高等数学期中试题

2014 -2015　学年第一学期

考试科目：高等数学B(上)　　　考试时间：2014 年11 月 5 日

姓　名:______________________　　学　号: _________________________

本试题共 6 道大题，满分 100 分

1. (每空 5 分, 共 50 分)

   (1) $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = a$ 的定义： __________________________________.

   (2) 求极限: $\lim\limits_{n\to\infty}(\sqrt[3]{n+1} - \sqrt[3]{n}) =$ _______.

   (3) 若实数 a 满足 $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x+2a}{x-a}\right)^x = 8$, 则 $a =$ _______.

   (4) 设函数 $y = \frac{1}{2x+3}$, 则它的 n 阶导数 $y^{(n)} =$ _______.

   (5) 已知 $F(x)$ 是 $f(x) = \arctan x^2$ 在 $\mathbb{R}$ 上的一个原函数, $y = F(\frac{3x-2}{3x+2})$, 则 $\frac{dy}{dx}\Big|_{x=0} =$ _______.

   (6) 若 $x \to 0$ 时, $(1-ax^2)^{\frac{1}{4}} - 1$ 与 $x\sin x$ 是等价无穷小, 则 $a =$ _______.

   (7) 求不定积分 $\displaystyle\int \frac{\cos 2x}{\cos^2 x \sin^2 x}dx =$ _______. 求定积分 $\displaystyle\int_0^2 x|1-x|dx =$ _______.

   (8) 函数 $y = \dfrac{x}{\sqrt{1-x^2}}$ 在 $x=0$ 处的二阶微分 $d^2y =$ _______.

   (9) $A = \displaystyle\int_{\frac{\pi}{8}}^{\frac{\pi}{4}} \ln\sin x dx, B = \int_{\frac{\pi}{8}}^{\frac{\pi}{4}} \ln\cot x dx, C = \int_{\frac{\pi}{8}}^{\frac{\pi}{4}} \ln\cos x dx$, A, B, C 的大小关系是 _______.

2. (10分) 设数列 $x_n > 0$ 满足 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{x_{n+1}}{x_n} = r < 1$, 证明 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = 0$.

3. (10分) 极限 $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{2+e^{\frac{1}{x}}}{1+e^{\frac{4}{x}}} + \dfrac{\sin x}{|x|}\right)$ 是否存在，若存在求出该极限。

4. (10分) 设 $f(x)$ 是 $[0,+\infty)$ 上定义的连续函数, 若有 $\displaystyle\int_0^{x^2(1+x)} f(t)dt = x$ 对任意的 $x \geq 0$ 成立, 求 $f(2)$ 的值.

5. (10分)讨论方程 $|x|^{\frac{1}{4}} + |x|^{\frac{1}{2}} - \cos x = 0$ 在 $\mathbb{R}$ 上的根的个数.

6. (10分) 已知函数 $f(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 内可导, $f(x) > 0$, 且 $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 1$, $\lim\limits_{h\to 0}\left(\frac{f(x+hx)}{f(x)}\right)^{\frac{1}{h}} = e^{\frac{1}{x}}$, 求 $f(x)$.

7. (10分)定义函数 $f(x)=\int_0^1 t|t-x|dt$, $x\in\mathbb{R}$. 求 $f(x)$.

8. (10分) 若 $f(x)$ 在 $x=x_0$ 的某个邻域上有定义，且极限 $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0-\Delta x)}{2\Delta x}$ 存在. 问： $f(x)$ 在 x_0 处是否一定可导？（给出证明或举出反例）.

————————2013————

9. (每空 4 分, 共 48 分)

(1) 设 $f(x)=\begin{cases}1-2x^2, & x\le 0\\ x^3+1, & x>0\end{cases}$, 则 $f(x)$ 的逆函数 $f^{-1}(x)=$ ______.

(2) 求极限: $\lim\limits_{x\to 0}\frac{3\sin x+x^2\cos\frac{1}{x}}{\ln(1+x)}=$ ______. $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{1+n^2}{n^2-2}\right)^{n^2}=$ ______.

(3) $f(x)=\begin{cases}\frac{\sin x}{x}e^{\frac{1}{x}}, & x\ne 0\\ 0, & x=0\end{cases}$, 则 $x=0$ 是第 ______ 类间断点.

(4) $\lim\limits_{x\to a+0}f(x)=\infty$ 的定义： ______.

(5) 设函数 $f(x)$ 在 $x=a$ 处可导, 且 $\lim\limits_{h\to 0}\frac{f(a-2h)-f(a+h)}{h}=1$, 则$f'(a)=$ ______.

(6) 设函数 $f(x)=\arctan e^x-\ln\sqrt{\frac{e^{2x}}{1+e^{2x}}}$, 则 $f'(1)=$ ______.

(7) 平面曲线 $\begin{cases}x=e^t\sin 2t\\ y=e^t\cos t\end{cases}$ 在 $(0,1)$ 处的切线方程为 ______.

(8) 设函数 $f(x)=\ln(x+\sqrt{1+x^2})$, 则 $f'''(\sqrt{3})=$ ______.

(9) 设函数 $f(x)$ 由方程 $2^{xy}=x+y$ 确定, 则 $dy|_{x=0}=$ ______.

(10) 求不定积分:$\int\sin^2\frac{x}{2}dx=$ ______. 求定积分：$\int_{-1}^1\frac{1}{x^2-9}dx=$ ______.

10. (10分) 若 $f(x)$ 是 $[0,1]$ 上不恒为零的非负连续函数, 证明 $\int_0^1 f(x)dx>0$.

11. (10分) 证明 $\lim\limits_{n\to+\infty}\sqrt[n]{n}=1$.

12. (12分) 若 f 在 $x=0$ 处可导，且 $|f(x)|\le|\sin x|$, 证明：$|f'(0)|\le 1$.

13. (10分) 设 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续, $x_i\in[a,b]$, $t_i>0(i=1,2,\cdots,n)$, 且 $\sum\limits_{i=1}^n t_i=1$. 证明至少存在一点 $\xi\in[a,b]$ 使得 $f(\xi)=\sum\limits_{i=1}^n t_if(x_i)$.

14. (10分) 设 $f(x)=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{\ln(e^n+x^n)}{n}$, $x\ge 0$. 求 $f(x)$, 并判断函数 $f(x)$ 是否连续.

————函数————-

15. 函数$y=\sqrt{\ln\frac{5x-x^2}{4}}$的定义域。

————-极限————

16. (每题5分, 共20 分)判断极限是否存在, 不存在时说明理由, 存在时求出极限.

(a) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x+x^2\sin\frac{1}{x}}{(1+\cos x)\ln(1+x)}$ (a) $\lim\limits_{n\to\infty}(1+\dfrac{1}{n})\sin\dfrac{n\pi}{2}$.

(a) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\cos x+\cos^2 x+\cdots+\cos^n x-n}{\cos x-1}$. (a) $\lim\limits_{x\to\infty}(\sin\dfrac{2}{x}+\cos\dfrac{1}{x})^x$.

(a) $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{2^x-4}{x-2}$ (b) $\lim\limits_{x\to 1}\tan\left(\dfrac{\sin\pi x}{4(x-1)}\right)$

(e) $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{\sin n+2}$ (f) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x^2+1}{x^2-1}\right)^{x^2}$

(c) $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{3}}\dfrac{\sin(x-\frac{\pi}{3})}{1-2\cos x}$ (d) $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[3]{n+1}-\sqrt[3]{n}$.

$\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{e^x-e^{-x}}{e^x+e^{-x}}$

$\lim\limits_{x\to-\infty}x(\sqrt{x^2+100}+x)$

$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x+x^2\sin\frac{1}{x}}{(1+\cos x)\ln(1+x)}$

(10) 若 $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{x+2a}{x-a}\right)^x=8$, 则 $a=$ _______.

17. (12分) 设数列 $x_n>0$ 满足 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{x_{n+1}}{x_n}=r<1$, 证明 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=0$.

18. (12分) 设 $a_n=\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}+\cdots+\frac{1}{n+n}$, 证明极限 $\lim\limits_{n\to\infty}a_n$ 存在, 并求该极限.

19. 判断题：若 $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=0$, 则有 $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_n}=0$.

20. 设数列$x_n>0$满足$\lim_{n\to\infty}\frac{x_{n+1}}{x_n}=r<1$,证明$\lim\limits_{n\to\infty}x_n=0$.

21. 极限$\lim\limits_{x\to 0}(\dfrac{2+e^{\frac{1}{x}}}{1+e^{\frac{4}{x}}}+\dfrac{\sin x}{|x|})$是否存在，若存在求出该极限。

———————-连续——————

22. (共10分)设 a,b 均为正实数，证明方程 $a\sin x+b=x$ 至少有一个不超过 $a+b$ 的正根.

23. (共10分) 证明方程 $x\cdot 2^x=1$ 至少有一个小于 1 的正根.

24. (共10分) 设 $f(x)$ 在$[a,b]$上连续，p,q是任意正实数证明方程在(a,b)内至少存在一点ξ, 使得 $pf(a)+qf(b)=(p+q)f(\xi)$ 的正根.

25. 设$f(x)=\lim_{n\to\infty}\frac{\ln(e^x+x^n)}{n}$, 求$f(x)$, 并判断函数$f(x)$是否连续.

26. 判断题：若$|f(x)|$连续, 则$f(x)$也连续.

27. (共10分) 设 $f(x)$ 是 $[0,+\infty)$ 上定义的连续函数, 若有 $\int_0^{x^2(1+x)} f(t)dt = x$ 对任意的 $x \geq 0$ 成立, 求 $f(2)$ 的值.

28. 判别间断点：$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{e^{\frac{x}{x-1}}-1}, & x \neq 0,1 \\ 0, & x = 0,1 \end{cases}$

29. 讨论方程$|x|^{\frac{1}{4}} + |x|^{\frac{1}{2}} - \cos x = 0$在$\mathbb{R}$上的根的个数.

30. 设$f(x)$是$[a,b]$上的正连续函数，证明存在$\xi \in [a,b]$，使得$f(\xi) = \sqrt{f(a)f(b)}$.

————导数和微分———-

31. 设$y = y(x)$由方程$x^{y^2} + y^2 \ln x - 4 = 0$所确定，求$y'$.

32. 设$y = y(x)$由方程$2^{xy} = x + y$所确定，求$dy|_{x=0}$.

33. 设函数$y = \frac{1}{2x+3}$, 则$y^{(n)} =$

34. 设$f(x) = \begin{cases} x \arctan \frac{1}{x^2}, & x \neq 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases}$. 讨论$f'(x)$在$x = 0$处的连续性.

35. 已知$F(x)$是$f(x) = \arctan x^2$的一个原函数, $y = F(\frac{3x-2}{3x+2})$, 则$\frac{dy}{dx}\Big|_{x=0} =$

36. 设$y = y(x)$由方程组$\begin{cases} x = 3t^2 + 2t + 3 \\ e^y \sin t - y + 1 = 0 \end{cases}$ 所确定，求$\frac{dy}{dt}$, $\frac{d^2y}{dt^2}\Big|_{t=0}$.

37. 设曲线的参数方程为$\begin{cases} x = (1 - \cos\theta)\cos\theta, \\ y = (1 - \cos\theta)\sin\theta \end{cases}$,求$\theta = \frac{\pi}{6}$处的切线的直角坐标方程.

38. 过$(2,0)$向曲线$y = x^3$作切线, 求切线方程。

39. 证明曲线$x^{\frac{1}{2}} + y^{\frac{1}{2}} = 1$上任意一点的切线所截两个坐标轴上的截距之等于1.

40. (每题6分, 共18分)

    (a) $f(x) = \dfrac{2^x}{\log_2 x}$, 求$f'(2)$.

    (c) 平面曲线$x = t\cos t$, $y = t\sin t$在点$(0, \frac{\pi}{2})$处的切线斜率.

    (d) 求函数 $y = \dfrac{x}{\sqrt{1-x^2}}$ 在 $x = 0$ 处的二阶微分.

    (e) 设$y = \arctan(e^x) - \ln\sqrt{\frac{e^{2x}}{1+e^{2x}}}$, 则$f'(1) =$

41. (每题8分,共24分)判断下面命题是否正确, 要求给出证明或举出反例.

    (a) 若$f(x)$, $g(x)$在区间(a,b)可导, 且$f(x) \leq g(x)$, 则$f'(x) \leq g'(x)$.

(b) 若 $f(x)$, 在 $x=x_0$ 的某个邻域上有定义，若极限 $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0-\Delta x)}{2\Delta x}$存在, 则 $f(x)$ 在x_0处可导.

(c) 若 $f(x)$ 在 $x=x_0$ 的某个邻域上有定义, 且在 x_0 点的左导数和右导数均存在，则 $f(x)$ 在 x_0 处连续.

(d) 若 $f(x)$ 在 $x=x_0$ 的某个邻域上有定义，且极限

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0-\Delta x)}{2\Delta x}$$

存在, 则 $f(x)$ 在 x_0 处可导.

42. $f(x)$是$(-1,1)$上定义的偶函数, 且在0点可微证明$f'(0)=0$.

43. (共10分) 若f在$x=0$处可导，且$|f(x)|\le|\sin x|$, 证明：$|f'(0)|\le 1$.

44. 若$x\to 0$时, $(1-ax^2)^{\frac{1}{4}}-1$与$x\sin x$是等价无穷小, 则$a=$

45. 若$x\to 0$时$(1-\cos x)\ln(1+x^2)$, $x\sin x^2$, $e^{x^2}-1$分别是x的多少阶无穷小

46. 已知函数$f(x)$在$(0,+\infty)$内可导, $f(x)>0$, 且$\lim_{x\to+\infty}f(x)=1$, $\lim_{h\to 0}[\frac{f(x+hx)}{f(x)}]^{\frac{1}{h}}=e^{\frac{1}{x}}$, 求$f(x)$.

47. 设$f(x)$在$x=0$的某个邻域内可导。求a,b使得$af(x)+bf(2x-f(0))=o(x)$, $x\to 0$.

48. $e^x(1+bx+cx^2)=1+ax+0(x^3), x\to 0$, 求$a,b,c$

49. $f(x)=x(1-x^2)$, $0\le x\le 1$. $f(x+1)=2f(x)$, 讨论f在$x=0$处的可导性。

————-定积分与不定积分———

50. (10分) 设 $f(x)=\begin{cases}2x\sin\frac{1}{x}-\cos\frac{1}{x}, & x\neq 0\\ 0, & x=0\end{cases}$,

    a. 函数 $f(x)$ 在 $[-1,1]$ 上是否连续性？

    b. $f(x)$ 在 $[-1,1]$ 是否黎曼可积？若可积，求出 $\int_{-1}^{1}f(x)dx$。

51. 曲线过$(e^2,3)$, 且任意点处的切线斜率等于该点横坐标的倒数，求该曲线。

52. (12分) 函数 $|\cos x|$ 在 $(0,\pi)$ 上是否有原函数? 若有, 给出一个原函数; 若没有, 给出理由.

53. (10分) 证明 $\int_0^{2\pi}e^{-x^2}\sin x dx>0$.

54. $\frac{d}{dx}\int_{x^2}^{0}x\cos t^2dt=$

55. $\int_0^1 x|t-x|dt$

56. (每题6分,共18分)求积分

(a) $\int \frac{1}{1-\cos 2x}dx.$ (b) $\int e^{-|x|}dx.$ (c) $\int_1^2 \frac{1}{\sqrt{x-1}-\sqrt{x+1}}dx.$

(d) $\int \frac{\cos 2x}{\cos^x \sin^2 x}dx$ (d) $\int \frac{3x^4+3x^2+1}{x^2+1}dx$

57. 设$f(x), g(x)$在有限区间$[a,b]$上黎曼可积，证明

$$\int_a^b f(x)g(x)dx \le \frac{1}{2}\Big(\int_a^b f(x)^2dx + \int_a^b g(x)^2dx\Big).$$

58. 设$f(x)$是有限区间$[a,b]$上的连续函数，对任意$[a,b]$上的连续函数$g(x)$, 都有$\int_a^b f(x)g(x)dx = 0$，则有$f(x) \equiv 0$.

59. 设$f(x) = \begin{cases} 2x\sin\frac{1}{x} - \cos\frac{1}{x}, & x \neq 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases}$, 函数$f(x)$在$[-1,1]$是否连续性？是否黎曼可积？若可积，求出$\int_{-1}^1 f(x)dx$。

——————综合题——————

60. 设$f(x) = \begin{cases} x\sin\frac{1}{x}, & x \neq 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases}$, 考虑函数$f(x)$在$[-1,1]$上的连续性，可微性，黎曼可积性, 在$(-1,1)$上是否存在原函数？

61. 设$f(x) = \lim_{n\to\infty} \frac{x^2e^{n(x-1)}+ax+b}{1+e^{n(x-1)}}$. 讨论$f(x)$的连续性和可导性。