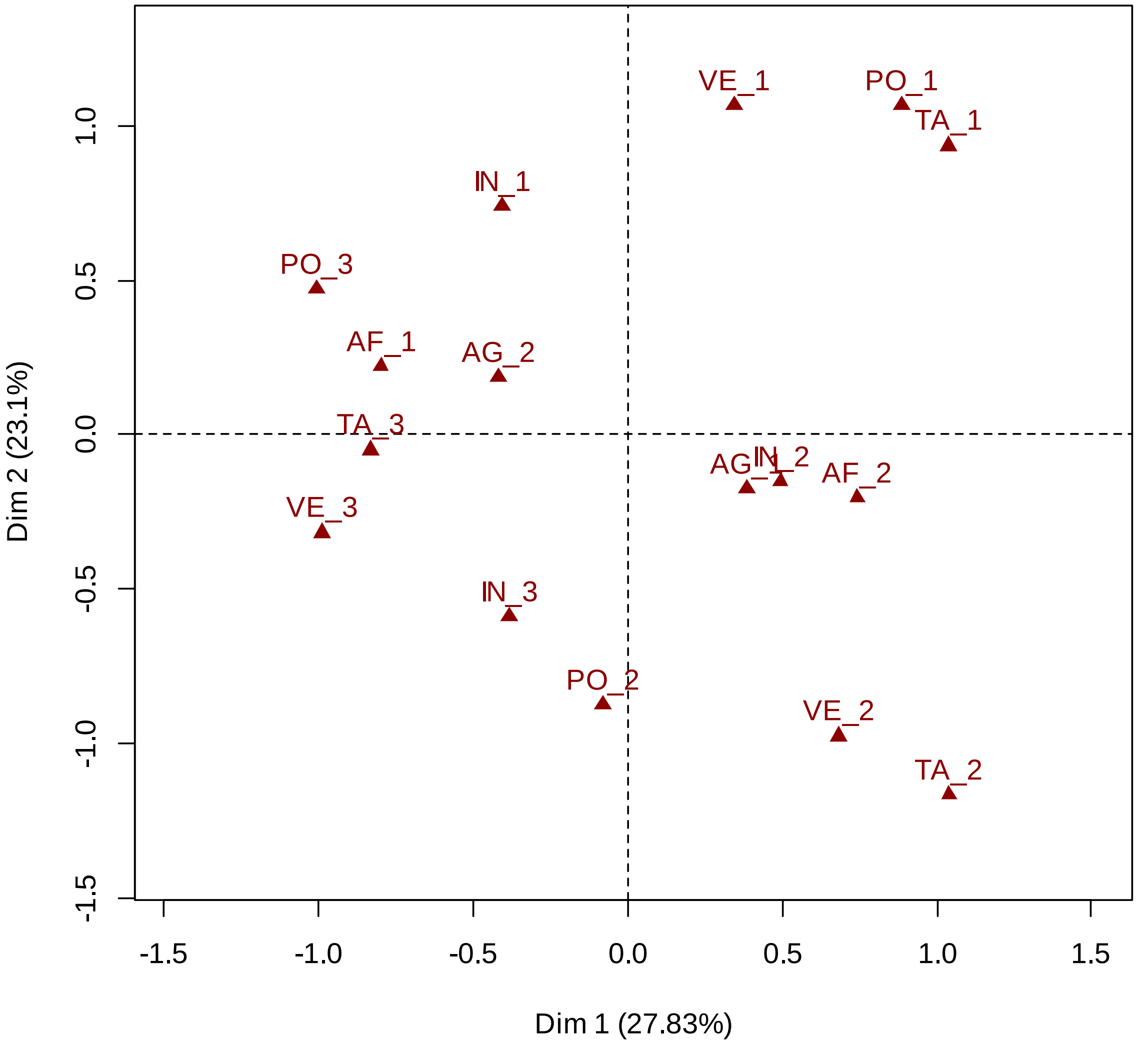
Tableau AFCM9

$cos2

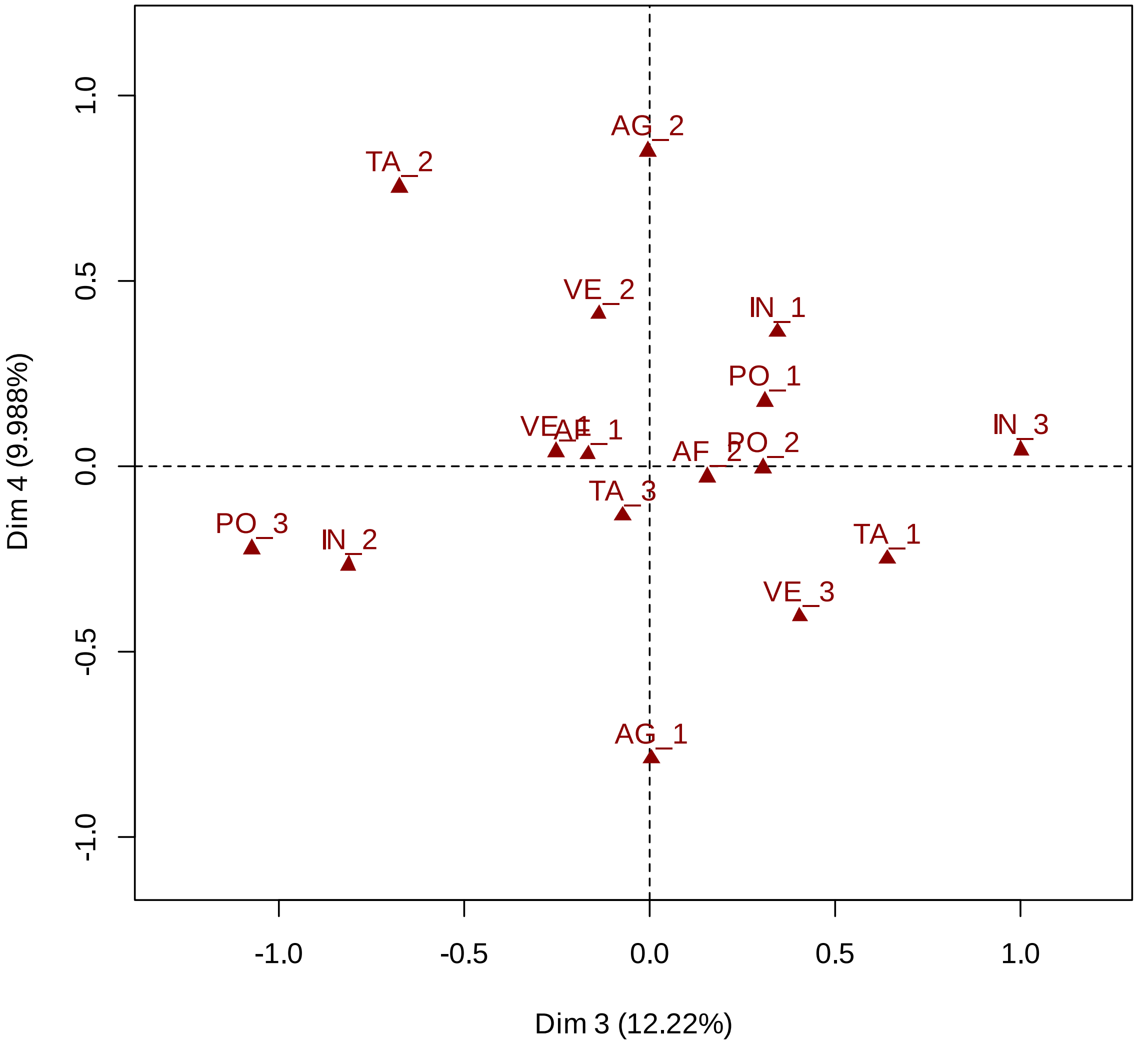
	Dim 1	Dim 2	Dim 3	Dim 4	Dim 5
1	0.157212658	0.1688635756	0.2992440994	0.0116163588	0.2386836743
2	0.012980125	0.6720314666	0.0539511777	0.1274728649	0.0632759663
3	0.157212658	0.1688635756	0.2992440994	0.0116163588	0.2386836743
4	0.196428496	0.3945255362	0.1012086571	0.2640290690	0.0002133381
5	0.541552604	0.2780382901	0.0001572051	0.1249830379	0.0246348926
6	0.052563766	0.1590535977	0.0548634732	0.1017638768	0.1899300667
7	0.186003030	0.1388297106	0.2872460089	0.0348397648	0.0009908554
8	0.287765749	0.4560491360	0.1056075450	0.0215294574	0.0444096729
9	0.292227121	0.0236477737	0.1143503829	0.1974996439	0.1235074588
10	0.055361410	0.0083695155	0.1695482516	0.3639168068	0.0897366656
11	0.350173612	0.4958942205	0.1011054648	0.0004855588	0.0280236823
12	0.622619193	0.0002166226	0.0005572283	0.0022278335	0.2351463766

13	0.657168560	0.0626944895	0.0246166332	0.0211532744	0.0170838512
14	0.163544286	0.5458257025	0.0276237658	0.0116712623	0.0074205115
15	0.001030766	0.2307527921	0.0852019742	0.0761601965	0.2071666264
16	0.530090872	0.0004335043	0.0633333234	0.0579442134	0.1917730539
17	0.388388244	0.0294458810	0.0017183268	0.0729347080	0.0094886830
18	0.140100558	0.0276387402	0.0064881186	0.2608037318	0.4299689326
19	0.350173612	0.4958942205	0.1011054648	0.0004855588	0.0280236823
20	0.321366418	0.0107698723	0.0658286276	0.1073849350	0.3816131595
21	0.332159355	0.2858025645	0.1173988216	0.0809694108	0.0168948668
22	0.287765749	0.4560491360	0.1056075450	0.0215294574	0.0444096729
23	0.298479697	0.1570807366	0.2033061901	0.1820968142	0.0093488054
24	0.188330318	0.1403868913	0.4951706927	0.0091560396	0.0646437682
25	0.166488905	0.1095442478	0.0133722526	0.3462716077	0.0461463744
26	0.541552604	0.2780382901	0.0001572051	0.1249830379	0.0246348926
27	0.077864118	0.0896956658	0.4995507194	0.1957823857	0.0081221816

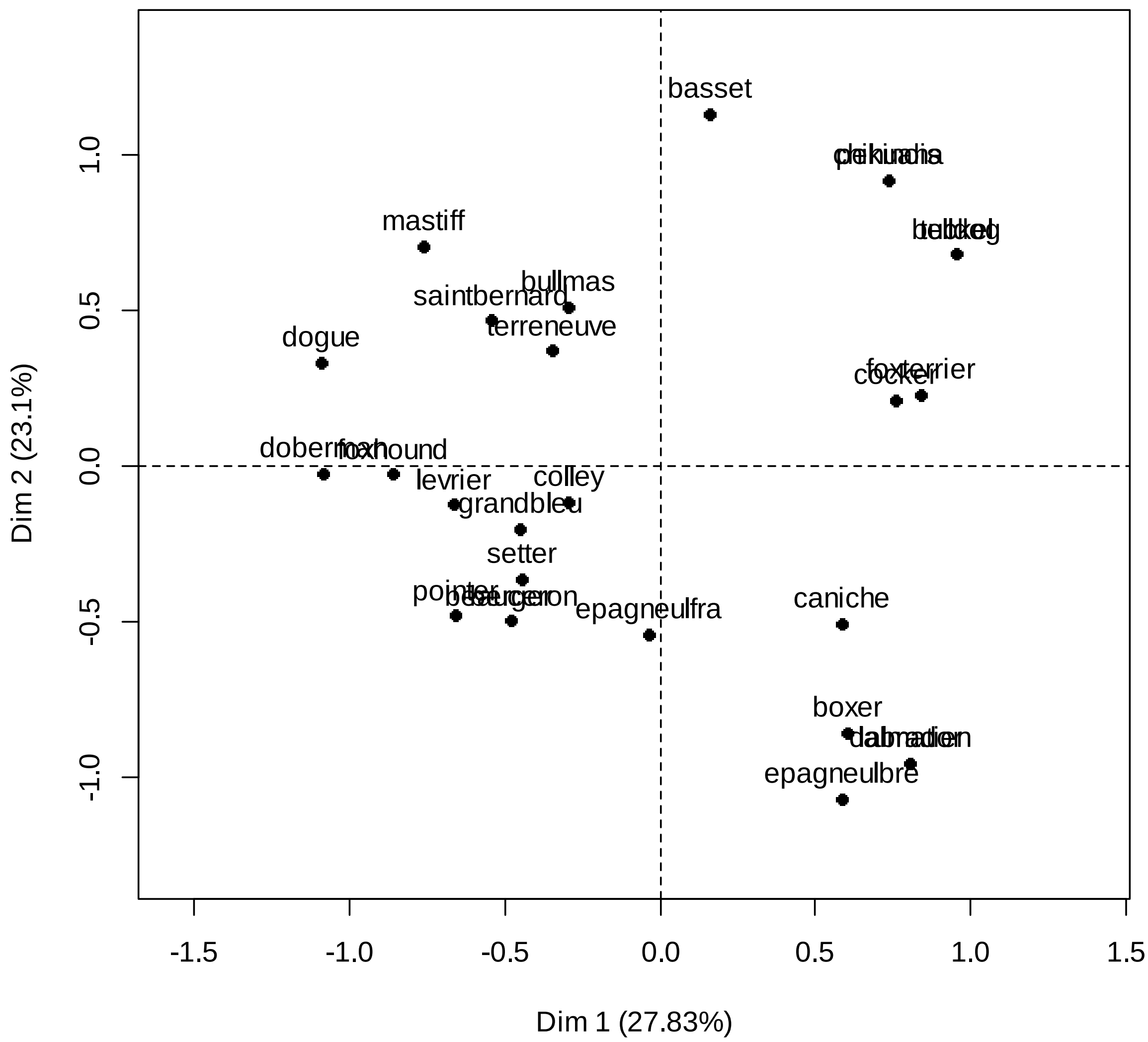
Graphique AFCM10

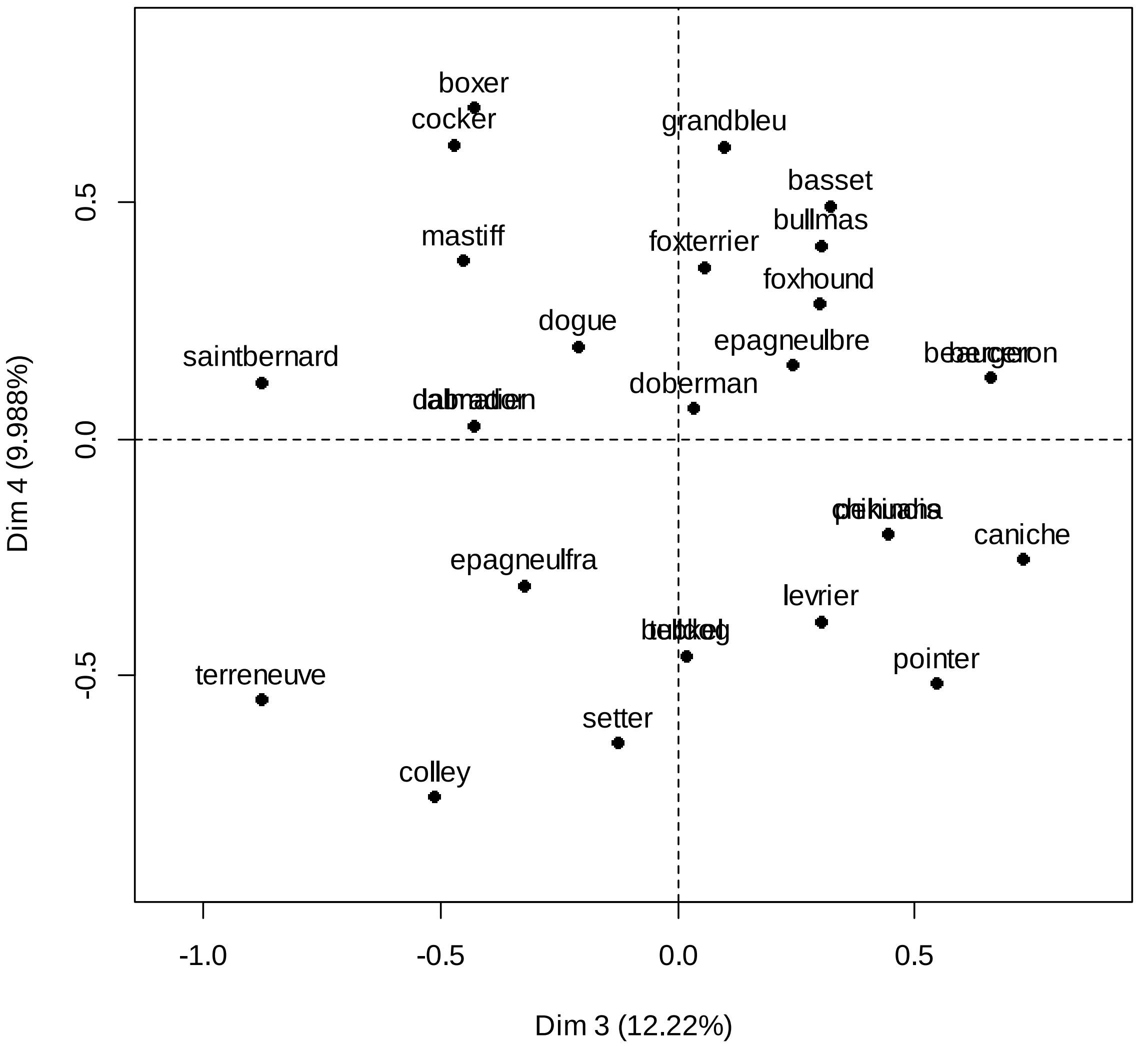


Graphique AFCM 11

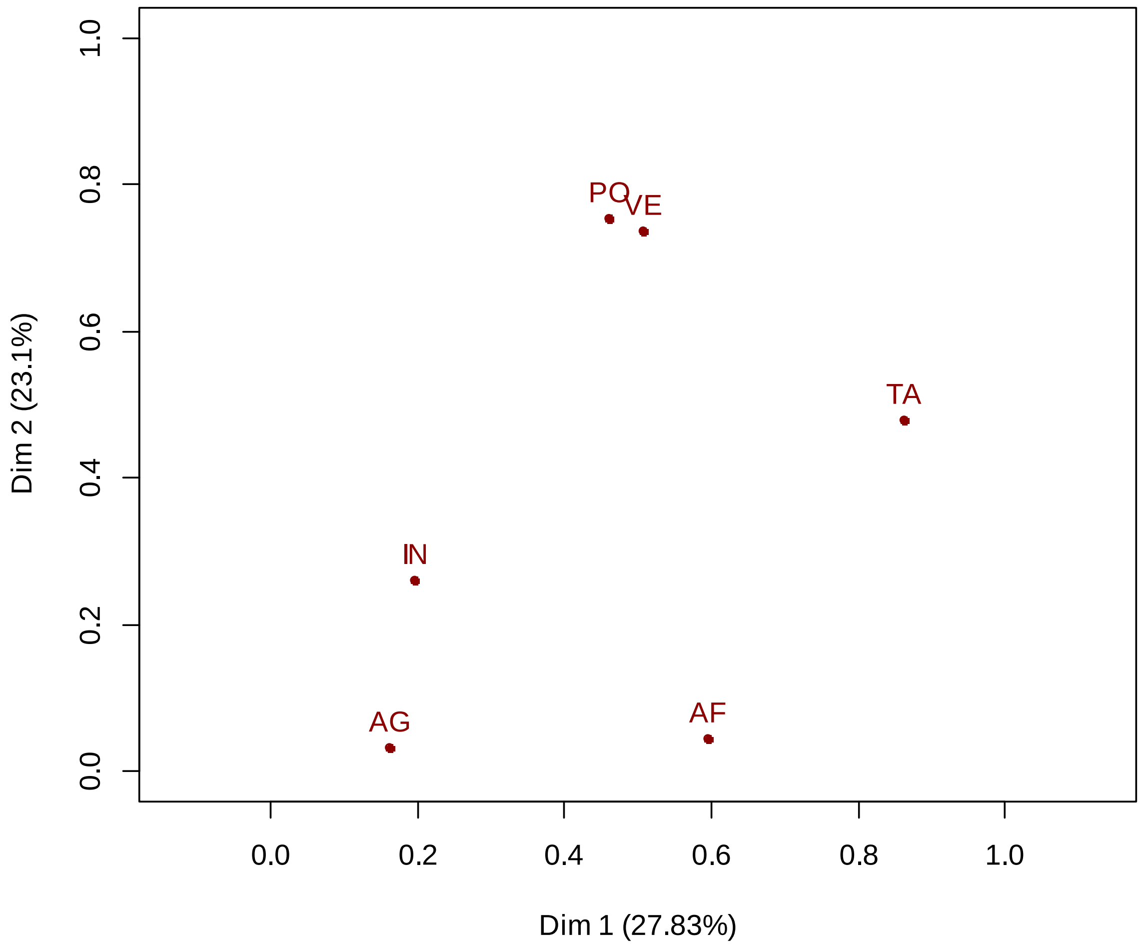


Graphique AFCM12





Graphique AFCM13



Graphique AFCM14

Graphique AFCM15