北京大学信息学院期末考试答案

2013 -2014　学年第二学期

一 (本题共 24 分) 解微分方程

1. 求方程 $ydx+(x^2-4x)dy=0$ 的通解.
   解: 答案为 $(x-4)y^4=Cx$. 用分离变量:
   $$\frac{dx}{x^2-4x}+\frac{dy}{y}=0\Longrightarrow \frac{1}{4}\ln\left|\frac{x-4}{x}\right|+\ln|y|=C.$$
2. 求方程 $xy'+y=xe^x$ 在 $x>0$ 上满足初始条件 $y(1)=1$ 的特解.
   解: 答案为 $y=\frac{x-1}{x}e^x+\frac{1}{x}$. 这是一元线性方程 $y'+\frac{y}{x}=e^x$, $e^{\int\frac{1}{x}dx}=x$, 通解为
   $$y=(\int e^x xdx+C)\frac{1}{x}=\frac{x-1}{x}e^x+\frac{C}{x}.$$
3. 求方程 $y'=\frac{x}{y}+\frac{y}{x}$ 在 $x>0$ 上满足初始条件 $y(1)=2$ 的特解. 解: 答案 $y^2=2x^2(\ln x+2)$. 设 $u=\frac{y}{x}$, $y'=x\frac{du}{dx}+u$, 代入得方程
   $$x\frac{du}{dx}+u=\frac{1}{u}+u\Longrightarrow udu=\frac{dx}{x}\Longrightarrow\frac{1}{2}u^2=\ln|x|+C.$$
4. 求方程 $xy''+3y'=0$ 的通解. 解: 答案 $y=C_1+\frac{C_2}{x^2}$. 令 $z=y'$, 得 $xz'+3z=0$, $zx^3=C_2$, $y'=z=\frac{C_2}{x^3}$.

二 (本题共 25 分)判别级数或广义积分的敛散性(要求说明理由).

1. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2}{n^n}$.　　收敛 $\sqrt[n]{\frac{2}{n^n}}=\frac{\sqrt[n]{2}}{n}\to 0$.
2. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{\sqrt{n}}{n+1}$.　　收敛. $\frac{\sqrt{n}}{n+1}$ 单调递减趋向于 0, 由莱布尼兹判别法得.
3. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^n}{n!}$.　　发散. 通项 $\frac{n^n}{n!}>1$.
4. $\displaystyle\int_0^2\frac{dx}{\sqrt[3]{x}+2\sqrt[4]{x}+x^2}$. 收敛 $\frac{dx}{\sqrt[3]{x}+2\sqrt[4]{x}+x^2}\sim\frac{1}{2\sqrt[4]{x}}$.
5. $\displaystyle\int_0^{+\infty}\sin x^2dx$. 收敛, $\int_0^{+\infty}\sin x^2dx=\int_0^{+\infty}\frac{\sin t}{2\sqrt{t}}dt$.

三 (本题 15 分) 设 $f(x)=x-\pi, 0<x\le\pi$, 求 $f(x)$ 的以 2π 为周期的正弦级数, 并写出和函数, 判断该级数在 $[0,\pi]$ 上的一致收敛性.

解: $f(x)$ 延拓为 $[-\pi,\pi]$ 上的奇函数, 傅里叶系数
$$b_n=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}(x-\pi)\sin nxdx=-\frac{2}{n}.$$

$$f(x) \sim \sum_{n=1}^{\infty} -\frac{2}{n}\sin nx,\ S(x) = \begin{cases} x-\pi, & 0 < x \le \pi \\ 0, & x = 0 \end{cases}.$$

因为和函数在 $[0,\pi]$ 上不连续, 所以该级数在 $[0,\pi]$ 上不是一致收敛.

四 (本题 15 分)考虑幂级数 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{x^{3n}}{(3n)!}$.

1. 求该幂级数的收敛半径.
   解: 设 $a_n = \frac{1}{(3n)!}$, $\frac{a_{n+1}}{a_n} \to 0$, $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{t^n}{(3n)!}$ 的收敛半径是 $+\infty$, 因此原级数的收敛半径也是 $+\infty$.
2. 证明和函数 $S(x)$ 在收敛区间上满足 $S''(x)+S'(x)+S(x)=e^x$.
   解:
   $$S'(x) = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^{3n-1}}{(3n-1)!},\qquad S''(x) = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^{3n-2}}{(3n-2)!}.$$
3. 求和函数 $S(x)$.
   解: 方程 $y''(x)+y'(x)+y(x)=0$ 的通解为 $y = e^{-\frac{1}{2}x}(C_1\cos\frac{\sqrt{3}}{2}x + C_2\sin\frac{\sqrt{3}}{2}x)$, $y''(x)+y'(x)+y(x)=e^x$ 有特解 $\frac{1}{3}e^x$, 因此
   $$S(x) = e^{-\frac{1}{2}x}(C_1\cos\frac{\sqrt{3}}{2}x + C_2\sin\frac{\sqrt{3}}{2}x) + \frac{1}{3}e^x.$$
   由于 $S(0)=1, S'(0)=0$, 得 $S(x) = \frac{2}{3}e^{-\frac{1}{2}x}\cos\frac{\sqrt{3}}{2}x + \frac{1}{3}e^x$

五 (本题 12 分)考虑含参变量的广义积分 $f(y) = \int_0^{+\infty} e^{-x^y}dx$, $y>0$.

1. 对任意 $c>0$, 证明含参变量的广义积分在 $[c,+\infty)$ 上一致收敛性.
   证明: 当 $y\in[c,+\infty)$ 时,
   $$e^{-x^y} \le g(x) = \begin{cases} 1, & 0\le x\le 1 \\ e^{-x^c}, & x>1 \end{cases}$$
   而 $\int_0^{+\infty} g(x)dx$ 收敛.
2. 求极限 $\lim\limits_{y\to+\infty} f(y)$.
   解: $f(y) = \int_0^{+\infty} e^{-x^y}dx = \int_0^{+\infty} e^{-t}\frac{1}{y}t^{\frac{1}{y}-1}dt = \frac{1}{y}\Gamma(\frac{1}{y}) = \Gamma(1+\frac{1}{y})$. 因此 $\lim\limits_{y\to+\infty} f(y) = \lim\limits_{y\to+\infty}\Gamma(1+\frac{1}{y}) = \Gamma(1) = 1$.

六 (本题 9 分)设 $\{a_n\}$ 是递增整正数列，证明级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(1-\dfrac{a_n}{a_{n+1}}\right)$ 收敛的充要条件是序列 $\{a_n\}$ 有界.

证明: 若序列 $\{a_n\}$ 有界，则序列 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = A$ 存在, $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(a_{n+1}-a_n)$ 收敛. 且 $A>0$.

$$\lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{a_n}{a_{n+1}}\right)\Big/(a_{n+1}-a_n) = \lim_{n\to\infty}\frac{1}{a_{n+1}} = \frac{1}{A}.$$

由比值判别法，原级数收敛.

若序列 $\{a_n\}$ 无界, 对任意 n, 存在 $N > n$, 使得 $\frac{a_{n+1}}{a_{N+1}} < \frac{1}{2}$, 从而

$$\sum_{k=n+1}^{N} \left(1 - \frac{a_n}{a_{n+1}}\right) \geq \frac{a_{N+1} - a_{n+1}}{a_{N+1}} > \frac{1}{2}.$$

由 Cauchy 收敛准则, 原级数发散.