一 (共 20 分) 计算重积分.

1. $\iint_D x\cos(x+y)d\sigma$, 其中 D 是顶点分别为 $(0,0),(\pi,0),(\pi,\pi)$ 的三角形闭区域.

解:

$$\int_0^\pi xdx\int_0^x\cos(x+y)dy=\int_0^\pi x(\sin 2x-\sin x)dx$$
$$=\int_0^\pi xd(-\frac{1}{2}\cos 2x+\cos x)=-\frac{3}{2}\pi+\int_0^\pi(-\frac{1}{2}\cos 2x+\cos x)dx=-\frac{3}{2}\pi$$

2. $\iiint_\Omega(x^2+y^2+z)dV$, 其中 Ω 是由曲线 $\begin{cases}x=0\\y^2=2z\end{cases}$ 绕 z 轴旋转一周形成的曲面与平面 $z=4$ 围成的立体.

解:

$$\iint_{x^2+y^2\le 8}dxdy\int_{\frac{x^2+y^2}{2}}^4(x^2+y^2+z)dy$$
$$=\iint_{x^2+y^2\le 8}(x^2+y^2)(4-\frac{x^2+y^2}{2})+\frac{1}{2}(16-\frac{(x^2+y^2)^2}{4})dxdy=\frac{256}{3}\pi$$

二 (共 20 分) 计算曲线积分.

1. $\int_L e^{\sqrt{x^2+y^2}}ds$. 其中 L 是扇形 $\{(x,y)|0\le y\le x, x^2+y^2\le 1\}$ 的边界.

解:

$$\int_0^1 e^x dx+\int_0^{\frac{\pi}{4}}ed\theta+\int_0^{\frac{\sqrt{2}}{2}}e^{\sqrt{2}x}\sqrt{2}dx=2(e-1)+\frac{\pi}{4}e$$

2. $\oint_L(x-y)dx+(x-z)dy+(x-y)dz$. 其中 L 是曲线 $\begin{cases}x^2+y^2=1\\x-y+z=2\end{cases}$, 方向:从上往下看顺时针.

解: 用 Stokes 公式, $(z_x,z_y,-1)=(-1,1,-1)$. $\mathrm{rot}\,\vec{F}=(0,-1,2)$

$$\iint_{x^2+y^2\le 1}[0\cdot(-1)+(-1)\cdot 1+2\cdot(-1)]dxdy=-3\pi$$

三 (共 20 分) 计算曲面积分.

1. S 是曲面 $|x|+|y|+|z|=1$. 求 $\oiint_S(x+|y|)dS$.

解: S_1 为 S 的第一卦限部分, $D_1=\{x+y\le 1, x\ge 0, y\ge 0\}$

$$\oiint_S(x+|y|)dS=8\iint_{S_1}ydS=\iint_{D_1}y\sqrt{3}dxdy=8\sqrt{3}\int_0^1 ydy\int_0^{1-y}dx=\frac{4\sqrt{3}}{3}$$

2. S 是曲面 $2x^2+2y^2+z^2=4$ 的外侧. 求 $\oiint_S\frac{xdydz+ydzdx+zdxdy}{(x^2+y^2+z^2)^{\frac{3}{2}}}$

解：$\mathrm{div}\,\vec{F}=0$, 上面的积分和单位球面 S_1 (外侧)上的积分相同. 设 Ω 为单位球.

$$\oiint_{S_1}\frac{xdydz+ydzdx+zdxdy}{(x^2+y^2+z^2)^{\frac{3}{2}}}=\oiint_{S_1}xdydz+ydzdx+zdxdy=\iiint_\Omega 3dV=4\pi$$

四 (共10分) 求曲线 $x = \cos^3 t$, $y = \sin^3 t$ $(0 \le t \le 2\pi)$ 所围成图形的面积.

解

$$S = \frac{1}{2}\int_L xdy - ydx = \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} 3\sin^2 t\cos^2 t dt = \frac{1}{2}\cdot\frac{3}{4}\pi = \frac{3}{8}\pi$$

五 (共10分) $\vec{F}(x,y) = \left(2xy(x^4+y^2)^k, -x^2(x^4+y^2)^k\right)$ 是右半平面 $x > 0$ 上的向量值函数。确定常数 k, 使得 $\vec{F}(x,y)$ 为右半平面上某二元函数 $u(x,y)$ 的梯度, 并求 $u(x,y)$.

解：由 $\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}$ 得 $k = -1$. $u = -\arctan\frac{y}{x^2}$.

$$\frac{2xydx - x^2dy}{x^4+y^2} = \frac{-d\frac{y}{x^2}}{1+(\frac{y}{x^2})^2} = d(-\arctan\frac{y}{x^2})$$

六 (共10分)设 $D_1 = \{(x,y)|y > 0\}$, $D_2 = \{(x,y)|x^2+y^2 \ne 0\}$. 判断第二型曲线积分 $\int_{\widehat{AB}}\frac{y}{x^2+y^2}dx - \frac{x}{x^2+y^2}dy$ 在 D_1, D_2 上是否与路径无关？(要求说明理由)

解：由 $\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}$, D_1 单连通, 在 D_1 上是与路径无关.

取闭曲线 $L : x^2+y^2 = 1$, 逆时针方向, L上 的曲线积分等于

$$\int_L ydx - xdy = -2\pi \ne 0$$

因此在 D_2 上积分与路径相关.

七 (共10分)椭球面 $x^2+y^2+z^2-yz = 1$. C 是该椭球面上的曲线，由椭球面上切平面与 Oxy 平面垂直的点构成. 证明 C 是椭圆. 若 S 是椭球面上位于曲线 C 上方的部分, 计算曲面积分

$$\iint_S \frac{(x+\sqrt{3})|y-2z|}{\sqrt{4+y^2+z^2-4yz}}dS$$

解: 若 $(x,y,z) \in$, 该点处的法向量为 $(2x, 2y-z, 2z-y)$, 与 $(0,0,1)$ 垂直, 得 $y = 2z$, 代入椭球面方程得 $x^2 + \frac{3}{4} = 1$. C 的方程

$$\begin{cases} y = 2z \\ x^2 + \frac{3}{4}y^2 = 1, \end{cases}$$

这是椭圆柱面和平面 $y = 2z$ 的交线, 是一椭圆. 利用隐函数求导法, 可得椭球面方程确定的隐函数 $z = z(x,y)$ 的偏导数为 $z_x = \frac{2x}{y-2z}$, $z_y = \frac{2y-z}{y-2z}$. 面积微元

$$dS = \sqrt{1+z_x^2+z_y^2}dxdy = \frac{\sqrt{4+y^2+z^2-4yz}}{|y-2z|}$$

因此所求积分等于($D : x^2 + \frac{3}{4}y^2 \le 1$)

$$\iint_D (x+\sqrt{3})dxdy = \iint_D (\sqrt{3})dxdy = \sqrt{3}\cdot\frac{2}{\sqrt{3}}\pi = 2\pi.$$