《计算概论A》课程 程序设计部分

函数的递归调用 (2)

李　戈

北京大学 信息科学技术学院 软件研究所

2010年12月3日

例题1：进制转换

进制转换

- 问题
  - 编写一个程序，对任意输入的十进制正整数给出其二进制表示，并打印输出。

- 例如:
  - 输入：97
  - 输出：1100001

进制转换

- 将123转换成等值的二进制数:

除以2的商（取整）	余数
123/2 = 61	1
61/2 = 30	1
30/2 = 15	0
15/2 = 7	1
7/2 = 3	1
3/2 = 1	1
1/2 = 0	1

- 自下而上收集余数：1111011

进制转换

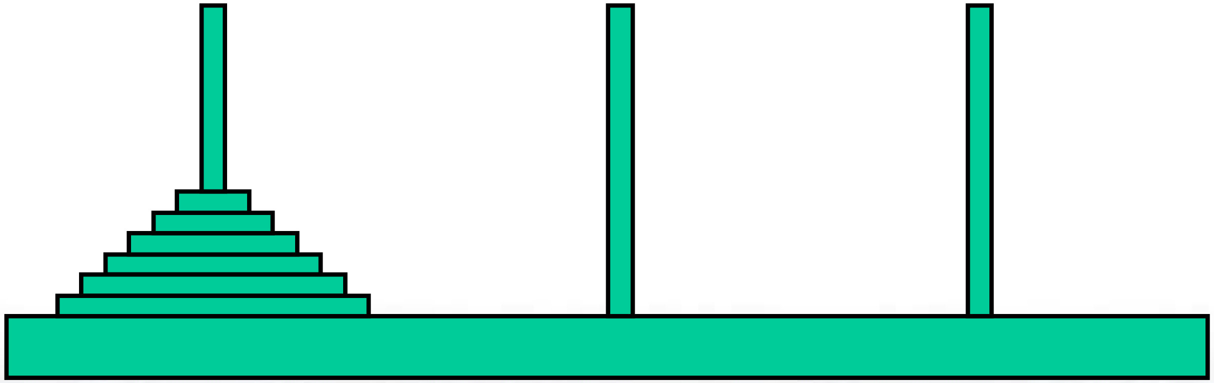
```
#include<iostream>
using namespace std;
void convert (int x)
{
   if((x/2)!=0)
   {
     convert (x/2);
     cout<<x%2;
   }
   else
     cout<<x;
}
```

```
void main()
{
   int x;
   cin>>x;
   convert (x);
}
```

例题2：汉诺塔问题

汉诺塔问题

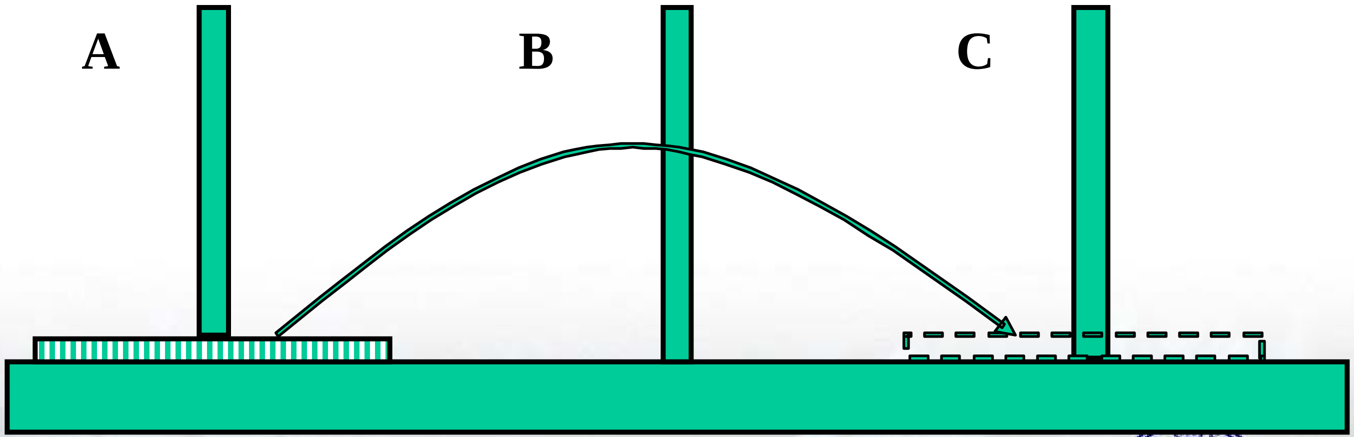
- 故事：相传在古代印度的Bramah庙中，有位僧人整天把三根柱子上的金盘倒来倒去，原来他是想把64个一个比一个小的金盘从一根柱子上移到另一根柱子上去。移动过程中恪守下述规则：每次只允许移动一只盘，且大盘不得落在小盘上面。
- 有人会觉得这很简单，真的动手移盘就会发现，如以每秒移动一只盘子的话，按照上述规则将64只盘子从一个柱子移至另一个柱子上，所需时间约为5800亿年。



汉诺塔问题

怎样编写这种程序？从思路上还是先从最简单的情况分析起，搬一搬看，慢慢理出思路。

1、在A柱上只有一只盘子，假定盘号为1，这时只需将该盘从A搬至C，一次完成，记为move 1 from A to C



2、在A柱上有二只盘子，1为小盘，2为大盘。

第（1）步将1号盘从A移至B；

第（2）步将2号盘从A移至C；

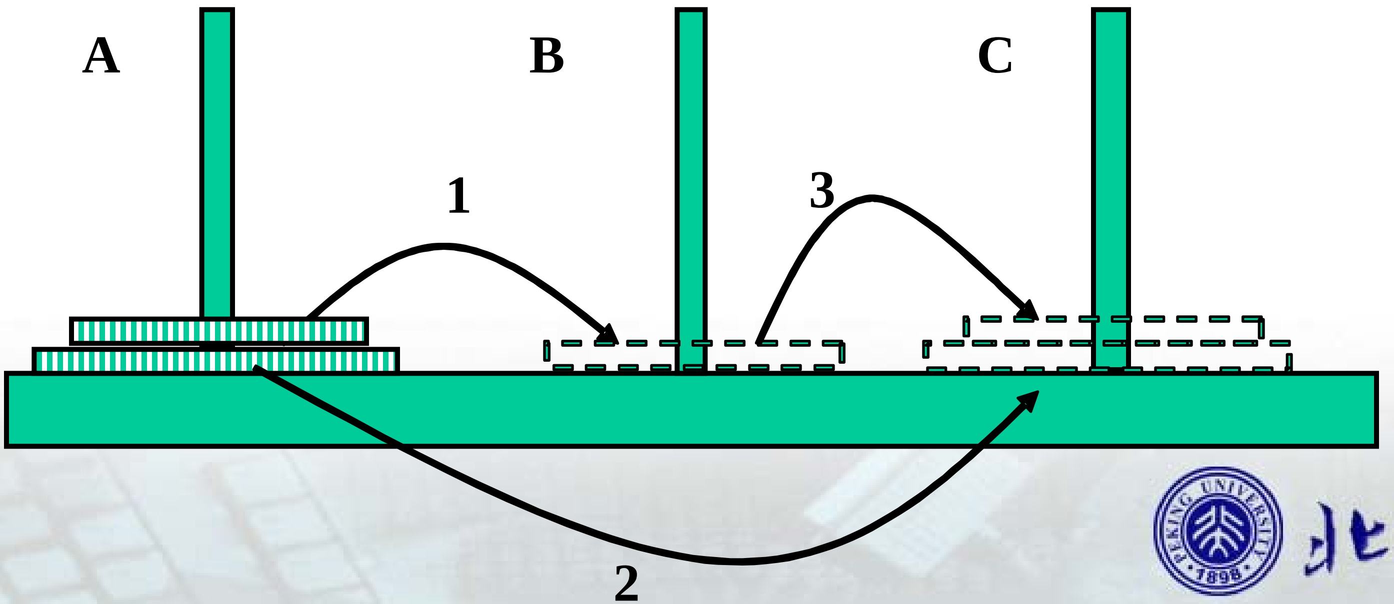
第（3）步再将1号盘从B移至C；

这三步记为：

move 1 from A to B;

move 2 from A to C;

move 3 form B to C;



3、在A柱上有3只盘子，从小到大分别为1号，2号，3号

第（1）步将1号盘和2号盘视为一个整体；先将二者作为整体从A移至B。这一步记为

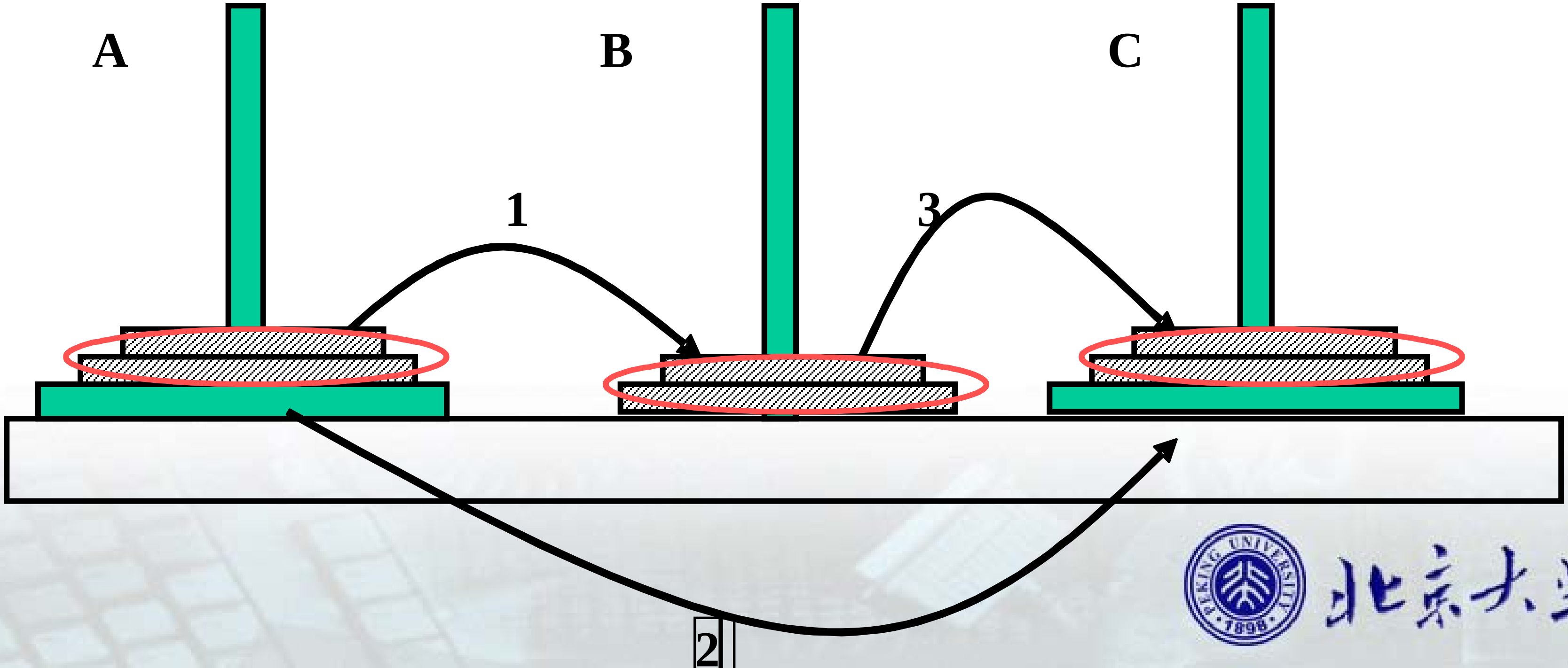
move(2, A, C, B)

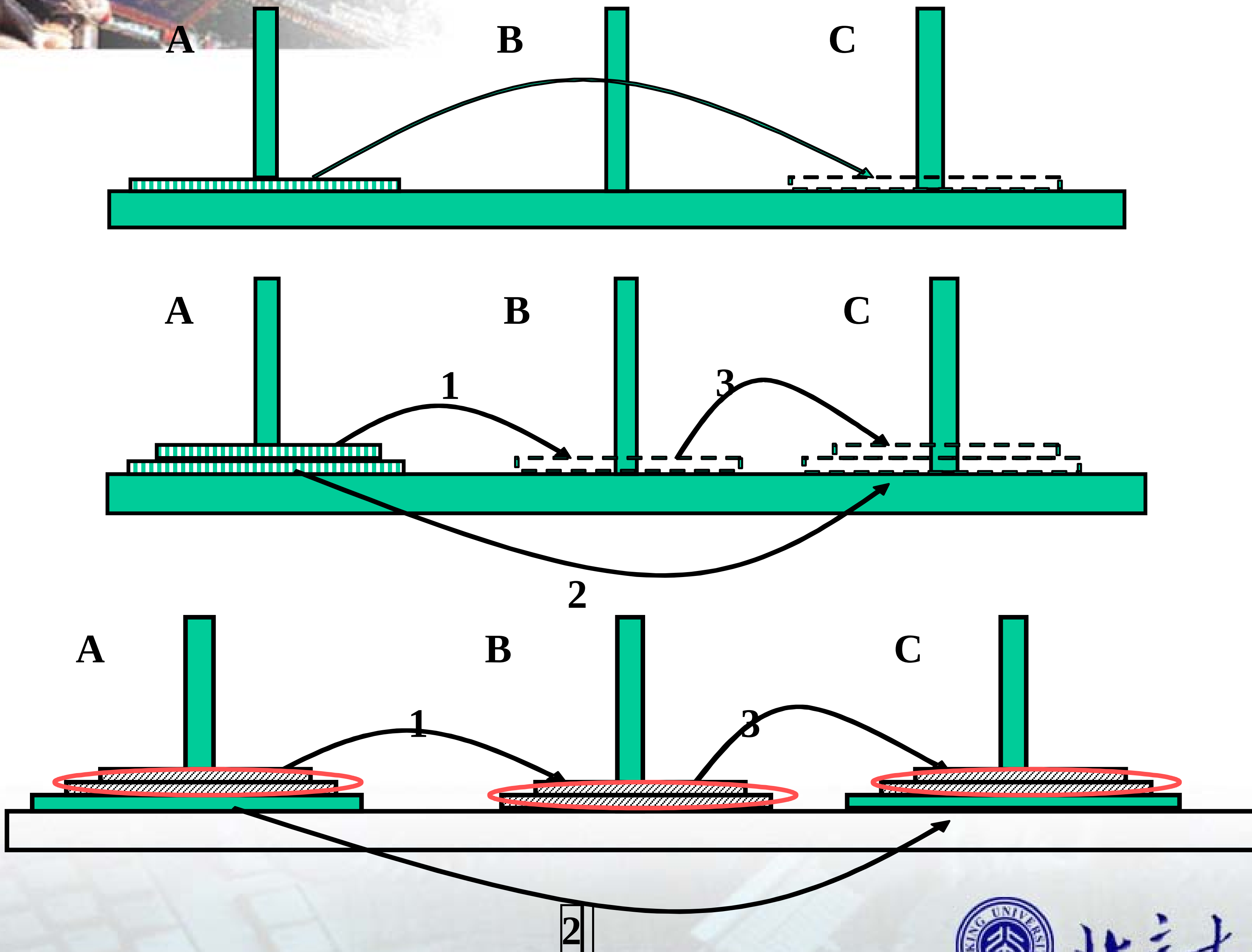
第（2）步将3号盘从A移至C，一次到位。记为

move 3 from A to C

第（3）步处于B上的作为一个整体的2只盘子，再移至C。这一步记为

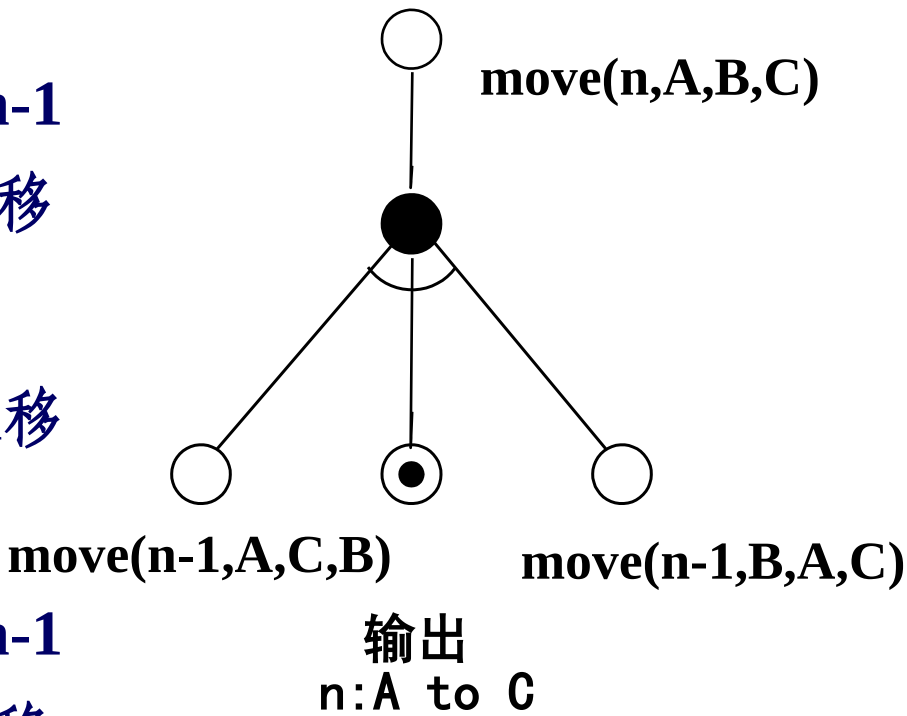
move(2, B, A, C)




A
B
C
A
B
C
1
3
2
A
B
C
1
3
2

递归经典问题——汉诺塔问题

- move(n, A, B, C) 分解为3步
  - move(n-1, A, C, B) 将上面的n-1只盘子作为一个整体从A经C移至B;
  - 输出n: A to C，将n号盘从A移至C，是直接可解结点;
  - move(n-1, B, A, C) 将上面的n-1只盘子作为一个整体从B经A移至C。



```
#include<iostream>
using namespace std;
void  move(int m, char A, char B, char C) //表示将m个盘子从A经过B移动到C
{    if (m==1)                                  //如果m为1,则为直接可解结点
     {
          cout<<"move 1# from"<<A<<" to "<<C<<endl;  //直接可解结点
     }
     else                          //如果不为1, 则要调用move(m-1)
     {
          move(m-1,A,C,B);           //递归调用move(m-1)
          cout<<"move 1# from"<<A<<" to "<<C<<endl;  //直接可解结点
          move(m-1,B,A,C);           //递归调用move(m-1)
     }
}
int main() {
     int n;                                   //整型变量, n为盘数
     cout<<"请输入盘数n="<<endl;
     cin >> n;                                  //输入盘子数目正整数n
     cout<<"在3根柱子上移"<<n<<"只盘的步骤为:"<<endl;
     move(n,'a','b','c');                     //调用函数 move(n,'a','b','c')
     return 0;
}
```

例题3：最大公约数问题

最大公约数

- 问题
  - 请编写程序求解两个整数a, b的最大公约数;
  - 提示:
    - Great Common Divisor（GCD）
    - 求a, b的最大公约数的函数可以命名为gcd(a, b)

北京大学

如何求最大公约数

- 辗转相除法
  - 又名欧几里德算法（Euclidean algorithm）
  - 它是已知最古老的算法，其可追溯至前300年。它首次出现于欧几里德的《几何原本》（第VII卷，命题i和ii）
  - 在中国可以追溯至东汉出现的《九章算术》。

北京大学

辗转相除法

- 原理:
  - 若 r 是 a ÷ b 的余数，则gcd(a, b) = gcd(b, r)

    如: gcd(27, 15) = gcd(15, 12)

    gcd(15, 12) = gcd(12, 3)

    这时，12 ÷3 余数为 0, 则 答案为3

  - 若 r = 0，算法结束；b 即为答案

辗转相除法

■ 用递归实现的代码:

```
int gcd(int a, int b)  //求a, b的最大公约数
{
    if(a%b ==0)
        return b;
    else
        return gcd(b, a%b);
}
```

如何求最小公倍数?

- 两个数的乘积等于这两个数的最大公约数与最小公倍数的积
  - Great Common Divisor（GCD）
  - Least Common Multiple（LCM）
- 即
  - 设两个数a, b的最小公倍数为lcm(a, b)
  - 设两个数a, b的最大公约数为gcd(a, b)
  - 则：a*b = gcd(a, b)*lcm(a, b)
- 因此，可先求gcd(a, b) 再求 lcm(a, b)

例题4：快速排序

快速排序

- 问题:
  - 设计程序对整数数组中的数进行由小到大的排序;
- 算法优劣的标准
  - 时间代价
  - 空间代价
- 思考:
  - 排序程序中，时间代价、空间代价花费在哪里?

	i=1	i=2	i=3	i=4	i=5	i=6
	a[1]	a[2]	a[3]	a[4]	a[5]	a[6]
初始值	1	8	3	2	4	9
1<8; 1,8互换	1 ⟷	8	3	2	4	9
1<3; 1,3互换	8	1 ⟷	3	2	4	9
1<2; 1,2互换	8	3	1 ⟷	2	4	9
1<4; 1,4互换	8	3	2	1 ⟷	4	9
1<9; 1,9互换	8	3	2	4	1 ⟷	9
1到达位置	8	3	2	4	9	1
8>3;顺序不动	8	3	2	4	9	1
3>2;顺序不动	8	3	2	4	9	1
2<4; 2,4互换	8	3	2 ⟷	4	9	1
2<9; 2,9互换	8	3	4	2 ⟷	9	1
2到达位置	8	3	4	9	2	1

快速排序

- 思路:
  - 假设你的手里有一把牌：要尽可能少移动牌的位置；尽可能少的进行比较；

3	2	4	7	5	1	6

快速排序

	3	2	4	7	5	1	6
3		2	4	7	5	1	6
3	1	2	4	7	5		6
3	1	2		7	5	4	6
	1	2	3	7	5	4	6

快速排序

- 完成一趟排序:
  - 将数组第一个元素取出，作为分界值存放到k里。此时数组第一个元素位置空闲，用一个左探针L指示。
  - 设右探针R，从右往左走，寻找小于k的数。找到则将该数存放进左探针L所指示的空闲位置，此时右探针R所指示的位置变为空闲位置。
  - 左探针L从左往右走，寻找大于k的数。找到则将该数放到右探针R所指示的空闲位置，此时左探针所指示的位置变为空闲位置。
  - 循环执行以上2步，直到左右探针相遇为止。左右探针相遇意味着找完所有的元素。它们相遇的地方就是k的位置。

3			2	4	7	5	1	6

快速排序

- 分而治之解决全部排序:
  - 选定数组中的某个数字作为参照物开始排序;
  - 首先以选定的数字为参照物，将要排序的数据分成两大部分，一部分的所有数据都比参照数字小，另外一部分的所有数据都比参照数字大;
  - 然后再按此方法对这两部分数据分别进行排序，直到整个数据变成有序序列。

3	2	4	7	5	1	6

3	1	2		7	5	4	6

快速排序

快速排序(*QuickSort*)

Cooling

本例演示只说明一次划分过程Partition。红色显示的元素表示待排序的无序区。

R[ ]

请输入待排序的记录数组R[low..high]
(数据之间用半角逗号隔开)

Clear　Start

快速排序

- 对数组是a[1]……a[n]，一趟快速排序的算法：
  1. 设置两个变量L、R，排序开始的时候L = 1，R = n;
  2. 以第一个数组元素作为关键数据，赋值给k，即k = a[1];
  3. 从R开始向前搜索，即由后开始向前搜索（R = R-1），找到第一个小于k的值，两者交换;
  4. 从L开始向后搜索，即由前开始向后搜索（L = L+1），找到第一个大于k的值，两者交换;
  5. 重复第3、4步，直到L=R;
  6. 将选出的k归位，a[L] = k;（或a[R] = k;）

```
L = LP;        R = RP;        k = array[L];
                         // array[L]给了k，L处空缺;
do {
    while ((L < R) && (array[R] >= k))
        R = R - 1;     //找到右起第一个比k小的数
    if (L < R) {
        array[L] = array[R]; //array[R]送给array[L];
        L ++;
    }
    while ((L < R) && (array[L] <= k))
        L = L + 1;     //找到左起第一个比k大的数
    if (L < R) {
        array[R]=array[L];
        R --;
    }
} while (L != R);
array[L] = k;              //将最初选出的数字归位
```

```
void sort(int array[ ], int LP, int RP)
{
    int L, R, i, k;
    if (LP < RP) {
        L = LP;  R = RP;  k = array[L];             // array[L]给了k，L处空缺;
        do {     while ((L < R) && (array[R] >= k))
                         R = R - 1;
                 if (L < R) {
                         array[L] = array[R];       //array[R]送给array[L];
                         L ++;
                 }
                 while ((L < R) && (array[L] <= k))
                         L = L + 1;                 //左边的元素<=k,让L往中间移;
                 if (L < R) {
                         array[R]=array[L];
                         R --;
                 }
        } while (L != R);
        array[L] = k;
        for(i = LP; i <= RP; i = i + 1)
        cout<<“a[”<<i<<“]=”<<array[i];
        cout << endl;
        sort(array, LP, L-1);
        sort(array, L + 1, RP);
    }}
```

快速排序

```
#include <iostream>
int main()
{
    int a[10], i;
    cout <<"请输入10个整数\n";
    for (i=0; i<10; i=i+1)
        cin >>a[i];
    sort(a, 0, 9); //调用sort函数，实际参数为数组a和0, 9
    cout <<"排序结果为:";
    for (i=0; i<10; i=i+1)
        cout <<a[i];
    cout << endl;
    return 0;   }
```

北京大学

例题5：两道习题

逆波兰表达式

- 题目描述
  - 逆波兰表达式是一种把运算符前置的算术表达式:
    - 如表达式2 + 3的逆波兰表示法为+ 2 3。
    - 如(2 + 3) * 4的逆波兰表示法为* + 2 3 4。
  - 编写程序求解任一仅包含+ - * /四个运算符的逆波兰表达式的值。
- 输入: *   +   11.0   12.0   +   24.0   35.0
- 输出: 1357.0

放苹果

- 题目描述
  - 把M个同样的苹果放在N个同样的盘子里，允许有的盘子空着不放，问共有多少种不同的分法?
  - 注意：5，1，1和1，5，1是同一种分法
  - 输入：7 3
  - 输出：8

放苹果

- 如果$n>m$：必定有$n-m$个盘子永远空着，去掉它们对摆放苹果方法数目不产生影响；即
  - $if(n>m)\ f(m,n) = f(m,m)$
- 当$n <= m$时，不同的放法可以分成两类：
  - 至少一个盘子空着：
    - 该情况相当于$f(m , n) = f(m , n-1)$
  - 所有盘子都有苹果：
    - 若从每个盘子中拿掉一个苹果，不影响放法的数目，即$f(m , n) = f(m-n , n)$

放苹果

- 极限情况:
  - n 会逐渐减少，终会当n= 1 时:
    - 所有苹果都必须放在一个盘子里，返回 1 ;
  - m 会逐渐减少，因为n>m 时，我们会 return f(m , m) 代替f(n, m)，最终当 m = 0时:
    - 没有苹果可放，返回 1 ;

好好想想,有没有问题?

谢　谢　!

北京大學