向量的内积(数量积)

例子　　　力对质点做功

力$\vec{f}$对质点作用，使其从A点沿直线运动到B点，问力$\vec{f}$做了多少功？

例子　　力对质点做功

力$\vec{f}$对质点作用，使其从A点沿直线运动到B点，问力$\vec{f}$做了多少功？

记路径矢量$\overrightarrow{AB}$为$\vec{s}$，力$\vec{f}$与路径$\vec{s}$直接的夹角为$(\vec{f},\vec{s}),(0\le(\vec{f},\vec{s})\le\pi)$,

则功$W=\underline{|\vec{f}|\cos(\vec{f},\vec{s})|\vec{s}|}$

例子　　力对质点做功

力$\vec{f}$对质点作用，使其从A点沿直线运动到B点，问力$\vec{f}$做了多少功？

记路径矢量$\overrightarrow{AB}$为$\vec{s}$，力$\vec{f}$与路径$\vec{s}$直接的夹角为$(\vec{f},\vec{s}),(0\leq(\vec{f},\vec{s})\leq\pi)$，

则功$W=\underline{|\vec{f}|\cos(\vec{f},\vec{s})|\vec{s}|}$

这种两向量运算结果为标量的运算，具有广泛的数学背景和应用背景。

定义

两个向量$\vec{a},\vec{b}$的内积(数量积)是一个实数，

其值为$|\vec{a}||\vec{b}|\cos(\vec{a},\vec{b})$,记作$\boxed{\vec{a}\cdot\vec{b}=|\vec{a}||\vec{b}|\cos(\vec{a},\vec{b})}$。

注

两个向量$\vec{a},\vec{b}$的内积 $\vec{a}\cdot\vec{b}=|\vec{a}||\vec{b}|\cos(\vec{a},\vec{b})$

可以看作是它们夹角的一种度量，即$\cos(\vec{a},\vec{b})=\dfrac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{a}||\vec{b}|}$.

注

两个向量$\vec{a},\vec{b}$的内积 $\vec{a}\cdot\vec{b}=|\vec{a}||\vec{b}|\cos(\vec{a},\vec{b})$

可以看作是它们夹角的一种度量，即$\cos(\vec{a},\vec{b})=\dfrac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{a}||\vec{b}|}$.

注

根据余弦定理$|\vec{b}-\vec{a}|^2=|\vec{a}|^2+|\vec{b}|^2-2|\vec{a}||\vec{b}|\cos(\vec{a},\vec{b})=|\vec{a}|^2+|\vec{b}|^2-2\vec{a}\cdot\vec{b}$,

注

两个向量$\vec{a},\vec{b}$的内积 $\vec{a}\cdot\vec{b}=|\vec{a}||\vec{b}|\cos(\vec{a},\vec{b})$

可以看作是它们夹角的一种度量，即$\cos(\vec{a},\vec{b})=\dfrac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{a}||\vec{b}|}$.

注

根据余弦定理$|\vec{b}-\vec{a}|^2=|\vec{a}|^2+|\vec{b}|^2-2|\vec{a}||\vec{b}|\cos(\vec{a},\vec{b})=|\vec{a}|^2+|\vec{b}|^2-2\vec{a}\cdot\vec{b}$,

$$\text{即}\vec{a}\cdot\vec{b}=\frac{1}{2}(|\vec{a}|^2+|\vec{b}|^2-|\vec{b}-\vec{a}|^2).$$

注

两个向量$\vec{a},\vec{b}$的内积 $\vec{a}\cdot\vec{b}=|\vec{a}||\vec{b}|\cos(\vec{a},\vec{b})$

可以看作是它们夹角的一种度量，即$\cos(\vec{a},\vec{b})=\dfrac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{a}||\vec{b}|}$.

注

根据余弦定理$|\vec{b}-\vec{a}|^2=|\vec{a}|^2+|\vec{b}|^2-2|\vec{a}||\vec{b}|\cos(\vec{a},\vec{b})=|\vec{a}|^2+|\vec{b}|^2-2\vec{a}\cdot\vec{b}$,

$$\text{即}\vec{a}\cdot\vec{b}=\frac{1}{2}(|\vec{a}|^2+|\vec{b}|^2-|\vec{b}-\vec{a}|^2).$$

如果向量记为坐标形式$\vec{a}=\{a_x,a_y,a_z\},\vec{b}=\{b_x,b_y,b_z\}$, 则

$\vec{b}-\vec{a}=\{b_x-a_x,b_y-a_y,b_z-a_z\}$

注

两个向量$\vec{a},\vec{b}$的内积 $\vec{a}\cdot\vec{b}=|\vec{a}||\vec{b}|\cos(\vec{a},\vec{b})$

可以看作是它们夹角的一种度量，即$\cos(\vec{a},\vec{b})=\dfrac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{a}||\vec{b}|}$.

注

根据余弦定理$|\vec{b}-\vec{a}|^2=|\vec{a}|^2+|\vec{b}|^2-2|\vec{a}||\vec{b}|\cos(\vec{a},\vec{b})=|\vec{a}|^2+|\vec{b}|^2-2\vec{a}\cdot\vec{b}$,

$$\text{即}\vec{a}\cdot\vec{b}=\frac{1}{2}(|\vec{a}|^2+|\vec{b}|^2-|\vec{b}-\vec{a}|^2).$$

如果向量记为坐标形式$\vec{a}=\{a_x,a_y,a_z\},\vec{b}=\{b_x,b_y,b_z\}$, 则

$$\vec{b}-\vec{a}=\{b_x-a_x,b_y-a_y,b_z-a_z\}$$

$$\Rightarrow |\vec{b}-\vec{a}|^2=(b_x-a_x)^2+(b_y-a_y)^2+(b_z-a_z)^2,$$

注

两个向量$\vec{a},\vec{b}$的内积 $\vec{a}\cdot\vec{b}=|\vec{a}||\vec{b}|\cos(\vec{a},\vec{b})$

可以看作是它们夹角的一种度量，即$\cos(\vec{a},\vec{b})=\dfrac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{a}||\vec{b}|}$.

注

根据余弦定理$|\vec{b}-\vec{a}|^2=|\vec{a}|^2+|\vec{b}|^2-2|\vec{a}||\vec{b}|\cos(\vec{a},\vec{b})=|\vec{a}|^2+|\vec{b}|^2-2\vec{a}\cdot\vec{b}$,

$$\text{即}\vec{a}\cdot\vec{b}=\frac{1}{2}(|\vec{a}|^2+|\vec{b}|^2-|\vec{b}-\vec{a}|^2).$$

如果向量记为坐标形式$\vec{a}=\{a_x,a_y,a_z\},\vec{b}=\{b_x,b_y,b_z\}$, 则

$$\vec{b}-\vec{a}=\{b_x-a_x,b_y-a_y,b_z-a_z\}$$

$$\Rightarrow|\vec{b}-\vec{a}|^2=(b_x-a_x)^2+(b_y-a_y)^2+(b_z-a_z)^2,$$

又因为$|\vec{a}|^2=a_x^2+a_y^2+a_z^2,|\vec{b}|^2=b_x^2+b_y^2+b_z^2$,所以

$$\vec{a}\cdot\vec{b}=\tfrac{1}{2}\{a_x^2+a_y^2+a_z^2+b_x^2+b_y^2+b_z^2-(b_x-a_x)^2-(b_y-a_y)^2-(b_z-a_z)^2\}$$

注

两个向量$\vec{a},\vec{b}$的内积 $\vec{a}\cdot\vec{b}=|\vec{a}||\vec{b}|\cos(\vec{a},\vec{b})$

可以看作是它们夹角的一种度量，即$\cos(\vec{a},\vec{b})=\dfrac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{a}||\vec{b}|}$.

注

根据余弦定理$|\vec{b}-\vec{a}|^2=|\vec{a}|^2+|\vec{b}|^2-2|\vec{a}||\vec{b}|\cos(\vec{a},\vec{b})=|\vec{a}|^2+|\vec{b}|^2-2\vec{a}\cdot\vec{b}$,

$$即\vec{a}\cdot\vec{b}=\frac{1}{2}(|\vec{a}|^2+|\vec{b}|^2-|\vec{b}-\vec{a}|^2).$$

如果向量记为坐标形式$\vec{a}=\{a_x,a_y,a_z\},\vec{b}=\{b_x,b_y,b_z\}$, 则

$$\vec{b}-\vec{a}=\{b_x-a_x,b_y-a_y,b_z-a_z\}$$

$$\Rightarrow|\vec{b}-\vec{a}|^2=(b_x-a_x)^2+(b_y-a_y)^2+(b_z-a_z)^2,$$

又因为$|\vec{a}|^2=a_x^2+a_y^2+a_z^2,|\vec{b}|^2=b_x^2+b_y^2+b_z^2$,所以

$$\vec{a}\cdot\vec{b}=\frac{1}{2}\{a_x^2+a_y^2+a_z^2+b_x^2+b_y^2+b_z^2-(b_x-a_x)^2-(b_y-a_y)^2-(b_z-a_z)^2\}$$

$$=a_xb_x+a_yb_y+a_zb_z$$

从而，两向量$\vec{a}=\{a_x,a_y,a_z\},\vec{b}=\{b_x,b_y,b_z\}$的内积为

$$\boxed{\vec{a}\cdot\vec{b}=a_xb_x+a_yb_y+a_zb_z}$$

从而，两向量$\vec{a} = \{a_x, a_y, a_z\}, \vec{b} = \{b_x, b_y, b_z\}$的内积为

$$\boxed{\vec{a} \cdot \vec{b} = a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z}$$

它们的夹角满足$\cos(\vec{a}, \vec{b}) = \dfrac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}||\vec{b}|} = \dfrac{a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z}{\sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2}\sqrt{b_x^2 + b_y^2 + b_z^2}}$.

从而，两向量$\vec{a}=\{a_x,a_y,a_z\},\vec{b}=\{b_x,b_y,b_z\}$的内积为

$$\boxed{\vec{a}\cdot\vec{b}=a_xb_x+a_yb_y+a_zb_z}$$

它们的夹角满足$\cos(\vec{a},\vec{b})=\dfrac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{a}||\vec{b}|}=\dfrac{a_xb_x+a_yb_y+a_zb_z}{\sqrt{a_x^2+a_y^2+a_z^2}\sqrt{b_x^2+b_y^2+b_z^2}}$

例

质点受力为$\vec{f}=2\vec{i}+4\vec{j}+6\vec{k}$,作了位移为$\vec{s}=3\vec{i}+2\vec{j}-\vec{k}$,

则此力所做了功为

从而，两向量$\vec{a}=\{a_x,a_y,a_z\},\vec{b}=\{b_x,b_y,b_z\}$的内积为

$$\boxed{\vec{a}\cdot\vec{b}=a_xb_x+a_yb_y+a_zb_z}$$

它们的夹角满足$\cos(\vec{a},\vec{b})=\dfrac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{a}||\vec{b}|}=\dfrac{a_xb_x+a_yb_y+a_zb_z}{\sqrt{a_x^2+a_y^2+a_z^2}\sqrt{b_x^2+b_y^2+b_z^2}}$

例

质点受力为$\vec{f}=2\vec{i}+4\vec{j}+6\vec{k}$,作了位移为$\vec{s}=3\vec{i}+2\vec{j}-\vec{k}$,

则此力所做了功为

$$W=\vec{f}\cdot\vec{s}=2\cdot3+4\cdot2+6\cdot(-1)=8.$$

从而，两向量$\vec{a}=\{a_x,a_y,a_z\},\vec{b}=\{b_x,b_y,b_z\}$的内积为

$$\boxed{\vec{a}\cdot\vec{b}=a_xb_x+a_yb_y+a_zb_z}$$

它们的夹角满足$\cos(\vec{a},\vec{b})=\dfrac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{a}||\vec{b}|}=\dfrac{a_xb_x+a_yb_y+a_zb_z}{\sqrt{a_x^2+a_y^2+a_z^2}\sqrt{b_x^2+b_y^2+b_z^2}}$

例

质点受力为$\vec{f}=2\vec{i}+4\vec{j}+6\vec{k}$,作了位移为$\vec{s}=3\vec{i}+2\vec{j}-\vec{k}$,

则此力所做了功为

$$W=\vec{f}\cdot\vec{s}=2\cdot3+4\cdot2+6\cdot(-1)=8.$$

例

向量$\vec{a}=\vec{i}+\vec{j}-4\vec{k}$与$\vec{b}=\vec{i}-2\vec{j}+2\vec{k}$之间的夹角满足

$$\cos(\vec{a},\vec{b})=\frac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{a}||\vec{b}|}=\frac{1\cdot1+1\cdot(-2)+(-4)\cdot2}{\sqrt{1^2+1^2+4^2}\cdot\sqrt{1^2+2^2+2^2}}=\frac{1-2-8}{\sqrt{8}\cdot\sqrt{9}}=-\frac{1}{\sqrt{2}},$$

从而，两向量$\vec{a}=\{a_x,a_y,a_z\},\vec{b}=\{b_x,b_y,b_z\}$的内积为

$$\boxed{\vec{a}\cdot\vec{b}=a_xb_x+a_yb_y+a_zb_z}$$

它们的夹角满足$\cos(\vec{a},\vec{b})=\dfrac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{a}||\vec{b}|}=\dfrac{a_xb_x+a_yb_y+a_zb_z}{\sqrt{a_x^2+a_y^2+a_z^2}\sqrt{b_x^2+b_y^2+b_z^2}}$

例

质点受力为$\vec{f}=2\vec{i}+4\vec{j}+6\vec{k}$,作了位移为$\vec{s}=3\vec{i}+2\vec{j}-\vec{k}$,

则此力所做了功为

$$W=\vec{f}\cdot\vec{s}=2\cdot3+4\cdot2+6\cdot(-1)=8.$$

例

向量$\vec{a}=\vec{i}+\vec{j}-4\vec{k}$与$\vec{b}=\vec{i}-2\vec{j}+2\vec{k}$之间的夹角满足

$$\cos(\vec{a},\vec{b})=\frac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{a}||\vec{b}|}=\frac{1\cdot1+1\cdot(-2)+(-4)\cdot2}{\sqrt{1^2+1^2+4^2}\cdot\sqrt{1^2+2^2+2^2}}=\frac{1-2-8}{\sqrt{8}\cdot\sqrt{9}}=-\frac{1}{\sqrt{2}},$$

即$(\vec{a}\cdot\vec{b})=\arccos(-\frac{1}{\sqrt{2}})=\frac{3\pi}{4}.$

根据内积的坐标表示法，$\boxed{\vec{a}=\{a_x,a_y,a_z\},\vec{b}=\{b_x,b_y,b_z\}}$

易见内积运算具有如下性质：$\boxed{\vec{a}\cdot\vec{b}=a_xb_x+a_yb_y+a_zb_z}$

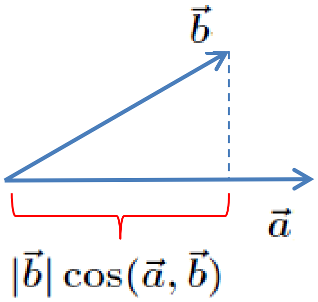
根据内积的坐标表示法， $\boxed{\vec{a}=\{a_x,a_y,a_z\},\vec{b}=\{b_x,b_y,b_z\}}$

易见内积运算具有如下性质： $\boxed{\vec{a}\cdot\vec{b}=a_xb_x+a_yb_y+a_zb_z}$

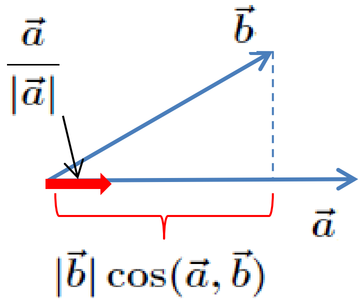
①$\vec{a}\cdot\vec{b}=\vec{b}\cdot\vec{a}$, ②$(\vec{a}+\vec{b})\cdot\vec{c}=\vec{a}\cdot\vec{c}+\vec{b}\cdot\vec{c}$(分配律)

③$(\lambda\vec{a})\cdot\vec{b}=\lambda\vec{a}\cdot\vec{b}$, ④$\vec{a}\cdot\vec{a}=|\vec{a}|^2$

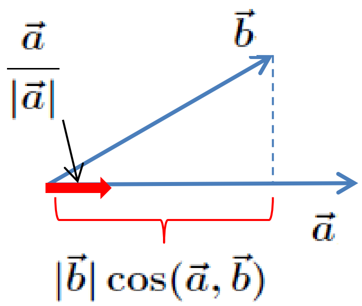
注 ①两个向量的内积可表示出互相的投影



注 ①两个向量的内积可表示出互相的投影

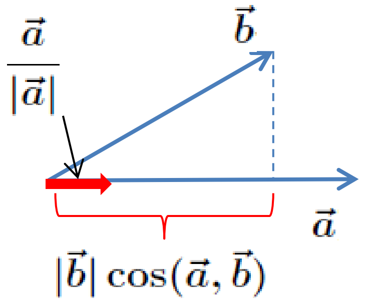


注 ①两个向量的内积可表示出互相的投影



$\vec{b}$在$\vec{a}$方向上的投影向量为$|\vec{b}|\cos(\vec{a},\vec{b})\dfrac{\vec{a}}{|\vec{a}|}$

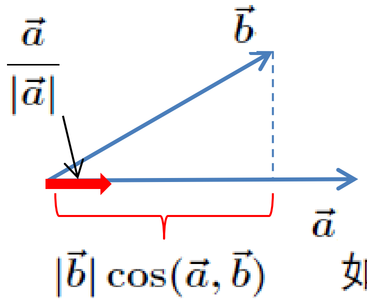
注 ①两个向量的内积可表示出互相的投影



$\vec{b}$在$\vec{a}$方向上的投影向量为$|\vec{b}|\cos(\vec{a},\vec{b})\frac{\vec{a}}{|\vec{a}|}$

$$=|\vec{b}||\vec{a}|\cos(\vec{a},\vec{b})\frac{\vec{a}}{|\vec{a}|^2}=\frac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{\vec{a}\cdot\vec{a}}\vec{a}$$

注 ①两个向量的内积可表示出互相的投影

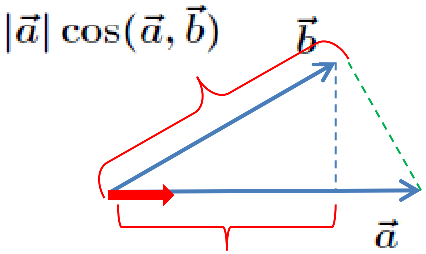


$\vec{b}$在$\vec{a}$方向上的投影向量为$|\vec{b}|\cos(\vec{a},\vec{b})\frac{\vec{a}}{|\vec{a}|}$

$$=|\vec{b}||\vec{a}|\cos(\vec{a},\vec{b})\frac{\vec{a}}{|\vec{a}|^2}=\frac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{\vec{a}\cdot\vec{a}}\vec{a}$$

如果$\vec{a}$是单位向量，则$\vec{b}$在$\vec{a}$上投影向量为$(\vec{a}\cdot\vec{b})\vec{a}$

注 ①两个向量的内积可表示出互相的投影



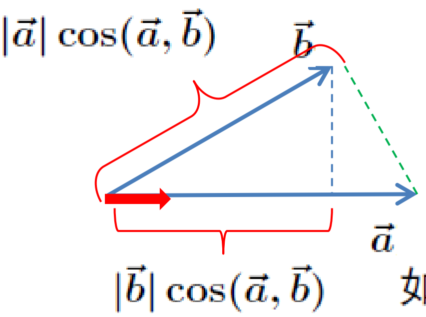
$\vec{b}$在$\vec{a}$方向上的投影向量为$|\vec{b}|\cos(\vec{a},\vec{b})\dfrac{\vec{a}}{|\vec{a}|}$

$$= |\vec{b}||\vec{a}|\cos(\vec{a},\vec{b})\frac{\vec{a}}{|\vec{a}|^2} = \frac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{\vec{a}\cdot\vec{a}}\vec{a}$$

如果$\vec{a}$是单位向量，则$\vec{b}$在$\vec{a}$上投影向量为$(\vec{a}\cdot\vec{b})\vec{a}$

$\vec{a}$在$\vec{b}$方向上的投影向量为$|\vec{a}|\cos(\vec{a},\vec{b})\dfrac{\vec{b}}{|\vec{b}|}$

注 ①两个向量的内积可表示出互相的投影



$\vec b$在$\vec a$方向上的投影向量为$|\vec b|\cos(\vec a,\vec b)\dfrac{\vec a}{|\vec a|}$

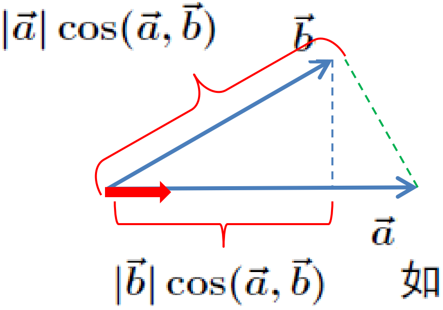
$$=|\vec b||\vec a|\cos(\vec a,\vec b)\frac{\vec a}{|\vec a|^2}=\frac{\vec a\cdot\vec b}{\vec a\cdot\vec a}\vec a$$

如果$\vec a$是单位向量，则$\vec b$在$\vec a$上投影向量为$(\vec a\cdot\vec b)\vec a$

$\vec a$在$\vec b$方向上的投影向量为$|\vec a|\cos(\vec a,\vec b)\dfrac{\vec b}{|\vec b|}$

$$=|\vec a||\vec b|\cos(\vec a,\vec b)\frac{\vec b}{|\vec b|^2}=\frac{\vec a\cdot\vec b}{\vec b\cdot\vec b}\vec b;$$

注 ①两个向量的内积可表示出互相的投影



$\vec{b}$在$\vec{a}$方向上的投影向量为$|\vec{b}|\cos(\vec{a},\vec{b})\dfrac{\vec{a}}{|\vec{a}|}$

$$=|\vec{b}||\vec{a}|\cos(\vec{a},\vec{b})\frac{\vec{a}}{|\vec{a}|^2}=\frac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{\vec{a}\cdot\vec{a}}\vec{a}$$

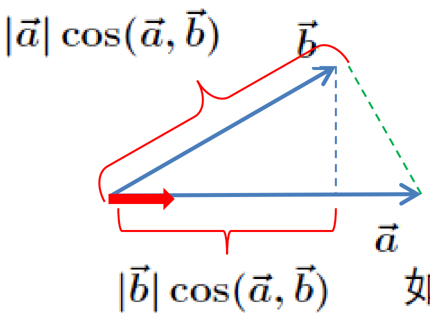
如果$\vec{a}$是单位向量，则$\vec{b}$在$\vec{a}$上投影向量为$(\vec{a}\cdot\vec{b})\vec{a}$

$\vec{a}$在$\vec{b}$方向上的投影向量为$|\vec{a}|\cos(\vec{a},\vec{b})\dfrac{\vec{b}}{|\vec{b}|}$

$$=|\vec{a}||\vec{b}|\cos(\vec{a},\vec{b})\frac{\vec{b}}{|\vec{b}|^2}=\frac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{\vec{b}\cdot\vec{b}}\vec{b};$$

如果$\vec{b}$是单位向量，则$\vec{a}$ 在$\vec{b}$上投影向量为$(\vec{a}\cdot\vec{b})\vec{b}$

注 ①两个向量的内积可表示出互相的投影



$\vec{b}$在$\vec{a}$方向上的投影向量为$|\vec{b}|\cos(\vec{a},\vec{b})\dfrac{\vec{a}}{|\vec{a}|}$

$$=|\vec{b}||\vec{a}|\cos(\vec{a},\vec{b})\frac{\vec{a}}{|\vec{a}|^2}=\frac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{\vec{a}\cdot\vec{a}}\vec{a}$$

如果$\vec{a}$是单位向量，则$\vec{b}$在$\vec{a}$上投影向量为$(\vec{a}\cdot\vec{b})\vec{a}$

$\vec{a}$在$\vec{b}$方向上的投影向量为$|\vec{a}|\cos(\vec{a},\vec{b})\dfrac{\vec{b}}{|\vec{b}|}$

$$=|\vec{a}||\vec{b}|\cos(\vec{a},\vec{b})\frac{\vec{b}}{|\vec{b}|^2}=\frac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{\vec{b}\cdot\vec{b}}\vec{b};$$

如果$\vec{b}$是单位向量，则$\vec{a}$ 在$\vec{b}$上投影向量为$(\vec{a}\cdot\vec{b})\vec{b}$

$\vec{a}$在某单位向量$\vec{e}$上的投影向量$(\vec{a}\cdot\vec{e})\vec{e}$,其长度为$|(\vec{a}\cdot\vec{e})|$,代数长度为$\vec{a}\cdot\vec{e}$

注 $\boxed{\text{①两个向量的内积可表示出互相的投影}}$

$\boxed{\text{②设向量}\vec{a},\vec{b}\text{非零，则}\vec{a} \perp \vec{b} \Leftrightarrow \vec{a}\cdot\vec{b}=0 \Leftrightarrow a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z = 0.}$

注 ①两个向量的内积可表示出互相的投影

②设向量$\vec{a},\vec{b}$非零，则$\vec{a} \perp \vec{b} \Leftrightarrow \vec{a} \cdot \vec{b} = 0 \Leftrightarrow a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z = 0.$

例 求xoy平面上的单位向量，使它与向量$\vec{a} = \{-4, 3, 7\}$垂直。

注 ①两个向量的内积可表示出互相的投影

②设向量$\vec{a},\vec{b}$非零，则$\vec{a} \perp \vec{b} \Leftrightarrow \vec{a} \cdot \vec{b} = 0 \Leftrightarrow a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z = 0.$

例 求xoy平面上的单位向量，使它与向量$\vec{a} = \{-4, 3, 7\}$垂直。

解: 设所求向量为$\vec{b} = \{x, y, 0\}$,

注 ①两个向量的内积可表示出互相的投影

②设向量$\vec{a},\vec{b}$非零，则$\vec{a} \perp \vec{b} \Leftrightarrow \vec{a} \cdot \vec{b} = 0 \Leftrightarrow a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z = 0.$

例 求xoy平面上的单位向量，使它与向量$\vec{a} = \{-4, 3, 7\}$垂直。

解: 设所求向量为$\vec{b} = \{x, y, 0\}$,

$$\vec{a} \perp \vec{b} \Rightarrow -4x + 3y = 0$$

注 ①两个向量的内积可表示出互相的投影

②设向量$\vec{a}, \vec{b}$非零，则$\vec{a} \perp \vec{b} \Leftrightarrow \vec{a} \cdot \vec{b} = 0 \Leftrightarrow a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z = 0.$

例 求xoy平面上的单位向量，使它与向量$\vec{a} = \{-4, 3, 7\}$垂直。

解: 设所求向量为$\vec{b} = \{x, y, 0\}$,

$$\vec{a} \perp \vec{b} \Rightarrow -4x + 3y = 0$$

$$|\vec{b}| = 1 \Rightarrow x^2 + y^2 = 1$$

注 ①两个向量的内积可表示出互相的投影

②设向量$\vec{a},\vec{b}$非零，则$\vec{a} \perp \vec{b} \Leftrightarrow \vec{a} \cdot \vec{b} = 0 \Leftrightarrow a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z = 0.$

例 求xoy平面上的单位向量，使它与向量$\vec{a} = \{-4, 3, 7\}$垂直。

解: 设所求向量为$\vec{b} = \{x, y, 0\}$,

$$\vec{a} \perp \vec{b} \Rightarrow -4x + 3y = 0$$

$$|\vec{b}| = 1 \Rightarrow x^2 + y^2 = 1$$

所以$\begin{cases} 3y & = 4x \\ x^2 + y^2 & = 1 \end{cases}$, $y = \frac{3}{4}x, x^2 + \frac{16}{9}x^2 = 1, x = \pm\frac{3}{5}, y = \pm\frac{4}{5}$

注 $\boxed{\text{①两个向量的内积可表示出互相的投影}}$

$\boxed{\text{②设向量}\vec{a},\vec{b}\text{非零，则}\vec{a}\perp\vec{b}\Leftrightarrow\vec{a}\cdot\vec{b}=0\Leftrightarrow a_xb_x+a_yb_y+a_zb_z=0.}$

例 求xoy平面上的单位向量，使它与向量$\vec{a}=\{-4,3,7\}$垂直。

解: 设所求向量为$\vec{b}=\{x,y,0\}$,

$\vec{a}\perp\vec{b}\Rightarrow -4x+3y=0$

$|\vec{b}|=1\Rightarrow x^2+y^2=1$

故所求向量为$\vec{b_1}=\{\frac{3}{5},\frac{4}{5},0\}$

或$\vec{b_2}=\{-\frac{3}{5},-\frac{4}{5},0\}$

所以$\begin{cases}3y & =4x\\ x^2+y^2 & =1\end{cases}$ $,y=\frac{3}{4}x,x^2+\frac{16}{9}x^2=1,x=\pm\frac{3}{5},y=\pm\frac{4}{5}$

例 已知向量$|\vec{a}|=2, |\vec{b}|=1, (\vec{a},\vec{b})=\frac{\pi}{3}$,

求$\overrightarrow{A}=2\vec{a}+3\vec{b}$与$\overrightarrow{B}=3\vec{a}-\vec{b}$ 之间的夹角$(\overrightarrow{A},\overrightarrow{B})$.

例　已知向量$|\vec{a}| = 2, |\vec{b}| = 1, (\vec{a}, \vec{b}) = \dfrac{\pi}{3}$,

求$\overrightarrow{A} = 2\vec{a} + 3\vec{b}$与$\overrightarrow{B} = 3\vec{a} - \vec{b}$ 之间的夹角$(\overrightarrow{A}, \overrightarrow{B})$.

解:

$$\cos(\overrightarrow{A}, \overrightarrow{B}) = \frac{\overrightarrow{A} \cdot \overrightarrow{B}}{|\overrightarrow{A}| \cdot |\overrightarrow{B}|}$$

例 已知向量$|\vec{a}| = 2, |\vec{b}| = 1, (\vec{a}, \vec{b}) = \frac{\pi}{3}$,

求$\overrightarrow{A} = 2\vec{a} + 3\vec{b}$与$\overrightarrow{B} = 3\vec{a} - \vec{b}$ 之间的夹角$(\overrightarrow{A}, \overrightarrow{B})$.

解:

$$\cos(\overrightarrow{A}, \overrightarrow{B}) = \frac{\overrightarrow{A} \cdot \overrightarrow{B}}{|\overrightarrow{A}| \cdot |\overrightarrow{B}|}$$

$\because |\vec{a}| = 2, |\vec{b}| = 1, (\vec{a}, \vec{b}) = \frac{\pi}{3}$, $\therefore \vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}|\,|\vec{b}| \cos(\vec{a}, \vec{b}) = 2 \cdot 1 \cdot \frac{1}{2} = 1$

例　已知向量$|\vec{a}|=2, |\vec{b}|=1, (\vec{a},\vec{b})=\frac{\pi}{3}$,

求$\overrightarrow{A}=2\vec{a}+3\vec{b}$与$\overrightarrow{B}=3\vec{a}-\vec{b}$之间的夹角$(\overrightarrow{A},\overrightarrow{B})$.

解:

$$\cos(\overrightarrow{A},\overrightarrow{B})=\frac{\overrightarrow{A}\cdot\overrightarrow{B}}{|\overrightarrow{A}|\cdot|\overrightarrow{B}|}$$

$$\because |\vec{a}|=2, |\vec{b}|=1, (\vec{a},\vec{b})=\frac{\pi}{3},\ \therefore \vec{a}\cdot\vec{b}=|\vec{a}|\,|\vec{b}|\cos(\vec{a},\vec{b})=2\cdot 1\cdot\frac{1}{2}=1$$

$$\overrightarrow{A}\cdot\overrightarrow{B}=(2\vec{a}+3\vec{b})\cdot(3\vec{a}-\vec{b})$$

例 已知向量$|\vec{a}|=2, |\vec{b}|=1, (\vec{a},\vec{b})=\dfrac{\pi}{3}$,

求$\overrightarrow{A}=2\vec{a}+3\vec{b}$与$\overrightarrow{B}=3\vec{a}-\vec{b}$ 之间的夹角$(\overrightarrow{A},\overrightarrow{B})$.

解:

$$\cos(\overrightarrow{A},\overrightarrow{B})=\frac{\overrightarrow{A}\cdot\overrightarrow{B}}{|\overrightarrow{A}|\cdot|\overrightarrow{B}|}$$

$$\because |\vec{a}|=2, |\vec{b}|=1, (\vec{a},\vec{b})=\frac{\pi}{3},\ \therefore \vec{a}\cdot\vec{b}=|\vec{a}|\,|\vec{b}|\cos(\vec{a},\vec{b})=2\cdot 1\cdot\frac{1}{2}=1$$

$$\overrightarrow{A}\cdot\overrightarrow{B}=(2\vec{a}+3\vec{b})\cdot(3\vec{a}-\vec{b})=6|\vec{a}|^2-3|\vec{b}|^2+7\vec{a}\cdot\vec{b}$$

例 已知向量$|\vec{a}| = 2, |\vec{b}| = 1, (\vec{a}, \vec{b}) = \frac{\pi}{3}$,

求$\overrightarrow{A} = 2\vec{a} + 3\vec{b}$与$\overrightarrow{B} = 3\vec{a} - \vec{b}$ 之间的夹角$(\overrightarrow{A}, \overrightarrow{B})$.

解:

$$\cos(\overrightarrow{A}, \overrightarrow{B}) = \frac{\overrightarrow{A} \cdot \overrightarrow{B}}{|\overrightarrow{A}| \cdot |\overrightarrow{B}|}$$

$$\because |\vec{a}| = 2, |\vec{b}| = 1, (\vec{a}, \vec{b}) = \frac{\pi}{3}, \ \therefore \vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}|\,|\vec{b}| \cos(\vec{a}, \vec{b}) = 2 \cdot 1 \cdot \frac{1}{2} = 1$$

$$\begin{aligned}\overrightarrow{A} \cdot \overrightarrow{B} = (2\vec{a} + 3\vec{b}) \cdot (3\vec{a} - \vec{b}) &= 6|\vec{a}|^2 - 3|\vec{b}|^2 + 7\vec{a} \cdot \vec{b} \\ &= 24 - 3 + 7 = 28\end{aligned}$$

例　已知向量$|\vec{a}|=2, |\vec{b}|=1, (\vec{a},\vec{b})=\dfrac{\pi}{3}$,

求$\overrightarrow{A}=2\vec{a}+3\vec{b}$与$\overrightarrow{B}=3\vec{a}-\vec{b}$ 之间的夹角$(\overrightarrow{A},\overrightarrow{B})$.

解:

$$\cos(\overrightarrow{A},\overrightarrow{B})=\frac{\overrightarrow{A}\cdot\overrightarrow{B}}{|\overrightarrow{A}|\cdot|\overrightarrow{B}|}$$

$$\because |\vec{a}|=2, |\vec{b}|=1, (\vec{a},\vec{b})=\frac{\pi}{3},\ \therefore \vec{a}\cdot\vec{b}=|\vec{a}|\,|\vec{b}|\cos(\vec{a},\vec{b})=2\cdot 1\cdot\frac{1}{2}=1$$

$$\begin{aligned}\overrightarrow{A}\cdot\overrightarrow{B}&=(2\vec{a}+3\vec{b})\cdot(3\vec{a}-\vec{b})=6|\vec{a}|^2-3|\vec{b}|^2+7\vec{a}\cdot\vec{b}\\&=24-3+7=28\end{aligned}$$

$$|\overrightarrow{A}|^2=\overrightarrow{A}\cdot\overrightarrow{A}=(2\vec{a}+3\vec{b})\cdot(2\vec{a}+3\vec{b})$$

例 已知向量$|\vec{a}|=2, |\vec{b}|=1, (\vec{a},\vec{b})=\dfrac{\pi}{3}$,

求$\overrightarrow{A}=2\vec{a}+3\vec{b}$与$\overrightarrow{B}=3\vec{a}-\vec{b}$之间的夹角$(\overrightarrow{A},\overrightarrow{B})$.

解:

$$\cos(\overrightarrow{A},\overrightarrow{B})=\frac{\overrightarrow{A}\cdot\overrightarrow{B}}{|\overrightarrow{A}|\cdot|\overrightarrow{B}|}$$

$$\because |\vec{a}|=2, |\vec{b}|=1, (\vec{a},\vec{b})=\frac{\pi}{3}, \ \therefore \vec{a}\cdot\vec{b}=|\vec{a}|\,|\vec{b}|\cos(\vec{a},\vec{b})=2\cdot 1\cdot\frac{1}{2}=1$$

$$\begin{aligned}\overrightarrow{A}\cdot\overrightarrow{B}&=(2\vec{a}+3\vec{b})\cdot(3\vec{a}-\vec{b})=6|\vec{a}|^2-3|\vec{b}|^2+7\vec{a}\cdot\vec{b}\\&=24-3+7=28\end{aligned}$$

$$|\overrightarrow{A}|^2=\overrightarrow{A}\cdot\overrightarrow{A}=(2\vec{a}+3\vec{b})\cdot(2\vec{a}+3\vec{b})=4|\vec{a}|^2+9|\vec{b}|^2+12\vec{a}\cdot\vec{b}$$

例　已知向量$|\vec{a}|=2, |\vec{b}|=1, (\vec{a},\vec{b})=\frac{\pi}{3}$，

求$\vec{A}=2\vec{a}+3\vec{b}$与$\vec{B}=3\vec{a}-\vec{b}$之间的夹角$(\vec{A},\vec{B})$.

解:

$$\cos(\vec{A},\vec{B})=\frac{\vec{A}\cdot\vec{B}}{|\vec{A}|\cdot|\vec{B}|}$$

$$\because |\vec{a}|=2, |\vec{b}|=1, (\vec{a},\vec{b})=\frac{\pi}{3},\ \therefore \vec{a}\cdot\vec{b}=|\vec{a}|\,|\vec{b}|\cos(\vec{a},\vec{b})=2\cdot1\cdot\frac{1}{2}=1$$

$$\vec{A}\cdot\vec{B}=(2\vec{a}+3\vec{b})\cdot(3\vec{a}-\vec{b})=6|\vec{a}|^2-3|\vec{b}|^2+7\vec{a}\cdot\vec{b}$$
$$=24-3+7=28$$

$$|\vec{A}|^2=\vec{A}\cdot\vec{A}=(2\vec{a}+3\vec{b})\cdot(2\vec{a}+3\vec{b})=4|\vec{a}|^2+9|\vec{b}|^2+12\vec{a}\cdot\vec{b}$$
$$=16+6+12=37$$

例 已知向量$|\vec{a}| = 2, |\vec{b}| = 1, (\vec{a}, \vec{b}) = \frac{\pi}{3}$,

求$\overrightarrow{A} = 2\vec{a} + 3\vec{b}$与$\overrightarrow{B} = 3\vec{a} - \vec{b}$ 之间的夹角$(\overrightarrow{A}, \overrightarrow{B})$.

解:

$$\cos(\overrightarrow{A}, \overrightarrow{B}) = \frac{\overrightarrow{A} \cdot \overrightarrow{B}}{|\overrightarrow{A}| \cdot |\overrightarrow{B}|}$$

$$\because |\vec{a}| = 2, |\vec{b}| = 1, (\vec{a}, \vec{b}) = \frac{\pi}{3}, \ \therefore \vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}|\,|\vec{b}| \cos(\vec{a}, \vec{b}) = 2 \cdot 1 \cdot \frac{1}{2} = 1$$

$$\overrightarrow{A} \cdot \overrightarrow{B} = (2\vec{a} + 3\vec{b}) \cdot (3\vec{a} - \vec{b}) = 6|\vec{a}|^2 - 3|\vec{b}|^2 + 7\vec{a} \cdot \vec{b}$$
$$= 24 - 3 + 7 = 28$$

$$|\overrightarrow{A}|^2 = \overrightarrow{A} \cdot \overrightarrow{A} = (2\vec{a} + 3\vec{b}) \cdot (2\vec{a} + 3\vec{b}) = 4|\vec{a}|^2 + 9|\vec{b}|^2 + 12\vec{a} \cdot \vec{b}$$
$$= 16 + 6 + 12 = 37$$

$$|\overrightarrow{B}|^2 = \overrightarrow{B} \cdot \overrightarrow{B} = (3\vec{a} - \vec{b}) \cdot (3\vec{a} - \vec{b})$$

例　已知向量$|\vec{a}|=2, |\vec{b}|=1, (\vec{a},\vec{b})=\dfrac{\pi}{3}$,

求$\overrightarrow{A}=2\vec{a}+3\vec{b}$与$\overrightarrow{B}=3\vec{a}-\vec{b}$ 之间的夹角$(\overrightarrow{A},\overrightarrow{B})$.

解:

$$\cos(\overrightarrow{A},\overrightarrow{B})=\frac{\overrightarrow{A}\cdot\overrightarrow{B}}{|\overrightarrow{A}|\cdot|\overrightarrow{B}|}$$

$$\because |\vec{a}|=2, |\vec{b}|=1, (\vec{a},\vec{b})=\frac{\pi}{3},\ \therefore \vec{a}\cdot\vec{b}=|\vec{a}|\,|\vec{b}|\cos(\vec{a},\vec{b})=2\cdot 1\cdot\frac{1}{2}=1$$

$$\overrightarrow{A}\cdot\overrightarrow{B}=(2\vec{a}+3\vec{b})\cdot(3\vec{a}-\vec{b})=6|\vec{a}|^2-3|\vec{b}|^2+7\vec{a}\cdot\vec{b}$$

$$=24-3+7=28$$

$$|\overrightarrow{A}|^2=\overrightarrow{A}\cdot\overrightarrow{A}=(2\vec{a}+3\vec{b})\cdot(2\vec{a}+3\vec{b})=4|\vec{a}|^2+9|\vec{b}|^2+12\vec{a}\cdot\vec{b}$$

$$=16+6+12=37$$

$$|\overrightarrow{B}|^2=\overrightarrow{B}\cdot\overrightarrow{B}=(3\vec{a}-\vec{b})\cdot(3\vec{a}-\vec{b})\ =9|\vec{a}|^2+|\vec{b}|^2-6\vec{a}\cdot\vec{b}$$

例　已知向量$|\vec{a}|=2, |\vec{b}|=1, (\vec{a},\vec{b})=\dfrac{\pi}{3}$,

求$\vec{A}=2\vec{a}+3\vec{b}$与$\vec{B}=3\vec{a}-\vec{b}$之间的夹角$(\vec{A},\vec{B})$.

解:

$$\cos(\vec{A},\vec{B})=\frac{\vec{A}\cdot\vec{B}}{|\vec{A}|\cdot|\vec{B}|}$$

$$\because |\vec{a}|=2, |\vec{b}|=1, (\vec{a},\vec{b})=\frac{\pi}{3},\ \therefore \vec{a}\cdot\vec{b}=|\vec{a}|\,|\vec{b}|\cos(\vec{a},\vec{b})=2\cdot 1\cdot\frac{1}{2}=1$$

$$\begin{aligned}\vec{A}\cdot\vec{B}&=(2\vec{a}+3\vec{b})\cdot(3\vec{a}-\vec{b})=6|\vec{a}|^2-3|\vec{b}|^2+7\vec{a}\cdot\vec{b}\\&=24-3+7=28\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}|\vec{A}|^2=\vec{A}\cdot\vec{A}&=(2\vec{a}+3\vec{b})\cdot(2\vec{a}+3\vec{b})=4|\vec{a}|^2+9|\vec{b}|^2+12\vec{a}\cdot\vec{b}\\&=16+6+12=37\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}|\vec{B}|^2=\vec{B}\cdot\vec{B}&=(3\vec{a}-\vec{b})\cdot(3\vec{a}-\vec{b})\ =9|\vec{a}|^2+|\vec{b}|^2-6\vec{a}\cdot\vec{b}\\&=36+1-6=31\end{aligned}$$

例　已知向量$|\vec{a}|=2, |\vec{b}|=1, (\vec{a},\vec{b})=\dfrac{\pi}{3}$,

求$\vec{A}=2\vec{a}+3\vec{b}$与$\vec{B}=3\vec{a}-\vec{b}$ 之间的夹角$(\vec{A},\vec{B})$.

解:

$$\cos(\vec{A},\vec{B})=\frac{\vec{A}\cdot\vec{B}}{|\vec{A}|\cdot|\vec{B}|}=\frac{28}{\sqrt{31\cdot37}}$$

$$\because |\vec{a}|=2, |\vec{b}|=1, (\vec{a},\vec{b})=\frac{\pi}{3}, \ \therefore \vec{a}\cdot\vec{b}=|\vec{a}|\,|\vec{b}|\cos(\vec{a},\vec{b})=2\cdot1\cdot\frac{1}{2}=1$$

$$\vec{A}\cdot\vec{B}=(2\vec{a}+3\vec{b})\cdot(3\vec{a}-\vec{b})=6|\vec{a}|^2-3|\vec{b}|^2+7\vec{a}\cdot\vec{b}$$

$$=24-3+7=28$$

$$|\vec{A}|^2=\vec{A}\cdot\vec{A}=(2\vec{a}+3\vec{b})\cdot(2\vec{a}+3\vec{b})=4|\vec{a}|^2+9|\vec{b}|^2+12\vec{a}\cdot\vec{b}$$

$$=16+6+12=37$$

$$|\vec{B}|^2=\vec{B}\cdot\vec{B}=(3\vec{a}-\vec{b})\cdot(3\vec{a}-\vec{b})=9|\vec{a}|^2+|\vec{b}|^2-6\vec{a}\cdot\vec{b}$$

$$=36+1-6=31$$

例　已知向量$|\vec{a}|=2, |\vec{b}|=1, (\vec{a},\vec{b})=\frac{\pi}{3}$,

求$\overrightarrow{A}=2\vec{a}+3\vec{b}$与$\overrightarrow{B}=3\vec{a}-\vec{b}$ 之间的夹角$(\overrightarrow{A},\overrightarrow{B})$.

解:

$$\cos(\overrightarrow{A},\overrightarrow{B})=\frac{\overrightarrow{A}\cdot\overrightarrow{B}}{|\overrightarrow{A}|\cdot|\overrightarrow{B}|}=\frac{28}{\sqrt{31\cdot 37}}\qquad (\overrightarrow{A},\overrightarrow{B})=\arccos=\frac{28}{\sqrt{31\cdot 37}}.$$

$$\because |\vec{a}|=2, |\vec{b}|=1, (\vec{a},\vec{b})=\frac{\pi}{3},\ \therefore \vec{a}\cdot\vec{b}=|\vec{a}|\,|\vec{b}|\cos(\vec{a},\vec{b})=2\cdot 1\cdot\frac{1}{2}=1$$

$$\overrightarrow{A}\cdot\overrightarrow{B}=(2\vec{a}+3\vec{b})\cdot(3\vec{a}-\vec{b})=6|\vec{a}|^2-3|\vec{b}|^2+7\vec{a}\cdot\vec{b}$$
$$=24-3+7=28$$

$$|\overrightarrow{A}|^2=\overrightarrow{A}\cdot\overrightarrow{A}=(2\vec{a}+3\vec{b})\cdot(2\vec{a}+3\vec{b})=4|\vec{a}|^2+9|\vec{b}|^2+12\vec{a}\cdot\vec{b}$$
$$=16+6+12=37$$

$$|\overrightarrow{B}|^2=\overrightarrow{B}\cdot\overrightarrow{B}=(3\vec{a}-\vec{b})\cdot(3\vec{a}-\vec{b})=9|\vec{a}|^2+|\vec{b}|^2-6\vec{a}\cdot\vec{b}$$
$$=36+1-6=31$$

例　设$\vec{a}=\{3,4,-4\}$, $\vec{b}=\{1,1,1\}$,求$\vec{a}$在$\vec{b}$方向的投影代数长度。

例　设$\vec{a}=\{3,4,-4\},\vec{b}=\{1,1,1\}$,求$\vec{a}$在$\vec{b}$方向的投影代数长度。

解:

$\vec{a}$在$\vec{b}$方向的投影代数长度为$\vec{a}\cdot\dfrac{\vec{b}}{|\vec{b}|}$

例　设$\vec{a}=\{3,4,-4\},\vec{b}=\{1,1,1\}$,求$\vec{a}$在$\vec{b}$方向的投影代数长度。

解:

$\vec{a}$在$\vec{b}$方向的投影代数长度为$\vec{a}\cdot\dfrac{\vec{b}}{|\vec{b}|}$

$$=\frac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{b}|}=\frac{3+4-4}{\sqrt{1+1+1}}=\sqrt{3}.$$