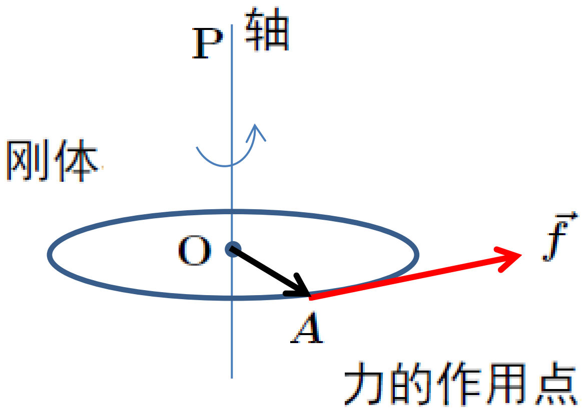
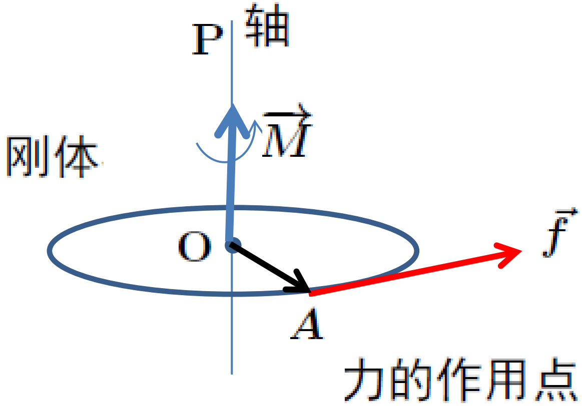
向量的向量积(叉积)

一个物理问题



力关于转轴OP的力矩$\vec{M}$ 为一个矢量

一个物理问题

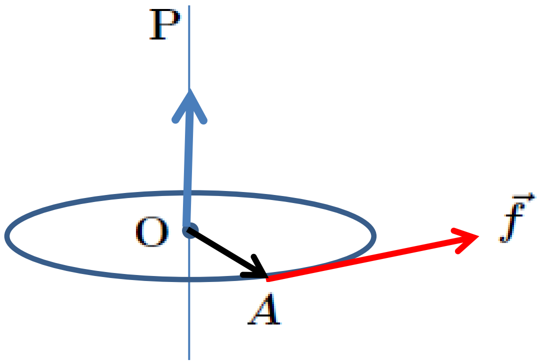


力关于转轴OP的力矩$\vec{M}$ 为一个矢量

其方向垂直于$\overrightarrow{OA}, \vec{f}$ 所决定的平面，

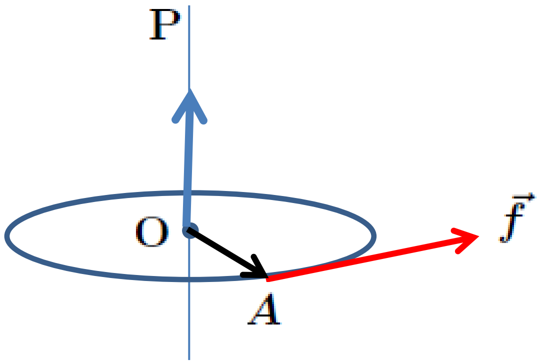
并使得$\overrightarrow{OA}, \vec{f}, \vec{M}$三者构成右手系，

其大小为$|\overrightarrow{OA}||\vec{f}|\sin(\overrightarrow{OA}, \vec{f})$



两个向量产生出第三个与它们都垂直的向量的运算具有广泛的数学背景和物理背景，所以

定义



两个向量产生出第三个与它们都垂直的向量的运算具有广泛的数学背景和物理背景，所以

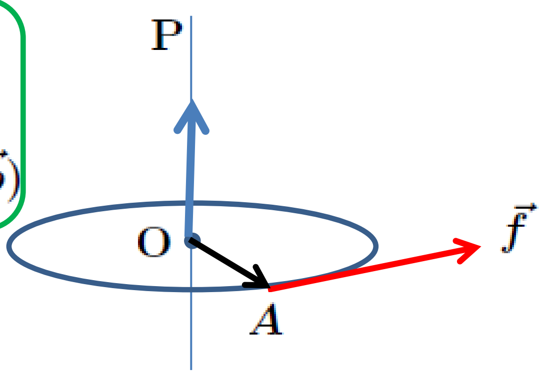
定义

两向量$\vec{a},\vec{b}$的向量积$\vec{a}\times\vec{b}$为一个向量$\vec{c}$，它满足

①$\vec{c}\perp\vec{a},\vec{c}\perp\vec{b}$， ②$\vec{a}$，$\vec{b}$，$\vec{c}$构成右手系，

③$|\vec{c}|=|\vec{a}||\vec{b}|\sin(\vec{a},\vec{b})$

$$\vec{a} \times \vec{b} \perp \vec{a}$$
$$\vec{a} \times \vec{b} \perp \vec{b}$$
$$|\vec{a} \times \vec{b}| = |\vec{a}||\vec{b}| \sin(\vec{a}, \vec{b})$$



两个向量产生出第三个与它们都垂直的向量的运算具有广泛的数学背景和物理背景，所以

定义

两向量$\vec{a}, \vec{b}$的向量积$\vec{a} \times \vec{b}$为一个向量$\vec{c}$，它满足

①$\vec{c} \perp \vec{a}, \vec{c} \perp \vec{b}$， ②$\vec{a}$，$\vec{b}$，$\vec{c}$构成右手系，

③$|\vec{c}| = |\vec{a}||\vec{b}| \sin(\vec{a}, \vec{b})$

显见向量积具有下述性质:

①$\vec{a},\vec{b}$非零，$\vec{a} \parallel \vec{b} \Leftrightarrow \vec{a} \times \vec{b} = 0$

定义

两向量$\vec{a},\vec{b}$的向量积$\vec{a} \times \vec{b}$为一个向量$\vec{c}$，它满足

①$\vec{c} \perp \vec{a}, \vec{c} \perp \vec{b}$，②$\vec{a}$，$\vec{b}$，$\vec{c}$构成右手系，

③$|\vec{c}| = |\vec{a}||\vec{b}| \sin(\vec{a}, \vec{b})$

显见向量积具有下述性质:

①$\vec{a},\vec{b}$非零，$\vec{a} \parallel \vec{b} \Leftrightarrow \vec{a} \times \vec{b} = 0$

②$\vec{a} \times \vec{b} = -\vec{b} \times \vec{a}$

定义

两向量$\vec{a},\vec{b}$的向量积$\vec{a} \times \vec{b}$为一个向量$\vec{c}$，它满足

①$\vec{c} \perp \vec{a}, \vec{c} \perp \vec{b}$， ②$\vec{a}$，$\vec{b}$，$\vec{c}$构成右手系，

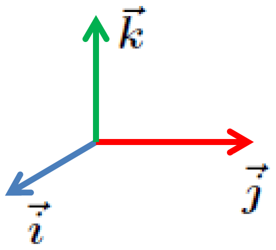
③$|\vec{c}| = |\vec{a}||\vec{b}| \sin(\vec{a},\vec{b})$

显见向量积具有下述性质:

①$\vec{a},\vec{b}$非零，$\vec{a} \parallel \vec{b} \Leftrightarrow \vec{a} \times \vec{b} = 0$

②$\vec{a} \times \vec{b} = -\vec{b} \times \vec{a}$

③$\vec{i} \times \vec{j} = \vec{k}, \vec{j} \times \vec{k} = \vec{i}, \vec{k} \times \vec{i} = \vec{j}$



定义

两向量$\vec{a},\vec{b}$的向量积$\vec{a} \times \vec{b}$为一个向量$\vec{c}$，它满足

①$\vec{c} \perp \vec{a}, \vec{c} \perp \vec{b}$，　②$\vec{a}$，$\vec{b}$，$\vec{c}$构成右手系，

③$|\vec{c}| = |\vec{a}||\vec{b}| \sin(\vec{a},\vec{b})$

显见向量积具有下述性质：

①$\vec{a},\vec{b}$非零，$\vec{a} \parallel \vec{b} \Leftrightarrow \vec{a} \times \vec{b} = 0$

②$\vec{a} \times \vec{b} = -\vec{b} \times \vec{a}$

③$\vec{i} \times \vec{j} = \vec{k}, \vec{j} \times \vec{k} = \vec{i}, \vec{k} \times \vec{i} = \vec{j}$

④如图：$S_{\square} = |\vec{a} \times \vec{b}|, S_{\triangle} = \frac{1}{2}|\vec{a} \times \vec{b}|$

定义

两向量$\vec{a},\vec{b}$的向量积$\vec{a} \times \vec{b}$为一个向量$\vec{c}$，它满足

①$\vec{c} \perp \vec{a}, \vec{c} \perp \vec{b}$， ②$\vec{a}$，$\vec{b}$，$\vec{c}$构成右手系，

③$|\vec{c}| = |\vec{a}||\vec{b}| \sin(\vec{a},\vec{b})$

显见向量积具有下述性质:

①$\vec{a},\vec{b}$非零，$\vec{a}\parallel\vec{b}\Leftrightarrow\vec{a}\times\vec{b}=0$

②$\vec{a}\times\vec{b}=-\vec{b}\times\vec{a}$

③$\vec{i}\times\vec{j}=\vec{k},\vec{j}\times\vec{k}=\vec{i},\vec{k}\times\vec{i}=\vec{j}$

④如图：$S_{\square}=|\vec{a}\times\vec{b}|,S_{\triangle}=\dfrac{1}{2}|\vec{a}\times\vec{b}|$

⑤$\lambda\in\mathbb{R}\Rightarrow(\lambda\vec{a})\times(\vec{b})=\lambda(\vec{a}\times\vec{b})=\vec{a}\times(\lambda\vec{b}),$

$$(\vec{a}+\vec{b})\times\vec{c}=\vec{a}\times\vec{c}+\vec{b}\times\vec{c},$$

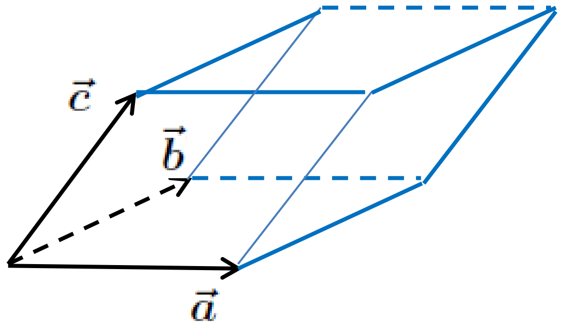
定义

两向量$\vec{a},\vec{b}$的向量积$\vec{a}\times\vec{b}$为一个向量$\vec{c}$，它满足

①$\vec{c}\perp\vec{a},\vec{c}\perp\vec{b}$， ②$\vec{a}$，$\vec{b}$，$\vec{c}$构成右手系，

③$|\vec{c}|=|\vec{a}||\vec{b}|\sin(\vec{a},\vec{b})$

⑥ 三个向量所决定的平行六面体的体积为$V = |(\vec{a} \times \vec{b}) \cdot \vec{c}|$



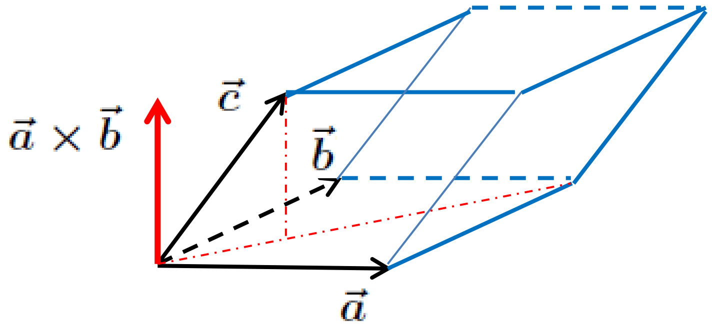
定义

两向量$\vec{a}, \vec{b}$的向量积$\vec{a} \times \vec{b}$为一个向量$\vec{c}$，它满足

①$\vec{c} \perp \vec{a}, \vec{c} \perp \vec{b}$， ②$\vec{a}$，$\vec{b}$，$\vec{c}$构成右手系，

③$|\vec{c}| = |\vec{a}||\vec{b}| \sin(\vec{a}, \vec{b})$

⑥ 三个向量所决定的平行六面体的体积为$V = |(\vec{a} \times \vec{b}) \cdot \vec{c}|$



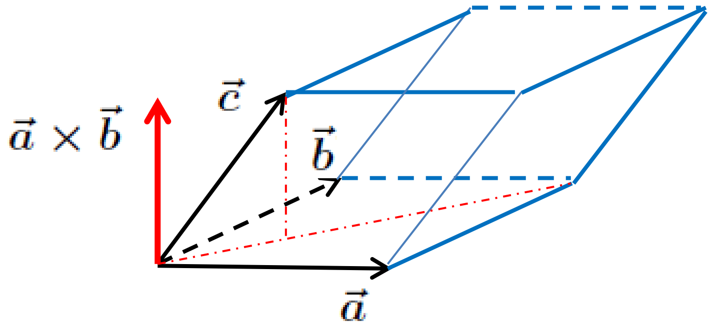
定义

两向量$\vec{a}, \vec{b}$的向量积$\vec{a} \times \vec{b}$为一个向量$\vec{c}$，它满足

①$\vec{c} \perp \vec{a}, \vec{c} \perp \vec{b}$， ②$\vec{a}$，$\vec{b}$，$\vec{c}$构成右手系，

③$|\vec{c}| = |\vec{a}||\vec{b}| \sin(\vec{a}, \vec{b})$

⑥ 三个向量所决定的平行六面体的体积为$V=|(\vec{a}\times\vec{b})\cdot\vec{c}|$



三个向量$\vec{a},\vec{b},\vec{c}$共面的充分必要条件是$(\vec{a}\times\vec{b})\cdot\vec{c}=0$

定义

两向量$\vec{a},\vec{b}$的向量积$\vec{a}\times\vec{b}$为一个向量$\vec{c}$，它满足

①$\vec{c}\perp\vec{a},\vec{c}\perp\vec{b}$， ②$\vec{a}$，$\vec{b}$，$\vec{c}$构成右手系，

③$|\vec{c}|=|\vec{a}||\vec{b}|\sin(\vec{a},\vec{b})$

向量积用坐标表示

$$\vec{a}=\{a_x,a_y,a_z\},\vec{b}=\{b_x,b_y,b_z\}$$

$$\vec{a}=a_x\vec{i}+a_y\vec{j}+a_z\vec{k},\vec{b}=b_x\vec{i}+b_y\vec{j}+b_z\vec{k},$$

向量积用坐标表示

$$\vec{a} = \{a_x, a_y, a_z\}, \vec{b} = \{b_x, b_y, b_z\}$$

$$\vec{a} = a_x\vec{i} + a_y\vec{j} + a_z\vec{k}, \vec{b} = b_x\vec{i} + b_y\vec{j} + b_z\vec{k},$$

$$\vec{a} \times \vec{b} = (a_x\vec{i} + a_y\vec{j} + a_z\vec{k}) \times (b_x\vec{i} + b_y\vec{j} + b_z\vec{k})$$

向量积用坐标表示

$$\vec{a}=\{a_x,a_y,a_z\},\vec{b}=\{b_x,b_y,b_z\}$$

$$\vec{a}=a_x\vec{i}+a_y\vec{j}+a_z\vec{k},\vec{b}=b_x\vec{i}+b_y\vec{j}+b_z\vec{k},$$

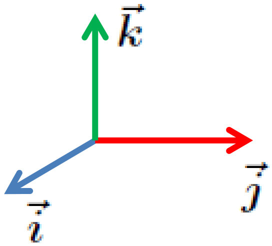
$$\vec{a}\times\vec{b}=(a_x\vec{i}+a_y\vec{j}+a_z\vec{k})\times(b_x\vec{i}+b_y\vec{j}+b_z\vec{k})$$

$$=a_xb_y\vec{k}+a_xb_z(-\vec{j})+a_yb_x(-\vec{k})+a_yb_z\vec{i}+a_zb_x\vec{j}+a_zb_y(-\vec{i})$$

向量积用坐标表示

$$\vec{a}=\{a_x,a_y,a_z\},\vec{b}=\{b_x,b_y,b_z\}$$

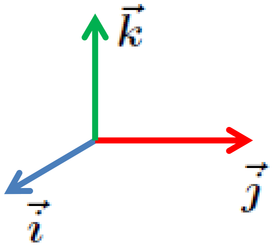
$$\vec{a}=a_x\vec{i}+a_y\vec{j}+a_z\vec{k},\vec{b}=b_x\vec{i}+b_y\vec{j}+b_z\vec{k},$$



$$\vec{a}\times\vec{b}=(a_x\vec{i}+a_y\vec{j}+a_z\vec{k})\times(b_x\vec{i}+b_y\vec{j}+b_z\vec{k})$$

$$=a_xb_y\vec{k}+a_xb_z(-\vec{j})+a_yb_x(-\vec{k})+a_yb_z\vec{i}+a_zb_x\vec{j}+a_zb_y(-\vec{i})$$

向量积用坐标表示



$$\vec{a} = \{a_x, a_y, a_z\}, \vec{b} = \{b_x, b_y, b_z\}$$

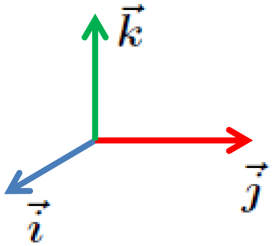
$$\vec{a} = a_x\vec{i} + a_y\vec{j} + a_z\vec{k}, \vec{b} = b_x\vec{i} + b_y\vec{j} + b_z\vec{k},$$

$$\vec{a} \times \vec{b} = (a_x\vec{i} + a_y\vec{j} + a_z\vec{k}) \times (b_x\vec{i} + b_y\vec{j} + b_z\vec{k})$$

$$= a_x b_y\vec{k} + a_x b_z(-\vec{j}) + a_y b_x(-\vec{k}) + a_y b_z\vec{i} + a_z b_x\vec{j} + a_z b_y(-\vec{i})$$

$$= (a_y b_z - a_z b_y)\vec{i} + (a_z b_x - a_x b_y)\vec{j} + (a_x b_y - a_y b_x)\vec{k}$$

向量积用坐标表示



$$\vec{a} = \{a_x, a_y, a_z\}, \vec{b} = \{b_x, b_y, b_z\}$$

$$\vec{a} = a_x\vec{i} + a_y\vec{j} + a_z\vec{k}, \vec{b} = b_x\vec{i} + b_y\vec{j} + b_z\vec{k},$$

$$\vec{a} \times \vec{b} = (a_x\vec{i} + a_y\vec{j} + a_z\vec{k}) \times (b_x\vec{i} + b_y\vec{j} + b_z\vec{k})$$

$$= a_xb_y\vec{k} + a_xb_z(-\vec{j}) + a_yb_x(-\vec{k}) + a_yb_z\vec{i} + a_zb_x\vec{j} + a_zb_y(-\vec{i})$$

$$= (a_yb_z - a_zb_y)\vec{i} + (a_zb_x - a_xb_z)\vec{j} + (a_xb_y - a_yb_x)\vec{k}$$

这正是如下三阶行列式的值

$$\vec{a} \times \vec{b} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \end{vmatrix}$$

三阶行列式

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}$$

三阶行列式

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = \left|\begin{array}{ccc|cc} a_1 & b_1 & c_1 & a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 & a_2 & b_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 & a_3 & b_3 \end{array}\right.$$

$$= a_1b_2c_3 + b_1c_2a_3 + c_1a_2b_3 - c_1b_2a_3 - a_1c_2b_3 - b_1a_2c_3$$

三阶行列式

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = \left|\begin{array}{ccc|cc} a_1 & b_1 & c_1 & a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 & a_2 & b_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 & a_3 & b_3 \end{array}\right.$$

$$= a_1b_2c_3 + b_1c_2a_3 + c_1a_2b_3 - c_1b_2a_3 - a_1c_2b_3 - b_1a_2c_3$$

$$= \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}$$

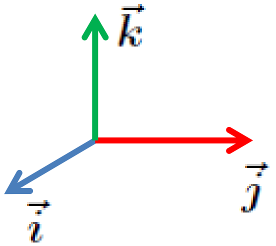
三阶行列式

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = \left|\begin{array}{ccc|cc} a_1 & b_1 & c_1 & a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 & a_2 & b_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 & a_3 & b_3 \end{array}\right.$$

$$= a_1b_2c_3 + b_1c_2a_3 + c_1a_2b_3 - c_1b_2a_3 - a_1c_2b_3 - b_1a_2c_3$$

$$= \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}$$

向量积用坐标表示



$$\vec{a} = \{a_x, a_y, a_z\}, \vec{b} = \{b_x, b_y, b_z\}$$

$$\vec{a} = a_x\vec{i} + a_y\vec{j} + a_z\vec{k}, \vec{b} = b_x\vec{i} + b_y\vec{j} + b_z\vec{k},$$

$$\vec{a} \times \vec{b} = (a_x\vec{i} + a_y\vec{j} + a_z\vec{k}) \times (b_x\vec{i} + b_y\vec{j} + b_z\vec{k})$$

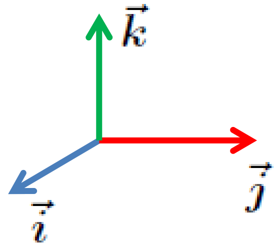
$$= a_x b_y \vec{k} + a_x b_z(-\vec{j}) + a_y b_x(-\vec{k}) + a_y b_z \vec{i} + a_z b_x \vec{j} + a_z b_y(-\vec{i})$$

$$= (a_y b_z - a_z b_y)\vec{i} + (a_z b_x - a_x b_z)\vec{j} + (a_x b_y - a_y b_x)\vec{k}$$

这正是如下三阶行列式的值

$$\vec{a} \times \vec{b} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \end{vmatrix}$$

向量积用坐标表示



$$\vec{a} = \{a_x, a_y, a_z\}, \vec{b} = \{b_x, b_y, b_z\}$$

$$\vec{a} = a_x\vec{i} + a_y\vec{j} + a_z\vec{k}, \vec{b} = b_x\vec{i} + b_y\vec{j} + b_z\vec{k},$$

$$\vec{a} \times \vec{b} = (a_x\vec{i} + a_y\vec{j} + a_z\vec{k}) \times (b_x\vec{i} + b_y\vec{j} + b_z\vec{k})$$

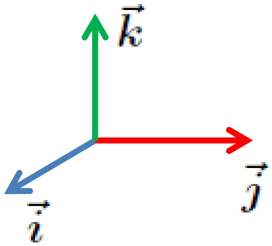
$$= a_xb_y\vec{k} + a_xb_z(-\vec{j}) + a_yb_x(-\vec{k}) + a_yb_z\vec{i} + a_zb_x\vec{j} + a_zb_y(-\vec{i})$$

$$= (a_yb_z - a_zb_y)\vec{i} + (a_zb_x - a_xb_z)\vec{j} + (a_xb_y - a_yb_x)\vec{k}$$

这正是如下三阶行列式的值

$$\vec{a} \times \vec{b} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \end{vmatrix} \begin{matrix} \vec{i} & \vec{j} \\ a_x & a_y \\ b_x & b_y \end{matrix}$$

向量积用坐标表示



$$\vec{a}=\{a_x,a_y,a_z\},\vec{b}=\{b_x,b_y,b_z\}$$

$$\vec{a}=a_x\vec{i}+a_y\vec{j}+a_z\vec{k},\vec{b}=b_x\vec{i}+b_y\vec{j}+b_z\vec{k},$$

$$\vec{a}\times\vec{b}=(a_x\vec{i}+a_y\vec{j}+a_z\vec{k})\times(b_x\vec{i}+b_y\vec{j}+b_z\vec{k})$$

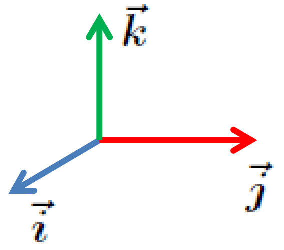
$$=a_xb_y\vec{k}+a_xb_z(-\vec{j})+a_yb_x(-\vec{k})+a_yb_z\vec{i}+a_zb_x\vec{j}+a_zb_y(-\vec{i})$$

$$=(a_yb_z-a_zb_y)\vec{i}+(a_zb_x-a_xb_z)\vec{j}+(a_xb_y-a_yb_x)\vec{k}$$

这正是如下三阶行列式的值

$$\vec{a}\times\vec{b}=\left|\begin{array}{ccc|cc} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} & \vec{i} & \vec{j} \\ a_x & a_y & a_z & a_x & a_y \\ b_x & b_y & b_z & b_x & b_y \end{array}\right.$$

向量积用坐标表示



$$\vec{a} = \{a_x, a_y, a_z\}, \vec{b} = \{b_x, b_y, b_z\}$$

$$\vec{a} = a_x\vec{i} + a_y\vec{j} + a_z\vec{k}, \vec{b} = b_x\vec{i} + b_y\vec{j} + b_z\vec{k},$$

$$\vec{a} \times \vec{b} = (a_x\vec{i} + a_y\vec{j} + a_z\vec{k}) \times (b_x\vec{i} + b_y\vec{j} + b_z\vec{k})$$

$$= a_x b_y \vec{k} + a_x b_z(-\vec{j}) + a_y b_x(-\vec{k}) + a_y b_z \vec{i} + a_z b_x \vec{j} + a_z b_y(-\vec{i})$$

$$= (a_y b_z - a_z b_y)\vec{i} + (a_z b_x - a_x b_z)\vec{j} + (a_x b_y - a_y b_x)\vec{k}$$

这正是如下三阶行列式的值

$$\boxed{\vec{a} \times \vec{b} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \end{vmatrix}}$$

三阶行列式的性质:

①行列式行列互换(转置)，其值不变，

即$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix}$$

三阶行列式的性质:

①行列式行列互换(转置)，其值不变，

$$即\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix}$$

②行列式两行(列)互换时，行列式的值变号，

$$即\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} a_2 & b_2 & c_2 \\ a_1 & b_1 & c_1 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}$$

例 $\vec{a}=\{2,5,7\},\vec{b}=\{1,2,4\}$,

则$\vec{a}\times\vec{b}=$

例 $\vec{a}=\{2,5,7\},\vec{b}=\{1,2,4\}$,

则$\vec{a}\times\vec{b}=\begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 2 & 5 & 7 \\ 1 & 2 & 4 \end{vmatrix}$

例 $\vec{a}=\{2,5,7\},\vec{b}=\{1,2,4\}$,

$$则\vec{a}\times\vec{b}=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ 2 & 5 & 7\\ 1 & 2 & 4\end{vmatrix}$$

$$=20\vec{i}+4\vec{k}+7\vec{j}-5\vec{k}-8\vec{j}-14\vec{i}$$

例 $\vec{a}=\{2,5,7\},\vec{b}=\{1,2,4\}$,

$$\text{则}\vec{a}\times\vec{b}=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ 2 & 5 & 7\\ 1 & 2 & 4\end{vmatrix}$$

$$=20\vec{i}+4\vec{k}+7\vec{j}-5\vec{k}-8\vec{j}-14\vec{i}$$

$$=6\vec{i}-\vec{j}-\vec{k}$$

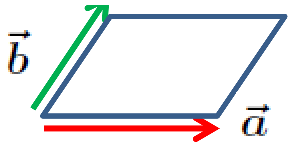
例　求以点$A(3,0,2), B(5,3,1), C(0,-1,3)$为顶点的三角形的面积。

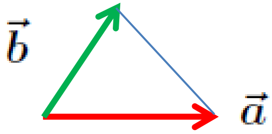
例 求以点$A(3,0,2)$, $B(5,3,1)$, $C(0,-1,3)$为顶点的三角形的面积。

解:

$$\overrightarrow{AB}=\{2,3,-1\}, \overrightarrow{AC}=\{-3,-1,1\},$$

④如图: $S_{\square}=|\vec{a}\times\vec{b}|, S_{\triangle}=\dfrac{1}{2}|\vec{a}\times\vec{b}|$





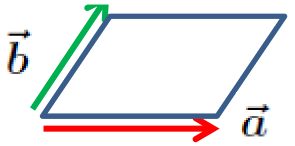
例　求以点$A(3,0,2)$, $B(5,3,1)$, $C(0,-1,3)$为顶点的三角形的面积。

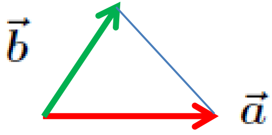
解:

$$\overrightarrow{AB}=\{2,3,-1\},\ \overrightarrow{AC}=\{-3,-1,1\},$$

$$\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ 2 & 3 & -1\\ -3 & -1 & 1\end{vmatrix}$$

④如图: $S_{\square}=|\vec{a}\times\vec{b}|$, $S_{\triangle}=\dfrac{1}{2}|\vec{a}\times\vec{b}|$





例 求以点$A(3,0,2)$, $B(5,3,1)$, $C(0,-1,3)$为顶点的三角形的面积。

解:

$$\overrightarrow{AB}=\{2,3,-1\},\ \overrightarrow{AC}=\{-3,-1,1\},$$

④如图: $S_{\square}=|\vec{a}\times\vec{b}|$, $S_{\triangle}=\frac{1}{2}|\vec{a}\times\vec{b}|$

$$\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ 2 & 3 & -1\\ -3 & -1 & 1\end{vmatrix}$$

$$=3\vec{i}-2\vec{k}+3\vec{j}+9\vec{k}-2\vec{j}-\vec{i}$$

例 求以点$A(3,0,2)$, $B(5,3,1)$, $C(0,-1,3)$为顶点的三角形的面积。

解:

$$\overrightarrow{AB}=\{2,3,-1\},\ \overrightarrow{AC}=\{-3,-1,1\},$$

$$\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ 2 & 3 & -1\\ -3 & -1 & 1\end{vmatrix}$$

$$=3\vec{i}-2\vec{k}+3\vec{j}+9\vec{k}-2\vec{j}-\vec{i}$$

$$=2\vec{i}+\vec{j}+7\vec{k}$$

④如图: $S_{\square}=|\vec{a}\times\vec{b}|$, $S_{\triangle}=\dfrac{1}{2}|\vec{a}\times\vec{b}|$

例 求以点$A(3,0,2)$, $B(5,3,1)$, $C(0,-1,3)$为顶点的三角形的面积。

解:

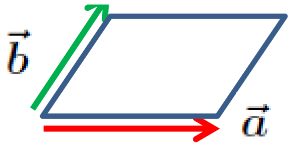
$$\overrightarrow{AB}=\{2,3,-1\},\ \overrightarrow{AC}=\{-3,-1,1\},$$

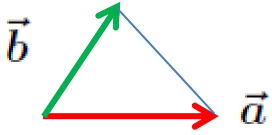
$$\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ 2 & 3 & -1\\ -3 & -1 & 1\end{vmatrix}$$

$$=3\vec{i}-2\vec{k}+3\vec{j}+9\vec{k}-2\vec{j}-\vec{i}$$

$$=2\vec{i}+\vec{j}+7\vec{k}$$

④如图: $S_{\square}=|\vec{a}\times\vec{b}|,\ S_{\triangle}=\dfrac{1}{2}|\vec{a}\times\vec{b}|$





$$|\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}|=\sqrt{4+1+49}=\sqrt{54},$$

例 求以点$A(3,0,2)$, $B(5,3,1)$, $C(0,-1,3)$为顶点的三角形的面积。

解:

$$\overrightarrow{AB}=\{2,3,-1\},\ \overrightarrow{AC}=\{-3,-1,1\},$$

④如图: $S_{\square}=|\vec{a}\times\vec{b}|,\ S_{\triangle}=\frac{1}{2}|\vec{a}\times\vec{b}|$

$$\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ 2 & 3 & -1\\ -3 & -1 & 1\end{vmatrix}$$

$$=3\vec{i}-2\vec{k}+3\vec{j}+9\vec{k}-2\vec{j}-\vec{i}$$

$$=2\vec{i}+\vec{j}+7\vec{k}$$

$$|\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}|=\sqrt{4+1+49}=\sqrt{54},\qquad \therefore S_{\triangle}=\tfrac{1}{2}\sqrt{54}$$