函数最值和线性拟合

二元函数在某区域上的最值

定义　设$z=f(x,y),(x,y)\in D$,

如果$\exists(x_0,y_0)\in D$, $s.t.\ f(x_0,y_0)\geq f(x,y)$, $\forall(x,y)\in D$,

则称 $f(x_0,y_0)$为 $z=f(x,y)$在 D上的最大值.

如果$\exists(x_0,y_0)\in D$, $s.t.\ f(x_0,y_0)\leq f(x,y)$, $\forall(x,y)\in D$,

则称 $f(x_0,y_0)$为 $z=f(x,y)$在 D上的最小值.

最大值、最小值统称为最值.

函数的最值在极值可疑点或边界点达到

函数的最值在极值可疑点或边界点达到

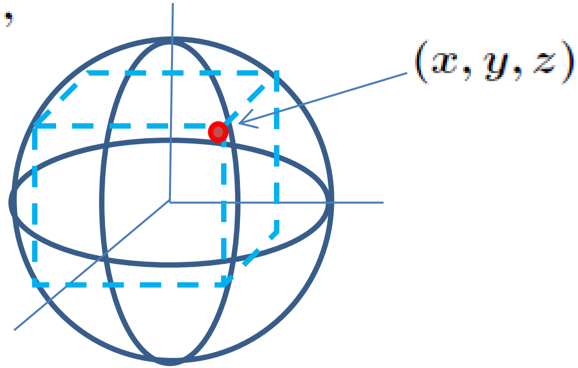
函数如果在某区域内可微,有唯一极值点，则此极值就是最值.

可微函数的唯一极值，若是极大则就是最大值，若是极小则就是最小值.

例　一球,半径 $\boldsymbol{R}$,切出长方体,如何切,所得体积最大?

例　一球,半径 R,切出长方体,如何切,所得体积最大?

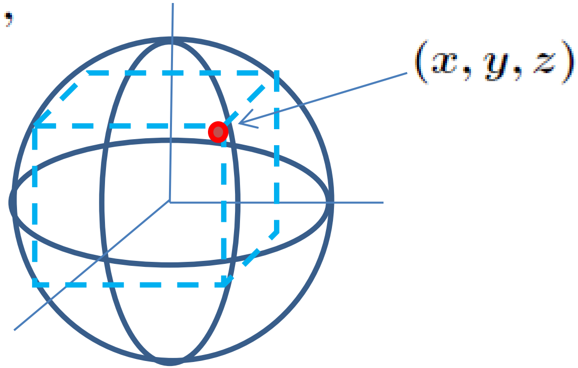
解：设球：$x^2+y^2+z^2=R^2$,



例　一球,半径 R,切出长方体,如何切,所得体积最大?

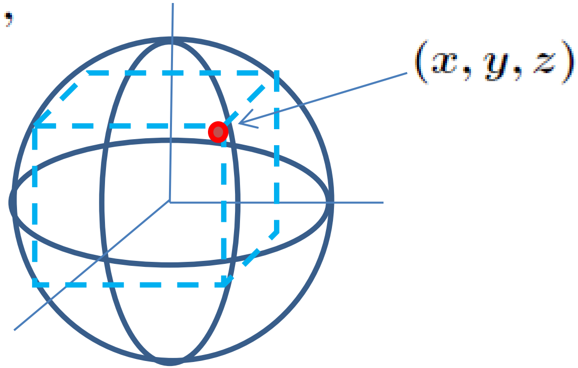
解：设球：$x^2+y^2+z^2=R^2$,

$$V=V_{(}x,y)=8xyz$$



例　一球,半径 R,切出长方体,如何切,所得体积最大?

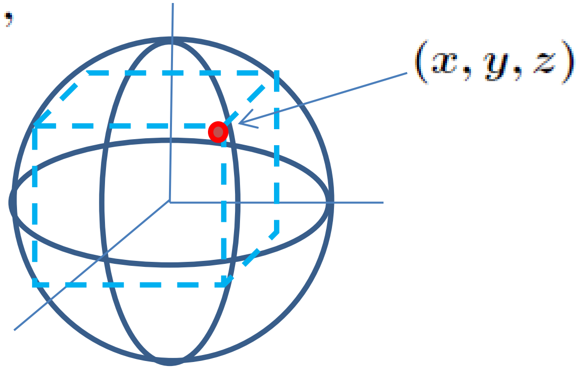
解：设球： $x^2+y^2+z^2=R^2$,



$$V=V_{(}x,y)=8xyz$$
$$=8xy\sqrt{R^2-x^2-y^2},$$
$$0\le x\le R, 0\le y\le R$$

例　一球,半径 R,切出长方体,如何切,所得体积最大?

解：设球： $x^2+y^2+z^2=R^2$,



$$V=V(x,y)=8xyz$$

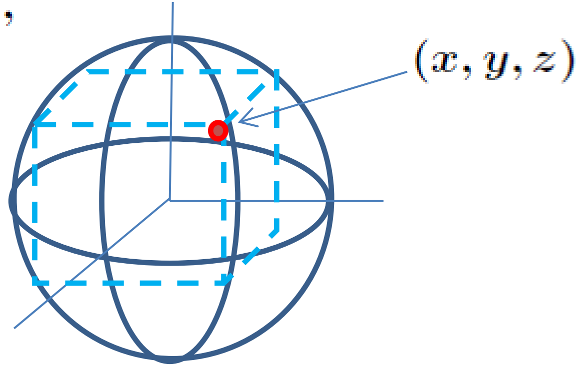
$$=8xy\sqrt{R^2-x^2-y^2},$$

$$0\le x\le R, 0\le y\le R$$

$$\begin{cases}\dfrac{\partial V}{\partial x}=0\\[2ex]\dfrac{\partial V}{\partial y}=0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x=\dfrac{R}{\sqrt{3}}\\[2ex]y=\dfrac{R}{\sqrt{3}}\end{cases}$$

例　一球,半径 R,切出长方体,如何切,所得体积最大?

解:设球: $x^2+y^2+z^2=R^2$,



$$V = V_{(}x, y) = 8xyz$$
$$= 8xy\sqrt{R^2 - x^2 - y^2},$$
$$0 \le x \le R, 0 \le y \le R$$

$$\begin{cases} \dfrac{\partial V}{\partial x} = 0 \\ \dfrac{\partial V}{\partial y} = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = \dfrac{R}{\sqrt{3}} \\ y = \dfrac{R}{\sqrt{3}} \end{cases}$$

实际情况是最大值存在,函数二次可微又驻点唯一

所以 $V(\frac{R}{\sqrt{3}}, \frac{R}{\sqrt{3}}) = max = 8(\frac{R}{\sqrt{3}})^3 = \frac{8R^3}{3\sqrt{3}}.$

例

盖一长方形平顶厂房,已知其体积为 $12000m^3$,前墙和屋顶的单位造价分别是其他墙的3倍和1.5倍,问房子的长、宽、高如何时造价最少?

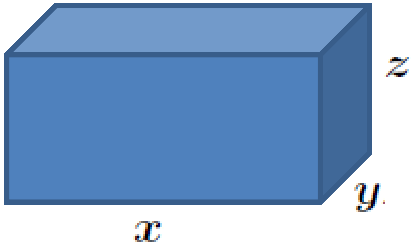
例

盖一长方形平顶厂房,已知其体积为 $12000m^3$,前墙和屋顶的单位造价分别是其他墙的3倍和1.5倍,问房子的长、宽、高如何时造价最少?

解：设侧墙单位造价为 ρ,则前墙单位造价为 3ρ,顶价位 1.5ρ,

所以,总造价为 $m = 3xz\rho + xz\rho + 2yz\rho + 1.5xy\rho$

$$m = \rho(4xz + 2yz + 1.5xy)$$



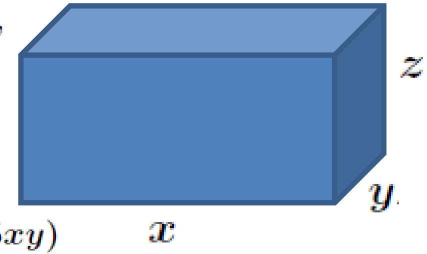
例

盖一长方形平顶厂房,已知其体积为 $12000m^3$,前墙和屋顶的单位造价分别是其他墙的3倍和1.5倍,问房子的长、宽、高如何时造价最少？

解：设侧墙单位造价为 ρ,则前墙单位造价为 3ρ,顶价位 1.5ρ,

所以,总造价为 $m = 3xz\rho + xz\rho + 2yz\rho + 1.5xy\rho$

$$m = \rho(4xz + 2yz + 1.5xy)$$



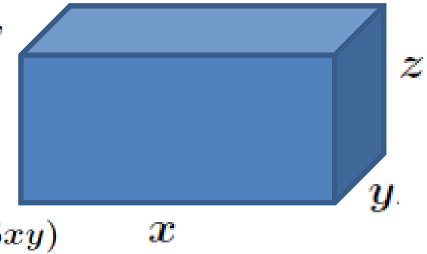
又因为 $xyz = 12000, \therefore m = \rho(4\frac{12000}{y} + \frac{2\cdot 12000}{x} + 1.5xy)$

例

盖一长方形平顶厂房,已知其体积为 $12000m^3$,前墙和屋顶的单位造价分别是其他墙的3倍和1.5倍,问房子的长、宽、高如何时造价最少?

解：设侧墙单位造价为 ρ,则前墙单位造价为 3ρ,顶价位 1.5ρ,

所以,总造价为 $m = 3xz\rho + xz\rho + 2yz\rho + 1.5xy\rho$



$$m = \rho(4xz + 2yz + 1.5xy)$$

又因为 $xyz = 12000, \therefore m = \rho(4\frac{12000}{y} + \frac{2\cdot 12000}{x} + 1.5xy)$

$$\frac{\partial m}{\partial x} = \rho[(-1)\frac{2\cdot 12000}{x^2} + 1.5y]$$

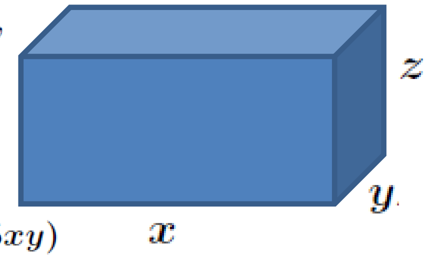
$$\frac{\partial m}{\partial y} = \rho[(-1)\frac{4\cdot 12000}{y^2} + 1.5x]$$

例

盖一长方形平顶厂房,已知其体积为 $12000m^3$,前墙和屋顶的单位造价分别是其他墙的3倍和1.5倍,问房子的长、宽、高如何时造价最少?

解：设侧墙单位造价为 ρ,则前墙单位造价为 3ρ,顶价位 1.5ρ,

所以,总造价为 $m=3xz\rho+xz\rho+2yz\rho+1.5xy\rho$



$$m=\rho(4xz+2yz+1.5xy)$$

又因为 $xyz=12000$, $\therefore\ m=\rho(4\frac{12000}{y}+\frac{2\cdot12000}{x}+1.5xy)$

$$\frac{\partial m}{\partial x}=\rho[(-1)\frac{2\cdot12000}{x^2}+1.5y]$$

$$\frac{\partial m}{\partial y}=\rho[(-1)\frac{4\cdot12000}{y^2}+1.5x]$$

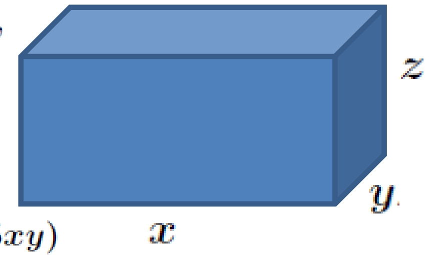
令 $\frac{\partial m}{\partial x}=\frac{\partial m}{\partial y}=0$,

$$\begin{cases}1.5x^2y=2\cdot12000\\1.5xy^2=4\cdot12000\end{cases}\Rightarrow\frac{x}{y}=\frac{1}{2},y=2x$$

$$3x^3=2\cdot12000,x^3=8000,x=20$$

例

盖一长方形平顶厂房,已知其体积为 $12000m^3$,前墙和屋顶的单位造价分别是其他墙的3倍和1.5倍,问房子的长、宽、高如何时造价最少?



解:设侧墙单位造价为 ρ,则前墙单位造价为 3ρ,顶价位 1.5ρ,

所以,总造价为 $m = 3xz\rho + xz\rho + 2yz\rho + 1.5xy\rho$

$$m = \rho(4xz + 2yz + 1.5xy)$$

又因为 $xyz = 12000$, $\therefore m = \rho(4\frac{12000}{y} + \frac{2\cdot 12000}{x} + 1.5xy)$

$$\frac{\partial m}{\partial x} = \rho[(-1)\frac{2\cdot 12000}{x^2} + 1.5y]$$

$$\frac{\partial m}{\partial y} = \rho[(-1)\frac{4\cdot 12000}{y^2} + 1.5x]$$

令 $\frac{\partial m}{\partial x} = \frac{\partial m}{\partial y} = 0$,

$$\begin{cases} 1.5x^2y = 2\cdot 12000 \\ 1.5xy^2 = 4\cdot 12000 \end{cases} \Rightarrow \frac{x}{y} = \frac{1}{2}, y = 2x$$

$$3x^3 = 2\cdot 12000, x^3 = 8000, x = 20$$

$$y = 40, z = 15.$$

线性拟合　　　　问题：

设经验告诉我们,变量 x与 y成线性关系,即 $y = kx + b(k, b$为常数$)k, b$为待定的参数.现经过测量得到 n组数据,求与实验数据最接近的函数关系（直线） $y = kx + b.$

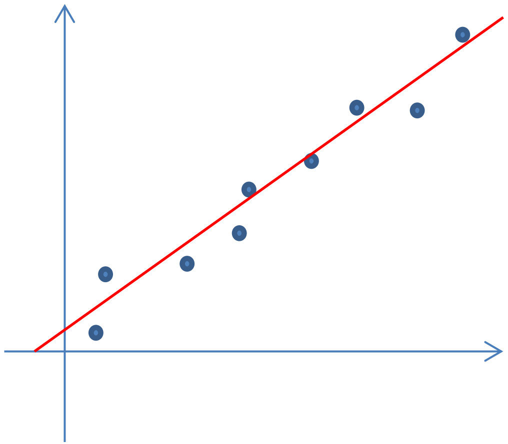
线性拟合　　　问题：

设经验告诉我们,变量 x与 y成线性关系,即 $y=kx+b(k,b$为常数$)k,b$为待定的参数.现经过测量得到 n组数据,求与实验数据最接近的函数关系（直线） $y=kx+b.$

“接近度”：$\sum_{i=1}^{n}[(kx_i+b-y_i)^2]$

即：寻找 k,b使得 $z=\sum_{i=1}^{n}[(kx_i+b-y_i)^2]=min$

其中 $z=z(k,b),(k,b)\in R^2$是二次函数.



线性拟合　　　问题：

设经验告诉我们,变量 x与 y成线性关系,即 $y=kx+b(k,b$为常数$)k,b$为待定的参数.现经过测量得到 n组数据,求与实验数据最接近的函数关系（直线） $y=kx+b.$

“接近度”：$\sum_{i=1}^{n}[(kx_i+b-y_i)^2]$

即：寻找 k,b使得 $z=\sum_{i=1}^{n}[(kx_i+b-y_i)^2]=min$

其中 $z=z(k,b),(k,b)\in R^2$是二次函数.

$$\begin{cases}\frac{\partial z}{\partial k}=\sum_{i=1}^{n}2x_i(kx_i+b-y_i)\\ \frac{\partial z}{\partial b}=\sum_{i=1}^{n}2(kx_i+b-y_i)\end{cases}$$

线性拟合　　问题：

设经验告诉我们,变量 x与 y成线性关系,即 $y=kx+b(k,b$为常数$)k,b$为待定的参数.现经过测量得到 n组数据,求与实验数据最接近的函数关系（直线） $y=kx+b.$

“接近度”：$\sum_{i=1}^{n}[(kx_i+b-y_i)^2]$

即：寻找 k,b使得 $z=\sum_{i=1}^{n}[(kx_i+b-y_i)^2]=min$

其中 $z=z(k,b),(k,b)\in R^2$是二次函数.

$$\begin{cases}\frac{\partial z}{\partial k}=\sum_{i=1}^{n}2x_i(kx_i+b-y_i)\\ \frac{\partial z}{\partial b}=\sum_{i=1}^{n}2(kx_i+b-y_i)\end{cases}\quad 令\begin{cases}\frac{\partial z}{\partial k}=0\\ \frac{\partial z}{\partial b}=0\end{cases}$$

$$得\begin{cases}k\sum_{i=1}^{n}x_i^2+b\sum_{i=1}^{n}x_i-\sum_{i=1}^{n}x_iy_i=0\\ k\sum_{i=1}^{n}x_i+nb-\sum_{i=1}^{n}y_i=0\end{cases}$$

线性拟合　　问题：

设经验告诉我们,变量 x与 y成线性关系,即 $y=kx+b(k,b$为常数$)k,b$为待定的参数.现经过测量得到 n组数据,求与实验数据最接近的函数关系（直线） $y=kx+b.$

“接近度”： $\sum_{i=1}^{n}[(kx_i+b-y_i)^2]$

即：寻找 k,b使得 $z=\sum_{i=1}^{n}[(kx_i+b-y_i)^2]=min$

其中 $z=z(k,b),(k,b)\in R^2$是二次函数.

$$\begin{cases}\frac{\partial z}{\partial k}=\sum_{i=1}^{n}2x_i(kx_i+b-y_i)\\ \frac{\partial z}{\partial b}=\sum_{i=1}^{n}2(kx_i+b-y_i)\end{cases}\quad 令\begin{cases}\frac{\partial z}{\partial k}=0\\ \frac{\partial z}{\partial b}=0\end{cases}$$

得 $$\begin{cases}k\sum_{i=1}^{n}{x_i}^2+b\sum_{i=1}^{n}x_i-\sum_{i=1}^{n}x_iy_i=0\\ k\sum_{i=1}^{n}x_i+nb-\sum_{i=1}^{n}y_i=0\end{cases}$$

记 $\bar{x}=\frac{1}{n}k\sum_{i=1}^{n}x_i,\bar{y}=\frac{1}{n}k\sum_{i=1}^{n}y_i$ 则有

$$\begin{cases}k\sum_{i=1}^{n}{x_i}^2+nb\bar{x}-\sum_{i=1}^{n}x_iy_i=0\\ k\bar{x}+b=\bar{y}\end{cases}$$

线性拟合 问题：

设经验告诉我们,变量 x与 y成线性关系,即 $y = kx + b(k, b$为常数$)k, b$为待定的参数.现经过测量得到 n组数据,求与实验数据最接近的函数关系（直线） $y = kx + b$.

“接近度”： $\sum_{i=1}^{n}[(kx_i + b - y_i)^2]$

即：寻找 k, b使得 $z = \sum_{i=1}^{n}[(kx_i + b - y_i)^2] = min$

其中 $z = z(k, b), (k, b) \in R^2$是二次函数.

$$\begin{cases} \frac{\partial z}{\partial k} = \sum_{i=1}^{n} 2x_i(kx_i + b - y_i) \\ \frac{\partial z}{\partial b} = \sum_{i=1}^{n} 2(kx_i + b - y_i) \end{cases} \quad 令 \begin{cases} \frac{\partial z}{\partial k} = 0 \\ \frac{\partial z}{\partial b} = 0 \end{cases}$$

得 $$\begin{cases} k\sum_{i=1}^{n} {x_i}^2 + b\sum_{i=1}^{n} x_i - \sum_{i=1}^{n} x_i y_i = 0 \\ k\sum_{i=1}^{n} x_i + nb - \sum_{i=1}^{n} y_i = 0 \end{cases}$$

记 $\bar{x} = \frac{1}{n}k\sum_{i=1}^{n} x_i, \bar{y} = \frac{1}{n}k\sum_{i=1}^{n} y_i$ 则有

$$\begin{cases} k\sum_{i=1}^{n} {x_i}^2 + nb\bar{x} - \sum_{i=1}^{n} x_i y_i = 0 \\ k\bar{x} + b = \bar{y} \end{cases}$$

$$\boxed{\begin{cases} k = \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i y_i - n\bar{x}\bar{y}}{\sum_{i=1}^{n} {x_i}^2 - n\bar{x}^2} \\ b = \bar{y} - k\bar{x} \end{cases}}$$

注

上述过程称为**线性拟合过程**,所用的方法称为“最小二乘法”

注

上述过程称为**线性拟合过程**,所用的方法称为“最小二乘法”

直线过平均值点 $(\bar{x}, \bar{y})$, $\begin{cases} k = \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i y_i - n\bar{x}\bar{y}}{\sum_{i=1}^{n} {x_i}^2 - n\bar{x}^2} \\ b = \bar{y} - k\bar{x} \end{cases}$

所以只需求出直线斜率 k,直线写成点斜式即可

即 $y - \bar{y} = k(x - \bar{x}), y = kc + (\bar{y} - k\bar{x})$

注

上述过程称为**线性拟合过程**,所用的方法称为“最小二乘法”

直线过平均值点 $(\bar{x},\bar{y})$, $\begin{cases} k=\frac{\sum_{i=1}^{n}x_iy_i-n\bar{x}\bar{y}}{\sum_{i=1}^{n}{x_i}^2-n\bar{x}^2} \\ b=\bar{y}-k\bar{x} \end{cases}$

所以只需求出直线斜率 k,直线写成点斜式即可

即 $y-\bar{y}=k(x-\bar{x}),y=kc+(\bar{y}-k\bar{x})$

k还可以写成 $k=\frac{\sum_{i=1}^{n}(x_i-\bar{x})(y_i-\bar{y})}{\sum_{i=1}^{n}(x_i-\bar{x})^2}$

注

上述过程称为**线性拟合过程**,所用的方法称为“最小二乘法”

直线过平均值点 $(\bar{x}, \bar{y})$, $\begin{cases} k = \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i y_i - n\bar{x}\bar{y}}{\sum_{i=1}^{n} {x_i}^2 - n\bar{x}^2} \\ b = \bar{y} - k\bar{x} \end{cases}$

所以只需求出直线斜率 k,直线写成点斜式即可

即 $y - \bar{y} = k(x - \bar{x}), y = kc + (\bar{y} - k\bar{x})$

$\boxed{k\text{还可以写成 } k = \frac{\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y})}{\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})^2}}$

其中,在线性拟合理论中,分母称为样本 $x_1, x_2, \cdots, x_n$的**方差**,

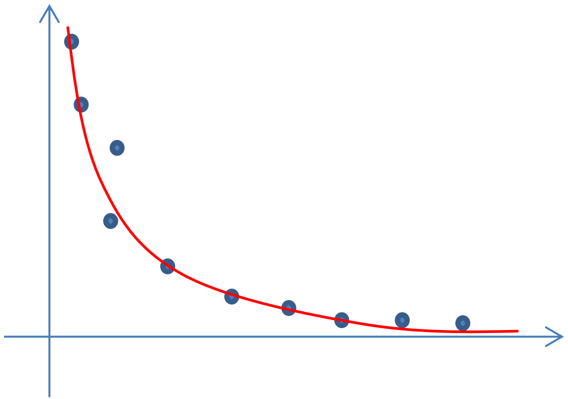
分子称为样本 $\{x_i\}_{i=1}^{n}$与 $\{y_i\}_{i=1}^{n}$ 的**协方差**,

k为这些 k_i的加权平均值,即样本（相对中心）的斜率的加权平均为拟合直线的斜率.

实际应用中,还有另一种常用的经验公式,即指数函数关系

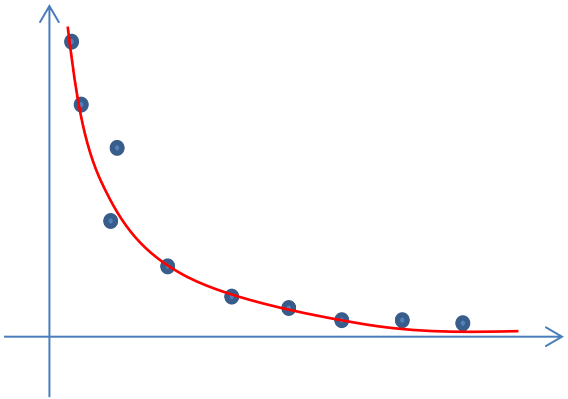
实际应用中,还有另一种常用的经验公式,即指数函数关系

给定数据组 $(x_i, y_i)_{i=1}^n$ 要寻找函数关系 $y = be^{-kx}$,使其与实验数据最接近.



实际应用中,还有另一种常用的经验公式,即指数函数关系

给定数据组 $(x_i, y_i)_{i=1}^n$ 要寻找函数关系 $y = be^{-kx}$,使其与实验数据最接近.



对函数 $y = be^{-kx}$ 取对数,则有 $\ln y = -kx + \ln b$,

令 $Y = \ln y, X = x, K = -k, B = \ln b$,

则所给数据转化为 $(X_i, Y_i)_{i=1}^n = (x_i, \ln y_i)_{i=1}^n$,

问题转化为对 $(X_i, Y_i)_{i=1}^n$ 做线性拟合

$$(X_i, Y_i)_{i=1}^{n} = (x_i, \ln y_i)_{i=1}^{n}$$

由上易见 $\begin{cases} K = \frac{\sum_{i=1}^{n} X_i Y_i - n\bar{X}\bar{Y}}{\sum_{i=1}^{n} {X_i}^2 - n\bar{X}^2} \\ b = \bar{Y} - K\bar{X} \end{cases}$

$$(X_i, Y_i)_{i=1}^{n} = (x_i, \ln y_i)_{i=1}^{n}$$

由上易见
$$\begin{cases} K = \frac{\sum_{i=1}^{n} X_i Y_i - n\bar{X}\bar{Y}}{\sum_{i=1}^{n} {X_i}^2 - n\bar{X}^2} \\ b = \bar{Y} - K\bar{X} \end{cases} \quad \because X_i = x_i, \therefore \bar{X} = \bar{x},$$

$$(X_i, Y_i)_{i=1}^{n} = (x_i, \ln y_i)_{i=1}^{n}$$

由上易见
$$\begin{cases} K = \frac{\sum_{i=1}^{n} X_i Y_i - n\bar{X}\bar{Y}}{\sum_{i=1}^{n} {X_i}^2 - n\bar{X}^2} \\ b = \bar{Y} - K\bar{X} \end{cases} \quad \because X_i = x_i, \therefore \bar{X} = \bar{x},$$

$$\because Y_i = \ln y_i, \therefore \bar{Y} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} Y_i = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} \ln y_i = \frac{1}{n}\ln(\prod_{i=1}^{n} y_i)$$

$$(X_i, Y_i)_{i=1}^n = (x_i, \ln y_i)_{i=1}^n$$

由上易见 $\begin{cases} K = \frac{\sum_{i=1}^n X_i Y_i - n\bar{X}\bar{Y}}{\sum_{i=1}^n {X_i}^2 - n\bar{X}^2} \\ b = \bar{Y} - K\bar{X} \end{cases}$ $\because X_i = x_i, \therefore \bar{X} = \bar{x},$

$$\because Y_i = \ln y_i, \therefore \bar{Y} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^n Y_i = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^n \ln y_i = \frac{1}{n}\ln(\prod_{i=1}^n y_i)$$

$$\begin{cases} K = -K = \dfrac{\bar{x}\ln(\prod_{i=1}^n y_i) - \sum_{i=1}^n x_i \ln y_i}{\sum_{i=1}^n {X_i}^2 - n\bar{X}^2} \\ b = e^B = exp\{\dfrac{1}{n}\ln(\prod_{i=1}^n y_i) + k\bar{x}\} = (\prod_{i=1}^n y_i)^{\frac{1}{n}} \quad e^{k\bar{x}} \end{cases}$$

$$(X_i, Y_i)_{i=1}^n = (x_i, \ln y_i)_{i=1}^n$$

由上易见
$$\begin{cases} K = \frac{\sum_{i=1}^n X_i Y_i - n\bar{X}\bar{Y}}{\sum_{i=1}^n {X_i}^2 - n\bar{X}^2} \\ b = \bar{Y} - K\bar{X} \end{cases} \quad \because X_i = x_i, \therefore \bar{X} = \bar{x},$$

$$\because Y_i = \ln y_i, \therefore \bar{Y} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^n Y_i = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^n \ln y_i = \frac{1}{n}\ln(\prod_{i=1}^n y_i)$$

$$\begin{cases} K = -K = \dfrac{\bar{x}\ln(\prod_{i=1}^n y_i) - \sum_{i=1}^n x_i \ln y_i}{\sum_{i=1}^n {X_i}^2 - n\bar{X}^2} \\ b = e^B = exp\{\dfrac{1}{n}\ln(\prod\limits_{i=1}^n y_i) + k\bar{x}\} = (\prod\limits_{i=1}^n y_i)^{\frac{1}{n}} \quad e^{k\bar{x}} \end{cases}$$

从而得拟合曲线 $y = be^{-kx}$.