Fonctions de répartition

1. $(*)$ On lance 2 dés et on appelle X la somme des points obtenus. Donner la représentation graphique de la fonction de répartition de X. (On précisera, en particulier les points de discontinuité et leur nature).

$X(\Omega) = [\![2, 12]\!]$ variable aléatoire discrète donc fonction de répartition en escalier, dont les discontinuités sont aux points de $X(\Omega)$.

On a $[X = 2] = \{(1,1)\}$, $[X = 3] = \{(1,2),(2,1)\}$, $[X = 4] = \{(1,3),(2,2),(3,1)\}$,

$$[X = 5] = \{(1,4),(2,3),(3,2),(4,1)\},\ [X = 6] = \{(1,5),(2,4),(3,3),(4,2),(5,1)\},$$

$$[X = 7] = \{(1,6),(2,5),(3,4),(4,3),(5,2),(6,1)\},$$

$$[X = 8] = \{(2,6),(3,5),(4,4),(5,3),(6,2)\},\ [X = 9] = \{(3,6),(4,5),(5,4),(6,3)\},$$

$$[X = 10] = \{(4,6),(5,5),(6,4)\},\ [X = 11] = \{(5,6),(6,5)\},\ [X = 12] = \{(6,6)\}.$$

Ainsi, $P([X = 2]) = P([X = 12]) = \frac{1}{36}$, $P([X = 3]) = P([X = 11]) = \frac{2}{36}$, $P([X = 4]) = P([X = 10]) = \frac{3}{36}$, $P([X = 5]) = P([X = 9]) = \frac{4}{36}$, $P([X = 6]) = P([X = 8]) = \frac{5}{36}$ et $P([X = 7]) = \frac{6}{36}$. On a donc

$$\begin{aligned} F_X(x) &= \frac{1}{36}\,\mathbb{1}_{[2,3[}(x) + \frac{3}{36}\,\mathbb{1}_{[3,4[}(x) + \frac{6}{36}\,\mathbb{1}_{[4,5[}(x) + \frac{10}{36}\,\mathbb{1}_{[5,6[}(x) + \frac{15}{36}\,\mathbb{1}_{[6,7[}(x) + \frac{21}{36}\,\mathbb{1}_{[7,8[}(x) \\ &\quad + \frac{26}{36}\,\mathbb{1}_{[8,9[}(x) + \frac{30}{36}\,\mathbb{1}_{[9,10[}(x) + \frac{33}{36}\,\mathbb{1}_{[10,11[}(x) + \frac{35}{36}\,\mathbb{1}_{[11,12[}(x) + \mathbb{1}_{[12,+\infty[}(x) \end{aligned}$$

---

2. $(*)$ On considère la fonction F définie sur $\mathbb{R}$ par:

$F(x) = 0$ si $x < 0$; $F(x) = x/8$ si $0 \leq x < 2$; $F(x) = x/4$ si $2 \leq x < 4$; $F(x) = 1$ si $x \geq 4$.

Tracer la représentation graphique de F et montrer que F peut être considérée comme la fonction de répartition d'une v.a.r. X .

F est croissante, continue sauf en 2, continue à droite en 2 et $\lim\limits_{-\infty} F = 0$, $\lim\limits_{+\infty} F = 1$, donc F est bien une fonction de répartition.

---

3. $(*)$ Soient a, $b \in \mathbb{R}$ tels que $a < b$.

Exprimer $P([a < X < b])$, $P([a < X < b])$, $P([a \leq X \leq b])$, $P([a \leq X < b])$ à l'aide de F_X .

$F_X(x) = P([X \leq x])$; $F_X(x_-) = \lim\limits_{y \to x, y < x} P([X \leq y]) = P([X < x])$.

On a $[X < b] = [X \leq a] \cup [a < X < b])$, réunion d'ensembles disjoints, donc

$$P([X < b]) = P([X \leq a]) + P([a < X < b]) \text{ et}$$

$$P([a < X < b]) = F_X(b_-) - F_X(a).$$

De même, $P([a \leq X \leq b]) = F_X(b) - F_X(a_-)$ et $P([a \leq X < b]) = F_X(b_-) - F_X(a_-)$.

---

4. ($**$) Trois urnes A, B et C contiennent respectivement 1 boule blanche et 3 noires, 2 blanches et 2 noires, 3 blanches et 1 noire. On tire au hasard une boule dans chacune des 3 urnes, et on désigne par X le nombre de boules blanches obtenues.
Donner la loi de X et sa fonction de répartition.

$X(\Omega) = [\![0,3]\!]$. $P([X=0]) = \frac{3}{4} \times \frac{2}{4} \times \frac{1}{4} = \frac{3}{32}$;

$$P([X=1]) = \frac{1}{4} \times \frac{2}{4} \times \frac{1}{4} + \frac{3}{4} \times \frac{1}{2} \times \frac{1}{4} + \frac{3}{4} \times \frac{1}{2} \times \frac{3}{4} = \frac{13}{32} \ ;$$

$$P([X=2]) = \frac{1}{4} \times \frac{2}{4} \times \frac{1}{4} + \frac{1}{4} \times \frac{1}{2} \times \frac{3}{4} + \frac{3}{4} \times \frac{1}{2} \times \frac{3}{4} = \frac{13}{32} \ ;$$

et $P([X=3]) = \frac{1}{4} \times \frac{1}{2} \times \frac{3}{4} = \frac{3}{32}$.
Ainsi, $P([X=0]) = P([X=3] = \frac{3}{32}$ et $P([X=1]) = P([X=2]) = \frac{13}{32}$ et

$$F_X(x) = \frac{3}{32} \mathbb{1}_{[0,1[}(x) + \frac{3}{32} \mathbb{1}_{[0,1[}(x) + \frac{16}{32} \mathbb{1}_{[1,2[}(x) + \frac{29}{32} \mathbb{1}_{[2,3[}(x) + \mathbb{1}_{[3,+\infty[}(x).$$

---

5. ($*$) Montrer que la fonction F définie par:

$$F(x) = \mathrm{e}^x/2\mathbb{1}_{\,]-\infty,0[}(x) + \mathbb{1}_{\,[0,+\infty[}(x)$$

est une fonction de répartition. La fonction F' est-elle une densité de probabilité ?

F est croissante et continue sur $]-\infty,0[\cup]0,+\infty[$. De plus, $F(0_+) - F(0_-) = 1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2} > 0$, donc F est croissante sur $\mathbb{R}$, continue sur $\mathbb{R}^*$, continue à droite en 0. De plus, $\lim\limits_{-\infty} F = \lim\limits_{-\infty} e^{x/2} = 0$ et $\lim\limits_{+\infty} F = 1$ donc F est bien une fonction de répartition.

F est dérivable sur $\mathbb{R}^*$ avec $F'(x) = \frac{1}{2}e^x$ si $x < 0$ et $F'(x) = 0$ si $x > 0$. De plus, F est non dérivable en 0 car non continue.

$\int F'(x)\,dx = \int_{-\infty}^{0} F'(x)\,dx = \frac{1}{2} \neq 1$ donc F' n'est pas une densité.

---

6. ($**$) Déterminer $(a,b) \in \mathbb{R}^2$ tel que la fonction F définie par:

$$F(x) = \frac{a(x+4)}{b+|x|}\mathbb{1}_{\,]-4,+\infty[}(x)$$

soit une fonction de répartition.

On a $\lim\limits_{-\infty} F = 0$ et on doit avoir $\lim\limits_{+\infty} F = 1$ or $\lim\limits_{+\infty} F = a$ d'où $\boxed{a = 1}$.

$$F(x) = \frac{x+4}{b+|x|}\,\mathbb{1}_{]-4,+\infty[}(x) = \begin{cases} \frac{x+4}{b-x} = -1 + \frac{b+4}{b-x} \text{ si } x \in]-4,0[\\ \frac{x+4}{b+x} = 1 + \frac{4-b}{b+x} \text{ si } x \in [0,+\infty[\end{cases}$$

Pour la croissance de F, on doit avoir $4 - b \leq 0$ (soit $b \geq 4$) et $b + 4 \geq 0$ (soit $b \geq -4$). D'où $b \geq 4$ et alors F est continue sur $\mathbb{R}$ (même en -4).

Finalement, $\boxed{F \text{ est une fonction de répartition si } a = 1 \text{ et } b \geq 4}$.

Variables aléatoires discrètes

7. ($*$) Soit X une v.a.r. discrète prenant les valeurs 3, 4, 5 et 6. Déterminer la loi de probabilité de X sachant que:

$$P([X < 5]) = 1/3 \; ; \; P([X > 5]) = 1/2 \; ; \; P([X = 3]) = P([X = 4]).$$

$P([X = 3]) = P([X = 4]) = a$, $P([X = 5]) = b$, $P([X = 6]) = c$, avec $2a + b + c = 1$, $c = 1/2$ et $2a = \frac{1}{3}$. Donc $a = \frac{1}{6}$, $c = 1/2$ et $b = 1 - 2a - b = 1/6$.

8. ($*$) A et B sont deux avions ayant respectivement 4 et 2 moteurs. Chaque moteur a la probabilité p de tomber en panne et les moteurs sont indépendants les uns des autres.
Sachant que chaque avion arrive à destination si moins de la moitié de ses moteurs tombent en panne, quel avion choisissez-vous ?

Soit A (resp. B) l'événement "l'avion A (resp. B) arrive à destination".
On a $P(A) = (1-p)^4 + 4p(1-p)^3 = (1-p)^3(1+3p)$ et $P(B) = (1-p)^2$.

$$P(A) - P(B) = (1-p)^2 \; [(1-p)(1+3p) - 1] = (1-p)^2(2p - 3p^2) = p(1-p)^2(2-3p)$$

- Si $2 - 3p > 0$, c'est-à-dire $p < \frac{2}{3}$, $P(A) > P(B)$ et il vaut mieux choisir l'avion A.
- Si $2 - 3p < 0$, c'est-à-dire $p > \frac{2}{3}$, $P(A) < P(B)$ et il vaut mieux choisir l'avion B.
- Si $2 - 3p = 0$, c'est-à-dire $p = \frac{2}{3}$, $P(A) = P(B)$ et peu importe le choix de l'avion.

9. ($**$) Deux joueurs lancent une pièce de monnaie parfaitement équilibrée, n fois chacun. Calculer la probabilité qu'ils obtiennent le même nombre de fois "pile" .

Soit A_k l'événement "les joueurs obtiennent chacun k piles". La probabilité cherchée est alors $p = P\left(\bigcup_{k=0}^{n} A_k\right) = \sum_{k=0}^{n} P(A_k)$.

Les lancers des 2 joueurs étant indépendants, on a alors $P(A_k) = \left(C_n^k \frac{1}{2^n}\right)^2$.

D'où $p = \frac{1}{4^n} \sum_{k=0}^{n} (C_n^k)^2$, soit $\boxed{p = \frac{C_{2n}^n}{4^n}}$.

10. ($***$) On tire 9 cartes dans un jeu de 52 cartes. On appelle X la v.a.r. égale au nombre de carrés obtenus.
Trouver la loi de X .

Ici, $\text{card}\Omega = C_{52}^9$ et $X(\Omega) = \{0, 1, 2\}$.

Pour $[X = 2]$, on choisit la hauteur des 2 carrés (C_{13}^2 choix), puis on choisit une autre carte (C_{52-8}^1 choix). Ainsi, $\boxed{P([X = 2]) = \frac{C_{13}^2 \times 44}{C_{52}^9} \approx 9.10^{-7}}$.

Pour $[X = 1]$, on choisit la hauteur du carré ($C_{13}^1 = 13$ choix), puis, dans les 5 autres cartes, il ne doit pas y avoir de carré ($C_{48}^5 - 12 \times 44$ choix). Ainsi,

$$\boxed{P([X=1]) = \frac{13\times(C_{48}^5 - 12\times 44)}{C_{52}^9} \approx 6.10^{-3}.}$$

Enfin, $P([X=0]) = 1 - P([X=1]) - P([X=2])$.

---

11. (∗∗) Une urne contient 5 boules toutes distinctes. On tire 3 boules une à une avec remise. Soit X la v.a.r. égale au nombre de boules différentes tirées.
Déterminer la loi de X .

---

card$\Omega = 5^3$ et $X(\Omega) = \{1,2,3\}$.

Pour avoir $[X=1]$, il faut tirer 3 fois la même boule et on a 5 choix possibles. Ainsi, $\boxed{P([X=1]) = \frac{5}{5^3} = \frac{1}{25} = 0,04}$.

Pour avoir $[X=3]$, pour la première boule, on a 5 choix, pour la deuxième 4 et pour la troisième 3. Ainsi, $\boxed{P([X=3]) = \frac{5\times4\times3}{5^3} = \frac{12}{25} = 0,48}$.

Pour avoir $[X=2]$, il faut 2 boules distinctes (5×4 choix), la boule différente des autres pouvant être en premier, en deuxième ou en troisième. Ainsi, $\boxed{P([X=2]) = \frac{5\times4\times3}{5^3} = \frac{12}{25}}$.
Remarque : On a bien $P([X=1]) + P([X=2]) + P([X=3]) = 1$.

---

12. (∗∗) Une urne contient n boules numérotées de 1 à n. Déterminer la loi de la v.a.r. X dans les cas suivants:

1. On tire k boules au hasard ; X est le plus petit numéro obtenu.
2. On tire successivement 3 boules, sans remise ; X est le numéro de la 3-ième boule tirée.
3. On tire 3 boules au hasard ; X est le numéro intermédiaire.

---

1. card$\Omega = C_n^k$, $X(\Omega) = [\![1, n-k+1]\!]$ et $\boxed{P([X=i]) = \dfrac{C_{n-i}^{k-1}}{C_n^k}}$ (on choisit les $k-1$ boules restantes à tirer parmi les $n-i$ plus grandes que i).

2. card$\Omega = A_n^3 = n(n-1)(n-2)$, $X(\Omega) = [\![1,n]\!]$ et $\boxed{P([X=i]) = \frac{1}{n}}$ $\left(= \frac{(n-1)(n-2)}{n(n-1)(n-2)}\right)$.

3. card$\Omega = C_n^3$, $X(\Omega) = [\![2, n-1]\!]$ et $\boxed{P([X=i]) = \frac{(i-1)(n-i)}{C_n^3}}$ (1 boule avant, 1 après).

---

13. (∗ ∗ ∗) Une urne contient des jetons numérotés de 1 à n. On tire tous les jetons successivement et sans remise. Soit $p \leq n$. Quelle est la probabilité de tirer les jetons numérotés de 1 à p :

1. dans l'ordre des numéros et consécutivement ?
2. dans l'ordre ?

---

card$\Omega = n!$.

1. Les jetons de $p+1$ à n peuvent être tirés dans n'importe quel ordre, soit $(n-p)!$ façons. Ceux de 1 à p sont tirés dans cet ordre en suivant, soit en premier, soit en deuxième,..., soit de façon à ce que le jeton p soit tiré en dernier, c'est-à-dire le jeton 1 en position $n-p+1$, d'où $n-p+1$ choix et $\boxed{p = \frac{(n-p+1)!}{n!}}$.

2. On a $p!$ ordres possibles pour les jetons numérotés de 1 à p. Comme tous les ordres sont équiprobables, $\boxed{\text{la probabilité d'avoir les jetons de 1 à } p \text{ dans l'ordre croissant est } \frac{1}{p!}}$.

---

14. $(***)$ Une urne contient des boules numérotés de 1 à n. On tire les boules de l'urne, une à une et avec remise. On s'arrête lorsque, pour la première fois le numéro tiré est supérieur ou égal aux numéros tirés précédemment. Soit X la v.a.r. égale au nombre de tirages effectués.
Déterminer la loi de X.

$X(\Omega) = \{2, \cdots, n+1\}$: en effet, au minimum, il faut 2 tirages pour obtenir un numéro supérieur ou égal au précédent, et au maximum, il en faut $n+1$ (lorsque les n premiers numéros sont $n, n-1, \cdots, 2, 1$.
On a $X > i$ lorsque $n_1 > n_2 > \cdots > n_i$ et il y a C_n^i i-uplets $(n_1, \cdots, n_i)$ de la sorte (un seul ordre possible).
Le nombre total de i-uplets étant n^i, il en résulte que $P([X > i]) = \frac{C_n^i}{n^i}$ (encore valable pour $i = 1$ puisque $C_n^1 = n^1 = n$ et que $P([X > 1]) = 1$). On a donc :

$$\boxed{\begin{cases} P([X = i]) = P([X > i-1]) - P([X > i]) = \frac{C_n^{i-1}}{n^{i-1}} - \frac{C_n^i}{n^i} \text{ si } 1 \leq i \leq n \\ P([X = n+1]) = \frac{1}{n^n} \end{cases}}.$$

---

15. $(*)$ Soit X une v.a.r. à valeurs dans $\mathbb{N}$, telle que, pour tout $k \in \mathbb{N}$, $P([X = k]) = \lambda 3^{-k}$.

1. Déterminer λ .
2. X a-t-elle plus de chances d'être paire ou impaire ?

---

1. $\sum\limits_{k=0}^{+\infty} P([X = k]) = \lambda \sum\limits_{k=0}^{+\infty} 3^{-k} = \frac{\lambda}{1-\frac{1}{3}} = \frac{3\lambda}{2}$. X est une v.a.r. à valeurs dans $\mathbb{N}$ d'où $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} P([X = k]) = 1$ et $\boxed{\lambda = \frac{2}{3}}$.

2. $P([X \text{ pair }]) = \sum\limits_{k=0}^{+\infty} P([X = 2k]) = \frac{2}{3} \sum\limits_{k=0}^{+\infty} 3^{-2k} = \frac{2}{3} \sum\limits_{k=0}^{+\infty} \left(\frac{1}{9}\right)^k = \frac{2}{3} \frac{1}{1-\frac{1}{9}} = \frac{2}{3} \times \frac{9}{8} = \frac{3}{4}$.

Ainsi, $\boxed{X \text{ a plus de chance d'être pair}}$.

---

16. $(*)$ On lance une pièce truquée jusqu'à obtenir pour la première fois "face". Quelle est la probabilité pour que le nombre de lancers soit impair ? Pair ?

Soit p la probabilité d'obtenir "face" et X la v.a. égale au nombre de lancers : $X(\Omega) = \mathbb{N}^*$ et $P([X = k]) = pq^{k-1}$. On a alors :

$$P([X \text{ pair }]) = \sum_{k=1}^{+\infty} P([X = 2k]) = p \sum_{k=1}^{+\infty} q^{2k-1} = pq \sum_{k=1}^{+\infty} q^{2(k-1)} = \frac{pq}{1-q^2} = \frac{q}{1+q}.$$

On a donc $\boxed{P([X \text{ pair }]) = \frac{q}{1+q} \text{ et } P([X \text{ impair }]) = \frac{1}{1+q}}$.

(En particulier, $P([X \text{ pair }]) < P([X \text{ impair }])$).

---

17. $(**)$ On lance une pièce truquée et on note p la probabilité de voir apparaître "pile". Soit X le temps d'attente du premier "pile". Trouver un entier s tel que $P([X \leq s]) \geq 1-\alpha$, où α est un réel donné tel que $\alpha \in]0,1[$. *Application* $\alpha = 0,01$ *et* $p = 1/6$.

$P([X=k]) = pq^{k-1}$ et $P([X \leq s]) = p\sum_{k=1}^{s} q^{k-1} = p(1+\cdots+q^{s-1}) = p\frac{1-q^s}{1-q} = 1-q^s$.
On veut $1-q^s \geq 1-\alpha$, soit $q^s = e^{s\ln q} \leq \alpha$ d'où $s\ln q \leq \ln\alpha$ et comme $\ln q < 0$, $s \geq \frac{\ln\alpha}{\ln q}$.
A.N. : $\alpha = 0,01$, $q = \frac{5}{6}$ donne $s \geq \frac{-2\ln 10}{\ln 5 - \ln 6} \approx 25,3$ d'où $\boxed{s = 26}$.

---

18. $(**)$ Combien une famille doit-elle avoir d'enfants pour avoir au moins un garçon et une fille avec une probabilité supérieure à 0,95 ?

Pour une famille de n enfants, soit p_n la probabilité qu'elle ait des enfants des 2 sexes : $p_n = 1 - \frac{2}{2^n} = 1 - \frac{1}{2^{n-1}}$.

On veut $p_n \geq 0,95$, c'est-à-dire $1 - \frac{1}{2^{n-1}} \geq 1 - 0,05$ ou bien $\frac{1}{2^{n-1}} \leq 0,05$, c'est-à-dire $2^{n-1} \geq \frac{1}{0,05} = 20$. D'où $n-1 \geq 5$: $\boxed{\text{la famille doit avoir au moins 6 enfants}}$.

---

19. $(**)$ Soit X une v.a.r. de loi géométrique de paramètre p et soit $M \in \mathbb{N}^*$. Déterminer les lois de $Z = \inf(X, M)$ et de $Y = \sup(X, M)$.

$Z(\Omega) = \{1, \cdots, M\}$ avec, pour $k \leq M-1$, $P([Z=k]) = P([X=k]) = pq^{k-1}$ et $P([Z=M]) = P([X \geq M]) = 1 - P([X \leq M-1]) = 1 - (1-q^{M-1}) = q^{M-1}$ (*cf* ex 17).
$Y(\Omega) = \{M, M+1, \cdots\}$ avec, pour $k > M$, $P([Y=k]) = P([X=k]) = pq^{k-1}$ et $P([Y=M]) = P([X \leq M]) = 1 - q^M$.

---

20. $(*)$ Un sauteur tente de franchir les hauteurs successives $1, 2, \cdots, n, \cdots$. Les sauts sont indépendants et la probabilité de succès à la hauteur n, $n \in \mathbb{N}^*$ est $1/n$. Le sauteur est éliminé à son premier échec . On note X la v.a.r. "numéro du dernier saut réussi".
Trouver la loi de X et vérifier que $\sum_{n=1}^{\infty} P([X=n]) = 1$.

Soit A_k l'événement "le sauteur réussit la hauteur k". On a, par hypothèse, $P(A_k) = \frac{1}{k}$.

Si X désigne la hauteur du dernier saut réussi, on a $X(\Omega) = \mathbb{N}^*$ (car $P(A_1) = 1$) et, pour $n \in \mathbb{N}^*$,

$$[X=n] = A_1 \cap \cdots \cap A_n \cap \overline{A_{n+1}}.$$

Les sauts étant supposés indépendants, les événements A_k le sont aussi et les probabilités se multiplient, soit :

$$P([X=n]) = \prod_{k=1}^{n} P(A_k) \times P(\overline{A_{n+1}}) = \frac{1}{n!} \times \left(1 - \frac{1}{n+1}\right).$$

Ainsi, $\boxed{P([X=n]) = \frac{1}{n!} - \frac{1}{(n+1)!} \text{ pour tout } n \in \mathbb{N}^*.}$

$$
\begin{aligned}
G_X(z) &= \mathbb{E}(z^X) = \sum_{n=1}^{+\infty} z^n\left(\frac{1}{n!}-\frac{1}{(n+1)!}\right) = \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{z^n}{n!} - \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{z^n}{(n+1)!}\\
&= e^z - 1 - \frac{1}{z}\left(e^z-1-z\right) = e^z\left(1-\frac{1}{z}\right)+\frac{1}{z}
\end{aligned}
$$

$$G'_X(z) = e^z\left(1-\frac{1}{z}+\frac{1}{z^2}\right)-\frac{1}{z^2} \text{ et } G''_X(z) = e^z\left(1-\frac{1}{z}+\frac{1}{z^2}+\frac{1}{z^2}-\frac{2}{z^3}\right)+\frac{2}{z^3}$$

donc $G'_X(1)=e-1$ et $G''_X(1)+G'_X(1)-(G'_X(1))^2 = 2+(e-1)-(e-1)^2 = 3e-e^2$, soit :

$$\boxed{\mathbb{E}(X)=e-1} \text{ et } \boxed{\mathrm{var}(X)=3e-e^2}.$$

---

21. (∗∗) Soit X une v.a.r. entière telle que $P([X=k]) = \mathrm{e}^{-2}(1+\alpha k)\frac{2^k}{4(k!)}$ pour tout $k\in\mathbb{N}$. Déterminer α.

On doit avoir $\sum\limits_{k=0}^{+\infty} P([X=k]) = 1$. Or

$$\sum_{k=0}^{+\infty} P([X=k]) = \frac{e^{-2}}{4}\left[\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{2^k}{k!}+\alpha\sum_{k=1}^{+\infty}\frac{2^k}{(k-1)!}\right] = \frac{e^{-2}}{4}\left[e^2+\alpha\times 2e^2\right] = \frac{1+2\alpha}{4}.$$

On doit donc avoir $1+2\alpha=4$, soit $\boxed{\alpha=\frac{3}{2}}$.

---

22. (∗ ∗ ∗) On lance 5 dés: à chaque lancer, on met de côté ceux qui donnent un as et on relance les autres jusqu'à obtenir 5 as. Soit X la v.a.r. égale au nombre de lancers et Y la v.a.r. égale au nombre de dés lancés .

1. Calculer $P([X\le k])$ puis $P([X=k])$ pour tout $k\in\mathbb{N}$.
2. Calculer $P([Y=k])$ pour tout $k\in\mathbb{N}$.

---

1. On numérote les dés et on note X_i le nombre de lancers du dé i, pour obtenir un as. $P([X_i\le k]) = 1-P([X_i>k]) = 1-\left(\frac{5}{6}\right)^k$. Or $[X\le k]=\bigcap\limits_{i=1}^{5}[X_i\le k]$.
Les événements $[X_i\le k]$ sont indépendants car ce qui se passe sur un dé ne dépend pas des autres dés ; d'où $P([X\le k]) = \prod\limits_{i=1}^{5}P([X_i\le k]) = \left[1-\left(\frac{5}{6}\right)^k\right]^5$. On a donc :

$$\boxed{X(\Omega)=\mathbb{N}^* \text{ et } P([X=k]) = P([X\le k])-P([X\le k-1]) = \left[1-\left(\tfrac{5}{6}\right)^k\right]^5-\left[1-\left(\tfrac{5}{6}\right)^{k-1}\right]^5}$$

2. Soit Y le nombre de dés lancés. Tout ce passe comme si on ne lançait qu'un dé et qu'on voulait obtenir 5 as ; $\boxed{Y(\Omega)=\{5,6,\cdots,+\infty\} \text{ et } P([Y=k]) = C_{k-1}^4\left(\frac{1}{6}\right)^5\left(\frac{5}{6}\right)^{k-5}}$.

---

23. (∗ ∗ ∗) Dans une urne, il y a 10 boules blanches et 5 noires. On appelle X le rang de la r-ième boule blanche tirée ($1\le r\le 10$). Déterminer la loi de X dans le cas de tirages sans remise puis dans le cas de tirages avec remise .

---

1. Cas de tirages sans remise : $X(\Omega) = [\![r, 5+r]\!]$.

Si $X = r+k$, on fait $r+k$ tirages sans remise : il faut donc tirer k boules noires et r boules blanches et l'ordre compte. De plus, la dernière boule tirée doit être blanche : il faut alors placer les k boules noires parmi les $r+k-1$ places. On a ainsi :

$$\boxed{P([X = r+k]) = \frac{C_{r+k-1}^{k} A_5^k A_{10}^r}{A_{15}^{r+k}}}.$$

2. Cas de tirages avec remise : $X(\Omega) = [\![r, +\infty[$ et la proportion des boules ne varient pas (2/3 de blanches et 1/3 de noires). On a alors :

$$\boxed{P([X = r+k]) = C_{r+k-1}^{k} \left(\frac{1}{3}\right)^k \left(\frac{2}{3}\right)^r}.$$

---

24. $(***)$ Une succession de parties indépendantes de "pile ou face" est représentée par une suite de v.a.r. X_n telles que:

$$P([X_n = 0]) = P([X_n = 1]) = 1/2$$

On pose $S_n = \sum_{i=1}^{n} X_i$.

1. Quelle est la loi suivie par S_n ?
2. Si $k > 0$, soit T la v.a.r. égale au premier instant où "pile" est tombé k fois. Quelle est la loi de T?
3. Pierre et Paul jouent à "pile ou face". Pierre choisit "pile" et Paul "face". Soit U la v.a.r. égale au premier instant où l'un des joueurs gagne k parties . Quelle est la loi de U ?

$X_n(\Omega) = \{0, 1\}$: $X_n = 1$ si pile tombe au lancer n, 0 sinon.

1. $S_n(\Omega) = [\![0, n]\!]$. $S_n = k$ si k des X_i valent 1, les $n-k$ autre 0.

$$P([S_n = k]) = C_n^k \left(\frac{1}{2}\right)^k \left(\frac{1}{2}\right)^{n-k} = \frac{1}{2^n} C_n^k \ :$$

$$\boxed{\text{la loi suivie par } S_n \text{ est la loi binomiale } \mathcal{B}\left(n, \tfrac{1}{2}\right).}$$

2. $T(\Omega) = [\![k, +\infty[$. $[T = n]$ si $X_n = 1$ et si $k-1$ des x_i valent 1 pour $i \in [\![1, n-1]\!]$ d'où $\boxed{P([T = n]) = C_{n-1}^{k-1} \frac{1}{2^n}}$.

3. Si $[U = n]$, où $n \geq k$, il y a eu alors, ou bien k piles et $n-k$ faces (avec $n-k < k$), soit k faces et $n-k$ piles d'où $U(\Omega) = [k, 2k-1]\!]$ et $\boxed{P([U = n]) = 2\frac{C_{n-1}^{k-1}}{2^n} = \frac{C_{n-1}^{k-1}}{2^{n-1}}}$.

---

25. $(**)$ Soit X une v.a.r. suivant une loi de Poisson.
Montrer que $P([X \text{ impair}]) < P([X \text{ pair}])$.

$P([X \text{ pair}]) = \sum_{k=0}^{+\infty} P([X = 2k]) = e^{-\lambda} \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{\lambda^{2k}}{(2k)!} = e^{-\lambda}\left(\frac{e^{\lambda}+e^{-\lambda}}{2}\right) = \frac{1}{2}(1+e^{-2\lambda})$ si $X \sim \mathcal{P}(\lambda)$. On a alors $P([X \text{ impair}]) = 1 - P([X \text{ pair}]) = 1 - \frac{1}{2}(1+e^{-2\lambda}) = \frac{1}{2}(1-e^{-2\lambda})$, d'où $\boxed{P([X \text{ impair}]) < P([X \text{ pair}])}$.

---

26. $(*)$ Soit X à valeurs dans $\mathbb{N}$ telle que $P([X = n]) = (\lambda/n)P([X = n-1])$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$. Trouver la loi de X .

$P([X = n]) = (\lambda/n)P([X = n-1])$ donne : $P([X = 1]) = \lambda P([X = 0])$,

$$P([X = 2]) = \frac{\lambda}{2}\, P([X = 1]) = \frac{\lambda^2}{2}\, P([X = 0])$$

$$P([X = 3]) = \frac{\lambda}{3}\, P([X = 2]) = \frac{\lambda^3}{3!}\, P([X = 0]).$$

Par récurrence, on montre que $P([X = n]) = \frac{\lambda^n}{n!}\, P([X = 0])$ pour $n \in \mathbb{N}^*$ (et même pour $n = 0$). De plus, $\sum_{n=0}^{+\infty} P([X = n]) = 1$, donc $P([X = 0]) \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\lambda^n}{n!} = 1$ et $P([X = 0]) = e^{-\lambda}$. D'où $P([X = n]) = e^{-\lambda}\, \frac{\lambda^n}{n!}$: $\boxed{X \text{ suit la loi de Poisson } \mathcal{P}(\lambda)}$.

---

27. $(**)$ Soit f une fonction définie sur $\mathbb{Z}$ par :
$f(n) = (4/n)f(n-1)$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et $f(-n) = f(n)$ pour tout $n \in \mathbb{Z}$.
Déterminer f pour qu'elle définisse la loi de probabilité d'une v.a.r. X à valeurs dans $\mathbb{Z}$.

On doit avoir $\sum_{n\in\mathbb{Z}} f(n) = 1$. Or $\sum_{n\in\mathbb{Z}} f(n) = f(0) + \sum_{n=1}^{+\infty}(f(n) + f(-n))$, et comme $f(-n) = f(n)$, $\sum_{n\in\mathbb{Z}} f(n) = f(0) + 2\sum_{n=1}^{+\infty} f(n) = 2\sum_{n=0}^{+\infty} f(n) - f(0)$.
Comme dans l'exercice 26, on obtient par récurrence $f(n) = \frac{4^n}{n!} f(0)$ donc $f(0)(2e^4-1) = 1$, ce qui donne $f(0) = \frac{1}{2e^4-1}$ puis $\boxed{f(n) = f(-n) = \frac{1}{2e^4-1}\,\frac{4^n}{n!} \text{ pour tout } n \in \mathbb{N}}$.

---

28. $(*)$ Dans une verrerie, on fabrique des abats-jour en verre qui admettent en moyenne 3 défauts. La probabilité du nombre de défauts par abat-jour est déterminée par une loi de Poisson. Calculer la probabilité pour qu'un abat-jour :

1. ne contienne aucun défaut ;
2. contienne 2 défauts au plus .

Dans une loi de Poisson, on verra que la moyenne, c'est le paramètre. Donc, si X est le nombre de défauts, X suit la loi $\mathcal{P}(3)$.

1. $P([X = 0]) = e^{-3} \approx 0,05$.

2. $P([X \leq 2]) = P([X = 0]) + P([X = 1]) + P([X = 2])$, soit

$$P([X \leq 2]) = e^{-3}\left(1 + 3 + \frac{9}{2}\right) = \frac{17}{2}\, e^{-3} \approx 0,42.$$

29. ($*$) Sachant que le nombre moyen de communications téléphoniques reçues par un standard entre 10h et 11h est de 1,8 par minute, et que le nombre X d'appels reçus par minute est une v.a.r. qui suit une loi de Poisson, calculer la probabilité pour qu'entre 10h53 et 10h54 il y ait aucun appel ; 1 appel ; 2 appels ; au moins 2 appels ; plus de 2 appels ; 2,3 ou 4 appels.

X suit la loi $\mathcal{P}(1,8)$. $P([X=0]) = e^{-1,8} \approx 0,165$, $P([X=1]) = 1,8e^{-1,8} \approx 0,298$, $P([X=2]) = \frac{1,8^2}{2}\, e^{-1,8} \approx 0,268$.

$$P([X \geq 2]) = 1 - P([X=0]) - P([X=1]) \approx 0,537.$$

$$P([X > 2]) = P([X \geq 2]) - P([X=2]) \approx 0,269.$$

$$P([X=2]) + P([X=3]) + P([X=4]) = P([X=2])\left(1 + \frac{1,8}{3} + \frac{1,8^2}{12}\right) \approx 0,501.$$

---

30. ($**$) Soit X une v.a.r. prenant ses valeurs dans $\mathbb{N}$. On suppose que pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $4P([X=n+2]) = 5P([X=n+1]) - P([X=n])$.
Montrer que X suit une loi binomiale négative dont on précisera les paramètres.

On pose $p_n = P([X=n])$. On a alors $p_{n+2} = 5p_{n+1} - p_n = 0$, d'équation caractéristique $4r^2 - 5r + 1 = 0$, soit $(4r-1)(r-1) = 0$, donc $p_n = A + B\left(\frac{1}{4}\right)^n$. Mais $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} p_n = 1$, donc $\lim\limits_{n} p_n = 0$ et $A = 0$.

Enfin, $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} p_n = \frac{B}{1-\frac{1}{4}} = \frac{4}{3}B$, d'où $B = \frac{3}{4}$ et $P([X=n]) = \frac{3}{4}\left(\frac{1}{4}\right)^n$: $\boxed{X \text{ suit la loi } \mathcal{G}_0\left(\frac{3}{4}\right)}$.

Variables aléatoires absolument continues

31. ($*$) Vérifier que les fonctions f suivantes sont des densités de probabilité:

1. $f(x) = (1 - |1-x|)\mathbb{1}_{]0,2[}(x)$
2. $f(x) = \frac{1}{2\sigma}\, e^{-\frac{|x-\mu|}{\sigma}}$
3. $f(x) = \frac{x}{4}\, e^{-\frac{x}{2}}\, \mathbb{1}_{]0,+\infty[}(x)$
4. $f(x) = \frac{b}{\pi(b^2+(x-a)^2)}$

---

1. Pour $x \in]0,2[$, $1-x \in]-1,1[$ donc $|1-x| \in [0,1[$ et $f(x) \geq 0$ sur $\mathbb{R}$. De plus, f est continue sur $\mathbb{R}$ et

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\, dx = \int_0^2 (1 - |1-x|)\, dx = \int_0^1 x\, dx + \int_1^2 (2-x)\, dx = \frac{1}{2} + \left[-\frac{(2-x)^2}{2}\right]_1^2 = 1.$$

2. f est positive, continue sur $\mathbb{R}$ (à condition que b soit > 0). De plus,

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\, dx = \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{b}\frac{1}{\left(1 + \left(\frac{x-a}{b}\right)^2\right)}\, dx \underset{u=\frac{x-b}{a}}{=} \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{du}{1+u^2} = \frac{1}{\pi}\left[\mathrm{Arctan} u\right]_{-\infty}^{+\infty} = 1.$$

3. f positive et continue sur $\mathbb{R}$ pour $\sigma > 0$. De plus,

$$\begin{aligned}\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx &= \frac{1}{2\sigma}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-|x-\mu|/\sigma}\,dx \underset{u=x-\mu}{=} \frac{1}{2\sigma}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-|u|/\sigma}\,du \\ &= \frac{1}{\sigma}\int_0^{+\infty} e^{-u/\sigma}\,du = \left[-e^{-u/\sigma}\right]_0^{+\infty} = 1.\end{aligned}$$

4. f positive et continue sur $\mathbb{R}$. De plus,

$$\begin{aligned}\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx &= \frac{1}{4}\int_0^{+\infty} x\,e^{-x/2}\,dx \underset{u=x/2}{=} \int_0^{+\infty} ue^{-u}\,du \\ &= [ue^{-u}]_0^{+\infty} + \int_0^{+\infty} e^{-u}\,du = 1.\end{aligned}$$

Dans les cas 1.,2. 3. 4., f est bien une densité.

---

32. $(*)$ Soit f la fonction définie par:

$$f(x) = cx\ \mathbb{1}_{[0,3[}(x) + c(6-x)\ \mathbb{1}_{[3,6[}(x)$$

1. Montrer que pour une constante c convenable, que l'on déterminera, f est une densité de probabilité.
2. Soit X une v.a.r. de densité f. Soit A l'événement $[X > 3]$ et B l'événement $[1,5 < X < 4,5]$. Calculer $P(A)$ et $P(B)$. Les événements A et B sont-ils indépendants?

---

1. On doit avoir $c > 0$. f est continue sur $\mathbb{R}$ et

$$\int f(x)\,dx = c\left[\int_0^3 x\,dx + \int_3^6 (6-x)\,dx\right] = c\left(\left[\frac{x^2}{2}\right]_0^3 + \left[-\frac{(6-x)^2}{2}\right]_3^6\right) = c\left(\frac{9}{2}+\frac{9}{2}\right) = 9c$$

d'où $\boxed{c = \frac{1}{9}}$.

2. $P(A) = \int_3^6 (6-x)\,dx = \frac{1}{2}$ d'après la question précédente.

$$\begin{aligned}P(B) &= \int_{3/2}^{9/2} f(x)\,dx = \frac{1}{9}\left(\left[\frac{x^2}{2}\right]_3 /2^3 + \left[-\frac{(6-x)^2}{2}\right]_3^{9/2}\right) \\ &= \frac{1}{9}\left(\frac{9}{2}-\frac{9}{8}-\frac{9}{8}+\frac{9}{2}\right) = 1-\frac{1}{4}\end{aligned}$$

Ainsi, $\boxed{P(A) = \frac{1}{2} \text{ et } P(B) = \frac{3}{4}}$.

$A \cap B = [3 \leq X \leq 4,5]$; $P(A\cap B) = \frac{1}{9}\left[-\frac{(6-x)^2}{2}\right]_3^{\frac{9}{2}} = \frac{3}{8} = P(A)P(B)$, donc A et B sont indépendants.

---

33. $(**)$ Soit X une v.a.r. de densité f.
Soit $a \neq 0$ et $b \in \mathbb{R}$ et soit $Y = aX + b$.

1. Exprimer la densité de Y à l'aide de f.
2. Même question avec $Y = |X|$.
3. Même question avec $Y = X^p$; $p \in \mathbb{N}^*$. (on distinguera les cas p impair et p pair).
   Application: Si X suit la loi normale $N(0,1)$, quelle est la loi de $Y = X^2$?

---

1. $P([Y \leq y]) = P([aX+b \leq y]) = \begin{cases} P\left(\left[X \leq \frac{y-b}{a}\right]\right) \text{ si } a > 0 \\ P\left(\left[X \geq \frac{y-b}{a}\right]\right) = 1 - P\left(\left[X < \frac{y-b}{a}\right]\right) \text{ si } a < 0 \end{cases}$.
Mais, comme F_X est continue, on a :

$$F_Y(y) = P([Y \leq y]) = \begin{cases} F_X\left(\frac{y-b}{a}\right) \text{ si } a > 0 \\ 1 - F_X\left(\frac{y-b}{a}\right) \text{ si } a < 0 \end{cases}.$$

Comme $f_Y = F'_Y$, il vient $f_Y(y) = \begin{cases} \frac{1}{a} f_X\left(\frac{y-b}{a}\right) \text{ si } a > 0 \\ -\frac{1}{a} f_X\left(\frac{y-b}{a}\right) \text{ si } a < 0 \end{cases}$.

Finalement, $\boxed{f_Y(y) = \frac{1}{|a|} f_X\left(\frac{y-b}{a}\right) \text{ si } a \neq 0}$

2. $P([Y \leq y]) = P([|X| \leq y]) = \begin{cases} 0 \text{ si } y < 0 \\ P([-y \leq X \leq y]) \text{ si } y \geq 0 \end{cases}$ d'où

$\boxed{F_Y(y) = (F_X(y) - F_X(-y))\mathbb{1}_{]0,+\infty[}(y) \text{ et } f_Y(y) = (f_X(y) + f_X(-y))\,\mathbb{1}_{]0,+\infty[}(y)}$.

3. $P([Y \leq y]) = P(|X^p \leq y])$.

• <u>Cas p impair</u> : alors $x \mapsto x^p$ est une bijection croissante de $\mathbb{R}$ sur $\mathbb{R}$. On a donc $F_Y(y) = f_X\left(y^{1/p}\right)$ et $\boxed{f_Y(y) = \frac{1}{p} y^{1/p-1} f_X\left(y^{1/p}\right)}$.

• <u>Cas p pair</u> : $x \mapsto x^p$ est une fonction paire positive.

$$P([Y \leq y]) = P([|X|^p \leq y]) = \begin{cases} 0 \text{ si } y < 0 \\ P\left(\left[-y^{1/p} \leq X \leq y^{1/p}\right]\right) \text{ si } y > 0 \end{cases}$$

Ainsi, $F_Y(y) = \left[F_X(y^{1/p}) - F_X(-y^{1/p})\right]\,\mathbb{1}_{]0,+\infty[}(y)$ et

$$\boxed{f_Y(y) = \frac{1}{p} y^{\frac{1}{p}-1}\left[f_X(y^{1/p}) + f_X(-y^{1/p})\right]\,\mathbb{1}_{]0,+\infty[}(x).}$$

Aplication : $f_X(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-x^2/2}$ et $Y = X^2$.

$$f_Y(y) = \frac{1}{2} y^{-\frac{1}{2}}\left[f_X(y^{1/2}) + f_X(-y^{1/2})\right]\,\mathbb{1}_{]0,+\infty[}(y)$$

soit $f_{X^2}(y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\, y^{-1/2} e^{-y/2}\,\mathbb{1}_{]0,+\infty[}(y)$: X^2 suit la loi Gamma $\gamma\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$.

---

34. $(*)$ Soient a et λ des réels strictement positifs. On pose:

$$\Gamma(a) = \int_0^{+\infty} e^{-x}\, x^{a-1}\, dx$$

1. Montrer que $\Gamma(a) < +\infty$.
2. Montrer que $\Gamma(a+1) = a\Gamma(a)$ et en déduire que, pour $n \in \mathbb{N}^*$, on a $\Gamma(n) = (n-1)!$.
3. On considère f définie par:

$$f(x) = \frac{\lambda^a}{\Gamma(a)}\, e^{-\lambda x}\, x^{a-1}\, \mathbb{1}_{]0,+\infty[}(x)$$

Vérifier que f est une densité de probabilité et représenter, selon les valeurs de a, l'allure de la courbe de densité.

---

1. $\gamma(a) = \int_0^{+\infty} x^{a-1}\, e^{-x}\, dx$.
• En 0, $x^{a-1}e^{-x} \sim x^{a-1}$ et l'intégrale converge pour $a-1 > -1$, c'est-à-dire $\boxed{a > 0}$.
• En $+\infty$, $(x^{a-1}e^{-x}) \times x^2 \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} 0$ donc $x^{a-1}e^{-x} \leq \frac{1}{x^2}$ pour $x \geq x_0$ et l'intégrale converge également. On a donc $\boxed{\Gamma(a) < +\infty}$.

2. $\int_0^A x^a\, e^{-x}\, dx = [-x^a\, e^{-x}]_0^A + \int_0^A a x^{a-1}\, e^{-x}\, dx = -A^a\, e^{-A} + \int_0^A a x^{a-1}\, e^{-x}\, dx$
où l'on a posé $u'(x) = e^{-x}$ $(u(x) = -e^{-x})$ et $v(x) = x^a$ $(v'(x) = a\, x^{a-1})$ et comme $\lim\limits_{A\to+\infty} A^a\, e^{-A} = 0$ on a bien, en faisant $A \to +\infty$:

$$\boxed{\Gamma(a+1) = a\Gamma(a).}$$

On a $\Gamma(1) = \int_0^{+\infty} e^{-x}\, dx = [-e^{-x}]_0^{+\infty} = 1$, $\Gamma(2) = 1\Gamma(1) = 1$, $\Gamma(3) = 2\Gamma(2) = 2$, $\Gamma(4) = 3\Gamma(3) = 3!$ et par récurrence, si $\Gamma(n) = (n-1)!$, alors $\Gamma(n+1) = n\Gamma(n) = n!$. On a donc bien $\boxed{\Gamma(n) = (n-1)! \text{ pour tout } n \in \mathbb{N}^*}$.

3. $f(x) = \frac{\lambda^a}{\Gamma(a)} x^{a-1} e^{-\lambda x}\, \mathbb{1}_{]0,+\infty[}(x)$. f est positive, continue sauf éventuellement en 0 et

$$\int f(x)\, dx = \frac{\lambda^a}{\Gamma(a)} \int_0^{+\infty} x^{a-1}\, e^{-\lambda x}\, dx \underset{u=\lambda x}{=} \frac{\lambda^a}{\Gamma(a)} \int_0^{+\infty} \left(\frac{u}{\lambda}\right)^{a-1} e^{-u}\, \frac{du}{\lambda} = \frac{\Gamma(a)}{\Gamma(a)} = 1$$

et $\boxed{f \text{ est bien une densité de probabilité}}$.
Pour avoir l'allure de la courbe, on détermine f' :

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{\lambda^a}{\Gamma(a)}\, e^{-\lambda x} \left[-\lambda x^{a-1} + (a-1)x^{a-2}\right] \mathbb{1}_{]0,+\infty[}(x) \\ &= \frac{\lambda^a}{\Gamma(a)}\, e^{-\lambda x}\, x^{a-2} \left[-\lambda x + a - 1\right] \mathbb{1}_{]0,+\infty[}(x). \end{aligned}$$

Ainsi, $f'(x) \geq 0$ pour $x \leq \frac{a-1}{\lambda}$.

De plus, $f(0^+) = \begin{cases} 0 \text{ pour } a > 1 \\ \lambda \text{ pour } a = 1 \\ +\infty \text{ pour } a < 1 \end{cases}$ et $f'(0^+) = \begin{cases} 0 \text{ pour } a > 2 \\ \alpha > 0 \text{ pour } a = 2 \\ -\lambda^2 \text{ pour } a = 1 \\ +\infty \text{ pour } a \in]1,2[\end{cases}$.

On obtient ainsi l'allure de la courbe.

---

35. $(*)$ Soit X une v.a.r. de loi normale $N(0,1)$.
Montrer, en utilisant les exercices 33 et 34 que la loi de $Z = X^2/2$ est la loi Gamma de paramètres $\lambda = 1$ et $a = 1/2$ et que $\Gamma(1/2) = \sqrt{\pi}$.

$F_Z(z) = P([Z \leq z]) = P([X^2 \leq 2z]) = \left(F_X(\sqrt{2z}) - F_X(-\sqrt{2z})\right) \, \mathbb{1}_{]0,+\infty[}(z)$ et

$$f_Z(z) = \frac{1}{\sqrt{2z}} \left(f_X(\sqrt{2z}) + f_X(-\sqrt{2z})\right) \, \mathbb{1}_{]0,+\infty[}(z) = \frac{2}{\sqrt{2z}} f_X(\sqrt{2z}) \, \mathbb{1}_{]0,+\infty[}(z)$$

car ici f_X est paire. On a en fait, $f_X(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-x^2/2}$ et donc

$$f_Z(z) = \frac{2}{\sqrt{4\pi\, z}} e^{-z} \, \mathbb{1}_{]0,+\infty[}(z) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} z^{-1/2} e^{-z} \, \mathbb{1}_{]0,+\infty[}(z).$$

La densité de la loi Gamma $\gamma(1, 1/2)$ est en fait $g : x \mapsto \frac{1}{\Gamma(\frac{1}{2})} z^{-1/2}\, e^{-z} \, \mathbb{1}_{]0,+\infty[}(z)$ et on a donc $f_Z(z) = cg(z)$.

Mais $\int f_Z(z)\, dz = 1 = c \int g(z)\, dz = c$, d'où $c = 1$ et $\boxed{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi}}$

---

36. $(*)$ On suppose que la durée d'une communication téléphonique est une v.a.r. de loi exponentielle $\mathcal{E}(k)$.

1. Calculer, pour $k = 0.8$, la probabilité pour qu'une communication dure :
   (a) plus de 4 minutes;
   (b) entre 3 et 5 minutes.
2. Quelle valeur faut-il donner à k pour que la probabilité qu'une communication dure plus de 3 minutes soit égale à 0.1?

$\mathcal{E}(k)$ est la loi de densité $x \mapsto ke^{-kx} \, \mathbb{1}_{]0,+\infty[}(x)$.

1. (a) $P([X > 4]) = \int_4^{+\infty} ke^{-kx}\, dx = \left[-e^{-kx}\right]_4^{+\infty} e^{-4k} = e^{-3.2} \approx 0.041$.
(b) $P([3 < X < 5]) = \left[-e^{-kx}\right]_3^5 = e^{-3k} - e^{-5k} = e^{-2.4} - e^{-4} \approx 0.072$.

2. On cherche k tel que $P([X > 3]) = 0.1$ avec $P([X > 3]) = e^{-3k}$. Donc $e^{-3k} = 0.1$; $-3k \geq \ln 0.1 = -\ln 10$ donc $\boxed{k = \frac{\ln 10}{3} \approx 0.77}$.

---

37. $(*)$ Soit X une v.a.r. de densité f définie par:

$$f(x) = (1+x)^{-2} \, \mathbb{1}_{[0,+\infty[}(x)$$

1. Déterminer la fonction de répartition F de X.
2. Soit $Y = \mathrm{Arctan} X$. Montrer que Y est une v.a.r. absolument continue et déterminer sa densité.

---

1. $F_X(x) = \displaystyle\int_{-\infty}^{x} f(t)\, dt = \begin{cases} 0 \text{ si } x \leq 0 \\ \left[-(1+t)^{-1}\right]_0^x = 1 - \frac{1}{1+x} = \frac{x}{1+x} \text{ si } x > 0 \end{cases}$ donc

$$\boxed{F_X(x) = \frac{x}{1+x} \, \mathbb{1}_{]0,+\infty[}(x).}$$

2. $Y = \varphi(X)$ avec $\varphi(x) = \text{Arctan}x$: X est à valeurs dans $\mathbb{R}_+^*$, donc Y est à valeurs dans $]0, \pi/2[$.

$$F_Y(y) = P([\text{Arctan}X \leq y]) = \begin{cases} 0 \text{ si } y \leq -\pi/2 \\ F_X(\tan y) \text{ si } y \in [-\pi/2, \pi/2] \\ 1 \text{ si } y > \pi/2 \end{cases} \quad \text{donc}$$

$$\boxed{F_Y(y) = \frac{\tan y}{1 + \tan y} \mathbb{1}_{]0,\pi/2[}(y) \text{ et } f_Y(y) = \frac{1 + \tan^2 y}{(1 + \tan y)^2} \mathbb{1}_{]0,\pi/2[}(y).}$$

---

38. (∗∗) Soit X une v.a.r. strictement positive et $\lambda > 0$. On définit les v.a.r. U et V par $U = 1 - X$ et $V = -\ln X/\lambda$.

1. Déterminer les lois de U et de V si X suit la loi uniforme sur $]0, 1[$.
2. Déterminer la loi de X pour que V suivent la loi exponentielle $\mathcal{E}(\lambda)$.

---

1. $F_U(u) = P([1 - X \leq u]) = P([X \geq 1 - u]) = 1 - F_X(1 - u)$ et $f_U(u) = f_X(1 - u)$. $F_V(v) = P([-\frac{\ln X}{\lambda} \leq v]) = P([\ln X \geq -\lambda v]) = P([X \geq e^{-\lambda v}]) = 1 - F_X(e^{-\lambda v})$ car $t \mapsto e^t$ est une bijection strictement croissante de $\mathbb{R}$ sur $\mathbb{R}_+^*$; puis $f_V(v) = \lambda e^{-\lambda v} f_X(e^{-\lambda v})$.
Or $f_X = \mathbb{1}_{]0,1[}$: $0 < 1 - u < 1$ équivaut à $0 < u < 1$ et $0 < e^{-\lambda v} < 1$ équivaut à $v > 0$ car $\lambda > 0$. D'où $\boxed{U \sim \mathcal{U}(]0, 1[) \text{ (loi uniforme) et } V \sim \mathcal{E}(\lambda) \text{ (loi exponentielle)}}$.

2. $X = e^{-\lambda V}$ et $P(X \leq x) = P(e^{-\lambda V} \leq x)$:
• si $x \leq 0$, alors $F_X(x) = 0$ et $f_X(x) = 0$;
• si $x > 0$, alors $F_X(x) = P([-\lambda V \leq \ln x]) = P([V \geq -\frac{\ln x}{\lambda}]) = 1 - F_V\left(-\frac{\ln x}{\lambda}\right)$. On a donc, en dérivant, $f_X(x) = \frac{1}{\lambda x} f_V\left(-\frac{\ln x}{\lambda}\right)$ et si $V \sim \mathcal{E}(\lambda)$, $f_X(x) = \frac{1}{\lambda x} \lambda e^{\ln x} \mathbb{1}_{]0,+\infty[}\left(-\frac{\ln x}{\lambda}\right)$.
Or $-\ln x > 0$ équivaut à $\ln x < 0$, soit $x < 1$.
On a donc finalement, $f_X(x) = \mathbb{1}_{]0,1[}(x)$ et $\boxed{X \sim \mathcal{U}(]0, 1[)}$.

---

39. (∗ ∗ ∗) Trouver la loi de $Y = e^{1/X}$ si X suit la loi uniforme sur $[-1, 1]$.

$Y = \varphi(X)$ où $\varphi(x) = e^{1/x}$: φ est définie sur $\mathbb{R}^*$ où elle est de classe C^1 avec $\varphi'(x) = -\frac{1}{x^2} e^{1/x} < 0$ donc φ est décroissante sur $] - \infty, 0[$ et sur $]0, +\infty[$, avec $\lim_{-\infty} \varphi = 1$, $\lim_{0_-} \varphi = 0$, $\lim_{0^+} \varphi = +\infty$ et $\lim_{+\infty} \varphi = 0$. En particulier, φ est bien à valeurs dans $\mathbb{R}_+^*$ et

$$\varphi(] - 1, 0[\cup]0, 1[) =]e^{-1}, 0[\cup]e, +\infty[.$$

$y = \varphi(x)$ donne $\frac{1}{x} = \ln y$, soit $x = \frac{1}{\ln y}$.

• Si $y < 0$, $F_Y(y) = 0$.
• Si $y \in]0, e^{-1}[$, $F_Y(y) = P([\varphi^{-1}(y) \leq X \leq 0]) = F(0) - F(\varphi^{-1}(y))$.
• Si $y \in]e^{-1}, e[$, $F_Y(y) = P([X \leq 0]) = \frac{1}{2}$.
• Si $y > e$, $F_Y(y) = P([X \geq \varphi^{-1}(y)]) = 1 - F_X(\varphi^{-1}(y))$.

Finalement, $f_Y(y) = -f_X\left(\frac{1}{\ln y}\right) \times \left(-\frac{1}{\ln^2 y} \frac{1}{y}\right)$ avec $f_X\left(\frac{1}{\ln y}\right) = \frac{1}{2}$ si $\ln y > 1$ ou $\ln y < -1$, c'est-à-dire, $y < e^{-1}$. Ainsi, $\boxed{f_Y(y) = \frac{1}{2y \ln^2 y} \mathbb{1}_{]0,e^{-1}[\cup]e,+\infty[}(y)}$.

40. (∗∗) Soit X une v.a.r. de densité f définie par:

$$f(x) = \cos x \, \mathbb{1}_{]0,\pi/2[}(x)$$

Déterminer la fonction de répartition de la v.a.r. $Y = \tan X$.

X est à valeurs dans $]0, \pi/2[$ donc $Y = \tan X$ et à valeurs dans $\mathbb{R}_+^*$ et on a :

$$F_Y(y) = P([Y \leq y]) = P([\tan X \leq y]) = F_X(\text{Arctan}\, y)$$

et $f_Y(y) = f_X(\text{Arctan}\, y)\, \frac{1}{1+y^2}$, soit $\boxed{f_Y(y) = (1+y^2)^{-3/2}\mathbb{1}_{]0,+\infty[}(y)}$.

---

41. (∗∗) Soit X une v.a.r. absolument continue.

1. Déterminer la loi de $Y = \sin(\pi X)$ si X suit la loi uniforme sur $]0, 1[$.
2. Déterminer la loi de $Z = \tan X$ si X suit la loi uniforme sur $]-\pi/2, \pi/2[$.

---

1. Pour $X \in [0, 1]$, $\pi X \in [0, \pi]$; or la fonction sin croît de 0 à 1 sur $[0, \frac{\pi}{2}]$ et décroît de 1 à 0 sur $[\frac{\pi}{2}, \pi]$. On a donc :

$$F_Y(y) = P([\sin \pi X \leq y]) = \begin{cases} 1 \text{ si } y \geq 1 \\ 0 \text{ si } y \leq 0 \\ P\left(\left[X \in \left[0, \frac{1}{\pi}\text{Arcsin}y\right] \cup \left[1 - \frac{1}{\pi}\text{Arcsin}y, 1\right]\right]\right) \text{ si } y \in]0, 1[\end{cases}.$$

On a alors $F_Y(y) = \frac{2}{\pi}\text{Arcsin}y \,\mathbb{1}_{]0,1[}(y) + \mathbb{1}_{[1,+\infty[}(y)$ et $\boxed{f_Y(y) = \frac{2}{\pi}\frac{1}{\sqrt{1-y^2}}\,\mathbb{1}_{]0,1[}(y)}$.

2. X est à valeurs sur $\left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$ et tan est une bijection strictement croissante de $\left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$ sur $\mathbb{R}$. $P([Z \leq z]) = P([\tan X \leq z]) = P([X \leq \text{Arctan}z]) = \frac{1}{\pi}\left(\text{Arctan}z + \frac{\pi}{2}\right)$ (puisque $F_X(x) = \frac{1}{\pi}\left(x + \frac{\pi}{2}\right)\mathbb{1}_{\left]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right[}(x) + \mathbb{1}_{\left[\frac{\pi}{2},+\infty\right[}(x)$) et $\boxed{f_Z(z) = \frac{1}{\pi}\frac{1}{1+z^2}}$: Z suit la loi de Cauchy.

---

42. (∗ ∗ ∗) Soit X une v.a.r. de fonction de répartition F définie par:

$$F(x) = (1 + e^{-x})^{-1}$$

Déterminer la fonction de répartition de la v.a.r. Y définie par:

$$Y = \frac{e^X + 1}{e^X - 1}$$

$Y = \varphi(X)$ avec $\varphi(x) = \frac{e^x+1}{e^x-1} = 1 + \frac{2}{e^x-1}$: φ est définie sur $\mathbb{R}^*$ où elle est de classe C^1 comme quotient de telles fonctions. On a $\varphi'(x) = -\frac{2}{(e^x-1)^2} < 0$ sur $\mathbb{R}^*$ donc φ est décroissante sur $]-\infty, 0[$ et sur $]0, +\infty[$, avec $\lim\limits_{-\infty} \varphi = -1$ et $\lim\limits_{+\infty} \varphi = 1$, $\lim\limits_{0_-} \varphi = -\infty$ et $\lim\limits_{0^+} \varphi = +\infty$. Ainsi, φ est une bijection de $\mathbb{R}^*$ sur $]-\infty, -1[\cup]1, +\infty[$.

Si $y=\varphi(x)$, $y-1=\frac{2}{e^x-1}$ donc $e^x-1=\frac{2}{y-1}$ et $e^x=\frac{2}{y-1}+1=\frac{y+1}{y-1}$. On a

$$P([Y\le y])=P([\varphi(X)\le y]).$$

- Si $y<-1$, $P([Y\le y])=P([\varphi^{-1}(y)\le X<0])=F(0)-F(\varphi^{-1}(y))$ où

$$F(\varphi^{-1}(y))=\left(1+\frac{y-1}{y+1}\right)^{-1}=\frac{y+1}{2y}$$

et donc $F_Y(y)=-\frac{1}{2y}$.

- Si $-1\le y\le 1$, $P([Y\le y])=P([X\le 0])=F(0)=\frac{1}{2}$.

- Si $y>1$, $P([Y\le y])=P([X\le 0])+P([X\ge\varphi^{-1}(y)])=\frac{1}{2}+1-F\left(\varphi^{-1}(y)\right)$, soit

$$F_Y(y)=\frac{3}{2}-\frac{y+1}{2y}=\frac{2y-1}{2y}=1-\frac{1}{2y}.$$

Finalement, $\boxed{F_Y(y)=-\frac{1}{2y}\,\mathbb{1}_{]-\infty,-1[}(y)+\frac{1}{2}\,\mathbb{1}_{[-1,1]}(y)+\left(1-\frac{1}{2y}\right)\,\mathbb{1}_{]1,+\infty[}(y)}$.

---

43. (**) Soit X une v.a.r. de loi normale $N(0,1)$. Soit $n\ge 2$ et $a>0$.

1. Pour quelle valeur du réel a, la probabilité $P([a<X<na])$ est-elle maximale?
2. Soit $T=|X|+a$. Calculer la fonction de répartition F de T en fonction de la fonction de répartition Φ de X et en déduire la densité f de T.

X a pour loi $N(0,1)$, de fonction de répartition Φ.

1. $P([a<X<na])=\Phi(na)-\Phi(a)=\varphi(a)$ avec

$$\varphi'(a)=nf_X(na)-f_X(a)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\left[ne^{-n^2a^2/2}-e^{-a^2/2}\right].$$

Pour connaître le maximum de φ, il faut étudier le signe de φ', qui est le même que celui de $a\mapsto e^{-n^2a^2/2+\ln n}-e^{-a^2/2}$. Or $x\mapsto e^x$ est une fonction croissante, donc $\varphi'(a)\ge 0$ si et seulement si $-\frac{n^2a^2}{2}+\ln n\ge-\frac{a^2}{2}$, soit $(n^2-1)a^2\le 2\ln$, c'est-à-dire $a\le\sqrt{\frac{2\ln n}{n^2-1}}$ et on a bien $\boxed{P([a<X<na])\text{ maximale pour } a=\sqrt{\frac{2\ln n}{n^2-1}}}$.

2. $F_T(t)=P([T\le t])=P([|X|+a\le t])=P([|X|\le t-a])$ d'où

$$F_T(t)=\begin{cases}0\text{ si } t<a\\ P([a-t\le X\le t-a])\text{ si } t\ge a\end{cases}.$$

Or $P([a-t\le X\le t-a])=\Phi(t-a)-\Phi(a-t)=2\Phi(t-a)-1$ si $t\ge a$ et

$$\boxed{f_T(t)=2f_X(t-a)\,\mathbb{1}_{[a,+\infty[}(t)}$$

44. ($*$) Soit X une v.a.r. de loi normale $N(0,1)$ et soit Φ sa fonction de répartition. Montrer que:

1. Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\Phi(-x) = 1 - \Phi(x)$. (En particulier $\Phi(0) = 1/2$).
2. Pour tout $x \in \mathbb{R}_+$, $P(|X| \leq x) = 2\Phi(x) - 1$ et $P(|X| \geq x) = 2(1 - \Phi(x))$.

---

1. $\Phi(-x) = \int_{-\infty}^{-x} f(u)\,du \underset{v=-u}{=} -\int_{+\infty}^{x} f(-v)\,dv = \int_{x}^{+\infty} f(v)\,dv$ car f est paire. f étant une densité, on a alors

$$\Phi(-x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(v)\,dv - \int_{-\infty}^{x} f(v)\,dv = 1 - \Phi(x).$$

En particulier, $\Phi(0) = 1 - \Phi(0)$ donc $\boxed{\Phi(0) = \frac{1}{2}}$.

2. $P([|X| \leq x]) = P([-x \leq X \leq x]) = \Phi(x) - \Phi(-x)$ pour $x \in \mathbb{R}_+$ et 0 sinon. Or $\Phi(-x) = 1 - \Phi(x)$ donc $\boxed{P([|X| \leq x]) = (2\Phi(x) - 1)\,\mathbb{1}_{[0,+\infty[}(x)}$.

$P([|X| > x]) = 1 - P([|X| \leq x]) = 1 - (2\Phi(x) - 1) = 2(1 - \Phi(x))$ si $x > 0$ (et 1 si $x \leq 0$).

Utilisation de tables

45. ($*$) On jette 10 pièces de monnaie truquées de telle sorte que, pour chacune, la probabilité d'obtenir "pile" soit 0,3. Soit X le nombre de "piles" obtenus au cours de ce lancer.

1. Déterminer la loi de X.
2. Quelle est la probabilité d'obtenir 3 "piles"? au plus 3 "piles"?

---

1. $X(\Omega) = [\![0, 10]\!]$ et $P([X = k]) = C_{10}^{k} 0.3^k\, 0.7^{10-k}$: X suit la loi binomiale $\mathcal{B}(10, 0.3)$ ($n = 10$, $p = 0.3$).

2. $P([X = 3]) = C_{10}^{3} 0.3^3\, 0.7^7 = 0.2668$ d'après les tables de la loi binomiale.

$$\begin{aligned} P([X \leq 3]) &= P([X = 0]) + P([X = 1]) + P([X = 2]) + P([X = 3]) \\ &= 0.0282 + 0.1211 + 0.2335 + 0.2668 = 0.6496 \end{aligned}$$

---

46. ($*$) Dans un garage, le nombre de voitures vendues en une semaine suit la loi de Poisson de paramètre 8.

1. Déterminer la probabilité des événements A "en une semaine, 8 voitures ont été vendues" et B "en une semaine, au moins 2 voitures ont été vendues".
2. Quelle est la probabilité qu'en une semaine il y ait eu au moins 6 et au plus 10 voitures vendues?

---

1. $P(A) = e^{-8}\frac{8^8}{8!} \approx 0.1396$ et $P(B) = P([X \geq 2]) = 1 - F_8(1) \approx 0.997$.

2. $P([6 \leq X \leq 10]) = F_8(10) - F_8(5) \approx 0.8159 - 0.1912 \approx 0.6237$.

47. ($*$) On suppose que le poids d'un bébé est une v.a.r. X de loi normale $N(3.2,\ 0.16)$.
Calculer $P([X \geq 4])$, $P([X \leq 3])$ et $P([2.8 \leq X \leq 3.6])$.

$P([X \geq 4]) = P\left(\left[\frac{X-3.2}{0.4} \geq 2\right]\right) = 1 - \Phi(2) \approx 1 - 0.9772 = 0.0228.$

$P([X \leq 3]) = P\left(\left[\frac{X-3.2}{0.4} \leq -0.5\right]\right) = \Phi(-0.5) = 1 - \Phi(0.5) \approx 1 - 0.6915 = 0.3085.$

$P([2.8 \leq X \leq 3.6]) = P\left(\left[-1 \leq \frac{X-3.2}{0.4} \leq 1\right]\right) = \Phi(1) - \Phi(-1) = 2\Phi(1) - 1 \approx 1.6826 - 1 \approx 0.6826.$

---

48. ($**$) Sur un échantillon de population, on note que 11% des personnes mesurent moins de 1,60m et 8% plus de 1,80m.
En admettant que la taille d'une personne est une v.a.r. de loi normale, préciser les paramètres de cette loi.

Si L est la taille d'une personne, on a alors $P([L \leq 1.6]) = 0.11$ et $P([L \geq 1.8]) = 0.08$. Or $P([L \leq 1.6]) = P\left(\left[\frac{L-m}{\sigma} \leq \frac{1.6-m}{\sigma}\right]\right) = \Phi\left(\frac{1.6-m}{\sigma}\right) = 0.11$ et $P([L \geq 1.8]) = P\left(\left[\frac{L-m}{\sigma} \geq \frac{1.8-m}{\sigma}\right]\right) = 1 - \Phi\left(\frac{1.8-m}{\sigma}\right) = 0.08$.

On s'aperçoit que 0.11 et 0.08 ne figurent pas dans les tables mais $\Phi\left(\frac{m-1.6}{\sigma}\right) = 1 - \Phi\left(\frac{1.6-m}{\sigma}\right) = 0.89$ et $\Phi\left(\frac{1.8-m}{\sigma}\right) = 0.92$.

On a donc, par lecture des tables, $\frac{m-1.6}{\sigma} \approx 1.23$ et $\frac{1.8-m}{\sigma} \approx 1,41$, d'où $\begin{cases} m - 1.6 = 1.23\sigma \\ 1.8 - m = 1.41\sigma \end{cases}$

et on en déduit $0.2 = 2.64\sigma$ donc $\boxed{\sigma = 0.076 \text{ et } m = 1.693}$.

---

49. ($**$) La distribution des notes obtenues à un concours admet approximativement la loi normale de moyenne 32.5 et d'écart-type 8.5 (les notes allant de 0 à 60).
Sachant que 30% des élèves ne sont pas admissibles et que 10% sont admis sans oral, quelles sont les barres d'admissibilité et d'admission ?

Si X est la variable note, la variable $T = \frac{X-32.5}{8.5}$ suit la loi $N(0,1)$. Soit m la barre d'admissibilité et M la barre d'admission sans oral. On a :

$$P([X \geq M]) = 0.1 = P\left(\left[T \geq \frac{M-32.5}{8.5}\right]\right) = 1 - \Phi\left(\frac{M-32.5}{8.5}\right)$$

donc $\Phi\left(\frac{M-32.5}{8.5}\right) = 0.9$. On en déduit, avec la table, $M - 32.5 = 8.5 \times 1.28$, soit $\boxed{M = 43.4}$.
De même,

$$P([X \leq m]) = 0.3 = P\left(\left[T \leq \frac{m-32.5}{8.5}\right]\right) = \Phi\left(\frac{m-32.5}{8.5}\right) = 1 - \Phi\left(\frac{32.5-m}{8.5}\right)$$

donc $\Phi\left(\frac{32.5-m}{8.5}\right) = 0.7$. On en déduit, avec la table, $32.5 - m = 8.5 \times 0.52$, soit $\boxed{m = 28.1}$.

---

50. ($*$) Soit X une v.a.r. de densité f définie par:

$$f(x) = Ax^2\, e^{-x^2/3}\, \mathbb{1}_{]0,+\infty[}(x)$$

Déterminer A, la fonction de répartition de X et calculer $P([X>1])$ à l'aide d'une table.

$F_X(x)=0$ si $x\leq 0$ et si $x>0$, $F(x)=A\int_0^x t^2 e^{-\frac{t^2}{3}}dt$. Dans le but d'utiliser la fonction de répartition Φ de la loi normale $N(0,1)$, on veut avoir $\frac{t^2}{3}=\frac{u^2}{2}$ donc on pose $t=\sqrt{\frac{3}{2}}u$. On a alors $F_X(x)=A\int_0^{\sqrt{\frac{2}{3}}x}\frac{3}{2}\sqrt{\frac{3}{2}}u^2e^{-\frac{u^2}{2}}du$. On fait alors une intégration par parties avec $v'=ue^{-\frac{u^2}{2}}$ et $w=u$ ($v=-e^{-\frac{u^2}{2}}$ et $w'=1$). Il vient alors, pour $x>0$:

$$\begin{aligned}F_X(x) &= A\frac{3}{2}\sqrt{\frac{3}{2}}\left(\left[-ue^{-\frac{u^2}{2}}\right]_0^{\sqrt{\frac{2}{3}}x}+\int_0^{\sqrt{\frac{2}{3}}x}e^{-\frac{u^2}{2}}du\right)\\ &= A\frac{3}{2}\sqrt{\frac{3}{2}}\left(-\sqrt{\frac{2}{3}}xe^{-\frac{x^2}{3}}+\int_{-\infty}^{\sqrt{\frac{2}{3}}x}e^{-\frac{u^2}{2}}du-\int_{-\infty}^{0}e^{-\frac{u^2}{2}}du\right)\end{aligned}$$

soit $F_X(x)=-\frac{3}{2}Axe^{-\frac{x^2}{3}}+\frac{3}{2}A\sqrt{3\pi}\left(\Phi\left(\sqrt{\frac{2}{3}}x\right)-\frac{1}{2}\right)$ si $x>0$.
On a $\lim\limits_{x\to+\infty}F_X(x)=1=\frac{3}{4}A\sqrt{3\pi}$ car $\lim\limits_{x\to+\infty}\Phi\left(\sqrt{\frac{2}{3}}x\right)=1$ et $\lim\limits_{x\to+\infty}xe^{-\frac{x^2}{3}}=0$.
On en déduit $\boxed{A=\frac{4}{3\sqrt{3\pi}}}$, puis $\boxed{F_X(x)=\left(2\Phi\left(\sqrt{\frac{2}{3}}x\right)-1-\frac{2}{\sqrt{3\pi}}xe^{-\frac{x^2}{3}}\right)\mathbb{1}_{]0,+\infty[}(x)}$.
On a alors $P(X>1)=1-F_X(1)=2-2\Phi\left(\sqrt{\frac{2}{3}}\right)+\frac{2}{\sqrt{3\pi}}e^{-\frac{1}{3}}$.
Comme $\sqrt{\frac{2}{3}}\approx 0,816$ et $\Phi(0,816)\approx 0,793$, on a donc $\boxed{P([X>1])\approx 0,88}$.

---

51. ($**$) La longueur L du côté d'un cube suit une loi normale de moyenne 10cm et d'écart-type 1mm. Soit V le volume du cube et S l'aire totale de ses 6 faces.

1. Calculer $P([V<1030\text{cm}^3])$ et $P([S<624\text{cm}^2])$.
2. Déterminer la densité de V et celle de S.

L suit la loi $N(10,0.01)$ ($m=10$cm, $\sigma=0.1$cm). $V=L^3$ et $S=6L^2$.

1. $P([V<1030])=P([L^3<1030])=P(L<\sqrt[3]{1030})=P\left(\frac{L-10}{0.1}<\frac{\sqrt[3]{1030}-10}{0.1}\right)$ d'où

$$P([V<1030])=\Phi\left(\frac{\sqrt[3]{1030}-10}{0.1}\right)\approx\Phi(0.99)\approx 0.8389$$

et de même,

$$\begin{aligned}P([S<624]) &= P([6L^2<624])=P\left(\left[L<\sqrt{\frac{624}{6}}\right]\right)=P\left(\left[\frac{L-10}{0.1}<\frac{\sqrt{104}-10}{0.1}\right]\right)\\ &= \Phi\left(\frac{\sqrt{104}-10}{0.1}\right)\approx\Phi(1.98)\approx 0.9762\end{aligned}$$

2. $P([V\leq v])=P([L\leq\sqrt[3]{v}])=F_L(\sqrt[3]{v})$ et

$$f_V(v)=\frac{1}{3}v^{-\frac{2}{3}}f_L(\sqrt[3]{v})=\frac{1}{3}v^{-\frac{2}{3}}\frac{1}{0.1\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{(\sqrt[3]{v}-10)^2}{0.02}}.$$

$P([S \leq s]) = P([6L^2 \leq s]) = P\left(\left[L < \sqrt{\frac{s}{6}}\right]\right) = F_L\left(\sqrt{\frac{s}{6}}\right)$ et

$$f_S(s) = \frac{1}{\sqrt{6}}\frac{1}{2\sqrt{s}}f_L\left(\sqrt{\frac{s}{6}}\right) = \frac{1}{2\sqrt{6}\sqrt{s}}\frac{1}{\sqrt{2\pi}\,0.1}\,e^{-\frac{\left(\sqrt{\frac{s}{6}}-10\right)^2}{0.02}}.$$

Remarque : ces résultats sont approximatifs car en fait, L, S et V sont toujours > 0.

---

52. (∗∗) Une confiture est qualifiée "pur sucre" si elle contient entre 420g et 520g de sucre par kg. Le poids en sucre d'un pot suit une loi normale de moyenne 465g et d'écart-type 30g.

1. Calculer le pourcentage de la production qui ne doit pas porter la mention "pur sucre".
2. Afin d'améliorer la qualité "pur sucre", le fabricant souhaite éliminer 15% de sa production. Déterminer un intervalle $[a, b]$ tel que $P(a \leq X \leq b) = 0,85$.
3. Un magasin diététique propose d'acheter les pots de moins de 495g mais d'au moins Yg de sucre. Déterminer Y sachant que le fabricant refusera la vente au dessus de 20% de chute.

---

a) $P([420 \leq X \leq 520]) \approx P\left([-1,5 \leq \frac{X-465}{30} \leq 1,83]\right) = \Phi(1,83) - \Phi(-1,5)$ (car $m = 465$ et $\sigma = 30$) et, comme $\Phi(-1,5) = 1-\Phi(1,5)$, on trouve $P(420 \leq X \leq 520) \approx 0,9$:

$$\boxed{\text{90\% des pots ont donc la mention "pur sucre".}}$$

b) Il est préférable de centrer l'intervalle $[a, b]$ en m : on cherche donc x qui vérifie $P([-x \leq X - m \leq x]) = 0,85 = \Phi\left(\frac{x}{\sigma}\right) - \Phi\left(-\frac{x}{\sigma}\right) = 2\Phi\left(\frac{x}{\sigma}\right) - 1$. On trouve $\Phi\left(\frac{x}{\sigma}\right) = 0,925$, d'où $\frac{x}{\sigma} \approx 1,44$, $a = m - 1,44\sigma$ et $b = m + 1,44\sigma$, soit $\boxed{I = [422, 508]}$.

c) On cherche y tel que $P([y \leq X \leq 495]) = 0,8 = P\left([\frac{y-m}{\sigma} \leq \frac{X-m}{\sigma} \leq 1]\right) = \Phi(1) - \Phi\left(\frac{y-m}{\sigma}\right)$. On a donc $\Phi\left(\frac{y-m}{\sigma}\right) = \Phi(1) - 0,8 = 0,8413 - 0,8 = 0,0413 = 1 - \Phi\left(\frac{m-y}{\sigma}\right)$; d'où $\Phi\left(\frac{m-y}{\sigma}\right) = 0,9587$: on trouve $\frac{m-y}{\sigma} = 1,735$, soit $y = m - 1,725\sigma$: $\boxed{y = 413g}$.
