向量的基本概念1

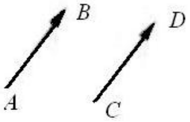
- 向量：即有大小又有方向的量. 若 A, B 是空间中的两点，$\overrightarrow{AB}$ 表示大小为 $d(A, B)$, 方向为从 A 指向 B 的向量. 称 A 为起点，B 为终点. 称 $\overrightarrow{AA}$ 为零向量，记为 $\vec{0}$, 它是大小为 0 方向任意的向量. 若不需要指出起点和终点，我们经常用记号 $\vec{a}, \vec{b}, \cdots$ 表示向量.
- 向量的模：向量起点和终点之间的距离(即向量的大小)称为向量的模. $\overrightarrow{AB}$ 的模记为 $|\overrightarrow{AB}|$, $\vec{a}$ 的模记为 $|\vec{a}|$.

向量的基本概念1

- 向量：即有大小又有方向的量. 若 A, B 是空间中的两点，$\overrightarrow{AB}$ 表示大小为 $d(A, B)$, 方向为从 A 指向 B 的向量. 称 A 为起点，B 为终点. 称 $\overrightarrow{AA}$ 为零向量，记为 $\vec{0}$, 它是大小为 0 方向任意的向量. 若不需要指出起点和终点，我们经常用记号 $\vec{a}, \vec{b}, \cdots$ 表示向量.
- 向量的模：向量起点和终点之间的距离(即向量的大小)称为向量的模. $\overrightarrow{AB}$ 的模记为 $|\overrightarrow{AB}|$, $\vec{a}$ 的模记为 $|\vec{a}|$.

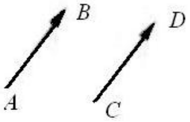
向量的基本概念2

- 两个非零向量的相等：$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$ 的充分必要条件是 $|\overrightarrow{AB}| = |\overrightarrow{CD}|$，且 AB 与 CD 平行且指向一致(起点可以不同). 当 A, B, C, D 不共线时，此时 $ABDC$ 必为平行四边形.
- 共线向量：互相平行的向量称为共线向量. 规定任何向量均与零向量共线.
- 若 $\vec{a}$ 是一个向量，则 $-\vec{a}$ 表示与 $\vec{a}$ 大小(模)相同，方向相反（平行但指向相反）的向量. 称为 $\vec{a}$ 的反向量.
- 单位向量：模为 1 的向量称为单位向量. 与非零向量 $\vec{a}$ 方向相同的单位向量记为 $\vec{a}^o$.



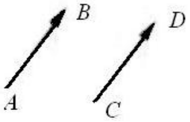
向量的基本概念2

- 两个非零向量的相等：$\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{CD}$ 的充分必要条件是 $|\overrightarrow{AB}|=|\overrightarrow{CD}|$，且 AB 与 CD 平行且指向一致(起点可以不同). 当 A, B, C, D 不共线时，此时 $ABDC$ 必为平行四边形.
- 共线向量：互相平行的向量称为共线向量. 规定任何向量均与零向量共线.
- 若 $\vec{a}$ 是一个向量，则 $-\vec{a}$ 表示与 $\vec{a}$ 大小(模)相同，方向相反（平行但指向相反）的向量. 称为 $\vec{a}$ 的反向量.
- 单位向量：模为 1 的向量称为单位向量. 与非零向量 $\vec{a}$ 方向相同的单位向量记为 $\vec{a}^{\circ}$.



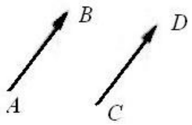
向量的基本概念2

- 两个非零向量的相等：$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$ 的充分必要条件是 $|\overrightarrow{AB}| = |\overrightarrow{CD}|$，且 AB 与 CD 平行且指向一致(起点可以不同)。当 A, B, C, D 不共线时，此时 $ABDC$ 必为平行四边形。
- 共线向量：互相平行的向量称为共线向量。规定任何向量均与零向量共线。
- 若 $\vec{a}$ 是一个向量，则 $-\vec{a}$ 表示与 $\vec{a}$ 大小(模)相同，方向相反（平行但指向相反）的向量。称为 $\vec{a}$ 的反向量。
- 单位向量：模为 1 的向量称为单位向量。与非零向量 $\vec{a}$ 方向相同的单位向量记为 $\vec{a}^{o}$。



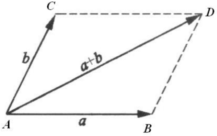
向量的基本概念2

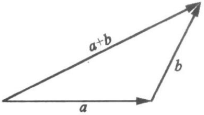
- 两个非零向量的相等：$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$ 的充分必要条件是 $|\overrightarrow{AB}| = |\overrightarrow{CD}|$，且 AB 与 CD 平行且指向一致(起点可以不同)．当 A, B, C, D 不共线时，此时 $ABDC$ 必为平行四边形．
- 共线向量：互相平行的向量称为共线向量．规定任何向量均与零向量共线．
- 若 $\vec{a}$ 是一个向量，则 $-\vec{a}$ 表示与 $\vec{a}$ 大小(模)相同，方向相反（平行但指向相反）的向量．称为 $\vec{a}$ 的反向量．
- 单位向量：模为 1 的向量称为单位向量．与非零向量 $\vec{a}$ 方向相同的单位向量记为 $\vec{a}^{\circ}$．



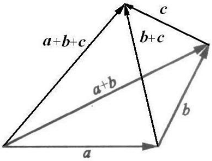
向量的加法

- 向量的加法：把 $\vec{a}$ 和 $\vec{b}$ 的起点移动到一点按照平行四边形法则或者把 $\vec{b}$ 的起点移动到 $\vec{a}$ 的终点按照三角形法则. 规定 $\vec{a}+\vec{0}=\vec{0}+\vec{a}=\vec{a}$.



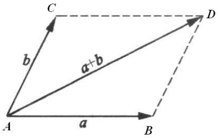


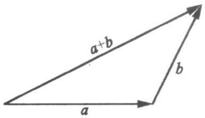
- 性质：$\vec{a}+\vec{b}=\vec{b}+\vec{a}$.
- 性质：$(\vec{a}+\vec{b})+\vec{c}=\vec{a}+(\vec{b}+\vec{c})$.
- 向量的减法：$\vec{a}-\vec{b}=\vec{a}+(-\vec{b})$, $\vec{a}-\vec{a}=\vec{0}$.



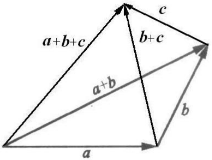
向量的加法

- 向量的加法：把 $\vec{a}$ 和 $\vec{b}$ 的起点移动到一点按照平行四边形法则或者把 $\vec{b}$ 的起点移动到 $\vec{a}$ 的终点按照三角形法则. 规定 $\vec{a}+\vec{0}=\vec{0}+\vec{a}=\vec{a}$.



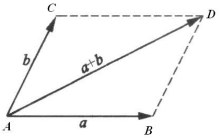


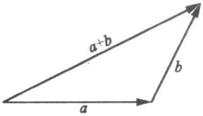
- 性质：$\vec{a}+\vec{b}=\vec{b}+\vec{a}$.
- 性质：$(\vec{a}+\vec{b})+\vec{c}=\vec{a}+(\vec{b}+\vec{c})$.
- 向量的减法：$\vec{a}-\vec{b}=\vec{a}+(-\vec{b})$, $\vec{a}-\vec{a}=\vec{0}$.

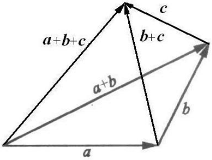


向量的加法

- 向量的加法：把 $\vec{a}$ 和 $\vec{b}$ 的起点移动到一点按照平行四边形法则或者把 $\vec{b}$ 的起点移动到 $\vec{a}$ 的终点按照三角形法则.
  规定 $\vec{a}+\vec{0}=\vec{0}+\vec{a}=\vec{a}$.
- 性质：$\vec{a}+\vec{b}=\vec{b}+\vec{a}$.
- 性质：$(\vec{a}+\vec{b})+\vec{c}=\vec{a}+(\vec{b}+\vec{c})$.
- 向量的减法：$\vec{a}-\vec{b}=\vec{a}+(-\vec{b})$, $\vec{a}-\vec{a}=\vec{0}$.

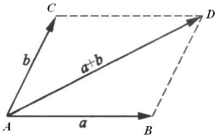


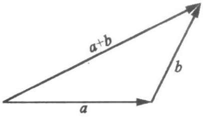


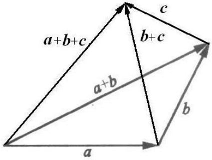


向量的加法

- 向量的加法：把 $\vec{a}$ 和 $\vec{b}$ 的起点移动到一点按照平行四边形法则或者把 $\vec{b}$ 的起点移动到 $\vec{a}$ 的终点按照三角形法则.
  规定 $\vec{a}+\vec{0}=\vec{0}+\vec{a}=\vec{a}$.
- 性质：$\vec{a}+\vec{b}=\vec{b}+\vec{a}$.
- 性质：$(\vec{a}+\vec{b})+\vec{c}=\vec{a}+(\vec{b}+\vec{c})$.
- 向量的减法：$\vec{a}-\vec{b}=\vec{a}+(-\vec{b})$, $\vec{a}-\vec{a}=\vec{0}$.





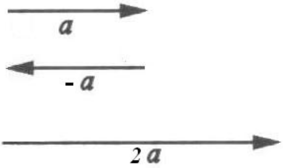


向量的数乘

- 向量的数乘：设 λ 是以实数，$\vec{a}$ 是一向量. 定义

$$\lambda\vec{a}=\begin{cases}\text{模为 }\lambda|\vec{a}|\text{ 方向与 }\vec{a}\text{ 相同的向量,} & \lambda>0\\ \text{模为 }|\lambda|\cdot|\vec{a}|\text{ 方向与 }\vec{a}\text{ 相反的向量,} & \lambda<0\,.\\ \vec{0}, & \lambda=0\end{cases}$$

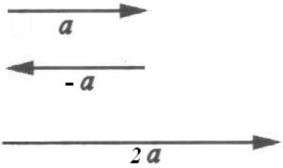
- 性质：$(-1)\vec{a}=-\vec{a}$.
- 性质：$\lambda_1\vec{a}+\lambda_2\vec{a}=(\lambda_1+\lambda_2)\vec{a}$.
- 性质：$\lambda(\vec{a}+\vec{b})=\lambda\vec{a}+\lambda\vec{b}$.
- 性质：$(\lambda\mu)\vec{a}=\lambda(\mu\vec{a})$.
- 向量的共线：两个非零向量 $\vec{a}$ 和 $\vec{b}$ 共线的充要条件是存在非零实数 λ, 使得 $\vec{a}=\lambda\vec{b}$.



- 向量的数乘：设 λ 是以实数，$\vec{a}$ 是一向量. 定义

$$\lambda\vec{a} = \begin{cases} \text{模为 } \lambda|\vec{a}| \text{ 方向与 } \vec{a} \text{ 相同的向量，} & \lambda > 0 \\ \text{模为 } |\lambda| \cdot |\vec{a}| \text{ 方向与 } \vec{a} \text{ 相反的向量，} & \lambda < 0 \\ \vec{0}, & \lambda = 0 \end{cases}.$$

- 性质：$(-1)\vec{a} = -\vec{a}$.
- 性质：$\lambda_1\vec{a} + \lambda_2\vec{a} = (\lambda_1 + \lambda_2)\vec{a}$.
- 性质：$\lambda(\vec{a} + \vec{b}) = \lambda\vec{a} + \lambda\vec{b}$.
- 性质：$(\lambda\mu)\vec{a} = \lambda(\mu\vec{a})$.
- 向量的共线：两个非零向量 $\vec{a}$ 和 $\vec{b}$ 共线的充要条件是存在非零实数 λ，使得 $\vec{a} = \lambda\vec{b}$.



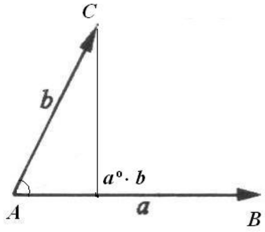
向量的内积

- 两个向量的夹角：若 $\vec{a}$ 和 $\vec{b}$ 是两个非零向量，$\vec{a}=\overrightarrow{AB}$ 和 $\vec{b}=\overrightarrow{AC}$，则角 $\angle BAC\in[0,\pi]$ 称为 $\vec{a}$ 与 $\vec{b}$ 的夹角，记为 $\langle\vec{a},\vec{b}\rangle$. 规定 $\langle\vec{a},\vec{0}\rangle$ 可以是任意值.
- 内积：定义 $\vec{a}$ 与 $\vec{b}$ 的内积为

$$\vec{a}\cdot\vec{b}=|\vec{a}|\cdot|\vec{b}|\cos\langle\vec{a},\vec{b}\rangle.$$

若 $\vec{a}$ 是单位向量，则 $\vec{a}\cdot\vec{b}$ 为 $\vec{b}$ 在方向 $\vec{a}$ 上的有向投影.

- $\vec{a}$ 与 $\vec{b}$ 垂直: $\langle\vec{a},\vec{b}\rangle=\frac{\pi}{2}$ 或 $\vec{a}\cdot\vec{b}=0$. 显然 $\vec{0}$ 与任何向量垂直.

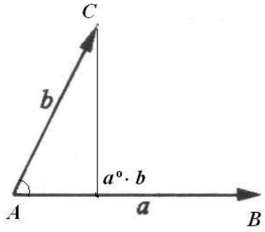


向量的内积

- 两个向量的夹角：若 $\vec{a}$ 和 $\vec{b}$ 是两个非零向量，$\vec{a}=\overrightarrow{AB}$ 和 $\vec{b}=\overrightarrow{AC}$，则角 $\angle BAC \in [0,\pi]$ 称为 $\vec{a}$ 与 $\vec{b}$ 的夹角，记为 $\langle \vec{a},\vec{b}\rangle$. 规定 $\langle \vec{a},\vec{0}\rangle$ 可以是任意值.
- 内积：定义 $\vec{a}$ 与 $\vec{b}$ 的内积为

$$\vec{a}\cdot\vec{b} = |\vec{a}|\cdot|\vec{b}|\cos\langle \vec{a},\vec{b}\rangle.$$

若 $\vec{a}$ 是单位向量，则 $\vec{a}\cdot\vec{b}$ 为 $\vec{b}$ 在方向 $\vec{a}$ 上的有向投影.



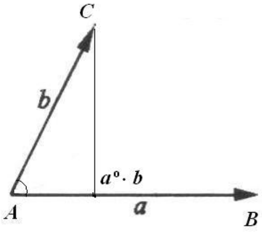
- $\vec{a}$ 与 $\vec{b}$ 垂直: $\langle \vec{a},\vec{b}\rangle = \frac{\pi}{2}$ 或 $\vec{a}\cdot\vec{b}=0$. 显然 $\vec{0}$ 与任何向量垂直.

向量的内积

- 两个向量的夹角：若 $\vec{a}$ 和 $\vec{b}$ 是两个非零向量，$\vec{a} = \overrightarrow{AB}$ 和 $\vec{b} = \overrightarrow{AC}$，则角 $\angle BAC \in [0, \pi]$ 称为 $\vec{a}$ 与 $\vec{b}$ 的夹角，记为 $\langle \vec{a}, \vec{b} \rangle$. 规定 $\langle \vec{a}, \vec{0} \rangle$ 可以是任意值.
- 内积：定义 $\vec{a}$ 与 $\vec{b}$ 的内积为

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cos\langle \vec{a}, \vec{b} \rangle.$$

若 $\vec{a}$ 是单位向量，则 $\vec{a} \cdot \vec{b}$ 为 $\vec{b}$ 在方向 $\vec{a}$ 上的有向投影.

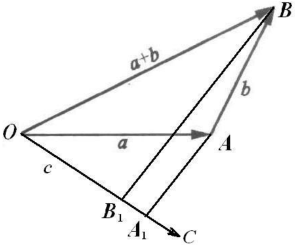


- $\vec{a}$ 与 $\vec{b}$ 垂直: $\langle \vec{a}, \vec{b} \rangle = \frac{\pi}{2}$ 或 $\vec{a} \cdot \vec{b} = 0$. 显然 $\vec{0}$ 与任何向量垂直.

内积的性质

- 交换律：$\vec{a}\cdot\vec{b}=\vec{b}\cdot\vec{a}$.
- 结合率：$(\lambda\vec{a})\cdot\vec{b}=\lambda(\vec{a}\cdot\vec{b})$.
- 分配率：$(\vec{a}+\vec{b})\cdot\vec{c}=\vec{a}\cdot\vec{c}+\vec{b}\cdot\vec{c}$.

  证明：不妨设 $\vec{c}=\overrightarrow{OC}$ 是单位向量. $\vec{a}=\overrightarrow{OA}$, $\vec{b}=\overrightarrow{AB}$, 则$\vec{a}+\vec{b}=\overrightarrow{OB}$. 过 A 和 B 分别作平面和 $\overrightarrow{OC}$ 垂直，交点分别为 A_1 和 B_1, 则 $(\vec{a}+\vec{b})\cdot\vec{c}=OB_1$, $\vec{a}\cdot\vec{c}=OA_1$, $\vec{b}\cdot\vec{c}=A_1B_1$.

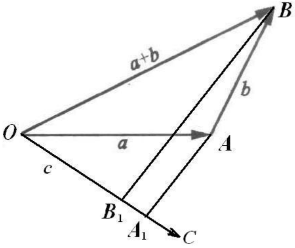


- 若 $\vec{a}$ 与任何向量的内积为 0，则有 $\vec{a}=\vec{0}$; 若对任意向量 $\vec{c}$, 有 $\vec{a}\cdot\vec{c}=\vec{b}\cdot\vec{c}$, 则 $\vec{a}=\vec{b}$.

  证明：若 $\vec{a}\neq\vec{0}$, $\vec{a}\cdot\vec{a}^o=|\vec{a}|\neq 0$, 与假设矛盾.

内积的性质

- 交换律：$\vec{a}\cdot\vec{b}=\vec{b}\cdot\vec{a}$.
- 结合率：$(\lambda\vec{a})\cdot\vec{b}=\lambda(\vec{a}\cdot\vec{b})$.
- 分配率：$(\vec{a}+\vec{b})\cdot\vec{c}=\vec{a}\cdot\vec{c}+\vec{b}\cdot\vec{c}$.
  证明：不妨设 $\vec{c}=\overrightarrow{OC}$ 是单位向量. $\vec{a}=\overrightarrow{OA}$, $\vec{b}=\overrightarrow{AB}$, 则$\vec{a}+\vec{b}=\overrightarrow{OB}$. 过 A 和 B 分别作平面和 $\overrightarrow{OC}$ 垂直，交点分别为 A_1 和 B_1, 则 $(\vec{a}+\vec{b})\cdot\vec{c}=OB_1$, $\vec{a}\cdot\vec{c}=OA_1$, $\vec{b}\cdot\vec{c}=A_1B_1$.

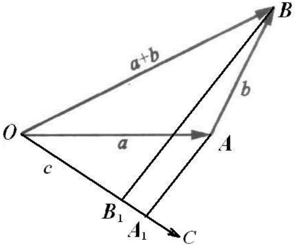


- 若 $\vec{a}$ 与任何向量的内积为 0，则有 $\vec{a}=\vec{0}$; 若对任意向量 $\vec{c}$, 有 $\vec{a}\cdot\vec{c}=\vec{b}\cdot\vec{c}$, 则 $\vec{a}=\vec{b}$.
  证明：若 $\vec{a}\neq\vec{0}$, $\vec{a}\cdot\vec{a}^{o}=|\vec{a}|\neq 0$, 与假设矛盾.

内积的性质

- 交换律: $\vec{a}\cdot\vec{b}=\vec{b}\cdot\vec{a}$.
- 结合率: $(\lambda\vec{a})\cdot\vec{b}=\lambda(\vec{a}\cdot\vec{b})$.
- 分配率: $(\vec{a}+\vec{b})\cdot\vec{c}=\vec{a}\cdot\vec{c}+\vec{b}\cdot\vec{c}$.

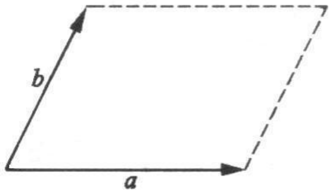
  证明: 不妨设 $\vec{c}=\overrightarrow{OC}$ 是单位向量. $\vec{a}=\overrightarrow{OA}$, $\vec{b}=\overrightarrow{AB}$, 则$\vec{a}+\vec{b}=\overrightarrow{OB}$. 过 A 和 B 分别作平面和 $\overrightarrow{OC}$ 垂直, 交点分别为 A_1 和 B_1, 则 $(\vec{a}+\vec{b})\cdot\vec{c}=OB_1$, $\vec{a}\cdot\vec{c}=OA_1$, $\vec{b}\cdot\vec{c}=A_1B_1$.

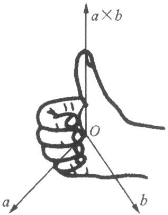


- 若 $\vec{a}$ 与任何向量的内积为 0, 则有 $\vec{a}=\vec{0}$; 若对任意向量 $\vec{c}$, 有 $\vec{a}\cdot\vec{c}=\vec{b}\cdot\vec{c}$, 则 $\vec{a}=\vec{b}$.

  证明: 若 $\vec{a}\neq\vec{0}$, $\vec{a}\cdot\vec{a}^{o}=|\vec{a}|\neq 0$, 与假设矛盾.

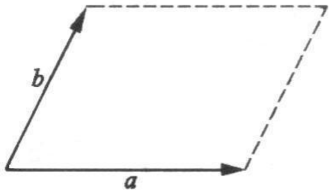
- $\vec{a}$ 和 $\vec{b}$ 为不共线向量时：$\vec{a} \times \vec{b}$ 的模为 $|\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \sin\langle \vec{a}, \vec{b} \rangle$, 即 $\vec{a}$ 和 $\vec{b}$ 张成的平行四边形面积. 方向为垂直于$\vec{a}$ 和 $\vec{b}$ 决定的平面，指向由右手法则决定，即 $\vec{a}$、$\vec{b}$ 和 $\vec{a} \times \vec{b}$ 构成右手系.
- $\vec{a}$ 和 $\vec{b}$ 共线时：定义 $\vec{a} \times \vec{b}$ 为零向量.
- 性质：$\vec{a}$ 和 $\vec{b}$ 共线的充要条件是 $\vec{a} \times \vec{b} = \vec{0}$.

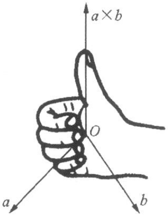




向量的叉乘

- $\vec{a}$ 和 $\vec{b}$ 为不共线向量时：$\vec{a}\times\vec{b}$ 的模为 $|\vec{a}|\cdot|\vec{b}|\sin\langle\vec{a},\vec{b}\rangle$，即 $\vec{a}$ 和 $\vec{b}$ 张成的平行四边形面积. 方向为垂直于$\vec{a}$ 和 $\vec{b}$ 决定的平面，指向由右手法则决定，即 $\vec{a}$、$\vec{b}$ 和 $\vec{a}\times\vec{b}$ 构成右手系.
- $\vec{a}$ 和 $\vec{b}$ 共线时：定义 $\vec{a}\times\vec{b}$ 为零向量.
- 性质：$\vec{a}$ 和 $\vec{b}$ 共线的充要条件是 $\vec{a}\times\vec{b}=\vec{0}$.



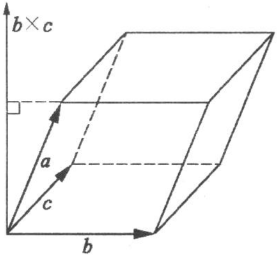


向量混合积

- 三个向量 $\vec{a}$、$\vec{b}$ 和 $\vec{c}$ 的混合积定义为 $\vec{a}\cdot(\vec{b}\times\vec{c})$. 设 $\vec{b}\times\vec{c}$ 方向的单位向量为 $\vec{n}$, 设 $\vec{b}$ 和 $\vec{c}$ 张成的平行四边形面积为 S，则

$$\vec{a}\cdot(\vec{b}\times\vec{c}) = \vec{a}\cdot\vec{n}S = \pm(\vec{a}\text{、}\vec{b}\text{ 和 }\vec{c}\text{ 张成的平行六面体体积}).$$

  且当 $\vec{b}$、$\vec{c}$、$\vec{a}$ 成右手系是取"+".



- 性质: $\vec{a}\cdot(\vec{b}\times\vec{c}) = \vec{b}\cdot(\vec{c}\times\vec{a}) = \vec{c}\cdot(\vec{a}\times\vec{b})$.
  证明: $\vec{b}$、$\vec{c}$、$\vec{a}$ 成右手系 $\Longleftrightarrow \vec{c}$、$\vec{a}$、$\vec{b}$ 成右手系 $\Longleftrightarrow \vec{a}$、$\vec{b}$、$\vec{c}$ 成右手系.
  也可直接证明: 当 $\vec{a}\cdot(\vec{b}\times\vec{c}) > 0$ 时, $\vec{b}\cdot(\vec{c}\times\vec{a}) > 0$. 事实上, 存在 $z > 0, x, y$, 使得 $\vec{a} = z\vec{b}\times\vec{c} + x\vec{b} + y\vec{c}$, $\vec{b}\cdot(\vec{c}\times\vec{a}) = r\vec{b}\cdot(\vec{c}\times(\vec{b}\times\vec{c}))$.

向量混合积

- 三个向量 $\vec{a}$、$\vec{b}$ 和 $\vec{c}$ 的混合积定义为 $\vec{a}\cdot(\vec{b}\times\vec{c})$. 设 $\vec{b}\times\vec{c}$ 方向的单位向量为 $\vec{n}$, 设 $\vec{b}$ 和 $\vec{c}$ 张成的平行四边形面积为 S，则

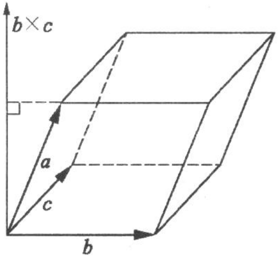
$$\vec{a}\cdot(\vec{b}\times\vec{c})=\vec{a}\cdot\vec{n}S=\pm(\vec{a}\text{、}\vec{b}\text{ 和 }\vec{c}\text{ 张成的平行六面体体积}).$$

  且当 $\vec{b}$、$\vec{c}$、$\vec{a}$ 成右手系是取"+".

- 性质：$\vec{a}\cdot(\vec{b}\times\vec{c})=\vec{b}\cdot(\vec{c}\times\vec{a})=\vec{c}\cdot(\vec{a}\times\vec{b})$.

  证明：$\vec{b}$、$\vec{c}$、$\vec{a}$ 成右手系 $\Longleftrightarrow$ $\vec{c}$、$\vec{a}$、$\vec{b}$ 成右手系 $\Longleftrightarrow$ $\vec{a}$、$\vec{b}$、$\vec{c}$ 成右手系.

  也可直接证明：当 $\vec{a}\cdot(\vec{b}\times\vec{c})>0$ 时，$\vec{b}\cdot(\vec{c}\times\vec{a})>0$. 事实上，存在 $z>0,x,y$，使得 $\vec{a}=z\vec{b}\times\vec{c}+x\vec{b}+y\vec{c}$, $\vec{b}\cdot(\vec{c}\times\vec{a})=r\vec{b}\cdot(\vec{c}\times(\vec{b}\times\vec{c}))$.



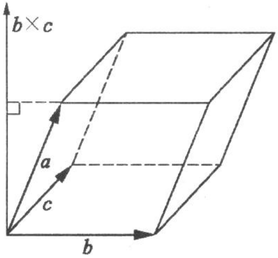
向量混合积

- 三个向量 $\vec{a}$、$\vec{b}$ 和 $\vec{c}$ 的混合积定义为 $\vec{a}\cdot(\vec{b}\times\vec{c})$. 设 $\vec{b}\times\vec{c}$ 方向的单位向量为 $\vec{n}$, 设 $\vec{b}$ 和 $\vec{c}$ 张成的平行四边形面积为 S, 则

$$\vec{a}\cdot(\vec{b}\times\vec{c})=\vec{a}\cdot\vec{n}S=\pm(\vec{a}、\vec{b}\text{ 和 }\vec{c}\text{ 张成的平行六面体体积}).$$

  且当 $\vec{b}$、$\vec{c}$、$\vec{a}$ 成右手系是取"+".

- 性质：$\vec{a}\cdot(\vec{b}\times\vec{c})=\vec{b}\cdot(\vec{c}\times\vec{a})=\vec{c}\cdot(\vec{a}\times\vec{b})$.
  证明：$\vec{b}$、$\vec{c}$、$\vec{a}$ 成右手系 $\Longleftrightarrow$ $\vec{c}$、$\vec{a}$、$\vec{b}$ 成右手系 $\Longleftrightarrow$ $\vec{a}$、$\vec{b}$、$\vec{c}$ 成右手系.
  也可直接证明: 当 $\vec{a}\cdot(\vec{b}\times\vec{c})>0$ 时, $\vec{b}\cdot(\vec{c}\times\vec{a})>0$. 事实上, 存在 $z>0, x, y$, 使得 $\vec{a}=z\vec{b}\times\vec{c}+x\vec{b}+y\vec{c}$, $\vec{b}\cdot(\vec{c}\times\vec{a})=r\vec{b}\cdot(\vec{c}\times(\vec{b}\times\vec{c}))$.

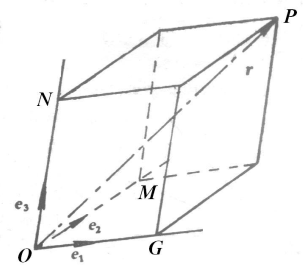


四点共面

- 性质： $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ 共面的充分必要条件是 $\vec{a} \cdot (\vec{b} \times \vec{c}) = 0$.
- 若 $\vec{e_1}, \vec{e_2}, \vec{e_3}$ 是空间中的三个不共面向量，则 对任意空间向量 $\vec{r}$，存在一组实数 x, y, z，使得 $\vec{r} = x\vec{e_1} + y\vec{e_2} + z\vec{e_3}$.

  证明：把所有向量的起点移至原点，$\overrightarrow{OP} = \vec{r}$，如图作平行六面体，则有

$$\overrightarrow{OP} = \overrightarrow{OG} + \overrightarrow{OM} + \overrightarrow{ON}.$$



- 推论：空间中的四个点 A, B, C, D 共面的充分必要条件是

$$\overrightarrow{AB} \cdot (\overrightarrow{AC} \times \overrightarrow{AD}) = 0.$$

叉乘的性质

- $\vec{a} \times \vec{b} = -\vec{b} \times \vec{a}$.
- $(\lambda\vec{a}) \times \vec{b} = \lambda(\vec{a} \times \vec{b})$.
- $(\vec{a} + \vec{b}) \times \vec{c} = \vec{a} \times \vec{c} + \vec{b} \times \vec{c}$.

证明：设 $\vec{d}$ 是任意向量，由混合积的性质，

$$\begin{aligned}
\vec{d} \cdot [(\vec{a} + \vec{b}) \times \vec{c}] &= (\vec{a} + \vec{b}) \cdot \vec{c} \times \vec{d} \\
&= \vec{a} \cdot (\vec{c} \times \vec{d}) + \vec{b} \cdot (\vec{c} \times \vec{d}) \\
&= \vec{d} \cdot (\vec{a} \times \vec{c}) + \vec{d} \cdot (\vec{b} \times \vec{c}) \\
&= \vec{d} \cdot (\vec{a} \times \vec{c} + \vec{b} \times \vec{c})
\end{aligned}$$

由 $\vec{d}$ 的任意性，即得.

叉乘的性质

- $\vec{a} \times \vec{b} = -\vec{b} \times \vec{a}$.
- $(\lambda\vec{a}) \times \vec{b} = \lambda(\vec{a} \times \vec{b})$.
- $(\vec{a} + \vec{b}) \times \vec{c} = \vec{a} \times \vec{c} + \vec{b} \times \vec{c}$.

  证明：设 $\vec{d}$ 是任意向量，由混合积的性质，

$$
\begin{aligned}
&\vec{d} \cdot [(\vec{a} + \vec{b}) \times \vec{c}] = (\vec{a} + \vec{b}) \cdot \vec{c} \times \vec{d} \\
&= \vec{a} \cdot (\vec{c} \times \vec{d}) + \vec{b} \cdot (\vec{c} \times \vec{d}) \\
&= \vec{d} \cdot (\vec{a} \times \vec{c}) + \vec{d} \cdot (\vec{b} \times \vec{c}) \\
&= \vec{d} \cdot (\vec{a} \times \vec{c} + \vec{b} \times \vec{c})
\end{aligned}
$$

  由 $\vec{d}$ 的任意性，即得.

例1

- $|\vec{a}\times\vec{b}|^2=|\vec{a}|^2|\vec{b}|^2-(\vec{a}\cdot\vec{b})^2$.
  证明: $|\vec{a}\times\vec{b}|^2=|\vec{a}|^2|\vec{b}|^2\sin^2\theta=|\vec{a}|^2|\vec{b}|^2(1-\cos^2\theta)$.
- $(\vec{a}\times\vec{b})\times\vec{c}=(\vec{a}\cdot\vec{c})\vec{b}-(\vec{b}\cdot\vec{c})\vec{a}$.
  证明：当 $\vec{a},\vec{b}$ 共线时，如 $\vec{a}=\lambda\vec{b}$, 显然. 当 $\vec{a},\vec{b}$ 不共线时, 存在一组实数 x,y,z, 使得 $\vec{c}=x\vec{a}+y\vec{b}+z\vec{a}\times\vec{b}$. 因此只要分别对 $\vec{c}=\vec{a},\vec{b},\vec{a}\times\vec{b}$ 证明. 当 $\vec{c}=\vec{a}\times\vec{b}$ 显然两边为零. 当 $\vec{c}=\vec{a}$，要证

$$(\vec{a}\times\vec{b})\times\vec{a}=(\vec{a}\cdot\vec{a})\vec{b}-(\vec{a}\cdot\vec{b})\vec{a}.$$

  只要证明上式两边和 $\vec{a},\vec{b}$ 的内积相等(上式两边均垂直于 $\vec{a}\times\vec{b}$). 事实上，两边和 $\vec{a}$ 的内积都为 0, 两边和 $\vec{b}$ 的内积都等于 $|\vec{a}\times\vec{b}|^2$.

例2

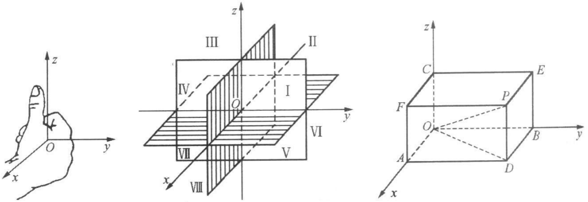
- Lagrange 恒等式

$$(\vec{a}\times\vec{b})\cdot(\vec{c}\times\vec{d})=(\vec{a}\cdot\vec{c})(\vec{b}\cdot\vec{d})-(\vec{a}\cdot\vec{d})(\vec{b}\cdot\vec{c}).$$

证明: 利用混合积,

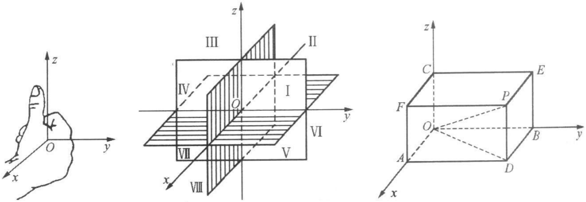
$$\begin{aligned}(\vec{a},\vec{b},\vec{c}\times\vec{d})&=[\vec{b}\times(\vec{c}\times\vec{d})]\cdot\vec{a}\\&=[(\vec{b}\cdot\vec{d})\vec{c}-(\vec{b}\cdot\vec{c})\vec{d}]\cdot\vec{a}=(\vec{b}\cdot\vec{d})(\vec{a}\cdot\vec{c})-(\vec{b}\cdot\vec{c})(\vec{a}\cdot\vec{d}).\end{aligned}$$

- 空间坐标系(右手系): 取原点 O, 三个两两正交的数轴 Ox, Oy, Oz, 且三个正向满足右手法则.
- 坐标平面: Oxy, Oyz, Ozx, 空间被分成八部分(卦限).
- 坐标: 过空间中的一点 P 作三个平面分别垂直于三个坐标轴, 交点的坐标分别为 x, y, z,则称三元数组 (x, y, z) 为 P 点的坐标. 设 $\mathbb{R}^3 = \{(x, y, z) : x, y, z \in \mathbb{R}\}$. 显然映射 $P \to (x, y, z)$ 是三维空间和 $\mathbb{R}^3$ 之间的一一映射. 因此我们把三维空间等同于 $\mathbb{R}^3$.



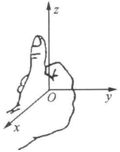
空间坐标系

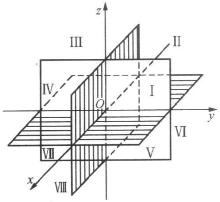
- 空间坐标系(右手系)：取原点 O，三个两两正交的数轴 Ox，Oy，Oz，且三个正向满足右手法则.
- 坐标平面：Oxy，Oyz，Ozx，空间被分成八部分(卦限).
- 坐标：过空间中的一点 P 作三个平面分别垂直于三个坐标轴，交点的坐标分别为 x, y, z,则称三元数组 (x, y, z) 为 P 点的坐标. 设 $\mathbb{R}^3 = \{(x, y, z) : x, y, z \in \mathbb{R}\}$. 显然映射 $P \to (x, y, z)$ 是三维空间和 $\mathbb{R}^3$ 之间的一一映射. 因此我们把三维空间等同于 $\mathbb{R}^3$.

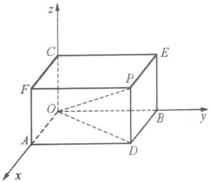


空间坐标系

- 空间坐标系(右手系)：取原点 O，三个两两正交的数轴 Ox, Oy, Oz，且三个正向满足右手法则.
- 坐标平面：Oxy, Oyz, Ozx, 空间被分成八部分(卦限).
- 坐标：过空间中的一点 P 作三个平面分别垂直于三个坐标轴，交点的坐标分别为 x, y, z,则称三元数组 (x, y, z) 为 P 点的坐标. 设 $\mathbb{R}^3 = \{(x, y, z) : x, y, z \in \mathbb{R}\}$. 显然映射 $P \to (x, y, z)$ 是三维空间和 $\mathbb{R}^3$ 之间的一一映射. 因此我们把三维空间等同于 $\mathbb{R}^3$.



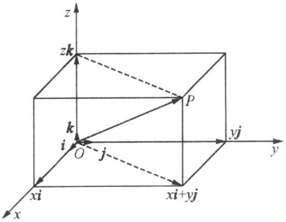




向量坐标

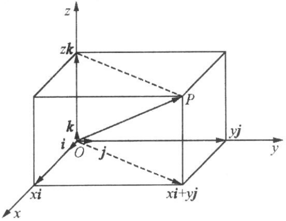
- 若把向量的起点平移至原点，则向量由它的终点决定. 映射 $\overrightarrow{OP} \to P$是向量构成的集合与三维空间之间的一一映射. 我们把 P 的坐标称为向量 $\overrightarrow{OP}$ 的坐标. 若 P 的坐标为 (x, y, z), 我们记 $\overrightarrow{OP} = (x, y, z)$.
- 向量空间的基：设 $A(1,0,0)$, $B(0,1,0)$, $C(0,0,1)$. 记 $\vec{i} = \overrightarrow{OA} = (1,0,0)$, $\vec{j} = \overrightarrow{OB} = (0,1,0)$, $\vec{k} = \overrightarrow{OC} = (0,0,1)$. 则任意向量 $\overrightarrow{OP} = (x, y, z)$ 可表示为

$$\overrightarrow{OP} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}.$$



- 若把向量的起点平移至原点，则向量由它的终点决定. 映射 $\overrightarrow{OP} \to P$是向量构成的集合与三维空间之间的一一映射. 我们把 P 的坐标称为向量 $\overrightarrow{OP}$ 的坐标. 若 P 的坐标为 (x, y, z), 我们记 $\overrightarrow{OP} = (x, y, z)$.
- 向量空间的基：设 $A(1, 0, 0)$, $B(0, 1, 0)$, $C(0, 0, 1)$. 记 $\vec{i} = \overrightarrow{OA} = (1, 0, 0)$, $\vec{j} = \overrightarrow{OB} = (0, 1, 0)$, $\vec{k} = \overrightarrow{OC} = (0, 0, 1)$. 则任意向量 $\overrightarrow{OP} = (x, y, z)$ 可表示为

$$\overrightarrow{OP} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}.$$



向量运算的坐标表示1

设向量 $\vec{a}_1 = (x_1, y_1, z_1)$, $\vec{a}_2 = (x_2, y_2, z_2)$, $\vec{a} = (x, y, z)$.

- 加减法: $\vec{a}_1 \pm \vec{a}_2 = (x_1 \pm x_2, y_1 \pm y_2, z_1 \pm z_2)$.
  证明: $\vec{a}_1 + \vec{a}_2 = (x_1\vec{i} + y_1\vec{j} + z_1\vec{k}) + (x_2\vec{i} + y_2\vec{j} + z_2\vec{k}) = (x_1 + x_2)\vec{i} + (y_1 + y_2)\vec{j} + (z_1 + z_2)\vec{k}$.
- 数乘: $\lambda\vec{a} = (\lambda x, \lambda y, \lambda z)$.
- 内积: $\vec{a}_1 \cdot \vec{a}_2 = x_1x_2 + y_1y_2 + z_1z_2$.
  证明: $\vec{a}_1 \cdot \vec{a}_2 = (x_1\vec{i} + y_1\vec{j} + z_1\vec{k}) \cdot (x_2\vec{i} + y_2\vec{j} + z_2\vec{k})$. 由于 $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ 两两垂直, 内积为 0, 利用分配率即得.
- 设 $P_1(x_1, y_1, z_1)$, $P_2(x_2, y_2, z_2)$, 则

$$\overrightarrow{P_1P_2} = (x_2 - x_1, y_2 - y_1, z_2 - z_1).$$

设向量 $\vec{a}_1 = (x_1, y_1, z_1)$, $\vec{a}_2 = (x_2, y_2, z_2)$, $\vec{a} = (x, y, z)$.

- 加减法：$\vec{a}_1 \pm \vec{a}_2 = (x_1 \pm x_2, y_1 \pm y_2, z_1 \pm z_2)$.
  证明：$\vec{a}_1 + \vec{a}_2 = (x_1\vec{i} + y_1\vec{j} + z_1\vec{k}) + (x_2\vec{i} + y_2\vec{j} + z_2\vec{k}) = (x_1 + x_2)\vec{i} + (y_1 + y_2)\vec{j} + (z_1 + z_2)\vec{k}$.
- 数乘：$\lambda\vec{a} = (\lambda x, \lambda y, \lambda z)$.
- 内积：$\vec{a}_1 \cdot \vec{a}_2 = x_1x_2 + y_1y_2 + z_1z_2$.
  证明：$\vec{a}_1 \cdot \vec{a}_2 = (x_1\vec{i} + y_1\vec{j} + z_1\vec{k}) \cdot (x_2\vec{i} + y_2\vec{j} + z_2\vec{k})$. 由于 $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ 两两垂直，内积为 0，利用分配率即得.
- 设 $P_1(x_1, y_1, z_1)$, $P_2(x_2, y_2, z_2)$, 则

$$\overrightarrow{P_1P_2} = (x_2 - x_1, y_2 - y_1, z_2 - z_1).$$

向量运算的坐标表示1

设向量 $\vec{a}_1=(x_1,y_1,z_1)$, $\vec{a}_2=(x_2,y_2,z_2)$, $\vec{a}=(x,y,z)$.

- 加减法：$\vec{a}_1\pm\vec{a}_2=(x_1\pm x_2,y_1\pm y_2,z_1\pm z_2)$.
  证明：$\vec{a}_1+\vec{a}_2=(x_1\vec{i}+y_1\vec{j}+z_1\vec{k})+(x_2\vec{i}+y_2\vec{j}+z_2\vec{k})=(x_1+x_2)\vec{i}+(y_1+y_2)\vec{j}+(z_1+z_2)\vec{k}$.
- 数乘：$\lambda\vec{a}=(\lambda x,\lambda y,\lambda z)$.
- 内积：$\vec{a}_1\cdot\vec{a}_2=x_1x_2+y_1y_2+z_1z_2$.
  证明：$\vec{a}_1\cdot\vec{a}_2=(x_1\vec{i}+y_1\vec{j}+z_1\vec{k})\cdot(x_2\vec{i}+y_2\vec{j}+z_2\vec{k})$. 由于 $\vec{i},\vec{j},\vec{k}$ 两两垂直，内积为 0, 利用分配率即得.
- 设 $P_1(x_1,y_1,z_1)$, $P_2(x_2,y_2,z_2)$, 则

$$\overrightarrow{P_1P_2}=(x_2-x_1,y_2-y_1,z_2-z_1).$$

向量运算的坐标表示1

设向量 $\vec{a}_1=(x_1,y_1,z_1)$, $\vec{a}_2=(x_2,y_2,z_2)$, $\vec{a}=(x,y,z)$.

- 加减法：$\vec{a}_1\pm\vec{a}_2=(x_1\pm x_2,y_1\pm y_2,z_1\pm z_2)$.
  证明：$\vec{a}_1+\vec{a}_2=(x_1\vec{i}+y_1\vec{j}+z_1\vec{k})+(x_2\vec{i}+y_2\vec{j}+z_2\vec{k})=(x_1+x_2)\vec{i}+(y_1+y_2)\vec{j}+(z_1+z_2)\vec{k}$.
- 数乘：$\lambda\vec{a}=(\lambda x,\lambda y,\lambda z)$.
- 内积：$\vec{a}_1\cdot\vec{a}_2=x_1x_2+y_1y_2+z_1z_2$.
  证明：$\vec{a}_1\cdot\vec{a}_2=(x_1\vec{i}+y_1\vec{j}+z_1\vec{k})\cdot(x_2\vec{i}+y_2\vec{j}+z_2\vec{k})$. 由于 $\vec{i}$, $\vec{j}$, $\vec{k}$ 两两垂直，内积为 0, 利用分配率即得.
- 设 $P_1(x_1,y_1,z_1)$, $P_2(x_2,y_2,z_2)$, 则

$$\overrightarrow{P_1P_2}=(x_2-x_1,y_2-y_1,z_2-z_1).$$

向量运算的坐标表示1

设向量 $\vec{a}_1=(x_1,y_1,z_1)$, $\vec{a}_2=(x_2,y_2,z_2)$, $\vec{a}=(x,y,z)$.

- 加减法：$\vec{a}_1\pm\vec{a}_2=(x_1\pm x_2,y_1\pm y_2,z_1\pm z_2)$.
  证明：$\vec{a}_1+\vec{a}_2=(x_1\vec{i}+y_1\vec{j}+z_1\vec{k})+(x_2\vec{i}+y_2\vec{j}+z_2\vec{k})=(x_1+x_2)\vec{i}+(y_1+y_2)\vec{j}+(z_1+z_2)\vec{k}$.
- 数乘：$\lambda\vec{a}=(\lambda x,\lambda y,\lambda z)$.
- 内积：$\vec{a}_1\cdot\vec{a}_2=x_1x_2+y_1y_2+z_1z_2$.
  证明：$\vec{a}_1\cdot\vec{a}_2=(x_1\vec{i}+y_1\vec{j}+z_1\vec{k})\cdot(x_2\vec{i}+y_2\vec{j}+z_2\vec{k})$. 由于 $\vec{i}$, $\vec{j}$, $\vec{k}$ 两两垂直，内积为 0, 利用分配率即得.
- 设 $P_1(x_1,y_1,z_1)$, $P_2(x_2,y_2,z_2)$, 则

$$\overrightarrow{P_1P_2}=(x_2-x_1,y_2-y_1,z_2-z_1).$$

向量运算的坐标表示2

- 模：$|\vec{a}| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$, $\vec{a} \neq \vec{0}$ 时, $\vec{a}^o = \frac{(x,y,z)}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$.
- $\cos\langle \vec{a}_1, \vec{a}_2 \rangle = \frac{x_1x_2+y_1y_2+z_1z_2}{\sqrt{x_1^2+y_1^2+z_1^2}\sqrt{x_2^2+y_2^2+z_2^2}}$.
- 方向余弦：$\vec{a} = (x, y, z)$，设 $\alpha = \langle \vec{a}, \vec{i} \rangle$, $\beta = \langle \vec{a}, \vec{j} \rangle$, $\gamma = \langle \vec{a}, \vec{k} \rangle$, 则由 $x = \vec{a} \cdot \vec{i} = |\vec{a}| \cos\alpha$, $y = \vec{a} \cdot \vec{j} = |\vec{a}| \cos\beta$, $z = \vec{a} \cdot \vec{k} = |\vec{a}| \cos\gamma$, 有

$$(\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma) = \frac{(x, y, z)}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} = \vec{a}^o.$$

我们称 $\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma$ 为向量 $\vec{a}$ 的方向余弦.

向量运算的坐标表示2

- 模：$|\vec{a}| = \sqrt{x^2+y^2+z^2}$, $\vec{a} \neq \vec{0}$ 时, $\vec{a}^o = \frac{(x,y,z)}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$.
- $\cos\langle\vec{a}_1, \vec{a}_2\rangle = \frac{x_1x_2+y_1y_2+z_1z_2}{\sqrt{x_1^2+y_1^2+z_1^2}\sqrt{x_2^2+y_2^2+z_2^2}}$.
- 方向余弦：$\vec{a} = (x,y,z)$，设 $\alpha = \langle\vec{a},\vec{i}\rangle$, $\beta = \langle\vec{a},\vec{j}\rangle$, $\gamma = \langle\vec{a},\vec{k}\rangle$, 则由 $x = \vec{a}\cdot\vec{i} = |\vec{a}|\cos\alpha$, $y = \vec{a}\cdot\vec{j} = |\vec{a}|\cos\beta$, $z = \vec{a}\cdot\vec{k} = |\vec{a}|\cos\gamma$, 有

$$(\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma) = \frac{(x,y,z)}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}} = \vec{a}^o.$$

我们称 $\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma$ 为向量 $\vec{a}$ 的方向余弦.

向量运算的坐标表示2

- 模：$|\vec{a}| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$, $\vec{a} \neq \vec{0}$ 时, $\vec{a}^o = \frac{(x,y,z)}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$.
- $\cos\langle\vec{a}_1, \vec{a}_2\rangle = \frac{x_1x_2+y_1y_2+z_1z_2}{\sqrt{x_1^2+y_1^2+z_1^2}\sqrt{x_2^2+y_2^2+z_2^2}}$.
- 方向余弦：$\vec{a} = (x, y, z)$，设 $\alpha = \langle\vec{a}, \vec{i}\rangle$, $\beta = \langle\vec{a}, \vec{j}\rangle$, $\gamma = \langle\vec{a}, \vec{k}\rangle$, 则由 $x = \vec{a} \cdot \vec{i} = |\vec{a}| \cos\alpha$, $y = \vec{a} \cdot \vec{j} = |\vec{a}| \cos\beta$, $z = \vec{a} \cdot \vec{k} = |\vec{a}| \cos\gamma$, 有

$$(\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma) = \frac{(x, y, z)}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} = \vec{a}^o.$$

我们称 $\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma$ 为向量 $\vec{a}$ 的方向余弦.

行列式

- 二阶行列式:

$$\begin{vmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \end{vmatrix} = x_1y_2 - y_1x_2.$$

- 三阶行列式:

$$\begin{vmatrix} x_0 & y_0 & z_0 \\ x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \end{vmatrix} = x_0\begin{vmatrix} y_1 & z_1 \\ y_2 & z_2 \end{vmatrix} - y_0\begin{vmatrix} x_1 & z_1 \\ x_2 & z_2 \end{vmatrix} + z_0\begin{vmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \end{vmatrix}.$$

$$= x_0y_1z_2 + x_2y_0z_1 + x_1y_2z_0 - x_0y_2z_1 - x_1y_0z_2 - x_2y_1z_0.$$

- 性质：两行或两列交换差一个负号.

行列式

- 二阶行列式：

$$\begin{vmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \end{vmatrix} = x_1 y_2 - y_1 x_2.$$

- 三阶行列式：

$$\begin{vmatrix} x_0 & y_0 & z_0 \\ x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \end{vmatrix} = x_0 \begin{vmatrix} y_1 & z_1 \\ y_2 & z_2 \end{vmatrix} - y_0 \begin{vmatrix} x_1 & z_1 \\ x_2 & z_2 \end{vmatrix} + z_0 \begin{vmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \end{vmatrix}.$$

$$= x_0 y_1 z_2 + x_2 y_0 z_1 + x_1 y_2 z_0 - x_0 y_2 z_1 - x_1 y_0 z_2 - x_2 y_1 z_0.$$

- 性质：两行或两列交换差一个负号.

行列式

- 二阶行列式：

$$\begin{vmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \end{vmatrix} = x_1 y_2 - y_1 x_2.$$

- 三阶行列式：

$$\begin{vmatrix} x_0 & y_0 & z_0 \\ x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \end{vmatrix} = x_0 \begin{vmatrix} y_1 & z_1 \\ y_2 & z_2 \end{vmatrix} - y_0 \begin{vmatrix} x_1 & z_1 \\ x_2 & z_2 \end{vmatrix} + z_0 \begin{vmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \end{vmatrix}.$$

$$= x_0 y_1 z_2 + x_2 y_0 z_1 + x_1 y_2 z_0 - x_0 y_2 z_1 - x_1 y_0 z_2 - x_2 y_1 z_0.$$

- 性质：两行或两列交换差一个负号.

叉乘的坐标表示

- 叉乘：$\vec{a}_1 \times \vec{a}_2 = (y_1 z_2 - y_2 z_1, x_2 z_1 - x_1 z_2, x_1 y_2 - x_2 y_1)$.

  证明：由于 $\vec{i} \times \vec{j} = \vec{k}, \vec{j} \times \vec{k} = \vec{i}, \vec{k} \times \vec{i} = \vec{j}$, 利用分配率,

$$
\begin{aligned}
\vec{a}_1 \times \vec{a}_2 &= (x_1 \vec{i} + y_1 \vec{j} + z_1 \vec{k}) \times (x_2 \vec{i} + y_2 \vec{j} + z_2 \vec{k}) \\
&= (y_1 z_2 - y_2 z_1) \vec{j} \times \vec{k} + (x_2 z_1 - x_1 z_2) \vec{k} \times \vec{i} + (x_1 y_2 - x_2 y_1) \vec{i} \times \vec{j} \\
&= (y_1 z_2 - y_2 z_1) \vec{i} + (x_2 z_1 - x_1 z_2) \vec{j} + (x_1 y_2 - x_2 y_1) \vec{k}
\end{aligned}
$$

- 上面结论可以写成行列式的形式：

$$
\vec{a}_1 \times \vec{a}_2 = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \end{vmatrix}.
$$

叉乘的坐标表示

- 叉乘：$\vec{a}_1 \times \vec{a}_2 = (y_1z_2 - y_2z_1, x_2z_1 - x_1z_2, x_1y_2 - x_2y_1)$.

  证明：由于 $\vec{i} \times \vec{j} = \vec{k}, \vec{j} \times \vec{k} = \vec{i}, \vec{k} \times \vec{i} = \vec{j}$, 利用分配率,

$$
\begin{aligned}
&\vec{a}_1 \times \vec{a}_2 = (x_1\vec{i} + y_1\vec{j} + z_1\vec{k}) \times (x_2\vec{i} + y_2\vec{j} + z_2\vec{k}) \\
&= (y_1z_2 - y_2z_1)\vec{j} \times \vec{k} + (x_2z_1 - x_1z_2)\vec{k} \times \vec{i} + (x_1y_2 - x_2y_1)\vec{i} \times \vec{j} \\
&= (y_1z_2 - y_2z_1)\vec{i} + (x_2z_1 - x_1z_2)\vec{j} + (x_1y_2 - x_2y_1)\vec{k}
\end{aligned}
$$

- 上面结论可以写成行列式的形式:

$$
\vec{a}_1 \times \vec{a}_2 = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \end{vmatrix}.
$$

叉乘的坐标表示

- 叉乘：$\vec{a}_1 \times \vec{a}_2 = (y_1 z_2 - y_2 z_1, x_2 z_1 - x_1 z_2, x_1 y_2 - x_2 y_1)$.

  证明：由于 $\vec{i} \times \vec{j} = \vec{k}, \vec{j} \times \vec{k} = \vec{i}, \vec{k} \times \vec{i} = \vec{j}$，利用分配率，

$$\begin{aligned}
\vec{a}_1 \times \vec{a}_2 &= (x_1\vec{i} + y_1\vec{j} + z_1\vec{k}) \times (x_2\vec{i} + y_2\vec{j} + z_2\vec{k}) \\
&= (y_1 z_2 - y_2 z_1)\vec{j} \times \vec{k} + (x_2 z_1 - x_1 z_2)\vec{k} \times \vec{i} + (x_1 y_2 - x_2 y_1)\vec{i} \times \vec{j} \\
&= (y_1 z_2 - y_2 z_1)\vec{i} + (x_2 z_1 - x_1 z_2)\vec{j} + (x_1 y_2 - x_2 y_1)\vec{k}
\end{aligned}$$

- 上面结论可以写成行列式的形式：

$$\vec{a}_1 \times \vec{a}_2 = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \end{vmatrix}.$$

混合积的坐标表示

- 设向量 $\vec{a} = (x_1, y_1, z_1)$, $\vec{b_2} = (x_2, y_2, z_2)$, $\vec{c} = (x_3, y_3, z_3)$, 则有

$$\vec{c} \cdot (\vec{a} \times \vec{b}) = \begin{vmatrix} x_3 & y_3 & z_3 \\ x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \\ x_3 & y_3 & z_3 \end{vmatrix}.$$

- 由行列式的性质, 显然有: $\vec{a} \cdot (\vec{b} \times \vec{c}) = \vec{b} \cdot (\vec{c} \times \vec{a}) = \vec{c} \cdot (\vec{a} \times \vec{b})$.

混合积的坐标表示

- 设向量 $\vec{a}=(x_1,y_1,z_1)$, $\vec{b}_2=(x_2,y_2,z_2)$, $\vec{c}=(x_3,y_3,z_3)$, 则有

$$\vec{c}\cdot(\vec{a}\times\vec{b})=\begin{vmatrix} x_3 & y_3 & z_3 \\ x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \\ x_3 & y_3 & z_3 \end{vmatrix}.$$

- 由行列式的性质, 显然有: $\vec{a}\cdot(\vec{b}\times\vec{c})=\vec{b}\cdot(\vec{c}\times\vec{a})=\vec{c}\cdot(\vec{a}\times\vec{b})$.

例1

- 例：设 $A(1,0,1)$, $B(0,1,1)$, $C(1,-1,1)$. 求 $\overrightarrow{AB}$ 与 $\overrightarrow{AC}$ 的夹角.
- 解：设夹角为 θ, 则有

$$\cos\theta=\frac{\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}}{|\overrightarrow{AB}|\cdot|\overrightarrow{AC}|}=\frac{(-1,1,0)\cdot(0,-1,0)}{|(-1,1,0)|\cdot|(0,-1,0)|}=-\frac{1}{\sqrt{2}},$$

因此 $\theta=\frac{3\pi}{4}$.

例1

- 例：设 $A(1,0,1)$, $B(0,1,1)$, $C(1,-1,1)$. 求 $\overrightarrow{AB}$ 与 $\overrightarrow{AC}$ 的夹角.
- 解：设夹角为 θ, 则有

$$\cos\theta = \frac{\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}}{|\overrightarrow{AB}|\cdot|\overrightarrow{AC}|} = \frac{(-1,1,0)\cdot(0,-1,0)}{|(-1,1,0)|\cdot|(0,-1,0)|} = -\frac{1}{\sqrt{2}},$$

因此 $\theta = \frac{3\pi}{4}$.

例2

- 例：设$\vec{a}=(1,0,2)$, $\vec{b}=(2,-1,1)$, 求单位向量 $\vec{c}$，使得 $\vec{c}$ 与 $\vec{a}$ 和 $\vec{b}$ 均垂直，而且 $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ 成右手系.
- 解：$\vec{c}$ 是与 $\vec{a}\times\vec{b}$ 方向相同的单位向量,

$$\vec{a}\times\vec{b}=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ 1 & 0 & 2\\ 2 & -1 & 1\end{vmatrix}=(2,3,-1),$$

由此到 $\vec{c}=\frac{(2,3,-1)}{\sqrt{14}}$.

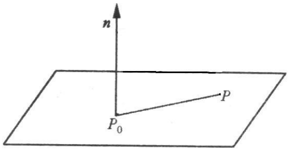
例2

- 例：设$\vec{a}=(1,0,2)$, $\vec{b}=(2,-1,1)$，求单位向量 $\vec{c}$，使得 $\vec{c}$ 与 $\vec{a}$ 和 $\vec{b}$ 均垂直，而且 $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ 成右手系.
- 解：$\vec{c}$ 是与 $\vec{a}\times\vec{b}$ 方向相同的单位向量,

$$\vec{a}\times\vec{b}=\begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & 0 & 2 \\ 2 & -1 & 1 \end{vmatrix}=(2,3,-1),$$

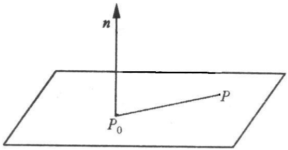
由此到 $\vec{c}=\frac{(2,3,-1)}{\sqrt{14}}$.

- 一般空间曲面的方程 $F(x, y, z) = 0$.
- 平面的点法式方程：过 $P_0(x_0, y_0, z_0)$, 法向量为 $\vec{n} = (A, B, C) \neq \vec{0}$ 的平面方程为 $A(x - x_0) + B(y - y_0) + C(z - z_0) = 0$.
- 证明：对平面上的任意点 $P(x, y, z)$, 满足 $\vec{n} \cdot \overrightarrow{P_0P} = 0$, 即得 $A(x - x_0) + B(y - y_0) + C(z - z_0) = 0$. 反过来，对于满足方程的任意点 $P(x, y, z)$, 有 $\vec{n} \cdot \overrightarrow{P_0P} = 0$，则 P 点一定在该平面上.



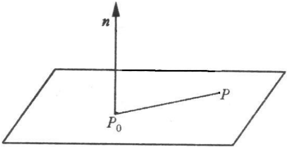
平面的点法式方程

- 一般空间曲面的方程 $F(x,y,z)=0$.
- 平面的点法式方程：过 $P_0(x_0,y_0,z_0)$，法向量为 $\vec{n}=(A,B,C)\neq\vec{0}$ 的平面方程为 $A(x-x_0)+B(y-y_0)+C(z-z_0)=0$.
- 证明：对平面上的任意点 $P(x,y,z)$，满足 $\vec{n}\cdot\overrightarrow{P_0P}=0$，即得 $A(x-x_0)+B(y-y_0)+C(z-z_0)=0$. 反过来，对于满足方程的任意点 $P(x,y,z)$，有 $\vec{n}\cdot\overrightarrow{P_0P}=0$，则 P 点一定在该平面上.



平面的点法式方程

- 一般空间曲面的方程 $F(x, y, z) = 0$.
- 平面的点法式方程：过 $P_0(x_0, y_0, z_0)$，法向量为 $\vec{n} = (A, B, C) \neq \vec{0}$ 的平面方程为 $A(x - x_0) + B(y - y_0) + C(z - z_0) = 0$.
- 证明：对平面上的任意点 $P(x, y, z)$，满足 $\vec{n} \cdot \overrightarrow{P_0P} = 0$，即得 $A(x - x_0) + B(y - y_0) + C(z - z_0) = 0$. 反过来，对于满足方程的任意点 $P(x, y, z)$，有 $\vec{n} \cdot \overrightarrow{P_0P} = 0$，则 P 点一定在该平面上.



平面的一般式方程

- 平面的一般式方程：$Ax + By + Cz + D = 0$. 这里 A, B, C 不同时为 0.
- 一般式方程化点法式方程：任取一个点 (x_0, y_0, z_0) 满足 $Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D = 0$. 则 $Ax + By + Cz + D = A(x - x_0) + B(y - y_0) + C(z - z_0)$. 从而方程变为 $A(x - x_0) + B(y - y_0) + C(z - z_0) = 0$. 因此方程表示的平面的法向量为 (A, B, C).
- 点法式方程化一般方程：$A(x - x_0) + B(y - y_0) + C(z - z_0) = 0$ 可以化为一般式 $Ax + By + Cz + (-Ax_0 - By_0 - Cz_0) = 0$.

平面的一般式方程

- 平面的一般式方程：$Ax+By+Cz+D=0$. 这里 A, B, C 不同时为 0.
- 一般式方程化点法式方程: 任取一个点 (x_0, y_0, z_0) 满足 $Ax_0+By_0+Cz_0+D=0$. 则 $Ax+By+Cz+D=A(x-x_0)+B(y-y_0)+C(z-z_0)$. 从而方程变为 $A(x-x_0)+B(y-y_0)+C(z-z_0)=0$. 因此方程表示的平面的法向量为 (A, B, C).
- 点法式方程化一般方程: $A(x-x_0)+B(y-y_0)+C(z-z_0)=0$ 可以化为一般式 $Ax+By+Cz+(-Ax_0-By_0-Cz_0)=0$.

平面的一般式方程

- 平面的一般式方程：$Ax + By + Cz + D = 0$. 这里 A, B, C 不同时为 0.
- 一般式方程化点法式方程: 任取一个点 (x_0, y_0, z_0) 满足 $Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D = 0$. 则 $Ax + By + Cz + D = A(x - x_0) + B(y - y_0) + C(z - z_0)$. 从而方程变为 $A(x - x_0) + B(y - y_0) + C(z - z_0) = 0$. 因此方程表示的平面的法向量为 (A, B, C).
- 点法式方程化一般方程: $A(x - x_0) + B(y - y_0) + C(z - z_0) = 0$ 可以化为一般式 $Ax + By + Cz + (-Ax_0 - By_0 - Cz_0) = 0$.

平面的三点式方程

- 平面的三点式方程：过不共线的三点 $P_1(x_1, y_1, z_1)$，$P_2(x_2, y_2, z_2)$，$P_3(x_3, y_3, z_3)$ 的方程

$$\begin{vmatrix} x - x_1 & y - y_1 & z - z_1 \\ x_2 - x_1 & y_2 - y_1 & z_2 - z_1 \\ x_3 - x_1 & y_3 - y_1 & z_3 - z_1 \end{vmatrix} = 0.$$

- 证明：若 P 是平面上的任一点，则 P, P_1, P_2, P_3 共面，因此 $\overrightarrow{P_1P} \cdot (\overrightarrow{P_1P_2} \times \overrightarrow{P_1P_3}) = 0$.
- 若 $(A, B, C) = \overrightarrow{P_1P_2} \times \overrightarrow{P_1P_3}$，上面的方程可化为 $A(x - x_1) + B(y - x_1) + C(z - z_1) = 0$.

平面的三点式方程

- 平面的三点式方程：过不共线的三点 $P_1(x_1, y_1, z_1)$，$P_2(x_2, y_2, z_2)$，$P_3(x_3, y_3, z_3)$ 的方程

$$\begin{vmatrix} x - x_1 & y - y_1 & z - z_1 \\ x_2 - x_1 & y_2 - y_1 & z_2 - z_1 \\ x_3 - x_1 & y_3 - y_1 & z_3 - z_1 \end{vmatrix} = 0.$$

- 证明：若 P 是平面上的任一点，则 P, P_1, P_2, P_3 共面，因此 $\overrightarrow{P_1P} \cdot (\overrightarrow{P_1P_2} \times \overrightarrow{P_1P_3}) = 0$.
- 若 $(A, B, C) = \overrightarrow{P_1P_2} \times \overrightarrow{P_1P_3}$，上面的方程可化为 $A(x - x_1) + B(y - y_1) + C(z - z_1) = 0$.

平面的三点式方程

- 平面的三点式方程：过不共线的三点 $P_1(x_1, y_1, z_1)$，$P_2(x_2, y_2, z_2)$，$P_3(x_3, y_3, z_3)$ 的方程

$$\begin{vmatrix} x - x_1 & y - y_1 & z - z_1 \\ x_2 - x_1 & y_2 - y_1 & z_2 - z_1 \\ x_3 - x_1 & y_3 - y_1 & z_3 - z_1 \end{vmatrix} = 0.$$

- 证明：若 P 是平面上的任一点，则 P, P_1, P_2, P_3 共面，因此 $\overrightarrow{P_1P} \cdot (\overrightarrow{P_1P_2} \times \overrightarrow{P_1P_3}) = 0$.
- 若 $(A, B, C) = \overrightarrow{P_1P_2} \times \overrightarrow{P_1P_3}$，上面的方程可化为 $A(x - x_1) + B(y - x_1) + C(z - z_1) = 0$.

平面的截距式方程

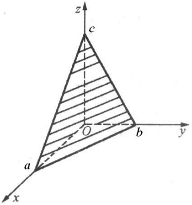
- 平面的截距式方程：过三点 $(a,0,0)$，$(0,b,0)$，$(0,0,c)$($abc \neq 0$)的平面方程 $\frac{x}{a}+\frac{y}{b}+\frac{z}{c}=1$.

  证明：平面的三点式方程为

$$\begin{vmatrix} x-a & y & z \\ -a & b & 0 \\ -a & 0 & c \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow bc(x-a)+acy+abz=0.$$

- 若 $ABCD \neq 0$, 一般方程 $Ax+By+Cz+D=0$ 可化为截距式方程

$$\frac{x}{-\frac{D}{A}}+\frac{y}{-\frac{D}{B}}+\frac{z}{-\frac{D}{C}}=1.$$



平面的截距式方程

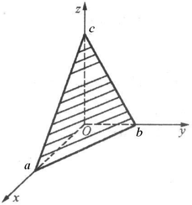
- 平面的截距式方程：过三点 $(a,0,0)$，$(0,b,0)$，$(0,0,c)$($abc \neq 0$)的平面方程 $\frac{x}{a}+\frac{y}{b}+\frac{z}{c}=1$.

  证明：平面的三点式方程为

$$\begin{vmatrix} x-a & y & z \\ -a & b & 0 \\ -a & 0 & c \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow bc(x-a)+acy+abz=0.$$

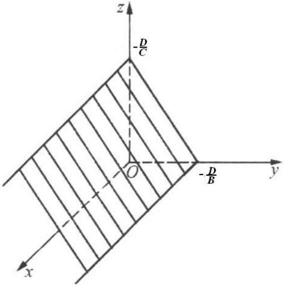
- 若 $ABCD \neq 0$, 一般方程 $Ax+By+Cz+D=0$ 可化为截距式方程

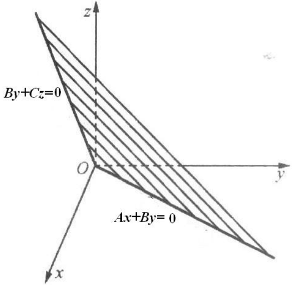
$$\frac{x}{-\frac{D}{A}}+\frac{y}{-\frac{D}{B}}+\frac{z}{-\frac{D}{C}}=1.$$



一些特殊方程

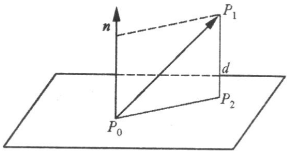
- 例：$Cz + D = 0$，即 $z = -\frac{D}{C}$ 是与 Oxy 平面平行的平面.
- 例：$By + Cz + D = 0$，是与 x 轴平行的平面.
- 例：$Ax + By + Cz = 0$，是过原点的平面.





- 平面 $Ax + By + Cz + D = 0$, 求点 $P_1 = (x_1, y_1, z_1)$ 到平面的距离.

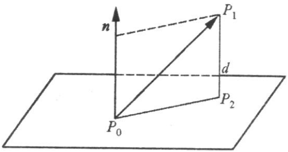
  解: 取平面上的点 $P_0 = (x_0, y_0, z_0)$, 则有 $D = -Ax_0 - By_0 - Cz_0$. 设 $\vec{n} = (A, B, C)$. 则 $P_1 = (x_1, y_1, z_1)$ 到平面的距离为



$$
\begin{aligned}
d =& \frac{|P_0P_1 \cdot \vec{n}|}{|\vec{n}|} = \frac{|A(x_1 - x_0) + B(y_1 - y_0) + C(z_1 - z_0|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}} \\
=& \frac{|Ax_1 + By_1 + Cz_1 + D|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}.
\end{aligned}
$$

点到平面的距离

- 平面 $Ax+By+Cz+D=0$，求点 $P_1=(x_1,y_1,z_1)$ 到平面的距离.
  解：取平面上的点 $P_0=(x_0,y_0,z_0)$，则有 $D=-Ax_0-By_0-Cz_0$. 设 $\vec{n}=(A,B,C)$. 则 $P_1=(x_1,y_1,z_1)$ 到平面的距离为



$$
\begin{aligned}
d=&\frac{|P_0P_1\cdot\vec{n}|}{|\vec{n}|}=\frac{|A(x_1-x_0)+B(y_1-y_0)+C(z_1-z_0|}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}\\
=&\frac{|Ax_1+By_1+Cz_1+D|}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}.
\end{aligned}
$$

平面之间的关系

- 两平面 $A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0$, $A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0$. 法向量分别为 $\vec{n}_1 = (A_1, B_1, C_1)$, $\vec{n}_1 = (A_2, B_2, C_2)$. 设两平面的夹角 θ, 则

$$\cos\theta = |\cos\langle\vec{n}_1, \vec{n}_2\rangle| = \frac{|\vec{n}_1 \cdot \vec{n}_2|}{|\vec{n}_1| \cdot |\vec{n}_2|}.$$

- 两平面垂直 $\Leftrightarrow \vec{n}_1 \cdot \vec{n}_2 = A_1A_2 + B_1B_2 + C_1C_2 = 0$.
- 两平面平行 $\Leftrightarrow \vec{n}_1$ 与 $\vec{n}_2$ 共线 $\Leftrightarrow (A_1, B_1, C_1) = \lambda(A_2, B_2, C_2)$
- 两平面重合 $\Leftrightarrow (A_1, B_1, C_1, D_1) = \lambda(A_2, B_2, C_2, D_2)$

平面之间的关系

- 两平面 $A_1x+B_1y+C_1z+D_1=0$, $A_2x+B_2y+C_2z+D_2=0$. 法向量分别为$\vec{n}_1=(A_1,B_1,C_1)$, $\vec{n}_1=(A_2,B_2,C_2)$. 设两平面的夹角 θ, 则

$$\cos\theta = |\cos\langle\vec{n}_1,\vec{n}_2\rangle| = \frac{|\vec{n}_1\cdot\vec{n}_2|}{|\vec{n}_1|\cdot|\vec{n}_2|}.$$

- 两平面垂直 $\Leftrightarrow \vec{n}_1\cdot\vec{n}_2 = A_1A_2+B_1B_2+C_1C_2=0.$
- 两平面平行 $\Leftrightarrow$ $\vec{n}_1$ 与 $\vec{n}_2$ 共线 $\Leftrightarrow (A_1,B_1,C_1)=\lambda(A_2,B_2,C_2)$
- 两平面重合 $\Leftrightarrow (A_1,B_1,C_1,D_1)=\lambda(A_2,B_2,C_2,D_2)$

例

- 求常数 l, k,使得平面 $x+ly+kz=1$ 与平面 $x+y-z=8$ 垂直，且过点 $(1,1,-\frac{2}{3})$.
- 解：$(1,l,k)\cdot(1,1,-1)=0$，即 $1+l-k=0$. 又过 $(1,1,-\frac{2}{3})$，因此满足 $1+l-\frac{2}{3}k=1$，解方程组得$l=2$, $k=3$.

例

- 求常数 l, k,使得平面 $x+ly+kz=1$ 与平面 $x+y-z=8$ 垂直，且过点 $(1,1,-\frac{2}{3})$.
- 解：$(1,l,k)\cdot(1,1,-1)=0$, 即 $1+l-k=0$. 又过 $(1,1,-\frac{2}{3})$，因此满足 $1+l-\frac{2}{3}k=1$, 解方程组得$l=2$, $k=3$.

直线方程

- 一般曲线方程: $\begin{cases} F(x,y,z)=0 \\ G(x,y,z)=0 \end{cases}$ 或 $\begin{cases} x=x(t) \\ y=y(t) \\ z=z(t) \end{cases}$.
- 当两平面 $A_1x+B_1y+C_1z+D_1=0$, $A_2x+B_2y+C_2z+D_2=0$ 不平行，即 $(A_1,B_1,C_1)\neq\lambda(A_2,B_2,C_2)$ 时，方程组

$$\begin{cases} A_1x+B_1y+C_1z+D_1=0 \\ A_2x+B_2y+C_2z+D_2=0 \end{cases}$$

表示一条直线, 反过来, 任意直线可表示为两平面之交(不唯一).

- 例: $\begin{cases} x-a=0 \\ y-b=0 \end{cases}$ 表示过 $(a,b,0)$ 且平行于 z 轴的直线.

直线方程

- 一般曲线方程: $\begin{cases} F(x,y,z)=0 \\ G(x,y,z)=0 \end{cases}$ 或 $\begin{cases} x=x(t) \\ y=y(t) \\ z=z(t) \end{cases}$.
- 当两平面 $A_1x+B_1y+C_1z+D_1=0$, $A_2x+B_2y+C_2z+D_2=0$ 不平行, 即 $(A_1,B_1,C_1)\neq\lambda(A_2,B_2,C_2)$ 时, 方程组

$$\begin{cases} A_1x+B_1y+C_1z+D_1=0 \\ A_2x+B_2y+C_2z+D_2=0 \end{cases}$$

表示一条直线, 反过来, 任意直线可表示为两平面之交(不唯一).

- 例: $\begin{cases} x-a=0 \\ y-b=0 \end{cases}$ 表示过 $(a,b,0)$ 且平行于 z 轴的直线.

直线的参数方程

- 参数方程：过点 $P_0(x_0, y_0, z_0)$，方向为 $\vec{e} = (a, b, c) \neq \vec{0}$ 的直线方程：$\begin{cases} x - x_0 = ta \\ y - y_0 = tb \\ z - z_0 = tc \end{cases}$.

  证明：直线上任意点 $P(x, y, z)$ 满足 $\overrightarrow{P_0P}$ 与 $\vec{e}$ 共线，则存在 t，使得 $\overrightarrow{P_0P} = t\vec{e}$.

- 求两平面交线的参数方程：先求出交线上一点 P_0，取 $\vec{e} = \vec{n}_1 \times \vec{n}_2$，即可写出两平面交线的参数方程.

直线的参数方程

- 参数方程：过点 $P_0(x_0, y_0, z_0)$，方向为 $\vec{e} = (a, b, c) \neq \vec{0}$ 的直线方程：$\begin{cases} x - x_0 = ta \\ y - y_0 = tb \\ z - z_0 = tc \end{cases}$.

  证明：直线上任意点 $P(x, y, z)$ 满足 $\overrightarrow{P_0P}$ 与 $\vec{e}$ 共线，则存在 t，使得 $\overrightarrow{P_0P} = t\vec{e}$.
- 求两平面交线的参数方程：先求出交线上一点 P_0，取 $\vec{e} = \vec{n}_1 \times \vec{n}_2$，即可写出两平面交线的参数方程.

参数方程消去t

- 直线的参数方程中消去 t: 若 $abc \neq 0$，得

$$\frac{x-x_0}{a}=\frac{y-y_0}{b}=\frac{z-z_0}{c};$$

若 a, b, c 中有一个为 0, 如 $a=0, bc \neq 0$时，得

$$\begin{cases} x-x_0=0 \\ \frac{y-y_0}{b}=\frac{z-z_0}{c} \end{cases};$$

若 a, b, c 中有两个为 0, 如 $a=b=0, c \neq 0$ 时, 得

$$\begin{cases} x-x_0=0 \\ y-y_0=0 \end{cases}.$$

直线的标准方程

- 标准方程：过点 $P_0(x_0, y_0, z_0)$，方向为 $\vec{e} = (a, b, c) \neq \vec{0}$ 的直线方程：
$$\frac{x - x_0}{a} = \frac{y - y_0}{b} = \frac{z - z_0}{c}.$$
这里规定：$a = 0, bc \neq 0$ 时，上面方程理解为
$$\begin{cases} x - x_0 = 0 \\ \frac{y-y_0}{b} = \frac{z-z_0}{c} \end{cases};$$
$a = b = 0, c \neq 0$ 时，上面方程理解为
$$\begin{cases} x - x_0 = 0 \\ y - y_0 = 0 \end{cases}.$$

直线与平面

- 直线过 P_0，方向为 $\vec{e}$, 则点 P 到该直线的距离为 $\frac{|\overrightarrow{P_0P}\times\vec{e}|}{|\vec{e}|}$.
- 点 $P_1(x_1, y_1, z_1)$ 到平面 $Ax+By+Cz+D=0$ 的垂线方程为

$$\frac{x-x_1}{A}=\frac{y-y_1}{B}=\frac{z-z_1}{C}$$

.

- 设直线 $\frac{x-x_0}{a}=\frac{y-y_0}{b}=\frac{z-z_0}{c}$ 与平面 $Ax+By+Cz+D=0$ 的夹角为 θ，则有

$$\sin\theta=\frac{|(a,b,c)\cdot(A,B,C)|}{|(a,b,c)|\cdot|(A,B,C)|}$$

直线与平面

- 直线过 P_0，方向为 $\vec{e}$, 则点 P 到该直线的距离为 $\frac{|\overrightarrow{P_0P}\times\vec{e}|}{|\vec{e}|}$.
- 点 $P_1(x_1, y_1, z_1)$ 到平面 $Ax+By+Cz+D=0$ 的垂线方程为
$$\frac{x-x_1}{A}=\frac{y-y_1}{B}=\frac{z-z_1}{C}$$
.
- 设直线 $\frac{x-x_0}{a}=\frac{y-y_0}{b}=\frac{z-z_0}{c}$ 与平面 $Ax+By+Cz+D=0$ 的夹角为 θ，则有
$$\sin\theta=\frac{|(a,b,c)\cdot(A,B,C)|}{|(a,b,c)|\cdot|(A,B,C)|}$$

两直线：$\frac{x-x_1}{a_1}=\frac{y-y_1}{b_1}=\frac{z-z_1}{c_1}$ 和 $\frac{x-x_2}{a_2}=\frac{y-y_2}{b_2}=\frac{z-z_2}{c_2}$. 设 $\vec{e}_1=(a_1,b_1,c_1)$, $\vec{e}_2=(a_2,b_2,c_2)$，$P_1=(x_1,y_1,z_1)$, $P_1=(x_2,y_2,z_2)$.

- 当 $\vec{e}_1$ 和 $\vec{e}_2$ 共线，但与 $\overrightarrow{P_1P_2}$ 不共线，则两直线平行；当 $\vec{e}_1$、$\vec{e}_2$ 和 $\overrightarrow{P_1P_2}$ 共线时，则两直线重合.
- 当 $\vec{e}_1$ 和 $\vec{e}_2$不共线时，混合积 $\overrightarrow{P_1P_2}\cdot(\vec{e}_1\times\vec{e}_2)=0$ 时两直线相交，$\overrightarrow{P_1P_2}\cdot(\vec{e}_1\times\vec{e}_2)\neq 0$ 时，两直线异面.
- 当两直线是异面直线时，公垂线的长度为

$$\frac{|\overrightarrow{P_1P_2}\cdot(\vec{e}_1\times\vec{e}_2)|}{|\vec{e}_1\times\vec{e}_2|}.$$

两直线：$\frac{x-x_1}{a_1} = \frac{y-y_1}{b_1} = \frac{z-z_1}{c_1}$ 和 $\frac{x-x_2}{a_2} = \frac{y-y_2}{b_2} = \frac{z-z_2}{c_2}$. 设 $\vec{e}_1 = (a_1, b_1, c_1)$, $\vec{e}_2 = (a_2, b_2, c_2)$， $P_1 = (x_1, y_1, z_1)$, $P_1 = (x_2, y_2, z_2)$.

- 当 $\vec{e}_1$ 和 $\vec{e}_2$ 共线，但与 $\overrightarrow{P_1P_2}$ 不共线，则两直线平行；当 $\vec{e}_1$、$\vec{e}_2$ 和 $\overrightarrow{P_1P_2}$ 共线时，则两直线重合.
- 当 $\vec{e}_1$ 和 $\vec{e}_2$不共线时，混合积 $\overrightarrow{P_1P_2} \cdot (\vec{e}_1 \times \vec{e}_2) = 0$ 时两直线相交，$\overrightarrow{P_1P_2} \cdot (\vec{e}_1 \times \vec{e}_2) \neq 0$ 时，两直线异面.
- 当两直线是异面直线时，公垂线的长度为

$$\frac{|\overrightarrow{P_1P_2} \cdot (\vec{e}_1 \times \vec{e}_2)|}{|\vec{e}_1 \times \vec{e}_2|}.$$

两直线：$\frac{x-x_1}{a_1}=\frac{y-y_1}{b_1}=\frac{z-z_1}{c_1}$ 和 $\frac{x-x_2}{a_2}=\frac{y-y_2}{b_2}=\frac{z-z_2}{c_2}$. 设 $\vec{e}_1=(a_1,b_1,c_1)$, $\vec{e}_2=(a_2,b_2,c_2)$，$P_1=(x_1,y_1,z_1)$, $P_1=(x_2,y_2,z_2)$.

- 当 $\vec{e}_1$ 和 $\vec{e}_2$ 共线，但与 $\overrightarrow{P_1P_2}$ 不共线，则两直线平行；当 $\vec{e}_1$、$\vec{e}_2$ 和 $\overrightarrow{P_1P_2}$ 共线时，则两直线重合.
- 当 $\vec{e}_1$ 和 $\vec{e}_2$不共线时，混合积 $\overrightarrow{P_1P_2}\cdot(\vec{e}_1\times\vec{e}_2)=0$ 时两直线相交，$\overrightarrow{P_1P_2}\cdot(\vec{e}_1\times\vec{e}_2)\neq 0$ 时，两直线异面.
- 当两直线是异面直线时，公垂线的长度为

$$\frac{|\overrightarrow{P_1P_2}\cdot(\vec{e}_1\times\vec{e}_2)|}{|\vec{e}_1\times\vec{e}_2|}.$$

二次曲面

- 一般曲面：$F(x, y, z) = 0$, 一次曲面(平面)：$Ax + By + Cz + D = 0$.
- 一般二次曲面方程：

$$Ax^2 + By^2 + Cz^2 + Dxy + Eyz + Fzx + Gx + Hy + Iz + J = 0.$$

其中 A, B, C, D, E, F 不能全为 0.

- 一些特殊情形不是曲面. 如

$$(A_1x + B_1y + C_1z + D_1)^2 + (A_2x + B_2y + C_2z + D_2)^2 = 0$$

表示一条直线.

二次曲面

- 一般曲面：$F(x,y,z)=0$，一次曲面(平面)：$Ax+By+Cz+D=0$.
- 一般二次曲面方程：

$$Ax^2+By^2+Cz^2+Dxy+Eyz+Fzx+Gx+Hy+Iz+J=0.$$

其中 A,B,C,D,E,F 不能全为 0.

- 一些特殊情形不是曲面. 如

$$(A_1x+B_1y+C_1z+D_1)^2+(A_2x+B_2y+C_2z+D_2)^2=0$$

表示一条直线.

二次曲面

- 一般曲面：$F(x,y,z)=0$，一次曲面(平面)：$Ax+By+Cz+D=0$.
- 一般二次曲面方程：

$$Ax^2+By^2+Cz^2+Dxy+Eyz+Fzx+Gx+Hy+Iz+J=0.$$

其中 A,B,C,D,E,F 不能全为 0.

- 一些特殊情形不是曲面. 如

$$(A_1x+B_1y+C_1z+D_1)^2+(A_2x+B_2y+C_2z+D_2)^2=0$$

表示一条直线.

二次曲面方程的化简

- 一般二次平面方程经过坐标变换，可简化为：

$$Ax^2 + By^2 + Cz^2 + Gx + Hy + Iz + J = 0,$$

其中 A, B, C 不全为 0.

- 例如：$xy = 1$ 经过坐标变换

$$\begin{cases} x = \frac{1}{\sqrt{2}}(x' - y') \\ y = \frac{1}{\sqrt{2}}(x' + y') \\ z = z' \end{cases}$$

可以化成 $x'^2 - y'^2 = 2$.

A, B, C 都不为 0 时方程的化简

A, B, C 都不为 0 时，方程可写成 $A(x+\frac{G}{2A})^2+B(y+\frac{H}{2B})^2+C(z+\frac{I}{2C})^2+J'=0$. 通过坐标平移，方程可化为 $Ax^2+By^2+Cz^2+J=0$. 有如下几种形式:

- $J=0$ 时，$A>0, B>0, C<0 \longrightarrow$ 椭圆锥面 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=0$.
- $J\neq 0$ 时，A, B, C 符号相同 $\longrightarrow$ 椭球面 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$.
- $J<0$ 时，$A>0, B>0, C<0 \longrightarrow$ 单叶双曲面 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=1$.
- $J>0$ 时，$A>0, B>0, C<0 \longrightarrow$ 双叶双曲面 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=-1$.

A, B, C 都不为 0 时方程的化简

A, B, C 都不为 0 时，方程可写成 $A(x+\frac{G}{2A})^2+B(y+\frac{H}{2B})^2+C(z+\frac{I}{2C})^2+J'=0$. 通过坐标平移，方程可化为 $Ax^2+By^2+Cz^2+J=0$. 有如下几种形式:

- $J=0$ 时，$A>0, B>0, C<0 \longrightarrow$ 椭圆锥面 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=0$.
- $J\neq 0$ 时，A, B, C 符号相同 $\longrightarrow$ 椭球面 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$.
- $J<0$ 时，$A>0, B>0, C<0 \longrightarrow$ 单叶双曲面 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=1$.
- $J>0$ 时，$A>0, B>0, C<0 \longrightarrow$ 双叶双曲面 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=-1$.

A, B, C 都不为 0 时方程的化简

A, B, C 都不为 0 时，方程可写成 $A(x+\frac{G}{2A})^2+B(y+\frac{H}{2B})^2+C(z+\frac{I}{2C})^2+J'=0$. 通过坐标平移，方程可化为 $Ax^2+By^2+Cz^2+J=0$. 有如下几种形式:

- $J=0$ 时，$A>0, B>0, C<0 \longrightarrow$ 椭圆锥面 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=0$.
- $J\neq 0$ 时，A, B, C 符号相同 $\longrightarrow$ 椭球面 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$.
- $J<0$ 时，$A>0, B>0, C<0 \longrightarrow$ 单叶双曲面 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=1$.
- $J>0$ 时，$A>0, B>0, C<0 \longrightarrow$ 双叶双曲面 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=-1$.

A, B, C 都不为 0 时，方程可写成 $A(x+\frac{G}{2A})^2+B(y+\frac{H}{2B})^2+C(z+\frac{I}{2C})^2+J'=0$. 通过坐标平移，方程可化为 $Ax^2+By^2+Cz^2+J=0$. 有如下几种形式:

- $J=0$ 时，$A>0, B>0, C<0 \longrightarrow$ 椭圆锥面 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=0$.
- $J\neq 0$ 时，A, B, C 符号相同 $\longrightarrow$ 椭球面 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$.
- $J<0$ 时，$A>0, B>0, C<0 \longrightarrow$ 单叶双曲面 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=1$.
- $J>0$ 时，$A>0, B>0, C<0 \longrightarrow$ 双叶双曲面 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=-1$.

A, B, C 中有一个为 0 时方程的化简

设 A, B 不为 0，$C = 0$ 时，方程可化为 $Ax^2 + By^2 + Iz + J = 0$. 若 $I \neq 0$, 平移坐标 z 可以化为 $Ax^2 + By^2 + Iz = 0$.

- $I = 0$，$J \neq 0$ 时，A, B 符号相同 $\rightarrow$ 椭圆柱面 $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$.
- $I = 0$ 时，$J \neq 0$, A, B 符号相反 $\rightarrow$ 双曲柱面 $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$.
- $I \neq 0$ 时，A, B 符号相同 $\rightarrow$ 椭球抛物面面 $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - z = 0$.
- $I \neq 0$ 时，A, B 符号不同 $\rightarrow$ 双曲抛物面面 $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} - z = 0$.

A, B, C 中有一个为 0 时方程的化简

设 A, B 不为 0，$C = 0$ 时，方程可化为 $Ax^2 + By^2 + Iz + J = 0$. 若 $I \neq 0$, 平移坐标 z 可以化为 $Ax^2 + By^2 + Iz = 0$.

- $I = 0$，$J \neq 0$ 时，A, B 符号相同 $\rightarrow$ 椭圆柱面 $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$.
- $I = 0$ 时，$J \neq 0$, A, B 符号相反 $\rightarrow$ 双曲柱面 $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$.
- $I \neq 0$ 时，A, B 符号相同 $\rightarrow$ 椭球抛物面面 $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - z = 0$.
- $I \neq 0$ 时，A, B 符号不同 $\rightarrow$ 双曲抛物面面 $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} - z = 0$.

A, B, C 中有一个为 0 时方程的化简

设 A, B 不为 0，$C = 0$ 时，方程可化为 $Ax^2 + By^2 + Iz + J = 0$. 若 $I \neq 0$, 平移坐标 z 可以化为 $Ax^2 + By^2 + Iz = 0$.

- $I = 0$，$J \neq 0$ 时，A, B 符号相同 $\rightarrow$ 椭圆柱面 $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$.
- $I = 0$ 时，$J \neq 0$, A, B 符号相反 $\rightarrow$ 双曲柱面 $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$.
- $I \neq 0$ 时，A, B 符号相同 $\rightarrow$ 椭球抛物面面 $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - z = 0$.
- $I \neq 0$ 时，A, B 符号不同 $\rightarrow$ 双曲抛物面面 $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} - z = 0$.

A, B, C 中有一个为 0 时方程的化简

设 A, B 不为 0，$C=0$ 时，方程可化为 $Ax^2+By^2+Iz+J=0$. 若 $I\neq 0$, 平移坐标 z 可以化为 $Ax^2+By^2+Iz=0$.

- $I=0$，$J\neq 0$ 时，A, B 符号相同 $\longrightarrow$ 椭圆柱面 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$.
- $I=0$ 时，$J\neq 0$, A, B 符号相反 $\longrightarrow$ 双曲柱面 $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$.
- $I\neq 0$ 时，A, B 符号相同 $\longrightarrow$ 椭球抛物面面 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-z=0$.
- $I\neq 0$ 时，A, B 符号不同 $\longrightarrow$ 双曲抛物面面 $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}-z=0$.

A, B, C 中有两个为 0 时方程的化简

设 A 不为 0，$B = C = 0$ 时，方程可化为 $Ax^2 + Hy + Iz + J = 0$. 当

- 当 $H = I = 0$ 时 $\rightarrow$ 曲面退化为两个平面.
- H, I 不全为 0时，通过对坐标 y, z 进行平移和旋转，方程可化为 $Ax^2 + H'y = 0 \rightarrow$ 抛物拄面 $\frac{x^2}{a^2} - y = 0$.

A, B, C 中有两个为 0 时方程的化简

设 A 不为 0，$B = C = 0$ 时，方程可化为 $Ax^2 + Hy + Iz + J = 0$. 当

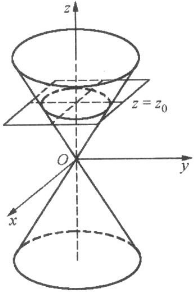
- 当 $H = I = 0$ 时 $\to$ 曲面退化为两个平面.
- H, I 不全为 0时，通过对坐标 y, z 进行平移和旋转，方程可化为 $Ax^2 + H'y = 0 \to$ 抛物柱面 $\frac{x^2}{a^2} - y = 0$.

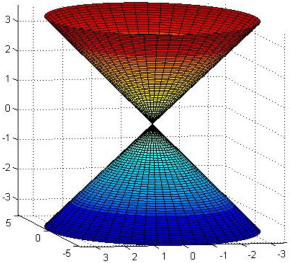
锥面

- 锥面：给定一条空间曲线 C 和不在 C 上的一点 O，当点 P 沿曲线 C 运动时，连接点 O 和 P 的直线 OP 形成的曲面称为锥面. 称点 O 为锥面的顶点，动直线称为锥面的直母线, 曲线 C 为锥面的准线.

椭圆锥面

- 椭圆锥面：$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=0.$
- 上面的椭圆锥面与 $z=z_0(\neq 0)$ 的交线为椭圆，与 $x=x_0(\neq 0)$，或者 $y=y_0(\neq 0)$ 的交线为双曲线，与 $x=0$，或者 $y=0$ 的交线为两条直线.

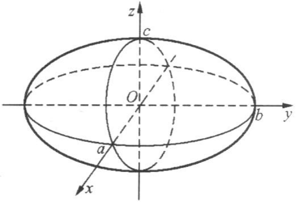




椭球面

- 椭球面：$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$.
- 椭球面和平行与坐标平面的平面 $x=x_0(|x_0|<a)$, $y=y_0(|y_0|<y)$, $z=z_0(|z_0|<c)$ 截得的曲线是椭圆.
- 椭球面的参数方程为

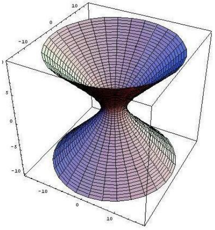
$$\begin{cases} x=a\sin\phi\cos\theta \\ y=b\sin\phi\sin\theta \\ z=c\cos\phi \end{cases},$$



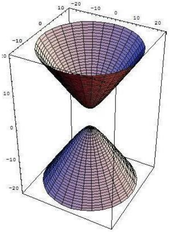
其中 $0\le\theta<2\pi$, $0\le\phi\le\pi$.

双曲面

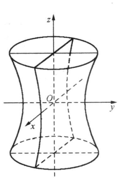
- 单叶双曲面：$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=1$.
  这里 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}\geq 1$. 与 $z=z_0$ 的交线为椭圆，与 $x=x_0\neq\pm a$ 或者 $y=y_0\neq\pm b$ 的交线为双曲线，与 $x=\pm a$ 或者 $y=\pm b$ 的交线为两条直线.
- 双叶双曲面：$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=-1$.
  这里 $|z|\geq c$. 与 $x=x_0$ 或者 $y=y_0$ 的交线为双曲线.

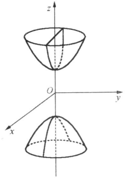


单叶双曲面：$\frac{x^2}{1^2}+\frac{y^2}{3^2}-\frac{z^2}{4^2}=1$



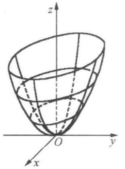
双叶双曲面：$\frac{x^2}{1^2}+\frac{y^2}{2^2}-\frac{z^2}{3^2}=-1$

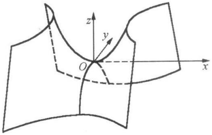


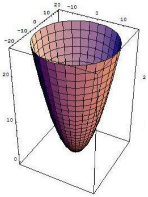


.

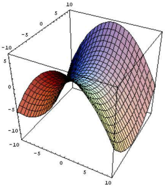
- 椭圆抛物面: $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-z=0$.
- 双曲抛物面: $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}-z=0$.
  与平行与坐标平面的截线: 双曲线($z=z_0\neq 0$), 两条相交直线($z=0$), 抛物线($x=x_0$ 或 $y=y_0$).







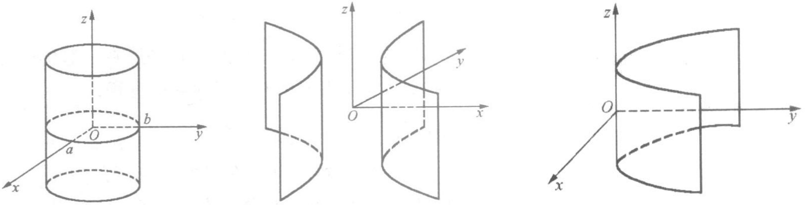
椭圆抛物面: $z=\frac{x^2}{3^2}+\frac{y^2}{4^2}$



双曲抛物面 $z=\frac{x^2}{3^2}-\frac{y^2}{4^2}$

柱面

- 柱面：动直线沿着一条定曲线平行移动所形成的曲面．动直线称为柱面的母线，定曲线称为柱面的准线．
- 椭圆柱面：$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$.
- 双曲柱面：$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$.
- 抛物柱面：$\frac{x^2}{a^2} - y = 0$.



例

- $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-x=0$ 可化为 $\frac{(x-\frac{a^2}{2})^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=\frac{a^2}{4}$，是椭圆柱面.
- $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=x+y+z$ 是双曲抛物面.
- $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=z$ 是椭球面.
- 直线 $\frac{x-x_0}{a}=\frac{y-y_0}{b}=\frac{z-z_0}{c}$($c\neq 0$，当 $c=0$ 时，若直线与 z 轴不交，得到去掉一个开圆盘的平面) 绕 z 轴的旋转面。设 (x,y,z) 是旋转面上的任意点，则存在直线上的点 (x_1,y_1,z)，由于 $x^2+y^2=x_1^2+y_1^2$，(x,y,z) 满足方程

$$x^2+y^2=\left(\frac{a(z-z_0)}{c}+x_0\right)^2+\left(\frac{b(z-z_0)}{c}+y_0\right)^2.$$

当 $a=b=0$ 时是圆柱面，当直线与 z 轴相交时是圆锥曲面，不交时是单页双曲面。

例

- $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-x=0$ 可化为 $\frac{(x-\frac{a^2}{2})^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=\frac{a^2}{4}$, 是椭圆柱面.
- $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=x+y+z$ 是双曲抛物面.
- $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=z$ 是椭球面.
- 直线 $\frac{x-x_0}{a}=\frac{y-y_0}{b}=\frac{z-z_0}{c}$($c\neq 0$, 当 $c=0$ 时，若直线与 z 轴不交，得到去掉一个开圆盘的平面) 绕 z 轴的旋转面。设 (x,y,z) 是旋转面上的任意点，则存在直线上的点 (x_1,y_1,z), 由于 $x^2+y^2=x_1^2+y_1^2$, (x,y,z) 满足方程

$$x^2+y^2=\left(\frac{a(z-z_0)}{c}+x_0\right)^2+\left(\frac{b(z-z_0)}{c}+y_0\right)^2.$$

当 $a=b=0$ 时是圆柱面, 当直线与 z 轴相交时是圆锥曲面，不交时是单页双曲面。

例

- $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-x=0$ 可化为 $\frac{(x-\frac{a^2}{2})^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=\frac{a^2}{4}$，是椭圆柱面.
- $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=x+y+z$ 是双曲抛物面.
- $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=z$ 是椭球面.
- 直线 $\frac{x-x_0}{a}=\frac{y-y_0}{b}=\frac{z-z_0}{c}$($c\neq 0$，当 $c=0$ 时，若直线与 z 轴不交，得到去掉一个开圆盘的平面) 绕 z 轴的旋转面。设 (x,y,z) 是旋转面上的任意点，则存在直线上的点 (x_1,y_1,z)，由于 $x^2+y^2=x_1^2+y_1^2$，(x,y,z) 满足方程

$$x^2+y^2=\left(\frac{a(z-z_0)}{c}+x_0\right)^2+\left(\frac{b(z-z_0)}{c}+y_0\right)^2.$$

当 $a=b=0$ 时是圆柱面，当直线与 z 轴相交时是圆锥曲面，不交时是单页双曲面。

一元向量值函数

- 一元向量值函数: $D \subset \mathbb{R}$ 到 $\mathbb{R}^3$ 的映射, 记为 $\vec{r}(t) = (x(t), y(t), z(t))$, $t \in D$.
- 向量值函数的极限: $\vec{r}(t) = (x(t), y(t), z(t))$, $\vec{r}_0 = (x_0, y_0, z_0)$,

$$\lim_{t \to t_0} \vec{r}(t) = \vec{r}_0$$
$$\Leftrightarrow \forall \epsilon > 0, \exists \delta, \text{ 使得当 } 0 < |t - t_0| < \delta \text{ 时, } |\vec{r} - \vec{r}_0| < \epsilon$$
$$\Leftrightarrow \lim_{t \to t_0} x(t) = x_0, \lim_{t \to t_0} y(t) = y_0, \lim_{t \to t_0} z(t) = z_0.$$

- 向量值函数的导数:

$$\vec{r}'(t) = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\vec{r}(t + \Delta t) - \vec{r}(t)}{\Delta t} = (x'(t), y'(t), z'(t))$$

一元向量值函数

- 一元向量值函数: $D \subset \mathbb{R}$ 到 $\mathbb{R}^3$ 的映射, 记为 $\vec{r}(t) = (x(t), y(t), z(t))$, $t \in D$.
- 向量值函数的极限: $\vec{r}(t) = (x(t), y(t), z(t))$, $\vec{r}_0 = (x_0, y_0, z_0)$,

$$
\begin{aligned}
&\lim_{t \to t_0} \vec{r}(t) = \vec{r}_0 \\
&\Leftrightarrow \forall \epsilon > 0, \exists \delta, \text{ 使得当 } 0 < |t - t_0| < \delta \text{ 时, } |\vec{r} - \vec{r}_0| < \epsilon \\
&\Leftrightarrow \lim_{t \to t_0} x(t) = x_0, \lim_{t \to t_0} y(t) = y_0, \lim_{t \to t_0} z(t) = z_0.
\end{aligned}
$$

- 向量值函数的导数:

$$
\vec{r}'(t) = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\vec{r}(t + \Delta t) - \vec{r}(t)}{\Delta t} = (x'(t), y'(t), z'(t))
$$

一元向量值函数

- 一元向量值函数: $D \subset \mathbb{R}$ 到 $\mathbb{R}^3$ 的映射, 记为 $\vec{r}(t) = (x(t), y(t), z(t))$, $t \in D$.
- 向量值函数的极限: $\vec{r}(t) = (x(t), y(t), z(t))$, $\vec{r}_0 = (x_0, y_0, z_0)$,

$$\begin{aligned}
&\lim_{t \to t_0} \vec{r}(t) = \vec{r}_0 \\
&\Leftrightarrow \forall \epsilon > 0, \exists \delta, \text{ 使得当 } 0 < |t - t_0| < \delta \text{ 时, } |\vec{r} - \vec{r}_0| < \epsilon \\
&\Leftrightarrow \lim_{t \to t_0} x(t) = x_0, \lim_{t \to t_0} y(t) = y_0, \lim_{t \to t_0} z(t) = z_0.
\end{aligned}$$

- 向量值函数的导数:

$$\vec{r}'(t) = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\vec{r}(t + \Delta t) - \vec{r}(t)}{\Delta t} = (x'(t), y'(t), z'(t))$$

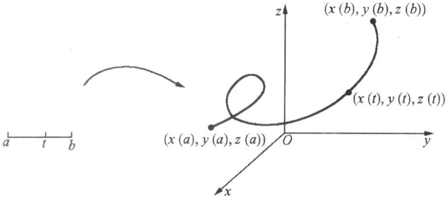
- 空间曲线：区间 $[a,b]$ 到空间 $\mathbb{R}^3$ 的一个连续映射的像. 该映射可以用向量值函数表示：

$$\vec{r}:[a,b]\to\mathbb{R}^3$$
$$t\mapsto\vec{r}(t)=(x(t),y(t),z(t)).$$

$(x(a),y(a),z(a))$ 和 $(x(b),y(b),z(b))$ 为曲线的端点.

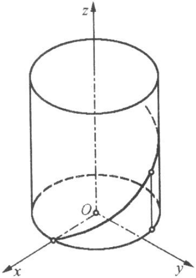
此时我们称

$$\begin{cases} x=x(t) \\ y=y(t) \\ z=z(t) \end{cases},t\in[a,b].$$



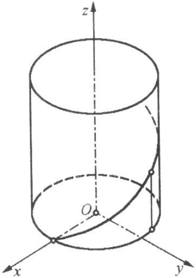
为该曲线的参数方程.

- 光滑曲线：若 $x(t), y(t), z(t) \in C^1([a, b])$，且 $x'(t), y'(t), z'(t)$ 不同时为 0，则称上面的参数方程表示的空间曲线是光滑曲线.
- 光滑曲线在每一点都有切线，而且切线随参数连续变动.
- 例：曲线 $x = a\cos t, y = a\sin t, z = bt$ ($0 \le t \le 2\pi$)是柱面 $x^2 + y^2 = a^2$ 上的一条曲线.



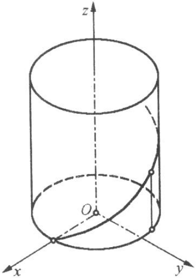
光滑曲线

- 光滑曲线：若 $x(t), y(t), z(t) \in C^1([a,b])$，且 $x'(t), y'(t), z'(t)$ 不同时为 0，则称上面的参数方程表示的空间曲线是光滑曲线.
- 光滑曲线在每一点都有切线，而且切线随参数连续变动.
- 例：曲线 $x = a\cos t, y = a\sin t, z = bt$ ($0 \le t \le 2\pi$)是柱面 $x^2 + y^2 = a^2$ 上的一条曲线.



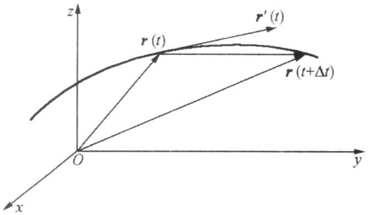
光滑曲线

- 光滑曲线：若 $x(t), y(t), z(t) \in C^1([a, b])$，且 $x'(t), y'(t), z'(t)$ 不同时为 0，则称上面的参数方程表示的空间曲线是光滑曲线.
- 光滑曲线在每一点都有切线，而且切线随参数连续变动.
- 例：曲线 $x = a\cos t, y = a\sin t, z = bt$ ($0 \leq t \leq 2\pi$)是柱面 $x^2 + y^2 = a^2$ 上的一条曲线.



光滑曲线的切向

- 光滑曲线 $\vec{r}(t)=(x(t),y(t),z(t))$. 当 $\Delta t>0$ 时, $\vec{r}(t)$ 到 $\vec{r}(t+\Delta t)$ 的割线方向(或者 $\Delta t<0$ 时 $\vec{r}(t+\Delta t)$ 到 $\vec{r}(t)$ 的割线方向)与下面向量的方向一致
$$\frac{\vec{r}(t+\Delta t)-\vec{r}(t)}{\Delta t}.$$
下列极限(若存在且极限是非零向量)
$$\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\vec{r}(t+\Delta t)-\vec{r}(t)}{\Delta t}=\vec{r}'(t).$$
是曲线在 $\vec{r}(t)$ 处的切线方向。



光滑曲线的切线和法平面

- 曲线在 $\vec{r}(t_0) = (x_0, y_0, z_0)$ 处的切线为

$$\begin{cases} x = x(t_0) + tx'(t_0) \\ y = y(t_0) + ty'(t_0) \\ z = z(t_0) + tz'(t_0) \end{cases} \Leftrightarrow \frac{x - x(t_0)}{x'(t_0)} = \frac{y - y(t_0)}{y'(t_0)} = \frac{z - z(t_0)}{z'(t_0)}.$$

切线方程的向量形式：$\vec{r} = \vec{r}(t_0) + t\vec{r}'(t_0)$.

- 曲线 $x = x(t), y = y(t), z = z(t)$ 在 $\vec{r}(t_0)$ 处的法平面为

$$x'(t_0)(x - x(t_0)) + y'(t_0)(y - y(t_0)) + z'(t_0)(z - z(t_0)) = 0.$$

- 曲线在 $\vec{r}(t_0)=(x_0,y_0,z_0)$ 处的切线为

$$\begin{cases} x = x(t_0) + tx'(t_0) \\ y = y(t_0) + ty'(t_0) \\ z = z(t_0) + tz'(t_0) \end{cases} \Leftrightarrow \frac{x-x(t_0)}{x'(t_0)} = \frac{y-y(t_0)}{y'(t_0)} = \frac{z-z(t_0)}{z'(t_0)}.$$

切线方程的向量形式：$\vec{r}=\vec{r}(t_0)+t\vec{r}'(t_0)$.

- 曲线 $x=x(t), y=y(t), z=z(t)$ 在 $\vec{r}(t_0)$ 处的法平面为

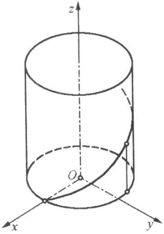
$$x'(t_0)(x-x(t_0))+y'(t_0)(y-y(t_0))+z'(t_0)(z-z(t_0))=0.$$

例

- 例： 曲线 $x = a\cos t, y = a\sin t, z = bt$， $t_0 = \frac{\pi}{2}$ 处的切向为 $(-a\sin t, a\cos t, b)|_{t=\frac{\pi}{2}} = (-a, 0, b)$，切线方程为

$$\frac{x-0}{-a} = \frac{y-a}{0} = \frac{z-\frac{\pi b}{2}}{b},$$

法平面为 $(-a)(x-0) + b(z - \frac{ba}{2}) = 0$.



- 第三章已经讲过平面曲线弧长公式.
- 曲线 $x=x(t), y=y(t), z=z(t)$, $a \le t \le b$. 把 $[a,b]$ 进行分割 $a=t_0<t_1<\cdots<t_n=b$. $\Delta t_i=t_i-t_{i-1}$. $\lambda=\max\{\Delta t_i : i=1,2,\cdots,n\}$. 曲线的弧长定义为

$$s=\lim_{\lambda\to 0}\sum_{i=1}^{n}|\vec{r}(t_i)-\vec{r}(t_{i-1})|$$

则有

$$s=\int_a^b|\vec{r}'(t)|dt=\int_a^b\sqrt{(x'(t))^2+(y'(t))^2+(z'(t))^2}dt$$

空间曲线弧长

- 第三章已经讲过平面曲线弧长公式.
- 曲线 $x = x(t), y = y(t), z = z(t)$，$a \le t \le b$. 把 $[a, b]$ 进行分割 $a = t_0 < t_1 < \cdots < t_n = b$. $\Delta t_i = t_i - t_{i-1}$. $\lambda = \max\{\Delta t_i : i = 1, 2, \cdots, n\}$. 曲线的弧长定义为

$$s = \lim_{\lambda \to 0} \sum_{i=1}^{n} |\vec{r}(t_i) - \vec{r}(t_{i-1})|$$

则有

$$s = \int_a^b |\vec{r}'(t)| dt = \int_a^b \sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2 + (z'(t))^2} dt$$

曲线弧长

- 证明思路：利用

$$\begin{aligned}&|\vec{r}(t_i)-\vec{r}(t_{i-1})|\\&=\sqrt{(x(t_i)-x(t_{i-1}))^2+(y(t_i)-y(t_{i-1}))^2+(z(t_i)-z(t_{i-1}))^2}\\&\approx\sqrt{(x'(t_{i-1}))^2+(y'(t_{i-1}))^2+(z'(t_{i-1}))^2}\Delta t_i=|\vec{r}'(t_{i-1})|\Delta t_i\end{aligned}$$

从而得到弧长公式.

- 弧微分：$ds=|\vec{r}'(t)|dt=\sqrt{(x'(t))^2+(y'(t))^2+(z'(t))^2}dt.$

曲线弧长

- 证明思路：利用

$$
\begin{aligned}
&|\vec{r}(t_i)-\vec{r}(t_{i-1})| \\
&=\sqrt{(x(t_i)-x(t_{i-1}))^2+(y(t_i)-y(t_{i-1}))^2+(z(t_i)-z(t_{i-1}))^2} \\
&\approx\sqrt{(x'(t_{i-1}))^2+(y'(t_{i-1}))^2+(z'(t_{i-1}))^2}\Delta t_i=|\vec{r}'(t_{i-1})|\Delta t_i
\end{aligned}
$$

  从而得到弧长公式.

- 弧微分：$ds=|\vec{r}'(t)|dt=\sqrt{(x'(t))^2+(y'(t))^2+(z'(t))^2}dt.$

例

- 例：曲线 $x = a\cos t, y = a\sin t, z = bt$，$0 \le t \le \pi$ 的弧长

$$s = \int_0^{\pi} \sqrt{(a\sin t)^2 + (a\cos t)^2 + b^2}dt = \pi\sqrt{a^2 + b^2}.$$

- 曲线 $\frac{x-x_0}{a} = \frac{y-y_0}{b} = \frac{z-z_0}{c}$，从 (x_0, y_0, z_0) 到 $(x_0 + at, y_0 + bt, z_0 + ct)$ 的长度

$$s = \int_0^{t} \sqrt{a^2 + b^2 + c^2}dt = t\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}.$$

例

- 例：曲线 $x = a\cos t, y = a\sin t, z = bt$，$0 \le t \le \pi$ 的弧长

$$s = \int_0^{\pi} \sqrt{(a\sin t)^2 + (a\cos t)^2 + b^2} dt = \pi\sqrt{a^2 + b^2}.$$

- 曲线 $\frac{x - x_0}{a} = \frac{y - y_0}{b} = \frac{z - z_0}{c}$，从 (x_0, y_0, z_0) 到 $(x_0 + at, y_0 + bt, z_0 + ct)$ 的长度

$$s = \int_0^{t} \sqrt{a^2 + b^2 + c^2} dt = t\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}.$$