北京大学信息学院期末试题

2014 -2015　学年第一学期

考试科目：高等数学B(上)　　考试时间：2015 年 01 月 16 日

姓　名:____________　　学　号: ____________

本试题共 7 道大题，满分 100 分

一 (每空 4 分, 共 20 分)

(1) 设 $y = \arctan x - x$. 该函数有拐点 _____，$x \to -\infty$ 的渐近线为 _________.

(2) 设 $f(x, y) = \arcsin(x\sqrt{y})$, 则该函数在 $(\frac{1}{2}, 1)$ 处的全微分为 _____，在 $(\frac{1}{2}, 1)$ 处沿方向 $(1, 1)$ 的方向导数为 _____。

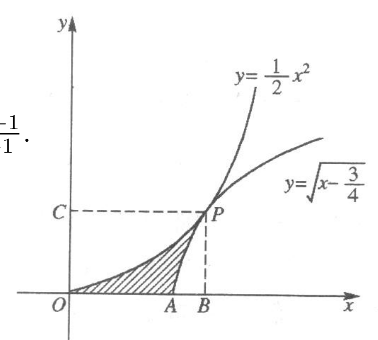
(3) 设 $f(x)$ 在 $\mathbb{R}$ 上有任意阶导数。令 $a_n = f^{(n)}(0)$(n 为正整数), $g(x) = f(x^2)$, 则 $g^{(2n)}(0) =$ _____

二 (共 18 分)计算

(1) $\int (\arcsin x)^2 dx$.　(2) $\int_0^{\frac{1}{2}} \sqrt{\frac{1-x}{1+x}} dx$.　(3) $\lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{1}{\int_0^x e^{t^2} dt} - \frac{1}{x}\right)$.

三 (共 12 分)见右图. 曲边形 OPA (阴影部分)由 $y = \frac{1}{2}x^2$, $y = \sqrt{x - \frac{3}{4}}$ 和 x 轴围成.

(1) 求图中曲边形 OPA 的面积. (2) 求曲边形 OPA 绕 x 轴旋转所得旋转体的体积.



四 (共 10 分)$D = \{(x, y) : x^2 + 4y^2 \le 4, y \ge \frac{1}{2}x - 1\}$. 求 $f(x, y) = x^2 + 4y^2 + xy$ 在 D 上的最大值和最小值.

五 (共 15 分)两条直线 $L_1 : \frac{x-1}{1} = \frac{y-1}{-1} = \frac{z}{1}$, $L_2 : \frac{x}{1} = \frac{y-1}{1} = \frac{z-1}{-1}$.

(1) 证明两直线是异面直线。

(2) 求 L_1 上的点和 L_2 上的点之间的最短距离.

(3) 求过 L_2 且与 L_1 平行的平面方程.

六 (共 15 分)定义 $\mathbb{R}^2$ 上的函数: $f(x, y) = \begin{cases} (x^2 + y^2)\sin\frac{1}{x^2+y^2}, & (x, y) \ne (0, 0) \\ 0, & (x, y) = (0, 0) \end{cases}$.

(1)证明该函数在原点处的偏导数存在，并求出 $f_x(x, y), f_y(x, y)$.

(2)讨论 $f_x(x, y), f_y(x, y)$ 在原点处的连续性.

(3)讨论 $f(x, y)$ 在原点处的可微性.

七 (共 10 分)$f(x)$ 在 $[a, b]$ 上连续，在 (a, b) 上可导, 且存在 $c \in (a, b)$，使得 $\int_a^c f(x)dx = \int_c^b f(x)dx = 0$. 证明

(1)存在 $\xi_1 \in (a, c)$, $\xi_2 \in (c, b)$，使得 $f(\xi_1) = \int_a^{\xi_1} f(x)dx$, $f(\xi_2) = \int_a^{\xi_2} f(x)dx$。

(2)存在 $\eta \in (a, b)$, 使得 $f'(\eta) = \int_a^{\eta} f(x)dx$.