
Problem Set 5

(Due date: Jan. 5)

- 考虑一个两人的交换经济，消费者 i 的效用函数为 $u^i(x_1^i, x_2^i) = \alpha_1^i \log x_1^i + \alpha_2^i \log x_2^i$ ，其中 $\alpha_j^i > 0, i = A, B$ 。消费者 i 关于商品 j 的初始禀赋为 w_j^i 。我们不妨假设商品 1 的价格为 1，商品 2 的价格为 p 。
 - 1) 求出消费者 i 的边际替代率 (marginal rate of substitution, MRS)。
 - 2) 定义消费者 i 的边际替代弹性 (marginal elasticity of substitution, MES) 为 $x_1^i dx_2^i / x_2^i dx_1^i$ 。证明 MES_i 为一个常数。
 - 3) 求出消费者 i 对商品 j 的需求函数，并把它表示为 MES 的函数。
 - 4) 求出该交换经济中的瓦尔拉斯均衡的价格。
 - 5) 假定有一个社会计划者试图实现两个消费者效用之和的最大化，前提是最后形成的配置必须是可行的 (feasible)。请求出满足社会计划者目标和约束的最优配置。
- Robinson Crusoe 决定每天用 8 个小时去搜寻食物，他可以用这些时间搜集椰子，也可以捕鱼。他每小时能捕 1 条鱼，搜集 2 只椰子。假设他消费的效用函数是 $U(F, C) = FC$ ，其中 F 是每天消费的鱼的数量， C 是椰子的数量。
 - 1) 给出表示 Robinson 生产可能性边界 (production possibility frontier) 和效用的无差异曲线的方程，并用图表示它们。
 - 2) 假设 Robinson 以一个社会计划者的身份来组织他的生产和分配（没有市场），请给出社会最优的鱼和椰子的数量。
 - 3) 现在我们以市场的观点来看到 Robinson 的问题。他既是劳动供给者，又是利润获得者，还是消费者。请计算这个市场的一般均衡。
- 假设每天早上北京有 6000 个人要开车从北边到南边工作，他们都希望最小化自己的通行时间。他们有两条路可以走：环路和直接穿过市区。走环路要花费 45 分钟，但是好处是不会堵车。穿过中心市区的好处是比较近，如果不堵车 20 分钟可以到，但是如果堵车的话，所需时间为 $20 + N/100$ ，其中 N 为选择走市区的人数。
 - (1) 假设两条路都不收取通行费，那么均衡时将有多少人选择走市区？每个人花费的时间各自是多少？
 - (2) 假设政府希望通过限行的方式来最小化所有人花费的总时间，即政府每天随机抽取 N^* 个人允许其通过市区。请问此时最优的人数限制为多少？在这个限制下，每个人花费时间的期望值是多少？
 - (3) 假设政府希望通过收取市区通行费的方式来最小化所有人花费的总时间。在这个政策下政府将对每个通行市区的人收取同样的费用 F ，并将收到的总费用在 6000 个人之间平均分

配。假设每分钟对于第 i 个人的价值为 $w_i = 15 - i/1000$ 块钱, $i = 1, 2, \dots, 6000$, 求解最优费用 F 。在这个费用下每个人各花费多少通行时间? 如果把缴费和返还得到费用折算成时间, 每个人相当于花费了多少时间?

(4) 请比较以上三种情况下社会福利的变化, 并给出这种变化的原因。

4. 一个企业的成本函数是: $C = 4q^2$, 其中 q 是企业的产量。企业能够以单位价格 64 元销售任意数量的产品。但是, 企业的生产需要排出污水, 给邻近居民带来损失, 总的损失 D 依赖于企业的产量: $D = 4q + q^2$ 。

- 1) 假定企业具有污染的产权。它会生产多少单位产品? 如果居民与企业进行协商, 那么, 双方协商的产量是多少? 居民最少要向企业付多少钱, 才能使得企业生产这个产量? 最多需要付多少钱? 假定双方协商的成本为零。
- 2) 假定居民具有不受污染的产权。企业生产多少单位产品? 如果企业与居民进行协商, 那么, 双方协商的产量是多少? 企业最少要向居民付多少钱, 才能使得企业生产这个产量? 最多需要付多少钱? 假定双方协商的成本为零。
- 3) 假定企业具有污染的产权。如果政府想通过税收来控制外部性, 它应该是多少? 政府的税收收入是多少?

5. Suppose that the oil industry in Utopia is perfectly competitive and that all firms draw oil from a single (and practically inexhaustible) pool. Assume that each competitor believes that he or she can sell all the oil he or she can produce at a stable world price of \$10 per barrel and that the cost of operating a well for one year is \$1,000.

Total output per year (Q) of the oil field is a function of the number of wells (N) operating in the fields. In particular

$$Q = 500N - N^2$$

And the amount of oil produced by each well (q) is given by

$$q = 500 - N$$

- a) Describe the equilibrium output and the equilibrium number of wells in this perfectly competitive case. Is there a divergence between private and social marginal cost in the industry?
- b) Suppose now that the government nationalizes the oil field. How many oil wells should it operate? What will total output be? What will the output per well be?
- c) As an alternative to nationalization, the Utopian government is considering an annual license fee per well to discourage overdrilling. How large should this license fee be if it is to prompt the industry to drill the optimal number of wells?