Devoir d'Optimisation n°2 pour le mardi 7 mai 2019

1. Soit $E = \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$, l'espace euclidien des matrices symétriques de $\mathbb{R}^n$, muni du produit scalaire $\langle A, B\rangle = \mathrm{tr}(AB)$ et soit $f : E \to \mathbb{R}$ telle que $f(X) = \frac{1}{n}\|X\|^2 - \left(\frac{\mathrm{tr}X}{n}\right)^2$.

On souhaite calculer $f^* : S \in E \mapsto \sup\limits_{X\in E} (\langle S, X\rangle - f(X))$.

a) Vérifier que, pour tout $X \in E$, $f(X) = \frac{1}{n}\|X - \frac{\mathrm{tr}X}{n} I_n\|^2$ et en déduire que f est convexe.

b) Montrer que $\max\limits_{X\in E} (\langle S, X\rangle - f(X))$ existe si et seulement si $\mathrm{tr}S = 0$ et qu'alors

$$f^*(S) = \frac{n}{4}\|S\|^2.$$

---

2. Déterminer les extrémums de la fonction f sur C dans les cas suivants :

a) $f(x, y) = x^2 + xy$ et $C = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \ ;\ y \geq 0,\ y \geq x,\ x^2 + y^2 \leq 1\}$;

b) $f(x, y, z) = x^2 + \frac{1}{2}y^2 + \frac{1}{2}z^2 - 2xy - xz$ et $C = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \ ;\ x^2 + y^2 + z^2 \leq 1\}$.

---

3. Calculs de distances

a) Sur $\mathbb{R}^2$, soit $X = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \ ; x \geq 0,\ y \geq 0,\ x + y \leq 6 \text{ et } y \geq x^2\}$. Déterminer la distance de $A\left(\frac{9}{4}, 2\right)$ à X et vérifier graphiquement le résultat.
[*On utilisera la factorisation* $2x^3 - 3x + \frac{9}{4} = \left(x - \frac{3}{2}\right)\left(2x^2 + 3x + \frac{3}{2}\right)$.]

b) Sur $\mathbb{R}^3$, on considère le cône $C = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \ ;\ z \geq \sqrt{x^2 + y^2}\}$. Déterminer la distance d'un point $P(a, b, c)$ à C.

---

4. Soit $u \in \mathbb{R}^n$ fixé. On cherche $x \in (\mathbb{R}_+)^n$ vérifiant $\sum\limits_{i=1}^{n} x_i = 1$, le plus proche de u pour la norme euclidienne.

a) Formaliser cette question comme un problème de minimisation. Montrer l'existence d'une solution et écrire avec le plus grand soin les relations de Kuhn-Tucker.

b) Résoudre le problème dans le cas $n = 3$ et $u = (5, 1, 4)$.