教材、成绩评定方法

- 教材：李忠, 周建莹，《高等数学》(上)，北大出版社
- 习题课：周建莹，李正元，《高等数学解题指南》，北大出版社.
- 成绩评定方法：平时成绩10%，期中成绩30%，期末成绩60%.
- 答疑：理科一号楼1373.
- 电子邮件：liujm@math.pku.edu.cn.

课程介绍

- 初等数学和高等数学：初等数学是常量的、静态的数学，它只能解决和解释常量的几何问题和物理问题，比如规则图形的长度、面积和体积，匀速直线运动，常力沿直线的作功，质点间的吸引力等.
  高等数学是变量的、动态的数学，它解释和解决那些变化的几何问题和物理过程，特别是描述一些物体的渐近行为和瞬时物理量等，比如不规则图形的长度、面积和体积，一般运动问题，变力沿曲线作功，一般物体间的吸引力等.
- 课程介绍："数学分析、高等代数、空间几何"是现代数学的基石. 我们现在学习的高等数学是由微积分学、空间解析几何、微分方程组成，而微积分学是数学分析中主干部分，而微分方程在科学技术中应用非常广泛,无处不在.

课程的重要性

- 微积分是继Euclid几何之后，数学中的一个最大创造. 冯.诺依曼："微积分是现代数学取得的最高成就，对它的重要性怎样估计也是不会过分的."
- 对于是理工科学生：高等数学是工作的最基本工具，没有数学支撑，计算理论、软件开发、工程分析...都将一筹莫展，只能拿别人的现成经验做事，永远没有创新可能！
- 对于计算机专业的学生：高等数学培养的逻辑思维能力,在计算机编程的时候要求严密的逻辑思维,并且在有的编程里面，高等数学的一些知识也要运用到,比如很多算法是以高等数学为基础的. 越深入编程，数学要求就越深.

学习方法1

- 树立信心：数学具有很强的抽象性，对于每位刚踏入大学的同学来说，要从简单、基础的数学转到对高度抽象、复杂的高等数学的学习中确实有一定的难度.但是只要用心学习，不难学好.
- 与中学数学相比，高等数学的课堂教教学有显著的差别. 高等数学的内容十分丰富，但学时又有限，因此每堂课不仅教学内容多，而且是全新的，教师讲课主要是讲概念、讲思路，举例较少. 要学好高等数学，自主性，自学能力很重要.

学习方法2

- 数学教育本质上是一种素质教育. 学习数学的目的, 不仅仅在于学到一些数学的概念、公式和结论, 更重要的是要了解数学的思想方法和精神实质, 真正掌握数学这门学科的精髓. 学习时, 要注意概念、定理的理解. 注意条件, 前后联系、相关概念和定理. 可通过实例、看证明、应用来加深对概念和定理的理解.
  例如$f(x)=x^3$的导数$f'(x)=3x^2$. 问$f(x)=|x|^3$的导数呢?
- 做题的目的是掌握概念和定理, 不用做太多. 做题时一定要独立完成, 尽量不要翻书. 做题的思路要清晰.

牛顿的“流数术”

- (I.Newton,1642-1727)牛顿于1664年秋开始研究微积分问题，1666年牛顿完成论文—《流数简论》，这也是历史上第一篇系统的微积分文献. 在简论中，牛顿以运动学为背景提出了微积分的基本问题，发明了“正流数术”（微分）；从确定面积的变化率入手通过反微分计算面积，又建立了“反流数术”；并将面积计算与求切线问题的互逆关系作为一般规律明确地揭示出来，将其作为微积分基础论述了“微积分基本定理”.
- 牛顿对于发表自己的科学著作持非常谨慎的态度. 1687年，牛顿出版了他的力学巨著《自然哲学的数学原理》，这部著作中包含他的微积分学说，也是牛顿微积分学说的最早的公开表述，因此该巨著成为数学史上划时代的著作. 而他的微积分论文直到18世纪初才在朋友的再三催促下相继发表.

莱布尼茨的微积分工作

- 莱布尼茨(W.Leibniz,1646-1716) 1672年至1676年，莱布尼茨作为大使在巴黎工作. 微积分的创立等许多重大的成就都是在这一时期完成或奠定了基础.
- 1684年，莱布尼茨在《教师学报》上发表了第一篇微分学论文《一种求极大值与极小值以及求切线的新方法》（简称《新方法》），它包含了微分记号以及函数和、差、积、商、乘幂与方根的微分法则，还包含了微分法在求极值、拐点以及光学等方面的广泛应用. 1686年，莱布尼茨又发表了他的第一篇积分学论文，这篇论文初步论述了积分或求积问题与微分或切线问题的互逆关系，包含积分符号.
- 莱布尼茨对微积分学基础的解释和牛顿一样也是含混不清的.

优先权之争

- 牛顿和莱布尼茨创立的微积分在背景、方法和形式上存在差异、各有特色. 然而，瑞士数学家德丢勒1699在一本小册子中，说莱布尼茨的微积分工作从牛顿那里有所借鉴，进一步莱布尼茨又被英国数学家指责为剽窃者. 这样就造成了支持莱布尼茨的欧陆数学家和支持牛顿的英国数学家两派的不和，甚至互相尖锐地攻击对方. 这件事的结果，使得两派数学家在数学的发展上分道扬镳，停止了思想交换.
- 在牛顿和莱布尼茨二人死后很久，事情终于得到澄清，调查证实两人确实是相互独立地完成了微积分的发明，就发明时间而言，牛顿早于莱布尼茨；就发表时间而言，莱布尼茨先于牛顿.

牛顿、莱布尼茨微积分的缺陷

- 微积分学创立以后，由于运算的完整性和应用的广泛性，使微积分学成了研究自然科学的有力工具. 由此还产生了一些重要的数学分支，如微分方程和微分几何，并创立了一些新的分析方法.
- 许多概念都没有精确的定义，微积分的基础-无穷小概念的解释不明确，在运算中时而为零，时而非零，出现了逻辑上的困境. 函数概念还不清楚，导数和积分的基本概念还没有恰当的定义.

  Abel："高等分析中只有很少几个定理是用逻辑上站得住脚的方式证明. 人们到处发现这种从特殊到一般的不可靠的推理方法，而奇怪的是这种方法很少导致悖论".
- 十八世纪很多数学家尝试使微积分严密化.

柯西对严格微积分的贡献

- 法国数学家柯(A-L.Cauchy,1789-1857)从1821年到1829年，柯西相继出版了《分析教程》、《无穷小计算教程》以及《微分计算教程》，对微积分的一系列基本概念给出了明确的定义. 他的许多定义和论述已经非常接近于微积分的现代形式.
- 然而，柯西的理论实际上也存在漏洞. 比如柯西定义极限为：“当同一变量逐次所取的值无限趋向于一个固定的值，最终使它的值与该定值的差可以随意小，那么这个定值就称为所有其它值的极限”，其中“无限趋向于”、“可以随意小”等语言只是极限概念的直觉的、定性的描述，缺乏定量的分析，这种语言在其它概念和结论中也多次出现.
- 直到到19世纪中叶，实数仍没有明确的定义，对实数系仍缺乏充分的理解.

威尔斯特拉斯的严格微积分

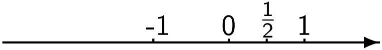
- 魏尔斯特拉斯（K. W. Weierstrass，1815—1897）定量地给出了极限概念的定义，这就是今天极限论中的“$\epsilon - \delta$”方法. 魏尔斯特拉斯用他创造的这一套语言重新定义了微积分中的一系列重要概念.
- 魏尔斯特拉斯认为实数是全部分析的本源，要使分析严格化，就先要使实数系本身严格化. 而实数又可按照严密的推理归结为整数.
- 1857年，魏尔斯特拉斯在课堂上给出了第一个严格的实数定义，但他没有发表. 1872年，戴德金(R. Dedekind，1831-1916)、康托尔(B. Cantor,1829-1920)几乎同时发表了他们的实数理论，并用各自的实数定义严格地证明了实数系的完备性. 这标志着由魏尔斯特拉斯倡导的分析算术化运动大致宣告完成.

有理数

- 克罗内克（L. Kronecker）：上帝创造了整数，其余一切是人造的.
- 自然数：$\mathbb{N}=\{1,2,3,\cdots\}$，对加法和乘法运算封闭.
- 整数：$\mathbb{N}=\{\cdots,-2,-1,0,1,2,\cdots\}$，对加法、减法和乘法运算封闭.
- 有理数：$\mathbb{Q}=\{\frac{m}{n}|m\in\mathbb{Z},n\in\mathbb{N},(|m|,n)=1\}$，对加法、减法和乘法运算封闭.

有理数的几何意义

- 取定原点、方向和单位长度，建立数轴.



取单位长度为1，单位长度n等分，得$\frac{1}{n}$，$\frac{1}{n}$的m倍即为$\frac{m}{n}$.

- 历史注记：1500年左右0已被接受为一个数，但直到十六十七世纪大多数数学家还不承认负数. 由于-1:1=1:-1，即小:大=大:小，认为不合理.

有理数的四则运算

- 规定：$\frac{a}{1} = a$, $\frac{ac}{bc} = \frac{a}{b}$
- 四则运算

$$\frac{a}{b} + \frac{c}{d} = \frac{ad+bc}{bd}, \quad \frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} = \frac{ac}{bd}$$
$$\frac{a}{b} - \frac{c}{d} = \frac{a}{b} + \frac{-c}{d}, \quad \frac{a}{b} \div \frac{c}{d} = \frac{a}{b} \cdot \frac{d}{c}$$

- 满足加（乘）法交换律，加（乘）法结合律，分配率.

有理数的性质

- 有理数在实轴上稠密（由于任意两个有理数的中点都是有理数）.
- 存在不能用有理数度量的线段（不可公度线段）（Pythagoras，前584-500）. 即数轴上存在一点，它到原点的距离不是有理数，从而有理数不能充满整个数轴.
- Pythagoras定理：边长为1的正方形的对角线长度不是有理数.
  证明：若$\sqrt{2}=\frac{m}{n}$, $(m,n)=1$. 则$m^2=2n^2$, 从而m必为偶数. 设$m=2l$，带入即得$n^2=2l^2$, 即n也是偶数，这与m,n互素矛盾.

十进制小数

- 十进制小数：数轴上的点都可表示为$x = m.a_1a_2a_3\cdots$，其中$m \in \mathbb{Z}$，$a_k \in \{0,1,2,\cdots,9\}$．事实上，存在唯一的整数$m$使得$x \in [m, m+1)$，存在唯一的$a_1$，使得$x \in [m.a_1, (m.a_1)+0.1)$，存在唯一的$a_2$使得$x \in [m.a_1a_2, (m.a_1a_2)+0.01)\cdots$．
- 数轴上的有理点的十进制展开是有限小数或无限循环小数．该结论反过来也成立．事实上对有理数$\frac{m}{n}$，z为m除以n的商，余数除以n的商为$a_1,\cdots$．由于余数只有$0,1,2,\cdots,n-1$，必定重复出现，从而是循环小数．反过来，利用等比级数的和公式，任何循环小数必为有理数．

无理数

- 无限不循环小数称为无理数,有理数和无理数统称为实数.
- 上述定义的缺陷：上面定义不严格，本质上用到了无穷求和. 利用该定义也不方便定义四则运算. *Dedekind*和*Cantor*从有理数出发给出了实数的严格定义，再定义了四则运算，且与有理数的四则运算相容.
- 历史注记：无理数很早就被使用，但很多数学家（如Pascal，Newton，...）还认为$\sqrt{2}$等只能作为几何量来理解，不能认为是数. 即使无理数的逻辑基础建立起来以后，还有数学家反对.

无理数的运算

- 按照Cantor的思想，粗略地说，实数定义为有理数Cauchy列的等价类（如$\sqrt{2}$定义为趋向于$\sqrt{2}$的有理数列的集合），实数的运算可以通过有理数运算的极限来定义.
- 例：a^n的定义. 若a是有理数时，定义显然；若a是无理数，取有理数列$a_n \to a$,则$a_n{}^n$是Cauchy列,它的所属的等价类即为a^n.
- a^b满足的性质：$a^{b_1} \cdot a^{b_2} = a^{b_1+b_2}$, $(a_1a_2)^b = (a_1)^b(a_2)^b$.

实数的绝对值

- 定义：$|x| = \begin{cases} x, & x \geq 0 \\ -x, & x < 0 \end{cases}.$
- 设a, b, c是任意实数，$|a-b| \leq |a-c| + |c-b|$.
  证明：要证的不等式有下面两个不等式得出，
  $$a - b = a - c + c - b \leq |a-c| + |c-b|$$
  $$b - a = c - a + b - c \leq |a-c| + |c-b|.$$
- 设$r > 0$, x满足$|x-a| < r$的充分必要条件是$a-r < x < a+r$.
  证明：$|x-a| < r$的充分必要条件是$-r < x - a < r$，即$a - r < x < a + r$.

两个重要的无理数

- $e = 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \cdots$ 是无理数.
  证明：若e是有理数，$e = \frac{p}{q}$,两边同乘$q!$得

$$q!e = p \cdot (q-1)! = \sum_{k=0}^{q} \frac{q!}{k!} + \frac{1}{q+1} + \frac{1}{(q+1)(q+2)} + \cdots$$

  由于$\frac{1}{q+1} + \frac{1}{(q+1)(q+2)} + \cdots < \frac{1}{2} + (\frac{1}{2})^2 + \cdots = 1$, 右边不是整数.
- π是无理数.

实数的完备性

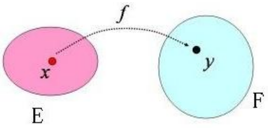
实数的完备性：实数与数轴上的点一一对应（实数域布满整个数轴，没有空隙）．实数完备性的刻画：

- 实数中的任意单调有界序列有极限. (单调递增序列($a_{n+1} \geq a_n$)和单调递减序列($a_{n+1} \leq a_n$)统称为单调序列，若存在$M > 0$,使得$|a_n| \leq M$,则称a_n有界)
  例：3.1, 3.14, 3.141, $\cdots$ 是递增有界序列，极限是π.
- 区间套原理：$[a_1, b_1] \supset [a_2, b_2] \supset [a_3, b_3] \supset \cdots$. 则有

$$\bigcap_{n=1}^{\infty} [a_n, b_n] \neq \phi.$$

变量与映射

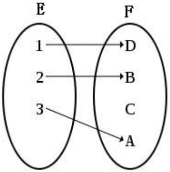
- 变量：可以取不同值的量，用一个符号来表示．如："变量x在X中取值"，即x不是一个固定的值，可以取X中的任意值．
- 映射：E, F是两个集合，如果对任意$x \in E$, 都有唯一确定的$y \in F$与之对应，记$y = f(x)$. 则称f是集合E到F的一个映射，记为$f : E \to F$. 记像集$f(E) = \{y \in F | \exists x \in E, s.t. y = f(x)\}$.



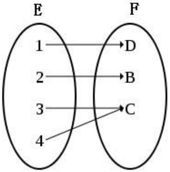
$$x \xrightarrow{f} y = f(x)$$

单射和满射

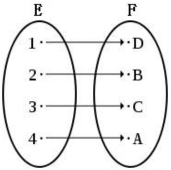
- 注：上面定义中，x是取值于E的变量，y是取值于F的变量，y的取值由x的取值决定，因此，x称为自变量，y称为因变量.
- 映射$f: E \to F$. 若对任意E中的两个不同的元x_1, x_2, 有$f(x_1) \neq f(x_2)$, 则称f为单射：若$f(E) = F$, 则称f为满射：若f既是单射，又是满射，则称f是双射.



单射



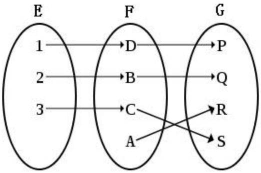
满射



双射

映射的复合

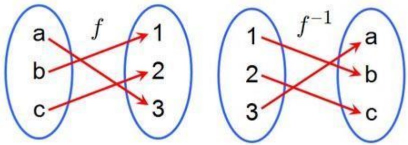
- 映射的复合：有两个映射$f: E \to F$，$g: F_1 \to G$，其中$F \subset F_1$，对任意$x \in E$，存在唯一的$z = g(f(x)) \in G$与之对应，这样建立了一个从E到G的映射，该映射记为$g \circ f$，称为映射f与g的复合.



映射的复合

逆映射

- 逆映射：设映射$f : E \to F$ 是一个双射. 则对任意$y \in F$, 存在唯一的$x \in E$, 使得$f(x) = y$, 记$x = f^{-1}(y)$. 则f^{-1}是F到E的映射，称该映射为f的逆映射.



映射f和它的逆映射

函数的定义

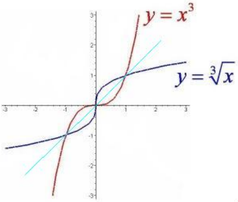
- 定义：设$X, Y \subset \mathbb{R}$, $f : X \to Y, x \to y$是一个映射(Y总可以取$\mathbb{R}$)，则称$y = f(x)$ 是一个（一元）函数，X称为f的定义域，$f(X)$称为f的值域，x称为自变量，y称为因变量.
- 函数定义域的确定：如果函数f由数学表达式给出，它的定义域一般规定为使表达式有意义的x的全体. 如果函数是从实际问题中提出，则定义域由实际问题决定.
- 平面中的点集$\{(x, f(x))|x \in X\}$称为f的图像.

复合函数与反函数

- 函数的复合：函数f的值域是g的定义域的子集，f与g的复合即为它们作为映射的复合. 例：$y=|x|$是$y=\sqrt{x}$和$y=x^2$的复合.
- 反函数：函数f作为映射是单射，则$f:X\to f(X)$是双射，它的逆映射$f^{-1}:f(X)\to X$称为f的反函数.
  例：$y=\sqrt{x}$是$y=x^2$,$x\in[0,+\infty)$的反函数；$y=\arcsin x$是$y=\sin x$, $x\in[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}]$的反函数.

反函数的图像

- 函数f的反函数f^{-1}存在，则f与f^{-1}的图像关于直线$y=x$对称.
- 证明：若(a,b)是f的图像中的点,则$b=f(a)$, 即$a=f^{-1}(b)$, 则(b,a)是f^{-1}的图像中的点.



函数定义的注记

- 函数可以由一个或多个公式表示，也可以没有公式. 例如
  - Dirichlet函数： $f(x) = \begin{cases} 1, & x \in \mathbb{Q} \\ 0, & x \notin \mathbb{Q} \end{cases}$
  - 符号函数： $\operatorname{sgn}(x) = \begin{cases} 1, & x > 0 \\ 0, & x = 0 \\ 1, & x < 0 \end{cases}$
  - 股票价格随时间的变化函数.
  - 序列（数列）是被排成一列的实数. 设a_n时任意序列. 定义映射$f:\mathbb{N} \to \mathbb{R}$, 设$f(n) = a_n$. 因此序列可看成$\mathbb{N}$上的函数.
- 历史注记：十八世纪以前数学家大多认为函数必须是由一个解析表达式给出（实际上是初等函数），后来Euler和Lagrange允许函数在不同的区域有不同的表达式. 19世纪30年代，Dirichlet给出了沿用至今的函数定义.

有界函数与单调函数

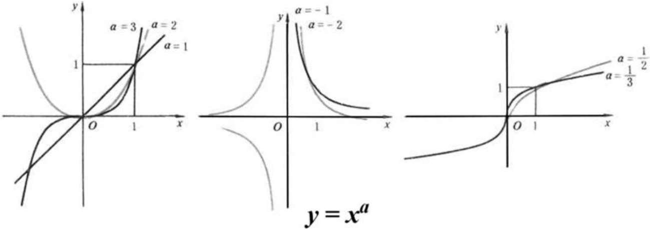
- 定义：函数$f: X \to \mathbb{R}$，存在$M > 0$使得$|f(x)| \le M$对所有$x \in X$成立(或者：存在M，N，使得$N \le f(x) \le M$对所有$x \in X$成立).
- 单调函数：函数$f: X \to \mathbb{R}$满足：若对任意$x_1 < x_2$，有$f(x_1) \le f(x_2)$ 则称f是单调增函数；若对任意$x_1 < x_2$，有$f(x_1) < f(x_2)$，则称f是严格单调增函数. 单调减函数和严格单调减函数可类似定义. 单调增函数和单调减函数统称为单调函数.

函数的奇偶性与周期性

- 函数的奇偶性：若f的定义域关于0对称．若对任意的$x \in X$，有$f(-x) = f(x)$，则称f是偶函数；若对任意的$x \in X$，有$f(-x) = -f(x)$，则称f是奇函数．
- 函数的周期性：设f是$\mathbb{R}$上定义的函数．若存在$T > 0$，使得对任意x，有$f(x+T) = f(x)$，则称f是以T为周期的函数．(若T是f的周期，则nT也是f的周期．若f有最小正周期，有时称最小正周期为f的周期)．
- 例：$\sin 2x$ 是周期函数，最小正周期是π．$f = \chi_{\mathbb{Q}}$以有理数为周期

基本初等函数1

- 常数函数：$y = c$
- 幂函数：$y = x^\alpha$, $\alpha \neq 0$.

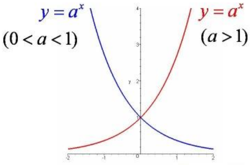


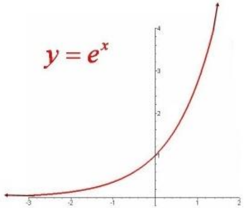
幂函数的性质

- $\alpha > 0$时，$y = x^\alpha$在$[0, +\infty)$上严格单调增；$\alpha < 0$时，$y = x^\alpha$ 在$(0, +\infty)$上严格单调减.
- $\alpha > 0$时，$y = x^\alpha : [0, +\infty) \to [0, +\infty)$是双射；$\alpha < 0$时，$y = x^\alpha : (0, +\infty) \to (0, +\infty)$是双射.
- $f(x_1 x_2) = f(x_1) f(x_2)$.

指数函数

- 指数函数：$y = a^x (a > 0, a \neq 1)$

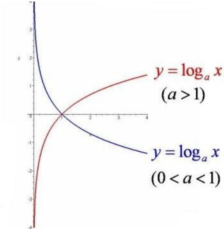


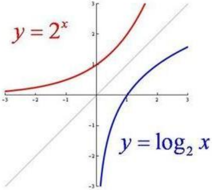


- 性质：严格单调，$\mathbb{R} \to (0, +\infty)$的双射．
  $f(x_1 + x_2) = f(x_1)f(x_2)$.

对数函数

- 对数函数：$y = \log_a x (a > 0, a \neq 1)$



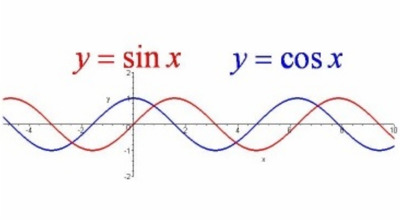


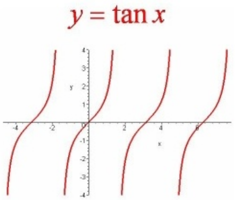
- 性质：是$y = a^x$的反函数；$a = e$时，记为

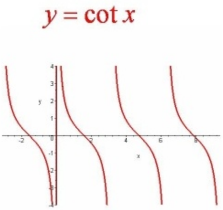
$$\ln x = \log_e x = \int_1^x \frac{1}{t} dt.$$

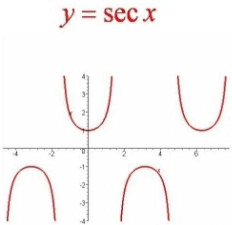
三角函数

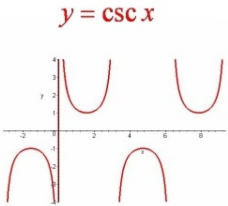
- 三角函数：$\sin x, \cos x$，$\tan x, \cot x, \sec x = \frac{1}{\cos x}, \csc x = \frac{1}{\sin x}$.





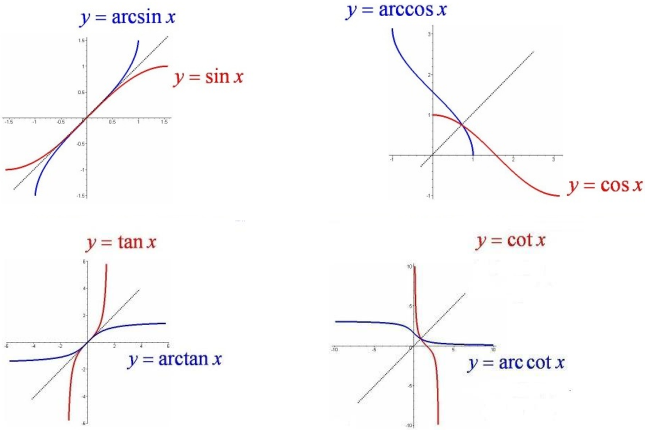






反三角函数

- 反三角函数：$\arcsin x$，$\arccos x.\arctan x$，$\operatorname{arccot} x$.



初等函数1

- 定义: 基本初等函数经过有限次的四则运算及复合运算所得的函数称为初等函数.
- 例： 多项式函数： $P(x) = a_0x^n + a_1x^{n-1} + \cdots + a_n$
- 例： 有理函数： $y = \frac{a_0x^n+a_1x^{n-1}+\cdots+a_n}{b_0x^n+b_1x^{n-1}+\cdots+b_n}$

初等函数2

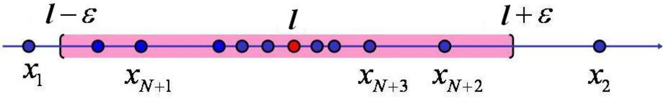
- 例： $f(x)=\begin{cases}1 & x>0\\ -1 & x<0\end{cases}=\frac{\sqrt{x^2}}{x}$
- 例： 符号函数 $\operatorname{sgn}(x)=\begin{cases}1 & x>0\\ 0 & x=0\\ -1 & x<0\end{cases}$
- 例： Dirichlet函数 $D(x)=\chi_{\mathbb{Q}}$

序列

- 序列（数列）和子序列：序列是被排成一列的实数．设a_n是一个序列，从中依次抽取无穷项组成的新序列称为$\{a_n\}$的子序列（或子列）．一般子列可记为a_{n_k}，其中$n_1 < n_2 < \cdots$，如：a_{2n+1} 表示子序列$a_1, a_3, a_5, \cdots$.
- 有界序列：若存在M，使得$|a_n| \leq M$，则称a_n有界.
- 单调序列：若$a_{n+1} \geq a_n$对任意的n成立，则称a_n是递增序列，类似可定义递减序列．递增序列和递减序列统称为单调序列.
- 例：$\{\frac{1}{n}\}$,$\{(-1)^n\frac{1}{n}\}$, $\{\cos n\pi\}$, $\{2^n\}$.

序列极限定义1

- 极限的形象定义：a_n是给定数列. 若当n无限增大时，a_n无限接近某个数l, 则称l为数列a_n的极限.
- 极限的$\epsilon - N$语言定义：a_n是给定数列. 存在一个实数l, 对任意$\epsilon > 0$, 存在N, 当$n > N$时，$|a_n - l| < \epsilon$, 则称a_n以l为极限，或“当n趋向无穷时，a_n趋于l”，或“a_n收敛到A”. 记着$\lim\limits_{n\to\infty} a_n = l$, 此时称$a_n$的极限存在，或称$a_n$收敛.



序列极限定义2

- 例：$a_n = \frac{1}{n}$，对任意的$\epsilon > 0$，存在N(可取$[\frac{1}{\epsilon}] + 1$)，当$n > N$时，$|\frac{1}{n} - 0| < \epsilon$.
- 此定义用来验证，l由观察得出. 若$a_n = \frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n}$，用定义没法判断收敛性.
- 要验证a_n以l为极限，只要对任意$\epsilon > 0$，找出满足条件“$n > N$时$|a_n - l| < \epsilon$”的N.
- ϵ首先任意给定（可以限制ϵ比较小，如$0 < \epsilon < 1$），N随后给出，它一般和ϵ有关，也不是唯一的，一般ϵ越小，N越大.

序列极限定义3

- $a_n \to l \Leftrightarrow$ 对任意$\epsilon > 0$，存在N，当$n > N$时，$|a_n - l| < K\epsilon$（K为任意固定正实数）$\Leftrightarrow$ 对任意$\epsilon > 0$，存在N，当$n > N$时，$|a_n - l| \le K\epsilon$（K为任意固定正实数）.
- 证明：ϵ是任意正实数，$K\epsilon$也包含任意正实数，第一个等价关系显然.
  若对任意$\epsilon_1 > 0$，存在N，当$n > N$时，$|a_n - l| \le K\epsilon_1$. 则对任意的$\epsilon > 0$，取$\epsilon_1 = \frac{\epsilon}{2}$，存在$N$，当$n > N$时，$|a_n - l| \le K\epsilon_1 = \frac{K}{2}\epsilon$，从而$|a_n - l| < K\epsilon$.
  反过来，若对任意$\epsilon > 0$，存在N，当$n > N$时，$|a_n - l| < K\epsilon$，则当$n > N$时，$|a_n - l| \le K\epsilon$.

序列极限定义4

- $a_n \nrightarrow l \Leftrightarrow$ 存在$\epsilon_0 > 0$, 对任意N, 存在$n > N$，$|a_n - l| \geq \epsilon_0$ $\Leftrightarrow$ 存在$\epsilon_0 > 0$和子列n_k，使得$|a_{n_k} - l| \geq \epsilon_0$.
- 证明：$a_n \nrightarrow l$, 等价于存在$\epsilon_0 > 0$，使得不存在N满足“当$n > N$时，$|a_n - l| < \epsilon_0$”，即对任意N, 存在$n > N$, 使得$|a_n - l| \geq \epsilon_0$.
  若存在$\epsilon_0 > 0$, 对任意N, 存在$n > N$时，$|a_n - l| \geq \epsilon_0$. 取$n_1 > 1$,使得$|a_{n_1} - l| \geq \epsilon_0$，再取$n_2 > n_1$,使得$|a_{n_2} - l| \geq \epsilon_0$，$\cdots$. 另一方面，若存在$\epsilon_0 > 0$和子列$n_k$，使得$|a_{n_k} - l| \geq \epsilon_0$，则对任意$N$, 存在$n = n_k > N$，使得$|a_n - l| \geq \epsilon_0$.

序列极限定义5

错误的说法:

- 1. 对任意$N>0$，存在$\epsilon>0$, 当$n>N$时，$|a_n-l|<\epsilon$(该叙述中不要求ϵ任意小，任意序列都满足).
- 2. 存在$\epsilon>0$,存在$N>0$，当$n>N$时，$|a_n-l|<\epsilon$（反例：$a_n=\frac{\epsilon}{2}$）.
- 3. 对任意$N>0$，对任意$\epsilon>0$, 当$n>N$时, $|a_n-l|<\epsilon$（则有$a_n=l$）.

序列极限的性质1

- 极限存在时，必定唯一.
  证明：若有两个极限l_1, L_2, 则对任意的ϵ, 存在N, $n > N$时$|a_n - l_1| < \epsilon$, $|a_n - l_2| < \epsilon$. 因此$|l_1 - l_2| \le |l_1 - a_n| + |a_n - l_2| < \epsilon$. 则有$l_1 = l_2$.
- 收敛序列有界.
  证明：若 $\lim_{n\to\infty} a_n = l$, 则存在$N$, $n > N$时$|a_n - l| < 1$. 则有$n > N$时$|a_n| \le |l| + 1$, $|a_n| \le \max\{|a_1|, |a_2|, \cdots, |a_{N-1}|, |l| + 1\}$.
- 极限存在与否与序列前面有限项无关.

序列极限的性质2

- $a_n \to 0$,则有$ca_n \to 0$.
  证明：不妨设$c \neq 0$. 若$\lim_{n\to\infty} a_n = 0$, 则对任意$\epsilon > 0$, 存在$N$, $n > N$时$|a_n| < \epsilon$, 则对任意$\epsilon > 0$, 存在N, $n > N$时$|ca_n| < |c|\epsilon$.
- $a_n \to l$, 且$p < l < q$(或$p < l, l < q$)则存在N, $n > N$时，有$p < a_n < q$(或$p < a_n, a_n < q$).
  证明：取$\epsilon < \min\{l-p, q-l\}$, 则存在$N$, $n > N$时，$p < l - \epsilon < a_n < l + \epsilon < q$.
- 问题：$a_n > 0, a_n \to 0$,是否有a_n单调递减?

序列极限的例子

- $a>0$时，$\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{a}=1$.
  证明：$a>1$时，对任意$\epsilon>0$, 要使$a^{\frac{1}{n}}-1<\epsilon$, 只要$n>\frac{1}{\log_a^{1+\epsilon}}$.取$N=[\frac{1}{\log_a^{1+\epsilon}}]+1$，则有当$n>N$时，$|a^{\frac{1}{n}}-1|<\epsilon$.
  $a<1$时，对任意$1>\epsilon>0$, 要使$1-a^{\frac{1}{n}}<\epsilon$, 只要$n>\frac{1}{\log_a^{1-\epsilon}}$.可取$N=[\frac{1}{\log_a^{1-\epsilon}}]+1$.
- $|q|<1$时，$\lim\limits_{n\to\infty}q^n=0$.
  证明：不妨设$|q|>0$,对任意$1>\epsilon>0$, 要使$|q^n|<\epsilon$, 只要$n>\log_{|q|}\epsilon$. 可取$N=[\log_{|q|}\epsilon]+1$.
- 数列$0,1,0,1,\cdots$无极限：
  证明：反设存在极限l, 则存在N, $n>N$时，$|a_n-l|<\frac{1}{2}$, 则有$|0-l|<\frac{1}{2}$, $|1-l|<\frac{1}{2}$, 矛盾.

夹逼定理

- 定理: 设有三个序列$\{a_n\}$,$\{b_n\}$,$\{c_n\}$. 存在N_0, 使得$n \geq N_0$时, $c_n \leq a_n \leq b_n$, 若有$\lim\limits_{n\to\infty} c_n = \lim\limits_{n\to\infty} b_n = l$, 则有$\lim\limits_{n\to\infty} a_n$存在, 且$\lim\limits_{n\to\infty} a_n = l$.
  证明: 对任意$\epsilon > 0$, 存在$N > N_0$, 使得$|b_n - l| < \epsilon$,$|c_n - l| < \epsilon$, 从而有$l - \epsilon < c_n \leq a_n \leq c_n < l + \epsilon$, 即得$|a_n - l| < \epsilon$.
- 注: 上面定理可否如下证明? 由于$c_n \leq a_n$, 利用极限不等式, 有$\lim\limits_{n\to\infty} c_n \leq \lim\limits_{n\to\infty} a_n$, 同样可得$\lim\limits_{n\to\infty} a_n \leq \lim\limits_{n\to\infty} b_n$.
- 推论: 若$0 \leq a_n \leq b_n \to 0$, 则有$a_n \to 0$.

夹逼定理的例子

- 例：设$a_n > 0$，若$\frac{a_{n+1}}{a_n} \to l < 1$(或者存在$N$，$n > N$时，$\frac{a_{n+1}}{a_n} < q < 1$)，则$a_n \to 0$.
  证明：取$l < q < 1$，则存在N，使得$n > N$时$\frac{a_{n+1}}{a_n} < q$. 因此$n > N$时，
  $$\frac{a_n}{a_N} = \frac{a_n}{a_{n-1}} \cdot \frac{a_{n-1}}{a_{n-2}} \cdots \frac{a_{N+1}}{a_N} < q^{n-N},$$
  从而有$a_n < a_N q^{n-N} = a_N q^N q^n \to 0$.
- 设$a > 1$，$\lim\limits_{n\to\infty} \frac{a^n}{n!} = 0$
  证明：设$a_n = \frac{a^n}{n!}$，则有$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{a}{n+1} \to 0$
- $a > 1$，$\lim\limits_{n\to\infty} \frac{n}{a^n} = 0$
  证明：设$a_n = \frac{n}{a^n}$，则有$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{n+1}{na} \to \frac{1}{a}$

极限不等式

- 定理: $\lim_{n\to\infty} a_n = l_1$, $\lim_{n\to\infty} b_n = l_2$, $l_1 > l_2$. 则存在N, 使得$n > N$时, $a_n > b_n$.
  证明: 存在N, 使得$n > N$时, $|a_n - l_1| < \frac{l_1 - l_2}{2}$, $|b_n - l_2| < \frac{l_1 - l_2}{2}$, 从而有$a_n > l_1 - \frac{l_1 - l_2}{2} = l_2 + \frac{l_1 + l_2}{2} > b_2$.
- 定理:若 $\lim_{n\to\infty} a_n = l_1$, $\lim_{n\to\infty} b_n = l_2$, 且存在$N$, 使得$n > N$时, $a_n \geq b_n$. 则有$l_1 \geq l_2$.
  证明: 反设$l_1 < l_2$, 则存在N, 当$n > N$时, $a_n < b_n$, 矛盾.
- 注: 由$a_n > b_n$得不到$\lim_{n\to\infty} a_n > \lim_{n\to\infty} b_n$. 如: $a_n = \frac{2}{n}$, $b_n = \frac{1}{n}$.

极限的四则运算1

- 设 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = l_1$，$\lim\limits_{n\to\infty} b_n = l_2$，则有：$\lim\limits_{n\to\infty}(a_n \pm b_n) = l_1 \pm l_2$.
- 证明：由条件 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = l_1$和 $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = l_2$，对任意的$\epsilon > 0$，存在$N$，使得当$n > N$时有

$$|a_n - l_1| < \frac{\epsilon}{2}, \quad |b_n - l_2| < \frac{\epsilon}{2}.$$

因此当$n > N$时有

$$|a_n \pm b_n - (l_1 \pm l_2)| \leq |a_n - l_1| + |b_n - l_2| < \epsilon.$$

极限的四则运算2

- 设$\lim\limits_{n\to\infty} a_n = l_1$，$\lim\limits_{n\to\infty} b_n = l_2$，则有：$\lim\limits_{n\to\infty}(a_n \cdot b_n) = l_1 \cdot l_2$.
- 证明：由于极限$\lim\limits_{n\to\infty} b_n$存在，因此有界，即存在$M$,使得$|b_n| \leq M$,

$$|a_n b_n - l_1 l_2| \leq |b_n| \cdot |a_n - l_1| + |l_1||b_n - l_2| \leq M \cdot |a_n - l_1| + |l_1||b_n - l_2|.$$

由于$\lim\limits_{n\to\infty} a_n = l_1$，$\lim\limits_{n\to\infty} b_n = l_2$，对任意的$\epsilon > 0$, 存在$N$, 使得当$n > N$时有

$$|a_n - l_1| < \epsilon, \quad |b_n - l_2| < \epsilon.$$

从而得$|a_n b_n - (l_1 l_2)| < (M + |l_1|)\epsilon$.

极限的四则运算3

- 设 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = l_1$, $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = l_2 \neq 0$, 则有 $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = \frac{l_1}{l_2}$.
- 证明：只要证明 $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{b_n} = \frac{1}{l_2}$，然后有极限的乘法运算得出. 不妨设$l_2 > 0$. 由于 $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = l_2 > \frac{l_2}{2}$, 存在$N_1$, 使得当$n > N_1$时，$b_n > \frac{l_2}{2}$, 则有当$n > N_1$时，

$$\left|\frac{1}{b_n} - \frac{1}{l_2}\right| \leq \frac{|b_n - l_2|}{|b_n l_2|} \leq \frac{|b_n - l_2|}{\frac{1}{2}(l_2)^2}.$$

由于 $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = l_2$，对任意的$\epsilon > 0$, 存在$N > N_1$, 使得当$n > N$时$|b_n - l_2| \leq \frac{\epsilon}{2}(l_2)^2$, 从而$|\frac{1}{b_n} - \frac{1}{l_2}| < \epsilon$.
- 注：当$l_2 \neq 0$时，存在N, $n > N$时，$b_n \neq 0$.

应用极限四则运算求极限1

- $$\lim_{n\to\infty}\frac{a_0n^m+a_1n^{m-1}+\cdots+a_m}{b_0n^k+a_1n^{k-1}+\cdots+a_k}=\begin{cases}\frac{a_0}{b_0}, & m=k\\ 0, & m<k\end{cases}$$

证明：$m\le k$ 时，

$$\begin{aligned}&\lim_{n\to\infty}\frac{a_0n^m+a_1n^{m-1}+\cdots+a_m}{b_0n^k+a_1n^{k-1}+\cdots+a_k}\\ =&\lim_{n\to\infty}\frac{a_0+a_1n^{-1}+\cdots+a_mn^{-m}}{b_0+a_1n^{-1}+\cdots+a_kn^{-k}}n^{m-k}\\ =&\frac{a_0}{b_0}\lim_{n\to\infty}\cdot n^{m-k}=\begin{cases}\frac{a_0}{b_0}, & m=k\\ 0, & m<k\end{cases}.\end{aligned}$$

应用极限四则运算求极限2

- $a_n=\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}+\cdots\frac{1}{n+n}$, 则极限 $\lim\limits_{n\to\infty}a_n$存在且大于0.
  证明：由：$a_n-a_{n-1}=\frac{1}{2n-1}+\frac{1}{2n}-\frac{1}{n}$，有$a_n$单调递增，且$a_n<\frac{n}{n+1}<1$, $\lim\limits_{n\to\infty}a_n$存在，但是
  $$\lim_{n\to\infty}a_n\neq\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n+1}+\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n+2}+\cdots+\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n+1}=0.$$
- 注：由于$a_n=\frac{1}{n}(\frac{1}{1+\frac{1}{n}}+\frac{1}{1+\frac{2}{n}}+\cdots+\frac{1}{1+\frac{n}{n}})$, 利用定积分的定义，可知$a_n\to\int_0^1\frac{1}{1+x}dx=\ln 2$.

应用极限四则运算求极限3

- $a_n = \sqrt{n+\sqrt{n}} - \sqrt{n}$,求 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n$.

  解:

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt{n}}{\sqrt{n+\sqrt{n}}+\sqrt{n}} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt{1+\frac{1}{\sqrt{n}}}+1} = \frac{1}{2}.$$

子序列的极限

- 定理:设$\lim\limits_{n\to\infty} a_n = l$, 则它的任意子序列$a_{n_k}$也以$l$为极限.
  证明：对任意$\epsilon > 0$, 存在N, 使得$n > N$时，$|a_n - l| < \epsilon$.
  取K，使得$n_K > N$, 则当$k > K$时，$|a_{n_k} - l| < \epsilon$.
- 推论：若序列a_n存在两个极限不同的子序列，则原序列的极限不存在. 例：$0, 1, 0, 1, \cdots$.
- 注：若$\{a_n\}$的任意子序列a_{n_k}均以l为极限, 则$\{a_n\}$以l为极限.
  证明: 若$\{a_n\}$不是以l为极限，则存在ϵ_0, a_{n_k}, 使得$|a_{n_k} - l| \geq \epsilon$. 从而$a_{n_k}$不是以$l$为极限.

一个重要的极限1

设$a_n = (1+\frac{1}{n})^n$，$b_n = 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \cdots + \frac{1}{n!}$，则有极限$\lim\limits_{n\to\infty} a_n$和$\lim\limits_{n\to\infty} b_n$均存在，设该极限为$e$.

证明如下：

- 1. a_n，和b_n是有界序列. 利用二项式展开公式：

$$(1+x)^n = 1 + nx + \frac{n(n-1)}{2!}x^2 + \cdots + \frac{n!}{n!}x^n$$

我们有

$$\begin{aligned}(1+\frac{1}{n})^n &= 1 + n\frac{1}{n} + \frac{n(n-1)}{2!}\frac{1}{n^2} + \cdots + \frac{n!}{n!}\frac{1}{n^n} \\ &< b_n = 1 + 1 + \frac{1}{2!} + \cdots + \frac{1}{n!} \\ &\le 1 + 1 + \frac{1}{1\cdot 2} + \cdots + \frac{1}{n\cdot(n-1)} = 3 - \frac{1}{n} < 3\end{aligned}$$

一个重要的极限2

- 2. a_n和b_n是递增序列，从而a_n, b_n极限存在.
  证明：b_n显然是递增序列.

$$(1+\frac{1}{n+1})^{n+1}=1+1+\sum_{k=2}^{n}\frac{1}{k!}(1-\frac{1}{n+1})(1-\frac{2}{n+1})$$

$$\cdots(1-\frac{k-1}{n+1})+(\frac{1}{n+1})^{n+1}$$

$$\geq 1+1+\sum_{k=2}^{n}\frac{1}{k!}(1-\frac{1}{n})(1-\frac{2}{n})\cdots(1-\frac{k-1}{n})=(1+\frac{1}{n})^{n}.$$

  也可如下证明：

$$(1+\frac{1}{n+1})^{n+1}=(\frac{n(1+\frac{1}{n})+1}{n+1})^{n+1}>(1+\frac{1}{n})^{n}\cdot 1$$

一个重要的极限3

- 3. $\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{m\to\infty} b_m$.

  证明：由$a_n < b_n$，有$\lim_{n\to\infty} a_n \le \lim_{m\to\infty} b_m$. 又对任意$m$,当$n > m$时，由二项式展开公式，

$$(1+\frac{1}{n+1})^{n+1} \ge 1+1+\frac{n(n-1)}{2!}\frac{1}{n^2}+ \cdots + \frac{n(n-1)\cdots(n-m+1)}{m!}\frac{1}{n^m}$$

  从而得对任意m,

$$\lim_{n\to\infty} a_n \ge b_m \Rightarrow \lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{m\to\infty} b_m.$$

一个重要的极限4

- 注：$b_n=(1+\frac{1}{n})^{n+1}$单调递减趋向于$e$.
  证明：利用Bernoulli不等式$(1+x)^n\geq 1+nx, x>-1$,

$$\frac{b_n}{b_{n+1}}=(\frac{n+1}{n})^{n+1}/(\frac{n+2}{n+1})^{n+2}=(1+\frac{1}{n})^{n+1}(1-\frac{1}{n+2})^{n+2}$$
$$=(1+\frac{1}{n(n+2)})^{n+1}(1-\frac{1}{n+2})\geq(1+\frac{n+1}{n(n+2)})(1-\frac{1}{n+2})$$
$$=\frac{1}{n(n+2)^2}+1>1.$$

例

- 求极限 $\lim\limits_{n\to\infty}(1-\frac{1}{n})^n$.
- 解:
$$\lim_{n\to\infty}(1-\frac{1}{n})^n = \lim_{n\to\infty}\frac{1}{(1+\frac{1}{n-1})^n} = \frac{1}{e}$$