M1 UE2

Corrigés des exercices des chapitres 9 à 11

Compléments sur les matrices

$\boxed{\textbf{1.}}$ Soit $A = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 1 \\ 1 & 3 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \end{pmatrix}$. Vérifier que $\lambda = 1$ est valeur propre de A et trouver une matrice orthogonale O telle que $O^{-1}AO = T$ soit triangulaire.

$A - I = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$: cette matrice est de rang 1 donc 1 est bien valeur propre de A et $\dim E_1(A) = 2$. L'hyperplan $E_1(A)$ a pour équation : $x + 2y + z = 0$ et on peut donc trouver rapidement dans $E_1(A)$ deux vecteurs unitaires et orthogonaux ε_1 et ε_2.

On prend par exemple, $\varepsilon_1 = \dfrac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ et $\varepsilon_2 = \dfrac{1}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

On pose alors $\varepsilon_3 = \varepsilon_1 \wedge \varepsilon_2 = \dfrac{1}{\sqrt{6}} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ et $O = \begin{pmatrix} -\dfrac{1}{\sqrt{2}} & \dfrac{1}{\sqrt{3}} & \dfrac{1}{\sqrt{6}} \\ 0 & -\dfrac{1}{\sqrt{3}} & \dfrac{2}{\sqrt{6}} \\ \dfrac{1}{\sqrt{2}} & \dfrac{1}{\sqrt{3}} & \dfrac{1}{\sqrt{6}} \end{pmatrix}$. La matrice O est bien orthogonale, car c'est la matrice de passage d'une base orthonormée (la base canonique (e_1, e_2, e_3)) dans une autre (la base $(\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3)$). Pour avoir $O^{-1}AO$, il suffira alors de déterminer $A\varepsilon_1$, $A\varepsilon_2$ et $A\varepsilon_3$ dans la base $(\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3)$. On a déjà $A\varepsilon_1 = \varepsilon_1$ et $A\varepsilon_2 = \varepsilon_2$ car ε_1 et ε_2 sont dans $E_1(A)$. On est donc assuré que $O^{-1}AO$ est triangulaire et il suffit de déterminer $A\varepsilon_3$.

On remarque que la somme des coefficients de chaque ligne de A vaut 5, ce qui permet de conclure que 5 est aussi valeur propre. La matrice A est donc diagonalisable (mais pas dans une base orthonormée, car elle n'est pas symétrique). On peut ainsi en déduire que troisième coefficient diagonal de T vaut 5. On a alors :

$$A\varepsilon_3 = \frac{1}{\sqrt{6}} \begin{pmatrix} 7 \\ 8 \\ 7 \end{pmatrix} = 5\varepsilon_3 + \frac{1}{\sqrt{6}} \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix} = 5\varepsilon_3 + \sqrt{2}\varepsilon_2.$$

Ainsi, $T = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \sqrt{2} \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix}$.

$\boxed{\textbf{2.}}$ Soit A une matrice carrée.

a) Montrer que $\mathrm{Sp}(A) \subset \displaystyle\bigcup_i D'(a_{ii}, \rho_i)$ avec $\rho_i = \displaystyle\sum_{j \neq i} |a_{ij}|$.

b) Montrer que $B = \begin{pmatrix} 3 & 2 & & (0) \\ 1 & \ddots & \ddots & \\ & \ddots & \ddots & 2 \\ (0) & & 1 & 3 \end{pmatrix}$ est inversible.

c) Trouver D diagonale telle que DBD^{-1} soit symétrique. Retrouver l'inversibilité de B.

d) Déterminer $\mathrm{Sp}(B)$.

---

a) Soit $AX = \lambda X$ avec $X \neq 0$. On a donc $\sum_j a_{ij}x_j = \lambda x_i$, soit $\sum_{j\neq i} a_{ij}x_j = (\lambda - a_{ii})x_i$. Si $|x_{i_0}| = \max\{|x_i|, 1 \leq i \leq n\}$, alors $|x_{i_0}| > 0$ car $X \neq 0$, et $|\lambda - a_{i_0i_0}| = \sum_{j\neq i_0} |a_{i_0j}|\dfrac{|x_j|}{|x_{i_0}|} \leq \sum_{j\neq i_0} |a_{i_0j}| = \rho_{i_0}$. Donc $\lambda \in \overline{D}(a_{i_0i_0}, \rho_{i_0})$, soit $\lambda \in \bigcup_{i=1}^{n} \overline{D}(a_{ii}, \rho_i)$.

b) On a $\rho_1 = 2$, $\rho_n = 1$ et $\rho_i = 3$ si $i \in \{2, \cdots, n-1\}$, ainsi que $a_{ii} = 3$ donc $\bigcup_{i=1}^{n} \overline{D}(a_{ii}, \rho_i) = \overline{D}(3, 3)$, soit $\mathrm{Sp}(A) \subset \overline{D}(3, 3)$.

Malheureusement, $O \in \overline{D}(3, 3)$ donc cela ne dit pas si A est inversible.

$AX = 0$ équivaut à $\begin{cases} 3x_1 + 2x_2 = 0 \\ x_{j-1} + 3x_j + 2x_{j+1} = 0 \text{ pour } 2 \leq j \leq n-1 \\ x_{n-1} + 3x_n = 0 \end{cases}$. Complètons par $x_0 = 0$ et $x_{n+1} = 0$. Alors $x_{j-1} + 3x_j + x_{j+1} = 0$ pour tout $j \in \{1, \cdots, n\}$. Or, puisque $2r^2 + 3r + 1 = (r+1)(2r+1)$, les suites (y_j) telles que $y_{j-1} + 3y_j + 2y_{j+1} = 0$ pour tout $f \in \mathbb{N}^*$ sont celles de $\mathrm{Vect}((-1)^j, (-1/2)^j)$. On utilise alors celle qui est telle que $y_j = x_j$ si $j \in \{0, \cdots, n+1\}$, puis $y_{j+1} = -\dfrac{1}{2}[y_{j-1} + 3y_j]$ si $j \geq n+1$ et elle fournit $x_j = \alpha(-1)^j + \beta(-1/2)^j$ si $j \in \{0, \cdots, n+1\}$. $x_0 = 0$ donne $\alpha + \beta = 0$ soit $\alpha = -\beta$ puis $x_{n+1} = 0$ donne $\alpha + \beta(1/2)^{n+1} = 0$ donc $\alpha = \beta = 0$ et $X = 0$, ainsi $0 \notin \mathrm{Sp}(A)$.

c) Cherchons $D = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n \end{pmatrix}$ avec $\lambda_i \neq 0$: ainsi $D^{-1} = \begin{pmatrix} \dfrac{1}{\lambda_1} & & \\ & \ddots & \\ & & \dfrac{1}{\lambda_n} \end{pmatrix}$ et $DA = \begin{pmatrix} 3\lambda_1 & 2\lambda_1 & & (0) \\ \lambda_2 & 3\lambda_2 & 2\lambda_2 & \\ & \ddots & \ddots & \ddots \\ (0) & & \lambda_n & 3\lambda_n \end{pmatrix}$ puis $DAD^{-1} = \begin{pmatrix} 3 & 2\dfrac{\lambda_1}{\lambda_2} & & (0) \\ \dfrac{\lambda_2}{\lambda_1} & \ddots & \ddots & \\ & \ddots & \ddots & 2 \\ (0) & & \dfrac{\lambda_n}{\lambda_{n-1}} & 3 \end{pmatrix}$. DAD^{-1} est symétrique si et seulement si $\dfrac{2\lambda_{i-1}}{\lambda_i} = \dfrac{\lambda_i}{\lambda_{i-1}}$ pour tout $i \in \{2, \cdots, n\}$, soit $\lambda_i^2 = 2\lambda_{i-1}^2$. Donc, si on prend $\lambda_i = 2^{\frac{i-1}{2}}$ pour $1 \leq i \leq n$, on a bien cette relation, et $DAD^{-1} = \begin{pmatrix} 3 & \sqrt{2} & & (0) \\ \sqrt{2} & \ddots & \ddots & \\ & \ddots & \ddots & \sqrt{2} \\ (0) & & \sqrt{2} & 3 \end{pmatrix}$ est symétrique. Cette fois, $\rho_i \in \{\sqrt{2}, 2\sqrt{2}\}$, donc $\mathrm{Sp}A \subset \overline{D}(3, 2\sqrt{2})$ et $0 \notin \overline{D}(3, 2\sqrt{2})$ car $2\sqrt{2} < 3$.

Bonus. On peut calculer Sp(A). Soit $P_n(\lambda) = \chi_A(\lambda)$ (A dépend de n). Suivant la première colonne, il vient $P_n(\lambda) = (3-\lambda)P_{n-1}(\lambda) - 2P_{n-2}(\lambda)$. Donc, on retrouve une récurrence linéaire. Si $f(r) = r^2 - (3-\lambda)r + 2$, $\Delta = (3-\lambda)^2$. Dans l'immédiat, on ne regarde que $\lambda \in]3-2\lambda, 3+2\lambda[$ et on pose $\lambda - 3 = -2\sqrt{2}\cos\theta$, $\theta \in]0,\pi[$, donc

$$f(r) = r^2 - 2r\sqrt{2}\cos\theta + 2 = (r - \sqrt{2}e^{i\theta})(r - \sqrt{2}e^{-i\theta})$$

Ainsi, $P_n(\lambda) = (\sqrt{2})^n[\alpha e^{in\theta} + \beta e^{-in\theta}] = (\sqrt{2})^n[\gamma\cos(n\theta) + \delta\sin(n\theta)]$.

Or $P_1(\lambda) = 3 - \lambda = 2\sqrt{2}\cos\theta = \sqrt{2}[\gamma\cos\theta + \delta\sin\theta]$ et

$$\begin{aligned} P_2(\lambda) &= (3-\lambda)^2 - 2 = 8\cos^2 - 2 = 4(\cos 2\theta + 1) - 2 \\ &= 4\cos 2\theta + 2 = 2(\gamma\cos 2\theta + \delta\sin 2\theta) \end{aligned}$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \gamma\cos\theta + \delta\sin\theta = 2\cos\theta \\ \gamma\cos 2\theta + \delta\sin 2\theta = 2\cos 2\theta + 1 = 4\cos^2\theta - 1 \end{array} \right.$$

donc $\gamma[2\cos^2\theta - \cos 2\theta] = 4\cos^2\theta - 2\cos 2\theta - 1$, soit $\gamma = 1$, puis $\delta = \dfrac{\cos\theta}{\sin\theta}$ donc

$$P_n(\lambda) = (\sqrt{2})^n\left[\cos(n\theta) + \frac{\cos\theta}{\sin\theta}\sin(n\theta)\right] = (\sqrt{2})^n\frac{\sin(n+1)\theta}{\sin\theta}$$

Pour $\theta \in]0,\pi[$, on a donc $P_n\left(3 - 2\sqrt{2}\cos\left(\dfrac{k\pi}{n+1}\right)\right) = 0$ si $1 \leq k \leq n$, d'où les n valeurs propres distinctes. $\lambda_k = 3 - 2\sqrt{2}\cos\left(\dfrac{k\pi}{n+1}\right)$. Il n'y en a donc pas d'autres.

$\boxed{\textbf{3.}}$ Soit $A \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{R})$ de rang $r > 0$.

a) Dire tout sur ${}^tAA$, notamment sur ses valeurs propres.

b) Pour λ valeur propre strictement positive de ${}^tAA$, on pose $\sigma = \sqrt{\lambda}$. Soit alors Σ la matrice diagonale Diag$(\sigma_1, \ldots, \sigma_r)$. Montrer que $A = V\begin{pmatrix} \Sigma & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}{}^tU$ avec V et U des matrices orthogonales.

---

a) En identifiant matrices et applications linéaires, et matrices colonnes et vecteurs dans la structure euclidienne canonique de $\mathbb{R}^n$, on a :

- ${}^tAAX = \lambda X$ implique $\|AX\|^2 = \lambda\|X\|^2$, donc $\lambda \geq 0$.
- $\ker A \subset \ker {}^tAA$, et, si ${}^tAAX = 0$, $\|AX\|^2 = 0$, donc $AX = 0$, soit $\ker A = \ker {}^tAA$ et rg$A = $ rg${}^tAA = r$.
- ${}^tAA$ est de plus symétrique.

b) Soit $(e_1, \ldots, e_n)$ une base orthonormale propre pour ${}^tAA$, et telle que $(e_{r+1}, \ldots, e_n)$ soit une base de $\ker A = \ker {}^tAA$. ${}^tAAe_i = \lambda_i e_i$, donc $({}^tAAe_i|e_j) = \lambda_i(e_i|e_j)$ donc $(Ae_i|Ae_j) = \lambda_i\delta_{ij}$, et $(\dfrac{Ae_1}{\sigma_1}, \ldots, \dfrac{Ae_r}{\sigma_r})$ est une famille orthonormale.

Analyse. si $A = V\begin{pmatrix} \Sigma & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}{}^tU$, alors ${}^tAA = U\begin{pmatrix} \Sigma^2 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}{}^tU$, donc U diagonalise ${}^tAA$. Puis $V\begin{pmatrix} \Sigma & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = AU$, donc, si $(c_1, \ldots, c_n)$ est la base canonique de $\mathbb{R}^n$, ayant $Uc_i = e_i$ et $\Sigma e_i = \sigma_i e_i$ si $i \leq r$ et 0 si $i > r$, on a $V\Sigma c_i = \sigma_i Vc_i = AUc_i = Ae_i$.

Synthèse. On complète $(\dfrac{Ae_1}{\sigma_1}, \ldots, \dfrac{Ae_r}{\sigma_r})$ en une base orthonormale de $\mathbb{R}^n$, soit $(e'_1, \ldots, e'_n)$. On définit U par $Uc_i = e_i$, donc U diagonalise ${}^tAA$ et V par $Vc_i = e'_i$. On a bien U et V orthogonales, $V\Sigma c_i = \sigma_i Vc_i = Ae_i = AUc_i$ si $i \leq r$ et $AUc_i = 0$ si $i > r$, donc $V\begin{pmatrix} \Sigma & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = AU$.

$\boxed{\textbf{4.}}$ Pour $A = (a_{ij}) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, on pose $\|A\|_2 = \sum_{i,j} |a_{ij}|^2$.

a) Montrer que, pour $(A, B) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})^2$, $\|AB\|_2 \leq \|A\|_2\|B\|_2$.
b) Trouver les matrices pour lesquelles $\|AB\|_2 = \|A\|_2\|B\|_2$.

---

a) On note $A = (a_{ij})$ et $B = (b_{ij})$, ainsi que $C = AB = (c_{ij})$, donc $c_{ij} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik}b_{kj}$. Alors, en utilisant l'inégalité de Cauchy-Schwarz,

$$|c_{ij}|^2 \leq \left[\sum_{k=1}^{n} |a_{ik}||b_{kj}|\right]^2 \leq \sum_{k=1}^{n} |a_{ik}|^2 \sum_{k=1}^{n} |b_{ik}|^2.$$

C'est bien, en sommant toutes ces inégalités sur i et j, que $\|AB\|_2 \leq \|A\|_2\|B\|_2$.

b) On a sommé des inégalités portant sur des nombres positifs, donc elles deviennent toutes des égalités. Cela donne les vecteurs $L_i = (a_{i1}, \ldots, a_{in})$ et $C_j = (b_{1j}, \ldots, b_{nj})$ linéairement dépendants pour tout (i, j). Alors:

• Si A ou B est nulle, il y a égalité.

• Sinon, il existe $L_{i_0} \neq 0$, et $C_j = \lambda_j L_{i_0}$, donc, le rang de B est 1, et son image est engendrée par L_{i_0}, et il existe $C_{j_0} \neq 0$, donc $L_i = \mu_i C_{j_0}$, et le rang de ${}^tA$ (donc, celui de A) vaut 1, son image étant engendrée par C_{j_0}. Mais, C_{j_0} et L_{i_0} sont liés, donc les deux images sont communes.

Réciproquement, si $\mathrm{im}{}^tA = \mathrm{im}B = D = \mathbb{C}\epsilon$ (droite vectorielle), les vecteurs L_i et C_j sont colinéaires à ϵ, dont linéairement dépendants, et on a bien l'égalité.

$\boxed{\textbf{5.}}$ Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathrm{I\!R})$ symétrique, et soient $\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \cdots \geq \lambda_n$ ses valeurs propres. Montrer que $\lambda_{r+1} = \inf_{F_r \in \mathcal{F}_r} \sup\{(Ax|x),\ x \in F_r\ ,\ \|x\| = 1\}$, où $\mathcal{F}_r$ désigne l'ensemble des sous espaces vectoriels de dimension $n - r$.

Soit $\mathrm{I\!R}^n$ euclidien canonique, et u l'endomorphisme symétrique de $\mathrm{I\!R}^n$ canoniquement associé à A. Soit $\mathcal{B} = (e_1, \ldots, e_n)$ une base orthonormale de diagonalisation de u, avec $u(e_i) = \lambda_i e_i$. Ainsi, $(u(x)|x) = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i x_i^2$ lorsque $x = \sum_{i=1}^{n} x_i e_i$. Donc, pour x unitaire, ayant $\|x\|^2 = \sum_{i=1}^{n} x_i^2$, la base étant orthonormale, il vient $(u(x)|x) \leq \lambda_1$, donc les quantités $(u(x)|x)$, pour x décrivant la sphère unité sont majorées : le sup proposé existe bien.

• En particulier, si $F_r^0 = \mathrm{Vect}(e_{r+1}, \ldots, e_n)$, et si $x = \sum_{i=r+1}^{n} x_i e_i$, alors $(u(x)|x) = \sum_{i=r+1}^{n} \lambda_i x_i^2 \leq \lambda_{r+1} \sum_{i=r+1}^{n} x_i^2$. si on impose que $\|x\| = 1$, on a $\|x\|^2 = \sum_{i=r+1}^{n} x_i^2$, car la base est orthonormale, d'où $(u(x)|x) \leq \lambda_{r+1}$ (et c'est atteint en $x = e_{r+1}$). C'est que $\lambda_{r+1} \geq \sup\{(u(x)|x), x \in F_r^0, \|x\| = 1\}$ (en fait, c'est le max), puis $\lambda_{r+1} \geq \inf_{F_r \in \mathcal{F}_r} \sup\{(u(x)|x), x \in F_r, \|x\| = 1\}$.

• Soit $F_r \in \mathcal{F}_r$. $\dim F_r + \dim \mathrm{Vect}(e_1, \ldots, e_{r+1}) = n + 1$, donc la somme des deux espaces en jeu n'est pas directe, et leur intersection n'est pas réduite à $\{0\}$: il y a un vecteur non nul dans l'intersection. On peut le prendre unitaire, quitte à le diviser par sa norme. Soit donc $x = \sum_{i=1}^{r+1} x_i e_i \in F_r$. Alors, $(u(x)|x) = \sum_{i=1}^{r+1} \lambda_i x_i^2 \geq \lambda_{r+1}$. D'où, $\sup\{(u(x)|x), x \in F_r, \|x\| = 1\} \geq \lambda_{r+1}$, puis, $\inf_{F_r \in \mathcal{F}_r} \sup\{(u(x)|x), x \in F_r, \|x\| = 1\} \geq \lambda_{r+1}$.

En combinant les deux inégalités, on a $\inf\limits_{F_r \in \mathcal{F}_r} \sup\{(u(x)|x), x \in F_r, \|x\| = 1\} = \lambda_{r+1}$.

Méthodes itératives de résolution de systèmes linéaires

---

6. Soit A une matrice d'ordre $n \geq 2$, inversible et à coefficients réels. On écrit la matrice A sous la forme $A = M - N$, où M est “facilement inversible” et on s'intéresse à la résolution du système linéaire $Ax = b$. Dans ce but, on introduit la suite $(x_k)_{k \in \mathbb{N}}$ définie par :

$$x_0 \text{ donné dans } \mathbb{R}^n \text{ et } x_{k+1} = M^{-1}Nx_k + M^{-1}b.$$

1) Résultats généraux :

a) Montrer que si la suite converge, c'est nécessairement vers la solution de $Ax = b$.

b) Soit $B = M^{-1}N$ et $\rho(B)$ son rayon spectral. Montrer l'équivalence des deux assertions suivantes :

i. Pour tout $x_0 \in \mathbb{R}^n$, $\lim\limits_{k \to +\infty} x_k = x$ avec $Ax = b$

ii. $\rho(B) < 1$.

c) Montrer que, s'il existe une norme matricielle subordonnée $\| \ \|$ telle que $\|B\| < 1$, alors la méthode itérative ci-dessus est convergente.

2) On suppose que tous les termes diagonaux de A sont non nuls et on considère la méthode itérative définie par le choix de $M = D$ avec D matrice diagonale de A : $d_{ii} = a_{ii}$ pour $1 \leq i \leq n$ et $d_{ij} = 0$ pour $i \neq j$.

a) Quel est le nom de cette méthode ?

b) Montrer que si A est à diagonale strictement dominante, c'est-à-dire si, pour tout $i \in \{1, \cdots, n\}$, $|a_{ii}| > \sum\limits_{j \neq i} |a_{ij}|$, alors cette méthode converge.

3) On suppose que tous les termes diagonaux de A sont non nuls et on considère la méthode itérative définie pour une matrice M telle que :

$$m_{ij} = 0 \text{ pour } 1 \leq i < j \leq n \text{ et } m_{ij} = a_{ij} \text{ pour } 1 \leq j \leq i \leq n.$$

a) Quel est le nom de cette méthode ?

b) Montrer que si A est à diagonale strictement dominante, alors cette méthode converge.

4) Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 1 \end{pmatrix}$; que peut-on dire de la convergence des deux méthodes proposées précédemment ?

---

1) a) On suppose que (x_k) converge vers x^*. Alors x^* vérifie

$$x^* = M^{-1}Nx^* + M^{-1}b$$

d'où, en composant à gauche par M, $Mx* = Nx^* + b$, soit $(M - N)x^* = b$, c'est-à-dire $\boxed{Ax^* = b}$.

b) On pose $c = M^{-1}b$. On a alors :

$$x_{k+1} - x^* = (Bx_k + c) - (Bx^* + c) = B(x_k - x^*) = B^2(x_{k-1} - x^*) = \cdots = B^{k+1}(x_0 - x^*)$$

donc (x_k) converge vers x^* si et seulement si $\lim\limits_{k \to +\infty} B^k(x_0 - x^*) = 0$ ce qui équivaut à $\rho(B) < 1$ d'après un théorème vu en cours.

c) Supposons qu'il existe une norme subordonnée $\| \ \|$ pour laquelle $\|B\| < 1$, alors, par un théorème du cours, $\rho(B) < 1$, ce qui équivaut par 2) à la convergence de (x_k).

2) a) C'est la méthode de Jacobi.

b) La méthode converge si et seulement si $\rho(D^{-1}(E+F)) < 1$ ou bien si et seulement si il existe une norme matricielle pour laquelle $\|D^{-1}(E+F)\| < 1$.

On pose $J = (J_{ij}) = D^{-1}(E+F)$. Alors :

$$J_{ij} = \begin{cases} 0 \text{ si } i = j \\ \dfrac{a_{ij}}{a_{ii}} \text{ si } i \neq j \end{cases} .$$

On a donc $\|J\|_\infty = \max\limits_{1 \leq i \leq n} \sum\limits_{j=1}^{n} |J_{ij}| < 1$ car A est à diagonale strictement dominante (et pour tout i, $\dfrac{\sum_{j=1}^{n} |a_{ij}|}{|a_{ii}|} < 1$) et la méthode converge bien.

3) a) C'est la méthode de Gauss-Seidel.

b) On pose $G = (D-E)^{-1}F$ et on veut montrer que $\rho(G) < 1$. Soit λ une valeur propre de G et $u \neq 0$ tel que $Gu = \lambda u$. $\det(G - \lambda I) = 0$ car $\ker(G - \lambda I) \neq \emptyset$.

Or $\det(G - \lambda I) = 0$ si et seulement si $\det((D-E)(G - \lambda I)) = \det(F - \lambda(D-E)) = 0$.

On va utiliser l'exercice 2 : $\lambda(D-E) - F = \begin{pmatrix} \lambda a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1,n} \\ \lambda a_{21} & \lambda a_{22} & & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \lambda a_{n,1} & \lambda a_{n,2} & \cdots & \lambda a_{n,n} \end{pmatrix}$.

Si 0 est valeur propre de $\lambda(D-E) - F$, d'après ce que l'on a vu à l'exercice 4, il existe k pour lequel

$$|\lambda a_{k,k}| \leq \sum_{j<k} |\lambda a_{k,j}| + \sum_{j>k} |a_{k,j}|.$$

Or $|\lambda a_{k,k}| > \sum\limits_{j \neq k} |\lambda a_{k,j}|$ et donc $|\lambda| \sum\limits_{j>k} |a_{k,j} < \sum\limits_{j>k} |a_{k,j}|$ d'où $|\lambda| < 1$ et $\rho(G) < 1$.

4) Pour $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 1 \end{pmatrix}$, on a $J = D^{-1}(E+F) = I(E+F) = \begin{pmatrix} 0 & -2 & 2 \\ -1 & 0 & -1 \\ -2 & -2 & 0 \end{pmatrix}$

$$\begin{aligned} \det(J - \lambda I) &= \begin{vmatrix} -\lambda & -2 & 2 \\ -1 & -\lambda & -1 \\ -2 & -2 & -\lambda \end{vmatrix} \\ &= -\lambda^3 - 4 + 4 - 4\lambda + 2\lambda + 2\lambda = -\lambda^3 \end{aligned}$$

La seule valeur propre est $0 < 1$ donc $\rho(J) < 1$ et la méthode converge.

$$
\begin{aligned}
G=(D-E)^{-1}F &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 2 & 2 & 1 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 0 & -2 & 2 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ -2 & -2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & -2 & 2 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -2 & 2 \\ 0 & 2 & -3 \\ 0 & 4 & -2 \end{pmatrix}
\end{aligned}
$$

$$
\det(G-\lambda I) = \begin{vmatrix} -\lambda & -2 & 2 \\ 0 & 2-\lambda & -3 \\ 0 & 4 & -2-\lambda \end{vmatrix} = -\lambda((2-\lambda)(-2-\lambda)+12) = -\lambda(\lambda_2+8)
$$

Ainsi, $\mathrm{sp}(G)=\{0, 2\sqrt{2}i, -2\sqrt{2}i\}$ et $\rho(G)=2\sqrt{2}>1$: la méthode ne converge pas.

$\boxed{\textbf{7.}}$ Soit A une matrice tridiagonale de taille $n\geq 3$ dont les termes diagonaux sont non nuls. Soit D la matrice diagonale de A, $-E$ (resp. $-F$) la matrice triangulaire inférieure (resp. supérieure) stricte de A. On a donc $A=D-E-F$; on pose $J=D^{-1}(E+F)$ et $G=(D-E)^{-1}F$.

1) Pour toute matrice $M=(m_{ij})_{1\leq i,j\leq n}$, on définit, pour tout réel non nul t, la matrice $M(t)=(m_{ij}(t))_{1\leq i,j\leq n}$, avec $m_{ij}(t)=t^{i-j}m_{ij}$ pour $1\leq i,j\leq n$. Montrer alors que :

$$
\text{pour tout } t\in\mathbb{R}^*,\quad \det(M(t))=\det(M).
$$

2) On pose $M=-F+\lambda^2(D-E)$. En utilisant les notations de la questions 1), écrire la matrice $M(1/\lambda)$ en fonction de D, E, F et λ.

3) Montrer que si P_J est le polynôme caractéristique de J et P_G celui de G, alors on a $P_G(\lambda^2)=\lambda^n P_J(\lambda)$. En déduire que $\rho(G)=(\rho(J))^2$ et conclure.

---

1)

$$
\begin{aligned}
\det M(t) &= \begin{vmatrix} m_{11} & \frac{m_{12}}{t} & \frac{m_{13}}{t^2} & \cdots & \frac{m_{1,n}}{t^{n-1}} \\ tm_{21} & m_{22} & \frac{m_{23}}{t} & \cdots & \frac{m_{2,n}}{t^{n-2}} \\ \vdots & & & & \vdots \\ t^{n-1}m_{n,1} & t^{n-2}m_{n,2} & \cdots & tm_{n,n-1} & m_{n,n} \end{vmatrix} \\
&= \frac{1}{t}\times\cdots\frac{1}{t^{n-1}}\det(C_1, tC_2, \cdots, t^{n-1}C_n) \\
&= \frac{1}{t}\times\cdots\frac{1}{t^{n-1}} \begin{vmatrix} m_{11} & m_{12} & m_{13} & \cdots & m_{1,n} \\ tm_{21} & tm_{22} & tm_{23} & \cdots & tm_{2,n} \\ \vdots & & & & \vdots \\ t^{n-1}m_{n,1} & t^{n-1}m_{n,2} & \cdots & t^{n-1}m_{n,n-1} & t^{n-1}m_{n,n} \end{vmatrix} \\
&= \frac{1}{t}\times\cdots\frac{1}{t^{n-1}}\det\begin{pmatrix} L_1 \\ tL_2 \\ \vdots \\ t^{n-1}L_n \end{pmatrix} = \det\begin{pmatrix} L_1 \\ L_2 \\ \vdots \\ L_n \end{pmatrix} = \det(M)
\end{aligned}
$$

2) On pose $A = \begin{pmatrix} a_1 & c_1 & & (0) \\ b_2 & \ddots & \ddots & \\ & \ddots & \ddots & c_{n-1} \\ (0) & & b_n & a_n \end{pmatrix}$.

On a $M = -F + \lambda^2(D-E) = \begin{pmatrix} \lambda^2 a_1 & c_1 & & (0) \\ \lambda^2 b_2 & \ddots & \ddots & \\ & \ddots & \ddots & c_{n-1} \\ (0) & & \lambda^2 b_n & \lambda^2 a_n \end{pmatrix}$ et

$$M(1/\lambda) = \begin{pmatrix} \lambda^2 a_1 & \lambda c_1 & & (0) \\ \lambda b_2 & \ddots & \ddots & \\ & \ddots & \ddots & \lambda c_{n-1} \\ (0) & & \lambda b_n & \lambda^2 a_n \end{pmatrix} = -\lambda(E+F) + \lambda^2 D.$$

3)

$$\begin{aligned} P_G(\lambda^2) &= \det((D-E)^{-1}F - \lambda^2 I) = (-1)^n \det((D-E)^{-1}) \det(-F + \lambda^2(D-E)) \\ &= (-1)^n \det(M) \det((D-E)^{-1}) = (-1)^n \det(M(1/\lambda)) \det((D-E)^{-1}) \\ &= (-1)^n \det(-\lambda(E+F) + \lambda^2 D) \times \det((D-E)^{-1}) \\ &= (-1)^n \lambda^n \det(-(E+F) + \lambda D) \times \det((D-E)^{-1}) \\ &= \lambda^n \det(D) \det(D^{-1}(E+F) - \lambda I) \times \det((D-E)^{-1}) = \lambda^n \det(J - \lambda I) \end{aligned}$$

car $\det((D+E)^{-1}) = \dfrac{1}{\det(D+E)} = \dfrac{1}{\det D} = \dfrac{1}{\prod\limits_k a_{kk}}$.

Ainsi, $P_G(\lambda^2) = \lambda^n P_J(\lambda)$.

λ est valeur propre de J équivaut à λ^2 est valeur propre de G et $\mathrm{sp}(G) = \{\lambda^2 \ ; \ \lambda \in \mathrm{sp}(J)\}$ et $\rho(G) = (\rho(J))^2$.

On a donc, comme ρ est positif, $\rho(G) < 1$ si et seulement si $\rho(J) < 1$ et dans ce cas, les deux méthodes sont convergentes ou bien aucune des deux ne converge.

Méthodes directes de résolution de systèmes linéaires

---

8. Méthode de Gauss

Résoudre par la méthode de Gauss le système linéaire suivant :

$$\left\{ \begin{array}{rcrcrcrcr} & x_1 & - & 3x_2 & - & x_3 & & & = 2 \\ - & x_1 & + & x_2 & & & + & 2x_4 & = 3 \\ & & & x_2 & - & x_3 & & & = 1 \\ & 2x_1 & + & x_2 & & & - & x_4 & = 0 \end{array} \right.$$

On fait d'abord $\mathcal{L}_2 \leftarrow \mathcal{L}_1 + \mathcal{L}_2$ et $\mathcal{L}_4 \leftarrow \mathcal{L}_4 - 2\mathcal{L}_1$ pour éliminer x_1 dans les lignes 2, 3 et 4. On obtient :

$$\left\{ \begin{array}{rcrcrcrcr} x_1 & - & 3x_2 & - & x_3 & & & = & 2 \\ & - & 2x_2 & - & x_3 & + & 2x_4 & = & 5 \\ & & x_2 & - & x_3 & & & = & 1 \\ & & 7x_2 & + & 2x_3 & - & x_4 & = & -4 \end{array} \right.$$

On fait ensuite $\mathcal{L}_4 \leftarrow \mathcal{L}_4 + \frac{1}{2}\mathcal{L}_2$:

$$\left\{\begin{array}{rcrcrcrcr} x_1 & - & 3x_2 & - & x_3 & & & = & 2 \\ & - & 2x_2 & - & x_3 & + & 2x_4 & = & 5 \\ & & x_2 & - & x_3 & & & = & 1 \\ & & 6x_2 & + & \dfrac{3}{2}x_3 & & & = & -\dfrac{3}{2} \end{array}\right.$$

puis $\mathcal{L}_4 \leftarrow \mathcal{L}_4 - 6\mathcal{L}_3$:

$$\left\{\begin{array}{rcrcrcrcr} x_1 & - & 3x_2 & - & x_3 & & & = & 2 \\ & - & 2x_2 & - & x_3 & + & 2x_4 & = & 5 \\ & & x_2 & - & x_3 & & & = & 1 \\ & & & + & \dfrac{15}{2}x_3 & & & = & -\dfrac{15}{2} \end{array}\right. .$$

On a alors $\left\{\begin{array}{l} x_3 = -1 \\ x_2 = 1 + x_3 = 0 \\ x_4 = \dfrac{5 + 2x_2 + x_3}{2} = 2 \\ x_1 = 2 + 3x_2 + x_3 = 1 \end{array}\right.$, soit $\boxed{(x_1, x_2, x_3, x_4) = (1, 0, -1, 2)}$.

---

9. Décomposition LU

On pose

$$A = \begin{pmatrix} -2 & 1 & -1 & 1 \\ 2 & 0 & 4 & -3 \\ -4 & -1 & -12 & 9 \\ -2 & 1 & 1 & -4 \end{pmatrix}.$$

1) Donner la décomposition LU de la matrice A (*i.e.* $A = LU$ avec L triangulaire inférieure et U triangulaire supérieure).

2) En déduire la solution du système linéaire $Ax = b$ où $b = {}^t(1.5, 4, -14, -6.5)$.

3) Soit $B = {}^tU\, A\, {}^tL$. Sans calculs supplémentaires, donner une décomposition LU de la matrice B.

---

1) Vérifions tout d'abord que, $\forall\, k = 1, \ldots, 4$, $\det \Delta_k \neq 0$:

$$\det \Delta_1 = -2 \neq 0 \ ;$$

$$\det \Delta_2 = \begin{vmatrix} -2 & 1 \\ 2 & 0 \end{vmatrix} = 0 - 2 = -2 \neq 0 \ ;$$

$$\begin{aligned} \det \Delta_3 &= \begin{vmatrix} -2 & 1 & -1 \\ 2 & 0 & 4 \\ -4 & -1 & -12 \end{vmatrix} = -2 \begin{vmatrix} 0 & 4 \\ -1 & -12 \end{vmatrix} - 1 \begin{vmatrix} 2 & 4 \\ -4 & -12 \end{vmatrix} - 1 \begin{vmatrix} 2 & 0 \\ -4 & -1 \end{vmatrix} \\ &= -2(4) - 1(-24 + 16) - 1(-2) = 2 \neq 0; \end{aligned}$$

$$\det \Delta_4 = \det A = \begin{vmatrix} -2 & 1 & -1 & 1 \\ 2 & 0 & 4 & -3 \\ -6 & 0 & -13 & 10 \\ 0 & 0 & 2 & -5 \end{vmatrix} = -1 \begin{vmatrix} 2 & 4 & -3 \\ -6 & -13 & 10 \\ 0 & 2 & -5 \end{vmatrix}$$

$$= -1 \begin{vmatrix} 2 & 4 & -3 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 2 & -5 \end{vmatrix} = -2(5-2) = -6 \neq 0.$$

Maintenant, obtenons la décomposition LU par la méthode du pivot de Gauss :
→ Étape 1 :

$$A = \begin{pmatrix} \boxed{-2} & 1 & -1 & 1 \\ 2 & 0 & 4 & -3 \\ -4 & -1 & -12 & 9 \\ -2 & 1 & 1 & -4 \end{pmatrix} \qquad E_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ -2 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad L_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

et

$$E_1 A = \begin{pmatrix} -2 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & \boxed{1} & 3 & -2 \\ 0 & -3 & -10 & 7 \\ 0 & 0 & 2 & -5 \end{pmatrix}$$

→Étape 2 :

$$E_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad L_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

et

$$E_2 E_1 A = \begin{pmatrix} -2 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 3 & -2 \\ 0 & 0 & \boxed{-1} & 1 \\ 0 & 0 & 2 & -5 \end{pmatrix}$$

→ Étape 3 :

$$E_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \end{pmatrix} \qquad L_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 1 \end{pmatrix}$$

d'où $\boxed{U = E_3 E_2 E_1 A = \begin{pmatrix} -2 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 3 & -2 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -3 \end{pmatrix}}$ et $\boxed{L = L_1 L_2 L_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & -3 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -2 & 1 \end{pmatrix}}$.

2) Résolvons successivement les systèmes $L\tilde{x} = b$ et $Ux = \tilde{x}$:

→ Système $L\tilde{x} = b$:

$$\left\{ \begin{array}{rrrrrr} & \tilde{x}_1 & & & & = & 1.5 \\ - & \tilde{x}_1 & +\tilde{x}_2 & & & = & 4 \\ & 2\tilde{x}_1 & -3x_2 & +\tilde{x}_3 & & = & -14 \\ & \tilde{x}_1 & & -2\tilde{x}_3 & +\tilde{x}_4 & = & -6.5 \end{array} \right. \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} \tilde{x}_1 = 1.5 \\ \tilde{x}_2 = 4 + \tilde{x}_1 = 5.5 \\ \tilde{x}_3 = -14 - 3 + 16.5 = -0.5 \\ \tilde{x}_4 = -6.5 - 1.5 - 1 = -9 \end{array} \right.$$

$\rightarrow$ Système $Ux = \tilde{x}$:

$$\left\{\begin{array}{rcrcrcrcr} -2x_1 & + & x_2 & - & x_3 & + & x_4 & = & 1.5 \\ & & x_2 & + & 3x_3 & - & 2x_4 & = & 5.5 \\ & & & - & x_3 & + & x_4 & = & -0.5 \\ & & & & & - & 3x_4 & = & -9 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} x_4 = 3 \\ x_3 = 0.5 + x_4 = 3.5 \\ x_2 = 5.5 + 2x_4 - 3x_3 = 1 \\ x_1 = -\dfrac{1}{2}(1.5 - x_2 + x_3 - x_4) = -0.5 \end{array}\right.$$

3) $B = {}^tU(LU)\,{}^tL = ({}^tUL)(U\,{}^tL)$. U est triangulaire supérieure et L triangulaire inférieure donc ${}^tU$ est triangulaire inférieure et ${}^tL$ triangulaire supérieure. Ainsi, ${}^tUL$ est triangulaire inférieure et $U\,{}^tL$ est triangulaire supérieure et on a bien $B = L'U'$ avec $L' = {}^tUL$ et $U' = U\,{}^tL$.

$\boxed{\textbf{10.}}$ Décomposition LU

1) Réaliser la décomposition LU de la matrice :

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 1 & -3 & 0 \\ 1 & 1 & 3 & 8 \\ -2 & 2 & -5 & -1 \\ 3 & 1 & 8 & 13 \end{pmatrix}.$$

2) En déduire la solution du système linéaire $Ax = b$ avec $b = {}^t(0, 2, -1, 5)$.

3) Sans calculer A^2, résoudre le système linéaire $A^2x = b$.

---

1) Vérifions tout d'abord que, $\forall\, k = 1, \ldots, 4$, $\det \Delta_k \neq 0$:

$$\det \Delta_1 = -1 \neq 0\ ;$$

$$\det \Delta_2 = \begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = -1 - 1 = -2 \neq 0\ ;$$

$$\begin{aligned} \det \Delta_3 &= \begin{vmatrix} -1 & 1 & -3 \\ 1 & 1 & 3 \\ -2 & 2 & -5 \end{vmatrix} = -1 \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 2 & -5 \end{vmatrix} - 1 \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ -2 & -5 \end{vmatrix} - 3 \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ -2 & 2 \end{vmatrix} \\ &= -(-11) - 1 - 3 \times 4 = -2 \neq 0; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \det \Delta_4 = \det A &= -1 \begin{vmatrix} 1 & 3 & 8 \\ 2 & -5 & -1 \\ 1 & 8 & 13 \end{vmatrix} - 1 \begin{vmatrix} 1 & 3 & 8 \\ -2 & -5 & -1 \\ 3 & 8 & 13 \end{vmatrix} - 3 \begin{vmatrix} 1 & 1 & 8 \\ -2 & 2 & -1 \\ 3 & 1 & 13 \end{vmatrix} \\ &= -\left[-5 \times 13 + 8 - 3 \times (2 \times 13 + 1) + 8 \times (2 \times 8 + 5)\right] \\ &\quad -\left[-5 \times 13 + 8 - 3 \times (-2 \times 13 + 3) + 8 \times (-2 \times 8 + 3 \times 5)\right] \\ &\quad -3\left[2 \times 13 + 1 - (-2 \times 13 + 3) + 8 \times (-2 - 3 \times 2)\right] \\ &= -(-57 - 81 + 168) - (-57 + 69 - 8) - 3(27 + 23 - 64) \\ &= -30 - 4 + 3 \times 14 = 8 \neq 0. \end{aligned}$$

Maintenant, obtenons la décomposition LU par la méthode du pivot de Gauss :

$\rightarrow$ Étape 1 :

$$A = \begin{pmatrix} \boxed{-1} & 1 & -3 & 0 \\ 1 & 1 & 3 & 8 \\ -2 & 2 & -5 & -1 \\ 3 & 1 & 8 & 13 \end{pmatrix} \qquad E_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ -2 & 0 & 1 & 0 \\ 3 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad L_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 1 & 0 \\ -3 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

et

$$E_1 A = \begin{pmatrix} -1 & 1 & -3 & 0 \\ 0 & \boxed{2} & 0 & 8 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 4 & -1 & 13 \end{pmatrix}$$

$\rightarrow$ Étape 2 :

$$E_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad L_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

et

$$E_2 E_1 A = \begin{pmatrix} -1 & 1 & -3 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 8 \\ 0 & 0 & \boxed{1} & -1 \\ 0 & 0 & -1 & -3 \end{pmatrix}$$

$\rightarrow$ Étape 3 :

$$E_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \qquad L_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

d'où $\boxed{U = E_3 E_2 E_1 A = \begin{pmatrix} -1 & 1 & -3 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 8 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & -4 \end{pmatrix}}$ et $\boxed{L = L_1 L_2 L_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 1 & 0 \\ -3 & 2 & -1 & 1 \end{pmatrix}}$.

2) Résolvons successivement les systèmes $L\tilde{x} = b$ et $Ux = \tilde{x}$:

$\rightarrow$ Système $L\tilde{x} = b$:

$$\left\{ \begin{array}{rrrrl} \tilde{x}_1 & & & & = 0 \\ -\tilde{x}_1 & +\tilde{x}_2 & & & = 2 \\ 2\tilde{x}_1 & & +\tilde{x}_3 & & = -1 \\ -3\tilde{x}_1 & +2\tilde{x}_2 & -\tilde{x}_3 & +\tilde{x}_4 & = 5 \end{array} \right. \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} \tilde{x}_1 = 0 \\ \tilde{x}_2 = 2 + \tilde{x}_1 = 2 \\ \tilde{x}_3 = -1 - 2\tilde{x}_1 = -1 \\ \tilde{x}_4 = 5 + 3\tilde{x}_1 - 2\tilde{x}_2 + \tilde{x}_3 = 5 - 4 - 1 = 0 \end{array} \right.$$

$\rightarrow$ Système $Ux = \tilde{x}$:

$$\left\{ \begin{array}{rrrrl} -x_1 & +x_2 & -3x_3 & & = 0 \\ & 2x_2 & & +8x_4 & = 2 \\ & & x_3 & -x_4 & = -1 \\ & & & -4x_4 & = 0 \end{array} \right. \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} x_4 = 0 \\ x_3 = -1 + x_4 = -1 \\ x_2 = \frac{1}{2}(2 - 8x_4) = 1 \\ x_1 = x_2 - 3x_3 = 4 \end{array} \right.$$

3) $A^2x = b \Leftrightarrow A(Ax) = b \Leftrightarrow Ax = {}^t\begin{pmatrix} 4 & 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$; résolvons ce système par la méthode utilisée à la question 2)

$\rightarrow$ Système $L\tilde{x} = {}^t\begin{pmatrix} 4 & 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$:

$$\left\{\begin{array}{rrrrrrrrr} & \tilde{x}_1 & & & & & & = & 4 \\ - & \tilde{x}_1 & + & \tilde{x}_2 & & & & = & 1 \\ & 2\tilde{x}_1 & & & + & \tilde{x}_3 & & = & -1 \\ - & 3\tilde{x}_1 & + & 2\tilde{x}_2 & - & \tilde{x}_3 & + \ \tilde{x}_4 & = & 0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} \tilde{x}_1 = 4 \\ \tilde{x}_2 = 1 + \tilde{x}_1 = 1 + 4 = 5 \\ \tilde{x}_3 = -1 - 2\tilde{x}_1 = -1 - 8 = -9 \\ \tilde{x}_4 = 3\tilde{x}_1 - 2\tilde{x}_2 + \tilde{x}_3 = 12 - 10 - 9 = -7 \end{array}\right.$$

$\rightarrow$ Système $Ux = \tilde{x}$:

$$\left\{\begin{array}{rrrrrrrrr} - & x_1 & + & x_2 & - & 3x_3 & & = & 4 \\ & & & 2x_2 & & & + \ 8x_4 & = & 5 \\ & & & & & x_3 & - \ x_4 & = & -9 \\ & & & & & & - \ 4x_4 & = & -7 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} x_4 = \dfrac{7}{4} = 1,75 \\ x_3 = -9 + x_4 = -\dfrac{29}{4} = -7,25 \\ x_2 = \dfrac{1}{2}(5 - 8x_4) = -\dfrac{9}{2} = -4,5 \\ x_1 = 4 + x_2 - 3x_3 = \dfrac{53}{4} = 13,25 \end{array}\right.$$

$\boxed{\textbf{11.}}$ Décomposition de Cholesky.

Donner la factorisation de Cholesky des matrices :

1) $A_1 = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 \\ -2 & 8 & -6 \\ 0 & -6 & 25 \end{pmatrix}$

2) $A_2 = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 12 & -6 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \\ 12 & 2 & 49 & -4 \\ -6 & 1 & -4 & 51 \end{pmatrix}$.

---

1) Posons $B = \begin{pmatrix} b_{11} & 0 & 0 \\ b_{21} & b_{22} & 0 \\ b_{31} & b_{32} & b_{33} \end{pmatrix}$. $A = B\,{}^tB$ s'écrit

$$\begin{pmatrix} b_{11} & 0 & 0 \\ b_{21} & b_{22} & 0 \\ b_{31} & b_{32} & b_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_{11} & b_{21} & b_{31} \\ 0 & b_{22} & b_{32} \\ 0 & 0 & b_{33} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 \\ -2 & 8 & -6 \\ 0 & -6 & 25 \end{pmatrix}$$

ce qui donne les relations suivantes :

$$\begin{array}{rcl} b_{1,1}^2 = 1 & \Rightarrow & b_{1,1} = 1 \\ b_{1,1} \times b_{2,1} = -2 & \Rightarrow & b_{2,1} = -2 \\ b_{1,1} \times b_{3,1} = 0 & \Rightarrow & b_{3,1} = 0 \\ b_{2,1}^2 + b_{2,2}^2 = 8 & \Rightarrow & b_{2,2} = 2 \\ b_{2,1} \times b_{3,1} + b_{2,2} \times b_{3,2} = -6 & \Rightarrow & b_{3,2} = \dfrac{-6 - (-2) \times 0}{2} = -3 \\ b_{3,1}^2 + b_{3,2}^2 + b_{3,3}^2 = 25 & \Rightarrow & b_{3,3} = \sqrt{25 - 9} = \sqrt{16} = 4 \end{array}$$

Ainsi, $\boxed{B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & 2 & 0 \\ 0 & -3 & 4 \end{pmatrix}}$.

Posons

$$B = \begin{pmatrix} b_{1,1} & 0 & 0 & 0 \\ b_{2,1} & b_{2,2} & 0 & 0 \\ b_{3,1} & b_{3,2} & b_{3,3} & 0 \\ b_{4,1} & b_{4,2} & b_{4,3} & b_{4,4} \end{pmatrix} \; ;$$

ce qui donne les relations suivantes :

$$\begin{aligned} b_{1,1}^2 = 4 \quad &\Rightarrow \quad b_{1,1} = 2 \\ b_{1,1} \times b_{2,1} = 0 \quad &\Rightarrow \quad b_{2,1} = 0 \\ b_{1,1} \times b_{3,1} = 12 \quad &\Rightarrow \quad b_{3,1} = \frac{12}{2} = 6 \\ b_{1,1} \times b_{4,1} = -6 \quad &\Rightarrow \quad b_{4,1} = \frac{-6}{2} = -3 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} b_{2,1}^2 + b_{2,2}^2 = 1 \quad &\Rightarrow \quad b_{2,2} = 1 \\ b_{2,1} \times b_{3,1} + b_{2,2} \times b_{3,2} = 2 \quad &\Rightarrow \quad b_{3,2} = \frac{2-0}{1} = 2 \\ b_{2,1} \times b_{4,1} + b_{2,2} \times b_{4,2} = 1 \quad &\Rightarrow \quad b_{4,2} = \frac{1-0}{1} = 1 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} b_{3,1}^2 + b_{3,2}^2 + b_{3,3}^2 = 49 \quad &\Rightarrow \quad b_{3,3} = \sqrt{49 - 36 - 4} = \sqrt{9} = 3 \\ b_{3,1}b_{4,1} + b_{3,2}b_{4,2} + b_{3,3}b_{4,3} = -4 \quad &\Rightarrow \quad b_{4,3} = \frac{-4 - 6 \times (-3) - 2 \times 1}{3} = \frac{12}{3} = 4 \end{aligned}$$

$$b_{4,1}^2 + b_{4,2}^2 + b_{4,3}^2 + b_{4,4}^2 = 51 \quad \Rightarrow \quad b_{4,4} = \sqrt{51 - 9 - 1 - 16} = \sqrt{25} = 5$$

Ainsi, $\boxed{B = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 6 & 2 & 3 & 0 \\ -3 & 1 & 4 & 5 \end{pmatrix}}$.

---

12. Décomposition QR

Chercher la décomposition QR de la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -46/5 & -43/5 \\ 2 & 8 & 23 \\ -2 & -28/5 & 26/5 \end{pmatrix}$$

$\rightarrow$ 1$^{\text{ère}}$ étape : Posons $a_1 = {}^t(1, 2, -2)$. Alors,

- $\| a_1 \|_2 = \sqrt{1+4+4} = \sqrt{9} = 3$ et $e^{i\alpha_1} = 11$;

- $v_1 = {}^t(-2, 2, -2)$;

- $H_1 = \mathbb{I}_3 - 2\dfrac{\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}(-1,1,-1)}{(-1,1,-1)\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}} = \begin{pmatrix} 1/3 & 2/3 & -2/3 \\ 2/3 & 1/3 & 2/3 \\ -2/3 & 2/3 & 1/3 \end{pmatrix}.$

- $H_1A = \begin{pmatrix} 3 & 6 & 9 \\ 0 & -36/5 & 27/5 \\ 0 & 48/5 & 114/5 \end{pmatrix}.$

$\rightarrow$ <u>2ème étape :</u> Posons $a_2 = {}^t(-36/5, 48/5)$. Alors,
$\| a_2 \|_2 = \dfrac{1}{5}\sqrt{1296+2304} = \dfrac{\sqrt{3600}}{5} = \dfrac{60}{5} = 12$ et $e^{i\alpha_2} = -1$;
$v_2 = {}^t(24/5, 48/5)$;
$\tilde{H}_2 = I_2 - 2\dfrac{\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}(1,2)}{(1,2)\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}} = \begin{pmatrix} 3/5 & -4/5 \\ -4/5 & -3/5 \end{pmatrix}$ et $H_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3/5 & -4/5 \\ 0 & -4/5 & -3/5 \end{pmatrix}$;
$H_2H_1A = \begin{pmatrix} 3 & 6 & 9 \\ 0 & -12 & -15 \\ 0 & 0 & -18 \end{pmatrix}$; avec $H_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$ on a alors

$$\boxed{H_3H_2H_1A = R = \begin{pmatrix} 3 & 6 & 9 \\ 0 & 12 & 15 \\ 0 & 0 & 18 \end{pmatrix}}$$

et $\boxed{Q = (H_3H_2H_1)^{-1} = H_1^{-1}H_2^{-1}H_3^{-1} = H_1H_2H_3 = \dfrac{1}{15}\begin{pmatrix} 5 & -14 & 2 \\ 10 & 5 & 10 \\ -10 & -2 & 11 \end{pmatrix}}.$

On a les équivalences :

$$\begin{aligned}
Ax = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \quad & \Leftrightarrow \quad QRx = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \\
& \Leftrightarrow \quad Rx = {}^tQ\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \qquad \text{car } Q \text{ est unitaire} \\
& \Leftrightarrow \quad \left\{ \begin{array}{llll} 3x_1 & +6x_2 & +9x_3 & = \frac{1}{15}(5+10-10) \\ & 12x_2 & +15x_3 & = \frac{1}{15}(-14+5-2) \\ & & 18x_3 & = \frac{1}{15}(2+10+11) \end{array} \right. \\
& \Leftrightarrow \quad \left\{ \begin{array}{l} x_3 = -\dfrac{1}{15\times 18}(-23) = \dfrac{23}{270} \\ x_2 = -\dfrac{1}{12}\left(\dfrac{11}{15} + \dfrac{23}{18}\right) = -\dfrac{181}{1080} \\ x_1 = \dfrac{1}{3}\left(\dfrac{1}{3} + \dfrac{181}{180} - \dfrac{23}{30}\right) = \dfrac{103}{540} \end{array} \right.
\end{aligned}$$

La solution du système $Ax = {}^t(1,1,1)$ est $\boxed{x = {}^t\left(\frac{103}{540}, \frac{181}{1080}, \frac{23}{270}\right)}$.

---

13. Calcul de déterminant et décomposition LU

1) Expliquer comment on peut calculer le déterminant d'une matrice A d'ordre n à partir de sa factorisation LU.

2) Appliquer cette méthode à la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ -4 & 1 & -4 \\ -2 & 2 & 4 \end{pmatrix}.$$

---

1) $A = LU$ donc $\det A = \det L \times \det U$ avec $\det L = \prod_{i=1}^{n} \ell_{ii} = 1$ et $\det U = \prod_{i=1}^{n} u_{ii}$. Ainsi, $\boxed{\det A = \prod_{i=1}^{n} u_{ii}}$.

2) Le calcul direct donne $\det A = 30$.

$$E_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad L_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \text{ et } E_1A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 0 & 3 & 2 \\ 0 & 3 & 7 \end{pmatrix}.$$

$$E_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}, \quad L_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \text{ et } E_2E_1A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 0 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix} = U.$$

On a alors $\det A = \det U = 2 \times 3 \times 5 = 30$.

---

14. Soit $M = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 3 & 4 & 5 & 1 \\ 3 & 4 & 5 & 1 & 2 \end{pmatrix}$.

La matrice J_r étant l'élément (α_{ij}) de $\mathcal{M}_{np}(\mathbb{K})$ telle $\alpha_{ij} = 1$ si $i = j \leq r$ et $\alpha_{ij} = 0$ sinon, trouver r, R et S avec $J_r = RMS$.

On peut obtenir R et S inversibles telles que $RMS = J_r$ en poursuivant la méthode du pivot. On considére au départ $(I_n|M|I_p)$ et on reporte sur I_n les opérations sur les lignes et sur I_p celles sur les colonnes.

On effectue sur $(I_3|M)$ les opérations élémentaires :

$\triangleright \begin{cases} \mathcal{L}_2 \hookleftarrow \mathcal{L}_2 - 2\mathcal{L}_1 \\ \mathcal{L}_3 \hookleftarrow \mathcal{L}_3 - 3\mathcal{L}_1 \end{cases}$. Cela donne

$$(U_1|M_1) = \left(\begin{array}{ccc|ccccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ -2 & 1 & 0 & 0 & -1 & -2 & -3 & -9 \\ -3 & 0 & 1 & 0 & -2 & -4 & -11 & -13 \end{array}\right).$$

$\triangleright$ $\mathcal{L}_3 \hookleftarrow \mathcal{L}_3 - 2\mathcal{L}_2$ puis $\mathcal{L}_2 \hookleftarrow -\mathcal{L}_2$ donnent

$$(U_2|M_2) = \left(\begin{array}{ccc|ccccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & -1 & 0 & 0 & 1 & 2 & 3 & 9 \\ 1 & -2 & 1 & 0 & 0 & 0 & -5 & 5 \end{array}\right).$$

Il y a 3 pivots, donc $r = \mathrm{rg}(M) = 3$. Pivotons maintenant sur les colonnes de M_2 dans $(M_2|I_5)$, en reportant les opérations effectuées dans I_5.

$\triangleright$ $\mathcal{C}_3 \longleftrightarrow \mathcal{C}_5$ puis $\mathcal{C}_4 \hookleftarrow \mathcal{C}_4 + \mathcal{C}_3$ donnent

$$(M_3|V_1) = \left(\begin{array}{ccccc|ccccc} 1 & 2 & 5 & 9 & 3 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 9 & 12 & 2 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 5 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ & & & & & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ & & & & & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \end{array}\right).$$

$\triangleright$ $\left\{\begin{array}{l} \mathcal{C}_3 \hookleftarrow \mathcal{C}_3 - 9\mathcal{C}_2 \\ \mathcal{C}_4 \hookleftarrow \mathcal{C}_4 - 12\mathcal{C}_2 \\ \mathcal{C}_5 \hookleftarrow \mathcal{C}_5 - 2\mathcal{C}_2 \end{array}\right.$ donnent $(M_4|V_2) =$

$$\left(\begin{array}{ccccc|ccccc} 1 & 2 & -13 & -15 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -9 & -12 & -2 \\ 0 & 0 & 5 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ & & & & & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ & & & & & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \end{array}\right).$$

$\triangleright$ $\left\{\begin{array}{l} \mathcal{C}_2 \hookleftarrow \mathcal{C}_2 - 2\mathcal{C}_1 \\ \mathcal{C}_3 \hookleftarrow \mathcal{C}_3 + 13\mathcal{C}_1 \\ \mathcal{C}_4 \hookleftarrow \mathcal{C}_4 + 15\mathcal{C}_1 \\ \mathcal{C}_5 \hookleftarrow \mathcal{C}_5 + \mathcal{C}_1 \end{array}\right.$ donnent $(M_5|V_3) =$

$$\left(\begin{array}{ccccc|ccccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -2 & 13 & 15 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -9 & -12 & -2 \\ 0 & 0 & 5 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ & & & & & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ & & & & & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \end{array}\right).$$

On finit par $\mathcal{C}_3 \hookleftarrow 1/5\mathcal{C}_3$ pour avoir $M_6 = J_3$. On prend donc $\boxed{R = U_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & -1 & 0 \\ 1 & -2 & 1 \end{pmatrix}}$ et

$$\boxed{S = V_4 = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 13/5 & 15 & 1 \\ 0 & 1 & -9/5 & -12 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1/5 & 1 & 0 \end{pmatrix}}.$$