复习提要　III（部分习题解答）

经过再三的考虑，我决定不给出“复习提要I、II”的习题解答，而是给出习题课我没讲，作业也没布置的部分习题答案。**不要把太多精力放在我出的那些习题上，否则就是“舍本逐末”。复习要以理解概念和熟悉最基本的方法、技巧为主。因此认真读书、好好做书上的习题才是关键！**

P39 1.3.5

证明：由于$\lim_{n\to\infty} a_n = 0$,故任取$\varepsilon > 0$，存在$N > 0$,使得只要$n > N$，就有

$$|a_n| < \frac{\varepsilon}{M}$$

于是

$$|a_n b_n| \le M|a_n| < M \cdot \frac{\varepsilon}{M} = \varepsilon$$

所以有$\lim_{n\to\infty} a_n b_n = 0$.

P52 1.4.5

解：以$\lim_{x\to a} = +\infty$为例：

任取$M > 0$,存在$\delta > 0$，使得只要$0 < |x-a| < \delta$，就有$f(x) > M$.

P67 第一章总练习题22

证明：反证法。假如Dirichlet函数$D(x)$在点a处连续。于是对任意的序列$x_n \to a$(且$x_n \ne a$)，都有$\lim_{n\to+\infty} D(x_n) = D(a)$.

但是由于有理数和无理数都是稠密的，我们一定可以找到$x_n \in \mathbb{Q}$,$x_n \to a$和$y_n \in \mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}$,$y_n \to a$。于是

$$0 = \lim_{n\to+\infty} D(y_n) = D(a) = \lim_{n\to+\infty} D(x_n) = 1$$

矛盾！因此$D(x)$在a点不连续。

P68 第一章总练习题24

证明： 由条件$0 \le f(x) \le x$可知$0 \le a_{n+1} = f(a_n) \le a_n$.所以序列$a_n$单调递减且有下界（0就是一个下界）。所以$\lim_{n\to\infty} a_n$存在。

设$a_n \to l$.由f的连续性得：$f(l) = \lim_{n\to\infty} f(a_n) = \lim_{n\to\infty} a_{n+1} = l$.

P78 2.1.9

证明：

$P'(x) = m(x-x_0)^{m-1}g(x)+(x-x_0)^m g'(x) = (x-x_0)^{m-1}[mg(x)+(x-x_0)g'(x)]$

记$h(x) = mg(x) + (x - x_0)g'(x)$.显然$h(x_0) = mg(x_0) \neq 0$,所以$x_0$是$P'(x)$的m-1重根。

P79 2.1.14

证明：利用φ在a点的连续性分别计算f在a点的左右导数：

$$f'_-(a) = \lim_{x\to a-0} \frac{(a-x)\varphi(x)}{x-a} = -\varphi(a)$$

$$f'_+(a) = \lim_{x\to a+0} \frac{(x-a)\varphi(x)}{x-a} = \varphi(a)$$

由于$\varphi(a) \neq 0$,$f'_-(a) \neq f'_+(a)$，所以f在a处不可导。

P118 2.7.3

证明：因为$\frac{d}{dx}(\int_a^x f(t)dt) = f(x)$,$\frac{d}{dx}F(x) = f(x)$,所以$F(x)$和$\int_a^x f(t)dt$只差一个常数。再考虑它们在a点的取值可知$F(x) = \int_a^x f(t)dt$.

P118 2.7.6

解：$G'(x) = e^x \int_0^x \sin z dz$, $G''(x) = e^x \int_0^x \sin z dz + e^x \sin x$

不定积分的题我就不提了，每个人都能检验自己算得对不对。

P166 3.5.4

解：易知$x(t)$单调递增，$y(t) \geq 0$,所以

$$S = \int_0^{2\pi a} y(x)dx = \int_0^{2\pi} y(t)x'(t)dt = \int_0^{2\pi} a^2(1-\cos t)^2 dt = 3\pi a^2$$

P166 3.5.8

解：我们先计算图形落在第一象限的那部分的面积S_1。此时$0 \leq \varphi \leq \frac{\pi}{4}$

$$S_1 = \frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{4}} r^2 d\varphi = \frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{4}} a^2\cos 2\varphi d\varphi = \frac{a^2}{4}$$

因此双扭线所围图形的面积是a^2.

P173 第三章总练习题5

证明：作变量替换$s = x + ht$,则有

$$\int_0^1 f(x+ht)dt = \frac{1}{h}\int_x^{x+h} f(s)ds$$

记$F(x)=\int_a^x f(s)ds$(a是定义域中任意一个取定的点)，则有

$$\lim_{h\to 0}\int_0^1 f(x+ht)dt=\lim_{h\to 0}\frac{F(x+h)-F(x)}{h}=F'(x)=f(x)$$

P175 第三章总练习题17

证明：令$s=\frac{1}{t}$则有

$$\int_x^1 \frac{1}{1+t^2}dt=\int_{\frac{1}{x}}^1 \frac{1}{1+s^{-2}}(-\frac{1}{s^2})ds=\int_1^{\frac{1}{x}} \frac{1}{1+s^2}ds$$

P175 第三章总练习题18

解：取$a=0$即可。因为

$$\int_0^2 f(x)dx=\int_0^1 f(x)dx+\int_1^2 f(x)dx=\int_0^1 f(x)dx+\int_0^1 f(2-y)dy=0$$

P175 第三章总练习题19

证明：当$0\le t\le 1$时，有$\frac{1}{1+t}\le\frac{1}{1+t^2}$，因此

$$\int_0^x \frac{1}{1+t}dt\le\int_0^x \frac{1}{1+t^2}dt$$

此式即$\ln(1+x)\le\arctan x$.

P175 第三章总练习题20 (1)

提示：同时考虑另一个积分$\int_0^a \frac{f(a-x)}{f(x)+f(a-x)}dx$。

石亚龙

2006年11月11日