Examen de Probabilités du lundi 25 mars 2019

4 exercices indépendants (Durée : 2 heures)

Exercice I-

On tire un nombre entier naturel X au hasard, et on suppose que X suit une loi de Poisson de paramètre $\lambda > 0$. Si X est pair supérieur ou égal à 2, Paul gagne et reçoit X euros de Quentin. Si X est impair, Quentin gagne et reçoit X euros de Paul. Si $X = 0$, la partie est nulle.
On note p la probabilité que Paul gagne et q la probabilité que Quentin gagne.

1. Montrer que $p + q + e^{-\lambda} = 1$.

2. Montrer que $p = e^{-\lambda} \displaystyle\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{\lambda^{2k}}{(2k)!}$ et écrire de même q sous forme de série. En déduire que $p - q = e^{-2\lambda} - e^{-\lambda}$.

3. Déduire des deux questions précédentes les valeurs de p et de q.

4. Soit Q la variable aléatoire égale au gain algébrique de Quentin. Exprimer $\mathbb{E}(Q)$ sous forme de somme puis montrer que $\mathbb{E}(Q) = \lambda e^{-2\lambda}$. Le jeu avantage-t-il Quentin ou Paul ?

Exercice II-

On considère deux suites indépendantes $(U_n)_{n\geq 1}$ et $(X_n)_{n\geq 1}$ de variables aléatoires indépendantes et équidistribuées. Les U_n sont absolument continues, de loi uniforme $\mathcal{U}([0,1])$ et les X_n sont discrètes, de loi binomiale $\mathcal{B}(n,p)$, où $p \in]0,1[$. On va s'intéresser au comportement asymptotique de la variable aléatoire

$$Y_n = n \times \min_{1\leq i\leq X_n} U_i.$$

1. Montrer que, pour tout $y \in [0,n]$ et pour tout entier k tel que $0 \leq k \leq n$, on a

$$P\left([Y_n > y]/[X_n = k]\right) = \left(1 - \frac{y}{n}\right)^k.$$

2. Montrer alors que la densité conditionnelle de Y_n sachant $X_n = k$ est donnée par

$$f_{Y_n}^{[X_n=k]}(y) = \frac{k}{n}\left(1 - \frac{y}{n}\right)^{k-1} \mathbb{I}_{[0,n]}(y).$$

3. Montrer que l'espérance conditionnelle de Y_n sachant $[X_n = k]$ est donnée par

$$\mathbb{E}(Y_n/[X_n = k]) = \frac{n}{k+1}$$

et en déduire $\mathbb{E}(Y_n|X_n)$.

4. En utilisant le théorème de l'espérance totale, montrer que l'espérance de Y_n est donnée par

$$\mathbb{E}(Y_n) = \frac{n}{p(n+1)}\left[1 - (1-p)^{n+1}\right].$$

5. Montrer que, pour tout $y \in [0, n]$, $P(Y_n \geq y) = \left(1 - \frac{py}{n}\right)^n$.

6. Déduire de la question précédente que Y_n converge en loi vers une variable Y_∞ dont on déterminera la loi. [*On trouvera une loi exponentielle.*].

Exercice III-

1. Soit X une variable aléatoire de densité de probabilité f définie par :

$$f(x) = k(5x^4 + 1)\, \mathbb{I}_{[-1,1]}(x).$$

a) Montrer que $k = \frac{1}{4}$, puis déterminer l'espérance et la variance de X.

b) Déterminer la fonction de répartition F_X de X.

c) Soit $Z = |X|$. Vérifier que $F_Z(z) = \frac{1}{2}(z^5 + z)\, \mathbb{I}_{[0,1[}(z) + \mathbb{I}_{[1,+\infty[}(z)$. En déduire la densité de Z et déterminer son espérance.

2. Soit (X, Y) un couple de variables aléatoires de densité de probabilité g définie par :

$$g(x, y) = \frac{5}{4}(x^4 + y^4)\, \mathbb{I}_{[-1,1]}(x)\, \mathbb{I}_{[0,1]}(y)$$

a) Vérifier que la densité de X est définie par $f_X(x) = \frac{1}{4}(5x^4 + 1)\, \mathbb{I}_{[-1,1]}(x)$ et déterminer la densité de Y et son espérance.

b) Calculer $\mathrm{cov}(X, Y)$. Les variables X et Y sont-elles indépendantes ?

c) Écrire la densité conditionnelle de Y sachant $X = x$. Calculer alors $\mathbb{E}(Y|X = x)$ puis vérifier que $\mathbb{E}(Y|X) = \frac{5}{6}\left(\frac{3X^4 + 1}{5X^4 + 1}\right)$.

d) Retrouver $\mathbb{E}(Y)$ en utilisant l'espérance totale.

Exercice IV-

Un vol Toulouse - Paris est assuré par un Airbus de 150 places. La compagnie vend n billets, $n > 150$. S'il se présente plus de 150 passagers à l'embarquement, les 150 premiers arrivés prennent leur vol et les autres sont dédommagés financièrement.

1. On considère que les désistements des passagers sont mutuellement indépendants et que la probabilité de désistement de chacun d'eux est 10%. On note S_n le nombre aléatoire de passagers se présentant à l'embarquement pour ce vol. Vérifier que S_n suit une loi binomiale, déterminer sa moyenne et sa variance.

2. Donner la loi approximative suivie par S_n, grâce au Théorème Central Limite.

3. Quelle est la probabilité qu'il n'y ait personne à rembourser s'il y a eu $n = 160$ réservations ?

4. Quelle est la valeur maximale de n pour laquelle $P(S_n \leq 150) \geq 0,95$?
