向量及其线性运算

本段内容要点

向量的概念

向量的加减法和数乘

向量的坐标表示

使用坐标进行向量的线性运算

向量是既有数值(长度)又有方向的量，如速度、位移、力、力矩等

向量是既有数值(长度)又有方向的量，如速度、位移、力、力矩等

一个向量$\vec{a}$的长度也称为$\vec{a}$ 的模，记作$|\vec{a}|$.

$\boxed{\text{向量}}$是既有数值(长度)又有方向的量，如速度、位移、力、力矩等

一个向量$\vec{a}$的长度也称为$\vec{a}$ 的$\boxed{\text{模}}$，记作$|\vec{a}|$.

$\boxed{\text{一个向量只有两个要素:长度和方向.}}$

$\boxed{\text{一个向量不在空间中具有起止点，只在其自身上有起止点（箭有箭尖和箭尾）.}}$

$\boxed{\text{空间中两点}A, B\text{ 固然决定两个向量}\overrightarrow{AB}\text{ 和}\overrightarrow{BA}}$

$\boxed{\text{但一个向量不决定空间中任何点!}}$

向量是既有数值(长度)又有方向的量，如速度、位移、力、力矩等

一个向量$\vec{a}$的长度也称为$\vec{a}$ 的模，记作$|\vec{a}|$.

一个向量只有两个要素:长度和方向.

一个向量不在空间中具有起止点，只在其自身上有起止点（箭有箭尖和箭尾）.

空间中两点A, B 固然决定两个向量$\overrightarrow{AB}$ 和$\overrightarrow{BA}$

但一个向量不决定空间中任何点!

两个向量$\vec{a}, \vec{b}$相等($\vec{a} = \vec{b}$) 当且仅当它们方向相同($\vec{a} \| \vec{b}$) 且长度相等($|\vec{a}| = |\vec{b}|$)

向量是既有数值(长度)又有方向的量，如速度、位移、力、力矩等

一个向量$\vec{a}$的长度也称为$\vec{a}$ 的模，记作$|\vec{a}|$.

一个向量只有两个要素:长度和方向.

一个向量不在空间中具有起止点，只在其自身上有起止点（箭有箭尖和箭尾）.

空间中两点A, B 固然决定两个向量$\overrightarrow{AB}$ 和$\overrightarrow{BA}$

但一个向量不决定空间中任何点!

两个向量$\vec{a}, \vec{b}$相等($\vec{a} = \vec{b}$) 当且仅当它们方向相同($\vec{a} \| \vec{b}$) 且长度相等($|\vec{a}| = |\vec{b}|$)

长度为零的向量$\vec{0}$称为零向量，

它不具有方向，或说它以任何方向为方向.

1.向量的加法

空间两个不平行的矢量决定一个平面

结论

与两个不平行的矢量都平行的平面只有一个

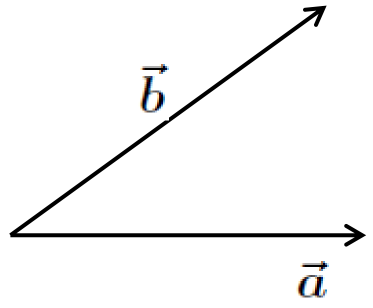
1.向量的加法

空间两个不平行的矢量决定一个平面

结论

与两个不平行的矢量都平行的平面只有一个

定义



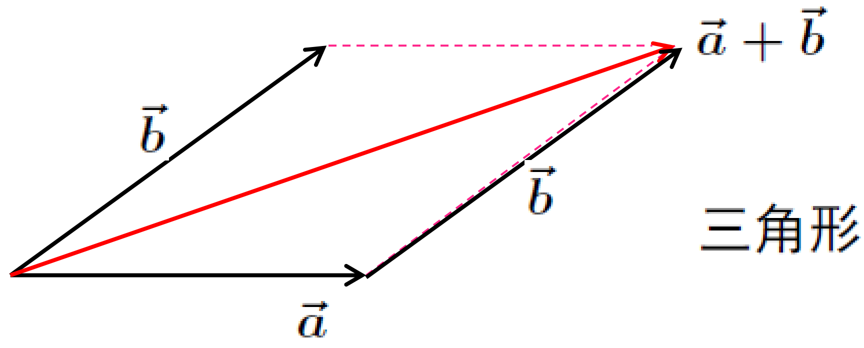
1.向量的加法

结论

空间两个不平行的矢量决定一个平面

与两个不平行的矢量都平行的平面只有一个

定义



三角形法则

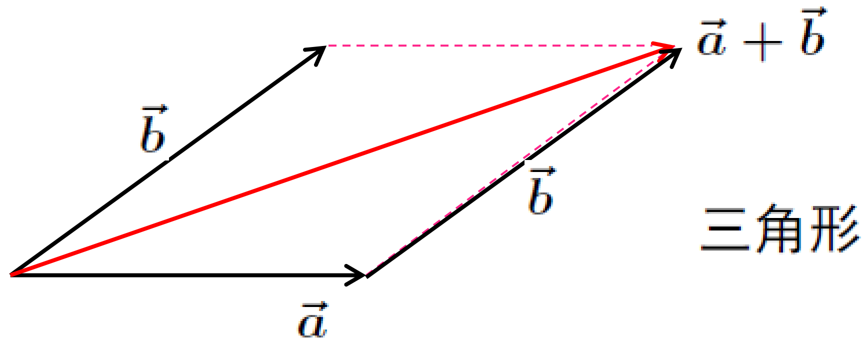
1.向量的加法

空间两个不平行的矢量决定一个平面

结论

与两个不平行的矢量都平行的平面只有一个

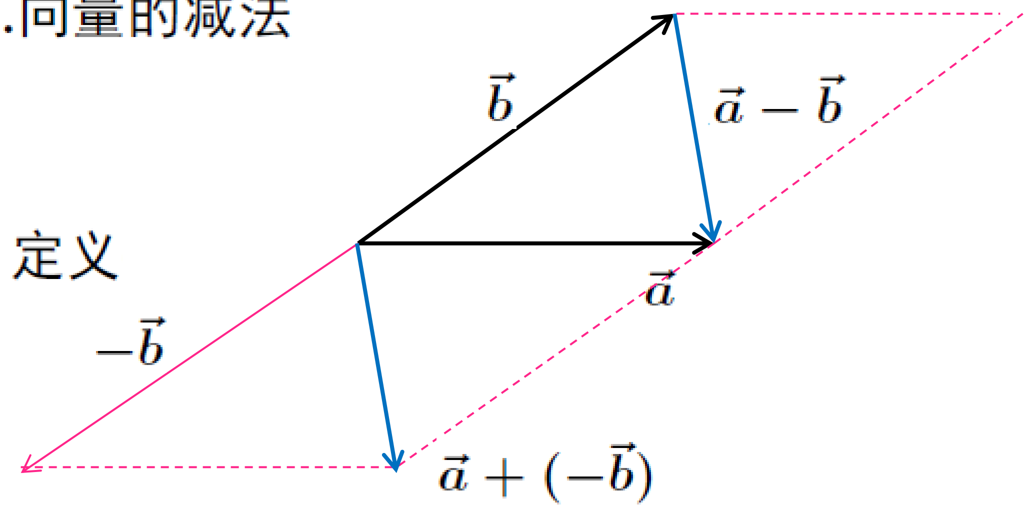
定义



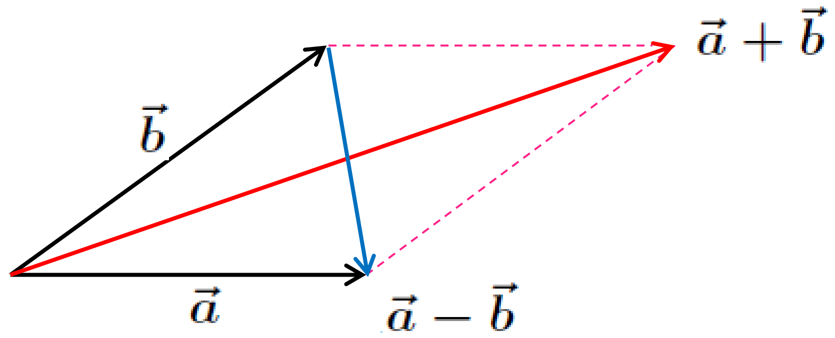
三角形法则

2.向量的减法

定义



定义



平行四边形法则

3.向量的伸缩

设有向量$\vec{a}$和实数$\lambda \in \mathbb{R}$，定义$\lambda\vec{a}$为一个新矢量，

它与$\vec{a}$同方向$(\lambda > 0)$ 或反方向$(\lambda < 0)$ 或以任何方向为方向$(\lambda = 0)$，

它的长度为$|\lambda\vec{a}| = |\lambda|\,|\vec{a}|$.

3.向量的伸缩

设有向量$\vec{a}$和实数$\lambda \in \mathbb{R}$，定义$\lambda\vec{a}$为一个新矢量，
它与$\vec{a}$同方向$(\lambda > 0)$ 或反方向$(\lambda < 0)$ 或以任何方向为方向$(\lambda = 0)$，
它的长度为$|\lambda\vec{a}| = |\lambda|\,|\vec{a}|$.

一个模（长度）为1的矢量称为单位矢量

3.向量的伸缩

设有向量$\vec{a}$和实数$\lambda \in \mathbb{R}$，定义$\lambda\vec{a}$为一个新矢量，
它与$\vec{a}$同方向$(\lambda > 0)$ 或反方向$(\lambda < 0)$ 或以任何方向为方向$(\lambda = 0)$，
它的长度为$|\lambda\vec{a}| = |\lambda|\,|\vec{a}|$.

一个模（长度）为1的矢量称为$\boxed{\text{单位矢量}}$

任何一个非零矢量$\vec{a}$，都可以用伸缩变为单位向量，
即$\frac{\vec{a}}{|\vec{a}|}(\vec{a} \neq \vec{0})$ 为单位矢量，通常记为$\vec{e}$。

3.向量的伸缩

设有向量$\vec{a}$和实数$\lambda \in \mathbb{R}$，定义$\lambda\vec{a}$为一个新矢量，
它与$\vec{a}$同方向($\lambda > 0$) 或反方向($\lambda < 0$) 或以任何方向为方向($\lambda = 0$)，
它的长度为$|\lambda\vec{a}| = |\lambda|\,|\vec{a}|$.

一个模（长度）为1的矢量称为$\boxed{\text{单位矢量}}$

任何一个非零矢量$\vec{a}$，都可以用伸缩变为单位向量，
即$\frac{\vec{a}}{|\vec{a}|}(\vec{a} \neq \vec{0})$ 为单位矢量，通常记为$\vec{e}$。

一个矢量等于其模乘以一个与其同向的单位矢量，即$\vec{a} = |\vec{a}|\,\frac{\vec{a}}{|\vec{a}|}$.

4.矢量线性运算

设$\lambda, \mu \in \mathbb{R}, \vec{a}, \vec{b} \in \mathbb{R}^3$或$\mathbb{R}^n(n = 1, 2, 3, 4, \cdots)$, 则

$(i)\lambda(\mu\vec{a}) = \lambda\mu\vec{a}$

4.矢量线性运算

设$\lambda, \mu \in \mathbb{R}, \vec{a}, \vec{b} \in \mathbb{R}^3$或$\mathbb{R}^n(n = 1, 2, 3, 4, \cdots)$, 则

$(i)\lambda(\mu\vec{a}) = \lambda\mu\vec{a}$

$(ii)(\lambda + \mu)\vec{a} = \lambda\vec{a} + \mu\vec{a}$

4.矢量线性运算

设$\lambda, \mu \in \mathbb{R}, \vec{a}, \vec{b} \in \mathbb{R}^3$或$\mathbb{R}^n (n = 1, 2, 3, 4, \cdots)$, 则

$(i)\lambda(\mu\vec{a}) = \lambda\mu\vec{a}$

$(ii)(\lambda + \mu)\vec{a} = \lambda\vec{a} + \mu\vec{a}$

$(iii)\lambda(\vec{a} + \vec{b}) = \lambda\vec{a} + \lambda\vec{b}$

4.矢量线性运算

设$\lambda, \mu \in \mathbb{R}, \vec{a}, \vec{b} \in \mathbb{R}^3$或$\mathbb{R}^n(n = 1, 2, 3, 4, \cdots)$, 则

$(i)\lambda(\mu\vec{a}) = \lambda\mu\vec{a}$

$(ii)(\lambda + \mu)\vec{a} = \lambda\vec{a} + \mu\vec{a}$

$(iii)\lambda(\vec{a} + \vec{b}) = \lambda\vec{a} + \lambda\vec{b}$

$(iv)\vec{a} + \vec{b} = \vec{b} + \vec{a}$

4.矢量线性运算

设$\lambda,\mu\in\mathbb{R},\vec{a},\vec{b}\in\mathbb{R}^3$或$\mathbb{R}^n(n=1,2,3,4,\cdots)$, 则

$(i)\lambda(\mu\vec{a})=\lambda\mu\vec{a}$

$(ii)(\lambda+\mu)\vec{a}=\lambda\vec{a}+\mu\vec{a}$

$(iii)\lambda(\vec{a}+\vec{b})=\lambda\vec{a}+\lambda\vec{b}$

$(iv)\vec{a}+\vec{b}=\vec{b}+\vec{a}$

$(v)(\vec{a}+\vec{b})+\vec{c}=\vec{a}+(\vec{b}+\vec{c})$

4.矢量线性运算

设$\lambda, \mu \in \mathbb{R}, \vec{a}, \vec{b} \in \mathbb{R}^3$或$\mathbb{R}^n(n=1,2,3,4,\cdots)$, 则

$(i)\lambda(\mu\vec{a}) = \lambda\mu\vec{a}$

$(ii)(\lambda+\mu)\vec{a} = \lambda\vec{a} + \mu\vec{a}$

$(iii)\lambda(\vec{a}+\vec{b}) = \lambda\vec{a} + \lambda\vec{b}$

$(iv)\vec{a}+\vec{b} = \vec{b}+\vec{a}$

$(v)(\vec{a}+\vec{b})+\vec{c} = \vec{a}+(\vec{b}+\vec{c})$

结论 $\boxed{\text{非零向量}\vec{a}, \vec{b}\ \text{平行} \Leftrightarrow \in \lambda \in \mathbb{R} \quad s.t. \quad \vec{b} = \lambda\vec{a}.}$

把直角坐标系与向量联系起来

先从平面(二维空间)开始

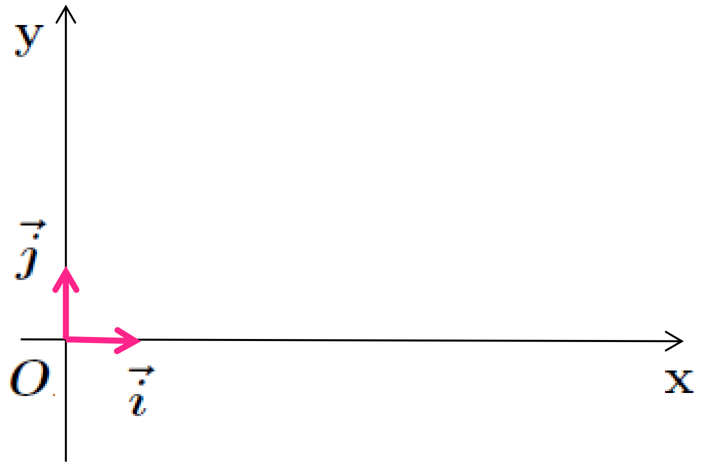
向量（矢量）的坐标表示法

把直角坐标系与向量联系起来

先从平面(二维空间)开始

把与x轴正向同向的单位矢量记作$\vec{i}$

把与y 轴正向同向的单位矢量记作$\vec{j}$



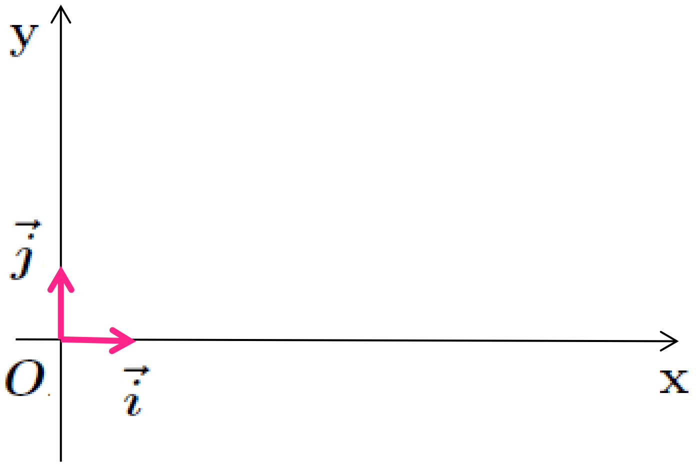
向量（矢量）的坐标表示法

把直角坐标系与向量联系起来

先从平面(二维空间)开始

把与x轴正向同向的单位矢量记作$\vec{i}$

把与y 轴正向同向的单位矢量记作$\vec{j}$



结论

平面上任何一个向量$\vec{a}$都可以唯一地分解成

一个$\vec{i}$方向的矢量与一个$\vec{j}$方向的矢量的和，即$\vec{a} = a_x\vec{i} + a_y\vec{j}$

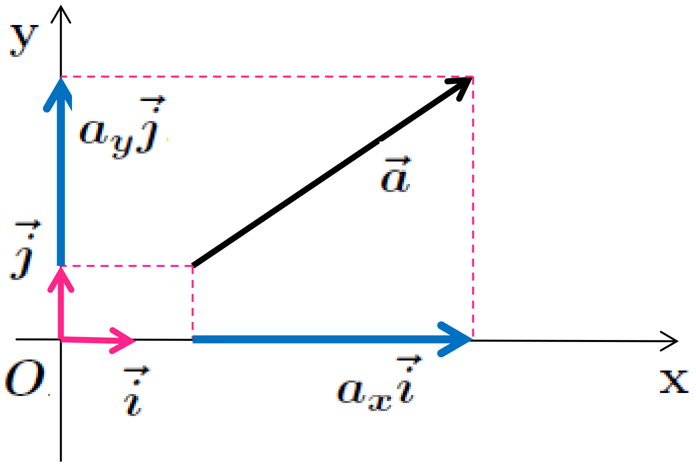
向量（矢量）的坐标表示法

把直角坐标系与向量联系起来

先从平面(二维空间)开始

把与x轴正向同向的单位矢量记作$\vec{i}$

把与y 轴正向同向的单位矢量记作$\vec{j}$



结论

平面上任何一个向量$\vec{a}$都可以唯一地分解成

一个$\vec{i}$方向的矢量与一个$\vec{j}$方向的矢量的和，即$\vec{a} = a_x\vec{i} + a_y\vec{j}$

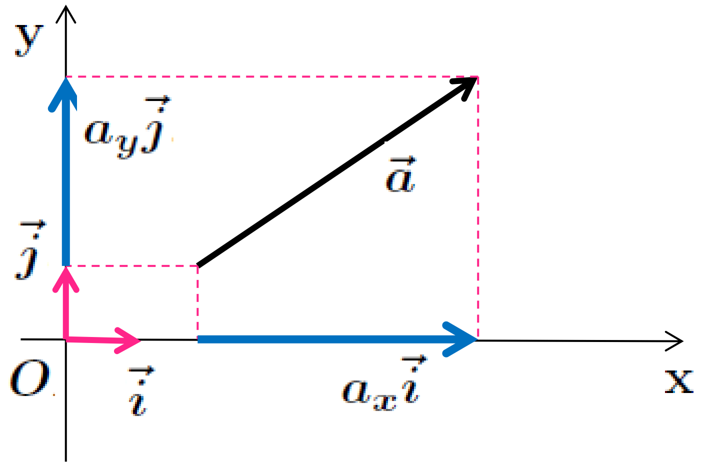
向量（矢量）的坐标表示法

把直角坐标系与向量联系起来

先从平面(二维空间)开始

把与x轴正向同向的单位矢量记作$\vec{i}$

把与y 轴正向同向的单位矢量记作$\vec{j}$



结论

平面上任何一个向量$\vec{a}$都可以唯一地分解成

一个$\vec{i}$方向的矢量与一个$\vec{j}$方向的矢量的和，即$\vec{a}=a_x\vec{i}+a_y\vec{j}$

其中

a_x为矢量$\vec{a}$在x轴正向上的投影的代数长度

若$\vec{a}$与x轴正向的夹角为锐角，即$a_x>0$，

若$\vec{a}$ 与x 轴正向的夹角为钝角，则$a_x<0$;

a_y为矢量$\vec{a}$在y轴正向上的投影的代数长度

若$\vec{a}$ 与y轴正向的夹角为锐角，则$a_y>0$，

若$\vec{a}$与y轴正向的夹角为钝角，则$a_y<0$ 。

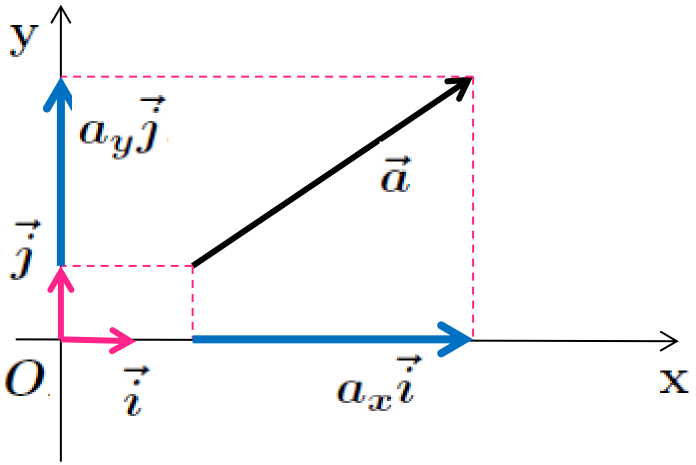
向量（矢量）的坐标表示法

把直角坐标系与向量联系起来

先从平面(二维空间)开始

把与x轴正向同向的单位矢量记作$\vec{i}$

把与y 轴正向同向的单位矢量记作$\vec{j}$



结论

平面上任何一个向量$\vec{a}$都可以唯一地分解成

一个$\vec{i}$方向的矢量与一个$\vec{j}$方向的矢量的和，即$\vec{a} = a_x\vec{i} + a_y\vec{j}$

矢量$\vec{a}$在两坐标轴正向上的投影的代数长度构成一个二元数组$\{a_x, a_y\}$，

它称为矢量$\vec{a}$的坐标(表示)。

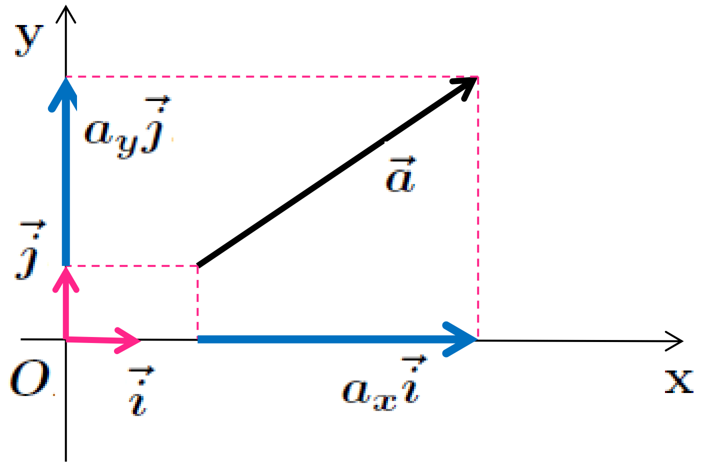
向量（矢量）的坐标表示法

把直角坐标系与向量联系起来

先从平面(二维空间)开始

把与x轴正向同向的单位矢量记作$\vec{i}$

把与y 轴正向同向的单位矢量记作$\vec{j}$



结论

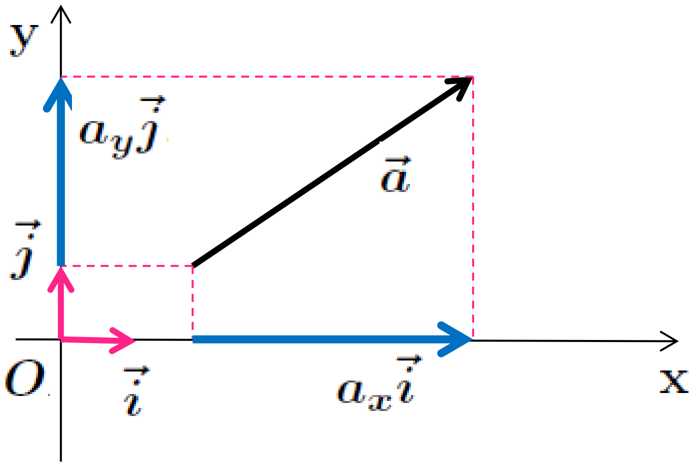
平面上任何一个向量$\vec{a}$都可以唯一地分解成

一个$\vec{i}$方向的矢量与一个$\vec{j}$方向的矢量的和，即$\vec{a}=a_x\vec{i}+a_y\vec{j}$

矢量$\vec{a}$在两坐标轴正向上的投影的代数长度构成一个二元数组$\{a_x,a_y\}$，它称为矢量$\vec{a}$的坐标(表示)。

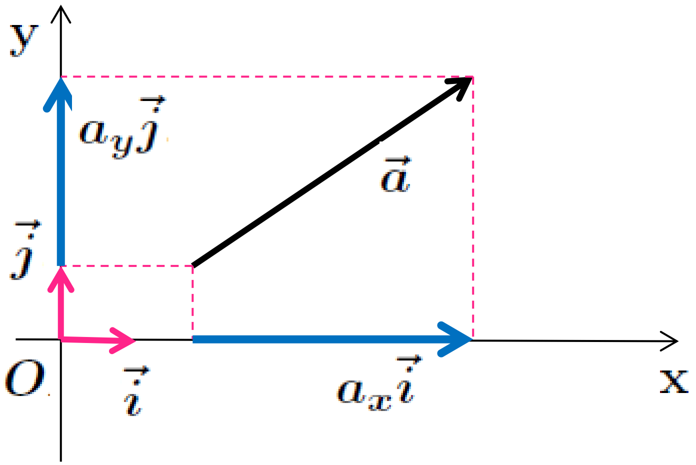
a_x称为$\vec{a}$的x方向坐标，a_y称为$\vec{a}$的y方向坐标。

$$\boxed{\vec{a} = \{a_x, a_y\} = a_x\vec{i} + a_y\vec{j}}$$



$$\boxed{\vec{a} = \{a_x, a_y\} = a_x\vec{i} + a_y\vec{j}}$$

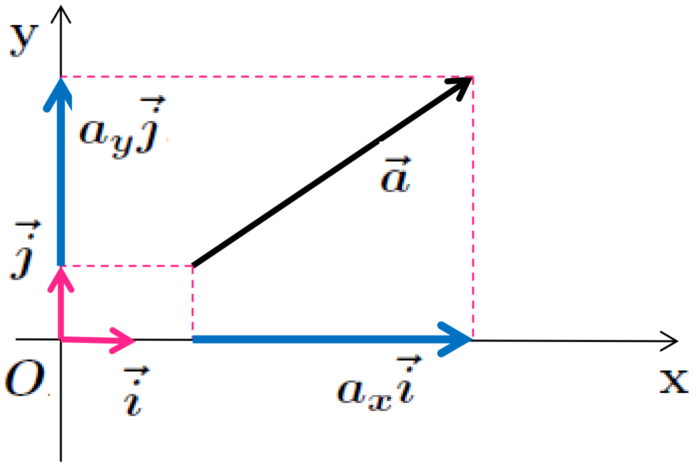
如$\vec{a} = \{1, 2\} = \vec{i} + 2\vec{j}$



$$\boxed{\vec{a} = \{a_x, a_y\} = a_x\vec{i} + a_y\vec{j}}$$

如$\vec{a} = \{1, 2\} = \vec{i} + 2\vec{j}$

$\vec{a} = \{4, -7\} = 4\vec{i} - 7\vec{j}$

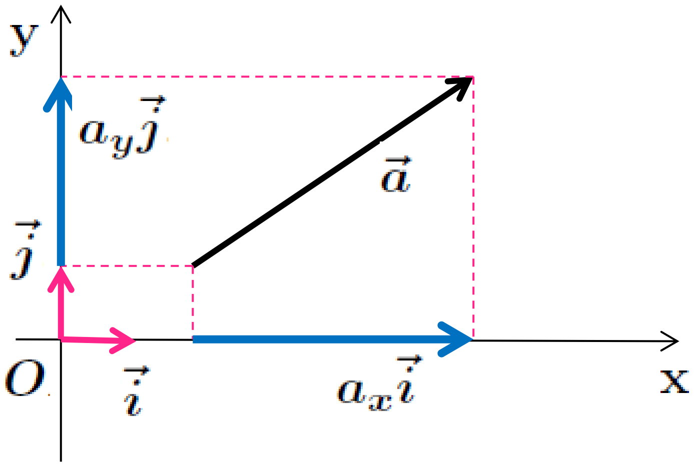


$$\boxed{\vec{a} = \{a_x, a_y\} = a_x\vec{i} + a_y\vec{j}}$$

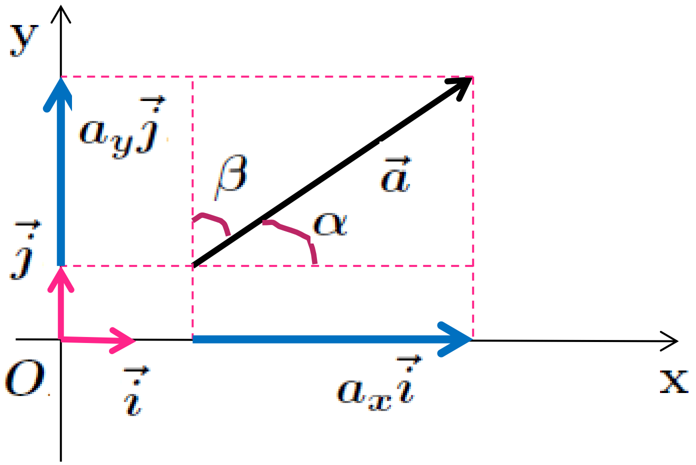
如$\vec{a} = \{1, 2\} = \vec{i} + 2\vec{j}$

$$\vec{a} = \{4, -7\} = 4\vec{i} - 7\vec{j}$$

$$\vec{a} = \{-9, -13\} = -9\vec{i} - 13\vec{j}$$



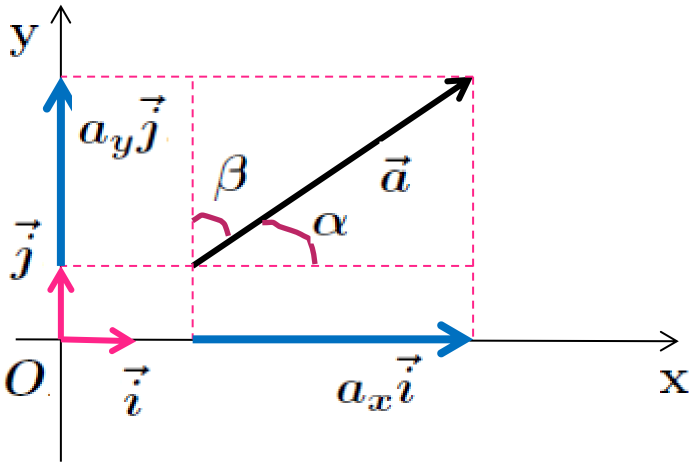
$$\boxed{\vec{a} = \{a_x, a_y\} = a_x\vec{i} + a_y\vec{j}}$$



记向量$\vec{a}$与$\vec{i}$的夹角为$\alpha(0 < \alpha < \pi)$,与$\vec{j}$的夹角为$\beta(0 < \beta < \pi)$,则由图易见$\cos\alpha = \frac{a_x}{|\vec{a}|}$, $\cos\beta = \frac{a_y}{|\vec{a}|}$,它们称为向量$\vec{a}$ 的方向余弦。

$\vec{a}$的两方向余弦就是与$\vec{a}$ 同向的单位向量的坐标，

即$\{\cos\alpha, \cos\beta\} = \{\frac{a_x}{|\vec{a}|}, \frac{a_y}{|\vec{a}|}\} = \frac{\vec{a}}{|\vec{a}|}$



记向量$\vec{a}$与$\vec{i}$的夹角为$\alpha(0 < \alpha < \pi)$,与$\vec{j}$的夹角为$\beta(0 < \beta < \pi)$,

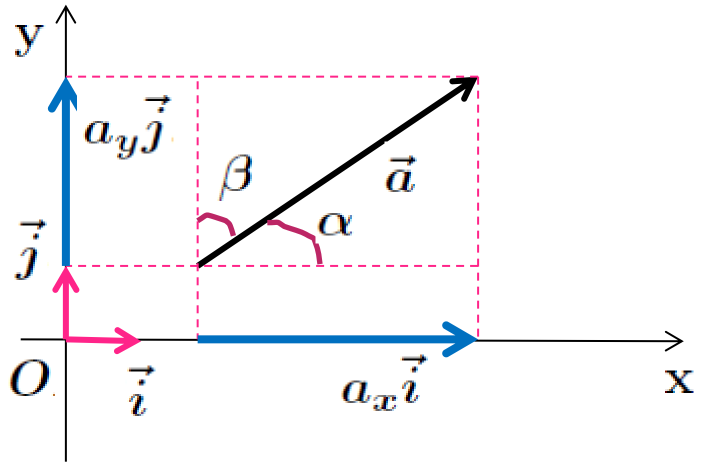
则由图易见$\cos\alpha = \frac{a_x}{|\vec{a}|}, \cos\beta = \frac{a_y}{|\vec{a}|}$,它们称为向量$\vec{a}$ 的方向余弦。

$\vec{a}$的两方向余弦就是与$\vec{a}$ 同向的单位向量的坐标，

即$\{\cos\alpha, \cos\beta\} = \{\frac{a_x}{|\vec{a}|}, \frac{a_y}{|\vec{a}|}\} = \frac{\vec{a}}{|\vec{a}|}$

任何一个单位向量都可以用其方向余弦表示

$\vec{a} = |\vec{a}|\,\{\cos\alpha, \cos\beta\}$



记向量$\vec{a}$与$\vec{i}$的夹角为$\alpha(0<\alpha<\pi)$,与$\vec{j}$的夹角为$\beta(0<\beta<\pi)$,

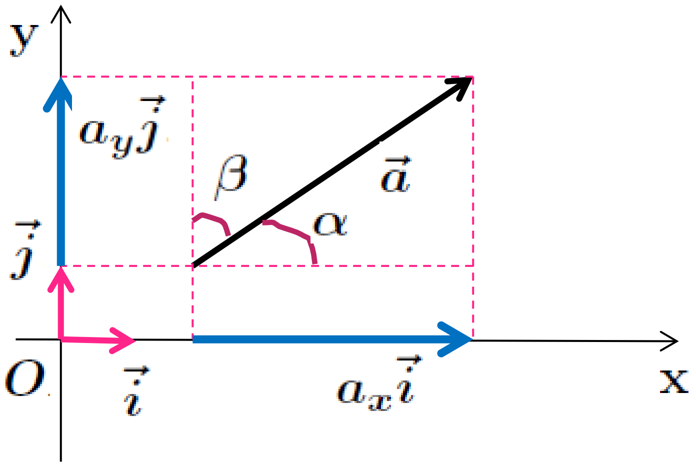
则由图易见$\cos\alpha = \frac{a_x}{|\vec{a}|}$, $\cos\beta = \frac{a_y}{|\vec{a}|}$,它们称为向量$\vec{a}$ 的方向余弦。

$\vec{a}$的两方向余弦就是与$\vec{a}$ 同向的单位向量的坐标，

即$\{\cos\alpha, \cos\beta\} = \{\frac{a_x}{|\vec{a}|}, \frac{a_y}{|\vec{a}|}\} = \frac{\vec{a}}{|\vec{a}|}$

任何一个单位向量都可以用其方向余弦表示

$\vec{a} = |\vec{a}|\,\{\cos\alpha, \cos\beta\}$



记向量$\vec{a}$与$\vec{i}$的夹角为$\alpha(0 < \alpha < \pi)$,与$\vec{j}$的夹角为$\beta(0 < \beta < \pi)$,

则由图易见$\cos\alpha = \frac{a_x}{|\vec{a}|}, \cos\beta = \frac{a_y}{|\vec{a}|}$,它们称为向量$\vec{a}$ 的方向余弦。

结论 $\{x_1, y_1\} = \{x_2, y_2\} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = x_2 \\ y_1 = y_2 \end{cases}$

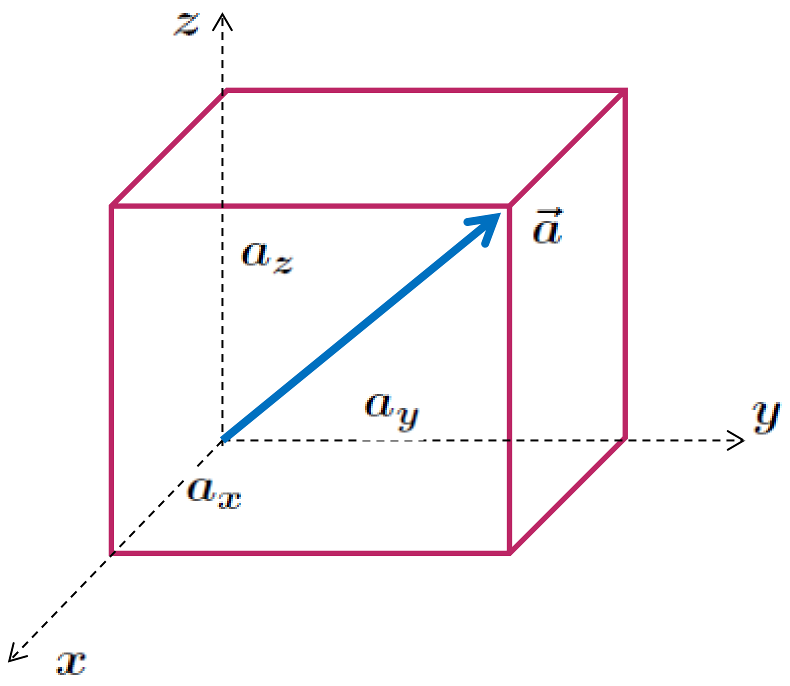
将上述二维向量的讨论推广到三维空间中

将上述二维向量的讨论推广到三维空间中

x, y, z轴正向上的单位向量分别记作$\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$

向量$\vec{a}$在三个坐标轴正向上的投影的代数长度分别记作a_x, a_y, a_z

称它们为向量$\vec{a}$的三个坐标，三元素组$\{a_x, a_y, a_z\}$ 称为向量$\vec{a}$ 的坐标表示



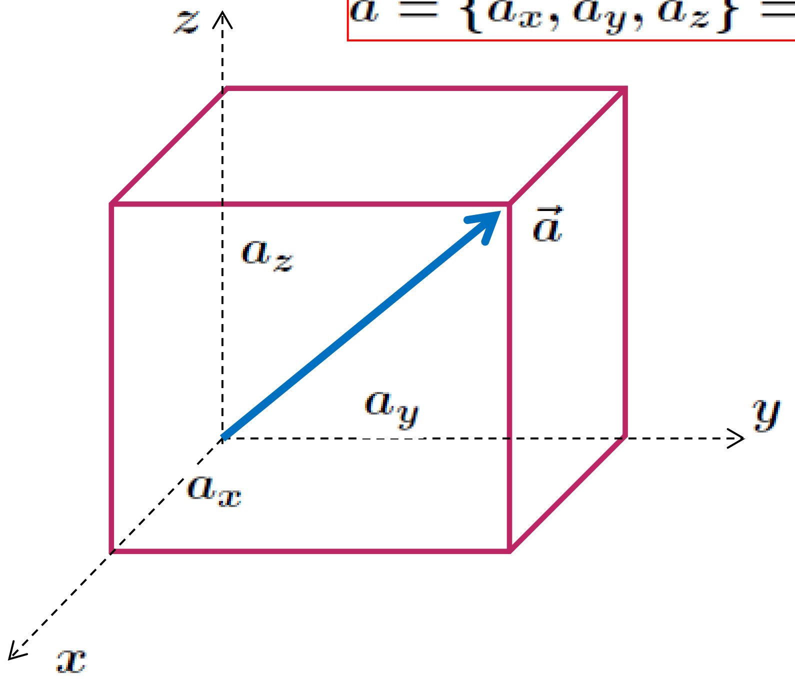
将上述二维向量的讨论推广到三维空间中

x, y, z轴正向上的单位向量分别记作$\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$

向量$\vec{a}$在三个坐标轴正向上的投影的代数长度分别记作a_x, a_y, a_z

称它们为向量$\vec{a}$的三个坐标，三元素组$\{a_x, a_y, a_z\}$ 称为向量$\vec{a}$ 的坐标表示

$$\boxed{\vec{a} = \{a_x, a_y, a_z\} = a_x\vec{i} + a_y\vec{j} + a_z\vec{k}}$$



将上述二维向量的讨论推广到三维空间中

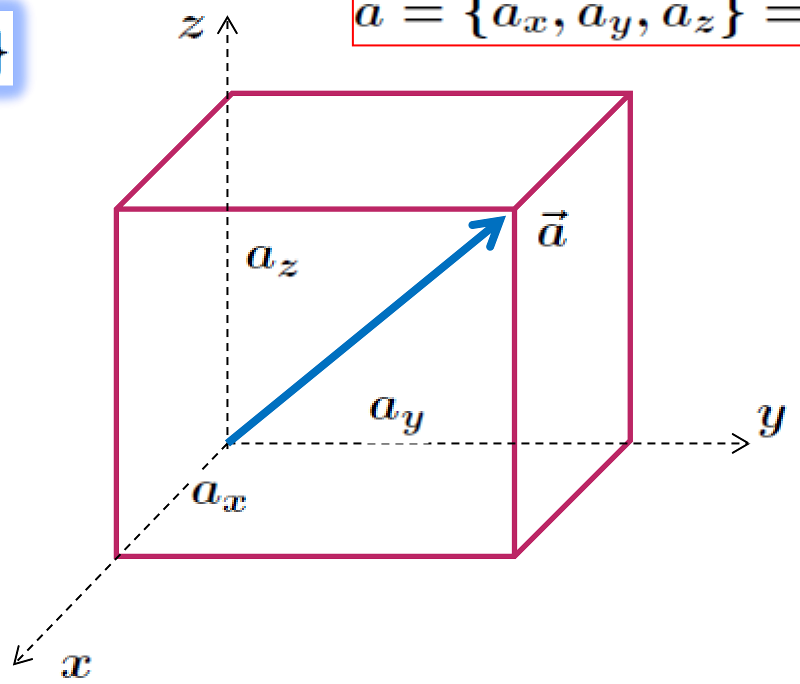
x, y, z轴正向上的单位向量分别记作$\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$

向量$\vec{a}$在三个坐标轴正向上的投影的代数长度分别记作a_x, a_y, a_z

称它们为向量$\vec{a}$的三个坐标，三元素组$\{a_x, a_y, a_z\}$ 称为向量$\vec{a}$ 的坐标表示

(a_x, a_y, a_z)与$\{a_x, a_y, a_z\}$

$$\boxed{\vec{a} = \{a_x, a_y, a_z\} = a_x\vec{i} + a_y\vec{j} + a_z\vec{k}}$$



将上述二维向量的讨论推广到三维空间中

x, y, z轴正向上的单位向量分别记作$\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$

向量$\vec{a}$在三个坐标轴正向上的投影的代数长度分别记作a_x, a_y, a_z

称它们为向量$\vec{a}$的三个坐标，三元素组$\{a_x, a_y, a_z\}$ 称为向量$\vec{a}$ 的坐标表示

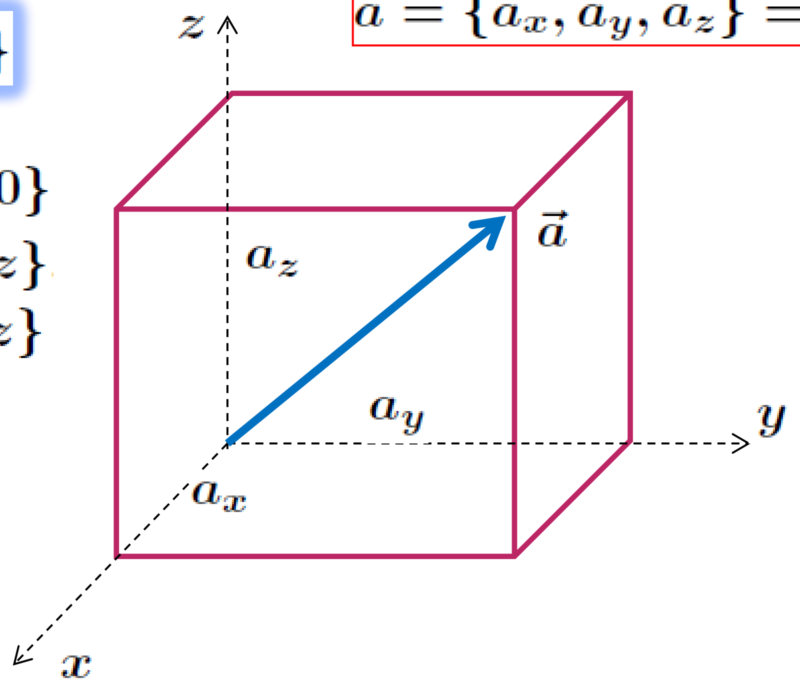
$$\boxed{\vec{a} = \{a_x, a_y, a_z\} = a_x\vec{i} + a_y\vec{j} + a_z\vec{k}}$$

$\boxed{(a_x, a_y, a_z)\text{与}\{a_x, a_y, a_z\}}$

xoy平面上的向量为$\{x, y, 0\}$

xoz平面上的向量为$\{x, 0, z\}$

yoz平面上的向量为$\{0, y, z\}$



例如:$\vec{i} = \{1, 0, 0\}, \vec{j} = \{0, 1, 0\}, \vec{k} = \{0, 0, 1\}$.

将上述二维向量的讨论推广到三维空间中

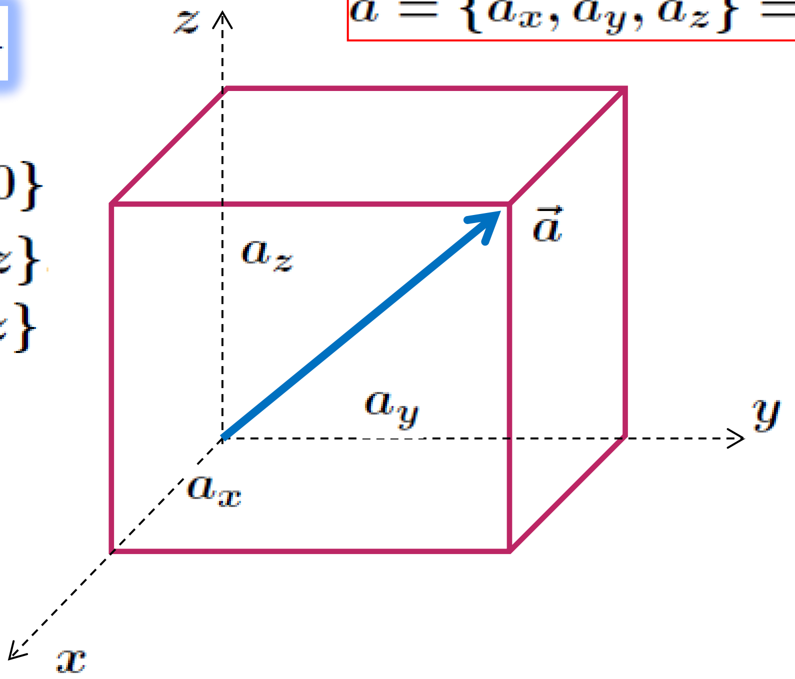
x, y, z轴正向上的单位向量分别记作$\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$

向量$\vec{a}$在三个坐标轴正向上的投影的代数长度分别记作a_x, a_y, a_z

称它们为向量$\vec{a}$的三个坐标，三元素组$\{a_x, a_y, a_z\}$ 称为向量$\vec{a}$ 的坐标表示

(a_x, a_y, a_z)与$\{a_x, a_y, a_z\}$

$$\boxed{\vec{a} = \{a_x, a_y, a_z\} = a_x\vec{i} + a_y\vec{j} + a_z\vec{k}}$$



xoy平面上的向量为$\{x, y, 0\}$
xoz平面上的向量为$\{x, 0, z\}$
yoz平面上的向量为$\{0, y, z\}$

x轴上的向量为$\{x, 0, 0\}$
y轴上的向量为$\{0, y, 0\}$
z轴上的向量为$\{0, 0, z\}$

例如:$\vec{i} = \{1, 0, 0\}, \vec{j} = \{0, 1, 0\}, \vec{k} = \{0, 0, 1\}$.

在坐标表示下，$\vec{a}=\{a_x,a_y,a_z\}$的长度为$|\vec{a}|=\sqrt{a_x^2+a_y^2+a_z^2}$.

在坐标表示下，$\vec{a}=\{a_x,a_y,a_z\}$的长度为$|\vec{a}|=\sqrt{a_x^2+a_y^2+a_z^2}$.

在坐标表示下，向量的线性运算可以如下进行：

①$\vec{a}+\vec{b}=(a_x\vec{i}+a_y\vec{j}+a_z\vec{k})+(b_x\vec{i}+b_y\vec{j}+b_z\vec{k})$

在坐标表示下，$\vec{a}=\{a_x,a_y,a_z\}$的长度为$|\vec{a}|=\sqrt{a_x^2+a_y^2+a_z^2}$.

在坐标表示下，向量的线性运算可以如下进行:

①$\vec{a}+\vec{b}=(a_x\vec{i}+a_y\vec{j}+a_z\vec{k})+(b_x\vec{i}+b_y\vec{j}+b_z\vec{k})$

$=(a_x+b_x)\vec{i}+(a_y+b_y)\vec{j}+(a_z+b_z)\vec{k}=\{a_x+b_x,a_y+b_y,a_z+b_z\}$

在坐标表示下，$\vec{a}=\{a_x,a_y,a_z\}$的长度为$|\vec{a}|=\sqrt{a_x^2+a_y^2+a_z^2}$.

在坐标表示下，向量的线性运算可以如下进行：

①$\vec{a}+\vec{b}=(a_x\vec{i}+a_y\vec{j}+a_z\vec{k})+(b_x\vec{i}+b_y\vec{j}+b_z\vec{k})$

$=(a_x+b_x)\vec{i}+(a_y+b_y)\vec{j}+(a_z+b_z)\vec{k}=\{a_x+b_x,a_y+b_y,a_z+b_z\}$

②$\vec{a}-\vec{b}=\{a_x-b_x,a_y-b_y,a_z-b_z\}$

在坐标表示下，$\vec{a}=\{a_x,a_y,a_z\}$的长度为$|\vec{a}|=\sqrt{a_x^2+a_y^2+a_z^2}$.

在坐标表示下，向量的线性运算可以如下进行:

①$\vec{a}+\vec{b}=(a_x\vec{i}+a_y\vec{j}+a_z\vec{k})+(b_x\vec{i}+b_y\vec{j}+b_z\vec{k})$

$=(a_x+b_x)\vec{i}+(a_y+b_y)\vec{j}+(a_z+b_z)\vec{k}=\{a_x+b_x,a_y+b_y,a_z+b_z\}$

②$\vec{a}-\vec{b}=\{a_x-b_x,a_y-b_y,a_z-b_z\}$

③$\lambda\vec{a}=\{\lambda a_x,\lambda a_y,\lambda a_z\}$

在坐标表示下，$\vec{a}=\{a_x,a_y,a_z\}$的长度为$|\vec{a}|=\sqrt{a_x^2+a_y^2+a_z^2}$.

在坐标表示下，向量的线性运算可以如下进行：

①$\vec{a}+\vec{b}=(a_x\vec{i}+a_y\vec{j}+a_z\vec{k})+(b_x\vec{i}+b_y\vec{j}+b_z\vec{k})$

$=(a_x+b_x)\vec{i}+(a_y+b_y)\vec{j}+(a_z+b_z)\vec{k}=\{a_x+b_x,a_y+b_y,a_z+b_z\}$

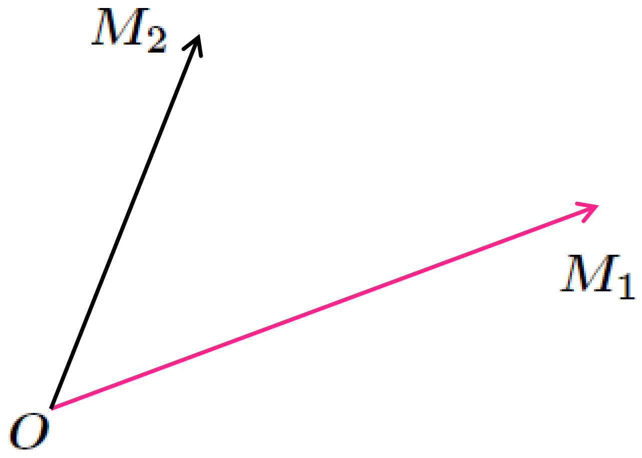
②$\vec{a}-\vec{b}=\{a_x-b_x,a_y-b_y,a_z-b_z\}$

③$\lambda\vec{a}=\{\lambda a_x,\lambda a_y,\lambda a_z\}$

④$\vec{a}=\vec{b}\Leftrightarrow a_x=b_x,a_y=b_y,a_z=b_z$

例　空间中有两点$M_1(x_1,y_1,z_1)$, $M_2(x_2,y_2,z_2)$,

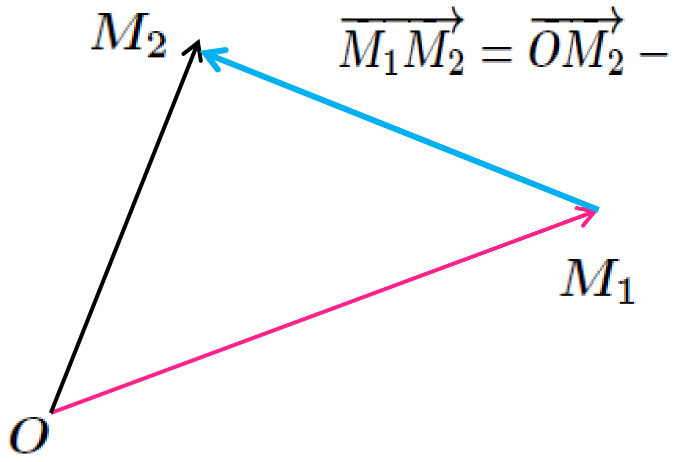
则向量$\overrightarrow{OM_1}=\{x_1,y_1,z_1\}$, $\overrightarrow{OM_2}=\{x_2,y_2,z_2\}$,



例　空间中有两点$M_1(x_1,y_1,z_1)$, $M_2(x_2,y_2,z_2)$,

则向量$\overrightarrow{OM_1}=\{x_1,y_1,z_1\}$, $\overrightarrow{OM_2}=\{x_2,y_2,z_2\}$,

$$\overrightarrow{M_1M_2}=\overrightarrow{OM_2}-\overrightarrow{OM_1}=\{x_2-x_1,y_2-y_1,z_2-z_1\}$$



例　空间中有两点$M_1(x_1,y_1,z_1)$, $M_2(x_2,y_2,z_2)$,

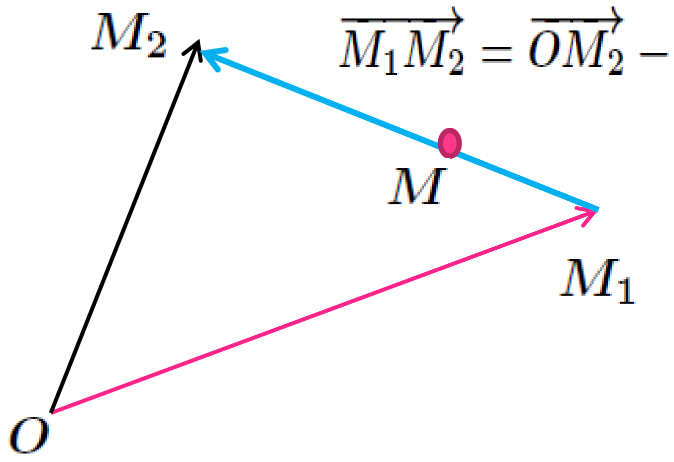
则向量$\overrightarrow{OM_1}=\{x_1,y_1,z_1\}$, $\overrightarrow{OM_2}=\{x_2,y_2,z_2\}$,

$$\overrightarrow{M_1M_2}=\overrightarrow{OM_2}-\overrightarrow{OM_1}=\{x_2-x_1,y_2-y_1,z_2-z_1\}$$

设$\overrightarrow{M_1M_2}$上一点为$M(x,y,z)$,

则$$\overrightarrow{M_1M}=\overrightarrow{OM}-\overrightarrow{OM_1}=\{x-x_1,y-y_1,z-z_1\},$$

$$\overrightarrow{MM_2}=\overrightarrow{OM_2}-\overrightarrow{OM}=\{x_2-x,y_2-y,z_2-z\}.$$



例　空间中有两点$M_1(x_1,y_1,z_1)$, $M_2(x_2,y_2,z_2)$,

则向量$\overrightarrow{OM_1}=\{x_1,y_1,z_1\}$, $\overrightarrow{OM_2}=\{x_2,y_2,z_2\}$,

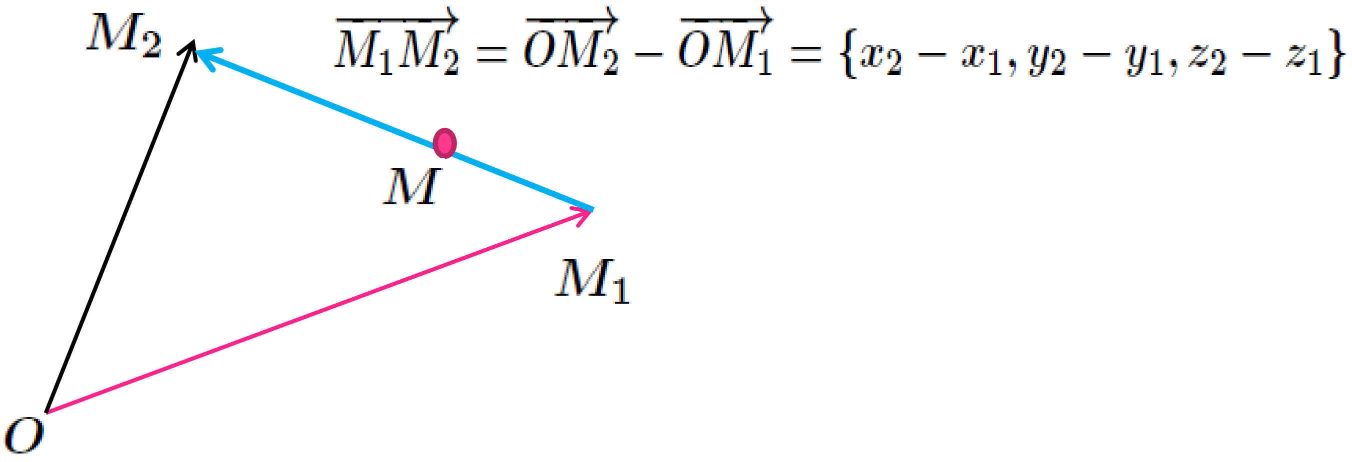
设$\overrightarrow{M_1M_2}$上一点为$M(x,y,z)$,

则$\overrightarrow{M_1M}=\overrightarrow{OM}-\overrightarrow{OM_1}$

$=\{x-x_1,y-y_1,z-z_1\}$,

$\overrightarrow{MM_2}=\overrightarrow{OM_2}-\overrightarrow{OM}$

$=\{x_2-x,y_2-y,z_2-z\}$.



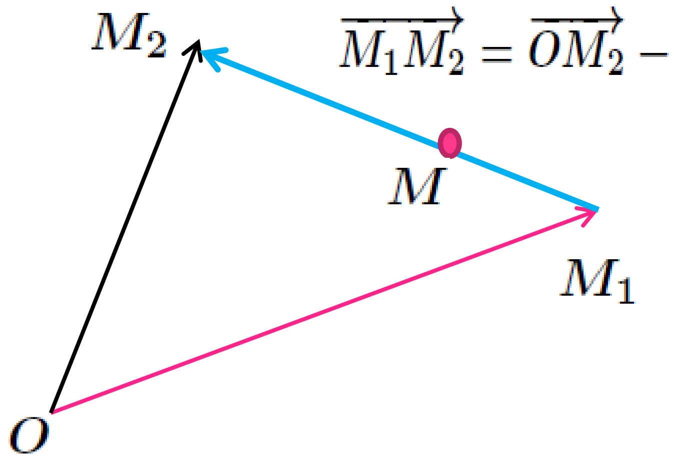
若假设$\left|\overrightarrow{M_1M}\right|:\left|\overrightarrow{MM_2}\right|=\lambda$, 即$\left|\overrightarrow{M_1M}\right|=\lambda\left|\overrightarrow{MM_2}\right|$,

则由于$\left|\overrightarrow{M_1M}\right|$与$\left|\overrightarrow{MM_2}\right|$ 为同向向量，所以有

$$\begin{cases} x-x_1=\lambda(x_2-x) \\ y-y_1=\lambda(y_2-y) \\ z-z_1=\lambda(z_2-z) \end{cases}$$

例　空间中有两点$M_1(x_1,y_1,z_1),M_2(x_2,y_2,z_2)$,

则向量$\overrightarrow{OM_1}=\{x_1,y_1,z_1\},\overrightarrow{OM_2}=\{x_2,y_2,z_2\}$,



$\overrightarrow{M_1M_2}=\overrightarrow{OM_2}-\overrightarrow{OM_1}=\{x_2-x_1,y_2-y_1,z_2-z_1\}$

设$\overrightarrow{M_1M_2}$上一点为$M(x,y,z)$,

则$\overrightarrow{M_1M}=\overrightarrow{OM}-\overrightarrow{OM_1}$

$=\{x-x_1,y-y_1,z-z_1\}$,

$\overrightarrow{MM_2}=\overrightarrow{OM_2}-\overrightarrow{OM}$

$=\{x_2-x,y_2-y,z_2-z\}$.

若假设$\left|\overrightarrow{M_1M}\right|:\left|\overrightarrow{MM_2}\right|=\lambda$, 即$\left|\overrightarrow{M_1M}\right|=\lambda\left|\overrightarrow{MM_2}\right|$,

则由于$\left|\overrightarrow{M_1M}\right|$与$\left|\overrightarrow{MM_2}\right|$ 为同向向量，所以有

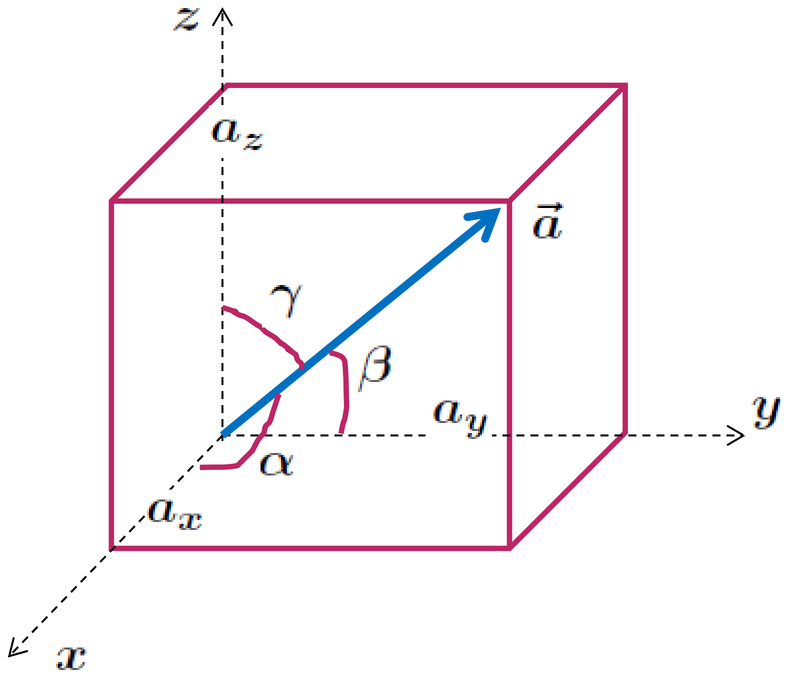
$$\begin{cases} x-x_1=\lambda(x_2-x) \\ y-y_1=\lambda(y_2-y) \\ z-z_1=\lambda(z_2-z) \end{cases}$$

从而

$$x=\frac{x_1+\lambda x_2}{1+\lambda}\qquad y=\frac{y_1+\lambda y_2}{1+\lambda}\qquad z=\frac{z_1+\lambda z_2}{1+\lambda}$$

设$\vec{a}(\vec{a} \neq 0)$与$\vec{i}$的夹角为$\alpha(0 < \alpha < \pi)$，

与$\vec{j}$的夹角为$\beta(0 < \beta < \pi)$， 与$\vec{k}$的夹角为$\gamma(0 < \gamma < \pi)$，

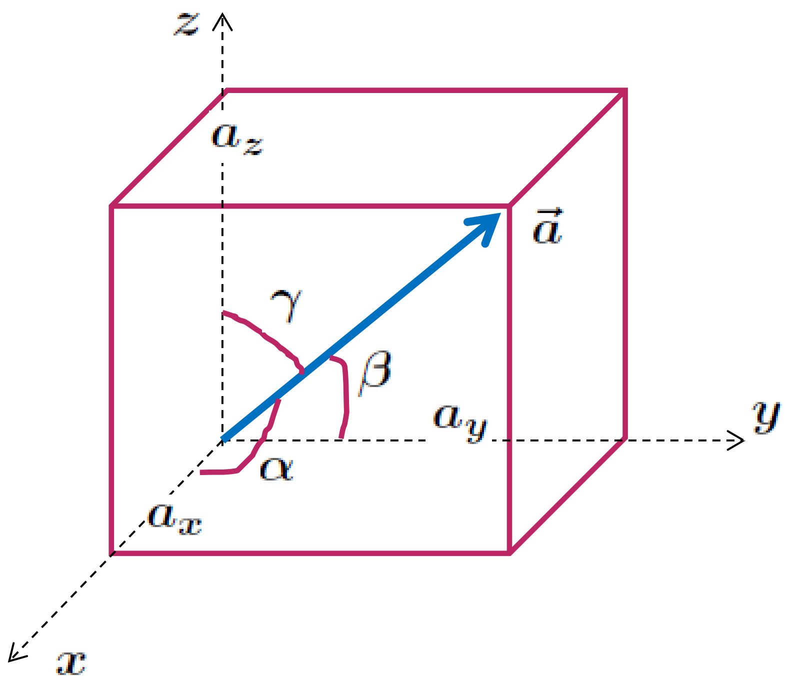


设$\vec{a}(\vec{a} \neq 0)$与$\vec{i}$的夹角为$\alpha(0 < \alpha < \pi)$，

与$\vec{j}$的夹角为$\beta(0 < \beta < \pi)$， 与$\vec{k}$的夹角为$\gamma(0 < \gamma < \pi)$，

它们称为向量$\vec{a}$的方向角，

$\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma$称为$\vec{a}$的方向余弦。



设$\vec{a}(\vec{a} \neq 0)$与$\vec{i}$的夹角为$\alpha(0 < \alpha < \pi)$，

与$\vec{j}$的夹角为$\beta(0 < \beta < \pi)$， 与$\vec{k}$的夹角为$\gamma(0 < \gamma < \pi)$，

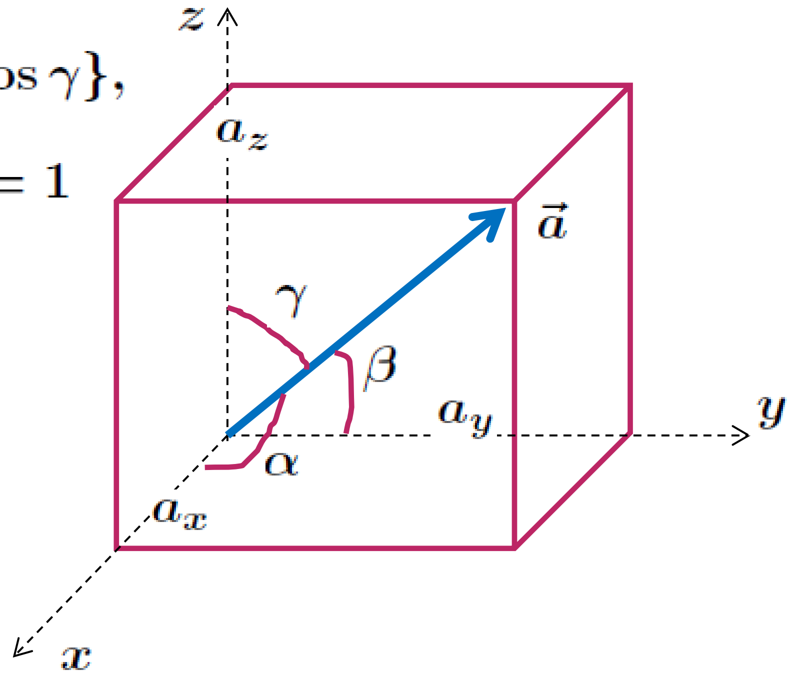
它们称为向量$\vec{a}$的方向角，

$\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma$称为$\vec{a}$的方向余弦。

易见$\cos\alpha = \frac{a_x}{|\vec{a}|}, \cos\beta = \frac{a_y}{|\vec{a}|}, \cos\gamma = \frac{a_z}{|\vec{a}|}$，

从而$\vec{a} = |\vec{a}| \{\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma\}$，

且$\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = 1$



设$\vec{a}(\vec{a}\neq 0)$与$\vec{i}$的夹角为$\alpha(0<\alpha<\pi)$，

与$\vec{j}$的夹角为$\beta(0<\beta<\pi)$， 与$\vec{k}$的夹角为$\gamma(0<\gamma<\pi)$，

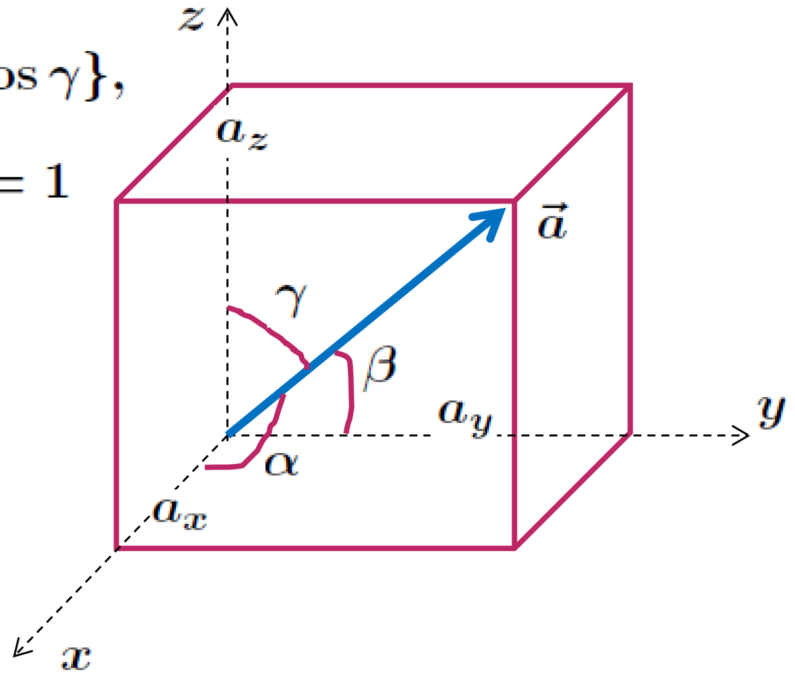
它们称为向量$\vec{a}$的方向角，

$\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma$称为$\vec{a}$的方向余弦。

易见$\cos\alpha = \frac{a_x}{|\vec{a}|}, \cos\beta = \frac{a_y}{|\vec{a}|}, \cos\gamma = \frac{a_z}{|\vec{a}|}$，

从而$\vec{a} = |\vec{a}|\{\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma\}$，

且$\cos^2\alpha+\cos^2\beta+\cos^2\gamma=1$



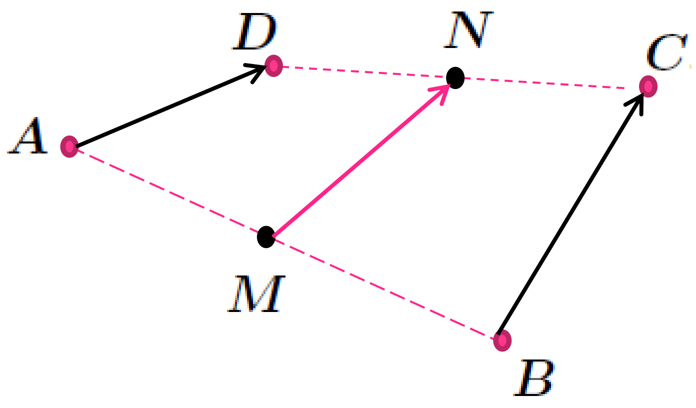
$\{\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma\}$是单位向量

任何矢量都可以用其长度和方向余弦表示

例

设A,B,C,D 是空间任意四个点，M,N 分别是AB 和CD 的中心，

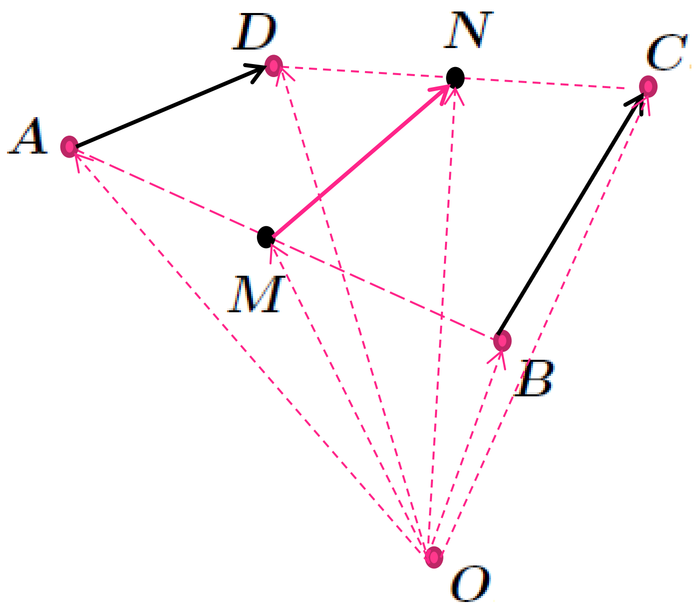
求证:$\overrightarrow{MN}=\frac{1}{2}(\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{BC})$.



例

设A, B, C, D 是空间任意四个点，M, N 分别是AB 和CD 的中心，

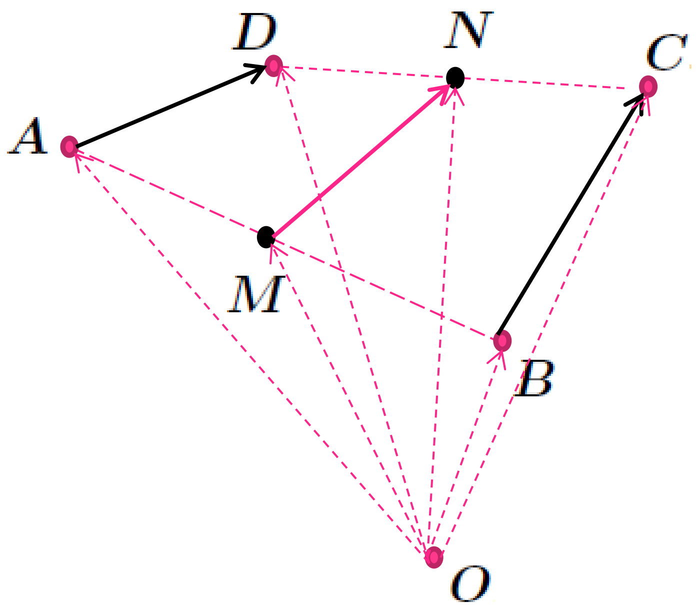
求证:$\overrightarrow{MN} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{BC})$.



例

设A,B,C,D 是空间任意四个点，M,N 分别是AB 和CD 的中心，

求证:$\overrightarrow{MN}=\dfrac{1}{2}(\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{BC})$.

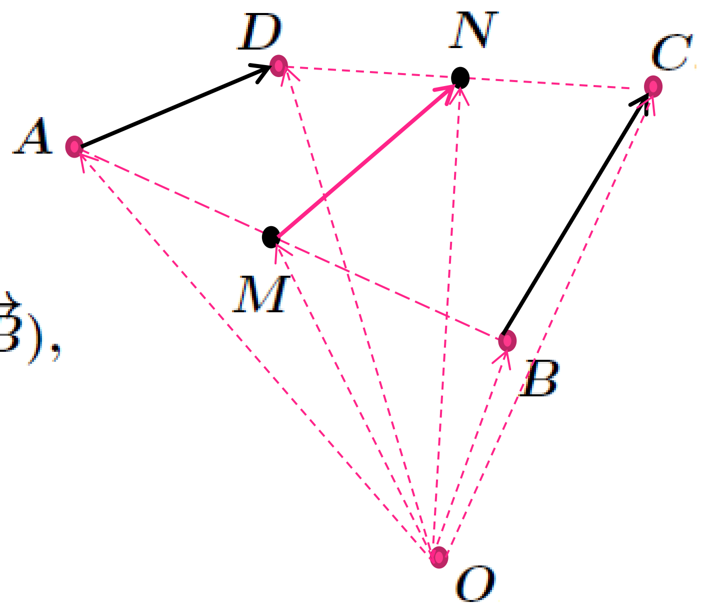


$$\overrightarrow{MN}=\overrightarrow{ON}-\overrightarrow{OM},$$

例

设A,B,C,D 是空间任意四个点，M,N 分别是AB 和CD 的中心，

求证:$\overrightarrow{MN}=\dfrac{1}{2}(\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{BC})$.



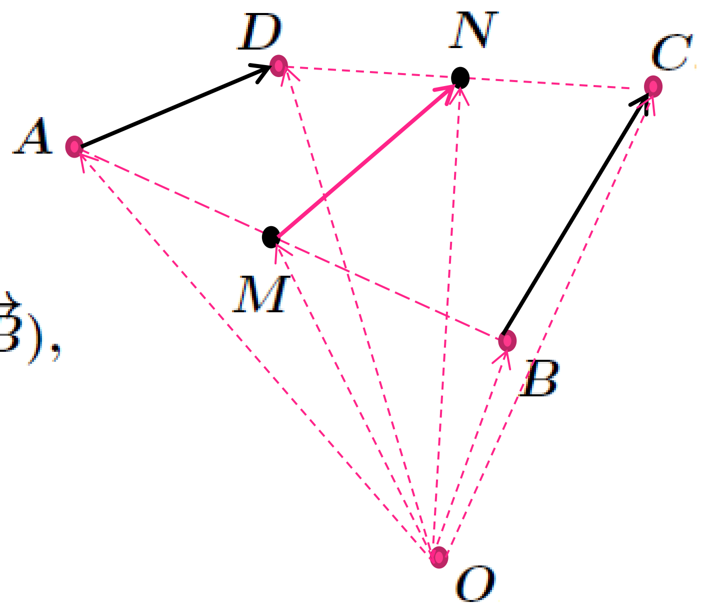
$$\overrightarrow{MN}=\overrightarrow{ON}-\overrightarrow{OM},$$

$$\overrightarrow{ON}=\tfrac{1}{2}(\overrightarrow{OD}+\overrightarrow{OC}),\overrightarrow{OM}=\tfrac{1}{2}(\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}),$$

例

设A,B,C,D 是空间任意四个点，M,N 分别是AB 和CD 的中心，

求证:$\overrightarrow{MN}=\frac{1}{2}(\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{BC})$.



$$\overrightarrow{MN}=\overrightarrow{ON}-\overrightarrow{OM},$$

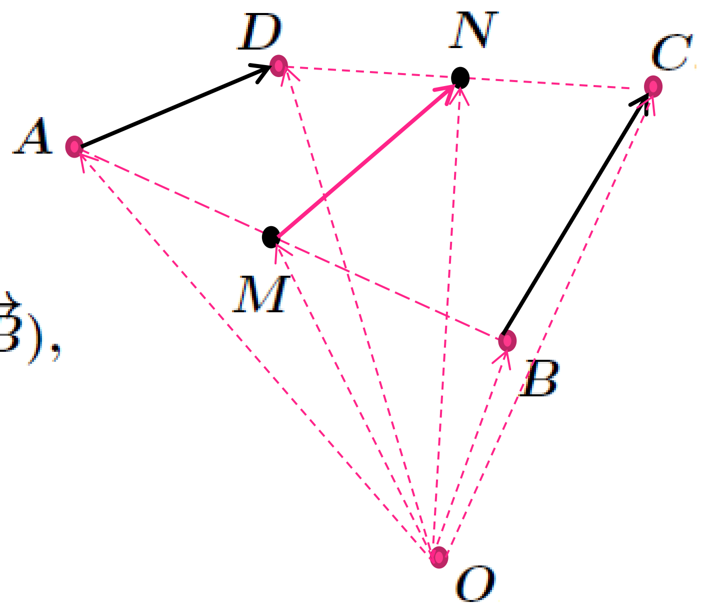
$$\overrightarrow{ON}=\tfrac{1}{2}(\overrightarrow{OD}+\overrightarrow{OC}),\overrightarrow{OM}=\tfrac{1}{2}(\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}),$$

$$\therefore\ \overrightarrow{MN}=\tfrac{1}{2}(\overrightarrow{OD}+\overrightarrow{OC}-\overrightarrow{OA}-\overrightarrow{OB})$$

例

设A,B,C,D 是空间任意四个点，M,N 分别是AB 和CD 的中心，

求证:$\overrightarrow{MN}=\dfrac{1}{2}(\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{BC})$.



$$\overrightarrow{MN}=\overrightarrow{ON}-\overrightarrow{OM},$$

$$\overrightarrow{ON}=\tfrac{1}{2}(\overrightarrow{OD}+\overrightarrow{OC}),\overrightarrow{OM}=\tfrac{1}{2}(\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}),$$

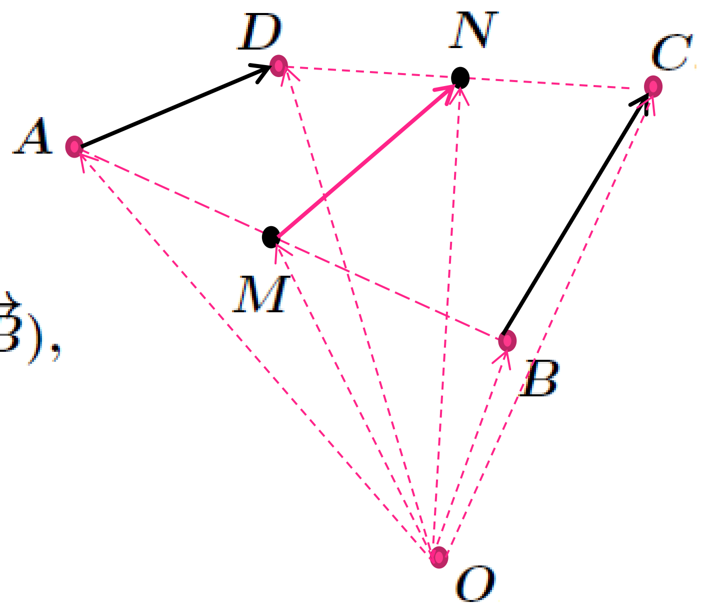
$$\therefore\ \overrightarrow{MN}=\tfrac{1}{2}(\overrightarrow{OD}+\overrightarrow{OC}-\overrightarrow{OA}-\overrightarrow{OB})$$

$$=\tfrac{1}{2}(\overrightarrow{OD}-\overrightarrow{OA})+\tfrac{1}{2}(\overrightarrow{OC}-\overrightarrow{OB})$$

例

设A,B,C,D 是空间任意四个点，M,N 分别是AB 和CD 的中心，

求证:$\overrightarrow{MN}=\frac{1}{2}(\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{BC})$.



$$\overrightarrow{MN}=\overrightarrow{ON}-\overrightarrow{OM},$$

$$\overrightarrow{ON}=\tfrac{1}{2}(\overrightarrow{OD}+\overrightarrow{OC}),\overrightarrow{OM}=\tfrac{1}{2}(\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}),$$

$$\therefore\overrightarrow{MN}=\tfrac{1}{2}(\overrightarrow{OD}+\overrightarrow{OC}-\overrightarrow{OA}-\overrightarrow{OB})$$

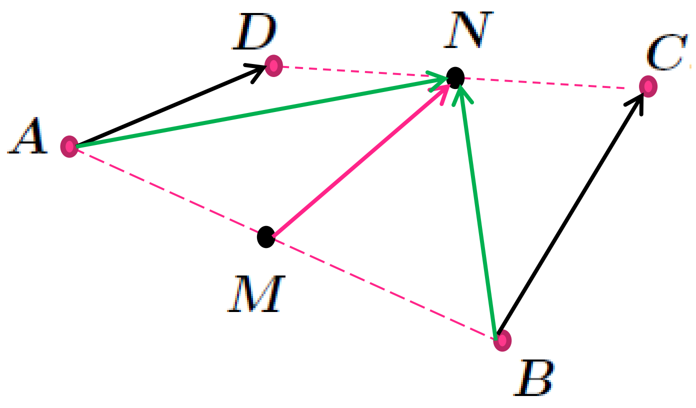
$$=\tfrac{1}{2}(\overrightarrow{OD}-\overrightarrow{OA})+\tfrac{1}{2}(\overrightarrow{OC}-\overrightarrow{OB})$$

$$=\tfrac{1}{2}(\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{BC}).$$

例

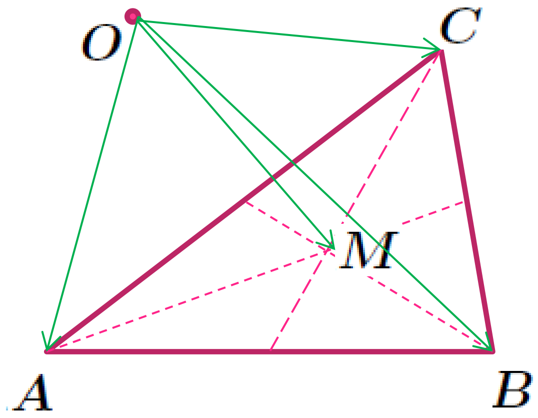
设A, B, C, D 是空间任意四个点，M, N 分别是AB 和CD 的中心，

求证:$\overrightarrow{MN}=\frac{1}{2}(\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{BC})$.



例

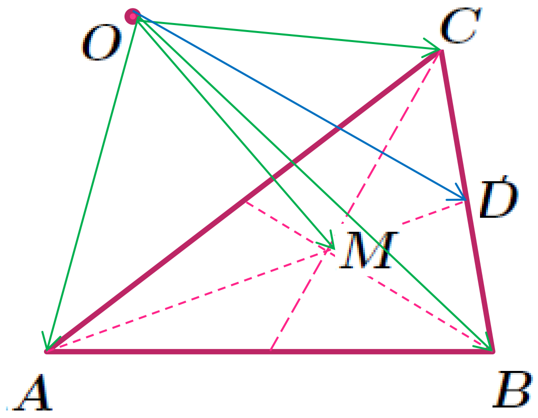
设M是$\triangle ABC$的重心，求证:对任意点O, $\overrightarrow{OM}=\frac{1}{3}(\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC})$.



例

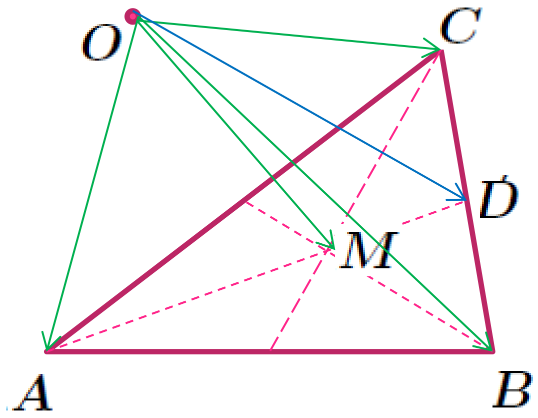
设M是$\triangle ABC$的重心，求证:对任意点O, $\overrightarrow{OM}=\frac{1}{3}(\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC})$.

$\overrightarrow{OM}=\frac{2}{3}\overrightarrow{OA}+\frac{1}{3}\overrightarrow{OD}$



例

设M是$\triangle ABC$的重心，求证:对任意点O，$\overrightarrow{OM}=\dfrac{1}{3}(\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC})$.



$$\overrightarrow{OM}=\tfrac{2}{3}\overrightarrow{OA}+\tfrac{1}{3}\overrightarrow{OD}$$

$$=\tfrac{2}{3}\overrightarrow{OA}+\tfrac{1}{3}\cdot\tfrac{1}{2}(\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC})$$

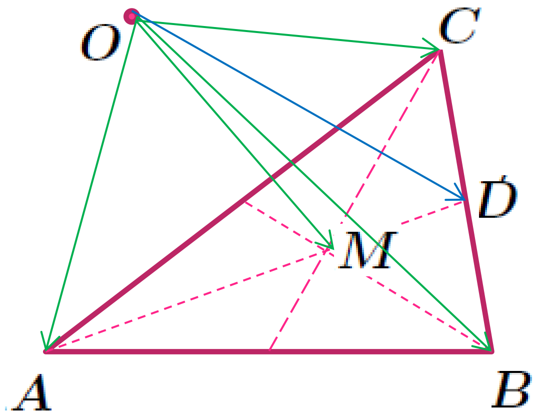
例

设M是$\triangle ABC$的重心，求证:对任意点O, $\overrightarrow{OM}=\frac{1}{3}(\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC})$.

$$\overrightarrow{OM}=\tfrac{2}{3}\overrightarrow{OA}+\tfrac{1}{3}\overrightarrow{OD}$$

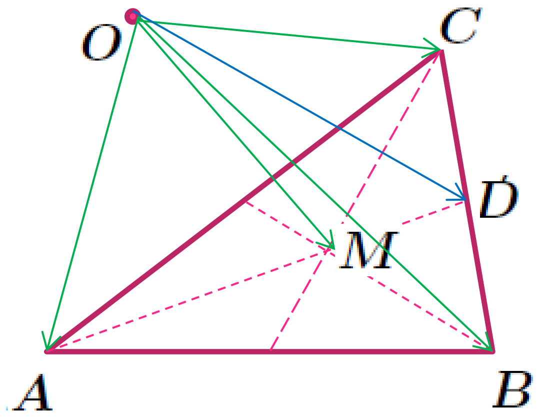
$$=\tfrac{2}{3}\overrightarrow{OA}+\tfrac{1}{3}\cdot\tfrac{1}{2}(\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC})$$

$$=\tfrac{2}{3}\overrightarrow{OA}+\tfrac{1}{6}\overrightarrow{OB}+\tfrac{1}{6}\overrightarrow{OC}$$



例

设M是$\triangle ABC$的重心，求证:对任意点O, $\overrightarrow{OM}=\dfrac{1}{3}(\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC})$.



$$\overrightarrow{OM}=\tfrac{2}{3}\overrightarrow{OA}+\tfrac{1}{3}\overrightarrow{OD}$$

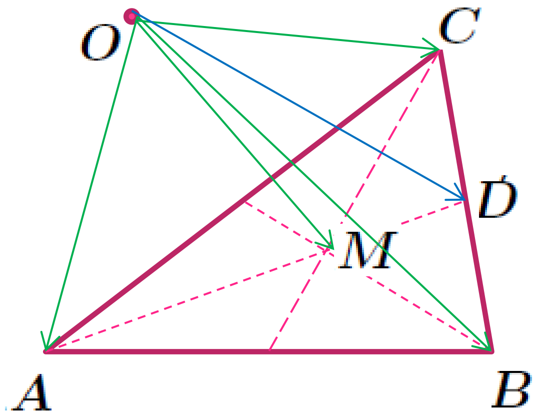
$$=\tfrac{2}{3}\overrightarrow{OA}+\tfrac{1}{3}\cdot\tfrac{1}{2}(\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC})$$

$$=\tfrac{2}{3}\overrightarrow{OA}+\tfrac{1}{6}\overrightarrow{OB}+\tfrac{1}{6}\overrightarrow{OC}$$

$$or=\tfrac{2}{3}\overrightarrow{OB}+\tfrac{1}{6}\overrightarrow{OA}+\tfrac{1}{6}\overrightarrow{OC}$$

例

设M是$\triangle ABC$的重心，求证:对任意点O, $\overrightarrow{OM}=\frac{1}{3}(\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC})$.



$$\overrightarrow{OM}=\tfrac{2}{3}\overrightarrow{OA}+\tfrac{1}{3}\overrightarrow{OD}$$

$$=\tfrac{2}{3}\overrightarrow{OA}+\tfrac{1}{3}\cdot\tfrac{1}{2}(\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC})$$

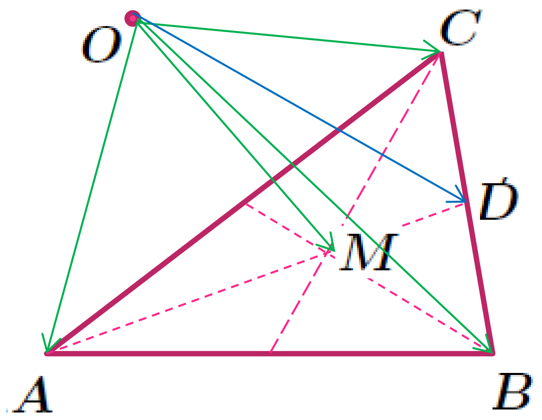
$$=\tfrac{2}{3}\overrightarrow{OA}+\tfrac{1}{6}\overrightarrow{OB}+\tfrac{1}{6}\overrightarrow{OC}$$

$$or=\tfrac{2}{3}\overrightarrow{OB}+\tfrac{1}{6}\overrightarrow{OA}+\tfrac{1}{6}\overrightarrow{OC}$$

$$or=\tfrac{2}{3}\overrightarrow{OC}+\tfrac{1}{6}\overrightarrow{OA}+\tfrac{1}{6}\overrightarrow{OB}$$

例

设M是$\triangle ABC$的重心，求证:对任意点O, $\overrightarrow{OM}=\frac{1}{3}(\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC})$.



$$\overrightarrow{OM}=\tfrac{2}{3}\overrightarrow{OA}+\tfrac{1}{3}\overrightarrow{OD}$$

$$=\tfrac{2}{3}\overrightarrow{OA}+\tfrac{1}{3}\cdot\tfrac{1}{2}(\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC})$$

$$=\tfrac{2}{3}\overrightarrow{OA}+\tfrac{1}{6}\overrightarrow{OB}+\tfrac{1}{6}\overrightarrow{OC}$$

$$or=\tfrac{2}{3}\overrightarrow{OB}+\tfrac{1}{6}\overrightarrow{OA}+\tfrac{1}{6}\overrightarrow{OC}$$

$$or=\tfrac{2}{3}\overrightarrow{OC}+\tfrac{1}{6}\overrightarrow{OA}+\tfrac{1}{6}\overrightarrow{OB}$$

$3\overrightarrow{OM}=\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}$,得证.