北京大学光华管理学院期末答案

2015 -2016　学年第一学期

考试科目：<u>高等数学B(上)</u>　　考试时间：<u>2016 年 01 月 11 日</u>

姓　名:________________　　学　号: ________________

本试题共 7 道大题，满分 100 分

一 (每空 4 分, 共 28 分)

(1) 设 $y = x^2e^{-x}$. 该函数有渐近线 $\underline{y = 0}$，有拐点 $\underline{x = 2 \pm \sqrt{2}}$.

(2) 设 $F(x, y, z) = yz - \ln z - x - y$, 则 $F(x, y, z)$ 在点 $(0, 2, 1)$ 处的梯度为 $\underline{(-1, 0, 1)}$. 曲面 $F(x, y, z) = 0$ 在 $(0, 2, 1)$ 点处的切平面方程为 $\underline{x - z + 1 = 0}$. 设 $z = z(x, y)$ 是由方程 $F(x, y, z) = 0$ 确定的隐函数, 则偏导数 $\frac{\partial z}{\partial x} = \underline{\frac{z}{yz-1}}$.

(3) $f_k(x, y) = \begin{cases} \frac{xy^k}{x^2+y^2}, & (x, y) \neq (0, 0) \\ 0, & (x, y) = (0, 0) \end{cases}$, k 为正整数. 则当 k 满足 $\underline{k > 1}$ 时 f_k 在 $(0, 0)$ 处连续, 当 k 满足 $\underline{k > 2}$ 时 f_k 在 $(0, 0)$ 处可微.

二 (共 18 分)计算

(1) $\displaystyle\int \frac{\sin 3x}{e^x}dx$.　　(2) $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{\cos x - \cos^3 x}dx$.　　(3) $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \frac{\ln x}{\ln(\frac{\pi}{2} - \arctan x)}$.

解：(1) $\displaystyle\int \frac{\sin 3x}{e^x}dx = \frac{e^{-x}}{10}(-\sin 3x - 3\cos 3x) + C$

(2) $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{\cos x - \cos^3 x}dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{\cos x}\sin x dx = \frac{2}{3}$

(3) $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \frac{\ln x}{\ln(\frac{\pi}{2} - \arctan x)} = \lim_{x\to+\infty} \frac{\ln x}{\ln(\arctan \frac{1}{x})} = \lim_{x\to 0+0} \frac{-\ln x}{\ln(\arctan x)} = -1$

三 (共 12 分)设曲线 $y = ax^2(a > 0, x \geq 0)$与 $y = 1 - x^2$ 交于 A, 过原点 O 和 A 的直线与 $y = ax^2$ 围成一平面图形.

(1)求该图形绕 x 轴旋转一周所得的旋转体体积 V_a.

(2)当 a 为何值时，V_a 最大？

解: $A(\frac{1}{\sqrt{1+a}}, \frac{a}{1+a})$,

$$V_a = \int_0^{\frac{1}{\sqrt{1+a}}} \pi\Big[\big(\frac{ax}{\sqrt{1+a}}\big)^2 - (ax^2)^2\Big]dx = \frac{2\pi}{15}\frac{a^2}{(1+a)^{\frac{5}{2}}}.$$

$\displaystyle\frac{dV_a}{da} = \frac{\pi}{15}\frac{4a - a^2}{(1+a)^{\frac{7}{2}}}$，显然 $a = 4$ 时，V_a 取最大值 $\displaystyle\frac{32\sqrt{5}}{1875}\pi$.

四 (共 10 分)设 $D=\{(x,y)|x\geq 0,y\geq 0,x+y\leq 6\}$. 证明函数 $f(x,y)=x^3y^2(6-x-y)$ 在 D 上满足 $f(x,y)\leq 108$.

解: 先求区域内的稳定点

$$\begin{cases} f_x = x^2y^2(18-4x-3y)=0 \\ f_y = x^3y(12-2x-3y)=0 \end{cases}$$

区域内部有唯一的稳定点 $(3,2)$, $f(3,2)=108$. 因为函数 $f(x,y)$ 在边界上恒为零，显然最大值在内部取到，因此 $f(3,2)=108$ 是最大值，不等式成立.

五 (共 12 分)两条直线 $L_1:\dfrac{x-1}{1}=\dfrac{y-1}{-1}=\dfrac{z}{1}$, $L_2:\dfrac{x}{1}=\dfrac{y-1}{1}=\dfrac{z-1}{-1}$.

(1) 在 L_1 上找一点 P_1, L_2 上找一点 P_2, 使得线段 P_1P_2 和 L_1,L_2 均垂直.

(2) 求过 P_1P_2 的中点且与 L_1,L_2 都平行的平面方程.

解: (1) 设 $\vec{e}_1=(1,-1,1)$, $\vec{e}_2=(1,1,-1)$, $\vec{e}_1=(1,-1,1)$, 则有 $\vec{e}_1\times\vec{e}_2=(0,2,2)$

$P_1(s+1,-s+1,s)$, $P_2(t,t+1,-t+1)$, 则 $\overrightarrow{P_1P_2}=(t-s-1,t+s,-s-t+1)$, P_1P_2 和 $\vec{e}_1\times\vec{e}_2$ 平行, 得 $t=\frac{3}{4},s=-\frac{1}{4}$, 代入得$P_1=(\frac{3}{4},\frac{5}{4},-\frac{1}{4})$, $P_2=(\frac{3}{4},\frac{7}{4},\frac{1}{4})$.

(2) P_1P_2 的中点为$(\frac{3}{4},\frac{3}{2},0)$, 求过中点且与 L_1,L_2 都平行的平面方程为 $2(y-\frac{3}{2})+2z=0$, 即 $2y+2z-3=0$.

六 (共10分) 设 $f(x,y)=\dfrac{x}{y}$, 求 $f(x,y)$ 在 $(1,1)$ 点处的带 Peano 余项的泰勒公式(展开到任意 n 阶).

解: 设 $\rho=\sqrt{(x-1)^2+(y-1)^2}$,

$$\begin{aligned}\frac{x}{y}&=\frac{1+x-1}{1+y-1}=(1+x-1)(1-(y-1)+\cdots+(-1)^n(y-1)^n+o((y-1)^n))\\ &=1+[(x-1)-(y-1)]+\cdots(-1)^{n-1}[(x-1)(y-1)^{n-1}-(y-1)^n]+o(\rho^n))\end{aligned}$$

七 (共 10 分)设 $x=x(t),y=y(t),z=z(t)$, $t\in[a,b]$ 是一空间曲线的参数方程, 端点 $A(x(a),y(a),z(a))$, $B(x(b),y(b),z(b))$ 不重合. 函数 $x(t),y(t),z(t)$ 均在 $[a,b]$ 上连续，在 (a,b) 上可导，且导数不同时为 0. 设点 P 是不在曲线上的一点, 使得 $\overrightarrow{PA}$ 和 $\overrightarrow{PB}$ 不共线. 证明曲线上存在一点 Q，使得点 Q 处的切线的方向向量和 $\overrightarrow{PA},\overrightarrow{PB}$ 共面.

证明: $P_t=(x(t),y(t),z(t))$, $P=(x_0,y_0,z_0)$, $(X,Y,Z)=\overrightarrow{PA}\times\overrightarrow{PB}$, 设

$$F(t)=\overrightarrow{PP_t}\cdot(X,Y,Z)=X(x(t)-x_0)+Y(y(t)-y_0)+Z(z(t)-z_0).$$

显然 $F(a)=F(b)=0$, 存在 $\xi\in(a,b)$ 使得 $F'(\xi)=x'(\xi)X+y'(\xi)Y+z'(\xi)Z=0$. 取$Q=(x(\xi),y(\xi),z(\xi))$ 即可.