下面是一些关键的步骤，解法可能并不唯一，而且未必最简洁，只算是提供一个思路吧。部分题目可能稍难， 不必泄气，这并不代表考试难度。我的本意只是让你们开阔下思路，绝无为难大家之意。如果做得不好，不必过于在意。

希望你们期中都能取得满意的成绩！

1. ✍ 注意到

$$1 \leq (1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n})^{\frac{1}{n}} \leq n^{\frac{1}{n}} \qquad \lim_{n\to\infty} 1 = \lim_{n\to\infty} n^{\frac{1}{n}} = 1$$

由夹逼定理即得.

2. ✍ 当$\alpha \leq 0$时，结论显然成立.下设$0<\alpha<1$. 因为

$$0 < (n+1)^{\alpha} - n^{\alpha} = n^{\alpha}[(1+\frac{1}{n})^{\alpha}-1] < n^{\alpha}[(1+\frac{1}{n})^{1}-1] = \frac{1}{n^{1-\alpha}}$$

以及$\lim\limits_{n\to\infty} 0 = \lim\limits_{n\to\infty} n^{1-\alpha} = 0$.

3. ✍ 因为

$$\frac{1}{2n} \leq \frac{3}{2}\times\frac{5}{4}\times\frac{7}{6}\times\cdots\times\frac{2n-1}{2n-2}\times\frac{1}{2n} = \frac{1}{2}\times\frac{3}{4}\times\frac{5}{6}\times\cdots\times\frac{2n-3}{2n-2}\times\frac{2n-1}{2n} \leq 1$$

而且

$$\lim_{n\to\infty}(\frac{1}{2n})^{\frac{1}{n}} = \lim_{n\to\infty} 1^{\frac{1}{n}} = 1$$

.

4. ✍ 注意到当$n>2$时,

$$n! < 1!+2!+\cdots+(n-2)!+(n-1)!+n! \leq (n-2)(n-2)!+(n-1)!+n! < 2(n-1)!+n!$$

因此，当$n>2$时,

$$1 < \frac{1!+2!+\cdots+n!}{n!} < \frac{2(n-1)!+n!}{n!} = 1+\frac{2}{n}$$

而$\lim\limits_{n\to\infty} 1 = \lim\limits_{n\to\infty}(1+\frac{2}{n}) = 1$.

6. ✍ 注意到

$$\lim_{x\to 0}(\cos x)^{\frac{1}{x^2}} = \lim_{x\to 0}[(1+\cos x-1)^{\frac{1}{\cos x-1}}]^{\frac{\cos x-1}{x^2}} = [\lim_{x\to 0}(1+\cos x-1)^{\frac{1}{\cos x-1}}]^{\lim\limits_{x\to 0}\frac{\cos x-1}{x^2}} = e^{-\frac{1}{2}}$$

7. ✍ 注意到

$$\lim_{x\to\infty}(\sin\frac{1}{x}+\cos\frac{1}{x})^{x} = \lim_{x\to\infty}\{[1+(\sin\frac{1}{x}+\cos\frac{1}{x}-1)]^{\frac{1}{\sin\frac{1}{x}+\cos\frac{1}{x}-1}}\}^{x(\sin\frac{1}{x}+\cos\frac{1}{x}-1)}$$

而

$$\lim_{x\to\infty} x(\sin\frac{1}{x}+\cos\frac{1}{x}-1)=\lim_{x\to\infty}(\frac{\sin\frac{1}{x}}{\frac{1}{x}}+\frac{\cos\frac{1}{x}-1}{\frac{1}{x}})=1+0=1$$

因此 $\lim\limits_{x\to\infty}(\sin\frac{1}{x}+\cos\frac{1}{x})^x=e$

8. ✍

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x-\tan x}{x^3}=\lim_{x\to 0}[(\frac{\sin x}{x})(\frac{1}{\cos x})(\frac{\cos x-1}{x^2})]=-\frac{1}{2}$$

9. ✍ 做变量替换$y=(x+1)^{\frac{1}{6}}$.

5. ✍ 提示：用数学归纳法容易证明$\frac{1}{2}\le x_n\le 1(n=0,1,2,\cdots)$.
记$x=\frac{\sqrt{5}-1}{2}$.显然有

$$x=\frac{1}{x+1},\qquad x>\frac{1}{2}$$

因此

$$\mid x_n - x\mid=\mid\frac{1}{1+x_n}-\frac{1}{x+1}\mid=\frac{\mid x_{n-1}-x\mid}{(1+x_{n-1})(1+x)}\le\frac{4}{9}\mid x_{n-1}-x\mid\le(\frac{4}{9})^n\mid x_0-x\mid$$

由夹逼定理不难得到结论.