第 10 章 股票价格的行为模式

10.1 说一个地区的气温服从马尔可夫过程，有什么含义？你认为温度确实可以服从马尔可夫过程吗？

假设你必须从以下已知条件下预报未来气温 a)当前气温，b)气温历史记录和 c)季节平均气温和季节气温变化趋势方面的知识。如果气温服从一个马尔可夫过程，气温的历史记录将是不相关的。

为了回答这个问题的第二部分，你可以考虑在五月份的第一个星期的下列景象：

1） 星期一到星期三天气温暖；星期五非常寒冷。

2） 星期一到星期五都非常寒冷。

你预测这个周末的气温会是怎样的呢？如果你在第二中情形下更悲观，那么气温就不服从一个马尔可夫过程。

10.2 基于股票价格过去历史的交易准则是否总是可以获得高于平均收益率的收益？请讨论这个问题。

首先要说明的是任何交易准则只能因为好运才能获得高于平均收益率的收益。关键问题是风险调整时，一个交易准则能否不断地适应市场。对于一个交易准则可能做到这点，然而，当足够多的投资者知道这个准则并按这个准则进行投资时，利润将消失。为了说明这点，考虑一个小公司影响的现象，当对风险做合适的调整，在小公司股票上的资产组合比对大公司股票的资产组合更有效。在 1980 年代早期相关论文发表后，公众基金被设立用来利用这种现象。有证据表明正是由于这导致了这种现象的消失。

10.3 一家公司的现金头寸，用百万美元衡量，服从一般化的维纳过程，每月的漂移率为 0.1，方差率为 0.16，初始现金头寸为 2.0。

（a） 分别说明 1 个月后、6 个月后和 1 年后，现金头寸的可能的分布是什么？

（b） 6 个月后和 1 年后负责现金头寸的可能性为多少？

（c） 未来的什么时间负现金头寸的可能性最大？

10.4 一家公司的现金头寸，用百万美元衡量，服从一般化的维纳过程，每季度的漂移率为 1.5，方差率为 4.0。如果要求公司在 1 年后负值现金流的概率小于 5%，公司的初始现金流要多高？

假设公司初始现金头寸是 x.，在一年后其现金头寸的可能分布是

$$\phi(x+4\times 0.5,\sqrt{4}\times\sqrt{4})=\phi(x+2.0,4)$$

在一年后一个负现金流的可能性是

$$N(-\frac{x+2.0}{4})$$

这里 N（x）是一个小于 x 的标准正态变量（0 期望，标准差为 1.0）的累计分布，从正态分布表可以得出：

$$N(-\frac{x+2.0}{4})=0.05$$

当

$$-\frac{x+2.0}{4}=-1.6449$$

例如：当 x=4.5796，初始现金头寸必须是 4560000 美元。

10.5 变量X1和X2服从一般化的维纳过程，漂移率为 μ1和μ2。方差率为σ_1^2 和 σ_2^2。X1+X2服从什么样的过程，如果：

（a） X1 和 X2 在任意小的时间间隔内的变化都是不相关的？

（b） X1 和 X2 在任意小的时间间隔内的变化的相关系数 ρ 为多少？

假设起初X_1和X_2等于a_1和a_2，经过T时间后，X_1的概率分布是

$$\phi(a_1+\mu_1 T, \sigma_1\sqrt{T})$$

X_2的概率分布是

$$\phi(a_2+\mu_2 T, \sigma_2\sqrt{T})$$

根据独立正态分布的性质，X_1+X_2的概率分布是

$$\phi(a_2+\mu_1 T+a_2+\mu_2 T, \sqrt{\sigma_1{}^2 T+\sigma_2{}^2 T})$$

即

$$\phi(a_1+a_2+(\mu_1+\mu_2)T, \sqrt{(\sigma_1{}^2+\sigma_2{}^2)T})$$

这说明X_1+X_2服从一个漂移率为 $\mu_1+\mu_2$，方差为 $\sigma_1{}^2+\sigma_2{}^2$ 的维纳过程。

b) X_1+X_2在一个短的时间间隔 Δt 的概率分布为：

$$\phi[(\mu_1+\mu_2)T, \sqrt{(\sigma_1{}^2+\sigma_2{}^2+2\rho\sigma_1\sigma_2)T}]$$

如果 $\mu_1, \mu_2, \sigma_1, \sigma_2$ 和 ρ 都是变化的，那么在一个长的时间 T 内的概率分布为：

$$\phi\left[(\mu_1+\mu_2)T, \sqrt{(\sigma_1{}^2+\sigma_2{}^2+2\rho\sigma_1\sigma_2)T}\right]$$

因此变量 X_1+X_2 服从一个漂移率为 $\mu_1+\mu_2$，方差为 $\sigma_1{}^2+\sigma_2{}^2+2\rho\sigma_1\sigma_2$ 的一般维纳过程。

10.6 考虑变量 S，服从如下过程

在头 3 年中 μ=2，σ=3，在接下来的 3 年中 μ=3，σ=4，如果变量的初始值为 5，问在第 6 年末变量价值的分布概率为多少？

S 在第一个三年变化的概率分布是

$$\phi(2\times 3, 3\times\sqrt{3}) = \phi(6, 5.20)$$

下一个三年变化的概率分布是：

$$\phi(3\times 3, 4\times\sqrt{3}) = \phi(9, 6.93)$$

在六年的变化是两个概率分布之和，因此变化的概率分布是：

$$\phi(6+9, \sqrt{5.20^2+6.93^2}) = \phi(15, 8.66)$$

由于变量初始值为 5，在 6 年末变量值的概率分布是 $\phi(20,8.66)$

10.7 假设有一股票，其期望收益率为每年 16%，波动率为每年 30%，某天其股票价格为＄50，计算如下问题：
（a） 预期下一天的股票价格为多少？
（b） 下一天的股票的标准差为多少？
（c） 下一天该股票 95%的置信区间为多少？

10.8 股票 A 和股票 B 均符合几何布朗运动，在任何短时间内两者的变化是不相关的。问由一股股票 A 和一股股票 B 构成的证券组合的价值是否遵循几何布朗运动？请解释原因。
10.9 等式（10.7）可以写成如下等式：

$$dx = a(x_0 - x)dt + sxdz$$

其中 μ 和 σ 均为常数。请阐述上式和下述几个式子的不同：

$$\Delta S = \mu \Delta t + \sigma \in \sqrt{\Delta t}$$

$$\Delta S = \mu S \Delta t + \sigma \in \sqrt{\Delta t}$$

$$dS = \mu S dt + \sigma S dz$$

为什么公式（10.7）比上述三种模型更符合股票价格的运动趋势？
10.10 已知短期利率 γ 遵循如下随机过程：

$$dr = (a - r)bdt + rcdz$$

其中 a，b 和 c 均为正常数，dz 是维纳过程。试描述这一随机过程的性质。
10.11 假设某个股票价格遵循几何布朗运动，其期望收益率为 μ，波动率为 σ：

$$dS = \mu S dt + \sigma S dz$$

变量 S^n 遵循什么过程？证明 S^n 也服从几何布朗运动。S_T 的期望价值即股票在 T 时刻的价格为 $Se^{\mu(T-t)}$。$S_T{}^n$ 的期望价值是多少？

如果 $G(S,t) = S^n$ 则 $\partial G/\partial t = 0, \partial G/\partial S = nS^{n-1}, \partial^2 G/\partial S^2 = n(n-1)S^{n-2}$

用 Ito 引理得 $dG = [\mu n G + \frac{1}{2} n(n-1)\sigma^2 G]dt + \sigma n G dz$

这显示 $G = S^n$ 服从几何布朗运动，期望收益为 $\mu n + \frac{1}{2} n(n-1)\sigma^2$，波动率是 $n\sigma$，股票价格 S 期望回报是 μ。S_T 的期望价值是 $S_0 e^{\mu T}$。$S_T{}^n$ 的期望价值是

$$S_0{}^n e^{[\mu n + \frac{1}{2} n(n-1)\sigma^2]T}$$

10.12 假设 x 是在 T 时刻支付＄1 的贴现债券按连续复利计息的到期收益率。假设 x 遵循如

下过程：

$$dx = a(x_0 - x)dt + sxdz$$

其中，a，x_0 和 s 是正常数，dz 是维纳过程。那么此债券的价格运动遵循何种过程？

根据 1to 引理 $dB = [\frac{\partial B}{\partial z}a(x_0 - x) + \frac{\partial B}{\partial t} + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 B}{\partial x^2}s^2x^2]dt + \frac{\partial B}{\partial x}sxdz$

由于 $B = e^{-x(T-t)}$

$$\frac{\partial B}{\partial t} = xe^{-x(T-t)} = xB$$

$$\frac{\partial B}{\partial x} = -(T-t)e^{-x(T-t)} = -(T-t)B$$

$$\frac{\partial^2 B}{\partial x^2} = (T-t)^2 e^{-x(T-t)} = (T-t)^2 B$$

所以 $dB = [-a(x_0 - x)(T-t) + \frac{1}{2}s^2x^2(T-t)^2]Bdt - sx(T-t)Bdz$

10.13 假设 x 是一永久性政府债券的收益率。此债券每年分发＄1 的利息。假设 x 是按连续复利计息的，债券的利息在不停的支付，x 遵循如下过程；

$$dx = a(x_0 - x)dt + sxdz$$

其中，a，x_0 和 s 是正常数，dz 是维纳过程。那么此债券的价格运动遵循何种？对于债券持有者来说，瞬时收益率（包括利息和投资收益）为多少？

方法同上