Année Préparatoire

Examen d'Algèbre Linéaire du mardi 26 mars 2019

4 exercices indépendants (Durée : 2 heures)

Exercice I-

Soit E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel, p un projecteur tel que $p \neq 0$ et $p \neq \mathrm{id}$. Soit $\alpha \in \mathbb{R}$ et $g = p + \alpha\mathrm{id}$.

1. Exprimer $g \circ g$ en fonction de g et id.

2. Pour quelles valeurs de α a-t-on g bijective ? Exprimer alors g^{-1}.

Exercice II-

On note u l'endomorphisme de matrice $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ dans la base canonique de E, $\mathbb{C}$-espace vectoriel.

1. Calculer le rang de $A - I_3$ et en déduire que A n'est pas diagonalisable.

2. Déterminer $\ker(u - 2\mathrm{id})$ et $\ker(u - \mathrm{id})^2$ et montrer qu'ils sont supplémentaires.

3. On note v l'endomorphisme canoniquement associé à $X \in \mathcal{M}_3(\mathbb{C})$ telle que $X^n = A$, avec $n \geq 2$. Montrer que u et v commutent et en déduire que $\ker(u - 2\mathrm{id})$ et $\ker(u - \mathrm{id})^2$ sont stables par u.
[*On rappelle que, lorsque deux endomorphismes commutent, les espaces propres de l'un sont stables par l'autre.*]

4. Montrer que X est de la forme $\begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & Y \end{pmatrix}$ avec $Y \in \mathcal{M}_2(\mathbb{C})$.

5. Soit $J = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$. Montrer que $YJ = JY$ et en déduire que $Y \in \mathrm{vect}(I_2, J)$.

6. Résoudre $X^n = A$.

Exercice III-

Soit $A = (a_{i,j})_{1 \leq i,j \leq n} \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ telle que $\mathrm{rg}(A - I_n) = n - 1$. On suppose que les $a_{i,j}$ sont > 0 et que, pour $i \in \{1, \cdots, n\}$, $a_{i,1} + \cdots + a_{i,n} = 1$.

1. Montrer que $\ker(A - I_n) = \mathrm{vect}(u)$, où $u = {}^t(1, \cdots, 1)$.

2. Montrer que, pour tout $X \in \mathbb{R}^n$, $\|AX\|_\infty \leq \|X\|_\infty$ où $\|{}^t(y_1, \cdots, y_n)\|_\infty = \max\limits_{1 \leq k \leq n} |y_k|$.

3. Soit $\lambda \in \mathrm{Sp}(A)$. Montrer que $|\lambda| \leq 1$.

4. On pose $B = A + I_n$. On note $(b_{i,j})$ les coefficients de B.
a) Montrer que, pour tout $i \in \{1, \cdots, n\}$, $b_{i,i} > \sum\limits_{1 \leq j \leq n, j \neq i} b_{i,j}$.

b) En déduire que B est inversible.

5. Montrer que la suite $(A^p)_{p\geq 1}$ converge vers une matrice R semblable à $\mathrm{Diag}(1, 0, \cdots, 0)$.

6. Montrer que $R = \frac{1}{n}\begin{pmatrix} 1 & \cdots & 1 \\ \vdots & & \vdots \\ 1 & \cdots & 1 \end{pmatrix}$.

Exercice IV-

On considère la matrice $A = \begin{pmatrix} 4 & 1 & 0 \\ 1 & 4 & 1 \\ 0 & 1 & 4 \end{pmatrix}$ et le vecteur $b = \begin{pmatrix} -3 \\ 4 \\ 5 \end{pmatrix}$.

1. Déterminer, si elles sont possibles, les factorisation LU et de Cholesky de A.

2. Déterminer $\overline{x}$, l'unique solution de $Ax = b$.

3. a) Écrire la matrice de Jacobi J et la matrice de Gauss-Seidel G associées à $Ax = b$.

b) Déterminer les valeurs propres de J et de G et montrer que les méthodes de Jacobi et de Gauss-Seidel sont convergentes. Quelle est la méthode qui converge le plus vite ?

c) Donner les 3 premières itérations des méthodes de Jacobi et de Gauss-Seidel en partant de $x^{(0)} = {}^t(0, 0, 0)$.