二元函数的极限

$$z = f(x, y), (x, y) \in D$$

点 $P_0(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$,设 $\exists \delta > 0 \quad s.t. \quad \mathring{U}_\delta(P_0) \subset D$,点 $P(x, y) \in \mathring{U}_\delta(P_0)$

记 $\rho(P_0, P) \triangleq |\overline{PP_0}| = \sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2}.$

$$z = f(x,y), (x,y) \in D$$

点 $P_0(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$,设 $\exists\delta > 0 \ \ s.t. \ \ \mathring{U}_\delta(P_0) \subset D$,点 $P(x,y) \in \mathring{U}_\delta(P_0)$

记 $\rho(P_0, P) \triangleq |\overline{PP_0}| = \sqrt{(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2}.$

定义' $\boxed{\lim\limits_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x,y) = A:}$

$$z = f(x, y), (x, y) \in D$$

点 $P_0(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$,设 $\exists \delta > 0 \;\; s.t. \;\; \mathring{U}_\delta(P_0) \subset D$,点 $P(x, y) \in \mathring{U}_\delta(P_0)$

记 $\rho(P_0, P) \triangleq |\overline{PP_0}| = \sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2}$.

定义' $\boxed{\lim\limits_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x, y) = A :}$

$$\boxed{\forall \varepsilon > 0, \;\; \exists \delta > 0, \;\; s.t. \;\; 0 < \rho(P_0, P) < \delta \Rightarrow |f(x, y) - A| < \varepsilon.}$$

$$z = f(x,y), (x,y) \in D$$

点 $P_0(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$,设 $\exists \delta > 0 \;\; s.t. \;\; \mathring{U}_\delta(P_0) \subset D$,点 $P(x,y) \in \mathring{U}_\delta(P_0)$

记 $\rho(P_0, P) \triangleq |\overline{PP_0}| = \sqrt{(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2}$.

定义' $\boxed{\lim\limits_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x,y) = A:}$

$$\boxed{\forall \varepsilon > 0, \quad \exists \delta > 0, \quad s.t. \quad 0 < \rho(P_0, P) < \delta \Rightarrow |f(x,y) - A| < \varepsilon.}$$

或记为：

$$\lim_{\substack{x\to x_0 \\ y\to y_0}} f(x) = A$$

$$\lim_{P\to P_0} f(P) = A$$

$$\boxed{\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x,y) = A:}$$

$$\boxed{\forall\varepsilon > 0,\quad \exists\delta > 0,\quad s.t.\quad 0 < \rho(P_0, P) < \delta \Rightarrow |f(x,y) - A| < \varepsilon.}$$

注

(1)二元函数求极限是一个复杂的过程,

平面上点 $P(x,y)$ 趋近于 $P_0(x_0,y_0)$ 的方式是无限多的

定义要求无论 (x,y) 以何种方式趋向于 (x_0,y_0) , $f(x,y)$ 都无限靠近 A .

$$\boxed{\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x,y) = A:}$$

$$\boxed{\forall\varepsilon > 0,\quad \exists\delta > 0,\quad s.t.\quad 0 < \rho(P_0, P) < \delta \Rightarrow |f(x,y) - A| < \varepsilon.}$$

注

(1)二元函数求极限是一个复杂的过程,

平面上点 $P(x,y)$ 趋近于 $P_0(x_0,y_0)$ 的方式是无限多的

定义要求无论 (x,y) 以何种方式趋向于 (x_0,y_0) , $f(x,y)$ 都无限靠近 A .

(2)一元函数极限的运算法则可以推广到多元函数的极限运算,

如和差积商的极限等于极限的和差积商以及夹逼定理等.

例

$$f(x, y) = (x^2 + y^2)\sin\frac{1}{x^2 + y^2}$$

例

$$f(x,y)=(x^2+y^2)\sin\frac{1}{x^2+y^2}$$

$\because 0\le |f(x,y)|\le x^2+y^2$,而 $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}(x^2+y^2)=0$

例

$$f(x,y) = (x^2+y^2)\sin\frac{1}{x^2+y^2}$$

$\because 0 \le |f(x,y)| \le x^2+y^2$,而 $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}(x^2+y^2) = 0$

$$\therefore \lim_{(x,y)\to(0,0)}(x^2+y^2)\sin\frac{1}{x^2+y^2} = 0$$

例

$$f(x,y)=(x^2+y^2)\sin\frac{1}{x^2+y^2}$$

$\because 0\le |f(x,y)|\le x^2+y^2$,而 $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}(x^2+y^2)=0$

$$\therefore \lim_{(x,y)\to(0,0)}(x^2+y^2)\sin\frac{1}{x^2+y^2}=0$$

该极限也可以写成 $\lim\limits_{\rho\to 0}\rho^2\sin\dfrac{1}{\rho^2}=0$ 其中 $\rho=\sqrt{x^2+y^2}$.

例 $$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2 y}{x^2+y^2} = ?$$

例 $$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2y}{x^2+y^2} = ?$$

$$\because 0 \leq \left|\frac{x^2y}{x^2+y^2}\right| \leq \frac{1}{2}|x| \text{ 而 } \lim_{(x,y)\to(0,0)} |x| = 0$$

例 $$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2y}{x^2+y^2} =?$$

$\because 0 \le |\frac{x^2y}{x^2+y^2}| \le \frac{1}{2}|x|$ 而 $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} |x| = 0$

$$\therefore \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2y}{x^2+y^2} = 0$$

例 $$f(x,y)=\begin{cases}\frac{xy}{x^2+y^2}, & (x,y)\neq(0,0)\\ 0, & (x,y)=(0,0)\end{cases}$$

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)\exists?$$

例 $$f(x,y)=\begin{cases}\frac{xy}{x^2+y^2}, & (x,y)\neq(0,0)\\ 0, & (x,y)=(0,0)\end{cases}$$

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)\exists?$$

取$y=kx, k\in\mathbb{R}$,则 $\lim\limits_{\substack{(x,y)\to(0,0)\\ y=kx}} f(x,y)=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{k}{1+k^2}=\dfrac{k}{1+k^2}$

例 $$f(x,y)=\begin{cases}\frac{xy}{x^2+y^2}, & (x,y)\neq(0,0)\\ 0, & (x,y)=(0,0)\end{cases}$$

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)\exists?$$

取$y=kx, k\in\mathbb{R}$,则 $\displaystyle\lim_{\substack{(x,y)\to(0,0)\\ y=kx}} f(x,y)=\lim_{x\to 0}\frac{k}{1+k^2}=\frac{k}{1+k^2}$

极限依赖于 k ,与路径有关,所以原极限不存在.

例

$$\lim_{(x,y)\to(0,1)} \frac{\sin(xy)}{x}$$

例

$$\lim_{(x,y)\to(0,1)} \frac{\sin(xy)}{x}$$

$$= \lim_{(x,y)\to(0,1)} \frac{\sin(xy)}{xy} y$$

例

$$\lim_{(x,y)\to(0,1)} \frac{\sin(xy)}{x}$$

$$= \lim_{(x,y)\to(0,1)} \frac{\sin(xy)}{xy} y$$

$$= \lim_{(x,y)\to(0,1)} \frac{\sin(xy)}{xy} \lim_{(x,y)\to(0,1)} y$$

例

$$\lim_{(x,y)\to(0,1)} \frac{\sin(xy)}{x}$$

$$= \lim_{(x,y)\to(0,1)} \frac{\sin(xy)}{xy} y$$

$$= \lim_{(x,y)\to(0,1)} \frac{\sin(xy)}{xy} \lim_{(x,y)\to(0,1)} y$$

$$= \lim_{xy\to 0} \frac{\sin(xy)}{xy} \lim_{y\to 1} y = 1$$

例 $\lim\limits_{\substack{x\to\infty\\y\to\infty}}\left(\frac{xy}{x^2+y^2}\right)^{x^2}$

例 $\lim\limits_{\substack{x\to\infty\\ y\to\infty}}(\frac{xy}{x^2+y^2})^{x^2}$

$2|xy|\le x^2+y^2,\quad 0\le|\frac{xy}{x^2+y^2}|^{x^2}\le(\frac{1}{2})^{x^2},$

例 $\lim\limits_{\substack{x\to\infty \\ y\to\infty}} \left(\frac{xy}{x^2+y^2}\right)^{x^2}$

$$2|xy| \le x^2+y^2, \quad 0 \le \left|\frac{xy}{x^2+y^2}\right|^{x^2} \le \left(\frac{1}{2}\right)^{x^2},$$

$$\lim_{\substack{x\to\infty \\ y\to\infty}} \left(\frac{1}{2}\right)^{x^2} = \lim_{x\to\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^{x^2} = 0,$$

例 $\lim\limits_{\substack{x\to\infty\\ y\to\infty}}(\frac{xy}{x^2+y^2})^{x^2}$

$2|xy|\le x^2+y^2,\quad 0\le|\frac{xy}{x^2+y^2}|^{x^2}\le(\frac{1}{2})^{x^2},$

$$\lim_{\substack{x\to\infty\\ y\to\infty}}(\frac{1}{2})^{x^2}=\lim_{x\to\infty}(\frac{1}{2})^{x^2}=0,$$

$$\lim_{\substack{x\to\infty\\ y\to\infty}}(\frac{xy}{x^2+y^2})^{x^2}=0$$

例 $\lim\limits_{\substack{x\to+\infty \\ y\to+\infty}} (x^2+y^2)e^{-(x+y)}$

例 $$\lim_{\substack{x\to+\infty\\ y\to+\infty}}(x^2+y^2)e^{-(x+y)}$$

for $x>0, y>0, \quad 0\le (x^2+y^2)e^{-(x+y)}\le (x+y)^2e^{-(x+y)}$

例 $$\lim_{\substack{x\to+\infty\\ y\to+\infty}}(x^2+y^2)e^{-(x+y)}$$

for $x>0, y>0,\quad 0\le (x^2+y^2)e^{-(x+y)}\le (x+y)^2e^{-(x+y)}$

$$\lim_{\substack{x\to+\infty\\ y\to+\infty}}(x+y)^2e^{-(x+y)}=\lim_{x+y\to+\infty}(x+y)^2e^{-(x+y)}$$

例 $$\lim_{\substack{x\to+\infty\\ y\to+\infty}}(x^2+y^2)e^{-(x+y)}$$

for $x>0, y>0, \quad 0\le (x^2+y^2)e^{-(x+y)}\le (x+y)^2e^{-(x+y)}$

$$\begin{aligned}\lim_{\substack{x\to+\infty\\ y\to+\infty}}(x+y)^2e^{-(x+y)} &= \lim_{x+y\to+\infty}(x+y)^2e^{-(x+y)}\\ &= \lim_{t\to+\infty}t^2e^{-t}=0\end{aligned}$$

例 $$\lim_{\substack{x\to+\infty\\ y\to+\infty}}(x^2+y^2)e^{-(x+y)}$$

for $x>0, y>0,\quad 0\le(x^2+y^2)e^{-(x+y)}\le(x+y)^2e^{-(x+y)}$

$$\begin{aligned}\lim_{\substack{x\to+\infty\\ y\to+\infty}}(x+y)^2e^{-(x+y)} &= \lim_{x+y\to+\infty}(x+y)^2e^{-(x+y)}\\ &= \lim_{t\to+\infty}t^2e^{-t}=0\end{aligned}$$

$$\therefore \lim_{\substack{x\to\infty\\ y\to\infty}}(x^2+y^2)e^{-(x+y)}=0$$

注

要注意 $\lim\limits_{\substack{x\to x_0\\ y\to y_0}} f(x,y)$ 与 $\lim\limits_{x\to x_0}\lim\limits_{y\to y_0} f(x,y)$ 之间的区别（后者为累次极限）

注

要注意 $\lim\limits_{\substack{x\to x_0\\ y\to y_0}} f(x,y)$ 与 $\lim\limits_{x\to x_0}\lim\limits_{y\to y_0} f(x,y)$ 之间的区别（后者为累次极限）

如果 $\lim\limits_{\substack{x\to x_0\\ y\to y_0}} f(x,y)$ 存在，不能保证 $\lim\limits_{x\to x_0}\lim\limits_{y\to y_0} f(x,y)$ 或者 $\lim\limits_{y\to y_0}\lim\limits_{x\to x_0} f(x,y)$ 的存在；

注

要注意 $\lim\limits_{\substack{x\to x_0\\ y\to y_0}} f(x,y)$ 与 $\lim\limits_{x\to x_0}\lim\limits_{y\to y_0} f(x,y)$ 之间的区别（后者为累次极限）

$\boxed{\text{如果} \lim\limits_{\substack{x\to x_0\\ y\to y_0}} f(x,y)\text{存在，不能保证} \lim\limits_{x\to x_0}\lim\limits_{y\to y_0} f(x,y) \text{ 或者 } \lim\limits_{y\to y_0}\lim\limits_{x\to x_0} f(x,y)\text{的存在;}}$

如,对函数$f(x)=(x+y)\sin\dfrac{1}{x}\sin\dfrac{1}{y}$, $(xy\neq 0)$, $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} f(x,y)=0$,

注

要注意 $\lim\limits_{\substack{x\to x_0\\ y\to y_0}} f(x,y)$ 与 $\lim\limits_{x\to x_0}\lim\limits_{y\to y_0} f(x,y)$ 之间的区别（后者为累次极限）

如果 $\lim\limits_{\substack{x\to x_0\\ y\to y_0}} f(x,y)$存在，不能保证 $\lim\limits_{x\to x_0}\lim\limits_{y\to y_0} f(x,y)$ 或者 $\lim\limits_{y\to y_0}\lim\limits_{x\to x_0} f(x,y)$的存在;

如,对函数$f(x)=(x+y)\sin\dfrac{1}{x}\sin\dfrac{1}{y}$, $(xy\neq 0)$, $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} f(x,y)=0$,

但是$\lim\limits_{x\to 0} f(x,y)$ 与$\lim\limits_{y\to 0} f(x,y)$不存在,

从而, $\lim\limits_{y\to 0}\lim\limits_{x\to 0} f(x,y)$, $\lim\limits_{x\to 0}\lim\limits_{y\to 0} f(x,y)$都不存在.

注

要注意 $\lim\limits_{\substack{x\to x_0\\ y\to y_0}} f(x,y)$ 与 $\lim\limits_{x\to x_0}\lim\limits_{y\to y_0} f(x,y)$ 之间的区别（后者为累次极限）

如果 $\lim\limits_{\substack{x\to x_0\\ y\to y_0}} f(x,y)$存在，不能保证 $\lim\limits_{x\to x_0}\lim\limits_{y\to y_0} f(x,y)$ 或者 $\lim\limits_{y\to y_0}\lim\limits_{x\to x_0} f(x,y)$的存在；

即使 $\lim\limits_{x\to x_0}\lim\limits_{y\to y_0} f(x,y)$和 $\lim\limits_{y\to y_0}\lim\limits_{x\to x_0} f(x,y)$都存在并相等，

也不能保证 $\lim\limits_{\substack{x\to x_0\\ y\to y_0}} f(x,y)$存在.

注

要注意 $\lim\limits_{\substack{x\to x_0\\ y\to y_0}} f(x,y)$ 与 $\lim\limits_{x\to x_0}\lim\limits_{y\to y_0} f(x,y)$ 之间的区别（后者为累次极限）

如果 $\lim\limits_{\substack{x\to x_0\\ y\to y_0}} f(x,y)$存在，不能保证 $\lim\limits_{x\to x_0}\lim\limits_{y\to y_0} f(x,y)$ 或者 $\lim\limits_{y\to y_0}\lim\limits_{x\to x_0} f(x,y)$的存在；

即使 $\lim\limits_{x\to x_0}\lim\limits_{y\to y_0} f(x,y)$和 $\lim\limits_{y\to y_0}\lim\limits_{x\to x_0} f(x,y)$都存在并相等，

也不能保证 $\lim\limits_{\substack{x\to x_0\\ y\to y_0}} f(x,y)$存在.

如：

$$f(x,y)=\begin{cases}\frac{xy}{x^2+y^2}, & (x,y)\neq(0,0)\\ 0, & (x,y)=(0,0)\end{cases},$$

注

要注意 $\lim\limits_{\substack{x\to x_0\\ y\to y_0}} f(x,y)$ 与 $\lim\limits_{x\to x_0}\lim\limits_{y\to y_0} f(x,y)$ 之间的区别（后者为累次极限）

如果 $\lim\limits_{\substack{x\to x_0\\ y\to y_0}} f(x,y)$存在，不能保证 $\lim\limits_{x\to x_0}\lim\limits_{y\to y_0} f(x,y)$ 或者 $\lim\limits_{y\to y_0}\lim\limits_{x\to x_0} f(x,y)$的存在；

即使 $\lim\limits_{x\to x_0}\lim\limits_{y\to y_0} f(x,y)$和 $\lim\limits_{y\to y_0}\lim\limits_{x\to x_0} f(x,y)$都存在并相等，

也不能保证 $\lim\limits_{\substack{x\to x_0\\ y\to y_0}} f(x,y)$存在.

如：

$$f(x,y)=\begin{cases}\frac{xy}{x^2+y^2}, & (x,y)\neq(0,0)\\ 0, & (x,y)=(0,0)\end{cases},$$

累次极限 $\lim\limits_{y\to 0}\lim\limits_{x\to 0} f(x,y)=0$, $\lim\limits_{x\to 0}\lim\limits_{y\to 0} f(x,y)=0$.

注

要注意 $\lim\limits_{\substack{x\to x_0\\ y\to y_0}} f(x,y)$ 与 $\lim\limits_{x\to x_0}\lim\limits_{y\to y_0} f(x,y)$ 之间的区别（后者为累次极限）

如果 $\lim\limits_{\substack{x\to x_0\\ y\to y_0}} f(x,y)$存在，不能保证 $\lim\limits_{x\to x_0}\lim\limits_{y\to y_0} f(x,y)$ 或者 $\lim\limits_{y\to y_0}\lim\limits_{x\to x_0} f(x,y)$的存在；

即使 $\lim\limits_{x\to x_0}\lim\limits_{y\to y_0} f(x,y)$和 $\lim\limits_{y\to y_0}\lim\limits_{x\to x_0} f(x,y)$都存在并相等，

也不能保证 $\lim\limits_{\substack{x\to x_0\\ y\to y_0}} f(x,y)$存在.

如：

$$f(x,y)=\begin{cases}\frac{xy}{x^2+y^2}, & (x,y)\neq(0,0)\\ 0, & (x,y)=(0,0)\end{cases},$$

累次极限 $\lim\limits_{y\to 0}\lim\limits_{x\to 0} f(x,y)=0$，$\lim\limits_{x\to 0}\lim\limits_{y\to 0} f(x,y)=0$.

但是，$\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)$ 不存在

注

要注意 $\lim\limits_{\substack{x\to x_0\\y\to y_0}} f(x,y)$ 与 $\lim\limits_{x\to x_0}\lim\limits_{y\to y_0} f(x,y)$ 之间的区别（后者为累次极限）

如果 $\lim\limits_{\substack{x\to x_0\\y\to y_0}} f(x,y)$存在，不能保证 $\lim\limits_{x\to x_0}\lim\limits_{y\to y_0} f(x,y)$ 或者 $\lim\limits_{y\to y_0}\lim\limits_{x\to x_0} f(x,y)$的存在；

即使 $\lim\limits_{x\to x_0}\lim\limits_{y\to y_0} f(x,y)$和 $\lim\limits_{y\to y_0}\lim\limits_{x\to x_0} f(x,y)$都存在并相等，

也不能保证 $\lim\limits_{\substack{x\to x_0\\y\to y_0}} f(x,y)$存在.

但是，如果 $\lim\limits_{\substack{x\to x_0\\y\to y_0}} f(x,y)$存在，

且 $\lim\limits_{x\to x_0}\lim\limits_{y\to y_0} f(x,y)$或者 $\lim\limits_{y\to y_0}\lim\limits_{x\to x_0} f(x,y)$存在，

则它们必定相等.

证明二元函数的极限不存在的方法：(1)寻找二条路径导致极限值不同!

证明二元函数的极限不存在的方法：*(1)*寻找二条路径导致极限值不同！

如 $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{(1-x)y}{|x|+|y|}$ 是否存在？

证明二元函数的极限不存在的方法：(1)寻找二条路径导致极限值不同!

如 $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{(1-x)y}{|x|+|y|}$ 是否存在？

$$\lim_{\substack{(x,y)\to(0,0)\\ y=kx}} \frac{(1-x)y}{|x|+|y|} = \lim_{x\to 0} \frac{(1-x)(\pm k)}{1+|k|} = \frac{\pm k}{1+|k|},$$

证明二元函数的极限不存在的方法：*(1)*寻找二条路径导致极限值不同!

如 $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{(1-x)y}{|x|+|y|}$ 是否存在?

$$\lim_{\substack{(x,y)\to(0,0)\\ \underline{y=kx}}} \frac{(1-x)y}{|x|+|y|} = \lim_{x\to 0} \frac{(1-x)(\pm k)}{1+|k|} = \frac{\pm k}{1+|k|},$$

方向极限依赖于方向，$\therefore$ 原极限不存在.

证明二元函数的极限不存在的方法：*(1)*寻找二条路径导致极限值不同！

又如 $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{x^2y}{x^4+y^2}\exists?$

证明二元函数的极限不存在的方法：*(1)*寻找二条路径导致极限值不同!

又如 $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{x^2y}{x^4+y^2}\exists?$

$$\lim_{\substack{(x,y)\to(0,0)\\ y=kx^2}} \frac{x^2y}{x^4+y^2} = \lim_{x\to 0}\frac{k}{1+k^2} \text{ 与 } k \text{ 有关!}$$

证明二元函数的极限不存在的方法:

(2)如果两累次极限都存在但不相等, 则极限不存在.

证明二元函数的极限不存在的方法:

*(2)*如果两累次极限都存在但不相等,则极限不存在.

$$\lim_{(x,y)\to(0+0,0)} x^y$$

证明二元函数的极限不存在的方法：

*(2)*如果两累次极限都存在但不相等，则极限不存在.

$$\lim_{(x,y)\to(0+0,0)} x^y$$

$$\lim_{y\to 0}\lim_{x\to 0+0} x^y = \lim_{y\to 0} 0 = 0$$

证明二元函数的极限不存在的方法：

*(2)*如果两累次极限都存在但不相等，则极限不存在.

$$\lim_{(x,y)\to(0+0,0)} x^y$$

$$\lim_{y\to 0}\lim_{x\to 0+0} x^y = \lim_{y\to 0} 0 = 0$$

$$\lim_{x\to 0+0}\lim_{y\to 0} x^y = \lim_{x\to 0+0} 1 = 1$$

所以此极限不存在

二元函数极限存在性的判别没有简单的方法,

只能具体问题具体分析.

通常是据观察预测极限是否存在,然后设法证明之.

例 $$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{e^x + e^y}{\cos x + \sin y}$$

例 $$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{e^x + e^y}{\cos x + \sin y}$$

$$= \frac{\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} e^x + \lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} e^y}{\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \cos x + \lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \sin y}$$

例 $$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{e^x + e^y}{\cos x + \sin y}$$

$$= \frac{\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} e^x + \lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} e^y}{\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \cos x + \lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \sin y}$$

$$= \frac{\lim\limits_{x\to 0} e^x + \lim\limits_{y\to 0} e^y}{\lim\limits_{x\to 0} \cos x + \lim\limits_{y\to 0} \sin y} = 2\,.$$

例

$$\lim_{\substack{x\to\infty \\ y\to a}} (1+\frac{1}{x})^{\frac{x^2}{x+y}}$$

例 $$\lim_{\substack{x\to\infty\\ y\to a}}(1+\frac{1}{x})^{\frac{x^2}{x+y}}$$

$$\because \lim_{\substack{x\to\infty\\ y\to a}}(1+\tfrac{1}{x})^{x}=e, \lim_{\substack{x\to\infty\\ y\to a}}\tfrac{x}{x+y}=1,$$

例

$$\lim_{\substack{x\to\infty\\y\to a}}(1+\frac{1}{x})^{\frac{x^2}{x+y}}$$

$$\because \lim_{\substack{x\to\infty\\y\to a}}(1+\tfrac{1}{x})^x=e, \lim_{\substack{x\to\infty\\y\to a}}\frac{x}{x+y}=1,$$

$$\therefore \quad 原式=\lim_{\substack{x\to\infty\\y\to a}}[(1+\frac{1}{x})^x]^{\frac{x}{x+y}}=e^1=e\,.$$

例

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^3+y^3}{x^2+y}$$

例

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^3+y^3}{x^2+y}$$

取 $y=x$ 时，$\lim\limits_{\substack{(x,y)\to(0,0)\\ y=x}} \dfrac{x^3+y^3}{x^2+y} = \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{2x^3}{x^2+x} = 0$；

例

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^3+y^3}{x^2+y}$$

取 $y=x$ 时，$\lim\limits_{\substack{(x,y)\to(0,0)\\ y=x}} \dfrac{x^3+y^3}{x^2+y} = \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{2x^3}{x^2+x} = 0$；

取 $y=-x^2+x^3$ 时，

$$\lim_{\substack{(x,y)\to(0,0)\\ y=-x^2+x^3}} \frac{x^3+y^3}{x^2+y} = \lim_{x\to 0} \frac{x^3+(x^3-x^2)^3}{x^3} = 1$$

所以此极限不存在

例

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^3 y^{\frac{3}{2}}}{x^4 + y^2}$$

例

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^3 y^{\frac{3}{2}}}{x^4+y^2}$$

$$= \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2 y}{x^4+y^2} x y^{\frac{1}{2}}$$

例

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^3 y^{\frac{3}{2}}}{x^4+y^2}$$

$$= \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2 y}{x^4+y^2} x y^{\frac{1}{2}}$$

$$0 \le \left|\frac{x^2 y}{x^4+y^2}\right| \le \frac{1}{2} \qquad \lim_{(x,y)\to(0,0)} x y^{\frac{1}{2}} = 0$$

例

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^3 y^{\frac{3}{2}}}{x^4+y^2}$$

$$= \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2 y}{x^4+y^2} x y^{\frac{1}{2}}$$

$$0 \le \left|\frac{x^2 y}{x^4+y^2}\right| \le \frac{1}{2} \qquad \lim_{(x,y)\to(0,0)} x y^{\frac{1}{2}} = 0$$

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^3 y^{\frac{3}{2}}}{x^4+y^2} = 0.$$

例

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{\sin(x^3+y^3)}{x^2+y^2}$$

例

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{\sin(x^3+y^3)}{x^2+y^2}$$

$$= \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{\sin(x^3+y^3)}{x^3+y^3}\frac{x^3+y^3}{x^2+y^2}$$

例 $$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{\sin(x^3+y^3)}{x^2+y^2}$$

$$= \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{\sin(x^3+y^3)}{x^3+y^3}\frac{x^3+y^3}{x^2+y^2}$$

关于 $\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^3+y^3}{x^2+y^2}$

例' $$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{\sin(x^3+y^3)}{x^2+y^2}$$

$$= \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{\sin(x^3+y^3)}{x^3+y^3}\frac{x^3+y^3}{x^2+y^2}$$

关于 $\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^3+y^3}{x^2+y^2}$

令$x = r\cos\theta, \quad y = r\sin\theta$, 则

$|\frac{x^3+y^3}{x^2+y^2}| \le |r(\cos^3\theta + \sin^3\theta)| \le 2r$

而$(x,y) \to (0,0) \ \Rightarrow \ r \to 0$

所以, $\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^3+y^3}{x^2+y^2} = \lim_{r\to 0} r(\cos^3\theta + \sin^3\theta) = 0.$

例' $$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{\sin(x^3+y^3)}{x^2+y^2}$$

$$= \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{\sin(x^3+y^3)}{x^3+y^3}\frac{x^3+y^3}{x^2+y^2} \quad \boxed{= 0.}$$

关于 $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{x^3+y^3}{x^2+y^2}$

令 $x = r\cos\theta, \quad y = r\sin\theta$, 则

$\left|\dfrac{x^3+y^3}{x^2+y^2}\right| \leq |r(\cos^3\theta + \sin^3\theta)| \leq 2r$

而 $(x,y) \to (0,0) \ \Rightarrow \ r \to 0$

所以, $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{x^3+y^3}{x^2+y^2} = \lim\limits_{r\to 0} r(\cos^3\theta + \sin^3\theta) = 0.$

例 $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{\sin(x^3+y^3)}{x^2+y^2}$

$$= \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{\sin(x^3+y^3)}{x^3+y^3}\frac{x^3+y^3}{x^2+y^2} \quad \boxed{= 0.}$$

关于 $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{x^3+y^3}{x^2+y^2}$

令$x = r\cos\theta,\quad y = r\sin\theta$, 则

$$\left|\frac{x^3+y^3}{x^2+y^2}\right| \le |r(\cos^3\theta + \sin^3\theta)| \le 2r$$

而$(x,y)\to(0,0) \ \Rightarrow\ r\to 0$

所以，$\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{x^3+y^3}{x^2+y^2} = \lim\limits_{r\to 0} r(\cos^3\theta + \sin^3\theta) = 0.$

注意上式的使用前提!