一般二次曲面

一般二次曲面的方程式为

$$Ax^2 + By^2 + Cz^2 + 2Dxy + 2Eyz + 2Fxz + Gx + Hy + Iz + J = 0$$

其中$A, \cdots, J$均为常数，且A, B, C, D, E, F不全为零。

一般二次曲面的方程式为

$$Ax^2 + By^2 + Cz^2 + 2Dxy + 2Eyz + 2Fxz + Gx + Hy + Iz + J = 0$$

其中$A, \cdots, J$均为常数，且A, B, C, D, E, F不全为零。

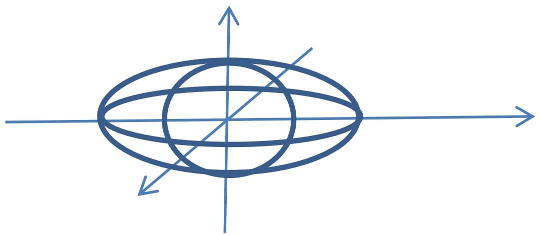
可以证明，这样的一般方程在坐标平移和旋转之后，

可以变成十七种形式， 而且只有这十七种形式。

其中非平凡的九种

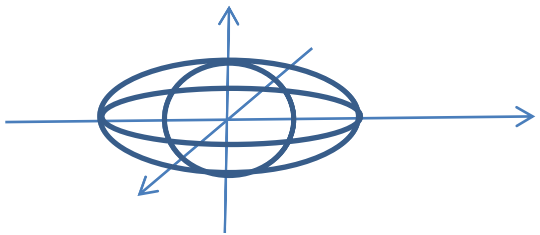
1.椭球面，$\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}+\dfrac{z^2}{c^2}=1,(a>0,b>0,c>0)$

1.椭球面，$\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}+\dfrac{z^2}{c^2}=1,(a>0,b>0,c>0)$



1.椭球面，$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1,(a>0,b>0,c>0)$

①$|x|\le a,|y|\le b,|z|\le c$

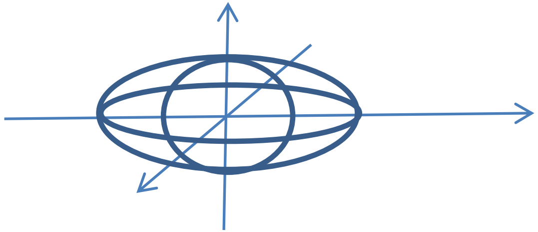


②在各坐标平面的截痕分别为

$$\begin{cases}\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1\\ z=0\end{cases},\begin{cases}\frac{x^2}{a^2}+\frac{z^2}{c^2}=1\\ y=0\end{cases},\begin{cases}\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1\\ x=0\end{cases}$$

1.椭球面，$\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}+\dfrac{z^2}{c^2}=1,(a>0,b>0,c>0)$

①$|x|\le a,|y|\le b,|z|\le c$



②在各坐标平面的$\boxed{\text{截痕}}$分别为

$$\begin{cases}\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1\\ z=0\end{cases},\begin{cases}\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{z^2}{c^2}=1\\ y=0\end{cases},\begin{cases}\dfrac{y^2}{b^2}+\dfrac{z^2}{c^2}=1\\ x=0\end{cases}$$

③用平面$z=h(|h|\le c)$截椭球面的$\boxed{\text{截痕}}$为椭圆:

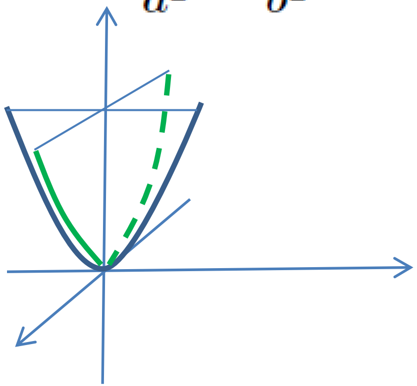
$$\begin{cases}z=h\\ \dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1-\dfrac{h^2}{c^2}\end{cases}$$,(用$x=h,y=h$去截，结果类似)

④$a=b=c$时，为球面$x^2+y^2+z^2=R^2,(R=a)$

2.椭圆抛物面，$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=2cz,(a>0,b>0)$

2.椭圆抛物面，$\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=2cz,(a>0,b>0)$

$(c>0)$时

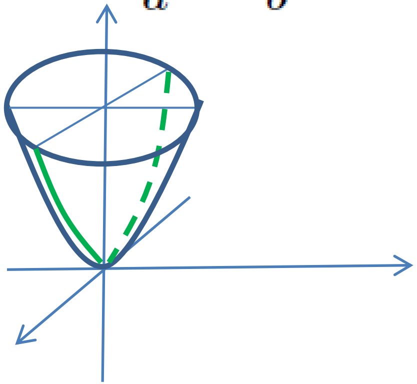


曲面在oyz和oxz上的截痕分别是

$$\begin{cases} x=0 \\ \frac{y^2}{b^2}=2cz \end{cases},\begin{cases} y=0 \\ \frac{x^2}{a^2}=2cz \end{cases}$$

2.椭圆抛物面，$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=2cz,(a>0,b>0)$

$(c>0)$时

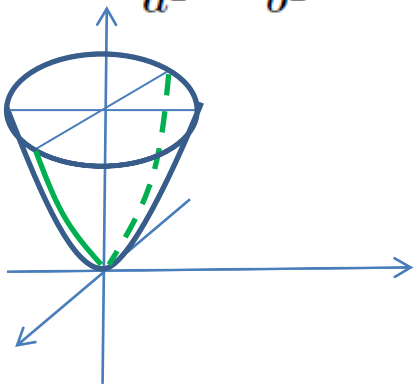


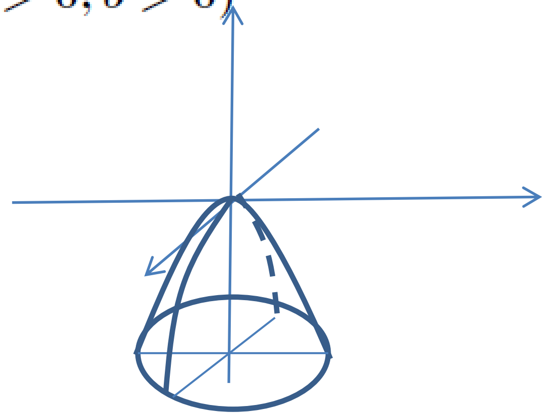
曲面于平面$z=h(h\geq 0)$上的截痕是椭圆

$$\begin{cases} z=h \\ \frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=2ch \end{cases}$$

2.椭圆抛物面，$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=2cz,(a>0,b>0)$

$(c>0)$时





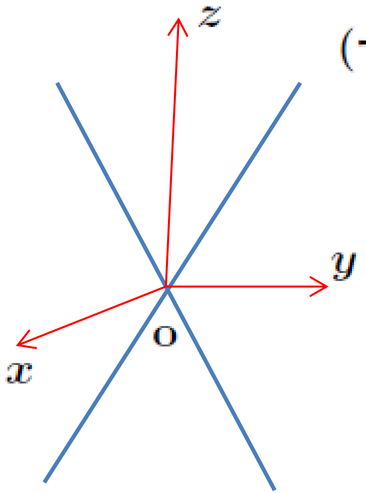
曲面于平面$z=h(h\geq 0)$上的截痕是椭圆

$$\begin{cases} z=h \\ \frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=2ch \end{cases}$$

3.椭圆锥面，$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=\frac{z^2}{c^2},(a,b,c>0)$

(一直线过一定点，转动而成的面称为锥面)

3.椭圆锥面，$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=\frac{z^2}{c^2}, (a,b,c>0)$

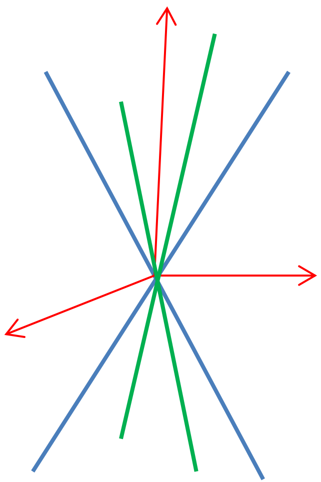


(一直线过一定点，转动而成的面称为锥面)

在yoz面的截痕为$\begin{cases} x=0 \\ \frac{y^2}{b^2}=\frac{z^2}{c^2} \end{cases}$ (两直线)

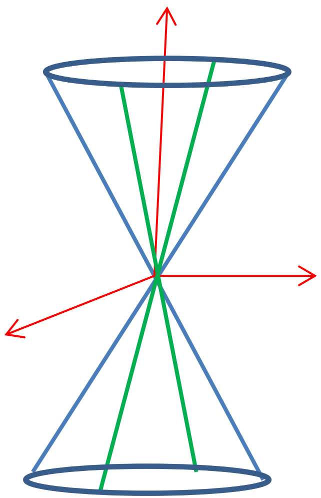
3.椭圆锥面, $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=\frac{z^2}{c^2},(a,b,c>0)$

(一直线过一定点，转动而成的面称为锥面)



在xoz面上的截痕为 $\begin{cases} y=0 \\ \frac{x^2}{a^2}=\frac{z^2}{c^2} \end{cases}$ (两直线)

3.椭圆锥面，$\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=\dfrac{z^2}{c^2},(a,b,c>0)$

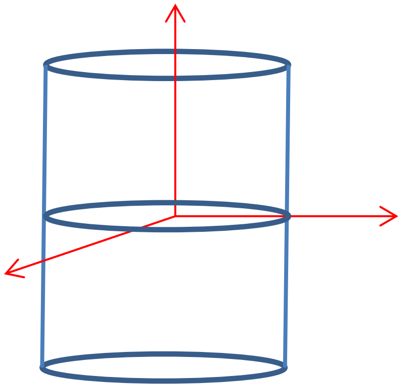


(一直线过一定点，转动而成的面称为锥面)

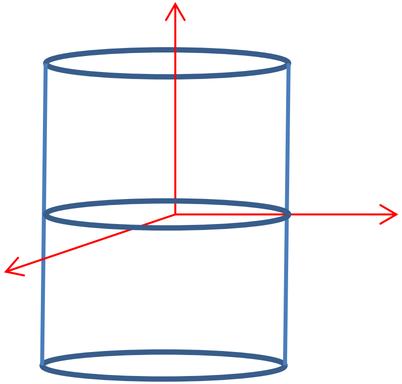
在平面$z=\pm h$上的截痕为$\begin{cases} z=\pm h \\ \frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=\frac{h^2}{c^2} \end{cases}$ (椭圆或点)

4.椭圆柱面，$\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$

4.椭圆柱面，$\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$



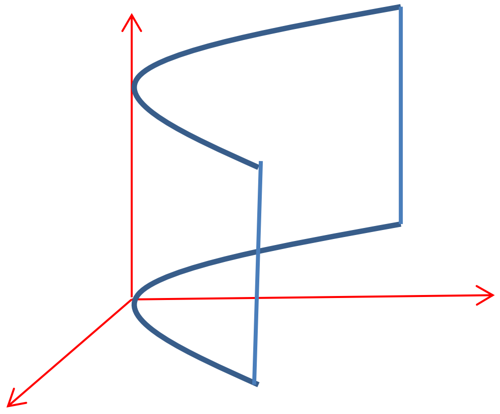
4.椭圆柱面，$\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$



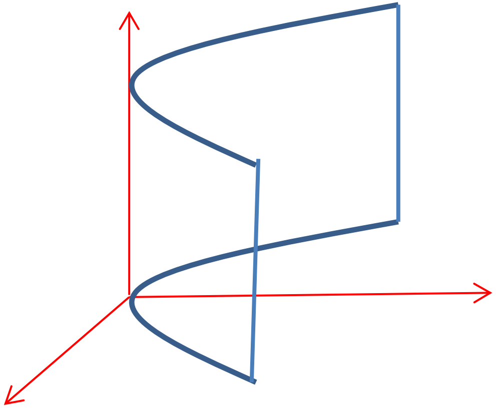
①xoy面上的投影(截痕)为椭圆$\begin{cases} z=0 \\ \frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1 \end{cases}$

②母线方向为$\vec{k}$,准线之一为xoy面上的投影

5.抛物柱面，$\dfrac{x^2}{a^2}-y=0$

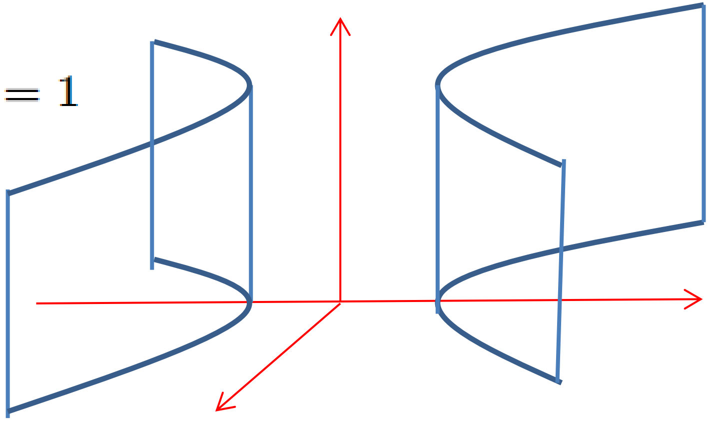


5.抛物柱面，$\dfrac{x^2}{a^2} - y = 0$

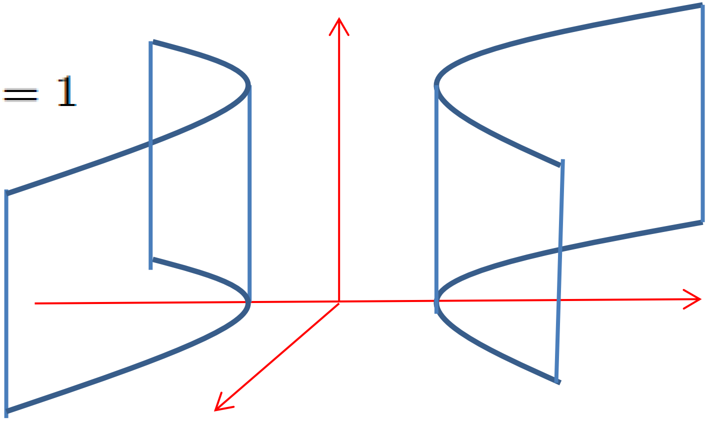


在xoy面上的投影为抛物线$\begin{cases} z = 0 \\ \dfrac{x^2}{a^2} = y \end{cases}$

6.双曲柱面，$-\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$



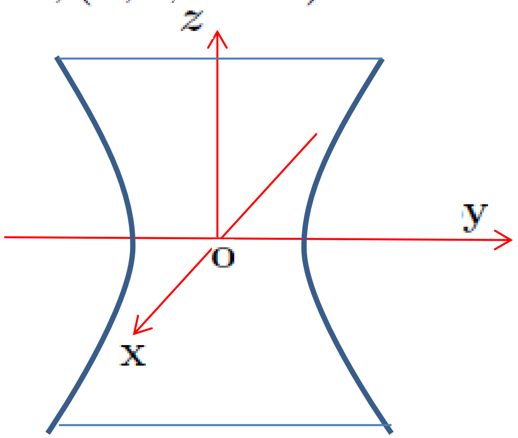
6.双曲柱面，$-\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$



在xoy面上的投影为双曲线$\begin{cases} z=0 \\ -\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1 \end{cases}$

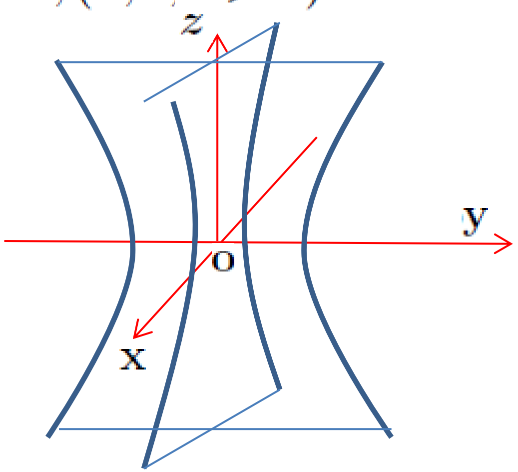
7.单叶双曲面，$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=1,(a,b,c>0)$

7.单叶双曲面，$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=1,(a,b,c>0)$



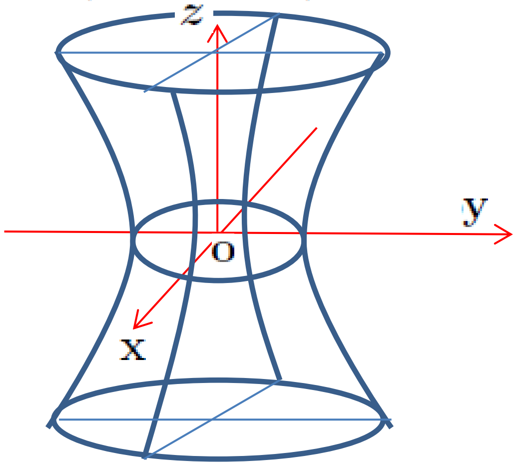
在yoz面的截痕为双曲线$\begin{cases} x=0 \\ \frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=1 \end{cases}$

7.单叶双曲面，$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=1,(a,b,c>0)$



在xoz面的截痕为双曲线$\begin{cases} y=0 \\ \frac{x^2}{a^2}-\frac{z^2}{c^2}=1 \end{cases}$

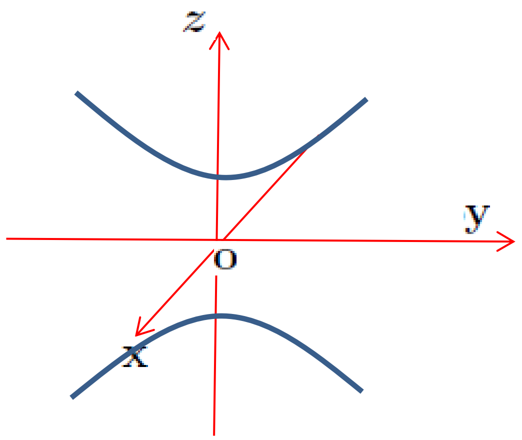
7.单叶双曲面，$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=1,(a,b,c>0)$



在平面$z=h$上的截痕为椭圆$\begin{cases} z=h \\ \frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1+\frac{h^2}{c^2} \end{cases}$

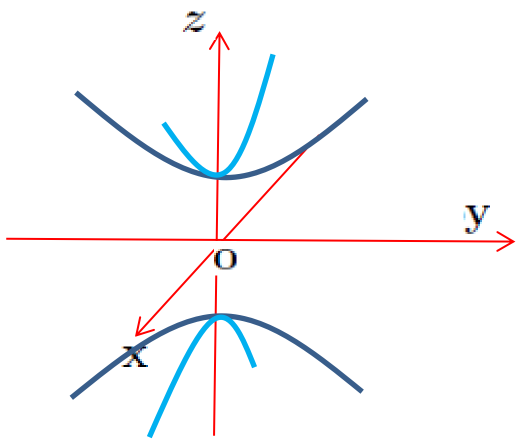
8.双叶双曲面，$\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}-\dfrac{z^2}{c^2}=-1,(a,b,c>0)$

8.双叶双曲面，$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=-1,(a,b,c>0)$



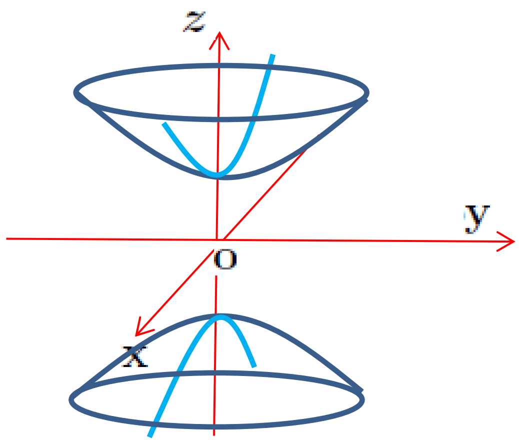
在yoz面的截痕为双曲线$\begin{cases} x=0 \\ \frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=-1 \end{cases}$

8.双叶双曲面，$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=-1,(a,b,c>0)$



在xoz面的截痕为双曲线$\begin{cases} y=0 \\ \frac{x^2}{a^2}-\frac{z^2}{c^2}=1 \end{cases}$

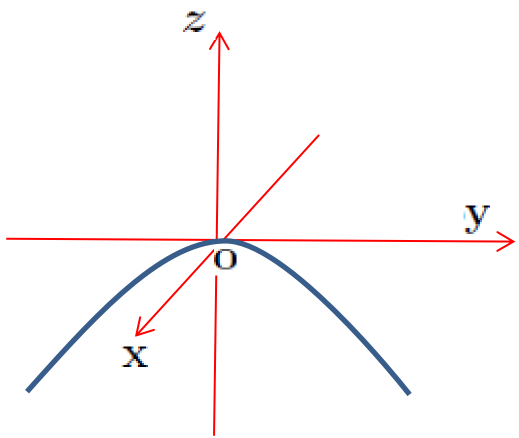
8.双叶双曲面，$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=-1,(a,b,c>0)$



在$z=\pm h(h>c)$上的截痕为椭圆$\begin{cases} z=\pm h \\ \frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=\frac{h^2}{c^2}-1 \end{cases}$

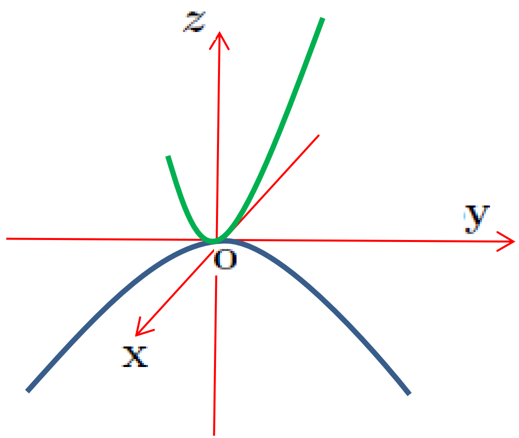
9.双曲抛物面(马鞍面)，$\frac{x^2}{p^2}-\frac{y^2}{q^2}=z,(p>0,q>0)$

9.双曲抛物面(马鞍面)，$\frac{x^2}{p^2}-\frac{y^2}{q^2}=z,(p>0,q>0)$



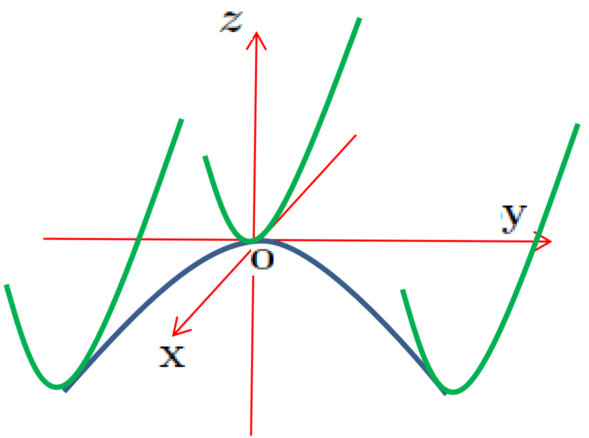
在yoz面的截痕为抛物线$\begin{cases} x=0 \\ -\frac{y^2}{q^2}=z \end{cases}$

9.双曲抛物面(马鞍面)，$\frac{x^2}{p^2}-\frac{y^2}{q^2}=z,(p>0,q>0)$



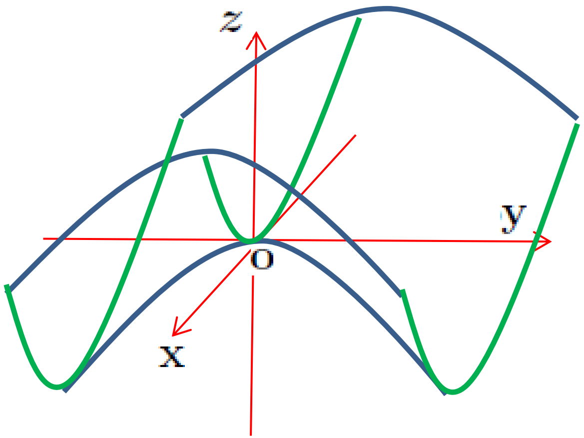
在xoz面的截痕为抛物线$\begin{cases} y=0 \\ \frac{x^2}{p^2}=z \end{cases}$

9.双曲抛物面(马鞍面)，$\dfrac{x^2}{p^2}-\dfrac{y^2}{q^2}=z,(p>0,q>0)$



在$y=\pm h$面的截痕为抛物线$\begin{cases} y=\pm h \\ \frac{x^2}{p^2}=z+\frac{h^2}{q^2} \end{cases}$

9.双曲抛物面(马鞍面), $\dfrac{x^2}{p^2}-\dfrac{y^2}{q^2}=z,(p>0,q>0)$



在$x=\pm h$面的截痕为抛物线$\begin{cases} x=\pm h \\ -\frac{y^2}{q^2}=z-\frac{h^2}{p^2} \end{cases}$