复习提要 I（第一章）

说明：这只是我本人总结的一些东西，绝非“官方资料”，不具有任何权威性，仅供参考。另外再强调一下：复习一定要以理解概念、掌握基本方法为主，做题只是辅助手段。千万不要“陷入题海不能自拔”。

1 基本概念

1.1 序列的极限

理解并熟练掌握序列极限的定义（$\varepsilon - N$语言）和基本性质：有界性、保序性、和四则运算可交换（除法要加条件）. 两个重要的极限和相关计算一定要熟练。

1.2 函数的极限

定义和基本性质参照序列极限。建议大家仿照序列的极限那部分内容，把函数极限的基本性质自己证一遍。

1.3 连续函数及其性质

理解定义和基本性质（连续函数与极限运算可交换）。掌握间断点的分类和相应的例子。掌握初等函数的连续性的证明。把P59 第六题做清楚，想想都用到了那些结论？会应用**闭区间**上连续函数的性质。最好能弄明白那几条性质的证明（虽然是小字内容，其实并不复杂）。

2 基本方法

2.1 证明极限存在

证明极限存在的最有效的方法是Cauchy给出的，这个要到下学期才能学到。我们已经学过的常用方法有以下三种：**直接用$\varepsilon - N(\delta)$语言证明极限存在，用夹逼定理和用实数的确界原理来证明**。由于后两者比较简单，这里重点提一下用$\varepsilon - N(\delta)$语言证明极限存在。这是最基本的方法，一定要熟练掌

握。要点如下：（以序列极限为例）

1、任取一个充分小的ε（想想为什么“充分小”的就行而不必考虑一般的），目标是要找到一个N，使得$n > N$时有$|a_n - a| < \varepsilon$

2、将$|a_n - a|$**适当放大**为一个与n有关的更加简单的表达式f(n)。这里的**适当**是指不能放得太大了。比如有的同学在证明

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt[3]{n^2}\sin n}{n+1} = 0$$

时把$|\frac{\sqrt[3]{n^2}\sin n}{n+1}|$放大为$\frac{n}{n+1}$，当n充分大时，$\frac{n}{n+1}$会越来越靠近1，怎么可能小于那个$\varepsilon$呢？

3、从$f(n) < \varepsilon$中解出$n >$某个只和ε、a有关的表达式$\varphi(\varepsilon)$

4、开始正式写：$\forall \varepsilon > 0$，令$N = [\varphi(\varepsilon)] + 1$，则当$n > N$时

$$|a_n - a| < f(n) < \varepsilon$$

所以

$$\lim_{n\to\infty} a_n = a$$

要注意的是：如果$|a_n - a|$本身就不复杂，则放缩那一步就是不必要的。

2.2 如何说明极限不存在？

这个问题很多同学都问过我。的确，我们的教材在这方面讲得不多，目的就是为了降低课程难度，减轻大家的负担。但我认为**不把这个问题弄明白了，就不能算是真正理解了极限的含义。**

不过教材里面还是告诉了我们正确的做法，只是很多同学没有注意到，请看P36定理5和P47定理5（以及定理证明后面的段落）！

2.3 利用连续函数的性质解决问题

关于这一部分，没什么好说的，看看书上的例题和习题，体会体会那几个定理的用法即可。

3　练习题

下面这些题目都是和基本概念相关的，大家可以试着做做：

1、设$a > 1$是一个常数，k是一个正整数。证明

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n^k}{a^n} = 0$$

2、回忆无限小数的定义，试用序列极限的方法说明其定义的合理性，并证明循环小数一定是有理数。

3、设$f(x)$在x_0点的临域内无界，问是否有

$$\lim_{x\to x_0} |f(x)| = +\infty$$

4、单调函数有第二类间断点吗？如果有，请举出例子；如果没有，请给出严格证明。

5、举出例子：1）开区间上的无界连续函数；2）开区间上的有界连续函数不能取到上确界。

6、设$f(x)$是$[0, +\infty)$上的连续函数，且$\lim_{x\to+\infty} f(x) = a \neq \pm\infty$，试证明$f(x)$在$[0, +\infty)$上有界。

7、证明方程$\tan x = e^x$有无穷多个根。

石亚龙

2006年10月26日