Ch13

13.1 不是可交易证券价格的变量的风险价格是如何定义的？

解： 不是可交换证券价格的变量的风险市场价格是通过求可交换证券的风险市场价格而来，但必须满足该可交换证券的价格与不是可交换证券价格的变量瞬态完全正相关。

13.2 假设黄金的风险市场价格为零，如果贮存成本为每年 1%，无风险年利率为 6%，那么黄金价格的期望增长率为多少？

解： 由公式 m-λs=r-y+u,而λ=0,r=0.06,y=0,u=0.01 所以 m=0.07.即期望增长率为 0.07。

13.3 一个证券的价格与以下两个变量正相关：铜的价格和日元兑美元的汇率，假设这两个变量的风险市场价格分别为 0.5 和 0.1。若铜的价格固定，则该证券的波动率为每年 8%；如果日元对美元的汇率固定，则该证券的波动率为每年 12%。无风险利率为每年 7%。证券的预期回报率为多少？如果两个变量彼此之间是不相关的，该证券的波动率为多少？

解：（1） 令 u 为证券的预期收益率，已知无风险利率 r=0.07，铜价和日圆兑美圆汇率的风险市场价格分别为 λ_1 =0.5 和 λ_2=0.1，铜价固定时汇率引起的证券波动率为 σ_2=0.08，汇率固定时铜价引起的证券波动率为 σ_1=0.12。因此由公式 $u-r=\lambda_1\sigma_1+\lambda_2\sigma_2$ 可得 u=0.138 即证券的预期收益率为每年 0.138

（2）由 $\sigma_1 dz_1+\sigma_2 dz_2=\sqrt{\sigma_1{}^2+\sigma_2{}^2}\, dz3$ 代入 σ_1，σ_2 的值可得 $\sqrt{\sigma_1{}^2+\sigma_2{}^2}E*S_TS_0e^{(m-\lambda s)\times T}$ 为 0.144 即铜价和日圆兑美圆汇率不相关时证券的波动率为 0.144

13.4 某个石油公司只是为了开发德克萨斯一个很小区域的石油。其价值主要依赖于如下两个随机变量：石油的价格和以探明石油的储存量。讨论：这两个变量中的风险市场价格为正数、负数还是零？

解：第二个变量的风险市场价格为 0。这是因为这种风险是非系统的，它与经济社会的其他风险完全不相关，投资者不能因为承担这种不可转换的风险而要求更高的回报。

13.5 通过两个无红利支付的交易证券和两个依赖于这两个无红利支付交易证券价格的衍生工具构成一个无风险组合，推导出这个衍生工具的微分方程。证明此微分方程和 13B.11 所给的微分方程一样。

解：假定两个无红利支付交易证券的价格分别为 S_1 和 S_2，而依赖于它们的衍生工具的价格为 f，可以得到如下等式：

$dS_1=u_1S_1dt+\sigma_1S_1dz_1$; $dS_2=u_2S_2dt+\sigma_2S_2dz_2$

又根据 Ito 定理可得式：

$$df=(u_1S_1\frac{\partial f}{\partial S_1}+u_2S_2\frac{\partial f}{\partial S_2}+\frac{\partial f}{\partial t}+\frac{1}{2}\sigma_1{}^2\frac{\partial^2 f}{\partial S_1{}^2}+\frac{1}{2}\sigma_2{}^2\frac{\partial^2 f}{\partial S_2{}^2}$$
$$+\rho\sigma_1\sigma_2\frac{\partial^2 f}{\partial S_1\partial S_2})dt+\sigma_1S_1\frac{\partial f}{\partial S_1}dz_1+\sigma_2S_2\frac{\partial f}{\partial S_2}dz_2$$

由 $$\prod = rf + r\frac{\partial f}{\partial S_1}S_1 + r\frac{\partial f}{\partial S_2}S_2 dt$$

$$rf = \frac{\partial f}{\partial t} + r\frac{\partial f}{\partial S_1}S_1 + r\frac{\partial f}{\partial S_2}S_2 + \frac{1}{2}\sigma_1^2\frac{\partial^2 f}{\partial S_1^2} + \frac{1}{2}\sigma_2^2\frac{\partial^2 f}{\partial S_2^2} + \rho\sigma_1\sigma_2\frac{\partial^2 f}{\partial S_1\partial S_2}$$

可得 $d\prod = -df + \frac{\partial f}{\partial S_1}dS_1 + \frac{\partial f}{\partial S_2}dS_2$

$$= -(\frac{\partial f}{\partial t} + \frac{1}{2}\sigma_1^2\frac{\partial^2 f}{\partial S_1^2} + \frac{1}{2}\sigma_2^2\frac{\partial^2 f}{\partial S_2^2} + \rho\sigma_1\sigma_2\frac{\partial^2 f}{\partial S_1\partial S_2})dt$$

所以，根据无风险组合特性：$d\prod = r\prod dt$

我们可以得到等式：

$$-(\frac{\partial f}{\partial t} + \frac{1}{2}\sigma_1^2\frac{\partial^2 f}{\partial S_1^2} + \frac{1}{2}\sigma_2^2\frac{\partial^2 f}{\partial S_2^2} + \rho\sigma_1\sigma_2\frac{\partial^2 f}{\partial S_1\partial S_2})dt = r(-f + \frac{\partial f}{\partial S_1}S_1 + \frac{\partial f}{\partial S_2}S_2)dt$$

因 此 ，

$$rf = \frac{dx}{x} = \left[\frac{a(x_0 - x)}{x} - \lambda\frac{c}{\sqrt{x}}\right]dt + \frac{c}{\sqrt{x}}dz\frac{1}{2}\sigma_1^2\frac{\partial^2 f}{\partial S_1^2} + \frac{1}{2}\sigma_2^2\frac{\partial^2 f}{\partial S_2^2} + \rho\sigma_1\sigma_2\frac{\partial^2 f}{\partial S_1\partial S_2}$$

又由 13B.11 知道 $m_1 - \lambda_1\sigma_1 = m_2 - \lambda_2\sigma_2 = r$

所以这个衍生工具的微分方程和 13B.11 所给的微分方程一样。

13.6 一个远期合约在 T 时刻盈亏状态为（S_T—K）日元，其中 S_T 是 T 时刻黄金的价格，K 是以美元计的交割价格。假设储存成本为零，若有必要可定义其他变量，计算远期价格。

解：假设 $\hat{E}$ 是从日圆投资者来看的风险中性世界中的期望值，Q_T 是 T 时刻用日圆表示的一美圆的价值，r 、r_f 分别是美圆和日圆的无风险利率，q 是指数的红利收益率，ρ 是 S 和 Q 的瞬时相关系数，σ_S 和 σ_Q 是 S 和 Q 的波动率，F 是远期价格

由本章可得如下等式：$F = \frac{\hat{E}\left[S_T \cdot Q_T\right]}{\hat{E}\left[Q_T\right]}$ 、$\hat{E}\left[Q_T\right] = Q_T \cdot e^{(r_f - r)(T-t)}$

以及 $\hat{E}\left[S_T \cdot Q_T\right] = S_T \cdot Q_T e^{(2r_f - q - r + \rho\sigma_S\sigma_Q)(T-t)}$

所以，远期价格 $F = S_T e^{(r_f - q + \rho\sigma_S\sigma_Q)(T-t)}$

13.7 豆油的便利收益是年率 5%，年贮存成本为 1%，无风险利率为年率 6%。豆油价格期望增长率为 0。那么 6 个月的期货价格和 6 个月的期望价格之间有何联系？

解：y=r+u-m + λs ,已知 y=0.05.r=0.06,u=0.01,m=0 ,可求得 λs= – 0.02

因为 F= $E^*(S_T) = S_0\, e^{(m-\lambda s)\times T}$ ，$E(S_T) = S_0\, e^{mT}$

所以 F=$E(S_T)e^{-\lambda s\times T}=E(S_T)e^{0.02\times 0.5}$=1.01$E(S_T)$

即六个月的期货价格比六个月的期望价格高出百分之一。

13.8 铜的风险市场价格为 0.5，铜的年波动率为 20%，即期价格为每磅 80 美分，6 个月期货价格为每磅 75 美分。问在下 6 个月中预期铜价的相应增长率为多少？

解：由上题知道 F=$E(S_T)e^{-\lambda s\times T}$。而$\lambda$=0.5，s=0.2，$S_0$=0.8, F=0.75 和 T=0.5

可求得$E(S_T)$=0.7885 又因为S_0=0.8，$E(S_T)=S_0\,e^{mT}$，所以 m=-0.03

即期望增长率为负百分之三。

13.9 假设一利率x遵循如下过程：

$$dx=a(x_0-x)dt+c\sqrt{x}dz$$

其中a、x_0、和c是正常数。假设x的风险市场价格是λ。当用扩展后的风险中性原理估计一个衍生工具时，漂移率是如何被调整的？

解：题中等式可改写为：$\frac{dx}{x}=\frac{a(x_0-x)}{x}dt+\frac{c}{\sqrt{x}}dz$，其中$\frac{a(x_0-x)}{x}$是利率的期望增长率，$\frac{c}{\sqrt{x}}$是它的干扰项，那么在风险中性世界期望增长率为

$\frac{a(x_0-x)}{x}-\lambda\frac{c}{\sqrt{x}}$

因此，过程变为$\frac{dx}{x}=\left[\frac{a(x_0-x)}{x}-\lambda\frac{c}{\sqrt{x}}\right]dt+\frac{c}{\sqrt{x}}dz$，

即$dx=\left[a(x_0-x)-\lambda c\sqrt{x}\right]dt+c\sqrt{x}dz$，

所以，漂移率调整为$\lambda c\sqrt{x}$

13.10 一个证券在 T 时刻的盈亏状态为 S_1S_2,其中 S_1 是标准普尔 500 指数的水平，S_2 是石油的价格。假设 S_1 和 S_2 都遵循几何布朗运动且不相关。若有必要，可定义其他变量，计算 T 时刻该证券的价值。

解：假设q、μ分别是标准普尔 500 指数和石油价格增长率，r是无风险利率

由公式 13.14：$f=e^{-r(T-t)}\hat{E}\left[f_T\right]$，以及考虑本题有 $f_T=S_1S_2$

而根据布朗运动知道$\hat{E}\left[S_1S_2\right]=S_1S_2e^{(q+\mu+\rho\sigma_1\sigma_2)(T-t)}$

所以,T 时刻该证券的价值为 $f=e^{-r(T-t)}S_1S_2e^{(q+\mu+\rho\sigma_1\sigma_2)(T-t)}$

$e^{m_2-\lambda_2 s_2}$

13.11 应用风险中性定价原理证明：6 个月后以一股 IBM 股票兑两股柯达股票的期权价格与利率无关。

解：由题意可假设现时刻一股 IBM 股票刚好可兑换两股柯达股票，那么六个月后一股 IBM 股票兑两股柯达股票的期权价格即是后者与前者的远期价格之差，令 S_{10}、S_{20} 分别是 IBM 股票和柯达股票的现时刻价格，即 $S_{10}=2S_{20}$；再令 m_1、m_2 分别是两股票的预期增长率，根据风险中性定价原理，在风险中性世界中两者的预期增长率为 $m_1-\lambda_1 s_1$、$m_1-\lambda_2 s_2$， IBM 股票和柯达股票六个月的远期价格为 $S_{10}\ e^{\frac{1}{2}(m_1-\lambda_1 s_1)}$、$S_{20}\ e^{\frac{1}{2}(m_2-\lambda_2 s_2)}$ 所以在风险中性世界中期权价格为 $2S_{20}\ e^{\frac{1}{2}(m_2-\lambda_2 s_2)} - S_{10}\ e^{\frac{1}{2}(m_1-\lambda_1 s_1)}$，即与利率无关，根据风险中性定价原理将其应用到风险世界中同样成立

13.12 假设有一商品，其波动率 σ 为一常数，无风险收益率也为常数。证明在风险中性的世界中：$\ln S_T \sim \Phi\left[\ln F-\frac{\sigma^2}{2}(T-t),\sigma\sqrt{T-t}\right]$

其中 S_T 为 T 时刻商品的价值，F 是到期日 T 时刻期货合约的价格。

解：由第 11 章我们可得 $\ln S_T \sim \Phi\left[\ln S+(\mu-\frac{\sigma^2}{2})(T-t),\sigma\sqrt{T-t}\right]$，而 $F=S\cdot e^{\mu(T-t)}$，

即 $\ln F=\ln S+\mu(T-t)$

所以，$\ln S_T \sim \Phi\left[\ln F-\frac{\sigma^2}{2}(T-t),\sigma\sqrt{T-t}\right]$

Ch14

14.1 一个看涨期权的 delta 值为 0.7 意味着什么？若每个期权的 delta 均为 0.7，如何使一个 1000 个看涨期权的空头变成 delta 中性？

解：Delta 为 0.7 意味着：当股票价格上涨一个小量 ΔS 时，期权价格上涨 70%ΔS。反之亦然。1000 个看涨期权空头其 Delta 是-700，可以购买 700 股使之变成 Delta 中性。

14.2 无风险年利率为 10%，股票价格的年波动率为 25%，计算标的物为不分红股票，6 个月期两平期权欧式看涨期权的 delta 值。

解：

$S_0=X$, $r=0.1$, $\sigma=0.25$, $T=0.5$

$$d_1=\frac{\ln(S_0/X)+(0.1+0.25^2/2)0.5}{0.25\sqrt{0.5}}=0.3712$$

看涨期权 delta 为 $N(d_1)$ 或 0.64

14.3 若以年计，一个期权头寸的 theta 值为－0.1 意味着什么？若一个交易者认

为股票价格和隐含波动率都不会变，那么期权头寸是什么类型？

解： Theta 为－0.1 意味着：如果Δt 年后，股票价格和波动率都不变，期权价值下降 0.1Δt。如果交易者认为股票价格和隐含波动率都不会变，期权头寸会选择一个尽可能高的 theta 值，相对来说，短期平价期权具有最高的 theta 值。

14.4 期权头寸的 gamma 是代表什么？当一个期权空头头寸的 gamma 为很大的负值时，并且 delta 为零，其风险是什么？

解：Gamma 代表某种标的资产的衍生证券组合的 delta 变化相对于标的资产价格变化的比率。当一个期权空头头寸的 gamma 为很大负值，而 delta 为 0，风险在于：如果资产价格有大的变化（上升或下降），该交易者会遭受巨大损失。

14.5 “构造一个合成期权头寸的过程就是对冲该期权头寸的逆过程。”请你解释这句话的意思。

解： 要为一个期权套期保值，必须构造一个数量相同、头寸方向相反的合成期权。比如说，要为一个看跌期权多头套期保值，就必须构造一个合成看跌期权的空头。这就是说：构造一个合成期权头寸的过程就是对冲该期权头寸的逆过程。

14.6 为什么在 1987 年 10 月 19 日证券组合的保险方式失效了？

解： 如果指数波动率变化迅速或者股票指数产生很大的跳跃，那么构造基于指数的合成看跌期权不是很有效的办法。因为他们无法足够快的卖出股票或者指数期货以保护原头寸免遭损失。1987 年 10 月 19 日，市场下跌的太快，以至于证券组合不能及时做出反应。

14.8 一个执行价格为＄40 的处于虚值状态的看涨期权，其 black-scholes 公式的价格为＄4.00。一个出售了该期权合约的交易商计划使用第 14.3 节中的止亏策略。交易商计划以＄$40\frac{1}{8}$买入，以＄$39\frac{7}{8}$卖出。估计股票被买入或卖出的预期次数。

解：在该策略中，交易者每次买卖股票要花费＄1/8，预期总成本是＄4，意味着：股票买卖次数大约为 32 次。买和卖的次数分别大约为 16 次。

14.9 利用看涨-看跌期权之间的平价关系推导不分红股票的如下二者之间的关系：

（a）一个欧式看涨期权的 delta 值和一个欧式看跌期权的 delta 值

（b）一个欧式看涨期权的 gamma 值和一个欧式看跌期权的 gamma 值

（c）一个欧式看涨期权的 vega 值和一个欧式看跌期权的 vega 值

（d）一个欧式看涨期权的 theta 值和一个欧式看跌期权的 theta 值

解：对于不分红股票，根据看涨-看跌平价关系有：在 t 时刻，

$$p+S=c+Xe^{-r(T-t)}$$

（a）对 S 求偏导

$$\frac{\partial p}{\partial s}+1=\frac{\partial c}{\partial s}\text{或者}\frac{\partial p}{\partial s}=\frac{\partial c}{\partial s}-1$$

这表示，欧式看跌期权的 delta 值等于对应的欧式看涨期权的 delta 值减去 1。

（b）再次对 S 求二阶偏导

$$\frac{\partial^2 p}{\partial s^2}=\frac{\partial^2 c}{\partial s^2}$$

表示：欧式看跌期权的 gamma 值与对应的欧式看涨期权的 gamma 值相等。

（c）对σ求偏导

$$\frac{\partial p}{\partial \sigma}=\frac{\partial c}{\partial \sigma}$$

表示：欧式看涨期权的 vega 值与对应的欧式看跌期权的 vega 值相等。

（d）对 T 求偏导

$$\frac{\partial p}{\partial t}=rXe^{-r(T-t)}+\frac{\partial c}{\partial t}$$

欧式看涨期权和欧式看跌期权的 theta 值存在以上关系。

14.10 假设一股票现价为＄20，假象一个执行价格为 25 的看涨期权，由频繁变化的股票头寸合成的。考虑下面两种情况：

（a）在期权有效期内，股票价格由＄20 稳定增长至＄35

（b）股票价格波动剧烈，最终价格为＄35

请解释哪种方案使合成的期权更值钱？解释你的答案。

解： 该策略为买高卖低。第一种情况，股票价格稳定增长，因此，一直都是买进；第二种情况则是不断的买进、卖出、买进、卖出……最终股票价格一样。显然后者比前者花费更高。

14.11 1000 个白银期货的欧式看涨期权的空头头寸的 delta 值为多少？该期权有效期为 8 个月，期权的标的期货合约有效期为 9 个月。当前 9 个月期的白银期货价格为每盎司＄8.00，期权执行价格为每盎司＄8.00，无风险年利率为 12%，白银价格的年波动率为 18%。

解： 期货的欧式看涨期权的 delta 值是期权价格变化和期货价格的比率。是

$e^{-rT}N(d_1)$

本题中，F_0=8， X=8， r=0.12， σ=0.18， T=0.6667

$$d_1=\frac{\ln(8/8)+(0.18^2/2)}{0.18\sqrt{0.6667}}=0.0735$$

N（d_1）=0.5293，所以 delta 值为 $e^{-0.12\times0.6667}\times0.5293=0.4886$

因此，1000 个白银期货的欧式看涨期权的空头头寸的 delta 值为－488.6

14.12 在习题 14.11 中，若进行 delta 套期保值，白银期货的初始头寸至少应为多少？如果使用白银本身，初始头寸为多少？如果是一年期期货，初始头寸应为多少？假设没有储存费用。

解： 前者指的是期货 delta 值，后者指的是现货 delta 值。对于前者，从上题的答案得出，要进行 delta 套期保值，必须持有 488.6 盎司的有效期为 9 个月的白银期货多头头寸。对于后者，delta 值为 $e^{0.12\times0.75}$=1.094（无储存费用）。因此，期货头寸的当前 delta 值为－488.6×1.094=-534.6，所以须持有 534.6 盎司多头头寸来套期保值。

若使用一年期期货，当前 delta 值为 $e^{0.12}$=1.1275，所以，初始头寸应为

$e^{0.12}\times 534.6=474.1$ 盎司。

14.13 一家公司打算对一个货币的看涨看跌期权组成的多头头寸组合进行 delta 套期保值。请解释下面哪种情况结果最佳？

解： 无论是看跌期权还是看涨期权，多头头寸都有正的 gamma 值，意味着，对于套期保值者，股票价格大幅波动比稳定的效果要好。因此（b）的结果最佳。

14.14 一家金融机构拥有一种货币的看涨看跌期权组成的空头头寸组合，请重新分析习题 14.13。

解： 无论是看跌期权还是看涨期权，空头头寸都有负的 gamma 值，意味着，对于套期保值者，股票价格大幅波动比稳定的效果要差。因此（a）的结果最佳。

14.15 一个金融机构刚刚卖出一些日元的 7 个月期欧式看涨期权。假设即期汇率为 0.8 美分/日元，执行价格为 0.81 美分/日元，美元的无风险年利率为 8%，日元的无风险年利率为 5%，日元的年波动率为 15%。计算并解释说明期权的 delta，vega，theta 和 rho。

解：本题中， $S_0=0.80, X=0.81, r=0.08, r_f=0.05, \sigma=0.15, T=0.5833$

$$d_1=\frac{\ln(0.80/0.81)+(0.08-0.05+0.15^2/2)\times 0.5833}{0.15\sqrt{0.5833}}=0.1016$$

$$d_2=d_1-0.15\sqrt{0.5833}=-0.0130$$

$$N(d_1)=0.5405; N(d_2)=0.4998$$

看涨期权的 delta 值为

$$e^{-r_fT}N(d_1)=e^{-0.05\times 0.5833}\times 0.5405=0.5250$$

$$N'(d_1)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-d_1^2/2}=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-0.00516}=0.3969$$

所以看涨期权的 gamma 值为

$$\frac{N'(d_1)e^{-r_fT}}{S\sigma\sqrt{T}}=\frac{0.3969\times 0.9713}{0.80\times 0.15\times\sqrt{0.5833}}=4.206$$

看涨期权的 vega 值为

$$S_0\sqrt{T}N'(d_1)e^{-r_fT}=0.80\sqrt{0.5833}\times 0.3969\times 0.9713=0.2355$$

看涨期权的 theta 值为

$$-\frac{S_0\sqrt{T}N'(d_1)e^{-r_fT}}{2\sqrt{T}}+r_fS_0\sqrt{T}N'(d_1)e^{-r_fT}-rXe^{-rT}N(d_2)$$

$$=-\frac{0.8\times0.3969\times0.15\times0.9713}{2\sqrt{0.5833}}$$

+0.05×0.8×0.5405×0.9713-0.08×0.81×0.9544×0.4948

=－0.0399

看涨期权的 rho 为

$$XTe^{-rT}N(d_2)$$

=0.81×0.5833×0.9544×0.4948

=0.2231

解释：delta 表示，现价上升一个小量，期权价值上升 0.525 倍该小量；vega 表示，当波动率上升一个小量，期权价值上升 0.2355 倍该小量；theta 表示，时间过去一个小量，期权价值下降 0.0399 倍该小量；rho 表示，利率上升一个小量，期权价值上升 0.2231 倍该小量。

14.19 某个基金经理拥有一个风险分散的组合，该组合的状况可由 S&P500 来反映，价值＄9000 万。S&P500 的点数为 300，该组合的经理打算购买保险，防止在随后的 6 个月中组合价值下跌超过 5%。无风险年利率为 6%。该组合以及 S&P500 的红利率为 3%，指数的年波动率为 30%。

（a）如果基金经理购买可交易欧式看跌期权，保险费为多少？

（b）详细解释包括可交易欧式看涨期权在内的几种策略，并说明他们如何得到相同的结果。

（c）如果基金经理决定通过部分无风险证券组合来提供保险，初始头寸应该为多少？

（d）如果基金经理决定通过使用 9 个月期指数期货来提供保险，初始头寸应该为多少?

解：

（a）

$$N(d_1)=0.6622;N(d_2)=0.5818$$
$$N(-d_1)=0.3378;N(-d_2)=0.4182$$

一份看跌期权价值为

$$\begin{aligned}&1140e^{-r(T-t)}N(-d_2)-1200e^{-q(T-t)}N(-d_1)\\&=285e^{-0.06\times0.5}\times0.4182-300e^{-0.03\times0.5}\times0.3378\\&=63.40\end{aligned}$$

因此总的保险费为 300，000×63.40=＄19，020，000

（b）由看涨-看跌平价关系 $S_0e^{-qT}+p=c+Xe^{-rT}$

表明一份看跌期权可以这样构造：卖空 e^{-qT} 的指数，买一份看涨期权，剩下的投资于无风险资产。应用到本题情况，该基金经理应该：

1） 卖出 360 $e^{-0.03\times0.5}=$＄354，640，000 的股票

2） 买入 300，000 份 S&P500 看涨期权，执行价 1140，期限为 6 个月

3） 投资剩余现金到无风险资产获得每年 6%的无风险利率。

该策略和直接买进看跌期权有同样的效果。

（c）一份看跌期权的 delta 值为

$$\begin{aligned}&e^{-qT}\left[N(d_1)-1\right]\\&=e^{-0.03\times0.5}(0.6622-1)\\&=-0.3327\end{aligned}$$

表示，初始头寸为，卖出资产组合的 33.27%（即＄119，770，000）并投资于无风险证券。

（d）9 个月期指数期货合约的 delta 值为

$$e^{(r-q)T}=e^{0.03\times0.75}=1.023$$

当前空头头寸必须为 $\frac{119,770,000}{300}=99,808$ 除以指数，所以，空头头寸为：$\frac{99,808}{1.023\times250}=390$ 份期货合约。

14.20 假设某证券组合的 beta 为 1.5，年红利率为 4%，重复习题 14.19 的几个问题。

解： 6 个月内，证券组合价值下跌 5%，证券组合的总回报，包括分红，为：－5+2=3%

即每年 6%。比无风险年利率少了 12%。既然证券组合的 beta 值为 1.5，那么可以预测，市场回报率比无风险利率少 8%，即为－2%。既然红利率为 3%，可以预测市场指数每年下降 5%，即 6 个月下降 2.5%，市场预计会下降到 1170。因此需要总计 450，000=（1.5×300，000）份 S&P500 看跌期权，执行价 1170，执行时间为 6 个月。

（a） $S_0=1200,X=1170,r=0.06,\sigma=0.3,T=0.5,q=0.03$

所以

$$d_1=\frac{\ln(1200/1170)+(0.06-0.03+0.09/2)\times0.5}{0.3\sqrt{0.5}}=0.2961$$

$$\begin{aligned}&d_2=d_1-0.3\sqrt{0.5}=0.0840\\&N(d_1)=0.6164;N(d_2)=0.5335\\&N(-d_1)=0.3836;N(-d_2)=0.4665\end{aligned}$$

看跌期权价值为：

$$\begin{aligned}&Xe^{-rT}N(-d_2)-S_0e^{-qT}N(-d_1)\\&=1170e^{-0.06\times0.5}\times0.4665-1200e^{-0.03\times0.5}\times0.3836\\&=76.28\end{aligned}$$

所以，保险费总计为： 450，000×76.28＝＄34，326，000

（b）策略 1：卖出＄354，640，000 的股票；2：买进 450，000S&P500 看涨期权，执行价 1170，执行期 6 个月；3：投资剩余现金于无风险资产。

（c）证券组合的波动率比 S&P500 高 50%，以证券组合来提供保险，参数为：

S_0=360, X=342, r=0.06, σ=0.45, T=0.5, q=0.04

$$d_1=\frac{\ln(360/342)+(0.06-0.04+0.45^2/2)\times 0.5}{0.45\sqrt{0.5}}=0.3517$$

$$N(d_1)=0.6374$$

期权 delta 值为：

$$\begin{aligned}&e^{-qT}\left[N(d_1)-1\right]\\&=e^{-0.03\times 0.5}(0.6474-1)\\&=-0.355\end{aligned}$$

这表明，证券组合中的 35.5%（即＄127，800，000）应该被卖出并投资于无风险证券。

（d）此时，每份看跌期权的 delta 值为

$$\begin{aligned}&e^{-qT}\left[N(d_1)-1\right]\\&=e^{-0.03\times 0.5}(0.6164-1)\\&=-0.3779\end{aligned}$$

看跌期权总头寸的 delta 值为－450，000×0.3779=－170，000。9 个月期指数期货的 delta 值为 1.023。所以初始头寸应该为：

$\dfrac{170{,}000}{1.023\times 250}=665$ 份指数期货合约空头。

14.21 证明代入Θ，Δ，Γ和 f，等式（14.4）在以下情况仍成立：

（a）不分红股票的欧式看涨期权

（b）不分红股票的欧式看涨期权

（c）任何不分红股票的欧式看涨期权和看跌期权的组合。

解：（a）对于不分红股票的欧式看涨期权

$$\Delta=N(d_1)$$

$$\Gamma=\frac{N'(d_1)}{S_0\sigma\sqrt{T}}$$

$$\Theta=-\frac{S_0N'(d_1)\sigma}{2\sqrt{T}}-rXe^{-rT}N(d_2)$$

代入 14.4，等式左边等于：

$$\begin{aligned}&=-\frac{S_0N'(d_1)\sigma}{2\sqrt{T}}-rXe^{-rT}N(d_2)+rS_0N(d_1)+\frac{1}{2}\sigma S_0\frac{N'(d_1)}{\sqrt{T}}\\&=r\left[S_0N(d_1)-Xe^{-rT}N(d_2)\right]\\&=r\Pi\end{aligned}$$

（b）对于不分红股票的欧式看跌期权

$$\Delta = N(d_1) - 1 = -N(-d_1)$$

$$\Gamma = \frac{N'(d_1)}{S_0\sigma\sqrt{T}}$$

$$\Theta = -\frac{S_0 N'(d_1)\sigma}{2\sqrt{T}} + rXe^{-rT}N(-d_2)$$

代入 14.4，等式左边等于：

$$= -\frac{S_0 N'(d_1)\sigma}{2\sqrt{T}} + rXe^{-rT}N(-d_2) - rS_0N(-d_1) + \frac{1}{2}\sigma S_0 \frac{N'(d_1)}{\sqrt{T}}$$

$$= r\left[Xe^{-rT}N(-d_2) - S_0N(-d_1)\right]$$

$$= r\Pi$$

（c）对于期权组合，Π，Δ，Θ和Γ是证券组合中的单个期权的价值的总和，因此，14.4 对于任何不分红股票的欧式看涨期权和看跌期权的组合成立。

14.22 与等式（14.4）相对应的一种货币衍生产品的组合的等式是怎样的？

解：货币提供连续的分红率 r_f，这点和股票类似。货币衍生产品组合的微分等式为：

$$\frac{\partial\Pi}{\partial t} + (r - r_f)S\frac{\partial\Pi}{\partial S} + \frac{1}{2}\sigma^2 S^2 \frac{\partial^2\Pi}{\partial S^2} = r\Pi$$

因此：$\Theta + (r - r_f)S\Delta + \frac{1}{2}\sigma^2 S^2\Gamma = r\Pi$

类似的，对于独立于期货价格的衍生产品组合，$\Theta + \frac{1}{2}\sigma^2 S^2\Gamma = r\Pi$

14.23 假设要为＄700 亿的权益资产组合做个保险计划。假设此计划可防止资产价值在一年内下跌不超过 5%。做任何你认为必要的估计，计算如果在一天之内市场下降 23%，该组合保险计划的管理者应出售价值多少的股票或期货合约？

解：可以把所有资产组合保险头寸看作一份单个的看跌期权。在下降 23%之前，三个已知参数为：S_0=70，X=66.5，T=1。其他参数估计为 r=0.06，σ=0.25，q=0.03。那么：

$$d_1 = \frac{\ln(70/66.5) + (0.06 - 0.03 + 0.25^2/2)}{0.25} = 0.4502$$

$$N(d_1) = 0.6737$$

期权 delta 值为：

$$e^{-qT}\left[N(d_1) - 1\right]$$

$$= e^{-0.03\times0.5}(0.6737 - 1)$$

$$= -0.3167$$

这表明，市场下降之前，必须卖出资产的 31.67%或者＄221.7 亿。

下降以后， $S_0 = 53.9, X = 66.5, r = 0.06, \sigma = 0.25, T = 1, q = 0.03$

$$d_1 = \frac{\ln(53.9/66.5) + (0.06 - 0.03 + 0.25^2/2)}{0.25} = 0.5953$$

$$N(d_1) = 0.2758$$

期权 delta 值下降为

$$\begin{aligned} &= e^{-0.03\times0.5}(0.2758-1) \\ &= -0.7028 \end{aligned}$$

这表明，总共必须卖出资产的 70.28%或者＄492 亿（以下跌前价格衡量）。即，市场下降的结果导致大约 270 亿的附加资产必须被卖出。

Ch15

15.1 美式期权的 Delta、Gamma、Vega、Theta 和 Rho 参数，哪一个可以通过构造单一的二叉树图来估值？

解：由式（15.8）、（15.9）和（15.10）及例 15.2 的计算知，Delta、Gamma 和 Theta 可以通过构造单一的二叉树图直接估值；由 Vega 的定义知，可以通过对股价波动率的微调，然后重新构造一个二叉树图间接估值；由 Rho 的定义知，可以通过对利率的微调，然后重新构造一个二叉树图间接估值。

15.2 某不分红股票的美式看跌期权，有效期 3 个月，股票市价和执行价格均为 60 美元，无风险利率为年率 10%，波动率为 45%。请构造时间间隔为一个月的期的二叉树图模型为该期权估值。

解：已知 $S = X = 60, r = 0.1, \sigma = 0.45, T = 3/12 = 0.25, \Delta t = 1/12 \approx 0.0833$,则

由（15.4）—（15.7）有：

$$\begin{aligned} &u = e^{\sigma\sqrt{\Delta t}} = e^{0.45\sqrt{0.0833}} \approx 1.1387 \\ &d = \frac{1}{u} \approx 0.8782 \\ &a = e^{r\Delta t} = e^{0.1\times0.0833} \approx 1.0084 \\ &p = \frac{a-d}{u-d} = \frac{1.0084-0.8782}{1.1387-0.8782} \approx 0.4998 \\ &1-p = 1-0.4998 = 0.5002 \end{aligned}$$

计算二叉树图的结果如下：

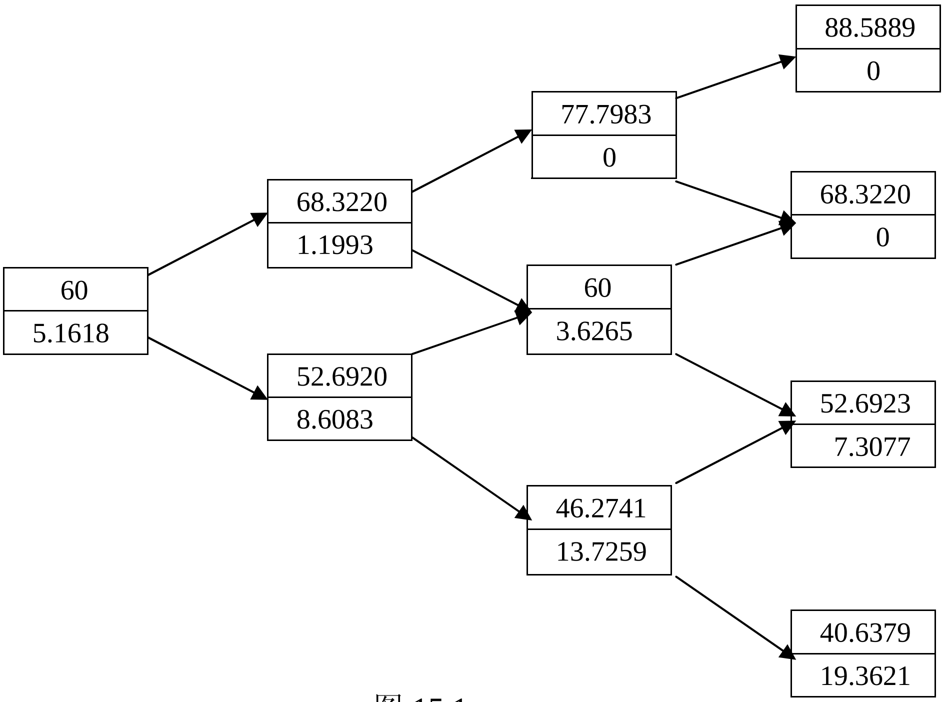


图 15.1

由此可知，该期权的价格约为 5.16 美元。

15.3 请解释当用树图法估计美式期权价值时，如何应用控制变量技术。

解：当用树图法估计美式期权价值时，控制变量技术主要有以下应用：

（1）利用二叉树图中常用的的方式对美式期权定价。（记为 f_A）

（2）使用与（1）中相同的二叉树图，并保持所有的参数不变，对相应的欧式期权定价。（记为 f_E）

（3）使用 B—S 对欧式期权定价。（记为 f_{BS}）

美式期权价格的估计值是 $f_A + f_{BS} - f_E$。

15.4 某谷物期货的美式看涨期权，有效期为 9 个月，期货市价为 198 美分，执行价格为 200 美分，无风险利率为年率 8%，波动率为年率 30%。请构造时间间隔为 3 个月的二叉树图模型为该期权估值。

解：已知 $F=198, X=200, r=0.08, \sigma=0.3, T=0.75, \Delta t=3/12=0.25$，则有：

$$u=e^{\sigma\sqrt{\Delta t}}=e^{0.3\sqrt{0.25}}\approx 1.1618$$
$$d=\frac{1}{u}=\frac{1}{1.1618}\approx 0.8607$$
$$a=e^{r\Delta t}=e^{0.08\times 0.25}\approx 1$$
$$p=\frac{a-d}{u-d}=\frac{1-0.8607}{1.1618-0.8607}\approx 0.4626$$
$$1-p=0.5374$$

计算二叉树图的结果如下：

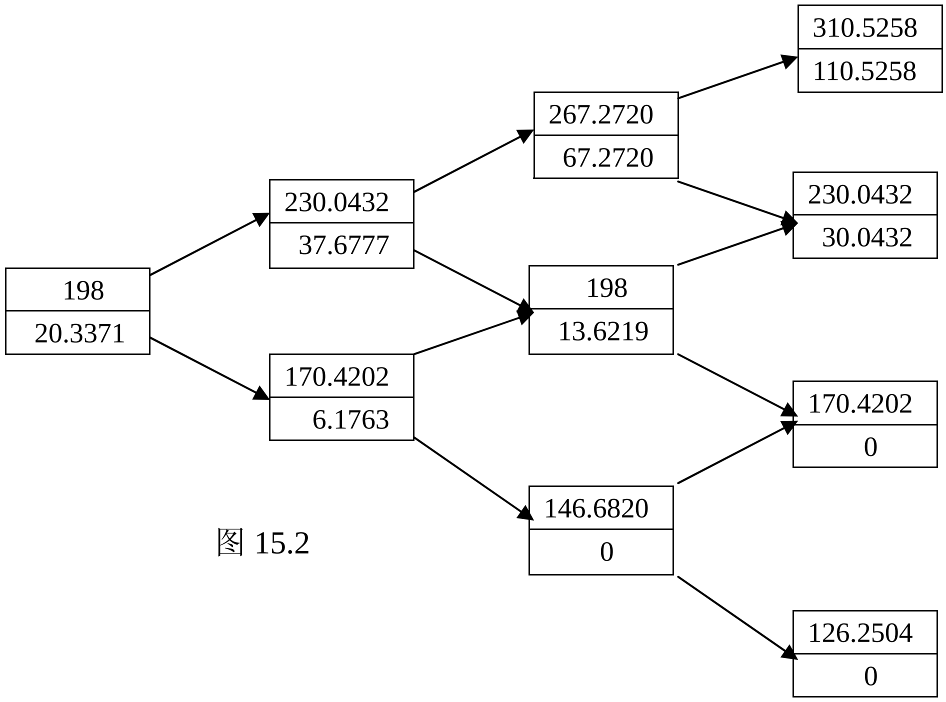


图 15.2

由此可知，该期权的价格约为 20.34 美元。

15.5 试想一个期权，其最终收益为期权有效期期末的股票价格高出有效期期中最低股价的部分。试问这一期权能否用二叉树图方法定价？请解释说明。

解：这一期权不能用二叉树图方法定价。原因如下：

此题中最终收益为期权有效期期末的股票价格高出有效期期中最低股价的部分，即其最终收益不仅与股票在期末时的价格有关，而且决定于股票价格的运动路径，故我们不能使用二叉树图方法从后向前推算，从而不能使用二叉树图方法对该期权定价。

15.6 “对于支付红利的股票，其股价的树图不重合，但从股价中减去将来的红利的现值之后，其树图重合。”请解释这一论述。

解： 假设在某时间段内股票将支付价值为 D 的红利，S 为股票的初始价格，则股票的在该时间段的期末价格将变为 Su—D 或 Sd—D，在下一个时间段的期末价格将变为(Su—D)u、(Su—D)d、(Sd—D)u 及(Sd—D)d 中的某一个值，由于 u 与 d 不相等，故(Su—D)d 与(Sd—D)u 是不可能相等的。这表明对于支付红利的股票，其股价的树图不重合。但是，当开始时就将将来的红利的现值从股价中剔除后（即减去将来的红利的现值后），其树图必然重合。

15.7 请说明在脚注 6 所示的情况下，应用 Cox、Ross 和 Rubinstein 的二叉树图方法时，概率将出现负值。

解：在脚注 6 所示的情况下，$\sigma < \left|(r-q)\sqrt{\Delta t}\right|$，即 $(r-q)\sqrt{\Delta t} > -\sigma$ 或 $(r-q)\sqrt{\Delta t} < \sigma$，

故有 $e^{(r-q)\Delta t} < e^{-\sigma\sqrt{\Delta t}}$ 或 $e^{(r-q)\Delta t} > e^{\sigma\sqrt{\Delta t}}$，此即：

$$a < d \text{ 或 } a > u$$

则概率 $p=\dfrac{a-d}{u-d}<0$ 或 $1-p=\dfrac{u-a}{u-d}<0$。

15.8 当股指美式期权的标的股指的红利收益率为时间的函数时，你如何用二叉树方法对该期权定价？

解：当股指美式期权的标的股指的红利收益率 q 为时间 t 的函 q(t)时，以下式子仍然成立：

$$d=e^{\sigma\sqrt{\Delta t}}$$
$$u=e^{-\sigma\sqrt{\Delta t}}$$
$$a=e^{(r-q(t))\Delta t}$$
$$p=\frac{a(t)-d}{u-d}$$

由以上式子可知，u、d 独立于时间 t，而 a、p 依赖于时间 t。当用二叉树方法对期权定价时，二叉树图的形态仅依赖于 u、d，故标的股指的红利收益率为时间的函数与其为常数所用的二叉树图的形态相同，不同的是在计算每个不同时间对应节点处的期权的价值时，p 值应该随着时间作相应的调整，然后重复与收益率为常数时计算期权价值的程序。

15.9 请解释说明为什么蒙特卡罗模拟不适用于于美式衍生证券的定价。

解：由于在用蒙特卡罗模拟方法计算风险中性世界中衍生证券的样本价值时，依赖于该衍生证券标的变量的路径的模拟，在每次的模拟中，标的变量的价值就首先在 Δt 时刻确定，然后在 $2\Delta t$ 时刻确定，然后 $3\Delta t$ 等等。这样在时刻 $i\Delta t$（$i=0,1,2\ldots$）就不可能决定提请执行期权是最优选择，原因是 $i\Delta t$ 时刻可能的路径没有被考察。总之，蒙特卡罗模拟是沿着时间从 t 到 T 顺次进行的，不适用于于美式衍生证券的定价。

15.10 某个不付红利股票的美式看跌期权，有效期为 1 年，执行价格为 18 美元。股票市价为 20 美元，无风险利率为年率 15%，股价的波动率为年率 40%。请将该有效期等分为四个时间段，每个时间段为期三个月。用树图方法对该期权定价。请用控制变量技术对这一估计进行修正。

解：已知 $S=20, X=18, r=0.15, \sigma=0.40, T=1, \Delta t=0.25$，由此可计算二叉树的有关参数如下：

$$u = e^{\sigma\sqrt{\Delta t}} = e^{0.4\sqrt{0.25}} \approx 1.2214$$

$$d = \frac{1}{u} = \frac{1}{1.2214} \approx 0.8187$$

$$a = e^{r\Delta t} = e^{0.15\times 0.25} \approx 1.0382$$

$$p = \frac{a-d}{u-d} = \frac{1.0382-0.8187}{1.2214-0.8187} \approx 0.5450$$

$$1-p = 0.4550$$

（1） 利用二叉树法对该美式看跌期权定价如图 15.3 所示，由此得该美式看跌期权的价格约为 1.29 美元。

（2） 利用二叉树法对该看跌期权对应的欧式期权定价如图 15.4 所示，由此得该看跌期权对应的欧式期权价格约为 1.14 美元。

（3） 用 Black—Scholes 公式对该看跌期权对应的欧式期权定价如下：

$$d_1 = \frac{\ln(S/X)+(r+\sigma^2/2)T}{\sigma\sqrt{T}} = \frac{\ln(20/18)+(0.15+0.40^2/2)\times 1}{0.40\sqrt{1}} \approx 0.8384$$

$$d_2 = \frac{\ln(S/X)+(r-\sigma^2/2)T}{\sigma\sqrt{T}} = \frac{\ln(20/18)+(0.15-0.40^2/2)\times 1}{0.40\sqrt{1}} \approx 0.4384$$

$$N(-d_1) \approx 0.2009, N(-d_2) \approx 0.3306$$

故该看跌期权对应的欧式期权价格为：

$$Xe^{-rT}N(-d_2) - SN(-d_1) = 18e^{-0.15\times 1}\times 0.3306 - 20\times 0.2009 \approx 1.10$$

故用控制变量法计算出的修正值为 1.29+1.10-1.14=1.25 美元。

注：保留小数点后四位有效数字。

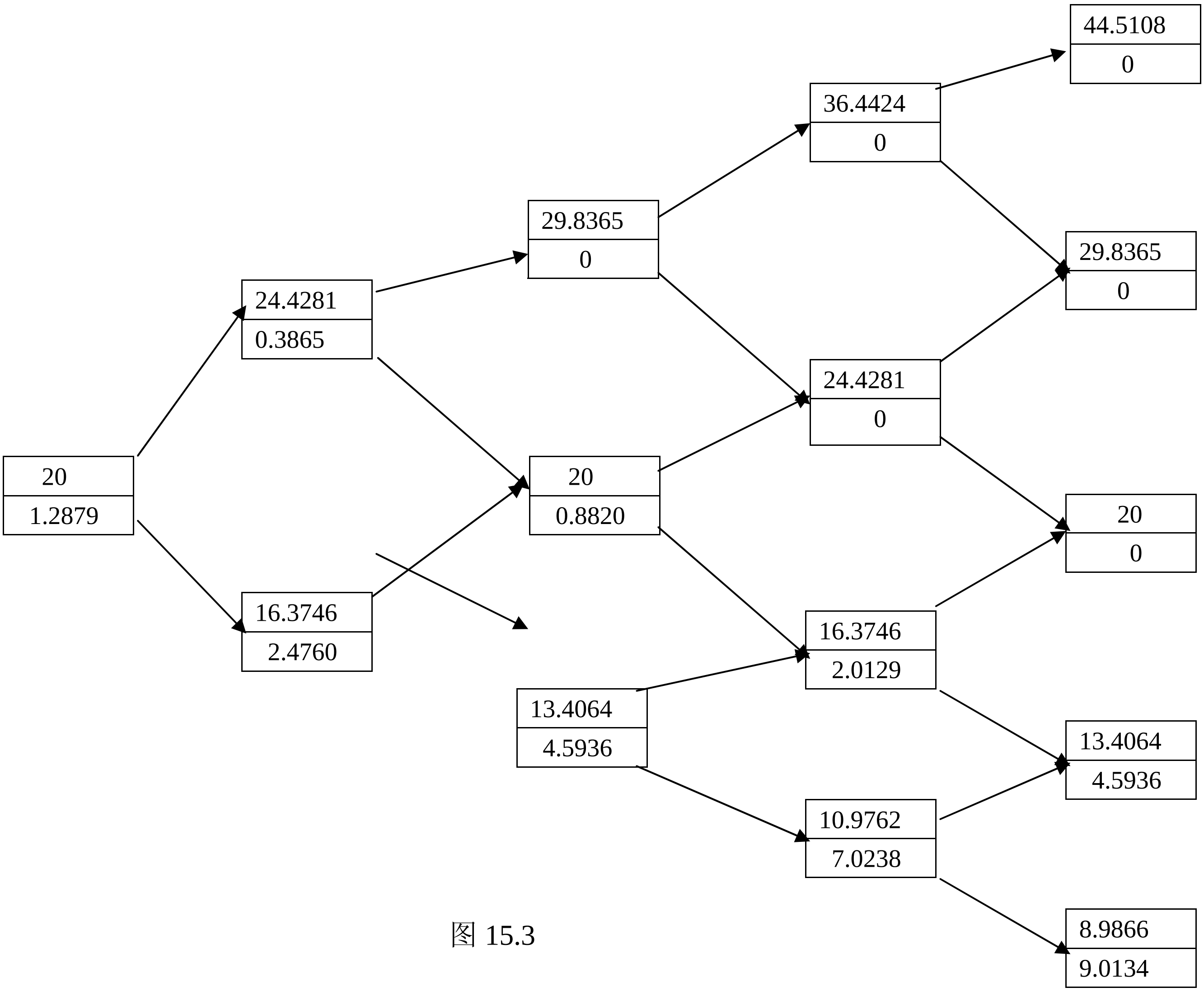

20
1.2879
24.4281
0.3865
16.3746
2.4760
29.8365
0
20
0.8820
13.4064
4.5936
36.4424
0
24.4281
0
16.3746
2.0129
10.9762
7.0238
44.5108
0
29.8365
0
20
0
13.4064
4.5936
8.9866
9.0134

图 15.3

注：保留小数点后四位有效数字。

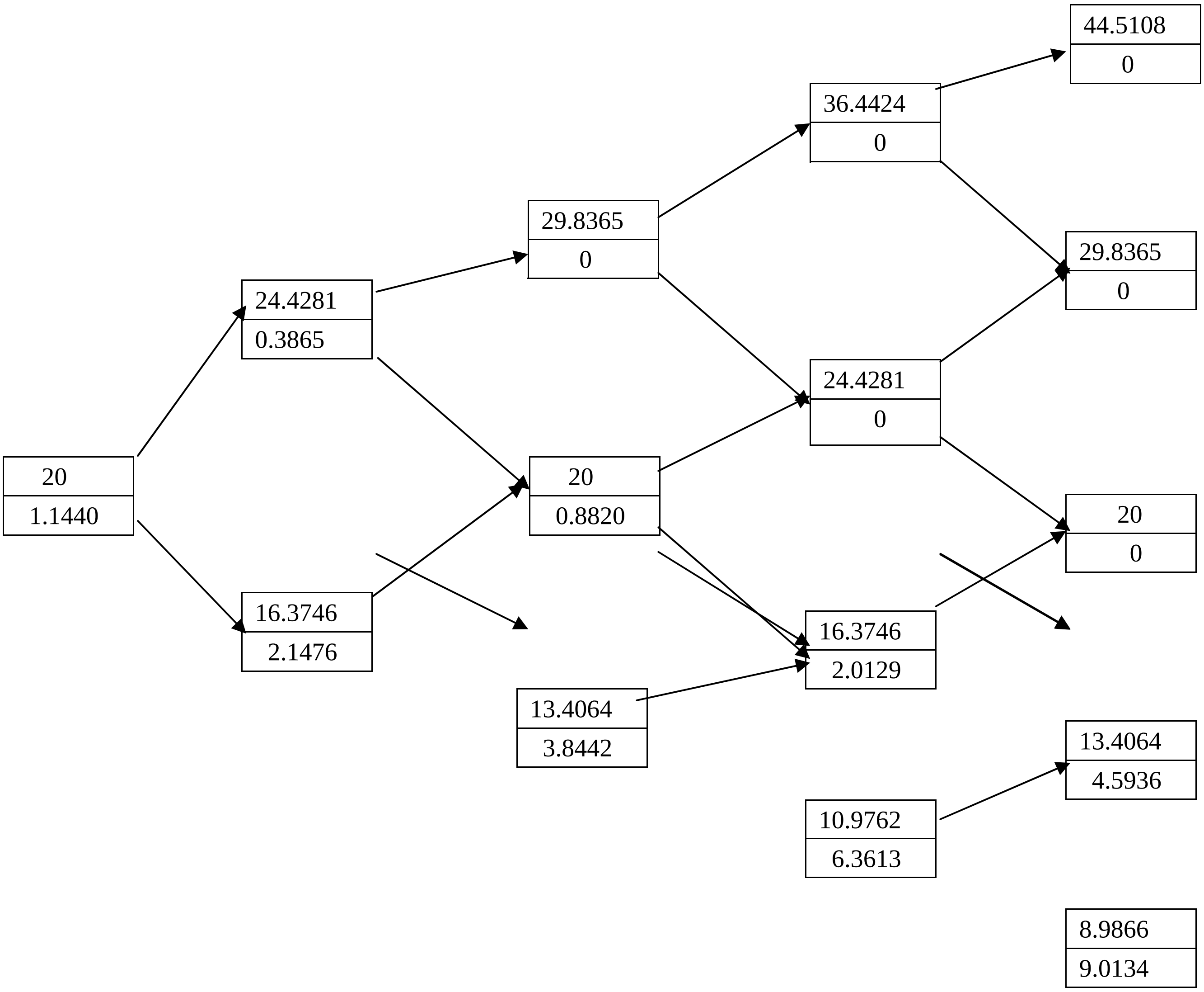


图 15.4

15.11 某个白银金属期货的美式看涨期权，有效期为 1 年，执行价格为 9 美元。期货合约的市价为 8.50 美元，无风险利率为年率 12%，期货价格的波动率为年率 25%。请将该有效期等分为四个时间段，每个时间段为期三个月。用树图方法对该期权定价。请用控制变量技术对这一估计进行修正。请估计该期权的 Delta 参数。

解：已知$T-1, X=9, F=0.85, r=0.12, \sigma=0.25, \Delta t=3/13=0.25$，由此得：

$$u = e^{\sigma\sqrt{\Delta t}} = e^{0.25\times\sqrt{0.25}} \approx 1.1331$$

$$d = \frac{1}{u} \approx 0.8825$$

$$a = 1$$

$$p = \frac{a-d}{u-d} = \frac{1-0.8825}{1.3331-0.8825} \approx 0.4689$$

$$1-p = 0.5311$$

（1） 利用二叉树法对该美式看涨期权定价如图 15.5 所示，由此得该美式看涨期权的价格约为 $f_A = 0.60$ 美元。

（2） 利用二叉树法对该看涨期权对应的欧式期权定价如图 15.6 所示，由此得该看涨期权对应的欧式期权价格约为 $f_E = 0.59$ 美元。

（3） 用 Black—Scholes 公式对该看涨期权对应的欧式期权定价如下：

$$d_1 = \frac{\ln(F/X)+(\sigma^2/2)T}{\sigma\sqrt{T}} = \frac{\ln(8.50/9)+(0.25^2/2)\times 1}{0.25\sqrt{1}} \approx -0.1038$$

$$d_2 = d_1 - \sigma\sqrt{T} = -0.1038 - 0.25\times\sqrt{1} = -0.3538$$

$$N(d_1) = N(-0.1038) \approx 0.4587$$

$$N(d_2) = N(-0.3538) \approx 0.3618$$

故该看涨期权对应的欧式期权价格为：

$$f_{BS} = SN(d_1) - Xe^{-rT}N(d_2) = 8.5\times 0.4587 - 9\times e^{-0.25\times 1}\times 0.3618 \approx 0.57$$

故用控制变量法计算出的修正值为：

$$f_A + f_{BS} - f_E = 0.60 + 0.57 - 0.59 = 0.58 \text{美元。}$$

（4） 对应于（1）的 Delta 参数为：

$$\Delta_A = \frac{f_{11} - f_{10}}{Su - Sd} = \frac{1.1052 - 0.1802}{9.6314 - 7.5013} \approx 0.4343$$

对应于（2）的 Delta 参数为：

$$\Delta_{BS} = N(d_1) = 0.4587$$

对应于（3）的 Delta 参数为：

$$\Delta_E = \frac{f_{11} - f_{10}}{Su - Sd} = \frac{1.0847 - 0.1802}{9.6314 - 7.5013} \approx 0.4246$$

故用控制变量法计算出的 Delta 参数修正值为：

$$\Delta_A + \Delta_{BS} - \Delta_E \approx 0.47$$

注：保留小数点后四位有效数字。

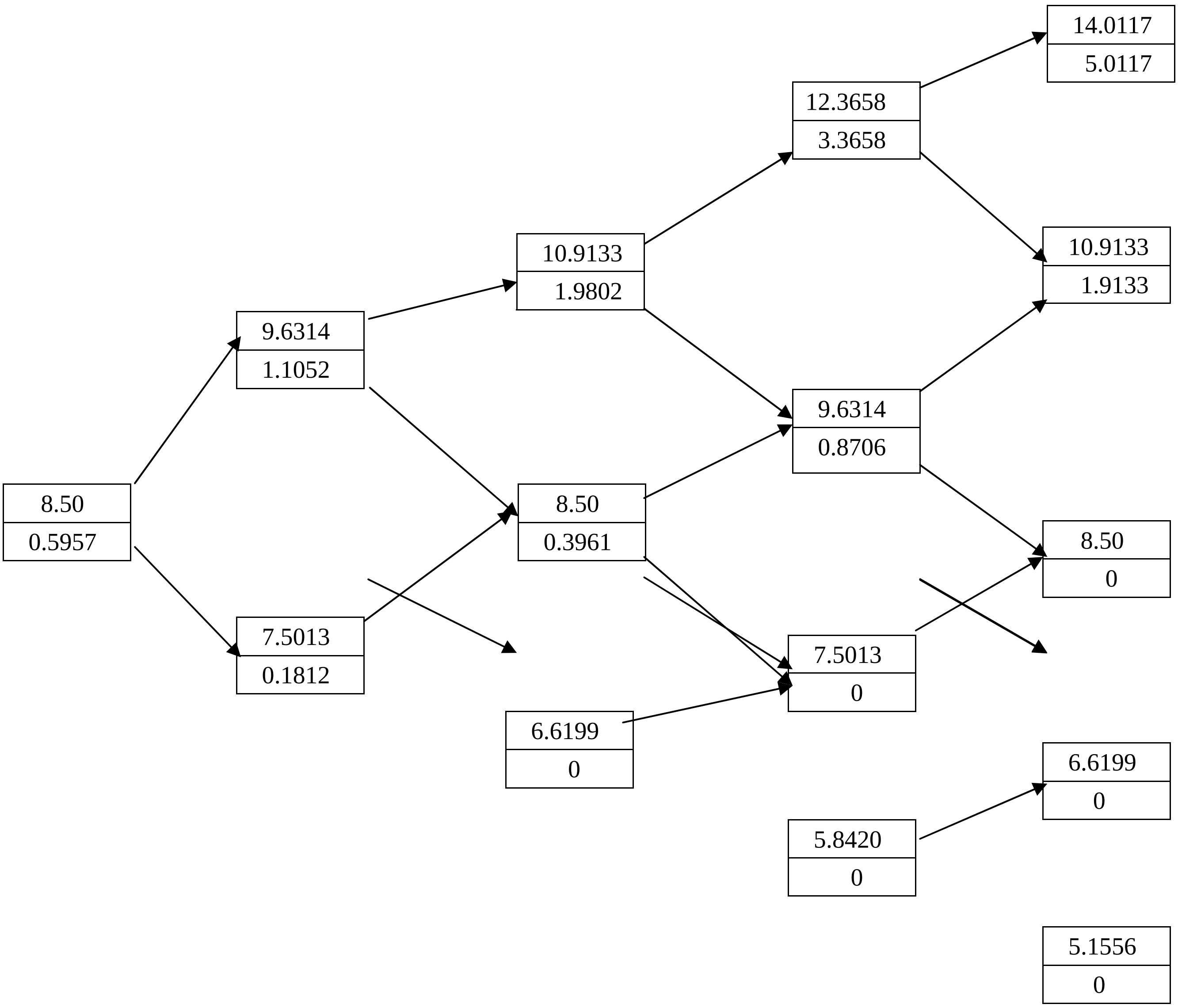

14.0117
5.0117
12.3658
3.3658
10.9133
1.9802
10.9133
1.9133
9.6314
1.1052
9.6314
0.8706
8.50
0.5957
8.50
0.3961
8.50
0
7.5013
0.1812
7.5013
0
6.6199
0
6.6199
0
5.8420
0
5.1556
0

图 15.5

注：保留小数点后四位有效数字。

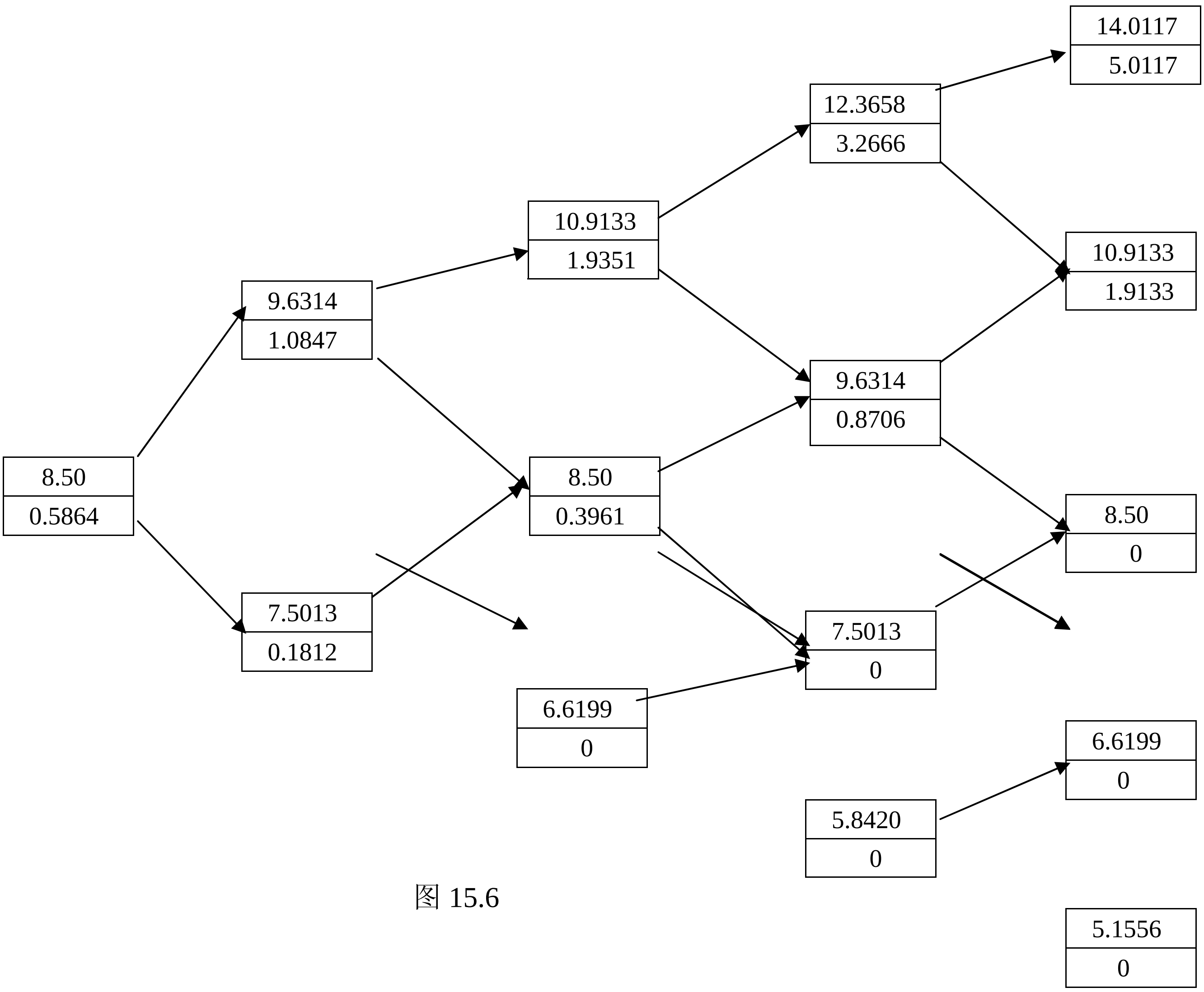


图 15.6

15.12 主要市场指数 MMI 的美式看跌期权，有效期为两个月，执行价格为 480。目前的指数水平为 484，无风险利率为年率 10%，股票指数年红利收益率为 3%，指数的波动率为年率 25%。请将该有效期等分为四个时间段，每个时间段为期半个月。用树图方法对该期权定价。

解：已知：

$$S=484, X=480, r=0.10, \sigma=0.25, T=1,, q=0.03, T=2/12 \approx 0.1667, \Delta t=0.0417$$

由此可计算二叉树的有关参数如下：

$$u = e^{\sigma\sqrt{\Delta t}} = e^{0.25\sqrt{0.0417}} \approx 1.0524$$

$$d = \frac{1}{u} = \frac{1}{1.0524} \approx 0.9502$$

$$a = e^{(r-q)\Delta t} = e^{(0.10-0.03)\times 0.25} \approx 1.0029$$

$$p = \frac{a-d}{u-d} = \frac{1.0029-0.9502}{1.0524-0.9502} \approx 0.5160$$

$$1-p = 0.4840$$

计算二叉树图的结果如下：

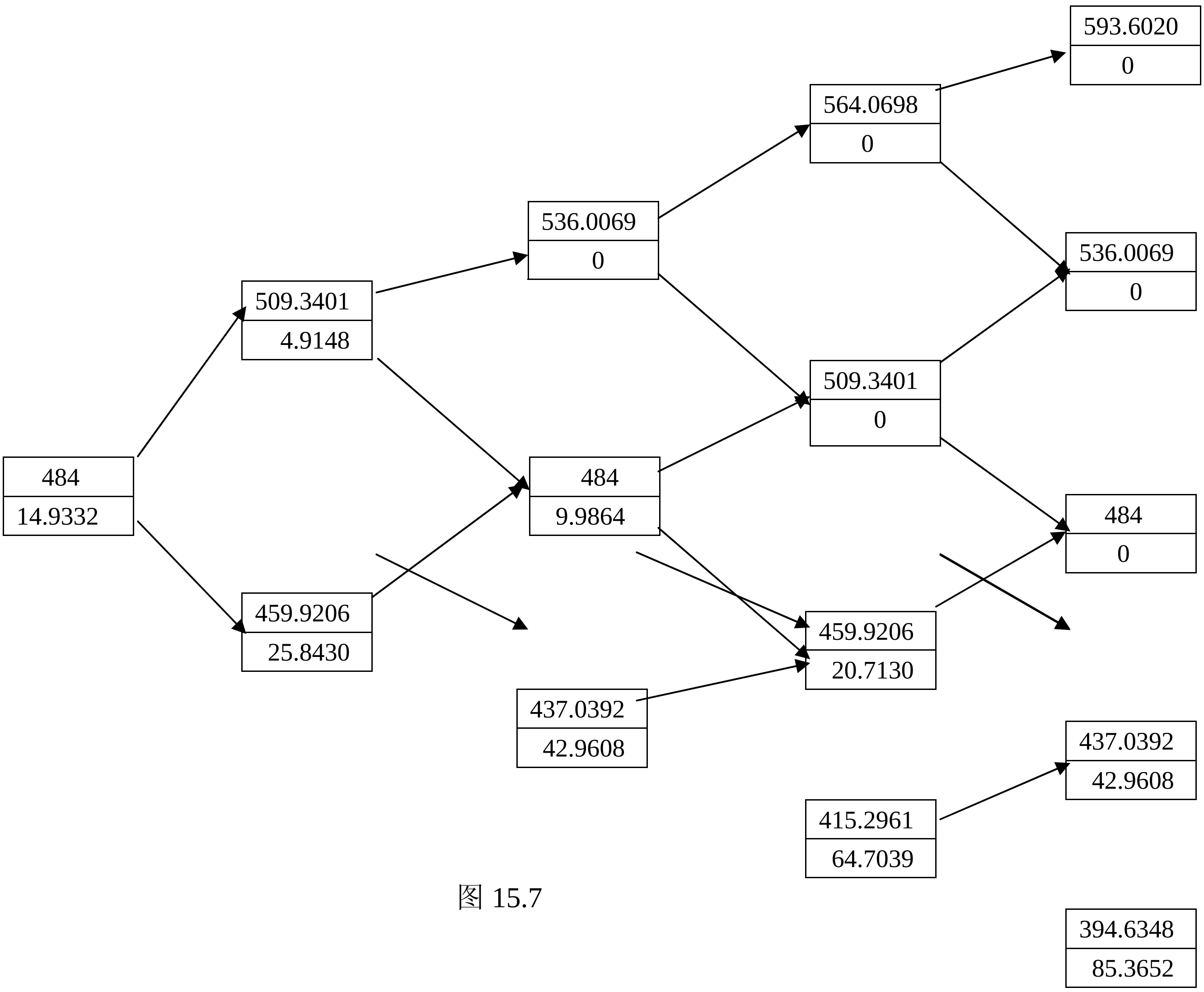


图 15.7

由图 15.7 知该期权价格约为 14.93 美元。

15.13 某个股票的美式看涨期权，有效期为 6 个月，预计在第二个和第五个月的月末将支付每股 1 美元的红利。该股价的市价为 30 美元，执行价格为 34 美元，无风险利率为年率 10%，不支付红利的股价部分的波动率为年率 30%。请将该有效期等分为 6 个时间段，每个时间段为期 1 个月。用树图方法对该期权定价。并且将这一结果将 Black 近似方法得到的结果（参见第 11.12 节）

相比较。用该树图估计该期权的 Delta 和 Theta 参数。

解： （1）已知：

$$S=30, X=34, r=0.10, \sigma=0.30, T=6/12=0.50, \Delta t=T/6 \approx 0.0833,$$
$$\tau_1=2/12 \approx 0.1667, \tau_2=5/12 \approx 0.4167, D_1=D_2=1$$

由此可计算二叉树的有关参数如下：

$$u=e^{\sigma\sqrt{\Delta t}}=e^{0.30\times\sqrt{0.0833}} \approx 1.0904$$
$$d=\frac{1}{u}=\frac{1}{1.0904} \approx 0.9171$$
$$a=e^{r\Delta t}=e^{0.10\times0.30} \approx 1.0084$$
$$p=\frac{a-d}{u-d} \approx 0.5268$$
$$1-p=0.4732$$

期权有效期内红利的现值为：

$$D=D_1e^{-r\tau_1}+D_2e^{-r\tau_2}=e^{-0.10\times0.1667}+e^{-0.10\times0.4167} \approx 1.94 \text{ 美元。}$$

所以 $S^*=S-D=30-1.94=28.06$ 美元。根据以上条件，可以模拟 S^* 的二图如图 15.8，根据图 15.8 得出 S 的二图如图 15.9。由图 15.9，得出该股票的美式看涨期权的价格约为 0.91 美元，并可估计 Delta 和 Theta 参数分别如下：

$$\Delta=\frac{f_{11}-f_{10}}{Su-Sd}=\frac{1.54-0.22}{32.56-27.69} \approx 0.27$$
$$\Theta=\frac{f_{21}-f_{00}}{2\Delta t}=\frac{0.42-0.91}{2\times0.0833} \approx -2.92$$

（2）Black 近似方法计算该股票的美式看涨期权的价格：

由于

$$X(1-e^{-r(\tau_2-\tau_1)})=34(1-e^{-0.10\times0.25}) \approx 0.84<1$$
$$X(1-e^{-r(T-\tau_2)})=34(1-e^{-0.10\times0.0833}) \approx 0.28<1$$

故存在提前执行的可能。现比较在提前执行期权预提前执行期权的情况下，该股票的美式看涨期权的价格的大小：

一、假设期权于最后除权日瞬时执行，此时：

$$S=30-e^{-0.10\times0.1667}=29.02$$
$$d_1=\frac{\ln(29.02/30)+(0.10+0.30^2/2)\times0.4167}{0.3\times\sqrt{0.4167}} \approx -0.51$$
$$d_2=d_1-\sigma\sqrt{\tau_2}=-0.51-0.30\times\sqrt{0.4167} \approx -0.70$$

则由 B—S 公式有：

$$f_{BS1} = SN(d_1) - Xe^{-r\tau_2}N(d_2) = 29.02\times0.3050 - 34\times e^{-0.10\times0.4167}\times0.2421 \approx 0.96$$

美元。

二、假设不提前执行，此时有：

$$S = 28.06$$

$$d_1 = \frac{\ln(28.06/30)+(0.10+0.30^2/2)\times0.50}{0.30\times\sqrt{0.50}} \approx -0.56$$

$$d_2 = d_1 - \sigma\sqrt{T} = -0.56 - 0.30\times\sqrt{0.50} \approx -0.78$$

则由 B—S 公式有：

$$f_{BS} = SN(d_1) - Xe^{-rT}N(d_2) = 2806\times0.2877 - 34\times e^{-0.10\times0.50}\times0.2177 \approx 1.04\text{美元} > f_{BS1}$$

故用 Black 近似方法计算该股票的美式看涨期权的价格为 1.04 美元。

15.14 当使用树图方法时，如何用控制变量技术改进美式期权的 Delta 估计值？

解：用控制变量技术改进美式期权的 Delta 估计值可以依以下步骤进行：

（1）根据正文中的式（15.8），使用通常的二叉树方法估计该美式期权的 Delta 值，不妨记为 Δ^*_A。

（2）使用和（1）相同的参数和相同的二叉树图计算对应的欧式期权的 Delta 值，不妨记为 Δ^*_E。

（3）使用第十四章计算 Δ 值的公式，计算欧式期权的真实 Delta 值，不妨记为 Δ_{BS}。

由控制变量法的思想知，改进后该美式期权的 Delta 估计值为

$\Delta^*_A + \Delta_{BS} - \Delta^*_E$

15.15 假设用蒙特卡罗模拟方法为某个不分红股票的欧式看涨期权定价，股价的波动率是随机的。请解释当同时应用控制变量技术和对偶变量技术时，每次模拟计算为什么需要计算 6 个期权的价值。

解：（1）在本题中，由于股价及其波动率均为随机变量，故蒙特卡罗模拟需要来自于标准正态分布的两个样本集：第一个样本集用来模拟及产生股价波动率的运动，第二个样本集是在股价波动率运动确定的条件下用来模拟及产生股价的运动。在第二次模拟中使用的控制变量技术假设股价波动率为常数，且使用与第一次模拟中相同的随机数流生成股价的运动，从而对期权价格估计值改进如下：

$$f_1^* - f_2^* + f_{BS}$$

其中：f_1^* 为第一次模拟中算出的期权价值（此时股价波动率随机），f_2^* 为第一次模拟中算出的期权价值（此时股价波动率为常数），f_{BS} 为用 Black—Scholes 期权定价公式中算出的期权价值（此时股价波动率为常数）。由此可知，单独使用控制变量技术时，需要进行 2 次模拟。

（2）当使用对偶变量技术时，来自于标准正态分布的两个样本集必须用到每个

股价波动率和股价中去。记股价波动率样本集为$\{V_1\}$和$\{V_2\}$（V_1与V_2为对偶变量，即$\forall\omega\in\Omega, V_1(\omega)=-V_2(\omega)$），记股价样本集为$\{S_1\}$和$\{S_2\}$（$S_1$与$S_2$为对偶变量，即$\forall\omega\in\Omega, S_2(\omega)=-S_1(\omega)$），由此可知，单独使用对偶变量技术时，需要进行 4 次模拟。

（3）当同时使用控制变量技术和对偶变量技术时，可以进行以下，模拟：

模拟 1：保持股价波动率为常数，使用样本$\{S_1\}$。

模拟 2：保持股价波动率为常数，使用样本$\{S_2\}$

模拟 3：使用样本$\{S_1\}$和$\{V_1\}$。

模拟 4：使用样本$\{S_1\}$和$\{V_2\}$。

模拟 5：使用样本$\{S_2\}$和$\{V_1\}$。

模拟 6：使用样本$\{S_2\}$和$\{V_2\}$。

记f_i为第i次模拟时算出的期权价格（$i=1,2,3,4,5,6$），则第 3 次和第 4 次模拟得出期权价格的估计值为$0.5(f_3+f_4)$，当使用控制变量法并结合第一次模拟得出的估计值，得到改进后的期权价格估计值为：

$$0.5(f_3+f_4)-f_1+f_{BS}$$

同理，第 2 次、第 5 次和第 6 次模拟得出的期权价格的改进值为：

$$0.5(f_5+f_6)-f_2+f_{BS1}$$

综上所述，期权价格的的最佳估计值为：

$$0.5(0.5(f_3+f_4)-f_1+f_{BS1}+0.5(f_5+f_6)-f_2+f_{BS1})$$

15.16 请说明用有限差分方法为美式货币看涨期权定价时，式（15.25）和式（15.28）的变动情况。

解：美式货币看涨期权的价格满足的随机微分方程为：

$$\frac{\partial f}{\partial t}+(r-r_f)S\frac{\partial f}{\partial S}+\frac{1}{2}\sigma^2S^2\frac{\partial^2 f}{\partial S^2}=rf$$

使用本章的记号可得上式对应的差分方程为：

$$\frac{f_{i+1,j}-f_{i,j}}{\Delta t}+(r-r_f)j\Delta S\frac{f_{i,j+1}-f_{i,j-1}}{2\Delta S}+\frac{1}{2}\sigma^2j^2S^2\frac{f_{i,j+1}-2f_{i,j}+f_{i,j-1}}{\Delta S^2}=rf_{i,j}$$

其中 $j=1,2,M-1; i=0,1,\ldots N-1$，经整理后得式（15.25）变为：

$$a_j f_{i,\,j-1}+b_j f_{i,\,j}+c_j f_{i,\,j+1}= f_{i+1,\,j}$$

其中：
$$a_j=\frac{1}{2}(r-r_f)\,j\Delta t-\frac{1}{2}\sigma^2 j^2\Delta t$$
$$b_j=1+\sigma^2 j^2\Delta t+r\Delta t$$
$$c_j=-\frac{1}{2}(r-r_f)\,j\Delta t-\frac{1}{2}\sigma^2 j^2\Delta t$$

式（15.28）变为： $f_{i,M}=M\Delta S-X, i=0,1,\ldots N$

15.17 某个不分红股票的美式看跌期权，还有 4 个月到期，执行价格为 21 美元，股票市价为 20 美元，无风险利率为年率 10%，波动率为年率 30%。请用外推有限差分方法为该期权估值。设时间间隔为 1 个月，估价间隔为 4 美元。

解答：不妨设股价的样本空间为 $S=\{0,4,8,12,16,20,24,28,32,36,40\}$。

已知：

$T-t=4/12 \approx 0.3333, X=21, S=20, r=0.10, \sigma=0.30, \Delta t=1/12 \approx 0.0833, \Delta S=4$

利用式（15.32）得到下表：

股票价格	到期时间（月）				
（美元）	4	3	2	1	0
40	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00
36	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00
32	0.01	0.00	0.00	0.00	0.00
28	0.07	0.04	0.02	0.00	0.00
24	0.38	0.30	0.21	0.11	0.00
20	1.56	1.44	1.31	1.17	1.00
16	5.00	5.00	5.00	5.00	5.00
12	9.00	9.00	9.00	9.00	9.00
8	13.00	13.00	13.00	13.00	13.00
4	17.00	17.00	17.00	17.00	17.00
0	21.00	21.00	21.00	21.00	21.00

由此可知，期权价格为 1.56 元。

15.19 作为一个近似，假设一年中利率的期限结构是水平的，并且

$$dr=(a-r)bdt+rcdz$$

其中 a, b 和 c 为已知常数，r 为一年内到期的利率；dz 为一个 Wiener 过程。请讨论一下在用二叉树图方法表示 r 的运动时所遇到的问题。

解：在风险中性世界中 r 的过程为：

$$\frac{dr}{r}=\left[\frac{a(b-r)}{r}-\lambda c\right]dt+cdz$$

其中λ是r的风险的市场价格。由此可知，r的风险中性世界中的期望增长率为$\frac{a(b-r)}{r}-\lambda c$（从而为$r$的函数），$r$的风险中性世界中的波动率为$c$。在用二叉树图方法表示$r$的运动时，由于参数

$$u=e^{\sigma\sqrt{\Delta t}}=e^{c\sqrt{\Delta t}},d=e^{-\sigma\sqrt{\Delta t}}=e^{-c\sqrt{\Delta t}}$$

$$p=\frac{a-d}{u-d}=\frac{e^{r\Delta t}-d}{u-d}=f(r)$$

故二叉树图中的u,d不受r的运动的影响，但p受r的运动的影响，随着r的变化，p的值并不能保证在 0 到 1 之间，即有可能为负值或大于 1，这必将影响最终结果的计算。

15.20 当前铜的即期价格为每磅 0.60 美元。假设起期货价格（每磅美元数）如下所示：

3 个月	0.59
6 个月	0.57
9 个月	0.54
12 个月	0.50

铜价的波动率为年率 40%，无风险利率为年率 6%。请用二叉树方法对该美式看涨期权定价，已知执行价格为 0.60 美元，该期劝还有一年到期。在构造二叉树图模型时，请将该有效期等分为 4 个时间段，每个时间段为期 3 个月。

解：由$\Delta t=3/12=0.25,\sigma=0.40$得：$u=e^{\sigma\sqrt{\Delta t}}=e^{0.40\sqrt{0.25}}\approx 1.2214,d=\frac{1}{u}\approx 0.818$。

期货价格给出了铜在风险中性条件下铜的价格增长率的一个估计。由已知数据可以计算在第一个季度（3 个月）的增长率（连续复利，以年计）：

$$4\ln\frac{0.59}{0.60}\approx -6.72\%$$

因此第一个季度对应的参数p是：

$$\frac{e^{-0.0672\times 0.25}-0.81878}{1.2214-0.8187}\approx 0.4088$$

以相同的方法可以计算后 3 个季度的增长率为：$-13.79\%,-21.63\%,-30.78\%$。

对应第 2 个季度的参数p是:

$$\frac{e^{-0.13.79\times 0.25}-0.81878}{1.2214-0.8187}\approx 0.3660$$

对应第 3 个季度的参数 p 是:

$$\frac{e^{-0.21.63\times0.25}-0.81878}{1.2214-0.8187} \approx 0.3195$$

对应第 4 个季度的参数 p 是:

$$\frac{e^{-0.3078\times0.25}-0.81878}{1.2214-0.8187} \approx 0.2663$$

根据以上数据可以作出风险中性世界铜的价格运动的二叉数图如图 15.6：

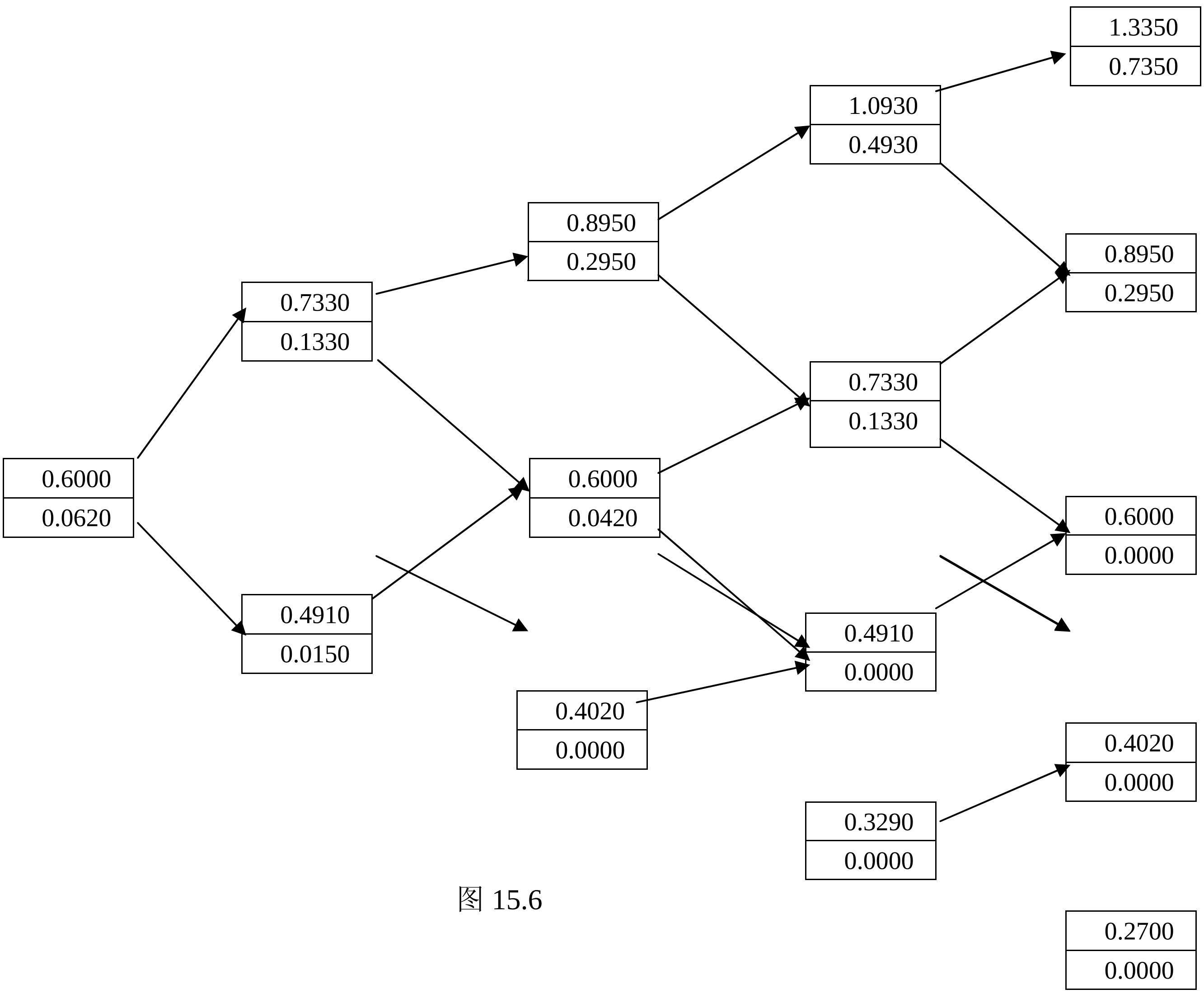


图 15.6

由图 15.6 知该期权价格约为 0.062 美元。

15.21 请用题 15.20 中二叉树图模型对以下证券估值：已知该证券的一年内的收益为 x^2，其中 x 为铜价。

解：由于相对于题 15.20 二叉树图模型的主要参数都没有改变，故可使用题 15.20 二叉树图对该衍生证券进行估值，只是由于因为最后节点处该衍生证券的价值与铜价的平方（即 x^2）相等，而其它结点处按通常方法计算，故最终得出的衍生证券的价值也不相同，计算结果如图 15.7：

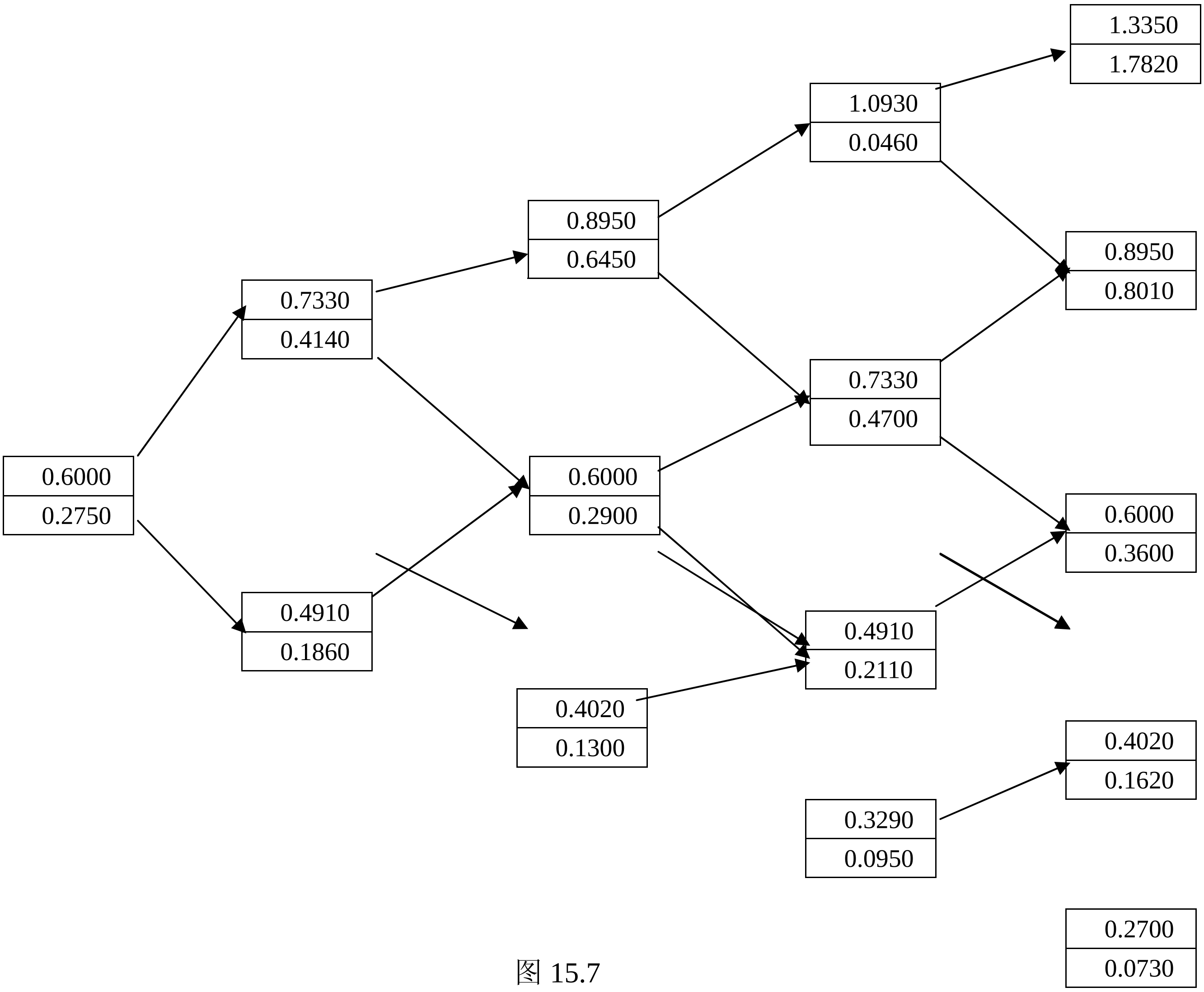


图 15.7

由图 15.6 知该期权价格约为 0.275 美元。

15.22 在应用外推有限差分方法对衍生证券估价时，什么情况下，边界条件 $S \to 0$ 和 $S \to +\infty$ 会对估值结果产生影响？

解：在应用外推有限差分方法对衍生证券估价时，记 S_t 为目前标的资产的价格，记 S_{max} 为所能考虑的标的资产的最高价格（即对应于 $S \to \infty$ 的情形），记 S_{min} 为所能考虑的标的资产的最低价格（即对应于 $S \to 0$ 的情形）并令

$$Q_1 = \frac{S_{max} - S_t}{\Delta S}, Q_2 = \frac{S_t - S_{min}}{\Delta S}$$

令 N 为所考虑的时间段的数目，从外推有限差分方法计算的过程中，很容易发现,当 $N \geq \max(Q_1, Q_2)$ 时，边界条件 $S \to 0$ 和 $S \to +\infty$ 将对估值结果产生影响。

15.23 在红利已知的情况下，如何应用有限差分方法？

解：在红利已知的情况下，我们可以借鉴在 15.3 节使用的支付已知红利的股票期权的二叉树图法的思路。这时，我们只需将原来使用的 S 换为 S^*(股价减去衍生证券有效期内所产生所有红利的现值之和)，然后针对 S^* 使用有限差分方法，不过此时应该注意的是：当使用这种方法时，就应该估计 S^* 的波动率，而不是 S 的波动率。当对有效期较长的衍生证券进行估值时，上述两个波动率很有可能差别很大。

15.24 某公司发行了有效期为 3 年的可转换债券，面值为 25 美元，可随时转换为该公司的股票 2 股。当股价高于或等于 18 美元时，公司可提前赎回债券并强制转换。假设该公司将尽可能早的强制转换。那么，可转换债券的价格的边界条件是什么？假设利率为常数，你如何用有限差分方法对该可转换债券进行估值？假设该公司无违约风险。

解：如果股票价格充分小至 S_{min}，显然，此时可转换债券在有效期内不会发生转股行为，可转换债券将按一般的债券定价。需要考虑的股价的最高价格 S_{max} 等于 18 美元，如果股价到了 S_{max}，则可转换债券的价值为 36 美元。在到期日，可转换债券的价值为 $\max(2S_T, 25)$，其中 S_T 为到期日的股票价格。一般情况下可转换债券可以结合上述边界条件使用外推或内含有限差分方法并采取倒推方式定价。

15.25 请给出从标准正态分布中抽取三个随机样本的公式。设样本 i 和样本 j 的相关系数为 $\rho_{i,j}$。

解：设 x_1, x_2, x_3 为 3 个独立正态分布产生的随机样本，$\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3$ 为所求的来自标准正态分布的随机样本,满足：

$$\varepsilon_1 = x_1$$

$$\varepsilon_2 = \rho_{12} x_1 + x_2 \sqrt{1 - \rho_{12}^2}$$

$$\varepsilon_3 = \alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \alpha_3 x_3$$

其中：

$$\alpha_1 = \rho_{13}$$

$$\alpha_1 \rho_{12} + \alpha_2 \sqrt{1 - \rho_{12}^2} = \rho_{23}$$

$$\alpha_1^2 + \alpha_2^2 + \alpha_3^2 = 1$$

即:
$$\alpha_1 = \rho_{13}$$
$$\alpha_2 = \frac{\rho_{23} - \rho_{13}\rho_{12}}{\sqrt{\rho_{12}^2}}$$
$$\alpha_3 = \sqrt{1 - \alpha_1^2 - \alpha_2^2}$$

Ch16

16.1 一家公司知道 3 个月后它可有 500 万美元投资 90 天，并希望保证获得一定的利率水平。在交易所内交易的利率期权提供了什么样的头寸来对冲利率的变动？

解：3 个月后有 500 万美元用来投资，希望保证获得一定的利率水平，既该公司当心利率下降，对应的利率工具的价格上升，故在交易所内交易的利率期权提供了多头头寸来对冲利率的变动：通过购买利率期权，锁定 3 个月后的投资成本。

16.2 一家公司 3 个月期 LIBOR 的上限为年率 10%，本金为 2000 万美元。在重新设定日，3 个月期的 LIBOR 为年率 12%。根据利率上限，需如何支付？什么时候支付？

解：已知：$\tau = 3/12 = 0.25, R_x = 0.10, L = 2000, R = 0.12$，由式（16.7）得发行利率上限的金融机构应向该公司支付的金额为：

$$\tau L \max(R - R_x, 0) = 0.25 \times 2000 \times \max(0.12 - 0.10, 0) = 10 \text{（万美元）}$$

在 3 个月以后支付。

16.3 抵押担保证券是如何产生的？请说明为什么抵押担保证券风险比诸如政府债券这样的普通固定收入的金融工具的风险更大？

解：当金融机构决定向其客户出售部分住房抵押组合，投资者从中购买一定的份额单位并从中获利，这些份额单位即为抵押担保证券。尽管抵押担保证券由于有一些与政府关系密切的机构担宝，从而其形式上可认为是政府发行的固定收入证券，但由于抵押担保证券中的抵押本身具有提前偿付特权，故它比诸如政府债券这样的普通固定收入的金融工具的风险更大。

16.4 请解释为什么互换期权可以被看作一种债券期权？

解：由于互换期权赋予持有者在未来某个确定的时间使用某个固定的利率进行利率互换的权利，而利率互换可以认为是固定利率债券和浮动利率债券的交换，因此互换期权是一种交换固定利率债券和浮动利率债券的权利。互换开始时，浮动利率债券的价值与本金相等，故互换期权可被看作执行价格为债券本金的基于固定利率债券的期权。

16.5 一位专家声称：对某个特定的抵押担保证券提供的经过期权调整的差价是 155 个基本点。请解释其含义。

解：对某个特定的抵押担保证券提供的经过期权调整的差价是 155 个基本点，即指在考虑了抵押担保证券中所有关于期权的因素后，抵押担保证券的收益超过政府长期债券收益 1.55%。

16.6 用 Black 模型为有效期期一年的基于某个 10 年期债券的欧式看跌期权估值。假设债券当前的现价为 125 美元，执行价格为 110 美元，一年期利率为年率 10%，债券价格的年波动率为 8%，期权有效期内将支付的息票的现值为 10

美元。

解：已知 $F=(125-10)e^{0.1\times 1}\approx 127.09, X=110, r=0.1, \sigma=0.08, T=1.0$，故可算出：

$$d_1=\frac{\ln(127.09/110)+0.08^2/2}{0.08}\approx 1.8456$$
$$d_2=d_1-\sigma\sqrt{T}=1.8456-0.08\sqrt{1.0}=1.7656$$

该欧式看跌期权的价值是：

$$110e^{-0.1}N(-1.7656)-115N(-1.8456)=0.12 \text{ 美元。}$$

16.7 假设 LIBOR 收益率曲线是水平的，为年复利 8%。某个互换期权赋予持有者这样一种权利：即 4 年后开始有权从某个 5 年期互换中收取 7.6%。每年支付一次。互换率的年波动率为 25%，年金为 100 万美元。用 Black 模型为该互换期权定价。

解：由题意知，该互换期权可看作关于固定利率 R_X 的看跌期权，可使用式（16.12）进行定价。

已知条件如下：
$$F=0.08, r_i=\ln(1+0.08)=0.077, m=1, \sigma=0.25, L=1000000$$
$$R_x=0.076, T=4$$

则有：
$$A=\sum_{i=1}^{5}e^{-r_it_i}=e^{-0.077\times 1}+e^{-0.077\times 2}+e^{-0.077\times 3}+e^{-0.077\times 4}+e^{-0.077\times 5}\approx 4.00$$

$$d_1=\frac{\ln(0.08/0.076)+0.25^2\times 4/2}{0.25\times\sqrt{4}}\approx 0.3526$$
$$d_2=d_1-\sigma\sqrt{T}=0.3526-0.25\sqrt{4}=-0.1474$$

故由式（16.12）有该互换期权的价值为：

$$\frac{LA}{m}\left[R_xN(-d_2)-FN(-d_1)\right]=\frac{1000000\times 4.00}{1}\left[0.076N(0.1474)-0.08N(-0.3526)\right]\approx 53880$$

16.8 在课文中讨论的条件累计互换中，固定利率方只有在浮动参照利率低于某一确定水平时才会获利。请讨论如何将以上分析扩展到如下这样一种情况：即只有当浮动参照利率高于某个水平同时低于某个水平时，固定利率方才会获利。

解：假设仅当浮动参照利率高于 R_Y 同时低于 R_X （$R_Y<R_X$）时才发生固定利率支付，则该条件累计互换可以看作一个标准互换加上两个一系列的两值期权，再互换有效期限内的每天都有一个两值期权。使用正文中的记号，某天 i 时 LIBOR 高于 R_X 的风险中性概率为 $N(d_2)$，其中：

$$d_2=\frac{\ln(F_i/R_X)-\sigma_i^2t_i^2/2}{\sigma\sqrt{t_i}}$$

LIBOR 低于 R_Y 的风险中性概率为 $N(-d_2^*)$ 其中：

$$d_2^* = \frac{\ln(F_i / R_Y) - \sigma_i^2 t_i^2 / 2}{\sigma \sqrt{t_i}}$$

所以对应于第 i 天的两值期权的总价值为：

$$\frac{QL}{n_2} P(0, s_i)\left[N(d_2) + N(d_2^*)\right]$$

16.9 请解释当出现如下情况时，是否需要凸度调整：

(a) 我们想要对某个差价期权进行估价，该期权的收益为每季度 5 年期的互换率超过 3 个月的 LIBOR 的超额部分（如果存在这个差额的话），本金为 100 美元。盈亏在这些利率出现后的 90 天发生。

(b) 我们想要对某个差价期权进行估价，该期权的盈亏为 3 个月期的 LIBOR 减 3 个月期的国债利率再减 50 个基本点之后的差值和 0 这两者中的较大者。盈亏在这些利率出现后的 90 天发生。

解：（a）需要凸度调整。

（b）不需要凸度调整或需要轻微调整。

16.10 请仔细说明如何使用（A）远期的远期波动率和（B）水平的波动率为 5 年期利率上限估值。

解：（A）当使用远期的远期波动率为 5 年期利率上限估值时，对每一个利率期权元使用不同的波动率估值，此时远期的远期波动率将作为利率期权元到期日的一个函数。

（B）当使用水平的波动率为 5 年期利率上限估值时，对每一个给定的利率期权元使用相同的波动率估值，此时水平的波动率将作为利率上限到期日的一个函数。

16.11 计算如下期权的价格。设期权本金量为 1000 美元，在 18 个月的时间内将 3 个月期利率（按季度复利报价）的上限定为 13%。这段时间内的利率波动率为年率 12%（按季度复利报价），18 个月期的无风险利率的年率为 11.5%（按连续复利计算），远期利率的波动率为年率 12%。

解：已知：

$$L = 1000, \tau = 0.25, F_k = 0.12, R_X = 0.13, r^* = 0.115$$
$$\sigma_k = 0.12, k\tau = 1.25, (k+1)\tau = 1.50$$

则由式（16.9）有：

$$d_1 = \frac{\ln(0.12/0.13) + 0.12^2 \times 1.25/2}{0.12\sqrt{1.25}} \approx -0.5295$$
$$d_2 = -0.5295 - 0.12\sqrt{1.25} = -0.6637\sqrt{\sigma_1^2 + \sigma_2^2}$$

由式（16.10）有，该期权的价格为：

$$0.25 \times 1000 \times e^{-0.115 \times 1.50} \times \left[0.12N(-0.5295) - N(-0.6637)\right] \approx 0.59 \text{（美元）}$$

16.12 假设使用基于某个 10 年期债券的 5 年期期权的隐含 Black 波动率为基于该债券的期权定价。你认为最后的结果是偏高还是偏低，为什么？

解： 隐含 Black 波动率测度的期权到期时债券价格对数的标准差与期权有效期算术平方根的比值。对于该 10 年期债券的 5 年期期权，债券在期权到期日还有 5 年时间才到期，而对于 10 年期债券的 9 年期期权，债券在期权到期

日只有 1 年时间就到期。在 9 年时间内得到的 1 年债券价格的标准差的正常期望值将小于 5 年时间内得到的 5 年债券价格的标准差的正常期望值，因此最后的结果是偏高。

16.13 考虑一个 8 个月期的基于 14.25 年到期国债的欧式看跌期权。债券现价为 910 美元，执行价格为 900 美元，债券价格的波动率为年率 10%，3 个月后该债券将付息 35 美元。一年期限内所有期限的五风险利率为年率 8%。使用 Black 模型为该期权定价。同时考虑如下两种情况：执行价格对应于债券现金价格；以及执行价格对应于债券报价。

解：已知：

$$B=910, X_1=900, X_2=900+35\times(5/6)\approx 929.17, \sigma=0.10$$
$$r=0.08, T=8/12\approx 0.6667$$

由此立即得出：

$$I=35e^{-0.08\times0.25}\approx 34.33$$
$$F=(B-I)e^{rT}=(910-34.33)e^{0.08\times0.6667}\approx 923.64$$

（1）若执行价格对应于债券的现金价格，则有：

$$d_1=\frac{\ln(F/X)+(\sigma^2/2)T}{\sigma\sqrt{T}}=\frac{\ln(923.64/900)+(0.10^2/2)\times0.6667}{0.10\times\sqrt{0.6667}}\approx 0.3580$$
$$d_2=d_1-\sigma\sqrt{T}=0.3580-0.10\sqrt{0.6667}\approx 0.2764$$

由式（16.2）有，该欧式看跌期权的价格为：

$$p=e^{-rT}\left[XN(-d_2)-FN(-d_1)\right]\approx 18.05\text{美元。}$$

（2）若执行价格对应于债券的报价，则有：

$$d_1=\frac{\ln(F/X)+(\sigma^2/2)T}{\sigma\sqrt{T}}=\frac{\ln(923.64/929.17)+(0.10^2/2)\times0.6667}{0.10\times\sqrt{0.6667}}\approx -0.0331$$
$$d_2=d_1-\sigma\sqrt{T}=-0.0331-0.10\sqrt{0.6667}\approx -0.1148$$

由式（16.2）有，该欧式看跌期权的价格为：

$$p=e^{-rT}\left[XN(-d_2)-FN(-d_1)\right]\approx 30.91$$
$$Delta=\frac{\partial p}{\partial B}=-N(-d_1)=-0.5132$$
$$Gamma=$$

16.14 当执行价格对应于报价时，计算习题 16.13 中的 Delta、Gamma、Vega 值。请说明如何理解这些结果。

解：由定义有：

$$Delta=\frac{\partial p}{\partial B}=-N(-d_1)=-0.5132$$

$$Gamma=\frac{\partial^2 p}{\partial B^2}=\frac{N^1(d_1)}{\sigma(B-I)\sqrt{T}}\approx 0.0058$$

$$Vega=(B-I)\sqrt{T}N^1(d_1)\approx 285.1041$$

$Delta$ 为 -0.5132 指在其它变量保持不变的条件下，债券价格价格给上涨一美元，该国债的欧式看跌期权的价格将下跌 0.5132 美元。

$Gamma$ 为 0.0058 指在其它变量保持不变的条件下，债券价格价格给上涨一美元，该国债的欧式看跌期权的 $Delta$ 将上升 0.0058。

$Vega$ 为 285.1041 指在其它变量保持不变的条件下，波动率每变化一个百分点，该国债的欧式看跌期权的价格将上涨 2.85 美元。

16.15 某个 9 个月期的基于 3 个月期的利率上限期权，本金为 1000 美元。使用 Black 模型和如下信息，为该期权估值：

9 个月期欧洲美元期货价格报价为 92 美元。

9 个月期欧洲美元期权隐含的利率波动率为年率 15%。

当前按连续复利计息的 12 个月期利率为年率 7.5%。

按季度计复利的上限为 8%。

解： 已知：

$$L=1000,\tau=0.25,F_k=0.08,R_X=0.08,r^*=0.075$$

$$\sigma_k=0.15,k\tau=0.75,(k+1)\tau=1.0$$

由式（16.9）有：

$$d_1=\frac{\ln(F_k/R_X)+(\sigma_k{}^2/2)k\tau}{\sigma_k\sqrt{k\tau}}=\frac{\ln(0.08/0.08)+(0.15^2/2)\times 0.75}{0.15\times\sqrt{0.75}}\approx 0.0650$$

$$d_2=d_1-\sigma_k\sqrt{k\tau}=0.0650-0.10\sqrt{0.6667}\approx -0.0649$$

$$c=\tau Le^{-r^*(k+1)\tau}\left[F_kN(d_1)-R_XN(d_2)\right]\approx 0.96\text{美元。}$$

16.16 计算习题 16.15 的 Delta、Gamma、Vega 值。请说明如何理解这些结果。

解：由定义有：

$$Delta=\frac{\partial c}{\partial F_k}=\tau Le^{-r^*(k+1)\tau}N(d_1)\approx 121.97$$

$$Gamma=\frac{\partial^2 c}{\partial F_k{}^2}=\frac{\tau Le^{-r^*(k+1)\tau}N^1(d_1)}{\sigma_k F_k\sqrt{k\tau}}\approx 8888.11$$

$$Vega=\tau Le^{-r^*(k+1)\tau}Fk\sqrt{k\tau}N^1(d_1)\approx 6.40$$

解释方法同 16.15。

16.17 使用 Black 模型为某个 4 年期的基于 5 年期的欧式看涨期权定价。5 年期债券价格为 105 美元，息票利息相同的 4 年期债券的价格为 102 美元，期权的执行价格为 100 美元，4 年期无风险利率为年率 10%（按连续复利计息），4 年内债券价格的波动率为 2%。

解：4 年期债券本金的现值为：

$$100e^{-0.10\times 4} \approx 67.032$$

由此可求出红利的现值是：

$$102 - 67.032 = 34.968$$

因此 5 年期债券的远期价格为：

$$(105 - 34.968)e^{0.10\times 4} \approx 104.475$$

则 Black 模型的参数如下：

$$F_0 = 104.475, X = 100, r = 0.10, T = 4, \sigma = 0.20$$

从而有：

$$d_1 = \frac{\ln(F_0/S) + (\sigma^2/2)T}{\sigma\sqrt{T}} = \frac{\ln(104.475/100) + (0.02^2/2)\times 4}{0.02\times\sqrt{4}} \approx 1.1144$$

$$d_2 = d_1 - \sigma\sqrt{T} = 1.0744$$

故该欧式看涨期权定价为：$e^{-rT}\left[F_0N(d_1) - XN(d_2)\right] \approx 3.19$ 美元。

16.18 考虑某个国债的欧式期权，国债到期日比期权到期日迟 90 天。期权价值总是期权到期日的增函数吗？请解释。

解： 期权价值并不总是期权到期日的增函数，理由如下：

（1）该期权为欧式期权，故到期日长的期权的执行机会并不一定包含到期日短的期权的所有的执行机会，因为它只能在到期日执行。

（2）在其它条件不变时，该期权价值还与债券价格波动率正相关，而债券价格波动率一般与期权有效期限负相关，故期权价值可能与到期日负相关，即期权价值并不总是期权到期日的增函数。

16.19 什么样的金融工具等价于利率上限和利率下限执行价格相等的 5 年期零成本利率双限？共同的执行价格是多少？

解：收到浮动利率支付固定利率且执行价格 5 年期零成本利率双限的执行价格相同的利率互换协议与它等价！它们共同的执行价格是互换利率。

16.20 推导欧洲债券期权之间的看涨—看跌平价关系。

解：债券期权之间的看涨—看跌平价关系有两种表述方式，相应的有两个证明过程，分别如下：

（1）$c + I + Xe^{-RT} = p + B$。

其中：c 债券的欧式看涨期权的价格，p 是相应的债券的欧式看跌期权的价格，I 是期权有效期内债券利息支付的现值，X 是执行价格，R 是期权有效期内的无风险利率，T 是期权有效期，B 是债券的价格。为了证明该平价公式，考虑以下投资组合：

组合 A：一份该债券的欧式看跌期权对头和一份债券多头。

组合 B：一份该债券的欧式看涨期权多头和大小为期权有效期内债券利息支付的现值与债券执行价格的现值之和的现金，并将现金以无风险利

率R进行投资。

则在期权到期日T：

1、若债券价格上涨到B_T。对于组合 A，则放弃债券的看跌期权，将持有的一份债券以市场价格B_T卖掉，最终组合 A 的总价值为B_T+I（债券在持有期内获得大小为I的利息支付）；对于组合 B，则执行债券的看涨期权，以现金X购入一份价格为B_T的债券，最终组合 B 的总价值也为B_T+I。因此组合 A 与组合 B 在到期日的价值相等。

2、若债券价格下跌到B_T。对于组合 A，则执行债券的看跌期权，以执行价格X将持有的一份债券卖出，最终组合 A 的总价值为$X+I$；对于组合 B，则放弃执行债券的看涨期权，最终组合 B 的总价值也为$X+I$。因此组合 A 与组合 B 在到期日的价值相等。

综上，无论债券价格如何变化，组合 A 与组合 B 在到期日的价值相等，根据无套利假设，它们在现在的价格也必然相等，即有：

$$c+I+Xe^{-RT}=p+B。$$

（2）$c+Xe^{-RT}=p+F_0e^{-RT}$。

其中：F_0是债券的远期价格。为了证明该平价公式，考虑以下投资组合：

组合 C：持有一份该债券的欧式看跌期权对头和一份债券远期多头及大小为债券远期价格现值的现金，并将现金以无风险利率R进行投资。

组合 D：一份该债券的欧式看涨期权多头和大小为期权有效期内执行价格的现值的现金，并将现金以无风险利率R进行投资。

则在期权到期日T：

1、若债券价格上涨到 B_T。对于组合 C，则放弃执行期权，交割债券远期合约，即以现金F_0购入一份债券，并以价格B_T卖出，最终组合 C 的总价值为B_T；对于组合 D，则执行债券的看涨期权，即以价格X购入一份债券，并以价格B_T卖出，最终组合 D 的总价值也为B_T。因此组合 C 与组合 D 在到期日价值相等。

2、若债券价格下跌到B_T。对于组合 C，则执行债券的看跌期权，以执行价格X将持有的一份债券卖出（先交割债券远期合约，以现金F_0购入一份债券），最终组合 C 的总价值为X；对于组合 D，则放弃执行债券的看涨期权，最终组合 D 的总价值也为X。因此组合 C 与组合 D 在到期日价值相等。

综上，无论债券价格如何变化，组合 C 与组合 D 在到期日的价值相等，根据无套利假设，它们在现在的价格也必然相等，即有：

$$c+Xe^{-RT}=p+F_0e^{-RT}。$$

16.21 推导欧洲互换期权之间的看涨—看跌平价关系。

解：欧洲互换期权之间的看涨—看跌平价关系是：

$$c+V=p$$

其中：c是支付固定利率R_X收到浮动利率的互换的看涨期权的价格，p是支付浮动利率收到固定利率R_X的看跌期权的价格，V是以支付浮动利率收

到固定利率 R_X 的互换期权为标的物的远期合约的价值。。为了证明该平价公式，考虑以下投资组合：

组合 A：一份支付浮动利率收到固定利率 R_X 的看跌期权的多头合约。

组合 B：一份支付固定利率 R_X 收到浮动利率的互换的看涨期权的多头合约和一份远期互换。

则在期权到期日 T：

1、若市场互换率高于 R_X。此时看涨期权将执行，看跌期权放弃执行，则组合 A 与组合 B 在到期日的价值均为 0。

2、若市场互换率低于 R_X。此时看跌期权将执行，看涨期权放弃执行，则组合 A 与组合 B 在到期日的价值均为 $L(R_X - R)$（L 为本金，R 为市场互换率）

综上，无论市场互换率如何变化，组合 A 与组合 B 在到期日的价值相等，根据无套利假设，它们在现在的价格也必然相等，即有：

$$c + V = p$$

16.22 请解释如果利率上限隐含 Black（平坦的）波动率不等于利率下限隐含 Black（平坦的）波动率，为什么就存在套利机会？

解：假设利率上限和利率下限有相同的执行价格 R_X 和相同的到期时间 T，则以下平价关系成立：

利率上限+互换= 利率下限

其中互换为收到固定利率 R_X 和支付浮动利率且到期时间为 T 普通利率互换。如果利率上限隐含 Black（平坦的）波动率等于利率下限隐含 Black（平坦的）波动率，Black 公式表明上式成立。反之，如果利率上限隐含 Black（平坦的）波动率不等于利率下限隐含 Black（平坦的）波动率，则上式不成利，即此时存在套利机会。

16.23 对数正态分布的债券定价模型允许债券的收益率变为负值吗？请解释。

解： 答案是肯定的。

16.24 假设在第 16.7 节的例子 16.4 中，盈亏在一年内发生（即该利率出现了）而不是在 15 个月后。这使得输入到 Black 模型的值有什么不同？

解： 这使得输入到 Black 模型的值有以下两方面的不同：

（1）折现时间将使用 1 年，而不是 15 个月（1.25 年）。

（2）需要对远期利率进行凸度调整，为了计算该凸度调整的大小，设 y 为按季度计复利的债券收益率，P(y)为一年期债券的价格。则有以下关系：

$$p(y) = \frac{1}{1+0.25y}, p'(y) = -\frac{0.25}{(1+0.25y)^2}, p''(y) = \frac{0.125}{(1+0.25y)^3}$$

将例子 16.4 中的有关数据代入上式中有：

$$F = 0.07, p'(y) = -0.2415, p''(y) = 0.1187$$

则由式（16.13）知，该凸度调整的大小为：

$-0.5 \times 0.07^2 \times 0.2^2 \times 1.0 \times \frac{0.1187}{-0.2415} \approx 0.00005$，大约半个基点。

在利率期权元的公式中，使用经凸度调整后的数据如下：

$L = 10000, \tau = 0.25, F_k = 0.07005, R_x = 0.08, r^* = 0.065$

$\sigma_k = 0.20, k\tau = 1.0$

由以上数据计算得：

$$d_1 = \frac{\ln(F_k / R_X) + (\sigma_k^{\ 2}/2)k\tau}{\sigma_k \sqrt{k\tau}} = \frac{\ln(0.07005/0.08) + (0.20^2/2)\times 1.0}{0.20\times\sqrt{1.0}} \approx -0.5642$$

$$d_2 = d_1 - \sigma_k\sqrt{k\tau} = -0.5642 - 0.20\sqrt{1.0} \approx -0.7642$$

由式（4.1）可计算出 1 年期即期利率（按连续复利计算）r=6.39%，故利率期权元的价格为：

$$c = \tau L e^{-rk\tau}\left[F_k N(d_1) - R_X N(d_2)\right] \approx 5.31\text{美元。}$$

16.25 收益率曲线为年利率 10%（年复利）的水平曲线。计算如下金融工具的价值：在 5 年内，收取 2 年期互换率（年复利），支付 10%的固定利率。年金都是 100 美元。假设每年交换一次支付额，互换利率的波动率为年率 20%。请说明为什么此金融工具的价值不为零？

解：由正文 16.11 中关于凸度调整的阐述知，本题中的互换属于固定期限的互换，需要进行凸度调整，从而此金融工具的价值不为零。事实上，可以计算该金融工具的真实价值。设 y 为按年计复利的债券收益率，P(y)为该 5 年金融工具的 2 年期债券的价格（将该金融工具分解为债券的组合），则：

$$p(y) = \frac{0.1}{1+y} + \frac{1.1}{(1+y)^2}$$

$$p'(y) = -\frac{0.1}{(1+y)^2} - \frac{2.2}{(1+y)^3}$$

$$p''(y) = \frac{0.2}{(1+y)^3} + \frac{6.6}{(1+y)^4}$$

将 y=0.10 代入上面的式子中有：

$$p'(y) = -\frac{0.1}{(1+0.10)^2} - \frac{2.2}{(1+0.10)^3} \approx -1.7355$$

$$p''(y) = \frac{0.2}{(1+0.10)^3} + \frac{6.6}{(1+0.10)^4} \approx 4.6582$$

则由式（16.13）知，该凸度调整的大小为：

$$-0.5\times 0.10^2 \times 0.2^2 \times 5 \times \frac{0.4682}{-0.7355} \approx 0.00268$$

故经凸度调整后 0.10+0.00268=10.268%，该金融工具的真实价值为：

$$\frac{10.268\% - 10\%}{(1+0.10)^5}\times 100 \approx 0.167\text{美元。}$$

16.26 假设某个贴现债券的收益率 R 遵循如下过程：

$$dR = \mu dt + \sigma dz$$

μ 和 σ 是 R 和 t 的函数，dz 是维纳过程。证明，随到期日的临近，贴现

债券的价格的波动率减少为零。

解：由题意知，该贴现债券的收益率 R 遵循 Ito 过程，由于贴现债券的价格 P 为收益率 R 的函数，故由 Ito 引理（参看正文（10.12）及其说明）知，该贴现债券的价格 P 也遵循 Ito 过程，且其波动率为：

$$\sigma \frac{\partial}{\partial R} e^{-R(T-t)} = -\sigma (T-t) e^{-R(T-t)}$$

其中 T 为到期时间,t 为现在的时间,因此 $t \to T$ ，贴现债券的价格 P 的波动率必将趋近于 0，即随到期日的临近，贴现债券的价格的波动率减少为零。

16.27 在一个普通型互换中，支付日的浮动利率的支付额是前一支付日的浮动利率计算而得的。在一个“arrears”互换中，浮动利率的支付额是由该支付日的浮动利率计算而来的。请描述如何对“arrears”互换进行估值。

解：此题与正文中例 16.8 类似，可参考该解答。

Ch17

1．均衡模型和无套利模型的区别是什么？

解：均衡模型是从假设一些经济变量开始的.并推出短期无风险利率 r 的一个过程.初始期限结构是模型中的一个输出.在无套利模型中,无风险利率被设计成与初始期限结构相符.

2．如果某个股票价格为均值回复或遵循某种路径依赖过程，就存在某种套利机会。请说明：当短期利率为以上行为过程时，为什么就不存在套利机会？

解：如果某个股票价格为均值回复或遵循某种路径依赖的过程,那么市场是无效率的.短期利率不是股票价格.换句话说,我们不能交易以短期利率为价格的任何金融产品.因此,当短期利率为均值回复或遵循某种路径依赖过程,那么市场是有效的我们可以交换债券和其他以短期利率为定价基础的金融证券.这些证券的价格并不是均值回复或遵循某种路径依赖过程.

3．假设当前短期利率为 4%，其标准偏差为年率 1%。当短期利率以如下方式：（a）Vasicek 的模型；（b）Rendleman 和 Bartter 的模型；（c）Cos,Ingersoll 和 Ross 的模型上升为 8%时，标准差为多少？

解：在 VASICEK 模型中,标准差为 1%.在 Rendleman 和 Batter 模型中,标准差与短期利率成正比.当短期利率从 4%上升到 8%时,标准差从 1%到 2%.在 Cos,Ingersoll 和 Ross 模型中,短期利率的的标准差和短期利率的平方根成正比.当短期利率从 4%上升到 8%,短期利率标准差,短期利率标准差从 1%上升到 1.414%.

4．请解释单因素和两因素利率模型之间的区别。

解：在单因素模型中,r 的过程只包含一个不确定性的来源.这通常意味着:在任意短期间隔内所有利率在相同的方向变动(但它并不意味着所有利率以相同的幅度变动).在两因素模型中,r 的过程包括两个不确定性的来源.第一个不确定因素导致利率大致上平行运动;第二个不确定因素导致长期利率和短期利率朝相反方向运动.

5．请解释马尔科夫和非马尔科夫利率模型之间的区别。

解：指定漂移为时间函数的短期利率为马尔科夫模型.当我们构造债券或瞬态远期模型时,变量的初始值保证我们的模型与初始期限结构一致,但该模型通常是非马尔科夫的过程.

6．第 17.4 章节描述了将基于某附息票债券的期权分解为基于贴现债券的期权组

合的方法，请问：该方法是否可以与某个两因素模型结合起来使用？请解释你的答案。

解：不.17.4 节的讨论过程是基于:在任意给定的时间,所有债券价格的变动方向是一致的.但是在两因素模型中,这种讨论是不正确的.

7．假设在 Vasicek 模型和 Cox,Ingersoll,Ross 模型中 a=0.1,b-0.1.在两个模型中，初始短期利率为 10%，初始短期利率的标准差为 2%。将该模型计算的价格与有效期为 10 年的贴现债券的价格进行比较。

解：在 Vasicek 模型中,a=0.1,b=0.1, σ =0.002,因此

$$B(t,t+10)=\frac{1}{0.1}(1-e^{-0.1*10})=6.32121$$

$$A(t,t+10)=\exp\left[\frac{(6.32121-10)(0.1^2\times 0.1-0.0002)}{0.01}-\frac{0.0004\times 6.32121^2}{0.4}\right]$$

=0.71587

债券价格为 $0.71587e^{-6.32121\times 0.1}=0.38046$

在 Cox,Ingersoll 和 Ross 模型中,a=0.1,b=0.1, $\sigma=0.02/\sqrt{0.1}=0.0632$;同时

$$\gamma=\sqrt{a^2+2\sigma^2}=0.13416$$

定义

$$\beta=(\gamma+\alpha)(e^{10\gamma}-1)+2\gamma=0.92992$$

$$B(t,t+10)=\frac{2(e^{10\gamma}-1)}{\beta}=6.07650$$

$$A(t,t+10)=(\frac{2\gamma e^{5(\alpha+\gamma)}}{\beta})^{2ab/\sigma^2}=0.69746$$

债券价格约为 $0.69746e^{-6.07650\times 0.1}=0.37986$

8．假设在初始短期利率为 5%的 Vasicek 的模型中，a=0.1,b=0.08 和 σ =0.015。计算某个执行价格为＄87，有效期为一年，基于 3 年后到期,本金为＄100 的贴现债券的欧式看涨期权的价格。

解：根据题目已知条件有：s=3,T=1,L=100,X=87

$$\sigma_P=\frac{0.015}{0.1}(1-e^{-2\times 0.1})\sqrt{\frac{1-e^{-2\times 0.1\times 1}}{2\times 0.1}}=0.025886$$

利用公式得 P（0,1）=0.94988,P (0,3)=0.85092,并且 h=1.14277,所以欧式看涨期权价格为：

$$100\times 0.85092\times N(1.14277)-87\times 0.94988\times N(1.11688)=2.59$$

或＄2.59

9．将习题 17.8 中的条件改为执行价格为＄87 的欧式看跌期权，重新估值。欧式

看涨期权和欧式看跌期权之间的看涨-看跌平价关系是怎么样的？证明在这种情况下，看涨期权价格和看跌期权价格满足看涨-看跌平价关系。

解：欧式看跌期权价格为：

$$87\times0.94988\times N(-1.11688)-100\times0.85092\times N(-1.14277)=0.14$$

因为是无息债券,看涨—看跌平价关系表明,看跌期权价格加上债券价格应该等于看涨期权价格加上执行价格的现值.债券价格是 85.09，执行价格的现值是$87\times0.94988=82.64$。看涨--看跌平价关系满足：

$$82.64+2.59=85.09+0.14$$

10．假设在初始短期利率为 6%的 Vasicek 的模型中 a=0.1,b=0.08, σ=0.015.计算某个有效期为 2.1 年的基于 3 年后到期债券的欧式看涨期权的价格。假设该债券每半年支付息票利率 5%。债券的面值为＄100，期权的执行价格为＄99。执行价格为债券将要支付的现金价格（不是报价）。

解：第一步计算 2.1 年时点γ的价值。在这点上，债券的价值为 99。定义此点的值为γ^*，我们必须满足等式：

$$2.5A(2.1,2.5)e^{-B(2.1,2.5)\gamma^*}+102.5A(2.1,3.0)e^{-B(2.1,3.0)\gamma^*}=99$$

求出结果：γ^*=0.063，因此

$$2.5A(2.1,2.5)e^{-B(2.1,2.5)\times0.063}=2.43624$$

和

$$102.5A(2.1,3.0)e^{-B(2.1,3.0)\times0.063}=96.56373$$

11．使用习题 17.10 的结果及看涨-看跌平价关系，计算与习题 17.10 中欧式看涨期权同样期限的欧式看跌期权的价格。

解：由看涨--看跌平价关系得到：

$$c+I+PV(X)=p+B_0$$

或

$$p=c+PV(X)-(B_0-I)$$

这里定义 c 为看涨期权价格，X 为执行价格，I 为利息现值，B_0为债券价格。

此题中：c=0.1244,

$PV(X)=99\times P(0,2.1)=85.9093$,

$B_0-I=2.5\times P(0,2.5)+102.5\times P(0,3)=85.3124$,所以，看跌期权价格为：

$0.1244+85.9093-85.3124=0.7213$

12．在 Hull-White 的模型中，a=0.08, σ=0.01.计算有效期限为一年的基于 5 年有效期的贴现债券的欧式看涨期权价格。设利率期限结构是水平的，为 10%，

债券面值为＄100，执行价格为＄68。

解：利用公式有 $P(0,T)=e^{-0.1\times 1}=0.9048$ 和 $P(0,s)=e^{-0.1\times 5}=0.6065$，同时也有：

$$\sigma_P=\frac{0.01}{0.08}(1-e^{-4\times 0.08})\sqrt{\frac{1-e^{-2\times 0.08\times 1}}{2\times 0.08}}=0.0329$$

和 $h=-0.4192$，所以看涨期权价格为：

$$100\times 0.6065N(h)-68\times 0.9048N(h-\sigma_P)=0.439$$

13．用 Hull-White 模型重复习题 17.10 的计算。假设利率期限结构是水平的，为 6%（按半年计复利）。

解：Hull---White 模型中所包含的变量：a=0.05 和 σ =0.015，设 $\Delta t=0.4$

$$\bar{B}(2.1,3)=\frac{B(2.1,3)}{B(2.1,2.5)}\times 0.4=0.88888$$

从等式（17.23），$\bar{A}(2.1,3)$=0.99925

第一步计算 2.1 年时点 R 的价值。在这点上，债券的价值为 99。定义此点上的 R 值为 R^*。满足等式

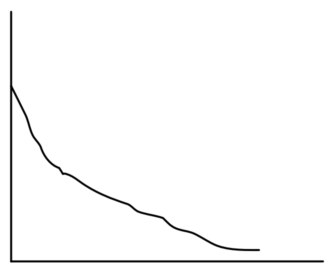
$$2.5e^{-R^*\times 0.4}+102.5\bar{A}(2.1,3)e^{-\bar{B}(2.1,3)R^*}=99$$

15．在 Ho-Lee 模型中，远期利率 F（t,T）遵循什么过程？

解：在 Ho-Lee 模型中，短期利率未来运动的平均方向近似等于瞬态远期利率曲线的斜率，远期利率的 标准差为 σ。

16．在 Hull-White 模型中，远期利率 F（t,T）遵循什么过程？

解：在 Hull-White 模型中，T 时刻到期的瞬态远期利率的瞬态标准差是 $\sigma e^{-a(T-t)}$ 回复率参数 a 决定标准差随到期日而下降的速率。



17．使用课本中给出的公式，证明在 Ho-Lee 模型中在时刻 t 的短期利率的漂移率为 $G_t(0,t)$，其中 $G_t(t,T)$ 是 T 时刻到期的合约在 t 时刻的瞬时期货利率。

解：从书上 17.10 节可以得出，在 Ho-Lee 模型中，瞬时期货利率为：

$$G(0,t)=F(0,t)+\frac{\sigma^2 t^2}{2}$$

所以

$$G(0,t)=F_t(0,t)+\sigma^2 t$$

这是等式（17.13）中 $\theta(t)$ 的表达式。它表明 $G_t(0,t)$ 是短期利率的漂移率。

18．使用课文中给出的公式，证明在 Hull-White 模型中在时刻 t 的短期利率的漂移率为 $G_t(0,t)+a[G(0,t)-r]$。其中 $G(t,T)$ 是 T 时刻到期的合约在 t 时刻的瞬时期货利率。

解：在 Hull—White 模型中，瞬时期货利率的表达式为：

$$G(0,t)=F(0,t)+\frac{\sigma^2}{2a^2}(1-e^{-at})^2$$

所以

$$G_t(0,t)=F_t(0,t)+\frac{\sigma^2}{a}(1-e^{-at})e^{-at}$$

$$G_t(0,t)+a[G(0,t)-r]=F_t(0,t)+aF(0,t)-ar+\frac{\sigma^2}{a}(1-e^{-at})e^{-at}+\frac{\sigma^2}{2a}(1-e^{-at})^2$$

$$=F_t(0,t)+aF(0,t)-ar+\frac{\sigma^2}{2a}(1-e^{-2at})$$

从等式（）这个是 r， $\theta(t)-ar$ 的漂移率。

19. 假设 a=0.05, σ =0.015,l 利率期限结构是水平的，为年率 10%。为 Hull—White 模型建造一个三个时间步长的三叉树，每个时间步长为 1 年。

解：时间步长□t 为 1，那么□$r=0.015\sqrt{3}=0.02598$。同时，$j_{\max}=4$ 表明，用树图法，从中心出来必须经过 4 步的变化。只有三步变化，我们是达不到所要求点的。

21．计算图 17.6 的树图中的某个两年期债券的价格。

解：2 年零息债券在末结必须支付＄100。在结点 B 它的值为 $100e^{-0.12\times 1}=88.69$；

在结点 C 的值为 $100e^{-0.10\times 1}=90.48$；在结点 D 的值为 $100e^{-0.08\times 1}=92.31$。因此在 A 点债券的值为：

$$(88.69\times 0.25+90.48\times 0.5+92.31\times 0.25)e^{-0.1\times 1}=81.88$$

22．计算图 17.9 的树图中的某个两年期债券的价格，并证明它与初始期限结构一致。

解：2 年零息债券在末结必须支付＄100。在 B 点的价值为 $100e^{-0.0693\times 1}=93.30$。

在 C 点的价格为：$100e^{-0.0520\times 1}=94.93$。在 D 点的价值为：$100e^{-0.0347\times 1}=96.59$。

因此在A点的价格为：$(93.30\times0.167+94.93\times0.666+96.59\times0.167)e^{-0.0382\times1}=91.37$ 即＄91.37。2 年期连续利率的零利率为：$0.08-0.05e^{-0.18\times2}=0.0451$，因此债券的价格是＄91.37。

因为 $91.37=e^{-0.04512\times2}$，所以 2 年期债券的价格和初始期限结构一致。

23．计算图 17.10 的树图中的某个 18 个月期债券的价格，并证明它与初始期限结构一致。

解：在树图末点，18 个月零息债券必须支付＄100。在点 E 的价格为：$100e^{-0.088\times0.5}=95.7$，在 F 点的价格 $100e^{-0.0648\times0.5}=96.81$.在 G 点价格 $100e^{-0.0477\times0.5}=97.64$.在 H 点的价格 $100e^{-0.0351\times0.5}=98.26$。在点 I 的价格 $100e^{0.0259\times0.5}=98.71$。在 B 点的价格是

$$(0.118\times95.70+0.654\times96.81+0.228\times97.64)e^{-0.0564\times0.5}=94.17$$

同理的 C 和 D 点的价格分别是 95.60 和 96.68。A 点的价格就是：

$$(0.167\times94.17+0.666\times95.60+0.167\times96.68)e^{-0.0343\times0.5}=93.92$$

18 个月连续利率的零利率为 $0.08-0.05e^{-0.18\times1.5}=0.0418$ .18 个月零息债券价格为：$100e^{-0.0418\times1.5}=93.92$.因此债券的价格与初始期限结构一致。

25．假设在 Hull-White 模型中，a=0.1, σ=0.02,某个 10 年期的欧洲美元期货报价为 92。在 10.0 年和 10.25 年之间的远期利率为多少？

解：考虑 a=0.1，σ=0.02，t_1=10.0，t_2=10.25。$B(t_1,t_2)$=0.2484，$B(0,t_1)$=6.5936

$$\frac{0.2484}{0.25}[0.2484(1-e^{-2\times0.05\times10})+2\times0.05\times6.5936^2]\frac{0.015^2}{4\times0.05}=0.004$$

即 0.4%.期货利率按季度计复利是年率 6%，按连续复利计算是年率 6%，因此远期利率按连续复利计息年率是 5.96-0.4=5.56%

Ch18

18.1 解释远期开始期权和任选期权之间的差别。

解：远期开始期权是现在支付期权费，但是在未来的某个时刻开始，执行价格与期权合约开始时标的资产的价格相等。

任选期权是经过一段指定的时期后，持有人能选择期权，或者是看涨期权或者是看跌期权。

18.2 描述具有同样有效期的一个回望期权看涨期权和一个回望期权看跌期权的组合的收益状态图。

解：一个回望期权看涨期权的收益为 S_T —S_{MIN}

一个回望期权看跌期权的收益为S_{MAX} —S_T

因此具有同样有效期的一个回望期权看涨期权和一个回望期权看跌期权的组合的收益为S_{MAX} —S_{MIN}。

18.3 考虑某个任选期权，持有者有权在两年期限内任何时候在欧式看涨期权和欧式看跌期权之间进行选择。不考虑所做出的选择，看涨期权和看跌期权的到期日和执行价格是相同的。在两年有效期期末之前做出选择是最佳的吗？请解释原因。

解：在两年有效期期末之前做出选择不是最佳的。因为对于欧式期权，不能提前执行，只能在到期日执行，所以在期限内的任何时候做出选择，所形成的现金流都是一样的。而对于美式期权如果规定了不能提前执行，则这个结论也是成立的。但是如果没有的，就是说美式看涨期权或者看跌期权的选择一旦做出，就可以执行期权，则这个结论就不成立，例如：如果股票价格在前六个月跌到了很低的水平，则持有者就可能选择看跌期权，并且立即执行。

18.4 假设 C_1 和 P_1 是执行价格为 X，有效期为 T 的欧式平均价格看涨期权和欧式平均价格看跌期权的价格，C_2 和 P_2 是有效期为 T 的欧式平均执行价格看涨期权和欧式平均执行价格看跌期权的价格，C_3 和 P_3 是执行价格为 X，有效期为 T 的常规欧式看涨期权和常规欧式看跌期权的价格。

证明：$C_1 + C_2 — C_3 = P_1 + P_2 — P_3$

解：各期权的收益如下：

C_1 ：MAX（0 ，S_{AVE} —X）　P_1 ：MAX（0，X —S_{AVE}）

C_2：MAX（0，S_T —S_{AVE}）　P_2 ：MAX（S_{AVE}—S_T）

C_3：MAX（S_T —X，0）　P_3 ：MAX（X—S_T，0）

有C_1 —P_1的收益为 S_{AVE}—X ；C_2—P_2的收益为 S_T —S_{AVE} ；C_3 —P_3的收益为S_T—X，故有C_1—P_1 +C_2 —P_2 =C_3 —P_3 得到 $C_1 + C_2$ —C_3= P_1 + P_2—P_3

18.5 课文中给出了某个特殊的任选期权分解成一个有效期为 T_2 的看涨期权和一个有效期为 T_1 的看跌期权的推导过程。请给出另外一种将任选期权分解为一个有效期为 T_1 的看涨期权和一个有效期为 T_2 的看跌期权。

解：由看涨期权和看跌期权之间的平价关系$C +$ X $e^{-r(T-t)}$ =P+S 得到

$$\text{MAX}(C,\ \text{P}) = \text{MAX}\ [\text{P},\ \text{P} + S_1 e^{-r(T_2-T_1)} — \text{X}\ e^{-r(T_2-T_1)}]$$

$$= \text{P} + \text{MAX}\ [0,\ S_1 e^{-q(T_2-T_1)} — \text{X}\ e^{-r(T_2-T_1)}]$$

由此可得，任选期权可以分解为一份执行价格为X，到期日为 T_2 的看涨期

权和$e^{-q(T_2-T_1)}$ 份执行价格为X $e^{-(r-q)(T_2-T_1)}$，到期日为 T_1的看跌期权。

18.6 第18.1节给出了下降敲出看涨期权的两个公式。第一个适用于障碍H小于或等于执行价格X的情况。第二个适用于障碍H大于或等于执行价格X的情况。证明；当H=X时，两个公式是一样的。

解；当$H \geqslant X$时，有$C_{do} = S_0 N(x_1) e^{-qT} — X e^{-rT} N(x_1 — \sigma\sqrt{T}) — S_0 e^{-qT}$

$(H/S_0) N(y_1) + X e^{-rT} (H/S_0)^{2\lambda-2} N(y_1 — \sigma\sqrt{T})$

其中 $x_1 = \ln(S/H)/\sigma\sqrt{T}$，$y_1 = \ln(H/S)/\sigma\sqrt{T}$

因为$\lambda = (r — q + \sigma^2/2)/\sigma^2$ 此时将$H = X$带入有$x_1 = d_1$，

可得$C_{do} = C — S_0 e^{-qT} (H/S_0)^{2\lambda} N(y_1) + X e^{-rT} (H/S_0)^{2\lambda-2} N(y_1 — \sigma\sqrt{T})$

当$H \leqslant X$时，有$C_{di} = S_0 e^{-qT} (H/S_0)^{2\lambda} N(y) — X e^{-rT} (H/S_0)^{2\lambda-2} N(y — \sigma\sqrt{T})$，

其中 $y = \ln[H^2/(SH)]/\sigma\sqrt{T} + \lambda\sigma\sqrt{T}$，$\lambda = (r — q + \sigma^2/2)/\sigma^2$

因为$C_{do} = C — C_{di}$，$C_{do} = C — S_0 e^{-qT} (H/S_0)^{2\lambda} N(y) + X e^{-rT} (H/S_0)^{2\lambda-2}$ $N(y — \sigma\sqrt{T})$

当$H = X$ 时，有$y_1 = y$ 因此，C_{do}两个公式是一样的。

18.7 当障碍大于执行价格时，为什么下降敲出看跌期权价值为零？请解释。

解：只有资产价格小于执行价格，期权才是有价值的，但是在这种情况下，已经达到障碍水平，期权已经作废，所以下降敲出看跌期权价值为零。

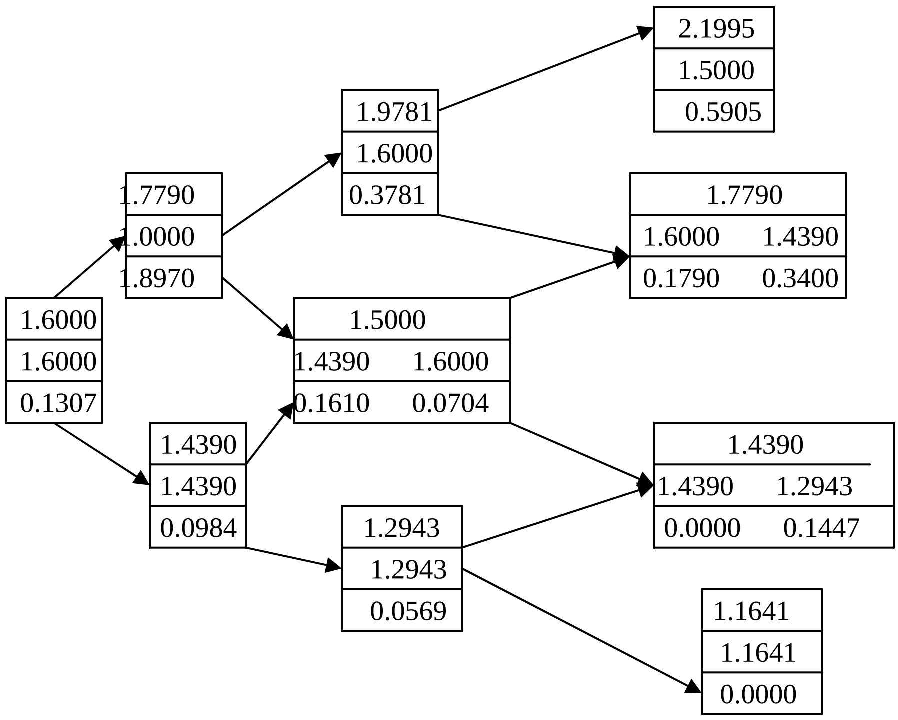
18.8 利用三时间步长树图估算某货币的美式回望看涨期权的价值，其中初始汇率为1.6，国内无风险利率为年率5%，国外无风险利率为年率8%，汇率波动率为年率15%，有效期为18个月。运用第18.3节中的方法。

解：S_0=1.6，r=0.05，r_f=0.08，σ=0.15，T=1.5，$\triangle t$=0.5

可得 $\mu = e^{0.15\sqrt{0.5}}$=1.1119，$d = 1/\mu$ =0.8994，$a = e^{(0.05-0.08)\times 0.5} = 0.9851$，

$P = (a — d)/(\mu — d) = 0.4033$ $1 — p = 0.5967$

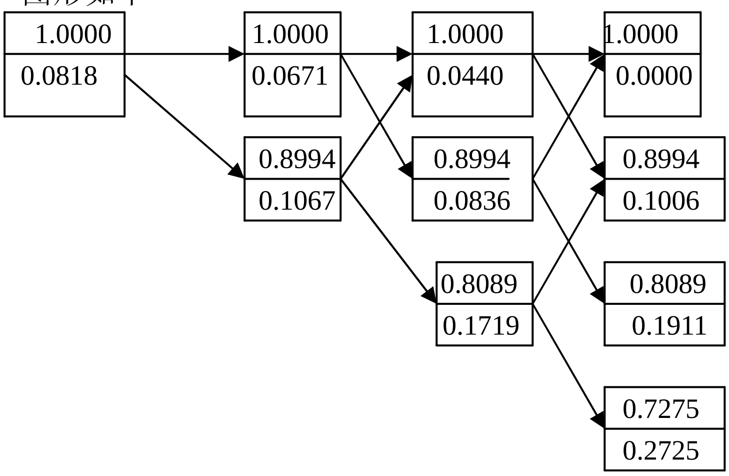
美式回望看涨期权的收益为$S_T — S_{MIN}$。其图如下：



在以上的图中，在每个结点处，上面的数字表示汇率，中间的数字表示最小汇率，下面的数字表示期权的价值。由图可得，期权的价值为 0.1307。

18.9 运用第 18.4 节中的方法，重新计算第 18.8 中的问题。

解： 图形如下



对于 $Y(t)=F(t)/S(t)$，$F(t)$ 表示到时间 t 为止的最小汇率，$S(t)$ 表示即期汇率。我们以外币计价，由图形可得期权的价值是 0.0818 单位的外币或者是 0.0818×1.6=0.131 单位的本币。这个结果与 18.8 的结果一致。

18.10 利用三时间步长树图估算基于不付红利股票几何平均价格的美式回望看涨期权的价格，其中股票价格为＄40，执行价格为＄40，无风险利率为年率 10%，波动率为年率 35%，有效期为 3 个月。计算几何平均是从今天开始直到期权到期日。

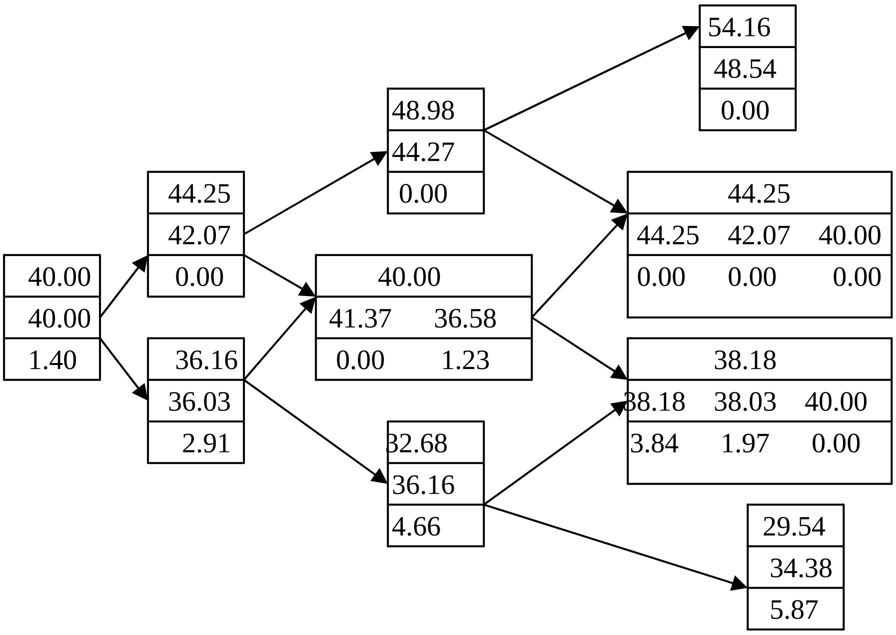
解： $S_0=40$，X= 40，$r=0.1$ $\sigma=0.35$ $T=0.25$ $\triangle t=0.08333$，由此可得：

$\mu = e^{0.35\sqrt{0.08333}}$ =1.1063 ， d =1/ μ = 0.09039 ， $a = e^{0.1\times0.08333}$

=1.008368 ，

P=（a—d）/（μ —d）=0.5161　　1— p = 0.4839

图形如下：



期权的收益为 40—S_{AVE} ，S_{AVE} 表示几何平均，在每个结点，上面的数字代表汇率，中间的数字代表几何平均，下面的数字代表期权的价值。由图形可得期权的价值为＄1.40

18.11 假设基于不付红利股票的美式回望看涨期权执行价格按比率 g 增长。证明如果 g 小于无风险利率为年率为 r，则提前执行该看涨期权决不是最优。

解：这个命题和第 7 章的不付红利股票的常规期权相似，考虑这样的一个证券组合，包含一个期权和价值为执行价格现值的一比现金，最初的现金头寸为 X $e^{(q-r)T}$，到时刻 t（0≤t≤T）现金头寸增长到 X $e^{-r(T-t)+qT}$ =X e^{qT} $e^{-(r-q)(T-t)}$

因为 $r>q$ ，所以 X $e^{-r(T-t)+qT}$ 小于 X e^{qT} ，因此未达到执行价格，其结果是如果提前执行期权，证券组合的最终价值将会小于 S_T 。在时刻 T，现金头寸是 X e^{qT} ， 这就要求执行期权，如果在时刻 T 执行期权，组合的最终价值就是 MAX（S_T， X e^{qT} ），同时也说明了至少是 S_T ，这意味着提前执行不可能是最优的。

18.12 如何计算基于不付红利股票的原期开始看跌期权的价值，假设执行价格比期权开始时刻的股票价格还要高 10%

解：假如基于不付红利股票的期权的执行价格比股票的价格高 10%，则期权的价值与股票的价格成一定的比例。这和远期开始期权是一样的，如果 t_1 表示期

权开始，t_2 表示期权到期，则这个期权与现在开始，期限为 t_2 —t_1，执行价格是目前股票价格 1.1 倍的期权的价值相等。

18.13 如果某个股票价格遵循几何布朗运动，A（t）遵循什么样的过程？其中 A（t）是零时刻和时刻之间股票价格的算术平均值。

解：假设我们从 0 时刻开始，A（t+△t）与 A（t）有如下关系：

A（t+△t）×A（t+△t）= A（t）×t+ S（t）×△t

其中，S（t）表示在 t 时刻股票的价格，△t 的高阶项被忽略不计，有

A（t+△t）= A（t）［1—△t / t］+ S（t）△t/t

当△t 趋近于 0 时，d A（t）= ［S（t）—A（t）］/ t ×d t

A（t）的过程是一个随机漂移，没有 d z 项，随着时间的推移，S 在下一个微小的时间段的变化对平均值只是一个二阶的影响，如果 S 等于 A，平均值就不漂移，如果 S 大于 A，则平均值就向上漂移，如果 S 小于 A，则平均就向下漂移。

18.14 解释为什么运用标的变量对冲亚式期权要比对冲障碍期权容易得多？

解：一个亚式期权的收益随着时间的推移，会变得越来越稳定，当快要接近到期日时，Delta 趋近于 0，这就使得 Delta 对冲非常容易。但是对于障碍期权，由于 Delta 非连续性，当标的物资产的价格接近于障碍水平时，Delta 对冲就存在问题。

18.15 计算每 1 盎司黄金支付 100 盎司白银的一年期欧式期权的价值。当前黄金和白银的价格分别为＄380 和＄4，无风险利率为年率 10%，每个商品价格的波动率为 10%，每个商品价格的波动率为 20%，两个价格之间的相关性为 0.7，忽略存储成本。

解：期权的价值如下：

$S_2\, e^{-q_2 T}$ N（d_1）—S_1 $e^{-q_1 T}$ N（d_2） 其中，d_1 =［$\ln(S_2/S_1)$ +(q_1—$q_2+\sigma^2/2$)T］/$\sigma\sqrt{T}$， d_2 = d_1 —$\sigma\sqrt{T}$，$\sigma=\sqrt{\sigma_1^2+\sigma_2^2-2\mathrm{P}\sigma_1\sigma_2}$

因为 S_2 = 400，S_1 = 380，q_1 = 0，q_2 =0，T =1，σ =0.1549，d_1 = 0.4086，

d_2 =0.2536，

所以可得期权价格为 400 N（0.4086）—380 N（0.2536）=35.4

18.16 基于某个资产价格的欧式下降敲出期权的价值与基于该资产期货价格的欧式下降敲出期权的价值相等吗？假设该期货合约到期日与期权到期日相同。

解：不相等，因为在期权的有效期内，当期货价格比即期价格高时，存在这样的可能，即期价格达到了障碍水平，而期货价格却并没有达到。

18.17（A）为什么基于某个看涨期权的欧式看涨期权与基于某个看涨期权的欧式看跌期权之间存在看跌期权—看涨期权的平价关系？证明在课文中的给出的公式满足这个关系式。

（B）为什么基于某个看跌期权的欧式与基于某个看跌期权的欧式看跌期权之间存在看跌期权—看涨期权的平价关系？证明在课文中给出的公式满足这个要求。

解：（A）由看涨期权—看跌期权的关系得：$C\,C+$ $X_1\, e^{-rT_1}$ $=P\,C+$ C

其中是CC基于看涨期权的看涨期权价格，PC是基于看涨期权的看跌期权的价格，

M（a，b，p）$=N$ (a)—M $(a$,—b,—p)$=N$ (b)—M (—a ，b，—p）

在附录 11C 中，N（x）=1— N(— x)，由此可得，

$CC-PC=$ $Se^{-qT_2}N$（b_1）—X_2 $e^{-rT_2}N$（b_2）—$X_1e^{-rT_1}$

因为 $C=$ $Se^{-qT_2}N$（b_1）—X_2 $e^{-rT_2}N$（b_2）

所以可得$CC-PC$ $=$ C—$X_1e^{-rT_1}$,与公式一致。

（B）看跌期权—看涨期权的关系如下：$CP+$ $X_1e^{-rT_1}=$ $PP+$ P

其中CP是基于看跌期权的看涨期权的价格，PP是基于看跌期权的看跌期权的价格，

M（a，b，p）$=N$ (a)— M $(a$,—b,—$p)=$ N (b)— M (—a，b，—p）

在附录 11C 中，N（x）= 1—N (—x)，由此可得，

$CP-PP=$ —$Se^{-qT_2}N$ (—b_1) + X_2 $e^{-rT_2}N$ (—b_1)—X$_1$ e^{-rT_1}

因为$P=$ —Se^{-qT_2} N(—b_1) + $X_2e^{-rT_2}N$ (—b_1)，

所以可得，CP —$PP=$ P—$X_1e^{-rT_1}$ ， 与公式一致

18.18 在计算最小值时，我们增加观测资产价格的频率，某个回望看涨期权的价格是增加了，还是减少了？

解： 增加了，因为当我们增加观测资产价格的频率时，我们观察到一个更小的最小值，这将增加回望看涨期权的价值。

18.19 在判断障碍是否达到时，我们增加观测资产价格的频率，某个下降敲出看涨期权的价格是增加了，还是减少了？如果是下降敲入看涨期权，同样问题的答案又如何？

解： 当我们减少观测资产价格的频率时，资产价格达到障碍水平的机会越来越小，并且下降敲出看涨期权的价值上升。同样的原因，下降敲进看涨期权的价值下降。根据 Broadie、 Glasserman 及 Kou 在文中所提到的调整可得，当减少对资产价格的观测频率，变动障碍水平，这样就增加了下降敲出期权的价格，减少了下降敲进期权的价格。

18.20 解释为什么常规欧式看涨期权是下降敲出欧式看涨期权和下降敲入欧式看涨期权之和？对美式看涨期权是否有相同结果呢？

解：当障碍水平达到时，下降敲出期权是没有价值的，但下降敲进期权的价值与常规期权的价值一样。同样，如果障碍水平没有达到，下降敲进期权是没有

价值的，但下降敲出期权的价值和常规期权的价值一样。这就是为什么一个下降敲出看涨期权加上一个下降敲进看涨期权是一个常规期权。对于美式看涨期权，这个结论并不是成立的。

18.21 考虑某个平均价格看涨期权，在 T 时刻支付 MAX（$S_{AVE}—X$，0），其中 S_{AVE} 是从时刻 t_0 到时刻 T 所计算的平均股票价格，X 是执行价格。该股票不支付红利。

（A）解释为什么当平均价格是几何平均时，有一个精确估计该期权价值的公式，但当平均价格是算术平均时没有这种精确公式。

（B）当期权是基于算术平均时有一个特例，可以用解析的方法估值。即在 t_0 和 T 时刻之间的某个时刻 t 进行估值，并且至今为止的平均价格 A 满足：$A(t—t_0)>X(T—t_0)$

证明：在这种情况下期权肯定被执行，并推导出它的价值来，用 X、t_0、、t、T、A、t 时刻执行价格和无风险利率来表示。

解：因为一系列对数正态分布的变量的几何平均值仍为对数正态分布，在风险中性的情况下，某个确定时期的股票价格的几何平均值的概率分布等同于该时期末某个股票价格的概率分布，而当平均价格是算术平均时，一系列对数正态分布的算术平均值分布没有可解析处理的特性。

18.22 某个衍生证券，在六个月内如果 S&P500 指数大于 500，则支付＄100，其它情况下则为零，该期权的价值是多少。假设当前指数水平是 480，无风险利率为年率 8%，该指数的红利收益为 3%，指数的波动率为 20%

解：这是一个现金或无价值看涨期权，其价值为 $Q\,e^{-rT}N(d_2)$=100 $N(d_2)$ $e^{-0.08\times0.5}$，

由 $d_2=[\ln(S_2/S_1)+(q_1—q_2—\sigma^2/2)\,T]/\sigma\sqrt{T}$

$$=[\ln(960/1000)+(0.08—0.03—0.2^2/2)\times0.5]/(0.2\times\sqrt{0.5})=-0.1826$$

可得 $N(d_2)=0.4276$，所以该期权的价值是 41.08

18.24 某个基于白银期货的下降敲出看涨期权，有效期为 3 个月，执行价格为每盎司＄20，障碍为＄18。当前期货价格是＄19，无风险利率是年率 5%，白银期货的波动率是年率 40%。解释该期权如何运作，并计算它的价值。具有同样期限的常规白银期货看涨期权的价值为多少？具有同样期限的基于白银期货的下跌敲入看涨期权的价值为多少？

解： 这是一个执行价格为＄20 的常规期权，当期货价格达到＄18，该期权就作废。

$H=18$，$X=20$，$S=19$，$r=0.05$，$\sigma=0.4$，$q=0.05$，$T=0.25$

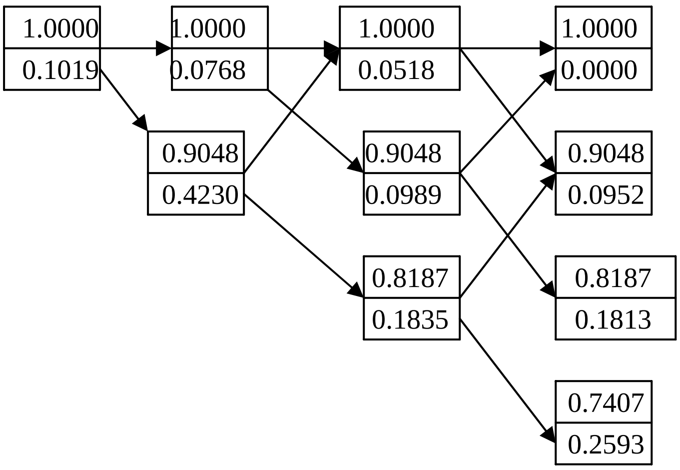
由此可得 $\lambda=0.5$，$y=\ln[18^2/19\times20]/0.4\sqrt{0.25}+0.5\times0.4$

$\sqrt{0.25}$=-0.69714

一个下降敲出看涨期权加上一个下降敲进看涨期权的价值等于一个常规看涨期权的价值。带入公式，当 H＜X，我们可以得到C_{di}= 0.4638 ，由 Black—Scholes 公式可得C=1.0902，因此，C_{do}= 0.6264。

18.25 基于某个股票指数的欧式回望看涨期权有效期限为 9 个月。当前指数水平为 400，无风险利率为年率 6%，该指数的红利收益率是 4%，该指数的波动率为年率 20%。运用第 18.4 节方法为该期权估值，并将你的计算结果与使用解析定价公式计算的结果进行比较。

解： 构造Y（t）=F（t）/S（t），其中F（t）是当前指数价值的最小值，S（t）是在时刻t的指数价值。各系数分别为a=1.0050, p=0.5000, μ =1.1052, d=0.9048 图形如下：



由图形可得，期权的价值为 0.1019 单位的股票指数，也就是：400×0.1019=40.47 美元，使用解析定价公式得到的是 53.38，它比前者高一些，因为前者假设得出最小值时，股票价格只被观测了三次。

18.26 某个基于不付红利股票的欧式平均价格看涨期权，有效期限为 6 个月，初始股票价格为＄30，执行价格为＄30，无风险利率为年率 5%，股票价格波动率为年率 30%。估算该期权的价值。

解： M_1= ［$e^{(r-q)T}$ —1］/ (r—q)T = (e $^{0.05\times0.5}$—1)×30 /（0.05×0.5）=30.378

同样$M_2 = 2e^{[(r-q)+\sigma^2]T}$ /（r—q +σ²）(2 r—2q+σ^2)T^2 +［2 / (r—q) T^2］×｛1/［2（r—q）+σ^2］—$e^{(r-q)T}$ / (r—q +σ^2)｝

=2936.9

由此可得σ=17.41% ，这个基于不付红利股票的欧式平均价格看涨期权可以被当作一个期货期权，其中F=30.378， X=30, r =5%,σ=17.41% , t= 0.5, 由此可得该期权的价值是 1.637。

Ch19

19.1 当：

(A)股票价格分布的两条拖尾曲线都比对数正态分布拖尾曲线窄；

(B)右拖尾曲线比对数正态分布窄，左拖尾曲线比对数正态分布要宽，

我们可以看到什么样的期权定价的偏差。

解：当股票价格分布的两条拖尾曲线都比对数正态分布拖尾曲线窄时，两平期权的隐含波动率比实值和虚值期权高；当右拖尾曲线比对数正态分布窄，左拖尾曲线比对数正态分布要厚时，隐含波动率将是执行价格的增函数。

19.2 当股票价格和波动率正相关时，不确定的波动率会产生什么样的偏差？

解：当股票价格和波动率正相关时，我们会发现有窄的左拖尾和厚的右拖尾。当股票价格上涨时，波动率增加，股票价格会比波动率一定时高。当股票价格下跌时，波动率减小，股票价格会比波动率一定时低。隐含波动率将是执行价格的增函数。

19.3 股票价格运动的跳跃会产生什么样的偏差？这些偏差对 6 个月的期权比 3 个月的期权更严重吗？

解：股票价格运动的跳跃会使股票价格分布的双尾比对数分布的要厚。这意味着我们获得了经典的波动率微笑。三个月期权的波动率微笑比六个月期权的更加显著，因为跳跃的影响会在远期中消失。

19.4 假设某个股票价格运动遵循复合期权模型。Black-Scholes 模型被用来计算不同执行价格和到期时间的看涨期权及看跌期权的隐含波动率。你预计会观察到什么形态的隐含波动率？

解：复合期权模型中，股票价格分布比对数分布的窄的右拖尾和厚的左拖尾。运用 Black-Scholes 时，实值看涨期权和虚值看跌期权会出现较高的隐含波动率，虚值看涨期权和实值看跌期权会出现较低的隐含波动率。

19.5 为什么处于实值状态看涨期权的市场价格(与 Black-Scholes 模型)的偏差通常与处于虚值状态看跌期权的市场价格的偏差相同？

解：偏差相同是由于存在看涨看跌平价。设 p_{bs} 和 c_{bs} 分别为运用 Black-Scholes 时欧式看跌和看涨期权价格，p_{mkt} 和 c_{mkt} 分别为看跌和看涨期权市场价格。

$$\mathrm{c}_{\mathrm{bs}} + Xe^{-rT} = p_{bs} + S$$

$$c_{mkt} + Xe^{-rT} = p_{mkt} + S$$

因此

$$c_{bs} - c_{mkt} = p_{bs} - p_{mkt}$$

这解释了为什么处于实值状态看涨期权通常与处于虚值状态看跌期权的偏差相同。

19.6 某个股票的现价为$20。明天发布消息，预期会使得价格或者提高$5 或者降低$5。在使用 Black-Scholes 模型为该股票期权估值时会出现什么问题？

解：股票价格一个月内的概率分布为非对数的，它由两个对数分布构成(一个对应价格提高$5，一个对应价格降低$5)。Black-Scholes 明显是不合适的，因

为它假设股票价格在未来任何时间都是对数分布的。

19.7 根据经验检验某个股票期权定价模型最大的问题是什么？

解：根据经验检验某个股票期权定价模型存在许多问题，其中包括股票价格和期权价格数据同周期，期权期限内估计股票支付红利，区分市场无效的情况和期权价格模型不正确的情况以及估计股票价格波动率的问题。

19.8 在 t 时刻的股票价格为 S。假设把时间 t 到 T 分为两段，分别长 t_1,t_2。在第一个时间段中，无风险利率为 r_1,波动率为 σ_1，在第二个时间段中，无风险利率为 r_2，波动率为 σ_2。假设为风险中性世界。

(a)使用第十一章的结论，用 $r_1,r_2,\sigma_1,\sigma_2,t_1,t_2$ 和 S 来表示 T 时刻的股票价格分布。

(b)假设 $\bar{r}$ 为在时间 t 到 T 的平均利率，$\bar{V}$ 为时间 t 到 T 的平均方差率。用 $\bar{r}$，$\bar{V}$，$T-t$ 和 S 表示 T 时刻的股票价格分布。

(c)当有 3 个时间段且每个时间段有不同的利率和波动率时，(a), (b)的结果如何？

(d)证明若干无风险利率 r 和波动率 σ 是时间的函数，T 时刻风险中性世界中的股票价格分布可以由等式(11.2)来计算，假设：(1)无风险利率为固定的，等于 r 的平均值；(2)方差率是固定的，等于 σ^2 的平均值

(e)证明第 19.1 节的结论。

解：(a)假设 t_1 时刻股票价格为 S_1，T 时刻股票价格为 S_T，在风险中性的情况下，

$$\ln S_1 - \ln S_0 \sim \phi[(r_1 - \frac{\sigma_1^2}{2})t_1, \sigma_1\sqrt{t_1}]$$

$$\ln S_T - \ln S_1 \sim \phi[(r_2 - \frac{\sigma_2^2}{2})t_2, \sigma_2\sqrt{t_2}]$$

两个独立正态分布之和为正态分布，其均值等于两正态分布均值之和，方差为方差之和

$$\ln S_T - \ln S_0 = (\ln S_T - \ln S_1) + (\ln S_1 - \ln S_0)$$

$$\sim \phi(r_1t_1 + r_2t_2 - \frac{\sigma_1^2 t_1}{2} - \frac{\sigma_2^2 t_2}{2}, \sqrt{\sigma_1^2 t_1 + \sigma_2^2 t_2})$$

(b)

$$r_1t_1 + r_2t_2 = \bar{r}T$$

$$\sigma_1^2 t_1 + \sigma_2^2 t_2 = \bar{V}T$$

$$\ln S_T - \ln S_0 \sim \phi[(\bar{r} - \frac{\bar{V}}{2})T, \sqrt{\bar{V}T}]$$

(c)假设在第 i 个时间段中，σ_i 为波动率，r_i 为无风险利率，在 3 个时间段中由(a)的结论类似可得：

$$\ln S_T - \ln S_0 \sim \phi(r_1t_1 + r_2t_2 + r_3t_3 - \frac{\sigma_1^2 t_1}{2} - \frac{\sigma_2^2 t_2}{2} - \frac{\sigma_3^2 t_3}{2}, \sqrt{\sigma_1^2 t_1 + \sigma_2^2 t_2 + \sigma_3^2 t_3})$$

其中 t_1，t_2，t_3 分别为 3 个时间段的长度(b)所得结论也是正确的。

(d)将 0 至 T 时刻划分为更多的时间段，每个时间段由不同的无风险利率和波动率时，(b)所得结论仍然正确。如果 r 和 σ 是时间的函数，T 时刻股票价格分布与固定利率方差下相同，其中固定利率等于利率平均值，固定方差为方差平均值。

19.9 某公司具有两类股票：一种由投票权，另一种无投票权。两种股票都支付同样的股利，由投票权的股票价格总是比无投票权的股票价格高 10%。如果总权益的波动率是固定的，请说明 Black-Scholes 公式在估计有投票权股票的欧式期权时是否有效？

解： 假定有投票权股票为 N_1，无投票权股票为 N_2，有投票权股票市场价格为 P_1，无投票权股票市场价格为 P_2

$$P_1 = 1.1P_2$$

定义 V 为权益的总市场价值

$$V = P_1N_1 + P_2N_2 = P_2(1.1N_1 + N_2) = P_1(N_1 + \frac{N_2}{1.1})$$

P_1 与 V 的关系用等式表示

$$p_1 = aV$$

a 为定值，V 的波动率为固定的，设为 σ_V，P_1 的波动率也为固定的，等于 σ_V。

这说明 Black-Scholes 公式在估计有投票权股票的欧式期权时是有效的。

19.10 假设某股票价格遵循跳跃扩散模型。用 Black-Scholes 模型计算不同执行价格，不同有效期限的看涨期权与看跌期权的隐含波动率。你预计会观察到什么形态的隐含波动率？

解： 深度实值和虚值期权的隐含波动率高于两平期权。对于期限较短的期权波动率的差异最为显著，并且随着期限增加而逐渐消失。这是因为跳跃对短期期权有很大的影响。

19.11 假设股票价格遵循随机波动率模型，股票价格与波动率正相关。重新做习题 19.10。

解： 当股票价格与波动率正相关时，波动率与课本中的图 c 类似，其显著性也将随着期权期限的增加而减少。

19.12 假设某外币汇率遵循跳跃过程，随机波动率与汇率不相关。对比市场上观察到的期权价格与 Black-Scholes 公式给出的期权定价，你预计会有什么样的偏差？假设用两平期权计算隐含利率。

解： 外汇的概率分布与对数分布相比具有窄的左右拖尾，虚值和实值看涨及看跌期权都比两平期权有更低的隐含波动率。

19.14 期权交易商有时喜欢把深度虚值期权看作基于波动率的期权。你认为他们为什么要这么做？

解： 深度虚值期权价值较低，波动率的较少降低了其价值，这种降低是很小的因为价值不能为负，另一方面，波动率的增加会导致期权价值的很大增长，因此，深度虚值期权具有与波动率的期权相同的分布。

Ch20

20.1 假设某公司发行的 3 年期零息票债券收益率对 3 年期零息票无风险债券收益率的价差为 1%.问 Black-Scholes 公式对该公司出售的 3 年期期权的价值高估为多少?

解: 当考虑违约风险时,正确的价格应该是 Black-Scholes 价格乘以 $e^{-0.01\times 3}=0.9704$,

因此 Black-Scholes 对期权价值高估了 0.0295/0.9704=3.05%.

20.2 “一个远期合约多头的信用风险是由无违约风险看跌期权的空头与有违约风险看涨期权多头组合而成”.请解释这句话.

解: 假设在远期合约到期时才发生违约.在一个无违约的世界中,远期合约由一个欧式看涨期权多头和一个欧式看跌期权空头组合而成,其中,期权的执行价格等于远期合约的交割价格,期权到期日等于远期合约到期日.如果在到期日,无违约合约的价值是正值,看涨期权价值价值为正,看跌期权价值为零,对远期合约违约的影响和对看涨期权违约的影响一样. 如果在到期日,无违约合约的价值是负值,看涨期权价值价值为零,看跌期权价值为正,在这种情况下违约没有影响.同样的, 对远期合约违约的影响和对看涨期权违约的影响一样.这表明合约的价值等于无违约风险看跌期权的空头头寸与有违约风险看涨期权多头头寸.

20.3 为什么一对配对的远期合约的信用暴露与 straddle 相似?

解: 假设远期合约在时间 T 有一个支付,按照我们通常的观点,远期合约多头价值是 S_T-Ke^{-rT},因此远期合约多头的信用暴露是 max(S_T-Ke^{-rT} ,0),也就是说,

它是一个执行价格为 Ke^{-rT} 的资产的看涨期权,类似的,远期合约空头的信用

暴露是 max($Ke^{-rT}-S_T$,0),即它是一个执行价格为 Ke^{-rT} 的资产的看跌期权.

所以总的信用暴露是一个执行价格为 Ke^{-rT} 的跨式期权.

20.4 为什么信用风险对一对配对的利率互换的影响低于对一对配对的货币互换的影响.

解: 一对配对的利率互换的信用风险是 $\left|B_{fixed}-B_{floating}\right|$,当到期日临近时,所有债券的价格趋于平价,然后趋于零.一对配对的货币的信用风险是

$\left|SB_{foreign}-B_{fixed}\right|$,S 是汇率,由于 S 的不确定性,当互换到期日临近时,这个期望值就会趋于增加.

20.5 一家银行有如下资产:$20000 万国库券,$10000 万公司贷款,$5000 万住宅抵押,$15000 万其他银行贷款.其资本充足条件似什么?

解: 经风险调整暴露为 20000×0+10000×1+5000×0.5+15000×0.2=$15500(万)

资本充足条件: 支撑这些资本的第一类资本是 0.04×15500=$620(万)

此外,第一类资本加上第二类资本必须大于 0.08×15500=$1240(万)

20.6 “当一家银行谈判一桩货币互换时,它应确保从具有较低信用风险的公司那里收取较低利率的货币”.请解释这句话.

解: 随着时间的推移,低利率的货币有逐渐变强的趋势.这就意味着,我们收取这种较低利率的货币互换将有一个正值,类似的,我们支付这种利率的货币的互换将有一个负值.这表明,我们收取较低利率的货币的互换的期望暴露大于收取较高利率的货币的互换的期望暴露.因此,我们应确保从具有较低信用风险的公司收取较低利率的货币.

20.8 当存在违约风险时,看涨期权与看跌期权之间的平价关系仍成立吗?请解释你的答案.

解: 当存在违约风险时,看涨期权与看跌期权之间的平价关系不成立.

设 C^* 和 P^* 是无违约风险时一个欧式看涨和看跌期权的价格,其在无红利支付时的执行价格为 X,到期日为 T,股票价格是 S.C 和 P 是存在违约风险时相应的期权价格.本章表明,当我们做独立性假设时, $C=C^*e^{-\left|y(T)-y^*(T)\right|T}$, $P=P^*e^{-\left|y(T)-y^*(T)\right|T}$.有如下关系式: $C^*+Xe^{-y^*(T)T}=P^*+S$ 在无违约世界中这个公式变为 $C+Xe^{-y(T)T}=P+Se^{-\left|y(T)-y^*(T)\right|T}$,当存在违约风险时,这个公式就不同于正规的平价公式,而且,他们的关系依赖于独立性假设,不能象第 7 章我们推导无违约风险世界平价公式那样,用同样简单的无套利原理来推.

20.9 一个公司有一笔出售$100 获得 DM150 的一年期远期合约.开始时合约无价值,换句话说,远期汇率为 1.50.美元的一年期无风险利率为每年 5%.对方能够借到的一年期美元的利率为每年 6%.汇率的波动率为每年 12%.该合约的违约成本现值是多少?假设违约只在合约到期时才知道.

解: 违约成本是 uv, u 是预期损失比例,v 是预期暴露的现值,u=1-$e^{-(0.06-0.05)\times 1}$=0.009950. 关于远期价格的看涨期权公式为

[FN(d_1) – XN (d_2)]e^{-rT},这里, $d_1=\dfrac{\log(F/X)+\sigma^2T/2}{\sigma\sqrt{T}}$, $d_2=d_1-\sigma\sqrt{T}$ 在这种情况下,F=0.6667,X=0.6667, σ =0.12,T=1,r=0.05 ,所以 d_1 =0.06, d_2 = -0.06 期权的价值为 0.0303.那么 v=150×0.0303=4.545 所以违约成本为 4.545×0.009950=0.04522

20.10 假设在习题 20.9 中,六个月期远期汇率也是 1.50 并且六个月期美元无风险利率为每年 5%.进一步假设对方能够借到的六个月期美元利率是每年 5.5%.假设违约发生的时刻既可能是在六个月后那个时刻也可能是在一年后合约到期时,问该合约的违约成本现值是多少?

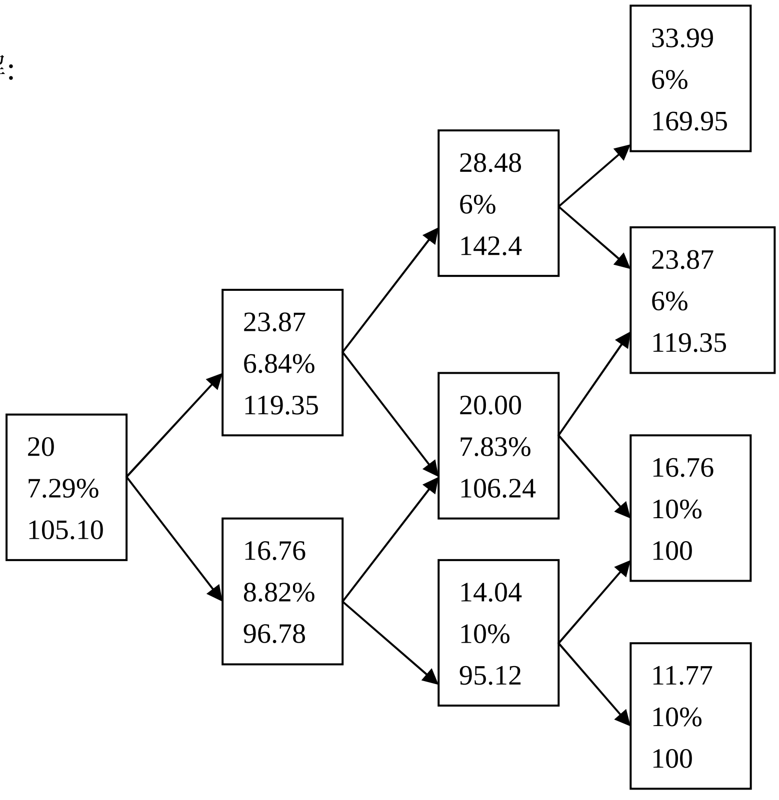
解: 在这种情况下,违约成本为$u_1v_1+u_2v_2$ $u_1=1-e^{-(0.055-0.05)\times 0.5}=0.002497$

$u_2=e^{-(0.055-0.05)\times 0.5}-e^{-(0.06-0.05)\times 1}=0.007453$ 由上题知 v_2 =4.545,类似的

v_1=3.300 违约成本为 0.002497×3.300+0.007453×4.545=0.04211

20.11 考虑 18 个月期贴现债券,面值$100,在有效期限内随时可以转换成 5 股公司股票.设当前股票价格为$20,股票不付红利,按连续复利计算的所有期限的无风险利率为每年 6%,股价波动率为每年 25%.设该公司发行的所有期限的不可转换债券的收益率为每年 10%.该债券随时可以$110 赎回.使用三步长树图方法计算该债券的价值.可转换期权的价值是多少?

解:



可转换债券的树图

解: 树图的参数为:r=0.06 Δt =0.5 $\sigma=0.25$ $u=e^{\sigma\sqrt{\Delta t}}$ =1.1934 d=0.8380

P= $\dfrac{e^{r\Delta t}-d}{u-d}$ =0.5416 1-p=0.4584 ,在最后结点处,可转换债券的价值

为:max(100,5 S_T), S_T 为股票价格.当我们从树图倒推时,我们检验转换是否最优,

债券是否应赎回,我们还要计算合适的贴现率.在 28.48 处倒推的债券价值为 $(0.5416\times169.95+0.4584\times119.35)$ $e^{-0.06\times0.5}$ =142.4,在该点债券持有者不关心债券是否转换成股票,因为转换的价值都是 142.4.28.48 点恰当的贴现率为 6%,因为如果达到这点,在某一阶段时转换必发生.在 14.04 这一点,正确贴现率为 10%,因为如果达到该点,可转换债券肯定不会被转换.在 20.00 点正确贴现率为 :0.5416 × 6%+0.4584 × 10%=7.83% .在该点可转换债券价值为 $(0.5416\times119.35+0.4584\times100)$ $e^{-0.0783\times0.5}$ =106.24 在 23.87 这一点用于倒推计算的贴现率为:0.5416×6%+0.4584×7.83%=6.84%,由倒推计算出这一点可转换债券价值为 $(142.4\times0.5416+106.24\times0.4584)$ $e^{-0.0684\times0.5}$ =124.86,在此点赎回债券最优.为计算在始点 20 的贴现率,假设 23.87 这一点的贴现率为 6%,以反应在该点转换,这一点的贴现率为 0.5416×6%+0.4584×8.82%=7.29% ,在该点衍生证券价值为 $(0.5416\times119.35+0.4584\times96.78)$ $e^{-0.0729\times0.5}$ =105.10 ,若债券无转换选择权,其价值为 $100e^{-1.5\times0.1}=86.07$,因此可转换期权的价值为 105.10-86.07=19.03

20.15 假设某一金融机构与对手 X 进行了基于英镑利率的互换,同时与对手 Y 进行了完全抵消的互换交易.下面的描述哪些是对的,哪些是错的?

(a) 违约成本的总现值是与 X 公司合约违约成本总现值加上与 Y 公司合约违约成本总现值.

(b) 在一年之内两个合约的预期暴露等于与 X 公司合约的预期暴露加上与 Y 公司合约的预期暴露.

(c) 一年内两个合约的暴露的 95%置信上限等于一年内与 X 公司合约暴露的 95%置信上限,加上一年内与 Y 公司合约暴露的 95%置信上限.

解: (a)和(b)是正确的,(c)是错误的. v_X 和 v_Y 是 X 和 Y 的暴露,预期暴露 v_X+v_Y 等于 X 的预期暴露加上 Y 的预期暴露,但这对于暴露的 95%置信上限是不正确的.

20.17 "当可进行净额化处理时,与某一特定对手进行的新的衍生证券交易对总的预期违约成本产生的附加效应可能是负的".请解释这句话.

解: 某一个新交易易于抵消对手存在的交易,那么当可进行净额化处理时,附加效应可能是减少的信用风险.