Exercice 1

1) $g \circ g = (p+\alpha id)\circ(p+\alpha id) = p\circ(p+\alpha id) + \alpha id \circ (p+\alpha id)$

$= p\circ(p+\alpha id) + \alpha(p+\alpha id)$

$= p\circ p + p(\alpha id) + \alpha p + \alpha^2 id$

$= p + \alpha p + \alpha p + \alpha^2 id$ car p est une projection

$= p + 2\alpha p + \alpha^2 id$

$= (1+2\alpha)p + \alpha^2 id$

$= (1+2\alpha)(p+\alpha id - \alpha id) + \alpha^2 id$

$= (1+2\alpha)(p+\alpha id) - (1+2\alpha)(\alpha id) + \alpha^2 id$

$= (1+2\alpha)g - \alpha id - 2\alpha^2 id + \alpha^2 id$

$\boxed{g\circ g = (1+2\alpha)g - (\alpha+1)\alpha id.}$

2) $g^2 = (1+2\alpha)g - (\alpha+1)\alpha id$

si $\alpha \neq 0$ et $\alpha \neq -1$ alors

$-g^2 + (1+2\alpha)g = (\alpha+1)\alpha id$

$\Leftrightarrow \dfrac{-g^2+(1+2\alpha)g}{(\alpha+1)\alpha} = id$

$\Leftrightarrow g\,\dfrac{(-g+1+2\alpha)}{(\alpha+1)\alpha} = id$

on peut donc en déduire que $\boxed{g \text{ est bijective pour } \alpha \neq 0 \text{ et } \alpha \neq -1}$

et que $\boxed{g^{-1} = \dfrac{-g+1+2\alpha}{(\alpha+1)\alpha}}$

Exercice 2.

1) $A - I_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ contient 2 lignes non nulles donc $\boxed{rg(A - I_3) = 2}$

$\det(A - \lambda I_3) = \begin{vmatrix} 2-\lambda & 0 & 0 \\ 0 & 1-\lambda & 1 \\ 0 & 0 & 1-\lambda \end{vmatrix} = (1-\lambda)^2 (2-\lambda).$

$sp(A) = \{1, 2\}$

et $rg(A - I_3) = 2$ donc d'après le théorème du rang $\dim(\ker(A - I_3)) = 1$

donc $\dim E_1 = 1$

Si A était diagonalisable on aurait $\chi_A = (1-X)^{\dim E_1} (2-X)^{\dim E_2}$

or $\chi_A(X) = (1-X)^2 (2-X)$

donc $\boxed{\text{A n'est pas diagonalisable.}}$

2) $\ker(u - 2id) \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ donc $\begin{cases} 0 = 0 \\ -y + z = 0 \\ -z = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = 0 \\ z = 0 \end{cases}$

$\boxed{\ker(u - 2id) = vect \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}}$

$\ker(u - id)^2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ donc $\begin{cases} x = 0 \\ 0 = 0 \\ 0 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \{ x = 0$

$\boxed{\ker(u - id)^2 = vect \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}}$

on a $\ker(u - 2id) + \ker(u - id)^2 = \mathbb{C}^3$ et $\dim(\ker(u - 2id)) + \dim(\ker(u - id)^2) = 3$

$\boxed{\text{ils sont donc supplémentaires}}$.

3) $XA = XX^n = X^{n+1}$ et $AX = X^n X = X^{n+1}$ donc $\boxed{\text{x et v commutent.}}$

$\ker(u - 2id)$ et $\ker(u - id)^2$ sont toujours stable par u car 1 et 2 sont valeurs propres.

4) si $x \in \ker(u - 2id)$ alors $u(x) = 2x$

$u(v(x)) = v(u(x)) = v(2x) = 2v(x)$ donc $\ker(u - 2id)$ est stable par v.

si $x \in \ker(u - id)^2$ alors $(u - id)^2(x) = (u - id) \circ (u - id)(x) = (u - id)(u(x) - x)$

$= u(u(x) - x) - (u(x) - x)$

$= u^2(x) - u(x) - u(x) + x$

$= u^2(x) - 2u(x) + x = 0$

$u^2(v(x)) - 2(u(v(x))) + v(x) = v(u^2(x)) - 2v(u(x)) + v(x)$

$= v(u^2(x) - 2u(x) + x) = v(0) = 0$

donc $\ker(u - id)^2$ est stable par v.

$e_1 \in \ker(u - 2id)$ qui est stable par v, donc $v(e_1) \in \ker(u - 2id) = \text{vect}(e_1)$

$v(e_1) = a e_1$, pour un certain $a \in \mathbb{C}$

$v(e_1) = \begin{pmatrix} a \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

$e_2 \in \ker(u - id)^2$ qui est stable par v, donc $v(e_2) \in \ker(u - id)^2 = \text{vect}(e_2, e_3)$

$v(e_2) = y_{22} e_2 + y_{32} e_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ y_{22} \\ y_{32} \end{pmatrix}$

de même $v(e_3) = y_{32} e_2 + y_{33} e_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ y_{23} \\ y_{33} \end{pmatrix}$

donc $\text{Mat}\, v = \boxed{X = \begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & y_{22} & y_{23} \\ 0 & y_{32} & y_{33} \end{pmatrix}}$

5 - $A_{|\ker(u-id)^2} = \text{Mat}\, u_{|\ker(u-id)^2} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

$Y = \text{Mat}\, v_{|\ker(u-id)^2}$ or u et v sont commutatives. donc

$A_{|\ker(u-id)^2} Y = Y A_{|\ker(u-id)^2}$ et $A_{|\ker(u-id)^2} = I_2 + J$ alors

$(I_2 + J) Y = Y (I_2 + J)$

$Y + JY = Y + YJ$ donc $\boxed{JY = YJ}$

Soit $Y = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$

$YJ = \begin{pmatrix} 0 & a \\ 0 & c \end{pmatrix}$ et $JY = \begin{pmatrix} c & d \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ donc $\begin{cases} a = d \\ c = 0 \end{cases}$

Y est de la forme $\begin{pmatrix} a & b \\ 0 & a \end{pmatrix}$ et $\boxed{Y \in \text{vect}(I_2, J)}$

6- $X = \begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & Y \end{pmatrix}$

$X^n = \begin{pmatrix} \alpha^n & 0 \\ 0 & Y^n \end{pmatrix}$ et $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

donc $\alpha^n = 2$ et $Y^n = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

$Y^n = I_2 + J$ et $J^2 = 0$

$Y = aI_2 + bJ$

$Y^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^{n-k} b^k I^{n-k} J^k$ mais $J^2 = 0$ donc

$Y^n = \binom{n}{0} a^n I^n J^0 + \binom{n}{1} a^{n-1} b I^{n-1} J$

$= \binom{n}{0} a^n I_2 + \binom{n}{1} a^{n-1} b J$

$Y^n = a^n I_2 + n a^{n-1} b J$

on a donc $\boxed{\begin{cases} \alpha^n = 2 \\ a^n = 1 \\ n a^{n-1} b = 1 \end{cases}}$

Exercice 3.

1) on sait que $rg(A - I_n) = n-1$ et d'après le théorème du rang $\dim(\ker(A - I_n)) = n-(n-1) = 1$

$$Au = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} + a_{12} + \cdots + a_{1n} \\ \vdots \\ a_{n1} + a_{n2} + \cdots + a_{nn} \end{pmatrix}$$

la somme des éléments d'une même ligne vaut 1

donc $Au = u$ et $\boxed{\ker(A - I_n) = \text{vect}(u)}$

2) $\|AX\|_\infty \leq |||A|||_\infty \|X\|_\infty$

et $|||A|||_\infty = \max_{1 \leq i \leq n} \sum_{j=1}^{n} |a_{ij}|$ or $\sum |a_{ij}| = \sum a_{ij}$ car $a_{ij} > 0$

donc $|||A|||_\infty = 1$

et $\boxed{\|AX\|_\infty \leq \|X\|_\infty}$

3) $\lambda \in Sp(A)$

$\rho(A) \leqslant |||A|||_\infty$

$\rho(A) \leqslant 1$ et $|\lambda| \leqslant \rho(A)$

donc $\boxed{|\lambda| \leqslant 1}$

4) a) $B = A + I_n$

$$B = \begin{pmatrix} a_{11}+1 & \cdots & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & a_{22}+1 & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ \vdots & \cdots & \cdots & a_{nn}+1 \end{pmatrix}$$

quelque soit i la somme des éléments d'une ligne de B vaut 2.

$\sum_{1 \leqslant j \leqslant n \; j \neq 1} b_{ij} = 2 - b_{ii} = 1 - a_{ii}$ et $b_{ii} = a_{ii} + 1$

Puisque $a_{ij} > 0$ alors $1 - a_{ii} < 1$ et $a_{ii} + 1 > 1$

donc $\boxed{\sum_{1 \leqslant j \leqslant n \; j \neq 1} b_{ij} < b_{ii}}$

b)

5) A est symétrique, A est donc diagonalisable

De plus, elle possède au moins une valeur propre 1 car $Au = u$

donc $A = P \begin{pmatrix} 1 & 0 & & 0 \\ 0 & \lambda_1 & & \vdots \\ & & \ddots & \\ 0 & \cdots & & \lambda_n \end{pmatrix} P^{-1}$ et $A^k = P \begin{pmatrix} 1 & & & 0 \\ & \lambda_1^k & & \\ & & \lambda_2^k & \\ 0 & & & \ddots \; \lambda_n^k \end{pmatrix} P^{-1}$

on sait que $\lambda_1 \neq 1$ et que $|\lambda_i| \leqslant 1$ donc $|\lambda_i| < 1$

Par conséquent les λ_i^k convergent vers 0 quand k tend vers $+\infty$.

$\boxed{A^k \text{ converge vers une matrice R semblable à } diag(1, 0, 0, \ldots, 0)}$

Exercice 4

1) A est une matrice tridiagonale avec $\delta_1 = 4 \neq 0$ $\delta_2 = \begin{vmatrix} 4 & 1 \\ 1 & 4 \end{vmatrix} = 15 \neq 0$ $\delta_3 = \det(A) = 56 \neq 0$.

on a donc d'après le cours $A = LU$ avec $\boxed{L = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \frac{1}{4} & 1 & 0 \\ 0 & \frac{4}{15} & 1 \end{pmatrix} \text{ et } U = \begin{pmatrix} 4 & 1 & 0 \\ 0 & \frac{15}{4} & 1 \\ 0 & 0 & \frac{56}{15} \end{pmatrix}}$

Si on prend $\Sigma = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\sqrt{15}}{2} & 0 \\ 0 & 0 & \sqrt{\frac{56}{15}} \end{pmatrix}$, on a alors

$$L\Sigma = \boxed{\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & \frac{\sqrt{15}}{2} & 0 \\ 0 & \frac{2\sqrt{15}}{15} & \sqrt{\frac{56}{15}} \end{pmatrix} = B} \quad \text{et} \quad \Sigma^{-1} U = \boxed{\begin{pmatrix} 2 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & \frac{\sqrt{15}}{2} & \frac{2\sqrt{15}}{15} \\ 0 & 0 & \sqrt{\frac{56}{15}} \end{pmatrix} = C}$$

on constate que l'on a $C = {}^tB$ et donc

$A = B\,{}^tB$

2) On résoud directement $Ax = b$, soit $\begin{cases} 4x_1 + x_2 = -3 \\ x_1 + 4x_2 + x_3 = 4 \\ x_2 + 4x_3 = 5 \end{cases} \iff \begin{cases} x_1 + 4x_2 + x_3 = 4 \\ 4x_1 + x_2 = -3 \\ x_2 + 4x_3 = 5 \end{cases}$

$\iff \begin{cases} x_1 + 4x_2 + x_3 = 4 \\ 15x_2 + 4x_3 = 19 \\ x_2 + 4x_3 = 5 \end{cases} \iff \begin{cases} x_1 + 4x_2 + x_3 = 4 \\ 15x_2 + 4x_3 = 19 \\ 56x_3 = 56 \end{cases} \iff \begin{cases} x_1 + 4x_2 + x_3 = 4 \\ 15x_2 = 15 \\ x_3 = 1 \end{cases}$

$\iff \begin{cases} x_1 = -1 \\ x_2 = 1 \\ x_3 = 1 \end{cases}$. $\boxed{\text{Ainsi l'unique solution de } Ax = b \text{ est } \bar{x} = {}^t(-1, 1, 1)}$

3) a) matrice de Jacobi : $J = D^{-1}(E + F)$ avec $D = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$ $D^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{4} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{4} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{4} \end{pmatrix}$

$\boxed{J = -\frac{1}{4} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}}$ $\quad E = -\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ $F = -\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

matrice de Gauss-Seidel : $G = (D - E)^{-1} F$

$(D - E) = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 1 & 4 & 0 \\ 0 & 1 & 4 \end{pmatrix}$ et $(D - E)^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{4} & 0 & 0 \\ -\frac{1}{16} & \frac{1}{4} & 0 \\ \frac{1}{64} & -\frac{1}{16} & \frac{1}{4} \end{pmatrix}$

$$\left.\begin{array}{ccc} 4 & 0 & 0 \\ 1 & 4 & 0 \\ 0 & 1 & 4 \end{array}\right| \begin{array}{ccc} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{array} \Rightarrow \left.\begin{array}{ccc} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 16 & 0 \\ 0 & 1 & 4 \end{array}\right| \begin{array}{ccc} \frac{1}{4} & 0 & 0 \\ -1 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{array} \Rightarrow \left.\begin{array}{ccc} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 4 \end{array}\right| \begin{array}{ccc} \frac{1}{4} & 0 & 0 \\ -\frac{1}{16} & \frac{1}{4} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{array} \Rightarrow \left.\begin{array}{ccc} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{array}\right| \begin{array}{ccc} \frac{1}{4} & 0 & 0 \\ -\frac{1}{16} & \frac{1}{4} & 0 \\ \frac{1}{16} & -\frac{1}{4} & 1 \end{array} \Rightarrow \left.\begin{array}{ccc} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{array}\right| \begin{array}{ccc} \frac{1}{4} & 0 & 0 \\ -\frac{1}{16} & \frac{1}{4} & 0 \\ \frac{1}{64} & -\frac{1}{16} & \frac{1}{4} \end{array}$$

donc $\boxed{G = \begin{pmatrix} 0 & -\frac{1}{4} & 0 \\ 0 & \frac{1}{16} & -\frac{1}{4} \\ 0 & -\frac{1}{64} & \frac{1}{16} \end{pmatrix}}$

b) on utilise $\det(M^{-1}N - \lambda I_3) = (-1)^3 \det(M^{-1}) \det(\lambda M - N)$ et ainsi les valeurs propres de $M^{-1}N$ sont les racines de $\det(\lambda M - N)$. On a alors, toujours en utilisant le déterminant des matrices tridiagonales,

$$\begin{vmatrix} 4\lambda & 1 & 0 \\ 1 & 4\lambda & 1 \\ 0 & 1 & 4\lambda \end{vmatrix} = (4\lambda)\left((4\lambda)^2 - 2\right) = 4\lambda(4\lambda - \sqrt{2})(4\lambda + \sqrt{2})$$

donc $\boxed{sp(J) = \left\{0, \frac{\sqrt{2}}{4}, -\frac{\sqrt{2}}{4}\right\}}$

et $$\begin{vmatrix} 4\lambda & 1 & 0 \\ \lambda & 4\lambda & 1 \\ 0 & \lambda & 4\lambda \end{vmatrix} = (4\lambda)^3 - 4\lambda^2 - 4\lambda^2 = (4\lambda)(16\lambda^2) - 4\lambda^2 - 4\lambda^2$$
$$= 4\lambda^2(16\lambda - 2)$$

donc $\boxed{sp(G) = \left\{0, \frac{1}{8}\right\}}$

On a donc $\rho(G) = \frac{1}{8} < \rho(J) = \frac{\sqrt{2}}{4} < 1$, <u>les méthodes de Jacobi et de Gauss-Seidel sont convergentes</u> et c'est <u>la méthode de Gauss seidel qui converge le plus vite.</u>

c) On trouve les 3 premières itérations de la méthode de Jacobi avec Excel en faisant $x^{(k+1)} = Jx^k + D^{-1}b$ et pour la méthode de Gauss-seidel en faisant $x^{(k+1)} = Gx^k + (D-E)^{-1}b$ en partant de $x^{(0)} = {}^t(0,0,0)$. On a alors

- pour Jacobi, $x^1 = \begin{pmatrix} -0,75 \\ 1 \\ 1,25 \end{pmatrix}$, $x^2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 0,875 \\ 1 \end{pmatrix}$ et $x^3 = \begin{pmatrix} -0,969 \\ 1 \\ 1,031 \end{pmatrix}$.

- pour Gauss-Seidel, $x^1 = \begin{pmatrix} -0,75 \\ 1,1875 \\ 0,9531 \end{pmatrix}$, $x^2 \begin{pmatrix} -1,04688 \\ 1,02344 \\ 0,99414 \end{pmatrix}$ et $x^3 = \begin{pmatrix} -1,00586 \\ 1,00293 \\ 0,99927 \end{pmatrix}$