补充

- $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = +\infty$: 对任给$M > 0$,存在$N$, 当$n > N$时, $a_n > M$.
- $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = -\infty$: 对任给$M < 0$,存在$N$, 当$n > N$时, $a_n < M$.
- $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \infty$: 对任给$M > 0$,存在$N$, 当$n > N$时, $|a_n| > M$.
  则有$\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \infty \Leftrightarrow \lim\limits_{n\to\infty} |a_n| = +\infty$.
- 若$\lim\limits_{n\to\infty} a_n = +\infty$或者$\lim\limits_{n\to\infty} a_n = -\infty$, 则有$\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \infty$.
- 例: $\lim\limits_{n\to\infty} \ln n = +\infty$, $\lim\limits_{n\to\infty} (-1)^n \ln n = \infty$.

补充

- $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = +\infty$: 对任给$M > 0$,存在$N$, 当$n > N$时, $a_n > M$.
- $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = -\infty$: 对任给$M < 0$,存在$N$, 当$n > N$时, $a_n < M$.
- $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \infty$: 对任给$M > 0$,存在$N$, 当$n > N$时, $|a_n| > M$.
  则有 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \infty \Leftrightarrow \lim\limits_{n\to\infty} |a_n| = +\infty$.
- 若 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = +\infty$或者 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = -\infty$, 则有 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \infty$.
- 例: $\lim\limits_{n\to\infty} \ln n = +\infty$, $\lim\limits_{n\to\infty} (-1)^n \ln n = \infty$.

补充

- $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = +\infty$: 对任给$M > 0$,存在$N$, 当$n > N$时, $a_n > M$.
- $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = -\infty$: 对任给$M < 0$,存在$N$, 当$n > N$时, $a_n < M$.
- $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \infty$: 对任给$M > 0$,存在$N$, 当$n > N$时, $|a_n| > M$.
  则有$\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \infty \Leftrightarrow \lim\limits_{n\to\infty} |a_n| = +\infty$.
- 若$\lim\limits_{n\to\infty} a_n = +\infty$或者$\lim\limits_{n\to\infty} a_n = -\infty$, 则有$\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \infty$.
- 例: $\lim\limits_{n\to\infty} \ln n = +\infty$, $\lim\limits_{n\to\infty} (-1)^n \ln n = \infty$.

补充

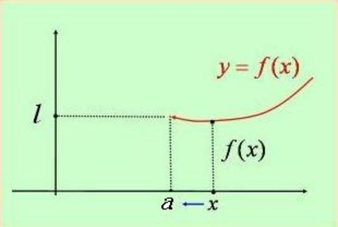
- $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = +\infty$: 对任给$M > 0$,存在$N$, 当$n > N$时, $a_n > M$.
- $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = -\infty$: 对任给$M < 0$,存在$N$, 当$n > N$时, $a_n < M$.
- $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \infty$: 对任给$M > 0$,存在$N$, 当$n > N$时, $|a_n| > M$.
  则有$\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \infty \Leftrightarrow \lim\limits_{n\to\infty} |a_n| = +\infty$.
- 若$\lim\limits_{n\to\infty} a_n = +\infty$或者$\lim\limits_{n\to\infty} a_n = -\infty$, 则有$\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \infty$.
- 例: $\lim\limits_{n\to\infty} \ln n = +\infty$, $\lim\limits_{n\to\infty} (-1)^n \ln n = \infty$.

补充

- $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = +\infty$: 对任给$M > 0$,存在$N$, 当$n > N$时, $a_n > M$.
- $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = -\infty$: 对任给$M < 0$,存在$N$, 当$n > N$时, $a_n < M$.
- $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \infty$: 对任给$M > 0$,存在$N$, 当$n > N$时, $|a_n| > M$.
  则有$\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \infty \Leftrightarrow \lim\limits_{n\to\infty} |a_n| = +\infty$.
- 若$\lim\limits_{n\to\infty} a_n = +\infty$或者$\lim\limits_{n\to\infty} a_n = -\infty$, 则有$\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \infty$.
- 例: $\lim\limits_{n\to\infty} \ln n = +\infty$, $\lim\limits_{n\to\infty} (-1)^n \ln n = \infty$.

右极限

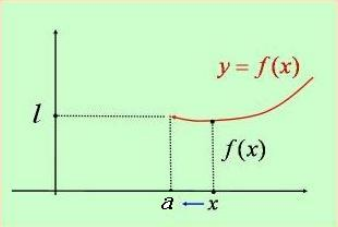
- 右极限是x从a的右侧趋于a的极限即$x > a$, x任意靠近a时，$f(x)$任意接近l,则称$f(x)$以l为右极限.



- 右极限的定义($\epsilon - \delta$语言)：对任意$\epsilon > 0$，存在δ，使得当$0 < x - a < \delta$时，$|f(x) - l| < \epsilon$，则称$x \to a + 0$时，$f(x)$以l为右极限，记为$\lim\limits_{x \to a+0} f(x) = l$.

右极限

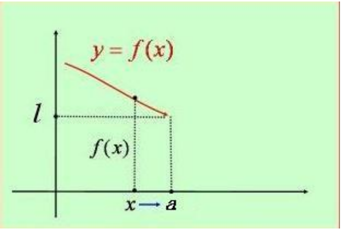
- 右极限是x从a的右侧趋于a的极限即$x > a$, x任意靠近a时，$f(x)$任意接近l,则称$f(x)$以l为右极限.

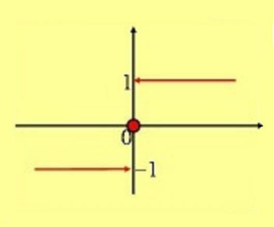


- 右极限的定义($\epsilon - \delta$语言)：对任意$\epsilon > 0$，存在δ，使得当$0 < x - a < \delta$时，$|f(x) - l| < \epsilon$，则称$x \to a + 0$时，$f(x)$以l为右极限，记为$\lim\limits_{x \to a+0} f(x) = l$.

左极限

- 左极限的定义($\epsilon-\delta$语言)：对任意$\epsilon>0$，存在δ，使得当$0<a-x<\delta$时，$|f(x)-l|<\epsilon$，则称$x\to a-0$时，$f(x)$以l为左极限，记为$\lim\limits_{x\to a-0} f(x)=l$.

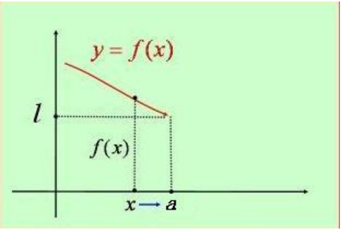


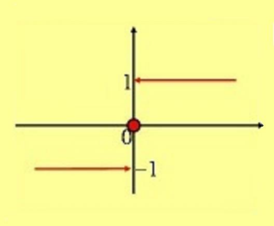


- 例：$f(x)=\mathrm{sgn}\,(x)$，$\lim\limits_{x\to 0+0} f(x)=1$，$\lim\limits_{x\to 0-0} f(x)=-1$.

左极限

- 左极限的定义($\epsilon-\delta$语言)：对任意$\epsilon>0$，存在δ，使得当$0<a-x<\delta$时，$|f(x)-l|<\epsilon$，则称$x\to a-0$时，$f(x)$以l为左极限，记为$\lim\limits_{x\to a-0} f(x)=l$.

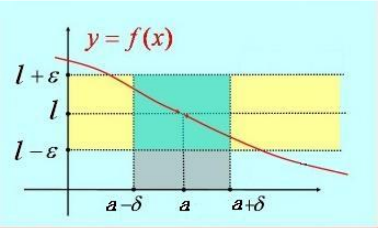




- 例：$f(x)=\mathrm{sgn}\,(x)$，$\lim\limits_{x\to 0+0} f(x)=1$，$\lim\limits_{x\to 0-0} f(x)=-1$.

(双侧)极限的定义

- (双侧)极限的定义($\epsilon-\delta$语言): $y=f(x)$在a的某个空心邻域$(a-r,a)\cup(a,a+r)$上有定义，若存在l, 对任意$\epsilon>0$, 存在$\delta<r$, 使得当$0<|x-a|<\delta$时，$|f(x)-l|<\epsilon$, 则称$x\to a$时，$f(x)$以l为极限,记为$\lim\limits_{x\to a} f(x)=l$.



极限的性质1

- 性质：$\lim\limits_{x\to a} f(x)$存在$\Leftrightarrow \lim\limits_{x\to a\pm 0} f(x)$存在且相等.
- 性质：若$p < \lim\limits_{x\to a} f(x) < q$，则存在$\delta$，使得$0 < |x-a| < \delta$时，$p < f(x) < q$.
  证明：设$\lim\limits_{x\to a} f(x) = l$，取$\epsilon = \min\{l-p, q-l\}$. $|f(x)-l| < \epsilon$时，$p < f(x) < q$.
- 性质：$\lim\limits_{x\to 0} f(kx) = \lim\limits_{x\to 0} f(x)$，$\lim\limits_{x\to a} f(x) = \lim\limits_{x\to b} f(x+a-b)$.
  证明：若$\lim\limits_{x\to a} f(x) = l$，对任意的$\epsilon > 0$，存在$\delta > 0$，当$0 < |x-a| < \delta$时，$|f(x)-l| < \epsilon$. 当$0 < |x-b| < \delta$时，有$0 < |(x+a-b)-a| < \delta$，因此$|f(x+a-b)-l| < \epsilon$.

极限的性质1

- 性质：$\lim\limits_{x\to a} f(x)$存在$\Leftrightarrow \lim\limits_{x\to a\pm 0} f(x)$存在且相等.
- 性质：若$p < \lim\limits_{x\to a} f(x) < q$，则存在$\delta$，使得$0 < |x-a| < \delta$时，$p < f(x) < q$.

  证明：设$\lim\limits_{x\to a} f(x) = l$，取$\epsilon = \min\{l-p, q-l\}$. $|f(x)-l| < \epsilon$时，$p < f(x) < q$.
- 性质：$\lim\limits_{x\to 0} f(kx) = \lim\limits_{x\to 0} f(x)$，$\lim\limits_{x\to a} f(x) = \lim\limits_{x\to b} f(x+a-b)$.

  证明：若$\lim\limits_{x\to a} f(x) = l$，对任意的$\epsilon > 0$，存在$\delta > 0$，当$0 < |x-a| < \delta$时，$|f(x)-l| < \epsilon$. 当$0 < |x-b| < \delta$时，有$0 < |(x+a-b)-a| < \delta$，因此$|f(x+a-b)-l| < \epsilon$.

极限的性质1

- 性质： $\lim\limits_{x\to a} f(x)$存在$\Leftrightarrow$ $\lim\limits_{x\to a\pm 0} f(x)$存在且相等.
- 性质： 若$p < \lim\limits_{x\to a} f(x) < q$, 则存在$\delta$, 使得$0 < |x-a| < \delta$时， $p < f(x) < q$.
  证明： 设$\lim\limits_{x\to a} f(x) = l$, 取$\epsilon = \min\{l-p, q-l\}$. $|f(x)-l| < \epsilon$时， $p < f(x) < q$.
- 性质： $\lim\limits_{x\to 0} f(kx) = \lim\limits_{x\to 0} f(x)$, $\lim\limits_{x\to a} f(x) = \lim\limits_{x\to b} f(x+a-b)$.
  证明： 若$\lim\limits_{x\to a} f(x) = l$, 对任意的$\epsilon > 0$, 存在$\delta > 0$, 当$0 < |x-a| < \delta$时，$|f(x)-l| < \epsilon$. 当$0 < |x-b| < \delta$时，有$0 < |(x+a-b)-a| < \delta$, 因此$|f(x+a-b)-l| < \epsilon$.

极限的性质1

- 性质：$\lim\limits_{x\to a} f(x)$存在$\Leftrightarrow \lim\limits_{x\to a\pm 0} f(x)$存在且相等.
- 性质：若$p<\lim\limits_{x\to a} f(x)<q$，则存在$\delta$，使得$0<|x-a|<\delta$时，$p<f(x)<q$.
  证明：设$\lim\limits_{x\to a} f(x)=l$，取$\epsilon=\min\{l-p,q-l\}$. $|f(x)-l|<\epsilon$时，$p<f(x)<q$.
- 性质：$\lim\limits_{x\to 0} f(kx)=\lim\limits_{x\to 0} f(x)$，$\lim\limits_{x\to a} f(x)=\lim\limits_{x\to b} f(x+a-b)$.
  证明：若$\lim\limits_{x\to a} f(x)=l$，对任意的$\epsilon>0$，存在$\delta>0$，当$0<|x-a|<\delta$时，$|f(x)-l|<\epsilon$. 当$0<|x-b|<\delta$时，有$0<|(x+a-b)-a|<\delta$，因此$|f(x+a-b)-l|<\epsilon$.

极限的性质1

- 性质：$\lim\limits_{x\to a} f(x)$存在$\Leftrightarrow \lim\limits_{x\to a\pm 0} f(x)$存在且相等.
- 性质：若$p < \lim\limits_{x\to a} f(x) < q$，则存在$\delta$，使得$0 < |x-a| < \delta$时，$p < f(x) < q$.
  证明：设$\lim\limits_{x\to a} f(x) = l$，取$\epsilon = \min\{l-p, q-l\}$. $|f(x)-l| < \epsilon$时，$p < f(x) < q$.
- 性质：$\lim\limits_{x\to 0} f(kx) = \lim\limits_{x\to 0} f(x)$，$\lim\limits_{x\to a} f(x) = \lim\limits_{x\to b} f(x+a-b)$.
  证明：若$\lim\limits_{x\to a} f(x) = l$，对任意的$\epsilon > 0$，存在$\delta > 0$，当$0 < |x-a| < \delta$时，$|f(x)-l| < \epsilon$. 当$0 < |x-b| < \delta$时，有$0 < |(x+a-b)-a| < \delta$，因此$|f(x+a-b)-l| < \epsilon$.

极限的性质2

- 若极限$\lim\limits_{x\to a} f(x)$存在，则有$\lim\limits_{x\to a}|f(x)|$存在，且$\lim\limits_{x\to a}|f(x)| = |\lim\limits_{x\to a} f(x)|$.

  证明：若设$\lim\limits_{x\to a} f(x) = l$. 对任意的$\epsilon > 0$, 存在$\delta > 0$, 当$0 < |x-a| < \delta$时，$|f(x)-l| < \epsilon$, 则有$||f(x)|-|l|| < \epsilon$.
- 例：$\lim\limits_{x\to 0} \operatorname{sgn}(x)$不存在，$\lim\limits_{x\to 0}|\operatorname{sgn}(x)| = 1$.
- $\lim\limits_{x\to a} f(x) = 0$的充分必要条件是$\lim\limits_{x\to a}|f(x)| = 0$.

  证明：$|f(x)-0| \le \epsilon \Leftrightarrow ||f(x)|-0| \le \epsilon$.

极限的性质2

- 若极限$\lim\limits_{x\to a} f(x)$存在，则有$\lim\limits_{x\to a}|f(x)|$存在，且$\lim\limits_{x\to a}|f(x)| = |\lim\limits_{x\to a} f(x)|$.
  证明：若设$\lim\limits_{x\to a} f(x) = l$. 对任意的$\epsilon > 0$, 存在$\delta > 0$, 当$0 < |x-a| < \delta$时，$|f(x)-l| < \epsilon$, 则有$||f(x)| - |l|| < \epsilon$.
- 例：$\lim\limits_{x\to 0} \operatorname{sgn}(x)$不存在，$\lim\limits_{x\to 0} |\operatorname{sgn}(x)| = 1$.
- $\lim\limits_{x\to a} f(x) = 0$的充分必要条件是$\lim\limits_{x\to a}|f(x)| = 0$.
  证明：$|f(x)-0| \le \epsilon \Leftrightarrow ||f(x)| - 0| \le \epsilon$.

极限的性质2

- 若极限$\lim\limits_{x\to a} f(x)$存在，则有$\lim\limits_{x\to a}|f(x)|$存在，且$\lim\limits_{x\to a}|f(x)| = |\lim\limits_{x\to a} f(x)|$.
  证明：若设$\lim\limits_{x\to a} f(x) = l$. 对任意的$\epsilon > 0$, 存在$\delta > 0$, 当$0 < |x-a| < \delta$时，$|f(x)-l| < \epsilon$, 则有$||f(x)|-|l|| < \epsilon$.
- 例：$\lim\limits_{x\to 0} \operatorname{sgn}(x)$不存在，$\lim\limits_{x\to 0} |\operatorname{sgn}(x)| = 1$.
- $\lim\limits_{x\to a} f(x) = 0$的充分必要条件是$\lim\limits_{x\to a}|f(x)| = 0$.
  证明：$|f(x)-0| \le \epsilon \Leftrightarrow ||f(x)|-0| \le \epsilon$.

极限的性质2

- 若极限$\lim\limits_{x\to a} f(x)$存在，则有$\lim\limits_{x\to a} |f(x)|$存在，且$\lim\limits_{x\to a} |f(x)| = |\lim\limits_{x\to a} f(x)|$.
  证明：若设$\lim\limits_{x\to a} f(x) = l$. 对任意的$\epsilon > 0$, 存在$\delta > 0$, 当$0 < |x-a| < \delta$时，$|f(x) - l| < \epsilon$, 则有$||f(x)| - |l|| < \epsilon$.
- 例：$\lim\limits_{x\to 0} \operatorname{sgn}(x)$不存在，$\lim\limits_{x\to 0} |\operatorname{sgn}(x)| = 1$.
- $\lim\limits_{x\to a} f(x) = 0$的充分必要条件是$\lim\limits_{x\to a} |f(x)| = 0$.
  证明：$|f(x) - 0| \le \epsilon \Leftrightarrow ||f(x)| - 0| \le \epsilon$.

极限的性质2

- 若极限$\lim_{x\to a} f(x)$存在，则有$\lim_{x\to a}|f(x)|$存在，且$\lim_{x\to a}|f(x)| = |\lim_{x\to a} f(x)|$.
  证明：若设$\lim_{x\to a} f(x) = l$. 对任意的$\epsilon > 0$, 存在$\delta > 0$, 当$0 < |x-a| < \delta$时，$|f(x) - l| < \epsilon$, 则有$||f(x)| - |l|| < \epsilon$.
- 例：$\lim_{x\to 0} \operatorname{sgn}(x)$不存在，$\lim_{x\to 0} |\operatorname{sgn}(x)| = 1$.
- $\lim_{x\to a} f(x) = 0$的充分必要条件是$\lim_{x\to a}|f(x)| = 0$.
  证明：$|f(x) - 0| \le \epsilon \Leftrightarrow ||f(x)| - 0| \le \epsilon$.

极限的例子1

- $\lim\limits_{x\to a}\sqrt{x}=\sqrt{a}\ (a>0)$, $\lim\limits_{x\to 0+0}\sqrt{x}=0.$

证明： $a>0$时，

$$|\sqrt{x}-\sqrt{a}|=\frac{|x-a|}{\sqrt{x}+\sqrt{a}}\leq\frac{|x-a|}{\sqrt{a}}.$$

取$\delta=\max\{\sqrt{a}\epsilon,a\}$, 则有当$0<|x-a|<\delta$时, $|\sqrt{x}-\sqrt{a}|<\epsilon.$
对于第二个极限，$\sqrt{x}<\epsilon\Leftrightarrow x<\epsilon^2$, 取$\delta=\epsilon^2$, 则有当$0<x<\delta$时, $|\sqrt{x}-|<\epsilon.$

极限的例子1

- $\lim\limits_{x\to a}\sqrt{x}=\sqrt{a}\ (a>0)$, $\lim\limits_{x\to 0+0}\sqrt{x}=0$.
  证明：$a>0$时，
  $$|\sqrt{x}-\sqrt{a}|=\frac{|x-a|}{\sqrt{x}+\sqrt{a}}\leq\frac{|x-a|}{\sqrt{a}}.$$
  取$\delta=\max\{\sqrt{a}\epsilon,a\}$, 则有当$0<|x-a|<\delta$时, $|\sqrt{x}-\sqrt{a}|<\epsilon$.
  对于第二个极限，$\sqrt{x}<\epsilon\Leftrightarrow x<\epsilon^2$, 取$\delta=\epsilon^2$, 则有当$0<x<\delta$时, $|\sqrt{x}-|<\epsilon$.

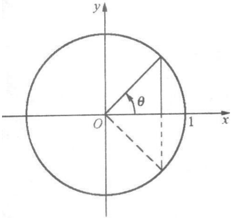
极限的例子1

- $\lim\limits_{x\to a}\sqrt{x}=\sqrt{a}\ (a>0)$, $\lim\limits_{x\to 0+0}\sqrt{x}=0$.
  证明：$a>0$时，
  $$|\sqrt{x}-\sqrt{a}|=\frac{|x-a|}{\sqrt{x}+\sqrt{a}}\le\frac{|x-a|}{\sqrt{a}}.$$
  取$\delta=\max\{\sqrt{a}\epsilon,a\}$, 则有当$0<|x-a|<\delta$时, $|\sqrt{x}-\sqrt{a}|<\epsilon$. 对于第二个极限，$\sqrt{x}<\epsilon\Leftrightarrow x<\epsilon^2$, 取$\delta=\epsilon^2$, 则有当$0<x<\delta$时, $|\sqrt{x}-|<\epsilon$.

极限的例子2

- $\lim\limits_{x\to a}\sin(x)=\sin(a)$, $\lim\limits_{x\to a}\cos(x)=\cos(a)$.

证明： 对任意的$\epsilon>0$，要使$|\sin(x)-\sin(a)|<\epsilon$，即$|2\sin\frac{x-a}{2}\cos\frac{x+a}{2}|<\epsilon$，只要$|\sin\frac{x-a}{2}|<\frac{\epsilon}{2}$. 取$\delta=\epsilon$，$|x-a|<\delta$时，$|\sin\frac{x-a}{2}|\le\frac{|x-a|}{2}<\frac{\epsilon}{2}$.



$|\sin\theta|\le|\theta|$

- $\lim\limits_{x\to x_0}a^x=a^{x_0}$.

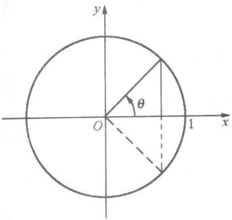
证明: 设$a>1$. 要使$|a^x-a^{x_0}|<\epsilon$，即$|a^{x-x_0}-1|<a^{-x_0}\epsilon$，

$$1-a^{-x_0}\epsilon<a^{x-x_0}<1+a^{-x_0}\epsilon\Leftrightarrow\log_a(1-a^{-x_0}\epsilon)<x-x_0<\log_a(1+a^{-x_0}\epsilon)$$

取$\delta=\min\{|\log_a(1-a^{-x_0}\epsilon)|,\log_a(1+a^{-x_0}\epsilon)\}$即可.

极限的例子2

- $\lim\limits_{x\to a}\sin(x)=\sin(a)$, $\lim\limits_{x\to a}\cos(x)=\cos(a)$.
  证明：对任意的$\epsilon>0$, 要使$|\sin(x)-\sin(a)|<\epsilon$, 即$|2\sin\frac{x-a}{2}\cos\frac{x+a}{2}|<\epsilon$, 只要$|\sin\frac{x-a}{2}|<\frac{\epsilon}{2}$. 取$\delta=\epsilon$, $|x-a|<\delta$时，$|\sin\frac{x-a}{2}|\le\frac{|x-a|}{2}<\frac{\epsilon}{2}$.



$|\sin\theta|\le|\theta|$

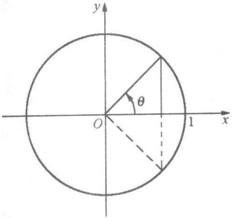
- $\lim\limits_{x\to x_0}a^x=a^{x_0}$.
  证明: 设$a>1$. 要使$|a^x-a^{x_0}|<\epsilon$, 即$|a^{x-x_0}-1|<a^{-x_0}\epsilon$,

$$1-a^{-x_0}\epsilon<a^{x-x_0}<1+a^{-x_0}\epsilon\Leftrightarrow\log_a(1-a^{-x_0}\epsilon)<x-x_0<\log_a(1+a^{-x_0}\epsilon)$$

  取$\delta=\min\{|\log_a(1-a^{-x_0}\epsilon)|,\log_a(1+a^{-x_0}\epsilon)\}$即可.

极限的例子2

- $\lim\limits_{x\to a}\sin(x)=\sin(a)$, $\lim\limits_{x\to a}\cos(x)=\cos(a)$.
  证明：对任意的$\epsilon>0$，要使$|\sin(x)-\sin(a)|<\epsilon$，即$|2\sin\frac{x-a}{2}\cos\frac{x+a}{2}|<\epsilon$，只要$|\sin\frac{x-a}{2}|<\frac{\epsilon}{2}$. 取$\delta=\epsilon$，$|x-a|<\delta$时，$|\sin\frac{x-a}{2}|\leq\frac{|x-a|}{2}<\frac{\epsilon}{2}$.
- $\lim\limits_{x\to x_0}a^x=a^{x_0}$.
  证明：设$a>1$. 要使$|a^x-a^{x_0}|<\epsilon$，即$|a^{x-x_0}-1|<a^{-x_0}\epsilon$，



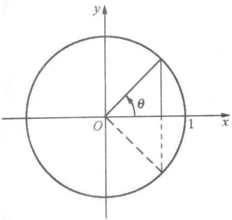
$|\sin\theta|\leq|\theta|$

$$1-a^{-x_0}\epsilon<a^{x-x_0}<1+a^{-x_0}\epsilon\Leftrightarrow\log_a(1-a^{-x_0}\epsilon)<x-x_0<\log_a(1+a^{-x_0}\epsilon)$$

取$\delta=\min\{|\log_a(1-a^{-x_0}\epsilon)|,\log_a(1+a^{-x_0}\epsilon)\}$即可.

极限的例子2

- $\lim\limits_{x\to a}\sin(x)=\sin(a)$, $\lim\limits_{x\to a}\cos(x)=\cos(a)$.
  证明：对任意的$\epsilon>0$，要使$|\sin(x)-\sin(a)|<\epsilon$，即$|2\sin\frac{x-a}{2}\cos\frac{x+a}{2}|<\epsilon$，只要$|\sin\frac{x-a}{2}|<\frac{\epsilon}{2}$. 取$\delta=\epsilon$，$|x-a|<\delta$时，$|\sin\frac{x-a}{2}|\le\frac{|x-a|}{2}<\frac{\epsilon}{2}$.
- $\lim\limits_{x\to x_0}a^x=a^{x_0}$.
  证明: 设$a>1$. 要使$|a^x-a^{x_0}|<\epsilon$，即$|a^{x-x_0}-1|<a^{-x_0}\epsilon$,



$|\sin\theta|\le|\theta|$

$$1-a^{-x_0}\epsilon<a^{x-x_0}<1+a^{-x_0}\epsilon\Leftrightarrow\log_a(1-a^{-x_0}\epsilon)<x-x_0<\log_a(1+a^{-x_0}\epsilon)$$

取$\delta=\min\{|\log_a(1-a^{-x_0}\epsilon)|,\log_a(1+a^{-x_0}\epsilon)\}$即可.

夹逼定理

- 定理：设$f(x), g(x), h(x)$在a的某个空心邻域$(a-r, a)\cup(a, a+r)$上有定义，且$h(x) \leq f(x) \leq g(x)$. 若$\lim\limits_{x\to a} g(x) = \lim\limits_{x\to a} h(x) = l$, 则有$\lim\limits_{x\to a} f(x) = l$.
  证明：对任意$\epsilon > 0$, 存在$\delta > 0$, $0 < |x-a| < \delta$时，$l-\epsilon < h(x) \leq f(x) \leq g(x) < l+\epsilon$.
- 推论：$0 \leq f(x) \leq g(x)$. 若$\lim\limits_{x\to a} g(x) = 0$, 则有$\lim\limits_{x\to a} f(x) = 0$.
- 注:对单边极限，也有类似的夹逼定理成立.
- 例：$\lim\limits_{x\to a} x\sin\frac{1}{x} = 0$.
  证明：$0 \leq |x\sin\frac{1}{x}| \leq |x| \to 0$.

夹逼定理

- 定理：设$f(x), g(x), h(x)$在a的某个空心邻域$(a-r, a)\cup(a, a+r)$上有定义，且$h(x) \le f(x) \le g(x)$. 若$\lim_{x\to a} g(x) = \lim_{x\to a} h(x) = l$, 则有$\lim_{x\to a} f(x) = l$.
  证明：对任意$\epsilon > 0$, 存在$\delta > 0$, $0 < |x-a| < \delta$时，$l-\epsilon < h(x) \le f(x) \le g(x) < l+\epsilon$.
- 推论：$0 \le f(x) \le g(x)$. 若$\lim_{x\to a} g(x) = 0$, 则有$\lim_{x\to a} f(x) = 0$.
- 注:对单边极限，也有类似的夹逼定理成立.
- 例：$\lim_{x\to a} x\sin\frac{1}{x} = 0$.
  证明：$0 \le |x\sin\frac{1}{x}| \le |x| \to 0$.

夹逼定理

- 定理：设$f(x), g(x), h(x)$在a的某个空心邻域$(a-r, a)\cup(a, a+r)$上有定义，且$h(x) \leq f(x) \leq g(x)$. 若$\lim\limits_{x\to a} g(x) = \lim\limits_{x\to a} h(x) = l$, 则有$\lim\limits_{x\to a} f(x) = l$.
  证明：对任意$\epsilon > 0$, 存在$\delta > 0$, $0 < |x-a| < \delta$时，$l-\epsilon < h(x) \leq f(x) \leq g(x) < l+\epsilon$.
- 推论：$0 \leq f(x) \leq g(x)$. 若$\lim\limits_{x\to a} g(x) = 0$, 则有$\lim\limits_{x\to a} f(x) = 0$.
- 注:对单边极限，也有类似的夹逼定理成立.
- 例：$\lim\limits_{x\to a} x\sin\frac{1}{x} = 0$.
  证明：$0 \leq |x\sin\frac{1}{x}| \leq |x| \to 0$.

夹逼定理

- 定理：设$f(x), g(x), h(x)$在a的某个空心邻域$(a-r, a)\cup(a, a+r)$上有定义，且$h(x) \leq f(x) \leq g(x)$. 若$\lim\limits_{x\to a} g(x) = \lim\limits_{x\to a} h(x) = l$，则有$\lim\limits_{x\to a} f(x) = l$.
  证明：对任意$\epsilon > 0$，存在$\delta > 0$，$0 < |x-a| < \delta$时，$l - \epsilon < h(x) \leq f(x) \leq g(x) < l + \epsilon$.
- 推论：$0 \leq f(x) \leq g(x)$. 若$\lim\limits_{x\to a} g(x) = 0$，则有$\lim\limits_{x\to a} f(x) = 0$.
- 注:对单边极限，也有类似的夹逼定理成立.
- 例：$\lim\limits_{x\to a} x\sin\frac{1}{x} = 0$.
  证明：$0 \leq |x\sin\frac{1}{x}| \leq |x| \to 0$.

夹逼定理

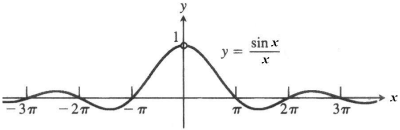
- 定理：设$f(x), g(x), h(x)$在a的某个空心邻域$(a-r, a)\cup(a, a+r)$上有定义，且$h(x) \leq f(x) \leq g(x)$. 若$\lim\limits_{x\to a} g(x) = \lim\limits_{x\to a} h(x) = l$，则有$\lim\limits_{x\to a} f(x) = l$.
  证明：对任意$\epsilon > 0$，存在$\delta > 0$，$0 < |x-a| < \delta$时，$l-\epsilon < h(x) \leq f(x) \leq g(x) < l+\epsilon$.
- 推论：$0 \leq f(x) \leq g(x)$. 若$\lim\limits_{x\to a} g(x) = 0$，则有$\lim\limits_{x\to a} f(x) = 0$.
- 注:对单边极限，也有类似的夹逼定理成立.
- 例：$\lim\limits_{x\to a} x\sin\frac{1}{x} = 0$.
  证明：$0 \leq |x\sin\frac{1}{x}| \leq |x| \to 0$.

夹逼定理

- 定理：设$f(x), g(x), h(x)$在a的某个空心邻域$(a-r, a)\cup(a, a+r)$上有定义, 且$h(x)\le f(x)\le g(x)$. 若$\lim_{x\to a} g(x) = \lim_{x\to a} h(x) = l$, 则有$\lim_{x\to a} f(x) = l$.
  证明：对任意$\epsilon > 0$, 存在$\delta > 0$, $0 < |x-a| < \delta$时，$l-\epsilon < h(x) \le f(x) \le g(x) < l+\epsilon$.
- 推论：$0\le f(x)\le g(x)$. 若$\lim_{x\to a} g(x) = 0$, 则有$\lim_{x\to a} f(x) = 0$.
- 注:对单边极限，也有类似的夹逼定理成立.
- 例：$\lim_{x\to a} x\sin\frac{1}{x} = 0$.
  证明：$0\le |x\sin\frac{1}{x}| \le |x| \to 0$.

一个重要极限

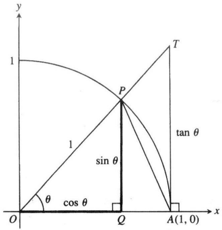
- 一个重要极限：$\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\sin x}{x} = 1.$



证明：由几何意义可以看出，当$0 < x < \frac{\pi}{2}$时，$\sin x < x < \tan x$,从而对当$0 < |x| < \frac{\pi}{2}$时，

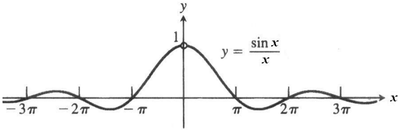
$$\cos x < \frac{\sin x}{x} < 1,$$

由$\lim\limits_{x \to 0} \cos(x) = 1$及夹逼定理即得.



一个重要极限

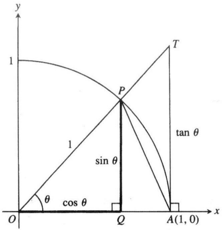
- 一个重要极限：$\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1.$



证明：由几何意义可以看出，当$0<x<\frac{\pi}{2}$时，$\sin x<x<\tan x$,从而对当$0<|x|<\frac{\pi}{2}$时，

$$\cos x<\frac{\sin x}{x}<1,$$

由$\lim\limits_{x\to 0}\cos(x)=1$及夹逼定理即得.



函数极限的四则运算

设$f(x)$, $g(x)$在a的某个空心邻域$(a-r,a)\cup(a,a+r)$上有定义.
若$\lim\limits_{x\longrightarrow a} f(x) = l_1$, $\lim\limits_{x\longrightarrow a} g(x) = l_2$,

- $\lim\limits_{x\longrightarrow a}(f(x)\pm g(x)) = l_1 \pm l_2$.
- $\lim\limits_{x\longrightarrow a}(f(x)\cdot g(x)) = l_1 \cdot l_2$.
- $l_2 \neq 0$时, $\lim\limits_{x\longrightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{l_1}{l_2}$.

  证明: $l_2 \neq 0$,存在$\delta_1 > 0$, 使得$0 < |x - x_0| < \delta_1$时, $|g(x)| > \frac{l_2}{2}$,

$$\left|\frac{f(x)}{g(x)} - \frac{l_1}{l_2}\right| = \frac{|(f(x)-l_1)l_2 - l_1(g(x)-l_2)|}{|g(x)|l_2}$$
$$\leq \frac{2}{|l_2|}|(f(x)-l_1)| + \frac{2|l_1|}{|l_2|^2}|g(x)-l_2|$$

函数极限的四则运算

设$f(x)$, $g(x)$在a的某个空心邻域$(a-r,a)\cup(a,a+r)$上有定义.
若$\lim\limits_{x\to a} f(x)=l_1$, $\lim\limits_{x\to a} g(x)=l_2$,

- $\lim\limits_{x\to a}(f(x)\pm g(x))=l_1\pm l_2$.
- $\lim\limits_{x\to a}(f(x)\cdot g(x))=l_1\cdot l_2$.
- $l_2\neq 0$时, $\lim\limits_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}=\frac{l_1}{l_2}$.

  证明: $l_2\neq 0$,存在$\delta_1>0$, 使得$0<|x-x_0|<\delta_1$时, $|g(x)|>\frac{l_2}{2}$,

$$\left|\frac{f(x)}{g(x)}-\frac{l_1}{l_2}\right|=\frac{|(f(x)-l_1)l_2-l_1(g(x)-l_2)|}{|g(x)|l_2}$$
$$\leq\frac{2}{|l_2|}|(f(x)-l_1)|+\frac{2|l_1|}{|l_2|^2}|g(x)-l_2|$$

函数极限的四则运算

设$f(x)$, $g(x)$在a的某个空心邻域$(a-r,a)\cup(a,a+r)$上有定义.
若$\lim\limits_{x\to a} f(x)=l_1$, $\lim\limits_{x\to a} g(x)=l_2$,

- $\lim\limits_{x\to a}(f(x)\pm g(x))=l_1\pm l_2$.
- $\lim\limits_{x\to a}(f(x)\cdot g(x))=l_1\cdot l_2$.
- $l_2\neq 0$时, $\lim\limits_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}=\frac{l_1}{l_2}$.

证明: $l_2\neq 0$,存在$\delta_1>0$, 使得$0<|x-x_0|<\delta_1$时, $|g(x)|>\frac{l_2}{2}$,

$$\left|\frac{f(x)}{g(x)}-\frac{l_1}{l_2}\right|=\frac{|(f(x)-l_1)l_2-l_1(g(x)-l_2)|}{|g(x)|l_2}$$
$$\leq\frac{2}{|l_2|}|(f(x)-l_1)|+\frac{2|l_1|}{|l_2|^2}|g(x)-l_2|$$

函数极限的四则运算

设$f(x)$, $g(x)$在a的某个空心邻域$(a-r,a)\cup(a,a+r)$上有定义.
若$\lim\limits_{x\to a} f(x)=l_1$, $\lim\limits_{x\to a} g(x)=l_2$,

- $\lim\limits_{x\to a}(f(x)\pm g(x))=l_1\pm l_2$.
- $\lim\limits_{x\to a}(f(x)\cdot g(x))=l_1\cdot l_2$.
- $l_2\neq 0$时, $\lim\limits_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}=\frac{l_1}{l_2}$.

  证明: $l_2\neq 0$,存在$\delta_1>0$, 使得$0<|x-x_0|<\delta_1$时, $|g(x)|>\frac{l_2}{2}$,

$$\begin{aligned}\left|\frac{f(x)}{g(x)}-\frac{l_1}{l_2}\right| &= \frac{|(f(x)-l_1)l_2-l_1(g(x)-l_2)|}{|g(x)|l_2} \\ &\leq \frac{2}{|l_2|}|(f(x)-l_1)|+\frac{2|l_1|}{|l_2|^2}|g(x)-l_2|\end{aligned}$$

极限四则运算的应用

- 例： 求$\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sqrt{1+x}-1}{x+\sin x}$.

  解：$\frac{\sqrt{1+x}-1}{x+\sin x}=\frac{x}{(\sqrt{1+x}+1)(x+\sin x)}=\frac{1}{(\sqrt{1+x}+1)(1+\frac{\sin x}{x})}\to\frac{1}{4}$.

- 求$\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin 5x-\tan 3x}{2x}$.

  解：

$$\frac{\sin 5x-\tan 3x}{2x}=\frac{\sin 5x}{5x}\cdot\frac{5}{2}-\frac{\tan 3x}{3x}\cdot\frac{3}{2}\to 1$$

极限四则运算的应用

- 例：求 $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sqrt{1+x}-1}{x+\sin x}$.

  解：$\frac{\sqrt{1+x}-1}{x+\sin x}=\frac{x}{(\sqrt{1+x}+1)(x+\sin x)}=\frac{1}{(\sqrt{1+x}+1)(1+\frac{\sin x}{x})}\to\frac{1}{4}$.

- 求 $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin 5x-\tan 3x}{2x}$.

  解：

$$\frac{\sin 5x-\tan 3x}{2x}=\frac{\sin 5x}{5x}\cdot\frac{5}{2}-\frac{\tan 3x}{3x}\cdot\frac{3}{2}\to 1$$

极限四则运算的应用

- 例：求$\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sqrt{1+x}-1}{x+\sin x}$.

  解：$\frac{\sqrt{1+x}-1}{x+\sin x}=\frac{x}{(\sqrt{1+x}+1)(x+\sin x)}=\frac{1}{(\sqrt{1+x}+1)(1+\frac{\sin x}{x})}\to\frac{1}{4}$.

- 求$\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin 5x-\tan 3x}{2x}$.

  解：

$$\frac{\sin 5x-\tan 3x}{2x}=\frac{\sin 5x}{5x}\cdot\frac{5}{2}-\frac{\tan 3x}{3x}\cdot\frac{3}{2}\to 1$$

极限四则运算的应用

- 例：求 $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sqrt{1+x}-1}{x+\sin x}$.

  解：$\frac{\sqrt{1+x}-1}{x+\sin x}=\frac{x}{(\sqrt{1+x}+1)(x+\sin x)}=\frac{1}{(\sqrt{1+x}+1)(1+\frac{\sin x}{x})}\to\frac{1}{4}$.

- 求 $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin 5x-\tan 3x}{2x}$.

  解：

$$\frac{\sin 5x-\tan 3x}{2x}=\frac{\sin 5x}{5x}\cdot\frac{5}{2}-\frac{\tan 3x}{3x}\cdot\frac{3}{2}\to 1$$

极限不等式

- 定理：设$f(x), g(x)$在a的某个空心邻域上有定义，$\lim\limits_{x\to a} f(x) = l_1$，$\lim\limits_{x\to a} g(x) = l_2$，$l_1 > l_2$．则存在$\delta > 0$，使得当$0 < |x-a| < \delta$时，$f(x) > g(x)$．
- 推论：若$\lim\limits_{x\to a} f(x) = l > 0$，则存在$\delta > 0$，当$0 < |x-a| < \delta$时，$f(x) > 0$．
- 定理：设$f(x), g(x)$在a的某个空心邻域上有定义，且在这个空心邻域上有$f(x) \geq g(x)$．若极限$\lim\limits_{x\to a} f(x)$，$\lim\limits_{x\to a} g(x)$存在，则有$\lim\limits_{x\to a} f(x) \geq \lim\limits_{x\to a} g(x)$．

极限不等式

- 定理：设$f(x), g(x)$在a的某个空心邻域上有定义，$\lim\limits_{x\to a} f(x) = l_1$，$\lim\limits_{x\to a} g(x) = l_2$，$l_1 > l_2$. 则存在$\delta > 0$，使得当$0 < |x-a| < \delta$时，$f(x) > g(x)$.
- 推论：若$\lim\limits_{x\to a} f(x) = l > 0$，则存在$\delta > 0$，当$0 < |x-a| < \delta$时，$f(x) > 0$.
- 定理：设$f(x), g(x)$在a的某个空心邻域上有定义，且在这个空心邻域上有$f(x) \geq g(x)$. 若极限$\lim\limits_{x\to a} f(x)$，$\lim\limits_{x\to a} g(x)$存在，则有$\lim\limits_{x\to a} f(x) \geq \lim\limits_{x\to a} g(x)$.

极限不等式

- 定理：设$f(x), g(x)$在a的某个空心邻域上有定义，$\lim\limits_{x\to a} f(x) = l_1$, $\lim\limits_{x\to a} g(x) = l_2$, $l_1 > l_2$. 则存在$\delta > 0$, 使得当$0 < |x - a| < \delta$时，$f(x) > g(x)$.
- 推论：若$\lim\limits_{x\to a} f(x) = l > 0$, 则存在$\delta > 0$, 当$0 < |x - a| < \delta$时，$f(x) > 0$.
- 定理：设$f(x), g(x)$在a的某个空心邻域上有定义，且在这个空心邻域上有$f(x) \geq g(x)$. 若极限$\lim\limits_{x\to a} f(x)$, $\lim\limits_{x\to a} g(x)$存在，则有$\lim\limits_{x\to a} f(x) \geq \lim\limits_{x\to a} g(x)$.

函数极限与序列极限1

- 设$f(x)$, $g(x)$在a的某个空心邻域上有定义, 且$\lim_{x\to a} f(x) = l$. 若$\{x_n\}$是在该空心邻域内取值的序列, 且$\lim_{n\to\infty} x_n = a$, 则有$\lim_{n\to\infty} f(x_n) = l$.

  证明: 由$\lim_{x\to a} f(x) = l$, 对任意$\epsilon > 0$, 存在$\delta > 0$, 使得当$0 < |x-a| < \delta$时, $|f(x) - l| < \epsilon$. 由于$\lim_{n\to\infty} x_n = a$, 且$x_n \neq a$, 存在$N$, $n > N$时, $0 < |x_n - a| < \delta$, 从而$|f(x_n) - l| < \epsilon$.
- 注: 若对任意的$x_n \to a$, 有$f(x_n) \to l$, 则有$\lim_{x\to a} f(x) = l$.
- 若$f(x) = |\mathrm{sgn}\,(x)|$, $x_n \equiv 0 \to 0$, 但$\lim_{n\to\infty} f(x_n) = 0 \neq \lim_{x\to 0} f(x) = 1$. 若取$x_n = \frac{1}{n}\sin\frac{n\pi}{2}$, $\lim_{n\to\infty} f(x_n)$不存在.

函数极限与序列极限1

- 设$f(x)$, $g(x)$在a的某个空心邻域上有定义，且$\lim_{x\to a} f(x)=l$. 若$\{x_n\}$是在该空心邻域内取值的序列，且$\lim_{n\to\infty} x_n=a$，则有$\lim_{n\to\infty} f(x_n)=l$.
  证明：由$\lim_{x\to a} f(x)=l$，对任意$\epsilon>0$，存在$\delta>0$，使得当$0<|x-a|<\delta$时，$|f(x)-l|<\epsilon$. 由于$\lim_{n\to\infty} x_n=a$，且$x_n\neq a$，存在N，$n>N$时，$0<|x_n-a|<\delta$，从而$|f(x_n)-l|<\epsilon$.
- 注：若对任意的$x_n\to a$，有$f(x_n)\to l$，则有$\lim_{x\to a} f(x)=l$.
- 若$f(x)=|\mathrm{sgn}\,(x)|$, $x_n\equiv 0\to 0$，但$\lim_{n\to\infty} f(x_n)=0\neq\lim_{x\to 0} f(x)=1$. 若取$x_n=\frac{1}{n}\sin\frac{n\pi}{2}$，$\lim_{n\to\infty} f(x_n)$不存在.

函数极限与序列极限1

- 设$f(x)$, $g(x)$在a的某个空心邻域上有定义，且$\lim\limits_{x\to a} f(x)=l$. 若$\{x_n\}$是在该空心邻域内取值的序列，且$\lim\limits_{n\to\infty} x_n=a$，则有$\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n)=l$.
  证明：由$\lim\limits_{x\to a} f(x)=l$，对任意$\epsilon>0$，存在$\delta>0$，使得当$0<|x-a|<\delta$时，$|f(x)-l|<\epsilon$. 由于$\lim\limits_{n\to\infty} x_n=a$，且$x_n\neq a$，存在$N$，$n>N$时，$0<|x_n-a|<\delta$，从而$|f(x_n)-l|<\epsilon$.
- 注：若对任意的$x_n\to a$，有$f(x_n)\to l$，则有$\lim\limits_{x\to a} f(x)=l$.
- 若$f(x)=|\mathrm{sgn}\,(x)|$, $x_n\equiv 0\to 0$, 但$\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n)=0\neq\lim\limits_{x\to 0} f(x)=1$. 若取$x_n=\frac{1}{n}\sin\frac{n\pi}{2}$，$\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n)$不存在.

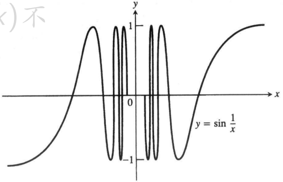
函数极限与序列极限1

- 设$f(x)$, $g(x)$在a的某个空心邻域上有定义，且$\lim_{x\to a} f(x) = l$. 若$\{x_n\}$是在该空心邻域内取值的序列，且$\lim_{n\to\infty} x_n = a$，则有$\lim_{n\to\infty} f(x_n) = l$.

  证明：由$\lim_{x\to a} f(x) = l$，对任意$\epsilon > 0$，存在$\delta > 0$，使得当$0 < |x-a| < \delta$时，$|f(x) - l| < \epsilon$. 由于$\lim_{n\to\infty} x_n = a$，且$x_n \neq a$，存在$N$，$n > N$时，$0 < |x_n - a| < \delta$，从而$|f(x_n) - l| < \epsilon$.
- 注：若对任意的$x_n \to a$，有$f(x_n) \to l$，则有$\lim_{x\to a} f(x) = l$.
- 若$f(x) = |\mathrm{sgn}\,(x)|$, $x_n \equiv 0 \to 0$，但$\lim_{n\to\infty} f(x_n) = 0 \neq \lim_{x\to 0} f(x) = 1$. 若取$x_n = \frac{1}{n}\sin\frac{n\pi}{2}$，$\lim_{n\to\infty} f(x_n)$不存在.

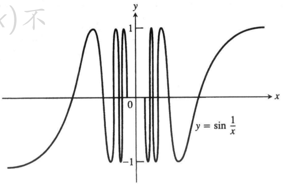
函数极限与序列极限2

- 推论：若存在$x_n \longrightarrow a$, $x_n' \longrightarrow a$, 且x_n, x_n'都不取a, 极限$\lim\limits_{n\longrightarrow\infty} f(x_n)$和$\lim\limits_{n\longrightarrow\infty} f(x_n')$都存在但不相等，则$\lim\limits_{x\longrightarrow a} f(x)$不存在.
- 例：$\lim\limits_{x\longrightarrow 0}\sin\frac{1}{x}$不存在，$x_n=\frac{1}{2n\pi}$, $x_n'=\frac{1}{2n\pi+\frac{\pi}{2}}$，$\lim\limits_{n\longrightarrow\infty} f(x_n)=0$ $\lim\limits_{n\longrightarrow\infty} f(x_n')=1$，从而$\lim\limits_{x\longrightarrow 0}\sin\frac{1}{x}$不存在.
- 例：$f(x)=\chi_{\mathbb{Q}}$, 对任意a, 极限$\lim\limits_{x\longrightarrow a} f(x)$不存在.
- 例 $\lim\limits_{n\longrightarrow\infty} n\sin\frac{1}{n}=1$



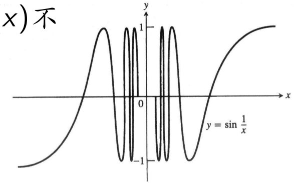
函数极限与序列极限2

- 推论：若存在$x_n \to a$, $x'_n \to a$, 且x_n, x'_n都不取a,极限$\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n)$和$\lim\limits_{n\to\infty} f(x'_n)$都存在但不相等，则$\lim\limits_{x\to a} f(x)$不存在.
- 例：$\lim\limits_{x\to 0} \sin\frac{1}{x}$不存在，$x_n = \frac{1}{2n\pi}$, $x_n. = \frac{1}{2n\pi+\frac{\pi}{2}}$, $\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n) = 0$ $\lim\limits_{n\to\infty} f(x'_n) = 1$，从而$\lim\limits_{x\to 0}\sin\frac{1}{x}$不存在.
- 例：$f(x) = \chi_{\mathbb{Q}}$, 对任意a, 极限$\lim\limits_{x\to a} f(x)$不存在.
- 例 $\lim\limits_{n\to\infty} n\sin\frac{1}{n} = 1$



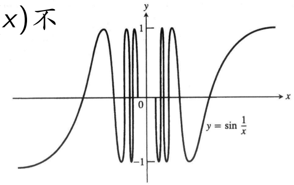
函数极限与序列极限2

- 推论：若存在$x_n \to a$, $x_n' \to a$, 且x_n, x_n'都不取a,极限$\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n)$和$\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n')$都存在但不相等，则$\lim\limits_{x\to a} f(x)$不存在.
- 例：$\lim\limits_{x\to 0} \sin\frac{1}{x}$不存在，$x_n = \frac{1}{2n\pi}$, $x_n. = \frac{1}{2n\pi+\frac{\pi}{2}}$, $\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n) = 0$ $\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n') = 1$，从而$\lim\limits_{x\to 0} \sin\frac{1}{x}$不存在.
- 例：$f(x) = \chi_{\mathbb{Q}}$, 对任意a, 极限$\lim\limits_{x\to a} f(x)$不存在.
- 例 $\lim\limits_{n\to\infty} n\sin\frac{1}{n} = 1$



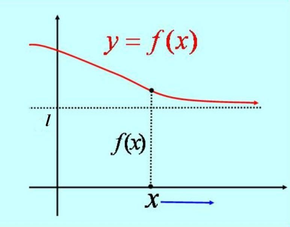
函数极限与序列极限2

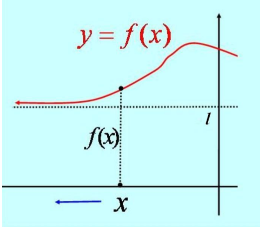
- 推论：若存在$x_n \to a$, $x'_n \to a$, 且x_n, x'_n都不取a,极限$\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n)$和$\lim\limits_{n\to\infty} f(x'_n)$都存在但不相等，则$\lim\limits_{x\to a} f(x)$不存在.
- 例：$\lim\limits_{x\to 0}\sin\frac{1}{x}$不存在，$x_n = \frac{1}{2n\pi}$, $x_{n}. = \frac{1}{2n\pi+\frac{\pi}{2}}$, $\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n) = 0$ $\lim\limits_{n\to\infty} f(x'_n) = 1$，从而$\lim\limits_{x\to 0}\sin\frac{1}{x}$不存在.
- 例：$f(x) = \chi_{\mathbb{Q}}$, 对任意a, 极限$\lim\limits_{x\to a} f(x)$不存在.
- 例 $\lim\limits_{n\to\infty} n\sin\frac{1}{n} = 1$



极限的推广1

- $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=l$: 存在$a$, $f(x)$在$(a,+\infty)$上有定义. 对任意$\epsilon>0$, 存在$M>a$, 使得当$x>M$时, $|f(x)-l|<\epsilon$, 则称$x\to+\infty$时, $f(x)$以l为极限,记为$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=l$.

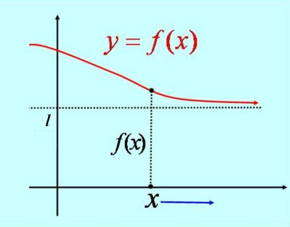


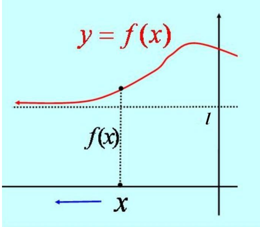


- $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=l$: 存在$a$, $f(x)$在$(-\infty,a)$上有定义. 对任意$\epsilon>0$, 存在$M<a$, 使得当$x<M$时, $|f(x)-l|<\epsilon$, 则称$x\to-\infty$时, $f(x)$以l为极限,记为$\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=l$.

极限的推广1

- $\lim_{x\to+\infty} f(x) = l$: 存在$a$, $f(x)$在$(a,+\infty)$上有定义. 对任意$\epsilon > 0$, 存在$M > a$, 使得当$x > M$时, $|f(x) - l| < \epsilon$, 则称$x \to +\infty$时, $f(x)$以l为极限,记为$\lim_{x\to+\infty} f(x) = l$.

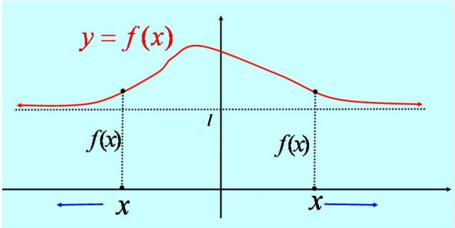




- $\lim_{x\to-\infty} f(x) = l$: 存在$a$, $f(x)$在$(-\infty,a)$上有定义. 对任意$\epsilon > 0$, 存在$M < a$, 使得当$x < M$时, $|f(x) - l| < \epsilon$, 则称$x \to -\infty$时, $f(x)$以l为极限,记为$\lim_{x\to-\infty} f(x) = l$.

极限的推广2

- $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = l$: 存在$a>0$, $f(x)$在$\{x : |x| > a\}$上有定义. 对任意$\epsilon > 0$, 存在$M > a$, 使得当$|x| > M$时, $|f(x) - l| < \epsilon$, 则称$x \to \infty$时, $f(x)$以l为极限,记为$\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = l$.



极限的推广3

- $\lim\limits_{x\to a} f(x) = +\infty$: 对任意$M$, 存在$\delta > 0$, 使得当$0 < |x - a| < \delta$时, $f(x) > M$, 则称$x \to a$时, $f(x)$趋向于$+\infty$. （此时极限不存在）
- $\lim\limits_{x\to a} f(x) = \infty$: 对任意$M$, 存在$\delta > 0$, 使得当$0 < |x - a| < \delta$时, $|f(x)| > M$, 则称$x \to a$时, $f(x)$趋向于∞.
- $\lim\limits_{x\to +\infty} f(x) = +\infty$: 对任意$M$, 存在$A > 0$, 使得当$x > A$时, $f(x) > M$, 则称$x \to +\infty$时, $f(x)$趋向于$+\infty$.
- 类似可定义$\lim\limits_{x\to a} f(x) = -\infty$, $\lim\limits_{x\to a\pm 0} f(x) = \pm\infty$, $\lim\limits_{x\to a\pm 0} f(x) = \infty$. $\lim\limits_{x\to +\infty} f(x) = \infty$, $\lim\limits_{x\to \infty} f(x) = \pm\infty$, $\lim\limits_{x\to \infty} f(x) = \infty$, $\cdots$.

极限的推广3

- $\lim\limits_{x\to a} f(x) = +\infty$: 对任意$M$, 存在$\delta > 0$, 使得当$0 < |x-a| < \delta$时, $f(x) > M$, 则称$x \to a$时, $f(x)$趋向于$+\infty$. （此时极限不存在）
- $\lim\limits_{x\to a} f(x) = \infty$: 对任意$M$, 存在$\delta > 0$, 使得当$0 < |x-a| < \delta$时, $|f(x)| > M$, 则称$x \to a$时, $f(x)$趋向于∞.
- $\lim\limits_{x\to +\infty} f(x) = +\infty$: 对任意$M$, 存在$A > 0$, 使得当$x > A$时, $f(x) > M$, 则称$x \to +\infty$时, $f(x)$趋向于$+\infty$.
- 类似可定义$\lim\limits_{x\to a} f(x) = -\infty$, $\lim\limits_{x\to a\pm 0} f(x) = \pm\infty$, $\lim\limits_{x\to a\pm 0} f(x) = \infty$. $\lim\limits_{x\to +\infty} f(x) = \infty$, $\lim\limits_{x\to \infty} f(x) = \pm\infty$, $\lim\limits_{x\to \infty} f(x) = \infty$, $\cdots$.

极限的推广3

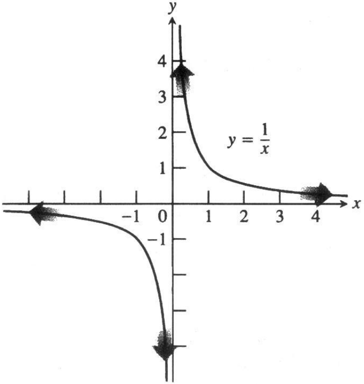
- $\lim\limits_{x\to a} f(x)=+\infty$: 对任意$M$, 存在$\delta>0$, 使得当$0<|x-a|<\delta$时, $f(x)>M$, 则称$x\to a$时, $f(x)$趋向于$+\infty$. (此时极限不存在)
- $\lim\limits_{x\to a} f(x)=\infty$: 对任意$M$, 存在$\delta>0$, 使得当$0<|x-a|<\delta$时, $|f(x)|>M$, 则称$x\to a$时, $f(x)$趋向于∞.
- $\lim\limits_{x\to +\infty} f(x)=+\infty$: 对任意$M$, 存在$A>0$, 使得当$x>A$时, $f(x)>M$, 则称$x\to +\infty$时, $f(x)$趋向于$+\infty$.
- 类似可定义$\lim\limits_{x\to a} f(x)=-\infty$, $\lim\limits_{x\to a\pm 0} f(x)=\pm\infty$, $\lim\limits_{x\to a\pm 0} f(x)=\infty$. $\lim\limits_{x\to +\infty} f(x)=\infty$, $\lim\limits_{x\to \infty} f(x)=\pm\infty$, $\lim\limits_{x\to \infty} f(x)=\infty$, $\cdots$.

极限的推广3

- $\lim\limits_{x\to a} f(x)=+\infty$: 对任意$M$, 存在$\delta>0$, 使得当$0<|x-a|<\delta$时, $f(x)>M$, 则称$x\to a$时, $f(x)$趋向于$+\infty$. （此时极限不存在）
- $\lim\limits_{x\to a} f(x)=\infty$: 对任意$M$, 存在$\delta>0$, 使得当$0<|x-a|<\delta$时, $|f(x)|>M$, 则称$x\to a$时, $f(x)$趋向于∞.
- $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$: 对任意$M$, 存在$A>0$, 使得当$x>A$时, $f(x)>M$, 则称$x\to+\infty$时, $f(x)$趋向于$+\infty$.
- 类似可定义$\lim\limits_{x\to a} f(x)=-\infty$, $\lim\limits_{x\to a\pm 0} f(x)=\pm\infty$, $\lim\limits_{x\to a\pm 0} f(x)=\infty$. $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=\infty$, $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)=\pm\infty$, $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)=\infty$, $\cdots$.

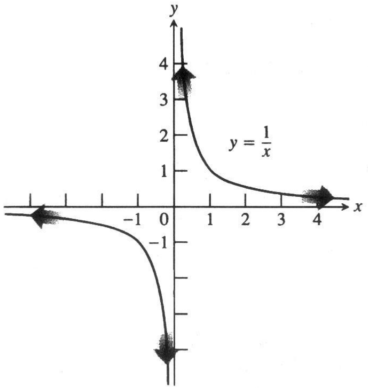
极限的推广-例

- $\lim\limits_{x\to 0+0}\dfrac{1}{x}=+\infty.$
- $\lim\limits_{x\to 0-0}\dfrac{1}{x}=-\infty.$
- $\lim\limits_{x\to 0\pm 0}\dfrac{1}{x}=\infty.$
- $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1}{x}=\infty.$
- $\lim\limits_{x\to \pm\infty}\dfrac{1}{x}=0.$
- $\lim\limits_{x\to \infty}\dfrac{1}{x}=0.$



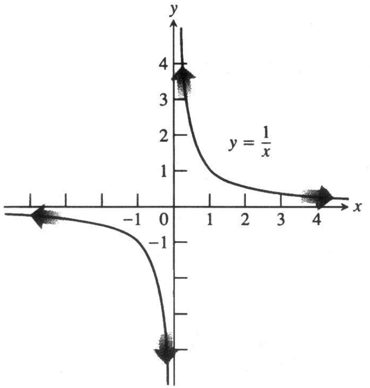
极限的推广-例

- $\lim\limits_{x\to 0+0} \frac{1}{x} = +\infty.$
- $\lim\limits_{x\to 0-0} \frac{1}{x} = -\infty.$
- $\lim\limits_{x\to 0\pm 0} \frac{1}{x} = \infty.$
- $\lim\limits_{x\to 0} \frac{1}{x} = \infty.$
- $\lim\limits_{x\to \pm\infty} \frac{1}{x} = 0.$
- $\lim\limits_{x\to \infty} \frac{1}{x} = 0.$



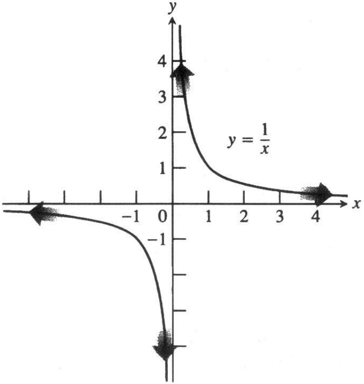
极限的推广-例

- $\lim\limits_{x \to 0+0} \frac{1}{x} = +\infty.$
- $\lim\limits_{x \to 0-0} \frac{1}{x} = -\infty.$
- $\lim\limits_{x \to 0\pm 0} \frac{1}{x} = \infty.$
- $\lim\limits_{x \to 0} \frac{1}{x} = \infty.$
- $\lim\limits_{x \to \pm\infty} \frac{1}{x} = 0.$
- $\lim\limits_{x \to \infty} \frac{1}{x} = 0.$



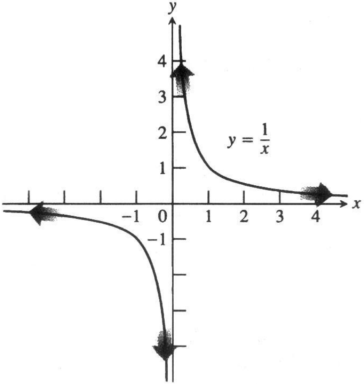
极限的推广-例

- $\lim\limits_{x\to 0+0} \frac{1}{x} = +\infty.$
- $\lim\limits_{x\to 0-0} \frac{1}{x} = -\infty.$
- $\lim\limits_{x\to 0\pm 0} \frac{1}{x} = \infty.$
- $\lim\limits_{x\to 0} \frac{1}{x} = \infty.$
- $\lim\limits_{x\to \pm\infty} \frac{1}{x} = 0.$
- $\lim\limits_{x\to \infty} \frac{1}{x} = 0.$



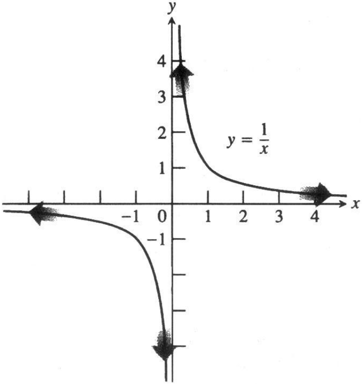
极限的推广-例

- $\lim\limits_{x\to 0+0}\frac{1}{x}=+\infty.$
- $\lim\limits_{x\to 0-0}\frac{1}{x}=-\infty.$
- $\lim\limits_{x\to 0\pm 0}\frac{1}{x}=\infty.$
- $\lim\limits_{x\to 0}\frac{1}{x}=\infty.$
- $\lim\limits_{x\to \pm\infty}\frac{1}{x}=0.$
- $\lim\limits_{x\to \infty}\frac{1}{x}=0.$



极限的推广-例

- $\lim\limits_{x \to 0+0} \dfrac{1}{x} = +\infty.$
- $\lim\limits_{x \to 0-0} \dfrac{1}{x} = -\infty.$
- $\lim\limits_{x \to 0\pm 0} \dfrac{1}{x} = \infty.$
- $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{1}{x} = \infty.$
- $\lim\limits_{x \to \pm\infty} \dfrac{1}{x} = 0.$
- $\lim\limits_{x \to \infty} \dfrac{1}{x} = 0.$



性质

- $x \to \pm\infty$或∞时，相应的夹逼定理,四则运算定理，函数极限与序列极限的关系均成立.
- $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = l \Leftrightarrow \lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = l$，这里$l$可以是有限或无穷.
- $\lim\limits_{x\to a} f(x) = \infty \Leftrightarrow \lim\limits_{x\to a} |f(x)| = +\infty$，这里$a$可以是有限或无穷.
- $\lim\limits_{x\to\pm\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to 0\pm 0} f(\frac{1}{x})$，$\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to 0} f(\frac{1}{x})$.

性质

- $x \to \pm\infty$或∞时，相应的夹逼定理,四则运算定理，函数极限与序列极限的关系均成立.
- $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = l \Leftrightarrow \lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = l$，这里$l$可以是有限或无穷.
- $\lim\limits_{x\to a} f(x) = \infty \Leftrightarrow \lim\limits_{x\to a} |f(x)| = +\infty$，这里$a$可以是有限或无穷.
- $\lim\limits_{x\to\pm\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to 0\pm 0} f(\frac{1}{x})$，$\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to 0} f(\frac{1}{x})$.

性质

- $x \to \pm\infty$或∞时，相应的夹逼定理,四则运算定理，函数极限与序列极限的关系均成立.
- $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = l \Leftrightarrow \lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = l$，这里$l$可以是有限或无穷.
- $\lim\limits_{x\to a} f(x) = \infty \Leftrightarrow \lim\limits_{x\to a} |f(x)| = +\infty$，这里$a$可以是有限或无穷.
- $\lim\limits_{x\to\pm\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to 0\pm 0} f(\frac{1}{x})$，$\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to 0} f(\frac{1}{x})$.

性质

- $x \to \pm\infty$或∞时，相应的夹逼定理,四则运算定理，函数极限与序列极限的关系均成立.
- $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = l \Leftrightarrow \lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = l$，这里$l$可以是有限或无穷.
- $\lim\limits_{x\to a} f(x) = \infty \Leftrightarrow \lim\limits_{x\to a} |f(x)| = +\infty$，这里$a$可以是有限或无穷.
- $\lim\limits_{x\to\pm\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to 0\pm 0} f(\frac{1}{x})$, $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to 0} f(\frac{1}{x})$.

无穷大量

- 定义：若$\lim_{x\to a} f(x) = \pm\infty$，则称$x \to a$时，$f(x)$为正（负）无穷大量；若$\lim_{x\to a} f(x) = \infty$，则称$x \to a$时，$f(x)$为无穷大量.（这里$a$可以是有限或无穷）
- 类似可定义序列的无穷大量：若$\lim_{n\to\infty} f(x) = \pm\infty$，则称$a_n$为正（负）无穷大量；若$\lim_{n\to\infty} f(x) = \infty$，则称$a_n$为无穷大量.
- 注：无穷大量是变量，不是一个数.

无穷大量

- 定义：若$\lim_{x\to a} f(x)=\pm\infty$，则称$x\to a$时，$f(x)$为正（负）无穷大量；若$\lim_{x\to a} f(x)=\infty$，则称$x\to a$时，$f(x)$为无穷大量.（这里$a$可以是有限或无穷）
- 类似可定义序列的无穷大量：若$\lim_{n\to\infty} f(x)=\pm\infty$，则称$a_n$为正（负）无穷大量；若$\lim_{n\to\infty} f(x)=\infty$，则称$a_n$为无穷大量.
- 注：无穷大量是变量，不是一个数.

无穷大量

- 定义：若$\lim\limits_{x\longrightarrow a} f(x)=\pm\infty$，则称$x\rightarrow a$时，$f(x)$为正（负）无穷大量；若$\lim\limits_{x\longrightarrow a} f(x)=\infty$，则称$x\rightarrow a$时，$f(x)$为无穷大量.（这里$a$可以是有限或无穷）
- 类似可定义序列的无穷大量：若$\lim\limits_{n\longrightarrow\infty} f(x)=\pm\infty$，则称$a_n$为正（负）无穷大量；若$\lim\limits_{n\longrightarrow\infty} f(x)=\infty$，则称$a_n$为无穷大量.
- 注：无穷大量是变量，不是一个数.

复合函数的极限1

- 设$x_0 \in (a,b)$, $y_0 \in (c,d)$, $f(x) : (a,b)\backslash\{x_0\} \to (c,d)\backslash\{y_0\}$, $\lim_{x\to x_0} f(x) = y_0$. $g(y) : (c,d)\backslash\{y_0\} \to \mathbb{R}$, $\lim_{y\to y_0} g(x) = l$. 则有$\lim_{x\to x_0} g(f(x)) = l$.

证明：由于$\lim_{y\to y_0} g(x) = l$，对任意$\epsilon > 0$，存在δ_1，使得当$0 < |y - y_0| < \delta_1$时，$|g(y) - g(y_0)| < \epsilon$. 有由$\lim_{x\to x_0} f(x) = y_0$及$f(x) \neq y_0$，存在$\delta < r$，使得当$0 < |x - x_0| < \delta$时$0 < |f(x) - f(x_0)| < \delta$. 因此当$0 < |x - x_0| < \delta$时有$|g(f(x)) - l)| < \epsilon$.

复合函数的极限

复合函数的极限1

- 设$x_0 \in (a,b)$, $y_0 \in (c,d)$, $f(x) : (a,b)\backslash\{x_0\} \to (c,d)\backslash\{y_0\}$, $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = y_0$. $g(y) : (c,d)\backslash\{y_0\} \to \mathbb{R}$, $\lim\limits_{y\to y_0} g(x) = l$. 则有$\lim\limits_{x\to x_0} g(f(x)) = l$.
  证明：由于$\lim\limits_{y\to y_0} g(x) = l$，对任意$\epsilon > 0$，存在$\delta_1$，使得当$0 < |y - y_0| < \delta_1$时，$|g(y) - g(y_0)| < \epsilon$. 有由$\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = y_0$及$f(x) \neq y_0$，存在$\delta < r$，使得当$0 < |x - x_0| < \delta$时$0 < |f(x) - f(x_0)| < \delta$. 因此当$0 < |x - x_0| < \delta$时有$|g(f(x)) - l)| < \epsilon$.

复合函数的极限

复合函数的极限2

- 注：上面定理中，$g(y)$在y_0处可以没有定义. 即使$g(y)$在y_0处有定义，由于$f(y_0)$ 与极限无关，$f(x)$也不能等于y_0. 如$g(y) = |\operatorname{sgn} y|$, $f(x) = x\sin\frac{1}{x}$, 取$x_0 = y_0 = 0$.
- 注：$a, y_0 = \pm\infty, \infty$，或$l = \pm\infty, \infty$时，也有类似的结论成立． 如：若$g(y)$与$f(x)$的复合$g(f(x))$在$x_0$的$(a, +\infty)$上有定义，若$\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = +\infty$, $\lim\limits_{y\to+\infty} g(x) = l$, 则有$\lim\limits_{x\to x_0} g(f(x)) = l$.

复合函数的极限2

- 注：上面定理中，$g(y)$在y_0处可以没有定义. 即使$g(y)$在y_0处有定义，由于$f(y_0)$ 与极限无关，$f(x)$也不能等于y_0. 如$g(y) = |\operatorname{sgn} y|$, $f(x) = x \sin \frac{1}{x}$, 取$x_0 = y_0 = 0$.
- 注：$a, y_0 = \pm\infty, \infty$，或$l = \pm\infty, \infty$时，也有类似的结论成立. 如：若$g(y)$与$f(x)$的复合$g(f(x))$在$x_0$的$(a, +\infty)$上有定义，若$\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = +\infty$, $\lim\limits_{y \to +\infty} g(x) = l$, 则有$\lim\limits_{x \to x_0} g(f(x)) = l$.

例子1

- $\lim\limits_{x\to+\infty} e^{-x} = 0.$
- $\lim\limits_{x\to\infty}(1+\frac{1}{x})^x = \lim\limits_{x\to0}(1+x)^{\frac{1}{x}} = e.$
  证明：$\lim\limits_{n\to\infty}(1+\frac{1}{n})^n = \lim\limits_{n\to\infty}(1+\frac{1}{n+1})^n = e.$ $x\to+\infty$时，

$$(1+\frac{1}{x})^x \le (1+\frac{1}{[x]})^{[x]+1}, \qquad (1+\frac{1}{x})^x \ge (1+\frac{1}{[x]+1})^{[x]},$$

$x\to-\infty$时，$(1+\frac{1}{x})^x = (1+\frac{1}{-x-1})^{-x-1}(1+\frac{1}{-x-1}) \to e.$

例子1

- $\lim\limits_{x\to+\infty} e^{-x} = 0.$
- $\lim\limits_{x\to\infty}(1+\frac{1}{x})^x = \lim\limits_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}} = e.$

证明：$\lim\limits_{n\to\infty}(1+\frac{1}{n})^n = \lim\limits_{n\to\infty}(1+\frac{1}{n+1})^n = e$. $x\to+\infty$时，

$$(1+\frac{1}{x})^x \le (1+\frac{1}{[x]})^{[x]+1}, \qquad (1+\frac{1}{x})^x \ge (1+\frac{1}{[x]+1})^{[x]},$$

$x\to-\infty$时，$(1+\frac{1}{x})^x = (1+\frac{1}{-x-1})^{-x-1}(1+\frac{1}{-x-1}) \to e.$

例子1

- $\lim\limits_{x\to+\infty} e^{-x} = 0.$
- $\lim\limits_{x\to\infty}(1+\frac{1}{x})^x = \lim\limits_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}} = e.$

  证明: $\lim\limits_{n\to\infty}(1+\frac{1}{n})^n = \lim\limits_{n\to\infty}(1+\frac{1}{n+1})^n = e.$ $x\to+\infty$时,

$$(1+\frac{1}{x})^x \le (1+\frac{1}{[x]})^{[x]+1}, \qquad (1+\frac{1}{x})^x \ge (1+\frac{1}{[x]+1})^{[x]},$$

$x\to-\infty$时, $(1+\frac{1}{x})^x = (1+\frac{1}{-x-1})^{-x-1}(1+\frac{1}{-x-1}) \to e.$

例子2

- $\lim\limits_{x\to 0}(1+kx)^{\frac{1}{x}}=\lim\limits_{y\to 0}(1+y)^{\frac{k}{y}}=e^k.$
- $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{x}{e^x}=0.$

  证明：$\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{n}{e^n}=0.$ $\frac{x}{e^x}\le\frac{[x]+1}{e^{[x]}}=\le\frac{[x]}{e^{[x]}}+\frac{1}{e^{[x]}}\to 0.$
- $\lim\limits_{x\to+\infty}x^{\frac{1}{x}}=1.$

  证明：$\lim\limits_{n\to+\infty}n^{\frac{1}{n}}=1.$ $1\le x^{\frac{1}{x}}\le([x]+1)^{\frac{2}{[x]+1}}\to 1.$

例子2

- $\lim\limits_{x\to 0}(1+kx)^{\frac{1}{x}} = \lim\limits_{y\to 0}(1+y)^{\frac{k}{y}} = e^k$.
- $\lim\limits_{x\to +\infty}\frac{x}{e^x} = 0$.

证明: $\lim\limits_{n\to +\infty}\frac{n}{e^n} = 0$. $\frac{x}{e^x} \le \frac{[x]+1}{e^{[x]}} = \le \frac{[x]}{e^{[x]}} + \frac{1}{e^{[x]}} \to 0$.

- $\lim\limits_{x\to +\infty} x^{\frac{1}{x}} = 1$.

证明: $\lim\limits_{n\to +\infty} n^{\frac{1}{n}} = 1$. $1 \le x^{\frac{1}{x}} \le ([x]+1)^{\frac{2}{[x]+1}} \to 1$.

例子2

- $\lim\limits_{x\to 0}(1+kx)^{\frac{1}{x}} = \lim\limits_{y\to 0}(1+y)^{\frac{k}{y}} = e^k.$
- $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{x}{e^x} = 0.$

  证明：$\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{n}{e^n} = 0.$ $\frac{x}{e^x} \leq \frac{[x]+1}{e^{[x]}} =\leq \frac{[x]}{e^{[x]}} + \frac{1}{e^{[x]}} \to 0.$
- $\lim\limits_{x\to+\infty} x^{\frac{1}{x}} = 1.$

  证明：$\lim\limits_{n\to+\infty} n^{\frac{1}{n}} = 1.$ $1 \leq x^{\frac{1}{x}} \leq ([x]+1)^{\frac{2}{[x]+1}} \to 1.$

例子2

- $\lim\limits_{x\to 0}(1+kx)^{\frac{1}{x}} = \lim\limits_{y\to 0}(1+y)^{\frac{k}{y}} = e^k.$
- $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{x}{e^x} = 0.$

  证明: $\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{n}{e^n} = 0.$ $\frac{x}{e^x} \le \frac{[x]+1}{e^{[x]}} = \le \frac{[x]}{e^{[x]}} + \frac{1}{e^{[x]}} \to 0.$
- $\lim\limits_{x\to+\infty} x^{\frac{1}{x}} = 1.$

  证明: $\lim\limits_{n\to+\infty} n^{\frac{1}{n}} = 1.$ $1 \le x^{\frac{1}{x}} \le ([x]+1)^{\frac{2}{[x]+1}} \to 1.$

例子2

- $\lim\limits_{x\to 0}(1+kx)^{\frac{1}{x}} = \lim\limits_{y\to 0}(1+y)^{\frac{k}{y}} = e^k.$
- $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{x}{e^x} = 0.$

  证明: $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{n}{e^n} = 0.$ $\frac{x}{e^x} \leq \frac{[x]+1}{e^{[x]}} =\leq \frac{[x]}{e^{[x]}} + \frac{1}{e^{[x]}} \to 0.$
- $\lim\limits_{x\to+\infty} x^{\frac{1}{x}} = 1.$

  证明: $\lim\limits_{n\to+\infty} n^{\frac{1}{n}} = 1.$ $1 \leq x^{\frac{1}{x}} \leq ([x]+1)^{\frac{2}{[x]+1}} \to 1.$

连续函数的定义

- 定义：$y=f(x)$在x_0附近有定义，若$\lim_{x\to x_0} f(x)=f(x_0)$，则称$f(x)$在$x_0$处连续$\Leftrightarrow$ 对任意$\epsilon>0$，存在$\delta>0$，当$|x-x_0|<\delta$时，$|f(x)-f(x_0)|<\epsilon$.
- 定义：$y=f(x)$在(a,b)上有定义，若$f(x)$在(a,b)上上处处连续，则称$y=f(x)$在(a,b)上连续.
- 注：连续是一个局部概念，每点处的连续性只与该点附近的取值有关.

连续函数的定义

- 定义：$y = f(x)$在x_0附近有定义，若$\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$，则称$f(x)$在$x_0$处连续$\Leftrightarrow$ 对任意$\epsilon > 0$，存在$\delta > 0$，当$|x - x_0| < \delta$时，$|f(x) - f(x_0)| < \epsilon$.
- 定义：$y = f(x)$在(a, b)上有定义，若$f(x)$在(a, b)上上处处连续，则称$y = f(x)$在(a, b)上连续.
- 注：连续是一个局部概念，每点处的连续性只与该点附近的取值有关.

连续函数的定义

- 定义：$y=f(x)$在x_0附近有定义，若$\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=f(x_0)$，则称$f(x)$在$x_0$处连续$\Leftrightarrow$ 对任意$\epsilon>0$，存在$\delta>0$，当$|x-x_0|<\delta$时，$|f(x)-f(x_0)|<\epsilon$.
- 定义：$y=f(x)$在(a,b)上有定义，若$f(x)$在(a,b)上上处处连续，则称$y=f(x)$在(a,b)上连续.
- 注：连续是一个局部概念，每点处的连续性只与该点附近的取值有关.

连续函数的定义

- 定义：$y = f(x)$在$[x_0, b]$上有定义，若$\lim\limits_{x \to x_0+0} f(x) = f(x_0)$，则称$f(x)$在$x_0$处右连续. 类似可定义左连续.
- 定义：$y = f(x)$在$[a, b]$上有定义，若$f(x)$在(a, b)上上处处连续，而且在a点右连续，在b点左连续，则称$y = f(x)$在$[a, b]$上连续.

连续函数的定义

- 定义：$y=f(x)$在$[x_0,b]$上有定义，若$\lim\limits_{x\to x_0+0} f(x)=f(x_0)$，则称$f(x)$在$x_0$处右连续. 类似可定义左连续.
- 定义：$y=f(x)$在$[a,b]$上有定义，若$f(x)$在(a,b)上上处处连续，而且在a点右连续，在b点左连续，则称$y=f(x)$在$[a,b]$上连续.

连续函数的定义

- 定义：$y=f(x)$在$[x_0,b]$上有定义，若$\lim\limits_{x\to x_0+0} f(x)=f(x_0)$，则称$f(x)$在$x_0$处右连续. 类似可定义左连续.
- 定义：$y=f(x)$在$[a,b]$上有定义，若$f(x)$在(a,b)上上处处连续，而且在a点右连续，在b点左连续，则称$y=f(x)$在$[a,b]$上连续.

例子

- $f(x) = xD(x) = \begin{cases} x, & x \in \mathbb{Q} \\ 0 & x \notin \mathbb{Q} \end{cases}$. 0是唯一的连续点.
- $\sin x$, $\cos x$, x^n是$\mathbb{R}$上的连续函数.
- $\sqrt{x}$ 是$[0, +\infty)$上的连续函数, $\sqrt{x(1-x)}$ 是$[0, 1]$上的连续函数.
- $\operatorname{sgn} x$ 在$\mathbb{R}$上有唯一的间断点0.

例子

- $f(x) = xD(x) = \begin{cases} x, & x \in \mathbb{Q} \\ 0 & x \notin \mathbb{Q} \end{cases}$. 0是唯一的连续点.
- $\sin x$, $\cos x$, x^n是$\mathbb{R}$上的连续函数.
- $\sqrt{x}$ 是$[0, +\infty)$上的连续函数, $\sqrt{x(1-x)}$ 是$[0, 1]$上的连续函数.
- $\operatorname{sgn} x$ 在$\mathbb{R}$上有唯一的间断点0.

例子

- $f(x) = xD(x) = \begin{cases} x, & x \in \mathbb{Q} \\ 0 & x \notin \mathbb{Q} \end{cases}$. 0是唯一的连续点.
- $\sin x$, $\cos x$, x^n是$\mathbb{R}$上的连续函数.
- $\sqrt{x}$ 是$[0, +\infty)$上的连续函数, $\sqrt{x(1-x)}$ 是$[0, 1]$上的连续函数.
- $\operatorname{sgn} x$ 在$\mathbb{R}$上有唯一的间断点0.

例子

- $f(x) = xD(x) = \begin{cases} x, & x \in \mathbb{Q} \\ 0 & x \notin \mathbb{Q} \end{cases}$. 0是唯一的连续点.
- $\sin x$, $\cos x$, x^n是$\mathbb{R}$上的连续函数.
- $\sqrt{x}$ 是$[0, +\infty)$上的连续函数, $\sqrt{x(1-x)}$ 是$[0, 1]$上的连续函数.
- $\operatorname{sgn} x$ 在$\mathbb{R}$上有唯一的间断点0.

连续的四则运算

- 定理：设$f(x)$和$g(x)$在x_0处连续，则有$f(x)\pm g(x)$, $f(x)g(x)$, $\frac{f(x)}{g(x)}(g(x_0)\neq 0)$ 在x_0处连续.
- 注：对于左（右）连续，区间上连续的相应四则运算定理也成立.
- 例：$y=\tan x$, $\cot x$ 在各自定义域内连续.
  $f(x)=\begin{cases}1, & x=0\\ \frac{\sin x}{x}, & x\neq 0\end{cases}$在$\mathbb{R}$上连续.

连续的四则运算

- 定理：设$f(x)$和$g(x)$在x_0处连续，则有$f(x)\pm g(x)$, $f(x)g(x)$, $\frac{f(x)}{g(x)}(g(x_0)\neq 0)$ 在x_0处连续.
- 注：对于左（右）连续，区间上连续的相应四则运算定理也成立.
- 例：$y=\tan x$, $\cot x$ 在各自定义域内连续.
$f(x)=\begin{cases}1, & x=0\\ \frac{\sin x}{x}, & x\neq 0\end{cases}$在$\mathbb{R}$上连续.

连续的四则运算

- 定理：设$f(x)$和$g(x)$在x_0处连续，则有$f(x)\pm g(x)$, $f(x)g(x)$, $\frac{f(x)}{g(x)}(g(x_0)\neq 0)$ 在x_0处连续.
- 注：对于左（右）连续，区间上连续的相应四则运算定理也成立.
- 例：$y=\tan x$, $\cot x$ 在各自定义域内连续.
$$f(x)=\begin{cases}1, & x=0\\ \frac{\sin x}{x}, & x\neq 0\end{cases}$$在$\mathbb{R}$上连续.

复合函数的连续性

- 定理：设$f(x):(a,b)\to(c,d)$在x_0处连续，$g(y):(c,d)\to\mathbb{R}$在$y_0=f(x_0)$处连续，则复合函数$g\circ f$在x_0处连续.
  证明：由于$g(y)$在y_0处连续，对任意的$\epsilon>0$，存在$\delta_1>0$，使得当$|y-y_0|<\delta_1$时，$|g(y)-g(y_0)|<\epsilon$.又由于$f(x)$在x_0处连续，存在$\delta>0$,使得当$|x-x_0|<\delta$时，$|f(x)-f(x_0)|<\delta_1$，从而有$|g(f(x))-g(f(x_0))|<\epsilon$.
- 注：若$f(x):(a,b)\to[c,d)$在x_0处连续，$g(y):[c,d)\to\mathbb{R}$. 若$x_0\in(a,b)$，$c=f(x_0)$. 若$f(x)$在x_0处连续，$g(y)$在c处右连续，则复合函数$g\circ f$在x_0处连续.
  例：$f(x)=x^2$, $g(y)=\sqrt{y}$, $g\circ f=|x|$在$\mathbb{R}$上连续.
- 注：若$f(x):[a,b)\to(c,d)$在$x=a$处右连续，$g(y):(c,d)\to\mathbb{R}$. 在$y_0=f(a)\in(c,d)$ 处连续，则复合函数$g\circ f$在a处右连续.

复合函数的连续性

- 定理：设$f(x):(a,b)\to(c,d)$在x_0处连续，$g(y):(c,d)\to\mathbb{R}$在$y_0=f(x_0)$处连续，则复合函数$g\circ f$在x_0处连续.
  证明：由于$g(y)$在y_0处连续，对任意的$\epsilon>0$，存在$\delta_1>0$，使得当$|y-y_0|<\delta_1$时，$|g(y)-g(y_0)|<\epsilon$.又由于$f(x)$在x_0处连续，存在$\delta>0$,使得当$|x-x_0|<\delta$时，$|f(x)-f(x_0)|<\delta_1$，从而有$|g(f(x))-g(f(x_0))|<\epsilon$.
- 注：若$f(x):(a,b)\to[c,d)$在x_0处连续，$g(y):[c,d)\to\mathbb{R}$. 若$x_0\in(a,b)$，$c=f(x_0)$. 若$f(x)$在x_0处连续，$g(y)$在c处右连续，则复合函数$g\circ f$在x_0处连续.
  例：$f(x)=x^2, g(y)=\sqrt{y}, g\circ f=|x|$在$\mathbb{R}$上连续.
- 注：若$f(x):[a,b)\to(c,d)$在$x=a$处右连续，$g(y):(c,d)\to\mathbb{R}$. 在$y_0=f(a)\in(c,d)$ 处连续，则复合函数$g\circ f$在a处右连续.

复合函数的连续性

- 定理：设$f(x):(a,b)\to(c,d)$在x_0处连续，$g(y):(c,d)\to\mathbb{R}$在$y_0=f(x_0)$处连续，则复合函数$g\circ f$在x_0处连续.
  证明：由于$g(y)$在y_0处连续，对任意的$\epsilon>0$，存在$\delta_1>0$，使得当$|y-y_0|<\delta_1$时，$|g(y)-g(y_0)|<\epsilon$.又由于$f(x)$在x_0处连续，存在$\delta>0$,使得当$|x-x_0|<\delta$时，$|f(x)-f(x_0)|<\delta_1$，从而有$|g(f(x))-g(f(x_0))|<\epsilon$.
- 注：若$f(x):(a,b)\to[c,d)$在x_0处连续，$g(y):[c,d)\to\mathbb{R}$. 若$x_0\in(a,b)$，$c=f(x_0)$. 若$f(x)$在x_0处连续，$g(y)$在c处右连续，则复合函数$g\circ f$在x_0处连续.
  例：$f(x)=x^2, g(y)=\sqrt{y}, g\circ f=|x|$在$\mathbb{R}$上连续.
- 注：若$f(x):[a,b)\to(c,d)$在$x=a$处右连续，$g(y):(c,d)\to\mathbb{R}$. 在$y_0=f(a)\in(c,d)$处连续，则复合函数$g\circ f$在a处右连续.

复合函数的连续性

- 定理：设$f(x):(a,b)\to(c,d)$在x_0处连续，$g(y):(c,d)\to\mathbb{R}$在$y_0=f(x_0)$处连续，则复合函数$g\circ f$在x_0处连续.
  证明：由于$g(y)$在y_0处连续，对任意的$\epsilon>0$，存在$\delta_1>0$，使得当$|y-y_0|<\delta_1$时，$|g(y)-g(y_0)|<\epsilon$.又由于$f(x)$在x_0处连续，存在$\delta>0$,使得当$|x-x_0|<\delta$时，$|f(x)-f(x_0)|<\delta_1$，从而有$|g(f(x))-g(f(x_0))|<\epsilon$.
- 注：若$f(x):(a,b)\to[c,d)$在x_0处连续，$g(y):[c,d)\to\mathbb{R}$.若$x_0\in(a,b)$，$c=f(x_0)$. 若$f(x)$在x_0处连续，$g(y)$在c处右连续，则复合函数$g\circ f$在x_0处连续.
  例：$f(x)=x^2$, $g(y)=\sqrt{y}$, $g\circ f=|x|$在$\mathbb{R}$上连续.
- 注：若$f(x):[a,b)\to(c,d)$在$x=a$处右连续，$g(y):(c,d)\to\mathbb{R}$. 在$y_0=f(a)\in(c,d)$ 处连续，则复合函数$g\circ f$在a处右连续.

复合函数的连续性

- 定理：设$f(x):(a,b)\to(c,d)$在x_0处连续，$g(y):(c,d)\to\mathbb{R}$在$y_0=f(x_0)$处连续，则复合函数$g\circ f$在x_0处连续.
  证明：由于$g(y)$在y_0处连续，对任意的$\epsilon>0$，存在$\delta_1>0$，使得当$|y-y_0|<\delta_1$时，$|g(y)-g(y_0)|<\epsilon$.又由于$f(x)$在x_0处连续，存在$\delta>0$,使得当$|x-x_0|<\delta$时，$|f(x)-f(x_0)|<\delta_1$，从而有$|g(f(x))-g(f(x_0))|<\epsilon$.
- 注：若$f(x):(a,b)\to[c,d)$在x_0处连续，$g(y):[c,d)\to\mathbb{R}$. 若$x_0\in(a,b)$，$c=f(x_0)$. 若$f(x)$在x_0处连续，$g(y)$在c处右连续，则复合函数$g\circ f$在x_0处连续.
  例：$f(x)=x^2$, $g(y)=\sqrt{y}$, $g\circ f=|x|$在$\mathbb{R}$上连续.
- 注：若$f(x):[a,b)\to(c,d)$在$x=a$处右连续，$g(y):(c,d)\to\mathbb{R}$. 在$y_0=f(a)\in(c,d)$ 处连续，则复合函数$g\circ f$在a处右连续.

复合函数的极限

- 定理: 设$x_0 \in (a,b)$, $f(x) : (a,b) \backslash \{x_0\} \to (c,d)$, $g(y) : (c,d) \to \mathbb{R}$. 若$\lim_{x \to x_0} f(x) = y_0$, 而$g(y)$在$y_0$处连续, 则有$\lim_{x \to x_0} g \circ f(x) = g(y_0)$. 证明: 由于$g(y)$在$y_0$处连续, 对任意的$\epsilon > 0$, 存在$\delta_1 > 0$, 使得当$|y - y_0| < \delta_1$时, $|g(y) - g(y_0)| < \epsilon$.又由于$\lim_{x \to x_0} f(x) = y_0$, 存在$\delta > 0$,使得当$0 < |x - x_0| < \delta$时, $|f(x) - y_0| < \delta_1$, 从而有$|g(f(x)) - g(y_0)| < \epsilon$.

复合函数的极限

复合函数的极限

- 定理: 设$x_0 \in (a,b)$, $f(x) : (a,b)\backslash\{x_0\} \to (c,d)$, $g(y) : (c,d) \to \mathbb{R}$. 若$\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = y_0$, 而$g(y)$在$y_0$处连续, 则有$\lim\limits_{x\to x_0} g\circ f(x) = g(y_0)$. 证明: 由于$g(y)$在$y_0$处连续, 对任意的$\epsilon > 0$, 存在$\delta_1 > 0$, 使得当$|y-y_0| < \delta_1$时, $|g(y)-g(y_0)| < \epsilon$.又由于$\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = y_0$, 存在$\delta > 0$,使得当$0 < |x - x_0| < \delta$时, $|f(x) - y_0| < \delta_1$, 从而有$|g(f(x)) - g(y_0)| < \epsilon$.

复合函数的极限

例

- $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\ln(1+x)}{x}=\lim\limits_{x\to 0}\ln(1+x)^{\frac{1}{x}}=\ln e=1.$
- $I=\lim\limits_{x\to 0}\frac{x}{e^x-1}$，作变换$x=\ln t$，得到

$$I=\lim_{t\to 1}\frac{\ln t}{t-1}=\lim_{s\to 0}\frac{\ln(s+1)}{s}=1.$$

例

- $\lim\limits_{x\to0}\frac{\ln(1+x)}{x}=\lim\limits_{x\to0}\ln(1+x)^{\frac{1}{x}}=\ln e=1.$
- $I=\lim\limits_{x\to0}\frac{x}{e^x-1}$，作变换$x=\ln t$，得到

$$I=\lim_{t\to1}\frac{\ln t}{t-1}=\lim_{s\to0}\frac{\ln(s+1)}{s}=1.$$

反函数的连续性1

- 定理：设$f(x):(a,b)\to(c,d)$是一一满射，并且是严格单调函数. 则f是(a,b)上连续函数，且f^{-1}是(c,d)上的连续函数.
- 注：上面定理中a,c可以取$-\infty$, b,d可以取$+\infty$.
- 注：定理中开区间换成闭区间时，结论也成立.

反函数的连续性1

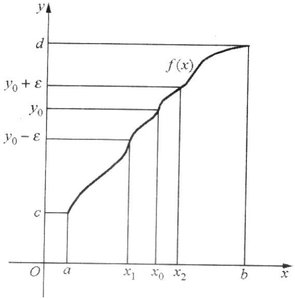
- 定理：设$f(x):(a,b)\to(c,d)$是一一满射，并且是严格单调函数. 则f是(a,b)上连续函数，且f^{-1}是(c,d)上的连续函数.
- 注：上面定理中a,c可以取$-\infty$，b,d可以取$+\infty$.
- 注：定理中开区间换成闭区间时，结论也成立.

反函数的连续性1

- 定理：设$f(x):(a,b)\to(c,d)$是一一满射，并且是严格单调函数. 则f是(a,b)上连续函数，且f^{-1}是(c,d)上的连续函数.
- 注：上面定理中a,c可以取$-\infty$, b,d可以取$+\infty$.
- 注：定理中开区间换成闭区间时，结论也成立.

反函数的连续性2

- 定理证明：不妨设f是严格增函数. 对任意$x_0 \in (a, b)$, 设$y_0 = f(x_0)$. 对任意的$\epsilon > 0$, 不妨设$\epsilon < \min\{y_0 - c, d - y_0\}$, 则有$c < y_0 - \epsilon < y_0 < y_0 + \epsilon < d$. 令$x_1 = f^{-1}(y_0 - \epsilon)$, $x_2 = f^{-1}(y_0 + \epsilon)$, $\delta = \min(x_2 - x_0, x_0 - x_1)$, 则有当$|x - x_0| < \delta$时, $x_1 < x < x_2$, 即得$y_0 - \epsilon < f(x) < y_0 + \epsilon$, $f(x)$在x_0处连续. f^{-1}和f满足同样的条件, 故同样连续.



初等函数的连续性

- $\cos x : [0, \pi] \to [-1, 1]$, $\arccos[-1, 1] \to [0, \pi]$.
- $\sin x : [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}] \to [-1, 1]$, $\arcsin[-1, 1] \to [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$.
- $x^a : [0, +\infty) \to [0, +\infty)$.
- $1 \neq a > 0$, $a^x : (-\infty, +\infty) \to (0, +\infty)$, $\log_a : (0, +\infty) \to (-\infty, +\infty)$.
- $\tan x : (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}) \to (-\infty, +\infty)$, $\arctan : (-\infty, +\infty) \to (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$.
- $\cot x : (0, \pi) \to (-\infty, +\infty)$, $\arctan : (-\infty, +\infty) \to (0, \pi)$.
- 所有基本初等函数在其定义域上连续，从而所有初等函数在其定义域上连续.

初等函数的连续性

- $\cos x : [0, \pi] \to [-1, 1]$, $\arccos[-1, 1] \to [0, \pi]$.
- $\sin x : [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}] \to [-1, 1]$, $\arcsin[-1, 1] \to [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$.
- $x^a : [0, +\infty) \to [0, +\infty)$.
- $1 \neq a > 0$, $a^x : (-\infty, +\infty) \to (0, +\infty)$, $\log_a : (0, +\infty) \to (-\infty, +\infty)$.
- $\tan x : (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}) \to (-\infty, +\infty)$, $\arctan : (-\infty, +\infty) \to (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$.
- $\cot x : (0, \pi) \to (-\infty, +\infty)$, $\arctan : (-\infty, +\infty) \to (0, \pi)$.
- 所有基本初等函数在其定义域上连续，从而所有初等函数在其定义域上连续.

初等函数的连续性

- $\cos x : [0, \pi] \to [-1, 1]$, $\arccos[-1, 1] \to [0, \pi]$.
- $\sin x : [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}] \to [-1, 1]$, $\arcsin[-1, 1] \to [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$.
- $x^a : [0, +\infty) \to [0, +\infty)$.
- $1 \neq a > 0$, $a^x : (-\infty, +\infty) \to (0, +\infty)$, $\log_a : (0, +\infty) \to (-\infty, +\infty)$.
- $\tan x : (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}) \to (-\infty, +\infty)$, $\arctan : (-\infty, +\infty) \to (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$.
- $\cot x : (0, \pi) \to (-\infty, +\infty)$, $\arctan : (-\infty, +\infty) \to (0, \pi)$.
- 所有基本初等函数在其定义域上连续，从而所有初等函数在其定义域上连续.

初等函数的连续性

- $\cos x : [0, \pi] \to [-1, 1]$, $\arccos[-1, 1] \to [0, \pi]$.
- $\sin x : [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}] \to [-1, 1]$, $\arcsin[-1, 1] \to [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$.
- $x^a : [0, +\infty) \to [0, +\infty)$.
- $1 \neq a > 0$, $a^x : (-\infty, +\infty) \to (0, +\infty)$, $\log_a : (0, +\infty) \to (-\infty, +\infty)$.
- $\tan x : (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}) \to (-\infty, +\infty)$, $\arctan : (-\infty, +\infty) \to (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$.
- $\cot x : (0, \pi) \to (-\infty, +\infty)$, $\arctan : (-\infty, +\infty) \to (0, \pi)$.
- 所有基本初等函数在其定义域上连续，从而所有初等函数在其定义域上连续.

初等函数的连续性

- $\cos x : [0, \pi] \to [-1, 1]$, $\arccos[-1, 1] \to [0, \pi]$.
- $\sin x : [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}] \to [-1, 1]$, $\arcsin[-1, 1] \to [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$.
- $x^a : [0, +\infty) \to [0, +\infty)$.
- $1 \neq a > 0$, $a^x : (-\infty, +\infty) \to (0, +\infty)$, $\log_a : (0, +\infty) \to (-\infty, +\infty)$.
- $\tan x : (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}) \to (-\infty, +\infty)$, $\arctan : (-\infty, +\infty) \to (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$.
- $\cot x : (0, \pi) \to (-\infty, +\infty)$, $\arctan : (-\infty, +\infty) \to (0, \pi)$.
- 所有基本初等函数在其定义域上连续，从而所有初等函数在其定义域上连续.

初等函数的连续性

- $\cos x : [0, \pi] \to [-1, 1]$, $\arccos[-1, 1] \to [0, \pi]$.
- $\sin x : [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}] \to [-1, 1]$, $\arcsin[-1, 1] \to [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$.
- $x^a : [0, +\infty) \to [0, +\infty)$.
- $1 \neq a > 0$, $a^x : (-\infty, +\infty) \to (0, +\infty)$, $\log_a : (0, +\infty) \to (-\infty, +\infty)$.
- $\tan x : (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}) \to (-\infty, +\infty)$, $\arctan : (-\infty, +\infty) \to (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$.
- $\cot x : (0, \pi) \to (-\infty, +\infty)$, $\arctan : (-\infty, +\infty) \to (0, \pi)$.
- 所有基本初等函数在其定义域上连续，从而所有初等函数在其定义域上连续.

初等函数的连续性

- $\cos x : [0,\pi] \to [-1,1]$, $\arccos[-1,1] \to [0,\pi]$.
- $\sin x : [-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}] \to [-1,1]$, $\arcsin[-1,1] \to [-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}]$.
- $x^a : [0,+\infty) \to [0,+\infty)$.
- $1 \neq a > 0$, $a^x : (-\infty,+\infty) \to (0,+\infty)$, $\log_a : (0,+\infty) \to (-\infty,+\infty)$.
- $\tan x : (-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}) \to (-\infty,+\infty)$, $\arctan : (-\infty,+\infty) \to (-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2})$.
- $\cot x : (0,\pi) \to (-\infty,+\infty)$, $\arctan : (-\infty,+\infty) \to (0,\pi)$.
- 所有基本初等函数在其定义域上连续，从而所有初等函数在其定义域上连续.

例子1

- $f(x) = \begin{cases} 1, & x > 0 \\ -1, & x < 0 \end{cases} = \frac{\sqrt{x^2}}{x}$ 是初等函数，在定义域$\mathbb{R}\backslash\{0\}$上连续.
- 符号函数$\operatorname{sgn} f(x) = \begin{cases} 1, & x > 0 \\ 0, & x = 0 \\ -1, & x < 0 \end{cases}$ 不是初等函数，有间断点0.

例子1

- $f(x)=\begin{cases}1, & x>0\\ -1, & x<0\end{cases}=\frac{\sqrt{x^2}}{x}$ 是初等函数，在定义域$\mathbb{R}\backslash\{0\}$上连续.
- 符号函数$\operatorname{sgn} f(x)=\begin{cases}1, & x>0\\ 0, & x=0\\ -1, & x<0\end{cases}$ 不是初等函数，有间断点0.

例子2

- 若极限 $\lim_{n\to\infty} a_n = a > 0$, $\lim_{n\to\infty} b_n = b$均存在，则有 $\lim_{n\to\infty} a_n^{b_n} = a^b$. 证明：$a_n^{b_n} = e^{b_n \ln a_n}$, $\lim_{n\to\infty}(b_n \ln a_n) = b\ln a$, 从而有 $\lim_{n\to\infty} a_n^{b_n} = e^{b\ln a} = a^b$.
- $\lim_{x\to 0+0} x^x = \lim_{x\to 0+0} e^{x\ln x} = 1$,
- $\lim_{x\to +\infty} x^{\frac{1}{x}} = \lim_{x\to +\infty} e^{\frac{\ln x}{x}} = 1$, $\lim_{x\to 0+0} x^{\frac{1}{x}} = \lim_{x\to 0+0} e^{\frac{\ln x}{x}} = 0$,

例子2

- 若极限 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a > 0$, $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = b$均存在，则有 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n^{b_n} = a^b$. 证明： $a_n^{b_n} = e^{b_n \ln a_n}$, $\lim\limits_{n\to\infty}(b_n \ln a_n) = b \ln a$, 从而有 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n^{b_n} = e^{b \ln a} = a^b$.
- $\lim\limits_{x\to 0+0} x^x = \lim\limits_{x\to 0+0} e^{x \ln x} = 1$,
- $\lim\limits_{x\to +\infty} x^{\frac{1}{x}} = \lim\limits_{x\to +\infty} e^{\frac{\ln x}{x}} = 1$, $\lim\limits_{x\to 0+0} x^{\frac{1}{x}} = \lim\limits_{x\to 0+0} e^{\frac{\ln x}{x}} = 0$,

例子2

- 若极限 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a > 0$, $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = b$均存在，则有 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n^{b_n} = a^b$. 证明： $a_n^{b_n} = e^{b_n \ln a_n}$, $\lim\limits_{n\to\infty}(b_n \ln a_n) = b\ln a$, 从而有 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n^{b_n} = e^{b\ln a} = a^b$.
- $\lim\limits_{x\to 0+0} x^x = \lim\limits_{x\to 0+0} e^{x\ln x} = 1$,
- $\lim\limits_{x\to +\infty} x^{\frac{1}{x}} = \lim\limits_{x\to +\infty} e^{\frac{\ln x}{x}} = 1$, $\lim\limits_{x\to 0+0} x^{\frac{1}{x}} = \lim\limits_{x\to 0+0} e^{\frac{\ln x}{x}} = 0$,

例子2

- 若极限 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a > 0$, $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = b$均存在，则有 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n^{b_n} = a^b$. 证明： $a_n^{b_n} = e^{b_n \ln a_n}$, $\lim\limits_{n\to\infty}(b_n \ln a_n) = b\ln a$, 从而有 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n^{b_n} = e^{b\ln a} = a^b$.
- $\lim\limits_{x\to 0+0} x^x = \lim\limits_{x\to 0+0} e^{x\ln x} = 1$,
- $\lim\limits_{x\to +\infty} x^{\frac{1}{x}} = \lim\limits_{x\to +\infty} e^{\frac{\ln x}{x}} = 1$, $\lim\limits_{x\to 0+0} x^{\frac{1}{x}} = \lim\limits_{x\to 0+0} e^{\frac{\ln x}{x}} = 0$,

间断点的分类

- 间断点：$f(x)$在x_0附近有定义，$f(x)$在x_0点不连续，则称x_0是f的间断点
- x_0是f的间断点$\Leftrightarrow$ 极限 $\lim\limits_{x\longrightarrow x_0} f(x)$ 不存在，或者极限存在但不等于$f(x_0)$.
- 第一类间断点：设x_0是f的间断点. 若 $\lim\limits_{x\longrightarrow x_0+0} f(x)$ 和 $\lim\limits_{x\longrightarrow x_0-0} f(x)$都存在，则称$x_0$是$f$的第一类间断点.
- 第二类间断点：若 $\lim\limits_{x\longrightarrow x_0+0} f(x)$ 和 $\lim\limits_{x\longrightarrow x_0-0} f(x)$至少有一个不存在，则称$x_0$是$f$的第二类间断点.

间断点的分类

- 间断点：$f(x)$在x_0附近有定义，$f(x)$在x_0点不连续，则称x_0是f的间断点
- x_0是f的间断点$\Leftrightarrow$ 极限 $\lim\limits_{x\longrightarrow x_0} f(x)$ 不存在，或者极限存在但不等于$f(x_0)$.
- 第一类间断点：设x_0是f的间断点. 若 $\lim\limits_{x\longrightarrow x_0+0} f(x)$ 和 $\lim\limits_{x\longrightarrow x_0-0} f(x)$都存在，则称$x_0$是$f$的第一类间断点.
- 第二类间断点：若 $\lim\limits_{x\longrightarrow x_0+0} f(x)$ 和 $\lim\limits_{x\longrightarrow x_0-0} f(x)$至少有一个不存在，则称$x_0$是$f$的第二类间断点.

间断点的分类

- 间断点：$f(x)$在x_0附近有定义，$f(x)$在x_0点不连续，则称x_0是f的间断点
- x_0是f的间断点$\Leftrightarrow$ 极限$\lim\limits_{x\longrightarrow x_0} f(x)$ 不存在，或者极限存在但不等于$f(x_0)$.
- 第一类间断点：设x_0是f的间断点. 若 $\lim\limits_{x\longrightarrow x_0+0} f(x)$ 和 $\lim\limits_{x\longrightarrow x_0-0} f(x)$都存在，则称$x_0$是$f$的第一类间断点.
- 第二类间断点：若 $\lim\limits_{x\longrightarrow x_0+0} f(x)$ 和 $\lim\limits_{x\longrightarrow x_0-0} f(x)$至少有一个不存在，则称$x_0$是$f$的第二类间断点.

间断点的分类

- 间断点：$f(x)$在x_0附近有定义，$f(x)$在x_0点不连续，则称x_0是f的间断点
- x_0是f的间断点$\Leftrightarrow$ 极限 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$ 不存在，或者极限存在但不等于$f(x_0)$.
- 第一类间断点: 设x_0是f的间断点. 若 $\lim\limits_{x\to x_0+0} f(x)$ 和 $\lim\limits_{x\to x_0-0} f(x)$都存在，则称$x_0$是$f$的第一类间断点.
- 第二类间断点: 若 $\lim\limits_{x\to x_0+0} f(x)$ 和 $\lim\limits_{x\to x_0-0} f(x)$至少有一个不存在，则称$x_0$是$f$的第二类间断点.

间断点的例子

- 注：第一类间断点有两种，一是$\lim\limits_{x\to x_0+0} f(x) = \lim\limits_{x\to x_0-0} f(x) \neq f(x_0)$，此时称$x_0$是$f$的可去间断点；另一种是$\lim\limits_{x\to x_0+0} f(x) \neq \lim\limits_{x\to x_0-0} f(x)$.
- $y = \operatorname{sgn} x$, $x = 0$是第一类间断点.
- Dirichlet函数，所有点是第二类间断点.
- $f(x) = \begin{cases} \sin\frac{1}{x}, & x \neq 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases}$，0是第二类间断点.

间断点的例子

- 注：第一类间断点有两种，一是$\lim\limits_{x\to x_0+0} f(x) = \lim\limits_{x\to x_0-0} f(x) \neq f(x_0)$，此时称$x_0$是$f$的可去间断点；另一种是$\lim\limits_{x\to x_0+0} f(x) \neq \lim\limits_{x\to x_0-0} f(x)$.
- $y = \operatorname{sgn} x$, $x = 0$是第一类间断点.
- Dirichlet函数，所有点是第二类间断点.
- $f(x) = \begin{cases} \sin\frac{1}{x}, & x \neq 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases}$，0是第二类间断点.

间断点的例子

- 注：第一类间断点有两种，一是$\lim\limits_{x\to x_0+0} f(x)=\lim\limits_{x\to x_0-0} f(x)\neq f(x_0)$，此时称$x_0$是$f$的可去间断点；另一种是$\lim\limits_{x\to x_0+0} f(x)\neq \lim\limits_{x\to x_0-0} f(x)$.
- $y=\operatorname{sgn} x$, $x=0$是第一类间断点.
- Dirichlet函数，所有点是第二类间断点.
- $f(x)=\begin{cases}\sin\frac{1}{x}, & x\neq 0\\ 0, & x=0\end{cases}$，0是第二类间断点.

间断点的例子

- 注：第一类间断点有两种，一是$\lim\limits_{x\to x_0+0} f(x) = \lim\limits_{x\to x_0-0} f(x) \neq f(x_0)$，此时称$x_0$是$f$的可去间断点；另一种是$\lim\limits_{x\to x_0+0} f(x) \neq \lim\limits_{x\to x_0-0} f(x)$.
- $y = \operatorname{sgn} x$, $x = 0$是第一类间断点.
- Dirichlet函数，所有点是第二类间断点.
- $f(x) = \begin{cases} \sin \frac{1}{x}, & x \neq 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases}$，0是第二类间断点.

介值定理

- 定理：设$f(x)$是闭区间$[a,b]$上的连续函数，则对于$f(a)$与$f(b)$之间的任意值η（η不等于$f(a),f(b)$），则存在$\xi\in(a,b)$，使得$f(\xi)=\eta$.
- 注：定理证明要用到实数的连续性，如可用区间套定理证明，每次去中点，构造递减闭区间套$[a_n,b_n]$使得$f(a_n)$和$f(b_n)$一个大于η，一个小于η. a_n,b_n的极限满足条件.
- 推论：$f(x)$是闭区间$[a,b]$上的连续函数，则$f(x)$的的值域是一个区间. 事实上任意区间上的连续函数的值域是一个区间

介值定理

- 定理：设$f(x)$是闭区间$[a,b]$上的连续函数，则对于$f(a)$与$f(b)$之间的任意值η（η不等于$f(a),f(b)$），则存在$\xi\in(a,b)$，使得$f(\xi)=\eta$.
- 注：定理证明要用到实数的连续性，如可用区间套定理证明，每次去中点，构造递减闭区间套$[a_n,b_n]$使得$f(a_n)$和$f(b_n)$一个大于η，一个小于η. a_n,b_n的极限满足条件.
- 推论：$f(x)$是闭区间$[a,b]$上的连续函数，则$f(x)$的的值域是一个区间. 事实上任意区间上的连续函数的值域是一个区间

介值定理

- 定理：设$f(x)$是闭区间$[a,b]$上的连续函数，则对于$f(a)$与$f(b)$之间的任意值η（η不等于$f(a),f(b)$），则存在$\xi\in(a,b)$，使得$f(\xi)=\eta$.
- 注：定理证明要用到实数的连续性，如可用区间套定理证明，每次去中点，构造递减闭区间套$[a_n,b_n]$使得$f(a_n)$和$f(b_n)$一个大于η，一个小于η. a_n,b_n的极限满足条件.
- 推论：$f(x)$是闭区间$[a,b]$上的连续函数，则$f(x)$的的值域是一个区间. 事实上任意区间上的连续函数的值域是一个区间

介值定理的应用

- 推广：设$f(x)$是闭区间$[a,+\infty)$上的连续函数，$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=B$存在，则对于$f(a)$与$B$之间的任意值$\eta$（$\eta$不等于$f(a),B$），存在$\xi\in(a,+\infty)$，使得$f(\xi)=\eta$.在$(-\infty,b],(-\infty,+\infty)$上也有类似推广.
- 例：$a_0\neq 0$，$P(x)=a_0x^5+a_1x^4+\cdots+a_5=0$至少有一个实根.

介值定理的应用

- 推广：设$f(x)$是闭区间$[a,+\infty)$上的连续函数，$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = B$存在，则对于$f(a)$与$B$之间的任意值$\eta$（$\eta$不等于$f(a),B$），存在$\xi\in(a,+\infty)$，使得$f(\xi)=\eta$.在$(-\infty,b],(-\infty,+\infty)$上也有类似推广.
- 例：$a_0\neq 0$，$P(x)=a_0x^5+a_1x^4+\cdots+a_5=0$至少有一个实根.

最值定理

- 定理：设$f(x)$是闭区间$[a,b]$上的连续函数，则$f(x)$在$[a,b]$上有最大值与最小值．即存在x_1和x_2使得对任意性$x\in[a,b]$有$f(x_1)\le f(x)\le f(x_2)$.
- 推论：$f(x)$是闭区间$[a,b]$上的连续函数，则$f(x)$的的值域是一个闭区间．
- 推论：设$f(x)$是闭区间$[a,b]$上的连续函数，则$f(x)$是$[a,b]$上的有界函数．
- 注：上面定理和推论中的区间若不是闭区间，则结论不成立．如$f(x)=\frac{1}{x}$在$(0,1)$上无界．

最值定理

- 定理：设$f(x)$是闭区间$[a,b]$上的连续函数，则$f(x)$在$[a,b]$上有最大值与最小值. 即存在x_1和x_2使得对任意性$x \in [a,b]$有$f(x_1) \leq f(x) \leq f(x_2)$.
- 推论：$f(x)$是闭区间$[a,b]$上的连续函数，则$f(x)$的的值域是一个闭区间.
- 推论：设$f(x)$是闭区间$[a,b]$上的连续函数，则$f(x)$是$[a,b]$上的有界函数.
- 注：上面定理和推论中的区间若不是闭区间，则结论不成立. 如$f(x)=\frac{1}{x}$在$(0,1)$上无界.

最值定理

- 定理：设$f(x)$是闭区间$[a,b]$上的连续函数，则$f(x)$在$[a,b]$上有最大值与最小值. 即存在x_1和x_2使得对任意性$x\in[a,b]$有$f(x_1)\leq f(x)\leq f(x_2)$.
- 推论：$f(x)$是闭区间$[a,b]$上的连续函数，则$f(x)$的的值域是一个闭区间.
- 推论：设$f(x)$是闭区间$[a,b]$上的连续函数，则$f(x)$是$[a,b]$上的有界函数.
- 注：上面定理和推论中的区间若不是闭区间，则结论不成立. 如$f(x)=\frac{1}{x}$在$(0,1)$上无界.

最值定理

- 定理：设$f(x)$是闭区间$[a,b]$上的连续函数，则$f(x)$在$[a,b]$上有最大值与最小值. 即存在x_1和x_2使得对任意性$x \in [a,b]$有$f(x_1) \leq f(x) \leq f(x_2)$.
- 推论：$f(x)$是闭区间$[a,b]$上的连续函数，则$f(x)$的的值域是一个闭区间.
- 推论：设$f(x)$是闭区间$[a,b]$上的连续函数，则$f(x)$是$[a,b]$上的有界函数.
- 注：上面定理和推论中的区间若不是闭区间，则结论不成立. 如$f(x)=\frac{1}{x}$在$(0,1)$上无界.

函数的连续性和单调性

- 定理：设$f(x):(a,b)\to(c,d)$是一一满射，并且是严格单调函数. 则f是(a,b)上连续函数，且f^{-1}是(c,d)上的连续函数. 即：双射+严格单调⇒ 连续.
- 命题：$f(x)$是(a,b)上的连续函数，且映射$f(x):(a,b)\to\mathbb{R}$单射，则f严格单调. 即：双射+连续⇒ 严格单调.
  证明：反设f不是单调函数，则存在$x_1<x_2<x_3$,使得$f(x_1)>f(x_2), f(x_2)<f(x_3)$ (或者$f(x_1)<f(x_2), f(x_2)>f(x_3)$), 取$\eta\in(f(x_2),f(x_1))\cap(f(x_2),f(x_3))$, 则存在$\xi_1\in(x_1,x_2),\xi_2\in(x_2,x_3)$, 使得$f(\xi_1)=f(\xi_2)=\eta$.
- 定理：设$f(x):(a,b)\to(c,d)$是双射，且$f(x)$是连续函数，则f^{-1}连续.
  证明：设$f(x):(a,b)\to(c,d)$是双射，且$f(x)$是连续函数，从而且$f(x)$是严格单调函数. 从而f^{-1}是双射且严格单调，从而连续.

函数的连续性和单调性

- 定理：设$f(x):(a,b)\to(c,d)$是一一满射，并且是严格单调函数. 则f是(a,b)上连续函数，且f^{-1}是(c,d)上的连续函数. 即：双射+严格单调$\Rightarrow$ 连续.
- 命题：$f(x)$是(a,b)上的连续函数，且映射$f(x)\ :\ (a,b)\to\mathbb{R}$单射，则$f$严格单调. 即：双射+连续$\Rightarrow$ 严格单调.

  证明：反设f不是单调函数，则存在$x_1<x_2<x_3$,使得$f(x_1)>f(x_2), f(x_2)<f(x_3)$ (或者$f(x_1)<f(x_2), f(x_2)>f(x_3)$), 取$\eta\in(f(x_2),f(x_1))\cap(f(x_2),f(x_3))$, 则存在$\xi_1\in(x_1,x_2),\xi_2\in(x_2,x_3)$, 使得$f(\xi_1)=f(\xi_2)=\eta$.
- 定理：设$f(x):(a,b)\to(c,d)$是双射，且$f(x)$是连续函数，则f^{-1}连续.

  证明：设$f(x):(a,b)\to(c,d)$是双射，且$f(x)$是连续函数，从而且$f(x)$是严格单调函数. 从而f^{-1}是双射且严格单调，从而连续.

函数的连续性和单调性

- 定理：设$f(x):(a,b)\to(c,d)$是一一满射，并且是严格单调函数. 则f是(a,b)上连续函数，且f^{-1}是(c,d)上的连续函数. 即：双射+严格单调$\Rightarrow$ 连续.
- 命题：$f(x)$是(a,b)上的连续函数，且映射$f(x):(a,b)\to\mathbb{R}$单射，则f严格单调. 即：双射+连续$\Rightarrow$ 严格单调.
  证明：反设f不是单调函数，则存在$x_1<x_2<x_3$,使得$f(x_1)>f(x_2), f(x_2)<f(x_3)$ (或者$f(x_1)<f(x_2), f(x_2)>f(x_3)$), 取$\eta\in(f(x_2),f(x_1))\cap(f(x_2),f(x_3))$, 则存在$\xi_1\in(x_1,x_2),\xi_2\in(x_2,x_3)$, 使得$f(\xi_1)=f(\xi_2)=\eta$.
- 定理：设$f(x):(a,b)\to(c,d)$是双射，且$f(x)$是连续函数，则f^{-1}连续.
  证明：设$f(x):(a,b)\to(c,d)$是双射，且$f(x)$是连续函数，从而且$f(x)$是严格单调函数. 从而f^{-1}是双射且严格单调，从而连续.

函数的连续性和单调性

- 定理：设$f(x):(a,b)\to(c,d)$是一一满射，并且是严格单调函数．则f是(a,b)上连续函数，且f^{-1}是(c,d)上的连续函数．即：双射+严格单调⇒ 连续．
- 命题：$f(x)$是(a,b)上的连续函数，且映射$f(x)\ :\ (a,b)\to\mathbb{R}$单射，则$f$严格单调．即：双射+连续⇒ 严格单调．
  证明：反设f不是单调函数，则存在$x_1<x_2<x_3$,使得$f(x_1)>f(x_2),f(x_2)<f(x_3)$（或者$f(x_1)<f(x_2),f(x_2)>f(x_3)$），取$\eta\in(f(x_2),f(x_1))\cap(f(x_2),f(x_3))$，则存在$\xi_1\in(x_1,x_2),\xi_2\in(x_2,x_3)$，使得$f(\xi_1)=f(\xi_2)=\eta$．
- 定理：设$f(x):(a,b)\to(c,d)$是双射，且$f(x)$是连续函数，则f^{-1}连续．
  证明：设$f(x):(a,b)\to(c,d)$是双射，且$f(x)$是连续函数，从而且$f(x)$是严格单调函数．从而f^{-1}是双射且严格单调，从而连续．

函数的连续性和单调性

- 定理：设$f(x):(a,b)\to(c,d)$是一一满射，并且是严格单调函数. 则f是(a,b)上连续函数，且f^{-1}是(c,d)上的连续函数. 即：双射+严格单调$\Rightarrow$ 连续.
- 命题：$f(x)$是(a,b)上的连续函数，且映射$f(x):(a,b)\to\mathbb{R}$单射，则f严格单调. 即：双射+连续$\Rightarrow$ 严格单调.
  证明：反设f不是单调函数，则存在$x_1<x_2<x_3$,使得$f(x_1)>f(x_2), f(x_2)<f(x_3)$ (或者$f(x_1)<f(x_2), f(x_2)>f(x_3)$), 取$\eta\in(f(x_2),f(x_1))\cap(f(x_2),f(x_3))$, 则存在$\xi_1\in(x_1,x_2), \xi_2\in(x_2,x_3)$, 使得$f(\xi_1)=f(\xi_2)=\eta$.
- 定理：设$f(x):(a,b)\to(c,d)$是双射，且$f(x)$是连续函数，则f^{-1}连续.
  证明：设$f(x):(a,b)\to(c,d)$是双射，且$f(x)$是连续函数，从而且$f(x)$是严格单调函数. 从而f^{-1}是双射且严格单调，从而连续.