Probabilités conditionnelles

1. $(*)$ Dans un jeu de 32 cartes, on tire une carte au hasard.
Calculer la probabilité que la carte tirée soit un roi sachant que l'événement "la carte tirée est un pique" est réalisé?

Soit A "on tire un roi" et B "on tire un pique". On cherche $P(A/B) = \frac{P(A\cap B)}{P(B)}$ où $A\cap B$ est l'événement "on tire le roi de pique". On a alors $P(A\cap B) = \frac{1}{32}$ et $P(B) = \frac{8}{32}$ donc $\boxed{P(A/B) = \frac{1}{8}}$.

---

2. $(*)$ Un dé est jeté 3 fois successivement et les résultats des 3 expériences sont tous différents.
Quelle est la probabilité qu'il y ait un as?

Soit A "on tire un as" et B "les résultats sont tous différents". On cherche $P(A/B) = \frac{P(A\cap B)}{P(B)}$ où $A\cap B$ est l'événement "on tire des dés de hauteurs différentes dont l'as". On a alors $P(B) = \frac{C_6^3\times 3!}{6^3}$ (on choisit 3 numéros, mais l'ordre a de l'importance) et $P(A\cap B) = \frac{C_5^2\times 3!}{6^3}$ (on choisit les deux autres numéros, toujours en tenant compte de l'ordre). On a donc $P(A/B) = \frac{C_5^2}{C_6^3} = \frac{10}{20}$, soit $\boxed{P(A/B) = \frac{1}{2}}$.

---

3. $(*)$ On tire 4 cartes d'un jeu de 32 cartes.
Sachant que l'une des cartes tirées est un roi, quelle est la probabilité d'obtenir 2 as et 2 rois?

Soit A "on tire 2 as et 2 rois" et B "on tire au moins un as". On cherche $P(A/B) = \frac{P(A\cap B)}{P(B)}$ où $A\cap B = A$ puisque $A\subset B$. On a alors $P(B) = 1 - P(\overline{B}) = 1 - \frac{C_{28}^4}{C_{32}^4}$ (on choisit 4 cartes parmi 32, et pour $\overline{B}$, on en choisit 4 parmi les 28 qui ne sont pas des as) et $P(A) = \frac{C_4^2\times C_4^2}{C_{32}^4}$ (choix de 2 rois parmi 4 ET de 2 as parmi 4). On a donc $P(A/B) = \frac{(C_4^2)^2}{C_{32}^4 - C_{28}^4} = \frac{36}{15485}$, soit $\boxed{P(A/B) \approx 0,0023}$.

---

4. $(*)$ Un sac contient 7 billes rouges, 5 billes blanches et 3 billes noires. On tire successivement 3 billes. Quelle est la probabilité pour que la première bille tirée soit rouge, la deuxième blanche et la troisième noire si chaque bille est:

1. remise dans le sac après tirage ;
2. non remise dans le sac.

---

1. On remet les billes dans le sac : les tirages sont indépendants et la composition de l'urne ne varie pas.

On considère les événements R_1 "la bille 1 est rouge", B_2 "la bille 2 est blanche" et N_3 "la bille 3 est noire". Les événements R_1, B_2 et N_3 étant ici indépendants, on a donc

$$P(R_1\cap B_2\cap N_3) = P(R_1)P(B_2)P(N_3) = \frac{7}{15}\times\frac{5}{15}\times\frac{3}{15},$$

soit $\boxed{P(R_1 \cap B_2 \cap N_3) = \frac{7}{225}}$.

2. On ne remet pas les billes dans le sac, la composition de celui-ci dépend donc des tirages précédents. D'après la formule des probabilités composées,

$$P(R_1 \cap B_2 \cap N_3) = P(R_1)P(B_2/R_1)P(N_3/(R_1 \cap B_2))$$

avec $P(R_1) = \frac{7}{15}$, $P(B_2/R_1) = \frac{5}{14}$ et $P(N_3/(R_1 \cap B_2)) = \frac{3}{13}$ d'où

$$P(R_1 \cap B_2 \cap N_3) = \frac{7}{15} \times \frac{5}{14} \times \frac{3}{13},$$

soit $\boxed{P(R_1 \cap B_2 \cap N_3) = \frac{1}{26}}$.

---

5. (∗∗) Soient A_1 et A_2 deux ensembles de boules. On suppose que A_1 contient 75% de boules blanches et que A_2 en contient 50%. En outre, on suppose que A_1 contient 3 fois plus de boules que A_2. On place les boules de A_1 et de A_2 dans une même urne et on en tire une au hasard: on constate qu'elle est blanche.
Quelle est la probabilité que cette boule provienne de A_1?

Soit A "la boule provient de A_1" et B "la boule est blanche". On cherche $P(A/B) = \frac{P(A\cap B)}{P(B)}$ où $A \cap B$ est l'événement "la boule est blanche et provient de A_1". Si N est le nombre de boules de A_2, le nombre de boule de A_1 est $3N$ (car A_1 contient 3 fois plus de boules que A_2). Dans A_1, il y a alors $\frac{9N}{4}$ boules blanches et $\frac{3N}{4}$ noires et dans A_2, il y a $\frac{N}{2}$ boules blanches et $\frac{N}{2}$ boules noires. Finalement, il y a au total $4N$ boules dont $\frac{5N}{4}$ noires et $\frac{11N}{4}$ blanches. On a alors $P(B) = \frac{\frac{11N}{4}}{4N} = \frac{11}{16}$ et $P(A \cap B) = \frac{\frac{9N}{4}}{4N} = \frac{9}{16}$, d'où

$$\boxed{P(A/B) = \frac{9}{11}.}$$

On peut également obtenir directement le résultat à l'aide du théorème de Bayes :

$$P(A/B) = \frac{P(B/A)P(A)}{P(B/A)P(A) + P(B/\overline{A})P(\overline{A})}.$$

On a $P(B/A) = \frac{3}{4}$, $P(B/\overline{A}) = \frac{1}{2}$ et $P(A) = \frac{3}{4}$ donc $P(A/B) = \frac{\frac{3}{4}\times\frac{3}{4}}{\frac{3}{4}\times\frac{3}{4}+\frac{1}{2}\times\frac{1}{4}} = \frac{9}{9+2} = \frac{9}{11}$.

---

6. (∗∗) Dans un élevage de moutons, la probabilité qu'un animal soit atteint par une maladie M est 0,3. La probabilité qu'un mouton qui n'est pas atteint par M ait une réaction négative à un test T est 0,9 ; la probabilité qu'un mouton atteint par M ait une réaction positive à T est 0,8.
Quelle est la probabilité qu'un mouton pris au hasard et ayant une réaction positive à T soit atteint par M?

Soit M l'événement "un mouton est malade" et T "un mouton a une réaction positive au test. On connait :

- $P(M)$ (=0.3)
- $P(\overline{T}/\overline{M})$ (=0.9) (*erreur d'énoncé dans le poly d'exercices*)

• $P(T/M)$ (=0.8)
et on cherche $P(M/T)$. On va utiliser la formule de Bayes :

$$P(M/T) = \frac{P(T/M)P(M)}{P(T/M)P(M) + P(T/\overline{M})P(\overline{M})}$$

et on sait que $P(T/\overline{M}) = 1 - P(\overline{T}/\overline{M}) = 1 - 0.9 = 0.1$ (car $P(./\overline{M})$ est une probabilité), donc

$$P(M/T) = \frac{0.8 \times 0.3}{0.8 \times 0.3 + 0.1 \times 0.7}$$

soit $\boxed{P(M/T) = \frac{24}{31}}$.

---

7. (∗∗) On étudie au cours du temps le fonctionnement d'un appareil obéissant aux règles suivantes:

1. si l'appareil fonctionne à la date $n-1$, ($n \in \mathbb{N}^*$), il a la probabilité a d'être en panne à la date n ($a \in]0,1[$) ;
2. si l'appareil est en panne à la date $n-1$, ($n \in \mathbb{N}^*$), il a la probabilité b d'être en panne à la date n ($b \in]0,1[$).

On note p_n la probabilité que l'appareil marche à la date n.
Etablir, pour $n \in \mathbb{N}^*$, une relation entre p_n et p_{n-1}. En déduire p_n en fonction de p_0. Etudier la convergence de la suite $(p_n)_{n\geq 1}$.

Soit F_n l'événement "l'appareil fonctionne à la date n". On connait :
• $P(\overline{F}_n/F_{n-1})$ $(= a)$
• $P(\overline{F}_n/\overline{F}_{n-1})$ $(= b)$

$$\begin{aligned} p_n = P(F_n) &= P(F_n \cap F_{n-1}) + P(F_n \cap \overline{F}_{n-1}) \\ &= P(F_n/F_{n-1})P(F_{n-1}) + P(F_n/\overline{F}_{n-1})P(\overline{F}_{n-1}) \end{aligned}$$

Or $P(F_n/F_{n-1}) = 1 - P(\overline{F}_n/F_{n-1}) = 1 - a$ et $P(F_n/\overline{F}_{n-1}) = 1 - P(\overline{F}_n/\overline{F}_{n-1}) = 1 - b$ donc

$$\boxed{p_n = (1-a)p_{n-1} + (1-b)(1-p_{n-1}) = (b-a)p_{n-1} + 1 - b.}$$

Soit r tel que $r = (b-a)r + 1 - b$ (c'est-à-dire $r = \frac{1-b}{1-b+a}$). On a alors $p_n - r = (b-a)(p_{n-1} - r)$ et $p_n - r = (b-a)^n(p_0 - r)$, soit

$$p_n = r + (b-a)^n(p_0 - r) = \frac{1-b}{1-b+a} + (b-a)^n\left(p_0 - \frac{1-b}{1-b+a}\right).$$

On a $a \in]0,1[$ et $b \in]0,1[$, donc $1-b \in]0,1[$ et $1-b+a \in]0,2[$ et $b-a \in]-1,1[$ donc $\lim\limits_{n}(b-a)^n = 0$ et $\boxed{\lim\limits_{n} p_n = \frac{1-b}{1-b+a}}$.

---

8. (∗∗) Des pièces mécaniques sont fabriquées en grande série. On effectue un test sur chacune d'elles pour en contrôler la qualité. On appelle p la probabilité pour qu'une pièce choisie au hasard soit bonne ; a la probabilité pour que le test indique comme bonne une pièce qui est effectivement bonne ; b la probabilité pour que le test indique comme bonne une pièce qui en réalité est mauvaise.

1. Calculer la probabilité pour qu'une pièce indiquée par le test comme bonne soit effectivement bonne.
2. A quelle condition le test est-il utile ? (c'est-à-dire à quelle condition cette probabilité est-elle supérieure à p?).

Soit B l'événement "la pièce est bonne" et T "le test indique la pièce comme bonne". On connait $P(B) = p$, $a = P(T/B)$ et $b = P(T/\overline{B})$.

1. On cherche $P(B/T)$ et pour cela, on utilise la formule de Bayes :

$$P(B/T) = \frac{P(T/B)P(B)}{P(T/B)P(B) + P(T/\overline{B})P(\overline{B})},$$

ce qui donne ici $\boxed{P(B/T) = \frac{ap}{ap + b(1-p)}}$.

2. Le test est jugé utile si $P(B/T) > P(B)$, c'est-à-dire si $\frac{a}{ap+b(1-p)} > 1$, soit encore $a > ap + b(1-p)$ ou encore $a(1-p) > b(1-p)$: le test est utile si $a > b$ $(P(T/B) > P(T/\overline{B}))$.

---

9. $(***)$ On lance 3 dés. Calculer la probabilité des événements A:"avoir 3 numéros de même parité" et B:"avoir un numéro strictement supérieur à la somme des 2 autres".
Calculer $P(C/B)$ où C est l'événement:"avoir un 6".

$P(A) = P(3 \text{ pairs}) + P(3 \text{ impairs}) = 2 \times \frac{3^3}{6^3}$ d'où $\boxed{P(A) = \frac{1}{4}}$.
Pour avoir un numéro strictement supérieur à la somme des 2 autres, cette somme S ne peut valoir que 2, 3, 4 ou 5.
• Si $S = 2$, on a $(1, 1, c)$ avec $3 \leq c \leq 6$ et leurs permutations, soit $4 \times 3 = 12$ cas.
• Si $S = 3$, on a $(1, 2, c)$ avec $4 \leq c \leq 6$ et leurs permutations, soit $3 \times 6 = 18$ cas.
• Si $S = 4$, on a $(1, 3, c)$, $(2, 2, c)$ avec $c = 5$ ou 6 et leurs permutations, soit $2 \times (6+3) = 18$ cas.
• Si $S = 5$, on a $(1, 4, 6)$, $(2, 3, 6)$ et leurs permutations, soit $2 \times 6 = 12$ cas.
Finalement, $\boxed{P(B) = \frac{60}{6^3}}$. Pour $C \cap B$ on regarde les cas précédents avec $c = 6$: il y en a $3 + 6 + 9 + 12 = 30$, donc $\boxed{P(C/B) = \frac{1}{2}}$.

---

10. $(**)$ Deux chasseurs A et B aperçoivent un lièvre et tirent simultanément.

1. Sachant que A atteint et tue d'habitude 5 lièvres sur 6 et B 4 lièvres sur 5, quelle est la probabilité que le lièvre soit tué?
2. En fait B a tiré.
   (a) Quelle est la probabilité pour que A tue le lièvre sachant que si B tire et manque, les chances de A d'atteindre le lièvre se trouvent diminuées de moitié?
   (b) Dans ces conditions, lorsque B a tiré, puis A, quelle est la probabilité pour le lièvre d'en réchapper?

Soit T l'événement "le lièvre est tué" A (resp. B) "le chasseur A (resp. B) réussit". On a donc $P(A) = \frac{5}{6}$ et $P(B) = \frac{4}{5}$.

1. $P(T) = P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$ avec $P(A \cap B) = P(A)P(B)$ car les tirs de A et de B sont indépendants. Ainsi,

$$P(T) = \frac{5}{6} + \frac{4}{5} - \frac{20}{30} = \frac{25 + 24 - 20}{30},$$

soit $\boxed{P(T) = \frac{29}{30} \approx 0.97}$.

2. i) On sait que $P(A/\overline{B}) = \frac{5}{12}$. On cherche $P(A \cap \overline{B}) = P(A/\overline{B})P(\overline{B}) = \frac{5}{12} \times \frac{1}{5}$, soit $\boxed{P(A \cap \overline{B}) = \frac{1}{12} \approx 0.17}$.

ii) On cherche $P(\overline{B} \cap \overline{A}) = P(\overline{B})P(\overline{A}/\overline{B}) = \frac{1}{5} \times \frac{7}{12}$, soit $\boxed{P(\overline{A} \cap \overline{B}) = \frac{7}{12} \approx 0.117}$.

---

11. (∗∗) Le quart d'une population est vacciné. On constate que parmi les malades il y a 1 vacciné pour 4 non vaccinés ; de plus, parmi les vaccinés, il y a 1 malade sur 12?
Quelle est la probabilité de tomber malade pour un individu non vacciné? Le vaccin est-il efficace?

Soit V l'événement "la personne est vaccinée" et M "la personne est malade". On a $P(V) = \frac{1}{4}$, $P(V/M) = \frac{1}{5}$, $P(M/V) = \frac{1}{12}$: c'est ce qu'on connait, et on cherche $P(M/\overline{V})$.

$$P(M/\overline{V}) = \frac{P(M \cap \overline{V})}{P(\overline{V})}$$

avec $P(\overline{V}) = \frac{3}{4}$. $P(V \cap M) = \frac{1}{5}P(M) = \frac{1}{12}P(V)$ donne $P(M) = \frac{5}{12}P(V) = \frac{5}{48}$ et $P(M) = P(M \cap V) + P(M \cap \overline{V})$ donne $P(M \cap \overline{V}) = P(M) - P(M \cap V) = \frac{5}{48} - \frac{1}{48} = \frac{4}{48} = \frac{1}{12}$ et $P(M/\overline{V}) = \frac{1}{12} \times \frac{4}{3}$, soit $\boxed{P(M/\overline{V}) = \frac{1}{9}}$.

$P(M) = \frac{5}{48}$, $P(M/\overline{V}) = \frac{1}{9}$ donc $\frac{P(M/\overline{V})}{P(M)} = \frac{48}{45} = \frac{16}{15} > 1$: on a donc $P(M/\overline{V}) > P(M)$ et le vaccin est bien efficace.

---

12. (∗) Une usine d'ampoules dispose de 3 machines qui fabriquent respectivement 20, 30 et 50% de la production. Sachant que la probabilité qu'une ampoule défectueuse ait été fabriquée par A, B, C est:
$P(D/A) = 0.05$; $P(D/B) = 0.04$; $P(D/C) = 0.01$;
calculer la probabilité:

1. qu'une ampoule soit défectueuse ;
2. qu'une ampoule défectueuse provienne de A ;
3. qu'une ampoule non défectueuse provienne de C .

On note D l'événement "l'ampoule est défectueuse" et A (resp. B, C) "l'ampoule vient de A (resp. B, C).

1. On a, d'après les probabilités totales

$$\begin{aligned} P(D) &= P(D/A)P(A) + P(D/B)P(B) + P(D/C)P(C) \\ &= 0.05 \times 0.2 + 0.04 \times 0.3 + 0.01 \times 0.5 = 0.01 + 0.012 + 0.005 \end{aligned}$$

Ainsi $\boxed{P(D) = 0.027}$.

2. $P(A/D)=\frac{P(A\cap D)}{P(D)}=\frac{P(D/A)P(A)}{P(D)}$, soit $\boxed{P(A/D)=\frac{10}{27}\approx 0.37}$.

3. $P(C/\overline{D})=\frac{P(C\cap\overline{D})}{P(\overline{D})}=\frac{P(\overline{D}/C)P(C)}{P(\overline{D})}=\frac{(1-P(D/C))P(C)}{1-P(D)}$ donc

$$\boxed{P(C/\overline{D})=\frac{0.09\times 0.5}{0.973}=\frac{45}{973}\approx 0.51}.$$

---

13. ($***$) Une urne contient initialement b bonbons blancs et r bonbons rouges. On effectue des tirages successifs d'un bonbon dans cette urne selon le protocole suivant: si à un rang quelconque on obtient un bonbon rouge, celui-ci est remis dans l'urne avant le tirage suivant et si à un rang quelconque on obtient un bonbon blanc, on le mange.

1. Quelle est la probabilité, au cours des n premiers tirages de tirer exactement un bonbon blanc? de manger au moins un bonbon?
2. Sachant qu'au cours des n premiers tirages, on a tiré exactement un bonbon blanc, quelle est la probabilité qu'il ait été tiré en dernier?

On note R_k (resp. B_k) l'événement "on obtient un bonbon rouge (resp. blanc) au k-ième tirage".

1. On commence par chercher la probabilité d'avoir exactement un bonbon blanc au k-ième tirage, et aux $n-1$ autres tirages, des bonbons rouges. La composition de l'urne ne varie pas tant qu'on n'a pas eu de bonbon rouge. On pose

$$p_k=P(E_1\cap\cdots\cap E_{k-1}\cap E_k\cap E_{k-1}\cap\cdots E_n)$$

avec $E_i=R_i$ pour $i\neq k$ et $E_k=B_k$. En utilisant les probabilités composées, il vient :

$$p_k=P(E_1)P(E_2/E_1)\cdots P(E_n/(E_1\cap\cdots\cap E_{n-1}))$$

avec $P(R_i/(R_1\cap\cdots\cap R_{i-1}))=\frac{r}{b+r}$ si $i\leq k$, $P(B_k/(R_1\cap\cdots\cap R_{k-1}))=\frac{b}{b+r}$ et, si $i\geq r+1$, $P(R_i/(R_1\cap\cdots\cap R_{i-1}))=\frac{r}{b+r-1}$ et donc

$$\boxed{p_k=\left(\frac{r}{b+r}\right)^{k-1}\times\frac{b}{b+r}\times\left(\frac{r}{b+r-1}\right)^{n-k}.}$$

La probabilité demandée est $p=\sum\limits_{k=1}^{n}p_k$ et donc

$$\begin{aligned}p&=\frac{b}{b+r}\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{r}{b+r}\right)^{k-1}\times\left(\frac{r}{b+r-1}\right)^{n-k}=\frac{b}{b+r}\left(\frac{r}{b+r-1}\right)^{n-1}\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{b+r-1}{b+r}\right)^{k-1}\\&=\frac{b}{b+r}\left(\frac{r}{b+r-1}\right)^{n-1}\frac{1-\left(\frac{b+r-1}{b+r}\right)^n}{1-\frac{b+r-1}{b+r}}=b\left(\frac{r}{b+r}\right)^{n-1}\left(1-\left(\frac{b+r-1}{b+r}\right)^n\right)\end{aligned}$$

et la probabilité de ne pas manger de bonbon est $P(R_1\cap\cdots\cap R_n)=\left(\frac{r}{b+r}\right)^n$, donc la probabilité de manger au moins un bonbon est $\boxed{p'=1-\left(\frac{r}{b+r}\right)^n}$.

2. On cherche $P(R_1\cap\cdots\cap R_{n-1}\cap B_n\cap E/E)=\dfrac{P(R_1\cap\cdots\cap R_{n-1}\cap B_n)}{P(E)}=\dfrac{p_n}{p}$, quotient de 2 probabilités déterminées ci-dessus :

$$p_n=\frac{br^{n-1}}{(b+r)^n}\text{ et }p=\frac{br^{n-1}}{(b+r)^n}\frac{(b+r)^n-(b+r-1)^n}{(b+r-1)^{n-1}}$$

et donc

$$\boxed{P(R_1 \cap \cdots \cap R_{n-1} \cap B_n \cap E/E) = \frac{(b+r-1)^{n-1}}{(b+r)^n - (b+r-1)^n}}.$$

---

14. (∗) Une urne contient 3 boules rouges et 7 boules blanches. On tire une boule et on remet dans l'urne une boule de l'autre couleur.
Quelle est la probabilité que la deuxième boule tirée soit rouge?

On cherche $P(R_2)$ où R_2 est l'événement "la deuxième boule tirée est rouge", et pour cela, on utilise les probabilités totales faisant intervenir la couleur de la première boule tirée.

$$P(R_2) = P(R_2/R_1)P(R_1) + P(R_2/\overline{R}_1)P(\overline{R}_1)$$

avec $P(R_1) = \frac{3}{10}$, $P(R_2/R_1) = \frac{2}{10}$ et $P(R_2/\overline{R}_1) = \frac{4}{10}$ donc $P(R_2) = \frac{6}{100} + \frac{28}{100} = \frac{34}{100}$, soit $\boxed{P(R_2) = 0.34}$.

---

15. (∗) On considère n urnes numérotées de 1 à n, l'urne k contenant n boules noires et k boules blanches. On choisit au hasard une urne et dans cette urne une boule.
Quelle est la probabilité d'obtenir une boule noire?

L'urne k contient $n+k$ boules dont k blanches. On utilise les probabilités totales en décomposant suivant la provenance de la boule :

$$P(N) = \sum_{k=1}^{n} P(N \cap U_k) = \sum_{k=1}^{n} P(N/U_k)P(U_k)$$

avec $P(U_k) = \frac{1}{n}$ (tous les choix d'urne sont équiprobable) et $P(N/U_k) = \frac{n}{n+k}$ d'où finalement $\boxed{P(N) = \sum_{k=1}^{\to n} \frac{k}{k+n}}$.

---

16. (∗) Une urne contient 4 boules noires et 2 boules blanches ; une autre 2 boules noires et 4 boules blanches. On effectue une succession de tirages avec remise dans une des urnes choisie qu hasard.
Quelle est la probabilité que la troisième boule tirée soit blanche sachant que les deux premières l'étaient?

On cherche $P(B_3/(B_1 \cap B_2)) = \frac{P(B_1 \cap B_2 \cap B_3)}{P(B_1 \cap B_2)}$.
Or $P(B_1 \cap B_2) = P(B_1 \cap B_2/U_1)P(U_1) + P(B_1 \cap B_2/U_2)P(U_2) = \frac{1}{2}\left(\left(\frac{1}{3}\right)^2 + \left(\frac{2}{3}\right)^2\right) = \frac{5}{18}$
et de même, $P(B_1 \cap B_2 \cap B_3) = \frac{1}{2}\left(\left(\frac{1}{3}\right)^3 + \left(\frac{2}{3}\right)^3\right) = \frac{1}{6}$ donc $\boxed{P(B_3/(B_1 \cap B_2)) = \frac{3}{5}}$.

---

17. (∗∗) Une urne contient 5 boules rouges et 1 noire.
Déterminer la probabilité qu'il faille retirer successivement 3 boules, sans remise dans l'urne, pour extraire la boule noire.

On cherche en fait $P(R_1 \cap R_2 \cap N_3)$ et, pour cela, on utilise les probabilités composées :

$$P(R_1 \cap R_2 \cap N_3) = P(R_1)P(R_2/R_1)P(N_3/(R_1 \cap R_2))$$

avec $P(R_1) = \frac{5}{6}$, $P(R_2/R_1) = \frac{4}{5}$ et $P(N_3/(R_1 \cap R_2)) = \frac{1}{4}$.

On a donc $P(R_1 \cap R_2 \cap N_3) = \frac{5}{6} \times \frac{4}{5} \times \frac{1}{4}$, soit $\boxed{P(R_1 \cap R_2 \cap N_3) = \frac{1}{6}}$.

---

18. (∗∗) Une urne contient 6 boules blanches et 5 rouges. On en extrait successivement les boules sans remettre dans le sac les boules sorties. On appelle p_n la probabilité pour qu'au n-ième tirage, la boule rouge apparaisse pour la première fois.
Calculer p_n pour tout entier n.

Au mieux, la boule rouge apparaît de suite ; au pire, on tire toutes les boules blanches avant. Donc $n \in [\![1, 7]\!]$ et, pour $n \in [\![2, 7]\!]$, on a :

$$\begin{aligned} p_n &= P(B_1 \cap \cdots \cap B_{n-1} \cap R_n) \\ &= P(B_1)P(B_2/B_1)\cdots P(B_{n-1}/B_1 \cap \cdots \cap B_{n-2})P(R_n/(B_1 \cap \cdots \cap B_{n-1}). \end{aligned}$$

Ainsi, $p_1 = \frac{5}{11}$, $p_2 = \frac{6}{11}\frac{5}{10} = \frac{3}{11}$, $p_3 = \frac{6}{11}\frac{5}{10}\frac{5}{9} = \frac{5}{33}$, $p_4 = \frac{6}{11}\frac{5}{10}\frac{4}{9}\frac{5}{8} = \frac{5}{66}$, $p_5 = \frac{6}{11}\frac{5}{10}\frac{4}{9}\frac{3}{8}\frac{5}{7} = \frac{5}{154}$, $p_6 = \frac{6}{11}\frac{5}{10}\frac{4}{9}\frac{3}{8}\frac{2}{7}\frac{5}{6} = \frac{5}{462}$ et $p_7 = \frac{6}{11}\frac{5}{10}\frac{4}{9}\frac{3}{8}\frac{2}{7}\frac{1}{6}\frac{5}{5} = \frac{1}{462}$.

---

19. (∗) On cherche un parapluie qui se trouve dans un immeuble de 7 étages (rez-de-chaussée compris) avec la probabilité p ($p \in]0, 1[$). On a exploré en vain les 6 premiers niveaux.
Quelle est la probabilité que le parapluie se trouve au 7-ième étage?

Soit A l'événement "le parapluie se trouve au 7-ième étage" et B "le parapluie n'est pas dans les 6 premiers étages". On cherche $P(A/B) = \frac{P(A\cap B)}{P(B)} = \frac{P(A)}{P(B)}$ car $A \cap B$. On a $P(A) = \frac{p}{7}$ (chaque étage a la même probabilité et la somme vaut p) et $P(B) = 1 - P(\overline{B}) = 1 - \frac{6p}{7} = \frac{7-6p}{7}$. Donc, finalement, $\boxed{P(A/B) = \frac{p}{7-6p}}$.

---

20. (∗) On considère 100 dés à 6 faces dont 50 sont pipés et 50 sont corrects. Pour chaque dé pipé, la probabilité d'obtenir la face 6 est 1/2. On prend un dé au hasard parmi les 100, on le jette et on constate que la face 6 apparaît.
Quelle est la probabilité que le dé soit pipé?

Soit A l'événement "la face 6 apparaît" et B "le dé est correct". On cherche $P(\overline{B}/A)$ et on connait $P(B) = P(\overline{B}) = \frac{1}{2}$, $P(A/B) = \frac{1}{6}$ et $P(A/\overline{B}) = \frac{1}{2}$.

On utilise la formule de Bayes : $P(\overline{B}/A) = \frac{P(A/\overline{B})P(\overline{B})}{P(A/\overline{B})P(\overline{B})+P(A/B)P(B)} = \frac{P(A/\overline{B})}{P(A/\overline{B})+P(A/B)}$ car $P(B) = P(\overline{B})$ et donc $P(\overline{B}/A) = \frac{\frac{1}{2}}{\frac{1}{6}+\frac{1}{2}}$, soit $\boxed{P(\overline{B}/A) = \frac{3}{4}}$.

---

21. (∗) On suppose que l'on a dans un magasin des machines provenant de 2 usines différentes A et B: 70% viennent de A et 30% viennent de B. Parmi celles qui viennent de A, 20% présentent un défaut ; parmi celles qui viennent de B, 10% présentent un défaut.

1. Déterminer le pourcentage de machines dans le magasin qui présentent un défaut.
2. Une machine donnée présente un défaut. Quelle est la probabilité qu'elle provienne de l'usine B?

On note D l'événement "la machine est défectueuse" et A (resp. B) "la machine vient de l'usine A (resp. B). On a $P(A) = 0.7$, $P(B) = 0.3$, $P(D/A) = 0.2$ et $P(D/B) = 0.1$.

1. D'après les probabilités totales

$$\begin{aligned} P(D) &= P(D/A)P(A) + P(D/B)P(B) \\ &= 0.2 \times 0.7 + 0.1 \times 0.3 = 0.14 + 0.07 = 0.21 \end{aligned}$$

Ainsi $\boxed{P(D) = 0.21}$.

2. On cherche $P(B/D)$, $P(B/D) = \frac{P(B\cap D)}{P(D)} = \frac{P(D/B)P(B)}{P(D)}$, soit $\boxed{P(B/D) = \frac{3}{17} \approx 0.176}$.

Remarque : exercice comparable à celui sur les ampoules en plus simple.

---

22. (∗∗) Un voyageur X peut prendre le train ou l'avion. Si au jour $n-1$ il prend le train, la probabilité qu'il prenne l'avion au jour n est $1/2$. Si au jour $n-1$, il prend l'avion, il prend le train au jour n. Soit p_n la probabilité que X prenne le train au jour n.
Donner l'expression de p_n en fonction de n sachant qu'au premier jour, X prend le train.

Soit T_k l'événement "le voyageur prend le train le jour k" et $p_k = P(T_k)$. On sait que $P(T_k/T_{k-1}) = \frac{1}{2}$ et $P(T_k/\overline{T}_{k-1}) = 1$. En utilisant les probabilités totales, on obtient :

$$p_n = P(T_n) = P(T_n/T_{n-1})P(T_{n-1}) + P(T_n/\overline{T}_{n-1})P(\overline{T}_{n-1}) = \frac{1}{2}p_{n-1} + 1 - p_{n-1},$$

soit $\boxed{p_n = 1 - \frac{1}{2}p_{n-1}}$.

On cherche r tel que $r = 1 - \frac{1}{2}r$: $\frac{3}{2}r = 1$ et $r = \frac{2}{3}$.

On a alors $p_n - r = -\frac{1}{2}(p_{n-1} - r) = \left(-\frac{1}{2}\right)^{n-1}(p_1 - r)$ avec $p_1 = 1$ et $r = \frac{2}{3}$, donc

$$p_n = \frac{2}{3} + \left(-\frac{1}{2}\right)^{n-1}\left(1 - \frac{2}{3}\right) = \frac{1}{3}\left(2 + \left(-\frac{1}{2}\right)^{n-1}\right) = \frac{2}{3}\left(1 - \left(-\frac{1}{2}\right)^{n}\right)$$

---

23. (∗) Un sac contient 3 jetons. L'un de ces jetons a 2 faces noires, un autre 2 faces blanches et le troisième a une face noire et l'autre blanche. On tire au hasard un jeton du sac et on le pose sur la table: la face visible est noire.
Quelle est la probabilité que le jeton tiré ait 2 faces noires?

Soit N l'événement "le jeton tiré a 2 faces noires" et V l'événement "la face visible est noire". On cherche $P(N/V) = \frac{P(N\cap V)}{P(V)} = \frac{P(N)}{P(V)}$ car $N \subset V$. On a $P(N) = \frac{1}{3}$, $P(V) = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$ et donc $P(N/V) = \frac{\frac{1}{3}}{\frac{1}{2}}$ soit $\boxed{P(N/V) = \frac{2}{3}}$.

---

24. (∗∗) Un joueur joue à "pile ou face" avec 2 pièces A et B. Pour le premier jeu, il choisit une pièce au hasard. Par la suite, il utilisera la même pièce qu'au coup précédent en cas de "pile" et il changera de pièce en cas de "face". Soient a et b les probabilités respectives de "piles" des pièces A et B. On suppose $a + b < 1$.
Calculer la probabilité d'obtenir "pile" au n-ième jeu, ainsi que la limite de cette probabilité lorsque n tend vers $+\infty$.

Soit P_n l'événement "on obtient pile au n-ième lancer" et A_n l'événement "la pièce A est jouée au n-ième lancer".

$$p_n = P(P_n) = P(P_n/A_n)P(A_n) + P(P_n/\overline{A_n})P(\overline{A_n}) = aP(A_n) + b(1 - P(A_n))$$

soit $\boxed{p_n = (a-b)P(A_n) + b}$. Or :

$$\begin{aligned} P(A_n) &= P(A_{n-1} \cap P_{n-1}) + P(\overline{A_{n-1}} \cap \overline{P_{n-1}}) \\ &= P(P_{n-1}/A_{n-1})P(A_{n-1}) + P(\overline{P_{n-1}}/\overline{A_{n-1}})P(\overline{A_{n-1}}) \\ &= aP(A_{n-1}) + (1-b)(1 - P(A_{n-1})) \end{aligned}$$

On a donc $\boxed{P(A_n) = (a+b-1)P(A_{n-1}) + 1 - b}$.
On cherche λ tel que $\lambda = (a+b-1)\lambda + 1 - b$, soit $\lambda = \frac{1-b}{2-a-b}$. On a alors :

$$P(A_n) - \lambda = (a+b-1)(P(A_{n-1}) - \lambda) = (a+b-1)^{n-1}(P(A_1) - \lambda)$$

et $P(A_1) = \frac{1}{2}$ donc $P(A_n) = \frac{1-b}{2-a-b} + (a+b-1)^{n-1}\left(\frac{1}{2} - \frac{1-b}{2-a-b}\right)$ et

$$\boxed{p_n = (a+b-1)^{n-1}(a-b)\left(\frac{1}{2} - \frac{1-b}{2-a-b}\right) + \frac{1-b}{2-a-b}(a-b) + b}$$

$0 < a+b < 1$ donc $a+b-1 \in]-1,1[$ et $\boxed{\lim_{n\to+\infty} p_n = \frac{(a-b)(1-b)}{2-a-b} + b}$.

---

25. (**) Soit $n \in \mathbb{N}^*$; k un entier tel que $0 < k < n$ et $p \in]0,1[$. Dans un magasin, se trouvent n commodes ayant toutes k tiroirs.

1. Soit r un entier tel que $0 < r \leq k$. On considère une commode de ce magasin. Un livre a une probabilité p de se trouver dans cette commode. S'il est dans la commode, il a la même probabilité de se trouver dans chacun des k tiroirs. On ouvre r tiroirs de la commode et on ne le trouve pas: quelle est la probabilité qu'il se trouve dans la commode?
2. Soit m un entier tel que $0 < m \leq n$. Un livre est situé dans l'un des k tiroirs de l'une des n commodes identiques du magasin. On le cherche en ouvrant r tiroirs de chaque commode: ne le trouvant pas dans les m premières commodes, quelle est la probabilité de le trouver de cette façon?

---

1. On a n commodes à k tiroirs chacune (il y a donc en tout nk tiroirs).
Soit C l'événement "le livre est dans la commode" et T_i "le livre est dans le tiroir i".
On cherche $P\left(C/\overline{T_1 \cup \dots \cup T_r}\right) = \dfrac{P\left(C \cap (\overline{T_1 \cup \dots \cup T_r})\right)}{P(\overline{T_1 \cup \dots \cup T_r})}$ avec

$$P\left(C \cap (\overline{T_1 \cup \dots \cup T_r})\right) = P(T_{r+1} \cup \dots T_k) = \frac{k-r}{k}p$$

$$P(\overline{T_1 \cup \dots \cup T_r}) = 1 - P(T_1 \cup \dots \cup T_r) = 1 - \frac{rp}{k} = \frac{k-rp}{k}$$

d'où $\boxed{P\left(C/\overline{T_1 \cup \dots \cup T_r}\right) = \dfrac{(k-r)p}{k-rp}}$.

2. Soit A l'événement "le livre se trouve dans l'un des r premiers tiroirs d'une commode" et B "le livre n'est pas dans les r premiers tiroirs des m premières commodes".

On cherche $P(A/B)=\frac{P(A\cap B)}{P(B)}$. Chaque tiroir ayant la probabilité $\frac{1}{nk}$ d'accueillir le livre (il y a nk tiroirs, tous équiprobables), on a alors $P(B)=1-\frac{mr}{nk}$ et $P(A\cap B)=\frac{(n-m)r}{nk}$, d'où $\boxed{P(A/B)=\frac{(n-m)r}{nk-mr}}$.

---

26. $(**)$ Soit $(\Omega,\mathcal{A},P)$ un espace probabilisé. On considère 3 événements A, B et X tels que $P(A)=1/2$, $P(B)=3/5$, $P(A\cap B)=1/5$, $P(X/A)=P(X/B)=1/2$ et $1/P(X)\in\mathbb{N}$.
Calculer $P(X)$.

$P(X/A)=\frac{P(X\cap A)}{P(A)}=\frac{1}{2}$ donc $P(X\cap A)=P(X/A)P(A)=\frac{1}{4}$.
De même, $P(X/B)=\frac{P(X\cap B)}{P(B)}=\frac{1}{2}$ donc $P(X\cap B)=P(X/B)P(B)=\frac{3}{10}$.
De plus, $X\cap(A\cup B)\subset X$, c'est-à-dire $(X\cap A)\cup(X\cap B)\subset X$, donc

$$\begin{aligned}P(X) &\geq P\left((X\cap A)\cup(X\cap B)\right)=P(X\cap A)+P(X\cap B)-P(X\cap A\cap B)\\ &= \frac{1}{4}+\frac{3}{10}-P(X\cap A\cap B)=\frac{11}{20}-P(X\cap A\cap B)\end{aligned}$$

$P(A\cap B)=\frac{1}{5}\geq P(X\cap A\cap B)$ donc $P(X)\geq\frac{11}{20}-\frac{1}{5}=\frac{7}{20}$ et $\frac{1}{P(X)}\in\mathbb{N}$ avec $\frac{1}{P(X)}\leq\frac{20}{7}$, donc $\frac{1}{P(X)}=1$ ou $\frac{1}{P(X)}=2$.

Si $P(X)=1$, alors $P(\overline{X})=0$ et $P(A)=P(A\cap X)+P(A\cap\overline{X})=P(A\cap X)$, ce qui est faux, donc $\boxed{P(X)=\frac{1}{2}}$.

---

27. $(*)$ Une urne contient a boules noires et b boules blanches. Deux tirages successifs sont effectués dans cette urne. On appelle E l'ensemble des résultats du premier tirage, F l'ensemble des résultats du deuxième tirage et $E\times F$ l'ensemble des couples de tous les tirages possibles.
Donner les probabilités attachées à tous les couples possibles de $E\times F$ lorsque le premier tirage se fait:

1. avec remise ;
2. sans remise .

$E=F=\{B,N\}$, $E\times F=\{(B,B);(B,N);(N,B);(N,N)\}$.

1. <u>Tirage avec remise</u> : la composition de l'urne ne varie pas.

$$P(\{(B,B)\})=\left(\frac{a}{a+b}\right)^2, P(\{(B,N)\})=P(\{(N,B)\})=\frac{ab}{(a+b)^2}, P(\{(N,N)\})=\left(\frac{b}{a+b}\right)^2.$$

2. <u>Tirage sans remise</u> : la composition de l'urne varie.

$$\begin{aligned}P(\{(B,B)\})=P(B_1\cap B_2)=P(B_1)P(B_2/B_1)&=\frac{a}{a+b}\times\frac{a-1}{a+b-1}\\ P(\{(B,N)\})=P(B_1\cap N_2)=P(B_1)P(N_2/B_1)&=\frac{a}{a+b}\times\frac{b}{a+b-1}\\ P(\{(N,B)\})=P(N_1\cap B_2)=P(N_1)P(B_2/N_1)&=\frac{b}{a+b}\times\frac{a}{a+b-1}\\ P(\{(N,N)\})=P(N_1\cap N_2)=P(N_1)P(N_2/N_1)&=\frac{b}{a+b}\times\frac{b-1}{a+b-1}.\end{aligned}$$
