

1. 证明：只要适当地排列顶点的次序，就能使有向无环图的邻接矩阵中主对角线以下的元素全部为 0。
2. Dr. Stranger 的电脑染上了一种特殊的病毒，该病毒发作时会将字母用其他字母代替，但不会将单词顺序交换，也不会产生新的字母。在病毒发作前文档 D 中的单词顺序为字典排序（比如在字典序下单词 ab 会排在单词 ac 前），且文档 D 中所有的单词只由字母集合 {a, b, c, d, e} 中的字母组成，病毒发作后文档 D 中的所有单词顺序如下：{cebdbac, cac, ecd, dca, aba, bac}，求文档 D 在病毒发作前的内容，并说明解题思路和步骤。
3. Toole 教授提出了一种新的分治算法来计算最小生成树，该算法是这样的：给定一个图 $G=(V, E)$ ，将顶点集合 V 划分成两个集合 V_1 和 V_2 ，使得 $|V_1|$ 和 $|V_2|$ 至多差 1。设 E_1 为一个边集，其中的边都与 V_1 中的顶点关联， E_2 为另一个边集，其中的边都与 V_2 中的顶点关联。在两个子图 $G_1=(V_1, E_1)$ 和 $G_2=(V_2, E_2)$ 上，分别递归地解决最小生成树问题。最后，从 E 中选择一条通过割 (V_1, V_2) （两个端点分别在 V_1 和 V_2 上）的最小权边，并利用该边，将所得的两棵最小生成树合并成一棵完整的生成树。请论证该算法能正确地计算出 G 的最小生成树，或者给出一个使该算法不能正确工作的例子。
4. 单源最短路径问题中，当路径中存在负权边时(不存在负权回路)不可以使用 Dijkstra 算法：（注：题中分析时间复杂度时，默认存储结构是邻接表，且使用最小堆存储源点到各点的路径值）
 - a) 一种想法是：先在每条边上加上一个常数，从而消除负权边，然后再利用 Dijkstra 算法。请问这种算法可行吗？若可行，请说明理由并分析时间复杂度；若不可行，请举反例。
 - b) 另外一种想法是：利用 Dijkstra 算法，在算法运行过程中，若 w 已经在 S 中，但是由于与 w 相邻的点加入 S 中而新计算得到的 $\text{dist}[w]$ 比 S 中存储的 $\text{dist}[w]$ 还要小，那么将 w 从 S 中剔除，重新加入未知集合 T 中。请问这种算法可行吗？若可行，请说明理由并分析时间复杂度；若不可行，请举反例。
5. 套汇是指利用汇率差异将一个单位的货币转换为大于一个单位的同种货币。例如，假设 1 美元兑换 7.51 人民币，1 元人民币兑换 0.07 英镑，1 英镑兑换 2.03 美元，那么如果一个人拿 1 美元先兑换成人民币，再把人民币兑换成英镑，最后把英镑兑换成美元，则他最后能够得到 $1 \times 7.51 \times 0.07 \times 2.03 = 1.07$ 美元，从而获得 $1.07 - 1 = 0.07$ 美元的利润，这就是套汇。假设有 n 种货币 v_1, v_2, \dots, v_n 和有关汇率的 $n \times n$ 矩阵，其中 $A[i, j]$ 是一单位货币 v_i 兑换成货币 v_j 的单位数，要求设计一个程序判断是否存在一个货币序列 $v_{i_1}, v_{i_2}, \dots, v_{i_k}$ 使得 $A[i_1, i_2] \times A[i_2, i_3] \times \dots \times A[i_k, i_1] > 1$ ，并确定算法的时间复杂度。