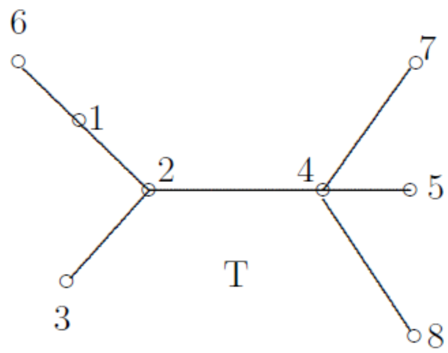
第 6 章　树

6.1 由于化学中同分异构体计数的问题和社会学中族谱研究问题的需要，对无序树（无根树）的计数研究十分丰富。Cayley 提出，由 n 个不同的顶点组成的不同的树的数目 为$T_n = n^{n-2}$。 历史上针对该式的证明方法从繁复到简单经历了十分漫长的历程。下面我们来看 1918 年数学家 Prufer 提出的一种方法。让我们从例子入手：

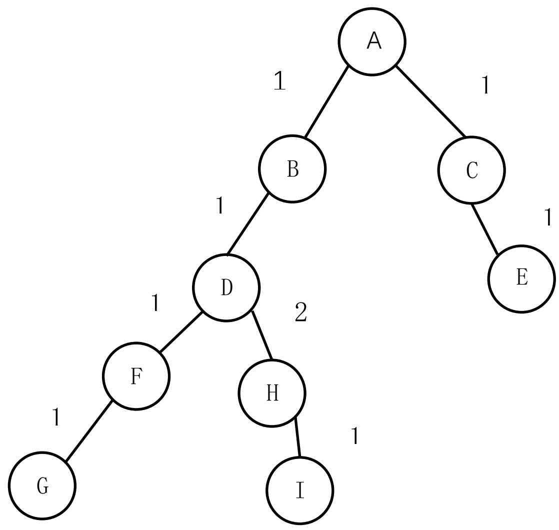


对于任何一棵 n 元树 T，可以将其和一个 n-2 元序列进行对应。如上图所示。

1） 取 T 中标号最小的悬挂点 3（我们将度数为 1 的节点定义为悬挂点）的临点编号 2 作为a_1，即$a_1 = 2$
2） 删除顶点 3，取最小的悬挂点 5 个临点 4，$a_2 = 4$
3） 接着删去顶点 5，同样的方法，得到最小的悬挂点 6 的临点 1，$a_3 = 1$
4） 如此继续可以得到$a_4 = 2$，$a_5 = 4$，$a_6 = 4$，最后的树是一个 2 元树。
这棵树对应一个 6 元序列 S: (2,4,1,2,4,4)

现在，请你说明如**何从一个 6 元序列 S 恢复一个 8 元树**，并说明该恢复结果是唯一的。只要把这个结果一般化，你就完成了这个公式的证明。

6.2　设 T 是一棵带权树，树的每一条边带一个正权。又设 S 是 T 的顶点集，T/S 是从树 T 中将 S 中顶点删去后得到的森林。若 T/S 中所有树的从根到叶的路长都不超过 d，则称 T/S 是一个 d 森林。



(1) 设计一个算法求 T 的一个最小顶点集 S，使 T/S 是 *d* 森林。
(2) 简要分析你所设计算法的正确性和时间复杂度。
(3) 对上图所表示的树 T，给出当 d=2 时，你在(1)中设计的算法运行得到的最小顶点集 S。

注释：算法给出算法思想或伪码就可以了。