Examen d'Algèbre Linéaire du mardi 27 mars 2018

4 exercices indépendants (Durée : 2 heures)

Exercice I-

Soit ϕ, défini sur $\mathbb{C}[X]$ par $\phi(P) = P + P(a)U$ où $a \in \mathbb{C}$ et $U \in \mathbb{C}[X]$.

1. Montrer que ϕ est un endomorphisme.
2. Montrer que $\ker \phi \subset \operatorname{vect}(U)$.
3. En déduire que, si $U(a) = -1$, $\ker \phi = \operatorname{vect}(U)$ et sinon que ϕ est injectif.
4. Montrer que $\phi^2 - (2 + U(a))\phi + (1 + U(a))\mathrm{id} = 0$ et en déduire une condition nécessaire et suffisante pour que ϕ soit bijectif ; donner alors sa réciproque.
5. On suppose $U(a) = -1$; que peut-on dire de ϕ ? Donner son image.
6. Résoudre l'équation $P + P(a)U = V$ dans $\mathbb{C}[X]$.

Exercice II-

Dans $\mathbb{R}^3$ euclidien muni du produit scalaire $(\ |\ )$ et de la norme $\|\ \|$ associée, on considère les vecteurs $u = (1, 2, 3)$ et $v = (-3, 1, 5)$.

1. a) Déterminer la dimension du sous-espace vectoriel F de $\mathbb{R}^3$ engendré par les vecteurs u et v.
b) Déterminer le nombre réel λ tel que le vecteur $v' = u + \lambda v$ soit orthogonal à u.
c) Montrer que le vecteur $w = (-1, 2, -1)$ dirige $F^\perp$ et que (u, v', w) est une base de $\mathbb{R}^3$.

2. Soit p_F la projection orthogonale sur F.
a) Déterminer la matrice A de p_F dans la base (u, v', w).
b) Déterminer la matrice B de p_F dans la base canonique.

3. Soit $C = \begin{pmatrix} 2 & 2 & -1 \\ 2 & -1 & 2 \\ -1 & 2 & 2 \end{pmatrix}$.
a) Montrer que C est diagonalisable puis trouver ses éléments propres.
b) Montrer qu'il existe deux réels α et β tels que $C = \alpha I_3 + \beta B$ et retrouver ainsi les éléments propres de C.

Exercice III-

Soit $M \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ telle que ${}^tM = M^2$.

1. Montrer que $M^4 = M$.
2. On suppose que M est inversible. Montrer que $M \in \mathcal{O}_2(\mathbb{R})$. Que vaut $\det(M)$?
3. On suppose M non inversible.
a) Montrer que M est semblable à $\begin{pmatrix} 0 & a \\ 0 & b \end{pmatrix}$, avec $a \in \mathbb{R}$ et $b \in \{0, 1\}$.
b) Que vaut M si $b = 0$?
c) Montrer que, si $b = 1$, M est diagonalisable et que c'est la matrice d'un projecteur.

Exercice IV-

On considère la matrice $A = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 0 \\ -1 & 3 & -1 \\ 0 & -1 & 3 \end{pmatrix}$ et le vecteur $b = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$.

1. Déterminer, si elles sont possibles, les factorisation LU et de Cholesky de A.

2. Calculer les valeurs propres de A et montrer que A est inversible.

3. Déterminer $\overline{x}$, l'unique solution de $Ax = b$.

4. a) Écrire la matrice de Jacobi J et la matrice de Gauss-Seidel G associées à $Ax = b$.

b) Déterminer les valeurs propres de J et de G et montrer que les méthodes de Jacobi et de Gauss-Seidel sont convergentes. Quelle est la méthode qui converge le plus vite ?

c) Donner les 3 premières itérations des méthodes de Jacobi et de Gauss-Seidel en partant de $x^{(0)} = {}^t(0, 0, 0)$.

5. Soit $x^{(k)}$ le k-ième itéré de la méthode de Jacobi, en partant de $x^{(0)} = {}^t(0, 0, 0)$.

a) Vérifier que $x^{(k+1)} - \overline{x} = J(x^{(k)} - \overline{x})$.

b) Déterminer s, le module de la plus petite valeur propre en module de A, et S le module de la plus grande valeur propre en module de J (on vérifiera que $S < 1$...)

c) Montrer que $\|\overline{x}\|_2 \leq \frac{1}{s}\|b\|_2$ où $\| \ \|_2$ désigne la norme euclidienne.

d) Montrer que $\|x^{(k)} - \overline{x}\|_2 \leq \frac{S^k}{s}\|b\|_2$.