

## 20161220习题课题目

1. 求极限  $\lim_{(x,y) \rightarrow (1,1)} \frac{xy-y-2x+2}{x-1}$

2. 求极限  $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,3)} \frac{\sin xy}{x}$

3. 讨论当  $(x, y) \rightarrow (0, 0)$  时, 下列函数极限是否存在

(a)  $f(x, y) = (x + 2y) \ln(x^2 + y^2)$

(b)  $f(x, y) = \frac{1 - \cos(x^2 + y^2)}{(x^2 + y^2)x^2 y^2}$

(c)  $f(x, y) = \frac{P_n(x, y)}{\rho^{n-1}}, n \geq 1$ , 其中  $\rho = \sqrt{x^2 + y^2}$ ,  $P_n(x, y)$  为  $x, y$  的  $n$  次齐次式.

4. 计算下列极限

(a)  $\lim_{(x,y) \rightarrow (\infty, \infty)} \frac{x+y}{x^2-xy+y^2}$

(b)  $\lim_{(x,y) \rightarrow (\infty, \infty)} \frac{x^2+y^2}{x^4+y^4}$

(c)  $\lim_{(x,y) \rightarrow (+\infty, +\infty)} \left(\frac{xy}{x^2+y^2}\right)^{x^2}$

5. 求极限  $\lim_{(x,y) \rightarrow (+\infty, +\infty)} (x^2 + y^2)e^{-(x+y)}$

6. 求极限  $\lim_{(x,y) \rightarrow (\infty, a)} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^{\frac{x^2}{x+y}}$

7. 设  $z = \frac{x \cos(y-1) - (y-1) \cos x}{1 + \sin x + \sin(y-1)}$ , 求  $\frac{\partial z}{\partial x}|_{(0,1)}$  以及  $\frac{\partial z}{\partial y}|_{(0,1)}$

8.  $u = \left(\frac{x}{y}\right)^z$ , 求  $du$

9.  $z = x \ln(xy)$ , 求  $\frac{\partial^3 z}{\partial x^3}$  以及  $\frac{\partial^3 z}{\partial x \partial y^2}$

10. 证明函数  $f(x, y) = \sqrt{|xy|}$  在点  $(0, 0)$  处连续,  $f_x(0, 0)$  与  $f_y(0, 0)$  存在, 但  $f(x, y)$  在点  $(0, 0)$  处不可微.

11. 已知函数  $z(x, y)$  满足  $\frac{\partial z}{\partial x} = -\sin y + \frac{1}{1-xy}$  以及  $z(0, y) = 2 \sin y + y^2$ , 求  $z(x, y)$

12. 设  $z(x, y)$  的全微分为  $dz = \left(x - \frac{y}{x^2+y^2}\right)dx + \left(y + \frac{x}{x^2+y^2}\right)dy$ , 求  $z(x, y)$  的表达式

13. 设函数

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{(x^2-y^2)xy}{x^2+y^2}, & (x, y) \neq (0, 0) \\ 0, & (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

(1) 计算  $f_x(0, y)$  ( $y \neq 0$ ); (2) 根据偏导数定义证明  $f_x(0, 0) = 0$ ; (3) 在上述结果的基础上, 证明  $f_{xy}(0, 0) = -1$ .