多元函数1

- n 元有序实数组构成的集合

$$\mathbb{R}^n = \{(x_1, x_2, \cdots, x_n) | x_i \in \mathbb{R}, i = 1, 2, \cdots, n\}.$$

则 $\mathbb{R}$ 等同于有坐标的直线(数轴)上的全体点, $\mathbb{R}^2$ 等同于有坐标的平面上的全体点, $\mathbb{R}^3$ 等同于有坐标的三维空间中的全体点.

- $\mathbb{R}^n$ 上可定义加法和数乘.

$$(x_1, x_2, \cdots, x_n) + (y_1, y_2, \cdots, y_n) = (x_1 + y_1, x_2 + y_2, \cdots, x_n + y_n)$$

$$\lambda(x_1, x_2, \cdots, x_n) = (\lambda x_1, \lambda x_2, \cdots, \lambda x_n).$$

多元函数1

- n 元有序实数组构成的集合

$$\mathbb{R}^n = \{(x_1, x_2, \cdots, x_n) | x_i \in \mathbb{R}, i = 1, 2, \cdots, n\}.$$

则 $\mathbb{R}$ 等同于有坐标的直线(数轴)上的全体点, $\mathbb{R}^2$ 等同于有坐标的平面上的全体点, $\mathbb{R}^3$ 等同于有坐标的三维空间中的全体点.

- $\mathbb{R}^n$ 上可定义加法和数乘.

$$(x_1, x_2, \cdots, x_n) + (y_1, y_2, \cdots, y_n) = (x_1 + y_1, x_2 + y_2, \cdots, x_n + y_n)$$

$$\lambda(x_1, x_2, \cdots, x_n) = (\lambda x_1, \lambda x_2, \cdots, \lambda x_n).$$

多元函数2

- 函数的定义：集合 D 到 $\mathbb{R}$ 的映射

$$f : D \to \mathbb{R}$$
$$x \mapsto y = f(x)$$

  称为 D 上的函数. x 为自变量, D 称为定义域, y 为因变量, $f(D) = \{f(x) : x \in D\}$ 称为 f 的值域.

- 一元函数：若 $D \subset \mathbb{R}$，则称 f 是一元函数；若 $D \subset \mathbb{R}^n$，则称 f 是 n 元函数.

- 函数定义域的确定：如果函数 f 由数学表达式给出，它的定义域一般规定为使表达式有意义的 x 的全体. 如果函数是从实际问题中提出，则定义域由实际问题决定.

多元函数2

- 函数的定义：集合 D 到 $\mathbb{R}$ 的映射

$$f : D \to \mathbb{R}$$
$$x \mapsto y = f(x)$$

称为 D 上的函数. x 为自变量, D 称为定义域, y 为因变量, $f(D) = \{f(x) : x \in D\}$ 称为 f 的值域.

- 一元函数：若 $D \subset \mathbb{R}$，则称 f 是一元函数；若 $D \subset \mathbb{R}^n$，则称 f 是 n 元函数.

- 函数定义域的确定：如果函数 f 由数学表达式给出，它的定义域一般规定为使表达式有意义的 x 的全体. 如果函数是从实际问题中提出，则定义域由实际问题决定.

多元函数2

- 函数的定义：集合 D 到 $\mathbb{R}$ 的映射

$$f : D \to \mathbb{R}$$
$$x \mapsto y = f(x)$$

称为 D 上的函数. x 为自变量, D 称为定义域, y 为因变量, $f(D) = \{f(x) : x \in D\}$ 称为 f 的值域.

- 一元函数：若 $D \subset \mathbb{R}$，则称 f 是一元函数；若 $D \subset \mathbb{R}^n$，则称 f 是 n 元函数.
- 函数定义域的确定：如果函数 f 由数学表达式给出，它的定义域一般规定为使表达式有意义的 x 的全体. 如果函数是从实际问题中提出，则定义域由实际问题决定.

- 若 n 元函数 f 的值域 $f(D)$ 包含在一元函数 g 的定义域内，则可以定义 f 与 g 的复合 $g \circ f$ (就是映射的复合).
- 例：二元函数 $z = f(x, y)$，三元函数 $u = f(x, y, z)$.
- 二元函数的图形：$\{(x, y, z) | z = f(x, y), (x, y) \in D\}$，一般为一曲面.
- 例：$z = ax + by + c$，$(x, y) \in \mathbb{R}^2$ 的图形是一平面.
- 例：$z = \sqrt{r^2 - x^2 - y^2}$，它的定义域为 $D = \{(x, y) | x^2 + y^2 \leq r^2\}$ 的图形是上半球面.

多元函数3

- 若 n 元函数 f 的值域 $f(D)$ 包含在一元函数 g 的定义域内，则可以定义 f 与 g 的复合 $g \circ f$ (就是映射的复合).
- 例：二元函数 $z = f(x, y)$，三元函数 $u = f(x, y, z)$.
- 二元函数的图形：$\{(x, y, z) | z = f(x, y), (x, y) \in D\}$，一般为一曲面.
- 例：$z = ax + by + c$，$(x, y) \in \mathbb{R}^2$ 的图形是一平面.
- 例：$z = \sqrt{r^2 - x^2 - y^2}$，它的定义域为 $D = \{(x, y) | x^2 + y^2 \leq r^2\}$ 的图形是上半球面.

多元函数3

- 若 n 元函数 f 的值域 $f(D)$ 包含在一元函数 g 的定义域内，则可以定义 f 与 g 的复合 $g \circ f$ (就是映射的复合).
- 例：二元函数 $z = f(x, y)$，三元函数 $u = f(x, y, z)$.
- 二元函数的图形：$\{(x, y, z) | z = f(x, y), (x, y) \in D\}$，一般为一曲面.
- 例：$z = ax + by + c$，$(x, y) \in \mathbb{R}^2$ 的图形是一平面.
- 例：$z = \sqrt{r^2 - x^2 - y^2}$，它的定义域为 $D = \{(x, y) | x^2 + y^2 \leq r^2\}$ 的图形是上半球面.

多元函数3

- 若 n 元函数 f 的值域 $f(D)$ 包含在一元函数 g 的定义域内，则可以定义 f 与 g 的复合 $g \circ f$ (就是映射的复合).
- 例：二元函数 $z = f(x, y)$，三元函数 $u = f(x, y, z)$.
- 二元函数的图形：$\{(x, y, z) | z = f(x, y), (x, y) \in D\}$，一般为一曲面.
- 例：$z = ax + by + c$, $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ 的图形是一平面.
- 例：$z = \sqrt{r^2 - x^2 - y^2}$，它的定义域为 $D = \{(x, y) | x^2 + y^2 \leq r^2\}$ 的图形是上半球面.

多元向量值函数1

- 多元向量值函数：集合 D 到 $\mathbb{R}^n$ 的映射

$$
\begin{aligned}
f : D &\to \mathbb{R}^n \\
x &\mapsto f(x)
\end{aligned}
$$

称为 D 上的向量值函数. D 称为定义域. $f(D) = \{f(x) : x \in D\}$ 称为 f 的值域.

- f 是集合 D 到 $\mathbb{R}^n$ 的映射. 若 $D \subset \mathbb{R}$，则称 f 是一元向量值函数；若 $D \subset \mathbb{R}^n$，则称 f 是 n 元向量值函数.
- 若 f 是 D 到 $\mathbb{R}^n$ 的映射, 值域 $f(D) \subset E$. g 是 E 上的函数, 则复合 $g \circ f$ 是 D 上的函数.

多元向量值函数1

- 多元向量值函数：集合 D 到 $\mathbb{R}^n$ 的映射

$$f : D \to \mathbb{R}^n$$
$$x \mapsto f(x)$$

称为 D 上的向量值函数. D 称为定义域. $f(D) = \{f(x) : x \in D\}$ 称为 f 的值域.

- f 是集合 D 到 $\mathbb{R}^n$ 的映射. 若 $D \subset \mathbb{R}$，则称 f 是一元向量值函数；若 $D \subset \mathbb{R}^n$，则称 f 是 n 元向量值函数.
- 若 f 是 D 到 $\mathbb{R}^n$ 的映射, 值域 $f(D) \subset E$. g 是 E 上的函数, 则复合 $g \circ f$ 是 D 上的函数.

多元向量值函数1

- 多元向量值函数：集合 D 到 $\mathbb{R}^n$ 的映射

$$
\begin{aligned}
f: D &\to \mathbb{R}^n \\
x &\mapsto f(x)
\end{aligned}
$$

  称为 D 上的向量值函数. D 称为定义域. $f(D)=\{f(x): x\in D\}$ 称为 f 的值域.

- f 是集合 D 到 $\mathbb{R}^n$ 的映射. 若 $D\subset\mathbb{R}$，则称 f 是一元向量值函数; 若 $D\subset\mathbb{R}^n$，则称 f 是 n 元向量值函数.

- 若 f 是 D 到 $\mathbb{R}^n$ 的映射, 值域 $f(D)\subset E$. g 是 E 上的函数, 则复合 $g\circ f$ 是 D 上的函数.

一元向量值函数

- 一元向量值函数的极限：设 $f(t)=(x_1(t),x_2(t),\cdots,x_n(t))$，$a=(a_1,a_2,\cdots,a_n)$，若对任意的 $\epsilon>0$，存在 δ，使得当 $0<|t-t_0|<\delta$ 时，有
$$\sqrt{(x_1(t)-a_1)^2+(x_2(t)-a_2)^2+\cdots+(x_n(t)-a_n)^2}<\epsilon,$$
则称 $t\to t_0$ 时，一元向量值函数 $f(t)$ 的极限为 a，记为 $\lim\limits_{t\to t_0}f(t)=a$.
- $\lim\limits_{t\to t_0}f(t)=a\Leftrightarrow\lim\limits_{t\to t_0}x_k(t)=a_k$，$k=1,2,\cdots,n$.
- 向量值函数的导数：
$$f'(t)=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{f(t+\Delta t)-f(t)}{\Delta t}=(x_1'(t),x_2'(t),\cdots,x_n'(t)).$$

一元向量值函数

- 一元向量值函数的极限：设 $f(t) = (x_1(t), x_2(t), \cdots, x_n(t))$，$a = (a_1, a_2, \cdots, a_n)$，若对任意的 $\epsilon > 0$，存在 δ，使得当 $0 < |t - t_0| < \delta$ 时，有

$$\sqrt{(x_1(t) - a_1)^2 + (x_2(t) - a_2)^2 + \cdots + (x_n(t) - a_n)^2} < \epsilon,$$

  则称 $t \to t_0$ 时，一元向量值函数 $f(t)$ 的极限为 a，记为 $\lim\limits_{t \to t_0} f(t) = a$.

- $\lim\limits_{t \to t_0} f(t) = a \Leftrightarrow \lim\limits_{t \to t_0} x_k(t) = a_k$，$k = 1, 2, \cdots, n$.
- 向量值函数的导数：

$$f'(t) = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{f(t + \Delta t) - f(t)}{\Delta t} = (x_1'(t), x_2'(t), \cdots, x_n'(t)).$$

一元向量值函数

- 一元向量值函数的极限：设 $f(t) = (x_1(t), x_2(t), \cdots, x_n(t))$，$a = (a_1, a_2, \cdots, a_n)$，若对任意的 $\epsilon > 0$，存在 δ，使得当 $0 < |t - t_0| < \delta$ 时，有

$$\sqrt{(x_1(t) - a_1)^2 + (x_2(t) - a_2)^2 + \cdots + (x_n(t) - a_n)^2} < \epsilon,$$

则称 $t \to t_0$ 时，一元向量值函数 $f(t)$ 的极限为 a，记为 $\lim\limits_{t \to t_0} f(t) = a$.

- $\lim\limits_{t \to t_0} f(t) = a \Leftrightarrow \lim\limits_{t \to t_0} x_k(t) = a_k$，$k = 1, 2, \cdots, n$.
- 向量值函数的导数：

$$f'(t) = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{f(t + \Delta t) - f(t)}{\Delta t} = (x_1'(t), x_2'(t), \cdots, x_n'(t)).$$

多元向量值函数2

- 例：平面曲线参数方程 $\begin{cases} x = \phi(t) \\ y = \psi(t) \end{cases}$, $t \in [\alpha, \beta]$ 是一元向量值函数

$$\vec{r} : [\alpha, \beta] \to \mathbb{R}^2, t \mapsto \vec{r}(t) = (\phi(t), \psi(t)).$$

- 例：平面坐标变换 $\begin{cases} u = x\cos\theta - y\sin\theta \\ v = x\sin\theta + y\cos\theta \end{cases}$, $(u, v) \in \mathbb{R}^2$, 是二元向量值函数 $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2, (x, y) \mapsto (u, v)$ 是二元向量值函数.
- 例：$\begin{cases} u = \phi(t)\cos\theta - \psi(t)\sin\theta \\ v = \phi(t)\sin\theta + \psi(t)\cos\theta \end{cases}$, $t \in [\alpha, \beta]$ 是上面两个映射的复合.

多元向量值函数2

- 例：平面曲线参数方程 $\begin{cases} x = \phi(t) \\ y = \psi(t) \end{cases}$, $t \in [\alpha, \beta]$ 是一元向量值函数

$$\vec{r} : [\alpha, \beta] \to \mathbb{R}^2, t \mapsto \vec{r}(t) = (\phi(t), \psi(t)).$$

- 例：平面坐标变换 $\begin{cases} u = x\cos\theta - y\sin\theta \\ v = x\sin\theta + y\cos\theta \end{cases}$, $(u, v) \in \mathbb{R}^2$, 是二元向量值函数 $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2, (x, y) \mapsto (u, v)$ 是二元向量值函数.
- 例：$\begin{cases} u = \phi(t)\cos\theta - \psi(t)\sin\theta \\ v = \phi(t)\sin\theta + \psi(t)\cos\theta \end{cases}$, $t \in [\alpha, \beta]$ 是上面两个映射的复合.

- 例：平面曲线参数方程 $\begin{cases} x = \phi(t) \\ y = \psi(t) \end{cases}$, $t \in [\alpha, \beta]$ 是一元向量值函数

$$\vec{r} : [\alpha, \beta] \to \mathbb{R}^2, t \mapsto \vec{r}(t) = (\phi(t), \psi(t)).$$

- 例：平面坐标变换 $\begin{cases} u = x\cos\theta - y\sin\theta \\ v = x\sin\theta + y\cos\theta \end{cases}$, $(u, v) \in \mathbb{R}^2$, 是二元向量值函数 $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2, (x, y) \mapsto (u, v)$ 是二元向量值函数.
- 例：$\begin{cases} u = \phi(t)\cos\theta - \psi(t)\sin\theta \\ v = \phi(t)\sin\theta + \psi(t)\cos\theta \end{cases}$, $t \in [\alpha, \beta]$ 是上面两个映射的复合.

- 例：曲面参数方程 $\begin{cases} x = x(u,v) \\ y = y(u,v), \ (u,v) \in D \in \mathbb{R}^2 \\ z = z(u,v) \end{cases}$，是二元向量值函数

$$\vec{r}: D \to \mathbb{R}^2, (u,v) \to \vec{r}(u,v) = (x(u,v), y(u,v), z(u,v)).$$

- 一般向量值函数：$D \subset \mathbb{R}^m$，$f: D \to \mathbb{R}^n$，$(x_1, x_2, \cdots, x_m) \mapsto (y_1, y_2, \cdots, y_n)$，其中

$$\begin{cases} y_1 = f_1(x_1, x_2, \cdots, x_m) \\ y_2 = f_2(x_1, x_2, \cdots, x_m) \\ \cdots \\ y_n = f_n(x_1, x_2, \cdots, x_m) \end{cases}.$$

- $\mathbb{R}^n$ 中的拓扑：$P(x_1, x_2, \cdots, x_n)$ 到 $P_0(x_1^0, x_2^0, \cdots, x_n^0)$ 的距离定义为

$$d(P, P_0) = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} (x_i - x_i^0)^2}.$$

- 例：$n = 1$ 时，$d(x, x_0) = |x - x_0|$.
- 例：$n = 3$ 时，$P(x, y, z)$ 到 $P_0(x_0, y_0, z_0)$ 的距离为

$$d(P, P_0) = \sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + (z - z_0)^2}.$$

- $d(P, Q) \geq 0$, $d(P, Q) = 0 \iff P = Q$.
- $d(P, Q) = d(Q, P)$.

$\mathbb{R}^n$ 中的距离1

- $\mathbb{R}^n$ 中的拓扑：$P(x_1, x_2, \cdots, x_n)$ 到 $P_0(x_1^0, x_2^0, \cdots, x_n^0)$ 的距离定义为

$$d(P, P_0) = \sqrt{\sum_{i=1}^{n}(x_i - x_i^0)^2}.$$

- 例：$n = 1$ 时，$d(x, x_0) = |x - x_0|$.
- 例：$n = 3$ 时，$P(x, y, z)$ 到 $P_0(x_0, y_0, z_0)$ 的距离为

$$d(P, P_0) = \sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + (z - z_0)^2}.$$

- $d(P, Q) \geq 0$, $d(P, Q) = 0 \iff P = Q$.
- $d(P, Q) = d(Q, P)$.

- $\mathbb{R}^n$ 中的拓扑：$P(x_1, x_2, \cdots, x_n)$ 到 $P_0(x_1^0, x_2^0, \cdots, x_n^0)$ 的距离定义为

$$d(P, P_0) = \sqrt{\sum_{i=1}^{n}(x_i - x_i^0)^2}.$$

- 例：$n = 1$ 时，$d(x, x_0) = |x - x_0|$.
- 例：$n = 3$ 时，$P(x, y, z)$ 到 $P_0(x_0, y_0, z_0)$ 的距离为

$$d(P, P_0) = \sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + (z - z_0)^2}.$$

- $d(P, Q) \geq 0$, $d(P, Q) = 0 \iff P = Q$.
- $d(P, Q) = d(Q, P)$.

- $d(P,Q) \le d(P,R) + d(R,Q)$.

  证明：a) 设 $x = (x_1, x_2, \cdots, x_n)$，$y = (y_1, y_2, \cdots, y_n)$. 定义$|x| = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} x_i^2}$, 则有

$$|x_1y_1 + x_2y_2 + \cdots + x_ny_n| \le |x| \cdot |y|.$$

  b)利用上面的不等式, 易得

$$|(x_1 + y_1, x_2 + y_2, \cdots, x_n + y_n)| \le |x| + |y|.$$

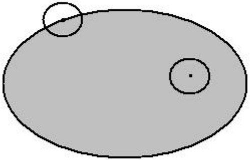
  c) 设 $x_{P,k}$，$x_{Q,k}$，$x_{R,k}$ 分别是 P, Q, R 的坐标. 上面的不等式中取 $x_k = x_{P,k} - x_{R,k}$，$y_k = x_{R,k} - x_{Q,k}$ 即得要证的三角不等式.

- 点 $P_0 \in \mathbb{R}^n$ 的 r 邻域

$$U_r(P_0) = \{P \in \mathbb{R}^n | d(P, P_0) < r\},$$

P_0 的 r 空心邻域为 $U_r(P_0) \backslash \{P_0\}$.

- 集合 $E \subset \mathbb{R}^n$ 的内点集



$$\mathring{E} = \{P \in E | \text{ 存在 } r, \text{ 使得 } U_r(P) \subset E\}.$$

显然内点集 $\mathring{E}$ 是 E 的子集.

- 集合 $E \subset \mathbb{R}^n$ 的边界点集

$$\partial E = \{P \in \mathbb{R}^n | \text{ 对任意 } r > 0, \text{ 有 } U_r(P) \cap E \neq \phi, U_r(P) \cap E^c \neq \phi\}.$$

E 的边界点不一定属于 E.

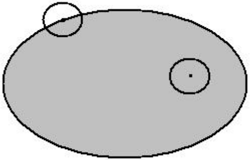
- 点 $P_0 \in \mathbb{R}^n$ 的 r 邻域

$$U_r(P_0) = \{P \in \mathbb{R}^n | d(P, P_0) < r\},$$

P_0 的 r 空心邻域为 $U_r(P_0) \backslash \{P_0\}$.

- 集合 $E \subset \mathbb{R}^n$ 的内点集

$\mathring{E} = \{P \in E|$ 存在 r, 使得 $U_r(P) \subset E\}$.



显然内点集 $\mathring{E}$ 是 E 的子集.

- 集合 $E \subset \mathbb{R}^n$ 的边界点集

$\partial E = \{P \in \mathbb{R}^n|$ 对任意 $r > 0$, 有 $U_r(P) \cap E \neq \phi, U_r(P) \cap E^c \neq \phi\}$.

E 的边界点不一定属于 E.

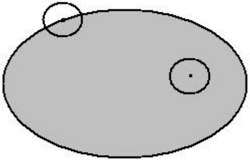
内点集和边界点集1

- 点 $P_0 \in \mathbb{R}^n$ 的 r 邻域

$$U_r(P_0) = \{P \in \mathbb{R}^n | d(P, P_0) < r\},$$

P_0 的 r 空心邻域为 $U_r(P_0) \backslash \{P_0\}$.

- 集合 $E \subset \mathbb{R}^n$ 的内点集



$\mathring{E} = \{P \in E|$ 存在 r, 使得 $U_r(P) \subset E\}$.

显然内点集 $\mathring{E}$ 是 E 的子集.

- 集合 $E \subset \mathbb{R}^n$ 的边界点集

$$\partial E = \{P \in \mathbb{R}^n|\text{ 对任意 } r > 0, \text{ 有 } U_r(P) \cap E \neq \phi, U_r(P) \cap E^c \neq \phi\}.$$

E 的边界点不一定属于 E.

内点集和边界点集2

- 性质：$\partial E = \partial E^c$.
- 性质：$E = \mathring{E} \cup (\partial E \cap E)$.

  证明：任给 $P \in E$, 若 $P \notin \mathring{E}$, 则对任意 $r > 0$, $U_r(P) \not\subset E$, 即 $U_r(P) \cap E^c \neq \phi$. 有显然有 $U_r(P) \cap E \ni P$ 非空, 因此 $P \in \partial E \cap E$.
- 性质：$E = \mathring{E} \Leftrightarrow \partial E \cap E = \phi$.

内点集和边界点集2

- 性质：$\partial E = \partial E^c$.
- 性质：$E = \mathring{E} \cup (\partial E \cap E)$.

  证明：任给 $P \in E$，若 $P \notin \mathring{E}$，则对任意 $r > 0$，$U_r(P) \not\subset E$，即 $U_r(P) \cap E^c \neq \phi$. 有显然有 $U_r(P) \cap E \ni P$ 非空，因此 $P \in \partial E \cap E$.
- 性质：$E = \mathring{E} \Leftrightarrow \partial E \cap E = \phi$.

- 性质：$\partial E = \partial E^c$.
- 性质：$E = \mathring{E} \cup (\partial E \cap E)$.

  证明：任给 $P \in E$, 若 $P \notin \mathring{E}$, 则对任意 $r > 0$, $U_r(P) \not\subset E$，即 $U_r(P) \cap E^c \neq \phi$. 有显然有 $U_r(P) \cap E \ni P$ 非空，因此 $P \in \partial E \cap E$.
- 性质：$E = \mathring{E} \Leftrightarrow \partial E \cap E = \phi$.

开集和闭集1

- 满足 $E = \mathring{E}$ 的集合称为开集，若集合 E 的补集为开集，则称 E 称为闭集.
- 性质：E 为开集 $\Leftrightarrow \partial E \cap E = \phi$.

  证明：利用 $E = \mathring{E} \Leftrightarrow \partial E \cap E = \phi$.
- 性质：E 为闭集 $\Leftrightarrow \partial E \subset E$.

  证明：若 E 为闭集，E^c 为开集，则有 $\partial E^c \cap E^c = \phi$, 即 $\partial E = \partial E^c \subset E$. 反过来，若 $\partial E \subset E$, 则有 $\partial E^c \cap E^c = \phi$.

开集和闭集1

- 满足 $E = \mathring{E}$ 的集合称为开集，若集合 E 的补集为开集，则称 E 称为闭集.
- 性质：E 为开集 $\Leftrightarrow \partial E \cap E = \phi$.

  证明：利用 $E = \mathring{E} \Leftrightarrow \partial E \cap E = \phi$.
- 性质：E 为闭集 $\Leftrightarrow \partial E \subset E$.

  证明：若 E 为闭集，E^c 为开集，则有 $\partial E^c \cap E^c = \phi$, 即 $\partial E = \partial E^c \subset E$. 反过来，若 $\partial E \subset E$, 则有 $\partial E^c \cap E^c = \phi$.

开集和闭集1

- 满足 $E = \mathring{E}$ 的集合称为开集，若集合 E 的补集为开集，则称 E 称为闭集.
- 性质：E 为开集 $\Leftrightarrow \partial E \cap E = \phi$.

  证明：利用 $E = \mathring{E} \Leftrightarrow \partial E \cap E = \phi$.
- 性质：E 为闭集 $\Leftrightarrow \partial E \subset E$.

  证明：若 E 为闭集，E^c 为开集，则有 $\partial E^c \cap E^c = \phi$，即 $\partial E = \partial E^c \subset E$. 反过来，若 $\partial E \subset E$，则有 $\partial E^c \cap E^c = \phi$.

开集和闭集2

- 例: $R=(-a,a)\times(-b,b)$ 是开集,

$$\partial R=\{(x,y)||x|=a \text{ 或者 } |y|=b\}.$$

因此 $\partial R\cap R=\phi$, R 是开集.

- 例: $R_1=[-a,a]\times[-b,b]$, $\partial R_1=\partial R\subset R_1$, R_1 是闭集.
- 单点集 $\{P_0\}$ 是闭集, $\cup_{n=1}^{\infty}(a_n,b_n)$ 是一维开集.

开集和闭集2

- 例: $R = (-a, a) \times (-b, b)$ 是开集,

$$\partial R = \{(x, y) || x| = a \text{ 或者 } |y| = b\}.$$

因此 $\partial R \cap R = \phi$, R 是开集.

- 例: $R_1 = [-a, a] \times [-b, b]$, $\partial R_1 = \partial R \subset R_1$, R_1 是闭集.
- 单点集 $\{P_0\}$ 是闭集, $\cup_{n=1}^{\infty}(a_n, b_n)$ 是一维开集.

开集和闭集2

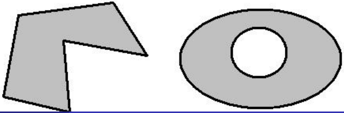
- 例: $R = (-a, a) \times (-b, b)$ 是开集,

$$\partial R = \{(x, y) | |x| = a \text{ 或者 } |y| = b\}.$$

  因此 $\partial R \cap R = \phi$, R 是开集.

- 例: $R_1 = [-a, a] \times [-b, b]$, $\partial R_1 = \partial R \subset R_1$, R_1 是闭集.
- 单点集 $\{P_0\}$ 是闭集, $\cup_{n=1}^{\infty}(a_n, b_n)$ 是一维开集.

- 连通开集：$E \subset \mathbb{R}^n$ 是开集，且 E 中任意两点都可以用一条落在 E 中的曲线相连接，则称 E 为连通开集.
  当 $n = 1$ 时，E 为连通开集的充分必要条件是 E 为开区间.
- 区域：连通的非空开集称为区域.
- 闭区域：设 G 是一个区域，集合 $\bar{G} = G \cup \partial G$ 称为闭区域(集合 $E \cup \partial E$ 称为 E 的闭包, 闭集 E 的闭包还是 E).
- 例：$R = (-a, a) \times (-b, b)$ 是二维空间中的区域；$U_r(P_0)$ 也是区域.
  $R_1 = \bar{R}$ 和 $\overline{U_r(P_0)} = \{P | d(P, P_0) \leq r\}$ 是闭区域.
- 有界集：若存在 $r > 0$ 使得 $U_r(0) \supset E$, 则称 E 为有界集.

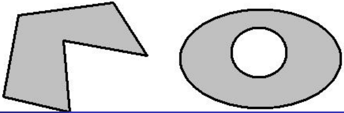


连通开集和区域

- 连通开集：$E \subset \mathbb{R}^n$ 是开集，且 E 中任意两点都可以用一条落在 E 中的曲线相连接，则称 E 为连通开集.

  当 $n = 1$ 时，E 为连通开集的充分必要条件是 E 为开区间.
- 区域：连通的非空开集称为区域.
- 闭区域：设 G 是一个区域，集合 $\bar{G} = G \cup \partial G$ 称为闭区域(集合 $E \cup \partial E$ 称为 E 的闭包, 闭集 E 的闭包还是 E).
- 例：$R = (-a, a) \times (-b, b)$ 是二维空间中的区域；$U_r(P_0)$ 也是区域.

  $R_1 = \bar{R}$ 和 $\overline{U_r(P_0)} = \{P | d(P, P_0) \leq r\}$ 是闭区域.
- 有界集：若存在 $r > 0$ 使得 $U_r(0) \supset E$, 则称 E 为有界集.



连通开集和区域

- 连通开集：$E \subset \mathbb{R}^n$ 是开集，且 E 中任意两点都可以用一条落在 E 中的曲线相连接，则称 E 为连通开集.

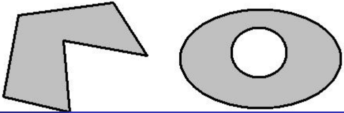
  当 $n = 1$ 时，E 为连通开集的充分必要条件是 E 为开区间.

- 区域：连通的非空开集称为区域.

- 闭区域：设 G 是一个区域，集合 $\bar{G} = G \cup \partial G$ 称为闭区域(集合 $E \cup \partial E$ 称为 E 的闭包, 闭集 E 的闭包还是 E).

- 例：$R = (-a, a) \times (-b, b)$ 是二维空间中的区域；$U_r(P_0)$ 也是区域.
  $R_1 = \bar{R}$ 和 $\overline{U_r(P_0)} = \{P | d(P, P_0) \leq r\}$ 是闭区域.

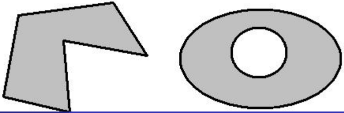
- 有界集：若存在 $r > 0$ 使得 $U_r(0) \supset E$, 则称 E 为有界集.



连通开集和区域

- 连通开集：$E \subset \mathbb{R}^n$ 是开集，且 E 中任意两点都可以用一条落在 E 中的曲线相连接，则称 E 为连通开集.

  当 $n = 1$ 时，E 为连通开集的充分必要条件是 E 为开区间.
- 区域：连通的非空开集称为区域.
- 闭区域：设 G 是一个区域，集合 $\bar{G} = G \cup \partial G$ 称为闭区域(集合 $E \cup \partial E$ 称为 E 的闭包, 闭集 E 的闭包还是 E).
- 例：$R = (-a, a) \times (-b, b)$ 是二维空间中的区域；$U_r(P_0)$ 也是区域. $R_1 = \bar{R}$ 和 $\overline{U_r(P_0)} = \{P | d(P, P_0) \leq r\}$ 是闭区域.
- 有界集：若存在 $r > 0$ 使得 $U_r(0) \supset E$, 则称 E 为有界集.



多元函数的极限的定义1

- 复习一元函数的极限: $y=f(x)$ 在 a 的某个空心邻域 $(a-r,a)\cup(a,a+r)$ 上有定义，若存在 A, 对任意 $\epsilon>0$, 存在 $\delta>0$, 使得当 $0<|x-a|<\delta$ 时，$|f(x)-A|<\epsilon$, 则称 $x\to a$ 时，$f(x)$ 以 A 为极限, 记为 $\lim\limits_{x\to a} f(x)=A$.
- 定义：设二元函数 $z=f(x,y)$ 在 (x_0,y_0)的某个空心邻域上有定义. 若存在实数 A，使得对任意的 $\epsilon>0$, 都存在 $\delta>0$, 使得当 (x,y) 满足 $0<\sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2}<\delta$ 时，有

$$|f(x,y)-A|<\epsilon,$$

则称 (x,y) 趋向于 (x_0,y_0) 时，$f(x,y)$ 以 A 为极限,记为

$$\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x,y)=A \text{ 或者 } \lim_{\substack{x\to x_0\\ y\to y_0}} f(x,y)=A.$$

- 复习一元函数的极限: $y = f(x)$ 在 a 的某个空心邻域 $(a-r,a)\cup(a,a+r)$ 上有定义，若存在 A, 对任意 $\epsilon > 0$, 存在 $\delta > 0$, 使得当 $0 < |x-a| < \delta$ 时，$|f(x)-A| < \epsilon$, 则称 $x \to a$ 时，$f(x)$ 以 A 为极限, 记为 $\lim\limits_{x\to a} f(x) = A$.
- 定义：设二元函数 $z = f(x,y)$ 在 (x_0,y_0)的某个空心邻域上有定义. 若存在实数 A，使得对任意的 $\epsilon > 0$, 都存在 $\delta > 0$, 使得当 (x,y) 满足 $0 < \sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2} < \delta$ 时，有

$$|f(x,y) - A| < \epsilon,$$

则称 (x,y) 趋向于 (x_0,y_0) 时，$f(x,y)$ 以 A 为极限,记为

$$\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x,y) = A \text{ 或者 } \lim_{\substack{x\to x_0\\ y\to y_0}} f(x,y) = A.$$

多元函数的极限的定义2

- 注：依照定义，要求 $f(x,y)$ 在 (x_0,y_0) 的一个空心邻域上有定义. 严格地说，$f(x,y)=xy\sin\frac{1}{xy}$ 不能讨论 $(x,y)\to(0,0)$ 的极限. 若补充定义函数在 x,y 轴上的值为 0, 则可以验证 $(x,y)\to(0,0)$ 时的 $f(x,y)$ 的极限为 0.
- 类似可定义 n 元函数的极限: 对任意的 $\epsilon>0$, 都存在 $\delta>0$, 使得当 P 满足 $0<d(P,P_0)<\delta$ 时，有

$$|f(P)-A|<\epsilon.$$

则称 $P\to P_0$ 时，$f(P)$ 以 A 为极限, 记为 $\lim\limits_{P\to P_0} f(P)=A$.

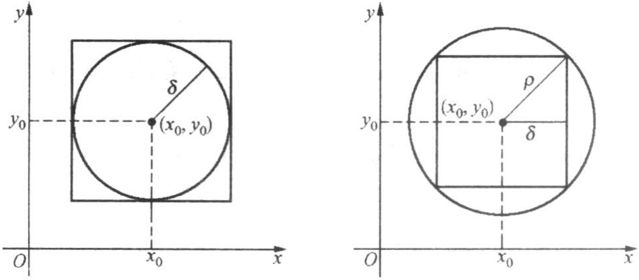
多元函数的极限的定义2

- 注：依照定义，要求 $f(x,y)$ 在 (x_0,y_0) 的一个空心邻域上有定义. 严格地说，$f(x,y)=xy\sin\frac{1}{xy}$ 不能讨论 $(x,y)\to(0,0)$ 的极限. 若补充定义函数在 x,y 轴上的值为 0, 则可以验证 $(x,y)\to(0,0)$ 时的 $f(x,y)$ 的极限为 0.
- 类似可定义 n 元函数的极限: 对任意的 $\epsilon>0$, 都存在 $\delta>0$, 使得当 P 满足 $0<d(P,P_0)<\delta$ 时，有

$$|f(P)-A|<\epsilon.$$

则称 $P\to P_0$ 时，$f(P)$ 以 A 为极限, 记为 $\lim\limits_{P\to P_0} f(P)=A$.

- 命题：$\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x,y) = A$ 的充要条件是：对任意的 $\epsilon > 0$，存在 $\delta > 0$，使得当 (x,y) 满足 $|x-x_0| < \delta$，$|y-y_0| < \delta$ 且 $(x,y) \neq (x_0,y_0)$ 时，有 $|f(x,y)-A| < \epsilon$.



多元函数极限的等价定义2

- 证明：若对任意的 $\epsilon > 0$, 存在 $\delta > 0$, 使得当 (x, y) 满足

$$|x - x_0| < \delta, |y - y_0| < \delta \text{ 且 } (x, y) \neq (x_0, y_0)$$

时，有 $|f(x, y) - A| < \epsilon$, 则当 (x, y) 满足

$$0 < \sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2} < \delta,$$

时有 $|f(x, y) - A| < \epsilon$.

反过来，若对任意的 $\epsilon > 0$, 存在 $\rho > 0$, 使得当 (x, y) 满足

$$0 < \sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2} < \rho$$

时，有 $|f(x, y) - A| < \epsilon$. 取 $\delta = \frac{1}{\sqrt{2}}\rho$, 则当 (x, y) 满足 $|x - x_0| < \delta$, $|y - y_0| < \delta$ 且 $(x, y) \neq (x_0, y_0)$ 时有 $|f(x, y) - A| < \epsilon$.

多元函数极限的等价定义2

- 证明：若对任意的 $\epsilon > 0$, 存在 $\delta > 0$, 使得当 (x, y) 满足
$$|x - x_0| < \delta, |y - y_0| < \delta \text{ 且 } (x, y) \neq (x_0, y_0)$$
时，有 $|f(x, y) - A| < \epsilon$, 则当 (x, y) 满足
$$0 < \sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2} < \delta,$$
时有 $|f(x, y) - A| < \epsilon$.
反过来, 若对任意的 $\epsilon > 0$, 存在 $\rho > 0$, 使得当 (x, y) 满足
$$0 < \sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2} < \rho$$
时，有 $|f(x, y) - A| < \epsilon$. 取 $\delta = \frac{1}{\sqrt{2}}\rho$, 则当 (x, y) 满足 $|x - x_0| < \delta$, $|y - y_0| < \delta$ 且 $(x, y) \neq (x_0, y_0)$ 时有 $|f(x, y) - A| < \epsilon$.

多元向量值函数极限的定义1

- 定义：设二元函数向量值函数 $f(x,y) = (f_1(x,y), f_2(x,y))$ 在 (x_0, y_0) 的某个空心邻域上有定义. 若存在 $a = (a_1, a_2)$，使得对任意的 $\epsilon > 0$, 都存在 $\delta > 0$, 使得当 (x,y) 满足

$$0 < \sqrt{(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2} < \delta$$

时，有

$$|f(x,y) - a| = \sqrt{(f_1(x,y) - a_1)^2 + (f_2(x,y) - a_2)^2} < \epsilon,$$

则称 (x,y) 趋向于 (x_0, y_0) 时，$f(x,y)$ 以 A 为极限, 记为

$$\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x,y) = a.$$

多元向量值函数极限的定义2

- 性质: $\lim\limits_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x,y) = a$ 的充要条件是

$$\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f_1(x,y) = a_1, \qquad \lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f_2(x,y) = a_2.$$

- 证明: 利用

$$|f_i(x,y)-a_i| \le |f(x,y)-a| \le |f_1(x,y)-a_1|+|f_2(x,y)-a_2|, \quad i=1,2.$$

- 注: 一般向量值函数的极限可类似定义.

多元向量值函数极限的定义2

- 性质: $\lim\limits_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x,y) = a$ 的充要条件是

$$\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f_1(x,y) = a_1, \qquad \lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f_2(x,y) = a_2.$$

- 证明: 利用

$$|f_i(x,y)-a_i| \le |f(x,y)-a| \le |f_1(x,y)-a_1|+|f_2(x,y)-a_2|, \quad i=1,2.$$

- 注: 一般向量值函数的极限可类似定义.

多元向量值函数极限的定义2

- 性质: $\lim\limits_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x,y) = a$ 的充要条件是

$$\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f_1(x,y) = a_1, \qquad \lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f_2(x,y) = a_2.$$

- 证明: 利用

$$|f_i(x,y)-a_i| \le |f(x,y)-a| \le |f_1(x,y)-a_1|+|f_2(x,y)-a_2|, \quad i=1,2.$$

- 注: 一般向量值函数的极限可类似定义.

- 一元复合函数的极限: 设 $\lim_{x\to x_0} g(x)=y_0$, 且 $x\neq x_0$ 时, $g(x)\neq y_0$, 若 $\lim_{y\to y_0} f(y)=A$, 则有 $\lim_{x\to x_0} f(g(x))=A$.
- 定理: $x=g(u,v)$, $y=h(u,v)$ 在 (u_0,v_0) 的一个空心邻域上有定义, 且有

$$\lim_{(u,v)\to(u_0,v_0)} g(u,v)=x_0 \quad \lim_{(u,v)\to(u_0,v_0)} h(u,v)=y_0.$$

又 $f(x,y)$ 在 (x_0,y_0) 的一个空心邻域上有定义, 且有 $(g(u,v),h(u,v))\neq(x_0,y_0)$. 若 $\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x,y)=A$, 则有

$$\lim_{(u,v)\to(u_0,v_0)} f(g(u,v),h(u,v))=A.$$

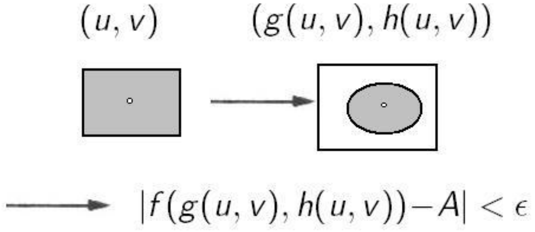
- 一元复合函数的极限: 设 $\lim\limits_{x\to x_0} g(x)=y_0$, 且 $x\neq x_0$ 时, $g(x)\neq y_0$, 若 $\lim\limits_{y\to y_0} f(y)=A$, 则有 $\lim\limits_{x\to x_0} f(g(x))=A$.
- 定理: $x=g(u,v)$, $y=h(u,v)$ 在 (u_0,v_0) 的一个空心邻域上有定义, 且有

$$\lim_{(u,v)\to(u_0,v_0)} g(u,v)=x_0 \quad \lim_{(u,v)\to(u_0,v_0)} h(u,v)=y_0.$$

又 $f(x,y)$ 在 (x_0,y_0) 的一个空心邻域上有定义, 且有 $(g(u,v),h(u,v))\neq(x_0,y_0)$. 若 $\lim\limits_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x,y)=A$, 则有

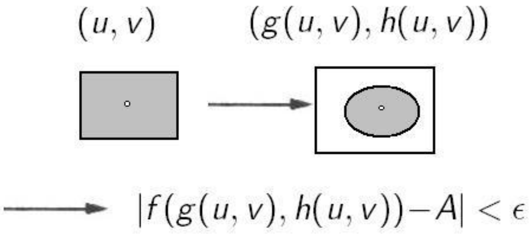
$$\lim_{(u,v)\to(u_0,v_0)} f(g(u,v),h(u,v))=A.$$

- 定理证明：对任意的 $\epsilon > 0$，存在 $\delta_1 > 0$，使得当 $|x - x_0| < \delta_1$，$|y - y_0| < \delta_1$ 且 $(x, y) \neq (x_0, y_0)$ 时有 $|f(x, y) - A| < \epsilon$.
存在 $\delta > 0$，使得当 $|u - u_0| < \delta$，$|v - v_0| < \delta$，且 $(u, v) \neq (u_0, v_0)$ 时，有 $|g(u, v) - x_0| < \delta_1$，$|h(u, v) - y_0| < \delta_1$，又由条件 $(g(u, v), h(u, v)) \neq (x_0, y_0)$，因此 $|f(g(u, v), h(u, v)) - A| < \epsilon$.



复合函数的极限2

- 定理证明：对任意的 $\epsilon > 0$，存在 $\delta_1 > 0$，使得当 $|x - x_0| < \delta_1$，$|y - y_0| < \delta_1$ 且 $(x, y) \neq (x_0, y_0)$ 时有 $|f(x, y) - A| < \epsilon$.
  存在 $\delta > 0$，使得当 $|u - u_0| < \delta$，$|v - v_0| < \delta$，且 $(u, v) \neq (u_0, v_0)$ 时，有 $|g(u, v) - x_0| < \delta_1$，$|h(u, v) - y_0| < \delta_1$，又由条件 $(g(u, v), h(u, v)) \neq (x_0, y_0)$，因此 $|f(g(u, v), h(u, v)) - A| < \epsilon$.



复合函数的极限3

- 上面定理可以用向量值函数来叙述：

  设 $\phi(u,v)=(g(u,v),h(u,v))$ 是二元向量值函数，若

$$\lim_{(u,v)\to(u_0,v_0)}\phi(u,v)=(x_0,y_0),$$

  且 $(u,v)\neq(u_0,v_0)$ 时，$\phi(u,v)\neq(x_0,y_0)$. 设 $\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)}f(x,y)=A$，则有

$$\lim_{(u,v)\to(u_0,v_0)}f(\phi(u,v))=A.$$

- 注：若 $f(x,y)=\operatorname{sgn}(x^2+y^2)$，$g(u,v)=h(u,v)=uv\sin\frac{1}{u^2+v^2}$，$\lim_{(x,y)\to(0,0)}f(x,y)=1$，但是下面极限不存在：

$$\lim_{(u,v)\to(0,0)}f(g(u,v),h(u,v)).$$

复合函数的极限3

- 上面定理可以用向量值函数来叙述:

  设 $\phi(u,v)=(g(u,v),h(u,v))$ 是二元向量值函数, 若

  $$\lim_{(u,v)\to(u_0,v_0)}\phi(u,v)=(x_0,y_0),$$

  且 $(u,v)\neq(u_0,v_0)$ 时, $\phi(u,v)\neq(x_0,y_0)$. 设 $\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)}f(x,y)=A$, 则有

  $$\lim_{(u,v)\to(u_0,v_0)}f(\phi(u,v))=A.$$

- 注: 若 $f(x,y)=\operatorname{sgn}(x^2+y^2)$, $g(u,v)=h(u,v)=uv\sin\frac{1}{u^2+v^2}$, $\lim_{(x,y)\to(0,0)}f(x,y)=1$, 但是下面极限不存在:

  $$\lim_{(u,v)\to(0,0)}f(g(u,v),h(u,v)).$$

复合函数的极限4

- 定理：$u=g(x,y)$ 在 (x_0,y_0) 的一个空心邻域上有定义，$\lim\limits_{(x,y)\to(x_0,y_0)} g(x,y)=u_0$，且有 $g(x,y)\neq u_0$. 又 $z=f(u)$ 在 u_0 的一个空心邻域上有定义，$\lim\limits_{u\to u_0} f(u)=A$，则有

$$\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(g(x,y))=A.$$

- 命题(沿曲线的极限)：$\lim\limits_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x,y)=A$，$x=x(t)$，$y=y(t)$ 在 t_0 的附近有定义，$x_0=\lim\limits_{t\to t_0} x(t)$，$y_0=\lim\limits_{t\to t_0} y(t)$，且有 $(x(t),y(t))\neq(x_0,y_0)$. 则有 $\lim\limits_{t\to t_0} f(x(t),y(t))=A$.

- 定理：$u = g(x,y)$ 在 (x_0,y_0) 的一个空心邻域上有定义，$\lim\limits_{(x,y)\to(x_0,y_0)} g(x,y) = u_0$，且有 $g(x,y) \neq u_0$. 又 $z = f(u)$ 在 u_0 的一个空心邻域上有定义，$\lim\limits_{u\to u_0} f(u) = A$，则有

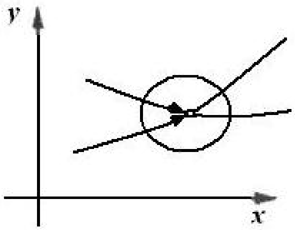
$$\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(g(x,y)) = A.$$

- 命题(沿曲线的极限)：$\lim\limits_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x,y) = A$，$x = x(t)$，$y = y(t)$ 在 t_0 的附近有定义，$x_0 = \lim\limits_{t\to t_0} x(t)$，$y_0 = \lim\limits_{t\to t_0} y(t)$，且有 $(x(t),y(t)) \neq (x_0,y_0)$. 则有 $\lim\limits_{t\to t_0} f(x(t),y(t)) = A$.

- 命题：设 $\lim\limits_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x,y) = A$，$y_0 = \lim\limits_{x\to x_0}\phi(x)$. 则沿着曲线 $y=\phi(x)$, (x,y) 趋向于 (x_0,y_0) 时的极限

$$\lim_{x\to x_0} f(x,\phi(x)) = A.$$

- 注：若上面命题中 $y_0 = \lim\limits_{x\to x_0+0} f(x)$，则 $\lim\limits_{x\to x_0+0} f(x,\phi(x)) = A$.
- 注：对三元函数有类似结论(考虑空间中的曲线 $y=\phi(x), z=\psi(x)$)。

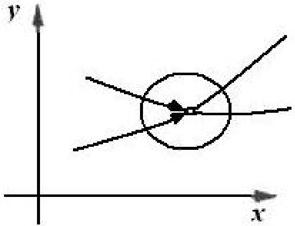


- 命题：设 $\lim\limits_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x,y) = A$，$y_0 = \lim\limits_{x\to x_0} \phi(x)$. 则沿着曲线 $y=\phi(x)$, (x,y) 趋向于 (x_0,y_0) 时的极限

$$\lim_{x\to x_0} f(x,\phi(x)) = A.$$

- 注：若上面命题中 $y_0 = \lim\limits_{x\to x_0+0} f(x)$，则 $\lim\limits_{x\to x_0+0} f(x,\phi(x)) = A$.

- 注：对三元函数有类似结论(考虑空间中的曲线 $y=\phi(x), z=\psi(x)$)。



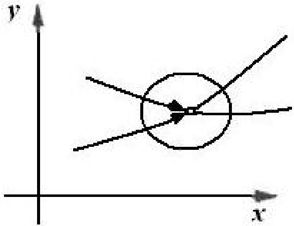
多元函数的极限与沿曲线的极限1

- 命题：设 $\lim\limits_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x,y) = A$，$y_0 = \lim\limits_{x\to x_0} \phi(x)$. 则沿着曲线 $y=\phi(x)$, (x,y) 趋向于 (x_0,y_0) 时的极限

$$\lim_{x\to x_0} f(x,\phi(x)) = A.$$

- 注：若上面命题中 $y_0 = \lim\limits_{x\to x_0+0} f(x)$，则 $\lim\limits_{x\to x_0+0} f(x,\phi(x)) = A$.

- 注：对三元函数有类似结论(考虑空间中的曲线 $y=\phi(x), z=\psi(x)$)。



多元函数的极限与沿曲线的极限3

- 推论：若存在连续函数 $y=\phi(x)$，且 $y_0=\phi(x_0)$，但是极限 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x,\phi(x))$ 不存在，则极限 $\lim\limits_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x,y)$ 不存在.（条件可以改为：极限 $\lim\limits_{x\to x_0\pm 0} f(x,\phi(x))$ 不存在）
- 推论：若存在连续函数 $y=\phi_1(x)$ 和 $y=\phi_2(x)$，且 $y_0=\phi_1(x_0)=\phi_2(x_0)$，但是

$$\lim_{x\to x_0} f(x,\phi_1(x))\neq \lim_{x\to x_0} f(x,\phi_2(x)),$$

则极限 $\lim\limits_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x,y)$ 不存在.（条件中的极限可以改为单边极限）

多元函数的极限与沿曲线的极限3

- 推论：若存在连续函数 $y=\phi(x)$，且 $y_0=\phi(x_0)$，但是极限 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x,\phi(x))$ 不存在，则极限 $\lim\limits_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x,y)$ 不存在.（条件可以改为：极限 $\lim\limits_{x\to x_0\pm 0} f(x,\phi(x))$ 不存在）
- 推论：若存在连续函数 $y=\phi_1(x)$ 和 $y=\phi_2(x)$，且 $y_0=\phi_1(x_0)=\phi_2(x_0)$，但是

$$\lim_{x\to x_0} f(x,\phi_1(x))\neq\lim_{x\to x_0} f(x,\phi_2(x)),$$

则极限 $\lim\limits_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x,y)$ 不存在.（条件中的极限可以改为单边极限）

极限存在性—例

- $f(x,y)=\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}$, 则有 $f(x,x)=\frac{x}{\sqrt{2}|x|}$. 由于 $\lim\limits_{x\to 0} f(x,x)$ 不存在，因此极限 $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)$ 不存在.
- $f(x,y)=\frac{|x|}{\sqrt{x^2+y^2}}$, 则有 $f(x,kx)=\frac{1}{\sqrt{1+k^2}}$. 由于 $\lim\limits_{x\to 0} f(x,kx)$ 与 k 有关，因此极限 $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)$ 不存在.
- $f(x,y)=\frac{x^4\cdot y^4}{(x^2+y^4)^3}$, 则有

$$\lim_{x\to 0+0} f(x,k\sqrt{x})=\frac{k^4}{(1+k^4)^3}.$$

与 k 有关，所以极限 $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)$ 不存在.

极限存在性—例

- $f(x,y)=\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}$，则有 $f(x,x)=\frac{x}{\sqrt{2}|x|}$. 由于 $\lim\limits_{x\to 0} f(x,x)$ 不存在，因此极限 $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)$ 不存在.
- $f(x,y)=\frac{|x|}{\sqrt{x^2+y^2}}$，则有 $f(x,kx)=\frac{1}{\sqrt{1+k^2}}$. 由于 $\lim\limits_{x\to 0} f(x,kx)$ 与 k 有关，因此极限 $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)$ 不存在.
- $f(x,y)=\frac{x^4\cdot y^4}{(x^2+y^4)^3}$，则有

$$\lim_{x\to 0+0} f(x,k\sqrt{x})=\frac{k^4}{(1+k^4)^3}.$$

与 k 有关，所以极限 $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)$ 不存在.

- $f(x,y)=\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}$，则有 $f(x,x)=\frac{x}{\sqrt{2}|x|}$．由于 $\lim\limits_{x\to 0} f(x,x)$ 不存在，因此极限 $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)$ 不存在.
- $f(x,y)=\frac{|x|}{\sqrt{x^2+y^2}}$，则有 $f(x,kx)=\frac{1}{\sqrt{1+k^2}}$．由于 $\lim\limits_{x\to 0} f(x,kx)$ 与 k 有关，因此极限 $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)$ 不存在.
- $f(x,y)=\frac{x^4\cdot y^4}{(x^2+y^4)^3}$，则有

$$\lim_{x\to 0+0} f(x,k\sqrt{x})=\frac{k^4}{(1+k^4)^3}.$$

与 k 有关，所以极限 $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)$ 不存在.

- 定理：设 $f(x,y), g(x,y)$ 在 (x_0,y_0) 的一个空心邻域上有定义，且 $f(x,y) \geq g(x,y)$. 若 (x,y) 趋向于 (x_0,y_0) 时，函数 $f(x,y)$ 和 $g(x,y)$ 的极限都存在，则有

$$\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x,y) \geq \lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} g(x,y).$$

- 注：若 $f(x,y) > g(x,y)$, 也不能得出

$$\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x,y) > \lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} g(x,y).$$

如 $f(x,y) = x^2+y^2$, $g(x,y) = \frac{1}{2}(x^2+y^2)$, $(x,y)\to(0,0)$ 时极限都是 0.

极限不等式

- 定理：设 $f(x,y), g(x,y)$ 在 (x_0,y_0) 的一个空心邻域上有定义，且 $f(x,y) \geq g(x,y)$. 若 (x,y) 趋向于 (x_0,y_0) 时，函数 $f(x,y)$ 和 $g(x,y)$ 的极限都存在，则有

$$\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x,y) \geq \lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} g(x,y).$$

- 注：若 $f(x,y) > g(x,y)$, 也不能得出

$$\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x,y) > \lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} g(x,y).$$

如 $f(x,y) = x^2 + y^2$, $g(x,y) = \frac{1}{2}(x^2+y^2)$, $(x,y) \to (0,0)$ 时极限都是 0.

夹逼定理

- 定理：设 $f(x,y), g(x,y), h(x,y)$ 在 (x_0,y_0) 的一个空心邻域上有定义，且 $f(x,y) \le h(x,y) \le g(x,y)$. 若有

$$\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x,y) = \lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} g(x,y) = A,$$

则有极限 $\lim\limits_{(x,y)\to(x_0,y_0)} h(x,y) = A$.

- 推论：设 $f(x,y), g(x,y)$ 在 (x_0,y_0) 的一个空心邻域上有定义，且 $|f(x,y)| \le |g(x,y)|$. 若 $\lim\limits_{(x,y)\to(x_0,y_0)} g(x,y) = 0$, 则有

$$\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x,y) = 0.$$

夹逼定理

- 定理：设 $f(x,y), g(x,y), h(x,y)$ 在 (x_0, y_0) 的一个空心邻域上有定义，且 $f(x,y) \leq h(x,y) \leq g(x,y)$. 若有

$$\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x,y) = \lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} g(x,y) = A,$$

则有极限 $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} h(x,y) = A$.

- 推论：设 $f(x,y), g(x,y)$ 在 (x_0, y_0) 的一个空心邻域上有定义，且 $|f(x,y)| \leq |g(x,y)|$. 若 $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} g(x,y) = 0$, 则有

$$\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x,y) = 0.$$

夹逼定理—例1

- $f(x,y)=\frac{x\sin y}{\sqrt{x^2+y^2}}$，则有

$$|f(x,y)|\le\frac{|xy|}{\sqrt{x^2+y^2}}\le\frac{1}{2}\sqrt{x^2+y^2}.$$

由于 $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}\frac{1}{2}\sqrt{x^2+y^2}=0$，因此 $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}f(x,y)=0.$

- $f(x,y)=xy\ln(x^2+y^2)$, $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}f(x,y)=0.$

证明：利用 $\lim\limits_{u\to0+0}u\ln(u)=0$,

$$|f(x,y)|=\frac{|xy|}{x^2+y^2}\cdot|(x^2+y^2)\ln(x^2+y^2)|\le\frac{1}{2}|(x^2+y^2)\ln(x^2+y^2)|\to0.$$

- $f(x,y)=\frac{x\sin y}{\sqrt{x^2+y^2}}$，则有

$$|f(x,y)|\le\frac{|xy|}{\sqrt{x^2+y^2}}\le\frac{1}{2}\sqrt{x^2+y^2}.$$

由于 $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}\frac{1}{2}\sqrt{x^2+y^2}=0$，因此 $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}f(x,y)=0.$

- $f(x,y)=xy\ln(x^2+y^2)$, $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}f(x,y)=0.$

证明：利用 $\lim\limits_{u\to0+0}u\ln(u)=0$,

$$|f(x,y)|=\frac{|xy|}{x^2+y^2}\cdot|(x^2+y^2)\ln(x^2+y^2)|\le\frac{1}{2}|(x^2+y^2)\ln(x^2+y^2)|\to0.$$

夹逼定理—例2

- $f(x,y)=\frac{x^m\cdot y^n}{(x^2+y^2)^{\frac{k}{2}}}$, $n+m>k$时，极限 $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)$ 存在(极限为 0).

证明：取 $m_1\le m, n_1\le n$, 使得 $k=m_1+n_1$, 则有

$$\begin{aligned}|f(x,y)| =&\frac{|x|^m\cdot|y|^n}{(x^2+y^2)^{\frac{k}{2}}}\le\frac{|x|^{m_1}\cdot|y|^{n_1}}{(x^2+y^2)^{\frac{k}{2}}}|x|^{m-m_1}|y|^{n-n_1}\\ \le&|x|^{m-m_1}|y|^{n-n_1}\to 0.\end{aligned}$$

- $f(x,y,z)=\frac{x^m y^n z^l}{(x^2+y^2+z^2)^{\frac{k}{2}}}$, $n+m+l>k$ 时，极限

$$\lim_{(x,y,z)\to(0,0,0)} f(x,y,z)=0.$$

夹逼定理—例2

- $f(x,y)=\frac{x^m\cdot y^n}{(x^2+y^2)^{\frac{k}{2}}}$, $n+m>k$时，极限 $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)$ 存在(极限为 0).

  证明：取 $m_1\le m, n_1\le n$, 使得 $k=m_1+n_1$, 则有

$$|f(x,y)| = \frac{|x|^m\cdot|y|^n}{(x^2+y^2)^{\frac{k}{2}}} \le \frac{|x|^{m_1}\cdot|y|^{n_1}}{(x^2+y^2)^{\frac{k}{2}}}|x|^{m-m_1}|y|^{n-n_1}$$
$$\le |x|^{m-m_1}|y|^{n-n_1}\to 0.$$

- $f(x,y,z)=\frac{x^my^nz^l}{(x^2+y^2+z^2)^{\frac{k}{2}}}$, $n+m+l>k$ 时，极限

$$\lim_{(x,y,z)\to(0,0,0)} f(x,y,z)=0.$$

- $f(x,y)=\frac{x^m\cdot y^n}{(x^2+y^2)^{\frac{k}{2}}}$, $n+m>k$时，极限 $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)$ 存在(极限为 0).

  证明：取 $m_1\le m, n_1\le n$, 使得 $k=m_1+n_1$, 则有

$$\begin{aligned}|f(x,y)|=&\frac{|x|^m\cdot|y|^n}{(x^2+y^2)^{\frac{k}{2}}}\le\frac{|x|^{m_1}\cdot|y|^{n_1}}{(x^2+y^2)^{\frac{k}{2}}}|x|^{m-m_1}|y|^{n-n_1}\\ \le&|x|^{m-m_1}|y|^{n-n_1}\to 0.\end{aligned}$$

- $f(x,y,z)=\frac{x^my^nz^l}{(x^2+y^2+z^2)^{\frac{k}{2}}}$, $n+m+l>k$ 时，极限

$$\lim_{(x,y,z)\to(0,0,0)} f(x,y,z)=0.$$

- 定理：设 $f(x,y), g(x,y)$ 在 (x_0,y_0) 的一个空心邻域上有定义，若 $\lim\limits_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x,y) = A$, $\lim\limits_{(x,y)\to(x_0,y_0)} g(x,y) = B$. 则有

$$\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} (f(x,y) \pm g(x,y)) = A \pm B,$$
$$\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x,y)g(x,y) = AB.$$

当 $B \neq 0$ 时，$\lim\limits_{(x,y)\to(x_0,y_0)} \frac{f(x,y)}{g(x,y)} = \frac{A}{B}$.

求极限—例

- 例： $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}(1+x^2+y^2)^{\frac{1}{x^2+y^2}} = \lim\limits_{u\to 0}(1+u)^{\frac{1}{u}} = e.$
- 例： 求 $I = \lim\limits_{(u,v)\to(0,0)}\left(\frac{\sin 2(u^2+v^2)}{u^2+v^2}\right)^{\frac{u\sin v}{\sqrt{u^2+v^2}}}$.

  解：由于

$$\lim_{(u,v)\to(0,0)}\frac{\sin 2(u^2+v^2)}{u^2+v^2} = 2,\quad \lim_{(u,v)\to(0,0)}\frac{u\sin v}{\sqrt{u^2+v^2}} = 0.$$

  因此

$$I = \lim_{(x,y)\to(2,0)} x^y = \lim_{(x,y)\to(2,0)} e^{y\ln x} = e^0 = 1.$$

- 例： $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}(1+x^2+y^2)^{\frac{1}{x^2+y^2}} = \lim\limits_{u\to 0}(1+u)^{\frac{1}{u}} = e.$
- 例： 求 $I = \lim\limits_{(u,v)\to(0,0)}\left(\frac{\sin 2(u^2+v^2)}{u^2+v^2}\right)^{\frac{u\sin v}{\sqrt{u^2+v^2}}}.$

  解: 由于

$$\lim_{(u,v)\to(0,0)}\frac{\sin 2(u^2+v^2)}{u^2+v^2} = 2, \quad \lim_{(u,v)\to(0,0)}\frac{u\sin v}{\sqrt{u^2+v^2}} = 0.$$

  因此

$$I = \lim_{(x,y)\to(2,0)} x^y = \lim_{(x,y)\to(2,0)} e^{y\ln x} = e^0 = 1.$$

- 令 $A(y)=\lim\limits_{x\to x_0} f(x,y)$, $B(x)=\lim\limits_{y\to y_0} f(x,y)$. 两个累次极限定义为

$$\lim_{x\to x_0}(\lim_{y\to y_0} f(x,y))=\lim_{x\to x_0} B(x),$$
$$\lim_{y\to y_0}(\lim_{x\to x_0} f(x,y))=\lim_{y\to y_0} A(y).$$

- 注: 上面定义中函数 $f(x,y)$ 可以在两条直线 $x=x_0$ 和 $y=y_0$ 上没有定义.
- 例: $\lim\limits_{x\to 0}(\lim\limits_{y\to 0}\frac{xy}{x^2+y^2})=0$, 但是全面极限 $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}\frac{xy}{x^2+y^2}$ 不存在.

累次极限

- 令 $A(y)=\lim_{x\to x_0} f(x,y)$, $B(x)=\lim_{y\to y_0} f(x,y)$. 两个累次极限定义为

$$\lim_{x\to x_0}(\lim_{y\to y_0} f(x,y))=\lim_{x\to x_0} B(x),$$
$$\lim_{y\to y_0}(\lim_{x\to x_0} f(x,y))=\lim_{y\to y_0} A(y).$$

- 注: 上面定义中函数 $f(x,y)$ 可以在两条直线 $x=x_0$ 和 $y=y_0$ 上没有定义.
- 例: $\lim_{x\to 0}(\lim_{y\to 0}\frac{xy}{x^2+y^2})=0$, 但是全面极限 $\lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{xy}{x^2+y^2}$ 不存在.

累次极限

- 令 $A(y)=\lim_{x\to x_0} f(x,y)$, $B(x)=\lim_{y\to y_0} f(x,y)$. 两个累次极限定义为

$$\lim_{x\to x_0}(\lim_{y\to y_0} f(x,y))=\lim_{x\to x_0} B(x),$$

$$\lim_{y\to y_0}(\lim_{x\to x_0} f(x,y))=\lim_{y\to y_0} A(y).$$

- 注: 上面定义中函数 $f(x,y)$ 可以在两条直线 $x=x_0$ 和 $y=y_0$ 上没有定义.
- 例: $\lim_{x\to 0}(\lim_{y\to 0}\frac{xy}{x^2+y^2})=0$, 但是全面极限 $\lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{xy}{x^2+y^2}$ 不存在.

- 若全面极限和累次极限都存在，则一定相等. 若两个累次极限存在但是不等，则全面极限不存在.

  证明：若 $\lim\limits_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x,y)$ 存在, 则存在 $\delta > 0$, 使得 $0 < |x - x_0| < \delta$，$0 < |y - y_0| < \delta$ 时，$|f(x,y) - A| < \epsilon$，则有 $|\lim\limits_{y\to y_0} f(x,y) - A| \leq \epsilon$，因此 $\lim\limits_{x\to x_0}\lim\limits_{y\to y_0} f(x,y) = A$.

- 例：$f(x,y) = \begin{cases} (x+y)\sin\frac{1}{x}, & x \neq 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases}$, 则有 $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = 0$, 但是 $\lim\limits_{y\to 0}\lim\limits_{x\to 0} f(x,y)$ 不存在.

- 若全面极限和累次极限都存在，则一定相等. 若两个累次极限存在但是不等，则全面极限不存在.

  证明：若 $\lim\limits_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x,y)$ 存在, 则存在 $\delta>0$, 使得 $0<|x-x_0|<\delta$，$0<|y-y_0|<\delta$ 时，$|f(x,y)-A|<\epsilon$，则有 $|\lim\limits_{y\to y_0} f(x,y)-A|\le\epsilon$，因此 $\lim\limits_{x\to x_0}\lim\limits_{y\to y_0} f(x,y)=A$.

- 例：$f(x,y)=\begin{cases}(x+y)\sin\frac{1}{x}, & x\neq 0\\ 0, & x=0\end{cases}$, 则有 $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)=0$, 但是 $\lim\limits_{y\to 0}\lim\limits_{x\to 0} f(x,y)$ 不存在.

- 定义：设二元函数 $z=f(x,y)$ 在 (x_0,y_0) 的一个邻域上有定义. 若 $\lim\limits_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x,y)=f(x_0,y_0)$ 则称 $f(x,y)$ 在 (x_0,y_0) 处连续. 若 $z=f(x,y)$ 在区域 D 内有定义，且在 D 上处处连续，则称 f 在 D 上连续，记为 $f\in C(D)$.
- 性质：f 在 (x_0,y_0) 处连续 $\Leftrightarrow$ 对任意 $\epsilon>0$，存在 $\delta>0$，使得当 $\sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2}<\delta$ (或者 $|x-x_0|<\delta, |y-y_0|<\delta$) 时，有 $|f(x,y)-f(x_0,y_0)|<\epsilon$.
- 例：函数 $f(x,y)=\begin{cases}\frac{xy}{x^2+y^2}, & (x,y)\neq(0,0)\\ 0, & (x,y)=(0,0)\end{cases}$ 在原点处不连续. 因为极限 $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}\frac{xy}{x^2+y^2}$ 不存在.

- 定义：设二元函数 $z=f(x,y)$ 在 (x_0,y_0) 的一个邻域上有定义. 若 $\lim\limits_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x,y)=f(x_0,y_0)$ 则称 $f(x,y)$ 在 (x_0,y_0) 处连续. 若 $z=f(x,y)$ 在区域 D 内有定义，且在 D 上处处连续，则称 f 在 D 上连续，记为 $f\in C(D)$.
- 性质：f 在 (x_0,y_0) 处连续 $\Leftrightarrow$ 对任意 $\epsilon>0$, 存在 $\delta>0$, 使得当 $\sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2}<\delta$ (或者 $|x-x_0|<\delta, |y-y_0|<\delta$) 时，有 $|f(x,y)-f(x_0,y_0)|<\epsilon$.
- 例：函数 $f(x,y)=\begin{cases}\frac{xy}{x^2+y^2}, & (x,y)\neq(0,0)\\ 0, & (x,y)=(0,0)\end{cases}$ 在原点处不连续. 因为极限 $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}\frac{xy}{x^2+y^2}$ 不存在.

- 定义：设二元函数 $z=f(x,y)$ 在 (x_0,y_0) 的一个邻域上有定义. 若 $\lim\limits_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x,y)=f(x_0,y_0)$ 则称 $f(x,y)$ 在 (x_0,y_0) 处连续. 若 $z=f(x,y)$ 在区域 D 内有定义，且在 D 上处处连续，则称 f 在 D 上连续，记为 $f\in C(D)$.
- 性质：f 在 (x_0,y_0) 处连续 $\Leftrightarrow$ 对任意 $\epsilon>0$，存在 $\delta>0$，使得当 $\sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2}<\delta$ (或者 $|x-x_0|<\delta, |y-y_0|<\delta$) 时，有 $|f(x,y)-f(x_0,y_0)|<\epsilon$.
- 例：函数 $f(x,y)=\begin{cases}\frac{xy}{x^2+y^2}, & (x,y)\neq(0,0)\\ 0, & (x,y)=(0,0)\end{cases}$ 在原点处不连续. 因为极限 $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}\frac{xy}{x^2+y^2}$ 不存在.

二元函数连续性的几个基本定理1

- 定理：设 $f(x,y), g(x,y)$ 在 (x_0,y_0) 处连续，则 $u = f \pm g, f \cdot g$ 在 (x_0,y_0) 处连续. 若还有 $g(x_0,y_0) \neq 0$, 则 $u = \frac{f}{g}$ 在 (x_0,y_0) 处连续.
- 定理：若 $z = f(x,y)$ 在 (x_0,y_0) 处连续, $u = g(z)$ 在 $z = z_0 = f(x_0,y_0)$ 处连续，则有 $g(f(x,y))$ 在 (x_0,y_0) 处连续.
- 注：若 $u = g(z)$ 在 $[a,b]$ 上连续, $z = f(x,y)$ 在 D 上连续且值域包含在 $[a,b]$ 内，则有 $g(f(x,y))$ 在 D 上连续. 例如：$g(z) = \sqrt{z}$, $z = x^2 + y^2$, 从而 $\sqrt{x^2+y^2}$ 连续.

二元函数连续性的几个基本定理1

- 定理：设 $f(x,y), g(x,y)$ 在 (x_0,y_0) 处连续，则 $u = f \pm g, f \cdot g$ 在 (x_0,y_0) 处连续. 若还有 $g(x_0,y_0) \neq 0$, 则 $u = \frac{f}{g}$ 在 (x_0,y_0) 处连续.
- 定理：若 $z = f(x,y)$ 在 (x_0,y_0) 处连续, $u = g(z)$ 在 $z = z_0 = f(x_0,y_0)$ 处连续，则有 $g(f(x,y))$ 在 (x_0,y_0) 处连续.
- 注：若 $u = g(z)$ 在 $[a,b]$ 上连续, $z = f(x,y)$ 在 D 上连续且值域包含在 $[a,b]$ 内，则有 $g(f(x,y))$ 在 D 上连续. 例如：$g(z) = \sqrt{z}$, $z = x^2 + y^2$, 从而 $\sqrt{x^2+y^2}$ 连续.

二元函数连续性的几个基本定理1

- 定理：设 $f(x,y),g(x,y)$ 在 (x_0,y_0) 处连续，则 $u=f\pm g,f\cdot g$ 在 (x_0,y_0) 处连续. 若还有 $g(x_0,y_0)\neq 0$, 则 $u=\frac{f}{g}$ 在 (x_0,y_0) 处连续.
- 定理：若 $z=f(x,y)$ 在 (x_0,y_0) 处连续, $u=g(z)$ 在 $z=z_0=f(x_0,y_0)$ 处连续，则有 $g(f(x,y))$ 在 (x_0,y_0) 处连续.
- 注：若 $u=g(z)$ 在 $[a,b]$ 上连续, $z=f(x,y)$ 在 D 上连续且值域包含在 $[a,b]$ 内，则有 $g(f(x,y))$ 在 D 上连续. 例如：$g(z)=\sqrt{z}$, $z=x^2+y^2$, 从而 $\sqrt{x^2+y^2}$ 连续.

- 注：若 $u=g(z)$ 在 $z=z_0$ 处连续，$\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)=z_0$，则有

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} g(f(x,y))=g(z_0).$$

- 若 $g(u,v)$ 在 $(u_0.v_0)$ 处连续，

$$\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x,y)=u_0,\quad \lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} h(x,y)=v_0,$$

则有 $\lim\limits_{(x,y)\to(x_0,y_0)} g(f(x,y),h(x,y))=g(u_o,v_0).$

- 注：若 $u=g(z)$ 在 $z=z_0$ 处连续，$\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)=z_0$，则有

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} g(f(x,y))=g(z_0).$$

- 若 $g(u,v)$ 在 $(u_0.v_0)$ 处连续，

$$\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x,y)=u_0,\quad \lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} h(x,y)=v_0,$$

则有 $\lim\limits_{(x,y)\to(x_0,y_0)} g(f(x,y),h(x,y))=g(u_o,v_0).$

- 二元初等函数：从 x, y 出发进行有限次的加、减、乘、除、与一元初等函数复合得到的函数.
- 定理：二元初等函数在其定义域内连续(定义域的内点都是连续点).
  例：$\sqrt{x^2+y^2}$, $\frac{xy}{x^2+y^2}$.
- 推论: 设 $f(x,y)$ 为二元初等函数, (x_0,y_0) 是其定义域的内点, 则有 $\lim\limits_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x,y) = f(x_0,y_0)$.
  例: $x_0>0$ 时, $\lim\limits_{(x,y)\to(x_0,y_0)} x^y = x_0^{y_0}$,

$$\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} (\sin(x+y)+|x+y+1|) = \sin(x_0+y_0)+|x_0+y_0+1|.$$

二元初等函数的连续性

- 二元初等函数：从 x, y 出发进行有限次的加、减、乘、除、与一元初等函数复合得到的函数.
- 定理：二元初等函数在其定义域内连续(定义域的内点都是连续点).
  例：$\sqrt{x^2+y^2}$, $\frac{xy}{x^2+y^2}$.
- 推论: 设 $f(x,y)$ 为二元初等函数, (x_0,y_0) 是其定义域的内点, 则有 $\lim\limits_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x,y) = f(x_0,y_0)$.
  例: $x_0 > 0$ 时, $\lim\limits_{(x,y)\to(x_0,y_0)} x^y = x_0^{y_0}$,

$$\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} (\sin(x+y) + |x+y+1|) = \sin(x_0+y_0) + |x_0+y_0+1|.$$

二元初等函数的连续性

- 二元初等函数：从 x, y 出发进行有限次的加、减、乘、除、与一元初等函数复合得到的函数.
- 定理：二元初等函数在其定义域内连续(定义域的内点都是连续点).
  例：$\sqrt{x^2+y^2}$, $\frac{xy}{x^2+y^2}$.
- 推论: 设 $f(x,y)$ 为二元初等函数, (x_0,y_0) 是其定义域的内点, 则有 $\lim\limits_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x,y)=f(x_0,y_0)$.
  例: $x_0>0$ 时, $\lim\limits_{(x,y)\to(x_0,y_0)} x^y = x_0^{y_0}$,

$$\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} (\sin(x+y)+|x+y+1|) = \sin(x_0+y_0)+|x_0+y_0+1|.$$

- 向量值函数的极限：设函数 $z = f(P) : D \to \mathbb{R}^m$ 在 P_0 点的一个空心邻域上有定义，若存在向量 $A \in \mathbb{R}^m$，对任意 $\epsilon > 0$，存在 δ，使得当 $0 < d(P, P_0) < \delta$ 时，有 $d(f(P), A) < \epsilon$，则称 $\lim\limits_{P \to P_0} f(P) = A$.
- 性质：设 $f(P) = (f_1, f_2, \cdots, f_m)$，$A = (a_1, a_2, \cdots, a_m)$. 则有

$$\lim_{P \to P_0} f(P) = A \Longleftrightarrow \lim_{P \to P_0} f_k(P) = a_k, k = 1, 2, \cdots, m.$$

证明：$|f_k(P) - a_k| \le d(f(P), A) \le \sum\limits_{k=1}^{m} |f_k(P) - a_k|$.

向量值函数的极限

- 向量值函数的极限：设函数 $z = f(P) : D \to \mathbb{R}^m$ 在 P_0 点的一个空心邻域上有定义，若存在向量 $A \in \mathbb{R}^m$，对任意 $\epsilon > 0$, 存在 δ, 使得当 $0 < d(P, P_0) < \delta$ 时，有 $d(f(P), A) < \epsilon$, 则称 $\lim\limits_{P \to P_0} f(P) = A$.
- 性质：设 $f(P) = (f_1, f_2, \cdots, f_m)$, $A = (a_1, a_2, \cdots, a_m)$. 则有

$$\lim_{P \to P_0} f(P) = A \Longleftrightarrow \lim_{P \to P_0} f_k(P) = a_k, k = 1, 2, \cdots, m.$$

证明：$|f_k(P) - a_k| \le d(f(P), A) \le \sum\limits_{k=1}^{m} |f_k(P) - a_k|$.

向量值函数的连续性

- 向量值函数的的连续：设函数 $z = f(P)$ 在 P_0 点附近有定义，若 $\lim\limits_{P\to P_0} f(P) = f(P_0)$, 则称 $f(P)$ 在 P_0 点处连续. 如果 f 在区域 D 上处处连续，则称 f 在 D 上连续，记为 $f \in C(D)$.
- 性质：设 $f(P) = (f_1, f_2, \cdots, f_m)$, 则有 f 在 P_0 处连续 $\Leftrightarrow$ $f_1, f_2, \cdots, f_m$ 在 P_0 处连续.
- 例：坐标变换 $\begin{cases} u = x\cos\alpha - y\sin\alpha \\ v = x\sin\alpha + y\cos\alpha \end{cases}$ 是 $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ 的连续映射.

向量值函数的连续性

- 向量值函数的的连续：设函数 $z = f(P)$ 在 P_0 点附近有定义，若 $\lim\limits_{P\to P_0} f(P) = f(P_0)$，则称 $f(P)$ 在 P_0 点处连续. 如果 f 在区域 D 上处处连续，则称 f 在 D 上连续，记为 $f \in C(D)$.
- 性质：设 $f(P) = (f_1, f_2, \cdots, f_m)$，则有 f 在 P_0 处连续 $\Leftrightarrow$ $f_1, f_2, \cdots, f_m$ 在 P_0 处连续.
- 例：坐标变换 $\begin{cases} u = x\cos\alpha - y\sin\alpha \\ v = x\sin\alpha + y\cos\alpha \end{cases}$ 是 $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ 的连续映射.

向量值函数的连续性

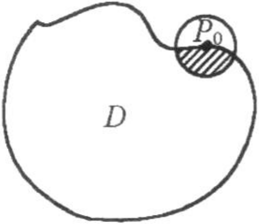
- 向量值函数的的连续：设函数 $z = f(P)$ 在 P_0 点附近有定义，若 $\lim_{P\to P_0} f(P) = f(P_0)$，则称 $f(P)$ 在 P_0 点处连续. 如果 f 在区域 D 上处处连续，则称 f 在 D 上连续，记为 $f \in C(D)$.
- 性质：设 $f(P) = (f_1, f_2, \cdots, f_m)$，则有 f 在 P_0 处连续 $\Leftrightarrow$ $f_1, f_2, \cdots, f_m$ 在 P_0 处连续.
- 例：坐标变换 $\begin{cases} u = x\cos\alpha - y\sin\alpha \\ v = x\sin\alpha + y\cos\alpha \end{cases}$ 是 $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ 的连续映射.

有界闭区域上的连续函数1

- 定义: f 是闭区域 $\bar{D}$ 上的函数, $P_0 \in \partial \bar{D}$. 若对任意的 $\epsilon > 0$, 存在 $\delta > 0$, 使得当 $P \in U_\delta(P_0) \cap \bar{D}$ 时, 有

$$|f(P) - f(P_0)| < \epsilon,$$

则称 f 在 P_0 处连续. 当 f 在 $\bar{D}$ 上处处连续时, 记为 $f \in C(\bar{D})$.



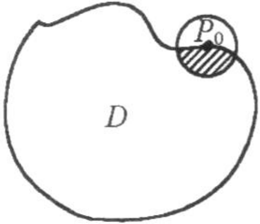
- $n = 1$ 时, 若 $\bar{D} = [a, b]$, f 在 a 点连续, 即为右连续.

- 定义：f 是闭区域 $\bar{D}$ 上的函数，$P_0 \in \partial \bar{D}$. 若对任意的 $\epsilon > 0$, 存在 $\delta > 0$, 使得当 $P \in U_\delta(P_0) \cap \bar{D}$ 时，有

$$|f(P) - f(P_0)| < \epsilon,$$

则称 f 在 P_0 处连续. 当 f 在 $\bar{D}$ 上处处连续时，记为 $f \in C(\bar{D})$.

- $n = 1$ 时，若 $\bar{D} = [a, b]$, f 在 a 点连续，即为右连续.



有界闭区域上的连续函数2

- 定理：设 $\bar{D}$ 是有界闭区域，$f \in C(\bar{D})$, 则 f 在 $\bar{D}$ 上有界，即存在 $M > 0$，使得 $|f(P)| \leq M$ 对所有 $P \in \bar{D}$ 成立.
- 设 $\bar{D}$ 是有界闭区域，$f \in C(\bar{D})$, 则 f 在 $\bar{D}$上能取到最大值和最小值，即存在 $P_1, P_2 \in \bar{D}$, 使得 $f(P_1) \geq f(P) \geq f(P_2)$ 对所有 $P \in \bar{D}$成立.
- 设 $\bar{D}$ 是有界闭区域，$f \in C(\bar{D})$, 设 f 在 $\bar{D}$ 上的最大值为 M, 最小值为 m. 则对任意 $\eta \in (m, M)$, 存在 $P \in \bar{D}$, 使得 $f(P) = \eta$.

有界闭区域上的连续函数2

- 定理：设 $\bar{D}$ 是有界闭区域，$f \in C(\bar{D})$，则 f 在 $\bar{D}$ 上有界，即存在 $M > 0$，使得 $|f(P)| \leq M$ 对所有 $P \in \bar{D}$ 成立.
- 设 $\bar{D}$ 是有界闭区域，$f \in C(\bar{D})$，则 f 在 $\bar{D}$上能取到最大值和最小值，即存在 $P_1, P_2 \in \bar{D}$，使得 $f(P_1) \geq f(P) \geq f(P_2)$ 对所有 $P \in \bar{D}$成立.
- 设 $\bar{D}$ 是有界闭区域，$f \in C(\bar{D})$，设 f 在 $\bar{D}$ 上的最大值为 M，最小值为 m. 则对任意 $\eta \in (m, M)$，存在 $P \in \bar{D}$，使得 $f(P) = \eta$.

有界闭区域上的连续函数2

- 定理：设 $\bar{D}$ 是有界闭区域，$f \in C(\bar{D})$, 则 f 在 $\bar{D}$ 上有界，即存在 $M > 0$，使得 $|f(P)| \leq M$ 对所有 $P \in \bar{D}$ 成立.
- 设 $\bar{D}$ 是有界闭区域，$f \in C(\bar{D})$, 则 f 在 $\bar{D}$上能取到最大值和最小值，即存在 $P_1, P_2 \in \bar{D}$, 使得 $f(P_1) \geq f(P) \geq f(P_2)$ 对所有 $P \in \bar{D}$成立.
- 设 $\bar{D}$ 是有界闭区域，$f \in C(\bar{D})$, 设 f 在 $\bar{D}$ 上的最大值为 M, 最小值为 m. 则对任意 $\eta \in (m, M)$, 存在 $P \in \bar{D}$, 使得 $f(P) = \eta$.

- 定义：设 $z=f(x,y)$ 在 (x_0,y_0) 的某个邻域上有定义. 若极限

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x_0+\Delta x,y_0)-f(x_0,y_0)}{\Delta x}$$

存在(即 $f(x,y_0)$ 作为 x 的函数在 $x=x_0$ 处可导)，则称 $f(x,y)$ 在 (x_0,y_0) 处关于 x 的偏导数存在. $f(x,y)$ 在 (x_0,y_0) 处关于 x 的偏导数可记为 $f_x(x_0,y_0)$, $\frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0)$, $\frac{\partial z}{\partial x}\big|_{(x_0,y_0)}$ 或者 $Z_x\big|_{(x_0,y_0)}$. 类似可定义 $f(x,y)$ 在 (x_0,y_0) 处关于 y 的偏导数

$$f_y(x_0,y_0)=\lim_{\Delta y\to 0}\frac{f(x_0,y_0+\Delta y)-f(x_0,y_0)}{\Delta y}.$$

- f 在 $\{(x,y_0)\in U_\delta(x_0,y_0)\}$ 上有定义即可考虑关于 x 的偏导数.

一阶偏导数的定义1

- 定义：设 $z=f(x,y)$ 在 (x_0,y_0) 的某个邻域上有定义. 若极限

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x_0+\Delta x,y_0)-f(x_0,y_0)}{\Delta x}$$

存在(即 $f(x,y_0)$ 作为 x 的函数在 $x=x_0$ 处可导)，则称 $f(x,y)$ 在 (x_0,y_0) 处关于 x 的偏导数存在. $f(x,y)$ 在 (x_0,y_0) 处关于 x 的偏导数可记为 $f_x(x_0,y_0)$, $\frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0)$, $\frac{\partial z}{\partial x}\big|_{(x_0,y_0)}$ 或者 $Z_x\big|_{(x_0,y_0)}$. 类似可定义 $f(x,y)$ 在 (x_0,y_0) 处关于 y 的偏导数

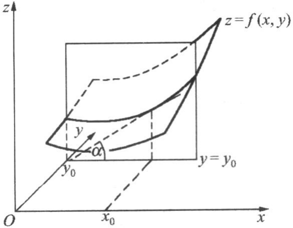
$$f_y(x_0,y_0)=\lim_{\Delta y\to 0}\frac{f(x_0,y_0+\Delta y)-f(x_0,y_0)}{\Delta y}.$$

- f 在 $\{(x,y_0)\in U_\delta(x_0,y_0)\}$ 上有定义即可考虑关于 x 的偏导数.

- 几何意义：$f_x(x_0,y_0)$ 是坐标曲线 $\begin{cases} z=f(x,y) \\ y=y_0 \end{cases}$ 在 (x_0,y_0) 点的切线关于 x 轴的斜率，$f_y(x_0,y_0)$ 类似.
- 例：$f(x,y)=\begin{cases} \frac{xy}{x^2+y^2}, & (x,y)\neq(0,0) \\ 0, & (x,y)=(0,0) \end{cases}$，$f(x,0)=f(0,y)=0$，因此 $f_x(0,0)=f_y(0,0)=0$.

$$f_x(x,y)=\begin{cases} \frac{-x^2y+y^3}{(x^2+y^2)^2}, & (x,y)\neq(0,0) \\ 0, & (x,y)=(0,0) \end{cases}$$

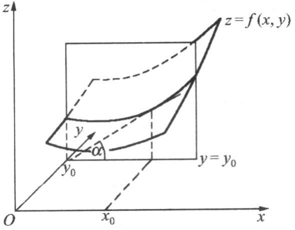
$$f_y(x,y)=\begin{cases} \frac{x^3-xy^2}{(x^2+y^2)^2}, & (x,y)\neq(0,0) \\ 0, & (x,y)=(0,0) \end{cases}$$



- 几何意义：$f_x(x_0, y_0)$ 是坐标曲线 $\begin{cases} z = f(x,y) \\ y = y_0 \end{cases}$ 在 (x_0, y_0) 点的切线关于 x 轴的斜率，$f_y(x_0, y_0)$ 类似.
- 例：$f(x,y) = \begin{cases} \frac{xy}{x^2+y^2}, & (x,y) \neq (0,0) \\ 0, & (x,y) = (0,0) \end{cases}$，$f(x,0) = f(0,y) = 0$，因此 $f_x(0,0) = f_y(0,0) = 0$.

$$f_x(x,y) = \begin{cases} \frac{-x^2y+y^3}{(x^2+y^2)^2}, & (x,y) \neq (0,0) \\ 0, & (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

$$f_y(x,y) = \begin{cases} \frac{x^3-xy^2}{(x^2+y^2)^2}, & (x,y) \neq (0,0) \\ 0, & (x,y) = (0,0) \end{cases}$$



一阶偏导数—例2

- 例： $z = \arctan \frac{(x-2)^2+y}{x+(x-2)^2y^2}$，则

$$Z_y|_{(2,0)} = \frac{d}{dy}\left(\arctan \frac{y}{2}\right)\Big|_{y=0} = \frac{1}{2}.$$

- 例： $f(x,y) = x^y,\ x > 0$. 则 $f_x = yx^{y-1}$, $f_y = x^y \ln x$.
- 注： $f(x_1, x_2, \cdots, x_n)$ 的偏导数记为 $f_{x_1}, f_{x_2}, \cdots, f_{x_n}$.

- 例： $z = \arctan \frac{(x-2)^2+y}{x+(x-2)^2y^2}$，则

$$Z_y|_{(2,0)} = \frac{d}{dy}\left(\arctan \frac{y}{2}\right)\Big|_{y=0} = \frac{1}{2}.$$

- 例： $f(x,y) = x^y$, $x > 0$. 则 $f_x = yx^{y-1}$, $f_y = x^y \ln x$.
- 注： $f(x_1, x_2, \cdots, x_n)$ 的偏导数记为 $f_{x_1}, f_{x_2}, \cdots, f_{x_n}$.

- 例： $z=\arctan\frac{(x-2)^2+y}{x+(x-2)^2y^2}$，则

$$Z_y|_{(2,0)}=\frac{d}{dy}\left(\arctan\frac{y}{2}\right)\Big|_{y=0}=\frac{1}{2}.$$

- 例： $f(x,y)=x^y$, $x>0$. 则 $f_x=yx^{y-1}$, $f_y=x^y\ln x$.
- 注： $f(x_1,x_2,\cdots,x_n)$ 的偏导数记为 $f_{x_1},f_{x_2},\cdots,f_{x_n}$.

高阶偏导数的定义

- 定义：设 $z=f(x,y)$，定义 f 的二阶偏导数

$$f_{xx}=\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}=\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right), f_{xy}=\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}=\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right),$$
$$f_{yx}=\frac{\partial^2 f}{\partial y\partial x}=\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right), f_{yy}=\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}=\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right).$$

- 例：$f(x,y)=x^y$, $f_x=yx^{y-1}$, $f_y=x^y\ln x$.

$$f_{xx}=y(y-1)x^{y-2},\quad f_{xy}=yx^{y-1}\ln x+x^{y-1},$$
$$f_{yx}=yx^{y-1}\ln x+x^{y-1},\quad f_{yy}=x^y(\ln x)^2$$

高阶偏导数的定义

- 定义：设 $z = f(x, y)$，定义 f 的二阶偏导数

$$f_{xx} = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right), f_{xy} = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right),$$
$$f_{yx} = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right), f_{yy} = \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right).$$

- 例： $f(x, y) = x^y$, $f_x = yx^{y-1}$, $f_y = x^y \ln x$.

$$f_{xx} = y(y-1)x^{y-2}, \quad f_{xy} = yx^{y-1}\ln x + x^{y-1},$$
$$f_{yx} = yx^{y-1}\ln x + x^{y-1}, \quad f_{yy} = x^y(\ln x)^2$$

高阶偏导数—例

- 例： $f(x,y)=\begin{cases}\frac{(x^2-y^2)xy}{x^2+y^2}, & (x,y)\neq(0,0)\\ 0, & (x,y)=(0,0)\end{cases}$，则 $y\neq 0$ 时，

$$f_x(0,y)=\frac{d}{dx}\frac{(x^2-y^2)xy}{x^2+y^2}\Big|_{x=0}$$
$$=\frac{(3x^2y-y^3)(x^2+y^2)-(x^2-y^2)xy\cdot 2x}{(x^2+y^2)^2}\Big|_{x=0}=-y,$$

显然，$f_x(0,0)=f_y(0,0)=0$. 类似地，$x\neq 0$ 时，

$$f_y(x,0)=\frac{d}{dy}\frac{(x^2-y^2)xy}{x^2+y^2}\Big|_{y=0}$$
$$=\frac{(x^3-3xy^2)(x^2+y^2)-(x^2-y^2)xy\cdot 2y}{(x^2+y^2)^2}\Big|_{y=0}=x,$$

从而得 $f_{xy}(0,0)=-1$，$f_{yx}(0,0)=1$.

高阶偏导数—例

- 例： $f(x,y)=\begin{cases}\frac{(x^2-y^2)xy}{x^2+y^2}, & (x,y)\neq(0,0)\\ 0, & (x,y)=(0,0)\end{cases}$，则 $y\neq 0$ 时，

$$\begin{aligned} f_x(0,y) &= \frac{d}{dx}\frac{(x^2-y^2)xy}{x^2+y^2}\Big|_{x=0} \\ &= \frac{(3x^2y-y^3)(x^2+y^2)-(x^2-y^2)xy\cdot 2x}{(x^2+y^2)^2}\Big|_{x=0}=-y, \end{aligned}$$

显然，$f_x(0,0)=f_y(0,0)=0$. 类似地，$x\neq 0$ 时，

$$\begin{aligned} f_y(x,0) &= \frac{d}{dy}\frac{(x^2-y^2)xy}{x^2+y^2}\Big|_{y=0} \\ &= \frac{(x^3-3xy^2)(x^2+y^2)-(x^2-y^2)xy\cdot 2y}{(x^2+y^2)^2}\Big|_{y=0}=x, \end{aligned}$$

从而得 $f_{xy}(0,0)=-1$，$f_{yx}(0,0)=1$.

高阶偏导数的性质

- 定理：若 $f(x,y)$ 的两个混合偏导数 f_{xy} 和 f_{yx} 在区域 D 内连续，则 $f_{xy}(x,y)=f_{xy}(x,y)$ 对任意 $(x,y)\in D$ 成立.
- $f(x,y)=x^y\in C^2$, 但是 $f(x,y)=\begin{cases}\frac{(x^2-y^2)xy}{x^2+y^2}, & (x,y)\neq(0,0)\\ 0, & (x,y)=(0,0)\end{cases}$ 的二阶偏导数不连续.
- 记 $C^n(D)$ 为 D 上所有 k 阶($k\leq n$)偏导数连续的函数构成的集合. 则对 $f\in C^2(D)$, $f_{xy}=f_{yx}$, 对 $f\in C^3(D)$, $f_{xyx}=f_{yxx}=f_{xxy},\ldots$

高阶偏导数的性质

- 定理：若 $f(x,y)$ 的两个混合偏导数 f_{xy} 和 f_{yx} 在区域 D 内连续，则 $f_{xy}(x,y)=f_{xy}(x,y)$ 对任意 $(x,y)\in D$ 成立.
- $f(x,y)=x^y\in C^2$, 但是 $f(x,y)=\begin{cases}\frac{(x^2-y^2)xy}{x^2+y^2}, & (x,y)\neq(0,0)\\ 0, & (x,y)=(0,0)\end{cases}$ 的二阶偏导数不连续.
- 记 $C^n(D)$ 为 D 上所有 k 阶($k\le n$)偏导数连续的函数构成的集合. 则对 $f\in C^2(D)$, $f_{xy}=f_{yx}$, 对 $f\in C^3(D)$, $f_{xyx}=f_{yxx}=f_{xxy},\ldots$

高阶偏导数的性质

- 定理：若 $f(x,y)$ 的两个混合偏导数 f_{xy} 和 f_{yx} 在区域 D 内连续，则 $f_{xy}(x,y) = f_{xy}(x,y)$ 对任意 $(x,y) \in D$ 成立.
- $f(x,y) = x^y \in C^2$, 但是 $f(x,y) = \begin{cases} \frac{(x^2-y^2)xy}{x^2+y^2}, & (x,y) \neq (0,0) \\ 0, & (x,y) = (0,0) \end{cases}$ 的二阶偏导数不连续.
- 记 $C^n(D)$ 为 D 上所有 k 阶($k \leq n$)偏导数连续的函数构成的集合. 则对 $f \in C^2(D)$, $f_{xy} = f_{yx}$, 对 $f \in C^3(D)$, $f_{xyx} = f_{yxx} = f_{xxy}, \ldots$

定理的证明1

- 证明：设

$$H(\Delta x, \Delta y) = f(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y) - f(x_0, y_0 + \Delta y) - f(x_0 + \Delta x, y_0) + f(x_0, y_0),$$

令 $g(y) = f(x_0 + \Delta x, y) - f(x_0, y)$，则有 $g'(y) = f_y(x_0 + \Delta x, y) - f_y(x_0, y)$，

$$\begin{aligned} H =& (f(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y) - f(x_0, y_0 + \Delta y)) \\ & - (f(x_0 + \Delta x, y_0) - f(x_0, y_0)) \\ =& g(y_0 + \Delta y) - g(y_0) = g'(y_0 + \theta_1 \Delta y)\Delta y \\ =& (f_y(x_0 + \Delta x, y_0 + \theta_1 \Delta y) - f_y(x_0, y_0 + \theta_1 \Delta y))\Delta y \\ =& f_{yx}(x_0 + \theta_2 \Delta x, y_0 + \theta_1 \Delta y)\Delta x \Delta y. \end{aligned}$$

定理的证明2

- 证明(续)：令 $h(x)=f(x,y_0+\Delta y)-f(x,y_0)$，则有$h'(x)=f_x(x,y_0+\Delta y)-f_x(x,y_0)$，

$$\begin{aligned}H=&(f(x_0+\Delta x,y_0+\Delta y)-f(x_0+\Delta x,y_0))\\&-(f(x_0,y_0+\Delta y)-f(x_0,y_0))\\=&h(x_0+\Delta x)-h(x_0)=h'(x_0+\theta_3\Delta x)\Delta x\\=&(f_x(x_0+\theta_3\Delta x,y_0+\Delta y)-f_x(x_0+\theta_3\Delta x,y_0))\Delta x\\=&f_{xy}(x_0+\theta_3\Delta x,y_0+\theta_4\Delta y)\Delta x\Delta y,\end{aligned}$$

因此 $\lim_{\Delta x\to 0}\frac{H(\Delta x,\Delta x)}{\Delta x^2}=f_{yx}(x_0,y_0)=f_{xy}(x_0,y_0)$.

- 例：$z = \ln\sqrt{x^2+y^2}$ 满足 $\Delta z = 0$，其中 $\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}$.

证明：设 $r = \sqrt{x^2+y^2}$,

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{1}{r}\cdot\frac{x}{r} = \frac{x}{r^2}, \qquad \frac{\partial z}{\partial y} = \frac{1}{r}\cdot\frac{y}{r} = \frac{y}{r^2},$$

则有

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = \frac{1}{r^2} - \frac{2x^2}{r^4}, \qquad \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = \frac{1}{r^2} - \frac{2y^2}{r^4},$$

相加即得.

- 例：$z = \ln \sqrt{x^2 + y^2}$ 满足 $\Delta z = 0$，其中 $\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}$.

证明：设 $r = \sqrt{x^2 + y^2}$,

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{1}{r} \cdot \frac{x}{r} = \frac{x}{r^2}, \qquad \frac{\partial z}{\partial y} = \frac{1}{r} \cdot \frac{y}{r} = \frac{y}{r^2},$$

则有

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = \frac{1}{r^2} - \frac{2x^2}{r^4}, \qquad \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = \frac{1}{r^2} - \frac{2y^2}{r^4},$$

相加即得.

Laplace 微分算子2

- 例：$u = \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$ 满足 $\Delta u = 0$，其中 $\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$.

证明：设 $r = \sqrt{x^2+y^2+z^2}$,

$$\frac{\partial u}{\partial x} = -\frac{x}{r^3}, \qquad \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{y}{r^3}, \qquad \frac{\partial u}{\partial z} = -\frac{z}{r^3},$$

则有

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = -\frac{1}{r^3} + \frac{3x^2}{r^5}, \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = -\frac{1}{r^3} + \frac{3y^2}{r^5}, \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = -\frac{1}{r^3} + \frac{3z^2}{r^5},$$

相加即得.

- 注：$n > 2$ 时，$\Delta = \sum\limits_{k=1}^{n} \frac{\partial^2}{\partial x_k^2}$，$\Delta[(x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2)^{1-\frac{n}{2}}] = 0$.

Laplace 微分算子2

- 例：$u=\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$ 满足 $\Delta u=0$，其中 $\Delta=\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\frac{\partial^2}{\partial y^2}+\frac{\partial^2}{\partial z^2}$.

  证明：设 $r=\sqrt{x^2+y^2+z^2}$,

$$\frac{\partial u}{\partial x}=-\frac{x}{r^3},\qquad \frac{\partial u}{\partial y}=-\frac{y}{r^3},\qquad \frac{\partial u}{\partial z}=-\frac{z}{r^3},$$

  则有

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=-\frac{1}{r^3}+\frac{3x^2}{r^5},\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=-\frac{1}{r^3}+\frac{3y^2}{r^5},\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}=-\frac{1}{r^3}+\frac{3z^2}{r^5},$$

  相加即得.

- 注：$n>2$ 时，$\Delta=\sum\limits_{k=1}^{n}\frac{\partial^2}{\partial x_k^2}$，$\Delta[(x_1^2+x_2^2+\cdots+x_n^2)^{1-\frac{n}{2}}]=0$.

- 例：$u=\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$ 满足 $\Delta u=0$，其中 $\Delta=\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\frac{\partial^2}{\partial y^2}+\frac{\partial^2}{\partial z^2}$.

  证明：设 $r=\sqrt{x^2+y^2+z^2}$,

$$\frac{\partial u}{\partial x}=-\frac{x}{r^3},\qquad \frac{\partial u}{\partial y}=-\frac{y}{r^3},\qquad \frac{\partial u}{\partial z}=-\frac{z}{r^3},$$

  则有

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=-\frac{1}{r^3}+\frac{3x^2}{r^5},\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=-\frac{1}{r^3}+\frac{3y^2}{r^5},\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}=-\frac{1}{r^3}+\frac{3z^2}{r^5},$$

  相加即得.

- 注：$n>2$ 时，$\Delta=\sum_{k=1}^{n}\frac{\partial^2}{\partial x_k^2}$, $\Delta[(x_1^2+x_2^2+\cdots+x_n^2)^{1-\frac{n}{2}}]=0$.

- 一元函数可微的定义：$f(x_0+\Delta x)-f(x_0)=A\Delta x+o(\Delta x)$, $\Delta x\to 0$. 即 $y=f(x)$ 与 $y=f(x_0)+A(x-x_0)$ 相切, 也等价于 $f(x)$ 在 x_0 点可导，且 $f'(x_0)=A$.
- 二元函数可微的定义：$z=f(x,y)$. 记 $\rho=\sqrt{(\Delta x)^2+(\Delta y)^2}$, 若

$$\Delta z=f(x_0+\Delta x,y_0+\Delta y)-f(x_0,y_0)=A\Delta x+B\Delta y+o(\rho),$$

$$(\Delta x,\Delta y)\to(0,0)$$

则称 $f(x,y)$ 在 (x_0,y_0) 处可微，称 $A\Delta x+B\Delta y$ 为 $f(x,y)$ 在 (x_0,y_0) 处的全微分，记为 $df=A\Delta x+B\Delta y=Adx+Bdy$.

全微分的定义

- 一元函数可微的定义：$f(x_0+\Delta x)-f(x_0)=A\Delta x+o(\Delta x)$, $\Delta x\to 0$. 即 $y=f(x)$ 与 $y=f(x_0)+A(x-x_0)$ 相切, 也等价于 $f(x)$ 在 x_0 点可导，且 $f'(x_0)=A$.
- 二元函数可微的定义：$z=f(x,y)$. 记 $\rho=\sqrt{(\Delta x)^2+(\Delta y)^2}$, 若

$$\Delta z=f(x_0+\Delta x,y_0+\Delta y)-f(x_0,y_0)=A\Delta x+B\Delta y+o(\rho),$$
$$(\Delta x,\Delta y)\to(0,0)$$

则称 $f(x,y)$ 在 (x_0,y_0) 处可微，称 $A\Delta x+B\Delta y$ 为 $f(x,y)$ 在 (x_0,y_0) 处的全微分，记为 $df=A\Delta x+B\Delta y=Adx+Bdy$.

- n 元函数的全微分可类似定义.
- 例：$f(x,y)=\begin{cases}\frac{x^4}{x^2+y^2}, & (x,y)\neq(0,0)\\ 0, & (x,y)=(0,0)\end{cases}$，则

$$f(\Delta x,\Delta y)=o(\sqrt{(\Delta x)^2+(\Delta y)^2}),$$

因此 $f(x,y)$ 在 $(0,0)$ 处可微，此时 $A=B=0$, $df|_{(0,0)}=0$.

- n 元函数的全微分可类似定义.
- 例：$f(x,y)=\begin{cases}\frac{x^4}{x^2+y^2}, & (x,y)\neq(0,0)\\ 0, & (x,y)=(0,0)\end{cases}$，则

$$f(\Delta x,\Delta y)=o(\sqrt{(\Delta x)^2+(\Delta y)^2}),$$

因此 $f(x,y)$ 在 $(0,0)$ 处可微，此时 $A=B=0$, $df|_{(0,0)}=0$.

可微与偏导数存在1

- 定理：$z = f(x,y)$ 在 (x_0,y_0) 处可微，设 $df|_{(x_0,y_0)} = Adx + Bdy$，则 $z = f(x,y)$ 在(x_0,y_0) 处的两个偏导数存在，且 $f_x(x_0,y_0) = A$，$f_y(x_0,y_0) = B$. 即

$$df|_{(x_0,y_0)} = f_x(x_0,y_0)dx + f_y(x_0,y_0)dy.$$

- 证明：$z = f(x,y)$ 在 (x_0,y_0) 处可微，则

$$\lim_{(\Delta x,\Delta y)\to(0,0)} \frac{f(x_0+\Delta x, y_0+\Delta y) - f(x_0,y_0) - A\Delta x - B\Delta y}{\sqrt{(\Delta x)^2+(\Delta y)^2}} = 0.$$

- 定理：$z = f(x,y)$ 在 (x_0,y_0) 处可微，设 $df|_{(x_0,y_0)} = Adx + Bdy$，则 $z = f(x,y)$ 在(x_0,y_0) 处的两个偏导数存在，且 $f_x(x_0,y_0) = A$, $f_y(x_0,y_0) = B$. 即

$$df|_{(x_0,y_0)} = f_x(x_0,y_0)dx + f_y(x_0,y_0)dy.$$

- 证明：$z = f(x,y)$ 在 (x_0,y_0) 处可微，则

$$\lim_{(\Delta x,\Delta y)\to(0,0)} \frac{f(x_0+\Delta x, y_0+\Delta y) - f(x_0,y_0) - A\Delta x - B\Delta y}{\sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2}} = 0.$$

可微与偏导数存在2

- 证明(续)：取 $\Delta y = 0$, $\rho = |\Delta x|$, 则有 $\Delta x \to 0$ 时,
$$\frac{f(x_0+\Delta x, y_0) - f(x_0, y_0) - A\Delta x}{|\Delta x|} \to 0.$$
上式两边同乘 $\frac{|\Delta x|}{\Delta x}$, 得 $f_x(x_0, y_0) = A$. 同样可得 $f_y(x_0, y_0) = B$.
- 推论：$f(x,y)$ 在 (x_0, y_0) 处可微等价于: $f(x,y)$ 在 (x_0,y_0) 处的偏导数存在, 且
$$\lim_{\substack{\Delta x \to 0 \\ \Delta y \to 0}} \frac{\Delta z - f_x(x_0,y_0)\Delta x - f_x(x_0,y_0)\Delta y}{\sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2}} = 0.$$
- 偏导数存在时不一定可微. 如
$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{xy}{x^2+y^2}, & (x,y) \neq (0,0) \\ 0, & (x,y) = (0,0) \end{cases}.$$

- 证明(续)：取 $\Delta y=0$, $\rho=|\Delta x|$, 则有 $\Delta x\to 0$ 时,

$$\frac{f(x_0+\Delta x,y_0)-f(x_0,y_0)-A\Delta x}{|\Delta x|}\to 0.$$

上式两边同乘 $\frac{|\Delta x|}{\Delta x}$, 得 $f_x(x_0,y_0)=A$. 同样可得 $f_y(x_0,y_0)=B$.

- 推论：$f(x,y)$ 在 (x_0,y_0) 处可微等价于：$f(x,y)$ 在 (x_0,y_0) 处的偏导数存在, 且

$$\lim_{\substack{\Delta x\to 0\\ \Delta y\to 0}}\frac{\Delta z-f_x(x_0,y_0)\Delta x-f_y(x_0,y_0)\Delta y}{\sqrt{(\Delta x)^2+(\Delta y)^2}}=0.$$

- 偏导数存在时不一定可微. 如

$$f(x,y)=\begin{cases}\frac{xy}{x^2+y^2}, & (x,y)\neq(0,0)\\ 0, & (x,y)=(0,0)\end{cases}.$$

- 证明(续): 取 $\Delta y = 0$, $\rho = |\Delta x|$, 则有 $\Delta x \to 0$ 时,

$$\frac{f(x_0 + \Delta x, y_0) - f(x_0, y_0) - A\Delta x}{|\Delta x|} \to 0.$$

上式两边同乘 $\frac{|\Delta x|}{\Delta x}$, 得 $f_x(x_0, y_0) = A$. 同样可得 $f_y(x_0, y_0) = B$.

- 推论: $f(x, y)$ 在 (x_0, y_0) 处可微等价于: $f(x, y)$ 在 (x_0, y_0) 处的偏导数存在, 且

$$\lim_{\substack{\Delta x \to 0 \\ \Delta y \to 0}} \frac{\Delta z - f_x(x_0, y_0)\Delta x - f_x(x_0, y_0)\Delta y}{\sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2}} = 0.$$

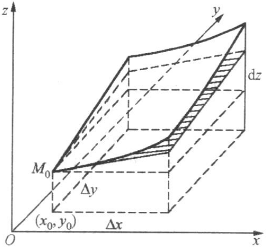
- 偏导数存在时不一定可微. 如

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{xy}{x^2+y^2}, & (x, y) \neq (0, 0) \\ 0, & (x, y) = (0, 0) \end{cases}.$$

- 几何意义：$z=f(x,y)$ 在 (x_0,y_0) 处可微,则

$$f(x,y)=f(x_0,y_0)+A(x-x_0)+B(y-y_0)+o(\sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2}).$$

即 $z=f(x,y)$ 和平面 $z=f(x_0,y_0)+A(x-x_0)+B(y-y_0)$ 在 (x_0,y_0) 点相切.



可微与连续

- 定理：$z=f(x,y)$ 在 (x_0,y_0) 处可微，则 $z=f(x,y)$ 在 (x_0,y_0) 处连续.

  证明: $(x,y)\to(x_0,y_0)$ 时,

$$
\begin{aligned}
f(x,y)-f(x_0,y_0) &= A(x-x_0)+B(y-y_0) \\
&\qquad + o\left(\sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2}\right)\to 0.
\end{aligned}
$$

- 例：连续函数不一定可微: $f(x,y)=|x|+|y|$. $f(x,y)$ 在 $(0,0)$ 处的偏导数不存在, 因此不可微.

- 定理：若 $f(x,y)$ 在 (x_0,y_0) 附近两个偏导数存在，且 $f_x(x,y)$, $f_y(x,y)$ 在 (x_0,y_0) 点连续，则 $f(x,y)$ 在 (x_0,y_0) 处可微.
- 证明：

$$\begin{aligned}
\Delta z =& f(x_0+\Delta x, y_0+\Delta y) - f(x_0,y_0) \\
=& f(x_0+\Delta x, y_0+\Delta y) - f(x_0, y_0+\Delta y) \\
&+ f(x_0, y_0+\Delta y) - f(x_0,y_0) \\
=& f_x(x_0+\theta_1\Delta x, y_0+\Delta y)\Delta x + f_y(x_0, y_0+\theta_2\Delta y)\Delta y \\
=& f_x(x_0,y_0)\Delta x + f_y(x_0,y_0)\Delta y + \alpha_1\Delta x + \alpha_2\Delta y
\end{aligned}$$

可微与偏导数连续1

- 定理：若 $f(x,y)$ 在 (x_0,y_0) 附近两个偏导数存在，且 $f_x(x,y)$, $f_y(x,y)$ 在 (x_0,y_0) 点连续，则 $f(x,y)$ 在 (x_0,y_0) 处可微.
- 证明:

$$
\begin{aligned}
\Delta z =& f(x_0+\Delta x, y_0+\Delta y) - f(x_0,y_0) \\
=& f(x_0+\Delta x, y_0+\Delta y) - f(x_0, y_0+\Delta y) \\
&+ f(x_0, y_0+\Delta y) - f(x_0,y_0) \\
=& f_x(x_0+\theta_1\Delta x, y_0+\Delta y)\Delta x + f_y(x_0, y_0+\theta_2\Delta y)\Delta y \\
=& f_x(x_0,y_0)\Delta x + f_y(x_0,y_0)\Delta y + \alpha_1\Delta x + \alpha_2\Delta y
\end{aligned}
$$

- 证明(续): 其中

$$\alpha_1 = f_x(x_0 + \theta_1 \Delta x, y_0 + \Delta y) - f_x(x_0, y_0) \to 0$$

$$\alpha_2 = f_y(x_0 + \theta_1 \Delta x, y_0 + \Delta y) - f_y(x_0, y_0) \to 0$$

因为

$$\frac{|\alpha_1 \Delta x + \alpha_2 \Delta y|}{\rho} \leq |\alpha_1| + |\alpha_2| \to 0,$$

即得 $\alpha_1 \Delta x + \alpha_2 \Delta y = o(\rho)$.

- 推理: 若 $f \in C^1(D)$, 则 f 在 D 上可微.
- 对初等函数, 若 f 在 (x_0, y_0) 附近偏导数存在, 则 f 在 (x_0, y_0) 处可微.

可微与偏导数连续2

- 证明(续)：其中

$$\alpha_1 = f_x(x_0 + \theta_1 \Delta x, y_0 + \Delta y) - f_x(x_0, y_0) \to 0$$

$$\alpha_2 = f_y(x_0 + \theta_1 \Delta x, y_0 + \Delta y) - f_y(x_0, y_0) \to 0$$

因为

$$\frac{|\alpha_1 \Delta x + \alpha_2 \Delta y|}{\rho} \le |\alpha_1| + |\alpha_2| \to 0,$$

即得 $\alpha_1 \Delta x + \alpha_2 \Delta y = o(\rho)$.

- 推理: 若 $f \in C^1(D)$, 则 f 在 D 上可微.
- 对初等函数, 若 f 在 (x_0, y_0) 附近偏导数存在, 则 f 在 (x_0, y_0) 处可微.

- 注：可微函数函数偏导数不一定连续，如

$$f(x,y)=\begin{cases}(x^2+y^2)\sin\frac{1}{x^2+y^2}, & (x,y)\neq(0,0)\\ 0, & (x,y)=(0,0)\end{cases}.$$

则有

$$f_x(x,y)=\begin{cases}2x\sin\frac{1}{x^2+y^2}-\frac{2x}{x^2+y^2}\cos\frac{1}{x^2+y^2}, & (x,y)\neq(0,0)\\ 0, & (x,y)=(0,0)\end{cases}.$$

例

- 例：$f(x,y,z)=\left(\frac{y}{x}\right)^z$，由于 $f_x(1,2,-1)=\frac{1}{2}$，$f_y(1,2,-1)=-\frac{1}{4}$，$f_z(1,2,-1)=\frac{1}{2}\ln 2$，因此

$$df\big|_{(1,2,-1)}=\frac{1}{2}dx-\frac{1}{4}dy+\frac{1}{2}\ln 2dz.$$