CH9

9.1 股票现价为\$40。已知在一个月后股价为\$42 或\$38。无风险年利率为 8%（连续复利）。执行价格为\$39 的 1 个月期欧式看涨期权的价值为多少？

解：考虑一资产组合：卖空 1 份看涨期权；买入 Δ 份股票。

若股价为\$42，组合价值则为 42Δ－3；若股价为\$38，组合价值则为 38Δ

当 42Δ－3＝38Δ，即 Δ＝0.75 时，

组合价值在任何情况下均为\$28.5，其现值为： $28.5e^{-0.08*0.08333}=28.31$，

即：－f＋40Δ＝28.31　其中 f 为看涨期权价格。

所以，f＝40×0.75－28.31＝\$1.69

另解：（计算风险中性概率 p）

42p－38（1－p）＝ $40e^{0.08*0.08333}$ ，p＝0.5669

期权价值是其期望收益以无风险利率贴现的现值，即：

$$f=（3\times0.5669+0\times0.4331）e^{-0.08*0.08333}=\$1.69$$

9.2 用单步二叉树图说明无套利和风险中性估值方法如何为欧式期权估值。

解：在无套利方法中，我们通过期权及股票建立无风险资产组合，使组合收益率等价于无风险利率，从而对期权估值。

在风险中性估值方法中，我们选取二叉树概率，以使股票的期望收益率等价于无风险利率，而后通过计算期权的期望收益并以无风险利率贴现得到期权价值。

9.3 什么是股票期权的 Delta？

解：股票期权的 Delta 是度量期权价格对股价的小幅度变化的敏感度。即是股票期权价格变化与其标的股票价格变化的比率。

9.4 某个股票现价为\$50。已知 6 个月后将为\$45 或\$55。无风险年利率为 10%（连续复利）。执行价格为\$50，6 个月后到期的欧式看跌期权的价值为多少？

解：考虑如下资产组合，卖 1 份看跌期权，买 Δ 份股票。

若股价上升为\$55，则组合价值为 55Δ；

若股价下降为\$45，则组合价值为：45Δ－5

当 55Δ＝45Δ－5，即 Δ＝－0.50 时，6 个月后组合价值在两种情况下将相等，

均为\$－27.5，其现值为： $-27.5e^{-0.10*0.50}=-\$26.16$，即：

－P＋50Δ＝－26.16

所以，P＝－50×0.5＋26.16＝\$1.16

另解：求风险中性概率 p

$$55p+45(1-p)=50e^{0.10*0.50}$$

所以，p＝0.7564

看跌期权的价值 P＝ $(0*0.7564+5*0.2436)e^{-0.10*0.50}=\$1.16$

9.5 某个股票现价为$100。有连续 2 个时间步，每个时间步的步长为 6 个月，每个单步二叉树预期上涨 10%，或下降 10%。无风险年利率为 8%（连续复利）。执行价格为$100 的一年期欧式看涨期权的价值为多少？

解：由题意得，u＝1.10，d＝0.90，r＝0.08

所以，$p = \dfrac{e^{rT} - d}{u - d} = \dfrac{e^{0.08*0.50} - 0.90}{1.10 - 0.90} = 0.7041$

计算二叉树图的结果如下

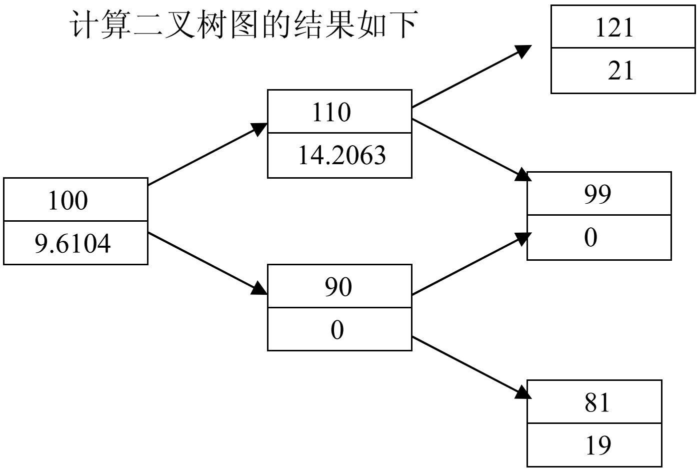

图 9.1

则看涨期权价值为：

$$e^{-2*0.08*0.50}*(0.7041^2*21+2*0.7041*0.2959*0+0.2959^2*0)$$
$$=9.61$$

9.6 考虑习题 9.5 中的情况，执行价格为$100 的一年期欧式看跌期权的价值为多少？证明欧式看涨期权和欧式看跌期权满足看涨看跌期权的平价关系。

解：如上题，计算二叉树图的结果如下

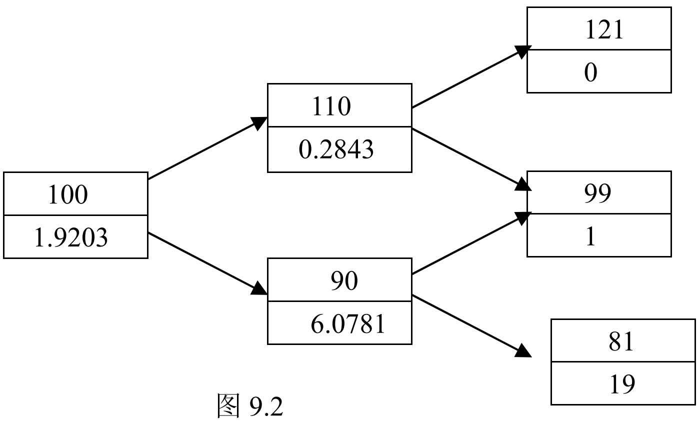

图 9.2

则看跌期权的价值为：

$$e^{-2*0.08*0.50}*(0.7041^2*0+2*0.7041*0.2959*1+0.2959^2*19)$$
$$=1.92$$

$S+P=100+1.92=101.92$,

$Xe^{-rT}+C=100e^{-0.08*1.00}+9.61=101.92$

所以有：$S+P=Xe^{-rT}+C$ 即：期权平价公式成立。

9.7 考虑这样一种情况，在某个欧式期权的有效期内，股票价格的运动符合两步二叉树运动模式。请解释为什么用股票和期权组合的头寸在期权的整个有效期内不可能一直是无风险的。

解：无风险组合可由卖空 1 份期权及买入 Δ 份股票构成。但由于 Δ 在期权的有效期内是会变化的，因而，无风险组合总是会变化。

所以，用股票和期权组合的头寸不可能是一直无风险的。

9.8 某个股票现价为$50。已知在两个月后，股票价格为$53 或$48。无风险年利率为 10%（连续复利）。请用无套利原理说明，执行价格为$49 的两个月后到期的欧式看涨期权的价值为多少？

解：两个月后欧式看涨期权的价值将为$4（当股价为$53）或$0（当股价为$48）。

考虑如下资产组合：＋Δ 份股票

－1 份看涨期权

则两个月后组合价值将为 53Δ－4 或 48Δ，当

53Δ－4＝48Δ，即 Δ＝0.8 时，

则两个月后无论股价如何，组合价值将均为 38.4。该组合现值为：

0.8×50－f

其中 f 是期权价值。

因为该资产组合是无风险利率投资，所以有：

$$(0.8*50-f)e^{0.10*0.16667}=38.4$$

即： f＝2.23

因此，期权的价值为$2.23。

此外，此题也可直接根据公式（9.2）和（9.3）计算，由题意可得：

$u=1.06, d=0.96$，则：

$$p=\frac{e^{0.10*0.16667}-0.96}{1.06-0.96}=0.5681$$ 且

$$f=e^{-0.10*0.16667}*0.5681*4=2.23$$

9.9 某个股票现价为\$50。已知在 4 个月后，股票价格为\$75 或\$85。无风险年利率为 5%（连续复利）。请用无套利原理说明，执行价格为\$80 的 4 个月后到期的欧式看跌期权的价值为多少？

解：4 个月后欧式看涨期权的价值将为\$5（当股价为\$75）或\$0（当股价为\$85）。

考虑如下资产组合：－Δ 份股票

＋1 份看跌期权

（注：看跌期权的套期保值率 Δ 是负值）。

则两个月后组合价值将为－75Δ＋5 或－85Δ，当

－75Δ＋5＝－85Δ，即 Δ＝－0.5 时，

则两个月后无论股价如何，组合价值将均为 42.5。该组合现值为：

0.5×80＋f

其中 f 是期权价值。

因为该资产组合是无风险的，所以有：

$$(0.5*80+f)e^{0.05*0.3333}=42.5$$

即：$f=1.80$

因此，看跌期权的价值为\$1.80

此外，此题也可直接利用公式（9.2）和（9.3）计算。由题意可得：

$u=1.0625, d=0.9375$ 则：

$$p=\frac{e^{0.05*0.3333}-0.9375}{1.0625-0.9375}=0.6345$$，1－p＝0.3655

且 $f=e^{-0.05*0.33333}*0.3655*5=1.80$

9.10 某个股票现价为\$50。已知在 6 个月后，股价将变为\$60 或\$42。无风险年利率为 12%（连续复利）。计算执行价格为\$48，有效期为 6 个月的欧式看涨期权的价值为多少。证明无套利原理和风险中性估价原理得出相同的答案。

解：6 个月后期权的价值为\$12（当股价为\$60 时）或\$0（当股价为\$42 时）。

考虑如下资产组合：

＋Δ 份股票

－1 份看涨期权

则资产组合价值为 60Δ－12 或 42Δ。

当 60Δ－12＝42Δ，即 Δ＝0.67 时，

6 个月后，无论股价如何变化，该资产组合的价值将均为\$28；此时组合的 Δ 值是无风险的。组合的现值为：

50Δ－f

其中 f 为期权的价值。

（1）根据无套利原理，该资产组合必须是无风险的，因而有：

$$(50*0.67-f)*e^{0.12*0.50}=28$$

则有：　　　　　　　　f＝6.96

（2）根据风险中性估价定理，设 p 为风险中性条件下股价上升的概率，有：

$$60p + 42(1-p) = 50e^{0.12*0.25}$$

即：　　　　　　　　$p = 0.6162$

在风险中性世界，期权的期望价值为：

12×0.6162＋0×0.3838＝7.3944

其现值为：

$$\frac{7.3944}{e^{0.12*0.25}} = 6.96$$

所以，无套利原理与风险中性估价定理的计算结果一致。

9.11 某个股票现价为$40。已知在 3 个月后，股价将变为$45 或$35。无风险年利率为 8％（连续复利）。计算执行价格为$40，有效期为 3 个月的欧式看跌期权的价值。证明无套利原理和风险中性估价原理得出相同的答案。

解：3 个月后期权的价值为$5（当股价为$35 时）或$0（当股价为$45 时）。

考虑如下资产组合：

－Δ 份股票

＋1 份看跌期权

则资产组合价值为－35Δ＋5 或－45Δ

当－35Δ＋5＝－45Δ，即 Δ＝－0.5 时，

无论股价如何变化，该资产组合价值均将为$22.5；此时组合的 Δ 值是无风险的。组合的现值为：

－40Δ＋f

其中 f 为期权的价值。

（1）根据无套利理论，该资产组合必须是无风险的，因而有：

$$(40*0.5+f)*e^{0.08*0.25} = 22.5$$

则有：　　　　　　$f = 2.06$

即看跌期权的价值为$2.06。

（2）根据风险中性估价定理，设 p 为风险中性条件下股价上升的概率，有：

$$45p + 35(1-p) = 40*e^{0.08*0.25}$$

即：　　　　　　　　$p = 0.58$

在风险中性世界，期权的期望价值为：

0×0.58＋5×0.42＝2.10

其现值为：

$$\frac{2.10}{e^{0.08*0.25}} = 2.06$$

所以，无套利原理与风险中性估价定理的计算结果一致。

9.12 某个股票现价为\$50。有连续 2 个时间步，每个时间步的步长为 3 个月，每个单步二叉树的股价或者上涨 6%或者下跌 5%。无风险年利率为 5%（连续复利）。执行价格为\$51,有效期为 6 个月的欧式看涨期权的价值为多少？

解：由题意可得，$u=1.06, d=0.95$

则风险中性概率 $p=\dfrac{e^{rT}-d}{u-d}=\dfrac{e^{0.25*0.05}-0.95}{1.06-0.95}=0.5689$

计算股价二叉树图的结果如下：

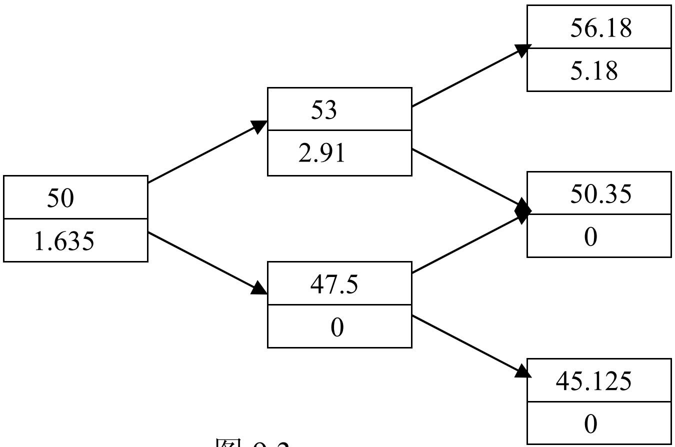

图 9.3

在最高的终节点，期权的价值为 56.18－61＝5.18；在其他情形期权价值均为 0。因而，该期权的价值为：

$$5.18*0.5689^2*e^{-0.05*0.5}=1.635$$

9.13 考虑习题 9.12 中的情况，执行价格为\$51，有效期为 6 个月的欧式看跌期权的价值为多少？证明欧式看涨期权和看跌期权满足看涨看跌期权平价关系。如果看跌期权是美式期权，在树图上的任何节点，提前执行期权是否会更优呢？

解：（1）如上题，$u=1.06, d=0.95$，$p=0.5689$

计算二叉树图的结果如下

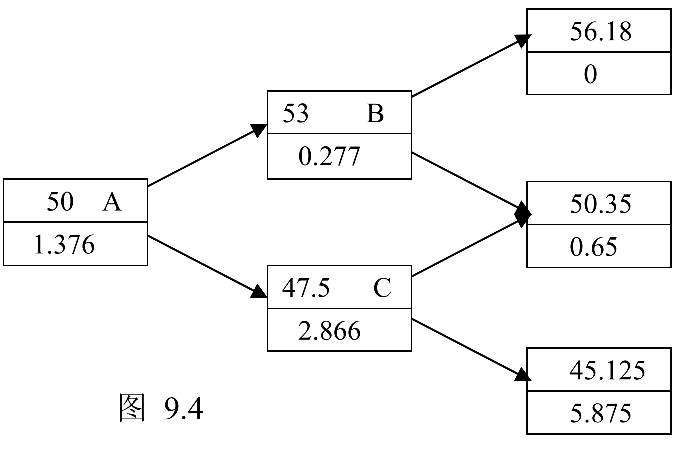

图 9.4

如上图，当到达中间的终节点时，期权的损益为 51－50.35＝0.65；当到达最低的终节点时，期权的损益为 51－45.125＝5.875。
因此，期权的价值为：

$$0.65*2*0.5689*0.4311+5.875*0.4311^2)e^{-0.05*0.5}=1.376$$

（2）因为， $P+S=1.376+50=51.376$

且有， $C+Xe^{-rT}=1.635+51e^{-0.05*0.5}=51.376$

因而， $P+S=C+Xe^{-rT}$

即欧式看涨期权和欧式看跌期权满足期权平价公式。

（3）为确定提前执行是否会更优，我们要计算比较每一节点处立即执行期权的损益。

在 C 节点处，立即执行期权的损益为 51－47.5＝3.5，大于 2.8664。因此，期权必须在此节点处被执行，在 A、B 节点处均不执行。

9.14 某个股票现价为$40。有连续 2 个时间步，每个时间步的步长为 3 个月，每个单位二叉树的股价或者上涨 10％或者下跌 10％。无风险年利率为 12％(连续复利)。

(A)执行价格为$42 的 6 个月期限的欧式看跌期权的价值为多少？

(B)执行价格为$42 的 6 个月期限的美式看跌期权的价值为多少？

解：由题意可得，$u=1.10, d=0.90$

则风险中性概率 $p=\dfrac{e^{rT}-d}{u-d}=\dfrac{e^{0.12*0.25}-0.90}{1.10-0.90}=0.6523$

计算股价二叉树图的结果如下：

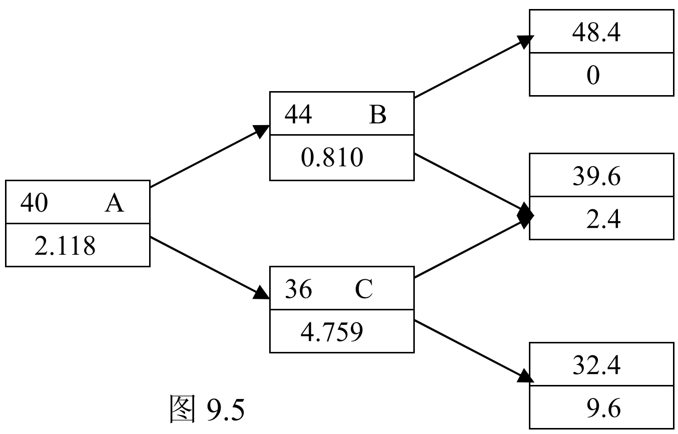

图 9.5

如上图，当到达中间终节点时，期权的损益为 42－39.6＝2.4；在最低的节点处，期权的损益为 42－32.4＝9.6。

（1）欧式期权的价值为：

$$(2*2.4*0.6523*0.3477+9.6*0.3477^2)e^{-0.12*0.50}=2.118$$

（2）在 C 节点处，立即执行期权的损益为 42－36＝6，大于 4.759（多 1.205 收益）。因此，美式看跌期权必须在此节点处被执行。

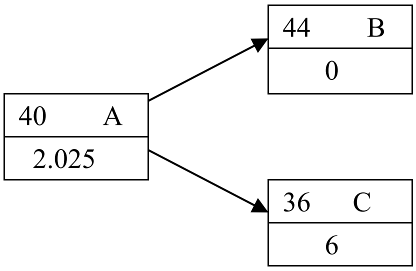

图 9.6

因此，美式看跌期权的价值为：

$$6*0.3477*e^{-0.12*0.25}=2.025$$

9.15 用“试错法”来估算习题 9.14 中的期权的执行价格为多高时，立即执行期权是最佳的？

解：（1）假设美式看跌期权的执行价格为$37，计算股价二叉树图的结果如下：

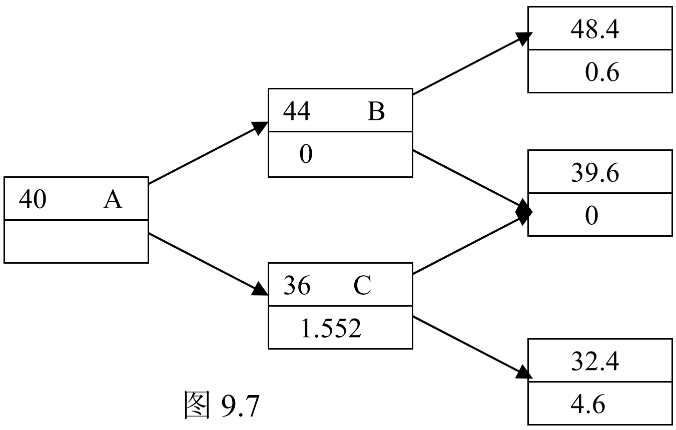

图 9.7

在此 C 节点处，立即执行期权的损益为 37－36＝4，小于 1.552。因此，美式看跌期权不会在此节点处被执行。

（2）假设美式看跌期权的执行价格为$38，计算股价二叉树图的结果如下：

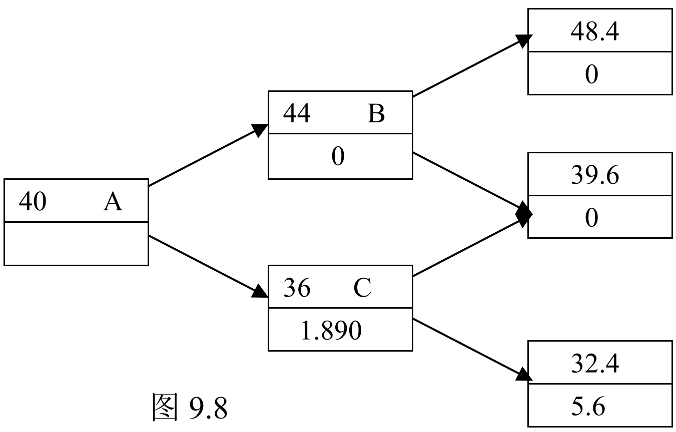

图 9.8

在此 C 节点处，立即执行期权的损益为 38－36＝2，比 1.890 多 0.11 收益。因此，美式看跌期权必须在此节点处被执行。

从以上分析可得，当执行价格高于或等于$38 时，提前执行美式看跌期权都是更优的选择。

9.16 某个股票的现价为$25。已知 2 个月后，股价会变为$23 或$27。无风险年利率为 10%（连续复利）。设 S_T 为 2 个月后的股票价格。在这时收益为 S_T^2 的衍生证券的价值为多少？

解：2 个月后，衍生证券 S_T^2 的价值将为 529（当股价为$23 时）或 729（当股价为$27 时）。考虑如下资产组合：

＋Δ 份股票

－1 份衍生证券

2 个月后，该资产组合的价值将为 23Δ－529 或 27Δ－729。

当 23Δ－529＝27Δ－729，即 Δ＝50 时，

无论股价如何变化，该资产组合价值均将为$621；此时组合的 Δ 值是无风险的。组合的现值为：

50×25－f

其中 f 是衍生资产的价值。因为该资产组合是无风险的，则有：

$$(50*25-f)e^{0.10*0.16667}=621$$

即：

$$f=639.3$$

此外，也可直接利用公式（9.2）及（9.3）计算。由题意可得，

$$u=1.08, d=0.92$$

则有：

$$p=\frac{e^{0.10*0.16667}-0.92}{1.08-0.92}=0.6050$$

则可得：

$$f=e^{-0.10*0.16667}(0.6050*729+0.3950*529)=639.3$$