Corrigés des exercices du Chapitre 2

$\boxed{5}$ On met le problème sous-forme standard :

$$\left\{\begin{array}{ccccccccc} 4x_1 & + & 3x_2 & & & & & = & z[\max] \\ 3x_1 & + & 4x_2 & + & x_3 & & & = & 12 \\ 7x_1 & + & 2x_2 & & & + & x_4 & = & 14 \\ x_1 & , & x_2 & , & x_3 & , & x_4 & \geq & 0 \end{array}\right.$$

C'est un problème de maximisation, que l'on va résoudre en utilisant la méthode des tableaux.

Premier tableau :

$$\begin{array}{cc|c|c|cccc|c|c|c|c} & & i\downarrow & j\rightarrow & A^1 & A^2 & A^3 & A^4 & & \beta & & \beta_i/\alpha_{i,e} \\ & & 3 & & 3 & 4 & 1 & 0 & & 12 & & 4 \\ s\leftarrow & & 4 & & \boxed{7} & 2 & 0 & 1 & & 14 & & 2 \\ & & & \Delta_j & 4 & 3 & 0 & 0 & & z-0 & & \\ & & & & \uparrow e & & & & & & & \end{array}$$

Deuxième tableau :

$$\begin{array}{cc|c|cccc|c|c} & i\downarrow & j\rightarrow & A^1 & A^2 & A^3 & A^4 & \beta & \beta_i/\alpha_{i,e} \\ s\leftarrow & 3 & & 0 & \boxed{22/7} & 1 & -3/7 & 6 & 21/11 \\ & 1 & & 1 & 2/7 & 0 & 1/7 & 2 & 7 \\ & & \Delta_j & 0 & -13/7 & 0 & 4/7 & z-8 & \\ & & & & \uparrow e & & & & \end{array}$$

Troisième tableau :

$$\begin{array}{c|c|cccc|c} i\downarrow & j\rightarrow & A^1 & A^2 & A^3 & A^4 & \beta \\ 2 & & 0 & 1 & 7/22 & -3/22 & 21/11 \\ 1 & & 1 & 0 & -1/11 & 2/11 & 16/11 \\ & \Delta_j & 0 & 0 & -13/22 & -7/22 & z-127/11 \end{array}$$

Comme tous les Δ_j sont ≤ 0, on est parvenu au maximum. On retrouve bien $\boxed{\max z = \frac{127}{11}}$ atteint au point de coordonnées $\boxed{x_1 = \frac{16}{11} \text{ et } x_2 = \frac{21}{11}}$.

$\boxed{6}$ C'est un problème de minimisation, que l'on ramène à un problème de maximisation de

$$z' = -z = -x_1 + 3x_2 - 2x_3.$$

Premier tableau :

	$i \downarrow$	$j \rightarrow$ A^1	A^2	A^3	A^4	A^5	A^6	β	$\beta_i/\alpha_{i,e}$
	4	3	-1	2	1	0	0	7	-7
$s \leftarrow$	5	-2	$\boxed{4}$	0	0	1	0	12	3
	6	-4	3	8	0	0	1	10	$10/3$
	Δ_j	-1	3	-2	0	0	0	$z' - 0$	
			$\uparrow e$						

Deuxième tableau :

$i \downarrow$	$j \rightarrow$ A^1	A^2	A^3	A^4	A^5	A^6	β	$\beta_i/\alpha_{i,e}$
4	$\boxed{5/2}$	0	2	1	$1/4$	0	10	4
2	$-1/2$	1	0	0	$1/4$	0	3	-6
6	$-5/2$	0	8	0	$-3/4$	1	1	$-2/5$
Δ_j	$1/2$	0	-2	0	$-3/4$	0	$z' - 9$	
	$\uparrow e$							

Troisième tableau :

$i \downarrow$	$j \rightarrow$ A^1	A^2	A^3	A^4	A^5	A^6	β
1	1	0	$4/5$	$2/5$	$1/10$	0	4
2	0	1	$2/5$	$1/5$	$3/10$	0	5
6	0	0	10	1	$-1/2$	1	11
Δ_j	0	0	$-12/5$	$-1/5$	$-4/5$	0	$z' - 11$

L'optimum est atteint, puisque tous les Δ_j, relatifs aux variables hors base, sont négatifs. On a donc la solution $\boxed{x_1 = 4,\ x_2 = 5 \text{ et } z = -11}$, puisque $z' = 11$.

$\boxed{7}$ 1) Si on complète le programme linéaire avec des variables d'écart, il devient :

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 2x_3 + \bar{x}_1 = 8/3 \\ x_1 + 2x_2 + 3x_3 - \bar{x}_2 = 7/3 \end{cases}$$

On ne dispose pas dans ce cas d'une solution réalisable de départ évidente, car si l'on pose $x_1 = x_2 = x_3 = 0$, alors $\bar{x}_1 = 8/3$ et $\bar{x}_2 = -7/3$ qui n'est pas une solution réalisable.
On ajoute alors aux contraintes de type $\geq$ (ou de type $=$) une variable artificielle $\bar{\bar{x}}_2 \geq 0$ (degré de violation (2)) pour chaque contrainte violée par "0".
Trouver un point compatible avec le critère provisoire $z = \bar{\bar{x}}_2$ (ou $\sum \bar{\bar{x}}_i$).
On a alors :

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 2x_3 + \bar{x}_1 = 8/3 \\ x_1 + 2x_2 + 3x_3 - \bar{x}_2 + \bar{\bar{x}}_2 = 7/3 \end{cases}, \quad \text{les } x_i \geq 0$$

Les variables de base du nouveau problème sont $\bar{x}_1$ et $\bar{\bar{x}}_2$; pour obtenir une solution réalisable (c'est-à-dire à valeurs positives ou nulles), il suffit de faire sortir de la base les variables artificielles. Pour cela, on peut utiliser la méthode suivante :

Méthode en deux phases de Dantzig. En première phase, on remplace la maximisation de z par la minimisation de la somme des variables artificielles (ici, $\min z = \bar{\bar{x}}_2$, soit $\max z'$ avec $z' = -z = -\bar{\bar{x}}_2$) ; cette fonction sera nulle lorsque les variables artificielles seront sorties de la base.

Pour calculer les profits marginaux, il faut exprimer la fonction économique en fonction des variables hors base. Les variables de base étant ici $\bar{x}_1$ et $\bar{\bar{x}}_2$, et la variable $\bar{\bar{x}}_2$ étant seule présente dans la fonction économique, on peut l'exprimer grâce à la deuxième contrainte en fonction des variables hors base :

$$\bar{\bar{x}}_2 = 7/3 + \bar{x}_2 - x_1 - 2x_2 - 3x_3.$$

La fonction économique s'écrit alors :

$$z' = -\bar{\bar{x}}_2 = -7/3 - \bar{x}_2 + x_1 + 2x_2 + 3x_3.$$

Sa valeur est $-\dfrac{7}{3}$ sur la solution initiale.

Les profits marginaux des variables hors base sont donc :

$$\Delta_1 = 1, \quad \Delta_2 = 2, \quad \Delta_3 = 3, \quad \Delta_{\bar{2}} = -1$$

(les profits marginaux des variables de base sont nuls).
Le même résultat peut être obtenu en additionnant à la fonction économique z' (sous forme de l'opposée de la somme des variables artificielles) les contraintes comportant des variables artificielles : comme les coefficients des variables artificielles dans z' valent -1 et dans les contraintes, 1, cette méthode annule les coefficients dans z' des variables artificielles, ce qui revient à les éliminer de l'expression de z'.

Premier tableau T'_0 avec z' :

	c_i	$i\downarrow$	$j\rightarrow$	1	2	3	$\bar{1}$	$\bar{2}$	$\bar{\bar{2}}$	β	$\beta_i/\alpha_{i,e}$
	0	$\bar{1}$		1	2	2	1	0	0	8/3	4/3
$s\leftarrow$	-1	$\bar{\bar{2}}$		1	2	$\boxed{3}$	0	-1	1	7/3	7/9
			c_j	0	0	0	0	0	-1		
			Δ_j	1	2	3	0	-1	0	$z'+7/3$	
						$\uparrow e$					

On notera l'intérêt pratique de disposer d'une ligne correspondant aux coefficients initiaux de la fonction économique, ce qui permet de calculer les profits marginaux en additionnant les lignes des contraintes comportant des variables artificielles à la ligne des c_j.
Le plus grand profit marginal étant $\Delta_3 = 3$, A^3 entre dans la base. La première règle de Dantzig impose que le pivot se trouve sur la deuxième ligne.

Tableau T'_1 :

c_i	$i\downarrow$	$j\rightarrow$	1	2	3	$\bar{1}$	$\bar{2}$	$\bar{\bar{2}}$	β
0	$\bar{1}$		1/3	2/3	0	1	2/3	$-2/3$	10/9
0	3		1/3	2/3	1	0	$-1/3$	1/3	7/9
		c_j	0	0	0	0	0	-1	
		Δ_j	0	0	0	0	0	-1	$z'-0$

On est à l'optimum de la première phase et on dispose d'une solution de base réalisable :

$$\bar{x}_1 = 10/9, \quad x_3 = 7/9, \quad x_1 = 0, \quad x_2 = 0, \quad \bar{x}_2 = 0, \quad \bar{\bar{x}}_2 = 0.$$

Si, à l'optimum, la somme des variables artificielles n'était pas nulle, cela signifierait que le programme linéaire n'a pas de solution, c'est-à-dire que les contraintes sont contradictoires.

Pour la deuxième phase, on doit déterminer les profits marginaux correspondant à la fonction économique du programme linéaire. Pour cela, il faut éliminer de la fonction économique les variables de base.

Soit x_j une variable de base ; son coefficient dans la fonction économique est c_j ; son coefficient dans la seule ligne du tableau du simplexe dans laquelle elle apparaît est 1. Pour l'éliminer de la fonction économique on peut l'exprimer, grâce à cette ligne du tableau, en fonction des seules variables hors base. Dans cet exemple, on considère la variable de base x_3 : la deuxième ligne du tableau des contraintes permet d'écrire :

$$\frac{1}{3}x_1 + \frac{2}{3}x_2 + x_3 - \frac{1}{3}\bar{\bar{x}}_2 = \frac{7}{9}$$

où $z = \dfrac{8}{3}x_1 + \dfrac{10}{3}x_2 + \dfrac{1}{3}\bar{x}_2 + \dfrac{7}{9}$.
Ayant ainsi exprimé z en fonction des seules variables hors-base, on peut ainsi déduire les profits marginaux des différentes variables hors-base qui sont :

$$\Delta_1 = \frac{8}{3}, \quad \Delta_2 = \frac{10}{3}, \quad \Delta_{\bar{2}} = \frac{1}{3}.$$

(On remarque que la variable $\bar{x}_1$ n'apparaît pas dans la fonction économique).

Une procédure équivalente et très pratique d'élimination de la fonction économique des variables de base, consiste à multiplier la ligne du tableau du simplexe contenant chaque variable de base par le coefficient de cette variable dans la fonction économique et de retrancher la somme des lignes ainsi transformées de la ligne des coefficients initiaux de la fonction économique ; bien sûr, cette opération doit se faire par variable ; elle est très facilitée par la présence dans la partie gauche du tableau simplexe des coefficients dans la fonction économique des variables de base et, juste avant la ligne des coûts marginaux, de la ligne des coefficients des variables dans la fonction économique.

Les Δ_j se calculent alors de la façon suivante de cet exemple :

$$\Delta_1 = 3 - 0 \times \frac{1}{3} - 1 \times \frac{1}{3} = \frac{8}{3}$$

$$\Delta_2 = 4 - 0 \times \frac{2}{3} - 1 \times \frac{2}{3} = \frac{10}{3}$$

$$\Delta_{\bar{2}} = 0 - 0 \times \frac{2}{3} - 1 \times \left(-\frac{1}{3}\right) = \frac{1}{3}.$$

On peut vérifier que cette méthode donne bien des profits marginaux nuls pour les variables de base.

Le tableau initial de la seconde phase est donc :

Tableau T'_1 :

c_i	$i\downarrow$	$j\rightarrow$	1	2	3	$\bar{1}$	$\bar{2}$	β
0	$\bar{1}$		1/3	2/3	0	1	2/3	10/9
1	3		1/3	$\boxed{2/3}$	1	0	$-1/3$	7/9
		c_j	3	4	1	0	0	
		Δ_j	8/3	10/3	0	0	1/3	$z-7/9$

La colonne A^2 entre dans la base.
La colonne A^3 sort de la base.
On obtient le nouveau tableau :

Tableau T'_2 :

c_i	$i\downarrow$	$j\rightarrow$	1	2	3	$\bar{1}$	$\bar{2}$	β
0	$\bar{1}$		0	0	-1	1	$\boxed{1}$	1/3
4	2		1/2	1	3/2	0	$-1/2$	7/6
		c_j	3	4	1	0	0	
		Δ_j	1	0	-5	0	2	$z-14/3$

La colonne $A^{\bar{2}}$ entre dans la base ; la colonne $A^{\bar{1}}$ sort de la base.

c_i	$i\downarrow$	$j\rightarrow$	1	2	3	$\bar{1}$	$\bar{2}$	β
0	$\bar{2}$		0	0	-1	1	1	1/3
4	2		$\boxed{1/2}$	1	1	1/2	0	4/3
		c_j	3	4	1	0	0	
		Δ_j	1	0	-3	-2	0	$z-16/3$

et enfin, A^1 entre dans la base ; la colonne A^2 sort de la base

c_i	$i\downarrow$	$j\rightarrow$	1	2	3	$\bar{1}$	$\bar{2}$	β
0	$\bar{2}$		0	0	-1	1	1	1/3
3	1		1	2	2	1	0	8/3
		c_j	3	4	1	0	0	
		Δ_j	0	-2	-5	-3	0	$z-24/3=z-8$

Arrêt optimum. On a donc $x_1 = 8/3$, $x_2 = 0$, $x_3 = 0$ (et $\bar{x}_2 = 1/3$).

2) Méthode de pénalités

Dans cette méthode, on attribue une pénalité $-M$ ($M > 0$ très grand) pour une maximisation à chacune des variables artificielles dans la fonction économique. Elle devient donc ici :

Maximiser $z' = 3x_1+4x_2+x_3-Mx_{\bar{2}} =\bar{\bar{x}}_2 = (3+M)x_1+(4+2M)x_2+(1+3M)x_3-Mx_{\bar{2}}-7/3M$.

La base initiale comporte les variables d'écart associées aux contraintes de type $\leq$, et les variables artificielles des contraintes de type $\geq$ et $=$ (ici $\bar{x}_1$ et $\bar{\bar{x}}_2$). Comme dans la méthode exposée dans la question précédente, la fonction économique comporte explicitement des variables artificielles qui sont en base ; les profits marginaux ne sont donc pas égaux aux coefficients de z', et on les calculera de la même façon que dans la méthode en deux phases.

D'où le tableau initial du simplexe :

c_i	$i\downarrow$	$j\rightarrow$	1	2	3	$\bar{1}$	$\bar{2}$	$\bar{\bar{2}}$	β
0	$\bar{1}$		1	2	2	1	0	0	$8/3$
$-M$	$\bar{\bar{2}}$		1	2	$\boxed{3}$	0	-1	1	$7/3$
		c_j	3	4	1	0	0	$-M$	
		Δ_j	$3+M$	$4+2M$	$1+3M$	0	$-M$	0	$z'+7/3M$

La colonne A^3 entre dans la base ; la colonne $A^{\bar{\bar{2}}}$ sort de la base.

c_i	$i\downarrow$	$j\rightarrow$	1	2	3	$\bar{1}$	$\bar{2}$	$\bar{\bar{2}}$	β
0	$\bar{1}$		$1/3$	$2/3$	0	1	$2/3$		$10/9$
1	2		$1/3$	$2/3$	1	0	$-1/3$		$7/9$
		c_j	3	4	1	0	0		
		Δ_j	$8/3$	$10/3$	0	0	$1/3$		$z'-7/9$

On dispose maintenant d'une solution réalisable et on peut continuer de façon classique la méthode des tableaux qui sont, dans ce cas, identiques à ceux que l'on a obtenus dans la méthode en deux phases.

$\boxed{8}$ La troisième contrainte étant une contrainte d'égalité, on se contente de lui rajouter une variable artificielle $\bar{\bar{x}}_3$. Le programme linéaire est de minimiser $z'=\bar{\bar{x}}_2+\bar{\bar{x}}_3$, c'est-à-dire maximiser $z''=-z'=-\bar{\bar{x}}_2-\bar{\bar{x}}_3=2x_2-x_{\bar{2}}-9$, soit

$$\left\{\begin{array}{rcrcrcrcrcrcl}
 & & & & & & & - & x_{\bar{\bar{2}}} & - & x_{\bar{\bar{3}}} & = & z''[\max] \\
x_1 & & & + & x_{\bar{1}} & & & & & & & = & 1 \\
x_1 & + & x_2 & & & - & x_{\bar{2}} & + & x_{\bar{\bar{2}}} & & & = & 6 \\
-x_1 & + & x_2 & & & & & & & + & x_{\bar{\bar{3}}} & = & 3 \\
x_1 & , & x_2 & , & x_{\bar{1}} & , & x_{\bar{2}} & , & x_{\bar{\bar{2}}} & , & x_{\bar{\bar{3}}} & \geq & 0.
\end{array}\right.$$

Le premier tableau du simplexe sera :

c_i	$i\downarrow$	$j\rightarrow$	1	2	$\bar{1}$	$\bar{2}$	$\bar{\bar{2}}$	$\bar{\bar{3}}$	β
0	$\bar{1}$		1	0	1	0	0	0	1
-1	$\bar{\bar{2}}$		1	1	0	-1	1	0	6
-1	$\bar{\bar{3}}$		-1	$\boxed{1}$	0	0	0	1	3
		c_j	0	0	0	0	-1	-1	
		Δ_j	0	2	0	-1	0	0	$z''+9$

La colonne A^2 entre dans la base, alors que la colonne $A^{\bar{\bar{3}}}$ en sort. On rappelle que la ligne des profits marginaux est obtenue par addition des deux dernières lignes des contraintes à la ligne des coefficients de la fonction économique.

c_i	$i\downarrow$	$j\rightarrow$	1	2	$\bar{1}$	$\bar{2}$	$\bar{\bar{2}}$	$\bar{\bar{3}}$	β
0	$\bar{1}$		$\boxed{1}$	0	1	0	0	0	1
-1	$\bar{\bar{2}}$		2	0	0	-1	1	-1	3
-1	2		-1	1	0	0	0	1	3
		c_j	0	0	0	0	-1	-1	
		Δ_j	2	0	0	-1	0	-2	$z''+3$

La colonne A^1 entre dans la base, la colonne $A^{\bar{1}}$ en sort.

c_i	$i\downarrow$	$j\rightarrow$	1	2	$\bar{1}$	$\bar{2}$	$\bar{\bar{2}}$	$\bar{\bar{3}}$	β
0	1		1	0	1	0	0	0	1
-1	$\bar{\bar{2}}$		0	0	-2	-1	1	-1	1
0	2		0	1	1	0	0	1	4
		c_j	0	0	0	0	-1	-1	
		Δ_j	0	0	-2	-1	0	-2	$z''+1$

On est à l'optimum ; mais on n'a pas pu faire sortir de la base la variable artificielle $A^{\bar{\bar{2}}}$. On ne peut trouver de solution réalisable de départ. Cela signifie que le domaine des solutions réalisables défini par les contraintes est vide, ou encore que les contraintes sont contradictoires.

$\boxed{9}$ On met le problème sous forme standard :

$$\left\{\begin{array}{ccccccccccc}
x_1 & - & 2x_2 & + & x_3 & & & & & = & z[\max] \\
x_1 & - & 2x_2 & + & x_3 & + & x_4 & & & = & 10 \\
2x_1 & - & 3x_2 & - & x_3 & & & + & x_5 & = & 6 \\
x_1 & , & x_2 & , & x_3 & , & x_4 & , & x_5 & \geq & 0
\end{array}\right.$$

Premier tableau :

	c_i	$i\downarrow$	$j\rightarrow$	1	2	3	4	5	β	$\beta_i/\alpha_{i,e}$
	0	4		1	-2	1	1	0	10	10
$s\leftarrow$	0	5		$\boxed{2}$	-3	-1	0	1	6	3
			c_j	1	-2	1	0	0		
			Δ_j	1	-2	1	0	0	$z-0$	
				$\uparrow e$						

Deuxième tableau :

	c_i	$i\downarrow$	$j\rightarrow$	1	2	3	4	5	β	$\beta_i/\alpha_{i,e}$
$s\leftarrow$	0	4		0	$-1/2$	$\boxed{3/2}$	1	$-1/2$	7	$14/3$
	1	1		1	$-3/2$	$-1/2$	0	$1/2$	3	-6
			c_j	1	-2	1	0	0		
			Δ_j	0	$-1/2$	$3/2$	0	$-1/2$	$z-3$	
						$\uparrow e$				

Troisième tableau :

c_i	$i\downarrow$	$j\rightarrow$	1	2	3	4	5	β
1	3		0	$-1/3$	1	$2/3$	$-1/3$	$14/3$
1	1		1	$-5/3$	0	$1/3$	$1/3$	$16/3$
		c_j	1	-2	1	0	0	
		Δ_j	0	0	0	-1	0	$z-10$

Le troisième tableau fournit la solution de base optimale $x_1 = \dfrac{16}{3}$, $x_2 = 0$, $x_3 = \dfrac{14}{3}$, soit $x = {}^t\left(\dfrac{16}{3}; 0; \dfrac{14}{3}\right)$. En effectuant une étape supplémentaire du simplexe avec $e = 5$ et $s = 1$, on obtient une autre solution optimale.

<u>Quatrième tableau :</u>

c_i	$i \downarrow$	$j \rightarrow$	1	2	3	4	5	β
1	3		1	-2	1	1	0	10
0	5		3	-5	0	1	1	16
		c_j	1	-2	1	0	0	
		Δ_j	0	0	0	-1	0	$z - 10$

La nouvelle solution optimale est donnée par $x_1 = x_2 = 0$ et $x_3 = 10$, soit $\overline{x} = {}^t(0;0;10)$. Toutes les combinaisons convexes de ces deux solutions optimales sont donc des solutions optimales aussi. Indépendamment du simplexe, on peut vérifier directement que les vecteurs suivants sont des solutions optimales eux aussi :

$$x^\varphi = {}^t\left(\frac{16}{3} + \frac{5}{3}\varphi, \varphi, \frac{14}{3} + \frac{1}{3}\varphi\right) \text{ pour tout } \varphi \geq 0.$$

On a évidemment $z(x^\varphi) = z(x) = z(\overline{x}) = 10$ pour tout $\varphi > 0$.