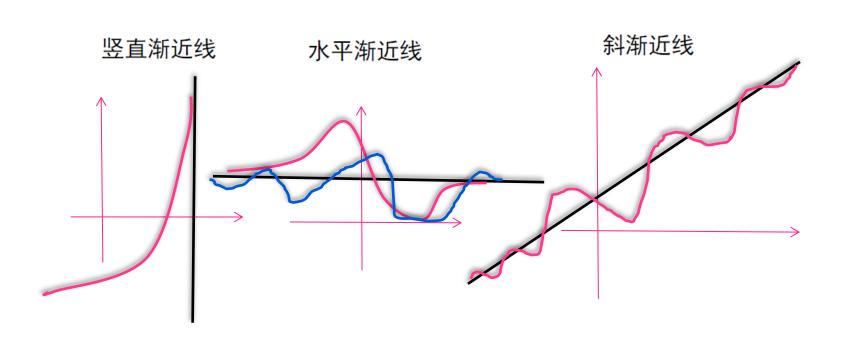
## 函数的渐近线

## 本段内容:

函数竖直渐近线、水平渐近线 和斜渐近线的概念和求法 若点M沿曲线y = f(x)无限远离原点时, 它与某条固定直线L之间的距离无限接近于0,

则称直线L为曲线y = f(x)的一条渐近线.

若点M沿曲线y = f(x)无限远离原点时,它与某条固定直线L之间的距离无限接近于0,则称直线L为曲线y = f(x)的一条渐近线。



①若
$$\lim_{x \to a} f(x) = \infty$$
,

$$\Rightarrow \mathbf{1} = \mathbf{f}(a)$$

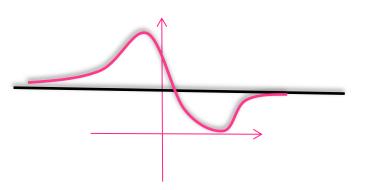
或
$$\lim_{x \to a-0} f(x) = \infty,$$

或
$$\lim_{x o a - 0} f(x) = \infty,$$
或 $\lim_{x o a + 0} f(x) = \infty,$ 

则
$$x=a$$
称为 $y=f(x)$ 的竖直渐近线。

②若 $\lim_{x \to \infty} f(x) = A,$ 或 $\lim_{x \to -\infty} f(x) = A,$ 或 $\lim_{x \to +\infty} f(x) = A,$ 

则
$$y = A$$
称为 $y = f(x)$ 的水平渐近线.

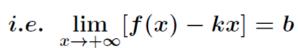


若y = kx + b是y = f(x)的斜渐近线

則
$$\lim_{x \to \infty} [f(x) - (kx + b)] = 0,$$



若y = kx + b是y = f(x)的斜渐近线



若
$$y=kx+b$$
是 $y=f(x)$ 的斜渐近线 
$$\lim_{x o \infty} [f(x)-(kx+b)]=0,$$









i.e.  $\lim_{x \to +\infty} [f(x) - kx] = b$ 

 $\lim_{x \to +\infty} \frac{f(x) - kx}{x} = 0, \ i.e. \ \lim_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{x} \exists$ 

若
$$y = kx + b$$
是 $y = f(x)$ 的斜渐近线

$$\displaystyle \lim_{x o +\infty} [f(x) - (kx+b)] = 0,$$

$$\lim [f(x) - kx] = b$$

i.e.  $\lim_{x \to +\infty} [f(x) - kx] = b$ 

$$i.e.$$
  $\lim_{n \to +\infty}$ 

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{J(a)}{a}$$

$$\lim_{x o +\infty} rac{f(x) - kx}{x} = 0, \; i.e. \; \lim_{x o +\infty} rac{f(x)}{x} \exists$$

若
$$y = kx + b$$
是 $y = f(x)$ 的斜渐近线

ਸ਼ੀ 
$$y=kx+b$$
 ਸ਼ੁਰੂ  $y=f(x)$  ਸ਼ਿੰਗ ਸ਼ਿੰਗ  $\int_{x o +\infty} [f(x)-(kx+b)]=0,$   $\int_{x o +\infty} [f(x)-kx]=b$ 

$$\lim_{x o +\infty} rac{f(x) - kx}{x} = 0, \; i.e. \; \lim_{x o +\infty} rac{f(x)}{x} \exists$$

故有:

若
$$\lim_{x\to -\infty}rac{f(x)}{x}=k(
eq 0),\;$$
且 $\lim_{x\to -\infty}[f(x)-kx]$ 存在,记作 $b$ . 则 $y=f(x)$ 有渐近线 $y=kx+b$ 

若
$$y = kx + b$$
是 $y = f(x)$ 的斜渐近线

$$\infty$$





i.e.  $\lim_{x \to +\infty} [f(x) - kx] = b$ 

以
$$\lim_{x \to +\infty} [f(x) - (kx + b)] = 0,$$

故有:

 $\lim_{x o +\infty} rac{f(x) - kx}{x} = 0, \; i.e. \; \lim_{x o +\infty} rac{f(x)}{x} \exists .$ 

若 $\lim_{x \to \infty} \frac{f(x)}{x} = k \neq 0$ ,且 $\lim_{x \to \infty} [f(x) - kx]$ 存在,记作b则y = f(x)有渐近线y = kx + b

例:  $y=rac{x^2}{x-1}$ 的竖直渐近线为x=1.

例: 
$$y = \frac{x^2}{x-1}$$
的竖直渐近线为 $x = 1$ .

又因为
$$\lim_{x \to \infty} \frac{y}{x} = 1$$
,

$$\lim_{x \to \infty} (y - x) = \lim_{x \to \infty} \left[ \frac{x^2}{x - 1} - x \right] = \lim_{x \to \infty} \frac{x}{x - 1} = 1$$

例: 
$$y = \frac{x^2}{x-1}$$
的竖直渐近线为 $x = 1$ .

又因为 
$$\lim_{x \to \infty} \frac{y}{x} = 1$$
, 
$$\lim_{x \to \infty} (y - x) = \lim_{x \to \infty} \left[ \frac{x^2}{x - 1} - x \right] = \lim_{x \to \infty} \frac{x}{x - 1} = 1$$
.

$$x \to \infty$$
  $x = 1$   $x \to \infty$   $x = 1$ 

:.有斜渐近线y=x+1.

例: 
$$y = \frac{x^2}{x-1}$$
的竖直渐近线为 $x = 1$ .

又因为 
$$\lim_{x \to \infty} \frac{y}{x} = 1$$

又因为
$$\lim_{x \to \infty} \frac{y}{x} = 1$$
,

$$\lim_{x\to\infty}(y-x)=\lim_{x\to\infty}[\frac{x^2}{x-1}-x]=\lim_{x\to\infty}\frac{x}{x-1}=1$$

:.有斜渐近线
$$y=x+1$$
.

定理:

$$y = f(x)$$
有斜渐近线 $y = kx + b$ 的充分必要条件是下列三条至少一条成立

下列二条至少一条成立
$$f(x)$$
 上月  $\lim_{x \to \infty} [f(x)] = f(x)$ 

$$(1) \lim_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{x} = k \coprod_{x \to +\infty} [f(x) - kx] = b;$$

$$(2) \lim_{x \to -\infty} \frac{f(x)}{x} = k \coprod_{x \to -\infty} [f(x) - kx] = b;$$

$$f(x) = \lim_{x \to +\infty} \frac{x}{f(x)} - k \exists \lim_{x \to +\infty} [f(x) - kx] - h$$

$$(3) \lim_{x \to \infty} \frac{f(x)}{x} = k \coprod_{x \to \infty} [f(x) - kx] = b.$$

(3) 
$$\lim \frac{f(x)}{x} = k \mathbb{E} \lim [f(x) - kx] = b$$

## 本段要点:

函数竖直渐近线、水平渐近线 和斜渐近线的概念和求法



