Corrigé de l'Examen de Probabilités du 21 mars 2016

Exercice I- [6 points]

1. $T_1(\Omega) = \{1, 2\}$ avec $P([T_1 = 1]) = \dfrac{1}{3}$ et $P([T_1 = 2]) = \dfrac{2}{3}$ [*1pt*].
$\mathbb{E}(T_1) = 1P([T_1 = 1]) + 2P([T_1 = 2]) = \dfrac{1}{3} + \dfrac{4}{3}$, $\mathbb{E}(T_1^2) = 1^2 P([T_1 = 1]) + 2^2 P([T_1 = 2]) = \dfrac{1}{3} + \dfrac{8}{3}$ et $\text{var}(T_1) = \mathbb{E}(T_1^2) - \mathbb{E}(T_1)^2$ donc $\boxed{\mathbb{E}(T_1) = \dfrac{5}{3}}$ [*0,5pt*].

2. $\rightarrow$ Si $T_1 = 1$, au deuxième tirage, il ne reste plus que des boules n°2.
On a donc $P^{[T_1=1]}([T_2 = 1]) = 0$ et $P^{[T_1=1]}([T_2 = 2]) = 1$.
$\rightarrow$ si $T_1 = 2$, au deuxième tirage, il reste une boule n°1 et une boule n°2.
On a donc $P^{[T_1=2]}([T_2 = 1]) = 1/2$ et $P^{[T_1=2]}([T_2 = 2]) = 1/2$ [*1pt*].
On a $P([T_2 = j]) = \displaystyle\sum_{i=1}^{2} P([T_1 = i] \cap [T_2 = j]) = \sum_{i=1}^{2} P([T_1 = i])P^{[T_1=i]}([T_2 = j])$.
On a $p_{1,1} = 0$, $p_{1,2} = p_{1.} = \dfrac{1}{3}$, $p_{2,1} = p_{2.} \times \dfrac{1}{2} = \dfrac{1}{3}$ et $p_{2,1} = p_{2.} \times \dfrac{1}{2} = \dfrac{1}{3}$.
On retrouve $p_{1.} = p_{1,1} + p_{1,2} = \dfrac{1}{3}$, $p_{2.} = p_{2,1} + p_{2,2} = \dfrac{2}{3}$ et on a $p_{.1} = p_{1,1} + p_{2,1} = \dfrac{1}{3}$ et $p_{.2} = p_{1,2} + p_{2,2} = \dfrac{2}{3}$. Ainsi, $\boxed{T_2 \text{ a même loi que } T_1}$ [*0,5pt*].

3. On a $P^{[T_2=2]}([T_1 = 2]) = \dfrac{p_{2,2}}{p_{.2}} = \dfrac{1/3}{2/3}$ donc $\boxed{P^{[T_2=2]}([T_1 = 2]) = \dfrac{1}{2}}$ [*0,5pt*].

4. On a $\mathbb{E}^{[T_1=1]}(T_2) = 1 \times P^{[T_1=1]}([T_2 = 1]) + 2 \times P^{[T_1=1]}([T_2 = 2]) = 1 \times 0 + 2 \times 1 = 2$ et $\mathbb{E}^{[T_1=2]}(T_2) = 1 \times P^{[T_1=2]}([T_2 = 1]) + 2 \times P^{[T_1=2]}([T_2 = 2]) = 1 \times 1/2 + 2 \times 1/2 = 3/2$ et $\dfrac{3\mathbb{E}(T_1) - T_1}{2} = \dfrac{5 - T_1}{2} = \begin{cases} 2 & \text{si } T_1 = 1 \\ 3/2 & \text{si } T_2 = 2 \end{cases}$. On a bien $\boxed{\mathbb{E}^{T_1}(T_2) = \dfrac{3\mathbb{E}(T_1) - T_1}{2}}$ [*1pt*].

5. On a $p_{1,1} = 0$ alors que $p_{1.}p_{.1} = (1/3)^2$ donc $\boxed{T_1 \text{ et } T_2 \text{ ne sont pas indépendantes}}$ [*0,5pt*].

$$\mathbb{E}(T_1T_2) = (1 \times 1)p_{1,1} + (1 \times 2)p_{1,2} + (2 \times 1)p_{2,1} + (2 \times 2)p_{2,2} = (2 + 2 + 4) \times \frac{1}{3} = \frac{8}{3}$$

et $\text{cov}(T_1, T_2) = \mathbb{E}(T_1T_2) - \mathbb{E}(T_1)\mathbb{E}(T_2) = \dfrac{8}{3} - \left(\dfrac{5}{3}\right)^2$, soit $\boxed{\text{cov}(T_1, T_2) = -\dfrac{1}{9}}$ [*1pt*].

Exercice II- [4 points]

1. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $p_n = \dfrac{1}{n(n+1)} = \dfrac{1}{n} - \dfrac{1}{n+1} \geq 0$ et $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} p_k = 1 - \frac{1}{n+1} \rightarrow 1$ quand $n \rightarrow +\infty$. Par théorème, il existe une probabilité P telle que $P([Y = n]) = p_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, donc on a bien affaire à la loi de probabilité de Y [*0,5pt*].

2. Le taux de panne (y_n) est donné par $y_0 = 0$ et, comme pour tout $n \geq 1$, on a, puisque $[Y \geq n] = \bigcup_{k=n}^{+\infty} [Y = k]$, les événements de la réunion étant incompatibles deux à deux,

$$P([Y \geq n]) = \lim_{p \to +\infty} \sum_{k=n}^{p} \left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1} \right) = \lim_{p \to +\infty} \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{p+1} \right) = \frac{1}{n}.$$

On a alors, compte-tenu de $[Y = n] \cap [Y \geq n] = [Y = n]$, $y_n = \frac{\frac{1}{n(n+1)}}{\frac{1}{n}}$, soit $\boxed{y_n = \frac{1}{n+1}}$ [*1pt*].

3. • <u>Initialisation :</u> On a $x_0 = \dfrac{P([X = 0])}{P([X \geq 0])} = P([X = 0])$ et $P([X \geq 1]) = 1 - P([X = 0]) = 1 - x_0$ donc l'égalité est vraie pour $n = 1$.

• <u>Hérédité :</u> Si l'égalité est vraie pour $n \in \mathbb{N}^*$, de $P([X \geq n]) = P([X = n]) + P([X \geq n+1])$ et $x_n = \dfrac{P([X = n])}{P([X \geq n])}$ on déduit $P([X \geq n+1]) = (1 - x_n)P([X \geq n]) = (1 - x_n)\prod_{k=0}^{n-1}(1 - x_k)$ et l'égalité est vraie aussi pour $n + 1$ [*1pt*]. On a alors $p_n = P([X = n]) = x_n P([X \geq n])$, soit $\boxed{p_n = x_n \prod_{k=0}^{n-1}(1 - x_k) \text{ pour } n \geq 1 \text{ et } p_0 = x_0}$ [*0,5pt*].

4. *Analyse.* Si X est à valeurs dans $\mathbb{N}^*$, de taux de panne $(x_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ constant égal à x, alors $p_0 = x_0 = 0$ et, par la question précédente, $p_n = x(1-x)^{n-1}$, donc $\boxed{X \hookrightarrow \mathcal{G}(x) \text{ (loi géométrique)}}$.

Synthèse. Si $X \hookrightarrow \mathcal{G}(p)$, on a $p_0 = 0$ et $P([X \geq 0]) = 1$, d'où $x_0 = 0$, puis, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$P([X = n]) = pq^{n-1}, \ P([X \geq n]) = \sum_{k=n}^{+\infty} pq^{k-1} = \frac{pq^{n-1}}{1-q} = q^{n-1} > 0$$

d'où $\boxed{x_n = \dfrac{P([X = n])}{P([X \geq n])} = p}$ [*1pt*] .

<u>Exercice III-</u> [6 points]

1. f est positive, continue sur $\mathbb{R}$ et, si $x > 0$, $\int_{-\infty}^{x} f(t)\,dt = \left[-e^{-t^2/2}\right]_0^x = 1 - e^{-x^2/2}$. En faisant $x \to +\infty$, on obtient $\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\,dt = 1$ donc $\boxed{f \text{ est une densité}}$ [*1pt*].

De plus, le calcul précédent donne $\boxed{F_X(x) = \left(1 - e^{-x^2/2}\right) \mathbb{I}_{]0,+\infty[}(x)}$ [*0,5pt*].

On cherche m tel que $F_X(m) = \frac{1}{2}$, soit $1 - e^{-m^2/2} = \frac{1}{2}$ donc $-m^2/2 = \ln(1/2) = -\ln 2$ donc $\boxed{m = \sqrt{2 \ln 2}}$ [*1pt*].

2. $\mathbb{E}(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} xf(x)dx = \int_0^{+\infty} x^2 e^{-x^2/2}\,dx = \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{+\infty} x^2 e^{-x^2/2}\,dx = \frac{\sqrt{2\pi}}{2}$, d'après la variance de la loi normale, donc $\boxed{\mathbb{E}(X) = \sqrt{\frac{\pi}{2}}}$ [*1pt*].

3. $x \mapsto u = x^2/2$ est un $\mathcal{C}^1$ difféomorphisme de $]0, +\infty[$ sur lui-même, avec $du = x\,dx$, donc $\mathbb{E}(X^n) = \int_{-\infty}^{+\infty} x^n f(x)\,dx = \int_0^{+\infty} x^n \times x e^{-x^2/2}\,dx = \int_0^{+\infty} (2u)^{n/2} e^{-u}\,du$, soit $\boxed{\mathbb{E}(X^n) = 2^{n/2}\Gamma\left(\frac{n}{2} + 1\right)}$

[*1pt*]. Avec $n=1$, on obtient $\mathbb{E}(X)=\sqrt{\dfrac{\pi}{2}}=\sqrt{2}\Gamma\left(\dfrac{3}{2}\right)$ donc $\boxed{\Gamma\left(\dfrac{3}{2}\right)=\dfrac{\sqrt{\pi}}{2}}$ [*0,5pt*].

4. $F_Z(z)=P([Z\leq z])=P([X^2\leq z])$. Si $z\leq 0$, $F_Z(z)=0$ et si $z>0$, $F_Z(z)=P([-\sqrt{z}\leq X\leq\sqrt{z}])=F_X(\sqrt{z})-F_X(-\sqrt{z})$ d'où $f_Z(z)=\dfrac{1}{2\sqrt{z}}(f(\sqrt{z})+f(-\sqrt{z}))\mathbb{I}_{]0,+\infty[}(z)=\dfrac{1}{2\sqrt{z}}\times\sqrt{z}e^{-z/2}\mathbb{I}_{]0,+\infty[}(z)=\dfrac{1}{2}e^{-z/2}\,\mathbb{I}_{]0,+\infty[}(z)$. Ainsi, $Z=X^2$ suit la loi exponentielle $\mathcal{E}\left(\dfrac{1}{2}\right)$ [*0,5pt*] et donc $\boxed{\mathbb{E}(X^2)=2}$ [*0,5pt*].

<u>Exercice IV-</u> [7 points]

1. X et Y étant indépendantes, on a $f_{X,Y}(x,y)=f_X(x)f_Y(y)$ soit :

$$\boxed{f_{X,Y}(x,y)=3\mathrm{e}^{-x-3y}\mathbb{I}_{]0,+\infty[}(x)\mathbb{I}_{]0,+\infty[}(y)}\ [\mathit{1pt}].$$

$P([X>Y])=\mathbb{E}(\mathbb{I}_D(X,Y))$ où $D=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2\ ;\ x>y\}$.
Donc $P([X>Y])=\displaystyle\int_0^{+\infty}\left(\int_y^{+\infty}3\mathrm{e}^{-x-3y}dx\right)dy=\int_0^{+\infty}3\mathrm{e}^{-3y}\left[-\mathrm{e}^{-x}\right]_y^{+\infty}dy=3\int_0^{+\infty}\mathrm{e}^{-4y}dy$ soit $\boxed{P([X>Y])=\dfrac{3}{4}}$ [*1pt*].

2. Soit $h:(x,y)\mapsto(u,v)=(x+y,x-y)$. h est une bijection de $\mathbb{R}^2$ sur lui-même, avec :

$$h^{-1}:(u,v)\mapsto\left(\frac{u+v}{2},\frac{u-v}{2}\right)\qquad;\qquad J_{h^{-1}}(u,v)=\begin{vmatrix}\frac{1}{2}&\frac{1}{2}\\ \frac{1}{2}&-\frac{1}{2}\end{vmatrix}=-\frac{1}{4}-\frac{1}{4}=-\frac{1}{2}.$$

On a donc $f_{U,V}(u,v)=f_{h(X,Y)}(u,v)=f_{X,Y}(h^{-1}(u,v))|J_{h^{-1}}(u,v)|=\dfrac{1}{2}f_{X,Y}\left(\dfrac{u+v}{2},\dfrac{u-v}{2}\right)$ soit:

$$\boxed{f_{U,V}(u,v)=\frac{3}{2}\mathrm{e}^{-2u+v}\mathbb{I}_\Delta(u,v)\text{ où }\Delta=\{(u,v)\in\mathbb{R}^2\ ;\ u>0\text{ et }-u<v<u\}}\ [\mathit{1pt}].$$

$f_U(u)=\displaystyle\int f_{U,V}(u,v)dv=\frac{3}{2}\mathrm{e}^{-2u}\left[\mathrm{e}^v\right]_{-u}^{u}\mathbb{I}_{]0,+\infty[}(u)$ soit $\boxed{f_U(u)=\dfrac{3}{2}(\mathrm{e}^{-u}-\mathrm{e}^{-3u})\mathbb{I}_{]0,+\infty[}(u)}$ [*0,5pt*].

On a aussi $\Delta=\{(u,v)\in\mathbb{R}^2\ ;\ u>v\text{ et }u>-v\}=\{(u,v)\in\mathbb{R}^2\ ;\ u>|v|\}$, donc :

$$f_V(v)=\int f_{U,V}(u,v)du=\frac{3}{2}\mathrm{e}^v\left[-\frac{1}{2}\mathrm{e}^{-2u}\right]_{|v|}^{+\infty}=\frac{3}{4}\mathrm{e}^{v-2|v|},$$

soit $\boxed{f_V(v)=\dfrac{3}{4}\left(\mathrm{e}^{3v}\mathbb{I}_{]-\infty,0[}(v)+\mathrm{e}^{-v}\mathbb{I}_{]0,+\infty[}(v)\right)}$ [*0,5pt*].

$U=X+Y$ et $V=X-Y$ avec $\mathbb{E}(X)=1$ et $\mathbb{E}(Y)=\dfrac{1}{3}$ donc $\boxed{\mathbb{E}(U)=\dfrac{4}{3}\text{ et }\mathbb{E}(V)=\dfrac{2}{3}}$ [*1pt*].

$P([X>Y])=P([X-Y>0])=P([V>0])=\displaystyle\int_0^{+\infty}f_V(v)dv=\frac{3}{4}\int_0^{+\infty}\mathrm{e}^{-v}dv$: on retrouve $\boxed{P([X>Y])=\dfrac{3}{4}}$ [*0,5pt*].

3. $\mathbb{E}(|V|) = \displaystyle\int |v| f_V(v) dv = \frac{3}{4}\left(\int_{-\infty}^{0} -v\mathrm{e}^{3v} dv + \int_0^{+\infty} v\mathrm{e}^{-v} dv\right) = \frac{3}{4}\left(\int_0^{+\infty} v\mathrm{e}^{-3v} dv + \Gamma(2)\right) = \frac{3}{4}(\frac{1}{9}+1)$, d'où $\boxed{\mathbb{E}(|V|) = \frac{5}{6}}$ [*0,5pt*].

4. $f_U^{(V=v)}(u) = \dfrac{f_{U,V}(u,v)}{f_V(v)}$ soit,

- si $v<0$, $f_U^{(V=v)}(u) = \dfrac{\frac{3}{2}\mathrm{e}^{-2u+v}}{\frac{3}{4}\mathrm{e}^{3v}} \mathbb{I}_{]-v,+\infty[}(u) = 2\mathrm{e}^{-2(u+v)}\mathbb{I}_{]-v,+\infty[}(u)$,
- si $v>0$, $f_U^{(V=v)}(u) = \dfrac{\frac{3}{2}\mathrm{e}^{-2u+v}}{\frac{3}{4}\mathrm{e}^{-v}} \mathbb{I}_{]v,+\infty[}(u) = 2\mathrm{e}^{-2(u-v)}\mathbb{I}_{]v,+\infty[}(u)$,

donc, dans les deux cas, $f_U^{(V=v)}(u) = 2\mathrm{e}^{-2(u-|v|)}\mathbb{I}_{]|v|,+\infty[}(u)$. On a alors : $\mathbb{E}^{(V=v)}(U) = \displaystyle\int u f_U^{(V=v)}(u)du = 2\int_{|v|}^{+\infty} u\mathrm{e}^{-2(u-|v|)}du$ et, en faisant le changement de variable $t = u-|v|$, il vient $\mathbb{E}^{(V=v)}(U) = 2\displaystyle\int_0^{+\infty}(t+|v|)\mathrm{e}^{-2t}dt = 2\left(\frac{\Gamma(2)}{2^2} + |v|\frac{\Gamma(1)}{2}\right) = \frac{1}{2}+|v|$. On a donc $\boxed{\mathbb{E}^V(U) = |V| + \frac{1}{2}}$ [*0,5pt*]. On en déduit que $\mathbb{E}(\mathbb{E}^V(U)) = \mathbb{E}(U) = \mathbb{E}(|V|) + \frac{1}{2}$, d'où $\mathbb{E}(|V|) = \mathbb{E}(U) - \frac{1}{2}$, soit $\boxed{\mathbb{E}(|V|) = \frac{4}{3} - \frac{1}{2} = \frac{5}{6}}$ [*0,5pt*].

<u>Exercice V-</u> [2 points]

On note X_k la variable aléatoire désignant la somme demandée par la personne k. La somme totale est donc $S = \displaystyle\sum_{k=1}^{60} X_k$, les variables X_k étant indépendantes de même loi, d'espérance $m = 80$ et de variance $\sigma^2 = 40^2$. On considère 60 comme grand, donc on peut considérer que S suit approximativement la loi normale d'espérance $60m$ et de variance $60\sigma^2$ [*0,5pt*]. On cherche s tel que $P([S \le s]) \ge 0,95$. Or $P([S \le s]) = P\left(\left[\dfrac{S-60m}{\sqrt{60}\sigma} \le \dfrac{s-60m}{\sqrt{60}\sigma}\right]\right) \ge 0,95$ avec $\dfrac{S-60m}{\sqrt{60}\sigma}$ qui suit approximativement la loi $\mathcal{N}(0,1)$. D'après l'indication, il suffit donc de prendre $\dfrac{s-60m}{\sqrt{60}\sigma} \ge 1,64$, c'est-à-dire $s \ge 60m + \sqrt{60}\sigma \times 1,64 = 4800 + 40 \times 1,64\sqrt{60} \approx 5308$.

$\boxed{\text{Le distributeur devra donc contenir au moins 5310 euros}}$ (puisqu'il n'y a que des billets) [*1,5pt*].
