无穷大量、无穷小量及其运算

本段内容要点:

各极限过程中无穷大量无穷小量的定义

同一极限过程中无穷小量的运算

同一极限过程中无穷大量无穷小量的关系

无穷大量的概念

无穷大量的概念

在某个极限过程中，绝对值趋于$+\infty$的函数，叫做此极限过程中的一个无穷大量.

无穷大量的概念

在某个极限过程中，绝对值趋于$+\infty$的函数，叫做此极限过程中的一个无穷大量.

例如:

$\lim\limits_{x\to 0}\frac{1}{x^2}=+\infty$(无穷大量)，　　$\lim\limits_{x\to 0}\frac{1}{x}\nexists(=\infty)$(无穷大量)，

无穷大量的概念

在某个极限过程中，绝对值趋于$+\infty$的函数，叫做此极限过程中的一个无穷大量.

例如:

$$\lim_{x\to 0}\frac{1}{x^2}=+\infty\text{(无穷大量)},\qquad \lim_{x\to 0}\frac{1}{x}\nexists(=\infty)\text{(无穷大量)},$$

$$\lim_{x\to 0+0}\frac{1}{x}=+\infty\text{(无穷大量)},\qquad \lim_{x\to 0-0}\frac{1}{x}=-\infty\text{(无穷大量)}.$$

具体地说

$f(x)$是$x \to +\infty$时的无穷大量:

具体地说

$f(x)$是$x \to +\infty$时的无穷大量:

$$\forall M > 0,\ \exists X > 0\ s.t.\ x > X \Rightarrow |f(x)| > M.$$

具体地说

$f(x)$是$x \to +\infty$时的无穷大量:

$$\forall M > 0,\ \exists X > 0\ s.t.\ x > X \ \Rightarrow |f(x)| > M.$$

$f(x)$是$x \to -\infty$时的无穷大量:

$$\forall M > 0,\ \exists X > 0\ s.t.\ x < -X \ \Rightarrow |f(x)| > M.$$

具体地说

$f(x)$是$x \to +\infty$时的无穷大量:

$$\forall M > 0,\ \exists X > 0\ s.t.\ \underline{x > X}\ \Rightarrow |f(x)| > M.$$

$f(x)$是$x \to -\infty$时的无穷大量:

$$\forall M > 0,\ \exists X > 0\ s.t.\ x < -X\ \Rightarrow |f(x)| > M.$$

$f(x)$是$x \to \infty$时的无穷大量:

$$\forall M > 0,\ \exists X > 0\ s.t.\ |x| > X\ \Rightarrow |f(x)| > M.$$

$f(x)$是$x \to x_0$时的无穷大量:

$$\forall M > 0,\ \exists \delta > 0\ s.\ 0 < |x - x_0| < \delta \Rightarrow |f(x)| > M.$$

$f(x)$是$x \to x_0$时的无穷大量:

$$\forall M > 0,\ \exists \delta > 0\ s.t.\quad 0 < |x - x_0| < \delta \ \Rightarrow |f(x)| > M.$$

$f(x)$是$x \to x_0 + 0$时的无穷大量:

$$\forall M > 0,\ \exists \delta > 0\ s.t.\quad 0 < x - x_0 < \delta \ \Rightarrow |f(x)| > M.$$

$f(x)$是$x \to x_0$时的无穷大量:

$$\forall M > 0,\ \exists \delta > 0\ s.t.\quad 0 < |x - x_0| < \delta \ \Rightarrow |f(x)| > M.$$

$f(x)$是$x \to x_0 + 0$时的无穷大量:

$$\forall M > 0,\ \exists \delta > 0\ s.t.\quad 0 < x - x_0 < \delta \ \Rightarrow |f(x)| > M.$$

$f(x)$是$x \to x_0 - 0$时的无穷大量:

$$\forall M > 0,\ \exists \delta > 0\ s.t.\quad 0 < x_0 - x < \delta \ \Rightarrow |f(x)| > M.$$

注意: $x \sin x$不是$x \to \infty$过程中的无穷大量!!

只是此过程中的一个无界量.

注意: $x\sin x$不是$x\to\infty$过程中的无穷大量!!

只是此过程中的一个无界量.

例:

$x\to 1$时, $\dfrac{1}{x-1},\dfrac{1}{x^3-1},\dfrac{1}{x^2+x-2}$ 等是无穷大量;

$x\to\infty$时, $x, x^2, \ln|x|$等是无穷大量.

注意: $x\sin x$不是$x \to \infty$过程中的无穷大量!!

只是此过程中的一个无界量.

例:

$x \to 1$时, $\dfrac{1}{x-1}, \dfrac{1}{x^3-1}, \dfrac{1}{x^2+x-2}$ 等是无穷大量;

$x \to \infty$时, $x, x^2, \ln|x|$等是无穷大量.

一个极限过程中的无穷大量一般不是另一个极限过程中的无穷大量

无穷小量及其运算

无穷小量及其运算

在某极限过程中，以0为极限的函数叫作这个极限过程中的一个无穷小量.

无穷小量及其运算

在某极限过程中，以0为极限的函数叫作这个极限过程中的一个无穷小量.

例如，$f(x)$为$x \to x_0$时的无穷小量的描述为

$$\boxed{\forall \varepsilon > 0,\ \exists \delta > 0\ s.t.\ \ 0 < |x - x_0| < \delta \ \Rightarrow |f(x)| < \varepsilon.}$$

无穷小量及其运算

在某极限过程中，以0为极限的函数叫作这个极限过程中的一个无穷小量.

例如，$f(x)$为$x \to x_0$时的无穷小量的描述为

$$\boxed{\forall \varepsilon > 0,\ \exists \delta > 0\ s.t.\ \ 0 < |x - x_0| < \delta\ \Rightarrow |f(x)| < \varepsilon.}$$

如 $\dfrac{1}{n}$是$n \to \infty$时的无穷小量,

$x \sin \dfrac{1}{x}$是$x \to 0$时的无穷小量,

$x - 1, x^2 - 1, x^3 - 1$ 是$x \to 1$时的无穷小量.

定理:　同一极限过程中, 两个无穷小量的和仍是无穷小量.

定理: $\boxed{\text{同一极限过程中, 两个无穷小量的和仍是无穷小量.}}$

证明: (以$x \to x_0$过程为例)

定理: $\boxed{\text{同一极限过程中, 两个无穷小量的和仍是无穷小量.}}$

证明: (以$x \to x_0$过程为例)

设 $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = 0$, $\lim\limits_{x \to x_0} g(x) = 0$, 往证 $\lim\limits_{x \to x_0} [f(x) + g(x)] = 0$.

即往证: $\forall \varepsilon > 0,\ \exists \delta > 0\ s.t.$

$$0 < |x - x_0| < \delta \Rightarrow |f(x) + g(x)| < \varepsilon.$$

定理:　$\boxed{\text{同一极限过程中, 两个无穷小量的和仍是无穷小量.}}$

证明: (以$x \to x_0$过程为例)

设 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = 0$, $\lim\limits_{x\to x_0} g(x) = 0$, 往证 $\lim\limits_{x\to x_0}[f(x)+g(x)] = 0$.

即往证:　$\forall \varepsilon > 0$, $\exists \delta > 0$ $s.t.$

$$0 < |x - x_0| < \delta \Rightarrow |f(x)+g(x)| < \varepsilon.$$

现在对于上述给定的ε,

$\because \lim\limits_{x\to x_0} f(x) = 0$, $\therefore$就$\dfrac{\varepsilon}{2} > 0$来说, $\exists \delta_1 > 0$ $s.t.$

$$0 < |x - x_0| < \delta_1 \Rightarrow |f(x)| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

定理: 同一极限过程中, 两个无穷小量的和仍是无穷小量.

证明: (以$x \to x_0$过程为例)

设 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = 0$, $\lim\limits_{x\to x_0} g(x) = 0$, 往证 $\lim\limits_{x\to x_0}[f(x)+g(x)] = 0$.

即往证: $\forall \varepsilon > 0$, $\exists \delta > 0$ $s.t.$

$$0 < |x - x_0| < \delta \Rightarrow |f(x) + g(x)| < \varepsilon.$$

现在对于上述给定的ε,

$\because \lim\limits_{x\to x_0} f(x) = 0$, $\therefore$就$\dfrac{\varepsilon}{2} > 0$来说, $\exists \delta_1 > 0$ $s.t.$

$$0 < |x - x_0| < \delta_1 \Rightarrow |f(x)| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

$\because \lim\limits_{x\to x_0} g(x) = 0$, $\therefore$就$\dfrac{\varepsilon}{2} > 0$来说, $\exists \delta_2 > 0$ $s.t.$

$$0 < |x - x_0| < \delta_2 \Rightarrow |g(x)| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

定理: $\boxed{\text{同一极限过程中, 两个无穷小量的和仍是无穷小量.}}$

证明: (以$x \to x_0$过程为例)

设 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = 0$, $\lim\limits_{x\to x_0} g(x) = 0$, 往证 $\lim\limits_{x\to x_0}[f(x)+g(x)] = 0$.

即往证: $\forall \varepsilon > 0,\ \exists \delta > 0\ s.t.$

$$0 < |x - x_0| < \delta \Rightarrow |f(x) + g(x)| < \varepsilon.$$

现在对于上述给定的ε,

$\because \lim\limits_{x\to x_0} f(x) = 0$, $\therefore$就$\dfrac{\varepsilon}{2} > 0$来说, $\exists \delta_1 > 0\ s.t.$

$$0 < |x - x_0| < \delta_1 \Rightarrow \boxed{|f(x)| < \frac{\varepsilon}{2}.}$$

$\because \lim\limits_{x\to x_0} g(x) = 0$, $\therefore$就$\dfrac{\varepsilon}{2} > 0$来说, $\exists \delta_2 > 0\ s.t.$

$$0 < |x - x_0| < \delta_2 \Rightarrow \boxed{|g(x)| < \frac{\varepsilon}{2}.}$$

取$\delta = \min\{\delta_1, \delta_2\}$, 则

定理: $\boxed{\text{同一极限过程中, 两个无穷小量的和仍是无穷小量.}}$

证明: (以$x \to x_0$过程为例)

设 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = 0,\ \lim\limits_{x\to x_0} g(x) = 0,$ 往证 $\lim\limits_{x\to x_0} [f(x) + g(x)] = 0.$

即往证: $\forall \varepsilon > 0,\ \exists \delta > 0\ s.t.$

$$0 < |x - x_0| < \delta \Rightarrow |f(x) + g(x)| < \varepsilon.$$

现在对于上述给定的ε,

$\because \lim\limits_{x\to x_0} f(x) = 0,\ \therefore$就$\dfrac{\varepsilon}{2} > 0$来说, $\exists \delta_1 > 0\ s.t.$

$$0 < |x - x_0| < \delta_1 \Rightarrow \boxed{|f(x)| < \frac{\varepsilon}{2}.}$$

$\because \lim\limits_{x\to x_0} g(x) = 0,\ \therefore$就$\dfrac{\varepsilon}{2} > 0$来说, $\exists \delta_2 > 0\ s.t.$

$$0 < |x - x_0| < \delta_2 \Rightarrow \boxed{|g(x)| < \frac{\varepsilon}{2}.}$$

取$\delta = \min\{\delta_1, \delta_2\}$, 则

$$0 < |x - x_0| < \delta \Rightarrow$$

$$|f(x)| < \frac{\varepsilon}{2} \text{ 且 } |g(x)| < \frac{\varepsilon}{2}$$

$$\Rightarrow |f(x) + g(x)| < \varepsilon.$$

定理: 某极限过程中的无穷小量的常数倍仍是此过程中的无穷小量.

定理: 某极限过程中的无穷小量的常数倍仍是此过程中的无穷小量.

即 $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = 0 \Rightarrow \lim\limits_{x \to x_0} k \cdot f(x) = 0$

定理: 某极限过程中的无穷小量的常数倍仍是此过程中的无穷小量.

即 $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = 0 \Rightarrow \lim\limits_{x \to x_0} k \cdot f(x) = 0$

如$k = 0$, 则结论显然.

定理: 某极限过程中的无穷小量的常数倍仍是此过程中的无穷小量.

即 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=0 \Rightarrow \lim\limits_{x\to x_0} k\cdot f(x)=0$

如 $k=0$, 则结论显然.

在 $k\neq 0$ 时, 对于任意给定的 $\varepsilon>0$,

由于 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=0$, 所以相应于 $\dfrac{\varepsilon}{|k|}$,

$\exists\delta>0\ s.t.\ 0<|x-x_0|<\delta \Rightarrow |f(x)|<\dfrac{\varepsilon}{|k|}$.

定理: 某极限过程中的无穷小量的常数倍仍是此过程中的无穷小量.

即 $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = 0 \Rightarrow \lim\limits_{x \to x_0} k \cdot f(x) = 0$

如 $k = 0$, 则结论显然.

在 $k \neq 0$ 时, 对于任意给定的 $\varepsilon > 0$,

由于 $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = 0$, 所以相应于 $\dfrac{\varepsilon}{|k|}$,

$\exists \delta > 0 \; s.t. \; 0 < |x - x_0| < \delta \Rightarrow |f(x)| < \dfrac{\varepsilon}{|k|}$.

从而, $\exists \delta > 0 \; s.t. \quad 0 < |x - x_0| < \delta \Rightarrow |k \cdot f(x)| < \varepsilon$.

定理: 同一极限过程中的有限个无穷小量的代数和仍是这过程中的无穷小量.

定理: 同一极限过程中的有限个无穷小量的代数和仍是这过程中的无穷小量.

即 $f_i(x) \to 0\,(i = 1, 2, \cdots, n,\ x \to x_0)$

$\Rightarrow$

$(k_1 f_1(x) + k_2 f_2(x) + \cdots + k_n f_n(x)) \to 0\,(x \to x_0)$

定理: 同一极限过程中的有限个无穷小量的代数和仍是这过程中的无穷小量.

定理:

同一变化过程中的有界变量与无穷小量乘积仍是无穷小量.

定理: 同一极限过程中的有限个无穷小量的代数和仍是这过程中的无穷小量.

定理:

同一变化过程中的有界变量与无穷小量乘积仍是无穷小量.

即

$$|f(x)| \leqslant M,\ \lim_{x \to x_0} g(x) = 0$$

$$\Rightarrow |f(x) \cdot g(x)| \leqslant M|g(x)| \to 0 \quad (x \to x_0)$$

定理: 同一极限过程中的有限个无穷小量的代数和仍是这过程中的无穷小量.

定理:

同一变化过程中的有界变量与无穷小量乘积仍是无穷小量.

推论:

同一极限过程中有限个无穷小量的乘积仍是无穷小量.

定理: $\lim_{x\to x_0} f(x) = A \neq 0$(此条件必需), $\lim_{x\to x_0} g(x) = 0$

$$\Rightarrow \lim_{x\to x_0} \frac{g(x)}{f(x)} = 0.$$

定理:

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = A \neq 0 \text{(此条件必需)}, \quad \lim_{x \to x_0} g(x) = 0$$

$$\Rightarrow \lim_{x \to x_0} \frac{g(x)}{f(x)} = 0.$$

证明:

因为 $\lim_{x \to x_0} f(x) = A \neq 0$, 所以 $\frac{1}{f(x)}$ 是 $x \to x_0$ 过程中的一个有界量.

而 $g(x)$ 是该过程的一个无穷小量,

由上定理, 它们的乘积仍是此过程的一个无穷小量.

注：0是任何极限过程中的无穷小量，但某极限过程中的无穷小量不一定是0.

定理:

某极限过程中的无穷大量的倒数是此过程中的无穷小量,非零无穷小量的倒数是无穷大量.

本段知识要点:

无穷大量、无穷小量的定义

同一极限过程中的两无穷小量的和是无穷小量,从而有限个无穷小量的和是无穷小量

同一极限过程中的两无穷小量的积是无穷小量,从而有限个无穷小量的积是无穷小量

同一极限过程中的有界量与无穷小量的积是无穷小量

同一极限过程中的无穷小量和无穷大量互为倒数（分母非零时）

无穷大量的运算可以转化为无穷小量的运算