函数的连续性

本段内容要点:

定义函数在一点的连续性
定义函数在一点的间断性
定义函数在一点的单侧连续性
定义函数在一个区间上的连续性
讨论连续函数的四则运算及复合
讨论初等函数的连续性

连续函数的本质

自变量在某区间上连续变动时,
相应的因变量也连续地变动.

连续函数的本质

自变量在某区间上连续变动时,
相应的因变量也连续地变动.

自变量的改变量$\to 0$时, 相应因变量的改变量也$\to 0$.

定义: 设$y=f(x)$在$x=x_0$的某实心邻域$U(x_0)$上有定义.

若$x-x_0\to 0 \Rightarrow f(x)-f(x_0)\to 0$,

则称$y=f(x)$在$x=x_0$点连续.

定义: 设$y=f(x)$在$x=x_0$的某实心邻域$U(x_0)$上有定义.

若$x-x_0\to 0\Rightarrow f(x)-f(x_0)\to 0$,

则称$y=f(x)$在$x=x_0$点连续.

$x\to x_0$

定义: 设$y=f(x)$在$x=x_0$的某实心邻域$U(x_0)$上有定义.
若$\boxed{x-x_0\to 0\ \Rightarrow f(x)-f(x_0)\to 0,}$
则称$y=f(x)$在$x=x_0$点连续.

(等价形式1)
设$y=f(x)$在$x=x_0$的某实心邻域$U(x_0)$上有定义.
若$\boxed{\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=f(x_0),}$则称$f(x)$在$x_0$点连续.

定义: 设$y=f(x)$在$x=x_0$的某实心邻域$U(x_0)$上有定义.

若$\boxed{x-x_0\to 0 \;\Rightarrow\; f(x)-f(x_0)\to 0,}$

则称$y=f(x)$在$x=x_0$点连续.

(等价形式1)

设$y=f(x)$在$x=x_0$的某实心邻域$U(x_0)$上有定义.

若$\boxed{\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=f(x_0),}$则称$f(x)$在$x_0$点连续.

(等价形式2)

设$y=f(x)$在$x=x_0$的某实心邻域$V(x_0)$上有定义.

若$\forall\varepsilon>0,\ \exists\delta>0\ s.t.$

$|f(x)-f(x_0)|<\varepsilon,\ \ 0<|x-x_0|<\delta,$

则称$f(x)$在x_0点连续.

称$x-x_0$为自变量在x_0点处的增量，记为Δx

称$f(x)-f(x_0)$为函数在x_0点处的增量，记为Δy

即$\Delta x=x-x_0$, $\Delta y=f(x)-f(x_0)$.

称$x - x_0$为自变量在x_0点处的增量，记为Δx

称$f(x) - f(x_0)$为函数在x_0点处的增量, 记为Δy

即$\Delta x = x - x_0$, $\Delta y = f(x) - f(x_0)$.

连续性定义为

$$\boxed{\lim_{\Delta x \to 0} \Delta y = 0}$$

称$x - x_0$为自变量在x_0点处的增量，记为Δx

称$f(x) - f(x_0)$为函数在x_0点处的增量，记为Δy

即$\Delta x = x - x_0$，$\Delta y = f(x) - f(x_0)$.

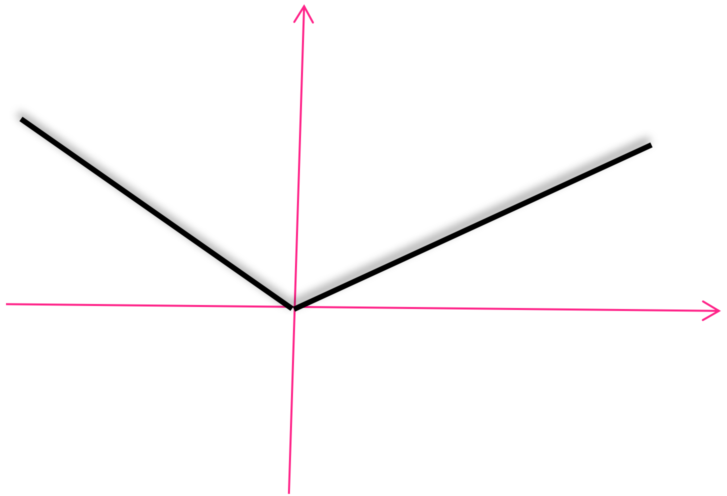
连续性定义为

$$\boxed{\lim_{\Delta x \to 0} \Delta y = 0}$$

$$\boxed{\text{或者}\Delta y \to 0\ (\Delta x \to 0)}$$

函数连续性的几何意义为图形不会断开

例: $y = |x|$在$x = 0$点连续.



定理: $y = f(x)$在x_0点连续$\Leftrightarrow$

$$f(x)\text{在}x_0\text{点的极限存在且等于}f(x_0).$$

函数在x_0点连续三要素为

(1) $f(x_0)\ \exists$,　　(2) $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)\ \exists$,　　(3) $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = f(x_0)$.

函数在x_0点连续三要素为

(1) $f(x_0)\ \exists$, (2) $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)\ \exists$, (3) $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=f(x_0)$.

例: $f(x)=\begin{cases} x, & x<0 \\ x+1, & x\geqslant 0 \end{cases}$ 在$x=0$点不连续.

函数在x_0点连续三要素为

(1) $f(x_0)\ \exists$,　(2) $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)\ \exists$,　(3) $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = f(x_0)$.

例: $f(x) = \begin{cases} x, & x < 0 \\ x+1, & x \geqslant 0 \end{cases}$ 在$x = 0$点不连续.

这是因为

$\lim\limits_{x\to 0+0} f(x) = 1,\ \lim\limits_{x\to 0-0} f(x) = 0.$

故$\lim\limits_{x\to 0} f(x)$不存在.

函数在x_0点连续三要素为

(1) $f(x_0)\ \exists$, (2) $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)\ \exists$, (3) $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = f(x_0)$.

例: $f(x) = \begin{cases} 0, & x = 0 \\ \dfrac{1}{x}, & x \neq 0 \end{cases}$ 在$x = 0$点不连续.

因为$\lim\limits_{x\to 0} f(x)$不存在.

函数在x_0点连续三要素为

$$\text{(1)}\ f(x_0)\ \exists, \qquad \text{(2)}\ \lim_{x\to x_0} f(x)\ \exists, \qquad \text{(3)}\ \lim_{x\to x_0} f(x) = f(x_0).$$

例: $f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{\sin x}, & x \neq k\pi \\ 0, & x = k\pi \end{cases}$ 在$x = k\pi$点不连续.

因为$\lim\limits_{x\to k\pi} f(x)$不存在.

定义:

设$y=f(x)$在$x=x_0$的某(实心或空心)邻域上有定义. 若有下列三者之一,
则称$x=x_0$为函数$y=f(x)$的$\boxed{\textbf{间断点}:}$

(1) $f(x_0)$不存在;

(2) $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$不存在;

(3) $f(x_0)$和$\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$存在但不相等.

定义:

设$y=f(x)$在$x=x_0$的某(实心或空心)邻域上有定义. 若有下列三者之一,
则称$x=x_0$为函数$y=f(x)$的**间断点**:

(1) $f(x_0)$不存在; (2) $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$不存在;

(3) $f(x_0)$和$\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$存在但不相等.

若间断点处函数的左右极限都存在,
则称为第一类间断点

定义:

设$y = f(x)$在$x = x_0$的某(实心或空心)邻域上有定义. 若有下列三者之一,
则称$x = x_0$为函数$y = f(x)$的**间断点**:

(1) $f(x_0)$不存在; (2) $\lim\limits_{x \to x_0} f(x)$不存在;

(3) $f(x_0)$和$\lim\limits_{x \to x_0} f(x)$存在但不相等.

若间断点处函数的左右极限都存在,
则称为<u>第一类间断点</u>

(可去间断-左右极限都存在并相等;
跳跃间断-左右极限都存在但不相等).

定义:

设$y = f(x)$在$x = x_0$的某(实心或空心)邻域上有定义. 若有下列三者之一,
则称$x = x_0$为函数$y = f(x)$的$\boxed{\textbf{间断点}}$:

(1) $f(x_0)$不存在; (2) $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$不存在;

(3) $f(x_0)$和$\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$存在但不相等.

若间断点处函数的左右极限都存在,
则称为第一类间断点

否则, 称为第二类间断点(振荡间断, 无穷间断).

注:

$f(x_0)$不存在时称为间断点是指x_0为$f(x)$的孤立无定义点.

注:

$\boxed{f(x_0)\text{不存在时称为间断点是指}x_0\text{为}f(x)\text{的孤立无定义点.}}$

如$f(x)=\dfrac{1}{x}$在$x=0$点间断,

但不能说$f(x)=\ln x$在$x=0$点间断.

例: 讨论$f(x)=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{x^{2n}-1}{x^{2n}+1}$的间断点及其类型.

例: 讨论$f(x)=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{x^{2n}-1}{x^{2n}+1}$的间断点及其类型.

$$f(x)=\begin{cases}1, & |x|>1\\ 0, & |x|=1\\ -1, & |x|<1\end{cases}$$

例: 讨论$f(x)=\lim_{n\to\infty}\frac{x^{2n}-1}{x^{2n}+1}$的间断点及其类型.

$$f(x)=\begin{cases}1, & |x|>1\\ 0, & |x|=1\\ -1, & |x|<1\end{cases}$$

故$x=\pm1$为函数的第一类间断点.

例: $x=0$是函数$f(x)=e^{x+\frac{1}{x}}$的第二类间断点.

例: $x=0$是函数$f(x)=e^{x+\frac{1}{x}}$的第二类间断点.

事实上,
$x=0$是函数的孤立无定义点,
同时$f(0+0)=+\infty$, $f(0-0)=0$.

例: $x=0$是函数$f(x)=e^{x+\dfrac{1}{x}}$的第二类间断点.

事实上,
$x=0$是函数的孤立无定义点,
同时$f(0+0)=+\infty$, $f(0-0)=0$.

这里约定记号
$$\lim_{x\to x_0+0} f(x)=f(x_0+0),\ \lim_{x\to x_0-0} f(x)=f(x_0-0)$$

定义:

若$\lim\limits_{x\to x_0+0} f(x) = f(x_0)$, 则称$f(x)$在$x_0$点**右连续**.

若$\lim\limits_{x\to x_0-0} f(x) = f(x_0)$, 则称$f(x)$在$x_0$点**左连续**

定义:

若 $\lim\limits_{x\to x_0+0} f(x) = f(x_0)$, 则称$f(x)$在$x_0$点**右连续**.

若 $\lim\limits_{x\to x_0-0} f(x) = f(x_0)$, 则称$f(x)$在$x_0$点**左连续**

定理: $f(x)$在x_0点连续$\Leftrightarrow$ $f(x)$在x_0点左、右都连续.

定义:

若 $\lim\limits_{x\to x_0+0} f(x)=f(x_0)$, 则称 $f(x)$ 在 x_0 点**右连续**.

若 $\lim\limits_{x\to x_0-0} f(x)=f(x_0)$, 则称 $f(x)$ 在 x_0 点**左连续**

定理: $f(x)$ 在 x_0 点连续 $\Leftrightarrow$ $f(x)$ 在 x_0 点左、右都连续.

定义: 若连续城某区间上每一点都连续, 则称此函数为此区间上的连续函数.

定义: 若连续城某区间上每一点都连续, 则称此函数为此区间上的连续函数.

注:

函数在$[a,b]$连续是指在$x = a$点右连续, 在$x = b$点左连续.

用记号$\mathrm{C}[a,b]$表示定义在$[a,b]$上连续函数的全体构成的集合.

如果$f(x)$在$[a,b]$上连续, 则记为$f(x) \in \mathrm{C}[a,b]$

例: a取何值时, 函数$f(x)=\begin{cases} e^x, & x<0 \\ a+x, & x\geqslant 0 \end{cases}$

在$(-\infty,+\infty)$上连续?

例: a取何值时, 函数$f(x)=\begin{cases} e^x, & x<0 \\ a+x, & x \geqslant 0 \end{cases}$ 在$(-\infty,+\infty)$上连续?

解: 因为$f(x) \in C_{(0,+\infty)}$, $f(x) \in C_{(-\infty,0)}$, 所以只需考虑$x=0$点.

例: a取何值时, 函数$f(x)=\begin{cases} e^x, & x<0 \\ a+x, & x \geqslant 0 \end{cases}$

在$(-\infty,+\infty)$上连续?

解: 因为$f(x) \in C_{(0,+\infty)}$, $f(x) \in C_{(-\infty,0)}$, 所以只需考虑$x=0$点.

因为 $\lim\limits_{x \to 0-0} f(x) = \lim\limits_{x \to 0-0} e^x = 1$,

$\lim\limits_{x \to 0+0} f(x) = \lim\limits_{x \to 0+0} (a+x) = a$.

例: a取何值时, 函数$f(x)=\begin{cases} e^x, & x<0 \\ a+x, & x\geqslant 0 \end{cases}$在$(-\infty,+\infty)$上连续?

解: 因为$f(x)\in C_{(0,+\infty)}$, $f(x)\in C_{(-\infty,0)}$, 所以只需考虑$x=0$点.

因为$\lim\limits_{x\to 0-0} f(x)=\lim\limits_{x\to 0-0} e^x=1$,
$\lim\limits_{x\to 0+0} f(x)=\lim\limits_{x\to 0+0}(a+x)=a$.

而$f(0)=a$, 所以要$f(x)$在$x=0$点连续必须
$\lim\limits_{x\to 0-0} f(x)=\lim\limits_{x\to 0+0} f(x)=f(0)$.
即$a=1$.

连续函数的运算

连续函数的运算

定理: 在某点连续的两函数的和, 差, 积, 商(有意义时)仍在此点连续.

连续函数的运算

定理: 在某点连续的两函数的和, 差, 积, 商(有意义时)仍在此点连续.

定理: 连续函数的复合仍为连续函数(极限复合运算).

连续函数的运算

定理: 在某点连续的两函数的和, 差, 积, 商(有意义时)仍在此点连续.

定理: 连续函数的复合仍为连续函数(极限复合运算).

定理: 连续函数的反函数(if any)连续.

连续函数的运算

定理: 在某点连续的两函数的和, 差, 积, 商(有意义时)仍在此点连续.

定理: 连续函数的复合仍为连续函数(极限复合运算).

定理: 连续函数的反函数(if any)连续.

函数有反函数时, x与y是1-1对应的

即$\Delta x \neq 0 \quad \Leftrightarrow \quad \Delta y \neq 0$

连续函数的运算

定理: 在某点连续的两函数的和, 差, 积, 商(有意义时)仍在此点连续.

定理: 连续函数的复合仍为连续函数(极限复合运算).

定理: 连续函数的反函数(if any)连续.

函数有反函数时, x与y是1-1对应的

即$\Delta x \neq 0 \;\Leftrightarrow\; \Delta y \neq 0$

所以, $\boxed{\Delta x \to 0 \Rightarrow \Delta y \to 0}$与

$\boxed{\Delta y \to 0 \Rightarrow \Delta x \to 0}$同时成立.

初等函数的连续性

初等函数的连续性

定理: 基本初等函数在它们定义域内是连续的.

初等函数的连续性

定理: 基本初等函数在它们定义域内是连续的.

定理: 初等函数在定义域上是连续的.

初等函数在定义域上求极限用直接代入求值法.

初等函数在定义域上求极限用直接代入求值法.

如$\lim\limits_{x\to 2}\sin\left(2x-\frac{1}{2}\right)=\sin\left(4-\frac{1}{2}\right)=\sin\frac{7}{2}$.

初等函数在定义域上求极限用直接代入求值法.

如$\lim\limits_{x\to 2}\sin\left(2x-\frac{1}{2}\right)=\sin\left(4-\frac{1}{2}\right)=\sin\frac{7}{2}$.

又如$\lim\limits_{x\to 0}\frac{\ln(1+x)}{x}=\lim\limits_{x\to 0}\ln(1+x)^{\frac{1}{x}}$

$$=\ln\lim_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}}=\ln e=1.$$

初等函数在定义域上求极限用直接代入求值法.

如$\lim\limits_{x\to 2}\sin\left(2x-\frac{1}{2}\right)=\sin\left(4-\frac{1}{2}\right)=\sin\frac{7}{2}$.

又如$\lim\limits_{x\to 0}\frac{\ln(1+x)}{x}=\lim\limits_{x\to 0}\ln(1+x)^{\frac{1}{x}}$

$$=\ln\lim_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}}=\ln e=1.$$

可与复合函数的极限相比较.

本段知识要点:

函数在一点的连续性
函数在一点的间断性
函数在一点的单侧连续性
函数在一个区间上的连续性
连续函数的四则运算及复合还连续
初等函数在定义域上连续
函数在连续点求极限是直接代入求函数值