# 高等数学公式汇总

**导数公式：**

$$(tgx)' = \sec^2 x$$
$$(ctgx)' = -\csc^2 x$$
$$(\sec x)' = \sec x \cdot tgx$$
$$(\csc x)' = -\csc x \cdot ctgx$$
$$(a^x)' = a^x \ln a$$
$$(\log_a x)' = \frac{1}{x \ln a}$$

$$(\arcsin x)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$
$$(\arccos x)' = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$
$$(arctgx)' = \frac{1}{1+x^2}$$
$$(arcctgx)' = -\frac{1}{1+x^2}$$

基本积分公式:

$$\int tgxdx = -\ln|\cos x| + C$$
$$\int ctgxdx = \ln|\sin x| + C$$
$$\int \sec xdx = \ln|\sec x + tgx| + C$$
$$\int \csc xdx = \ln|\csc x - ctgx| + C$$
$$\int \frac{dx}{a^2+x^2} = \frac{1}{a} arctg \frac{x}{a} + C$$
$$\int \frac{dx}{x^2-a^2} = \frac{1}{2a} \ln\left|\frac{x-a}{x+a}\right| + C$$
$$\int \frac{dx}{a^2-x^2} = \frac{1}{2a} \ln \frac{a+x}{a-x} + C$$
$$\int \frac{dx}{\sqrt{a^2-x^2}} = \arcsin \frac{x}{a} + C$$

$$\int \frac{dx}{\cos^2 x} = \int \sec^2 xdx = tgx + C$$
$$\int \frac{dx}{\sin^2 x} = \int \csc^2 xdx = -ctgx + C$$
$$\int \sec x \cdot tgxdx = \sec x + C$$
$$\int \csc x \cdot ctgxdx = -\csc x + C$$
$$\int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + C$$
$$\int shxdx = chx + C$$
$$\int chxdx = shx + C$$
$$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 \pm a^2}} = \ln(x + \sqrt{x^2 \pm a^2}) + C$$

$$I_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n xdx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^n xdx = \frac{n-1}{n} I_{n-2}$$

$$\int \sqrt{x^2+a^2}dx = \frac{x}{2}\sqrt{x^2+a^2} + \frac{a^2}{2}\ln(x+\sqrt{x^2+a^2}) + C$$

$$\int \sqrt{x^2-a^2}dx = \frac{x}{2}\sqrt{x^2-a^2} - \frac{a^2}{2}\ln\left|x+\sqrt{x^2-a^2}\right| + C$$

$$\int \sqrt{a^2-x^2}dx = \frac{x}{2}\sqrt{a^2-x^2} + \frac{a^2}{2}\arcsin \frac{x}{a} + C$$

**三角函数的有理式积分：**

**一些初等函数：**

$$双曲正弦: shx = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$$

$$双曲余弦: chx = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$$

$$双曲正切: thx = \frac{shx}{chx} = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}$$

$$arshx = \ln(x + \sqrt{x^2 + 1})$$

$$archx = \pm\ln(x + \sqrt{x^2 - 1})$$

$$arthx = \frac{1}{2}\ln\frac{1+x}{1-x}$$

**两个重要极限：**

$$\lim_{x \to 0} \frac{\sin x}{x} = 1$$

$$\lim_{x \to \infty} (1 + \frac{1}{x})^x = e = 2.718281828459045...$$

**三角函数公式：**

- **和差角公式：**

$$\sin(\alpha \pm \beta) = \sin\alpha\cos\beta \pm \cos\alpha\sin\beta$$

$$\cos(\alpha \pm \beta) = \cos\alpha\cos\beta \mp \sin\alpha\sin\beta$$

$$tg(\alpha \pm \beta) = \frac{tg\alpha \pm tg\beta}{1 \mp tg\alpha \cdot tg\beta}$$

$$ctg(\alpha \pm \beta) = \frac{ctg\alpha \cdot ctg\beta \mp 1}{ctg\beta \pm ctg\alpha}$$

- **和差化积公式：**

$$\sin\alpha + \sin\beta = 2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2}$$

$$\sin\alpha - \sin\beta = 2\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\sin\frac{\alpha-\beta}{2}$$

$$\cos\alpha + \cos\beta = 2\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2}$$

$$\cos\alpha - \cos\beta = 2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\sin\frac{\alpha-\beta}{2}$$

• **倍角公式：**

$$\sin 2\alpha = 2\sin\alpha\cos\alpha$$

$$\cos 2\alpha = 2\cos^2\alpha - 1 = 1 - 2\sin^2\alpha = \cos^2\alpha - \sin^2\alpha$$

$$ctg2\alpha = \frac{ctg^2\alpha - 1}{2ctg\alpha}$$

$$tg2\alpha = \frac{2tg\alpha}{1 - tg^2\alpha}$$

$$\sin 3\alpha = 3\sin\alpha - 4\sin^3\alpha$$

$$\cos 3\alpha = 4\cos^3\alpha - 3\cos\alpha$$

$$tg3\alpha = \frac{3tg\alpha - tg^3\alpha}{1 - 3tg^2\alpha}$$

• **半角公式：**

$$\sin\frac{\alpha}{2} = \pm\sqrt{\frac{1-\cos\alpha}{2}} \qquad \cos\frac{\alpha}{2} = \pm\sqrt{\frac{1+\cos\alpha}{2}}$$

$$tg\frac{\alpha}{2} = \pm\sqrt{\frac{1-\cos\alpha}{1+\cos\alpha}} = \frac{1-\cos\alpha}{\sin\alpha} = \frac{\sin\alpha}{1+\cos\alpha} \qquad ctg\frac{\alpha}{2} = \pm\sqrt{\frac{1+\cos\alpha}{1-\cos\alpha}} = \frac{1+\cos\alpha}{\sin\alpha} = \frac{\sin\alpha}{1-\cos\alpha}$$

• **正弦定理：** $\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C} = 2R$ • **余弦定理：** $c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos C$

• **反三角函数性质：** $\arcsin x = \frac{\pi}{2} - \arccos x$ $\quad arctgx = \frac{\pi}{2} - arcctgx$

**高阶导数公式——莱布尼兹（Leibniz）公式：**

$$(uv)^{(n)}=\sum_{k=0}^{n}C_n^k u^{(n-k)}v^{(k)}$$

$$=u^{(n)}v+nu^{(n-1)}v'+\frac{n(n-1)}{2!}u^{(n-2)}v''+\cdots+\frac{n(n-1)\cdots(n-k+1)}{k!}u^{(n-k)}v^{(k)}+\cdots+uv^{(n)}$$

**中值定理与导数应用：**

拉格朗日中值定理：$f(b)-f(a)=f'(\xi)(b-a)$

柯西中值定理：$\dfrac{f(b)-f(a)}{F(b)-F(a)}=\dfrac{f'(\xi)}{F'(\xi)}$

当$F(x)=x$时，柯西中值定理就是拉格朗日中值定理。

**曲率：**

弧微分公式：$ds=\sqrt{1+y'^2}dx$,其中$y'=tg\alpha$

平均曲率：$\overline{K}=\left|\dfrac{\Delta\alpha}{\Delta s}\right|$.$\Delta\alpha$:从M点到M′点，切线斜率的倾角变化量；Δs：$\overset{\frown}{MM'}$弧长。

M点的曲率：$K=\lim\limits_{\Delta s\to 0}\left|\dfrac{\Delta\alpha}{\Delta s}\right|=\left|\dfrac{d\alpha}{ds}\right|=\dfrac{|y''|}{\sqrt{(1+y'^2)^3}}$.

直线：$K=0$;

半径为$a$的圆：$K=\dfrac{1}{a}$.

• **诱导公式：**

| 函数 / 角 A | sin | cos | tg | ctg |
|---|---|---|---|---|
| -α | -sinα | cosα | -tgα | -ctgα |
| 90°-α | cosα | sinα | ctgα | tgα |
| 90°+α | cosα | -sinα | -ctgα | -tgα |
| 180°-α | sinα | -cosα | -tgα | -ctgα |
| 180°+α | -sinα | -cosα | tgα | ctgα |
| 270°-α | -cosα | -sinα | ctgα | tgα |
| 270°+α | -cosα | sinα | -ctgα | -tgα |
| 360°-α | -sinα | cosα | -tgα | -ctgα |
| 360°+α | sinα | cosα | tgα | ctgα |

**空间解析几何和向量代数：**

空间2点的距离：$d=\left|M_1M_2\right|=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2+(z_2-z_1)^2}$

向量在轴上的投影：$\Pr j_u\overline{AB}=\left|\overline{AB}\right|\cdot\cos\varphi,\varphi$是$\overline{AB}$与$u$轴的夹角。

$\Pr j_u(\vec{a}_1+\vec{a}_2)=\Pr j\vec{a}_1+\Pr j\vec{a}_2$

$\vec{a}\cdot\vec{b}=\left|\vec{a}\right|\cdot\left|\vec{b}\right|\cos\theta=a_xb_x+a_yb_y+a_zb_z$，是一个数量，

两向量之间的夹角：$\cos\theta=\dfrac{a_xb_x+a_yb_y+a_zb_z}{\sqrt{a_x{}^2+a_y{}^2+a_z{}^2}\cdot\sqrt{b_x{}^2+b_y{}^2+b_z{}^2}}$

$\vec{c}=\vec{a}\times\vec{b}=\begin{vmatrix} i & j & k \\ a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \end{vmatrix}$，$\left|\vec{c}\right|=\left|\vec{a}\right|\cdot\left|\vec{b}\right|\sin\theta$.例：线速度：$\vec{v}=\vec{w}\times\vec{r}$.

向量的混合积：$[\vec{a}\vec{b}\vec{c}]=(\vec{a}\times\vec{b})\cdot\vec{c}=\begin{vmatrix} a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \\ c_x & c_y & c_z \end{vmatrix}=\left|\vec{a}\times\vec{b}\right|\cdot\left|\vec{c}\right|\cos\alpha,\alpha$为锐角时，

代表平行六面体的体积。

平面的方程：

1、点法式：$A(x-x_0)+B(y-y_0)+C(z-z_0)=0$，其中$\vec{n}=\{A,B,C\},M_0(x_0,y_0,z_0)$

2、一般方程：$Ax+By+Cz+D=0$

3、截距世方程：$\frac{x}{a}+\frac{y}{b}+\frac{z}{c}=1$

平面外任意一点到该平面的距离：$d=\frac{|Ax_0+By_0+Cz_0+D|}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}$

空间直线的方程：$\frac{x-x_0}{m}=\frac{y-y_0}{n}=\frac{z-z_0}{p}=t$,其中$\vec{s}=\{m,n,p\}$;参数方程：$\begin{cases}x=x_0+mt\\y=y_0+nt\\z=z_0+pt\end{cases}$

二次曲面：

1、椭球面：$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$

2、抛物面：$\frac{x^2}{2p}+\frac{y^2}{2q}=z$,（$p,q$同号）

3、双曲面：

单叶双曲面：$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=1$

双叶双曲面：$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$（马鞍面）

**多元函数微分法及应用**

全微分：$dz=\frac{\partial z}{\partial x}dx+\frac{\partial z}{\partial y}dy \qquad du=\frac{\partial u}{\partial x}dx+\frac{\partial u}{\partial y}dy+\frac{\partial u}{\partial z}dz$

全微分的近似计算：$\Delta z\approx dz=f_x(x,y)\Delta x+f_y(x,y)\Delta y$

多元复合函数的求导法：

$z=f[u(t),v(t)] \qquad \frac{dz}{dt}=\frac{\partial z}{\partial u}\cdot\frac{\partial u}{\partial t}+\frac{\partial z}{\partial v}\cdot\frac{\partial v}{\partial t}$

$z=f[u(x,y),v(x,y)] \qquad \frac{\partial z}{\partial x}=\frac{\partial z}{\partial u}\cdot\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial z}{\partial v}\cdot\frac{\partial v}{\partial x}$

当$u=u(x,y)$，$v=v(x,y)$时，

$du=\frac{\partial u}{\partial x}dx+\frac{\partial u}{\partial y}dy \qquad dv=\frac{\partial v}{\partial x}dx+\frac{\partial v}{\partial y}dy$

隐函数的求导公式：

隐函数$F(x,y)=0$，$\quad \frac{dy}{dx}=-\frac{F_x}{F_y}$，$\quad \frac{d^2y}{dx^2}=\frac{\partial}{\partial x}(-\frac{F_x}{F_y})+\frac{\partial}{\partial y}(-\frac{F_x}{F_y})\cdot\frac{dy}{dx}$

隐函数$F(x,y,z)=0$，$\quad \frac{\partial z}{\partial x}=-\frac{F_x}{F_z}$，$\quad \frac{\partial z}{\partial y}=-\frac{F_y}{F_z}$

隐函数方程组：$\begin{cases}F(x,y,u,v)=0\\G(x,y,u,v)=0\end{cases} \qquad J=\frac{\partial(F,G)}{\partial(u,v)}=\begin{vmatrix}\frac{\partial F}{\partial u} & \frac{\partial F}{\partial v}\\ \frac{\partial G}{\partial u} & \frac{\partial G}{\partial v}\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}F_u & F_v\\ G_u & G_v\end{vmatrix}$

$\frac{\partial u}{\partial x}=-\frac{1}{J}\cdot\frac{\partial(F,G)}{\partial(x,v)} \qquad \frac{\partial v}{\partial x}=-\frac{1}{J}\cdot\frac{\partial(F,G)}{\partial(u,x)}$

$\frac{\partial u}{\partial y}=-\frac{1}{J}\cdot\frac{\partial(F,G)}{\partial(y,v)} \qquad \frac{\partial v}{\partial y}=-\frac{1}{J}\cdot\frac{\partial(F,G)}{\partial(u,y)}$

**微分法在几何上的应用：**

空间曲线$\begin{cases} x=\varphi(t) \\ y=\psi(t) \\ z=\omega(t) \end{cases}$在点$M(x_0,y_0,z_0)$处的切线方程：$\dfrac{x-x_0}{\varphi'(t_0)}=\dfrac{y-y_0}{\psi'(t_0)}=\dfrac{z-z_0}{\omega'(t_0)}$

在点$M$处的法平面方程：$\varphi'(t_0)(x-x_0)+\psi'(t_0)(y-y_0)+\omega'(t_0)(z-z_0)=0$

若空间曲线方程为：$\begin{cases} F(x,y,z)=0 \\ G(x,y,z)=0 \end{cases}$，则切向量$\vec{T}=\{\begin{vmatrix} F_y & F_z \\ G_y & G_z \end{vmatrix},\begin{vmatrix} F_z & F_x \\ G_z & G_x \end{vmatrix},\begin{vmatrix} F_x & F_y \\ G_x & G_y \end{vmatrix}\}$

曲面$F(x,y,z)=0$上一点$M(x_0,y_0,z_0)$，则：

1、过此点的法向量：$\vec{n}=\{F_x(x_0,y_0,z_0),F_y(x_0,y_0,z_0),F_z(x_0,y_0,z_0)\}$

2、过此点的切平面方程：$F_x(x_0,y_0,z_0)(x-x_0)+F_y(x_0,y_0,z_0)(y-y_0)+F_z(x_0,y_0,z_0)(z-z_0$

3、过此点的法线方程：$\dfrac{x-x_0}{F_x(x_0,y_0,z_0)}=\dfrac{y-y_0}{F_y(x_0,y_0,z_0)}=\dfrac{z-z_0}{F_z(x_0,y_0,z_0)}$

**数与梯度：**

函数$z=f(x,y)$在一点$p(x,y)$沿任一方向$l$的方向导数为：$\dfrac{\partial f}{\partial l}=\dfrac{\partial f}{\partial x}\cos\varphi+\dfrac{\partial f}{\partial y}\sin\varphi$

其中$\varphi$为$x$轴到方向$l$的转角。

函数$z=f(x,y)$在一点$p(x,y)$的梯度：$\mathrm{grad} f(x,y)=\dfrac{\partial f}{\partial x}\vec{i}+\dfrac{\partial f}{\partial y}\vec{j}$

它与方向导数的关系是：$\dfrac{\partial f}{\partial l}=\mathrm{grad}\, f(x,y)\cdot\vec{e}$，其中$\vec{e}=\cos\varphi\cdot\vec{i}+\sin\varphi\cdot\vec{j}$，为$l$方向上的单位向量。

$\therefore \dfrac{\partial f}{\partial l}$是$\mathrm{grad} f(x,y)$在$l$上的投影。

**多元函数的极值及其求法：**

设$f_x(x_0,y_0)=f_y(x_0,y_0)=0$，令：$f_{xx}(x_0,y_0)=A$，$f_{xy}(x_0,y_0)=B$，$f_{yy}(x_0,y_0)=C$

$$\text{则：}\begin{cases} AC-B^2>0\text{时}, \begin{cases} A<0,(x_0,y_0)\text{为极大值} \\ A>0,(x_0,y_0)\text{为极小值} \end{cases} \\ AC-B^2<0\text{时}, \quad \text{无极值} \\ AC-B^2=0\text{时}, \quad \text{不确定} \end{cases}$$

**重积分及其应用：**

$$\iint_D f(x,y)dxdy=\iint_{D'} f(r\cos\theta,r\sin\theta)rdrd\theta$$

$$\text{曲面}z=f(x,y)\text{的面积}A=\iint_D\sqrt{1+\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2}\,dxdy$$

$$\text{平面薄片的重心：}\bar{x}=\frac{M_x}{M}=\frac{\iint_D x\rho(x,y)d\sigma}{\iint_D\rho(x,y)d\sigma},\qquad \bar{y}=\frac{M_y}{M}=\frac{\iint_D y\rho(x,y)d\sigma}{\iint_D\rho(x,y)d\sigma}$$

平面薄片的转动惯量：对于$x$轴$I_x=\iint_D y^2\rho(x,y)d\sigma$，对于$y$轴$I_y=\iint_D x^2\rho(x,y)d\sigma$

平面薄片（位于$xoy$平面）对$z$轴上质点$M(0,0,a),(a>0)$的引力：$F=\{F_x,F_y,F_z\}$，其中：

$$F_x=f\iint_D\frac{\rho(x,y)xd\sigma}{(x^2+y^2+a^2)^{\frac{3}{2}}},\qquad F_y=f\iint_D\frac{\rho(x,y)yd\sigma}{(x^2+y^2+a^2)^{\frac{3}{2}}},\qquad F_z=-fa\iint_D\frac{\rho(x,y)xd\sigma}{(x^2+y^2+a^2)^{\frac{3}{2}}}$$

**曲线积分：**

第一类曲线积分（对弧长的曲线积分）：

设$f(x,y)$在$L$上连续，$L$的参数方程为：$\begin{cases} x=\varphi(t) \\ y=\psi(t) \end{cases}$，$(\alpha\le t\le\beta)$，则：

$$\int_L f(x,y)ds=\int_\alpha^\beta f[\varphi(t),\psi(t)]\sqrt{\varphi'^2(t)+\psi'^2(t)}\,dt\quad(\alpha<\beta)\qquad\text{特殊情况：}\begin{cases} x=t \\ y=\varphi(t) \end{cases}$$

第二类曲线积分（对坐标的曲线积分）：

设$L$的参数方程为$\begin{cases} x=\varphi(t) \\ y=\psi(t) \end{cases}$，则：

$$\int_L P(x,y)dx+Q(x,y)dy=\int_\alpha^\beta \{P[\varphi(t),\psi(t)]\varphi'(t)+Q[\varphi(t),\psi(t)]\psi'(t)\}dt$$

两类曲线积分之间的关系：$\int_L Pdx+Qdy=\int_L (P\cos\alpha+Q\cos\beta)ds$，其中$\alpha$和$\beta$分别为$L$上积分起止点处切向量的方向角。

格林公式：$\iint_D (\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y})dxdy=\oint_L Pdx+Qdy$格林公式：$\iint_D (\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y})dxdy=\oint_L Pdx+Qdy$

当$P=-y,Q=x$，即：$\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}=2$时，得到$D$的面积：$A=\iint_D dxdy=\frac{1}{2}\oint_L xdy-ydx$

·平面上曲线积分与路径无关的条件：

1、$G$是一个单连通区域；

2、$P(x,y)$，$Q(x,y)$在$G$内具有一阶连续偏导数，且$\frac{\partial Q}{\partial x}=\frac{\partial P}{\partial y}$。注意奇点，如$(0,0)$，应减去对此奇点的积分，注意方向相反！

·二元函数的全微分求积：

在$\frac{\partial Q}{\partial x}=\frac{\partial P}{\partial y}$时，$Pdx+Qdy$才是二元函数$u(x,y)$的全微分，其中：

$u(x,y)=\int_{(x_0,y_0)}^{(x,y)} P(x,y)dx+Q(x,y)dy$，通常设$x_0=y_0=0$。

**曲面积分：**

对面积的曲面积分：$\iint_\Sigma f(x,y,z)ds=\iint_{D_{xy}} f[x,y,z(x,y)]\sqrt{1+z_x^2(x,y)+z_y^2(x,y)}dxdy$

对坐标的曲面积分：$\iint_\Sigma P(x,y,z)dydz+Q(x,y,z)dzdx+R(x,y,z)dxdy$，其中：

$\iint_\Sigma R(x,y,z)dxdy=\pm\iint_{D_{xy}} R[x,y,z(x,y)]dxdy$，取曲面的上侧时取正号；

$\iint_\Sigma P(x,y,z)dydz=\pm\iint_{D_{yz}} P[x(y,z),y,z]dydz$，取曲面的前侧时取正号；

$\iint_\Sigma Q(x,y,z)dzdx=\pm\iint_{D_{zx}} Q[x,y(z,x),z]dzdx$，取曲面的右侧时取正号。

两类曲面积分之间的关系：$\iint_\Sigma Pdydz+Qdzdx+Rdxdy=\iint_\Sigma (P\cos\alpha+Q\cos\beta+R\cos\gamma)ds$

**高斯公式：**

$$\iiint\limits_{\Omega}(\frac{\partial P}{\partial x}+\frac{\partial Q}{\partial y}+\frac{\partial R}{\partial z})dv=\oiint\limits_{\Sigma}Pdydz+Qdzdx+Rdxdy=\oiint\limits_{\Sigma}(P\cos\alpha+Q\cos\beta+R\cos\gamma)ds$$

高斯公式的物理意义 ——通量与散度：

散度：$\operatorname{div}\vec{\nu}=\frac{\partial P}{\partial x}+\frac{\partial Q}{\partial y}+\frac{\partial R}{\partial z}$,即：单位体积内所产生 的流体质量，若 $\operatorname{div}\vec{\nu}<0$,则为消失

通量：$\iint\limits_{\Sigma}\vec{A}\cdot\vec{n}ds=\iint\limits_{\Sigma}A_n ds=\iint\limits_{\Sigma}(P\cos\alpha+Q\cos\beta+R\cos\gamma)ds$，

因此，高斯公式又可写 成：$\iiint\limits_{\Omega}\operatorname{div}\vec{A}dv=\oiint\limits_{\Sigma}A_n ds$

**斯托克斯公式——曲线积分与曲面积分的关系：**

$$\iint\limits_{\Sigma}(\frac{\partial R}{\partial y}-\frac{\partial Q}{\partial z})dydz+(\frac{\partial P}{\partial z}-\frac{\partial R}{\partial x})dzdx+(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y})dxdy=\oint\limits_{\Gamma}Pdx+Qdy+Rdz$$

上式左端又可写成：$\iint\limits_{\Sigma}\begin{vmatrix} dydz & dzdx & dxdy \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ P & Q & R \end{vmatrix}=\iint\limits_{\Sigma}\begin{vmatrix} \cos\alpha & \cos\beta & \cos\gamma \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ P & Q & R \end{vmatrix}$

空间曲线积分与路径无关的条件：$\frac{\partial R}{\partial y}=\frac{\partial Q}{\partial z},\quad \frac{\partial P}{\partial z}=\frac{\partial R}{\partial x},\quad \frac{\partial Q}{\partial x}=\frac{\partial P}{\partial y}$

旋度：$\operatorname{rot}\vec{A}=\begin{vmatrix} i & j & k \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ P & Q & R \end{vmatrix}$

向量场$\vec{A}$沿有向闭曲线$\Gamma$的环流量：$\oint\limits_{\Gamma}Pdx+Qdy+Rdz=\oint\limits_{\Gamma}\vec{A}\cdot\vec{t}ds$

**常数项级数：**

等比数列:$1+q+q^2+\cdots+q^{n-1}=\dfrac{1-q^n}{1-q}$

等差数列:$1+2+3+\cdots+n=\dfrac{(n+1)n}{2}$

调和级数:$1+\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{3}+\cdots+\dfrac{1}{n}$是发散的

**级数审敛法：**

1、正项级数的审敛法——根植审敛法（柯西判别法）：

设：$\rho=\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{u_n}$，则$\begin{cases}\rho<1\text{时，级数收敛}\\ \rho>1\text{时，级数发散}\\ \rho=1\text{时，不确定}\end{cases}$

2、比值审敛法：

设：$\rho=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{U_{n+1}}{U_n}$，则$\begin{cases}\rho<1\text{时，级数收敛}\\ \rho>1\text{时，级数发散}\\ \rho=1\text{时，不确定}\end{cases}$

3、定义法：

$s_n=u_1+u_2+\cdots+u_n;\lim\limits_{n\to\infty}s_n$存在，则收敛；否则发散。

交错级数$u_1-u_2+u_3-u_4+\cdots$(或$-u_1+u_2-u_3+\cdots,u_n>0$)的审敛法——莱布尼兹定理：

如果交错级数满足$\begin{cases}u_n\geq u_{n+1}\\ \lim\limits_{n\to\infty}u_n=0\end{cases}$，那么级数收敛且其和$s\leq u_1$,其余项$r_n$的绝对值$|r_n|\leq u_{n+1}$。

**绝对收敛与条件收敛：**

(1)$u_1+u_2+\cdots+u_n+\cdots$，其中$u_n$为任意实数；

(2)$|u_1|+|u_2|+|u_3|+\cdots+|u_n|+\cdots$

如果(2)收敛，则(1)肯定收敛，且称为绝对收敛级数；

如果(2)发散，而(1)收敛，则称(1)为条件收敛级数。

调和级数：$\sum\frac{1}{n}$发散，而$\sum\frac{(-1)^n}{n}$收敛；

级数：$\sum\frac{1}{n^2}$收敛；

$p$级数：$\sum\frac{1}{n^p}$ $\begin{cases} p\le 1\text{ 时发散} \\ p>1\text{时收敛} \end{cases}$

**幂级数：**

$1+x+x^2+x^3+\cdots+x^n+\cdots$ $\begin{cases} |x|<1\text{时，收敛于}\dfrac{1}{1-x} \\ |x|\ge 1\text{时，发散} \end{cases}$

对于级数(3)$a_0+a_1x+a_2x^2+\cdots+a_nx^n+\cdots$，如果它不是仅在原点收敛，也不是在全数轴上都收敛，则必存在$R$，使$\begin{cases} |x|<R\text{时收敛} \\ |x|>R\text{时发散} \\ |x|=R\text{时不定} \end{cases}$，其中$R$称为收敛半径。

求收敛半径的方法：设$\lim\limits_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|=\rho$，其中$a_n$，$a_{n+1}$是(3)的系数，则$\begin{cases} \rho\ne 0\text{时，}R=\dfrac{1}{\rho} \\ \rho=0\text{时，}R=+\infty \\ \rho=+\infty\text{时，}R=0 \end{cases}$

**函数展开成幂级数：**

函数展开成泰勒级数：$f(x)=f(x_0)(x-x_0)+\frac{f''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2+\cdots+\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n+\cdots$

余项：$R_n=\frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1}$，$f(x)$可以展开成泰勒级数的充要条件是：$\lim_{n\to\infty}R_n=0$

$x_0=0$时即为麦克劳林公式：$f(x)=f(0)+f'(0)x+\frac{f''(0)}{2!}x^2+\cdots+\frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n+\cdots$

**一些函数展开成幂级数：**

$$(1+x)^m=1+mx+\frac{m(m-1)}{2!}x^2+\cdots+\frac{m(m-1)\cdots(m-n+1)}{n!}x^n+\cdots \qquad (-1<x<1)$$

$$\sin x=x-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}-\cdots+(-1)^{n-1}\frac{x^{2n-1}}{(2n-1)!}+\cdots \qquad (-\infty<x<+\infty)$$

**欧拉公式：**

$$e^{ix}=\cos x+i\sin x \qquad \text{或}\begin{cases}\cos x=\dfrac{e^{ix}+e^{-ix}}{2}\\ \sin x=\dfrac{e^{ix}-e^{-ix}}{2}\end{cases}$$

**三角级数：**

$$f(t)=A_0+\sum_{n=1}^{\infty}A_n\sin(n\omega t+\varphi_n)=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos nx+b_n\sin nx)$$

其中，$a_0=aA_0$，$a_n=A_n\sin\varphi_n$，$b_n=A_n\cos\varphi_n$，$\omega t=x$。

正交性：$1,\sin x,\cos x,\sin 2x,\cos 2x\cdots\sin nx,\cos nx\cdots$任意两个不同项的乘积在$[-\pi,\pi]$上的积分$=0$。

**傅立叶级数：**

$$f(x)=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos nx+b_n\sin nx)，\quad 周期=2\pi$$

$$其中\begin{cases}a_n=\dfrac{1}{\pi}\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\cos nx\,dx & (n=0,1,2\cdots)\\ b_n=\dfrac{1}{\pi}\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\sin nx\,dx & (n=1,2,3\cdots)\end{cases}$$

$$1+\frac{1}{3^2}+\frac{1}{5^2}+\cdots=\frac{\pi^2}{8} \qquad 1+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\frac{1}{4^2}+\cdots=\frac{\pi^2}{6}（相加）$$

$$\frac{1}{2^2}+\frac{1}{4^2}+\frac{1}{6^2}+\cdots=\frac{\pi^2}{24} \qquad 1-\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}-\frac{1}{4^2}+\cdots=\frac{\pi^2}{12}（相减）$$

正弦级数：$a_n=0$，$b_n=\dfrac{2}{\pi}\displaystyle\int_0^{\pi}f(x)\sin nx\,dx \quad n=1,2,3\cdots \quad f(x)=\sum b_n\sin nx$是奇函数

余弦级数：$b_n=0$，$a_n=\dfrac{2}{\pi}\displaystyle\int_0^{\pi}f(x)\cos nx\,dx \quad n=0,1,2\cdots \quad f(x)=\dfrac{a_0}{2}+\sum a_n\cos nx$是偶函数

**周期为$2l$的周期函数的傅立叶级数：**

$$f(x)=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n\cos\frac{n\pi x}{l}+b_n\sin\frac{n\pi x}{l}\right),\ \text{周期}=2l$$

$$\text{其中}\begin{cases}a_n=\dfrac{1}{l}\displaystyle\int_{-l}^{l}f(x)\cos\frac{n\pi x}{l}dx & (n=0,1,2\cdots)\\ b_n=\dfrac{1}{l}\displaystyle\int_{-l}^{l}f(x)\sin\frac{n\pi x}{l}dx & (n=1,2,3\cdots)\end{cases}$$

**微分方程的相关概念：**

一阶微分方程：$y'=f(x,y)$　或　$P(x,y)dx+Q(x,y)dy=0$

可分离变量的微分方程：一阶微分方程可以化为$g(y)dy=f(x)dx$的形式，解法：

$\int g(y)dy=\int f(x)dx$　　得：$G(y)=F(x)+C$称为隐式通解。

齐次方程：一阶微分方程可以写成$\frac{dy}{dx}=f(x,y)=\varphi(x,y)$，即写成$\frac{y}{x}$的函数，解法：

设$u=\frac{y}{x}$，则$\frac{dy}{dx}=u+x\frac{du}{dx}$，$u+\frac{du}{dx}=\varphi(u)$，$\therefore\ \frac{dx}{x}=\frac{du}{\varphi(u)-u}$分离变量，积分后将$\frac{y}{x}$代替$u$，即得齐次方程通解。

**二阶常系数齐次线性微分方程及其解法：**

(*)$y''+py'+qy=0$，其中$p,q$为常数；

求解步骤：

1、写出特征方程:$(\Delta)r^2+pr+q=0$，其中$r^2$，$r$的系数及常数项恰好是(*)式中$y'',y',y$的系数；

2、求出$(\Delta)$式的两个根$r_1,r_2$

3、根据$r_1,r_2$的不同情况，按下表写出(*)式的通解：

| $r_1$，$r_2$的形式 | (*)式的通解 |
|---|---|
| 两个不相等实根$(p^2-4q>0)$ | $y=c_1e^{r_1x}+c_2e^{r_2x}$ |
| 两个相等实根$(p^2-4q=0)$ | $y=(c_1+c_2x)e^{r_1x}$ |
| 一对共轭复根$(p^2-4q<0)$<br>$r_1=\alpha+i\beta$，$r_2=\alpha-i\beta$<br>$\alpha=-\dfrac{p}{2}$，$\beta=\dfrac{\sqrt{4q-p^2}}{2}$ | $y=e^{\alpha x}(c_1\cos\beta x+c_2\sin\beta x)$ |

**二阶常系数非齐次线性微分方程**

$y''+py'+qy=f(x)$，$p,q$为常数

$f(x)=e^{\lambda x}P_m(x)$型，$\lambda$为常数；

$f(x)=e^{\lambda x}[P_l(x)\cos\omega x+P_n(x)\sin\omega x]$型

# 概率公式整理

1．随机事件及其概率

$$\text{吸收律：}\begin{array}{ll} A\cup\Omega=\Omega & A\cap\Omega=A \\ A\cup\varnothing=A & A\cap\varnothing=\varnothing \\ A\cup(AB)=A & A\cap(A\cup B)=A \end{array}$$

$A-B=A\overline{B}=A-(AB)$

反演律：$\overline{A\cup B}=\overline{A}\,\overline{B}$　　$\overline{AB}=\overline{A}\cup\overline{B}$

$$\overline{\bigcup_{i=1}^{n}A_i}=\bigcap_{i=1}^{n}\overline{A_i} \qquad \overline{\bigcap_{i=1}^{n}A_i}=\bigcup_{i=1}^{n}\overline{A_i}$$

2．概率的定义及其计算

$P(\overline{A})=1-P(A)$

若 $A\subset B \quad \Rightarrow P(B-A)=P(B)-P(A)$

对任意两个事件 $A,B,$ 有 $P(B-A)=P(B)-P(AB)$

加法公式：对任意两个事件 $A,B,$ 有

$P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(AB)$

$P(A\cup B)\le P(A)+P(B)$

$$P(\bigcup_{i=1}^{n}A_i)=\sum_{i=1}^{n}P(A_i)-\sum_{1\le i<j\le n}P(A_iA_j)+\sum_{1\le i<j<k\le n}P(A_iA_jA_k)+\cdots+(-1)^{n-1}P(A_1A_2\cdots A_n)$$

4. 随机变量及其分布

分布函数计算

$$\begin{aligned} P(a < X \le b) &= P(X \le b) - P(X \le a) \\ &= F(b) - F(a) \end{aligned}$$

5. 离散型随机变量

(1) $0-1$ 分布

$$P(X=k) = p^k(1-p)^{1-k}, \quad k = 0,1$$

(2) 二项分布 $B(n,p)$

若 $P(A)=p$

$$P(X=k) = C_n^k p^k (1-p)^{n-k}, \quad k = 0,1,\cdots,n$$

* Possion 定理

$$\lim_{n\to\infty} np_n = \lambda > 0$$

有 $$\lim_{n\to\infty} C_n^k p_n^k (1-p_n)^{n-k} = e^{-\lambda}\frac{\lambda^k}{k!}$$
$$k = 0,1,2,\cdots$$

(3) Poisson 分布 $P(\lambda)$

$$P(X=k) = e^{-\lambda}\frac{\lambda^k}{k!}, \quad k = 0,1,2,\cdots$$

6．连续型随机变量

(1)　均匀分布　$U(a,b)$

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{b-a}, & a<x<b \\ 0, & \text{其他}\end{cases}$$

$$F(x)=\begin{cases}0, \\ \dfrac{x-a}{b-a}, \\ 1\end{cases}$$

(2) 指数分布　$E(\lambda)$

$$f(x)=\begin{cases}\lambda e^{-\lambda x}, & x>0 \\ 0, & \text{其他}\end{cases}$$

$$F(x)=\begin{cases}0, & x<0 \\ 1-e^{-\lambda x}, & x\ge 0\end{cases}$$

(3) 正态分布 $N(\mu, \sigma 2)$

$$f(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}} \quad -\infty<x<+\infty$$

$$F(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}\int_{-\infty}^{x}e^{-\frac{(t-\mu)^2}{2\sigma^2}}\mathrm{d}t$$

* $N(0,1)$ — 标准正态分布

$$\varphi(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{x^2}{2}} \quad -\infty<x<+\infty$$

$$\Phi(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{x}e^{-\frac{t^2}{2}}\mathrm{d}t \quad -\infty<x<+\infty$$

7.多维随机变量及其分布

二维随机变量( $X,Y$)的分布函数

$$F(x,y)=\int_{-\infty}^{x}\int_{-\infty}^{y}f(u,v)dvdu$$

边缘分布函数与边缘密度函数

$$F_X(x)=\int_{-\infty}^{x}\int_{-\infty}^{+\infty}f(u,v)dvdu$$

$$f_X(x)=\int_{-\infty}^{+\infty}f(x,v)dv$$

$$F_Y(y)=\int_{-\infty}^{y}\int_{-\infty}^{+\infty}f(u,v)dudv$$

$$f_Y(y)=\int_{-\infty}^{+\infty}f(u,y)du$$

8. 连续型二维随机变量

(1) 区域 $G$ 上的均匀分布，$U(G)$

$$f(x,y)=\begin{cases}\frac{1}{A}, & (x,y)\in G\\ 0, & 其他\end{cases}$$

(2) 二维正态分布

$$f(x,y)=\frac{1}{2\pi\sigma_1\sigma_2\sqrt{1-\rho^2}}\times e^{-\frac{1}{2(1-\rho^2)}\left[\frac{(x-\mu_1)^2}{\sigma_1^2}-2\rho\frac{(x-\mu_1)(y-\mu_2)}{\sigma_1\sigma_2}+\frac{(y-\mu_2)^2}{\sigma_2^2}\right]}$$

$$-\infty<x<+\infty,-\infty<y<+\infty$$

9. 二维随机变量的 条件分布

$f(x,y)=f_X(x)f_{Y|X}(y|x) \qquad f_X(x)>0$

$\quad = f_Y(y)f_{X|Y}(x|y) \qquad f_Y(y)>0$

$f_X(x)=\int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)dy=\int_{-\infty}^{+\infty} f_{X|Y}(x|y)f_Y(y)dy$

$f_Y(y)=\int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)dx=\int_{-\infty}^{+\infty} f_{Y|X}(y|x)f_X(x)dx$

$$f_{X|Y}(x|y)=\frac{f(x,y)}{f_Y(y)}=\frac{f_{Y|X}(y|x)f_X(x)}{f_Y(y)}$$

$$f_{Y|X}(y|x)=\frac{f(x,y)}{f_X(x)}=\frac{f_{X|Y}(x|y)f_Y(y)}{f_X(x)}$$

$X,Y$ 的二阶混合中心矩　$X,Y$ 的协方差

$E\left((X-E(X))(Y-E(Y))\right)$

$X,Y$ 的相关系数

$$E\left(\frac{(X-E(X))(Y-E(Y))}{\sqrt{D(X)}\sqrt{D(Y)}}\right)=\rho_{XY}$$

$X$ 的方差

$D(X)=E((X-E(X))2)$

$D(X)=E(X^2)-E^2(X)$

协方差

$\operatorname{cov}(X,Y)=E\left((X-E(X))(Y-E(Y))\right)$

$\quad =E(XY)-E(X)E(Y)$

$\quad =\pm\frac{1}{2}\left(D(X\pm Y)-D(X)-D(Y)\right)$

相关系数

$$\rho_{XY}=\frac{\operatorname{cov}(X,Y)}{\sqrt{D(X)}\sqrt{D(Y)}}$$

# 线性代数部分

梳理：条理化，给出一个系统的，有内在有机结构的理论体系。

沟通：突出各部分内容间的联系。

充实提高：围绕考试要求，介绍一些一般教材上没有的结果，教给大家常见问题的实用而简捷的方法

大家要有这样的思想准备：发现我的讲解在体系上和你以前学习的有所不同，有的方法是你不知道的。我相信，只要你对它们了解了，掌握了，会提高你的解题能力的。

**基本运算**

① $A+B=B+A$

② $(A+B)+C=A+(B+C)$

③ $c(A+B)=cA+cB \quad (c+d)A=cA+dA$

④ $c(dA)=(cd)A$

⑤ $cA=0 \Leftrightarrow c=0$ 或 $A=0$。

$\left(A^T\right)^T=A$

$(A\pm B)^T=A^T\pm B^T$

$(cA)^T=c\left(A^T\right)$。

$(AB)^T=B^TA^T$

$\tau(n(n-1)\cdots 21)=C_n^2=\frac{n(n-1)}{2}$

$D=a_{21}A_{21}+a_{22}A_{22}+\cdots+a_{2n}A_{2n}$

$D = a_{21}A_{21} + a_{22}A_{22} + \cdots + a_{2n}A_{2n}$

转置值不变 $\left|A^T\right| = |A|$

逆值变 $\left|A^{-1}\right| = \dfrac{1}{|A|}$

$|cA| = c^n |A|$

$|\alpha, \beta_1 + \beta_2, \gamma| = |\alpha, \beta_1, \gamma| + |\alpha, \beta_2, \gamma|$

$A = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$，3 阶矩阵

$B = (\beta_1, \beta_2, \beta_3)$

$|A + B| \neq |A| + |B|$

$A + B = (\alpha_1 + \beta_1, \alpha_2 + \beta_2, \alpha_3 + \beta_3)$

$|A + B| = |\alpha_1 + \beta_1, \alpha_2 + \beta_2, \alpha_3 + \beta_3|$

$\begin{vmatrix} A & * \\ 0 & B \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} A & 0 \\ * & B \end{vmatrix} = |A||B|$

$\left|E(i, j(c))\right| = 1$

**有关乘法的基本运算**

$C_{ij} = a_{i1}b_{1j} + a_{i2}b_{2j} + \cdots + a_{in}b_{nj}$

线性性质　$(A_1 + A_2)B = A_1B + A_2B$，

$A(B_1 + B_2) = AB_1 + AB_2$

$(cA)B = c(AB) = A(cB)$

结合律　$(AB)C = A(BC)$

$(AB)^T = B^T A^T$

$|AB| = |A||B|$

$A^k A^l = A^{k+l}$

$\left(A^k\right)^l = A^{kl}$

$(AB)^k = A^k B^k$**不一定成立！**

$AE = A$，$EA = A$

$A(kE) = kA$，$(kE)A = kA$

$AB = E \Leftrightarrow BA = E$

$AB = E \Leftrightarrow BA = E$

**与数的乘法的不同之处**

$(AB)^k = A^k B^k$ **不一定成立！**

**无交换律** 因式分解障碍是交换性

一个矩阵 $A$ 的每个多项式可以因式分解，例如

$$A^2 - 2A - 3E = (A - 3E)(A + E)$$

**无消去律**（矩阵和矩阵相乘）

当 $AB = 0$ 时 $\not\Rightarrow A = 0$ 或 $B = 0$

由 $A \neq 0$ 和 $AB = 0 \not\Rightarrow B = 0$

由 $A \neq 0$ 时 $AB = AC \not\Rightarrow B = C$（无左消去律）

**特别的** 设 $A$ 可逆，则 $A$ **有消去律。**

左消去律：$AB = AC \Rightarrow B = C$。

右消去律：$BA = CA \Rightarrow B = C$。

如果 $A$ 列满秩，则 $A$ 有左消去律，即

① $AB = 0 \Rightarrow B = 0$

② $AB = AC \Rightarrow B = C$

**可逆矩阵的性质**

i）当$A$可逆时，

$A^T$也可逆，且$\left(A^T\right)^{-1}=\left(A^{-1}\right)^T$。

$A^k$也可逆，且$\left(A^k\right)^{-1}=\left(A^{-1}\right)^k$。

数$c\neq 0$，$cA$也可逆，$(cA)^{-1}=\frac{1}{c}A^{-1}$。

ii）$A$，$B$是两个$n$阶可逆矩阵$\Leftrightarrow AB$也可逆，且$(AB)^{-1}=B^{-1}A^{-1}$。

推论：设$A$，$B$是两个$n$阶矩阵，则$AB=E\Leftrightarrow BA=E$

命题：初等矩阵都可逆，且

$$(E(i,j))^{-1}=E(i,j)$$

$$(E(i(c)))^{-1}=E\left(i\left(\frac{1}{c}\right)\right)$$

$$(E(i,j(c)))^{-1}=E(i,j(-c))$$

命题：准对角矩阵

$$A=\begin{vmatrix}A_{11}&0&0&0\\0&A_{22}&0&0\\0&0&\ddots&0\\0&0&0&A_{kk}\end{vmatrix}\text{可逆}\Leftrightarrow\text{每个 }A_{ii}\text{ 都可逆，记 }A^{-1}=\begin{vmatrix}A_{11}^{-1}&0&0&0\\0&A_{22}^{-1}&0&0\\0&0&\ddots&0\\0&0&0&A_{kk}^{-1}\end{vmatrix}$$

**伴随矩阵的基本性质：**

$AA^*=A^*A=|A|E$

当 $A$ 可逆时， $A\dfrac{A^*}{|A|}=E$ 得 $\boxed{A^{-1}=\dfrac{A^*}{|A|}}$， （求逆矩阵的伴随矩阵法）

且得：$\boxed{(A^*)^{-1}=\dfrac{A}{|A|}=(A^{-1})^*}$ $\left((A^{-1})^*=|A^{-1}|(A^{-1})^{-1}=\dfrac{A}{|A|}\right)$

**伴随矩阵的其他性质**

① $\boxed{|A^*|=|A|^{n-1}}$， $A^*=|A|A^{-1}$

② $(A^T)^*=(A^*)^T$，

③ $\boxed{(cA)^*=c^{n-1}A^*}$，

④$(AB)^* = B^* A^*$,

⑤$(A^k)^* = (A^*)^k$，

⑥$\boxed{(A^*)^* = |A|^{n-2} A}$。　　$n = 2$时，　$(A^*)^* = A$　　$A^* = \begin{pmatrix} a & -b \\ -c & d \end{pmatrix}$

**关于矩阵右上肩记号：** T，$k$，$-1$，*

i) 任何两个的次序可交换，

如$(A^T)^* = (A^*)^T$，

$(A^*)^{-1} = (A^{-1})^*$等

ii) $(AB)^T = B^T A^T, (AB)^{-1} = B^{-1} A^{-1}$，

$(AB)^* = B^* A^*$

$\boxed{但(AB)^k = B^k A^k不一定成立！}$

**线性表示**

$0 \to \alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_s$

$\alpha_i \to \alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_s$

$\beta \to \alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_s \Leftrightarrow x_1\alpha_1 + x_2\alpha_2 + \cdots + x_s\alpha_s = \beta$有解

$\Leftrightarrow (\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_s)x = \beta$有解$\left(x = (x_1, \cdots, x_s)^T\right)$

$Ax = \beta$有解，即$\beta$可用 A 的列向量组表示

$AB = C = (r_1, r_2, \cdots, r_s)$，$A = (\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n)$，

则$r_1, r_2, \cdots, r_s \to \alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n$。

$\beta_1, \beta_2, \cdots, \beta_t \to \alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_s$，

则存在矩阵$C$，使得$(\beta_1, \beta_2, \cdots, \beta_t) = (\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_s)C$

线性表示关系有传递性　当$\beta_1, \beta_2, \cdots, \beta_t \to \alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_s \to r_1, r_2, \cdots, r_p$，

则$\beta_1, \beta_2, \cdots, \beta_t \to r_1, r_2, \cdots, r_p$。

等价关系：如果$\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_s$与$\beta_1, \beta_2, \cdots, \beta_t$互相可表示　$\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_s \rightleftarrows \beta_1, \beta_2, \cdots, \beta_t$

记作$\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_s \cong \beta_1, \beta_2, \cdots, \beta_t$。

**线性相关**

$s=1$，单个向量 $\alpha$， $x\alpha=0$　　$\alpha$ 相关 $\Leftrightarrow \alpha=0$

$s=2$， $\alpha_1,\alpha_2$ 相关 $\Leftrightarrow$ 对应分量成比例　$\alpha_1,\alpha_2$ 相关 $\Leftrightarrow a_1:b_1=a_2:b_2=\cdots=a_n:b_n$

①向量个数 $s$=维数 $n$，则 $\alpha_1,\cdots,\alpha_n$ 线性相（无）关 $\Leftrightarrow \left|\alpha_1\cdots\alpha_n\right|=(\neq)0$

$A=(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n)$， $Ax=0$ 有非零解 $\Leftrightarrow |A|=0$

如果 $s>n$，则 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s$ 一定相关

$Ax=0$ 的方程个数 $n$ <未知数个数 $s$

②如果 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s$ 无关，则它的每一个部分组都无关

③如果 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s$ 无关，而 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s,\beta$ 相关，则 $\beta\to\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s$

证明：设 $c_1,\cdots,c_s,c$ 不全为 0，使得 $c_1\alpha_1+\cdots+c_s\alpha_s+c\beta=0$

则其中 $c \neq 0$，否则 $c_1,\cdots,c_s$ 不全为 0，$c_1\alpha_1+\cdots+c_s\alpha_s=0$，与条件 $\alpha_1,\cdots,\alpha_s$ 无关矛盾。

$\beta=-\frac{c_1}{c}\alpha_1-\cdots-\frac{c_s}{c}\alpha_s$。

④当 $\beta \to \alpha_1,\cdots,\alpha_s$ 时，表示方式唯一 $\Leftrightarrow \alpha_1\cdots\alpha_s$ 无关

（表示方式不唯一 $\Leftrightarrow \alpha_1\cdots\alpha_s$ 相关）

⑤若 $\beta_1,\cdots,\beta_t \to \alpha_1,\cdots,\alpha_s$，并且 $t>s$，则 $\beta_1,\cdots,\beta_t$ 一定线性相关。

证明：记 $A=(\alpha_1,\cdots,\alpha_s)$，$B=(\beta_1,\cdots,\beta_t)$，

则存在 $s\times t$ 矩阵 $C$，使得 $B=AC$。

$Cx=0$ 有 $s$ 个方程，$t$ 个未知数，$s<t$，有非零解 $\eta$，$C\eta=0$。

则 $B\eta=AC\eta=0$，即 $\eta$ 也是 $Bx=0$ 的非零解，从而 $\beta_1,\cdots,\beta_t$ 线性相关。

**各性质的逆否形式**

①如果 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s$ 无关，则 $s\leq n$。

②如果 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s$ 有相关的部分组，则它自己一定也相关。

③如果 $\alpha_1\cdots\alpha_s$ 无关，而 $\beta \nrightarrow \alpha_1,\cdots,\alpha_s$，则 $\alpha_1,\cdots,\alpha_s,\beta$ 无关。

⑤如果 $\beta_1\cdots\beta_t \to \alpha_1\cdots\alpha_s$，$\beta_1\cdots\beta_t$ 无关，则 $t\leq s$。

推论：若两个无关向量组 $\alpha_1\cdots\alpha_s$ 与 $\beta_1\cdots\beta_t$ 等价，则 $s=t$。

**极大无关组**

一个线性无关部分组$(I)$，若$\#(I)$等于秩$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_4,\alpha_6 \to (I)$，$(I)$就一定是极大无关组

①$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s$无关$\Leftrightarrow \gamma(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s)=s$

②$\beta \to \alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s \Leftrightarrow \gamma(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s,\beta)=\gamma(\alpha_1,\cdots,\alpha_s)$

另一种说法： 取$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s$的一个极大无关组$(I)$

$(I)$也是$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s,\beta$的极大无关组$\Leftrightarrow (I),\beta$相关。

证明：$\beta \to \alpha_1,\cdots,\alpha_s \Leftrightarrow \beta \to (I) \Leftrightarrow (I),\beta$相关。

$$\boxed{\gamma(\alpha_1,\cdots,\alpha_s,\beta)=\begin{cases}\gamma(\alpha_1,\cdots,\alpha_s), \beta \to \alpha_1\cdots\alpha_s \\ \gamma(\alpha_1,\cdots,\alpha_s)+1, \beta \nrightarrow \alpha_1,\cdots,\alpha_s\end{cases}}$$

③$\beta$可用$\alpha_1,\cdots,\alpha_s$唯一表示$\Leftrightarrow \gamma(\alpha_1,\cdots,\alpha_s,\beta)=\gamma(\alpha_1,\cdots,\alpha_s)=s$

④$\beta_1,\cdots,\beta_t \to \alpha_1,\cdots,\alpha_s \Leftrightarrow \gamma(\alpha_1,\cdots,\alpha_s,\beta_1,\cdots,\beta_t)=\gamma(\alpha_1,\cdots,\alpha_s)$

$$\Rightarrow \gamma(\beta_1,\cdots,\beta_t)\le\gamma(\alpha_1,\cdots,\alpha_s)$$

⑤$\alpha_1,\cdots,\alpha_s \cong \beta_1,\cdots,\beta_t \Leftrightarrow \gamma(\alpha_1,\cdots,\alpha_s)=\gamma(\alpha_1\cdots\alpha_s,\beta_1\cdots\beta_t)=\gamma(\beta_1,\cdots,\beta_t)$

**矩阵的秩的简单性质**

$0\le r(A)\le \min\{m,n\}$

$r(A)=0 \Leftrightarrow A=0$

$A$行满秩：$r(A)=m$

$A$列满秩：$r(A)=n$

$n$阶矩阵$A$满秩：$r(A)=n$

$A$满秩$\Leftrightarrow A$的行（列）向量组线性无关

$\Leftrightarrow |A|\ne 0$

$\Leftrightarrow A$可逆

$\Leftrightarrow Ax=0$只有零解，$Ax=\beta$唯一解。

**矩阵在运算中秩的变化**

初等变换保持矩阵的秩

①$r\left(A^T\right)=r(A)$

②$c\neq 0$时，$r(cA)=r(A)$

③$r(A\pm B)\leq r(A)+r(B)$

④$r(AB)\leq \min\{r(A),r(B)\}$

⑤ $A$可逆时，$r(AB)=r(B)$

弱化条件：如果 $A$列满秩，则$\gamma(AB)=\gamma(B)$

证：下面证 $ABx=0$与 $Bx=0$同解。

$\eta$是 $ABx=0$的解$\Leftrightarrow AB\eta=0$

$\Leftrightarrow B\eta=0\Leftrightarrow\eta$是 $Bx=0$的解

$B$可逆时，$r(AB)=r(A)$

⑥若 $AB=0$，则$r(A)+r(B)\leq n$（$A$的列数，$B$的行数）

⑦ $A$列满秩时$r(AB)=r(B)$

$B$行满秩时$r(AB)=r(A)$

⑧$r(AB)+n\geq r(A)+r(B)$

**解的性质**

1. $Ax=0$的解的性质。

如果$\eta_1,\eta_2,\cdots,\eta_e$是一组解，则它们的任意线性组合$c_1\eta_1+c_2\eta_2+\cdots+c_e\eta_e$一定也是解。

$$\forall_i, A\eta_i=0 \Rightarrow A(c_1\eta_1+c_2\eta_2+\cdots+c_e\eta_e)=0$$

2. $Ax=\beta(\beta\neq 0)$

①如果$\xi_1,\xi_2,\cdots,\xi_e$是$Ax=\beta$的一组解，则

$c_1\xi_1+c_2\xi_2+\cdots+c_e\xi_e$也是$Ax=\beta$的解$\Leftrightarrow c_1+c_2+\cdots+c_e=1$

$c_1\xi_1+c_2\xi_2+\cdots+c_e\xi_e$是$Ax=0$的解$\Leftrightarrow c_1+c_2+\cdots+c_e=0$

$A\xi_i=\beta \cdot \forall i$

$$A(c_1\xi_1+c_2\xi_2+\cdots+c_e\xi_e)=c_1A\xi_1+c_2A\xi_2+\cdots+c_eA\xi_e$$

$$=(c_1+c_2+\cdots+c_e)\beta$$

特别的：当$\xi_1,\xi_2$是$Ax=\beta$的两个解时，$\xi_1-\xi_2$是$Ax=0$的解

②如果$\xi_0$是$Ax=\beta$的解，则$n$维向量$\xi$也是$Ax=\beta$的解$\Leftrightarrow \xi-\xi_0$是$Ax=0$的解。

**解的情况判别**

方程：$Ax=\beta$，即 $x_1\alpha_1+x_2\alpha_2+\cdots+x_n\alpha_n=\beta$

$\boxed{\text{有解}}\Leftrightarrow \beta\to\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n$

$\Leftrightarrow \gamma(A\,|\,\beta)=\gamma(A)\Leftrightarrow \gamma(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n,\beta)=\gamma(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n)$

$\boxed{\text{无解}}\Leftrightarrow \gamma(A\,|\,\beta)>\gamma(A)$

$\boxed{\text{唯一解}}\Leftrightarrow \gamma(A\,|\,\beta)=\gamma(A)=n$

$\boxed{\text{无穷多解}}\Leftrightarrow \gamma(A\,|\,\beta)=\gamma(A)<n$

**方程个数$m$：**

$\gamma(A\,|\,\beta)\le m,\gamma(A)\le m$

①当 $\gamma(A)=m$时，$\gamma(A\,|\,\beta)=m$，有解

②当 $m<n$时，$\gamma(A)<n$，不会是唯一解

**对于齐次线性方程组** $Ax=0$，

只有零解 $\Leftrightarrow \gamma(A)=n$（即 $A$列满秩）

（有非零解 $\Leftrightarrow \gamma(A)<n$）

**特征值特征向量**

$\lambda$是$A$的特征值$\Leftrightarrow\lambda$是$A$的特征多项式$|xE-A|$的根。

**两种特殊情形：**

（1）$A$是上（下）三角矩阵，对角矩阵时，特征值即对角线上的元素。

$$A=\begin{pmatrix}\lambda_1 & * & * \\ 0 & \lambda_2 & * \\ 0 & 0 & \lambda_3\end{pmatrix}$$

$$|xE-A|=\begin{vmatrix}x-\lambda_1 & -* & -* \\ 0 & x-\lambda_2 & -* \\ 0 & 0 & x-\lambda_3\end{vmatrix}=(x-\lambda_1)(x-\lambda_2)(x-\lambda_3)$$

（2）$r(A)=1$时：$A$的特征值为$0,0,\cdots,0,tr(A)$

**特征值的性质**

命题：$n$阶矩阵$A$的特征值$\lambda$的重数$\geq n-r(\lambda E-A)$

命题：设$A$的特征值为$\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n$，则

①$\boxed{\lambda_1\lambda_2\cdots\lambda_n=|A|}$

②$\boxed{\lambda_1+\lambda_2+\cdots+\lambda_n=tr(A)}$

命题：设$\eta$是$A$的特征向量，特征值为$\lambda$，即$A\eta=\lambda\eta$，则

①对于$A$的每个多项式$f(A)$，$f(A)\eta=f(x)\eta$

②当$A$可逆时，$A^{-1}\eta=\dfrac{1}{\lambda}\eta$，$A^*\eta=\dfrac{|A|}{\lambda}\eta$

命题：设$A$的特征值为$\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n$，则

①$f(A)$的特征值为$f(\lambda_1),f(\lambda_2),\cdots,f(\lambda_n)$

②$A$可逆时，$A^{-1}$的特征值为$\dfrac{1}{\lambda_1},\dfrac{1}{\lambda_2},\cdots,\dfrac{1}{\lambda_n}$

$A^*$的特征值为$\dfrac{|A|}{\lambda_1},\dfrac{|A|}{\lambda_2},\cdots,\dfrac{|A|}{\lambda_n}$

③$A^T$的特征值也是$\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n$

**特征值的应用**

①**求行列式** $|A| = \lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n$

②**判别可逆性**

$\lambda$ 是 $A$ 的特征值 $\Leftrightarrow \left|\lambda E - A\right| = 0 \Leftrightarrow A - \lambda E$ 不可逆

$A - \lambda E$ 可逆 $\Leftrightarrow \lambda$ 不是 $A$ 的特征值。

当 $f(A) = 0$ 时，如果 $f(c) \neq 0$，则 $A - cE$ 可逆

若 $\lambda$ 是 $A$ 的特征值，则 $f(\lambda)$ 是 $f(A)$ 的特征值 $\Rightarrow f(\lambda) = 0$。

$f(c) \neq 0 \Rightarrow c$ 不是 $A$ 的特征值 $\Leftrightarrow AcE$ 可逆。

**n 阶矩阵的相似关系**

当 $AU = UA$ 时，$B = A$，而 $AU \neq UA$ 时，$B \neq A$。

相似关系有 i）**对称性**：$A \sim B \Leftrightarrow B \sim A$

$U^{-1}AU = B$，则 $A = UBU^{-1}$

ii）**有传递性**：$A \sim B$，$B \sim C$，则 $A \sim C$

$U^{-1}AU = B$，$V^{-1}BV = C$，则

$(UV)^{-1} A (UV) = V^{-1}U^{-1}AUV = V^{-1}BV = C$

命题　当 $A \sim B$ 时，$A$ 和 $B$ 有许多相同的性质

①$|A| = |B|$

②$\gamma(A) = \gamma(B)$

③$A$，$B$ 的特征多项式相同，从而特征值完全一致。

$A$ 与 $B$ 的特征向量的关系：$\eta$ 是 $A$ 的属于 $\lambda$ 的特征向量 $\Leftrightarrow U^{-1}\eta$ 是 $B$ 的属于 $\lambda$ 的特征向量。

$$\begin{array}{ccc} A\eta = \lambda\eta & \Leftrightarrow & B(U^{-1}\eta) = \lambda(U^{-1}\eta) \\ \Updownarrow & & \Updownarrow \\ U^{-1}A\eta = \lambda U^{-1}\eta & \Leftrightarrow & U^{-1}AUU^{-1}\eta = \lambda(U^{-1}\eta) \end{array}$$

**正定二次型与正定矩阵性质与判别**

可逆线性变换替换保持正定性

$f(x_1, x_2, \cdots, x_n)$ 变为 $g(y_1, y_2, \cdots, y_n)$，则它们同时正定或同时不正定

$A \simeq B$，则 $A$，$B$ 同时正定，同时不正定。

例如 $B = C^T AC$。如果 $A$ 正定，则对每个 $x \neq 0$

$$x^T Bx = x^T C^T ACx = (Cx)^T ACx > 0$$

（$C$ 可逆，$x \neq 0$，$\therefore Cx \neq 0$！）

**我们给出关于正定的以下性质**

$A$ 正定 $\Leftrightarrow A \simeq E$

$\Leftrightarrow$ 存在实可逆矩阵 $C$，$A = C^T C$。

$\Leftrightarrow A$ 的正惯性指数 $= n$。

$\Leftrightarrow A$ 的特征值全大于 $0$。

$\Leftrightarrow A$ 的每个顺序主子式全大于 $0$。

**判断 $A$ 正定的三种方法：**

①顺序主子式法。

②特征值法。

③定义法。

**基本概念**

**对称矩阵** $A^T = A$。

**反对称矩阵** $A^T = -A$。

**简单阶梯形矩阵**：台角位置的元素都为 1，台角正上方的元素都为 0。
如果 $A$ 是一个 $n$ 阶矩阵，$A$ 是阶梯形矩阵 $\Rightarrow$ $A$ 是上三角矩阵，反之不一定
**矩阵消元法：（解的情况）**

①写出增广矩阵 $(A|\beta)$，用初等行变换化 $(A|\beta)$ 为阶梯形矩阵 $(B|\gamma)$。

②用 $(B|\gamma)$ 判别解的情况。

i）如果 $(B|\gamma)$ 最下面的非零行为 $(0,\cdots,0|d)$，则无解，否则有解。

ii）如果有解，记 $\gamma$ 是 $(B|\gamma)$ 的非零行数，则

$\gamma = n$ 时唯一解。
$\gamma < n$ 时无穷多解。
iii）唯一解求解的方法（初等变换法）

去掉 $(B|\gamma)$ 的零行，得 $(B_0|\gamma_0)$，它是 $n\times(n+c)$ 矩阵，$B_0$ 是 $n$ 阶梯形矩阵，从而是上三角矩阵。

则 $b_{nn} \neq 0 \Rightarrow b_{n-1n-1} \neq 0 \Rightarrow \cdots b_{ii}$ 都不为 $0$。

$(A|\beta) \xrightarrow{\text{行}} (B|r) \xrightarrow{\text{行}} (E|\eta)$ $\qquad$ $\eta$ 就是解。

**一个 $n$ 阶行列式** $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$ **的值：**

①是 $n!$ 项的代数和

②每一项是 $n$ 个元素的乘积，它们共有 $n!$ 项 $a_{1j_1}a_{2j_2}\cdots a_{nj_n}$ 其中 $j_1j_2\cdots j_n$ 是 $1,2,\cdots,n$ 的一个全排列。

③$a_{1j_1}\cdots a_{nj_n}$ 前面乘的应为 $(-1)^{\tau(j_1j_2\cdots j_n)}$ $\quad$ $\tau(j_1j_2\cdots j_n)$ 的逆序数

$$\begin{vmatrix} \quad \end{vmatrix} = \sum_{j_1j_2\cdots j_n} (-1)^{\tau(j_1j_2\cdots j_n)} a_{1j_1}a_{2j_2}\cdots a_{nj_n}$$

$$\tau(n(n-1)\cdots 21) = C_n^2 = \frac{n(n-1)}{2}$$

**代数余子式**

$M_{ij}$ 为 $a_{ij}$ 的余子式。

$A_{ij}=(-1)^{i+j}M_{ij}$

定理：一个行列式的值 $D$ 等于它的某一行（列），各元素与各自代数余子式乘积之和。

$D=a_{21}A_{21}+a_{22}A_{22}+\cdots+a_{2n}A_{2n}$

一行（列）的元素乘上另一行（列）的相应元素代数余子式之和为 0 。

**范德蒙行列式**

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ a_1 & a_1 & \cdots & a_n \\ & & & \\ & & & \end{vmatrix}=\prod_{i<j}(a_j-a_i) \qquad C_n^2\text{个}$$

**乘法相关**

$AB$ 的 $(i,j)$ 位元素是 $A$ 的第 $i$ 行和 $B$ 的第 $j$ 列对应元素乘积之和。

$C_{ij}=a_{i1}b_{1j}+a_{i2}b_{2j}+\cdots+a_{in}b_{nj}$

**乘积矩阵的列向量与行向量**

（1）设$m \times n$矩阵 $A=(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n)$， $n$维列向量 $\beta=(b_1,b_2,\cdots,b_n)^T$，则

$$A\beta=b_1\alpha_1+b_2\alpha_2+\cdots+b_n\alpha_n$$

**矩阵乘法应用于方程组**

方程组的矩阵形式

$$Ax=\beta，\left(\beta=(b_1,b_2,\cdots,b_m)^T\right)$$

方程组的向量形式

$$x_1\alpha_1+x_2\alpha_2+\cdots+x_n\alpha_n=\beta$$

（2）设$AB=C$，

$$AB=(A\beta_1,A\beta_2,\cdots,A\beta_s)$$

$$r_i=A\beta_i=b_{1i}\alpha_1+b_{2i}\alpha_2+\cdots+b_{ni}\alpha_n$$

$AB$ 的第 $i$ 个列向量是 $A$ 的列向量组的线性组合，组合系数是 $B$ 的第 $i$ 个列向量的各分量。

$AB$ 的第 $i$ 个行向量是 $B$ 的行向量组的线性组合，组合系数是 $A$ 的第 $i$ 个行向量的各分量。

**矩阵分解**

当矩阵$C$的每个列向量都是 $A$ 的列向量的线性组合时，可把 $C$ 分解为 $A$ 与一个矩阵 $B$ 的乘积

**特别的在有关对角矩阵的乘法中的若干问题**

$$(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n)\begin{pmatrix}\lambda_1 & 0 & 0 & 0\\ 0 & \lambda_2 & 0 & 0\\ 0 & 0 & \ddots & 0\\ 0 & 0 & 0 & \lambda_n\end{pmatrix}=(\lambda_1\alpha_1,\lambda_2\alpha_2,\cdots,\lambda_n\alpha_n)$$

对角矩阵从右侧乘一矩阵 $A$，即用对角线上的元素依次乘 $A$ 的各列向量

对角矩阵从左侧乘一矩阵 $A$，即用对角线上的元素依次乘 $A$ 的各行向量

于是 $AE=A$， $EA=A$

$$A(kE)=kA,\quad (kE)A=kA$$

两个对角矩阵相乘只须把对角线上对应元素相乘

对角矩阵的 $k$ 次方幂只须把每个对角线上元素作 $k$ 次方幂

对一个 $n$ 阶矩阵 $A$，规定 $tr(A)$ 为 $A$ 的对角线上元素之和称为 $A$ 的迹数。

于是 $(\alpha\beta^T)^k=(\beta^T\alpha)^{k-1}\alpha\beta^T=\left[tr(\alpha\beta^T)\right]^{k-1}\alpha\beta^T \qquad \alpha^T\alpha=tr(\alpha\alpha^T)$

其他形式方阵的高次幂也有规律

例如：$A=\begin{pmatrix}1&0&1\\0&2&0\\1&0&1\end{pmatrix}$

**初等矩阵及其在乘法中的作用**

（1） $E(i,j)$：交换 $E$ 的第 $i,j$ 两行或交换 $E$ 的第 $i,j$ 两列

（2） $E(i(c))$：用数 $c(\neq 0)$ 乘 $E$ 的第 $i$ 行或第 $i$ 列

（3） $E(i,j(c))$：把 $E$ 的第 $j$ 行的 $c$ 倍加到第 $i$ 行上，或把 $E$ 的第 $i$ 列的 $c$ 倍加到第 $j$ 列上。

$$\begin{pmatrix} A_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & A_{22} & \cdots & 0 \\ \vdots & & \ddots & \\ 0 & 0 & \cdots & A_{kk} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} B_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & B_{22} & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & B_{kk} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A_{11}B_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & A_{22}B_{22} & \cdots & 0 \\ & & \ddots & \\ 0 & 0 & & A_{kk}B_{kk} \end{pmatrix}$$

**矩阵方程与可逆矩阵**

**两类基本的矩阵方程** **（**都需求$A$是方阵，且$|A| \neq 0$**）**

$(I)Ax = B$ $\qquad$ $(II)xA = B$

（I）的解法：

$$(A|B) \xrightarrow{\text{行}} (E|x)$$

（II）的解法，先化为$A^T x^T = B^T$。

$$(A^T|B^T) \to (E|x^T)。$$

通过逆求解：$Ax = B$， $x = A^{-1}B$

**可逆矩阵及其逆矩阵**

定义：设 $A$ 是 $n$ 阶矩阵，如果存在 $n$ 阶矩阵 $H$，使得 $AH=E$，且 $HA=E$，则称 $A$ 是可逆矩阵，称 $H$ 是 $A$ 的逆矩阵，证作 $A^{-1}$。

定理：$n$ 阶矩阵 $A$ 可逆 $\Leftrightarrow |A|\neq 0$

**求 $A^{-1}$ 的方程**（初等变换法）

$$(A|E)\xrightarrow{\text{行}}(E|A^{-1})$$

**伴随矩阵**

$$A^*=\begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & \cdots & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & \cdots & A_{n2} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ A_{1n} & A_{2n} & \cdots & A_{nn} \end{pmatrix}=(A_{ij})^T$$

**线性表示**

$\beta$ 可以用 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s$ 线性表示，即 $\beta$ 可以表示为 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s$ 的线性组合，

也就是存在 $c_1,c_2,\cdots,c_s$ 使得 $c_1\alpha_1+c_2\alpha_2+\cdots+c_s\alpha_s=\beta$

记号：$\beta\to\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s$

**线性相关性**

线性相关：存在向量 $\alpha_i$ 可用其它向量 $\alpha_1,\cdots,\alpha_{i-1},\alpha_{i+1},\cdots,\alpha_s$ 线性表示。

线性无关：每个向量 $\alpha_i$ 都不能用其它向量线性表示

定义:如果存在不全为0的 $c_1,c_2,\cdots,c_s$，使得 $c_1\alpha_1+c_2\alpha_2+\cdots+c_s\alpha_s=0$ 则称 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s$ 线性相关，否则称 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s$ 线性无关。

即：$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s$ 线性相（无）关 $\Leftrightarrow x_1\alpha_1+\cdots+x_s\alpha_s=0$ 有（无）非零解

$\Leftrightarrow(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s)x=0$ 有（无）非零解

**极大无关组和秩**

定义：$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s$ 的一个部分组 $(I)$ 称为它的一个极大无关组，如果满足：

i）$(I)$ 线性无关。

ii）$(I)$ 再扩大就相关。

$(I)\rightleftarrows\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s$　$(II)\cong\alpha_1\cdots\alpha_s\cong(I)$

定义：规定$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s$的秩$\gamma(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s)=\#(I)$。

如果$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s$每个元素都是零向量，则规定其秩为0。

$0\le\gamma(\alpha_1,\cdots,\alpha_s)\le\min\{n,s\}$

**有相同线性关系的向量组**

定义：两个向量若有相同个数的向量：$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s,\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_s$，并且向量方程

$x_1,\alpha_1+x_2\alpha_2+\cdots+x_s\alpha_s=0$与$x_1\beta_1+x_2\beta_2+\cdots+x_s\beta_s=0$同解，则称它们有相同的线性关系。

①对应的部分组有一致的相关性。

$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_4$的对应部分组$\beta_1,\beta_2,\beta_4$，

若$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_4$相关，有不全为0的$c_1,c_2,c_4$使得

$c_1\alpha_1+c_2\alpha_2+c_4\alpha_4=0$，

即$(c_1,c_2,0,c_4,0,\cdots,0)$是$x_1\alpha_1+x_2\alpha_2+\cdots+x_s\alpha_s=0$的解，

从而也是$x_1\beta_1+x_2\beta_2+\cdots+x_s\beta_s=0$的解，则有

$c_1\beta_1+c_2\beta_2+c_4\beta_4=0$，

$\beta_1,\beta_2,\beta_3$也相关。

②极大无关组相对应，从而秩相等。

③有一致的内在线表示关系。

设：$A=(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s)$，$B=(\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_s)$，则

$x_1\alpha_1+x_2\alpha_2+\cdots+x_s\alpha_s=0$ 即 $Ax=0$，

$x_1\beta_1+x_2\beta_2+\cdots+x_s\beta_s=0$ 即 $Bx=0$。

$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s$ 与 $\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_s$ 有相同的线性关系即 $Ax=0$ 与 $Bx=0$ 同解。

反之，当 $Ax=0$ 与 $Bx=0$ 同解时，$A$ 和 $B$ 的列向量组有相同的线性关系。

**矩阵的秩**

定理：矩阵 $A$ 的行向量组的秩=列向量组的秩

规定 $r(A)$ =行（列）向量组的秩。

$r(A)$ **的计算**：用初等变换化 $A$ 为阶梯形矩阵 $B$，则 $B$ 的非零行数即 $r(A)$。

命题：$r(A)=A$ 的非零子式阶数的最大值。

$$A=\begin{pmatrix} * & * & * & * & * \\ * & * & * & * & * \\ * & * & * & * & * \\ * & * & * & * & * \end{pmatrix}$$

**方程组的表达形式**

1. $\begin{cases} a_{11}x_1+a_{12}x_2+\cdots+a_{1n}x_n=b_1 \\ a_{21}x_1+a_{22}x_2+\cdots+a_{2n}x_n=b_2 \\ \cdots \\ a_{m1}x_1+a_{m2}x_2+\cdots+a_{mn}x_n=b_m \end{cases}$

2. $Ax=\beta$　　$\eta$是解$\Leftrightarrow A\eta=\beta$

3. $x_1\alpha_1+x_2\alpha_2+\cdots+x_n\alpha_n=\beta$　　　有解$\Leftrightarrow \beta\to\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n$

**基础解系和通解**

**1. $Ax=0$有非零解时的基础解系**

$\eta_1,\eta_2,\cdots,\eta_e$是$Ax=0$的基础解系的条件：

①每个$\eta_i$都是$Ax=0$的解

②$\eta_1,\eta_2,\cdots,\eta_e$线性无关

③$Ax=0$的每个解$\eta\to\eta_1,\eta_2,\cdots,\eta_e$

③′ $l=n-\gamma(A)$

**通解**

①如果$\eta_1,\eta_2,\cdots,\eta_e$是$Ax=0$的一个基础解系，则$Ax=0$的通解为

$$c_1\eta_1+c_2\eta_2+\cdots+c_e\eta_e,\quad c_i\text{任意}$$

②如果$\xi_0$是$Ax=\beta(\beta\neq 0)$的一个解，$\eta_1,\eta_2,\cdots,\eta_e$是$Ax=0$的基础解系，则$Ax=\beta$的通解为

$$\xi_0+c_1\eta_1+c_2\eta_2+\cdots+c_e\eta_e,\quad c_i\text{任意}$$

**特征向量与特征值**

定义：如果$\eta\neq 0$，并且$A\eta$与$\eta$线性相关，则称$\eta$是$A$的一个特征向量。此时，有数$\lambda$，使得$A\eta=$

称$\lambda$为$\eta$的特征值。

设$A$是数量矩阵$\lambda E$，则对每个$n$维列向量$\eta$，$A\eta=\lambda\eta$，于是，任何非零列向量都是$\lambda E$的特征向量

征值都是$\lambda$。

①特征值有限特征向量无穷多

若$A\eta=\lambda\eta$，$A(c\eta)=cA\eta=c\lambda\eta=\lambda(c\eta)$

$$\left.\begin{array}{l} A\eta_1 = \lambda\eta_1 \\ A\eta_2 = \lambda\eta_2 \end{array}\right\} \Rightarrow A(c_1\eta_1 + c_2\eta_2) = c_1A\eta_1 + c_2A\eta_2 = \lambda(c_1\eta_1 + c_2\eta_2)$$

②每个特征向量有唯一特征值，而有许多特征向量有相同的特征值。

③计算时先求特征值，后求特征向量。

**特征向量与特征值计算**

$A\eta = \lambda\eta, \eta \neq 0$

$\Leftrightarrow (\lambda E - A)\eta = 0, \eta \neq 0$

$\Leftrightarrow \eta$ 是 $(\lambda E - A)x = 0$ 的非零解

命题：①$\lambda$ 是 $A$ 的特征值 $\Leftrightarrow |\lambda E - A| = 0$

②$\eta$ 是属于 $\lambda$ 的特征向量 $\Leftrightarrow \eta$ 是 $(\lambda E - A)x = 0$ 的非零解

称多项式 $|xE - A|$ 为 $A$ 的特征多项式。

$\lambda$ 是 $A$ 的特征值 $\Leftrightarrow \lambda$ 是 $A$ 的特征多项式 $|xE - A|$ 的根。

$\lambda$ 的重数：$\lambda$ 作为 $|xE - A|$ 的根的重数。

$n$ 阶矩阵 $A$ 的特征值有 $n$ 个：$\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n$，可能其中有的不是实数，有的是多重的。

计算步骤：

①求出特征多项式$|xE-A|$。

②求$|xE-A|$的根，得特征值。

③对每个特征值$\lambda_i$，求$(\lambda_i E-A)x=0$的非零解，得属于$\lambda_i$的特征向量。

**n阶矩阵的相似关系**

设$A$，$B$是两个$n$阶矩阵。如果存在$n$阶可逆矩阵$U$，使得$U^{-1}AU=B$，则称$A$与$B$相似，记作$A$

**n阶矩阵的对角化**

基本定理 $A$可对角化$\Leftrightarrow$ $A$有$n$个线性无关的特征向量。

设可逆矩阵$U=(\eta_1,\eta_2,\cdots,\eta_n)$，则

$$U^{-1}AU=\begin{pmatrix}\lambda_1 & 0 & 0 & 0\\ 0 & \lambda_2 & 0 & 0\\ 0 & 0 & \ddots & 0\\ 0 & 0 & 0 & \lambda_n\end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow A(\eta_1,\eta_2,\cdots,\eta_n)=U\begin{pmatrix}\lambda_1 & 0 & 0 & 0\\ 0 & \lambda_2 & 0 & 0\\ 0 & 0 & \ddots & 0\\ 0 & 0 & 0 & \lambda_n\end{pmatrix}=(\lambda_1\eta_1,\lambda_2\eta_2,\cdots,\lambda_n\eta_n)$$

$$\Leftrightarrow A\eta_i = \lambda_i\eta_i,\quad i = 1,2,\cdots,n$$

**判别法则**

$A$可对角化$\Leftrightarrow$对于$A$的每个特征值$\lambda$，$\lambda$的重数$= n-\gamma(\lambda E - A)$。

计算：对每个特征值$\lambda_i$，求出$(\lambda_i E - A)x = 0$的一个基础解系，把它们合在一起，得到$n$个线性无关的特征向量，$\eta_1,\cdots,\eta_n$。令$U = (\eta_1,\eta_2,\cdots,\eta_n)$，则

$$U^{-1}AU = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda_n \end{pmatrix}$$，其中$\lambda_i$为$\eta_i$的特征值。

**二次型（实二次型）**

**二次型及其矩阵**

一个$n$元二次型的一般形式为

$$f(x_1,x_2,\cdots,x_n) = \sum_{i=1}^{n} a_{ii}x_i^2 + 2\sum_{i<j} a_{ij}x_i x_j$$

只有平方项的二次型称为标准二次型。

形如：$x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_p^2 - x_{p+1}^2 - \cdots - x_{p+q}^2$的$n$元二次型称为规范二次型。

对每个$n$阶实矩阵$A$，记$x = (x_1,x_2,\cdots,x_n)^T$，则$x^T Ax$是一个二次型。

$f(x_1, x_2, \cdots, x_n) = x^T Ax$

称 $A$ 的秩 $\gamma(A)$ 为这个二次型的秩。

标准二次型的矩阵是对角矩阵。

规范二次型的矩阵是规范对角矩阵。

**可逆线性变量替换**

设有一个 $n$ 元二次型 $f(x_1, x_2, \cdots, x_n)$，引进新的一组变量 $y_1, y_2, \cdots, y_n$，并把 $x_1, x_2, \cdots, x_n$ 用它们表示。

$$\begin{cases} x_1 = c_{11}y_1 + c_{12}y_2 + \cdots + c_{1n}y_n \\ x_2 = c_{21}y_1 + c_{22}y_2 + \cdots + c_{2n}y_n \\ \qquad\qquad \cdots \\ x_n = c_{n1}y_1 + c_{n2}y_2 + \cdots + c_{nn}y_n \end{cases}$$（并要求矩阵 $C = \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} & \cdots & c_{1n} \\ c_{21} & c_{22} & \cdots & c_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ c_{n1} & c_{n2} & \cdots & c_{nn} \end{pmatrix}$ 是可逆矩阵）

代入 $f(x_1, x_2, \cdots, x_n)$，得到 $y_1, \cdots, y_n$ 的一个二次型 $g(y_1, \cdots, y_n)$ 这样的操作称为对 $f(x_1 \cdots x_n)$ 作了一次可逆线性变量替换。

设 $Y = (y_1, y_2, \cdots, y_n)^T$，则上面的变换式可写成

$$\boxed{x = CY}$$

则 $f(x_1 \cdots x_n) = x^T Ax = Y^T C^T ACY = g(y_1, \cdots, y_n)$

于是 $g(y_1, \cdots y_n)$ 的矩阵为 $C^T AC$

$$\left(C^T AC\right)^T = C^T A^T C^T = C^T AC$$

**实对称矩阵的合同**

两个$n$阶实对称矩阵$A$和$B$，如果存在$n$阶实可逆矩阵$C$，值得$C^T AC = B$。称$A$与$B$合同，记作

命题：二次型$f\left(x_1 \cdots x_n\right) = x^T Ax$可用可逆线性变换替换化为

$$g\left(y_1 \cdots y_n\right) = Y^T BY \Leftrightarrow A \simeq B$$

**二次型的标准化和规范化**

1. **每个二次型都可以用可逆线性变量替换化为标准二次型和规范二次型。**

   也就是每个实对称矩阵都会同于对角矩阵和规范对角矩阵。

   设$A$是一个实对称矩阵，则存在正交矩阵$Q$，使得$D = Q^{-1}AQ$是对角矩阵。

$$Q^T AQ = Q^{-1}AQ = D \qquad A \sim D，\ A \simeq D$$

2. **标准化和规范化的方法**

   ①正交变换法

   ② 配方法

3. **惯性定理与惯性指数**

定理：一个二次型用可逆线性变换替换化出的标准形的各个平方项的系数中，大于 0 的个数和小于
数是由原二次型所决定的，分别称为原二次型的正、负惯性指数。

一个二次型化出的规范二次型在形式上是唯一的，也即相应的规范对角矩阵是唯一的。

用矩阵的语言来说：一个实对称矩阵$A$合同于唯一规范对角矩阵。

定理：二次型的正、负惯性指数在可逆线性变量替换下不变；两个二次型可互相转化的充要条件是
正、负惯性指数相等。

实对称矩阵的正（负）惯性指数就等于正（负）特征值的个数。

**正定二次型与正定矩阵**

**定义：**一个二次型$f(x_1,x_2,\cdots,x_n)$称为正定二次型，如果当$x_1,\cdots,x_n$不全为0时，

$$f(x_1,x_2,\cdots,x_n)>0。$$

例如，标准二次型$f(x_1,x_2,\cdots,x_n)=d_1x_1^2+d_2x_2^2+\cdots+d_nx_n^2$正定$\Leftrightarrow d_i>0$，$i=1,\cdots,n$

（必要性"$\Rightarrow$"，取$x_1=1$，$x_2=\cdots=x_n=0$，此时$f(1,0,\cdots,0)=d_1>0$同样可证每个$d_i>$

**实对称矩阵正定**即二次型$x^TAx$正定，也就是：当$x\neq0$时，$x^TAx>0$。

例如实对角矩阵$\begin{pmatrix}\lambda_1 & 0 & 0 & 0\\ 0 & \lambda_2 & 0 & 0\\ 0 & 0 & \ddots & 0\\ 0 & 0 & 0 & \lambda_n\end{pmatrix}$正定$\Leftrightarrow\lambda_i>0$，$i=1,\cdots,n$

**定义：**设$A$是一个$n$阶矩阵，记$A_r$是$A$的西北角的$r$阶小方阵，称$|A_r|$为$A$的第$r$个顺序主子式（或

顺序主子式）。

## 附录一　内积，正交矩阵，实对称矩阵的对角化

### 一．向量的内积

**1. 定义**

两个$n$维实向量$\alpha,\beta$的内积是一个数，记作$(\alpha,\beta)$，规定为它们对应分量乘积之和。

设$\alpha=\begin{pmatrix}a_1\\a_2\\\vdots\\a_n\end{pmatrix},\beta=\begin{pmatrix}b_1\\b_2\\\vdots\\b_n\end{pmatrix}$，则 $(\alpha,\beta)=a_1b_1+a_2b_2+\cdots+a_nb_n=\alpha^T\beta$

**2. 性质**

①对称性：$(\alpha,\beta)=(\beta,\alpha)$

②双线性性质：$(\alpha_1+\alpha_2,\beta)=(\alpha_1,\beta)+(\alpha_2,\beta)$

$$(\alpha,\beta_1+\beta_2)=(\alpha,\beta_1)+(\alpha,\beta_2)$$

$$(c\alpha,\beta)=c(\alpha,\beta)=(\alpha,c\beta)$$

③正交性：$(\alpha,\alpha)\geq0$，且$(\alpha,\alpha)=0\Leftrightarrow\alpha=0$　　$(\alpha,\alpha)=\sum_{i=1}^{n}a_i^2$

**3．长度与正交**

向量$\alpha$的长度$\|\alpha\|=\sqrt{(\alpha,\alpha)}=\sqrt{\sum_{i=1}^{n}a_i^2}$

$\|\alpha\|=0\Leftrightarrow\alpha=0$

$\|c\alpha\|=|c|\|\alpha\|$

单位向量：长度为1的向量

$\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}$，$\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}$，$\begin{pmatrix}\frac{\sqrt{2}}{2}\\0\\-\frac{\sqrt{2}}{2}\end{pmatrix}$，

若$\alpha\neq0$，则$\frac{\alpha}{\|\alpha\|}$是单位向量，称为$\alpha$的**单位化。** $\left\|\frac{\alpha}{\|\alpha\|}\right\|=\frac{1}{\|\alpha\|}\|\alpha\|=1$

两个向量$\alpha,\beta$如果内积为0：$(\alpha,\beta)=0$，称它们是**正交**的。

如果$n$维向量组$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s$两两正交，并且每个都是单位向量，则称为单位**正交向量组。**

例 1．如果向量组$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s$两两正交，并且每个向量都不为零向量，则它们线性无关。

证：记$A=(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s)$，则

$$A^TA=\begin{pmatrix} \|\alpha_1\|^2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \|\alpha_2\|^2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \|\alpha_s\|^2 \end{pmatrix}$$

则$r(A^TA)=s,\Rightarrow r(A)=s$即$r(\alpha_1,\cdots,\alpha_s)=s$。

例 2．若$A$是一个实的矩阵，则$r(A^TA)=r(A)$。

**二．正交矩阵**

一个实$n$阶矩阵$A$如果满足$AA^T=E$，就称为正交矩阵。$A^T=A^{-1}$

定理　$A$是正交矩阵$\Leftrightarrow A$的行向量组是单位正交向量组。

$\Leftrightarrow A$的列向量组是单位正交向量组。

例 3．正交矩阵$A$保持内积，即

$(A\alpha,A\beta)=(\alpha,\beta)$

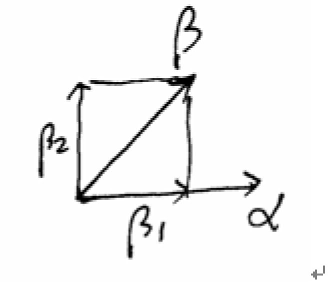
$\|A\alpha\|=\|\alpha\|$

证：$(A\alpha,A\beta)=\alpha^TA^TA\beta=\alpha^T\beta=(\alpha,\beta)$

例 4.（04）$A$是 3 阶正交矩阵，并且$a_{11}=1$，求$Ax=\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}$的解。

**三．施密特正交化方法**

这是把一个线性无关的向量组改造为与之等价的单位正交向量组的方法。




$\beta_2 = \beta - \beta_1 = \beta - c\alpha$

设$\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$线性无关

①正交化：令$\beta_1 = \alpha_1$

$$\beta_2 = \alpha_2 - \frac{(\beta_1, \alpha_2)}{(\beta_1, \beta_1)}\beta_1$$

（设$\beta_2 = \alpha_2 - k\beta_1$，$(\beta_2, \beta_1) = (\alpha_2, \beta_1) - k(\beta_1, \beta_1)$

当$k = \dfrac{(\alpha_2, \beta_1)}{(\beta_1, \beta_1)}$时，$\beta_2, \beta_1$正交。）