CHAPITRE 6

COUPLES ALEATOIRES DISCRETS

I- GENERALITES

Soient X et Y deux v.a.r. discrètes, définies sur un même espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, P)$.
On pose $X(\Omega) = \{x_i \ ; \ i \in \mathbb{N}\}$ et $Y(\Omega) = \{y_j \ ; \ j \in \mathbb{N}\}$.

1- Loi de probabilité d'un couple (X, Y).

D1 : On appelle loi de probabilité du couple (X, Y) l'ensemble des triplets (x_i, y_j, p_{ij}) avec

$$p_{ij} = P([X = x_i] \cap [Y = y_j]) \text{ pour } i \in \mathbb{N} \text{ et } j \in \mathbb{N}.$$

2- Lois marginales.

D2 : Les v.a.r. X et Y sont appelées v.a.r. marginales du couple (X, Y) ; les lois des v.a.r. X et Y sont appelées lois marginales du couple (X, Y).

On pose $p_{i.} = \sum\limits_j p_{ij}$ et $p_{.j} = \sum\limits_i p_{ij}$.

TH1 : La loi de X est définie par l'ensemble des couples $(x_i, p_{i.})$ pour $i \in \mathbb{N}$ et la loi de Y est définie par l'ensemble des couples $(y_j, p_{.j})$ pour $j \in \mathbb{N}$.

3- Lois conditionnelles.

Si $p_{i.} \neq 0$, la loi conditionnelle de Y sachant $[X = x_i]$ est définie par l'ensemble des couples $\left(y_j, \frac{p_{ij}}{p_{i.}}\right)$, pour $j \in \mathbb{N}$. On peut de même définir la loi conditionnelle de X sachant $[Y = y_j]$.

4- Indépendance de deux v.a.r. discrètes.

D3 : Deux v.a.r. discrètes X et Y sont dites indépendantes si, pour tout $(i, j) \in \mathbb{N}^2$, on a :

$$P([X = x_i] \cap [Y = y_j]) = P([X = x_i])P([Y = y_j]) \text{ (c'est-à-dire } p_{ij} = p_{i.}p_{.j}).$$

Propriété (admise) : Les v.a.r. X et Y sont indépendantes si et seulement si, pour toutes fonctions numériques f et g, les v.a.r. $f(X)$ et $g(Y)$ sont indépendantes.

5- Somme de deux v.a.r. discrètes.

TH2 : Soient X et Y deux v.a.r. discrètes et soit $Z = X + Y$.
Pour $z \in Z(\Omega)$, on pose $I_z = \{(i, j) \in \mathbb{N}^2 \ ; \ x_i + y_j = z\}$; alors $P([Z = z]) = \sum\limits_{(i,j) \in I_z} p_{ij}$.

Cas particulier important si X et Y sont indépendantes et à valeurs dans $\mathbb{N}$:

TH3 : Si X et Y sont indépendantes à valeurs dans $\mathbb{N}$, de fonctions génératrices respectives G_X et G_Y, alors $P([X+Y=n]) = \sum\limits_{i+j=n} p_{i.}p_{.j}$ et $G_{X+Y}(t) = G_X(t)G_Y(t)$ pour tout $t \in [0,1]$.

Application :
Si X et Y sont deux v.a.r. indépendantes :
1) si X suit la loi binomiale $\mathcal{B}(n,p)$ et Y la loi $\mathcal{B}(m,p)$, alors $X+Y$ suit la loi $\mathcal{B}(n+m,p)$;
2) si X suit la loi de Poisson $\mathcal{P}(\lambda)$ et Y la loi $\mathcal{P}(\mu)$, alors $X+Y$ suit la loi $\mathcal{P}(\lambda+\mu)$.

II- OPERATEURS CLASSIQUES.

1- Espérance.

Propriétés :
1) Si X et Y possèdent une espérance, alors $\mathbb{E}(X+Y)$ existe et $\mathbb{E}(X+Y) = \mathbb{E}(X) + \mathbb{E}(Y)$.
2) Si X et Y possèdent un moment d'ordre 2, alors $\mathbb{E}(XY)$ existe.

TH4 : Soit f une application de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}$, telle que $f(X,Y)$ admette une espérance. Alors :

$$\mathbb{E}(f(X,Y)) = \sum_{i,j} f(x_i,y_j)P([X=x_i]\cap[Y=y_j]) = \sum_{i,j} f(x_i,y_j)p_{ij}.$$

Propriété : Si X et Y sont indépendantes, alors $\mathbb{E}(XY) = \mathbb{E}(X)\mathbb{E}(Y)$.

Remarque : La réciproque est en général fausse.

2- Variance et covariance.

D4 : Si X et Y sont d'ordre 2, on appelle :
1) covariance de X et de Y, le réel $\operatorname{cov}(X,Y)$ défini par $\operatorname{cov}(X,Y) = \mathbb{E}\left((X-\mathbb{E}(X))(Y-\mathbb{E}(Y))\right)$;
2) coefficient de corrélation linéaire de X et de Y, le réel $\rho(X,Y)$ défini par $\rho(X,Y) = \frac{\operatorname{cov}(X,Y)}{\sigma(X)\sigma(Y)}$;
3) matrice de covariance de X et de Y, la matrice $\Gamma(X,Y)$ définie par :

$$\Gamma(X,Y) = \begin{pmatrix} \operatorname{var}(X) & \operatorname{cov}(X,Y) \\ \operatorname{cov}(Y,X) & \operatorname{var}(Y) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \operatorname{cov}(X,X) & \operatorname{cov}(X,Y) \\ \operatorname{cov}(Y,X) & \operatorname{cov}(Y,Y) \end{pmatrix}.$$

Propriétés :
1)i) $\operatorname{cov}(X,Y) = \operatorname{cov}(Y,X) = \mathbb{E}(XY) - \mathbb{E}(X)\mathbb{E}(Y)$;
1)ii) $\operatorname{var}(X+Y) = \operatorname{var}(X) + \operatorname{var}(Y) + 2\operatorname{cov}(X,Y)$;
1)iii) si X et Y sont indépendantes, alors $\operatorname{cov}(X,Y) = 0$ et $\operatorname{var}(X+Y) = \operatorname{var}(X) + \operatorname{var}(Y)$;
1)iv) $\operatorname{cov}(aX+b, cY+d) = ac\operatorname{cov}(X,Y)$.

2) $\rho(X,Y) \in [-1,1]$ et $\rho(aX+b,cY+d) = \frac{ac}{|ac|}\rho(X,Y)$.

3) $\Gamma(X,Y)$ est une matrice réelle symétrique et, pour tout $(u,v) \in \mathbb{R}^2$, $(u,v)\Gamma(X,Y)\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} \geq 0$.

Exercices chapitre 6

Couples aléatoires discrets

183. * On lance 2 dés. On appelle X la v.a.r. égale qu résultat du premier dé et Y la v.a.r. égale à la valeur maximale obtenue.
Déterminer la loi du couple (X, Y) et en déduire la loi de Y.

---

184. ** On lance 2 dés. Soit T la somme des points obtenus, X le reste de la division de T par 2 et Y le reste de la division de T par 5.

(a) Donner la loi conjointe de (X, Y).

(b) Donner les lois marginales de X et de Y.

(c) Les v.a.r. X et Y sont-elles indépendantes?

---

185. ** On considère n boîtes numérotées de 1 à n. La boîte k contient k boules numérotées de 1 à k. On choisit au hasard une boîte, puis une boule dans cette boîte. On note X le numéro de la boîte et Y le numéro de la boule.

(a) Déterminer la loi du couple (X, Y), la loi de Y et $\mathbb{E}(Y)$.

(b) Calculer $P([X = Y])$.

---

186. ** Soit (X, Y) un couple de v.a.r. à valeurs dans $\mathbb{N}^2$ tel que:

$$P([X = j] \cap [Y = k]) = \frac{(j+k)\lambda^{j+k}}{e\ j!\ k!}$$

(a) Déterminer λ puis trouver les lois de X et de Y. Les v.a.r. X et Y sont-elles indépendantes?

(b) Calculer $\mathbb{E}(2^{X+Y})$.

---

187. * Soient X et Y deux v.a.r. indépendantes vérifiant, pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$P([X = n]) = P([Y = n]) = \frac{1 + a^n}{4(n!)}$$

(a) Déterminer a, calculer $\mathbb{E}(X)$ et $V(X)$.

(b) Déterminer la loi de $S = X + Y$.

---

188. * On pose, pour tout $(m, n) \in \mathbb{N}^2$, $p_{n,m} = \frac{e^{-1}}{2^{m+1}\ n!}$.

(a) Montrer que l'on peut définir ainsi la loi d'un couple (X, Y).

(b) Déterminer les lois marginales. Les v.a.r. X et Y sont-elles indépendantes?

(c) Calculer l'espérance et la variance de X et de Y.

---

189. * On pose, pour tout $(m, n) \in \mathbb{N}^{*2}$, $p_{n,m} = \frac{1}{2^{n-1}\ 3^m}$.

(a) Montrer que $(p_{n,m})_{(n,m)\in\mathbb{N}^{*2}}$ définit une probabilité Π.

(b) Déterminer les lois marginales d'un couple (X, Y) de v.a.r. admettant Π comme probabilité.

(c) Identifier la loi de X (resp. la loi de Y) et donner la valeur de $\mathbb{E}(X)$ et de $V(X)$. (resp. de $\mathbb{E}(Y)$ et de $V(Y)$).

---

190. ** Soient X et Y deux v.a.r. indépendantes de lois respectives binomiales $\mathcal{B}(n, 1/2)$ et $\mathcal{B}(m, 1/2)$. Calculer $P([X = Y])$.

191. ** Soient X et Y deux v.a.r. indépendantes de même loi géométrique $\mathcal{G}(p)$.

(a) Déterminer la loi de $Z = X/Y$.

(b) Calculer $\mathbb{E}(Z)$ et montrer que $\mathbb{E}(Z) > 1$.

192. ** Une urne contient n boules noires indiscernables et 2 boules rouges numérotées 1 et 2. L'expérience consiste à tirer $n+2$ fois une boule sans remise. On note:
N_1 la v.a.r. égale au rang de tirage de la première boule rouge;
N_2 la v.a.r. égale au rang de tirage de la deuxième boule rouge;
R_1 la v.a.r. égale au rang de tirage de la boule rouge numéro 1;
R_2 la v.a.r. égale au rang de tirage de la boule rouge numéro 2.

(a) Trouver la loi du couple (R_1, R_2). En déduire les lois des v.a.r. R_1 et R_2.

(b) Trouver la loi du couple (N_1, N_2). En déduire les lois des v.a.r. N_1 et $N_2 - N_1$, puis les espérances $\mathbb{E}(N_1)$ et $\mathbb{E}(N_2)$.

193. * Soient X et Y deux v.a.r. indépendantes. Trouver la loi conditionnelle de X sachant $[X+Y = k]$ dans les deux cas suivants:

(a) X suit la loi binomiale $\mathcal{B}(n, p)$ et Y suit la loi binomiale $\mathcal{B}(m, p)$;

(b) X suit la loi de Poisson $\mathcal{P}(\lambda)$ et Y suit la loi de Poisson $\mathcal{P}(\mu)$.

194. ** Soit X une v.a.r. de loi binomiale $\mathcal{B}(n, p)$ et Y une v.a.r. à valeurs dans $\mathbb{N}$ telle que la loi conditionnelle de Y sachant $[X = k]$ est la loi binomiale $\mathcal{B}(k, p')$.
Déterminer la loi de Y.

195. ** Soient X et Y deux v.a.r. à valeurs dans $\mathbb{N}$ telles que la loi conditionnelle de X sachant $(Y = n)$ est l'équiprobabilité sur $[0, n]$.

(a) Exprimer la loi du couple (X, Y) en fonction de la loi de Y ;

(b) Montrer que $P([X \leq Y]) = 1$.

(c) Soit $a \in]0, 1[$. On suppose que $P([Y = n]) = (1-a)^2\ (n+1)\ a^n$. Déterminer la loi de X, puis celle de $Y - X$.

196. ** Soit $(a, b, c) \in]0, 1[^3$ vérifiant $a + b + c = 1$ et soit $(\alpha, \beta) \in]0, 1[^2$ vérifiant $\alpha + \beta = 1$.
On pose $p_{0,0} = \alpha + \beta a$ et pour $(n, m) \neq (0, 0)$, $p_{n,m} = \beta a\, C_{n+m}^n\ b^n\ c^m$.

(a) Vérifier que $(p_{n,m})_{(n,m)\in\mathbb{N}^2}$ définit la loi de probabilité d'un couple (X, Y).

(b) Déterminer les lois marginales de X et de Y, les espérances et variances de X et de Y.

(c) Déterminer la loi conditionnelle de Y sachant $[X = 0]$, puis sachant $[X = n]$.

197. * Soient X et Y deux v.a.r. indépendantes de même loi de Bernoulli $\mathcal{B}(p)$.

(a) Quelle est la loi de $X + Y$? de $X - Y$?

(b) Les v.a.r. $X + Y$ et $X - Y$ peuvent-elles être indépendantes?

198. * Soient X et Y deux v.a.r. de loi de Bernoulli.
Montrer que $\text{cov}(X, Y) = 0$ si et seulement si X et Y sont indépendantes.

199. ** Soient X et Y deux v.a.r. d'ordre 2. On pose $S = X + Y$ et $D = X - Y$.

(a) Montrer que si S et D sont indépendantes, alors $V(S) = V(D)$.

(b) On suppose que X et Y sont indépendantes de même loi, l'équiprobabilité sur $[1, 3]$.

(α) Montrer que $V(X) = V(Y)$.

(β) Déterminer les lois de S et D. Les v.a.r. S et D sont-elles indépendantes?

---

200. *** Soient X_0, X_1,..., X_{2n-1}, $2n$ v.a.r. indépendantes de même loi de Bernoulli $\mathcal{B}(1/2)$.
On pose, pour $0 \leq m \leq n-1$, $Y_m = X_{2m} + X_{2m+1}$ et pour $k = 0, 1, 2$, on désigne par N_k le nombre de v.a.r. Y_m égales à k.

(a) Déterminer la loi de N_0.

(b) Déterminer la loi du couple (N_0, N_2).

---

201. *** Soit (X_n) une suite de v.a.r. indépendantes de même loi de Bernoulli $\mathcal{B}(p)$ et soit $Y_n = X_n\, X_{n+1}$. On pose $S_n = \sum_{i=1}^n X_i$ et $T_n = \sum_{i=1}^n Y_i$.
Calculer $\mathbb{E}(S_n)$, $\mathbb{E}(T_n)$, $V(S_n)$, $V(T_n)$ et $\text{cov}(S_n, T_n)$.

---

202. ** Soit (X_n) une suite de v.a.r. indépendantes qui vérifient $P([X_n = -1]) = P([X_n = 1]) = 1/2$.
On définit une suite (Y_n) par $Y_1 = X_1$ et $Y_n = \alpha Y_{n-1} + X_n$.

(a) Exprimer Y_n en fonction de X_1, X_2,..., X_n.

(b) Calculer $\mathbb{E}(Y_n)$, $V(Y_n)$ puis $\text{cov}(Y_n, Y_{n+m})$.

---

203. * Soit X une v.a.r. suivant la loi de Bernoulli $\mathcal{B}(p)$ et Y une v.a.r. suivant la loi de Poisson $\mathcal{P}(\lambda)$. On suppose les v.a.r. X et Y indépendantes et on pose $Z = XY$.

(a) Calculer $\mathbb{E}(Z)$.

(b) Déterminer la loi de Z, puis calculer sa variance.

---

204. *** Soient X_1, X_2,..., X_n, n v.a.r. discrètes indépendantes de même loi, à valeurs dans $[1, k]$.
On pose, pour tout $j \in [1, k]$, $p_j = P([X_i = j])$.
Soit X la v.a.r. égale au nombre de v.a.r. X_i telles que $X_i = 1$ et Y la v.a.r. égale au nombre de v.a.r. X_i telles que $X_i = 2$.
Calculer le coefficient de corrélation $\rho(X, Y)$.

---

205. ** Soient X et Y deux v.a.r. discrètes telles que $\mathbb{E}(X) = \mathbb{E}(Y) = m$; $V(X) = \sigma_1^2$; $V(Y) = \sigma_2^2$; $\text{cov}(X, Y) = \mu$ et $V(X - Y) \neq 0$. On pose $Z = aX + bY$.
Déterminer a et b pour que $\mathbb{E}(Z) = m$ et $V(Z)$ soit maximale.

---

206. ** On considère 3 urnes contenant chacune n boules numérotées de 1 à n. On tire une boule dans chaque urne. Les v.a.r. X, Y et Z représentent les 3 numéros tirés.

(a) Calculer $P([Z = X + Y])$.

(b) Déterminer $\text{cov}(X, Y)$.

---

207. ** Soient X et Y deux v.a.r. indépendantes à valeurs dans $\mathbb{N}$, X suivant la loi géométrique $\mathcal{G}(p)$. Soit Z la v.a.r. telle que $Z = X - Y$ si $X > Y$ et $Z = 0$ sinon.
Exprimer la loi de Z en fonction de celle de Y et montrer qu'elle ne dépend que de $\alpha = \mathbb{E}((1-p)^Y)$.

---

208. ** Soient X et Y deux v.a.r. indépendantes, X suivant la loi géométrique $\mathcal{G}(p)$ et Y suivant la loi de Poisson $\mathcal{P}(\lambda)$. Soit Z la v.a.r. telle que $Z = 0$ si $X = 0$ et $Z = Y$ si $X = 1$.
Calculer la loi de Z, $g_Z(t)$, $\mathbb{E}(Z)$, $V(Z)$ et $P([X = 1]/[Z = 0])$.

---

209. ** Soient X_1 et X_2 deux v.a.r. indépendantes de même loi telles que, pour $k \in \mathbb{N}$, $P([X_1 = k]) = P([X_2 = k]) = \frac{1}{2^{k+1}}$.
Déterminer, à l'aide de la fonction de répartition, la loi de $X = \sup(X_1, X_2)$ et calculer $\mathbb{E}(X)$.

210. ** Soit X une v.a.r. suivant la loi géométrique $\mathcal{G}(p)$ et soit $n \in \mathbb{N}$.

(a) Déterminer les lois suivies par les v.a.r. $Y = \max(n, X)$ et $Z = \min(n, X)$.

(b) Soit T une v.a.r. indépendante de X suivant aussi la loi géométrique $\mathcal{G}(p)$. Déterminer les lois suivies par $X + T$, $\max(X, T)$ et $\min(X, T)$.

211. ** Soient X et Y deux v.a.r. indépendantes de même loi, à valeurs dans $\mathbb{N}$.

(a) On suppose que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $P([X = n]) = P([Y = n]) = pq^n$ où $p \in]0, 1[$ et $q = 1 - p$. Montrer qu'alors les v.a.r. $V = \inf(X, Y)$ et $W = X - Y$ sont indépendantes.

(b) Réciproquement, on suppose que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $P([X = n]) \neq 0$ et que les v.a.r. $V = \inf(X, Y)$ et $W = X - Y$ sont indépendantes. Déterminer les lois de X et de Y en fonction de $r = \frac{P([W=1])}{P([W=0])}$.
(*on calculera de deux façons différentes le rapport* $\frac{P([X=n+1]\cap[Y=n])}{P([X=n]\cap[Y=n])}$ *pour* $n \in \mathbb{N}$).