Année Préparatoire

$\boxed{\text{Corrigé de l'Examen d'Algèbre Linéaire du mardi 27 mars 2018}}$

Exercice I- **[9 points]**

1. On a bien $\Phi(P) \in \mathbb{C}[X]$. Si $P, Q \in \mathbb{C}[X]$ et $\alpha \in \mathbb{C}$,

$$\Phi(\alpha P + Q)(X) = (\alpha P + Q)(X) + (\alpha P + Q)(a)U(X) = \alpha\Phi(P)(X) + \Phi(Q)(X),$$

donc $\boxed{\Phi \in \mathcal{L}(\mathbb{C}[X])}$ [*1pt*].

2. Si $\Phi(P) = 0$, $P(X) = -P(a)U(X) \in \mathbb{C}U[X]$, donc $\boxed{\ker\Phi \subset \mathrm{vect}(U)}$ [*1pt*].

3. • Si $U(a) = -1$, $\Phi(U) = 0$, donc $U \in \ker\Phi$, puis $\mathrm{vect}(U) \subset \ker\Phi$, ce qui donne $\boxed{\ker\Phi = \mathrm{vect}(U)}$.
• Si $U(a) \neq -1$, $\Phi(U) = (1 + U(a))U \neq 0$ car $U \neq 0$, donc $U \notin \ker\Phi$. L'inclusion $\ker\Phi \subset \mathrm{vect}(U)$ est stricte, ce qui oblige $\boxed{\ker\Phi = \{0\}}$ (sinon, $\ker\Phi$ est au moins une droite, et vaut forcément $\mathrm{vect}(U)$) [*2pts*].

4. [*2pts*] On a :

$$\Phi(\Phi(P)) = \Phi(P) + P(a)\Phi(U) = P + P(a)U + P(a)(U + U(a)U) = P + 2P(a)U + P(a)U(a)U,$$

$$(2+U(a))\Phi(P) - (1+U(a))P = 2P + 2P(a)U + U(a)P + U(a)P(a)U - P - U(a)P = P + 2P(a)U + U(a)P(a)U,$$

donc $\boxed{\Phi \circ \Phi - (2 + U(a))\Phi + (1 + U(a))\mathrm{id} = 0}$.
Une condition nécessaire pour que $\Phi \in GL(\mathbb{C}[X])$ est $U(a) \neq -1$ par 3.

$$\Phi \circ \left(\frac{-\Phi + (2 + U(a))\mathrm{id}}{1 + U(a)}\right) = \left(\frac{-\Phi + (2 + U(a))\mathrm{id}}{1 + U(a)}\right) \circ \Phi = \mathrm{id},$$

donc $\Phi \in GL(\mathbb{C}[X])$ avec $\Phi^{-1} = \frac{-\Phi + (2+U(a))\mathrm{id}}{1+U(a)}$, soit

$$\boxed{\Phi^{-1}(P) = \frac{-P - P(a)U + (2 + U(a))P}{1 + U(a)} = P - \frac{P(a)}{1 + U(a)}U}.$$

5. Si $U(a) = -1$, $\Phi^2 = \Phi$, donc Φ est un projecteur avec $\ker\Phi = \mathrm{vect}U$. On a $\mathrm{im}\Phi = \ker(\Phi - \mathrm{id}_E)$, donc $P \in \mathrm{im}\Phi$ équivaut à, $P(a)U = 0$, donc à $P(a) = 0$. Ainsi, $\boxed{\mathrm{im}\Phi = (X - a)\mathbb{C}[X]}$ (multiples de $X - a$) [*1pt*].

6. • Si $U(a) \neq -1$, on a $P = \Phi^{-1}(V)$, soit $\boxed{P = V - \frac{V(a)}{1+U(a)}U}$.
• Si $U(a) = -1$, on a $V \in \mathrm{im}\Phi$ si P existe. Donc, si $V(a) \neq 0$, il n'y a pas de solution. Sinon, $P = V$ est solution et, comme on a une équation linéaire, les solutions sont les éléments de la droite affine $\boxed{V + \mathrm{vect}U}$ [*2pts*].

Exercice II- **[10 points]**

1. a) Les deux vecteurs u et v ne sont pas proportionnels, donc ils forment une famille libre et comme F est engendré par u et v, c'est aussi une famille génératrice de F. Ainsi, (u, v) est une base de F et $\boxed{\dim(F) = 2}$ [*1pt*].

b) On veut $(v'|u)=0$. Or $(v'|u)=(u+\lambda v|u)=(u|u)+\lambda(v|u)$. On a donc $\lambda=-\frac{(u|u)}{(v|u)}$ avec $(u|u)=1^2+2^2+3^2=14$ et $(v|u)=-3+2+15=14$. On a donc $\boxed{\lambda=-1}$ [*1pt*].

c) On a $(w|u)=-1+4-3=0$ et $(w|v)=3+2-5=0$ donc $w\in F^\perp$. Or $\dim(F)=2$, donc $\dim(F^\perp)=1$ et $\boxed{F^\perp=\mathrm{vect}(w)}$. De plus, u, v' et w sont des vecteurs deux à deux orthogonaux, donc ils forment une famille libre de $\mathbb{R}^3$ qui est de dimension 3, donc $\boxed{(u,v',w) \text{ est une base de } \mathbb{R}^3}$ [*2pts*].

2. a) Soit $\mathcal{B}'=(u,v',w)$. On a $u\in F$ donc $p_F(u)=u$; de même $p_F(v')=v'$ et $p_F(w)=0$ car $w\in F^\perp$. Ainsi, $\boxed{A=\mathcal{M}_{\mathcal{B}'}(p_F)=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&0\end{pmatrix}}$ [*1pt*].

b) On a $\mathrm{id}=p_F+p_{F^\perp}$, avec

$$p_{F^\perp}(x)=\frac{(x|w)}{\|w\|^2}w=\frac{-x_1+2x_2-x_3}{6}(-1,2,-1)=\left(\frac{x_1-2x_2+x_3}{6},\frac{-2x_1+4x_2-2x_2}{6},\frac{x_1-2x_2+x_3}{6}\right)$$

et donc $p_F(x)=(x_1,x_2,x_3)-p_{F^\perp}(x)$, soit

$$p_F(x)=\left(\frac{5x_1+2x_2-x_3}{6},\frac{2x_1+2x_2+2x_3}{6},\frac{-x_1+2x_2+5x_1}{6}\right).$$

Ainsi, $\boxed{B=\mathcal{M}_{\mathcal{B}}(p_F)=\frac{1}{6}\begin{pmatrix}5&2&-1\\2&2&2\\-1&2&5\end{pmatrix}}$ [*2pts*].

3. Soit $C=\begin{pmatrix}2&2&-1\\2&-1&2\\-1&2&2\end{pmatrix}$.

a) C est une matrice symétrique réelle, donc $\boxed{C \text{ est diagonalisable}}$ (et les espaces propres sont orthogonaux).

$$\begin{aligned}\det(C-\lambda I_3) &= \begin{vmatrix}2-\lambda&2&-1\\2&-1-\lambda&2\\-1&2&2-\lambda\end{vmatrix}=(3-\lambda)\begin{vmatrix}1&2&-1\\1&-1-\lambda&2\\1&2&2-\lambda\end{vmatrix}\\ &= (3-\lambda)\begin{vmatrix}1&2&-1\\0&-3-\lambda&3\\0&0&3-\lambda\end{vmatrix}=-(3-\lambda)^2(3+\lambda)\end{aligned}$$

où on a fait $C_1\leftarrow C_1+C_2+C_3$. Ainsi, $\boxed{\mathrm{sp}(C)=\{-3,3\}}$.

• $C+3I=\begin{pmatrix}5&2&-1\\2&2&2\\-1&2&5\end{pmatrix}$. On a alors $(C+3I_3)x=0$ qui équivaut à $\begin{cases}5x_1+2x_2-x_3=0\\2x_1+2x_2+2x_3=0\\-x_1+2x_2+5x_3=0\end{cases}$ donc $x_1=x_3$ (en faisant L_1-L_3), puis $x_2=-x_1$ en reportant dans L_2, donc $w\in E_{-3}(C)$ qui est de dimension 1 et donc $\boxed{E_{-3}(C)=F^\perp}$. Comme les sous-espaces propres sont orthogonaux, $\boxed{E_3(C)=F}$ [*2pts*].

b) On a $6B=C+3I_3$ donc $\boxed{C=-3I_3+6B}$ et on a bien le résultat avec $\boxed{\alpha=-3 \text{ et } \beta=6}$. Si $Bx=\lambda x$, alors $Cx=(-3I_3+6B)x=-3x+6\lambda x=(-3+6\lambda)x$, donc les vecteurs propres de C sont les mêmes que ceux de B, avec $\mathrm{sp}(C)=\{6\lambda-3\,;\lambda\in\mathrm{sp}(B)\}$. Comme $\mathrm{sp}(B)=\{0,1\}$, on retrouve ainsi $\boxed{\mathrm{sp}(C)=\{-3;3\}}$, avec $\boxed{E_{-3}(C)=E_0(B)=F^\perp}$ et $\boxed{E_3(C)=E_1(B)=F}$ [*1pt*].

Exercice III- [8 points]

1. On a $M^4 = ({}^tM)^2 = {}^t(M^2) = {}^t({}^tM)$ donc $\boxed{M^4 = M}$ [*1pt*].

2. Si M est inversible, en multipliant $M^4 = M$ par M^{-1} à gauche, il vient $M^3 = I_2$. Il en résulte que ${}^tM\,M = M^2M = I_2$, donc que $\boxed{M \in \mathcal{O}_2(\mathbb{R})}$. On a aussi $\det(M^3) = (\det M)^3 = \det(I_2) = 1$, donc $\boxed{\det(M) = 1}$ car on est dans $\mathbb{R}$ [*2pts*].

3. a) Si M n'est pas inversible, 0 est valeur propre de M. Soit alors $e_1 \in \ker M$, que l'on complète par e_2 en une base de $\mathbb{R}^2$. M est alors semblable à $\boxed{T = \begin{pmatrix} 0 & a \\ 0 & b \end{pmatrix}}$, avec $a, b \in \mathbb{R}$. Mais alors M^4 est semblable à $T^4 = \begin{pmatrix} 0 & * \\ 0 & b^4 \end{pmatrix}$ et, de $M^4 = M$, on déduit $T^4 = T$, donc $b^4 = b$, soit $b(b^3 - 1) = 0$ et, comme $b \in \mathbb{R}$, il vient $\boxed{b \in \{0, 1\}}$ [*2pts*].

b) Si $b = 0$, alors $T^2 = 0$, donc $M^2 = 0$, ce qui donne ${}^tM = 0$ donc $\boxed{M = 0}$ [*1pt*].

c) Si $b = 1$, $\mathrm{sp}(M) = \mathrm{sp}(T) = \{0, 1\}$ donc M a deux valeurs propres distinctes et ainsi $\boxed{M \text{ est diagonalisable}}$ et semblable à $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, donc $\boxed{M \text{ est la matrice d'un projecteur}}$ [*2pts*].

Exercice IV- [14 points]

1. [*2pts*] A est une matrice tridiagonale avec $\delta_1 = 3$, $\delta_2 = 9 - 1 = 8$ et $\delta_3 = 3\delta_2 - \delta - 1 = 21$. On a donc, d'après le cours $A = LU$ avec $\boxed{L = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1/3 & 1 & 0 \\ 0 & -3/8 & 1 \end{pmatrix}}$ et $\boxed{U = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 0 \\ 0 & 3/8 & -1 \\ 0 & 0 & 21/8 \end{pmatrix}}$.

Si on prend $\Sigma = \mathrm{diag}(\sqrt{u_{11}}, \sqrt{u_{22}}, \sqrt{u_{33}}) = \mathrm{diag}\left(\sqrt{3}, \sqrt{\frac{8}{3}}, \sqrt{\frac{21}{8}}\right)$, on a alors

$$L\Sigma = \boxed{\begin{pmatrix} \sqrt{3} & 0 & 0 \\ -\frac{1}{\sqrt{3}} & \sqrt{\frac{8}{3}} & 0 \\ 0 & -\sqrt{\frac{3}{8}} & \sqrt{\frac{21}{8}} \end{pmatrix} = B}$$

(multiplication à droite par une matrice diagonale donc ce sont les colonnes de L que l'on multiplie) et $\Sigma^{-1}U = \begin{pmatrix} \sqrt{3} & -\frac{1}{\sqrt{3}} & 0 \\ 0 & \sqrt{\frac{8}{3}} & -\sqrt{\frac{3}{8}} \\ 0 & 0 & \sqrt{\frac{21}{8}} \end{pmatrix} = C$ (multiplication à gauche par une matrice diagonale donc ce sont les lignes que l'on multiplie). On constate que l'on a $C = {}^tB$ et donc $\boxed{A = B\,{}^tB}$.

2. $\det(A - \lambda I_3) = \begin{vmatrix} 3-\lambda & -1 & 0 \\ -1 & 3-\lambda & -1 \\ 0 & -1 & 3-\lambda \end{vmatrix} = (3-\lambda)((3-\lambda)^2 - 1) - (3-\lambda)$ en utilisant le résultat sur les matrices tridiagonales, soit $\det(A - \lambda I_3) = (3-\lambda)((\lambda-3)^2 - 2)$ et $\boxed{\mathrm{sp}(A) = \{3; 3 - \sqrt{2}; 3 + \sqrt{2}\}}$.
$0 \notin \mathrm{sp}(A)$, donc $\boxed{A \text{ est inversible}}$ [*1,5pt*].

3. On résout directement $Ax = b$, soit $\begin{cases} 3x_1 - x_2 = 2 \\ -x_1 + 3x_2 - x_3 = 1 \\ -x_2 + 3x_3 = 2 \end{cases}$. En faisant $L_1 - L_3$, on obtient $3(x_1 - x_3) = 0$, soit $x_1 = x_3$ et en remplaçant dans L_2, on obtient $L_2' : -2x_1 + 3x_2 = 1$. On fait alors $2L_1+3L_2'$: $7x_2=7$, soit $x_2=1$, puis $x_1=x_2=1$. Ainsi, l'unique solution de $Ax=b$ est $\boxed{\overline{x}={}^t(1,1,1)}$ [*1pt*].

4. a) [*2pts*] $J=D^{-1}(E+F)$ donc on a directement $\boxed{J=\frac{1}{3}\begin{pmatrix}0&1&0\\1&0&1\\0&1&0\end{pmatrix}}$ et $G=(D+E)^{-1}F$.

Pour déterminer $(D-E)^{-1}$, on détermine x tel que $(D-E)x=x'$, soit $\left\{\begin{array}{r}3x_1=x_1'\\-x_1+3x_2=x_2'\\-x_2+3x_3=x_3'\end{array}\right.$, ce qui donne $x_1=x_1'/3$, $x_2=x_1'/9+x_2'/3$ et $x_3=x_1'/27+x_2'/9+x_3'/3$. On a alors

$$G=\begin{pmatrix}1/3&0&0\\1/9&1/3&0\\1/27&1/9&1/3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0&1&0\\0&0&1\\0&0&0\end{pmatrix}=\boxed{\begin{pmatrix}0&1/3&0\\0&1/9&1/3\\0&1/27&1/9\end{pmatrix}}.$$

b) [*2,5pts*] On utilise $\det(M^{-1}N-\lambda I_3)=(-1)^3\det(M^{-1})\det(\lambda M-N)$ et ainsi les valeurs propres de $M^{-1}N$ sont les racines de $\det(\lambda M-N)$. On a alors, toujours en utilisant le déterminant des matrices tridiagonales,

$$\begin{vmatrix}3\lambda&-1&0\\-1&3\lambda&-1\\0&-1&3\lambda\end{vmatrix}=3\lambda((3\lambda)^2-1)-3\lambda=3\lambda(9\lambda^2-2)=3\lambda(3\lambda-\sqrt{2})(3\lambda+\sqrt{2})$$

donc $\boxed{\mathrm{sp}(J)=\left\{0\ ;\ -\frac{\sqrt{2}}{3}\ ;\ \frac{\sqrt{2}}{3}\right\}}$ et

$$\begin{vmatrix}3\lambda&-1&0\\-\lambda&3\lambda&-1\\0&-\lambda&3\lambda\end{vmatrix}=3\lambda((3\lambda)^2-\lambda)-3\lambda^2=3\lambda^2(9\lambda-2)$$

donc $\boxed{\mathrm{sp}(G)=\left\{0\ ;\ \frac{2}{9}\right\}}$. On a donc $\rho(G)=\frac{2}{9}<\rho(J)=\frac{\sqrt{2}}{3}<1$ donc les méthodes de Jacobi et de Gauss-Seidel sont convergentes et $\boxed{\text{c'est la méthode de Gauss seidel qui converge le plus vite}}$.

c) [*2pts*] On trouve les 3 premières itérations de la méthode de Jacobi avec la calculatrice en faisant $x^{(k+1)}=Jx^{(k)}+D^{-1}b$ et pour la méthode de Gauss-Seidel en faisant $x^{(k+1)}=Gx^{(k)}+(D-E)^{-1}b$ en partant de $x^{(0)}={}^t(0,0,0)$. On a alors,

- pour Jacobi $x^{(1)}=\begin{pmatrix}0,6667\\0,3333\\0,6667\end{pmatrix}$, $x^{(2)}=\begin{pmatrix}0,7778\\0,7778\\0,7778\end{pmatrix}$ et $x^{(3)}=\begin{pmatrix}0,9259\\0,8519\\0,9259\end{pmatrix}$;
- pour Gauss-Seidel, $x^{(1)}=\begin{pmatrix}0,6667\\0,5556\\0,8519\end{pmatrix}$, $x^{(2)}=\begin{pmatrix}0,8519\\0,9012\\0,9671\end{pmatrix}$ et $x^{(2)}=\begin{pmatrix}0,9671\\0,9781\\0,9927\end{pmatrix}$.

5. a) On a $x^{(k+1)}=Jx^{(k)}+D^{-1}b$ et $A\overline{x}=b$ donc $D^{-1}(D-(E+F))\overline{x}=D^{-1}b=\overline{x}-J\overline{x}$. En retranchant cette équation à la précédente, on a bien $\boxed{x^{(k+1)}-\overline{x}=J(x^{(k)}-\overline{x})}$ [*1pt*].

b) $\boxed{s=3-\sqrt{2}}$ et $\boxed{S=\frac{\sqrt{2}}{3}<1}$ [*0,5pt*].

c) $\|\overline{x}\|_2=\sqrt{3}\approx 1,73$ et $\frac{1}{s}\|b\|_2=\frac{3}{3-\sqrt{2}}\approx 1,89$ donc $\boxed{\|\overline{x}\|_2\leq\frac{1}{s}\|b\|_2}$ [*0,5pt*].

d) Par récurrence à partir de a), on déduit que $\|x^{(k)}-\overline{x}\|_2\leq\|J^k(x^{(0)}-\overline{x})\|_2=\|J^k\overline{x}\|_2$. Or $\|J^kx\|_2^2={}^t xJ^{2k}x\leq S^{2k}\|x\|_2^2$. On a donc $\|J^kx\|_2\leq S^k\|x\|_2$ et $\boxed{\|x^{(k)}-\overline{x}\|_2\leq\frac{S^k}{s}\|b\|_2}$ par c) [*1pt*].