高阶导数的定义

- 若$f(x)$在(a,b)上可导，导函数$f'(x)$在x_0处可导，则称$f(x)$在x_0处二阶可导，$f(x)$在x_0处二阶导数定义为

$$f''(x_0)=\frac{d^2f}{dx^2}\Big|_{x_0}=(f'(x))'(x_0)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f'(x_0+\Delta x)-f'(x_0)}{\Delta x}.$$

- 若$f(x)$在(a,b)上$(n-1)$阶可导，且$n-1$阶导函数$f^{(n-1)}(x)$在x_0处可导，则称$f(x)$在x_0处n阶可导，$f(x)$在x_0处n阶导数定义为

$$f^{(n)}(x_0)=\frac{d^nf}{dx^n}\Big|_{x_0}=(f^{(n-1)}(x))'(x_0).$$

- 例：直线运动物体位置随时间变化函数为$S=S(t)$，则$v(t)=S'(t)$，$a(t)=S''(t)$.

高阶导数的定义

- 若$f(x)$在(a,b)上可导，导函数$f'(x)$在x_0 处可导，则称$f(x)$在x_0处二阶可导，$f(x)$在x_0处二阶导数定义为

$$f''(x_0)=\frac{d^2f}{dx^2}\Big|_{x_0}=(f'(x))'(x_0)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f'(x_0+\Delta x)-f'(x_0)}{\Delta x}.$$

- 若$f(x)$在(a,b)上$(n-1)$阶可导，且$n-1$阶导函数$f^{(n-1)}(x)$在x_0处可导，则称$f(x)$在x_0处n阶可导，$f(x)$在x_0处n阶导数定义为

$$f^{(n)}(x_0)=\frac{d^nf}{dx^n}\Big|_{x_0}=(f^{(n-1)}(x))'(x_0).$$

- 例：直线运动物体位置随时间变化函数为$S=S(t)$, 则$v(t)=S'(t)$, $a(t)=S''(t)$.

高阶导数的定义

- 若$f(x)$在(a,b)上可导，导函数$f'(x)$在x_0 处可导，则称$f(x)$在x_0处二阶可导，$f(x)$在x_0处二阶导数定义为

$$f''(x_0)=\frac{d^2f}{dx^2}\Big|_{x_0}=(f'(x))'(x_0)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f'(x_0+\Delta x)-f'(x_0)}{\Delta x}.$$

- 若$f(x)$在(a,b)上$(n-1)$阶可导，且$n-1$阶导函数$f^{(n-1)}(x)$在x_0处可导，则称$f(x)$在x_0处n阶可导，$f(x)$在x_0处n阶导数定义为

$$f^{(n)}(x_0)=\frac{d^nf}{dx^n}\Big|_{x_0}=(f^{(n-1)}(x))'(x_0).$$

- 例：直线运动物体位置随时间变化函数为$S=S(t)$, 则$v(t)=S'(t)$, $a(t)=S''(t)$.

一些函数的高阶导数

- $(\sin x)^{(n)} = \sin(x + \frac{n\pi}{2})$, $(\cos x)^{(n)} = \cos(x + \frac{n\pi}{2})$. 即

$$
\begin{aligned}
(\sin x)^{(4n)} &= \sin x, & (\sin x)^{(4n+1)} &= \cos x, \\
(\sin x)^{(4n+2)} &= -\sin x, & (\sin x)^{(4n+3)} &= -\cos x, \\
(\cos x)^{(4n)} &= \cos x, & (\cos x)^{(4n+1)} &= -\sin x, \\
(\cos x)^{(4n+2)} &= -\cos x, & (\cos x)^{(4n+3)} &= \sin x.
\end{aligned}
$$

- $(e^x)^{(n)} = e^x$, $(a^x)^{(n)} = (\ln a)^n a^x$.
- 当a不是自然数时，$(x^a)^{(n)} = a(a-1)\cdots(a-n+1)x^{a-n}$,
- $(\ln(1+x))^{(n)} = ((1+x)^{-1})^{n-1} = (-1)^{n-1}\frac{(n-1)!}{(x+1)^n}$.

一些函数的高阶导数

- $(\sin x)^{(n)} = \sin(x + \frac{n\pi}{2})$, $(\cos x)^{(n)} = \cos(x + \frac{n\pi}{2})$. 即

$$
\begin{aligned}
(\sin x)^{(4n)} &= \sin x, & (\sin x)^{(4n+1)} &= \cos x,\\
(\sin x)^{(4n+2)} &= -\sin x, & (\sin x)^{(4n+3)} &= -\cos x,\\
(\cos x)^{(4n)} &= \cos x, & (\cos x)^{(4n+1)} &= -\sin x,\\
(\cos x)^{(4n+2)} &= -\cos x, & (\cos x)^{(4n+3)} &= \sin x.
\end{aligned}
$$

- $(e^x)^{(n)} = e^x$, $(a^x)^{(n)} = (\ln a)^n a^x$.
- 当a不是自然数时，$(x^a)^{(n)} = a(a-1)\cdots(a-n+1)x^{a-n}$,
- $(\ln(1+x))^{(n)} = ((1+x)^{-1})^{n-1} = (-1)^{n-1}\frac{(n-1)!}{(x+1)^n}$.

一些函数的高阶导数

- $(\sin x)^{(n)} = \sin(x + \frac{n\pi}{2})$, $(\cos x)^{(n)} = \cos(x + \frac{n\pi}{2})$. 即

$$
\begin{aligned}
(\sin x)^{(4n)} &= \sin x, & (\sin x)^{(4n+1)} &= \cos x,\\
(\sin x)^{(4n+2)} &= -\sin x, & (\sin x)^{(4n+3)} &= -\cos x,\\
(\cos x)^{(4n)} &= \cos x, & (\cos x)^{(4n+1)} &= -\sin x,\\
(\cos x)^{(4n+2)} &= -\cos x, & (\cos x)^{(4n+3)} &= \sin x.
\end{aligned}
$$

- $(e^x)^{(n)} = e^x$, $(a^x)^{(n)} = (\ln a)^n a^x$.
- 当a不是自然数时，$(x^a)^{(n)} = a(a-1)\cdots(a-n+1)x^{a-n}$,
- $(\ln(1+x))^{(n)} = ((1+x)^{-1})^{n-1} = (-1)^{n-1}\frac{(n-1)!}{(x+1)^n}$.

一些函数的高阶导数

- $(\sin x)^{(n)} = \sin(x + \frac{n\pi}{2})$, $(\cos x)^{(n)} = \cos(x + \frac{n\pi}{2})$. 即

$$\begin{aligned}
(\sin x)^{(4n)} &= \sin x, & (\sin x)^{(4n+1)} &= \cos x,\\
(\sin x)^{(4n+2)} &= -\sin x, & (\sin x)^{(4n+3)} &= -\cos x,\\
(\cos x)^{(4n)} &= \cos x, & (\cos x)^{(4n+1)} &= -\sin x,\\
(\cos x)^{(4n+2)} &= -\cos x, & (\cos x)^{(4n+3)} &= \sin x.
\end{aligned}$$

- $(e^x)^{(n)} = e^x$, $(a^x)^{(n)} = (\ln a)^n a^x$.
- 当a不是自然数时，$(x^a)^{(n)} = a(a-1)\cdots(a-n+1)x^{a-n}$,
- $(\ln(1+x))^{(n)} = ((1+x)^{-1})^{n-1} = (-1)^{n-1}\frac{(n-1)!}{(x+1)^n}$.

函数乘积的高阶导数1

- Leibniz公式：设$y = f(x)$和$y = g(x)$在(a, b)上有n阶导数，则有

$$(f(x)g(x))^{(n)} = \sum_{k=0}^{n} C_n^k f^{(k)}(x)g^{(n-k)}(x).$$

这里规定$f^{(0)} = f, g^{(0)} = g$.

函数乘积的高阶导数2

- 证明：$n=1$时显然成立．设$n=m$时成立，$n=m+1$时，

$$(f(x)g(x))^{(m+1)}=\Big(\sum_{k=0}^{m}C_m^k f^{(k)}(x)g^{(m-k)}(x)\Big)'$$

$$=\sum_{k=0}^{m}C_m^k f^{(k+1)}(x)g^{(m-k)}(x)+\sum_{k=0}^{m}C_m^k f^{(k)}(x)g^{(m-k+1)}(x)$$

$$=f^{(m+1)}(x)g(x)+f(x)g^{(m+1)}+\sum_{k=1}^{m}(C_m^{k-1}+C_m^k)f^{(k)}g^{(m+1-k)}$$

$$=\sum_{k=0}^{m+1}C_{m+1}^k f^{(k)}(x)g^{(m+1-k)}(x)$$

高阶导数—例

- 例： $y = x^2 \sin x$，求$y^{(5)}$.
- 解：

$$
\begin{aligned}
(x^2 \sin x)^{(5)} =& x^2(\sin x)^{(5)} + 5 \cdot 2x \cdot (\sin x)^{(4)} + \frac{5 \cdot 4}{2} 2(\sin x)^{(3)} \\
=& x^2 \cos x + 5 \cdot 2x \cdot \sin x + \frac{5 \cdot 4}{2} 2(-\cos x) \\
=& (x^2 - 20) \cos x + 10x \cdot \sin x
\end{aligned}
$$

高阶导数—例

- 例： $y = x^2 \sin x$，求$y^{(5)}$.
- 解：

$$
\begin{aligned}
(x^2 \sin x)^{(5)} =& x^2 (\sin x)^{(5)} + 5 \cdot 2x \cdot (\sin x)^{(4)} + \frac{5 \cdot 4}{2} 2 (\sin x)^{(3)} \\
=& x^2 \cos x + 5 \cdot 2x \cdot \sin x + \frac{5 \cdot 4}{2} 2 (-\cos x) \\
=& (x^2 - 20) \cos x + 10x \cdot \sin x
\end{aligned}
$$

高阶微分

- $df(x)=f'(x)dx$看成x的函数（自变量的微分dx看成常数），继续求微分，得到二阶微分：

$$d^2f(x)=d(df(x))=d(f'(x))dx=f''(x)dx^2.$$

依次类推，n阶微分$d^nf(x)=f^{(n)}(x)dx^n$. 这里$dx^n=(dx)^n$.

- 复合函数的二阶微分：设$z=g(y), y=f(x)$, 则有

$$\begin{aligned} d^2z=&(g(f(x)))''dx^2=(g'(f(x)f'(x)))'dx^2\\ =&(g''(f(x))(f'(x))^2+g'(f(x))f''(x))dx^2\\ =&g''y)dy^2+g'(y)d^2y. \end{aligned}$$

由此可知二阶微分形式没有不变性.

高阶微分

- $df(x) = f'(x)dx$看成x的函数（自变量的微分dx看成常数），继续求微分，得到二阶微分：

$$d^2f(x) = d(df(x)) = d(f'(x))dx = f''(x)dx^2.$$

依次类推，n阶微分$d^nf(x) = f^{(n)}(x)dx^n$. 这里$dx^n = (dx)^n$.

- 复合函数的二阶微分：设$z = g(y)$, $y = f(x)$, 则有

$$\begin{aligned} d^2z =&(g(f(x)))''dx^2 = (g'(f(x)f'(x)))'dx^2 \\ =&(g''(f(x))(f'(x))^2 + g'(f(x))f''(x))dx^2 \\ =&g''y)dy^2 + g'(y)d^2y. \end{aligned}$$

由此可知二阶微分形式没有不变性.

原函数1

- 定义：设$f(x)$在区间(a,b)上的有定义，若区间(a,b)上的函数$F(x)$满足$F'(x)=f(x)$, $x\in(a,b)$, 则称$F(x)$是$f(x)$在区间(a,b)上的原函数.
- 注：$F(x)$是处处可导，$f(x)$可以不连续，也不一定有界.
- 注：(a,b)可以是无穷区间，若在端点用左（右）导数，也可定义闭区间上的原函数.
- 例：$F(x)=\begin{cases} x^2\sin\frac{1}{x}, & x\neq 0\\ 0, & x=0\end{cases}$ 是下面函数的原函数.

$$f(x)=\begin{cases} 2x\sin\frac{1}{x}-\cos\frac{1}{x}, & x\neq 0\\ 0, & x=0\end{cases}.$$

原函数1

- 定义：设$f(x)$在区间(a,b)上的有定义，若区间(a,b)上的函数$F(x)$满足$F'(x)=f(x)$，$x\in(a,b)$，则称$F(x)$是$f(x)$在区间(a,b)上的原函数.
- 注：$F(x)$是处处可导，$f(x)$可以不连续，也不一定有界.
- 注：(a,b)可以是无穷区间，若在端点用左（右）导数，也可定义闭区间上的原函数.
- 例：$F(x)=\begin{cases} x^2\sin\frac{1}{x}, & x\neq 0\\ 0, & x=0\end{cases}$ 是下面函数的原函数.

$$f(x)=\begin{cases} 2x\sin\frac{1}{x}-\cos\frac{1}{x}, & x\neq 0\\ 0, & x=0\end{cases}.$$

原函数1

- 定义：设$f(x)$在区间(a,b)上的有定义，若区间(a,b)上的函数$F(x)$ 满足$F'(x)=f(x)$, $x\in(a,b)$, 则称$F(x)$是$f(x)$在区间(a,b)上的原函数.
- 注：$F(x)$是处处可导，$f(x)$可以不连续，也不一定有界.
- 注：(a,b)可以是无穷区间，若在端点用左（右）导数，也可定义闭区间上的原函数.
- 例：$F(x)=\begin{cases} x^2\sin\frac{1}{x}, & x\neq 0 \\ 0, & x=0 \end{cases}$ 是下面函数的原函数.

$$f(x)=\begin{cases} 2x\sin\frac{1}{x}-\cos\frac{1}{x}, & x\neq 0 \\ 0, & x=0 \end{cases}.$$

原函数1

- 定义：设$f(x)$在区间(a,b)上的有定义，若区间(a,b)上的函数$F(x)$ 满足$F'(x)=f(x)$，$x\in(a,b)$，则称$F(x)$是$f(x)$在区间(a,b)上的原函数.
- 注：$F(x)$是处处可导，$f(x)$可以不连续，也不一定有界.
- 注：(a,b)可以是无穷区间，若在端点用左（右）导数，也可定义闭区间上的原函数.
- 例：$F(x)=\begin{cases} x^2\sin\frac{1}{x}, & x\neq 0\\ 0, & x=0\end{cases}$ 是下面函数的原函数.

$$f(x)=\begin{cases} 2x\sin\frac{1}{x}-\cos\frac{1}{x}, & x\neq 0\\ 0, & x=0\end{cases}.$$

原函数2

- 命题：设$F(x)$是$f(x)$在区间(a, b)上的原函数，则对任意常数C，$F(x)+C$也是$f(x)$ 的原函数；反之，若$G(x)$是$f(x)$的原函数，则存在C，使得$G(x) = F(x) + C$．即$\{F(x) + C\}$是$f(x)$ 在(a, b)上原函数的全体.
- 证明：$(F(x) + C)' = F'(x) = f(x)$; $(G(x) - F(x))' = 0$，从而$G(x) - F(x) \equiv C$(这里要用到微分中值定理．若$\phi'(x) \equiv 0$，$x \in (a, b)$，则对任意的$x_1, x_2 \in (a, b)$，有$\phi(x_1) - \phi(x_2) = \phi'(\xi)(x_1 - x_2) = 0$).
- 例：$F(x) = \ln|x|$, $F'(x) = \frac{1}{x}$, $\{F(x)+C\}$．是$f(x)$在$(0, +\infty)$上原函数的全体，也是$f(x)$在$(-\infty, 0,)$上原函数的全体.

原函数2

- 命题：设$F(x)$是$f(x)$在区间(a,b)上的原函数，则对任意常数C，$F(x)+C$也是$f(x)$ 的原函数；反之，若$G(x)$是$f(x)$的原函数，则存在C，使得$G(x)=F(x)+C$. 即$\{F(x)+C\}$是$f(x)$ 在(a,b)上原函数的全体.
- 证明：$(F(x)+C)'=F'(x)=f(x)$; $(G(x)-F(x))'=0$，从而$G(x)-F(x)\equiv C$(这里要用到微分中值定理. 若$\phi'(x)\equiv 0$，$x\in(a,b)$，则对任意的$x_1,x_2\in(a,b)$，有$\phi(x_1)-\phi(x_2)=\phi'(\xi)(x_1-x_2)=0$).
- 例：$F(x)=\ln|x|$, $F'(x)=\frac{1}{x}$, $\{F(x)+C\}$. 是$f(x)$在$(0,+\infty)$上原函数的全体, 也是$f(x)$在$(-\infty,0,)$上原函数的全体.

原函数2

- 命题：设$F(x)$是$f(x)$在区间(a,b)上的原函数，则对任意常数C，$F(x)+C$也是$f(x)$ 的原函数；反之，若$G(x)$是$f(x)$的原函数，则存在C，使得$G(x)=F(x)+C$．即$\{F(x)+C\}$是$f(x)$ 在(a,b)上原函数的全体.
- 证明：$(F(x)+C)'=F'(x)=f(x)$; $(G(x)-F(x))'=0$，从而$G(x)-F(x)\equiv C$(这里要用到微分中值定理．若$\phi'(x)\equiv 0$，$x\in(a,b)$，则对任意的$x_1, x_2\in(a,b)$，有$\phi(x_1)-\phi(x_2)=\phi'(\xi)(x_1-x_2)=0)$.
- 例：$F(x)=\ln|x|$, $F'(x)=\frac{1}{x}$, $\{F(x)+C\}$．是$f(x)$在$(0,+\infty)$上原函数的全体, 也是$f(x)$在$(-\infty,0,)$上原函数的全体.

不定积分

- 定义：设$f(x)$是(a,b)上定义的函数，(a,b)上$f(x)$的原函数构成的函数族称为$f(x)$的不定积分，记为$\int f(x)dx$．若$F(x)$是$f(x)$在(a,b)上的一个原函数，则有$\int f(x)dx=F(x)+C$．这里$f(x)$叫做被积函数，x叫做积分变量，C叫做积分常数．
- 注：不定积分是函数族，不是单个函数．
- 注：(a,b)可以是无穷区间．如：$\frac{1}{x}$在$(0,+\infty)$或$(-\infty,0,)$上的不定积分为$\ln|x|+C$．
- 注：任意开区间上的连续函数都有原函数，但初等函数的原函数不一定是初等函数，如$\sin x^2$，e^{-x^2}，$\frac{e^x}{x}$，$\frac{\sin x}{x}$．

不定积分

- 定义：设$f(x)$是(a,b)上定义的函数，(a,b)上$f(x)$的原函数构成的函数族称为$f(x)$的不定积分，记为$\int f(x)dx$. 若$F(x)$是$f(x)$在(a,b)上的一个原函数，则有$\int f(x)dx = F(x) + C$. 这里$f(x)$叫做被积函数，x叫做积分变量，C叫做积分常数.
- 注：不定积分是函数族，不是单个函数.
- 注：(a,b)可以是无穷区间. 如：$\frac{1}{x}$在$(0,+\infty)$或$(-\infty,0,)$上的不定积分为$\ln|x| + C$.
- 注：任意开区间上的连续函数都有原函数，但初等函数的原函数不一定是初等函数，如$\sin x^2$, e^{-x^2}, $\frac{e^x}{x}$, $\frac{\sin x}{x}$.

不定积分

- 定义：设$f(x)$是(a,b)上定义的函数，(a,b)上$f(x)$的原函数构成的函数族称为$f(x)$的不定积分，记为$\int f(x)dx$. 若$F(x)$是$f(x)$在(a,b)上的一个原函数，则有$\int f(x)dx = F(x) + C$. 这里$f(x)$叫做被积函数，x叫做积分变量，C叫做积分常数.
- 注：不定积分是函数族，不是单个函数.
- 注：(a,b)可以是无穷区间. 如：$\frac{1}{x}$在$(0,+\infty)$或$(-\infty,0,)$上的不定积分为$\ln|x| + C$.
- 注：任意开区间上的连续函数都有原函数，但初等函数的原函数不一定是初等函数，如$\sin x^2$，e^{-x^2}，$\frac{e^x}{x}$，$\frac{\sin x}{x}$.

不定积分

- 定义：设$f(x)$是(a,b)上定义的函数，(a,b)上$f(x)$的原函数构成的函数族称为$f(x)$的不定积分，记为$\int f(x)dx$. 若$F(x)$是$f(x)$在(a,b)上的一个原函数，则有$\int f(x)dx = F(x) + C$. 这里$f(x)$叫做被积函数，x叫做积分变量，C叫做积分常数.
- 注：不定积分是函数族，不是单个函数.
- 注：(a,b)可以是无穷区间. 如：$\frac{1}{x}$在$(0,+\infty)$或$(-\infty,0,)$上的不定积分为$\ln|x| + C$.
- 注：任意开区间上的连续函数都有原函数，但初等函数的原函数不一定是初等函数，如$\sin x^2$，e^{-x^2}，$\frac{e^x}{x}$，$\frac{\sin x}{x}$.

e^{-x^2}的原函数不一定是初等函数

例 1 证明$\int e^{-x^2}dx$不能表为初等函数.

证明 反证法：设$u(x)=\int e^{-x^2}dx$为初等函数，则由刘维尔第三定理知：

$$u(x)=R(x)e^{g(x)}+C,$$

(其中$R(x)$为x的有理函数，C为常数，$f(x)\equiv1, g(x)=-x^2$)上式两边求导得

$$\frac{du}{dx}=R'(x)e^{-x^2}-2xe^{-x^2}R(x)$$

$$=e^{-x^2}[R'(x)-2xR(x)]=e^{-x^2},$$

所以

$$R'(x)-2xR(x)=1.$$

上式右端的 1 在有限平面上无极点，所以$R(x)$在有限平面上无极点，故$R(x)$不是有理分式函数. 另一方面，$R(x)$也不是多项式. 否则，若$R(x)$是x的n次多项式，则上式左端也是$n+1$次多项式，矛盾. 故$\int e^{-x^2}dx$不是初等函数.

数学分析概要二十讲 张从军

$\frac{\sin x}{x}$的原函数不一定是初等函数

例 2 证明$\int\frac{\sin x}{x}dx$不能表为初等函数.

证明 由欧拉公式

$$e^{ix}=\cos x+i\sin x,\quad e^{-ix}=\cos x-i\sin x$$

有

$$\sin x=\frac{1}{2i}[e^{ix}-e^{-ix}]$$

从而

$$\int\frac{\sin x}{x}dx=\int\frac{1}{2i}\left[\frac{e^{ix}}{x}-\frac{e^{-ix}}{x}\right]dx=\frac{1}{2i}\int\left[\frac{e^{ix}}{x}-\frac{e^{-ix}}{x}\right]dx,$$

由于$\int\frac{e^{ix}}{x}dx$与$\int\frac{e^{-ix}}{x}dx$都不是初等函数，且$ix-(-ix)=2ix\neq$常数，故$\int\frac{\sin x}{x}dx$不是初等函数.

定理 7(切比雪夫定理) 二项型微分$x^p(1-x)^q dx$的不定积分为初等函数的充要条件是$p,q,p+q$三个有理数中至少有一个为整数.

不定积分的性质

- $\int (f(x) \pm g(x))dx = \int f(x)dx \pm \int g(x)dx.$
  证明：若$F(x), G(x)$分别是$f(x), g(x)$的原函数，则$\int f(x)dx = F(x) + C$, $\int g(x)dx = G(x) + C$, $\{F(x) + C\} + \{F(x) + C\} = \{F(x) + G(x) + C\}.$
- $\int cf(x)dx = c\int f(x)dx.$

不定积分的性质

- $\int(f(x) \pm g(x))dx = \int f(x)dx \pm \int g(x)dx$.
  证明：若$F(x), G(x)$分别是$f(x), g(x)$的原函数，则$\int f(x)dx = F(x) + C$, $\int g(x)dx = G(x) + C$, $\{F(x) + C\} + \{F(x) + C\} = \{F(x) + G(x) + C\}$.
- $\int cf(x)dx = c\int f(x)dx$.

不定积分的性质

- $\int (f(x) \pm g(x))dx = \int f(x)dx \pm \int g(x)dx$.
  证明：若$F(x), G(x)$分别是$f(x), g(x)$的原函数，则$\int f(x)dx = F(x) + C$, $\int g(x)dx = G(x) + C$, $\{F(x) + C\} + \{F(x) + C\} = \{F(x) + G(x) + C\}$.
- $\int cf(x)dx = c\int f(x)dx$.

不定积分–例

- 求$f(x) = |x|$(在$\mathbb{R}$上)的不定积分.
- 解：考虑函数$F(x) = \begin{cases} \frac{1}{2}x^2, & x \geq 0 \\ -\frac{1}{2}x^2, & x < 0 \end{cases} = \frac{1}{2}|x|x$，显然当$x \neq 0$时，$F'(x) = |x|$，当$x = 0$时，

$$\lim_{\Delta x \to 0+0} \frac{F(\Delta x) - F(0)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0+0} \frac{\frac{1}{2}\Delta x^2}{\Delta x} = 0,$$
$$\lim_{\Delta x \to 0-0} \frac{F(\Delta x) - F(0)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0-0} \frac{-\frac{1}{2}\Delta x^2}{\Delta x} = 0,$$

因此$F(x)$在$x = 0$处可导，且$F'(0) = 0 = |0|$. $F(x)$是$f(x)$的原函数，$\int |x| dx = F(x) + C$.

不定积分–例

- 求$f(x)=|x|$(在$\mathbb{R}$上)的不定积分.
- 解: 考虑函数$F(x)=\begin{cases}\frac{1}{2}x^2, & x\geq 0\\ -\frac{1}{2}x^2, & x<0\end{cases}=\frac{1}{2}|x|x$, 显然当$x\neq 0$时, $F'(x)=|x|$, 当$x=0$时,

$$\lim_{\Delta x\to 0+0}\frac{F(\Delta x)-F(0)}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0+0}\frac{\frac{1}{2}\Delta x^2}{\Delta x}=0,$$
$$\lim_{\Delta x\to 0-0}\frac{F(\Delta x)-F(0)}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0-0}\frac{-\frac{1}{2}\Delta x^2}{\Delta x}=0,$$

因此$F(x)$在$x=0$处可导, 且$F'(0)=0=|0|$. $F(x)$是$f(x)$的原函数, $\int|x|dx=F(x)+C$.

基本不定积分公式

- $\int \cos x dx = \sin x + C$, $\int \sin x dx = -\cos x + C$
- $\int \sec^2 x dx = \tan x + C$,$((k\pi - \frac{\pi}{2}, k\pi - \frac{\pi}{2}))$, $\int \csc^2 x dx = -\cot x + C$, $((k\pi, k\pi + \pi))$.
- $\int 1 dx = x + C$, $\int x^\alpha dx = \frac{1}{\alpha+1}x^{\alpha+1} + C$, $\alpha \neq -1$
- $\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx = \arcsin x + C = -\arccos x + C$, $(-1, 1)$.
- $\int \frac{1}{1+x^2} dx = \arctan x + C = -\text{arccot}\, x + C$, $(-\infty, \infty)$.
- $\int a^x dx = \frac{1}{\ln a} a^x + C$, $a > 0, a \neq 1$.
- $\int \frac{1}{x} dx = \ln |x| + C$

基本不定积分公式

- $\int \cos x dx = \sin x + C$, $\int \sin x dx = -\cos x + C$
- $\int \sec^2 x dx = \tan x + C, ((k\pi - \frac{\pi}{2}, k\pi - \frac{\pi}{2}))$, $\int \csc^2 x dx = -\cot x + C$, $((k\pi, k\pi + \pi))$.
- $\int 1 dx = x + C$, $\int x^\alpha dx = \frac{1}{\alpha+1} x^{\alpha+1} + C$, $\alpha \neq -1$
- $\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx = \arcsin x + C = -\arccos x + C$, $(-1, 1)$.
- $\int \frac{1}{1+x^2} dx = \arctan x + C = -\text{arccot}\, x + C$, $(-\infty, \infty)$.
- $\int a^x dx = \frac{1}{\ln a} a^x + C$, $a > 0, a \neq 1$.
- $\int \frac{1}{x} dx = \ln |x| + C$

基本不定积分公式

- $\int \cos x dx = \sin x + C$, $\int \sin x dx = -\cos x + C$
- $\int \sec^2 x dx = \tan x + C,((k\pi - \frac{\pi}{2}, k\pi - \frac{\pi}{2}))$, $\int \csc^2 x dx = -\cot x + C$, $((k\pi, k\pi + \pi))$.
- $\int 1 dx = x + C$, $\int x^\alpha dx = \frac{1}{\alpha+1}x^{\alpha+1} + C$, $\alpha \neq -1$
- $\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx = \arcsin x + C = -\arccos x + C$, $(-1, 1)$.
- $\int \frac{1}{1+x^2} dx = \arctan x + C = -\operatorname{arccot} x + C$, $(-\infty, \infty)$.
- $\int a^x dx = \frac{1}{\ln a} a^x + C$, $a > 0, a \neq 1$.
- $\int \frac{1}{x} dx = \ln |x| + C$

基本不定积分公式

- $\int \cos x dx = \sin x + C$, $\int \sin x dx = -\cos x + C$
- $\int \sec^2 x dx = \tan x + C, ((k\pi - \frac{\pi}{2}, k\pi - \frac{\pi}{2}))$, $\int \csc^2 x dx = -\cot x + C$, $((k\pi, k\pi + \pi))$.
- $\int 1 dx = x + C$, $\int x^\alpha dx = \frac{1}{\alpha+1} x^{\alpha+1} + C$, $\alpha \neq -1$
- $\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx = \arcsin x + C = -\arccos x + C$, $(-1, 1)$.
- $\int \frac{1}{1+x^2} dx = \arctan x + C = -\text{arccot}\, x + C$, $(-\infty, \infty)$.
- $\int a^x dx = \frac{1}{\ln a} a^x + C$, $a > 0, a \neq 1$.
- $\int \frac{1}{x} dx = \ln |x| + C$

基本不定积分公式

- $\int \cos x dx = \sin x + C$, $\int \sin x dx = -\cos x + C$
- $\int \sec^2 x dx = \tan x + C,((k\pi - \frac{\pi}{2}, k\pi - \frac{\pi}{2}))$, $\int \csc^2 x dx = -\cot x + C$, $((k\pi, k\pi + \pi))$.
- $\int 1 dx = x + C$, $\int x^\alpha dx = \frac{1}{\alpha+1} x^{\alpha+1} + C$, $\alpha \neq -1$
- $\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx = \arcsin x + C = -\arccos x + C$, $(-1, 1)$.
- $\int \frac{1}{1+x^2} dx = \arctan x + C = -\mathrm{arccot}\, x + C$, $(-\infty, \infty)$.
- $\int a^x dx = \frac{1}{\ln a} a^x + C$, $a > 0, a \neq 1$.
- $\int \frac{1}{x} dx = \ln |x| + C$

基本不定积分公式

- $\int \cos x dx = \sin x + C$, $\int \sin x dx = -\cos x + C$
- $\int \sec^2 x dx = \tan x + C, ((k\pi - \frac{\pi}{2}, k\pi - \frac{\pi}{2}))$, $\int \csc^2 x dx = -\cot x + C$, $((k\pi, k\pi + \pi))$.
- $\int 1 dx = x + C$, $\int x^\alpha dx = \frac{1}{\alpha+1} x^{\alpha+1} + C$, $\alpha \neq -1$
- $\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx = \arcsin x + C = -\arccos x + C$, $(-1, 1)$.
- $\int \frac{1}{1+x^2} dx = \arctan x + C = -\mathrm{arccot}\, x + C$, $(-\infty, \infty)$.
- $\int a^x dx = \frac{1}{\ln a} a^x + C$, $a > 0, a \neq 1$.
- $\int \frac{1}{x} dx = \ln |x| + C$

基本不定积分公式

- $\int \cos x dx = \sin x + C$, $\int \sin x dx = -\cos x + C$
- $\int \sec^2 x dx = \tan x + C, ((k\pi - \frac{\pi}{2}, k\pi - \frac{\pi}{2}))$, $\int \csc^2 x dx = -\cot x + C$, $((k\pi, k\pi + \pi))$.
- $\int 1 dx = x + C$, $\int x^\alpha dx = \frac{1}{\alpha+1} x^{\alpha+1} + C$, $\alpha \neq -1$
- $\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx = \arcsin x + C = -\arccos x + C$, $(-1, 1)$.
- $\int \frac{1}{1+x^2} dx = \arctan x + C = -\mathrm{arccot}\, x + C$, $(-\infty, \infty)$.
- $\int a^x dx = \frac{1}{\ln a} a^x + C$, $a > 0, a \neq 1$.
- $\int \frac{1}{x} dx = \ln |x| + C$

简单不定积分的计算

- $\int \frac{(x+1)^2}{\sqrt{x}}dx = \int (x^{\frac{3}{2}} + 2x^{\frac{1}{2}} + x^{-\frac{1}{2}})dx = \frac{2}{5}x^{\frac{5}{2}} + \frac{4}{3}x^{\frac{3}{2}} + 2x^{\frac{1}{2}} + C.$
- $\int (e^x + \frac{3x^2}{1+x^2})dx = e^x + 3\int (1 - \frac{1}{1+x^2})dx = e^x + 3x - 3\arctan x + C.$
- 求$S(t)$满足$\begin{cases} \frac{d^2S}{dt^2} = -g \\ S(0) = h_0, S'(0) = v \end{cases}$.

  解：$S'(t) = -gt + C$，$S(t) = -\frac{1}{2}gt^2 + C_1 t + C_2$，从而$S(t) = -\frac{1}{2}gt^2 + v_0 t + h_0$.

简单不定积分的计算

- $\int \frac{(x+1)^2}{\sqrt{x}}dx = \int (x^{\frac{3}{2}} + 2x^{\frac{1}{2}} + x^{-\frac{1}{2}})dx = \frac{2}{5}x^{\frac{5}{2}} + \frac{4}{3}x^{\frac{3}{2}} + 2x^{\frac{1}{2}} + C.$
- $\int (e^x + \frac{3x^2}{1+x^2})dx = e^x + 3\int (1 - \frac{1}{1+x^2})dx = e^x + 3x - 3\arctan x + C.$
- 求$S(t)$满足$\begin{cases} \frac{d^2S}{dt^2} = -g \\ S(0) = h_0, S'(0) = v \end{cases}$.

  解：$S'(t) = -gt + C$, $S(t) = -\frac{1}{2}gt^2 + C_1t + C_2$, 从而$S(t) = -\frac{1}{2}gt^2 + v_0t + h_0$.

简单不定积分的计算

- $\int \frac{(x+1)^2}{\sqrt{x}} dx = \int (x^{\frac{3}{2}} + 2x^{\frac{1}{2}} + x^{-\frac{1}{2}}) dx = \frac{2}{5}x^{\frac{5}{2}} + \frac{4}{3}x^{\frac{3}{2}} + 2x^{\frac{1}{2}} + C.$
- $\int (e^x + \frac{3x^2}{1+x^2}) dx = e^x + 3\int (1 - \frac{1}{1+x^2}) dx = e^x + 3x - 3\arctan x + C.$
- 求$S(t)$满足$\begin{cases} \frac{d^2S}{dt^2} = -g \\ S(0) = h_0, S'(0) = v \end{cases}$.

解：$S'(t) = -gt + C$，$S(t) = -\frac{1}{2}gt^2 + C_1 t + C_2$，从而$S(t) = -\frac{1}{2}gt^2 + v_0 t + h_0$.

简单不定积分的计算

- $\int \frac{(x+1)^2}{\sqrt{x}}dx = \int (x^{\frac{3}{2}} + 2x^{\frac{1}{2}} + x^{-\frac{1}{2}})dx = \frac{2}{5}x^{\frac{5}{2}} + \frac{4}{3}x^{\frac{3}{2}} + 2x^{\frac{1}{2}} + C.$
- $\int (e^x + \frac{3x^2}{1+x^2})dx = e^x + 3\int (1 - \frac{1}{1+x^2})dx = e^x + 3x - 3\arctan x + C.$
- 求$S(t)$满足$\begin{cases} \frac{d^2S}{dt^2} = -g \\ S(0) = h_0, S'(0) = v \end{cases}$.

  解：$S'(t) = -gt + C$，$S(t) = -\frac{1}{2}gt^2 + C_1 t + C_2$，从而$S(t) = -\frac{1}{2}gt^2 + v_0 t + h_0$.

定积分思想的历史

- 阿基米德(公元前287年-前212年)用内接正多边形的周长来穷尽圆周长，而求得圆周率愈来愈好的近似值，也用一连串的三角形来填充抛物线的图形，以求得其面积. 这是穷尽法的古典例子之一，可以说是积分思想的起源.
- 美国科学家根据一本失传2000多年的古希腊遗稿发现，早在公元前200年左右，古希腊数学家阿基米德就阐述了现代微积分学理论的精粹，并发明出了一种用于微积分计算的特殊工具. 美国科学家克里斯·罗里斯称，如果这本阿基米德“失传遗稿”早牛顿100年被世人发现，那么人类科技进程可能就会提前100年，人类现在说不定都已经登上了火星.
- 3世纪，中国数学家刘徽创立的割圆术用圆内接正九十六边形的面积近似代替圆面积，求出圆周率π的近似值. 并指出："割之弥细，所失弥少，割之又割，以至不可割，则与圆合体而无所失矣".

定积分思想的历史

- 阿基米德(公元前287年-前212年)用内接正多边形的周长来穷尽圆周长，而求得圆周率愈来愈好的近似值，也用一连串的三角形来填充抛物线的图形，以求得其面积. 这是穷尽法的古典例子之一，可以说是积分思想的起源.
- 美国科学家根据一本失传2000多年的古希腊遗稿发现，早在公元前200年左右，古希腊数学家阿基米德就阐述了现代微积分学理论的精粹，并发明出了一种用于微积分计算的特殊工具. 美国科学家克里斯·罗里斯称，如果这本阿基米德“失传遗稿”早牛顿100年被世人发现，那么人类科技进程可能就会提前100年，人类现在说不定都已经登上了火星.
- 3世纪，中国数学家刘徽创立的割圆术用圆内接正九十六边形的面积近似代替圆面积，求出圆周率π的近似值. 并指出："割之弥细，所失弥少，割之又割，以至不可割，则与圆合体而无所失矣".

定积分思想的历史

- 阿基米德(公元前287年-前212年)用内接正多边形的周长来穷尽圆周长，而求得圆周率愈来愈好的近似值，也用一连串的三角形来填充抛物线的图形，以求得其面积. 这是穷尽法的古典例子之一，可以说是积分思想的起源.
- 美国科学家根据一本失传2000多年的古希腊遗稿发现，早在公元前200年左右，古希腊数学家阿基米德就阐述了现代微积分学理论的精粹，并发明出了一种用于微积分计算的特殊工具. 美国科学家克里斯·罗里斯称，如果这本阿基米德“失传遗稿”早牛顿100年被世人发现，那么人类科技进程可能就会提前100年，人类现在说不定都已经登上了火星.
- 3世纪，中国数学家刘徽创立的割圆术用圆内接正九十六边形的面积近似代替圆面积，求出圆周率π的近似值. 并指出："割之弥细，所失弥少，割之又割，以至不可割，则与圆合体而无所失矣".

曲边梯形面积1

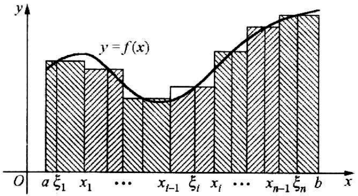
求曲边梯形$x=a, x=b, y=0, y=f(x)$围成的的面积.

- 第一步：把区间$[a,b]$进行分割$a=x_0<x_1<x_2<\cdots<x_n=b$，区间$[x_{i-1},x_i]$对应的小曲边梯形设为$S_i$. 则原来的曲边梯形分解成$S=\cup_{i=1}^n S_i$.
- 第二步：任取$\xi_i\in[x_{i-1},x_i]$，S_i的面积（任记为S_i）近似为

$$S_i \approx f(\xi_i)(x_i - x_{i-1}),$$

从而原曲边梯形的面积

$$S \approx \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)(x_i - x_{i-1}).$$



- 第三步：$\lambda=\max\{\Delta x_i\}$，

$$S = \lim_{\lambda\to 0} \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)(x_i - x_{i-1})$$

曲边梯形面积1

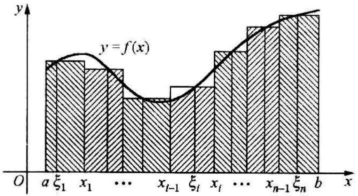
求曲边梯形$x=a, x=b, y=0, y=f(x)$围成的的面积.

- 第一步：把区间$[a,b]$进行分割$a=x_0<x_1<x_2<\cdots<x_n=b$,区间$[x_{i-1},x_i]$对应的小曲边梯形设为$S_i$. 则原来的曲边梯形分解成$S=\cup_{i=1}^n S_i$.
- 第二步：任取$\xi_i\in[x_{i-1},x_i]$, S_i的面积（任记为S_i）近似为

$$S_i\approx f(\xi_i)(x_i-x_{i-1}),$$

从而原曲边梯形的面积

$$S\approx\sum_{i=1}^n f(\xi_i)(x_i-x_{i-1}).$$



- 第三步：$\lambda=\max\{\Delta x_i\}$,

$$S=\lim_{\lambda\to 0}\sum_{i=1}^n f(\xi_i)(x_i-x_{i-1})$$

曲边梯形面积1

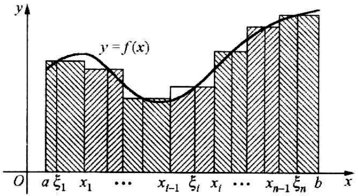
求曲边梯形$x=a, x=b, y=0, y=f(x)$围成的的面积.

- 第一步：把区间$[a,b]$进行分割$a=x_0<x_1<x_2<\cdots<x_n=b$, 区间$[x_{i-1},x_i]$对应的小曲边梯形设为$S_i$. 则原来的曲边梯形分解成$S=\cup_{i=1}^n S_i$.
- 第二步：任取$\xi_i\in[x_{i-1},x_i]$, S_i的面积（任记为S_i）近似为

$$S_i\approx f(\xi_i)(x_i-x_{i-1}),$$

从而原曲边梯形的面积

$$S\approx\sum_{i=1}^n f(\xi_i)(x_i-x_{i-1}).$$



- 第三步：$\lambda=\max\{\Delta x_i\}$,

$$S=\lim_{\lambda\to 0}\sum_{i=1}^n f(\xi_i)(x_i-x_{i-1})$$

曲边梯形面积2

求曲边梯形$x = 0, x = 1, y = 0, y = x^2$围成的的面积.

- 把区间[0, 1]进行分割$a = 0 < \frac{1}{n} < \frac{2}{n} < \cdots < 1$, 区间$[\frac{i-1}{n}, \frac{i}{n}]$对应的小曲边梯形设为$S_i$. 则原来的曲边梯形面积（任然记为$S_i$）近似为

$$S_i \approx (\frac{i-1}{n})^2 \frac{1}{n} = \frac{(i-1)^2}{n^3},$$

从而原曲边梯形的面积$S \approx \sum_{i=1}^{n} \frac{(i-1)^2}{n^3} = \frac{1}{n^3} \frac{(2n-1)(n-1)n}{6}$.

- $\lambda = \frac{1}{n} \to 0$,

$$S = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{n^3} \frac{(2n-1)(n-1)n}{6} = \frac{1}{3}.$$

曲边梯形面积2

求曲边梯形$x=0, x=1, y=0, y=x^2$围成的的面积.

- 把区间$[0,1]$进行分割$a=0<\frac{1}{n}<\frac{2}{n}<\cdots<1$, 区间$[\frac{i-1}{n},\frac{i}{n}]$对应的小曲边梯形设为$S_i$. 则原来的曲边梯形面积（任然记为$S_i$）近似为

$$S_i \approx (\frac{i-1}{n})^2\frac{1}{n}=\frac{(i-1)^2}{n^3},$$

从而原曲边梯形的面积$S\approx\sum_{i=1}^{n}\frac{(i-1)^2}{n^3}=\frac{1}{n^3}\frac{(2n-1)(n-1)n}{6}$.

- $\lambda=\frac{1}{n}\to 0$,

$$S=\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{n^3}\frac{(2n-1)(n-1)n}{6}=\frac{1}{3}.$$

变力做功

质量为1的质点沿直线运动，求变力$f(s)$从$s=a$到$s=b$所作的功（s为物体到初始位置的距离）.

- 作分割$a=s_0<s_1<s_2<\cdots<s_n=b$.
- 变力$f(s)$从s_{i-1}到s_i所作的功近似为

$$W_i\approx f(\xi_i)(s_i-s_{i-1}),$$

从$s=a$到$s=b$所作的功近似为$W\approx\sum_{i=1}^{n}f(\xi_i)(s_i-s_{i-1})$.

- $\lambda=\max\{\Delta s_i\}\to 0$,从$s=a$到$s=b$所作的功

$$W=\lim_{\lambda\to 0}\sum_{i=1}^{n}f(\xi_i)(s_i-s_{i-1})$$

变力做功

质量为1的质点沿直线运动，求变力$f(s)$从$s=a$到$s=b$所作的功（s为物体到初始位置的距离）.

- 作分割$a=s_0<s_1<s_2<\cdots<s_n=b$.
- 变力$f(s)$从s_{i-1}到s_i所作的功近似为

$$W_i \approx f(\xi_i)(s_i-s_{i-1}),$$

$$\text{从}s=a\text{到}s=b\text{所作的功近似为}W \approx \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)(s_i-s_{i-1}).$$

- $\lambda=\max\{\Delta s_i\}\to 0$,从$s=a$到$s=b$所作的功

$$W=\lim_{\lambda\to 0}\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)(s_i-s_{i-1})$$

变力做功

质量为1的质点沿直线运动，求变力$f(s)$从$s=a$到$s=b$所作的功（s为物体到初始位置的距离）.

- 作分割$a=s_0<s_1<s_2<\cdots<s_n=b$.
- 变力$f(s)$从s_{i-1}到s_i所作的功近似为

$$W_i \approx f(\xi_i)(s_i - s_{i-1}),$$

$$\text{从}s=a\text{到}s=b\text{所作的功近似为}W \approx \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)(s_i - s_{i-1}).$$

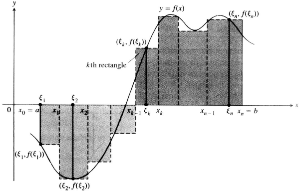
- $\lambda=\max\{\Delta s_i\}\to 0$,从$s=a$到$s=b$所作的功

$$W = \lim_{\lambda\to 0}\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)(s_i - s_{i-1})$$

定积分的定义1

- 其它类似问题：沿直线变速运动，求路程；变密度长杆的质量.
- 定义：设$f(x)$是定义在区间$[a,b]$上的函数，对$[a,b]$作分割$T{:}a=x_0<x_1<x_2<\cdots<x_n=b$，记$\Delta x_i=x_i-x_{i-1}$，$i=1,2,\cdots,n$，记$\lambda(T)=\max\{\Delta x_i|i=1,2,\cdots,n\}$. 任意选取中间值$\xi_i\in[x_{i-1},x_i]$. 若极限

$$\lim_{\lambda(T)\to 0}\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i$$



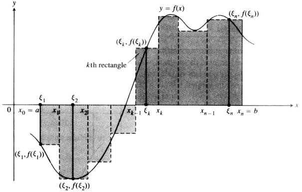
存在，且与分割和ξ_i的选取无关，则称极限$f(x)$在$[a,b]$上可积.

定积分的定义1

- 其它类似问题：沿直线变速运动，求路程；变密度长杆的质量.
- 定义：设$f(x)$是定义在区间$[a,b]$上的函数，对$[a,b]$作分割T:$a=x_0<x_1<x_2<\cdots<x_n=b$，记$\Delta x_i=x_i-x_{i-1}$，$i=1,2,\cdots,n$，记$\lambda(T)=\max\{\Delta x_i|i=1,2,\cdots,n\}$. 任意选取中间值$\xi_i\in[x_{i-1},x_i]$. 若极限

$$\lim_{\lambda(T)\to 0}\sum_{i=1}^{n}f(\xi_i)\Delta x_i$$

存在，且与分割和ξ_i的选取无关，则称极限$f(x)$在$[a,b]$上可积.

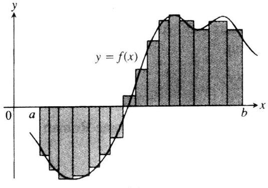


定积分的定义2

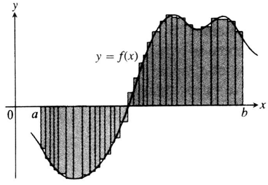
- 定义(续)：定义$f(x)$在$[a,b]$上的定积分定义为

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{\lambda(T)\to 0} \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i$$

这里称$f(x)$为被积函数，x为积分变量，b为积分上限，a为积分下限，$[a,b]$为积分区间，$\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i$为黎曼和.



(a)



(b)

定积分的定义2

- $\lim\limits_{\lambda(T)\to 0}\sum\limits_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i = A$的定义：对任给$\epsilon > 0$,存在$\delta > 0$，对任意满足$\lambda(T) < \delta$的分割$T$，任取$\xi \in [x_{i-1}, x_i]$，都有

$$|\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i - A| < \epsilon.$$

定积分的定义3

- 例如：求曲边梯形$x = a, x = b, y = 0, y = f(x)$围成的的面积为$\int_a^b f(x)dx$;质量为1的质点沿直线从$s = a$移动到$s = b$，变力$f(s)$所作的功为$\int_a^b f(x)dx$.
- 几何意义：$\int_a^b f(x)dx$是$x = a, x = b, y = 0, y = f(x)$所围面积的代数和（$x$轴上方的为正，下方的为负）.
- 约定：$\int_a^a f(x)dx = 0$, $b < a$时，$\int_a^b f(x)dx = -\int_b^a f(x)dx$（物理中从$x = a$到$x = b$所作的功与从$x = b$到$x = a$所作的功差一个负号）.
- 记$[a, b]$上Riemann可积函数构成的集合为$R([a, b])$.

定积分的定义3

- 例如：求曲边梯形$x=a, x=b, y=0, y=f(x)$围成的的面积为$\int_a^b f(x)dx$;质量为1的质点沿直线从$s=a$移动到$s=b$，变力$f(s)$所作的功为$\int_a^b f(x)dx$.
- 几何意义：$\int_a^b f(x)dx$是$x=a, x=b, y=0, y=f(x)$所围面积的代数和（x轴上方的为正，下方的为负）.
- 约定：$\int_a^a f(x)dx=0$, $b<a$时，$\int_a^b f(x)dx=-\int_b^a f(x)dx$（物理中从$x=a$到$x=b$所作的功与从$x=b$到$x=a$所作的功差一个负号）.
- 记$[a,b]$上Riemann可积函数构成的集合为$R([a,b])$.

定积分的定义3

- 例如：求曲边梯形$x = a, x = b, y = 0, y = f(x)$围成的的面积为$\int_a^b f(x)dx$;质量为1的质点沿直线从$s = a$移动到$s = b$，变力$f(s)$所作的功为$\int_a^b f(x)dx$.
- 几何意义：$\int_a^b f(x)dx$是$x = a, x = b, y = 0, y = f(x)$所围面积的代数和（$x$轴上方的为正，下方的为负）.
- 约定：$\int_a^a f(x)dx = 0$, $b < a$时，$\int_a^b f(x)dx = -\int_b^a f(x)dx$（物理中从$x = a$到$x = b$所作的功与从$x = b$到$x = a$所作的功差一个负号）.
- 记$[a, b]$上Riemann可积函数构成的集合为$R([a, b])$.

定积分的定义3

- 例如：求曲边梯形$x=a, x=b, y=0, y=f(x)$围成的的面积为$\int_a^b f(x)dx$;质量为1的质点沿直线从$s=a$移动到$s=b$，变力$f(s)$所作的功为$\int_a^b f(x)dx$.
- 几何意义：$\int_a^b f(x)dx$是$x=a, x=b, y=0, y=f(x)$所围面积的代数和（x轴上方的为正，下方的为负）.
- 约定：$\int_a^a f(x)dx=0$, $b<a$时，$\int_a^b f(x)dx=-\int_b^a f(x)dx$（物理中从$x=a$到$x=b$所作的功与从$x=b$到$x=a$所作的功差一个负号）.
- 记$[a,b]$上Riemann可积函数构成的集合为$R([a,b])$.

可积函数1

- 命题：若$f(x)$在$[a,b]$上可积，f必然有界.

  证明：反设$f(x)$无界，若$f(x)$在$[a,b]$上的定积分为I，则存在分割，使得

$$|\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i - I| < 1 \tag{1}$$

  对任意的$\xi_i \in [x_{i-1}, x_i]$成立. 由于f无界，则f在某个区间$[x_{k-1}, x_k]$上无界. 则存在x_i', x_i''，使得$|f(\xi_i')\Delta x_i - f(\xi_i'')\Delta x_i| > 2$. 对于中间点的两种取法$\xi_1, \xi_2, \cdots \xi_k' \cdots \xi_n$和$\xi_1, \xi_2, \cdots \xi_k'' \cdots \xi_n$，(1)式不可能都成立.

- Dirichlet函数$D(x) = \begin{cases} 1, & x \in \mathbb{Q} \\ 0, & x \notin \mathbb{Q} \end{cases}$. 则$D(x)$在任意区间上不可积. 这是因为$\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i = \begin{cases} 1, & \xi_i \in \mathbb{Q} \\ 0, & \xi_i \notin \mathbb{Q} \end{cases}$.

可积函数1

- 命题：若$f(x)$在$[a,b]$上可积，f必然有界.
  证明：反设$f(x)$无界，若$f(x)$在$[a,b]$上的定积分为I，则存在分割，使得
  $$|\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i - I| < 1 \tag{1}$$
  对任意的$\xi_i \in [x_{i-1}, x_i]$成立. 由于f无界，则f在某个区间$[x_{k-1}, x_k]$上无界. 则存在x_i', x_i''，使得$|f(\xi_i')\Delta x_i - f(\xi_i'')\Delta x_i| > 2$. 对于中间点的两种取法$\xi_1, \xi_2, \cdots \xi_k' \cdots \xi_n$和$\xi_1, \xi_2, \cdots \xi_k'' \cdots \xi_n$，(1)式不可能都成立.
- Dirichlet函数$D(x) = \begin{cases} 1, & x \in \mathbb{Q} \\ 0, & x \notin \mathbb{Q} \end{cases}$. 则$D(x)$在任意区间上不可积. 这是因为$\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i = \begin{cases} 1, & \xi_i \in \mathbb{Q} \\ 0, & \xi_i \notin \mathbb{Q} \end{cases}$.

可积函数1

- 命题：若$f(x)$在$[a,b]$上可积，f必然有界.
  证明：反设$f(x)$无界，若$f(x)$在$[a,b]$上的定积分为I，则存在分割，使得
  $$\left|\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i - I\right| < 1 \tag{1}$$
  对任意的$\xi_i \in [x_{i-1}, x_i]$成立. 由于f无界，则f在某个区间$[x_{k-1}, x_k]$上无界. 则存在x_i', x_i''，使得$|f(\xi_i')\Delta x_i - f(\xi_i'')\Delta x_i| > 2$. 对于中间点的两种取法$\xi_1, \xi_2, \cdots \xi_k' \cdots \xi_n$和$\xi_1, \xi_2, \cdots \xi_k'' \cdots \xi_n$，(1)式不可能都成立.
- Dirichlet函数$D(x) = \begin{cases} 1, & x \in \mathbb{Q} \\ 0, & x \notin \mathbb{Q} \end{cases}$. 则$D(x)$在任意区间上不可积. 这是因为$\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i = \begin{cases} 1, & \xi_i \in \mathbb{Q} \\ 0, & \xi_i \notin \mathbb{Q} \end{cases}$.

可积函数2

- 命题：在有限区间上，连续函数可积；具有有限个间断点的有界函数可积；单调函数可积.
- 注：定积分的定义由Riemann在1854年给出，并证明了可积函数必有界，且间断点有限的有界函数可积；Darboux与1875年证明了f可积的充分必要条件是f有界且间断点构成的集合测度为0.
- $f, g \in R([a,b]) \Rightarrow fg, c_1 f + c_2 g \in R([a,b])$. 这里$c_1, c_2$为常数.
- $f \in R([a,b]) \Rightarrow f \in R([c,d]), [c,d] \subset [a,b]$.
- $f \in R([a,b]) \Rightarrow |f| \in R([a,b])$.
- f, g仅在有限个点处取值不同，则可积性相同.

可积函数2

- 命题：在有限区间上，连续函数可积；具有有限个间断点的有界函数可积；单调函数可积.
- 注：定积分的定义由Riemann在1854年给出，并证明了可积函数必有界，且间断点有限的有界函数可积；Darboux与1875年证明了f可积的充分必要条件是f有界且间断点构成的集合测度为0.
- $f, g \in R([a,b]) \Rightarrow fg, c_1 f + c_2 g \in R([a,b])$. 这里$c_1, c_2$为常数.
- $f \in R([a,b]) \Rightarrow f \in R([c,d]), [c,d] \subset [a,b]$.
- $f \in R([a,b]) \Rightarrow |f| \in R([a,b])$.
- f, g仅在有限个点处取值不同，则可积性相同.

可积函数2

- 命题：在有限区间上，连续函数可积；具有有限个间断点的有界函数可积；单调函数可积.
- 注：定积分的定义由Riemann在1854年给出，并证明了可积函数必有界，且间断点有限的有界函数可积；Darboux与1875年证明了f可积的充分必要条件是f有界且间断点构成的集合测度为0.
- $f, g \in R([a,b]) \Rightarrow fg, c_1 f + c_2 g \in R([a,b])$. 这里$c_1, c_2$为常数.
- $f \in R([a,b]) \Rightarrow f \in R([c,d]), [c,d] \subset [a,b]$.
- $f \in R([a,b]) \Rightarrow |f| \in R([a,b])$.
- f, g仅在有限个点处取值不同，则可积性相同.

可积函数2

- 命题：在有限区间上，连续函数可积；具有有限个间断点的有界函数可积；单调函数可积.
- 注：定积分的定义由Riemann在1854年给出，并证明了可积函数必有界，且间断点有限的有界函数可积；Darboux与1875年证明了f可积的充分必要条件是f有界且间断点构成的集合测度为0.
- $f, g \in R([a,b]) \Rightarrow fg, c_1 f + c_2 g \in R([a,b])$. 这里$c_1, c_2$为常数.
- $f \in R([a,b]) \Rightarrow f \in R([c,d]), [c,d] \subset [a,b]$.
- $f \in R([a,b]) \Rightarrow |f| \in R([a,b])$.
- f, g仅在有限个点处取值不同，则可积性相同.

可积函数2

- 命题：在有限区间上，连续函数可积；具有有限个间断点的有界函数可积；单调函数可积.
- 注：定积分的定义由Riemann在1854年给出，并证明了可积函数必有界，且间断点有限的有界函数可积；Darboux与1875年证明了f可积的充分必要条件是f有界且间断点构成的集合测度为0.
- $f, g \in R([a, b]) \Rightarrow fg, c_1 f + c_2 g \in R([a, b])$. 这里$c_1, c_2$为常数.
- $f \in R([a, b]) \Rightarrow f \in R([c, d]), [c, d] \subset [a, b]$.
- $f \in R([a, b]) \Rightarrow |f| \in R([a, b])$.
- f, g仅在有限个点处取值不同，则可积性相同.

可积函数2

- 命题：在有限区间上，连续函数可积；具有有限个间断点的有界函数可积；单调函数可积.
- 注：定积分的定义由Riemann在1854年给出，并证明了可积函数必有界，且间断点有限的有界函数可积；Darboux与1875年证明了f可积的充分必要条件是f有界且间断点构成的集合测度为0.
- $f, g \in R([a,b]) \Rightarrow fg, c_1 f + c_2 g \in R([a,b])$. 这里$c_1, c_2$为常数.
- $f \in R([a,b]) \Rightarrow f \in R([c,d]), [c,d] \subset [a,b]$.
- $f \in R([a,b]) \Rightarrow |f| \in R([a,b])$.
- f, g仅在有限个点处取值不同，则可积性相同.

定积分的性质1

- $f(x) \geq 0 \Rightarrow \int_a^b f(x)dx \geq 0.$
- $f, g \in R([a,b]) \Rightarrow \int_a^b (f(x) \pm g(x))dx = \int_a^b f(x)dx \pm \int_a^b g(x)dx.$
- $f(x) \geq g(x), \forall x \in [a,b] \Rightarrow \int_a^b f(x)dx \geq \int_a^b g(x)dx.$
  证明：$\int_a^b f(x)dx = \int_a^b g(x)dx + \int_a^b (f(x) - g(x))dx$
- $\int_a^b cf(x)dx = c\int_a^b f(x)dx.$

定积分的性质1

- $f(x) \geq 0 \Rightarrow \int_a^b f(x)dx \geq 0.$
- $f, g \in R([a,b]) \Rightarrow \int_a^b (f(x) \pm g(x))dx = \int_a^b f(x)dx \pm \int_a^b g(x)dx.$
- $f(x) \geq g(x), \forall x \in [a,b] \Rightarrow \int_a^b f(x)dx \geq \int_a^b g(x)dx.$
  证明： $\int_a^b f(x)dx = \int_a^b g(x)dx + \int_a^b (f(x) - g(x))dx$
- $\int_a^b cf(x)dx = c\int_a^b f(x)dx.$

定积分的性质1

- $f(x) \geq 0 \Rightarrow \int_a^b f(x)dx \geq 0.$
- $f, g \in R([a, b]) \Rightarrow \int_a^b (f(x) \pm g(x))dx = \int_a^b f(x)dx \pm \int_a^b g(x)dx.$
- $f(x) \geq g(x), \forall x \in [a, b] \Rightarrow \int_a^b f(x)dx \geq \int_a^b g(x)dx.$

  证明：$\int_a^b f(x)dx = \int_a^b g(x)dx + \int_a^b (f(x) - g(x))dx$
- $\int_a^b cf(x)dx = c\int_a^b f(x)dx.$

定积分的性质1

- $f(x) \geq 0 \Rightarrow \int_a^b f(x)dx \geq 0.$
- $f, g \in R([a, b]) \Rightarrow \int_a^b (f(x) \pm g(x))dx = \int_a^b f(x)dx \pm \int_a^b g(x)dx.$
- $f(x) \geq g(x), \forall x \in [a, b] \Rightarrow \int_a^b f(x)dx \geq \int_a^b g(x)dx.$
  证明：$\int_a^b f(x)dx = \int_a^b g(x)dx + \int_a^b (f(x) - g(x))dx$
- $\int_a^b cf(x)dx = c\int_a^b f(x)dx.$

定积分的性质2

- $f \in R([a,b])$,$c \in [a,b]$则有, $\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx$.
  若$f \in R([c,b])$,$c < a < b$, 上式也成立. 事实上

$$\int_a^b f(x)dx = \int_c^b f(x)dx - \int_c^a f(x)dx = \int_c^b f(x)dx + \int_a^c f(x)dx.$$

- $f \in R([a,b])$, 则有$|\int_a^b f(x)dx| \leq \int_a^b |f(x)|dx$.
  证明: 由于$\pm f(x) \leq |f(x)|$, 因此

$$\pm \int_a^b f(x)dx = \int_a^b \pm f(x)dx \leq \int_a^b |f(x)|dx$$

定积分的性质2

- $f \in R([a,b])$,$c \in [a,b]$则有, $\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx$. 若$f \in R([c,b])$,$c < a < b$, 上式也成立. 事实上

$$\int_a^b f(x)dx = \int_c^b f(x)dx - \int_c^a f(x)dx = \int_c^b f(x)dx + \int_a^c f(x)dx.$$

- $f \in R([a,b])$, 则有$|\int_a^b f(x)dx| \leq \int_a^b |f(x)|dx$. 证明: 由于$\pm f(x) \leq |f(x)|$, 因此

$$\pm \int_a^b f(x)dx = \int_a^b \pm f(x)dx \leq \int_a^b |f(x)|dx$$

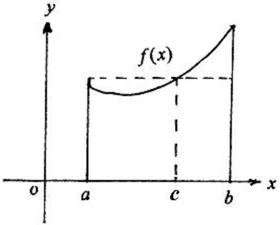
定积分的性质3

- $f \in R([a,b])$, f, g仅在有限个点处取值不同，则$\int_a^b f(x)dx = \int_a^b g(x)dx$.
  证明：只要证明若$f(x)$在除有限点外处处为0, 则$f(x)$的积分为0. 进一步，只要证明只在一点处不为0 的函数积分为0.设$f(x)$在$c \in [a,b]$处不为0，则
  $$|\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i| \leq 2|f(c)|\lambda \to 0.$$
- 例：$\int_a^b \operatorname{sgn}(x)dx = \int_a^b 1dx$.

积分中值定理1

- 复习介值定理：设$f(x)$是闭区间$[a,b]$上的连续函数，则对于$f(a)$与$f(b)$之间的任意值η (η不等于$f(a), f(b)$)，则存在$\xi \in (a,b)$，使得$f(\xi) = \eta$.
- 定理：设$f \in C([a,b])$，则存在$c \in [a,b]$，使得

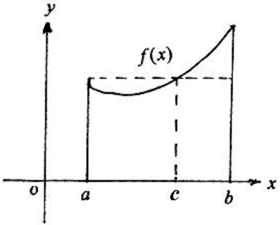
$$\int_a^b f(x)dx = f(c)(b-a)$$



积分中值定理1

- 复习介值定理：设$f(x)$是闭区间$[a,b]$上的连续函数，则对于$f(a)$与$f(b)$之间的任意值η (η不等于$f(a), f(b)$), 则存在$\xi \in (a,b)$, 使得$f(\xi) = \eta$.
- 定理：设$f \in C([a,b])$, 则存在$c \in [a,b]$, 使得

$$\int_a^b f(x)dx = f(c)(b-a)$$



积分中值定理2

- 定理证明：设M, m是$f(x)$在$[a, b]$上的最大值与最小值，则有
$$m(b-a) \leq \int_a^b f(x)dx \leq M(b-a)$$
从而$\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx \in [m, M]$，由介值定理，存在$c \in [a, b]$，使得$\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx = f(c)$.
- 注：当$b < a$时,存在c介于a, b之间，使得结论也成立; c与x相关. 如$\int_0^a x^2dx = \frac{1}{3}a^3 = c^2 \cdot a$,其中$c = \sqrt{\frac{1}{3}a^2}$.

积分中值定理2

- 定理证明：设M, m是$f(x)$在$[a, b]$上的最大值与最小值，则有
$$m(b-a) \leq \int_a^b f(x)dx \leq M(b-a)$$
从而$\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx \in [m, M]$，由介值定理，存在$c \in [a, b]$，使得$\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx = f(c)$.
- 注：当$b < a$时,存在c介于a, b之间，使得结论也成立; c与x相关. 如$\int_0^a x^2 dx = \frac{1}{3}a^3 = c^2 \cdot a$,其中$c = \sqrt{\frac{1}{3}a^2}$.

变上限积分1

- 定理：设$f \in C([a,b])$，$F_0(x) = \int_a^x f(t)dt$. 则$F_0(x)$在$[a,b]$上连续，且在(a,b)上可导，$F_0'(x) = f(x), x \in (a,b)$.

证明：取$x_0 \in (a,b)$, 对任意$x \in (a,b)$, $x \neq x_0$,

$$\frac{F(x) - F(x_0)}{x - x_0} = \frac{1}{x - x_0} \int_{x_0}^{x} f(t)dt = f(c_x)$$

其中c_x介于x_0, x之间. 当$x \to 0$时，$c_x \to x_0$，有f的连续性，$f(c_x) \to f(x_0)$.从而有

$$F_0'(x_0) = \lim_{x \to x_0} \frac{F(x) - F(x_0)}{x - x_0} = f(x_0).$$

- 设$f \in C([a,b])$，$F_0(x) = \int_x^b f(t)dt$. 则$F_0(x)$在$[a,b]$上连续，且在(a,b)上可导，$F_0'(x) = -f(x), x \in (a,b)$.

变上限积分1

- 定理：设$f \in C([a,b])$, $F_0(x) = \int_a^x f(t)dt$. 则$F_0(x)$在$[a,b]$上连续，且在(a,b)上可导，$F_0'(x) = f(x), x \in (a,b)$.
  证明：取$x_0 \in (a,b)$, 对任意$x \in (a,b)$, $x \neq x_0$,
  $$\frac{F(x) - F(x_0)}{x - x_0} = \frac{1}{x - x_0} \int_{x_0}^{x} f(t)dt = f(c_x)$$
  其中c_x介于x_0, x之间. 当$x \to 0$时，$c_x \to x_0$，有f的连续性，$f(c_x) \to f(x_0)$.从而有
  $$F_0'(x_0) = \lim_{x \to x_0} \frac{F(x) - F(x_0)}{x - x_0} = f(x_0).$$
- 设$f \in C([a,b])$, $F_0(x) = \int_x^b f(t)dt$. 则$F_0(x)$在$[a,b]$上连续，且在(a,b)上可导，$F_0'(x) = -f(x), x \in (a,b)$.

变上限积分1

- 定理：设$f \in C([a,b])$, $F_0(x) = \int_a^x f(t)dt$. 则$F_0(x)$在$[a,b]$上连续，且在(a,b)上可导，$F_0'(x) = f(x), x \in (a,b)$.
  证明：取$x_0 \in (a,b)$, 对任意$x \in (a,b)$, $x \neq x_0$,
  $$\frac{F(x)-F(x_0)}{x-x_0} = \frac{1}{x-x_0}\int_{x_0}^{x} f(t)dt = f(c_x)$$
  其中c_x介于x_0, x之间. 当$x \to 0$时，$c_x \to x_0$，有f的连续性，$f(c_x) \to f(x_0)$.从而有
  $$F_0'(x_0) = \lim_{x \to x_0} \frac{F(x)-F(x_0)}{x-x_0} = f(x_0).$$
- 设$f \in C([a,b])$, $F_0(x) = \int_x^b f(t)dt$. 则$F_0(x)$在$[a,b]$上连续，且在(a,b)上可导，$F_0'(x) = -f(x), x \in (a,b)$.

变上限积分2

- 注：设$f \in C([a,b])$, 则$F_0(x)$在a点有右导数$f(a)$，在b点有左导数$f(b)$.

  证明：对$x > a$，当$x \to a + 0$时，

$$\frac{F(x) - F(a)}{x - x_0} = \frac{1}{x-a}\int_a^x f(t)dt = f(c_x) \to f(a)$$

- 设$f(x) \in C((a,b))$, $x_0 \in [a,b]$. 定义$F(x) = \int_{x_0}^x f(t)dt$, $x \in (a,b)$. 则有$F'(x) = f(x)$, $x \in (a,b)$.

  证明：只要证明$F'(x_0) = f(x_0)$. 由$F'(x_0+0) = F'(x_0-0) = f(x_0)$即得.

变上限积分2

- 注：设$f \in C([a,b])$, 则$F_0(x)$在a点有右导数$f(a)$，在b点有左导数$f(b)$.
  证明：对$x > a$, 当$x \to a+0$时，
  $$\frac{F(x)-F(a)}{x-x_0} = \frac{1}{x-a}\int_a^x f(t)dt = f(c_x) \to f(a)$$
- 设$f(x) \in C((a,b))$, $x_0 \in [a,b]$. 定义$F(x) = \int_{x_0}^x f(t)dt$, $x \in (a,b)$. 则有$F'(x) = f(x)$, $x \in (a,b)$.
  证明：只要证明$F'(x_0) = f(x_0)$. 由$F'(x_0+0) = F'(x_0-0) = f(x_0)$即得.

变上限积分2

- 注：设$f \in C([a,b])$，则$F_0(x)$在a点有右导数$f(a)$，在b点有左导数$f(b)$.
  证明：对$x > a$，当$x \to a+0$时，
  $$\frac{F(x)-F(a)}{x-x_0} = \frac{1}{x-a}\int_a^x f(t)dt = f(c_x) \to f(a)$$
- 设$f(x) \in C((a,b))$，$x_0 \in [a,b]$. 定义$F(x) = \int_{x_0}^x f(t)dt$，$x \in (a,b)$. 则有$F'(x) = f(x)$，$x \in (a,b)$.
  证明：只要证明$F'(x_0) = f(x_0)$. 由$F'(x_0+0) = F'(x_0-0) = f(x_0)$即得.

变上限积分2

- 注：设$f \in C([a,b])$，则$F_0(x)$在a点有右导数$f(a)$，在b点有左导数$f(b)$.
  证明：对$x > a$，当$x \to a+0$时，
  $$\frac{F(x)-F(a)}{x-x_0} = \frac{1}{x-a}\int_a^x f(t)dt = f(c_x) \to f(a)$$
- 设$f(x) \in C((a,b))$，$x_0 \in [a,b]$. 定义$F(x) = \int_{x_0}^x f(t)dt$，$x \in (a,b)$. 则有$F'(x) = f(x)$，$x \in (a,b)$.
  证明：只要证明$F'(x_0) = f(x_0)$. 由$F'(x_0+0) = F'(x_0-0) = f(x_0)$即得.

变上限积分3

- 当$f \in R([a,b])$时，定义$F_0(x) = \int_a^x f(t)dt$. 则$F_0(x) \in C([a,b])$，但此时$F_0(x)$不一定可导，且可导时导数也不一定是$f(x)$.
证明：由于$f \in R([a,b])$，存在M，使得$|f(x)| \leq M$，从而
$$|F_0(x) - F_0(x_0)| = |\int_{x_0}^x f(x)dx| \leq M|x - x_0|.$$
因此$\lim\limits_{x \to x_0} |F_0(x) - F_0(x_0)| = 0$，即得$\lim\limits_{x \to x_0} F_0(x) = F(x_0)$.
- $f(x) = \operatorname{sgn} x$，$\int_{-1}^x f(t)dt = |x| - 1$

变上限积分3

- 当$f \in R([a,b])$时，定义$F_0(x) = \int_a^x f(t)dt$. 则$F_0(x) \in C([a,b])$, 但此时$F_0(x)$不一定可导，且可导时导数也不一定是$f(x)$.
  证明：由于$f \in R([a,b])$，存在M, 使得$|f(x)| \le M$, 从而

  $$|F_0(x) - F_0(x_0)| = |\int_{x_0}^{x} f(x)dx| \le M|x - x_0|.$$

  因此$\lim\limits_{x \to x_0} |F_0(x) - F_0(x_0)| = 0$, 即得$\lim\limits_{x \to x_0} F_0(x) = F(x_0)$.
- $f(x) = \operatorname{sgn} x$, $\int_{-1}^{x} f(t)dt = |x| - 1$

变上限积分3

- 当$f \in R([a,b])$时，定义$F_0(x) = \int_a^x f(t)dt$. 则$F_0(x) \in C([a,b])$, 但此时$F_0(x)$不一定可导，且可导时导数也不一定是$f(x)$.
  证明：由于$f \in R([a,b])$，存在M, 使得$|f(x)| \leq M$, 从而

$$|F_0(x) - F_0(x_0)| = |\int_{x_0}^x f(x)dx| \leq M|x - x_0|.$$

  因此$\lim_{x \to x_0} |F_0(x) - F_0(x_0)| = 0$, 即得$\lim_{x \to x_0} F_0(x) = F(x_0)$.
- $f(x) = \operatorname{sgn} x$, $\int_{-1}^x f(t)dt = |x| - 1$

变上限积分的导数

- 若$f \in C([a,b])$，$g(x)$可导，且在$[a,b]$中取值，定义$F(x)=\int_a^{g(x)} f(t)dt$，则有$F'(x)=f(g(x))g'(x)$.
  证明：设$F_0(y)=\int_a^y f(t)dt$，则有$F(x)=F_0(g(x))$，因此$F'(x)=F_0'(x)g'(x)$.
- 若$f \in C([a,b])$，$g(x), h(x)$可导，且都在$[a,b]$中取值，定义$F(x)=\int_{h(x)}^{g(x)} f(t)dt$，则有$F'(x)=f(g(x))g'(x)-f(h(x))h'(x)$.
  证明：$F(x)=\int_c^{g(x)} f(t)dt-\int_c^{h(x)} f(t)dt$.
- 例：$(\int_{x^2}^x \sqrt{1+t})'dt=\sqrt{1+x}-2x\sqrt{1+x^2}$.

变上限积分的导数

- 若$f \in C([a,b])$，$g(x)$可导，且在$[a,b]$中取值，定义$F(x) = \int_a^{g(x)} f(t)dt$，则有$F'(x) = f(g(x))g'(x)$.
  证明：设$F_0(y) = \int_a^y f(t)dt$,则有$F(x) = F_0(g(x))$，因此$F'(x) = F_0'(x)g'(x)$.
- 若$f \in C([a,b])$，$g(x), h(x)$可导，且都在$[a,b]$中取值，定义$F(x) = \int_{h(x)}^{g(x)} f(t)dt$，则有$F'(x) = f(g(x))g'(x) - f(h(x))h'(x)$.
  证明：$F(x) = \int_c^{g(x)} f(t)dt - \int_c^{h(x)} f(t)dt$.
- 例：$(\int_{x^2}^x \sqrt{1+t})'dt = \sqrt{1+x} - 2x\sqrt{1+x^2}$.

变上限积分的导数

- 若$f \in C([a,b])$，$g(x)$可导，且在$[a,b]$中取值，定义$F(x) = \int_a^{g(x)} f(t)dt$，则有$F'(x) = f(g(x))g'(x)$.
  证明：设$F_0(y) = \int_a^y f(t)dt$,则有$F(x) = F_0(g(x))$，因此$F'(x) = F_0'(x)g'(x)$.
- 若$f \in C([a,b])$，$g(x), h(x)$可导，且都在$[a,b]$中取值，定义$F(x) = \int_{h(x)}^{g(x)} f(t)dt$，则有$F'(x) = f(g(x))g'(x) - f(h(x))h'(x)$.
  证明：$F(x) = \int_c^{g(x)} f(t)dt - \int_c^{h(x)} f(t)dt$.
- 例：$(\int_{x^2}^{x} \sqrt{1+t})'dt = \sqrt{1+x} - 2x\sqrt{1+x^2}$.

变上限积分的导数

- 若$f \in C([a,b])$，$g(x)$可导，且在$[a,b]$中取值，定义$F(x) = \int_a^{g(x)} f(t)dt$，则有$F'(x) = f(g(x))g'(x)$.
  证明：设$F_0(y) = \int_a^y f(t)dt$，则有$F(x) = F_0(g(x))$，因此$F'(x) = F_0'(x)g'(x)$.
- 若$f \in C([a,b])$，$g(x), h(x)$可导，且都在$[a,b]$中取值，定义$F(x) = \int_{h(x)}^{g(x)} f(t)dt$，则有$F'(x) = f(g(x))g'(x) - f(h(x))h'(x)$.
  证明：$F(x) = \int_c^{g(x)} f(t)dt - \int_c^{h(x)} f(t)dt$.
- 例：$(\int_{x^2}^{x} \sqrt{1+t})'dt = \sqrt{1+x} - 2x\sqrt{1+x^2}$.

变上限积分的导数

- 若$f \in C([a,b])$, $g(x)$可导，且在$[a,b]$中取值，定义$F(x) = \int_a^{g(x)} f(t)dt$, 则有$F'(x) = f(g(x))g'(x)$.
  证明：设$F_0(y) = \int_a^y f(t)dt$,则有$F(x) = F_0(g(x))$, 因此$F'(x) = F_0'(x)g'(x)$.
- 若$f \in C([a,b])$, $g(x), h(x)$可导，且都在$[a,b]$中取值，定义$F(x) = \int_{h(x)}^{g(x)} f(t)dt$, 则有$F'(x) = f(g(x))g'(x) - f(h(x))h'(x)$.
  证明：$F(x) = \int_c^{g(x)} f(t)dt - \int_c^{h(x)} f(t)dt$.
- 例：$(\int_{x^2}^x \sqrt{1+t})'dt = \sqrt{1+x} - 2x\sqrt{1+x^2}$.

微积分基本定理

- 连续函数存在原函数：若$f \in C([a,b])$，$F_0(x) = \int_a^x f(t)dt$是$f(x)$在(a,b)上的原函数，且$\int_a^b f(x)dx = F_0(b) - F_0(a)$；若$f \in C((a,b))$, $c \in (a,b)$, $F_0(x) = \int_c^x f(t)dt$. 是$f(x)$在(a,b)上的原函数.
- 定理：若$f \in C([a,b])$, $F(x)$是$f(x)$在(a,b)上的原函数, 且$F(x)$在$[a,b]$上连续，则有$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a) = F(x)|_a^b$.
证明：F_0, F都是$f(x)$在(a,b)上的原函数，则存在常数C，使得$F(x) = F_0(x) + C$，从而$F(b) - F(a) = F_0(b) - F_0(a) = \int_a^b f(x)dx$.
- 例：$f(x) = \operatorname{sgn} x$, $F_0(x) = \int_{-1}^x |t|dt = |x|-1$, 仍然有$\int_a^b f(x)dx = F_0(b) - F_0(a)$. 但此时$F_0(x)$不是$f(x)$的原函数.

微积分基本定理

- 连续函数存在原函数：若$f \in C([a,b])$，$F_0(x) = \int_a^x f(t)dt$是$f(x)$在(a,b)上的原函数，且$\int_a^b f(x)dx = F_0(b) - F_0(a)$；若$f \in C((a,b))$, $c \in (a,b)$, $F_0(x) = \int_c^x f(t)dt$. 是$f(x)$在(a,b)上的原函数.
- 定理：若$f \in C([a,b])$, $F(x)$是$f(x)$在(a,b)上的原函数, 且$F(x)$在$[a,b]$上连续，则有$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a) = F(x)|_a^b$.
  证明：F_0, F都是$f(x)$在(a,b)上的原函数，则存在常数C，使得$F(x) = F_0(x) + C$，从而$F(b) - F(a) = F_0(b) - F_0(a) = \int_a^b f(x)dx$.
- 例：$f(x) = \operatorname{sgn} x$, $F_0(x) = \int_{-1}^x |t|dt = |x| - 1$, 任然有$\int_a^b f(x)dx = F_0(b) - F_0(a)$. 但此时$F_0(x)$不是$f(x)$的原函数.

微积分基本定理

- 连续函数存在原函数：若$f \in C([a,b])$，$F_0(x) = \int_a^x f(t)dt$是$f(x)$在(a,b)上的原函数，且$\int_a^b f(x)dx = F_0(b) - F_0(a)$；若$f \in C((a,b))$, $c \in (a,b)$, $F_0(x) = \int_c^x f(t)dt$．是$f(x)$在(a,b)上的原函数.
- 定理：若$f \in C([a,b])$, $F(x)$是$f(x)$在(a,b)上的原函数, 且$F(x)$在$[a,b]$上连续，则有$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a) = F(x)|_a^b$.
  证明：F_0, F都是$f(x)$在(a,b)上的原函数，则存在常数C，使得$F(x) = F_0(x) + C$，从而$F(b) - F(a) = F_0(b) - F_0(a) = \int_a^b f(x)dx$.
- 例：$f(x) = \operatorname{sgn} x$, $F_0(x) = \int_{-1}^x |t|dt = |x| - 1$, 仍然有$\int_a^b f(x)dx = F_0(b) - F_0(a)$. 但此时$F_0(x)$不是$f(x)$的原函数.

微积分基本定理

- 连续函数存在原函数：若$f \in C([a,b])$，$F_0(x) = \int_a^x f(t)dt$是$f(x)$在(a,b)上的原函数，且$\int_a^b f(x)dx = F_0(b) - F_0(a)$；若$f \in C((a,b))$，$c \in (a,b)$，$F_0(x) = \int_c^x f(t)dt$．是$f(x)$在$(a,b)$上的原函数.
- 定理：若$f \in C([a,b])$，$F(x)$是$f(x)$在(a,b)上的原函数，且$F(x)$在$[a,b]$上连续，则有$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a) = F(x)|_a^b$.
  证明：F_0, F都是$f(x)$在(a,b)上的原函数，则存在常数C，使得$F(x) = F_0(x) + C$，从而$F(b) - F(a) = F_0(b) - F_0(a) = \int_a^b f(x)dx$.
- 例：$f(x) = \operatorname{sgn} x$，$F_0(x) = \int_{-1}^x |t|dt = |x| - 1$，任然有$\int_a^b f(x)dx = F_0(b) - F_0(a)$．但此时$F_0(x)$不是$f(x)$的原函数.

用微积分基本定理求定积分

- $\int_0^1 x^2 dx = \frac{1}{3}x^2|_0^1 = \frac{1}{3}$.
- 但下面的计算不成立：$\int_{-1}^1 \frac{1}{x}dx = \ln|x||_{-1}^1 = 0$.
- $\arcsin x = \int_0^x \frac{dt}{\sqrt{1-t^2}}$, $|x| < 1$, $\arctan x = \int_0^x \frac{dt}{1+t^2}$. 如$\frac{\pi}{4} = \int_0^1 \frac{dt}{1+t^2}$.
- $\ln x = \int_1^x \frac{1}{t}dt$. （此公式可作为$\ln x$的定义，由此公式可以推出$\ln x$的一些基本性质）．如

$$\ln a + \ln b = \int_1^a \frac{1}{t}dt + \int_1^b \frac{1}{t}dt = \int_1^a \frac{1}{t}dt + \int_a^{ab} \frac{1}{t}dt = \ln(ab).$$

用微积分基本定理求定积分

- $\int_0^1 x^2 dx = \frac{1}{3}x^2|_0^1 = \frac{1}{3}$.
- 但下面的计算不成立：$\int_{-1}^1 \frac{1}{x} dx = \ln|x||_{-1}^1 = 0$.
- $\arcsin x = \int_0^x \frac{dt}{\sqrt{1-t^2}}$, $|x| < 1$, $\arctan x = \int_0^x \frac{dt}{1+t^2}$. 如$\frac{\pi}{4} = \int_0^1 \frac{dt}{1+t^2}$.
- $\ln x = \int_1^x \frac{1}{t} dt$. （此公式可作为$\ln x$的定义，由此公式可以推出$\ln x$的一些基本性质）. 如

$$\ln a + \ln b = \int_1^a \frac{1}{t} dt + \int_1^b \frac{1}{t} dt = \int_1^a \frac{1}{t} dt + \int_a^{ab} \frac{1}{t} dt = \ln(ab).$$

用微积分基本定理求定积分

- $\int_0^1 x^2 dx = \frac{1}{3}x^2|_0^1 = \frac{1}{3}$.
- 但下面的计算不成立：$\int_{-1}^1 \frac{1}{x} dx = \ln|x||_{-1}^1 = 0$.
- $\arcsin x = \int_0^x \frac{dt}{\sqrt{1-t^2}}$, $|x| < 1$, $\arctan x = \int_0^x \frac{dt}{1+t^2}$. 如$\frac{\pi}{4} = \int_0^1 \frac{dt}{1+t^2}$.
- $\ln x = \int_1^x \frac{1}{t} dt$. （此公式可作为$\ln x$的定义，由此公式可以推出$\ln x$的一些基本性质）. 如

$$\ln a + \ln b = \int_1^a \frac{1}{t} dt + \int_1^b \frac{1}{t} dt = \int_1^a \frac{1}{t} dt + \int_a^{ab} \frac{1}{t} dt = \ln(ab).$$

用微积分基本定理求定积分

- $\int_0^1 x^2 dx = \frac{1}{3}x^2|_0^1 = \frac{1}{3}$.
- 但下面的计算不成立：$\int_{-1}^1 \frac{1}{x} dx = \ln|x||_{-1}^1 = 0$.
- $\arcsin x = \int_0^x \frac{dt}{\sqrt{1-t^2}}$, $|x| < 1$, $\arctan x = \int_0^x \frac{dt}{1+t^2}$. 如$\frac{\pi}{4} = \int_0^1 \frac{dt}{1+t^2}$.
- $\ln x = \int_1^x \frac{1}{t} dt$. （此公式可作为$\ln x$的定义，由此公式可以推出$\ln x$的一些基本性质）．如

$$\ln a + \ln b = \int_1^a \frac{1}{t} dt + \int_1^b \frac{1}{t} dt = \int_1^a \frac{1}{t} dt + \int_a^{ab} \frac{1}{t} dt = \ln(ab).$$

π是无理数

- 反设$\pi = \frac{b}{a}$, $a, b\mathbb{N}$. 令$f(x) = \frac{b^n x^n(\pi - x)^n}{n!} = \frac{x^n(a-bx)^n}{n!}$, 则有
  - $f(x) = f(\pi - x)$
  - 当$k < n$时, $f^{(k)}(0) = f^{(k)}(\pi) = 0$.
  - 当$k \geq n$时, $f^{(k)}(0)$和$f^{(k)}(\pi) = 0$为整数.
- 令$F(x) = f(x) - f^{(2)}(x) + f^{(4)}(x) - \cdots + (-1)^n f^{(2n)}(x)$,则有
  - $F(0)$, $F(\pi)$是整数.
  - $F''(x) + F(x) = f(x)$.
  - $\frac{d}{dx}(F'(x)\sin x - F(x)\cos x) = (F''(x) + F(x))\sin x = f(x)\sin x$.
  - $\int_0^\pi f(x)\sin x dx = F(\pi) + F(0)$是整数.
- 当$0 < x < \pi$时, $0 < f(x)\sin x < \frac{\pi^n a^n}{n!} \to 0$. 取$n$足够大, 使得$\frac{\pi^n a^n}{n!} < \frac{1}{\pi}$, 则有$0 < \int_0^\pi f(x)\sin x dx < 1$不是整数. 矛盾.

π是无理数

- 反设$\pi = \frac{b}{a}$, $a, b\mathbb{N}$. 令$f(x) = \frac{b^n x^n(\pi - x)^n}{n!} = \frac{x^n(a-bx)^n}{n!}$, 则有
  - $f(x) = f(\pi - x)$
  - 当$k < n$时, $f^{(k)}(0) = f^{(k)}(\pi) = 0$.
  - 当$k \geq n$时, $f^{(k)}(0)$和$f^{(k)}(\pi) = 0$为整数.
- 令$F(x) = f(x) - f^{(2)}(x) + f^{(4)}(x) - \cdots + (-1)^n f^{(2n)}(x)$,则有
  - $F(0)$, $F(\pi)$是整数.
  - $F''(x) + F(x) = f(x)$.
  - $\frac{d}{dx}(F'(x) \sin x - F(x) \cos x) = (F''(x) + F(x)) \sin x = f(x) \sin x$.
  - $\int_0^\pi f(x) \sin x dx = F(\pi) + F(0)$是整数.
- 当$0 < x < \pi$时, $0 < f(x) \sin x < \frac{\pi^n a^n}{n!} \to 0$. 取$n$足够大, 使得$\frac{\pi^n a^n}{n!} < \frac{1}{\pi}$, 则有$0 < \int_0^\pi f(x) \sin x dx < 1$不是整数. 矛盾.

π是无理数

- 反设$\pi = \frac{b}{a}$, $a, b\mathbb{N}$. 令$f(x) = \frac{b^n x^n(\pi - x)^n}{n!} = \frac{x^n(a - bx)^n}{n!}$, 则有
  - $f(x) = f(\pi - x)$
  - 当$k < n$时, $f^{(k)}(0) = f^{(k)}(\pi) = 0$.
  - 当$k \geq n$时, $f^{(k)}(0)$和$f^{(k)}(\pi) = 0$为整数.
- 令$F(x) = f(x) - f^{(2)}(x) + f^{(4)}(x) - \cdots + (-1)^n f^{(2n)}(x)$,则有
  - $F(0)$, $F(\pi)$是整数.
  - $F''(x) + F(x) = f(x)$.
  - $\frac{d}{dx}(F'(x)\sin x - F(x)\cos x) = (F''(x) + F(x))\sin x = f(x)\sin x$.
  - $\int_0^\pi f(x)\sin x dx = F(\pi) + F(0)$是整数.
- 当$0 < x < \pi$时, $0 < f(x)\sin x < \frac{\pi^n a^n}{n!} \to 0$. 取$n$足够大, 使得$\frac{\pi^n a^n}{n!} < \frac{1}{\pi}$, 则有$0 < \int_0^\pi f(x)\sin x dx < 1$不是整数. 矛盾.