M1 UE2

Espaces préhilbertiens (Corrigés des exercices chapitre 7)

Résultats dans un espace préhilbertien

1. * Soit E un espace préhilbertien réel et n points $x_1, x_2, \cdots, x_n$ de E ($n \geq 2$). Établir la formule

$$\sum_{1 \leq i < j \leq n} \|x_i - x_j\|^2 = n \sum_{i=1}^{n} \|x_i\|^2 - \|\sum_{i=1}^{n} x_i\|^2.$$

On procède par récurrence sur n. Pour $n = 2$, la formule est vérifiée puisque : $\|x_1 - x_2\|^2 = \|x_1\|^2 + \|x_2\|^2 - 2(x_1|x_2)$, et :

$$\begin{aligned} 2(\|x_1\|^2 + \|x_2\|^2) - \|x_1 + x_2\|^2 &= 2(\|x_1\|^2 + \|x_2\|^2) - (\|x_1\|^2 + \|x_2\|^2 + 2(x_1|x_2)) \\ &= \|x_1\|^2 + \|x_2\|^2 - 2(x_1|x_2). \end{aligned}$$

Supposons la propriété annoncée vraie à l'ordre $n-1$, c'est-à-dire pour $n-1$ points. Alors, en utilisant l'hypothèse de récurrence :

$$\begin{aligned} \sum_{1 \leq i < j \leq n} \|x_i - x_j\|^2 &= \sum_{1 \leq i < j \leq n-1} \|x_i - x_j\|^2 + \sum_{i=1}^{n} \|x_i - x_n\|^2 \\ &= (n-1) \sum_{i=1}^{n-1} \|x_i\|^2 - \|\sum_{i=1}^{n-1} x_i\|^2 + \sum_{i=1}^{n} \|x_i\|^2 + n\|x_n\|^2 - 2\sum_{i=1}^{n} (x_i|x_n) \end{aligned}$$

Or :

$$-2\sum_{i=1}^{n} (x_i|x_n) = -2\sum_{i=1}^{n-1} (x_i|x_n) - 2\|x_n\|^2 = \left(\|\sum_{i=1}^{n-1} x_i\|^2 - \|\sum_{i=1}^{n} x_i\|^2 + \|x_n\|^2 \right) - 2\|x_n\|^2.$$

En injectant cette expression dans l'équation précédente, il vient :

$$\begin{aligned} \sum_{1 \leq i < j \leq n} \|x_i - x_j\|^2 &= (n-1) \sum_{i=1}^{n-1} \|x_i\|^2 + \sum_{i=1}^{n} \|x_i\|^2 + n\|x_n\|^2 - \|\sum_{i=1}^{n} x_i\|^2 - \|x_n\|^2 \\ &= n \sum_{i=1}^{n} \|x_i\|^2 - \|\sum_{i=1}^{n} x_i\|^2 \end{aligned}$$

ce qui est le résultat escompté.

2. *** Soit E euclidien et $\mathcal{A} = \{\alpha / \forall (x, y) \in E^2,\ \|x\| + \|y\| \leq \alpha \max(\|x - y\|,\ \|x + y\|)\}$.
a) Montrer que $\mathcal{A}$ est un intervalle inclus dans $[1, +\infty[$.
b) Si $\dim E = 1$, montrer que $\mathcal{A} = [1, +\infty[$.
c) Si $\dim E \geq 2$, montrer que $\mathcal{A} = [\sqrt{2}, +\infty[$.

a) Soit $\gamma, \alpha \in \mathcal{A}$ et $\alpha \leq \beta \leq \gamma$. $\|x\|+\|y\| \leq \alpha \max(\|x-y\|,\ \|x+y\|) \leq \beta \max(\|x-y\|,\ \|x+y\|)$ donc $\beta \in \mathcal{A}$ qui est convexe. Donc $\mathcal{A}$ est bien un intervalle. En prenant $x \neq 0$ et $y = 0$, on obtient $\|x\| \leq \alpha \|x\|$, donc $\alpha \geq 1$, i.e. $\mathcal{A} \subset [1, +\infty[$.

b) Si dim$E = 1$; $E = K\epsilon$ avec ϵ unitaire ; $x = a\epsilon$; $y = b\epsilon$, et : $\|x\| + \|y\| = |a| + |b|$; $\|x - y\| = |a - b|$; $\|x + y\| = |a + b|$. Or $|a| + |b| = |a + b|$ si signe(a) =signe(b) ; sinon $|a| + |b| = |a - b|$ sinon, donc $1 \in \mathcal{A}$ et si $\beta \geq 1$, $\beta \in \mathcal{A}$; donc $\mathcal{A} = [1, +\infty[$.

c) $n \geq 2$; si $x \perp y$, et $\|x\| = \|y\| \neq 0$, alors $\|x\| + \|y\| = 2\|x\|$ et

$$\|x - y\|^2 = \|x + y\|^2 = \|x\|^2 + \|y\|^2 = 2\|x\|^2.$$

donc, si $\alpha \in \mathcal{A}$, alors $2 \leq \sqrt{2}\alpha$ donc $\mathcal{A} \subset [\sqrt{2}, +\infty[$. Montrons alors que $\sqrt{2} \in \mathcal{A}$. $\|x + \epsilon y\|^2 = \|x\|^2 + \|y\|^2 + 2\epsilon(x|y)$. Si $\delta(x, y) = \max(\|x - y\|,\ \|x + y\|)$, on a :

$$\begin{aligned} 2\delta^2(x, y) &= 2\|x\|^2 + 2\|y\|^2 + 4|(x|y)| \\ &= (\|x\| - \|y\|)^2 + (\|x\| + \|y\|)^2 + 4|(x|y)| \\ &\geq (\|x\| + \|y\|)^2 \end{aligned}$$

d'où $\sqrt{2} \in \mathcal{A}$, et $\mathcal{A} = [\sqrt{2}, +\infty[$.

---

3. * Soit E euclidien, F un sous-espace vectoriel de E et $x \in E$. Montrer que x est orthogonal à F si, et seulement si, $\|x\| \leq \|x - y\|$ pour tout $y \in F$.

On a d'abord $\|x-y\|^2 - \|x\|^2 = -2(x|y) + \|y\|^2$, donc, si $x \in F^\perp$, $\|x-y\|^2 - \|x\|^2 = \|y\|^2 \geq 0$. Réciproquement, si $\|x\| \leq \|x - y\|$ pour tout $y \in F$, on a notamment $\|x - 0\| \leq \|x - p_F(x)\|$. Mais $0 \in F$ et $p_F(x)$ réalise le minimum des distances $d(x, y)$, $y \in F$ et c'est l'unique point qui le fait, donc $p_F(x) = 0$ et $x \in F^\perp$.

---

4. *** Soit, dans E préhilbertien, $(e_1, \cdots, e_n)$ libre et telle que, pour tout $x \in E$, $\|x\|^2 = \sum_{i=1}^{n} |(e_i|x)|^2$. Montrer que cette famille est une base orthonormale de E.

Si, pour tout i, $(e_i|x) = 0$, alors $x = 0$, donc, si $F = \text{Vect}(e_1, \cdots, e_n)$, alors $F^\perp = \{0\}$, et $E = F \oplus F^\perp = F$, donc on a une base de E.

$x = e_j$ donne $\|e_j\|^2 \geq \|e_j\|^4$, d'où $\|e_j\| \leq 1$.

Pour $x \in \text{Vect}(e_1, \cdots, e_{n-1})^\perp$; $\|x\|^2 = |(e_n|x)|^2 \leq \|e_n\|^2 \|x\|^2$, donc $\|e_n\| \geq 1$ puis $\|e_n\| = 1$ et il en est de même pour les autres : $\|e_j\| = 1$.

Dès lors, par Cauchy-Schwarz, (x, e_n) est liée : $\text{Vect}(e_1, \cdots, e_{n-1})^\perp = \mathbb{K}e_n$. De même, $\text{Vect}(e_i\ ;\ i \neq j)^\perp = \mathbb{K}e_j$, donc $(e_1, \cdots, e_n)$ est orthonormale.

---

5. ** Soit E euclidien et $e_1, \ldots, e_n$ des vecteurs de E tels que $\|x\|^2 = \sum_{i=1}^{n} (x|e_i)^2$ pour tout $x \in E$.

a) On suppose que les e_i sont unitaires : montrer que $(e_1, \ldots, e_n)$ est une base orthonormale de E.

b) On suppose que $\dim(E) = n$.

i) Montrer que $(e_1, \ldots, e_n)$ est une base de E. En déduire que la matrice $[(e_i|e_j)]_{1 \leq i,j \leq n}$ est inversible.

ii) Montrer que, pour tout $(x, y) \in E^2$, $(x|y) = \sum_{i=1}^{n} (x|e_i)(y|e_i)$. En déduire que $(e_1, \ldots, e_n)$ est une base orthonormale de E.

---

a) Pour $x = e_j$, il vient $\|e_j\|^2 = \|e_j\|^4 + \sum_{i \neq j}(e_j|e_i)^2$, donc $\sum_{i \neq j}(e_j|e_i)^2 = 0$ et la famille des e_i est orthonormale.

$x \in \mathrm{vect}(e_1, \ldots, e_n)^\perp$ équivaut à $\|x\|^2 = 0$, donc à $x = 0$, et la famille des e_i engendre donc E. Comme elle est libre (orthonormale), c'en est une base.

b) i) Cette fois encore, $x \in \mathrm{vect}(e_1, \ldots, e_n)^\perp$ équivaut à $\|x\|^2 = 0$, donc à $x = 0$, et la famille des e_i engendre donc E et c'en est une base car elle a n éléments.

Si une combinaison linéaire des colonnes de la matrice est nulle, c'est que, pour tout i, $\sum_{j=1}^{n} \alpha_j (e_i|e_j) = 0$, donc $\sum_{j=1}^{n} \alpha_j e_j \in E^\perp = \{0\}$, donc les α_j sont nuls : la matrice est inversible.

ii) $\|x+y\|^2 = \sum_{i=1}^{n}(x+y|e_i)^2 = \|x\|^2 + \|y\|^2 + 2\sum_{i=1}^{n}(x|e_i)(y|e_i)$ conduit à la formule demandée.

Si on prend $x = e_l$ et $y = e_c$, la formule devient la relation matricielle $A^2 = A$ où A est la matrice des $(e_i|e_j)$. Comme A est inversible, c'est que $A = I_n$, donc $(e_i|e_j) = \delta_{ij}$ et la base est bien orthonormale.

$\boxed{6.}$ * Soit E un espace vectoriel euclidien de dimension n et soit $(a_i)_{1 \leq i \leq p} \in E^p$. Soit $f : E \to E$, $x \mapsto \sum_{i=1}^{p}(x|a_i)a_i$. Montrer que f est bijective si et seulement si $(a_i)_{1 \leq i \leq p}$ est génératrice.

---

f est linéaire, car, par linéarité d'un côté du produit scalaire :

$$f(\lambda x + \mu y) = \sum_{i=1}^{p}(\lambda x + \mu y|a_i)a_i = \lambda f(x) + \mu f(y).$$

Si f est bijective, et si $y \in E$, il existe x tel que $f(x) = y$, soit $y = \sum_{i=1}^{p} \lambda_i a_i$, avec $\lambda_i = (x|a_i)$. C'est bien le caractère générateur de la famille $(a_i)_{1 \leq i \leq p}$.

Pour montrer la bijectivité de f, il suffit de montrer son injectivité, car c'est un endomorphisme en dimension finie. Or, $(x|f(x)) = \sum_{i=1}^{p}(x|a_i)^2$, donc $f(x) = 0$ si, et seulement si, $(x|a_i) = 0$ pour tout i, car la réciproque est évidente. Si c'est le cas, et si la famille est génératrice, $x = \sum_{i=1}^{p} x_i a_i$, donc $(x|x) = 0$, puis $x = 0$: f est bien injective.

$\boxed{7.}$ ** Soit E un espace préhilbertien réel et $(e_1, \cdots, e_p)$ une famille d'éléments de E telle que $p \geq 2$ et $(e_i|e_j) < 0$ pour $1 \leq i < j \leq p$. Montrer que toute sous-famille à $p-1$ termes de cette suite est libre [on pourra commencer par montrer que $\sum_{k=1}^{p-1} \lambda_k e_k = 0$ implique $\sum_{k=1}^{p-1} |\lambda_k| e_k = 0$].

Supposons que $(\lambda_1, \cdots, \lambda_{p-1}) \in \mathbb{R}^{p-1}$ soit tel que $\sum_{k=1}^{p-1} \lambda_k e_k = 0$. On a :

$$0 = \|\sum_{k=1}^{p-1} \lambda_k e_k\|^2 = \sum_{k=1}^{p-1} \lambda_k^2 \|e_k\|^2 + 2 \sum_{1 \leq i < j \leq p-1} \lambda_i \lambda_j (e_i|e_j).$$

Pour tout (i,j) tel que $i \neq j$, $(e_i|e_j) < 0$, donc : $\lambda_i\lambda_j(e_i|e_j) \geq |\lambda_i||\lambda_j|(e_i|e_j)$. On en déduit alors que $0 \geq \sum_{k=1}^{p-1} |\lambda_k|^2 \|e_k\|^2 + 2 \sum_{1\leq i<j\leq p-1} |\lambda_i||\lambda_j|(e_i|e_j) = \|\sum_{k=1}^{p-1} |\lambda_k|e_k\|^2 \geq 0$, et, et par conséquent $\sum_{k=1}^{p-1} |\lambda_k|e_k = 0$. On remarque alors, puisque pour tout $k \in \{1,\cdots,p-1\}$, $|\lambda_k|(e_k|e_p) \leq 0$, l'égalité $0 = (\sum_{k=1}^{p-1} |\lambda_k|e_k|e_p) = \sum_{k=1}^{p-1} |\lambda_k|(e_k|e_p)$ n'est possible que si, pour tout $k \in \{1,\cdots,p-1\}$, $|\lambda_k|(e_k|e_p) = 0$ et donc, puisque $(e_k|e_p) < 0$, $|\lambda_k| = 0$.

La famille $(e_1,\cdots,e_{p-1})$ est donc libre. Il en est de même pour les autres sous-familles de $p-1$ termes de la famille $(e_1,\cdots,e_p)$.

---

8. *** Soit E euclidien et $f \in \mathcal{L}(E)$ tel que $\|f(x)\| \leq \|x\|$ pour tout $x \in E$. Montrer que $E = \ker(f - id_E) \oplus \mathrm{im}(f - id_E)$.

Soit $x \in \ker(f-id_E)$ et $y = f(z)-z \in \mathrm{im}(f-id_E)$. Soit $\lambda \in \mathbb{R}$. On a $y = f(z+\lambda x)-(z+\lambda x)$ d'où :

$$\|z+\lambda x\|^2 \geq \|f(z+\lambda x)\|^2 = \|z+\lambda x\|^2 + 2\lambda(x|y) + 2(z|y) + \|y\|^2.$$

Donc $2\lambda(x|y) + 2(z|y) + \|y\|^2 \leq 0$ pour tout λ. Or, si $(x|y) \neq 0$, $2\lambda(x|y) + 2(z|y) + \|y\|^2$ change de signe. Les deux sous-espaces sont donc orthogonaux et de ce fait en somme directe. On conclut avec la formule du rang.

Produits scalaires, familles orthonormalisées

---

9. * Soit $n \geq 2$ et $E = \{P \in \mathbb{R}_n[X]/P(0) = P(1) = 0\}$.

a) Montrer que E est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}_n[X]$, et en donner la dimension.

b) Soit, pour $P \in E$, $\phi(P) = -\int_{[0,1]} PP''$. Montrer que $\sqrt{\phi}$ est une norme euclidienne.

---

a) L'application $u : \mathbb{R}_n[X] \to \mathbb{R}^2, P \mapsto (P(0),P(1))$ est linéaire, et E en est le noyau donc E est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}_n[X]$. Si $(a,b) \in \mathbb{R}^2$, il existe $P \in \mathbb{R}_n[X]$ tel que $P(0) = a$ et $P(1) = b$: par exemple, $P = a(1-X) + bX$ (calcul issu éventuellement de la théorie des polynômes d'interpolation de Lagrange), donc u est surjective, et $\dim(E) = (n+1)-2 = n-1$.

On peut aussi dire que $E = X(X-1)\mathbb{R}[X] \cap \mathbb{R}_n[X]$, donc $E = X(X-1)\mathbb{R}_{n-2}[X]$ et ainsi une base de E est $(X(X-1), X^2(X-1), \ldots, X^{n-1}(X-1))$.

b) L'éventuel produit scalaire est

$$\frac{1}{4}[\phi(P+Q) - \phi(P-Q)] = -\frac{1}{2}\int_{[0,1]} [PQ'' + P''Q],$$

donc soit $f(P,Q) = -\frac{1}{2}\int_{[0,1]} [PQ'' + P''Q]$.

• $f(P,Q) = f(Q,P)$.

• Pour tout Q, $P \mapsto -\frac{1}{2}\int_{[0,1]} [PQ'' + P''Q]$ est linéaire par linéarité de l'intégration et de la dérivation.

• $f(P,P) = \phi(P)$, et, en intégrant par parties,

$$\phi(P) = [-PP']_0^1 + \int_{[0,1]} P'^2 = \int_{[0,1]} P'^2,$$

car $P \in E$. Commme P'^2 est continue et positive, $\phi(P) \geq 0$ et $\phi(P) = 0$ équivaut à $P' = 0$ sur $[0,1]$, donc à $P = 0$ car $P(0) = 0$. Comme $[0,1]$ est infini, on a bien $P = 0$.

Par conséquent, f est un produit scalaire sur E tel que $f(P,P) = \phi(P)$. Ainsi, $\sqrt{\phi}$ est la norme euclidienne associée à f.

$\boxed{\textbf{10.}}$ ** Soit $E = \mathcal{C}^\infty([a,b], \mathrm{I\!R})$.

a) Montrer que $(f,g) \mapsto \displaystyle\int_{[a,b]} [fg + f'g'] = (f|g)$ est un produit scalaire sur E.

b) Trouver les orthogonaux des deux sous-espaces vectoriels suivants :

i) $F = \{f \in E / \displaystyle\int_{[a,b]} f = 0\}$.

ii) $G = \{f \in E / f(a) = f(b) = 0\}$.

---

a) $(f|g) = (g|f)$ et $g \mapsto fg + f'g'$ est linéaire, donc ,par linéarité de l'intégrale $g \mapsto (f|g)$ est linéaire.

$(f|f) = \displaystyle\int_{[a,b]} [f^2 + f'^2]$ est positive par continuité et positivité, ce qui amène aussi $(f|f) = 0$ équivaut à $f = f' = 0$.

b) i) $\displaystyle\int_{[a,b]} f = (f|1)$, donc $F = [\mathrm{I\!R}1]^\perp$. Donc, déjà, $D = \mathrm{I\!R}1 \subset F^\perp$. F est le noyau d'une forme linéaire non nulle : c'est un hyperplan, et, comme $1 \notin F$, $E = D \oplus F$. Donc, D et F sont supplémentaires orthogonaux, et ainsi $D = F^\perp$.

ii) On cherche les fonctions g telles que $\displaystyle\int_{[a,b]} [fg + f'g'] = 0$ dès que $f(a) = f(b) = 0$. On a alors, par parties, $\displaystyle\int_{[a,b]} f'g' = [f(x)g'(x)]_a^b - \int_{[a,b]} fg''$, donc $\displaystyle\int_{[a,b]} f[g - g''] = 0$. Prenons $f(x) = (a-x)(x-b)(g(x) - g''(x))$: il vient $\displaystyle\int_a^b (a-t)(t-b)[g(t) - g''(t)]^2 dt = 0$. Par continuité-positivité, $g = g''$ sur $]a,b[$ puis sur $[a,b]$ par continuité, donc $g(t) = Ae^t + Be^{-t}$. Réciproquement, cela donne bien $(f|g) = 0$ puisque $g = g''$, donc $G^\perp = \mathrm{vect}(t \mapsto e^t, t \mapsto e^{-t})$.

$\boxed{\textbf{11.}}$ * Soit $\varphi : (\mathrm{I\!R}[X])^2 \to \mathrm{I\!R}$, $(f,g) \mapsto f(0)g(0) + \displaystyle\int_0^1 f'(t)g'(t)dt$.

a) Montrer que φ est un produit scalaire.

b) Trouver 3 polynômes P_0, P_1, P_2 de degrés respectifs 0, 1, et 2 formant une base orthonormale pour φ.

c) Cette base est-elle orthonormale pour $\psi(f,g) = \displaystyle\int_0^1 f(t)g(t)dt$?

$\to \varphi(f,g) = \varphi(g,f)$.

$\to \varphi(f, \lambda g + h) = f(0)(\lambda g(0) + h(0)) + \displaystyle\int_0^1 f'(t)(\lambda g'(t) + h'(t))dt$ et par linéarité de l'intégrale, on a bien $\varphi(f, \lambda g + h) = \lambda\varphi(f,g) + \varphi(f,h)$.

$\rightarrow \varphi(f,f) = f(0)^2 + \int_0^1 f'(t)^2 dt \geq 0$ et $\varphi(f,f) = 0$ équivaut à $f(0)^2 = 0$ et $\int_0^1 f'(t)^2 dt = 0$. Puisque f'^2 est continue et positive, on a donc $f'^2 = 0$ donc $f'(t) = 0$ sur $[0,1]$. f est donc constante sur $[0,1]$, avec $f(0) = 0$: $f = 0$. Comme $[0,1]$ est infini, f est le polynôme nul.

b) $\rightarrow$ Si $P_0 = \lambda$, on a $(P_0|P_0) = \lambda^2$ donc $\lambda^2 = 1$. On prend $P_0 = 1$.

$\rightarrow P_1 = aX + b$ donne $(P_1|P_1) = b^2 + a^2$ et $(P_0|P_1) = b + 0 = b$n donc $b = 0$ et $a^2 = 1$: on prend $P = 1 = X$.

$\rightarrow P_2 = \alpha X^2 + \beta X + \gamma$ donne $(P_0|P_2) = \gamma$ donc $\gamma = 0$, puis

$$(P_2|P_1) = \int_0^1 (2\alpha t + \beta) dt = \alpha + \beta = 0 \quad \text{et}$$

$$(P_2|P_2) = \int_0^1 (2\alpha t + \beta)^2 dt = \int_0^1 (4\alpha^2 t^2 + 4\alpha\beta t + \beta^2) dt = \frac{4}{3}\alpha^2 + 2\alpha\beta + \beta^2 = 1$$

donc $\left\{ \begin{array}{l} \beta = -\alpha \\ \frac{4}{3}\alpha^2 - 2\alpha^2 + \alpha^2 = 1 = \frac{1}{3}\alpha^2 \end{array} \right.$.

On prend $\alpha = \sqrt{3}$, d'où $\beta = -\sqrt{3}$, puis $P_2 = \sqrt{3}(X^2 - X)$.

c) $\psi(P_0|P_1) = \int_0^1 t dt = \frac{1}{2}$ donc il n'y a pas même orthogonalité.

$\boxed{\textbf{12.}}$ ** Soit $E = \{f \in \mathcal{F}([-1,1],\mathbb{R}) / f_{|[-1,0]}$ et $f_{|[0,1]}$ soient affines $\}$.

a) Montrer que E est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{F}([-1,1],\mathbb{R})$, qui est de dimension 3 et dont une base est $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3)$, où $e_1(x) = 1$, $e_2(x) = x$ et $e_3(x) = |x|$.

b) Montrer que $(f,g) \mapsto \int_{[-1,1]} fg$ est un produit scalaire sur E et orthonormaliser $\mathcal{B}$ pour ce produit scalaire.

---

a) E est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{F}([-1,1],\mathbb{R})$ car il n'est pas vide (il y a toutes les fonctions affines sur $[-1,1]$) et que, si f et g sont dans E, $\lambda f + \mu g$ aussi, du fait notamment que $[\lambda f + \mu g]_{[a,b]} = \lambda f_{[a,b]} + \mu g_{[a,b]}$.

Si $f \in E$,

$$f(x) = \left\{ \begin{array}{l} f(0) + [f(0) - f(-1)]x \text{ si } x \in [-1,0] \\ f(0) - [f(0) - f(1)]x \text{ si } x \in [0,1] \end{array} \right. .$$

Il vient donc que f est entièrement caractérisée par la donnée de $f(-1), f(0)$ et $f(1)$, donc $f \mapsto (f(-1), f(0), f(1))$ est bijective de E sur $\mathbb{R}^3$. Comme elle est linéaire,c'est un isomorphisme et $\dim(E) = 3$.

En fait, si on pose $\varepsilon_1(x) = \left\{ \begin{array}{l} -x \text{ si } x \in [-1,0] \\ 0 \text{ si } x \in [0,1] \end{array} \right.$, $\varepsilon_2(x) = \left\{ \begin{array}{l} 0 \text{ si } x \in [-1,0] \\ x \text{ si } x \in [0,1] \end{array} \right.$ et $\varepsilon_3(x) = |x| + 1$, on a $f = f(-1)\varepsilon_1 + f(1)\varepsilon_2 + f(0)\varepsilon_3$ donc la famille $(\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3)$ engenge E et c'en est une base vu la dimension.

Or, $\varepsilon_1 = \frac{e_2 - e_3}{2}$, $\varepsilon_2 = \frac{e2 + e_3}{2}$ et $\varepsilon_3 = e_1 + e_3$, donc (e_1, e_2, e_3) est aussi génératrice et c'est ainsi une base de E car elle a 3 éléments.

b) En fait, les fonctions de E sont continues car du fait que l'on considère les restrictions aux segments, $f(0) = f(0^-) = f(0^+)$. Donc, $(f,g) \mapsto \int_{[-1,1]} fg$ est la restriction d'un produit scalaire classiaue sur $\mathcal{C}([-1,1],\mathbb{R})$ et c'en est un sur E.

$\|e_1\|^2 = 2$, donc on prend $f_1 = \dfrac{1}{\sqrt{2}}$.

$e_2 - p_{\mathbb{R}f_1}(e_2)$ est dans E et orthogonale à f_1, avec $p_{\mathbb{R}f_1}(e_2) = (f_1|e_2)f_1 = 0$ car d_1e_2 est impaire. De plus, $\|e_2\|^2 = 2\displaystyle\int_0^1 x^2dx = \frac{2}{3}$, donc on prend $f_2(x) = \sqrt{\dfrac{3}{2}}x$.

$e_3 - p_{\mathrm{vect}(f_1,f_2)}(e_3)$ est dans E et orthogonale à f_1 et f_3, avec $p_{\mathrm{vect}(f_1,f_2)}(e_3) = (f_1|e_3)f_1 + (f_2|e_3)f_2$. $(f_3|e_2) = 0$ car f_3e_2 est impaire. $(f_1|e_3) = \sqrt{2}\displaystyle\int_0^1 xdx = \frac{\sqrt{2}}{2}$. Enfin, $\||x| - \dfrac{1}{2}\|^2 = 2\displaystyle\int_0^1 (x-\frac{1}{2})^2dx = \frac{1}{6}$, donc $f_3(x) = \sqrt{6}(|x| - \dfrac{1}{2})$.

Projecteurs orthogonaux

$\boxed{\textbf{13.}}$ * On se place dans l'espace vectoriel euclidien $\mathbb{R}^3$. Soit $V_t = \mathrm{vect}((1,1,1),(1,t,t^2))$, P_t la projection orthogonale sur V_t et M_t la matrice qui lui est canoniquement associée.

a) Que dire de $\mathrm{tr}(M_t)$?

b) Calculer M_t en distinguant deux cas.

---

a) $\mathrm{tr}(M_t) = \mathrm{rg}(P_t) = \dim(V_t)$.

▷ Si $t = 1$, $V_1 = \mathbb{R}(1,1,1) = \mathbb{R}e$ et $\mathrm{tr}(M_t) = 1$.

▷ Si $t \neq 1$, $\mathrm{tr}(M_t) = 2$.

b) ▷ Si $t = 1$, $P_t(x) = \dfrac{(e|x)}{\|e\|^2}e = \dfrac{x_1+x_2+x_3}{3}(1,1,1)$ donc $M_t = \dfrac{1}{3}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.

▷ Si $t \neq 1$, $V_t^\perp = \mathbb{R}\varepsilon$ où ε est proportionnel à $(1,1,1) \wedge (1,t,t^2) = (t-1)(t,-(1+t),1)$. On peut prendre $\varepsilon = (t,-(1+t),1)$. On a $\|\varepsilon\|^2 = 2(1+t+t^2)$.

Alors, $P_t(x) = x - \dfrac{(\varepsilon|x)}{\|\varepsilon\|^2}\varepsilon$ avec $(\varepsilon|x) = tx_1 - (1+t)x_2 + x_3$ donc

$$\begin{aligned} M_t &= I_3 - \frac{1}{2(1+t+t^2)}\begin{pmatrix} t^2 & -(t^2+t) & t \\ -(t^2+t) & (1+t)^2 & -(1+t) \\ t & -(1+t) & 1 \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{2(1+t+t^2)}\begin{pmatrix} 2+2t+t^2 & t^2+t & -t \\ t^2+t & 1+t^2 & 1+t \\ -t & 1+t & 1+2t+2t^2 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

$\boxed{\textbf{14.}}$ * Dans $\mathbb{R}^4$ euclidien canonique, soit $F\begin{cases} x_1+x_2+x_3+x_4 = 0 \\ x_1+2x_2+3x_3+4x_4 = 0 \end{cases}$. Donner $\dim F$ et une base orthonormale de F, ainsi que $p_F(x)$ pour $x \in \mathbb{R}^4$.

F est le noyau de l'application linéaire

$$u : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^2, (x_1,x_2,x_3,x_4) \mapsto (x_1+x_2+x_3+x_4, x_1+2x_2+3x_3+4x_4),$$

et, si $\mathcal{C}_i$ est la base canonique de $\mathbb{R}^i$, $\mathcal{M}_{\mathcal{C}_4\mathcal{C}_2}(u) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \end{pmatrix}$, dont le rang est 2. Donc, $\dim F = 4 - 2 = 2$. On a aussi $F\begin{cases} x_2 = -2x_3 - 3x_4 \\ x_1 = x_3 + 2x_4 \end{cases}$. Donc, $\varepsilon_1 = (1,-2,1,0)$ et $\varepsilon_2 =$

$(2,-3,0,1)$ forment une base de F. On prend donc $e_1 = \dfrac{1}{\sqrt{6}}(1,-2,1,0)$. Soit $e_2' = \varepsilon_2 - (\varepsilon_2|e_1)e_1$. On a bien $(e_1|e_2') = 0$. Comme $(\varepsilon_2|e_1)e_1 = \dfrac{1}{6}(\varepsilon_2|\varepsilon_1)\varepsilon_1 = \dfrac{4}{3}\varepsilon_1$, on a $e_2' = (\dfrac{2}{3}, -\dfrac{1}{3}, -\dfrac{4}{3}, 1)$, donc $e_2 = \dfrac{1}{\sqrt{30}}(2,-1,-4,3)$. Dès lors, $p_F(x) = (e_1|x)e_1 + (e_2|x)e_2 = \dfrac{1}{6}(\varepsilon_1|x)\varepsilon_1 + \dfrac{1}{30}(e_2'|x)e_2'$.

$$p_F(x) = \frac{1}{6}(x_1 - 2x_2 + x_3)\varepsilon_1 + \frac{1}{30}(2x_1 - x_2 - 4x_3 + 3x_4)e_2'$$

Finalement, $p_F(x) = (\dfrac{1}{30}(9x_1 - 12x_2 - 3x_3 + 6x_4, -12x_1 + 21x_2 - 6x_3 - 3x_4, -3x_1 - 6x_2 + 21x_3 - 12x_4, 6x_1 - 3x_2 - 12x_3 + 9x_4)$.

On peut aussi calculer $p_F(x)$ sans passer par la base orthonormale. On utilise :

Ici, on pose $p_F(x) = \lambda_1\varepsilon_1 + \lambda_2\varepsilon_2$, et on traduit que $(\varepsilon_i|x - p_F(x)) = 0$, soit $(\varepsilon_i|p_F(x)) = (\varepsilon_i|x)$, en utilisant $\|\varepsilon_1\|^2 = 6$, $\|\varepsilon_2\|^2 = 14$ et $(\varepsilon_1|\varepsilon_2) = 8$. Donc $\begin{cases} (\varepsilon_1|x) = x_1 - 2x_2 + x_3 = 6\lambda_1 + 8\lambda_2 \\ (\varepsilon_2|x) = 2x_1 - 3x_2 + x_4 = 8\lambda_1 + 14\lambda_2 \end{cases}$, soit $\begin{cases} 20\lambda_1 = -2x_1 - 4x_2 + 14x_3 - 8x_4 \\ 20\lambda_2 = 4x_1 - 2x_2 + -8x_3 + 6x_4 \end{cases}$. Puis $20p_F(x) = 20\lambda_1\varepsilon_1 + 20\lambda_2\varepsilon_2$ redonne le résultat.

$\boxed{\textbf{15.}}$ * Trouver la matrice canoniquement associée au projecteur orthogonal de $\mathbb{R}^3$ sur le plan engendré par les vecteurs $(2,1,0)$ et $(1,0,-1)$.

$e_1 = (2,1,0)$ et $e_2 = (1,0,-1)$ sont bien indépendants mais pas orthogonaux.

Soit $D = P^\perp$. $p_D(x) = (\varepsilon|x)\varepsilon$ quand $D = \mathbb{R}\varepsilon$ avec ε unitaire et $p_D + p_P = \mathrm{id}_{\mathbb{R}^3}$.

$e_1 \wedge e_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}$. Si $\varepsilon = \dfrac{1}{\sqrt{6}}(-1,2,-1)$ et $x = (x_1, x_2, x_3)$,

$$p_P(x) = x - (\varepsilon|x)\varepsilon = x + \frac{1}{6}(x_1 - 2x_2 + x_3)(-1,2,-1).$$

La "matrice" est celle qui est canoniquement associée à p_P, donc

$$M = I_3 + \frac{1}{6}\begin{pmatrix} -1 & 2 & -1 \\ 2 & -4 & 2 \\ -1 & 2 & -1 \end{pmatrix} = \frac{1}{6}\begin{pmatrix} 5 & 2 & -1 \\ 2 & 2 & 2 \\ -1 & 2 & 5 \end{pmatrix}.$$

Problèmes de distance

$\boxed{\textbf{16.}}$ * Soit $F = \{P \in \mathbb{R}_3[X] / P(0) = P'(0) = 0\}$. Trouver $\inf\limits_{P\in F} \displaystyle\int_0^1 [2 + 3t - P(t)]^2 dt$ et $\inf\limits_{P\in F} \displaystyle\int_{-1}^1 [2 + 3t - P(t)]^2 dt$.

La formule de Taylor conduit à $F = \mathsf{vect}(X^2, X^3)$ et on cherche $d(2 + 3X, F)$ pour $(P|Q) = \displaystyle\int_{[0,1]} PQ$ puis $< P|Q >= \displaystyle\int_{[-1,1]} PQ$. C'est $\|2 + 3X - p_F(2 + 3X)\|$.

• Si $(P|Q) = \displaystyle\int_{[0,1]} PQ$, posons $p_F(2 + 3X) = aX^2 + bX^3$. On a donc le système

$$\begin{cases} (2 + 3X - aX^2 - b^3|X^2) = 0 = \dfrac{17}{12} - \dfrac{a}{5} - \dfrac{b}{6} \\ (2 + 3X - aX^2 - b^3|X^3) = \dfrac{11}{10} - \dfrac{a}{6} - \dfrac{b}{7} \end{cases}.$$

On obtient $p_F(2+3X) = 24X^2 - \dfrac{203}{10}X^3$. Puis,

$$d(2+3X,F)^2 = (2+3X|2+3X-p_F(2+3X)) = \frac{133}{100}.$$

• Si $< P|Q >= \displaystyle\int_{[-1,1]} PQ$, la famille (X^2,X^3) est orthogonale, donc

$$p_F(2+3X) = \frac{(2+3X|X^2)}{\|X^2\|^2}X^2 + \frac{(2+3X|X^3)}{\|X^3\|^2}X^3 = \frac{10}{3}X^2 + \frac{21}{5}X^3.$$

Puis, $d(2+3X,F)^2 = (2+3X|2+3X-p_F(2+3X)) = \dfrac{1016}{225}$.

$\boxed{\textbf{17.}}$ ** Soit $E = \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$, muni de $(A|B) = \mathrm{tr}({}^tAB)$. Pour $A \in E$, trouver $d(A,F)$ dans les deux cas suivants :
a) $F = \mathbb{R}I_2$.
b) $F = \mathcal{S}_2(\mathbb{R})$, sous-espace vectoriel des matrices symétriques.

• $F = \mathbb{R}I_n$ est une droite vectorielle, avec $p_F(A) = \dfrac{(I_n|A)}{\|I_n\|^2}I_n = \dfrac{\mathrm{tr}(A)}{n}I_n$. Donc, $d(A,F) = \sqrt{(A|A-p_F(A))} = \sqrt{\mathrm{tr}({}^tAA) - \dfrac{\mathrm{tr}(A)^2}{n}}$.
• $A = \dfrac{1}{2}(A+{}^tA) + \dfrac{1}{2}(A-{}^tA)$ conduit à $\mathcal{M}_n(\mathbb{R}) = \mathcal{S}_n(\mathbb{R}) \oplus \mathcal{A}_n(\mathbb{R})$, de manière orthogonale par rapport au produit scalaire $(A|B) = \mathrm{tr}({}^tAB)$. D'où $d(A, S_n(\mathbb{R})) = \|A - p_{\mathcal{S}_n(\mathbb{R})}(A)\|$ avec $p_{\mathcal{S}_n(\mathbb{R})}(A) = \dfrac{1}{2}(A+{}^tA)$. Finalement $d(A,S_n(\mathbb{R})) = \dfrac{1}{2}\|A-{}^tA\| = \dfrac{1}{\sqrt{2}}\sqrt{\mathrm{tr}(A^2) - \mathrm{tr}({}^tAA)}$.

$\boxed{\textbf{18.}}$ * Trouver $\displaystyle\inf_{(a,b)\in\mathbb{C}^2} \int_0^1 |x^2+ax+b|^2dx$.

On demande en fait la distance de la fonction $e_2 : x \mapsto x^2$ au sous-espace vectoriel Fde $\mathcal{C}([0,1])$ engendré par $e_1 : x \mapsto x$ et $e_0 : x \mapsto 1$. On veut donc $d^2 = \|e_2 - p_F(e_2)\|^2$, et on a $p_F = ce_1 + de_2$ avec aussi $e_2 - ce_1 - de_2$ orthogonal à F donc à e_1 et e_0. Or,

$$\int_0^1 (x^2-cx-d)dx = \frac{1}{3} - \frac{c}{2} - d, \int_0^1 (x^3-cx^2-dx)dx = \frac{1}{4} - \frac{c}{3} - \frac{d}{2}.$$

Ces deux quantités sont nulles, donc $c = 1$ et $b = -\dfrac{1}{6}$. Alors,

$$d^2 = \int_0^1 \left(x^2 - x + \frac{1}{6}\right)^2 dx = \frac{1}{180}.$$

$\boxed{\textbf{19.}}$ * Trouver $m = \displaystyle\min_{(a,b)\in\mathbb{R}^2} \int_0^\pi [\sin(t) - at^2 - bt]^2dt$.

Munissons $E = \mathcal{C}([0,\pi],\mathbb{R})$ de $(f|g) = \displaystyle\int_{[0,\pi]} fg$. Posons $e_k(t) = t^k$ pour $k = 1,2$ et $f(t) = \sin(t)$. On doit trouver $d(f, F = \mathrm{vect}(e_1,e_2))^2$, et c'est $\|p_{F^\perp}(f)\|^2$. Posons $P = p_{F^\perp}(f)$. On a $P(t) = at^2 + bt$, et a et b sont caractérisés par $(e_1 - P|e_1) = (e_2 - P|e_2) = 0$, soit par $(e_k|P) = \|e_k\|^2$.

- $\|e_k\|^2 = \dfrac{\pi^{2k+1}}{2k+1}$.
- $\displaystyle\int_0^\pi t^k \sin(t)dt = [-t^k \cos(t)]_0^\pi + k\int_0^\pi t^{k-1}\cos(t)dt$, donc $(e_1|f) = \pi$ et

$$(e_2|f) = \pi^2 + 2\left([t\sin(t)]_0^\pi - \int_0^\pi \sin(t)dt\right) = \pi^2 - 4.$$

On est donc confronté au système $\begin{cases} \dfrac{a\pi^4}{4} + \dfrac{b\pi^3}{3} = \pi \\ \dfrac{a\pi^5}{5} + \dfrac{b\pi^4}{4} = \pi^2 - 4 \end{cases}$, qui donne

$$a\pi^5(\frac{1}{16} - \frac{1}{15}) = \frac{\pi^2}{4} - \frac{1}{3}(\pi^2 - 4) = \frac{4}{3} - \frac{\pi^2}{12},$$

soit $a = \dfrac{320}{\pi^5} - \dfrac{20}{\pi^3}$, puis

$$-b\pi^4(\frac{1}{16} - \frac{1}{15}) = \frac{\pi^2}{5} - \frac{1}{4}(\pi^2 - 4) = 1 - \frac{\pi^2}{20},$$

soit $b = -\dfrac{12}{\pi^2} + \dfrac{240}{\pi^4}$. Ensuite, $m = (f - P|f - P) = (f - P|f)$. Mais, $(f|f) = \displaystyle\int_0^\pi \sin^2 t dt = \int_0^\pi \frac{1 - \cos(2t)}{2}dt = \frac{\pi}{2}$, et

$$(f|P) = a(\pi^2 - 4) + b\pi = -(\frac{320}{\pi^5} - \frac{20}{\pi^3})(\pi^2 - 4) - \frac{12}{\pi} + \frac{240}{\pi^3} = \frac{8}{\pi} + \frac{160}{\pi^3} - \frac{1280}{\pi^5},$$

et $m = \dfrac{\pi}{2} - \dfrac{8}{\pi} - \dfrac{160}{\pi^3} + \dfrac{1280}{\pi^5}$.

---

20. * Trouver $\displaystyle\min_{(a,b)\in\mathbb{R}^2} \int_0^1 [t\ln t - at - b]^2 dt$.

L'application $f : t \mapsto t\ln t$ peut être considérée comme étant continue de $[0, 1]$ dans $\mathbb{R}$ si on pose $f(0) = 0$. On munit $\mathcal{C}([0, 1], \mathbb{R})$ du produit scalaire $\displaystyle\int_{[0,1]} fg$. On doit donc chercher la distance (au carré) de f à $F = \text{vect}(e_0, e_1)$ où $e_k(t) = t^k$. C'est $\|f - p_F(f)\|^2 = m$.

Posons $g = p_F(f) = ae_0 + be_1$. On a donc $(f - g|e_0) = (f - g|e_1) = 0$ donc $(f|e_k) = (g|e_k)$.

Déjà, par parties, $I_k = \displaystyle\int_0^1 t^k \ln t\ dt = [\frac{t^{k+1}}{k+1}\ln t]_0^1 - \frac{1}{k+1}\int_0^1 t^k\ t = -\frac{1}{(k+1)^2}$. Donc $(f|e_0) = -\dfrac{1}{4}$ et $(f|e_1) = -\dfrac{1}{9}$. On a aussi $(g|e_0) = a + \dfrac{b}{2}$ et $(g|e_1) = \dfrac{a}{2} + \dfrac{b}{3}$. D'où $\dfrac{a}{2} + \dfrac{b}{4} = -\dfrac{1}{8}$ soit $\dfrac{b}{12} = \dfrac{1}{72}$ et $b = \dfrac{1}{6}$ puis $a = -\dfrac{1}{3}$.

Pour finir, $m = (f - g|f - g) = (f - g|f) = \|f\|^2 - (g|f)$. En intégrant deux fois par parties,

$$\int_0^1 t^2 \ln^2 t\ dt = [\frac{t^3}{3}\ln^2 t]_0^1 - \frac{2}{3}\int_0^1 t^2 \ln t\ dt = -\frac{2}{3}I_2 = \frac{2}{27}.$$

On a $(g|f) = aI_1 + bI_2 = -\dfrac{a}{4} - \dfrac{b}{9} = \dfrac{7}{108}$ donc $m = \dfrac{1}{108}$.

Inégalités

---

21. * Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Montrer que $\mathrm{tr}({}^tAA) \geq 0$ et $|\mathrm{tr}A| \leq \sqrt{n\mathrm{tr}^tAA}$. Cas d'égalité ?

Si $A = (a_{ij})$, $\mathrm{tr}^tAA = \sum_{i,j} a_{ij}^2 \geq 0$. $|\mathrm{tr}A|^2 = (\sum_{i=1}^n 1 \times a_{ii})^2 \leq n \times \sum_{i=1}^n a_{ii}^2$ par Cauchy-Schwarz. Or $\sum_{i=1}^n a_{ii}^2 \leq \sum_{i,j} a_{ij}^2$ et $|\mathrm{tr}A|^2 \leq n\mathrm{tr}({}^tAA)$.

S'il y a égalité, on a d'abord $a_{ij} = 0$ si $i \neq j$, puis, par Cauchy-Schwarz, $(a_{11}, \cdots, a_{nn}) = \lambda(1, \cdots, 1)$, i.e. $A = \lambda I_n$ qui, réciproquement, réalise bien l'égalité.

---

22. ** Pour $A = (a_{ij}) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, on pose $\|A\|_2 = \sum_{i,j} |a_{ij}|^2$.

a) Montrer que, pour $(A, B) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})^2$, $\|AB\|_2 \leq \|A\|_2\|B\|_2$.

b) Trouver les matrices pour lesquelles $\|AB\|_2 = \|A\|_2\|B\|_2$.

---

a) On note $A = (a_{ij})$ et $B = (b_{ij})$, ainsi que $C = AB = (c_{ij})$, donc $c_{ij} = \sum_{k=1}^n a_{ik}b_{kj}$. Alors, en utilisant l'inégalité de Cauchy-Schwarz,

$$|c_{ij}|^2 \leq \left[\sum_{k=1}^n |a_{ik}||b_{kj}|\right]^2 \leq \sum_{k=1}^n |a_{ik}|^2 \sum_{k=1}^n |b_{ik}|^2.$$

C'est bien, en sommant toutes ces inégalités sur i et j, que $\|AB\|_2 \leq \|A\|_2\|B\|_2$.

b) On a sommé des inégalités portant sur des nombres positifs, donc elles deviennent toutes des égalités. Cela donne les vecteurs $L_i = (a_{i1}, \ldots, a_{in})$ et $C_j = (b_{1j}, \ldots, b_{nj})$ linéairement dépendants pour tout (i, j). Alors:

• Si A ou B est nulle, il y a égalité.

• Sinon, il existe $L_{i_0} \neq 0$, et $C_j = \lambda_j L_{i_0}$, donc, le rang de B est 1, et son image est engendrée par L_{i_0}, et il existe $C_{j_0} \neq 0$, donc $L_i = \mu_i C_{j_0}$, et le rang de ${}^tA$ (donc, celui de A) vaut 1, son image étant engendrée par C_{j_0}. Mais, C_{j_0} et L_{i_0} sont liés, donc les deux images sont communes.

Réciproquement, si $\mathrm{im}{}^tA = \mathrm{im}B = D = \mathbb{C}\epsilon$ (droite vectorielle), les vecteurs L_i et C_j sont colinéaires à ϵ, dont linéairement dépendants, et on a bien l'égalité.

---

23. ** a) Soit $a \in \mathbb{R}$. Justifier l'existence d'un unique $P_a \in \mathbb{R}_3[X]$ tel que $P(a) = \int_{-1}^1 P(t)P_a(t)\,dt$ pour tout $P \in \mathbb{R}_3[X]$ et calculer P_a.

b) Soit $P \in \mathbb{R}_3[X]$ tel que $\int_{-1}^1 P(t)^2 dt = 1$. Montrer que $\sup_{x\in[-1,1]} |P(x)| \leq 2\sqrt{2}$.

---

a) $E = \mathbb{R}_3[X]$ est euclidien avec $(P|Q) = \int_{[-1,1]} PQ$. $P \mapsto P(a)$ est une forme linéaire sur E donc s'écrit de manière unique sous la forme $P \mapsto (P_a|P)$.

On écrit que $P(a) = (P_a|P)$ pour $P = 1, X, X, X^2$ en posant $P_a = A + BX + CX^2 + DX^3$,

d'où (un exposant impair donne une intégrale nulle) : $\begin{cases} 1 = 2A + \frac{2}{3}C \\ a^2 = \frac{2}{3}A + \frac{2}{5}C \\ a = \frac{2}{3}B + \frac{2}{5}D \\ a^3 = \frac{2}{5}C + \frac{2}{7}D \end{cases}$ et on obtient

$$P_a = \frac{1}{8}[(-15a^2 + 9) + (75a - 105a^3)X + (45a^2 - 15)X^2 + (175a^3 - 105a)X^3].$$

b) D'après l'inégalité de Cauchy-Schwarz, $P(a)^2 \leq \|P_a\|^2\|P\|^2 = \|P_a\|^2$ si $\|P\|^2 = 1$. Or, $\|P_a\|^2 = P(a)^2$, donc

$$\begin{aligned} \|P_a\|^2 &= \frac{1}{8}[(-15a^2 + 9) + (75a - 105a^3)a + (45a^2 - 15)a^2 + (175a^3 - 105a)a^3] \\ &= \frac{1}{8}[9 + 45a^2 - 165a^4 + 175a^6] = \frac{1}{8}Q(a^2), \end{aligned}$$

avec $Q'(b) = 45 - 330b + 525b^2 = 15(5b - 1)(7b - 3)$. Si on limite b à $[0, 1]$ (soit a à $[-1, 1]$), on a Q croissante sur $[0, 1/5]$, décroissante sur $[1/5, 3/7]$ puis croissante sur $[3/7, 1]$. Or, $Q(0) > 0$, $Q(3/7) = 576/49 > 0$ donc le maximum de $|Q|$ est atteint en 1 et vaut 64, donc$\|P_a\|^2 \leq 8$ pour tout $a \in [-1, 1]$, soit $|P(a)|^2 \leq 8$ d'où l'inégalité.