无穷小量的比较及应用

本段内容:

定义同阶无穷小量、高阶无穷小量和等价无穷小量

等价无穷小在极限运算中的使用

同一极限过程中的无穷小量的加法和乘法运算

设 α,β $(\beta \neq 0)$ 为某一极限过程中的两个无穷小量,即 $\lim_x \alpha = \lim_x \beta = 0$,

设 α, β ($\beta \neq 0$)为某一极限过程中的两个无穷小量, 即 $\lim_{n} \alpha = \lim_{n} \beta = 0$,

如果 $\lim_{x} \frac{\alpha}{\beta} = A \neq 0$,则称 α , β 为同阶无穷小.

设 α, β ($\beta \neq 0$)为某一极限过程中的两个无穷小量, 即 $\lim \alpha = \lim \beta = 0$,

如果
$$\lim_{x} \frac{\alpha}{\beta} = A \neq 0$$
,则称 α , β 为同阶无穷小.

特别地,如果 $\lim_{x} \frac{\alpha}{\beta} = 1$,则称 α , β 为等价无穷小,记作 $\alpha \sim \beta$.

设 $\alpha, \beta \ (\beta \neq 0)$ 为某一极限过程中的两个无穷小量, $\mathbb{P}\lim \alpha = \lim \beta = 0,$

如果
$$\lim_{x} \frac{\alpha}{\beta} = A \neq 0$$
,则称 α , β 为同阶无穷小.

特别地,如果 $\lim_{x} \frac{\alpha}{\beta} = 1$,则称 α , β 为等价无穷小,记作 $\alpha \sim \beta$.

如果
$$\lim_{x}\frac{\alpha}{\beta}=0$$
,则称 α 是 β 的高阶无穷小,记作 $\alpha=o(\beta)$.

设 $\alpha, \beta \ (\beta \neq 0)$ 为某一极限过程中的两个无穷小量, $\mathbb{P}\lim_{\alpha}\alpha=\lim_{\beta}\beta=0,$

如果
$$\lim_{x} \frac{\alpha}{\beta} = A \neq 0$$
,则称 α , β 为同阶无穷小.

特别地,如果
$$\lim_{x} \frac{\alpha}{\beta} = 1$$
,则称 α , β 为等价无穷小,记作 $\alpha \sim \beta$.

如果
$$\lim_{x}\frac{\alpha}{\beta}=0$$
,则称 α 是 β 的高阶无穷小,记作 $\alpha=o(\beta)$.

如果
$$\lim_{x} \frac{\alpha}{\beta^{k}} = A \neq 0$$
,则称 α 是 β 的 k 阶无穷小.

 $x \sim \sin x \quad (x \to 0)$

 $x \sim \sin x \quad (x \to 0)$

 $x \sim \tan x \quad (x \to 0)$

$$x \sim \sin x \quad (x \to 0)$$

$$x \sim \tan x \quad (x \to 0)$$

$$x \sim e^x - 1 \quad (x \to 0)$$

$$x \sim \sin x \quad (x \to 0)$$

$$x \sim \tan x \quad (x \to 0)$$

$$x \sim e^x - 1$$
 $(x \to 0)$

$$x \sim \ln(1+x) \quad (x \to 0)$$

$$x \sim \sin x \quad (x \to 0)$$

$$x \sim \tan x \quad (x \to 0)$$

$$x \sim e^x - 1 \quad (x \to 0)$$

$$x \sim \ln(1+x) \qquad (x \to 0)$$

$$x \sim \arcsin x \quad (x \to 0)$$

$$x \sim \sin x \quad (x \to 0)$$

$$x \sim \tan x \quad (x \to 0)$$

$$x \sim e^x - 1 \quad (x \to 0)$$

$$x \sim \ln(1+x) \qquad (x \to 0)$$

$$x \sim \arcsin x \quad (x \to 0)$$

$$x \sim \arctan x \quad (x \to 0)$$

$$x \sim \sin x \quad (x \to 0)$$

$$x \sim \tan x \quad (x \to 0)$$

$$x \sim e^x - 1 \quad (x o 0)$$

$$x \sim \ln(1+x) \quad (x \to 0)$$

$$x \sim \arcsin x \quad (x \to 0)$$

$$x \sim \arctan x \quad (x \to 0)$$

$$(1+x)^{\alpha}-1\sim \alpha x \hspace{0.5cm} (x o 0)$$

例如:
$$\lim_{x \to 0} \frac{\sin x \ln(1+x)}{2x^2} = \lim_{x \to 0} \frac{x \cdot x}{2x^2} = \frac{1}{2}$$

事实上.

例如
$$\lim_{x o 0}rac{\sin x\ln(1+x)}{2x^2}=\lim_{x o 0}rac{x\cdot x}{2x^2}=rac{1}{2}$$

$$\lim_{x \to 0} \frac{1}{2x^2} = \lim_{x \to 0} \frac{1}{2x^2} = \frac{1}{2}$$

$$2x^2$$
 $-\lim_{x o 0} 2x^2$ 2

如
$$\lim_{x \to 0} \frac{1}{2x^2} = \lim_{x \to 0} \frac{1}{2x^2} = \frac{1}{2}$$

 $\lim_{x \to 0} \frac{\sin x \ln(1+x)}{2x^2} = \lim_{x \to 0} \frac{\sin x}{x} \frac{\ln(1+x)}{x} \frac{x^2}{2x^2}$

 $\lim_{x \to 0} \frac{\arcsin^2 x}{x^2} = \lim_{x \to 0} \frac{x^2}{x^2} = 1.$

例如
$$\lim_{x o 0}rac{\sin x\ln(1+x)}{2x^2}=\lim_{x o 0}rac{x\cdot x}{2x^2}=rac{1}{2}$$

以如此
$$\lim_{x o 0}rac{\sin x \ln(x+x)}{2x^2}=\lim_{x o 0}rac{x}{2x^2}=rac{1}{2}$$

$$\lim_{x \to 0} \frac{1}{2x^2} = \lim_{x \to 0} \frac{1}{2x^2} = \frac{1}{2}$$

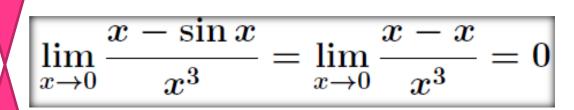
 $\lim_{x \to 0} \frac{\sin x \ln(1+x)}{2x^2} = \lim_{x \to 0} \frac{\sin x}{x} \frac{\ln(1+x)}{x} \frac{x^2}{2x^2}$

$$\lim_{x \to 0} \frac{1}{2x^2} = \lim_{x \to 0} \frac{1}{2x^2} = \frac{1}{2}$$

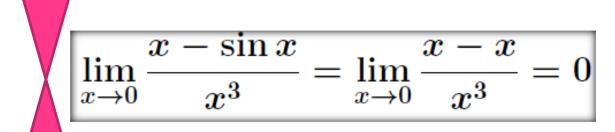
事实上,

$$\sin x \ln(1 \pm x)$$
 x

无穷小代换只能用于极限过程中的乘、除法中, 不能用于加、减法中. 无穷小代换只能用于极限过程中的乘、除法中, 不能用于加、减法中.



无穷小代换只能用于极限过程中的乘、除法中, 不能用于加、减法中.



事实上,
$$\lim_{x\to 0}\frac{x-\sin x}{x^3}=\frac{1}{6}.$$

例: $x \to 0$ 时, $x^3 \in x$ 的 3 阶无穷小.

$$x \rightarrow 0, \ \alpha = o(x^2), \ \beta = o(x^3)$$

$$\Rightarrow$$
 $\alpha + eta = o(x^2)$, $\alpha \cdot eta = o(x^5)$

$$x o 0, \ lpha = o(x^2), \ eta = o(x^3)$$
 $\Rightarrow \alpha + \beta = o(x^2), \ \alpha \cdot \beta = o(x^5)$ i.E. $\lim \frac{\alpha}{-} = 0$ $\lim \frac{\beta}{-} = 0 \Rightarrow$

$$\begin{array}{c} x \to 0, \ \alpha = o(x^2), \ \beta = o(x^3) \\ \Rightarrow \boxed{\alpha + \beta = o(x^2)}, \ \boxed{\alpha \cdot \beta = o(x^2)} \\ \lim_{x \to 0} \frac{\alpha}{x^2} = 0 \quad \lim_{x \to 0} \frac{\beta}{x^3} = 0 \Rightarrow \end{array}$$

$$\lim_{x o 0} \frac{lpha + eta}{x^2} = \lim_{x o 0} \frac{lpha}{x^2} + \lim_{x o 0} rac{eta}{x^2}$$

$$x \to 0, \ \alpha = o(x^2), \ \beta = o(x^3)$$

$$\Rightarrow \alpha + \beta = o(x^2), \ \alpha \cdot \beta = o(x^5)$$

$$\lim_{x \to 0} \frac{\alpha}{x^2} = 0 \quad \lim_{x \to 0} \frac{\beta}{x^3} = 0 \Rightarrow$$

$$egin{align} \widetilde{\mathbb{H}} : & \lim_{x o 0} \dfrac{lpha}{x^2} = 0 & \lim_{x o 0} \dfrac{eta}{x^3} = 0 \Rightarrow \ & \lim_{x o 0} \dfrac{lpha + eta}{x^2} = \lim_{x o 0} \dfrac{lpha}{x^2} + \lim_{x o 0} \dfrac{eta}{x^2} \ \end{aligned}$$

 $= \lim_{x \to 0} \frac{o(x^2)}{x^2} + \lim_{x \to 0} \frac{o(x^3)}{x^2} = 0 + 0 = 0.$

$$x
ightarrow 0, \, lpha = o(x^2), \, eta = o(x^3)$$

i.e. $\lim_{n \to 0} \frac{\alpha}{n^2} = 0$ $\lim_{n \to 0} \frac{\beta}{n^3} = 0 \Rightarrow$

$$x
ightarrow 0, \, lpha = o(x^2), \, eta = o(x^3)$$

$$x \to 0, \ \alpha = o(x^2), \ \beta = o(x^3)$$

ルカ小里的母子
$$r o 0$$
 $\alpha = a(x^2)$ $\beta = a(x^3)$

$$x
ightarrow 0$$
 , $lpha = lpha(x^2)$, $eta = lpha(x^3)$

无穷小里的运算
$$0 \sim 10^{-6} (m^2)$$
 $3 \sim 10^{-6} (m^3)$

 $egin{aligned} &\lim_{x o 0}rac{lpha\cdoteta}{x^5}=\lim_{x o 0}rac{lpha}{x^2}rac{eta}{x^3}\ &=\lim_{x o 0}rac{o(x^2)}{x^2}\lim_{x o 0}rac{o(x^3)}{x^3}=0. \end{aligned}$













本段要点:

同阶无穷小量、高阶无穷小量和等价无穷小量的概念

等价无穷小在极限的乘除法运算中可以代换,在加减法中通常不能代换

同一极限过程中的无穷小量的加法结果为较低阶, 乘法结果为阶数之和







