二元函数的连续性

$z = f(x, y), (x, y) \in D$

点 $P_0(x_0, y_0) \in D$,且 $\exists \delta > 0 \quad s.t. \quad U_\delta(P_0) \subset D$

$z = f(x, y), (x, y) \in D$

点 $P_0(x_0, y_0) \in D$,且 $\exists\delta > 0 \;\; s.t. \;\; U_\delta(P_0) \subset D$

定义

称 $f(x, y)$ 在 P_0 点连续,如果 $\lim\limits_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x, y) = f(x_0, y_0)$.

$z = f(x,y), (x,y) \in D$

点 $P_0(x_0, y_0) \in D$,且 $\exists \delta > 0 \;\; s.t. \;\; U_\delta(P_0) \subset D$

定义

称 $f(x,y)$ 在 P_0 点连续,如果 $\lim\limits_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x,y) = f(x_0,y_0)$.

$z = f(x,y)$ 在 D 上连续是指 $z = f(x,y)$ 与 D 的每一点上连续

记作$f(x,y) \in C(D)$.

（注意,边界点的连续是指“单边连续”,在此不细论.）

定义　　$f(x,y)$ 称为二元初等函数，

如果它分别是 x （y 视为常数）和 y （x 视为常数）的一元初等函数.

定义　$f(x,y)$ 称为二元初等函数，

如果它分别是 x （y 视为常数）和 y （x 视为常数）的一元初等函数.

定理　二元初等函数在定义域内连续.

定义　　$f(x, y)$ 称为二元初等函数，

如果它分别是 x （y 视为常数）和 y （x 视为常数）的一元初等函数.

定理　　$\boxed{\text{二元初等函数在定义域内连续.}}$

$\boxed{\text{有界闭区域上的连续函数有界.}}$

定义　$f(x,y)$ 称为二元初等函数，

如果它分别是 x（y 视为常数）和 y（x 视为常数）的一元初等函数.

定理　二元初等函数在定义域内连续.

有界闭区域上的连续函数有界.

有界闭区域上的连续函数在闭区域上达到最大最小值.

中介值定理

设D为区域, $f(x,y) \in C(D), P_1, P_2 \in D, f(P_1) < f(P_2)$,则

$\forall \eta \in [f(P_1), f(P_2)] \quad \exists P_0 \quad \in D \quad s.t. \quad f(P_0) = \eta$.

(几何解释,水平切割面.)

例　$D \subset \mathbb{R}$ 为有界闭区域, $P_0(x_0, y_0) \notin D$ 则

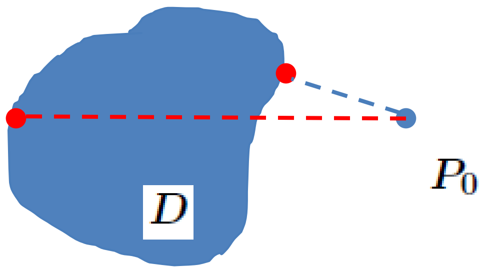
$$\exists P_1, P_2 \in D, \quad s.t. \;\; \rho(P_0, P_1) = \max_{P \in D} \rho(P_0, P) \,,$$

$$\rho(P_0, P_2) = \min_{P \in D} \rho(P_0, P) \,.$$

例　$D \subset \mathbb{R}$ 为有界闭区域, $P_0(x_0, y_0) \notin D$ 则

$$\exists P_1, P_2 \in D, \quad s.t. \quad \rho(P_0, P_1) = \max_{P \in D} \rho(P_0, P) \, ,$$

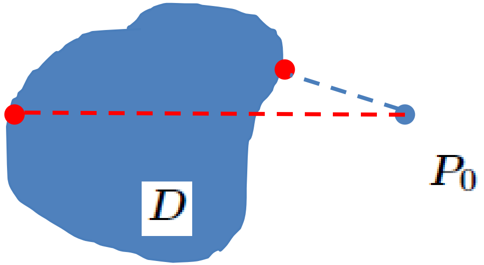
$$\rho(P_0, P_2) = \min_{P \in D} \rho(P_0, P) \, .$$



例　$D \subset \mathbb{R}$ 为有界闭区域, $P_0(x_0, y_0) \notin D$ 则

$$\exists P_1, P_2 \in D, \quad s.t. \;\; \rho(P_0, P_1) = \max_{P \in D} \rho(P_0, P) \, ,$$

$$\rho(P_0, P_2) = \min_{P \in D} \rho(P_0, P) \, .$$



距离函数为 $\rho(x, y) = \sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2}, (x, y) \in D$

它是初等函数,在闭区域 D 上连续,所以有最大最小值.

例

$f(x,y)\in C(D)$, D 为区域, $(x_i,y_i)\in D, i=1,2,3,\cdots,n$ 则

$$\exists(\xi,\eta)\in D \quad s.t. \quad f(\xi,\eta)=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} f(x_i,y_i) \ .$$

例

$f(x,y)\in C(D)$, D 为区域, $(x_i,y_i)\in D, i=1,2,3,\cdots,n$ 则

$$\exists(\xi,\eta)\in D\quad s.t.\quad f(\xi,\eta)=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}f(x_i,y_i)\,.$$

(解释：对区域 D 上的连续函数来说,任意 n 个点的平均高度一定等于 D 上某一点的高度.)

例

$f(x,y) \in C(D)$，D 为区域, $(x_i, y_i) \in D, i = 1,2,3,\cdots,n$ 则

$$\exists(\xi,\eta) \in D \quad s.t. \quad f(\xi,\eta) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} f(x_i, y_i)\ .$$

(解释：对区域 D 上的连续函数来说,任意 n 个点的平均高度一定等于 D 上某一点的高度.)

证明：设 $\{f(x_i, y_i)\}_{i=1}^{n}$ 中最大一个值为 M，最小一个值为 m，

$$\text{则 } m \le \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} f(x_i, y_i) \le M$$

例

$f(x, y) \in C(D)$, D 为区域, $(x_i, y_i) \in D, i = 1, 2, 3, \cdots, n$ 则

$$\exists(\xi, \eta) \in D \quad s.t. \quad f(\xi, \eta) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} f(x_i, y_i) .$$

(解释：对区域 D 上的连续函数来说,任意 n 个点的平均高度一定等于 D 上某一点的高度.)

证明：设 $\{f(x_i, y_i)\}_{i=1}^{n}$ 中最大一个值为 M ,最小一个值为 m ,

$$\text{则 } m \le \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} f(x_i, y_i) \le M$$

由于 $f(x, y) \in C(D)$ 所以根据连续函数中介值定理

$$\exists(\xi, \eta) \in D \quad s.t. \quad f(\xi, \eta) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} f(x_i, y_i) .$$

例

$$f(x,y)=\begin{cases}\frac{x^2-y^2}{x^2+y^2}, & x^2+y^2\neq 0\\ 0, & x^2+y^2=0\end{cases}$$,在 $(0,0)$ 点不连续.

函数在$(0,0)$点极限不存在.

例
$$f(x,y)=\begin{cases} y^2\ln(x^2+y^2), & x^2+y^2\neq 0 \\ 0, & x^2+y^2=0 \end{cases}$$
,在 $\mathbb{R}^2$ 上连续.

例

$$f(x,y)=\begin{cases} y^2\ln(x^2+y^2), & x^2+y^2\neq 0 \\ 0, & x^2+y^2=0 \end{cases}$$

,在 $\mathbb{R}^2$ 上连续.

由于$f(x,y)$于$(x,y)\neq(0,0)$处连续, 所以, 只需要考察函数于$(0,0)$点的连续性.

例
$$f(x,y)=\begin{cases} y^2\ln(x^2+y^2), & x^2+y^2\neq 0 \\ 0, & x^2+y^2=0 \end{cases}$$,在 $\mathbb{R}^2$ 上连续.

由于$f(x,y)$于$(x,y)\neq(0,0)$处连续, 所以, 只需要考察函数于$(0,0)$点的连续性.

令 $x=r\cos\theta, y=r\sin\theta$,则有

$$0\leq y^2|\ln(x^2+y^2)|=r^2\sin^2\theta|\ln r^2|\leq r^2|\ln r^2|=2r^2|\ln r|\to 0(r\to 0+0)$$

例
$$f(x,y)=\begin{cases} y^2\ln(x^2+y^2), & x^2+y^2\neq 0 \\ 0, & x^2+y^2=0 \end{cases}$$,在 $\mathbb{R}^2$ 上连续.

由于$f(x,y)$于$(x,y)\neq(0,0)$处连续, 所以, 只需要考察函数于$(0,0)$点的连续性.

令 $x=r\cos\theta, y=r\sin\theta$,则有

$$0\leq y^2|\ln(x^2+y^2)|=r^2\sin^2\theta|\ln r^2|\leq r^2|\ln r^2|=2r^2|\ln r|\to 0(r\to 0+0)$$

$$\therefore \lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)=0=f(0,0) .$$

所以$f(x,y)$于$(0,0)$点连续, 所以$f(x,y)\in C(\mathrm{R}^2)$.