Corrigé : Mini-Projet

Solution Exercice 1 1. Voir le code.

2. (a) Soit $Y \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$. On a $Y \overset{\text{loi}}{=} \mu + \sigma X$ où $X \sim \mathcal{N}(0,1)$. Ainsi la fonction de répoartition $Fx; \mu, \sigma^2$ de la loi $\mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$ vérifie

$$\begin{aligned} F(x; \mu, \sigma^2) &= \mathbb{P}(Y \leq x) \\ &= \mathbb{P}(Y \leq x) = \mathbb{P}(\mu + \sigma X \leq) \\ &= \mathbb{P}(X \leq \frac{x-\mu}{\sigma}) \\ &= F(\frac{x-\mu}{\sigma}; 0, 1) = \Phi(\frac{x-\mu}{\sigma}). \end{aligned}$$

Donc la fonction quantile vérifie, par inversion,

$$\forall\, p \in]0,1[, \quad F^{-1}(p; \mu, \sigma) = \mu + \sigma \Phi^{-1}(p) = \mu + \sigma F^{-1}(p; 0, 1)\,.$$

(b) Voir le code.

(c) Voir le code.

(d) Les données ne semblent pas du tout provenir d'une loi normale.

3. (a) La fonction de répartition d'une loi exponentielle est $F(x; \lambda) = 1 - e^{-\lambda x}$. Par inversion la fonction quantile asssociée s'écrit

$$\forall\, p \in (0,1), \quad F^{-1}(p; \lambda) = -\frac{\log(1-p)}{\lambda} = \frac{1}{\lambda} F^{-1}(p; 1)\,.$$

(b) Voir le code.

(c) Voir le code.

(d) Voir le code.

(e) Une loi exponentielle semble plus plausible qu'une loi normale.

Solution Exercice 2 1. Il suffit de montrer que

(a) l'estimateur $T(X)$ est sans biais pour le paramètre $g(\lambda) = 1/\lambda$

(b) sa variance est égale à la borne de Cramér-Rao $B(\lambda) = \frac{g'(\lambda)^2}{I_n(\lambda)}$, où $I_n(\lambda)$ est l'information de Fisher du modèle à n observations indépendantes, pour tout $\lambda > 0$.

(a) Pour le premier point, on a immédiatement $\mathbb{E}_\lambda(T(X)) = \mathbb{E}_\lambda(X_1) = \frac{1}{\lambda}$. L'estimateur est non biaisé.

(b) Pour $\lambda > 0$, on a

$$\mathrm{Var}_\lambda(T(X)) = \frac{1}{n}\mathrm{Var}_\lambda(X_1) = \frac{1}{n\lambda^2}.$$

D'autre part, la fonction de répartition de P_λ est la fonction

$$F_\lambda(x) = \mathbf{1}_{x>0}(1 - e^{-\lambda x}).$$

La dérivée de cette dernière est $f_\lambda(x) = \mathbf{1}_{x>0}\ \lambda e^{-\lambda x}$. On vérifie immédiatement que l'on a bien, pour $x \in \mathbb{R}$,

$$F_\lambda(x) = \int_{-\infty}^{x} f_\lambda(t)dt.$$

Ainsi, le modèle est dominé par la mesure de Lebesgue (notée dt ci-dessus) sur $\mathbb{R}$, et la loi P_λ admet comme densité $p(x;\lambda) = f_\lambda(x)$ ($x \in \mathbb{R}, \lambda > 0$). l'information de Fisher pour une observation est

$$\begin{aligned}
I_1(\lambda) &= \mathbb{E}_\lambda\left[\left(\frac{\partial \log p(X_1;\lambda)}{\partial\lambda}\right)^2\right] \\
&= \mathbb{E}_\lambda\left[\left(\frac{\partial \log \lambda - \lambda X_1}{\partial\lambda}\right)^2\right] \\
&= \mathbb{E}_\lambda\left[\left(\frac{1}{\lambda} - X_1\right)^2\right] \\
&= \mathbb{E}_\lambda\left[(\mathbb{E}(X_1) - X_1)^2\right] \\
&= \mathrm{Var}_\lambda(X_1) \\
&= \frac{1}{\lambda^2}
\end{aligned}$$

La borne de Cramér-Rao pour un échantillon *i.i.d.* de taille n est donc

$$B(\lambda) = \frac{g'(\lambda)^2}{nI_1(\lambda)} = \frac{1/\lambda^4}{n/\lambda^2} = \frac{1}{n\lambda^2}$$

On a bien, pour tout $\lambda > 0$, $\mathrm{Var}_\lambda(T(X)) = B(\lambda)$. L'estimateur T est donc efficace et par conséquent, il est UVMB.

2. Soit $\alpha > 0$. On considère le nouvel estimateur

$$\widetilde{T}_{1,\alpha}(X) = \alpha T_1(X).$$

Le biais de $\widetilde{T}_{1,\alpha}$ vaut :

$$\mathrm{biais}_\lambda(\widetilde{T}_{1,\alpha}) = \mathbb{E}_\lambda(\widetilde{T}_{1,\alpha}(X)) - 1/\lambda = \frac{\alpha - 1}{\lambda}.$$

Sa variance vaut

$$\mathrm{Var}_\lambda(\widetilde{T}_{1,\alpha}(X)) = \alpha^2 \mathrm{Var}_\lambda(T_1(X)) = \frac{\alpha^2}{n\lambda^2}.$$

Ainsi, le risque quadratique est

$$\forall \lambda > 0, R(\lambda, \widetilde{T}_{1,\alpha}) = \mathrm{biais}_\lambda(\widetilde{T}_{1,\alpha})^2 + \mathrm{Var}_\lambda(\widetilde{T}_{1,\alpha}(X)) = \frac{(\alpha-1)^2 + \alpha^2/n}{\lambda^2} := h_\lambda(\alpha)$$

On trouve α^* en minimisant la fonction h_λ, qui est dérivable :

$$h'_\lambda(\alpha) = \frac{2}{\lambda^2}((\alpha - 1) + \alpha/n).$$

Le minimum de h_λ est atteint en

$$\alpha^* = \frac{1}{1 + n^{-1}} = \frac{n}{n+1}$$

Cette quantité ne dépendant pas de λ, on a bien

$$\forall \lambda > 0, \forall \alpha > 0, R(\lambda, \widetilde{T}_{1,\alpha^*}) \leq R(\lambda, \widetilde{T}_{1,\alpha}).$$

Cherchons maintenant la plage de valeurs de α pour lesquelles $\forall \lambda > 0$,

$$R(\lambda, \widetilde{T}_{1,\alpha}) \leq R(\lambda, T_1) \qquad (\star)$$

À n, λ fixés,

$$\begin{aligned}
(\star) &\iff \frac{(\alpha-1)^2 + \alpha^2/n}{\lambda^2} - \frac{1}{n\lambda^2} \leq 0 \\
&\iff (\alpha-1)^2 + \alpha^2/n - 1/n \leq 0 \\
&\iff (\alpha-1)(\alpha - 1 + (\alpha+1)/n) \leq 0 \\
&\iff (\alpha-1)\Big(\alpha(1+\frac{1}{n}) - (1-\frac{1}{n})\Big) \leq 0 \\
&\iff \frac{(1-\frac{1}{n})}{(1+\frac{1}{n})} \leq \alpha \leq 1
\end{aligned}$$

L'ensemble $E_n = \left[\frac{(1-\frac{1}{n})}{(1+\frac{1}{n})}, 1\right]$ ne dépend pas de λ et pour tout $\alpha \in E_n$, $(\star)$ est vraie pour tout $\lambda > 0$.

Il n'y a pas de contradiction avec la question précédente car l'estimateur $\tilde{T}_{1,\alpha}$ étant biaisé, le résultat d'optimalité de l'estimateur T_1 parmi les estimateurs non biaisés ne s'applique pas.

3.

(a) En posant $\varphi(x) = x$, d'après le point (1.) on sait que

$$\Phi(\lambda) = \mathbb{E}_\lambda \varphi(X_1) = \frac{1}{\lambda}.$$

$\forall\, y \in [0,\infty)$ on a $\Phi^{-1}(y) = \frac{1}{y}$, et pour estimer g_2, en prenant $\widehat{\Phi}_n = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^n \varphi(X_i)$ on peut construire

$$T_2(X) = \frac{\log 2}{\Phi^{-1}(\widehat{\Phi}_n)} = \frac{\log 2}{n}\sum_{i=1}^n X_i\,.$$

(b) En voyant T_2 comme un estimateur de g_1, on peut écrire $T_2(X) = \alpha T_1(X)$ avec $\alpha = \log 2$. Ainsi, $T_2 = \widetilde{T}_{1,\log 2}$. D'après le point (2.) on sait que $R(\lambda, \widetilde{T}_{1,\alpha}) \leq R(\lambda, T_1)$ pour tout $\lambda > 0$ si $\alpha \in \left[\frac{(1-\frac{1}{n})}{(1+\frac{1}{n})}, 1\right]$. Mais pour $n = 55$, $\log 2 = 0.693 \notin [0.964, 1]$, on ne peut pas garantir que le risque quadratique du T_2 comme un estimateur de g_1 est inférieur à celui du T_1 pour tout $\lambda > 0$.

4. Voir le code.
5. Voir le code.
6. Voir le code. On voit sur le graphique que l'estimateur biaisé peut avoir un risque quadratique plus petit que l'estimateur non biaisé pour les petites tailles d'échantillon.

Solution Exercice 3

1. La fonction caractéristique de n variables aléatoires exponentielles $X_j \sim \mathcal{E}(\lambda)$, *i.i.d.*, $j = 1, ..., n$ est

$$\varphi_{\sum_{j=1}^n X_j}(t) = \prod_{j=1}^n \frac{1}{1 - \frac{it}{\lambda}} = \frac{1}{\left(1 - \frac{it}{\lambda}\right)^n}\,,$$

On reconnait la fonction caractéristique d'une loi $Gamma(n, \frac{1}{\lambda})$, d'où $T(X) = \sum_{j=1}^n X_j \sim Gamma(n, \frac{1}{\lambda})$. Sous l'hypothèse H_1, on a $\lambda > \lambda_0$ donc $\mathbb{E}_\lambda(T(X)) < \mathbb{E}_{\lambda_0}(T(X))$. Ceci suggère un test consistant à rejeter H_0 lorsque $T(X)$ est plus petit qu'un seuil γ à fixer en fonction du niveau du test α désiré. Ainsi, on cherche à construire un test de forme

$$\delta(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } T(x) < \gamma \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

Avec γ à déterminer, tel que $\mathbb{P}_{\lambda_0}(T(X) < \gamma) = \alpha$. (c'est-à-dire, tel que la probabilité de se tromper lorsque H_0 est vraie vaut α).
On détermine γ en utilisant le fait que sous H_0, $T(X) \sim Gamma(n, \frac{1}{\lambda})$, d'où, pour tout $\gamma > 0$, $\mathbb{P}_{\lambda_0}(T(X) < \gamma) = F_{Gamma}(\gamma; n, 1/\lambda_0)$ Ainsi,

$$\mathbb{P}_{\lambda_0}(T(X) < \gamma) = \alpha \iff F_{Gamma}(\gamma; n, 1/\lambda_0) = \alpha \iff \gamma = F^{-1}(\alpha; n, 1/\lambda_0).$$

où F^{-1}_{Gamma} et la fonction quantile de loi Gamma. D'où le seuil γ à choisir : $\gamma = F^{-1}(\alpha; n, 1/\lambda_0)$.
Remarque : On peut vérifier facilement que le test ainsi construit est un test de Neyman-Pearson pour l'hypothèse H_0 contre $\widetilde{H}_1 : \lambda = \lambda_1$ avec $\lambda_1 > \lambda_0$.

2. Voir le code.
3. Voir le code.
4. Voir le code.
5. Voir le code.
6. Il faut montrer que

$$\alpha' = \mathbb{P}\Big[T < \frac{1}{\lambda_0} \Big| T \sim Gamma\Big(n, \frac{1}{\lambda'}\Big)\Big] < \mathbb{P}\Big[T < \frac{1}{\lambda_0} \Big| T \sim Gamma\Big(n, \frac{1}{\lambda_0}\Big)\Big] = \alpha\,.$$

Pour cela il suffit de montrer que

$$F_{Gamma}\Big(\frac{1}{\lambda_0}; n, \frac{1}{\lambda'}\Big) < F_{Gamma}\Big(\frac{1}{\lambda_0}; n, \frac{1}{\lambda_0}\Big)$$

si $\lambda' < \lambda_0$, ou encore que pour tout $x > 0$,

$$F_{Gamma}\Big(x; n, \frac{1}{\lambda'}\Big) < F_{Gamma}\Big(x; n, \frac{1}{\lambda_0}\Big).$$

Soit $x > 0$. On pose $f(\lambda) = F_{Gamma}\Big(x; n, \frac{1}{\lambda}\Big) = 1 - e^{-x\lambda} \sum_0^{n-1} (x\lambda)^j/j!$. Il s'agit de montrer que la fonction f est croissante. f est dérivable , de dérivée

$$\begin{aligned} f'(\lambda) &= e^{-x\lambda}\left(x \sum_0^{n-1} (x\lambda)^j/j! - \sum_0^{n-1} (x)^j j \lambda^{j-1}/j!\right) \\ &= x e^{-x\lambda}\left(\sum_0^{n-1} (x\lambda)^j/j! - \sum_0^{n-2} (x\lambda)^j/j!\right) \\ &> 0. \end{aligned}$$

D'où le résultat.