# 1. 求极限

- $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}} \frac{\cos 5x}{\cos 3x} \xlongequal{x=\frac{\pi}{2}+t} \lim\limits_{t\to 0} \frac{\cos(5t+\frac{5\pi}{2})}{\cos(3t+\frac{3\pi}{2})} = \lim\limits_{t\to 0} \frac{-\sin 5t}{\sin 3t} = -\frac{5}{3}.$
- $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{\sqrt{n^2+1}-\sqrt{n}}{n+1} = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{\sqrt{1+\frac{1}{n^2}}-\sqrt{\frac{1}{n}}}{1+\frac{1}{n}} = 1.$
- $\lim\limits_{x\to 0}(1+\sin 2x)^{\frac{1}{x}} = \lim\limits_{x\to 0}(1+\sin 2x)^{\frac{1}{\sin 2x}\frac{\sin 2x}{x}} = e^2.$
- $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{1+\frac{2}{n}}.$ 解：$1 \le \sqrt[n]{1+\frac{2}{n}} \le \sqrt[n]{2} \to 1.$

# 2. 求导数或微分

- 求函数 $y = e^{|x+1|^3}$ 的导函数.
  解：$(|x|^3)' = 3x|x|$. $y' = e^{|x+1|^3} 3(x+1)|x+1|$.
- 求函数 $y = \log_x e$ 在 $x = 2$ 处的微分.
  解：$y = \log_x e = \frac{1}{\ln x}$, $y' = -\frac{1}{x(\ln x)^2}$. $dy|_{x=2} = -\frac{1}{2(\ln 2)^2} dx$.
- 求函数 $y = (1+x^2)\arctan x$ 的二阶导数.
  解：$y' = 2x\arctan x + 1$, $y'' = 2\arctan x + \frac{2x}{1+x^2}$.
- 求函数 $f(x) = \int_x^{2x} t^2\sqrt{t^2+1}\, dt$ 的导数.
  解：$f'(x) = 8x^2\sqrt{4x^2+1} - x^2\sqrt{x^2+1})$.

# 3. 求积分

- $$\int \frac{1+\cos^2 x}{1+\cos 2x} dx = \int \frac{1+\cos^2 x}{2\cos^2 x} dx = \frac{1}{2}\tan x + \frac{1}{2}x + C,$$
- $$\int |x(x-1)| dx.$$

  解： 令$F(x) = \int_0^x |t(t-1)| dt = \begin{cases} \frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3}, & x \geq 1 \\ -\frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{2}x^2, & 0 \leq x < 1 \\ \frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{2}x^2, & x \geq 1 \end{cases}.$

  $$\int |x(x-1)| dx = F(x) + C.$$
- $$\int_0^{\frac{1}{2}} \frac{1}{(x-1)(x-2)} dx = -\int_0^{\frac{1}{2}} \frac{1}{x-1} dx + \int_0^{\frac{1}{2}} \frac{1}{x-2} dx$$
  $$= -\ln\frac{1}{2} + \ln\frac{3}{2} - \ln 2 = \ln\frac{3}{2}.$$

# 4. 判断题

- 不存在 $(0,\infty)$ 上的函数 $F(x)$，使得对任意 $x>0$, 有 $F'(x)=\frac{e^x}{x}$.
  错，$F(x)=\int_1^x \frac{e^t}{t}dt$满足要求.
- 若 $f(x)$, $g(x)$ 在 $x=a$ 的某个空心邻域上有定义，$g(x)$ 是处处不为 0 的有界函数. 若 $x\to a$ 时 $f(x)$ 是无穷大量，则 $x\to a$ 时 $f(x)g(x)$ 也是无穷大量.
  错：如$f(x)=\frac{1}{x-a}$, $g(x)=x-a$.

# 第五题

- (本题12分)设$f(x)=\operatorname{sgn}x$, 右极限 $f(0+0)$、右导数 $f'(0+0)$ 和 $\lim\limits_{x\to 0+0} f'(x)$ 是否存在?若存在，求出其值.

  解：因为$x>0$时，$f(x)=1$, 所以右极限 $f(0+0)=1$;
  右导数 $f'(0+0)=\lim\limits_{\Delta x\to 0+0}\frac{f(\Delta x)-f(0)}{\Delta x}=\lim\limits_{\Delta x\to 0+0}\frac{1-0}{\Delta x}$不存在.
  又$x>0$时，$f'(x)=0$,因此$\lim\limits_{x\to 0+0} f'(x)=0$.

# 第六题

- (本题14分)设 $f$ 是$(a,b)$ 上的连续函数，$x_n$ 和 $y_n$ 是$(a,b)$ 中的两个趋向于 $a$ 的序列，且有 $\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n)=A$，$\lim\limits_{n\to\infty} f(y_n)=B$. 这里 $A<B$. 则对任意 $C\in(A,B)$，存在$(a,b)$ 中的序列 $z_n\to a$，使得 $\lim\limits_{n\to\infty} f(z_n)=C$.
  证明：由于$\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n)=A<C$，$\lim\limits_{n\to\infty} f(y_n)=B>C$，存在$N_0$，当$n>N_0$ 时，$f(x_n)<C<f(y_n)$. 由介值定理，$x_n$与$y_n$之间存在$z_n$，使得$f(z_n)=C$. 对$1\le n\le N_0$，可以取$z_n=\frac{a_n+b_n}{2}$. 显然 $\lim\limits_{n\to\infty} f(z_n)=C$. 下面只需证明$z_n\to a$.
  由于$\min\{x_n,y_n\}<z_n<\max\{x_n,y_n\}$，$\min\{x_n,y_n\}=\frac{a_n+b_n}{2}-\frac{|a_n-b_n|}{2}\to a$，$\max\{x_n,y_n\}=\frac{a_n+b_n}{2}+\frac{|a_n-b_n|}{2}\to a$，由夹逼定理，$z_n\to a$.