

8. (10 分) 设函数

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{xy}{(x^2 + y^2)^\alpha}, & (x, y) \neq (0, 0), \\ 0, & (x, y) = (0, 0). \end{cases}$$

(a) 当 α 取什么值时, $f(x, y)$ 在 $(0, 0)$ 处连续?

(b) 当 α 取什么值时, $f(x, y)$ 在 $(0, 0)$ 处可微?

9. (10 分) 设 $f(x), g(x)$ 为闭区间 $[a, b]$ 上的连续函数. 证明: 存在 $\xi \in (a, b)$ 满足

$$f(\xi) \int_{\xi}^b g(t) dt = g(\xi) \int_a^{\xi} f(t) dt.$$

10. (10 分) 设 $f(x)$ 在整个数轴上有定义, 并且任意阶的导数都存在. 如果对所有 $n \geq 0$, 都有

$$|f^{(n)}(x)| \leq |x|^n.$$

加上条件 $f(0) = 0$.

证明: $f(x) \equiv 0$. (这里 $f^{(0)}(x)$ 就是 $f(x)$)