复习积分中值定理

- 复习积分中值定理：若 $f \in C([a,b])$，则存在 $c \in [a,b]$ 使得 $\int_a^b f(x)dx = f(c)(b-a)$.
- 若令 $F(x) = \int_a^x f(t)dt$，上面中值定理可以写成：存在 $c \in [a,b]$ 使得

$$F'(c) = \frac{F(b) - F(a)}{b - a}.$$

- 若还有 $F(a) = F(b)$，则上面的 c 满足 $F'(c) = 0$.

复习积分中值定理

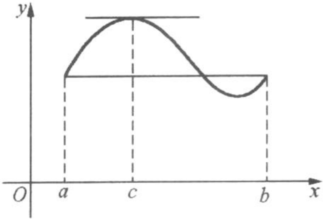
- 复习积分中值定理：若 $f \in C([a,b])$，则存在 $c \in [a,b]$ 使得 $\int_a^b f(x)dx = f(c)(b-a)$.
- 若令 $F(x) = \int_a^x f(t)dt$，上面中值定理可以写成：存在 $c \in [a,b]$ 使得
$$F'(c) = \frac{F(b)-F(a)}{b-a}.$$
- 若还有 $F(a) = F(b)$，则上面的 c 满足 $F'(c) = 0$.

复习积分中值定理

- 复习积分中值定理：若 $f \in C([a,b])$，则存在 $c \in [a,b]$ 使得 $\int_a^b f(x)dx = f(c)(b-a)$.
- 若令 $F(x) = \int_a^x f(t)dt$，上面中值定理可以写成：存在 $c \in [a,b]$ 使得
$$F'(c) = \frac{F(b)-F(a)}{b-a}.$$
- 若还有 $F(a) = F(b)$，则上面的 c 满足 $F'(c) = 0$.

一个引理

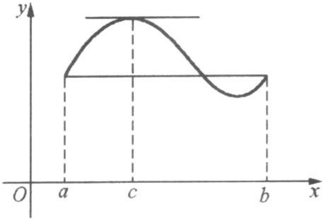
- 引理：设 $y = f(x)$ 在 $[a, b]$ 上连续，(a, b) 内可导，若 $c \in (a, b)$ 为最值点，则有 $f'(c) = 0$.
- 引理证明：不妨假设 c 是最大值点. 由于 $x > c$ 时，$f(x) \le f(c)$, 因此 $\lim\limits_{x\to c+0} \frac{f(x)-f(c)}{x-c} \le 0$; 由于 $x < c$ 时，$f(x) \le f(c)$, 因此 $\lim\limits_{x\to c-0} \frac{f(x)-f(c)}{x-c} \ge 0$, 由于 f 在 c 点可导，



$$f'(c) = \lim_{x\to c+0} \frac{f(x)-f(c)}{x-c} = \lim_{x\to c-0} \frac{f(x)-f(c)}{x-c} = 0.$$

一个引理

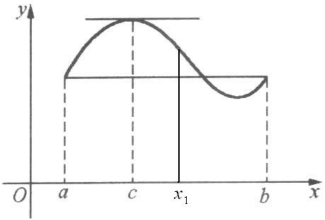
- 引理：设 $y=f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续，(a,b) 内可导，若 $c\in(a,b)$ 为最值点，则有 $f'(c)=0$.
- 引理证明：不妨假设 c 是最大值点．由于 $x>c$ 时，$f(x)\le f(c)$，因此 $\lim\limits_{x\to c+0}\frac{f(x)-f(c)}{x-c}\le 0$；由于 $x<c$ 时，$f(x)\le f(c)$，因此 $\lim\limits_{x\to c-0}\frac{f(x)-f(c)}{x-c}\ge 0$，由于 f 在 c 点可导，



$$f'(c)=\lim_{x\to c+0}\frac{f(x)-f(c)}{x-c}=\lim_{x\to c-0}\frac{f(x)-f(c)}{x-c}=0.$$

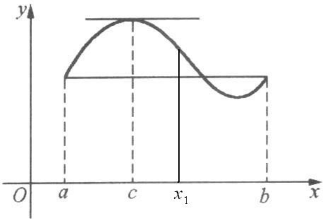
Rolle定理1

- Rolle定理：设 $y=f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续，(a,b) 内可导，且 $f(b)=f(a)$，则存在 $c\in(a,b)$，使得 $f'(c)=0$.
- 证明：不妨设 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上的最大值为 M，最小值为 m. 若 $M=m$，则 f 是常数函数，结论显然成立. 若 $M>m$，则 M 和 m 中至少有一个不等于 $f(a)$. 不妨设 $M\neq f(a)$. 则存在最大值点 $c\in(a,b)$，由引理得 $f'(c)=0$.



Rolle定理1

- Rolle定理：设 $y=f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续，(a,b) 内可导，且 $f(b)=f(a)$，则存在 $c\in(a,b)$，使得 $f'(c)=0$.
- 证明：不妨设 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上的最大值为 M，最小值为 m. 若 $M=m$，则 f 是常数函数，结论显然成立. 若 $M>m$，则 M 和 m 中至少有一个不等于 $f(a)$. 不妨设 $M\neq f(a)$. 则存在最大值点 $c\in(a,b)$，由引理得 $f'(c)=0$.

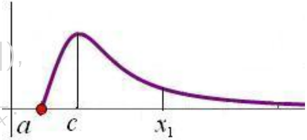


Rolle 定理2

- 注：f 不可导时，结论不成立，如 $f(x) = |x|, x \in [-1, 1]$. 满足条件的 c 也不一定唯一.
- 注：若 f 在 $[a, +\infty)$ 上连续，$(a, +\infty)$ 上可导，且有 $f(a) = \lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$, 则存在 $c \in (a, +\infty)$ 使得 $f'(c) = 0$.

证明：设 $f(x)$ 在 $[a, +\infty)$ 上不是常数，不妨设存在 $x_1 \in (a, +\infty)$, 使得 $f(x_1) > f(a)$. 由于 $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = f(a) < f(x_1)$, 存在 M, 使得 $x \geq M$ 时 $f(x) < f(x_1)$. 设 c 为$f(x)$ 在 $[a, M]$ 上的最大值点，则 $c \in (a.M)$, $f'(c) = 0$.

也可以令 $g(x) = f(\tan x), x \in [\arctan a, \frac{\pi}{2})$,
令 $g(\frac{\pi}{2}) = \lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$. 则 $g \in C([\arctan a, \frac{\pi}{2}])$,
且 $g(\arctan a) = g(\frac{\pi}{2})$. $g'(x) = f'(\tan x)\frac{1}{\cos^2 x}$



Rolle 定理2

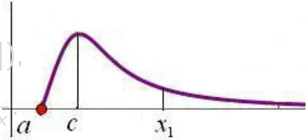
- 注：f 不可导时，结论不成立，如 $f(x)=|x|, x\in[-1,1]$. 满足条件的 c 也不一定唯一.
- 注：若 f 在 $[a,+\infty)$ 上连续，$(a,+\infty)$ 上可导，且有 $f(a)=\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)$, 则存在 $c\in(a,+\infty)$ 使得 $f'(c)=0$.

证明：设 $f(x)$ 在 $[a,+\infty)$ 上不是常数，不妨设存在 $x_1\in(a,+\infty)$, 使得 $f(x_1)>f(a)$. 由于 $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=f(a)<f(x_1)$, 存在 M, 使得 $x\geq M$ 时 $f(x)<f(x_1)$. 设 c 为$f(x)$ 在 $[a,M]$ 上的最大值点，则 $c\in(a.M)$, $f'(c)=0$.

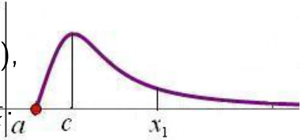
也可以令 $g(x)=f(\tan x), x\in[\arctan a,\frac{\pi}{2})$,

令 $g(\frac{\pi}{2})=\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)$. 则 $g\in C([\arctan a,\frac{\pi}{2}])$,

且 $g(\arctan a)=g(\frac{\pi}{2})$. $g'(x)=f'(\tan x)\frac{1}{\cos^2 x}$



- 注：f 不可导时，结论不成立，如 $f(x)=|x|,\ x\in[-1,1]$. 满足条件的 c 也不一定唯一.
- 注：若 f 在 $[a,+\infty)$ 上连续，$(a,+\infty)$ 上可导，且有 $f(a)=\lim_{x\to+\infty} f(x)$, 则存在 $c\in(a,+\infty)$ 使得 $f'(c)=0$.
  证明：设 $f(x)$ 在 $[a,+\infty)$ 上不是常数，不妨设存在 $x_1\in(a,+\infty)$, 使得 $f(x_1)>f(a)$. 由于 $\lim_{x\to+\infty} f(x)=f(a)<f(x_1)$, 存在 M, 使得 $x\geq M$ 时 $f(x)<f(x_1)$. 设 c 为$f(x)$ 在 $[a,M]$ 上的最大值点，则 $c\in(a.M)$, $f'(c)=0$.
  也可以令$g(x)=f(\tan x),\ x\in[\arctan a,\frac{\pi}{2})$,
  令$g(\frac{\pi}{2})=\lim_{x\to+\infty} f(x)$. 则 $g\in C([\arctan a,\frac{\pi}{2}])$,
  且$g(\arctan a)=g(\frac{\pi}{2})$. $g'(x)=f'(\tan x)\frac{1}{\cos^2 x}$.



Rolle 定理—列

- 设 $c_1, c_2, \cdots, c_n$ 为任意实数, 证明函数

$$f(x) = c_1 \cos x + c_2 \cos 2x + \cdots + c_n \cos nx$$

在 $(0, \pi)$ 内必有实根.

证明: 方法1. $\int_0^\pi f(x)dx = 0$.

方法2. 令

$$g(x) = c_1 \sin x + \frac{c_2}{2} \sin 2x + \cdots + \frac{c_n}{n} \sin nx,$$

则有 $g'(x) = f(x)$, $g(0) = g(\pi) = 0$, 由 Rolle 定理, 存在 $c \in (0, \pi)$, 使得 $g'(c) = f(c) = 0$.

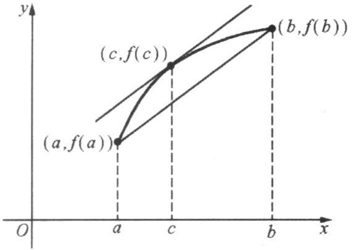
Lagrange 中值定理1

- 定理：设 $y = f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续，(a,b) 内可导，则存在 $c \in (a,b)$，使得 $f'(c) = \frac{f(b)-f(a)}{b-a}$.
- 证明：令

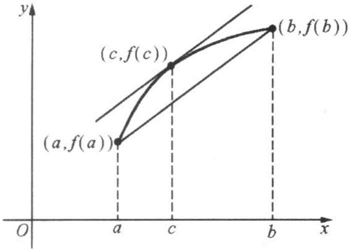
$$g(x) = f(x) - \frac{f(b)-f(a)}{b-a}x,$$

则有 $g(a) = g(b) = \frac{bf(a)-af(b)}{b-a}$，由 Rolle 定理，存在 $c \in (a,b)$，使得 $g'(c) = 0$，即

$$f'(c) - \frac{f(b)-f(a)}{b-a} = 0.$$



- 定理：设 $y = f(x)$ 在 $[a, b]$ 上连续，(a, b) 内可导，则存在 $c \in (a, b)$, 使得 $f'(c) = \frac{f(b)-f(a)}{b-a}$.
- 证明：令



$$g(x) = f(x) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a}x,$$

则有 $g(a) = g(b) = \frac{bf(a)-af(b)}{b-a}$, 由 Rolle 定理，存在 $c \in (a, b)$, 使得 $g'(c) = 0$, 即

$$f'(c) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a} = 0.$$

Lagrange 中值定理2

- 推论：设 $y=f(x)$ 在 (a,b) 内可导，x_0, $x\in(a,b)$. 则存在 $0<\theta<1$, 使得 $f(x)=f(x_0)+f'(x_0+\theta\Delta x)\Delta x$, 其中 $\Delta x=x-x_0$.

  证明：不妨设 $x>x_0$, 在 $[x_0,x]$ 上利用 Lagrange 中值定理, 存在 c, 使得 $f(x)=f(x_0)+f'(c)\Delta x$. 则 $c=x_0+\theta\Delta x$, 其中 $\theta=\frac{c-x_0}{x-x_0}\in(0,1)$.

- 推论：设 $y=f(x)$ 在内可导，且 $f'(x)\equiv 0$, 则 $f(x)$ 在 (a,b)上为常数. (这里 a 可以是 $-\infty$, b 可以是 $+\infty$.)

  证明：固定 $x_0\in(a,b)$. 对任意 $x\in(a,b)$，存在 $0<\theta<1$, 使得 $f(x)=f(x_0)+f'(x_0+\theta\Delta x)\Delta x=f(x_0)$.

- 推论:若 $G(x)$, $F(x)$ 都是 $f(x)$ 在 (a,b) 上的原函数，则存在常数 C, 使得 $G(x)=F(x)+C$.

Lagrange 中值定理2

- 推论：设 $y=f(x)$ 在 (a,b) 内可导，x_0, $x\in(a,b)$. 则存在 $0<\theta<1$, 使得 $f(x)=f(x_0)+f'(x_0+\theta\Delta x)\Delta x$, 其中 $\Delta x=x-x_0$.
  证明：不妨设 $x>x_0$, 在 $[x_0,x]$ 上利用 Lagrange 中值定理, 存在 c, 使得 $f(x)=f(x_0)+f'(c)\Delta x$. 则 $c=x_0+\theta\Delta x$, 其中 $\theta=\frac{c-x_0}{x-x_0}\in(0,1)$.
- 推论：设 $y=f(x)$ 在内可导，且 $f'(x)\equiv 0$, 则 $f(x)$ 在 (a,b)上为常数. (这里 a 可以是 $-\infty$, b 可以是 $+\infty$.)
  证明：固定 $x_0\in(a,b)$. 对任意 $x\in(a,b)$, 存在 $0<\theta<1$, 使得 $f(x)=f(x_0)+f'(x_0+\theta\Delta x)\Delta x=f(x_0)$.
- 推论:若 $G(x)$, $F(x)$ 都是 $f(x)$ 在 (a,b) 上的原函数，则存在常数 C, 使得 $G(x)=F(x)+C$.

Lagrange 中值定理2

- 推论：设 $y = f(x)$ 在 (a, b) 内可导，x_0, $x \in (a, b)$. 则存在 $0 < \theta < 1$, 使得 $f(x) = f(x_0) + f'(x_0 + \theta\Delta x)\Delta x$, 其中 $\Delta x = x - x_0$.

  证明：不妨设 $x > x_0$, 在 $[x_0, x]$ 上利用 Lagrange 中值定理, 存在 c, 使得 $f(x) = f(x_0) + f'(c)\Delta x$. 则 $c = x_0 + \theta\Delta x$, 其中 $\theta = \frac{c-x_0}{x-x_0} \in (0, 1)$.
- 推论：设 $y = f(x)$ 在内可导，且 $f'(x) \equiv 0$, 则 $f(x)$ 在 (a, b)上为常数. (这里 a 可以是 $-\infty$, b 可以是 $+\infty$.)

  证明：固定 $x_0 \in (a, b)$. 对任意 $x \in (a, b)$, 存在 $0 < \theta < 1$, 使得 $f(x) = f(x_0) + f'(x_0 + \theta\Delta x)\Delta x = f(x_0)$.
- 推论:若 $G(x)$, $F(x)$ 都是 $f(x)$ 在 (a, b) 上的原函数，则存在常数 C, 使得 $G(x) = F(x) + C$.

- 推论：设 $y=f(x)$ 在 (a,b) 内可导，x_0, $x\in(a,b)$. 则存在 $0<\theta<1$, 使得 $f(x)=f(x_0)+f'(x_0+\theta\Delta x)\Delta x$, 其中 $\Delta x=x-x_0$.
  证明：不妨设 $x>x_0$, 在 $[x_0,x]$ 上利用 Lagrange 中值定理, 存在 c, 使得 $f(x)=f(x_0)+f'(c)\Delta x$. 则 $c=x_0+\theta\Delta x$, 其中 $\theta=\frac{c-x_0}{x-x_0}\in(0,1)$.
- 推论：设 $y=f(x)$ 在内可导，且 $f'(x)\equiv 0$, 则 $f(x)$ 在 (a,b)上为常数. (这里 a 可以是 $-\infty$, b 可以是 $+\infty$.)
  证明：固定 $x_0\in(a,b)$. 对任意 $x\in(a,b)$，存在 $0<\theta<1$, 使得 $f(x)=f(x_0)+f'(x_0+\theta\Delta x)\Delta x=f(x_0)$.
- 推论:若 $G(x)$, $F(x)$ 都是 $f(x)$ 在 (a,b) 上的原函数，则存在常数 C, 使得 $G(x)=F(x)+C$.

- 推论：设 $y=f(x)$ 在 (a,b) 内可导，x_0，$x\in(a,b)$. 则存在 $0<\theta<1$, 使得 $f(x)=f(x_0)+f'(x_0+\theta\Delta x)\Delta x$, 其中 $\Delta x=x-x_0$.
  证明：不妨设 $x>x_0$, 在 $[x_0,x]$ 上利用 Lagrange 中值定理, 存在 c, 使得 $f(x)=f(x_0)+f'(c)\Delta x$. 则 $c=x_0+\theta\Delta x$, 其中 $\theta=\frac{c-x_0}{x-x_0}\in(0,1)$.
- 推论：设 $y=f(x)$ 在内可导，且 $f'(x)\equiv 0$, 则 $f(x)$ 在 (a,b)上为常数. (这里 a 可以是 $-\infty$, b 可以是 $+\infty$.)
  证明：固定 $x_0\in(a,b)$. 对任意 $x\in(a,b)$，存在 $0<\theta<1$, 使得 $f(x)=f(x_0)+f'(x_0+\theta\Delta x)\Delta x=f(x_0)$.
- 推论:若 $G(x)$, $F(x)$ 都是 $f(x)$ 在 (a,b) 上的原函数，则存在常数 C, 使得 $G(x)=F(x)+C$.

- 设 $f \in C^1([a,b])$，$f''(a)$ 存在，且不为 0，则有对 $a < x \le b$，存在 $a < c_x < x$，使得 $f(x) - f(a) = f'(c_x)(x-a)$，且 $\lim\limits_{x\to a} \frac{c_x - a}{x-a} = \frac{1}{2}$.

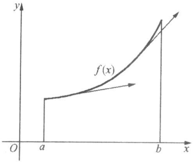
  证明：

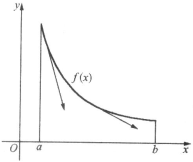
$$
\begin{aligned}
c_x - a \sim \frac{f'(c_x) - f'(a)}{f''(a)} &= \frac{1}{f''(a)}\Big(\frac{f(x)-f(a)}{x-a} - f'(a)\Big) \\
&= \frac{1}{f''(a)} \frac{f(x) - f(a) - f'(a)(x-a)}{x-a},
\end{aligned}
$$

  利用罗比达法则

$$
\lim_{x\to a} \frac{f(x)-f(a)-(x-a)f'(a)}{(x-a)^2} = \lim_{x\to a} \frac{f'(x)-f'(a)}{2(x-a)} = \frac{1}{2} f''(a).
$$

- 定理：设 $y = f(x)$ 在 $[a, b]$ 上连续，(a, b) 内可导.
  - 若 $f'(x) > 0$, $x \in (a, b)$, 则 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上严格单调增.
  - 若 $f'(x) \geq 0$, $x \in (a, b)$, 则 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上单调增.
  - 若 $f'(x) < 0$, $x \in (a, b)$, 则 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上严格单调减.
  - 若 $f'(x) \leq 0$, $x \in (a, b)$, 则 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上单调减.

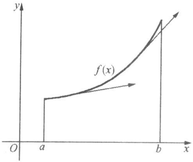


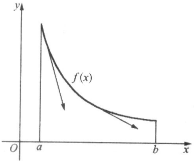


- 证明：若有 $f'(x) > 0$. 设 $a \leq x_1 < x_2 \leq b$, 存在 $c \in (x_1, x_2)$, 使得 $f(x_2) = f(x_1) + f'(c)(x_2 - x_1) > f(x_1)$.

函数的导数和单调性1

- 定理：设 $y = f(x)$ 在 $[a, b]$ 上连续，(a, b) 内可导.
  - 若 $f'(x) > 0$, $x \in (a, b)$, 则 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上严格单调增.
  - 若 $f'(x) \geq 0$, $x \in (a, b)$, 则 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上单调增.
  - 若 $f'(x) < 0$, $x \in (a, b)$, 则 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上严格单调减.
  - 若 $f'(x) \leq 0$, $x \in (a, b)$, 则 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上单调减.





- 证明：若有 $f'(x) > 0$. 设 $a \leq x_1 < x_2 \leq b$, 存在 $c \in (x_1, x_2)$, 使得 $f(x_2) = f(x_1) + f'(c)(x_2 - x_1) > f(x_1)$.

- 推论：设 $y = f(x)$ 在 (a, b) 内可导. 若 $f'(x) > 0$, $x \in (a, b)$, 则 $f(x)$ 在 (a, b) 上严格单调增(这里 a 可以是 $-\infty$, b 可以是 $+\infty$).
  证明：设 $a < x_1 < x_2 < b$, 在 $[x_1, x_2]$ 上利用上面的定理，得 $f(x_2) > f(x_1)$.
- 由 $f(x)$ 严格单调增不能得出 $f'(x) > 0$，如 $f(x) = x^3$.
- 若 $y = f(x)$ 在 $[a, b]$ 上连续，在 (a, b) 上 $f'(x) \geq 0$, 且 $f'(x)$ 只有有限个零点，则 $f(x)$ 也是严格单调增的.
  证明：设 $f'(x)$ 在 (a, b) 上有零点 $x_1, x_2, \cdots, x_n$, 则由上面的定理, $f(x)$ 在 $[a, x_1]$, $[x_1, x_2]$, $\cdots$, $[x_n, b]$ 上均严格单调，从而 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上严格单调.

函数的导数和单调性2

- 推论：设 $y=f(x)$ 在 (a,b) 内可导. 若 $f'(x)>0$, $x\in(a,b)$, 则 $f(x)$ 在 (a,b) 上严格单调增(这里 a 可以是 $-\infty$, b 可以是 $+\infty$).
  证明：设 $a<x_1<x_2<b$, 在 $[x_1,x_2]$ 上利用上面的定理, 得 $f(x_2)>f(x_1)$.
- 由 $f(x)$ 严格单调增不能得出 $f'(x)>0$，如 $f(x)=x^3$.
- 若 $y=f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续，在 (a,b) 上 $f'(x)\geq 0$, 且 $f'(x)$ 只有有限个零点，则 $f(x)$ 也是严格单调增的.
  证明：设 $f'(x)$ 在 (a,b) 上有零点 $x_1,x_2,\cdots,x_n$, 则由上面的定理, $f(x)$ 在 $[a,x_1],[x_1,x_2],\cdots,[x_n,b]$ 上均严格单调，从而 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上严格单调.

函数的导数和单调性2

- 推论：设 $y = f(x)$ 在 (a, b) 内可导. 若 $f'(x) > 0$, $x \in (a, b)$, 则 $f(x)$ 在 (a, b) 上严格单调增(这里 a 可以是 $-\infty$, b 可以是 $+\infty$).
  证明：设 $a < x_1 < x_2 < b$, 在 $[x_1, x_2]$ 上利用上面的定理，得 $f(x_2) > f(x_1)$.
- 由 $f(x)$ 严格单调增不能得出 $f'(x) > 0$，如 $f(x) = x^3$.
- 若 $y = f(x)$ 在 $[a, b]$ 上连续，在 (a, b) 上 $f'(x) \geq 0$, 且 $f'(x)$ 只有有限个零点，则 $f(x)$ 也是严格单调增的.
  证明：设 $f'(x)$ 在 (a, b) 上有零点 $x_1, x_2, \cdots, x_n$, 则由上面的定理，$f(x)$ 在 $[a, x_1], [x_1, x_2], \cdots, [x_n, b]$ 上均严格单调，从而 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上严格单调.

- 推论：设 $y=f(x)$ 在 (a,b) 内可导. 若 $f'(x)>0$, $x\in(a,b)$, 则 $f(x)$ 在 (a,b) 上严格单调增(这里 a 可以是 $-\infty$, b 可以是 $+\infty$).
  证明：设 $a<x_1<x_2<b$, 在 $[x_1,x_2]$ 上利用上面的定理，得 $f(x_2)>f(x_1)$.
- 由 $f(x)$ 严格单调增不能得出 $f'(x)>0$，如 $f(x)=x^3$.
- 若 $y=f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续，在 (a,b) 上 $f'(x)\geq 0$, 且 $f'(x)$ 只有有限个零点，则 $f(x)$ 也是严格单调增的.
  证明：设 $f'(x)$ 在 (a,b) 上有零点 $x_1,x_2,\cdots,x_n$, 则由上面的定理，$f(x)$ 在 $[a,x_1]$, $[x_1,x_2]$, $\cdots$, $[x_n,b]$ 上均严格单调，从而 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上严格单调.

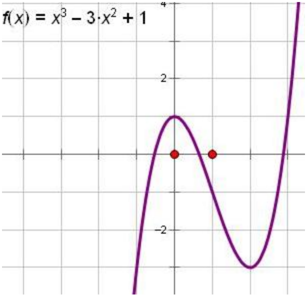
函数的导数和单调性2

- 推论：设 $y = f(x)$ 在 (a,b) 内可导. 若 $f'(x) > 0$, $x \in (a,b)$, 则 $f(x)$ 在 (a,b) 上严格单调增(这里 a 可以是 $-\infty$, b 可以是 $+\infty$).
  证明：设 $a < x_1 < x_2 < b$, 在 $[x_1, x_2]$ 上利用上面的定理，得 $f(x_2) > f(x_1)$.
- 由 $f(x)$ 严格单调增不能得出 $f'(x) > 0$，如 $f(x) = x^3$.
- 若 $y = f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续，在 (a,b) 上 $f'(x) \geq 0$, 且 $f'(x)$ 只有有限个零点，则 $f(x)$ 也是严格单调增的.
  证明：设 $f'(x)$ 在 (a,b) 上有零点 $x_1, x_2, \cdots, x_n$, 则由上面的定理, $f(x)$ 在 $[a, x_1]$, $[x_1, x_2]$, $\cdots$, $[x_n, b]$ 上均严格单调，从而 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上严格单调.

函数的导数和单调性—例1

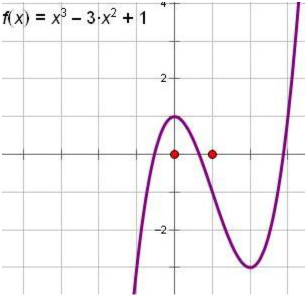
- 例： 求 $f(x) = x^3 - 3x^2 + 1$ 的单调区间.

  解： $f'(x) = 3x^2 - 6x = 3x(x-2)$，因此 $f(x)$在$(0,2)$($[0,2]$)上严格单调下降，$(-\infty,0)$ 和 $(2,+\infty)$ 上严格单调增.



函数的导数和单调性—例1

- 例：求 $f(x) = x^3 - 3x^2 + 1$ 的单调区间.
  解：$f'(x) = 3x^2 - 6x = 3x(x-2)$，因此 $f(x)$在$(0,2)$($[0,2]$)上严格单调下降，$(-\infty, 0)$ 和 $(2, +\infty)$ 上严格单调增.



函数的导数和单调性—例2

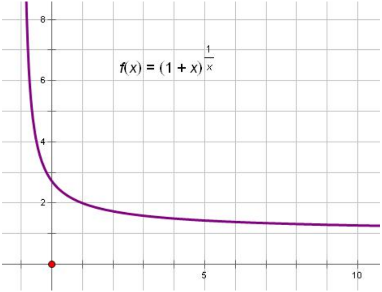
- 例：证明 $f(x) = (1+x)^{\frac{1}{x}}$ 在 $(0, +\infty)$ 上递减.

  证明：$f'(x) = (1+x)^{\frac{1}{x}}\left(\frac{1}{x(1+x)} - \frac{\ln(1+x)}{x^2}\right) = (1+x)^{\frac{1}{x}}\frac{g(x)}{x^2}$. 其中 $g(x) = \frac{x}{1+x} - \ln(1+x)$, $g'(x) = \frac{1}{(1+x)^2} - \frac{1}{1+x} < 0$,

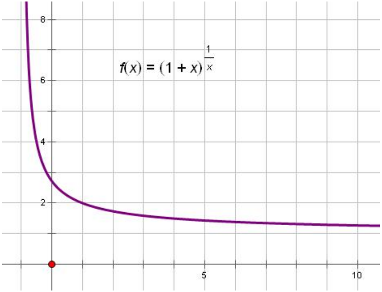
  因此当 $x > 0$ 时，$g(x) < g(0) = 0$,

  从而 $f'(x) < 0$.

- 推论：$(1+\frac{1}{n})^n$ 单调递增.



- 例：证明 $f(x)=(1+x)^{\frac{1}{x}}$ 在 $(0,+\infty)$ 上递减.
  证明：$f'(x) = (1+x)^{\frac{1}{x}}(\frac{1}{x(1+x)} - \frac{\ln(1+x)}{x^2}) = (1+x)^{\frac{1}{x}}\frac{g(x)}{x^2}$. 其中 $g(x) = \frac{x}{1+x} - \ln(1+x)$, $g'(x) = \frac{1}{(1+x)^2} - \frac{1}{1+x} < 0$,
  因此当 $x > 0$ 时，$g(x) < g(0) = 0$,
  从而 $f'(x) < 0$.

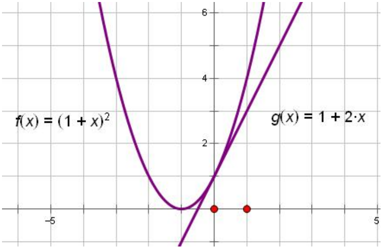


- 推论：$(1+\frac{1}{n})^n$ 单调递增.

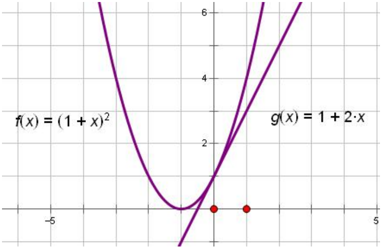
函数的导数和单调性—例3

- Bernoulli 不等式：设 $\alpha > 1, (1+x)^{\alpha} > 1+\alpha x$, $x \in (-1,0)\cup(0,+\infty)$.

证明：设 $f(x) = (1+x)^{\alpha} - (1+\alpha x)$, $f'(x) = \alpha(1+x)^{\alpha-1} - \alpha$. $x > 0$ 时，$f'(x) > 0$, $f(x)$ 在 $[0,+\infty)$ 上严格单调增，因此 $x > 0$ 时，$f(x) > f(0) = 0$. $-1 < x < 0$ 时，$f'(x) < 0$, $f(x)$ 在 $(-1,0]$ 上严格单调减. 因此 $-1 < x < 0$ 时，$f(x) > f(0) = 0$.



- Bernoulli 不等式：设 $\alpha > 1, (1+x)^\alpha > 1+\alpha x,\ x \in (-1,0)\cup(0,+\infty)$.
证明：设 $f(x)=(1+x)^\alpha-(1+\alpha x)$, $f'(x)=\alpha(1+x)^{\alpha-1}-\alpha$. $x>0$ 时，$f'(x)>0$, $f(x)$ 在 $[0,+\infty)$ 上严格单调增，因此 $x>0$ 时，$f(x)>f(0)=0$. $-1<x<0$ 时，$f'(x)<0$, $f(x)$ 在 $(-1,0]$ 上严格单调减. 因此 $-1<x<0$ 时，$f(x)>f(0)=0$.



- $f(x)$ 是 (a,b) 上的可微函数，则 $f'(x)$ 没有第一类间断点.

  证明：若 $f'(x)$ 有第一类间断点 $x_0 \in (a,b)$(x_0 在 $f'(x)$ 的定义域内，即 $f(x)$ 在 x_0 处可导). 则有 $\lim\limits_{x\to x_0\pm 0} f'(x)$ 存在. $x > x_0$ 时，

$$\begin{aligned} f'(x_0) &= \lim_{x\to x_0+0} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} \\ &= \lim_{x\to x_0+0} f'(x_0+\theta(x-x_0)) = \lim_{x\to x_0+0} f'(x) \end{aligned}$$

  同理可得 $f'(x_0) = \lim\limits_{x\to x_0-0} f'(x)$, 从而 $f'(x)$ 在 x_0 处连续，矛盾.

- 推论：$\operatorname{sgn} x$ 在 $\mathbb{R}$ 上没有原函数.

- $f'(x)$ 可以有第二类间断点，如 $f(x) = \begin{cases} x^2 \sin \frac{1}{x}, & x \neq 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases}$

- $f(x)$ 是 (a,b) 上的可微函数，则 $f'(x)$ 没有第一类间断点.
  证明：若 $f'(x)$ 有第一类间断点 $x_0 \in (a,b)$(x_0 在 $f'(x)$ 的定义域内，即 $f(x)$ 在 x_0 处可导). 则有 $\lim\limits_{x\to x_0\pm 0} f'(x)$ 存在. $x > x_0$ 时，

$$f'(x_0) = \lim_{x\to x_0+0} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} = \lim_{x\to x_0+0} f'(x_0+\theta(x-x_0)) = \lim_{x\to x_0+0} f'(x)$$

  同理可得 $f'(x_0) = \lim\limits_{x\to x_0-0} f'(x)$, 从而 $f'(x)$ 在 x_0 处连续，矛盾.
- 推论：$\operatorname{sgn} x$ 在 $\mathbb{R}$ 上没有原函数.
- $f'(x)$ 可以有第二类间断点，如 $f(x) = \begin{cases} x^2 \sin\frac{1}{x}, & x \neq 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases}$

导函数的性质

- $f(x)$ 是 (a,b) 上的可微函数，则 $f'(x)$ 没有第一类间断点.
  证明：若 $f'(x)$ 有第一类间断点 $x_0 \in (a,b)$(x_0 在 $f'(x)$ 的定义域内，即 $f(x)$ 在 x_0 处可导). 则有 $\lim\limits_{x\to x_0\pm 0} f'(x)$ 存在. $x > x_0$ 时，
  $$\begin{aligned} f'(x_0) &= \lim_{x\to x_0+0} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} \\ &= \lim_{x\to x_0+0} f'(x_0+\theta(x-x_0)) = \lim_{x\to x_0+0} f'(x) \end{aligned}$$
  同理可得 $f'(x_0) = \lim\limits_{x\to x_0-0} f'(x)$, 从而 $f'(x)$ 在 x_0 处连续，矛盾.
- 推论：$\operatorname{sgn} x$ 在 $\mathbb{R}$ 上没有原函数.
- $f'(x)$ 可以有第二类间断点，如 $f(x) = \begin{cases} x^2 \sin \frac{1}{x}, & x \neq 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases}$

Cauchy 柯西中值定理1

- 定理：设 $f(x), g(x)$ 在 $[a, b]$ 上连续，(a, b) 内可导，且 $g'(x) \neq 0$ 则存在 $c \in (a, b)$，使得
$$\frac{f'(c)}{g'(c)} = \frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)}.$$
- 证明：令
$$h(x) = f(x) - \frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)}[g(x) - g(a)],$$
则有 $h(b) = h(a) = f(a)$，由 Rolle 定理，存在 $c \in (a, b)$，使得
$$h'(c) = f'(c) - \frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} g'(c) = 0.$$

- 定理：设 $f(x), g(x)$ 在 $[a, b]$ 上连续，(a, b) 内可导，且 $g'(x) \neq 0$ 则存在 $c \in (a, b)$，使得

$$\frac{f'(c)}{g'(c)} = \frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)}.$$

- 证明：令

$$h(x) = f(x) - \frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)}[g(x) - g(a)],$$

则有 $h(b) = h(a) = f(a)$，由 Rolle 定理，存在 $c \in (a, b)$，使得

$$h'(c) = f'(c) - \frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)}g'(c) = 0.$$

Cauchy 柯西中值定理2

- 注：参数方程 $\begin{cases} x = g(t) \\ y = f(t) \end{cases}$，$t \in [a, b]$ 表示一段曲线，$\frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}$ 表示端点连线的斜率，$\frac{f'(c)}{g'(c)}$ 是 $(g(c), f(c))$ 点的切线斜率.
- 如下证明是否正确：由 Lagrange 定理，存在 c, 使得 $f(b) - f(a) = f'(c)(b-a)$, $g(b) - g(a) = g'(c)(b-a)$, 从而有

$$\frac{f'(c)}{g'(c)} = \frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)}.$$

Cauchy 柯西中值定理2

- 注：参数方程 $\begin{cases} x = g(t) \\ y = f(t) \end{cases}$，$t \in [a, b]$ 表示一段曲线，$\frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}$ 表示端点连线的斜率，$\frac{f'(c)}{g'(c)}$ 是 $(g(c), f(c))$ 点的切线斜率.
- 如下证明是否正确：由 Lagrange 定理，存在 c, 使得 $f(b) - f(a) = f'(c)(b-a)$, $g(b) - g(a) = g'(c)(b-a)$, 从而有

$$\frac{f'(c)}{g'(c)} = \frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)}.$$

Cauchy 柯西中值定理-例

- 设 $f(x), g(x)$ 在 $[a,b]$ 上二次可导，且 $g''(x) \neq 0$. 则存在 $c \in (a,b)$, 使得$\frac{f''(c)}{g''(c)} = \frac{f(b)-f(a)-f'(a)(b-a)}{g(b)-g(a)-g'(a)(b-a)}$.
- 证明： $h(x) = f(x) - f(a) - f'(a)(x-a) - \frac{f(b)-f(a)-f'(a)(b-a)}{g(b)-g(a)-g'(a)(b-a)}(g(x) - g(a) - g'(a)(x-a))$, 则 $h(a) = h(b) = 0$, 存在 $c_1 \in (a,b)$, 使得

$$h'(c_1) = f'(c_1) - f'(a) - \frac{f(b)-f(a)-f'(a)(b-a)}{g(b)-g(a)-g'(a)(b-a)}(g'(c_1) - g'(a)) = 0,$$

在 $[a, c_1]$ 上对函数 $f'(x)$ 用 Cauchy 中值定理, 存在 $c \in (a, c_1)$, 使得

$$f'(c_1) - f'(a) = \frac{f''(c)}{g''(c)}(g'(c_1) - g'(a)).$$

由于 $g''(x) \neq 0$, $g'(c_1) - g'(a) \neq 0$(Rolle 定理).

$\frac{0}{0}$ 型L'Hospital法则1

- $\frac{0}{0}$ 型：设 $\lim_{x\to a} f(x) = \lim_{x\to a} g(x) = 0$，求 $\lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)}$.
- 例：若 $f(x), g(x)$ 在 a 点的附近连续且可导，且 $f(a) = g(a) = 0$, $g'(a) \neq 0$，则有

$$\lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to a} \frac{f'(a)(x-a) + o((x-a))}{g'(a)(x-a) + o((x-a))} = \frac{f'(a)}{g'(a)}.$$

- 定理：设 $f(x), g(x)$ 在 a 点的某个空心邻域上有定义，且可导，$g'(x) \neq 0$. 若 $\lim_{x\to a} f(x) = \lim_{x\to a} g(x) = 0$，$\lim_{x\to a} \frac{f'(x)}{g'(x)}$ 存在，则极限 $\lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)}$ 存在，且 $\lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to a} \frac{f'(x)}{g'(x)}$.

$\frac{0}{0}$ 型L'Hospital法则1

- $\frac{0}{0}$ 型：设 $\lim_{x\to a} f(x) = \lim_{x\to a} g(x) = 0$，求 $\lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)}$.
- 例：若 $f(x), g(x)$ 在 a 点的附近连续且可导，且 $f(a) = g(a) = 0$, $g'(a) \neq 0$，则有

$$\lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to a} \frac{f'(a)(x-a)+o((x-a))}{g'(a)(x-a)+o((x-a))} = \frac{f'(a)}{g'(a)}.$$

- 定理：设 $f(x), g(x)$ 在 a 点的某个空心邻域上有定义，且可导，$g'(x) \neq 0$. 若 $\lim_{x\to a} f(x) = \lim_{x\to a} g(x) = 0$，$\lim_{x\to a} \frac{f'(x)}{g'(x)}$ 存在，则极限 $\lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)}$ 存在，且 $\lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to a} \frac{f'(x)}{g'(x)}$.

$\frac{0}{0}$ 型L'Hospital法则1

- $\frac{0}{0}$ 型：设 $\lim\limits_{x\to a} f(x) = \lim\limits_{x\to a} g(x) = 0$，求 $\lim\limits_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)}$.
- 例：若 $f(x), g(x)$ 在 a 点的附近连续且可导，且 $f(a) = g(a) = 0$，$g'(a) \neq 0$，则有

$$\lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to a} \frac{f'(a)(x-a) + o((x-a))}{g'(a)(x-a) + o((x-a))} = \frac{f'(a)}{g'(a)}.$$

- 定理：设 $f(x), g(x)$ 在 a 点的某个空心邻域上有定义，且可导，$g'(x) \neq 0$. 若 $\lim\limits_{x\to a} f(x) = \lim\limits_{x\to a} g(x) = 0$，$\lim\limits_{x\to a} \frac{f'(x)}{g'(x)}$ 存在，则极限 $\lim\limits_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)}$ 存在，且 $\lim\limits_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim\limits_{x\to a} \frac{f'(x)}{g'(x)}$.

$\frac{0}{0}$型L'Hospital法则2

- 定理证明：定义 $f(a) = g(a) = 0$, 则 $f(x)$在$[x.a]$ (或 $[a, x]$)上连续，内部可导.

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a)}{g(x) - g(a)}$$
$$= \lim_{x \to a} \frac{f'(c_x)}{g'(c_x)} = \lim_{x \to a} \frac{f'(x)}{g'(x)}$$

上面用到当 $x \to a$ 时，$c_x \to a$.

- 注：对 $x \to a \pm 0$, 也有相应的结论成立.
- 注：若 $\lim_{x \to a} \frac{f'(x)}{g'(x)} = \infty$, 上面结论依然成立。

$\frac{0}{0}$ 型L'Hospital法则2

- 定理证明：定义 $f(a)=g(a)=0$，则 $f(x)$在$[x.a]$（或 $[a,x]$）上连续，内部可导.

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim_{x\to a}\frac{f(x)-f(a)}{g(x)-g(a)}$$
$$=\lim_{x\to a}\frac{f'(c_x)}{g'(c_x)}=\lim_{x\to a}\frac{f'(x)}{g'(x)}$$

  上面用到当 $x\to a$ 时，$c_x\to a$.

- 注：对 $x\to a\pm 0$，也有相应的结论成立.
- 注：若 $\lim\limits_{x\to a}\frac{f'(x)}{g'(x)}=\infty$，上面结论依然成立。

$\frac{0}{0}$ 型 L'Hospital 法则3

- 注：$\lim\limits_{x\to a}\frac{f'(x)}{g'(x)}$ 不存在时，$\lim\limits_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}$ 也可能存在，如 $f(x)=x^2\sin\frac{1}{x}$，$g(x)=x$, $x\to 0$, $\lim\limits_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}=0$, 但是极限

$$\lim_{x\to 0}\frac{f'(x)}{g'(x)}=\lim_{x\to 0}\frac{2x\sin\frac{1}{x}-\cos\frac{1}{x}}{1}$$

不存在.

- 推论：设 $f(x),g(x)$ 在 a 点的某个空心邻域上有定义，且 n 次可导. 若 $g^{(k)}(x)\neq 0$ $(k=0,1,\cdots,n)$，$\lim\limits_{x\to a}f^{(k)}(x)=\lim\limits_{x\to a}g(x)^{(k)}=0$ $(k=0,1,2,\cdots,n-1)$，$\lim\limits_{x\to a}\frac{f^{(n)}(x)}{g^{(n)}(x)}$ 存在，则极限 $\lim\limits_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}$ 存在，且 $\lim\limits_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim\limits_{x\to a}\frac{f^{(n)}(x)}{g^{(n)}(x)}$.

$\frac{0}{0}$ 型 L'Hospital 法则3

- 注：$\lim\limits_{x\to a}\frac{f'(x)}{g'(x)}$ 不存在时，$\lim\limits_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}$ 也可能存在，如 $f(x)=x^2\sin\frac{1}{x}$, $g(x)=x$, $x\to 0$, $\lim\limits_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}=0$, 但是极限

$$\lim_{x\to 0}\frac{f'(x)}{g'(x)}=\lim_{x\to 0}\frac{2x\sin\frac{1}{x}-\cos\frac{1}{x}}{1}$$

不存在.

- 推论：设 $f(x), g(x)$ 在 a 点的某个空心邻域上有定义，且 n 次可导. 若 $g^{(k)}(x)\neq 0$ $(k=0,1,\cdots,n)$，$\lim\limits_{x\to a}f^{(k)}(x)=\lim\limits_{x\to a}g(x)^{(k)}=0$ $(k=0,1,2,\cdots,n-1)$，$\lim\limits_{x\to a}\frac{f^{(n)}(x)}{g^{(n)}(x)}$ 存在，则极限 $\lim\limits_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}$ 存在，且 $\lim\limits_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim\limits_{x\to a}\frac{f^{(n)}(x)}{g^{(n)}(x)}$.

$\frac{0}{0}$ 型 L'Hospital 法则—例

- $\lim\limits_{x\to0}\frac{\ln(1+x)-x}{x^2}=\lim\limits_{x\to0}\frac{\frac{1}{1+x}-1}{2x}=\lim\limits_{x\to0}\frac{-\frac{1}{(1+x)^2}}{2}=-\frac{1}{2}.$
- 例： $f(x)=\begin{cases}\frac{\sin x}{x}, & x\neq0\\ 1, & x=0\end{cases}$. 求 $f''(0)$.

解： $f'(0)=\lim\limits_{x\to0}\frac{\frac{\sin x}{x}-1}{x}=\lim\limits_{x\to0}\frac{\sin x-x}{x^2}=\lim\limits_{x\to0}\frac{\cos x-1}{2x}=\lim\limits_{x\to0}\frac{-\sin x}{2}$ $=0$, $x\neq0$ 时， $f'(x)=\frac{x\cos x-\sin x}{x^2}$. 因此

$$f''(0)=\lim_{x\to0}\frac{x\cos x-\sin x}{x^3}=\lim_{x\to0}\frac{\cos x-x\sin x-\cos x}{3x^2}=-\frac{1}{3}$$

- $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\ln(1+x)-x}{x^2}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{\frac{1}{1+x}-1}{2x}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{-\frac{1}{(1+x)^2}}{2}=-\frac{1}{2}$.
- 例： $f(x)=\begin{cases}\frac{\sin x}{x}, & x\neq 0\\ 1, & x=0\end{cases}$. 求 $f''(0)$.

  解： $f'(0)=\lim\limits_{x\to 0}\frac{\frac{\sin x}{x}-1}{x}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin x-x}{x^2}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{\cos x-1}{2x}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{-\sin x}{2}$
  $=0$, $x\neq 0$ 时， $f'(x)=\frac{x\cos x-\sin x}{x^2}$. 因此

$$f''(0)=\lim_{x\to 0}\frac{x\cos x-\sin x}{x^3}=\lim_{x\to 0}\frac{\cos x-x\sin x-\cos x}{3x^2}=-\frac{1}{3}$$

$x \to \infty$ 的 L'Hospital 法则

- $\frac{0}{0}$ 型：设 $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} g(x) = 0$，求 $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{g(x)}$.
- 定理：设 $f(x), g(x)$ 在 $[A, +\infty)$ 上有定义(不妨设 $A > 0$)，且可导，$g'(x) \neq 0$. 若 $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} g(x) = 0$，$\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{f'(x)}{g'(x)}$ 存在，则极限 $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{g(x)}$ 存在，且 $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim\limits_{x\to+\infty} \frac{f'(x)}{g'(x)}$.
  证明：令 $F(x) = f(\frac{1}{x})$, $G(x) = g(\frac{1}{x})$, F, G 在 $(0, \frac{1}{A})$ 上有定义，且 $\lim\limits_{x\to0+0} F(x) = \lim\limits_{x\to0+0} G(x) = 0$,

$$\begin{aligned}\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{g(x)} &= \lim_{x\to0+0}\frac{F(x)}{G(x)} = \lim_{x\to0+0}\frac{F'(x)}{G'(x)}\\ &= \lim_{x\to0+0}\frac{f'(\frac{1}{x})(-\frac{1}{x^2})}{g'(\frac{1}{x})(-\frac{1}{x^2})} = \lim_{x\to+\infty}\frac{f'(x)}{g'(x)}.\end{aligned}$$

$x \to \infty$ 的 L'Hospital 法则

- $\frac{0}{0}$ 型：设 $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} g(x) = 0$，求 $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{g(x)}$.
- 定理：设 $f(x), g(x)$ 在 $[A, +\infty)$ 上有定义(不妨设 $A > 0$)，且可导，$g'(x) \neq 0$. 若 $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} g(x) = 0$，$\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{f'(x)}{g'(x)}$ 存在，则极限 $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{g(x)}$ 存在，且 $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim\limits_{x\to+\infty} \frac{f'(x)}{g'(x)}$.

证明：令 $F(x) = f(\frac{1}{x})$, $G(x) = g(\frac{1}{x})$, F, G 在 $(0, \frac{1}{A})$ 上有定义，且 $\lim\limits_{x\to0+0} F(x) = \lim\limits_{x\to0+0} G(x) = 0$,

$$\begin{aligned}\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{g(x)} &= \lim_{x\to0+0} \frac{F(x)}{G(x)} = \lim_{x\to0+0} \frac{F'(x)}{G'(x)} \\ &= \lim_{x\to0+0} \frac{f'(\frac{1}{x})(-\frac{1}{x^2})}{g'(\frac{1}{x})(-\frac{1}{x^2})} = \lim_{x\to+\infty} \frac{f'(x)}{g'(x)}.\end{aligned}$$

- $\frac{0}{0}$ 型：设 $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} g(x) = 0$，求 $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{g(x)}$.
- 定理：设 $f(x), g(x)$ 在 $[A, +\infty)$ 上有定义(不妨设 $A > 0$)，且可导，$g'(x) \neq 0$. 若 $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} g(x) = 0$，$\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{f'(x)}{g'(x)}$ 存在，则极限 $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{g(x)}$ 存在，且 $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim\limits_{x\to+\infty} \frac{f'(x)}{g'(x)}$.
  证明：令 $F(x) = f(\frac{1}{x})$, $G(x) = g(\frac{1}{x})$, F, G 在 $(0, \frac{1}{A})$ 上有定义，且 $\lim\limits_{x\to0+0} F(x) = \lim\limits_{x\to0+0} G(x) = 0$,

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{g(x)} &= \lim_{x\to0+0} \frac{F(x)}{G(x)} = \lim_{x\to0+0} \frac{F'(x)}{G'(x)} \\
&= \lim_{x\to0+0} \frac{f'(\frac{1}{x})(-\frac{1}{x^2})}{g'(\frac{1}{x})(-\frac{1}{x^2})} = \lim_{x\to+\infty} \frac{f'(x)}{g'(x)}.
\end{aligned}$$

$\frac{\infty}{\infty}$ 型 L'Hospital 法则1

- $\frac{\infty}{\infty}$ 型：设 $\lim\limits_{x \to a} f(x) = \lim\limits_{x \to a} g(x) = \infty$，求 $\lim\limits_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)}$.
- 定理：设 $f(x), g(x)$ 在 a 的某个空心邻域上可导，且 $g'(x) \neq 0$. 若 $\lim\limits_{x \to a} f(x) = \infty = \lim\limits_{x \to a} g(x)$，$\lim\limits_{x \to a} \frac{f'(x)}{g'(x)}$ 存在，则极限 $\lim\limits_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)}$ 存在，且 $\lim\limits_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim\limits_{x \to a} \frac{f'(x)}{g'(x)}$.
- 若已知 $\lim\limits_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)} = A$ 存在，且 $A \neq 0$, 则有

$$A = \lim_{x \to a} \frac{\frac{1}{g(x)}}{\frac{1}{f(x)}} = \lim_{x \to a} \frac{\frac{g'(x)}{g(x)^2}}{\frac{f'(x)}{f(x)^2}} = \lim_{x \to a} \frac{g'(x)}{f'(x)} \cdot A^2$$

由此可得 $A = \lim\limits_{x \to a} \frac{f'(x)}{g'(x)}$.

$\frac{\infty}{\infty}$ 型 L'Hospital 法则1

- $\frac{\infty}{\infty}$ 型：设 $\lim\limits_{x\to a} f(x)=\lim\limits_{x\to a} g(x)=\infty$，求 $\lim\limits_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}$.
- 定理：设 $f(x), g(x)$ 在 a 的某个空心邻域上可导，且 $g'(x)\neq 0$. 若 $\lim\limits_{x\to a} f(x)=\infty=\lim\limits_{x\to a} g(x)$，$\lim\limits_{x\to a}\frac{f'(x)}{g'(x)}$ 存在，则极限 $\lim\limits_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}$ 存在，且 $\lim\limits_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim\limits_{x\to a}\frac{f'(x)}{g'(x)}$.
- 若已知 $\lim\limits_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}=A$ 存在，且 $A\neq 0$, 则有

$$A=\lim_{x\to a}\frac{\frac{1}{g(x)}}{\frac{1}{f(x)}}=\lim_{x\to a}\frac{\frac{g'(x)}{g(x)^2}}{\frac{f'(x)}{f(x)^2}}=\lim_{x\to a}\frac{g'(x)}{f'(x)}\cdot A^2$$

由此可得 $A=\lim\limits_{x\to a}\frac{f'(x)}{g'(x)}$.

$\frac{\infty}{\infty}$ 型 L'Hospital 法则1

- $\frac{\infty}{\infty}$ 型：设 $\lim\limits_{x\to a} f(x) = \lim\limits_{x\to a} g(x) = \infty$，求 $\lim\limits_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)}$.
- 定理：设 $f(x), g(x)$ 在 a 的某个空心邻域上可导，且 $g'(x) \neq 0$. 若 $\lim\limits_{x\to a} f(x) = \infty = \lim\limits_{x\to a} g(x)$，$\lim\limits_{x\to a} \frac{f'(x)}{g'(x)}$ 存在，则极限 $\lim\limits_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)}$ 存在，且 $\lim\limits_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim\limits_{x\to a} \frac{f'(x)}{g'(x)}$.
- 若已知 $\lim\limits_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} = A$ 存在，且 $A \neq 0$, 则有

$$A = \lim_{x\to a} \frac{\frac{1}{g(x)}}{\frac{1}{f(x)}} = \lim_{x\to a} \frac{\frac{g'(x)}{g(x)^2}}{\frac{f'(x)}{f(x)^2}} = \lim_{x\to a} \frac{g'(x)}{f'(x)} \cdot A^2$$

由此可得 $A = \lim\limits_{x\to a} \frac{f'(x)}{g'(x)}$.

$\frac{\infty}{\infty}$ 型 L'Hospital 法则2

- 定理证明思路：由柯西中值定理，存在 c_x，使得 $\frac{f(x)-f(x_1)}{g(x)-g(x_1)} = \frac{f'(c_x)}{g'(c_x)}$，即

$$f(x) = f(x_1) + \frac{f'(c_x)}{g'(c_x)}(g(x) - g(x_1)).$$

两边除以 $g(x)$，得

$$\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f(x_1)}{g(x)} + \frac{f'(c_x)}{g'(c_x)}\left(1 - \frac{g(x_1)}{g(x)}\right)$$

先固定 x_1 满足当 $x > x_1$ 时，$|\frac{f'(x)}{g'(x)} - A| < \frac{\epsilon}{3}$，然后令 $x \to +\infty$ 即可.

- 其它不定型：$0 \cdot \infty = \frac{0}{\frac{1}{\infty}}$，$0 \ln 0 = \frac{\ln 0}{\frac{1}{0}}$，$0^0 = e^{0 \ln 0}$，$0 \ln \infty = \frac{\ln \infty}{\frac{1}{0}}$，$\infty^0 = e^{0 \ln \infty}$，$\infty \ln 1 = \frac{\ln 1}{\frac{1}{\infty}}$，$1^\infty = e^{\infty \ln 1}$.

$\frac{\infty}{\infty}$ 型 L'Hospital 法则2

- 定理证明思路：由柯西中值定理，存在 c_x，使得 $\frac{f(x)-f(x_1)}{g(x)-g(x_1)} = \frac{f'(c_x)}{g'(c_x)}$，即

$$f(x) = f(x_1) + \frac{f'(c_x)}{g'(c_x)}(g(x) - g(x_1)).$$

两边除以 $g(x)$，得

$$\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f(x_1)}{g(x)} + \frac{f'(c_x)}{g'(c_x)}\left(1 - \frac{g(x_1)}{g(x)}\right)$$

先固定 x_1 满足当 $x > x_1$ 时，$|\frac{f'(x)}{g'(x)} - A| < \frac{\epsilon}{3}$，然后令 $x \to +\infty$ 即可.

- 其它不定型：$0 \cdot \infty = \frac{0}{\frac{1}{\infty}}$，$0 \ln 0 = \frac{\ln 0}{\frac{1}{0}}$，$0^0 = e^{0 \ln 0}$，$0 \ln \infty = \frac{\ln \infty}{\frac{1}{0}}$，$\infty^0 = e^{0 \ln \infty}$，$\infty \ln 1 = \frac{\ln 1}{\frac{1}{\infty}}$，$1^\infty = e^{\infty \ln 1}$.

L'Hospital 法则—例1

- 例： $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{P(x)}{e^x}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{P'(x)}{e^x}=0.$
- 例： $\lim\limits_{x\to0+0}x^x=\lim\limits_{x\to0+0}e^{\frac{\ln x}{\frac{1}{x}}}=1$, 这里用到

$$\lim_{x\to0+0}\frac{\ln x}{\frac{1}{x}}=\lim_{x\to0+0}\frac{\frac{1}{x}}{-\frac{1}{x^2}}=0.$$

- 例： $\lim\limits_{x\to1}\left(\frac{1}{\ln x}-\frac{1}{x-1}\right)=\lim\limits_{x\to1}\frac{x-1-\ln x}{(x-1)\ln x}=\lim\limits_{x\to1}\frac{1-\frac{1}{x}}{\ln x+\frac{x-1}{x}}=\lim\limits_{x\to1}\frac{\frac{1}{x^2}}{\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}}=\frac{1}{2}.$
- $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n}{e^n}=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{x}{e^x}=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{1}{e^x}=0.$

L'Hospital 法则—例1

- 例： $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{P(x)}{e^x}=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{P'(x)}{e^x}=0.$
- 例： $\lim\limits_{x\to0+0}x^x=\lim\limits_{x\to0+0}e^{\frac{\ln x}{\frac{1}{x}}}=1$，这里用到

$$\lim_{x\to0+0}\frac{\ln x}{\frac{1}{x}}=\lim_{x\to0+0}\frac{\frac{1}{x}}{-\frac{1}{x^2}}=0.$$

- 例： $\lim\limits_{x\to1}\left(\frac{1}{\ln x}-\frac{1}{x-1}\right)=\lim\limits_{x\to1}\frac{x-1-\ln x}{(x-1)\ln x}=\lim\limits_{x\to1}\frac{1-\frac{1}{x}}{\ln x+\frac{x-1}{x}}=\lim\limits_{x\to1}\frac{\frac{1}{x^2}}{\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}}=\frac{1}{2}.$
- $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n}{e^n}=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{x}{e^x}=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{1}{e^x}=0.$

L'Hospital 法则—例1

- 例： $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{P(x)}{e^x}=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{P'(x)}{e^x}=0.$
- 例： $\lim\limits_{x\to0+0}x^x=\lim\limits_{x\to0+0}e^{\frac{\ln x}{\frac{1}{x}}}=1$，这里用到

$$\lim_{x\to0+0}\frac{\ln x}{\frac{1}{x}}=\lim_{x\to0+0}\frac{\frac{1}{x}}{-\frac{1}{x^2}}=0.$$

- 例： $\lim\limits_{x\to1}\left(\frac{1}{\ln x}-\frac{1}{x-1}\right)=\lim\limits_{x\to1}\frac{x-1-\ln x}{(x-1)\ln x}=\lim\limits_{x\to1}\frac{1-\frac{1}{x}}{\ln x+\frac{x-1}{x}}=\lim\limits_{x\to1}\frac{\frac{1}{x^2}}{\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}}=\frac{1}{2}.$
- $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n}{e^n}=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{x}{e^x}=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{1}{e^x}=0.$

L'Hospital 法则—例1

- 例： $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{P(x)}{e^x}=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{P'(x)}{e^x}=0.$
- 例： $\lim\limits_{x\to0+0}x^x=\lim\limits_{x\to0+0}e^{\frac{\ln x}{\frac{1}{x}}}=1$，这里用到

$$\lim_{x\to0+0}\frac{\ln x}{\frac{1}{x}}=\lim_{x\to0+0}\frac{\frac{1}{x}}{-\frac{1}{x^2}}=0.$$

- 例： $\lim\limits_{x\to1}\left(\frac{1}{\ln x}-\frac{1}{x-1}\right)=\lim\limits_{x\to1}\frac{x-1-\ln x}{(x-1)\ln x}=\lim\limits_{x\to1}\frac{1-\frac{1}{x}}{\ln x+\frac{x-1}{x}}=\lim\limits_{x\to1}\frac{\frac{1}{x^2}}{\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}}=\frac{1}{2}.$
- $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n}{e^n}=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{x}{e^x}=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{1}{e^x}=0.$

L'Hospital法则—例2

- 设 $a_k > 0$, $k = 1, 2, \cdots, n$. 证明:

$$\lim_{x\to 0}\left(\frac{a_1^x + a_2^x + \cdots + a_n^x}{n}\right)^{\frac{1}{x}} = (a_1\cdots a_n)^{\frac{1}{n}}.$$

证明:

$$\begin{aligned}
&\lim_{x\to 0}\ln\left(\frac{a_1^x + a_2^x + \cdots + a_n^x}{n}\right)^{\frac{1}{x}}\\
=&\lim_{x\to 0}\frac{\ln(a_1^x + a_2^x + \cdots + a_n^x) - \ln n}{x}\\
=&\lim_{x\to 0}\frac{a_1^x\ln a_1 + a_2^x\ln a_2 + \cdots + a_n^x\ln a_n}{a_1^x + a_2^x + \cdots + a_n^x}\\
=&\frac{\ln a_1 + \ln a_2 + \cdots + \ln a_n}{n}.
\end{aligned}$$

L'Hospital法则—例2

- 设 $a_k > 0$, $k = 1, 2, \cdots, n$. 证明:

$$\lim_{x\to 0}\left(\frac{a_1^x + a_2^x + \cdots + a_n^x}{n}\right)^{\frac{1}{x}} = (a_1 \cdots a_n)^{\frac{1}{n}}.$$

证明:

$$\begin{aligned}
&\lim_{x\to 0}\ln\left(\frac{a_1^x + a_2^x + \cdots + a_n^x}{n}\right)^{\frac{1}{x}} \\
=&\lim_{x\to 0}\frac{\ln(a_1^x + a_2^x + \cdots + a_n^x) - \ln n}{x} \\
=&\lim_{x\to 0}\frac{a_1^x \ln a_1 + a_2^x \ln a_2 + \cdots + a_n^x \ln a_n}{a_1^x + a_2^x + \cdots + a_n^x} \\
=&\frac{\ln a_1 + \ln a_2 + \cdots + \ln a_n}{n}.
\end{aligned}$$

Taylor公式1

- 历史注记：1715 年 Taylor 在《正的和反的增量法》中给出 Taylor 公式（没有考虑余项），后来 Lagrange 给出余项表达式，指出不考虑余项是不严格的.
- 复习：若 $f(x)$ 在 x_0 处可导，则有

$$f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + o((x - x_0)).$$

Taylor公式1

- 历史注记：1715 年 Taylor 在《正的和反的增量法》中给出 Taylor 公式（没有考虑余项），后来 Lagrange 给出余项表达式，指出不考虑余项是不严格的.
- 复习：若 $f(x)$ 在 x_0 处可导，则有

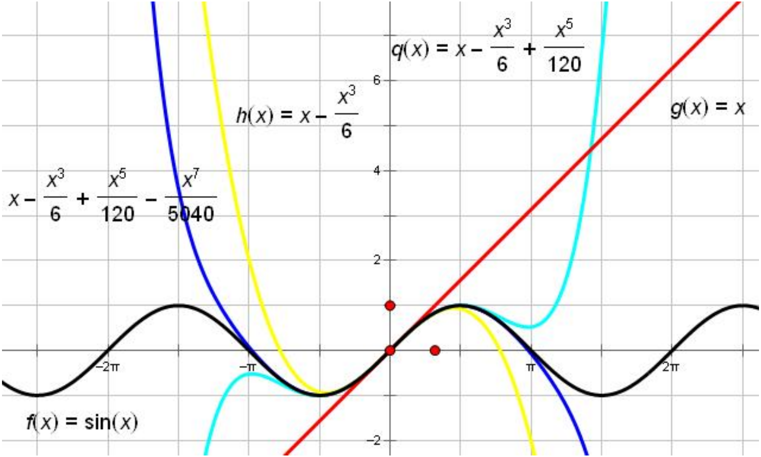
$$f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + o((x - x_0)).$$

Taylor公式1

- 定理：$y=f(x)$ 在 x_0 的某个邻域上有定义，且在 x_0 处有 n 阶导数(则在 x_0 的某个邻域上的 $n-1$ 阶导数存在)，则有
  1. $x\to x_0$ 时，
  $$f(x)=f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0)+\cdots+\frac{1}{n!}f^{(n)}(x_0)(x-x_0)^n+o((x-x_0)^n).$$
  2. 若存在常数 $A_0,A_1,\cdots,A_n$，使得
  $$f(x)=A_0+A_1(x-x_0)+\cdots+A_n(x-x_0)^n+o((x-x_0)^n).$$
  则有 $A_0=f(x_0)$，$A_k=\frac{1}{k!}f^{(k)}(x_0)(k=1,2,\cdots,n)$.
- 注：$x_0=0$ 时的 Taylor 公式称为 Marclaurin 公式，$R_n(x)=o((x-x_0)^n)$ 称为 Peano 余项（Peano:世界语创始人）.

- 定理：$y=f(x)$ 在 x_0 的某个邻域上有定义，且在 x_0 处有 n 阶导数(则在 x_0 的某个邻域上的 $n-1$ 阶导数存在)，则有
  1. $x\to x_0$ 时，
  $$f(x)=f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0)+\cdots+\frac{1}{n!}f^{(n)}(x_0)(x-x_0)^n+o((x-x_0)^n).$$
  2. 若存在常数 $A_0,A_1,\cdots,A_n$，使得
  $$f(x)=A_0+A_1(x-x_0)+\cdots+A_n(x-x_0)^n+o((x-x_0)^n).$$
  则有 $A_0=f(x_0)$，$A_k=\frac{1}{k!}f^{(k)}(x_0)(k=1,2,\cdots,n)$.
- 注：$x_0=0$ 时的 Taylor 公式称为 Marclaurin 公式，$R_n(x)=o((x-x_0)^n)$ 称为 Peano 余项（Peano:世界语创始人）.

- 若 $f(x) = \sin x$, Taylor 展式的逼近程度如图.



Taylor 公式的证明1

- 1的证明：令多项式

$$T_n(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \cdots + \frac{1}{n!} f^{(n)}(x_0)(x - x_0)^n,$$

则有 $T_n^{(k)}(x_0) = f^{(k)}(x_0)$ $(k = 0, \cdots, n)$，$T_n^{(n-1)}(x) = f^{(n-1)}(x_0) + f^{(n)}(x_0)(x - x_0)$. 利用 L'Hospital 法则，

$$\begin{aligned} \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - T_n(x)}{(x - x_0)^n} &= \lim_{x \to x_0} \frac{f^{(n-1)}(x) - T^{(n-1)}(x)}{n!(x - x_0)} \\ &= \lim_{x \to x_0} \frac{f^{(n-1)}(x) - f^{(n-1)}(x_0)}{n!(x - x_0)} - \frac{1}{n!} f^n(x_0) = 0. \end{aligned}$$

- 2的证明：令

$$S_n(x) = A_0 + A_1(x - x_0) + \cdots + A_n(x - x_0)^n,$$

由$f(x) = S_n(x) + o((x - x_0)^n)$, $x \to x_0$ 得 $f(x_0) = A_0$. 又由

$$\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = A_1 + A_2(x - x_0) + o((x - x_0)) \to f'(x_0) = A_1,$$

即我们证明了 $S_1(x) = T_1(x)$. 下面用归纳法，若 $S_k = T_k$ $(k < n)$, 则有 $f(x) - T_k(x) = A_{k+1}(x - x_0)^{k+1} + o((x - x_0)^{k+1})$, 由于

$$\frac{f(x) - T_k(x)}{(x - x_0)^{k+1}} = A_{k+1} + o(1),$$

求极限得 $\frac{1}{(k+1)!} f^{(k+1)}(x_0) = A_{k+1}$.

一些初等函数的 Taylor公式1

- 例： $e^x = 1 + \frac{1}{1!}x + \cdots + \frac{1}{n!}x^n + o(x^n).$
- 例： 利用 $(\sin x)^{(2k+1)} = (-1)^k \cos x$, $(\sin x)^{(2k)} = (-1)^k \sin x$,

$$\sin x = x - \frac{1}{3!}x^3 + \cdots + (-1)^k \frac{1}{(2k+1)!}x^{2k+1} + o(x^{2k+1}) \text{或者} + o(x^{2k+2})$$

- 例： $(\cos x)^{(2k)} = (-1)^k \cos x$, $(\cos x)^{(2k+1)} = (-1)^{k+1} \sin x$,

$$\cos x = 1 - \frac{1}{2!}x^2 + \cdots + (-1)^k \frac{1}{(2k)!}x^{2k} + o(x^{2k}) \text{或者} + o(x^{2k+1}).$$

一些初等函数的 Taylor公式1

- 例： $e^x = 1 + \frac{1}{1!}x + \cdots + \frac{1}{n!}x^n + o(x^n)$.
- 例： 利用 $(\sin x)^{(2k+1)} = (-1)^k \cos x$, $(\sin x)^{(2k)} = (-1)^k \sin x$,

$$\sin x = x - \frac{1}{3!}x^3 + \cdots + (-1)^k \frac{1}{(2k+1)!}x^{2k+1} + o(x^{2k+1})\text{或者} + o(x^{2k+2})$$

- 例： $(\cos x)^{(2k)} = (-1)^k \cos x$, $(\cos x)^{(2k+1)} = (-1)^{k+1} \sin x$,

$$\cos x = 1 - \frac{1}{2!}x^2 + \cdots + (-1)^k \frac{1}{(2k)!}x^{2k} + o(x^{2k})\text{或者} + o(x^{2k+1}).$$

- 例： $e^x = 1 + \frac{1}{1!}x + \cdots + \frac{1}{n!}x^n + o(x^n)$.
- 例： 利用 $(\sin x)^{(2k+1)} = (-1)^k \cos x$, $(\sin x)^{(2k)} = (-1)^k \sin x$,

$$\sin x = x - \frac{1}{3!}x^3 + \cdots + (-1)^k \frac{1}{(2k+1)!}x^{2k+1} + o(x^{2k+1})\text{或者} + o(x^{2k+2})$$

- 例： $(\cos x)^{(2k)} = (-1)^k \cos x$, $(\cos x)^{(2k+1)} = (-1)^{k+1} \sin x$,

$$\cos x = 1 - \frac{1}{2!}x^2 + \cdots + (-1)^k \frac{1}{(2k)!}x^{2k} + o(x^{2k})\text{或者} + o(x^{2k+1}).$$

一些初等函数的 Taylor公式2

- 例：由 $\ln(1+x)^{(k)} = (-1)^{k-1}(k-1)!\frac{1}{(1+x)^k}$，

$$\ln(1+x) = x - \frac{1}{2}x^2 + \cdots + (-1)^{n-1}\frac{x^n}{n} + o(x^n).$$

- 二项式展开

$$(1+x)^\alpha = 1 + \alpha x + \frac{1}{2!}\alpha(\alpha-1)x^2 + \cdots + \frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+1)}{n!}x^n + o(x^n).$$

- 例：由 $\ln(1+x)^{(k)} = (-1)^{k-1}(k-1)!\frac{1}{(1+x)^k}$，

$$\ln(1+x) = x - \frac{1}{2}x^2 + \cdots + (-1)^{n-1}\frac{x^n}{n} + o(x^n).$$

- 二项式展开

$$(1+x)^\alpha = 1 + \alpha x + \frac{1}{2!}\alpha(\alpha-1)x^2 + \cdots + \frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+1)}{n!}x^n + o(x^n).$$

- $\alpha = -1$, $\frac{1}{1+x} = 1 - x + x^2 + \cdots + (-1)^n x^n + o(x^n)$.
  事实上，$\frac{1}{1+x} - (1 - x + x^2 + \cdots + (-1)^n x^n) = \frac{(-1)^{n+1} x^{n+1}}{1+x}$.
- $\alpha = -\frac{1}{2}$,

$$(1+x)^{-\frac{1}{2}} = 1 - \frac{1}{2}x + \frac{\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{2}}{2!}x^2 + \cdots + (-1)^n \frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}x^n + o(x^n).$$

- $\alpha = \frac{1}{2}$,

$$(1+x)^{\frac{1}{2}} = 1 + \frac{1}{2}x + \frac{\frac{1}{2}\cdot(-\frac{1}{2})}{2!}x^2 + \cdots + (-1)^{n-1} \frac{(2n-3)!!}{(2n)!!}x^n + o(x^n).$$

一些初等函数的 Taylor 公式3

- $\alpha = -1$, $\frac{1}{1+x} = 1 - x + x^2 + \cdots + (-1)^n x^n + o(x^n)$.
  事实上，$\frac{1}{1+x} - (1 - x + x^2 + \cdots + (-1)^n x^n) = \frac{(-1)^{n+1}x^{n+1}}{1+x}$.
- $\alpha = -\frac{1}{2}$,
$$(1+x)^{-\frac{1}{2}} = 1 - \frac{1}{2}x + \frac{\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{2}}{2!}x^2 + \cdots + (-1)^n \frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}x^n + o(x^n).$$
- $\alpha = \frac{1}{2}$,
$$(1+x)^{\frac{1}{2}} = 1 + \frac{1}{2}x + \frac{\frac{1}{2}\cdot(-\frac{1}{2})}{2!}x^2 + \cdots + (-1)^{n-1} \frac{(2n-3)!!}{(2n)!!}x^n + o(x^n).$$

一些初等函数的 Taylor 公式3

- $\alpha = -1$, $\frac{1}{1+x} = 1 - x + x^2 + \cdots + (-1)^n x^n + o(x^n)$.
  事实上，$\frac{1}{1+x} - (1 - x + x^2 + \cdots + (-1)^n x^n) = \frac{(-1)^{n+1} x^{n+1}}{1+x}$.
- $\alpha = -\frac{1}{2}$,

$$(1+x)^{-\frac{1}{2}} = 1 - \frac{1}{2}x + \frac{\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{2}}{2!}x^2 + \cdots + (-1)^n \frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}x^n + o(x^n).$$

- $\alpha = \frac{1}{2}$,

$$(1+x)^{\frac{1}{2}} = 1 + \frac{1}{2}x + \frac{\frac{1}{2}\cdot(-\frac{1}{2})}{2!}x^2 + \cdots + (-1)^{n-1} \frac{(2n-3)!!}{(2n)!!}x^n + o(x^n).$$

例1

- 例： 求 $f(x)=e^{-x^2}$ 在 $x=0$ 处的 Taylor 公式，并求 f 在 0 处的任意阶导数.

解： 利用 e^x 的 Taylor公式, 有

$$\begin{aligned} e^{-x^2} &= 1+(-x^2)+\frac{1}{2!}(-x^2)^2+\cdots+\frac{1}{n!}(-x^2)^n+o(x^{2n}) \\ &= 1-x^2+\frac{1}{2!}x^4+\cdots+(-1)^n\frac{1}{n!}x^{2n}+o(x^{2n}), \end{aligned}$$

由此可得 $f^{(2n+1)}(0)=0$, $f^{(2n)}(0)=\frac{(-1)^n}{n!}(2n)!$.

例1

- 例： 求 $f(x)=e^{-x^2}$ 在 $x=0$ 处的 Taylor 公式，并求 f 在 0 处的任意阶导数.

  解： 利用 e^x 的 Taylor公式, 有

$$
\begin{aligned}
e^{-x^2} &= 1+(-x^2)+\frac{1}{2!}(-x^2)^2+\cdots+\frac{1}{n!}(-x^2)^n+o(x^{2n}) \\
&= 1-x^2+\frac{1}{2!}x^4+\cdots+(-1)^n\frac{1}{n!}x^{2n}+o(x^{2n}),
\end{aligned}
$$

  由此可得 $f^{(2n+1)}(0)=0$, $f^{(2n)}(0)=\frac{(-1)^n}{n!}(2n)!$.

例2

- 例：$f(x)=\begin{cases} e^{-\frac{1}{x^2}}, & x\neq 0 \\ 0, & x=0 \end{cases}$，则有 $f'(x)=\begin{cases} \frac{2}{x^3}e^{-\frac{1}{x^2}}, & x\neq 0 \\ 0, & x=0 \end{cases}$. 事实上，存在多项式 $P_n(x)$，使得

$$f^{(n)}(x)=\begin{cases} P_n(\frac{1}{x})e^{-\frac{1}{x^2}}, & x\neq 0 \\ 0, & x=0 \end{cases}.$$

$f(x)$ 的 Taylor 公式 $f(x)=o(x^n)$.

- 例：求极限

$$\lim_{x\to 0}\frac{e^x-1-x-\frac{x}{2}\sin x}{\sin x-x\cos x}$$
$$=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{1}{2!}x^2+\frac{1}{3!}x^3-\frac{1}{2}x^2+o(x^3)}{x-\frac{1}{6}x^3-x(1-\frac{1}{2!}x^2)+o(x^3)}=\frac{1}{2}.$$

- 例：设 $m>1$,

$$\lim_{x\to+\infty}[(x^m+x^{m-1})^{\frac{1}{m}}-(x^m-x^{m-1})^{\frac{1}{m}}]$$
$$=\lim_{x\to+\infty}[x(1+\frac{1}{x})^{\frac{1}{m}}-x(1-\frac{1}{x})^{\frac{1}{m}}]$$
$$=\lim_{x\to+\infty}[x(1+\frac{1}{mx})-x(1-\frac{1}{mx})+o(1)]=\frac{2}{m}.$$

- 例：求极限

$$\lim_{x\to 0}\frac{e^x-1-x-\frac{x}{2}\sin x}{\sin x-x\cos x}$$
$$=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{1}{2!}x^2+\frac{1}{3!}x^3-\frac{1}{2}x^2+o(x^3)}{x-\frac{1}{6}x^3-x(1-\frac{1}{2!}x^2)+o(x^3)}=\frac{1}{2}.$$

- 例：设 $m>1$,

$$\lim_{x\to+\infty}[(x^m+x^{m-1})^{\frac{1}{m}}-(x^m-x^{m-1})^{\frac{1}{m}}]$$
$$=\lim_{x\to+\infty}[x(1+\frac{1}{x})^{\frac{1}{m}}-x(1-\frac{1}{x})^{\frac{1}{m}}]$$
$$=\lim_{x\to+\infty}[x(1+\frac{1}{mx})-x(1-\frac{1}{mx})+o(1)]=\frac{2}{m}.$$

- 例(上节例5):

$$\lim_{x\to 1}\left(\frac{1}{\ln x}-\frac{1}{x-1}\right)=\lim_{x\to 1}\frac{x-1-\ln(1+x-1)}{(x-1)\ln(1+x-1)}$$

$$=\lim_{x\to 1}\frac{x-1-((x-1)-\frac{1}{2}(x-1)^2)}{(x-1)^2}=\frac{1}{2}.$$

带 Peano 余项的 Taylor 公式

- 带 Peano 余项的 Taylor 公式：f 在 x_0 附近有定义，f 在 x_0 处有 n 阶导数，则 $x \to x_0$ 时，

$$f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \cdots + \frac{1}{n!} f^{(n)}(x - x_0)^n + o((x - x_0)^n).$$

这里余项 $R_n(x) = o((x - x_0)^n)$ 只反映了 $x \to x_0$ 时，余项趋向于 0 的速度. 如 $100(x - x_0)^{n+1}$ 和 $\frac{1}{100}(x - x_0)^{n+1}$ 都是 $o((x - x_0)^n)$, 在一点处的值可能相差很大.

带 Peano 余项的 Taylor 公式

- 带 Peano 余项的 Taylor 公式：f 在 x_0 附近有定义，f 在 x_0 处有 n 阶导数，则 $x \to x_0$ 时，

$$f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \cdots + \frac{1}{n!} f^{(n)}(x - x_0)^n + o((x - x_0)^n).$$

这里余项 $R_n(x) = o((x - x_0)^n)$ 只反映了 $x \to x_0$ 时，余项趋向于 0 的速度. 如 $100(x - x_0)^{n+1}$ 和 $\frac{1}{100}(x - x_0)^{n+1}$ 都是 $o((x - x_0)^n)$, 在一点处的值可能相差很大.

带 Lagrange 余项的 Taylor 公式

- 带 Lagrange 余项的 Taylor 公式：设 f 在 (A, B) 内有 $n+1$ 阶导数，则对任意 $x, x_0 \in (A, B)$ 时，存在 $\xi \in (x_0, x)$(或者 (x, x_0))，使得

$$\begin{aligned} f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \cdots + \frac{1}{n!} f^{(n)}(x_0)(x - x_0)^n \\ + \frac{1}{(n+1)!} f^{(n+1)}(\xi)(x - x_0)^{n+1}. \end{aligned}$$

- 注：(A, B) 可以是无穷区间．$n = 0$ 时，带 Lagrange 余项的 Taylor 公式即为 Lagrange 中值定理．
- 注：两个 Taylor 公式的条件不同．
- 注：余项公式 $R_n(x) = \frac{1}{(n+1)!} f^{(n+1)}(\xi)(x - x_0)^{n+1}$ 可用于估计余项大小．
- 注：设 f 在 $[x_0, B)$ 上有 $n+1$ 阶导数，$x \in [x_0, B)$，公式依然成立．

带 Lagrange 余项的 Taylor 公式

- 带 Lagrange 余项的 Taylor 公式：设 f 在 (A, B) 内有 $n+1$ 阶导数，则对任意 $x, x_0 \in (A, B)$ 时，存在 $\xi \in (x_0, x)$(或者 (x, x_0))，使得

$$\begin{aligned} f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x-x_0) + \cdots + \frac{1}{n!} f^{(n)}(x_0)(x-x_0)^n \\ + \frac{1}{(n+1)!} f^{(n+1)}(\xi)(x-x_0)^{n+1}. \end{aligned}$$

- 注：(A, B) 可以是无穷区间．$n=0$ 时，带 Lagrange 余项的 Taylor 公式即为 Lagrange 中值定理．
- 注：两个 Taylor 公式的条件不同．
- 注：余项公式 $R_n(x) = \frac{1}{(n+1)!} f^{(n+1)}(\xi)(x-x_0)^{n+1}$ 可用于估计余项大小．
- 注：设 f 在 $[x_0, B)$ 上有 $n+1$ 阶导数，$x \in [x_0, B)$，公式依然成立．

带 Lagrange 余项的 Taylor 公式

- 带 Lagrange 余项的 Taylor 公式：设 f 在 (A,B) 内有 $n+1$ 阶导数，则对任意 $x, x_0 \in (A,B)$ 时，存在 $\xi \in (x_0, x)$(或者 (x, x_0))，使得

$$
\begin{aligned}
f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x-x_0) + \cdots + \frac{1}{n!} f^{(n)}(x_0)(x-x_0)^n \\
+ \frac{1}{(n+1)!} f^{(n+1)}(\xi)(x-x_0)^{n+1}.
\end{aligned}
$$

- 注：(A,B) 可以是无穷区间. $n=0$ 时，带 Lagrange 余项的 Taylor 公式即为 Lagrange 中值定理.
- 注：两个 Taylor 公式的条件不同.
- 注：余项公式 $R_n(x) = \frac{1}{(n+1)!} f^{(n+1)}(\xi)(x-x_0)^{n+1}$ 可用于估计余项大小.
- 注：设 f 在 $[x_0, B)$ 上有 $n+1$ 阶导数，$x \in [x_0, B)$，公式依然成立.

带 Lagrange 余项的 Taylor 公式

- 带 Lagrange 余项的 Taylor 公式：设 f 在 (A,B) 内有 $n+1$ 阶导数，则对任意 $x,x_0\in(A,B)$ 时，存在 $\xi\in(x_0,x)$(或者 (x,x_0))，使得

$$f(x)=f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0)+\cdots+\frac{1}{n!}f^{(n)}(x_0)(x-x_0)^n \\ +\frac{1}{(n+1)!}f^{(n+1)}(\xi)(x-x_0)^{n+1}.$$

- 注：(A,B) 可以是无穷区间. $n=0$ 时，带 Lagrange 余项的 Taylor 公式即为 Lagrange 中值定理.
- 注：两个 Taylor 公式的条件不同.
- 注：余项公式 $R_n(x)=\frac{1}{(n+1)!}f^{(n+1)}(\xi)(x-x_0)^{n+1}$ 可用于估计余项大小.
- 注：设 f 在 $[x_0,B)$ 上有 $n+1$ 阶导数，$x\in[x_0,B)$, 公式依然成立.

带 Lagrange 余项的 Taylor 公式

- 带 Lagrange 余项的 Taylor 公式：设 f 在 (A,B) 内有 $n+1$ 阶导数，则对任意 $x, x_0 \in (A,B)$ 时，存在 $\xi \in (x_0, x)$(或者 (x, x_0))，使得

$$
\begin{aligned}
f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x-x_0) + \cdots + \frac{1}{n!} f^{(n)}(x_0)(x-x_0)^n \\
+ \frac{1}{(n+1)!} f^{(n+1)}(\xi)(x-x_0)^{n+1}.
\end{aligned}
$$

- 注：(A,B) 可以是无穷区间．$n=0$ 时，带 Lagrange 余项的 Taylor 公式即为 Lagrange 中值定理．
- 注：两个 Taylor 公式的条件不同．
- 注：余项公式 $R_n(x) = \frac{1}{(n+1)!} f^{(n+1)}(\xi)(x-x_0)^{n+1}$ 可用于估计余项大小．
- 注：设 f 在 $[x_0, B)$ 上有 $n+1$ 阶导数，$x \in [x_0, B)$，公式依然成立．

带 Lagrange 余项 Taylor 公式的证明

- 令 $R_n(x) = f(x) - T_n(x)$, 其中

$$T_n(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \cdots + \frac{1}{n!} f^{(n)}(x_0)(x - x_0)^n.$$

则有 $R_n(x_0) = R_n'(x_0) = \cdots = R_n^{(n)}(x_0) = 0$, $R_n^{(n+1)}(x) = f^{(n+1)}(x)$. 重复利用 Cauchy 中值定理，存在 $\xi_1, \xi_2, \cdots, \xi_{n+1}$ (ξ_1 位于 x_0 与 x 之间, ξ_{k+1} 位于 x_0 与 ξ_k之间)，使得

$$\frac{R_n(x)}{(x - x_0)^{n+1}} = \frac{R_n'(\xi_1)}{(n+1)(\xi_1 - x_0)^n} = \cdots = \frac{R_n^{(n+1)}(\xi_{n+1})}{(n+1)!}$$

取 $\xi = \xi_{n+1}$ 即可.

- 例： $e^x = 1 + \frac{1}{1!}x + \cdots + \frac{1}{n!}x^n + \frac{e^\xi}{(n+1)!}x^{n+1}, x \in \mathbb{R}.$
- 例： 利用 $(\sin x)^{(2k+1)} = (-1)^k \cos x$, $(\sin x)^{(2k)} = (-1)^k \sin x$,

$$\sin x = x - \frac{1}{3!}x^3 + \cdots + (-1)^{n-1}\frac{1}{(2n-1)!}x^{2n-1}$$
$$+ (-1)^n \frac{\cos\xi}{(2n+1)!}x^{2n+1} (\text{或者} + (-1)^n \frac{\sin\xi}{(2n)!}x^{2n}), x \in \mathbb{R}.$$

- 例： $(\cos x)^{(2k)} = (-1)^k \cos x$, $(\cos x)^{(2k+1)} = (-1)^{k+1} \sin x$

$$\cos x = 1 - \frac{1}{2!}x^2 + \cdots + (-1)^n \frac{1}{(2n)!}x^{2n}$$
$$+(-1)^{n+1}\frac{\cos\xi}{(2n+2)!}x^{2n+2} (\text{或者} + (-1)^{n+1}\frac{\sin\xi}{(2n+1)!}x^{2n+1}), x \in \mathbb{R}.$$

一些初等函数带的 Lagrange 余项的 Taylor 公式

- 例：$e^x = 1 + \frac{1}{1!}x + \cdots + \frac{1}{n!}x^n + \frac{e^\xi}{(n+1)!}x^{n+1}, x \in \mathbb{R}.$
- 例：利用 $(\sin x)^{(2k+1)} = (-1)^k \cos x$, $(\sin x)^{(2k)} = (-1)^k \sin x$,

$$\sin x = x - \frac{1}{3!}x^3 + \cdots + (-1)^{n-1}\frac{1}{(2n-1)!}x^{2n-1} + (-1)^n \frac{\cos\xi}{(2n+1)!}x^{2n+1}\left(\text{或者} + (-1)^n \frac{\sin\xi}{(2n)!}x^{2n}\right), x \in \mathbb{R}.$$

- 例：$(\cos x)^{(2k)} = (-1)^k \cos x$, $(\cos x)^{(2k+1)} = (-1)^{k+1} \sin x$

$$\cos x = 1 - \frac{1}{2!}x^2 + \cdots + (-1)^n \frac{1}{(2n)!}x^{2n} + (-1)^{n+1}\frac{\cos\xi}{(2n+2)!}x^{2n+2}\left(\text{或者} + (-1)^{n+1}\frac{\sin\xi}{(2n+1)!}x^{2n+1}\right), x \in \mathbb{R}.$$

一些初等函数带的 Lagrange 余项的 Taylor 公式

- 例： $e^x = 1 + \frac{1}{1!}x + \cdots + \frac{1}{n!}x^n + \frac{e^{\xi}}{(n+1)!}x^{n+1}, x \in \mathbb{R}.$
- 例： 利用 $(\sin x)^{(2k+1)} = (-1)^k \cos x$, $(\sin x)^{(2k)} = (-1)^k \sin x$,

$$\sin x = x - \frac{1}{3!}x^3 + \cdots + (-1)^{n-1}\frac{1}{(2n-1)!}x^{2n-1}$$
$$+ (-1)^n \frac{\cos\xi}{(2n+1)!}x^{2n+1}(\text{或者} + (-1)^n \frac{\sin\xi}{(2n)!}x^{2n}), x \in \mathbb{R}.$$

- 例： $(\cos x)^{(2k)} = (-1)^k \cos x$, $(\cos x)^{(2k+1)} = (-1)^{k+1} \sin x$

$$\cos x = 1 - \frac{1}{2!}x^2 + \cdots + (-1)^n \frac{1}{(2n)!}x^{2n}$$
$$+(-1)^{n+1}\frac{\cos\xi}{(2n+2)!}x^{2n+2})(\text{或者} +(-1)^{n+1}\frac{\sin\xi}{(2n+1)!}x^{2n+1}), x \in \mathbb{R}.$$

- 例： $(\ln(1+x))^{(k)} = (-1)^{k-1}(k-1)!\frac{1}{(1+x)^k}$.

$$\ln(1+x) = x - \frac{1}{2}x^2 + \cdots + (-1)^{n-1}\frac{x^n}{n} + (-1)^n \frac{x^{n+1}}{(n+1)(1+\xi)^{n+1}}, x > -1.$$

- 例： 由 $((1+x)^\alpha)^{(n+1)} = \alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n)(1+x)^{\alpha-n-1}$,

$$(1+x)^\alpha = 1+\alpha x+\frac{1}{2!}\alpha(\alpha-1)x^2+\cdots+\frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+1)}{n!}x^n + \frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n)}{(n+1)!}(1+\xi)^{\alpha-n-1}x^{n+1}, x > -1.$$

一些初等函数的 Lagrange 余项

- 例： $(\ln(1+x))^{(k)} = (-1)^{k-1}(k-1)!\frac{1}{(1+x)^k}$.

$$\ln(1+x) = x - \frac{1}{2}x^2 + \cdots + (-1)^{n-1}\frac{x^n}{n} + (-1)^n \frac{x^{n+1}}{(n+1)(1+\xi)^{n+1}}, x > -1.$$

- 例： 由 $((1+x)^\alpha)^{(n+1)} = \alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n)(1+x)^{\alpha-n-1}$,

$$(1+x)^\alpha = 1+\alpha x+\frac{1}{2!}\alpha(\alpha-1)x^2+\cdots+\frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+1)}{n!}x^n + \frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n)}{(n+1)!}(1+\xi)^{\alpha-n-1}x^{n+1}, x > -1.$$

误差估计

- $f(x) = \sin x$, $n \to +\infty$ 时,

$$|R_{2n}(x)| = \left|(-1)^n \frac{\cos\xi}{(2n+1)!} x^{2n+1}\right| \le \frac{1}{(2n+1)!}|x|^{2n+1} \to 0.$$

- $f(x) = e^x$, $n \to +\infty$ 时,

$$|R_n(x)| = \left|\frac{e^{\xi}}{(n+1)!} x^{n+1}\right| \le \frac{e^{|x|}}{(n+1)!}(|x|)^{n+1} \to 0.$$

误差估计

- $f(x) = \sin x$，$n \to +\infty$ 时，

$$|R_{2n}(x)| = \left|(-1)^n \frac{\cos\xi}{(2n+1)!} x^{2n+1}\right| \le \frac{1}{(2n+1)!}|x|^{2n+1} \to 0.$$

- $f(x) = e^x$，$n \to +\infty$ 时，

$$|R_n(x)| = \left|\frac{e^\xi}{(n+1)!} x^{n+1}\right| \le \frac{e^{|x|}}{(n+1)!}(|x|)^{n+1} \to 0.$$

一个特殊函数的 Taylor 公式

- 设 $f(x)=\begin{cases} e^{-\frac{1}{x^2}}, & x\neq 0 \\ 0, & x=0 \end{cases}$，则存在多项式 $P_n(x)$，使得

$$f^{(n)}(x)=\begin{cases} P_n(\frac{1}{x})e^{-\frac{1}{x^2}}, & x\neq 0 \\ 0, & x=0 \end{cases}.$$

该函数的 Taylor 公式为 $f(x)=0+\frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}x^{n+1}$.

- 注：存在 ξ (在 0 与 $-\frac{1}{x^2}$ 之间)，使得

$$e^{-\frac{1}{x^2}}=1-\frac{1}{x^2}+\cdots+\frac{1}{n!}\Big(-\frac{1}{x^2}\Big)^n+\frac{e^{\xi}}{(n+1)!}\Big(-\frac{1}{x^2}\Big)^{n+1},$$

但上式不是 Taylor 公式.

一个特殊函数的 Taylor 公式

- 设 $f(x)=\begin{cases} e^{-\frac{1}{x^2}}, & x\neq 0 \\ 0, & x=0 \end{cases}$，则存在多项式 $P_n(x)$，使得

$$f^{(n)}(x)=\begin{cases} P_n(\frac{1}{x})e^{-\frac{1}{x^2}}, & x\neq 0 \\ 0, & x=0 \end{cases}.$$

该函数的 Taylor 公式为 $f(x)=0+\frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}x^{n+1}$.

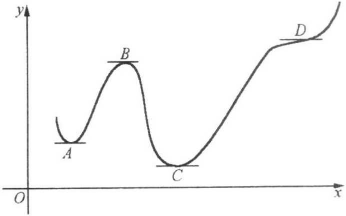
- 注：存在 ξ (在 0 与 $-\frac{1}{x^2}$ 之间)，使得

$$e^{-\frac{1}{x^2}}=1-\frac{1}{x^2}+\cdots+\frac{1}{n!}\Big(-\frac{1}{x^2}\Big)^n+\frac{e^{\xi}}{(n+1)!}\Big(-\frac{1}{x^2}\Big)^{n+1},$$

但上式不是 Taylor 公式.

极值与极值点1

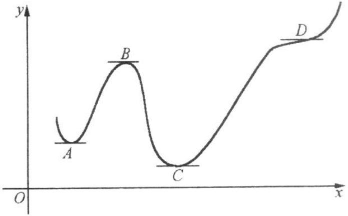
- 历史注记：极值问题历史悠久. 1638 年 Fermat 在《求最大值和最小值的方法》用微积分方法研究极值(该研究对微积分的创立发挥了很大的作用）. 规划论、对策论等研究的本质上也是极值问题.
- 极值与极值点：设 $f(x)$ 在 x_0 附近有定义，若存在 $\delta > 0$，使得对任意的 $x \in (x_0-\delta, x_0+\delta)$，有 $f(x) \le f(x_0)$，则称 $f(x_0)$ 是 $f(x)$ 的极大值，x_0 为 $f(x)$ 的一个极大点. 类似地可定义极小值和极小值点.



极大值和极小值统称为极值，极小点和极大点统称为极值点.

极值与极值点1

- 历史注记：极值问题历史悠久. 1638 年 Fermat 在《求最大值和最小值的方法》用微积分方法研究极值(该研究对微积分的创立发挥了很大的作用）. 规划论、对策论等研究的本质上也是极值问题.
- 极值与极值点：设 $f(x)$ 在 x_0 附近有定义，若存在 $\delta > 0$, 使得对任意的 $x \in (x_0-\delta, x_0+\delta)$, 有 $f(x) \le f(x_0)$, 则称 $f(x_0)$ 是 $f(x)$ 的极大值，x_0 为 $f(x)$ 的一个极大点. 类似地可定义极小值和极小值点.



极大值和极小值统称为极值，极小点和极大点统称为极值点.

极值与极值点2

- 注：极值点必须是在定义域内部. 极大值是局部最大值，一个函数可以有多个极大值和极小值，极小值可能比极大值大. 对 $f(x) = C$, 所有点都是极值点. 而 $f = \chi_{\mathbb{Q}}$, 有理点是极大点，无理点是极小点.

最值与最值点

- $f(x)$ 是集合 X 上的函数，$x_0 \in X$ 满足 $f(x) \geq f(x_0)$ 对所有 $x \in X$ 成立，则称 $f(x_0)$ 是 $f(x)$ 在 X 上的最小值，x_0 为最小点，类似地可定义最大值和最大点.
- 注：最值可以在边界上取得，内部的最值点一点是极值点.
- 若 $f(x) \in C([a,b])$, $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上有 n 个极值点 $x_1, x_2, \cdots, x_n \in (a,b)$, 则最大值 M 和最小值 m 分别为

$$M = \max\{f(a), f(b), f(x_1), f(x_2), \cdots, f(x_n)\}$$
$$m = \min\{f(a), f(b), f(x_1), f(x_2), \cdots, f(x_n)\}$$

证明：f 连续，最值点一定存在，若不是边界点，必为极值点.

最值与最值点

- $f(x)$ 是集合 X 上的函数，$x_0 \in X$ 满足 $f(x) \geq f(x_0)$ 对所有 $x \in X$ 成立，则称 $f(x_0)$ 是 $f(x)$ 在 X 上的最小值，x_0 为最小点，类似地可定义最大值和最大点.
- 注：最值可以在边界上取得，内部的最值点一点是极值点.
- 若 $f(x) \in C([a,b])$, $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上有 n 个极值点 $x_1, x_2, \cdots, x_n \in (a,b)$, 则最大值 M 和最小值 m 分别为

$$M = \max\{f(a), f(b), f(x_1), f(x_2), \cdots, f(x_n)\}$$

$$m = \min\{f(a), f(b), f(x_1), f(x_2), \cdots, f(x_n)\}$$

证明：f 连续，最值点一定存在，若不是边界点，必为极值点.

最值与最值点

- $f(x)$ 是集合 X 上的函数，$x_0 \in X$ 满足 $f(x) \geq f(x_0)$ 对所有 $x \in X$ 成立，则称 $f(x_0)$ 是 $f(x)$ 在 X 上的最小值，x_0 为最小点，类似地可定义最大值和最大点.
- 注：最值可以在边界上取得，内部的最值点一点是极值点.
- 若 $f(x) \in C([a,b])$, $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上有 n 个极值点 $x_1, x_2, \cdots, x_n \in (a,b)$, 则最大值 M 和最小值 m 分别为

$$M = \max\{f(a), f(b), f(x_1), f(x_2), \cdots, f(x_n)\}$$
$$m = \min\{f(a), f(b), f(x_1), f(x_2), \cdots, f(x_n)\}$$

证明：f 连续，最值点一定存在，若不是边界点，必为极值点.

最值与最值点

- $f(x)$ 是集合 X 上的函数，$x_0 \in X$ 满足 $f(x) \geq f(x_0)$ 对所有 $x \in X$ 成立，则称 $f(x_0)$ 是 $f(x)$ 在 X 上的最小值，x_0 为最小点，类似地可定义最大值和最大点.
- 注：最值可以在边界上取得，内部的最值点一点是极值点.
- 若 $f(x) \in C([a,b])$, $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上有 n 个极值点 $x_1, x_2, \cdots, x_n \in (a,b)$, 则最大值 M 和最小值 m 分别为

$$M = \max\{f(a), f(b), f(x_1), f(x_2), \cdots, f(x_n)\}$$
$$m = \min\{f(a), f(b), f(x_1), f(x_2), \cdots, f(x_n)\}$$

证明：f 连续，最值点一定存在，若不是边界点，必为极值点.

Fermat 定理

- 定理：设 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上有定义，若 $x_0 \in (a,b)$ 是 $f(x)$ 的极值点，且 $f(x)$ 在 x_0 处可导，则有 $f'(x_0) = 0$.
- 证明(参见 Rolle 定理的证明)：若 $x_0 \in (a,b)$ 是 $f(x)$ 的极值点，则存在 $\delta > 0$，使得 $f(x_0)$ 是 $f(x)$ 在 $(x_0-\delta, x_0+\delta)$ 上的最值，从而 $f'(x_0) = 0$. 事实上，若 x_0 是最大值点. 由于 $x_0+\delta > x > x_0$ 时，$f(x) \le f(x_0)$，因此 $\lim\limits_{x\to x_0+0} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} \le 0$；由于 $x_0-\delta < x < x_0$ 时，$f(x) \le f(x_0)$，因此 $\lim\limits_{x\to x_0-0} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} \ge 0$，由于 f 在 x_0 点可导，因此 $f'(x_0) = 0$.
- 极值点不一定可导，如 $f(x) = |x|$；导数为 0 的点也不一定是极值点，如 $y = x^3$, $x_0 = 0$.

Fermat 定理

- 定理：设 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上有定义，若 $x_0\in(a,b)$ 是 $f(x)$ 的极值点，且 $f(x)$ 在 x_0 处可导，则有 $f'(x_0)=0$.
- 证明(参见 Rolle 定理的证明)：若 $x_0\in(a,b)$ 是 $f(x)$ 的极值点，则存在 $\delta>0$，使得 $f(x_0)$ 是 $f(x)$ 在 $(x_0-\delta,x_0+\delta)$ 上的最值，从而 $f'(x_0)=0$. 事实上，若 x_0 是最大值点. 由于 $x_0+\delta>x>x_0$ 时，$f(x)\le f(x_0)$，因此 $\lim\limits_{x\to x_0+0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}\le 0$; 由于 $x_0-\delta<x<x_0$ 时，$f(x)\le f(x_0)$，因此 $\lim\limits_{x\to x_0-0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}\ge 0$，由于 f 在 x_0 点可导，因此 $f'(x_0)=0$.
- 极值点不一定可导，如 $f(x)=|x|$; 导数为 0 的点也不一定是极值点，如 $y=x^3$, $x_0=0$.

Fermat 定理

- 定理：设 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上有定义，若 $x_0\in(a,b)$ 是 $f(x)$ 的极值点，且 $f(x)$ 在 x_0 处可导，则有 $f'(x_0)=0$.
- 证明(参见 Rolle 定理的证明)：若 $x_0\in(a,b)$ 是 $f(x)$ 的极值点，则存在 $\delta>0$，使得 $f(x_0)$ 是 $f(x)$ 在 $(x_0-\delta,x_0+\delta)$ 上的最值，从而 $f'(x_0)=0$. 事实上，若 x_0 是最大值点. 由于 $x_0+\delta>x>x_0$ 时，$f(x)\le f(x_0)$，因此 $\lim\limits_{x\to x_0+0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}\le 0$；由于 $x_0-\delta<x<x_0$ 时，$f(x)\le f(x_0)$，因此 $\lim\limits_{x\to x_0-0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}\ge 0$，由于 f 在 x_0 点可导，因此 $f'(x_0)=0$.
- 极值点不一定可导，如 $f(x)=|x|$；导数为 0 的点也不一定是极值点，如 $y=x^3$, $x_0=0$.

极值点的判别1

- 定义：设 $f(x)$ 可导，称导数为 0 的点为稳定点（或驻点）.
- 命题：可导函数的极值点一定是稳定点.
- 极值点的求法：先求出稳定点，再判别稳定点是否是极值点.
- 稳定点是否是极值点的判别方法：
    - 根据函数在稳定点两边的单调性来判别，若两边单调性相反，则是极值点.
    - 根据 $f'(x)$ 在稳定点两边的符号来判别，若 $f'(x)$ 在稳定点两边的符号相反，则是极值点.
    - 若 f 在 x_0 处有二阶导数，可用下面的定理来判断.

极值点的判别1

- 定义：设 $f(x)$ 可导，称导数为 0 的点为稳定点（或驻点）．
- 命题：可导函数的极值点一定是稳定点．
- 极值点的求法：先求出稳定点，再判别稳定点是否是极值点．
- 稳定点是否是极值点的判别方法：
  - 根据函数在稳定点两边的单调性来判别，若两边单调性相反，则是极值点．
  - 根据 $f'(x)$ 在稳定点两边的符号来判别，若 $f'(x)$ 在稳定点两边的符号相反，则是极值点．
  - 若 f 在 x_0 处有二阶导数，可用下面的定理来判断．

极值点的判别1

- 定义：设 $f(x)$ 可导，称导数为 0 的点为稳定点（或驻点）.
- 命题：可导函数的极值点一定是稳定点.
- 极值点的求法：先求出稳定点，再判别稳定点是否是极值点.
- 稳定点是否是极值点的判别方法：
  - 根据函数在稳定点两边的单调性来判别，若两边单调性相反，则是极值点.
  - 根据 $f'(x)$ 在稳定点两边的符号来判别，若 $f'(x)$ 在稳定点两边的符号相反，则是极值点.
  - 若 f 在 x_0 处有二阶导数，可用下面的定理来判断.

极值点的判别1

- 定义：设 $f(x)$ 可导，称导数为 0 的点为稳定点（或驻点）．
- 命题：可导函数的极值点一定是稳定点.
- 极值点的求法：先求出稳定点，再判别稳定点是否是极值点.
- 稳定点是否是极值点的判别方法：
  - 根据函数在稳定点两边的单调性来判别，若两边单调性相反，则是极值点.
  - 根据 $f'(x)$ 在稳定点两边的符号来判别，若 $f'(x)$ 在稳定点两边的符号相反，则是极值点.
  - 若 f 在 x_0 处有二阶导数，可用下面的定理来判断.

- 定理：$y = f(x)$ 在 (a,b) 内有一阶导数，$x_0 \in (a,b)$ 是稳定点，且 $f(x)$ 在 x_0 处有二阶导数. 若 $f''(x_0) < 0$, 则 x_0 为极大点；若 $f''(x_0) > 0$, 则 x_0 为极小点. $(f''(x_0) = 0,$不定$)$
- 证明1：若 $f''(x_0) > 0$, 则有

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f'(x) - f'(x_0)}{x - x_0} = \lim_{x \to x_0} \frac{f'(x)}{x - x_0} > 0,$$

则存在 $\delta > 0$, 使得当 $0 < |x - x_0| < \delta$ 时，$\frac{f'(x)}{x - x_0} > 0$，从而 $x \in (x_0, x_0 + \delta)$时，$f'(x) > 0$, $x \in (x_0 - \delta, x_0)$ 时，$f'(x) < 0$, 因此 x_0 为极小点.
- 注：若 $f''(x) > 0$，则利用 $f'(x)$ 严格单调增，直接可得 $f'(x)$ 在 x_0 左边为负，右边为正. x_0 为极小点.

极值点的判别2

- 定理：$y = f(x)$ 在 (a, b) 内有一阶导数，$x_0 \in (a, b)$ 是稳定点，且 $f(x)$ 在 x_0 处有二阶导数. 若 $f''(x_0) < 0$, 则 x_0 为极大点；若 $f''(x_0) > 0$, 则 x_0 为极小点. ($f''(x_0) = 0$, 不定)
- 证明1：若 $f''(x_0) > 0$, 则有

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f'(x) - f'(x_0)}{x - x_0} = \lim_{x \to x_0} \frac{f'(x)}{x - x_0} > 0,$$

则存在 $\delta > 0$, 使得当 $0 < |x - x_0| < \delta$ 时，$\frac{f'(x)}{x - x_0} > 0$，从而 $x \in (x_0, x_0 + \delta)$ 时，$f'(x) > 0$, $x \in (x_0 - \delta, x_0)$ 时，$f'(x) < 0$, 因此 x_0 为极小点.

- 注：若 $f''(x) > 0$，则利用 $f'(x)$ 严格单调增，直接可得 $f'(x)$ 在 x_0 左边为负，右边为正. x_0 为极小点.

极值点的判别2

- 定理：$y = f(x)$ 在 (a, b) 内有一阶导数，$x_0 \in (a, b)$ 是稳定点，且 $f(x)$ 在 x_0 处有二阶导数. 若 $f''(x_0) < 0$, 则 x_0 为极大点；若 $f''(x_0) > 0$, 则 x_0 为极小点. $(f''(x_0) = 0, 不定)$
- 证明1：若 $f''(x_0) > 0$, 则有

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f'(x) - f'(x_0)}{x - x_0} = \lim_{x \to x_0} \frac{f'(x)}{x - x_0} > 0,$$

则存在 $\delta > 0$, 使得当 $0 < |x - x_0| < \delta$ 时，$\frac{f'(x)}{x - x_0} > 0$，从而 $x \in (x_0, x_0 + \delta)$时，$f'(x) > 0$, $x \in (x_0 - \delta, x_0)$ 时，$f'(x) < 0$, 因此 x_0 为极小点.

- 注：若 $f''(x) > 0$，则利用 $f'(x)$ 严格单调增，直接可得 $f'(x)$ 在 x_0 左边为负，右边为正. x_0 为极小点.

极值点的判别3

- 证明2：设 $f''(x_0) > 0$. 由于 $f(x)$ 在 x_0 处有二阶导数，有 *Taylor* 公式

$$f(x) - f(x_0) = \frac{1}{2}f''(x_0)(x - x_0)^2 + R_2(x)$$

其中 $R_2(x) = o((x - x_0)^2)$，即 $\frac{R_2(x)}{(x-x_0)^2} \to 0$. 因此存在 $\delta > 0$, 使得当 $0 < |x - x_0| < \delta$ 时，$\frac{|R_2(x)|}{(x-x_0)^2} < \frac{1}{4}f''(x_0)$, 从而

$$\begin{aligned} f(x) - f(x_0) =& \frac{1}{2}f''(x_0)(x - x_0)^2 + R_2(x) \\ \geq& \frac{1}{2}f''(x_0)(x - x_0)^2 - \frac{1}{4}f''(x_0)(x - x_0)^2 > 0 \end{aligned}$$

因此 x_0 为极小点.

极值点的判别4

- 上面的证明 2 可以用于证明下面更一般的结论：设 $f(x)$ 在 x_0 处有 $2n$ 阶导数，且 $f'(x_0) = f''(x_0) = \cdots = f^{(2n-1)}(x_0) = 0$. 若 $f^{(2n)}(x_0) < 0$, 则 x_0 为极大点；若 $f^{(2n)}(x_0) > 0$, 则 x_0 为极小点. ($f^{(2n)}(x_0) = 0$,不定)

证明：$f(x) - f(x_0) = \frac{1}{(2n)!} f^{(2n)}(x_0)(x - x_0)^{2n} + o((x - x_0)^{2n})$.

极值点的判别4

- 上面的证明 2 可以用于证明下面更一般的结论：设 $f(x)$ 在 x_0 处有 $2n$ 阶导数，且 $f'(x_0) = f''(x_0) = \cdots = f^{(2n-1)}(x_0) = 0$. 若 $f^{(2n)}(x_0) < 0$, 则 x_0 为极大点；若 $f^{(2n)}(x_0) > 0$, 则 x_0 为极小点. ($f^{(2n)}(x_0) = 0$,不定)
证明：$f(x) - f(x_0) = \frac{1}{(2n)!} f^{(2n)}(x_0)(x - x_0)^{2n} + o((x - x_0)^{2n})$.

- 注：若 $f'(x_0) = f''(x_0) = \cdots = f^{(2n)}(x_0) = 0$，$f^{(2n+1)}(x_0) \neq 0$，则 x_0 不是极值点. 例如 $f(x) = x^3$.

证明：$f(x) - f(x_0) = \frac{1}{(2n+1)!} f^{(2n+1)}(x_0)(x - x_0)^{2n+1} + R_{2n+1}(x)$. 其中 $R_{2n+1}(x) = o((x - x_0)^{2n+1})$. 若 $f^{(2n+1)}(x_0) > 0$，存在 $\delta > 0$，使得当 $0 < |x - x_0| < \delta$ 时，$\left|\frac{R_{2n+1}(x)}{(x-x_0)^{2n+1}}\right| < \frac{1}{2}\frac{1}{(2n+1)!} f^{(2n+1)}(x_0)$. 当 $x_0 < x < x_0 + \delta$ 时，

$$f(x) - f(x_0) > \frac{1}{2}\frac{1}{(2n+1)!} f^{(2n+1)}(x_0)(x - x_0)^{2n+1} > 0.$$

当 $x_0 - \delta < x < x_0$ 时，

$$f(x) - f(x_0) < \frac{1}{2}\frac{1}{(2n+1)!} f^{(2n+1)}(x_0)(x - x_0)^{2n+1} < 0.$$

- 注：若 $f'(x_0)=f''(x_0)=\cdots=f^{(2n)}(x_0)=0$，$f^{(2n+1)}(x_0)\neq 0$，则 x_0 不是极值点. 例如 $f(x)=x^3$.
  证明：$f(x)-f(x_0)=\frac{1}{(2n+1)!}f^{(2n+1)}(x_0)(x-x_0)^{2n+1}+R_{2n+1}(x)$. 其中 $R_{2n+1}(x)=o((x-x_0)^{2n+1})$. 若 $f^{(2n+1)}(x_0)>0$，存在 $\delta>0$，使得当 $0<|x-x_0|<\delta$ 时，$\left|\frac{R_{2n+1}(x)}{(x-x_0)^{2n+1}}\right|<\frac{1}{2}\frac{1}{(2n+1)!}f^{(2n+1)}(x_0)$. 当 $x_0<x<x_0+\delta$ 时，

$$f(x)-f(x_0)>\frac{1}{2}\frac{1}{(2n+1)!}f^{(2n+1)}(x_0)(x-x_0)^{2n+1}>0.$$

  当 $x_0-\delta<x<x_0$ 时，

$$f(x)-f(x_0)<\frac{1}{2}\frac{1}{(2n+1)!}f^{(2n+1)}(x_0)(x-x_0)^{2n+1}<0.$$

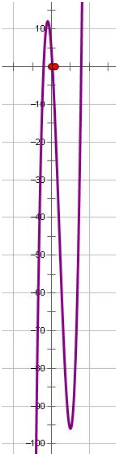
例

- 例：求 $f(x) = x^3 - 6x^2 - 15x + 4$ 的极值点.

  解：$f'(x) = 3x^2 - 12x - 15 = 3(x+1)(x-5)$. 有两个稳定点：$-1, 5$.

  方法一：$f'(x)$ 在 -1 的左边为正，右边为负，是极大点；$f'(x)$ 在 5的左边为负，右边为正，是极小点.

  方法二：$f''(x) = 6x - 12$, $f''(-1) < 0$, 极大点；$f''(5) > 0$，极小点.

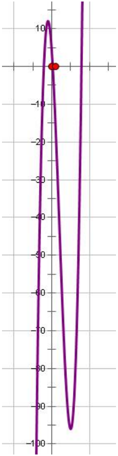


- 例： 求 $f(x) = x^3 - 6x^2 - 15x + 4$ 的极值点.

  解: $f'(x) = 3x^2 - 12x - 15 = 3(x+1)(x-5)$. 有两个稳定点： $-1, 5$.

  方法一： $f'(x)$ 在 -1 的左边为正，右边为负，是极大点； $f'(x)$ 在 5的左边为负，右边为正，是极小点.

  方法二： $f''(x) = 6x - 12$, $f''(-1) < 0$, 极大点； $f''(5) > 0$，极小点.



最值1

- 若 $f(x)\in C^1([a,b])$, $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上有 n 个稳定点 $x_1,x_2,\cdots,x_n\in(a,b)$, 则最大值 M 和最小值 m 分别为

$$M=\max\{f(a),f(b),f(x_1),f(x_2),\cdots,f(x_n)\}$$
$$m=\min\{f(a),f(b),f(x_1),f(x_2),\cdots,f(x_n)\}$$

证明：由于 f 连续，最值点一定存在，若不是边界点，必为稳定点.

- 例：求 $f(x)=x^3-6x^2-15x+4$ 在 $[-2,6]$ 上的最值点.

解：有两个稳定点：$-1,5$. $f(-1)=12$，$f(5)=-96$，$f(-2)=2$，$f(6)=-86$. 最大值为 12, 最小值为 -96.

- 若 $f(x) \in C^1([a,b])$, $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上有 n 个稳定点 $x_1, x_2, \cdots, x_n \in (a,b)$, 则最大值 M 和最小值 m 分别为

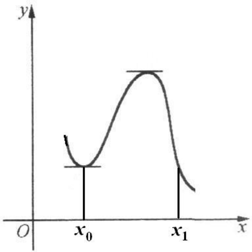
$$M = \max\{f(a), f(b), f(x_1), f(x_2), \cdots, f(x_n)\}$$
$$m = \min\{f(a), f(b), f(x_1), f(x_2), \cdots, f(x_n)\}$$

  证明：由于 f 连续，最值点一定存在，若不是边界点，必为稳定点.

- 例：求 $f(x) = x^3 - 6x^2 - 15x + 4$ 在 $[-2, 6]$ 上的最值点.
  解：有两个稳定点：$-1, 5$. $f(-1) = 12$，$f(5) = -96$，$f(-2) = 2$，$f(6) = -86$. 最大值为 12, 最小值为 -96.

最值2

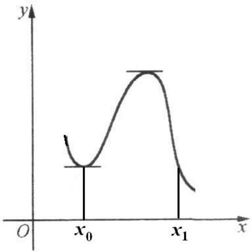
- $f(x)$ 在区间 X 上连续，且有唯一的极值点 x_0 (必为 X 的内点). 若 x_0 为极小点，则必为最小点;若 x_0 为极大点，则必为最大点.



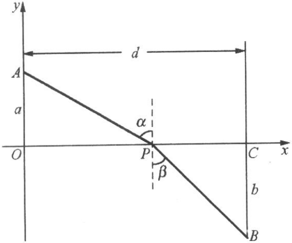
证明：设 x_0 是唯一的极值点(不妨设是极小点)，则存在邻域 $(x_0-\delta, x_0+\delta)$，使得 x_0 是 $f(x)$ 在 $(x_0-\delta, x_0+\delta)$ 上的最小点. 下面证明 $f(x) > f(x_0)$ 对所有 $x \neq x_0$ 成立. 反设存在 x_1 使得 $f(x_1) \leq f(x_0)$，不妨设 $x_1 > x_0$. 考虑 $f(x)$ 在 $[x_0, x_1]$ 上的最大值 M，则 $M \geq f(x_0) \geq f(x_1)$. (1)若 $M = f(x_0)$，则 $f(x_0)$ 同时是 f 在 $[x_0, x_0+\delta)$ 上的最大值和最小值，即 f 在 $[x_0, x_0+\delta)$ 上为常数，与极值点的唯一性矛盾. (2) $M > f(x_0) \geq f(x_1)$，f 在 $[x_0, x_1)$ 上的最大值在区间内部取得，必为极值点，这也与极值点唯一矛盾.

- $f(x)$ 在区间 X 上连续，且有唯一的极值点 x_0 (必为 X 的内点)。若 x_0 为极小点，则必为最小点;若 x_0 为极大点，则必为最大点.

  证明：设 x_0 是唯一的极值点(不妨设是极小点)，则存在邻域 $(x_0-\delta, x_0+\delta)$，使得 x_0 是 $f(x)$ 在 $(x_0-\delta, x_0+\delta)$ 上的最小点. 下面证明 $f(x) > f(x_0)$ 对所有 $x \neq x_0$ 成立. 反设存在 x_1 使得 $f(x_1) \leq f(x_0)$，不妨设 $x_1 > x_0$. 考虑 $f(x)$ 在 $[x_0, x_1]$ 上的最大值 M，则 $M \geq f(x_0) \geq f(x_1)$. (1)若 $M = f(x_0)$，则 $f(x_0)$ 同时是 f 在 $[x_0, x_0+\delta)$ 上的最大值和最小值，即 f 在 $[x_0, x_0+\delta)$ 上为常数，与极值点的唯一性矛盾. (2) $M > f(x_0) \geq f(x_1)$，f 在 $[x_0, x_1)$ 上的最大值在区间内部取得，必为极值点，这也与极值点唯一矛盾.



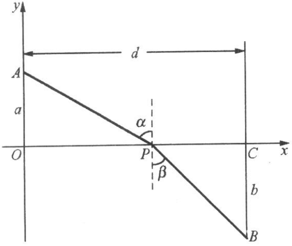
- 光的折射原理：介质甲、乙中光速分别为 v_1, v_2，光线从介质甲中的 A 点到乙中的 B 点，求花时间最短的路径.
- 解：如图以两种介质分界线为 x轴，A 到分界线的垂线为 y 轴的建立坐标系. 设 P 是两种介质分界线上的一点，设路径是折线 APB，设 B 到 x 轴的垂线的垂足分别为 C，设 OC 长为 d，AO，BC 长分别为 a 和 b. 设 OP 长为 x，则总时间为



$$T(x) = \frac{\sqrt{a^2 + x^2}}{v_1} + \frac{\sqrt{b^2 + (d-x)^2}}{v_2}$$

光的折射原理1

- 光的折射原理：介质甲、乙中光速分别为 v_1, v_2，光线从介质甲中的 A 点到乙中的 B 点，求花时间最短的路径.
- 解：如图以两种介质分界线为 x轴，A 到分界线的垂线为 y 轴的建立坐标系. 设 P 是两种介质分界线上的一点，设路径是折线 APB，设 B 到 x 轴的垂线的垂足分别为 C，设 OC 长为 d，AO，BC 长分别为 a 和 b. 设 OP 长为 x，则总时间为



$$T(x) = \frac{\sqrt{a^2 + x^2}}{v_1} + \frac{\sqrt{b^2 + (d - x)^2}}{v_2}$$

光的折射原理2

- 解（续）：下面求 $T(x)$ 的最小值. $T(x)$ 的一阶导数为

$$T'(x) = \frac{x}{v_1\sqrt{a^2+x^2}} - \frac{d-x}{v_2\sqrt{b^2+(d-x)^2}}.$$

$T(x)$ 的二阶导数

$$T''(x) = \frac{a^2}{v_1\sqrt{(a^2+x^2)^3}} + \frac{b^2}{v_2\sqrt{(b^2+(d-x)^2)^3}} > 0.$$

显然 $T'(0) < 0$, $T'(d) > 0$, 因此存在唯一的 $x_0 \in (c,d)$, 使得 $T'(x_0) = 0$, 且 x_0 是极小点，从而是最小点. x_0 满足

$$\frac{x_0}{v_1\sqrt{a^2+x_0^2}} = \frac{d-x_0}{v_2\sqrt{b^2+(d-x_0)^2}} \text{ 即 } \frac{\sin\alpha}{v_1} = \frac{\sin\beta}{v_2}$$

光的折射原理2

- 解（续）：下面求 $T(x)$ 的最小值. $T(x)$ 的一阶导数为

$$T'(x)=\frac{x}{v_1\sqrt{a^2+x^2}}-\frac{d-x}{v_2\sqrt{b^2+(d-x)^2}}.$$

$T(x)$ 的二阶导数

$$T''(x)=\frac{a^2}{v_1\sqrt{(a^2+x^2)^3}}+\frac{b^2}{v_2\sqrt{(b^2+(d-x)^2)^3}}>0.$$

显然 $T'(0)<0$, $T'(d)>0$, 因此存在唯一的 $x_0\in(c,d)$, 使得 $T'(x_0)=0$, 且 x_0 是极小点，从而是最小点. x_0 满足

$$\frac{x_0}{v_1\sqrt{a^2+x_0^2}}=\frac{d-x_0}{v_2\sqrt{b^2+(d-x_0)^2}} \text{ 即 } \frac{\sin\alpha}{v_1}=\frac{\sin\beta}{v_2}$$

- 解（续）：下面求 $T(x)$ 的最小值. $T(x)$ 的一阶导数为

$$T'(x)=\frac{x}{v_1\sqrt{a^2+x^2}}-\frac{d-x}{v_2\sqrt{b^2+(d-x)^2}}.$$

$T(x)$ 的二阶导数

$$T''(x)=\frac{a^2}{v_1\sqrt{(a^2+x^2)^3}}+\frac{b^2}{v_2\sqrt{(b^2+(d-x)^2)^3}}>0.$$

显然 $T'(0)<0$, $T'(d)>0$, 因此存在唯一的 $x_0\in(c,d)$, 使得 $T'(x_0)=0$, 且 x_0 是极小点，从而是最小点. x_0 满足

$$\frac{x_0}{v_1\sqrt{a^2+x_0^2}}=\frac{d-x_0}{v_2\sqrt{b^2+(d-x_0)^2}}\text{ 即 }\frac{\sin\alpha}{v_1}=\frac{\sin\beta}{v_2}$$

- 最小二乘法：作 n 次实验，得到数据 $a_1, a_2, \cdots, a_n$. 找 x_0，使得 $f(x) = \sum_{i=1}^{n}(x - a_i)^2$ 在 x_0 处最小(此时我们认为 x_0 就是真实值).
- 解：先求 $f(x)$ 的稳定点. 解 $f'(x) = 2\sum_{i=1}^{n}(x - a_i) = 0$ 得 $x_0 = \frac{1}{n}(a_1 + a_2 + \cdots + a_n)$. 显然 $f''(x_0) = 2n > 0$，因此 x_0 是唯一的极小点，也是最小点.

最小二乘法

- 最小二乘法：作 n 次实验，得到数据 $a_1, a_2, \cdots, a_n$. 找 x_0，使得 $f(x) = \sum_{i=1}^{n}(x - a_i)^2$ 在 x_0 处最小(此时我们认为 x_0 就是真实值).
- 解：先求 $f(x)$ 的稳定点. 解 $f'(x) = 2\sum_{i=1}^{n}(x - a_i) = 0$ 得 $x_0 = \frac{1}{n}(a_1 + a_2 + \cdots + a_n)$. 显然 $f''(x_0) = 2n > 0$，因此 x_0 是唯一的极小点，也是最小点.

函数的凸凹性的定义

- 定义：设 $f(x)$ 在 (a,b) 上可导，若任意固定 $x_0 \in (a,b)$，都有

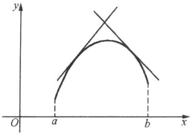
$$f(x) < f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0), \forall x \in (a,b), x \neq x_0,$$

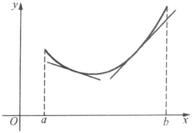
则称 $f(x)$ 在 (a,b) 上是一个向上凸（凸）函数；若任意固定 $x_0 \in (a,b)$，都有

$$f(x) > f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0), \forall x \in (a,b), x \neq x_0,$$

则称 $f(x)$ 在 (a,b) 上是一个向下凸（凹）函数.

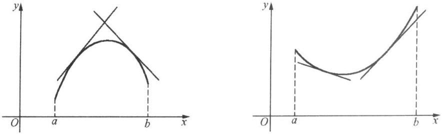
- 例：$p > 1$ 时，$f(x) = x^p$，是 $(0,+\infty)$ 上的下凸函数. 事实上，对不相等的正实数 x 和 x_0，利用贝努利不等式，$(\frac{x}{x_0})^p > 1 + p(\frac{x}{x_0} - 1)$，即得 $x^p > x_0^p + px_0^{p-1}(x - x_0)$.





函数的凸凹性的定义

- 定义：设 $f(x)$ 在 (a,b) 上可导，若任意固定 $x_0 \in (a,b)$，都有
$$f(x) < f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0), \forall x \in (a,b), x \neq x_0,$$
则称 $f(x)$ 在 (a,b) 上是一个向上凸（凸）函数；若任意固定 $x_0 \in (a,b)$，都有
$$f(x) > f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0), \forall x \in (a,b), x \neq x_0,$$
则称 $f(x)$ 在 (a,b) 上是一个向下凸（凹）函数.
- 例：$p > 1$ 时，$f(x) = x^p$，是 $(0,+\infty)$ 上的下凸函数. 事实上，对不相等的正实数 x 和 x_0，利用贝努利不等式，$(\frac{x}{x_0})^p > 1 + p(\frac{x}{x_0} - 1)$，即得 $x^p > x_0^p + px_0^{p-1}(x - x_0)$.



凸(凹)函数的性质1

- 若 $f(x)$ 在 (a,b) 上是一个向上凸函数，则对任意两个不相等的 $x_1, x_2 \in (a,b)$, $0 < k_1, k_2 < 1$, $k_1 + k_2 = 1$, $x_0 = k_1x_1 + k_2x_2$, 有

$$k_1 f(x_1) + k_2 f(x_2) < f(x_0)$$

类似地, 若 $f(x)$ 在 (a,b) 上是一个凹函数, 则有 $k_1 f(x_1) + k_2 f(x_2) > f(x_0)$.

证明：若 $f(x)$ 是一个凸函数，则 $f(x_k) < f(x_0) + f'(x_0)(x_k - x_0)$($k = 1,2$),

$$\begin{aligned} k_1 f(x_1) + k_2 f(x_2) &< (k_1 + k_2) f(x_0) \\ &+ f'(x_0)(k_1x_1 + k_2x_2 - (k_1 + k_2)x_0) = f(x_0) \end{aligned}$$

凸(凹)函数的性质1

- 若 $f(x)$ 在 (a,b) 上是一个向上凸函数，则对任意两个不相等的 $x_1, x_2 \in (a,b)$, $0 < k_1, k_2 < 1$, $k_1 + k_2 = 1$, $x_0 = k_1x_1 + k_2x_2$, 有

$$k_1 f(x_1) + k_2 f(x_2) < f(x_0)$$

类似地, 若 $f(x)$ 在 (a,b) 上是一个凹函数, 则有 $k_1 f(x_1) + k_2 f(x_2) > f(x_0)$.

证明：若 $f(x)$ 是一个凸函数，则 $f(x_k) < f(x_0) + f'(x_0)(x_k - x_0)($ $k = 1,2$ $)$,

$$\begin{aligned} k_1 f(x_1) + k_2 f(x_2) &< (k_1 + k_2) f(x_0) \\ &\quad + f'(x_0)(k_1x_1 + k_2x_2 - (k_1 + k_2)x_0) = f(x_0) \end{aligned}$$

凸(凹)函数的性质2

- 若 $f(x)$ 是凸函数， $x_k \in (a,b)(k=1,2,\cdots,n)$不全等, $0<c_k<1$ 满足 $c_1+c_2+\cdots c_n=1$，则有 $c_1f(x_1)+c_2f(x_2)+\cdots c_nf(x_n)<f(c_1x_1+c_2x_2+\cdots c_nx_n)$.

证明: 方法同上, 也可归纳证明:

$$c_1x_1+\cdots+c_nx_n=(c_1\cdots+c_{n-1})\frac{c_1x_1\cdots+c_{n-1}x_{n-1}}{c_1\cdots+c_{n-1}}+c_nx_n,$$

而 $\frac{c_1x_1+\cdots+c_{n-1}x_{n-1}}{c_1+\cdots+c_{n-1}}=\frac{c_1}{c_1\cdots+c_{n-1}}x_1+\cdots+\frac{c_{n-1}}{c_1\cdots+c_{n-1}}x_{n-1}$.

- 特别地，对上凸函数有 $f(\frac{x_1+x_2+\cdots x_n}{n})\geq\frac{f(x_1)+f(x_2)+\cdots f(x_n)}{n}$; 对凹函数有 $f(\frac{x_1+x_2+\cdots x_n}{n})\leq\frac{f(x_1)+f(x_2)+\cdots f(x_n)}{n}$.

- 若 $f(x)$ 是凸函数， $x_k \in (a,b)(k=1,2,\cdots,n)$不全等, $0<c_k<1$ 满足 $c_1+c_2+\cdots c_n=1$, 则有 $c_1 f(x_1)+c_2 f(x_2)+\cdots c_n f(x_n) < f(c_1x_1+c_2x_2+\cdots c_nx_n)$.

  证明: 方法同上, 也可归纳证明:

$$c_1x_1+\cdots+c_nx_n=(c_1\cdots+c_{n-1})\frac{c_1x_1\cdots+c_{n-1}x_{n-1}}{c_1\cdots+c_{n-1}}+c_nx_n,$$

  而 $\frac{c_1x_1+\cdots+c_{n-1}x_{n-1}}{c_1+\cdots+c_{n-1}}=\frac{c_1}{c_1\cdots+c_{n-1}}x_1+\cdots+\frac{c_{n-1}}{c_1\cdots+c_{n-1}}x_{n-1}$.

- 特别地，对上凸函数有 $f(\frac{x_1+x_2+\cdots x_n}{n})\geq\frac{f(x_1)+f(x_2)+\cdots f(x_n)}{n}$; 对凹函数有 $f(\frac{x_1+x_2+\cdots x_n}{n})\leq\frac{f(x_1)+f(x_2)+\cdots f(x_n)}{n}$.

凸(凹)函数的性质3

- 设 $f(x)$ 在 (a,b) 上是一个向上凸的可微函数, 则 $f'(x)$ 严格递减

证明: 对任意的 $x_1 < x_2$, 由 f 是凸函数,

$$f(x_1) < f(x_2) + f'(x_2)(x_1 - x_2),$$
$$f(x_2) < f(x_1) + f'(x_1)(x_2 - x_1).$$

因此

$$f'(x_1) > \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} > f'(x_2).$$

函数凸凹性的判断

- 命题：若 $f'(x)$ 在 (a,b) 上严格递减，则 $f(x)$ 在 (a,b) 上为上凸函数，若 $f'(x)$ 在 (a,b)上严格递增，则 $f(x)$ 在 (a,b) 上为下凸函数.

  证明：若 $f'(x)$ 在 (a,b) 上严格递减，$x \neq x_0$, 存在 ξ 位于 x_0 与 x 之间，使得

$$f(x) - f(x_0) - f'(x_0)(x - x_0) = (f'(\xi) - f'(x_0))(x - x_0) < 0.$$

- 设 $f(x)$ 在 (a,b) 二阶可导，若 $f''(x) > 0$ 对任意 $x \in (a,b)$ 成立，则 $f(x)$ 在 (a,b) 上是凹函数；$f''(x) < 0$ 对任意 $x \in (a,b)$ 成立，则 $f(x)$ 在 (a,b) 上是凸函数

  证明1：有 $f''(x) > 0$, $f'(x)$ 严格增，从而 $f(x)$ 是凹函数.

  证明2：$f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)) + \frac{1}{2}f''(\xi)(x - x_0)^2 > f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$

函数凸凹性的判断

- 命题：若 $f'(x)$ 在 (a,b) 上严格递减，则 $f(x)$ 在 (a,b) 上为上凸函数，若 $f'(x)$ 在 (a,b)上严格递增，则 $f(x)$ 在 (a,b) 上为下凸函数.
  证明：若 $f'(x)$ 在 (a,b) 上严格递减，$x \neq x_0$，存在 ξ 位于 x_0 与 x 之间，使得

$$f(x) - f(x_0) - f'(x_0)(x - x_0) = (f'(\xi) - f'(x_0))(x - x_0) < 0.$$

- 设 $f(x)$ 在 (a,b) 二阶可导，若 $f''(x) > 0$ 对任意 $x \in (a,b)$ 成立，则 $f(x)$ 在 (a,b) 上是凹函数；$f''(x) < 0$ 对任意 $x \in (a,b)$ 成立，则 $f(x)$ 在 (a,b) 上是凸函数
  证明1：有 $f''(x) > 0$，$f'(x)$ 严格增，从而 $f(x)$ 是凹函数.
  证明2：$f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)) + \frac{1}{2}f''(\xi)(x - x_0)^2 > f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$

函数凸凹性的判断

- 命题：若 $f'(x)$ 在 (a,b) 上严格递减，则 $f(x)$ 在 (a,b) 上为上凸函数，若 $f'(x)$ 在 (a,b)上严格递增，则 $f(x)$ 在 (a,b) 上为下凸函数.
  证明：若 $f'(x)$ 在 (a,b) 上严格递减，$x \neq x_0$，存在 ξ 位于 x_0 与 x 之间，使得

$$f(x) - f(x_0) - f'(x_0)(x - x_0) = (f'(\xi) - f'(x_0))(x - x_0) < 0.$$

- 设 $f(x)$ 在 (a,b) 二阶可导，若 $f''(x) > 0$ 对任意 $x \in (a,b)$ 成立，则 $f(x)$ 在 (a,b) 上是凹函数；$f''(x) < 0$ 对任意 $x \in (a,b)$ 成立，则 $f(x)$ 在 (a,b) 上是凸函数
  证明1：有 $f''(x) > 0$, $f'(x)$ 严格增，从而 $f(x)$ 是凹函数.
  证明2：$f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)) + \frac{1}{2}f''(\xi)(x - x_0)^2 > f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$

- 命题：若 $f'(x)$ 在 (a,b) 上严格递减，则 $f(x)$ 在 (a,b) 上为上凸函数，若 $f'(x)$ 在 (a,b)上严格递增，则 $f(x)$ 在 (a,b) 上为下凸函数.
  证明：若 $f'(x)$ 在 (a,b) 上严格递减，$x \neq x_0$, 存在 ξ 位于 x_0 与 x 之间，使得

$$f(x) - f(x_0) - f'(x_0)(x - x_0) = (f'(\xi) - f'(x_0))(x - x_0) < 0.$$

- 设 $f(x)$ 在 (a,b) 二阶可导，若 $f''(x) > 0$ 对任意 $x \in (a,b)$ 成立，则 $f(x)$ 在 (a,b) 上是凹函数；$f''(x) < 0$ 对任意 $x \in (a,b)$ 成立，则 $f(x)$ 在 (a,b) 上是凸函数
  证明1：有 $f''(x) > 0$, $f'(x)$ 严格增，从而 $f(x)$ 是凹函数.
  证明2：$f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)) + \frac{1}{2}f''(\xi)(x - x_0)^2 > f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$

函数凸凹性的判断

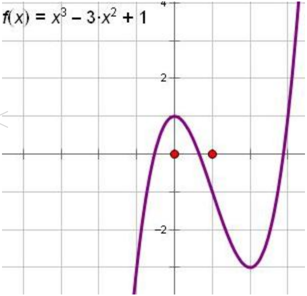
- 命题：若 $f'(x)$ 在 (a,b) 上严格递减，则 $f(x)$ 在 (a,b) 上为上凸函数，若 $f'(x)$ 在 (a,b)上严格递增，则 $f(x)$ 在 (a,b) 上为下凸函数.
  证明：若 $f'(x)$ 在 (a,b) 上严格递减，$x \neq x_0$, 存在 ξ 位于 x_0 与 x 之间，使得

$$f(x) - f(x_0) - f'(x_0)(x - x_0) = (f'(\xi) - f'(x_0))(x - x_0) < 0.$$

- 设 $f(x)$ 在 (a,b) 二阶可导，若 $f''(x) > 0$ 对任意 $x \in (a,b)$ 成立, 则 $f(x)$ 在 (a,b) 上是凹函数；$f''(x) < 0$ 对任意 $x \in (a,b)$ 成立, 则 $f(x)$ 在 (a,b) 上是凸函数
  证明1：有 $f''(x) > 0$, $f'(x)$ 严格增，从而 $f(x)$ 是凹函数.
  证明2：$f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)) + \frac{1}{2}f''(\xi)(x - x_0)^2 > f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$

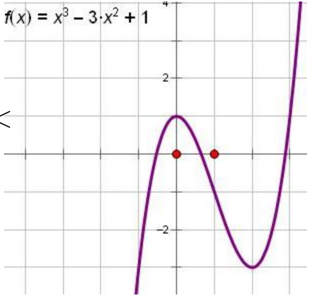
例

- $f(x) = x^p$, $f'(x) = px^{p-1}$, $f''(x) = p(p-1)x^{p-2}$. 当 $p > 1$ 时, $f'(x)$ 严格单调增 ($f''(x) > 0$), 是下凸函数; 当 $0 < p < 1$ 时, $f'(x)$ 严格单调减($f''(x) < 0$), 是下凸函数.
- 例：设 $f(x) = x^3 + bx^2 + cx + d$, 则有 $y''(x) = 6x + 2b$. 当 $x > -\frac{b}{3}$ 时，$y'' > 0$, $(-\frac{b}{3}, +\infty)$ 上是凹函数；$x < -\frac{b}{3}$ 时，$y'' < 0$, $y'' < 0$, $(-\infty, -\frac{b}{3},)$ 上凸. $f(x)$ 在 $-\frac{b}{3}$ 两边的凸凹性相反，称 $-\frac{b}{3}$ 为 $f(x)$ 的拐点.



例

- $f(x)=x^p$, $f'(x)=px^{p-1}$, $f''(x)=p(p-1)x^{p-2}$. 当 $p>1$ 时, $f'(x)$ 严格单调增 $(f''(x)>0)$, 是下凸函数; 当 $0<p<1$ 时, $f'(x)$ 严格单调减($f''(x)<0)$, 是下凸函数.
- 例： 设 $f(x)=x^3+bx^2+cx+d$, 则有 $y''(x)=6x+2b$. 当 $x>-\frac{b}{3}$ 时， $y''>0$, $(-\frac{b}{3},+\infty)$ 上是凹函数； $x<-\frac{b}{3}$ 时， $y''<0$, $y''<0$, $(-\infty,-\frac{b}{3},)$ 上凸. $f(x)$ 在 $-\frac{b}{3}$ 两边的凸凹性相反， 称 $-\frac{b}{3}$ 为 $f(x)$ 的拐点.



拐点的定义

- 上例中 $f(x) = x^3 + bx^2 + cx + d$ 在 $-\frac{b}{3}$ 两边的凸凹性相反，称 $-\frac{b}{3}$ 为 $f(x)$ 的拐点.
- 定义：若 x_0 为 $f(x)$ 定义域的一个内点，存在 δ, 使得 $f(x)$ 在 $(x_0 - \delta, 0)$ 和 $(0, x_0 + \delta)$ 上的凸凹性相反，则称 x_0 为 $f(x)$ 的拐点.
- 性质：设 $f(x) \in C^2((a,b))$. 若 $c \in (a,b)$ 是 $f(x)$的拐点，则 $f''(c) = 0$.

  证明：由于 $f'(x)$ 在 c 两边的单调性相反，则 $f''(x)$ 在 c 的一边非负，一边非正，由连续性，$f''(c) = 0$.
- 注：二阶导数为 0 的点不一定是拐点，如 $y = x^4, x_0 = 0$.

拐点的定义

- 上例中 $f(x)=x^3+bx^2+cx+d$ 在 $-\frac{b}{3}$ 两边的凸凹性相反，称 $-\frac{b}{3}$ 为 $f(x)$ 的拐点.
- 定义：若 x_0 为 $f(x)$ 定义域的一个内点，存在 δ, 使得 $f(x)$ 在 $(x_0-\delta,0)$ 和 $(0,x_0+\delta)$ 上的凸凹性相反，则称 x_0 为 $f(x)$ 的拐点.
- 性质：设 $f(x)\in C^2((a,b))$. 若 $c\in(a,b)$ 是 $f(x)$的拐点，则 $f''(c)=0$.

  证明：由于 $f'(x)$ 在 c 两边的单调性相反，则 $f''(x)$ 在 c 的一边非负，一边非正，由连续性，$f''(c)=0$.
- 注：二阶导数为 0 的点不一定是拐点，如 $y=x^4, x_0=0$.

拐点的定义

- 上例中 $f(x)=x^3+bx^2+cx+d$ 在 $-\frac{b}{3}$ 两边的凸凹性相反，称 $-\frac{b}{3}$ 为 $f(x)$ 的拐点.
- 定义：若 x_0 为 $f(x)$ 定义域的一个内点，存在 δ, 使得 $f(x)$ 在 $(x_0-\delta,0)$ 和 $(0,x_0+\delta)$ 上的凸凹性相反，则称 x_0 为 $f(x)$ 的拐点.
- 性质：设 $f(x)\in C^2((a,b))$. 若 $c\in(a,b)$ 是 $f(x)$的拐点，则 $f''(c)=0$.

  证明：由于 $f'(x)$ 在 c 两边的单调性相反，则 $f''(x)$ 在 c 的一边非负，一边非正，由连续性，$f''(c)=0$.
- 注：二阶导数为 0 的点不一定是拐点，如 $y=x^4, x_0=0$.

拐点的定义

- 上例中 $f(x) = x^3 + bx^2 + cx + d$ 在 $-\frac{b}{3}$ 两边的凸凹性相反，称 $-\frac{b}{3}$ 为 $f(x)$ 的拐点.
- 定义：若 x_0 为 $f(x)$ 定义域的一个内点，存在 δ, 使得 $f(x)$ 在 $(x_0 - \delta, 0)$ 和 $(0, x_0 + \delta)$ 上的凸凹性相反，则称 x_0 为 $f(x)$ 的拐点.
- 性质：设 $f(x) \in C^2((a, b))$. 若 $c \in (a, b)$ 是 $f(x)$的拐点，则 $f''(c) = 0$.

  证明：由于 $f'(x)$ 在 c 两边的单调性相反，则 $f''(x)$ 在 c 的一边非负，一边非正，由连续性，$f''(c) = 0$.
- 注：二阶导数为 0 的点不一定是拐点，如 $y = x^4, x_0 = 0$.

拐点的定义

- 上例中 $f(x)=x^3+bx^2+cx+d$ 在 $-\frac{b}{3}$ 两边的凸凹性相反，称 $-\frac{b}{3}$ 为 $f(x)$ 的拐点.
- 定义：若 x_0 为 $f(x)$ 定义域的一个内点，存在 δ, 使得 $f(x)$ 在 $(x_0-\delta,0)$ 和 $(0,x_0+\delta)$ 上的凸凹性相反，则称 x_0 为 $f(x)$ 的拐点.
- 性质：设 $f(x)\in C^2((a,b))$. 若 $c\in(a,b)$ 是 $f(x)$的拐点，则 $f''(c)=0$.

  证明：由于 $f'(x)$ 在 c 两边的单调性相反，则 $f''(x)$ 在 c 的一边非负，一边非正，由连续性，$f''(c)=0$.
- 注：二阶导数为 0 的点不一定是拐点，如 $y=x^4, x_0=0$.

拐点的判别

- 拐点的判别: 满足下列条件之一的 x_0 是拐点:
  1. 若 $f'(x)$ 在 x_0 两边的单调性相反.
  2. $f''(x)$ 在 x_0 两边的正负相反.
  3. $f''(x_0) = 0$, $f'''(x_0) \neq 0$.
- 例: (函数凸凹性用于不等式证明) 设 $a_1, a_2, \cdots, a_n$ 是正实数, $p > 1$ 时有

$$\frac{a_1 + a_2 + \cdots + a_n}{n} \leq \left(\frac{a_1^p + a_2^p + \cdots + a_n^p}{n}\right)^{\frac{1}{p}}.$$

$0 < p < 1$ 时有

$$\frac{a_1 + a_2 + \cdots + a_n}{n} \geq \left(\frac{a_1^p + a_2^p + \cdots + a_n^p}{n}\right)^{\frac{1}{p}}.$$

证明: 利用 $f(x) = x^p$. 当 $p > 1$ 时, $f(x)$ 是 $(0. +\infty)$ 上的下凸函数, $0 < p < 1$ 有是上凸函数.

拐点的判别

- 拐点的判别: 满足下列条件之一的 x_0 是拐点:
  1. 若 $f'(x)$ 在 x_0 两边的单调性相反.
  2. $f''(x)$ 在 x_0 两边的正负相反.
  3. $f''(x_0) = 0$, $f'''(x_0) \neq 0$.
- 例: (函数凸凹性用于不等式证明) 设 $a_1, a_2, \cdots, a_n$ 是正实数, $p > 1$ 时有

$$\frac{a_1 + a_2 + \cdots + a_n}{n} \leq \left(\frac{a_1^p + a_2^p + \cdots + a_n^p}{n}\right)^{\frac{1}{p}}.$$

$0 < p < 1$ 时有

$$\frac{a_1 + a_2 + \cdots + a_n}{n} \geq \left(\frac{a_1^p + a_2^p + \cdots + a_n^p}{n}\right)^{\frac{1}{p}}.$$

证明: 利用 $f(x) = x^p$. 当 $p > 1$ 时, $f(x)$ 是 $(0. + \infty)$ 上的下凸函数, $0 < p < 1$ 有是上凸函数.

渐近线

- 若 $y = f(x)$ 在 $(c, +\infty)$ 有定义， $\lim\limits_{x\to+\infty}(f(x) - (ax+b)) = 0$，则称 $y = ax + b$ 是 $y = f(x)$ 在 $x \to +\infty$ 时的渐近线. 类似可定义 $x \to -\infty$ 的渐近线.
- 若 $\lim\limits_{x\to a+0} f(x) = \infty$ 或 $\lim\limits_{x\to a-0} f(x) = \infty$，则称 $x = a$ 是 $y = f(x)$ 的（垂直）渐近线.
- 定理：若 $y = f(x)$ 在 $(c, +\infty)$ 有定义，$y = ax + b$ 是 $y = f(x)$ 在 $x \to +\infty$ 时的渐近线的充分必要条件是 $a = \lim\limits_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x}$，$b = \lim\limits_{x\to+\infty}(f(x) - ax)$.

  证明：若 $\lim\limits_{x\to+\infty}(f(x) - (ax+b)) = 0$，则 $\lim\limits_{x\to+\infty}(\frac{f(x)}{x} - a) = 0$，$b = \lim\limits_{x\to+\infty}(f(x) - ax)$.

渐近线

- 若 $y = f(x)$ 在 $(c, +\infty)$ 有定义，$\lim\limits_{x \to +\infty}(f(x) - (ax + b)) = 0$，则称 $y = ax + b$ 是 $y = f(x)$ 在 $x \to +\infty$ 时的渐近线. 类似可定义 $x \to -\infty$ 的渐近线.
- 若 $\lim\limits_{x \to a+0} f(x) = \infty$ 或 $\lim\limits_{x \to a-0} f(x) = \infty$，则称 $x = a$ 是 $y = f(x)$ 的（垂直）渐近线.
- 定理：若 $y = f(x)$ 在 $(c, +\infty)$ 有定义，$y = ax + b$ 是 $y = f(x)$ 在 $x \to +\infty$ 时的渐近线的充分必要条件是 $a = \lim\limits_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{x}$，$b = \lim\limits_{x \to +\infty}(f(x) - ax)$.

  证明：若 $\lim\limits_{x \to +\infty}(f(x) - (ax + b)) = 0$，则 $\lim\limits_{x \to +\infty}(\frac{f(x)}{x} - a) = 0$，$b = \lim\limits_{x \to +\infty}(f(x) - ax)$.

渐近线

- 若 $y=f(x)$ 在 $(c,+\infty)$ 有定义，$\lim\limits_{x\to+\infty}(f(x)-(ax+b))=0$，则称 $y=ax+b$ 是 $y=f(x)$ 在 $x\to+\infty$ 时的渐近线. 类似可定义 $x\to-\infty$ 的渐近线.
- 若 $\lim\limits_{x\to a+0}f(x)=\infty$ 或 $\lim\limits_{x\to a-0}f(x)=\infty$，则称 $x=a$ 是 $y=f(x)$ 的（垂直）渐近线.
- 定理：若 $y=f(x)$ 在 $(c,+\infty)$ 有定义，$y=ax+b$ 是 $y=f(x)$ 在 $x\to+\infty$ 时的渐近线的充分必要条件是 $a=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}$，$b=\lim\limits_{x\to+\infty}(f(x)-ax)$.

证明：若 $\lim\limits_{x\to+\infty}(f(x)-(ax+b))=0$，则 $\lim\limits_{x\to+\infty}(\frac{f(x)}{x}-a)=0$，$b=\lim\limits_{x\to+\infty}(f(x)-ax)$.

渐近线

- 若 $y = f(x)$ 在 $(c, +\infty)$ 有定义，$\lim\limits_{x\to+\infty}(f(x) - (ax + b)) = 0$，则称 $y = ax + b$ 是 $y = f(x)$ 在 $x \to +\infty$ 时的渐近线. 类似可定义 $x \to -\infty$ 的渐近线.
- 若 $\lim\limits_{x\to a+0} f(x) = \infty$ 或 $\lim\limits_{x\to a-0} f(x) = \infty$，则称 $x = a$ 是 $y = f(x)$ 的（垂直）渐近线.
- 定理：若 $y = f(x)$ 在 $(c, +\infty)$ 有定义，$y = ax + b$ 是 $y = f(x)$ 在 $x \to +\infty$ 时的渐近线的充分必要条件是 $a = \lim\limits_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x}$，$b = \lim\limits_{x\to+\infty}(f(x) - ax)$.

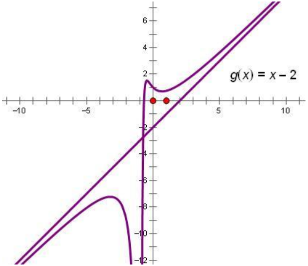
  证明：若 $\lim\limits_{x\to+\infty}(f(x) - (ax + b)) = 0$，则 $\lim\limits_{x\to+\infty}(\frac{f(x)}{x} - a) = 0$，$b = \lim\limits_{x\to+\infty}(f(x) - ax)$.

渐近线-例

- 例：$y=\frac{x^3+x+1}{(x+1)^2}$, $\lim\limits_{x\to\pm\infty}\frac{f(x)}{x}=1$,

$$\lim_{x\to\pm\infty}(f(x)-x)=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{-2x^2+1}{(x+1)^2}=-2,$$

因此 $y=x-2$ 是 $x\to\pm\infty$ 时 $f(x)$ 的渐近线. 显然 $x=-1$ 是垂直渐近线.



函数作图

- 函数作图的步骤:
  - 确定定义域，间断点
  - 求导数，确定不可微点，稳定点，单调区间，极值点
  - 求 $f''(x)$, 确定凸凹区间，拐点.
  - 求渐近线.
  - 求出几个点（包括特殊点）的值.

函数作图

- 函数作图的步骤:
  - 确定定义域，间断点
  - 求导数，确定不可微点，稳定点，单调区间，极值点
  - 求 $f''(x)$, 确定凸凹区间，拐点.
  - 求渐近线.
  - 求出几个点（包括特殊点）的值.

函数作图

- 函数作图的步骤:
  - 确定定义域，间断点
  - 求导数，确定不可微点，稳定点，单调区间，极值点
  - 求 $f''(x)$, 确定凸凹区间，拐点.
  - 求渐近线.
  - 求出几个点（包括特殊点）的值.

函数作图

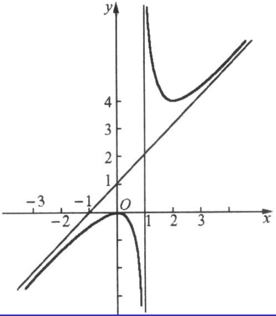
- 函数作图的步骤:
  - 确定定义域，间断点
  - 求导数，确定不可微点，稳定点，单调区间，极值点
  - 求 $f''(x)$, 确定凸凹区间，拐点.
  - 求渐近线.
  - 求出几个点（包括特殊点）的值.

函数作图

- 函数作图的步骤:
  - 确定定义域，间断点
  - 求导数，确定不可微点，稳定点，单调区间，极值点
  - 求 $f''(x)$, 确定凸凹区间，拐点.
  - 求渐近线.
  - 求出几个点（包括特殊点）的值.

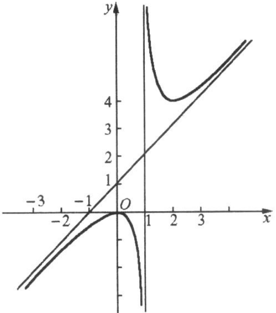
函数作图

- 例：$y = \frac{x^2}{x-1}$，
  - 定义域为 $x \neq -1$，没有间断点.
  - 导数 $y'(x) = \frac{x(x-2)}{(x-1)^2}$，没有不可微点. 稳定点 $x = 0, 2$，区间 $(-\infty, 0)$ 上函数递增，$(0,1)$ 和 $(1,2)$ 上递减，$x = 0$ 是极大点，$x = 2$ 是极小点.
  - $f''(x) = \frac{2}{(x-1)^3}$，区间 $(-\infty, 1)$ 上函数凸，$(1, +\infty)$ 上函数凹. 没有拐点
  - 渐近线 $y = x + 1$ ($x \to \pm\infty$)($\frac{f(x)}{x} \to 1$, $f(x) - x = \frac{x}{x-1} \to 1$), $x = 1$.
  - 几个点的值：$f(-1) = -\frac{1}{2}$, $f(0) = 0$, $f(\frac{1}{2}) = -\frac{1}{2}$, $f(2) = 4$, $f(3) = \frac{9}{2}$.



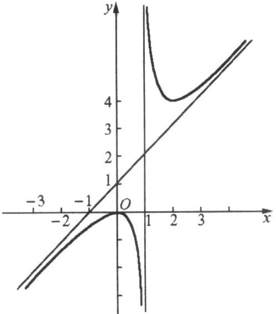
函数作图

- 例：$y = \frac{x^2}{x-1}$，
  - 定义域为 $x \neq -1$，没有间断点.
  - 导数 $y'(x) = \frac{x(x-2)}{(x-1)^2}$，没有不可微点. 稳定点 $x = 0, 2$，区间 $(-\infty, 0)$ 上函数递增，$(0,1)$ 和 $(1,2)$ 上递减，$x = 0$ 是极大点，$x = 2$ 是极小点.
  - $f''(x) = \frac{2}{(x-1)^3}$，区间 $(-\infty, 1)$ 上函数凸，$(1, +\infty)$ 上函数凹. 没有拐点
  - 渐近线 $y = x + 1$ ($x \to \pm\infty$)($\frac{f(x)}{x} \to 1$, $f(x) - x = \frac{x}{x-1} \to 1$), $x = 1$.
  - 几个点的值：$f(-1) = -\frac{1}{2}$，$f(0) = 0$, $f(\frac{1}{2}) = -\frac{1}{2}$, $f(2) = 4$, $f(3) = \frac{9}{2}$.



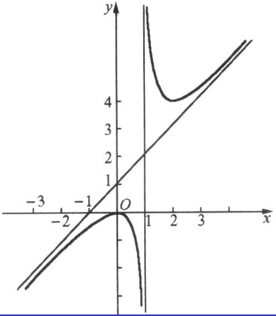
函数作图

- 例：$y=\frac{x^2}{x-1}$，
  - 定义域为 $x\neq -1$，没有间断点.
  - 导数 $y'(x)=\frac{x(x-2)}{(x-1)^2}$，没有不可微点. 稳定点 $x=0,2$，区间 $(-\infty,0)$ 上函数递增，$(0,1)$ 和 $(1,2)$ 上递减，$x=0$ 是极大点，$x=2$ 是极小点.
  - $f''(x)=\frac{2}{(x-1)^3}$，区间 $(-\infty,1)$ 上函数凸，$(1,+\infty)$ 上函数凹. 没有拐点
  - 渐近线 $y=x+1$ ($x\to\pm\infty$)($\frac{f(x)}{x}\to 1$, $f(x)-x=\frac{x}{x-1}\to 1$), $x=1$.
  - 几个点的值：$f(-1)=-\frac{1}{2}$, $f(0)=0$, $f(\frac{1}{2})=-\frac{1}{2}$, $f(2)=4$, $f(3)=\frac{9}{2}$.



函数作图

- 例：$y=\frac{x^2}{x-1}$，
  - 定义域为 $x \neq -1$，没有间断点.
  - 导数 $y'(x)=\frac{x(x-2)}{(x-1)^2}$，没有不可微点. 稳定点 $x=0,2$，区间 $(-\infty,0)$ 上函数递增，$(0,1)$ 和 $(1,2)$ 上递减，$x=0$ 是极大点，$x=2$ 是极小点.
  - $f''(x)=\frac{2}{(x-1)^3}$，区间 $(-\infty,1)$ 上函数凸，$(1,+\infty)$ 上函数凹. 没有拐点
  - 渐近线 $y=x+1$ ($x\to\pm\infty$)($\frac{f(x)}{x}\to 1$, $f(x)-x=\frac{x}{x-1}\to 1$), $x=1$.
  - 几个点的值: $f(-1)=-\frac{1}{2}$, $f(0)=0$, $f(\frac{1}{2})=-\frac{1}{2}$, $f(2)=4$, $f(3)=\frac{9}{2}$.



- 例：$y = \frac{x^2}{x-1}$，
  - 定义域为 $x \neq -1$，没有间断点.
  - 导数 $y'(x) = \frac{x(x-2)}{(x-1)^2}$，没有不可微点. 稳定点 $x = 0, 2$，区间 $(-\infty, 0)$ 上函数递增，$(0, 1)$ 和 $(1, 2)$ 上递减，$x = 0$ 是极大点，$x = 2$ 是极小点.
  - $f''(x) = \frac{2}{(x-1)^3}$，区间 $(-\infty, 1)$ 上函数凸，$(1, +\infty)$ 上函数凹. 没有拐点
  - 渐近线 $y = x + 1$ ($x \to \pm\infty$)($\frac{f(x)}{x} \to 1$, $f(x) - x = \frac{x}{x-1} \to 1$), $x = 1$.
  - 几个点的值: $f(-1) = -\frac{1}{2}$, $f(0) = 0$, $f(\frac{1}{2}) = -\frac{1}{2}$, $f(2) = 4$, $f(3) = \frac{9}{2}$.