CHAPITRE 2

RAPPELS D'ANALYSE COMBINATOIRE

Lorsque l'univers Ω d'une expérience est fini, on utilise l'équiprobabilité sur $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega))$ chaque fois qu'aucun événement simple n'a de privilège sur les autres.
Dans ce cas, le calcul des probabilités se ramène donc au calcul du nombre d'éléments de Ω et de ses sous-ensembles.
L'analyse combinatoire est précisément l'ensemble des méthodes permettant de compter les éléments d'un ensemble.

D1 : L'ensemble des p-uplets $(y_1, \cdots, y_p)$ où $y_i \in N_i$ pour tout $i \in \{1, \cdots, p\}$ est appelé produit cartésien des N_i. Il est noté $N_1 \times \cdots \times N_p$, ou bien $\prod_{i=1}^{p} N_i$.
Si $N_1 = \cdots = N_p = N$, alors $\prod_{i=1}^{p} N_i$ est noté N^p.

Propriété : $\text{card}(N_1 \times \cdots \times N_p) = \text{card}N_1 \times \cdots \times \text{card}N_p$ et $\text{card}(N^p) = (\text{card}N)^p$.

On notera $A_p, B_p, \cdots$ des ensembles de cardinal p.

I- TIRAGES ORDONNES AVEC REMISE (ou applications).

On note $\mathcal{F}(E_p, F_n)$ l'ensemble des applications de E_p vers F_n.

TH1 : $\text{card}\mathcal{F}(E_p, F_n) = n^p$.

II- TIRAGES ORDONNES SANS REMISE (ou injections).

On note $\mathcal{I}(E_p, F_n)$ l'ensemble des injections de E_p vers F_n, lorsque $n \geq p$.

TH2 : $\text{card}\mathcal{I}(E_p, F_n) = n(n-1)\cdots(n-(p-1))$.

Remarque : Si $n = p$, les injections sont en fait des bijections et on a alors :

$$\text{card}\mathcal{I}(E_n, F_n) = n(n-1) \times \cdots \times 2 \times 1 = n!$$

Dans le cas général, $(n \geq p)$, $\text{card}\mathcal{I}(E_p, F_n) = \frac{n!}{(n-p)!}$ que l'on note A_n^p.

III- TIRAGES NON ORDONNES SANS REMISE (ou combinaisons).

D2 : Si $n \geq p$, on appelle coefficient binomial C_n^p (ou parfois $\binom{n}{p}$), le nombre $\frac{n!}{p!(n-p)!}$.

Propriétés :
1) $C_n^p = C_n^{n-p}$;
2) $C_n^p = C_{n-1}^p + C_{n-1}^{p-1}$.

D3 : Une p-combinaison de F_n est une partie de F_n à p éléments.

TH3 : Le nombre de p-combinaisons de F_n est C_n^p.

IV- TIRAGES NON ORDONNES AVEC REMISE (ou combinaisons avec répétitions).

D4 : Une p-combinaison avec répétition de F_n est une liste de p éléments de F_n, les répétitions étant autorisées et l'ordre dans la liste n'intervenant pas.

TH4 : Le nombre de p-combinaisons avec répétitions de F_n est C_{p+n-1}^{n-1}.

V- PARTAGES D'ENSEMBLES.

Problème : Etant donné p entiers positifs ou nuls, $n_1, \cdots, n_p$, vérifiant $n_1 + \cdots + n_p = n$, on cherche le nombre de partages de F_n en p parties $A_1, \cdots, A_p$ telles que card$A_i = n_i$.

TH5 : Le nombre de partages de F_n en p parties $A_1, \cdots, A_p$ telles que card$A_i = n_i$ est $\frac{n!}{n_1! \cdots n_p!}$.

Exercices chapitre 2

Coefficients binomiaux

24. *** On appelle chemin une suite de segments de longueur 1, dirigés soit vers le haut, soit vers la droite.

(a) Dénombrer tous les chemins allant d'un point $(0,0)$ d'un réseau carré à un point (n,n).En déduire que:

$$C_{2n}^n = \sum_{i=0}^{n} (C_n^i)^2 \quad \text{et} \quad (C_{2n}^n)^2 = \sum_{i=0}^{n} \frac{(2n)!}{(i!(n-i)!)^2}.$$

(b) Par une méthode analogue, montrer que, pour $k \in \{0, 1, \cdots, n\}$:

$$C_{n+k}^n = \sum_{i=0}^{k} C_k^i C_n^{k-i}$$

(c) Retrouver le résultat du (b) en développant de 2 façons différentes $(1+x)^k(1+x)^n$.

---

25. ** Montrer que, pour tout $p \geq 1$ et pour tout $n \geq p$, on a:

$$\sum_{k=p}^{n} C_k^p = C_{n+1}^{p+1} \quad \text{et} \quad \sum_{k=p}^{2p} C_k^p = C_{2p+1}^{p+1}.$$

---

26. ** A partir du développement de $(1+x)^n$, calculer:

(a)

$$\sum_{k=0}^{n} C_n^k \quad ; \quad \sum_{k=0}^{n} (-1)^k C_n^k \quad ; \quad \sum_{k=0}^{E(n/2)} C_n^{2k} \quad ; \quad \sum_{k=0}^{E(n/2)-1} C_n^{2k+1}.$$

(b)

$$\sum_{k=1}^{n} k\, C_n^k \quad ; \quad \sum_{k=2}^{n} k(k-1) C_n^k.$$

(c)

$$\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k+1} C_n^k \quad ; \quad \sum_{k=0}^{n} (-1)^{k+1} \frac{1}{k+1} C_n^k.$$

---

27. ** Soient $(u_n)_{n\geq 0}$ une suite arithmétique, $(A_i)_{i\geq 0}$ et $(B_i)_{i\geq 0}$ les suites définies par:

$$A_i = \sum_{k=0}^{n} (C_n^k)^i \quad \text{et} \quad B_i = \sum_{k=0}^{n} u_k (C_n^k)^i$$

(a) Calculer A_0, A_1 et A_2.

(b) Montrer que $B_i = \sum_{k=0}^{n} u_{n-k} (C_n^k)^i$ et en déduire une expression de B_i en fonction de A_i, u_0 et la raison r de la suite (u_n).

(c) Calculer $\sum_{k=0}^{n} (ak+b)(C_n^k)^2$ et $\sum_{k=0}^{n} k(C_n^k)^2$.

Combinatoire

28. * Vingt chevaux sont au départ d'une course et on suppose qu'il n'y a pas d'ex-aequo.

(a) Combien y-a-t-il de trios possibles?

(b) Combien y-a-t-il de tiercés dans l'ordre possibles?

29. ** De combien de manière peut-on classer 4 individus en supposant qu'il puisse y avoir des ex-aequo.

30. * Combien de mots différents peut-on écrire en permutant les lettres du mot "PIERRE"?

31. ** $2n$ personnes doivent s'asseoir autour d'une table ronde.

(a) De combien de façons différentes peuvent-elles être placées?

(b) Si on a n hommes et n femmes, de combien de façons différentes peuvent-ils être placés en respectant l'alternance?

32. ** On effectue n contrôles successifs sur une population de N individus, un individu pouvant être contrôlé plusieurs fois.

(a) Décrire l'ensemble Ω des résultats possibles. Que vaut card Ω ?

(b) Trouver le nombre de résultats pour lesquels un individu est contrôlé:

1. k fois ($k \leq n$) ?
2. m fois au cours des r premiers contrôles ($m \leq r \leq n$) ?
3. pour la s-ième fois au t-ième contrôle ($s \leq t \leq n$)?

33. * Combien y-a-t-il de nombres écrits avec 3 chiffres tous différents pris parmi les chiffres:

(a) $\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$?

(b) $\{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$?

34. *** Déterminer le cardinal de l'ensemble des nombres de 4 chiffres que l'on peut écrire avec les 6 chiffres 1, 2, 3, 4, 5, 6 et calculer la somme de tous les nombres de cet ensemble dans les cas suivants:

(a) un chiffre peut être utilisé plusieurs fois ;

(b) les 4 chiffres doivent être distincts.

35. * Combien de mots de 7 lettres toutes différentes peut-on former :

(a) avec les lettres A, B, C, D, E, F, G ?

(b) avec les lettres A, B, C, D, E, F, G et tels que les lettres C, D et E soient toujours ensemble:

1. dans cet ordre ;
2. dans un ordre quelconque.

36. ** Une association de 12 hommes et 8 femmes désire former un comité de 5 personnes dans lequel doivent se trouver au moins 2 hommes et 2 femmes.

(a) De combien de façon peut-on former ce comité?

(b) Même question en supposant que Monsieur A et Madame B ne peuvent faire partie simultanément du comité.

37. ** Déterminer le nombre d'applications surjectives de $\{1,2,3,4,5\}$ dans $\{1,2,3,4\}$.

38. ** Dans un jeu de 32 cartes, on tire au hasard 6 cartes.

(a) Quel est le nombre de tirages possibles ?

(b) Dans combien de cas obtient-on entre autre 2 dames et 3 trèfles exactement?

39. ** Une main est un ensemble de 13 cartes prises dans un jeu de 52. Combien y-a-t-il de mains contenant:

(a) au moins un pique ?

(b) au plus un pique ?

(c) exactement 1 as et au plus 2 piques ?

Calculs classiques de probabilités

40. * Dans une course de chevaux de 20 partants, quelle est la probabilité d'avoir:

(a) le tiercé dans l'ordre ?

(b) le tiercé dans le désordre ?

(c) ni l'ordre, ni le désordre ?

41. * Quelle est la probabilité d'avoir les 6 bons numéros sur une grille simple de loto ? D'en avoir exactement 3 ?

42. ** On prend 5 cartes au hasard dans un jeu de 32.

(a) Quelle est la probabilité qu'elles soient toutes de hauteurs différentes ?

(b) Quelle est la probabilité d'avoir un full ? (c'est-à-dire 2 cartes d'une même hauteur et les 3 autres cartes d'une autre même hauteur).

43. * Dans un jeu de 32 cartes, on a remplacé une autre carte que l'as de pique par un autre as de pique. Une personne prend au hasard 3 cartes du jeu. Quelle est la probabilité qu'elle s'aperçoive de la supercherie ?

44. ** On distribue 8 cartes d'un jeu de 32. Calculer les probabilités d'avoir:

(a) exactement 2 cœurs et au moins un valet ;

(b) au moins un cœur et au moins un valet ;

(c) exactement un cœur et au moins un valet.

45. ** On lance 4 dés et on considère les éléments A_i, $i \in \{1,2,3,4\}$ associés au nombre de faces distinctes obtenues. Calculer les $P(A_i)$.

46. * Est-il plus probable d'obtenir au moins 1 as en lançant 4 fois un dé ou au moins 1 double as en lançant 24 fois 2 dés ?

47. * Au poker d'as (5 dés), quelle est la probabilité d'avoir un brelan ?(c'est-à-dire 3 figures identiques, les 2 autres différentes entre elles et différentes des précédentes)

48. *** Un point P se déplace dans le plan. A chaque instant, il a une probabilité p d'aller de (x,y) à $(x,y+1)$ et une probabilité q d'aller de (x,y) à $(x+1,y)$. ($x,y \in \mathbb{N}$ et $p+q=1$).

(a) Quelle est la probabilité qu'en partant de $(0,0)$, le point P atteigne le point A (a,b) ?

(b) Quelle est la probabilité qu'en partant de $(0,0)$, le point P atteigne le segment MN ; (M $(n,0)$; N (n,n)) ?

49. ** 10 livres discernables sont rangés sur une étagère. Quelle est la probabilité pour que 3 livres donnés soient placés l'un à côté de l'autre ?

50. ** On a mélangé 10 paires de chaussettes et on choisit au hasard 4 chaussettes. Quelle est la probabilité d'obtenir :

(a) 2 paires ?

(b) au moins une paire ?

(c) exactement une paire ?

51. ** Un domino porte 2 nombres de $\{0,1,2,3,4,5,6\}$, éventuellement identiques.

(a) Combien y-a-t-il de dominos dans un jeu ?

(b) Quelle est la probabilité que 2 dominos tirés au hasard soient compatibles ?

(c) Quelle est la probabilité d'avoir au moins un double parmi 5 dominos tirés au hasard ?

52. * Une urne contient N boules numérotées de 1 à N. On tire simultanément n de ces boules. Soit $k \in \{1,\cdots,N\}$.

(a) Calculer la probabilité que tous les numéros tirés soient inférieurs ou égaux à k.

(b) Calculer la probabilité que le plus grand des numéros tirés soit égal à k.

(c) En déduire que $\sum_{k=n}^{N} C_{k-1}^{n-1} = C_N^n$.

53. ** Une urne contient N boules numérotées de 1 à N. On considera le cas où les tirages se font avec remise, puis le cas où les tirages se font sans remise.

(a) On tire successivement 2 de ces boules. Quelle est la probabilité que la deuxième boule tirée ait un numéro supérieur ou égal à celui de la première boule tirée ?

(b) On tire successivement p de ces boules. Quelle est la probabilité que la p-ième boule tirée ait un numéro supérieur ou égal à celui des $p-1$ premières boules tirées ?

(c) Déterminer la limite de ces probabilités lorsque N tend vers $+\infty$.

54. ** Une urne contient 10 boules numérotées de 1 à 10. On tire 3 fois de suite une boule avec remise. Quelle est la probabilité d'obtenir 3 nombres dans un ordre:

(a) strictement croissant ?

(b) croissant au sens large ?

55. * On compose au hasard un numéro de téléphone à 8 chiffres. Quelle est la probabilité que :

(a) tous les chiffres soient distincts ?

(b) le produit des chiffres soit divisible par 2 ? Par 3 ?

(c) les chiffres forment une suite strictement croissante ?

56. ** On considère le mot ATTACHANT.

(a) Donner le nombre d'anagrammes de ce mot.

(b) On tire au hasard et sans remise 4 lettres de ce mot. Quelle est la probabilité de pouvoir écrire le mot CHAT avec les lettres obtenues ? D'écrire directement le mot CHAT ?

(c) Reprendre les questions du (b) dans le cas de tirages avec remise.

57. ** Un sac contient 10 billes: x blanches et les autres rouges ($x \in \{2, \cdots, 8\}$) .

(a) Calculer la probabilité pour que, en tirant simultanément 2 billes du sac, celles-ci soient les 2 de même couleur.

(b) Quel doit être le nombre x pour que cette probabilité soit minimale et quel est ce minimum ?

58. ** Un ascenseur prend 6 personnes au rez-de-chaussée d'un immeuble de 8 étages. Quelle est la probabilité que :

(a) 2 personnes descendent au même étage, les autres descendent chacune à des étages différents et différents du précédent ?

(b) 1 personne descende à un étage, 2 à un autre et 3 à un autre ?

59. *** Une urne contient a boules rouges et b noires. Deux joueurs tirent à tour de rôle une boule sans la remettre ; celui qui tire la première boule rouge a gagné. Quelle est la probabilité de gain de chacun des joueurs ?
En déduire la valeur de:

$$S = 1 + \frac{b}{a+b-1} + \frac{b(b-1)}{a+b-2} + \cdots$$

60. *** Dans une classe de $N+1$ élèves, la solution d'un exercice est donnée par un élève à un de ses camarades. Celui-ci la transmet à l'un de ses camarades, le processus étant répété k fois. Quelle est la probabilité pour que la solution ne soit pas répétée:

(a) à celui qui l'a trouvée ?

(b) à un élève l'ayant transmise ?

(c) même question que (a) dans le cas où, au lieu de transmettre la solution à un élève, on la transmet à n élèves.

61. *** On considère le système:

$$\begin{cases} x - 2y = 3 \\ ax - by = c \end{cases}$$

dont les coefficients a, b et c sont déterminés en lançant 3 fois un dé. Quelles sont les probabilité pour que le système admette:

(a) une solution ? une infinité de solutions ? pas de solution ?

(b) la solution unique $(3, 0)$?

62. ** On tire successivement p boules parmi n^2 numérotées de 1 à n^2. Quelle est la probabilité d'avoir:

(a) une seule boule dont le numéro est un carré ?

(b) au moins une boule dont le numéro soit un carré ?

(c) ayant tiré 2 boules, 2 boules dont la différence des numéros soit un carré ?

On utilisera $\sum_{k=1}^{n} k^2 = n(n+1)(2n+1)/6$.