北京大学

本 科 生 毕 业 论 文

题目：**Black-Litterman 模型及其在投资管理中的应用**

Topic：**The Black-Litterman Model and its Applications in Investment Management**

姓　　名：王致远

学　　号：00928144

院　　系：光华管理学院

专　　业：金融

导　　师：李辰旭

2013 年 4 月

版权声明

Black-Litterman模型及其在投资管理中的应用

摘要

Black-Litterman模型在投资管理行业应用广泛，然而学术界（尤其是国内学术界）对其研究较少。本文对Black-Litterman 模型的文献进行综述，全面介绍了该模型蕴含的思想、使用的方法以及严格的证明。此外，作为实例，作者采用中国行业的数据，利用Black-Litterman模型进行了资产配置。作者希望，对量化投资管理感兴趣的读者通过本文可以初步理解和掌握这一重要模型。

关键词：Black-Litterman模型；投资者观点；投资组合管理

The Black-Litterman Model and its Applications in Investment Management

ABSTRACT

The Black-Litterman model is a widely-used model in the investment management industry, yet its literature is relatively scarce. This paper made a comprehensive literature review on the Black-Litterman model, covering the intuition, the proof and the implementation of the model. In addition, the author used market data in China to put the Black-Litterman into practice. It is the author's hope that those who are interested in quantitative investment management can master this important model at an introductory level after reading this paper.

Keywords: The Black-Litterman model, investor's view, portfolio management

Contents

1 引言

Markowitz (1952)的现代投资组合理论提出应当分散化投资，这为资本市场的参与者提供了一个基本指导，自那之后以基金为代表的投资组合管理的大规模兴起就是很好的例证。在早期的投资组合管理中，资产的选择仍以基本面分析为主，资产组合也少有持续良好的表现。随着网络的兴起和计算机技术的发展，投资者获取信息、处理数据的能力都大幅度提高，以数量方法分析资产收益，进行投资组合管理的量化投资方法开始成为投资管理的重要组成部分，Black-Litterman模型就是其中的一个代表。

Black-Litterman模型是由高盛公司的Fischer Black和Robert Litterman于上世纪90年代初共同提出的，此后一直被高盛公司资产管理部使用。尽管这一模型在业界被广为使用，但是学术界对它的研究并不深入。国外的学者直到近十年来才逐渐始研究这一模型，其中较为全面的对该模型的介绍和综述仅有Idzorek (2005)和Walters (2011)，国内的相关文献更是屈指可数。出于对量化投资的兴趣，作者详细阅读了Black-Litterman模型的相关文献，深入学习了这一模型，并在此基础上进行了综述。考虑到作者的同学中有越来越多的同学对数量金融有浓厚的兴趣，但是Black-Litterman模型作为量化投资领域的一个典型代表却没有出现在本科学习中，作者模仿教材的写法完成了本篇论文。文中既有Black-Litterman模型直观上的思想，也有严格的数学推导和证明，还有模型具体实施的步骤和方法，希望这些内容能够给对Black-Litterman模型感兴趣的同仁们一定帮助。

本文余下的内容如下。第二节介绍传统的均值-方差分析存在的问题，这是Black-Litterman模型提出的背景；第三节对Black-Litterman 模型的基本思想和框架进行概述，并介绍由该模型推导出的最优投资组合具有的性质；第四节通过两种方法对Black-Litterman 模型进行严格证明；第五节详细介绍如何在投资中实施Black-Litterman模型，包括操作步骤和参数的选取确定；第六节是案例分析，作者采用中国行业的数据，利用Black-Litterman模型进行研究，检测该模型在中国市场上的使用结果；第七节介绍Black-Litterman模型在学术界的最新发展，主要是其他学者对于该模型的延伸和改进，如Herold (2003), Krishnan and Mains (2005), Meucci (2006)等。第八节是全文的总结。

2 均值-方差分析的缺陷

均值-方差分析(Mean-Variance Analysis)是由Markowitz (1952)提出的，属于现代投资组合理论(Modern Portfolio Theory)。该分析方法运用数量化方法研究投资者行为，特别是构建投资组合的方法和标准。Markowitz认为正常投资者都是风险规避的，希望在获取高收益的同时降低收益的不确定性，因此构建投资组合实际上是在进行收益与风险的权衡，找到符使得自身效用最大化的投资组合。以资产收益率的期望与方差分别代表资产的期望收益[1]与风险，选取最常用的效用函数模型$U = E(R) - \frac{1}{2}\lambda\sigma^2$，$\lambda$代表风险规避系数，均值-方差模型可表示为

$$\max U = w'\mu - \frac{1}{2}\lambda w'\Sigma w, \tag{1}$$

其中w是n*1的列向量，代表n种资产各自的权重，μ是n*1的列向量，是n种资产的期望收益向量，Σ代表n种资产收益率的协方差矩阵。当上述优化问题无约束时[2]，可以得到如下优化解：

$$\frac{\partial U}{\partial w} = \mu - \lambda\Sigma w = 0,$$

$$w^* = (\lambda\Sigma)^{-1}\mu. \tag{2}$$

均值-方差分析可以被视为最早的量化分析工具之一，但是，它在实际的投资组合管理中使用甚少。这主要是由于均值- 方差分析本身存在着缺陷，学术界的很多研究指出了均值-方差分析在实际应用中存在问题，如Pulley (1981), Jobson and Korkie (1981), Kroll, Levy and Markowitz (1984)等等。总结起来主要有以下三点。

2.1 优化组合成分极端

大量实证研究表明，使用均值-方差分析得到的最优投资组合其构成成分通常比较极端，在直觉上并不存在“分散投资”的意味，具体表现为：如果在优化时不添加限制条件，则优化组合通常会在某些资产上拥有大量空头头寸；若

[1]在此说明，本文所有的“收益”若无特殊说明，均指代“超额收益”，即资产收益率减去无风险收益率，这并不影响文章结论。

[2]通常的优化问题存在资产权重之和为1这一约束条件，但是由于本文讨论的收益是超额收益，因此这一条件可以被去掉，权重和偏离1的部分都可以被视为投资于了无风险资产。

在优化时添加部分限制条件，则容易出现聚集现象，即优化组合在某几种资产上拥有大量头寸，而其它资产的头寸为0。Black and Litterman (1992) 运用三种方法来描述资产的期望收益并以此为基础进行优化，均得到了比较极端的优化组合。首先，他们采用历史平均值来表示资产的期望收益（这也是最常用的方法），无约束条件下，最优投资组合有大量的空头头寸，其中一种资产的头寸达到-95.7%，在卖空限制下，最优投资组合出现了聚集现象，14种资产中只有两种资产头寸不为0。其次，他们采用等均值和风险调整后等均值(Risk-Adjusted Equal Means)[3]的方法来进行优化，仍然得到了相似的结论。对于这种现象，Black and Litterman (1992), He and Litterman (1999)认为，均值-方差分析需要大量的输入变量，要求投资者对市场上所有资产的期望收益都有准确的估计，但是投资者通常只对几种市场有自己的看法和了解，难以在估计所有变量时找到合适的出发点，因此不能得到合理的结果。Christodoulakis (2002)则认为，可选资产中若有一种资产其收益率的方差很低，且与其它资产收益率的相关性不高，那么结果很有可能是大量持有该资产而非选择分散化。

2.2 对输入变量反应敏感

对输入变量反应敏感是输入变量的微小改变就能引起最优投资组合构成和性质的剧烈变化。Best and Grauer (1991)对这一问题从理论分析和数据计算两个角度进行了研究。在理论研究方面，他们给出了均值-方差优化问题的解析解，并对该解进行敏感性分析，结果发现，当仅有预算限制条件时，最优组合的资产权重对于单个资产期望收益变化的反应极端敏感，进一步地，优化组合的总期望收益及其方差对单个资产期望收益变化的反应也十分剧烈。在数据研究方面，作者分别使用10，20，50，100种资产研究优化问题，并添加卖空限制。结果发现，最优组合的期望收益和方差的变化在卖空限制下不再明显，但是最优组合的资产权重依然具有输入变量敏感性，一种资产期望收益的微小改变可以使得该资产在组合中的权重改变一半以上。

2.3 估计误差最大化

估计误差最大化(estimation error maximization)这一问题来源于输入变量的

[3]这是指假设所有资产每单位风险带来的收益相同。

选取。由于投资者并不知道资产的期望收益以及协方差矩阵的真实值，因此在进行优化时这些输入变量都是由投资者估计产生的。估计带来的估计误差也一并进入了优化过程，这使得误差的影响被进一步放大，从会得到糟糕的优化结果。Michaud (1989)对这一问题进行了详细的讨论。Michaud引用了Jobson and Korkie (1981)的研究，该研究构建了三种最优组合：基于已知分布的投资组合、基于估计的投资组合和等权重投资组合，结果发现基于估计的投资组合表现明显低于另外两种组合。Michaud 指出，产生这种结果的原因是用均值-方差方法得到的估计量的估计误差进入了优化过程，这严重影响了结果的准确性和可信性。作者建议应该增加有效的优化约束来解决这一问题。进一步地，Michaud指出，投资者通常使用的历史均值并不是期望收益的最佳估计，因为这一估计量忽略了各变量之间的联系，投资者应当采用更加有效的估计手段。事实上，估计误差问题很可能是造成均值- 方差分析结果极端性和敏感性的根本原因，Britten-Jones (1999), Christodoulakis (2002), Silva, Lee and Pornrojnangkool (2009)都持有这种观点。

总体来看，均值-方差分析存在的上述缺陷造成的最大问题是最优投资组合构成成分比较极端，同时又不够稳定，而两点这恰恰是实际投资组合管理中最为忌讳的，因此均值-方差分析很少被投资者应用于实际投资组合管理中。而另一方面，均值- 方差分析背后蕴含的思想又能普遍被人们接受。因此，如果有新型的量化投资模型能够改善均值-方差分析框架下最优组合表现不稳定的问题，那么这种模型必将在量化投资中发挥重要作用。Black-Litterman模型就是在这样的背景下提出的。

3 Black-Litterman模型：概述

正如第二节结尾指出的，Black-Litterman模型可以有效改进均值-方差分析中存在的问题。Black-Litterman模型最早由Black and Litterman (1990)提出，随后在Black and Litterman (1991, 1992)中进一步讨论，其中Black and Litterman (1992)比较全面的阐述了模型的整体思想，是现在研究通常参考的原始著作。Black-Litterman模型结合了CAPM (Sharpe (1964), Lintner (1965))，逆最优

化理论(Sharpe (1974))，混合估计法(Theil (1971))和均值-方差分析(Markowitz (1952))等理论，建立了一种将投资者对资产收益的主观判断与市场均衡收益联系起来的资产配置方法。模型的核心思想是：首先引入一个能够出清市场的均衡模型，将该模型下各个资产的收益情况作为参考点和收益调整的出发点（先验分布）；其次引入投资者观点，投资者对任意资产的预期收益发表若干看法，并且对于每个看法都有一定的信心水平；然后将投资者的观点收益与均衡收益相结合，推导出调整后的Black-Litterman期望收益分布（后验分布）；最后将后验分布作为输入变量，使用均值-方差分析方法求解出最优组合的权重。

Black-Litterman模型对于资产配置模型的主要贡献在于：第一，模型给出了投资者估计资产期望收益的出发点－－市场均衡，正如Black and Litterman (1992)指出的，投资者不可能对所有类别的资产都有准确的估计，因此设立一个良好的参照点是十分必要的；第二，模型给出了将投资者观点进行量化的方法，同时创新性地将这些观点作为市场均衡的补充信息进行更新，得到调整后的资产期望收益的情况，这种调整最终得到了更好的优化结果。

本节首先从整体介绍Black-Litterman模型的四大基本步骤，然后讨论基于Black-Litterman模型的最优投资组合具有的性质。需要指出的是，Black and Litterman (1992)以Black (1989)的iCAPM市场均衡模型作为市场均衡的基础，存在汇率风险，但是此后的大部分文献的讨论(包括He and Litterman (1999))都以CAPM作为市场均衡模型，没有包括汇率风险。为了与大部分文献一致，本文的讨论也以CAPM为均衡的出发点。

3.1 偏离市场均衡

Black-Litterman模型的基本出发点是市场均衡。市场均衡是指每种资产的期望收益都促使该资产在市场上供需相等，从而到达市场出清的状态。满足这一条件的一组期望收益被称为均衡风险溢价(risk equilibrium premium)。Black and Litterman (1992)指出，在现实中资本市场是经常偏离市场均衡的，偏离状态的存在使得投资者有动机制定自己的投资策略来获取利润；另一方面，市场均衡起到了参照点的作用，投资者制定的各种策略的出发点都是市场均衡状态，这使得市场偏离均衡的程度不会很大，不同投资者的行为最终会将市场重新带回均衡状态。投资者在上述描述的环境中进行投资需要对资产期望收益的

分布有明确的认识，而这种认识可以用数学的语言表示如下。

假设$R, E(R), \Pi$都是n*1的列向量，分别表示n种资产的收益向量，期望收益向量以及均衡风险溢价向量，其中均衡风险溢价是由均衡模型CAPM确定的。假设Σ是n*n的对称矩阵，表示资产收益率的协方差矩阵。一般的，我们认为资产的收益率符合多元正态分布

$$R \sim N(E(R), \Sigma), \tag{3}$$

若市场处于均衡状态，显然有$E(R) = \Pi$，即$E(R)$是一个常向量，但是由于我们认为市场经常偏离均衡状态，因此资产的期望收益也应当处于随机变化之中，$E(R)$ 不再是常向量，而是一个随机向量。由于市场最终会回到均衡状态，我们认为$E(R)$在Π附近摆动，可以表示为

$$E(R) = \Pi + \varepsilon, \tag{4}$$

ε是n*1的列向量，服从均值为0的多元正态分布，表示$E(R)$的波动情况。我们假定$E(R)$的波动性与R成正比，因此ε的协方差矩阵可以用$\tau\Sigma$来描述。τ代表了期望收益的不确定程度，由于资本市场偏离均衡的程度不大，期望收益的不确定性应当远小于收益本身的不确定性，故τ应当趋于零。综上所述，在我们叙述的环境下的资产期望收益是一个随机向量，其分布可以表示为

$$E(R) \sim N(\Pi, \tau\Sigma), \tag{5}$$

这就是资产期望收益的先验分布，这一分布包含的信息被市场上全部的投资者熟知，属于公共信息。

3.2 引入个人观点

市场偏离均衡的状态使得投资者有动机制定自己的投资策略来获取利润，在这一过程中，投资者对资产收益会产生个人观点，该观点可能与市场隐含的对资产期望收益的观点不同，因此投资者会将个人观点与市场观点结合，形成新的期望收益的分布，这对策略的形成至关重要。投资者可以发表一个观点，也可以发表多个观点；其观点可以针对一种特定资产，也可以针对任意种类、任意数量的资产的投资组合，投资者观点涉及的资产被称为“ 观点投资组合(view portfolio)”；观点可以是绝对观点，也可以是相对观点。但是观点需要有明确的收益率的判断，同时投资者应当表明自己对自己所持观点的自信程度。一个绝对观点的例子是：“我认为未来资产A 的收益率是3% （自信程度50%)”，一个相对观点的例子是：“我百分之百确信未来资产A 的收益率会比资产B 高5%”。投资者的一个观点用数学语言可以表示为

$$pE(R) = q + \epsilon,$$

其中p是1*n的行向量，第i个元素表示第i种资产在观点投资组合中的权重，$E(R)$即n种资产的期望收益向量，q为常数，表示投资者对该观点投资组合的期望收益判断，$\epsilon \sim N(0, \omega^2)$表示投资者对自己观点的自信程度，显然$\omega$越小，投资者对自己的观点越自信，$\omega = 0$表示投资者完全确信自己的判断。

由于投资者可以发表不止一个观点，当投资者具有k个观点时，其观点可以表示为

$$PE(R) = Q + \epsilon, \tag{6}$$

其中P是k*n的矩阵，其第i行表示第i个观点投资组合的构成情况，Q为k*1的列向量，第i行表示对第i个观点投资组合的期望收益，ϵ是k*1的列向量，$\epsilon \sim N(0, \Omega)$，$\Omega$是k*k的对角矩阵，表示其对角元$\omega_{ii}^2$表示投资者对第$i$个观点的自信程度[4]。关于$P, Q, \Omega$ 的具体确定方式请见第5.3节。

Ω是对角矩阵的要求说明我们假定投资者的k个观点是相互独立的[5]，此外我们进一步假设公式(4)中的ε与公式(6)中的ϵ 相互独立，即

$$\begin{pmatrix} \varepsilon \\ \epsilon \end{pmatrix} \sim N\left(0, \begin{bmatrix} \tau\Sigma & 0 \\ 0 & \Omega \end{bmatrix}\right),$$

投资者观点将作为市场均衡收益的补充信息对资产期望收益的分布进行更新，从而得到资产期望收益的后验分布。

[4]事实上，由于假定$\epsilon \sim N(0, \Omega)$，于是有$\det \Omega \neq 0$，这就要求$\forall i, \omega_{ii}^2 > 0$，这意味着投资者不可以持有完全确定的观点。但是，我们可以将投资者对k个观点都完全确定的情况视为$\Omega \to 0$的情况。

[5]实际上，He and Litterman (1999)指出，Black-Litterman模型大部分的结论和性质的得出并不需要限制Ω为对角矩阵。

3.3 信息的结合

在得到以市场均衡为基础的资产期望收益的先验分布和代表投资者观点的投资组合收益分布后，我们可以将两种信息结合，得到调整后的Black-Litterman期望收益分布，这实际上是资产期望收益的后验分布，也是资产期望收益基于投资者观点的条件分布。该后验分布仍然是正态分布，记为$\widehat{E(R)} \sim N(\bar{\mu}, M)$，后验均值和后验协方差矩阵在He and Litterman (1999)中给出，公式为

$$\bar{\mu} = [(\tau\Sigma)^{-1} + P'\Omega^{-1}P]^{-1}[(\tau\Sigma)^{-1}\Pi + P'\Omega^{-1}Q], \tag{7}$$

$$M = [(\tau\Sigma)^{-1} + P'\Omega^{-1}P]^{-1}, \tag{8}$$

上述公式(7)(8)中的所有参数均已在3.1，3.2两节给出定义。

我们尝试从直观角度解释公式(7)。公式中$[(\tau\Sigma)^{-1}\Pi + P'\Omega^{-1}Q]$表明期望收益的后验均值是先验均值$\Pi$和补充观点均值$Q$的加权平均，权重大小由参数$\tau, \Omega$决定，由于$\tau, \Omega$ 分别衡量了资产期望收益的不确定度和投资者观点的不确定度，所以不确定度越低，其对应部分所占的权重就相对越高，这非常符合我们的直觉。

投资者观点完全确信的情况

当投资者观点完全确信，即$\Omega \to 0$ 时，资产期望收益存在最优估计值$\widehat{E(R)}$，该估计值最早在Black and Litterman (1992)中给出[6]。

$$\widehat{E(R)} = \Pi + \Sigma P'(P\Sigma P')^{-1}(Q - P\Pi) \tag{9}$$

3.4 优化投资组合

在得到调整后的资产期望收益的分布后，我们可以进一步得到调整后的资产收益的分布情况，注意到公式(3)中，$E(R)$本身就是一个随机向量，因此不能简单的认为资产收益的分布服从正态分布$N(\bar{\mu}, \Sigma)$，而是应当对资产收益的协方差矩阵也进行更新。结合公式(3)(7)(8)，资产收益的后验分布应修正为

$$R \sim N(\bar{\mu}, \bar{\Sigma}), \tag{10}$$

[6]将公式(7)利用Woodbury Matrix Identity变形，再令$\Omega \to 0$ 即可得到该最优估计值。

其中$\bar{\mu}$来自公式(7)，$\bar{\Sigma} = \Sigma + M$，M来自公式(8)。

以上我们得到了资产收益的后验分布情况，这是投资者将自身观点与市场均衡模型结合的结果，投资者将依此作为其投资策略的指导。因此，Black-Litterman模型的最后一步是根据投资者得到的资产收益后验分布确定最优投资组合。由于我们假定资本市场是符合CAPM均衡的，因此投资者的思想仍然可以用均值-方差分析描述，我们将公式(10)所表示的资产收益的后验分布作为输入变量，采用均值-方差分析方法得到最优组合，这便是Black-Litterman模型下的资产资产配置情况，其数学表达如下。

用公式(10)中的变量代入公式(1),我们有$\max U = w'\bar{\mu} - \frac{1}{2}\lambda w'\bar{\Sigma}w$，在无约束条件的情况下，最优投资组合由公式(2)应为

$$w^* = (\lambda\bar{\Sigma})^{-1}\bar{\mu}, \tag{11}$$

其中$\bar{\mu}$,$\bar{\Sigma}$均由分布(10)给出。

在有约束条件的情况下，我们可以采用任意的优化软件包来求解最优投资组合。

特别值得注意的是，现有的关于Black-Litterman模型的文献中，除了He and Litterman (1999)之外，没有其它文献提及应当更新资产收益的后验协方差矩阵这一步骤(即得到公式(10)，绝大部分文献直接使用资产收益原有的协方差矩阵Σ作为输入变量求解最优资产，作者认为这是不合理的。第一，这种做法忽略了我们关于资产的期望收益也是一个随机向量这一认定，没有将期望收益的不确定纳入资产收益本身的不确定性；第二，这种做法没有及时的对信息进行更新，这样得到的估计并不是最优的。Walters (2011)也指出了这一问题，他对于其它文献采用的方式提出了一种新的解释。Walters 认为，大部分的文献实际上没有采用Black and Litterman (1992)关于资产收益的模型设定，而是采用了一种替代参考模型(alternative reference model)，在这种模型下，这些文献没有对资产收益的后验协方差矩阵进行更新是可以理解的。详细的讨论请见Walters (2011)。

至此，我们用较为直观的语言完整介绍了Black-Litterman模型的核心思想，第3.5节将讨论Black-Litterman模型下最优投资组合的性质，第4节将给出Black-

Litterman期望收益分布(即公式(7)(8))的严格证明。如果读者希望尽快了解如何确定模型中的参数并使用Black-Litterman模型，可以跳过以下章节，直接阅读第5节。

3.5 最优投资组合的性质

由于Black-Litterman模型在有约束条件时没有固定的解析解，所以本节讨论的最优投资组合指无约束条件时的最优投资组合。最优投资组合有以下几条主要性质。

性质3.1. *最优投资组合是市场组合加上每一种观点投资组合的加权和，最后按照$\frac{1}{1+\tau}$比例缩减。*

He and Litterman (1999)证明了，在无约束条件时，最优投资组合可以表示为

$$w^* = \frac{1}{1+\tau}(w_{mkt} + P'\Theta), \tag{12}$$

其中Θ为k*1的列向量，

$$\Theta = \frac{\tau}{\lambda}\Omega^{-1}Q - A^{-1}P\frac{\Sigma}{1+\tau}w_{mkt} - \frac{\tau}{\lambda}A^{-1}P\frac{\Sigma}{1+\tau}P'\Omega^{-1}Q, \tag{13}$$

$$A = \Omega/\tau + P\Sigma/(1+\tau)P',$$

公式(12)明确的表示了性质3.1的内容，即投资者的最优组合是从市场组合出发进行调整，按一定权重加入所有观点投资组合，权重由Θ决定，第i个观点投资组合所占的权重就是列向量Θ的第i个元素θ_i。性质3.1完美地反应了Black-Litterman模型的核心－－投资者从市场均衡出发调整最优投资策略。He and Litterman还进一步直观地解释了权重向量Θ中每一项的含义。公式(12)中第一项是权重的主要决定成分，其大小的决定将由性质3.3给出；第二项代表观点投资组合与市场组合间的相互影响，在考虑观点投资组合权重时，投资者应当去除已经反映在市场组合中的信息；第三项代表观点投资组合之间的相互影响，在考虑观点投资组合权重时，投资者应当去除已有观点投资组合间重复的信息。

性质3.2. *当投资者对市场没有任何观点时，他将持有按$\frac{1}{1+\tau}$比例缩减市场组合。*

令公式(12)中观点矩阵$P=0$即可得到结论。性质3.2是容易理解的，一个投资者对于市场没有额外看法时，最佳策略应该是保持均衡情况下的最优组合，即市场组合不变。比例因子$1/(1+\tau)$则表明投资者对市场CAPM均衡存在不确定，因此将减少市场组合的权重，改用无风险资产代替。

性质3.3. *最优投资组合中，第i种观点投资组合所占的权重θ_i是该观点投资组合期望收益q_i的增函数，其绝对值是投资者对该组合自信程度$1/(w_{ii}^2)$的增函数。*

性质3.3的证明请见He and Litterman (1999)。性质3.3也是十分直观的，最优组合中观点投资组合的权重反映了最优组合偏离市场组合的程度。一方面，较高的观点投资组合期望收益使投资者有动机在自己的投资策略中安排更多该组合以获取更丰厚的收益；另一方面，比较投资者对自己的观点较为肯定和不够肯定时的情况，显然他在前者情况下对于市场组合的调整幅度会比后者大。

4 Black-Litterman模型：证明

本节给出Black-Litterman模型中资产期望收益后验分布的证明。Black and Litterman (1992)在原文中指出自己使用的是Theil (1971)的混合估计方法(mixed estimation)，但是由于Black-Litterman模型中存在信息的更新，所以后来大部分文献都将Black-Litterman模型归类为贝叶斯(Bayes)方法的模型，并从贝叶斯统计学的角度给出证明。事实上这两种方法能够得到相同的结论，我们给出这两种方法的证明。

4.1 Theil混合估计法

Theil (1971)混合估计法的目的是从完整的先验数据和之后补充的部分数据的混合数据中作出对未知参数更为准确的估计。对Black-Litterman模型而言，资产的期望收益$E(R)$是未知参数，是我们需要估计的变量。先验分布的模型为

$$\Pi = I_n E(R) + \varepsilon, \tag{14}$$

其中$\Pi, E(R), \varepsilon$的定义、假设与公式(4)相同，I_n为n维单位矩阵[7]。

[7]我们注意到该模型与公式(4)的区别，一是Π与$E(R)$的位置，二是n维单位矩阵I_n，I_n的出现主要是为了将先验分布写为一个线性模型的形式，而由于ε的均值为0，因此Π与$E(R)$的位置并无影响，但是因为$E(R)$是我们希望估计的变量，故写在线性模型的右侧。

当投资者的观点作为额外信息给出时，我们可以得到一个关于$E(R)$的新的线性模型

$$Q = PE(R) + \epsilon, \tag{15}$$

其中$P, Q, E(R), \epsilon$的定义、假设与公式(6)相同[8]。

Theil的混合估计法就是将以上两个关于未知参量$E(R)$的线性模型结合，通过广义最小二乘法(GLS)方法得到结合有两个模型信息的$E(R)$的估计值，该估计量的分布即为Black-Litterman模型中资产期望收益的后验分布。具体步骤为：将上述两个线性模型合并，得

$$\begin{bmatrix} \Pi \\ Q \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I_n \\ P \end{bmatrix} E(R) + \begin{bmatrix} \varepsilon \\ \epsilon \end{bmatrix}, \tag{16}$$

由于假设了ε, ϵ相互独立，故合并后模型的残差项仍服从正态分布，均值为0，方差为

$$\begin{bmatrix} \tau\Sigma & 0 \\ 0 & \Omega \end{bmatrix},$$

我们对公式(16)中结合的线性模型进行GLS估计，得到未知参数$E(R)$的估计和分布。GLS估计量为

$$\bar{\mu} = \left[\begin{bmatrix} I'_n & P' \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \tau\Sigma & 0 \\ 0 & \Omega \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} I_n \\ P \end{bmatrix} \right]^{-1} \begin{bmatrix} I'_n & P' \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \tau\Sigma & 0 \\ 0 & \Omega \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} \Pi \\ Q \end{bmatrix}, \tag{17}$$

将公式(17)进行矩阵乘法化简得

$$\bar{\mu} = [(\tau\Sigma)^{-1} + P'\Omega^{-1}P]^{-1}[(\tau\Sigma)^{-1}\Pi + P'\Omega^{-1}Q], \tag{18}$$

根据GLS估计量的性质，$E(R)$服从渐进正态分布，其渐进方差为

$$\left[\begin{bmatrix} I'_n & P' \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \tau\Sigma & 0 \\ 0 & \Omega \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} I_n \\ P \end{bmatrix} \right]^{-1} = [(\tau\Sigma)^{-1} + P'\Omega^{-1}P]^{-1},$$

故我们得到资产期望收益的$E(R)$的后验分布为

$$N([(\tau\Sigma)^{-1} + P'\Omega^{-1}P]^{-1}[(\tau\Sigma)^{-1}\Pi + P'\Omega^{-1}Q], [(\tau\Sigma)^{-1} + P'\Omega^{-1}P]^{-1}).$$

[8]我们同样注意到注意到该模型与公式(6)的区别是Q与$PE(R)$的位置，由于ϵ的均值为0，因此二者的位置并无影响。

4.2 贝叶斯方法

贝叶斯统计学派最重要的观点就是信息的更新，而这也与Black-Litterman模型的想法一致，所以大部分文献都将Black-Litterman模型定性为贝叶斯方法的一种应用，我们以贝叶斯方法来证明Black-Litterman模型。

在贝叶斯框架下，投资者对未来资产期望收益的观点是先验分布，同时，投资者借助自己已有的看法（先验分布）与市场数据求解得到均衡风险溢价，该数据信息使得投资者重新更新自己对于资产期望收益的判断，投资者新形成的观点就是未来资产期望收益的后验分布[9]。

贝叶斯定理是

$$\mathrm{pdf}(A|B) = \frac{\mathrm{pdf}(B|A)\mathrm{pdf}(A)}{\mathrm{pdf}(B)}, \mathrm{pdf}\text{指代概率密度函数}, \tag{19}$$

我们令$A = E(R), B = \Pi$，则

$$\mathrm{pdf}(E(R)|\Pi) = \frac{\mathrm{pdf}(\Pi|E(R))\mathrm{pdf}(E(R))}{\mathrm{pdf}(\Pi)}, \tag{20}$$

为了利用贝叶斯定理建立模型并解决问题，我们进行如下假设：假设投资者对资产期望收益的初始看法为公式(6)，于是资产期望收益的先验分布为

$$PE(R) \sim N(Q, \Omega),$$

另一方面，假设基于投资者先验看法的均衡风险溢价$(\Pi|E(R))$具有分布

$$\Pi|E(R) \sim N(E(R), \tau\Sigma),$$

$E(\Pi) = E(R)$这一点反映的是在CAPM均衡的市场中，所有投资者对资产的期望收益持有相同看法，因此均衡风险溢价就是这一看法代表的期望收益。最后，假设计算均衡风险溢价的数据分布是均匀分布，概率密度函数为常数。以上出现的所有参数定义均与第3节统一。

由公式(20)和假设，

$$\mathrm{pdf}(PE(R)) \propto \exp\{-\frac{1}{2}(PE(R) - Q)'\Omega^{-1}(PE(R) - Q)\},$$

$$\mathrm{pdf}(\Pi|E(R)) \propto \exp\{-\frac{1}{2}(\Pi - E(R))'(\tau\Sigma)^{-1}(\Pi - E(R))\},$$

[9]注意到这里先验分布、后验分布的定义与全文其他章节不同，这是由于贝叶斯统计学派和普通统计学派观点的差异造成的，不对问题的本质产生影响。

故可得

$$\mathrm{pdf}(E(R)|\Pi) \propto \exp\{-\frac{1}{2}(PE(R)-Q)'\Omega^{-1}(PE(R)-Q)-\frac{1}{2}(\Pi-E(R))'(\tau\Sigma)^{-1}(\Pi-E(R))\},$$

上式右端可化简为

$$\exp\{-\frac{1}{2}[E(R)'HE(R) - 2C'E(R) + A]\},$$

其中

$$H = (\tau\Sigma)^{-1} + P'\Omega^{-1}P, \mathrm{H}是对称矩阵,$$

$$C = (\tau\Sigma)^{-1}\Pi + P'\Omega^{-1}Q,$$

$$A = \Pi'(\tau\Sigma)^{-1}\Pi + Q'\Omega^{-1}Q,$$

对上式继续变形，有

$$\begin{aligned}
& \exp\{-\frac{1}{2}[E(R)'HE(R) - 2C'E(R) + A]\} \\
= \;& \exp\{-\frac{1}{2}[E(R)'H'H{-}1HE(R) - 2C'H^{-1}HE(R) + A]\} \\
= \;& \exp\{-\frac{1}{2}[(HE(R) - C)'H^{-1}(HE(R) - C) + A - C'H^{-1}C]\} \\
= \;& \exp\{-\frac{1}{2}[(E(R) - H^{-1}C)'H(E(R) - H^{-1}C) + A - C'H^{-1}C]\} \\
\propto \;& \exp\{-\frac{1}{2}(E(R) - H^{-1}C)'H(E(R) - H^{-1}C\}.
\end{aligned}$$

故可知基于市场均衡风险溢价数据更新的资产期望收益的后验分布服从多元正态分布$N(H^{-1}C, H^{-1})$，将H, C代入，则得到

$$E(R)|\Pi \sim N([(\tau\Sigma)^{-1} + P'\Omega^{-1}P]^{-1}[(\tau\Sigma)^{-1}\Pi + P'\Omega^{-1}Q], [(\tau\Sigma)^{-1} + P'\Omega^{-1}P]^{-1}).$$

5 Black-Litterman模型：实施

本文第3节从总体上对Black-Litterman模型的思想和原理进行了介绍，本节将介绍在现实中如何利用Black-Litterman模型进行投资组合管理，包括具体的操作步骤以及各种参数的确定方法。概括来说，Black-Litterman模型的操作步骤可以归纳如下：

1. 做好准备工作，包括确定要进行配置的资产的种类，决定市场组合中各个资产的权重，计算资产收益的协方差矩阵Σ，计算投资者的风险偏好系数λ；

2. 确定市场均衡情况，主要是确定均衡风险溢价Π，Π的计算是基于逆最优化理论，该过程需要准备工作中得到的市场组合中各资产的权重，风险偏好系数等变量。其次，确定代表资产期望收益不确定性的标量τ，形成先验分布，即公式(4)；

3. 确定投资者的观点作为补充信息，将投资者观点进行数量化处理，形成公式(6)，这包括确定矩阵P, Q以及Ω；

4. 将先验分布与补充信息结合，根据公式(7)(8)得到期望收益的后验分布参数$\bar{\mu}, M$，进而通过公式(10)确定$\bar{\mu}, \bar{\Sigma}$, 得到资产收益调整后的分布；

5. 将上一步中得到的调整后的收益分布作为均值-方差分析的输入变量，依照自身情况下的约束条件使用公式(11)或优化软件进行优化，得到最优投资组合。

5.1 准备工作

进行投资组合管理时首先要确定的问题就是应该将哪些资产纳入投资范围（也即市场组合包含哪些资产），这包括指定资产的种类和地理范围。首先考虑地理范围，如果进行国内投资管理，则选取的资产都应该是本国资产；如果进行跨国投资管理，则应该广泛选取不同国家的资产。Black and Litterman (1992)选取了七个资本市场发达国家的股票和债券市场共14类资产完成了他们的优化配置。其次考虑资产类别，市场组合的定义是包括市场中所有正在进行交易的资产，但是这在实际操作中是不现实的，在实际的投资管理中，我们只能选取尽量多种类别的资产来组成市场组合，但是很难包括市场上所有的资产。对于股票和债券这两类资产，Litterman, et al (2003)建议采用一些知名投资银行构造的指数来模拟。至于如房地产、私募基金、对冲基金、大宗商品等其他资产是否应该纳入市场组合，Litterman, et al (2003)也进行了详细讨论，概括来讲，这些资产都不需要纳入市场组合之中。

在确定市场组合包含的资产后，我们需要确定市场组合中每种资产的权重向量w_{mkt}，这十分简单。在CAPM均衡下，每名投资者都持有市场组合，因此w_{mkt}中的元素就是每种资产的市值占比。

为了计算均衡风险溢价，我们还需要提前计算资产收益的协方差矩阵Σ，投资者的风险偏好系数λ。

风险偏好系数λ的取法主要有两种。一是凭作者的经验主观指定，如He and Litterman (1999)取$\lambda = 2.5$；二是采用隐含风险偏好系数(implied risk aversion coefficient)来代替。这样的方法见于Grinold and Kahn (1999)。Grinold and Kahn通过估计隐含风险偏好系数来计算λ，公式为

$$\lambda = \frac{E(R) - r_f}{\sigma^2},$$

其中$E(R)$表示市场组合的总期望收益（不是超额期望收益），由历史数据的均值确定，r_f是无风险利率，$\sigma^2 = w'_{mkt}\Sigma w_{mkt}$表示市场组合收益率的方差，$w_{mkt}$是市场组合权重的n*1的列向量[10]。

考虑协方差矩阵Σ的取法，目前大部分文献采用的方法仍然是基于历史收益计算的协方差矩阵，这一估计虽然简单，但是有一定的局限。例如，这种估计给收益率时间序列赋予等权重，而事实上由于收益率波动率的类聚性，最近发生的收益序列比之前发生的收益序列更能反映现在的真实情况。Litterman, et al (2003)给出了一种改进的方法，该方法以高频收益率序列（如日度收益率）为基础，通过累计变换、赋予最近的数据更高的权重这两种手段来得到频率相对较低的收益率协方差矩阵（如月度收益率）。他们还给出了其它几种估计方法，如利用GARCH模型[11]，利用隐含波动率等等，这些在Litterman, et al (2003)的第16章有详细介绍，此处不再赘述。此外，在时间序列领域中还有更多

[10]这一方法的原理是简单的，在第5.2节我们将看到在市场均衡时，有

$$\Pi - \lambda\Sigma w_{mkt} = 0,$$

给该等式两边同时左乘向量w'_{mkt}，得

$$w'_{mkt}\Pi = \lambda w'_{mkt}\Sigma w_{mkt},$$

左边即为市场组合的超额收益率$E(R) - r_f$，右边为$\lambda\sigma^2$，此时该等式只有一个未知量λ，故可解。

[11]郭红(2012)采用了这种方法。

多元波动率的模型，这些模型在此也不作介绍，有兴趣的读者可以参考任意一本时间序列的教材，如Tsay (2005)。

5.2 市场均衡的确定

均衡风险溢价是Black-Litterman模型的基石，也是资产期望收益估计的出发点，因此我们必须首先对其进行有效的估计。我们采用的是Sharpe (1974)的逆最优化理论，这一理论的思想是非常简单的。在CAPM均衡的市场中，所有投资者均按照均值-方差的分析框架进行投资，即$\max U = w'\mu - \frac{1}{2}\lambda w'\Sigma w$，其一阶条件为$\mu - \lambda\Sigma w = 0$，最优时如下等式成立

$$\mu = \lambda\Sigma w,$$

该优化条件在给定λ, Σ时满足μ与w的一一对应。由于CAPM均衡状态是优化状态，故CAPM下的最优资产（即市场组合）的权重w_{mkt}与均衡风险溢价Π唯一的满足上述等式，即有

$$\Pi = \lambda\Sigma w_{mkt}, \tag{21}$$

正常的优化过程中，投资者已知资产的期望收益求解资产权重向量；另一方面，由于μ与w的一一对应关系，若已知最优状态下自由投资组合的权重分配，我们便可以反推出这组资产所蕴含的期望收益向量，这就是所谓的逆最优化过程。由公式(21)我们可以便可以得出市场组合蕴含的均衡风险溢价。

5.3 投资者观点的确定

第3.2节已经初步介绍了投资者观点的定义，分类以及表述方法，本节主要讨论如何将叙述性的投资者观点转化为数学表达，即如何确定公式(6)中的P, Q，第5.5节将讨论如何确定代表投资者自信程度的Ω。

无论是绝对观点还是相对观点，投资者的每个观点均可以表示为“一个观点投资组合的收益等于一个数值”的形式，第3.2节已经谈到，矩阵P的第i行表示第i个观点投资组合的构成情况，向量Q的第i行表示第i个观点投资组合的收益。显然，Q的取值是容易确定的，因此重点在于如何从观点中确定观点投资组合的权重。下面我们通过举例来说明P, Q 的确定方式，然后进行总结。

我们假设共有5种资产A, B, C, D, E，投资者共有四个观点，这四种观点可以包括投资者所有观点类型，四种观点如下：

1. 未来资产A的收益率是3%（自信度50%）

2. 未来资产A的收益率会比资产B 高5%（自信度75%）

3. 未来资产C和D的收益率是8%（自信度60%）

4. 未来资产A和B比C和D的表现好2%（自信度90%）

我们分别考虑每个观点，将每个观点转化为$pE(R) = q + \epsilon$的形式，进而汇总成$PE(R) = Q + \epsilon$的形式。

对观点1，显然$q = 0.03$，而观点投资组合中只有A，因此A, B, C, D, E在观点投资组合中所占的权重分别为1,0,0,0,0，故$p = [1, 0, 0, 0, 0]$；

对观点2，该观点等价于"买入资产A同时卖空资产B未来的期望收益是5%"。因此，观点投资组合应当是由买入A和卖空B构成的，故$p = [1, -1, 0, 0, 0]$；

对观点3，该观点的观点投资组合应当是由买入C和D构成的，但是此时C和D同时拥有多头头寸，两种资产的相对权重的确定就产生了不确定性。Satchell and Scowcroft (2001)主张此时具有相同头寸的资产应当持有相等权重，即$p = [0, 0, 0.5, 0.5, 0]$，但是大部分的文献，如He and Litterman (1999), Idzorek (2005), Walters (2011)均认为在这种情况下，应当按照总市值相对占比来确定观点投资组合的相对权重。假设C的总市值为8亿，D的总市值为2亿，C相对于C和D的整体总市值占比80%，D相对占比20%，故$p = [0, 0, 0.8, 0.2, 0]$。作者认为，采用总市值相对占比的方法更为合理。第一，在"未来资产C和D的收益率是8%"这种表述方式中，一个自然的暗示是市值大的公司对收益的贡献应当更大，相反的，若是进行等权重的投资，投资者一般会明确表明这一态度；第二，这与整体均衡的分析框架较为一致；

对观点4，类似观点3，该观点的观点投资组合应当是由买入A和B，同时卖空C和D构成的，我们同样应当采取总市值相对占比的方法来确定权重，假定A的总市值为6亿，B的总市值为4亿，C和D与观点3相同，则应有$p = [0.6, 0.4, -0.8, -0.2, 0]$.

综上，我们得到了四种观点的数学表示方法，将其合并为矩阵形式$PE(R) = Q + \epsilon$，则有

$$P = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0.8 & 0.2 & 0 \\ 0.6 & 0.4 & -0.8 & -0.2 & 0 \end{bmatrix}, Q = \begin{bmatrix} 0.03 \\ 0.05 \\ 0.08 \\ 0.02 \end{bmatrix}.$$

我们对投资者不同观点下的P的确定方法总结如下：当投资者的观点是绝对观点时，观点投资组合的总权重应为1（如观点1, 3），当投资者的观点是相对观点时，观点投资组合的总权重应为0（如观点2, 4）；当相同头寸中的资产不只一种时，应当采用总市值相对占比的方法确定其权重（如观点3, 4）。

读者可能注意到，第一，我们的矩阵P中第五列元素均为0，这是由于投资者对资产E没有观点造成的，这是可以接受的，因为投资者可以对任意资产发表或不发表自己的观点。第二，我们在上述过程中没有讨论自信程度的确定方法，这是因为Ω的确定既相对独立，又比较复杂，我们将在第6.5节单独讨论。第三，本节讨论的是如何将已有观点转化为数学表述，但是并未涉及观点本身是如何形成的，事实的确如此。Black-Litterman模型只涉及投资者如何利用观点进行投资，却没有为观点的形成给出指导，已有的文献中，大部分的观点或者由学者自行假设，或者来自知名投资机构的研究部门。鉴于个人投资者对市场的了解和把握程度有限，作者建议，在实际运用Black-Litterman模型时，个人投资者应当尽量参考机构投资者的研究来形成自己的观点。

5.4 τ的确定

τ和Ω可以说是Black-Litterman模型中最为重要的两个参数，分别代表了市场中期望收益的不确定度和投资者观点的不确定度。从第3.5节的讨论就可以看出，最优投资组合中观点投资组合的相对权重就与τ和Ω 有关。但是另一方面，τ和Ω也是模型中最容易引起混淆，最难以确定的两个参数。由于Black and Litterman (1992) 的原文中并没有对τ和Ω的取法给予明确指导，这就导致后来的文献众说纷纭，没有统一的看法。本节介绍τ的几种主要取法，第5.5节介绍Ω的几种主要取法。

由于τ衡量的是期望收益的不确定程度，根据第3.1节的讨论，这种不确定程度应当很低，故τ的取值应当趋近于0。

第一种方法是由作者直接假定。He and Litterman (1999)中就假设$\tau = 0.05$；Lee (2000)根据自己的研究经验，认为τ的取值在0.01至0.05之间比较合适；Bevan and Winkelmann (1998)指出，τ的取值应当尽量小，如果τ的取值使得最优投资组合的预期信息比率(information ratio)超过了2，那么应当进一步减小τ的值并重新优化。

第二种方法是从统计量估计。Blamont and Firoozye (2003)认为，$\tau\Sigma$代表期望收益的不确定性，这一变量应当与使用历史数据得到的期望收益估计值的标准误差保持一致。观测到的历史数据越多，对期望收益的估计越准确，不确定度越低。在这种情况下，τ的最佳估计应为$\tau = \frac{1}{T}$，T为资产收益的观测数目。

第三种方法是将τ和Ω联系起来共同估计，这样可以相对减少实际起作用的变量个数，使结果尽可能准确[12]。事实上，Walters (2011)证明了如下结论，如果假设Ω是正比于$\tau\Sigma$的，即若有$\Omega = \alpha P(\tau\Sigma)P', \alpha > 0$[13]，那么期望收益的后验均值将与$\tau$的取值无关，仅期望收益的后验协方差矩阵与$\tau$有关。

上述方法中，τ的取值一般都很小。与这一做法相反，Satchell and Scowcroft (2001)在应用Black-Litterman模型时直接将τ设定为1，这一做法引发了其他一些文献的质疑。作者也认为这一设定方法背离了原著对于τ这一参量意义的解释，因此不推荐这种取法。Walters (2011)则将这种取法解释为使用替代参考模型的结果，并证明了二者的统一性。

除了将τ指定为1，Satchell and Scowcroft (2001)还提出了一种关于τ的建模方式。他们假定τ是一个随机变量，且服从scale-gamma分布，在此条件下，资产期望收益的后验分布将服从多元t分布[14]。他们指出，由于资产收益分布的一个重要特点是其厚尾性(fat-tailed)，而大部分情况下t分布比正态分布更加厚尾，因此这种分布可能能够更好刻画期望收益的分布。但是，由于这种建模的计算过于复杂，我们认为这种方法的实际操作价值并不高。

[12]在第5.5节可以看到，He and Litterman (1999)就是采用了这种方法。

[13]采用这一公式时，Ω不一定成为对角矩阵，但是这并不影响问题的结论，对角矩阵可以看做是上述表示的一个特例，即$\Omega = diag(\alpha P(\tau\Sigma)P')$.

[14]证明的详细过程请见原文献。

综上所述，学术界关于τ的取值研究并没有统一的结论，但是一个基本共识是τ的取值比较小。在实际操作中，我们可以任意采用方法1, 2, 3对τ进行估计。

5.5 Ω的确定

在第5.3节中我们讨论了如何将投资者观点数量化，但是没有讨论如何确定Ω这一关键变量。事实上，Ω与τ一样难以确定，都没有统一的标准，这里介绍几种常见的Ω的确定方法。

第一种方法是假定Ω与期望收益先验分布的协方差矩阵$\tau\Sigma$成正比。这一方法的基本思想是直观的，Ω的对角元ω_{ii}^2代表的是投资者对自己第i个观点的不确定程度，ω_{ii}^2越大，投资者对该观点的自信程度越低；另一方面，考虑第i个观点投资组合的期望收益，若该组合期望收益的方差越大，该组合期望收益的不确定性越高，正是由于组合期望收益的不确定性高，投资者才对这种观点缺乏信心。因此，我们可以假设w_{ii}^2正比于第i 个观点投资组合的期望收益的方差。令p_i表示矩阵P的第i个行向量，即第i个观点投资组合的权重向量，则第i 个观点投资组合的期望收益的方差为$p_i(\tau\Sigma)p_i'$，于是有$\omega_{ii}^2 \propto p_i(\tau\Sigma)p_i'$，记为

$$\omega_{ii}^2 = \alpha p_i(\tau\Sigma)p_i', \tag{22}$$

在这种情况下，Ω可以表示为

$$\Omega = \begin{bmatrix} \alpha p_1(\tau\Sigma)p_1' & 0 & 0 \\ 0 & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & \alpha p_k(\tau\Sigma)p_k' \end{bmatrix},$$

这也等价于

$$\Omega = diag(\alpha P(\tau\Sigma)P').^{15}$$

这就得到了Ω与期望收益先验分布的协方差矩阵$\tau\Sigma$成正比的结果。为方便起见，一部分文献令$\alpha = 1$ (如He and Litterman (1999))，根据Walters (2011)，α代表了投资者观点在后验分布的形成过程中所起到的比重，$\alpha = 1$说明先验分布与投资者观点在决定后验分布时同等重要，这在直觉上是符合逻辑的。

[15]关于Ω是否为对角矩阵对结果的影响的讨论参见脚注13。

总结第一种方法，Ω的取法为

$$\Omega = \begin{bmatrix} p_1(\tau\Sigma)p_1' & 0 & 0 \\ 0 & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & p_k(\tau\Sigma)p_k' \end{bmatrix} = diag(P(\tau\Sigma)P'). \tag{23}$$

第二种方法是将自信程度与观点投资组合期望收益的置信区间结合起来，这是Walters (2011)提出的。由于每一个观点都可以写成$pE(R) = q + \epsilon, \epsilon \sim N(0, \omega^2)$的形式，我们有期望收益$pE(R) \sim N(q, \omega^2)$，因此我们可以得出期望收益的任意置信区间。考虑观点“我有68%的把握确定观点投资组合的收益在区间[2%, 4%]内部”，通过不复杂的计算，我们就可以得到这样的叙述等价于$q = 3\%, \omega^2 = 0.01^2$.[16]但是，由于这种观点本身的表述就充满了数学色彩，因此很少会出现在平时的投资者观点中，故这种方法的实用性并不高。

第三种方法是直接指定Ω的值，但是由于Ω的含有的元素个数较多，这种指定很可能带来较大的错误，因此少有文献使用这种方法。

以上的方法中，方法1和3都没有给出投资者的自信程度究竟是多少，方法2的表达方式和常用性又受到了限制，因此，我们可以认为目前为止，观点的自信程度都是通过间接的方式与ω_{ii}^2建立联系的。Idzorek (2005)给出了一种方法，使得投资者能够直接将自行指定的自信程度与ω_{ii}^2联系起来。Idzorek提出了隐含自信程度(implied confidence level)的概念，这是指

$$confidence = (w^* - w_{mkt})/(w^*_{100} - w_{mkt}), \tag{24}$$

其中w^*代表给定当前Ω下的最优投资组合，w^*_{100}代表投资者对全部观点均完全确信，即$\Omega \to 0$时的最优投资组合，w_{mkt}代表市场组合。公式(24)的含义是，Black-Litterman模型下最优投资组合偏离市场组合的程度与投资者对自己观点的信心有关，当投资者对自己的所有观点都完全自信时，偏离程度最高。因此，使用当前Ω矩阵得到的最优投资组合偏离市场组合的程度占100%自信时偏离程度的百分比即可以描述当前的投资者自信程度。如果投资者希望为自己指定的自信程度选取Ω矩阵，则只需将逆向进行上述过程，这便是Idzorek (2005)方法的核心思想。Idzorek给出了这一方法

[16]首先，该观点表明均值$q = \frac{2+4}{2} = 3$，其次，正态分布的随机变量落在一个标准差之内的概率为68%，因此，标准差$\omega = 1\%$，方差$\omega^2 = 0.01^2$.

的详细步骤，但比较复杂，Walters (2011)推导出了等价的但更为简洁的结论$confidence = 1/(1+\alpha)$(其中$\alpha$被公式(22)定义)，并基于此给出简化的操作方法，步骤如下。

假定投资者对第i中观点的自信程度为$0 < confidence_i < 1$，则该自信程度对应的参数α_i值为$\alpha_i = (1 - confidence_i)/confidence_i$，基于此计算$\omega_{ii}^2 = \alpha p_i \Sigma p_i'$[17]，$p_i$是$P$的第$i$行，于是$\Omega = diag\{\omega_{11}^2, \omega_{22}^2, \cdots, \omega_{kk}^2\}$.

以上是目前文献中主要提及的四种Ω的估计方法，一般而言，第一种最为简便也最为常用，如果投资者一定要准确的将自己的观点显示在Ω矩阵中，则应当采用Idzorek (2005)的方法。

本节完整介绍了Black-Litterman模型的使用方法，投资者只需按照各小节的方法确定所需参数，再按照本节总论中的步骤进行操作，就可以得到Black-Litterman模型的最优投资组合。下一节我们使用中国行业的数据来举例说明Black-Litterman模型的具体实施过程。

6 案例——Black-Litterman模型在中国

本节我们使用中国市场的数据作为案例来具体演示Black-Litterman模型在投资管理时的使用方法，我们按照第5节的步骤和参数确定方法来实施Black-Litterman模型。首先我们要确定本次资产配置所选取的资产范围。根据Litterman, et al (2003)，我们应当选取有代表性的指数来模拟股票的组合，另外，由于中国的债券市场和衍生品市场等都相对欠发达，因此我们在本案例中不考虑这些市场。我们选用Wind一级行业指数来模拟我国的股票类别，这一指数中包括十个行业，分别是能源指数，材料指数，工业指数，可选消费指数，日常消费指数，医疗保健指数，金融指数，信息技术指数，电信服务指数，公用事业指数[18]，本案例中我们就以这十种指数作为我们要配置的资产。

在数据选取方面，选取从2008年12月31日至2013年4月16日的行业指数收益率序列，数据频率为周，共219条数据；指数的市值以2013年4月16日的最新市

[17]此处公式中没有τ是因为Walters认为Idzorek使用的是替代参考模型。

[18]本案例中所有向量对应的资产顺序均按照这一顺序。

值为准；计算超额收益时使用的无风险收益率为相同时间窗口的7天银行间市场拆借利率(Shibor)。以这些数据为基础处理得到w_{mkt}, λ, Σ，限于篇幅，此处仅列出w_{mkt}, λ的值，Σ不再列出。

$$w_{mkt} = (0.132, 0.105, 0.147, 0.090, 0.049, 0.048, 0.344, 0.050, 0.003, 0.032)',$$

$$\lambda = 1.947,$$

通过上述数据，根据公式(21)解得隐含的均衡风险溢价为

$$\Pi = (0.0020, 0.0025, 0.0021, 0.0022, 0.0016, 0.0016, 0.0020, 0.0021, 0.0015, 0.0016)'$$[19].

此外，关于τ的选取，我们根据已有文献的经验假设$\tau = 0.025$。至此，我们已经完成了资产期望收益先验分布$E(R) \sim N(\Pi, \tau\Sigma)$的确定。

其次我们引入投资者观点。正如第5.3节指出的，投资者观点大部分是由专业的投资机构提出。因此，本案例中，我们结合最新的宏观市场形势与专业投资机构的研究报告[20]来给出我们的观点，我们给出以下三条观点：

1. 未来可选消费指数将跑赢日常消费指数3%（年化收益）。这条观点的依据是，由于中央严打烟酒消费政策的出台以及某些白酒厂商加工过程黑幕的曝光，属于日常消费指数的白酒行业受到打击，股票表现低迷；另一方面，可选消费指数表现较为平稳，有增长潜力，所以我们给出上述观点。

2. 未来能源指数，医疗保健指数和公共事业指数的收益为是12%（年化收益）。这条观点的依据是，由于近来H7N9型禽流感疫情的扩散，医药行业的表现十分值得期待；此外，2013年初中国全国范围的大规模严重污染引起了广泛关注，环保行业和新型能源行业受到政府的大力扶持，这将推动公共事业指数和能源指数的上涨，所以我们给出上述观点。

3. 未来金融指数的收益为5%（年化收益）。这条观点的依据是，2013年3月底，中国银监会出台了《中国银监会关于规范商业银行理财业务投资运作有关问题的通知》，要求整治和规范银行理财产品市场，随即银行股暴跌。这一举措被视为银监会治理影子银行系统的开始，预计年内还会有更

[19]本案例中所有的收益率数据、波动率数据均未年化，而是以周为基础，故数量级较小。

[20]主要来源于2013年4月10日至4月16日中信证券、国泰君安证券、申银万国证券等证券公司的研究报告。

多限制性政策出台。银行股作为金融指数的主要成分势必将拖累该指数的表现，所以我们给出上述观点[21]。

将以上三种看法的收益率周化，并计算未来能源指数，医疗保健指数和公共事业指数三者的相对市值权重，我们可以得到P, Q矩阵

$$P = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0.623 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0.224 & 0 & 0 & 0 & 0.153 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, Q = \begin{bmatrix} 0.000576923 \\ 0.002307692 \\ 0.000961538 \end{bmatrix},$$

我们采用第5.5节的方法一来确定投资者对这些观点的自信程度Ω，即$\Omega = diag(P(\tau\Sigma)P')$，经计算

$$\Omega = \begin{bmatrix} 1.08506 * 10^{-5} & 0 & 0 \\ 0 & 2.50703 * 10^{-5} & 0 \\ 0 & 0 & 3.20831 * 10^{-5} \end{bmatrix},$$

以上我们便完成了投资者观点的分布的计算。

我们现在已经获得了计算优化投资组合的所需的全部变量，下面根据公式(7)(8)(10)(11) 即可得到无约束条件下的Black-Litterman优化投资组合。具体结果如下表所示，表格中的字母含义均与正文一致。

[21]需要注意的是，尽管5%看上去是一个有一定吸引力的数据，但实际上其周化收益率仅为0.1%，低于该行业目前的均衡风险溢价0.2%，因此实际上这是一个对金融指数悲观的看法。

表1：本表展示了在案例所给三条观点下十种资产的调整后的期望收益、优化配置方式以及优化权重与市场组合的差异

资产类别	w_{mkt}	$\bar{\mu}$	w^*	$w^* - \frac{w_{mkt}}{1+\tau}$
能源指数	0.132	0.0020	0.279	0.149
材料指数	0.105	0.0024	0.103	0
工业指数	0.147	0.0021	0.143	0
可选消费指数	0.090	0.0021	0.203	0.115
日常消费指数	0.049	0.0016	-0.067	-0.115
医疗保健指数	0.048	0.0017	0.100	0.054
金融指数	0.344	0.0017	0.034	-0.296
信息技术指数	0.050	0.0021	0.048	0
电信服务指数	0.003	0.0015	0.003	0
公用事业指数	0.032	0.0016	0.068	0.037

分析上表的结果，我们能够得到以下结论：

1. 使用Black-Litterman模型得到的最优组合w^*在权重的分配上的确比较平均，不会出现传统均值-方差分析方法下资产配置过于集中或者资产有大量空头头寸的情况；

2. 表格的最后一列$w^* - \frac{w_{mkt}}{1+\tau}$反映了最优组合偏离市场组合的情况[22]，该偏离程度验证了Black-Litterman模型最优组合的性质：

   - 首先，最优组合是市场组合加上带有一定权重的观点投资组合，然后被$(1/1+\tau)$缩减，投资者未发表观点的资产不做调整。本案例中，我们未对材料指数、工业指数、信息技术指数和电信服务指数发表看法，因此这四种资产在最优组合中的权重并未偏离其在市场组合下的权重；

   - 其次，进行权重调整的资产，其调整幅度符合观点投资组合中的相对权重，即投资者是在按照观点投资组合进行调整。考虑能源指数、医

[22]将w^*与$\frac{w_{mkt}}{1+\tau}$而不是w_{mkt}相比的原因在第3.5节Black-Litterman最优模型性质中已讨论。

疗保健指数和公用事业指数的调整，三者的偏离程度正比于三者在观点投资组合中的权重。

3. 上述最优组合偏离市场组合的情况反映了Black-Litterman模型对输入变量的敏感性。与其它一些文献的例子相比，本案例中最优组合的偏离程度比较大，尤其是金融指数的调整达到了30%，这是本案例的一个不足之处。这可能是由于以下两个原因造成：一是金融指数自身在市场组合中所占权重就很大，达到34%，高出第二名20%，自身的高权重容易造成较大波动；二是本案例中投资者观点是结合研究报告，由作者自行提出的，可能存在不专业或者内容不一致的情况。

7 Black-Litterman模型：延伸

随着Black-Litterman模型逐渐被广泛研究，学者们也提出了该模型的一些缺陷与不足，同时提出了相应的扩展和改进模型，这一节简单介绍其中的几种延伸模型，关于这些模型的细节和更多的延伸模型可以参考原文献。

Herold (2003), Jones, Lim and Zangari (2007), Silva, Lee and Pornrojnangkool (2009)都讨论了Black-Litterman模型在主动投资管理(active investment management)中的应用。与原有的Black-Litterman模型相比，主动投资管理最大的变化在于投资者的出发点不再是处于均衡状态的市场组合，而是指定的标准资产组合(benchmark portfolio)，投资者追求的超额收益也是与标准资产组合相比的，这一指标就是Jensen指数(Jensen Index)。

Herold (2003)指出，Black-Litterman 模型中投资者观点必须以定量形式确定（即观点投资组合具有期望收益$PE(R) = Q$），而现实中大部分基金经理还是以形成定性观点为主，Herold据此提出了一个能够表示和采用定性观点的扩展模型。此外，Herold还提出了三种检验投资者形成的观点是否相容，是否一致的诊断工具(diagnostic tool)。

Jones, Lim and Zangari (2007)的主要贡献在于，他们提出了一种新的观点投资组合的形成方式，即将影响资产收益的风险因子作为形成观点的依据，而非直接指定具体的某些资产收益。常用的风险因子可以来自Fama (1992)的研究，一个例子是："小市值的股票将比大市值的股票表现好5%"。三位作者进一步建

立了这种基于风险因子的观点投资组合模型并将其应用于股票投资管理中。

Silva, Lee and Pornrojnangkool (2009)则从理论角度出发，指出将Black-Litterman模型用于主动投资管理时，投资者的目标函数应为最大化信息比率[23]，在给定这一目标函数的条件下，他们得到了最优组合的解析解。三人在随后的分析中指出，由于最大化信息比率与原始Black-Litterman模型所针对的最大化夏普比率之间存在一定程度的不匹配，因此按照他们分析框架得到的组合可能承担了更多不必要的风险，他们又对潜在的补救措施进行了讨论。

Krishinan and Mains (2005)提出“双因素Black-Litterman模型(two-factor Black-Litterman model)”。他们认为，Black-Litterman模型和均值-方差分析都将风险定义为资产收益的协方差矩阵，但是风险应当包括更丰富的含义，例如宏观经济因素等。他们推导出一套以Black-Litterman模型为基础，能够纳入其它风险因子的资产配置模型，并以经济衰退程度为一个额外因子研究了最优投资组合的情况。

Meucci (2006, 2008)放松了Black-Litterman模型关于收益分布的假设，研究非正态分布收益市场的资产配置情况，进一步地，他还将投资者观点扩展为非线性观点。Meucci将扩展模型尝试应用于情景分析(scenario analysis)，压力测试(stress test)以及衍生品市场的投资和交易。

此外，包括Braga and Natale (2007), 孟勇(2012)等都提出了自己对于Black-Litterman模型的扩展研究，此处限于篇幅不再一一叙述。

8 总结

Black-Litterman模型是以CAPM，逆最优化理论，混合估计法（或贝叶斯方法）和均值-方差分析理论为基础的一个量化资产配置模型。它将投资者对资产收益的看法与原有的市场均衡下的资产期望收益相结合，得到基于投资者观点的资产期望收益分布，这种调整方法能够获得比单纯均值-方差分析更为稳定和分散的最优组合，因而被大量应用于投资管理当中。

使用Black-Litterman模型的主要步骤是：首先在CAPM均衡的资本市场条件下确定均衡风险溢价，并以此为基础得到资产期望收益的先验分布；其

[23]关于信息比率、追踪误差、Jensen Index的定义及三者之间的关系可以参考任意有关主动投资管理的文献。

次引入投资者观点，将投资者观点与期望收益的先验分布结合，得到调整后的Black-Litterman期望收益分布（后验分布）；最后使用均值-方差分析方法求解出最优组合的权重。在无约束条件下，Black-Litterman最优投资组合是市场组合加上加权的观点组合的和，观点组合在最优组合中所占比重（也被视为最优组合偏离市场组合的程度）由投资者对自己观点的自信程度、对均衡收益的不确定度等因素共同决定：投资者对自己的观点越自信，对市场均衡收益的不确定性越高，观点组合所占比重越大。本文案例使用中国行业的数据实施Black-Litterman模型，结果表明该模型确实能够得到较为稳定的最优组合。

目前对于Black-Litterman模型的扩展研究主要集中于参数的选取方法以及模型在不同投资管理领域的应用。未来的研究方向可能包括对模型假定的放松，多因素的Black-Litterman模型等等。

参考文献

[1] 郭红. (2012). 《运用Black-Litterman模型对我国股票市场行业配置研究》, 首都经济贸易大学硕士学位论文.

[2] 孟勇. (2012). 《对Black-Litterman模型加入主观收益方法的改进》, 《统计研究》第29期94-99页.

[3] Best, M. J. and R. R. Grauer. (1991). "On the Sensitivity of Mean-Variance-Efficient Portfolios to Changes in Asset Means: Some Analytical and Computational Results," *Review of Financial Studies*, 4, 315-342.

[4] Bevan, A. and K. Winkelmann. (1998). "Using the Black-Litterman Global Asset Allocation Model: Three Years of Practical Experience," working paper.

[5] Black, F. (1989). "Universal Hedging: Optimizing Currency Risk and Reward in International Equity Portfolios," *Financial Analysts Journal*, 45, 16-22.

[6] Black, F. and R. Litterman. (1990). "Asset Allocation: Combining Investor Views with Market Equilibrium," *Journal of Fixed Income*, 1, 7-18.

[7] Black, F. and R. Litterman. (1991). "Global Asset Allocation with Equities, Bonds, and Currencies," *Fixed Income Research*, 2, 15-28.

[8] Black, F. and R. Litterman. (1992). "Global Portfolio Optimization," *Financial Analysts Journal*, 48, 28-43.

[9] Blamont, D. and N. Firoozy. (2003). "Asset Allocation Model," working paper.

[10] Braga, M. and F. Natale. (2007). "TEV Sensitivity to Views in Black-Litterman Model," working paper.

[11] Britten-Jones, M. (1999). "The Sampling Error in Estimates of Mean-Variance Efficient Portfolio Weights," *Journal of Finance*, 54, 655-671.

[12] Christodoulakis, G. A. (2002). "Bayesian Optimal Portfolio Selection: the Black-Litterman Approach," working paper.

[13] Da Silva, A. S., W. Lee and B. Pornrojnangkool. (2009). "The Black-Litterman Model for Active Portfolio Management," *Journal of Portfolio Management*, 35, 61-70.

[14] Fama, E. F. and K. R. French. (1992). "The Cross Section of Expected Stock Returns, *Journal of Finance*," 47, 427-465.

[15] Grinold, R. C. and R. N. Kahn. (1999). *Active Portfolio Management (2nd ed)*, New York: McGraw-Hill.

[16] He, G. and R. Litterman. (1999). "The Intuition Behind Black-Litterman Model Portfolios," working paper.

[17] Herold, U. (2003). "Portfolio Construction with Qualitative Forecasts," *Journal of Portfolio Management*, 30, 61-72.

[18] Idzorek, T. M. (2005). "A Step-By-Step Guide to the Black-Litterman Model, Incorporating User-Specified Confidence Levels," working paper.

[19] Jobson, J. D. and R. M. Korkie. (1981). "Putting Markowitz Theory to Work," *Journal of Portfolio Management*, 7, 70-74.

[20] Jones, R., T. Lim and P. J. Zangari. (2007). "The Black-Litterman Model for Structured Equity Portfolios," *Journal of Portfolio Management*, 33, 24 – 33.

[21] Krishnan, H. and N. Mains. (2005). "The Two-Factor Black-Litterman Model," *Risk Magazine*, 18, 69.

[22] Kroll, Y., H. Levy, and H. M. Markowitz. (1984). "Mean-Variance versus Direct Utility Maximization," *Journal of Finance*, 39, 47-61.

[23] Lee, W. (2000). *Advanced Theory and Methodology of Tactical Asset Allocation*, New York: John Wiley and Sons.

[24] Lintner, J. (1965). "The Valuation of Risk Assets and the Selection of Risky Investments in Stock Portfolios and Capital Budgets," *Review of Economics and Statistics*, 47, 13-37.

[25] Litterman, R., et al. (2003). *Modern Investment Management: an Equilibrium Approach*, New Jersey: John Wiley and Sons.

[26] Markowitz, H. M. (1952). "Portfolio Selection," *Journal of Finance*, 7, 77-91.

[27] Meucci, A. (2006). "Beyond Black-Litterman in Practice: A Five-step Recipe to Input Views on non-Normal Markets," working paper.

[28] Meucci, A. (2008). "Fully Flexible Views: Theory and Practice," working paper.

[29] Pulley, L. B. (1981). "A General Mean-Variance Approximation to Expected Utility for Short Holding Periods," *Journal of Financial and Quantitative Analysis*, 16, 361-373.

[30] Satchell, S. and A. Scowcroft. (2000). "A Demystification of the Black-Litterman Model: Managing Quantitative and Traditional Construction," *Journal of Asset Management*, 1, 138-150.

[31] Sharpe, W. F. (1964). "Capital Asset Prices: A Theory of Market Equilibrium," *Journal of Finance*, 19, 425-442.

[32] Sharpe, W. F. (1974). "Imputing Expected Security Returns from Portfolio Composition," *Journal of Financial and Quantitative Analysis*, 9, 463-472.

[33] Theil, H. (1971). *Principles of Econometrics*, New York: Wiley and Sons.

[34] Tsay, R. S. (2005). *Analysis of Financial Time Series (3rd ed)*, New York: John Wiley and Sons.

[35] Walters, J. (2011). "The Black-Litterman Model in Detail," working paper.

致谢

本文是在导师李辰旭老师的指导和帮助下完成的。李老师一直关心我的成长和发展，为我在金融工程领域的技能培养提供了大量的机会和帮助，而且极大地宽容了我的懒惰和拖延。本次论文主题是李老师根据我未来的职业规划特地帮助我选择的，在整个的完成过程中，李老师一直支持和鼓励我的想法，在这里我要向李老师表示最衷心的感谢。

我还要感谢光华管理学院的每一位帮助和指导过我的老师，特别是赵龙凯老师。赵老师的证券投资学课程让我第一次对数量金融和量化投资产生了浓厚的兴趣，并逐渐依此确定了自己的职业目标。此后，赵老师为我提供的大量研究机会和申请上的帮助都使我受益无穷。

感谢一直以来陪伴、帮助和鼓励我的朋友们，你们是我大学四年最宝贵的收获和财富。

对父母的感恩和爱无需赘言，他们永远是我最坚实的后盾。

王致远

2013年4月于北京大学

北京大学学位论文原创性声明和使用授权说明

原创性声明

本人郑重声明： 所呈交的学位论文，是本人在导师的指导下，独立进行研究工作所取得的成果。除文中已经注明引用的内容外，本论文不含任何其他个人或集体已经发表或撰写过的作品或成果。对本文的研究做出重要贡献的个人和集体，均已在文中以明确方式标明。本声明的法律结果由本人承担。

论文作者签名： 日期： 年 月 日

学位论文使用授权说明

（必须装订在提交学校图书馆的印刷本）

本人完全了解北京大学关于收集、保存、使用学位论文的规定，即：

- 按照学校要求提交学位论文的印刷本和电子版本；
- 学校有权保存学位论文的印刷本和电子版，并提供目录检索与阅览服务，在校园网上提供服务；
- 学校可以采用影印、缩印、数字化或其它复制手段保存论文；
- 因某种特殊原因需要延迟发布学位论文电子版，授权学校□一年/□两年/□三年以后，在校园网上全文发布。

（保密论文在解密后遵守此规定）

论文作者签名： 导师签名：

日期： 年 月 日