课程要求

2019年2月18日　12:45

1.联络方式

教师个人主页：https://sites.wustl.edu/xiwang

教师Email: wang.x@pku.edu.cn

助教Email: shangbang.long@pku.edu.cn

推荐用Email联系

2.考核要求

1.作业40%：4人一组，抽取做pre

2.期中30%：考伪代码

3.期末30%：论文结课

3.教材（不需要购买）

- Recursive Methods in Economic Dynamics, by Nancy Stocky and Robert Lucas with Edward Prescott
- Recursive Macroeconomic Theory, by Lars Ljungqvist and Thomas J. Sargent
- Numerical Methods in Economics, by Kenneth Judd
- Dynamic General Equilibrium Modeling: Computational Methods and Applications, by Burkhard Heer and Alfred Maussner
- Numerical Recipes in Fortran 90, by William H. Press, Saul A. Teukolsky, William T. Vetterling, Brian P. Flannery and Michael Metcalf.
- Reinforcement Learning: An Introduction, by Richard S. Sutton and Andrew G. Barto

1.被誉为宏观的圣经（推荐阅读）

2.与上面一本类似，都是高宏教材，Technical

3.偏重数值解

4.与3类似

5.教Fortran90语言和算法

6.教加强学习算法

4.课程目标/内容

1.DSGE模型

　　构建自己解这个模型的工具箱

　　做宏观试验与预测

2.数值方法vs实证方法

　　数值方法的意义：Deep reasoning和 Match reality——Calibration

　　实证方法的意义：发现现象——Estimation

Lecture1: Basic Models

2019年2月18日　　12:52

假设 定理 重要中间步骤 结论/方程 优化问题

1.基本模型

1.1 基本设定

1.时间分成等长小区间，$t=0$到$t=T$

2.K_t表示t时刻的资本存量，N_t表示t时刻的劳动流量

3.只有一种最终产品，可以用来消费或生产资本

4.生产函数

$$Y_t=F(N_t,K_t).$$

1.2 假设

1.有关生产函数

1.不能无中生有

$$F(0,0)=0.$$

2.投入带来正产出

$$F_1',F_2'\geq 0.$$

3.边际产出递减

$$F_{11}'',F_{22}''\leq 0.$$

注1：$F_{12}''\geq 0$表示两个要素为互补品，反之表示两个要素为替代品

注2：在此条件下，$C_t+K_{t+1}\leq F(N_t,K_t)+(1-\delta)K_t$条件下优化问题的可行集$(C_t,K_{t+1})$是一个凸集，因此满足K-T定理的适用条件

2.预算约束

1.不考虑政府部门和进出口，因而

$$Y_t=C_t+I_t.$$

2.考虑折旧，I_t应该就是资本的净流量，因而

$$K_t(1-\delta)+I_t=K_{t+1}.$$

3.从而t期的预算约束就是：

$$Y_t\geq C_t+K_{t+1}-(1-\delta)K_t，其中\delta\in[0,1]$$

3.效用

1.人的一生的效用与所有期的消费都有关，因而效用的形式设定为

$$U(C_1,\ldots,C_T).$$

2.消费多多益善

$$U_i'>0.$$

3.边际效用递减

$$U_{ii}''\leq 0.$$

注：交叉偏导的符号与要素类似，也取决于每期消费之间的替代/互补性

1.3 优化问题

考虑的Ramsey问题如下：

$$
\begin{aligned}
&\max_{C_1, C_2, \ldots, C_t} U(C_1, C_2, \ldots, C_T) \\
&s.t. \\
&C_t + K_{t+1} \leq F(N_t, K_t) + (1-\delta)K_t \\
&C_t \geq 0 \\
&K_{t+1} \geq 0 \\
&\text{for all } t = 1, 2, \ldots, T \\
&K_1 = K \text{ is given}
\end{aligned}
$$

注0：所谓Ramsey问题，是在索洛模型的基础上，将原本外生化的储蓄消费（率）内生化，其手段是考虑“最大化一生的效用”这个问题

注1：该模型中不存在不确定性

注2：所有的信息都是已知的

注3：$T < \infty$

1.4 模型求解

1.Kuhn-Tucker定理

设f是一个连续可微的凹函数，凸定义域$X \subset \mathbb{R}^N$，$f: X \to \mathbb{R}$

假设有K个约束条件$h^i: X \to \mathbb{R}$，都是连续可微凹函数

若存在$x_0 \in X$使得对任意i，都有$h^i(x_0) > 0$，那么在$D = \{x \in X | h^i(x) > 0, i = 1, \ldots, K\}$上使得$f$最大的$x^*$满足的条件是：存在$\lambda^* \in \mathbb{R}^K$满足：

1.一阶条件（F.O.C）

$$\frac{\partial}{\partial x_j} f(x)|_{x^*} + \Sigma_{i=1}^{K} \lambda_i^* \frac{\partial}{\partial x_j} h^i(x)|_{x^*} = 0, i = 1, \ldots, N.$$

2.互补松弛条件（C.S.C）

$$\lambda_j^* \geq 0,\ \ \lambda_j^* h^j(x^*) = 0,\ j = 1, \ldots, K.$$

2.优化条件

记拉格朗日函数

$$L = U(C_1, \ldots, C_T) + \Sigma_{t=1}^{T} \lambda_t (F(N, K_t) - C_t + (1-\delta)K_t - K_{t+1}) + \Sigma_{t=1}^{T} \mu_t C_t + \Sigma_{t=1}^{T} \theta_{t+1} K_{t+1}.$$

注1：$K_{T+1} = 0$（虽然这是由后面的推导得到而非假设条件）

注2：每一个约束条件都对应一个影子价格

注3：假设N_t恒为常数N，这是因为这里人的闲暇时间是一定的，使用闲暇去劳动只会带来收益而不会带来成本（N不出现在U中），所以人会把所有闲暇都拿去劳动

那么优化条件就可以写成：对$t = 1, \ldots, T$

$$
\begin{cases}
\text{F.O.C}_1: \frac{\partial L}{\partial C_t} = \frac{\partial U(C_1, \ldots, C_T)}{\partial C_t} - \lambda_t + \mu_t = 0 \\
\text{F.O.C}_2: \frac{\partial L}{\partial K_{t+1}} = -\lambda_t + \lambda_{t+1}(F_2'(N, K_{t+1}) + 1 - \delta) + \theta_{t+1} = 0 \\
\text{特别地：} \ -\lambda_T + \theta_{T+1} = 0\ (F.O.C\ of\ K_{T+1}) \\
\text{C.S.C}_1: \lambda_t (F(N, K_t) - C_t + (1-\delta)K_t - K_{t+1}) = 0 \\
\text{C.S.C}_2: \mu_t C_t = 0 \\
\text{C.S.C}_3: \theta_{t+1} K_{t+1} = 0
\end{cases}.
$$

3.求解

1.由于$\frac{\partial U(C_1, \ldots, C_T)}{\partial C_t} > 0$：

所以$\lambda_t = \mu_t + U'_{C_t} > 0$

进而$C_t + K_{t+1} = F(N_t, K_t) + (1-\delta)K_t$一定满足，**预算约束是紧的（binding）**

2.稻田条件（Inada Condition）

我们对效用函数增加假设（稻田条件）

$$\lim_{C_t\to 0} U'_{C_t} = +\infty，\text{而}\lim_{C_t\to +\infty} U'_{C_t} = 0$$

则：$\lambda_t = \mu_t + U'_{C_t}$，且$\lambda_t$是一个正的常数，说明$U'_{C_t}$也是一个正的常数，从而$0 < C_t < \infty$，进而由$C.S.C_2$知$\mu_t = 0$

3.免费午餐条件（Free-Lunch Condition）

我们对生产函数增加假设（免费午餐条件）

$$F(0,\cdot) = F(\cdot,0) = 0.$$

由预算约束易知：$F(N,K_t) \geq C_t > 0$，从而：$K_t > 0$，进而$\theta_t = 0$

对于$t = T+1$时的情况，$\theta_{T+1} = \lambda_T > 0$，从而$K_{T+1} = 0$

4.综上，可对方程组做出简化：

$$\begin{cases} \text{Budget Constraint: } K_{t+1} = F(N,K_t) + (1-\delta)K_t - C_t \\ \text{Euler Equation: } \frac{U_{C_t}}{U_{C_{t+1}}} = F_2'(N,K_{t+1}) + 1 - \delta \end{cases}.$$

注：关于Euler方程，经济学上可以看成两期消费的tradeoff：$U'_{C_t}dc = [F_2'(N,K_{t+1}) + 1 - \delta]U'_{C_{t+1}}dc$

2.无穷时限情形

2.1 基本设定的扩展

1.时间无限：$T \to \infty$

2.效用函数在时间上可分（time separable）：$\frac{\partial^2 U}{\partial C_i \partial C_j} = 0$

具体地：

$$U(C_1,\dots,C_t,\dots) = \Sigma_{t=1}^{\infty}\beta^{t-1}u(C_t).$$

其中：$u: \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$，并有$u' > 0, u'' \leq 0, \beta < 1$

注：不是所有有意义的life-utility function $U(C_1,\dots,C_t,\dots)$ 都是时间上可分的，比如Epstein & Zin 效用函数和Habit型效用函数（边际效用与历史累积水平有关）

2.2 优化问题

现在的Ramsey问题如下：

$$\begin{aligned} &\max_{C_1,C_2,\dots,C_t} \sum_{t=1}^{\infty} \beta^{t-1}u(C_t) \\ &s.t. \\ &C_t + K_{t+1} \leq F(N_t,K_t) + (1-\delta)K_t \\ &C_t \geq 0 \\ &K_{t+1} \geq 0 \\ &\text{for all } t = 1,2,\dots,T \\ &K_1 = K \text{ is given} \end{aligned}$$

这里：我们首先必须假设目标函数是一个收敛的级数。而这并不需要我们假设u是一个有界函数（实际上常用的CRRA效用函数$u(C_t) = \frac{C_t^{1-\alpha}-1}{1-\alpha}$就不是一个有界的函数），我们只需要通过限制$F$来限制$C_t$。通过简单的相图分析我们可以知道，如果$F$满足稻田条件（或者特别concave），就可以让$K_t$存在收敛点（奇点），从而限制$C_t$有界

2.3 模型求解

1.Euler方程方法

仍然，我们可以令拉格朗日函数：

$$L = \Sigma_{t=0}^{\infty}\beta^t[u(C_t) + \lambda_t(F(N,K_t) - C_t + (1-\delta)K_t - K_{t+1}) + \mu_t C_t + \theta_{t+1}K_{t+1}].$$

那么优化条件就可以写成：对$t = 1,\dots,T,\dots$

$$\begin{cases}\text{F.O.C}_1: \frac{\partial L}{\partial C_t} = 0 \Rightarrow \lambda_t = u'(C_t) + \mu_t \\ \text{F.O.C}_2: \frac{\partial L}{\partial K_{t+1}} = 0 \Rightarrow \lambda_t = \beta\lambda_{t+1}[F_2'(N, K_{t+1}) + 1 - \delta] + \theta_{t+1} \\ \text{C.S.C}_1: \lambda_t(F(N, K_t) - C_t + (1-\delta)K_t - K_{t+1}) = 0 \\ \text{C.S.C}_2: \mu_t C_t = 0 \\ \text{C.S.C}_3: \theta_{t+1}K_{t+1} = 0\end{cases}.$$

并同理可以有：

1）边际效用为正⇒ $K_{t+1} = F(N, K_t) + (1-\delta)K_t - C_t, \lambda_t > 0$

2）稻田条件⇒ $\mu_t = 0, C_t > 0$

3）免费午餐条件⇒ $K_t > 0, \theta_t = 0$

因此我们可以把方程组简化为：

$$\begin{cases}\text{Budget Constraint: } K_{t+1} = F(N, K_t) + (1-\delta)K_t - C_t \\ \text{Euler Equation: } u'(C_t) = \beta u'(C_{t+1})[F_2'(N, K_{t+1}) + 1 - \delta]\end{cases}.$$

令

$$g(K_t) = F(N, K_t) + (1-\delta)K_t,$$

预算约束就可以写成：$K_{t+1} = g(K_t) - C_t$

代入Euler方程，得到：

$$u'(g(K_t) - K_{t+1}) = \beta u'(g(K_{t+1}) - K_{t+2})[1 - \delta + F_2'(N, K_{t+1})].$$

显然，这是一个二阶差分方程，需要两个边界条件。其中一个已经给出：

$$K_1 = K.$$

另一个是TVC条件：

$$\lim_{t\to\infty} \beta^t u'(C_t)K_{t+1} = 0.$$

注：经济学含义是不能过度储蓄

2.动态规划方法

1.Bellman方程

假设这个Ramsey问题的最优路径是$\{K_{t+1}\}_{t=0}^{\infty}$，我们记值函数

$$V(K_0) = \Sigma_t \beta^t u(C_t).$$

由于$C_t = F(N, K_t) + (1-\delta)K_t - K_{t+1} = g(K_t) - K_{t+1}$，所以有：

$$\begin{aligned} V(K_0) &= \Sigma_t \beta^t u(g(K_t) - K_{t+1}) \\ &= u(g(K_0) - K_1) + \beta\Sigma_{t=0}^{\infty}\beta^{t-1}u(g(K_t) - K_{t+1}) \\ &= u(g(K_0) - K_1) + \beta V(K_1) \end{aligned}$$

推导的结果：

$$V(K_0) = u(g(K_0) - K_1) + \beta V(K_1).$$

称为**Bellman方程**，这里的等号的意义是sup converge

注：sup converge的含义：函数的收敛有点点收敛（$\forall x_0, \lim_{n\to\infty} f_n(x_0) = g(x_0)$）和上确界收敛（$\lim_{n\to\infty}\sup_{x\in D}|f_n(x) - g(x)| = 0$）。点点收敛不一定上确界收敛，但上确界收敛一定点点收敛

举例：考虑$f_n(x) = 1_{\{x\geq n\}}$和$g(x) = 0$，$f_n(x)$点点收敛于$g(x)$，但上确界不收敛

2.优化问题转化

假设我们已知了函数$V(\cdot)$。有了Bellman方程，我们考虑的就是如下的优化问题：

$$\begin{gathered} V(K) = u(C) + \beta V(K'). \\ s.t.\, g(K) \geq K' + C. \end{gathered}$$

其中：K、C代表当期的资本存量和消费量，K'代表下一期的资本存量

作拉格朗日函数：

$$L = u(C) + \beta V(K') + \lambda(g(K) - K' + C).$$

$$\text{F.O.C: }\begin{cases} u'(C) = \lambda \\ \beta V'(K') = \lambda\end{cases}.$$

由第一个一阶条件$u'(C)=\lambda>0$可知，利用互补松弛条件有 $g(K)=K'+C$，即**预算约束一定是紧的**

从而代入第二个F.O.C有：$\beta V'(K')=\lambda=u'(C)=u'(g(K)-K')$。由隐函数存在定理知：$K'$是$K$的函数，我们记为：

$$K'=h(K).$$

3.与欧拉方程方法的联系

将$K'=h(K)$代入Bellman方程并两边对K求导，我们得到：

$$V'(K)=u'(g(K)-K')[g'(K)-h'(K)]+\beta V'(K')h'(K)=u'(g(K)-K')g'(K)$$

将这一结果代入一阶条件$\beta V'(K')=u'(g(K)-K')$，得到：

$$u'(g(K)-K')=\beta u'(g(K)-K')g'(K).$$

只要我们代入$g(K_t)=F(N,K_t)+(1-\delta)K_t$这一具体形式，很容易验证上面这个方程就是Euler方程

与Euler方程方法相比，动态规划的优点是可以解无穷时限问题

4.如何得到$V(\cdot)$：迭代算法

具体而言，我们可以做下面这样一个迭代：

$$V^{i+1}(K)=u(g(K)-K')+\beta V^i(K').$$
$$s.t.\ g(K)\geq K'.$$

这样，我们就可以得到：

$$\lim_{i\to\infty}V^i(K)=V(K).$$

注1：上述等号表示sup converge

注2：在计算机中我们判定收敛的方法是考虑一个很小的数ϵ（例如10^{-8}），使得$\sup_k|V^n(k)-V^{n+1}(k)|<\epsilon$ 或者$\frac{\sup_k|V^n(k)-V^{n+1}(k)|}{\max_k|V^n(k)|}<\epsilon$

5.有穷时限的动态规划：倒向递推法

$$\text{Bellman方程：}V_{t-1}(K_{t-1})=\max_{K_t}\{u(g(K_{t-1})-K_t)+\beta V_t(K_t)\}$$
$$\text{特别地：}V_T(K_T)=u\big(g(K_T)\big)$$

2.4 模型的动态学

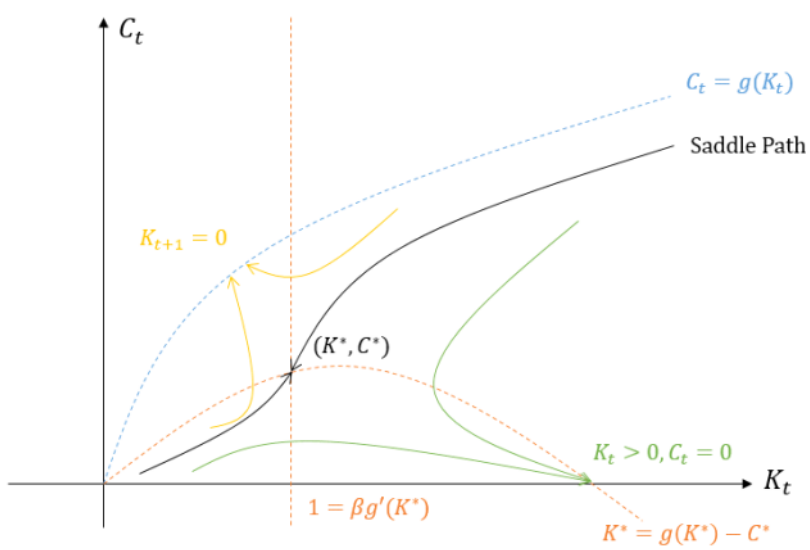
1.动态相图（Dynamic Phase）

$$\begin{cases}\text{Budget Constraint: } K_{t+1}=g(K_t)-C_t\\ \text{Euler Equation: } 1=\frac{\beta u'(C_{t+1})}{u'(C_t)}g'(K_{t+1})\end{cases}.$$

2.稳定点（Steady State）

$$\begin{cases}K^*=g(K^*)-C^*\\ 1=\beta g'(K^*)\end{cases}.$$

3.相图分析（有关相图分析的步骤细节可详见《动态优化理论》）



首先，经济的可行域在蓝线下方，因为需要满足最起码的约束：$C_t \leq g(K_t)$
经济中唯一的均衡路径就是鞍轨（saddle path），也就是图中的黑线。不同于鞍轨的运行轨迹将如黄色和绿色的线标识的一样。要么让经济走向崩溃（$K_{t+1}=0$），要么过度储蓄却不消费（$K_t \geq, C_t = 0$）

Lecture 2: Stochastic Models

2019年2月20日　　8:43

假设 定理 重要中间步骤 结论/方程 优化问题

1 随机元素的引入

1.1 期望效用函数

我们在这里声明一个期望效用函数的数学定义。假设X是一个随机变量，x是X的一个实现，那么定义：

$$\mathcal{U}(X)=\Sigma u(x)\mathbb{P}(x)=\mathbb{E}(u(x)).$$

为期望效用函数，其中：$\mathcal{U}: PDF\ Space\rightarrow\mathbb{R}$，而$u:\mathbb{R}\rightarrow\mathbb{R}$

1.2 在生产函数中引入随机项

我们假设agent不再能全部掌控所有的信息和未来的轨迹，那么生产函数的形式设定为：

$$Y_t=Z_tF(N_t,K_t).$$

其中：$\{Z_t\}$是一个马尔科夫过程，且设$\mathbb{E}Z_t=1$

这样我们考虑的优化问题就是一个期望效用最大化问题：

$$\begin{aligned}&\max_{C_1,C_2,\dots} E[\sum_t \beta^t u(C_t)|I_0]\\ &s.t.\\ &K_{t+1}+C_t\le Z_tF(N,K_t)+(1-\delta)K_t\\ &0\le C_t\\ &0\le K_{t+1}\end{aligned}$$

上述问题中的每一期，K_t是状态变量，K_{t+1},C_t是控制变量

其中I_0表示到0期为止的全部信息（包括K_0和Z_t的历史值）

1.3 随机欧拉方程（SEE）

类似地，我们令拉格朗日函数：

$$L_t=\mathbb{E}[\Sigma_t\beta^t(u(C_t)+\mu_tC_t+\theta_{t+1}K_{t+1}+\lambda_t(Z_tF(K_t)+(1-\delta)K_t-C_t-K_{t+1}))].$$

求得一阶条件为：

$$\text{F.O.C:}\begin{cases}u'(C_t)+\mu_t=\lambda_t\\ \mathbb{E}[\beta\lambda_{t+1}(Z_{t+1}F'(K_{t+1})+1-\delta)+\theta_{t+1}]=\lambda_t\\ \lambda_t(Z_tF(K_t)+(1-\delta)K_t-C_t-K_{t+1})=0\\ \mu_tC_t=0\\ \theta_{t+1}K_{t+1}=0\end{cases}$$

与前面一章几乎相同，利用稻田条件和免费午餐条件，我们可以将方程组简化为：

$$\begin{cases}\text{Stochastic Euler Equation: }\mathbb{E}[\beta u'(C_{t+1})(Z_{t+1}F'(K_{t+1})+1-\delta)]=u'(C_t)\\ \text{Budget Constraint: }Z_tF(K_t)+(1-\delta)K_t-C_t-K_{t+1}=0\\ \text{TVC: }\lim_{t\to\infty}\beta^t\mathbb{E}[u'(C_t)K_{t+1}]=0\end{cases}.$$

1.4 随机动态规划（SDP）

这个时候的Bellman方程是：

$$v(K,Z)=\max_{C+K'\le(1-\delta)K+ZF(K)}\{u(C)+\beta\mathbb{E}[v(Z'K')|Z]\}.$$

其中$\mathbb{E}[v(Z',K')|Z]=\int v(K',Z')d\pi(Z'|Z)$是不含$Z'$的函数

与Lecture1 2.3.2类似地，我们通过作拉格朗日函数：

$$L=u(C)+\beta\mathbb{E}[v(Z',K')|Z]+\lambda((1-\delta)K+ZF(K)-C-K').$$

求一阶条件&包罗定理如下：

$$\text{F.O.C:}\begin{cases}L_C=0:u'(C)=\lambda\\ L_{K'}=0:\beta\mathbb{E}[v_2'(Z',K')|Z]=\lambda\\ \text{Bellman方程的包罗定理}:v_2'(Z,K)=L_K=\lambda(1-\delta+ZF'(K))\end{cases}$$

从而：$\lambda>0$。得到**预算约束是紧的**，亦即：$C=(1-\delta)K+ZF(K)-K'$。从而从F.O.C中我们可以得到：

$$u'(C)=\lambda=\beta\mathbb{E}[v_2'(Z',K')|Z]=\mathbb{E}\big[\beta\lambda'\big(1-\delta+Z'F'(K')\big)\big]=\mathbb{E}\big[\beta u'(C')\big(1-\delta+Z'F'(K')\big)\big].$$

可以发现这随机欧拉方程是一致的

2 增长元素的引入

2.1 增长的来源

1.N_t的内生化

现在我们将效用中也考虑N_t。直觉上，劳动应该会减少效用。形式上我们将效用函数写成：

$$u=u(C_t,N_t),N_t\in[0,N].$$

这里我们并没有特别假设u_2'的符号

2.增长来源的设定

1.传统认为：增长的来源一般为劳动参与的增加和资本的积累

2.索洛模型的设定：嵌入式（embeded）增长和非嵌入式（disembeded）增长

$$Y_t=A_tF(\theta_tN_t,\eta_tK_t).$$

说明：上面这个设定中θ_t、η_t就称为embeded。因为它们是依附于N_t和K_t不可分离的。它们的直觉是：古时候的人们和现在人们一单位的劳动生产效率是不同的，资本也是一样。而相对地A_t就是disembeded

3.一般对于F的假设：规模报酬不变（CRTS）

$$\lambda F(x,y)=F(\lambda x,\lambda y).$$

注：一次齐次函数有如下两个性质：

1）一阶偏导是0次齐次(证明：定义式两边对x或y偏导)

$$F_1'(x,y)=F_1'(\lambda x,\lambda y),F_2'(x,y)=F_2'(\lambda x,\lambda y).$$

2）欧拉定理（证明：定义式两边对λ偏导再令$\lambda=1$）

$$F(x,y)=xF_1'(x,y)+yF_2'(x,y).$$

4.所谓“平衡增长路径”：$\frac{Y_t}{N_t}$以常数增长率增长，且储蓄率为一个常数

3.我们的假设

1.生产函数的形式

$$Y_t=F(A_tN_t,K_t).$$

注：**根据索洛模型我们写成$Y_t=A_tF(N_t,\frac{K_t}{A_t})$，则$k_t=\frac{K_t}{A_t}$将会收敛到一个稳定水平$k^*$**

2.增长的设定（索罗1956）

$$\frac{A_{t+1}}{A_t}=a.$$

3.引入波动

$$Y_t=Z_tF(A_tN_t,K_t).$$

或者

$$Y_t=F(A_tZ_tN_t,K_t).$$

注1：Z_t是一个协方差平稳过程

注2：如果$Z_t\equiv1$则表示无波动

4.进一步对Z_t和A_t的建模

$$Z' = Ze^{\epsilon_t}, \epsilon_t \sim N(0,\sigma^2).$$
$$A' = Ae^{a+\epsilon_t}, \epsilon_t \sim N(0,\sigma^2).$$

2.2 优化问题与求解

1.优化问题及其一阶条件

我们现在考虑的优化问题为：

$$\begin{aligned}
&\max_{C_t,N_t} E[\sum_t \beta^t u(C_t, 1-N_t)] \\
&s.t. \\
&C_t + K' \le F(AN_t, K_t) + (1-\delta)K_t \\
&0 \le C_t \\
&0 \le K_{t+1} \\
&N_t \in [0,1]
\end{aligned}$$

这个问题（其实尚未引入波动性）中的控制变量每期有三个：C_t，N_t，K_{t+1}。简化之后的一阶条件为：

$$\text{F.O.C:}\begin{cases} L_C = 0:\ \lambda_t = u_C'(C_t, 1-N_t) \\ L_N = 0:\ \lambda_t A_t F(A_t N_t, K_t) = u_l'(C_t, 1-N_t) \\ L_{N'} = 0:\ \lambda_t = \beta\lambda_{t+1}[1-\delta+F_2'(A_{t+1}N_{t+1}, K_{t+1})] \end{cases}$$

其中：u_l'表示对第二个位置（leisure）求导

上面的方程组消去λ可以化成：

$$\begin{cases} u_l'(C_t, 1-N_t) = u_C'(C_t, 1-N_t)A_t F_1'(A_t N_t, K_t) \\ u_C'(C_t, 1-N_t) = \beta u_C'(C_{t+1}, 1-N_{t+1})[1-\delta+F_2'(A_{t+1}N_{t+1}, K_{t+1})] \end{cases}.$$

注1：第一个式子表示在同期劳动与消费之间的tradeoff，第二个式子表示在跨期消费之间的tradeoff

注2：完整的方程组还应该包括紧的预算约束

2.追加假设

1.根源于索洛模型的结论：GDP indentity

由于$\frac{K_{t+1}}{K_t} = \frac{Y_t}{K_t} - \frac{C_t}{K_t} + 1 - \delta = \frac{S_t}{K_t} + 1 - \delta = \frac{S_t}{Y_t} \times \frac{Y_t}{K_t} + 1 - \delta$，在索洛模型下，平衡增长路径中$\frac{K_{t+1}}{K_t}$是一个常数，储蓄率$\frac{S_t}{Y_t}$也是一个常数，所以$\frac{Y_t}{K_t}$就是一个常数，进而$\frac{C_t}{K_t}$也是一个常数。所以$Y_t$、$C_t$最终都是与$K_t$以相同的速度增长

2.效用函数的具体形式

下面的讨论中，效用函数都采取：

$$u(C, 1-N) = C^{1-\eta}v(1-N).$$

或者

$$u(C, 1-N) = \ln C + v(1-N).$$

的形式

3.求解：欧拉方程法

根据转化后的一阶条件第二个式子，并利用$F_2'(A_{t+1}N_{t+1}, K_{t+1})$的0次齐次性，我们可以有：

$$\text{Euler Equation:} \frac{C_t^{-\eta}v(1-N_t)}{C_{t+1}^{-\eta}v(1-N_{t+1})} = \beta\left(1-\delta+F_2'\left(N_{t+1}, \frac{K_{t+1}}{A_{t+1}}\right)\right).$$

将$\frac{A_{t+1}}{A_t} = a$的假设代入左边，可以将上述方程改写为：

$$\text{Euler Equation}': \frac{\left(\frac{C_t}{aA_t}\right)^{-\eta}v(1-N_t)}{\left(\frac{C_{t+1}}{A_{t+1}}\right)^{-\eta}v(1-N_{t+1})} = \beta\left(1-\delta+F_2'\left(N_{t+1}, \frac{K_{t+1}}{A_{t+1}}\right)\right).$$

同时又利用$F(A_t N_t, K_t)$的1次齐次性有：

$$\text{Budget Constraint}: a\frac{K_{t+1}}{A_{t+1}} = F\left(N_t, \frac{K_t}{A_t}\right) + (1-\delta)\frac{K_t}{A_t} - \frac{C_t}{A_t}.$$

根据转化后的一阶条件的第一个式子（Labor tradeoff），并利用$F_1'(A_tN_t, K_t)$的0次齐次性，我们可以有：

$$\text{Labor Tradoff}: \frac{v'(1-N_t)}{(1-\eta)v(1-N_t)}\frac{C_t}{A_t} = F_1'\left(N_t, \frac{K_t}{A_t}\right).$$

求解的过程主要通过Euler Equation′、Budget Constraint和Labor Tradoff三个方程来展开，在这三个式子里面已将变量写成了新的形式$\frac{K_t}{A_t}$、$\frac{C_t}{A_t}$和N_t

特别地，索洛模型中$\frac{K_t}{A_t}$会收敛，从而S.S.时，Y_t与A_t应该也增长一样快

2.3 验证一般均衡：与去中心化经济的等价性

1.去中心化经济的基本假设

1.问题引入

之前我们考虑的都是一个经济中统一代理人的问题。为何它能够描述“一般均衡”呢？

下面的论述就是论证之前的讨论和将经济部门分拆之后的结果没有区别

2.企业

我们假设有许多同质的企业，它们可能规模不一样，但是面临相同的生产函数和社会技术水平，从家庭中雇佣/租用劳动和资本，并不能影响市场上要素的价格

3.家庭

每期出售劳务和租出资本，并持有企业的股权（分享利润）

能够决定出售劳务和资本的提供量，并决定消费

2.企业问题

企业考虑的是一个（无条件的）利润最大化问题

$$\boxed{\max_{N_t, K_t} F(A_tN_t, K_t) - w_tN_t - r_tK_t}$$

我们求得一阶条件为：

$$\text{F.O.C:} \begin{cases} \omega_t = A_tF_1'(A_tN_t, K_t) \\ r_t = F_2'(A_tN_t, K_t) \end{cases}$$

通过$F_2'(A_tN_t, K_t)$的0次齐次性将第二个式子变形：$r_t = F_2'(A_t, \frac{K_t}{N_t})$，由于每个企业面临相同的资本价格$r_t$和社会技术水平$A_t$，**所以每个企业的劳-资结构$\frac{K_t}{N_t}$是相同的**（虽然企业使用要素的规模各不相同）。假设对每个企业都有$\frac{K_t}{N_t} = h$，总体而言就有：$Y_t = \Sigma_i Y^i = \Sigma_i N_t^i F(A_t, h) = N_tF(A_t, h) = N_tF(A_t, \frac{K_t}{N_t})$

另外，将ω_t、r_t代入，很容易得到企业的最终利润为0（利用欧拉定理）

3.家庭问题

对于家庭而言，他们考虑的是受约束的优化问题

$$\boxed{\begin{aligned} &\max_{C_t, K'} \sum_t \beta^t u(C_t, 1-N_t) \\ &s.t. \\ &K' + C_t \le w_tN_t + (r_t + 1 - \delta)K_t \end{aligned}}$$

注：本来约束条件中，右边应该还有企业利润Π_t（因为家庭是持股人也分享企业利润），但由于$\Pi_t = 0$所以省去

这个问题的一阶条件为：

$$\text{F.O.C:}\begin{cases}\lambda_t = u_1'(C_t, 1-N_t)\\ \omega_t\lambda_t = u_2'(C_t, 1-N_t)\\ \lambda_t = \beta\lambda_{t+1}(1-\delta+r_{t+1})\\ C_t + K' = (r_t+1-\delta)K_t + \omega_t N_t + \Pi_t(=0)\end{cases}$$

由前两个式子结合企业的第一个一阶条件，我们就可以得到之前的Labor tradeoff。第三个式子结合企业的第二个一阶条件，就可以得到Euler equation。第四个式子结合企业的两个一阶条件，就是Budget constraint。**因此分散决策跟集中决策的结果是等价的**

注：这里省去了之前企业问题加总的过程。实际上，由于我们的效用函数设定为 $u(C, 1-N) = v_1(C)v_2(1-N)$这种分开相乘的形式，所以这里由于一阶条件也存在一个C_t和N_t的固定关系，从而很多个家庭表现得也像只有一个家庭一样

2.4 模型的终点：稳态分布

在平衡增长且不存在不确定性的情况下，最终模型会到达稳态（Steady state）。但是存在波动性时，我们只能说，模型（特指z, k）最后会到达一个稳态分布（Stationary distribution）。具体而言，对于一个定义在状态空间$(\omega_1, \dots, \omega_N)$上的马尔科夫过程，我们都能定义其转移矩阵：$M = \begin{pmatrix} p_{11} & \cdots & p_{1N} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ p_{N1} & \cdots & p_{NN}\end{pmatrix}$。这个矩阵满足如下的两个基本条件：

1） $p_{ij} \geq 0, \forall i, j$

2） $\Sigma_j p_{ij} = 1, \forall i$

那么，给定我们0期的概率分布$\pi_0 = [\pi_1^0, \dots, \pi_N^0]'$，第1期的概率分布$\pi_1 = [\pi_1^1, \dots, \pi_N^1]'$就应该是$[\Sigma_i \pi_i^0 p_{i1}, \dots, \Sigma_i \pi_i^0 p_{iN}]'$，亦即：$\pi_1' = \pi_0' M$。有了这个递推关系自然就会问：存不存在一种概率分布，它在这个递推关系下是不变的呢？这就是我们要找的稳态分布，亦即π_∞

从线性代数上看，$\pi_\infty = M'\pi_\infty$，因此$\pi_\infty$是$M'$特征值为1的特征向量

要想任给一个π_0，都能够收敛到π_∞上面去，M就还需要满足下列两个“便利性条件”中的一个：

1） $p_{ij} > 0, \forall i, j$

2） $\exists N \in \mathbb{N}, s.t. M^N$满足1）

3 模型的最终设定与说明

3.1 优化问题与后续问题

具体地，我们把效用和生产函数都给定具体的形式，模型的优化问题就是下面这个：

$$\boxed{\begin{aligned} &\max_{c_t, N_t} E[\sum_t \beta^t \frac{C_t^{1-\eta}(1-N_t)^{\theta(1-\eta)}}{1-\eta}]\\ &s.t.\\ &C_t + K' \leq Z_t(AN_t)^{1-\alpha}K_t^\alpha + (1-\delta)K_t\\ &A_{t+1} = aA_t\\ &\ln(Z_{t+1}) = \rho\ln(Z_t) + \epsilon_t,\ \epsilon_t \sim N(0, \sigma^2)\\ &0 \leq C_t\\ &0 \leq K_{t+1}\\ &N_t \in [0, 1]\end{aligned}}$$

上面的生产函数和效用函数的形式并非随意选取的，具体说明见3.2和3.3

可以看到，关于Z_t，我们的设定是它的对数服从AR(1)。更进一步地，关于上面的参数我们都可以取值：

参数	值	含义
ρ	0.9	$\ln Z$的自相关系数
β	0.994	社会折现率
a	1.005	A的增长率
α	0.3	$F(\cdot)$的参数
δ	0.05	折旧率
N	0.4	N_t上限
σ	0.007	ϵ_t的方差
η	2	$u(\cdot)$的参数
θ	2	$u(\cdot)$的参数

解完这个模型之后，我们需要考虑的是。GDP、消费、投资的均值、方差、协方差。每个变量的自相关以及脉冲响应函数

3.2 关于生产函数的说明

下面我们来说明为什么生产函数采取柯布道格拉斯形式

在索洛模型中，收敛到的平衡增长路径满足：1）变量增长率保持稳定，2）储蓄率为常数

在2.2.2.1中，我们已经论证了，这种情况下Y_t、C_t最终都是与K_t以相同的速度增长

假设我们的生产函数采取的抽象形式是：$Y_t = F(A_0 a^t N_t, B_0 b^t K_t) = B_t K_t F(\frac{A_t N_t}{B_t K_t}, 1)$

我们记$X_t = \frac{A_t N_t}{B_t K_t}$（含义是每单位有效资本配比的有效劳动），并记$f(X_t) = F(\frac{A_t N_t}{B_t K_t}, 1)$，就可以有：$\frac{Y_{t+1}}{Y_t} = b\frac{K_{t+1}}{K_t}\frac{f(X_{t+1})}{f(X_t)}$。根据上面的结论，$\frac{Y_{t+1}}{Y_t} = \frac{K_{t+1}}{K_t}$，从两边约掉，就可以得到：$b\frac{f(X_{t+1})}{f(X_t)} = 1$

对于这个方程，我们考察两种特殊的情形

1）如果$b = 1$，那么B_t是一个不增长的常数，相当于我们并没有给K_t设置嵌入式增长

这个时候，由于$\frac{f(X_{t+1})}{f(X_t)} = 1$，说明在平衡增长路径上（无穷远处），$X_t = \frac{A_t N_t}{B_t K_t}$是一个常数

N_t在无穷远处一定是一个常数，因为它是一个有界量，如果它包含了增长要素（不论是上升还是下降），它都会超过上界或者触及0，这是不能成立的

从而$X_t = \frac{A_t N_t}{B_t K_t}$是一个常数意味着，**$K_t$与$A_t$也有着相同的增长速度**

2）如果我们进一步假设X_t也有一个平衡增长路径（这个时候$b \neq 1$）：$x_t = \theta^t x_0$，并有$\frac{f(X_{t+1})}{f(X_t)} = \frac{f(x_0\theta^{t+1})}{f(x_0\theta^t)} = Constant$

两边对x_0求导，就可以化简得到：$\frac{f'(x_0\theta^{t+1})\theta^{t+1}}{f(x_0\theta^{t+1})} = \frac{f'(x_0\theta^t)\theta^t}{f(x_0\theta^t)}$

两边同乘x_0，就等价于$\frac{f'(x_{t+1})x_{t+1}}{f(x_{t+1})} = \frac{f'(x_t)x_t}{f(x_t)}$

根据假设$x_{t+1} \neq x_t$，所以我们就得到一个ODE：$\frac{f'(x)x}{f(x)} = Constant$

解这个微分方程，可以得到$f(x)$应该是一个幂函数，亦即：$F(A_0 a^t N_t, B_0 b^t K_t) = B_t K_t f(X_t) = B_t K_t \left(\frac{A_t N_t}{B_t K_t}\right)^\alpha = (A_t N_t)^\alpha (B_t K_t)^{1-\alpha}$，这就是我们要的柯布道格拉斯形式

在这一形式下，不失一般性地，可以将B_t乘到A_t中去，从而使得K_t前面没有嵌入式增长（这等同于$b = 1$）

3.3 关于效用函数的说明

上面已经讨论了我们的生产函数形式。特别地，作为幂函数，它是一个一次齐次的函数。那么欧拉方程和预算约束就应该能够变形如下：

$$\begin{cases}\text{Euler Eq: } \frac{u_1'(C_t,1-N_t)}{\beta u_1'(C_{t+1},1-N_{t+1})} = F_2'\left(N_{t+1},\frac{K_{t+1}}{A_{t+1}}\right) + 1 - \delta \\ \text{B.C.: } C_t = A_t\left[F\left(N_t,\frac{K_t}{A_t}\right) + (1-\delta)\frac{K_t}{A_t} - a\frac{K_{t+1}}{A_{t+1}}\right]\end{cases}.$$

之前已经提到了，在平衡增长路径下，$b \neq 1$的情形可以等价于$b = 1$的情形，因此**K_t与A_t也有着相同的增长速度**。那么$\frac{K_t}{A_t}$就是一个常数，同时N_t也是一个常数。从B.C.我们可以看出，中括号内是一个常数，于是**C_t与A_t也具有相同的增长速度**，可以表示为$C_t = C_0 a^t$

再根据欧拉方程，方程右边是一个常数，因此它可以写成：$\frac{u_1'(C_0 a^{t+1},1-N)}{u_1'(C_0 a^t,1-N)} = Constant$

这个等式两边对C_0求导，就可以化简得到：$\frac{u_{11}''(C,1-N)C}{u_1'(C,1-N)} = Constant$。这是一个PDE，解它，就可以证明效用函数一定是2.2.2.2中的形式

Lecture 3: Perturbation

2019年4月2日　18:45

假设 定理 重要中间步骤 结论/方程 优化问题

1 隐函数方法

1.1 隐函数定理（Implicit Function Theorem）

一般而言，我们考虑一个隐函数决定方程：$\vec{0}_{\dim=m}=h(\vec{x}_{n\times 1},\vec{y}_{m\times 1})$，其中：$h:U\subset\mathbb{R}^{n+m}\to V\subset\mathbb{R}^m$

注：具体而言，这个方程展开来写就是：$h^1(\vec{x}_{n\times 1},y_1)=0,\dots,h^m(\vec{x}_{n\times 1},y_m)=0$，即有多少个因变量$y$，函数$h$就有多少个分量

我们考虑隐函数存在必要条件的基本思想是：一个方程$H(x,y)=0$可以决定一个函数$y=f(x)$存在至少需要：1.$\exists(x,y)s.t.H(x,y)=0$，2.$H_y\neq 0$

放到高维，我们有以下**定理**：

如果h在开集U上连续可微，且$\exists(\bar{x},\bar{y})\in\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}^m,s.t.h(\bar{x},\bar{y})=0$，并有$D_{h_y(x,y)}\coloneqq\det\begin{bmatrix}\frac{\partial h_1}{\partial y_1} & \cdots & \frac{\partial h_1}{\partial y_m}\\ \vdots & \ddots & \vdots\\ \frac{\partial h_m}{\partial y_1} & \cdots & \frac{\partial h_m}{\partial y_m}\end{bmatrix}$非退化，那么$\bar{x}$附近可以定义$y=f(x)$，使得$h\big(x,f(x)\big)=0$

对于这个函数，我们可以求其Jacobian如下：

$$\frac{\partial f}{\partial x^T}=\begin{bmatrix}f_1^1 & \cdots & f_n^1\\ \vdots & \ddots & \vdots\\ f_1^m & \cdots & f_n^m\end{bmatrix}=-\left[\frac{\partial h(x,y)}{\partial y^T}\right]^{-1}\left[\frac{\partial h(x,y)}{\partial x^T}\right]|_{x,y=\bar{x},\bar{y}}.$$

注1：Jacobian的由来：先从$f:\mathbb{C}^N\to\mathbb{C}$开始考虑，这个时候$f$的值是一个标量。我们有

$$df(x_1,\dots,x_N)=f_1dx_1+\cdots+f_Ndx_N=[f_1,\dots,f_N]\begin{bmatrix}dx_1\\ \dots\\ dx_N\end{bmatrix}=\frac{\partial f}{\partial x^T}dx$$

再推广到值是一个m维向量的函数$f:\mathbb{C}^N\to\mathbb{C}^m$，我们有：

$$df=d\begin{bmatrix}f^1(x)\\ \dots\\ f^m(x)\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}df^1(x)\\ \dots\\ df^m(x)\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\frac{\partial f^1}{\partial x^T}dx\\ \dots\\ \frac{\partial f^m}{\partial x^T}dx\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\frac{\partial f^1}{\partial x^T}\\ \dots\\ \frac{\partial f^m}{\partial x^T}\end{bmatrix}dx=\begin{bmatrix}f_1^1 & \cdots & f_N^1\\ \vdots & \ddots & \vdots\\ f_1^m & \cdots & f_N^m\end{bmatrix}dx$$

注2：上述Jacobian的推导：由于$h\big(x,f(x)\big)\equiv 0$，两边做全微分有：

$$dh\big(x,f(x)\big)=\frac{\partial h}{\partial x^T}dx+\frac{\partial h}{\partial y^T}dy=\frac{\partial h}{\partial x^T}dx+\frac{\partial h}{\partial y^T}\frac{\partial f}{\partial x^T}dx=0.$$

从而求得上面的Jacobian表达式

1.2 运用隐函数定理解模型

1.隐函数决定方程

考虑Lecture 1的确定性模型，我们将预算约束和欧拉方程看成关于向量$[K_t,C_t]^T$的方程，亦即：

$$\begin{cases}\mathrm{B.C.}:K_{t+1}+C_t-g(K_t)=0=h_1\left(\begin{bmatrix}K_t\\ C_t\end{bmatrix},\begin{bmatrix}K_{t+1}\\ C_{t+1}\end{bmatrix}\right)\\ \mathrm{Euler}:\beta u'(C_{t+1})g'(K_{t+1})-u'(C_t)=0=h_2(\begin{bmatrix}K_t\\ C_t\end{bmatrix},\begin{bmatrix}K_{t+1}\\ C_{t+1}\end{bmatrix})\end{cases}.$$

令$x=\begin{bmatrix}K_t\\ C_t\end{bmatrix}$，$y=\begin{bmatrix}K_{t+1}\\ C_{t+1}\end{bmatrix}$，我们的目标是找到方程决定的隐函数$\begin{bmatrix}K_{t+1}\\ C_{t+1}\end{bmatrix}=f\left(\begin{bmatrix}K_t\\ C_t\end{bmatrix}\right)$，也就是决定

一个递推关系。注意到，在无穷远处S.S.时x和y相等，所以我们可以取

$$(\bar{x},\bar{y})=\left(\begin{bmatrix}\bar{K}\\\bar{C}\end{bmatrix},\begin{bmatrix}\bar{K}\\\bar{C}\end{bmatrix}\right).$$

这是一定会取到的值。

2.Jacobian分析

下面我们来考察这个隐函数的Jacobian：

$$\frac{\partial f}{\partial x^T}=-\left[\frac{\partial h(x,y)}{\partial y^T}\right]^{-1}\left[\frac{\partial h(x,y)}{\partial x^T}\right]=-\begin{bmatrix}1&0\\\beta u'(\bar{C})g''(\bar{K})&\beta u''(\bar{C})g'(\bar{K})\end{bmatrix}^{-1}\begin{bmatrix}-g'(\bar{K})&1\\0&-u''(\bar{C})\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\frac{1}{\beta}&-1\\-\frac{u'g''}{u''}&1+\frac{\beta u'g''}{u''}\end{bmatrix}.$$

注：上面的最后一步用到了两个事实：

1） $A^{-1}=\begin{bmatrix}a&b\\c&d\end{bmatrix}^{-1}=\frac{1}{\det A}\begin{bmatrix}d&-b\\-c&a\end{bmatrix}=\frac{1}{ad-bc}\begin{bmatrix}d&-b\\-c&a\end{bmatrix}$

2）在S.S.时有$g'(\bar{K})=\frac{1}{\beta}$（Lecture 1 2.4.2）

这个Jacobian有两个特征根λ_1,λ_2，满足$\lambda_1\lambda_2=\frac{1}{\beta}>1,\lambda_1+\lambda_2=1+\frac{1}{\beta}+\frac{\beta u'g''}{u''}>1$，所以一个大于1，一个小于1

3.Shur分解

利用Schur分解，我们可以把Jacobian写成：$\frac{\partial f}{\partial[K_t,C_t]}=Q\begin{bmatrix}\lambda_1&s_{12}\\0&\lambda_2\end{bmatrix}Q^{-1},\lambda_1<1<\lambda_2$

这就可以推出：

$$Q^{-1}\frac{\partial f}{\partial[K_t,C_t]}\begin{bmatrix}dK_t\\dC_t\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\lambda_1&s_{12}\\0&\lambda_2\end{bmatrix}Q^{-1}\begin{bmatrix}dK_t\\dC_t\end{bmatrix}.$$

而$\frac{\partial f}{\partial[K_t,C_t]}\begin{bmatrix}dK_t\\dC_t\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}dK_{t+1}\\dC_{t+1}\end{bmatrix}$，所以上式等价于：

$$Q^{-1}\begin{bmatrix}dK_{t+1}\\dC_{t+1}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\lambda_1&s_{12}\\0&\lambda_2\end{bmatrix}Q^{-1}\begin{bmatrix}dK_t\\dC_t\end{bmatrix}.$$

注：这一步隐含了我们的泰勒展开只使用到一阶，从而最后结果与一阶泰勒展开法相同

令$Q^{-1}=\begin{bmatrix}b_{11}&b_{12}\\b_{21}&b_{22}\end{bmatrix}$，上式就可以写成：

$$\begin{bmatrix}b_{11}&b_{12}\\b_{21}&b_{22}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}dK_{t+1}\\dC_{t+1}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\lambda_1&s_{12}\\0&\lambda_2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}b_{11}&b_{12}\\b_{21}&b_{22}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}dK_t\\dC_t\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\lambda_1&s_{12}\\0&\lambda_2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}b_{11}dK_t+b_{12}dC_t\\b_{21}dK_t+b_{22}dC_t\end{bmatrix}.$$

看第二行，即：

$$b_{21}dK_{t+1}+b_{22}dC_{t+1}=\lambda_2(b_{21}dK_t+b_{22}dC_t).$$

由于最终存在S.S.，所以$b_{21}dK_{t+1}+b_{22}dC_{t+1}\to 0$，但是我们知道$\lambda_2>1$，所以为了满足S.S.，必须有

$$b_{21}dK_t+b_{22}dC_t\equiv 0.$$

从而我们得到了Policy function：

$$C_t-\bar{C}=-\frac{b_{21}}{b_{22}}(K_t-\bar{K})\ or\ dC_t=\theta\times dK_t.$$

根据这个Policy function，我们再来看第一行，即：

$$b_{11}dK_{t+1}+b_{12}dC_{t+1}=[\lambda_1,s_{12}]\begin{bmatrix}b_{11}dK_t+b_{12}dC_t\\0\end{bmatrix}=\lambda_1(b_{11}dK_t+b_{12}dC_t).$$

将$dC_t=\theta\times dK_t$代入化简就可以推出：

$$dK_{t+1}=\lambda_1 dK_t.$$

由此，模型最简单的动态方程和Policy function都解出来了

1.3 泰勒展开方法

按照S.S.的结果，$x^*=\begin{bmatrix}K^*\\C^*\end{bmatrix}$是我们设定的隐函数的一个不动点。在不动点附近进行泰勒展开

有：

$$\begin{cases}K_{t+1} = h(K_t) \approx K^* + h'(K^*)(K_t - K^*)\\ \text{B.C.}: C_t = g(K_t) - h(K_t)\end{cases}.$$

把它们代入Euler方程有：

$$u'\left(g(K_t) - h(K_t)\right) = \beta u'\left(g\left(h(K_t)\right) - h\left(h(K_t)\right)\right) g'\left(h(K_t)\right).$$

两边在K^*处对K_t做全微分有：

$$u''(C^*)\left(g'(K^*) - h'(K^*)\right) = \beta u'(C^*)g''(K^*)h'(K^*) + \beta u''(C^*)g'(K^*)\left(g'(K^*)h'(K^*) - h'^2(K^*)\right).$$

注：这一步中用到了$K^* = h(K^*)$这一不动点性质。具体而言，$g\left(h(K^*)\right) - h\left(h(K^*)\right) = C^*$

整理一下，这是一个关于$h'(K^*)$的二次方程：

$$h'^2 + \frac{1}{\beta} = \left(g' + \frac{\beta u' g''}{u''} + 1\right) h'.$$

再利用S.S.处$g' = \frac{1}{\beta}$，就可以发现这与1.2中Jacobian的特征方程形式完全一致，亦即h'的两个解正是之前Jacobian的两个特征根，所以我们在这里给的Policy function $dK_{t+1} = h' dK_t$和我们之前求得的$dK_{t+1} = \lambda_1 dK_t$是一致的

2 线性二次型方法（Linear Quadratic）

2.1 基本模型

1.模型设定

我们假设状态变量/控制变量遵从如下线性动态方程：

$$x_{t+1} = A_{n\times n}x_t + B_{n\times n}u_t + \epsilon,\ \mathbb{E}[\epsilon\epsilon^T] = \Sigma.$$

并假设Agent考虑的最优化问题目标是一个二次型：

$$\boxed{\max\ E[\textstyle\sum_t \beta^t (x_t'Qx_t + u_t'Ru_t + 2u_t'Sx_t)]}$$

2.动态规划解法

假设我们的动态规划值函数形式为

$$V = x^T Px + d.$$

那么Bellman方程就应该写成：

$$x^T Px + d = \max_u\{x^T Qx + u^T Ru + 2u^T Sx + \beta\mathbb{E}[x_{t+1}^T Px_{t+1} + d]\}.$$

将线性动态方程代入得：

$$x^T Px + d = \max_u\{x^T Qx + u^T Ru + 2u^T Sx + \beta\mathbb{E}[(Ax + Bu + \epsilon)^T P(Ax + Bu + \epsilon) + d]\}.$$

化简得（注：这里所有矩阵都是对称的）：

$$x^T Px + d =$$
$$\max_u\{x^T Qx + \beta x^T A^T PAx + u^T Ru + 2u^T Sx + 2\beta x^T A^T PBu + \beta u^T B^T PBu + \beta tr(P\Sigma) + \beta d\}.$$

注：这里化简时有一个步骤为：$\mathbb{E}[\epsilon^T P\epsilon] = \mathbb{E}[tr(\epsilon^T P\epsilon)] = tr[\mathbb{E}(\epsilon^T P\epsilon)] = tr[P\mathbb{E}(\epsilon^T\epsilon)] = tr(P\Sigma)$，其中用到了：$\epsilon^T P\epsilon$是一个标量（一元矩阵），所以它就是它的迹；迹是线性算法与期望可交换；P是非随机的

F.O.C（对控制变量u）为：

$$Ru + Sx + \beta B^T PAx + \beta B^T PBu = 0.$$

推得：

$$u = -(R + \beta B^T PB)^{-1}(S + \beta B^T PA)x.$$

注：我们可以看到这里控制变量是状态变量的一个线性函数，并且与方差Σ完全无关。这包含了“确定性等价/风险中性”的强假设

将u代回Bellman方程得到：

$$\begin{cases} P = Q + \beta A^T PA - (S + \beta B^T PA)^T (R + \beta B^T PB)^{-1} (S + \beta B^T PA) \\ d = \frac{\beta tr(P\Sigma)}{1-\beta} \end{cases}.$$

这样我们就在理论上可以将值函数求出来

注：第一个方程可以通过迭代算法（皮卡收敛法）将P学习出来，但因为计算矩阵的逆（特别是在维度较高的时候）很慢，所以这个算法效率并不高

2.2 扩展模型

1.模型设定

我们现在假设引入一个新的外生状态变量z_t，现在状态变量/控制变量满足线性动态方程（不等式）：

$$x_{t+1} \le A_x x_t + A_z z_t + Bu_t.$$

这里面状态变量是x和z，控制变量为u。其中z_t自身也服从一个AR(1)过程：

$$z_t = \rho z_{t-1} + \epsilon,\ \mathbb{E}[\epsilon\epsilon^T] = \Sigma.$$

现在假设Agent考虑的最优化问题目标是下面的二次型：

$$\max\ E \sum_t \beta^t \begin{bmatrix} x_t \\ u_t \\ z_t \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} A_{xx} & A_{xu} & A_{xz} \\ A_{xu} & A_{uu} & A_{uz} \\ A_{xz} & A_{uz} & A_{zz} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_t \\ u_t \\ z_t \end{bmatrix}$$

2.库恩塔克解法

考虑拉格朗日函数：

$$L = \mathbb{E}\beta^t \left\{ \begin{bmatrix} x_t \\ u_t \\ z_t \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} A_{xx} & A_{xu} & A_{xz} \\ A_{xu} & A_{uu} & A_{uz} \\ A_{xz} & A_{uz} & A_{zz} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_t \\ u_t \\ z_t \end{bmatrix} + 2\lambda_t^T [A_x x_t + A_z z_t + Bu_t - x_{t+1}] \right\}.$$

在这里做一个特殊处理：我们把λ_t也当成一个状态变量来看待，就有：

$$\begin{cases} \text{F.O.C.: } 2A_{uu}u_t + 2A_{ux}x_t + 2A_{uz}z_t + 2B^T\lambda_t = 0 \\ \text{Euler Eq: } \lambda_t = \mathbb{E}\beta[A_{xx}x_{t+1} + A_{xu}u_{t+1} + A_{xz}z_{t+1} + A_x^T\lambda_{t+1}] \end{cases}.$$

我们把这两个方程结合B.C.（即线性动态方程）改写成如下的形式：

$$\begin{cases} \text{F.O.C.: } A_{uu}u_t = -[A_{ux}\ B^T] \begin{bmatrix} x_t \\ \lambda_t \end{bmatrix} - A_{uz}z_t \\ \text{Euler Eq} \times \text{B.C.: } \begin{bmatrix} \beta A_{xx} & \beta A_x^T \\ I & 0 \end{bmatrix} \mathbb{E}_t \begin{bmatrix} x_{t+1} \\ \lambda_{t+1} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & -I \\ -A_x & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_t \\ \lambda_t \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -A_{xu} \\ 0 \end{bmatrix} \mathbb{E}u_{t+1} + \begin{bmatrix} 0 \\ A_u \end{bmatrix} u_t + \begin{bmatrix} -\beta A_{xz} \\ 0 \end{bmatrix} \end{cases}.$$

上面的两个方程，第一个是对FOC的单纯改写，也是系统的dynamics。第二个方程第一行是欧拉方程，第二行是预算约束

通过这两个方程，理论上我们就可以通过联立方程解出这个系统。第一个方程帮助我们把控制变量变成状态变量的函数，代入第二个方程就得到了动态方程

2.3 Hansen-Prescott方法

1.模型设定

考虑一个最简单的Ramsey优化问题：

$$\max_{c_t, k_{t+1}} \sum_t \beta^t \ln(c_t)$$
$$s.t$$
$$k_{t+1} + c_t \le k_t^\alpha$$

我们知道在最终的S.S.有：

$$\begin{cases}\text{B.C.}: k_{t+1}+c_t=k_t^{\alpha}\\ \text{Euler Eq}: \frac{\beta c_t}{c_{t+1}}\alpha k_{t+1}^{\alpha-1}=1\end{cases}$$

2.LQ解法

直接通过S.S.的动态方程解比较麻烦，我们下面介绍一种LQ引申出来的，利用DP的矩阵解法

由于没有折旧，我们令$c_t=k_t^{\alpha}-I_t, I_t=k_{t+1}$。其中$I_t$表示投资，是一个控制变量。这样，$\ln(c_t)=\ln(k_t^{\alpha}-I_t)$

我们把它在最终S.S.处$(\bar{k},\bar{I})$进行泰勒展开：

$$\ln(k_t^{\alpha}-I_t)=f(k_t,I_t)$$
$$\approx f(\bar{k},\bar{I})+f_1'(k_t-\bar{k})+f_2'(I_t-\bar{I})+\frac{1}{2}f_{11}''(k_t-\bar{k})^2+\frac{1}{2}f_{22}''(I_t-\bar{I})^2+f_{12}''(I_t-\bar{I})(k_t-\bar{k})$$
$$=\begin{bmatrix}1\\k\\I\end{bmatrix}^T Q\begin{bmatrix}1\\k\\I\end{bmatrix}.$$

其中：$Q:=$

$$\begin{bmatrix}f(\bar{k},\bar{I})-f_1'\bar{k}-f_2'\bar{I}+\frac{1}{2}f_{11}''\bar{k}^2+\frac{1}{2}f_{22}''\bar{I}^2+f_{12}'\bar{k}\bar{I} & \frac{1}{2}(f_1'-f_{11}''\bar{k}-f_{12}''\bar{I}) & \frac{1}{2}(f_2'-f_{22}''-f_{12}''\bar{k})\\ \cdot & \frac{1}{2}f_{11}'' & \frac{1}{2}f_{12}''\\ \cdot & \cdot & \frac{1}{2}f_{22}''\end{bmatrix}$$

，这就是我们对收益函数$\ln(k_t^{\alpha}-c_t)$所做的近似（approximation）

通过之前的LQ算法我们知道，我们可以假设值函数的形式为：

$$\mathcal{V}=k^TQk+d=\begin{bmatrix}1\\k\end{bmatrix}^T V\begin{bmatrix}1\\k\end{bmatrix}.$$

那么，我们的Bellman方程应该是如下的形式：

$$\begin{bmatrix}1\\k\end{bmatrix}^T V\begin{bmatrix}1\\k\end{bmatrix}=\ln(k_t^{\alpha}-I_t)+\beta\begin{bmatrix}1\\k_{t+1}\end{bmatrix}^T V\begin{bmatrix}1\\k_{t+1}\end{bmatrix}.$$

我们把对于$\ln(k_t^{\alpha}-I_t)$的近似代入Bellman方程，右边就可以写成：

$$\begin{bmatrix}1\\k\\I\end{bmatrix}^T Q\begin{bmatrix}1\\k\\I\end{bmatrix}+\beta\begin{bmatrix}1\\k'\end{bmatrix}^T V\begin{bmatrix}1\\k'\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1\\k\\I\\1\\k'\end{bmatrix}^T\begin{bmatrix}Q & 0\\0 & \beta V\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1\\k\\I\\1\\k'\end{bmatrix}.$$

其中：k'指代的是k_{t+1}

首先我们知道：$k'=I$，所以$\begin{bmatrix}1\\k\\I\\1\\k'\end{bmatrix}=\begin{bmatrix} & I_{4\times4} & & \\0 & 0 & 1 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1\\k\\I\\1\end{bmatrix}$，令$\begin{bmatrix} & I_{4\times4} & & \\0 & 0 & 1 & 0\end{bmatrix}=D_1$，我们可以对右边进行一次降维：

$$\begin{bmatrix}1\\k\\I\\1\\k'\end{bmatrix}^T\begin{bmatrix}Q & 0\\0 & \beta V\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1\\k\\I\\1\\k'\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1\\k\\I\\1\end{bmatrix}^T D_1^T\begin{bmatrix}Q & 0\\0 & \beta V\end{bmatrix}D_1\begin{bmatrix}1\\k\\I\\1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1\\k\\I\\1\end{bmatrix}^T S_1\begin{bmatrix}1\\k\\I\\1\end{bmatrix}.$$

这里$S_1:=D_1^T\begin{bmatrix}Q & 0\\0 & \beta V\end{bmatrix}D_1$

类似地，这里有2个1，所以$\begin{bmatrix}1\\k\\I\\1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix} & I_{3\times3} & \\1 & 0 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1\\k\\I\end{bmatrix}$，令$\begin{bmatrix} & I_{3\times3} & \\1 & 0 & 0\end{bmatrix}=D_2$，我们又可以对右边做一次降维：

$$\begin{bmatrix}1\\k\\I\\1\end{bmatrix}^T S_1 \begin{bmatrix}1\\k\\I\\1\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}1\\k\\I\end{bmatrix}^T D_2^T S_1 D_2 \begin{bmatrix}1\\k\\I\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}1\\k\\I\end{bmatrix}^T S_2 \begin{bmatrix}1\\k\\I\end{bmatrix}.$$

这里$S_2 \coloneqq D_2^T S_1 D_2 = \begin{bmatrix} s_2^{11} & s_2^{12} & s_2^{13} \\ \cdot & s_2^{22} & s_2^{23} \\ \cdot & \cdot & s_2^{33} \end{bmatrix}$

将矩阵展开，得到：$\begin{bmatrix}1\\k\\I\end{bmatrix}^T S_2 \begin{bmatrix}1\\k\\I\end{bmatrix} = s_2^{11} + s_2^{22}k^2 + s_2^{33}I^2 + 2s_2^{12}k + 2s_2^{13}I + 2s_2^{23}kI$。这里$I$是控制变量，应该满足最优条件，上式应该最大，所以我们利用F.O.C.得到：

$$I_t = -\frac{s_2^{13}}{s_2^{33}} - \frac{s_2^{23}}{s_2^{33}} k_t.$$

从而我们得到关系：$\begin{bmatrix}1\\k\\I\end{bmatrix} = \begin{bmatrix} & I_{2\times 2} & \\ -\frac{s_2^{13}}{s_2^{33}} & & -\frac{s_2^{23}}{s_2^{33}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix}1\\k\end{bmatrix}$，令$\begin{bmatrix} & I_{2\times 2} & \\ -\frac{s_2^{13}}{s_2^{33}} & & -\frac{s_2^{23}}{s_2^{33}} \end{bmatrix} = D_3$，我们就得以进一步降维：

$$\begin{bmatrix}1\\k\\I\end{bmatrix}^T S_2 \begin{bmatrix}1\\k\\I\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}1\\k\end{bmatrix}^T D_3^T S_2 D_3 \begin{bmatrix}1\\k\end{bmatrix}.$$

将左边和右边联立起来，就得到：

$$\begin{bmatrix}1\\k\end{bmatrix}^T D_3^T S_2 D_3 \begin{bmatrix}1\\k\end{bmatrix} \equiv \begin{bmatrix}1\\k\end{bmatrix}^T V \begin{bmatrix}1\\k\end{bmatrix}.$$

注意到，左边右边都是含有V的，这就是我们赖以用来迭代得到V的方程

3.向一般问题的推广

我们考虑一般的优化问题。通过LQ近似，我们都可以利用上面的算法来走DP的路子求解。具体而言，我们把s.v.和c.v.写成一个向量$x = [1 \quad s.v. \quad c.v.]^T$，并且每期考虑的收益函数为$g(x) = x^T Q x$。猜想值函数的形式为：$\mathcal{V} = \begin{bmatrix}1\\s.v.\end{bmatrix}^T V \begin{bmatrix}1\\s.v.\end{bmatrix}$，那么Bellman方程就应该是：

$$\begin{bmatrix}1\\s.v.\end{bmatrix}^T V \begin{bmatrix}1\\s.v.\end{bmatrix} = g(x) + \beta \begin{bmatrix}1\\s.v.'\end{bmatrix}^T V \begin{bmatrix}1\\s.v.'\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}1\\s.v.\\c.v.\\1\\s.v.'\end{bmatrix}^T \begin{bmatrix}Q & 0\\0 & \beta V\end{bmatrix} \begin{bmatrix}1\\s.v.\\c.v.\\1\\s.v.'\end{bmatrix}.$$

利用泰勒展开，我们得到一个线性近似的动态方程：

$$s.v.' = As.v. + Bc.v..$$

这样我们就可以做第一次降维：

$$\begin{bmatrix}1\\s.v.\\c.v.\\1\\s.v.'\end{bmatrix} = \begin{bmatrix} & I_{n\times n} & \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & A & B \end{bmatrix} \begin{bmatrix}1\\s.v.\\c.v.\end{bmatrix}.$$

然后利用F.O.C.可以得到一个policy funtion：

$$c.v. = D + Es.v..$$

从而做第二次降维：

$$\begin{bmatrix}1\\s.v.\\c.v.\end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I_{k\times k} & \\ D & E \end{bmatrix} \begin{bmatrix}1\\s.v.\end{bmatrix}.$$

然后代回原来的Bellman方程就可以迭代得到V了

3 随机模型

3.1 最简情形

1.模型方程

上面2.3的讨论没有引入随机因素。现在我们考虑冲击项z_t。回忆Lecture 2 1.3中的内容，我们知道模型的动态满足：

$$\begin{cases}\mathrm{B.C.:}\ 0=k_{t+1}+c_t-z_tf(k_t)-(1-\delta)k_t\\ \text{Euler Eq:}\ 0=u'(c_t)-\beta\mathbb{E}[u'(c_{t+1})(z_{t+1}f'(k_{t+1})+1-\delta)]\end{cases}.$$

并且，冲击项还满足如下的动态方程

$$\ln z_t=\rho\ln z_{t-1}+\epsilon_t.$$

令$\epsilon_t=0$得到的z值就是z的s.s.值，因此$z^{s.s.}=1$，我们令$\bar{z}_t=z_t-z^{s.s.}=z_t-1$，我们知道在很小的变动量情况下，$\ln x\approx x-1$，所以我们可以有：

$$\bar{z}_t\approx\rho\bar{z}_{t-1}+\epsilon_t.$$

类似于这种近似，我们把模型的两个方程的一些函数都在s.s.处做泰勒展开，具体而言，（若s.s.的值我们标上*号，对任意变量y记$\bar{y}=y-y^{s.s.}$，注意$z^{s.s.}=1$）有：

$$\text{Taylor:}\begin{cases}z_tf(k_t)\approx z^*f(k^*)+f(k^*)\bar{z}_t+z^*f'(k^*)\bar{k}_t=f+f\bar{z}_t+f'\bar{k}_t\\ u'(c_{t+1})z_{t+1}f'(k_{t+1})\approx u'\times1\times f'+f'u''\bar{c}_{t+1}+u'f'\bar{z}_{t+1}+u'f''\bar{k}_{t+1}\\ u'(c_{t+1})\approx u'+u''\bar{c}_{t+1}\end{cases}.$$

注：上述包括下面所有类似于f,f',u'',u'这样的略写都是值在s.s.的值

进一步地，对于B.C.，我们有：

$$\begin{cases}\text{Taylor:}\ 0=k_{t+1}+c_t-z_tf(k_t)-(1-\delta)k_t\approx k_{t+1}+c_t-\left(f(k^*)+f(k^*)\bar{z}_t+f'(k^*)\bar{k}_t\right)-(1-\delta\\ \mathrm{s.s.:}0=k^*+c^*-f(k^*)-(1-\delta)k^*\end{cases}.$$

两者做差，就得到：

$$0=\bar{k}_{t+1}+\bar{c}_t-\bar{z}_tf-(1-\delta+f')\bar{k}_t.$$

类似地，关于欧拉方程，我们也有：

$$\begin{cases}\text{Taylor:}\ 0=u'(c_t)-\beta\mathbb{E}[u'(c_{t+1})(z_{t+1}f'(k_{t+1})+1-\delta)]\\ \approx u'+u''\bar{c}_{t+1}-\beta\mathbb{E}\left[(u'+u''\bar{c}_{t+1})(1-\delta)+u'f'+u''f'\bar{c}_{t+1}+u'f'\bar{z}_{t+1}+u'f''\bar{k}_{t+1}\right]\\ \mathrm{s.s.:}0=u'(c^*)-\beta\mathbb{E}[u'(c^*)(1-\delta)+u'(c^*)f'(k^*)]\end{cases}.$$

两者做差，就得到：

$$0=u''\bar{c}_t-\beta\mathbb{E}\left[u''f'\bar{c}_{t+1}+u'f'\bar{z}_{t+1}+u'f''\bar{k}_{t+1}+(1-\delta)u''\bar{c}_{t+1}\right].$$

整合起来就是：

$$\begin{cases}0=\bar{k}_{t+1}+\bar{c}_t-\bar{z}_tf-(1-\delta+f')\bar{k}_t\\ 0=u''\bar{c}_t-\beta\mathbb{E}\left[u''f'\bar{c}_{t+1}+u'f'\bar{z}_{t+1}+u'f''\bar{k}_{t+1}+(1-\delta)u''\bar{c}_{t+1}\right]\end{cases}.$$

把两个做差得到的方程写成矩阵形式，就是：

$$\begin{bmatrix}0\\0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1&0\\-\beta u'f''&-\beta u''(1-\delta+f')\end{bmatrix}\mathbb{E}\begin{bmatrix}\bar{k}_{t+1}\\ \bar{c}_{t+1}\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}-(1-\delta+f')&1\\0&u''\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\bar{k}_t\\ \bar{c}_t\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}-f\\0\end{bmatrix}\bar{z}_t+\begin{bmatrix}0\\-\beta u'f'\end{bmatrix}\mathbb{E}[\bar{z}_{t+1}].$$

这就是矩阵化之后的模型动态方程

2.直接解法

为了解出上面的方程，我们假设policy function是线性的，亦即：

$$\begin{cases}\bar{k}_{t+1}=p_{kk}\bar{k}_t+p_{kz}\bar{z}_t\\ \bar{c}_t=p_{ck}\bar{k}_t+p_{cz}\bar{z}_t\end{cases}.$$

解出上面设的4个参数，我们就解出了想要的policy function。我们把这个policy function代入模型的动态方程。注意由于之前采取的近似，我们应该可以有$\mathbb{E}[\bar{z}_{t+1}]=\mathbb{E}[\rho\bar{z}_t+\epsilon_{t+1}]=\rho\bar{z}_t$，所以动态方程的右边将完全只与$\bar{k}_t$和$\bar{z}_t$有关，也就是我们应当可以整理成：

$$\begin{bmatrix}coff_1\\coff_2\end{bmatrix}\bar{k}_t+\begin{bmatrix}coff_3\\coff_4\end{bmatrix}\bar{z}_t=0.$$

它对所有期t都是成立的，所以应该有

$$coff_i \equiv 0, i = 1,2,3,4.$$

这样就得到了4个方程4个未知数，从而可以解（而这个方法过于繁琐）

3.隐函数法

事实上，期望算子$\mathbb{E}$也不过是一个线性算子而已。所以$\mathbb{E}f(x,y) = 0$同样可以确定y与x的一个函数关系。比如在这个问题中，我们可以考虑$x = x_t = [k_t \quad c_t]^T, y = x_{t+1} = [k_{t+1} \quad c_{t+1}]^T$。现在我们期望得到的policy function采取如下的抽象形式：

$$\begin{cases} k_{t+1} = g^k(k_t, z_t, \sigma) \\ c_t = g^c(k_t, z_t, \sigma) \end{cases}.$$

其中：σ是ϵ的标准差

根据$\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -\beta u' f'' & -\beta u''(1-\delta+f') \end{bmatrix} \mathbb{E} \begin{bmatrix} \bar{k}_{t+1} \\ \bar{c}_{t+1} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -(1-\delta+f') & 1 \\ 0 & u'' \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{k}_t \\ \bar{c}_t \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -f \\ 0 \end{bmatrix} \bar{z}_t + \begin{bmatrix} 0 \\ -\beta u' f' \end{bmatrix} \mathbb{E}[\bar{z}_{t+1}]$这个动态方程和$\mathbb{E}[\bar{z}_{t+1}] = \mathbb{E}[\rho \bar{z}_t + \epsilon_{t+1}] = \rho \bar{z}_t$，（注意到s.s.处$g' = 1 - \delta + f' = \frac{1}{\beta}$，Lecture 1 2.4.2）我们可以推出：

$$\begin{aligned}
\mathbb{E} \begin{bmatrix} \bar{k}_{t+1} \\ \bar{c}_{t+1} \end{bmatrix} &= -\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -\beta u' f'' & -\beta u''(1-\delta+f') \end{bmatrix}^{-1} \left\{ \begin{bmatrix} -(1-\delta+f') & 1 \\ 0 & u'' \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{k}_t \\ \bar{c}_t \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -f \\ 0 \end{bmatrix} \bar{z}_t + \begin{bmatrix} 0 \\ -\beta u' f' \end{bmatrix} \mathbb{E}[\bar{z}_{t+1}] \right\} \\
&= \frac{1}{u''} \begin{bmatrix} -u'' & 0 \\ \beta u' f'' & 1 \end{bmatrix} \left\{ \begin{bmatrix} -\frac{1}{\beta} & 1 \\ 0 & u'' \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{k}_t \\ \bar{c}_t \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -f \\ -\rho \beta u' f' \end{bmatrix} \bar{z}_t \right\} \\
&= \begin{bmatrix} \frac{1}{\beta} & -1 \\ -\frac{u' f''}{u''} & 1 + \frac{\beta u' f''}{u''} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{k}_t \\ \bar{c}_t \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} f \\ -\frac{\beta u' f'' f + \rho u' f'}{u''} \end{bmatrix} \bar{z}_t
\end{aligned}$$

令$\begin{bmatrix} \bar{k}_{t+1} \\ \bar{c}_{t+1} \end{bmatrix} = x_{t+1}, \begin{bmatrix} \bar{k}_t \\ \bar{c}_t \end{bmatrix} = x_t$，我们可以把上式简写成：

$$\mathbb{E}[x_{t+1}] = W x_t + R \bar{z}_t.$$

按照之前的老办法，对W做Shur分解，$W = Q \begin{bmatrix} \lambda_1 & s_{12} \\ 0 & \lambda_2 \end{bmatrix} Q^{-1}, \lambda_2 > 1 > \lambda_1 > 0$，上式就可以写成：

$$Q^{-1} \mathbb{E} \begin{bmatrix} \bar{k}_{t+1} \\ \bar{c}_{t+1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda_1 & s_{12} \\ 0 & \lambda_2 \end{bmatrix} Q^{-1} \begin{bmatrix} \bar{k}_t \\ \bar{c}_t \end{bmatrix} + Q^{-1} R \bar{z}_t.$$

令$Q^{-1} \begin{bmatrix} \bar{k}_{t+1} \\ \bar{c}_{t+1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \tilde{k}_{t+1} \\ \tilde{c}_{t+1} \end{bmatrix}, Q^{-1} \begin{bmatrix} \bar{k}_t \\ \bar{c}_t \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \tilde{k}_t \\ \tilde{c}_t \end{bmatrix}$，于是上式就可以改写成：

$$\mathbb{E} \begin{bmatrix} \tilde{k}_{t+1} \\ \tilde{c}_{t+1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda_1 & s_{12} \\ 0 & \lambda_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \tilde{k}_t \\ \tilde{c}_t \end{bmatrix} + Q^{-1} R \bar{z}_t.$$

根据第二行，我们有：

$$\mathbb{E}[\tilde{c}_{t+1}] = \lambda_2 \tilde{c}_t + q_2 \bar{z}_t.$$

其中：q_2指的是$Q^{-1}R \coloneqq \begin{bmatrix} q_1 \\ q_2 \end{bmatrix}$第二行的那个数

我们把这个式子变形，利用$\mathbb{E}[\bar{z}_{t+1}] = \mathbb{E}[\rho \bar{z}_t + \epsilon_{t+1}] = \rho \bar{z}_t$就可以通过递推得到：

$$\begin{aligned}
\tilde{c}_t &= \frac{1}{\lambda_2} \mathbb{E}_t[\tilde{c}_{t+1}] - \frac{q_2}{\lambda_2} \bar{z}_t \\
&= \cdots \\
&= \frac{1}{\lambda_2^n} \mathbb{E}_t(\tilde{c}_{t+n}) - \frac{q_2}{\lambda_2} \left(1 + \frac{\rho}{\lambda_2} + .. + \frac{\rho^{n-1}}{\lambda_2^{n-1}}\right) \bar{z}_t
\end{aligned}$$

注意到$\lambda_2 > 1$，所以$n \to \infty$时这个式子一定是收敛的，于是我们得到了policy funtion：

$$\tilde{c}_t = -\frac{\frac{q_2}{\lambda_2}}{1 - \frac{\rho}{\lambda_2}} \bar{z}_t.$$

令$Q^{-1}=\begin{bmatrix} q_{11} & q_{12} \\ q_{21} & q_{22} \end{bmatrix}$，我们有$\tilde{c}_t \coloneqq q_{21}\bar{k}_t + q_{22}\bar{c}_t$，于是我们得到了消费的policy funciton：

$$\bar{c}_t = -\frac{1}{q_{22}}\left(q_{21}\bar{k}_t - \frac{\frac{q_2}{\lambda_2}}{1-\frac{\rho}{\lambda_2}}\bar{z}_t\right).$$

然后，结合B.C.：$\bar{k}_{t+1} = \frac{1}{\beta}\bar{k}_t - \bar{c}_t + f\bar{z}_t$，代入$\bar{c}_t$我们就可以得到$\bar{k}_{t+1}$的policy funtion：

$$\bar{k}_{t+1} = \frac{1}{\beta}\bar{k}_t + \frac{1}{q_{22}}\left(q_{21}\bar{k}_t - \frac{\frac{q_2}{\lambda_2}}{1-\frac{\rho}{\lambda_2}}\bar{z}_t\right) + +f\bar{z}_t.$$

3.2 一般情形

考虑之前2.2中利用KKT解引入冲击项的LQ问题，我们当时将影子价格λ_t也当做了状态变量来考虑，我们之前得到的方程是一个F.O.C.和一个Euler×B.C.的矩阵方程。现在我们假设根据这两个方程，我们系统的动态方程最终可以化简写成下面的形式（注意所有的变量都是向量）：

$$\mathbb{E}\begin{bmatrix} x_{t+1} \\ \lambda_{t+1} \end{bmatrix} = W\begin{bmatrix} x_t \\ \lambda_t \end{bmatrix} + Rz_t.$$

还是对W做Shur分解，令$W = Q\begin{bmatrix} \Gamma_1 & S_{12} \\ 0 & \Gamma_2 \end{bmatrix}Q^{-1}$，其中$\Gamma_2$是一个上三角矩阵，并令$\begin{bmatrix} \tilde{x}_t \\ \tilde{\lambda}_t \end{bmatrix} \coloneqq Q^{-1}\begin{bmatrix} x_t \\ \lambda_t \end{bmatrix}$，就有：

$$\mathbb{E}\begin{bmatrix} \tilde{x}_{t+1} \\ \tilde{\lambda}_{t+1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \Gamma_1 & S_{12} \\ 0 & \Gamma_2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \tilde{x}_t \\ \tilde{\lambda}_t \end{bmatrix} + Q^{-1}Rz_t.$$

我们想求的policy funtion是$\tilde{\lambda}_t = \Phi z_t$。令$Q^{-1}R \coloneqq \begin{bmatrix} Q_1 \\ Q_2 \end{bmatrix}$，考虑第二行，有：

$$\mathbb{E}[\tilde{\lambda}_{t+1}] = \Gamma_2\tilde{\lambda}_t + Q_2 z_t.$$

我们假设z_t服从一个VAR(1)过程的关系：

$$z_{t+1} = \Pi z_t.$$

把这个关系与$\tilde{\lambda}_t = \Phi z_t$一同代入上述方程，就有：

$$\Phi\Pi z_t = \Gamma_2\Phi z_t + Q_2 z_t.$$

该式子对所有的t都应该成立，所以应该有：

$$\Phi\Pi = \Gamma_2\Phi + Q_2.$$

接下来我们引入两种运算：向量化运算$vec(\cdot)$和克罗内克（Kronecker）积⊗。通过举例进行定义：

1）设$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}$，则$vec(A) \coloneqq \begin{bmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ a_{12} \\ a_{22} \end{bmatrix}$

2）设$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{bmatrix}$，则$A \otimes B \coloneqq \begin{bmatrix} a_{11}B & a_{12}B \\ a_{21}B & a_{22}B \end{bmatrix}$

这两种运算存在一个性质：

$$vec(ABC) = (C^T \otimes A)vec(B).$$

运用这个性质，我们可以按照下面这个步骤解出Φ：

$$\begin{aligned} & I_1\Phi\Pi = \Gamma_2\Phi I_2 + Q_2 \\ \Rightarrow\ & vec(I_1\Phi\Pi) = vec(\Gamma_2\Phi I_2) + vec(Q_2) \\ \Rightarrow\ & (\Pi^T \otimes I_1)vec(\Phi) = (I_2 \otimes \Gamma_2)vec(\Phi) + vec(Q_2) \end{aligned}$$

从而我们解得：

$$vec(\Phi) = [\Pi^T \otimes I_1 - I_2 \otimes \Gamma_2]^{-1}vec(Q_2).$$

解出了$vec(\Phi)$，只需要做一个逆运算（摞回去）就可以得到Φ了，从而我们解出了$\tilde{\lambda}_t$的policy function。如果我们令$Q^{-1} \coloneqq \begin{bmatrix} Q_{11} & Q_{12} \\ Q_{21} & Q_{22} \end{bmatrix}$，就应该有：

$$\tilde{\lambda}_t = \Phi z_t = Q_{21}x_t + Q_{22}\lambda_t.$$

从而$\lambda_t = f^1(x_t, z_t)$的关系就可以得到了。根据动态方程，$\mathbb{E}\begin{bmatrix} x_{t+1} \\ \lambda_{t+1} \end{bmatrix} = W\begin{bmatrix} x_t \\ \lambda_t \end{bmatrix} + Rz_t \coloneqq$

$\begin{bmatrix} W_{11} & W_{12} \\ W_{21} & W_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_t \\ \lambda_t \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} R_1 \\ R_2 \end{bmatrix} z_t$，把$\lambda_t = f^1(x_t, z_t)$的关系代入，理论上我们又可以解得$\mathbb{E}[x_{t+1}] = W_{11}x_t + W_{12}\lambda_t + R_1 z_t = f^2(x_t, z_t)$。于是$x_{t+1}$的policy funtion也得到了。又根据F.O.C.,u_t的policy funtion也可以得到了。模型就算解完了