- 定理：设 $u=\phi(x,y)$，$v=\psi(x,y)$ 在 (x_0,y_0) 处的偏导数存在，$z=f(u,v)$ 在 (u_0,v_0) 附近偏导数存在且偏导数在 (u_0,v_0) 点连续(这里 $u_0=\phi(x_0,y_0)$，$v_0=\psi(x_0,y_0)$)，则复合函数 $z=f(\phi(x,y),\psi(x,y))$ 在 (x_0,y_0) 处偏导数存在，且有链式法则

$$\frac{\partial z}{\partial x}\Big|_{(x_0,y_0)}=\frac{\partial f}{\partial u}\Big|_{(u_0,v_0)}\cdot\frac{\partial u}{\partial x}\Big|_{(x_0,y_0)}+\frac{\partial f}{\partial v}\Big|_{(u_0,v_0)}\cdot\frac{\partial v}{\partial x}\Big|_{(x_0,y_0)}$$
$$\frac{\partial z}{\partial y}\Big|_{(x_0,y_0)}=\frac{\partial f}{\partial u}\Big|_{(u_0,v_0)}\cdot\frac{\partial u}{\partial y}\Big|_{(x_0,y_0)}+\frac{\partial f}{\partial v}\Big|_{(u_0,v_0)}\cdot\frac{\partial v}{\partial y}\Big|_{(x_0,y_0)}$$

- f 满足的条件可以改为：$f(u,v)$ 在 (u_0,v_0) 点处可微.

复合函数微分法1

- 定理：设 $u=\phi(x,y)$, $v=\psi(x,y)$ 在 (x_0,y_0) 处的偏导数存在，$z=f(u,v)$ 在 (u_0,v_0) 附近偏导数存在且偏导数在 (u_0,v_0) 点连续(这里 $u_0=\phi(x_0,y_0)$, $v_0=\psi(x_0,y_0)$), 则复合函数 $z=f(\phi(x,y),\psi(x,y))$ 在 (x_0,y_0) 处偏导数存在, 且有链式法则

$$
\begin{aligned}
\left.\frac{\partial z}{\partial x}\right|_{(x_0,y_0)} &= \left.\frac{\partial f}{\partial u}\right|_{(u_0,v_0)}\cdot\left.\frac{\partial u}{\partial x}\right|_{(x_0,y_0)}+\left.\frac{\partial f}{\partial v}\right|_{(u_0,v_0)}\cdot\left.\frac{\partial v}{\partial x}\right|_{(x_0,y_0)}\\
\left.\frac{\partial z}{\partial y}\right|_{(x_0,y_0)} &= \left.\frac{\partial f}{\partial u}\right|_{(u_0,v_0)}\cdot\left.\frac{\partial u}{\partial y}\right|_{(x_0,y_0)}+\left.\frac{\partial f}{\partial v}\right|_{(u_0,v_0)}\cdot\left.\frac{\partial v}{\partial y}\right|_{(x_0,y_0)}
\end{aligned}
$$

- f 满足的条件可以改为: $f(u,v)$ 在 (u_0,v_0) 点处可微.

复合函数微分法2

- 定理证明：由 $z = f(u, v)$ 在 (u_0, v_0) 点可微，有

$$\Delta z = \frac{\partial f}{\partial u}(u_0, v_0)\Delta u + \frac{\partial f}{\partial v}(u_0, v_0)\Delta v + \sqrt{\Delta u^2 + \Delta v^2}\alpha(\Delta u, \Delta v),$$

其中 α 满足：当 $(\Delta u, \Delta v) \to (0, 0)$ 时，$\alpha(\Delta u, \Delta v) \to 0$. 令

$$\Delta u = \phi(x_0 + \Delta x, y_0) - \phi(x_0, y_0),$$

$$\Delta v = \psi(x_0 + \Delta x, y_0) - \psi(x_0, y_0),$$

则有

$$\begin{aligned}\Delta z &= f(\phi(x_0 + \Delta x, y_0), \psi(x_0 + \Delta x, y_0)) - f(u_0, v_0) \\ &= \frac{\partial f}{\partial u}(u_0, v_0)\Delta u + \frac{\partial f}{\partial v}(u_0, v_0)\Delta v + \sqrt{\Delta u^2 + \Delta v^2}\alpha(\Delta u, \Delta v).\end{aligned}$$

上面等式两边同除以 Δx, 再令 $\Delta x \to 0$ 即得第一个等式.

复合函数微分法3

- $z=f(\phi(x,y),\psi(x,y))$ 求导的链式法则可以写成

$$\frac{\partial z}{\partial x}=f_1'\cdot\frac{\partial\phi}{\partial x}+f_2'\cdot\frac{\partial\psi}{\partial x},\qquad \frac{\partial z}{\partial y}=f_1'\cdot\frac{\partial\phi}{\partial y}+f_2'\cdot\frac{\partial\psi}{\partial y}.$$

- 若 $z=f(\phi(t),\psi(t))$, f 可微，则有

$$\frac{dz}{dt}=f_1'\phi'(t)+f_2'\psi'(t).$$

- 例：$z=f(x,y,w(x,y))$. $\frac{\partial z}{\partial x}=f_1'+f_3'\frac{\partial w}{\partial x}$, $\frac{\partial z}{\partial y}=f_2'+f_3'\frac{\partial w}{\partial y}$.
- 若 $z=f(u_1,u_2,\cdots,u_n)$, $u_i=u_i(x_1,x_2,\cdots,x_m)$, $i=1,2,\cdots,n$. f 可微，则有

$$\frac{\partial z}{\partial x_k}=\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial f}{\partial u_i}\cdot\frac{\partial u_i}{\partial x_k}, k=1,2,\cdots,m.$$

复合函数微分法3

- $z=f(\phi(x,y),\psi(x,y))$ 求导的链式法则可以写成

$$\frac{\partial z}{\partial x}=f_1'\cdot\frac{\partial\phi}{\partial x}+f_2'\cdot\frac{\partial\psi}{\partial x},\qquad \frac{\partial z}{\partial y}=f_1'\cdot\frac{\partial\phi}{\partial y}+f_2'\cdot\frac{\partial\psi}{\partial y}.$$

- 若 $z=f(\phi(t),\psi(t))$, f 可微，则有

$$\frac{dz}{dt}=f_1'\phi'(t)+f_2'\psi'(t).$$

- 例：$z=f(x,y,w(x,y))$. $\frac{\partial z}{\partial x}=f_1'+f_3'\frac{\partial w}{\partial x}$, $\frac{\partial z}{\partial y}=f_2'+f_3'\frac{\partial w}{\partial y}$.
- 若 $z=f(u_1,u_2,\cdots,u_n)$, $u_i=u_i(x_1,x_2,\cdots,x_m)$, $i=1,2,\cdots,n$. f 可微，则有

$$\frac{\partial z}{\partial x_k}=\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial f}{\partial u_i}\cdot\frac{\partial u_i}{\partial x_k}, k=1,2,\cdots,m.$$

复合函数微分法3

- $z=f(\phi(x,y),\psi(x,y))$ 求导的链式法则可以写成
$$\frac{\partial z}{\partial x}=f_1'\cdot\frac{\partial\phi}{\partial x}+f_2'\cdot\frac{\partial\psi}{\partial x},\qquad \frac{\partial z}{\partial y}=f_1'\cdot\frac{\partial\phi}{\partial y}+f_2'\cdot\frac{\partial\psi}{\partial y}.$$
- 若 $z=f(\phi(t),\psi(t))$, f 可微，则有
$$\frac{dz}{dt}=f_1'\phi'(t)+f_2'\psi'(t).$$
- 例：$z=f(x,y,w(x,y))$. $\frac{\partial z}{\partial x}=f_1'+f_3'\frac{\partial w}{\partial x}$, $\frac{\partial z}{\partial y}=f_2'+f_3'\frac{\partial w}{\partial y}$.
- 若 $z=f(u_1,u_2,\cdots,u_n)$, $u_i=u_i(x_1,x_2,\cdots,x_m)$, $i=1,2,\cdots,n$. f 可微，则有
$$\frac{\partial z}{\partial x_k}=\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial f}{\partial u_i}\cdot\frac{\partial u_i}{\partial x_k},k=1,2,\cdots,m.$$

- $z=f(\phi(x,y),\psi(x,y))$ 求导的链式法则可以写成

$$\frac{\partial z}{\partial x}=f_1'\cdot\frac{\partial\phi}{\partial x}+f_2'\cdot\frac{\partial\psi}{\partial x},\qquad \frac{\partial z}{\partial y}=f_1'\cdot\frac{\partial\phi}{\partial y}+f_2'\cdot\frac{\partial\psi}{\partial y}.$$

- 若 $z=f(\phi(t),\psi(t))$, f 可微，则有

$$\frac{dz}{dt}=f_1'\phi'(t)+f_2'\psi'(t).$$

- 例：$z=f(x,y,w(x,y))$. $\frac{\partial z}{\partial x}=f_1'+f_3'\frac{\partial w}{\partial x}$, $\frac{\partial z}{\partial y}=f_2'+f_3'\frac{\partial w}{\partial y}$.
- 若 $z=f(u_1,u_2,\cdots,u_n)$, $u_i=u_i(x_1,x_2,\cdots,x_m)$, $i=1,2,\cdots,n$. f 可微，则有

$$\frac{\partial z}{\partial x_k}=\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial f}{\partial u_i}\cdot\frac{\partial u_i}{\partial x_k}, k=1,2,\cdots,m.$$

关于复合函数微分法的注记1

- $f(u,v)$ 在 (u_0,v_0) 处的偏导数存在但不可微时, 复合函数的偏导数不一定存在, 即使偏导数存在也不一定满足链式法则.
- 例: 设 $u=x+y$, $v=x-y$,

$$z=f(u,v)=\begin{cases}\frac{uv}{\sqrt{u^2+v^2}}, & (u,v)\neq(0,0)\\ 0, & (u,v)=(0,0)\end{cases}$$

则有 $z=f(x+y,x-y)=\frac{(x+y)(x-y)}{\sqrt{2(x^2+y^2)}}$. 在 $(0,0)$ 处的偏导数不存在.

- $f(u,v)$ 在 (u_0,v_0) 处的偏导数存在但不可微时, 复合函数的偏导数不一定存在，即使偏导数存在也不一定满足链式法则.
- 例： 设 $u=x+y$, $v=x-y$,

$$z=f(u,v)=\begin{cases}\frac{uv}{\sqrt{u^2+v^2}}, & (u,v)\neq(0,0)\\ 0, & (u,v)=(0,0)\end{cases}$$

则有 $z=f(x+y,x-y)=\frac{(x+y)(x-y)}{\sqrt{2(x^2+y^2)}}$. 在 $(0,0)$ 处的偏导数不存在.

关于复合函数微分法的注记2

- 例：设 $u = x + y$, $v = x - y$,

$$z = f(u,v) = \begin{cases} \frac{u^2 v}{u^2+v^2}, & (u,v) \neq (0,0) \\ 0, & (u,v) = (0,0) \end{cases}$$

则有 $z = f(x+y, x-y) = \begin{cases} \frac{(x+y)^2(x-y)}{2(x^2+y^2)}, & (x,y) \neq (0,0) \\ 0, & (x,y) = (0,0) \end{cases}$

$$\frac{\partial z}{\partial x}\Big|_{(0,0)} = \frac{1}{2}, \quad \frac{\partial f}{\partial u}\Big|_{(0,0)} \cdot \frac{\partial u}{\partial x}\Big|_{(0,0)} + \frac{\partial f}{\partial v}\Big|_{(0,0)} \cdot \frac{\partial v}{\partial x}\Big|_{(0,0)} = 0,$$

$$\frac{\partial z}{\partial y}\Big|_{(0,0)} = -\frac{1}{2}, \quad \frac{\partial f}{\partial u}\Big|_{(0,0)} \cdot \frac{\partial u}{\partial y}\Big|_{(0,0)} + \frac{\partial f}{\partial v}\Big|_{(0,0)} \cdot \frac{\partial v}{\partial y}\Big|_{(0,0)} = 0.$$

- 例：设 $u = x + y$, $v = x - y$,

$$z = f(u, v) = \begin{cases} \frac{u^2 v}{u^2+v^2}, & (u, v) \neq (0, 0) \\ 0, & (u, v) = (0, 0) \end{cases}$$

则有 $z = f(x + y, x - y) = \begin{cases} \frac{(x+y)^2(x-y)}{2(x^2+y^2)}, & (x, y) \neq (0, 0) \\ 0, & (x, y) = (0, 0) \end{cases}$

$$\frac{\partial z}{\partial x}\Big|_{(0,0)} = \frac{1}{2}, \quad \frac{\partial f}{\partial u}\Big|_{(0,0)} \cdot \frac{\partial u}{\partial x}\Big|_{(0,0)} + \frac{\partial f}{\partial v}\Big|_{(0,0)} \cdot \frac{\partial v}{\partial x}\Big|_{(0,0)} = 0,$$

$$\frac{\partial z}{\partial y}\Big|_{(0,0)} = -\frac{1}{2}, \quad \frac{\partial f}{\partial u}\Big|_{(0,0)} \cdot \frac{\partial u}{\partial y}\Big|_{(0,0)} + \frac{\partial f}{\partial v}\Big|_{(0,0)} \cdot \frac{\partial v}{\partial y}\Big|_{(0,0)} = 0.$$

- 例: $f(x,y)=\begin{cases}\frac{x^2y}{x^2+y^2} & (x,y)\neq(0,0)\\ 0 & (x,y)=(0,0)\end{cases}$, $\phi(t)=\psi(t)=t$. 则有

$$\frac{d}{dt}f(t,t)\Big|_{t=0}=\frac{1}{2},\quad \frac{\partial f}{\partial x}\Big|_{(0,0)}\phi'(0)+\frac{\partial f}{\partial y}\Big|_{(0,0)}\psi'(0)=0.$$

- 例: $z=f(u,v)=v\ln u$, $u=x^2+y^2$, $v=\frac{y}{x}$, 求 $\frac{\partial z}{\partial x}$, $\frac{\partial z}{\partial y}$.

解:

$$\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{v}{u}\cdot 2x-\ln u\cdot\frac{y}{x^2}=\frac{2y}{x^2+y^2}-\frac{y}{x^2}\ln(x^2+y^2),$$
$$\frac{\partial z}{\partial y}=\frac{v}{u}\cdot 2y+\ln u\cdot\frac{1}{x}=\frac{2y^2}{x(x^2+y^2)}+\frac{1}{x}\ln(x^2+y^2).$$

- 例: $f(x,y)=\begin{cases}\frac{x^2y}{x^2+y^2} & (x,y)\neq(0,0)\\ 0 & (x,y)=(0,0)\end{cases}$, $\phi(t)=\psi(t)=t$. 则有

$$\frac{d}{dt}f(t,t)\Big|_{t=0}=\frac{1}{2},\quad \frac{\partial f}{\partial x}\Big|_{(0,0)}\phi'(0)+\frac{\partial f}{\partial y}\Big|_{(0,0)}\psi'(0)=0.$$

- 例: $z=f(u,v)=v\ln u$, $u=x^2+y^2$, $v=\frac{y}{x}$, 求 $\frac{\partial z}{\partial x}$, $\frac{\partial z}{\partial y}$.

  解:

$$\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{v}{u}\cdot 2x-\ln u\cdot\frac{y}{x^2}=\frac{2y}{x^2+y^2}-\frac{y}{x^2}\ln(x^2+y^2),$$
$$\frac{\partial z}{\partial y}=\frac{v}{u}\cdot 2y+\ln u\cdot\frac{1}{x}=\frac{2y^2}{x(x^2+y^2)}+\frac{1}{x}\ln(x^2+y^2).$$

- 设 $z=f(x,y)$ 有连续的一阶偏导数，$x=r\cos\theta, y=r\sin\theta$, 证明

$$\left(\frac{\partial z}{\partial r}\right)^2+\frac{1}{r^2}\left(\frac{\partial z}{\partial \theta}\right)^2=\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2.$$

证明：利用复合函数求导法则，

$$\frac{\partial z}{\partial r}=\frac{\partial z}{\partial x}\cos\theta+\frac{\partial z}{\partial y}\sin\theta$$

$$\frac{\partial z}{\partial \theta}=\frac{\partial z}{\partial x}(-r\sin\theta)+\frac{\partial z}{\partial y}(r\cos\theta).$$

复合函数微分法—例2

- 设 $z=f(x,y)$ 有连续的一阶偏导数，$x=r\cos\theta, y=r\sin\theta$, 证明

$$\left(\frac{\partial z}{\partial r}\right)^2+\frac{1}{r^2}\left(\frac{\partial z}{\partial \theta}\right)^2=\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2.$$

证明：利用复合函数求导法则,

$$\frac{\partial z}{\partial r}=\frac{\partial z}{\partial x}\cos\theta+\frac{\partial z}{\partial y}\sin\theta$$

$$\frac{\partial z}{\partial \theta}=\frac{\partial z}{\partial x}(-r\sin\theta)+\frac{\partial z}{\partial y}(r\cos\theta).$$

- 设 $u=\phi(x,y)$, $v=\psi(x,y)$ 和 $z=f(u,v)$ 都有连续的二阶偏导数, 则复合函数 $z=f(\phi(x,y),\psi(x,y))$ 的二阶偏导数存在，且有

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}=f_{uu}\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2+2f_{uv}\frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial v}{\partial x}+f_{vv}\left(\frac{\partial v}{\partial x}\right)^2+f_u\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+f_v\frac{\partial^2 v}{\partial x^2},$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=f_{uu}\frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial u}{\partial y}+f_{uv}\left(\frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial v}{\partial y}+\frac{\partial u}{\partial y}\frac{\partial v}{\partial x}\right)+f_{vv}\frac{\partial v}{\partial x}\frac{\partial v}{\partial y}$$
$$+f_u\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}+f_v\frac{\partial^2 v}{\partial x\partial y}.$$

- 证明： $\frac{\partial z}{\partial x}=f_u\frac{\partial u}{\partial x}+f_v\frac{\partial v}{\partial x}$, $\frac{\partial f_u}{\partial x}=f_{uu}\frac{\partial u}{\partial x}+f_{uv}\frac{\partial v}{\partial x}$, $\frac{\partial f_v}{\partial x}=f_{vu}\frac{\partial u}{\partial x}+f_{vv}\frac{\partial v}{\partial x}$.

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}=\frac{\partial f_u}{\partial x}\frac{\partial u}{\partial x}+f_u\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial f_v}{\partial x}\frac{\partial v}{\partial x}+f_v\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}.$$

复合函数的高阶偏导数

- 设 $u=\phi(x,y)$, $v=\psi(x,y)$ 和 $z=f(u,v)$ 都有连续的二阶偏导数, 则复合函数 $z=f(\phi(x,y),\psi(x,y))$ 的二阶偏导数存在，且有

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}=f_{uu}\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2+2f_{uv}\frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial v}{\partial x}+f_{vv}\left(\frac{\partial v}{\partial x}\right)^2+f_u\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+f_v\frac{\partial^2 v}{\partial x^2},$$

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}&=f_{uu}\frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial u}{\partial y}+f_{uv}\left(\frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial v}{\partial y}+\frac{\partial u}{\partial y}\frac{\partial v}{\partial x}\right)+f_{vv}\frac{\partial v}{\partial x}\frac{\partial v}{\partial y}\\&\quad+f_u\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}+f_v\frac{\partial^2 v}{\partial x\partial y}.\end{aligned}$$

- 证明： $\frac{\partial z}{\partial x}=f_u\frac{\partial u}{\partial x}+f_v\frac{\partial v}{\partial x}$, $\frac{\partial f_u}{\partial x}=f_{uu}\frac{\partial u}{\partial x}+f_{uv}\frac{\partial v}{\partial x}$, $\frac{\partial f_v}{\partial x}=f_{vu}\frac{\partial u}{\partial x}+f_{vv}\frac{\partial v}{\partial x}$.

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}=\frac{\partial f_u}{\partial x}\frac{\partial u}{\partial x}+f_u\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial f_v}{\partial x}\frac{\partial v}{\partial x}+f_v\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}.$$

复合函数的高阶偏导数—例

- 求 $z = f(x+y, x-y)$ 的偏导数(这里 f 有连续的二阶偏导数).

解: $\frac{\partial z}{\partial x} = f_1'(x+y, x-y) + f_2'(x+y, x-y)$,

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} &= f_{11}''(x+y, x-y) + f_{12}''(x+y, x-y) \\ &\quad + f_{21}''(x+y, x-y) + f_{22}''(x+y, x-y) \\ &= f_{11}''(x+y, x-y) + 2f_{12}''(x+y, x-y) + f_{22}''(x+y, x-y), \\ \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} &= f_{11}''(x+y, x-y) - f_{12}''(x+y, x-y) \\ &\quad + f_{21}''(x+y, x-y) - f_{22}''(x+y, x-y) \\ &= f_{11}''(x+y, x-y) - f_{22}''(x+y, x-y).\end{aligned}$$

- 求 $z = f(x+y, x-y)$ 的偏导数(这里 f 有连续的二阶偏导数).

  解: $\frac{\partial z}{\partial x} = f_1'(x+y, x-y) + f_2'(x+y, x-y)$,

$$\begin{aligned}
\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} &= f_{11}''(x+y, x-y) + f_{12}''(x+y, x-y) \\
&\quad + f_{21}''(x+y, x-y) + f_{22}''(x+y, x-y) \\
&= f_{11}''(x+y, x-y) + 2f_{12}''(x+y, x-y) + f_{22}''(x+y, x-y), \\
\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} &= f_{11}''(x+y, x-y) - f_{12}''(x+y, x-y) \\
&\quad + f_{21}''(x+y, x-y) - f_{22}''(x+y, x-y) \\
&= f_{11}''(x+y, x-y) - f_{22}''(x+y, x-y).
\end{aligned}$$

- 定理：设 $z=f(u,v)$, $u=u(x,y)$, $v=v(x,y)$ 都有连续的偏导数，则 $z=f(u(x,y),v(x,y))$ 可微，全微分为 $dz=f_u du+f_v dv$，即不管 u,v 是自变量还是中间变量，$z=f(u,v)$ 的微分形式相同.
- 证明：$\frac{\partial z}{\partial x}=f_u\frac{\partial u}{\partial x}+f_v\frac{\partial v}{\partial x}$, $\frac{\partial z}{\partial y}=f_u\frac{\partial u}{\partial y}+f_v\frac{\partial v}{\partial y}$. 得

$$\begin{aligned}dz=&\left(f_u\frac{\partial u}{\partial x}+f_v\frac{\partial v}{\partial x}\right)dx+\left(f_u\frac{\partial u}{\partial y}+f_v\frac{\partial v}{\partial y}\right)dy\\=&f_u\left(\frac{\partial u}{\partial x}dx+\frac{\partial u}{\partial y}dy\right)+f_v\left(\frac{\partial v}{\partial x}dx+\frac{\partial v}{\partial y}dy\right)\\=&f_u du+f_v dv.\end{aligned}$$

一阶全微分形式的不变性1

- 定理：设 $z=f(u,v)$, $u=u(x,y)$, $v=v(x,y)$ 都有连续的偏导数，则 $z=f(u(x,y),v(x,y))$ 可微，全微分为 $dz=f_u du+f_v dv$, 即不管 u,v 是自变量还是中间变量，$z=f(u,v)$ 的微分形式相同.
- 证明：$\frac{\partial z}{\partial x}=f_u\frac{\partial u}{\partial x}+f_v\frac{\partial v}{\partial x}$, $\frac{\partial z}{\partial y}=f_u\frac{\partial u}{\partial y}+f_v\frac{\partial v}{\partial y}$. 得

$$\begin{aligned}
dz=&\left(f_u\frac{\partial u}{\partial x}+f_v\frac{\partial v}{\partial x}\right)dx+\left(f_u\frac{\partial u}{\partial y}+f_v\frac{\partial v}{\partial y}\right)dy\\
=&f_u\left(\frac{\partial u}{\partial x}dx+\frac{\partial u}{\partial y}dy\right)+f_v\left(\frac{\partial v}{\partial x}dx+\frac{\partial v}{\partial y}dy\right)\\
=&f_u du+f_v dv.
\end{aligned}$$

一阶全微分形式的不变性2

- 其它形式复合函数的微分：设下面中用到的函数都有连续偏导数或导数.

$$d(f(g(x,y))) = f'(g)dg$$

$$d(f(\phi(x),\psi(x))) = f_1'd\phi + f_2'd\psi$$

- 令 $f(u,v) = u \pm v, uv, \frac{u}{v}$, $u = u(x,y)$, $v = v(x,y)$,得

$$d(u \pm v) = du \pm dv$$

$$d(uv) = udv + vdu$$

$$d(\frac{u}{v}) = \frac{vdu - udv}{v^2}$$

一阶全微分形式的不变性2

- 其它形式复合函数的微分：设下面中用到的函数都有连续偏导数或导数.

$$d(f(g(x,y))) = f'(g)dg$$

$$d(f(\phi(x),\psi(x))) = f_1'd\phi + f_2'd\psi$$

- 令 $f(u,v) = u \pm v, uv, \frac{u}{v}$, $u = u(x,y)$, $v = v(x,y)$,得

$$d(u \pm v) = du \pm dv$$

$$d(uv) = udv + vdu$$

$$d(\frac{u}{v}) = \frac{vdu - udv}{v^2}$$

一阶全微分形式不变性的应用

- 设 $u = \sin(x^2+y^2)+e^{xz}$，求函数在 $(1,0,1)$ 处的全微分。

$$\begin{aligned} du &= \cos(x^2+y^2)d(x^2+y^2)+e^{xz}d(xz) \\ &= \cos(x^2+y^2)(2xdx+2ydy)+e^{xz}(xdz+zdx) \\ &= [2x\cos(x^2+y^2)+e^{xz}z]dx+2y\cos(x^2+y^2)dy+e^{xz}xdz, \end{aligned}$$

从而得 $du|_{(1,0,1)} = (2\cos 1+e)dx+edz.$

高阶微分

- 若 $z = f(x,y) \in C^2(D)$. 当 x,y 为自变量时，dx, dy 看成常数，从而 df 是 x,y 的函数，定义二阶微分 $d^2f = d(df)$. 由于 $df = f_x dx + f_y dy = (dx\frac{\partial}{\partial x} + dy\frac{\partial}{\partial y})f$,

$$\begin{aligned} d^2f =& \left(dx\frac{\partial}{\partial x} + dy\frac{\partial}{\partial y}\right)\left(dx\frac{\partial}{\partial x} + dy\frac{\partial}{\partial y}\right)f \\ =& dx^2\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + 2dxdy\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} + dy^2\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}. \end{aligned}$$

- 若 $z = f(x,y) \in C^n(D)$, 定义 $d^nf = d(d^{n-1}f)$. 则有

$$\begin{aligned} d^nf =& \left(dx\frac{\partial}{\partial x} + dy\frac{\partial}{\partial y}\right)^n f \\ =& dx^n\frac{\partial^n f}{\partial x^n} + ndx^{n-1}dy\frac{\partial^2 f}{\partial x^{n-1}\partial y} + \cdots + dy^n\frac{\partial^n f}{\partial y^n}. \end{aligned}$$

高阶微分

- 若 $z=f(x,y)\in C^2(D)$. 当 x,y 为自变量时，dx,dy 看成常数，从而 df 是 x,y 的函数，定义二阶微分 $d^2f=d(df)$. 由于 $df=f_xdx+f_ydy=(dx\frac{\partial}{\partial x}+dy\frac{\partial}{\partial y})f$,

$$\begin{aligned}d^2f=&\left(dx\frac{\partial}{\partial x}+dy\frac{\partial}{\partial y}\right)\left(dx\frac{\partial}{\partial x}+dy\frac{\partial}{\partial y}\right)f\\ =&dx^2\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}+2dxdy\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}+dy^2\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}.\end{aligned}$$

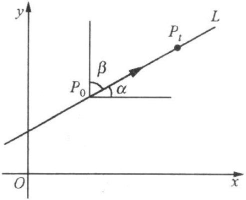
- 若 $z=f(x,y)\in C^n(D)$, 定义 $d^nf=d(d^{n-1}f)$. 则有

$$\begin{aligned}d^nf=&\left(dx\frac{\partial}{\partial x}+dy\frac{\partial}{\partial y}\right)^nf\\ =&dx^n\frac{\partial^n f}{\partial x^n}+ndx^{n-1}dy\frac{\partial^2 f}{\partial x^{n-1}\partial y}+\cdots+dy^n\frac{\partial^n f}{\partial y^n}.\end{aligned}$$

方向导数1

- 方向导数：设 $z=f(x,y)$ 在 $P_0(x_0,y_0)$ 的一个邻域内有定义，$\vec{l}$ 是一个给定的方向，其方向余弦为 $(\cos\alpha,\cos\beta)$，若极限

$$\lim_{t\to 0}\frac{f(x_0+t\cos\alpha,y_0+t\cos\beta)-f(x_0,y_0)}{t}$$
$$=\frac{d}{dt}f(x_0+t\cos\alpha,y_0+t\cos\beta)\Big|_{t=0}$$



存在，则称 f 在 P_0 点沿方向 $\vec{l}$ 的方向导数存在，记作 $\frac{\partial z}{\partial \vec{l}}\Big|_{(x_0,y_0)}$ 或 $\frac{\partial f}{\partial \vec{l}}(x_0,y_0)$，$\frac{\partial f}{\partial \vec{l}}\Big|_{(x_0,y_0)}$.

方向导数2

- 注：f 沿方向 $\vec{l}$ 的方向导数存在，等价于 f 沿方向 $-\vec{l}$ 的方向导数存在，且 $\frac{\partial f}{\partial(-\vec{l})} = -\frac{\partial f}{\partial \vec{l}}$.

  证明:

$$\begin{aligned}\frac{\partial f}{\partial(-\vec{l})} &= \frac{d}{dt} f(x_0 - t\cos\alpha, y_0 - t\cos\beta)\Big|_{t=0} \\ &= -\frac{d}{dt} f(x_0 + t\cos\alpha, y_0 + t\cos\beta)\Big|_{t=0} = -\frac{\partial f}{\partial \vec{l}}.\end{aligned}$$

- $\alpha = 0, \beta = \frac{\pi}{2}$ 时，$\frac{\partial f}{\partial \vec{l}} = \frac{\partial f}{\partial x}$; $\alpha = \frac{\pi}{2}, \beta = 0$ 时，$\frac{\partial f}{\partial \vec{l}} = \frac{\partial f}{\partial y}$.

方向导数2

- 注：f 沿方向 $\vec{l}$ 的方向导数存在，等价于 f 沿方向 $-\vec{l}$ 的方向导数存在，且 $\frac{\partial f}{\partial(-\vec{l})} = -\frac{\partial f}{\partial \vec{l}}$.

  证明:

$$\begin{aligned}\frac{\partial f}{\partial(-\vec{l})} &= \frac{d}{dt} f(x_0 - t\cos\alpha, y_0 - t\cos\beta)\Big|_{t=0} \\ &= -\frac{d}{dt} f(x_0 + t\cos\alpha, y_0 + t\cos\beta)\Big|_{t=0} = -\frac{\partial f}{\partial \vec{l}}.\end{aligned}$$

- $\alpha = 0, \beta = \frac{\pi}{2}$ 时，$\frac{\partial f}{\partial \vec{l}} = \frac{\partial f}{\partial x}$; $\alpha = \frac{\pi}{2}, \beta = 0$ 时，$\frac{\partial f}{\partial \vec{l}} = \frac{\partial f}{\partial y}$.

- 注：f 沿方向 $\vec{l}$ 的方向导数存在，等价于 f 沿方向 $-\vec{l}$ 的方向导数存在，且 $\frac{\partial f}{\partial(-\vec{l})} = -\frac{\partial f}{\partial \vec{l}}$.

  证明:

$$\frac{\partial f}{\partial(-\vec{l})} = \frac{d}{dt} f(x_0 - t\cos\alpha, y_0 - t\cos\beta)\Big|_{t=0}$$
$$= -\frac{d}{dt} f(x_0 + t\cos\alpha, y_0 + t\cos\beta)\Big|_{t=0} = -\frac{\partial f}{\partial \vec{l}}.$$

- $\alpha = 0, \beta = \frac{\pi}{2}$ 时，$\frac{\partial f}{\partial \vec{l}} = \frac{\partial f}{\partial x}$; $\alpha = \frac{\pi}{2}, \beta = 0$ 时，$\frac{\partial f}{\partial \vec{l}} = \frac{\partial f}{\partial y}$.

方向导数3

- 定理：若 $f(x,y)$ 在 (x_0,y_0) 处可微，则 $f(x,y)$ 在该点沿任一方向 $\vec{l}$ (方向余弦为 $(\cos\alpha,\cos\beta)$) 的方向导数均存在，且

$$\begin{aligned}\left.\frac{\partial f}{\partial \vec{l}}\right|_{(x_0,y_0)} &= f_x(x_0,y_0)\cos\alpha + f_y(x_0,y_0)\cos\beta \\ &= (f_x(x_0,y_0), f_y(x_0,y_0))\cdot \vec{l}^o.\end{aligned}$$

- 证明：利用链式法则，

$$\begin{aligned}\left.\frac{\partial f}{\partial \vec{l}}\right|_{(x_0,y_0)} &= \left.\frac{d}{dt} f(x_0 + t\cos\alpha, y_0 + t\cos\beta)\right|_{t=0} \\ &= f_x(x_0,y_0)\cos\alpha + f_y(x_0,y_0)\cos\beta.\end{aligned}$$

方向导数3

- 定理：若 $f(x,y)$ 在 (x_0,y_0) 处可微，则 $f(x,y)$ 在该点沿任一方向 $\vec{l}$ (方向余弦为 $(\cos\alpha,\cos\beta)$)的方向导数均存在，且

$$\left.\frac{\partial f}{\partial \vec{l}}\right|_{(x_0,y_0)} = f_x(x_0,y_0)\cos\alpha + f_y(x_0,y_0)\cos\beta$$
$$= (f_x(x_0,y_0), f_y(x_0,y_0)) \cdot \vec{l}^o.$$

- 证明：利用链式法则，

$$\left.\frac{\partial f}{\partial \vec{l}}\right|_{(x_0,y_0)} = \left.\frac{d}{dt} f(x_0 + t\cos\alpha, y_0 + t\cos\beta)\right|_{t=0}$$
$$= f_x(x_0,y_0)\cos\alpha + f_y(x_0,y_0)\cos\beta.$$

- 例：若 $f(x,y)$ 在 (x_0,y_0) 处可微，若单位向量 $\vec{l},\vec{e}_1,\vec{e}_2$ 满足 $\vec{l}=a\vec{e}_1+b\vec{e}_2$，则

$$\frac{\partial f}{\partial \vec{l}}\Big|_{(x_0,y_0)}=a\frac{\partial f}{\partial \vec{e}_1}\Big|_{(x_0,y_0)}+b\frac{\partial f}{\partial \vec{e}_2}\Big|_{(x_0,y_0)}.$$

证明: $(f_x(x_0,y_0),f_y(x_0,y_0))\cdot\vec{l}=a(f_x(x_0,y_0),f_y(x_0,y_0))\cdot\vec{e}_1+b(f_x(x_0,y_0),f_y(x_0,y_0))\cdot\vec{e}_2$.

- 例(方向导数的计算): $f(x,y)=x^3y$, $\vec{l}=(\sqrt{3},1)$, 则

$$\frac{\partial f}{\partial \vec{l}}\Big|_{(1,2)}=3x^2y\big|_{(1,2)}\frac{\sqrt{3}}{2}+x^3\big|_{(1,2)}\frac{1}{2}=3\sqrt{3}+\frac{1}{2}.$$

方向导数—例

- 例：若 $f(x,y)$ 在 (x_0,y_0) 处可微，若单位向量 $\vec{l},\vec{e}_1,\vec{e}_2$ 满足 $\vec{l}=a\vec{e}_1+b\vec{e}_2$，则

$$\frac{\partial f}{\partial \vec{l}}\Big|_{(x_0,y_0)} = a\frac{\partial f}{\partial \vec{e}_1}\Big|_{(x_0,y_0)} + b\frac{\partial f}{\partial \vec{e}_2}\Big|_{(x_0,y_0)}.$$

证明: $(f_x(x_0,y_0), f_y(x_0,y_0))\cdot\vec{l} = a(f_x(x_0,y_0), f_y(x_0,y_0))\cdot\vec{e}_1 + b(f_x(x_0,y_0), f_y(x_0,y_0))\cdot\vec{e}_2$.

- 例(方向导数的计算): $f(x,y)=x^3y$, $\vec{l}=(\sqrt{3},1)$, 则

$$\frac{\partial f}{\partial \vec{l}}\Big|_{(1,2)} = 3x^2y\big|_{(1,2)}\frac{\sqrt{3}}{2} + x^3\big|_{(1,2)}\frac{1}{2} = 3\sqrt{3}+\frac{1}{2}.$$

- 三元函数的方向导数可类似定义. 设 $u=f(x,y,z)$ 设在 $P_0(x_0,y_0,z_0)$ 的一个邻域内有定义, $\vec{l}$ 是一个给定的方向, 其方向余弦为 $(\cos\alpha,\cos\beta,\cos\gamma)$. f 沿方向 $\vec{l}$ 的方向导数定义为

$$\frac{\partial z}{\partial \vec{l}}\Big|_{(x_0,y_0,z_0)}=\frac{d}{dt}f(x_0+t\cos\alpha,y_0+t\cos\beta,z_0+t\cos\gamma)\Big|_{t=0}.$$

- 若 $f(x,y,z)$ 在 (x_0,y_0,z_0) 处可微, 利用链式法则,

$$\frac{\partial f}{\partial \vec{l}}\Big|_{(P_0)}=f_x(P_0)\cos\alpha+f_y(P_0)\cos\beta++f_z(P_0)\cos\gamma.$$

- 三元函数的方向导数可类似定义. 设 $u=f(x,y,z)$ 设在 $P_0(x_0,y_0,z_0)$ 的一个邻域内有定义，$\vec{l}$ 是一个给定的方向，其方向余弦为 $(\cos\alpha,\cos\beta,\cos\gamma)$. f 沿方向 $\vec{l}$ 的方向导数定义为

$$\frac{\partial z}{\partial \vec{l}}\Big|_{(x_0,y_0,z_0)}=\frac{d}{dt}f(x_0+t\cos\alpha,y_0+t\cos\beta,z_0+t\cos\gamma)\Big|_{t=0}.$$

- 若 $f(x,y,z)$ 在 (x_0,y_0,z_0) 处可微, 利用链式法则,

$$\frac{\partial f}{\partial \vec{l}}\Big|_{(P_0)}=f_x(P_0)\cos\alpha+f_y(P_0)\cos\beta++f_z(P_0)\cos\gamma.$$

方向导数—例3

- 设 $f(x,y) = \begin{cases} \frac{xy^2}{x^2+y^2}, & (x,y) \neq (0,0) \\ 0, & (x,y) = (0,0) \end{cases}$, $\vec{l} = (\cos\alpha, \cos\beta)$. 由于

$$f(t\cos\alpha, t\cos\beta) = \cos\alpha\cos^2\beta \cdot t,$$

因此 $\frac{\partial f}{\partial \vec{l}}(0,0) = \cos\alpha\cos^2\beta$.

- 上面的函数 $f(x,y)$ 在原点不可微, $\alpha, \beta \neq \frac{\pi}{2}$ 时,

$$\frac{\partial f}{\partial \vec{l}}(0,0) = \cos\alpha\cos^2\beta \neq f_x(x_0,y_0)\cos\alpha + f_y(x_0,y_0)\cos\beta.$$

方向导数—例3

- 设 $f(x,y) = \begin{cases} \frac{xy^2}{x^2+y^2}, & (x,y) \neq (0,0) \\ 0, & (x,y) = (0,0) \end{cases}$, $\vec{l} = (\cos\alpha, \cos\beta)$. 由于

$$f(t\cos\alpha, t\cos\beta) = \cos\alpha\cos^2\beta \cdot t,$$

因此 $\frac{\partial f}{\partial \vec{l}}(0,0) = \cos\alpha\cos^2\beta$.

- 上面的函数 $f(x,y)$ 在原点不可微, $\alpha, \beta \neq \frac{\pi}{2}$ 时,

$$\frac{\partial f}{\partial \vec{l}}(0,0) = \cos\alpha\cos^2\beta \neq f_x(x_0,y_0)\cos\alpha + f_y(x_0,y_0)\cos\beta.$$

最大方向导数

- 命题：设 f 在 (x_0, y_0) 点可微或偏导数连续，且 f 在 (x_0, y_0) 的两个偏导数不同时为 0, 则 f 在 (x_0, y_0) 处沿方向 $\vec{t} = (f_x(x_0, y_0), f_y(x_0, y_0))$ 的方向导数取最大值 $|\vec{t}|$ (沿 $-\vec{t}$ 的方向导数最小).
- 证明：设 $\vec{l}$ 是一个任意给定方向，其方向余弦为 $(\cos\alpha, \cos\beta)$, 则

$$\begin{aligned}\frac{\partial f}{\partial \vec{l}}\Big|_{(x_0,y_0)} &= f_x(x_0, y_0)\cos\alpha + f_y(x_0, y_0)\cos\beta = \vec{t}\cdot(\cos\alpha, \cos\beta)\\ &= |\vec{t}|\cos\langle\vec{t}, \vec{l}\rangle \le |\vec{t}| = \sqrt{f_x(x_0, y_0)^2 + f_y(x_0, y_0)^2}.\end{aligned}$$

又有

$$\frac{\partial f}{\partial \vec{t}}\Big|_{(x_0,y_0)} = f_x(x_0, y_0)\frac{f_x(x_0, y_0)}{|\vec{t}|} + f_y(x_0, y_0)\frac{f_y(x_0, y_0)}{|\vec{t}|} = |\vec{t}|.$$

- 命题：设 f 在 (x_0,y_0) 点可微或偏导数连续，且 f 在 (x_0,y_0) 的两个偏导数不同时为 0, 则 f 在 (x_0,y_0) 处沿方向 $\vec{t}=(f_x(x_0,y_0),f_y(x_0,y_0))$ 的方向导数取最大值 $|\vec{t}|$ (沿 $-\vec{t}$ 的方向导数最小).
- 证明：设 $\vec{l}$ 是一个任意给定方向，其方向余弦为 $(\cos\alpha,\cos\beta)$, 则

$$\begin{aligned}\left.\frac{\partial f}{\partial \vec{l}}\right|_{(x_0,y_0)} &= f_x(x_0,y_0)\cos\alpha + f_y(x_0,y_0)\cos\beta = \vec{t}\cdot(\cos\alpha,\cos\beta)\\ &= |\vec{t}|\cos\langle\vec{t},\vec{l}\rangle \le |\vec{t}| = \sqrt{f_x(x_0,y_0)^2+f_y(x_0,y_0)^2}.\end{aligned}$$

又有

$$\left.\frac{\partial f}{\partial \vec{t}}\right|_{(x_0,y_0)} = f_x(x_0,y_0)\frac{f_x(x_0,y_0)}{|\vec{t}|} + f_y(x_0,y_0)\frac{f_y(x_0,y_0)}{|\vec{t}|} = |\vec{t}|.$$

梯度的定义

- 定义: 标量场的梯度是一个向量场。标量场中某点处的梯度方向为指向增长最快的方向，长度是该点处的最大的变化率。
- 定义：设 f 在 (x_0, y_0) 点可微或者偏导数连续，f 在 (x_0, y_0) 的梯度定义为

$$\operatorname{grad} f|_{(x_0,y_0)} = (f_x(x_0, y_0), f_y(x_0, y_0)).$$

- 注： 类似地可定义三元函数的梯度: f 在 (x_0, y_0, z_0) 点可微或者偏导数连续，f 在 (x_0, y_0, z_0) 的梯度定义为 $\operatorname{grad} f|_{(x_0,y_0,z_0)} = (f_x(x_0, y_0, z_0), f_y(x_0, y_0, z_0), f_z(x_0, y_0, z_0))$. 且梯度方向的方向导数最大.

梯度的定义

- 定义: 标量场的梯度是一个向量场。标量场中某点处的梯度方向为指向增长最快的方向，长度是该点处的最大的变化率。
- 定义：设 f 在 (x_0, y_0) 点可微或者偏导数连续，f 在 (x_0, y_0) 的梯度定义为

$$\operatorname{grad} f\big|_{(x_0,y_0)} = (f_x(x_0, y_0), f_y(x_0, y_0)).$$

- 注：类似地可定义三元函数的梯度: f 在 (x_0, y_0, z_0) 点可微或者偏导数连续，f 在 (x_0, y_0, z_0) 的梯度定义为 $\operatorname{grad} f\big|_{(x_0,y_0,z_0)} = (f_x(x_0, y_0, z_0), f_y(x_0, y_0, z_0), f_z(x_0, y_0, z_0))$. 且梯度方向的方向导数最大.

梯度的性质

- 性质：设 f 可微或者偏导数连续，f 在 (x_0, y_0) 点处沿方向 $\vec{l}$ (方向余弦为 $(\cos\alpha, \cos\beta)$) 的方向导数为

$$\frac{\partial f}{\partial \vec{l}}\Big|_{(x_0,y_0)} = f_x(x_0, y_0)\cos\alpha + f_y(x_0, y_0)\cos\beta = \mathrm{grad}\, f|_{(x_0,y_0)} \cdot \frac{\vec{l}}{|\vec{l}|}.$$

- 利用偏导数公式可得下面的梯度公式(设 f 的偏导数连续):

$$\mathrm{grad}\,(f(u, v)) = \frac{\partial f}{\partial u}\mathrm{grad}\, u + \frac{\partial f}{\partial v}\mathrm{grad}\, v,$$

$$\mathrm{grad}\,(u \pm v) = \mathrm{grad}\, u \pm \mathrm{grad}\, v.$$

$$\mathrm{grad}\,(uv) = v\mathrm{grad}\, u + u\mathrm{grad}\, v.$$

$$\mathrm{grad}\,(\frac{u}{v}) = \frac{1}{v^2}(v\mathrm{grad}\, u - u\mathrm{grad}\, v).$$

梯度的性质

- 性质：设 f 可微或者偏导数连续，f 在 (x_0, y_0) 点处沿方向 $\vec{l}$ (方向余弦为 $(\cos\alpha, \cos\beta)$) 的方向导数为

$$\frac{\partial f}{\partial \vec{l}}\Big|_{(x_0,y_0)} = f_x(x_0, y_0)\cos\alpha + f_y(x_0, y_0)\cos\beta = \mathrm{grad}\, f|_{(x_0,y_0)} \cdot \frac{\vec{l}}{|\vec{l}|}.$$

- 利用偏导数公式可得下面的梯度公式(设 f 的偏导数连续):

$$\mathrm{grad}\,(f(u,v)) = \frac{\partial f}{\partial u}\mathrm{grad}\, u + \frac{\partial f}{\partial v}\mathrm{grad}\, v,$$

$$\mathrm{grad}\,(u \pm v) = \mathrm{grad}\, u \pm \mathrm{grad}\, v.$$

$$\mathrm{grad}\,(uv) = v\mathrm{grad}\, u + u\mathrm{grad}\, v.$$

$$\mathrm{grad}\,(\frac{u}{v}) = \frac{1}{v^2}(v\mathrm{grad}\, u - u\mathrm{grad}\, v).$$

- 例：位于原点的点电荷产生的电势为 $V = \frac{q}{4\pi\varepsilon} \cdot \frac{1}{r}$，其中 $r = \sqrt{x^2+y^2+z^2}$，则产生的电场为

$$-\text{grad}\, V = \frac{q}{4\pi\varepsilon} \frac{(x,y,z)}{r^3}.$$

- 例：函数 $f(x,y) = \begin{cases} \frac{xy^2}{x^2+y^2}, & (x,y) \neq (0,0) \\ 0, & (x,y) = (0,0) \end{cases}$，原点处沿方向 $\vec{l} = (\cos\alpha, \cos\beta)$ 的方向导数为

$$\frac{\partial f}{\partial \vec{l}}(0,0) = \cos\alpha \cos^2\beta,$$

原点处方向导数最大的方向为 $(\sqrt{\frac{1}{3}}, \pm\sqrt{\frac{2}{3}})$.

- 例：位于原点的点电荷产生的电势为 $V=\frac{q}{4\pi\varepsilon}\cdot\frac{1}{r}$，其中 $r=\sqrt{x^2+y^2+z^2}$，则产生的电场为

$$-\mathrm{grad}\, V=\frac{q}{4\pi\varepsilon}\frac{(x,y,z)}{r^3}.$$

- 例：函数 $f(x,y)=\begin{cases}\frac{xy^2}{x^2+y^2}, & (x,y)\neq(0,0)\\ 0, & (x,y)=(0,0)\end{cases}$，原点处沿方向 $\vec{l}=(\cos\alpha,\cos\beta)$ 的方向导数为

$$\frac{\partial f}{\partial\vec{l}}(0,0)=\cos\alpha\cos^2\beta,$$

原点处方向导数最大的方向为 $(\sqrt{\frac{1}{3}},\pm\sqrt{\frac{2}{3}})$.

二元函数的微分中值定理1

- 复习一元函数微分中值定理：设 $y = f(x)$ 在 (a,b) 内可导，x_0, $x_0 + \Delta x \in (a,b)$. 则存在 $0 < \theta < 1$, 使得

$$f(x_0 + \Delta x) - f(x_0) = f'(x_0 + \theta\Delta x)\Delta x.$$

- 定理：设 $z = f(x,y) \in C^1(D)$, $P_0(x_0,y_0)$, $P_1(x_0+\Delta x, y_0+\Delta y) \in D$, 且 $\overline{P_0P_1} \subset D$. 则存在 $\theta \in (0,1)$, 使得

$$\begin{aligned} f(x_0+\Delta x, y_0+\Delta y) = f(x_0,y_0) &+ \frac{\partial f}{\partial x}(x_0+\theta\Delta x, y_0+\theta\Delta y)\Delta x \\ &+ \frac{\partial f}{\partial y}(x_0+\theta\Delta x, y_0+\theta\Delta y)\Delta y. \end{aligned}$$

二元函数的微分中值定理1

- 复习一元函数微分中值定理：设 $y = f(x)$ 在 (a,b) 内可导，x_0, $x_0 + \Delta x \in (a,b)$. 则存在 $0 < \theta < 1$, 使得

$$f(x_0 + \Delta x) - f(x_0) = f'(x_0 + \theta\Delta x)\Delta x.$$

- 定理：设 $z = f(x,y) \in C^1(D)$, $P_0(x_0,y_0)$, $P_1(x_0+\Delta x, y_0+\Delta y) \in D$, 且 $\overline{P_0P_1} \subset D$. 则存在 $\theta \in (0,1)$, 使得

$$\begin{aligned} f(x_0+\Delta x, y_0+\Delta y) = f(x_0,y_0) &+ \frac{\partial f}{\partial x}(x_0+\theta\Delta x, y_0+\theta\Delta y)\Delta x \\ &+ \frac{\partial f}{\partial y}(x_0+\theta\Delta x, y_0+\theta\Delta y)\Delta y. \end{aligned}$$

二元函数的微分中值定理2

- 注：设 $\overrightarrow{\Delta P} = \overrightarrow{P_0P_1}$，中值公式可以写成

$$f(P_1) = f(P_0) + \operatorname{grad} f\big|_{P_0+\theta\overrightarrow{\Delta P}} \cdot \overrightarrow{\Delta P}.$$

或者

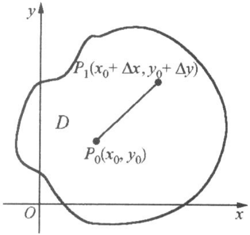
$$f(P_1) = f(P_0) + \frac{\partial f}{\partial \overrightarrow{\Delta P}}\Big|_{P_0+\theta\overrightarrow{\Delta P}} \cdot |\overrightarrow{\Delta P}|.$$

- 定理证明：令 $\phi(t) = f(x_0 + t\Delta x, y_0 + t\Delta y)$，则 $\phi(t) \in C^1([0,1])$，$\phi'(t) = \frac{\partial f}{\partial x}\Delta x + \frac{\partial f}{\partial y}\Delta y$. 由一元函数微分中值定理，存在 $\theta \in (0,1)$ 使得

$$f(x_0+\Delta x, y_0+\Delta y) = \phi(1) = \phi(0) + \phi'(\theta)$$

$$= f(x_0, y_0) + f_x(x_0+\theta\Delta x, y_0+\theta\Delta y)\Delta x$$

$$+ f_y(x_0+\theta\Delta x, y_0+\theta\Delta y)\Delta y.$$



- 注：设 $\overrightarrow{\Delta P} = \overrightarrow{P_0P_1}$，中值公式可以写成

$$f(P_1) = f(P_0) + \text{grad}\, f\big|_{P_0+\theta\overrightarrow{\Delta P}} \cdot \overrightarrow{\Delta P}.$$

或者

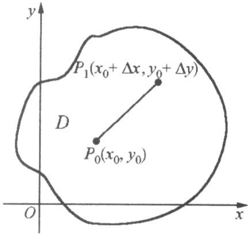
$$f(P_1) = f(P_0) + \frac{\partial f}{\partial \overrightarrow{\Delta P}}\Big|_{P_0+\theta\overrightarrow{\Delta P}} \cdot |\overrightarrow{\Delta P}|.$$

- 定理证明：令 $\phi(t) = f(x_0 + t\Delta x, y_0 + t\Delta y)$，则 $\phi(t) \in C^1([0,1])$，$\phi'(t) = \frac{\partial f}{\partial x}\Delta x + \frac{\partial f}{\partial y}\Delta y$. 由一元函数微分中值定理，存在 $\theta \in (0,1)$ 使得

$$f(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y) = \phi(1) = \phi(0) + \phi'(\theta)$$

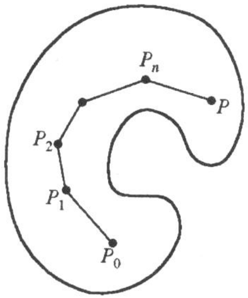
$$= f(x_0, y_0) + f_x(x_0 + \theta\Delta x, y_0 + \theta\Delta y)\Delta x$$

$$+ f_y(x_0 + \theta\Delta x, y_0 + \theta\Delta y)\Delta y.$$



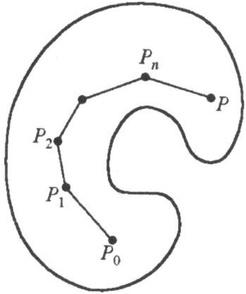
- 推论：设 $z = f(x, y)$ 是区域 D 上的函数，且它的两个偏导数在 D 上恒为 0，则 $f(x, y) \equiv C$.

证明：对任意 $P_0, P \in D$，由于 D 是连通集，存在 D 中连接 P_0 和 P_1 的折线 $P_0P_1P_2 \cdots P_nP \subset D$，利用上面的中值定理，有 $f(P_0) = f(P_1) = \cdots = f(P_n) = f(P)$.



- 推论：设 $z = f(x, y)$ 是区域 D 上的函数，且它的两个偏导数在 D 上恒为 0, 则 $f(x, y) \equiv C$.

  证明：对任意 $P_0, P \in D$, 由于 D 是连通集，存在 D 中连接 P_0 和 P_1 的折线 $P_0P_1P_2 \cdots P_nP \subset D$, 利用上面的中值定理，有 $f(P_0) = f(P_1) = \cdots = f(P_n) = f(P)$.



二元函数的 Taylor 公式

- Lagrange微分中值定理可以写成:

$$
\begin{aligned}
&f(x_0+\Delta x, y_0+\Delta y) - f(x_0, y_0) \\
&= \frac{\partial f}{\partial x}(x_0+\theta\Delta x, y_0+\theta\Delta y)\Delta x + \frac{\partial f}{\partial y}(x_0+\theta\Delta x, y_0+\theta\Delta y)\Delta y \\
&= df(x_0+\theta\Delta x, y_0+\theta\Delta y)
\end{aligned}
$$

- 定理：设 D 是一个平面区域，$f \in C^{n+1}(D)$，$P_0(x_0, y_0)$，$P_1(x_0+\Delta x, y_0+\Delta y) \in D$，且 $\overline{P_0P_1} \subset D$. 则存在 $\theta \in (0,1)$,使得

$$
\begin{aligned}
f(x_0+\Delta x, y_0+\Delta y) &= f(x_0, y_0) + \frac{1}{1!}df(x_0, y_0) + \frac{1}{2!}d^2f(x_0, y_0) \\
&+ \cdots + \frac{1}{n!}d^nf(x_0, y_0) + \frac{1}{(n+1)!}d^{(n+1)}f(x_0+\theta\Delta x, y_0+\theta\Delta y).
\end{aligned}
$$

- Lagrange微分中值定理可以写成:

$$
\begin{aligned}
&f(x_0+\Delta x, y_0+\Delta y) - f(x_0, y_0)\\
&= \frac{\partial f}{\partial x}(x_0+\theta\Delta x, y_0+\theta\Delta y)\Delta x + \frac{\partial f}{\partial y}(x_0+\theta\Delta x, y_0+\theta\Delta y)\Delta y\\
&= df(x_0+\theta\Delta x, y_0+\theta\Delta y)
\end{aligned}
$$

- 定理：设 D 是一个平面区域，$f \in C^{n+1}(D)$，$P_0(x_0, y_0)$，$P_1(x_0+\Delta x, y_0+\Delta y) \in D$，且 $\overline{P_0P_1} \subset D$. 则存在 $\theta \in (0,1)$,使得

$$
\begin{aligned}
f(x_0+\Delta x, y_0+\Delta y) &= f(x_0, y_0) + \frac{1}{1!}df(x_0, y_0) + \frac{1}{2!}d^2f(x_0, y_0)\\
&+ \cdots + \frac{1}{n!}d^nf(x_0, y_0) + \frac{1}{(n+1)!}d^{(n+1)}f(x_0+\theta\Delta x, y_0+\theta\Delta y).
\end{aligned}
$$

二元函数的 Taylor 公式的证明

- 定理证明：令 $\phi(t) = f(x_0 + t\Delta x, y_0 + t\Delta y)$，则 $\phi \in C^{n+1}([0,1])$，$\phi^{(k)}(t) = (\Delta x\frac{\partial}{\partial x} + \Delta y\frac{\partial}{\partial y})^k f(x_0 + t\Delta x, y_0 + t\Delta y)$. 由一元函数的 Taylor 公式，

$$\phi(1) = \phi(0) + \frac{1}{1!}\phi'(0) + \cdots + \frac{1}{n!}\phi^{(n)}(0) + \frac{1}{(n+1)!}\phi^{(n+1)}(\theta).$$

利用 $\phi^{(k)}(0) = d^k f(x_0, y_0)$，$\phi^{(n+1)}(\theta) = d^{(n+1)} f(x_0 + \theta\Delta x, y_0 + \theta\Delta y)$ 即得.

二元函数的 Taylor 公式的注记

- 注：一元函数 Taylor 公式只要求 f 的 $n+1$ 阶导数存在，不要求 $n+1$ 阶导数连续. 二元函数 Taylor 公式要求 f 的 $n+1$ 阶偏导数连续.
- 二元函数 Taylor 公式可以写成：

$$f(x,y)=f(x_0,y_0)+\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k!}\left[(x-x_0)\frac{\partial}{\partial x}+(y-y_0)\frac{\partial}{\partial y}\right]^k f(x_0,y_0)$$

$$+\frac{1}{(n+1)!}\left[(x-x_0)\frac{\partial}{\partial x}+(y-y_0)\frac{\partial}{\partial y}\right]^{n+1} f(x_0+\theta(x-x_0),y_0+\theta(y-y_0)).$$

二元函数的 Taylor 公式的注记

- 注：一元函数 Taylor 公式只要求 f 的 $n+1$ 阶导数存在，不要求 $n+1$ 阶导数连续. 二元函数 Taylor 公式要求 f 的 $n+1$ 阶偏导数连续.
- 二元函数 Taylor 公式可以写成：

$$f(x,y)=f(x_0,y_0)+\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k!}\left[(x-x_0)\frac{\partial}{\partial x}+(y-y_0)\frac{\partial}{\partial y}\right]^k f(x_0,y_0)$$

$$+\frac{1}{(n+1)!}\left[(x-x_0)\frac{\partial}{\partial x}+(y-y_0)\frac{\partial}{\partial y}\right]^{n+1} f(x_0+\theta(x-x_0),y_0+\theta(y-y_0)).$$

带 Peano 余项的 Taylor 公式1

- 余项估计：若 f 的任意 $(n+1)$ 阶偏导数的绝对值 $\leq M$, 则

$$
\begin{aligned}
|R_n| =& \left|\frac{1}{(n+1)!}d^{(n+1)}f(x_0+\theta\Delta x, y_0+\theta\Delta y)\right| \\
\leq& M\frac{2^{(n+1)}}{(n+1)!}\rho^{n+1} = o(\rho^n),
\end{aligned}
$$

其中 $\rho = \sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2}$.

- 推论：在上面定理相同的条件下，有

$$
\begin{aligned}
f(x_0+\Delta x, y_0+\Delta y) =& f(x_0, y_0) + \frac{1}{1!}df(x_0, y_0) + \cdots \\
&+ \frac{1}{n!}d^n f(x_0, y_0) + o(\rho^n). \qquad (\Delta x, \Delta y) \to (0, 0).
\end{aligned}
$$

证明：存在 (x_0, y_0) 的一个小邻域 U_δ(事实上只要满足 $\bar{U}_\delta \subset D$ 即可), 使得 f 的任意 $(n+1)$ 阶偏导数在 U_δ 上有界.

带 Peano 余项的 Taylor 公式1

- 余项估计：若 f 的任意 $(n+1)$ 阶偏导数的绝对值 $\le M$，则

$$
\begin{aligned}
|R_n| =& \left|\frac{1}{(n+1)!} d^{(n+1)} f(x_0+\theta\Delta x, y_0+\theta\Delta y)\right| \\
\le& M\frac{2^{(n+1)}}{(n+1)!}\rho^{n+1} = o(\rho^n),
\end{aligned}
$$

其中 $\rho = \sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2}$.

- 推论：在上面定理相同的条件下，有

$$
\begin{aligned}
f(x_0+\Delta x, y_0+\Delta y) = f(x_0, y_0) + \frac{1}{1!} df(x_0, y_0) + \cdots \\
+ \frac{1}{n!} d^n f(x_0, y_0) + o(\rho^n). \qquad (\Delta x, \Delta y) \to (0,0).
\end{aligned}
$$

证明：存在 (x_0, y_0) 的一个小邻域 U_δ(事实上只要满足 $\bar{U}_\delta \subset D$ 即可)，使得 f 的任意 $(n+1)$ 阶偏导数在 U_δ 上有界.

带 Peano 余项的 Taylor 公式 2

- 注：上面带 Piano 余项的 Taylor 公式只要 $n-1$ 阶偏导数在 (x_0, y_0) 处可微即可.
- 若记 $(\Delta x, \Delta y) = \rho(\cos\alpha, \cos\beta)$，则有

$$\phi^{(k)}(0) = \rho^k(\cos\alpha\frac{\partial}{\partial x} + \cos\beta\frac{\partial}{\partial y})^k f(x_0, y_0).$$

带 Piano 余项的 Taylor 公式可以写成:

$$\begin{aligned} f(x_0+\Delta x, y_0+\Delta y) &= f(x_0, y_0) + \frac{1}{1!}(\cos\alpha\frac{\partial}{\partial x} + \cos\beta\frac{\partial}{\partial y})f(x_0, y_0)\rho \\ &+ \cdots + \frac{1}{n!}(\cos\alpha\frac{\partial}{\partial x} + \cos\beta\frac{\partial}{\partial y})^n f(x_0, y_0)\rho^n + o(\rho^n). \end{aligned}$$

带 Peano 余项的 Taylor 公式 2

- 注：上面带 Piano 余项的 Taylor 公式只要 $n-1$ 阶偏导数在 (x_0, y_0) 处可微即可.
- 若记 $(\Delta x, \Delta y) = \rho(\cos\alpha, \cos\beta)$，则有

$$\phi^{(k)}(0) = \rho^k(\cos\alpha\frac{\partial}{\partial x} + \cos\beta\frac{\partial}{\partial y})^k f(x_0, y_0).$$

带 Piano 余项的 Taylor 公式可以写成：

$$\begin{aligned} f(x_0+\Delta x, y_0+\Delta y) &= f(x_0, y_0) + \frac{1}{1!}(\cos\alpha\frac{\partial}{\partial x} + \cos\beta\frac{\partial}{\partial y})f(x_0, y_0)\rho \\ &+ \cdots + \frac{1}{n!}(\cos\alpha\frac{\partial}{\partial x} + \cos\beta\frac{\partial}{\partial y})^n f(x_0, y_0)\rho^n + o(\rho^n). \end{aligned}$$

- 命题：设 $f \in C^{n+1}(D)$，令 $T_n(\Delta x, \Delta y) = f(x_0, y_0) + \frac{1}{1!} df(x_0, y_0) + \cdots + \frac{1}{n!} d^n f(x_0, y_0)$. 若 $f(x, y)$ 有展开

$$f(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y) = P_n(\Delta x, \Delta y) + o(\rho^n),$$

其中 P_n 是 n 次二元多项式，则有 $P_n = T_n$.

- 证明：取 $\Delta y = \lambda \Delta x$，则有

$$\begin{aligned} f(x_0 + \Delta x, y_0 + \lambda \Delta x) &= P_n(x_0 + \Delta x, y_0 + \lambda \Delta x) + o(\Delta x^n) \\ &= T_n(x_0 + \Delta x, y_0 + \lambda \Delta x) + o(\Delta x^n). \end{aligned}$$

由一元函数 Taylor 公式的唯一性，有 $P_n(x_0 + \Delta x, y_0 + \lambda \Delta x) = T_n(x_0 + \Delta x, y_0 + \lambda \Delta x)$ 对任意 λ 和 Δx 成立，从而有 $P_n = T_n$.

Taylor 公式的唯一性

- 命题：设 $f \in C^{n+1}(D)$，令 $T_n(\Delta x, \Delta y) = f(x_0, y_0) + \frac{1}{1!} df(x_0, y_0) + \cdots + \frac{1}{n!} d^n f(x_0, y_0)$. 若 $f(x, y)$ 有展开

$$f(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y) = P_n(\Delta x, \Delta y) + o(\rho^n),$$

其中 P_n 是 n 次二元多项式，则有 $P_n = T_n$.

- 证明：取 $\Delta y = \lambda \Delta x$，则有

$$\begin{aligned} f(x_0 + \Delta x, y_0 + \lambda\Delta x) &= P_n(x_0 + \Delta x, y_0 + \lambda\Delta x) + o(\Delta x^n) \\ &= T_n(x_0 + \Delta x, y_0 + \lambda\Delta x) + o(\Delta x^n). \end{aligned}$$

由一元函数 Taylor 公式的唯一性，有 $P_n(x_0 + \Delta x, y_0 + \lambda\Delta x) = T_n(x_0 + \Delta x, y_0 + \lambda\Delta x)$ 对任意 λ 和 Δx 成立，从而有 $P_n = T_n$.

Taylor 公式—例1

- 求函数 $f(x,y)=\sin(\frac{\pi}{2}x^2y)$ 在 $(1,1)$ 处的二阶 Taylor 公式(带 Peano 余项).
- 解1：直接计算得 $f(1,1)=1$，$f_x(1,1)=0$，$f_y(1,1)=0$，$f_{xx}(1,1)=-\pi^2$，$f_{xy}(1,1)=-\frac{\pi^2}{2}$，$f_{yy}(1,1)=-\frac{\pi^2}{4}$，由此可得 Taylor 公式

$$\sin(\frac{\pi}{2}x^2y)=1-\frac{\pi^2}{2}((x-1)^2+(x-1)(y-1)+\frac{1}{4}(y-1)^2)+o(\rho^2).$$

- 求函数 $f(x,y)=\sin(\frac{\pi}{2}x^2y)$ 在 $(1,1)$ 处的二阶 Taylor 公式(带 Peano 余项).
- 解1: 直接计算得 $f(1,1)=1$, $f_x(1,1)=0$, $f_y(1,1)=0$, $f_{xx}(1,1)=-\pi^2$, $f_{xy}(1,1)=-\frac{\pi^2}{2}$, $f_{yy}(1,1)=-\frac{\pi^2}{4}$, 由此可得 Taylor 公式

$$\sin(\frac{\pi}{2}x^2y)=1-\frac{\pi^2}{2}((x-1)^2+(x-1)(y-1)+\frac{1}{4}(y-1)^2)+o(\rho^2).$$

Taylor 公式—例2

- 解2：由于

$$\frac{\pi}{2}x^2y=\frac{\pi}{2}[1+2(x-1)+(y-1)+(x-1)^2+2(x-1)(y-1)+o(\rho^2)].$$

我们有

$$\begin{aligned}&\sin(\frac{\pi}{2}x^2y)\\=&\cos\frac{\pi}{2}[2(x-1)+(y-1)+(x-1)^2+2(x-1)(y-1)+o(\rho^2)]\\=&1-\frac{1}{2}[\frac{\pi}{2}(2(x-1)+(y-1))]^2+o(\rho^2)\\=&1-\frac{\pi^2}{2}((x-1)^2+(x-1)(y-1)+\frac{1}{4}(y-1)^2)+o(\rho^2).\end{aligned}$$

- 解2：由于

$$\frac{\pi}{2}x^2y=\frac{\pi}{2}[1+2(x-1)+(y-1)+(x-1)^2+2(x-1)(y-1)+o(\rho^2)].$$

我们有

$$\begin{aligned}
&\sin(\frac{\pi}{2}x^2y)\\
=&\cos\frac{\pi}{2}[2(x-1)+(y-1)+(x-1)^2+2(x-1)(y-1)+o(\rho^2)]\\
=&1-\frac{1}{2}[\frac{\pi}{2}(2(x-1)+(y-1))]^2+o(\rho^2)\\
=&1-\frac{\pi^2}{2}((x-1)^2+(x-1)(y-1)+\frac{1}{4}(y-1)^2)+o(\rho^2).
\end{aligned}$$

- 函数 $y=f(x)$, $x\in D$ 代入 $F(x,y)=0$, 使得 $F(x,f(x))\equiv 0$, 则称 $y=f(x)$, $x\in D$ 是由方程 $F(x,y)=0$ 确定的隐函数.
- 函数 $z=f(x,y)$, $(x,y)\in D$ 代入 $F(x,y,z)=0$, 使得

$$F(x,y,f(x,y))\equiv 0,$$

则称 $z=f(x,y)$, $(x,y)\in D$ 是由方程 $F(x,y,z)=0$ 确定的隐函数.

一个方程确定的隐函数

- 函数 $y=f(x),\ x\in D$ 代入 $F(x,y)=0$, 使得 $F(x,f(x))\equiv 0$, 则称 $y=f(x),\ x\in D$ 是由方程 $F(x,y)=0$ 确定的隐函数.
- 函数 $z=f(x,y),\ (x,y)\in D$ 代入 $F(x,y,z)=0$, 使得
$$F(x,y,f(x,y))\equiv 0,$$
则称 $z=f(x,y),\ (x,y)\in D$ 是由方程 $F(x,y,z)=0$ 确定的隐函数.

二个方程确定的隐函数

- $(x,y) \in D$ 时 $\begin{cases} F(x,y,u(x,y),v(x,y)) \equiv 0 \\ G(x,y,u(x,y),v(x,y)) \equiv 0 \end{cases}$，则称 $\begin{cases} u = u(x,y) \\ v = v(x,y) \end{cases}$，$(x,y) \in D$ 是由方程组 $\begin{cases} F(x,y,u,v) = 0 \\ G(x,y,u,v) = 0 \end{cases}$ 确定的隐函数.
- 若 $x \in D$ 时 $\begin{cases} F(x,u(x),v(x)) \equiv 0 \\ G(x,u(x),v(x)) \equiv 0 \end{cases}$，则称 $\begin{cases} u = u(x) \\ v = v(x) \end{cases}$，$x \in D$ 是由方程组 $\begin{cases} F(x,u,v) = 0 \\ G(x,u,v) = 0 \end{cases}$ 确定的隐函数.

- $(x, y) \in D$ 时 $\begin{cases} F(x, y, u(x, y), v(x, y)) \equiv 0 \\ G(x, y, u(x, y), v(x, y)) \equiv 0 \end{cases}$，则称 $\begin{cases} u = u(x, y) \\ v = v(x, y) \end{cases}$，$(x, y) \in D$ 是由方程组 $\begin{cases} F(x, y, u, v) = 0 \\ G(x, y, u, v) = 0 \end{cases}$ 确定的隐函数.
- 若 $x \in D$ 时 $\begin{cases} F(x, u(x), v(x)) \equiv 0 \\ G(x, u(x), v(x)) \equiv 0 \end{cases}$，则称 $\begin{cases} u = u(x) \\ v = v(x) \end{cases}$，$x \in D$ 是由方程组 $\begin{cases} F(x, u, v) = 0 \\ G(x, u, v) = 0 \end{cases}$ 确定的隐函数.

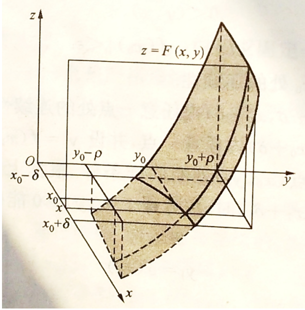
- 定理：$F(x, y)$ 在 $P_0(x_0, y_0)$ 的一个邻域上有定义，且满足
  - $F(x_0, y_0) = 0$,
  - $F_x(x, y), F_y(x, y)$ 连续，且 $F_y(x_0, y_0) \neq 0$.

  则在 x_0 的某个邻域 $(x_0 - \delta, x_0 + \delta)$ 内存在一个函数 $y = f(x)$，使得 $y_0 = f(x_0)$，$F(x, f(x)) \equiv 0, \forall x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta)$. 且 $y = f(x)$ 在 $(x_0 - \delta, x_0 + \delta)$ 上连续、可微，导数为

$$f'(x) = -\frac{F_x(x, y)}{F_y(x, y)}\bigg|_{y=f(x)}.$$

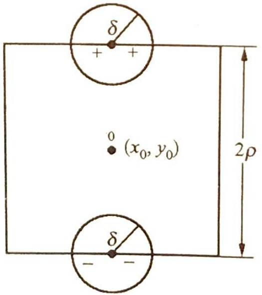
- 注：隐函数 $y = f(x)$ 的切线方向 $(1, f'(x))$ 与 (F_x, F_y) 垂直，(F_x, F_y) 是曲线的法向.

- $F(x,y)=0$ 的图形为曲面 $z=F(x,y)$ 和 $z=0$ 的交线，因此一般表示一条曲线，法向量为 (F_x,F_y). $F_y(x_0,y_0)\neq 0$ 保证该点处切线不垂直于 x 轴，此时 x_0 附近的交线可以由一个(隐)函数确定.



隐函数存在定理1的证明思路

- 证明思路：不妨设 $F_y(x_0, y_0) > 0$, $F(x_0, y)$ 作为 y 的函数在 y_0 附近单调增，存在 $\rho > 0$, 使得 $F(x_0, y_0 + \rho) > 0$, $F(x_0, y_0 - \rho) < 0$. 由 $F(x, y)$ 的连续性，存在 $\delta > 0$, 使得对 $x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta)$, $F(x, y_0 + \rho) > 0$ 且 $F(x, y_0 - \rho) < 0$. 由介值定理，对任意 $x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta)$，存在 $y = y(x)$, 使得 $F(x, y(x)) = 0$.



- 隐函数的导数：设 $\Delta y = f(x+\Delta x) - f(x)$，则

$$0 \equiv F(x+\Delta x, f(x)+\Delta y) - F(x, f(x)),$$

由 Langrange 中值定理，存在 $\theta \in (0,1)$，使得

$$0 = F_x(x+\theta\Delta x, f(x)+\theta\Delta y)\Delta x + F_y(x+\theta\Delta x, f(x)+\theta\Delta y)\Delta y.$$

因此

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = -\frac{F_x(x+\theta\Delta x, f(x)+\theta\Delta y)}{F_y(x+\theta\Delta x, f(x)+\theta\Delta y)}.$$

令 $\Delta x \to 0$ 即得

$$f'(x) = -\frac{F_x(x,y)}{F_y(x,y)}\Big|_{y=f(x)}.$$

- 隐函数的导数：设 $\Delta y = f(x+\Delta x) - f(x)$，则

$$0 \equiv F(x+\Delta x, f(x)+\Delta y) - F(x, f(x)),$$

由 Langrange 中值定理，存在 $\theta \in (0,1)$，使得

$$0 = F_x(x+\theta\Delta x, f(x)+\theta\Delta y)\Delta x + F_y(x+\theta\Delta x, f(x)+\theta\Delta y)\Delta y.$$

因此

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = -\frac{F_x(x+\theta\Delta x, f(x)+\theta\Delta y)}{F_y(x+\theta\Delta x, f(x)+\theta\Delta y)}.$$

令 $\Delta x \to 0$ 即得

$$f'(x) = -\frac{F_x(x,y)}{F_y(x,y)}\Big|_{y=f(x)}.$$

- 隐函数的导数：设 $\Delta y = f(x+\Delta x) - f(x)$，则

$$0 \equiv F(x+\Delta x, f(x)+\Delta y) - F(x, f(x)),$$

由 Langrange 中值定理，存在 $\theta \in (0,1)$，使得

$$0 = F_x(x+\theta\Delta x, f(x)+\theta\Delta y)\Delta x + F_y(x+\theta\Delta x, f(x)+\theta\Delta y)\Delta y.$$

因此

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = -\frac{F_x(x+\theta\Delta x, f(x)+\theta\Delta y)}{F_y(x+\theta\Delta x, f(x)+\theta\Delta y)}.$$

令 $\Delta x \to 0$ 即得

$$f'(x) = -\frac{F_x(x,y)}{F_y(x,y)}\Big|_{y=f(x)}.$$

一元隐函数微分法

- 隐函数的导数：设 $\Delta y = f(x+\Delta x) - f(x)$，则

$$0 \equiv F(x+\Delta x, f(x)+\Delta y) - F(x, f(x)),$$

由 Langrange 中值定理，存在 $\theta \in (0,1)$，使得

$$0 = F_x(x+\theta\Delta x, f(x)+\theta\Delta y)\Delta x + F_y(x+\theta\Delta x, f(x)+\theta\Delta y)\Delta y.$$

因此

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = -\frac{F_x(x+\theta\Delta x, f(x)+\theta\Delta y)}{F_y(x+\theta\Delta x, f(x)+\theta\Delta y)}.$$

令 $\Delta x \to 0$ 即得

$$f'(x) = -\frac{F_x(x,y)}{F_y(x,y)}\Big|_{y=f(x)}.$$

- 例： $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ 在 $(\frac{a}{\sqrt{2}},\frac{b}{\sqrt{2}})$ 点附近确定隐函数$y=y(x)$, 求 $y'(\frac{a}{\sqrt{2}})$.

  解：设 $F(x,y)=\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}$， $F_x(x,y)=\frac{2x}{a^2}$, $F_y(x,y)=\frac{2y}{b^2}$, 因此有

$$y'(x)=-\frac{F_x}{F_y}=-\frac{b^2x}{a^2y}\Longrightarrow y'(\frac{a}{\sqrt{2}})=-\frac{b}{a}.$$

- 注：也可用第二章中的方法，对方程 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ 两边对 x 求导（y 看成 x 的函数）．也可两边微分得 $F_xdx+F_ydy=0$, $\frac{dy}{dx}=-\frac{F_x}{F_y}$.

一元隐函数微分法—例

- 例：$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ 在 $(\frac{a}{\sqrt{2}},\frac{b}{\sqrt{2}})$ 点附近确定隐函数$y=y(x)$，求 $y'(\frac{a}{\sqrt{2}})$.

  解：设 $F(x,y)=\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}$，$F_x(x,y)=\frac{2x}{a^2}$，$F_y(x,y)=\frac{2y}{b^2}$，因此有

$$y'(x)=-\frac{F_x}{F_y}=-\frac{b^2x}{a^2y}\Longrightarrow y'(\frac{a}{\sqrt{2}})=-\frac{b}{a}.$$

- 注：也可用第二章中的方法，对方程 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ 两边对 x 求导（y 看成 x 的函数）. 也可两边微分得 $F_xdx+F_ydy=0$, $\frac{dy}{dx}=-\frac{F_x}{F_y}$.

一元隐函数微分法—例

- 例：$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ 在 $(\frac{a}{\sqrt{2}},\frac{b}{\sqrt{2}})$ 点附近确定隐函数$y=y(x)$，求 $y'(\frac{a}{\sqrt{2}})$.

  解：设 $F(x,y)=\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}$，$F_x(x,y)=\frac{2x}{a^2}$，$F_y(x,y)=\frac{2y}{b^2}$，因此有

$$y'(x)=-\frac{F_x}{F_y}=-\frac{b^2x}{a^2y}\Longrightarrow y'(\frac{a}{\sqrt{2}})=-\frac{b}{a}.$$

- 注：也可用第二章中的方法，对方程 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ 两边对 x 求导（y 看成 x 的函数）. 也可两边微分得 $F_xdx+F_ydy=0$，$\frac{dy}{dx}=-\frac{F_x}{F_y}$.

- 定理：$F(x, y, z)$ 在 $M_0(x_0, y_0, z_0)$ 的一个邻域上有定义，满足
  - $F(x_0, y_0, z_0) = 0$,
  - $F_x(x, y, z), F_y(x, y, z), F_z(x, y, z)$ 连续，且 $F_z(x_0, y_0, z_0) \neq 0$.

则在 (x_0, y_0) 的某个邻域 D，和 D 上的函数 $z = z(x, y)$，使得 $z_0 = z(x_0, y_0)$，$F(x, y, z(x, y)) \equiv 0$, $\forall (x, y) \in D$. 且 $z = z(x, y) \in C^1(D)$,

$$\frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{F_x}{F_z}, \quad \frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{F_y}{F_z}.$$

- 注：曲面 $F(x, y, z) = 0$ 在 (x_0, y_0, z_0) 的法向量为

$$(F_x(x_0, y_0, z_0), F_y(x_0, y_0, z_0), F_z(x_0, y_0, z_0)).$$

条件 $F_z(x_0, y_0, z_0) \neq 0$ 保证该点处的切平面和 z 轴不平行.

- 定理：$F(x,y,z)$ 在 $M_0(x_0,y_0,z_0)$ 的一个邻域上有定义，满足
  - $F(x_0,y_0,z_0)=0$，
  - $F_x(x,y,z), F_y(x,y,z), F_z(x,y,z)$ 连续，且 $F_z(x_0,y_0,z_0)\neq 0$.

则在 (x_0,y_0) 的某个邻域 D，和 D 上的函数 $z=z(x,y)$，使得 $z_0=z(x_0,y_0)$，$F(x,y,z(x,y))\equiv 0$, $\forall (x,y)\in D$. 且 $z=z(x,y)\in C^1(D)$，

$$\frac{\partial z}{\partial x}=-\frac{F_x}{F_z},\quad \frac{\partial z}{\partial y}=-\frac{F_y}{F_z}.$$

- 注：曲面 $F(x,y,z)=0$ 在 (x_0,y_0,z_0) 的法向量为

$$(F_x(x_0,y_0,z_0), F_y(x_0,y_0,z_0), F_z(x_0,y_0,z_0)).$$

条件 $F_z(x_0,y_0,z_0)\neq 0$ 保证该点处的切平面和 z 轴不平行.

- 若 $F(x,y,z)=0$ 确定隐函数 $z=z(x,y)$. 方程 $F(x,y,z)=0$ 两边对 x,y 求偏导数得(z 看成 x,y 的函数),

$$F_x+F_z\frac{\partial z}{\partial x}=0,\qquad F_y+F_z\frac{\partial z}{\partial y}=0,$$

因此有 $\frac{\partial z}{\partial x}=-\frac{F_x}{F_z}$, $\frac{\partial z}{\partial y}=-\frac{F_y}{F_z}$.

- 也可方程两边微分:

$$F_xdx+F_ydy+F_zdz=0\Longrightarrow dz=-\frac{F_x}{F_z}dx-\frac{F_y}{F_z}dy.$$

- 若 $F(x,y,z)=0$ 确定隐函数 $z=z(x,y)$. 方程 $F(x,y,z)=0$ 两边对 x,y 求偏导数得(z 看成 x,y 的函数),

$$F_x+F_z\frac{\partial z}{\partial x}=0,\qquad F_y+F_z\frac{\partial z}{\partial y}=0,$$

因此有 $\frac{\partial z}{\partial x}=-\frac{F_x}{F_z}$, $\frac{\partial z}{\partial y}=-\frac{F_y}{F_z}$.

- 也可方程两边微分:

$$F_xdx+F_ydy+F_zdz=0\Longrightarrow dz=-\frac{F_x}{F_z}dx-\frac{F_y}{F_z}dy.$$

- 例： 求 $xy + yz + e^{xz} = 3$ 确定的隐函数 $z(x, y)$ 的偏导数.

  解：设 $F(x, y, z) = xy + yz + e^{xz} - 3$, $F_x = y + ze^{xz}$, $F_y = x + z$, $F_z = y + xe^{xz}$,

$$z_x = -\frac{y + ze^{xz}}{y + xe^{xz}}, \quad z_y = -\frac{x + z}{y + xe^{xz}}.$$

  也可对方程两边求偏导数: $y + yz_x + e^{xz}(z + xz_x) = 0$, $x + z + yz_y + e^{xz}xz_y = 0$.

- 例：求 $F(x-y, y-z)=0$ 确定的隐函数 $z=z(x,y)$ 的偏导数(这里 $F\in C^1$).

解：方程两边对 x,y 求偏导，$F_1'+F_2'(-\frac{\partial z}{\partial x})=0$, $-F_1'+F_2'(1-\frac{\partial z}{\partial y})=0$, 由此可得

$$\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{F_1'(x-y,y-z)}{F_2'(x-y,y-z)},$$
$$\frac{\partial z}{\partial y}=\frac{-F_1'(x-y,y-z)+F_2'(x-y,y-z)}{F_2'(x-y,y-z)}.$$

- 注：可令 $G(x,y,z)=F(x-y,y-z)$, $G_x=F_1'$, $G_y=-F_1'+F_2'$, $G_z=-F_2'$, 利用 $\frac{\partial z}{\partial x}=-\frac{G_x}{G_z}$, $\frac{\partial z}{\partial y}=-\frac{G_y}{G_z}$ 也可得到上面的偏导数公式.

- 例：求 $F(x-y,y-z)=0$ 确定的隐函数 $z=z(x,y)$ 的偏导数(这里 $F\in C^1$).

  解：方程两边对 x,y 求偏导，$F_1'+F_2'(-\frac{\partial z}{\partial x})=0$, $-F_1'+F_2'(1-\frac{\partial z}{\partial y})=0$, 由此可得

$$\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{F_1'(x-y,y-z)}{F_2'(x-y,y-z)},$$
$$\frac{\partial z}{\partial y}=\frac{-F_1'(x-y,y-z)+F_2'(x-y,y-z)}{F_2'(x-y,y-z)}.$$

.

- 注：可令 $G(x,y,z)=F(x-y,y-z)$, $G_x=F_1'$, $G_y=-F_1'+F_2'$, $G_z=-F_2'$, 利用 $\frac{\partial z}{\partial x}=-\frac{G_x}{G_z}$, $\frac{\partial z}{\partial y}=-\frac{G_y}{G_z}$ 也可得到上面的偏导数公式.

- 例：求 $F(x-y, y-z)=0$ 确定的隐函数 $z=z(x,y)$ 的偏导数(这里 $F\in C^1$).

  解：方程两边对 x, y 求偏导，$F_1'+F_2'(-\frac{\partial z}{\partial x})=0$, $-F_1'+F_2'(1-\frac{\partial z}{\partial y})=0$, 由此可得

$$\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{F_1'(x-y,y-z)}{F_2'(x-y,y-z)},$$
$$\frac{\partial z}{\partial y}=\frac{-F_1'(x-y,y-z)+F_2'(x-y,y-z)}{F_2'(x-y,y-z)}.$$

- 注：可令 $G(x,y,z)=F(x-y,y-z)$, $G_x=F_1'$, $G_y=-F_1'+F_2'$, $G_z=-F_2'$, 利用 $\frac{\partial z}{\partial x}=-\frac{G_x}{G_z}$, $\frac{\partial z}{\partial y}=-\frac{G_y}{G_z}$ 也可得到上面的偏导数公式.

两曲面的交线

- 若 $\begin{cases} y = y(x) \\ z = z(x) \end{cases}$ 是曲面 $F(x,y,z) = 0$ 和 $G(x,y,z) = 0$ 的交线. 设 $(x_0, y_0, z_0) = (x_0, y(x_0), z(x_0))$ 处 (F_x, F_y, F_z) 和 (G_x, G_y, G_z) 不共线(即两曲面不相切), 则 $x = x, y = y(x), z = z(x)$ 是交线的参数方程, (x_0, y_0, z_0) 处的切向量 $(1, y'(x_0), z'(x_0))$ 平行于

$$(F_x, F_y, F_z) \times (G_x, G_y, G_z)\big|_{(x_0,y_0,z_0)}$$
$$= (F_y G_z - F_z G_y, F_z G_x - F_x G_z, F_x G_y - F_y G_x)\big|_{(x_0,y_0,z_0)},$$

因此在 (x_0, y_0, z_0) 处

$$\frac{D(F,G)}{D(y,z)} = \begin{vmatrix} F_y & F_z \\ G_y & G_z \end{vmatrix} = F_y G_z - F_z G_y \neq 0.$$

- $\begin{cases} F(x,u,v)=0 \\ G(x,u,v)=0 \end{cases}$ 确定的隐函数存在定理:

设 $F, G \in C^1$, $F(x_0,u_0,v_0)=0$, $G(x_0,u_0,v_0)=0$.

$$(F_u G_v - F_v G_u)\big|_{(x_0,u_0,v_0)} \neq 0.$$

则存在 x_0 的邻域 D, 以及 D 上的函数 $u(x)$, $v(x) \in C^1(D)$ 使得 $u_0 = u(x_0)$, $v_0 = v(x_0)$, 而且

$$\begin{cases} F(x,u(x),v(x)) \equiv 0 \\ G(x,u(x),v(x)) \equiv 0 \end{cases}.$$

- $\begin{cases} F(x,u,v)=0 \\ G(x,u,v)=0 \end{cases}$ 确定的隐函数存在定理:

  设 $F,G\in C^1$, $F(x_0,u_0,v_0)=0$, $G(x_0,u_0,v_0)=0$.

$$(F_uG_v-F_vG_u)\big|_{(x_0,u_0,v_0)}\neq 0.$$

  则存在 x_0 的邻域 D, 以及 D 上的函数 $u(x)$, $v(x)\in C^1(D)$ 使得 $u_0=u(x_0)$, $v_0=v(x_0)$, 而且

$$\begin{cases} F(x,u(x),v(x))\equiv 0 \\ G(x,u(x),v(x))\equiv 0 \end{cases}.$$

方程组确定的一元函数2

- 若方程组 $\begin{cases} F(x,u,v)=0 \\ G(x,u,v)=0 \end{cases}$ 确定隐函数 $\begin{cases} u=u(x) \\ v=v(x) \end{cases}$，即

$$\begin{cases} F(x,u(x),v(x)) \equiv 0 \\ G(x,u(x),v(x)) \equiv 0 \end{cases},$$

对 x 求导得

$$\begin{cases} F_1' + F_2'u' + F_3'v' = 0 \\ G_1' + G_2'u' + G_3'v' = 0 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} u'(x) = \frac{F_3'G_1' - F_1'G_3'}{F_2'G_3' - F_3'G_2'} \\ \\ v'(x) = \frac{F_1'G_2' - F_2'G_1'}{F_2'G_3' - F_3'G_2'} \end{cases}$$

- 若方程组 $\begin{cases} F(x,u,v)=0 \\ G(x,u,v)=0 \end{cases}$ 确定隐函数 $\begin{cases} u=u(x) \\ v=v(x) \end{cases}$, 即

$$\begin{cases} F(x,u(x),v(x))\equiv 0 \\ G(x,u(x),v(x))\equiv 0 \end{cases},$$

对 x 求导得

$$\begin{cases} F_1'+F_2'u'+F_3'v'=0 \\ G_1'+G_2'u'+G_3'v'=0 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} u'(x)=\frac{F_3'G_1'-F_1'G_3'}{F_2'G_3'-F_3'G_2'} \\ \\ v'(x)=\frac{F_1'G_2'-F_2'G_1'}{F_2'G_3'-F_3'G_2'} \end{cases}$$

方程组确定的二元函数1

- 方程组 $\begin{cases} F(x,y,u,v)=0 \\ G(x,y,u,v)=0 \end{cases}$ 确定的隐函数存在定理:

设 $F,G\in C^1$, $(F_uG_v-F_vG_u)\big|_{(x_0,y_0;u_0,v_0)}\neq 0$.

$$\begin{cases} F(x_0,y_0,u_0,v_0)=0 \\ G(x_0,y_0,u_0,v_0)=0 \end{cases}.$$

则存在 (x_0,y_0) 的邻域 D, 以及 D 上的函数 $u(x,y)$, $v(x,y)\in C^1$ 满足 $u_0=u(x_0,y_0)$, $v_0=v(x_0,y_0)$,

$$\begin{cases} F(x,y,u(x,y),v(x,y))\equiv 0, \\ G(x,y,u(x,y),v(x,y))\equiv 0. \end{cases}$$

方程组确定的二元函数2

- 设方程组 $\begin{cases} F(x,y,u,v)=0 \\ G(x,y,u,v)=0 \end{cases}$ 确定隐函数 $u(x,y)$, $v(x,y)$, 则有 $F(x,y,u(x,y),v(x,y)) \equiv 0$, $G(x,y,u(x,y),v(x,y)) \equiv 0$, 偏导数满足

$$\begin{cases} F_x + F_u \frac{\partial u}{\partial x} + F_v \frac{\partial v}{\partial x} = 0 \\ \\ G_x + G_u \frac{\partial u}{\partial x} + G_v \frac{\partial v}{\partial x} = 0 \end{cases}, \qquad \begin{cases} F_y + F_u \frac{\partial u}{\partial y} + F_v \frac{\partial v}{\partial y} = 0 \\ \\ G_x + G_u \frac{\partial u}{\partial y} + G_v \frac{\partial v}{\partial y} = 0 \end{cases}.$$

由此方程组可解出 $\frac{\partial u}{\partial x}$, $\frac{\partial u}{\partial y}$, $\frac{\partial v}{\partial x}$, $\frac{\partial v}{\partial y}$.

例1

- 例：由讨论方程组

$$\begin{cases} x^2 + y^2 - uv = 0 \\ xy + u^2 - v^2 = 0 \end{cases},$$

确定的隐函数 $u(x,y)$, $v(x,y)$ 的存在性，存在时求 u_x, u_y, v_x, v_y.

解：令 $F(x,y,u,v) = x^2 + y^2 - uv$, $G(x,y,u,v) = xy + u^2 - v^2$, 则 $F_u G_v - F_v G_u = 2(u^2 + v^2)$. 若 (x_0, y_0, u_0, v_0) 满足上面的方程组. 当 $(x_0, y_0) \neq (0,0)$ 时, u_0, v_0 不能同时为 0, 此时 $F_u G_v - f_v G_u \neq 0$, 因此在 (x_0, y_0)的某个邻域上确定隐函数 $u(x,y)$, $v(x,y)$.

例1

- 例：由讨论方程组
$$\begin{cases} x^2+y^2-uv=0 \\ xy+u^2-v^2=0 \end{cases},$$
确定的隐函数 $u(x,y)$, $v(x,y)$ 的存在性，存在时求 u_x, u_y, v_x, v_y.
解：令 $F(x,y,u,v)=x^2+y^2-uv$, $G(x,y,u,v)=xy+u^2-v^2$，则 $F_uG_v-F_vG_u=2(u^2+v^2)$. 若 (x_0,y_0,u_0,v_0) 满足上面的方程组. 当 $(x_0,y_0)\neq(0,0)$ 时，u_0, v_0 不能同时为 0，此时 $F_uG_v-f_vG_u\neq 0$，因此在 (x_0,y_0)的某个邻域上确定隐函数 $u(x,y)$, $v(x,y)$.

例2

- 下面求 $u(x,y)$ 和 $v(x,y)$ 的偏导数. 对 x 求偏导,

$$\begin{cases} 2x - u_x v - u v_x = 0 \\ y + 2u u_x - 2v v_x = 0 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} u_x = \frac{4xv - yu}{2(u^2+v^2)} \\ v_x = \frac{4xu + yv}{2(u^2+v^2)} \end{cases}.$$

对 y 求偏导,

$$\begin{cases} 2y - u_y v - u v_y = 0 \\ x + 2u u_y - 2v v_y = 0 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} u_y = \frac{4yv - xu}{2(u^2+v^2)} \\ v_y = \frac{4yu + xv}{2(u^2+v^2)} \end{cases}.$$

例2

- 下面求 $u(x,y)$ 和 $v(x,y)$ 的偏导数. 对 x 求偏导,

$$\begin{cases} 2x - u_x v - u v_x = 0 \\ y + 2u u_x - 2v v_x = 0 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} u_x = \frac{4xv - yu}{2(u^2+v^2)} \\ v_x = \frac{4xu + yv}{2(u^2+v^2)} \end{cases}.$$

对 y 求偏导,

$$\begin{cases} 2y - u_y v - u v_y = 0 \\ x + 2u u_y - 2v v_y = 0 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} u_y = \frac{4yv - xu}{2(u^2+v^2)} \\ v_y = \frac{4yu + xv}{2(u^2+v^2)} \end{cases}.$$

逆映射的存在性定理1

- 设映射

$$f:(u,v)\mapsto(x,y),\quad x=x(u,v),y=y(u,v).$$

令 $F(x,y,u,v)=x-x(u,v),G(x,y,u,v)=y-y(u,v)$, 若 $x(u,v)$, $y(u,v)\in C^1$, $F_uG_v-F_vG_u=x_uy_v-x_vy_u\neq 0$. 则 $\begin{cases}F(x,y,u,v)=0\\G(x,y,u,v)=0\end{cases}$ 确定隐函数 $u=u(x,y)$, $v=v(x,y)$,

$$x(u(x,y),v(x,y))=x,\quad y(u(x,y),v(x,y))=y.$$

定义映射 $g:(x,y)\mapsto(u(x,y),v(x,y))$, 则

$$f\circ g:(x,y)\mapsto\big(x(u(x,y),v(x,y)),y(u(x,y),v(x,y))\big)=(x,y).$$

逆映射的存在性定理2

- 定理：设 $x = x(u,v), y = y(u,v)$ 是 (u_0,v_0) 的一个邻域上定义的函数，且有连续偏导数. 若 Jacobi 行列式

$$\left.\frac{D(x,y)}{D(u,v)}\right|_{(u_0,v_0)} = x_u y_v - x_v y_u|_{(u_0,v_0)} \neq 0, \begin{cases} x_0 = x(u_0,v_0) \\ y_0 = y(u_0,v_0) \end{cases}.$$

则存在 (u_0,v_0) 的邻域 U, (x_0,y_0) 的邻域 D, 以及 D 上的函数 $u = u(x,y)$, $v = v(x,y) \in C^1(D)$ 满足 $u_0 = u(x_0,y_0)$, $v_0 = v(x_0,y_0)$, 且映射

$$D \to U : (x,y) \mapsto (u(x,y), v(x,y))$$

是映射

$$U \to D : (u,v) \mapsto (x(u,v), y(u,v))$$

的逆映射.

- $\begin{cases} x = x(u,v) \\ y = y(u,v) \end{cases}$, $x(u,v), y = y(u,v) \in C^1$, 逆映射函数 $u = u(x,y)$, $v = v(x,y)$ 的偏导数满足

$$\begin{cases} 1 = x_u \dfrac{\partial u}{\partial x} + x_v \dfrac{\partial v}{\partial x} \\ 0 = y_u \dfrac{\partial u}{\partial x} + y_v \dfrac{\partial v}{\partial x} \end{cases}, \qquad \begin{cases} 0 = x_u \dfrac{\partial u}{\partial y} + x_v \dfrac{\partial v}{\partial y} \\ 1 = y_u \dfrac{\partial u}{\partial y} + y_v \dfrac{\partial v}{\partial y} \end{cases}.$$

- n 为逆映射存在定理: 映射 $f : (x_1, x_2, \cdots, x_n) \mapsto (y_1, y_2, \cdots, y_n)$, $y_k = f_k(x_1, x_2, \cdots, x_n)$, $k = 1, 2, \cdots, n$. 若 f 的 Jacobi 行列式

$$\frac{D(y_1, y_2, \cdots, y_n)}{D(x_1, x_2, \cdots, x_n)} = \begin{vmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ \frac{\partial f_n}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial f_n}{\partial x_n}. \end{vmatrix} \neq 0$$

则存在局部逆映射.

逆映射的存在性定理3

- $\begin{cases} x = x(u,v) \\ y = y(u,v) \end{cases}$, $x(u,v), y = y(u,v) \in C^1$, 逆映射函数 $u = u(x,y)$, $v = v(x,y)$ 的偏导数满足

$$\begin{cases} 1 = x_u \dfrac{\partial u}{\partial x} + x_v \dfrac{\partial v}{\partial x} \\ \\ 0 = y_u \dfrac{\partial u}{\partial x} + y_v \dfrac{\partial v}{\partial x} \end{cases}, \qquad \begin{cases} 0 = x_u \dfrac{\partial u}{\partial y} + x_v \dfrac{\partial v}{\partial y} \\ \\ 1 = y_u \dfrac{\partial u}{\partial y} + y_v \dfrac{\partial v}{\partial y} \end{cases}.$$

- n 为逆映射存在定理: 映射 $f : (x_1, x_2, \cdots, x_n) \mapsto (y_1, y_2, \cdots, y_n)$, $y_k = f_k(x_1, x_2, \cdots, x_n)$, $k = 1, 2, \cdots, n$. 若 f 的 Jacobi 行列式

$$\frac{D(y_1, y_2, \cdots, y_n)}{D(x_1, x_2, \cdots, x_n)} = \begin{vmatrix} \dfrac{\partial f_1}{\partial x_1} & \cdots & \dfrac{\partial f_1}{\partial x_n} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ \dfrac{\partial f_n}{\partial x_1} & \cdots & \dfrac{\partial f_n}{\partial x_n}. \end{vmatrix} \neq 0$$

则存在局部逆映射.

例

- 例：$\begin{cases} x = r\cos\theta \\ y = r\sin\theta \end{cases}$，若 $(x_0, y_0), (r_0, \theta_0)$ 满足上述方程组，且 $x_r y_\theta - x_\theta y_r|_{(r_0,\theta_0)} = r_0 = \sqrt{x_0^2 + y_0^2} \neq 0$，则存在 (x_0, y_0) 的某个邻域上定义的逆变换 $r = r(x, y)$, $\theta = \theta(x, y)$. 偏导数满足

$$\begin{cases} 1 = r_x \cos\theta - \theta_x r \sin\theta \\ 0 = r_x \sin\theta + \theta_x r \cos\theta \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} r_x = \cos\theta \\ \theta_x = -\dfrac{\sin\theta}{r} \end{cases}.$$

- 例：$\begin{cases} x = r\cos\theta\sin\phi \\ y = r\sin\theta\sin\phi \\ z = r\cos\phi \end{cases}$ 的 Jacobi 行列式为 $r^2\sin\phi$.

- 例： $\begin{cases} x = r\cos\theta \\ y = r\sin\theta \end{cases}$，若 $(x_0, y_0), (r_0, \theta_0)$ 满足上述方程组，且 $x_r y_\theta - x_\theta y_r|_{(r_0,\theta_0)} = r_0 = \sqrt{x_0^2 + y_0^2} \neq 0$，则存在 (x_0, y_0) 的某个邻域上定义的逆变换 $r = r(x, y)$，$\theta = \theta(x, y)$. 偏导数满足

$$\begin{cases} 1 = r_x \cos\theta - \theta_x r\sin\theta \\ 0 = r_x \sin\theta + \theta_x r\cos\theta \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} r_x = \cos\theta \\ \theta_x = -\frac{\sin\theta}{r} \end{cases}.$$

- 例： $\begin{cases} x = r\cos\theta\sin\phi \\ y = r\sin\theta\sin\phi \\ z = r\cos\phi \end{cases}$ 的 Jacobi 行列式为 $r^2\sin\phi$.

- 定义：$f(x,y)$ 在集合 D 上定义，(x_0,y_0) 是 D 的内点. 若存在 (x_0,y_0) 的一个领域 U_δ 使得

$$f(x,y) \le f(x_0,y_0), \quad \forall (x,y) \in U_\delta$$

成立，则称 (x_0,y_0) 为 f 的一个极大值点, $f(x_0,y_0)$ 称为 $f(x,y)$ 的一个极大值. 类似可定义极小值点与极小值. 极大值点和极小值点统称为极值点，极大值和极小值统称为极值.

- 定义：$f(x,y)$ 在集合 D 上定义，若 $(x_0,y_0) \in D$ 满足

$$f(x,y) \le f(x_0,y_0), \quad \forall (x,y) \in D,$$

则称 $f(x_0,y_0)$ 为 $f(x,y)$ 在 D 上的最大值, (x_0,y_0) 为 f 在 D 上的最值点. 类似可定义最小值点与最小值.

- 定义：$f(x,y)$ 在集合 D 上定义，(x_0,y_0) 是 D 的内点. 若存在 (x_0,y_0) 的一个领域 U_δ 使得

$$f(x,y) \leq f(x_0,y_0), \quad \forall (x,y) \in U_\delta$$

成立，则称 (x_0,y_0) 为 f 的一个极大值点, $f(x_0,y_0)$ 称为 $f(x,y)$ 的一个极大值. 类似可定义极小值点与极小值. 极大值点和极小值点统称为极值点，极大值和极小值统称为极值.

- 定义：$f(x,y)$ 在集合 D 上定义，若 $(x_0,y_0) \in D$ 满足

$$f(x,y) \leq f(x_0,y_0), \quad \forall (x,y) \in D,$$

则称 $f(x_0,y_0)$ 为 $f(x,y)$ 在 D 上的最大值, (x_0,y_0) 为 f 在 D 上的最值点. 类似可定义最小值点与最小值.

极值的必要条件

- 定理（极值的必要条件）：若 (x_0, y_0) 是 $f(x, y)$ 的极值点，且 $f_x(x_0, y_0)$, $f_y(x_0, y_0)$ 均存在，则 $f_x(x_0, y_0) = f_y(x_0, y_0) = 0$.

证明：$x = x_0$ 是 $f(x, y_0)$ 的极值点，且在 $x = x_0$ 处可导，因此

$$\frac{d}{dx} f(x, y_0)\Big|_{x=x_0} = f_x(x_0, y_0) = 0.$$

- 注：若 (x_0, y_0) 是 $f(x, y)$ 的极值点，$\vec{l} = (\cos\alpha, \cos\beta)$，则 $t = 0$ 是 $\phi(t) = f(x_0 + t\cos\alpha, y_0 + t\cos\beta)$ 的极值点．若 $\frac{\partial f}{\partial \vec{l}}\big|_{(x_0,y_0)}$ 存在，即 $\phi(t)$ 在 0 点可导，则有 $\phi'(0) = \frac{\partial f}{\partial \vec{l}}\big|_{(x_0,y_0)} = 0$.
- 定义：满足 $f_x(x_0, y_0) = f_y(x_0, y_0) = 0$ 的点 (x_0, y_0) 称为 f 的稳定点.

- 定理（极值的必要条件）：若 (x_0, y_0) 是 $f(x, y)$ 的极值点，且 $f_x(x_0, y_0)$, $f_y(x_0, y_0)$ 均存在，则 $f_x(x_0, y_0) = f_y(x_0, y_0) = 0$.

  证明：$x = x_0$ 是 $f(x, y_0)$ 的极值点，且在 $x = x_0$ 处可导，因此

$$\frac{d}{dx} f(x, y_0)\Big|_{x=x_0} = f_x(x_0, y_0) = 0.$$

- 注：若 (x_0, y_0) 是 $f(x, y)$ 的极值点，$\vec{l} = (\cos\alpha, \cos\beta)$，则 $t = 0$ 是 $\phi(t) = f(x_0 + t\cos\alpha, y_0 + t\cos\beta)$ 的极值点. 若 $\frac{\partial f}{\partial \vec{l}}|_{(x_0,y_0)}$ 存在，即 $\phi(t)$ 在 0 点可导，则有 $\phi'(0) = \frac{\partial f}{\partial \vec{l}}|_{(x_0,y_0)} = 0$.
- 定义：满足 $f_x(x_0, y_0) = f_y(x_0, y_0) = 0$ 的点 (x_0, y_0) 称为 f 的稳定点.

极值的必要条件

- 定理（极值的必要条件）：若 (x_0, y_0) 是 $f(x, y)$ 的极值点，且 $f_x(x_0, y_0)$, $f_y(x_0, y_0)$ 均存在，则 $f_x(x_0, y_0) = f_y(x_0, y_0) = 0$.

  证明：$x = x_0$ 是 $f(x, y_0)$ 的极值点，且在 $x = x_0$ 处可导，因此

$$\frac{d}{dx} f(x, y_0)\Big|_{x=x_0} = f_x(x_0, y_0) = 0.$$

- 注：若 (x_0, y_0) 是 $f(x, y)$ 的极值点，$\vec{l} = (\cos\alpha, \cos\beta)$，则 $t = 0$ 是 $\phi(t) = f(x_0 + t\cos\alpha, y_0 + t\cos\beta)$ 的极值点. 若 $\frac{\partial f}{\partial \vec{l}}|_{(x_0,y_0)}$ 存在，即 $\phi(t)$ 在 0 点可导，则有 $\phi'(0) = \frac{\partial f}{\partial \vec{l}}|_{(x_0,y_0)} = 0$.
- 定义：满足 $f_x(x_0, y_0) = f_y(x_0, y_0) = 0$ 的点 (x_0, y_0) 称为 f 的稳定点.

一元函数极值点的判别方法

- 设 $f'(x_0) = 0$，若两边单调性相反，则是极值点.
- 设 $f'(x_0) = 0$，若 $f'(x)$ 在 x_0 两边的符号相反，则是极值点.
- 设 $f'(x_0) = 0$，若 f 在 x_0 处有二阶导数. 若 $f''(x_0) < 0$, 则 x_0 为极大点; 若 $f''(x_0) > 0$, 则 x_0 为极小点. ($f''(x_0) = 0$, 不定)

- 若 $f(x,y)=Ax^2+2Bxy+Cy^2$, 当 $B^2\neq AC$ 时 $(0,0)$ 是唯一的稳定点， 当 $A\neq 0$ 时,

$$Ax^2+2Bxy+Cy^2=\frac{1}{A}[(Ax+By)^2+(AC-B^2)y^2],$$

若 $C\neq 0$ 时,

$$Ax^2+2Bxy+Cy^2=\frac{1}{C}[(AC-B^2)x^2+(Bx+Cy)^2].$$

$A=C=0$ 时, $f(x,y)=2Bxy$.

若 $B^2<AC$, 则当 $A>0$ 时, $(0,0)$ 是极小点(也是最小点); 当 $A<0$ 时, $(0,0)$ 是极大点(也是最大点).

$B^2>AC$, $(0,0)$ 一定不是极值点.

多元函数极值点的判别定理

- 设 $z=f(x,y)$ 在 (x_0,y_0) 的一个邻域内有连续的二阶偏导数，且 $f_x(x_0,y_0)=0$, $f_y(x_0,y_0)=0$. 记 $A=f_{xx}(x_0,y_0)$, $B=f_{xy}(x_0,y_0)$, $C=f_{yy}(x_0,y_0)$.

$$f(x,y)=f(x_0,y_0)+\frac{1}{2}(A(x-x_0)^2+2B(x-x_0)(y-y_0)+C(y-y_0)^2)+o(\rho^2).$$

- 定理：设 $z=f(x,y)$ 在 (x_0,y_0) 的一个邻域内有连续的二阶偏导数，且 $f_x(x_0,y_0)=0$, $f_y(x_0,y_0)=0$.

  (1) 若 $B^2<AC$, 则当 $A>0$ 时，$f(x_0,y_0)$ 是极小值；当 $A<0$ 时，$f(x_0,y_0)$ 时极大值.

  (2) $B^2>AC$, $f(x_0,y_0)$ 一定不是极值点.

  (3) $B^2=AC$, 不定.

多元函数极值点的判别定理

- 设 $z=f(x,y)$ 在 (x_0,y_0) 的一个邻域内有连续的二阶偏导数，且 $f_x(x_0,y_0)=0$，$f_y(x_0,y_0)=0$. 记 $A=f_{xx}(x_0,y_0)$，$B=f_{xy}(x_0,y_0)$，$C=f_{yy}(x_0,y_0)$.

$$f(x,y)=f(x_0,y_0)+\frac{1}{2}(A(x-x_0)^2+2B(x-x_0)(y-y_0)+C(y-y_0)^2)+o(\rho^2).$$

- 定理：设 $z=f(x,y)$ 在 (x_0,y_0) 的一个邻域内有连续的二阶偏导数，且 $f_x(x_0,y_0)=0$, $f_y(x_0,y_0)=0$.

  (1) 若 $B^2<AC$，则当 $A>0$ 时，$f(x_0,y_0)$ 是极小值；当 $A<0$ 时，$f(x_0,y_0)$ 时极大值.

  (2) $B^2>AC$，$f(x_0,y_0)$ 一定不是极值点.

  (3) $B^2=AC$，不定.

- (1)的证明：由二元函数的 Taylor公式，存在 $\theta \in (0.1)$，使得 $P_\theta = (x_0+\theta\Delta x, y_0+\theta\Delta y)$ 满足

$$
\begin{aligned}
& f(x_0+\Delta x, y_0+\Delta y) \\
&\qquad = f(x_0,y_0) + \frac{1}{2}(f_{xx}(P_\theta)\Delta x^2 + 2f_{xy}(P_\theta)\Delta x\Delta y + f_{yy}(P_\theta)\Delta y^2)
\end{aligned}
$$

记 $\tilde{A} = f_{xx}(P_\theta)$，$\tilde{B} = f_{xy}(P_\theta)$，$\tilde{C} = f_{yy}(P_\theta)$. 当 $B^2 < AC$，$A > 0$时，存在 $\delta > 0$，使得当 $|\Delta x| < \delta$，$|\Delta y| < \delta$ 时，$\tilde{B}^2 < \tilde{A}\tilde{C}$，$\tilde{A} > 0$，则有

$$
\tilde{A}\Delta x^2 + 2\tilde{B}\Delta x\Delta y + \tilde{C}\Delta y^2 = \frac{1}{\tilde{A}}[(\tilde{A}\Delta x + \tilde{B}\Delta y)^2 + (\tilde{A}\tilde{C} - \tilde{B}^2)\Delta y^2] \geq 0.
$$

判别法的证明1

- (1)的证明：由二元函数的 Taylor公式，存在 $\theta \in (0.1)$，使得 $P_\theta = (x_0 + \theta\Delta x, y_0 + \theta\Delta y)$ 满足

$$
\begin{aligned}
& f(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y) \\
& \qquad = f(x_0, y_0) + \frac{1}{2}(f_{xx}(P_\theta)\Delta x^2 + 2f_{xy}(P_\theta)\Delta x\Delta y + f_{yy}(P_\theta)\Delta y^2)
\end{aligned}
$$

记 $\tilde{A} = f_{xx}(P_\theta)$, $\tilde{B} = f_{xy}(P_\theta)$, $\tilde{C} = f_{yy}(P_\theta)$. 当 $B^2 < AC$，$A > 0$时，存在 $\delta > 0$，使得当 $|\Delta x| < \delta$, $|\Delta y| < \delta$ 时，$\tilde{B}^2 < \tilde{A}\tilde{C}$，$\tilde{A} > 0$，则有

$$
\tilde{A}\Delta x^2 + 2\tilde{B}\Delta x\Delta y + \tilde{C}\Delta y^2 = \frac{1}{\tilde{A}}[(\tilde{A}\Delta x + \tilde{B}\Delta y)^2 + (\tilde{A}\tilde{C} - \tilde{B}^2)\Delta y^2] \geq 0.
$$

判别法的证明2

- (1)的证明续：也可用 Peano 余项的 Taylor 公式证明.

$$f(x_0+\Delta x, y_0+\Delta y) = f(x_0, y_0) + \frac{1}{2}(A\Delta x^2 + 2B\Delta x\Delta y + C\Delta y^2) + R_2.$$

其中 $R_2 = o(\rho^2)$. 若 $B^2 < AC$，$A > 0$, 存在 $\epsilon > 0$，使得

$$A\Delta x^2 + 2B\Delta x\Delta y + C\Delta y^2 \geq \epsilon(\Delta x^2 + \Delta y^2).$$

事实上只要取 ϵ 满足 $B^2 < (A-\epsilon)(C-\epsilon)$ 即可. 取 $\delta > 0$, 使得当 $|\Delta x| < \delta$, $|\Delta y| < \delta$ 时, $|R_2| \leq \frac{1}{2}\epsilon(\Delta x^2 + \Delta y^2)$.

当 $B^2 < AC$，$A < 0$ 时, 证明类似.

- (1)的证明续：也可用 Peano 余项的 Taylor 公式证明.

$$f(x_0+\Delta x, y_0+\Delta y) = f(x_0, y_0) + \frac{1}{2}(A\Delta x^2 + 2B\Delta x\Delta y + C\Delta y^2) + R_2.$$

其中 $R_2 = o(\rho^2)$. 若 $B^2 < AC$，$A > 0$, 存在 $\epsilon > 0$，使得

$$A\Delta x^2 + 2B\Delta x\Delta y + C\Delta y^2 \geq \epsilon(\Delta x^2 + \Delta y^2).$$

事实上只要取 ϵ 满足 $B^2 < (A-\epsilon)(C-\epsilon)$ 即可. 取 $\delta > 0$, 使得当 $|\Delta x| < \delta$, $|\Delta y| < \delta$ 时, $|R_2| \leq \frac{1}{2}\epsilon(\Delta x^2 + \Delta y^2)$.
当 $B^2 < AC$，$A < 0$ 时, 证明类似.

判别法的证明3

- (2)的证明：利用 Peano 余项的 Taylor 公式，

$$f(x_0+\Delta x, y_0+\Delta y) = f(x_0, y_0) + \frac{1}{2}(A\Delta x^2 + 2B\Delta x\Delta y + C\Delta y^2) + R_2.$$

当 $B^2 > AC$，$A \neq 0$ 时，

$$A\Delta x^2 + 2B\Delta x\Delta y + C\Delta y^2 = \frac{1}{A}[(A\Delta x + B\Delta y)^2 - (B^2 - AC)\Delta y^2],$$

存在 $\delta > 0$, 使得当 $|\Delta x| < \delta$, $|\Delta y| < \delta$ 时, 可取 $|R_2| \leq \frac{1}{4}\frac{1}{|A|}[(A\Delta x + B\Delta y)^2 + |B^2 - AC|\Delta y^2]$.

- (2)的证明：利用 Peano 余项的 Taylor 公式，

$$f(x_0+\Delta x, y_0+\Delta y) = f(x_0, y_0) + \frac{1}{2}(A\Delta x^2 + 2B\Delta x\Delta y + C\Delta y^2) + R_2.$$

当 $B^2 > AC$，$A \neq 0$ 时，

$$A\Delta x^2 + 2B\Delta x\Delta y + C\Delta y^2 = \frac{1}{A}[(A\Delta x + B\Delta y)^2 - (B^2 - AC)\Delta y^2],$$

存在 $\delta > 0$, 使得当 $|\Delta x| < \delta$, $|\Delta y| < \delta$ 时，可取 $|R_2| \leq \frac{1}{4}\frac{1}{|A|}[(A\Delta x + B\Delta y)^2 + |B^2 - AC|\Delta y^2]$.

- (2)的证明：利用 Peano 余项的 Taylor 公式，

$$f(x_0+\Delta x, y_0+\Delta y) = f(x_0, y_0) + \frac{1}{2}(A\Delta x^2 + 2B\Delta x\Delta y + C\Delta y^2) + R_2.$$

当 $B^2 > AC$，$A \neq 0$ 时，

$$A\Delta x^2 + 2B\Delta x\Delta y + C\Delta y^2 = \frac{1}{A}[(A\Delta x + B\Delta y)^2 - (B^2 - AC)\Delta y^2],$$

存在 $\delta > 0$，使得当 $|\Delta x| < \delta$，$|\Delta y| < \delta$ 时，可取 $|R_2| \leq \frac{1}{4}\frac{1}{|A|}[(A\Delta x + B\Delta y)^2 + |B^2 - AC|\Delta y^2]$.

判别法的证明4

- (2)的证明续：$A > 0$ 时，当 $\Delta x = -\frac{B}{A}\Delta y$ 且 $|\Delta x| < \delta$, $|\Delta y| < \delta$ 时，

$$\frac{1}{2}(A\Delta x^2 + 2B\Delta x\Delta y + C\Delta y^2) + R_2 \leq -\frac{1}{4A}(B^2 - AC)\Delta y^2,$$

当 $\Delta y = 0$ 且 $|\Delta x| < \delta$,

$$\frac{1}{2}(A\Delta x^2 + 2B\Delta x\Delta y + C\Delta y^2) + R_2 \geq \frac{1}{4}A\Delta x^2.$$

- (2)的证明续:

  $A<0$ 时类似. 若 $C\neq 0$ 时利用

  $$A\Delta x^2+2B\Delta x\Delta y+C\Delta y^2=\frac{1}{C}((C\Delta y+B\Delta x)^2-(B^2-AC)\Delta x^2)$$

  可类似讨论.

  若 $A=C=0$, 则 $B\neq 0$, $A\Delta x^2+2B\Delta x\Delta y+C\Delta y^2=2B\Delta x\Delta y$. 考虑 $\Delta x=\Delta y$, $\Delta x=-\Delta y$.

- (3)的证明: 考虑 $f(x,y)=(x+y)^2$ 和 $g(x,y)=(x+y)^2+x^3$, 在 $(0,0)$ 点, 都满足 $B^2=AC$.

判别法的证明5

- (2)的证明续：

  $A < 0$ 时类似. 若 $C \neq 0$ 时利用

  $$A\Delta x^2 + 2B\Delta x\Delta y + C\Delta y^2 = \frac{1}{C}((C\Delta y + B\Delta x)^2 - (B^2 - AC)\Delta x^2)$$

  可类似讨论.

  若 $A = C = 0$, 则 $B \neq 0$, $A\Delta x^2 + 2B\Delta x\Delta y + C\Delta y^2 = 2B\Delta x\Delta y$. 考虑 $\Delta x = \Delta y$，$\Delta x = -\Delta y$.

- (3)的证明：考虑 $f(x, y) = (x + y)^2$ 和 $g(x, y) = (x + y)^2 + x^3$, 在 $(0, 0)$ 点, 都满足 $B^2 = AC$.

- (2)的证明续:

  $A<0$ 时类似. 若 $C\neq 0$ 时利用

  $$A\Delta x^2+2B\Delta x\Delta y+C\Delta y^2=\frac{1}{C}((C\Delta y+B\Delta x)^2-(B^2-AC)\Delta x^2)$$

  可类似讨论.

  若 $A=C=0$, 则 $B\neq 0$, $A\Delta x^2+2B\Delta x\Delta y+C\Delta y^2=2B\Delta x\Delta y$. 考虑 $\Delta x=\Delta y$, $\Delta x=-\Delta y$.

- (3)的证明: 考虑 $f(x,y)=(x+y)^2$ 和 $g(x,y)=(x+y)^2+x^3$, 在 $(0,0)$ 点, 都满足 $B^2=AC$.

- $f(x,y) = xy + \frac{1}{3}(x^3+y^3)$. 求极值点.
- 解：解方程组 $\begin{cases} f_x = y + x^2 = 0 \\ f_y = x + y^2 = 0 \end{cases}$ 得到稳定点$(0,0), (-1,-1)$.
  二阶偏导数 $f_{xx} = 2x$, $f_{xy} = 1$, $f_{yy} = 2y$. 在 $(0,0)$点，$B^2 - AC > 0$, 不是极值点. 在 $(-1,-1)$ 点，$B^2 - AC < 0$, $A < 0$ 是极大值点.
- 注：上例中 $f(x,y)$ 在 $\mathbb{R}^2$ 上有唯一的极值点 $(-1,-1)$，但不是最值点. 若 $f(x,y)$ 是二次多项式, 且 $f(x,y)$ 有唯一的极值点，则该极值点必为最值点. 若 $f(x,y) = Ax^2 + 2Bxy + Cy^2$, 当 $B^2 \neq AC$ 时稳定点唯一. 当 $B^2 < AC$ 时 $(0,0)$ 是唯一的极值点，也是最值点.

- $f(x,y) = xy + \frac{1}{3}(x^3 + y^3)$. 求极值点.
- 解：解方程组 $\begin{cases} f_x = y + x^2 = 0 \\ f_y = x + y^2 = 0 \end{cases}$ 得到稳定点$(0,0), (-1,-1)$.

  二阶偏导数 $f_{xx} = 2x$, $f_{xy} = 1$, $f_{yy} = 2y$. 在 $(0,0)$点，$B^2 - AC > 0$, 不是极值点. 在 $(-1,-1)$ 点，$B^2 - AC < 0$, $A < 0$ 是极大值点.
- 注：上例中 $f(x,y)$ 在 $\mathbb{R}^2$ 上有唯一的极值点 $(-1,-1)$，但不是最值点. 若 $f(x,y)$ 是二次多项式, 且 $f(x,y)$ 有唯一的极值点，则该极值点必为最值点. 若 $f(x,y) = Ax^2 + 2Bxy + Cy^2$，当 $B^2 \neq AC$ 时稳定点唯一. 当 $B^2 < AC$ 时 $(0,0)$ 是唯一的极值点，也是最值点.

极值点的判别–例

- $f(x,y) = xy + \frac{1}{3}(x^3 + y^3)$. 求极值点.
- 解：解方程组 $\begin{cases} f_x = y + x^2 = 0 \\ f_y = x + y^2 = 0 \end{cases}$ 得到稳定点$(0,0), (-1,-1)$.
  二阶偏导数 $f_{xx} = 2x$, $f_{xy} = 1$, $f_{yy} = 2y$. 在 $(0,0)$点，$B^2 - AC > 0$, 不是极值点. 在 $(-1,-1)$ 点，$B^2 - AC < 0$, $A < 0$ 是极大值点.
- 注：上例中 $f(x,y)$ 在 $\mathbb{R}^2$ 上有唯一的极值点 $(-1,-1)$，但不是最值点. 若 $f(x,y)$ 是二次多项式, 且 $f(x,y)$ 有唯一的极值点，则该极值点必为最值点. 若 $f(x,y) = Ax^2 + 2Bxy + Cy^2$, 当 $B^2 \neq AC$ 时稳定点唯一. 当 $B^2 < AC$ 时 $(0,0)$ 是唯一的极值点，也是最值点.

- $f(x,y) = xy + \frac{1}{3}(x^3 + y^3)$. 求极值点.
- 解：解方程组 $\begin{cases} f_x = y + x^2 = 0 \\ f_y = x + y^2 = 0 \end{cases}$ 得到稳定点$(0,0),(-1,-1)$.
  二阶偏导数 $f_{xx} = 2x$, $f_{xy} = 1$, $f_{yy} = 2y$. 在 $(0,0)$点，$B^2 - AC > 0$, 不是极值点. 在 $(-1,-1)$ 点，$B^2 - AC < 0$, $A < 0$ 是极大值点.
- 注：上例中 $f(x,y)$ 在 $\mathbb{R}^2$ 上有唯一的极值点 $(-1,-1)$，但不是最值点. 若 $f(x,y)$ 是二次多项式, 且 $f(x,y)$ 有唯一的极值点，则该极值点必为最值点. 若 $f(x,y) = Ax^2 + 2Bxy + Cy^2$, 当 $B^2 \neq AC$ 时稳定点唯一. 当 $B^2 < AC$ 时 $(0,0)$ 是唯一的极值点，也是最值点.

多元函数的最值

- 有界闭区域 $\bar{D}$ 上的连续函数存在最大值点和最小值点. 在 D 内部的最值点必是极值点.
- 有界闭区域 $\bar{D}$ 上最值的求法:

  1. 求出内部的驻点, 2. 求出边界上的最值. 3. 比较函数在内部驻点处的取值和边界上最值点处的取值, 得到函数的最值.

多元函数的最值

- 有界闭区域 $\bar{D}$ 上的连续函数存在最大值点和最小值点. 在 D 内部的最值点必是极值点.
- 有界闭区域 $\bar{D}$ 上最值的求法:

  1. 求出内部的驻点, 2. 求出边界上的最值. 3. 比较函数在内部驻点处的取值和边界上最值点处的取值, 得到函数的最值.

最小二乘法1

- 最小二乘法:变量 y 是变量 x 的函数，由实验测得当 x 取 x_1，x_2，$\cdots, x_n$时，对应 y 的值分别为 $y_1, y_2, \cdots, y_n$. 找一个近似公式 $y = ax + b$，使得 $u(a, b) = \sum_{i=1}^{n}(ax_i + b - y_i)^2$ 最小.
- 解：要求函数 $u(a, b)$ 的最小值点. 先求驻点:

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial a} = \sum_{i=1}^{n} 2x_i(ax_i + b - y_i) = 0 \\ \frac{\partial u}{\partial b} = \sum_{i=1}^{n} 2(ax_i + b - y_i) = 0 \end{cases}$$

最小二乘法1

- 最小二乘法:变量 y 是变量 x 的函数，由实验测得当 x 取 x_1，x_2，$\cdots,x_n$时，对应 y 的值分别为 $y_1,y_2,\cdots,y_n$. 找一个近似公式 $y=ax+b$，使得 $u(a,b)=\sum\limits_{i=1}^{n}(ax_i+b-y_i)^2$ 最小.
- 解：要求函数 $u(a,b)$ 的最小值点. 先求驻点:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial a}=\sum\limits_{i=1}^{n}2x_i(ax_i+b-y_i)=0 \\ \dfrac{\partial u}{\partial b}=\sum\limits_{i=1}^{n}2(ax_i+b-y_i)=0 \end{cases}$$

最小二乘法2

- 解（续）：上面方程组整理得

$$\begin{cases} (\sum\limits_{i=1}^{n} x_i^2)a + (\sum\limits_{i=1}^{n} x_i)b = \sum\limits_{i=1}^{n} x_i y_i \\ (\sum\limits_{i=1}^{n} x_i)a + nb = \sum\limits_{i=1}^{n} y_i \end{cases}.$$

上面二元线性方程组的系数行列式

$$\begin{vmatrix} \sum\limits_{i=1}^{n} x_i^2 & \sum\limits_{i=1}^{n} x_i \\ \sum\limits_{i=1}^{n} x_i & n \end{vmatrix} = \sum_{i<j} (x_i - x_j)^2 \neq 0,$$

因此方程组有唯一解 (a_0, b_0). 又 $u_{aa} = 2\sum\limits_{i=1}^{n} x_i^2$, $u_{ab} = 2\sum\limits_{i=1}^{n} x_i$, $u_{bb} = 2n$, $AC - B^2 = 4\sum\limits_{i<j}(x_i - x_j)^2 > 0$, 因此 (a_0, b_0) 是唯一的极小值点，也是最小值点.

最小二乘法2

- 解（续）：上面方程组整理得

$$\begin{cases} (\sum\limits_{i=1}^{n} x_i^2)a + (\sum\limits_{i=1}^{n} x_i)b = \sum\limits_{i=1}^{n} x_i y_i \\ (\sum\limits_{i=1}^{n} x_i)a + nb = \sum\limits_{i=1}^{n} y_i \end{cases}.$$

上面二元线性方程组的系数行列式

$$\begin{vmatrix} \sum\limits_{i=1}^{n} x_i^2 & \sum\limits_{i=1}^{n} x_i \\ \sum\limits_{i=1}^{n} x_i & n \end{vmatrix} = \sum_{i<j}(x_i - x_j)^2 \neq 0,$$

因此方程组有唯一解 (a_0, b_0). 又 $u_{aa} = 2\sum\limits_{i=1}^{n} x_i^2$, $u_{ab} = 2\sum\limits_{i=1}^{n} x_i$, $u_{bb} = 2n$, $AC - B^2 = 4\sum\limits_{i<j}(x_i - x_j)^2 > 0$, 因此 (a_0, b_0) 是唯一的极小值点，也是最小值点.

- 解（续）：上面方程组整理得

$$\begin{cases}(\sum_{i=1}^{n} x_i^2)a + (\sum_{i=1}^{n} x_i)b = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i \\ (\sum_{i=1}^{n} x_i)a + nb = \sum_{i=1}^{n} y_i\end{cases}.$$

上面二元线性方程组的系数行列式

$$\begin{vmatrix} \sum_{i=1}^{n} x_i^2 & \sum_{i=1}^{n} x_i \\ \sum_{i=1}^{n} x_i & n \end{vmatrix} = \sum_{i<j} (x_i - x_j)^2 \neq 0,$$

因此方程组有唯一解 (a_0, b_0). 又 $u_{aa} = 2\sum_{i=1}^{n} x_i^2$, $u_{ab} = 2\sum_{i=1}^{n} x_i$, $u_{bb} = 2n$, $AC - B^2 = 4\sum_{i<j}(x_i - x_j)^2 > 0$, 因此 (a_0, b_0) 是唯一的极小值点，也是最小值点.

- 例： $f(x,y)=x^2y(4-x-y)$, $\bar{D}=\{(x,y)|x\geq 0, y\geq 0, x+y\leq 6\}$. 求 f 在 $\bar{D}$ 上的最值.
- 解：先求驻点:

$$\begin{cases} f_x = 2xy(4-x-y)-x^2y = xy(8-3x-2y)=0 \\ f_y = x^2(4-x-y)-x^2y = x^2(4-x-2y)=0 \end{cases}$$

得内部驻点 $(2,1)$，$f(2,1)=4$.

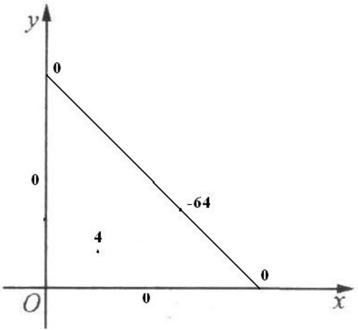
求最值—例1

- 例： $f(x,y)=x^2y(4-x-y)$, $\bar{D}=\{(x,y)|x\ge 0, y\ge 0, x+y\le 6\}$. 求 f 在 $\bar{D}$ 上的最值.
- 解： 先求驻点:

$$\begin{cases} f_x = 2xy(4-x-y) - x^2y = xy(8-3x-2y) = 0 \\ f_y = x^2(4-x-y) - x^2y = x^2(4-x-2y) = 0 \end{cases}$$

得内部驻点 $(2,1)$， $f(2,1)=4$.

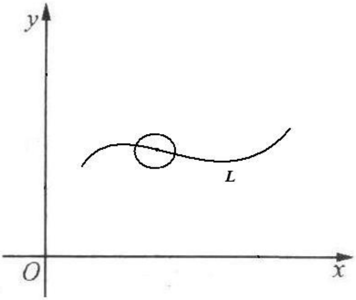
- 例(续)：$f(x,y)$ 在边界 $y=0(0\le x\le 6)$, $x=0(0\le y\le 6)$ 上恒为 0. 在 $x+y=6(0\le x\le 6)$ 上
$$f(x,y)=2x^2(x-6),$$
$x=0,6$ 时取最大值 0, $x=4$ 时取最小值 -64.
综上可知 $f(x,y)$ 的最大值为 4, 最小值为 -64.



- $z=f(x,y)$ 在条件 $\phi(x,y)=0$ 下的条件极值: 设

$$L=\{(x,y)|\phi(x,y)=0\},$$

L一般表示一条曲线. 设 (x_0,y_0) 为 L 上的一内点（? ）. 若存在 (x_0,y_0) 的邻域 U_δ, 使得



$$f(x,y)\geq f(x_0,y_0),\forall(x,y)\in U_\delta\cap L.$$

则称 $f(x_0,y_0)$ 是 $f(x,y)$ 的条件极小值.

一个条件下二元函数的条件极值2

- 设 $f(x,y)$, $\phi(x,y) \in C^1$, 且 $\phi_x^2+\phi_y^2 \neq 0$, 则 $\phi(x,y)=0$ 表示光滑曲线. 若 $x=x(t)$, $y=y(t)$ 是曲线 L 的的参数方程，则有

$$\phi(x(t),y(t)) \equiv 0 \Longrightarrow \phi_x x'(t)+\phi_y y'(t)=0.$$

问题转化为求一元函数 $z=f(x(t),y(t))$ 的极值点，稳定点方程为

$$\begin{cases} \phi_x x'(t)+\phi_y y'(t)=0, \\ \frac{dz}{dt}=f_x x'(t)+f_y y'(t)=0. \end{cases}$$

一个条件下二元函数的条件极值3

- 由上面驻点满足的方程可知，向量 (f_x, f_y), (ϕ_x, ϕ_y) 均与 $(x'(t), y'(t))$ 垂直，因此必然共线，即存在 λ, 使得 $(f_x, f_y) = -\lambda(\phi_x, \phi_y)$.
- 作辅助函数 $F(x, y, \lambda) = f(x, y) + \lambda\phi(x, y)$, 则稳定点 (x, y) 和 λ 满足

$$\begin{cases} F_x = f_x + \lambda\phi_x = 0 \\ F_y = f_y + \lambda\phi_y = 0 \\ F_\lambda = \phi(x, y) = 0 \end{cases}.$$

- 稳定点不一定是极值点, 如 $f(x, y) = x^2 y$, $\phi(x, y) = x - y$, 则 $(0, 0)(\lambda = 0)$ 是稳定点, 显然不是极值点.

一个条件下二元函数的条件极值3

- 由上面驻点满足的方程可知，向量 (f_x, f_y), (ϕ_x, ϕ_y) 均与 $(x'(t), y'(t))$ 垂直，因此必然共线，即存在 λ, 使得 $(f_x, f_y) = -\lambda(\phi_x, \phi_y)$.
- 作辅助函数 $F(x, y, \lambda) = f(x, y) + \lambda\phi(x, y)$, 则稳定点 (x, y) 和 λ 满足

$$\begin{cases} F_x = f_x + \lambda\phi_x = 0 \\ F_y = f_y + \lambda\phi_y = 0 \\ F_\lambda = \phi(x, y) = 0 \end{cases}.$$

- 稳定点不一定是极值点，如 $f(x, y) = x^2y$, $\phi(x, y) = x - y$, 则 $(0, 0)(\lambda = 0)$ 是稳定点，显然不是极值点.

- 由上面驻点满足的方程可知，向量 (f_x, f_y), (ϕ_x, ϕ_y) 均与 $(x'(t), y'(t))$ 垂直，因此必然共线，即存在 λ, 使得 $(f_x, f_y) = -\lambda(\phi_x, \phi_y)$.
- 作辅助函数 $F(x, y, \lambda) = f(x, y) + \lambda\phi(x, y)$, 则稳定点 (x, y) 和 λ 满足

$$\begin{cases} F_x = f_x + \lambda\phi_x = 0 \\ F_y = f_y + \lambda\phi_y = 0 \\ F_\lambda = \phi(x, y) = 0 \end{cases}.$$

- 稳定点不一定是极值点，如 $f(x, y) = x^2 y$, $\phi(x, y) = x - y$, 则 $(0, 0)(\lambda = 0)$ 是稳定点，显然不是极值点.

一个条件下三元函数的条件极值1

- $u=f(x,y,z)$ 在条件 $\phi(x,y,z)=0$ 下的条件极值. $\phi(x,y,z)=0$ 一般表示一张曲面. 条件极值即为曲面上的局部最值.
- 设 $f(x,y,z),\ \phi(x,y,z)\in C^1$, 且 $\phi_x^2+\phi_y^2+\phi_z^2\neq 0$, 则 $\phi(x,y,z)=0$ 确定一光滑曲面. 若 $x=x(s,t)$, $y=y(s,t)$, $z=z(s,t)$ 是该曲面的参数方程，则有$\phi(x(s,t),y(s,t)+z(s,t))\equiv 0$, 求偏导数得方程

$$\begin{cases}\phi_x\frac{\partial x}{\partial s}+\phi_y\frac{\partial y}{\partial s}+\phi_z\frac{\partial z}{\partial s}=0,\\ \phi_x\frac{\partial x}{\partial t}+\phi_y\frac{\partial y}{\partial t}+\phi_z\frac{\partial z}{\partial t}=0.\end{cases}$$

由条件极值点是函数 $u=f(x(s,t),y(s,t),z(s,t))$ 的极值点，因此满足稳定点方程

$$\begin{cases}\frac{\partial u}{\partial s}=f_x\frac{\partial x}{\partial s}+f_y\frac{\partial y}{\partial s}+f_z\frac{\partial z}{\partial s}=0,\\ \frac{\partial u}{\partial t}=f_x\frac{\partial x}{\partial t}+f_y\frac{\partial y}{\partial t}+f_z\frac{\partial z}{\partial t}=0.\end{cases}$$

一个条件下三元函数的条件极值1

- $u = f(x,y,z)$ 在条件 $\phi(x,y,z) = 0$ 下的条件极值. $\phi(x,y,z) = 0$ 一般表示一张曲面. 条件极值即为曲面上的局部最值.
- 设 $f(x,y,z)$, $\phi(x,y,z) \in C^1$, 且 $\phi_x^2 + \phi_y^2 + \phi_z^2 \neq 0$, 则 $\phi(x,y,z) = 0$ 确定一光滑曲面. 若 $x = x(s,t)$, $y = y(s,t)$, $z = z(s,t)$ 是该曲面的参数方程，则有$\phi(x(s,t), y(s,t) + z(s,t)) \equiv 0$, 求偏导数得方程

$$\begin{cases} \phi_x \frac{\partial x}{\partial s} + \phi_y \frac{\partial y}{\partial s} + \phi_z \frac{\partial z}{\partial s} = 0, \\ \phi_x \frac{\partial x}{\partial t} + \phi_y \frac{\partial y}{\partial t} + \phi_z \frac{\partial z}{\partial t} = 0. \end{cases}$$

由条件极值点是函数 $u = f(x(s,t), y(s,t), z(s,t))$ 的极值点，因此满足稳定点方程

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial s} = f_x \frac{\partial x}{\partial s} + f_y \frac{\partial y}{\partial s} + f_z \frac{\partial z}{\partial s} = 0, \\ \frac{\partial u}{\partial t} = f_x \frac{\partial x}{\partial t} + f_y \frac{\partial y}{\partial t} + f_z \frac{\partial z}{\partial t} = 0. \end{cases}$$

一个条件下三元函数的条件极值1

- $u = f(x,y,z)$ 在条件 $\phi(x,y,z) = 0$ 下的条件极值. $\phi(x,y,z) = 0$ 一般表示一张曲面. 条件极值即为曲面上的局部最值.
- 设 $f(x,y,z)$, $\phi(x,y,z) \in C^1$, 且 $\phi_x^2 + \phi_y^2 + \phi_z^2 \neq 0$, 则 $\phi(x,y,z) = 0$ 确定一光滑曲面. 若 $x = x(s,t)$, $y = y(s,t)$, $z = z(s,t)$ 是该曲面的参数方程, 则有$\phi(x(s,t), y(s,t) + z(s,t)) \equiv 0$, 求偏导数得方程

$$\begin{cases} \phi_x \frac{\partial x}{\partial s} + \phi_y \frac{\partial y}{\partial s} + \phi_z \frac{\partial z}{\partial s} = 0, \\ \phi_x \frac{\partial x}{\partial t} + \phi_y \frac{\partial y}{\partial t} + \phi_z \frac{\partial z}{\partial t} = 0. \end{cases}$$

由条件极值点是函数 $u = f(x(s,t), y(s,t), z(s,t))$ 的极值点, 因此满足稳定点方程

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial s} = f_x \frac{\partial x}{\partial s} + f_y \frac{\partial y}{\partial s} + f_z \frac{\partial z}{\partial s} = 0, \\ \frac{\partial u}{\partial t} = f_x \frac{\partial x}{\partial t} + f_y \frac{\partial y}{\partial t} + f_z \frac{\partial z}{\partial t} = 0. \end{cases}$$

一个条件下三元函数的条件极值2

- 由上面驻点满足的方程可知，向量 (f_x, f_y, f_z), (ϕ_x, ϕ_y, ϕ_z) 均垂直于 (x_s, y_s, z_s) 和 (x_s, y_s, z_s)，因此必然共线，即存在 λ, 使得

$$(f_x, f_y, f_z) = -\lambda(\phi_x, \phi_y, \phi_z).$$

- 作辅助函数 $F(x, y, z, \lambda) = f(x, y, z) + \lambda\phi(x, y, z)$, 则稳定点 (x, y, z) 和 λ 满足

$$\begin{cases} F_x = f_x + \lambda\phi_x = 0 \\ F_y = f_y + \lambda\phi_y = 0 \\ F_z = f_z + \lambda\phi_z = 0 \\ F_\lambda = \phi(x, y, z) = 0 \end{cases}.$$

一个条件下三元函数的条件极值2

- 由上面驻点满足的方程可知，向量 (f_x, f_y, f_z), (ϕ_x, ϕ_y, ϕ_z) 均垂直于 (x_s, y_s, z_s) 和 (x_s, y_s, z_s)，因此必然共线，即存在 λ, 使得
$$(f_x, f_y, f_z) = -\lambda(\phi_x, \phi_y, \phi_z).$$
- 作辅助函数 $F(x, y, z, \lambda) = f(x, y, z) + \lambda\phi(x, y, z)$, 则稳定点 (x, y, z) 和 λ 满足
$$\begin{cases} F_x = f_x + \lambda\phi_x = 0 \\ F_y = f_y + \lambda\phi_y = 0 \\ F_z = f_z + \lambda\phi_z = 0 \\ F_\lambda = \phi(x, y, z) = 0 \end{cases}.$$

一个条件下的条件极值-例

- 求 $f(x,y,z)=xyz$ 在球面 $x^2+y^2+z^2=R^2(x>0,y>0,z>0)$ 上的最值.
- 解：设 $F(x,y,z)=xyz+\lambda(x^2+y^2+z^2-R^2)$.

$$\begin{cases} F_x=yz+2\lambda x=0 \\ F_y=xz+2\lambda y=0 \\ F_z=xy+2\lambda z=0 \\ F_\lambda=x^2+y^2+z^2-R^2=0 \end{cases}.$$

解得 $x_0=y_0=z_0=\frac{R}{\sqrt{3}}$. 由于 f 在球面 $x^2+y^2+z^2=R^2(x\geq 0,y\geq 0,z\geq 0)$ 上的最值存在，且边界上的值为 0，故 (x_0,y_0,z_0) 点必为最大值点.

- 注：由不等式 $xyz\leq(\frac{x^2+y^2+z^2}{3})^{\frac{3}{2}}$ 直接可得.

一个条件下的条件极值-例

- 求 $f(x,y,z)=xyz$ 在球面 $x^2+y^2+z^2=R^2(x>0,y>0,z>0)$ 上的最值.
- 解：设 $F(x,y,z)=xyz+\lambda(x^2+y^2+z^2-R^2)$.

$$\begin{cases} F_x = yz+2\lambda x=0 \\ F_y = xz+2\lambda y=0 \\ F_z = xy+2\lambda z=0 \\ F_\lambda = x^2+y^2+z^2-R^2=0 \end{cases}.$$

解得 $x_0=y_0=z_0=\frac{R}{\sqrt{3}}$. 由于 f 在球面 $x^2+y^2+z^2=R^2(x\geq 0,y\geq 0,z\geq 0)$ 上的最值存在，且边界上的值为 0，故 (x_0,y_0,z_0) 点必为最大值点.

- 注：由不等式 $xyz\leq(\frac{x^2+y^2+z^2}{3})^{\frac{3}{2}}$ 直接可得.

一个条件下的条件极值-例

- 求 $f(x,y,z)=xyz$ 在球面 $x^2+y^2+z^2=R^2(x>0,y>0,z>0)$ 上的最值.
- 解：设 $F(x,y,z)=xyz+\lambda(x^2+y^2+z^2-R^2)$.

$$\begin{cases} F_x=yz+2\lambda x=0 \\ F_y=xz+2\lambda y=0 \\ F_z=xy+2\lambda z=0 \\ F_\lambda=x^2+y^2+z^2-R^2=0 \end{cases}.$$

解得 $x_0=y_0=z_0=\frac{R}{\sqrt{3}}$. 由于 f 在球面 $x^2+y^2+z^2=R^2(x\geq 0,y\geq 0,z\geq 0)$ 上的最值存在，且边界上的值为 0，故 (x_0,y_0,z_0) 点必为最大值点.

- 注：由不等式 $xyz\leq(\frac{x^2+y^2+z^2}{3})^{\frac{3}{2}}$ 直接可得.

多个条件下的条件极值1

- 条件 $\phi(x,y,z)=0$, $\psi(x,y,z)=0$ 下 $u=f(x,y,z)$ 的条件极值(这里假设 (ϕ_x,ϕ_y,ϕ_z) 和 (ψ_x,ψ_y,ψ_z) 不共线). 设 $\phi(x,y,z)=0$, $\psi(x,y,z)=0$ 确定的曲线的参数方程 $x=x(t), y=y(t), z=z(t)$, 则极值点满足
$$\begin{cases} \phi_x x' + \phi_y y' + \phi_z z' = 0, \\ \psi_x x' + \psi_y y' + \psi_z z' = 0, \\ f_x x' + f_y y' + f_z z' = 0. \end{cases}$$
因此 (f_x,f_y,f_z), (ϕ_x,ϕ_y,ϕ_z) 和 (ψ_x,ψ_y,ψ_z) 均与 $(x'(t),y'(t),z'(t))$ 垂直, 即三个向量 (f_x,f_y,f_z), (ϕ_x,ϕ_y,ϕ_z) 和 (ψ_x,ψ_y,ψ_z) 共面, 存在 λ_1, λ_2 使得
$$(f_x,f_y,f_z) = -\lambda_1\left(\frac{\partial\phi}{\partial x},\frac{\partial\phi}{\partial y},\frac{\partial\phi}{\partial z}\right) - \lambda_2\left(\frac{\partial\psi}{\partial x},\frac{\partial\psi}{\partial y},\frac{\partial\psi}{\partial z}\right).$$

多个条件下的条件极值2

- 作辅助函数

$$F(x,y,z,\lambda_1,\lambda_2) = f(x,y,z) + \lambda_1\phi(x,y,z) + \lambda_2\psi(x,y,z),$$

则稳定点 (x,y,z) 和 λ_1,λ_2 满足

$$\begin{cases} F_x = f_x + \lambda_1\frac{\partial\phi}{\partial x} + \lambda_2\frac{\partial\psi}{\partial x} = 0 \\ F_y = f_y + \lambda_1\frac{\partial\phi}{\partial y} + \lambda_2\frac{\partial\psi}{\partial y} = 0 \\ F_z = f_z + \lambda_1\frac{\partial\phi}{\partial z} + \lambda_2\frac{\partial\psi}{\partial z} = 0 \\ F_{\lambda_1} = \phi = 0 \\ F_{\lambda_2} = \psi = 0 \end{cases}$$

多个条件下的条件极值3

- 求 $f(x_1, x_2, \cdots, x_n)$ 条件在 $\phi_k(x_1, x_2, \cdots, x_n) = 0$ ($k = 1, 2, \cdots, m < n$)下的条件极值.
- 作辅助函数

$$F(x_1, x_2, \cdots, x_n, \lambda_1, \cdots, \lambda_m) = f(x_1, x_2, \cdots, x_n) + \lambda_1\phi_1(x_1, x_2, \cdots, x_n) + \cdots + \lambda_m\phi_m(x_1, x_2, \cdots, x_n),$$

则驻点 $(x_1, x_2, \cdots, x_n)$ 和 $\lambda_1, \cdots, \lambda_m$ 满足

$$\begin{cases} F_{x_i} = f_{x_i} + \lambda_1\frac{\partial\phi_i}{\partial x_i} + \cdots + \lambda_m\frac{\partial\phi_m}{\partial x_i}, & i = 1, 2, \cdots, n. \\ F_{\lambda_k} = \phi_k(x_1, x_2, \cdots, x_n) = 0, & k = 1, 2, \cdots, m. \end{cases}$$

多个条件下的条件极值3

- 求 $f(x_1, x_2, \cdots, x_n)$ 条件在 $\phi_k(x_1, x_2, \cdots, x_n) = 0$ ($k = 1, 2, \cdots, m < n$)下的条件极值.
- 作辅助函数

$$\begin{aligned} F(x_1, x_2, \cdots, x_n, \lambda_1, \cdots, \lambda_m) = f(x_1, x_2, \cdots, x_n) \\ + \lambda_1 \phi_1(x_1, x_2, \cdots, x_n) + \cdots + \lambda_m \phi_m(x_1, x_2, \cdots, x_n), \end{aligned}$$

则驻点 $(x_1, x_2, \cdots, x_n)$ 和 $\lambda_1, \cdots, \lambda_m$ 满足

$$\begin{cases} F_{x_i} = f_{x_i} + \lambda_1 \frac{\partial \phi_i}{\partial x_i} + \cdots + \lambda_m \frac{\partial \phi_m}{\partial x_i}, & i = 1, 2, \cdots, n. \\ F_{\lambda_k} = \phi_k(x_1, x_2, \cdots, x_n) = 0, & k = 1, 2, \cdots, m. \end{cases}$$

多个条件下的条件极值3

- 求 $f(x_1, x_2, \cdots, x_n)$ 条件在 $\phi_k(x_1, x_2, \cdots, x_n) = 0$ ($k = 1, 2, \cdots, m < n$)下的条件极值.
- 作辅助函数

$$
\begin{aligned}
F(x_1, x_2, \cdots, x_n, \lambda_1, \cdots, \lambda_m) &= f(x_1, x_2, \cdots, x_n) \\
&\quad + \lambda_1 \phi_1(x_1, x_2, \cdots, x_n) + \cdots + \lambda_m \phi_m(x_1, x_2, \cdots, x_n),
\end{aligned}
$$

则驻点 $(x_1, x_2, \cdots, x_n)$ 和 $\lambda_1, \cdots, \lambda_m$ 满足

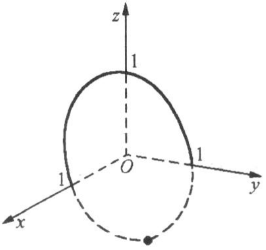
$$
\begin{cases}
F_{x_i} = f_{x_i} + \lambda_1 \frac{\partial \phi_i}{\partial x_i} + \cdots + \lambda_m \frac{\partial \phi_m}{\partial x_i}, & i = 1, 2, \cdots, n. \\
F_{\lambda_k} = \phi_k(x_1, x_2, \cdots, x_n) = 0, \quad k = 1, 2, \cdots, m.
\end{cases}
$$

多个条件下的条件极值-例1

- 平面 $x+y+z=1$ 截圆柱面 $x^2+y^2=1$ 得到一个椭圆，求该椭圆上到原点的最近点与最远点.

- 解：设 $F(x,y,z)=x^2+y^2+z^2+\lambda_1(x+y+z-1)+\lambda_2(x^2+y^2-1)$.

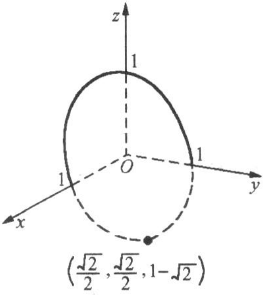
$$\begin{cases} F_x = 2x+\lambda_1+2\lambda_2 x = 0 \\ F_y = 2y+\lambda_1+2\lambda_2 y = 0 \\ F_z = 2z+\lambda_1 = 0 \\ F_{\lambda_1} = x+y+z-1 = 0 \\ F_{\lambda_2} = x^2+y^2-1 = 0 \end{cases}$$



得驻点 $(1,0,0)$, $(0,1,0)$, $(\frac{\sqrt{2}}{2},\frac{\sqrt{2}}{2},1-\sqrt{2})$, $(-\frac{\sqrt{2}}{2},-\frac{\sqrt{2}}{2},1+\sqrt{2})$. 最近点为 $(1,0,0)$ 和 $(0,1,0)$，最远点为 $(-\frac{\sqrt{2}}{2},-\frac{\sqrt{2}}{2},1+\sqrt{2})$.

- 平面 $x+y+z=1$ 截圆柱面 $x^2+y^2=1$ 得到一个椭圆，求该椭圆上到原点的最近点与最远点.
- 解：设 $F(x,y,z)=x^2+y^2+z^2+\lambda_1(x+y+z-1)+\lambda_2(x^2+y^2-1)$.

$$\begin{cases} F_x=2x+\lambda_1+2\lambda_2 x=0 \\ F_y=2y+\lambda_1+2\lambda_2 y=0 \\ F_z=2z+\lambda_1=0 \\ F_{\lambda_1}=x+y+z-1=0 \\ F_{\lambda_2}=x^2+y^2-1=0 \end{cases}$$

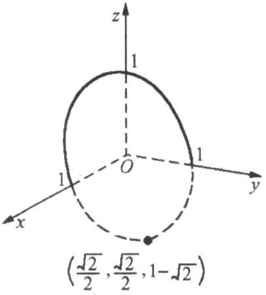


得驻点 $(1,0,0)$, $(0,1,0)$, $(\frac{\sqrt{2}}{2},\frac{\sqrt{2}}{2},1-\sqrt{2})$, $(-\frac{\sqrt{2}}{2},-\frac{\sqrt{2}}{2},1+\sqrt{2})$. 最近点为 $(1,0,0)$ 和 $(0,1,0)$，最远点为 $(-\frac{\sqrt{2}}{2},-\frac{\sqrt{2}}{2},1+\sqrt{2})$.

多个条件下的条件极值-例1

- 平面 $x+y+z=1$ 截圆柱面 $x^2+y^2=1$ 得到一个椭圆，求该椭圆上到原点的最近点与最远点.
- 解：设 $F(x,y,z)=x^2+y^2+z^2+\lambda_1(x+y+z-1)+\lambda_2(x^2+y^2-1)$.

$$\begin{cases} F_x = 2x+\lambda_1+2\lambda_2 x = 0 \\ F_y = 2y+\lambda_1+2\lambda_2 y = 0 \\ F_z = 2z+\lambda_1 = 0 \\ F_{\lambda_1} = x+y+z-1 = 0 \\ F_{\lambda_2} = x^2+y^2-1 = 0 \end{cases}$$



得驻点 $(1,0,0)$, $(0,1,0)$, $(\frac{\sqrt{2}}{2},\frac{\sqrt{2}}{2},1-\sqrt{2})$, $(-\frac{\sqrt{2}}{2},-\frac{\sqrt{2}}{2},1+\sqrt{2})$. 最近点为 $(1,0,0)$ 和 $(0,1,0)$，最远点为 $(-\frac{\sqrt{2}}{2},-\frac{\sqrt{2}}{2},1+\sqrt{2})$.

- 注：上例用椭圆周的参数方程更简单:

$$x = \cos t, y = \sin t, z = 1 - \cos t - \sin t,$$

代入得

$$f(x, y, z) = 1 + (1 - \cos t - \sin t)^2 = 1 + [1 - \sqrt{2}\sin(t + \frac{\pi}{4})]^2.$$

则有当 $\sin(t + \frac{\pi}{4}) = \frac{1}{\sqrt{2}}$, 即 $t = 0, \frac{\pi}{2}$ 时最小，最近点为 $(1, 0, 0)$ 和 $(0, 1, 0)$，当 $\sin(t + \frac{\pi}{4}) = -1$, 即 $t = \pi + \frac{\pi}{4}$ 时最大，得最远点为$(-\frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2}, 1 + \sqrt{2})$.

多个条件下的条件极值-例2

- 注：上例用椭圆周的参数方程更简单:

$$x = \cos t, y = \sin t, z = 1 - \cos t - \sin t,$$

代入得

$$f(x, y, z) = 1 + (1 - \cos t - \sin t)^2 = 1 + [1 - \sqrt{2}\sin(t + \frac{\pi}{4})]^2.$$

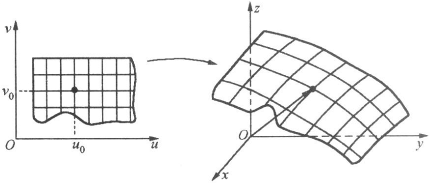
则有当 $\sin(t + \frac{\pi}{4}) = \frac{1}{\sqrt{2}}$，即 $t = 0, \frac{\pi}{2}$ 时最小，最近点为 $(1, 0, 0)$ 和 $(0, 1, 0)$，当 $\sin(t + \frac{\pi}{4}) = -1$，即 $t = \pi + \frac{\pi}{4}$ 时最大，得最远点为$(-\frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2}, 1 + \sqrt{2})$.

- 曲面是平面区域 D 到 $\mathbb{R}^3$ 中的一个连续映射的像.
- 曲面参数方程：设平面区域 D 到 $\mathbb{R}^3$的映射

$$(u,v)\mapsto \vec{r}(u,v)=(x(u,v),y(u,v),z(u,v))$$

的像是曲面 S, 则称

$$\begin{cases} x=x(u,v) \\ y=y(u,v)\,,(u,v)\in D, \\ z=z(u,v) \end{cases}$$



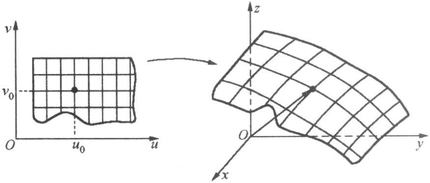
为曲面的参数方程.

- 曲面是平面区域 D 到 $\mathbb{R}^3$ 中的一个连续映射的像.
- 曲面参数方程：设平面区域 D 到 $\mathbb{R}^3$的映射

$$(u,v)\mapsto \vec{r}(u,v)=(x(u,v),y(u,v),z(u,v))$$

的像是曲面 S, 则称

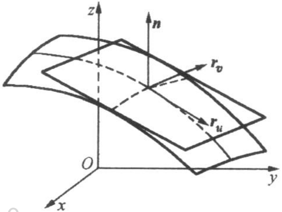
$$\begin{cases} x=x(u,v) \\ y=y(u,v) \ ,(u,v)\in D, \\ z=z(u,v) \end{cases}$$



为曲面的参数方程.

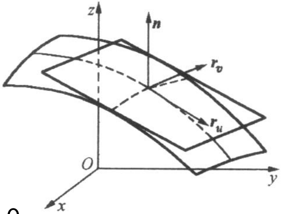
- 正则曲面：$x(u,v), y(u,v), z(u,v) \in C^1(D)$，且 $\vec{r}_u \times \vec{r}_v \neq \vec{0}$. 其中 $\vec{r}_u = (x_u, y_u, z_u), \vec{r}_v = (x_v, y_v, z_v)$(该条件保证曲面处处有切平面，且切平面连续变动).
- 例：$z = f(x,y) \in C^1(D)$, $(x,y) \in D$ 是正则曲面. 事实上，取参数方程 $x = x, y = y, z = f(x,y)$,

$$\vec{r}_x \times \vec{r}_y = (1,0,f_x) \times (0,1,f_y) = (-f_x, -f_y, 1) \neq 0.$$



正则曲面

- 正则曲面: $x(u,v), y(u,v), z(u,v) \in C^1(D)$, 且 $\vec{r}_u \times \vec{r}_v \neq \vec{0}$. 其中 $\vec{r}_u = (x_u, y_u, z_u), \vec{r}_v = (x_v, y_v, z_v)$(该条件保证曲面处处有切平面, 且切平面连续变动).
- 例: $z = f(x,y) \in C^1(D)$, $(x,y) \in D$ 是正则曲面. 事实上, 取参数方程 $x = x, y = y, z = f(x,y)$,



$$\vec{r}_x \times \vec{r}_y = (1,0,f_x) \times (0,1,f_y) = (-f_x, -f_y, 1) \neq 0.$$

一般曲面方程

- 一般曲面方程：$F(x,y,z)=0$, $F\in C^1$, $(F_x,F_y,F_z)\neq\vec{0}$ 时称为正则曲面.

若 $F(x_0,y_0,z_0)=0$, $F_z(x_0,y_0,z_0)\neq 0$, 则在 (x_0,y_0,z_0) 附近有参数方程 $x=x, y=y, z=z(x,y)$, 其中 $z(x,y)$ 是方程 $F(x,y,z)=0$ 确定的隐函数. 则有

$$\vec{r}_x\times\vec{r}_y=(1,0,z_x)\times(0,1,z_y)=(-z_x,-z_y,1)=\frac{1}{F_z}(F_x,F_y,F_z)\neq 0.$$

一般曲面方程

- 一般曲面方程：$F(x,y,z)=0$, $F\in C^1$, $(F_x,F_y,F_z)\neq\vec{0}$ 时称为正则曲面.
  若 $F(x_0,y_0,z_0)=0$, $F_z(x_0,y_0,z_0)\neq 0$, 则在 (x_0,y_0,z_0) 附近有参数方程 $x=x, y=y, z=z(x,y)$, 其中 $z(x,y)$ 是方程 $F(x,y,z)=0$ 确定的隐函数. 则有

$$\vec{r}_x\times\vec{r}_y=(1,0,z_x)\times(0,1,z_y)=(-z_x,-z_y,1)=\frac{1}{F_z}(F_x,F_y,F_z)\neq 0.$$

球面

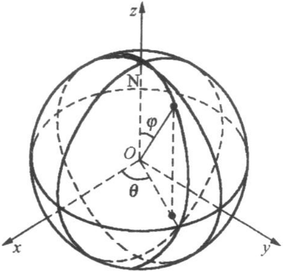
- 曲面方程：$F(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2 - R^2$.
- 曲面参数方程：$\begin{cases} x = R\sin\phi\cos\theta \\ y = R\sin\phi\sin\theta \\ z = R\cos\phi \end{cases}$, $(\phi, \theta) \in (0, \pi) \times (0, 2\pi)$,

$$\vec{r}_\phi = R(\cos\phi\cos\theta, \cos\phi\sin\theta, -\sin\phi)$$

$$\vec{r}_\theta = R(-\sin\phi\sin\theta, \sin\phi\cos\theta, 0).$$

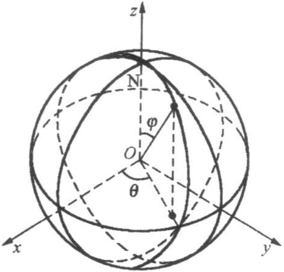
$$\vec{r}_\phi \times \vec{r}_\theta = R^2\sin\phi(\sin\phi\cos\theta, \sin\phi\sin\theta, \cos\phi).$$

$\phi \neq 0, \pi$ 时，$\vec{r}_\phi \times \vec{r}_\theta \neq \vec{0}$.



球面

- 曲面方程：$F(x,y,z)=x^2+y^2+z^2-R^2$.
- 曲面参数方程：$\begin{cases} x=R\sin\phi\cos\theta \\ y=R\sin\phi\sin\theta \\ z=R\cos\phi \end{cases}$，$(\phi,\theta)\in(0,\pi)\times(0,2\pi)$,



$$\vec{r}_\phi=R(\cos\phi\cos\theta,\cos\phi\sin\theta,-\sin\phi)$$

$$\vec{r}_\theta=R(-\sin\phi\sin\theta,\sin\phi\cos\theta,0).$$

$$\vec{r}_\phi\times\vec{r}_\theta=R^2\sin\phi(\sin\phi\cos\theta,\sin\phi\sin\theta,\cos\phi).$$

$\phi\neq 0,\pi$ 时，$\vec{r}_\phi\times\vec{r}_\theta\neq\vec{0}$.

曲面 $F(x,y,z)=0$. $F\in C^1$, 且 $(F_x,F_y,F_z)|_{P_0}\neq\vec{0}$.

- 曲面在 P_0 点的法向量为 $\vec{n}(P_0)=(F_x,F_y,F_z)|_{P_0}$, 即过 P_0 点的切线均与 $\vec{n}(P_0)$ 垂直.

  证明：设 $x=\phi(t),y=\psi(t),z=\omega(t)$ 是过 P_0 的曲线，$t=t_0$ 对应点 P_0, 则有 $F(\phi(t),\psi(t),\omega(t))\equiv 0$, 对 t 求导得

$$F_x\cdot\phi'+F_y\cdot\psi'+F_z\cdot\omega'=0,$$

  即 $(\phi'(t_0),\psi'(t_0),\omega'(t_0))\perp\vec{n}(P_0)$.

- 切平面方程：$F_x(P_0)(x-x_0)+F_y(P_0)(y-y_0)+F_z(P_0)(z-z_0)=0$.
- 法线方程：$\frac{x-x_0}{F_x(P_0)}=\frac{y-y_0}{F_y(P_0)}=\frac{z-z_0}{F_z(P_0)}$.

曲面 $F(x,y,z)=0$. $F\in C^1$, 且 $(F_x,F_y,F_z)|_{P_0}\neq\vec{0}$.

- 曲面在 P_0 点的法向量为 $\vec{n}(P_0)=(F_x,F_y,F_z)|_{P_0}$, 即过 P_0 点的切线均与 $\vec{n}(P_0)$ 垂直.

  证明：设 $x=\phi(t),y=\psi(t),z=\omega(t)$ 是过 P_0 的曲线，$t=t_0$ 对应点 P_0, 则有 $F(\phi(t),\psi(t),\omega(t))\equiv 0$, 对 t 求导得

  $$F_x\cdot\phi'+F_y\cdot\psi'+F_z\cdot\omega'=0,$$

  即 $(\phi'(t_0),\psi'(t_0),\omega'(t_0))\perp\vec{n}(P_0)$.

- 切平面方程：$F_x(P_0)(x-x_0)+F_y(P_0)(y-y_0)+F_z(P_0)(z-z_0)=0$.
- 法线方程：$\frac{x-x_0}{F_x(P_0)}=\frac{y-y_0}{F_y(P_0)}=\frac{z-z_0}{F_z(P_0)}$.

切平面与法向量1

曲面 $F(x,y,z)=0$. $F\in C^1$, 且 $(F_x,F_y,F_z)|_{P_0}\neq\vec{0}$.

- 曲面在 P_0 点的法向量为 $\vec{n}(P_0)=(F_x,F_y,F_z)|_{P_0}$, 即过 P_0 点的切线均与 $\vec{n}(P_0)$ 垂直.

  证明：设 $x=\phi(t),y=\psi(t),z=\omega(t)$ 是过 P_0 的曲线，$t=t_0$ 对应点 P_0, 则有 $F(\phi(t),\psi(t),\omega(t))\equiv 0$, 对 t 求导得

  $$F_x\cdot\phi'+F_y\cdot\psi'+F_z\cdot\omega'=0,$$

  即 $(\phi'(t_0),\psi'(t_0),\omega'(t_0))\perp\vec{n}(P_0)$.

- 切平面方程：$F_x(P_0)(x-x_0)+F_y(P_0)(y-y_0)+F_z(P_0)(z-z_0)=0$.
- 法线方程：$\frac{x-x_0}{F_x(P_0)}=\frac{y-y_0}{F_y(P_0)}=\frac{z-z_0}{F_z(P_0)}$.

曲面 $F(x,y,z)=0$. $F\in C^1$, 且 $(F_x,F_y,F_z)|_{P_0}\neq\vec{0}$.

- 曲面在 P_0 点的法向量为 $\vec{n}(P_0)=(F_x,F_y,F_z)|_{P_0}$, 即过 P_0 点的切线均与 $\vec{n}(P_0)$ 垂直.

  证明：设 $x=\phi(t), y=\psi(t), z=\omega(t)$ 是过 P_0 的曲线，$t=t_0$ 对应点 P_0, 则有 $F(\phi(t),\psi(t),\omega(t))\equiv 0$, 对 t 求导得

$$F_x\cdot\phi'+F_y\cdot\psi'+F_z\cdot\omega'=0,$$

  即 $(\phi'(t_0),\psi'(t_0),\omega'(t_0))\perp\vec{n}(P_0)$.

- 切平面方程：$F_x(P_0)(x-x_0)+F_y(P_0)(y-y_0)+F_z(P_0)(z-z_0)=0$.
- 法线方程：$\frac{x-x_0}{F_x(P_0)}=\frac{y-y_0}{F_y(P_0)}=\frac{z-z_0}{F_z(P_0)}$.

切平面与法向量2

曲面 $z = f(x, y)$. $f \in C^1$.

- 曲面在 P_0 点的法向量为 $(f_x, f_y, -1)$.

  证明：设 $F(x, y, z) = f(x, y) - z$, $(F_x, F_y, F_z) = (f_x, f_y, -1)$.

- 切平面方程：$f_x(x_0, y_0)(x - x_0) + f_y(x_0, y_0)(y - y_0) - (z - z_0) = 0$.
- 法线方程：$\frac{x - x_0}{f_x(x_0, y_0)} = \frac{y - y_0}{f_y(x_0, y_0)} = \frac{z - z_0}{-1}$.

切平面与法向量2

曲面 $z = f(x, y)$. $f \in C^1$.

- 曲面在 P_0 点的法向量为 $(f_x, f_y, -1)$.

  证明：设 $F(x, y, z) = f(x, y) - z$, $(F_x, F_y, F_z) = (f_x, f_y, -1)$.

- 切平面方程：$f_x(x_0, y_0)(x - x_0) + f_y(x_0, y_0)(y - y_0) - (z - z_0) = 0$.
- 法线方程：$\frac{x-x_0}{f_x(x_0,y_0)} = \frac{y-y_0}{f_y(x_0,y_0)} = \frac{z-z_0}{-1}$.

切平面与法向量2

曲面 $z = f(x, y)$. $f \in C^1$.

- 曲面在 P_0 点的法向量为 $(f_x, f_y, -1)$.

  证明：设 $F(x, y, z) = f(x, y) - z$, $(F_x, F_y, F_z) = (f_x, f_y, -1)$.

- 切平面方程：$f_x(x_0, y_0)(x - x_0) + f_y(x_0, y_0)(y - y_0) - (z - z_0) = 0$.

- 法线方程：$\frac{x-x_0}{f_x(x_0,y_0)} = \frac{y-y_0}{f_y(x_0,y_0)} = \frac{z-z_0}{-1}$.

切平面与法向量2

曲面 $z = f(x, y)$. $f \in C^1$.

- 曲面在 P_0 点的法向量为 $(f_x, f_y, -1)$.

  证明：设 $F(x, y, z) = f(x, y) - z$, $(F_x, F_y, F_z) = (f_x, f_y, -1)$.
- 切平面方程：$f_x(x_0, y_0)(x - x_0) + f_y(x_0, y_0)(y - y_0) - (z - z_0) = 0$.
- 法线方程：$\frac{x - x_0}{f_x(x_0, y_0)} = \frac{y - y_0}{f_y(x_0, y_0)} = \frac{z - z_0}{-1}$.

切平面与法向量3

参数方程表示的曲面：$x = x(u, v), y = y(u, v), z = z(u, v)$, $(u, v) \in D$, $x(u, v), y(u, v), z(u, v) \in C^1(D)$.

- 曲面在 $P_0(x(u_0, v_0), y(u_0, v_0), z(u_0, v_0))$ 点的法向量为 $\vec{r}_u \times \vec{r}_v|_{(u_0,v_0)}$.

  证明：坐标曲线 $x = x(u, v_0), y = y(u, v_0), z = z(u, v_0)$ 在 P_0 点的切向 $\vec{r}_u(u_0, v_0)$ 和 $x = x(u_0, v), y = y(u_0, v), z = z(u_0, v)$ 在 P_0 点的切向 $\vec{r}_v(u_0, v_0)$ 均垂直于$\vec{r}_u \times \vec{r}_v|_{(u_0,v_0)}$.

- 切平面方程：$\begin{vmatrix} x - x_0 & y - y_0 & z - z_0 \\ x_u(u_0, v_0) & y_u(u_0, v_0) & z_u(u_0, v_0) \\ x_v(u_0, v_0) & y_v(u_0, v_0) & z_v(u_0, v_0) \end{vmatrix} = 0.$

  证明：$(\vec{r} - \vec{r}_0) \cdot \vec{r}_u(u_0, v_0) \times \vec{r}_v(u_0, v_0) = 0$.

切平面与法向量3

参数方程表示的曲面：$x = x(u,v), y = y(u,v), z = z(u,v)$, $(u,v) \in D$, $x(u,v), y(u,v), z(u,v) \in C^1(D)$.

- 曲面在 $P_0(x(u_0,v_0), y(u_0,v_0), z(u_0,v_0))$ 点的法向量为 $\vec{r}_u \times \vec{r}_v|_{(u_0,v_0)}$.

  证明：坐标曲线 $x = x(u,v_0), y = y(u,v_0), z = z(u,v_0)$ 在 P_0 点的切向 $\vec{r}_u(u_0,v_0)$ 和 $x = x(u_0,v), y = y(u_0,v), z = z(u_0,v)$ 在 P_0 点的切向 $\vec{r}_v(u_0,v_0)$ 均垂直于$\vec{r}_u \times \vec{r}_v|_{(u_0,v_0)}$.

- 切平面方程：$\begin{vmatrix} x - x_0 & y - y_0 & z - z_0 \\ x_u(u_0,v_0) & y_u(u_0,v_0) & z_u(u_0,v_0) \\ x_v(u_0,v_0) & y_v(u_0,v_0) & z_v(u_0,v_0) \end{vmatrix} = 0.$

  证明：$(\vec{r} - \vec{r}_0) \cdot \vec{r}_u(u_0,v_0) \times \vec{r}_v(u_0,v_0) = 0.$

切平面与法向量3

参数方程表示的曲面：$x=x(u,v), y=y(u,v), z=z(u,v)$, $(u,v)\in D$, $x(u,v), y(u,v), z(u,v)\in C^1(D)$.

- 曲面在 $P_0(x(u_0,v_0), y(u_0,v_0), z(u_0,v_0))$ 点的法向量为 $\vec{r}_u\times\vec{r}_v|_{(u_0,v_0)}$.

  证明：坐标曲线 $x=x(u,v_0), y=y(u,v_0), z=z(u,v_0)$ 在 P_0 点的切向 $\vec{r}_u(u_0,v_0)$ 和 $x=x(u_0,v), y=y(u_0,v), z=z(u_0,v)$ 在 P_0 点的切向 $\vec{r}_v(u_0,v_0)$ 均垂直于$\vec{r}_u\times\vec{r}_v|_{(u_0,v_0)}$.

- 切平面方程：$\begin{vmatrix} x-x_0 & y-y_0 & z-z_0 \\ x_u(u_0,v_0) & y_u(u_0,v_0) & z_u(u_0,v_0) \\ x_v(u_0,v_0) & y_v(u_0,v_0) & z_v(u_0,v_0) \end{vmatrix}=0.$

  证明：$(\vec{r}-\vec{r}_0)\cdot\vec{r}_u(u_0,v_0)\times\vec{r}_v(u_0,v_0)=0.$

切平面与法向量3

参数方程表示的曲面： $x = x(u, v), y = y(u, v), z = z(u, v)$, $(u, v) \in D$, $x(u, v), y(u, v), z(u, v) \in C^1(D)$.

- 曲面在 $P_0(x(u_0, v_0), y(u_0, v_0), z(u_0, v_0))$ 点的法向量为 $\vec{r}_u \times \vec{r}_v|_{(u_0,v_0)}$.

  证明：坐标曲线 $x = x(u, v_0), y = y(u, v_0), z = z(u, v_0)$ 在 P_0 点的切向 $\vec{r}_u(u_0, v_0)$ 和 $x = x(u_0, v), y = y(u_0, v), z = z(u_0, v)$ 在 P_0 点的切向 $\vec{r}_v(u_0, v_0)$ 均垂直于$\vec{r}_u \times \vec{r}_v|_{(u_0,v_0)}$.

- 切平面方程： $\begin{vmatrix} x - x_0 & y - y_0 & z - z_0 \\ x_u(u_0, v_0) & y_u(u_0, v_0) & z_u(u_0, v_0) \\ x_v(u_0, v_0) & y_v(u_0, v_0) & z_v(u_0, v_0) \end{vmatrix} = 0.$

  证明： $(\vec{r} - \vec{r}_0) \cdot \vec{r}_u(u_0, v_0) \times \vec{r}_v(u_0, v_0) = 0.$

两曲面的交线

- 曲线 $\begin{cases} \psi(x,y,z)=0 \\ \phi(x,y,z)=0 \end{cases}$ 的切线，其中 $\phi,\psi \in C^1(D)$，且 $(\frac{\partial\phi}{\partial x},\frac{\partial\phi}{\partial y},\frac{\partial\phi}{\partial z})$ 和 $(\frac{\partial\psi}{\partial x},\frac{\partial\psi}{\partial y},\frac{\partial\psi}{\partial z})$ 不共线.
- 解：设 $P_0(x_0,y_0,z_0)$ 是交线上的一点，切向

$$(A,B,C)=\left(\frac{\partial\phi}{\partial x},\frac{\partial\phi}{\partial y},\frac{\partial\phi}{\partial z}\right)\Big|_{P_0}\times\left(\frac{\partial\psi}{\partial x},\frac{\partial\psi}{\partial y},\frac{\partial\psi}{\partial z}\right)\Big|_{P_0},$$

切线方程 $\frac{x-x_0}{A}=\frac{y-y_0}{B}=\frac{z-z_0}{C}$.

两曲面的交线

- 曲线 $\begin{cases}\psi(x,y,z)=0\\ \phi(x,y,z)=0\end{cases}$ 的切线，其中 $\phi,\psi\in C^1(D)$，且 $(\frac{\partial\phi}{\partial x},\frac{\partial\phi}{\partial y},\frac{\partial\phi}{\partial z})$ 和 $(\frac{\partial\psi}{\partial x},\frac{\partial\psi}{\partial y},\frac{\partial\psi}{\partial z})$ 不共线.
- 解：设 $P_0(x_0,y_0,z_0)$ 是交线上的一点，切向

$$(A,B,C)=\left(\frac{\partial\phi}{\partial x},\frac{\partial\phi}{\partial y},\frac{\partial\phi}{\partial z}\right)\Big|_{P_0}\times\left(\frac{\partial\psi}{\partial x},\frac{\partial\psi}{\partial y},\frac{\partial\psi}{\partial z}\right)\Big|_{P_0},$$

切线方程 $\frac{x-x_0}{A}=\frac{y-y_0}{B}=\frac{z-z_0}{C}$.

复习

- 利用洛比达法则，泰勒公式求极限，多元函数的极限.
- 积分的计算.
- 积分的应用：弧长，面积，体积
- 中值定理及其应用：函数单调性，函数的凸凹性，不等式证明,拐点，渐近线。
- 一元函数和多元函数的泰勒公式
- 一元函数和多元函数的极值和最值.
- 空间解析几何：向量运算，平面与直线方程.
- 多元函数的连续性，偏导数存在性，可微性.
- 多元函数(或隐函数确定的函数)的偏导数，微分，方向导数，梯度.