第五章、时间序列分析基础

- 金融市场中拥有大量的交易数据
- 绝大多数的金融数据都表现为按一定时间间隔记录的离散型时间序列数据
  - 资产的价格 、利率水平、汇率、投资收益
- 八十年代之前，对时间序列的研究主要集中在对平稳时间序列的研究
- 近二十年来，对非平稳时间序列的理论研究和实际应用各方面都发生了重大的突破

第五章、时间序列分析基础

5．1 时间序列基本概念

5．1．1 时间序列

- 一随机过程x按固定时间间隔取值而得到的序列 { x_t }，t=1, 2, ….，称为时间序列

1954年7月至2002年12月美国一年期和十年期利率月度时间序列

$$x_t = 趋势 + 季节(周期) + 平稳部分 + 干扰项$$

- 任何一个时间序列都由是下面四种形态的其中之一、二、三种或全部形态构成
  - 第一种形态是趋势(**trend**)
  - 第二种形态是周期或季节变动(**cycle or seasonal variations**)
  - 第三种形态是序列之间的短期相依或平稳序列的自相关和滑动平均变化关系（**ARMA**）
  - 第四种形态是不规则的波动或干扰项(**irregular fluctuations**)
- 要研究和讨论的任何一个时间序列都至少包含前三个部分中的一个部分
- 绝大部分时间序列模型都是针对第三种形态而建立
- 先需要熟悉对时间序列进行描述的一些比较重要的术语

5．1．2 平稳时间序列

- 要对序列进行分析，需要利用序列不同时期之间的观测值之间的关系
- 对不同时期观测值之间的关系进行一些限制

横截面数据的样本是独立同分布的

很自然的要求是给定的时间序列在不同的取值点有相同的期望值和方差;

考虑前后观测值彼此之间的关系，观测值在相同的间隔长度之间具有相同的相关系数

两种方式来给出时间序列平稳的定义，分别称为严平稳和宽平稳

- 严平稳的定义：若对任意给定的自然数**k,h**有

$$F(x_{t_1},\ldots,x_{t_k})=F(x_{h+t_1},\ldots,x_{h+t_k})$$

- 即时间序列在某一时段上的联合分布函数不随时段的变化而改变，则称时间序列是严平稳的时间序列（或称严平稳过程）
- 宽平稳的定义：若时间序列中的任意一个随机变量都存在有限的一、二阶矩且与**t**无关，即对任意的自然数**t,k**有

7

$$E[x_t]=E[x_{t-k}]=\mu<\infty \quad E[(x_t-\mu)^2]=E[(x_{t-s}-\mu)^2]=\sigma_x^2<\infty$$

$$E[(x_t-\mu)(x_{t-k}-\mu)]=\gamma(k)$$

- 则称时间序列$\{x_t\}$为宽平稳的时间序列（或称宽平稳过程）
- 当时间序列$\{x_t\}$中的每一个随机变量都存在一、二阶矩时，严平稳过程一定是宽平稳过程
- 宽平稳过程不一定能满足严平稳过程的条件，有的严平稳过程不一定存在二阶矩，所以严平稳过程并不一定都是宽平稳过程

8

- 白噪声过程是宽平稳过程，对正态过程来说宽平稳过程与严平稳过程是等价的。
- 在后面的讨论中都是指宽平稳过程
- 考虑下面的一阶滑动平均模型**MA(1)**

$$x_t=r_0+r_1\varepsilon_{t-1}+\varepsilon_t$$

- 对任给的**t**总有 $E[\varepsilon_t]=0$

$$E[x_t]=r_0+r_1E[\varepsilon_{t-1}]+E[\varepsilon_t]=r_0$$

$$Var[x_t]=r_1^2Var[\varepsilon_{t-1}]+Var[\varepsilon_t]+2r_1Cov[\varepsilon_t,\varepsilon_{t-1}]=(1+r_1^2)\sigma_x^2$$

$$E[(x_t-\mu)(x_{t-1}-\mu)]=r_1E[\varepsilon_{t-1}^2]=r_1\sigma_x^2$$

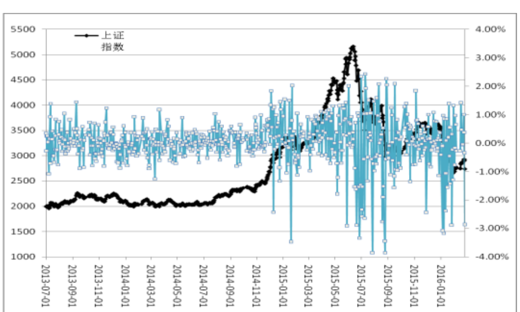
- 综合上面可得的一、二阶矩是与时间**t**无关的常数，所以一阶滑动平均模型**MA(1)**是宽平稳的时间序列

9

- 面对实际问题，通常是时间序列的一段观测数值
- 序列是否是平稳的，需要验证它的期望、方差和自相关系数在不同的观测时段是相同的
- 例5．2，上证指数**2013**年**7**月至**2016**年**2**月数据得到的指数和日度收益率时间序列
- 把样本划分为前后两个时段来考察序列在两个时段是否有相同的一、二阶矩；
- 均值分别为：**0.0247%**，**0.0193%**；
- 标准差分别为：**0.4115%**，**1.047%**；
- 一阶自相关系数：**0.088**，**0.079**。

10

上证指数的日度收盘价格和收盘收益率时间序列



11

- 样本均值和样本方差的差异性检验分别使用类似横截面数据的 **t** 检验和**F** 检验
- 使用估计的方差来构造两组之间不同方差的组间均值检验统计量
- 零假设为：$H_0:\mu_1=\mu_2$
- 检验的统计量

$$\mathrm{T}=\frac{\mu_1+\mu_2}{\sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n_1}+\frac{\sigma_2^2}{n_2}}}=\frac{(0.0247-0.0193)}{\sqrt{(0.4115/34\,0+1.047/300)}}=\frac{0.0054}{0.19}=0.03$$

- 对两组样本估计的方差是否存在显著的差异，检验的**F**统计量为

$$\mathrm{F}=\frac{\frac{1}{\mathrm{n}_1}\sum_{i=1}^{n_1}(x_i-\mu_1)^2}{\frac{1}{\mathrm{n}_2}\sum_{i=1}^{n_2}(x_i-\mu_2)^2})=\frac{1.047}{0.4115}=2.54$$

- 自由度为**340,300**的**F**检验在**1%**水平的临界值为**1.33** 12

5．1．3 自相关函数

- 序列中任意两个取值的协方差为

$$Cov(x_t, x_{t-k}) = E[(x_t - \mu)(x_{t-k} - \mu)]$$

- 时间序列中随机变量之间的对时间的依存性,对任给的自然数**k** $E[(x_t - \mu)(x_{t-k} - \mu)] / E[(x_t - \mu)^2] = \rho(k)$

定义为时间序列的**k**阶自相关函数

- 给定平稳时间序列，其观测样本为 $x_1, x_2 \cdots, x_T$
- 它的**k**阶样本自协方差系数为

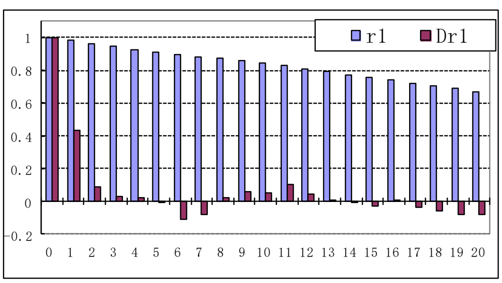
$$\hat{\gamma}(k) = \tfrac{1}{T-k}\sum_{t=1}^{T-k}(x_t - \mu_T)(x_{t+k} - \mu_T), \qquad \mu_T = \tfrac{1}{T}\sum_{t=1}^{T} x_t$$

- 时间序列的**k**阶自相关系数为 $\hat{\rho}_k = \hat{\gamma}(k) / \hat{\gamma}(0)$

- **表5．1 1954年7月至2002年12月美国1年期利率月度利率和变化率的样本自相关系数**

自相关系数	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
利率	0.987	0.966	0.946	0.929	0.914	0.896	0.881	0.871	0.860	0.845
Δ利率	0.436	0.088	0.031	0.025	-0.004	-0.111	-0.077	0.021	0.057	0.056
自相关系数	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
利率	0.829	0.810	0.793	0.775	0.756	0.740	0.724	0.707	0.689	0.671
Δ利率	0.108	0.047	0.011	-0.007	-0.029	0.000	-0.037	-0.055	-0.083	-0.076

图5．2 1954年7月至2002年12月美国1年期利率月度利率和变化率的样本自相关系数



5．1．4 遍历性 (Ergodicity)

- 计算时间序列的均值时使用的是 $\mu_T = \frac{1}{T}\sum_{t=1}^{T} x_t$
- 这一概念只有当时间序列具有遍历性的时候才成立。
- 时间序列称对其均值具有遍历性，若当T趋向无穷大时 $\mu_T = \frac{1}{T}\sum_{t=1}^{T} x_t$ 依概率收敛 $E[x_t]$
- 对均值具有遍历性，要求序列的k阶自相关系数随k增大尽快地趋于零。即自相关系数满足条件 $\sum_{j=0}^{\infty} |\rho_j| < \infty$

- 平稳时间序列称为对其二阶矩具有遍历性，如果当**T**趋向于无穷大时，对任给的**j**有

$$\tfrac{1}{T-k}\sum_{t=1}^{T-k}(x_t - \mu)(x_{t+k} - \mu) \xrightarrow{P} \gamma(k)$$

- 时间序列的许多应用中对平稳性和遍历性的要求几乎是同等重要的
- 考虑下面的一个例子
- 假定时间序列第**i**次实现值的均值是 $\mu^{(i)}$
- 服从正态分布 $N(0, \lambda^2)$ 即对时间序列的第**i**次试验观测序列为 $x_t^{(i)} = \mu^{(i)} + \varepsilon_t$

- 注意到 $\mu_t = E[\mu^{(i)}] + E[\varepsilon_t] = 0$

$$\gamma(0) = E[(\mu^{(i)} + \varepsilon_t)^2] = \lambda^2 + \sigma^2$$

$$\gamma(j) = E[(\mu^{(i)} + \varepsilon_t)(\mu^{(i)} + \varepsilon_{t-j})^2] = \lambda^2$$

- 综上所述，所给的时间序列是平稳的。但它并不满足条件 $\sum_{j=0}^{\infty} |\rho_j| < \infty$
- 所以对其均值不具有遍历性。事实上

$$\tfrac{1}{T}\sum_{t=1}^{T} x_t^{(i)} = \tfrac{1}{T}\sum_{t=1}^{T}(\mu^{(i)} + \varepsilon_t) = \mu^{(i)} + \tfrac{1}{T}\sum_{t=1}^{T}\varepsilon_t = \mu^{(i)} \neq \mu_t = 0$$

$$\sum_{j=0}^{\infty} |\rho_j| = \sum_{j=0}^{\infty} |\gamma(j)/\gamma(0)| = \sum_{j=0}^{\infty} \left|\frac{\lambda^2}{\lambda^2 + \sigma^2}\right| \to \infty$$

5．2时间序列模型类别介绍

- 5．2．1．时间序列的阶
- 5．2．2．整型时间序列和分型时间序列
- 5．2．3．单整型和协整型时间序列
  - 平稳时间序列
  - 非平稳时间序列
    - 整型时间序列
    - 分型时间序列
  - 整型时间序列
    - 单整型时间序列
    - 协整型时间序列

19

5．2．1．时间序列的阶

- 后置算子，即 $Lx_t = x_{t-1}$ 有下面的一些性质
- 1）对常数的作用不变 $Lc = c$
- 2）满足分配率 $(L^i + L^j)x_t = L^i x_t + L^j x_t = x_{t-i} + x_{t-j}$
- 3）满足结合率 $L^i(L^j(x_t)) = L^i(x_{t-j}) = x_{t-i-j} = L^{i+j}x_t$
- 4）算子的指数为负时变为前置算子 $L^{-i}(x_t) == x_{t+i}$
- 5）对任给的 $|a|<1$，无限求和式

$$(1 + aL + a^2L^2 + \cdots)x_t = x_t/(1-aL)$$

- 6）对任给的 $|a|>1$，无限求和

$$(1 + (aL)^{-1} + (aL)^{-2} + \cdots)x_t = -aLx_t/(1-aL)$$

20

非平稳时间序列通过差分整形变为平稳

- 后置算子可以定义一个差分算子 $\Delta = 1 - L$
- 若时间序列{ x_t }经过差分运算之后所得到的新时间序列{ x_t }是平稳的时间序列则称原序列{ x_t 为一阶整形的时间序列
- 一般地，若时间序列{ x_t }至少经过n差分运算之后所得到的新时间序列{ x_t }才是平稳的时间序列，则称原序列{ x_t }为n阶整形的时间序列，记为I(n)

21

5．2．2．整型时间序列和分型时间序列

- 是否每一个非平稳的时间序列都一定存在一个自然数n使其通过n次差分变换之后成为一个平稳过程呢？
- 当一个非平稳的时间序列不能通过整数n次差分整形而变成平稳过程时，我们就得到了分型过程
- 把差分运算中的差分次树放宽为可以取实数d，即进行d次整形时，我们就可以定义分型过程
- 根据自相关函数衰减速度来划分
- 分型过程也称为长记忆(Long memory)过程

22

5．2．3．单整型和协整型时间序列

- 当只对某一个具体的整形时间序列进行分析时，通常也称为单整形分析方法。对单位根过程的分析和检验方法就是单整形分析方法的核心内容；对时间序列的趋势分析也在这一范畴之内
- 当同时涉及到多个整形时间序列的分析时，时间序列之间存在的长期均衡关系是一个非常重要的关系，协整分析方法在此发挥着极其关键的作用
- 涉及到非平稳时间序列的变量，则有可能会出现序列整型的问题。需要序列之间具有协整关系
- 如果协整关系不存在则可能出现伪回归的问题

23

图5．3 时间序列模型分类结构

- 时间序列
  - 时域分析
    - 平稳序列
      - 自回归序列
      - 滑动平均序列
      - 自回归滑动平均
      - 状态方程
      - 向量自回归
    - 非平稳序列
      - 随机趋势
        - 整型
          - 单整(单位根)
          - 协整分析
          - 伪回归
        - 分型(长记忆过程)
      - 确定趋势
    - 非线性时间序列
      - 异方差模型
      - 门限自回归
      - 非参数自回归滑动平均
    - 季节性调整
  - 频域分析(谱分析)

24

5．3．平稳时间序列

- 5．3．1 滑动平均模型
- 滑动平均模型的原理
- 假定{ ε_t }为一个白噪声序列，令

$$x_t = \mu + \varepsilon_t + \theta\varepsilon_{t-1}$$

则称{ x_t }为一阶滑动平均序列，记为**MA(1)**

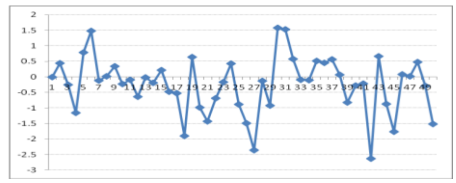
序列的期望值为 $E[x_t] = \mu$

方差为 $Var[x_t] = E[(\varepsilon_t + \theta\varepsilon_{t-1})^2] = (1+\theta^2)\sigma^2 = \gamma(0)$

一阶自相关系数为

$$\rho_1 = \gamma(1)/\gamma(0) = \frac{\theta\sigma^2}{(1+\theta^2)\sigma^2} = \frac{\theta}{(1+\theta^2)}$$

- 一阶滑动平均序列是平稳的和对各阶矩都具有遍历性的
- 由于 $\frac{1/\theta}{(1+(1/\theta)^2)} = \frac{1/\theta}{(\theta^2+1)/\theta^2} = \frac{\theta}{(\theta^2+1)}$ ，所以对任何一个给定的 ρ_1，同时有两个系数互为倒数的滑动平均模型与之对应
- 例5．5，一个滑动平均模型为：$x_t = \varepsilon_t + 0.2\varepsilon_{t-1}$



q阶滑动平均模型

- q阶滑动平均模型的动态变化原理
- 假定{ ε_t }为一个白噪声序列，则定义序列为

$$x_t = \mu + \varepsilon_t + \theta_1\varepsilon_{t-1} + \theta_2\varepsilon_{t-2} + \cdots + \theta_q\varepsilon_{t-q}$$

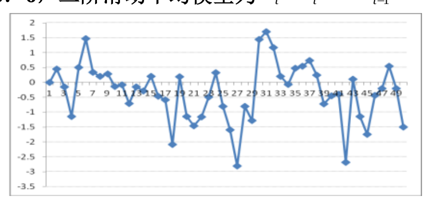
- 则称{ x_t }为q阶滑动平均序列，记为**MA(q)**
- 方差为 $Var[x_t] = E[(\varepsilon_t + \theta_1\varepsilon_{t-1} + \theta_2\varepsilon_{t-2} + \cdots + \theta_q\varepsilon_{t-q})^2]$

$$= (1+\theta_1^2+\theta_2^2+\cdots+\theta_q^2)\sigma^2 = \gamma(0)$$

- 自协方差为

$$\gamma(j) = \begin{cases} \theta_j + \theta_{j+1}\theta_1 + \theta_{j+2}\theta_2 + \cdots \theta_q\theta_{q-j} & 当 j = 1,2,\cdots q \\ 0 & 当 j > q \end{cases}$$

例5．6，二阶滑动平均模型为 $x_t = \varepsilon_t + 0.3\varepsilon_{t-1} + 0.2\varepsilon_{t-2}$



无穷阶滑动平均序列 $x_t = \mu + \sum_{j=0}^{\infty}\theta_j\varepsilon_{t-j} = \mu + \theta_1\varepsilon_{t-1} + \theta_2\varepsilon_{t-2} + \cdots$

滑动平均系数需要满足条件

$$\sum_{j=0}^{\infty}|\theta_j| < \infty$$

5．3．2 自回归模型

- 一阶自回归模型的动态结构
- 假定{ ε_t }为一个白噪声序列，令

$$x_t = c + \phi x_{t-1} + \varepsilon_t$$

- 则称{ x_t }为一阶自回归序列，记为**AR(1)**
- 可以验证序列是平稳的和对均值具有遍历性
- 通过反复迭代

$$x_t = c + \varepsilon_t + \phi(c+\varepsilon_{t-1}) + \phi^2(c+\varepsilon_{t-2}) + \phi^3(c+\varepsilon_{t-3}) + \cdots$$

$$= c/(1-\phi) + \varepsilon_t + \phi\varepsilon_{t-1} + \phi^2\varepsilon_{t-2} + \phi^3\varepsilon_{t-3} + \cdots$$

- 上式所表示的是无穷阶的滑动平均模型，其系数为 $\psi_j = \phi^j$
- 当系数 $|\phi| < 1$ 时，滑动平均序列的遍历性条件为 $\sum_{j=0}^{\infty}|\psi_j| < \sum_{j=0}^{\infty}|\phi|^j = 1/(1-|\phi|) < \infty$
- 序列的均值为 $E[x_t] = c/(1-\phi) + 0 + \cdots = c/(1-\phi) = \mu$
- 方差为 $Var[x_t] = E[(x_t - \mu)^2]$

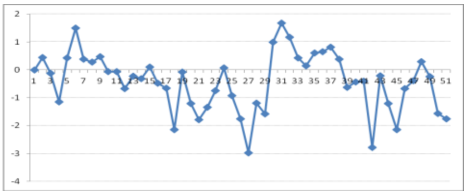
$$= (1+\phi^2+\phi^4+\phi^6+\cdots)\sigma^2 = \sigma^2/(1-\phi^2) = \gamma(0)$$

- 第j（j>1）阶自协方差为

$$\gamma(j) = \phi^j(1+\phi^2+\phi^4+\phi^6+\cdots)\sigma^2 = \sigma^2\phi^j/(1-\phi^2)$$

- j阶自相关系数为 $\rho_j = \gamma(j)/\gamma(0) = \phi^j$

例5．7，一阶自回归模型 $x_t = 0.3x_{t-1} + \varepsilon_t$



p阶自回归序列

- P阶自回归模型的动态结构
- 假定$\{\varepsilon_t\}$为一个白噪声序列，令

$$x_t = c + \phi_1 x_{t-1} + \phi_2 x_{t-2} + \cdots + \phi_p x_{t-p} + \varepsilon_t$$

- 则序列$\{x_t\}$为p阶自回归序列
- 当方程 $1 - \phi_1 z - \phi_2 z^2 - \cdots - \phi_p z^p = 0$ 的根都在单位圆外时，p阶自回归序列是平稳的
- p阶自回归序列的期望

$$E[x_t] = \mu = c + \phi_1\mu + \phi_2\mu + \cdots + \phi_p\mu$$
$$\mu = c/(1 - \phi_1 - \phi_2 - \cdots - \phi_p)$$

- 自协方差函数为

$$\gamma(j) = \begin{cases} \phi_1\gamma(j-1) + \phi_2\gamma(j-2) + \cdots + \phi_p\gamma(j-p) & \text{当} j = 1,2,\cdots \\ \phi_1\gamma(1) + \phi_2\gamma(2) + \cdots + \phi_p\gamma(p) + \sigma^2 & \text{当} j = 0 \end{cases}$$

- 对上式同除以方差可以得到用自相关系数表示的Yule-Walker方程

$$\rho_j = \phi_1\rho_{j-1} + \phi_2\rho_{j-2} + \cdots + \phi_p\rho_{j-p} \qquad j = 1,2,\cdots$$

- 定义

$$P_p = \begin{bmatrix} 1 & \rho_1 & \rho_2 & \cdots & \rho_{p-1} \\ \rho_1 & 1 & \rho_1 & \cdots & \rho_{p-2} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ \rho_{p-1} & \rho_{p-2} & \rho_{p-3} & \cdots & 1 \end{bmatrix}$$

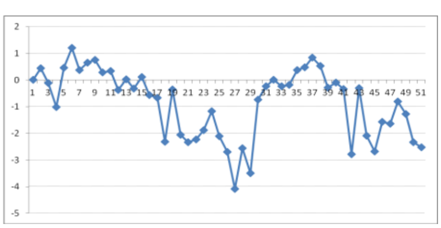
- 可以表示为向量形式 $\Phi = P_p^{-1}\rho$
- p阶自回归序列的自协方差系数和自相关系数与时间序列本身具有同样形式的方程。

- 假定多项式 $\lambda^p - \phi_1\lambda^{p-1} - \phi_2\lambda^{p-2} - \cdots - \phi_p = 0$

的特征根分别为（$\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_p$），则自协方差的解具有以下形式

$$\gamma(j) = g_1\lambda_1^j + g_2\lambda_2^j + \cdots + g_p\lambda_p^j$$

例5．8，二阶自回归模型为 $x_t = 0.3x_{t-1} + 0.2x_{t-2} + \varepsilon_t$



5.3.3 滑动平均模型的可逆性

- 对给定自相关系数的一个滑动平均模型，存在两个系数互为倒数的模型。
- 如果我们在MA(1)的两边同时除以$(1-\theta L)$，可变形为一自回归序列 $\varepsilon_t = \mu + x_t + \theta x_{t-1} + \theta^2 x_{t-2} + \cdots$
- 这一序列只有在时才是平稳的。所以对滑动平均序列来说，为使序列对不同的表示形式都有意义，需要对其系数进行限制才能使其可以进行变化，这一条件就是滑动平均模型的可逆性条件。对一般的滑动平均序列MA(q)其可以性条件为 $\Psi(L) = 0$ 的根都在单位圆之外

5.3.4 偏相关系数

- 在AR（1）序列中，x_t 与 x_{t-2} 的相关性可以看做是偏效应为零，因为 $\rho_2=(\rho_1)^2$
- 偏相关系数所表示考虑了 x_{t-1} 到 x_{t-k+1} 的影响后，x_{t-k} 对 x_t 的偏效应
- 得到偏相关系数的方法是从所给序列中首先得到去除均值的新序列 { $x_t^*=x_t-\mu$ } 然后给出一个一阶自回归 $x_t^*=\phi_{11}x_{t-1}^*+e_t$
- ϕ_{11} 即是 x_t 与 x_{t-1} 之间的相关系数，也是它们之间的偏相关系数

- 再给出二阶的自回归方程

$$x_t^*=\phi_{21}x_{t-1}^*+\phi_{22}x_{t-2}^*+e_t$$

- ϕ_{22} 就是 x_t 与 x_{t-2} 之间的偏相关系数，
- x_t 与 x_{t-2} 之间的偏相关系数就是考虑了 x_{t-1} 的影响之后的关系。
- 不断地重复这一过程可得到直到k阶的偏相关系数 $\phi_{kk}=\phi(k)$
- 对一个AR(p)过程，使用Yule-Walker方程的方法来得到其偏相关函数的计算

$$\rho_j=\phi_{k1}\rho_{j-1}+\phi_{k2}\rho_{j-2}+\cdots+\phi_{kk}\rho_{j-k}\quad j=1,2,\cdots,k$$

$$\begin{bmatrix}\rho_1\\ \rho_2\\ \vdots\\ \rho_k\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1 & \rho_1 & \rho_2 & \cdots & \rho_{p-1}\\ \rho_1 & 1 & \rho_1 & \cdots & \rho_{p-2}\\ \vdots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots\\ \rho_{p-1} & \rho_{p-2} & \rho_{p-3} & \cdots & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\phi_{k1}\\ \phi_{k2}\\ \vdots\\ \phi_{kk}\end{bmatrix}$$

- 对AR(p)序列来说，小于p阶的偏相关系数都不为零，而大于p阶的偏相关系数都为零
- 偏相关系数是自相关系数的函数。可得到使用自相关系数表示的偏相关系数计算公式为

$$\phi_{11}=\rho_1\qquad \phi_{22}=(\rho_2-\rho_1^2)/(1-\rho_1^2)$$

$$\phi_{kk}=\frac{\rho_k-\sum_{j=1}^{k-1}\phi_{k-1,j}\rho_{k-j}}{1-\sum_{j=1}^{k-1}\phi_{k-1,j}\rho_j},k\ge 3$$

$$\phi_{kj}=\phi_{k-1,j}-\phi_{kk}\phi_{k-1,k-j},\ j=1,3,\cdots,k-1$$

- **例5．9，计算ARMA（1，1）模型**
- $x_t=-0.7x_{t-1}+\varepsilon_t-0.7\varepsilon_{t-1}$ 的偏相关系数

$$\rho_1=\frac{(1+\phi_1\theta_1)(\phi_1+\theta_1)}{1+\theta_1^2+2\phi_1\theta_1}=\frac{(1+0.49)(-0.7-0.7)}{1+0.49+2(0.49)}=-0.8445$$

$$\rho_2=-0.7\times(-0.8445)=0.591\qquad \rho_3=-0.414$$

$$\rho_4=0.290\qquad \rho_5=-0.203\qquad \rho_6=0.142$$

- 计算偏相关系数为 $\phi_{11}=\rho_1=-0.8445$

$$\phi_{22}=(\rho_2-\rho_1^2)/(1-\rho_1^2)=[0.591-(0.8445)^2]/[1-(00.8445)^2]=-0.426$$

$$\phi_{33}=\frac{\rho_3-\sum_{j=1}^{2}\phi_{3-1,j}\rho_{3-j}}{1-\sum_{j=1}^{2}\phi_{3-1,j}\rho_j}=\frac{[-0.414-(-1.204)\times 0.591-(-0.426)(-0.8445)]}{1-(-1.204)(-0.8445)-(-0.426)\times 0.591}=-0.262$$

$$\phi_{44}=-0.173\qquad \phi_{55}=-0.117\qquad \phi_{66}=-0.081$$

- **例5．10，采用上面给出的偏相关系数计算方法，使用1954年7月至2002年12月美国政府1年期债券按月度记录的市场利率和序列一阶差分后的利率变化序列的前20阶偏相关系数由下表给出**

偏相关系数	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
利率	0.983	-0.266	0.135	0.024	0.007	-0.067	0.143	0.057	-0.097	-0.014
Δ利率	0.356	-0.248	0.012	-0.037	0.11	-0.264	0.011	0.125	-0.019	0.009
偏相关系数	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
利率	-0.03	-0.082	0.056	-0.027	-0.032	0.075	-0.041	-0.031	-0.041	0.075
Δ利率	0.138	-0.14	0.076	0.008	-0.087	0.075	0.038	0.019	-0.156	-0.073

5.3.5 自回归滑动平均模型

- 同时包含有自回归项和滑动平均项的序列称为自回归滑动平均序列，即为

$$x_t=c+\phi_1x_{t-1}+\phi_2x_{t-2}+\cdots+\phi_px_{t-p}+\varepsilon_t+\theta_1\varepsilon_{t-1}+\theta_2\varepsilon_{t-2}+\cdots+\theta_q\varepsilon_{t-q}$$

- 采用后置算子表示为

$$(1-\phi_1L-\phi_2L^2-\cdots-\phi_pL^p)x_t=c+(1+\theta_1L+\theta_2L^2+\cdots+\theta_qL^q)\varepsilon_t$$

- 在平稳条件下，两边同时除以

$$1-\phi_1L-\phi_2L^2-\cdots-\phi_pL^p$$

$$x_t=\mu+\Psi(L)\varepsilon_t$$

$$\Psi(L)=\frac{(1+\theta_1 L+\theta_2 L^2+\cdots+\theta_q L^q)}{(1-\phi_1 L-\phi_2 L^2-\cdots-\phi_p L^p)}$$

系数满足 $\sum_{j=0}^{\infty}|\psi_j|<\infty$ 称为 $ARMA(p,q)$ 的 ψ 表示

- 在可逆条件下，两边同时除以

$$1+\theta_1 z+\theta_2 z^2+\cdots+\theta_q z^q=0$$

$$\Pi(L)(x_t-\mu)=\varepsilon_t$$

$$\Pi(L)=\frac{(1-\phi_1 L-\phi_2 L^2-\cdots-\phi_p L^p)}{(1+\theta_1 L+\theta_2 L^2+\cdots+\theta_q L^q)}$$

系数满足 $\sum_{j=0}^{\infty}|\pi_j|<\infty$ 称为 $ARMA(p,q)$ 的 π 表示

43

- 自回归滑动平均序列的平稳性与滑动平均系数无关，完全依赖于其自回归系数
- 自回归滑动平均序列的期望

$$E[x_t]=\mu=c+\phi_1\mu+\phi_2\mu+\cdots+\phi_p\mu$$

- 当j>q时其自协方差函数为

$$\gamma(j)=\phi_1\gamma(j-1)+\phi_2\gamma(j-2)+\cdots+\phi_p\gamma(j-p)$$

- 对大于q阶的自协方差，自回归滑动平均序列与自回归序列部分相同，且完全由自回归系数确定

44

- 例5．11，通过ARMA（1，1）给出一个示例，对 $x_t=\phi_1 x_{t-1}+\varepsilon_t+\theta_1\varepsilon_{t-1}$

$$E(x_t x_t)=\phi_1 E(x_{t-1}x_t)+E(\varepsilon_t x_t)+\theta_1 E(\varepsilon_{t-1}x_t)$$

$$\Rightarrow \gamma_0=\phi_1\gamma_1+\sigma^2+\theta_1(\phi_1+\theta_1)\sigma^2$$

$$E(x_t x_{t-1})=\phi_1 E(x_{t-1}x_{t-1})+E(\varepsilon_t x_{t-1})+\theta_1 E(\varepsilon_{t-1}x_{t-1})$$

$$\Rightarrow \gamma_1=\phi_1\gamma_0+\theta_1\sigma^2$$

- 求解这一方程组得到

$$\gamma_0=\frac{1+\theta_1^2+2\phi_1\theta_1}{1-\phi_1^2}\sigma^2 \qquad \gamma_1=\frac{(1+\phi_1\theta_1)(\phi_1+\theta_1)}{1-\phi_1^2}\sigma^2$$

- 自相关函数为

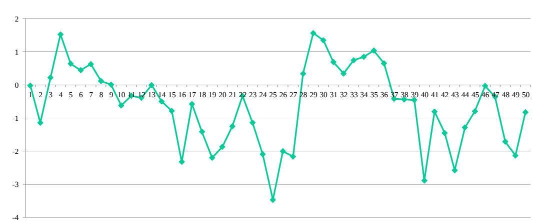
$$\rho_1=\frac{(1+\phi_1\theta_1)(\phi_1+\theta_1)}{1+\theta_1^2+2\phi_1\theta_1} \qquad \rho_k=\phi_1\rho_{k-1}, k\ge 2$$

45

例5．对二阶自回归一阶滑动平均模型模型为

$$x_t=0.3x_{t-1}+0.2x_{t-2}+0.4\varepsilon_{t-1}+\varepsilon_t$$

通过随机模拟产生的前50个观测值如图



46

常见自回归滑动平均模型自相关函数和偏相关函数的特性

过程	自相关函数（ACF）	偏相关函数（PACF）
白噪声	所有 $\rho_k=0,(k\neq 0)$	所有 $\phi_{kk}=0$
AR(1) $\phi_1>0$	直接指数衰减 $\rho_k=\phi_1^k$	$\phi_{11}=\rho_1$, $\phi_{kk}=0$, k>1
AR(1) $\phi_1<0$	振荡衰减 $\rho_k=(-1)^k\lvert\phi_1\rvert^k$	$\phi_{11}=\rho_1$，$\phi_{kk}=0$，k>1
AR(p)	逐渐衰减到零，系数可能振荡	$\phi_{kk}=0$，k> p
MA(1) $\theta_1>0$	一阶为正， $\rho_k=0,(k\ge 2)$	振荡衰减, $\phi_{11}>0$
MA(1) $\theta_1<0$	一阶为负， $\rho_k=0,(k\ge 2)$	几何衰减, $\phi_{11}<0$
ARMA(1,1)	一阶起指数衰减, $sign(\rho_1)=sign(\phi_1+\theta_1)$	一阶起振荡衰减， $\phi_{11}=\rho_1$
ARMA(1,1)	一阶起振荡衰减, $sign(\rho_1)=sign(\phi_1+\theta_1)$	一阶起指数衰减， $\phi_{11}=\rho_1$
ARMA(p,q)	q阶起指数衰减（或振荡）衰减	p阶起指数衰减（或振荡）衰减

47

5.3.6 平稳时间序列的Wold分解

- 所有的平稳时间序列都可以用无穷阶的滑动平均模型来表出或自回归模型来表示
- Wold分解） 任何一个平稳的时间序列 $\{x_t\}$ 都有如下形式的表示

$$x_t=\sum_{j=0}^{\infty}\psi_j\varepsilon_{t-j}$$

$$\sum_{j=0}^{\infty}\pi_j x_{t-j}=\varepsilon_t$$

- 分别称为时间序列的的 ψ 表示和 π 表示
- 对一个时间序列来说，表示式不是唯一的

48

5.4.时间序列的预测

- 预测的基本原理
- 滑动平均序列的预测
- 自回归序列的预测

5.4.1 预测的基本原理

- 均方损失函数 **MSE**

$$MSE(x^*_{t+1|t})=E[(x^*_{t+1|t}-x_{t+1})^2]$$

- 可证明条件期望是最小均方误差预测值

$$MinMSE(x^*_{t+1|t}\}=E[x_{t+1}\,|\,x_t,x_{t-1},\cdots]$$

- 线性投影是所有线性组合中，均方误差最小

$$\alpha'=E[x_{t+1}X_t'](E[X_tX_t'])^{-1}$$

5.4.2 滑动平均序列的预测

- 假定观测值序列可表为无穷阶滑动平均过程

$$x_t=\mu+\Psi(L)\varepsilon_t$$

- S步最优线性预测为

$$E[x_{t+s}\,|\,\varepsilon_t,\varepsilon_{t-1},\cdots]=\mu+\psi_s\varepsilon_t+\psi_{s+1}\varepsilon_{t-1}+\psi_{s+2}\varepsilon_{t-2}\cdots$$

- 预测的方差为

$$E[(x_{t+s}-E[x_{t+s}\,|\,\varepsilon_t,\varepsilon_{t-1},\cdots])^2]=(1+\psi_1^2+\cdots+\psi_{s-1}^2)\sigma^2$$

- 预测的均方误差随着步长增加而逐渐加大

5.4.3 自回归序列的预测

- 注意到

$$\Psi(L)/L^s=L^{-s}+\psi_1L^{1-s}+\cdots+\psi_{s-1}L^{-1}+\psi_sL^0+\psi_{s+1}L^1+\cdots$$

- S步最优线性预测可转化为

$$E[x_{t+s}\,|\,\varepsilon_t,\varepsilon_{t-1},\cdots]=\mu+[\Psi(L)/L^s]_+\varepsilon_t$$

- 假设序列为自回归过程 $\Phi(L)(x_t-\mu)=\varepsilon_t$
- 假定 $\Psi(L)=[\Phi(L)]^{-1}$
- 可以得到自回归序列的**s**步最优线性预测

$$E[x_{t+s}\,|\,x_t,x_{t-1},\cdots]=\mu+[\Psi(L)/L^s]_+\Phi(L)(x_t-\mu)$$

- 对于一阶自回归序列**s**步最优线性预测为

$$[\Psi(L)/L^s]_+=\phi^s+\phi^{s+1}L^1+\phi^{s+2}L^2+\cdots=\phi^s/(1-\phi L)$$

$$E[x_{t+s}\,|\,x_t,x_{t-1},\cdots]=\mu+[\Psi(L)/L^s]_+\Phi(L)(x_t-\mu)=\mu+\phi^s(x_t-\mu)$$

- 预测的均方误差为

$$MSE(E[x_{t+s}\,|\,x_t,x_{t-1},\cdots]=[1+\phi^2+\phi^4+\cdots+\phi^{2(s-1)}]\sigma^2$$

- **p**阶自回归序列的**s**步最优线性预测为

$$\begin{aligned}&E[x_{t+s}\,|\,x_t,x_{t-1},\cdots]=\mu+[\Psi(L)/L^s]_+\Phi(L)(x_t-\mu)\\&=\mu+f_{11}^{(s)}(x_t-\mu)+f_{12}^{(s)}(x_{t-1}-\mu)+\cdots+f_{1p}^{(s)}(x_{t-p}-\mu)\end{aligned}$$

其中 f_{1j}^s 是矩阵**F**的**s**次乘幂的第一行第**j**列的数值

$$F=\begin{pmatrix}\phi_1&\phi_2&\phi_3&\cdots&\phi_{p-1}&\phi_p\\1&0&0&\cdots&0&0\\0&1&0&\cdots&0&0\\\vdots&\vdots&\vdots&\vdots&\vdots&\vdots\\0&0&0&\cdots&1&0\end{pmatrix}$$

$$MSE(E[x_{t+s}\,|\,x_t,x_{t-1},\cdots]=[1+\phi^2+\phi^4+\cdots+\phi^{2(s-1)}]\sigma^2$$

- 序列的一步预测容易求得；多步预测比较复杂，可以采用逐步递推方法而求得。
- 自回归滑动平均的预测通过把序列转化为滑动平均表示的序列再给出相应的预测值

5．5 时间序列建模方法

- 模型识别、参数估计和诊断检验
  - 模型的识别就是通过使用数据和经济、金融理论模型和一切有用的信息来选择一些值得考虑的、可能揭示数据的备选模型
  - 模型的参数估计就是对备选模型，使用一些统计估计方法来给出相关模型的参数的初步估计值
  - 模型诊断就是根据前两步给出的结果对备选模型的适应能力进行检验，对模型进行改进

5．5.1 模型的识别

- 采用模型 $ARIMA(p,n,q)$ 对时间序列数据进行建模
- 对模型的识别就是确定模型中的 p,n,q
- 真实的数据产生模型是未知的，识别只能给出一些备选的可能模型
- 使用一些图形化的直观方法
- 模型识别通常分为两步：
  - 确定序列的整形阶数
  - 识别ARMA序列

5．5.2 确定序列整形的阶数

- 一般的时间序列可以表示为 $\Phi(L)\Delta^n w_t = \Psi(L)\varepsilon_t$
- 自相关函数和偏相关函数是我们猜测模型初步结构的依据，也可以给出模型参数的初步估计
- 平稳时间序列的自相关系数

$$\rho_j = \phi_1\rho_{j-1} + \phi_2\rho_{j-2} + \cdots + \phi_p\rho_{j-p} \quad \Phi(L)\rho_j = 0$$

- 假定自回归算子函数通过分解因式表为

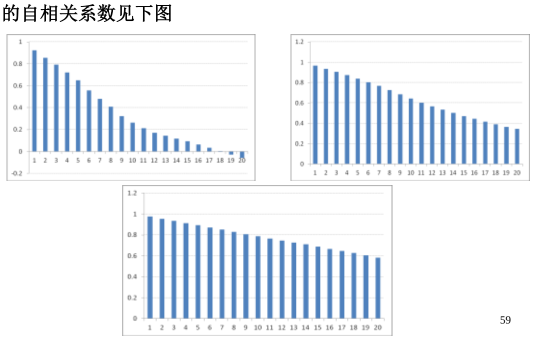
$$\Phi(L) = \prod_{i=1}^{p}(1-G_iL)$$

序列的**k**（**k>q-p**）阶自相关系数可用方程的根表为

$$\rho_k = A_1G_1^k + A_2G_2^k + \cdots + A_pG_p^k$$

- 平稳时间序列的自相关系数将随着**k**增加而迅速衰减
- 根据自相关系数变化的趋势不是快速下降来作为序列是否存在单位根的指标
- 认为序列是非平稳的，对序列进行差分运算，直到所得到的新序列是平稳序列为止
- 对原序列所进行的差分次数就是序列整形的阶
- 常用的金融时间序列的阶通常为**0,1,2**；
- 对序列自相关系数考查通常以前**20**阶自相关系数为主

例**5**．13 分别使用50 **120**和**200**个样本得到的模型 $x_t - x_{t-1} = \varepsilon_t$ 的自相关系数见下图



5．5.3 识别ARMA序列

- 通过序列的自相关系数和偏相关系数的各种变化形式来选取适合序列的自回归模型，滑动平均模型或自回归滑动平均模型。
- 自回归模型的自相关系数超过**p**阶之后开始逐步递减，而其偏相关系数只有前**p**阶不为零。滑动平均模型的自相关系数只有前**q**不为零，而其偏相关系数**q**阶之后开始逐步递减。如果序列的自相关系数和偏相关系数都不是截尾的，而是逐步递减，则数据很可能是一个混合的自回归滑动平均模型。

过程	自相关函数特性	偏相关函数特性	初步的估计参数	参数取值范围
白噪声	所有 $\rho_k = 0, (k \neq 0)$	所有 $\phi_{kk} = 0$		
AR(1)	指数衰减 $\rho_k = \phi_1^k$	$\phi_{11} = \rho_1$ $\phi_{kk} = 0$ k>1	$\phi_1 = \rho_1$	$-1 < \phi_1 < 1$
MA(1)	只有，$\rho_1 \neq 0$ $\rho_k = 0, (k \geq 2)$	指数衰减，ϕ_{kk}	$\rho_1 = \frac{-\theta_1}{1+\theta_1^2}$	$-1 < \theta_1 < 1$
AR(2)	指数衰减和sin波型 ρ_k	$\phi_{11} \neq 0, \phi_{22} \neq 0$ $\phi_{kk} = 0$ k>2	$\phi_1 = \frac{\rho_1(1-\rho_2)}{1-\rho_1^2}$ $\phi_2 = \frac{\rho_2 - \rho_1^2}{1-\rho_1^2}$	$-1 < \phi_2 < 1$ $\phi_1 + \phi_2 < 1$ $\phi_2 - \phi_1 < 1$
MA(2)	$\rho_1 \neq 0$ $\rho_2 \neq 0$, $\rho_k = 0 (k \geq 2)$	指数衰减和sin波型 ϕ_{kk}	$\rho_1 = \frac{-\theta_1(1-\theta_2)}{1+\theta_1^2+\theta_2^2}$ $\rho_2 = \frac{-\theta_2}{1+\theta_1^2+\theta_2^2}$	$-1 < \theta_2 < 1$ $\theta_1 + \theta_2 < 1$ $\theta_2 - \theta_1 < 1$
ARMA(1,1)	一阶起指数衰减 $\rho_k, (k \geq 1)$	一阶起振荡指数衰减，$\phi_{11} = \rho_1$	$\rho_1 = \frac{(1-\theta_1\phi_1)(\phi_1-\theta_1)}{1+\theta_1^2-2\phi_1\theta_1}$ $\rho_2 = \rho_1\phi_1$	$-1 < \theta_1 < 1$ $-1 < \phi_1 < 1$

5．5.4 理论的自相关系数与估计值之间的关系

- 有平稳序列T个观测值，样本均值估计 $\hat{\mu} = \frac{1}{T}\sum_{t=1}^{T} x_t$
- 均值估计的方差为

$$Var(\hat{\mu}) = \frac{1}{T^2}\sum_{t=1}^{T}\sum_{k=1}^{T}\gamma(t-k) = \frac{\gamma(0)}{T}[1+2\sum_{k=1}^{T-1}(1-\frac{k}{T})\rho_k]$$

- 均值估计的方差有渐近式

$$T \cdot Var(\hat{\mu}) \to \gamma(0)[1+2\sum_{k=1}^{\infty}\rho_k]$$

- 自相关系数估计的方差可以由下面的近似式给出

$$Var(\hat{\rho}_k) \approx \frac{1}{T}\sum_{j=-\infty}^{+\infty}(\rho_j^2 + \rho_{j+k}\rho_{j-k} - 4\rho_k\rho_j\rho_{j-k} + 2\rho_j^2\rho_k^2)$$

- **q**阶滑动平均序列大于**q**阶的自相关系数都为零，自相关系数估计的方差其近似式为

- 例5．**14**，中国**2008**年**12**月发行的第**26**号国债交易数据可以得到债券按周采样的投资**445**周的收益率时间序列。样本自相关系数和样本偏相关系数的估计

阶数	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
自相关	-0.436	0.051	-0.048	-0.029	0.086	-0.143	0.148	-0.054	-0.069	0.104
偏相关	-0.436	-0.172	-0.124	-0.125	0.016	-0.131	0.035	0.025	-0.098	0.033
	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
自相关	-0.074	-0.020	-0.026	0.033	0.064	-0.107	0.020	0.034	-0.101	0.148
偏相关	-0.010	-0.102	-0.088	-0.043	0.034	-0.050	-0.085	-0.006	-0.118	0.047

$$Var(\hat{\rho}_k) \approx \frac{1}{T}[1+2\sum_{j=1}^{q}\rho_j^2)]$$

- **p**阶自回归序列大于**p**阶的偏相关系数的估计值其方差有下面的近似式

$$Var(\hat{\phi}_{kk}) \approx \frac{1}{T} \text{ ，k>p}$$

- 注意:需要首先剔除季节性因素
- 模型的识别通常是尝试性的，需要进行进一步的测试和诊断，必要的修改
- **RS**排列法，广义的偏相关系数法，逆自相关函数法，主相关分析法等，见有关文献

- 例5．**15**，由二阶滑动平均模型为 $x_t = \varepsilon_t + 0.3\varepsilon_{t-1} + 0.2\varepsilon_{t-2}$
- 随机产生**200**个观测值，通过上面的自相关系数估计方法可以得到其一阶和二阶自相关系数估计值分别为：**0.335**和**0.107**，而其理论值分别为**0.36**和**0.2**。一阶自相关系数估计的方差为：$Var(\hat{\rho}_1) \approx \frac{1}{T} = \frac{1}{200}$
- 标准差为**0.071**。二阶自相关系数估计的方差为：

$$Var(\hat{\rho}_2) \approx \frac{1}{T}(1+2\hat{\rho}_1^2) = \frac{1+0.335}{200} = 0.0067$$

- 标准差为**0.082**

例5.16，使用**1961**年**5**月**17**日至**1962**年**11**月**2**日共计**369**个交易日**IBM**公司股票价格的数据可以得到价格，价格的一阶整型和二阶整型时间序列数据而给出的前**20**阶样本自相关系数和偏相关系数的估计为

自相关	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
p_t	.99	.99	.98	.97	.96	.96	.95	.94	.93	.92
$r_t = \Delta p_t$	.09	.00	-.05	-.04	-.02	.12	.07	.04	-.07	.02
$\Delta^2 p_t$	-.45	-.02	-.04	.00	-.07	.11	-.01	.04	-.10	.02
	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
p_t	.91	.91	.90	.89	.88	.87	.86	.85	.84	.83
$r_t = \Delta p_t$	.08	0.05	-.05	.07	-.07	.12	.12	.05	.05	.07
$\Delta^2 p_t$	.04	.04	-.12	.13	-.17	.10	.05	-.04	-.01	.09

偏相关	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
p_t	.996	-09	.01	.05	.02	.02	-.12	-.05	-.02	.06
$r_t = \Delta p_t$	.09	-.01	-.05	-.03	-.02	.13	.05	.02	-.06	.05
$\Delta^2 p_t$	-.45	-.28	-.24	-.20	-.29	-.17	-.13	-.03	-.14	-.16

	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
	-.05	-.09	-.03	.07	-.08	.06	-.14	-.10	-.01	-.08
	.09	0.03	-.08	.08	-.06	.14	.10	.00	.07	.08
	-.09	.02	-.13	.01	-.19	-.13	-.03	-.10	-.10	.06

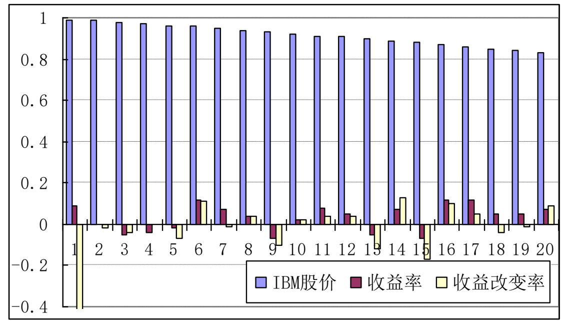
$Var(\hat{\rho}_1) \approx \frac{1}{T} = \frac{1}{368} = 0.0027$ $Var(\hat{\rho}_2) \approx \frac{1}{T}(1-\phi^2) = \frac{0.992}{368} = 0.0027$

标准差为0.052，只有一阶自相关系数t统计量为1.73，

其他的自相关系数都几乎为零。

可认为IBM股票收益率序列服从的是MA（1）

IBM股票序列的前20阶自相关系数和偏相关系数估计



5．5．5 对序列季节的调整

- 对含有季节性或周期性的序列，首先使用剔除季节性因素的季节算子，再使用剔除季节因素的序列建立模型
- 当季节的周期为4时，剔除季节的算子为 $(1-L^4)$
- 可能丢失序列中的一部分季节影响，需要对整个序列进行综合考虑
- 对季节和**ARMA**模型同时进行建模的方法
- 对季节性数据进行建模与无季节性数据建模的处理方式基本相同，同样是根据自相关系数和偏相关系数来判断备选的模型

- 季节的周期为s，则在自相关系数和偏相关系数的序列中，其滞后**s,2s,3s,…**阶的自相关系数或偏相关系数具有非零的特征，而不是无季节性数据的滞后**1,2,3,…**阶的
- 对季度数据，两个纯粹的季节模型为

$$x_t = \alpha_4 x_{t-4} + \varepsilon_t \qquad x_t = \beta_4 \varepsilon_{t-4} + \varepsilon_t$$

- 季节数据的理论自相关系数满足

$$\rho_i = \begin{cases} (\alpha_4)^{i/4} & 当i/ \\ 0 & 其他 \end{cases}$$

- 例5．17，使用中国**1994-2010**年城镇居民的季度人均可支配收入建立时间序列模型。
- 按照首先剔除季节因素在建立模型的方式，首先给出季节因素的估计为 $x_t = 1.116 x_{t-4} + \varepsilon_t$

	季度收入		季度收入差分		剔除季节水平		剔除季节差分	
	自相关	偏相关	自相关	偏相关	自相关	偏相关	自相关	偏相关
1	0.900	0.900	-0.463	-0.463	0.670	0.670	-0.443	-0.443
2	0.852	0.221	-0.050	-0.337	0.626	0.321	0.009	-0.234
3	0.813	0.087	-0.400	-0.842	0.582	0.166	-0.055	-0.203
4	0.792	0.130	0.855	0.306	0.562	0.131	0.027	-0.128
5	0.708	-0.298	-0.373	0.291	0.561	0.137	0.028	-0.043
6	0.662	0.027	-0.052	0.267	0.537	0.070	-0.007	-0.018
7	0.622	0.038	-0.354	0.201	0.511	0.034	0.118	0.164
8	0.606	0.111	0.735	0.171	0.394	-0.182	-0.268	-0.164
9	0.527	-0.202	-0.306	0.099	0.431	0.083	0.128	-0.084
10	0.480	-0.036	-0.046	0.078	0.385	-0.024	0.038	0.021
11	0.440	0.003	-0.332	-0.061	0.305	-0.150	-0.137	-0.188
12	0.424	0.090	0.645	-0.074	0.325	0.059	0.123	-0.028
13	0.358	-0.082	-0.253	-0.089	0.265	-0.045	0.021	0.087
14	0.318	-0.038	-0.048	-0.134	0.188	-0.144	-0.057	-0.006
15	0.286	0.009	-0.276	0.073	0.159	-0.028	-0.03	0.004
16	0.263	-0.037	0.526	-0.006	0.103	-0.114	0.134	0.108
17	0.209	-0.002	-0.201	-0.038	0.017	-0.144	-0.135	-0.057
18	0.176	-0.015	-0.041	-0.024	0.030	0.056	0.003	-0.063
19	0.148	-0.010	-0.243	-0.107	0.041	0.057	0.054	-0.072

- 直接使用季度数据建立的模型为

$x_t = 1.049x_{t-4} + 0.062x_{t-1} + \varepsilon_t \qquad x_t = 1.115x_{t-4} + 0.287\varepsilon_{t-1} + \varepsilon_t$

- 使用剔除季节的数据建立的模型为
- 一阶自回归模型 $y_t = 0.929y_{t-1} + \varepsilon_t$
- 一阶滑动平均模型 $y_t = 0.696\varepsilon_{t-1} + \varepsilon_t$
- 二阶自回归模型 $y_t = 0.544y_{t-1} + 0.435y_{t-2} + \varepsilon_t$
- 考虑直接带季节的模型

$$x_t = 0.462x_{t-1} + 0.303x_{t-2} + 0.230x_{t-4} + \varepsilon_t$$

$$x_t = 0.622x_{t-1} + 0.360x_{t-4} + \varepsilon_t$$

73

5．6．平稳时间序列的参数估计

- 5．6．1　对模型参数的矩估计
- 一个给定的ARMA模型，它有唯一的一个自协方差函数
- 平稳性和和可逆性条件
- 对滑动平均序列，其前q阶自相关系数不为零

74

- q个方程求解方程而得到q个未知系数
- 方差的估计为

$$\sigma^2 = \gamma(0)/(1+\theta_1^2+\theta_2^2+\cdots+\theta_q^2)$$

- 特别对**MA(1)**有

$$\rho_1 = -\theta_1/(1+\theta_1^2)$$

$$\theta_1 = -\tfrac{1}{2\rho_1} \pm [(\tfrac{1}{2\rho_1})^2 - 1]^{1/2}$$

- 选取 $-1 > \theta_1 > 1$

75

- 自回归序列,其前p阶自相关系数满足**Yule-Walker**方程
- 当自相关系数矩阵非奇异时有

$$\begin{bmatrix} \phi_{k1} \\ \phi_{k2} \\ \vdots \\ \phi_{kk} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & \rho_1 & \rho_2 & \cdots & \rho_{k-1} \\ \rho_1 & 1 & \rho_1 & \cdots & \rho_{k-2} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ \rho_{k-1} & \rho_{k-2} & \rho_{k-3} & \cdots & 1 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} \rho_1 \\ \rho_2 \\ \vdots \\ \rho_k \end{bmatrix}$$

  - 特别对AR(1)，其唯一的模型系数为

$$\hat{\phi}_{11} = \hat{\rho}_1$$

- 自回归滑动平均模型的初步参数估计分两步

76

5．6．2 极大似然估计

- 极大似然估计就是寻找一组参数,使在这一组参数值之下的联合概率分布对所得到的这一组样本有比较大的可能发生或概率。
- 实施极大似然估计分为两个步骤，第一步是建立似然函数，第二步是寻找使似然函数取最大值的参数。
- 假定我们有某时间序列的T个样本观测值

$$(x_1, x_2, \cdots, x_T)$$

77

- 待估计的参数记为

$$\theta = (c, \phi_1, \phi_2, \cdots, \phi_p, \theta_1, \theta_2, \cdots, \theta_q, \sigma^2)'$$

- 这T个观测样本的联合分布为

$$f_{x_1, x_2, \cdots, x_T}(x_1, x_2, \cdots, x_T \mid \theta)$$

- 自回归AR（1）的情形
- 对第一个样本观测值有

$$E[x_1] = \mu = c/(1-\phi) \qquad Var[x_1] = \sigma^2/(1-\phi^2)$$

$$f(x_1 \mid \theta) = f(x_1 \mid c, \phi, \sigma^2) = \frac{1}{\sqrt{2\pi(\sigma^2/(1-\phi^2))}} \exp\left[\frac{-(x_1 - c/(1-\phi))}{2\sigma^2/(1-\phi^2)}\right]$$

78

- 对t>1，有

$$E[x_t \mid x_1,\cdots x_{t-1}]=c+\phi x_{t-1} \qquad Var[x_t \mid x_1,\cdots,x_{t-1}]=\sigma^2$$

$$f(x_t \mid x_1,x_2,\cdots x_{t-1},\theta)=\frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}}\exp\left[\frac{-(x_t-c-\phi x_{t-1})}{2\sigma^2}\right]$$

- 联合分布密度函数为

$$f(x_1,x_2,\cdots,x_T \mid \theta)=f(x_1 \mid \theta)*\prod_{t-2}^{T} f(x_t \mid x_1,x_2,\cdots,x_{t-1},\theta)$$

- 对数似然函数为

$$=-\tfrac{1}{2}\log(2\pi)-\tfrac{1}{2}\log(\sigma^2/(1-\phi^2))-\frac{[x_1-(c/(1-\phi))]^2}{2\sigma^2/(1-\phi^2)}$$

$$-\tfrac{T-1}{2}\log(2\pi)-\tfrac{T-1}{2}\log(\sigma^2)-\sum_{t=2}^{T}\frac{-(x_t-c-\phi x_{t-1})^2}{2\sigma^2}$$

79

条件极大似然方法

- 假定第一个样本观测值是确定的已知量，似然函数可以简化为

$$l(\theta)=\log[\,f(x_2,\cdots,x_T \mid x_1,\theta)]=$$

$$-\tfrac{T-1}{2}\log(2\pi)-\tfrac{T-1}{2}\log(\sigma^2)-\sum_{t=2}^{T}\frac{-(x_t-c-\phi x_{t-1})^2}{2\sigma^2}$$

- 相当于通常的最小二乘法条件极大似然估计为

$$\begin{bmatrix}\hat{c}\\ \hat{\phi}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}T-1 & \sum_{t=2}^{T}x_{t-1}\\ \sum_{t=2}^{T}x_{t-1} & \sum_{t=2}^{T}x_{t-1}^2\end{bmatrix}^{-1}\begin{bmatrix}\sum_{t=2}^{T}x_t\\ \sum_{t=2}^{T}x_{t-1}x_t\end{bmatrix}$$

80

- 条件极大似然估计正好是回归残差的平方和

$$\hat{\sigma}^2=\sum_{t=2}^{T}\left[\frac{(x_t-\hat{c}-\hat{\phi}x_{t-1})^2}{T-1}\right]$$

- 当样本观测值的数目T适当大时，条件极大似然估计与极大似然方法差异甚微且两种估计有相同的渐近分布。
- 类似地，可以得到p阶自回归模型的条件似然函数为 $l(\theta)=\log[\,f(x_{p+1},\cdots,x_T \mid x_p,\cdots,x_1,\theta)]$

$$=-\tfrac{T-p}{2}\log(2\pi)-\tfrac{T-p}{2}\log(\sigma^2)$$

$$-\sum_{t=p+1}^{T}\frac{-(x_t-c-\phi_1x_{t-1}-\phi_2x_{t-2}-\cdots-\phi_px_{t-p})^2}{2\sigma^2}$$

81

- 相当于通常的最小二乘法，观测值对常数项和它的前**p**个观测值进行回归

σ^2条件极大似然估计正好是回归残差的平方和

$$\hat{\sigma}^2=\sum_{t=2}^{T}\left[\frac{(x_t-\hat{c}-\hat{\phi}_1x_{t-1}-\hat{\phi}_2x_{t-2}-\cdots-\hat{\phi}_px_{t-p})^2}{T-p}\right]$$

- 同样，当样本观测值的数目**T**适当大时，条件极大似然估计给出的结果与极大似然方法差异甚微且两种估计有相同的渐近分布。
- 滑动平均模**MA**（**1**）：如果前一时期的干扰项已知，当前时期样本观测值的条件分布

$$P\{x_t \mid \varepsilon_{t-1},c,\theta,\sigma^2\}=N(c+\theta\varepsilon_{t-1},\sigma^2)$$

82

- 第**t**个干扰项　$\varepsilon_t=x_t-c-\theta\varepsilon_{t-1}$
- 观测值的条件分布

$$N(c+\theta\varepsilon_{t-1},\sigma^2)=\frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma}}\exp\left\{\frac{-(x_t-c-\theta\varepsilon_{t-1})^2}{2\sigma^2}\right\}$$

$$P\{x_t \mid \varepsilon_{t-1},c,\theta,\sigma^2\}=\frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma}}\exp\left\{\frac{-\varepsilon_t^2}{2\sigma^2}\right\}$$

- 所有样本的联合分布为各个样本条件分布的乘积，对数似然函数为

$$l(\theta)=-\tfrac{T}{2}\log(2\pi)-\tfrac{T}{2}\log(\sigma^2)-\sum_{t=1}^{T}\frac{-\varepsilon_t^2}{2\sigma^2}$$

83

- 把干扰项用样本观测值来表示

$$\varepsilon_t=(x_t-c)-\theta(x_{t-1}-c)+\theta^2(x_{t-2}-c)-\cdots+(-1)^{t-1}\theta^{t-1}(x_1-c)+(-1)^t\theta^t\varepsilon_0$$

- 滑动平均模型，即使是从条件似然函数出发也只能通过数值方法来求解。
- 类似地，**q**阶滑动平均模**MA**（**q**），样本观测值的对数似然函数为

$$l(\theta)=-\tfrac{T}{2}\log(2\pi)-\tfrac{T}{2}\log(\sigma^2)-\sum_{t=1}^{T}\frac{-\varepsilon_t^2}{2\sigma^2}$$

- 对参数的求解同样需要使用数值方法。

84

自回归滑动平均模**ARMA（p，q）**

- 同时假定样本观测值的前**p**个初值和前面的**q**个干扰项是给定的初值 。
- 样本观测值的对数似然函数为

$$l(\theta)=-\tfrac{T}{2}\log(2\pi)-\tfrac{T}{2}\log(\sigma^2)-\sum_{t=1}^{T}\frac{-\varepsilon_t^{\,2}}{2\sigma^2}$$

$$\varepsilon_t=x_1-c-\phi_1 x_{t-1}-\phi_2 x_{t-2}-\cdots-\phi_p x_{t-p}-\theta_1\varepsilon_{t-1}-\theta_2\varepsilon_{t-2}-\cdots-\theta_q\varepsilon_{t-q}$$

- 初值的选定方法有两种：一种是假定样本观测值的初值为其期望值。另一种方法把前**p**个观测值作为初值

85

5．6．3 数值方法

- 极大似然估计的数值解就是建立一套程序化的计算方法给出一序列的似然函数计算，通过一定的规则而使这一参数序列逐步向似然函数最大值的取值点靠近
- 网格法（或称植树法）
- 梯度法（或称“瞎子爬山”法）

86

5．6．4 极大似然估计的方差

- 自回归滑动平均模型参数的极大似然估计有下面的近似分布

$$\vec{\theta}\approx N(\vec{\theta}^*,T^{-1}I^{-1}(\theta))$$

$I^{-1}(\theta)$ • 为信息矩阵

$$I(\vec{\theta})=-\tfrac{1}{T}\left.\frac{\partial^2 l(\vec{\theta})}{\partial\vec{\theta}\cdot\partial\vec{\theta}'}\right|_{\vec{\theta}=\hat{\vec{\theta}}}$$

87

5．7 模型诊断检验

- 5．7．1 模型的选择标准
- 选择标准来权衡模型的参数数目与残差平方和
- 模型选择标准是（AIC）和（SBC）
- **AIC=T ln(**残差平方和**)+2r**
- **SBC=T ln(**残差平方和**)+r ln(T)**
- 其中： **r**为模型中需要估计的参数数目（**p+q+**可能有常数项），**T**为观测样本量

88

- 例**5．18**，由二阶滑动平均模型为：$x_t=\varepsilon_t+0.3\varepsilon_{t-1}+0.2\varepsilon_{t-2}$ 随机产生**200**个观测值，如果我们分别使用一阶，二阶和三阶的滑动平均模型来拟合将得到估计模型分别为
- MA（1） $x_t=\varepsilon_t+0.303\varepsilon_{t-1}$ AIC=2.822，SBC=2.838
- MA（2） $x_t=\varepsilon_t+0.340\varepsilon_{t-1}+0.146\varepsilon_{t-2}$ AIC=2.811，SBC=2.844
- MA(3) $x_t=\varepsilon_t+0.347\varepsilon_{t-1}+0.167\varepsilon_{t-2}+0.038\varepsilon_{t-3}$ AIC=2.819，SBC=2.869
- AR（1） $x_t=\varepsilon_t+0.347x_{t-1}$ AIC=2.809，SBC=2.826

89

- **5．7．2** 过度拟合
- 在正确的模型中再添加参数之后就会发生偏离
- 通过对模型参数的添加来考查原模型所选取的参数是否已经足够
- 不需要附加的参数，只能从一个方面表示模型已经是正确
- 对**ARMA**模型来说，不能同时对自回归和滑动平均都进行添加

90

- 5．7．3 对残差进行诊断检验
- 使用过度拟合进行诊断是对我们不希望发生偏离的方向进行试探，如果没有可选的试探方向，我们可以直接从模型的残差项进行分析

- **A).** 自相关检查：得到了模型参数的极大似然估计之后，通过估计模型可以给出模型的残差序列。对选择适当的模型有

$$\hat{\varepsilon}_t=\varepsilon_t+O(\tfrac{1}{\sqrt{n}})$$

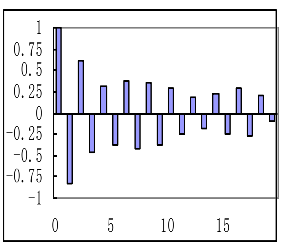
- **B).** 拟合不足检验
- 采用Q统计量来进行检验，假定所选定的ARMA（p，q）模型是恰当的，则有

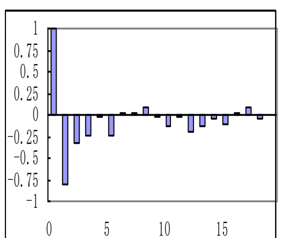
$$Q=T\sum_{k=1}^{K}\hat{\rho}_k^2(\hat{\varepsilon})$$

近似服从 $\chi^2(K-p-q)$ 分布

- **C).** 由于模型参数值改变而造成的不适合
- 在一个适当长的时期内模型的参数可能已经发生了变异。采用分组的差异性检验

- 例**20.** 假定得到从**ARMA**（**1**，**1**，）模型产生的**100**样本观测值
- 计算样本的自相关函数和偏相关函数



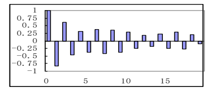


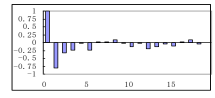
- 可能会选择**AR(1),AR(2),ARMA(1，1)**模型。分别计算模型的估计参数，残差序列的**Q**统计量和模型选择标准**AIC**及**SBC**如下表

	估计系数(标准差)	Q统计量（p-值）	AIC或SBC
模型1： $x_t=\phi_1 x_{t-1}+\varepsilon_t$	$\phi_1:-0.835(0.053)$	**Q(8)=26.19(0.000)** **Q(24)=41.10(0.001)**	**AIC=496.5** **SBC=499.0**
模型2： $x_t=\phi_1 x_{t-1}+\varepsilon_t+\theta_1\varepsilon_{t-1}$	$\phi_1:-0.679(0.076)$ $\theta_1:-0.676(0.081)$	**Q(8)=3.86(0.695)** **Q(24)=14.23(0.892)**	**AIC=471.0** **SBC=476.2**
模型3： $x_t=\phi_1 x_{t-1}+\phi_2 x_{t-2}+\varepsilon_t$	$\phi_1:-1.16(0.093)$ $\phi_2:-0.378(0.092)$	**Q(8)=11.44(0.057)** **Q(24)=22.59(0.424)**	**AIC=482.8** **SBC=487.9**

- **Q**统计量发现模型**1**存在拟合不足，从**Q**（**8**）统计量看模型**3**也存在一定程度的拟合不足
- 模型**2**没有拟合不足的证据；
- 从**AIC**和**BIC**可以发现模型**2**优于模型**3**和模型**1**

- 例5．**20**，假定得到从**ARMA**（**1**，**1**，）模型
- $x_t=-0.7x_{t-1}+\varepsilon_t-0.7\varepsilon_{t-1}$ 产生的**100**样本观测值
- 模型的前**20**阶自相关系数和偏相关系数



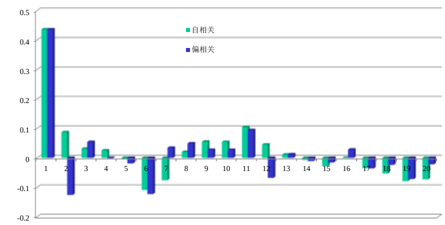


- 根据数据的自相关和偏相关函数，可能会选择**AR(1)**，**AR(2)**，**ARMA(1，1)**模型
- 分别计算模型的估计参数

	估计系数（标准差）	Q统计量（p-值）	AIC或SBC
模型1： $x_t = \phi_1 x_{t-1} + \varepsilon_t$	$\phi_1: -0.835(0.053)$	**Q(8)=26.19(0.000)** **Q(24)=41.10(0.001)**	**AIC=496.5** **BIC=499.0**
模型2： $x_t = \phi_1 x_{t-1} + \varepsilon_t + \theta_1 \varepsilon_{t-1}$	$\phi_1: -0.679(0.076)$ $\theta_1: -0.676(0.081)$	**Q(8)=3.86(0.695)** **Q(24)=14.23(0.892)**	**AIC=471.0** **BIC=476.2**
模型3： $x_t = \phi_1 x_{t-1} + \phi_2 x_{t-2} + \varepsilon_t$	$\phi_1: -1.16(0.093)$ $\phi_2: -0.378(0.092)$	**Q(8)=11.44(0.057)** **Q(24)=22.59(0.424)**	**AIC=482.8** **BIC=487.9**

- 从**Q**统计量可以发现模型**1**存在拟合不足，从**Q**（**8**）统计量看模型**3**也存在一定程度的拟合不足，或者说不能完全刻划数据的动态特征。但模型**2**没有拟合不足的证据；从**AIC**和**BIC**可以发现模型**2**优于模型**3**和模型**1**

- 例**5**．**21**，美国市场**1954**年**7**月至**2002**年**12**月一年期国债利率数据，直接的利率数据是一阶整型的，利率的改变量序列是平稳的，我们对一阶差分后的序列根据前面的例**10**中的数据而得到下图



- 根据自相关系数从二阶以后振荡衰减（二阶似乎也不为零），而偏相关系数从三阶以后振荡衰减，使用上面的模型识别方法来给出一些备选的模型，分别为：**AR**（**2**），**ARMA**（**2**，**1**），**ARMA**（**2**，**2**）

	估计系数（标准差）	Q统计量（p-值）	AIC或SBC
模型1： $x_t = \phi_1 x_{t-1} + \phi_2 x_{t-2} + \varepsilon_t + \theta_1 \varepsilon_{t-1}$	$\phi_1: 0.372(0.267)$ $\phi_2: -0.078(0.125)$ $\theta_1: 0.121(0.269)$	Q(5)=1.35(0.929) Q(10)=12.09(0.279)	AIC=-2.778 BIC=-2.756
模型2： $x_t = \phi_1 x_{t-1} + \varepsilon_t + \theta_1 \varepsilon_{t-1} + \theta_2 \varepsilon_{t-2}$	$\phi_1: 0.927(0.045)$ $\theta_1: -0.475(0.058)$ $\theta_2: -0.432(0.042)$	Q(5)=3.80(0.578) Q(10)=14. 7(0.143)	AIC=-2.785 BIC=-2.762
模型3： $x_t = \phi_1 x_{t-1} + \phi_2 x_{t-2} + + \varepsilon_t + \theta_1 \varepsilon_{t-1} + \theta_2 \varepsilon_{t-2}$	$\phi_1: 1.149(0.092)$ $\phi_2: -0.197(0.087)$ $\theta_1: -0.668(0.090)$ $\theta_2: -0.287(0.083)$	Q(5)=1.56(0.906) Q(10)=11.30(0.084)	AIC=-2.790 BIC=-2.759
模型4： $x_t = \phi_1 x_{t-1} + \phi_2 x_{t-2} + \varepsilon_t$	$\phi_1: 0.488(0.041)$ $\phi_2: -0.125(0.041)$	Q(5)=1.94(0.857) Q(10)=12.87(0.231)	AIC=-2.781 BIC=-2.766

5．8 时间序列回归模型中残差中有自相关或异方差

- 带时间序列的回归模型可以表示为如下的一般形式

$$y_t = \beta_0 + \alpha_1 y_{t-1} + \cdots + \alpha_p y_{t-p} + \beta_1 x_{1t} + \cdots + \beta_k x_{kt} + \varepsilon_t$$

- 前面给出的估计方法是否满足无偏性或一致性，甚或是满足**BLUE**，最优无偏估计，其需要满足的假设条件显然会与横截面有所差异
- 放宽随机抽样假设，要求时间序列若相关，其他条件基本不变
- 模型的干扰项序列{ ε_t }存在相关

- 干扰项是否于其他时期的自变量取值之间存在反馈作用通过改变假设3来考虑
- 干扰项的条件期望与前后任意时期之间的自变量取值都没有关系，自变量就被称为是强外生的

$$E[\varepsilon_t \mid x_{1t}, \cdots, x_{kt}, t = 1, \cdots, T] = E[\varepsilon_t \mid x_{1t}, \cdots, x_{kt}] = 0$$

- 前一个条件期望是要求干扰项与任何时期的自变量都没有关系，
- 第二个期望只要求干扰项与当期的自变量没有关系，只能满足第二个条件期望的就称为同时期外生
- 大部分时间序列数据只满足在给定到目前时期为止的所有自变量的取值后，第**t**时期的干扰项的条件期望为零

- 要使带时间序列的回归模型的最小二乘估计具有优良的统计性质，就要对干扰项之间的关系加上一个限制
- 不同时期之间的干扰项是不相关的

$$E[\varepsilon_t \varepsilon_s \mid x_{1t}, \cdots, x_{kt}, x_{1s}, \cdots, x_{ks}] = 0, s \neq t$$

- 如果这一假设不成立，则不能保证最小二乘估计的无偏性
- 假定残差序列服从一阶自回归模型 $\varepsilon_t = \rho \varepsilon_{t-1} + u_t$
- 干扰项的方差可表为 $Var(\varepsilon_t) = Var(u_t)/(1-\rho)$

- 把乘以干扰项之间相关系数的滞后一期模型再减回去得到

$$y_t-\rho y_{t-1}=(1-\rho)\beta_0+\alpha_1(y_{t-1}-\rho y_{t-2})+\cdots+\alpha_p(y_{t-p}-\rho y_{t-p-1})+$$
$$+\beta_1(x_{1t}-\rho x_{1t-1})+\cdots+\beta_k(x_{kt}-\rho x_{kt-1)})+u_t$$

- 相当于把所有的自变量和因变量都进行一个变换

$$\tilde{y}=y_t-\rho y_{t-1} \qquad \tilde{x}_{it}=x_{it}-\rho x_{it-1}$$
$$\tilde{y}_t=(1-\rho)\beta_0+\alpha_1\tilde{y}_{t-1}+\cdots+\alpha_p\tilde{y}_{t-p}+\beta_1\tilde{x}_{1t}+\cdots+\beta_k\tilde{x}_{kt}+u_t$$

- 这一变化模型通常被称为部分差分，限定了系数为一个压缩因子
- 在已知干扰项的自相关系数时，可以通过变换而得到纠正干扰项存在自相关的更优的一个估计

- 如果不知道干扰项的相关系数，可以通过对干扰项类似于前面对异方差的函数形式未知时，给出可行**OLS**估计的方法
- 先使用**OLS**估计原来的模型，得到残差序列的估计
- 然后对残差序列建立一阶自回归模型

$$\hat{\varepsilon}_t=\hat{\rho}\hat{\varepsilon}_{t-1}+u_t$$

- 用这一估计值代入，重复前面的步骤而得到所需要调整干扰项自相光的结果
- 干扰项存在自相关时，回归模型的**OLS**估计给出的模型系数的方差估计也不再合理

- 模型的估计系数可以表示为

$$\hat{\beta}_1=\beta_1+SST_x^{-1}\sum_{t=}^{T}x_t\varepsilon_t \qquad SST_x=\sum_{t=}^{T}x_t^2$$

- 模型估计系数的方差为

$$Var(\hat{\beta}_1)=SST_x^{-2}Var(\sum_{t=}^{T}x_t\varepsilon_t)$$
$$=SST_x^{-2}\left(\sum_{t=}^{T}x_t^2Var(\varepsilon_t)+2\sum_{j=1}^{T-1}\sum_{t=1}^{T-j}x_tx_{t+j}E(\varepsilon_t\varepsilon_{t+j})\right)$$
$$=\sigma^2/SST_x+\sigma^2SST_x^{-2}\sum_{j=1}^{T-1}\sum_{t=1}^{T-j}x_tx_{t+j}\rho_j$$

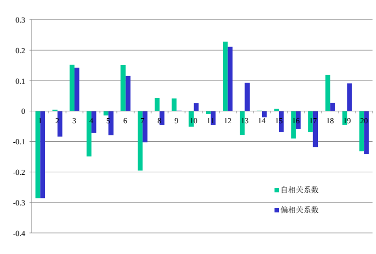
- 干扰项存在自相关时，上式中第二项不为零，通常**OLS**估计方差将不能给出模型参数方差的无偏估计
- 对残差序列是否存在自相关的检验方法中，要求回归模型中自变量是强外生的，如果模型中自变量不是强外生的，则对回归模型残差序列的相关性检验不合理

- 这时候如果使用 $\hat{\varepsilon}_t=\hat{\rho}\hat{\varepsilon}_{t-1}+u_t$需要作为回归模型来给出的估计 $\hat{\rho}$ 是有偏的
- 需要剔除其他自变量与残差间相关性的影响才合理
- 需要使用两个步骤的回归方法来给出
- 首先使用**OLS**方法给出模型的残差估计序列 $\hat{\varepsilon}_t$
- 在对残差的一阶自回归模型同时加入其他的自变量，使用的回归模型

$$\varepsilon_t=\alpha_1y_{t-1}+\cdots+\alpha_py_{t-p}+\beta_1x_{1t}+\cdots+\beta_kx_{kt}+\hat{\rho}^*\varepsilon_{t-1}+u_t$$

- 这样得到的估计构造的**t**检验统计量是渐进无偏的

- **例5．22，使用中国1997年1月至2012年8月的月度数据，我们使用M2的对数增长率给出的序列，计算其前20阶自相关和偏相关系数而得到下图**



- 根据上图的自相关和偏相关函数，分别选择5种可能的模型对数据进行建模和参数估计得到下表

模型	AR(1)	AR(2)	MA(1)	MA（2）	ARMA(1,1)
Ar1	0.398（6.02）	0.286（4.99）			-0.541（-7.03）
Ar2		0.405（7.15）	0.277（4.11		
Ma1				-0.027（-0.51）	0.809（14.76）
Ma2				0.575（10.87）	
AIC	-5.245	-5.676	-5.163	-5.368	-5.252
残差自相关系数	-0.103（-1.62）	-0.213（-3.06）	0.044（0.62）	0.199（2.87）	0.230（3.37）