Ensembles, événements

1. ($*$) Donner les expressions simplifiées des ensembles suivants:

1. $(A \cup B) \cap (A \cup C)$;
2. $(\overline{A} \cup B) \cap (A \cup B)$;
3. $(\overline{A} \cup B) \cap (A \cup B) \cap (\overline{A} \cup \overline{B})$.

D'après la distritributivité de l'union par rapport à l'intersection,

$$A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$$

donc $\boxed{(A \cup B) \cap (A \cup C) = A \cup (B \cap C)}$

2. D'après la distritributivité de l'union par rapport à l'intersection,

$$(A \cap \overline{A}) \cup B = (A \cup B) \cap (\overline{A} \cup B)$$

donc $(A \cup B) \cap (\overline{A} \cup B) = (A \cap \overline{A}) \cup B = \emptyset \cup B$ et finalement $\boxed{(A \cup B) \cap (\overline{A} \cup B) = B}$

3. D'après l'associativité de l'intersection :

$$(\overline{A} \cup B) \cap (A \cup B) \cap (\overline{A} \cup \overline{B}) = \left[(\overline{A} \cup B) \cap (A \cup B)\right] \cap (\overline{A} \cup \overline{B})$$

$$(\overline{A} \cup B) \cap (A \cup B) \cap (\overline{A} \cup \overline{B}) = B \cap (\overline{A} \cup \overline{B})$$

On utilise alors la distritributivité de l'intersection par rapport à l'union :

$$B \cap (\overline{A} \cup \overline{B}) = (B \cap \overline{A}) \cup (B \cap \overline{B}).$$

Or $(B \cap \overline{B}) = \emptyset$ qui est l'élément neutre pour la réunion ($C \cup \emptyset = C$). On a alors $B \cap (\overline{A} \cup \overline{B}) = (B \cap \overline{A}) \cup \emptyset = B \cap \overline{A}$ d'où $\boxed{(\overline{A} \cup B) \cap (A \cup B) \cap (\overline{A} \cup \overline{B}) = B \cap \overline{A}}$.

---

2. ($**$) Exprimer chacun des événements suivants à l'aide des événements A, B et C et des opérateurs réunion, intersection et complémentation:

1. au moins un des trois événements a lieu ;
2. au plus un des trois événements a lieu ;
3. aucun des trois événements n'a lieu ;
4. les trois événements ont lieu ;
5. exactement un seul des trois événements a lieu ;
6. A et B ont lieu, mais pas C ;
7. A a lieu, sinon B n'a pas lieu non plus.

1. $A \cup B \cup C$.

2. $[A \cap \overline{B} \cap \overline{C}] \cup [\overline{A} \cap B \cap \overline{C}] \cup [\overline{A} \cap \overline{B} \cap C] \cup [\overline{A} \cap \overline{B} \cap \overline{C}]$.

3. $[\overline{A} \cap \overline{B} \cap \overline{C}] = \overline{A \cup B \cup C}$.

4. $A \cap B \cap C$.

5. $[A \cap \overline{B} \cap \overline{C}] \cup [\overline{A} \cap B \cap \overline{C}] \cup [\overline{A} \cap \overline{B} \cap C]$.

6. $A \cap B \cap \overline{C}$.

7. $A \cup (\overline{A} \cap \overline{B}) = (A \cup \overline{A}) \cap (A \cup \overline{B}) = \Omega \cap (A \cup \overline{B}) = A \cup \overline{B}$.

---

3. $(*)$ On lance une pièce trois fois et on considère les événements suivants:

1. A : "pile apparaît exactement deux fois" ;
2. B : "pile apparaît au moins deux fois" ;
3. C : "pile apparaît quand face est apparu au moins une fois" ;

Exprimer Ω , A, B et C ainsi que $\overline{A} \cap B$, $\overline{A} \cap \overline{B}$ et $A \cap C$.

$A = \{(F, P, P),\ (P, F, P),\ (P, P, F)\}$.

$B = \{(F, P, P),\ (P, F, P),\ (P, P, F),\ (P, P, P)\}\ (= A \cup \{(P, P, P)\})$.

$C = \{(F, P, F),\ (F, F, P),\ (F, P, P)\}$.

$$\overline{A} \cap B = \{(P, P, P)\}$$

$$A \cap C = \{(F, P, P)\}$$

$$\overline{A} \cap \overline{B} = \overline{B} = \{(F, F, F),\ (P, F, F),\ (F, P, F),\ (F, F, P)\}.$$

---

4. $(**)$ Dans chacun des cas suivants, donner le nombre d'éléments de Ω et des événements considérés :

1. Une famille a 4 enfants. A : "les filles et les garçons sont alternés" ; B : "le premier et le quatrième sont des garçons" ; C :"il y a autant de filles que de garçons" ; D : "il y a au moins 3 enfants en suivant du même sexe".

2. Un représentant doit visiter 2 fois 3 villes a, b et c. A : "il visite a en premier et en dernier".

3. Un ascenseur porte 2 personnes et il y a 3 niveaux. A : "elles s'arrêtent à 2 niveaux différents" ; B : "une personne au moins s'arrête au premier niveau".

1. Ω est l'ensemble des 4-uplets formés de F et de G ; $\boxed{\text{card}\Omega = 2^4 = 16}$.

$A = \{(F,G,F,G),\ (G,F,G,F)\}$; $\boxed{\text{card}A = 2}$.

$B = \{(G,F,F,G),\ (G,F,G,G),\ (G,G,F,G),\ (G,G,G,G)\}$; $\boxed{\text{card}B = 4}$.

$C = A \cup \{(G,F,F,G),\ (F,G,G,F),\ (G,G,F,F),\ (F,F,G,G)\}$; $\boxed{\text{card}C = 6}$ $(= C_4^2)$.

$D = \{(F,F,F,G), (F,F,F,F), (G,F,F,F), (G,G,G,F), (G,G,G,G), (F,G,G,G)\}$;
$\boxed{\text{card}D = 6}$.

2. Ω est ici l'ensemble des 6-uplets comprenant 2 fois la ville a, 2 fois b et 2 fois c. On commence par exemple par choisir les 2 places occupées par a sur les 6 possibles (ce qui fait $C_6^2 = \frac{6\times5}{2} = 15$ possibilités).

Pour chacunes d'entre elles, il faut choisir, parmi les 4 places qui restent, les 2, par exemple, occupées par b. On a alors $C_4^2 = \frac{4\times3}{2} = 6$ possibilités). Les places de c sont alors imposées : ce sont les 2 qui restent.

Ainsi, $\boxed{\text{card}\Omega = 15 \times 6 = 90}$.

Dans A, la place des a est imposée et il reste seulement à placer les 2 b parmi les 4 places qui restent(les 2 c sont alors aux 2 places restantes). $\boxed{\text{card}A = C_4^2 = 6}$.

3. À chaque personne, on associe l'étage auquel elle descend (3 choix possibles par personne). Ω est alors représenté par l'ensemble des couples (x_1, x_2), $x_i \in \{1,2,3\}$ étant l'étage où est descendue la i-ième personne. Il y a donc $3 \times 3 = 3^2 = 9$ possibilités et $\boxed{\text{card}\Omega = 9}$.
Il est plus facile de déterminer $\overline{A}$: “les 2 personnes descendent au même niveau”

$$\overline{A} = \{(1,1),\ (2,2),\ (3,3)\}$$

$$A = \{(1,2),\ (1,3),\ (2,1),\ (2,3),\ (3,1),\ (3,2)\}$$

$\text{card}A = 6$ $(= \text{card}\Omega - \text{card}\overline{A})$.

De même, il est plus facile de déterminer $\overline{B}$:“personne ne s'arrête au premier niveau” ; c'est l'ensemble des couples formés de 2 et de 3. On a alors $\text{card}\overline{B} = 2^2 = 4$ et

$$\text{card}B = \text{card}\Omega - \text{card}\overline{B} = 9 - 4 = 5.$$

Ou bien directement :

$$B = \{(1,1),\ (1,2),\ (1,3),\ (2,1),\ (3,1)\}.$$

---

5. $(*)$ On lance deux dés, l'un bleu, l'autre rouge. Soit x le nombre obtenu par le dé bleu et y le nombre obtenu par le dé rouge. On appelle Ω l'ensemble de tous les couples (x, y) possibles.

1. Donner un diagramme cartésien de Ω.

2. Soient les événements A, B, C et D définis respectivement par: $x+y \leq 3$; $x+y=4$ ou 5 ; $6 \leq x+y \leq 7$ et $x+y>7$.
Représenter graphiquement ces événements. Forment-ils un système complet d'événements?

$\Omega = \{\{(x,y)\ ;\ x,y \in \{1,2,3,4,5,6\}\}$; $\text{card}\Omega = 6^2 = 36$

$(1,1)$	$(1,2)$	$(1,3)$	$(1,4)$	$(1,5)$	$(1,6)$
$(2,1)$	$(2,2)$	$(2,3)$	$(2,4)$	$(2,5)$	$(2,6)$
$(3,1)$	$(3,2)$	$(3,3)$	$(3,4)$	$(3,5)$	$(3,6)$
$(4,1)$	$(4,2)$	$(4,3)$	$(4,4)$	$(4,5)$	$(4,6)$
$(5,1)$	$(5,2)$	$(5,3)$	$(5,4)$	$(5,5)$	$(5,6)$
$(6,1)$	$(6,2)$	$(6,3)$	$(6,4)$	$(6,5)$	$(6,6)$

$$A = \{(x,y)\ ;\ x+y \leq 3\}$$
$$B = \{(x,y)\ ;\ 4 \leq x+y \leq 5\}$$
$$C = \{(x,y)\ ;\ 6 \leq x+y \leq 7\}$$
$$D = \{(x,y)\ ;\ x+y \leq 8\}.$$

Les événements A, B, C et D sont clairement disjoints (la somme des coordonnées étant différente, les couples ne peuvent pas être identiques). De plus

$$A \cup B \cup C \cup D = \Omega.$$

Les événements $\boxed{A,\ B,\ C \text{ et } D \text{ forment donc bien un système complet d'événements}}$.

$\boxed{\textbf{Propriétés des probabilités}}$

---

6. $(*)$ Soit $a = P(A)$; $b = P(B)$ et $c = P(A \cap B)$. Exprimer $P(\overline{A})$, $P(\overline{A} \cup B)$, $P(A \cap \overline{B})$, $P(\overline{A} \cup \overline{B})$ en fonction de a, b et c.

$P(\overline{A}) = 1 - P(A)$ donc $\boxed{P(\overline{A}) = 1-a}$;

$$\begin{aligned} P(\overline{A} \cup B) &= P(\overline{A}) + P(B) - P(\overline{A} \cap B) = P(\overline{A}) + P(B) - [P(B) - P(A \cap B)] \\ &= P(\overline{A}) + P(A \cap B) \end{aligned}$$

donc $\boxed{P(\overline{A} \cup B) = 1 - a + c}$.

De même, en intervertissant les rôles de A et de B, $P(A \cup \overline{B}) = 1 - b + c$.

De $A = (A \cap B) \cup (A \cap \overline{B})$, on déduit $\boxed{P(A \cap \overline{B}) = a - c}$.

Enfin, $P(\overline{A} \cup \overline{B}) = P(\overline{A \cap B}) = 1 - P(A \cap B)$, soit $\boxed{P(\overline{A} \cup \overline{B}) = 1 - c}$.

---

7. $(**)$ Etant donné $P(A) = 3/4$ et $P(B) = 3/8$, montrer que $P(A \cup B) \geq 3/4$ et $1/8 \leq P(A \cap B) \leq 3/8$.

$A \subset A \cup B$, donc $P(A) \leq P(A \cup B)$ et $\boxed{P(A \cup B) \geq 3/4}$.

$A \cap B \subset B$, donc $P(A \cap B) \leq P(B)$ et $\boxed{P(A \cap B) \leq 3/8}$.

Enfin, $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) = \frac{3}{4} + \frac{3}{8} - P(A \cap B) = \frac{9}{8} - P(A \cap B)$ et, comme $P(A \cup B) \leq 1$, on a alors $\frac{9}{8} - P(A \cap B) \leq 1$, d'où $\boxed{P(A \cap B) \geq \frac{9}{8} - 1 = \frac{1}{8}}$.

---

8. (*) Montrer que:

$$P(A \cap B) - P(A)P(B) = P(\overline{A})P(B) - P(\overline{A} \cap B) = P(A)P(\overline{B}) - P(A \cap \overline{B}).$$

$$\begin{aligned} P(\overline{A})P(B) - P(\overline{A} \cap B) &= [1 - P(A)]P(B) - [P(B) - P(A \cap B)] \\ &= P(A \cap B) - P(A)P(B) \\ &= P(A)P(\overline{B}) - P(A \cap \overline{B}) \end{aligned}$$

(vu que A et B jouent le même rôle dans $P(A \cap B) - P(A)P(B)$).

Ainsi, A et B indépendants équivaut à $\overline{A}$ et B indépendants, ou à A et $\overline{B}$ indépendants.

---

9. (**) Montrer par récurrence l'inégalité suivante:

$$P(A_1 \cap A_2 \cap \cdots \cap A_n) \geq \sum_{i=1}^{n} P(A_i) - (n-1) = 1 - \sum_{i=1}^{n} P(\overline{A_i})$$

La partie égalité se démontre directement car $\sum_{i=1}^{n} P(\overline{A_i}) = \sum_{i=1}^{n} [1 - P(A_i)] = n - \sum_{i=1}^{n} P(A_i)$ donc $1 - \sum_{i=1}^{n} P(\overline{A_i}) = 1 - n + \sum_{i=1}^{n} P(A_i) = \sum_{i=1}^{n} P(A_i) - (n-1)$.

Montrons l'inégalité par récurrence :

<u>Pour $n = 1$</u> $P(A_1) = P(A_1) - (1-1)$ et la formule est vraie.

<u>Si l'hypothèse est vraie jusqu'au rang n</u>, en appliquant l'hypothèse de récurrence, tout d'abord à $A_1' = (A_1 \cap \cdots \cap A_n)$ et à $A_2' = A_{n+1}$, puis à $A_1, \cdots, A_n$,

$$\begin{aligned} P(A_1 \cap \cdots \cap A_n \cap A_{n+1}) &= P((A_1 \cap \cdots \cap A_n) \cap A_{n+1}) \\ &\geq P(A_1 \cap \cdots \cap A_n) + P(A_{n+1}) - (2-1) \\ &\geq \left[\sum_{i=1}^{n} P(A_i) - (n-1)\right] + P(A_{n+1}) - 1 \\ &= \sum_{i=1}^{n+1} P(A_i) - n \end{aligned}$$

et l'hypothèse est bien vérifiée au rang $n+1$.

---

10. ($*$) Montrer la formule suivante:

$$P(A \cup B \cup C) = P(A) + P(B) + P(C) - P(A \cap B) - P(A \cap C) - P(B \cap C) + P(A \cap B \cap C)$$

$$\begin{aligned}
P(A \cup B \cup C) &= P((A \cup B) \cup C) = P(A \cup B) + P(C) - P((A \cup B) \cap C) \\
&= P(A) + P(B) - P(A \cap B) + P(C) - P[(A \cap C) \cup (B \cap C)] \\
&= P(A) + P(B) + P(C) - P(A \cap B) \\
&\quad - [P(A \cap C) + P(B \cap C) - P(A \cap C \cap B)] \\
&= P(A) + P(B) + P(C) - [P(A \cap B) + P(A \cap C) + P(B \cap C)] \\
&\quad + P(A \cap B \cap C).
\end{aligned}$$

---

11. ($**$) Une boîte contient n boules numérotées de 1 à n. On tire au hasard une boule. Quelle est la probabilité que son numéro soit divisible par 3 ou par 4? Etudier la limite de cette probabilité lorsque $n \to \infty$.

Soit A l'événement "le nombre est divisible par 3" : $A = \{3k \ ; \ k \geq 1, \ 3k \leq n\}$ et $\boxed{\text{card}A = E\left(\frac{n}{3}\right)}$ (il y a $E\left(\frac{n}{3}\right)$ nombres divisibles par 3 et $\leq n$).

Pour l'événement B "le nombre est divisible par 4" : $B = \{4k \ ; \ k \geq 1, \ 4k \leq n\}$ et $\boxed{\text{card}B = E\left(\frac{n}{4}\right)}$.

L'événement $A \cap B$ "le nombre est divisible par 3 et par 4" est, puisque 3 et 4 sont premiers entre eux l'événement "le nombre est divisible par 12", de cardinal $E\left(\frac{n}{12}\right)$.

Chaque boule ayant la même chance d'être tirée (probabilité $\frac{1}{n}$), on a, pour tout événement C, $P(C) = \frac{\text{card}(C)}{n}$.

La probabilité demandée ici est celle de $A \cup B$. Or

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) = \frac{1}{n}\left[E\left(\frac{n}{3}\right) + E\left(\frac{n}{4}\right) - E\left(\frac{n}{12}\right)\right].$$

On a $\frac{n}{3} - 1 < E\left(\frac{n}{3}\right) \leq \frac{n}{3}$, $\frac{n}{4} - 1 < E\left(\frac{n}{4}\right) \leq \frac{n}{4}$ et $\frac{n}{12} - 1 < E\left(\frac{n}{12}\right) \leq \frac{n}{12}$ donc

$$\frac{1}{n}\left[\frac{n}{3} + \frac{n}{4} - \frac{n}{12} - 2\right] < P(A \cup B) < \frac{1}{n}\left[\frac{n}{3} + \frac{n}{4} - \frac{n}{12} + 1\right]$$

et, comme $\frac{1}{3} + \frac{1}{4} - \frac{1}{12} = \frac{6}{12} = \frac{1}{2}$ on a finalement

$$\frac{1}{2} - \frac{2}{n} < P(A \cup B) < \frac{1}{2} + \frac{1}{n}.$$

En particulier, $\boxed{\lim_{n \to +\infty} P(A \cup B) = \frac{1}{2}}$: quand n est très grand, il y a à peu près 1 chance sur 2 qu'un nombre $\leq n$ soit divisible par 3 ou par 4.

---

12. ($***$) Exprimer en fonction de $P(A)$, $P(B)$, $P(C)$, $P(A \cap B)$, $P(A \cap C)$, $P(B \cap C)$, $P(A \cap B \cap C)$ et pour $k \in \{0, 1, 2, 3\}$ les probabilités que:

1. exactement k des 3 événements aient lieu ;
2. au moins k des 3 événements aient lieu .

---

1. On note p_k la probabilité de l'événement "exactement k des événements A, B, C ont lieu".

Pour $\underline{k=0}$ $p_0 = P(\overline{A} \cap \overline{B} \cap \overline{C}) = P(\overline{A \cup B \cup C}) = 1 - P(A \cup B \cup C)$ et, d'après la formule de Poincarré (cf. exercice 10),

$$p_0 = 1 - P(A) - P(B) - P(C) + P(A \cap B) + P(A \cap C) + P(B \cap C) - P(A \cap B \cap C).$$

Pour $\underline{k=1}$, un seul événement a lieu. On a par exemple

$$\begin{aligned} P(A \cap \overline{B} \cap \overline{C}) &= P(A \cap (\overline{B \cup C})) = P(A) - P(A \cap (B \cup C)) \\ &= P(A) - P\left[(A \cap B) \cup (A \cap C)\right] \\ &= P(A) - P(A \cap B) - P(A \cap C) + P(A \cap B \cap C). \end{aligned}$$

Mais, comme A, B et C jouent le même rôle, on a des expressions identiques si c'est B qui a lieu ou si c'est C et finalement :

$$p_1 = P(A) + P(B) + P(C) - 2P(A \cap B) - 2P(A \cap C) - 2P(B \cap C) + 3P(A \cap B \cap C).$$

Pour $\underline{k=2}$, 2 événements ont lieu. Pour, par exemple A et B,

$$P(A \cap B \cap \overline{C}) = P((A \cap B) \cap \overline{C}) = P(A \cap B) - P(A \cap B \cap C)$$

puis, les rôles de A, B et C étant symétriques,

$$p_2 = P(A \cap B) + P(A \cap C) + P(B \cap C) - 3P(A \cap B \cap C).$$

Pour $\underline{k=3}$, $p_3 = P(A \cap B \cap C)$.

2. On a, si q_k est la probabilité de l'événement "au moins k des événements A, B, C a lieu", $q_0 = p_0 + p_1 + p_2 + p_3$, $q_1 = p_1 + p_2 + p_3$, $q_2 = p_2 + p_3$ et $q_3 = p_3$, ce qui donne :

Pour $\underline{k=0}$, $q_0 = 1$.
Pour $\underline{k=1}$, $q_1 = P(A \cup B \cup C)$, soit

$$q_1 = P(A) + P(B) + P(C) - P(A \cap B) - P(A \cap C) - P(B \cap C) + P(A \cap B \cap C).$$

Pour $\underline{k=2}$, en additionnant les expressions de p_2 et de p_3 on obtient

$$q_2 = P(A \cap B) + P(A \cap C) + P(B \cap C) - 2P(A \cap B \cap C).$$

Pour $\underline{k=3}$, on a enfin, $p_3 = q_3 = P(A \cap B \cap C)$.

---

13. $(* * *)$ On pose $A\Delta B = (\overline{A} \cap B) \cup (A \cap \overline{B})$ et $d(A,B) = P(A\Delta B)$.
Montrer que $d(A,B) = P(A) + P(B) - 2P(A \cap B)$ et que $d(A,C) \leq d(A,B) + d(B,C)$.

$P(A\Delta B) = P\left((\overline{A}\cap B)\cup(A\cap\overline{B})\right) = P(\overline{A}\cap B) + P(A\cap\overline{B})$ (événements disjoints) donc $\boxed{d(A,B) = P(A)+P(B)-2P(A\cap B)}$.
De même, $d(B,C) = P(B)+P(C)-2P(B\cap C)$ et $d(A,C) = P(A)+P(C)-2P(A\cap C)$ donc $d(A,B)+d(B,C)-d(A,C) = 2\left[P(B)-P(A\cap B)-P(B\cap C)+P(A\cap C)\right]$. Or

$$\begin{aligned} P(A\cap B)+P(B\cap C) &= P\left((A\cap B)\cup(B\cap C)\right)+P(A\cap B\cap C) \\ &= P\left(B\cap(A\cup C)\right)+P(A\cap B\cap C)\leq P(B)+P(A\cap C) \end{aligned}$$

donc $d(A,B)+d(B,C)-d(A,C)\geq 0$ et $\boxed{d(A,C)\leq d(A,B)+d(B,C)}$.

---

14. (∗∗) On jette 3 dés. On note X la somme des points obtenus. Calculer la probabilité d'avoir $X = 11$ et $X = 12$.

Un résultat est un triplet de nombres entiers entre 1 et 6 donc $\text{card}(\Omega) = 6^3 = 216$.
$[X = 11]$ est l'ensemble des triplets (k_1, k_2, k_3) tels que $k_1+k_2+k_3 = 11$.
On commence par chercher les triplets tels que $k_1\leq k_2\leq k_3$: $(1,4,6)$, $(1,5,5)$, $(2,3,6)$, $(2,4,5)$, $(3,3,5)$, $(3,4,4)$. Les autres triplets s'obtiennent par permutations de ceux-ci. Il y a $3! = 6$ permutations différentes lorsque les k_i sont tous distincts, 3 lorsque deux des k_i sont égaux (et 1 seule si les k_i sont tous égaux).
Ceci donne $\text{card}[X = 11] = 3\times 6+3\times 3 = 27$ et $\boxed{P([X = 11]) = \frac{27}{216} = \frac{1}{8}}$.
De même, $[X = 12]$ est l'ensemble des triplets $(1,5,6)$, $(2,4,6)$, $(2,5,5)$, $(3,3,6)$, $(3,4,5)$, $(4,4,4)$ et de leur permutés, soit $\text{card}(X = 12) = 3\times6+2\times3+1 = 25$ et $\boxed{P([X = 12]) = \frac{25}{216}}$.

Événements indépendants

---

15. (∗) Soient A, B et C trois événements indépendants.

1. A est-il indépendant de lui-même? A et $\overline{A}$ sont-ils indépendants?
2. Montrer que $(A,\overline{B})$, $(\overline{A},B)$ et $(\overline{A},\overline{B})$ sont des couples d'événements indépendants.
3. Montrer que $(A, B\cap C)$ est un couple d'événements indépendants.

---

1. $P(A\cap A)-P(A)P(A) = P(A)-P(A)P(A) = P(A)(1-P(A)) = 0$ si et seulement si $P(A) = 0$ ou bien $P(A) = 1$. Ainsi, $\underline{A \text{ indépendant de lui-même}}$ si et seulement si $\boxed{P(A)\in\{0,1\}}$.

$P(A\cap\overline{A})-P(A)P(\overline{A}) = P(\emptyset)-P(A)P(\overline{A}) = -P(A)P(\overline{A}) = 0$ si et seulement si $P(A) = 0$ ou bien $P(\overline{A}) = 0$ (et donc $P(A) = 1$). Ainsi, $\underline{A \text{ et } \overline{A} \text{ indépendants}}$ si et seulement si $\boxed{P(A)\in\{0,1\}}$.

2. On a $P(A) = P(A\cap B)+P(A\cap\overline{B})$ et $P(A\cap B) = P(A)P(B)$ par indépendance de A et B. Ainsi,

$$P(A\cap\overline{B}) = P(A)(1-P(B)) = P(A)P(\overline{B})$$

et donc (A,B) indépendants implique $(A,\overline{B})$ indépendants et par symétrie des rôles joués par A et B dans $P(A\cap B) = P(A)P(B)$, on a aussi $(\overline{A},B)$ indépendants.

Réciproquement, si $(A, \overline{B})$ indépendants, $(A, \overline{\overline{B}}) = (A, B)$ sont indépendants, de même que $(\overline{A}, \overline{B})$.

---

16. (**) Soit $(A_i)_{1 \le i \le n}$ une famille d'événements indépendants tels que $P(A_i) = p$ pour tout $i \in \{1, 2, \cdots, n\}$. Quelles sont les probabilités que:

1. au moins un des événements ait lieu ?
2. au moins m événements aient lieu ?
3. exactement m événements aient lieu ?

---

1. $p_a = P\left(\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right) = 1 - P\left(\bigcap_{i=1}^{n} \overline{A_i}\right) = 1 - \prod_{i=1}^{n} P(\overline{A_i})$ (indépendance des A_i), d'où

$$\boxed{p_a = 1 - (1-p)^n.}$$

3. Il y a C_n^m façons de choisir les m événements qui ont lieu parmi n. On a donc, toujours grâce à l'indépendance des A_i, $\boxed{p_c = C_n^m p^m (1-p)^{n-m}}$.

2. On décompose suivant le nombre d'événements qui ont lieu, celui-ci pouvant aller de m à n, et on utilise la technique du c). On a alors, $\boxed{p_b = \sum_{k=m}^{n} C_n^k p^k (1-p)^{n-k}}$.

---

17. (*) Un atelier comporte 3 machines A, B et C.
Les probabilités de défaillence sont respectivement $P(A) = 0,1$; $P(B) = 0,2$; $P(C) = 0,3$.
Quelle est la probabilité d'avoir une machine au moins en panne?

Soit E l'événement "au moins une machine est en panne". Alors $\overline{E}$ est l'événement, "aucune machine n'est en panne" soit $\overline{E} = \overline{A} \cap \overline{B} \cap \overline{C}$.

Les machines fonctionnant indépendamment les unes des autres, les événements $\overline{A}$, $\overline{B}$ et $\overline{C}$ sont indépendants et donc

$$P(\overline{A} \cap \overline{B} \cap \overline{C}) = P(\overline{A})P(\overline{B})P(\overline{C}) = (1 - P(A))(1 - P(B))(1 - P(C))$$

et donc

$$P(E) = 1 - (1 - P(A))(1 - P(B))(1 - P(C)) = 1 - 0,9 \times 0,8 \times 0,7$$

c'est-à-dire $P(E) = 1 - 0,504$, soit $\boxed{P(E) = 0,496}$.

---

18. (*) Soit $\Omega = \{\omega_i ; 1 \le i \le 6\}$. On définit sur l'espace probabilisable $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega))$ deux probabilités P et P' telles que:
$P(\{\omega_1\}) = 3/10$; $P(\{\omega_2\}) = 1/5$; $P(\{\omega_3\}) = 1/20$; $P(\{\omega_4\}) = 3/20$; $P(\{\omega_5\}) = 1/20$; $P(\{\omega_6\}) = 1/4$ et, pour tout $i \in \{1, 2, \cdots, 6\}$; $P'(\{\omega_i\}) = 1/6$.
On considère les événements $A = \{\omega_1, \omega_2, \omega_5, \omega_6\}$ et $B = \{\omega_2, \omega_3\}$.
Etudier l'indépendance de A et de B relativement à P, puis relativement à P'.

On pose $P(\{\omega_i\}) = p_i$ et $P'(\{\omega_i\}) = q_i$. Ainsi $q_i = \frac{1}{6}$ pour $1 \leq i \leq 6$ et $p_1 = \frac{3}{10} = \frac{6}{20}$, $p_2 = \frac{1}{5} = \frac{4}{20}$, $p_3 = p_5 = \frac{1}{20}$, $p_4 = \frac{3}{20}$, $p_6 = \frac{1}{4} = \frac{5}{20}$. On a $p_1 + p_2 + p_3 + p_4 + p_5 + p_6 = 1$ donc P définit bien une probabilité et

$$P(A) = P(\{\omega_1, \omega_2, \omega_5, \omega_6\} = p_1 + p_2 + p_5 + p_6 = \frac{16}{20} = \frac{4}{5}$$
$$P(B) = P(\{\omega_2, \omega_3\}) = p_2 + p_3 = \frac{5}{20} = \frac{1}{4}$$
$$P(A \cap B) = P(\{\omega_2\}) = p_2 = \frac{1}{5}$$

On a donc bien $P(A \cap B) = \frac{1}{5} = P(A)P(B)$ et A et B sont indépendants pour P.

D'autre part P' étant l'équiprobabilité sur Ω, on a, pour tout $C \subset \Omega$,

$$P'(C) = \frac{\text{card}(C)}{\text{card}\Omega} = \frac{\text{card}(C)}{6}.$$

Ceci donne $P'(A) = \frac{4}{6} = \frac{2}{3}$, $P'(B) = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$ et $P'(A \cap B) = \frac{1}{6}$. Or $P'(A)P'(B) = \frac{2}{9} \neq \frac{1}{6}$ donc les événements A et B ne sont pas indépendants pour P'.

---

19. (∗∗) Une boîte A contient 1 boule blanche et 3 boules rouges. Une boîte B contient 5 boules blanches et 3 boules rouge.
On tire au hasard une boule de A et une boule de B, puis on les change de boîte.

1. Quelle est la probabilité pour qu'après l'échange la boîte A ne contienne que des boules rouges?
2. Quelle est la probabilité pour qu'après l'échange chaque boîte ait retrouvé, en nombre de boules de chaque couleur, sa composition initiale.

---

1. Pour qu'après l'échange, il n'y ait que des boules rouges dans A, il faut tirer dans A la boule blanche (événement A_b) et dans B une boule rouge (événement B_r).

On a $P(A_b) = \frac{1}{4}$ et $P(B_r) = \frac{3}{8}$. Les 2 tirages étant indépendants, on a alors

$$p_1 = P(A_b \cap B_r) = P(A_b)P(B_r) = \frac{1}{4} \times \frac{3}{8}$$

soit $\boxed{p_1 = \frac{3}{32}}$.

2. Pour qu'après l'échange, l'urne ait retrouvé sa composition initiale, il faut tirer dans A et dans B des boules de même couleur soit

→ soit 1 boule blanche dans A et 1 boule blanche dans B (événement $A_b \cap B_b$) ;
→ soit 1 boule rouge dans A et 1 boule rouge dans B (événement $A_r \cap B_r$.

On a ainsi $p_2 = P((A_b \cap B_b) \cup (A_r \cap B_r)) = P(A_b \cap B_b) + P(A_r \cap B_r)$ (événements disjoints) et, comme les tirages dans A et dans B sont indépendants,

$$P(A_b \cap B_b) = P(A_b)P(B_b) = \frac{1}{4} \times \frac{5}{8} = \frac{5}{32} \text{ et } P(A_r \cap B_r) = P(A_r)P(B_r) = \frac{3}{4} \times \frac{3}{8} = \frac{9}{32}$$

et ainsi, $p_2 = \frac{5}{32} + \frac{9}{32} = \frac{14}{32}$, soit $\boxed{p_2 = \frac{7}{16}}$.

---

20. (∗∗) On considère les différentes répartitions possibles des sexes des n enfants d'une famille. Soit Ω l'ensemble des états et soient les événements H : "la famille a des enfants des 2 sexes" et F : "la famille a au plus une fille".

1. Décrire Ω ; calculer $P(H)$, $P(F)$ et $P(H \cap F)$.
2. H et F sont-ils indépendants? (on considèrera $n = 2$, $n = 3$ puis n quelconque).

---

1. Ω est l'ensemble des n-uplets formés de f et de g. Pour chaque enfant, on a 2 choix possibles, donc $\boxed{\text{card}\Omega = 2^n}$.

Si H est l'événement "la famille a des enfants des 2 sexes" , $\overline{H} = \{(f, \cdots, f), (g, \cdots, g)\}$. Ainsi, $\text{card}(\overline{H}) = 2$ et $\text{card}H = \text{card}\Omega - \text{card}\overline{H} = 2^n - 2$, et $\boxed{P(H) = 1 - \frac{1}{2^{n-1}}}$.

Si F est l'événement "la famille a au plus une fille",

$$F = \{(g, \cdots, g),\ (f, g, \cdots, g),\ (g, f, g, \cdots, g),\ \cdots, (g, \cdots, g, f)\}.$$

On a donc $\text{card}F = n + 1$ et $\boxed{P(F) = \frac{n+1}{2^n}}$.

De même, $F \cap H = \{(f, g, \cdots, g),\ (g, f, g, \cdots, g),\ \cdots, (g, \cdots, g, f)\}$, $\text{card}(F \cap H) = n$ et $\boxed{P(F \cap H) = \frac{n}{2^n}}$.

2. On a $P(F \cap H) - P(F)P(H) = \frac{n}{2^n} - \frac{n+1}{2^n} \times \left(1 - \frac{1}{2^{n-1}}\right) = \frac{1}{2^n}\left[n - (n+1) + \frac{n+1}{2^{n-1}}\right]$.

Ainsi $\boxed{H \text{ et } F \text{ sont indépendants si et seulement si } n + 1 = 2^{n-1}}$.

Pour $\underline{n = 2}$, $n + 1 = 3$, $2^1 = 2$ et il n'y a pas indépendance.
Pour $\underline{n = 3}$, $n + 1 = 4$, $2^2 = 4$ et il y a bien indépendance.
Pour $\underline{n = 4}$, $n + 1 = 5$, $2^3 = 8 > 5$ et il n'y a pas indépendance.
Par récurrence, si $n + 1 < 2^n$, alors $2^{n+1} = 2 \times 2^n > 2(n + 1) = 2n + 1 > n + 2$ pour $n > 1$ donc si il n'y a pas indépendance avec n, il n'y a pas non plus indépendance avec $n + 1$.
Finalement, $\boxed{H \text{ et } F \text{ sont indépendants seulement pour } n = 3}$.

---

21. (∗∗) Deux personnes lancent une pièce n fois chacun ($n \geq 1$). Quelle est la probabilité qu'ils obtiennent le même nombre de "faces"?

Soit A_k (resp. B_k) l'événement "la personne A (resp. B) obtient k piles en n lancers". On a $p = P\left(\bigcup_{k=0}^{n}(A_k \cap B_k)\right) = \sum_{k=0}^{n} P(A_k \cap B_k) = \sum_{k=0}^{n} P(A_k)P(B_k)$ car A_k et B_k sont indépendants. Mais $P(A_k) = P(B_k) = C_n^k \left(\frac{1}{2}\right)^k \left(\frac{1}{2}\right)^{n-k} = \frac{C_n^k}{2^n}$ et donc

$$\boxed{p = \frac{1}{2^{2n}} \sum_{k=0}^{n} (C_n^k)^2 = \frac{C_{2n}^n}{4^n}.}$$

---

22. (∗∗∗) Deux joueurs A et B jouent avec 2 dés. A gagnera avec un total de 7 et B avec un total de 6. B joue le premier et ensuite, (s'il y a une suite), A et B jouent alternativement. Le jeu s'arrête dès que l'un d'entre eux gagne.
Calculer la probabilité de succès de chaque joueur.

Soit E_i l'événement "faire un total de i". Alors

$$E_7 = \{(1, 6),\ (2, 5),\ (3, 4),\ (4, 3),\ (5, 2),\ (6, 1)\}$$

$$E_6 = \{(1,5),\ (2,4),\ (3,3),\ (4,2),\ (5,1)\}$$

On en déduit $P(E_7) = \frac{6}{36}$ et $P(E_6) = \frac{5}{36}$.

On considère ensuite les événements A_j "A fait 7 au j-ième coup" et B_j "B fait 6 au j-ième coup. On a alors :

$$\text{“}A \text{ gagne''} = (\overline{B_1} \cap A_1) \cup (\overline{B_1} \cap \overline{A_1} \cap \overline{B_2} \cap A_2) \cup \cdots = (\overline{B_1} \cap A_1) \cup \bigcup_{k=1}^{+\infty} C_k$$

où $C_k = \bigcap\limits_{i=1}^{k-1} (\overline{B_i} \cap \overline{A_i}) \cap \overline{B_k} \cap A_k$.

Les C_k étant tous disjoints, on a $P(\text{“}A \text{ gagne''}) = P(\overline{B_1} \cap A_1) + \sum\limits_{k=2}^{+\infty} P(C_k)$.

Les A_i et B_j étant tous indépendants, on a alors $P(C_k) = \left(\frac{31}{36} \times \frac{30}{36}\right)^{k-1} \times \frac{31}{36} \times \frac{6}{36}$ (et $P(\overline{B_1} \cap A_1) = \frac{31}{36} \times \frac{6}{36}$) et

$$P(\text{“}A \text{ gagne''}) = \frac{31}{36} \times \frac{6}{36}\ \frac{1}{1 - \frac{31}{36} \times \frac{30}{36}} = \frac{31 \times 6}{36 \times 36 - 31 \times 30} = \frac{31}{6 \times 36 - 5 \times 31}$$

soit $\boxed{P(\text{“}A \text{ gagne''}) = \frac{31}{216-155} = \frac{31}{61}}$.

De même, "B gagne$''$ $= B_1 \cup (\overline{B_1} \cap \overline{A_1} \cap B_2) \cup \cdots = B_1 \cup \bigcup\limits_{k=1}^{+\infty} D_k$ où $D_k = \bigcap\limits_{i=1}^{k-1} (\overline{B_i} \cap \overline{A_i}) \cap B_k$ et

$$P(\text{“}B \text{ gagne''}) = \frac{5}{36}\ \frac{1}{1 - \frac{31}{36} \times \frac{30}{36}} = \frac{5 \times 36}{36 \times 36 - 31 \times 30} = \frac{30}{6 \times 36 - 5 \times 31}$$

soit $\boxed{P(\text{“}B \text{ gagne''}) = \frac{30}{216-155} = \frac{30}{61}}$.

Remarque : On a $P(\text{“}A \text{ gagne''}) + P(\text{“}B \text{ gagne''}) = 1$ c'est à dire que la probabilité qu'il y ait un gagnant est 1.

---

23. $(* * *)$ Soient A, B et C trois événements indépendants tels que $P(A) = a$, $P(A \cup B \cup C) = 1 - b$ $P(A \cap B \cap C) = 1 - c$ et $P(\overline{A} \cap \overline{B} \cap C) = x$.

1. Montrer que:
$$P(B) = \frac{(1-c)(x+b)}{ax} \quad \text{et} \quad P(C) = \frac{x}{x+b}.$$
2. Montrer que x satisfait l'équation:
$$ax^2 + (ab - (1-a)(a-c-1))x + b(1-a)(1-c) = 0.$$
En déduire que:
$$c > \frac{(1-a)^2 + ab}{1-a}.$$

A, B et C sont indépendants, donc $P(A \cap B \cap C) = P(A)P(B)P(C)$ mais aussi $P(\overline{A} \cap \overline{B} \cap C) = P(\overline{A})P(\overline{B})P(C)$.
On a $P(A) = a$, $1-c = aP(B)P(C)$ et $x = (1-a)(1-P(B))P(C)$ et $1-b = P(A \cup B \cup C)$,

soit $b = 1 - P(A \cup B \cup C) = P(\overline{A \cup B \cup C}) = P(\overline{A} \cap \overline{B} \cap \overline{C}) = P(\overline{A})P(\overline{B})P(\overline{C})$.

1. On a $b + x = P(\overline{A})P(\overline{B})(P(\overline{C}) + P(C)) = P(\overline{A})P(\overline{B})$, d'où $\boxed{P(C) = \frac{x}{x+b}}$.

$P(B) = \frac{1-c}{aP(C)}$ d'où $\boxed{P(B) = \frac{(1-c)(x+b)}{ax}}$ si $x \neq 0$.

2. De $x = (1-a)P(\overline{B})P(C)$ et de 1., on tire $x = (1-a)\left[1 - \frac{(1-c)(x+b)}{ax}\right]\frac{x}{x+b}$ et, si $x \neq 0$, $(x+b) = \frac{(1-a)}{ax}[ax - (1-c)(x+b)]$, soit $ax(x+b) - (1-a)[ax - (1-c)(x+b)] = 0$. En ordonnant cette équation sous forme de trinôme du second degré en x, on obtient :

$$\boxed{ax^2 + (ab - (1-a)(a+c-1))x + b(1-a)(1-c) = 0.}$$

Comme $a > 0$, $x > 0$ et $b(1-a)(1-c) > 0$, ceci n'est possible que si $ab-(1-a)(a+c-1) < 0$ c'est-à-dire $a + c - 1 > \frac{ab}{1-a}$ ou $c > 1 - a + \frac{ab}{1-a}$. On a donc $\boxed{c > \frac{(1-a)^2+ab}{1-a}}$.