定积分的分部积分法

- 定理：设$u(x), v(x)$在$[a, b]$上可导，且$u'(x)$，$v'(x)$在$[a, b]$上连续，则

$$\int_a^b u(x)v'(x)dx = u(x)v(x)|_a^b - \int_a^b v(x)u'(x)dx.$$

证明：$(u(x)v(x))' = u'(x)v(x) + v(x)'u(x)$.

- $u(x)$常取对数函数，反三角函数，指数函数，多项式，三角函数.
- 可先用不定积分的分部积分法求出原函数. 直接用定积分的分部积分法更方便.

定积分的分部积分法

- 定理： 设$u(x), v(x)$在$[a,b]$上可导，且$u'(x)$，$v'(x)$在$[a,b]$上连续，则

$$\int_a^b u(x)v'(x)dx = u(x)v(x)|_a^b - \int_a^b v(x)u'(x)dx.$$

证明：$(u(x)v(x))' = u'(x)v(x) + v(x)'u(x).$

- $u(x)$常取对数函数，反三角函数，指数函数，多项式，三角函数.
- 可先用不定积分的分部积分法求出原函数. 直接用定积分的分部积分法更方便.

定积分的分部积分法

- 定理：设$u(x), v(x)$在$[a, b]$上可导，且$u'(x)$，$v'(x)$在$[a, b]$上连续，则

$$\int_a^b u(x)v'(x)dx = u(x)v(x)|_a^b - \int_a^b v(x)u'(x)dx.$$

证明：$(u(x)v(x))' = u'(x)v(x) + v(x)'u(x)$.

- $u(x)$常取对数函数，反三角函数，指数函数，多项式，三角函数.
- 可先用不定积分的分部积分法求出原函数. 直接用定积分的分部积分法更方便.

定积分的分部积分法

- 定理：设$u(x), v(x)$在$[a, b]$上可导，且$u'(x)$，$v'(x)$在$[a, b]$上连续，则

$$\int_a^b u(x)v'(x)dx = u(x)v(x)|_a^b - \int_a^b v(x)u'(x)dx.$$

证明：$(u(x)v(x))' = u'(x)v(x) + v(x)'u(x)$.

- $u(x)$常取对数函数，反三角函数，指数函数，多项式，三角函数.
- 可先用不定积分的分部积分法求出原函数. 直接用定积分的分部积分法更方便.

用分部积分法求定积分

- 例： 求积分 $\int_1^2 x \ln x dx$.

  解：

$$\int_1^2 x \ln x dx = \frac{1}{2}\int_1^2 \ln x dx^2$$

$$= \frac{1}{2}x^2 \ln x\Big|_1^2 - \frac{1}{2}\int_1^2 x dx = 2\ln 2 - \frac{3}{4}.$$

用分部积分法求定积分

- 例： 求积分$\int_1^2 x\ln x dx$.
  解：

$$\int_1^2 x\ln x dx = \frac{1}{2}\int_1^2 \ln x dx^2$$

$$= \frac{1}{2}x^2\ln x\Big|_1^2 - \frac{1}{2}\int_1^2 x dx = 2\ln 2 - \frac{3}{4}.$$

用分部积分法求定积分

- 例： 求积分$\int_1^2 x\ln x dx$.
  解：

$$\int_1^2 x\ln x dx = \frac{1}{2}\int_1^2 \ln x dx^2$$

$$= \frac{1}{2}x^2\ln x\Big|_1^2 - \frac{1}{2}\int_1^2 x dx = 2\ln 2 - \frac{3}{4}.$$

瓦利斯公式1

- 例：求$I_n=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^n xdx,\ n\geq 0.$
- 解：显然$I_0=\frac{\pi}{2},\ I_1=1,\ n\geq 2$时，stirling 例子

$$
\begin{aligned}
I_n=&-\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^{n-1}xd\cos x\\
=&-\sin^{n-1}x\cos x\Big|_0^{\frac{\pi}{2}}+(n-1)\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^{n-2}x\cos^2 xdx\\
=&(n-1)(I_{n-2}-I_n).
\end{aligned}
$$

得到递推公式$I_n=\frac{n-1}{n}I_{n-2}$. 由该递推公式可得瓦利斯公式

$$
I_{2k}=\frac{(2k-1)!!}{(2k)!!}\frac{\pi}{2},\qquad I_{2k+1}=\frac{(2k)!!}{(2k+1)!!}.
$$

瓦利斯公式1

- 例：求$I_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n x dx$，$n \geq 0$.
- 解：显然$I_0 = \frac{\pi}{2}$，$I_1 = 1$，$n \geq 2$时， stirling 例子

$$I_n = -\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{n-1} x d\cos x$$

$$= -\sin^{n-1} x \cos x\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} + (n-1)\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{n-2} x \cos^2 x dx$$

$$=(n-1)(I_{n-2} - I_n).$$

得到递推公式$I_n = \frac{n-1}{n} I_{n-2}$. 由该递推公式可得瓦利斯公式

$$I_{2k} = \frac{(2k-1)!!}{(2k)!!}\frac{\pi}{2}, \qquad I_{2k+1} = \frac{(2k)!!}{(2k+1)!!}.$$

瓦利斯公式1

- 例：求$I_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n x dx$，$n \geq 0$.
- 解：显然$I_0 = \frac{\pi}{2}$，$I_1 = 1$，$n \geq 2$时，stirling 例子

$$
\begin{aligned}
I_n &= -\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{n-1} x d \cos x \\
&= -\sin^{n-1} x \cos x \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} + (n-1)\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{n-2} x \cos^2 x dx \\
&=(n-1)(I_{n-2} - I_n).
\end{aligned}
$$

得到递推公式$I_n = \frac{n-1}{n} I_{n-2}$. 由该递推公式可得瓦利斯公式

$$
I_{2k} = \frac{(2k-1)!!}{(2k)!!}\frac{\pi}{2}, \qquad I_{2k+1} = \frac{(2k)!!}{(2k+1)!!}.
$$

瓦利斯公式2

- 显然I_n单调递减，即有$I_{2k+1} \le I_{2k} \le I_{2k-1}$，由于$\frac{I_{2k-1}}{I_{2k+1}} = \frac{2k+1}{2k} \to 1$，因此$\frac{I_{2k}}{I_{2k+1}} \to 1$.
- 利用瓦利斯公式，$I_{2k+1} I_{2k} = \frac{\pi}{2} \cdot \frac{1}{2k+1}$，

$$\frac{\pi}{2} = \lim_{k\to\infty} \frac{\frac{\pi}{2} I_{2k+1}}{I_{2k}} = \lim_{k\to\infty} (I_{2k+1})^2 (2k+1)$$

因此$I_{2k+1} \sim \sqrt{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{\sqrt{2k+1}}$，$I_{2k} = \frac{\pi}{2} \cdot \frac{1}{2k+1} \cdot \frac{1}{I_{2k+1}} \sim \sqrt{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{\sqrt{2k+1}} \sim \sqrt{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{\sqrt{2k}}$. $I_n \sim \sqrt{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{\sqrt{n}}$.

瓦利斯公式2

- 显然I_n单调递减，即有$I_{2k+1} \le I_{2k} \le I_{2k-1}$，由于$\frac{I_{2k-1}}{I_{2k+1}} = \frac{2k+1}{2k} \to 1$，因此$\frac{I_{2k}}{I_{2k+1}} \to 1$.
- 利用瓦利斯公式，$I_{2k+1}I_{2k} = \frac{\pi}{2} \cdot \frac{1}{2k+1}$，

$$\frac{\pi}{2} = \lim_{k\to\infty} \frac{\frac{\pi}{2} I_{2k+1}}{I_{2k}} = \lim_{k\to\infty} (I_{2k+1})^2(2k+1)$$

因此$I_{2k+1} \sim \sqrt{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{\sqrt{2k+1}}$，$I_{2k} = \frac{\pi}{2} \cdot \frac{1}{2k+1} \cdot \frac{1}{I_{2k+1}} \sim \sqrt{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{\sqrt{2k+1}} \sim \sqrt{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{\sqrt{2k}}$. $I_n \sim \sqrt{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{\sqrt{n}}$.

Stirling公式1

- Stirling公式: $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\sqrt{2\pi n}(\frac{n}{e})^n}{n!}=1.$
- 证明：令$a_n=\dfrac{n!}{n^{n+\frac{1}{2}}e^{-n}}$, $\ln a_n=\ln(n!)+n-(n+\frac{1}{2})\ln n.$

$$\ln a_n-\ln a_{n+1}=(n+\frac{1}{2})\ln(1+\frac{1}{n})-1$$
$$=(n+\frac{1}{2})(\frac{1}{n}-\frac{1}{2n^2}+\frac{1}{3n^3}+o(\frac{1}{n^3}))-1=\frac{1}{12n^2}+o(\frac{1}{n^2})$$

由此可知$\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{k=1}^{n}|\ln a_k-\ln a_{k+1}|$收敛. 又由于$\ln a_n=\ln a_1-\sum\limits_{k=1}^{n-1}(\ln a_k-\ln_{k+1})$, 极限$\lim\limits_{n\to\infty}\ln a_n$存在, 从而$\lim\limits_{n\to\infty}a_n$存在.

Stirling公式1

- Stirling公式: $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{\sqrt{2\pi n}(\frac{n}{e})^n}{n!}=1.$
- 证明: 令$a_n=\frac{n!}{n^{n+\frac{1}{2}}e^{-n}}$, $\ln a_n=\ln(n!)+n-(n+\frac{1}{2})\ln n.$

$$\ln a_n-\ln a_{n+1}=(n+\frac{1}{2})\ln(1+\frac{1}{n})-1$$
$$=(n+\frac{1}{2})(\frac{1}{n}-\frac{1}{2n^2}+\frac{1}{3n^3}+o(\frac{1}{n^3}))-1=\frac{1}{12n^2}+o(\frac{1}{n^2})$$

由此可知$\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{k=1}^{n}|\ln a_k-\ln a_{k+1}|$收敛. 又由于$\ln a_n=\ln a_1-\sum\limits_{k=1}^{n-1}(\ln a_k-\ln_{k+1})$, 极限$\lim\limits_{n\to\infty}\ln a_n$存在, 从而$\lim\limits_{n\to\infty}a_n$存在.

Stirling公式2

- 证明：设$A = \lim\limits_{n\to\infty} a(n)$，即$n! \sim A n^{n+\frac{1}{2}} e^{-n}$．利用Wallis公式，wallis

$$\frac{\pi}{2} = \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{\pi}{2} I_{2n+1}}{I_{2n}} = \lim_{n\to\infty} \frac{\left(\frac{(2n)!!}{(2n-1)!!}\right)^2}{2n+1} = \lim_{n\to\infty} \frac{\left(\frac{(2n)!!(2n)!!}{(2n)!}\right)^2}{2n+1}$$

$$= \lim_{n\to\infty} 2^{4n} \frac{\left(\frac{(n!)^2}{(2n)!}\right)^2}{2n+1} = \lim_{n\to\infty} 2^{4n} \frac{\left(\frac{(An^{n+1/2}e^{-n})^2}{A(2n)^{2n+\frac{1}{2}}e^{-2n}}\right)^2}{2n+1}$$

$$= \lim_{n\to\infty} 2^{4n} \frac{(2^{-2n-\frac{1}{2}} A\sqrt{n})^2}{2n+1} = \lim_{n\to\infty} 2^{4n} \frac{A^2 2^{-4n-1} n}{2n+1} = \frac{A^2}{4}$$

所以$A = \sqrt{2\pi}$，即得$\lim\limits_{n\to\infty} \frac{\sqrt{2\pi n}(\frac{n}{e})^n}{n!} = 1.$

定积分的换元法1

- 定理：设$f(x)$是连续函数，$\phi \in C^1([a,b])$，$a = \phi(\alpha), b = \phi(\beta)$，则有

$$\int_a^b f(x)dx = \int_\alpha^\beta f(\phi(t))\phi'(t)dt.$$

- 证明：设$F(x)$是$f(x)$的一个原函数，则$F(\phi(t))$是$f(\phi(t))\phi'(t)$的原函数，

$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a)$$

$$= F(\phi(\alpha)) - F(\phi(\beta)) = \int_\alpha^\beta f(\phi(t))\phi'(t)dt$$

- 注：这里不要ϕ可逆.

定积分的换元法1

- 定理：设$f(x)$是连续函数，$\phi \in C^1([a,b])$，$a = \phi(\alpha), b = \phi(\beta)$，则有

$$\int_a^b f(x)dx = \int_\alpha^\beta f(\phi(t))\phi'(t)dt.$$

- 证明：设$F(x)$是$f(x)$的一个原函数，则$F(\phi(t))$是$f(\phi(t))\phi'(t)$的原函数，

$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a)$$

$$= F(\phi(\alpha)) - F(\phi(\beta)) = \int_\alpha^\beta f(\phi(t))\phi'(t)dt$$

- 注：这里不要ϕ可逆.

定积分的换元法1

- 定理：设$f(x)$是连续函数，$\phi \in C^1([a,b])$，$a = \phi(\alpha), b = \phi(\beta)$，则有
$$\int_a^b f(x)dx = \int_\alpha^\beta f(\phi(t))\phi'(t)dt.$$
- 证明：设$F(x)$是$f(x)$的一个原函数，则$F(\phi(t))$是$f(\phi(t))\phi'(t)$的原函数，
$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a)$$
$$= F(\phi(\alpha)) - F(\phi(\beta)) = \int_\alpha^\beta f(\phi(t))\phi'(t)dt$$
- 注：这里不要ϕ可逆.

定积分的换元法2

- 注：上面定理中a不需要小于b, α也不需要小于β. 例：

$$\int_{-1}^{1} f(t^2)2tdt = \int_{1}^{1} f(x)dx = 0$$

对任意的连续函数f成立.

- 上式定理可以用于从$\int_a^b f(x)dx$计算$\int_\alpha^\beta f(\phi(t))\phi'(t)dt$ （比较不定积分的第一换元法）,也可用于从$\int_\alpha^\beta f(\phi(t))\phi'(t)dt$计算$\int_a^b f(x)dx$ （比较不定积分的第二换元法）.

定积分的换元法2

- 注：上面定理中a不需要小于b, α也不需要小于β. 例：

$$\int_{-1}^{1} f(t^2)2tdt = \int_{1}^{1} f(x)dx = 0$$

对任意的连续函数f成立.

- 上式定理可以用于从$\int_a^b f(x)dx$计算$\int_\alpha^\beta f(\phi(t))\phi'(t)dt$ （比较不定积分的第一换元法）,也可用于从$\int_\alpha^\beta f(\phi(t))\phi'(t)dt$计算$\int_a^b f(x)dx$ （比较不定积分的第二换元法）.

利用换元法求定积分1

- 例： （第一换元）

$$\int_0^{\frac{\pi}{4}} \tan x dx = -\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{1}{\cos x} d\cos x = -\int_1^{\frac{\sqrt{2}}{2}} \frac{1}{t} dt = \frac{1}{2}\ln 2.$$

- 例： （第二换元）

$$\int_0^1 \frac{\sqrt{x}}{1+\sqrt{x}} dx \xlongequal{x=t^2} \int_0^1 \frac{t}{1+t} 2t dt = -1 + 2\ln 2.$$

- 例

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(\sin x) dx \xlongequal{x=\frac{\pi}{2}-t} \int_0^{\frac{\pi}{2}} f(\cos t) dt.$$

如 $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n x dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^n x dx.$

利用换元法求定积分1

- 例： （第一换元）

$$\int_0^{\frac{\pi}{4}} \tan x dx = -\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{1}{\cos x} d\cos x = -\int_1^{\frac{\sqrt{2}}{2}} \frac{1}{t} dt = \frac{1}{2}\ln 2.$$

- 例： （第二换元）

$$\int_0^1 \frac{\sqrt{x}}{1+\sqrt{x}} dx \xlongequal{x=t^2} \int_0^1 \frac{t}{1+t} 2tdt = -1 + 2\ln 2.$$

- 例

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(\sin x)dx \xlongequal{x=\frac{\pi}{2}-t} \int_0^{\frac{\pi}{2}} f(\cos t)dt.$$

如 $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n xdx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^n xdx.$

利用换元法求定积分1

- 例：（第一换元）

$$\int_0^{\frac{\pi}{4}} \tan x dx = -\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{1}{\cos x} d\cos x = -\int_1^{\frac{\sqrt{2}}{2}} \frac{1}{t} dt = \frac{1}{2}\ln 2.$$

- 例：（第二换元）

$$\int_0^1 \frac{\sqrt{x}}{1+\sqrt{x}} dx \xlongequal{x=t^2} \int_0^1 \frac{t}{1+t} 2t dt = -1 + 2\ln 2.$$

- 例

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(\sin x) dx \xlongequal{x=\frac{\pi}{2}-t} \int_0^{\frac{\pi}{2}} f(\cos t) dt.$$

如$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n x dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^n x dx$.

利用换元法求定积分2

- 例： wallis

$$\int_0^a x^4\sqrt{a^2-x^2}dx \xlongequal{x=a\sin t} a^6\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^4 t\cos^2 tdt$$

$$= a^6\left(\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^4 tdt-\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^6 tdt\right) = a^6\left(\frac{3}{8}-\frac{5}{16}\right)\frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{32}a^6$$

- 例：求 $\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sin x}{\cos x+\sin x}dx$.
  解：由于

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sin x}{\cos x+\sin x}dx \xlongequal{x=\frac{\pi}{2}-t} \int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\cos t}{\cos t+\sin t}dt$$

因此有

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sin x}{\cos x+\sin x}dx = \frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sin x+\cos x}{\cos x+\sin x}dx = \frac{\pi}{4}$$

利用换元法求定积分2

- 例： wallis

$$\int_0^a x^4\sqrt{a^2-x^2}dx \xlongequal{x=a\sin t} a^6\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^4 t\cos^2 t dt$$

$$= a^6\left(\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^4 t dt - \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^6 t dt\right) = a^6\left(\frac{3}{8}-\frac{5}{16}\right)\frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{32}a^6$$

- 例： 求$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin x}{\cos x+\sin x}dx$.

  解： 由于

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin x}{\cos x+\sin x}dx \xlongequal{x=\frac{\pi}{2}-t} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos t}{\cos t+\sin t}dt$$

因此有

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin x}{\cos x+\sin x}dx = \frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin x+\cos x}{\cos x+\sin x}dx = \frac{\pi}{4}$$

利用换元法求定积分3

- 例：求$\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin^2 x}{1+e^x} dx$.

  解：由于

$$\int_{-\frac{\pi}{2}}^{0} \frac{\sin^2 x}{1+e^x} dx = \int_{0}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin^2 x}{1+e^{-x}} dx = \int_{0}^{\frac{\pi}{2}} \frac{e^x \sin^2 x}{1+e^x} dx$$

  因此有

$$\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin^2 x}{1+e^x} dx = \int_{0}^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 x dx = \frac{\pi}{4}$$

偶函数、奇函数的定积分

- 设$f(x)$连续，若$f(x)=f(-x)$,则有
$$\int_{-a}^{a} f(x) = 2\int_{0}^{a} f(x)dx.$$
若$f(x)=-f(-x)$,则有$\int_{-a}^{a} f(x)dx = 0.$
- 例：$\int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} \frac{\tan x}{\ln(1+\sin^2 x)+2} dx = 0.$

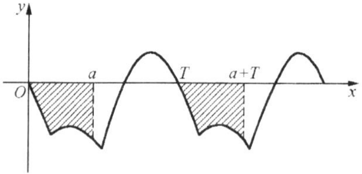
周期函数的定积分1

- 设$f(x)$连续，若$f(x)=f(x+T)$, 则有$\int_0^T f(x)dx=\int_a^{a+T} f(x)dx$, $\int_T^{a+T} f(x)dx=\int_0^a f(x)dx$.

证明：由于$\int_T^{a+T} f(x)dx \xlongequal{x=T+t} \int_0^a f(t)dt$,

$$\int_0^{a+T} f(x)dx=\int_0^T f(x)dx+\int_T^{a+T} f(x)dx$$
$$=\int_0^a f(x)dx+\int_a^{a+T} f(x)dx$$

得$\int_0^T f(x)dx=\int_a^{a+T} f(x)dx$.



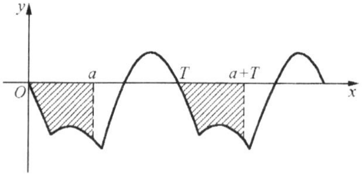
周期函数的定积分1

- 设$f(x)$连续，若$f(x)=f(x+T)$, 则有$\int_0^T f(x)dx=\int_a^{a+T} f(x)dx$, $\int_T^{a+T} f(x)dx=\int_0^a f(x)dx$.

证明：由于$\int_T^{a+T} f(x)dx \xlongequal{x=T+t} \int_0^a f(t)dt$,

$$\int_0^{a+T} f(x)dx=\int_0^T f(x)dx+\int_T^{a+T} f(x)dx$$
$$=\int_0^a f(x)dx+\int_a^{a+T} f(x)dx$$

得$\int_0^T f(x)dx=\int_a^{a+T} f(x)dx$.



周期函数的定积分2

- 设$f(x)$是$\mathbb{R}$上以T为周期的连续函数，则有

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{x}\int_0^x f(x)dx=\frac{1}{T}\int_0^T f(x)dx=A.$$

证明：设$nT\le x<(n+1)T$, 则有

$$\begin{aligned}\frac{1}{x}\int_0^x f(x)dx-A&=\frac{1}{x}\int_0^x f(x)dx-\frac{1}{nT}\int_0^{nT} f(x)dx\\&=\left(\frac{1}{x}-\frac{1}{nT}\right)\int_0^x f(x)dx+\frac{1}{nT}\int_{nT}^x f(x)dx\end{aligned}$$

设$|f(x)|\le M$, 则有$|(\frac{1}{x}-\frac{1}{nT})\int_0^x f(x)dx|\le\frac{T}{x\cdot nT}xM=\frac{M}{T}\to 0$,
$|\frac{1}{nT}\int_{nT}^x f(x)dx|\le\frac{1}{nT}TM\to 0$.

周期函数的定积分2

- 设$f(x)$是$\mathbb{R}$上以T为周期的连续函数，则有

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{x}\int_0^x f(x)dx=\frac{1}{T}\int_0^T f(x)dx=A.$$

证明：设$nT\le x<(n+1)T$, 则有

$$\frac{1}{x}\int_0^x f(x)dx-A=\frac{1}{x}\int_0^x f(x)dx-\frac{1}{nT}\int_0^{nT} f(x)dx$$
$$=\left(\frac{1}{x}-\frac{1}{nT}\right)\int_0^x f(x)dx+\frac{1}{nT}\int_{nT}^x f(x)dx$$

设$|f(x)|\le M$, 则有$|(\frac{1}{x}-\frac{1}{nT})\int_0^x f(x)dx|\le\frac{T}{x\cdot nT}xM=\frac{M}{T}\to 0$,
$|\frac{1}{nT}\int_{nT}^x f(x)dx|\le\frac{1}{nT}TM\to 0.$

总结

定积分的计算

- 第一步：利用奇偶性、周期性缩小积分区间.
- 第二步：若被积函数含有绝对值，或分段定义，先把积分分成几个区间上的积分.
- 第三步：计算（利用换元、分部积分）.

总结

定积分的计算

- 第一步：利用奇偶性、周期性缩小积分区间.
- 第二步：若被积函数含有绝对值，或分段定义，先把积分分成几个区间上的积分.
- 第三步：计算（利用换元、分部积分）.

总结

定积分的计算

- 第一步：利用奇偶性、周期性缩小积分区间.
- 第二步：若被积函数含有绝对值，或分段定义，先把积分分成几个区间上的积分.
- 第三步：计算（利用换元、分部积分）.

光滑曲线

- 光滑曲线：设平面曲线的参数方程为$\begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \end{cases}$, $\alpha \le t \le \beta$, $x(t), y(t) \in C^1([\alpha, \beta])$. 若$x'(t), y'(t)$不同时为0，此时切线随$t$连续变动，称该曲线为光滑曲线.
- 若平面曲线的直角坐标方程为$y = f(x)$，$y \in C^1([a, b])$，则该曲线为光滑曲线.
- 分段光滑曲线：若曲线可分割为有限段光滑曲线，则该曲线称为分段光滑曲线. 如曲线参数方程的$x(t), y(t) \in C([\alpha, \beta])$, $x(t), y(t) \in C^1([\alpha_{k-1}, \alpha_k])$(其中$\alpha = \alpha_0 < \alpha_1 < \alpha_2 < \cdots < \alpha_n = \beta$).

光滑曲线

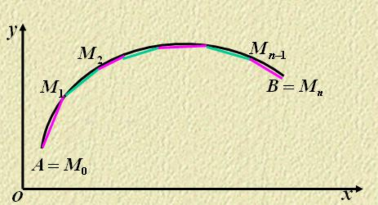
- 光滑曲线：设平面曲线的参数方程为$\begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \end{cases}$, $\alpha \le t \le \beta$, $x(t), y(t) \in C^1([\alpha, \beta])$. 若$x'(t), y'(t)$不同时为0，此时切线随$t$连续变动，称该曲线为光滑曲线.
- 若平面曲线的直角坐标方程为$y = f(x)$，$y \in C^1([a, b])$，则该曲线为光滑曲线.
- 分段光滑曲线：若曲线可分割为有限段光滑曲线，则该曲线称为分段光滑曲线. 如曲线参数方程的$x(t), y(t) \in C([\alpha, \beta])$, $x(t), y(t) \in C^1([\alpha_{k-1}, \alpha_k])$(其中$\alpha = \alpha_0 < \alpha_1 < \alpha_2 < \cdots < \alpha_n = \beta$).

光滑曲线

- 光滑曲线：设平面曲线的参数方程为$\begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \end{cases}, \alpha \leq t \leq \beta$, $x(t), y(t) \in C^1([\alpha, \beta])$. 若$x'(t), y'(t)$不同时为0，此时切线随$t$连续变动，称该曲线为光滑曲线.
- 若平面曲线的直角坐标方程为$y = f(x)$，$y \in C^1([a, b])$，则该曲线为光滑曲线.
- 分段光滑曲线：若曲线可分割为有限段光滑曲线，则该曲线称为分段光滑曲线. 如曲线参数方程的$x(t), y(t) \in C([\alpha, \beta])$, $x(t), y(t) \in C^1([\alpha_{k-1}, \alpha_k])$(其中$\alpha = \alpha_0 < \alpha_1 < \alpha_2 < \cdots < \alpha_n = \beta$).

曲线弧长

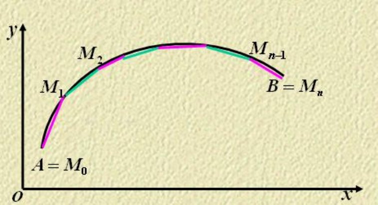
- 曲线AB的弧长：把曲线进行分割（在曲线上依次取$A = M_0 M_1, M-2, \cdots, M_n = B$），$\lambda = \max\{|M_{k-1}M_k| : k = 0, 1, \cdots, n\}$, $\lambda \to 0$时，$\sum_{k=0}^{n} |M_{k-1}M_k|$的极限称为曲线$AB$的弧长(极限不存在时曲线不可求长).



- 分段光滑曲线是可求长曲线.

曲线弧长

- 曲线AB的弧长：把曲线进行分割（在曲线上依次取$A = M_0 M_1, M - 2, \cdots, M_n = B$），$\lambda = \max\{|M_{k-1}M_k| : k = 0, 1, \cdots, n\}$, $\lambda \to 0$时，$\sum_{k=0}^{n} |M_{k-1}M_k|$的极限称为曲线$AB$的弧长(极限不存在时曲线不可求长).
- 分段光滑曲线是可求长曲线.



直角坐标下曲线弧长1

- 设有光滑曲线的直角坐标方程为$y = f(x)$, $y \in C^1([a,b])$ 作$[a,b]$ 的分割$a = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = b$, 从而给出了曲线的分割点$M_k(x_k, f(x_k))$. 设$\Delta x_k = x_k - x_{k-1}$, 则弦$M_{k-1}M_k$的长为

$$|M_{k-1}M_k| = \sqrt{(x_k - x_{k-1})^2 + (f(x_k) - f(x_{k-1}))^2}$$
$$= \sqrt{1 + \left(\frac{\Delta y_k}{\Delta x_k}\right)^2} \Delta x_k = \sqrt{1 + (f'(\xi_k))^2} \Delta x_k$$

这里用到中值定理: 存在$\xi_k \in [x_{k-1}, x_k]$, 使得$f(x_k) - f(x_{k-1}) = f'(x_k)\Delta x_k$.

直角坐标下曲线弧长2

- 令$\lambda = \max\{\Delta x_k : k = 0, 1, \cdots, n\}$，则

$$|M_{k-1}M_k| \leq \sqrt{1+M^2}\Delta x_k \leq \sqrt{1+M^2}\lambda,$$

这里M为$f'(x)$的最大值. 因此当$\lambda \to 0$时$\max\{|M_{k-1}M_k| : k = 0, 1, \cdots, n\} \to 0$.

- 曲线弧长

$$s = \lim_{\lambda \to 0} \sum_{k=1}^{n} \sqrt{1+(f'(\xi_k))^2}\Delta x_k$$

$$= \int_a^b \sqrt{1+(f'(x))^2}dx.$$

直角坐标下曲线弧长2

- 令$\lambda = \max\{\Delta x_k : k = 0, 1, \cdots, n\}$, 则

$$|M_{k-1}M_k| \le \sqrt{1+M^2}\Delta x_k \le \sqrt{1+M^2}\lambda,$$

这里M为$f'(x)$的最大值. 因此当$\lambda \to 0$时$\max\{|M_{k-1}M_k| : k = 0, 1, \cdots, n\} \to 0$.

- 曲线弧长

$$s = \lim_{\lambda\to 0}\sum_{k=1}^{n}\sqrt{1+(f'(\xi_k))^2}\Delta x_k$$
$$= \int_a^b \sqrt{1+(f'(x))^2}dx.$$

参数方程下曲线弧长1

- 设有光滑曲线的参数方程为$\begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \end{cases}$, $\alpha \le t \le \beta$, 作$[\alpha, \beta]$的分割$\alpha = t_0 < t_1 < \cdots < t_n = \beta$, 从而给出了曲线的分割$M_i(x(t_i), y(t_i))$. 设$\Delta t_i = t_i - t_{i-1}$, 则弦$M_{i-1}M_i$的长为

$$|M_{i-1}M_i| = \sqrt{(x(t_i) - x(t_{i-1}))^2 + (y(t_i) - y(t_{i-1}))^2}$$
$$\approx \sqrt{(x'(t_{i-1}))^2 + (y'(t_{i-1}))^2}\Delta t_i$$

这里用到$x(t_i) - x(t_{i-1}) = x'(t_{i-1})\Delta t_i + o(\Delta t_i)$, $y(t_i) - y(t_{i-1}) = y'(t_{i-1})\Delta t_i + o(\Delta t_i)$.

参数方程下曲线弧长2

- 令$\lambda = \max\{\Delta t_i : i = 0, 1, \cdots, n\}$, 则$\lambda \to 0$时$\max\{|M_{k-1}M_k| : k = 0, 1, \cdots, n\} \to 0$），曲线弧长

$$s = \lim_{\lambda \to 0} \sum_{i=1}^{n} \sqrt{(x'(t_{i-1}))^2 + (y'(t_{i-1}))^2} \Delta t_i$$
$$= \int_{\alpha}^{\beta} \sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2} dt$$

- 注：由于$x'(t), y'(t)$连续，t_{i-1}可以换成任意$\xi_i \in [t_{i-1}, t_i]$, 此时任然有$x(t_i) - x(t_{i-1}) = x'(\xi_i)\Delta t_i + o(\Delta t_i)$, $y(t_i) - y(t_{i-1}) = y'(\xi_i)\Delta t_i + o(\Delta t_i)$.

参数方程下曲线弧长2

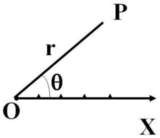
- 令$\lambda=\max\{\Delta t_i: i=0,1,\cdots,n\}$, 则$\lambda\to 0$时$\max\{|M_{k-1}M_k|: k=0,1,\cdots,n\}\to 0$），曲线弧长

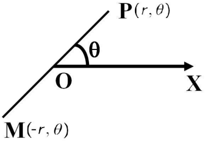
$$s=\lim_{\lambda\to 0}\sum_{i=1}^{n}\sqrt{(x'(t_{i-1}))^2+(y'(t_{i-1}))^2}\Delta t_i$$
$$=\int_{\alpha}^{\beta}\sqrt{(x'(t))^2+(y'(t))^2}dt$$

- 注：由于$x'(t), y'(t)$连续，t_{i-1}可以换成任意$\xi_i\in[t_{i-1},t_i]$,此时任然有$x(t_i)-x(t_{i-1})=x'(\xi_i)\Delta t_i+o(\Delta t_i)$, $y(t_i)-y(t_{i-1})=y'(\xi_i)\Delta t_i+o(\Delta t_i)$.

平面极坐标

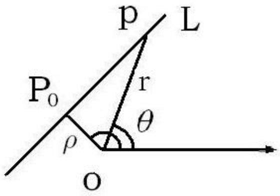
- 极坐标系: 在平面上取定一点O, 称为极点. 从O出发引一条射线Ox, 称为极轴. 再取定一个长度单位, 规定角度取逆时针方向为正. 这样, 平面上任一点P的位置就可以用线段OP的长度r 以及从Ox到OP的角度θ来确定, 有序数对(r,θ)就称为P点的极坐标, 记为$P(r,\theta)$; r称为P点的极径, θ称为P点的极角. 当限制$r \geq 0$, $0 \leq \theta < 2\pi$时, 平面上除极点O以外, 其他每一点都有唯一的一个极坐标. 极点的极径为零, 极角任意. 若除去上述限制, 平面上每一点都有无数多组极坐标, 一般地, 如果(r,θ) 是一个点的极坐标, 那么$(r,\theta+2n\pi)$, $(-r,\theta+(2n+1)\pi)$, 都可作为它的极坐标, 这里n是任意整数.





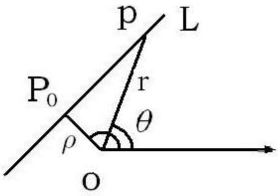
平面极坐标中的曲线方程

- 建立如下直角坐标系：以极坐标的原点O为原点，Ox为x轴. 则点$P(r,\theta)$的直角坐标(x,y)是$\begin{cases} x = r\cos\theta \\ y = r\sin\theta \end{cases}$.
- 直线方程：过原点O到一直线的作垂线，垂足P_0的极坐标为(ρ,ω), 则直线上任一点$P(r,\theta)$满足的方程为$r\cos(\theta-\omega)=\rho$.



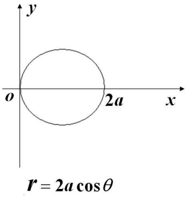
平面极坐标中的曲线方程

- 建立如下直角坐标系：以极坐标的原点O为原点，Ox为x轴. 则点$P(r,\theta)$的直角坐标(x,y)是$\begin{cases} x = r\cos\theta \\ y = r\sin\theta \end{cases}$.
- 直线方程：过原点O到一直线的作垂线，垂足P_0的极坐标为(ρ,ω)，则直线上任一点$P(r,\theta)$满足的方程为$r\cos(\theta-\omega)=\rho$.



平面极坐标中的曲线方程2

- 以O为圆心，半径为R的圆周的极坐标方程为$r=R$.

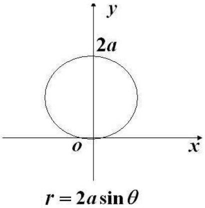


- 设$a>0$，以$(a,0)$为圆心，半径为a的圆周的极坐标方程为

$$r=2a\cos\theta,\quad -\frac{\pi}{2}\le\theta\le\frac{\pi}{2}.$$

- 以$(a,\frac{\pi}{2})$为圆心，半径为a的圆周的极坐标方程为

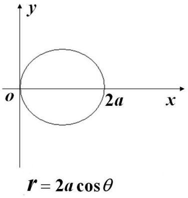
$$r=2a\sin\theta,\quad 0\le\theta\le\pi.$$



平面极坐标中的曲线方程2

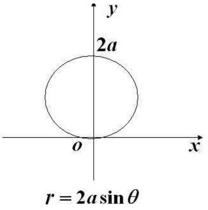
- 以O为圆心，半径为R的圆周的极坐标方程为$r=R$.
- 设$a>0$，以$(a,0)$为圆心，半径为a的圆周的极坐标方程为

$$r=2a\cos\theta,\quad -\frac{\pi}{2}\le\theta\le\frac{\pi}{2}.$$



- 以$(a,\frac{\pi}{2})$为圆心，半径为a的圆周的极坐标方程为

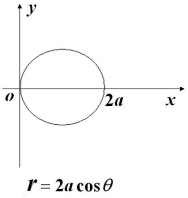
$$r=2a\sin\theta,\quad 0\le\theta\le\pi.$$



平面极坐标中的曲线方程2

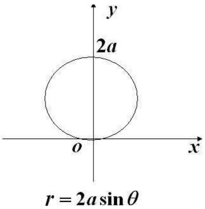
- 以O为圆心，半径为R的圆周的极坐标方程为$r = R$.
- 设$a > 0$，以$(a, 0)$为圆心，半径为a的圆周的极坐标方程为

$$r = 2a\cos\theta, \quad -\frac{\pi}{2} \le \theta \le \frac{\pi}{2}.$$



- 以$(a, \frac{\pi}{2})$为圆心，半径为a的圆周的极坐标方程为

$$r = 2a\sin\theta, \quad 0 \le \theta \le \pi.$$

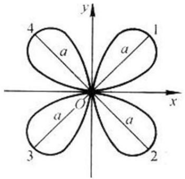


平面极坐标中的曲线方程3

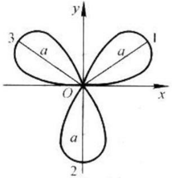
- 以任意点(r_0, θ_0)为圆心，半径为R的圆周的极坐标方程为

$$r^2 + r_0^2 - 2rr_0\cos(\theta - \theta_0) = R^2.$$

- 一般曲线的极坐标方程：$r = r(\theta)$，或$F(r, \theta) = 0$.
- $r(\theta) = a\sin 2\theta$ 是四叶玫瑰线.
- $r(\theta) = a\sin 3\theta$ 是三叶玫瑰线.



四叶玫瑰线 $r = a\sin 2\theta$



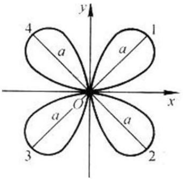
三叶玫瑰线 $r = a\sin 3\theta$

平面极坐标中的曲线方程3

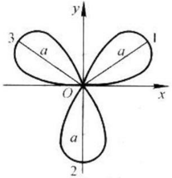
- 以任意点(r_0, θ_0)为圆心，半径为R的圆周的极坐标方程为

$$r^2 + r_0^2 - 2rr_0\cos(\theta - \theta_0) = R^2.$$

- 一般曲线的极坐标方程：$r = r(\theta)$，或$F(r, \theta) = 0$.
- $r(\theta) = a\sin 2\theta$ 是四叶玫瑰线.
- $r(\theta) = a\sin 3\theta$ 是三叶玫瑰线.



四叶玫瑰线 $r = a\sin 2\theta$



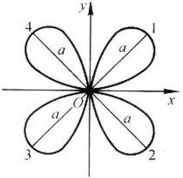
三叶玫瑰线 $r = a\sin 3\theta$

平面极坐标中的曲线方程3

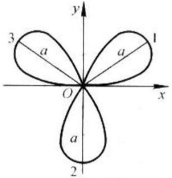
- 以任意点(r_0, θ_0)为圆心，半径为R的圆周的极坐标方程为

$$r^2 + r_0^2 - 2rr_0\cos(\theta - \theta_0) = R^2.$$

- 一般曲线的极坐标方程：$r = r(\theta)$，或$F(r, \theta) = 0$.
- $r(\theta) = a\sin 2\theta$ 是四叶玫瑰线.
- $r(\theta) = a\sin 3\theta$ 是三叶玫瑰线.



四叶玫瑰线 $r = a\sin 2\theta$



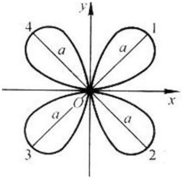
三叶玫瑰线 $r = a\sin 3\theta$

平面极坐标中的曲线方程3

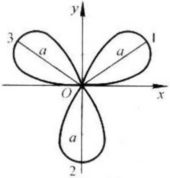
- 以任意点(r_0, θ_0)为圆心，半径为R的圆周的极坐标方程为

$$r^2 + r_0^2 - 2rr_0\cos(\theta - \theta_0) = R^2.$$

- 一般曲线的极坐标方程：$r = r(\theta)$，或$F(r, \theta) = 0$.
- $r(\theta) = a\sin 2\theta$ 是四叶玫瑰线.
- $r(\theta) = a\sin 3\theta$ 是三叶玫瑰线.



四叶玫瑰线 $r = a\sin 2\theta$



三叶玫瑰线 $r = a\sin 3\theta$

平面极坐标中的曲线弧长

- 设曲线的极坐标方程为$r = r(\theta)(\alpha \le \theta \le \beta)$，则直接坐标下的参数方程为
$$\begin{cases} x = r(\theta)\cos\theta \\ y = r(\theta)\sin\theta \end{cases}.$$
通过简单计算可知$(x'(\theta))^2 + (y'(\theta))^2 = r'(\theta)^2 + r(\theta)^2$，从而有弧长公式
$$s = \int_\alpha^\beta \sqrt{r'(\theta)^2 + r(\theta)^2} d\theta.$$

- 例：圆周$r = R$的周长$s = \int_0^{2\pi} \sqrt{0 + R^2} d\theta = 2\pi R$.
- 例：$r = 2R\cos\theta(-\frac{\pi}{2} \le \theta \le \frac{\pi}{2})$，$(r')^2 + r^2 = 4R^2$，周长$s = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} 2Rd\theta = 2\pi R$.

平面极坐标中的曲线弧长

- 设曲线的极坐标方程为$r=r(\theta)(\alpha\le\theta\le\beta)$，则直接坐标下的参数方程为
$$\begin{cases} x=r(\theta)\cos\theta \\ y=r(\theta)\sin\theta \end{cases}.$$
通过简单计算可知$(x'(\theta))^2+(y'(\theta))^2=r'(\theta)^2+r(\theta)^2$，从而有弧长公式
$$s=\int_\alpha^\beta\sqrt{r'(\theta)^2+r(\theta)^2}d\theta.$$

- 例：圆周$r=R$的周长$s=\int_0^{2\pi}\sqrt{0+R^2}d\theta=2\pi R$.
- 例：$r=2R\cos\theta(-\frac{\pi}{2}\le\theta\le\frac{\pi}{2})$，$(r')^2+r^2=4R^2$，周长$s=\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}2Rd\theta=2\pi R$.

平面极坐标中的曲线弧长

- 设曲线的极坐标方程为$r=r(\theta)(\alpha\le\theta\le\beta)$，则直接坐标下的参数方程为
$$\begin{cases} x=r(\theta)\cos\theta \\ y=r(\theta)\sin\theta \end{cases}.$$
通过简单计算可知$(x'(\theta))^2+(y'(\theta))^2=r'(\theta)^2+r(\theta)^2$，从而有弧长公式
$$s=\int_\alpha^\beta\sqrt{r'(\theta)^2+r(\theta)^2}d\theta.$$

- 例：圆周$r=R$的周长$s=\int_0^{2\pi}\sqrt{0+R^2}d\theta=2\pi R$.
- 例：$r=2R\cos\theta(-\frac{\pi}{2}\le\theta\le\frac{\pi}{2})$，$(r')^2+r^2=4R^2$，周长$s=\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}2Rd\theta=2\pi R$.

弧微分

- 光滑曲线的参数方程为$\begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \end{cases}$, $\alpha \le t \le \beta$, $[\alpha, t]$ 对应的弧长

$$s(t) = \int_{\alpha}^{t} \sqrt{(x'(s))^2 + (y'(s))^2} ds.$$

则有$ds = \sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2} dt.$

- 曲线$y = f(x)$, $x \in [a, b]$, $[a, x]$对应的弧长

$$s(x) = \int_{a}^{x} \sqrt{1 + (y'(t))^2} dt.$$

则有$ds = \sqrt{1 + (y'(x))^2} dx.$

- 极坐标表示的曲线$r = r(\theta)$, 则有$ds = \sqrt{r(\theta)^2 + (r'\theta)^2} d\theta.$

狐微分

- 光滑曲线的参数方程为$\begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \end{cases}$, $\alpha \le t \le \beta$, $[\alpha, t]$ 对应的弧长
$$s(t) = \int_\alpha^t \sqrt{(x'(s))^2 + (y'(s))^2} ds.$$
则有$ds = \sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2} dt.$
- 曲线$y = f(x)$, $x \in [a, b]$, $[a, x]$对应的弧长
$$s(x) = \int_a^x \sqrt{1 + (y'(t))^2} dt.$$
则有$ds = \sqrt{1 + (y'(x))^2} dx.$
- 极坐标表示的曲线$r = r(\theta)$, 则有$ds = \sqrt{r(\theta)^2 + (r'\theta)^2} d\theta.$

弧微分

- 光滑曲线的参数方程为$\begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \end{cases}$, $\alpha \le t \le \beta$, $[\alpha, t]$ 对应的弧长
$$s(t) = \int_\alpha^t \sqrt{(x'(s))^2 + (y'(s))^2} ds.$$
则有$ds = \sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2} dt$.
- 曲线$y = f(x)$, $x \in [a, b]$, $[a, x]$对应的弧长
$$s(x) = \int_a^x \sqrt{1 + (y'(t))^2} dt.$$
则有$ds = \sqrt{1 + (y'(x))^2} dx$.
- 极坐标表示的曲线$r = r(\theta)$, 则有$ds = \sqrt{r(\theta)^2 + (r'\theta)^2} d\theta$.

微元法

- 光滑曲线的参数方程为$\begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \end{cases}$, $\alpha \le t \le \beta$, 由于$[t, t + \Delta t]$对应的弧长
$$\Delta s = ds + o(\Delta t).$$
因此若能把$[t, t + \Delta t]$对应的弧长表示为$\Delta s = f(t)\Delta t + o(\Delta t)$, 则$[\alpha, \beta]$对应的弧长为$\int_\alpha^\beta f(t)dt$.
- 一般地，要求区间$[a, b]$对应的一个量y(比如：面积，弧长，体积)，若$[x, x + \Delta x]$对应的值为$\Delta y = f(x)\Delta x + o(\Delta x)$, 则$[a, b]$对应的值为$\int_a^b f(x)dx$.

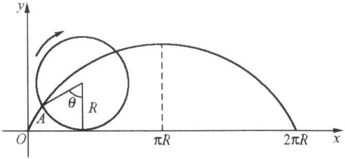
微元法

- 光滑曲线的参数方程为$\begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \end{cases}$, $\alpha \le t \le \beta$, 由于$[t, t + \Delta t]$对应的弧长
$$\Delta s = ds + o(\Delta t).$$
因此若能把$[t, t + \Delta t]$对应的弧长表示为$\Delta s = f(t)\Delta t + o(\Delta t)$, 则$[\alpha, \beta]$对应的弧长为$\int_\alpha^\beta f(t)dt$.
- 一般地，要求区间$[a, b]$对应的一个量y(比如：面积，弧长，体积)，若$[x, x + \Delta x]$对应的值为$\Delta y = f(x)\Delta x + o(\Delta x)$, 则$[a, b]$对应的值为$\int_a^b f(x)dx$.

旋轮线的弧长

- 圆盘在x轴上滚动. 圆盘上规定一点旋转一周所得曲线（称为旋轮线）的弧长.
  解：不妨假设固定点起始位置在原点，设P为固定点，Q为圆盘和x轴的接触点，C是圆盘的中心，参数$\theta = \angle QCP$. 旋转一周θ从0变到2π. 旋轮线的参数方程为

$$\begin{cases} x(\theta) = R(\theta - \sin\theta) \\ y(\theta) = R(1 - \cos\theta) \end{cases},$$



则有$x'(\theta)^2 + y'(\theta)^2 = R^2(1 - \cos\theta)^2 + R^2\sin^2\theta = 4R^2\sin^2\frac{\theta}{2}$,从而得弧长$s = \int_0^{2\pi} 2R|\sin\frac{\theta}{2}|d\theta = 8R$.

椭圆的周长

- 椭圆$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1(a\neq b)$的参数方程为$\begin{cases} x=a\cos\theta \\ y=b\sin\theta \end{cases}$, $0\leq\theta\leq 2\pi$. 则周长为$s=\int_0^{2\pi}\sqrt{a^2\sin^2\theta+b^2\cos^2\theta}d\theta$.
- 若用直角坐标$y=\frac{b}{a}\sqrt{a^2-x^2}$，则有周长等于

$$s=4\int_0^a\sqrt{1+\frac{(\frac{b}{a}x)^2}{a^2-x^2}}dx=4\int_0^a\sqrt{\frac{a^2+(\frac{b^2}{a^2}-1)x^2}{a^2-x^2}}dx.$$

- 注：$a\neq b$时，上面积分中被积函数的原函数不是初等函数(椭圆积分).

椭圆的周长

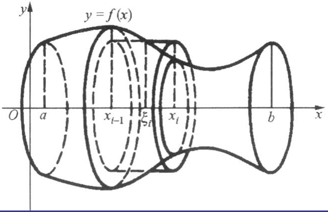
- 椭圆$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1(a\neq b)$的参数方程为$\begin{cases} x=a\cos\theta \\ y=b\sin\theta \end{cases}, 0\leq\theta\leq 2\pi$. 则周长为$s=\int_0^{2\pi}\sqrt{a^2\sin^2\theta+b^2\cos^2\theta}d\theta$.
- 若用直角坐标$y=\frac{b}{a}\sqrt{a^2-x^2}$，则有周长等于

$$s=4\int_0^a\sqrt{1+\frac{(\frac{b}{a}x)^2}{a^2-x^2}}dx=4\int_0^a\sqrt{\frac{a^2+\left(\frac{b^2}{a^2}-1\right)x^2}{a^2-x^2}}dx.$$

- 注：$a\neq b$时，上面积分中被积函数的原函数不是初等函数(椭圆积分).

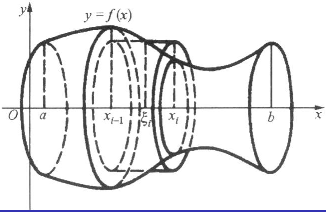
旋转体的体积1

- 连续函数$y=f(x)\geq 0(x\in[a,b])$表示的曲线绕x轴旋转所围成的旋转体体积.
- $[x.\Delta x]$对应的旋转体片(近似地看成底面半径为$f(x)$的圆柱体)的体积为$\Delta V=\pi f(x)^2\Delta x+o(\Delta x)$, 因此$V=\int_a^b \pi f(x)^2dx$.
- 注：$[x.\Delta x]$对应的旋转体片也可近似为上下底面半径分别为$f(x),f(x+\Delta x)$的圆台，此时$\Delta V\approx\frac{1}{3}\pi(f(x)^2+f(x)f(x+\Delta x)+f(x+\Delta x)^2)\Delta x=\pi f(x)^2\Delta x+o(\Delta x)$.
- $x=g(y)$（$y\in[c,d]$）绕y轴旋转形成的旋转体体积为$V=\int_c^d \pi g(y)^2dy$.



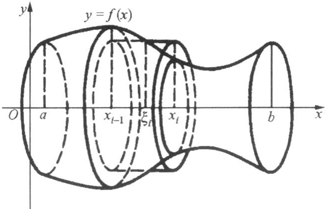
旋转体的体积1

- 连续函数$y = f(x) \geq 0 (x \in [a, b])$表示的曲线绕x轴旋转所围成的旋转体体积.
- $[x.\Delta x]$对应的旋转体片(近似地看成底面半径为$f(x)$的圆柱体)的体积为$\Delta V = \pi f(x)^2 \Delta x + o(\Delta x)$, 因此$V = \int_a^b \pi f(x)^2 dx$.
- 注: $[x.\Delta x]$对应的旋转体片也可近似为上下底面半径分别为$f(x), f(x+\Delta x)$的圆台, 此时$\Delta V \approx \frac{1}{3}\pi(f(x)^2 + f(x)f(x+\Delta x) + f(x+\Delta x)^2)\Delta x = \pi f(x)^2 \Delta x + o(\Delta x)$.
- $x = g(y)$ ($y \in [c, d]$) 绕y轴旋转形成的旋转体体积为$V = \int_c^d \pi g(y)^2 dy$.



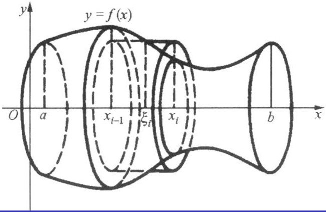
旋转体的体积1

- 连续函数$y = f(x) \geq 0 (x \in [a, b])$表示的曲线绕$x$轴旋转所围成的旋转体体积.
- $[x.\Delta x]$对应的旋转体片(近似地看成底面半径为$f(x)$的圆柱体)的体积为$\Delta V = \pi f(x)^2 \Delta x + o(\Delta x)$, 因此$V = \int_a^b \pi f(x)^2 dx$.
- 注：$[x.\Delta x]$对应的旋转体片也可近似为上下底面半径分别为$f(x), f(x+\Delta x)$的圆台，此时$\Delta V \approx \frac{1}{3}\pi(f(x)^2 + f(x)f(x+\Delta x) + f(x+\Delta x)^2)\Delta x = \pi f(x)^2 \Delta x + o(\Delta x)$.
- $x = g(y)$（$y \in [c, d]$）绕y轴旋转形成的旋转体体积为$V = \int_c^d \pi g(y)^2 dy$.



旋转体的体积1

- 连续函数$y = f(x) \geq 0(x \in [a, b])$表示的曲线绕$x$轴旋转所围成的旋转体体积.
- $[x.\Delta x]$对应的旋转体片(近似地看成底面半径为$f(x)$的圆柱体)的体积为$\Delta V = \pi f(x)^2 \Delta x + o(\Delta x)$, 因此$V = \int_a^b \pi f(x)^2 dx$.
- 注：$[x.\Delta x]$对应的旋转体片也可近似为上下底面半径分别为$f(x), f(x + \Delta x)$的圆台，此时$\Delta V \approx \frac{1}{3}\pi(f(x)^2 + f(x)f(x + \Delta x) + f(x + \Delta x)^2)\Delta x = \pi f(x)^2 \Delta x + o(\Delta x)$.
- $x = g(y)$（$y \in [c, d]$）绕y轴旋转形成的旋转体体积为$V = \int_c^d \pi g(y)^2 dy$.



旋转体的体积2

- $y=f(x)$（$x\in[a,b]$）绕$x=d$轴旋转形成的旋转体体积为$V=\int_a^b \pi(f(x)-d)^2dx$.
- 设曲线的参数方程为$x=x(t),y=y(t)$, $\alpha\le\beta$.当$x(t)$严格单调时，$[t,t+\Delta t]$对应的体积

$$\Delta V\approx\pi y(t)^2|\Delta x|\approx\pi y(t)^2|x'(t)|\Delta t.$$

曲线绕x轴旋转形成的旋转体体积为

$$V=\int_\alpha^\beta \pi(y(t))^2|x'(t)|dt.$$

- 曲线$x=x(t),y=y(t)$, $\alpha\le\beta$.当$y(t)$严格单调时，曲线绕y轴旋转形成的旋转体体积为

$$V=\int_\alpha^\beta \pi(x(t))^2|y'(t)|dt.$$

旋转体的体积2

- $y=f(x)$（$x\in[a,b]$）绕$x=d$轴旋转形成的旋转体体积为$V=\int_a^b \pi(f(x)-d)^2dx$.
- 设曲线的参数方程为$x=x(t), y=y(t)$, $\alpha\le\beta$.当$x(t)$严格单调时，$[t,t+\Delta t]$对应的体积

$$\Delta V\approx \pi y(t)^2|\Delta x|\approx \pi y(t)^2|x'(t)|\Delta t.$$

曲线绕x轴旋转形成的旋转体体积为

$$V=\int_\alpha^\beta \pi(y(t))^2|x'(t)|dt.$$

- 曲线$x=x(t), y=y(t)$, $\alpha\le\beta$.当$y(t)$严格单调时，曲线绕y轴旋转形成的旋转体体积为

$$V=\int_\alpha^\beta \pi(x(t))^2|y'(t)|dt.$$

旋转体的体积2

- $y = f(x)$（$x \in [a, b]$）绕$x = d$轴旋转形成的旋转体体积为$V = \int_a^b \pi(f(x) - d)^2 dx$.
- 设曲线的参数方程为$x = x(t), y = y(t)$, $\alpha \le \beta$. 当$x(t)$严格单调时，$[t, t + \Delta t]$对应的体积

$$\Delta V \approx \pi y(t)^2 |\Delta x| \approx \pi y(t)^2 |x'(t)| \Delta t.$$

曲线绕x轴旋转形成的旋转体体积为

$$V = \int_\alpha^\beta \pi(y(t))^2 |x'(t)| dt.$$

- 曲线$x = x(t), y = y(t)$, $\alpha \le \beta$. 当$y(t)$严格单调时，曲线绕y轴旋转形成的旋转体体积为

$$V = \int_\alpha^\beta \pi(x(t))^2 |y'(t)| dt.$$

计算旋转体的体积1

- 圆锥的体积：设圆锥底面半径为R，高维h，可以看成直线段$x=R(1-\frac{y}{h})(y\in[0,h])$ 绕y旋转形成的旋转体，$V=\int_0^h \pi R^2(1-\frac{y}{h})^2dy=\frac{\pi}{3}R^2h.$
- 球的体积：$x=R\cos\theta, y=R\sin\theta(\theta\in[0,\pi])$绕$x$轴旋转形成的旋转体体积为

$$V=\int_0^{\pi}\pi(R\sin\theta)^2R\sin\theta d\theta=\frac{4}{3}\pi R^3.$$

- 圆台的体积：上下底面半径分别为R_1,R_2，高维h的圆台，可以看成是$x=\frac{R_2-R_1}{h}(h-y)+R_1$ ($y\in[0,h]$绕y轴旋转所得的旋转体)，

$$V=\int_0^h\pi\Big(\frac{R_2-R_1}{h}(h-y)+R_1\Big)^2dy=\frac{1}{3}\pi h(R_1^2+R_2^2+R_1R_2).$$

计算旋转体的体积1

- 圆锥的体积：设圆锥底面半径为R，高维h，可以看成直线段$x = R(1-\frac{y}{h})(y\in[0,h])$ 绕y旋转形成的旋转体，$V = \int_0^h \pi R^2(1-\frac{y}{h})^2 dy = \frac{\pi}{3}R^2 h.$
- 球的体积：$x = R\cos\theta, y = R\sin\theta(\theta\in[0,\pi])$绕$x$轴旋转形成的旋转体体积为

$$V = \int_0^{\pi} \pi(R\sin\theta)^2 R\sin\theta d\theta = \frac{4}{3}\pi R^3.$$

- 圆台的体积：上下底面半径分别为R_1, R_2，高维h的圆台，可以看成是$x = \frac{R_2-R_1}{h}(h-y)+R_1$ $(y\in[0,h]$绕y轴旋转所得的旋转体)，

$$V = \int_0^h \pi\Big(\frac{R_2-R_1}{h}(h-y)+R_1\Big)^2 dy = \frac{1}{3}\pi h(R_1^2+R_2^2+R_1R_2).$$

计算旋转体的体积1

- 圆锥的体积：设圆锥底面半径为R，高维h，可以看成直线段$x = R(1-\frac{y}{h})(y \in [0,h])$ 绕y旋转形成的旋转体，$V = \int_0^h \pi R^2(1-\frac{y}{h})^2 dy = \frac{\pi}{3}R^2 h.$
- 球的体积：$x = R\cos\theta, y = R\sin\theta(\theta \in [0,\pi])$绕$x$轴旋转形成的旋转体体积为

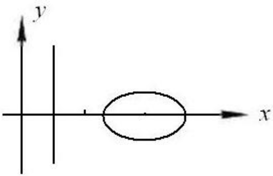
$$V = \int_0^{\pi} \pi(R\sin\theta)^2 R\sin\theta d\theta = \frac{4}{3}\pi R^3.$$

- 圆台的体积：上下底面半径分别为R_1, R_2，高维h的圆台，可以看成是$x = \frac{R_2-R_1}{h}(h-y)+R_1$ $(y \in [0,h]$绕y轴旋转所得的旋转体)，

$$V = \int_0^h \pi\Big(\frac{R_2-R_1}{h}(h-y)+R_1\Big)^2 dy = \frac{1}{3}\pi h(R_1^2+R_2^2+R_1R_2).$$

计算旋转体的体积2

- 设D是由椭圆$4(x-4)^2+9y^2=9$围成，求D绕以下直线旋转所得旋转体体积.（1）x轴；（2）y轴，（3）$x=1$.



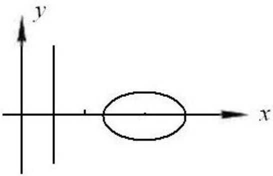
- 解：椭圆的参数方程为$x=4+\frac{3}{2}\cos\theta, y=\sin\theta$. 绕$x$轴旋转的旋转体体积

$$\int_0^{\pi}\pi(\sin\theta)^2(\frac{3}{2}\sin\theta)d\theta=2\pi$$

计算旋转体的体积2

- 设D是由椭圆$4(x-4)^2+9y^2=9$围成，求D绕以下直线旋转所得旋转体体积.（1）x轴；（2）y轴，（3）$x=1$.
- 解：椭圆的参数方程为$x=4+\frac{3}{2}\cos\theta, y=\sin\theta$. 绕$x$轴旋转的旋转体体积

$$\int_0^{\pi}\pi(\sin\theta)^2(\frac{3}{2}\sin\theta)d\theta=2\pi$$



计算旋转体的体积3

- 绕y轴旋转形成的旋转体是$\theta\in[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}]$对应曲线产生的旋转体挖去$\theta\in[\frac{\pi}{2},\frac{3\pi}{2}]$对应曲线产生的旋转体，体积等于

$$\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\pi(4+\frac{3}{2}\cos\theta)^2\cos\theta d\theta-\int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}}\pi(4+\frac{3}{2}\cos\theta)^2(-\cos\theta)d\theta$$
$$=\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\pi((4+\frac{3}{2}\cos\theta)^2-(4-\frac{3}{2}\cos\theta)^2)\cos\theta d\theta$$
$$=\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\pi\cdot 24\pi\cos^2\theta\cos\theta d\theta=12\pi^2.$$

- 绕$x=1$旋转所得旋转体体积为

$$\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\pi(3+\frac{3}{2}\cos\theta)^2\cos\theta d\theta-\int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}}\pi(3+\frac{3}{2}\cos\theta)^2(-\cos\theta)d\theta=9\pi^2.$$

计算旋转体的体积3

- 绕y轴旋转形成的旋转体是$\theta \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$对应曲线产生的旋转体挖去$\theta \in [\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}]$对应曲线产生的旋转体，体积等于

$$\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \pi(4+\frac{3}{2}\cos\theta)^2\cos\theta d\theta - \int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}} \pi(4+\frac{3}{2}\cos\theta)^2(-\cos\theta)d\theta$$
$$= \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \pi((4+\frac{3}{2}\cos\theta)^2 - (4-\frac{3}{2}\cos\theta)^2)\cos\theta d\theta$$
$$= \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \pi\cdot 24\pi\cos^2\theta\cos\theta d\theta = 12\pi^2.$$

- 绕$x=1$旋转所得旋转体体积为

$$\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \pi(3+\frac{3}{2}\cos\theta)^2\cos\theta d\theta - \int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}} \pi(3+\frac{3}{2}\cos\theta)^2(-\cos\theta)d\theta = 9\pi^2.$$

旋转体的侧面积1

- $y = f(x) \geq 0 (x \in [a, b])$绕$x$轴转，求旋转体的侧面积(曲线扫过的曲面面积). $[x, x + \Delta x]$对应的旋转体片的侧面积

$$\Delta F \approx 2\pi f(x)\Delta s \approx 2\pi f(x)\sqrt{1 + f'(x)^2}\Delta x,$$

得到侧面积公式

$$F = \int_a^b 2\pi f(x)\sqrt{1 + f'(x)^2}dx.$$

- 注：$[x, x + \Delta x]$对应的旋转体片也可以近似看成上下底半径分别为$f(x), f(x + \Delta x)$的圆台，侧面积

$$\Delta F \approx \pi(f(x) + f(x + \Delta x)) \cdot l \approx 2\pi f(x)\sqrt{1 + f'(x)^2}\Delta x.$$

- 注：求侧面积时，$[x, x + \Delta x]$对应的旋转体片不能近似地看成高为Δx的圆柱体.

旋转体的侧面积1

- $y = f(x) \geq 0 (x \in [a, b])$绕$x$轴转，求旋转体的侧面积(曲线扫过的曲面面积). $[x, x+\Delta x]$对应的旋转体片的侧面积

$$\Delta F \approx 2\pi f(x)\Delta s \approx 2\pi f(x)\sqrt{1+f'(x)^2}\Delta x,$$

得到侧面积公式

$$F = \int_a^b 2\pi f(x)\sqrt{1+f'(x)^2}dx.$$

- 注：$[x, x+\Delta x]$对应的旋转体片也可以近似看成上下底半径分别为$f(x), f(x+\Delta x)$的圆台，侧面积

$$\Delta F \approx \pi(f(x)+f(x+\Delta x)) \cdot l \approx 2\pi f(x)\sqrt{1+f'(x)^2}\Delta x.$$

- 注：求侧面积时，$[x, x+\Delta x]$对应的旋转体片不能近似地看成高为Δx的圆柱体.

旋转体的侧面积2

- 曲线参数方程$x=x(t), y=y(t)$, $t\in[\alpha,\beta]$ 绕x轴旋转，曲线扫过的曲面面积为
$$F=\int_{\alpha}^{\beta} 2\pi y(t)\sqrt{x'(t)^2+y'(x)^2}dt.$$
- 例：球面面积. 参数方程$x=R\cos\theta, y=R\sin\theta$,
$$F=\int_{0}^{\pi} 2\pi R\sin\theta Rd\theta=4\pi R^2$$
或用直角坐标$y=\sqrt{R^2-x^2}$,
$$F=\int_{-R}^{R} 2\pi\sqrt{R^2-x^2}\sqrt{1+\frac{x^2}{R^2-x^2}}dx=4\pi R^2$$

旋转体的侧面积2

- 曲线参数方程$x = x(t), y = y(t)$, $t \in [\alpha, \beta]$ 绕x轴旋转，曲线扫过的曲面面积为

$$F = \int_{\alpha}^{\beta} 2\pi y(t)\sqrt{x'(t)^2 + y'(x)^2}dt.$$

- 例：球面面积. 参数方程$x = R\cos\theta, y = R\sin\theta$,

$$F = \int_0^{\pi} 2\pi R\sin\theta Rd\theta = 4\pi R^2$$

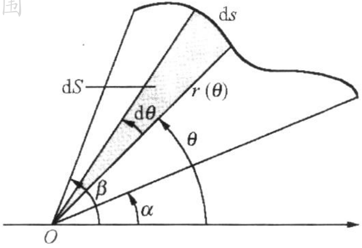
或用直角坐标$y = \sqrt{R^2 - x^2}$,

$$F = \int_{-R}^{R} 2\pi\sqrt{R^2 - x^2}\sqrt{1 + \frac{x^2}{R^2 - x^2}}dx = 4\pi R^2$$

平面极坐标下图形的面积

- 曲边扇形的面积：$r=r(\theta)$，曲线$\theta\in[\alpha,\beta]$与射线$\theta=\alpha,\theta=\beta$ 围成的图形面积. $[\theta,\theta+\Delta\theta]$对应的小扇形面积$\Delta S\approx\frac{1}{2}r(\theta)^2\Delta\theta$，因此面积为$S=\int_\alpha^\beta\frac{1}{2}r(\theta)^2d\theta$.
- 例：三叶玫瑰线$r(\theta)=a\sin 3\theta$围成的面积.

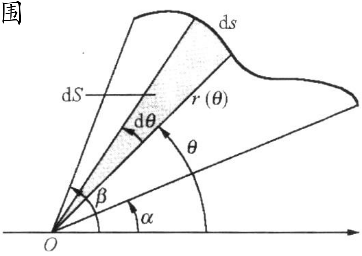
  解：$S=3\int_0^{\frac{\pi}{3}}a^2\sin^3\theta d\theta=\frac{\pi}{4}a^2$.



平面极坐标下图形的面积

- 曲边扇形的面积：$r = r(\theta)$，曲线$\theta \in [\alpha, \beta]$与射线$\theta = \alpha, \theta = \beta$ 围成的图形面积. $[\theta, \theta + \Delta\theta]$对应的小扇形面积$\Delta S \approx \frac{1}{2} r(\theta)^2 \Delta\theta$，因此面积为$S = \int_\alpha^\beta \frac{1}{2} r(\theta)^2 d\theta$.
- 例：三叶玫瑰线$r(\theta) = a\sin 3\theta$围成的面积.

  解：$S = 3\int_0^{\frac{\pi}{3}} a^2 \sin^3 \theta d\theta = \frac{\pi}{4} a^2$.



定积分在物理上的应用1

- 细线$x=x(t), y=y(t)$, $t\in[\alpha,\beta]$, 线密度为$\rho(t)$的质量

$$M=\int_\alpha^\beta \rho(t)\sqrt{x'(t)^2+y'(t)^2}dt.$$

- 细线$x=x(t), y=y(t)$, $t\in[\alpha,\beta]$, 线密度为$\rho(t)$,设质心为$(\bar{x},\bar{y})$, 则有

$$\bar{x}=\frac{1}{M}\int_\alpha^\beta x(t)\rho(t)\sqrt{x'(t)^2+y'(t)^2}dt$$
$$\bar{y}=\frac{1}{M}\int_\alpha^\beta y(t)\rho(t)\sqrt{x'(t)^2+y'(t)^2}dt.$$

定积分在物理上的应用1

- 细线$x=x(t), y=y(t)$, $t\in[\alpha,\beta]$, 线密度为$\rho(t)$的质量

$$M=\int_{\alpha}^{\beta}\rho(t)\sqrt{x'(t)^2+y'(t)^2}dt.$$

- 细线$x=x(t), y=y(t)$, $t\in[\alpha,\beta]$, 线密度为$\rho(t)$,设质心为$(\bar{x},\bar{y})$, 则有

$$\bar{x}=\frac{1}{M}\int_{\alpha}^{\beta}x(t)\rho(t)\sqrt{x'(t)^2+y'(t)^2}dt$$
$$\bar{y}=\frac{1}{M}\int_{\alpha}^{\beta}y(t)\rho(t)\sqrt{x'(t)^2+y'(t)^2}dt.$$

定积分在物理上的应用2

- 细线$x=x(t),y=y(t),\ t\in[\alpha,\beta]$，线密度为$\rho(t)$,绕$x$轴的转动惯量

$$I_x=\int_\alpha^\beta y(t)^2\rho(t)\sqrt{x'(t)^2+y'(t)^2}dt.$$

绕y轴的转动惯量

$$I_y=\int_\alpha^\beta x(t)^2\rho(t)\sqrt{x'(t)^2+y'(t)^2}dt.$$

- Guldin定理：平面上一条质量分布均匀的曲线绕一条不通过它的直线旋转一周，所得旋转体的侧面积恰好等于它的质心绕同一轴旋转所得的圆周长乘以曲线的弧长.
证明：$\rho(t)=\rho$，绕x轴旋转，设弧长为l. 侧面积$F=2\pi\int_\alpha^\beta y(t)ds$，质心$\bar{y}=\frac{1}{M}\int_\alpha^\beta y(t)\rho ds=\frac{F}{2\pi l}$.即$F=2\pi l\bar{y}$.