11.1 阐述 Black-Scholes 股票期权定价模型中对于一年中股票价格概率分布的假设条件。

Black-Scholes 股票期权定价模型假定一年中股票价格概率分布服从正态分布，同样，它假设股票的连续回报率也是服从正态分布的。

11.2 若一股票价格的波动率为每年 30%，则在一个交易日内其相应的价格变化的标准差为多少？

在本题中 σ =0.3，假设一年中有 252 个交易日，则

$$\Delta t = 1/252 = 0.004$$

因此 $\sigma\sqrt{\Delta t} = 0.3\sqrt{0.004} = 0.019 or 1.9\%$

11.3 阐述风险中性定价原理。

一个期权或者其他金融衍生品都是通过风险中性定价原理来定价的，期权因此在风险中性下和在真实下有一样的价值。因此我们为了估价期权而假设这个世界是风险中性的，这简化了分析。在风险中性情况下，所有证券都期望得到无风险利率的回报率。因此在一个风险中性世界，用于预计远期现金流的最合适的贴现率是无风险利率。

11.4 计算基于无红利支付股票的欧式看跌期权价格，其中执行价格为＄50，现价为＄50，有效期 3 个月期，无风险年收益率为 10%，波动率为每年 30%。

在本题中 $S_0 = 50, X = 50, r = 0.1, \sigma = 0.3, T = 0.25$

$$d_1 = \frac{\ln(50/50) + (0.1 + 0.09/2)0.25}{0.3\sqrt{0.25}} = 0.2417$$

$$d_2 = d_1 - 0.3\sqrt{0.25} = 0.0917$$

欧式看跌期权价格是

$$\begin{aligned} &50N(-0.0.0917)e^{-0.1\times0.25} - 50N(-0.2417) \\ &= 50\times0.4634e^{-0.1\times0.25} - 50\times0.4045 = 2.37 \end{aligned}$$

11.5 若在两个月后预期支付的红利为＄1.50，则习题 11.4 中计算会有何变化？

在本题中我们在使用 BS 公式前必须从股票价格中减去红利的贴现值，因此 S_0 应该是

$$S_0 = 50 - 1.50e^{-0.1667\times0.1} = 48.52$$

其他变量不变 $X = 50, r = 0.1, \sigma = 0.3, T = 0.25$ 在本题中

$$d_1 = \frac{\ln(48.52/50) + (0.1 + 0.09/2)0.25}{0.3\sqrt{0.25}} = 0.0414$$

$$d_2 = d_1 - 0.3\sqrt{0.25} = -0.1086$$

欧式看跌期权价格是

$$
\begin{aligned}
&50N(-0.1086)e^{-0.1\times0.25}-48.52N(-0.0414)\\
&=50\times0.5432e^{-0.1\times0.25}-48.52\times0.4045=3.03
\end{aligned}
$$

11.6 什么是隐含波动率？如何计算？

隐含波动率是使一个期权的 Black-Scholes 价格等于它的市场价格的波动率，它用互换程序计算。

11.7 目前股票价格为＄50，假设该股票的期望收益率为 18%,波动率为 30%。两年内此种股票价格的概率分布是什么？计算该分布的均值和标准差（95%的置信区间）。

在本题中 $\mu=0.18,\sigma=0.30$ 从方程（11.7）两年内此种股票回报率的概率分布是：

$$\phi(0.18-\frac{0.30^2}{2},\frac{0.30}{\sqrt{2}})=\phi(0.11875,0.1768)$$

回报期望值是 11.875%。标准差是 17.68%。

11.8 某个股票现价为＄40。假设其期望收益率为 15%，波动率为 25%。两年期间所得回报率（连续复利计息）的概率分布是什么？

在本题中 $\mu=0.15,\sigma=0.25$ 从方程（11.7）两年内此种股票回报率的概率分布是：

$$\phi(0.15-\frac{0.25^2}{2},\frac{0.25}{\sqrt{2}})=\phi(0.11875,0.1768)$$

11.9 某个股票价格遵循几何布朗运动，其期望收益率为 16%，波动率为 35%。现价为§38。

（a） 计算基于该股票的欧式看涨期权将被执行的概率分布。标的物股票的执行价格为＄40，6 个月后到期。

（b） 若到期日的执行价格和到期日如上，则基于该股票的欧式看跌期权将被执行的概率分布是多少？

（a）$\ln S_T \sim \phi(\ln 38+(0.16-\frac{0.35^2}{2})0.5,0.35\sqrt{0.5})$

$\ln S_T \sim \phi(3.687,0.247)$

由于 $\ln 40=3.689$，所以所求的概率是

$$1-N(\frac{3.689-3.687}{0.247})=1-N(0.008)=1-0.5032=0.4968$$

（c） 在本题中所求概率是在 6 个月中股票价格小于 40 的概率

1-0.4968=0.5032

11.10 用本章所用符号，证明 S_T 的 95%的置信区间是在 [$S_0e^{(\mu-\sigma^2/2)T-1.96\sigma\sqrt{T}}$ ，$S_0e^{(\mu-\sigma^2/2)T+1.96\sigma\sqrt{T}}$]

根据方程 11.2

$$\ln S_T \sim \phi[\ln S_0+(\mu-\frac{\sigma^2}{2})T,\sigma\sqrt{T}]$$

在 95%的置信用水平上 S_T 置信区间 [$\ln S_0+(\mu-\frac{\sigma^2}{2})T-1.96\sigma\sqrt{T}$ ，$\ln S_0+(\mu-\frac{\sigma^2}{2})T+1.96\sigma\sqrt{T}$]

经转化得[$S_0e^{(\mu-\sigma^2/2)T-1.96\sigma\sqrt{T}}$ ，$S_0e^{(\mu-\sigma^2/2)T+1.96\sigma\sqrt{T}}$]

11.11 一个证券组合的经理在过去的 10 年中平均每年的回报率为 20%。这种说法在哪些方面有问题？

这种说法造成误导，因为平均回报率有几何平均回报率和算术平均回报率，两责最后结果不同。

11.12 假设一股票。在连续 15 周每个周末观察一次股票价格（以美圆计算）如下：30.25，32，31.125，30.125，30.24，30.375，30.675，33.5，33，32.875，33，33.5，33.75，33.5，33.25，试估算此股票的波动率，你估算的标准误差。

11.13 假设某个无红利支付股票的期望收益率为 μ，波动率为 σ。某个具有创新意识的金融机构刚刚宣布：它将交易这样一种证券，即：该证券在T时刻以美元计的收益率等价于 $\mathrm{Ln}S_T$，其中 S_T,是在T时刻股票的价格。

（a） 利用风险中性定价，计算在 T 时刻此种证券的价格，用股票价格 S 和时间 T 来表示。

（b） 证明你所计算的价格满足公式（11.15）。

11.14 若习题 11.13 中的证券非常成功，此金融机构计划交易这样一种证券，即：该证券在T时刻以美元计的收益等价于 S_T^2。

（a） 利用风险中性定价，计算此种证券在 t 时刻的价格，用股票价格 S 和时间 t 来表示。

（b） 证明你计算的价格满足公式（11.15）

(a) 在 t 时刻 $\ln S_T$ 的期望值是

$$\ln S+(\mu-\frac{\sigma^2}{2})(T-t)$$

在风险中性条件下 $\ln S_T$ 的期望值是

$$\ln S+(r-\frac{\sigma^2}{2})(T-t)$$

用风险中性估价在 t 时刻证券的价值是

$$e^{-r(T-t)}[\ln S+(r-\frac{\sigma^2}{2})(T-t)]$$

（c） 如果 $f=e^{-r(T-t)}[\ln S+(r-\frac{\sigma^2}{2})(T-t)]$

则 $\frac{\partial f}{\partial t}=re^{-r(T-t)}[\ln S+(r-\frac{\sigma^2}{2})(T-t)]-e^{-r(T-t)}(r-\frac{\sigma^2}{2})$

$$\frac{\partial f}{\partial S}=\frac{e^{-r(T-t)}}{S}$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial S^2}=\frac{e^{-r(T-t)}}{S^2}$$

BS 方程左边是 $[r\ln S+r(r-\frac{\sigma^2}{2})(T-t)-(r-\frac{\sigma^2}{2})+r-\frac{\sigma^2}{2}]=rf$

因此满足 BS 方程。

11.15 一个在T时刻支付S_T^n 的衍生工具，S_T是T时刻此种股票的价格。当这种股票的价格服从几何布朗运动时，在t时刻（t≤T）此种股票的价格有如下形式：

h（t，T）S^n

其中 S 是 t 时刻的股票的价格，h 仅只是 t 和 T 的函数。

（a） 通过代入 Black-Scholes 偏微分方程，推导一个 h（t，T）满足的普通微分方程。

（b） h（t，T）的微分方程的边界条件是什么？

（c） 证明

（a）如果 $G(S,t)=h(t,T)S^n$ 则 $\frac{\partial G}{\partial t}=h_tS^n,\frac{\partial G}{\partial S}=hnS^{n-1},\frac{\partial^2 G}{\partial S^2}=hn(n-1)S^{n-2},h_t=\frac{\partial G}{\partial t}$

带入 BS 方程得 $h_t+rhn+\frac{1}{2}\sigma^2hn(n-1)=rh$

（b）衍生品在 t=T 时刻价值为 S^n，所以微分方程的边界条件是 $h(T,T)=1$

11.16 求无红利支付股票的欧式看涨期权的价格。其中股票价格为＄52，执行价格为＄50，无风险年收益率为 12%，年波动率为 30%，到期日为 3 个月。

在本题中 $S_0=52,X=50,r=0.12,\sigma=0.30,T=0.25$

$$d_1 = \frac{\ln(52/50) + (0.12 + 0.3^2/2)0.25}{0.30\sqrt{0.25}} = 0.5365$$

$$d_2 = d_1 - 0.30\sqrt{0.25} = 0.3865$$

欧式看涨期权的价格是

$$52N(0.5365) - 50e^{-0.03} \times 0.6504 = 5.06$$

11.17 求无红利支付股票的欧式看跌期权的价格。其中股票价格为＄69，执行价格为＄70，无风险年收益率为 5%，年波动率为 35%，到期日为 6 个月。

在本题中 $S_0 = 69, X = 70, r = 0.05, \sigma = 0.35, T = 0.5$

$$d_1 = \frac{\ln(69/70) + (0.05 + 0.35^2/2) \times 0.5}{0.35\sqrt{0.5}} = 0.1666$$

$$d_2 = d_1 - 0.35\sqrt{0.5} = -0.0809$$

欧式看跌期权价格为

$$70e^{-0.05\times0.5}N(0.0809) - 69N(-0.1666) = 70e^{-0.025} \times 0.5323 - 69 \times 0.4338 = 6.40$$

11.18 有一个无红利支付股票的期权，股票价格为＄30，执行价格为＄29，无风险年利率为 5%，年波动率为 25%，到期日为 4 个月。

（a） 如果这是一个欧式看涨期权，计算其价格。

（b） 如果这是一个美式看涨期权，计算其价格。

（c） 如果这是一个欧式看跌期权，计算其价格。

（d） 检验看涨-看跌期权的平价关系。

（a）

11.19 假设习题 11.18 中的股票，打算在 1.5 个月后除权除息一次，期望红利为 50 美分。

(a) 若是欧式看涨期权，计算其价格。

(b) 若是欧式看跌期权，计算其价格。

(c) 若是美式看涨期权，有没有可能提前执行呢？

11.20 一个基于无红利支付股票的看涨期权，市场价格为＄2.5，股票价格为＄15，执行价格为＄13，到期时间为 3 个月，无风险年利率为 5%，计算隐含波动率。

11.21 用本章所用的符号：

（a） 计算 $N^{'}(x)$？

（b） 证明 $SN'(d_1) = xe^{[-r(T-t)]N'(d_2)}$

（c） 计算 $\frac{\delta d_1}{\delta S}$ 和 $\frac{\delta d_2}{\delta S}$

（d） 证明 $\frac{\delta c}{\delta t} = -rXe^{-r(T-t)}N(d_2) - SN'(d_1)\frac{\sigma}{2\sqrt{T-t}}$ 其中 c 是基于无红利支付股票的看涨期权价格。

（e）　证明 $\frac{\delta c}{\delta S} = N(d_1)$

（f）　证明 Black-Scholes 对无红利支付股票的看涨期权定价的公式，确实满足 Black-Schole 偏微分方程。

11.22 证明：当 $t \to T$,Black-Scholes 看涨期权公式的值趋向于 $\max(S - X, 0)$ 。

11.23 有一个美式期权，标的股票价格为＄18，执行价格为＄20，有效期为 6 个月，波动率为每年 30%，无风险年利率为 10%。在期权有效期内，两次除权除息日分别在 2 个月和 5 个月的月末，两次期望红利值相等。为了使美式期权价值不高于相应的欧式期权价值，红利最多为多少？

11.24 假设习题 11.23 中每次红利为每股 40 美分，用 Black 近似值为该期权定价

11.25 一旦支付一次红利，对支付红利股票的美式看涨期权的 Black 估价方法就可以给出一个计算结果，请详细解释。Black 近似方法是高估了还是低估了真正的期权的价值？请解释原因。

11.26 有一个美式看涨期权，其标的股票的当前股价是＄70。有效期为 8 个月，无风险年利率为 10%，执行价格为＄65，波动率为 32%。在 3 个月和 6 个月后，期望得到＄1 的红利，证明在任何两个红利支付日，执行期权不是最佳选择，计算该期权的价格。

11.27 利用本章所用的符号。证明：在风险中性世界中，一个欧式看涨期权被执行的概率是 $N(d2)$ 。若 T 时刻的股价大于 X，收益为＄100 的衍生工具的价格的表达式是什么？