2016年秋季学期线性代数第三次作业

开课学院：光华管理学院

授课老师：傅翔

截止日期：2016年12月20日

本次作业共13题，满分150分，作业成绩的10%将计入最终成绩。

1. （5分）A是实矩阵，证明以下命题等价： a) A 正交； b) A 的所有行组成标准正交基; c) A的所有列组成标准正交基.
2. （10分）求证对于方阵A, A奇异（det(A)=0）等价于adj(A)奇异.
3. （10分）在不展开的前提下证明下列矩阵行列式为零

$$\begin{bmatrix} 1 & a & b+c \\ 1 & b & a+c \\ 1 & c & a+b \end{bmatrix}$$

4. （10分）a) 设V是数域K上2阶对称矩阵构成的线性空间，求证dim(V)=3;
   b) 求n阶对称矩阵构成的线性空间维数.
5. （15分）求下列矩阵的秩

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & -1 \\ 2 & 6 & -3 & -3 \\ 3 & 10 & -6 & 5 \end{bmatrix}; \quad \begin{bmatrix} 1 & 3 & 1 & -2 & -3 \\ 1 & 4 & 3 & -1 & -4 \\ 2 & 3 & -4 & -7 & -3 \\ 3 & 8 & 1 & -7 & -8 \end{bmatrix}; \quad \begin{bmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 2 & 1 & 0 \\ -2 & -1 & 3 \\ -1 & 4 & -2 \end{bmatrix}.$$

6. （15分）若$\{w_1, w_2 \ldots w_r\}$是R^{n}中的一族正交向量. 对R^{n}中任意向量v，定义 $\mathrm{v}' = \mathrm{v} - \mathrm{c}_1\mathrm{w}_1 - \mathrm{c}_2\mathrm{w}_2 - \cdots - \mathrm{c}_r\mathrm{w}_r$,其中

$$\mathrm{c}_i = \frac{(\mathrm{v}, w_i)}{(w_i, w_i)}$$

   a) 求证对任意i，$(\mathrm{v}', w_i)=0$；
   b) 求证$\mathrm{c}_1\mathrm{w}_1 + \mathrm{c}_2\mathrm{w}_2 + \cdots + \mathrm{c}_r\mathrm{w}_r$是$\{w_1, w_2 \ldots w_r\}$生成的线性空间中与v相差最小的向量
7. （10分）求R^4中由$\mathrm{v}_1 = (1,1,1,1), \mathrm{v}_2 = (1,2,4,5), \mathrm{v}_3 = (1,-3,-4,-2)$张成子空间的一组标准正交基.
8. （15分）取R^5的子空间 U=span{(1,3,-2,2,3), (1,4,-3,4,2), (2,3,-1,-2,9)}, 求一组解空间为U的齐次线性方程组.
9. （5分）已知$\mathrm{A}_1, \mathrm{A}_2$是方阵，令$\mathrm{M} = \begin{bmatrix} \mathrm{A}_1 & \mathrm{B} \\ 0 & \mathrm{A}_2 \end{bmatrix}$
   求证M的特征多项式是$\mathrm{A}_1, \mathrm{A}_2$特征多项式的乘积.
10. （5分）求证0是A的特征值等价于A奇异.
11. （10分）A,B都是n阶方阵，求证AB和BA特征值相同.
12. （20分）令$\mathrm{A} = \begin{bmatrix} 1 & -3 & 3 \\ 3 & -5 & 3 \\ 6 & -6 & 4 \end{bmatrix}$
    a) 求A的特征值;
    b) 请问A是否可对角化，若可以，请给出将A对角化的矩阵.
13. （20分）令$\mathrm{A} = \begin{bmatrix} -3 & 1 & -1 \\ -7 & 5 & -1 \\ -6 & 6 & -2 \end{bmatrix}$
    求$\mathrm{A}^{100} - 9\mathrm{A}^{98} - 16\mathrm{A}^{97} - 36\mathrm{A}^{96} - 48\mathrm{A}^{95} + \mathrm{A}$. (提示：用 Cayley-Hamilton 定理)