## 瞬时速度

- 微积分(Calculus) 包括微分(Differential Calculus)和积分(Integral Calculus).
- 求物体沿直线运动的瞬时速度. 若物体随时间变化的函数为$s(t)$, 求$t=t_0$时的瞬时速度. (应用: 测速仪)
  设$\Delta t \neq 0$, 从$t_0$到$t_0+\Delta t$($\Delta t>0$时) 或$t_0+\Delta t$到$t_0$($\Delta t<0$时)的平均速度为

$$\bar{v}_{\Delta t}=\frac{\Delta s}{\Delta t}=\frac{s(t_0+\Delta t)-s(t_0)}{\Delta t}=\frac{s(t_0)-s(t_0+\Delta t)}{-\Delta t}$$

则有$v(t_0)=\lim\limits_{\Delta t\to 0} v_{\Delta t}$. $t=t_0$时的瞬时加速度

$$a(t_0)=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{v(t_0+\Delta t)-v(t_0)}{\Delta t}.$$

# 瞬时速度

- 微积分(Calculus) 包括微分(Differential Calculus)和积分(Integral Calculus).
- 求物体沿直线运动的瞬时速度. 若物体随时间变化的函数为$s(t)$, 求$t = t_0$时的瞬时速度. (应用: 测速仪)

设$\Delta t \neq 0$, 从$t_0$到$t_0 + \Delta t(\Delta t > 0$时) 或$t_0 + \Delta t$到$t_0(\Delta t < 0$时)的平均速度为

$$\bar{v}_{\Delta t} = \frac{\Delta s}{\Delta t} = \frac{s(t_0 + \Delta t) - s(t_0)}{\Delta t} = \frac{s(t_0) - s(t_0 + \Delta t)}{-\Delta t}$$

则有$v(t_0) = \lim\limits_{\Delta t \to 0} v_{\Delta t}$. $t = t_0$时的瞬时加速度

$$a(t_0) = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{v(t_0 + \Delta t) - v(t_0)}{\Delta t}.$$

# 瞬时速度

- 微积分(Calculus) 包括微分(Differential Calculus)和积分(Integral Calculus).
- 求物体沿直线运动的瞬时速度. 若物体随时间变化的函数为$s(t)$, 求$t = t_0$时的瞬时速度. (应用: 测速仪)
  设$\Delta t \neq 0$, 从$t_0$到$t_0 + \Delta t(\Delta t > 0$时) 或$t_0 + \Delta t$到$t_0(\Delta t < 0$时)的平均速度为

$$\bar{v}_{\Delta t} = \frac{\Delta s}{\Delta t} = \frac{s(t_0 + \Delta t) - s(t_0)}{\Delta t} = \frac{s(t_0) - s(t_0 + \Delta t)}{-\Delta t}$$

则有$v(t_0) = \lim\limits_{\Delta t \to 0} v_{\Delta t}$. $t = t_0$时的瞬时加速度

$$a(t_0) = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{v(t_0 + \Delta t) - v(t_0)}{\Delta t}.$$

# 瞬时速度–例

- 例： $S(t)=t^n$,

$$v(t_0)=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{(t_0+\Delta t)^n-t_0^n}{\Delta t}=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{n\Delta t\cdot t_0^{n-1}+o(\Delta t)}{\Delta t}=nt_0^{n-1}$$

- 例： 自由落体运动:$s(t)=\frac{1}{2}gt^2$, $v(t)=gt$, 瞬时加速度

$$a(t)=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{g(t+\Delta t)-gt}{\Delta t}=g.$$

# 瞬时速度–例

- 例： $S(t) = t^n$,

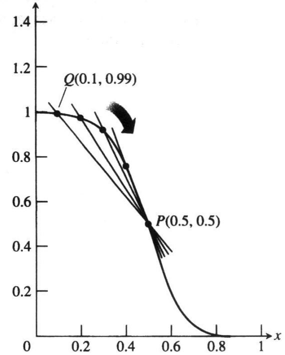
$$v(t_0) = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{(t_0 + \Delta t)^n - t_0^n}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{n\Delta t \cdot t_0^{n-1} + o(\Delta t)}{\Delta t} = nt_0^{n-1}$$

- 例： 自由落体运动:$s(t) = \frac{1}{2}gt^2$, $v(t) = gt$, 瞬时加速度

$$a(t) = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{g(t + \Delta t) - gt}{\Delta t} = g.$$

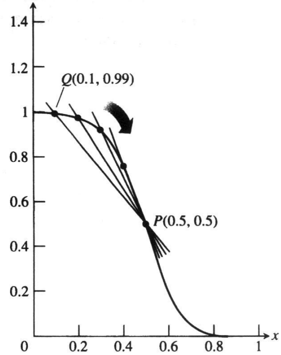
# 曲线的切线1

- P和Q是曲线上邻近的两点，P是定点，当Q点沿着曲线无限地接近P点时，割线PQ的极限位置叫做曲线在点P的切线，P点叫做切点.
- 平面几何中，将和圆只有一个公共交点的直线叫做圆的切线．这种定义不适用于一般的曲线；切线和曲线可以有不止一个交点；相反，和曲线只有一个交点的直线不一定是曲线的切线.
- 17世纪，为了设计透镜，需要求切线．牛顿发明了反设式望远镜.



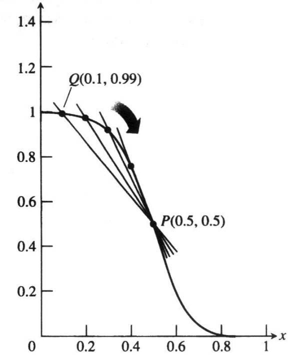
# 曲线的切线1

- P和Q是曲线上邻近的两点，P是定点，当Q点沿着曲线无限地接近P点时，割线PQ的极限位置叫做曲线在点P的切线，P点叫做切点.
- 平面几何中，将和圆只有一个公共交点的直线叫做圆的切线．这种定义不适用于一般的曲线；切线和曲线可以有不止一个交点；相反，和曲线只有一个交点的直线不一定是曲线的切线.
- 17世纪，为了设计透镜，需要求切线．牛顿发明了反设式望远镜.



# 曲线的切线1

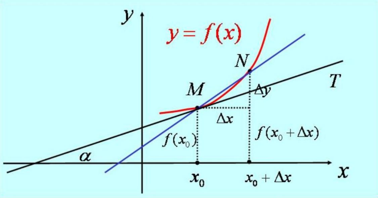
- P和Q是曲线上邻近的两点，P是定点，当Q点沿着曲线无限地接近P点时，割线PQ的极限位置叫做曲线在点P的切线，P点叫做切点.
- 平面几何中，将和圆只有一个公共交点的直线叫做圆的切线．这种定义不适用于一般的曲线；切线和曲线可以有不止一个交点；相反，和曲线只有一个交点的直线不一定是曲线的切线.
- 17世纪，为了设计透镜，需要求切线. 牛顿发明了反设式望远镜.



# 曲线的切线2

- 求曲线$y=f(x)$在一点$(x_0,f(x_0))$处的切线，只要求出该切线的斜率即可. $\Delta x\neq 0$，过$(x_0,f(x_0))$和$(x_0+\Delta x,f(x_0+\Delta x))$两点的斜率为

$$\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}$$



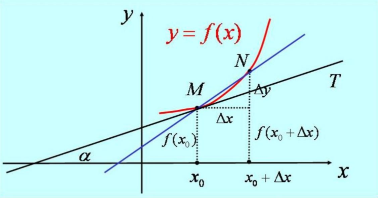

若切线与$x$轴不垂直，则切线斜率为$k=\tan\alpha=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}$.

- 例：$y=y_0+kx$的斜率为$k$.

# 曲线的切线2

- 求曲线$y=f(x)$在一点$(x_0,f(x_0))$处的切线，只要求出该切线的斜率即可. $\Delta x\neq 0$，过$(x_0,f(x_0))$和$(x_0+\Delta x,f(x_0+\Delta x))$两点的斜率为

$$\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}$$




若切线与$x$轴不垂直，则切线斜率为$k=\tan\alpha=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}$.

- 例：$y=y_0+kx$的斜率为$k$.

# 导数（微商）的定义

- 设函数$y = f(x)$在$x_0$的附近$(x_0 - r, x_0 + r)$上有定义，若极限$\lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}$存在，则称$f(x)$在$x_0$处可导，称极限$\lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}$为$f(x)$在$x_0$处的导数(或微商). 记着$f'(x_0)$或$\frac{df}{dx}|_{x=x_0}$. 若$(a, b)$上的函数$f(x)$在$(a, b)$上处处可导，则$f'(x)$是$(a, b)$上的函数, 称为$f(x)$的导函数.
- 若$f(x)$在$[x_0, b)$上有定义，可定义$x_0$点的右导数定义为

$$f'(x_0 + 0) = \lim_{\Delta x \to 0+0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}$$

左导数类似定义.

# 导数（微商）的定义

- 设函数$y = f(x)$在$x_0$的附近$(x_0 - r, x_0 + r)$上有定义，若极限$\lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}$存在，则称$f(x)$在$x_0$处可导，称极限$\lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}$为$f(x)$在$x_0$处的导数(或微商). 记着$f'(x_0)$或$\frac{df}{dx}|_{x=x_0}$. 若$(a,b)$上的函数$f(x)$在$(a,b)$上处处可导，则$f'(x)$是$(a,b)$上的函数, 称为$f(x)$的导函数.
- 若$f(x)$在$[x_0, b)$上有定义，可定义$x_0$点的右导数定义为

$$f'(x_0+0) = \lim_{\Delta x\to 0+0}\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}$$

左导数类似定义.

# 导数定义的注记

- $f'(x_0)$存在的充分必要条件是左右导数$f'(x_0 \pm 0)$均存在且相等.
- 注：$f'(x_0)$是$f(x_0)$在$x_0$出的变化率. 当$f'(x_0)$越大，$f(x_0)$在$x_0$变化越快，它的图像在$(x_0, f(x_0))$处的切线越陡.
- 注：导函数的右极限 $\lim\limits_{x \to x_0+0} f'(x)$和右导数$f'(x_0+0)$是两个不同的概念. 事实上右导数存在时，导函数的右极限不一定存在.

  例：$f(x) = \begin{cases} x^2 \sin \frac{1}{x}, & x \neq 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases}$, $f'(0) = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta x^2 \sin \frac{1}{\Delta x} - 0}{\Delta x} = 0$, 因此$f'(0+0) = 0$. 但$x \neq 0$时，$f'(x) = 2x \sin \frac{1}{x} - \cos \frac{1}{x}$, $\lim\limits_{x \to 0+0} f'(x)$ 不存在.

## 导数定义的注记

- $f'(x_0)$存在的充分必要条件是左右导数$f'(x_0\pm 0)$均存在且相等.
- 注：$f'(x_0)$是$f(x_0)$在$x_0$出的变化率. 当$f'(x_0)$越大，$f(x_0)$在$x_0$变化越快，它的图像在$(x_0,f(x_0))$处的切线越陡.
- 注：导函数的右极限$\lim\limits_{x\to x_0+0} f'(x)$和右导数$f'(x_0+0)$是两个不同的概念. 事实上右导数存在时，导函数的右极限不一定存在.

例：$f(x)=\begin{cases} x^2\sin\frac{1}{x}, & x\neq 0\\ 0, & x=0\end{cases}$, $f'(0)=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta x^2\sin\frac{1}{\Delta x}-0}{\Delta x}=0$, 因此$f'(0+0)=0$. 但$x\neq 0$时，$f'(x)=2x\sin\frac{1}{x}-\cos\frac{1}{x}$, $\lim\limits_{x\to 0+0} f'(x)$ 不存在.

# 导数定义的注记

- $f'(x_0)$存在的充分必要条件是左右导数$f'(x_0 \pm 0)$均存在且相等.
- 注：$f'(x_0)$是$f(x_0)$在$x_0$出的变化率. 当$f'(x_0)$越大，$f(x_0)$在$x_0$变化越快，它的图像在$(x_0, f(x_0))$处的切线越陡.
- 注：导函数的右极限$\lim\limits_{x \to x_0+0} f'(x)$和右导数$f'(x_0+0)$是两个不同的概念. 事实上右导数存在时，导函数的右极限不一定存在.

例：$f(x) = \begin{cases} x^2 \sin \frac{1}{x}, & x \neq 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases}$, $f'(0) = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta x^2 \sin \frac{1}{\Delta x} - 0}{\Delta x} = 0$, 因此$f'(0+0) = 0$. 但$x \neq 0$时，$f'(x) = 2x \sin \frac{1}{x} - \cos \frac{1}{x}$, $\lim\limits_{x \to 0+0} f'(x)$ 不存在.

# 导数定义的注记

- $f'(x_0)$存在的充分必要条件是左右导数$f'(x_0\pm 0)$均存在且相等.
- 注：$f'(x_0)$是$f(x_0)$在$x_0$出的变化率. 当$f'(x_0)$越大，$f(x_0)$在$x_0$变化越快，它的图像在$(x_0, f(x_0))$处的切线越陡.
- 注：导函数的右极限$\lim\limits_{x\to x_0+0} f'(x)$和右导数$f'(x_0+0)$是两个不同的概念. 事实上右导数存在时，导函数的右极限不一定存在.

  例：$f(x)=\begin{cases} x^2\sin\frac{1}{x}, & x\neq 0\\ 0, & x=0\end{cases}$, $f'(0)=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta x^2\sin\frac{1}{\Delta x}-0}{\Delta x}=0$, 因此$f'(0+0)=0$. 但$x\neq 0$时，$f'(x)=2x\sin\frac{1}{x}-\cos\frac{1}{x}$, $\lim\limits_{x\to 0+0} f'(x)$ 不存在.

## 用导数定义求导数1

- $y = |x|$,

$$f'(0+0) = \lim_{\Delta x \to 0+0} \frac{f(0+\Delta x) - f(0)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0+0} \frac{\Delta x - 0}{\Delta x} = 1$$

$$f'(0-0) = \lim_{\Delta x \to 0-0} \frac{f(0+\Delta x) - f(0)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0-0} \frac{-\Delta x - 0}{\Delta x} = -1$$

- $y = |x|^3$, $f'(0) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{|0+\Delta x|^3 - 0}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{|\Delta x|^3}{\Delta x} = 0.$
- $y = x^{\frac{3}{2}}$, $f'(0+0) = \lim_{\Delta x \to 0+0} \frac{(0+\Delta x)^{\frac{3}{2}} - 0}{\Delta x} = 0.$
- $y = x^2 D(x)$，其中$D(x)$是Dirichlet函数.
  $f'(0) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{(\Delta x)^2 D(x)}{\Delta x} = 0.$

# 用导数定义求导数1

- $y=|x|$,

$$f'(0+0)=\lim_{\Delta x\to 0+0}\frac{f(0+\Delta x)-f(0)}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0+0}\frac{\Delta x-0}{\Delta x}=1$$

$$f'(0-0)=\lim_{\Delta x\to 0-0}\frac{f(0+\Delta x)-f(0)}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0-0}\frac{-\Delta x-0}{\Delta x}=-1$$

- $y=|x|^3$, $f'(0)=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{|0+\Delta x|^3-0}{\Delta x}=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{|\Delta x|^3}{\Delta x}=0.$
- $y=x^{\frac{3}{2}}$, $f'(0+0)=\lim\limits_{\Delta x\to 0+0}\frac{(0+\Delta x)^{\frac{3}{2}}-0}{\Delta x}=0.$
- $y=x^2D(x)$，其中$D(x)$是Dirichlet函数.
  $f'(0)=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{(\Delta x)^2D(x)}{\Delta x}=0.$

# 用导数定义求导数1

- $y=|x|$,

$$f'(0+0)=\lim_{\Delta x\to 0+0}\frac{f(0+\Delta x)-f(0)}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0+0}\frac{\Delta x-0}{\Delta x}=1$$

$$f'(0-0)=\lim_{\Delta x\to 0-0}\frac{f(0+\Delta x)-f(0)}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0-0}\frac{-\Delta x-0}{\Delta x}=-1$$

- $y=|x|^3$, $f'(0)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{|0+\Delta x|^3-0}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{|\Delta x|^3}{\Delta x}=0.$
- $y=x^{\frac{3}{2}}$, $f'(0+0)=\lim_{\Delta x\to 0+0}\frac{(0+\Delta x)^{\frac{3}{2}}-0}{\Delta x}=0.$
- $y=x^2D(x)$，其中$D(x)$是Dirichlet函数.
  $f'(0)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{(\Delta x)^2D(x)}{\Delta x}=0.$

# 用导数定义求导数1

- $y=|x|$,

$$f'(0+0)=\lim_{\Delta x\to 0+0}\frac{f(0+\Delta x)-f(0)}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0+0}\frac{\Delta x-0}{\Delta x}=1$$

$$f'(0-0)=\lim_{\Delta x\to 0-0}\frac{f(0+\Delta x)-f(0)}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0-0}\frac{-\Delta x-0}{\Delta x}=-1$$

- $y=|x|^3$, $f'(0)=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{|0+\Delta x|^3-0}{\Delta x}=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{|\Delta x|^3}{\Delta x}=0.$
- $y=x^{\frac{3}{2}}$, $f'(0+0)=\lim\limits_{\Delta x\to 0+0}\frac{(0+\Delta x)^{\frac{3}{2}}-0}{\Delta x}=0.$
- $y=x^2D(x)$, 其中$D(x)$是Dirichlet函数.
  $f'(0)=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{(\Delta x)^2D(x)}{\Delta x}=0.$

# 用导数定义求导数2

- $y = x^{\frac{1}{3}}$, $f'(0) = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{(0+\Delta x)^{\frac{1}{3}} - 0}{\Delta x}$. 极限不存在.
- $y = xD(x)$, 其中$D(x)$是Dirichlet函数.

$$f'(0) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(0+\Delta x) - f(0)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta x D(x)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} D(x),$$

$f(x)$在0点不可导.

- $f(x) = \begin{cases} x \sin \frac{1}{x}, & x \neq 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases}$,

$$f'(0) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta x \sin \frac{1}{\Delta x} - 0}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \sin \frac{1}{\Delta x},$$

极限不存在.

# 用导数定义求导数2

- $y = x^{\frac{1}{3}}$，$f'(0) = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{(0+\Delta x)^{\frac{1}{3}} - 0}{\Delta x}$. 极限不存在.
- $y = xD(x)$，其中$D(x)$是Dirichlet函数.

$$f'(0) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(0+\Delta x) - f(0)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta x D(x)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} D(x),$$

$f(x)$在0点不可导.

- $f(x) = \begin{cases} x \sin \frac{1}{x}, & x \neq 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases}$,

$$f'(0) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta x \sin \frac{1}{\Delta x} - 0}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \sin \frac{1}{\Delta x},$$

极限不存在.

## 用导数定义求导数2

- $y = x^{\frac{1}{3}}$, $f'(0) = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{(0+\Delta x)^{\frac{1}{3}} - 0}{\Delta x}$. 极限不存在.
- $y = xD(x)$, 其中$D(x)$是Dirichlet函数.

$$f'(0) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(0+\Delta x) - f(0)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta x D(x)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} D(x),$$

$f(x)$在0点不可导.
- $f(x) = \begin{cases} x \sin \frac{1}{x}, & x \neq 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases}$,

$$f'(0) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta x \sin \frac{1}{\Delta x} - 0}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \sin \frac{1}{\Delta x},$$

极限不存在.

# 基本初等函数的导数1

- $y \equiv C$, $f'(x) = 0$.
- $(\sin x)' = \cos x$. $(\cos x)' = -\sin x$
  证明:
  $$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\sin(x+\Delta x)-\sin x}{\Delta x} = \lim_{\Delta x\to 0}\frac{2\sin\frac{\Delta x}{2}\cos(x+\frac{\Delta x}{2})}{\Delta x} = \cos x$$
- $m$是自然数, $(x^m) = mx^{m-1}$.
  证明:
  $$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{(x+\Delta x)^m - x^m}{\Delta x} = \lim_{\Delta x\to 0}\frac{mx^{m-1}\Delta x + o(\Delta x)}{\Delta x} = m{\cdot}x^{m-1}.$$

# 基本初等函数的导数1

- $y \equiv C$, $f'(x) = 0$.
- $(\sin x)' = \cos x$. $(\cos x)' = -\sin x$
  证明:
  $$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\sin(x+\Delta x) - \sin x}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{2\sin\frac{\Delta x}{2}\cos(x+\frac{\Delta x}{2})}{\Delta x} = \cos x$$
- $m$是自然数, $(x^m) = mx^{m-1}$.
  证明:
  $$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{(x+\Delta x)^m - x^m}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{mx^{m-1}\Delta x + o(\Delta x)}{\Delta x} = m \cdot x^{m-1}.$$

# 基本初等函数的导数1

- $y \equiv C$, $f'(x) = 0$.
- $(\sin x)' = \cos x$. $(\cos x)' = -\sin x$
  证明:
  $$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\sin(x+\Delta x) - \sin x}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{2\sin\frac{\Delta x}{2}\cos(x+\frac{\Delta x}{2})}{\Delta x} = \cos x$$
- $m$是自然数，$(x^m) = mx^{m-1}$.
  证明:
  $$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{(x+\Delta x)^m - x^m}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{mx^{m-1}\Delta x + o(\Delta x)}{\Delta x} = m{\cdot}x^{m-1}.$$

# 基本初等函数的导数2

- $(e^x)' = e^x$. $(a^x)' = a^x \ln a$
  证明：
  $$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{e^{x+\Delta x} - e^x}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} e^x \frac{e^{\Delta x} - 1}{\Delta x} = e^x$$
  $$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{a^{x+\Delta x} - a^x}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} a^x \frac{e^{\ln a \Delta x} - 1}{\Delta x} = a^x \ln a$$
- $(\ln x)' = \frac{1}{x}$
  证明：
  $$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\ln(x+\Delta x) - \ln x}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\ln(1 + \frac{\Delta x}{x})}{\Delta x} = \frac{1}{x}$$

# 基本初等函数的导数2

- $(e^x)' = e^x$. $(a^x)' = a^x \ln a$

  证明：

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{e^{x+\Delta x} - e^x}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} e^x \frac{e^{\Delta x} - 1}{\Delta x} = e^x$$

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{a^{x+\Delta x} - a^x}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} a^x \frac{e^{\ln a \Delta x} - 1}{\Delta x} = a^x \ln a$$

- $(\ln x)' = \frac{1}{x}$

  证明：

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\ln(x + \Delta x) - \ln x}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\ln(1 + \frac{\Delta x}{x})}{\Delta x} = \frac{1}{x}$$

# 可导与连续之间的关系

- $f(x)$在$x_0$处可导，则$f$在$x_0$处连续.
  证明：若$f(x)$在$x_0$处可导，则有$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}$存在，极限为$f'(x_0)$. 则存在$\delta$，使得当$|\Delta x|<\delta$时，
  $$|f(x_0+\Delta x)-f(x_0)|\le(|f'(x_0)|+1)|\Delta x|\to 0,$$
  因此有$\lim_{x\to x_0}f(x)=\lim_{\Delta x\to 0}f(x_0+\Delta x)=f(x_0)$.
- 若$f(x)$在$x_0$处连续，$f$在$x_0$处不一定可导.
  例：$y=|x|$, $x^{\frac{1}{3}}$, $x\sin\frac{1}{x}$
- 注：初等函数在定义域内可以有不可导点. 如$y=|x|$, $x^{\frac{1}{3}}$.

## 可导与连续之间的关系

- $f(x)$在$x_0$处可导，则$f$在$x_0$处连续.
  证明：若$f(x)$在$x_0$处可导，则有$\lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}$存在，极限为$f'(x_0)$. 则存在$\delta$，使得当$|\Delta x| < \delta$时，
  $$|f(x_0+\Delta x) - f(x_0)| \leq (|f'(x_0)| + 1)|\Delta x| \to 0,$$
  因此有$\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = \lim\limits_{\Delta x \to 0} f(x_0 + \Delta x) = f(x_0)$.
- 若$f(x)$在$x_0$处连续，$f$在$x_0$处不一定可导.
  例：$y = |x|, x^{\frac{1}{3}}, x \sin \frac{1}{x}$
- 注：初等函数在定义域内可以有不可导点. 如$y = |x|, x^{\frac{1}{3}}$.

# 可导与连续之间的关系

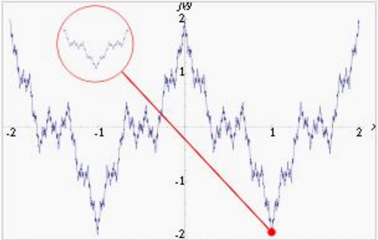
- $f(x)$在$x_0$处可导，则$f$在$x_0$处连续.
  证明：若$f(x)$在$x_0$处可导，则有$\lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}$存在，极限为$f'(x_0)$. 则存在$\delta$，使得当$|\Delta x|<\delta$时，
  $$|f(x_0+\Delta x)-f(x_0)|\le(|f'(x_0)|+1)|\Delta x|\to 0,$$
  因此有$\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=\lim\limits_{\Delta x\to 0}f(x_0+\Delta x)=f(x_0)$.
- 若$f(x)$在$x_0$处连续，$f$在$x_0$处不一定可导.
  例：$y=|x|$, $x^{\frac{1}{3}}$, $x\sin\frac{1}{x}$
- 注：初等函数在定义域内可以有不可导点. 如$y=|x|$, $x^{\frac{1}{3}}$.

# 可导与连续之间的关系

- $f(x)$在$x_0$处可导，则$f$在$x_0$处连续.
  证明：若$f(x)$在$x_0$处可导，则有$\lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}$存在，极限为$f'(x_0)$. 则存在$\delta$，使得当$|\Delta x|<\delta$时，
  $$|f(x_0+\Delta x)-f(x_0)|\leq(|f'(x_0)|+1)|\Delta x|\to 0,$$
  因此有$\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=\lim\limits_{\Delta x\to 0}f(x_0+\Delta x)=f(x_0)$.
- 若$f(x)$在$x_0$处连续，$f$在$x_0$处不一定可导.
  例：$y=|x|$, $x^{\frac{1}{3}}$, $x\sin\frac{1}{x}$
- 注：初等函数在定义域内可以有不可导点. 如$y=|x|$, $x^{\frac{1}{3}}$.

# Weierstrass函数

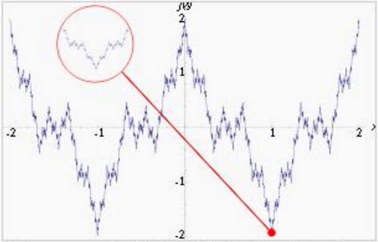
- Weierstrass函数：$b$为奇数，$0 < a < 1$, $ab > 1 + \frac{3\pi}{2}$. 则函数$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a^n \cos(\pi b^n x)$处处连续但处处不可导.
- 一般人会直觉上认为连续的函数必然是近乎可导的。即使不可导，不可导的点也必然只占整体的一小部分。早期的许多数学家，包括高斯，都曾经假定连续函数不可导的部分是有限或可数的。这可能是因为直观上想象一个连续但在不可数个点上不可导的函数是很困难的事。




区间 [−2, 2]上的魏尔斯特拉斯函数。这个函数具有分形特性：某些部分会和整体自相似。

# Weierstrass函数

- Weierstrass函数：$b$为奇数，$0 < a < 1$, $ab > 1 + \frac{3\pi}{2}$. 则函数$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a^n \cos(\pi b^n x)$处处连续但处处不可导.
- 一般人会直觉上认为连续的函数必然是近乎可导的。即使不可导，不可导的点也必然只占整体的一小部分。早期的许多数学家，包括高斯，都曾经假定连续函数不可导的部分是有限或可数的。这可能是因为直观上想象一个连续但在不可数个点上不可导的函数是很困难的事。




区间 [−2, 2]上的魏尔斯特拉斯函数。这个函数具有分形特性：某些部分会和整体自相似。

# 微商的四则运算1

设$f(x)$, $g(x)$在$(a,b)$上可导，则有

- $(f(x)\pm g(x))' = f'(x)\pm g'(x)$, $(cf(x))' = cf'(x)$.

  证明:

$$\frac{\Delta(f+g)}{\Delta x} = \frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x} + \frac{g(x+\Delta x)-g(x)}{\Delta x}.$$

- $(f(x)\cdot g(x))' = f'(x)g(x)+f(x)g'(x)$.

  证明:

$$\frac{\Delta(fg)}{\Delta x} = \frac{f(x+\Delta x)g(x+\Delta x)-f(x)g(x)}{\Delta}$$

$$= \frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}g(x+\Delta x)+f(x)\frac{g(x+\Delta x)-g(x)}{\Delta x}$$

$$\to f'(x)g(x)+f(x)g'(x)$$

# 微商的四则运算1

设$f(x)$, $g(x)$在$(a,b)$上可导，则有

- $(f(x)\pm g(x))' = f'(x)\pm g'(x)$, $(cf(x))' = cf'(x)$.

  证明：

$$\frac{\Delta(f+g)}{\Delta x} = \frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x} + \frac{g(x+\Delta x)-g(x)}{\Delta x}.$$

- $(f(x)\cdot g(x))' = f'(x)g(x) + f(x)g'(x)$.

  证明：

$$\begin{aligned}\frac{\Delta(fg)}{\Delta x} &= \frac{f(x+\Delta x)g(x+\Delta x)-f(x)g(x)}{\Delta} \\ &= \frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}g(x+\Delta x) + f(x)\frac{g(x+\Delta x)-g(x)}{\Delta x} \\ &\to f'(x)g(x)+f(x)g'(x)\end{aligned}$$

# 微商的四则运算2

设$f(x)$, $g(x)$在$(a,b)$上可导，则有

- $g(x)\neq 0$, $(\frac{f(x)}{g(x)})'=\frac{f'(x)g(x)-f(x)g'(x)}{g(x)^2}$.

  证明：

$$\frac{\Delta(\frac{f}{g})}{\Delta x}=\frac{\frac{f(x+\Delta x)}{g(x+\Delta x)}-\frac{f(x)}{g(x)}}{\Delta x}$$

$$=\frac{\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}g(x)-f(x)\frac{g(x+\Delta)-g(x)}{\Delta x}}{g(x+\Delta x)g(x)}$$

$$\to\frac{f'(x)g(x)-f(x)g'(x)}{g(x)^2}$$

# 利用四则运算求导数

- $(\tan x)' = \frac{\cos^2 x + \sin^2 x}{\cos^2 x} \frac{1}{\cos^2 x} = \sec^2 x$
- $(\cot x)' = \frac{-\cos^2 x - \sin^2 x}{\sin^2 x} \frac{-1}{\sin^2 x} = -\csc^2 x$
- $f(x) = \begin{cases} x^2 \sin \frac{1}{x}, & x \neq 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases}$, 则有

$$f'(x) = \begin{cases} 2x \sin \frac{1}{x} - \cos \frac{1}{x}, & x \neq 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases},$$

# 利用四则运算求导数

- $(\tan x)' = \frac{\cos^2 x + \sin^2 x}{\cos^2 x} \frac{1}{\cos^2 x} = \sec^2 x$
- $(\cot x)' = \frac{-\cos^2 x - \sin^2 x}{\sin^2 x} \frac{-1}{\sin^2 x} = -\csc^2 x$
- $f(x) = \begin{cases} x^2 \sin \frac{1}{x}, & x \neq 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases}$，则有

$$f'(x) = \begin{cases} 2x \sin \frac{1}{x} - \cos \frac{1}{x}, & x \neq 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases},$$

## 利用四则运算求导数

- $(\tan x)' = \frac{\cos^2 x + \sin^2 x}{\cos^2 x} \frac{1}{\cos^2 x} = \sec^2 x$
- $(\cot x)' = \frac{-\cos^2 x - \sin^2 x}{\sin^2 x} \frac{-1}{\sin^2 x} = -\csc^2 x$
- $f(x) = \begin{cases} x^2 \sin \frac{1}{x}, & x \neq 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases}$, 则有

$$f'(x) = \begin{cases} 2x \sin \frac{1}{x} - \cos \frac{1}{x}, & x \neq 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases},$$

# 复合函数的微商

- 定理：$y=f(x):(a,b)\to(A,B)$，$z=g(y):(A,B)\to\mathbb{R}$. $f(x)$在$x_0\in(a,b)$处可导，$g(y)$在$y_0=f(x_0)$处可导，则有复合函数$g\circ f$在$x_0$处可导，且

$$\left.\frac{dg\circ f}{dx}\right|_{x_0}=g'(y_0)f'(x_0)\ \text{或写成}\left.\frac{dz}{dx}\right|_{x_0}=\left.\frac{dz}{dy}\right|_{y=f(x_0)}\left.\frac{dy}{dx}\right|_{x=x_0}.$$

若$y=f(x)$和$z=g(y)$在各自定义域内可导，则$\frac{dg\circ f}{dx}=g'(f(x))f'(x)$.

# 定理的证明1

- 令$\Delta y = f(x_0+\Delta x) - f(x_0)$，$y_0 = f(x_0)$，则有$f(x_0+\Delta x) = y_0 + \Delta y$. 由于$g(y)$在$y_0$处连续，$\Delta x \to 0$时，$\Delta y \to 0$.
- 若$f'(x_0) \neq 0$，$\lim_{\Delta x\to 0} |\frac{\Delta y}{\Delta x}| > 0$，则存在$\delta > 0$，使得当$0 < |\Delta x| < \delta$时，$\Delta y \neq 0$，从而有

$$\frac{\Delta z}{\Delta x} = \frac{g(f(x_0+\Delta x)) - g(f(x_0))}{\Delta x} = \frac{g(y_0+\Delta y) - g(y_0)}{\Delta y}\frac{\Delta y}{\Delta x}$$

求极限得$\frac{dz}{dx}|_{x_0} = g'(y_0)f'(x_0)$.

## 定理的证明2

- 若$f'(x_0)=0$，由于$z=g(y)$在$y_0$处可导，则存在$\delta_1$，$0<|\Delta y|<\delta_1$时，$|\frac{\Delta z}{\Delta y}-g'(y_0)|<1$，因此$|\Delta y|<\delta_1$时，$|\Delta z|\le(|g'(y_0)|+1)|\Delta y|$. 又由$\lim_{\Delta x\to 0}|\frac{\Delta y}{\Delta x}|>0$，对任给$\epsilon>0$，存在$\delta$，使得$0<|\Delta x|<\delta$时，$|\Delta y|<\delta_1$ 且$\left|\frac{\Delta y}{\Delta x}\right|<\epsilon$，此时有

$$\left|\frac{\Delta z}{\Delta x}\right|\le\frac{(|g'(y_0)|+1)|\Delta y|}{|\Delta x|}\le(|g'(y_0)|+1)\epsilon.$$

因此$\Delta x\to 0$时，极限为0，即$\frac{dz}{dx}|_{x_0}=0=g'(y_0)f'(x_0)$.

# 定理的另一证明

定义$\Delta y$的函数(存在$\delta > 0$, 下面函数在$|\Delta y| < \delta$上有定义)

$$\eta(\Delta y) = \begin{cases} \frac{g(y_0+\Delta y)-g(y_0)}{\Delta y} - g'(y_0), & \Delta y \neq 0 \\ 0, & \Delta y = 0 \end{cases},$$

则由$g$在$y_0 = f(x_0)$处可导, 有$\lim\limits_{\Delta y \to 0} \eta(\Delta y) = 0$. 即$\eta(\Delta y)$在$\Delta y = 0$处连续, 且有$g(y_0 + \Delta y) - g(y_0) = (\eta(\Delta y) + g'(y_0))\Delta y$.

$$\frac{\Delta z}{\Delta x} = \frac{g(f(x_0 + \Delta x)) - g(f(x_0))}{\Delta x} = g'(y_0)\frac{\Delta y}{\Delta x} + \eta(\Delta y)\frac{\Delta y}{\Delta x}$$

求极限即得.

# 利用链式法则求导数1

- 例：$(e^{x^2})' = e^y 2x = e^{x^2} 2x$，这里$y = x^2$.
- 例：$(e^{\sin(x^2)})' = e^{\sin(x^2)}(\sin(x^2))' = e^{\sin(x^2)}\cos(x^2)2x$
- 例：设$f(x)$, $g(x)$可导，$f(x) > 0$,

$$
\begin{aligned}
(f(x)^{g(x)})' =& (e^{g(x)\ln f(x)})' = f(x)^{g(x)}(g(x)\ln f(x))' \\
=& f(x)^{g(x)}(g'(x)\ln f(x) + g(x)\frac{f'(x)}{f(x)}) \\
=& f(x)^{g(x)}g'(x)\ln f(x) + f(x)^{g(x)-1}g(x)f'(x)
\end{aligned}
$$

- 例：$(a^{g(x)})' = a^{g(x)}g'(x)\ln a$, $(f(x)^a)' = af(x)^{a-1}f'(x)$.

## 利用链式法则求导数1

- 例：$(e^{x^2})' = e^y 2x = e^{x^2} 2x$，这里$y = x^2$.
- 例：$(e^{\sin(x^2)})' = e^{\sin(x^2)}(\sin(x^2))' = e^{\sin(x^2)} \cos(x^2) 2x$
- 例：设$f(x)$, $g(x)$可导，$f(x) > 0$,

$$
\begin{aligned}
(f(x)^{g(x)})' =& (e^{g(x)\ln f(x)})' = f(x)^{g(x)}(g(x)\ln f(x))' \\
=& f(x)^{g(x)}(g'(x)\ln f(x) + g(x)\frac{f'(x)}{f(x)}) \\
=& f(x)^{g(x)} g'(x)\ln f(x) + f(x)^{g(x)-1} g(x) f'(x)
\end{aligned}
$$

- 例：$(a^{g(x)})' = a^{g(x)} g'(x) \ln a$, $(f(x)^a)' = a f(x)^{a-1} f'(x)$.

# 利用链式法则求导数1

- 例：$(e^{x^2})' = e^y 2x = e^{x^2} 2x$，这里$y = x^2$.
- 例：$(e^{\sin(x^2)})' = e^{\sin(x^2)}(\sin(x^2))' = e^{\sin(x^2)}\cos(x^2)2x$
- 例：设$f(x)$, $g(x)$可导，$f(x) > 0$,

$$\begin{aligned}(f(x)^{g(x)})' &= (e^{g(x)\ln f(x)})' = f(x)^{g(x)}(g(x)\ln f(x))' \\ &= f(x)^{g(x)}(g'(x)\ln f(x) + g(x)\frac{f'(x)}{f(x)}) \\ &= f(x)^{g(x)}g'(x)\ln f(x) + f(x)^{g(x)-1}g(x)f'(x)\end{aligned}$$

- 例：$(a^{g(x)})' = a^{g(x)}g'(x)\ln a$, $(f(x)^a)' = af(x)^{a-1}f'(x)$.

# 利用链式法则求导数1

- 例：$(e^{x^2})' = e^y 2x = e^{x^2} 2x$，这里$y = x^2$.
- 例：$(e^{\sin(x^2)})' = e^{\sin(x^2)}(\sin(x^2))' = e^{\sin(x^2)} \cos(x^2) 2x$
- 例：设$f(x)$, $g(x)$可导，$f(x) > 0$,

$$
\begin{aligned}
(f(x)^{g(x)})' =& (e^{g(x)\ln f(x)})' = f(x)^{g(x)}(g(x)\ln f(x))' \\
=& f(x)^{g(x)}(g'(x)\ln f(x) + g(x)\frac{f'(x)}{f(x)}) \\
=& f(x)^{g(x)} g'(x)\ln f(x) + f(x)^{g(x)-1} g(x) f'(x)
\end{aligned}
$$

- 例：$(a^{g(x)})' = a^{g(x)} g'(x) \ln a$, $(f(x)^a)' = af(x)^{a-1} f'(x)$.

# 利用链式法则求导数2

- 例：$(x^x)' = x^x(\ln x + 1)$. $(x^a)' = ax^{a-1}$
- 例：$f(x) = (1+x)^{\frac{1}{x}}$
  解：$f'(x) = (1+x)^{\frac{1}{x}}(\frac{1}{x(1+x)} - \frac{\ln(1+x)}{x^2})$. 若利用
  $$1 = x \cdot \frac{1}{x} < \frac{\ln(1+x)}{x} = \frac{1}{x}\int_1^{1+x} \frac{1}{t}dt > \frac{1}{1+x},$$
  可证明$f'(x) < 0$.
- 例：$f(x) = (1+x)^{\frac{1}{x}+1}$.
  解：$f'(x) = (1+x)^{\frac{1}{x}+1}(\frac{1}{x} - \frac{\ln(1+x)}{x^2}) > 0$.

# 利用链式法则求导数2

- 例: $(x^x)' = x^x(\ln x + 1)$. $(x^a)' = ax^{a-1}$
- 例: $f(x) = (1+x)^{\frac{1}{x}}$
  解: $f'(x) = (1+x)^{\frac{1}{x}}(\frac{1}{x(1+x)} - \frac{\ln(1+x)}{x^2})$. 若利用

$$1 = x \cdot \frac{1}{x} < \frac{\ln(1+x)}{x} = \frac{1}{x}\int_1^{1+x} \frac{1}{t}dt > \frac{1}{1+x},$$

  可证明$f'(x) < 0$.
- 例: $f(x) = (1+x)^{\frac{1}{x}+1}$.
  解: $f'(x) = (1+x)^{\frac{1}{x}+1}(\frac{1}{x} - \frac{\ln(1+x)}{x^2}) > 0$.

# 利用链式法则求导数2

- 例: $(x^x)' = x^x(\ln x + 1)$. $(x^a)' = ax^{a-1}$
- 例: $f(x) = (1+x)^{\frac{1}{x}}$
  解: $f'(x) = (1+x)^{\frac{1}{x}}(\frac{1}{x(1+x)} - \frac{\ln(1+x)}{x^2})$. 若利用

$$1 = x \cdot \frac{1}{x} < \frac{\ln(1+x)}{x} = \frac{1}{x}\int_1^{1+x} \frac{1}{t}dt > \frac{1}{1+x},$$

  可证明$f'(x) < 0$.
- 例: $f(x) = (1+x)^{\frac{1}{x}+1}$.
  解: $f'(x) = (1+x)^{\frac{1}{x}+1}(\frac{1}{x} - \frac{\ln(1+x)}{x^2}) > 0$.

# 反函数的微商

- 定理：$y=f(x):(a,b)\to(A,B)$连续，严格单调，双射. 若反函数$x=g(y)$ 在$y_0\in(A,B)$处可导，且$g'(y_0)\neq 0$，则$y=f(x)$在$x_0=g(y_0)$处可导，且$f'(x_0)=\frac{1}{g'(y_0)}=\frac{1}{g'(f(x_0))}$.
- 证明：当$\Delta x\neq 0$时，$\Delta y=f(x_0+\Delta x)-f(x_0)\neq 0$，且$\Delta x\to 0$时，$\Delta y\to 0$，$\Delta x=g(y_0+\Delta y)-g(y_0)$，

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\lim_{\Delta y\to 0}\frac{1}{\frac{\Delta x}{\Delta y}}=\frac{1}{g'(y_0)}.$$

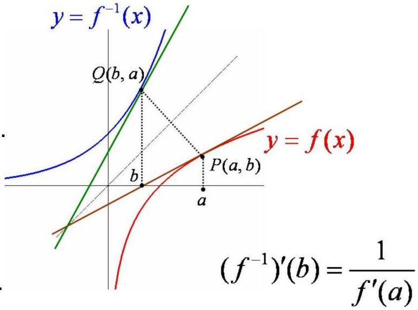
# 反函数的微商

- 定理： $y = f(x) : (a, b) \to (A, B)$连续，严格单调，双射．若反函数$x = g(y)$ 在$y_0 \in (A, B)$处可导，且$g'(y_0) \neq 0$，则$y = f(x)$在$x_0 = g(y_0)$处可导，且$f'(x_0) = \frac{1}{g'(y_0)} = \frac{1}{g'(f(x_0))}$．
- 证明： 当$\Delta x \neq 0$时，$\Delta y = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0) \neq 0$，且$\Delta x \to 0$时，$\Delta y \to 0$，$\Delta x = g(y_0 + \Delta y) - g(y_0)$，

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta y \to 0} \frac{1}{\frac{\Delta x}{\Delta y}} = \frac{1}{g'(y_0)}.$$

# 关于反函数微商的注记

- 很容易用几何方法证明图中反函数和原函数图像对应点处切线和x轴的夹角之和为90度.
- 定理的如下证法是否正确：由于$g = f^{-1}$, $x = g(f(x))$, 两边对x求导，得$1 = g'(f(x))f'(x)$.



# 利用反函数的微商求导数1

- $(\arcsin x)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$, $(\arccos x)' = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$,
  证明：设$y = \arcsin x$，则有$x = \sin y$,

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{\frac{dx}{dy}} = \frac{1}{\cos y} = \frac{1}{\cos(\arcsin x)} = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

  第二个等式由$\arcsin x + \arccos x = \frac{\pi}{2}$得到.

- $(\arctan x)' = \frac{1}{1+x^2}$,$(\operatorname{arccot} x)' = -\frac{1}{1+x^2}$,
  证明：设$y = \arctan x$，则有$x = \tan y$,

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{\frac{dx}{dy}} = \frac{1}{\sec^2 y} = \frac{1}{1+\tan^2(\arctan x)} = \frac{1}{1+x^2}$$

  第二个等式由$\arctan x + \operatorname{arccot} x = \frac{\pi}{2}$得到.

# 利用反函数的微商求导数1

- $(\arcsin x)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$, $(\arccos x)' = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$,
  证明：设$y = \arcsin x$，则有$x = \sin y$,

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{\frac{dx}{dy}} = \frac{1}{\cos y} = \frac{1}{\cos(\arcsin x)} = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

  第二个等式由$\arcsin x + \arccos x = \frac{\pi}{2}$得到.

- $(\arctan x)' = \frac{1}{1+x^2}$,$(\operatorname{arccot} x)' = -\frac{1}{1+x^2}$,
  证明：设$y = \arctan x$，则有$x = \tan y$,

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{\frac{dx}{dy}} = \frac{1}{\sec^2 y} = \frac{1}{1+\tan^2(\arctan x)} = \frac{1}{1+x^2}$$

  第二个等式由$\arctan x + \operatorname{arccot} x = \frac{\pi}{2}$得到.

# 利用反函数的微商求导数2

- $(\ln x)' = \frac{1}{x}$, $(\ln(-x))' = \frac{1}{-x}(-1) = \frac{1}{x}$, 从而$(\ln|x|)' = \frac{1}{x}$.
  证明：设$y = \ln x$, 则有$x = e^y$, $\frac{dy}{dx} = \frac{1}{e^y} = \frac{1}{e^{\ln x}} = \frac{1}{x}$
- $y = \sqrt[3]{\frac{(x+1)^2(2-x)}{(3-x)^2(x-4)}} = (x+1)^{\frac{2}{3}}(2-x)^{\frac{1}{3}}(3-x)^{-\frac{2}{3}}(x-4)^{-\frac{1}{3}}$.
  解：$x \neq 2, -1$时，$\ln|y| = \frac{1}{3}(2\ln|x+1| + \ln|2-x| - 2\ln|3-x| - \ln|x-4|)$, 从而有$y' = y \cdot \frac{1}{3}(\frac{2}{x+1} - \frac{1}{2-x} + \frac{2}{3-x} - \frac{1}{x-4})$.
  $x = 2, -1$时，函数不可导.
- 注：若$f(x) = (x-x_0)^{\frac{2}{3}}g(x)$, $g(x)$在$x = x_0$处可导且$g(x_0) \neq 0$, 则$f(x)$ 在$x = x_0$处不可导.
  证明：$\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x} = \frac{(\Delta x)^{\frac{2}{3}}g(x_0+\Delta x)}{\Delta x}$.

# 利用反函数的微商求导数2

- $(\ln x)' = \frac{1}{x}$, $(\ln(-x))' = \frac{1}{-x}(-1) = \frac{1}{x}$, 从而$(\ln|x|)' = \frac{1}{x}$.
  证明：设$y = \ln x$, 则有$x = e^y$, $\frac{dy}{dx} = \frac{1}{e^y} = \frac{1}{e^{\ln x}} = \frac{1}{x}$
- $y = \sqrt[3]{\frac{(x+1)^2(2-x)}{(3-x)^2(x-4)}} = (x+1)^{\frac{2}{3}}(2-x)^{\frac{1}{3}}(3-x)^{-\frac{2}{3}}(x-4)^{-\frac{1}{3}}$.
  解：$x \neq 2, -1$时，$\ln|y| = \frac{1}{3}(2\ln|x+1| + \ln|2-x| - 2\ln|3-x| - \ln|x-4|)$, 从而有$y' = y \cdot \frac{1}{3}(\frac{2}{x+1} - \frac{1}{2-x} + \frac{2}{3-x} - \frac{1}{x-4})$.
  $x = 2, -1$时，函数不可导.
- 注：若$f(x) = (x-x_0)^{\frac{2}{3}}g(x)$, $g(x)$在$x = x_0$处可导且$g(x_0) \neq 0$, 则$f(x)$ 在$x = x_0$处不可导.
  证明：$\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x} = \frac{(\Delta x)^{\frac{2}{3}}g(x_0+\Delta x)}{\Delta x}$.

# 利用反函数的微商求导数2

- $(\ln x)' = \frac{1}{x}$, $(\ln(-x))' = \frac{1}{-x}(-1) = \frac{1}{x}$, 从而$(\ln|x|)' = \frac{1}{x}$.
  证明：设$y = \ln x$, 则有$x = e^y$, $\frac{dy}{dx} = \frac{1}{e^y} = \frac{1}{e^{\ln x}} = \frac{1}{x}$
- $y = \sqrt[3]{\frac{(x+1)^2(2-x)}{(3-x)^2(x-4)}} = (x+1)^{\frac{2}{3}}(2-x)^{\frac{1}{3}}(3-x)^{-\frac{2}{3}}(x-4)^{-\frac{1}{3}}$.
  解：$x \neq 2, -1$时，$\ln|y| = \frac{1}{3}(2\ln|x+1| + \ln|2-x| - 2\ln|3-x| - \ln|x-4|)$, 从而有$y' = y \cdot \frac{1}{3}(\frac{2}{x+1} - \frac{1}{2-x} + \frac{2}{3-x} - \frac{1}{x-4})$.
  $x = 2, -1$时，函数不可导.
- 注：若$f(x) = (x-x_0)^{\frac{2}{3}}g(x)$, $g(x)$在$x = x_0$处可导且$g(x_0) \neq 0$, 则$f(x)$ 在$x = x_0$处不可导.

证明：$\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x} = \frac{(\Delta x)^{\frac{2}{3}}g(x_0+\Delta x)}{\Delta x}$.

# 利用反函数的微商求导数2

- $(\ln x)' = \frac{1}{x}$, $(\ln(-x))' = \frac{1}{-x}(-1) = \frac{1}{x}$, 从而$(\ln|x|)' = \frac{1}{x}$.
  证明：设$y = \ln x$, 则有$x = e^y$, $\frac{dy}{dx} = \frac{1}{e^y} = \frac{1}{e^{\ln x}} = \frac{1}{x}$
- $y = \sqrt[3]{\frac{(x+1)^2(2-x)}{(3-x)^2(x-4)}} = (x+1)^{\frac{2}{3}}(2-x)^{\frac{1}{3}}(3-x)^{-\frac{2}{3}}(x-4)^{-\frac{1}{3}}$.
  解：$x \neq 2, -1$时，$\ln|y| = \frac{1}{3}(2\ln|x+1| + \ln|2-x| - 2\ln|3-x| - \ln|x-4|)$, 从而有$y' = y \cdot \frac{1}{3}(\frac{2}{x+1} - \frac{1}{2-x} + \frac{2}{3-x} - \frac{1}{x-4})$.
  $x = 2, -1$时，函数不可导.
- 注：若$f(x) = (x-x_0)^{\frac{2}{3}}g(x)$, $g(x)$在$x = x_0$处可导且$g(x_0) \neq 0$, 则$f(x)$ 在$x = x_0$处不可导.
  证明：$\frac{f(x_0+\Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} = \frac{(\Delta x)^{\frac{2}{3}} g(x_0+\Delta x)}{\Delta x}$.

# 无穷小量的定义

- 牛顿和莱布尼茨建立微积分的出发点是直观的无穷小量，因此这门学科早期也称为无穷小分析，这正是现在数学中分析学这一大分支名称的来源.
- 复习无穷大量：若 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x_0)=\infty$，则称$x\to x_0$时，$f(x)$为无穷大量；若 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n=\infty$，则称($n\to\infty$时，)$a_n$为无穷大量.
- 无穷小量是以0为极限的变量．若 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x_0)=0$，则称$x\to x_0$时，$f(x)$为无穷小量；若 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n=0$，则称($n\to\infty$时，)$a_n$为无穷小量.

# 无穷小量的定义

- 牛顿和莱布尼茨建立微积分的出发点是直观的无穷小量，因此这门学科早期也称为无穷小分析，这正是现在数学中分析学这一大分支名称的来源.
- 复习无穷大量：若 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x_0)=\infty$, 则称$x\to x_0$时，$f(x)$为无穷大量; 若 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n=\infty$, 则称($n\to\infty$时，)$a_n$为无穷大量.
- 无穷小量是以0为极限的变量. 若 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x_0)=0$, 则称$x\to x_0$时，$f(x)$为无穷小量; 若 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n=0$, 则称($n\to\infty$时，)$a_n$为无穷小量.

## 无穷小量的定义

- 牛顿和莱布尼茨建立微积分的出发点是直观的无穷小量，因此这门学科早期也称为无穷小分析，这正是现在数学中分析学这一大分支名称的来源.
- 复习无穷大量：若 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x_0)=\infty$, 则称$x\to x_0$时，$f(x)$为无穷大量; 若 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n=\infty$, 则称($n\to\infty$时，)$a_n$为无穷大量.
- 无穷小量是以0为极限的变量. 若 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x_0)=0$, 则称$x\to x_0$时，$f(x)$为无穷小量; 若 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n=0$, 则称($n\to\infty$时，)$a_n$为无穷小量.

## 无穷小量的性质

- 注：无穷小量和无穷大量都是变量，不是数.
- 例：$\frac{1}{n}, q^n(|q|<1)$是无穷小量. 设$f(x)=x$,则$x\to 0$时，$f(x)$为无穷小量，$x\to\infty$时，$f(x)$为无穷大量.
- $x\to x_0$时，$f(x)$是无穷大量，则$\frac{1}{f(x)}$是无穷小量；$f(x)$是无穷小量，且$f(x)\neq 0$，则$\frac{1}{f(x)}$是无穷大量.
- 四则运算：$x\to x_0$时，$f(x), g(x)$是无穷小量，则$f(x)\pm g(x), f(x)g(x)$是无穷小量；$x\to x_0$时，$f(x)$是无穷小量，$g(x)$有界，则$f(x)g(x)$是无穷小量，序列无穷小量也有类似结论.

# 无穷小量的性质

- 注：无穷小量和无穷大量都是变量，不是数.
- 例：$\frac{1}{n}, q^n(|q|<1)$是无穷小量. 设$f(x)=x$,则$x\to 0$时，$f(x)$为无穷小量，$x\to\infty$时，$f(x)$为无穷大量.
- $x\to x_0$时，$f(x)$是无穷大量，则$\frac{1}{f(x)}$是无穷小量；$f(x)$是无穷小量，且$f(x)\neq 0$，则$\frac{1}{f(x)}$是无穷大量.
- 四则运算：$x\to x_0$时，$f(x), g(x)$是无穷小量，则$f(x)\pm g(x), f(x)g(x)$是无穷小量；$x\to x_0$时，$f(x)$是无穷小量，$g(x)$有界，则$f(x)g(x)$是无穷小量，序列无穷小量也有类似结论.

# 无穷小量的性质

- 注：无穷小量和无穷大量都是变量，不是数.
- 例：$\frac{1}{n}, q^n(|q| < 1)$是无穷小量. 设$f(x) = x$,则$x \to 0$时，$f(x)$为无穷小量，$x \to \infty$时，$f(x)$为无穷大量.
- $x \to x_0$时，$f(x)$是无穷大量，则$\frac{1}{f(x)}$是无穷小量；$f(x)$是无穷小量，且$f(x) \neq 0$，则$\frac{1}{f(x)}$是无穷大量.
- 四则运算：$x \to x_0$时，$f(x), g(x)$是无穷小量，则$f(x) \pm g(x), f(x)g(x)$是无穷小量；$x \to x_0$时，$f(x)$是无穷小量，$g(x)$有界，则$f(x)g(x)$是无穷小量，序列无穷小量也有类似结论.

# 无穷小量的性质

- 注：无穷小量和无穷大量都是变量，不是数.
- 例：$\frac{1}{n}, q^n(|q| < 1)$是无穷小量. 设$f(x) = x$,则$x \to 0$时，$f(x)$为无穷小量，$x \to \infty$时，$f(x)$为无穷大量.
- $x \to x_0$时，$f(x)$是无穷大量，则$\frac{1}{f(x)}$是无穷小量；$f(x)$是无穷小量，且$f(x) \neq 0$，则$\frac{1}{f(x)}$是无穷大量.
- 四则运算：$x \to x_0$时，$f(x), g(x)$是无穷小量，则$f(x) \pm g(x), f(x)g(x)$是无穷小量；$x \to x_0$时，$f(x)$是无穷小量，$g(x)$有界，则$f(x)g(x)$是无穷小量，序列无穷小量也有类似结论.

# 无穷小量的阶1

若$x \to x_0$时，$f(x), g(x)$是无穷小量，且$x \neq x_0$时，$g(x) \neq 0$.

- 若$\lim\limits_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = 1$, 则称$f(x)$和$g(x)$是等价无穷小量. 记为$f(x) \sim g(x)$.
- 若$\lim\limits_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = l \neq 0$, 则称$f(x)$和$g(x)$是等阶无穷小量.
- 若$\lim\limits_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = 0$, 则称$f(x)$是$g(x)$的高阶无穷小量.
- 若$x \to a$时，$f(x)$与$(x-a)^n$是同阶无穷小，则称$f(x)$是$(x-a)$的$n$阶无穷小.

# 无穷小量的阶1

若$x \to x_0$时，$f(x), g(x)$是无穷小量，且$x \neq x_0$时，$g(x) \neq 0$.

- 若$\lim\limits_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = 1$, 则称$f(x)$和$g(x)$是等价无穷小量. 记为$f(x) \sim g(x)$.
- 若$\lim\limits_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = l \neq 0$, 则称$f(x)$和$g(x)$是等阶无穷小量.
- 若$\lim\limits_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = 0$, 则称$f(x)$是$g(x)$的高阶无穷小量.
- 若$x \to a$时，$f(x)$与$(x-a)^n$是同阶无穷小，则称$f(x)$是$(x-a)$的$n$阶无穷小.

# 无穷小量的阶1

若$x \to x_0$时，$f(x), g(x)$是无穷小量，且$x \neq x_0$时，$g(x) \neq 0$.

- 若$\lim\limits_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = 1$, 则称$f(x)$和$g(x)$是等价无穷小量. 记为$f(x) \sim g(x)$.
- 若$\lim\limits_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = l \neq 0$, 则称$f(x)$和$g(x)$是等阶无穷小量.
- 若$\lim\limits_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = 0$, 则称$f(x)$是$g(x)$的高阶无穷小量.
- 若$x \to a$时，$f(x)$与$(x-a)^n$是同阶无穷小，则称$f(x)$是$(x-a)$的$n$阶无穷小.

# 无穷小量的阶1

若$x \to x_0$时，$f(x), g(x)$是无穷小量，且$x \neq x_0$时，$g(x) \neq 0$.

- 若$\lim\limits_{x\to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = 1$, 则称$f(x)$和$g(x)$是等价无穷小量. 记为$f(x) \sim g(x)$.
- 若$\lim\limits_{x\to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = l \neq 0$, 则称$f(x)$和$g(x)$是等阶无穷小量.
- 若$\lim\limits_{x\to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = 0$, 则称$f(x)$是$g(x)$的高阶无穷小量.
- 若$x \to a$时，$f(x)$与$(x-a)^n$是同阶无穷小，则称$f(x)$是$(x-a)$的$n$阶无穷小.

# 无穷小量的阶2

- 注：若$g(x)$可以取0，可如下定义：若存在$h(x)$，使得$x \neq x_0$时，$f(x) = h(x)g(x)$. 当$\lim\limits_{x \to x_0} h(x) = 1$，则称$f(x)$和$g(x)$是等价无穷小量；当$\lim\limits_{x \to x_0} h(x) = l \neq 0$，则称$f(x)$和$g(x)$是等阶无穷小量；当$\lim\limits_{x \to x_0} h(x) = 0$，则称$f(x)$是$g(x)$的高阶无穷小量，记为$f(x) = o(g(x))$，$x \to x_0$.
- 严格地说，记号$o(g(x))$表示一类函数（$g(x)$的高阶无穷小量构成的集合），上面的记号$f(x) = o(g(x))$应该写成$f(x) \in o(g(x))$. 因此由$f_1(x) = o(g(x))$，$f_2(x) = o(g(x))$不能得出$f_1 = f_2$.

# 无穷小量的阶2

- 注：若$g(x)$可以取0，可如下定义：若存在$h(x)$，使得$x \neq x_0$时，$f(x) = h(x)g(x)$. 当$\lim\limits_{x \to x_0} h(x) = 1$，则称$f(x)$和$g(x)$是等价无穷小量；当$\lim\limits_{x \to x_0} h(x) = l \neq 0$，则称$f(x)$和$g(x)$是等阶无穷小量；当$\lim\limits_{x \to x_0} h(x) = 0$，则称$f(x)$是$g(x)$的高阶无穷小量，记为$f(x) = o(g(x))$，$x \to x_0$.
- 严格地说，记号$o(g(x))$表示一类函数（$g(x)$的高阶无穷小量构成的集合），上面的记号$f(x) = o(g(x))$应该写成$f(x) \in o(g(x))$. 因此由$f_1(x) = o(g(x))$，$f_2(x) = o(g(x))$不能得出$f_1 = f_2$.

# 无穷小量的阶3

- 我们用记号$f(x)=f_0(x)+o(g(x))$表示$f(x)-f_0(x)$是$g(x)$的高阶无穷小.
- 例：$\sqrt{1-x}=1-\frac{1}{2}x+o(x)$.
  证明：$\frac{\sqrt{1-x}-1+\frac{1}{2}x}{x}=\frac{\sqrt{1-x}-1}{x}+\frac{1}{2}=\frac{-1}{\sqrt{1-x}+1}+\frac{1}{2}\to 0$.
- $\sin x=x+o(x)$, $\ln(1+x)=x+o(x)$.
  证明：$\frac{\sin x-x}{x}\to 0$, $\frac{\ln(1+x)-x}{x}\to 0$.

# 无穷小量的阶3

- 我们用记号$f(x)=f_0(x)+o(g(x))$表示$f(x)-f_0(x)$是$g(x)$的高阶无穷小.
- 例：$\sqrt{1-x}=1-\frac{1}{2}x+o(x)$.
  证明：$\frac{\sqrt{1-x}-1+\frac{1}{2}x}{x}=\frac{\sqrt{1-x}-1}{x}+\frac{1}{2}=\frac{-1}{\sqrt{1-x}+1}+\frac{1}{2}\to 0$.
- $\sin x=x+o(x)$, $\ln(1+x)=x+o(x)$.
  证明：$\frac{\sin x-x}{x}\to 0$, $\frac{\ln(1+x)-x}{x}\to 0$.

# 无穷小量的阶3

- 我们用记号$f(x)=f_0(x)+o(g(x))$表示$f(x)-f_0(x)$是$g(x)$的高阶无穷小.
- 例: $\sqrt{1-x}=1-\frac{1}{2}x+o(x)$.
  证明: $\frac{\sqrt{1-x}-1+\frac{1}{2}x}{x}=\frac{\sqrt{1-x}-1}{x}+\frac{1}{2}=\frac{-1}{\sqrt{1-x}+1}+\frac{1}{2}\to 0$.
- $\sin x=x+o(x)$, $\ln(1+x)=x+o(x)$.
  证明: $\frac{\sin x-x}{x}\to 0$, $\frac{\ln(1+x)-x}{x}\to 0$.

# 利用无穷小量求极限

- 例： $x \to 0$时， $x \sim \sin x \ln(1+x) \sim e^x - 1 \sim \arctan x \sim \arcsin x$, $1-\cos x \sim \frac{1}{2}x^2$.
- 例： $x \to +\infty$时， $\frac{1}{e^x} = o(\frac{1}{x^n}), \frac{1}{x} = o(\frac{1}{\ln x})$. $\frac{1}{n!} = o(\frac{1}{e^n})$, $\frac{1}{e^n} = o(\frac{1}{n})$
- 例： $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\tan x - \sin x}{x^3} = \lim\limits_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} \frac{1-\cos x}{x^2 \cos x} = \frac{1}{2}$.
- 注： $\sin x \sim x$, 但是 $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\tan x - \sin x}{x^3} \neq \lim\limits_{x\to 0} \frac{\tan x - x}{x^3} = \frac{1}{6}$.

# 利用无穷小量求极限

- 例：$x \to 0$时，$x \sim \sin x \ln(1+x) \sim e^x - 1 \sim \arctan x \sim \arcsin x$, $1 - \cos x \sim \frac{1}{2}x^2$.
- 例：$x \to +\infty$时，$\frac{1}{e^x} = o(\frac{1}{x^n}), \frac{1}{x} = o(\frac{1}{\ln x})$. $\frac{1}{n!} = o(\frac{1}{e^n})$, $\frac{1}{e^n} = o(\frac{1}{n})$
- 例：$\lim\limits_{x\to 0} \frac{\tan x - \sin x}{x^3} = \lim\limits_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} \frac{1-\cos x}{x^2 \cos x} = \frac{1}{2}$.
- 注：$\sin x \sim x$, 但是$\lim\limits_{x\to 0} \frac{\tan x - \sin x}{x^3} \neq \lim\limits_{x\to 0} \frac{\tan x - x}{x^3} = \frac{1}{6}$.

# 利用无穷小量求极限

- 例：$x \to 0$时，$x \sim \sin x \ln(1+x) \sim e^x - 1 \sim \arctan x \sim \arcsin x$, $1-\cos x \sim \frac{1}{2}x^2$.
- 例：$x \to +\infty$时，$\frac{1}{e^x} = o(\frac{1}{x^n}), \frac{1}{x} = o(\frac{1}{\ln x})$. $\frac{1}{n!} = o(\frac{1}{e^n})$, $\frac{1}{e^n} = o(\frac{1}{n})$
- 例：$\lim\limits_{x\to 0} \frac{\tan x - \sin x}{x^3} = \lim\limits_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} \frac{1-\cos x}{x^2 \cos x} = \frac{1}{2}$.
- 注：$\sin x \sim x$, 但是$\lim\limits_{x\to 0} \frac{\tan x - \sin x}{x^3} \neq \lim\limits_{x\to 0} \frac{\tan x - x}{x^3} = \frac{1}{6}$.

# 利用无穷小量求极限

- 例：$x \to 0$时，$x \sim \sin x \ln(1+x) \sim e^x - 1 \sim \arctan x \sim \arcsin x$, $1-\cos x \sim \frac{1}{2}x^2$.
- 例：$x \to +\infty$时，$\frac{1}{e^x} = o(\frac{1}{x^n}), \frac{1}{x} = o(\frac{1}{\ln x})$. $\frac{1}{n!} = o(\frac{1}{e^n})$, $\frac{1}{e^n} = o(\frac{1}{n})$
- 例：$\lim\limits_{x\to 0}\frac{\tan x - \sin x}{x^3} = \lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}\frac{1-\cos x}{x^2\cos x} = \frac{1}{2}$.
- 注：$\sin x \sim x$, 但是$\lim\limits_{x\to 0}\frac{\tan x - \sin x}{x^3} \neq \lim\limits_{x\to 0}\frac{\tan x - x}{x^3} = \frac{1}{6}$.

# 微分

- 一个函数在某一点的导数描述了这个函数在这一点附近的变化率。导数的本质是通过极限的概念对函数进行局部的线性逼近。
- 微分也是对函数的局部变化率的一种线性描述。微分可以近似地描述当函数自变量的取值作足够小的改变时，函数的值是怎样改变的。当某些函数的自变量有一个微小的改变$\Delta x$时，函数的变化可以分解为两个部分。一个部分是线性部分，另一部分是比更高阶的无穷小。当改变量很小时，第二部分可以忽略不计.
- 微分和导数是两个不同的概念。但是，对一元函数来说，可微与可导是完全等价的。

# 微分

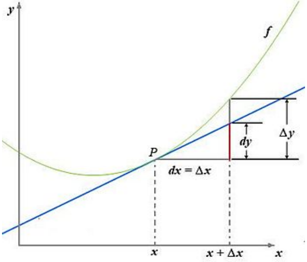
- 一个函数在某一点的导数描述了这个函数在这一点附近的变化率。导数的本质是通过极限的概念对函数进行局部的线性逼近。
- 微分也是对函数的局部变化率的一种线性描述。微分可以近似地描述当函数自变量的取值作足够小的改变时，函数的值是怎样改变的。当某些函数的自变量有一个微小的改变$\Delta x$时，函数的变化可以分解为两个部分。一个部分是线性部分，另一部分是比更高阶的无穷小。当改变量很小时，第二部分可以忽略不计.
- 微分和导数是两个不同的概念。但是，对一元函数来说，可微与可导是完全等价的。

# 微分

- 一个函数在某一点的导数描述了这个函数在这一点附近的变化率。导数的本质是通过极限的概念对函数进行局部的线性逼近。
- 微分也是对函数的局部变化率的一种线性描述。微分可以近似地描述当函数自变量的取值作足够小的改变时，函数的值是怎样改变的。当某些函数的自变量有一个微小的改变$\Delta x$时，函数的变化可以分解为两个部分。一个部分是线性部分，另一部分是比更高阶的无穷小。当改变量很小时，第二部分可以忽略不计.
- 微分和导数是两个不同的概念。但是，对一元函数来说，可微与可导是完全等价的。

# 微分的定义

- $y=f(x)$在$x_0$附近有定义，若存在常数$A$, 使得
$$\Delta y=f(x_0+\Delta x)-f(x_0)=A\Delta x+o(\Delta x),$$
则称$y=f(x)$在$x_0$处可微，$A\Delta x$称为$y=f(x)$在$x_0$处的微分，记为$dy|_{x=x_0}=df|_{x=x_0}=A\Delta x=Adx$.若$f(x)$在$(a,b)$上处处可微，则称$f(x)$在$(a,b)$中可微,此时常数$A$与$x$有关，$df=A(x)dx$.
- 对自变量$x$, 规定$dx=\Delta x$. 事实上，$y=x$是一个函数，利用上面的定义, 得$dy=dx=\Delta x$.



# 微分的性质

- $df$ 是 $x$ 和 $\Delta x(dx)$ 的函数，$df|_{x=x_0} = A\Delta x$ 是 $\Delta x$ 的函数.
- $f(x)$ 在 $x_0$ 处可微的几何意义：若 $f(x)$ 在 $x_0$ 处可微，$f(x)-f(x_0) = A(x-x_0)+o(x-x_0)$, $x \to x_0$. 即 $f(x)-(f(x_0)-A(x-x_0)) = o(x-x_0)$. 即 $y=f(x)$ 与直线 $y=f(x_0)-A(x-x_0)$ 在 $x=x_0$ 处相切.
- $y=f(x)$ 在 $x_0$ 处可微 $\Leftrightarrow$ $y=f(x)$ 在 $x_0$ 处可导，且 $A=f'(x_0)$.
  证明：$y=f(x)$ 在 $x_0$ 处可微
  $\Leftrightarrow$ 存在 $A$，使得 $\Delta y = f(x_0+\Delta x)-f(x_0) = A\Delta x + o(\Delta x)$
  $\Leftrightarrow \lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)-A\Delta x}{\Delta x} = 0 \Leftrightarrow \lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x} = A$

# 微分的性质

- $df$是$x$和$\Delta x(dx)$的函数, $df|_{x=x_0} = A\Delta x$是$\Delta x$的函数.
- $f(x)$在$x_0$处可微的几何意义：若$f(x)$在$x_0$处可微，$f(x)-f(x_0) = A(x-x_0)+o(x-x_0)$, $x \to x_0$. 即$f(x)-(f(x_0)-A(x-x_0)) = o(x-x_0)$. 即$y = f(x)$ 与直线$y = f(x_0)-A(x-x_0)$在$x = x_0$处相切.
- $y = f(x)$在$x_0$处可微$\Leftrightarrow$ $y = f(x)$在$x_0$处可导，且$A = f'(x_0)$.
  证明：$y = f(x)$在$x_0$处可微
  $\Leftrightarrow$ 存在$A$, 使得$\Delta y = f(x_0+\Delta x) - f(x_0) = A\Delta x + o(\Delta x)$
  $\Leftrightarrow \lim\limits_{\Delta x\to 0} \frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)-A\Delta x}{\Delta x} = 0 \Leftrightarrow \lim\limits_{\Delta x\to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = A$

# 微分的性质

- $df$是$x$和$\Delta x(dx)$的函数，$df|_{x=x_0} = A\Delta x$是$\Delta x$的函数.
- $f(x)$在$x_0$处可微的几何意义：若$f(x)$在$x_0$处可微，$f(x)-f(x_0) = A(x-x_0)+o(x-x_0)$, $x \to x_0$. 即$f(x)-(f(x_0)-A(x-x_0)) = o(x-x_0)$. 即$y=f(x)$ 与直线$y=f(x_0)-A(x-x_0)$在$x=x_0$处相切.
- $y=f(x)$在$x_0$处可微$\Leftrightarrow$ $y=f(x)$在$x_0$处可导，且$A=f'(x_0)$.

证明：$y=f(x)$在$x_0$处可微

$\Leftrightarrow$ 存在$A$，使得$\Delta y = f(x_0+\Delta x)-f(x_0) = A\Delta x + o(\Delta x)$

$\Leftrightarrow \lim\limits_{\Delta x\to 0} \frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)-A\Delta x}{\Delta x} = 0 \Leftrightarrow \lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x} = A$

# 微分的性质

- $df$是$x$和$\Delta x(dx)$的函数, $df|_{x=x_0} = A\Delta x$是$\Delta x$的函数.
- $f(x)$在$x_0$处可微的几何意义：若$f(x)$在$x_0$处可微，$f(x)-f(x_0) = A(x-x_0)+o(x-x_0)$, $x \to x_0$. 即$f(x)-(f(x_0)-A(x-x_0)) = o(x-x_0)$. 即$y = f(x)$ 与直线$y = f(x_0)-A(x-x_0)$在$x = x_0$处相切.
- $y = f(x)$在$x_0$处可微$\Leftrightarrow$ $y = f(x)$在$x_0$处可导，且$A = f'(x_0)$.
  证明：$y = f(x)$在$x_0$处可微
  $\Leftrightarrow$ 存在$A$, 使得$\Delta y = f(x_0+\Delta x) - f(x_0) = A\Delta x + o(\Delta x)$
  $\Leftrightarrow \lim\limits_{\Delta x\to 0} \frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)-A\Delta x}{\Delta x} = 0 \Leftrightarrow \lim\limits_{\Delta x\to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = A$

# 微分的计算

- $df = f'(x)dx$, $df|_{x=x_0} = f'(x_0)dx$.
- 例： $de^x = e^x dx$, $d\sin x = \cos x dx$. $e^x$在$x = 0$处的微分为$de^x|_{x=0} = dx$, $\sin x$在$x = \frac{\pi}{2}$处的微分为$d\sin x|_{x=\frac{\pi}{2}} = 0dx = 0$.
- 微分的四则运算:
  - $d(u(x) \pm v(x)) = du(x) \pm dv(x)$,
  - $d(u(x)v(x)) = u(x)dv(x) + v(x)du(x)$,
  - $d(\frac{u(x)}{v(x)}) = \frac{v(x)du(x) - u(x)dv(x)}{v(x)^2}$

证明：利用导数的四则运算公式，如

$$\begin{aligned} d(u(x)v(x)) &= (u(x)v'(x) + u'(x)v(x))dx \\ &= u(x)dv(x) + v(x)du(x). \end{aligned}$$

# 微分的计算

- $df = f'(x)dx$, $df|_{x=x_0} = f'(x_0)dx$.
- 例： $de^x = e^x dx$, $d\sin x = \cos x dx$. $e^x$在$x = 0$处的微分为$de^x|_{x=0} = dx$, $\sin x$在$x = \frac{\pi}{2}$处的微分为$d\sin x|_{x=\frac{\pi}{2}} = 0dx = 0$.
- 微分的四则运算:
  - $d(u(x) \pm v(x)) = du(x) \pm dv(x)$,
  - $d(u(x)v(x)) = u(x)dv(x) + v(x)du(x)$,
  - $d(\frac{u(x)}{v(x)}) = \frac{v(x)du(x) - u(x)dv(x)}{v(x)^2}$

  证明：利用导数的四则运算公式，如

$$d(u(x)v(x)) = (u(x)v'(x) + u'(x)v(x))dx = u(x)dv(x) + v(x)du(x).$$

# 微分的计算

- $df = f'(x)dx$, $df|_{x=x_0} = f'(x_0)dx$.
- 例： $de^x = e^x dx$, $d\sin x = \cos x dx$. $e^x$在$x = 0$处的微分为$de^x|_{x=0} = dx$, $\sin x$在$x = \frac{\pi}{2}$处的微分为$d\sin x|_{x=\frac{\pi}{2}} = 0dx = 0$.
- 微分的四则运算:
  - $d(u(x) \pm v(x)) = du(x) \pm dv(x)$,
  - $d(u(x)v(x)) = u(x)dv(x) + v(x)du(x)$,
  - $d(\frac{u(x)}{v(x)}) = \frac{v(x)du(x) - u(x)dv(x)}{v(x)^2}$

证明：利用导数的四则运算公式，如

$$\begin{aligned} d(u(x)v(x)) &= (u(x)v'(x) + u'(x)v(x))dx \\ &= u(x)dv(x) + v(x)du(x). \end{aligned}$$

# 微分的计算

- $df = f'(x)dx$, $df|_{x=x_0} = f'(x_0)dx$.
- 例： $de^x = e^x dx$, $d\sin x = \cos x dx$. $e^x$在$x = 0$处的微分为$de^x|_{x=0} = dx$, $\sin x$在$x = \frac{\pi}{2}$处的微分为$d\sin x|_{x=\frac{\pi}{2}} = 0dx = 0$.
- 微分的四则运算：
  - $d(u(x) \pm v(x)) = du(x) \pm dv(x)$,
  - $d(u(x)v(x)) = u(x)dv(x) + v(x)du(x)$,
  - $d(\frac{u(x)}{v(x)}) = \frac{v(x)du(x) - u(x)dv(x)}{v(x)^2}$

  证明：利用导数的四则运算公式，如

$$\begin{aligned} d(u(x)v(x)) &= (u(x)v'(x) + u'(x)v(x))dx \\ &= u(x)dv(x) + v(x)du(x). \end{aligned}$$

# 微分与近似计算

- 若$f(x)$在$x_0$处可微，

$$f(x)=f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0)+o(x-x_0)\approx f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0).$$

- 例： $\tan(\frac{\pi}{4}+0.01)\approx\tan\frac{\pi}{4}+\sec^2\frac{\pi}{4}\cdot 0.01=1.02.$ 事实上$\tan(\frac{\pi}{4}+0.01)=1.0202\cdots$.
- 例： 当$x$靠近0时，$\sin x\approx x$, $(1+x)^\alpha\approx 1+\alpha x$.

## 微分与近似计算

- 若$f(x)$在$x_0$处可微，

  $$f(x) = f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0)+o(x-x_0) \approx f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0).$$

- 例：$\tan(\frac{\pi}{4} + 0.01) \approx \tan\frac{\pi}{4} + \sec^2\frac{\pi}{4} \cdot 0.01 = 1.02.$ 事实上$\tan(\frac{\pi}{4} + 0.01) = 1.0202\cdots.$
- 例：当$x$靠近0时，$\sin x \approx x$, $(1+x)^\alpha \approx 1+\alpha x.$

# 微分与近似计算

- 若$f(x)$在$x_0$处可微，

  $$f(x)=f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0)+o(x-x_0)\approx f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0).$$

- 例：$\tan(\frac{\pi}{4}+0.01)\approx\tan\frac{\pi}{4}+\sec^2\frac{\pi}{4}\cdot 0.01=1.02$. 事实上$\tan(\frac{\pi}{4}+0.01)=1.0202\cdots$.
- 例：当$x$靠近0时，$\sin x\approx x$, $(1+x)^\alpha\approx 1+\alpha x$.

# 一阶微分形式的不变性

- 命题：设$z=g(y)$是可微函数，则有不论$y$是自变量还是可微函数，均有$dz=g'(y)dy$.
  证明：若$y=f(x)$是可微函数，则有$\frac{dz}{dx}=g'(f(x))f'(x)$，故有$dz=g'(f(x))f'(x)dx=g'(y)dy$.
- 例：求微分$d(e^{\sin x^2})$.
  解法1. $(e^{\sin x^2})'=e^{\sin x^2}\cos x^2(2x)$，因此
  $$d(e^{\sin x^2})=e^{\sin x^2}\cos x^2\cdot 2xdx.$$
  解法2. 利用一阶微分形式的不变性，
  $$\begin{aligned}d(e^{\sin x^2})=&e^{\sin x^2}d(\sin x^2)=e^{\sin x^2}\cos x^2 d(x^2)\\=&e^{\sin x^2}\cos x^2\cdot 2xdx.\end{aligned}$$

# 一阶微分形式的不变性

- 命题：设$z=g(y)$是可微函数，则有不论$y$是自变量还是可微函数，均有$dz=g'(y)dy$.
  证明：若$y=f(x)$是可微函数，则有$\frac{dz}{dx}=g'(f(x))f'(x)$，故有$dz=g'(f(x))f'(x)dx=g'(y)dy$.
- 例：求微分$d(e^{\sin x^2})$.
  解法1. $(e^{\sin x^2})'=e^{\sin x^2}\cos x^2(2x)$，因此

$$d(e^{\sin x^2})=e^{\sin x^2}\cos x^2\cdot 2xdx.$$

解法2. 利用一阶微分形式的不变性，

$$\begin{aligned}d(e^{\sin x^2})=&e^{\sin x^2}d(\sin x^2)=e^{\sin x^2}\cos x^2 d(x^2)\\=&e^{\sin x^2}\cos x^2\cdot 2xdx.\end{aligned}$$

# 一阶微分形式的不变性

- 命题：设$z=g(y)$是可微函数，则有不论$y$是自变量还是可微函数，均有$dz=g'(y)dy$.
  证明：若$y=f(x)$是可微函数，则有$\frac{dz}{dx}=g'(f(x))f'(x)$，故有$dz=g'(f(x))f'(x)dx=g'(y)dy$.
- 例：求微分$d(e^{\sin x^2})$.
  解法1. $(e^{\sin x^2})'=e^{\sin x^2}\cos x^2(2x)$，因此

$$d(e^{\sin x^2})=e^{\sin x^2}\cos x^2\cdot 2xdx.$$

解法2. 利用一阶微分形式的不变性，

$$\begin{aligned} d(e^{\sin x^2}) &= e^{\sin x^2}d(\sin x^2)=e^{\sin x^2}\cos x^2 d(x^2) \\ &= e^{\sin x^2}\cos x^2\cdot 2xdx. \end{aligned}$$

# 一阶微分形式的不变性

- 命题：设$z=g(y)$是可微函数，则有不论$y$是自变量还是可微函数，均有$dz=g'(y)dy$.
  证明：若$y=f(x)$是可微函数，则有$\frac{dz}{dx}=g'(f(x))f'(x)$，故有$dz=g'(f(x))f'(x)dx=g'(y)dy$.
- 例：求微分$d(e^{\sin x^2})$.
  解法1. $(e^{\sin x^2})'=e^{\sin x^2}\cos x^2(2x)$，因此

$$d(e^{\sin x^2})=e^{\sin x^2}\cos x^2\cdot 2xdx.$$

解法2. 利用一阶微分形式的不变性，

$$\begin{aligned} d(e^{\sin x^2}) =& e^{\sin x^2}d(\sin x^2)=e^{\sin x^2}\cos x^2 d(x^2) \\ =& e^{\sin x^2}\cos x^2\cdot 2xdx. \end{aligned}$$

# 隐函数的导数1

- 若$y=f(x), x\in X$代入方程$F(x,y)=0$恒成立，即$F(x,f(x))\equiv 0, x\in X$，则称$y=f(x), x\in X$是由方程$F(x,y)=0$确定的隐函数.
- 例：$y=\pm\sqrt{R^2-x^2}$，$x\in(-R,+R)$是由$x^2+y^2-R^2=0$确定的隐函数.
- 例：若$f$是双射，则$y=f^{-1}(x)$是由方程$x-f(y)=0$确定的隐函数.
- 注：$F(x,y)=0$确定的隐函数的存在性和唯一性以后在多元函数部分讨论.

# 隐函数的导数1

- 若$y = f(x), x \in X$代入方程$F(x, y) = 0$恒成立，即$F(x, f(x)) \equiv 0, x \in X$，则称$y = f(x), x \in X$是由方程$F(x, y) = 0$确定的隐函数.
- 例：$y = \pm\sqrt{R^2 - x^2}$，$x \in (-R, +R)$是由$x^2 + y^2 - R^2 = 0$确定的隐函数.
- 例：若$f$是双射，则$y = f^{-1}(x)$是由方程$x - f(y) = 0$确定的隐函数.
- 注：$F(x, y) = 0$确定的隐函数的存在性和唯一性以后在多元函数部分讨论.

# 隐函数的导数1

- 若$y=f(x),x\in X$代入方程$F(x,y)=0$恒成立，即$F(x,f(x))\equiv 0,x\in X$，则称$y=f(x),x\in X$是由方程$F(x,y)=0$确定的隐函数.
- 例：$y=\pm\sqrt{R^2-x^2}$，$x\in(-R,+R)$是由$x^2+y^2-R^2=0$确定的隐函数.
- 例：若$f$是双射，则$y=f^{-1}(x)$是由方程$x-f(y)=0$确定的隐函数.
- 注：$F(x,y)=0$确定的隐函数的存在性和唯一性以后在多元函数部分讨论.

# 隐函数的导数1

- 若$y=f(x),x\in X$代入方程$F(x,y)=0$恒成立，即$F(x,f(x))\equiv 0,x\in X$，则称$y=f(x),x\in X$是由方程$F(x,y)=0$确定的隐函数.
- 例：$y=\pm\sqrt{R^2-x^2}$，$x\in(-R,+R)$是由$x^2+y^2-R^2=0$确定的隐函数.
- 例：若$f$是双射，则$y=f^{-1}(x)$是由方程$x-f(y)=0$确定的隐函数.
- 注：$F(x,y)=0$确定的隐函数的存在性和唯一性以后在多元函数部分讨论.

# 隐函数的导数2

- 隐函数的求导方法1：把$y$看成$x$的函数，方程$F(x,y)=0$两边对$x$求导，再解出$f'(x)$.
- 隐函数的求导方法2：方程$F(x,y)=0$两边求微分，再除以$dx$，解出$\frac{dy}{dx}$.
- 求$x^2+y^2=R^2$确定的隐函数的导数.

  解法1：$x^2+y^2=R^2$两边对$x$求导，得$2x+2yy'=0$，因此$y'=-\frac{x}{y}$.

  解法2：方程两边求微分，得$2xdx+2ydy=0$，两边除以$dx$，得$\frac{dy}{dx}=-\frac{x}{y}$.
- 注：上面计算中不需要解出$y(x)$.

## 隐函数的导数2

- 隐函数的求导方法1：把$y$看成$x$的函数，方程$F(x,y)=0$两边对$x$求导，再解出$f'(x)$.
- 隐函数的求导方法2：方程$F(x,y)=0$两边求微分，再除以$dx$，解出$\frac{dy}{dx}$.
- 求$x^2+y^2=R^2$确定的隐函数的导数.
  解法1：$x^2+y^2=R^2$两边对$x$求导，得$2x+2yy'=0$，因此$y'=-\frac{x}{y}$.
  解法2：方程两边求微分，得$2xdx+2ydy=0$，两边除以$dx$，得$\frac{dy}{dx}=-\frac{x}{y}$.
- 注：上面计算中不需要解出$y(x)$.

# 隐函数的导数2

- 隐函数的求导方法1：把$y$看成$x$的函数，方程$F(x,y)=0$两边对$x$求导，再解出$f'(x)$.
- 隐函数的求导方法2：方程$F(x,y)=0$两边求微分，再除以$dx$，解出$\frac{dy}{dx}$.
- 求$x^2+y^2=R^2$确定的隐函数的导数.

  解法1：$x^2+y^2=R^2$两边对$x$求导，得$2x+2yy'=0$，因此$y'=-\frac{x}{y}$.

  解法2：方程两边求微分，得$2xdx+2ydy=0$，两边除以$dx$，得$\frac{dy}{dx}=-\frac{x}{y}$.
- 注：上面计算中不需要解出$y(x)$.

# 隐函数的导数2

- 隐函数的求导方法1：把$y$看成$x$的函数，方程$F(x,y)=0$两边对$x$求导，再解出$f'(x)$.
- 隐函数的求导方法2：方程$F(x,y)=0$两边求微分，再除以$dx$，解出$\frac{dy}{dx}$.
- 求$x^2+y^2=R^2$确定的隐函数的导数.
  解法1：$x^2+y^2=R^2$两边对$x$求导，得$2x+2yy'=0$，因此$y'=-\frac{x}{y}$.
  解法2：方程两边求微分，得$2xdx+2ydy=0$，两边除以$dx$，得$\frac{dy}{dx}=-\frac{x}{y}$.
- 注：上面计算中不需要解出$y(x)$.

## 隐函数的导数2

- 隐函数的求导方法1：把$y$看成$x$的函数，方程$F(x,y)=0$两边对$x$求导，再解出$f'(x)$.
- 隐函数的求导方法2：方程$F(x,y)=0$两边求微分，再除以$dx$，解出$\frac{dy}{dx}$.
- 求$x^2+y^2=R^2$确定的隐函数的导数.
  解法1：$x^2+y^2=R^2$两边对$x$求导，得$2x+2yy'=0$，因此$y'=-\frac{x}{y}$.
  解法2：方程两边求微分，得$2xdx+2ydy=0$，两边除以$dx$，得$\frac{dy}{dx}=-\frac{x}{y}$.
- 注：上面计算中不需要解出$y(x)$.

# 隐函数的导数2

- 隐函数的求导方法1：把$y$看成$x$的函数，方程$F(x,y)=0$两边对$x$求导，再解出$f'(x)$.
- 隐函数的求导方法2：方程$F(x,y)=0$两边求微分，再除以$dx$，解出$\frac{dy}{dx}$.
- 求$x^2+y^2=R^2$确定的隐函数的导数.
  解法1：$x^2+y^2=R^2$两边对$x$求导，得$2x+2yy'=0$，因此$y'=-\frac{x}{y}$.
  解法2：方程两边求微分，得$2xdx+2ydy=0$，两边除以$dx$，得$\frac{dy}{dx}=-\frac{x}{y}$.
- 注：上面计算中不需要解出$y(x)$.

# 隐函数的导数3

- 上例中的导数公式$y' = -\frac{x}{y}$对$y = \pm\sqrt{R^2 - x^2}$都适应. 事实上$y' = \mp\frac{x}{\sqrt{R^2-x^2}} = -\frac{x}{y}$. 由上述公式可知$(\frac{\sqrt{2}}{2}R, \frac{\sqrt{2}}{2}R)$处的切线斜率为$-1$, 此时并不需要解出$y$的表达式.
- 例: 求$f$的反函数的导数.
  解: $f$的反函数时是由方程$x - f(y) = 0$确定的隐函数. 方程两边对$x$求导, 得$1 - f'(y)y' = 0$, 即得$y'(x)|_{x=f(y)} = \frac{1}{f'(y)}$.
- 例:求方程$y - x - \epsilon\sin y = 0$ $(0 < \epsilon < 1)$确定的隐函数的导数.
  解: 方程$y - x - \epsilon\sin y = 0$ 两边求微分得$dy - dx - \epsilon\cos dy = 0$, 再除以$dx$得$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{1-\epsilon\cos y}$.

## 隐函数的导数3

- 上例中的导数公式$y' = -\frac{x}{y}$对$y = \pm\sqrt{R^2 - x^2}$都适应. 事实上$y' = \mp\frac{x}{\sqrt{R^2-x^2}} = -\frac{x}{y}$. 由上述公式可知$(\frac{\sqrt{2}}{2}R, \frac{\sqrt{2}}{2}R)$处的切线斜率为$-1$, 此时并不需要解出$y$的表达式.
- 例: 求$f$的反函数的导数.
  解: $f$的反函数时是由方程$x - f(y) = 0$确定的隐函数. 方程两边对$x$求导, 得$1 - f'(y)y' = 0$, 即得$y'(x)|_{x=f(y)} = \frac{1}{f'(y)}$.
- 例:求方程$y - x - \epsilon \sin y = 0$ $(0 < \epsilon < 1)$确定的隐函数的导数.
  解: 方程$y - x - \epsilon \sin y = 0$ 两边求微分得$dy - dx - \epsilon \cos dy = 0$, 再除以$dx$得$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{1-\epsilon\cos y}$.

# 隐函数的导数3

- 上例中的导数公式$y' = -\frac{x}{y}$对$y = \pm\sqrt{R^2 - x^2}$都适应. 事实上$y' = \mp\frac{x}{\sqrt{R^2-x^2}} = -\frac{x}{y}$. 由上述公式可知$(\frac{\sqrt{2}}{2}R, \frac{\sqrt{2}}{2}R)$处的切线斜率为$-1$, 此时并不需要解出$y$的表达式.
- 例: 求$f$的反函数的导数.
  解: $f$的反函数时是由方程$x - f(y) = 0$确定的隐函数. 方程两边对$x$求导, 得$1 - f'(y)y' = 0$, 即得$y'(x)|_{x=f(y)} = \frac{1}{f'(y)}$.
- 例:求方程$y - x - \epsilon \sin y = 0$ $(0 < \epsilon < 1)$确定的隐函数的导数.
  解: 方程$y - x - \epsilon \sin y = 0$ 两边求微分得$dy - dx - \epsilon \cos dy = 0$, 再除以$dx$得$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{1-\epsilon \cos y}$.

# 隐函数的导数3

- 上例中的导数公式$y' = -\frac{x}{y}$对$y = \pm\sqrt{R^2 - x^2}$都适应. 事实上$y' = \mp\frac{x}{\sqrt{R^2-x^2}} = -\frac{x}{y}$. 由上述公式可知$(\frac{\sqrt{2}}{2}R, \frac{\sqrt{2}}{2}R)$处的切线斜率为$-1$，此时并不需要解出$y$的表达式.
- 例：求$f$的反函数的导数.
  解: $f$的反函数时是由方程$x - f(y) = 0$确定的隐函数. 方程两边对$x$求导, 得$1 - f'(y)y' = 0$, 即得$y'(x)|_{x=f(y)} = \frac{1}{f'(y)}$.
- 例:求方程$y - x - \epsilon \sin y = 0$ $(0 < \epsilon < 1)$确定的隐函数的导数.
  解：方程$y - x - \epsilon \sin y = 0$ 两边求微分得$dy - dx - \epsilon \cos dy = 0$, 再除以$dx$得$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{1-\epsilon \cos y}$.

# 隐函数的导数3

- 上例中的导数公式$y' = -\frac{x}{y}$对$y = \pm\sqrt{R^2 - x^2}$都适应. 事实上$y' = \mp\frac{x}{\sqrt{R^2-x^2}} = -\frac{x}{y}$. 由上述公式可知$(\frac{\sqrt{2}}{2}R, \frac{\sqrt{2}}{2}R)$处的切线斜率为$-1$, 此时并不需要解出$y$的表达式.
- 例: 求$f$的反函数的导数.
  解: $f$的反函数时是由方程$x - f(y) = 0$确定的隐函数. 方程两边对$x$求导, 得$1 - f'(y)y' = 0$, 即得$y'(x)|_{x=f(y)} = \frac{1}{f'(y)}$.
- 例:求方程$y - x - \epsilon \sin y = 0$ $(0 < \epsilon < 1)$确定的隐函数的导数.
  解: 方程$y - x - \epsilon \sin y = 0$ 两边求微分得$dy - dx - \epsilon \cos dy = 0$, 再除以$dx$得$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{1-\epsilon \cos y}$.

# 参数方程确定函数的导数1

- 函数$y=f(x)$和参数方程$\begin{cases} x=\phi(t) \\ y=\psi(t) \end{cases}$, $\alpha<t<\beta$. 若参数方程代入$y=f(x)$是恒等，即$\psi(t)\equiv f(\phi(t))$. 设$\phi,\psi,f$均可微，且$\phi'(t)\neq 0$, 则有$y=f(x)$在$x=\phi(t)$处可导，且$\frac{dy}{dx}\Big|_{x=\phi(t)}=\frac{\psi'(t)}{\phi'(t)}$.
  证明：由于$\phi'(t)\neq 0$, 任意固定$t_0$, 则$x=\phi'(t)$在$t_0$附近可逆，设$x_0=\phi(t_0)$, $y=f(x)=\psi(t)=\psi(\phi^{-1}(x))$, 因此有$\frac{dy}{dx}\Big|_{x=\phi(t_0)}=\psi'(t_0)\frac{1}{\phi'(t_0)}$.

# 参数方程确定函数的导数2

- 例：$\begin{cases} x = R\cos t \\ y = R\sin t \end{cases}$，$\left.\frac{dy}{dx}\right|_{x=\phi(t)} = \frac{-\cos t}{\sin t} = -\frac{x}{y}$.
- 例：$\begin{cases} x = f(t) \\ y = t \end{cases}$，$\left.\frac{dy}{dx}\right|_{x=f(t)} = \frac{1}{f'(t)} = \frac{1}{f'(y)}$.
- 例：$\begin{cases} x = R(t)\cos t \\ y = R(t)\sin t \end{cases}$，$\left.\frac{dy}{dx}\right|_{x=\phi(t)} = \frac{R'(t)\sin t + R(t)\cos t}{R'(t)\cos t - R(t)\sin t}$.

# 参数方程确定函数的导数2

- 例: $\begin{cases} x = R\cos t \\ y = R\sin t \end{cases}$, $\frac{dy}{dx}\Big|_{x=\phi(t)} = \frac{-\cos t}{\sin t} = -\frac{x}{y}$.
- 例: $\begin{cases} x = f(t) \\ y = t \end{cases}$, $\frac{dy}{dx}\Big|_{x=f(t)} = \frac{1}{f'(t)} = \frac{1}{f'(y)}$.
- 例: $\begin{cases} x = R(t)\cos t \\ y = R(t)\sin t \end{cases}$, $\frac{dy}{dx}\Big|_{x=\phi(t)} = \frac{R'(t)\sin t + R(t)\cos t}{R'(t)\cos t - R(t)\sin t}$.

# 参数方程确定函数的导数2

- 例: $\begin{cases} x = R\cos t \\ y = R\sin t \end{cases}$, $\frac{dy}{dx}\Big|_{x=\phi(t)} = \frac{-\cos t}{\sin t} = -\frac{x}{y}$.
- 例: $\begin{cases} x = f(t) \\ y = t \end{cases}$, $\frac{dy}{dx}\Big|_{x=f(t)} = \frac{1}{f'(t)} = \frac{1}{f'(y)}$.
- 例: $\begin{cases} x = R(t)\cos t \\ y = R(t)\sin t \end{cases}$, $\frac{dy}{dx}\Big|_{x=\phi(t)} = \frac{R'(t)\sin t + R(t)\cos t}{R'(t)\cos t - R(t)\sin t}$.