Exercice 1

1) p est la probabilité que $P\left(\bigcup_{k\geq 1}\{X=2k\}\right)$

q est la probabilité que $P\left(\bigcup_{k\geq 0}\{X=2k+1\}\right)$

$$\Omega = \left(\bigcup_{k\geq 1}\{X=2k\} \amalg \bigcup_{k\geq 0}\{X=2k+1\} \amalg (X=0)\right)$$

$$P(\Omega) = p + q + P(X=0) = 1$$

donc $\boxed{p+q+e^{-\lambda}=1}$ car X suit une loi de Poisson.

2) $p = P\left(\bigcup_{k\geq 1}\{X=2k\}\right)$, or cette union est disjointe donc

$p = \sum_{k=1}^{+\infty} P(X=2k)$, X suit une loi de Poisson

$$p = \sum_{k=1}^{+\infty} e^{-\lambda}\frac{\lambda^{2k}}{(2k)!} = \boxed{e^{-\lambda}\sum_{k=1}^{+\infty}\frac{\lambda^{2k}}{(2k)!}}$$

de la même manière,

$$\boxed{q = e^{-\lambda}\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{\lambda^{2k+1}}{(2k+1)!}}$$

$$p-q = e^{-\lambda}\left(\sum_{k=1}^{+\infty}\frac{\lambda^{2k}}{(2k)!} - \sum_{k=0}^{+\infty}\frac{\lambda^{2k+1}}{(2k+1)!}\right) = e^{-\lambda}\left(\sum_{l=1}^{+\infty}(-1)^l\frac{\lambda^l}{l!}\right)$$

$$= e^{-\lambda}\left(\sum_{l=1}^{+\infty}\frac{(-\lambda)^l}{l!}\right) = e^{-\lambda}\left(\sum_{l=1}^{+\infty}\frac{(-\lambda)^l}{l!} + \frac{(-\lambda)^0}{0!} - \frac{(-\lambda)^0}{0!}\right)$$

$$= e^{-\lambda}\left(\sum_{l=0}^{+\infty}\frac{(-\lambda)^l}{l!} - 1\right), \text{ or } \sum_{l=0}^{+\infty}\frac{(-\lambda)^l}{l!} = e^{-\lambda}$$

$$= e^{-\lambda}(e^{-\lambda}-1)$$

donc $\boxed{p-q = e^{-2\lambda} - e^{-\lambda}}$

3) $\begin{cases} p+q+e^{-\lambda}=1 \\ p-q=e^{-2\lambda}-e^{-\lambda} \end{cases} \iff \begin{cases} p+q+e^{-\lambda}=1 \\ 2p+e^{-\lambda}=1+e^{-2\lambda}-e^{-\lambda} \end{cases}$

$\iff \begin{cases} p+q+e^{-\lambda}=1 \\ p=\dfrac{1+e^{-2\lambda}-e^{-\lambda}-e^{-\lambda}}{2} \end{cases}$

donc $\boxed{p=\frac{1}{2}\left(1+e^{-2\lambda}-2e^{-\lambda}\right)=\frac{1}{2}\left(1-e^{-\lambda}\right)^2}$

$q=1-e^{-\lambda}-p=1-e^{-\lambda}-\frac{1}{2}-\frac{e^{-2\lambda}}{2}+e^{-\lambda}$

$=\frac{1}{2}-\frac{e^{-2\lambda}}{2}=\frac{1}{2}\left(1-e^{-2\lambda}\right)$

$\boxed{q=\frac{1}{2}\left(1+e^{-\lambda}\right)\left(1-e^{-\lambda}\right)}$

4) Si $X=2k$, $Q=-2k$
Si $X=2k+1$, $Q=2k+1$
Si $X=0$, $Q=0$

Si $X=k$, alors $Q=(-1)^{k+1}k$, donc $Q=(-1)^{X+1}X$

$\mathbb{E}(Q)=\mathbb{E}\left((-1)^{X+1}X\right)=\sum_{k=0}^{+\infty}(-1)^{k+1}k\,P(X=k)=\sum_{k=0}^{+\infty}(-1)^{k+1}k\,e^{-\lambda}\frac{\lambda^k}{k!}$

$=\sum_{k=1}^{+\infty}(-1)^{k+1}\frac{ke^{-\lambda}\lambda^k}{k!}$ car si $k=0$, $(-1)^1\times 0\,e^{-\lambda}\frac{\lambda^0}{0!}=0$

$=\sum_{k=1}^{+\infty}(-1)^{k+1}\frac{e^{-\lambda}\lambda^k}{(k-1)!}=e^{-\lambda}\sum_{k=1}^{+\infty}(-1)^{k+1}\frac{\lambda^k}{(k-1)!}$.

on pose $k-1=l$

$\mathbb{E}(Q)=e^{-\lambda}\sum_{l=0}^{+\infty}\frac{(-1)^{l+2}\lambda^{l+1}}{l!}=e^{-\lambda}\sum_{l=0}^{+\infty}\frac{(-1)^l\lambda^{l+1}}{l!}=e^{-\lambda}\sum_{l=0}^{+\infty}\frac{(-1)^l\lambda^l\lambda}{l!}$

$=e^{-\lambda}\lambda\sum_{l=0}^{+\infty}\frac{(-\lambda)^l}{l!}=e^{-\lambda}\lambda e^{-\lambda}$

$\boxed{\mathbb{E}(Q)=\lambda e^{-2\lambda}}$

Puisque $\lambda>0$ alors $\mathbb{E}(Q)>0$, le jeu avantage donc Quentin

Exercice 2

1- $P(Y_n > y \mid X_n = k) = P\left(n \times \min_{1\leq i\leq X_n} U_i > y \mid X_n = k\right) = P\left(n \times \min_{1\leq i \leq k} U_i > y\right)$

$= P\left(\bigcap_{1\leq i\leq k} U_i > \frac{y}{n}\right) = \prod_{i=1}^{k} P\left(U_i > \frac{y}{n}\right) = \prod_{i=1}^{k}\left(1 - P\left(U_1 < \frac{y}{n}\right)\right)$

$P\left(U_i < \frac{y}{n}\right) = P\left(0 < U_i < \frac{y}{n}\right) = \int_0^{\frac{y}{n}} \mathbb{1}_{[0,1]}\, dx = \int_0^{\frac{y}{n}} 1\, dx = \frac{y}{n}$

$$\boxed{P(Y_n > y \mid X_n = k) = \prod_{i=1}^{k}\left(1 - \frac{y}{n}\right) = \left(1 - \frac{y}{n}\right)^k.}$$

2 - Si $y \notin [0,n]$ alors $P([Y_n > y] \mid [X_n = k]) = 0$

Si $y \in [0,n]$ alors la densité conditionnelle de Y_n sachant $X_n = k$ est donnée par $\frac{\partial}{\partial y} P([Y_n < y] \mid X_n = k) = \frac{\partial}{\partial y}\left(1 - P([Y_n > y] \mid X_n = k)\right)$

$= \frac{\partial}{\partial y}\left(1 - \left(1 - \frac{y}{n}\right)^k\right) = 0 + \frac{k}{n}\left(1 - \frac{y}{n}\right)^{k-1}$

on a donc $\boxed{f_{Y_n}^{[X_n = k]}(y) = \frac{k}{n}\left(1 - \frac{y}{n}\right)^{k-1} \mathbb{1}_{[0,n]}(y).}$

3 - $\mathbb{E}(Y_n \mid [X_n = k]) = \int_0^n y\left(\frac{k}{n}\left(1 - \frac{y}{n}\right)^{k-1}\right) dy = \frac{k}{n}\int_0^n y\left(1 - \frac{y}{n}\right)^{k-1} dy$

on pose $u(y) = y$ $v(y) = \frac{-n}{k}\left(1 - \frac{y}{n}\right)^k$

$u'(y) = 1$ $v'(y) = \left(1 - \frac{y}{n}\right)^{k-1}$

$\mathbb{E}(Y_n \mid [X_n = k]) = \frac{k}{n}\int_0^n u(y) v'(y)\, dy = \frac{k}{n}\left[\underbrace{y\left(\frac{-n}{k}\left(1 - \frac{y}{n}\right)^k\right)\Big]_0^n}_{=0} - \int_0^n \frac{-n}{k}\left(1 - \frac{y}{n}\right)^k dy\right]$

$= \frac{k}{n}\frac{n}{k}\int_0^n \left(1 - \frac{y}{n}\right)^k dy = \left[\frac{-n}{k+1}\left(1 - \frac{y}{n}\right)^{k+1}\right]_0^n$

$$\boxed{\mathbb{E}(Y_n \mid [X_n = k]) = \frac{n}{k+1}}$$

Ainsi $\mathbb{E}(Y_n \mid X_n) = \frac{n}{X_n + 1}$

4- $\mathbb{E}(Y_n) = \mathbb{E}(\mathbb{E}(Y_n | X_n))$

$$= \sum_{k=0}^{n} \left(\frac{n}{k+1} P(X_n = k) \right) = \sum_{k=0}^{n} \frac{n}{k+1} \times \frac{n!}{k!(n-k)!} p^k (1-p)^{n-k}$$

$$= n \sum_{k=0}^{n} \frac{n!}{(k+1)!(n-k)!} p^k (1-p)^{n-k}$$

$$= \frac{n}{n+1} \sum_{k=0}^{n} \frac{(n+1)!}{(k+1)!(n-k)!} p^k (1-p)^{n-k}$$

$$= \frac{n}{n+1} \sum_{k=0}^{n} \binom{n+1}{k+1} p^k (1-p)^{n-k}$$

$$= \frac{n}{n+1} \sum_{j=1}^{n+1} \binom{n+1}{j} p^{j-1} (1-p)^{n-j+1}$$

$$= \frac{n}{n+1} \sum_{j=1}^{n+1} \binom{n+1}{j} \frac{p^j}{p} (1-p)^{n-j+1}$$

$$= \frac{n}{(n+1)p} \left(\sum_{j=1}^{n+1} \binom{n+1}{j} p^j (1-p)^{n-j+1} + p^0 (1-p)^{n+1} - p^0 (1-p)^{n+1} \right)$$

$$\boxed{\mathbb{E}(Y_n) = \frac{n}{(n+1)p} \times \left(1 - (1-p)^{n+1} \right)}$$

5-

6- $F_{Y_n}(y) = P(Y_n \leq y) = 1 - P(Y_n \geqslant y) = 1 - \left(1 - \frac{py}{n}\right)^n$

$\lim_{n \to +\infty} F_{Y_n}(y) = 1 - e^{-py}$. On reconnait la fonction de répartition d'une variable aléatoire suivant une loi exponentielle de paramètre p.

Donc Y_n converge en loi vers Y_∞ et $\boxed{Y_\infty \sim \mathcal{E}(p)}$

Exercice 3

1. a) $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx = \int_{-\infty}^{+\infty} k(5x^4+1)\mathbb{1}_{[-1,1]}\,dx = \int_{-1}^{1} k(5x^4+1)\,dx$

$$= k\left[x^5+x\right]_{-1}^{1} = 4k = 1 \quad \text{donc } k = \frac{1}{4}$$

f est une densité pour $\boxed{k = \frac{1}{4}}$

$$\mathbb{E}(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} x f(x)\,dx = k\int_{-1}^{1} x(5x^4+1)\,dx = k\int_{-1}^{1} 5x^5 + x\,dx$$

$$= k\left[\frac{5x^6}{6} + \frac{x^2}{2}\right]_{-1}^{1} = \boxed{0}$$

$$Var(X) = \mathbb{E}(X^2) - \mathbb{E}(X)^2 = \mathbb{E}(X^2) = k\int_{-1}^{1} x^2(5x^4+1)\,dx = k\int_{-1}^{1} 5x^6 + x^2\,dx$$

$$= k\left[\frac{5}{7}x^7 + \frac{x^3}{3}\right]_{-1}^{1} = \frac{1}{4}\left(\frac{10}{7} + \frac{2}{3}\right) = \boxed{\frac{11}{21}}$$

b) $F_X(x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)\,dt = \int_{-\infty}^{x} \frac{1}{4}(5t^4+1)\mathbb{1}_{[-1,1]}(t)\,dt$

si $x < -1$, $F_X(x) = 0$

si $x > 1$, $F_X(x) = 1$

si $x \in [-1,1]$, $F_X(x) = \int_{-1}^{x} \frac{1}{4}(5t^4+1)\,dt = \frac{1}{4}\left[t^5+t\right]_{-1}^{x}$

$$= \frac{1}{4}(x^5+x+2)$$

$$\boxed{F_X(x) = \frac{1}{4}(x^5+x+2)\mathbb{1}_{[-1,1]}(x) + \mathbb{1}_{]1,+\infty[}(x)}$$

c. $F_Z(z) = P(|X| \leqslant z)$ si $z < 0$ alors $F_Z(z) = 0$
si $z \geqslant 1$ alors $F_Z(z) = 1$

si $z \in [0,1[$ alors $P(|X| \leqslant z) = P(-z \leqslant X \leqslant z)$

$$F_X(z) - F_X(-z) = \left[\frac{1}{4}(z^5+z+2)\right] - \left[\frac{1}{4}\left((-z)^5 - z + 2\right)\right] = \frac{1}{2}z^5 + \frac{1}{2}z = \frac{1}{2}(z^5+z)$$

$$\boxed{F_Z(z) = \frac{1}{2}(z^5+z)\mathbb{1}_{[0,1[}(z) + \mathbb{1}_{[1,+\infty[}(z).}$$

Si $z \in [0,1]$ alors $F'_Z(z) = \frac{1}{2}(5z^4+1)$

Si $z \in]-\infty, 0[\cup [1,+\infty[$ alors $F'_Z(z) = 0$.

donc $\boxed{f_Z(z) = \frac{1}{2}(5z^4+1)\, \mathbb{1}_{[0,1[}(z).}$

$$\mathbb{E}(Z) = \int_0^1 z f_Z(z) = \int_0^1 \frac{5z^5}{2} + \frac{z}{2} = \left[\frac{5z^6}{12} + \frac{z^2}{4}\right]_0^1$$

$$\boxed{\mathbb{E}(Z) = \frac{2}{3}}$$

2. a) $$f_X(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} g(x,y)\,dy = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{5}{4}(x^4+y^4)\, \mathbb{1}_{[-1,1]}(x)\, \mathbb{1}_{[0,1]}(y)\,dy$$

$$= \mathbb{1}_{[-1,1]}(x)\, \frac{5}{4} \int_0^1 (x^4+y^4)\,dy = \mathbb{1}_{[-1,1]}(x)\, \frac{5}{4} \left[x^4 y + \frac{y^5}{5}\right]_0^1$$

$$\boxed{f_X(x) = \frac{5}{4}\left(x^4 + \frac{1}{5}\right) \mathbb{1}_{[-1,1]}(x)}$$

$$f_Y(y) = \int_{-\infty}^{+\infty} g(x,y)\,dx = \mathbb{1}_{[0,1]}(y)\, \frac{5}{4} \int_{-1}^{1} (x^4+y^4)\,dx = \mathbb{1}_{[0,1]}(y) \frac{5}{4} \left[\frac{x^5}{5} + xy^4\right]_{-1}^1$$

$$= \mathbb{1}_{[0,1]}(y)\, \frac{5}{4} \left[\frac{2}{5} + 2y^4\right] = \mathbb{1}_{[0,1]}(y) \left(\frac{1}{2} + \frac{5}{2} y^4\right) = \boxed{\mathbb{1}_{[0,1]}(y)\, \frac{1}{2}(5y^4+1)}$$

$$\mathbb{E}(Y) = \int_0^1 y \times \frac{1}{2}(5y^4+1)\,dy = \frac{1}{2}\int_0^1 5y^5 + y\,dy = \frac{1}{2}\left[\frac{5y^6}{6} + \frac{y^2}{2}\right]_0^1 = \frac{1}{2}\left(\frac{5}{6} + \frac{1}{2}\right)$$

$$= \boxed{\frac{2}{3}}$$

b) $\mathrm{cov}(X,Y) = \mathbb{E}(XY) - \mathbb{E}(X)\mathbb{E}(Y) = \mathbb{E}(XY)$ car $\mathbb{E}(X) = 0$.

$$= \int_0^1 \int_{-1}^1 xy \times \frac{5}{4}(x^4+y^4)\,dx\,dy = \frac{5}{4}\int_0^1 \int_{-1}^1 x^5 y + xy^5\,dx\,dy$$

$$= \frac{5}{4}\int_{-1}^1 \left[\frac{x^5y^2}{2} + \frac{xy^6}{6}\right]_0^1 dx = \frac{5}{4}\int_{-1}^1 \left[\frac{x^5}{2} + \frac{x}{6}\right] dx$$

$$= \frac{5}{4}\left[\frac{x^6}{12} + \frac{x^2}{12}\right]_{-1}^1 = \boxed{0}$$

$$f_X(x)\, f_Y(y) = \frac{5}{4}\left(x^4+\frac{1}{5}\right) \mathbb{1}_{[-1,1]}(x)\, \mathbb{1}_{[0,1]}(y)\, \frac{1}{2}\left(5y^4+1\right)$$

X et Y ne sont pas indépendants car $\frac{5}{4}\left(x^4+\frac{1}{5}\right) \times \frac{1}{2}\left(5y^4+1\right) \neq \frac{5}{4}\left(x^4+y^4\right)$.

c) $$f_Y^{X=x}(y) = \frac{f_{X,Y}(x,y)}{f_X(x)} = \frac{\frac{5}{4}\left(x^4+y^4\right)\mathbb{1}_{[-1,1]}(x)\,\mathbb{1}_{[0,1]}(y)}{\frac{1}{4}\left(5x^4+1\right)\mathbb{1}_{[-1,1]}(x)} = \frac{5\left(x^4+y^4\right)\mathbb{1}_{[0,1]}(y)}{5x^4+1}$$

$$\mathbb{E}(Y|X=x) = \int_{-\infty}^{+\infty} y\, \frac{5\left(x^4+y^4\right)\mathbb{1}_{[0,1]}(y)}{5x^4+1}\, dy = \frac{5}{5x^4+1} \int_0^1 \left(yx^4+y^5\right) dy$$

$$= \frac{5}{5x^4+1}\left[\frac{x^4y^2}{2} + \frac{y^6}{6}\right]_0^1 = \frac{5}{5x^4+1} \times \frac{3x^4+1}{6}$$

$$\boxed{\mathbb{E}(Y|X=x) = \frac{5}{6}\left(\frac{3x^4+1}{5x^4+1}\right)}$$

Ainsi $\mathbb{E}(Y|X) = \frac{5}{6}\left(\frac{3X^4+1}{5X^4+1}\right)$

d) $\mathbb{E}(Y) = \mathbb{E}\left(\mathbb{E}(Y|X)\right)$

$$\mathbb{E}(Y) = \frac{1}{4}\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{5}{6}\left(\frac{3x^4+1}{5x^4+1}\right) \times \left(5x^4+1\right) \mathbb{1}_{[-1,1]}(x)\, dx$$

$$= \frac{5}{24}\int_{-1}^{1} 3x^4+1\, dx.$$

$$= \frac{5}{24}\left[\frac{3x^5}{5}+x\right]_{-1}^{1}$$

$$\boxed{\mathbb{E}(Y) = \frac{2}{3}}$$

Exercice 4.

1) On considère l'épreuve de Bernoulli : " un passager se désiste ou non " avec une probabilité de désistement de 10% (chance de succès = 90%) et on répète cette expérience n fois de manière indépendante.
On note S_n le nombre de passagers qui ne se désiste pas (nombre de succès) alors S_n suit une loi binomial $\mathcal{B}(n, 0,9)$

$$\boxed{\begin{array}{l} \mathbb{E}(S_n) = 0,9n \\ Var(S_n) = 0,9\, n \times (0,1) = 0,09\, n \end{array}}$$

2) On considère S_n comme une somme de variables aléatoires suivant une loi de Bernoulli. D'après le théorème central des limites, S_n suit approximativement la loi normale $\boxed{\mathcal{N}(n0,9\,;\, n0,09)}$

3) L'évènement : " personne à rembourser " est égal à $S_n \leqslant 150$.

$$P(S_{160} \leqslant 150) = P\left(S_{160}^* \leqslant \frac{150 - 0,9 \times 160}{\sqrt{0,09 \times 160}}\right) = P(S_{160}^* \leqslant 1,58)$$

A l'aide d'une table de loi normale

$$\boxed{P(S_{160} \leqslant 150) \simeq 0,943.}$$

4) $P(S_n \leqslant 150) \geqslant 0,95 \iff \dfrac{150 - 0,9n}{\sqrt{0,09n}} = 1,64$

$\iff 0,492\sqrt{n} + 0,9n - 150 = 0$, on pose $X = \sqrt{n}$

$\iff 0,9X^2 + 0,492X - 150 = 0$

$\Delta \simeq 540,242064$

$X = \dfrac{-0,492 \pm 23}{1,8} \simeq 12,50$

$\boxed{n \simeq 156.}$