Exercices de Révisions (chapitres 1 à 5)

Espaces vectoriels

1. Notons E l'espace vectoriel des fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. On considère les ensembles de fonctions F_i définis ci-dessous. Déterminer pour chaque i si F_i est un espace vectoriel ou pas (pour montrer que F_i est un espace vectoriel, il suffit de vérifier que c'est un sous-espace vectoriel de E).
a) $F_1 = \mathbb{R}[x]$ (l'ensemble des fonctions polynômes)
b) $F_2 = \{P \in \mathbb{R}[x]\ ;\ P \text{ est unitaire }\}$
c) $F_3 = \{P \in \mathbb{R}[x]\ ;\ \deg(P) \leq 3\}$
d) $F_4 = \{P \in \mathbb{R}[x]\ ;\ \deg(P) = 4\}$
e) $F_5 = \{P \in \mathbb{R}[x]\ ; P(0) = 0\}$
f) $F_6 = \{f \in E\ ;\ f(0) = 0\}$
g) $F_7 = \{P \in \mathbb{R}[x]\ ;\ P(0) = 1\}$
h) $F_8 = \{P \in \mathbb{R}[x]\ ;\ P(1) = 0\}$
i) $F_9 = \{f \in E\ ;\ f \text{ est continue }\}$
j) $F_{10} = \{f \in E\ ;\ f \text{ est croissante }\}$
k) $F_{11} = \{f \in E\ ;\ f \text{ est monotone }\}$
l) $F_{12} = \{f \in E\ ;\ \text{pour tout } x \in \mathbb{R},\ f(x + 2\pi) = f(x)\}$
m) $F_{13} = \{f \in E\ ;\ \text{pour tout } x \in \mathbb{R},\ \alpha f''(x) + \beta f'(x) + \gamma f(x) = 0\}$.

---

a) F_1 (l'ensemble des fonctions polynômes) est un espace vectoriel car 0 est un polynôme et une combinaison linéaire de polynômes est un polynôme.

b) F_2 n'est pas un espace vectoriel. Par exemple, $X^2 + X^2 = 2X^2$ qui n'est pas un polynôme unitaire.

c) F_3 est un espace vectoriel car 0 est un polynôme de degré inférieur ou égal à 3 et, si P et Q sont de degré inférieur à 3, alors le degré de $\lambda P + \mu Q$ est inférieur à $\min(\deg P, \deg Q)$.

d) F_4 n'est pas un espace vectoriel. Par exemple, $X^4 + (-X^4 + X^3) = X^3$ n'est pas un polynôme de degré 4 : il n'y a pas de stabilité pour la somme.

e) F_5 est un espace vectoriel car $0 \in F_5$ et, si P et $Q \in F_5$, alors $(\lambda P + \mu Q)(0) = \lambda P(0) + \mu Q(0) = 0$ donc $\lambda P + \mu Q \in F_5$.

f) F_6 est un espace vectoriel pour la même raison que F_5.

g) F_7 n'est pas un espace vectoriel car $0 \notin F_7$ par exemple.

h) F_8 est un espace vectoriel car $0 \in F_8$ et, si P et $Q \in F_8$, alors $(\lambda P + \mu Q)(1) = \lambda P(1) + \mu Q(1) = 0$ donc $\lambda P + \mu Q \in F_8$.

i) F_9 est un espace vectoriel car 0 est une fonction continue et une combinaison linéaire de fonctions continues est continue.

j) F_{10} n'est pas un espace vectoriel. Par exemple, la fonction $x \mapsto x^3$ est croissante mais pas son opposée (pas de stabilité pour la multiplication par -1).

k) F_{11} n'est pas un espace vectoriel. Par exemple $x \mapsto x^3$ et $x \mapsto -x$ sont monotones, mais pas leur somme.

l) F_{12} est un espace vectoriel car 0 est périodique de période 2π et si $f, g \in F_{12}$, alors $(\lambda f + \mu g)(x + 2\pi) = \lambda f(x + 2\pi) + \mu g(x + 2\pi) = \lambda f(x) + \mu g(x) = (\lambda f + \mu g)(x)$ donc $\lambda f + \mu g \in F_{12}$.

m) F_{13} est un espace vectoriel car 0 vérifie l'équation différentielle et si f et g vérifient cette équation, alors $\lambda f + \mu g$ aussi (car $(f + g)' = f' + g'$ et $(\lambda f)' = \lambda f'$).

---

2. Soit E un espace vectoriel sur $\mathbb{K}$ ($\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$). Soit F et G deux sous-espaces vectoriels de E. Les ensembles suivants sont-ils des sous-espaces vectoriels de E ?

a) Le complémentaire de F dans E, noté $\overline{F}$
b) La réunion $\overline{F} \cup \{0\}$
c) L'intersection $F \cap G$;
d) La réunion $F \cup G$
e) La somme $F + G = \{z \in E \text{ ; il existe } x \in F \text{ et } y \in G \text{ tels que } z = x + y\}$.

---

a) Le complémentaire de F n'est pas un sous-espace vectoriel puisque $0 \notin \overline{F}$.

b) La réunion $\overline{F} \cup \{0\}$ n'est pas (en général) un sous-espace vectoriel : par exemple, dans $\mathbb{R}^2$, soit $(1,1), (1,-1) \in \overline{\text{vect}(1,0)} \cup \{\overrightarrow{0}\}$; on a $(1,1) + (1,-1) = (2,0) \notin \overline{\text{vect}(1,0)} \cup \{\overrightarrow{0}\}$ donc il n'y a pas stabilité pour la somme.

c) L'intersection $F \cap G$ est un sous-espace vectoriel (vu dans le cours).

d) La réunion $F \cup G$ n'est pas un sous-espace vectoriel (vu dans le cours).

e) La somme $F + G$ est un sous-espace vectoriel (vu dans le cours).

---

3. On se place dans l'espace vectoriel $\mathbb{R}^2$.
On définit les vecteurs $e_1 = (1,0)$, $e_2 = (0,1)$, $v_1 = (1,1)$, $v_2 = (2,2)$ et $v_3 = (1,2)$.
a) Les familles suivantes sont-elles libres ? sont-elles génératrices ?
(e_1, e_2), (v_1, v_2), (e_1, v_1), (v_3), (v_1, v_2, v_3), (e_2, v_1, v_3), (e_1, v_1, v_3).
b) Donner une condition nécessaire portant sur le nombre de vecteurs pour qu'une famille de vecteurs de $\mathbb{R}^2$ soit libre.
c) Donner une condition nécessaire portant sur le nombre de vecteurs pour qu'une famille de vecteurs de $\mathbb{R}^2$ soit génératrice.
d) Donner une condition suffisante portant sur le nombre de vecteurs pour qu'une famille de vecteurs de $\mathbb{R}^2$ soit liée.

---

a) (e_1, e_2) est libre : $\lambda e_1 + \mu e_2 = (0,0)$ équivaut à $(\lambda, \mu) = (0,0)$, soit $\lambda = \mu = 0$.
(e_1, e_2) est génératrice de $\mathbb{R}^2$: $(x,y) = xe_1 + ye_2$. Donc (e_1, e_2) est une base de $\mathbb{R}^2$ et $\dim \mathbb{R}^2 = 2$.

(v_1, v_2) est liée car $2v_1 - v_2 = 0$. (v_1, v_2) n'est pas génératrice non plus car, par exemple, pour tout $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$, $\lambda v_1 + \mu v_2 \neq (1,0)$.

(e_1, v_1) est libre : $\lambda e_1 + \mu v_1 = 0$ équivaut à $(\lambda + \mu, \mu) = (0,0)$ donc $\lambda = \mu = 0$. (e_1, v_1) est génératrice de $\mathbb{R}^2$: $(x,y) = (x-y)e_1 + yv_1$; donc (e_1, v_1) est une base de $\mathbb{R}^2$.

(v_3) est libre : $\lambda v_3 = 0$ implique $\lambda = 0$. (v_3) n'est pas génératrice de $\mathbb{R}^2$: par exemple, pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$, $\lambda v_3 \neq (1,0)$.

(v_1, v_2, v_3) est liée : $2v_1 - v_2 + 0v_3 = 0$. (v_1, v_2, v_3) est génératrice de $\mathbb{R}^2$: par exemple, $(x,y) = (2x-y)v_1 + 0v_2 + (y-x)v_3$.

(e_2, v_1, v_3) est liée : $e_2 + v_1 - v_3 = 0$. (e_2, v_1, v_3) est génératrice de $\mathbb{R}^2$: par exemple, $(x,y) = (x+y)e_2 + 2xv_1 - xv_3$.

(e_1, v_1, v_3) est liée : $e_1 - 2v_1 - v_3 = 0$. (e_2, v_1, v_3) est génératrice de $\mathbb{R}^2$: c'est une sur-famille de (e_1, v_1) qui est génératrice.

b) Si une famile de vecteurs de $\mathbb{R}^2$ est libre, alors elle possède au plus 2 vecteurs, car $\dim\mathbb{R}^2 = 2$ (voir cours).

c) Si une famile de vecteurs de $\mathbb{R}^2$ est génératrice, alors elle possède au moins 2 vecteurs, car $\dim\mathbb{R}^2 = 2$ (voir cours).

d) Si une famile de vecteurs de $\mathbb{R}^2$ possède au moins 3 vecteurs, alors elle est liée car $\dim\mathbb{R}^2 = 2$ (voir cours) : c'est la contraposée de b).

---

4. On se place dans l'espace vectoriel $\mathbb{R}^3$. Les deux familles ci-dessous sont-elles libres ou liées ?

$$\mathcal{F}_1 = ((1,2,-1),(3,1,2),(7,4,3)) \qquad \mathcal{F}_2 = ((2,2,-1),(0,1,3),(0,0,7))$$

$a(1,2,-1)+b(3,1,2)+c(7,4,3) = (0,0,0)$ équivaut à $\left\{\begin{array}{l} a+3b+7c=0 \\ 2a+b+4c=0 \\ -a+2b+3c=0 \end{array}\right.$, soit à $\left\{\begin{array}{l} a+3b+7c=0 \\ -5b-10c=0 \\ 5b+10c=0 \end{array}\right.$, ou encore à $\left\{\begin{array}{l} a+3b+7c=0 \\ b+2c=0 \end{array}\right.$, d'où $\left\{\begin{array}{l} a=-c \\ b=-2c \end{array}\right.$, donc $\mathcal{F}_1$ est liée, par exemple avec $c=-1$: $(1,2,-1)+2(3,1,2)-(7,4,3)=(0,0,0)$.

$a(2,2,-1)+b(0,1,3)+c(0,0,7) = (0,0,0)$ équivaut à $(2a, 2a+b, -a+3b+7c) = (0,0,0)$, qui équivaut encore à $a=0$, $b=0$ et $c=0$ donc $\mathcal{F}_2$ est libre. C'est une famille libre à 3 éléments dans un espace vectoriel de dimension 3 donc elle est également génératrice de $\mathbb{R}^3$ et c'est une base de $\mathbb{R}^3$.

---

5. Dans le $\mathbb{R}$-espace vectoriel $\mathbb{R}^4$, on considère les sous-ensembles :

$$F = \{(x,y,z,t) \in \mathbb{R}^4 \ ; \ x+3y+3z+3t=0\} \qquad G = \{(x,y,z,t) \in \mathbb{R}^4 \ ; \ x-y+z-t=0\}$$

a) Démontrer que F et G sont des sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}^4$ et trouver une base et la dimension de F et de G.
b) Trouver une base et la dimension de $F \cap G$.
c) Montrer que $\mathbb{R}^4 = F + G$.
d) Déterminer deux supplémentaires de G puis un supplémentaire de $F \cap G$.

---

a) $F = \{(x,y,z,t) \in \mathbb{R}^4 \ ; \ x = -3y-3z-3t\} = \{(-3y-3z-3t, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 \ ; \ y,\ z,\ t \in \mathbb{R}\} = \{y(-3,1,0,0)+z(-3,0,1,0)+t(-3,0,0,1) \in \mathbb{R}^4 \ ; \ y,\ z,\ t \in \mathbb{R}\}$
$= \mathrm{vect}((-3,1,0,0),(-3,0,1,0),(-3,0,0,1))$ donc F est le sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^4$ engendré par $((-3,1,0,0),(-3,0,1,0),(-3,0,0,1))$ et on vérifie facilement que cette famille est libre, donc c'est une base de F et $\dim F = 3$.

$G = \{(x,y,z,t) \in \mathbb{R}^4 \ ; \ x = y-z+t\} = \{(y-z+t, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 \ ; \ y,\ z,\ t \in \mathbb{R}\} = \{y(1,1,0,0)+z(-1,0,1,0)+t(1,0,0,1) \in \mathbb{R}^4 \ ; \ y,\ z,\ t \in \mathbb{R}\} = \mathrm{vect}((1,1,0,0),(-1,0,1,0),(1,0,0,1))$ donc G est le sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^4$ engendré par $((1,1,0,0),(-1,0,1,0),(1,0,0,1))$ et on vérifie facilement que cette famille est libre, donc c'est une base de G et $\dim G = 3$.

b) Cherchons une base et la dimension de $F \cap G = \{(x,y,z,t) \in \mathbb{R}^4 \ ; \ x+3y+3z+3t=0 \text{ et } x-y+z-t=0\} = \{(x,y,z,t) \in \mathbb{R}^4 \ ; \ z=-2y-2t \text{ et } x=3y+3t\} = \{(3y+3t, y, -2y-2t, t) \in \mathbb{R}^4 \ ; \ y,\ t \in \mathbb{R}\} = \{y(3,1,-2,0)+t(3,0,-2,1) \in \mathbb{R}^4 \ ; \ y,\ t \in$

$\mathbb{R}\} = \text{vect}((3,1,-2,0),(3,0,-2,1))$. Donc $F \cap G$ est engendré par $((3,1,-2,0),(3,0,-2,1))$ qui est clairement une famille libre puisqu'il s'agit de deux vecteurs non colinéaires. On a donc $\dim(F \cap G) = 2$.

c) Montrons que $\mathbb{R}^4 = F + G$: $\dim(F+G) = \dim F + \dim G - \dim(F \cap G) = 3 + 3 - 2 = 4$. Ainsi, $F + G$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^4$, de même dimension que $\mathbb{R}^4$ donc $F + G = \mathbb{R}^4$.

d) Pour trouver des supplémentaires de G, il suffit de compléter une base de G en une base de $\mathbb{R}^4$ et de considérer l'espace engendré par les vecteurs ajoutés.

Par exemple, $(1,0,0,0)$ complète $((1,1,0,0),(-1,0,1,0),(1,0,0,1))$ en une base de $\mathbb{R}^4$. En effet, on vérifie facilement que $((1,1,0,0),(-1,0,1,0),(1,0,0,1))$ est libre, et, puisqu'elle comporte 4 éléments, c'est une base de $\mathbb{R}^4$; donc $\text{vect}((1,0,0,0))$ est un supplémentaire de G dans $\mathbb{R}^4$. De même, on montre que $\text{vect}((0,1,0,0))$ est un autre supplémentaire de G dans $\mathbb{R}^4$ (il en existe bien d'autres).

Pour trouver des supplémentaires de $F \cap G$, il suffit de compléter une base de $F \cap G$ en une base de $\mathbb{R}^4$ et de considérer l'espace engendré par les vecteurs ajoutés.

Par exemple, il est très facile de vérifier que $((3,1,-2,0),(3,0,-2,1),(1,0,0,0),(0,0,1,0))$ est libre, et, puisqu'elle comporte 4 éléments, c'est une base de $\mathbb{R}^4$; $\text{vect}((1,0,0,0),(0,0,1,0))$ est donc un supplémentaire de $F \cap G$ dans $\mathbb{R}^4$.

$\boxed{\textbf{6.}}$ Soit $V = (v_1, v_2, v_3)$ une famille libre d'un espace vectoriel E. Posons $x = \alpha v_1 + \beta v_2 + \gamma v_3$ et $W = (v_1 + x, v_2 + x, v_3 + x)$.

Démontrer que W est libre si et seulement si $\alpha + \beta + \gamma \neq -1$.

Supposons que $\alpha + \beta + \gamma \neq -1$ et montrons que W est libre.

$\lambda_1(v_1 + x) + \lambda_2(v_2 + x) + \lambda_3(v_3 + x) = 0$ équivaut à $(\lambda_1 + \lambda_1\alpha + \lambda_2\alpha + \lambda_3\alpha)v_1 + (\lambda_2 + \lambda_1\beta + \lambda_2\beta + \lambda_3\beta)v_2 + (\lambda_3 + \lambda_1\gamma + \lambda_2\gamma + \lambda_3\gamma)v_3 = 0$. Or V est libre, donc $\left\{\begin{array}{l} \lambda_1 + \alpha(\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3) = 0 \\ \lambda_2 + \beta(\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3) = 0 \\ \lambda_3 + \gamma(\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3) = 0 \end{array}\right.$, ce qui implique, en faisant la somme, $(1 + \alpha + \beta + \gamma)(\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3) = 0$ et, puisque $\alpha + \beta + \gamma \neq -1$, on a $\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 = 0$. En remplaçant dans le système précédent, on trouve $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 0$.

Réciproquement, supposons que $\alpha + \beta + \gamma = -1$, alors $\alpha(v_1 + x) + \beta(v_2 + x) + \gamma(v_3 + x) = \alpha v_1 + \beta v_2 + \gamma v_3 + (\alpha + \beta + \gamma)x = x - x = 0$. Les scalaires α, β et γ sont non tous nuls puisque leur somme est -1 donc la famille W est liée.

$\boxed{\textbf{7.}}$ On considère l'espace vectoriel $\mathbb{R}^3$ muni de la base canonique (e_1, e_2, e_3).

Soit $F = \{\alpha e_1 + \beta e_2 + \gamma e_3 \ ; \ \alpha = \beta\}$ et $G = \{\alpha e_1 + \beta e_2 + \gamma e_3 \ ; \ \alpha + \beta = 0\}$.

a) Démontrer que F et G sont des sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}^3$ et donner une base de F et de G.

b) Trouver deux supplémentaires de F dans $\mathbb{R}^3$.

c) Donner une base de $H = F \cap G$.

d) Trouver des sous-espaces vectoriels de L, M et N tels que :

i) $H \oplus L = F$ ii) $H \oplus M = G$ iii) $H \oplus N = \mathbb{R}^3$.

---

a) $F = \{\alpha e_1 + \alpha e_2 + \gamma e_3 \ ; \ \alpha, \ \beta \in \mathbb{R}\} = \{\alpha(e_1 + e_2) + \gamma e_3 \ ; \ \alpha, \ \gamma \in \mathbb{R}\} = \text{vect}(e_1 + e_2, e_3)$ donc F est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$ dont une base est $\mathcal{B} = (e_1 + e_2, e_3)$ (il apparaît ci-dessus que cette famille engendre F et il est clair que cette famille est libre puisqu'il s'agit de deux vecteurs non colinéaires). F est donc un plan.

$G = \{\alpha e_1 - \alpha e_2 + \gamma e_3\ ;\ \alpha,\ \beta \in \mathrm{IR}\} = \{\alpha(e_1 - e_2) + \gamma e_3\ ;\ \alpha,\ \gamma \in \mathrm{IR}\} = \mathrm{vect}(e_1 - e_2, e_3)$ donc G est un sous-espace vectoriel de IR^3 dont une base est $\mathcal{B}' = (e_1 - e_2, e_3)$ (il apparaît ci-dessus que cette famille engendre G et il est clair que cette famille est libre puisqu'il s'agit de deux vecteurs non colinéaires). G est donc un plan.

b) Pour trouver un supplémentaire de F dans IR^3, il suffit de compléter une base de $\mathcal{B}$ en une base de IR^3 et de considérer l'espace engendré par les vecteurs ajoutés.

Par exemple, $(e_1 + e_2, e_3, e_1)$ est une base de IR^3 (3 vecteurs qui forment une famille libre) donc $\mathrm{vect}(e_1)$ est un supplémentaire de F.

De même, $(e_1 + e_2, e_3, e_2)$ est une base de IR^3 (3 vecteurs qui forment une famille libre) donc $\mathrm{vect}(e_2)$ est un autre supplémentaire de F.

c) $H = F \cap G = \{\alpha e_1 + \beta e_2 + \gamma e_3\ ;\ \alpha = \beta \text{ et } \alpha + \beta = 0\ ;\ \alpha,\ \beta \in \mathrm{IR}\} = \{\alpha e_1 + \beta e_2 + \gamma e_3\ ;\ \alpha = \beta = 0\} = \{\gamma e_3\ ;\ \gamma \in \mathrm{IR}\} = \mathrm{vect}(e_3)$. (e_3) est une base de H qui est donc une droite.

d) Pour trouver des sous-espaces vectoriels L, M et N, il suffit de compléter (e_3) en une base de F, de G, puis de IR^3.

i) Avec $L = \mathrm{vect}(e_1 + e_2)$, on a $H \oplus L = F$;

ii) Avec $M = \mathrm{vect}(e_1 - e_2)$, on a $H \oplus M = G$;

iii) Avec $N = \mathrm{vect}(e_1, e_2)$, on a $H \oplus N = \mathrm{IR}^3$.

$\boxed{\textbf{8.}}$ On se place dans le IR-espace vectoriel de IR^{2n} où n est un entier naturel non nul. On considère les deux sous-ensembles définis ci-dessous :

$$E = \{(x_1, \cdots, x_n, x_{n+1}, \cdots, x_{2n})\ \ x_i = 0 \text{ pour tout } i \leq n\}$$

$$F = \{(x_1, \cdots, x_n, x_{n+1}, \cdots, x_{2n})\ \ x_i = x_{n+i} \text{ pour tout } i \leq n\}$$

a) Démontrer que E et F sont des sous-espaces vectoriels de IR^{2n}.

b) Démontrer que $\mathrm{IR}^{2n} = E \oplus F$.

---

a) Montrons d'abord que E est un sous-espace vectoriel de IR^{2n}.

Tout d'abord, $0 \in E$ puis, si $(0, \cdots, 0, x_{n+1}, \cdots, x_{2n}), (0, \cdots, 0, x_{n+1}, \cdots, x'_{2n}) \in E$ et $\lambda, \mu \in \mathrm{IR}$,

$\lambda(0, \cdots, 0, x_{n+1}, \cdots, x_{2n}) + \mu(0, \cdots, 0, x'_{n+1}, \cdots, x'_{2n})$

$= (0, \cdots, 0, \lambda x_{n+1} + \mu x'_{n+1}, \cdots, \lambda x_{2n} + \mu x'_{2n}) \in E$.

De même, on montre que F est un sous-espace vectoriel de IR^{2n}.

Tout d'abord, $0 \in F$ puis, si $(x_1, \cdots, x_n, x_1, \cdots, x_n), (x'_1, \cdots, x'_n, x'_1, \cdots, x'_n) \in F$ et $\lambda, \mu \in \mathrm{IR}$,

$\lambda(x_1, \cdots, x_n, x_1, \cdots, x_n) + \mu(x_1, \cdots, x_n, x'_1, \cdots, x'_n)$

$= (\lambda x_1 + \mu x'_1, \cdots, \lambda x_n + \mu x_n, \lambda x_1 + \mu x'_1, \cdots, \lambda x_n + \mu x'_n) \in F$.

b) On remarque d'abord que $E \cap F$ est réduit au vecteur nul puisqu'un élément de E a ses n premières composantes nulles et pour un élément de F, les n dernières composantes sont égales aux n premières.

Pour montrer que $\mathrm{IR}^{2n} = E + F$, il suffit de remarquer que :

$$(x_1, \cdots, x_n, x_{n+1}, \cdots, x_{2n}) = (0, \cdots, 0, x_{n+1} - x_1, \cdots, x_{2n} - x_n) + (x_1, \cdots, x_n, x_1, \cdots, x_n).$$

$\boxed{\textbf{9.}}$ Soit $E = \mathcal{C}^2([0,1], \mathrm{IR})$, $E_1 = \{y \in E / y'' + xy = 0\}$, $E_2 = \{y \in E / y'' - xy = 0\}$ et $E_3 = \{y \in E / y \text{ est polynomiale}\}$. Montrer que E_1, E_2 et E_3 sont en somme directe.

Soit $y_1+y_2+y_3=0$ où $y_i\in E_i$. On dérive deux fois d'où $-xy_1+xy_2+y_3''=0$. Ainsi, avec $xy_1+xy_2+xy_3=0$, il vient $2xy_2+y_3''+xy_3=0$. Soit le polynôme $P_3=-(y_3''+xy_3)$. On a $P_3(0)=0$ soit $P_3=XQ_3$ avec $Q_3=2y_2$. Donc, y_2 est polynomiale. Mais $y_2''=xy_2$ et y_2 polynomiale est impossible si $y_2\neq 0$ pour des raisons de degré donc $y_2=0$. De même, $y_1=0$, donc $y_3=0$.

---

10. Soit $E=\mathbb{K}_3[X]$, $E_1=\{P\in E/P(0)=P(1)=P(2)=0\}$, $E_2=\{P\in E/P(1)=P(2)=P(3)=0\}$ et $E_3=\{P\in E/P(X)=P(-X)\}$. Montrer que les E_i sont des sous-espaces vectoriels de E et que $E=E_1\oplus E_2\oplus E_3$.

On a $E_1=\mathbb{K}X(X-1)(X-2)$ et $E_2=\mathbb{K}(X-1)(X-2)(X-3)$ tandis que $E_3=\text{vect}(1,X^2)$ donc $\dim(E_1)=\dim(E_2)=1$ et $\dim(E_3)=2$, soit déjà $\dim(E)=\sum_{i=1}^{3}\dim(E_i)$.

Montrons que la somme est directe. Si $P_1+P_2+P_3=0$, alors $P_3(1)=P_3(2)=0$. Si $P_3=a+bX^2$, cela donne $a=b=0$ donc $P_3=0$. Il reste alors $P_1(3)=0$ donc P_1 a quatre racines distinctes et $P_1=0$. D'où $P_2=0$ et la somme est directe. Avec les dimensions, elle vaut E.

---

11. On se place dans $\mathbb{R}_3[X]$, l'espace vectoriel des polyômes de degré inférieur ou égal à 3.
Soit $U=\{P\in\mathbb{R}_3[X]\ ;\ P(0)=0\}$.
a) Démontrer que U est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}_3[X]$.
b) Déterminer un supplémentaire de U.

---

a) D'abord, le polynôme 0 appartient à U. Soit $P,Q\in U$ et $\lambda,\mu\in\mathbb{R}$: $(\lambda P+\mu Q)(0)=\lambda P(0)+\mu Q(0)=0$ donc $\lambda P+\mu Q\in U$ et U est bien un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}_3[X]$.

b) Un élément de U est un polynôme dont le terme constant est nul : $P(X)=aX^3+bX^2+cX$. Ainsi, la famille (X,X^2,X^3) est génératrice de U et il est clair que cette famille est libre. Le polynôme constant 1 complète cette famille en une base $\mathcal{B}$ de $\mathbb{R}_3[X]$ (la base canonique) donc vect(1), c'est-à-dire l'ensemble des polynômes constants est un supplémentaire de U dans $\mathbb{R}_3[X]$.

---

12. On considère le $\mathbb{C}$-espace vectoriel $\mathbb{C}^4$.
Soit $F=\{(a,2a+b,-b,-a)\in\mathbb{C}^4\ ;\ a,b\in\mathbb{C}\}$ et $G=\{(a,3a+b,-b,-2a+b)\in\mathbb{C}^4\ ;\ a,b\in\mathbb{C}\}$.
a) Montrer que F est G sont des sous-espaces vectoriels de $\mathbb{C}^4$ en mettant en évidence pour chacun d'eux une base.
b) Montrer que $\mathbb{C}^4=F\oplus G$.

---

a) $F=\{a(1,2,0,-1)+b(0,1,-1,0)\in\mathbb{C}^4\ ;\ a,b\in\mathbb{C}\}=\text{vect}((1,2,0,-1),(0,1,-1,0))$ donc F est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{C}^4$ engendré par $((1,2,0,-1),(0,1,-1,0))$ qui est une famille libre puisqu'il s'agit de deux vecteurs non colinéaires, donc c'est une base de F.

$G=\{a(1,3,0,-2)+b(0,1,-1,1)\in\mathbb{C}^4\ ;\ a,b\in\mathbb{C}\}=\text{vect}((1,3,0,-2),(0,1,-1,1))$ donc G est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{C}^4$ engendré par $((1,3,0,-2),(0,1,-1,1))$ qui est une famille libre puisqu'il s'agit de deux vecteurs non colinéaires, donc c'est une base de G.

b) Montrons que $\mathbb{C}^4=F\oplus G$. On a déjà $\dim F+\dim G=2+2=4=\dim\mathbb{C}^4$. Il reste donc à montrer que $F\cap G=\{0\}$. Supposons que $v=(a,2a+b,-b,-a)=(a',3a'+b',-b',-2a'+b')\in$

$F \cap G$. Les premières et troisièmes composantes donnent immédiatement $a = a'$ et $b = b'$. Avec les deuxièmes composantes, il vient $2a = 3a$ donc $a = 0$ puis avec les quatrièmes, on a $b = 0$. D'où $v = 0$ et $\mathbb{C}^4 = F \oplus G$.

$\boxed{\textbf{13.}}$ Soit $E = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \ ; \ x + y + 2z = 0\}$ et $F = \{(a, -a, 3a) \ ; \ a \in \mathbb{R}\}$
a) Montrer que E et F sont des sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}^3$ dont on déterminera la dimension
b) Montrer que $\mathbb{R}^3 = E \oplus F$.

---

a) $E = \{(-y - 2z, y, z) \ ; y,\ z \in \mathbb{R}\} = \{y(-1, 1, 0) + z(-2, 0, 1) \in \mathbb{R}^3 \ ; \ y, z \in \mathbb{R}\} = \mathrm{vect}((-1, 1, 0), (-2, 0, 1))$ donc E est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$ engendré par $((-1, 1, 0), (-2, 0, 1))$ qui est une famille libre puisqu'il s'agit de deux vecteurs non colinéaires, donc c'est une base de E.

$F = \{a(1, -1, 3) \in \mathbb{R}^3 \ ; \ a \in \mathbb{R}\} = \mathrm{vect}((1, -1, 3))$ donc F est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$ engendré par $((1, -1, 3))$ qui est une famille libre puisqu'il s'agit d'un vecteur non nul, donc c'est une base de F.

b) Montrons que $\mathbb{R}^3 = E \oplus F$. On a déjà $\dim E + \dim F = 2 + 1 = 3 = \dim \mathbb{R}^3$. Il reste donc à montrer que $E \cap F = \{0\}$. Supposons que $v = (-y - 2z, y, z) = (a, -a, 3a) \in F \cap G$. Les deuxièmes et troisièmes composantes donnent immédiatement $y = -a$ et $z = 3a$. Avec les premières composantes, il vient $-y - 2z = a$, soit $a - 6a = a$ donc $a = 0$. D'où $v = 0$ et $\mathbb{R}^3 = E \oplus F$.

$\boxed{\textbf{14.}}$ Soit F le sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^4$ engendré par :

$$u_1 = (1, 4, -1, 0) \qquad u_2 = (6, 10, 1, 0) \qquad u_3 = (2, 2, 1, 1) \qquad u_4 = (1, 0, 1, -4)$$

Trouver une base de F, puis un supplémentaire de F dans $\mathbb{R}^4$.

On a $u_1 + u_2 = (7, 14, 0, 0)$, $u_1 + u_3 = (3, 6, 0, 1)$ et $u_1 + u_4 = (2, 4, 0, -4)$ puis $4(u_1 + u_3) + (u_1 + u_4) = (14, 28, 0, 0) = 2(u_1 + u_2)$. Ainsi, $3u_1 - 2u_2 + 4u_3 - u_4 = 0$ donc la famille (u_1, u_2, u_3, u_4) est liée. Par contre, $\alpha u_1 + \beta u_2 + \gamma u_3 = 0$ donne tout d'abord $\gamma = 0$ (quatrièmes composantes), puis $\alpha = \beta$ (troisièmes composantes), et enfin $7\alpha = 0$ (premières composantes) donc $\alpha = \beta = \gamma = 0$ et la famille (u_1, u_2, u_3) est libre : c'est une base de F (famille libre maximale).

Comme supplémentaire de F dans $\mathbb{R}^4$, on peut prendre $\mathrm{vect}(e_1)$ où $e_1 = (1, 0, 0, 0)$ car (e_1, u_1, u_2, u_3) est libre. En effet, si $\alpha e_1 + \beta u_2 + \gamma u_2 + \delta u_3 = 0$, on obtient d'abord $\delta = 0$ (quatrièmes composantes), puis $\beta = \gamma$ (troisièmes composantes), puis $14\beta = 0$ (deuxièmes composantes) donc $\beta = \gamma = \delta = 0$ et enfin $\alpha = 0$.
Remarque : Cet exercice peut également se traiter avec les déterminants.

Applications linéaires

$\boxed{\textbf{15.}}$ Les applications suivantes sont-elles linéaires ?
a) $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, $(x, y) \mapsto (x + y, 8y)$
b) $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, $(x, y) \mapsto (x + y, xy)$
c) $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, $(x, y, z) \mapsto (2x + 1, y + z, x)$
d) $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$, $(x, y, z) \mapsto (2x + y, -z)$
e) $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$, $(x, y, z) \mapsto \sin(x)$
f) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x \mapsto xe^x$.

---

a) $f((x,y)+\lambda(x',y')) = f(x+\lambda x', y+\lambda y') = (x+\lambda x'+y+\lambda y', 8y+8\lambda y') = (x+y, 8y) + \lambda(x'+y', 8y') = f(x,y)+\lambda f(x',y')$ donc f est bien une application linéaire.

b) f n'est pas linéaire : par exemple, $f(0,1)+f(1,0) = (2,0)$ alors que $f((0,1)+(1,0)) = f(1,1) = (2,1)$.

c) f n'est pas linéaire car $f(0,0,0) = (1,0,0) \neq (0,0,0)$.

d) $f((x,y,z)+\lambda(x',y',z')) = f(x+\lambda x', y+\lambda y', z+\lambda z') = (2(x+\lambda x')+(y+\lambda y'), -(z+\lambda z')) = (2x+y,-z)+\lambda(2x'+y',-z') = f(x,y,z)+\lambda f(x',y',z')$.

e) f n'est pas linéaire : $f\left(2\times\dfrac{\pi}{2},0,0\right) = f(\pi,0,0) = 0$ alors que $2f\left(\dfrac{\pi}{2},0,0\right) = 2$.

f) f n'est pas linéaire : par exemple $f(1-1) = f(0) = 0$ alors que $f(1)+f(-1) = e-e^{-1} \neq 0$.

$\boxed{\textbf{16.}}$ Soit l'application linéaire $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, $(x,y,z) \mapsto (x+y+z, 2y+z, x-y)$. Calculer $\mathrm{im}(f)$ et $\ker(f)$.

$v = (x,y,z) \in \ker(f)$ équivaut à $(x+y+z, 2y+z, x-y) = 0$, ce qui donne $x = y$ et $z = -2y$. Donc $\ker(f) = \mathrm{vect}((1,1,-2))$ qui est de dimension 1.
$\mathrm{im}(f) = \{x(1,0,1)+y(1,2,-1)+z(1,1,0) \in \mathbb{R}^3\ ;\ x,\ y,\ z \in \mathbb{R}\} = \mathrm{vect}((1,0,1),(1,2,-1),(1,1,0))$. La famille $((1,0,1),(1,2,-1),(1,1,0))$ engendre $\mathrm{im}(f)$ mais n'est pas libre car $(1,0,1)+(1,2,-1)-2(1,1,0) = 0$. Par contre, la famille $((1,0,1),(1,2,-1))$ est libre car formée de deux vecteurs non colinéaires et $\mathrm{im}(f) = \mathrm{vect}((1,0,1),(1,2,-1))$ donc en particulier $\mathrm{rg}(f) = 2$ et le théorème du rang est bien vérifié.

$\boxed{\textbf{17.}}$ Soit $f : \mathbb{R}[X] \to \mathbb{R}$, $P \mapsto P(1)$.
Montrer que f est linéaire et déterminer son noyau et son image.

$f(P+\lambda Q) = (P+\lambda Q)(1) = P(1)+\lambda Q(1) = f(P)+\lambda f(Q)$.
$\ker(f) = \{P \in \mathbb{R}[X]\ ; P(1) = 0\} = (X-1)\mathbb{R}[X]$ car $P(1) = 0$ équivaut à $(X-1)$ divise P.
$\mathrm{im}(f) = \mathbb{R}$ car déjà $\mathrm{im}(f) \subset \mathbb{R}$ et, si $P_a = a$, polynôme constant, $f(P_a) = a$.

$\boxed{\textbf{18.}}$ Soit E l'espace vectoriel de l'ensemble des fonctions de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$ et $\varphi : E \to E$ définie par $\varphi(f) = f'+f$.

a) Montrer que φ est linéaire et calculer son noyau.

b) φ est-elle injective ?

---

a) $\varphi(f+\lambda g) = (f+\lambda g)' + (f+\lambda g) = f'+\lambda g'+f+\lambda g$ par linéarité de la dérivation, donc $\varphi(f+\lambda g) = f'+f+\lambda(g'+g) = \varphi(f)+\lambda\varphi(g)$ et φ est bien linéaire.
$\ker(\varphi) = \{f \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R})\ ;\ f'+f = 0\} = \mathrm{vect}(x \mapsto e^{-x})$.

b) f n'est pas injective puisque son noyau n'est pas nul.

$\boxed{\textbf{19.}}$ Soit E un espace vectoriel de dimension $n \geq 1$. Soit $u,\ v \in \mathcal{L}(E)$ avec $u \circ v = v \circ u$ ainsi que $E = \ker u \oplus \mathrm{im} u = \ker v \oplus \mathrm{im} v$. Montrer que $E = \ker(u \circ v) \oplus \mathrm{im}(u \circ v)$.

Étant donné la formule du rang appliquée à $u \circ v$, il suffit de montrer que : $\ker(u \circ v) \cap \mathrm{im}(u \circ v) = \{0\}$. Soit $x = u \circ v(y)$ tel que $u \circ v(x) = 0$. On a alors $v(x) \in \ker u$ et $v(x) = v \circ u \circ v(y) = u \circ v^2(y)$, d'où $v(x) \in \ker u \cap \mathrm{im} u$ donc $v(x) = 0$. Ainsi $x \in \ker v$.

Mais $x = u \circ v(y) = v \circ u(y)$, donc $x \in \mathrm{im} v$. D'où $x \in \ker v \cap \mathrm{im} v$ donc $x = 0$.

$\boxed{\mathbf{20.}}$ Soit E un espace vectoriel, et $u \in \mathcal{L}(E)$. Montrer que :

a) $E = \mathrm{Im} u + \ker u$ si et seulement si $\mathrm{Im} u = \mathrm{Im} u^2$.

b) $\ker u \cap \mathrm{Im} u = \{0\}$ si et seulement si $\ker u = \ker u^2$. .

Que conclut-on si E est de dimension finie ?

---

a) On a toujours $\mathrm{Im} u^2 \subset \mathrm{Im} u$.

• Si $E = \mathrm{Im} u + \ker u$, soit $x \in \mathrm{Im} u$: $x = u(y)$, $y = y_1 + y_2$, où $y_1 \in \mathrm{Im} u$: $y_1 = u(z_1)$, et $y_2 \in \ker u$. Donc, $u(y) = u^2(z_1) = x$, *i.e.* $\mathrm{Im} u \subset \mathrm{Im} u^2$.

• si $\mathrm{Im} u = \mathrm{Im} u^2$: pour tout $x \in E$, il existe y tel que $u(x) = u^2(y)$, d'où $u(x - u(y)) = 0$, ainsi $x - u(y) = z \in \ker u$, soit $x = u(y) + z$, donc $E = \mathrm{Im} u + \ker u$.

b) On a toujours $\ker u \subset \ker u^2$.

• si $\ker u \cap \mathrm{Im} u = \{0\}$, soit $x \in \ker u^2$: $u^2(x) = 0$, donc $u(x) \in \ker u \cap \mathrm{Im} u$, soit $u(x) = 0$, d'où $\ker u^2 \subset \ker u$.

• si $\ker u = \ker u^2$, soit $x \in \ker u \cap \mathrm{Im} u$: $u(x) = 0$ et $x = u(y)$, donc $u^2(y) = 0$, puis $u(y) = 0$, soit $x = 0$.

En dimension finie : $E = \mathrm{Im} u \oplus \ker u$ si et seulement si $\mathrm{Im} u = \mathrm{Im} u^2$ (ou $\ker u = \ker u^2$). D'ailleurs, $\dim E = \mathrm{rg} u + \dim \mathrm{Ker} u = \mathrm{rg} u^2 + \dim \mathrm{Ker} u^2$, donc $\mathrm{rg} u = \mathrm{rg} u^2$ équivaut à $\dim \mathrm{Ker} u = \dim \mathrm{Ker} u^2$, soit $\mathrm{Im} u = \mathrm{Im} u^2$ équivaut à $\ker u = \ker u^2$, puisque l'une des inclusions est assurée au départ. On peut se contenter de (a) par exemple, pour la preuve !

$\boxed{\mathbf{21.}}$ Soit E un espace vectoriel de dimension $n \geq 1$ et soient $u,\ v \in \mathcal{L}(E)$ vérifiant $E = \mathrm{im} u + \mathrm{im} v = \ker u + \ker v$. Montrer l'équivalence entre :

a) Les deux sommes sont directes

b) $E = \mathrm{im}(u + v)$ et $\mathrm{rg}(u + v) = \mathrm{rg} u + \mathrm{rg} v = n$.

Si b) est réalisée, $n = \mathrm{rg} u + \mathrm{rg} v - \dim(\mathrm{im} u \cap \mathrm{im} v) = \dim \ker u + \dim \ker v - \dim(\ker u \cap \ker v)$. D'où $\dim \ker v \geq n - \dim \ker u = \mathrm{rg} u \geq n - \mathrm{rg} v = \dim \ker v$. Ainsi, $\mathrm{rg} u = \dim \ker v$ et $\mathrm{rg} v = \dim \ker u$, puis $n = \mathrm{rg} u + \mathrm{rg} v$, d'où $\mathrm{im} u \cap \mathrm{im} v = \{0\}$, et $n = \dim \ker u + \dim \ker v$, donc $\ker u \cap \ker v = \{0\}$.

Supposons disposer de a). Si $(u + v)(x) = 0$, alors $u(x) = -v(x) = v(-x) \in \mathrm{im} u \cap \mathrm{im} v$, d'où $u(x) = 0 = v(x)$, soit $x \in \ker u \cap \ker v = \{0\}$. Ainsi, $E = \mathrm{im}(u+v)$, puis $n = \mathrm{rg}(u+v) = \mathrm{rg} u + \mathrm{rg} v$.

$\boxed{\mathbf{22.}}$ Soit E un espace vectoriel de dimension $n \geq 1$ et soient $u,\ v \in \mathcal{L}(E)$ vérifiant $\mathrm{rg} u = \mathrm{rg} v = 1$. Montrer l'équivalence entre :

a) $\mathrm{rg}(u + v) \leq 1$.

b) $\mathrm{im} u = \mathrm{im} v$ ou $\ker u = \ker v$ [on pourra montrer, et utiliser, que, si $u \in \mathcal{L}(E)$ est de rang 1, il existe un vecteur non nul e et une forme linéaire $\lambda \in E^*$ avec $u = \lambda e$].

Si on a b), comme $\mathrm{im}(u + v) \subset \mathrm{im} u + \mathrm{im} v$,

• si $\mathrm{im} u = \mathrm{im} v$, alors $\mathrm{rg}(u + v) \leq \mathrm{rg} u \leq 1$,

• si $\ker u = \ker v$, si $u(x) = 0$, $v(x) = 0$ et donc $(u + v)(x) = 0$ et $\ker u \subset \ker(u + v)$. D'où $n - \mathrm{rg} u \leq n - \mathrm{rg}(u + v)$ et $\mathrm{rg}(u + v) \leq \mathrm{rg} u = 1$.

Si on a a),

• si $u + v = 0$, $v = -u$ et $\mathrm{im} u = \mathrm{im} v$.

• sinon, $\mathrm{rg}(u+v)=1$. Puisque $\mathrm{rg}u=1$, il existe $\epsilon\neq 0$ avec, pour tout $x\in E$, il existe $\lambda(x)$ tel que $u(x)=\lambda(x)\epsilon$. La linéarité de u entraîne que λ est une forme linéaire non nulle. De même, $v(x)=\mu(x)e$ et $(u+v)(x)=\gamma(x)a$, où $\mu,\gamma\in E^*\setminus\{0\}$. On a donc, pour tout $x\in E$, $\lambda(x)\epsilon+\mu(x)e=\gamma(x)a$.

$\triangleright$ Si $\ker\lambda=\ker\mu=H$ hyperplan, alors $\ker u=\ker v$, donc $\mu=\alpha\lambda$ ($\alpha\neq 0$), et $\gamma(x)a=\lambda(x)(\epsilon+\alpha e)$, donc $a=\delta(\epsilon+\alpha e)$ car il existe x_0 tel que $\gamma(x_0)\neq 0$.

$\triangleright$ Sinon, il existe x_0 et x_1 tels que $\lambda(x_0)\neq 0$; $\mu(x_0)=0$ et $\lambda(x_1)=0$; $\mu(x_1)\neq 0$, donc $\lambda(x_0)\epsilon=\gamma(x_0)a$ et $\mu(x_1)e=\gamma(x_1)a$, soit $\gamma(x_0)\neq 0$, $\gamma(x_1)\neq 0$, donc $\mathbb{K}\epsilon=\mathbb{K}e=\mathbb{K}a$, soit $\mathrm{im}u=\mathrm{im}v$.

---

23. Soit E un espace vectoriel de dimension finie, et $u\in\mathcal{L}(E)$. Montrer l'équivalence entre :
a) $u^2=0$.
b) Il existe un projecteur p de E tel que $pu=u$ et $up=0$.
c) Il existe un projecteur p de E tel que $pu-up=u$.

Si l'on veut b), on doit avoir $\mathrm{im}(p)\subset\ker(u)$ et $\mathrm{im}(u)\subset\mathrm{im}(p)$.

$u^2=0$ équivaut à $\mathrm{im}(u)\subset\ker(u)$. Soit alors $E=\ker(u)\oplus F$ et p le projecteur sur $\ker(u)$ associé à cette somme directe. Ainsi, $\mathrm{im}(p)=\ker(u)$ donc $up=0$ et c'est aussi $\ker(p-id)$ qui contient donc $\mathrm{im}(u)$ donc $(p-id)u=0$. Finalement, a) implique b).

b) implique facilement a) car $u^2=pupu=p0u=0$.

b) implique trivialement c). Si on a c), on multiplie par p à gauche et à droite, d'où $pup-up=up$ et $pu-pup=pu$, soit $pup=0$ donc $-up=up$ donc $up=0$ puis $pu=u$: c'est b).

---

24. Soit $p\in\mathcal{L}(E)$. Montrer que p est un projecteur de E si, et seulement si, $p^2=p^3$ et $E=\ker p\oplus\mathrm{im}p$.

Si p est un projecteur, alors $p=p^2$, donc $p^2=p^3$ et d'après le cours, on a de plus $E=\ker p\oplus\mathrm{im}p$.

Réciproquement, si $p^2=p^3$, alors, pour tout $x\in E$, $p(p(x)-p^2(x))=0$, donc $p(x)-p^2(x)\in\ker p$. Mais c'est $p(x-p(x))$ donc c'est aussi dans $\mathrm{im}p$, d'où $p(x)=p^2(x)$ pour tout $x\in E$, soit . $p=p^2$.

Matrices

---

25. La transposée d'une matrice A s'obtient en échangeant les lignes et colonnes, on la note ${}^tA$. Autrement dit, si $A=(a_{ij})$, alors ${}^tA=(a'_{ij})$ avec $a'_{ij}=a_{ji}$.

Soit $A=\begin{pmatrix}7&2&3\\2&0&1\end{pmatrix}$. Écrire la transposée de A. Calculer $A\,{}^tA$, puis ${}^tAA$.

$${}^tA=\begin{pmatrix}7&2\\2&0\\3&1\end{pmatrix}\ ;\qquad A\,{}^tA=\begin{pmatrix}7&2&3\\2&0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}7&2\\2&0\\3&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}62&17\\17&5\end{pmatrix}$$

$${}^tAA=\begin{pmatrix}7&2\\2&0\\3&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}7&2&3\\2&0&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}53&14&23\\14&4&6\\23&6&10\end{pmatrix}.$$

---

26. Soit A et B dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. Résoudre, dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, $M = (\mathrm{tr}M)A + B$.

Nécessairement, $\mathrm{tr}M(1 - \mathrm{tr}A) = \mathrm{tr}B$.

• Si $\mathrm{tr}A \neq 1$, alors il n'y a qu'une solution possible, c'est $M = \dfrac{\mathrm{tr}B}{1-\mathrm{tr}A}A+B$ et réciproquement, si $M = \dfrac{\mathrm{tr}B}{1-\mathrm{tr}A}A + B$, alors $\mathrm{tr}M = \mathrm{tr}B(\dfrac{\mathrm{tr}A}{1-\mathrm{tr}A} + 1) = \dfrac{\mathrm{tr}B}{1-\mathrm{tr}A}$ et M est bien solution. Dans ce cas $\mathcal{S} = \{\dfrac{\mathrm{tr}B}{1-\mathrm{tr}A}A + B\}$.

• Si $\mathrm{tr}A = 1$ et si $\mathrm{tr}B \neq 0$, alors $\mathcal{S} = \emptyset$.

• Si $\mathrm{tr}A = 1$ et si $\mathrm{tr}B = 0$, alors M est nécessairement de la forme $\lambda A+B$ et réciproquement, si $M = \lambda A + B$, alors $\mathrm{tr}M = \lambda \mathrm{tr}A + \mathrm{tr}B = \lambda$ et on a bien $M = (\mathrm{tr}M)A + B$. Donc finalement $\mathcal{S} = \{\lambda A + B\ ;\ \lambda \in K\}$.

---

27. Soit $A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 5 \\ 0 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$.

a) Écrire A sous la forme $\alpha I_3 + J$.
b) Calculer $(\alpha I_3)^{100}$, calculer J^3 puis J^n pour $n \geq 3$.
c) Calculer A^{100}.

---

a) $A = 3I_3 + \begin{pmatrix} 0 & 1 & 5 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = 3I_3 + J$ avec $J = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 5 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

b) $3I_3)^{100} = 3^{100}I_3$, $J^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ et $J_3 = 0$ donc $J_n = 0$ pour $n \geq 3$.

c) $A^{100} = (3I_3 + J)^{100}$ et on peut appliquer la formule du binôme de Newton car I_3 et J commutent (pour le produit des matrices).

$$A^{100} = (3I_3)^{100}+100(3I_3)^{99}J+\frac{100\times 99}{2}(3I_3)^{98}J^2+0 = \begin{pmatrix} 3^{100} & 100\times 3^{99} & 500\times 3^{99} + 9900\times 3^{98} \\ 0 & 3^{100} & 200\times 3^{99} \\ 0 & 0 & 3^{100} \end{pmatrix}.$$

---

28. On se place dans $E = \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ l'espace vectoriel des matrices carrées d'ordre n.
Soit $\mathcal{S} = \{A \in E\ ;\ {}^tA = A\}$ l'ensemble des matrices symétriques
Soit $\mathcal{A} = \{A \in E\ ;\ {}^tA = -A\}$ l'ensemble des matrices antisymétriques.

a) Donner, pour $n = 3$ des exemples de matrices symétriques et des exemples de matrices antisymétriques.
b) Démontrer que $\mathcal{S}$ et $\mathcal{A}$ sont des sous-espaces vectoriels de E.
c) Vérifier que pour toute matrice $A \in E$, $A + {}^tA$ est symétrique et $A - {}^tA$ est antisymétrique.
d) Démontrer que $E = \mathcal{S} \oplus \mathcal{A}$.

---

a) Pour $n = 3$, les matrices symétriques sont de la forme $\begin{pmatrix} a & b & c \\ b & d & e \\ c & e & f \end{pmatrix}$ et les matrices antisymétriques sont de la forme $\begin{pmatrix} 0 & b & c \\ -b & 0 & e \\ -c & -e & 0 \end{pmatrix}$.

b) $0 \in \mathcal{S}$ donc $\mathcal{S}$ est non vide. Si $A, B \in \mathcal{S}$ et $\lambda \in \mathbb{R}$, on a ${}^t(A + \lambda B) = {}^tA + \lambda\, {}^tB = A + \lambda B$ donc $\mathcal{S}$ est stable par combinaisons linéaires. Donc $\mathcal{S}$ est un sous-espace vectoriel de E.

De même, $0 \in \mathcal{A}$ donc $\mathcal{A}$ est non vide. Si $A, B \in \mathcal{A}$ et $\lambda \in \mathbb{R}$, on a ${}^t(A + \lambda B) = {}^tA + \lambda\, {}^tB = -A - \lambda B = -(A + \lambda B)$ donc $\mathcal{A}$ est stable par combinaisons linéaires. Donc $\mathcal{A}$ est un sous-espace vectoriel de E.

c) ${}^t(A + {}^tA) = {}^tA + A = A + {}^tA$ donc $A + {}^tA$ est symétrique.
De même, ${}^t(A - {}^tA) = {}^tA - A = -(A - {}^tA)$ donc $A - {}^tA$ est antisymétrique.

d) Soit $A \in E$. On a $A = \dfrac{1}{2}(A + {}^tA) + \dfrac{1}{2}(A - {}^tA)$ donc $E = \mathcal{S} + \mathcal{A}$ et, si $A \in \mathcal{S} \cap \mathcal{A}$, on a ${}^tA = A = -A$ donc $A = 0$ et $\mathcal{S} \cap \mathcal{A} = \{0\}$. Finalement, on a bien $E = \mathcal{S} \oplus \mathcal{A}$.

---

29. Dans $\mathbb{R}^3$, notons $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3)$ la base canonique.
Soit $\mathcal{B}' = (e'_1, e'_2, e'_3) = ((1,1,0), (1,1,1), (0,3,1))$ une famille de $\mathbb{R}^3$.
a) Montrer que $\mathcal{B}'$ est une base de $\mathbb{R}^3$.
b) Écrire la matrice de passage de $\mathcal{B}$ à $\mathcal{B}'$.
c) Déterminer la matrice de passage de $\mathcal{B}'$ à $\mathcal{B}$.
d) Quelles sont les coordonnées d'un triplet (x, y, z) dans la nouvelle base $\mathcal{B}'$?

---

a) Pour montrer que $\mathcal{B}'$ est une base de $\mathbb{R}^3$, il suffit de montrer qu'elle est libre (3 vecteurs dans $\mathbb{R}^3$).

Si $\alpha e'_1 + \beta e'_2 + \gamma e'_3 = 0$, alors $\begin{cases} \alpha + \beta = 0 \\ \alpha + \beta + 3\gamma = 0 \\ \beta + \gamma = 0 \end{cases}$, donc $\alpha = \beta = \gamma = 0$.

b) $P_{\mathcal{B} \to \mathcal{B}'} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.

c) Pour calculer la matrice de passage de $\mathcal{B}'$ à $\mathcal{B}$, il faut mettre e_1, e_2 et e_3 en fonction de (e'_1, e'_2, e'_3). On a $\begin{cases} e'_1 = e_1 + e_2 \\ e'_2 = e_1 + e_2 + e_3 \\ e'_3 = 3e_2 + e_3 \end{cases}$, ce qui équivaut à $e_3 = e'_2 - e'_1$, puis $e_2 = \dfrac{1}{3}(e'_3 - e'_2 + e'_1)$ et enfin $e_1 = e'_1 - e_2 = \dfrac{1}{3}(2e'_1 + e'_2 - e'_3)$. On a alors

$$P_{\mathcal{B}' \to \mathcal{B}} = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 2 & 1 & -3 \\ 1 & -1 & 3 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

d) On a $X = P_{\mathcal{B} \to \mathcal{B}'} X'$ donc $X' = P_{\mathcal{B}' \to \mathcal{B}} X$, soit $\begin{cases} x' = \dfrac{2}{3}x + \dfrac{1}{3}y - z \\ y' = \dfrac{1}{3}x - \dfrac{1}{3}y + z \\ z' = -\dfrac{1}{3}x + \dfrac{1}{3}y \end{cases}$.

---

30. Soit $A, B \in \mathcal{M}_{2n+1}(\mathbb{K})$ telles que $AB = 0$. Montrer que l'une au moins des deux matrices $A + {}^tA$ et $B + {}^tB$ n'est pas inversible.

On a $\mathrm{im}(B) \subset \ker(A)$, donc $\mathrm{rg}(A) + \mathrm{rg}(B) \leq 2n + 1$. On ne peut donc avoir $\mathrm{rg}(A) > n$ et $\mathrm{rg}(B) > n$. Supposons par exemple $\mathrm{rg}(A) \leq n$. On a alors $\mathrm{rg}(A + {}^tA) \leq \mathrm{rg}(A) + \mathrm{rg}({}^tA) = 2\mathrm{rg}(A)$

(ceci car $\mathrm{im}(A+{}^tA) \subset \mathrm{im}(A)+\mathrm{im}({}^tA)$ puis Grassmann), donc $\mathrm{rg}(A+{}^tA) \leq 2n < 2n+1$, et $A+{}^tA$ n'est pas inversible.

$\boxed{\textbf{31.}}$ Calculer l'inverse de chacune des matrices ci-dessous :

$$A=\begin{pmatrix}1&1\\1&-1\end{pmatrix}\qquad B=\begin{pmatrix}3&-1&1\\0&2&0\\1&-1&3\end{pmatrix}\qquad C=\begin{pmatrix}1&0&1\\-1&1&1\\0&1&0\end{pmatrix}\qquad D=\begin{pmatrix}1&1&0&1\\1&0&1&1\\0&-1&1&1\\1&0&0&1\end{pmatrix}$$

On a $MX=X'$ qui donne $X=M^{-1}X'$.

Pour A, $\begin{cases}x+y=x'\\x-y=y'\end{cases}$ donne $\begin{cases}2x=x'+y'\\2y=x'-y'\end{cases}$ donc $A^{-1}=\dfrac{1}{2}\begin{pmatrix}1&1\\1&-1\end{pmatrix}$.

Pour B, $\begin{cases}3x-y+z=x'\\2y=y'\\x-y+3z=z'\end{cases}$ donne d'abord $y=\dfrac{y'}{2}$ puis $\begin{cases}3x+z=x'+\dfrac{y'}{2}\\x+3z=\dfrac{y'}{2}+z'\end{cases}$ donne $8x=3x'+y'-z'$ et $8z=-x'+y'+3z'$ donc $B^{-1}=\dfrac{1}{8}\begin{pmatrix}3&1&-1\\0&4&0\\-1&1&3\end{pmatrix}$.

Pour C, $\begin{cases}x+z=x'\\-x+y+z=y'\\y=z'\end{cases}$ donne d'abord $y=z'$ puis $\begin{cases}x+z=x'\\-x+z=y'-z'\end{cases}$ donne $2x=x'-y'+z'$ et $2z=x'+y'-z'$ donc $C^{-1}=\dfrac{1}{2}\begin{pmatrix}1&-1&1\\0&0&2\\1&1&-1\end{pmatrix}$.

Enfin, pour D, $\begin{cases}x+y+t=x'\\x+z+t=y'\\-y+z+t=z'\\x+t=t'\end{cases}$ donne d'abord $y=x'-t'$ et $z=y'-t'$ puis $t=y-z+z'=x'-y'+z'$ et enfin $x=t'-t=-x'+y'-z'+t'$ donc $D^{-1}=\begin{pmatrix}-1&1&-1&1\\1&0&0&-1\\0&1&0&-1\\1&-1&1&0\end{pmatrix}$.

$\boxed{\textbf{32.}}$ Inverser $A=\begin{pmatrix}1&2&\dots&n\\&\ddots&\ddots&\vdots\\(0)&&\ddots&2\\&&&1\end{pmatrix}$.

$\det A=1$, donc A est inversible. On résout $AX=Y$, soit

$$\left\{\begin{array}{llllll}x_1+&2x_2+&\dots&\dots&+nx_n&=y_1\\&x_2+&2x_3+&\dots&+(n-1)x_n&=y_2\\&&&&\vdots&\\&&&x_{n-1}&+2x_n&=y_{n-1}\\&&&&x_n&=y_n\end{array}\right. .$$

On fait, pour $1 \leq i \leq n-1$, $L_i \leftarrow L_i - L_{i+1}$: $\left\{\begin{array}{llllll} x_1+ & x_2+ & \dots & \dots & +x_n & = y_1 - y_2 \\ & x_2+ & x_3+ & \dots & +x_n & = y_2 - y_3 \\ & & & \vdots & & \\ & & & x_{n-1} & +x_n & = y_{n-1} - y_n \\ & & & & x_n & = y_n \end{array}\right.$.

Puis, de nouveau, pour $1 \leq i \leq n-1$, $L_i \leftarrow L_i - L_{i+1}$: $\left\{\begin{array}{ll} x_1+ & = y_1 - 2y_2 + y_3 \\ \vdots & \vdots \\ x_i & = y_i - 2y_{i+1} + y_{i+2} \text{ pour} 1 \leq i \leq n-2 \\ \vdots & \vdots \\ x_{n-1} & = y_{n-1} - 2y_n \\ x_n & = y_n \end{array}\right.$.

On a donc $A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 1 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & & \ddots & 1 & -2 & 1 \\ \vdots & & & \ddots & 1 & -2 \\ 0 & \dots & \dots & \dots & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Applications linéaires et matrices

$\boxed{\textbf{33.}}$ On se place dans le $\mathbb{R}$-espace vectoriel $\mathbb{R}^3$.
Soit f l'application linéaire définie par $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, $w = (x, y, z) \mapsto (2x + 3y - z, x - y, 4z)$.
Soit $\mathcal{E}$ la base canonique de $\mathbb{R}^3$.
a) Donner la matrice de f dans la base canonique. Soit g l'application linéaire définie par la matrice $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 0 \\ 2 & -1 & 0 \end{pmatrix}$.
b) Calculer $g(w)$ avec $w = (x, y, z)$.
c) Calculer $g \circ f$ en utilisant deux méthodes différentes.

---

a) La matrice de f dans la base canonique est la matrice dont les colonnes sont les images par f des vecteurs de la base canonique exprimées dans la base canonique. Ainsi, on a $f(1, 0, 0) = (2, 1, 0)$, $f(0, 1, 0) = (3, -1, 0)$ et $f(0, 0, 1) = (-1, 0, 4)$, ce qui donne $M_{\mathcal{B}}(f) = \begin{pmatrix} 2 & 3 & -1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$.

b) On a $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 0 \\ 2 & -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x + 2y + 3z \\ y \\ 2x - y \end{pmatrix}$. Ainsi, $g(w) = (x + 2y + 3z, y, 2x - y)$.

c) $g \circ f(x, y, z) = g(2x + 3y - z, x - y, 4z) = (2x + 3y - z + 2(x - y) + 12z, y - z, 2(x + 3y - z) - (x - y))$, soit $g \circ f(w) = (4x + y + 11z, y - z, x + 7y - 2z)$ ou bien avec les matrices :

$$M_{\mathcal{B}}(g \circ f) = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 0 \\ 2 & -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 3 & -1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 1 & 11 \\ 1 & -1 & 0 \\ 3 & 7 & -2 \end{pmatrix}.$$

$\boxed{\textbf{34.}}$ On se place dans le $\mathbb{R}$-espace vectoriel $\mathbb{R}_3[X]$. Soit f l'application de $\mathbb{R}_3[X]$ dans $\mathbb{R}_3[X]$ qui à un polynôme associe le reste de sa division euclidienne par $P(X) = X^2 - 1$.

a) Montrer que f est une application linéaire.

b) Donner la matrice M de f dans la base canonique. En déduire une base du noyau et de l'image de f.

c) Montrer que la famille $(1, X-1, X^2-1, (X^2-1)(X-1))$ est une base de $\mathbb{R}_3[X]$. On notera cette base $\mathcal{B}$.

d) Donner la matrice N de f dans $\mathcal{B}$ et en déduire une base du noyau et de l'image de f.

e) f est-il un projecteur ?

f) Donner la matrice de passage P de la base canonique à la base $\mathcal{B}$ et la matrice de passage entre la base $\mathcal{B}$ et la base canonique.

g) Quelle relation doit-on avoir entre les matrices M, N et P ? Vérifier cette relation.

---

a) Si $f(P_1) = R_1$ et $f(P_2) = R_2$, il existe Q_1 et Q_2 tels que $P_1 = (X^2-1)Q_1 + R_1$ et $P_2 = (X^2-1)Q_2 + R_2$ avec $\deg(R_1) \leq 1$ et $\deg(R_2) \leq 1$. On a alors, pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$, $P_1 + \lambda Q_1 = (X^2-1)(Q_1 + \lambda Q_2) + (R_1 + \lambda R_2)$ avec $\deg(R_1 + \lambda R_2) \leq 1$ donc $f(P_1 + \lambda P_2) = R_1 + \lambda R_2 = f(P_1) + \lambda f(P_2)$ et f est linéaire.

b) $1 = (X^2-1)\times 0 + 1$, $X = (X^2-1)\times 0 + X$, $X^2 = (X^2-1)\times 1 + 1$ et $X^3 = (X^2-1)\times X + X$. On a donc $f(1) = 1$, $f(X) = X$, $f(X^2) = 1$ et $f(X^3) = X$ donc $M = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$. C'est une matice de rang 2 (2 colonnes indépendantes et $\mathcal{C}_3 = \mathcal{C}_1$ et $\mathcal{C}_4 = \mathcal{C}_2$ donc le noyau est de dimension $4-2=2$ et $\ker M = \mathrm{vect}((1,0,-1,0),(0,1,0,-1))$. Donc ici $\ker(f) = \mathrm{vect}(1-X^2, X-X^3) = (X^2-1)\mathbb{R}_1[X]$.

On a clairement $\mathrm{im}(f) \subset \mathbb{R}_1[X]$ et par égalité des dimensions, $\mathrm{im}(f) = \mathbb{R}_1[X] = \mathrm{vect}(1, X)$.

c) Soit $\alpha + \beta(X-1) + \gamma(X^2-1) + \delta(X^2-1)(X-1) = 0$. On a un polynôme de degré ≤ 3 qui est nul, donc tous ses coefficients sont nuls. Le coefficient de X^3 étant δ, on a tout d'abord $\delta = 0$, puis $\alpha + \beta(X-1) + \gamma(X^2-1) = 0$ donne $\gamma = 0$ en considérant le coefficient de X^2, puis de même $\beta = 0$ et enfin $\alpha = 0$ (famille de polynômes de degrés échelonnés). La famille est donc libre et elle a 4 éléments. Comme $\dim\mathbb{R}_3[X] = 4$, c'est bien une base de $\mathbb{R}_3[X]$.

d) On a $f(1) = 1$, $f(X-1) = X-1$, $f(X^2-1) = 0$ et $f(X^2-1)(X-1) = 0$ donc

$$N = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

On retrouve ainsi aisément que $\ker(f) = \mathrm{vect}((X^2-1), (X^2-1)(X-1))$ et $\mathrm{im}(f) = \mathrm{vect}(1, X-1)$.

e) $N = \begin{pmatrix} I_2 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ par blocs, donc $N^2 = N$ et $f \circ f = f$: f est bien un projecteur.

f) Si $\mathcal{C}$ est la base canonique, on a $P_{\mathcal{C}\to\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. Pour l'autre matrice de passage, on écrit les vecteurs de la base canonique en fonction des vecteurs de $\mathcal{B}$. On a alors $X = (X-1)+1$, $X^2 = (X^2-1)+1$ et $X^3 = (X^2-1)(X-1)+X^2+X-1 = (X^2-1)(X-1)+(X^2-1)+(X-1)+1$ donc $P_{\mathcal{B}\to\mathcal{C}} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

g) On doit avoir $N = P^{-1}MP$, soit $PN = MP$, relation que l'on peut vérifier aisément.

---

35. Soit f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ défini par la matrice $M = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

a) f est-elle inversible ?
b) Soit A et B deux matrices qui commutent. Calculer $(A+B)^n$.
c) Calculer f^n (pour cela, on pourra décomposer la matrice M en $M = I+N$).

---

a) $f(x,y,z) = 0$ équivaut à $\begin{cases} x+y-z=0 \\ y+z=0 \\ z=0 \end{cases}$, ce qui donne, par remontée, $z=0$ puis $y=0$ et enfin $x=0$. On a donc $\ker(f) = \{(0,0,0\}$ et f est bien inversible.

b) Si A et B commutent, la formule du binôme de Newton s'applique, et on a donc

$$(A+B)^n = \sum_{k=0}^{n} C_n^k A^k B^{n-k} = \sum_{k=0}^{n} C_n^k B^k A^{n-k}.$$

c) $M = I_3 + N$ avec $N = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, $N^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ et $N^k = 0$ pour $k \geq 3$.

Comme l'identité commute avec toutes les matrices, on a $M^n = (I_3+N)^n = \sum_{k=0}^{n} C_n^k I_3^{n-k} N^k$.

On a donc $M^n = I_3 + nN + \dfrac{n(n-1)}{2}N^2 = \begin{pmatrix} 1 & n & \dfrac{n^2-3n}{2} \\ 0 & 1 & n \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Ainsi, $f^n(x,y,z) = (x + ny + \dfrac{n^2-3n}{2}z, y+nz, z)$.

---

36. Soit f l'application linéaire de $\mathbb{R}^3$ définie par $f(x,y,z) = (2x+y, x+z, y-2z)$.
a) Calculer $\mathrm{im}(f)$ et $\ker(f)$. Quel est le rang de f ?
b) Écrire la matrice M de f dans la base canonique.
c) Quel est le rang de la matrice M ?

---

a) $f(x,y,z) = x(2,1,0)+y(1,0,1)+z(0,1,-2)$ donc $\mathrm{im}(f) = \mathrm{vect}((2,1,0),(1,0,1),(0,1,-2))$. La famille $((2,1,0),(1,0,1),(0,1,-2))$ engendre $\mathrm{im}(f)$ mais elle n'est pas libre, puisque $(0,1,-2) = (2,1,0) - 2(1,0,1)$. Par contre la famille $((2,1,0),(1,0,1))$ est libre et $\mathrm{rg}(f) = 2$.

$f(x,y,z) = (0,0,0)$ équivaut à $\begin{cases} 2x+y=0 \\ x+z=0 \\ y-2z=0 \end{cases}$, soit $y = 2z$ et $x = -z$ d'où $\ker(f) = \mathrm{vect}((-1,2,1))$ et $\dim\ker(f) = 1$. On a bien $\mathrm{rg}(f) + \dim\ker(f) = 2+1 = 3 = \dim(\mathbb{R}^3)$.

b) $M_{\mathcal{B}}(f) = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -2 \end{pmatrix}$ car $f(1,0,0) = (2,1,0)$, $f(0,1,0) = (1,0,1)$ et $f(0,0,1) = (0,1,-2)$.

c) Le rang de la matrice est le rang de f, c'est-à-dire $\text{rg}(M) = 2$.

---

37. Soit la matrice $P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 0 \\ 4 & -2 & -1 \end{pmatrix}$ et soit $\mathcal{E}$ la base canonique de $\mathbb{R}^3$.

a) Montrer que P est la matrice de passage de la base $\mathcal{E}$ à une autre base de $\mathbb{R}^3$ que l'on notera $\mathcal{B}$ et que l'on explicitera.

b) Calculer la matrice de passage de la base $\mathcal{B}$ à la base $\mathcal{E}$.

c) En déduire P^{-1}.

Soit f l'application linéaire sur $\mathbb{R}^3$ définie par $f(x,y,z) = (z, y+z, x-y)$

d) Écrire la matrice de f dans la base $\mathcal{E}$.

e) Écrire la matrice de f dans la base $\mathcal{B}$.

---

a) On pose $b_1 = (1,2,4)$, $b_2 = (1,1,-2)$ et $b_3 = (2,0,-1)$: b_1, b_2 et b_3 sont les colonnes de P et elles forment une famille libre. En effet $\alpha b_1 + \beta b_2 + \gamma b_3 = 0$ conduit à $\begin{cases} \alpha + \beta + 2\gamma = 0 \\ 2\alpha + \beta = 0 \\ 4\alpha - 2\beta - \gamma = 0 \end{cases}$ d'où $\beta = -2\alpha$, puis $\alpha = 2\gamma$ et $8\alpha - \gamma = 0$, soit $15\gamma = 0$ donc $\gamma = \alpha = \beta = 0$. C'est aussi une base car elle est constituée de 3 vecteurs.

b) $\begin{cases} e_1 + 2e_2 + 4e_3 = b_1 \\ e_1 + e_2 - 2e_3 = b_2 \\ 2e_1 - e_3 = b_3 \end{cases}$ donne, en remplaçant e_3 par $2e_1 - b_3$: $\begin{cases} 9e_1 + 2e_2 = b_1 + 4b_3 \\ -3e_1 + e_2 = b_2 - 2b_3 \\ 2e_1 - e_3 = b_3 \end{cases}$ donc finalement $5e_2 = b_1 + 3b_2 - 2b_3$, soit $e_2 = \frac{1}{5}b_1 + \frac{3}{5}b_2 - \frac{2}{5}b_3$. On en déduit $e_1 = \frac{1}{3}e_2 - \frac{1}{3}b_2 + \frac{2}{3}b_3 = \frac{1}{15}b_1 - \frac{2}{15}b_2 + \frac{8}{15}b_3$ et enfin $e_3 = 2e_1 - b_3 = \frac{2}{15}b_1 - \frac{4}{15}b_2 + \frac{1}{15}b_3$. On a alors $P_{\mathcal{B}\to\mathcal{E}} = \begin{pmatrix} \frac{1}{15} & \frac{1}{5} & \frac{2}{15} \\ -\frac{2}{15} & \frac{3}{5} & -\frac{4}{15} \\ \frac{8}{15} & -\frac{2}{5} & \frac{1}{15} \end{pmatrix}$.

c) P étant la matrice de passage de la base $\mathcal{E}$ à la base $\mathcal{B}$, P^{-1} est la matrice de passage de la base $\mathcal{B}$ à la base $\mathcal{E}$ trouvée à la question précédente.

d) $M_{\mathcal{E}}(f) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$ car $f(1,0,0) = (0,0,1)$, $f(0,1,0) = (0,1,-1)$ et $f(0,0,1) = (1,1,0)$.

e) On a $M_{\mathcal{B}}(f) = P^{-1}M_{\mathcal{E}}(f)P$. On calcule donc le produit de ces matrices :

$$P^{-1}M_{\mathcal{E}}(f) = \begin{pmatrix} \frac{1}{15} & \frac{1}{5} & \frac{2}{15} \\ -\frac{2}{15} & \frac{3}{5} & -\frac{4}{15} \\ \frac{8}{15} & -\frac{2}{5} & \frac{1}{15} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix} = \frac{1}{15} \begin{pmatrix} 2 & 1 & 4 \\ -4 & 13 & 7 \\ 1 & -7 & 2 \end{pmatrix}$$

$$P^{-1}M_{\mathcal{E}}(f)P = \frac{1}{15}\begin{pmatrix} 2 & 1 & 4 \\ -4 & 13 & 7 \\ 1 & -7 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 0 \\ 4 & -2 & -1 \end{pmatrix} = \frac{1}{15}\begin{pmatrix} 20 & -5 & 0 \\ 50 & -5 & -15 \\ -5 & -10 & 0 \end{pmatrix}$$

soit $M_{\mathcal{B}}(f) = \dfrac{1}{3}\begin{pmatrix} 4 & -1 & 0 \\ 10 & -1 & -3 \\ -1 & -2 & 0 \end{pmatrix}$.

$\boxed{\textbf{38.}}$ Soit f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ dont la matrice dans la base canonique est :

$$M = \begin{pmatrix} 2 & -3 & 1 \\ -1 & 3 & -5 \\ -5 & 9 & -7 \end{pmatrix}$$

Donner une base et la dimension de $\ker f$ et de $\mathrm{im}(f)$.

On commence par déterminer le noyau.

$\begin{cases} 2x-3y+z=0 \\ -x+3y-5z=0 \\ -5x+9y-7z=0 \end{cases}$ équivaut à $\begin{cases} x=3y-5z \\ 6y-10z-3y+z=0 \\ -15y+25z+9y-7z=0 \end{cases}$, soit à $\begin{cases} x=3y-5z \\ 3y-9z=0 \\ -6y+18z=0 \end{cases}$,

soit $y=3z$ et $x=4z$. Ainsi, $\ker(f) = \mathrm{vect}((4,3,1))$. On a donc, en particulier $\dim\ker(f)=1$ et donc $\mathrm{rg}(f)=2$.

On a $\mathrm{im}(f) = \mathrm{vect}(f(e_1), f(e_2), f(e_3)) = \mathrm{vect}((2,-1,-5),(-3,3,9),(1,-4,-7))$. Les 2 premiers vecteurs sont non colinéaires et $\mathrm{rg}(f)=2$ donc ils forment une base de $\mathrm{im}(f)$. On peut donc prendre, par exemple, comme base de $\mathrm{im}(f)$, la famille $((2,-1,5),(-1,1,3))$ (ou encore $((2,-1,5),(1,0,8))$,....).

$\boxed{\textbf{39.}}$ Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, $A \neq 0$, telle que $A^3 = -A$.

a) Montrer que $E = \mathbb{R}^3 = \ker\ A \oplus \ker(A^2 + \mathrm{id}_E)$. Donner le projecteur associé à cette somme directe.

b) Montrer que A est semblable à $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.

Soit $u \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^3)$ canoniquement associé à A : $u^3 = -u$.

a) • $x \in \ker\ u \cap \ker(u^2 + \mathrm{id}_E)$: $u(x) = 0 = u^2(x) + x$ donc $x = 0$.

• $u^3 + u = u(u^2 + \mathrm{id}_E)$, donc $\mathrm{Im}(u^2 + \mathrm{id}_E) \subset \ker\ u$, soit $3 \leq \dim\ \mathrm{Ker}(u^2 + \mathrm{id}_E) + \dim\ \mathrm{Ker}\ u$. Donc, $3 \leq \dim[\ker(u^2 + \mathrm{id}_E) \oplus \ker\ u] \leq 3$, d'où $E = \ker\ u \oplus \ker(u^2 + \mathrm{id}_E)$. Donnons la décomposition de $x \in E$.

Analyse. $x = x_1 + x_2$; $u(x) = u(x_2)$; $u^2(x) = -x_2$, d'où $x_2 = -u^2(x)$, $x_1 = x + u^2(x)$.

Synthèse. $x + u^2(x) \in \ker\ u$ et $-u^2(x) \in \ker(u^2 + \mathrm{id}_E)$.

b) Soit e_1 un vecteur non nul de $\ker\ u$, soit $e_2 \in \ker(u^2 + \mathrm{id}_E)$ et $e_3 = u(e_2)$. $(u^2 + \mathrm{id}_E)(e_3) = u^3(e_2) + u(e_2) = 0$ donc $e_3 \in \ker(u^2 + \mathrm{id}_E)$. Montrons la liberté de la famille (e_1, e_2, e_3). Si $\lambda e_2 + \mu e_3 = 0$, alors, en composant par u : $\lambda u(e_2) + \mu u(e_3) = 0$. Or $u(e_2) = e_3$ et $u^2(e_2) = -e_2$. On a donc $\begin{cases} \lambda e_3 - \mu e_2 = 0 \\ \mu e_3 + \lambda e_2 = 0 \end{cases}$, puis $\lambda^2 + \mu^2 = 0$ et $\lambda = \mu = 0$. Enfin, $u(e_3) = u^2(e_2) = -e_2$, d'où la matrice dans (e_1, e_2, e_3).

$\boxed{\textbf{40.}}$ a) Montrer que $M_n(\mathbb{K})$ a une base de matrices de projecteurs [si (E_{ij}) est la base canonique de $M_n(\mathbb{K})$, on pourra calculer $(E_{ii} + E_{ij})^2$ pour $i \neq j$].

b) Montrer que $\{M = (m_{ij}) \in M_n(\mathbb{K}) / m_{11} = 0\}$ est l'hyperplan $\ker(M \mapsto \mathrm{tr}(ME_{11}))$.

c) Soit $A \in M_n(\mathbb{K})$ telle que, pour tout $P \in GL_n(\mathbb{K})$, si $M = PAP^{-1} = (m_{ij})$, on ait $m_{11} = 0$. Montrer que $\mathrm{tr}(AX) = 0$ pour toute matrice X semblable à E_{11}. En déduire que $\mathrm{tr}(AX) = 0$ pour toute matrice X de projecteur, puis que $A = 0$.

---

a) Rappelons que $E_{ij}E_{kl} = \delta_{jk}E_{il}$, donc $E_{ij}^2 = 0$ et $E_{ij}E_{ii} = 0$ si $i \neq j$. Par contre, $E_{ii}^2 = E_{ii}$ et $E_{ii}E_{ij} = E_{ij}$, donc $E_{ii} + E_{ij}$ est une matrice de projecteurs. Donc :

$$M = \sum_{ij} m_{ij}E_{ij} = \sum_{j=1}^{n}\sum_{i\neq j} m_{ij}[E_{ii} + E_{ij}] - \sum_{j=1}^{n}\sum_{i\neq j} m_{ij}E_{ii} + \sum_{i=1}^{n} m_{ii}E_{ii}$$

Ainsi, $M_n(\mathbb{K}) = \mathrm{vect}(E_{ii}, 1 \leq i \leq n; E_{ii} + E_{ij}, i \neq j)$ admet une famille génératrice de projecteurs, qui contient n^2 éléments, donc c'est une base.

b) Si $M = (m_{ij})$, comme $E_{11} = (\delta_{l1}\delta_{c1})$, on a $ME_{11} = (\sum_{k=1}^{n} m_{ik}\delta_{k1}\delta_{kj}) = (m_{i1}\delta_{1j})$, donc $\mathrm{tr}(ME_{11}) = \sum_{i=1}^{n} m_{i1}\delta_{1i} = m_{11}$.

c) Pour toute P inversible, $\mathrm{tr}(PAP^{-1}E_{11}) = 0 = \mathrm{tr}(AP^{-1}E_{11}P)$, donc $\mathrm{tr}(AX) = 0$ pour toute X semblable à E_{11}.

Si X est une matrice de projecteur, et si r est son rang, X est semblable à $\sum_{i=1}^{r} E_{ii}$, E_{ii} elle-même est donc semblable à E_{11}, donc X est semblable à $\sum_{i=1}^{r} P_iE_{11}P_i^{-1}$. Or, $\mathrm{tr}(AP_iE_{11}P_i^{-1})$ est nulle, donc, par linéarité, $\mathrm{tr}(AX) = 0$. Comme $M_n(\mathbb{K})$ a une base de matrices de projecteurs, il vient, par linéarité, $\mathrm{tr}(AX) = 0$ pour toute matrice X. En prenant $X = {}^tA$ si $\mathbb{K} = \mathbb{R}$, et $X = {}^t\bar{A}$ si $\mathbb{K} = \mathbb{C}$, on a $A = 0$.

---

41. Soit $f \in \mathcal{L}(E)$, E étant de dimension 3, qui vérifie $f^2 \neq 0$, et $f^3 = 0$. Soit $\mathcal{C}$ l'ensemble des endomorphismes de E qui commutent avec f.

a) Montrer qu'il existe un vecteur e tel que $(e, f(e), f^2(e))$ soit une base de E.

b) Montrer que $\mathcal{C} = \mathrm{Vect}(Id_E, f, f^2)$.

---

a) Soit e tel que $f^2(e) \neq 0$, et $ae + bf(e) + cf^2(e) = 0$. En appliquant f^2, on a $af^2(e) = 0$, donc $a = 0$, puis, par f, $bf^2(e) = 0$, donc, $b = 0$, et, enfin, $cf^2(e) = 0$, donc $c = 0$. La famille $(e, f(e), f^2(e))$ est libre, et, comme elle comporte $3 = \dim E$ éléments, c'est une base de E.

b) $\mathcal{C}$ est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{L}(E)$. En effet, 0 commute avec f, et, si g et h commutent avec f, on a :

$$(\lambda g + \mu h) \circ f = \lambda g \circ f + \mu h \circ f = \lambda f \circ g + \mu f \circ h = f \circ (\lambda g + \mu h).$$

La dernière égalité vient de la linéarité de f.

De plus, Id_e, f, f^2 sont dans $\mathcal{C}$, donc $\mathrm{Vect}(Id_E, f, f^2) \subset \mathcal{C}$.

Réciproquement, soit $g \in \mathcal{C}$. Par(a), $g(e) = ae + bf(e) + cf^2(e) = (aId_E + bf + cf^2)(e)$. Alors :

$$g(f(e)) = f(g(e)) = af(e) + bf^2(e) + cf^3(e) = (aId_E + bf + cf^2)(f(e)),$$
$$g(f^2(e)) = f^2(g(e)) = af^2(e) + bf^3(e) + cf^4(e) = (aId_E + bf + cf^2)(f^2(e)).$$

Donc, g et $aId_E + bf + cf^2$ sont deux applications linéaires égales sur une base, donc égales partout. Cela prouve que $g \in \mathrm{Vect}(Id_E, f, f^2)$, donc $\mathcal{C} = \mathrm{Vect}(Id_E, f, f^2)$.

Déterminants

---

42. Calculer le déterminant des matrices ci-dessous :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 1 & 6 & 6 \\ 0 & 0 & 1 \\ 4 & 2 & 1 \end{pmatrix} \qquad C = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 6 \\ 2 & 5 & 9 \\ 3 & 6 & 12 \end{pmatrix} \qquad D = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 6 & 2 \\ 2 & 2 & 6 & 1 \\ 4 & 5 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

$\det A = \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 4 \end{vmatrix} = 1 \times 4 - 2 \times 3 = -2$

$\det B = \begin{vmatrix} 1 & 6 & 6 \\ 0 & 0 & 1 \\ 4 & 2 & 1 \end{vmatrix} = (-1) \times \begin{vmatrix} 1 & 6 \\ 4 & 2 \end{vmatrix} = -(2 - 24) = 22$

$\det C = \begin{vmatrix} 1 & 4 & 6 \\ 2 & 5 & 9 \\ 3 & 6 & 12 \end{vmatrix} = \begin{matrix} 1 & 4 & 6 \\ 0 & -3 & -3 \\ 0 & -6 & -6 \end{matrix} = 0$ (On peut aussi remarquer que $\mathcal{C}_3 = \mathcal{C}_2 + 2\mathcal{C}_1$).

$\det D = \begin{vmatrix} 1 & 3 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 6 & 2 \\ 2 & 2 & 6 & 1 \\ 4 & 5 & 1 & 2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 3 & 3 & 1 \\ 0 & -2 & 3 & 1 \\ 0 & -4 & 0 & -1 \\ 0 & -7 & -11 & -2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -2 & 3 & 1 \\ -4 & 0 & -1 \\ -7 & -11 & -2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -6 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \\ 1 & -11 & -2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -6 & 3 \\ 1 & -11 \end{vmatrix} =$ 63.

---

43. Calculer le déterminant des matrices ci-dessous en fonction des paramètres x, y et z. En déduire, dans chaque cas, des conditions nécessaires et suffisantes portant sur les paramètres pour que ces matrices soient inversibles.

$$A = \begin{pmatrix} x & \pi & 1 \\ 0 & y & \sqrt{2} \\ 0 & 0 & z \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ x & y & z \\ y+z & x+z & x+y \end{pmatrix}$$

$$C = \begin{pmatrix} 1 & x & x^2 \\ 1 & y & y^2 \\ 1 & z & z^2 \end{pmatrix} \qquad D = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & x & y \\ 1 & -x & 0 & z \\ 1 & -y & z & 0 \end{pmatrix}.$$

$\det A = \begin{vmatrix} x & \pi & 1 \\ 0 & y & \sqrt{2} \\ 0 & 0 & z \end{vmatrix} = xyz$ (matrice triangulaire). A est inversible si et seulement si $\det A \neq 0$, c'est-à-dire si et seulement si x, y et z sont non nuls. Plus généralement, le déterminant d'une matrice triangulaire est le produit des éléments diagonaux ; une telle matrice est inversible si et seulement si tous les éléments diagonaux sont nuls.

$\det B = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ x & y & z \\ y+z & x+z & x+y \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ x & y & z \\ x+y+z & x+y+z & x+y+z \end{vmatrix} = 0$ (la première et la troisième ligne sont colinéaires). Quels que soient les nombres x, y et z, B n'est pas inversible.

$$\det C = \begin{vmatrix} 1 & x & x^2 \\ 1 & y & y^2 \\ 1 & z & z^2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & x & x^2 \\ 0 & y-x & y^2-x^2 \\ 0 & z-x & z^2-x^2 \end{vmatrix} = ((y-x)(z-x)(z+x) - (z-x)(y-x)(y+x) =$$

$(y-x)(z-x)(x-z)$. C est inversible si et seulement si x, y et z sont deux à deux distincts.

$$\begin{aligned} \det D &= \begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & x & y \\ 1 & -x & 0 & z \\ 1 & -y & z & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & x & y \\ 0 & -x & -x & z-y \\ 0 & -y & z-x & -y \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -x & -x & z-y \\ -y & z-x & -y \end{vmatrix} \\ &= -\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -x & 0 & z-y+x \\ -y & z-x+y & 0 \end{vmatrix} = (z+x-y)(z+y-x). \end{aligned}$$

Donc D est inversible si et seulement si $y \neq z+x$ et $x \neq z+y$.

---

44. Calculer le déterminant d'ordre n ci-dessous (en fonction de a, b et n)

$$D_n = \begin{vmatrix} a & b & \cdots & b \\ b & a & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & b \\ b & \cdots & b & a \end{vmatrix}$$

$$\begin{aligned} D_n &= \begin{vmatrix} a & b & \cdots & b \\ b & a & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & b \\ b & \cdots & b & a \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a+(n-1)b & b & b & \cdots & b \\ a+(n-1)b & a & b & \ddots & \vdots \\ a+(n-1)b & b & a & \ddots & b \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & b \\ a+(n-1)b & b & \cdots & b & a \end{vmatrix} \\ &= \begin{vmatrix} a+(n-1)b & b & b & \cdots & b \\ 0 & a-b & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & a-b & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & a-b \end{vmatrix} = (a+(n-1)b)(a-b)^{n-1}. \end{aligned}$$

---

45. Soit $a \in \mathbb{C}$. Calculer $\det(a^{|i-j|})_{1 \leq i,j \leq n}$.

$A = \begin{pmatrix} 1 & a & \dots & a^n \\ a & 1 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & a \\ a^n & \dots & a & 1 \end{pmatrix}$. On effectue $\mathcal{L}_i - a\mathcal{L}_{i-1} \to \mathcal{L}_i$ pour i de n à 2, et

$$\det(A) = \begin{vmatrix} 1 & a & \dots & a^n \\ a & 1 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & a \\ a^n & \dots & a & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & & \dots & \\ 0 & 1-a^2 & \ddots & (*) \\ \vdots & \ddots & \ddots & \\ 0 & \dots & 0 & 1-a^2 \end{vmatrix} = (1-a^2)^{n-1}.$$

---

46. Calculer le déterminant :

$$D_n = \begin{vmatrix} 1 & n & n-1 & \cdots & 2 \\ 2 & 1 & n & \cdots & 3 \\ 3 & 2 & 1 & \cdots & 4 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ n & n-1 & \cdots & 2 & 1 \end{vmatrix}.$$

On remarque d'abord que la somme des éléments d'une ligne est toujours $\dfrac{n(n+1)}{2}$. Il est intéressant de garder la première colonne dont deux éléments sont séparés par 1. On fait plutôt $\mathcal{C}_n \leftarrow \sum \mathcal{C}_j$ et $D_n = \dfrac{n(n+1)}{2}\Delta_n$ où $\Delta_n = \begin{vmatrix} 1 & n & n-1 & \cdots & 1 \\ 2 & 1 & n & \cdots & 1 \\ 3 & 2 & 1 & \cdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ n & n-1 & \cdots & 2 & 1 \end{vmatrix}$. Puis on fait $\mathcal{L}_i \leftarrow \mathcal{L}_i - \mathcal{L}_{i-1}$ si $i \geq 2$ d'où

$$\Delta_n = \begin{vmatrix} 1 & n & \cdots & \cdots & 3 & 1 \\ 1 & 1-n & 1 & \cdots & 1 & 0 \\ \vdots & 1 & & & 1 & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & & 1-n & \vdots \\ 1 & 1 & \cdots & \cdots & 1 & 0 \end{vmatrix} = (-1)^{n+1} \begin{vmatrix} 1 & 1-n & 1 & \cdots & 1 \\ \vdots & 1 & & & 1 \\ \vdots & \vdots & \ddots & & 1-n \\ 1 & 1 & \cdots & \cdots & 1 \end{vmatrix}.$$

On fait encore $\mathcal{L}_i \leftarrow \mathcal{L}_i - \mathcal{L}_{i-1}$ si $i \geq 2$ et $\Delta_n = (-1)^{n+1} \begin{vmatrix} 1 & 1-n & 1 & 1 \\ 0 & n & & 1 \\ \vdots & \ddots & n & 1 \\ 0 & \cdots & 0 & n \end{vmatrix}$ et finalement $D_n = (-)^{n+1} n^{n-1} \dfrac{n+1}{2}$.

---

47. Calculer $\Delta_n = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 1 & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 & 1 \\ 0 & \cdots & 0 & 1 & 1 \end{vmatrix}$.

En développant suivant la première colonne, il vient

$$\Delta_n = -\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 1 & 0 & 1 & \ddots & \vdots \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 & 1 \\ 0 & \cdots & 0 & 1 & 1 \end{vmatrix} = -\Delta_{n-2}$$

en développant par rapport à la première ligne, si $n \geq 4$. (On peut prendre $\Delta_1 = 1$, car $\Delta_3 = -1$ et on a $\Delta_2 = -1$). D'où $\Delta_{2p} = (-1)^p$ et $\Delta_{2p+1} = (-1)^p$ par récurrence ou par télescopage. On peut résumer en $\Delta_n = (-1)^{E(\frac{n}{2})}$.

$\boxed{\textbf{48.}}$ Soit $a_1, \ldots, a_n, b_1, \ldots, b_n$ des éléments de $\mathbb{K}$. Calculer le déterminant :

$$D_n = \begin{vmatrix} a_1+b_1 & b_1 & b_1 & \cdots & b_1 \\ b_2 & a_2+b_2 & b_2 & \cdots & b_2 \\ b_3 & b_3 & a_3+b_3 & \cdots & b_3 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ b_n & \cdots & \cdots & b_n & a_n+b_n \end{vmatrix}.$$

On se place dans le contexte canonique de $\mathbb{K}^n$ et on pose $b = (b_1, \ldots, b_n)$. Si $\mathcal{C} = (e_1, \ldots, e_n)$ est la base canonique, $D_n = \det_{\mathcal{C}}(a_1e_1+b, \ldots, a_ne_n+b)$. Par n-linéarité, $D_n = \det_{\mathcal{C}}(a_1e_1, \ldots, a_ne_n) + \sum_{j=1}^{n} \det_{\mathcal{C}}(a_1e_1, \ldots, b, \ldots, a_ne_n) + S_n$. S_n est une somme de déterminants qui contiennent au moins deux fois le vecteur b, donc $S_n = 0$. Par ailleurs, en développant $\det_{\mathcal{C}}(e_1, \ldots, b, \ldots, e_n)$ suivant la colonne j où est b, ce déterminant vaut b_j. On a finalement $D_n = \prod_{i=1}^{n} a_i + \sum_{j=1}^{n} \left(\prod_{i \neq j} a_i \right) b_j$.

$\boxed{\textbf{49.}}$ Soit $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$, et $M = \begin{pmatrix} 0 & & \\ & \ddots & (\alpha) \\ & (\beta) & \ddots \\ & & & 0 \end{pmatrix}$. Calculer le déterminant et le rang de M [lorsque $\alpha \neq \beta$, on pourra calculer $\begin{vmatrix} x & & (\alpha+x) \\ & \ddots & \\ (\beta+x) & & x \end{vmatrix}$ par multilinéarité pour $x \in \mathbb{R}$] .

A l'aide des opérations élémentaires, $\mathcal{L}_{i+1} \leftarrow \mathcal{L}_{i+1} - \mathcal{L}_i$, M est de même rang que

$$N = \begin{pmatrix} 0 & \alpha & \ldots & \ldots & \alpha \\ \beta & -\alpha & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \beta & -\alpha & 0 \\ 0 & \ldots & 0 & \beta & -\alpha \end{pmatrix}.$$

On extrait de N $\begin{pmatrix} \beta & -\alpha & & (0) \\ & \ddots & \ddots & \\ & & \ddots & -\alpha \\ (0) & & & \beta \end{pmatrix}$ ou $\begin{pmatrix} -\alpha & & & (0) \\ \beta & \ddots & & \\ & \ddots & \ddots & \\ (0) & & \beta & -\alpha \end{pmatrix}$, donc $\text{rg}M \geq n-1$.

Si $\alpha = 0$ ou $\beta = 0$, $\det M = 0$, donc $\text{rg}M = n-1$. Soit

$$\varphi(x) = \begin{pmatrix} x & & (\alpha+x) \\ & \ddots & \\ (\beta+x) & & x \end{pmatrix} = \det(\mathcal{C}_1 + x\overrightarrow{u}, \ldots, \mathcal{C}_n + x\overrightarrow{u}),$$

du type $a + bx$, par multilinéarité et $\det M = a = \varphi(0)$. Or $\begin{cases} \varphi(-\alpha) = (-\alpha)^n = a - b\alpha \\ \varphi(-\beta) = (-\beta)^n = a - b\beta \end{cases}$.

Si $\alpha \neq \beta$, $a = \dfrac{\beta(-\alpha)^n - \alpha(-\beta)^n}{\beta - \alpha} = \dfrac{(-1)^n \alpha\beta}{\beta - \alpha}\left[\alpha^{n-1} - \beta^{n-1}\right]$.

- Si n est pair, et $\alpha \neq \beta$, rg$M = n$.
- Si n est impair, si $\beta \neq \pm\alpha$, rg$M = n$. Si $\alpha = -\beta$, rg$M = n - 1$.

Si $\alpha = \beta$, on fixe α. $\beta \to \det M$ est continue, et $\lim\limits_{\beta \to \alpha} \dfrac{\beta^{n-1} - \alpha^{n-1}}{\beta - \alpha} = (n-1)\alpha^{n-2}$.

Donc $\det M = (-1)^{n-1}(n-1)\alpha^n \neq 0$, donc rg$M = n$. On pouvait aussi écrire

$$\alpha^n \begin{vmatrix} 0 & & (1) \\ & \ddots & \\ (1) & & 0 \end{vmatrix} = \alpha^n \begin{vmatrix} n-1 & 1 & \dots & \dots & 1 \\ \vdots & 0 & \ddots & & \vdots \\ \vdots & 1 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & 1 \\ n-1 & 1 & \dots & 1 & 0 \end{vmatrix} = \alpha^n \begin{vmatrix} n-1 & 1 & \dots & \dots & 1 \\ 0 & -1 & 0 & & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \\ \vdots & & \ddots & -1 & 0 \\ 0 & \dots & \dots & 0 & -1 \end{vmatrix} = (-1)^{n-1}(n-1)\alpha^n.$$

---

50. Soit E un espace vectoriel de dimension n et f un endomorphisme de E.

a) On dit que f est un projecteur si $f \circ f = f$. Quelles sont les valeurs possibles pour $\det f$ lorsque f est un projecteur ?

b) On dit que f est nilpotent si il existe un entier naturel k tel que $f^k = 0$. Quelles sont les valeurs possibles pour $\det f$ lorsque f est nilpotent ?

c) On dit que f est involutif si $f \circ f = id$. Quelles sont les valeurs possibles pour $\det f$ lorsque f est involutif ?

d) On dit que f est une homothétie de rapport λ si, pour tout x, $f(x) = \lambda x$. Quel est le déterminant d'une homothétie de rapport λ ?

---

a) $\det(f \circ f) = \det f \times \det f = \det f$ donc $\det f = 0$ ou $\det f = 1$.

b) $\det f^k = (\det f)^k = 0$ dont $\det f = 0$ (en particulier, un endomorphisme nilpotent n'est pas inversible).

c) $\det(f \circ f) = (\det f)^2 = \det \mathrm{id} = 1$ donc $\det f = 1$ ou $\det f = -1$.

d) Soit f une homothétie de rapport λ et $\mathcal{B}$ une base de E. $\mathrm{Mat}(f; \mathcal{B}) = \lambda I_n$ donc $\det f = \lambda^n$.
