1. 假设$u(x,y)$的所有二阶偏导数都连续，并且满足以下关系

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}-\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=0,$$

$$u(x,2x)=x, u'_x(x,2x)=x^2.$$

请求出

$$u''_{xx}(x,2x), u''_{xy}(x,2x), u''_{yy}(x,2x).$$

2. 请将二元情形的Laplace 方程变换为极坐标的形式，即假设u对x和y二阶连续可导且$x=r\cos\theta, y=r\sin\theta$，然后将方程

$$\Delta u:=\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=0$$

写成u关于r,θ求导的形式。

3. 假设$F(u,v)$有连续偏导数，请证明曲面$S: F(nx-lz, ny-mz)=0$上任意一点的切平面都平行于直线$L: \frac{x}{l}=\frac{y}{m}=\frac{z}{n}$.

4. 设$f,g:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}$是连续二阶可微多元函数，$F:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^n$是连续可微向量值多元函数（向量场）, 其中$F=(F_1,F_2,...,F_n)$。定义梯度算子$\mathrm{grad}\ f:=(\partial_1 f,\partial_2 f,...,\partial_n f)$, 以及散度算子$\mathrm{div}F:=\partial_1 F_1+\partial_2 F_2+...+\partial_n F_n$（可以用Hamilton符号$\nabla$表示，记$\nabla f:=\mathrm{grad}\ f$和$\nabla\cdot F:=\mathrm{div}F$）。证明以下公式

   (a) $\Delta f=\nabla\cdot\nabla f$

   (b) $\nabla\cdot(fF)=\nabla f\cdot F+f\nabla\cdot F$

   (c) $f\Delta g=\nabla\cdot(f\nabla g)-\nabla f\cdot\nabla g$

5. 在点$(0,0)$邻域内，将函数$f(x,y)=\ln(1+x+y)$ 按照拉格朗日型余项展开成泰勒公式（到一阶）。

6. 利用泰勒公式证明: 当$|x|,|y|,|z|$充分小时，有近似公式

$$\cos x+y+z-\cos x\cos y\cos z\approx -(xy+yz+zx).$$

7. 已知f一阶连续可微，且$f(xy^2,x+y)=0$，计算$\frac{dy}{dx}$.

8. 计算3维球坐标变换的雅可比行列式，即已知

$$\left\{\begin{array}{l} x=r\cos\theta\sin\varphi \\ y=r\sin\theta\sin\varphi \quad (0\leqslant\theta<2\pi, 0\leqslant\varphi\leqslant\pi) \\ z=r\cos\varphi \end{array}\right.$$

计算$J=\frac{D(x,y,z)}{D(r,\theta,\varphi)}$.

9. 假设$y=(y_1,y_2,...,y_n)\in\mathbb{R}^n$满足条件$|y|=1$, 常数$0<\lambda_1\leqslant\lambda_2\leqslant...\leqslant\lambda_n$, 计算

$$\sum_{i=1}^{n}\lambda_i y_i^2$$

的最大值和最小值，以及取等号的条件。

10. (a) (均值不等式) 假设$\sum_{i=1,2,...,n}x_i=l$且$x_i>0, i=1,2,...,n$, 求$x_1...x_n$的最大值.

    (b) (Hölder 不等式) 假设$a_i\geqslant 0, i=1,2,...,n$是常数，变量$x_i\geqslant 0, i=1,2,...,n$满足$\sum_{i=1,2,...,n}a_i x_i=l$, 求下面函数的最小值

$$(\sum_{i=1}^{n}a_i^p)^{\frac{1}{p}}(\sum_{i=1}^{n}x_i^q)^{\frac{1}{q}},$$

    其中$p,q>1$ 并且$\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$.

11. 设常数$a,b,c>0$满足$b^2-ac>0$,，请计算$f(x,y)=ax^2+2bxy+cy^2$在单位闭球$\bar{B}=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2: x^2+y^2\leqslant 1\}$上的所有极值以及最大值和最小值。