数据结构与算法

第 7 章　图

主讲：赵海燕

北京大学信息科学技术学院

“数据结构与算法”教学组

国家精品课“数据结构与算法”

http://www.jpk.pku.edu.cn/pkujpk/course/sjjg/

张铭，王腾蛟，赵海燕

高等教育出版社，2008. 6，“十一五”国家级规划教材

补充内容

关键路径

关键路径

- 有向无环图（即DAG 图）在工程计划、企业管理中有广泛的应用。DAG 图中边往往都带权，形成网络
  - 活动位于顶点的网络(Activity On Vertex)，简称AOV 网络：用活动作为顶点，活动间的优先关系作为有向边，活动结点网络的结点可以带权，表示完成一项活动需要的时间等
  - 活动位于边的网络(Activity On Edge)，简称AOE 网络：事件作为顶点，活动作为有向边。AOE 网络中边的权代表完成一项活动所需要的时间（单位可以是“天”、“时”、“分”等）；顶点所表示的事件是其所有入边所代表的活动均已完成，出边所代表的活动可以开始
    - AOE网络在工程计划的安排、估算中很有用途，稍加介绍

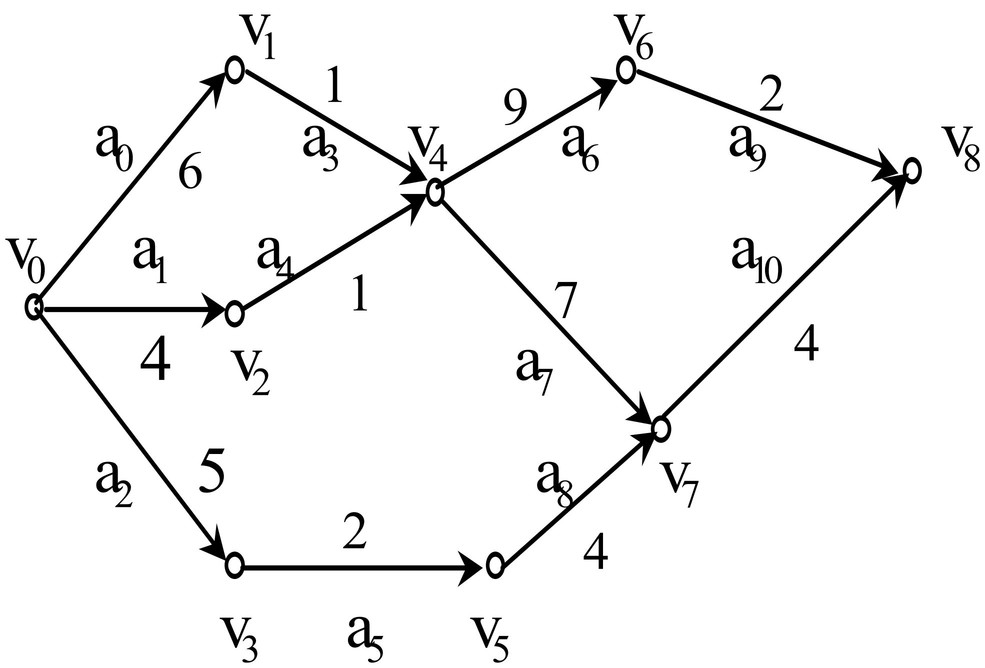
关键路径

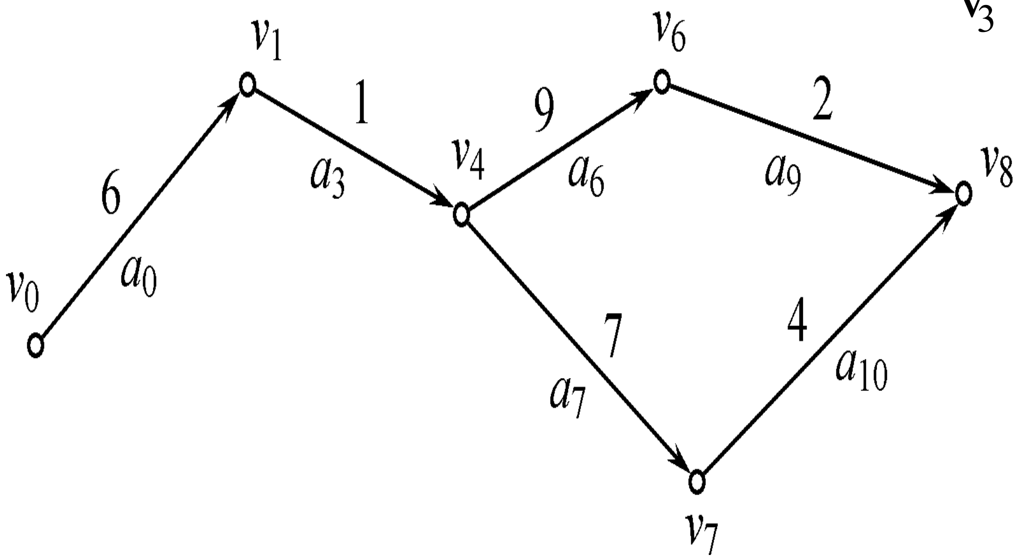
- AOE网
  - 开始顶点
  - 完成顶点
  - 有些活动可以并行进行，完成整个工程的最短时间是从开始顶点到完成顶点的最长路径长度，路径长度为路径上各边的权值之和
  - 把开始顶点到完成顶点的最长路径称为关键路径

关键活动

- 哪些活动将影响工程的进度呢?
  - 关键路径上的活动如果延期，将导致整项工程不能按时完成
  - 若要提前完成工程，则需要在某些关键活动上投入更多的人力物力
- 分析关键路径的目的是确定关键活动

关键路径





路径 v_0, v_1, v_4, v_7, v_8是一条关键路径，长度为18，若权值代表天数的话，整个工程至少要18天才能完成

相关概念

- 关键活动
  - 事件v_j可能的最早发生时间ee(j)
  - 事件v_i允许的最迟发生时间le(i)
  - 活动$a_k = < v_i, v_j >$ 的最早开始时间e(k)
  - 活动$a_k = < v_i, v_j >$ 的最晚开始时间l(k)

满足 e(k) = l(k) 的活动均为关键活动

l(k) - e(k)表示完成活动a_k的时间余量，即在不延误工期的前提下，活动a_k可以延迟的时间

某事件可能的最早发生时间

- 从开始顶点到顶点v_j（事件v_j）的最长路径长度
  - 所有进入v_j的活动$< v_i, v_j >$均结束时， v_j所代表的事件才可发生

$$
\begin{aligned}
&\mathrm{ee}(0) = 0 \\
&\mathrm{ee}(j) = \max\{\mathrm{ee}(i) + \mathrm{weight}(< v_i, v_j >)\} \\
&\qquad\qquad < v_i, v_j > \in T, 1 \le j \le n-1
\end{aligned}
$$

其中 T为所有以 v_j 为终点的入边的集合

某事件允许的最晚发生时间

- 在不推延整个工期的前提下，事件v_i允许的最晚发生时间
  - 不得迟于其 **后继事件**v_j的最晚发生时间减去活动$<v_i, v_j>$的持续时间

$$le(n-1) = ee(n-1)$$

$$le(i) = \min\{le(j) - weight(<v_i, v_j>)\}$$

$$<v_i, v_j> \in S, 0 \le i \le n-2$$

其中 S 为所有以 v_i 为始点的出边的集合

某活动的最早开始时间

- 活动$a_k = < v_i , v_j >$的**最早开始时间**e(k)
  - 只有事件v_i发生了，活动a_k才能开始，即其最早开始时间为事件v_i的最早发生时间

    $$e(k) = ee(i)$$

某活动的最晚开始时间

- 活动a_k = <v_i , v_j>的**最晚开始时间** l(k)
  - 活动a_k的最晚开始时间为事件 v_j 的最晚完成时间 减去a_k的持续时间

$$l(k) = le(j) - weight(< v_i , v_j >)$$

关键路径算法

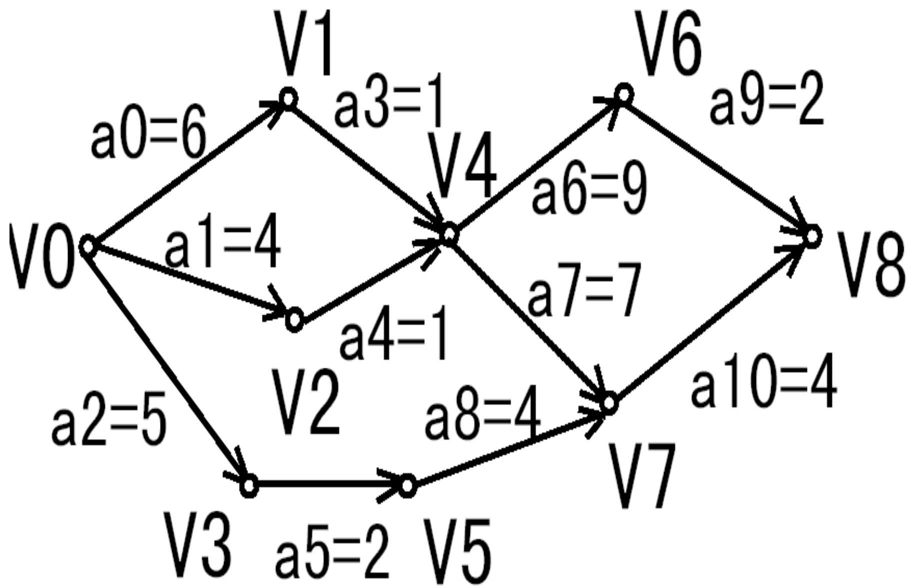
- ee(j)的计算须在顶点v_j 所有前驱顶点 的最早发生时间都已经求出的前提下进行;
- le(i)的计算须在顶点v_i 所有后继顶点的最迟发生时间都已经求出的前提下进行;

故顶点序列须是一个拓扑序列

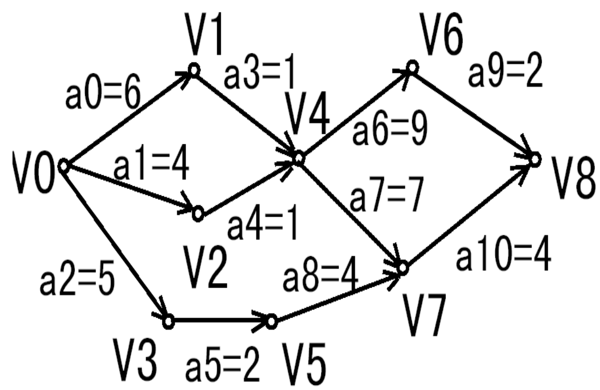
一种方法是首先检查图是否无环，若是，则按照上述思路，逐步计算，并找出e(k)=l(k)的关键活动

关键路径的求解示例

- 分别求出
  - 各事件的最早发生时间（从前往后）及最迟发生时间（从后往前）
  - 各活动的最早开始时间及最晚开始时间



关键路径的求解示例



$ee(0) = 0$

$ee(1) = ee(0) + weight(<v_0,v_1>) = 0 + 6 = 6$

$ee(2) = ee(0) + weight(<v_0,v_2>) = 0 + 4 = 4$

$ee(3) = ee(0) + weight(<v_0,v_3>) = 0 + 5 = 5$

$ee(4) = \max\{ee(1) + weight(<v_1,v_4>),\ ee(2)+ weight(<v_2,v_4>)$

$\quad = \max\{6+1, 4+1\} = 7$

$ee(5) = ee(3) + weight(<v_3,v_5>) = 5 + 2 = 7$

$ee(6) = ee(4) + weight(<v_4,v_6>) = 7 + 9 = 16$

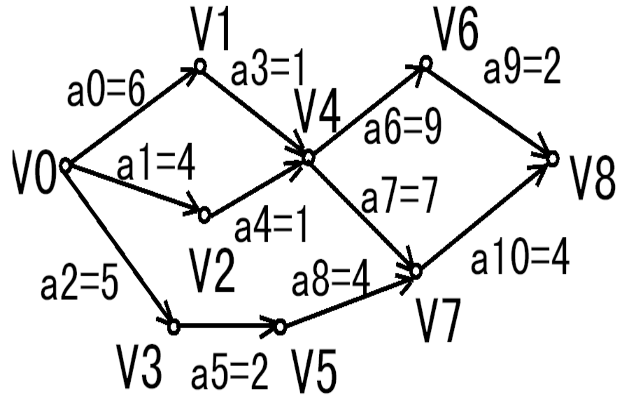
$ee(7) = \max\{ee(4) + weight(<v_4,v_7>),\ ee(5) + weight(<v_5,v_7>)$

$\quad = \max\{7 + 7, 7 + 4\} = 14$

$ee(8) = \max\{ee(6) + weight(<v_6,v_8>),\ ee(7) + weight(<v_7,v_8>)$

$\quad = \max\{16+2, 14+4\} = 18$

关键路径的求解示例



$le(8) = ee(8) = 18$

$le(7) = ee(8) - weight(<v_7,v_8>) = 18 - 4 = 14$

$le(6) = ee(8) - weight(<v_6,v_8>) = 18 - 2 = 16$

$le(5) = ee(7) - weight(<v_5,v_7>) = 14 - 4 = 10$

$le(4) = \min\{le(7) - weight(<v_4,v_7>), le(6) — weight(<v_4,v_6>)\}$

$= \min\{14 - 7, 16 - 9\} = 7$

$le(3) = le(5) - weight(<v_3,v_5>) = 10 - 2 = 8$

$le(2) = le(4) - weight(<v_2,v_4>) = 7 - 1 = 6$

$le(1) = le(4) - weight(<v_1,v_4>) = 7 - 1 = 6$

$le(0) = \min\{le(1) - weight(<v_0,v_1>), le(2) - weight(<v_0,v_2>), le(3) - weight(<v_0,v_3>)\}$

$= \min\{6 - 6, 6 - 4, 8 - 5\} = 0$

关键路径的求解示例

e(0) = ee(0) = 0

e(1) = ee(0) = 0

e(2) = ee(0) = 0

e(3) = ee(1) = 6

e(4) = ee(2) = 4

e(5) = ee(3) = 5

e(6) = ee(4) = 7

e(7) = ee(4) = 7

e(8) = ee(5) = 7

e(9) = ee(6) = 16

e(10) = ee(7) = 14

关键路径的求解示例

$l(0) = le(1) - weight(<v_0,v_1>) = 6 - 6 = 0$

$l(1) = le(2) - weight(<v_0,v_2>) = 6 - \ = 2$

$l(2) = le(3) - weight(<v_0,v_3>) = 8 - 5 = 3$

$l(3) = le(4) - weight(<v_1,v_4>) = 7 - 1 = 6$

$l(4) = le(4) - weight(<v_2,v_4>) = 7 - 1 = 6$

$l(5) = le(5) - weight(<v_3,v_5>) = 10 - 2 = 8$

$l(6) = le(6) - weight(<v_4,v_6>) = 16 - 9 = 7$

$l(7) = le(7) - weight(<v_4,v_7>) = 14 - 7 = 7$

$l(8) = le(7) - weight(<v_5,v_7>) = 14 - 4 = 10$

$l(9) = le(8) - weight(<v_6,v_8>) = 18 - 2 = 16$

$l(10) = le(8) - weight(<v_7,v_8>) = 18 - 4 = 14$

关键路径的求解示例

$l(0) - e(0) = 0 - 0 = 0$

$l(1) - e(1) = 2 - 0 = 2$

$l(2) - e(2) = 3 - 0 = 3$

$l(3) - e(3) = 6 - 6 = 0$

$l(4) - e(4) = 6 - 4 = 2$

$l(5) - e(5) = 8 - 5 = 3$

$l(6) - e(6) = 7 - 7 = 0$

$l(7) - e(7) = 7 - 7 = 0$

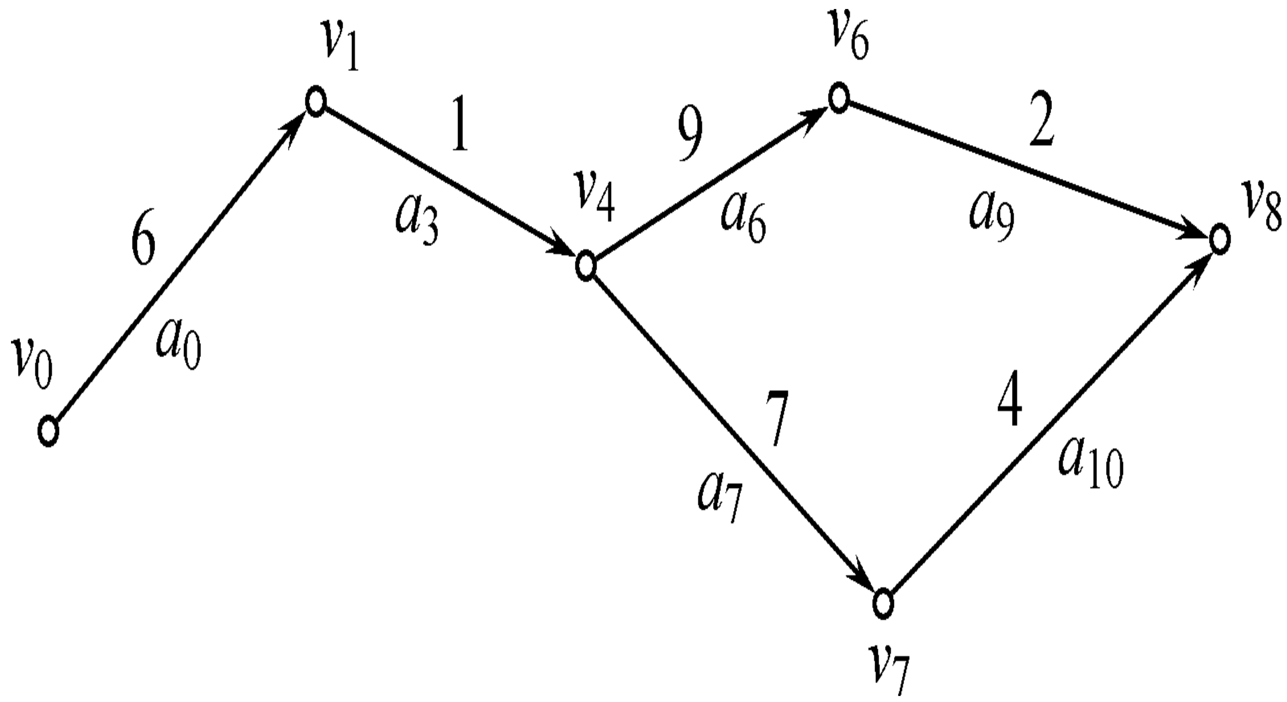
$l(8) - e(8) = 10 - 7 = 3$

$l(9) - e(9) = 16 - 16 = 0$

$l(10) - e(10) = 14 - 14 = 0$

关键路径的求解示例

- 求解结果：
  - 活动a_0，a_3，a_6，a_7，a_9，a_{10}为关键活动



复杂度分析

- 时间复杂度为O(n+e)
  - 在n个顶点，e条边的AOE网中，求
    - 事件可能的最早发生时间
    - 事件允许的最迟发生时间
    - 活动最早开始时间
    - 活动最晚开始时间时

均需对图中所有顶点及每个顶点边表中所有的边结点进行检查

图知识点总结

- 图的基本概念
- 图的抽象数据类型
- 图的存储结构
- 图的周游（深度、广度、拓扑）
- 最短路径问题
- 最小生成树
- 关键路径