Corrigés des exercices sur le conditionnement.

1. * Soient X et Y deux v.a.r. indépendantes. Déterminer la loi conditionnelle de X sachant $[X+Y=n]$, puis $\mathbb{E}^{[X+Y=n]}(X)$ ainsi que $\mathbb{E}^{X+Y}(X)$ dans les cas suivants :

(a) X et Y suivent respectivement les lois de Poisson $\mathcal{P}(\lambda)$ et $\mathcal{P}(\mu)$;
(b) X et Y suivent respectivement les lois binomiales $\mathcal{B}(m,p)$ et $\mathcal{B}(n,p)$.

(a) On sait que, si $P_X = \mathcal{P}(\lambda)$ et $P_Y = \mathcal{P}(\mu)$ avec X et Y indépendantes, alors $P_{X+Y} = \mathcal{P}(\lambda+\mu)$. On peut le remontrer rapidement :

$$\begin{aligned} P([X+Y=n]) &= \sum_{k=0}^{n} P([X=k]\cap[Y=n-k]) \\ &= \sum_{k=0}^{n} P([X=k])P([Y=n-k]) \\ &= \sum_{k=0}^{n} e^{-\lambda}\frac{\lambda^k}{k!}e^{-\mu}\frac{\mu^{n-k}}{(n-k)!} = \frac{e^{-(\lambda+\mu)}}{n!}\sum_{k=0}^{n} C_n^k\lambda^k\mu^{n-k} \\ &= e^{-(\lambda+\mu)}\frac{(\lambda+\mu)^n}{n!}. \end{aligned}$$

Donc

$$\begin{aligned} P^{[X+Y=n]}([X=k]) &= \frac{P([X=k]\cap[X+Y=n])}{P([X+Y=n])} = \frac{P([X=k]\cap[Y=n-k])}{P([X+Y=n])} \\ &= \frac{P([X=k])P([Y=n-k])}{P([X+Y=n])} \end{aligned}$$

par indépendance de X et de Y. On a alors :

Si $k \notin [\![0,n]\!]$, $P^{[X+Y=n]}([X=k]) = 0$, sinon :

$$P^{[X+Y=n]}([X=k]) = \frac{e^{-\lambda}\frac{\lambda^k}{k!}e^{-\mu}\frac{\mu^{n-k}}{(n-k)!}}{e^{-(\lambda+\mu)}\frac{(\lambda+\mu)^n}{n!}} = C_n^k\frac{\lambda^k\mu^{n-k}}{(\lambda+\mu)^n} = C_n^k\left(\frac{\lambda}{\lambda+\mu}\right)^k\left(\frac{\mu}{\lambda+\mu}\right)^{n-k}$$

donc $\boxed{P_X^{[X+Y=n]} = \mathcal{B}\left(n, \frac{\lambda}{\lambda+\mu}\right)}$, puis $\boxed{\mathbb{E}^{[X+Y=n]}(X) = \frac{n\lambda}{\lambda+\mu}}$ et $\boxed{\mathbb{E}^{X+Y}(X) = \frac{\lambda(X+Y)}{\lambda+\mu}}$.

(b) On sait que, si $P_X = \mathcal{B}(m,p)$ et $P_Y = \mathcal{B}(n,p)$ avec X et Y indépendantes, alors $P_{X+Y} = \mathcal{B}(m+n,p)$. On peut le remontrer rapidement, pour changer, en utilisant la fonction génératrice : $G_{X+Y}(s) = \mathbb{E}(s^{X+Y}) = \mathbb{E}(s^Xs^Y) = \mathbb{E}(s^X)\mathbb{E}(s^Y)$ par indépendance de X et Y. Or $G_X(s) = \sum_{k=0}^{m} s^kC_m^kp^k(1-p)^{m-k} = (ps+1-p)^m$ et donc $G_{X+Y}(s) = (ps+1-p)^{m+n}$ qui est bien la fonction génératrice de la loi $\mathcal{B}(n+m,p)$.

On a alors, avec la même formule que précédemment :

$$\begin{aligned} P^{[X+Y=k]}([X=i]) &= \frac{P([X=i])P([Y=k-i])}{P([X+Y=k])} \\ &= \frac{C_m^ip^i(1-p)^{m-i}C_n^{k-i}p^{k-i}(1-p)^{n-k+i}}{C_{n+m}^kp^k(1-p)^{n+m-k}} = \frac{C_m^iC_n^{k-i}}{C_{n+m}^k} \end{aligned}$$

donc $\boxed{P_X^{[X+Y=k]} = \mathcal{H}(k, m, n+m)}$, puis $\boxed{\mathbb{E}^{[X+Y=k]}(X) = \frac{km}{n+m}}$ et $\boxed{\mathbb{E}^{X+Y}(X) = \frac{m(X+Y)}{n+m}}$.

---

2. ** Soit a, b, c trois réels de $]0,1[$ tels que $a+b+c=1$ et α, β deux réels de $]0,1[$ tels que $\alpha+\beta=1$.

(a) Montrer que la famille $(p_{m,n})$ définie par:

$$\begin{cases} p_{0,0} = \alpha + \beta a \\ p_{m,n} = \beta a \frac{(m+n)!}{m!n!}\, b^m c^n \text{ si } (m,n) \neq (0,0) \end{cases}$$

est une probabilité sur $\mathbb{N}^2$.
(b) On considère un couple (X, Y) de v.a.r. à valeurs dans $\mathbb{N}^2$ tel que :

$$P([X=m] \cap [Y=n]) = p_{m,n}.$$

Déterminer les lois conditionnelles de Y sachant $[X=0]$, puis sachant $[X=m]$ pour tout $m \in \mathbb{N}^*$. Déterminer $\mathbb{E}^X(Y)$.

(a) Les $p_{n,m}$ sont positifs et, si $n=0$,

$$p_{n,.} = \sum_{m=0}^{+\infty} p_{n,m} = \beta a b^n \sum_{m=0}^{+\infty} C_{n+m}^n c^m = \frac{\beta a b^n}{n!} \sum_{m=0}^{+\infty} (m+1)\cdots(m+n)c^m.$$

On a $\sum\limits_{m=0}^{+\infty} x^m = \frac{1}{1-x}$, série entière de rayon 1. En dérivant, on obtient, pour $|x|<1$,

$$((1-x)^{-1})' = \frac{1}{(1-x)^2} = \sum_{m=1}^{+\infty} m x^{m-1} = \sum_{m=0}^{+\infty} (m+1)x^m$$

$$((1-x)^{-1})'' = \frac{2}{(1-x)^3} = \sum_{m=1}^{+\infty} m(m+1)x^{m-1} = \sum_{m=0}^{+\infty} (m+1)(m+2)x^m$$

Plus généralement,

$$((1-x)^{-1})^{(n)} = \frac{n!}{(1-x)^{n+1}} = \sum_{m=0}^{+\infty} (m+1)\cdots(m+n)c^m$$

d'où, pour $n \neq 0$, $p_{n.} = \frac{\beta a b^n}{n!} \frac{n!}{(1-c)^{n+1}} = \beta \frac{a}{a+b} \left(\frac{b}{a+b}\right)^n$, puisque $a+b+c=1$.
Pour $n=0$,

$$p_{0,.} = p_{0,0} + \sum_{m=1}^{+\infty} p_{n,m} = \alpha + \beta a + \beta a \sum_{m=1}^{+\infty} c^m = \alpha + \beta a \sum_{m=0}^{+\infty} c^m = \alpha + \frac{\beta a}{1-c} = \alpha + \frac{\beta a}{a+b}.$$

On a donc

$$\begin{aligned} \sum_{n=0}^{+\infty} \left(\sum_{m=0}^{+\infty} p_{n,m} \right) &= p_{0.} + \sum_{n=1}^{+\infty} p_{n.} = \alpha + \frac{\beta a}{a+b} + \frac{\beta a}{a+b} \sum_{n=1}^{+\infty} \left(\frac{b}{a+b}\right)^n \\ &= \alpha + \frac{\beta a}{a+b} \sum_{n=0}^{+\infty} \left(\frac{b}{a+b}\right)^n = \alpha + \frac{\beta a}{a+b} \frac{1}{1-\frac{b}{a+b}} \\ &= \alpha + \frac{\beta a}{a+b-b} = \alpha + \beta = 1 \end{aligned}$$

donc $\boxed{\text{la famille } (p_{n,m})_{n,m\in\mathbb{N}^2} \text{ définit bien une probabilité sur } \mathbb{N}^2}$.

(b) $P([X=0]) = p_{0,.} = \alpha + \frac{\beta a}{a+b} = \frac{\alpha(a+b)+\beta a}{a+b} = \frac{a+\alpha b}{a+b}$.

Si $m \neq 0$, $P^{[X=0]}([Y=m]) = \frac{p_{0,m}}{p_{0,.}} = \frac{\beta a c^m}{a+\alpha b}(a+b) = \frac{\beta a c^m}{a+\alpha b}(a+b) = \frac{\beta a}{a+\alpha b}c^m(1-c)$

$$P^{[X=0]}([Y=0]) = \frac{p_{0,0}}{p_{0,.}} = \frac{\alpha+\beta a}{a+\alpha b}(a+b) = \frac{\beta a}{a+\alpha b}(1-c) + \frac{\alpha}{a+\alpha b}$$

donc la loi conditionnelle de Y sachant $[X=0]$ est $\boxed{P_Y^{[X=0]} = \frac{\alpha(a+b)}{a+\alpha b}\delta_0 + \frac{\beta a}{a+\alpha b}\mathcal{G}_0(a+b)}$ avec $\frac{\alpha(a+b)}{a+\alpha b} + \frac{\beta a}{a+\alpha b} = \frac{\alpha a+\alpha b+\beta a}{a+\alpha b} = 1$.

Pour $m \in \mathbb{N}$, $P^{[X=n]}([Y=m]) = \frac{p_{n,m}}{p_{n,.}} = \frac{\beta a C_{n+m}^n b^n c^m}{\beta a b^n}(1-c)^{n+1} = C_{n+m}^n(1-c)^{n+1}c^m$.

Ainsi, la loi conditionnelle de Y sachant $[X=n]$ est la loi $\boxed{\mathcal{BN}(n+1, a+b)}$, loi binomiale négative.

On a alors, pour $n \neq 0$, $\mathbb{E}^{[X=n]}(Y) = (n+1)\frac{c}{a+b}$ et $\mathbb{E}^{[X=0]}(Y) = \frac{\beta a}{a+\alpha b}\frac{c}{a+b}$.

On a $\mathbb{E}^X(Y) = \psi(X)$ avec $\psi(0) = \frac{\beta a}{a+\alpha b}\frac{c}{a+b} = \frac{c}{a+b} - \frac{\alpha c}{a+\alpha b}$ et $\psi(n) = \frac{c(n+1)}{a+b}$ pour $n \neq 0$ donc $\boxed{\mathbb{E}^X(Y) = \frac{c}{a+b}(X+1) - \frac{\alpha c}{a+\alpha b}\,\mathbb{I}_{\{0\}}(X)}$.

---

3. * Soit $\lambda > 0$ et (X,Y) un couple à valeurs dans $\mathbb{N}^2$ de loi conjointe définie par :

$$P([X=m]\cap[Y=k]) = \frac{1}{\lambda}\, C_{m+k}^k \left(\frac{\lambda}{2\lambda+1}\right)^{m+k+1}$$

(a) Déterminer la loi de $Z = X+Y$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$, la loi conditionnelle de X sachant $[Z=n]$.

(b) Déterminer $\mathbb{E}^Z(X)$ et retrouver $\mathbb{E}(X)$.

(a) $P([X=m]\cap[Z=n]) = P([X=m]\cap[Y=n-m]) = \frac{1}{\lambda}\, C_n^m\left(\frac{\lambda}{2\lambda+1}\right)^{n+1}$ pour $n \geq m$ (et 0 sinon).

On en déduit $P([Z=n]) = \sum\limits_m P([X=m]\cap[Z=n]) = \frac{1}{\lambda}\left(\frac{\lambda}{2\lambda+1}\right)^{n+1} \sum\limits_{m=0}^{n} C_n^m = \frac{1}{\lambda}\left(\frac{\lambda}{2\lambda+1}\right)^{n+1} 2^n$. Ainsi, $P([Z=n]) = \frac{1}{2\lambda+1}\left(\frac{2\lambda}{2\lambda+1}\right)^n$ et $\boxed{Z \text{ suit la loi géométrique } \mathcal{G}_0\left(\frac{1}{2\lambda+1}\right)}$.

(b) $P^{[Z=n]}([X=m]) = \dfrac{P([X=m]\cap[Z=n])}{P([Z=n])} = \dfrac{\frac{1}{\lambda}\, C_n^m\left(\frac{\lambda}{2\lambda+1}\right)^{n+1}}{\frac{1}{2\lambda+1}\left(\frac{2\lambda}{2\lambda+1}\right)^n} = \dfrac{C_n^m}{2^n}$ pour $0 \leq m \leq n$ (qui peut s'écrire $C_n^m\left(\frac{1}{2}\right)^m\left(\frac{1}{2}\right)^{n-m}$). Ainsi $\boxed{P_X^{[Z=n]} = \mathcal{B}\left(n, \frac{1}{2}\right)}$.

On en déduit $\mathbb{E}^{[Z=n]}(X) = \frac{n}{2}$, d'où $\boxed{\mathbb{E}^Z(X) = \frac{Z}{2}}$ et $\mathbb{E}(X) = \mathbb{E}(\mathbb{E}^Z(X)) = \frac{1}{2}\mathbb{E}(Z)$. Or $\mathbb{E}(Z) = \frac{\frac{2\lambda}{2\lambda+1}}{\frac{1}{2\lambda+1}} = 2\lambda$, donc $\boxed{\mathbb{E}(X) = \lambda}$.

---

4. ** On considère le vecteur aléatoire $U = (X,Y)$ équiréparti sur $\{(0,0),(0,2),(1,1)\}$. Les v.a. X et Y sont-elles indépendantes ? Déterminer $\mathbb{E}(Y)$ et $\mathbb{E}^X(Y)$.

On a $p_{0,0} = p_{0,2} = p_{1,1} = \frac{1}{3}$ donc $X(\Omega) = \{0, 1\}$ avec $P([X = 0]) = \frac{2}{3}$ et $P([X = 1]) = \frac{1}{3}$, c'est-à-dire que X suit la loi de Bernoulli $\mathcal{B}\left(\frac{1}{3}\right)$. Par contre $Y(\Omega) = \{0, 1, 2\}$ avec $P([Y = 0])P([Y = 1]) = P([Y = 2]) = \frac{1}{3}$: Y suit la loi équiprobabilité sur $\{0; 1; 2\}$. Les v.a. X et Y ne sont pas indépendantes car $P([X = 0] \cap [Y = 1]) = p_{0,1} = 0$ alors que $P([X = 0]) \times P([Y = 1]) = \frac{2}{3} \times \frac{1}{3} = \frac{2}{9}$.

$\mathbb{E}(Y) = \frac{1}{3} \times 0 + \frac{1}{3} \times 1 + \frac{1}{3} \times 2$, soit $\boxed{\mathbb{E}(Y) = 1}$.

• $P^{[X=0]}([Y = 0]) = \frac{p_{0,0}}{P([X=0])} = \frac{1}{2}$ et de même $P^{[X=0]}([Y = 2]) = \frac{1}{2}$ donc $\mathbb{E}^{[X=0]}(Y) = 2 \times \frac{1}{2} = 1$.
• $P^{[X=1]}([Y = 1]) = \frac{p_{1,1}}{P([X=1])} = 1$ donc $\mathbb{E}^{[X=1]}(Y) = 1$.

Finalement, on a dans chaque cas $\mathbb{E}^{[X=x]}(Y) = 1$ donc $\boxed{\mathbb{E}^X(Y) = 1 = \mathbb{E}(Y)}$ bien que X et Y ne soient pas indépendantes.

---

5. *** Soit Y et Z deux v.a. indépendantes, de loi l'équiprobabilité dans $\{-1, 1\}$.

(a) Montrer que $X = \mathbb{I}_{[Y+Z=0]}$ est indépendante de Y et de Z. Les v.a. X, Y, Z sont-elles mutuellement indépendantes ?

(b) Déterminer $\mathbb{E}^Y(X)$ et $\mathbb{E}^Z(X)$. Ces v.a. sont-elles indépendantes de Y et Z ?

(c) Déterminer $\mathbb{E}^{(Y,Z)}(X)$. Est-elle indépendante de (Y, Z) ?

(d) Est-il vrai que, lorsqu'une v.a. Z est indépendante de la v.a.r. U et de la v.a. Y, on a p.s. $\mathbb{E}^{(Y,Z)}(U) = \mathbb{E}^Y(U)$?

(a) On a $Y + Z(\Omega) = \{-2; 0; 2\}$ avec $P([Y + Z = -2]) = P([Y = -1] \cap [Z = -1]) = \frac{1}{4}$; $P([Y + Z = 2]) = P([Y = 1] \cap [Z = 1]) = \frac{1}{4}$ et

$$P([Y + Z = 0]) = P([Y = -1] \cap [Z = 1]) + P([Y = 1] \cap [Z = -1]) = \frac{1}{2}.$$

Ainsi X suit la loi de Bernoulli $\mathcal{B}\left(\frac{1}{2}\right)$.

On a $P([X = 0] \cap [Y = \varepsilon]) = P([Z \neq -Y] \cap [Y = \varepsilon]) = P([Z = \varepsilon] \cap [Y = \varepsilon]) = \frac{1}{4}$ par indépendance de Y et Z.

De même $P([X = 1] \cap [Y = \varepsilon]) = P([Z = -Y] \cap [Y = \varepsilon]) = P([Z = -\varepsilon] \cap [Y = \varepsilon]) = \frac{1}{4}$ et comme $P([X = 0]) = P([X = 1]) = P([Y = \varepsilon])$ on a bien X et Y indépendantes et de même avec Z.

Par contre, X, Y et Z ne sont pas mutuellement indépendantes car $P([X = 0] \cap [Y = 1] \cap [Z = -1]) = 0$ alors que $P([X = 0])P([Y = 1])P([Z = -1]) = \frac{1}{8}$.

(b) Y et Z jouant le même rôle, il suffit de déterminer l'espérance conditionnelle pour Y.
$P^{[Y=1]}([X = 0]) = \frac{P([X=0] \cap [Y=1])}{P([Y=1])} = \frac{1}{2}$ et $P^{[Y=1]}([X = 1]) = \frac{1}{2}$ donc $\mathbb{E}^{[Y=1]}(X) = \frac{1}{2}$.

On a de la même manière $\mathbb{E}^{[Y=-1]}(X) = \frac{1}{2}$ donc $\boxed{\mathbb{E}^Y(X) = \frac{1}{2} = \mathbb{E}(X)}$. $\mathbb{E}^Y(X)$ étant constante, elle est indépendante à toute autre variable donc en particulier à Y et de même pour Z.

(c) La donnée du couple (Y, Z) détermine complètement la valeur de X car $X = \mathbb{I}_{[Y+Z=0]} = \psi(Y, Z)$. On peut en fait écrire que $\boxed{\mathbb{E}^{(Y,Z)}(X) = X}$ qui n'est pas indépendante de (Y, Z).

(d) En prenant $U = X = \mathbb{I}_{[Y+Z=0]}$, on a bien Z indépendante de Y et de X (voir (a)). Pourtant $\mathbb{E}^{(Y,Z)}(X) = X$, alors que $\mathbb{E}^{Y}(X) = 1$.

---

6. ** Soit X une v.a. équiprobable dans $\{-1, 1\}$ et $Y = X^2$.

(a) Les v.a. X et Y sont-elles indépendantes ? non corrélées ?

(b) Déterminer $\mathbb{E}^X(Y)$. Deux v.a.r. liées par une relation fonctionnelle sont-elles toujours dépendantes ?

(a) $P([X = -1]) = P([X = 1]) = \frac{1}{2}$, et $P([Y = 1]) = 1$ (Y v.a. constante égale à 1). On a $P([X = 1] \cap [Y = 1]) = \frac{1}{2} = P([X = 1])P([Y = 1])$ et $P([X = -1] \cap [Y = 1]) = \frac{1}{2} = P([X = -1])P([Y = 1])$ donc X et Y sont indépendantes et par conséquent décorrélées aussi.

(b) On a $\mathbb{E}^X(Y) = 1$. On a ici deux v.a.r. liées par une relation fonctionnelle et pourtant indépendantes.

---

7. ** (a) Déterminer l'espérance et la variance d'une v.a. Y dont la loi est définie par :

$$\forall\, m \in \mathbb{N},\;\; P([Y = m]) = \frac{2}{3^{m+1}}.$$

Si X une v.a. entière dont la loi conditionnelle à $[Y = m]$, pour chaque m de $\mathbb{N}$, est l'équiprobabilité sur $\{m, m + 1\}$. Déterminer $\mathbb{E}^Y(X)$. En déduire que X admet une espérance que l'on indiquera.

(b) Déterminer la loi conjointe des v.a. X et Y.

(c) Préciser la loi de X, sa variance et l'espérance conditionnelle de Y à X.

(d) Calculer $\operatorname{cov}(X, Y)$ et le coefficient de corrélation linéaire $\rho_{X,Y}$ des v.a. X et Y. Déterminer les droites de régression linéaire de X en Y et de Y en X.

(a) On a donc, pour tout $m \in \mathbb{N}$, $P([Y = m]) = \frac{2}{3}\left(\frac{1}{3}\right)^m$ et Y est donc une v.a. $\mathcal{G}_0\left(\frac{2}{3}\right)$. Il vient alors $\mathbb{E}(Y) = \frac{1/3}{2/3} = \frac{1}{2}$ et $\operatorname{var} Y = \frac{1/3}{(2/3)^2} = \frac{3}{4}$.

On a $\mathbb{E}^{[Y=m]}(X) = m \times \frac{1}{2} + (m+1) \times \frac{1}{2} = m + \frac{1}{2}$, d'où $\boxed{\mathbb{E}^Y(X) = Y + \frac{1}{2}}$. Puis, $\mathbb{E}^Y(X)$ ayant une espérance, comme Y :

$$\mathbb{E}(\mathbb{E}^Y(X)) = \mathbb{E}(X) = \mathbb{E}(Y) + \frac{1}{2} = 1.$$

(b) Pour tout $(n, m) \in \mathbb{N}^2$, on a :

$$\begin{aligned} P([X = n] \cap [Y = m]) &= P([Y = m])P^{[Y=m]}([X = n]) \\ &= \begin{cases} \frac{2}{3^{m+1}} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{3^{m+1}} & \text{si } n \in \{m, m+1\} \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases} \end{aligned}$$

(c) La loi de X est définie par :

• $P([X=0]) = P([X=0]\cap[Y=0]) = \frac{1}{3}$,
• pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$\begin{aligned} P([X=n]) &= \sum_{m=0}^{+\infty} P([X=n]\cap[Y=m]) \\ &= P([X=n]\cap[Y=n]) + P([X=n]\cap[Y=n-1]) \\ &= \frac{1}{3^{n+1}} + \frac{1}{3^n} = \frac{4}{3^{n+1}}. \end{aligned}$$

On a par ailleurs : pour tout $s \in [-1,1]$, $\varphi_X(s) = \frac{1+s}{3-s} = -1 + \frac{4}{3-s}$, $\varphi'_X(s) = \frac{4}{(3-s)^2}$, $\varphi''_X(s) = \frac{8}{(3-s)^3}$, d'où $\mathbb{E}(X) = \lim_{s\to 1_-} \varphi'_X(s) = 1$ et $\mathbb{E}(X(X-1)) = \lim_{s\to 1_-} \varphi''_X(s) = 1$, d'où, comme $\mathrm{var} X = \mathbb{E}(X(X-1)) + \mathbb{E}(X) - \mathbb{E}(X)^2$, $\boxed{\mathrm{var}(X) = 1}$.

On a, par ailleurs, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$P^{[X=n]}([Y=m]) = \begin{cases} \frac{1/3^{n+1}}{4/3^{n+1}} = \frac{1}{4} & \text{si } m=n \\ \frac{1/3^{n}}{4/3^{n+1}} = \frac{3}{4} & \text{si } m=n-1 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

et $P^{[X=0]}([Y=0]) = \frac{P([X=0]\cap[Y=0])}{P([Y=0])} = \frac{1/3}{1/3} = 1$, $P^{[X=0]}([Y=m]) = 0$ si $m \neq 0$.

On a, par conséquent, $P_Y^{[X=0]} = \delta_0$ et $P_Y^{[X=n]} = \frac{3}{4}\delta_{n-1} + \frac{1}{4}\delta_n$ sinon. Il en résulte que l'on a :

$$\mathbb{E}^{[X=0]}(Y) = \mathbb{E}_{\delta_0} = 0 \text{ et } \forall n \in \mathbb{N}^*,\ \mathbb{E}^{[X=n]}(Y) = \frac{n}{4} + \frac{3(n-1)}{4} = n - \frac{3}{4},$$

d'où $\mathbb{E}^X(Y) = \sum_{n=0}^{+\infty} \mathbb{E}^{[X=n]}(Y)\mathbb{I}_{[X=n]} = \sum_{n=1}^{+\infty} \mathbb{E}^{[X=n]}(Y)\mathbb{I}_{[X=n]}$, soit $\boxed{\mathbb{E}^X(Y) = (X - \frac{3}{4})\mathbb{I}_{[X\neq 0]}}$.

(On a bien $\mathbb{E}(\mathbb{E}^X(Y)) = \mathbb{E}\left((X-\frac{3}{4})\mathbb{I}_{[X\neq 0]}\right) = \mathbb{E}(X) - \frac{3}{4}P([X\neq 0]) = 1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2} = \mathbb{E}(Y)$).

(d) On a $\mathbb{E}(XY) = \mathbb{E}(\mathbb{E}^Y(XY)) = \mathbb{E}(Y\mathbb{E}^Y(X))$ avec $\mathbb{E}^Y(X) = Y + \frac{1}{2}$ donc

$$\mathbb{E}(XY) = \mathbb{E}(Y^2) + \frac{1}{2}\mathbb{E}(Y) = \frac{3}{4} + \frac{1}{4} + \frac{1}{4} = \frac{5}{4}.$$

On en déduit $\mathrm{cov}(X,Y) = \frac{5}{4} - 1 \times \frac{1}{2} = \boxed{\frac{3}{4}}$. Le coefficient de corrélation est donc :

$$\rho_{X,Y} = \frac{\mathrm{cov}(X,Y)}{\sigma_X\sigma_Y} = \frac{3/4}{1\times\sqrt{3/4}} = \boxed{\sqrt{\frac{3}{4}}}.$$

La droite de régression de Y en X a pour équation :

$$y - \mathbb{E}(Y) = \rho_{X,Y}\frac{\sigma_Y}{\sigma_X}(x - \mathbb{E}(X)) \quad \text{soit } \boxed{y = \tfrac{3}{4}x - \tfrac{1}{4}}$$

celle de X en Y est :

$$x - \mathbb{E}(X) = \rho_{X,Y}\frac{\sigma_X}{\sigma_Y}(y - \mathbb{E}(Y)) \quad \text{soit } \boxed{x = y + \tfrac{1}{2}}.$$

---

8. ** Soit U une indicatrice d'espérance p ($p \in]0,1[$) et X une v.a. à valeurs dans $\mathbb{N}$ (avec $P([X=n]) \neq 0$ pour tout n), ayant un moment d'ordre 2. On suppose U et X indépendantes. On note φ la fonction génératrice de X ($\varphi(s) = \mathbb{E}(s^X)$). Tous les résultats demandés (sauf au

(2)) sont à exprimer en fonction de p et φ.

(a) On rappelle que l'on pose par convention : $0^0 = 1$. Calculer $\mathbb{E}\left(0^X\right)$ et $\mathbb{E}\left(X^0\right)$.

(b) Montrer que, pour toute fonction numérique f, on peut écrire : $f \circ U = AU + B$, où A et B sont des constantes à préciser en fonction de f.

(c) Calculer $\mathbb{E}^U\left(U^X\right)$ et en déduire $\mathbb{E}\left(U^X\right)$, puis calculer $\mathbb{E}^X\left(U^X\right)$ et retrouver $\mathbb{E}\left(U^X\right)$.

(d) Calculer $\mathbb{E}^X\left(X^U\right)$ et en déduire $\mathbb{E}\left(X^U\right)$, puis calculer $\mathbb{E}^U\left(X^U\right)$ et retrouver $\mathbb{E}\left(X^U\right)$.

(a) $\mathbb{E}(0^X) = 0^0 P([X=0]) = P([X=0])$ donc $\boxed{\mathbb{E}(0^X) = \varphi(0)}$ et $\boxed{\mathbb{E}(X^0) = 1}$.

(b) Posant $U = \mathbb{I}_\Delta$, où $P(\Delta) = p$, il vient :

$$f \circ U = f(1)\mathbb{I}_\Delta + f(0)\mathbb{I}_{\overline{\Delta}} = [f(1) - f(0)]\mathbb{I}_\Delta + f(0)$$

donc $\boxed{f \circ U = [f(1) - f(0)]U + f(0)}$.

(c) On a : $\mathbb{E}^U(U^X) = f \circ U$ avec $f(u) = \mathbb{E}^{[U=u]}(u^X) = \mathbb{E}(u^X) = \varphi(u)$ (indépendance de X et de U), d'où :

$$\boxed{\mathbb{E}^U(U^X) = [\varphi(1) - \varphi(0)]\,U + \varphi(0) = (1 - \varphi(0))\,U + \varphi(0)}$$

et $\mathbb{E}(U^X) = \mathbb{E}(\mathbb{E}^U(U^X)) = (1-\varphi(0))\mathbb{E}(U) + \varphi(0) = p + \varphi(0)(1-p)$.

De même, $\mathbb{E}^X(U^X) = g \circ X$, avec $g(x) = \mathbb{E}^{[X=x]}(U^x) = \mathbb{E}(U^x) = \begin{cases} \mathbb{E}(U^0) = 1 & \text{si } x = 0 \\ \mathbb{E}(U) = p & \text{si } x \neq 0 \end{cases}$, d'où $\mathbb{E}^X(U^X) = \mathbb{I}_{[X=0]} + p \sum\limits_{x \neq 0} \mathbb{I}_{[X=x]} = (1-p)\mathbb{I}_{[X=0]} + p$ et

$$\mathbb{E}(U^X) = \mathbb{E}(\mathbb{E}^X(U^X)) = (1-p)P([X=0]) + p$$

soit $\boxed{\mathbb{E}(U^X) = (1-p)\varphi(0) + p}$.

(d) Il vient : $\mathbb{E}^X(X^U) = h \circ X$, avec

$$h(x) = \mathbb{E}^{[X=x]}(x^U) = \mathbb{E}(x^U) = \begin{cases} \mathbb{E}(0^U) = P([U=0]) = 1-p & \text{si } x = 0 \\ xP([U=1]) + P([U=0]) = xp + (1-p) & \text{si } x \neq 0 \end{cases},$$

d'où, pour tout $x \in \mathbb{N}$, $h(x) = xp + (1-p)$. Il en résulte donc $\mathbb{E}^X(X^U) = pX + (1-p)$ et

$$\boxed{\mathbb{E}(X^U) = \mathbb{E}(\mathbb{E}^X(X^U)) = p\mathbb{E}(X) + (1-p) = p\varphi'(1) + (1-p).}$$

Enfin, puisque $\mathbb{E}^U(X^U) = k \circ U$ avec

$$k(u) = \mathbb{E}^{[U=u]}(X^u) = \mathbb{E}(X^u) = \begin{cases} \mathbb{E}(X^0) = 1 & \text{si } u = 0 \\ \mathbb{E}(X) = \varphi'(1) & \text{si } u = 1 \end{cases},$$

on obtient $\mathbb{E}^U(X^U) = (\varphi'(1) - 1)U + 1$ et $\mathbb{E}(X^U) = (\varphi'(1)-1)\mathbb{E}(U) + 1 = p\varphi'(1) + 1 - p$.

---

9. * Soit λ_1 et λ_2 deux éléments de $]0,1[$ vérifiant l'inégalité :

$$\lambda_1 + \lambda_2 < 1.$$

On considère un couple (X,Y) de v.a.r. dont la loi est définie par :

$$\forall\ (n,m) \in \mathbb{N}^2 - \{(0,0)\}, \quad P([X=n]\cap[Y=m]) = -\frac{(n+m-1)!}{n!\,m!}\,\frac{\lambda_1^n\,\lambda_2^m}{\ln\,(1-\lambda_1-\lambda_2)}.$$

(a) Calculer $P([X=0])$ et, pour tout n de $\mathbb{N}^*$, $P([X=n])$. Déterminer les lois de X et Y. Préciser les espérances et les variances de ces v.a.

(b) Identifier la loi de Y conditionnelle à l'événement $[X=n]$ (distinguer les cas $n=0$ et $n\in\mathbb{N}^*$). Calculer $\mathbb{E}^{[X=n]}(Y)$. En déduire $\mathbb{E}^X(Y)$. Vérifier, à partir de là, que l'on a :

$$\mathbb{E}(Y) - \frac{\lambda_2}{1-\lambda_2}\mathbb{E}(X) = -\frac{\lambda_2}{(1-\lambda_2)\,\ln\,(1-\lambda_1-\lambda_2)}.$$

(a) La loi de X est caractérisée par :

$$P([X=0]) = \sum_{y=1}^{+\infty} P([X=0]\cap[Y=y]) = \sum_{y=1}^{+\infty}\frac{(y-1)!}{y!}\,\frac{\lambda_2^y}{-\ln(1-\lambda_1-\lambda_2)} = \frac{\ln(1-\lambda_2)}{\ln(1-\lambda_1-\lambda_2)}$$

et, pour $n\in\mathbb{N}^*$,

$$\begin{aligned} P([X=n]) &= \sum_{m=0}^{+\infty} P([X=n]\cap[Y=m]) \\ &= -\frac{\lambda_1^n}{n!\ln(1-\lambda_1-\lambda_2)}\sum_{m=0}^{+\infty}(n+m-1)\cdots(m+1)\lambda_2^m \\ &= -\frac{\lambda_1^n}{n!\ln(1-\lambda_1-\lambda_2)}\times\frac{(n-1)!}{(1-\lambda_2)^n} = -\frac{1}{\ln(1-\lambda_1-\lambda_2)}\frac{1}{n}\left(\frac{\lambda_1}{1-\lambda_2}\right)^n. \end{aligned}$$

La loi de X a pour fonction génératrice

$$\begin{aligned} \sum_{n=0}^{+\infty} u^n P([X=n]) &= \frac{\ln(1-\lambda_2)}{\ln(1-\lambda_1-\lambda_2)} - \frac{1}{\ln(1-\lambda_1-\lambda_2)}\sum_{n=1}^{+\infty} u^n\frac{1}{n}\left(\frac{\lambda_1}{1-\lambda_2}\right)^n \\ &= \frac{\ln(1-\lambda_2)}{\ln(1-\lambda_1-\lambda_2)} + \frac{1}{\ln(1-\lambda_1-\lambda_2)}\left[\ln\left(1-\frac{\lambda_1 u}{1-\lambda_2}\right)\right] \\ &= \frac{\ln(1-\lambda_2-\lambda_1 u)}{\ln(1-\lambda_1-\lambda_2)} = \varphi_{1-\lambda_2,\lambda_1}(u), \end{aligned}$$

où $\varphi_{q,\lambda} : u\in[-1,1] \mapsto \frac{\ln(q-\lambda u)}{\ln(q-\lambda)}$ $(\lambda < q \le 1)$ est la f.g. d'une loi sur $\mathbb{N}$ notée $L_{q,\lambda}$.

On a alors $\varphi_X'(u) = -\frac{1}{\ln(1-\lambda_1-\lambda_2)}\frac{\lambda_1}{1-\lambda_2-\lambda_1 u}$ et $\varphi_X''(u) = -\frac{1}{\ln(1-\lambda_1-\lambda_2)}\frac{\lambda_1^2}{(1-\lambda_2-\lambda_1 u)^2}$, puis

$$\varphi_X'(1) = -\frac{1}{\ln(1-\lambda_1-\lambda_2)}\frac{\lambda_1}{1-\lambda_2-\lambda_1} \text{ et}$$

$$\varphi_X''(1)+\varphi_X'(1) = -\frac{1}{\ln(1-\lambda_1-\lambda_2)}\frac{\lambda_1(1-\lambda_2)}{(1-\lambda_2-\lambda_1)^2}.$$

On en déduit :

$$\mathbb{E}(X) = -\frac{1}{\ln(1-\lambda_1-\lambda_2)}\frac{\lambda_1}{1-\lambda_2-\lambda_1} \text{ et } \operatorname{var}(X) = \frac{\lambda_1[-\lambda_1-(1-\lambda_2)\ln(1-\lambda_1-\lambda_2)]}{[(1-\lambda_1-\lambda_2)\ln(1-\lambda_1-\lambda_2)]^2}$$

et par symétrie, Y suit la loi $L_{1-\lambda_1,\lambda_2}$ et on a :

$$\mathbb{E}(Y) = -\frac{1}{\ln(1-\lambda_1-\lambda_2)}\frac{\lambda_2}{1-\lambda_2-\lambda_1} \text{ et } \mathrm{var}(Y) = \frac{\lambda_2[-\lambda_2-(1-\lambda_1)\ln(1-\lambda_1-\lambda_2)]}{[(1-\lambda_1-\lambda_2)\ln(1-\lambda_1-\lambda_2)]^2}.$$

(b) Pour tout $m \in \mathbb{N}^*$, il vient :

$$\begin{aligned}
P^{[X=0]}([Y=m]) &= \frac{P([X=0]\cap[Y=m])}{P([X=0])} \\
&= \frac{\ln(1-\lambda_1-\lambda_2)}{\ln(1-\lambda_2)} \times \frac{\lambda_2^m}{-m\ln(1-\lambda_1-\lambda_2)} = -\frac{\lambda_2^m}{m\ln(1-\lambda_2)}.
\end{aligned}$$

La loi de Y conditionnelle à $[X=0]$ est la loi L_{1,λ_2} et il vient :

$$\mathbb{E}^{[X=0]}(Y) = -\frac{\lambda_2}{(1-\lambda_2)\ln(1-\lambda_2)}.$$

Pour tout $(n,m) \in \mathbb{N}^* \times \mathbb{N}$, on a :

$$\begin{aligned}
P^{[X=n]}([Y=m]) &= \left[-\frac{n\ln(1-\lambda_1-\lambda_2)}{\lambda_1^n/(1-\lambda_2)^n}\right] \times \left[-\frac{(n+m-1)!}{n!m!}\frac{\lambda_1^n\lambda_2^m}{\ln(1-\lambda_1-\lambda_2)}\right] \\
&= \binom{n+m-1}{m}(1-\lambda_2)^n\lambda_2^m.
\end{aligned}$$

La loi de Y conditionnelle à $[X=n]$ est donc une loi binomiale négative $\mathcal{N}(n, 1-\lambda_2)$ dont l'espérance est $\frac{n\lambda_2}{1-\lambda_2}$ d'où l'on déduit :

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}^X(Y) &= -\frac{\lambda_2}{(1-\lambda_2)\ln(1-\lambda_2)}\mathbb{I}_{[X=0]} + \frac{\lambda_2 X}{1-\lambda_2}\mathbb{I}_{[X\neq 0]} \\
&= -\frac{\lambda_2}{(1-\lambda_2)\ln(1-\lambda_2)}\mathbb{I}_{[X=0]} + \frac{\lambda_2 X}{1-\lambda_2}
\end{aligned}$$

En prenant l'espérance mathématique des deux membres, on a :

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}(Y) = \mathbb{E}(\mathbb{E}^X(Y)) &= -\frac{\lambda_2}{(1-\lambda_2)\ln(1-\lambda_2)}P([X=0]) + \frac{\lambda_2}{1-\lambda_2}\mathbb{E}(X) \\
&= -\frac{\lambda_2}{(1-\lambda_2)\ln(1-\lambda_1-\lambda_2)} + \frac{\lambda_2}{1-\lambda_2}\mathbb{E}(X)
\end{aligned}$$

d'où la relation indiquée.

---

10. * Soit (X,Y) un couple de v.a.r. définies sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ tel que la loi de X soit donnée par la densité :

$$f_X(x) = \begin{cases} 4x^3 \text{ si } 0 < x < 1, \\ 0 \text{ sinon.} \end{cases}$$

Les lois conditionnelles de Y à X sont définies, pour chaque x de $]0,1[$, par :

$$f_Y^{X=x}(y) = \begin{cases} \frac{2y}{x^2} \text{ si } 0 < y < x, \\ 0 \text{ sinon.} \end{cases}$$

(a) Déterminer la denstité de la loi de Y, puis $\mathbb{E}(Y)$.

(b) Déterminer $\mathbb{E}^X(Y)$ puis retrouver $\mathbb{E}(Y)$.

(c) Calculer $\text{cov}(X, Y)$.

On remarque que la loi de X est la loi $B_1(4,1)$, d'espérance $\frac{4}{5}$.

(a) Pour (x, y) vérifiant : $0 < y < x < 1$, il vient :

$$f_{X,Y}(x,y) = f_Y^{X=x}(y)\, f_X(x) = \frac{2y}{x^2} \times 4x^3 = 8xy$$

et $P_{X,Y}$ est la loi de densité $f_{X,Y} : (x,y) \mapsto \begin{cases} 8xy & \text{si } 0 < y < x < 1 \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$

La densité de Y est :

$$f_Y(y) = \int_{\mathbb{R}} f_{X,Y}(x,y)dx = \begin{cases} \int_y^1 8xydy = 4y[x^2]_y^1 = 4y - 4y^3 & \text{si } 0 < y < 1 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

soit $\boxed{f_Y(y) = (4y - 4y^3)\, \mathbb{I}_{]0,1[}(y)}$ et $\mathbb{E}(Y) = \int_0^1 (4y^2 - 4y^4)dy = \frac{4}{3} - \frac{4}{5}$, soit $\boxed{\mathbb{E}(Y) = \frac{8}{15}}$.

(b) Pour tout $x \in]0,1[$, on a :

$$\mathbb{E}^{X=x}(Y) = \int_{\mathbb{R}} y f_Y^{X=x}(y)dy = \int_0^x \frac{2y^2}{x^2}dy = \frac{2}{3}x$$

et donc : $\boxed{\mathbb{E}^X(Y) = \frac{2}{3}X}$. Il vient alors $\mathbb{E}(\mathbb{E}^X(Y)) = \frac{2}{3}\mathbb{E}(X) = \frac{8}{15}$ donc $\boxed{\mathbb{E}(Y) = \frac{8}{15}}$.

(c) De

$$\mathbb{E}(XY) = \int\int_{\mathbb{R}^2} xy f_{X,Y}(x,y)dxdy = \int_0^1 x^2 \left[\int_0^x 8y^2 dy\right] dx = \frac{8}{3}\int_0^1 x^5 dx = \frac{8}{18} = \frac{4}{9},$$

on déduit : $\text{cov}(X,Y) = \mathbb{E}(XY) - \mathbb{E}(X)\mathbb{E}(Y) = \frac{4}{9} - \frac{32}{75}$, soit $\boxed{\text{cov}(X,Y) = \frac{4}{225}}$.

---

11. * On considère un couple (X, Y) de v.a.r. absolument continu de densité :

$$f_{X,Y} : (x,y) \in \mathbb{R}^2 \;\mapsto\; \frac{a^{p+q}}{\Gamma(p)\,\Gamma(q)}\, x^{p-1}\,(y-x)^{q-1}\, \mathrm{e}^{-ay}\, \mathbb{I}_{\Delta}(x,y),$$

où l'on a posé : $\Delta = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \;;\; 0 < x < y\}$ et où (p,q) est un couple de réels strictement supérieurs à 1.

(a) Déterminer (et identifier) la loi de X. Préciser l'espérance et la variance de X.

(b) Expliciter (et identifier) les lois conditionnelles de Y à X. Écrire $\mathbb{E}^X(Y)$. En déduire l'espérance de Y. Calculer la variance d'une v.a. ayant pour loi $P_Y^{X=x}$ $(x > 0)$.

(c) Déterminer (et identifier) la loi de Y. Écrire son espérance et sa variance.

(d) Calculer $\mathbb{E}^Y(X)$.

(e) Écrire la matrice des covariances de X et Y. Calculer le coefficient $\rho_{X,Y}$ de corrélation linéaire de X et Y.

(f) Déterminer la droite de régression linéaire de Y en X.

(a) La densité f_X est nulle pour $x \leq 0$ et pour $x > 0$, on a :

$$\begin{aligned} f_X(x) &= \int_{\mathbb{R}} f_{X,Y}(x,y)dy = \int_x^{+\infty} \frac{a^{p+q}}{\Gamma(p)\Gamma(q)} x^{p-1}(y-x)^{q-1}\mathrm{e}^{-ay}dy \\ &\overset{y=x+\frac{u}{a}}{=} \frac{a^{p+q}x^{p-1}}{\Gamma(p)\Gamma(q)} \int_0^{+\infty} \frac{u^{q-1}}{a^{q-1}}\mathrm{e}^{-u}\mathrm{e}^{-ax}\frac{1}{a}\,du = \frac{a^p x^{p-1}}{\Gamma(p)}\mathrm{e}^{-ax}. \end{aligned}$$

$\boxed{\text{La v.a. } X \text{ est donc de loi } \gamma(a,p)\text{, d'espérance } \frac{p}{a} \text{ et de variance } \frac{p}{a^2}}$.

(b) Les lois conditionnelles $P_Y^{X=x}$ sont définies pour $x > 0$ et ont pour densité

$$f_Y^{X=x}(y) = \frac{f_{X,Y}(x,y)}{f_X(x)} = \begin{cases} \dfrac{\frac{a^{p+q}}{\Gamma(p)\Gamma(q)}x^{p-1}(y-x)^{q-1}\mathrm{e}^{-ay}}{\frac{a^p}{\Gamma(p)}x^{p-1}\mathrm{e}^{-ax}} = \frac{a^q}{\Gamma(q)}(y-x)^{q-1}\mathrm{e}^{-a(y-x)} \text{ si } y > x \\ 0 \text{ sinon.} \end{cases}$$

Par suite, pour $x > 0$, $P_Y^{X=x}$ a pour densité : $\boxed{f_x : y \mapsto \frac{a^q}{\Gamma(q)}(y-x)^{q-1}\mathrm{e}^{-a(y-x)}\mathbb{I}_{]x,+\infty[}(y)}$. On remarque que, si Z est une v.a. de loi $P_Y^{X=x}$, alors $Z - x$ suit la loi Gamma $\gamma(a,q)$ (car $P([Z - x \leq y]) = P([Z \leq y + x])$ donc $f_{Z-x}(y) = f_x(y+x) = \frac{a^q}{\Gamma(q)}y^{q-1}\mathrm{e}^{-ay}\mathbb{I}_{]0,+\infty[}(y)$ et on a donc $\mathbb{E}^{X=x}(Y) = \mathbb{E}(Z) = x + \mathbb{E}(Z-x)$, soit $\mathbb{E}^{X=x}(Y) = x + \frac{q}{a}$ et $\boxed{\mathbb{E}^X(Y) = X + \frac{q}{a}}$.

On en déduit $\mathbb{E}(Y) = \mathbb{E}(\mathbb{E}^X(Y)) = \mathbb{E}(X) + \frac{q}{a}$, donc $\boxed{\mathbb{E}(Y) = \frac{p+q}{a}}$.

On a aussi $\boxed{\mathrm{var}Z = \frac{q}{a^2}}$.

(c) Pour tout $y > 0$, on a :

$$\begin{aligned} f_Y(y) &= \int_{\mathbb{R}} f_{X,Y}(x,y)dx = \int_0^y \frac{a^{p+q}}{\Gamma(p)\Gamma(q)}x^{p-1}(y-x)^{q-1}\mathrm{e}^{-ay}dx \\ &\overset{x=yz}{=} \frac{a^{p+q}}{\Gamma(p)\Gamma(q)}y^{p+q-1}\mathrm{e}^{-ay}\int_0^1 z^{p-1}(1-z)^{q-1}dz = \frac{B(p,q)}{\Gamma(p)\Gamma(q)}a^{p+q}y^{p+q-1}\mathrm{e}^{-ay} \\ &= \frac{a^{p+q}}{\Gamma(p+q)}y^{p+q-1}\mathrm{e}^{-ay}. \end{aligned}$$

$\boxed{\text{La loi } P_Y \text{ est donc la loi Gamma } \gamma(a, p+q)}$, d'espérance $\boxed{\frac{p+q}{a}}$ et de variance $\boxed{\frac{p+q}{a^2}}$.

(d) Pour tout $y > 0$, il vient :

$$\begin{aligned} f_X^{Y=y}(x) &= \frac{f_{X,Y}(x,y)}{f_X(x)} = \frac{\frac{a^{p+q}}{\Gamma(p)\Gamma(q)}x^{p-1}(y-x)^{q-1}\mathrm{e}^{-ay}}{\frac{a^{p+q}}{\Gamma(p+q)}y^{p+q-1}\mathrm{e}^{-ay}}\mathbb{I}_{]0,y[}(x) \\ &= \frac{x^{p-1}(y-x)^{q-1}}{B(p,q)y^{p+q-1}}\mathbb{I}_{]0,y[}(x) \end{aligned}$$

$P_X^{Y=y}$ a donc pour densité la fonction g_y telle que $\boxed{g_y(x) = \frac{x^{p-1}(y-x)^{q-1}}{B(p,q)y^{p+q-1}}\mathbb{I}_{]0,y[}(x)}$ et on remarque que, si V est une v.a. de densité g_y, alors V/y suit la loi Bêta $B(p,q)$ car $P([V/y \leq x]) =$

$P([V \leq xy])$ et $f_{V/y}(x) = y g_y(xy) = \frac{x^{p-1}(1-x)^{q-1}}{B(p,q)} \mathbb{I}_{]0,1[}(x)$, avec par conséquent $\mathbb{E}(V/y) = \frac{p}{q}$. On en déduit donc $\mathbb{E}^{Y=y}(X) = \mathbb{E}(V) = \frac{py}{p+q}$ et $\boxed{\mathbb{E}^Y(X) = \frac{pY}{p+q}}$.

(e) On a :

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}(XY) &= \int_\Delta \frac{a^{p+q}}{\Gamma(p)\Gamma(q)} x^p y (y-x)^{q-1} \mathrm{e}^{-ay} dx dy \\
&= \frac{a^{p+q}}{\Gamma(p)\Gamma(q)} \int_0^{+\infty} y \mathrm{e}^{-ay} \left[\int_0^y x^p (y-x)^{q-1} dx \right] dy \\
&= \frac{a^{p+q}}{\Gamma(p)\Gamma(q)} \int_0^{+\infty} y^{p+q+1} \mathrm{e}^{-ay} \left[\int_0^1 z^p (1-z)^{q-1} dz \right] dy \\
&= \frac{a^{p+q}}{\Gamma(p)\Gamma(q)} B(p+1,q) \frac{\Gamma(p+q+2)}{a^{p+q+2}} \\
&= \frac{\Gamma(p+1)\Gamma(q)}{a^2 \Gamma(p+q+1)} \frac{\Gamma(p+q+2)}{\Gamma(p)\Gamma(q)} = \frac{p(p+q+1)}{a^2}.
\end{aligned}$$

Il vient donc $\mathrm{cov}(X,Y) = \frac{p(p+q+1)}{a^2} - \frac{p(p+q)}{a^2} = \boxed{\frac{p}{a^2}}$, d'où $\rho_{X,Y} = \frac{p/a^2}{\sqrt{p/a^2}\sqrt{(p+q)/a^2}} = \boxed{\sqrt{\frac{p}{p+q}}}$.

La matrice des covariances de X à Y s'écrit alors :

$$\boxed{\begin{pmatrix} \frac{p}{a^2} & \frac{p}{a^2} \\ \frac{p}{a^2} & \frac{p+q}{a^2} \end{pmatrix}}.$$

(f) La droite de régression de Y en X a pour équation :

$$\frac{y - \mathbb{E}(Y)}{\sigma_Y} = \rho_{X,Y} \frac{x - \mathbb{E}(X)}{\sigma_X} \quad \text{soit } \boxed{y = x + \frac{q}{a}}.$$

Il y a donc correspondance entre régressions linéaire et non linéaire.

---

12. Soient X, Y et Z trois v.a.r. telles que :

i. X suit la loi uniforme sur $]0,1[$;

ii. $f_Y^{(X=x)}(y) = (y-x)e^{-(y-x)} \mathbb{I}_{]x,+\infty[}(y)$;

iii. $f_Z^{(X=x)\cap(Y=y)}(z) = (y-x)e^{-z(y-x)} \mathbb{I}_{]0,+\infty[}(z)$ pour $x \in]0,1[$ et $y > x$.

(a) Déterminer la loi conjointe de (X,Y,Z) et la loi de Z.

(b) Déterminer la loi conditionnelle de (X,Y) sachant $(Z=z)$.

(c) Calculer $\mathbb{E}^{(Z=z)}(\sqrt{Y-X})$ puis $\mathbb{E}(\sqrt{Y-X})$.

(a) $f_{X,Y}(x,y) = f_Y^{X=x}(y) f_X(x) = (y-x)e^{-(y-x)} \mathbb{I}_{]0,1[}(x) \mathbb{I}_{]x,+\infty[}(y)$.

$$\begin{aligned}
f_{X,Y,Z}(x,y,z) &= f_Z^{X=x,Y=y}(z) f_{X,Y}(x,y) \\
&= (y-x)^2 e^{-(y-x)(z+1)} \mathbb{I}_{]0,1[}(x) \mathbb{I}_{]x,+\infty[}(y) \mathbb{I}_{]0,+\infty[}(z)
\end{aligned}$$

$f_{X,Z}(x,z) = \int f_{X,Y,Z}(x,y,z)\, dy = \mathbb{I}_{]0,1[}(x) \mathbb{I}_{]0,+\infty[}(z) \int_x^{+\infty} (y-x)^2 e^{-(y-x)(z+1)}\, dy$. En posant $u = (y-x)(z+1)$, on a alors

$$f_{X,Z}(x,z) = \mathbb{I}_{]0,1[}(x) \mathbb{I}_{]0,+\infty[}(z) \frac{1}{(z+1)^3} \int_0^{+\infty} u^2 e^{-u}\, du = \frac{2}{(z+1)^3} \mathbb{I}_{]0,1[}(x) \mathbb{I}_{]0,+\infty[}(z).$$

Il vient ensuite $f_Z(z) = \int f_{X,Z}(x,z)\,dx$, soit $\boxed{f_Z(z) = \frac{2}{(z+1)^3}\mathbb{I}_{]0,+\infty[}(z)}$.

(b) $f_{X,Y}^{Z=z}(x,y) = \frac{f_{X,Y,Z}(x,y,z)}{f_Z(z)} = \frac{1}{2}(z+1)^3(y-x)^2 e^{-(y-x)(z+1)}\mathbb{I}_A(x,y)$ pour $z>0$ fixé.

(c) $\mathbb{E}^{Z=z}(\sqrt{Y-X}) = \iint \sqrt{y-x} f_{X,Y}^{Z=z}(x,y)dxdy = \int_0^1\int_x^{+\infty}\frac{1}{2}(z+1)^3(y-x)^{5/2}e^{-(y-x)(z+1)}dydx$. En posant encore $u=(y-x)(z+1)$, on a alors : $\mathbb{E}^{Z=z}(\sqrt{Y-X}) = \frac{(z+1)^{-1/2}}{2}\int_0^1\int_0^{+\infty}u^{5/2}e^{-u}dudx = \frac{\Gamma(7/2)}{2\sqrt{1+z}}$ avec $\Gamma(7/2) = \frac{5}{2}\Gamma(5/2) = \frac{5}{2}\frac{3}{2}\Gamma(3/2) = \frac{5}{2}\frac{3}{2}\frac{1}{2}\Gamma(1/2) = \frac{15\sqrt{\pi}}{8}$ donc $\boxed{\mathbb{E}^Z(\sqrt{Y-X}) = \frac{15\sqrt{\pi}}{16\sqrt{Z+1}}}$.

---

13. Soient $X_1, X_2, \cdots, X_n$ des v.a.r. absolument continues, indépendantes, de même loi de densité f. On pose $X = \max(X_1, X_2, \cdots, X_n)$ et $Y = \min(X_1, X_2, \cdots, X_n)$.

(a) Exprimer en fonction de f la loi conditionnelle de Y sachant $(X=x)$ et $\mathbb{E}^X(Y)$.

(b) Appliquer ce qui précède au cas où les X_i suivent la loi uniforme sur $]0,1[$.

(a) On commence par déterminer la loi de (X,Y).

$$F_{X,Y}(x,y) = P([X\le x]\cap[Y\le y]) = P([X\le x]) - P([X\le x]\cap[Y>y])$$

avec

$$P([X\le x]) = P([\max_{1\le i\le n} X_i \le x]) = P\left(\bigcap_{i=1}^n [X_i\le x]\right)$$

et, comme les X_i sont indépendantes d'une part, et de même loi de fonction de répartition F d'autre part, $P([X\le x]) = \prod_{i=1}^n P([X_i\le x]) = F(x)^n$.

De même $P([Y>y]) = P\left(\bigcap_{i=1}^n [X_i>y]\right)$ et

$$\begin{aligned} P([X\le x]\cap[Y>y]) &= P\left(\bigcap_{i=1}^n [y<X_i\le x]\right) \\ &= \prod_{i=1}^n P([y<X_i\le x]) = (F(x)-F(y))^n \end{aligned}$$

donc $\boxed{F_{X,Y}(x,y) = F(x)^n - (F(x)-F(y))^n}$ si $x>y$. Pour avoir la densité, on utilise $f(x,y) = \frac{\partial^2}{\partial x\partial y}F_{X,Y}(x,y) = \frac{\partial}{\partial x}\left[nf(y)(F(x)-F(y))^{n-1}\right]$ pour $x>y$, soit finalement

$$\boxed{f_{X,Y}(x,y) = n(n-1)f(x)f(y)(F(x)-F(y))^{n-2}\mathbb{I}_{]-\infty,x[}(y)}.$$

On a alors $f_Y^{X=x}(y) = \frac{f_{X,Y}(x,y)}{f_X(x)}$. Comme $F_X(x) = F(x)^n$, on a $f_X(x) = nf(x)F(x)^{n-1}$ et donc

$$\boxed{f_Y^{X=x}(y) = (n-1)f(y)\frac{(F(x)-F(y))^{n-2}}{F(x)^{n-1}}\mathbb{I}_{]-\infty,x[}(y)}$$

puis $\mathbb{E}^X(Y) = \psi(X)$ avec $\boxed{\psi(x) = \mathbb{E}^{(X=x)}(Y) = \frac{n-1}{F(x)}\int_{-\infty}^x yf(y)\left(1-\frac{F(y)}{F(x)}\right)^{n-2}dy}$.

(b) Pour la loi uniforme sur $]0,1[$, on a $f(x) = \mathbb{I}_{]0,1[}(x)$ et $F(x) = x$ si $x \in]0,1[$ donc, pour $x \in]0,1[$, $\boxed{f_Y^{X=x}(y) = \frac{n-1}{x}\left(1-\frac{y}{x}\right)^{n-2}\mathbb{I}_{]0,x[}(y)}$ et, en posant $u = \frac{y}{x}$, on aura

$$\mathbb{E}^{X=x}(Y) = (n-1)\int_0^x \frac{y}{x}\left(1-\frac{y}{x}\right)^{n-2} dy = (n-1)x\int_0^1 u(1-u)^{n-2}\, du$$

avec $\int_0^1 u(1-u)^{n-2}\, du = B(2, n-1) = \frac{1!(n-2)!}{n!} = \frac{1}{n(n-1)}$ donc $\mathbb{E}^{X=x}(Y) = \frac{x}{n}$ et $\boxed{\mathbb{E}^X(Y) = \frac{X}{n}}$.

---

14. ** Soit θ un réel donné et $(X_1, \cdots, X_i, \cdots, X_n)$ un n-échantillon de la loi $\mathcal{N}(\theta, 1)$. On note G la fonction de répartition de la loi $\mathcal{N}(0,1)$ et on pose : $\overline{X}_n = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^n X_i$.

(a) Déterminer l'espérance de $Y = \mathbb{I}_{]-\infty,c]}(X_1)$.

(b) Identifier la loi de $\overline{X}_n$.

(c) Montrer que le couple $\left(X_1, \overline{X}_n\right)$ admet pour densité :

$$(x, \overline{x}) \;\mapsto\; \frac{n}{2\pi\sqrt{n-1}} \exp\left(-\frac{n}{2(n-1)}\left[(x-\theta)^2 - 2(x-\theta)(\overline{x}-\theta) + n(\overline{x}-\theta)^2\right]\right).$$

(d) Calculer $\mathbb{E}^{\overline{X}_n}(Y)$. La suite $\left(\mathbb{E}^{\overline{X}_n}(Y)\right)_n$ est-elle convergente ?

(a) On a $\mathbb{E}(Y) = \mathbb{E}\left(\mathbb{I}_{]-\infty,c]}(X_1)\right) = P([X_1 \leq c])$, soit $\boxed{\mathbb{E}(Y) = G(c)}$.

(b) La v.a. $\overline{X}_n$ est une combinaison linéaire des composantes du vecteur gaussien $X = (X_1, \cdots, X_n)$ et est donc une $\boxed{\text{v.a. normale}}$ d'espérance

$$\mathbb{E}\left(\overline{X}_n\right) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^n \mathbb{E}(X_i) = \frac{n\,\theta}{n} = \theta$$

et, puisque les v.a. X_i sont indépendantes, de variance :

$$\operatorname{var}\overline{X}_n = \frac{1}{n^2}\operatorname{var}\sum_{i=1}^n X_i = \frac{\sum_{i=1}^n \operatorname{var} X_i}{n^2} = \frac{1}{n}.$$

(c) On a matriciellement :

$${}^t(X_1 \quad \overline{X}_n) = \mathbf{A}\,{}^t(X_1 \quad \cdots \quad X_n), \quad \text{où } \mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 1/n & 1/n & \cdots & 1/n \end{pmatrix}.$$

Il en résulte que le vecteur aléatoire $Z = \left(X_1, \overline{X}_n\right)$ est gaussien d'e.m. :

$$\left(\mathbb{E}(X_1) = \theta, \mathbb{E}\left(\overline{X}_n\right) = \theta\right)$$

et de matrice de covariance :

$$\mathbf{\Lambda}_Z = \mathbf{A}\,\mathbf{\Lambda}_X\,{}^t\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 1/n \\ 1/n & 1/n \end{pmatrix}.$$

Comme $\det \mathbf{\Lambda}_Z = \frac{1}{n} - \frac{1}{n^2}$ et $\mathbf{\Lambda}_Z^{-1} = \frac{n}{n-1}\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & n \end{pmatrix}$, le vecteur Z admet pour densité :

$$\begin{aligned} f_Z\left(x_1, \overline{x}\right) &= \frac{1}{2\,\pi\,\sqrt{\det \mathbf{\Lambda}_Z}} \exp\left[-\frac{1}{2}\begin{pmatrix} x_1-\theta & \overline{x}_n-\theta \end{pmatrix} \mathbf{\Lambda}_Z^{-1} \begin{pmatrix} x_1-\theta \\ \overline{x}_n-\theta \end{pmatrix}\right] \\ &= \frac{n}{2\,\pi\,\sqrt{n-1}} \exp\left[-\frac{n}{2(n-1)}\left[(x-\theta)^2 - 2(x-\theta)\left(\overline{x}-\theta\right) + n\left(\overline{x}-\theta\right)^2\right]\right]. \end{aligned}$$

(d) La densité de $\overline{X}_n$ s'écrit : $f_{\overline{X}_n}\left(\overline{x}\right) = \frac{\sqrt{n}}{\sqrt{2\,\pi}} \exp\left[-\frac{n}{2}\left(\overline{x}-\theta\right)^2\right]$. La loi conditionnelle $P_{X_1}^{\overline{X}_n=\overline{x}}$ admet donc pour densité :

$$f_{X_1}^{\overline{X}_n=\overline{x}} : x_1 \;\mapsto\; \frac{f_{X_1,\overline{X}_n}\left(x_1, \overline{x}\right)}{f_{\overline{X}_n}\left(\overline{x}\right)} = \frac{\sqrt{n}}{\sqrt{2\,\pi}\,\sqrt{n-1}} \exp\left[-\frac{n}{2\,(n-1)}\left(x_1-\overline{x}\right)^2\right],$$

qui est la densité de la loi normale $N\left(\overline{x}, \frac{n-1}{n}\right)$. On en déduit :

$$\begin{aligned} \mathbb{E}^{\overline{X}_n=\overline{x}}\left(\mathbb{I}_{]-\infty,c]}\left(X_1\right)\right) &= \int_{-\infty}^{c} f_{X_1}^{\overline{X}_n=\overline{x}}(u)\,du \\ &= \int_{-\infty}^{c} \frac{\sqrt{n}}{\sqrt{2\,\pi}\,\sqrt{n-1}} \exp\left[-\frac{n}{2\,(n-1)}\left(u-\overline{x}\right)^2\right] du \\ &\overset{\left(v=\sqrt{\frac{n}{n-1}}\,\left(u-\overline{x}\right)\right)}{=} \int_{-\infty}^{\sqrt{\frac{n}{n-1}}\,\left(c-\overline{x}\right)} \frac{1}{\sqrt{2\,\pi}} \exp\left(-\frac{v^2}{2}\right) dv \\ &= G\left(\sqrt{\frac{n}{n-1}}\,\left(c-\overline{x}\right)\right), \end{aligned}$$

d'où $\boxed{\mathbb{E}^{\overline{X}_n}\left(\mathbb{I}_{]-\infty,c]}\left(X_1\right)\right) = G\left(\sqrt{\frac{n}{n-1}}\,\left(c-\overline{X}_n\right)\right)}$.

Puisque $\overline{X}_n$ converge p.s. vers θ et que G est continue sur $\mathbb{R}$, la suite $\left(\mathbb{E}^{\overline{X}_n}\left(\mathbb{I}_{]-\infty,c]}\left(X_1\right)\right)\right)_n$ converge vers $\boxed{G(c-\theta)}$.

---

15. Considérant un n-échantillon $(X_1, ..., X_i, ..., X_n)$ de loi de Poisson $\mathcal{P}(\lambda)$ ($\lambda > 0$), on pose :

$$U_n = \sum_{i=1}^{n} X_i \quad \text{et} \quad T_n = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} \mathbb{I}_{[X_i=0]}.$$

Déterminer $\mathbb{E}^{U_n}\left(\mathbb{I}_{[X_1=0]}\right)$, puis $Z_n = \mathbb{E}^{U_n}\left(T_n\right)$. Calculer $\operatorname{var} Z_n$.

De manière plus générale, on peut calculer $\mathbb{E}^{U_n}\left(T_n\right)$, où l'on a posé : $T_n = n^{-1}\sum_{i=1}^{n} \mathbb{I}_{[X_i=k]}$ ($k \in \mathbb{N}$). Par hypothèse les v.a. $\left(\mathbb{I}_{[X_i=k]}, \sum_{j=1}^{n} X_j\right)$ ont même loi pour tout i ; on a donc :

$$\mathbb{E}^{U_n}\left(T_n\right) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} \mathbb{E}^{\sum_{j=1}^{n} X_j}\left(\mathbb{I}_{[X_i=k]}\right) = P^{\sum_{j=1}^{n} X_j}\left(\left[X_1=k\right]\right).$$

Puisque les X_j sont indépendantes et de même loi $\mathcal{P}(\lambda)$, $U_n = \sum_{j=1}^{n} X_j$ est de loi de Poisson $\mathcal{P}(n\lambda)$. On en déduit, pour $m \in \mathbb{N}$:

$$\begin{aligned} P^{[U_n=m]}\left(\left[X_i=k\right]\right) &= \frac{P\left(\left[X_i=k\right] \cap \left[\sum_{j=1}^{n} X_j = m\right]\right)}{P\left(\left[U_n=m\right]\right)} \\ &= \begin{cases} 0 & \text{si } k > m \\ \frac{P\left(\left[X_i=k\right] \cap \left[\sum_{j=1, j\neq i}^{n} X_j = m-k\right]\right)}{P\left(\left[U_n=m\right]\right)} & \text{si } k \leq m \end{cases}. \end{aligned}$$

Puisque X_i est indépendante de $(X_1, \cdots, X_{i-1}, X_{i+1}, \cdots, X_n)$ et que $\sum_{j=1, j\neq i}^{n} X_j$, somme de $n-1$ v.a. indépendantes de Poisson $\mathcal{P}(\lambda)$, est une v.a. de Poisson $\mathcal{P}((n-1)\lambda)$, il vient, pour $k \leq m$:

$$\begin{aligned} P^{[U_n=m]}([X_i = k]) &= \frac{P([X_i = k])\, P\left(\left[\sum_{j\neq i} X_j = m-k\right]\right)}{P([U_n = m])} \\ &= \frac{\mathrm{e}^{-\lambda}\left(\lambda^k/k\,!\right)\mathrm{e}^{-(n-1)\lambda}((n-1)\lambda)^{m-k}/(m-k)\,!}{\mathrm{e}^{-n\lambda}\,(n\lambda)^m/m\,!} \\ &= \binom{m}{k}\frac{\lambda^k[(n-1)\lambda]^{m-k}}{(n\lambda)^m} = \binom{m}{k}\left(\frac{1}{n}\right)^k\left(1-\frac{1}{n}\right)^{m-k}. \end{aligned}$$

On en déduit, pour $k = 0$:

$$P^{[U_n=m]}([X_i = 0]) = \mathbb{E}^{U_n}(T_n) = \left(1 - \frac{1}{n}\right)^{U_n}.$$

Il vient alors :

$$\mathbb{E}(Z_n) = \mathbb{E}(T_n) = P([X_1 = 0]) = \mathrm{e}^{-\lambda}.$$

Par ailleurs, on a :

$$\mathbb{E}\left(Z_n^2\right) = \exp\left(\frac{\lambda}{n} - 2\lambda\right),$$

d'où

$$\operatorname{var} Z_n = \mathbb{E}\left(Z_n^2\right) - (\mathbb{E}(Z_n))^2 = \mathrm{e}^{\left(\frac{\lambda}{n} - 2\lambda\right)} - \mathrm{e}^{-2\lambda}.$$

---

16. ** Soit (X_n) une suite de v.a.r. indépendantes de même loi avec $\mathbb{E}(X_n) = \mu$ et $V(X_n) = v$ et soit N une v.a.r. entière, indépendante des X_n avec $\mathbb{E}(N) = \nu$ et $V(N) = w$. On pose $S_k = X_1 + \cdots + X_k$ et on note S_N l'application, qui à ω associe $S_{N(\omega)}(\omega)$.

(a) Montrer que S_N est une v.a.r. et que $\mathbb{E}^{[N=n]}(S_N) = \mathbb{E}(S_n)$.

(b) En déduire l'espérance et la variance de S_N.

(a) Pour tout borélien B, $S_N^{-1}(B) = [S_N \in B] = \bigcup_{n=0}^{+\infty} [N = n] \cap [S_n \in B] \in \mathcal{A}$ car $[N = n] \in \mathcal{A}$ (N v.a.), $[S_n \in B] \in \mathcal{A}$ (S_n v.a. comme somme finie de v.a.), et finalement $[S_N \in B] \in \mathcal{A}$ comme union dénombrable d'intersections d'éléments de $\mathcal{A}$.

$\mathbb{E}^{[N=n]}(S_N) = \mathbb{E}^{[N=n]}(S_n) = \mathbb{E}(S_n)$ car les v.a. $X_1, \cdots, X_n$ sont indépendantes de N, et par conséquent, S_n est aussi indépendante de N. On a bien $\boxed{\mathbb{E}^{[N=n]}(S_N) = \mathbb{E}(S_n)}$.

b) On a $\mathbb{E}(S_n) = n\mu$, c'est-à-dire, d'après (a), $\mathbb{E}^{[N=n]}(S_N) = n\mu$. On en déduit alors $\mathbb{E}^N(S_N) = N\mu$ et

$$\mathbb{E}(S_N) = \mathbb{E}(\mathbb{E}^N(S_N)) = \mathbb{E}(N\mu) = \mu\mathbb{E}(N)$$

soit $\boxed{\mathbb{E}(S_N) = \mathbb{E}(N)\mathbb{E}(X_1) = \mu\nu}$.

On a $\operatorname{var}(S_N) = \mathbb{E}(S_N^2) - (\mathbb{E}(S_N))^2$. Or $\mathbb{E}(S_N^2) = \mathbb{E}(\mathbb{E}^N(S_N^2))$ avec $\mathbb{E}^{N=n}(S_N^2) = \mathbb{E}^{N=n}(S_n^2) = \mathbb{E}(S_n^2)$ toujours par indépendance de S_n et N.

De plus, $\mathbb{E}(S_n^2)=\text{var}(S_n)+(\mathbb{E}(S_n))^2=nv+n^2\mu^2$ ($\text{var}(S_n)=\sum_{i=1}^{n}\text{var}(X_i)=nv$ car les X_i sont indépendantes entre elles). Ainsi, $\mathbb{E}^N(S_N^2)=Nv+N^2\mu^2$ et

$$\mathbb{E}(S_N^2)=\mathbb{E}(\mathbb{E}^N(S_N^2))=v\mathbb{E}(N)+\mu^2\mathbb{E}(N^2)=v\mathbb{E}(N)+\mu^2(\text{var}(N)+(\mathbb{E}(N))^2)$$

On en déduit :

$$\text{var}(S_N)=\mathbb{E}(S_N^2)-(\mathbb{E}(S_N))^2=\mathbb{E}(S_N^2)-\mu^2(\mathbb{E}(N))^2=v\mathbb{E}(N)+\mu^2\text{var}(N)$$

c'est-à-dire $\boxed{\text{var}(S_N)=\mathbb{E}(N)\text{var}(X_1)+(\mathbb{E}(X_1))^2\text{var}(N)=\nu v+\mu^2 w}$.

---

17. * Soient X une v.a.r. de loi uniforme sur $[0,1]$ et Y une v.a.r. entière telle que, pour tout $x\in[0,1]$, la loi conditionnelle de Y sachant $(X=x)$ soit la loi binomiale $\mathcal{B}(n,x)$.

(a) Déterminer la loi et l'espérance de Y.

(b) Déterminer $\mathbb{E}^{(X=x)}(Y)$, puis $\mathbb{E}^X(Y)$ et retrouver $\mathbb{E}(Y)$.

(a) $P^{(X=x)}([Y=k])=C_n^k x^k(1-x)^{n-k}$ pour tout $k\in[\![0,n]\!]$, donc, par les probabilités totales,

$$\begin{aligned}P([Y=k]) &= \int P^{(X=x)}([Y=k])f_X(x)\,dx=\int_0^1 C_n^k x^k(1-x)^{n-k}\,dx\\ &= C_n^k B(k+1,n-k+1)=C_n^k\frac{\Gamma(k+1)\Gamma(n-k+1)}{\Gamma(n+2)}\\ &= \frac{n!}{k!(n-k)!}\frac{k!(n-k)!}{(n+1)!}=\frac{1}{n+1}\end{aligned}$$

$\boxed{\text{La loi de } Y \text{ est donc l'équiprobabilité sur } \{0,\cdots,n\}}$ d'où $\mathbb{E}(Y)=\frac{1+2+\cdots+n}{n+1}=\frac{n(n+1)}{2(n+1)}$ soit $\boxed{\mathbb{E}(Y)=\frac{n}{2}}$.

(b) L'espérance de la loi binomiale $\mathcal{B}(n,x)$ étant nx, on a $\boxed{\mathbb{E}^{(X=x)}(Y)=nx}$, puis $\boxed{\mathbb{E}^X(Y)=nX}$ et enfin, par l'espérance totale $\mathbb{E}(Y)=\mathbb{E}(\mathbb{E}^X(Y))=n\mathbb{E}(X)$ avec $\mathbb{E}(X)=\frac{1}{2}$, donc on retrouve bien $\boxed{\mathbb{E}(Y)=\frac{n}{2}}$.

---

18. *** Soient a et b deux réels strictement positifs et $n\in\mathbb{N}^*$. Soient Y une v.a.r. absolument continue de loi Béta $\beta(a,b)$ et X une v.a.r. entière telle que la loi conditionnelle de X sachant $(Y=y)$ soit la loi binomiale $\mathcal{B}(n,y)$.

(a) Déterminer la loi de X, que l'on appellera loi Béta-binomiale $\beta B(a,b,n)$.

(b) Déterminer $\mathbb{E}^{(Y=y)}(X)$, puis $\mathbb{E}^Y(X)$, puis $\mathbb{E}(X)$. Déterminer également $\mathbb{E}^{(Y=y)}(X^2)$, puis $\mathbb{E}^Y(X^2)$, puis $\mathbb{E}(X^2)$ et $V(X)$.

(c) Soient $N\geq n$, U une v.a.r. de loi Béta-binomiale $\beta B(a,b,N)$ et V une v.a.r. telle que, pour tout $i\in\{0,1,\cdots,N\}$, la loi conditionnelle de V sachant $[U=i]$ soit la loi hypergéométrique $\mathcal{H}(n,i,N-i)$ (définie par $p_j=\frac{C_i^jC_{N-i}^{n-j}}{C_N^n}$).

i. Déterminer $P([U=i]\cap[V=j])$, puis $P([U-V=k]\cap[V=j])$. En déduire que V suit la loi Béta-binomiale $\beta B(a,b,n)$ et que la loi conditionnelle de $U-V$ sachant $[V=j]$ est la loi Béta-binomiale $\beta B(a+j,b+n-j,N-n)$.

ii. Calculer $\mathbb{E}^{[V=j]}(U-V)$ et montrer que $\mathbb{E}^{[V=j]}(U) = \frac{(N-n)a+(N+a+b)j}{a+b+n}$.

(a) $P^{(Y=y)}([X=k]) = C_n^k y^k (1-y)^{n-k}$ pour $0 \leq k \leq n$ et, d'après les probabilités totales,

$$\begin{aligned} P([X=k]) &= \int P^{(Y=y)}([X=k]) f_Y(y)\,dy = \int_0^1 C_n^k y^k (1-y)^{n-k} \frac{1}{B(a,b)} y^{a-1}(1-y)^{b-1}\,dy \\ &= \frac{C_n^k}{B(a,b)} \int_0^1 y^{k+a-1}(1-y)^{n-k+b-1}\,dy = C_n^k \frac{B(a+k,b+n-k)}{B(a,b)} \end{aligned}$$

(b) $P_X^{(Y=y)} = \mathcal{B}(n,y)$ donc $\boxed{\mathbb{E}^{(Y=y)}(X) = ny}$, puis $\boxed{\mathbb{E}^Y(X) = nY}$. On a alors $\mathbb{E}(X) = \mathbb{E}(\mathbb{E}^Y(X)) = n\mathbb{E}(Y)$, avec $\mathbb{E}(Y) = \frac{a}{a+b}$ ($P_Y = \beta(a,b)$), donc finalement $\boxed{\mathbb{E}(X) = \frac{na}{a+b}}$.

On a aussi $\boxed{\mathbb{E}^{(Y=y)}(X^2) = ny(1-y)+(ny)^2}$, puis $\boxed{\mathbb{E}^Y(X^2) = nY - nY^2 + n^2Y^2}$ donc $\mathbb{E}(X^2) = \mathbb{E}(\mathbb{E}^Y(X^2)) = n\mathbb{E}(Y) + (n^2-n)\mathbb{E}(Y^2)$ et $\text{var}(X) = \mathbb{E}(X^2) - (\mathbb{E}(X))^2$ donne

$$\text{var}(X) = n\mathbb{E}(Y) + (n^2-n)\mathbb{E}(Y^2) - n^2(\mathbb{E}(Y))^2 = (n^2-n)\text{var}(Y) + n\mathbb{E}(Y)(1-\mathbb{E}(Y))$$

soit $\boxed{\text{var}(X) = \frac{(n^2-n)ab}{(a+b)^2(a+b+1)} + \frac{nab}{(a+b)^2} = \frac{nab(a+b+n)}{(a+b)^2(a+b+1)}}$.

(c) i. On a $P([U=i]\cap[V=j]) = P^{[U=i]}([V=j]) \times P([V=j]) = \frac{C_i^j C_{N-i}^{n-j}}{C_N^n} \frac{C_N^i B(a+i,b+N-i)}{B(a,b)}$ avec $\frac{C_i^j C_{N-i}^{n-j} C_N^i}{C_N^n} = \frac{i!}{j!(i-j)!} \frac{(N-i)!}{(n-j)!(N-n-i+j)!} \frac{N!}{i!(N-i)!} \frac{n!(N-n)!}{N!} = C_n^j C_{N-n}^{i-j}$ pour $0 \leq j \leq i \leq N$ et $0 \leq n-j \leq N-i$. Donc $\boxed{P([U=i]\cap[V=j]) = C_n^j C_{N-n}^{i-j} \frac{B(a+i,b+N-i)}{B(a,b)}}$.

On a $P([U-V=k]\cap[V=j]) = P([U=k+j]\cap[V=j])$ donc

$$\boxed{P([U-V=k]\cap[V=j]) = C_n^j C_{N-n}^k \frac{B(a+k+j,b+N-k-j)}{B(a,b)}}.$$

$$P([V=j]) = \sum_k P([U-V=k]\cap[V=j]) = \frac{C_n^j}{B(a,b)} \sum_k C_{N-n}^k B(a+j+k,b+N-j-k)$$

Or, en utilisant la loi $\beta B(a+j,b+n-j,N-n)$, on a $\sum_k C_{N-n}^k \frac{B(a+j+k,b+n-j+N-n-k)}{B(a+j,b+n-j)} = 1$ et donc $P([V=j]) = C_n^j \frac{B(a+j,b+n-j)}{B(a,b)}$ et $\boxed{V \text{ suit bien la loi } \beta B(a,b,n)}$.

On a alors $P^{[V=j]}([U-V=k]) = \frac{P([U-V=k]\cap[V=j]}{P([V=j])} = C_{N-n}^k \frac{B(a+j+k,b+N-j-k)}{B(a+j,b+n-j)}$ et ainsi, la loi conditionnelle de $U-V$ sachant $[V=j]$ est la loi $\boxed{\beta B(a+j,b+n-j,N-n)}$.

ii. On a alors $\boxed{\mathbb{E}^{[V=j]}(U-V) = \frac{(N-n)(a+j)}{a+b+n}}$ d'après (b), et c'est aussi $\mathbb{E}^{[V=j]}(U) - j$ donc

$$\mathbb{E}^{[V=j]}(U) = j + \frac{(N-n)(a+j)}{a+b+n} = \frac{aj+bj+nj+(N-n)a+Nj-nj}{a+b+n}$$

soit $\boxed{\mathbb{E}^{[V=j]}(U) = \frac{(N-n)a+(a+b+N)j}{a+b+n}}$.