Corrigé du Devoir d'Optimisation n°4 (28 mai 2019)

$\boxed{\textbf{1.}}$ [**4 points**]. Pour "coller" à la définition du cours, on duplique x_3 en $x_3 = x_3' - x_3''$ avec $x_3' \geq 0$ et $x_3'' \geq 0$ et on pose $x_1' = -x_1$ (on se ramène ainsi à 4 variables positives). Par ailleurs, on s'arrange pour que toutes les contraintes soient des inégalités $\leq$, d'où le problème équivalent :

$$\left\{\begin{array}{rrrrrrrrcr} - & 2x_1' & + & x_2 & - & x_3' & + & x_3'' & = & z[\max] \\ - & 5x_1' & - & x_2 & + & x_3' & - & x_3'' & \leq & 3 \\ - & 3x_1' & + & 2x_2 & - & x_3' & + & x_3'' & \leq & 7 \\ & 3x_1' & - & 2x_2 & + & x_3' & - & x_3'' & \leq & -7 \\ & x_1' & + & x_2 & + & 3x_3' & - & 3x_3'' & \leq & 1 \\ & x_1' & & & & & & & \geq & 0 \\ & & & x_2 & & & & & \geq & 0 \\ & & & & & x_3' & & & \geq & 0 \\ & & & & & & & x_3'' & \geq & 0 \end{array}\right. .$$

L'application des formules du cours donne alors le programme dual :

$$\left\{\begin{array}{rrrrrrrrcr} & 3y_1 & + & 7y_2' & - & 7y_2'' & + & y_3 & = & w[\min] \\ - & 5y_1 & - & 3y_2' & + & 3y_2'' & + & y_3 & \geq & -2 \\ - & y_1 & + & 2y_2' & - & 2y_2'' & + & y_3 & \geq & 1 \\ & y_1 & - & y_2' & + & y_2'' & + & 3y_3 & \geq & -1 \\ - & y_1 & + & y_2' & - & y_2'' & - & 3y_3 & \geq & 1 \\ & y_1 & & & & & & & \geq & 0 \\ & & & y_2' & & & & & \geq & 0 \\ & & & & & y_2'' & & & \geq & 0 \\ & & & & & & & y_3 & \geq & 0 \end{array}\right. .$$

En remplaçant $y_2' - y_2''$ par y_2 et en transformant les deux dernières inégalités en une seule égalité, on obtient finalement :

$$\boxed{\left\{\begin{array}{rrrrrrcr} & 3y_1 & + & 7y_2 & + & y_3 & = & w[\min] \\ - & 5y_1 & - & 3y_2 & + & y_3 & \geq & -2 \\ - & y_1 & + & 2y_2 & + & y_3 & \geq & 1 \\ & y_1 & - & y_2 & + & 3y_3 & = & -1 \\ & y_1 & & & & & \geq & 0 \\ & & & y_2 & & & \in & \mathbb{R} \\ & & & & & y_3 & \geq & 0 \end{array}\right.}.$$

$\boxed{\textbf{2.}}$ [**6 points**] On utilise une variable artificielle x_a et deux variables d'écart $x_{\bar{1}}$ et $x_{\bar{2}}$ et on cherche le maximum de $z' = -x_a$:

$$\left\{\begin{array}{rrrrrrrrrrcr} x_1 & + & x_2 & + & x_3 & + & x_{\bar{1}} & & & & = & 4 \\ 2x_1 & + & x_2 & + & x_3 & & & - & x_{\bar{2}} & + x_a & = & 2 \\ 2x_1 & + & x_2 & + & x_3 & & & - & x_{\bar{2}} & & = & z' + 2 \end{array}\right.$$

	$i\downarrow$	$j\rightarrow$	x_1	x_2	x_3	$x_{\bar 1}$	$x_{\bar 2}$	x_a	β	$\beta_i/\alpha_{i,e}$
	$\bar 1$		1	1	1	1	0	0	4	4
$s \leftarrow$	a		2	1	1	0	-1	1	2	1
		Δ_j	2	1	1	0	-1	0	$z'+2$	
			$\uparrow e$							

$i\downarrow$	$j\rightarrow$	x_1	x_2	x_3	$x_{\bar 1}$	$x_{\bar 2}$	x_a	β
$\bar 1$		0	1/2	1/2	1	1/2	$-1/2$	3
1		1	1/2	1/2	0	$-1/2$	1/2	1
	Δ_j	0	0	0	0	0	-1	$z'+0$

On est parvenu à l'optimum (tous les Δ_j sont ≤ 0) et on a $z' = 0$ avec $x_a = 0$. C'est donc qu'il y a bien des solutions au problème initial [*4pts*]. Pour continuer, on supprime la colonne correspondant à x_a et on exprime z en fonction des variables hors base :

$$z = x_1 + x_2 + 2x_3 = \left(1 - \frac{1}{2}x_2 - \frac{1}{2}x_3 + \frac{1}{2}x_{\bar 2}\right) + x_2 + 2x_3 = \frac{1}{2}x_2 + \frac{3}{2}x_3 + \frac{1}{2}x_{\bar 2} + 1$$

$i\downarrow$	$j\rightarrow$	x_1	x_2	x_3	$x_{\bar 1}$	$x_{\bar 2}$	β
$\bar 1$		0	1/2	1/2	1	1/2	3
1		1	1/2	$\boxed{1/2}$	0	$-1/2$	1
	Δ_j	0	1/2	3/2	0	1/2	$z-1$

$i\downarrow$	$j\rightarrow$	x_1	x_2	x_3	$x_{\bar 1}$	$x_{\bar 2}$	β
$\bar 1$		-1	0	0	1	$\boxed{1}$	2
3		2	1	1	0	-1	2
	Δ_j	-3	-1	0	0	2	$z-4$

$i\downarrow$	$j\rightarrow$	x_1	x_2	x_3	$x_{\bar 1}$	$x_{\bar 2}$	β
$\bar 2$		-1	0	0	1	1	2
3		1	1	1	1	0	4
	Δ_j	-1	-1	0	-2	0	$z-8$

On a donc, à l'optimum $\boxed{x^* = (0,0,4) \text{ et } z^* = 8}$ ($x_1^* = 0$, $x_2^* = 0$, $x_3^* = 4$) [*2pts*].

---

3. **[8 points]** **a)** On désigne par x_1 et x_2 les quantités des produits P_1 et P_2 fabriquées. La fonction objectif est la marge totale $z = 4x_1 + 48_2$ qu'il faut maximiser. Avec les contraintes de production maximale ($x_1 + x_2 \leq 10$), de temps total d'usinage ($3x_1 + x_2 \leq 24$) et de quantité de ressource ($2x_1 + 6x_2 \leq 48$, soit, en divisant par 2, $x_1 + 3x_2 \leq 24$), le problème se modélise sous la forme suivante :

$$\left\{\begin{array}{ccccc} 4x_1 & + & 8x_2 & = & z[\max] \\ x_1 & + & x_2 & \leq & 10 \\ x_1 & + & 3x_2 & \leq & 24 \\ 3x_1 & + & x_2 & \leq & 24 \\ & x_1 \geq 0 & ; & x_2 \geq 0 & \end{array}\right.$$

Le domaine des solutions admissibles est le polytope de sommets $OABCD$ avec $O(0;0)$, $A(0;8)$, $B(3;7)$, $C(7;3)$, $D(8;0)$ [*2pts*].

b) Premier tableau :

$i\downarrow$	$j\rightarrow$	x_1	x_2	$x_{\bar 1}$	$x_{\bar 2}$	$x_{\bar 3}$	β	$\beta_i/\alpha_{i,e}$
$\bar 1$		1	1	1	0	0	10	10
$\leftarrow$ $\bar 2$		1	$\boxed{3}$	0	1	0	24	8
$\bar 3$		3	1	0	0	1	24	24
	Δ_j	4	8	0	0	0	$z-0$	
			$\uparrow e$					

Deuxième tableau : x_2 entre dans la base et $x_{\bar 2}$ en sort

$i\downarrow$	$j\rightarrow$	x_1	x_2	$x_{\bar 1}$	$x_{\bar 2}$	$x_{\bar 3}$	β	$\beta_i/\alpha_{i,e}$
$\leftarrow$ $\bar 1$		$\boxed{2/3}$	0	1	$-1/3$	0	2	3
2		$1/3$	1	0	$1/3$	0	8	24
$\bar 3$		$8/3$	0	0	$-1/3$	1	16	6
	Δ_j	$4/3$	0	0	$-8/3$	0	$z-64$	
		$\uparrow e$						

Troisième tableau : x_1 entre dans la base et $x_{\bar 1}$ en sort

$i\downarrow$	$j\rightarrow$	x_1	x_2	$x_{\bar 1}$	$x_{\bar 2}$	$x_{\bar 3}$	β
1		1	0	$3/2$	$-1/2$	0	3
2		0	1	$-1/2$	$1/2$	0	7
$\bar 3$		0	0	-4	1	1	8
	Δ_j	0	0	-2	-2	0	$z-68$

Il n'y a plus de terme positif dans la dernière ligne donc on est à l'optimum. La solution est donc $\boxed{x_1^*=3,\ x_2^*=7}$ et la valeur à l'optimum est $\boxed{z^*=68}$ [*2 pts*].

c) On écrit directement le programme dual :

$$\left\{\begin{array}{ccccccc} 10y_1 & + & 24y_2 & + & 24y_3 & = & w[\min] \\ y_1 & + & y_2 & + & 3y_3 & \geq & 4 \\ y_1 & + & 3y_2 & + & y_3 & \geq & 8 \\ y_1 & , & y_2 & , & y_3 & \geq & 0. \end{array}\right. \qquad [0{,}5pt]$$

On déduit directement du tableau à l'optimal que $\Delta'_{\bar 1}=-3$, $\Delta'_{\bar 2}=-7$ et $\Delta'_{\bar 3}=-8$, les autres étant nuls ; et que $y_1=y_2=2$ (variables de base), les autres étant nulles. Enfin, on remplit le tableau grâce à $\alpha'_{i,j}=-\alpha_{\bar j,\bar i}$ (en convenant que $\bar{\bar{i}}=i$). Pour des raisons de lecture plus simple, on place $y_{\bar 1}$ et $y_{\bar 2}$ en premier dans le tableau. On a alors le tableau du simplexe du dual à l'optimal [*0,5 pt*] :

$i\downarrow$	$j\rightarrow$	$y_{\bar 1}$	$y_{\bar 2}$	y_1	y_2	y_3	β'
1		$-3/2$	$1/2$	1	0	4	2
2		$1/2$	$-1/2$	0	1	-1	2
	Δ'_j	-3	-7	0	0	-8	$w+68$

d) Le domaine reste le même et le maximum est sur l'un des sommets du polytope. On a $z_O = 0$, $z_A = 8p_2$, $z_B = 12 + 7p_2$, $z_C = 28 + 3p_2$ et $z_D = 32$. Le maximum reste en B si $8p_2 \leq 12 + 7p_2$ et $12 + 7p_2 \geq 28 + 3p_2$, soit $p_2 \leq 12$ et $4p_2 \geq 16$.
Ainsi,

- $\boxed{\text{le maximum de } z \text{ est en } B(3;7) \text{ pour } 4 < p_2 < 12}$.

- Pour $p_2 > 12$, le maximum de z est atteint en $A(0;8)$.

De plus, $z_D > z_C$ pour $28 + 3p_2 < 32$, soit $p_2 < \dfrac{4}{3}$. Ainsi :

- Pour $0 < p_2 < \dfrac{4}{3}$, le maximum est atteint en $D(8;0)$.
- Pour $\dfrac{4}{3} < p_2 < 4$, le maximum est atteint en $C(7;3)$.

Enfin, pour $p_2 = 12$, n'importe quel point du segment $[AB]$ réalise le maximum ; de même, n'importe quel point de $[BC]$ réalise le maximum si $p = 4$ et n'importe quel point de $[CD]$ réalise le maximum si $p = \dfrac{4}{3}$.

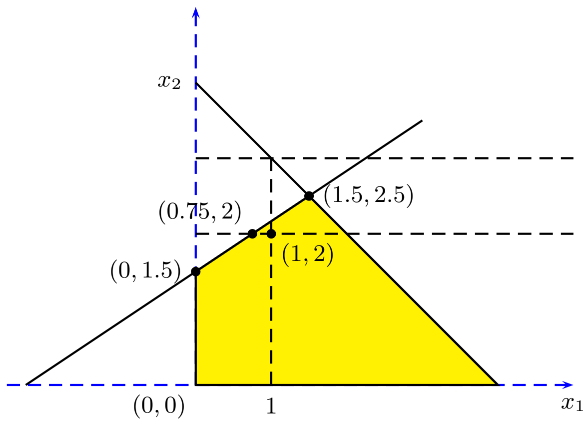
On a finalement $\boxed{z^*_{p_2} = \begin{cases} 32 & \text{si } p_2 < 4/3[\\ 28 + 3p_2 & \text{si } p_2 \in [4/3, 4[\\ 12 + 7p_2 & \text{si } p_2 \in [4, 12[\\ 8p_2 & \text{si } p_2 \geq 12 \end{cases}}$ (fonction continue de p_2) [*2 pts*].

e) On a ici $w_q = qy_1 + 24y_2 + 24y_3$. Pour cette question, on travaille sur le dual et on tire du tableau optimal $y_1 = 2 + \dfrac{3}{2}y_{\bar{1}} - \dfrac{1}{2}y_{\bar{2}} - 4y_3$, et $y_2 = 2 - \dfrac{1}{2}y_{\bar{1}} + \dfrac{1}{2}y_{\bar{2}} + y_3$, donc

$$\begin{aligned} -w_q &= -qy_1 - 24y_2 - 24y_3 \\ &= -q\left(2 + \frac{3}{2}y_{\bar{1}} - \frac{1}{2}y_{\bar{2}} - 4y_3\right) - 24\left(2 - \frac{1}{2}y_{\bar{1}} + \frac{1}{2}y_{\bar{2}} + y_3\right) - 24y_3 \\ &= -48 - 2q - \left(\frac{3}{2}q - 12\right)y_{\bar{1}} - \left(-\frac{1}{2}q + 12\right)y_{\bar{2}} - (-4q + 48)y_3 \end{aligned}$$

On écrit qu'à l'optimal, les Δ' sont négatifs, ce qui donne $\dfrac{3}{2}q - 12 \geq 0$, $-\dfrac{1}{2}q + 12 \geq 0$ et $-4q + 48 \geq 0$, soit finalement $q \geq 8$, $q \leq 24$ et $q \leq 12$. Donc, pour $\boxed{q \in [8;12]}$, le point en lequel l'optimum est atteint est inchangé. [*1 pt*].

$\boxed{\textbf{4.}}$ **[6 points]** On commence par résoudre (P_0) $\begin{cases} -x_1 + 2x_2 = z[\max] \\ -4x_1 + 6x_2 \leq 9 \\ x_1 + x_2 \leq 4 \\ x_1 \; , \; x_2 \geq 0 \end{cases}$, sans tenir compte de la contrainte x_1, x_2 à valeurs entières mais seulement $x_1 \geq 0$ et $x_2 \geq 0$. On trouve graphiquement [*2pts*] la solution optimale $\boxed{x_1^* = 1.5,\ x_2^* = 2.5,\ z^* = 3.5}$, ce qui ne fournit pas une solution entière.



- On branche (P_0) par rapport à x_2 en

$$(P_0) \wedge (x_2 \leq 2) = (P_1)$$

et on résout ce nouveau programme linéaire sans tenir compte de la contrainte x_1, x_2 à valeurs entières. On trouve la solution optimale non entière $\boxed{x_1^* = 0.75,\ x_2^* = 2 \text{ avec } z^* = 3.25}$ et

$$(P_0) \wedge (x_2 \geq 3) = (P_2)$$

qui n'a $\boxed{\text{pas de solution}}$.

- On branche (P_1) par rapport à x_1 en

$$(P_1) \wedge (x_1 \leq 0) = (P_3)$$

qui donne une solution non entière $\boxed{x_1^* = 0,\ x_2^* = 1.5, \text{ avec } z^* = 3}$ et

$$(P_1) \wedge (x_1 \geq 1) = (P_4)$$

qui donne une solution entière $\boxed{x_1^* = 1,\ x_2^* = 2, \text{ avec } z^* = 3}$, qui fournit une première borne et il est inutile de continuer l'exploration après (P_3) car déjà, la solution maximale non entière de (P_3) n'est pas meilleure que la solution entière de (P_4) donc on ne fera pas mieux en branchant (P_3) par rapport à x_2 (solution entière $(0; 1)$ pour laquelle $z^* = 2$).

Ainsi, on peut construire l'arbre.
On a obtenu l'optimum du PLNE initial qui est $\boxed{x^* = (1; 2) \text{ avec } z^* = 3}$ [*4pts*].