$\boxed{\text{Corrigés des exercices du chapitre 6}}$

$\boxed{\textbf{12.}}$ Déterminer les minimums de f sur C dans les cas suivants :

a) $f : (x, y, z) \mapsto 4x^2 + y^2 + z^2$ et $C = \{(x, y, z)\ ;\ 2x + 3y + z - 12 = 0\}$.

b) $f : (x, y, z) \mapsto xy + 2yz + 2xz$ et $C = \{(x, y, z)\ ;\ xyz = 32\}$.

c) $f : (x, y) \mapsto xy$ et $C = \{(x, y)\ ;\ xy > 0$ et $x^2 + y^2 = 8\}$.

---

a) On pose $u = (x, y, z)$. $C = \psi^{-1}(\{0\})$ où $\psi(u) = 2x + 3y + z - 12$: C est fermé comme image réciproque du fermé $\{0\}$ par l'application continue ψ.

• $f(u) \geq \|u\|^2$ donc f est coercive continue, et il y a existence du minimum de f sur C.

f et φ sont convexe ; le minimum u est solution de $\nabla f(u) + \mu \nabla\psi(u) = 0$, soit $\begin{cases} 8x + 2\mu = 0 \\ 2y + 3\mu = 0 \\ 2z + \mu = 0 \\ \psi(u) = 0 \end{cases}$.

On a donc $x = -\dfrac{\mu}{4}$, $y = -\dfrac{3\mu}{2}$ et $z = -\dfrac{\mu}{2}$, avec $2x + 3y + z - 12 = -\dfrac{\mu}{2} - \dfrac{9\mu}{2} - \dfrac{\mu}{2} - 12 = 0$, ce qui donne $-\dfrac{11}{2}\mu = 12$, donc $\mu = -\dfrac{24}{11}$ et $\boxed{u_0 = \left(\dfrac{6}{11}, \dfrac{36}{12}, \dfrac{12}{11}\right)}$. $\mathrm{Arg}_C \min f = \{u_0\}$ et $\min\limits_C f = f(u_0)$.

• $u_k = (3k, -2k, 12) \in C$ et $f(u_k) = 40k^2 + 144 \to +\infty$ quand $k \to +\infty$ donc il n'y a <u>pas de maximum</u>.

b) • <u>Pas de maximum</u> car si $u_k = (k, \dfrac{1}{k}, 32)$, $u_k \in C$ et $f(u_k) \to +\infty$ si $k \to +\infty$.

• De même, <u>pas de minimum</u> car si $u_k = (k, -\dfrac{1}{k}, -32)$, $u_k \in C$ et $f(u_k) \to -\infty$ si $k \to +\infty$.

c) On cherche d'abord les extrémums sur $X = \{(x, y)\ ;\ xy \geq 0$ et $x^2 + y^2 = 8\}$.

X est fermé, borné donc compact et f continue. On a donc existence du minimum et du maximum de f sur X.

Sur X, $f \geq 0$ et $f = 0$ si et seulement si $xy = 0$, soit $x = 0$ et $y = \pm 2$ ou $y = 0$ et $x = \pm\sqrt{2}$.

$X = \varphi^{-1}(]-\infty, 0]) \cap \psi^{-1}(\{0\})$ où $\varphi(x, y) = -xy$ et $\psi(x, y) = x^2 + y^2 - 8$.

ψ est convexe et $\nabla\varphi(u) \neq 0$ si $u \neq 0$, ce qui est le cas ici donc on a bien qualification des contraintes.

Si $\varphi(u) = 0$, on a un minimum, sinon $\nabla f(u) + \mu\nabla\psi(u) = 0$, ce qui donne $\begin{vmatrix} y & 2x \\ x & 2y \end{vmatrix} = 0 = 2y^2 - 2x^2$, soit $y^2 = x^2$ et $2x^2 = 8$, soit $x = \pm 2$, avec $f(2, 2) = f(-2, -2) = 4$. On a donc $\min\limits_X f = 0$ avec $\mathrm{Arg}_C \min f = \{(0, \pm 2\sqrt{2}), (\pm 2\sqrt{2}, 0)\}$ et $\max\limits_X f = 4$ avec $\mathrm{Arg}_X \max f = \{(2, 2), (-2, -2)\}$.

$(-2, -2)$ et $(2, 2)$ sont dans C donc $\max\limits_C f = \max\limits_X f$ et $\boxed{\mathrm{Arg}_C \max f = \{(2, 2), (-2, -2)\}}$.

Par contre $(0, \pm 2\sqrt{2})$ et $(\pm 2\sqrt{2}, 0)$ ne sont pas dans C et $f > 0$ sur C. On a $u_k = \left(\dfrac{1}{k}, \sqrt{8 - \dfrac{1}{k^2}}\right) \in C$ et $f(u_k) = \dfrac{1}{k}\sqrt{8 - \dfrac{1}{k^2}} \to 0$ quand $k \to +\infty$. Il n'y a donc <u>pas de minimum</u> sur C.

$\boxed{\textbf{13.}}$ Déterminer les maximums de f sur C dans les cas suivants :

a) $f : (x, y, z) \mapsto xy^2z^2$ et $C = \{(x, y, z) \in (\mathbb{R}_+^*)^3\ ;\ x + y + z = 12\}$.

b) $f:(x,y)\mapsto x^2y$ et $C=\{(x,y)\ ;\ 0\le x\le 1 \text{ et } 0\le y\le 1\}$.

c) $f:(x,y)\mapsto xy$ et $C=\{(x,y)\ ;\ (x+1)^2+y^2=1\}$.

---

a) Comme C est non fermé, on commence par résoudre le problème sur $X=\{(x,y,z)\ ;\ x\ge 0,\ y\ge 0,\ z\ge 0,\ x+y+z=12\}$.

X est un compact car il est fermé et borné (inclus dans $[0,12]^3$). Les contraintes sont linéaires donc qualifiées.

On a $\nabla f(u)=\begin{pmatrix} y^2z^2\\ 2xyz^2\\ 2xy^2z\end{pmatrix}$ et $\nabla\psi(u)=\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$, où $\psi(u)=x+y+z-12$.

$\nabla f(u)+\mu\nabla\psi(u)=0=\begin{pmatrix} y^2z^2+\mu\\ 2xyz^2+\mu\\ 2xy^2z+\mu\end{pmatrix}$. On a donc $\left\{\begin{array}{c} yz^2(y-2x)=0\\ 2xyz(y-z)=0\\ x+y+z-12=0\end{array}\right)$.

• Si $x=0$ ou $y=0$ ou $z=0$, alors $f(x,y,z)=0$.

• Si $xyz\neq 0$, alors $y=2x$ et $y=z$, puis $x+y+z-12=0$ donne $5x=12$ et $u=\left(\frac{12}{5},\frac{24}{5},\frac{24}{5}\right)$.

On a donc $\min\limits_X f=0$ avec $\mathrm{Arg}_X\min f=\{(0,y,12-y),(x,0,12-x),(x,12-x,0)\}$ et $\max\limits_X f=\dfrac{4(12)^3}{5^3}$ avec $\boxed{\mathrm{Arg}_X\max f=\left\{\left(\frac{12}{5},\frac{24}{5},\frac{24}{5}\right)\right\}}$.

$\left(\frac{12}{5},\frac{24}{5},\frac{24}{5}\right)\in C$ donc $\max\limits_C f=\max\limits_X f$. Par contre les minimums ne sont pas dans C : $u_k=\left(\frac{1}{k},y-\frac{1}{k},12-y\frac{24}{5}\right)\in C$ et $f\left(\frac{1}{k},y-\frac{1}{k},12-y_k\right)=\frac{1}{k}\left(y-\frac{1}{k}\right)^2(12-y^2)\to 0$ quand $k\to 0$ et il n'y a pas de minimum sur C.

b) Directement : $0\le x\le 1$ et $0\le y\le 1$ donc $0\le x^2y\le 1$ avec $x^2y=0$ si et seulement si $x=0$ ou $y=0$ et $x^2y=1$ si et seulement si $x=y=1$ (car si $x<1$ ou $y<1$, alors $x^2y<1$).

Sinon, on pose $u=(x,y)$, $\varphi_1(u)=-x$, $\varphi_2(u)=x-1$, $\varphi_3(u)=-y$ et $\varphi_4(u)=y-1$. C est un compact (fermé borné) et f est continue, donc admet sur C un minimum et un maximum. On écrit tous les gradients :

$$\nabla f(u)=\begin{pmatrix}2xy\\x^2\end{pmatrix},\ \nabla\varphi_1(u)=\begin{pmatrix}-1\\0\end{pmatrix},\ \nabla\varphi_2(u)=\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix},\ \nabla\varphi_3(u)=\begin{pmatrix}0\\-1\end{pmatrix},\ \nabla\varphi_4(u)=\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}$$

Les contraintes sont linéaires donc qualifiées en tout point.

• À l'intérieur, aucune contrainte n'est saturée. On a alors $\nabla f(u)=0$ mais alors $x=0$, ce qui n'est pas possible à l'intérieur.

• Si φ_1 est saturée, alors $x=0$ et $f(u)=0$

• Si φ_3 est saturée, $y=0$ et $f(u)=0$.

• Si φ_2 est saturée, $x=1$ et $f(u)=y\in[0,1]$

• Si φ_4 est saturée, $f(u)=x^2\in[0,1]$.

Finalement, on a $\max\limits_C f=1$, $\min\limits_C f=0$, $\mathrm{Arg}_C\max f=\{(1,1)\}$ et $\mathrm{Arg}_C\min f=\{(x,0)\ ;\ x\in[0,1]\}\cup\{(0,y)\ ;\ y\in[0,1]\}$.

c) C est un disque compact (fermé et borné). la contrainte φ est convexe donc qualifiée en tout $u=(x,y)$; f est continue donc admet un minimum et un maximum sur C compact. Pour rechercher les extrémums possibles, on utilise le théorème de Kuhn-Tucker et on écrit en particulier que les gradients de f et de φ sont liés :

$$\det(\nabla f(u), \nabla\varphi(u)) = 0 = \begin{vmatrix} y & 2(x+1) \\ x & 2y \end{vmatrix} = 2y^2 - 2x(x+1).$$

On a donc $y^2 = x(x+1)$ et $\lambda\varphi(x,y) = \lambda((x+1)^2 + y^2 - 1) = 0$.

- Si $\lambda = 0$, alors $\nabla f(u) = 0$, soit $y = x = 0$ et $f(0,0) = 0$.
- Si $\lambda \neq 0$, alors $(x+1)^2 + y^2 - 1 = 0 = (x+1)^2 + x(x+1) - 1 = 2x^2 + 3x = x(2x+3)$.
  $\rightarrow x = 0$ donne $y = 0$ et $f(0,0) = 0$ (déjà vu)
  $\rightarrow x = -\dfrac{3}{2}$ donne $y^2 = -\dfrac{3}{2} \times \left(-\dfrac{3}{2} + 1\right) = \dfrac{3}{4}$, soit $y = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$ ou bien $y = -\dfrac{\sqrt{3}}{2}$.

$f\left(-\dfrac{3}{2}, -\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right) = \dfrac{3\sqrt{3}}{4}$ et $f\left(-\dfrac{3}{2}, \dfrac{\sqrt{3}}{2}\right) = -\dfrac{3\sqrt{3}}{4}$ donc $\min\limits_C f = -\dfrac{3\sqrt{3}}{4}$, $\mathrm{Arg}_C \min f = \left\{\left(-\dfrac{3}{2}, \dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)\right\}$, $\max\limits_C f = \dfrac{3\sqrt{3}}{4}$ et $\mathrm{Arg}_C \max f = \left\{\left(-\dfrac{3}{2}, -\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)\right\}$.

$\boxed{\textbf{14.}}$ Déterminer les extrémums de f sur C dans les cas suivants :

a) $f : (x,y,z) \mapsto x^2 + y^2 + z^2$ et $C = \{(x,y,z) \; ; \; \dfrac{x^2}{64} + \dfrac{y^2}{36} + \dfrac{z^2}{25} = 1\}$.

b) $f : (x,y) \mapsto x^2 + 2y^2 - x$ et $C = \{(x,y) \; ; \; x^2 + y^2 \leq 1\}$.

c) $f : (x,y,z) \mapsto x^2 + y^2 + z^2$ et $C = \{(x,y,z) \; ; \; x^2 + 2y^2 - z^2 - 1 = 0\}$.

---

a) On a une contrainte égalité qui est convexe (valeurs propres de la hessienne $\dfrac{2}{64}$, $\dfrac{2}{36}$ et $\dfrac{2}{25}$ strictement positives). Ainsi, la contrainte est qualifiée en tout $u = (x,y,z) \in C$.

$C = \psi^{-1}(\{0\})$ est fermé comme image réciproque du fermé $\{0\}$ par l'application continue ψ.

$C \subset [-8,8] \times [-6,6] \times [-5,5]$ est aussi borné. C'est donc un compact et f continue admet sur C des extrémums. On cherche les candidats au moyen du théorème de Kuhn-Tucker, c'est-à-dire que $\nabla f(u) + \mu\nabla\psi(u) = 0$, avec $\psi(u) = 0$, ce qui donne

$$\begin{cases} 2x + \mu\dfrac{2}{64}x = 2x\left(1 + \dfrac{\mu}{64}\right) = 0 \\ 2y + \mu\dfrac{2}{36}y = 2y\left(1 + \dfrac{\mu}{36}\right) = 0 \\ 2z + \mu\dfrac{2}{25}z = 2z\left(1 + \dfrac{\mu}{25}\right) = 0 \end{cases}$$

μ ne peut pas prendre 2 valeurs distinctes à la fois donc 2 au moins des coordonnées de u sont nulles mais pas les 3, sinon on aurait $\psi(u) = -1 \neq 0$.

- Si $x = y = 0$, alors $\mu = -25$ et $u = (0,0,\pm 5)$ avec $f(u) = 25$;
- Si $x = z = 0$, alors $\mu = -36$ et $u = (0,\pm 6,0)$ avec $f(u) = 36$;
- Si $y = z = 0$, alors $\mu = -64$ et $u = (\pm 8,0,0)$ avec $f(u) = 64$.

Ainsi, $\boxed{\max\limits_C f = 64}$ avec $\mathrm{Arg}_C \max f = \{(8,0,0),(-8,0,0)\}$ et $\boxed{\min\limits_C f = 25}$ avec $\mathrm{Arg}_C \max f = \{(0,0,-5),(0,0,5)\}$.

b) On pose $u = (x,y)$. $C = \varphi^{-1}(]-\infty,0])$ est fermé comme image réciproque du fermé $]-\infty,0])$ par l'application continue $\varphi : u \mapsto x^2+y^2-1$. C est aussi borné car c'est le disque unité. Donc $f : u \mapsto x^2+2y^2-x$, qui est continue, admet des extrémums sur le compact C. La contrainte φ étant convexe, elle est qualifiée en tout u et les candidats pour être extrémums vérifient

$\nabla f(u) + \lambda \nabla \varphi(u) = 0$ avec $\lambda\varphi(u) = 0$ et $\varphi(u) \leq 0$, soit $\begin{cases} 2x - 1 + 2\lambda x = 2x(1+\lambda) - 1 = 0 \\ 4y + 2\lambda y = 2y(2+\lambda) = 0 \end{cases}$ et $\lambda\varphi(u) = 0$.

On a donc $y = 0$ ou $\lambda = -2$ et $x = \dfrac{1}{2(\lambda+1)}$ (avec $\lambda \neq -1$).

• $\lambda = 0$ donne $y = 0$ et $x = \dfrac{1}{2}$ et $f\left(\dfrac{1}{2}, 0\right) = -\dfrac{1}{4}$.

• $\lambda = -2$ donne $x = -\dfrac{1}{2}$ et $x^2 + y^2 = 1$, soit $y^2 = \dfrac{3}{4}$ et $f\left(-\dfrac{1}{2}, \dfrac{\sqrt{3}}{2}\right) = f\left(-\dfrac{1}{2}, -\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right) = \dfrac{1}{4} + 2 \times \dfrac{3}{4} + \dfrac{1}{2} = \dfrac{9}{4}$.

• $\lambda \notin \{0, -2\}$ donne $y = 0$ et $x^2 + y^2 = 1$, soit $x^2 = 1$ avec $f(1, 0) = 0$ et $f(-1, 0) = 2$.

Donc finalement, $\boxed{\max_C f = \dfrac{9}{4}}$ avec $\mathrm{Arg}_C \max f = \left\{\left(-\dfrac{1}{2}, -\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right), \left(-\dfrac{1}{2}, \dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)\right\}$ et $\boxed{\min_C f = -\dfrac{1}{4}}$ avec $\mathrm{Arg}_C \min f = \left\{\left(\dfrac{1}{2}, 0\right)\right\}$.

Remarque : En utilisant directement $(\nabla f(u), \nabla\varphi(u))$ lié, on a $\begin{vmatrix} 2x-1 & 2x \\ 4y & 2y \end{vmatrix} = 2y(2x - 1 - 4x) = 2y(-1 - 2x) = 0$, soit $y = 0$ ou bien $x = -\dfrac{1}{2}$.

c) f est coercive continue et $C = \psi^{-1}(\{0\})$ est fermé comme image réciproque du fermé $\{0\}$ par l'application continue $\psi : u = (x, y, z) \mapsto x^2 + 2y^2 - z^2 - 1$ donc le minimum existe. On cherche les candidats au moyen du théorème de Kuhn-Tucker, c'est-à-dire que $\nabla f(u) + \mu\nabla\psi(u) = 0$, avec $\psi(u) = 0$, ce qui donne

$$\begin{cases} 2x + 2\mu x = 2x(1+\mu) = 0 \\ 2y + 4\mu y = 2y(1 + 2\mu) = 0 \\ 2z - 2\mu z = 2z(1-\mu) = 0 \end{cases}$$

μ ne peut pas prendre 2 valeurs distinctes à la fois donc 2 au moins des coordonnées de u sont nulles mais pas les 3, sinon on aurait $\psi(u) = -1 \neq 0$.

• Si $x = y = 0$, alors $-z^2 - 1 = 0$: impossible ;

• Si $x = z = 0$, alors $2y^2 = 1$ et $u = \left(0, \pm\dfrac{1}{\sqrt{2}}, 0\right)$ avec $f(u) = \dfrac{1}{2}$;

• Si $y = z = 0$, alors $x^2 = 1$ et $u = (\pm 1, 0, 0)$ avec $f(u) = 1$.

En tous ces points $\nabla\psi(u) \neq 0$ donc la contrainte est qualifiée.

Ainsi, $\boxed{\min_C f = \dfrac{1}{2}}$ avec $\mathrm{Arg}_C \min f = \left\{\left(0, -\dfrac{1}{\sqrt{2}}, 0\right), \left(0, \dfrac{1}{\sqrt{2}}, 0\right)\right\}$.

Pour le maximum, on remarque que C est non borné : en effet $u_k = \left(\sqrt{k^2+1}, 0, k\right) \in C$ et $\|u_k\|^2 = 2k^2 + 1 \to +\infty$ quand $k \to +\infty$. Il n'y a donc pas de maximum de f sur C.

---

15. Déterminer la hauteur de C (*i.e.* $z_{\max} - z_{\min}$) ; C étant l'intersection de la sphère d'équation $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ et du cône d'équation $(x + 2z)^2 + y^2 = z^2$.

On pose $u = (x, y, z)$. On cherche les extrémums de $f : u \mapsto z$ sur $C = \psi_1^{-1}(\{0\}) \cap \psi_2^{-1}(\{0\})$ où $\psi_1(u) = \|u\|^2 - 1$ et $\psi_2(u) = (x + 2z)^2 + y^2 - z^2$. C est fermé comme intersection de fermés (images réciproques de $\{0\}$ par ψ_1 et ψ_2 qui sont continues). De plus, C est borné, car contenu dans la sphère unité. Ainsi, C est compact et f continue y admet des extrémums. Les candidats sont les u tels que $(\nabla f(u), \nabla\psi_1(u), \nabla\psi_2(u))$ soit lié et $\psi_1(u) = \psi_2(u) = 0$.

$$\det(\nabla f(u),\nabla\psi_1(u),\nabla\psi_2(u))=\begin{vmatrix}0 & 2x & 2(x+2z)\\ 0 & 2y & 2y\\ 1 & 2z & 4(x+2z)-2z\end{vmatrix}=2y(2x-2(x+2z))=-8yz.$$

ψ_1 est convexe et $\nabla\psi_2(u)\neq 0$ si $u\neq 0$.

• Si $z=0$, alors $\psi_1(u)=x^2+y^2-1$ et $\psi_2(u)=x^2+y^2$ et on ne peut pas avoir $\psi_1(u)=\psi_2(u)=0$.

• Si $y=0$, alors $x^2+z^2=1$ et $(x+2z)^2-z^2=0=(x+3z)(x+z)$.

$\rightarrow x=-z$ donne $2z^2=1$ et $z=\pm\dfrac{1}{\sqrt{2}}$

$\rightarrow x=-3z$ donne $10z^2=1$ et $z=\pm\dfrac{1}{\sqrt{10}}$

On a donc $z_{\max}=\dfrac{1}{\sqrt{2}}$, $z_{\min}=-\dfrac{1}{\sqrt{2}}$ et $h=\dfrac{1}{\sqrt{2}}+\dfrac{1}{\sqrt{2}}$, soit $\boxed{h=\sqrt{2}}$.

---

16. Déterminer les extrémums de $f:x\mapsto\|x\|^2$ sur $C=\{x\in\mathbb{R}^n\ ;\ <Ax,x>=1\}$ où la matrice est symétrique.

Application à $n=2$ et $A=\begin{pmatrix}1 & \sqrt{6}\\ \sqrt{6} & 2\end{pmatrix}$.

$\psi:x\mapsto\langle Ax,x\rangle-1$ est continue et $C=\psi^{-1}(\{0\})$ est fermé comme image réciproque du fermé $\{0\}$ par l'application continue ψ. De plus $f:x\mapsto\|x\|^2$ est continue coercive donc $\min\limits_C f$ existe.

On a $\psi(x+h)=\langle A(x+h),x+h\rangle-1=\langle Ax,x\rangle-1+\langle Ax,h\rangle+\langle x,Ah\rangle+\langle Ah,h\rangle$, ce qui nous donne $\nabla\psi(x)=2Ax$ (car $\langle x,Ah\rangle=\langle Ax,h\rangle$ par symétrie de A). De même, $\nabla f(x)=2x$. On a donc, par Kuhn-Tucker, $2x+\mu 2Ax=0$ et $\langle Ax,x\rangle=1$. Si on avait $\mu=0$, on aurait $x=0$, et $\psi(0)=-1\neq 0$, donc $\mu\neq 0$ et $Ax=-\dfrac{1}{\mu}x$ et les candidats sont des vecteurs propres de A.

A est une matrice symétrique réelle donc diagonalisable dans une base orthonormée (e_i), de valeurs propres $\lambda_1\leq\lambda_2\leq\cdots\leq\lambda_n$ et si $x=\sum\limits_{i=1}^{n}x_ie_i$,

$$\lambda_1\|x\|^2\leq\langle Ax,x\rangle=1=\sum_i\lambda_ix_i^2\leq\lambda_n\|x\|^2$$

• Si $\lambda_n\leq 0$, $C=\emptyset$ (on ne peut pas avoir $\langle Ax,x\rangle=1$)

• Si $\lambda_n>0$, pour $x\in C$, $\|x\|^2\geq\dfrac{1}{\lambda_n}$ avec égalité si $x\in E_{\lambda_n}$ et $\|x\|^2=\dfrac{1}{\lambda_n}$, soit $x=\dfrac{1}{\sqrt{\lambda_n}}u_n$ où u_n est un vecteur unitaire de E_{λ_n}. On a donc $\min\limits_C f=\dfrac{1}{\lambda_n}$.

• Si $\lambda_1>0$, alors $\|x\|^2\leq\dfrac{1}{\lambda_1}$ avec égalité si $x\in E_{\lambda_1}$ et $\|x\|^2=\dfrac{1}{\lambda_1}$, soit $x=\dfrac{1}{\sqrt{\lambda_1}}u_1$ où u_1 est un vecteur unitaire de E_{λ_1}. On a donc $\max\limits_C f=\dfrac{1}{\lambda_1}$.

• Si $\lambda_1\leq 0$, posons $x_k=ke_1+\dfrac{1}{\sqrt{\lambda_n}}\sqrt{1-\lambda_1k^2}e_n$: $x_k\in C$ et $\|x_k\|^2\geq k^2\rightarrow+\infty$, donc pas de maximum si $\lambda_1\leq 0$ et si $\lambda_1>0$, $\max\limits_C f=\dfrac{1}{\lambda_1}$.

Application : $A=\begin{pmatrix}1 & \sqrt{6}\\ \sqrt{6} & 1\end{pmatrix}$. On a $\chi_A(\lambda)=\lambda^2-\mathrm{tr}A\,\lambda+\det A=\lambda^2-3\lambda-4=(\lambda+1)(\lambda-4)$.

Les valeurs propres sont -1 et 4 : il n'y a donc pas de maximum et $\boxed{\min\limits_C f=\dfrac{1}{4}}$. $A-4I=$

$\begin{pmatrix} -3 & \sqrt{6} \\ \sqrt{6} & -2 \end{pmatrix}$ d'où $E_4 = \{u_4 = (\sqrt{6}\alpha, 3\alpha),\ \alpha \in \mathbb{R}\}$. On veut $\|u_4\|^2 = \dfrac{1}{4} = 15\alpha^2$, donc $\alpha^2 = \dfrac{1}{60}$ et finalement $\boxed{\operatorname{Arg}_C \min f = \left\{\left(\dfrac{1}{\sqrt{10}}, \sqrt{\dfrac{3}{20}}\right), \left(-\dfrac{1}{\sqrt{10}}, -\sqrt{\dfrac{3}{20}}\right)\right\}}$.

---

17. Application à la géométrie.

a) Déterminer le point P du plan d'équation $ax + by + cz + d = 0$ dont la distance à O est minimale.

b) Calculer la distance du point $M_0(x_0, y_0, z_0)$ à la droite d'équation

$$\begin{cases} ax + by + cz + d = 0 \\ a'x + b'y + c'z + d' = 0 \end{cases}.$$

---

a) On pose $u = (x, y, z)$. Si P a pour coordonnées (x, y, z), alors $d(O, P)^2 = \|u\|^2$. On cherche donc à minimiser $f : u \mapsto \|u\|^2$ sur $C = \{u\ ;\ ax + by + cz + d = 0\} = \psi^{-1}(\{0\})$ avec $\psi : (x, y, z) \mapsto ax + by + cz + d$ continue.

C est fermé comme image réciproque du fermé $\{0\}$ par l'application continue ψ ; f est coercive ($\lim\limits_{\|u\| \to +\infty} f(u) = +\infty$) donc $\min\limits_C f$ existe et vérifie $\nabla f(u) + \mu \nabla \psi(u) = 0$ c'est-à-dire $\begin{cases} 2x + \mu a = 0 \\ 2y + \mu b = 0 \\ 2z + \mu c = 0 \end{cases}$ (La contrainte est qualifiée car linéaire).

On exprime x, y et z en fonction de μ et on reporte dans $\psi(u) = 0$, ce qui donne :

$$a\left(-\frac{\mu a}{2}\right) + b\left(-\frac{\mu b}{2}\right) + c\left(-\frac{\mu c}{2}\right) + d = 0,$$

soit $\mu = \dfrac{2d}{a^2 + b^2 + c^2}$, $x = -\dfrac{ad}{a^2 + b^2 + c^2}$, $y = -\dfrac{bd}{a^2 + b^2 + c^2}$ et $z = -\dfrac{cd}{a^2 + b^2 + c^2}$.

On a alors $d(O, P)^2 = \|u\|^2 = \dfrac{d^2}{(a^2 + b^2 + c^2)^2}(a^2 + b^2 + c^2) = \dfrac{d^2}{a^2 + b^2 + c^2}$ et $\min\limits_{P \in C} d(O, P) = d(O, C) = \dfrac{|d|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}$.

Par la méthode classique : $\mathcal{H}$ est l'hyperplan d'équation $ax + by + cz + d = 0$. Si P est la projection orthogonale de O sur $\mathcal{H}$, on a $OP \perp \mathcal{H}$ donc $x_p = \lambda a$, $y_P = \lambda b$, $z_p = \lambda c$ (ce qui est l'analogue de $\nabla f(u) + \mu \nabla \psi(u)$, puis $P \in \mathcal{H}$ donne $\lambda(a^2 + b^2 + c^2) + d = 0$ (qui est l'analogue de $\psi(u) = 0$).

b) $d(M_0, M)^2 = \|\overrightarrow{MM_0}\|^2 = (x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + (z - z_0)^2 = f(x, y, z)$.

On cherche $\min\limits_C f$ où $C = \{(x, y, z)\ ;\ ax + by + cz + d = 0 \text{ et } a'x + b'y + c'z = 0\}$.

On pose $u = (x, y, z)$, $\psi_1(u) = ax + by + cz + d$ et $\psi_2(u) = a'x + b'y + c'z + d'$: les fonctions f, ψ_1 et ψ_2 sont continues convexes.

On a donc, pour le minimum, $\begin{cases} (\nabla f(u), \nabla \psi_1(u), \nabla \psi_2(u)) \text{ liés} \\ \psi_1(u) = \psi_2(u) = 0 \end{cases}$.

Or $\det(\nabla f(u), \nabla \psi_1(u), \nabla \psi_2(u)) = \begin{vmatrix} 2(x - x_0) & a & a' \\ 2(y - y_0) & b & b' \\ 2(z - z_0) & c & c' \end{vmatrix} = 0$ traduit exactement $\overrightarrow{M_0M} \perp \mathcal{D}$ et $\psi_1(u) = \psi_2(u) = 0$ traduit $M \in \mathcal{D}$...

$\boxed{\textbf{18.}}$ Soit $C = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \ ; \ x + y + z = -3 \text{ et } xy + xz + yz = 0\}$.

a) Montrer que C est borné et calculer les extrémums sur C de $f : (x, y, z) \mapsto xyz$.

b) Retrouver ce résultat en étudiant, pour $\lambda \in \mathbb{R}$, le nombre de racines réelles de

$$P_\lambda(x) = x^3 + 3x^2 - \lambda.$$

---

a) Si $u = (x, y, z) \in C$, $(x + y + z)^2 = 9 = x^2 + y^2 + z^2 + 2(xy + xz + yz) = x^2 + y^2 + z^2$ donc $u \in \mathcal{S}(0, 3)$. Ainsi, C est inclus dans la sphère de centre 0 et de rayon 3, donc C est bien borné. $C = \psi_1^{-1}(\{0\}) \cap \psi_2^{-1}(\{0\})$ avec $\psi_1(u) = x + y + z + 3$ et $\psi_2(u) = xy + xz + yz$. ψ_1 et ψ_2 sont continues et C est fermé, comme intersection de deux fermés (images réciproques de $\{0\}$ fermé par des applications continues).

C est un fermé borné et c'est donc un compact. Comme f est continue, elle admet un maximum et un minimum sur le compact C.

Pour rechercher les candidats au poste d'extrémum, on va utiliser le théorème de Kuhn-Tucker. En particulier, on doit avoir $(\nabla f(u), \nabla\psi_1(u), \nabla\psi_2(u))$ liés, avec $\psi_1(u) = 0$ et $\psi_2(u) = 0$.

On a $\det(\nabla f(u), \nabla\psi_1(u), \nabla\psi_2(u)) = \begin{vmatrix} yz & 1 & y+z \\ xz & 1 & x+z \\ xy & 1 & x+y \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} yz & 1 & y+z \\ z(x-y) & 0 & x-y \\ y(x-z) & 0 & x-z \end{vmatrix} = -(x-y)(x-z)(z-y)$ en faisant $L_i \leftarrow L_i - L_1$ pour $i \in \{2, 3\}$, puis en développant par rapport à la deuxième colonne.

Ainsi, les extrémums possibles vérifient le système : $\begin{cases} (x-y)(x-y)(x-z) = 0 \\ x + y + z = -3 \\ xy + xz + yz = 0 \end{cases}$.

On remarque que x, y et z jouent le même rôle et que deux d'entre eux doivent être égaux.

Si $x = y$, alors $z = -3 - 2x$ et $x^2 + 2x(-3 - 2x) = 0 = x(-6 - 3x)$. On a alors, soit $x = y = 0$ et $z = -3$, soit $x = y = -2$ et $z = 1$. Par symétrie, les candidats sont donc $(0, 0, -3)$, $(0, -3, 0)$, $(-3, 0, 0)$ d'image 0 par f et $(-2, -2, 1)$, $(-2, 1, -2)$, $(1, -2, -2)$ d'image 4 par f. ψ_1 est linéaire et $\nabla\psi_2(u) \neq 0$ pour $u \neq 0$ donc les contraintes sont qualifiés en tout $u \neq 0$.

On a finalement $\boxed{\min_C f = 0, \ \max_C f = 4}$, $\boxed{\mathrm{Arg}_C \min f = \{(0, 0, -3), (0, -3, 0), (-3, 0, 0)\}}$ et $\boxed{\mathrm{Arg}_C \max f = \{(-2, -2, 1), (-2, 1, -2), (1, -2, -2)\}}$.

b) $P_\lambda(x) = (x - x_1)(x - x_2)(x - x_3) = x^3 - (x_1 + x_2 + x_3)x^2 + (x_1x_2 + x_1x_3 + x_2x_3)x - x_1x_2x_3 = x^3 + 3x - \lambda$ si $(*)$ $\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = -3 \\ x_1x_2 + x_1x_3 + x_2x_3 = 0 \\ x_1x_2x_3 = \lambda \end{cases}$.

On a $P'_\lambda(x) = 3x^2 + 6x = 3x(x+2)$ qui est positif si $x < -2$ ou $x > 0$ et négatif si $x \in]-2, 0[$. On a le tableau de variations suivant :

$$\begin{array}{|c|ccccccc|}
\hline
x & -\infty & & -2 & & 0 & & +\infty \\
\hline
P'_\lambda(x) & & + & 0 & - & 0 & + & \\
\hline
P_\lambda(x) & -\infty & \nearrow & 4-\lambda & \searrow & -\lambda & \nearrow & +\infty \\
\hline
\end{array}$$

On a donc 3 racines réelles si $-\lambda \leq 0$ et $4 - \lambda \geq 0$, c'est-à-dire pour $\lambda \in [0, 4]$ et dans ce cas $(*)$ a une solution.
