**CHAPITRE 4**

# PROBABILITES CONDITIONNELLES

La notion de probabilité conditionnelle est introduite chaque fois que, pendant le déroulement d'une expérience aléatoire, une information partielle est fournie à l'expérimentateur.
Un événement en conditionne un autre, si la réalisation de ce dernier dépend de la réalisation du premier. Les notions d'indépendance et de conditionnement sont donc étroitement liées.

## I- INTRODUCTION.

Soit $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ un espace probabilisé.

**D1 :** Soit $B \in \mathcal{A}$ tel que $P(B) > 0$. On appelle probabilité de $A$ sachant $B$ le nombre $P(A/B)$ ou $P^B(A)$ défini par $P(A/B) = \frac{P(A\cap B)}{P(B)}$.

**Propriété :** L'application $P^B : A \mapsto P(A/B)$ est une probabilité sur $(\Omega, \mathcal{A})$.

**Conséquence importante :** $P(\overline{A}/B) = 1 - P(A/B)$.

**Probabilités conditionnelles et indépendance :**

**TH1 :** Si $A$ et $B$ sont deux événements indépendants de probabilité non nulle, alors

$$P(A/B) = P(A) \text{ et } P(B/A) = P(B).$$

## II- PROBABILITES COMPOSEES.

On déduit facilement de la définition de la probabilité conditionnelle que, si $A$ et $B$ sont deux événements de probabilité non nulle, $P(A \cap B) = P(A/B)P(B) = P(B/A)P(A)$.

Plus généralement,

**TH2 :** Soit $(A_i)_{1\leq i\leq n}$ une famille d'événements telle que $P(A_1 \cap \cdots \cap A_{n-1}) \neq 0$ ; alors :

$$P\left(\bigcap_{i=1}^{n} A_i\right) = P(A_1)P(A_2/A_1)\cdots P(A_n/A_1 \cap \cdots \cap A_{n-1}).$$

## III- FORMULE DES PROBABILITES TOTALES.

**TH3 :** Soit $(B_i)_{i\in I}$ un système complet d'événements de probabilités non nulles. Alors, pour tout $A \in \mathcal{A}$,

$$P(A) = \sum_{i\in I} P(A/B_i)P(B_i).$$

**Cas particulier très utile :** $P(A) = P(A/B)P(B) + P(A/\overline{B})P(\overline{B})$.

**IV- THEOREME DE BAYES.**

**TH4 :** Soit $(B_i)_{i\in I}$ un système complet d'événements de probabilités non nulles et $A$ un événement de probabilité non nulle. Alors, pour tout $i_0 \in I$ :

$$P(B_{i_0}/A) = \frac{P(A/B_{i_0})P(B_{i_0})}{\sum\limits_{i\in I} P(A/B_i)P(B_i)}.$$

En particulier, $P(B/A) = \frac{P(A/B)P(B)}{P(A/B)P(B)+P(A/\overline{B})P(\overline{B})}$.

**Exercices Chapitre 4**

# Probabilités conditionnelles

**115.** * Dans un jeu de 32 cartes, on tire une carte au hasard.
Calculer la probabilité que la carte tirée soit un roi sachant que l'événement “la carte tirée est un pique” est réalisé?

**116.** * Un dé est jeté 3 fois successivement et les résultats des 3 expériences sont tous différents.
Quelle est la probabilité qu'il y ait un as?

**117.** * On tire 4 cartes d'un jeu de 32 cartes.
Sachant que l'une des cartes tirées est un roi, quelle est la probabilité d'obtenir 2 as et 2 rois?

**118.** * Un sac contient 7 billes rouges, 5 billes blanches et 3 billes noires. On tire successivement 3 billes.
Quelle est la probabilité pour que la première bille tirée soit rouge, la deuxième blanche et la troisième noire si chaque bille est:

(a) remise dans le sac après tirage ;

(b) non remise dans le sac.

**119.** ** Soient $A_1$ et $A_2$ deux ensembles de boules. On suppose que $A_1$ contient 75% de boules blanches et que $A_2$ en contient 50%. En outre, on suppose que $A_1$ contient 3 fois plus de boules que $A_2$. On place les boules de $A_1$ et de $A_2$ dans une même urne et on en tire une au hasard: on constate qu'elle est blanche. Quelle est la probabilité que cette boule provienne de $A_1$?

**120.** ** Dans un élevage de moutons, la probabilité qu'un animal soit atteint par une maladie $M$ est 0,3. La probabilité qu'un mouton qui n'est pas atteint par $M$ ait une réaction positive à un test $T$ est 0,9 ; la probabilité qu'un mouton atteint par $M$ ait une réaction positive à $T$ est 0,8.
Quelle est la probabilité qu'un mouton pris au hasard et ayant une réaction positive à $T$ soit atteint par $M$?

**121.** ** On étudie au cours du temps le fonctionnement d'un appareil obéissant aux règles suivantes:

i) si l'appareil fonctionne à la date $n-1$, ($n \in \mathbb{N}^*$), il a la probabilité $a$ d'être en panne à la date $n$ ; ($a \in ]0,1[$);

ii) si l'appareil est en panne à la date $n-1$, ($n \in \mathbb{N}^*$), il a la probabilité $b$ d'être en panne à la date $n$ , ($b \in ]0,1[$).

On note $p_n$ la probabilité que l'appareil marche à la date $n$.
Etablir, pour $n \in \mathbb{N}^*$, une relation entre $p_n$ et $p_{n-1}$. En déduire $p_n$ en fonction de $p_0$. Etudier la convergence de la suite $(p_n)_{n\geq 1}$.

**122.** ** Des pièces mécaniques sont fabriquées en grande série. On effectue un test sur chacune d'elles pour en contrôler la qualité. On appelle $p$ la probabilité pour qu'une pièce choisie au hasard soit bonne ; $a$ la probabilité pour que le test indique comme bonne une pièce qui est effectivement bonne ; $b$ la probabilité pour que le test indique comme bonne une pièce qui en réalité est mauvaise.

(a) Calculer la probabilité pour qu'une pièce indiquée par le test comme bonne soit effectivement bonne.

(b) A quelle condition le test est-il utile ? (c'est-à-dire à quelle condition cette probabilité est-elle supérieure à $p$?).

**123.** *** On lance 3 dés. Calculer la probabilité des événements $A$:“avoir 3 numéros de même parité” et $B$:“avoir un numéro strictement supérieur à la somme des 2 autres”.
Calculer $P(C/B)$ où $C$ est l'événement:“avoir un 6”.

**124.** ** Deux chasseurs $A$ et $B$ aperçoivent un lièvre et tirent simultanément.

(a) Sachant que $A$ atteint et tue d'habitude 5 lièvres sur 6 et $B$ 4 lièvres sur 5, quelle est la probabilité que le lièvre soit tué?

(b) En fait $B$ a tiré.

($\alpha$) Quelle est la probabilité pour que $A$ tue le lièvre sachant que si $B$ tire et manque, les chances de $A$ d'atteindre le lièvre se trouvent diminuées de moitié?

($\beta$) Dans ces conditions, lorsque $B$ a tiré, puis $A$, quelle est la probabilité pour le lièvre d'en réchapper?

---

**125.** ** Le quart d'une population est vacciné. On constate que parmi les malades il y a 1 vacciné pour 4 non vaccinés ; de plus, parmi les vaccinés, il y a 1 malade sur 12?
Quelle est la probabilité de tomber malade pour un individu non vacciné? Le vaccin est-il efficace?

---

**126.** * Une usine d'ampoules dispose de 3 machines qui fabriquent respectivement 20, 30 et 50% de la production. Sachant que la probabilité qu'une ampoule défectueuse ait été fabriquée par $A$, $B$, $C$ est:
$P(D/A) = 0,05$ ; $P(D/B) = 0,04$ ; $P(D/C) = 0,01$ ;
calculer la probabilité:

(a) qu'une ampoule soit défectueuse ;

(b) qu'une ampoule défectueuse provienne de $A$ ;

(c) qu'une ampoule non défectueuse provienne de $C$ .

---

**127.** *** Une urne contient initialement $b$ bonbons blancs et $r$ bonbons rouges. On effectue des tirages successifs d'un bonbon dans cette urne selon le protocole suivant: si à un rang quelconque on obtient un bonbon rouge, celui-ci est remis dans l'urne avant le tirage suivant et si à un rang quelconque on obtient un bonbon blanc, on le mange.

(a) Quelle est la probabilité, au cours des $n$ premiers tirages de tirer exactement un bonbon blanc? de manger au moins un bonbon?

(b) Sachant qu'au cours des $n$ premiers tirages, on a tiré exactement un bonbon blanc, quelle est la probabilité qu'il ait été tiré en dernier?

---

**128.** * Une urne contient 3 boules rouges et 7 boules blanches. On tire une boule et on remet dans l'urne une boule de l'autre couleur.
Quelle est la probabilité que la deuxième boule tirée soit rouge?

---

**129.** ** On considère $n$ urnes numérotées de 1 à $n$, l'urne $k$ contenant $n$ boules noires et $k$ boules blanches. On choisit au hasard une urne et dans cette urne une boule.
Quelle est la probabilité d'obtenir une boule noire?

---

**130.** * Une urne contient 4 boules noires et 2 boules blanches ; une autre 2 boules noires et 4 boules blanches. On effectue une succession de tirages avec remise dans une des urnes choisie qu hasard.
Quelle est la probabilité que la troisième boule tirée soit blanche sachant que les deux premières l'étaient?

---

**131.** ** Une urne contient 5 boules rouges et 1 noire.
Déterminer la probabilité qu'il faille retirer successivement 3 boules, sans remise dans l'urne, pour extraire la boule noire.

---

**132.** ** Une urne contient 6 boules blanches et 5 rouges. On en extrait successivement les boules sans remettre dans le sac les boules sorties. On appelle $p_n$ la probabilité pour qu'au $n$-ième tirage, la boule rouge apparaisse pour la première fois.
Calculer $p_n$ pour tout entier $n$.

---

**133.** * On cherche un parapluie qui se trouve dans un immeuble de 7 étages (rez-de-chaussée compris) avec la probabilité $p$ ($p \in ]0,1[$). On a exploré en vain les 6 premiers niveaux.
Quelle est la probabilité que le parapluie se trouve au 7-ième étage?

**134.** * On considère 100 dés à 6 faces dont 50 sont pipés et 50 sont corrects. Pour chaque dé pipé, la probabilité d'obtenir la face 6 est 1/2. On prend un dé au hasard parmi les 100, on le jette et on constate que la face 6 apparaît. Quelle est la probabilité que le dé soit pipé?

**135.** * On suppose que l'on a dans un magasin des machines provenant de 2 usines différentes $A$ et $B$: 70% viennent de $A$ et 30% viennent de $B$. Parmi celles qui viennent de $A$, 20% présentent un défaut ; parmi celles qui viennent de $B$, 10% présentent un défaut.

(a) Déterminer le pourcentage de machines dans le magasin qui présentent un défaut.

(b) Une machine donnée présente un défaut. Quelle est la probabilité qu'elle provienne de l'usine $B$?

**136.** ** Un voyageur $X$ peut prendre le train ou l'avion. Si au jour $n-1$ il prend le train, la probabilité qu'il prenne l'avion au jour $n$ est $1/2$. Si au jour $n-1$, il prend l'avion, il prend le train au jour $n$. Soit $p_n$ la probabilité que $X$ prenne le train au jour $n$.
Donner l'expression de $p_n$ en fonction de $n$ sachant qu'au premier jour, $X$ prend le train.

**137.** * Un sac contient 3 jetons. L'un de ces jetons a 2 faces noires, un autre 2 faces blanches et le troisième a une face noire et l'autre blanche. On tire au hasard un jeton du sac et on le pose sur la table: la face visible est noire. Quelle est la probabilité que le jeton tiré ait 2 faces noires?

**138.** ** Un joueur joue à “pile ou face” avec 2 pièces $A$ et $B$. Pour le premier jeu, il choisit une pièce au hasard. Par la suite, il utilisera la même pièce qu'au coup précédent en cas de “pile” et il changera de pièce en cas de “face”. Soient $a$ et $b$ les probabilités respectives de “piles” des pièces $A$ et $B$. On suppose $a + b < 1$.
Calculer la probabilité d'obtenir “pile” au $n$-ième jeu, ainsi que la limite de cette probabilité lorsque $n$ tend vers $+\infty$.

**139.** ** Soit $n \in \mathbb{N}^*$ ; $k$ un entier tel que $0 < k < n$ et $p \in ]0,1[$. Dans un magasin, se trouvent $n$ commodes ayant toutes $k$ tiroirs.

(a) Soit $r$ un entier tel que $0 < r \leq k$. On considère une commode de ce magasin. Un livre a une probabilité $p$ de se trouver dans cette commode. S'il est dans la commode, il a la même probabilité de se trouver dans chacun des $k$ tiroirs. On ouvre $r$ tiroirs de la commode et on ne le trouve pas: quelle est la probabilité qu'il se trouve dans la commode?

(b) Soit $m$ un entier tel que $0 < m \leq n$. Un livre est situé dans l'un des $k$ tiroirs de l'une des $n$ commodes identiques du magasin. On le cherche en ouvrant $r$ tiroirs de chaque commode: ne le trouvant pas dans les $m$ premières commodes, quelle est la probabilité de le trouver de cette façon?

**140.** ** Soit $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ un espace probabilisé. On considère 3 événements $A$, $B$ et $X$ tels que $P(A) = 1/2$, $P(B) = 3/5$, $P(A \cap B) = 1/5$, $P(X/A) = P(X/B) = 1/2$ et $1/P(X) \in \mathbb{N}$.
Calculer $P(X)$.

**141.** * Une urne contient $a$ boules noires et $b$ boules blanches. Deux tirages successifs sont effectués dans cette urne. On appelle $E$ l'ensemble des résultats du premier tirage, $F$ l'ensemble des résultats du deuxième tirage et $E \times F$ l'ensemble des couples de tous les tirages possibles.
Donner les probabilités attachées à tous les couples possibles de $E \times F$ lorsque le premier tirage se fait:

(a) avec remise ;

(b) sans remise .