Corrigés des exercices du Chapitre 3

$\boxed{10}$ 1) Le pays va acheter x_1 lots 1, x_2 lots 2 et x_3 lots 3. Il souhaite minimiser son coût qui sera en fait $z' = 10x_1+12x_2+15x_3$. Il veut au moins 100 000 fusils donc on doit avoir $500x_1+300x_2+800x_3 \geq 100\,000$. De même, pour les grenades, on doit avoir $1\,000x_1+2\,000x_2+1\,500x_3 \geq 200\,000$, pour les chars, $10x_1 + 20x_2 + 15x_3 \geq 100$, pour les mitrailleuses $100x_1 + 80x_2 + 150x_3 \geq 400$ et pour les bazookas $80x_1 + 120x_2 + 200x_3 \geq 400$. Le programme s'écrit donc :

$$(P)\left\{\begin{array}{rcrcrcr} 10x_1 & + & 12x_2 & + & 15x_3 & = & z[\min] \\ 500x_1 & + & 300x_2 & + & 800x_3 & \geq & 100\,000 \\ 1\,000x_1 & + & 2\,000x_2 & + & 1\,500x_3 & \geq & 200\,000 \\ 10x_1 & + & 20x_2 & + & 15x_3 & \geq & 100 \\ 100x_1 & + & 80x_2 & + & 150x_3 & \geq & 400 \\ 80x_1 & + & 120x_2 & + & 200x_3 & \geq & 400 \end{array}\right.$$

2) Le programme dual s'écrit :

$$(D)\left\{\begin{array}{rcrcrcrcrcc} 100\,000y_1 & + & 200\,000y_2 & + & 100y_3 & + & 400y_4 & + & 400y_5 & = & z'[\max] \\ 500y_1 & + & 1\,000y_2 & + & 10y_3 & + & 100y_4 & + & 80y_5 & \leq & 10 \\ 300y_1 & + & 2\,000y_2 & + & 20y_3 & + & 80y_4 & + & 120y_5 & \leq & 12 \\ 800y_1 & + & 1\,500y_2 & + & 15y_3 & + & 150y_4 & + & 200y_5 & \leq & 15 \\ y_1 & , & y_2 & , & y_3 & , & y_4 & , & y_5 & \geq & 0. \end{array}\right.$$

3) Le programme dual peut être interprété comme suit :
Un fabriquant d'armements qui produit ces différents types d'armes à la demande veut s'emparer du marché.
Soit y_1, le prix de vente d'un fusil, y_2 celui d'une grenade, y_3 celui d'un char, y_4 celui d'une mitrailleuse et y_5 celui d'un bazooka.

- Un lot de type 1 coûtera : $500y_1 + 1\,000y_2 + 10y_3 + 100y_4 + 80y_5 = Y_1$;

- Un lot de type 2 coûtera : $300y_1 + 2\,000y_2 + 20y_3 + 80y_4 + 120y_5 = Y_2$;

- Un lot de type 3 coûtera : $800y_1 + 1\,500y_2 + 15y_3 + 150y_4 + 200y_5 = Y_3$.

Le marché rapportera globalement : $100\,000y_1 + 200\,000y_2 + 100y_3 + 400y_4 + 400y_5$.

Pour remporter le marché, le fabriquant d'armements doit calculer ses prix de vente unitaires de façon concurrencer le marchand d'armes (c'est-à-dire $Y_1 \leq 10$, $Y_2 \leq 12$ et $Y_3 \leq 15$), tout en faisant un bénéfice maximal.
Le programme est donc ici le programme dual écrit à la question 2.

$\boxed{11}$ Il convient de ramener chaque contrainte, si nécessaire, à la forme $\alpha x_1 + \beta x_2 + \gamma x_3 \leq \delta$ (où δ ici, peut être négatif), de s'assurer de ce que toutes les variables du primal sont positives ou nulles, et - enfin - de ramener la fonction économique, si nécessaire, à une maximisation. En particulier ici, on remplacera la contrainte en égalité : $3x_1 - 2x_2 + 7x_3 = 5$ par deux inéquations de sens contraire

$$3x_1 - 2x_2 + 7x_3 \leq 5 \text{ et } 3x_1 - 2x_2 + 7x_3 \geq 5,$$

cette dernière inéquation, (de même que $x_1 - 5x_2 + 6x_3 \geq 2$) doit être multipliée par -1 pour obtenir une inégalité de la forme $\alpha x_1 + \beta x_2 + \gamma x_3 \leq \delta$; de même, on ramène la fonction économique à une maximisation en la multipliant par -1. Ainsi, le primal devient, sous forme standard de passage au dual :

$$\left\{\begin{array}{rcrcrcc}
2x_1 & - & 3x_2 & - & 4x_3 & = & -z[\max] \\
2x_1 & + & x_2 & - & 4x_3 & \leq & 10 \\
-x_1 & + & 5x_2 & - & 6x_3 & \leq & -2 \\
3x_1 & - & 2x_2 & + & 7x_3 & \leq & 5 \\
-3x_1 & + & 2x_2 & - & 7x_3 & \leq & -5 \\
x_1 & , & x_2 & , & x_3 & \geq & 0
\end{array}\right.$$

D'où le dual :

$$\left\{\begin{array}{rcrcrcrcc}
10y_1 & - & 2y_2 & + & 5y_3 & - & 5y_4 & = & z'[\min] \\
2y_1 & - & y_2 & + & 3y_3 & - & 3y_4 & \geq & 2 \\
y_1 & + & 5y_2 & - & 2y_3 & + & 2y_4 & \geq & -3 \\
-4y_1 & - & 6y_2 & + & 7y_3 & - & 7y_4 & \geq & -4 \\
y_1 & , & y_2 & , & y_3 & , & y_4 & \geq & 0
\end{array}\right.$$

$\boxed{12}$ 1) On commence par chercher la solution optimale de (P), mis sous forme standard en introduisant des variables d'écart :

$$\left\{\begin{array}{rcrcrcrcc}
4x_1 & + & 5x_2 & & & & & = & z[\max] \\
3x_1 & + & x_2 & + & x_3 & & & = & 1 \\
x_1 & + & x_2 & & & + & x_4 & = & 1
\end{array}\right.$$

On a une solution initiale évidente avec $y_3 = y_4 = 1$ et $y_1 = y_2 = y_3 = 1$. On peut donc aisément démarrer le simplexe.

Premier tableau :

$$\begin{array}{rcc|cccc|c|c}
 & c_i & i\downarrow \; j\rightarrow & 1 & 2 & 3 & 4 & \beta & \beta_i/\alpha_{i,e} \\
 & 0 & 3 & 3 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 \\
s\leftarrow & 0 & 4 & 1 & \boxed{4} & 0 & 1 & 1 & 1/4 \\
 & & c_j & 4 & 5 & 0 & 0 & & \\
 & & \Delta_j & 4 & 5 & 0 & 0 & z-0 & \\
 & & & & \uparrow e & & & &
\end{array}$$

Deuxième tableau :

$$\begin{array}{rcc|cccc|c|c}
 & c_i & i\downarrow \; j\rightarrow & 1 & 2 & 3 & 4 & \beta & \beta_i/\alpha_{i,e} \\
s\leftarrow & 0 & 3 & \boxed{11/4} & 0 & 1 & -1/4 & 3/4 & 3/11 \\
 & 5 & 2 & 1/4 & 1 & 0 & 1/4 & 1/4 & 1 \\
 & & c_j & 4 & 5 & 0 & 0 & & \\
 & & \Delta_j & 11/4 & 0 & 0 & -5/4 & z-5/4 & \\
 & & & \uparrow e & & & & &
\end{array}$$

Troisième tableau :

$$\begin{array}{cc|c|cccc|c|c}
c_i & i\downarrow & j\rightarrow & 1 & 2 & 3 & 4 & \beta & \beta_i/\alpha_{i,e} \\
\hline
4 & 1 & & 1 & 0 & 4/11 & -1/11 & 3/11 & \\
5 & 2 & & 0 & 1 & -1/11 & 3/11 & 2/11 & \\
\hline
 & & c_j & 4 & 5 & 0 & 0 & & \\
 & & \Delta_j & 0 & 0 & 0 & -1 & z-2 & \\
 & & & \uparrow e & & & & &
\end{array}$$

On est donc à l'optimum, et ceci, pour $x^* = \left(\frac{3}{11}, \frac{2}{11}\right)$.

$$2)\ (D)\left\{\begin{array}{ccccc} y_1 & + & y_2 & = & z'[\min] \\ 3y_1 & + & y_2 & \geq & 4 \\ y_1 & + & 4y_2 & \geq & 5 \\ y_1 & , & y_2 & \geq & 0 \end{array}\right. .$$

Les relations d'exclusion s'écrivent :

$$(1)\ \left\{\begin{array}{l} y_1^*(1-3x_1^*-x_2^*-x_3^*)=0\,; \\ y_2^*(1-x_1^*-x_2^*-x_4^*)=0 \end{array}\right. \qquad (2)\ \left\{\begin{array}{l} (4-3y_1^*-y_2^*)x_1^*=0\,; \\ (5-y_1^*-4y_2^*)x_2^*=0 \end{array}\right. .$$

Comme on a $x_1^* > 0$ et $x_2^* > 0$, on en déduit que $3y_1^* + y_2^* = 4$ et $y_1^* + 4y_2^* = 5$, ce qui donne finalement $(y_1^*, y_2^*) = (1,1)$.

Donc $\boxed{y_1^* = y_2^* = 1}$ donne la solution optimale de (D). En effet, $z\left(\frac{3}{11}, \frac{2}{11}\right) = 2 = z'(1,1)$.

Le lien entre les solutions du primal et le dual sont facilement visibles si on les résout par le simplexe. En fait, les tableaux terminaux se recouvrent partiellement. Les colonnes de x_1 et x_2 et la dernière colonne représentent le tableau final du simplexe appliqué au primal. La solution optimale du primal apparaît en dernière ligne : $x_1 = 3/11$, $x_2 = 2/11$ (le tableau est transposé par rapport à la représentation habituelle : les lignes du tableau habituel deviennent ici les colonnes.

Les lignes de y_1 et y_2 et la dernière ligne forment le tableau optimal du simplexe appliqué au dual. La solution optimale du dual apparaît en dernière colonne : $y_1 = y_2 = 1$.

Il n'est donc pas nécessaire de résoudre (P) et (D). Il suffit de résoudre (P) ou (D), la solution optimale de l'autre se trouve dans le tableau optimal du premier, en dernière ligne.

$\boxed{13}$ Le programme (PL) s'écrit aussi :

$$\left\{\begin{array}{ccccc} -2x_1 & - & 3x_2 & = & -z[\max] \\ -4x_1 & - & x_2 & \leq & -8 \\ -x_1 & - & 4x_2 & \leq & -8 \\ -7x_1 & - & 10x_2 & \leq & -47 \end{array}\right.$$

et il est alors aisé de passer au programme dual :

$$(PL^*)\left\{\begin{array}{ccccccc} -8y_1 & - & 8y_2 & - & 47y_3 & = & -z'[\min] \\ -4y_1 & - & y_2 & - & 7y_3 & \geq & -2 \\ -y_1 & - & 4y_2 & - & 10y_3 & \geq & -3 \\ y_1 & , & y_2 & , & y_3 & \geq & 0. \end{array}\right.$$

soit encore

$$(PL^*)\left\{\begin{array}{rcrcrcl} 8y_1 & + & 8y_2 & + & 47y_3 & = & z'[\max]\\ 4y_1 & + & y_2 & + & 7y_3 & \leq & 2\\ y_1 & + & 4y_2 & + & 10y_3 & \leq & 3\\ y_1 & , & y_2 & , & y_3 & \geq & 0.\end{array}\right.$$

$\rightarrow$ "0" est solution de (PL^*).

Optimisation de (PL^*) : simplexe. On introduit des variables d'écart (1 par contrainte) :

$$(PL^*)\left\{\begin{array}{rcrcrcrcrcl} 8y_1 & + & 8y_2 & + & 47y_3 & & & & & = & z'[\max]\\ 4y_1 & + & y_2 & + & 7y_3 & + & y_{\bar 1} & & & = & 2\\ y_1 & + & 4y_2 & + & 10y_3 & & & + & y_{\bar 2} & = & 3\\ y_1 & , & y_2 & , & y_3 & , & y_{\bar 1} & , & y_{\bar 2} & \geq & 0.\end{array}\right.$$

On a une solution de base évidente $\widetilde{y_{\bar 1}} = 2$, $\widetilde{y_{\bar 2}} = 3$, les variables hors-base $\widetilde{y_1}$, $\widetilde{y_2}$, $\widetilde{y_3}$ étant nulles.

On va résoudre (PL^*) par la méthode des tableaux.

<u>Premier tableau :</u>

$$\begin{array}{r|cc|c|ccccc|c|l}
 & c_i & i\downarrow & j\rightarrow & 1 & 2 & 3 & \bar 1 & \bar 2 & \beta & \beta_i/\alpha_{i,e}\\
s\leftarrow & 0 & \bar 1 & & 4 & 1 & \boxed{7} & 1 & 0 & 2 & 2/7 = 20/70\\
 & 0 & \bar 2 & & 1 & 4 & 10 & 0 & 1 & 3 & 3/10 = 21/70\\
 & & & c_j & 8 & 8 & 47 & 0 & 0 & & \\
 & & & \Delta_j & 8 & 8 & 47 & 0 & 0 & z-0 & \\
 & & & & & & \uparrow e & & & &
\end{array}$$

<u>Deuxième tableau :</u>

$$\begin{array}{r|cc|c|ccccc|c|l}
 & c_i & i\downarrow & j\rightarrow & 1 & 2 & 3 & \bar 1 & \bar 2 & \beta & \beta_i/\alpha_{i,e}\\
 & 47 & 3 & & 4/7 & 1/7 & 1 & 1/7 & 0 & 2/7 & 2\\
s\leftarrow & 0 & \bar 2 & & -33/7 & \boxed{18/7} & 0 & -10/7 & 1 & 1/7 & 1/18\\
 & & & c_j & 8 & 8 & 47 & 0 & 0 & & \\
 & & & \Delta_j & -132/7 & 9/7 & 0 & -47/7 & 0 & z-94/7 & \\
 & & & & & \uparrow e & & & & &
\end{array}$$

<u>Troisième tableau :</u>

$$\begin{array}{|cc|c|ccccc|c|}
c_i & i\downarrow & j\rightarrow & 1 & 2 & 3 & \bar 1 & \bar 2 & \beta\\
47 & 3 & & 5/6 & 0 & 1 & 2/9 & -1/18 & 5/18\\
8 & 2 & & -33/18 & 1 & 0 & -5/9 & 7/18 & 1/18\\
 & & \Delta_j & -33/2 & 0 & 0 & -6 & -1/2 & z-27/2
\end{array}$$

et c'est le tableau optimal.
La solution du programme dual est donc $\boxed{y_1 = 0,\ y_2 = 1/18,\ y_3 = 5/18 \text{ et } \bar y_1 = \bar y_2 = 0}$.

2) Récupération de la solution optimale de (PL) à partir du tableau optimal du dual (PL^*).

Le tableau dual du tableau dual optimal est le tableau primal optimal.

Pour obtenir celui-ci, on commence par compléter le tableau optimal du dual en ajoutant les contraintes de positivité des variables hors-base. On obtient ainsi un tableau carré que l'on va transposer pour obtenir son dual.

Les 3 dernières lignes du tableau carré représentent les contraintes :

$$\begin{cases} -y_1 \leq 0 \\ -y_{\bar{1}} \leq 0 \\ -y_{\bar{2}} \leq 0 \end{cases}$$

$$\begin{array}{r|ccccc|c|c|}
\max & 1 & 2 & 3 & \bar{1} & \bar{2} & & u \\
3 & 5/6 & 0 & 1 & 2/9 & -1/18 & & 5/18 \\
2 & -33/18 & 1 & 0 & -5/9 & 7/18 & & 1/18 \\
1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & \leq & 0 \\
\bar{1} & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & & 0 \\
\bar{2} & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & & 0 \\
\hline
\Delta_j & -33/2 & 0 & 0 & -6 & -1/2 & & 27/2
\end{array}$$

On va transposer ce tableau : les indices des variables d'écart du dual deviennent les indices des variables structurelles du primal et les indices des variables structuelles du dual deviennent les indices des variables d'écart du primal ($\bar{\bar{1}} = 1\,!$). Les seconds membres du dual deviennent les coefficients de la fonction économique du primal et les coefficients de la fonction économique du dual deviennent les seconds membres du primal :

$$\begin{array}{r|ccccc|c|c|}
\min & 1 & 2 & \bar{1} & \bar{2} & \bar{3} & & u \\
1 & -1 & 0 & 0 & -5/9 & 2/9 & & -6 \\
2 & 0 & -1 & 0 & 7/18 & -1/18 & & -1/2 \\
\bar{1} & 0 & 0 & -1 & -33/18 & 5/6 & \geq & -33/2 \\
\bar{2} & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & & 0 \\
\bar{3} & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & & 0 \\
\hline
\Delta_j & 0 & 0 & 0 & 1/18 & 5/18 & & 27/2
\end{array}$$

Les deux dernières lignes expriment simplement la positivité des variables $x_{\bar{2}}$ et $x_{\bar{3}}$ hors-base.

La première ligne peut s'écrire :

$$-x_1 - 5/9x_{\bar{2}} + 2/9x_{\bar{3}} = -6 \text{ ou } x_1 + 5/9x_{\bar{2}} - 2/9x_{\bar{3}} = 6.$$

De même pour les deuxième et troisième lignes :

$$-x_2 + 7/18x_{\bar{2}} - 1/18x_{\bar{3}} = -1/2$$

$$-x_{\bar{1}} - 33/18x_{\bar{2}} + 5/6x_{\bar{3}} = -33/2$$

qui peuvent s'écrire :

$$x_2 - 7/18x_{\bar{2}} + 1/18x_{\bar{3}} = 1/2$$

$$x_{\bar{1}} + 33/18x_{\bar{2}} - 5/6x_{\bar{3}} = 33/2.$$

Le tableau optimal du primal est donc :

$$
\begin{array}{c}
\boxed{\begin{array}{c}1\\2\\\bar{1}\end{array}}
\end{array}
\quad
\begin{array}{ccccc}
1 & 2 & \bar{1} & \bar{2} & \bar{3}\\
\hline
1 & 0 & 0 & 5/9 & -2/9\\
0 & 1 & 0 & -7/18 & 1/18\\
0 & 0 & 1 & 33/18 & -5/6
\end{array}
\ \geq\
\begin{array}{c}
u\\
\hline
6\\
1/2\\
33/2
\end{array}
$$

$$
\Delta_j \quad \boxed{0 \quad 0 \quad 0 \quad 1/18 \quad 5/18} \qquad \boxed{27/2}
$$

La solution optimale du primal est donc : $x_1^* = 6$, $x_2^* = 1/2$, $x_{\bar{1}}^* = 33/2$, $x_{\bar{2}}^* = x_{\bar{3}}^* = 0$ et $z^* = 27/2$.

3) Méthode duale du simplexe

Lorsque les coefficients de la fonction économique sont positifs, on dispose d'une solution initiale duale réalisable. La méthode duale du simplexe, dans ce cas, permet de résoudre le problème en donnant à chaque itération, une solution réalisable du programme dual. Lorsque la solution est à la fois primale et duale réalisable, elle est optimale.

La solution initiale du problème a pour variables de base les variables d'écart $x_{\bar{1}}$, $x_{\bar{2}}$, $x_{\bar{3}}$: elle n'est pas admissible.

Le programme dual s'écrit :

$$
\left\{
\begin{array}{ccccccccccc}
2x_1 & + & 3x_2 & & & & & & & = & z[\min]\\
4x_1 & + & x_2 & - & x_{\bar{1}} & & & & & = & 8\\
x_1 & + & 4x_2 & & & - & x_{\bar{2}} & & & = & 8\\
7x_1 & + & 10x_2 & & & & & - & x_{\bar{3}} & = & 47\\
x_1 & , & x_2 & , & x_{\bar{1}} & , & x_{\bar{2}} & , & x_{\bar{3}} & \geq & 0
\end{array}
\right.
$$

ou, avec $z' = -z$,

$$
\left\{
\begin{array}{ccccccccccc}
-2x_1 & - & 3x_2 & & & & & & & = & z'[\max]\\
-4x_1 & - & x_2 & + & x_{\bar{1}} & & & & & = & -8\\
-x_1 & - & 4x_2 & & & + & x_{\bar{2}} & & & = & -8\\
-7x_1 & - & 10x_2 & & & & & + & x_{\bar{3}} & = & -47\\
x_1 & , & x_2 & , & x_{\bar{1}} & , & x_{\bar{2}} & , & x_{\bar{3}} & \geq & 0
\end{array}
\right.
$$

Le premier tableau du simplexe est donc

$$
\begin{array}{c}
i\downarrow\\
\boxed{\begin{array}{c}\bar{1}\\\bar{2}\\\bar{3}\end{array}}
\end{array}
\quad
\begin{array}{c}
j\rightarrow\\
\\
\\
\\
\end{array}
\quad
\begin{array}{ccccc}
1 & 2 & \bar{1} & \bar{2} & \bar{3}\\
\hline
-4 & -1 & 1 & 0 & 0\\
-1 & -4 & 0 & 1 & 0\\
\boxed{-7} & -10 & 0 & 0 & 1
\end{array}
\quad
\begin{array}{c}
\\
\hline
-8\\
-8\\
-47
\end{array}
$$

$$
\Delta_j \quad \boxed{-2 \quad -3 \quad 0 \quad 0 \quad 0} \qquad \boxed{0}
$$

En se reportant au tableau initial de la méthode du simplexe pour le programme dual, on constate que les 3 colonnes correspondant aux variables structurelles de ce tableau ainsi que le second membre et les premières composantes de la fonction économique sont, au signe près, identiques aux composantes sur x_1 et x_2 des 3 lignes de contraintes, aux 2 premières composantes de la fonction économique et aux composantes du second membre (respectivement) du tableau ci-dessus.

On va en fait utiliser la méthode du simplexe sur le programme dual à partir de ce tableau.

Pour commencer, on cherche la variable négative la plus petite, en l'occurrence $x_{\bar{3}}$, elle va sortir de la base : ce n'est autre que le premier critère de Dantzig appliqué au programme dual.

On cherche alors, sur la ligne correspondant à la variable de base $x_{\bar{3}}$ les coefficients négatifs : $a_{3,1} = -7$ et $a_{3,2} = -10$.

On calcule $\dfrac{\Delta_e}{a_{3,e}} = \min\left(\dfrac{\Delta_1}{a_{3,1}}, \dfrac{\Delta_2}{a_{3,2}}\right) = \min\left(\dfrac{2}{7}, \dfrac{3}{10}\right) = \dfrac{2}{7} = \dfrac{\Delta_1}{a_{3,1}}$: la variable x_1 entre dans la base. Ceci n'est autre que l'application du deuxième critère de Dantzig au programme dual.

On pivote alors de façon classique sur l'élément $a_{3,1} = -7$, ce qui donne le nouveau tableau :

$$
\begin{array}{c c c c c c c c}
i\downarrow & j\rightarrow & 1 & 2 & \bar{1} & \bar{2} & \bar{3} & \beta \\
\bar{1} & & 0 & 33/7 & 1 & 0 & -4/7 & 132/7 \\
\bar{2} & & 0 & \boxed{-18/7} & 0 & 1 & -1/7 & -9/7 \\
1 & & 1 & 10/7 & 0 & 0 & -1/7 & 47/7 \\
 & \Delta_j & 0 & -1/7 & 0 & 0 & -2/7 & 94/7
\end{array}
$$

On constate que la solution est duale et pas primale admisible ; elle n'est donc pas optimale.

La seule variable négative est $x_{\bar{2}}$: elle va sortir de la base.

Les coefficients négatifs de la ligne correspondante sont $a_{\bar{2},2}$ et $a_{\bar{2},\bar{3}}$:

$$\frac{\Delta_e}{a_{\bar{2},e}} = \min\left(\frac{\Delta_2}{a_{\bar{2},2}}, \frac{\Delta_{\bar{3}}}{a_{\bar{2},\bar{3}}}\right) = \min\left(\frac{-1/7}{-18/7}; \frac{-2/7}{-1/7}\right) = \frac{1}{18} = \frac{\Delta_2}{a_{\bar{2},2}}.$$

La variable qui entre dans la base est donc x_2. On pivote sur l'élément $a_{\bar{2},2} = -\dfrac{18}{7}$ et on obtient le tableau suivant :

$$
\begin{array}{c c c c c c c c}
i\downarrow & j\rightarrow & 1 & 2 & \bar{1} & \bar{2} & \bar{3} & \beta \\
\bar{1} & & 0 & 0 & 1 & -33/18 & -5/18 & 33/2 \\
2 & & 0 & 1 & 0 & -7/18 & 1/18 & 1/2 \\
1 & & 1 & 0 & 0 & 5/9 & -2/9 & 6 \\
 & \Delta_j & 0 & 0 & 0 & -1/18 & -5/18 & 27/2
\end{array}
$$

Le tableau donne une solution primale et duale admissible : la solution est donc optimale.