复习提要 II（第二章）

在本章中，我们学习了微积分里最重要的概念：导数、微分、积分，以及连接微分学和积分学的Newton-Leibniz公式。这些可以说是整个微积分学的基础。在以后的章节里，我们所做的只不过是利用本章所引入的各种工具来研究形形色色的函数。因此大家一定要把这一章学明白，把各种常见函数的导数和原函数记牢。

1 基本概念

1.1 微分学基本概念

首先是导数的概念，它的几何意义（切线斜率）和物理意义（速度）。导数表要记熟，认真看一下推导过程：都用到了那些连续函数的性质？用到了哪些重要极限？高阶导数的计算：Leibniz公式（自己证一下）

1.2 积分学基本概念

理解积分的定义和几何意义，会用基本性质解决问题。积分无论在数学中还是在其他的应用中都是非常重要的工具。为什么呢？因为积分涉及到函数的**整体**性质！本章主要是概念性的东西和一些简单的计算，更多的计算方法要到第三章才能学到。

1.3 微分学与积分学的联系：Newton-Leibniz公式

Newton-Leibniz公式是单变量微积分的核心！它把看似无关的微分学和积分学紧密联系起来。这部分最重要的会熟练运用Newton-Leibniz公式计算积分。关键是计算出原函数，这就需要熟记不定积分表。而这个不定积分表说到底不过是那个导数表换了一种方式写出来。此外还有一些利用Newton-Leibniz公式的表达式解决问题的，习题中出现过，此处不再详述。

2 练习题

首先说明一下，我给出这些题目只具有参考价值，不要因为某一道题不会做

而信心受挫（比如上次的第二题，我出出来只是想让大家了解这样一个大家都知其然而不知其所以然的结论其实是可以用微积分的理论完全证明的。其实那个问题还有另外一半，即证明任意一个分数都可以写成有限小数或循环小数。这一半比较难，需要一个数论的结论，有兴趣的同学可以试一下。）

1、$f(x)$在x_0处可微，那么它在x_0处一定连续吗？

2、设$f(x)$是可导的偶函数，证明$f'(x)$也是偶函数。

3、设$f(x)$是可导的单调函数，证明$f'(x) \geq 0$

4、若$f(x)$和$g(x)$都可导，且$f(x) \leq g(x)$，请问是否有$f'(x) \leq g'(x)$？

5、设奇函数$f(x)$在0处的右导数$f'_+(0)$存在，证明f在0点可导。

6、讨论函数$f(x) = \{^{|x|^\alpha \sin \frac{1}{|x|^\beta} \quad x \neq 0}_{0 \quad x=0}$在$\alpha$满足什么条件时在0点可导（$\beta > 0$是一个固定的常数）。

7、如果$f(x)$在a点可导，$g(x)$在a点不可导，请问$f \pm g$以及fg是否在a点也不可导？

8、如果$f(x)$和$g(x)$在a点都不可导，请问$f \pm g$以及fg是否在a点也不可导？

9、设φ是连续函数，请指出下述计算错在哪里：

$$[(x-a)\varphi(x)]'|_{x=a} = 1 \cdot \varphi(a) + (a-a)\varphi'(a) = \varphi(a)$$

并指出当φ满足什么条件时$|x-a|\varphi(x)$在a点可导？

10、证明函数

$$H_n(x) = (-1)^n \frac{1}{n!} e^{-\frac{x^2}{2}} \frac{d^n(e^{-\frac{x^2}{2}})}{dx^n}$$

是多项式函数（称为Hermite多项式）。它是几次多项式？

11、请指出下列矛盾为什么会出现，哪个是对的？

$$\int_{-1}^{1} \frac{-dx}{1+x^2} = -\int_{-1}^{1} \frac{dx}{1+x^2} = -\arctan x\Big|_{-1}^{1} = -\frac{\pi}{2}$$

$$\int_{-1}^{1} \frac{-dx}{1+x^2} = \mathrm{arccot} x\Big|_{-1}^{1} = \frac{\pi}{2}$$

12、如果定义在区间[a,b]上的函数$f(x)$满足:存在常数$L > 0$,使得对任意的$x, y \in [a, b]$都有

$$|f(x) - f(y)| \leq L|x - y|$$

则称f是Lipschitz的。若$F'(x)$在[a,b]上连续，请证明F是[a,b]上的Lipschitz函数。请举出一个Lipschitz函数，使得它不是处处可微的。

13、设$f^{(n)}(x)$在$[a, b]$上恒等于0，证明f是多项式函数（含常值函数）。

14、设$f(x)$是$[a, b]$上的连续函数，$f(x) \geq 0$并且f不恒为0。证明

$$\int_a^b f(x)dx > 0$$

15、设$f(x)$在$[0, +\infty)$上单调递增，并且在任意有限区间上都可积，试证明：

$$\int_0^n f(x)dx \leq \sum_{k=1}^{n} f(k) \leq \int_1^{n+1} f(x)dx$$

最后说一下参考书问题，以前我总是向别人推荐Courant和John写的"Introduction to Calculus and Analysis"（中译本：柯朗，约翰《微积分和数学分析引论》）。这是本很经典的书，念起来也不怎么费力。但考虑此书实在太厚，没有那么多时间的同学把教材好好吃透就足够了。还有一本书可用来自学，但内容编排跟我们的教材很不一样：龚昇，张声雷《简明微积分》。它的特点是把$\varepsilon - \delta$语言等比较难的内容放到后面讲，前面先讲导数、积分和多变量微积分等更加实用的东西。

石亚龙
2006年10月29日