多元函数（二元函数）的概念

定义在平面集合 D上的二元函数的一般形式为

$$z = f(x, y),\ (x, y) \in D \subset \mathbb{R}^2$$

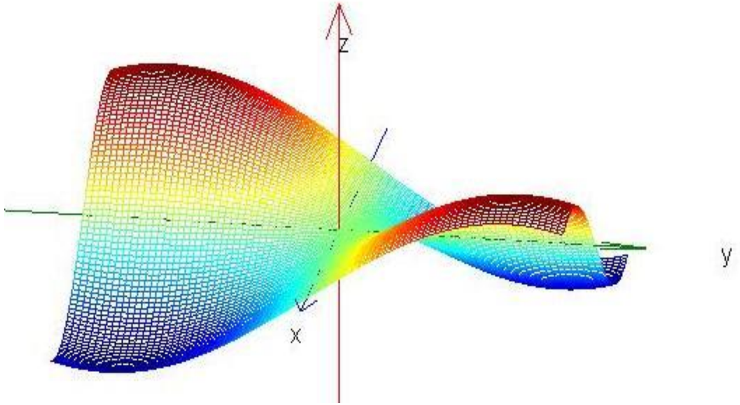
其中 D为函数的定义域

定义在平面集合 D上的二元函数的一般形式为

$$z=f(x,y),\ (x,y)\in D\subset\mathbb{R}^2$$

其中 D为函数的定义域

函数 $z=f(x,y)$ 的几何图形为一张空间曲面



注： 要区分空间曲面与二元函数的概念

如球面是曲面但不是二元函数的图形

上（下）半球面才是一个二元函数的图形

一些术语和记号

点 $M_0(x_0, y_0)$ 的 $\boxed{\delta\text{邻域}}$ 是指集合

$$U_\delta(M_0) \triangleq \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 | \sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2} < \delta\}.$$

一些术语和记号

点 $M_0(x_0, y_0)$的 $\boxed{\delta\text{邻域}}$是指集合

$$U_\delta(M_0) \triangleq \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 | \sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2} < \delta\}.$$

或写成 $U_\delta(M_0) \triangleq \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 | \ \ |\overline{MM_0}| < \delta\}$

其中 $|\overline{MM_0}|$表示点 $M_0(x_0, y_0)$和点 $M(x,y)$的距离，有时也写成 $\rho(M, M_0)$ 或 $dist(M, M_0)$.

一些术语和记号

点 $M_0(x_0,y_0)$的 $\boxed{\delta\text{邻域}}$是指集合

$$U_\delta(M_0)\triangleq\{(x,y)\in\mathbb{R}^2|\sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2}<\delta\}.$$

或写成 $U_\delta(M_0)\triangleq\{(x,y)\in\mathbb{R}^2|\quad|\overline{MM_0}|<\delta\}$

其中 $|\overline{MM_0}|$表示点 $M_0(x_0,y_0)$和点 $M(x,y)$的距离，有时也写成 $\rho(M,M_0)$ 或 $dist(M,M_0)$.

点 $M_0(x_0,y_0)$的 $\boxed{\delta\ \text{空心邻域}}$是指集合

$$\mathring{U}_\delta(M_0)\triangleq\{(x,y)\in\mathbb{R}^2|0<\sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2}<\delta\}$$

一些术语和记号

点 $M_0(x_0, y_0)$的 $\boxed{\delta\text{邻域}}$是指集合

$$U_\delta(M_0) \triangleq \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 | \sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2} < \delta\}$$

或写成 $U_\delta(M_0) \triangleq \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 | \ |\overline{MM_0}| < \delta\}$

其中 $|\overline{MM_0}|$表示点 $M_0(x_0, y_0)$和点 $M(x,y)$的距离，有时也写成 $\rho(M, M_0)$ 或 $dist(M, M_0)$.

点 $M_0(x_0, y_0)$的 $\boxed{\delta\ \text{空心邻域}}$是指集合

$$\mathring{U}_\delta(M_0) \triangleq \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 | 0 < \sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2} < \delta\}$$

$U_\delta(M_0)$是以 M_0为心的开圆盘， $\mathring{U}_\delta(M_0)$是空心的开圆盘.

点M_0是集合E的$\boxed{\text{内点}}$: $\exists\ \delta > 0 \quad s.t. \quad U_\delta(M_0) \subset E.$

点M_0是集合E的内点: $\exists\ \delta > 0\ \ s.t.\ \ U_\delta(M_0) \subset E.$

点M_0是集合E的外点: $\exists\ \delta > 0\ \ s.t.\ \ U_\delta(M_0) \cap E = \emptyset.$

点M_0是集合E的$\boxed{\text{内点}}$: $\exists\ \delta > 0\ \ s.t.\ \ U_\delta(M_0) \subset E.$

点M_0是集合E的$\boxed{\text{外点}}$: $\exists\ \delta > 0\ \ s.t.\ \ U_\delta(M_0) \cap E = \emptyset.$

点M_0是集合E的$\boxed{\text{边界点:}}$

点M_0不是集合E的内点，且$\forall\ \delta > 0(\delta < \delta_0)\ \ s.t.\ \ U_\delta(M_0) \cap E \neq \emptyset.$

点M_0是集合E的$\boxed{\text{内点}}$: $\exists\ \delta > 0\ \ s.t.\ \ U_\delta(M_0) \subset E.$

点M_0是集合E的$\boxed{\text{外点}}$: $\exists\ \delta > 0\ \ s.t.\ \ U_\delta(M_0) \cap E = \emptyset.$

点M_0是集合E的$\boxed{\text{边界点:}}$

点M_0不是集合E的内点，且$\forall\ \delta > 0(\delta < \delta_0)\ \ s.t.\ \ U_\delta(M_0) \cap E \neq \emptyset.$

E是$\boxed{\text{开集}}$: E中的所有点都是内点.

$$\text{例如}\{(x, y) \in \mathrm{R}^2 \ \mid\ x^2 + y^2 < 1\}$$

点M_0是集合E的内点：$\exists\ \delta > 0\ \ s.t.\ \ U_\delta(M_0) \subset E.$

点M_0是集合E的外点：$\exists\ \delta > 0\ \ s.t.\ \ U_\delta(M_0) \cap E = \emptyset.$

点M_0是集合E的边界点：

点M_0不是集合E的内点，且$\forall\ \delta > 0(\delta < \delta_0)\ \ s.t.\ \ U_\delta(M_0) \cap E \neq \emptyset.$

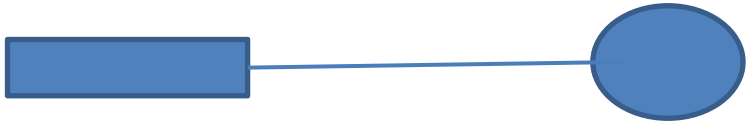
E是开集：E中的所有点都是内点.

E是闭集：E的所有边界点都属于E.

$$例如\{(x, y) \in \mathrm{R}^2 \ \mid\ x^2 + y^2 \leq 1\}$$

连通集：

若平面集合 D中任何两点都能用集合内的曲线联接，则称 D 为连通集.



连通集：

若平面集合 D中任何两点都能用集合内的曲线联接，则称 D 为连通集.

有界集：能用一个半径有限的圆盘覆盖的集合.

连通集:

若平面集合 D中任何两点都能用集合内的曲线联接，则称 D 为连通集.

有界集: 能用一个半径有限的圆盘覆盖的集合.

无界集: 不能用一个半径有限的圆盘覆盖的集合.

$\boxed{\text{连通集：}}$

若平面集合 D中任何两点都能用集合内的曲线联接，则称 D 为连通集.

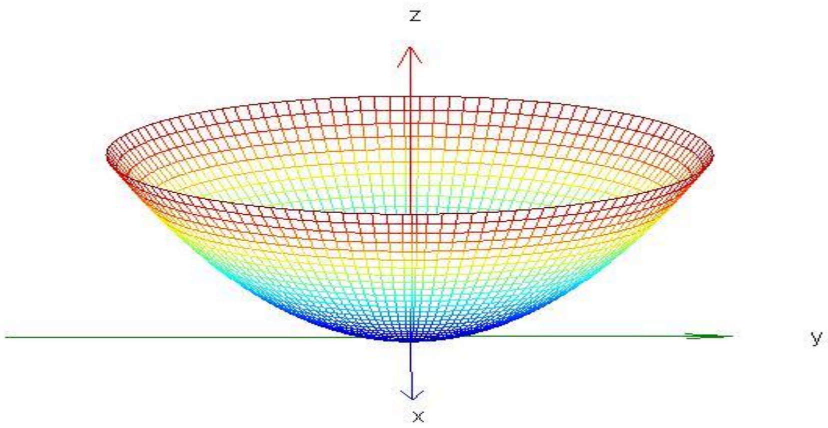
$\boxed{\text{有界集}}$：能用一个半径有限的圆盘覆盖的集合.

$\boxed{\text{无界集}}$：不能用一个半径有限的圆盘覆盖的集合.

$\boxed{\text{区域}}$：连通的非空的开集称为区域.

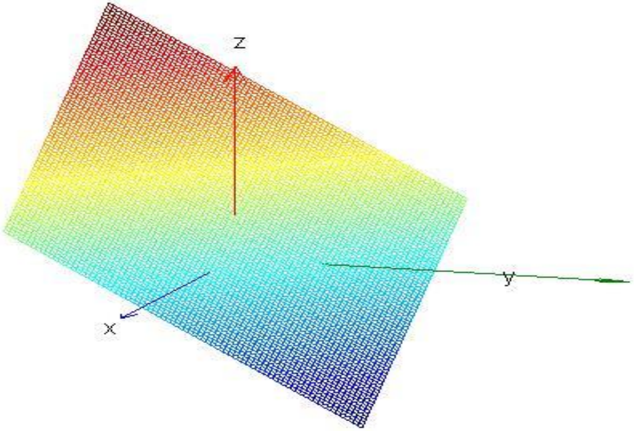
二元函数示例

$z = x^2 + y^2$ （抛物面）   定义域是 $\mathbb{R}^2$

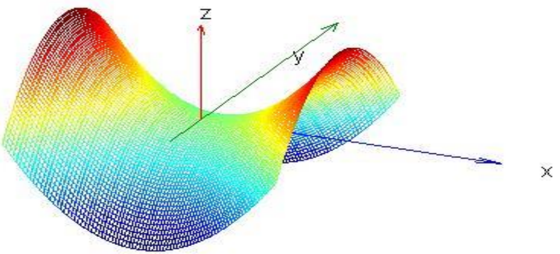


$z = 1 - x - y$ 表示平面 $(x + y + z = 1)$

定义域为 $\mathbb{R}^2$

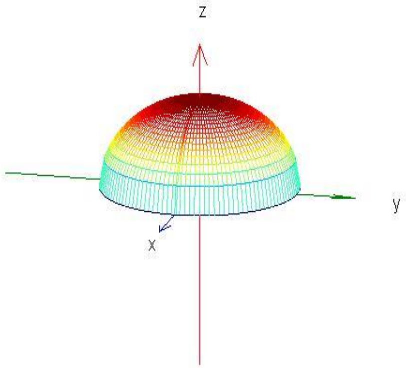


$z = x^2 - y^2$ 表示马鞍面 定义域为 $\mathbb{R}^2$



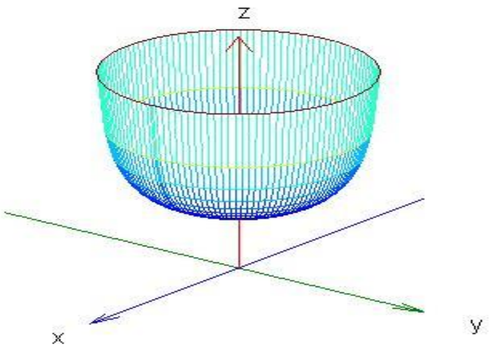
$z=\sqrt{1-x^2-y^2}$ 表示上半球面

定义域为闭圆盘 $\{(x,y)|x^2+y^2\leq 1\}$



$$z = \frac{1}{\sqrt{1 - x^2 - y^2}}$$

定义域为开圆盘 $\{(x, y) | x^2 + y^2 < 1\}$



二元函数的等高线的概念

等高线是空间曲面的一种平面表示法，反映空间曲面的形态.

二元函数的等高线的概念

等高线是空间曲面的一种平面表示法，反映空间曲面的形态.

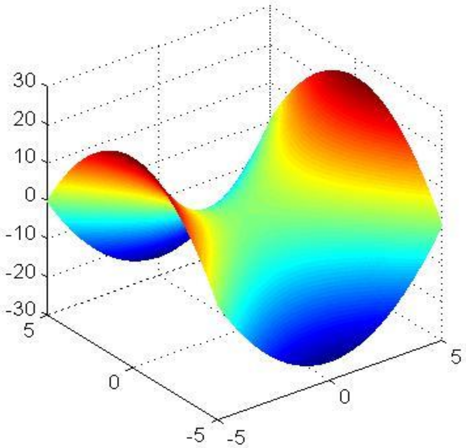
满足 $f(x,y)=c$（c 为常数）的 xoy 平面上的曲线 $\begin{cases} f(x,y)=c \\ z=0 \end{cases}$

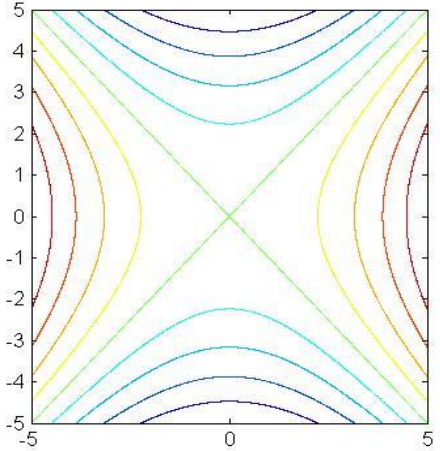
称为函数 $z=f(x,y)$ 的高度为 c 的**等高线**，或称为**等值线**.

通常简写为 $f(x,y)=c$.

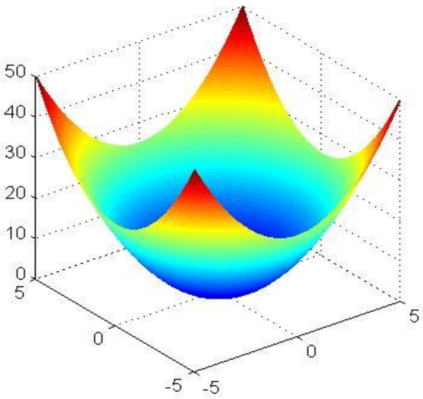
常用的还有等位线，等温线，等压线等.

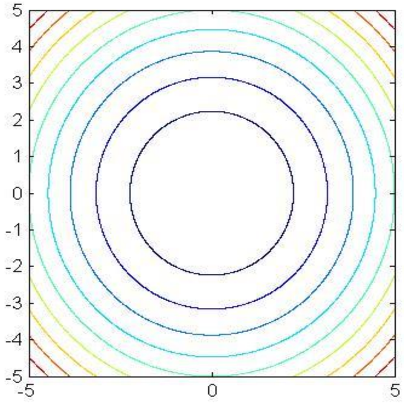
$z = x^2 - y^2$ 的等高线为 $x^2 - y^2 = c$



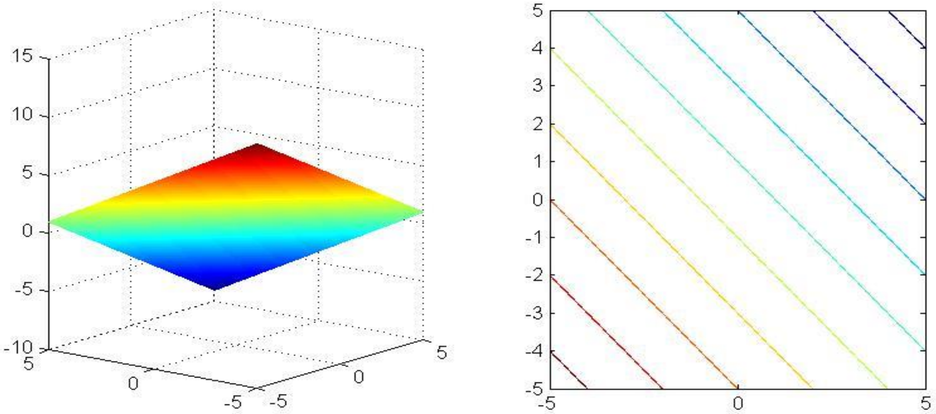


$z = x^2 + y^2$ 的等高线为 $x^2 + y^2 = c, (c \geq 0)$

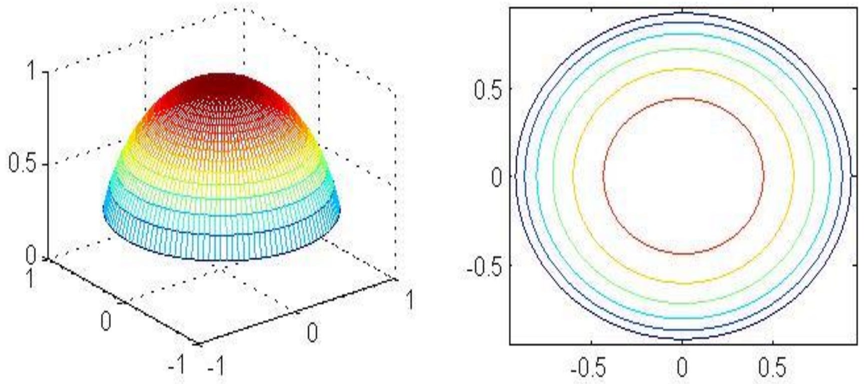




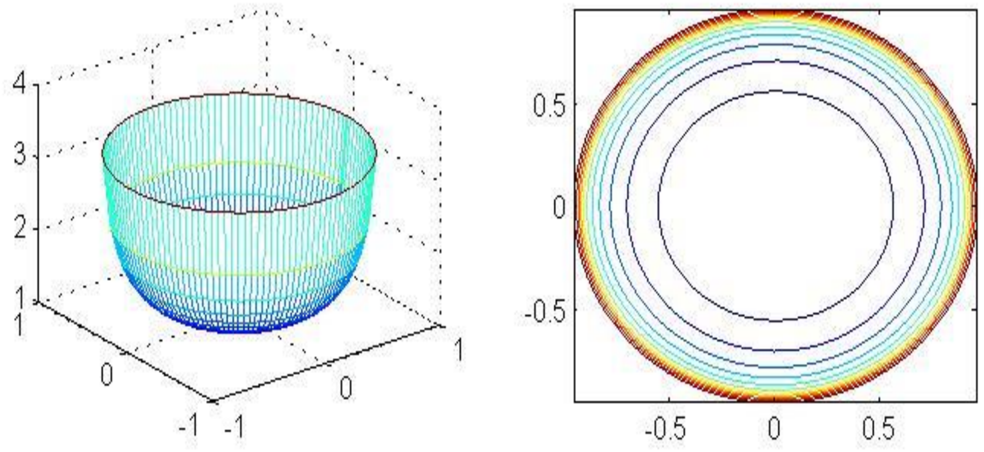
$z=1-x-y$ 的等高线为 $1-x-y=c$



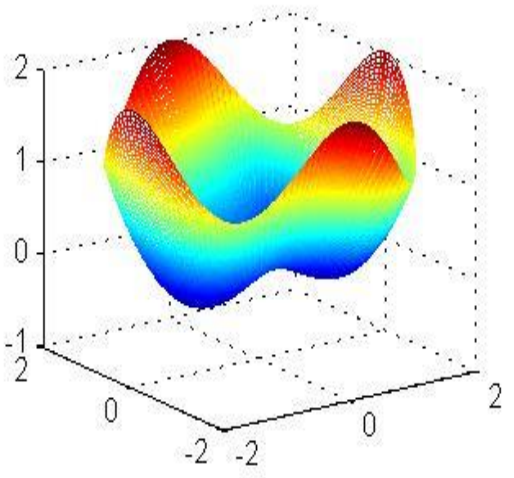
$z = \sqrt{1 - x^2 - y^2}$ 的等高线为 $1 - x^2 - y^2 = c, (0 \leq c \leq 1)$

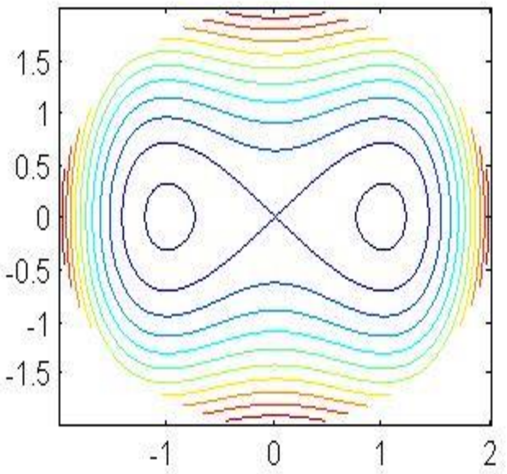


$$z=\frac{1}{\sqrt{1-x^2-y^2}}\text{的等高线为}\ \frac{1}{\sqrt{1-x^2-y^2}}=c,(c\geq 1)$$

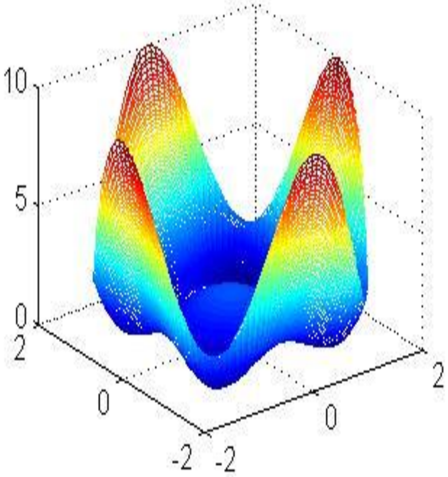


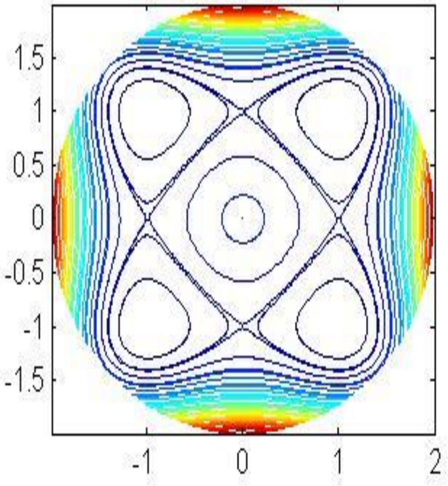
$$z=\frac{y^2}{2}-\frac{x^2}{2}+\frac{x^4}{4}\text{ 的等高线为 }\frac{y^2}{2}-\frac{x^2}{2}+\frac{x^4}{4}=c$$



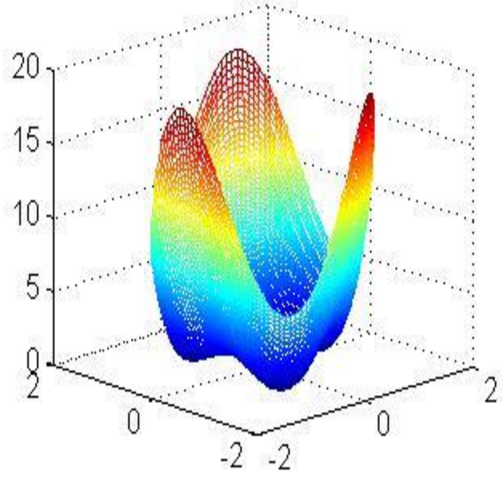


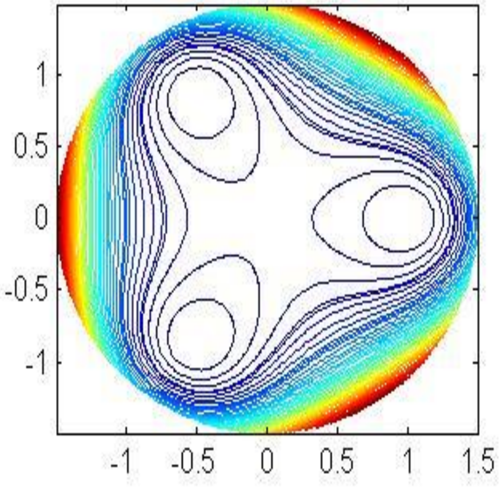
$$z = (x^2 - 1)^2 + (y^2 - 1)^2$$





$$z = [(x-1)^2 + y^2] * [(x+\frac{1}{2})^2 + (y - \frac{\sqrt{3}}{2})^2] * [(x+\frac{1}{2})^2 + (y + \frac{\sqrt{3}}{2})^2]$$





三元函数有等值面

如空间中的等温面，电场中的等势面，压力场中的等压面等等

四元函数有等值体