Devoir d'Optimisation n°1 pour le mardi 23 avril 2019

1. Étude des extrémums locaux et éventuellement globaux des fonctions :

a) $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $(x, y) \mapsto x^3 + 3xy^2 - 15x - 12y$

b) $g : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$, $(x, y, z) \mapsto x^2 + y^2 + z^2 - 2xyz$.

2. Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $(x, y) \mapsto x^2 + xy^2 + y^6$.

a) Déterminer les points critiques de f. Montrer que f possède 2 minimums locaux et que la valeur de f en ces points est $-\frac{1}{432}$. $(0, 0)$ est-il un extrémum local ? (*Considérer le signe de $f(y^3, y)$ par exemple*). f admet-elle un maximum local ? un maximum global ?

b) Montrer que, si $f(x, y) \leq 0$, alors $xy^2 + y^6 \leq 0$ et $x^2 + xy^2 \leq 0$ et qu'on a alors nécessairement $x \leq 0$ et $-y^2 \leq x \leq -y^4$, puis en déduire que les points où f est négative sont dans $[-1, 0] \times [-1, 1]$. Les minimums locaux précédents sont-ils globaux ?

3. Soit $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ et $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $(x, y) \mapsto x^2 + y^2 + 2\sqrt{(x - a)^2 + (y - b)^2}$.
Étude du minimum de f . (*On discutera suivant la valeur de $a^2 + b^2$*).

4. Étudier, suivant les valeurs de $\alpha \in \mathbb{R}$, les extrémums locaux et globaux de la fonction

$$F_\alpha : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R},\ (x, y) \mapsto \alpha e^{xy} - (x^2 + y^2).$$