2016 年秋季学期线性代数第二次作业

开课学院：光华管理学院
授课老师：傅翔
联系方式：fuxiang@math.pku.edu.cn
截止日期：2016 年 11 月 16 日

本次作业共 12 题，满分 150 分，作业成绩的 10%将计入最终成绩。

1. （15 分）计S_n为 n 个元素的置换群，即所有集合{1,2,...,n}到自身的一一映射，其中元素称为置换，置换的乘法即两个映射的复合。其中相邻两个元素做对换称为简单对换。求证任一置换可以分解成简单对换的乘积。
2. （15 分）求证对于任意$\sigma \in S_n$，其中逆序数等于上述分解的最短长度。
3. （10 分）对于任意$\sigma \in S_n$，定义$\mathrm{sgn}(\sigma) = (-1)^k$，其中 k 为σ的逆序数。求证$\mathrm{sgn}(\sigma_1\sigma_2) = \mathrm{sgn}(\sigma_1)\mathrm{sgn}(\sigma_2)$.
4. （10 分）计 adj(A)为方阵 A 的伴随矩阵，求证 Aadj(A)=|A|I。
5. （15 分）对于实矩阵 A，若$A^T = A$则称其为对称矩阵，若$A^T = -A$则称其为反对称矩阵。
   a. 若 A 和 B 都是实对称矩阵，求证 AB 也是实对称矩阵等价于 AB=BA；
   b. 若 A 是实方阵，求证$A + A^T$对称，而$A - A^T$反对称；
   c. 求证任何一个实方阵都可以写成一个对称矩阵跟一个反对称矩阵的和。
6. （5 分）若一个实矩阵 A 满足$AA^T = A^TA = I$，则称其为正交矩阵，求证若 A 是正交矩阵，则|A|=±1 且A^{-1}也是正交矩阵。
7. （10 分）证明 6 阶方阵按某三行展开的情况下，拉普拉斯展开的正确性。
8. （15 分）求下列矩阵的行列式

$$\begin{bmatrix} 5 & 4 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & 1 & -2 \\ -5 & -7 & -3 & 9 \\ 1 & -2 & -1 & 4 \end{bmatrix}; \quad \begin{bmatrix} 2 & 5 & -3 & -2 \\ -2 & -3 & 2 & -5 \\ 1 & 3 & -2 & 2 \\ 1 & -6 & 4 & 3 \end{bmatrix}; \quad \begin{bmatrix} 6 & 2 & 1 & 0 & 5 \\ 2 & 1 & 1 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 & -2 & 3 \\ 3 & 0 & 2 & 3 & -1 \\ -1 & -1 & -3 & 4 & 2 \end{bmatrix}.$$

9. （10 分）对于矩阵 A，它的行（列）向量生成的线性空间成为它的行（列）空间。
   a. 判断下列矩阵是否有相同的行空间

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 5 \\ 2 & 3 & 13 \end{bmatrix}; \quad \begin{bmatrix} 1 & -1 & -2 \\ 3 & -2 & -3 \end{bmatrix}; \quad \begin{bmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 4 & -3 & -1 \\ 3 & -1 & 3 \end{bmatrix};$$

   b. 判断下列矩阵是否有相同的列空间

$$\begin{bmatrix} 1 & 3 & 5 \\ 1 & 4 & 3 \\ 1 & 1 & 9 \end{bmatrix}; \quad \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -2 & -3 & -4 \\ 7 & 12 & 17 \end{bmatrix}.$$

10. （15 分）对任意 A，B 满足 AB 良定义，求证$\mathrm{rank}(AB) \le \min\{rank(A), rank(B)\}$.
11. （15 分）计A°，B°分别为矩阵 A，B 的简化行阶梯形，求证 A，B 的行空间相同等价于A°，B°有相同的非零行。
12. （15 分）验证以下三个多项式是否 R-线性相关，即是否存在不全为零的实数 a,b,c 使得 au+bv+cw=0

$$u = t^3 + 4t^2 - 2t + 3, \quad v = t^3 + 6t^2 - t + 4, \quad w = 3t^3 + 8t^2 - 8t + 7.$$