Corrigés des exercices du chapitre 4

9. Soit $a \in \mathbb{R}^n$ tel que $\|a\| < 1$ et soit $f_a : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, $x \mapsto \left(1+\|x\|^2\right)^{\frac{1}{2}} - < a, x >$. Montrer que f_a est convexe et déterminer $\operatorname{Arg}_{\mathbb{R}^n} \min f_a$.

$f_a(x) = \left(1+\sum_{i=1}^n x_i^2\right)^{1/2} - \sum_{i=1}^n a_i x_i$ et $D_j f_a(x) = \frac{1}{2}\left(1+\sum_{i=1}^n x_i^2\right)^{-1/2} \times 2x_j - a_j$ donc $\nabla f_a(x) = \left(1+\|x\|^2\right)^{-\frac{1}{2}} x - a$ et les points critiques vérifient $\left(1+\|x\|^2\right)^{-\frac{1}{2}} x - a = 0$, soit $\left(1+\|x\|^2\right)^{-\frac{1}{2}} x = a$. On commence par déterminer la norme de x en prenant le carré de la norme des 2 membres. On a donc $\left(1+\|x\|^2\right)^{-1} \|x\|^2 = \|a\|^2$, soit $\|x\|^2 = \|a\|^2(1+\|x\|^2)$, c'est-à-dire $\|x\|^2(1-\|a\|^2) = \|a\|^2$, ce qui est possible puisque $\|a\| < 1$ et $\|x\| = \frac{\|a\|}{\sqrt{1-\|a\|^2}}$, puis $1+\|x\|^2 = \frac{1}{1-\|a\|^2}$ et $x = a\left(1+\|x\|^2\right)^{\frac{1}{2}} = \frac{a}{\sqrt{1-\|a\|^2}}$ est l'unique candidat et $f_a\left(\frac{a}{\sqrt{1-\|a\|^2}}\right) = \frac{1}{\sqrt{1-\|a\|^2}} - \frac{\|a\|^2}{\sqrt{1-\|a\|^2}} = \sqrt{1-\|a\|^2}$.

Il reste à prouver que f_a est convexe (en prouvant que $\nabla^2 f_a(x)$ est une matrice positive). On a alors, pour $i \neq j$, $D_i D_j f_a(x) = -\frac{1}{2} x_i \left(1+\|x\|^2\right)^{-\frac{3}{2}} \times 2x_j = -x_i x_j \left(1+\|x\|^2\right)^{-\frac{3}{2}}$

et $D_i^2 f(x) = \left(1+\|x\|^2\right)^{-\frac{1}{2}} - \frac{1}{2} x_i \left(1+\|x\|^2\right)^{-\frac{3}{2}} \times 2x_i = \left(1+\|x\|^2\right)^{-\frac{1}{2}} - x_i^2 \left(1+\|x\|^2\right)^{-\frac{3}{2}}$.

On a donc $\nabla^2 f_a(x) = \left(1+\|x\|^2\right)^{-\frac{1}{2}} \left[I - \left(1+\|x\|^2\right)^{-1} M\right]$, où $M = (x_i x_j)$.

Si $MX = \lambda X$, alors $\nabla^2 f_a(x) X = \left(1+\|x\|^2\right)^{-\frac{1}{2}} \left(1 - \lambda \left(1+\|x\|^2\right)^{-1}\right) X$. On commence donc par chercher les valeurs propres de M.

$MX = Y$ avec $Y_i = \sum_j m_{ij} X_j = \sum_j x_i x_j X_j = x_i \langle x, X\rangle$ donc $MX = x\langle x, X\rangle$ et $MX = \lambda X$ équivaut à $\lambda X = x\langle x, X\rangle$:

• Si $\lambda \neq 0$, alors X est colinéaire à x (on peut prendre $x = X$), et alors $\lambda = \|x\|^2$ (sauf si $x = 0$, mais alors $\nabla^2 f_a(0) = I$).

• Si $\lambda = 0$ et $x \neq 0$, alors $\langle x, X\rangle = 0$, d'où $X \in (\mathbb{R}x)^\perp$.

On a donc une valeur propre non nulle, d'espace propre associé $\mathbb{R}x$ et, comme M est symétrique réelle, elle est diagonalisable dans une base orthonormée, l'autre valeur propre vaut 0 et $E_0 = (\mathbb{R}x)^\perp$.

Les valeurs propres de $\nabla^2 f_a(x)$ sont alors $\left(1+\|x\|^2\right)^{-\frac{1}{2}} > 0$ et $\left(1+\|x\|^2\right)^{-\frac{1}{2}} \left(1 - \frac{\|x\|^2}{1+\|x\|^2}\right) = \left(1+\|x\|^2\right)^{-\frac{3}{2}} > 0$. D'où $\nabla^2 f_a(x)$ est une matrice positive et f_a est bien convexe.

10. Soit $\varphi : \Omega \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$. Pour tout $y \in \mathbb{R}^n$, on pose $\varphi^*(y) = \sup_{x\in\Omega}(< y, x > -\varphi(x))$.

a) Montrer que φ^* est convexe.

b) Soit $p \in]1, +\infty[$ et $\varphi(x) = \frac{\|x\|^p}{p}$. Montrer que φ est convexe ; déterminer $\varphi^*(y)$ et montrer que $\varphi^{**} = \varphi$. (*On utilisera* q *tel que* $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$).

c) Soit $\varphi(x) = \dfrac{1}{2} < Ax, x > + < b, x > +c$ où A est une matrice symétrique définie positive. Montrer que φ est convexe ; déterminer $\varphi^*(y)$ et montrer que $\varphi^{**} = \varphi$.

---

a) $\psi_x : y \mapsto \langle y, x\rangle - \varphi(x)$ est affine, donc convexe et concave et $\varphi^* = \sup_x \psi_x$ est convexe.

$$\varphi^*(y) = \sup_x \left(\langle y, x\rangle - \varphi(x)\right) = -\inf_x \left(\varphi(x) - \langle x, y\rangle\right)$$

. (En effet, si $F(x) \geq F(x')$, alors $-F(x) \leq -F(x')$ et $\sup F = -\inf(-F)$.

Si φ est convexe, alors $x \mapsto \varphi(x) - \langle x, y\rangle$ est convexe comme somme de fonctions convexes et un minimum sera donc un point critique, solution de $\nabla\varphi(x) - y = 0$ ou $\nabla\varphi(x) = y$.

$\varphi(x) = \dfrac{1}{p}\left(\|x\|^2\right)^{\frac{p}{2}} = \dfrac{\|x\|^p}{p}$.

$\Phi : t \mapsto \dfrac{t^p}{p}$ est croissante convexe sur $\mathbb{R}_+$ car $\Phi'(t) = t^{p-1}$ et $\Phi''(t) = (p-1)t^{p-2} \geq 0$ pour $p > 1$. Donc, comme $x \mapsto \|x\|$ est convexe et $\varphi = \Phi \circ \|\ \ \|$, φ est convexe.

$D_i\varphi(x) = \dfrac{1}{2}\left(\|x\|^2\right)^{\frac{p}{2}-1} \times 2x_i$, donc $\nabla\varphi(x) = \|x\|^{p-2}x$. $\nabla\varphi(x) = y$ donne $y = \|x\|^{p-2}x$ et en prenant la norme, $\|y\| = \|x\|^{p-1}$.

On a alors $\varphi^*(y) = -\varphi(x) + \langle x, y\rangle = -\dfrac{1}{p}\|y\|^{\frac{p}{p-1}} + \|x\|^p$, c'est-à-dire $\varphi^*(y) = \left(1 - \dfrac{1}{p}\right)\|y\|^{\frac{p}{p-1}}$ avec $\dfrac{p}{p-1} = \dfrac{1}{1-\frac{1}{p}} = q$ où $\dfrac{1}{p} + \dfrac{1}{q} = 1$. Ainsi, $\varphi^*(y) = \dfrac{\|y\|^q}{q}$ où $\dfrac{1}{p} + \dfrac{1}{q} = 1$. On a alors $\varphi^{**} = \varphi$ puisque $p \mapsto q \mapsto p$.

c) $\varphi(x) = \dfrac{1}{2}\langle Ax, x\rangle + \langle b, x\rangle + c$.

$$\begin{aligned} \varphi(x+h) &= \frac{1}{2}\langle A(x+h), x+h\rangle + \langle b, x+h\rangle + c \\ &= \frac{1}{2}\langle Ax, x\rangle + \langle b, x\rangle + c + \langle Ax, h\rangle + \langle b, h\rangle + \frac{1}{2}\langle Ah, h\rangle \end{aligned}$$

donc $\nabla\varphi(x) = Ax + b$ et $\nabla^2\varphi(x) = A$ est définie positive donc inversible (et φ est convexe).

$\nabla\varphi(x) = y = Ax + b$, donne $x = A^{-1}(y - b)$. On a alors :

$$\begin{aligned} \varphi^*(y) &= -\varphi(A^{-1}(y-b)) + \langle y, A^{-1}(y-b)\rangle \\ &= -\frac{1}{2}\langle y - b, A^{-1}(y-b)\rangle - \langle b, A^{-1}(y-b)\rangle - c + \langle y, A^{-1}(y-b)\rangle \\ &= \frac{1}{2}\langle A^{-1}(y-b), y-b\rangle - c = \frac{1}{2}\langle A^{-1}y, y\rangle - \langle A^{-1}b, y\rangle + \frac{1}{2}\langle A^{-1}b, b\rangle - c \end{aligned}$$

Ainsi, φ^* est de même type que φ avec $A^* = A^{-1}$, $b^* = -A^{-1}b$ et $c^* = -\dfrac{1}{2}\langle b^*, b\rangle - c$.

On a alors $A^{**} = (A^*)^{-1} = A$, $b^{**} = -(A^*)^{-1}b^* = -Ab^* = b$ et $c^{**} = -\dfrac{1}{2}\langle b^{**}, b^*\rangle - c^* = -\dfrac{1}{2}\langle b, b^*\rangle + \dfrac{1}{2}\langle b^*, b\rangle + c = c$.

$\boxed{\textbf{11.}}$ Soit $C \subset \mathbb{R}^n$ un convexe fermé non vide et $b \in \mathbb{R}^n$. Soit $\pi = \mathrm{Arg}_C \min N$ où $N(x) = \|x - b\|^2$.

a) Montrer que :

i) π est non vide ;

ii) si $p \in \pi$, pour tout $c \in C$, $< p - b, p - c > \leq 0$.

(*On utilisera* $F(\lambda) = \|\lambda c + (1-\lambda)p - b\|^2$).

iii) π contient exactement 1 élément, noté $p(b)$.
iv) Si $< u-b, u-c > \leq 0$ pour tout $c \in C$, alors $u = p(b)$.

b) Déduire de a) que, $b \notin C$ si et seulement si il existe $w \in \mathbb{R}^n$ tel que

$$< w, b >< \inf_{c \in C} < w, c > .$$

---

a) i) $x \mapsto N(x) = \|x-b\|^2$. $t \mapsto t^2$ est convexe croissante sur $\mathbb{R}_+$ et $x \mapsto \|x-b\|$ est convexe de $\mathbb{R}$ sur $\mathbb{R}_+$ ($\|\theta x + (1-\theta)y - b\| = \|\theta(x-b) + (1-\theta)(y-b)\| \leq \theta\|x-b\| + (1-\theta)\|y-b\|$ donc N est convexe.

C fermé et N continue coercive car $N(x) \geq (\|x\| - \|b\|)^2 \to +\infty$ si $\|x\| \to +\infty$, donc N admet un minimum sur C (qui n'est pas forcément un point critique car il peut être sur le bord (C fermé).

ii) $F(0) = \|p-b\|^2 = N(p)$ et

$$\begin{aligned} F(\lambda) &= \|p-b+\lambda(c-p)\|^2 = N(p+\lambda(c-p)) = N((1-\lambda)p + \lambda c) \\ &= \|p-b\|^2 + 2\lambda\langle p-b, c-p\rangle + \lambda^2\|c-p\|^2 \end{aligned}$$

On a donc $F(\lambda) \geq F(0)$ pour tout $\lambda \in]0,1]$ donc $\dfrac{F(\lambda)-F(0)}{\lambda} \geq 0$, puis, avec $\lambda \to 0$, $F'(0) \geq 0$.

Or $F'(\lambda) = 2\lambda\|c-p\|^2 + 2\langle p-b, c-p\rangle$, d'où $F'(0) = 2\langle p-b, c-p\rangle \geq 0$ et $\langle p-b, p-c\rangle \leq 0$ pour tout $c \in C$.

iii) Si $p_1 \in \Pi$ et $p_2 \in \Pi$, alors on applique ii) à $(p,c) = (p_1, p_2)$

$$\langle p_1 - b, p_1 - p_2\rangle \leq 0$$

puis, en appliquant ii) à $(p,c) = (p_2, p_1)$,

$$\langle p_2 - b, p_2 - p_1\rangle = \langle b - p_2, p_1 - p_2\rangle \leq 0.$$

En sommant les 2 inégalités et en utilisant la bilinéarité, on a alors $\langle p_1 - p_2, p_1 - p_2\rangle = \|p_1 - p_2\|^2 \leq 0$, ce qui n'est possible que si $p_1 = p_2$.

iv) Réciproquement, $c = p(b)$ donne $\langle u-b, u-p(b)\rangle \leq 0$ (1).

On fait alors $c = u$ dans ii) : $\langle p(b)-b, p(b)-u\rangle \leq 1$ (3), soit $\langle b-p(b), u-p(b)\rangle \leq 0$.

On ajoute (1) et (3) en utilisant la linéarité à gauche : $\langle u-b+b-p(b), u-p(b)\rangle = \langle u-p(b), u-p(b)\rangle \leq 0$ donc $\|u-p(b)\|^2 \leq 0$ et $u = p(b)$.

b) • Si $b \in C$, $\langle w, b\rangle \geq \inf_{c \in C}\langle w, c\rangle$ et, par contraposée, si $\inf_C \langle w, c\rangle > \langle w, b\rangle$, alors $b \notin C$.

Si $b \notin C$, alors $b - p(b) \neq 0$: $\langle p(b)-b, p(b)-p+p-c\rangle \leq 0$ pour tout $c \in C$, c'est-à-dire $\|p(b)-b\|^2 + \langle p(b)-b, b\rangle \leq \langle p(b)-b, c\rangle$ pour tout $c \in C$. En posant $w = p(b) - b$, on a $\inf_C \langle w, c\rangle \geq \|w\|^2 + \langle b, w\rangle > \langle w, b\rangle$, d'où le résultat.
