事件的分解 $A=A\cap S=A\cap(B\cup B^c)$
$=(AB)\cap(AB^c)$

排列(permutation) 相异 $P_n^k=n(n-1)\cdots(n-k+1)$

组合(combination) 无异 $C_n^k=\binom{n}{k}=\frac{n(n-1)\cdots(n-k+1)}{n!}$

$\Pr(A\cup B)=\Pr(A)+\Pr(B)-\Pr(AB)$

$\Pr(\bigcup_{i=1}^{n}A_i)=\sum_{i=1}^{n}\Pr(A_i)-\sum_{i<j}\Pr(A_iA_j)+\cdots+(-1)^{n+1}\Pr(A_1A_2\cdots A_n)$

条件概率

$\Pr(A|B)=\frac{\Pr(AB)}{\Pr(B)} \Rightarrow \Pr(A|B)\cdot\Pr(B)=\Pr(AB)$

$\Pr(A)=\Pr(AB)+\Pr(AB^c)$

$\Rightarrow \Pr(A|B)\cdot\Pr(B)=\Pr(B|A)\cdot\Pr(A)$

$\Pr(A_1A_2\cdots A_n)=\Pr(A_1)\cdot\Pr(A_2|A_1)\cdots\Pr(A_n|A_1A_2\cdots A_{n-1})$

独立(independent) $\Pr(AB)=\Pr(A)\Pr(B)$
(3个事件，两两独立和三者独立都要证明哦)

条件独立 $P(A_1A_2\cdots A_n|B)=P(A_1|B)\cdots P(A_n|B)$
$P(A_2|A_1B)=P(A_2|B)$

全概率 $\Pr(A)=\sum_{j=1}^{k}\Pr(B_j)\Pr(A|B_j)$

Bayes' Theorem $\Pr(B_i|A)=\frac{\Pr(A|B_i)\cdot\Pr(B_i)}{\sum_{j=1}^{k}\Pr(B_j)\Pr(A|B_j)}$

离散 { 概率函数 p.f.(和为1)；分布函数 d.f. 和 } 二元 多元

连续 { 概率密度函数 p.d.f.(积分为1)；分布函数 d.f. 积 导 }

边际 {
- 边际概率函数(离) $f_1(x)=\sum_y f(x,y)$, $f_2(y)=\sum_x f(x,y)$
- 边际概率密度函数(连) $f_1(x)=\int_{-\infty}^{\infty}f(x,y)dy$, $f_2(x)=\int_{-\infty}^{\infty}f(x,y)dx$
- $\int f_1(x)dx=\int f_2(y)dy=1$
- 边际分布函数 $F_1(x)=\lim_{y\to\infty}F(x,y)$, $F_2(x)=\lim_{x\to\infty}F(x,y)$

条件分布：条件概率/概率密度函数 $g_1(x|y)=\frac{f(x,y)}{f_2(y)}$, $g_2(y|x)=\frac{f(x,y)}{f_1(x)}$

$\Rightarrow g_1(x|y)f_2(y)=g_2(y|x)f_1(x)$ $\int g_1(x|y)dx=\int g_2(y|x)dy=1.$ 多元

独立 $f(x,y)=f_1(x)f_2(y)$
$\Rightarrow g_1(x|y)=f_1(x)$ $\Rightarrow g_2(y|x)=f_2(y)$

独立同分布(i.i.d.) 独立，都有相同p.f./p.d.f.
$g(x_1,\ldots,x_n)=f(x_1)\cdots f(x_n)$ random sample

函数变换 $Y=r(X)$

离：$g(y)=\sum_{r(x)=y}f(x)$ (满足$r(x)=y$的和)

连：$G(y)=\int_{\{x|r(x)\le y\}}f(x)dx$ (满足$r(x)\le y$积分)
$g(y)=G'(y)$

$Y=r(X) \Rightarrow X=s(Y)$ 反函数

$r(x)$单增 $G(y)=F(s(y))$, $g(y)=f[s(y)]\cdot s'(y)$

$r(x)$单减 $G(y)=1-F(s(y))$, $g(y)=-f[s(y)]\cdot s'(y)$

多元 $g(y_1,\ldots,y_n)=f[s_1(y_1,\ldots,y_n),\ldots,s_n(y_1,\ldots,y_n)]\cdot|J|$
(可构造一个新变量求联合，再求边际)

期望(expectation/mean) $E(X)=\sum_x xf(x)$
(绝对收敛时存在) $E(X)=\int_{-\infty}^{\infty}xf(x)dx$

函数变换 $\int_{-\infty}^{\infty}y f_Y(y)dy=E(Y)=E(r(X))=\int_{-\infty}^{\infty}r(x)f(x)dx$

$\Rightarrow Y=r(X_1,\ldots,X_n)$ $E(Y)=\underbrace{\int\cdots\int}_{n}r(x_1,\ldots,x_n)f(x_1,\ldots,x_n)dx_1\ldots dx_n$

$E(a_1X_1+a_2X_2+\cdots+a_nX_n+b)=a_1E(X_1)+\cdots+a_nE(X_n)+b$

独立 $\Rightarrow E(X_1\cdots X_n)=E(X_1)\cdots E(X_n)$

方差(Variance) $Var(X)=E[(X-\mu)^2]$

$Var(aX+b)=a^2Var(X)$

$Var(X)=E(X^2)-[E(X)]^2$ ★

独立 $\Rightarrow Var(a_1X_1+\cdots+a_nX_n+b)=a_1^2Var(X_1)+\cdots+a_n^2Var(X_n)$

协方差(Covariance) $Cov(X,Y)=E[(X-\mu_X)(Y-\mu_Y)]$

$Cov(X,Y)=E(XY)-E(X)E(Y)$

相关系数(Correlation coefficient) $\rho(X,Y)=\frac{Cov(X,Y)}{\sigma_X\sigma_Y}$ $-1\le\rho(X,Y)\le1$

$\rho\begin{cases}1 & \text{正线性}\\ 0<\ <1 & \text{正相关}\\ 0 & \text{不相关}\\ -1<\ <0 & \text{负相关}\\ -1 & \text{负线性.}\end{cases}$ 独立 $\underset{\not\Leftarrow}{\Rightarrow}$ 不相关

$Var(X+Y)=Var(X)+Var(Y)+2Cov(X,Y)$

$Var(aX+bY+c)=a^2Var(X)+b^2Var(Y)+2ab\,Cov(X,Y)$

$Var(X_1+\cdots+X_n)=Var(X_1)+\cdots+Var(X_n)+2\sum\sum_{i<j}Cov(X_i,X_j)$

样本均值(Sample mean) $\bar X_n=\frac{1}{n}(X_1+\cdots+X_n)$
$E(\bar X_n)=\mu$ $Var(\bar X_n)=\frac{1}{n}\sigma^2$

Schwarz $[E(UV)]^2\le E(U^2)E(V^2)$ 造$X=aU+V$ $Var\ge0$ $\Delta\le0\Rightarrow a$

Markov $\Pr(X\ge t)=\frac{E(X)}{t}$ 扔掉小于t的部分，将x缩小到t

Chebyshev $\Pr(|X-E(X)|\ge t)\le\frac{Var(X)}{t^2}$ $Y=[X-E(X)]^2$ 用Markov

大数定律(Law of Large Number) $\bar X_n\xrightarrow{P}\mu$
$(\lim_{n\to\infty}\Pr(|\bar X_n-\mu|<\varepsilon)=1\ \ \forall\varepsilon>0)$

$\boxed{\lim\Pr(|Z_n-b|<\varepsilon)=1,\ Z_n\xrightarrow{P}b,\ g(Z_n)\xrightarrow{P}g(b)}$

条件期望 $E(Y|X=x)=\begin{cases}\sum_y yg(y|x) & \text{离}\\ \int_{-\infty}^{\infty}yg(y|x)dy & \text{连}\end{cases}$

迭代期望公式 $E[E(Y|X)]=E(Y)$

条件方差 $Var(Y|X=x)=\begin{cases}\sum_y(y-E(Y|X=x))^2g(y|x) & \text{离}\\ \int_{-\infty}^{\infty}(y-E(Y|X=x))^2g(y|x)dy & \text{连}\end{cases}$

$Var(Y|X)=E(Y^2|X)-[E(Y|X)]^2$ ★

Eve's Law $Var(Y)=E[Var(Y|X)]+Var[E(Y|X)]$

均匀分布(uniform distribution)
子集概率和区间长度/区域面积成正比
$f(x)=\begin{cases}\frac{1}{b-a}\ /\ \frac{1}{S}\\ 0 & \text{otherwise}\end{cases}$

伯努利分布/二元分布(Bernoulli distribution)
$f(x)=\begin{cases}p^xq^{1-x} & x=0,1\\ 0 & \text{otherwise}\end{cases}$ $E(X)=p$ $Var(X)=p(1-p)$

二项分布(Binomial distribution) $X\sim B(n,p)$
$f(x)=\begin{cases}\binom{n}{x}p^xq^{1-x} & x=0,1,\ldots,n\\ 0 & \text{otherwise}\end{cases}$ $E(X)=np$ $Var(X)=np(1-p)$

泊松分布(Poisson distribution) 某一时段，某一现象发生的次数
$f(x)=\begin{cases}\frac{e^{-\lambda}\cdot\lambda^x}{x!} & x=0,1,\ldots,n\\ 0 & \text{otherwise}\end{cases}$ $E(X)=\lambda$ $Var(X)=\lambda$ (用$E(X(X-1))$)

指数分布(Exponential distribution)
$f(x)=\begin{cases}\beta e^{-\beta x} & x>0\\ 0 & \text{otherwise}\end{cases}$ $E(X)=\frac{1}{\beta}$ $Var(X)=\frac{1}{\beta^2}$

无记忆性
$\Pr(X\ge t)=\int_t^{\infty}\beta e^{-\beta x}dx=e^{-\beta t}$
$\Pr(X\ge t+h|X\ge t)=\frac{e^{-\beta(t+h)}}{e^{-\beta t}}=e^{-\beta h}=\Pr(X\ge h)$

正态分布(Normal distribution) $X\sim N(\mu,\sigma^2)$
$f(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}e^{-\frac{1}{2}(\frac{x-\mu}{\sigma})^2}$ $-\infty<x<\infty$ $E(X)=\mu$ $Var(X)=\sigma^2$

线性：$Y=aX+b \Rightarrow Y\sim N(a\mu+b,a^2\sigma^2)$
独立的正态分布的$X_1,\ldots,X_n$线性组合仍正态

标准化(Standardize) $Z=\frac{X-\mu}{\sigma}$ $Z\sim N(0,1)$

中心极限定理：$\bar X_n$服从正态分布(可估计n) 求X分布
$\mu=\frac{1}{n}(\mu_1+\cdots+\mu_n)$, $\sigma^2=\frac{1}{n^2}(\sigma_1^2+\cdots+\sigma_n^2)$

二元正态分布 (独=不相关) $\begin{pmatrix}X_1\\X_2\end{pmatrix}\sim N\left[\begin{pmatrix}\mu_1\\\mu_2\end{pmatrix},\begin{pmatrix}\sigma_1^2 & \rho\sigma_1\sigma_2\\ \rho\sigma_1\sigma_2 & \sigma_2^2\end{pmatrix}\right]$

$X_1=\sigma_1Z_1+\mu_1$ $X_2=\sigma_2[\rho Z_1+\sqrt{1-\rho^2}Z_2]+\mu_2$

$E(X_1)=\mu_1$ $E(X_2)=\mu_2$
$Var(X_1)=\sigma_1^2$ $Var(X_2)=\sigma_2^2$
$Cov(X_1,X_2)=\rho\sigma_1\sigma_2$ $\rho(X_1,X_2)=\rho$

二元 $\Downarrow$ 线性 求Var

$f(x_1,x_2)=g(z_1(x_1,x_2),z_2(x_1,x_2))\cdot|J|$
$=\frac{1}{2\pi\sqrt{1-\rho^2}\cdot\sigma_1\sigma_2}e^{\left\{-\frac{1}{2(1-\rho^2)}\left[(\frac{x_1-\mu_1}{\sigma_1})^2-2\rho(\frac{x_1-\mu_1}{\sigma_1})(\frac{x_2-\mu_2}{\sigma_2})+(\frac{x_2-\mu_2}{\sigma_2})^2\right]\right\}}$

$X_1=x_1$时 $X_2|X_1=x_1=\sqrt{1-\rho^2}\sigma_2Z_2+\mu_2+\rho\sigma_2(\frac{x_1-\mu_1}{\sigma_1})$
$E(X_2|X_1=x_1)=\mu_2+\rho\sigma_2(\frac{x_1-\mu_1}{\sigma_1})$
$Var(X_2|X_1=x_1)=(1-\rho^2)\sigma_2^2$

$X_2=x_2$时同理.
二元正态分布的边际分布也是正态分布.

Max: $G_n(y)=\Pr(Y_n\le y)=\Pr(X_1\le y,\ldots,X_n\le y)=(F(y))^n$

Min: $G_1(y)=\Pr(Y_1\le y)=1-\Pr(Y_1\ge y)$
$=1-\Pr(X_1\ge y,\ldots,X_n\ge y)$
$=1-[1-F(y)]^n$

joint: $G(y_1,y_n)=\Pr(Y_1\le y_1,Y_n\le y_n)$
$=\Pr(Y_n\le y_n)-\Pr(Y_1\ge y_1,Y_n\le y_n)$
$=[F(y_n)]^n-[F(y_n)-F(y_1)]^n$

range: $Z=Y_n-Y_1$ $W=Y_1$
$f(y_1,y_n)=n(n-1)[F(y_n)-F(y_1)]^{n-2}$
$g(Z,W)=n(n-1)Z^{n-2}$
$g_1(Z)=\int_0^{1-Z}n(n-1)Z^{n-2}dW=n(n-1)Z^{n-2}(1-Z)$

顾客 $N\sim Poisson(\lambda)$ $X|N\sim Binomial(N,p)$
$E(X)=E[E(X|N)]=E[Np]=pE(N)=p\lambda$
$Var(X)=E[Var(X|N)]+Var[E(X|N)]$
$=E(Np(1-p))+Var(Np)$
$=p(1-p)E(N)+p^2Var(N)$
$=p\lambda$