Good Luck！！！Good Luck！！！Good Luck！！！Good Luck！！！

我并不参与试卷的出题，就考试题目而言，我并不比你们了解丝毫更多的信息。以下只是我零星找来的一些题目，权当作为补充练习吧。 此外，数学公式输入很繁琐，再加上时间仓促，我只给出关键的步骤，你们用自己的聪明才智应该足以完满解决。

1. 证明组合恒等式：

$$(1)\quad \sum_{k=1}^{n} kC_n^k = n2^{n-1}. \quad (2)\quad \sum_{k=1}^{n} k^2C_n^k = n(n+1)2^{n-1}$$

.

2. 已知$y = arcsinx$, 求 $y^{(n)}(0)$

3. 求$\lim_{x\to 0^+} \frac{1-\sqrt{\cos x}}{1-\cos\sqrt{x}}$.

4. 讨论函数$f(x) = \lim_{n\to\infty} \frac{\ln(e^n+x^n)}{n} \quad (x > 0)$的连续性.

5. 证明方程$x = \sin x + 2$至少有一个小于3的正根.

6. 若函数$f(x)$在$(-\infty, +\infty)$内连续且$\lim_{x\to\infty} f(x)$存在，证明$f(x)$在$(-\infty, +\infty)$内有界.

7. 若函数$f(x)$在$(-\infty, +\infty)$内连续且$\lim_{x\to\pm\infty} f(x) = +\infty$，证明$f(x)$在$(-\infty, +\infty)$内取到最小值.

8. 若函数$f(x)$在$[a, b]$上连续，对于区间$[a, b]$上每一点x，总存在$y \in [a, b]$使得$|f(y)| \le \frac{1}{2}|f(x)|$。求证：至少存在一点$\xi$，使得$f(\xi) = 0$.

9. 对于数列$\{x_n\}$,若$\lim_{k\to\infty} x_{2k} = \lim_{k\to\infty} x_{2k+1} = a$,证明$\lim_{n\to\infty} x_n = a$.

10. 若$f(x), g(x)$在(a, b)上连续，则$|f(x)|$,$\min\{f(x), g(x)\}$,$\max\{f(x), g(x)\}$也在(a, b)上连续. 若C是任意给定的正常数，

$h(x) = -C, if \quad f(x) < -C; h(x) = f(x), if \quad |f(x)| \le C; h(x) = C, if \quad f(x) > C$

则$h(x)$也在(a, b)上连续.

Good Luck！！！Good Luck！！！Good Luck！！！Good Luck！！！

1.✍ 提示：令$f(x) = (1+x)^n$，做二项式展开，对等式两端分别求一阶，两阶导数，再取$x=1$即可。

2.✍ 提示：寻找递推关系。首先有

$$y' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

将它改写成

$$y'\sqrt{1-x^2} = 1$$

后再求导，可以整理为

$$(1-x^2)y'' - xy' = 0$$

然后用Leibniz公式对上式求n阶导数，得到

$$(1-x^2)y^{(n+2)} - (2n+1)xy^{(n+1)} - n^2y^{(n)} = 0$$

将x=0代入，就得到递推公式。

$$y^{(n+2)}(0) - n^2y^{(n)}(0) = 0$$

3.✍ 提示：

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{1-\sqrt{\cos x}}{1-\cos\sqrt{x}} = \lim_{x\to 0^+} \frac{1-\cos x}{(1-\cos\sqrt{x})(1+\sqrt{\cos x})} = \lim_{x\to 0^+} \frac{1-\cos x}{1-\cos\sqrt{x}}$$

且当$x\to 0$时，

$$1-\cos x \sim \frac{x^2}{2}, \quad 1-\cos\sqrt{x} \sim \frac{x}{2}$$

因此，

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{1-\sqrt{\cos x}}{1-\cos\sqrt{x}} = \lim_{x\to 0^+} x = 0$$

4.✍ 提示：先求出函数的解析表达式.
以$x > e$时为例，

$$f(x) = \lim_{n\to\infty} \frac{\ln x^n + \ln[1+(\frac{e}{x})^n]}{n} = \ln x$$

类似的，当$0 < x < e$时，$f(x) = 1$，且$f(e) = 1$. 在此基础上不难判断$f(x)$在$(0, +\infty)$内连续.

5.✍ 提示：考察

$$f(x) = x - \sin x - 2, \quad x \in [0, 3]$$

运用闭区间上连续函数的介值定理.

Good Luck！！！Good Luck！！！Good Luck！！！Good Luck！！！

6.✍ 提示：不妨设$\lim_{x\to\infty} = A$,则对于给定的$\epsilon = 1$,存在正数X,当$|\ x\ |> X$时，有

$$| f(x) - A |< \epsilon = 1$$

即

$$| f(x) |<| A | +1, \quad | x |> X$$

此外,在有界闭区间$[-X, X]$上考察连续函数$f(x)$,有最值原理,存在正数B,满足

$$| f(x) |\leq B, \quad x \in [-X, X]$$

取$M = \max\{| A | +1, B\}$,则M是在整个实数轴上的上界.

7.✍ 提示：由$\lim_{x\to -\infty} f(x) = +\infty$,可知

$$\exists A < 0, s.t. \quad f(x) > f(0), when \quad x < A$$

类似地,由$\lim_{x\to -\infty} f(x) = +\infty$可知

$$\exists B > 0, s.t. \quad f(x) > f(0), when \quad x > B$$

综合上面两个结果,不难发现

$$\min_{y\in[A,B]} f(y) \leq f(0) < f(x), \forall x \notin [A, B]$$

由有界闭区间上连续函数的最值原理,不妨设$x_0 \in [A, B]$,使得$f(x_0) = \min_{x\in[A,B]} f(x)$,结合上式,可知

$$f(x_0) = \min_{(-\infty,+\infty)} f(x)$$

8.✍ 提示：用反证法.如果函数$f(x)$在$[a, b]$上没有零点,那么函数$| f(x) |$在$[a, b]$上也没有零点.由$| f(x) |$在$[a, b]$上连续性,可知$| f(x) |> 0$。根据有界闭区间上连续函数的性质,必存在最小值,即存在点$\xi \in [a, b]$,满足

$$\min_{a\leq x\leq b}\{| f(x) |\} =| f(\xi) |> 0$$

有题设条件知,在$[a, b]$内存在$y \in [a, b]$，满足

$$| f(y) |\leq \frac{1}{2} | f(\xi) |<| f(\xi) |$$

这与$| f(\xi) |$是最小值相矛盾，所以函数$f(x)$在$[a, b]$上至少有一个零点.

Good Luck！！！ Good Luck！！！ Good Luck！！！ Good Luck！！！

9. ✍ 提示：对于任意给定的正数ϵ,由$\lim_{k\to\infty} x_{2k} = a$,可知

$$\exists N_1, \quad s.t. \quad k > N_1, \quad |\ x_{2k} - a\ | < \epsilon$$

由$\lim_{k\to\infty} x_{2k+1} = a$，可知

$$\exists N_2, \quad s.t. \quad k > N_2, \quad |\ x_{2k+1} - a\ | < \epsilon$$

若取$N = \max\{2N_1, 2N_2 + 1\}$,则有当$n > N$时,上面两个不等式同时成立，即

$$|\ x_n - a\ | < \epsilon, \quad \forall n > N$$

.

10.✍ 提示：只需注意到

$$\min\{f(x), g(x)\} = \frac{1}{2}(|\ f(x) + g(x)\ | - |\ f(x) - g(x)\ |)$$

$$\max\{f(x), g(x)\} = \frac{1}{2}(|\ f(x) + g(x)\ | + |\ f(x) - g(x)\ |)$$

$$h(x) = \frac{1}{2}(|\ C + f(x)\ | - |\ C - f(x)\ |)$$