2016年秋季学期线性代数期末试题

开课学院：光华管理学院
授课老师：傅翔
联系方式：fuxiang@math.pku.edu.cn
考试日期：2016年12月23日
考试时长：2小时

本次考试共10题，满分100分。考试成绩的60%将计入总评。

1. （10分）考虑如下线性方程组：

$$\begin{array}{rcrcrcl} x & + & y & + & 2z & = & a \\ 3x & + & 2y & - & z & = & b \\ 5x & + & 4y & + & 3z & = & c \end{array}$$

a）写出上述方程组对应的的增广矩阵；

b）请问当 a,b,c 满足什么条件时，方程

i) 无解；

ii) 有唯一解；

iii) 有无穷多组解；

c）当方程有无穷多解时，以含参数的形式写出它的所有解.

2. （10分）

a）通过行变换找到下述矩阵的逆

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 \\ -1 & 2 & -1 \\ 1 & -3 & 1 \end{bmatrix}$$

b）t 为实数，考虑如下矩阵

$$M = \begin{bmatrix} t+2 & 3t & t^2+1 \\ 0 & t-1 & 0 \\ 2t+4 & t & 3t+4 \end{bmatrix}$$

i) 求 M 的行列式；

ii) t 满足什么条件时，M 可逆?

3. （10分）令

$$A = \begin{bmatrix} -3 & -9 & -3 & -12 & -4 \\ -4 & -12 & -3 & -9 & -5 \\ 3 & 9 & 3 & 12 & 4 \\ 5 & 15 & 4 & 13 & 6 \\ -2 & -6 & -3 & -15 & -3 \end{bmatrix} \qquad B = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 0 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 7 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

已知 A 可以通过初等行变换得到 B

a）求 A 的秩

b）A 的行是否线性无关? 为什么?

c）写出 A 行空间的一组基；

d）写出 A 列空间的一组基；

e）将（-12，-9，，12，13，-15）写成（-3，-4，3，5，-2）和（-3，-3，3，4，-3）的线性组合的形式；

f）找出 A 解空间的一组基.

4. （10 分）如下定义线性映射 T：$\mathrm{R}^2 \to M_{2,2}$

$$T\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1+2x_2+4x_3 & 4x_1+2x_2-2x_3 \\ x_1+x_2+x_3 & 7x_1+5x_2+x_3 \end{bmatrix}$$

a）找到 T 的核 ker(T)的一组基；

b）找到 T 的像 Im(T)的一组基；

c）陈述线性变换的秩-零化度定理，并对 T 进行验证；

d）证明$\begin{bmatrix} -7 & 8 \\ -1 & 5 \end{bmatrix} \in \mathrm{Im}(T)$.

5. （10 分）

a）取R^3中的向量$\mathrm{x}=(x_1,x_2,x_3), \mathrm{y}=(y_1,y_2,y_3)$，请问是否可以如下定义它们的内积?为什么?

$$\langle x, y\rangle = x_1y_1 + x_2y_2 - x_3y_3$$

b）

i）通过施密特正交化找到R^4中由（1，0，0，0），（1，1，0，0）和（1，1，1，1）张成的子空间 V 的一组标准正交基；

ii) 找出 V 中距离（1，2，3，4）最近的点.

6. （10 分）已知 A 是一个三阶方阵，它的特征多项式为

$$p(x) = x^3 + x^2 - 6x$$

a）求 A 的特征值；

b）A 是否可逆? 请给出理由；

c）将A^4写成 I，A，A^2的线性组合.

7. （10 分）设 V 是有限维线性空间，求证 V 中任意一组基的元素个数为固定值.
8. （10 分）设 W 是有限维线性空间 V 的子空间，求证 dim(W)≤dim(V)且取等条件为 W=V.
9. （10 分）求证相似矩阵有相同的特征多项式.
10. （10 分）令

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 2 \end{bmatrix}$$

a）求 A 的特征多项式；

b）求 A 的特征值；

c）对每一个特征值找到它的特征子空间；

d）A 是否可以对角化?请给出理由.