数列极限性质在函数极限中的对应

数列极限性质在函数极限中的对应

本段内容要点:

叙述并分析数列极限基本性质在函数极限过程中的对应. 包括:

(1) 极限唯一性

(2) 收敛数列必有界在函数极限中的对应

(3) 单调有界数列必收敛在函数极限中的对应

(4) 极限的保序性和保号性

(5) 函数极限的夹逼原理

(6) 函数极限与点列极限

(1) 极限唯一性

在任何一个极限过程中，极限若存在则唯一确定

(1) 极限唯一性

在任何一个极限过程中，极限若存在则唯一确定

在$A \neq B$时，

$|f(x)-A|<\varepsilon$与$|f(x)-B|<\varepsilon$

不可能在同一过程中共存

(2)收敛数列必有界的对应

(2)收敛数列必有界的对应

[有界定理1] 若 $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$存在，则存在$X>0$，

使得$f(x)$在$(X,+\infty)$有界.

(2)收敛数列必有界的对应

[有界定理1] 若 $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$存在,则存在$X>0$,

使得$f(x)$在$(X,+\infty)$有界.

证:

记 $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=A$,

(2)收敛数列必有界的对应

[有界定理1] 若 $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$存在, 则存在$X>0$,

使得$f(x)$在$(X,+\infty)$有界.

证:

记 $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=A$, 则对于$\varepsilon=1$来说, 存在$X>0$使得

$$|f(x)-A|<1,\ x>X.$$

(2)收敛数列必有界的对应

[有界定理1] 若 $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$存在, 则存在$X>0$,

使得$f(x)$在$(X,+\infty)$有界.

证:

记 $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=A$, 则对于$\varepsilon=1$来说, 存在$X>0$使得

$$|f(x)-A|<1,\ \ x>X.$$

从而, $|f(x)|<1+|A|, \quad x>X.$

即$f(x)$在$(X,+\infty)$有界$1+|A|$.

[有界定理2] 若 $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$存在, 则存在$X>0$,

使得$f(x)$在$(-\infty,-X)$有界.

[有界定理2] 若 $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$存在, 则存在$X>0$,

使得$f(x)$在$(-\infty,-X)$有界.

[有界定理3] 若 $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)$存在, 则存在$X>0$,

使得$f(x)$在$|x|>X$上有界.

[有界定理2] 若 $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$存在, 则存在$X>0$,

使得$f(x)$在$(-\infty,-X)$有界.

[有界定理3] 若 $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)$存在, 则存在$X>0$,

使得$f(x)$在$|x|>X$上有界.

[有界定理4] 若 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$存在, 则存在$\delta_0>0$,

使得$f(x)$在$\mathring{U}_{\delta_0}(x_0)$有界.

[有界定理2] 若 $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$存在, 则存在$X>0$,

使得$f(x)$在$(-\infty,-X)$有界.

[有界定理3] 若 $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)$存在, 则存在$X>0$,

使得$f(x)$在$|x|>X$上有界.

[有界定理4] 若 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$存在, 则存在$\delta_0>0$,

使得$f(x)$在$\mathring{U}_{\delta_0}(x_0)$有界.

[有界定理5] 若 $\lim\limits_{x\to x_0+0} f(x)$存在, 则存在$\delta_0>0$,

使得$f(x)$在$(x_0, x_0+\delta_0)$有界.

[有界定理2] 若 $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$存在, 则存在$X>0$,

使得$f(x)$在$(-\infty,-X)$有界.

[有界定理3] 若 $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)$存在, 则存在$X>0$,

使得$f(x)$在$|x|>X$上有界.

[有界定理4] 若 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$存在, 则存在$\delta_0>0$,

使得$f(x)$在$\mathring{U}_{\delta_0}(x_0)$有界.

[有界定理5] 若 $\lim\limits_{x\to x_0+0} f(x)$存在, 则存在$\delta_0>0$,

使得$f(x)$在$(x_0,x_0+\delta_0)$有界.

[有界定理6] 若 $\lim\limits_{x\to x_0-0} f(x)$存在, 则存在$\delta_0>0$,

使得$f(x)$在$(x_0-\delta_0,x_0)$有界.

(3)单调有界数列必收敛的对应

(3)单调有界数列必收敛的对应

[单调收敛定理1] 若在$x \to +\infty$的过程中，$f(x)$单调上升有上界或单调下降有下界，则 $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$存在.

(3)单调有界数列必收敛的对应

[单调收敛定理1] 若在$x \to +\infty$的过程中, $f(x)$单调上升有上界或单调下降有下界, 则 $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$存在.

$$\text{例如} \lim_{x\to+\infty} \arctan x = \frac{\pi}{2}, \quad \lim_{x\to+\infty} e^{-x} = 0.$$

(3)单调有界数列必收敛的对应

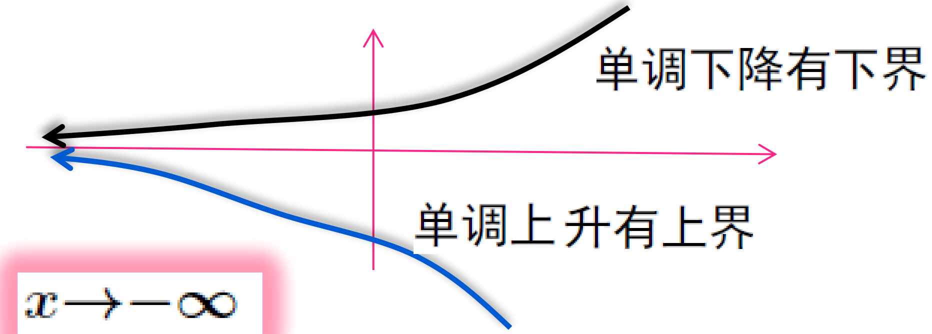
[单调收敛定理1] 若在$x \to +\infty$的过程中, $f(x)$单调上升有上界或单调下降有下界, 则$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$存在.

[单调收敛定理2] 若在$x \to -\infty$的过程中, $f(x)$单调上升有上界或单调下降有下界, 则$\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$存在.

(3)单调有界数列必收敛的对应

[单调收敛定理1] 若在$x\to+\infty$的过程中, $f(x)$单调上升有上界或单调下降有下界, 则$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$存在.

[单调收敛定理2] 若在$x\to-\infty$的过程中, $f(x)$单调上升有上界或单调下降有下界, 则$\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$存在.

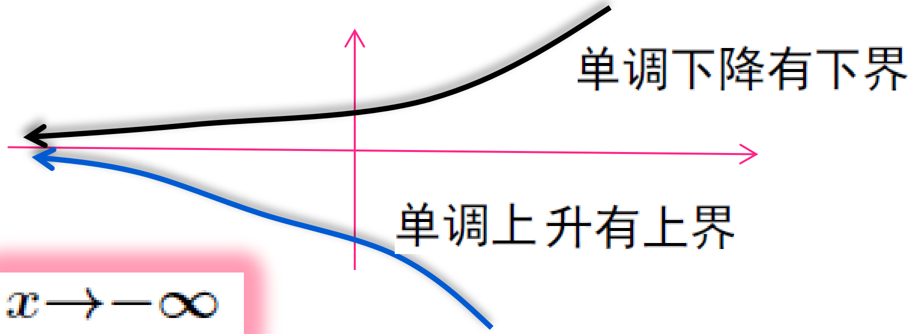


$x\to-\infty$

(3)单调有界数列必收敛的对应

[单调收敛定理1] 若在$x \to +\infty$的过程中，$f(x)$单调上升有上界或单调下降有下界，则$\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$存在.

[单调收敛定理2] 若在$x \to -\infty$的过程中，$f(x)$单调上升有上界或单调下降有下界，则$\lim\limits_{x \to -\infty} f(x)$存在.



$\boxed{x \to -\infty}$

例如 $\lim\limits_{x \to -\infty} \arctan x = -\dfrac{\pi}{2}$; $\lim\limits_{x \to -\infty} e^x = 0.$

(3)单调有界数列必收敛的对应

[单调收敛定理1] 若在$x \to +\infty$的过程中，$f(x)$单调上升有上界或单调下降有下界，则$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$存在.

[单调收敛定理2] 若在$x \to -\infty$的过程中，$f(x)$单调上升有上界或单调下降有下界，则$\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$存在.

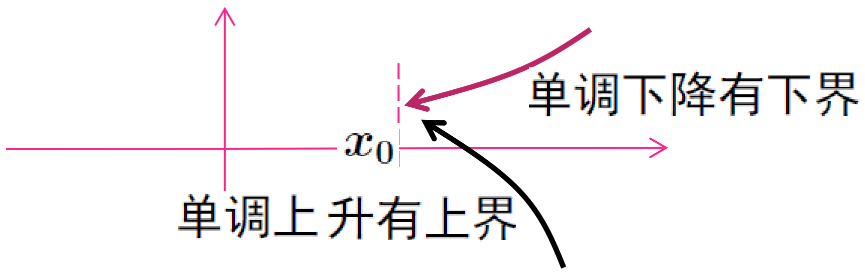
[单调收敛定理3] 若在$x \to x_0+0$的过程中，$f(x)$单调上升有上界或单调下降有下界，则$\lim\limits_{x\to x_0+0} f(x)$存在.

(3)单调有界数列必收敛的对应

[单调收敛定理1] 若在$x \to +\infty$的过程中，$f(x)$单调上升有上界或单调下降有下界，则$\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$存在.

[单调收敛定理2] 若在$x \to -\infty$的过程中，$f(x)$单调上升有上界或单调下降有下界，则$\lim\limits_{x \to -\infty} f(x)$存在.

[单调收敛定理3] 若在$x \to x_0 + 0$的过程中，$f(x)$单调上升有上界或单调下降有下界，则$\lim\limits_{x \to x_0+0} f(x)$存在.



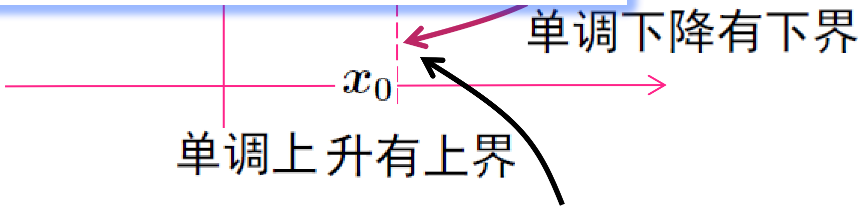
(3)单调有界数列必收敛的对应

[单调收敛定理1] 若在$x \to +\infty$的过程中, $f(x)$单调上升有上界或单调下降有下界, 则 $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$存在.

[单调收敛定理2] 若在$x \to -\infty$的过程中, $f(x)$单调上升有上界或单调下降有下界, 则 $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x)$存在.

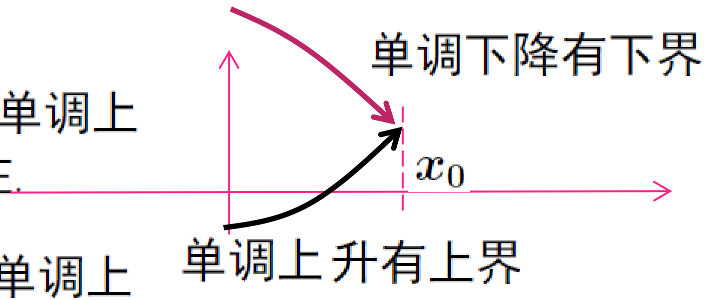
[单调收敛定理3] 若在$x \to x_0 + 0$的过程中, $f(x)$单调上升有上界或单调下降有下界, 则 $\lim\limits_{x \to x_0+0} f(x)$存在.

例如 $\lim\limits_{x \to 0+0} e^x = 1$; $\lim\limits_{x \to 0+0} (e^{-x^2}) = 1$.



(3)单调有界数列必收敛的对应

[单调收敛定理1] 若在 $x \to +\infty$ 的过程中, $f(x)$ 单调上升有上界或单调下降有下界, 则 $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ 存在.



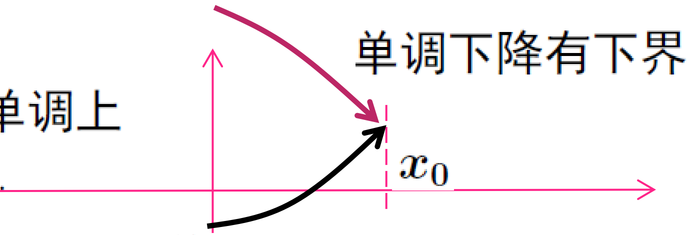
[单调收敛定理2] 若在 $x \to -\infty$ 的过程中, $f(x)$ 单调上升有上界或单调下降有下界, 则 $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$ 存在.

[单调收敛定理3] 若在 $x \to x_0 + 0$ 的过程中, $f(x)$ 单调上升有上界或单调下降有下界, 则 $\lim\limits_{x\to x_0+0} f(x)$ 存在.

[单调收敛定理4] 若在 $x \to x_0 - 0$ 的过程中, $f(x)$ 单调上升有上界或单调下降有下界, 则 $\lim\limits_{x\to x_0-0} f(x)$ 存在.

(3)单调有界数列必收敛的对应

[单调收敛定理1] 若在$x \to +\infty$的过程中, $f(x)$单调上升有上界或单调下降有下界, 则 $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$存在.



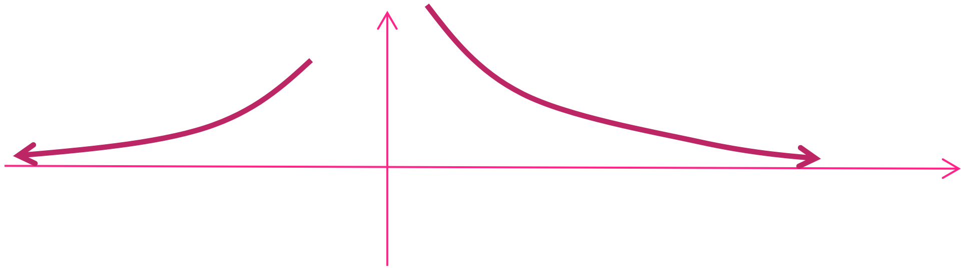
[单调收敛定理2] 若在$x \to -\infty$的过程中, $f(x)$单调上升有上界或单调下降有下界, 则 $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$存在.

[单调收敛定理3] 若在$x \to x_0 + 0$的过程中, $f(x)$单调上升有上界或单调下降有下界, 则 $\lim\limits_{x\to x_0+0} f(x)$存在.

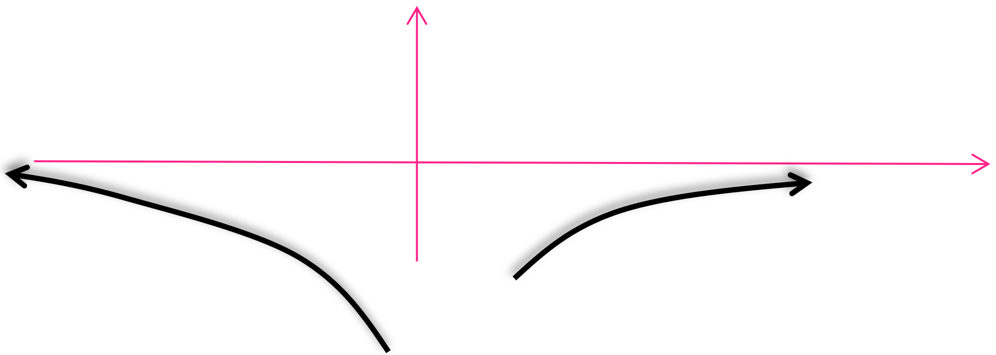
[单调收敛定理4] 若在$x \to x_0 - 0$的过程中, $f(x)$单调上升有上界或单调下降有下界, 则 $\lim\limits_{x\to x_0-0} f(x)$存在.

例如 $\lim\limits_{x\to0-0} e^x = 1;\quad \lim\limits_{x\to0-0}(e^{-x^2}) = 1.$

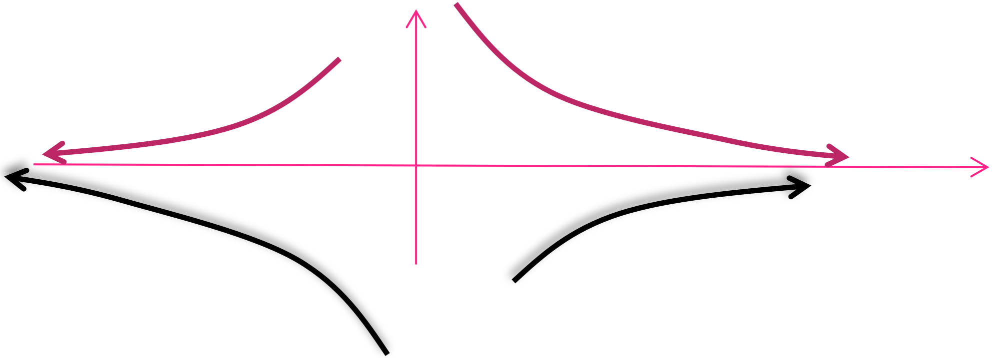
在$x \to \infty$的过程中，分别对$x \to +\infty$和$x \to -\infty$使用上述单调收敛原理.



在$x \to \infty$的过程中，分别对$x \to +\infty$和$x \to -\infty$使用上述单调收敛原理.

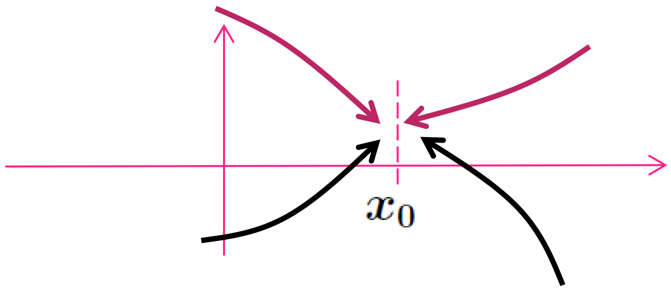


在$x \to \infty$的过程中，分别对$x \to +\infty$和$x \to -\infty$使用上述单调收敛原理.



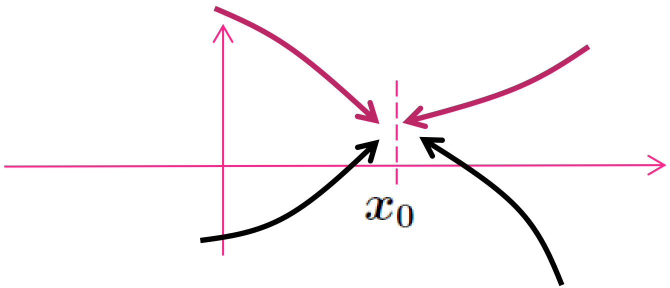
例如 $\lim\limits_{x\to\infty} e^{-x^2} = 0$; $\lim\limits_{x\to\infty} (-e^{-x^2}) = 0$.

在$x \to x_0$的过程中，分别对$x \to x_0 + 0$和$x \to x_0 - 0$使用上述单调收敛原理.



在$x \to x_0$的过程中，分别对$x \to x_0 + 0$和$x \to x_0 - 0$使用上述单调收敛原理.

例如$\lim\limits_{x \to 0} e^{-x^2} = 1$; $\lim\limits_{x \to 0}(-e^{-x^2}) = -1.$



(4)极限的保序性和保号性

(4)极限的保序性和保号性 [保序保号性质1]

若存在$X>0$,使得$f(x)\geqslant g(x)$, $x>X$,且
$\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=A$, $\lim\limits_{x\to+\infty}g(x)=B$,则$A\geqslant B$.

(4)极限的保序性和保号性 [保序保号性质1]

若存在$X>0$,使得$f(x)\geqslant g(x)$, $x>X$,且 $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=A$, $\lim\limits_{x\to+\infty}g(x)=B$,则$A\geqslant B$.

若$\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=A$, $\lim\limits_{x\to+\infty}g(x)=B$且$A>B$,则存在$X>0$,使得$f(x)>g(x)$, $x>X$.

(4)极限的保序性和保号性 [保序保号性质1]

若存在$X>0$,使得$f(x)\geqslant g(x)$, $x>X$,且$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=A$, $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x)=B$,则$A\geqslant B$.

若$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=A$, $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x)=B$且$A>B$,则存在$X>0$,使得$f(x)>g(x)$, $x>X$.

若$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=A$,且$A>0$,则存在$X>0$,使得$f(x)>\frac{A}{2}>0$, $x>X$.

(4)极限的保序性和保号性

[保序保号性质1]

若存在$X>0$, 使得$f(x)\geqslant g(x)$, $x>X$, 且$\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=A$, $\lim\limits_{x\to+\infty}g(x)=B$, 则$A\geqslant B$.

若$\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=A$, $\lim\limits_{x\to+\infty}g(x)=B$且$A>B$, 则存在$X>0$, 使得$f(x)>g(x)$, $x>X$.

若$\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=A$, 且$A>0$, 则存在$X>0$, 使得$f(x)>\dfrac{A}{2}>0$, $x>X$.

若$\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=A$, 且$A<0$, 则存在$X>0$, 使得$f(x)<\dfrac{A}{2}<0$, $x>X$.

(4)极限的保序性和保号性 [保序保号性质2]

若存在$X>0$, 使得$f(x)\geqslant g(x)$, $x<-X$, 且$\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=A$, $\lim\limits_{x\to-\infty}g(x)=B$, 则$A\geqslant B$.

若$\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=A$, $\lim\limits_{x\to-\infty}g(x)=B$且$A>B$, 则存在$X>0$, 使得$f(x)>g(x)$, $x<-X$.

若$\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=A$, 且$A>0$, 则存在$X>0$, 使得$f(x)>\frac{A}{2}>0$, $x<-X$.

若$\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=A$, 且$A<0$, 则存在$X>0$, 使得$f(x)<\frac{A}{2}<0$, $x<-X$.

(4)极限的保序性和保号性

[保序保号性质3]

若存在$X>0$,使得$f(x)\geqslant g(x)$, $|x|>X$,且$\lim\limits_{x\to\infty} f(x)=A$, $\lim\limits_{x\to\infty} g(x)=B$,则$A\geqslant B$.

若$\lim\limits_{x\to\infty} f(x)=A$, $\lim\limits_{x\to\infty} g(x)=B$且$A>B$,则存在$X>0$,使得$f(x)>g(x)$, $|x|>X$.

若$\lim\limits_{x\to\infty} f(x)=A$,且$A>0$,则存在$X>0$,使得$f(x)>\dfrac{A}{2}>0$, $|x|>X$.

若$\lim\limits_{x\to\infty} f(x)=A$,且$A<0$,则存在$X>0$,使得$f(x)<\dfrac{A}{2}<0$, $|x|>X$.

(4)极限的保序性和保号性

[保序保号性质4]

若存在$\delta > 0$,使得$f(x) \geqslant g(x)$, $0 < |x - x_0| < \delta$,且$\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = A$, $\lim\limits_{x \to x_0} g(x) = B$,则$A \geqslant B$.

若$\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = A$, $\lim\limits_{x \to x_0} g(x) = B$且$A > B$,则存在$\delta > 0$,使得$f(x) > g(x)$, $0 < |x - x_0| < \delta$.

若$\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = A$,且$A > 0$,则存在$\delta > 0$,使得

$$f(x) > \frac{A}{2} > 0,\ 0 < |x - x_0| < \delta.$$

若$\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = A$,且$A < 0$,则存在$\delta > 0$,使得

$$f(x) < \frac{A}{2} < 0,\ 0 < |x - x_0| < \delta.$$

(4)极限的保序性和保号性 [保序保号性质5]

若存在$\delta>0$, 使得$f(x)\geqslant g(x)$, $x_0-\delta<x<x_0$,
且$\lim\limits_{x\to x_0-0}f(x)=A$, $\lim\limits_{x\to x_0-0}g(x)=B$, 则$A\geqslant B$.

若$\lim\limits_{x\to x_0-0}f(x)=A$, $\lim\limits_{x\to x_0-0}g(x)=B$且$A>B$,
则存在$\delta>0$, 使得$f(x)>g(x)$, $x_0-\delta<x<x_0$.

若$\lim\limits_{x\to x_0-0}f(x)=A$, 且$A>0$, 则存在$\delta>0$, 使得

$$f(x)>\frac{A}{2}>0,\ x_0-\delta<x<x_0.$$

若$\lim\limits_{x\to x_0-0}f(x)=A$, 且$A<0$, 则存在$\delta>0$, 使得

$$f(x)<\frac{A}{2}<0,\ x_0-\delta<x<x_0.$$

(4)极限的保序性和保号性　　[保序保号性质6]

若存在$\delta>0$, 使得$f(x)\geqslant g(x)$, $x_0<x<x_0+\delta$,
且$\lim\limits_{x\to x_0+0}f(x)=A$, $\lim\limits_{x\to x_0+0}g(x)=B$, 则$A\geqslant B$.

若$\lim\limits_{x\to x_0+0}f(x)=A$, $\lim\limits_{x\to x_0+0}g(x)=B$且$A>B$,
则存在$\delta>0$, 使得$f(x)>g(x)$, $x_0<x<x_0+\delta$.

若$\lim\limits_{x\to x_0+0}f(x)=A$, 且$A>0$, 则存在$\delta>0$, 使得

$$f(x)>\frac{A}{2}>0,\ x_0<x<x_0+\delta.$$

若$\lim\limits_{x\to x_0+0}f(x)=A$, 且$A<0$, 则存在$\delta>0$, 使得

$$f(x)<\frac{A}{2}<0,\ x_0<x<x_0+\delta.$$

(5) 函数极限的夹逼原理

由于将要叙述的结论对六种极限过程都成立，所以不再一一重复，而使用$\boxed{\lim\limits_{x}}$泛指某一极限过程.

(5)函数极限的夹逼原理

由于将要叙述的结论对六种极限过程都成立，所以不再一一重复，而使用$\boxed{\lim\limits_{x}}$泛指某一极限过程.

设在某一极限过程中，$f(x) \leqslant g(x) \leqslant h(x)$且$\lim\limits_{x} f(x) = \lim\limits_{x} h(x) = A$，则$\lim\limits_{x} g(x) = A$.

例: 证明: $\lim\limits_{x\to 0} x\sin\frac{1}{x} = 0$

例: 证明: $\lim_{x \to 0} x \sin \frac{1}{x} = 0$

解: $0 \leqslant \left| x \sin \frac{1}{x} \right| \leqslant |x|$,

而$\lim_{x \to 0} |x| = 0$,

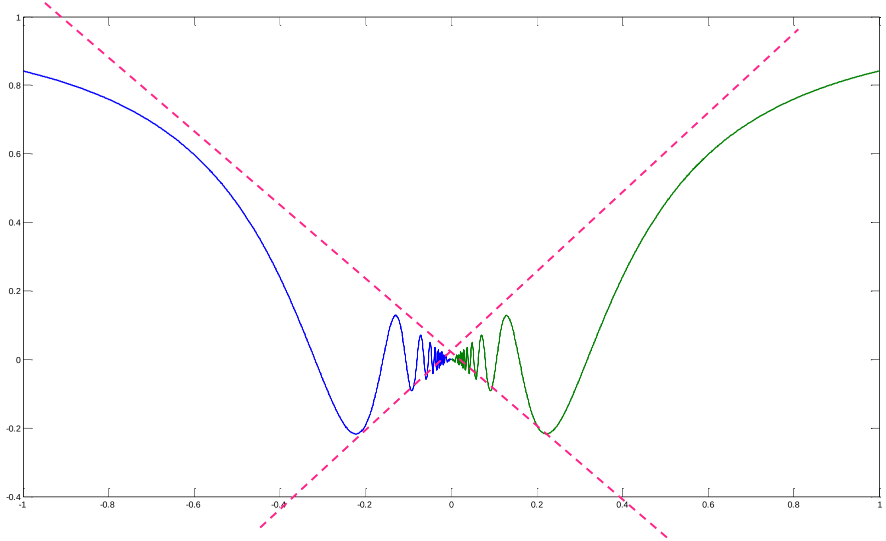
据夹逼原理, $\lim_{x \to 0} x \sin \frac{1}{x} = 0$

例: 证明: $\lim\limits_{x\to 0} x\sin\dfrac{1}{x}=0$

解: $0\leqslant\left|x\sin\dfrac{1}{x}\right|\leqslant|x|$,

而 $\lim\limits_{x\to 0}|x|=0$,

据夹逼原理, $\lim\limits_{x\to 0} x\sin\dfrac{1}{x}=0$

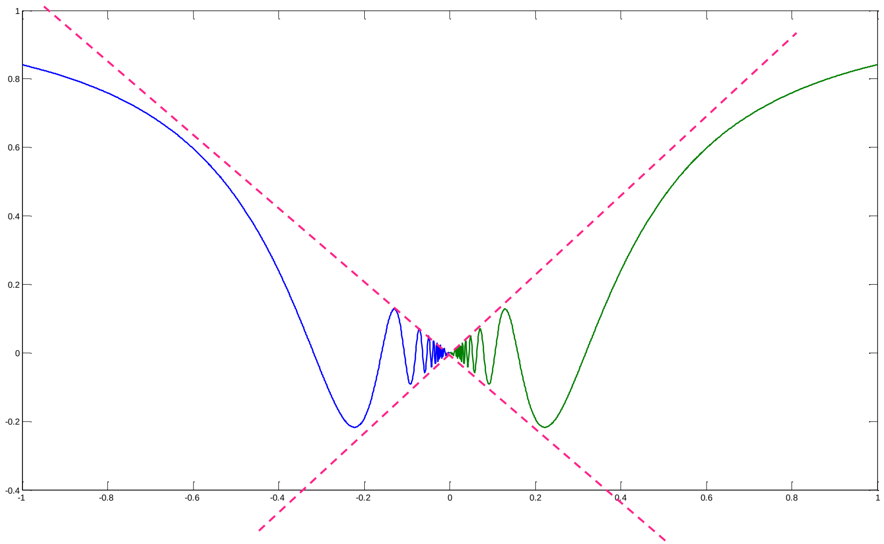


例: 证明: $\lim\limits_{x\to 0} x\sin\frac{1}{x}=0$

解: $0\leqslant\left|x\sin\frac{1}{x}\right|\leqslant|x|$,

而$\lim\limits_{x\to 0}|x|=0$,

据夹逼原理, $\lim\limits_{x\to 0} x\sin\frac{1}{x}=0$



也可以定义一个在$x=0$点有值的函数

$$f(x)=\begin{cases} x\sin\frac{1}{x}, & x\neq 0, \\ 0, & x=0. \end{cases}$$

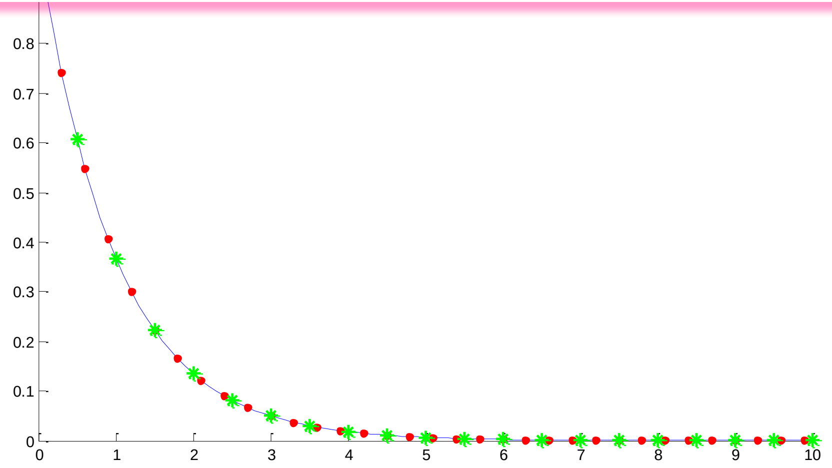
(6)函数极限与点列的极限

(6)函数极限与点列的极限

定理: $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = A$ 当且仅当任何单调递增趋向$+\infty$的自变量数列$\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$所导致的函数值数列$y_n = f(x_n)$都满足 $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = A$.

(6)函数极限与点列的极限

定理: $\lim_{x\to+\infty} f(x)=A$ 当且仅当任何单调递增趋向$+\infty$的自变量数列$\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$所导致的函数值数列$y_n=f(x_n)$都满足 $\lim_{n\to\infty} y_n=A$.



例: 考虑极限 $\lim\limits_{x\to+\infty} x\sin x$.

记 $f(x) = x\sin x$.

例: 考虑极限 $\lim\limits_{x \to +\infty} x \sin x$.

记$f(x) = x \sin x$.

对于点列$x_n' = n\pi$来说,

$\lim\limits_{n \to \infty} x_n = +\infty, f(x_n') = x_n' \sin x_n' = (-1)^n n\pi,$

$\lim\limits_{n \to \infty} f(x_n') = \infty;$

例: 考虑极限 $\lim\limits_{x\to+\infty} x\sin x$.

记 $f(x) = x\sin x$.

对于点列 $x_n' = n\pi$ 来说,

$\lim\limits_{n\to\infty} x_n = +\infty, f(x_n') = x_n'\sin x_n' = (-1)^n n\pi,$

$\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n') = \infty;$

而对于点列 $x_n'' = 2n\pi$ 来说,

$\lim\limits_{n\to\infty} x_n = +\infty, f(x_n'') = x_n''\sin x_n'' = 0, \lim\limits_{n\to\infty} f(x_n'') = 0,$

例: 考虑极限 $\lim\limits_{x\to+\infty} x\sin x$.

记$f(x)=x\sin x$.

对于点列$x_n'=n\pi$来说,

$\lim\limits_{n\to\infty} x_n=+\infty, f(x_n')=x_n'\sin x_n'=(-1)^n n\pi,$

$\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n')=\infty;$

而对于点列$x_n''=2n\pi$来说,

$\lim\limits_{n\to\infty} x_n=+\infty, f(x_n'')=x_n''\sin x_n''=0, \lim\limits_{n\to\infty} f(x_n'')=0,$

因为 $\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n')\neq\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n''),$

所以 $\lim\limits_{x\to+\infty} x\sin x$不存在.

定理: $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = A$ 当且仅当任何趋向于x_0的无穷数列x_n所对应的函数值列$y_n = f(x_n)$都满足

$$\lim_{n \to \infty} f(x_n) = \lim_{n \to \infty} y_n = A.$$

例: 考虑极限$\lim\limits_{x\to 0}\sin\frac{1}{x}$.

例: 考虑极限$\lim\limits_{x\to 0}\sin\frac{1}{x}$.

$$令 x_n=\frac{1}{2n\pi+\frac{\pi}{2}}, 则 x_n\to 0\ (n\to\infty),$$

$$此时 y_n=\sin\frac{1}{x_n}=1\Rightarrow\lim_{n\to\infty}y_n=1.$$

例: 考虑极限$\lim\limits_{x\to 0}\sin\frac{1}{x}$.

$$令x_n = \frac{1}{2n\pi+\frac{\pi}{2}}, 则x_n \to 0\ (n\to\infty),$$

$$此时y_n = \sin\frac{1}{x_n} = 1 \Rightarrow \lim_{n\to\infty} y_n = 1.$$

$$令x_n = \frac{1}{2n\pi}, 则x_n \to 0\ (n\to\infty),$$

$$此时y_n = \sin\frac{1}{x_n} = 0 \Rightarrow \lim_{n\to\infty} y_n = 0.$$

例: 考虑极限$\lim\limits_{x\to 0}\sin\frac{1}{x}$.

$$令x_n=\frac{1}{2n\pi+\dfrac{\pi}{2}},\ 则x_n\to 0\ (n\to\infty),$$

$$此时y_n=\sin\frac{1}{x_n}=1\Rightarrow\lim_{n\to\infty}y_n=1.$$

$$令x_n=\frac{1}{2n\pi},\ 则x_n\to 0\ (n\to\infty),$$

$$此时y_n=\sin\frac{1}{x_n}=0\Rightarrow\lim_{n\to\infty}y_n=0.$$

$$所以\lim_{x\to 0}\sin\frac{1}{x}\ \nexists.$$

本段知识要点:

极限若存在则唯一性
有极限的函数在该过程中局部有界
函数在极限过程中的单调有界性确保极限存在
函数的极限具有保序性和保号性
函数极限满足夹逼原理
函数极限存在当且仅当该过程中自变量点列所导致的
函数值列收敛于同一极限