第一章 基本概念

习题 1-1

1.解：

(1) $\because y = C_1e^{2x} + C_2e^{-2x}$

$\therefore y^{'} = 2C_1e^{2x} - 2C_2e^{-2x}$

$y^{''} = 4C_1e^{2x} + 4C_2e^{-2x}$

$\therefore y^{''} - 4y = 0$

又$\because \frac{D[y,y^{'}]}{D[C_1,C_2]} = \begin{vmatrix} e^{2x} & e^{-2x} \\ 2e^{2x} & -2e^{-2x} \end{vmatrix} = -4 \neq 0$

$\therefore$ 此函数是右侧相应微分方程的通解。

(2) $\because y = \frac{\sin x}{x}$

$\therefore y^{'} = \frac{x\cos x - \sin x}{x^2}$

$xy^{'} + y = \cos x$

$\therefore y = \frac{\sin x}{x}$是$xy^{'} + y = \cos x$的一个特解。

(3) $\because y = x(\int x^{-1}e^x dx + C)$

$y^{'} = \int x^{-1}e^x dx + C + e^x$

$\therefore xy^{'} - y = xe^x$

又$\because \frac{dy}{dc} = x \neq 0,\ (x \neq 0)$

$\therefore y = x(\int x^{-1}e^x dx + C)$是$xy^{'} - y = xe^x$的通解。

(4) $\because y = \begin{cases} -\frac{1}{4}(x-c_1)^2 & ,-\infty < x < c_1 \\ 0 & ,c_1 \leq x \leq c_2 \\ \frac{1}{4}(x-c_2)^2 & ,c_2 < x < \infty \end{cases} \qquad (*)$

$\therefore y^{'} = \begin{cases} -\frac{1}{2}(x-c_1) & ,-\infty < x < c_1 \\ 0 & ,c_1 \leq x \leq c_2 \\ \frac{1}{2}(x-c_2) & ,c_2 < x < \infty \end{cases}$

$y^{'} = \sqrt{|y|}$

$\therefore (*)$是$y^{'} = \sqrt{|y|}$的通解。

2.解：

(1) $\because y^{'''} = x$

$\therefore y = \frac{1}{24}x^4 + \frac{1}{2}c_1x^2 + c_2x + c_3$

又$y(0) = a_0,\ y^{'}(0) = a_1,\ y^{''}(0) = a_2$

$\therefore y = a_0 + a_1 x + \frac{1}{2} a_2 x^2 + \frac{1}{24} x^4$
(2) $y^{'} = f(x) \Rightarrow \;\; y = \int_0^x f(t)dt + C$
又$y(0) = 0$
$\therefore y = \int_0^x f(t)dt$
(3) $R^{'} = -aR \Rightarrow \;\; R = Ce^{-at}, \; (a > 0)$
又$R(0) = C = 1$
$\therefore R = e^{-at}, \; (a > 0)$
(4) $\because y^{'} = 1 + y^2, \; \therefore \frac{dy}{1+y^2} = dx$
$\therefore \arctan y = x + C, \; \therefore y = \tan(x + C)$
又$y(x_0) = \tan(x_0 + C) = y_0, \; \therefore C = \arctan y_0 - x_0$
$\therefore y = \tan(x - x_0 + \arctan y_0)$

3.解：

(1) $y = Cx + x^2, \; \therefore y^{'} = C + 2x$
$\therefore y = (y^{'} - 2x)x + x^2 = y^{'}x - x^2$
即$xy^{'} - x^2 - y = 0$
(2)

$$y = c_1 e^x + c_2 x e^x \tag{1a}$$

$$y^{'} = c_1 e^x + c_2 (x e^x + e^x) \tag{1b}$$

$$y^{''} = c_1 e^x + c_2 (x e^x + 2e^x) \tag{1c}$$

$$\frac{D[y, y^{'}]}{D[c_1, c_2]} = \begin{vmatrix} e^x & x e^x \\ e^x & e^x + x e^x \end{vmatrix} = e^{2x} \neq 0$$

$\therefore c_1, c_2$是彼此独立的

$$(1a)(1b) \;\; \Rightarrow \;\; \begin{cases} c_1 & , e^{-x}(y + xy - xy^{'}) \\ c_2 & , e^{-x}(y^{'} - y) \end{cases}$$

代入$(1c)$,有

$$y^{''} = 2y^{'} - y$$

(3) 对$x^2 + y^2 = c$两边关于x求导,有

$$x + yy^{'} = 0$$

(4)

$$(x - a)^2 + (y - b)^2 = C \tag{2a}$$

$$(x-a)+(y-b)y^{'}=0 \tag{2b}$$

$$1+(y^{'})^2+(y-b)y^{''}=0 \tag{2c}$$

$$3y^{'}y^{''}+(y-b)y^{'''}=0 \tag{2d}$$

$$(2c) \Rightarrow y-b=-\frac{1+(y^{'})^2}{y^{''}}$$

代入(2d),有

$$[1+(y^{'})^2]y^{'''}-3y^{'}(y^{''})^2=0$$

4.证：

$\because y=g(x,c_1,c_2,\cdots,c_n)$充分光滑，则y直到n阶可导

$$y=g^{'}(x,c_1,c_2,\cdots,c_n)$$

$$y=g^{''}(x,c_1,c_2,\cdots,c_n)$$

$$\cdots$$

$$y=g^{n}(x,c_1,c_2,\cdots,c_n)$$

又$\because c_1,c_2,\cdots,c_n$彼此独立，

$\therefore$

$$\frac{D[y,y^{'},\cdots,y^{n-1}]}{D[c_1,c_2,\cdots,c_n]}\neq 0$$

由隐函数存在定理，知$c_1,c_2,\cdots,c_n$可以用$y,y^{'},\cdots,y^{n-1}$表出，代入方程

$$y=g^{n}(x,c_1,c_2,\cdots,c_n)$$

即可得形如$F(x,y,y^{'},\cdots,y^{n})=0$的方程

显然，$y=g(x,c_1,c_2,\cdots,c_n)$是此方程的解，

又$\because c_1,c_2,\cdots,c_n$彼此独立，

$\therefore$又是方程的通解，得证。

习题 1-2

1.解：

(1)

(2)

(3)

2.解:

(1)

(2)

3.解：

第二章 初等积分法

习题 2-1

1.解:

$\because$

$$\frac{\partial P}{\partial y}(x,y)=0\neq 2=\frac{\partial Q}{\partial x}(x,y)$$

$\therefore$不是恰当方程

2.解：

$\because$

$$\frac{\partial P}{\partial y}(x,y)=2=\frac{\partial Q}{\partial x}(x,y)$$

$\therefore$是恰当方程

3.解:

$\because$

$$\frac{\partial P}{\partial y}(x,y)=b=\frac{\partial Q}{\partial x}(x,y)$$

$\therefore$是恰当方程

4.解：

$\because$

$$\frac{\partial P}{\partial y}(x,y)=-b\neq b=\frac{\partial Q}{\partial x}(x,y),\ (b\neq 0)$$

∴不是恰当方程

5.解：

∵

$$\frac{\partial P}{\partial y}(x,y)=2t\cos u=\frac{\partial Q}{\partial x}(x,y)$$

∴是恰当方程

6.解：

∵

$$\frac{\partial P}{\partial y}(x,y)=e^x+2y=\frac{\partial Q}{\partial x}(x,y)$$

∴是恰当方程

7.解：

∵

$$\frac{\partial P}{\partial y}(x,y)=\frac{1}{x}=\frac{\partial Q}{\partial x}(x,y)$$

∴是恰当方程

8.解:

∵

$$\frac{\partial P}{\partial y}(x,y)=2by,\ \frac{\partial Q}{\partial x}(x,y)=cy$$

$\therefore if\ 2b=c$, 则是恰当方程；否则，不是恰当方程。

9.解：

∵

$$\frac{\partial P}{\partial y}(x,y)=\frac{1-2s}{t^2}=\frac{\partial Q}{\partial x}(x,y)$$

∴是恰当方程

10.解：

∵

$$\frac{\partial P}{\partial y}(x,y)=2xyf^{'}(x^2+y^2)=\frac{\partial Q}{\partial x}(x,y)$$

∴是恰当方程

习题 2-2

1.解：

(1)

$$y^{'}=\frac{x^2}{y},\ ydy=x^2dx$$

$$0.5y^2=\frac{1}{3}x^3+C,\ y\neq 0$$

即

$$3y^2=2x^3+C,\ y\neq 0$$

(2)

$$y^{'}=\frac{x^2}{y(1+x^3)},\ ydy=\frac{x^2}{1+x^3}dx$$

$$0.5y^2=\frac{1}{3}\ln|1+x^3|+C,$$

即

$$3y^2-2\ln|1+x^3|=C,\ y\neq 0,x\neq -1$$

(3) $y=0$是方程的一个解，

$if\ \ y\neq 0$

$$-\frac{dy}{y^2}=\sin xdx,\ \frac{1}{y}=-\cos x-C$$

即

$$1+(C+\cos x)y=0$$

和特解

$$y=0$$

(4)

$$y^{'}=(1+x)(1+y^2),\ \frac{dy}{1+y^2}=(1+x)dx$$

$$\arctan y=0.5x^2+x+C$$

$$y=\tan(0.5x^2+x+C)$$

(5)

$$y^{'}=(\cos x\cos 2y)^2$$

$if\ \ \cos 2y\neq 0$

$$\frac{dy}{\cos^2 2y}=\cos^2 xdx=\frac{1+\cos 2x}{2}dx$$

$$2\tan 2y-2x-\sin 2x=C$$

$if\ \ \cos 2y=0$

$$y=\frac{\pi}{4}+\frac{n\pi}{2},n\in\mathbf{Z}$$

(6)

$$xy^{'}=\sqrt{1-y^2}$$

$y=\pm1$是方程的特解，

$if\ y\neq\pm1,x\neq0$

$$\frac{dy}{\sqrt{1-y^2}}=\frac{dx}{x}$$

$$\arcsin y=\ln|x|+C$$

$\therefore$方程的解为

$$\arcsin y=\ln|x|+C,\ (x\neq0)and\ y=\pm1$$

(7)

$$y^{'}=\frac{x-e^{-x}}{y+e^y}$$

$$(y+e^y)dy=(x-e^{-x})dx$$

解为

$$y^2-x^2+2(e^y-e^{-x})=C\ (y+e^y\neq0)$$

2.解:

(1)

$$\sin 2xdx+\cos 3ydy=0$$

$$-\frac{\cos 2x}{2}+\frac{\sin 3y}{3}=C$$

又$y(\frac{\pi}{2})=\frac{\pi}{3}$,所以

$$-\frac{\cos(2*\frac{\pi}{2})}{2}+\frac{\sin(3*\frac{\pi}{3})}{3}=C=0.5$$

$\therefore$

$$2\sin 3y-3\cos 2x=3$$

(2)

$$xdx + ye^{-x}dy = 0 \Rightarrow xe^{x}dx + ydy = 0$$

$$\Rightarrow xe^{x} - e^{x} + \frac{y^2}{2} = C$$

$\because y(0) = 1$

$\therefore C = -e^0 + \frac{1}{2} = -\frac{1}{2}$,所以

$$2(x-1)e^{x} + y^2 + 1 = 0$$

(3)

$$\frac{dr}{d\theta} = r$$

$r = 0$是它的一个解

$r \neq 0$时，

$$\frac{dr}{r} - d\theta = 0,$$

$$\ln|r| - \theta = C,$$

由r的物理意义知$r \geq 0$,所以$\ln r - \theta = C$

又$r(0) = 2, \therefore C = \ln 2$

$$\ln r - \theta = \ln 2 \Rightarrow r = 2e^{\theta}$$

(4)

$$\because y' = \frac{\ln|x|}{1+y^2}, (1+y^2)dy - \ln|x|dx = 0$$

$$\therefore y + \frac{y^3}{3} - x\ln|x| + x = C$$

$$\because y(1) = 0, \therefore C = 0 + 0 - 0 + 1 = 1$$

$$\therefore y + \frac{y^3}{3} - x\ln|x| + x = 1$$

(5)

$$\sqrt{1+x^2}y' = xy^3$$

$y = 0$是方程的一个特解，

$y \neq 0$时，

$$\frac{xdx}{\sqrt{1+x^2}} - \frac{dy}{y^3} = 0$$

$$2\sqrt{1+x^2} + \frac{1}{y^2} = C$$

$\because y(0)=1,\ \therefore C=2\sqrt{1}+1=3$

$$\therefore \frac{1}{y^2}+2\sqrt{1+x^2}=3$$

3.解：

(1)

$$y^{'}=\cos x$$

$$\therefore y=\sin x+C$$

(2)

$$y^{'}=ay\ (a\neq 0)$$

$y=0$是它的一个特解，

$y\neq 0$时，

$$\frac{dy}{y}=adx$$

$$\ln|y|=ax+C_1$$

$$y=Ce^{ax}\ (C\neq 0)$$

$y=0$是$C=0$时的特解，故

$$y=Ce^{ax}$$

(3)

$$y^{'}=1-y^2$$

$y=\pm 1$是方程的特解，

$if\ y\neq \pm 1,$

$$\frac{dy}{1-y^2}=dx$$

$$\frac{1}{2}\ln|\frac{1+y}{1-y}|=x+C_1$$

即

$$y=\frac{Ce^{2x}-1}{Ce^{2x}+1}$$

$$\therefore y=\frac{Ce^{2x}-1}{Ce^{2x}+1}\ and\ y=\pm 1$$

(4)

$$y^{'} = y^n \ (n = \frac{1}{3}, 1, 2)$$

$if\ n = 1$，利用(2)的结果，有

$$y = Ce^x$$

$if\ n \neq 1$,
$y = 0$是方程的一个特解，
$y \neq 0$时，

$$y^{-n}dy - dx = 0$$
$$\frac{1}{1-n}y^{1-n} - x = C$$

$$\therefore \begin{array}{ll} if\ n = 1, & y = Ce^x \\ if\ n \neq 1, & \frac{1}{1-n}y^{1-n} - x = C\ and\ y = 0 \end{array}$$

4.解：

设A，B在同一时刻的坐标分别为$(x_A, 0)$和(x, y)，则由题意

$$x \leq x_A$$

$$\overline{BA} = \sqrt{(x - x_A)^2 + y^2} = b$$

又B的运动方向永远指向A，故

$$y^{'}(x - x_A) = y$$

两式联立，有微分方程

$$y^{'}\sqrt{b^2 - y^2} + y = 0$$

(1)$if\ b = 0$,则

$$y = 0$$

(2)$if\ b \neq 0,\ let\ y = b\sin z,\ z \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$，则微分方程可化为

$$b(1 - \sin^2 z)z^{'} + \sin z = 0$$

显然$\sin z = 0$，即$y = 0$是微分方程的特解，

$\sin z \neq 0$时，

$$\frac{b}{\sin z}z' - b\sin z z' + 1 = 0$$

积分，有

$$-\frac{1}{2}b\ln\frac{1+\cos z}{1-\cos z} + b\cos z + x = C$$

$$-\frac{1}{2}b\ln\frac{b+\sqrt{b^2-y^2}}{b-\sqrt{b^2-y^2}} + \sqrt{b^2-y^2} + x = C$$

又$\because y(0) = b,\ \therefore C = 0,$

$$\therefore \begin{array}{ll} if\ b = 0, & y = 0 \\ if\ b \neq 0, & x = \frac{1}{2}b\ln\frac{b+\sqrt{b^2-y^2}}{b-\sqrt{b^2-y^2}} - \sqrt{b^2-y^2} \end{array}$$

5.证：

$\Leftarrow$

（反证）显然$y = a$是方程(2.27)的一个解，

假设过点P(x_0, a)存在另外一个不同的解$y = g(x)$，则

$$\exists x_1,\ s.t.\ 0 < |g(x_1) - a| < \varepsilon$$

不妨设$g(x_1) > a$，令$h = g(x_1) - a > 0$，则

$$|\int_a^{a+h}\frac{dy}{f(y)}| = |\int_{x_0}^{x_1}dx| = |x_1 - x_0| < \infty$$

这与$\infty = |\int_a^{a+\varepsilon}\frac{dy}{f(y)}| \leq |\int_a^{a+h}\frac{dy}{f(y)}| + |\int_{a+h}^{a+\varepsilon}\frac{dy}{f(y)}|$矛盾！

因此，在直线$y = a$上的每一点，方程的解是局部唯一的。

$\Rightarrow$

$\because$在直线$y = a$上的每一点，方程的解是局部唯一的

$\therefore$直线$y = a$上的每一点，方程的解只有$y = a$

假设$|\int_a^{a\pm\varepsilon}\frac{dy}{f(y)}| < \infty$,不妨设$|\int_a^{a+\varepsilon}\frac{dy}{f(y)}| < \infty$

令$g(x) = \int_a^x\frac{dy}{f(y)}$，则$g(x) < \infty\ (a \leq x \leq a+\varepsilon)$,

则$g'(y) = \frac{1}{f(y)} \neq 0$

从而由隐函数存在定理知y可由g表出，不妨设$y = h(g)$，则

$$\frac{dh(g)}{dg} = \frac{1}{g'(y)} = f(y) = f(h(g))$$

从而$y=h(x)$也是方程（2.27）的解
显然$h(x)$不恒等于a，这与前提矛盾!
故假设不成立，$|\int_a^{a\pm\varepsilon}\frac{dy}{f(y)}|=\infty$
得证。

6.解：

(1) $f(y)=\sqrt{|y|}$在$y=0$附近连续，且$f(y)=0\Longleftrightarrow y=0$

$$|\int_0^{\pm\varepsilon}\frac{dy}{f(y)}|=|\int_0^{\pm\varepsilon}\frac{dy}{\sqrt{|y|}}|=2\sqrt{\varepsilon}<\infty$$

因此，由上题结果知，在$y=0$上每一点，方程解不唯一。

(2) $f(y)=\begin{cases} y\ln|y|, & y\neq 0\\ 0, & y=0\end{cases}$ 在$y=0$附近连续，且$f(y)=0\Longleftrightarrow y=0$

$$|\int_0^{\pm\varepsilon}\frac{dy}{f(y)}|=\infty$$

因此，由上题结果知，在$y=0$上每一点，方程解局部唯一。

习题 2-3

1.解：

已知

$$\frac{dy}{dx}+p(x)y=q(x)$$

的通解是

$$y=e^{-\int p(x)dx}\left(C+\int q(x)e^{\int p(x)dx}dx\right)$$

(1) 方程$y^{'}+2y=xe^{-x}$的通解为

$$\begin{aligned} y&=e^{-\int 2dx}\left(C+\int xe^{-x}e^{\int 2dx}dx\right)\\ &=e^{-2x}\left(C+xe^{x}-e^{x}\right)\\ &=(x-1)e^{-x}+Ce^{-2x}\end{aligned}$$

(2) 方程$y^{'}+y\tan x=\sin(2x)$的通解为

$$\begin{aligned} y&=e^{-\int\tan x dx}\left(C+\int\sin x e^{\int\tan x dx}dx\right)\\ &=C\cos x-2\cos^2 x\end{aligned}$$

(3) $x=0$时，$y=0$

$x\neq 0$时，方程可化为

$$\frac{dy}{dx}+\frac{2}{x}y=\frac{\sin x}{x}$$

通解为

$$\begin{aligned} y &= e^{-\int \frac{2}{x}dx}\left(C+\int \frac{\sin x}{x}e^{\int \frac{2}{x}dx}dx\right) \\ &= \frac{C}{x^2}+(\sin x - x\cos x)x^{-2} \end{aligned}$$

又$y(\pi)=\frac{1}{\pi}$, 即$\frac{C}{\pi^2}+(0+\pi)\frac{1}{\pi^2}=\frac{1}{\pi}$

$$\therefore C=0$$

$$\therefore y=\frac{\sin x - x\cos x}{x^2}\ (x\neq 0)$$

(4) $\frac{dy}{dx}-\frac{1}{1-x^2}y=1+x$的通解为

$$\begin{aligned} y &= e^{-\int -\frac{1}{1-x^2}dx}\left(C+\int (1+x)e^{\int -\frac{1}{1-x^2}dx}dx\right) \\ &= \sqrt{\left|\frac{1+x}{1-x}\right|}\left(C+\int (1+x)\sqrt{\left|\frac{1-x}{1+x}\right|}dx\right) \end{aligned}$$

$\because y(0)=1$, $\therefore C=1$

$\therefore$ 在x=0的某个邻域内

$$\begin{aligned} y &= \sqrt{\frac{1+x}{1-x}}\left(1+\int (1+x)\sqrt{\frac{1-x}{1+x}}dx\right) \\ &= \sqrt{\frac{1+x}{1-x}}\frac{2+\arcsin x + x\sqrt{1-x^2}}{2}\ (-1<x<1) \end{aligned}$$

2.解：

(1) 令$u=y^2$，则

$$\begin{aligned} \frac{du}{dx} &= 2y\frac{dy}{dx} \\ &= 2y\frac{x^2+y^2}{2y} \\ &= x^2+u \end{aligned}$$

(2) 将x看做y的函数，则原方程化为

$$\frac{dx}{dy} = \frac{x+y^2}{y}$$

(3) 令$u = y^3$，则

$$\begin{aligned} x\frac{du}{dx} &= 3xy^2\frac{dy}{dx} \\ &= -x^3 - y^3 \\ &= -x^3 - u \end{aligned}$$

(4) 令$u = \sin y$，则

$$\begin{aligned} \frac{du}{dx} &= \cos y\frac{dy}{dx} \\ &= \cos y\left(\frac{1}{\cos y} + x\tan y\right) \\ &= 1 + x\sin y \\ &= 1 + xu \end{aligned}$$

3.证： $\because y = \varphi(x)$满足$y^{'} + a(x)y \leq 0\ (x \geq 0)$

$$\therefore \varphi^{'}(x) + a(x)\varphi(x) \leq 0\ (x \geq 0)$$

$$\therefore e^{\int_0^x a(s)ds}\left(\varphi^{'}(x) + a(x)\varphi(x)\right) \leq 0\ (x \geq 0)$$

$$\therefore \left[e^{\int_0^x a(s)ds}\varphi(x)\right]^{'} \leq 0\ (x \geq 0)$$

$$\therefore e^{\int_0^x a(s)ds}\varphi(x) \leq e^{\int_0^0 a(s)ds}\varphi(0) = \varphi(0)\ (x \geq 0)$$

$$\therefore \varphi(x) \leq \varphi(0)e^{-\int_0^x a(s)ds}\ (x \geq 0)$$

4.解： 设非齐次线性方程

$$\frac{dy}{dx} + p(x)y = q(x) \tag{3}$$

有形如$y = C(x)e^{-\int p(x)dx}$的解，则

$$\frac{dy}{dx} = C^{'}(x)e^{-\int p(x)dx} - C(x)p(x)e^{-\int p(x)dx} \tag{4}$$

$$(3)(4) \Rightarrow C^{'}(x)e^{-\int p(x)dx} = q(x)$$
$$\therefore C(x) = \int q(x)e^{\int p(x)dx}dx + C$$
$$\therefore y = e^{-\int p(x)dx}\left(C + \int q(x)e^{\int p(x)dx}dx\right)$$

5.证:

(1) $\because q(x) \equiv 0$, $\therefore$方程是齐次线性微分方程，

方程的解为$y = Ce^{-\int p(x)dx}$

$\Rightarrow$

若该方程的任一非零解以ω为周期，则$y(x+\omega) = y(x)$，即

$$e^{-\int_0^{x+\omega} p(s)ds} = e^{-\int_0^{x} p(s)ds}$$
$$e^{-\int_0^{x+\omega} p(s)ds + \int_0^{x} p(s)ds} = 0$$
$$\int_x^{x+\omega} p(s)ds = 0$$

由x的任意性，知

$$\bar{p} = \frac{1}{\omega}\int_0^{\omega} p(s)ds = 0$$

$\Leftarrow$

若$\bar{p} = 0$，则 $\int_0^{\omega} p(x)dx = 0$

又$p(x)$以ω为周期的连续函数，所以

$$\int_0^{\omega} p(x)dx = \int_0^{\omega} p(x+t)dx = \int_t^{\omega+t} p(s)ds = 0 \ (\forall t)$$
$$e^{-\int_0^{t+\omega} p(s)ds + \int_0^{t} p(s)ds} = 0 \ (\forall t)$$
$$\therefore Ce^{-\int_0^{t+\omega} p(s)ds} = Ce^{-\int_0^{t} p(s)ds} \ (\forall t)$$
$$y(t+\omega) = y(t) \ (\forall t, C \neq 0)$$

$\therefore$方程的任一非零解以ω为周期。

(2) $q(x)$不恒为零，方程的解为

$$y = e^{-\int p(x)dx}\left(C + \int q(x)e^{\int p(x)dx}dx\right)$$

$\Rightarrow$

若方程有唯一ω周期解，则$\exists$唯一的常数C，s.t.

$$e^{-\int_0^x p(s)ds}\left(C+\int_0^x q(s)e^{\int_0^s p(t)dt}ds\right)$$

$$=e^{-\int_0^{x+\omega} p(s)ds}\left(C+\int_0^{x+\omega} q(s)e^{\int_0^s p(t)dt}ds\right)$$

$$e^{\int_x^{x+\omega} p(s)ds}\left(C+\int_0^x q(s)e^{\int_0^s p(t)dt}ds\right)=C+\int_0^{x+\omega} q(s)e^{\int_0^s p(t)dt}ds \qquad (5)$$

又$p(x),q(x)$以ω为周期，$\therefore \int_x^{x+\omega} p(s)ds=\int_0^\omega p(s)ds$
又C存在且唯一，故$e^{\int_0^\omega p(s)ds}\neq 1$，即

$$\bar{p}\neq 0.$$

$\Leftarrow$
$\because p(x),q(x)$以ω为周期，
$\therefore$

$$\int_\omega^{x+\omega} q(s)e^{\int_0^s p(t)dt}ds=\int_0^x q(k+\omega)e^{\int_0^{k+\omega} p(t)dt}dk \ (s=k+\omega)$$
$$=e^{\bar{p}\omega}\int_0^x q(k)e^{\int_0^k p(t)dt}dk$$

$$\therefore \left(\int_\omega^{\omega+x}-e^{\bar{p}\omega}\int_0^x\right)q(s)e^{\int_0^s p(t)dt}ds=0$$

$$\therefore \left(\int_0^{\omega+x}-e^{\bar{p}\omega}\int_0^x\right)q(s)e^{\int_0^s p(t)dt}ds=\int_0^\omega q(s)e^{\int_0^s p(t)dt}ds$$

又$\bar{p}\neq 0$，从而再由(5)可得

$$C=\frac{\left(\int_0^{\omega+x}-e^{\bar{p}\omega}\int_0^x\right)q(s)e^{\int_0^s p(t)dt}ds}{e^{\bar{p}\omega}-1}$$
$$=\frac{\int_0^\omega q(s)e^{\int_0^s p(t)dt}ds}{e^{\bar{p}\omega}-1}$$

从而方程的ω周期解为

$$y=e^{-\int_0^x p(s)ds}\left(\frac{1}{e^{\bar{p}\omega}-1}\int_0^w+\int_0^x\right)q(s)e^{\int_0^s p(t)dt}ds$$

6.证：方程$y^{'}+y=f(x)$的通解为

$$y=e^{-x}\left(C+\int_0^x f(s)e^s ds\right)$$

令$C=\int_{-\infty}^0 f(s)e^s ds$，则

$$y=e^{-x}\int_{-\infty}^x f(s)e^s ds$$

$\because f(x)$在$(-\infty,\infty)$上有界，不妨设其上确界为M，则

$$\begin{aligned}|C| &= |\int_{-\infty}^0 f(s)e^s ds| \\ &\le \int_{-\infty}^0 |f(s)|e^s ds \\ &\le M\int_{-\infty}^0 e^s ds \\ &= M\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}|y| &= |\int_{-\infty}^x f(s)e^{s-x} ds| \\ &\le \int_{-\infty}^x |f(s)|e^{s-x} ds \\ &\le M\int_{-\infty}^x e^{s-x} ds \\ &= M\end{aligned}$$

$\therefore y=e^{-x}\int_{-\infty}^x f(s)e^s ds$是方程的有界解。

下证有界解惟一：

假设$y=y_1(x)$，$y=y_2(x)$皆是方程$y^{'}+y=f(x)$的有界解，

则$y=y_1(x)-y_2(x)$是方程$y^{'}+y=0$的有界解，

即$y_1(x)-y_2(x)=Ce^{-x}$有界，从而

$C=0$，$y_1(x)=y_2(x)$，有界解惟一。

当$f(x)$以ω为周期时，$f(x+\omega)=f(x)$，从而

$$\begin{aligned}y(x+\omega)&=\int_{-\infty}^{x+\omega}f(s)e^{s-x-\omega}ds\\&=\int_{-\infty}^{x}f(t+\omega)e^{t-x}dt\ (t=s-\omega)\\&=\int_{-\infty}^{x}f(t)e^{t-x}dt\\&=y(x)\end{aligned}$$

从而此有界解以ω为周期。

7.证：(1)

设$\{f_n\}$是H^0中一基列，即

$\forall\varepsilon>0,\exists N(\varepsilon),\ s.t.\ \forall m,n\geq N(\varepsilon)$，有

$$||f_m-f_n||=\max_{0\leq x\leq 2\pi}|f_m(x)-f_n(x)|<\varepsilon$$

即$\forall\varepsilon>0,\exists N(\varepsilon),\ s.t.\ \forall m,n\geq N(\varepsilon),\forall x$，有$|f_m(x)-f_n(x)|<\varepsilon$

$\because(\mathbf{R},|\cdot|)$是完备的，

$\therefore\forall x,\{f_n(x)\}$是收敛列，记$f_n(x)\to f(x)\ (n\to+\infty)$

下面只需证：(i)$f(x)$以2π为周期　(ii)$||f_n-f||\to 0\ (n\to+\infty)$

关于(i)，$\forall x$

$$\begin{aligned}f(x+2\pi)&=\lim_{n\to+\infty}f_n(x+2\pi)\\&=\lim_{n\to+\infty}f_n(x)\\&=f(x)\end{aligned}$$

关于(ii)，

$$\begin{aligned}||f_n-f||&=\max_{0\leq x\leq 2\pi}|f_n(x)-f(x)|\\&=\max_{0\leq x\leq 2\pi}|f_n(x)-\lim_{m\to+\infty}f_m(x)|\\&=\max_{0\leq x\leq 2\pi}|\lim_{m\to+\infty}(f_n(x)-f_m(x))|\\&\leq\lim_{m\to+\infty}\max_{0\leq x\leq 2\pi}|f_n(x)-f_m(x)|\\&=\lim_{m\to+\infty}||f_n(x)-f_m(x)||\end{aligned}$$

$$\therefore \lim_{n\to+\infty}||f_n-f|| = \lim_{m,n\to+\infty}||f_n(x)-f_m(x)|| = 0$$

因此，H^0是完备空间。

(2) 定义$\varphi : f \longmapsto y = \frac{1}{e^{2a\pi}-1}\int_x^{x+2\pi} e^{-a(x-s)}f(s)ds$，

$\because f$以2π为周期，由(2.40)的推导知，y也以2π为周期

即 $\varphi : H^0 \to H^0$

(i) $\forall C_1, C_2,\ f_1, f_2 \in H^0$, 记$\frac{1}{e^{2a\pi}-1} = K$, 则

$$\begin{aligned}\varphi(C_1f_1+C_2f_2) &= K\int_x^{x+2\pi} e^{-a(x-s)}\left(C_1f_1(s)+C_2f_2(s)\right)ds \\ &= C_1\left[K\int_x^{x+2\pi} e^{-a(x-s)}f_1(s)ds\right] + C_2\left[K\int_x^{x+2\pi} e^{-a(x-s)}f_2(s)ds\right] \\ &= C_1\varphi(f_1)+C_2\varphi(f_2)\end{aligned}$$

(ii) $\forall f \in H^0$

$$\begin{aligned}||\varphi(f)|| &= \max_{0\le x\le 2\pi}|K\int_x^{x+2\pi} e^{-a(x-s)}f(s)ds| \\ &\le \max_{0\le x\le 2\pi}|K|\cdot||f||\cdot\int_x^{x+2\pi} e^{-a(x-s)}ds \\ &= |K|\frac{e^{2a\pi}-1}{a}||f|| \\ &= \frac{1}{|a|}||f|| \\ &= k||f||,\ (k=\frac{1}{|a|})\end{aligned}$$

得证。

习题 2-4

1.解:

(1) 令$y = ux$，则$y^{'} = u^{'}x+u = \frac{2ux-x}{2x-ux}$，

原方程可化为：

$$x^2(2-u)du + x(1-u^2)dx = 0$$

$if\ x \neq 0, u \neq \pm 1$

$$\frac{2-u}{1-u^2}du + \frac{1}{x}dx = 0$$

积分，可得

$$\frac{(1+u)^3}{1-u}\frac{x^3}{x}=C,\ (C\neq 0)$$

$$(x+y)^3=C(x-y),\ (C\neq 0)$$

$$if\ u=1\ ,\quad y=x$$
$$if\ u=-1\ ,\quad y=-x$$

$x=0$不是原方程的特解，综上，原方程的解为

$$(x+y)^3=C(x-y)\ and\ y=x\ \ ,(y\neq 2x)$$

(2) 令$u=y+2,\ v=x-1$，则

$$u^{'}=y^{'}=\frac{2(u-2)-(v+1)+5}{2(v+1)-(u-2)-4}=\frac{2u-v}{2v-u}$$

令$u=zv$，则方程进一步化为

$$\frac{z^2-1}{2-z}=v\frac{dz}{dv}$$

$if\ v\neq 0,\ z\neq \pm 1$，方程化为

$$\frac{2-z}{z^2-1}dz-\frac{1}{v}dv=0$$

得

$$v(1-z)=C(1+z)^3v^3,\ (c\neq 0)$$

$$v-u=C(v+u)^3,\ (C\neq 0)$$

$$if\ z=1\ ,\quad u=v$$
$$if\ z=-1\ ,\quad u=-v$$

$v=0$不是方程的特解，综上，原方程的解为

$$u-v=C(v+u)^3\ and\ u+v=0,\ (2v-u\neq 0)$$

即

$$y-x+3=C(x+y+1)^3\ and\ x+y+1=0,\ (2x-y-4\neq 0)$$

(3) 令$u=x+2y$，则$u^{'}=2y^{'}+1=\frac{4u+1}{2u-1}$，
显然$u=-\frac{1}{4}$是特解

$if\ u \neq -\frac{1}{4}$

$$\frac{dx}{du} = \frac{2u-1}{4u+1}$$

$$x = \frac{u}{2} - \frac{3}{8}\ln|4u+1| + C$$

$$4u+1 = Ce^{\frac{4u-8x}{3}},\ (C \neq 0)$$

而$u = -\frac{1}{4}$是C取0时的解

综上，方程的通解为

$$4x+8y+1 = Ce^{\frac{8y-4x}{3}},\ (2x+4y-1 \neq 0)$$

(4) 显然$y=0$是特解

$if\ y \neq 0$，令$u = \frac{1}{y^2}$，则

$$u' = -2\frac{y'}{y^3} = -2x^3 + 2xu$$

即

$$u' - 2xu = -2x^3$$

这是一个一阶线性方程，套用公式解得

$$u = x^2 + 1 + Ce^{x^2}$$

因此

$$y^2 = u^{-1} = (x^2+1+Ce^{x^2})^{-1}\ and\ y=0$$

2.解：

(1) 令$u = x - y$，则$u' = 1 - y' = 1 - \cos u$

$$du + (\cos u - 1)dx = 0$$

$\cos u = 1$，即$u = 2k\pi, k \in \mathbf{Z}$是特解

$if\ \ \cos u \neq 1$

$$\frac{du}{\cos u - 1} + dx = 0$$

$$\cot\frac{u}{2} + x = C$$

$\therefore$方程的解为

$$\cot\frac{x-y}{2}+x=C\ and\ x-y=2k\pi,k\in\mathbf{Z}$$

(2) 令$u=wv$，则方程可化为

$$v^3(3w+1)dw+(4w+2)wv^2dv=0$$

$if\ \ v\neq 0,w(4w+2)\neq 0,$

$$\frac{3w+1}{w(4w+2)}dw+\frac{dv}{v}=0$$

解得

$$w^2(2w+1)v^4=C,\ (C\neq 0)$$

显然$v=0,w(4w+2)=0$是上式C取0时的特解，
因此原方程的通解为

$$(wv)^2(2wv^2+v^2)=C$$

$$u^2(2uv+v^2)=C$$

(3) 令$u=y^2,v=x^2$，则原方程化为

$$(u+v+3)du-(4u-2v)dv=0$$

令$w=u+1,p=v+2$，则原方程继续化为

$$(w+p)dw-(4w-2p)dp=0$$

令$w=ph$，则原方程继续化为

$$p^2(h+1)dh+p(h^2-3h+2)dp=0$$

变量分离法，解得

$$p=0\ and\ (h-1)^2=Cp(h-2)^3\ and\ h=2$$

而$p=0$，即$x^2+2=0$并不是原方程的解
$\therefore$逐步回代，得原方程的解

$$(y^2-x^2-1)^2=C(y^2-2x^2-3)^3\ and\ y^2=2x^2+3,\ (y\neq 0)$$

(4) 令$u=y^2,v=x^2$，则原方程化为

$$\frac{du}{dv}=\frac{2v+3u-7}{3v+2u-8}$$

令$w=u-1,p=v-2$，则原方程继续化为

$$\frac{dw}{dp}=\frac{3w+2p}{2w+3p}$$

令$w=ph$，则原方程继续化为

$$p^2(2h+3)dh+2p(h^2-1)dp=0$$

变量分离法，解得

$$h+1=Cp^4(h-1)^5 \ and \ h=1 \ and \ p=0$$

而$p=0$，即$x^2-2=0$并不是原方程的解

∴逐步回代，得原方程的解

$$y^2+x^2-3=C(y^2-x^2+1)^5 \ and \ y^2-x^2+1=0$$

3.解：

(1) 令$u=xy$，则

$$u^{'}=xy^{'}+y=x(-y^2-\frac{1}{4x^2})+y=\frac{4u-4u^2-1}{4x},\ (x\neq 0)$$

$if\ 4u-4u^2-1\neq 0$，则方程化为

$$\frac{du}{4u-4u^2-1}=\frac{dx}{4x}$$

解得

$$x^2e^{\frac{4}{1-2u}}=C,\ (C>0)$$

$4u-4u^2-1=0$，即$u=\frac{1}{2}$是方程特解

∴方程的通解为

$$x^2e^{\frac{4}{1-2xy}}=C,\ (C>0)\ and\ xy=\frac{1}{2}$$

(2) $xy=-1$是方程$x^2y^{'}=x^2y^2+xy+1$的一个特解

令$u = y + \frac{1}{x}$，则$u^{'} = y^{'} - \frac{1}{x^2}$，方程可化为

$$u^{'} = u^2 - \frac{u}{x}$$

令$z = u^{-1}$，则方程继续化为

$$z^{'} - \frac{z}{x} + 1 = 0$$

解得

$$z = Cx - x\ln|x|$$

$\therefore$方程的通解为

$$y = -\frac{1}{x} + \frac{1}{Cx - x\ln|x|} \ and \ y = -\frac{1}{x}$$

4.解： $y = 0$是方程的一个特解

$if\ y \neq 0$，令$u = y^{-1}y^{'}$，则

$$\begin{aligned} u^{'} &= y^{-1}y^{''} - y^{-2}(y^{'})^2 \\ &= y^{-1}\left(-p(x)y^{'} - q(x)y\right) - y^{-2}(y^{'})^2 \\ &= -p(x)u - q(x) - u^2 \end{aligned}$$

即化为里卡蒂方程

$$u^{'} = -u^2 - p(x)u - q(x)$$

5.解：设$y = y(x)$是所求曲线，对曲线上任一点(x, y)，其切线方向为$(1, y^{'})$，向径方向为(x, y)

$\because$切线与向径夹角为$\frac{\pi}{4}$,

$\therefore$有方程

$$\left|\frac{y^{'} - \frac{y}{x}}{1 + y^{'}\frac{y}{x}}\right| = \tan(\frac{\pi}{4}) = 1$$

得

$$y^{'} = \frac{x+y}{x-y} \quad or \quad y^{'} = \frac{y-x}{x+y}$$

下面求解第一个方程，令$y=ux$，则方程可化为

$$\frac{du}{dx}x=\frac{1+u^2}{1-u}$$

得

$$\arctan u-\frac{1}{2}\ln(1+u^2)-\ln|x|=C$$

即

$$\arctan\frac{y}{x}-\frac{1}{2}\ln(x^2+y^2)=C$$

对于第二个方程，令$z=-y$，则$z^{'}=\frac{x+z}{x-z}$，即为第一个方程

得

$$\arctan(-\frac{y}{x})-\frac{1}{2}\ln(x^2+y^2)=C$$

即

$$\arctan\frac{y}{x}+\frac{1}{2}\ln(x^2+y^2)=C$$

因此，所求曲线方程为

$$\arctan\frac{y}{x}\pm\frac{1}{2}\ln(x^2+y^2)=C$$

6.解： 设点光源位于原点，经反光镜反射后与x轴平行，旋转曲线为$y=y(x)$，

由几何关系，易看出过曲线上任一点，向径所在直线的倾斜角是该处切线倾斜角的2倍

则有方程

$$\frac{2y^{'}}{1-(y^{'})^2}=\frac{y}{x}$$

令$u=y^2$，则方程化为

$$u+x^2=\left(\frac{u^{'}}{2}+x\right)^2$$

再令$v=u+x^2$，显然$v>0$，则方程继续化为

$$4v=(v^{'})^2$$

$$v^{'}=\pm 2v^{\frac{1}{2}}$$

得

$$v = (x + C)^2$$

即

$$x^2 + y^2 = (x + C)^2$$

所以是个抛物线

$$y^2 = 2Cx + C^2$$

习题 2-5

1.解：

(1)

$$\because \frac{\partial P}{\partial y} = 3x^2 + 2x + 3y^2, \frac{\partial Q}{\partial x} = 2x$$

$$\therefore \frac{1}{Q}\left(\frac{\partial P}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial x}\right) = 3$$

积分因子$\mu(x) = e^{\int 3dx} = e^{3x}$，乘于方程两侧，有

$$e^{3x}(3x^2y + 2xy + y^3)dx + e^{3x}(x^2 + y^2)dy = 0$$

即

$$d\left(e^{3x}(x^2y + \frac{1}{3}y^3)\right) = 0$$

$$e^{3x}(x^2y + \frac{1}{3}y^3) = C$$

(2)

$$\because \frac{\partial P}{\partial y} = 1, \frac{\partial Q}{\partial x} = 2y$$

$$\therefore \frac{1}{P}\left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) = 2 - \frac{1}{y}$$

积分因子$\mu(y) = e^{\int (2-\frac{1}{y})dy} = \frac{1}{y}e^{2y}, (y \neq 0)$，乘于方程两侧，有

$$e^{2y}dx + e^{2y}\left(2x - \frac{1}{y}e^{-2y}\right)dy = 0$$

即

$$d\left(xe^{2y}-\ln|y|\right)=0$$

$$xe^{2y}-\ln|y|=C,(y\neq 0)$$

$y=0$是特解。

(3) 方程两侧乘以xy，可化为

$$(3x^2y+6x)dx+(x^3+3y^2)dy=0$$

直接积分，有

$$x^3y+3x^2+y^3=C$$

(4)

$$(ydx-xdy)-(x^2+y^2)dy=0$$

第一组有积分因子$x^{-2},y^{-2},(x^2+y^2)^{-1}$，

第二组有积分因子$(x^2+y^2)^{-1}$

$\therefore$取$\mu=(x^2+y^2)^{-1}$乘方程两侧，有

$$\frac{y}{x^2+y^2}dx-\frac{x^2+y^2+x}{x^2+y^2}dy=0$$

得

$$\arctan\frac{y}{x}+y=C\ and\ y=0$$

(5)

$$\because \frac{\partial P}{\partial y}=6xy^2,\frac{\partial Q}{\partial x}=2xy^2$$

$$\therefore \frac{1}{P}\left(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}\right)=\frac{-4xy^2}{2xy^3}=-\frac{2}{y}$$

积分因子$\mu(y)=e^{\int(-\frac{2}{y})dy}=y^{-2},(y\neq 0)$乘于方程两侧，有

$$2xydx+(x^2-y^{-2})dy=0$$

得

$$x^2y+\frac{1}{y}=C\ and\ y=0$$

(6)

$$(ydx-xdy)+xy^2dx=0$$

显然$\mu = y^{-2}$是方程的一个积分因子，方程可化为

$$\frac{1}{y}dx - \frac{x}{y^2}dy + xdx = 0,\ (y \neq 0)$$

即

$$\frac{x}{y} + \frac{x^2}{2} = C, (y \neq 0)$$

而$y = 0$也满足原方程，故是特解。

(7) 方程可分租

$$(y^3dx - 2xy^2dy) + 2x^2dy = 0$$

第一组有积分因子y^{-5}和通积分$\frac{x}{y^2} = C$

第二组有积分因子x^{-2}和通积分$2y = C$

目标：寻找可微函数g_1, g_2，$s.t.$满足

$$y^{-5}g_1(\frac{x}{y^2}) = x^{-2}g_2(2y)$$

显然$g_1(t) = t^{-2}, g_2(t) = 2t^{-1}$满足上式

$\therefore$原方程有积分因子$x^{-2}y^{-1}$,则方程可化为

$$x^{-2}y^2dx + 2(y^{-1} - x^{-1}y)dy = 0,\ (xy \neq 0)$$

得

$$-\frac{y^2}{x} + 2\ln|y| = C,\ (xy \neq 0)$$

而$x = 0, y = 0$是原方程的特解，因此

$$\ln y^2 - \frac{y^2}{x} = C\ and\ x = 0\ and\ y = 0$$

(8)

$$\because \frac{\partial P}{\partial y} = 0, \frac{\partial Q}{\partial x} = e^x \cot y$$

$$\therefore \frac{1}{P}\left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) = \cot y$$

积分因子$\mu(y) = e^{\int \cot y dy} = \sin y$，乘于方程两侧，有

$$e^x \sin y dx + (e^x \cos y + 2y \sin y \cos y)\, dy = 0$$

得

$$e^x \sin y + \frac{1}{4}\left(\sin(2y) - 2y\cos(2y)\right) = C$$

2.证：

$$P(x,y)dx + Q(x,y)dy = 0 \tag{2.55}$$

$\Rightarrow$

若方程(2.55)有形如$\mu = \mu\left(\varphi(x,y)\right)$的积分因子，则

$$\frac{\partial(\mu P)}{\partial y} = \frac{\partial(\mu Q)}{\partial x}$$

即

$$P\frac{\partial \mu}{\partial y} - Q\frac{\partial \mu}{\partial x} = \mu\left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right)$$

而$\mu = \mu\left(\varphi(x,y)\right)$

$$\therefore P\mu^{'}\left(\varphi(x,y)\right)\frac{\partial \varphi}{\partial y} - Q\mu^{'}\left(\varphi(x,y)\right)\frac{\partial \varphi}{\partial x} = \mu\left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right)$$

令$f\left(\varphi(x,y)\right) = \frac{\mu^{'}\left(\varphi(x,y)\right)}{\mu\left(\varphi(x,y)\right)}$，则

$$f\left(\varphi(x,y)\right) = \frac{\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}}{P\frac{\partial \varphi}{\partial y} - Q\frac{\partial \varphi}{\partial x}}$$

$\Leftarrow$

若方程(2.55)满足

$$\frac{\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}}{P\frac{\partial \varphi}{\partial y} - Q\frac{\partial \varphi}{\partial x}} = f\left(\varphi(x,y)\right)$$

令$\mu(t) = e^{\int f(t)dt}$，则

$$\frac{\mu^{'}(t)}{\mu(t)} = f(t)$$

从而

$$\frac{\mu^{'}\left(\varphi(x,y)\right)}{\mu\left(\varphi(x,y)\right)} = \frac{\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}}{P\frac{\partial \varphi}{\partial y} - Q\frac{\partial \varphi}{\partial x}}$$

整理可得

$$\frac{\partial(\mu P)}{\partial y}=\frac{\partial(\mu Q)}{\partial x}$$

$$\therefore \mu\left(\varphi(x,y)\right)=e^{\int f(\varphi(x,y))d\varphi}$$

是方程(2.55)的一个积分因子。

(1) 将$\mu=\mu(x\pm y)$代入充要条件式子，整理可得

$$\frac{\frac{\partial P}{\partial y}-\frac{\partial Q}{\partial x}}{Q\mp P}=f(x\pm y)$$

(2) 将$\mu=\mu(x^2+y^2)$代入充要条件式子，整理可得

$$\frac{\frac{\partial P}{\partial y}-\frac{\partial Q}{\partial x}}{xQ-yP}=f(x^2+y^2)$$

(3) 将$\mu=\mu(xy)$代入充要条件式子，整理可得

$$\frac{\frac{\partial P}{\partial y}-\frac{\partial Q}{\partial x}}{yQ-xP}=f(xy)$$

(4) 将$\mu=\mu(\frac{y}{x})$代入充要条件式子，整理可得

$$\frac{\frac{\partial P}{\partial y}-\frac{\partial Q}{\partial x}}{\frac{y}{x^2}Q-\frac{1}{x}P}=f(\frac{y}{x})$$

(5) 将$\mu=\mu(x^\alpha y^\beta)$代入充要条件式子，整理可得

$$\frac{\frac{\partial P}{\partial y}-\frac{\partial Q}{\partial x}}{\alpha x^{-1}Q-\beta y^{-1}P}=f(x^\alpha y^\beta)$$

3.证： 只需证

$$\frac{\partial(\mu P)}{\partial y}=\frac{\partial(\mu Q)}{\partial x}$$

即证

$$P\frac{\partial\mu}{\partial y}-Q\frac{\partial\mu}{\partial x}=\mu\left(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}\right)\tag{3.1}$$

而$\mu=\frac{1}{xP+yQ}$，

$$\therefore\begin{cases}\frac{\partial\mu}{\partial x}=-\frac{P+x\frac{\partial P}{\partial x}+y\frac{\partial Q}{\partial x}}{(xP+yQ)^2}\\ \frac{\partial\mu}{\partial y}=-\frac{Q+x\frac{\partial P}{\partial y}+y\frac{\partial Q}{\partial y}}{(xP+yQ)^2}\end{cases}$$

代入(3.1)式，化简，得

$$yQ\frac{\partial P}{\partial y}+xQ\frac{\partial P}{\partial x}=yP\frac{\partial Q}{\partial y}+xP\frac{\partial Q}{\partial x} \tag{3.2}$$

故只需证(3.2)式

事实上，由于方程是其次方程，所以$P=\varphi(\frac{y}{x})Q$

$$\therefore \begin{cases} \frac{\partial P}{\partial x}=-\frac{y}{x^2}\varphi^{'}(\frac{y}{x})Q+\varphi(\frac{y}{x})\frac{\partial Q}{\partial x} \\ \frac{\partial P}{\partial y}=\frac{1}{x}\varphi^{'}(\frac{y}{x})Q+\varphi(\frac{y}{x})\frac{\partial Q}{\partial y} \end{cases}$$

代入(3.2)式左端

$$\begin{aligned} left\ of\ (3.2) &= \frac{yQ^2}{x}\varphi^{'}+y\varphi Q\frac{\partial Q}{\partial y}+\left(-\frac{xyQ^2}{x^2}\varphi^{'}+x\varphi Q\frac{\partial Q}{\partial x}\right) \\ &= y\varphi Q\frac{\partial Q}{\partial y}+x\varphi Q\frac{\partial Q}{\partial x} \\ &= yP\frac{\partial Q}{\partial y}+xP\frac{\partial Q}{\partial x} \\ &= right\ of\ (3.2) \end{aligned}$$

因此得证!

4.证：

(定理6的证明)

$$\because \mu P(x,y)dx+\mu Q(x,y)dy=d\Phi(x,y)$$

$$\therefore \mu g(\Phi)P(x,y)dx+\mu g(\Phi)Q(x,y)dy=g(\Phi)d\Phi(x,y)=d\int g(\Phi)d\Phi$$

$\therefore \mu(x,y)g(\Phi(x,y))$也是方程的一个积分因子。

(定理2.6的逆定理)

$\because \mu_1,\mu$都是微分方程(2.55)的积分因子

$$\therefore \mu_1(Pdx+Qdy)=d\psi$$

$$\mu(Pdx+Qdy)=d\phi$$

$$\therefore \frac{D[\psi,\phi]}{D[x,y]}=\begin{vmatrix} \frac{\partial\psi}{\partial x} & \frac{\partial\phi}{\partial x} \\ \frac{\partial\psi}{\partial y} & \frac{\partial\phi}{\partial y} \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} \mu_1 P & \mu P \\ \mu_1 Q & \mu Q \end{vmatrix}\equiv 0$$

因此ψ与ϕ函数相关,从而存在函数$f(\cdot)$，使得满足

$$\psi = f(\phi)$$

$$\frac{\mu_1}{\mu} = \frac{d\psi}{d\phi} = f^{'}(\phi) \triangleq g(\phi)$$

$$\therefore \mu_1 = \mu g(\phi)$$

得证!

5.证：$\because \mu_1, \mu_2$都是微分方程(2.55)的积分因子

$$\therefore \mu_1(Pdx + Qdy) = d\psi$$

$$\mu_2(Pdx + Qdy) = d\phi$$

利用上题结果知，$\mu_1 = \mu_2 g(\phi)$，其中$g(\cdot)$是可微非零函数

$$\therefore \frac{\mu_1}{\mu_2} = g(\phi)$$

从而

$$g^{'}(\phi)\mu_2(Pdx + Qdy) = g^{'}(\phi)d\phi = dg(\phi)$$

又$\because \frac{\mu_1}{\mu_2}$不恒为常数，$\therefore g^{'}(\phi)$不恒为零
因此$g^{'}(\phi)\mu_2$也是方程的一个积分因子
相应的通积分为$g(\phi) = \frac{\mu_1}{\mu_2} = C$，得证!

习题 2-6

1.解：

(1)

$$\because x^2 + y^2 = Cx$$

$$\therefore 2x + 2yy^{'} = C = \frac{x^2 + y^2}{x}$$

$\therefore$它的正交轨线族方程满足

$$2x - 2y\frac{1}{y^{'}} = \frac{x^2 + y^2}{x}$$

即

$$2xydx+(y^2-x^2)dy=0$$

有积分因子$\mu=y^{-2}$,乘方程两侧，得

$$\frac{2x}{y}dx+\left(1-\frac{x^2}{y^2}\right)dy=d\left(\frac{x^2}{y}+y\right)=0$$

即有

$$x^2+y^2=Ky$$

(2)

$$\because xy=C$$

$$\therefore y+xy^{'}=0$$

$\therefore$它的正交轨线族方程满足

$$y-\frac{x}{y^{'}}=0$$

即

$$xdx-ydy=0$$

即有

$$x^2-y^2=K$$

(3)

$$\because y^2=ax^3$$

$$\therefore 2yy^{'}=3ax^2=\frac{3y^2}{x}$$

$\therefore$它的正交轨线族方程满足

$$-\frac{2y}{y^{'}}=\frac{3y^2}{x}$$

即

$$2xdx+3ydy=0$$

即有

$$x^2+\frac{3}{2}y^2=K$$

(4)

$$\because x^2+C^2y^2=1$$

$$\therefore 2x+2C^2yy^{'}=2x+2\frac{1-x^2}{y}y^{'}=0$$

∴它的正交轨线族方程满足

$$x-\frac{1-x^2}{y}\frac{1}{y^{'}}=0$$

即

$$\frac{1-x^2}{x}dx-ydy=0$$

即有

$$x^2+y^2-\ln x^2=K$$

2.解：

(1)

$$\because x-2y=C$$

$$\therefore H(x,y)=y^{'}=\frac{1}{2}$$

∴所求曲线族方程满足

$$\frac{dy}{dx}=\frac{H+\tan\frac{\pi}{4}}{1-H\tan\frac{\pi}{4}}=3$$

即有

$$y=3x+K$$

(2)

$$\because xy=C$$

$$\therefore H(x,y)=y^{'}=-\frac{y}{x}$$

∴所求曲线族方程满足

$$\frac{dy}{dx}=\frac{H+\tan\frac{\pi}{4}}{1-H\tan\frac{\pi}{4}}=\frac{x-y}{x+y}$$

即

$$(y-x)dx+(x+y)dy=0$$

即有

$$x^2-y^2-2xy=K$$

(3)

$$\because y = x\ln ax$$

$$\therefore H(x,y) = y^{'} = \ln ax + 1 = 1 + \frac{y}{x}$$

∴所求曲线族方程满足

$$\frac{dy}{dx} = \frac{H + \tan\frac{\pi}{4}}{1 - H\tan\frac{\pi}{4}} = -\frac{2x+y}{y}$$

令$y = ux$，则方程可化为

$$u + 1 + \frac{2}{u} + x\frac{du}{dx} = 0$$

得

$$\ln\left((u+\frac{1}{2})^2 + \frac{7}{4}\right) - \frac{2}{\sqrt{7}}\arctan\frac{2u+1}{\sqrt{7}} + \ln x^2 = K$$

即

$$\ln(y^2 + xy + 2x^2) - \frac{2}{\sqrt{7}}\arctan\frac{2y+x}{\sqrt{7}x} = K$$

(4)

$$\because y^2 = 4ax$$

$$\therefore H(x,y) = y^{'} = \frac{4a}{2y} = \frac{y^2}{2xy} = \frac{y}{2x}$$

∴所求曲线族方程满足

$$\frac{dy}{dx} = \frac{H + \tan\frac{\pi}{4}}{1 - H\tan\frac{\pi}{4}} = \frac{2x+y}{2x-y}$$

令$y = ux$，则方程可化为

$$\frac{du}{dx}x = \frac{2 - u + u^2}{2 - u}$$

得

$$\frac{6}{\sqrt{7}}\arctan\frac{2u-1}{\sqrt{7}} = \ln\left((u-\frac{1}{2})^2 + \frac{7}{4}\right) + \ln x^2 + K$$

即

$$\ln(y^2 - xy + 2x^2) + K = \frac{6}{\sqrt{7}}\arctan\frac{2y-x}{\sqrt{7}x}$$

3.解：

$$\because x^2 - y^2 = C$$

$$\therefore H(x,y) = y^{'} = \frac{x}{y}$$

∴运动点轨迹方程满足

$$\frac{dy}{dx} = \frac{H + \tan\frac{\pi}{6}}{1 - H\tan\frac{\pi}{6}} = \frac{\sqrt{3}x + y}{\sqrt{3}y - x}$$

即

$$(y + \sqrt{3}x)dx + (x - \sqrt{3}y)dy = 0$$

即有

$$xy + \frac{\sqrt{3}}{2}x^2 - \frac{\sqrt{3}}{2}y^2 = K$$

又$y(0) = 1$, $\therefore K = -\frac{\sqrt{3}}{2}$
所以运动点的轨迹为

$$x^2 + \frac{2}{\sqrt{3}}xy - y^2 + 1 = 0$$

4.解： 设初始时刻为0，此时P，Q分别位于$(0,0),(0,1)$
再设时刻为t时，Q位于(x,y)，此时P位于(at,0)
∵Q的运动方向永远指向P
∴

$$\frac{dx}{dy} = \frac{x - at}{y}$$

即

$$y\frac{dx}{dy} = x - at$$

两边对y求导，得

$$\frac{dx}{dy} + y\frac{d^2x}{dy^2} = \frac{dx}{dy} - a\frac{dt}{dy}$$

即

$$y\frac{d^2x}{dy^2} + a\frac{dt}{dy} = 0 \tag{4.1}$$

有Q速率为b，$\frac{dy}{dt} < 0$，有

$$bdt = \sqrt{(dx)^2 + (dy)^2} = -dy\sqrt{1 + \left(\frac{dx}{dy}\right)^2} \tag{4.2}$$

(4.1)(4.2) $\Rightarrow$

$$y\frac{d^2x}{dy^2}-\frac{a}{b}\sqrt{1+\left(\frac{dx}{dy}\right)^2}=0 \tag{4.3}$$

令$u=\frac{dx}{dy}$，则(4.3)可化为

$$y\frac{du}{dy}-\frac{a}{b}\sqrt{1+u^2}=0$$

即

$$\frac{du}{\sqrt{1+u^2}}=\frac{a}{by}dy$$

解得

$$\ln\left(u+\sqrt{1+u^2}\right)=\frac{a}{b}\ln y+C_1$$

化简

$$u=\frac{1}{2}Cy^{\frac{a}{b}}-\frac{1}{2C}y^{-\frac{a}{b}}$$

又$t=0$时，$x=0,y=1$

$$u=\frac{dx}{dy}=\frac{x-at}{y}=0$$

即

$$u(1)=\frac{C}{2}-\frac{1}{2C}=0$$

$\therefore$

$$C=1$$

$$\frac{dx}{dy}=u=\frac{1}{2}y^{\frac{a}{b}}-\frac{1}{2}y^{-\frac{a}{b}}$$

积分，即有

$$x=\frac{b}{2(a+b)}y^{1+\frac{a}{b}}-\frac{b}{2(b-a)}y^{1-\frac{a}{b}}+K \tag{4.4}$$

又$t=0$时，$x=0,y=1$，所以

$$x(1)=\frac{b}{2(a+b)}-\frac{b}{2(b-a)}+K=0 \tag{4.5}$$

(4.4)(4.5) $\Rightarrow$轨迹方程

$$x=\frac{b}{2(a+b)}\left(y^{1+\frac{a}{b}}-1\right)-\frac{b}{2(b-a)}\left(y^{1-\frac{a}{b}}-1\right)$$

当追上时，$y=0, x=\frac{b}{2(b-a)}-\frac{b}{2(a+b)}, u=0\ (b>a)$

$$\frac{x-at}{y}=\frac{dx}{dy}=u=0\Rightarrow t=\frac{b}{b^2-a^2}$$

5.解: 设地球质量为m，由能量守恒公式，即得

$$\frac{1}{2}Mv_0^2-\frac{GMm}{R}=\frac{1}{2}Mv_0^2-\frac{gR^2M}{R}=0$$

解得

$$v_0=11.23km/s$$

6.解： 设比例系数为k,由题意，可得

$$\frac{dx}{dt}=kx(N-x)$$

$x=0,\ x=N$是特解。

$if\ x\neq 0, x\neq N$

$$\frac{dx}{kx(N-x)}=dt$$

解得

$$x=\frac{CNe^{Nkt}}{1+Ce^{Nkt}}$$

$$\therefore x=\frac{CNe^{Nkt}}{1+Ce^{Nkt}}\ and\ x=N$$

显然当$t\rightarrow+\infty$时，$x(t)\rightarrow N$

第三章 存在和惟一性定理

习题 3-1

1.解：

(1)

$$\because f(x,y)=|y|^{\alpha},\ (\alpha>0)$$

显然，$f(x,y)$在整个平面上都连续

$\therefore$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y)=sign(y)\alpha|y|^{\alpha-1},\ (\alpha>0)$$

可见$if\ \alpha>1$，则$f(x,y)$对y有连续偏微商，因此由皮卡定理知，满足$y(0)=0$的解存在且唯一；

$if\ \alpha<1$，则$f(x,y)$在$y=0$处偏导数不存在，不能由皮卡定理判断，此时有

$$\left|\int_0^{\pm\varepsilon}\frac{dy}{|y|^{\alpha}}\right|=\frac{1}{1-\alpha}\varepsilon^{1-\alpha}<+\infty$$

因此由习题2-2的第五题知，方程满足$y(0)=0$的解存在但不唯一；

$if\ \alpha=1$，则$|f(x,y_1)-f(x,y_2)|=||y_1|-|y_2||\le 1\cdot|y_1-y_2|$，从而$f(x,y)$对y满足李氏条件， 由皮卡定理知，满足$y(0)=0$的解存在且唯一；

综上，$\alpha\ge 1$时，满足$y(0)=0$的解存在且唯一；$\alpha<1$时，方程满足$y(0)=0$的解存在但不唯一

2.解： 设R是包含$(0,0)$的有界闭矩形区域，区间I意义如皮卡定理所述

皮卡序列构造公式为

$$y_{n+1}(x)=y_0+\int_{x_0}^{x}f(s,y_n(s))ds,\ (x\in I)$$

此题中，$x_0=y_0=0,f(x,y)=x+y+1$,所以

$$y_1(x)=0+\int_0^x f(s,y_0(s))ds=\int_0^x(s+1)ds=\frac{1}{2}x^2+x$$

$$y_2(x)=0+\int_0^x f(s,y_1(s))ds=\int_0^x(s+s+\frac{1}{2}s^2+1)ds=\frac{1}{3!}x^3+\frac{2}{2!}x^2+x$$

$$y_3(x)=0+\int_0^x f(s,y_2(s))ds=\int_0^x(s+\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{3}s^3+s^2+s+1)ds=\frac{1}{4!}x^4+\frac{2}{3!}x^3+\frac{2}{2!}x^2+x$$

$\cdots$

下面归纳。假设

$$y_n(x)=\frac{1}{(n+1)!}x^{n+1}+2\sum_{k=0}^{n}\frac{x^k}{k!}-x-2,\ (x\in I)$$

则

$$y_{n+1}(x)=0+\int_0^x f(s,y_n(s))ds=\frac{1}{(n+2)!}x^{n+2}+2\sum_{k=0}^{n+1}\frac{x^k}{k!}-x-2$$

因此

$$y_n(x)=\frac{1}{(n+1)!}x^{n+1}+2\sum_{k=0}^{n}\frac{x^k}{k!}-x-2\to 2e^x-x-2,\ (n\to+\infty)$$

则$\{y_n(x)\}$即为该初值问题的皮卡序列；极限解为$y(x)=2e^x-x-2$

习题 3-2

1.证: 设函数序列为$\{f_n(x)\}, x\in I$，有限区间I有以下四种形式：

(1)若$I=[a,b]$，直接由Ascoli引理即可得证；

(2)若$I=(a,b]$，令$L=[a,b], \{a_n\}$为收敛于a的数列，且$\forall n, a_n\in I$,

因为$\{f_n(x)\}$在I上等度连续，所以$\forall n, \{f_n(a_k)\}$收敛，极限记为$f_n(a)$，从而函数列$\{f_n(x)\}$扩充到L上，且在L上等度连续

$\because \{f_n(x)\}$在I上一致有界，所以$\exists M,\ s.t|f_n(x)|<M\ (x\in I)$，

又$|f_n(a)|=|\lim_{k\to+\infty}f_n(a_k)|=\lim_{k\to+\infty}|f_n(a_k)|\le M$

所以$\{f_n(x)\}$在L上一致有界

因此，由Ascoli引理知，$\{f_n(x)\}$在L上有一个一致收敛的子序列，自然在I上也一致收敛；

(3)若$I=[a,b)$，同(2)类似构造，即可得证；

(4)若$I=(a,b)$，同(2)类似构造使之扩充到$[a,b]$上，即可得证；

综上，得证！

2.解：(反例)

令$\{f_n(x)\}=\{\sin\frac{x}{n}\},\ x\in\mathbf{R}$

$\because |f_n(x)| = \left|\sin\frac{x}{n}\right| \leq 1$

$\therefore$函数列在$\mathbf{R}$上一致有界；

又$\because$ $|f_n(x_1) - f_n(x_2)| = \left|\sin\frac{x_1}{n} - \sin\frac{x_2}{n}\right| = \left|\frac{1}{n}\cos\frac{\xi}{n}(x_1 - x_2)\right|$(中值定理)$\leq |x_1 - x_2|$

$\therefore$函数列在$\mathbf{R}$上等度连续；

又$\because$ $f_n(x) = \sin\frac{x}{n} \to 0(n \to +\infty)$，而$f_n(n) = \sin\frac{n}{n} = \sin(1) > 0$

$\therefore$函数列在$\mathbf{R}$不存在一致收敛的子列

因此，当I是无限区间时第1题的结论不成立。

习题 3-3

2.解:

(1)$f(x, y) = \frac{1}{x^2+y^2}$在去除原点的平面上连续，由解的延伸定理知，解的最大存在区间必是以下三种情形：

(i)解的最大存在区间为$(\alpha, 0)$，则存在$-\alpha < a < 0$，则

$$0 < \frac{dy}{dx} \leq \frac{1}{a^2},\ (if x < a)$$

由(左行)解的延伸定理知，解可延伸直至$-\infty$,从而$\alpha = -\infty$；

(ii)解的最大存在区间为$(0, \beta)$，则存在$0 < b < \beta$，则

$$0 < \frac{dy}{dx} \leq \frac{1}{b^2},\ (if x > b)$$

由(右行)解的延伸定理知，解可延伸直至$+\infty$,从而$\beta = +\infty$；

(iii) 解的最大存在区间为(α, β)，其中$\alpha < 0, \beta > 0$，则存在$-\alpha < a < 0, 0 < b < \beta$，则

$$0 < \frac{dy}{dx} \leq \frac{1}{b^2},\ (if x > b)$$

由(右行)解的延伸定理知，解可延伸直至$+\infty$,从而$\beta = +\infty$；

$$0 < \frac{dy}{dx} \leq \frac{1}{a^2},\ (if x < a)$$

由(左行)解的延伸定理知，解可延伸直至$-\infty$,从而$\alpha = -\infty$；

综上，解的存在区间为$(-\infty, 0), (0, \infty)$或者$(-\infty, \infty)$

(3) $\because f(x, y) = y\sin(xy)$在$-\infty < x < +\infty$, $-\infty < y < +\infty$内连续，而且满足不等式

$$|f(x, y)| \leq |y| = 1 \cdot |y| + 0$$

$A(x) = 1$，$B(x) = 0$显然在$-\infty < x < +\infty$上是连续的，则由定理3.5知，该微分方程的每一个解都以区间$(-\infty, +\infty)$为最大存在区间。

3.解: 不矛盾!

事实上，解的延伸定理讨论的是形如$\frac{dy}{dx} = f(x, y)$的微分方程，本方程$xdx + ydy = 0$相当于$f(x, y) = -\frac{x}{y}$，显然此$f(x, y)$在$y = 0$时无意义，所以G的边界包括$y = 0$,而单位圆显然延伸到了这个边界，故不矛盾。

5.证：

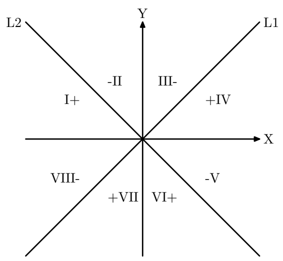

图 1:

令$F(x, y) = (x^2 - y^2)f(x, y)$,因为$y \neq 0$时，$yf(x, y) > 0$,则可得$\frac{dy}{dx}$形势图(见上图)，其中在直线$L_1, L_2, X$轴上$\frac{dy}{dx} = 0$，对应线素场的水平等斜线。

对任意的点$P(x_0, y_0)$，当$x_0 < 0, |y_0|$适当小时，点P位于区域I或VIII或x负半轴中。

(1)若P位于I区域，则$\frac{dy}{dx} > 0$，又因为在区域VIII中，$\frac{dy}{dx} < 0$，从而由(左行)解的延伸定理，得出解Γ必可向左延伸直至$-\infty$;

下面看右行解的情况：由于在区域I，$\frac{dy}{dx} > 0$，从而解Γ必可穿过直线L_2到达区域II，又因为在区域$\{II \cup III \cup Y$正半轴$\}$，导数小于0，从而解Γ必可穿过直线L_1到达区域IV，而在区域IV中，解的导数大于零，又不能穿过水平等斜线L_1，由(右行)解的延伸定理， 得出解Γ必可向右延伸直至$+\infty$，从而解Γ的存在区间为$-\infty < x < \infty$;

(2)若P位于VIII区域，则类似于(1)的解释，可得解可延拓至$-\infty < x < \infty$;

(3)若P位于X负半轴，由于在X轴上$\frac{dy}{dx} = 0$，从而$y \equiv 0$，可延拓至$-\infty < x < \infty$;

综上，得证!

第四章 奇解

习题 4-1

1.解: (1) $\because$

$$2y = p^2 + 4px + 2x^2$$

两边对x求导，有

$$2p = 2pp^{'} + 4p + 4p^{'}x + 4x$$

即

$$(p^{'} + 1)(p + 2x) = 0$$

$\therefore$

$$p^{'} = -1 \ or \ p = -2x$$

即

$$p = -x + C \ or \ p = -2x$$

代入原方程，即得

$$y = -\frac{1}{2}x^2 + Cx + \frac{1}{2}C^2$$

和特解$y = -x^2$

(2) $\because$

$$y = px\ln x + (xp)^2$$

两边对x求导，有

$$p = p^{'}x\ln x + p(1 + \ln x) + 2xp(p + xp^{'})$$

即

$$(p^{'}x + p)(2xp + \ln x) = 0$$

$\therefore$

$$p^{'}x + p = 0 \ or \ 2xp + \ln x = 0$$

即

$$px = C \ or \ px = -\frac{1}{2}\ln x$$

代入原方程，即得

$$y = C\ln x + C^2$$

和特解$y=-\frac{1}{4}(\ln x)^2$

(3) $\because$

$$2xp=2\tan y+p^3\cos^2 y$$

若$p=0$，则$\tan y=0,\ y=k\pi,k\in\mathbf{Z}$

若$p\neq 0$，令$q=\frac{1}{p}$，则方程化为

$$x=q\tan y+\frac{1}{2q^2}\cos^2 y$$

对y求导，有

$$q=q^{'}\tan y+\frac{q}{\cos^2 y}-q^{-3}q^{'}\cos^2 y-q^{-2}\sin y\cos y$$

化简，有

$$(q^{'}\cos y+q\sin y)\left(\frac{\sin y}{\cos^2 y}-\frac{\cos y}{q^3}\right)$$

$\therefore$

$$q^{'}\cos y+q\sin y=0\ or\ \frac{\sin y}{\cos^2 y}-\frac{\cos y}{q^3}=0$$

即

$$q=C\cos y\ or\ q=\frac{\cos y}{\sqrt[3]{\sin y}}$$

$\therefore$

$$x=C\sin y+\frac{1}{2C^2}\ or\ x=\frac{3}{2}\sin^{\frac{2}{3}} y$$

综上，方程通解为$x=C\sin y+\frac{1}{2C^2}$及特解$x=\frac{3}{2}\sin^{\frac{2}{3}} y,\ y=k\pi,k\in\mathbf{Z}$

2.解：(1) 原方程有参数表达式

$$y=\sqrt{2}\cos t,\ \frac{dy}{dx}=\frac{2}{\sqrt{5}}\sin t,\ t\in\mathbf{R}$$

由此推出

$$dx=\frac{\sqrt{5}}{2}\frac{dy}{\sin t}=\frac{\sqrt{5}}{2}\frac{d(\sqrt{2}\cos t)}{\sin t}=-\sqrt{\frac{5}{2}}dt$$

得

$$x=-\sqrt{\frac{5}{2}}t+C$$

因此，微分方程的通解为

$$x = -\sqrt{\frac{5}{2}}t + C,\ y = \sqrt{2}\cos t$$

消去t，有

$$y = \sqrt{2}\cos\left(\sqrt{\frac{2}{5}}(C - x)\right)$$

另外，还有特解

$$y = \pm\sqrt{2}$$

(2) 原方程有参数表达式

$$x = \sec t,\ \frac{dy}{dx} = \frac{1}{\sqrt{3}}\tan t, t \in \mathbf{R}$$

由此推出

$$dy = \frac{1}{\sqrt{3}}\tan t dx = \frac{1}{\sqrt{3}}\tan t d\sec t = \frac{1}{\sqrt{3}}\tan^2 t \sec t dt$$

得

$$y = \frac{1}{\sqrt{3}}\left(\frac{1}{2}\tan t\sec t - \frac{1}{4}\ln\frac{1+\sin t}{1-\sin t}\right) + C$$

因此，微分方程的通解为

$$x = \sec t,\ y = \frac{1}{\sqrt{3}}\left(\frac{1}{2}\tan t\sec t - \frac{1}{4}\ln\frac{1+\sin t}{1-\sin t}\right) + C$$

(3) 令$u = x$和$v = \frac{dy}{dx}$为两个参变量，则可得

$$x = u, \frac{dy}{dx} = v, y = u^2 - v^2$$

从而

$$v = \frac{dy}{dx} = \frac{2udu - 2vdv}{du}$$

即

$$\frac{dv}{du} = \frac{u}{v} - \frac{1}{2}$$

令$v = pu$，得

$$(p - \frac{1}{p} + \frac{1}{2})du + udp = 0$$

解得

$$u\left(p+\frac{1+\sqrt{17}}{4}\right)^{\frac{1+\sqrt{17}}{2\sqrt{17}}}\left(p+\frac{1-\sqrt{17}}{4}\right)^{\frac{\sqrt{17}-1}{2\sqrt{17}}}=C_1$$

及特解

$$p=-\frac{1+\sqrt{17}}{4},p=\frac{\sqrt{17}-1}{4}$$

即

$$\left(v+\frac{1+\sqrt{17}}{4}u\right)^{\frac{1+\sqrt{17}}{2\sqrt{17}}}\left(v+\frac{1-\sqrt{17}}{4}u\right)^{\frac{\sqrt{17}-1}{2\sqrt{17}}}=C_1$$

及特解

$$v=-\frac{1+\sqrt{17}}{4}u,v=\frac{\sqrt{17}-1}{4}u$$

令$\alpha=\frac{\sqrt{17}-1}{4},\beta=-\frac{1+\sqrt{17}}{4}$,则

$$(v-\alpha u)^{\alpha}=C(v-\beta u)^{\beta}$$

以及特解

$$v=\beta u,v=\alpha u$$

因此，方程的通解为

$$y=x^2-v^2,(v-\alpha x)^{\alpha}=C(v-\beta x)^{\beta}$$

以及特解

$$y_1=\frac{1}{2}\alpha x^2,y_2=\frac{1}{2}\beta x^2$$

其中$\alpha=\frac{\sqrt{17}-1}{4},\beta=-\frac{1+\sqrt{17}}{4}$

(4) 因为$x=0$不是方程的特解，故可令参数t满足$\frac{dy}{dx}=xt$，则方程可化为

$$x^3+(xt)^3=4x^2t$$

即

$$x=\frac{4t}{1+t^3}$$

从而

$$dy=xtdx=\frac{4t^2}{1+t^3}dx=\frac{16t^2(1-2t^3)}{(1+t^3)^3}$$

解得

$$y=\frac{8t^3}{(1+t^3)^2}+\frac{8}{3(1+t^3)}+C$$

所以通解为

$$x=\frac{4t}{1+t^3},\ y=\frac{8t^3}{(1+t^3)^2}+\frac{8}{3(1+t^3)}+C$$

习题 4-2

1.解： (1)

$$\because F(x,y,p)=xp+p^2-y$$

$$F_p^{'}(x,y,p)=x+2p$$

p判别式为

$$xp+p^2-y=0,\ x+2p=0$$

消去p，得到

$$y=-\frac{1}{4}x^2$$

易验证，$y=-\frac{1}{4}x^2$是方程的解

又

$$F_y^{'}=-1\neq 0,\ F_{pp}^{'}=2\neq 0$$

以及

$$F_p^{'}(x,-\frac{1}{4}x^2,-\frac{1}{2}x)=0$$

$\therefore y=-\frac{1}{4}x^2$是方程的奇解

(2)

$$\because F(x,y,p)=2xp+p^2-y$$

$$F_p^{'}(x,y,p)=2x+2p$$

p判别式为

$$2xp+p^2-y=0,\ 2x+2p=0$$

消去p，得到

$$y=-x^2$$

易验证，$y=-x^2$不是方程的解

$\therefore$方程无奇解

(3)

$$\because F(x,y,p)=(y-1)^2p^2-\frac{4}{9}y$$

$$F_p^{'}(x,y,p)=2(y-1)^2p$$

p判别式为

$$(y-1)^2p^2-\frac{4}{9}y=0,\ 2(y-1)^2p=0$$

消去p，得到

$$y=0$$

易验证，$y=0$是方程的解

又

$$F_y^{'}(x,0,0)=-\frac{4}{9}\neq 0,\ F_{pp}^{'}(x,0,0)=2\neq 0$$

以及

$$F_p^{'}(x,0,0)=0$$

$\therefore y=0$是方程的奇解

2.解：(1)讨论微分方程

$$p^2-y^2=0\ (p=\frac{dy}{dx})$$

$$\because F(x,y,p)=p^2-y^2$$

$$F_p^{'}(x,y,p)=2p$$

p判别式为

$$p^2-y^2=0,\ 2p=0$$

消去p，得到

$$y=0$$

易验证，$y=0$是方程的解

以及

$$F_y^{'}(x,0,0)=0,\ F_{pp}^{'}(x,0,0)=2\neq 0,\ F_p^{'}(x,0,0)=0$$

因此条件(4.28)中的第一个不等式不成立；

但是容易求出方程通解为

$$y = C_1 e^{x},\ y = C_2 e^{-x}$$

由此验证$y=0$不是奇解，故(4.28)中的第一个不等式不可缺。

(2)讨论微分方程

$$\sin(yp) = y\ (p = \frac{dy}{dx})$$

$$\because F(x,y,p) = \sin(yp) - y$$

$$F_p^{'}(x,y,p) = y\cos(yp)$$

p判别式为

$$sin(yp) - y = 0,\ y\cos(yp) = 0$$

消去p，得到

$$y = 0, \pm 1$$

易验证，只有$y=0$是方程的解

以及

$$F_y^{'}(x,0,0) = -1,\ F_{pp}^{'}(x,0,0) = 0,\ F_p^{'}(x,0,0) = 0$$

因此条件(4.28)中的第二个不等式不成立；

下面说明$y=0$不是奇解，假若不然，在$y=0$上任一点$(x_0,0)$必存在另外一个解$y=y_1(x)$，使得满足：

$$y_1(x) = \sin\left(y_1(x)y_1^{'}(x)\right),\ y_1(x_0) = 0,\ y_1^{'}(x_0) = 0$$

且存在x_1，使得

$$|y_1(x_1)| \neq 0, |y_1^{'}(x_1)| < 1$$

推得

$$|y_1(x_1)| = \left|\sin\left(y_1(x_1)y_1^{'}(x_1)\right)\right| \leq \left|y_1(x_1)y_1^{'}(x_1)\right|$$

即

$$1 \leq |y_1^{'}(x_1)|$$

矛盾！故假设不成立，即$y=0$不是奇解 故(4.28)中的第二个不等式不可缺。

综上所述，条件(4.28)的两个不等式缺一不可。

3.解：讨论微分方程

$$y = 2x + p - \frac{1}{3}p^3 \ (p = \frac{dy}{dx})$$

$$\because F(x, y, p) = y - 2x - p + \frac{1}{3}p^3$$

$$F_p^{'}(x, y, p) = p^2 - 1$$

p判别式为

$$y - 2x - p + \frac{1}{3}p^3 = 0, \ p^2 - 1 = 0$$

消去p，得到

$$y = 2x \pm \frac{2}{3}$$

经验证，$y = 2x - \frac{2}{3}$是方程的解,而$y = 2x + \frac{2}{3}$不是方程的解
当$y = 2x - \frac{2}{3}$时

$$F_y^{'} = 1 \neq 0, \ F_{pp}^{'} = 4 \neq 0, \ F_p^{'} = 3 \neq 0$$

因此条件(4.29)不成立；
容易求出方程通解为

$$x = -\frac{1}{2}p^2 - 2p - 3\ln|p - 2| + C,$$

$$y = -\frac{1}{3}p^3 - p^2 - 3p - 6\ln|p - 2| + 2C$$

以及特解

$$y = 2x - \frac{2}{3}$$

由此容易验证$y = 2x - \frac{2}{3}$不是奇解
因此，条件(4.29)是不可缺少的。

4.证：$\because$当$0 < y \leq 1$时，$E(y) \neq 0$，又$E(y)$连续
$\therefore E(y)$在$(0, 1]$上不变号，不妨设$E(y) > 0 \ (0 < y \leq 1)$
$\Leftarrow$
若$\int_0^1 \frac{dy}{E(y)}$收敛，则可令$x(y) = \int_0^y \frac{ds}{E(s)} \ (0 \leq y \leq 1)$，从而

$$x^{'}(y) = \frac{1}{E(y)} \neq 0 \ (0 \leq y \leq 1)$$

由隐函数定理知，存在函数$h(\cdot)$，使得$y=h(x)\ (0\leq x\leq x(1))$，从而

$$\frac{dy}{dx}=\frac{d(h(x))}{dx}=\frac{1}{x'(y)}=E(y)$$

即$y=h(x)\ (0\leq x\leq x(1))$也是方程的解，且$y\neq 0,\ (0<x\leq x(1))$，则不难验证，对任意常数C，

$$y=h(x+C)\ \ (-C\leq x\leq x(1)-C)$$

也是方程的解，且$y\neq 0,\ (-C<x\leq x(1)-C)$，且有

$$y(-C)=h(0)=0,\ y^{'}(-C)=E(h(0))=E(0)=0$$

从而$y=h(x+C)\ \ (-C\leq x\leq x(1)-C)$在$(-C,0)$处与$y=0$相切

由C的任意性以及$y=h(x+C)\neq 0,\ (-C<x\leq x(1)-C)$知，在直线$y=0$上任一点的任何邻域内都有另外一个解在此点与之相切，而$y=0$本身也是方程的解，从而$y=0$是奇解；

$\not\Rightarrow$

反例

$$E(y)=\begin{cases} y & ,y>0 \\ 0 & ,y=0 \\ \sqrt{-y} & ,y<0 \end{cases}$$

显然，$E(y)$满足条件，且易验证$y=0$是方程的奇解，但是此时，

$$\int_0^1\frac{dy}{E(y)}=\int_0^1\frac{dy}{y}=\infty$$

习题 4-3

1.解:(1)克莱罗方程为

$$y=xp+f(p)\quad (p=\frac{dy}{dx}),\ f^{''}(p)\neq 0$$

由微分法，可得

$$p=p+x\frac{dp}{dx}+f^{'}(p)\frac{dp}{dx}$$

亦即

$$[x+f^{'}(p)]\frac{dp}{dx}=0$$

当$x+f^{'}(p)=0$时，有特解

$$x=-f^{'}(p),\ y=-f^{'}(p)p+f(p)$$

其中p当做参数

当$\frac{dp}{dx}=0$时，我们有$p=C$.因此，得到方程通解

$$y=Cx+f(C)$$

(2)由通解得曲线族

$$V(x,y,C)=Cx+f(C)-y$$

则

$$V_C^{'}(x,y,C)=x+f^{'}(C)$$

从而C-判别式为

$$Cx+f(C)-y=0,x+f^{'}(C)=0$$

得一不含于曲线族的曲线

$$x=-f^{'}(C)\triangleq\varphi(C),\ y=f(C)-Cf^{'}(C)\triangleq\psi(C)$$

又

$$(\varphi^{'}(C),\psi^{'}(C))=(-f^{''}(C),-Cf^{''}(C))\neq(0,0)$$

$$(V_x^{'},V_y^{'})=(C,-1)\neq(0,0)$$

$$\therefore x=-f^{'}(C),\ y=f(C)-Cf^{'}(C)$$

是方程唯一包络。

2.解： 由上一题我们知道，克莱罗方程

$$y=xp+f(p)\quad(p=\frac{dy}{dx}),\ f^{''}(p)\neq0$$

的奇解为

$$x=-f^{'}(C),\ y=f(C)-Cf^{'}(C)$$

若$y=\sin x$是克莱罗型方程的奇解，则

$$x=-f^{'}(C),\ \sin x=f(C)-Cf^{'}(C)$$

即

$$\sin x=f(C)+Cx$$

方程关于C求导，有

$$x^{'}\cos x=f^{'}(C)+x+Cx^{'}=Cx^{'}$$

即

$$C=\cos x$$

从而

$$\sin x=f(C)+Cx=f(\cos x)+x\cos x$$

令$p=\cos x$，即有

$$f(p)=\sqrt{1-p^2}-p\arccos p$$

$$f^{''}(p)=\frac{1}{\sqrt{1-p^2}}>0$$

所以相应的克莱罗方程为

$$y=xp+\sqrt{1-p^2}-p\arccos p$$

事实上，我们可以验证$y=\sin x$确实是上述方程的奇解。

第五章 高阶微分方程

习题 5-1

1.解：对于线性单摆方程

$$\frac{d^2x}{dt^2}+a^2x=0\ (a=\sqrt{\frac{g}{l}})$$

单摆周期

$$T=\frac{2\pi}{a}=2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}$$

$$\therefore g=l\left(\frac{2\pi}{T}\right)^2$$

因此，g可以通过测量单摆小振动时的周期T来计算，计算公式如上。

2.证明：对于三次近似方程

$$\frac{d^2x}{dt^2}+a^2(x-\frac{1}{6}x^3)=0\ (a=\sqrt{\frac{g}{l}})$$

容易得到它的首次积分

$$\left(\frac{dx}{dt}\right)^2+a^2x^2-\frac{1}{12}a^2x^4=C_1$$

即

$$\frac{dx}{dt}=\pm\sqrt{\frac{1}{12}a^2(x^2-6)^2+C_1-3a^2}$$

设单摆振幅为$A(0<A<\sqrt{6})$，则它在某一时刻t_1的运动状态是$x(t_1)=A,x^{'}(t_1)=0$，代入上式，有

$$\begin{aligned}\frac{dx}{dt}&=\pm\sqrt{\frac{1}{12}a^2\left[(x^2-6)^2-(A^2-6)^2\right]}\\&=\pm\frac{a}{2\sqrt{3}}\sqrt{(12-x^2-A^2)(A^2-x^2)}\end{aligned}$$

$$\therefore\frac{T}{4}=\int_0^A\frac{dx}{\frac{a}{2\sqrt{3}}\sqrt{(12-x^2-A^2)(A^2-x^2)}}$$

即

$$T=\frac{4}{a}\int_0^1\frac{du}{\sqrt{(1-u^2)\left[1-\frac{A^2}{12}(1+u^2)\right]}}$$

$$\lim_{A\to 0} T = \frac{2\pi}{a},\ \lim_{A\to\sqrt{6}} T = +\infty$$

T与A有关，因此是不等时的。

3.解：若

$$L = \sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2}$$

则说明细线是绷直的，悬链线是以点$(x_1,y_1),(x_2,y_2)$为端点的直线段。

4.解：(1)取

$$C_1=0,\ C_2=0,\ C_3=0$$

则

$$y\dot{x}-x\dot{y}=C_3=0$$

即

$$ydx-xdy=0$$

从而

$$y(t)=Cx(t)\ and\ x(t)=0$$

$$\because x^2+y^2+z^2\neq 0$$

$\therefore$不妨设$x(t)$不恒为零，则$y(t)=Cx(t)$ 又

$$x\dot{z}-z\dot{x}=0$$

$$\therefore z(t)=Kx(t)$$

从而$(x,y,z)=x(t)(1,C,K)$，运动轨道处于直线上，但是是否发生碰撞则还要视初始状态而定。若初始时运动方向相背离，且初始动能足以克服引力，则不会发生碰撞，否则发生碰撞。

(2)取

$$C_1=0,\ C_2=0,\ C_3>0,\ C_4=-\left(\frac{\mu}{C_3}\right)^2$$

则

$$e=0,\ r=p=\frac{C_3^2}{\mu}$$

运动轨道为一圆周。

习题 5-2

1.解：单摆方程(5.7)，令

$$y_1 = x,\ y_2 = \dot{x}$$

则

$$\begin{cases} \frac{dy_1}{dt} &= y_2 \\ \frac{dy_2}{dt} &= -a^2 \sin y_1 \end{cases}$$

悬链线方程(5.15)，令

$$y_1 = y,\ y_2 = y^{'}$$

则

$$\begin{cases} \frac{dy_1}{dx} &= y_2 \\ \frac{dy_2}{dx} &= a\sqrt{1+y_2^2} \end{cases}$$

二体运动方程(5.20)，令

$$y_1 = x,\ y_2 = \dot{x}$$

$$y_3 = y,\ y_4 = \dot{y}$$

$$y_5 = z,\ y_6 = \dot{z}$$

则

$$\begin{cases} \frac{dy_1}{dt} &= y_2 \\ \frac{dy_2}{dt} &= -\frac{Gm_s y_1}{\left(\sqrt{y_1^2+y_3^2+y_5^2}\right)^3} \\ \frac{dy_3}{dt} &= y_4 \\ \frac{dy_4}{dt} &= -\frac{Gm_s y_3}{\left(\sqrt{y_1^2+y_3^2+y_5^2}\right)^3} \\ \frac{dy_5}{dt} &= y_6 \\ \frac{dy_6}{dt} &= -\frac{Gm_s y_5}{\left(\sqrt{y_1^2+y_3^2+y_5^2}\right)^3} \end{cases}$$

2.解: 对于初值问题

$$(E):\ \frac{d\mathbf{y}}{dx} = \mathbf{f}(x, \mathbf{y}), \mathbf{y}(x_0) = \mathbf{y_0}$$

(1)皮卡存在和唯一定理

设初值问题(E)中$\mathbf{f}(x,\mathbf{y})$在区域

$$R:\ |x-x_0|\le a,\ |\mathbf{y}-\mathbf{y_0}|\le b$$

内连续，且对$\mathbf{y}$满足李氏条件，则(E)在区间$I=[x_0-h,x_0+h]$上有且只有一个解，其中常数$h=\min\left\{a,\frac{b}{m}\right\},M>\max_{(x,\mathbf{y})\in R}|\mathbf{f}(x,\mathbf{y})|$。

主要证明步骤：

(a)初值问题(E)等价于积分方程

$$\mathbf{y}=\mathbf{y_0}+\int_{x_0}^{x}\mathbf{f}(x,\mathbf{y})dx$$

(b)由此可作皮卡序列

$$\mathbf{y_{n+1}}(\mathbf{x})=\mathbf{y_0}+\int_{x_0}^{x}\mathbf{f}(x,\mathbf{y_n}(\mathbf{x}))dx$$

$(n=0,1,2,\cdots)$，其中$\mathbf{y_0}(x)=\mathbf{y_0}$

(c)归纳法可证$\mathbf{y}=\mathbf{y_n}(x)$在I上是连续的，且满足

$$|\mathbf{y_n}(x)-\mathbf{y_0}|\le M|x-x_0|\ (n=0,1,2,\cdots)$$

(d)归纳法可证

$$|\mathbf{y_{n+1}}(x)-\mathbf{y_n}(x)|\le\frac{M}{L}\frac{(L|x-x_0|)^{n+1}}{(n+1)!}$$

它蕴含着皮卡序列$\mathbf{y}=\mathbf{y_n}(x)$是一致收敛的

(e)令$\boldsymbol{\varphi}(x)=\lim_{n\to\infty}\mathbf{y_n}(x),\ (x\in I)$，则$\mathbf{y}=\boldsymbol{\varphi}(x)$是(E)的一个解。

(f)证明解唯一。

(2)佩亚诺存在定理

设函数$\mathbf{f}(x,\mathbf{y})$在区域R内连续，则初值问题(E)在区间$|x-x_0|\le h$上至少有一个解。这里R和h定义如上。

主要证明步骤：

(a)构造欧拉序列$\mathbf{y}=\boldsymbol{\varphi_n}(x),\ (|x-x_0|\le h)$

(b)由Ascoli引理证明欧拉序列在$|x-x_0|\le h$上至少有一个收敛子列。

(c)证明欧拉折线$\mathbf{y}=\boldsymbol{\varphi_n}(x)$在$|x-x_0|\le h$上满足

$$\boldsymbol{\varphi_n}(x)=\mathbf{y_0}+\int_{x_0}^{x}\mathbf{f}(x,\boldsymbol{\varphi_n}(x))dx+\boldsymbol{\delta_n}(x)$$

其中函数$\delta_{\mathbf{n}}(x)$趋于零。

(d)选取欧拉折线序列的一个子序列，使之在$|x-x_0|\le h$上一致收敛，极限函数为$\boldsymbol{\varphi}(x)$，则$\mathbf{y}=\boldsymbol{\varphi}(x)$在$|x-x_0|\le h$上连续，是(E)的一个解。

3.解:对n阶线性微分方程组初值问题

$$(F):\ \frac{d\mathbf{y}}{dx}=\mathbf{A}(x)\mathbf{y}+\mathbf{e}(x),\ \mathbf{y}(x_0)=\mathbf{y_0}$$

若$\mathbf{A}(x),\mathbf{e}(x)$在$|x-x_0|\le a$上连续，则(F)解存在且局部唯一。

证明：事实上，$\mathbf{f}(x,\mathbf{y})=\mathbf{A}(x)\mathbf{y}+\mathbf{e}(x)$在区域

$$R:\ |x-x_0|\le a,\ |\mathbf{y}-\mathbf{y_0}|\le b$$

内连续，且

$$|\mathbf{f}(x,\mathbf{y})-\mathbf{f}(x,\mathbf{z})|\le L|\mathbf{y}-\mathbf{z}|$$

其中

$$L=n\max_{|x-x_0|\le a}|a_{ij}(x)|$$

再由皮卡定理即可得证。

习题 5-3

1.证明：做变换$t=x-x_0,\ \mathbf{u}=\mathbf{y}-\boldsymbol{\eta}$，则

$$\mathbf{f}(x,\mathbf{y})=\mathbf{f}(t+x_0,\mathbf{u}+\boldsymbol{\eta})\triangleq\mathbf{g}(t,\mathbf{u},\boldsymbol{\eta})$$

从而初值问题变为：

$$(F):\ \frac{d\mathbf{u}}{dt}=\mathbf{g}(t,\mathbf{u},\boldsymbol{\eta}),\mathbf{u}(0)=0$$

由$\mathbf{f}(x,\mathbf{y})$在R上连续且对$\mathbf{y}$满足李氏条件，知$\mathbf{g}(t,\mathbf{u},\boldsymbol{\eta})$在

$$(G):\ |t|\le a,\ |\mathbf{u}|\le\frac{b}{2},\ |\boldsymbol{\eta}-\mathbf{y_0}|\le\frac{b}{2}$$

上连续且对$\mathbf{u}$满足李氏条件。

由定理5.1知，初值问题(F)的解$\mathbf{u}=\boldsymbol{\phi}(x,\boldsymbol{\eta})$在区域

$$(D):\ |t|\le\frac{h}{2},\ |\boldsymbol{\eta}-\mathbf{y_0}|\le\frac{b}{2}$$

上连续，即原微分方程的解$\mathbf{y} = \boldsymbol{\varphi}(x, \boldsymbol{\eta}) \triangleq \boldsymbol{\eta} + \boldsymbol{\phi}(x, \boldsymbol{\eta})$在区域Q上连续。

3.解：例如§2.2例2中的微分方程$y' = \frac{3}{2}y^{\frac{1}{3}}$，其积分曲线族见§2.2图2-2，显然在x轴上任一点解都不唯一，且局部范围内都不能把曲线族拉成平行直线族。

习 题 6—3

1．证明函数组 $\varphi_1(x)=\begin{cases}x^2 当 x\ge 0\\ 0 当 x<0\end{cases}$，$\varphi_2(x)=\begin{cases}0 \quad 当 x\ge 0\\ x^2 \quad 当 x<0\end{cases}$，在区间 $(-\infty,+\infty)$ 上线性无关，但它们的朗斯基行列式恒等于零。这与本节的定理 6.2*是否矛盾？如果并不矛盾，那么它说明了什么？

证　设有 $c_1\varphi_1(x)+c_2\varphi_2\equiv 0 \quad -\infty<x<+\infty$，则当 $x\ge 0$ 时，有 $c_1x^2+c_2 0\equiv 0$，从而推得 $c_1=0$。而当 $x<0$ 时，有 $c_1\cdot 0+c_2x\equiv 0$，从而推得 $c_2=0$。因此在 $-\infty<x<+\infty$ 上，只有 $c_1=c_2=0$ 时，才有 $c_1\varphi_1(x)+c_2\varphi_2(x)\equiv 0$，故 $\varphi_1(x),\varphi_2(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上线性无关。又当 $x\ge 0$ 时，$w(x)=\begin{vmatrix}x^2 & 0\\ 2x & 0\end{vmatrix}\equiv 0$，当 $x<0$ 时，$w(x)=\begin{vmatrix}0 & x^2\\ 0 & 2x\end{vmatrix}\equiv 0$

故当 $-\infty<x<+\infty$ 时，有 $w(x)\equiv 0$。这与本节定理 6.2 不矛盾，因为定理 6.2*成立对函数有要求，即 $\varphi_1(x)$，$\varphi_2(x)$ 是某个二阶齐次线性方程的解组。这说明不存在一个二阶齐次线性方程，它以 $\varphi_1(x)$，$\varphi_2(x)$ 为解组。

3．考虑微分方程　$y''+q(x)y=0$

（1）设 $y=\varphi(x)$ 与 $y=\psi(x)$ 是它的任意两个解，试证 $y=\varphi(x)$ 与 $y=\psi(x)$ 的朗斯基行列式恒等于一个常数。

（2）设已知方程有一个特解为 $y=e^x$，试求这方程的通解，并确定 $q(x)=?$

证：（1）在解 $y=\varphi(x)$，$y=\psi(x)$ 的公共存在区间内任取一点 x。由刘维尔公式，有 $w[\varphi(x),\psi(x)]=w(x_0)e^{-\int_{x_0}^{x}odx}=w(x_0)$（常数）

（2）由于 $y=e^x$ 是方程的一个非零特解，故可借助刘维尔公式，求与之线性无关的特解 $y_2=e^x\int\frac{1}{e^{2x}}\cdot e^{-\int odx}dx=-\frac{1}{2}e^{-x}$，故方程的通解为 $y=c_1e^x+c_2e^{-x}$

又由于 $y=e^x$ 是方程的解，故有 $e^x+q(x)e^x\equiv 0$，所以 $q(x)=-1$。

4．（1）见课本 291 页的 Lemma 9.1；（2）见课后答案

5．设函数 $u(x)$ 和 $v(x)$ 是方程 $y''+p(x)y'+q(x)y=0$ （6.76）的一个基本解组，

试证：（1）方程的系数函数 $p(x)$ 和 $q(x)$ 能由这个基本解组唯一地确定；

（2）$u(x)$ 和 $v(x)$ 没有共同的零点。

证：（1）由于 $u(x)$ 、$v(x)$ 是方程（6.76）的一个基本解组，故有

$$\begin{cases} u' p(x)+uq(x)=-u'' \\ v' p(x)+vq(x)=-v'' \end{cases} ,\quad 且 \begin{vmatrix} u' & u \\ v' & v \end{vmatrix} = -w[u(x).v(x)] \neq 0 ,\quad 故有$$

$$p(x)=\frac{\begin{vmatrix} -u'' & u \\ -v'' & v \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} u' & u \\ v' & v \end{vmatrix}}=\frac{u''v-uv''}{w[u(x).v(x)]},\qquad q(x)=\frac{\begin{vmatrix} u' & -u'' \\ v'' & -v'' \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} u' & u \\ v' & v \end{vmatrix}}=\frac{u'v''-u'v''}{w[u(x).v(x)]}$$

因此 $p(x),q(x)$ 能够由基本解组 $u(x),v(x)$ 惟一地确定。

（2）（反证法）若不然，$u(x)$ 和 $v(x)$ 有共同的零点，设为 x_0，则 $w(u(x_0),v(x_0))=0$，所以 $u(x)$，$v(x)$ 线性相关，这与 $u(x)$，$v(x)$ 为齐次线性方程（6.76）的一个基本解组矛盾。故得证。

7．设欧拉方程　$x^n y^{(n)}+a_1 x^{n-1} y^{(n-1)}+\cdots+a_n y=0$　（1）

其中 $a_1,a_2,\cdots,a_n$ 都是常数，$x>0$。试利用适当的变换把它化成常系数的齐次线性微分方程。

解　作自变量变换 $x=e^t$，则 $t=\ln x$

直接计算可得 $\frac{dy}{dx}=\frac{dy}{dt}\cdot\frac{dt}{dx}=e^{-t}\frac{dy}{dt}$，$\frac{d^k y}{dx^k}=e^{-kt}\left(\frac{d^k y}{dt^k}+\beta_1\frac{d^{k-1}y}{dt^{k-1}}+\cdots+\beta_{k-1}\frac{dy}{dt}\right)$

其中 $\beta_1,\beta_2,\cdots\beta_{k-1}$ 都是常数，于是 $x^k\frac{dy^k}{dx^k}=\frac{d^k y}{dt^k}+\beta_1\frac{d^{k-1}y}{dt^{k-1}}+\cdots+\beta_{k-1}\frac{dy}{dt}$。将上述结果代人方程（1），就得到常系数齐次线性方程

$$\frac{d^n y}{dt^n}+b_1\frac{d^{n-1}y}{dt^{n-1}}+\cdots+b_{n-1}\frac{dy}{dt}+b_n y=0$$

其中 $b_1,b_2,\cdots b_n$ 是常数

8、求解有阻尼的弹簧振动方程

$$m\frac{d^2x}{dt^2}+\gamma\frac{dx}{dt}+kx=0 \qquad （1）$$

其中m,γ和中都是正的常数，并就$\Delta=r^2-4mk$大于，等于和小于零的不同情况，说明相应解的物理意义 。

解：特征方程为 $m\lambda^2+\gamma\lambda+k=0$

特征根：$\lambda_1=\dfrac{-r+\sqrt{r^2-4km}}{2m}$，$\lambda_2=\dfrac{-r+\sqrt{r^2-4km}}{2m}$

记$\Delta=\gamma^2-4mk$，下面由判别式Δ分三种情况讨论：

1）当$\Delta>0$时，这时，特征根$\lambda_2<\lambda_1<0$, 的方程（1）的通解为

$$x=c_1e^{\lambda_1 t}+c_2e^{\lambda_2 t} \qquad （2）$$

由（2）可看出，方程（1）的任何解$x=x(t)$ 都满足 $\lim\limits_{t\to+\infty}x(t)=0$。

而且当$c_1\neq 0,c_2=0$（或$c_1=0,c_2\neq 0$）时，有$x(t)\neq 0$。

而当$c_1\neq 0,c_2\neq 0$时，由（2）令 $c_1e^{\lambda_1 t}+c_2e^{\lambda_2 t}=0$ （3）

若c_1与c_2同号，显然（3）式不能成立。若c_1与c_2异号，则有$t=\dfrac{1}{\lambda_2-\lambda_1}\ln\left(\dfrac{-c_1}{c_2}\right)$

故方程(1)的一切非零解最多只有一个零点,这相当于弹簧振子最多只能一次经过静止点。因此由以上讨论说明，当阻尼很大，即γ很大时，弹簧的运动不是周期的，且不具有振动的性质。

2）当$\Delta<0$时，这时特征根λ_1,λ_2是一对其轭的复根$\lambda_1=\alpha+i\beta,\lambda_2=\alpha-i\beta$，

其中 $\alpha=\dfrac{-\gamma}{2m}<0$ $\beta=\dfrac{\sqrt{-\Delta}}{2m}>0$， 于是方程（1）的通解为

$x=e^{\alpha t}(c_1\cos\beta t+c_2\sin\beta t)$，此式可改写为

$$x=\sqrt{c_1^2+c_2^2}\left(\frac{c_1}{\sqrt{c_1^2+c_2^2}}\cos t+\frac{c_2}{\sqrt{c_1^2+c_2^2}}\sin\beta t\right)e^{\alpha t}=Ae^{\alpha t}\sin(\beta t+\theta) \qquad （4）$$

其中 $A=\sqrt{c_1^2+c_2^2}\geq 0$，$\sin\theta=\dfrac{c_1}{\sqrt{c_1^2+c_2^2}}$ $\cos\theta=\dfrac{c_2}{\sqrt{c_1^2+c_2^2}}$

由于$\alpha<0$，由（4）可知 $\lim\limits_{t\to+\infty} x(t)=0$这就证明，有阻尼的弹簧振动总是趋于静止的。由（4）可以看方程（1）的任何非零解（即 A≠0）都有无穷无多个零点。弹簧振动已不是周期的，弹簧振动将作衰减振动，最后振幅$Ae^{\alpha t}$将衰减到零，即振动趋于平衡位置 x=0

3）当$\Delta=0$时，此时有两个相同的特征根$\lambda_1=\lambda_2=\dfrac{-\gamma}{2m}$，方程（1）的通解为

$$x=(c_1+c_2t)e^{-\frac{\gamma}{2m}t} \qquad (5)$$

从（5）式可看出，弹簧的运动也不是周期的，且容易验证，一切非零解最多只有一个零点，故弹簧不能振动，在性质上与$\Delta>0$的情形相仿。

9、求解弹簧振子在无阻尼下的强迫振动方程

$$m\frac{d^2x}{dt^2}+kx=p\cos wt \qquad (1)$$

其中 m,k,p 和 w 都是正的常数，并对外加频率$w\neq w_0$和$w=w_0$两种不同的情况，说明解的物理意义，这里$w_0=\sqrt{\dfrac{k}{m}}$是弹簧振子的因有频率。

解：对应齐次线性方程的特征方程为

$m\lambda^2+k=0$ 特征值为$\lambda_1=\sqrt{\dfrac{k}{m}}i$ $\lambda_2=-\sqrt{\dfrac{k}{m}}i$ 记$\sqrt{\dfrac{k}{m}}=\Omega$，则齐次线性方程的通解为 $x=c_1\cos\Omega t+c_2\sin\Omega t$

当$\Omega\neq w$时，wi不是特征方程的根，则设（1）有形如 $x=A\cos wt+B\sin wt$ 的解，代入（1）得$(-Amw^2+kA)\cos wt+(-Bmw^2+kB)\sin wt=p\cos wt$

比较同类项系数，得 $\begin{cases}-Amw^2+kA=p\\-Bmw^2+kB=0\end{cases}$，解之得$A=\dfrac{p}{k-mw^{-2}}=\dfrac{\frac{p}{m}}{\Omega^2-w^{-2}}$，B=0

因此方程（1）有通解

$$x(t)=c_1\cos\Omega t+c_2\sin\Omega t+\frac{\frac{p}{m}}{\Omega^2-w^2}\cos wt，\quad \sqrt{\frac{k}{m}}=\Omega，\quad \Omega\neq w \qquad ②$$

这个通解②由两部分组成，②式右端的头两端是无阻尼自由振动的解，它代表固有振动. 后一项是无阻尼强迫振动的解，它代表强迫振动，振动频率与外力频率相同，其振幅由外力的振幅 P，频率 W 及系统的参数$\sqrt{\frac{k}{m}}=\Omega$来决定，由②还可看出，若外加频率 W，接近弹簧本身的因有频率$\Omega=\sqrt{\frac{k}{m}}$，则强迫振动项的振幅就越大.

若$\Omega=w$时， wi 是特征方程的根，则①有形如 $x=t(A\cos wt+\sin wt)$ 的解，代入（1），比较同类项系数得　A=0 ，$B=\frac{p}{2m\Omega}$

此时方程（1）有通解

$$x=c_1A\cos wt+c_2\sin wt+\frac{p}{2m\Omega}t\sin\Omega t \qquad ③$$

③表示强迫振动的“振幅”，随时间的增加而无限增加，即产生共振现象。

因此上述结论可作力学解释如下：方程①是一个弹簧在受强迫力为 $p\cos wt$ 下的振动方程当外加频率 W 等于固有频率时Ω时，就会产生共振。

10. 求解下列常数系数线性微分方程

（1） $2y''-4y'-6y=3e^{2x}$；

（2） $y''+2y'=3+4\sin 2x$；

（3） $y'''-2y''-3y'+10y=0$；

（4） $y^{(4)}+4y'''+8y''-8y'+3y=0$；

（5） $y^{(4)}+2y'''+y=\sin x$，

$y(0)=1, y'(0)=-2, y''(0)=3, y'''(0)=0$

6） $y''-2y'+2y=4e^x\cos x$

7） $y''-5y'+6y=(12x-7)e^{-x}$

8） $x^2y''+5xy'+13y=0(x>0)$

解（1）对应齐次方程的特征方程为

$2\lambda^2-4\lambda-6=0$

特征根为 $\lambda_1=3,\lambda_2=-1$，

所以齐次方程的通解为 $y=c_1e^{3x}+c_2e^{-x}$

因为 2 不是特征根，故非齐次方程有形如

$y=Ae^{2x}$ 的特解，其中常数 A 待定，把它代入微分方程，得出

$-6Ae^{2x}=3e^{2x}$

由此推知 $A=-\dfrac{1}{2}$

所以，原方程的通为

$y=c_1e^{3x}+c_2e^{-x}-\dfrac{1}{2}e^{2x}$

2)，特征方程为 $\lambda^2+2\lambda=0$

特征根为 $\lambda_1=0,\lambda_2=-2$

由于 0 是一重特征根，$\pm 2i$ 不是特征根，故设方程有特解 $\overline{y}=Ax+B\cos 2x+C\sin 2x$

其中常数 A，B，C 待定。代入微分方程，可推得 $A=\dfrac{3}{2},B=-\dfrac{1}{2},c=-\dfrac{1}{2}$

所以，所求通解为

$y=c_1+c_2e^{-2x}+\dfrac{3}{2}x-\dfrac{1}{2}(\cos 2x+\sin 2x)$。

3）特征方程 $\lambda^3-2\lambda^2-3\lambda+10=0$

特征根 $\lambda_1=-2,\lambda_2=2+i,\lambda_3=2-i$

故所求通解为

$y=c_1e^{-2x}+e^{2x}(c_2\cos x+c_3\sin x)$

4）特征方程 $\lambda^4-4\lambda^3+8\lambda^2-8\lambda+3=0$

特征根　$\lambda_1=\lambda_2=1,\lambda_{3,4}=1\pm\sqrt{2}i$

故所求通解为

$$y=(c_1+c_2x)e^x+e^x(c_2\cos\sqrt{2}x+c_3\sin\sqrt{2}x$$

5）特征方程　$\lambda^4+2\lambda^2+1=0$

特征根 $\lambda_1=\lambda_2=i,\lambda_3=\lambda_4=-i$

对应齐次方程的通解为

$$y=(c_1+c_2x)\cos x+(c_3+c_4x)\sin x$$

由于 $\pm i$ 是二重特征根，故已知方程有形如　$\overline{y}=Ax^2\cos x+Bx^2\sin x$ 的特解

代入已知方程，求得　$A=0,B=-\dfrac{1}{8}$

故所求方程的通解为

$$y=(c_1+c_2x)\cos x+(c_3+c_4x)\sin x-\frac{1}{8}x^2\sin x$$

将初值条件 $y(0)=14,y'(0)=-2,y''(0)=3,y'''(0)=0$ 代入上式，求得

$$c_1=1,c_2=\frac{5}{8},c_3=-\frac{21}{8},c_4=2$$

故所求初值问题的特解为

$$y=(1+\frac{5}{8}x)\cos x-(\frac{21}{8}-2+\frac{1}{8}x^2)\sin x$$

6）特征方程　$\lambda^2-2\lambda+2=0$

特征根　$\lambda_1,\lambda_2=1\pm i$

由于 $1\pm i$ 是一重特征根，故方程有特解

$\overline{y}=xe^x(a\cos x+b\sin x)$　其中 a, b 为待定常数。

代入微分方程可推知 a=0, b=0

所以，所求方程的通解为。

$$y=(c_1\cos x+c_2\sin x)e^x+2xe^x\sin x$$

7）特征方程 $\lambda^2-5\lambda+6=0$

特征根 $\lambda_1 = 2, \lambda_2 = 3$

由于—1 不是特征根，故方程有特解

$\overline{y} = (ax+b)e^{-x}$　　其中 a, b 为待定常数，代入微分方程可推知，a=1, b=0

故所求方程的通解为

$$y = c_1 e^{2x} + c_2 e^{3x} + xe^{-x}$$

13）这是欧拉方程，令 $x = e^t$，代入方程得

$$\frac{d^2y}{dt^2} + 4\frac{dy}{dt} + 13y = 0 \qquad (1)$$

特征方程 $\lambda^2 + 4\lambda + 13 = 0$，特征根　$\lambda_{1,2} = -2 \pm 3i$

①式的通解为　$y = e^{-2t}(c_1 \cos 3t + c_2 \sin 3t)$

所以所求方程的通解为

$$y = \frac{1}{x^2}\left[(c_1 \cos(3\ln x) + c_2 \sin(3\ln x)\right]$$

9）令　$u = 2x+1$，则得

$$\frac{dy}{dx} = 4\frac{dy}{du}\frac{du}{dx} = 2\frac{dy}{du}$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{d}{du}(2\frac{dy}{du})\frac{du}{dx} = 4\frac{d^2y}{du^2}$$

则已知方程可化为

$$u^2\frac{d^2y}{du^2} - 2u\frac{dy}{du} + 2y = 0$$

此方程的通解为　$y = c_1 e^x + c_2 e^{2x}$

将 $t = \ln(2x+1)$ 代入上式，即得所求方程的通解

$$y = c_1(2x-1) + c_2(2x+1)^2$$