Examen 2019 : Optimisation

Exercice I

1. $f(x,y) = (1-x)(1-y)(x+y-1)$

gradient : $\nabla f(x,y) = \begin{pmatrix} 2x(y-1) + y^2 - 3y + 2 \\ 2y(x-1) + x^2 - 3x + 2 \end{pmatrix}$

matrice Hessienne $\nabla^2 f(x,y) = \begin{pmatrix} 2y-2 & 2x+2y-3 \\ 2x+2y-3 & 2x-2 \end{pmatrix}$

2. un point critique vérifie $\begin{cases} 2x(y-1) + y^2 - 3y + 2 = 0 \\ 2y(y-1) + x^2 - 3x + 2 = 0 \end{cases}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} (y-1)(2x+y-2) = 0 \\ 2(x-1) + x^2 - 3x + 2 = 0 \end{cases}$$

On a donc $y = 1$ ou $y = 2(1-x)$

Si $y = 1$ alors $2(x-1) + x^2 - 3x + 2 = 0 \Leftrightarrow x = 0$ ou $x = 1$

si $y = 2(1-x)$ alors $2(x-1)2(1-x) + x^2 - 3x + 2 = 0 \Leftrightarrow x = 1$ ou $x = \frac{2}{3}$

et donc $y = 0$ ou $y = \frac{2}{3}$

$\boxed{\text{les 4 points critiques sont donc } (0,1), (1,1), (1,0), (\tfrac{2}{3}, \tfrac{2}{3})}$

Pour $(0,1)$, $(1,1)$ et $(1,0)$, le déterminant de la hessienne < 0, on a donc deux valeurs propres de signe opposé. $\boxed{(0,1), (1,1) \text{ et } (1,0) \text{ ne sont pas des extremums locaux.}}$

Pour $(\frac{2}{3}, \frac{2}{3})$, le déterminant de la hessienne est > 0 et la trace < 0, on a donc deux valeurs propres négatives $\boxed{(\tfrac{2}{3}, \tfrac{2}{3}) \text{ est donc un maximum local}}$

3. $f(x,x) = (1-x)^2\ (2x-1)$

$= 2x^3 - 5x^2 + 4x - 1$

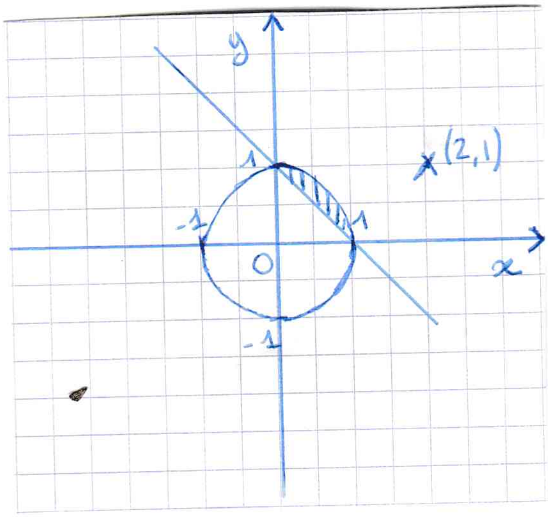
$\lim\limits_{x \to +\infty} f(x,x) = \lim\limits_{x \to +\infty} 2x^3 = +\infty$ et $\lim\limits_{x \to -\infty} 2x^3 = -\infty$

Il n'y a donc pas d'extremum globale

Exercice II.

$f(x,y) = (x-2)^2 + (y-1)^2$ sur $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2, x^2+y^2 \leq 1, x+y \geq 1\}$

1.



D est le domaine limité par le disque de centre $(0,0)$ de rayon 1 et la droite $x+y=1$. Plus précisément, $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 ; \varphi_1(x,y) \leq 0$ et $\varphi_2(x,y) \leq 0\}$ avec $\varphi_1(x,y) = x^2+y^2-1$ et $\varphi_2(x,y) = -x-y+1$.

Ces fonctions contraintes sont donc de classe C^1. D est donc un fermé comme intersection de 2 fermés (disque fermé et demi-plan fermé). D est aussi un ensemble borné car inclus dans le disque de centre $(0,0)$ et de rayon 1.

Donc $\boxed{D \text{ est fermé borné}}$ et comme f est continue, $\boxed{f \text{ admet un minimum et un maximum sur } D.}$

2- Les fonctions f et φ_i pour $1 \leqslant i \leqslant 2$ sont toutes de classe C^1. De plus φ_1 est convexe et φ_2 est linéaire, donc les contraintes sont qualifiées en tout point et on peut appliquer Kuhn-Tucker.

On a $\nabla f(x,y) = \begin{pmatrix} 2(x-2) \\ 2(y-1) \end{pmatrix}$, $\nabla \varphi_1(x,y) = \begin{pmatrix} 2x \\ 2y \end{pmatrix}$, $\nabla \varphi_2(x,y) = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \end{pmatrix}$

Il existe λ_i, $1 \leqslant i \leqslant 2$, tels que

$$\begin{cases} \nabla f(u) + \sum_{i=1}^{2} \lambda_i \nabla \varphi_i(u) = 0 \\ \lambda_i \varphi_i(u) = 0 \quad \text{pour } 1 \leqslant i \leqslant 2 \\ \varphi_i(u) \leqslant 0 \quad \text{pour } 1 \leqslant i \leqslant 2 \end{cases}$$

Soit $$\begin{cases} 2(x-2) + 2x\lambda_1 - \lambda_2 = 0 \\ 2(y-1) + 2y\lambda_1 - \lambda_2 = 0 \\ \lambda_1(x^2+y^2-1) = 0 \,;\ \lambda_2(-x-y+1) = 0 \\ x^2+y^2-1 \leqslant 0 \,;\ -x-y+1 \leqslant 0 \end{cases}$$

3. • Si aucune contrainte n'est saturée, on a $\nabla f(u) = 0$ qui donne $x=2$ et $y=1$ mais $(2,1) \notin D$.

• Si les deux contraintes sont saturées, on calcule les intersections.

$x+y=1$ et $x^2+y^2=1$ donne $x^2+(1-x)^2=1$ soit $2x^2-2x+1=1$
$\Leftrightarrow 2x(x-1)=0$

on a donc $x=0$ et $y=1$
ou $x=1$ et $y=0$

on a alors $f(0,1)=4$ et $f(1,0)=2$

• Si une seule contrainte est saturée

Pour φ_1, $x^2+y^2=1$ et $\begin{vmatrix} x-2 & x \\ y-1 & y \end{vmatrix} = 0$, soit $xy-2y-xy+x=0$, ce qui donne $x=2y$, puis $(2y)^2+y^2=1$ donc $y=\frac{1}{\sqrt5}$ et $x=\frac{2}{\sqrt5}$
ou $y=-\frac{1}{\sqrt5}$ et $x=-\frac{2}{\sqrt5}$

$\left(\frac{-2}{\sqrt5}, -\frac{1}{\sqrt5}\right) \notin D$ car $\frac{-2}{\sqrt5} - \frac{1}{\sqrt5} \leqslant 1$

$f\left(\frac{2}{\sqrt5}, \frac{1}{\sqrt5}\right) = 6\left(1-\frac{1}{\sqrt5}\right) \simeq 3{,}32$

Pour φ_2, $x+y=1$ et $\begin{vmatrix} x-2 & -1 \\ y-1 & -1 \end{vmatrix} = 0$, soit $-x+2+y-1=0$, donc $x=y+1$

donc $2y+1=1 \Leftrightarrow y=0$ et $x=1$

$f(1,0)=2$.

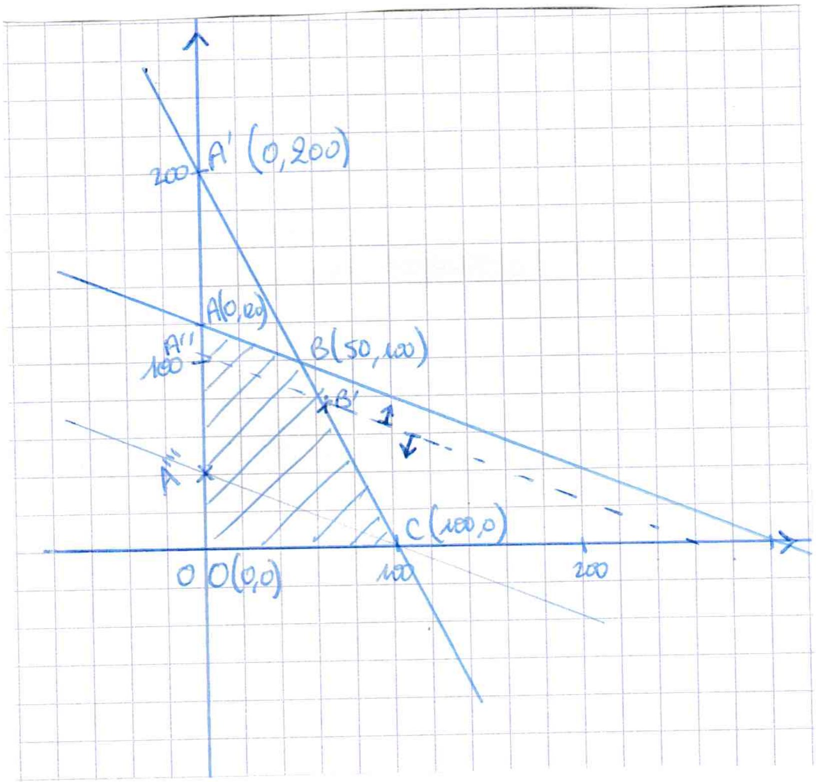
Il faut donc comparer 2, 4 et $6\left(1-\frac{1}{\sqrt{5}}\right)$. Donc $\boxed{\min f = 2 \text{ avec } \operatorname{argmin}_D(f) = \{(1,0)\}}$

et $\boxed{\max f = 4 \text{ avec } \operatorname{argmax}_D(f) = \{(0,1)\}}$

4- Le point $(1,0)$ du domaine D est le point le plus proche du point $(2,1)$. et le point $(0,1)$ le plus loin du point $(2,1)$.

Exercice III

1.



On note x_i, $1 \leq i \leq 2$, la quantité de céréales produite (en hectare). Le chiffre d'affaire est alors de $600x_1 + 500x_2 = z$. On a des contraintes d'engrais $10x_1 + 25x_2 \leq 3\,000$ et d'eau $2x_1 + x_2 \leq 200$.

$$(P)\quad \begin{cases} 600x_1 + 500x_2 = z\,[\max] \\ 2x_1 + x_2 \leqslant 200 \\ 10x_1 + 25x_2 \leqslant 3\,000 \\ x_1 \geqslant 0 \quad \text{et}\; x_2 \geqslant 0 \end{cases}$$

Le domaine des solutions admissibles satisfaisant les contraintes est le polygone de sommets $O(0,0)$, $A(0,120)$, $B(50,100)$ et $C(100,0)$. On sait que le maximum existe (domaine fermé borné) et qu'il se trouve en l'un des sommets du polygone.

On a $z_A = z_C = 60\,000$ $\quad z_C = 0$ et $z_B = 80\,000$.

On a donc $\boxed{\max(z) = z^* = 80\,000}$ atteint en B pour une production de 50 hectares de maïs et 100 hectares de colza.

2. 1er tableau :

$i \downarrow$	$j \rightarrow$	x_1	x_2	$x_{\bar 1}$	$x_{\bar 2}$	β	$\beta_i / a_{i,e}$
$\leftarrow$	$\bar 1$	$\boxed{2}$	1	0	1	200	100
	$\bar 2$	10	25	1	0	3 000	300
	Δ_j	600	500	0	0	z - 0	
		$\uparrow$ e					

2ème tableau x_1 entre dans la base et $x_{\bar 1}$ en sort

$i \downarrow$	$j \rightarrow$	x_1	x_2	$x_{\bar 1}$	$x_{\bar 2}$	β	$\beta_i / a_{i,e}$
	1	1	$\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{2}$	100	200
$\leftarrow$	$\bar 2$	0	$\boxed{20}$	1	-5	2000	100
	Δ_j	0	200	0	-300	z - 60000	
			$\uparrow$ e				

3ème tableau : x_2 entre dans la base et $x_{\bar 2}$ en sort

$i \downarrow$	$j \rightarrow$	x_1	x_2	$x_{\bar 1}$	$x_{\bar 2}$	β
	1	1	0	$-1/40$	$5/8$	50
	2	0	1	$1/20$	$-1/4$	100
	Δ_j	0	0	-10	-250	z - 80 000

Il n'y a plus de terme positif dans la dernière ligne on est donc à l'optimum. La solution est donc $\boxed{x_1^* = 50 \quad x_2^* = 100 \quad \text{et} \quad z^* = 80\,000}$

3. On écrit directement le programme dual :

$$\begin{cases} 200y_1 + 3000y_2 = \omega\ [\min] \\ 2y_1 + 10y_2 \geqslant 600 \\ y_1 + 25y_2 \geqslant 500 \\ y_1 \geqslant 0,\ y_2 \geqslant 0 \end{cases}$$

On déduit directement du tableau à l'optimal que $\Delta'_{\bar{1}} = -50$, $\Delta'_{\bar{2}} = -100$, les autres étant nuls et que $y_1 = 250$ et $y_2 = 10$ (variable de base), les autres étant nulls. Enfin, on remplit le tableau grâce à $\alpha'_{i,j} = -\alpha_{\bar{j},\bar{i}}$ (en convenant que $\bar{\bar{i}} = i$). On a alors le tableau du simplexe du dual à l'optimal.

$i \downarrow$ \ $j \rightarrow$	$y_{\bar{1}}$	$y_{\bar{2}}$	y_1	y_2	B'
1	$+1/40$	$-1/20$	1	0	250
2	$-5/8$	$+1/4$	0	1	10
	-50	-100	0	0	$\omega + 80000$

4. Le domaine reste le même et le maximum est sur l'un des sommets du polygone. On a $z_O = 0$, $z_A = 120p$, $z_B = 30\,000 + 100p$ et $z_C = 60\,000$

Le maximum reste en B si $z_B \geqslant z_A \Leftrightarrow 30\,000 + 100p \geqslant 120p \Leftrightarrow 1500 \geqslant p$

et si $z_B \geqslant z_C \Leftrightarrow 30\,000 + 100p \geqslant 60\,000 \Leftrightarrow p \geqslant 300$

$\boxed{\text{Les valeurs des variables pour l'optimum restent inchangées pour } p \in [300, 1500]}$

5. Ici, la deuxième contrainte change. Le nouveau programme s'écrit

$$\begin{cases} 600x_1 + 500x_2 = z\ [\max] \\ 2x_1 + x_2 \leqslant 2000 \\ 10x_1 + 25x_2 \leqslant 9/10 \\ x_1 \geqslant 0\ ;\ x_2 \geqslant 0 \end{cases}$$

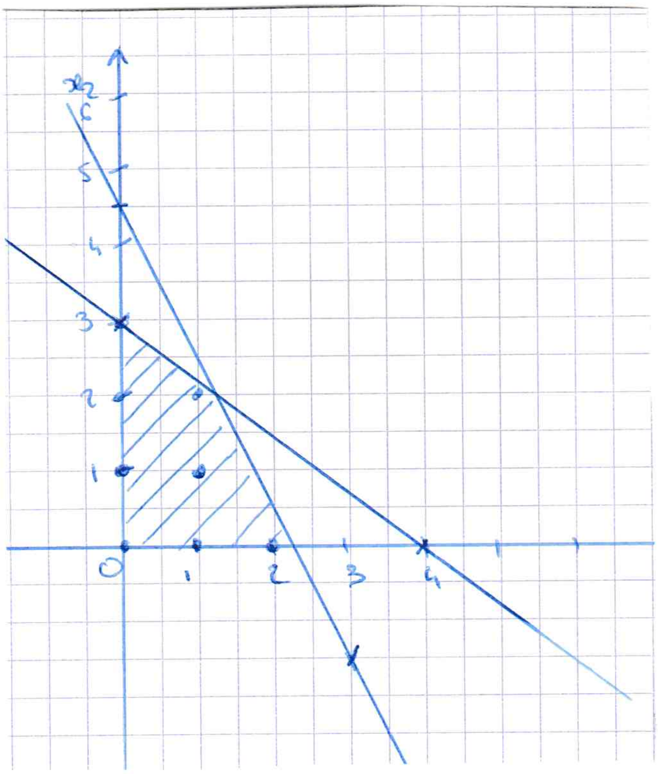
La droite (AB) est remplacé par une droite parallèle, la droite d'équation $x_2 = -0{,}4x_1 + 9/250$

· Si $q/250 \geq 200$ soit $q \geq 50T$, le domaine est le triangle OA'C avec A' (0,200). On a alors $z_{A'} = 100\,000$ alors que $z_C = 60\,000$. Dans ce cas, il vaut mieux produire que du colza.

· Si $40 \leq q/250 \leq 200$ soit $10T \leq q \leq 50T$, le domaine est le quadrilatère OA''B'C avec $A''\left(0, \frac{q}{250}\right)$ et $B'\left(125 - \frac{q}{320} ; \frac{21q}{4000} - 50\right)$ avec $z^* = z^*_{B'} = 50\,000 + \frac{3q}{4}$

· Si $q \leq 10T$, le domaine devient le triangle OA'''C avec A'''(0,40). $z_{A'''} = 2000$ et $z_C = 60\,000$. Dans ce cas, il vaut mieux produire que du maïs.

Exercice IV



On commence par resoudre (P_0)
$$\begin{cases} 4x_1 + 3x_2 = z\,[\max] \\ 3x_1 + 4x_2 \leq 12 \\ 4x_1 + 2x_2 \leq 9 \\ x_1 \geq 0 \; ; \; x_2 \geq 0 \end{cases}$$
, sans tenir compte de la contrainte x_1, x_2 à valeurs entières mais seulement $x_1 \geq 0$ et $x_2 \geq 0$.

On trouve $\boxed{x_1^* = 1{,}2 \quad \text{et } x_2^* = 2{,}1 \quad z^* = 11{,}1}$

On branche P_0 par rapport à x_1 en

$$(P_0) \wedge (x_1 \leq 1) = (P_1)$$

$\boxed{x_1^* = 1 \quad x_2^* = 2,25 \quad z^* = 10,75}$

On branche P_1 par rapport à x_2 en :

$$(P_1) \wedge (x_2 \leq 2) = (P_{11})$$

$\boxed{x_1^* = 1 \quad x_2^* = 2 \quad z^* = 10}$

$$(P_1) \wedge (x_2 \geq 3) = (P_{12})$$

$\boxed{x_1^* = 0 \quad x_2^* = 3 \quad z^* = 9}$

On branche P_0 par rapport à x_1 en

$$(P_0) \wedge (x_1 \geq 2) = (P_2)$$

$\boxed{x_1^* = 2 \quad x_2^* = 0,3 \quad z^* = 9,5.}$

Nous n'avons pas besoin de continuer car $z^* = 9,5 < z^*$ du (P_{11})

On branche P_0 par rapport à x_2 en

$$(P_0) \wedge (x_2 \geq 3) = (P_3)$$

$\boxed{x_1^* = 0 \quad x_2^* = 3 \quad z^* = 9} < z^*$ du (P_{11}). on s'arrête ici.

$$(P_0) \wedge (x_2 \leq 2) = (P_4)$$

$\boxed{x_1^* = 1,25 \quad x_2^* = 2 \quad z^* = 11}$

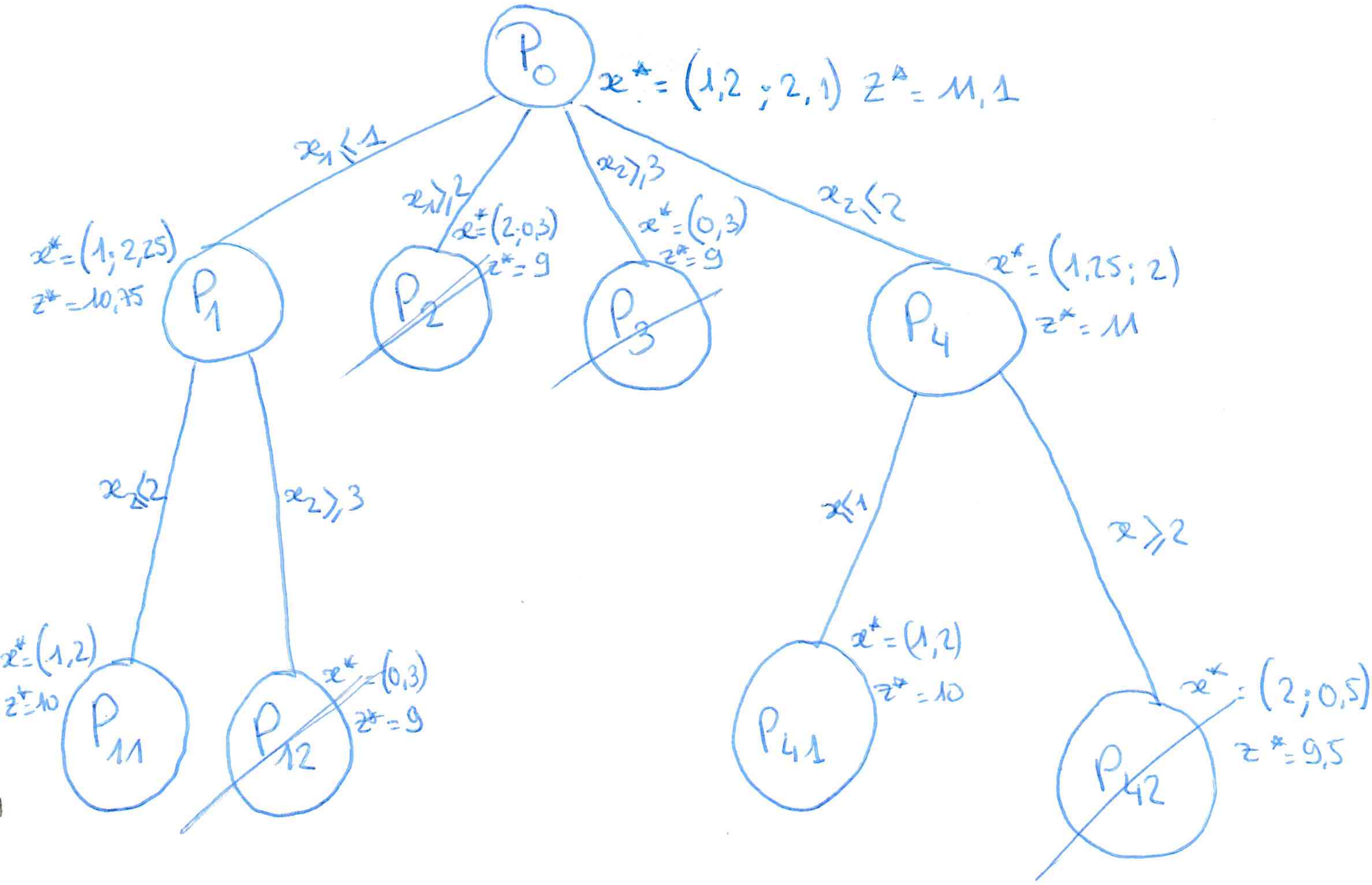
On branche P_4 par rapport à x_1 en

$$(P_4) \wedge (x_1 \leq 1) = (P_{41})$$

$\boxed{x_1^* = 1 \quad x_2^* = 2 \quad z^* = 10}$. nous avons la même solution qu'au (P_{11})

$$(P_4) \wedge (x_1 \geq 2) = (P_{42})$$

$\boxed{x_1^* = 2 \quad x_2 = 0,5 \quad z^* = 9,5} < z^*$ du (P_{11})



$\boxed{\text{La solution optimale est donc } x_{PLNE} = (1,2) \text{ avec } z_{opt} = 10}$