向量的内积(数量积)

例子 力对质点做功

力 $\vec{f}$ 对质点作用,使其从A点沿直线运动到B点,问力 $\vec{f}$ 做了多少功?



#### 例子 力对质点做功

力 $\vec{f}$ 对质点作用,使其从A点沿直线运动到B点,问力 $\vec{f}$ 做了多少功?

记路径矢量 $\overrightarrow{AB}$ 为 $\overrightarrow{s}$ , 力 $\overrightarrow{f}$ 与路径 $\overrightarrow{s}$ 直接的夹角为 $(\overrightarrow{f}, \overrightarrow{s}), (0 \leq (\overrightarrow{f}, \overrightarrow{s}) \leq \pi)$ ,

则功
$$W = |\vec{f}|\cos(\vec{f}, \vec{s})|\vec{s}|$$



### 例子 力对质点做功

力 $\vec{f}$ 对质点作用,使其从A点沿直线运动到B点,问力 $\vec{f}$ 做了多少功?

记路径矢量 $\overrightarrow{AB}$ 为 $\overrightarrow{s}$ , 力 $\overrightarrow{f}$ 与路径 $\overrightarrow{s}$ 直接的夹角为 $(\overrightarrow{f}, \overrightarrow{s}), (0 \le (\overrightarrow{f}, \overrightarrow{s}) \le \pi)$ ,

则功
$$W = |\vec{f}|\cos(\vec{f}, \vec{s})|\vec{s}|$$



这种两向量运算结果为标量的运算,具有广泛的数学背景和应用背景。

#### 定义

两个向量 $\vec{a}$ ,  $\vec{b}$ 的内积(数量积)是一个实数,

其值为 $|\vec{a}||\vec{b}|\cos(\vec{a},\vec{b})$ ,记作 $\vec{a}\cdot\vec{b}=|\vec{a}||\vec{b}|\cos(\vec{a},\vec{b})$ 。

两个向量 $\vec{a}$ , $\vec{b}$ 的内积  $\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| |\vec{b}| \cos(\vec{a}, \vec{b})$ 

可以看作是它们夹角的一种度量,即 $\cos(\vec{a}, \vec{b}) = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}||\vec{b}|}.$ 

两个向量 $\vec{a}$ , $\vec{b}$ 的内积  $\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| |\vec{b}| \cos(\vec{a}, \vec{b})$ 

可以看作是它们夹角的一种度量,即
$$\cos(\vec{a}, \vec{b}) = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}||\vec{b}|}$$
.

根据余弦定理
$$|\vec{b} - \vec{a}|^2 = |\vec{a}|^2 + |\vec{b}|^2 - 2|\vec{a}||\vec{b}|\cos(\vec{a}, \vec{b}) = |\vec{a}|^2 + |\vec{b}|^2 - 2\vec{a} \cdot \vec{b},$$

两个向量 $\vec{a}$ ,  $\vec{b}$ 的内积  $\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| |\vec{b}| \cos(\vec{a}, \vec{b})$ 

可以看作是它们夹角的一种度量,即
$$\cos(\vec{a}, \vec{b}) = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}||\vec{b}|}$$
.

可以看作是它们夹角的一种度量,即
$$\cos(\vec{a}, \vec{b}) = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}||\vec{b}|}$$
. 注 根据余弦定理 $|\vec{b} - \vec{a}|^2 = |\vec{a}|^2 + |\vec{b}|^2 - 2|\vec{a}||\vec{b}|\cos(\vec{a}, \vec{b}) = |\vec{a}|^2 + |\vec{b}|^2 - 2\vec{a} \cdot \vec{b}$ , 
$$\mathbb{D}\vec{a} \cdot \vec{b} = \frac{1}{2}(|\vec{a}|^2 + |\vec{b}|^2 - |\vec{b} - \vec{a}|^2).$$

两个向量 $\vec{a}$ ,  $\vec{b}$ 的内积  $\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| |\vec{b}| \cos(\vec{a}, \vec{b})$ 

如果向量记为坐标形式 $\vec{a} = \{a_x, a_y, a_z\}, \vec{b} = \{b_x, b_y, b_z\},$ 则

可以看作是它们夹角的一种度量,即
$$\cos(\vec{a}, \vec{b}) = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}||\vec{b}|}$$
.

 $\vec{b} - \vec{a} = \{b_x - a_x, b_y - a_y, b_z - a_z\}$ 

根据余弦定理
$$|\vec{b} - \vec{a}|^2 = |\vec{a}|^2 + |\vec{b}|^2 - 2|\vec{a}||\vec{b}|\cos(\vec{a}, \vec{b}) = |\vec{a}|^2 + |\vec{b}|^2 - 2\vec{a} \cdot \vec{b},$$





$$|ec{b}| |ec{b}| \cos(ec{a}, ec{b})$$

个向量
$$ec{a},ec{b}$$
的内积  $ec{a}\cdotec{b}=|ec{a}||ec{b}|\cos(ec{a},ec{b})$ 

 $\mathbb{D}\vec{a} \cdot \vec{b} = \frac{1}{2}(|\vec{a}|^2 + |\vec{b}|^2 - |\vec{b} - \vec{a}|^2).$ 

两个向量 $\vec{a}$ ,  $\vec{b}$ 的内积  $\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| |\vec{b}| \cos(\vec{a}, \vec{b})$ 

可以看作是它们夹角的一种度量,即
$$\cos(\vec{a}, \vec{b}) = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}||\vec{b}|}$$
.

根据余弦定理
$$|\vec{b} - \vec{a}|^2 = |\vec{a}|^2 + |\vec{b}|^2 - 2|\vec{a}||\vec{b}|\cos(\vec{a}, \vec{b}) = |\vec{a}|^2 + |\vec{b}|^2 - 2\vec{a} \cdot \vec{b},$$
 
$$\qquad \qquad \mathbb{D}\vec{a} \cdot \vec{b} = \frac{1}{2}(|\vec{a}|^2 + |\vec{b}|^2 - |\vec{b} - \vec{a}|^2).$$

如果向量记为坐标形式 $\vec{a} = \{a_x, a_y, a_z\}, \vec{b} = \{b_x, b_y, b_z\},$ 则

$$\vec{b} - \vec{a} = \{b_x - a_x, b_y - a_y, b_z - a_z\}$$

$$\Rightarrow |\vec{b} - \vec{a}|^2 = (b_x - a_x)^2 + (b_y - a_y)^2 + (b_z - a_z)^2,$$

注

两个向量 $\vec{a}$ ,  $\vec{b}$ 的内积  $\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| |\vec{b}| \cos(\vec{a}, \vec{b})$ 

可以看作是它们夹角的一种度量,即 $\cos(\vec{a}, \vec{b}) = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}||\vec{b}|}$ .

注  
根据余弦定理
$$|\vec{b} - \vec{a}|^2 = |\vec{a}|^2 + |\vec{b}|^2 - 2|\vec{a}||\vec{b}|\cos(\vec{a}, \vec{b}) = |\vec{a}|^2 + |\vec{b}|^2 - 2\vec{a} \cdot \vec{b},$$

即
$$ec{a}\cdotec{b}=rac{1}{2}(|ec{a}|^2+|ec{b}|^2-|ec{b}-ec{a}|^2).$$

如果向量记为坐标形式 $\vec{a} = \{a_x, a_y, a_z\}, \vec{b} = \{b_x, b_y, b_z\},$ 则

最初に対象に対象に対象には、
$$\vec{b}-\vec{a}=\{b_x-a_x,b_y-a_y,b_z-a_z\}$$

$$\Rightarrow |\vec{b} - \vec{a}|^2 = (b_x - a_x)^2 + (b_y - a_y)^2 + (b_z - a_z)^2,$$

又因为 $|\vec{a}|^2 = a_x^2 + a_y^2 + a_z^2, |\vec{b}|^2 = b_x^2 + b_y^2 + b_z^2,$ 所以

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = \frac{1}{2} \{ a_x^2 + a_y^2 + a_z^2 + b_x^2 + b_y^2 + b_z^2 - (b_x - a_x)^2 - (b_y - a_y)^2 - (b_z - a_z)^2 \}$$

两个向量 $\vec{a}$ ,  $\vec{b}$ 的内积  $\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| |\vec{b}| \cos(\vec{a}, \vec{b})$ 

可以看作是它们夹角的一种度量,即 $\cos(\vec{a}, \vec{b}) = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{c}||\vec{k}|}$ .

汪  
根据余弦定理
$$|\vec{b} - \vec{a}|^2 = |\vec{a}|^2 + |\vec{b}|^2 - 2|\vec{a}||\vec{b}|\cos(\vec{a}, \vec{b}) = |\vec{a}|^2 + |\vec{b}|^2 - 2\vec{a} \cdot \vec{b},$$

即 $\vec{a} \cdot \vec{b} = \frac{1}{2}(|\vec{a}|^2 + |\vec{b}|^2 - |\vec{b} - \vec{a}|^2).$  如果向量记为坐标形式 $\vec{a} = \{a_x, a_y, a_z\}, \vec{b} = \{b_x, b_y, b_z\},$ 则

$$\vec{b}-\vec{a}=\{b_x-a_x,b_y-a_y,b_z-a_z\}$$

$$\Rightarrow |\vec{b} - \vec{a}|^2 = (b_x - a_x)^2 + (b_y - a_y)^2 + (b_z - a$$

 $\vec{a} \cdot \vec{b} = a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z$ 

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z$$

它们的夹角满足
$$\cos(\vec{a}, \vec{b}) = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}||\vec{b}|} = \frac{a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z}{\sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2} \sqrt{b_x^2 + b_y^2 + b_z^2}}$$

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z$$

它们的夹角满足
$$\cos(\vec{a}, \vec{b}) = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}||\vec{b}|} = \frac{a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z}{\sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2} \sqrt{b_x^2 + b_y^2 + b_z^2}}$$

质点受力为
$$\vec{f} = 2\vec{i} + 4\vec{j} + 6\vec{k}$$
,作了位移为 $\vec{s} = 3\vec{i} + 2\vec{j} - \vec{k}$ ,则此力所做了功为

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z$$

它们的夹角满足
$$\cos(\vec{a}, \vec{b}) = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}||\vec{b}|} = \frac{a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z}{\sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2} \sqrt{b_x^2 + b_y^2 + b_z^2}}$$

质点受力为
$$\vec{f} = 2\vec{i} + 4\vec{j} + 6\vec{k}$$
,作了位移为 $\vec{s} = 3\vec{i} + 2\vec{j} - \vec{k}$ ,

则此力所做了功为

$$W = \vec{f} \cdot \vec{s} = 2 \cdot 3 + 4 \cdot 2 + 6 \cdot (-1) = 8.$$

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z$$

它们的夹角满足
$$\cos(\vec{a}, \vec{b}) = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}||\vec{b}|} = \frac{a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z}{\sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2} \sqrt{b_x^2 + b_y^2 + b_z^2}}$$

例

质点受力为
$$\vec{f} = 2\vec{i} + 4\vec{j} + 6\vec{k}$$
,作了位移为 $\vec{s} = 3\vec{i} + 2\vec{j} - \vec{k}$ ,则此力所做了功为

 $W = \vec{f} \cdot \vec{s} = 2 \cdot 3 + 4 \cdot 2 + 6 \cdot (-1) = 8.$ 

例  
向量
$$ec{a}=ec{i}+ec{j}-4ec{k}$$
与 $ec{b}=ec{i}-2ec{j}+2ec{k}$ 之间的夹角满足

向量
$$\vec{a} = i + j - 4k$$
与 $b = i - 2j + 2k$ 之间的夹角满足
$$\cos(\vec{a}, \vec{b}) = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}||\vec{b}|} = \frac{1 \cdot 1 + 1 \cdot (-2) + (-4) \cdot 2}{\sqrt{1^2 + 1^2 + 4^2} \cdot \sqrt{1^2 + 2^2 + 2^2}} = \frac{1 - 2 - 8}{\sqrt{8} \cdot \sqrt{9}} = -\frac{1}{\sqrt{2}},$$

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z$$

它们的夹角满足
$$\cos(\vec{a}, \vec{b}) = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}||\vec{b}|} = \frac{a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z}{\sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2} \sqrt{b_x^2 + b_y^2 + b_z^2}}$$

则此力所做了功为

$$W = \vec{f} \cdot \vec{s} = 2 \cdot 3 + 4 \cdot 2 + 6 \cdot (-1) = 8.$$

 $\mathbb{D}(\vec{a} \cdot \vec{b}) = \arccos\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}\right) = \frac{3\pi}{4}.$ 

例  
向量
$$\vec{a} = \vec{i} + \vec{j} - 4\vec{k}$$
与 $\vec{b} = \vec{i} - 2\vec{j} + 2\vec{k}$ 之间的夹角满足  
$$\cos(\vec{a}, \vec{b}) = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}||\vec{b}|} = \frac{1 \cdot 1 + 1 \cdot (-2) + (-4) \cdot 2}{\sqrt{1^2 + 1^2 + 4^2} \cdot \sqrt{1^2 + 2^2 + 2^2}} = \frac{1 - 2 - 8}{\sqrt{8} \cdot \sqrt{9}} = -\frac{1}{\sqrt{2}},$$

例  
质点受力为
$$\vec{f} = 2\vec{i} + 4\vec{j} + 6\vec{k}$$
,作了位移为 $\vec{s} = 3\vec{i} + 2\vec{j} - \vec{k}$ ,

 $\vec{a} = \{a_x, a_y, a_z\}, \vec{b} = \{b_x, b_y, b_z\}$  $\vec{a} \cdot \vec{b} = a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z$ 根据内积的坐标表示法,

易见内积运算具有如下性质:

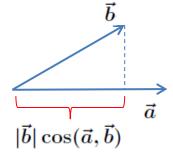
 $\vec{a} = \{a_x, a_y, a_z\}, \vec{b} = \{b_x, b_y, b_z\}$ 根据内积的坐标表示法,

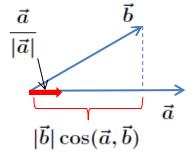
易见内积运算具有如下性质:

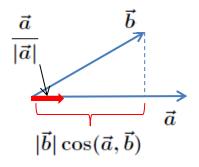
 $\vec{a} \cdot \vec{b} = a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z$ 

 $\textcircled{1}\vec{a}\cdot\vec{b}=\vec{b}\cdot\vec{a},$ ② $(\vec{a} + \vec{b}) \cdot \vec{c} = \vec{a} \cdot \vec{c} + \vec{b} \cdot \vec{c}$ (分配律)

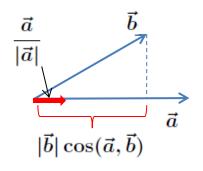
 $(3(\lambda \vec{a}) \cdot \vec{b} = \lambda \vec{a} \cdot \vec{b},$  $\vec{\mathbf{a}} \cdot \vec{a} = |\vec{a}|^2$ 



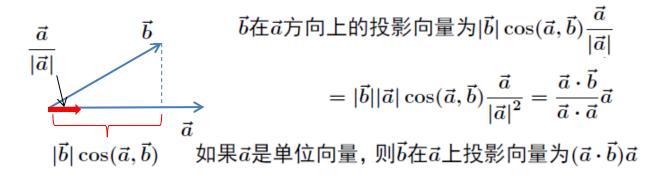


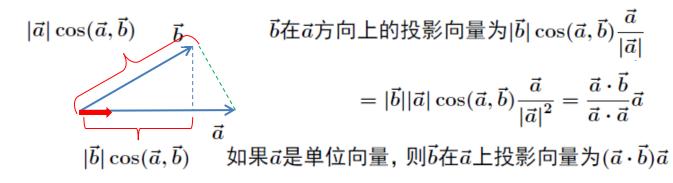


 $\vec{b}$ 在 $\vec{a}$ 方向上的投影向量为 $|\vec{b}|\cos(\vec{a},\vec{b})\frac{\vec{a}}{|\vec{a}|}$ 

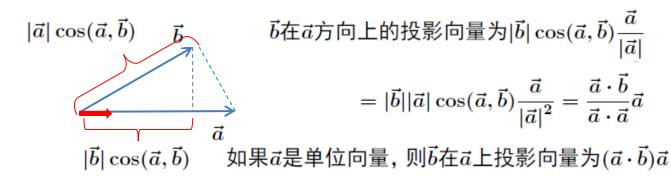


 $\vec{b}$ 在 $\vec{a}$ 方向上的投影向量为 $|\vec{b}|\cos(\vec{a},\vec{b})\frac{\vec{a}}{|\vec{a}|}$  $=|\vec{b}||\vec{a}|\cos(\vec{a},\vec{b})\frac{\vec{a}}{|\vec{a}|^2}=\frac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{\vec{a}\cdot\vec{a}}\vec{a}$ 

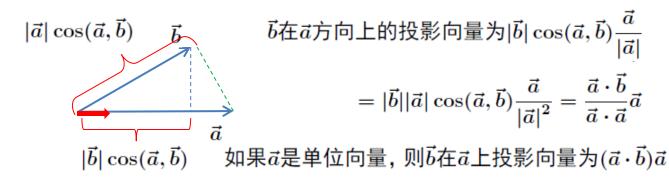




 $ec{a}$ 在 $ec{b}$ 方向上的投影向量为 $|ec{a}|\cos(ec{a},ec{b})rac{ec{b}}{|ec{b}|}$ 

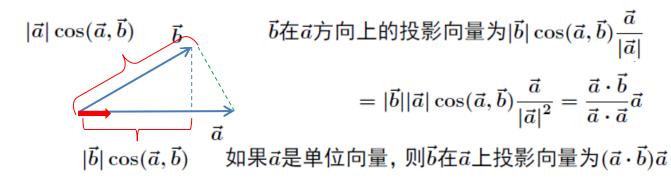


$$\vec{a}$$
在 $\vec{b}$ 方向上的投影向量为 $|\vec{a}|\cos(\vec{a},\vec{b})\frac{\vec{b}}{|\vec{b}|}$ 
$$= |\vec{a}||\vec{b}|\cos(\vec{a},\vec{b})\frac{\vec{b}}{|\vec{b}|^2} = \frac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{\vec{b}\cdot\vec{b}}\vec{b}$$



$$\vec{a}$$
在 $\vec{b}$ 方向上的投影向量为 $|\vec{a}|\cos(\vec{a},\vec{b})\frac{\vec{b}}{|\vec{b}|}$ 
$$= |\vec{a}||\vec{b}|\cos(\vec{a},\vec{b})\frac{\vec{b}}{|\vec{b}|^2} = \frac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{\vec{b}\cdot\vec{b}}\vec{b}$$

如果 $\vec{b}$ 是单位向量,则 $\vec{a}$  在 $\vec{b}$ 上投影向量为 $(\vec{a} \cdot \vec{b})\vec{b}$ 



$$\vec{a}$$
在 $\vec{b}$ 方向上的投影向量为 $|\vec{a}|\cos(\vec{a},\vec{b})\frac{\vec{b}}{|\vec{b}|}$ 

$$= |\vec{a}||\vec{b}|\cos(\vec{a},\vec{b})\frac{\vec{b}}{|\vec{b}|^2} = \frac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{\vec{b}\cdot\vec{b}}\vec{b}$$

如果 $\vec{b}$ 是单位向量,则 $\vec{a}$  在 $\vec{b}$ 上投影向量为 $(\vec{a} \cdot \vec{b})\vec{b}$ 

 $\vec{a}$ 在某单位向量 $\vec{e}$ 上的投影向量 $(\vec{a} \cdot \vec{e})\vec{e}$ ,其长度为 $|(\vec{a} \cdot \vec{e})|$ ,代数长度为 $\vec{a} \cdot \vec{e}$ 

②设向量 $\vec{a}$ ,  $\vec{b}$ 非零,则 $\vec{a} \perp \vec{b} \Leftrightarrow \vec{a} \cdot \vec{b} = 0 \Leftrightarrow a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z = 0$ .

②设向量 $\vec{a}$ ,  $\vec{b}$ 非零,则 $\vec{a} \perp \vec{b} \Leftrightarrow \vec{a} \cdot \vec{b} = 0 \Leftrightarrow a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z = 0$ .

例 求xoy平面上的单位向量,使它与向量 $\vec{a} = \{-4, 3, 7\}$ 垂直。

②设向量 $\vec{a}$ ,  $\vec{b}$ 非零,则 $\vec{a} \perp \vec{b} \Leftrightarrow \vec{a} \cdot \vec{b} = 0 \Leftrightarrow a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z = 0$ .

例 求xoy平面上的单位向量,使它与向量 $\vec{a} = \{-4, 3, 7\}$ 垂直。

解: 设所求向量为 $\vec{b} = \{x, y, 0\},$ 

②设向量 $\vec{a}$ ,  $\vec{b}$ 非零,则 $\vec{a} \perp \vec{b} \Leftrightarrow \vec{a} \cdot \vec{b} = 0 \Leftrightarrow a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z = 0$ .

例 求xoy平面上的单位向量,使它与向量 $\vec{a} = \{-4, 3, 7\}$ 垂直。

解: 设所求向量为 $\vec{b} = \{x, y, 0\}$ ,

 $\vec{a} \perp \vec{b} \Rightarrow -4x + 3y = 0$ 

②设向量 $\vec{a}$ ,  $\vec{b}$ 非零,则 $\vec{a} \perp \vec{b} \Leftrightarrow \vec{a} \cdot \vec{b} = 0 \Leftrightarrow a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z = 0$ .

例 求xoy平面上的单位向量, 使它与向量 $\vec{a} = \{-4, 3, 7\}$ 垂直。

解: 设所求向量为 $\vec{b} = \{x, y, 0\},$ 

 $\vec{a} \perp \vec{b} \Rightarrow -4x + 3y = 0$ 

 $|\vec{b}| = 1 \Rightarrow x^2 + y^2 = 1$ 

②设向量
$$\vec{a}$$
,  $\vec{b}$ 非零,则 $\vec{a} \perp \vec{b} \Leftrightarrow \vec{a} \cdot \vec{b} = 0 \Leftrightarrow a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z = 0$ .

求xoy平面上的单位向量, 使它与向量 $\vec{a} = \{-4, 3, 7\}$ 垂直。

解: 设所求向量为
$$\vec{b} = \{x, y, 0\},$$

$$\vec{a} \perp \vec{b} \Rightarrow -4x + 3y = 0$$

$$+ \delta y = 0$$

$$|\vec{b}| = 1 \Rightarrow x^2 + y^2 = 1$$

所以 
$$\begin{cases} 3y &= 4x \\ x^2 + y^2 &= 1 \end{cases}, y = \frac{3}{4}x, x^2 + \frac{16}{9}x^2 = 1, x = \pm \frac{3}{5}, y = \pm \frac{4}{5}$$

②设向量
$$\vec{a}$$
,  $\vec{b}$ 非零, 则 $\vec{a} \perp \vec{b} \Leftrightarrow \vec{a} \cdot \vec{b} = 0 \Leftrightarrow a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z = 0$ .

求xoy平面上的单位向量, 使它与向量 $\vec{a} = \{-4, 3, 7\}$ 垂直。

解: 设所求向量为
$$\vec{b} = \{x, y, 0\}$$
,

设所米回重万
$$b = \{x, y, 0\},$$
  $\vec{a} \perp \vec{b} \Rightarrow -4x + 3y = 0$ 

$$\vec{a} \perp \vec{b} \Rightarrow -4x + 3y = 0$$

$$|\vec{b}| = 1 \Rightarrow x^2 + y^2 = 1$$

所以 
$$\begin{cases} 3y &= 4x \\ x^2 + y^2 &= 1 \end{cases}, y = \frac{3}{4}x, x^2 + \frac{16}{9}x^2 = 1, x = \pm \frac{3}{5}, y = \pm \frac{4}{5} \end{cases}$$

故所求向量为
$$\vec{b_1} = \{\frac{3}{5}, \frac{4}{5}, 0\}$$

$$\{\frac{3}{5}, \frac{4}{5}, 0\}$$

$$\vec{\mathfrak{g}}\vec{b_2} = \{-\frac{3}{5}, -\frac{4}{5}, 0\}$$

已知向量 $|\vec{a}| = 2, |\vec{b}| = 1, (\vec{a}, \vec{b}) = \frac{\pi}{3},$  求 $\overrightarrow{A} = 2\vec{a} + 3\vec{b}$ 与 $\overrightarrow{B} = 3\vec{a} - \vec{b}$  之间的夹角 $(\overrightarrow{A}, \overrightarrow{B})$ .

例

已知向量
$$|\vec{a}|=2, |\vec{b}|=1, (\vec{a}, \vec{b})=\frac{\pi}{3},$$
 求 $\overrightarrow{A}=2\vec{a}+3\vec{b}$ 与 $\overrightarrow{B}=3\vec{a}-\vec{b}$  之间的夹角 $(\overrightarrow{A}, \overrightarrow{B}).$ 

例

 $\cos(\overrightarrow{A},\overrightarrow{B}) = \frac{\overrightarrow{A} \cdot \overrightarrow{B}}{|\overrightarrow{A}| \cdot |\overrightarrow{B}|}$ 

已知向量 $|\vec{a}| = 2, |\vec{b}| = 1, (\vec{a}, \vec{b}) = \frac{\pi}{2},$ 求 $\overrightarrow{A} = 2\overrightarrow{a} + 3\overrightarrow{b}$ 与 $\overrightarrow{B} = 3\overrightarrow{a} - \overrightarrow{b}$  之间的夹角( $\overrightarrow{A}$ ,  $\overrightarrow{B}$ ).

 $|\vec{a}| = 2, |\vec{b}| = 1, (\vec{a}, \vec{b}) = \frac{\pi}{2}, \ |\vec{a} \cdot \vec{b}| = |\vec{a}| |\vec{b}| \cos(\vec{a}, \vec{b}) = 2 \cdot 1 \cdot \frac{1}{2} = 1$ 

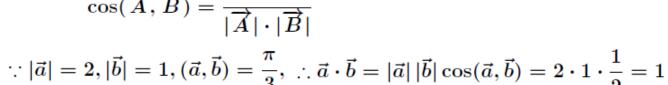
$$\cos(\overrightarrow{A}, \overrightarrow{B}) = \frac{\overrightarrow{A} \cdot \overrightarrow{B}}{|\overrightarrow{A}| \cdot |\overrightarrow{B}|}$$

已知向量 $|\vec{a}| = 2, |\vec{b}| = 1, (\vec{a}, \vec{b}) = \frac{\pi}{2},$ 求 $\overrightarrow{A} = 2\overrightarrow{a} + 3\overrightarrow{b}$ 与 $\overrightarrow{B} = 3\overrightarrow{a} - \overrightarrow{b}$  之间的夹角( $\overrightarrow{A}$ ,  $\overrightarrow{B}$ ).

$$\cos(\overrightarrow{A}, \overrightarrow{B}) = \frac{\overrightarrow{A} \cdot \overrightarrow{B}}{|\overrightarrow{A}| \cdot |\overrightarrow{B}|}$$

例









 $\overrightarrow{A} \cdot \overrightarrow{B} = (2\vec{a} + 3\vec{b}) \cdot (3\vec{a} - \vec{b})$ 

已知向量 $|\vec{a}| = 2, |\vec{b}| = 1, (\vec{a}, \vec{b}) = \frac{\pi}{2},$ 求 $\overrightarrow{A} = 2\overrightarrow{a} + 3\overrightarrow{b}$ 与 $\overrightarrow{B} = 3\overrightarrow{a} - \overrightarrow{b}$  之间的夹角( $\overrightarrow{A}$ ,  $\overrightarrow{B}$ ).

$$\cos(\overrightarrow{A}, \overrightarrow{B}) = \frac{\overrightarrow{A} \cdot \overrightarrow{B}}{|\overrightarrow{A}| \cdot |\overrightarrow{B}|}$$

 $\overrightarrow{A} \cdot \overrightarrow{B} = (2\vec{a} + 3\vec{b}) \cdot (3\vec{a} - \vec{b}) = 6|\vec{a}|^2 - 3|\vec{b}|^2 + 7\vec{a} \cdot \vec{b}$ 

$$\cos(\overrightarrow{A}, \overrightarrow{B}) = \frac{\overrightarrow{A} \cdot \overrightarrow{B}}{|\overrightarrow{A}| \cdot |\overrightarrow{B}|}$$

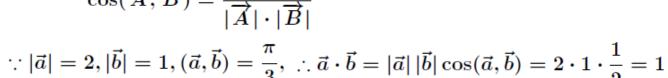
$$\therefore |\overrightarrow{a}| = 2, |\overrightarrow{b}| = 1, (\overrightarrow{a}, \overrightarrow{b}) = \frac{\pi}{3}, \ \therefore \overrightarrow{a} \cdot \overrightarrow{b} = |\overrightarrow{a}| |\overrightarrow{b}| \cos(\overrightarrow{a}, \overrightarrow{b}) = 2 \cdot 1 \cdot \frac{1}{2} = 1$$

已知向量 $|\vec{a}| = 2, |\vec{b}| = 1, (\vec{a}, \vec{b}) = \frac{\pi}{2},$ 求 $\overrightarrow{A} = 2\overrightarrow{a} + 3\overrightarrow{b}$ 与 $\overrightarrow{B} = 3\overrightarrow{a} - \overrightarrow{b}$  之间的夹角( $\overrightarrow{A}$ ,  $\overrightarrow{B}$ ).  $\cos(\overrightarrow{A}, \overrightarrow{B}) = \frac{\overrightarrow{A} \cdot \overrightarrow{B}}{|\overrightarrow{A}| \cdot |\overrightarrow{B}|}$ 

= 24 - 3 + 7 = 28

例

解:



 $\overrightarrow{A} \cdot \overrightarrow{B} = (2\overrightarrow{a} + 3\overrightarrow{b}) \cdot (3\overrightarrow{a} - \overrightarrow{b}) = 6|\overrightarrow{a}|^2 - 3|\overrightarrow{b}|^2 + 7\overrightarrow{a} \cdot \overrightarrow{b}$ 

已知向量 $|\vec{a}| = 2, |\vec{b}| = 1, (\vec{a}, \vec{b}) = \frac{\pi}{2},$ 求 $\overrightarrow{A} = 2\vec{a} + 3\vec{b} = 3\vec{a} - \vec{b}$  之间的夹角( $\overrightarrow{A}, \overrightarrow{B}$ ).  $\cos(\overrightarrow{A}, \overrightarrow{B}) = \frac{\overrightarrow{A} \cdot \overrightarrow{B}}{|\overrightarrow{A}| \cdot |\overrightarrow{B}|}$ 

= 24 - 3 + 7 = 28

例

$$,|ec{b}$$

- $|\vec{a}| = 2, |\vec{b}| = 1, (\vec{a}, \vec{b}) = \frac{\pi}{2}, \ |\vec{a} \cdot \vec{b}| = |\vec{a}| |\vec{b}| \cos(\vec{a}, \vec{b}) = 2 \cdot 1 \cdot \frac{1}{2} = 1$

 $|\overrightarrow{A}|^2 = \overrightarrow{A} \cdot \overrightarrow{A} = (2\overrightarrow{a} + 3\overrightarrow{b}) \cdot (2\overrightarrow{a} + 3\overrightarrow{b})$ 

- $\overrightarrow{A} \cdot \overrightarrow{B} = (2\overrightarrow{a} + 3\overrightarrow{b}) \cdot (3\overrightarrow{a} \overrightarrow{b}) = 6|\overrightarrow{a}|^2 3|\overrightarrow{b}|^2 + 7\overrightarrow{a} \cdot \overrightarrow{b}$

已知向量 $|\vec{a}| = 2, |\vec{b}| = 1, (\vec{a}, \vec{b}) = \frac{\pi}{2},$ 求 $\overrightarrow{A} = 2\vec{a} + 3\vec{b} = 3\vec{a} - \vec{b}$  之间的夹角( $\overrightarrow{A}, \overrightarrow{B}$ ).  $\cos(\overrightarrow{A}, \overrightarrow{B}) = \frac{\overrightarrow{A} \cdot \overrightarrow{B}}{|\overrightarrow{A}| \cdot |\overrightarrow{B}|}$ 

= 24 - 3 + 7 = 28

 $\overrightarrow{A} \cdot \overrightarrow{B} = (2\overrightarrow{a} + 3\overrightarrow{b}) \cdot (3\overrightarrow{a} - \overrightarrow{b}) = 6|\overrightarrow{a}|^2 - 3|\overrightarrow{b}|^2 + 7\overrightarrow{a} \cdot \overrightarrow{b}$ 

 $|\vec{A}|^2 = \vec{A} \cdot \vec{A} = (2\vec{a} + 3\vec{b}) \cdot (2\vec{a} + 3\vec{b}) = 4|\vec{a}|^2 + 9|\vec{b}|^2 + 12\vec{a} \cdot \vec{b}$ 

$$(\vec{A}, \vec{B}) = \frac{\vec{A} \cdot |\vec{B}|}{|\vec{A}| \cdot |\vec{B}|}$$

$$(\vec{a}, \vec{b}) = \frac{\pi}{2}, \ \vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| \, |\vec{b}| \cos(\vec{a}, \vec{b}) = 2 \cdot 1 \cdot \frac{1}{2} = 1$$

已知向量
$$|\vec{a}| = 2, |\vec{b}| = 1, (\vec{a}, \vec{b}) = \frac{\pi}{3},$$
  
求 $\vec{A} = 2\vec{a} + 3\vec{b}$ 与 $\vec{B} = 3\vec{a} - \vec{b}$  之间的夹角 $(\vec{A}, \vec{B})$ .  

$$\cos(\vec{A}, \vec{B}) = \frac{\vec{A} \cdot \vec{B}}{|\vec{A}| \cdot |\vec{B}|}$$

= 24 - 3 + 7 = 28

= 16 + 6 + 12 = 37

例

解:

$$|A| \cdot |B|$$

$$\therefore |\vec{a}| = 2, |\vec{b}| = 1, (\vec{a}, \vec{b}) = \frac{\pi}{2}, \ \therefore \vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| |\vec{b}| \cos(\vec{a}, \vec{b}) = 2 \cdot 1 \cdot \frac{1}{2} = 1$$



 $\overrightarrow{A} \cdot \overrightarrow{B} = (2\overrightarrow{a} + 3\overrightarrow{b}) \cdot (3\overrightarrow{a} - \overrightarrow{b}) = 6|\overrightarrow{a}|^2 - 3|\overrightarrow{b}|^2 + 7\overrightarrow{a} \cdot \overrightarrow{b}$ 

 $|\vec{A}|^2 = \vec{A} \cdot \vec{A} = (2\vec{a} + 3\vec{b}) \cdot (2\vec{a} + 3\vec{b}) = 4|\vec{a}|^2 + 9|\vec{b}|^2 + 12\vec{a} \cdot \vec{b}$ 



已知向量 $|\vec{a}| = 2, |\vec{b}| = 1, (\vec{a}, \vec{b}) = \frac{\pi}{2},$ 求 $\overrightarrow{A} = 2\overrightarrow{a} + 3\overrightarrow{b} = 3\overrightarrow{a} - \overrightarrow{b}$  之间的夹角( $\overrightarrow{A}$ ,  $\overrightarrow{B}$ ).  $\cos(\overrightarrow{A}, \overrightarrow{B}) = \frac{\overrightarrow{A} \cdot \overrightarrow{B}}{|\overrightarrow{A}| \cdot |\overrightarrow{B}|}$ 

= 24 - 3 + 7 = 28

= 16 + 6 + 12 = 37

 $|\vec{A}|^2 = \vec{A} \cdot \vec{A} = (2\vec{a} + 3\vec{b}) \cdot (2\vec{a} + 3\vec{b}) = 4|\vec{a}|^2 + 9|\vec{b}|^2 + 12\vec{a} \cdot \vec{b}$ 

例

$$\cos(|ec{b}|)$$

- $|\vec{a}| = 2, |\vec{b}| = 1, (\vec{a}, \vec{b}) = \frac{\pi}{2}, \ \ \vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| \, |\vec{b}| \cos(\vec{a}, \vec{b}) = 2 \cdot 1 \cdot \frac{1}{2} = 1$
- $\overrightarrow{A} \cdot \overrightarrow{B} = (2\overrightarrow{a} + 3\overrightarrow{b}) \cdot (3\overrightarrow{a} \overrightarrow{b}) = 6|\overrightarrow{a}|^2 3|\overrightarrow{b}|^2 + 7\overrightarrow{a} \cdot \overrightarrow{b}$

 $|\overrightarrow{B}|^2 = \overrightarrow{B} \cdot \overrightarrow{B} = (3\overrightarrow{a} - \overrightarrow{b}) \cdot (3\overrightarrow{a} - \overrightarrow{b})$ 

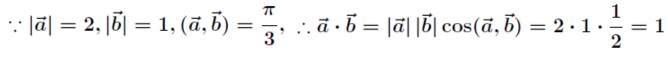
已知向量 $|\vec{a}| = 2, |\vec{b}| = 1, (\vec{a}, \vec{b}) = \frac{\pi}{2},$ 求 $\overrightarrow{A} = 2\vec{a} + 3\vec{b} = 3\vec{a} - \vec{b}$  之间的夹角( $\overrightarrow{A}, \overrightarrow{B}$ ).  $\cos(\overrightarrow{A}, \overrightarrow{B}) = \frac{\overrightarrow{A} \cdot \overrightarrow{B}}{|\overrightarrow{A}| \cdot |\overrightarrow{B}|}$ 

= 24 - 3 + 7 = 28

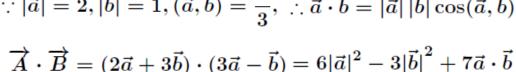
= 16 + 6 + 12 = 37

 $|\vec{A}|^2 = \vec{A} \cdot \vec{A} = (2\vec{a} + 3\vec{b}) \cdot (2\vec{a} + 3\vec{b}) = 4|\vec{a}|^2 + 9|\vec{b}|^2 + 12\vec{a} \cdot \vec{b}$ 

 $|\overrightarrow{B}|^2 = \overrightarrow{B} \cdot \overrightarrow{B} = (3\vec{a} - \vec{b}) \cdot (3\vec{a} - \vec{b}) = 9|\vec{a}|^2 + |\vec{b}|^2 - 6\vec{a} \cdot \vec{b}$ 







已知向量
$$|\vec{a}| = 2, |\vec{b}| = 1, (\vec{a}, \vec{b}) = \frac{\pi}{3},$$
  
求 $\overrightarrow{A} = 2\vec{a} + 3\vec{b}$ 与 $\overrightarrow{B} = 3\vec{a} - \vec{b}$  之间的夹角 $(\overrightarrow{A}, \overrightarrow{B})$ .  

$$\cos(\overrightarrow{A}, \overrightarrow{B}) = \frac{\overrightarrow{A} \cdot \overrightarrow{B}}{|\overrightarrow{A}| \cdot |\overrightarrow{B}|}$$

= 24 - 3 + 7 = 28

= 16 + 6 + 12 = 37

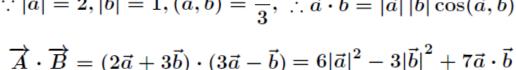
= 36 + 1 - 6 = 31

 $|\vec{A}|^2 = \vec{A} \cdot \vec{A} = (2\vec{a} + 3\vec{b}) \cdot (2\vec{a} + 3\vec{b}) = 4|\vec{a}|^2 + 9|\vec{b}|^2 + 12\vec{a} \cdot \vec{b}$ 

 $|\overrightarrow{B}|^2 = \overrightarrow{B} \cdot \overrightarrow{B} = (3\vec{a} - \vec{b}) \cdot (3\vec{a} - \vec{b}) = 9|\vec{a}|^2 + |\vec{b}|^2 - 6\vec{a} \cdot \vec{b}$ 

例

$$|\vec{a}| = 2, |\vec{b}| = 1, (\vec{a}, \vec{b}) = \frac{\pi}{3}, \ |\vec{a} \cdot \vec{b}| = |\vec{a}| |\vec{b}| \cos(\vec{a}, \vec{b}) = 2 \cdot 1 \cdot \frac{1}{2} = 1$$



已知向量 $|\vec{a}| = 2, |\vec{b}| = 1, (\vec{a}, \vec{b}) = \frac{\pi}{2},$ 求 $\overrightarrow{A} = 2\overrightarrow{a} + 3\overrightarrow{b} = 3\overrightarrow{a} - \overrightarrow{b}$  之间的夹角( $\overrightarrow{A}$ ,  $\overrightarrow{B}$ ).

$$\cos(\overrightarrow{A}, \overrightarrow{B}) = \frac{\overrightarrow{A} \cdot \overrightarrow{B}}{|\overrightarrow{A}| \cdot |\overrightarrow{B}|} = \frac{28}{\sqrt{31 \cdot 37}}$$

例

$$|\vec{a}| = 2, |\vec{b}| = 1, (\vec{a}, \vec{b}) = \frac{\pi}{3}, \ \ \vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| \, |\vec{b}| \cos(\vec{a}, \vec{b}) = 2 \cdot 1 \cdot \frac{1}{2} = 1$$

$$\overrightarrow{A} \cdot \overrightarrow{B} = (2\vec{a} + 3\vec{b}) \cdot (3\vec{a} - \vec{b}) = 6|\vec{a}|^2 - 3|\vec{b}|^2 + 7\vec{a} \cdot \vec{b}$$
$$= 24 - 3 + 7 = 28$$

$$=24-3+7=28$$
 
$$\left|\overrightarrow{A}\right|^2=\overrightarrow{A}\cdot\overrightarrow{A}=(2\vec{a}+3\vec{b})\cdot(2\vec{a}+3\vec{b})=4|\vec{a}|^2+9|\vec{b}|^2+12\vec{a}\cdot\vec{b}$$

$$\overrightarrow{A} \cdot \overrightarrow{A} = (2\vec{a} + 3\vec{b}) \cdot (2\vec{a} + 3\vec{b}) = 4|\vec{a}|^2 + 9|\vec{b}|^2 + 12\vec{a} \cdot \vec{b}$$

$$= 16 + 6 + 12 = 37$$

$$\cdot \overrightarrow{B} = (3\vec{a} - \vec{b}) \cdot (3\vec{a} - \vec{b}) = 9|\vec{a}|^2 + |\vec{b}|^2 - 6\vec{a} \cdot \vec{b}$$

$$= 16 + 6 + 12 = 37$$

$$|\overrightarrow{B}|^{2} = \overrightarrow{B} \cdot \overrightarrow{B} = (3\vec{a} - \vec{b}) \cdot (3\vec{a} - \vec{b}) = 9|\vec{a}|^{2} + |\vec{b}|^{2} - 6\vec{a} \cdot \vec{b}$$

$$= 36 + 1 - 6 = 31$$

已知向量 $|\vec{a}| = 2, |\vec{b}| = 1, (\vec{a}, \vec{b}) = \frac{\pi}{3},$ 求 $\overrightarrow{A} = 2\vec{a} + 3\vec{b}$ 与 $\overrightarrow{B} = 3\vec{a} - \vec{b}$  之间的夹角 $(\overrightarrow{A}, \overrightarrow{B})$ .

 $\cos(\overrightarrow{A}, \overrightarrow{B}) = \frac{\overrightarrow{A} \cdot \overrightarrow{B}}{|\overrightarrow{A}| \cdot |\overrightarrow{B}|} = \frac{28}{\sqrt{31 \cdot 37}} \qquad (\overrightarrow{A}, \overrightarrow{B}) = \arccos = \frac{28}{\sqrt{31 \cdot 37}}.$ 

 $|\overrightarrow{A}|^2 = \overrightarrow{A} \cdot \overrightarrow{A} = (2\vec{a} + 3\vec{b}) \cdot (2\vec{a} + 3\vec{b}) = 4|\vec{a}|^2 + 9|\vec{b}|^2 + 12\vec{a} \cdot \vec{b}$ = 16 + 6 + 12 = 37

= 16 + 6 + 12 = 37  $|\overrightarrow{B}|^{2} = \overrightarrow{B} \cdot \overrightarrow{B} = (3\vec{a} - \vec{b}) \cdot (3\vec{a} - \vec{b}) = 9|\vec{a}|^{2} + |\vec{b}|^{2} - 6\vec{a} \cdot \vec{b}$  = 36 + 1 - 6 = 31

例

例 设 $\vec{a} = \{3, 4, -4\}, \vec{b} = \{1, 1, 1\}, \vec{x}\vec{a}$ 在 $\vec{b}$ 方向的投影代数长度。

例 设 $\vec{a} = \{3, 4, -4\}, \vec{b} = \{1, 1, 1\}, 求 \vec{a} \times \vec{b}$ 方向的投影代数长度。

$$ec{a}$$
在 $ec{b}$ 方向的投影代数长度为 $ec{a}\cdotrac{ec{b}}{|ec{b}|}$ 

例 设 $\vec{a} = \{3, 4, -4\}, \vec{b} = \{1, 1, 1\}, 求 \vec{a} \times \vec{b}$ 方向的投影代数长度。

$$ec{a}$$
在 $ec{b}$ 方向的投影代数长度为 $ec{a}\cdotrac{ec{b}}{|ec{b}|}$ 

$$= \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{b}|} = \frac{3+4-4}{\sqrt{1+1+1}} = \sqrt{3}.$$

