Corrigé de l'examen de Probabilités du lundi 26 mars 2018

Exercice I- [12 points]

1. [*1,5pt*] $X_1(\Omega) = \{0, 1\}$ avec $P([X_1 = 1]) = P(R_1) = \dfrac{1}{1+3} = \dfrac{1}{4}$ et $P([X_1 = 0]) = P(B_1) = \dfrac{3}{4}$ donc $\boxed{X_1 \text{ suit la loi de Bernoulli } \mathcal{B}(1/4)}$ d'où $\boxed{\mathbb{E}(X_1) = 1/4}$.

2. a) [*1pt*] $P([X_2 = 0]/[X_1 = 0]) = P(B_2/B_1)$. Or, si on a tiré une boule bleue au premier tirage, après celui-ci, on a $3 + 2 = 5$ boules bleues et toujours 1 boule rouge, soit 6 boules en tout. On a donc $P([X_2 = 0]/[X_1 = 0]) = P(B_2/B_1) = \dfrac{5}{6}$. D'autre part $P([X_1 = 0] \cap [X_2 = 0]) = P([X_1 = 0]) \times P([X_2 = 0]/[X_1 = 0]) = \dfrac{3}{4} \times \dfrac{5}{6}$, soit $\boxed{P([X_1 = 0] \cap [X_2 = 0]) = \dfrac{5}{8}}$.

2. b) [*2pts*] On a $(X_1, X_2)(\Omega) = \{(0; 0), (0; 1), (1; 0), (1; 1)\}$ avec $p_{0,0} = P([X_1 = 0] \cap [X_2 = 0]) = \dfrac{5}{8}$ d'après a). On a alors $p_{0,1} = P([X_1 = 0] \cap [X_2 = 1]) = P([X_1 = 0]) - p_{0,0} = \dfrac{3}{4} - \dfrac{5}{8} = \dfrac{1}{8}$.
De même, Si on a tiré une boule rouge au premier tirage, après celui-ci, on a $1 + 2 = 3$ boules rouges et toujours 3 boules bleues, donc encore 6 boules en tout et $P([X_2 = 0]/[X_1 = 1]) = P(B_2/R_1) = \dfrac{3}{6}$, donc $p_{1,0} = P([X_1 = 1] \cap [X_2 = 0]) = P([X_1 = 1])P([X_2 = 0]/[X_1 = 1]) = \dfrac{1}{8}$ et $p_{1,1} = P([X_1 = 1]) - p_{1,0} = \dfrac{1}{4} - \dfrac{1}{8} = \dfrac{1}{8}$.
Finalement, $p_{0,0} = \dfrac{5}{8}$ et $p_{0,1} = p_{1,0} = p_{1,1} = \dfrac{1}{8}$.
On a alors $P([X_2 = 0]) = p_{0,0} + p_{1,0} = \dfrac{5}{8} + \dfrac{1}{8} = \dfrac{3}{4}$ et $P([X_2 = 1]) = p_{0,1} + p_{1,1} = \dfrac{1}{8} + \dfrac{1}{8} = \dfrac{1}{4}$.
Ainsi, $\boxed{X_2 \text{ a même loi que } X_1}$.
Si X_1 et X_2 étaient indépendantes, on aurait $P([X_1 = 0] \cap [X_2 = 0]) = P([X_1 = 0])P([X_2 = 0])$, soit $\dfrac{5}{8} = \dfrac{9}{16}$, ce qui est faux, donc $\boxed{X_1 \text{ et } X_2 \text{ ne sont pas indépendantes}}$.

2. c) [*1,5pt*] $S_2(\Omega) = \{0, 1, 2\}$, avec $P([S_2 = 0]) = p_{0,0} = \dfrac{5}{8}$, $P([S_2 = 1]) = p_{0,1} + p_{1,0} = \dfrac{2}{8}$ et $P([S_2 = 2]) = p_{1,1} = \dfrac{1}{8}$. $\mathbb{E}(S_2) = \mathbb{E}(X_1) + \mathbb{E}(X_2) = 2\mathbb{E}(X_1)$, soit $\boxed{\mathbb{E}(S_2) = \dfrac{1}{2}}$.

3. a) [*1pt*] $[S_n = k]$ signifie qu'à l'issue du tirage n, il y a $2n + 4$ boules, dont $2k + 1$ rouges (et $2(n - k) + 3$ bleues). On a $k \geq 0$ et $n - k \geq 0$, donc $\boxed{S_n(\Omega) = [\![0, n]\!]}$.

3. b) [*2pts*] D'après a), on a $\boxed{P([X_{n+1} = 1]/[S_n = k]) = \dfrac{2k + 1}{2n + 4}}$ pour tout k entier tel que $0 \leq k \leq n$. On applique alors les probabilités totales à $[X_{n+1} = 1]$, avec le système complet d'événements de probabilités non nulles $([S_n = k])_{0 \leq k \leq n}$:

$$P([X_{n+1} = 1]) = \sum_{k=0}^{n} P([X_{n+1} = 1]/[S_n = k])P([S_n = k]) = \sum_{k=0}^{n} \frac{2k + 1}{2n + 4} P([S_n = k])$$

puis, en séparant la somme en deux,

$$P([X_{n+1} = 1]) = \frac{2}{2n + 4} \sum_{k=0}^{n} kP([S_n = k]) + \frac{1}{2n + 4} \sum_{k=0}^{n} kP([S_n = k]) = \frac{2\mathbb{E}(S_n) + 1}{2n + 4}.$$

3. c) [*1pt*] En utilisant 3.b), on a $P([X_{n+1}=1])=\mathbb{E}(X_{n+1})=\dfrac{2\mathbb{E}(S_n)+1}{2n+4}$, puis $\mathbb{E}(S_{n+1})=\mathbb{E}(S_n)+\mathbb{E}(X_{n+1})=\dfrac{(2n+6)\mathbb{E}(S_n)+1}{2n+4}$ et on a bien $\boxed{\mathbb{E}(S_{n+1})=\dfrac{n+3}{n+2}\mathbb{E}(S_n)+\dfrac{1}{2n+4}}$.

3. d) [*1pt*] • Pour $n=1$, on a $\mathbb{E}(S_1)=\mathbb{E}(X_1)=\dfrac{1}{4}$ donc la propriété est vraie.

• Si $\mathbb{E}(S_n)=\dfrac{n}{4}$, alors $\mathbb{E}(S_{n+1})=\dfrac{n+3}{n+2}\dfrac{n}{4}+\dfrac{1}{2n+4}=\dfrac{n(n+3)+2}{4n+8}$ avec $n(n+3)+2=n^2+3n+2=(n+1)(n+2)$, donc $\mathbb{E}(S_{n+1})=\dfrac{(n+1)(n+2)}{4(n+2)}$, soit $\boxed{\mathbb{E}(S_{n+1})=\dfrac{n+1}{4}}$.

3. e) [*1pt*] $X_{n+1}(\Omega)=\{0;1\}$ et $P(X_{n+1}=1)=\mathbb{E}(S_{n+1})-\mathbb{E}(S_n)=\dfrac{n+1}{4}-\dfrac{n}{4}=\dfrac{1}{4}$. Ainsi, $P([X_{n+1}=0])=\dfrac{3}{4}$ et $\boxed{\text{les } X_n \text{ ont toutes même loi}}$.

__Exercice II-__ **[6 points]**

1. Les lancers sont mutuellement indépendants : $\boxed{T \text{ suit une loi géométrique de paramètre } p}$, soit $T(\Omega)=\mathbb{N}^*$ et $P([T=n])=p(1-p)^{n-1}$. La probabilité que les lancers ne donnent jamais Pile est $1-\sum\limits_{n=1}^{+\infty}p(1-p)^{n-1}=1-p\dfrac{1}{1-(1-p)}=0$ [*1pt*].

2. • Si $T=1$, le joueur gagne au premier coup et on a $G=-a+ka$.

• Si $T=n$, le joueur a perdu $n-1$ fois. Il a parié, lors de ces défaites, $-a(1+k+\cdots+k^{n-1})$. Il gagne à la fin k^na puisque sa dernière mise est $k^{n-1}a$. On a donc

$$G=-a\frac{k^n-1}{k-1}+k^na=\frac{a}{k-1}+k^na\frac{k-2}{k-1}.$$

Cette formule est également vraie si $n=1$. On a $G=f(T)$ avec $\boxed{f(n)=\dfrac{a}{k-1}+k^na\dfrac{k-2}{k-1}}$ pour tout $n\in\mathbb{N}^*$ [*2pts*].

3. Par le théorème de transfert, G admet une espérance si, et seulement si, la série $\left(\sum\limits_{n\geq 1}f(n)P([T=n])\right)$ converge absolument, donc converge car ses termes sont >0.

• On a $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\dfrac{a}{k-1}p(1-p)^{n-1}=\dfrac{a}{k-1}$.

• La série $\left(\sum\limits_{n\geq 1}k^na\dfrac{k-2}{k-1}p(1-p)^{n-1}\right)$ converge si, et seulement si, $k(1-p)<1$ (ce nombre est >0). Dans ce cas, on a

$$\mathbb{E}(G)=\frac{a}{k-1}+\frac{apk(k-2)}{k-1}\sum_{n=1}^{+\infty}(k(1-p))^{n-1}=\frac{a}{k-1}+\frac{apk(k-2)}{k-1}\frac{1}{1-k(1-p)}=a\frac{1-k(1-p)+pk(k-2)}{(k-1)(1-k(1-p))}$$

On a $1-k(1-p)+pk(k-2)=pk^2-pk+1-k=(pk-1)(k-1)$, donc $\boxed{\mathbb{E}(G)=a\dfrac{pk-1}{1-k(1-p)}}$ [*3pts*].

<u>Exercice III-</u> [14 points]

1. f est positive, continue sur $\mathbb{R} \setminus \{0,1\}$ et $\displaystyle\int f(x)\,dx = \int_0^1 k(2x+1)\,dx = k\left[x^2+x\right]_0^1 = 2k = 1$ donc $\boxed{f \text{ est une densité pour } k = \frac{1}{2}}$. $\displaystyle\mathbb{E}(X) = \int x f(x)\,dx = k\int_0^1 x(2x+1)\,dx = k\left[\frac{2x^3}{3}+\frac{x}{2}\right]_0^1 = \frac{1}{2}\left(\frac{2}{3}+\frac{1}{2}\right)$, soit $\boxed{\mathbb{E}(X) = \frac{7}{12}}$. $\displaystyle\mathbb{E}(X^2) = \int x^2 f(x)\,dx = k\int_0^1 x^2(2x+1)\,dx = k\left[\frac{2x^4}{4}+\frac{x^3}{3}\right]_0^1 = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{3}\right) = \frac{5}{12}$ et $\displaystyle\mathrm{var}(X) = \mathbb{E}(X^2) - \mathbb{E}(X)^2 = \frac{5}{12} - \left(\frac{7}{12}\right)^2 = \frac{5\times 12 - 49}{144}$, soit $\boxed{\mathrm{var}(X) = \frac{11}{144}}$. [*3pts*]

b) [*1pt*] $$F_X(x) = \int_{-\infty}^x f(t)\,dt = \begin{cases} 0 \text{ si } x < 0 \\ \displaystyle\int_0^x k(2t+1)\,dt = \frac{1}{2}\left[t^2+t\right]_0^x = \frac{x^2+x}{2} \text{ si } x \in [0,1[\\ \displaystyle\int_0^1 k(2t+1)\,dt = 1 \text{ si } x \geq 1 \end{cases}$$ d'où

$$\boxed{F_X(x) = \frac{x^2+x}{2}\,\mathbb{I}_{[0,1[}(x) + \mathbb{I}_{[1,+\infty[}(x)}$$

c) [*2,5pts*] Si $t < 0$, $P([Z \leq t]) = 0$. Si $t \in [0,1]$, $P([Z \leq t]) = P([-\sqrt{t} \leq X \leq \sqrt{t}]) = F_X(\sqrt{t}) - F_X(-\sqrt{t}) = F_X(\sqrt{t}) = \dfrac{t+\sqrt{t}}{2}$. Enfin, si $t \geq 1$, $P([Z \leq t]) = P([X^2 \leq t]) = 1$. On a donc bien $\boxed{F_Z(t) = \frac{1}{2}(t+\sqrt{t})\,\mathbb{I}_{[0,1[}(t) + \mathbb{I}_{[1,+\infty[}(t)}$.

On a alors $\displaystyle f_Z(t) = F_Z'(t) = \frac{1}{2}\left(1+\frac{1}{2\sqrt{t}}\right)\mathbb{I}_{]0,1[}(t)$, puis $\boxed{\mathbb{E}(Z) = \mathbb{E}(X^2) = \frac{5}{12}}$.

2. a) [*1pt*] $\displaystyle f_X(x) = \int g(x,y)\,dy = \mathbb{I}_{]0,1[}(x)\int_0^1 (x+y)\,dy = \mathbb{I}_{]0,1[}(x)\left[xy+\frac{y^2}{2}\right]_{y=0}^{y=1} = \left(x+\frac{1}{2}\right)\mathbb{I}_{]0,1[}(x) = \frac{1}{2}(2x+1)\,\mathbb{I}_{]0,1[}(x)$. Comme x et y jouent le même rôle dans g, $\boxed{X \text{ et } Y \text{ ont même loi de densité } f}$.

b) $\displaystyle f_Y^{X=x}(y) = \frac{g(x,y)}{f_X(x)} = \frac{2(x+y)}{2x+1}\,\mathbb{I}_{]0,1[}(y)$ pour $x \in]0,1[$. On a alors $\displaystyle\mathbb{E}^{X=x}(Y) = \int_0^1 \frac{2(xy+y^2)}{2x+1}\,dy = \frac{2}{2x+1}\left[\frac{xy^2}{2}+\frac{y^3}{3}\right]_{y=0}^{y=1} = \frac{2}{2x+1}\left(\frac{x}{2}+\frac{1}{3}\right)$, soit $\boxed{\mathbb{E}^{X=x}(Y) = \frac{3x+2}{3(2x+1)}}$ et on a bien $\boxed{\mathbb{E}^{X}(Y) = \frac{3X+2}{3(2X+1)}}$ [*2pts*].

c) On a $\displaystyle f_X(x)f_Y(y) = \frac{1}{4}(2x+1)(2y+1)\mathbb{I}_{]0,1[}(x)\mathbb{I}_{]0,1[}(y) \neq g(x,y)$ car $\displaystyle\frac{(2x+1)(2y+1)}{4} \neq x+y$.

$$\mathbb{E}(XY) = \int_0^1\int_0^1 xy(x+y)\,dx\,dy = \int_0^1 \left[\frac{x^2y^2}{2}+x\frac{y^3}{3}\right]_{y=0}^{y=1} dx = \int_0^1 \left(\frac{x^2}{2}+\frac{x}{3}\right)dx = \left[\frac{x^3}{6}+\frac{x^2}{6}\right]_0^1 = $$

$\dfrac{1}{3}$ et $\displaystyle\mathrm{cov}(X,Y) = \frac{1}{3} - \frac{49}{144} = \frac{48-49}{144}$, soit $\boxed{\mathrm{cov}(X,Y) = -\frac{1}{144}}$ [*1,5pt*].

3. $\displaystyle f_{S_2}(s) = \int g(x,s-x)\,dx = \int s\,\mathbb{I}_{]0,1[}(x)\,\mathbb{I}_{]0,1[}(s-x)\,dx$ où $\mathbb{I}_{]0,1[}(s-x) = 1$ si $0 < s-x < 1$, soit $s-1 < x < s$ et $$]0,1[\cap]s-1,s[= \begin{cases}]0,s[& \text{si } s \in]0,1[\\ ]s-1,1[& \text{si } s \in [1,2[\\ \emptyset & \text{si } s \leq 0 \text{ ou } s \geq 2 \end{cases}.$$

Pour $s \in]0,1[$, $f_S(s) = \displaystyle\int_0^s s\,dx = s^2$; Pour $s \in]1,2[$, $f_S(s) = \displaystyle\int_{s-1}^1 s\,dx = s(1-(s-1)) = s(2-s)$ d'où $\boxed{f_S(s) = s^2 \mathbb{I}_{]0,1[}(s) + s(2-s)\,\mathbb{I}_{[1,2[}(s)}$ [*2pts*].

$\mathbb{E}(S) = \mathbb{E}(X+Y) = \mathbb{E}(X) + \mathbb{E}(Y) = 2 \times \dfrac{7}{12}$, donc $\boxed{\mathbb{E}(S) = \dfrac{7}{6}}$ [*1pt*].

<u>Exercice IV-</u> [8 points]

1. [*3pts*] X suit la loi $\mathcal{N}(80;15^2)$ donc $X^* = \dfrac{X-80}{15}$ suit la loi normale $\mathcal{N}(0;1)$.

• $P([X > 50]) = P\left(\left[X^* > \dfrac{50-80}{15}\right]\right) = P([X^* > -2]) = 0,5 + \Phi(2) = 0,5 + 0,477 = \boxed{0,977}$.

• $P([65 < X < 95]) = P\left(\left[\dfrac{65-80}{15} < X^* < \dfrac{95-80}{15}\right]\right) = P([-1 < X^* < 1]) = 2\Phi(1) = \boxed{0,682}$.

• $P([X > 110]) = P\left(\left[X^* > \dfrac{110-80}{15}\right]\right) = P([X^* > 2]) = 0,5 - \Phi(2) = \boxed{0,023}$.

2. [*1pt*] On a ici $\boxed{\mathbb{E}(S_n) = n\mathbb{E}(X) = 80n}$ et $\mathrm{var}(S_n) = n \times 15^2$ donc $\boxed{\sigma(S_n) = 15\sqrt{n}}$.

3. [*4pts*] On veut $P([S_n > 1000]) \leq 0,01$. Or $\dfrac{S_n - 80n}{15\sqrt{n}}$ suit la loi $\mathcal{N}(0,1)$, donc on cherche le plus grand n pour lequel $P\left(\left[X^* > \dfrac{1000-80n}{15\sqrt{n}}\right]\right) \leq 0,01$, soit $\Phi\left(\dfrac{1000-80n}{15\sqrt{n}}\right) \geq 0,49$ soit $\dfrac{1000-80n}{15\sqrt{n}} \geq 2,31$ ou $80n + 34,65\sqrt{n} - 1000 \leq 0$ (équation du deuxième degré en $\sqrt{n}$). On trouve $\sqrt{n} \approx 3,32$ et donc $\boxed{n = 11}$. En mettant 10 personnes maximum, il y aura donc une probabilité de surcharge inférieure à 1%.
