全微分

一个变量的微分就是它的微小改变量

一个变量的微分就是它的微小改变量

x 的微分记作 $\mathrm{d}x$, y 的微分记作 $\mathrm{d}y$, z 的微分记作 $\mathrm{d}z$.

一个变量的微分就是它的微小改变量

x 的微分记作 $\mathrm{d}x$, y 的微分记作 $\mathrm{d}y$, z 的微分记作 $\mathrm{d}z$.

在二元函数 $z=f(x,y)$ 中三个变量各有微分,其间关系如何呢？

z 的微小改变量是由 x,y 的微变而引起的.

一个变量的微分就是它的微小改变量

x 的微分记作 $\mathrm{d}x$, y 的微分记作 $\mathrm{d}y$, z 的微分记作 $\mathrm{d}z$.

在二元函数 $z = f(x, y)$ 中三个变量各有微分,其间关系如何呢?

z 的微小改变量是由 x, y 的微变而引起的.

先考虑 Δz, Δx, Δy 之间的关系.

$$\Delta z = f(x + \Delta x, y + \Delta y) - f(x, y)$$

一个变量的微分就是它的微小改变量

x 的微分记作 $\mathrm{d}x$, y 的微分记作 $\mathrm{d}y$, z 的微分记作 $\mathrm{d}z$.

在二元函数 $z=f(x,y)$ 中三个变量各有微分,其间关系如何呢?

z 的微小改变量是由 x,y 的微变而引起的.

先考虑 Δz, Δx, Δy 之间的关系.

$$\Delta z=f(x+\Delta x,y+\Delta y)-f(x,y)$$

如何衡量 Δx, Δy 都很小呢?

一个变量的微分就是它的微小改变量

x 的微分记作 $\mathrm{d}x$, y 的微分记作 $\mathrm{d}y$, z 的微分记作 $\mathrm{d}z$.

在二元函数 $z = f(x, y)$ 中三个变量各有微分,其间关系如何呢?

z 的微小改变量是由 x, y 的微变而引起的.

先考虑 Δz, Δx, Δy 之间的关系.

$$\Delta z = f(x + \Delta x, y + \Delta y) - f(x, y)$$

如何衡量 Δx, Δy 都很小呢?

记 $\rho = \sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2}$, ρ 小则 Δx, Δy 都小.

定义　记 $\rho = \sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2}$，如果 $\rho \to 0$ 时，

$$\Delta z = A(x, y)\Delta x + B(x, y)\Delta y + o(\rho) \ ,$$

则称 $z = f(x, y)$ 在 (x, y) 点可求**微分**，$\boxed{\text{可微}}$

定义　记 $\rho=\sqrt{(\Delta x)^2+(\Delta y)^2}$，如果 $\rho\to 0$ 时，

$$\Delta z = A(x,y)\Delta x + B(x,y)\Delta y + o(\rho)\ ,$$

则称 $z=f(x,y)$ 在 (x,y) 点可求**微分**，$\boxed{\text{可微}}$

并称 $A(x,y)\Delta x + B(x,y)\Delta y + o(\rho)$

为函数 $z=f(x,y)$ 在 (x,y) 点的全微分，　记为 $\mathrm{d}z$

即 $\underline{\mathrm{d}z = A(x,y)\Delta x + B(x,y)\Delta y}$

定义　记 $\rho=\sqrt{(\Delta x)^2+(\Delta y)^2}$，如果 $\rho \to 0$ 时，

$$\Delta z=A(x,y)\Delta x+B(x,y)\Delta y+o(\rho)\ ,$$

则称 $z=f(x,y)$ 在 (x,y) 点可求**微分**，$\boxed{\text{可微}}$

并称 $A(x,y)\Delta x+B(x,y)\Delta y+o(\rho)$

为函数 $z=f(x,y)$ 在 (x,y) 点的全微分，　记为 $\mathrm{d}z$

即 $\mathrm{d}z=A(x,y)\Delta x+B(x,y)\Delta y$

$\mathrm{d}z$ 是 Δz 的关于 Δx，Δy 的线性部分（一次部分）

定义 记 $\rho=\sqrt{(\Delta x)^2+(\Delta y)^2}$，如果 $\rho\to 0$ 时，

$$\Delta z=A(x,y)\Delta x+B(x,y)\Delta y+o(\rho)\ ,$$

则称 $z=f(x,y)$ 在 (x,y) 点可求**微分**， 可微

并称 $A(x,y)\Delta x+B(x,y)\Delta y+o(\rho)$

为函数 $z=f(x,y)$ 在 (x,y) 点的全微分， 记为 $\mathrm{d}z$

即 $\mathrm{d}z=A(x,y)\Delta x+B(x,y)\Delta y$

$\mathrm{d}z$ 是 Δz 的关于 Δx，Δy 的线性部分（一次部分）

类似于一元函数情形,显见 $\mathrm{d}x=\Delta x$，$\mathrm{d}y=\Delta y$ 所以，

$$\boxed{\mathrm{d}z=A(x,y)\,\mathrm{d}x+B(x,y)\,\mathrm{d}y}$$

$$\Delta z = A(x,y)\Delta x + B(x,y)\Delta y + o(\rho)\ ,$$

$$\Rightarrow \quad \boxed{\mathrm{d}z = A(x,y)\,\mathrm{d}x + B(x,y)\,\mathrm{d}y}$$

$$\Delta z = A(x,y)\Delta x + B(x,y)\Delta y + o(\rho)\ ,$$

$$\Rightarrow \quad \boxed{\mathrm{d}z = A(x,y)\,\mathrm{d}x + B(x,y)\,\mathrm{d}y}$$

那么如何求出 $A(x,y)$，$B(x,y)$ 的表达式呢？

$$\Delta z = A(x, y)\Delta x + B(x, y)\Delta y + o(\rho)\ ,$$

$$\Rightarrow \quad \boxed{\mathrm{d}z = A(x, y)\,\mathrm{d}x + B(x, y)\,\mathrm{d}y}$$

那么如何求出 $A(x, y)$，$B(x, y)$ 的表达式呢？

定理　如果 $z = f(x, y)$ 在 (x, y) 点可微，

则在此处 $\dfrac{\partial z}{\partial x}$，$\dfrac{\partial z}{\partial y}$ 亦存在，并且 $\mathrm{d}z = \dfrac{\partial z}{\partial x}\mathrm{d}x + \dfrac{\partial z}{\partial y}\mathrm{d}y.$

$$\Delta z = A(x, y)\Delta x + B(x, y)\Delta y + o(\rho)\ ,$$

$$\Rightarrow \quad \boxed{dz = A(x, y)\, dx + B(x, y)\, dy}$$

那么如何求出 $A(x, y)$，$B(x, y)$ 的表达式呢？

定理　如果 $z = f(x, y)$ 在 (x, y) 点可微，则在此处 $\dfrac{\partial z}{\partial x}$, $\dfrac{\partial z}{\partial y}$ 亦存在,并且 $dz = \dfrac{\partial z}{\partial x} dx + \dfrac{\partial z}{\partial y} dy$.

证明：$z = f(x, y)$ 在 (x, y) 点可微 $\Rightarrow \exists\ A(x, y), B(x, y) \quad s.t.$

$$\Delta z = A(x, y)\Delta x + B(x, y)\Delta y + o(\rho), \quad (\rho \to 0).$$

$$\Delta z = A(x,y)\Delta x + B(x,y)\Delta y + o(\rho)\ ,$$

$$\Rightarrow \quad \boxed{\mathrm{d}z = A(x,y)\,\mathrm{d}x + B(x,y)\,\mathrm{d}y}$$

那么如何求出 $A(x,y)$，$B(x,y)$ 的表达式呢？

定理　如果 $z = f(x,y)$ 在 (x,y) 点可微，

则在此处 $\dfrac{\partial z}{\partial x}$, $\dfrac{\partial z}{\partial y}$ 亦存在,并且 $\mathrm{d}z = \dfrac{\partial z}{\partial x}\mathrm{d}x + \dfrac{\partial z}{\partial y}\mathrm{d}y.$

证明： $z = f(x,y)$ 在 (x,y) 点可微 $\Rightarrow \exists\ A(x,y), B(x,y)\quad s.t.$

$$\Delta z = A(x,y)\Delta x + B(x,y)\Delta y + o(\rho), \quad (\rho \to 0).$$

此式（对任何形式的 Δx，Δy ）只要 $\rho \to 0$ 就成立!

并且 $A(x,y)$，$B(x,y)$ 不会因为 Δx，Δy 的形式的改变而改变.

$$\Delta z = A(x,y)\Delta x + B(x,y)\Delta y + o(\rho)\ ,$$

$$\Rightarrow \quad \boxed{\mathrm{d}z = A(x,y)\,\mathrm{d}x + B(x,y)\,\mathrm{d}y}$$

那么如何求出 $A(x,y)$，$B(x,y)$ 的表达式呢？

定理　如果 $z = f(x,y)$ 在 (x,y) 点可微，
则在此处 $\dfrac{\partial z}{\partial x}$，$\dfrac{\partial z}{\partial y}$ 亦存在,并且 $\mathrm{d}z = \dfrac{\partial z}{\partial x}\mathrm{d}x + \dfrac{\partial z}{\partial y}\mathrm{d}y.$

证明：$z = f(x,y)$ 在 (x,y) 点可微 $\Rightarrow \exists\ A(x,y), B(x,y)\quad s.t.$

$$\Delta z = A(x,y)\Delta x + B(x,y)\Delta y + o(\rho), \quad (\rho \to 0).$$

现考虑 $\rho \to 0$ 的一种特殊形式：$\Delta x = 0,\quad \Delta y \to 0$,此时,

$$\Delta z|_{\substack{\Delta x=0\\ \Delta y\neq 0}} = f(x, y+\Delta y) - f(x,y) = B(x,y)\Delta y + o(\Delta y), \quad (\Delta y \to 0)$$

$$\Delta z = A(x,y)\Delta x + B(x,y)\Delta y + o(\rho)\ ,$$

$$\Rightarrow \quad \boxed{\mathrm{d}z = A(x,y)\,\mathrm{d}x + B(x,y)\,\mathrm{d}y}$$

那么如何求出 $A(x,y)$，$B(x,y)$ 的表达式呢？

定理　如果 $z = f(x,y)$ 在 (x,y) 点可微，
则在此处 $\dfrac{\partial z}{\partial x}$，$\dfrac{\partial z}{\partial y}$ 亦存在,并且 $\mathrm{d}z = \dfrac{\partial z}{\partial x}\mathrm{d}x + \dfrac{\partial z}{\partial y}\mathrm{d}y.$

证明：　$z = f(x,y)$ 在 (x,y) 点可微 $\Rightarrow \exists\ A(x,y), B(x,y)\quad s.t.$

$$\Delta z = A(x,y)\Delta x + B(x,y)\Delta y + o(\rho), \quad (\rho \to 0).$$

现考虑 $\rho \to 0$ 的一种特殊形式：　$\Delta x = 0,\quad \Delta y \to 0$,此时,

$$\Delta z\big|_{\substack{\Delta x=0\\ \Delta y\neq 0}} = f(x, y+\Delta y) - f(x,y) = B(x,y)\Delta y + o(\Delta y), \quad (\Delta y \to 0)$$

$$\Rightarrow \frac{f(x,y+\Delta y)-f(x,y)}{\Delta y} = B(x,y) + \frac{o(\Delta y)}{\Delta y}, \quad (\Delta y \to 0)$$

$$\Delta z = A(x,y)\Delta x + B(x,y)\Delta y + o(\rho) \ ,$$

$$\Rightarrow \quad \boxed{dz = A(x,y)\,dx + B(x,y)\,dy}$$

那么如何求出 $A(x,y)$，$B(x,y)$ 的表达式呢？

定理 如果 $z = f(x,y)$ 在 (x,y) 点可微，则在此处 $\dfrac{\partial z}{\partial x}$，$\dfrac{\partial z}{\partial y}$ 亦存在,并且 $dz = \dfrac{\partial z}{\partial x}dx + \dfrac{\partial z}{\partial y}dy.$

证明： $z = f(x,y)$ 在 (x,y) 点可微 $\Rightarrow \exists\ A(x,y), B(x,y) \quad s.t.$

$$\Delta z = A(x,y)\Delta x + B(x,y)\Delta y + o(\rho), \quad (\rho \to 0).$$

现考虑 $\rho \to 0$ 的一种特殊形式： $\Delta x = 0$， $\Delta y \to 0$,此时,

$$\Delta z|_{\substack{\Delta x=0\\ \Delta y\neq 0}} = f(x, y+\Delta y) - f(x,y) = B(x,y)\Delta y + o(\Delta y), \quad (\Delta y \to 0)$$

$$\Rightarrow \frac{f(x,y+\Delta y)-f(x,y)}{\Delta y} = B(x,y) + \frac{o(\Delta y)}{\Delta y}, \quad (\Delta y \to 0)$$

$$\Rightarrow \lim_{\Delta y\to 0}\frac{f(x,y+\Delta y)-f(x,y)}{\Delta y} \text{ 存在且} = B(x,y) \text{ ,即 } B(x,y) = \frac{\partial f(x,y)}{\partial y};$$

$$\Delta z = A(x,y)\Delta x + B(x,y)\Delta y + o(\rho)\ ,$$

$$\Rightarrow \quad \boxed{\mathrm{d}z = A(x,y)\,\mathrm{d}x + B(x,y)\,\mathrm{d}y}$$

那么如何求出 $A(x,y)$，$B(x,y)$ 的表达式呢？

定理　如果 $z = f(x,y)$ 在 (x,y) 点可微，则在此处 $\dfrac{\partial z}{\partial x}$，$\dfrac{\partial z}{\partial y}$ 亦存在,并且 $\mathrm{d}z = \dfrac{\partial z}{\partial x}\mathrm{d}x + \dfrac{\partial z}{\partial y}\mathrm{d}y.$

证明：　$z = f(x,y)$ 在 (x,y) 点可微 $\Rightarrow \exists\ A(x,y), B(x,y)\quad s.t.$

$$\Delta z = A(x,y)\Delta x + B(x,y)\Delta y + o(\rho),\quad (\rho \to 0).$$

现考虑 $\rho \to 0$ 的一种特殊形式：$\Delta x = 0,\quad \Delta y \to 0$,此时，

$$\Delta z|_{\substack{\Delta x=0\\ \Delta y\neq 0}} = f(x, y+\Delta y) - f(x,y) = B(x,y)\Delta y + o(\Delta y),\quad (\Delta y \to 0)$$

$$\Rightarrow \tfrac{f(x,y+\Delta y)-f(x,y)}{\Delta y} = B(x,y) + \tfrac{o(\Delta y)}{\Delta y},\quad (\Delta y \to 0)$$

$$\Rightarrow \lim_{\Delta y\to 0} \tfrac{f(x,y+\Delta y)-f(x,y)}{\Delta y} \text{ 存在且 } = B(x,y) \text{ ,即 } B(x,y) = \tfrac{\partial f(x,y)}{\partial y};$$

同理令$\Delta y = 0$，$\Delta x \to 0$,则有

$$A(x,y) = \frac{\partial f(x,y)}{\partial x}$$

$$\Delta z = A(x,y)\Delta x + B(x,y)\Delta y + o(\rho)\ ,$$

$$\Rightarrow \quad \boxed{\mathrm{d}z = A(x,y)\,\mathrm{d}x + B(x,y)\,\mathrm{d}y}$$

那么如何求出 $A(x,y)$，$B(x,y)$ 的表达式呢？

定理　如果 $z = f(x,y)$ 在 (x,y) 点可微，则在此处 $\dfrac{\partial z}{\partial x}$，$\dfrac{\partial z}{\partial y}$ 亦存在,并且 $\mathrm{d}z = \dfrac{\partial z}{\partial x}\mathrm{d}x + \dfrac{\partial z}{\partial y}\mathrm{d}y.$

证明：$z = f(x,y)$ 在 (x,y) 点可微 $\Rightarrow \exists\ A(x,y), B(x,y)\quad s.t.$

$$\Delta z = A(x,y)\Delta x + B(x,y)\Delta y + o(\rho),\quad (\rho \to 0).$$

现考虑 $\rho \to 0$ 的一种特殊形式：$\Delta x = 0,\quad \Delta y \to 0$,此时,

$$\Delta z|_{\substack{\Delta x = 0\\ \Delta y \neq 0}} = f(x, y+\Delta y) - f(x,y) = B(x,y)\Delta y + o(\Delta y),\quad (\Delta y \to 0)$$

$$\Rightarrow \frac{f(x,y+\Delta y)-f(x,y)}{\Delta y} = B(x,y) + \frac{o(\Delta y)}{\Delta y},\quad (\Delta y \to 0)$$

$\Rightarrow \lim\limits_{\Delta y \to 0} \dfrac{f(x,y+\Delta y)-f(x,y)}{\Delta y}$ 存在且 $= B(x,y)$,即 $B(x,y) = \dfrac{\partial f(x,y)}{\partial y}$;

同理令$\Delta y = 0,\quad \Delta x \to 0$,则有

$$A(x,y) = \frac{\partial f(x,y)}{\partial x}$$

$$\therefore\ \mathrm{d}z = A(x,y)\,\mathrm{d}x + B(x,y)\,\mathrm{d}y$$

$$= \frac{\partial f}{\partial x}\mathrm{d}x + \frac{\partial f}{\partial y}\mathrm{d}y$$

$$\Delta z = A(x,y)\Delta x + B(x,y)\Delta y + o(\rho)\ ,$$

$$\Rightarrow \quad \boxed{\mathrm{d}z = A(x,y)\,\mathrm{d}x + B(x,y)\,\mathrm{d}y}$$

定理

如果 $z = f(x,y)$ 在 (x,y) 点可微,则 $z = f(x,y)$ 在此点连续.

$$\Delta z = A(x,y)\Delta x + B(x,y)\Delta y + o(\rho)\ ,$$

$$\Rightarrow \quad \boxed{\mathrm{d}z = A(x,y)\,\mathrm{d}x + B(x,y)\,\mathrm{d}y}$$

定理

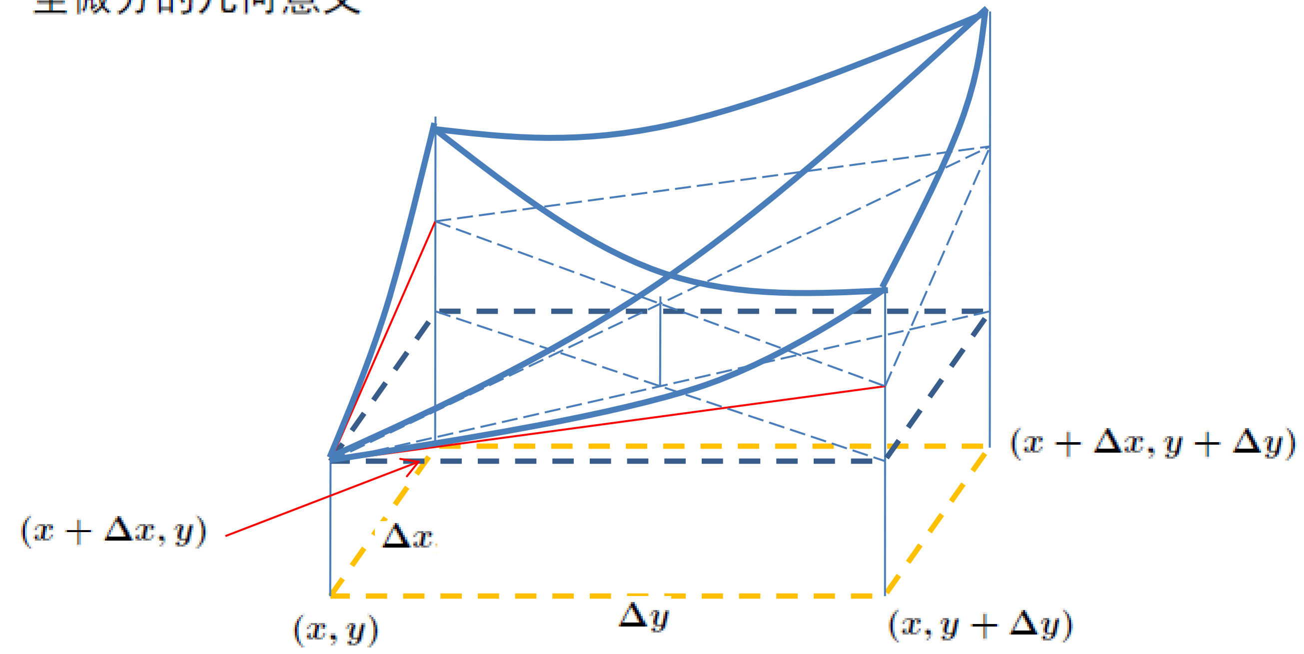
如果 $z = f(x,y)$ 在 (x,y) 点可微,则 $z = f(x,y)$ 在此点连续.

证明: $\rho \to 0, \Rightarrow \Delta z \to 0$

$$\Delta z = A(x,y)\Delta x + B(x,y)\Delta y + o(\rho)\ ,$$

$$\Rightarrow \quad \boxed{\mathrm{d}z = A(x,y)\,\mathrm{d}x + B(x,y)\,\mathrm{d}y} \qquad \boxed{\mathrm{d}z = \frac{\partial z}{\partial x}\mathrm{d}x + \frac{\partial z}{\partial y}\mathrm{d}y}$$

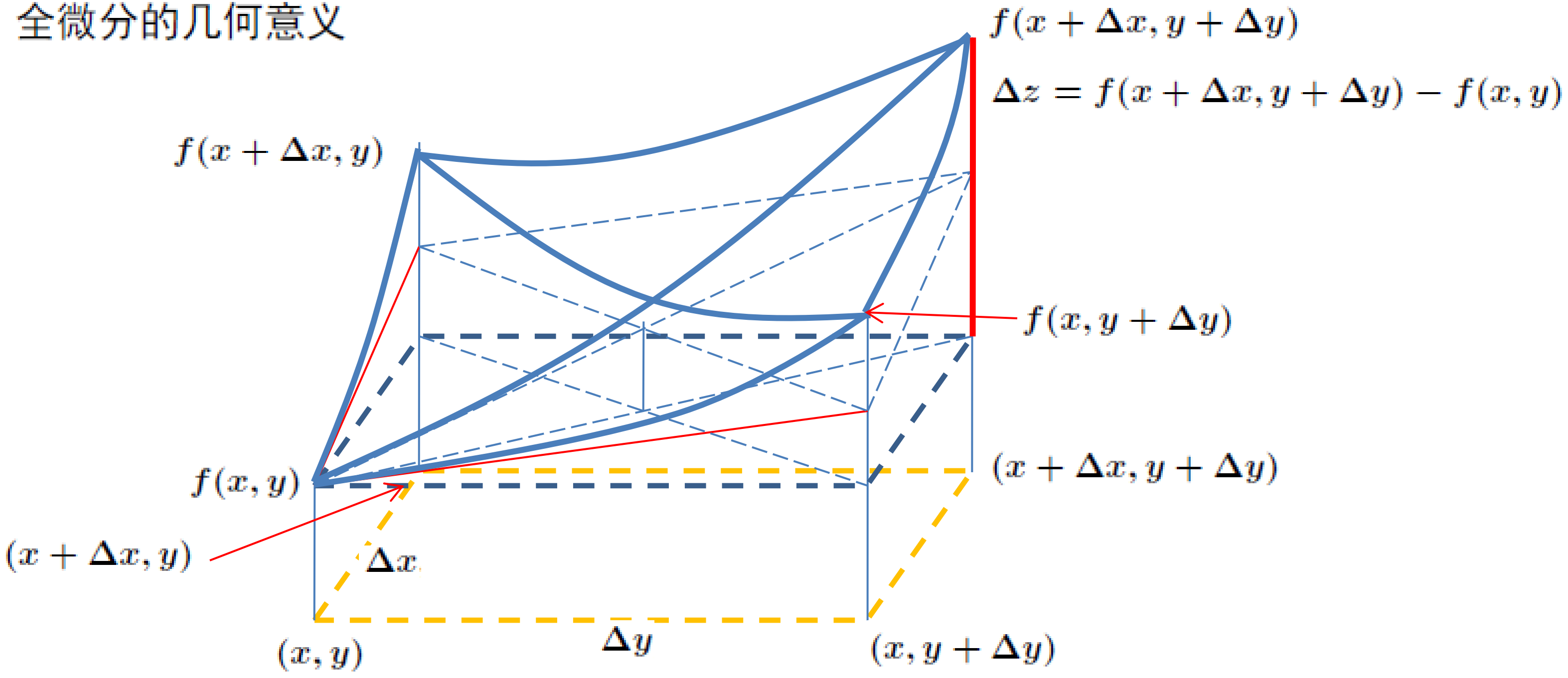
全微分的几何意义



$$\Delta z = A(x,y)\Delta x + B(x,y)\Delta y + o(\rho) \ ,$$

$$\Rightarrow \quad \boxed{\mathrm{d}z = A(x,y)\,\mathrm{d}x + B(x,y)\,\mathrm{d}y} \qquad \boxed{\mathrm{d}z = \frac{\partial z}{\partial x}\mathrm{d}x + \frac{\partial z}{\partial y}\mathrm{d}y}$$

全微分的几何意义

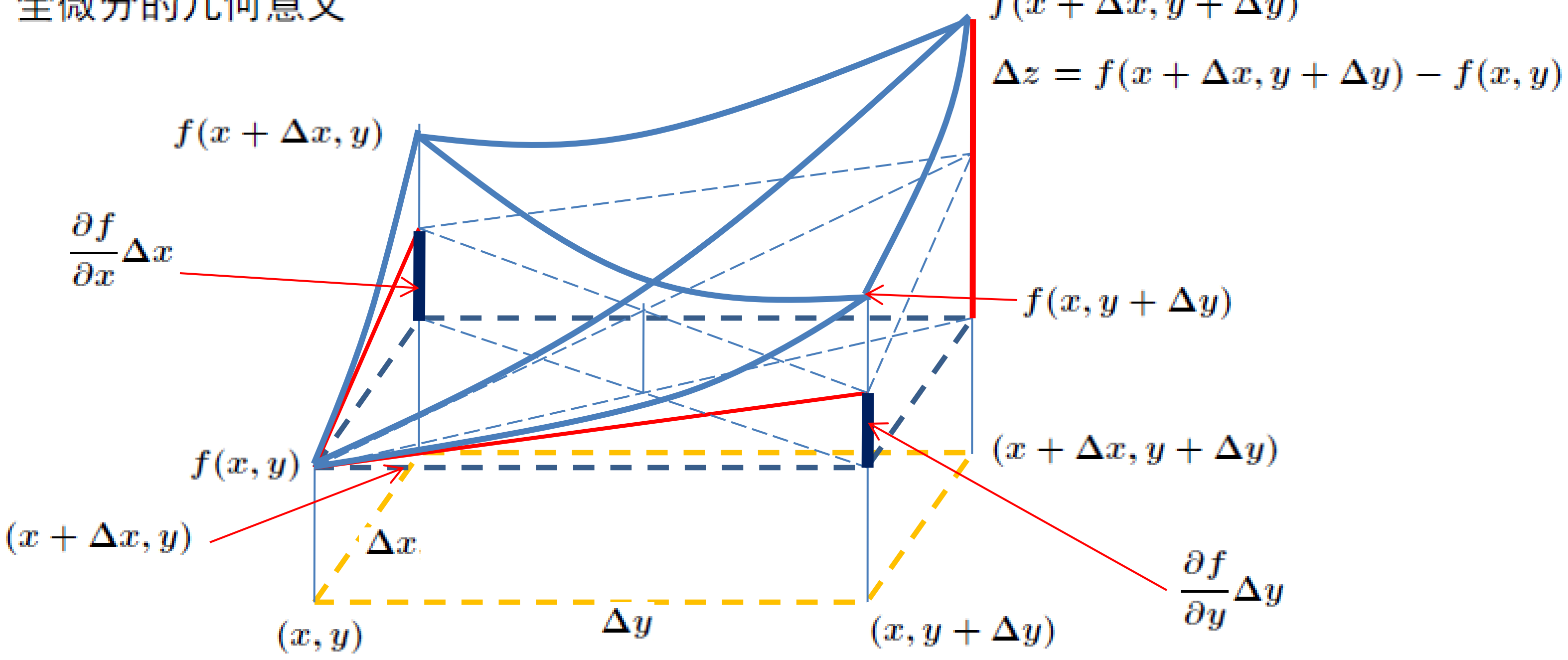


$$\Delta z = A(x,y)\Delta x + B(x,y)\Delta y + o(\rho)\ ,$$

$$\Rightarrow \boxed{\mathrm{d}z = A(x,y)\,\mathrm{d}x + B(x,y)\,\mathrm{d}y}$$

$$\boxed{\mathrm{d}z = \frac{\partial z}{\partial x}\mathrm{d}x + \frac{\partial z}{\partial y}\mathrm{d}y}$$

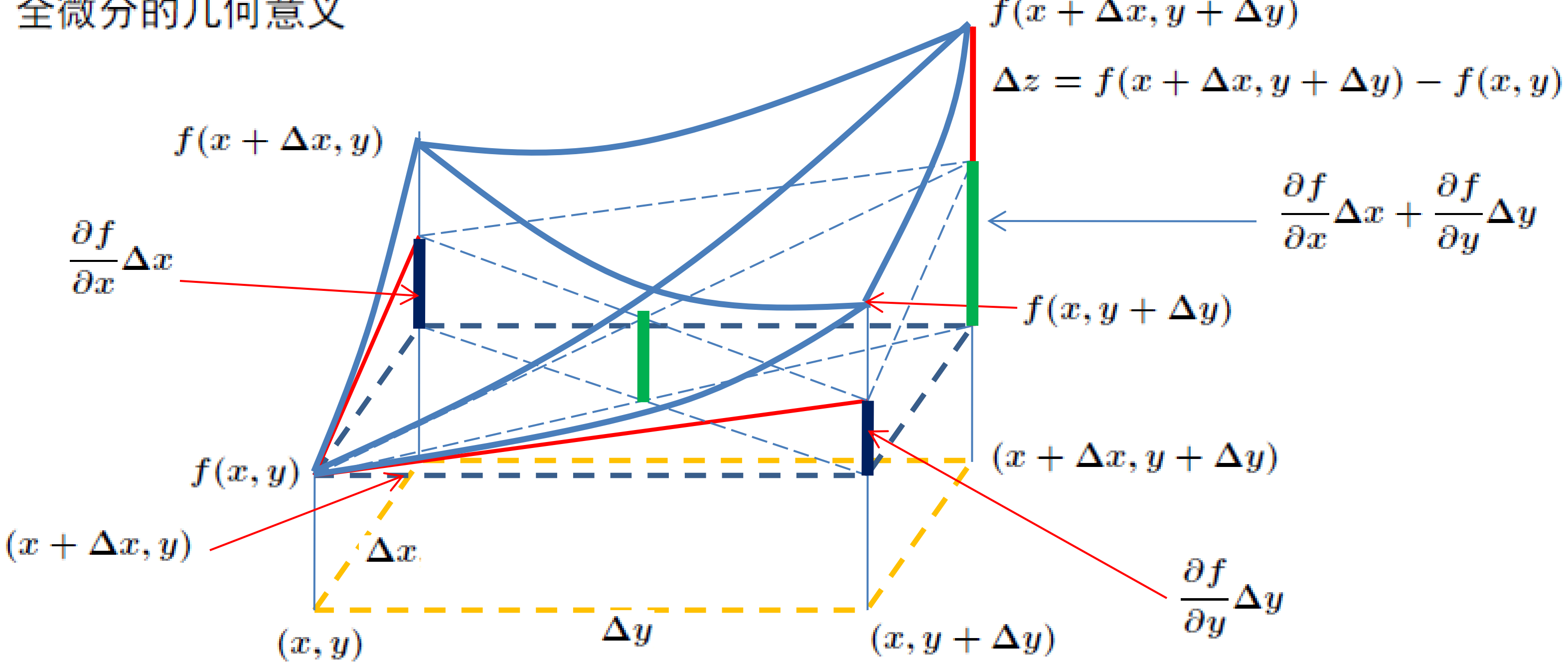
全微分的几何意义



$$\Delta z = A(x,y)\Delta x + B(x,y)\Delta y + o(\rho) \text{ ,}$$

$$\Rightarrow \quad \boxed{\mathrm{d}z = A(x,y)\,\mathrm{d}x + B(x,y)\,\mathrm{d}y} \qquad \boxed{\mathrm{d}z = \frac{\partial z}{\partial x}\mathrm{d}x + \frac{\partial z}{\partial y}\mathrm{d}y}$$

全微分的几何意义

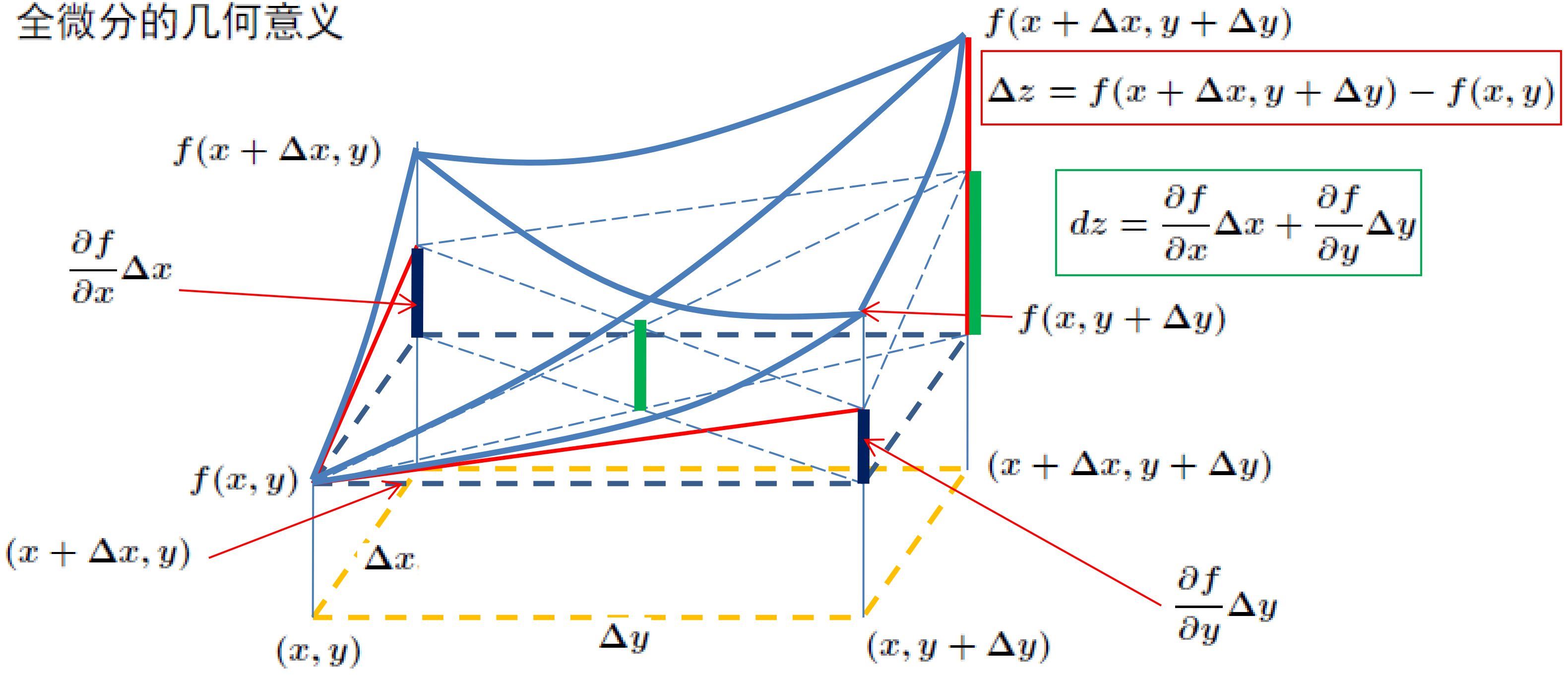


$$\Delta z = A(x,y)\Delta x + B(x,y)\Delta y + o(\rho)\ ,$$

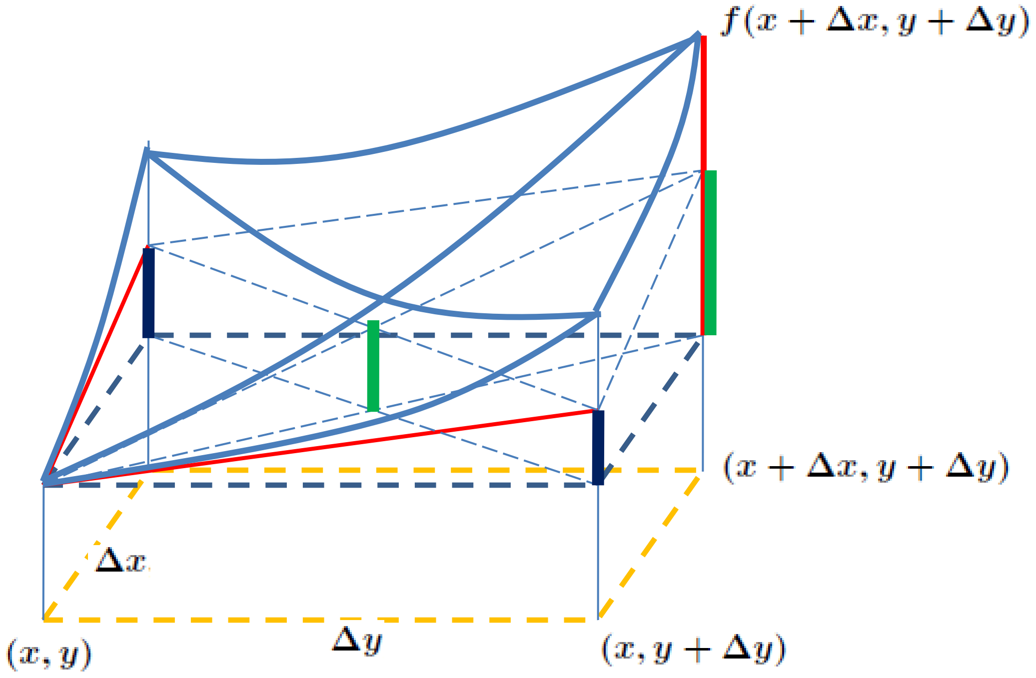
$$\Rightarrow \quad \boxed{dz = A(x,y)\,dx + B(x,y)\,dy}$$

$$\boxed{dz = \frac{\partial z}{\partial x}dx + \frac{\partial z}{\partial y}dy}$$

全微分的几何意义

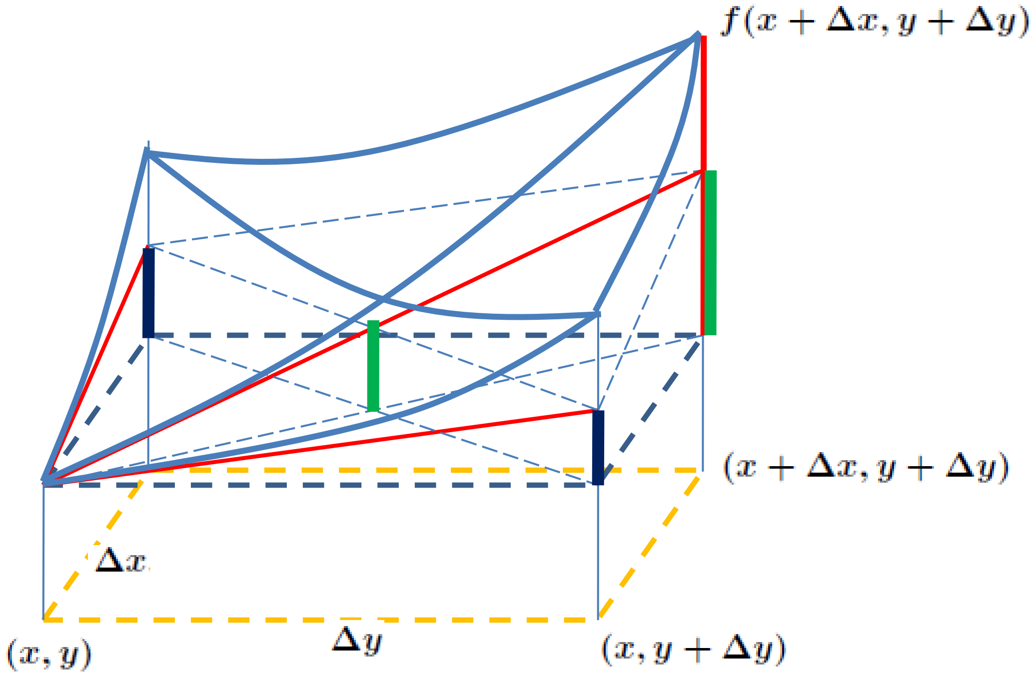


注　　偏导数存在只保证函数于两个坐标方向上的截痕的切线斜率存在



注　偏导数存在只保证函数于两个坐标方向上的截痕的切线斜率存在

可微则保证所有方向上的截痕的切线斜率存在

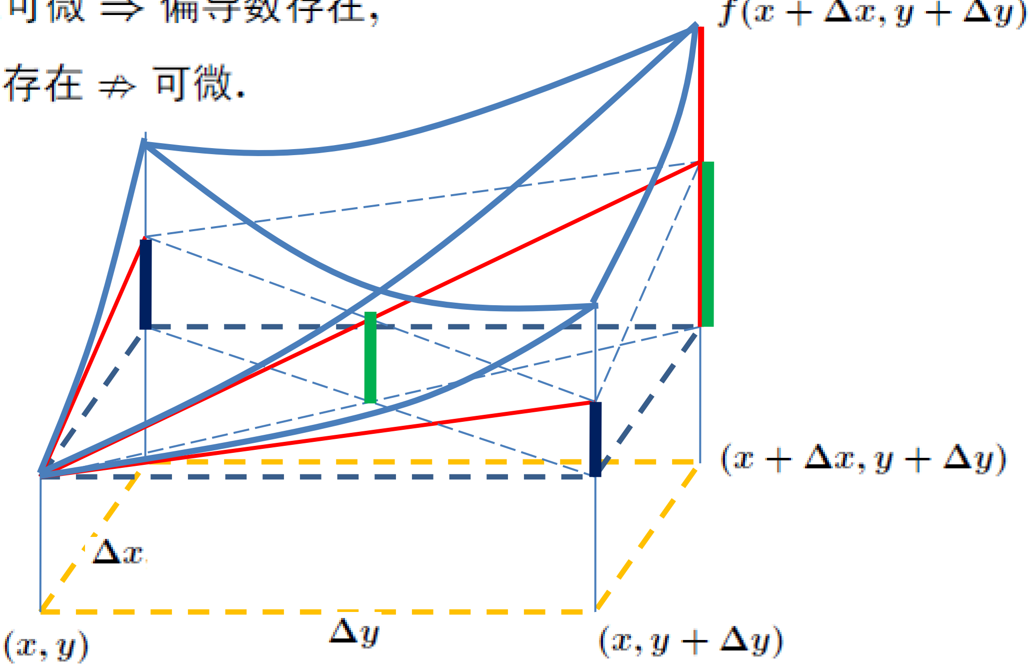


注　偏导数存在只保证函数于两个坐标方向上的截痕的切线斜率存在

可微则保证所有方向上的截痕的切线斜率存在

可微 $\Rightarrow$ 连续,可微 $\Rightarrow$ 偏导数存在,

但是两偏导数存在 $\nRightarrow$ 可微.



例

$$z = f(x,y) = \begin{cases} \frac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}}, & (x,y) \neq (0,0) \\ 0, & (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

例

$$z=f(x,y)=\begin{cases}\frac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}}, & (x,y)\neq(0,0)\\ 0, & (x,y)=(0,0)\end{cases}$$

$f(0,y)=f(x,0)=0\Rightarrow\dfrac{\partial f(0,0)}{\partial x}=\dfrac{\partial f(0,0)}{\partial y}=0$, 两个偏导数存在,

例

$$z=f(x,y)=\begin{cases}\frac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}}, & (x,y)\neq(0,0)\\ 0, & (x,y)=(0,0)\end{cases}$$

$f(0,y)=f(x,0)=0 \Rightarrow \dfrac{\partial f(0,0)}{\partial x}=\dfrac{\partial f(0,0)}{\partial y}=0$, 两个偏导数存在,

但函数在 $(0,0)$ 点不可微.

例

$$z=f(x,y)=\begin{cases}\frac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}}, & (x,y)\neq(0,0)\\ 0, & (x,y)=(0,0)\end{cases}$$

$f(0,y)=f(x,0)=0\Rightarrow\dfrac{\partial f(0,0)}{\partial x}=\dfrac{\partial f(0,0)}{\partial y}=0$, 两个偏导数存在,

但函数在 $(0,0)$ 点不可微.

因为 $\Delta z=\dfrac{\Delta x\Delta y}{\sqrt{(\Delta x)^2+(\Delta y)^2}}-0=\dfrac{\Delta x\Delta y}{\rho}$

$$\neq 0\Delta x+0\Delta y+o(\rho),\quad(\rho\to 0)$$

例

$$z=f(x,y)=\begin{cases}\frac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}}, & (x,y)\neq(0,0)\\ 0, & (x,y)=(0,0)\end{cases}$$

$f(0,y)=f(x,0)=0 \Rightarrow \dfrac{\partial f(0,0)}{\partial x}=\dfrac{\partial f(0,0)}{\partial y}=0$, 两个偏导数存在,

但函数在 $(0,0)$ 点不可微.

$$\text{因为 } \Delta z=\frac{\Delta x\Delta y}{\sqrt{(\Delta x)^2+(\Delta y)^2}}-0=\frac{\Delta x\Delta y}{\rho}$$

$$\neq 0\Delta x+0\Delta y+o(\rho),\quad (\rho\to 0)$$

这是因为 $\lim\limits_{\rho\to 0}\dfrac{\Delta x\Delta y}{\rho^2}=\lim\limits_{\substack{\Delta x\to 0\\ \Delta y\to 0}}\dfrac{\Delta x\Delta y}{(\Delta x)^2+(\Delta y)^2}$ 不存在

那么如何判别可微并求出全微分呢？

那么如何判别可微并求出全微分呢？

定理

若 $z=f(x,y)$ 的两个偏导数在点 (x,y) 处连续,则函数在 (x,y) 处可微.

(证略)

那么如何判别可微并求出全微分呢？

定理

若 $z = f(x, y)$ 的两个偏导数在点 (x, y) 处连续,则函数在 (x, y) 处可微.

(证略)

例 $\quad z = \arctan \dfrac{y}{x} \quad (x \neq 0)$

那么如何判别可微并求出全微分呢？

定理

若 $z=f(x,y)$ 的两个偏导数在点 (x,y) 处连续,则函数在 (x,y) 处可微.

(证略)

例 $z=\arctan\frac{y}{x}\quad(x\neq 0)$

前已求 $\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{-y}{x^2+y^2},\quad \frac{\partial z}{\partial y}=\frac{x}{x^2+y^2}$

那么如何判别可微并求出全微分呢？

定理

若 $z=f(x,y)$ 的两个偏导数在点 (x,y) 处连续,则函数在 (x,y) 处可微.

(证略)

例 $\quad z=\arctan\frac{y}{x} \quad (x\neq 0)$

前已求 $\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{-y}{x^2+y^2}, \quad \frac{\partial z}{\partial y}=\frac{x}{x^2+y^2}$

$$\therefore \mathrm{d}z=\frac{-y\,\mathrm{d}x+x\,\mathrm{d}y}{x^2+y^2} \quad (x\neq 0)$$