球面、旋转面和柱面

1.球面

考虑球心在$M_0(x_0, y_0, z_0)$,半径为R的球面,

1.球面

考虑球心在$M_0(x_0,y_0,z_0)$,半径为R的球面，

点$M(x,y,z)$在这个球面上的充分必要条件是$\overrightarrow{M_0M}=R$, 即

$$(x-x_0)^2+(y-y_0)^2+(z-z_0)^2=R^2$$

如果记$A=-x_0, B=-y_0, C=-z_0, D=x_0^2+y_0^2+z_0^2-R^2$,则

$$\boxed{x^2+y^2+z^2+2Ax+2By+2Cz+D=0}$$

1.球面

考虑球心在$M_0(x_0, y_0, z_0)$,半径为R的球面,

点$M(x, y, z)$在这个球面上的充分必要条件是$|\overrightarrow{M_0M}| = R$, 即

$$(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + (z - z_0)^2 = R^2$$

如果记$A = -x_0, B = -y_0, C = -z_0, D = x_0^2 + y_0^2 + z_0^2 - R^2$,则

$$\boxed{x^2 + y^2 + z^2 + 2Ax + 2By + 2Cz + D = 0}$$

球面的一般方程

1.球面

考虑球心在$M_0(x_0,y_0,z_0)$,半径为R的球面,

点$M(x,y,z)$在这个球面上的充分必要条件是$\overrightarrow{M_0M}=R$, 即

$$(x-x_0)^2+(y-y_0)^2+(z-z_0)^2=R^2$$

如果记$A=-x_0,B=-y_0,C=-z_0,D=x_0^2+y_0^2+z_0^2-R^2$,则

$$\boxed{x^2+y^2+z^2+2Ax+2By+2Cz+D=0}$$

球面的一般方程

特点:

①一个三元二次方程,②没有交叉项(指xy,xz,yz项),③平方项的系数相同。

反之，对任意实数A,B,C,D来说，

方程$x^2+y^2+z^2+2Ax+2By+2Cz+D=0$可以写成

$$(x+A)^2+(y+B)^2+(z+C)^2=A^2+B^2+C^2-D$$

反之，对任意实数A,B,C,D来说，

方程$x^2+y^2+z^2+2Ax+2By+2Cz+D=0$可以写成

$$(x+A)^2+(y+B)^2+(z+C)^2=A^2+B^2+C^2-D$$

①当$A^2+B^2+C^2-D>0$时，它就表示一个球心在$(-A,-B,-C)$，

半径为$\sqrt{A^2+B^2+C^2-D}$的球面；

反之，对任意实数A,B,C,D来说，

方程$x^2+y^2+z^2+2Ax+2By+2Cz+D=0$可以写成

$$(x+A)^2+(y+B)^2+(z+C)^2=A^2+B^2+C^2-D$$

①当$A^2+B^2+C^2-D>0$时，它就表示一个球心在$(-A,-B,-C)$，

半径为$\sqrt{A^2+B^2+C^2-D}$的球面；

②当$A^2+B^2+C^2-D=0$时，它就表示一个点$(-A,-B,-C)$；

反之，对任意实数A,B,C,D来说，

方程$x^2+y^2+z^2+2Ax+2By+2Cz+D=0$可以写成

$$(x+A)^2+(y+B)^2+(z+C)^2=A^2+B^2+C^2-D$$

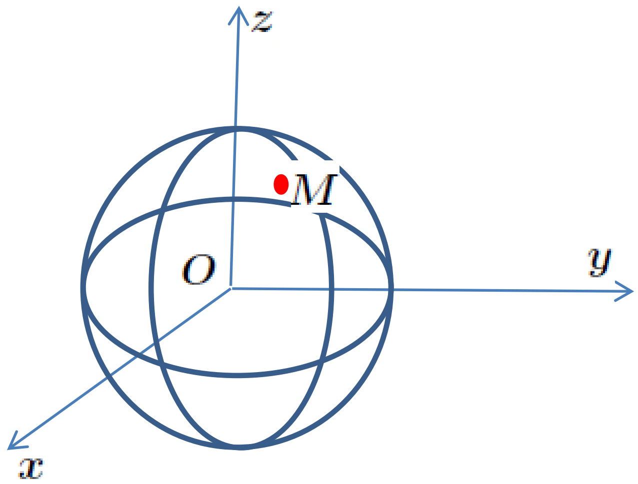
①当$A^2+B^2+C^2-D>0$时，它就表示一个球心在$(-A,-B,-C)$，

半径为$\sqrt{A^2+B^2+C^2-D}$的球面；

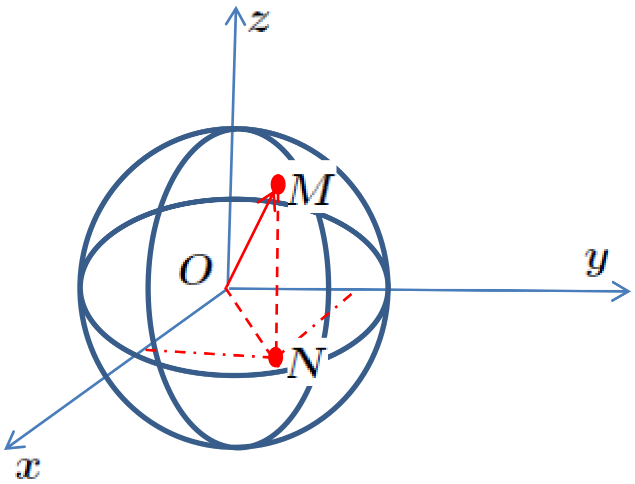
②当$A^2+B^2+C^2-D=0$时，它就表示一个点$(-A,-B,-C)$；

③当$A^2+B^2+C^2-D<0$时，它没有图形(有时说它是一个虚球面)。

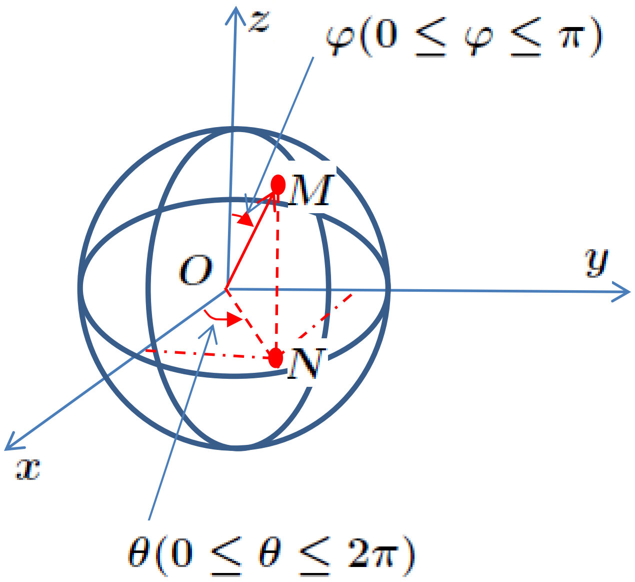
现设球面的球心在原点O， 球面上任取一点$M(x, y, z)$



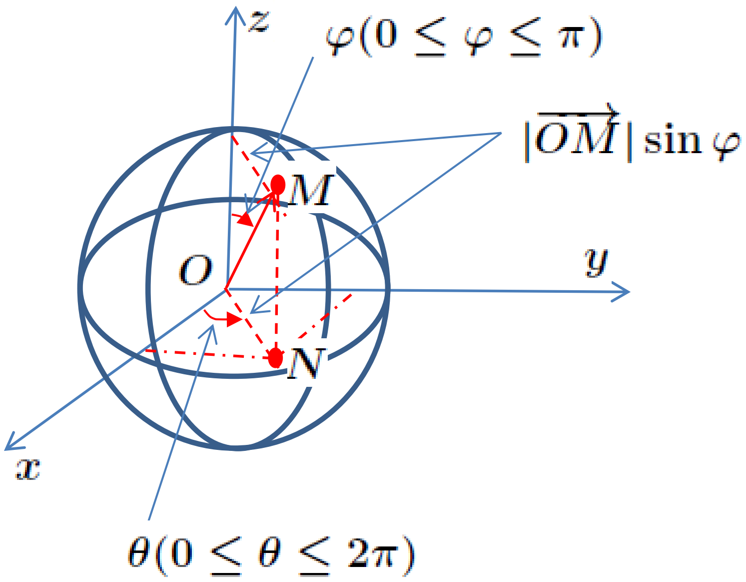
现设球面的球心在原点O，　球面上任取一点$M(x,y,z)$



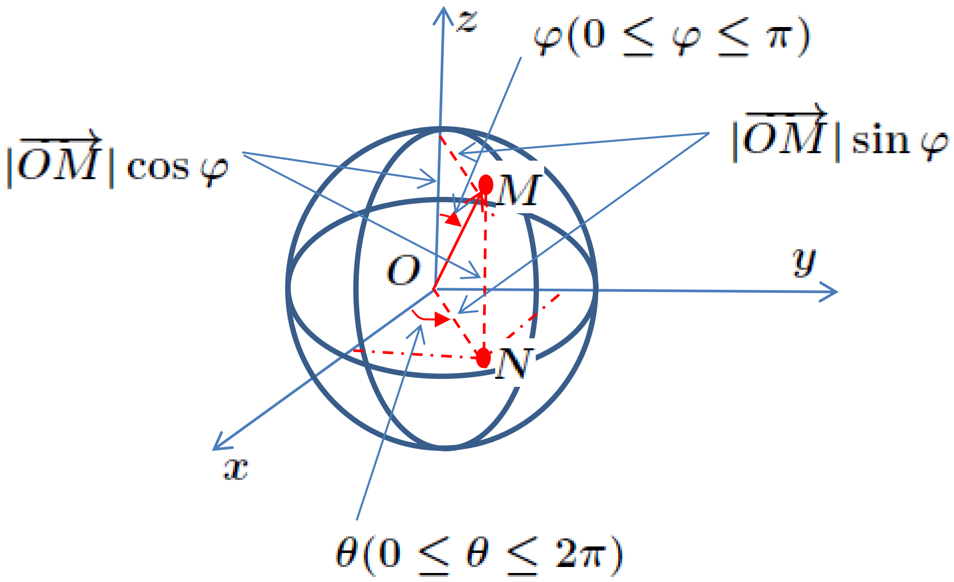
现设球面的球心在原点O，　球面上任取一点$M(x, y, z)$



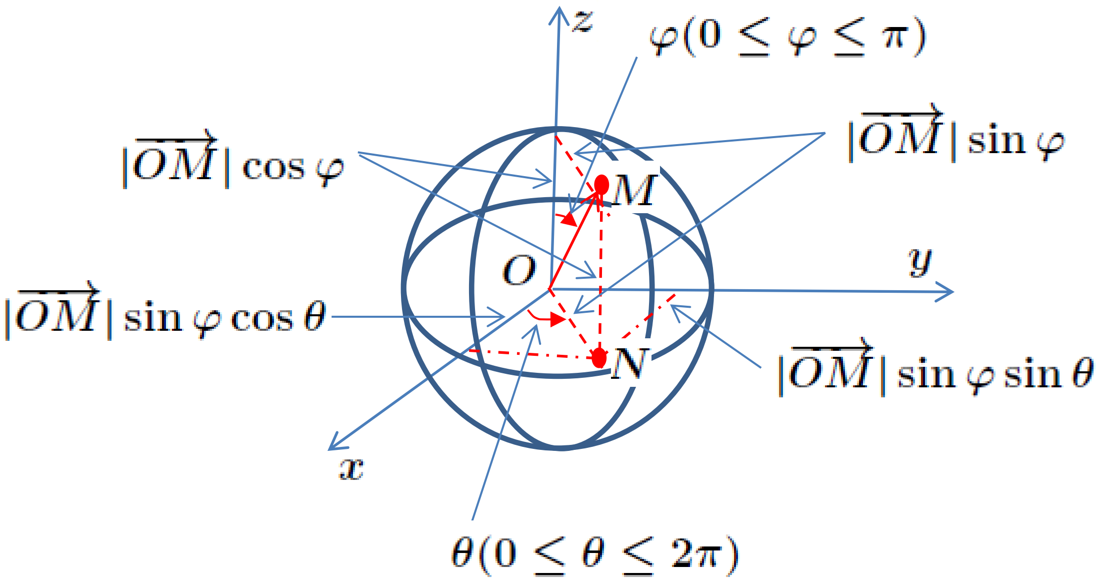
现设球面的球心在原点O，　球面上任取一点$M(x,y,z)$



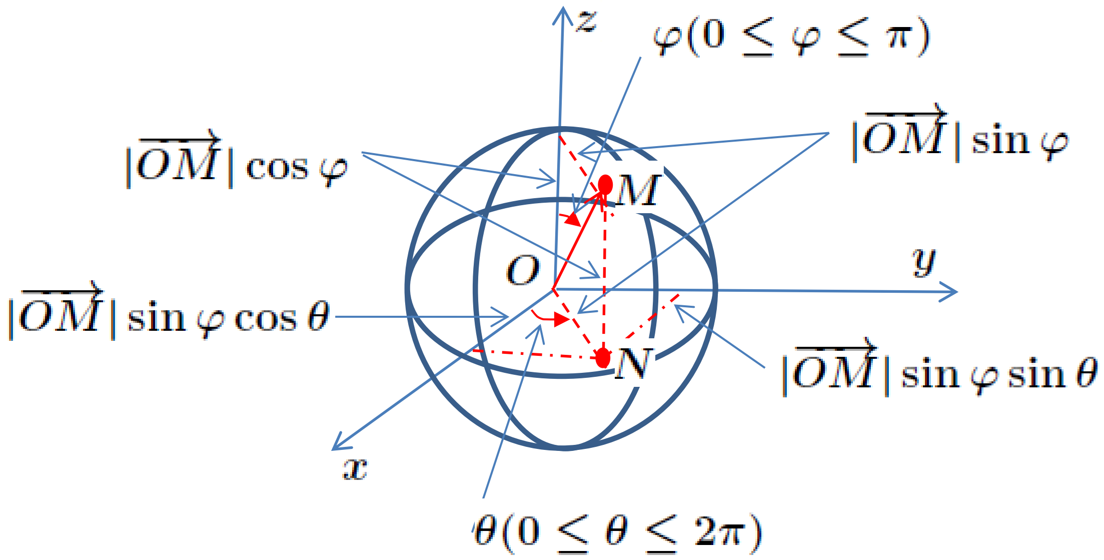
现设球面的球心在原点O，　球面上任取一点$M(x, y, z)$



现设球面的球心在原点O， 球面上任取一点$M(x, y, z)$



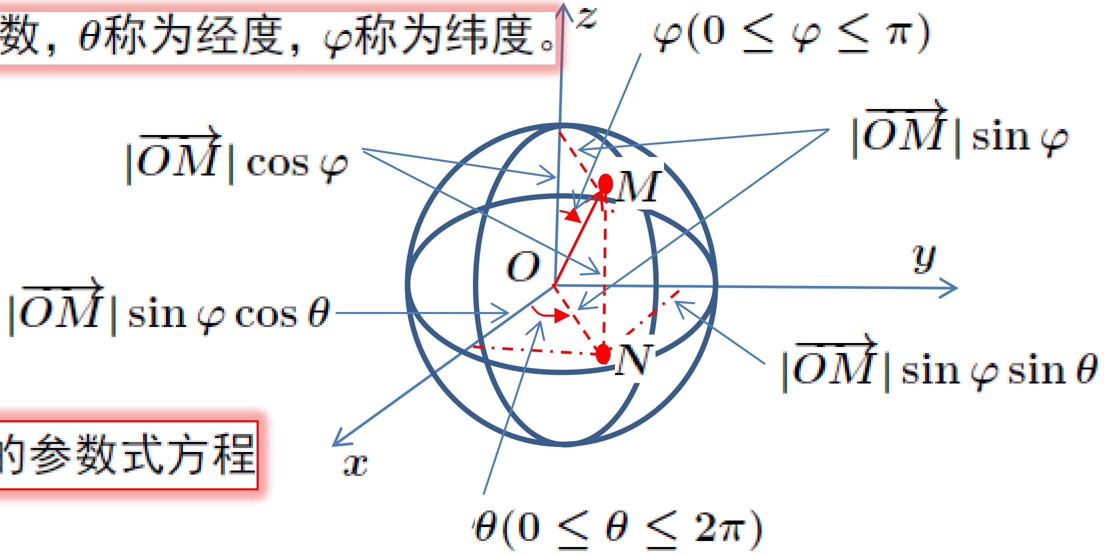
现设球面的球心在原点O，　球面上任取一点$M(x,y,z)$



$$\begin{cases} x = |\overrightarrow{OM}|\sin\varphi\cos\theta = R\sin\varphi\cos\theta \\ y = |\overrightarrow{OM}|\sin\varphi\sin\theta = R\sin\varphi\sin\theta \\ z = |\overrightarrow{OM}|\cos\varphi = R\cos\varphi \end{cases}$$

现设球面的球心在原点O， 球面上任取一点$M(x,y,z)$

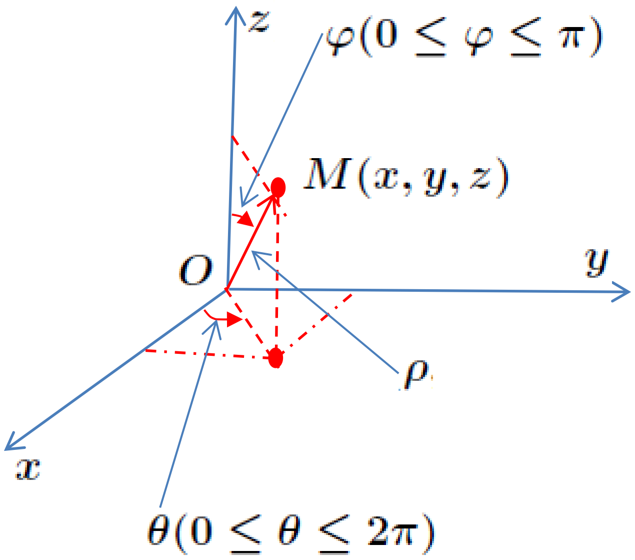
θ和φ为参数，θ称为经度，φ称为纬度。



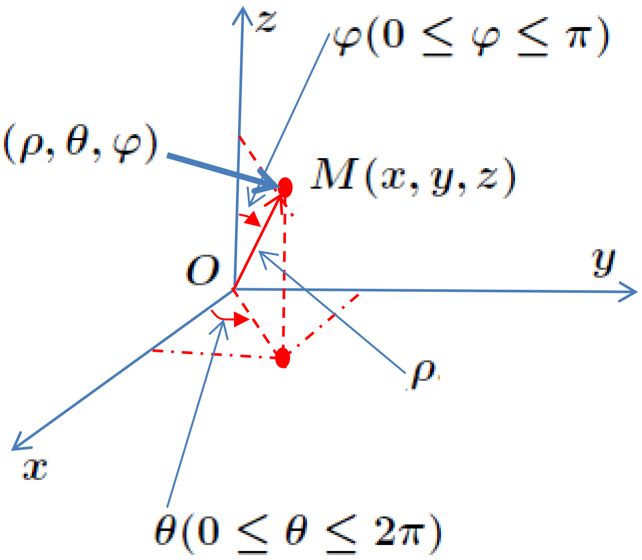
球面的参数式方程

$$\begin{cases} x = |\overrightarrow{OM}|\sin\varphi\cos\theta = R\sin\varphi\cos\theta \\ y = |\overrightarrow{OM}|\sin\varphi\sin\theta = R\sin\varphi\sin\theta \\ z = |\overrightarrow{OM}|\cos\varphi = R\cos\varphi \end{cases} \qquad \begin{cases} 0\le\theta\le 2\pi \\ 0\le\varphi\le\pi \end{cases}$$

球面坐标



球面坐标



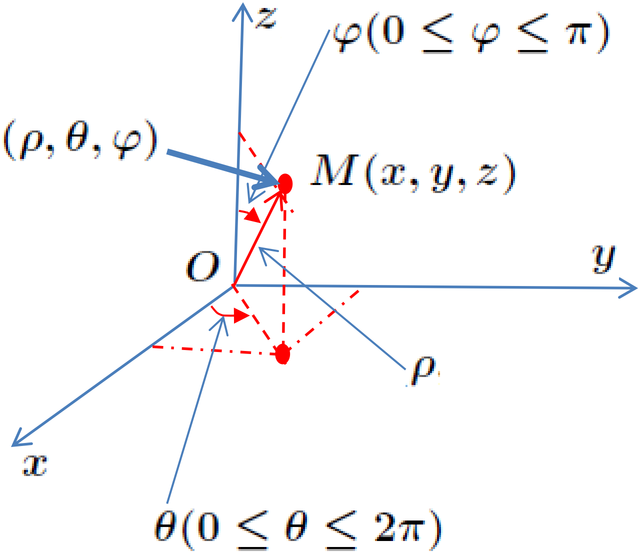
z
$\varphi(0 \le \varphi \le \pi)$
(ρ, θ, φ)
$M(x, y, z)$
O
y
ρ
x
$\theta(0 \le \theta \le 2\pi)$

球面坐标

球面坐标 (ρ, θ, φ)

与直角坐标的关系为

$$\begin{cases} x = \rho \sin\varphi \cos\theta \\ y = \rho \sin\varphi \sin\theta \\ z = \rho \cos\varphi \end{cases}$$



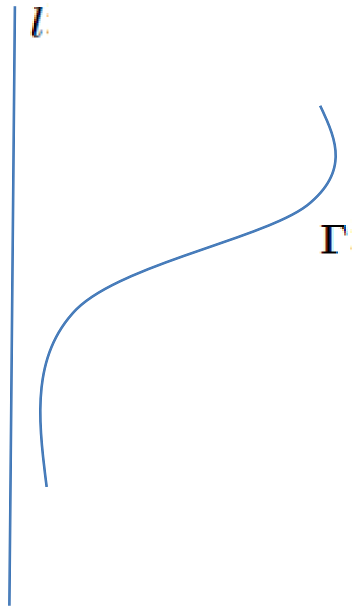
$$\rho \ge 0, 0 \le \theta \le 2\pi, 0 \le \varphi \le \pi$$

会带来极大的方便

2.旋转面

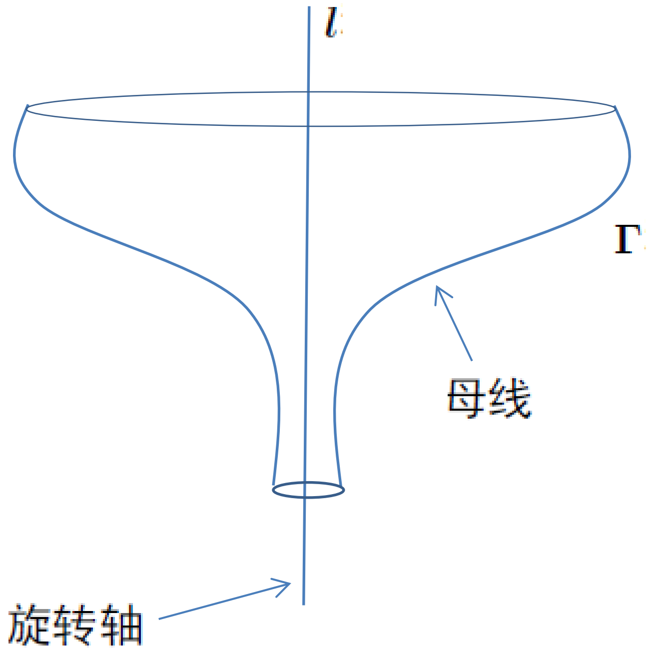
2.旋转面

一条曲线Γ绕一条直线l旋转所得的曲面称为旋转面



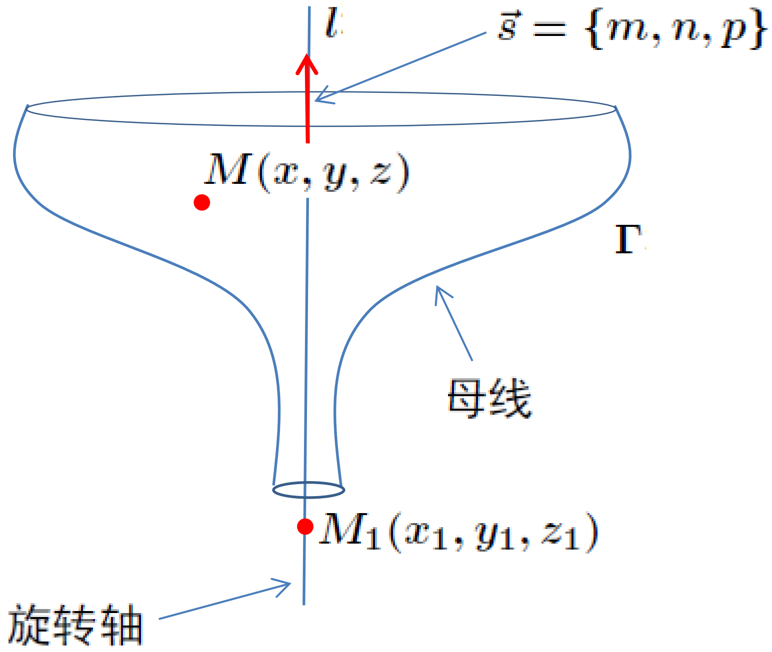
2.旋转面

一条曲线Γ绕一条直线l旋转所得的曲面称为旋转面



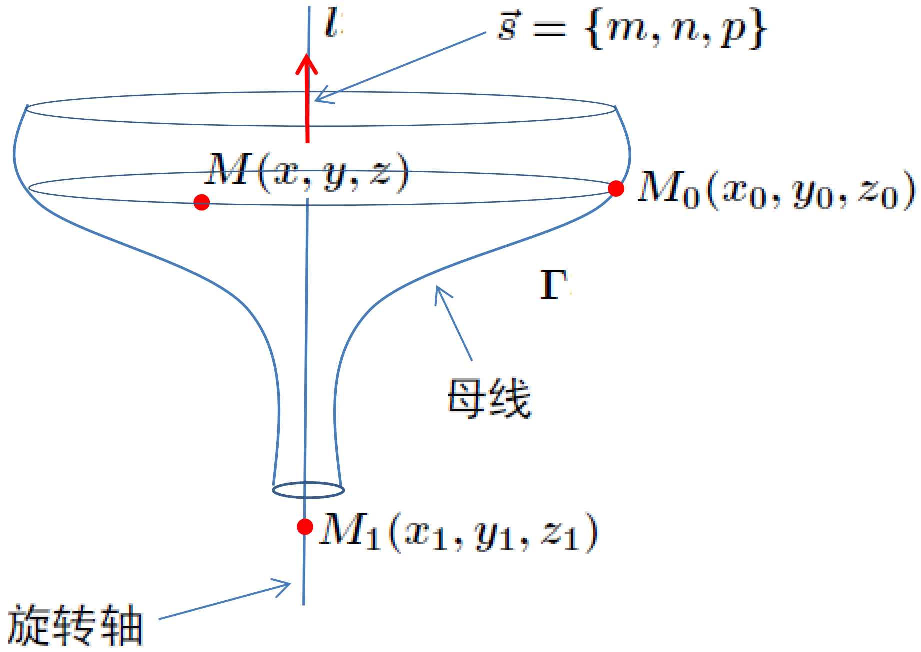
2.旋转面

一条曲线Γ绕一条直线l旋转所得的曲面称为旋转面



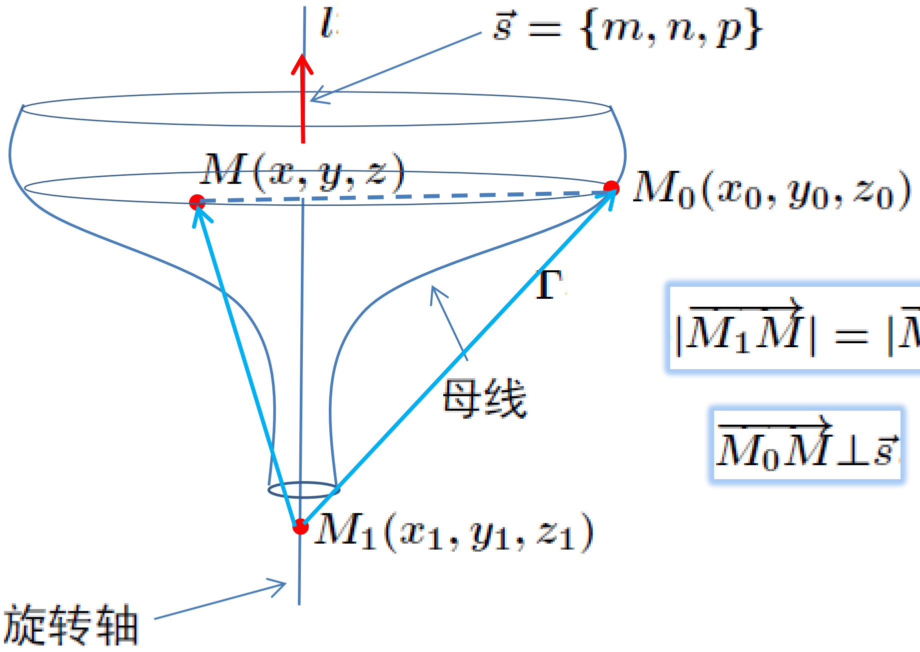
2.旋转面

一条曲线Γ绕一条直线l旋转所得的曲面称为旋转面



2.旋转面

一条曲线Γ绕一条直线l旋转所得的曲面称为旋转面

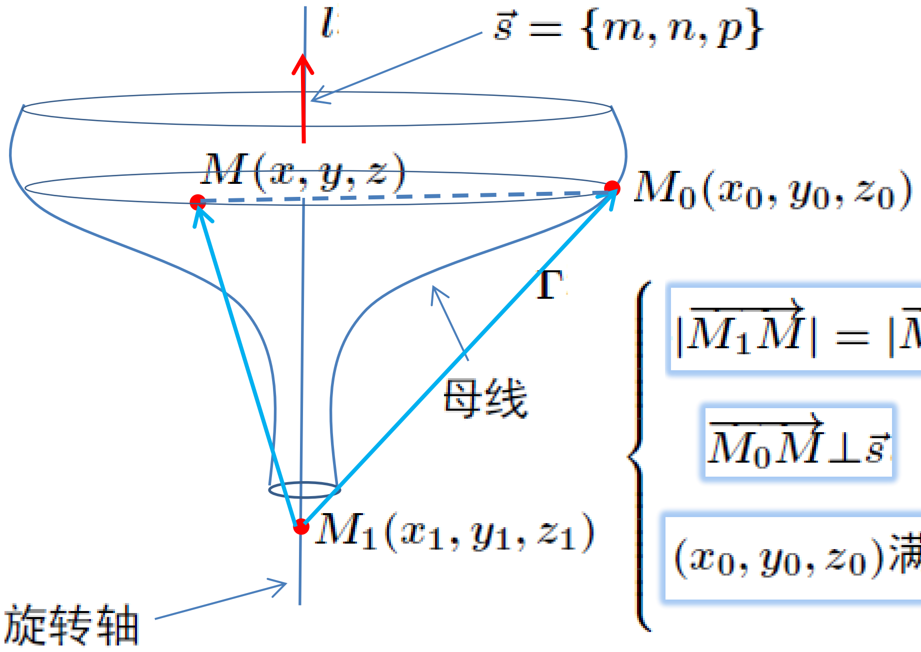


$$\boxed{|\overrightarrow{M_1M}|=|\overrightarrow{M_1M_0}|}$$

$$\boxed{\overrightarrow{M_0M}\perp\vec{s}}$$

2.旋转面

一条曲线Γ绕一条直线l旋转所得的曲面称为旋转面

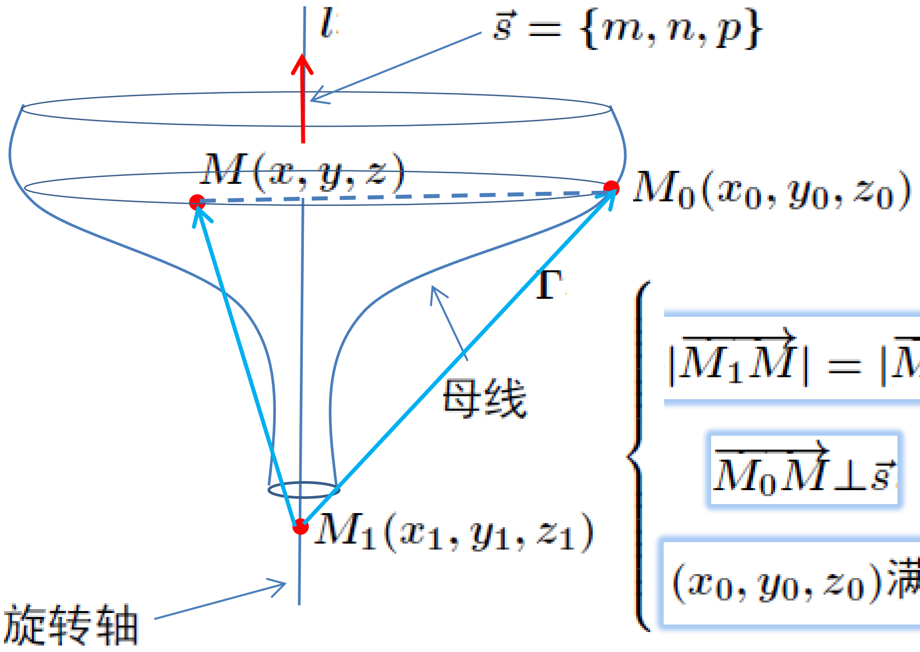


$$\begin{cases} \boxed{|\overrightarrow{M_1M}|=|\overrightarrow{M_1M_0}|} \\ \boxed{\overrightarrow{M_0M}\perp\vec{s}} \\ \boxed{(x_0,y_0,z_0)\text{满足Γ的方程}} \end{cases}$$

得到一个含有x,y,z的方程，即为旋转面的方程

2.旋转面

一条曲线Γ绕一条直线l旋转所得的曲面称为旋转面



$$\begin{cases} \boxed{|\overrightarrow{M_1M}|=|\overrightarrow{M_1M_0}|} \\ \boxed{\overrightarrow{M_0M}\perp\vec{s}} \\ \boxed{(x_0,y_0,z_0)\text{满足}\Gamma\text{的方程}} \end{cases}$$

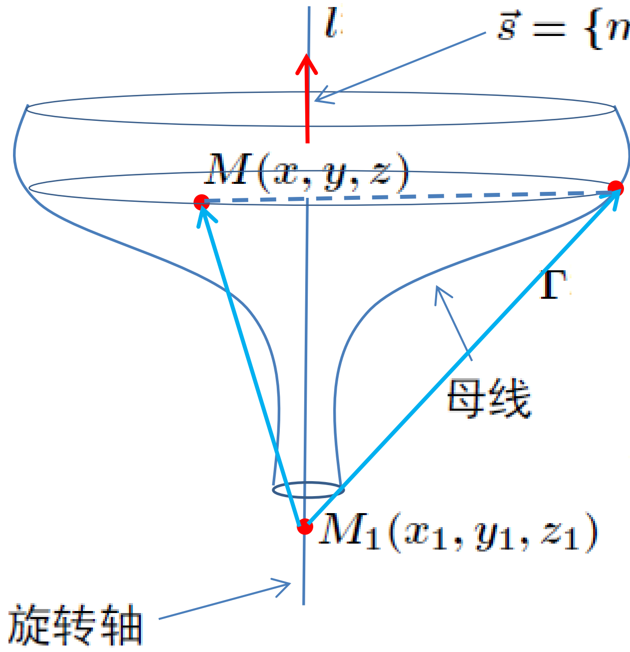
得到一个含有x,y,z的方程，即为旋转面的方程

比如，设z轴为旋转轴，母线Γ 在yoz平面上，

其方程为$\begin{cases} f(y,z)=0 \\ x=0 \end{cases}$

2.旋转面

一条曲线Γ绕一条直线l旋转所得的曲面称为旋转面



$$\begin{cases} \boxed{|\overrightarrow{M_1M}|=|\overrightarrow{M_1M_0}|} \\ \boxed{\overrightarrow{M_0M}\perp\vec{s}} \\ \boxed{(x_0,y_0,z_0)\text{满足Γ的方程}} \end{cases}$$

得到一个含有x,y,z的方程，即为旋转面的方程

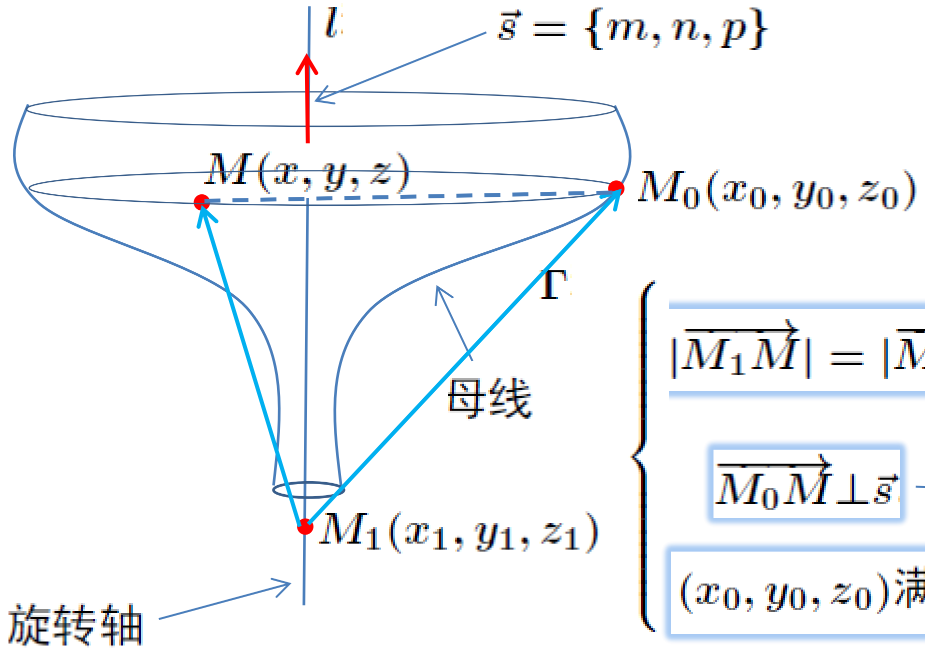
比如，设z轴为旋转轴，母线Γ 在yoz平面上，

其方程为$\begin{cases} f(y,z)=0 \\ x=0 \end{cases}$

$$\begin{cases} f(y_0,z_0)=0 \\ x_0=0 \\ x^2+y^2=x_0^2+y_0^2 \\ (z-z_0)=0 \end{cases}$$

2.旋转面

一条曲线Γ绕一条直线l旋转所得的曲面称为旋转面



$$\begin{cases} |\overrightarrow{M_1M}|=|\overrightarrow{M_1M_0}| \\ \overrightarrow{M_0M}\perp\vec{s} \\ (x_0,y_0,z_0)\text{满足}\Gamma\text{的方程} \end{cases}$$

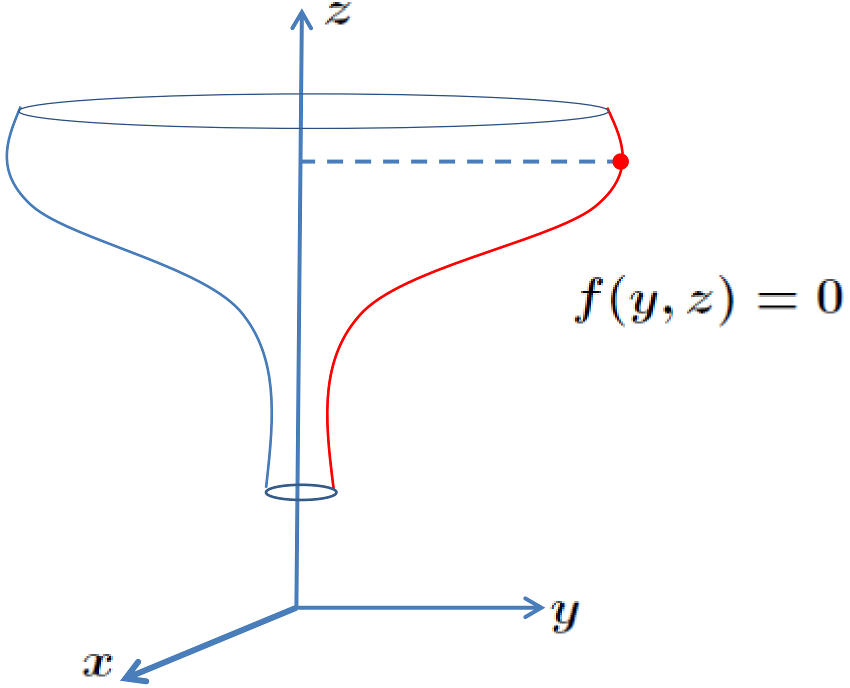
得到一个含有x,y,z的方程，即为旋转面的方程

比如，设z轴为旋转轴，母线Γ 在yoz平面上，

其方程为$\begin{cases} f(y,z)=0 \\ x=0 \end{cases}$

$$\begin{cases} f(y_0,z_0)=0 \\ x_0=0 \\ x^2+y^2=x_0^2+y_0^2 \\ (z-z_0)=0 \end{cases}$$

$$\boxed{f(\pm\sqrt{x^2+y^2},z)=0}$$



比如，设z轴为旋转轴，母线Γ 在yoz平面上，

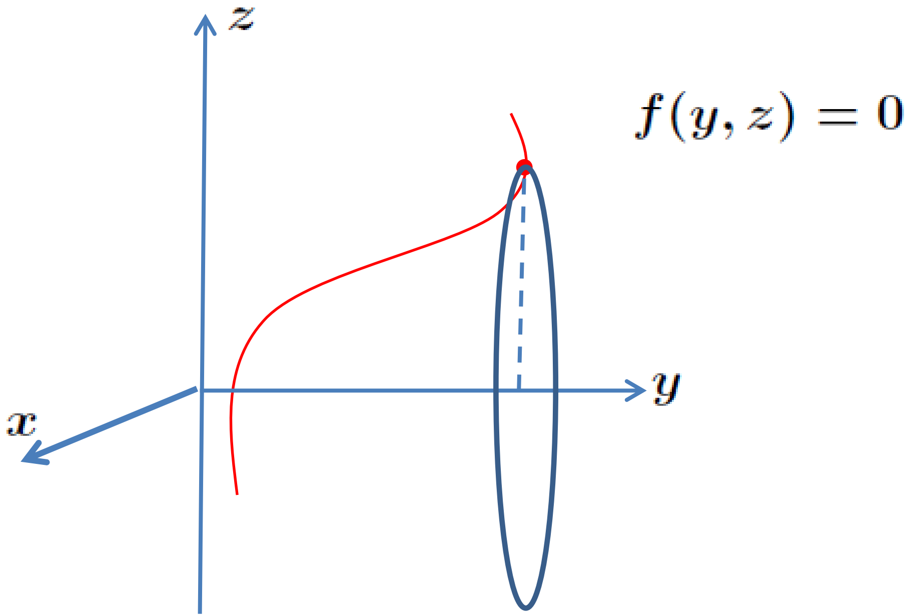
$$\text{其方程为}\begin{cases} f(y,z)=0 \\ x=0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} f(y_0,z_0)=0 \\ x_0=0 \\ x^2+y^2=x_0^2+y_0^2 \\ (z-z_0)=0 \end{cases}$$

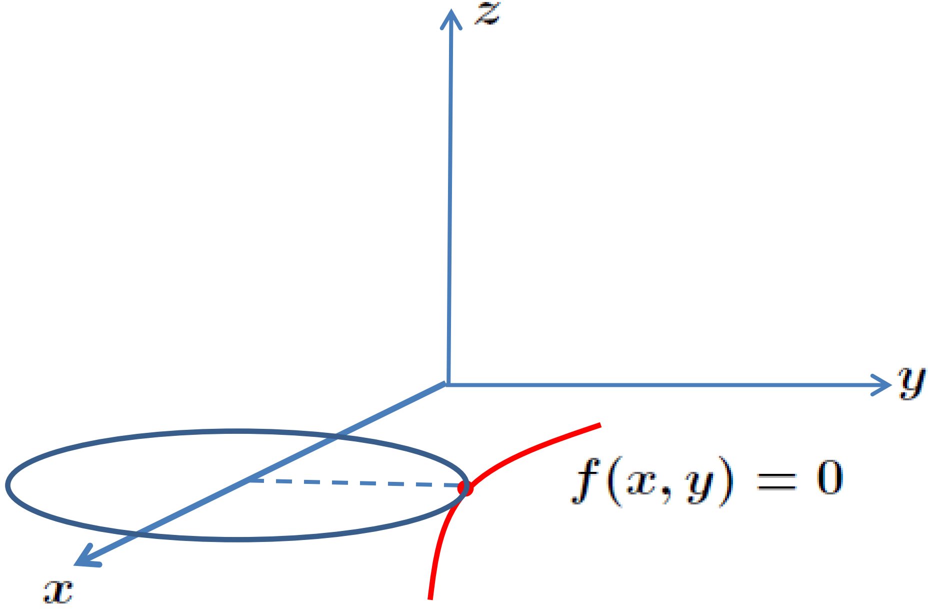
$$\boxed{f(\pm\sqrt{x^2+y^2},z)=0}$$

可以类似推得

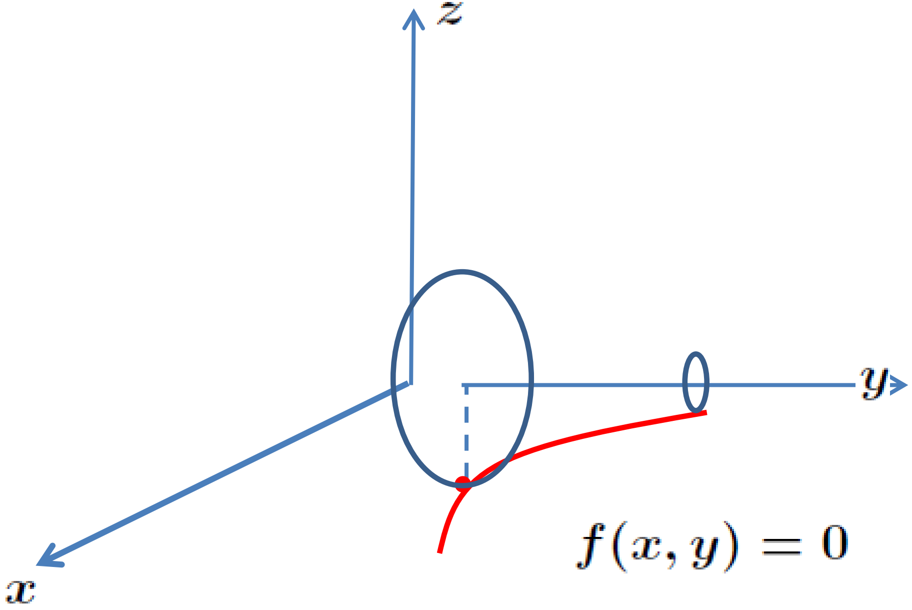
$$\begin{cases} f(y,z)=0 \\ x=0 \end{cases}$$ 绕y轴旋转所得到旋转面的方程为$f(y,\pm\sqrt{x^2+z^2})=0$



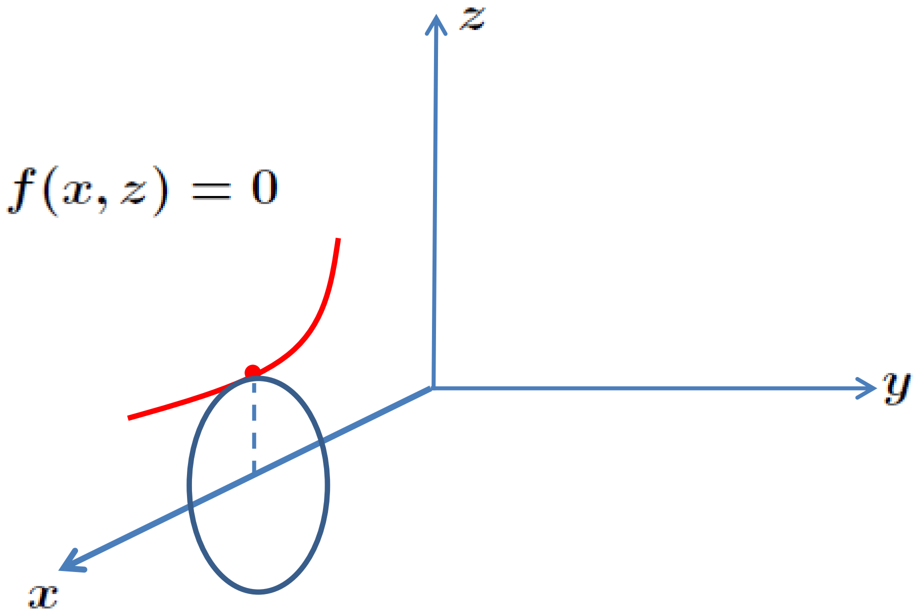
$$\begin{cases} f(x,y)=0 \\ z=0 \end{cases}$$ 绕x轴旋转所得到旋转面的方程为$f(x,\pm\sqrt{y^2+z^2})=0$



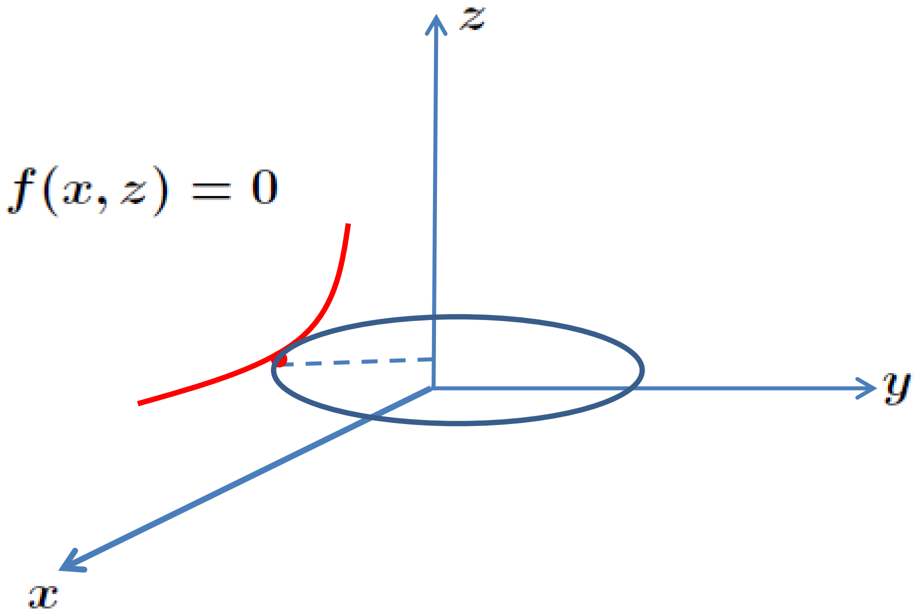
$$\begin{cases} f(x,y)=0 \\ z=0 \end{cases}$$ 绕y轴旋转所得到旋转面的方程为$f(\pm\sqrt{x^2+z^2}, y)=0$.



$$\begin{cases} f(x,z)=0 \\ y=0 \end{cases}$$ 绕x轴旋转所得到旋转面的方程为$f(x,\pm\sqrt{y^2+z^2})=0$



$$\begin{cases} f(x,z)=0 \\ y=0 \end{cases}$$ 绕z轴旋转所得到旋转面的方程为$f(\pm\sqrt{x^2+y^2},z)=0$



$\boxed{\text{注}}$

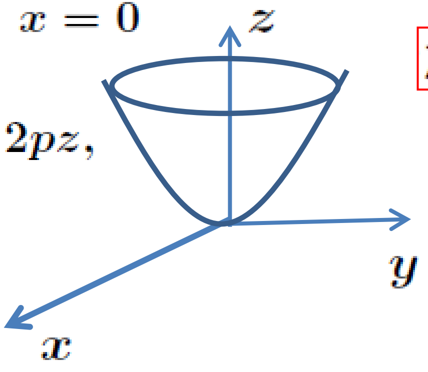
旋转面之方程中诸如$\pm\sqrt{x^2+y^2}$之类的项，其符号选取要视具体情况而定。

注

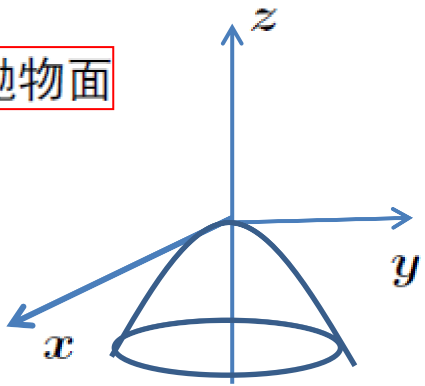
旋转面之方程中诸如$\pm\sqrt{x^2+y^2}$之类的项，其符号选取要视具体情况而定。

例 母线Γ：$\begin{cases} y^2 = 2pz \\ x = 0 \end{cases}$ 绕z轴旋转所得旋转面的方程为

$x^2+y^2=2pz$,



旋转抛物面

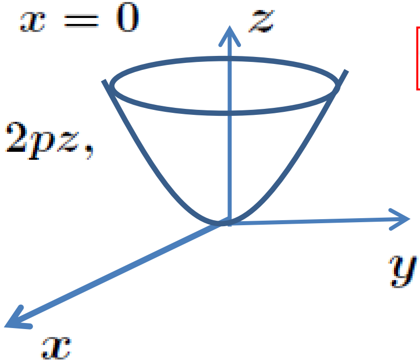


注

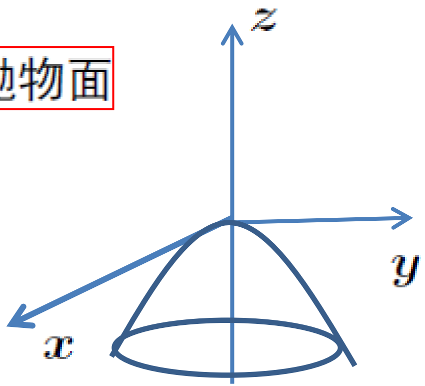
旋转面之方程中诸如$\pm\sqrt{x^2+y^2}$之类的项，其符号选取要视具体情况而定。

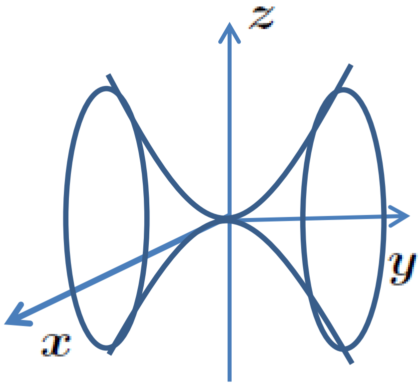
例 母线Γ：$\begin{cases} y^2 = 2pz \\ x = 0 \end{cases}$ 绕z轴旋转所得旋转面的方程为

$x^2+y^2=2pz,$



旋转抛物面



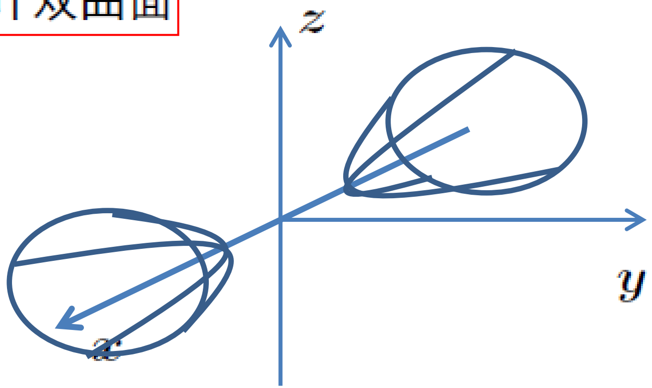


它绕y轴旋转所得旋转面的方程为$y^2 = \pm 2p\sqrt{x^2+z^2}$

例

母线Γ：$\begin{cases} \frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1 \\ z=0 \end{cases}$ 绕x轴旋转所得旋转面的方程为$\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2+z^2}{b^2}=1$

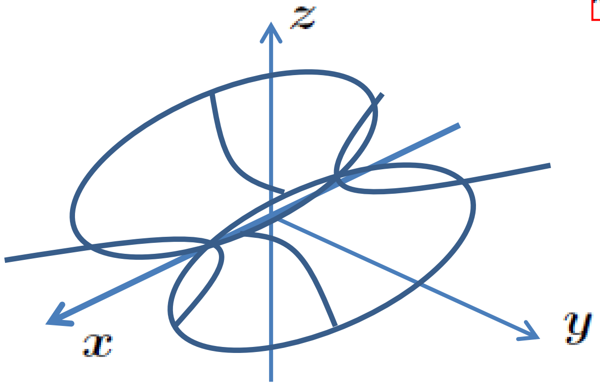
旋转双叶双曲面

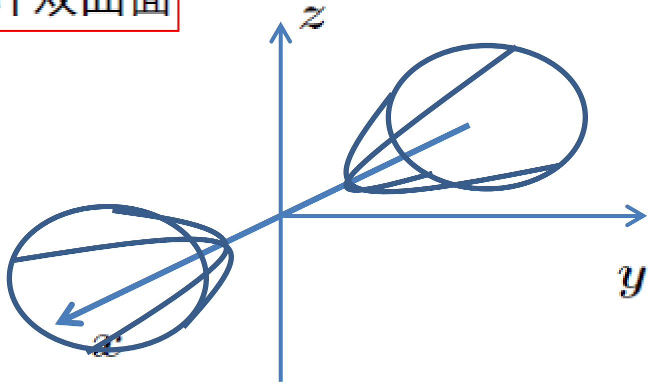


例

母线$\Gamma:\begin{cases}\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1\\ z=0\end{cases}$ 绕x轴旋转所得旋转面的方程为$\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2+z^2}{b^2}=1$

旋转双叶双曲面

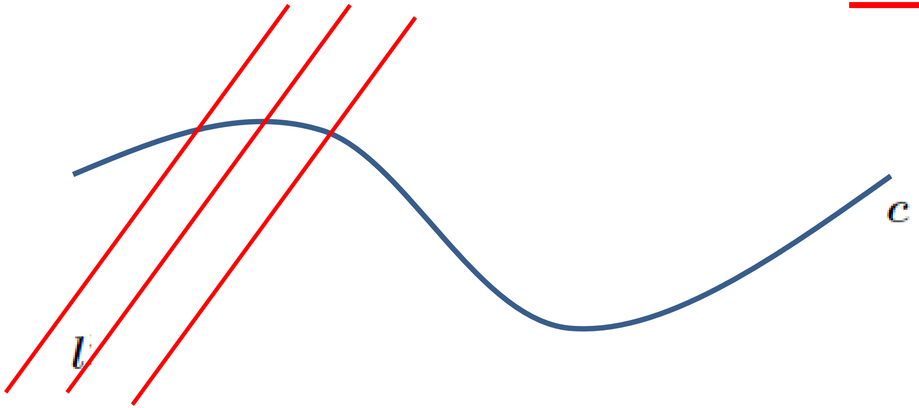




绕y轴旋转所得旋转面的方程为$\frac{x^2+z^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$,它称为旋转单叶双曲面

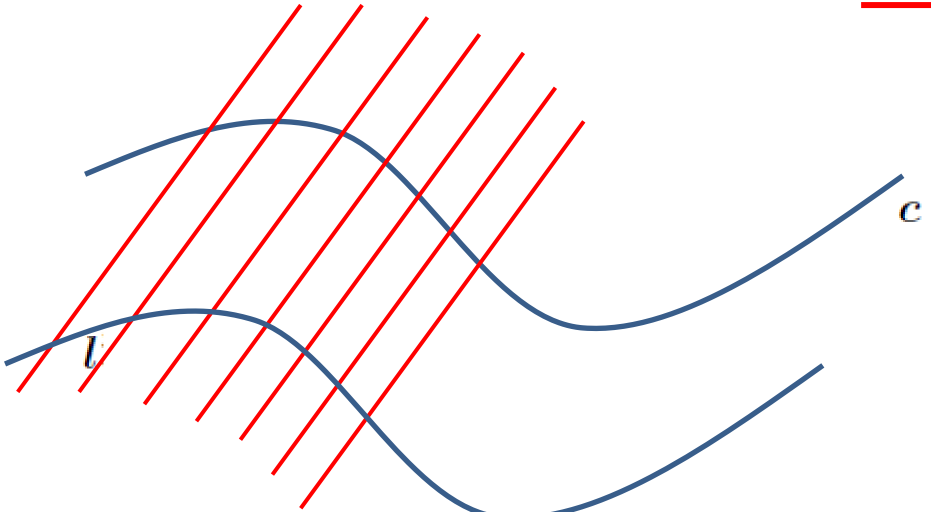
3.柱面

一条直线l沿着一条空间曲线c平行滑动时所形成的曲面叫做柱面



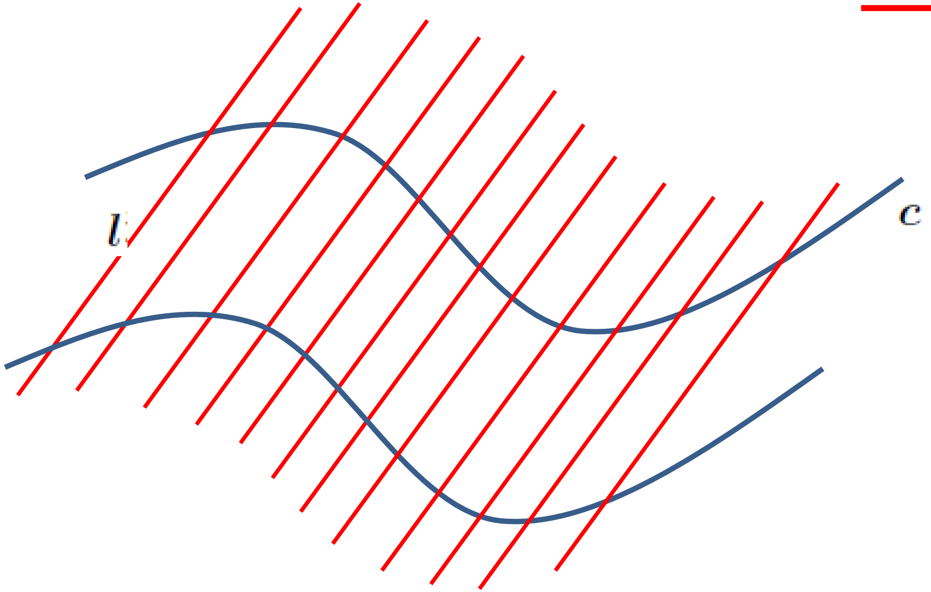
3.柱面

一条直线l沿着一条空间曲线c平行滑动时所形成的曲面叫做柱面



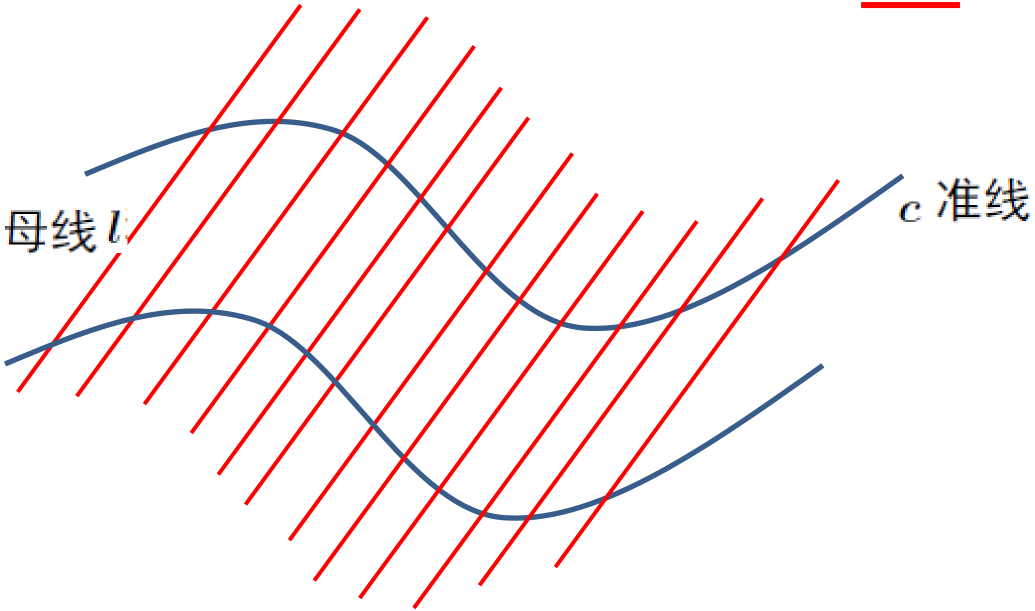
3.柱面

一条直线l沿着一条空间曲线c平行滑动时所形成的曲面叫做柱面



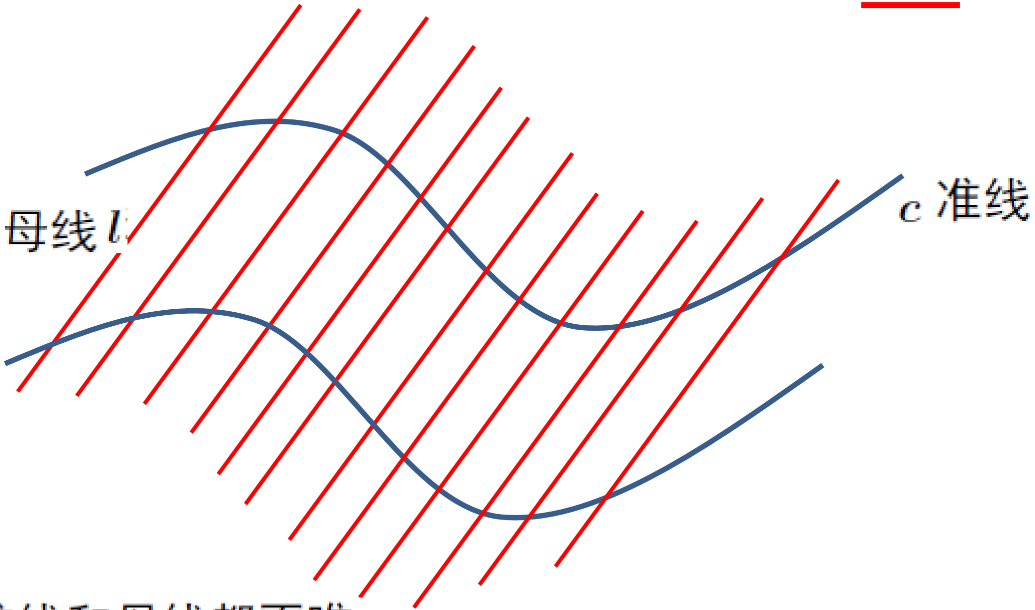
3.柱面

一条直线l沿着一条空间曲线c平行滑动时所形成的曲面叫做柱面



3.柱面

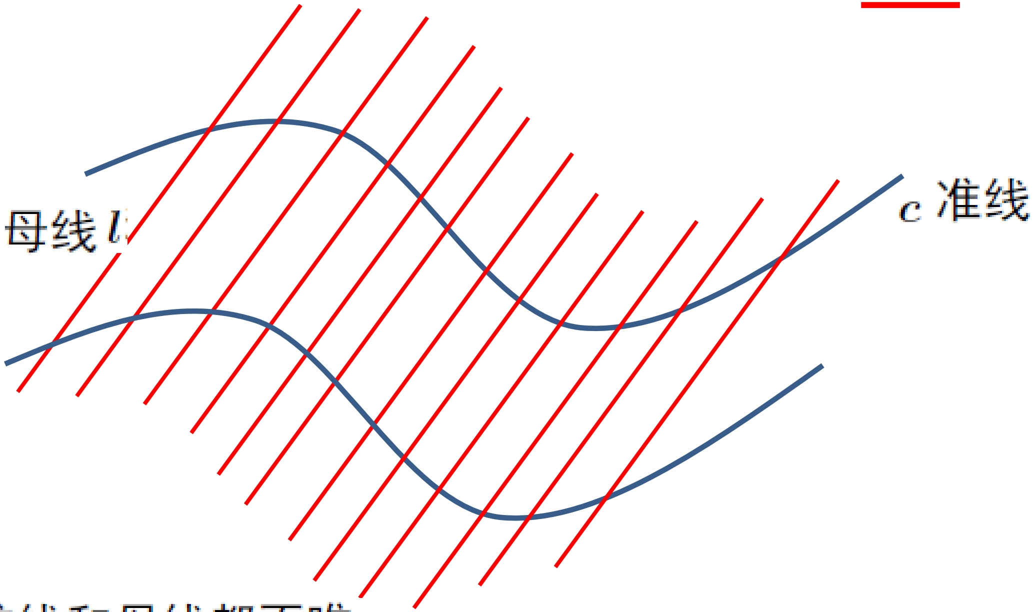
一条直线l沿着一条空间曲线c平行滑动时所形成的曲面叫做柱面



一个柱面，它的准线和母线都不唯一

3.柱面

一条直线l沿着一条空间曲线c平行滑动时所形成的曲面叫做柱面

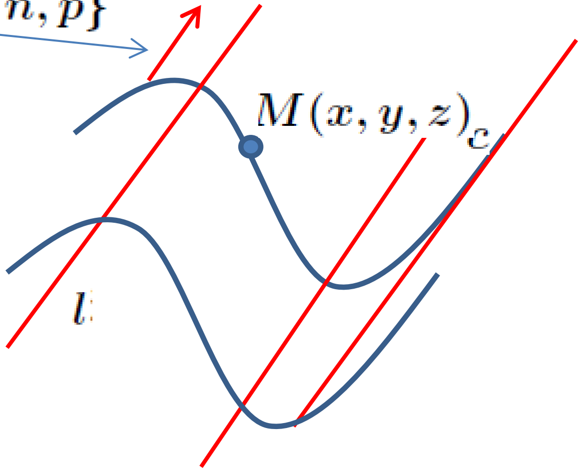


一个柱面，它的准线和母线都不唯一

但母线方向唯一(除去平面，它的母线方向不唯一)

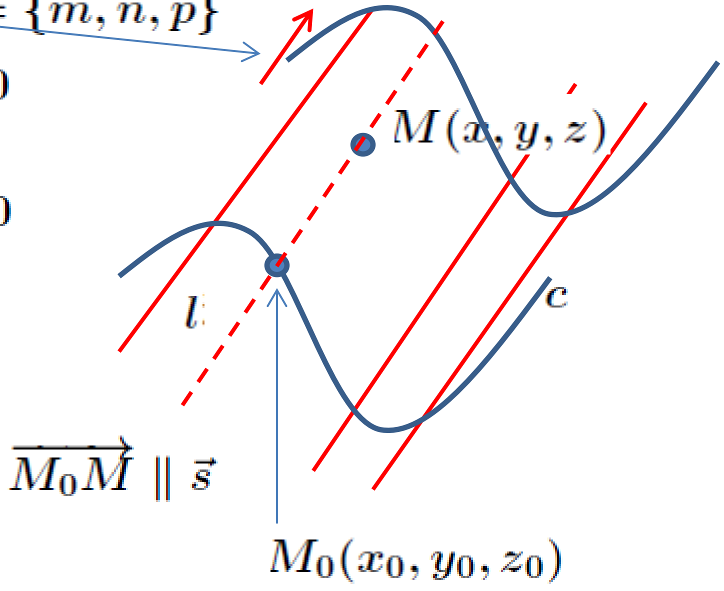
设一个柱面的母线方向向量为$\vec{s}=\{m,n,p\}$

准线c的方程为: $\begin{cases} F(x,y,z)=0 \\ G(x,y,z)=0 \end{cases}$



设一个柱面的母线方向向量为$\vec{s}=\{m,n,p\}$

准线c的方程为: $\begin{cases} F(x,y,z)=0 \\ G(x,y,z)=0 \end{cases}$

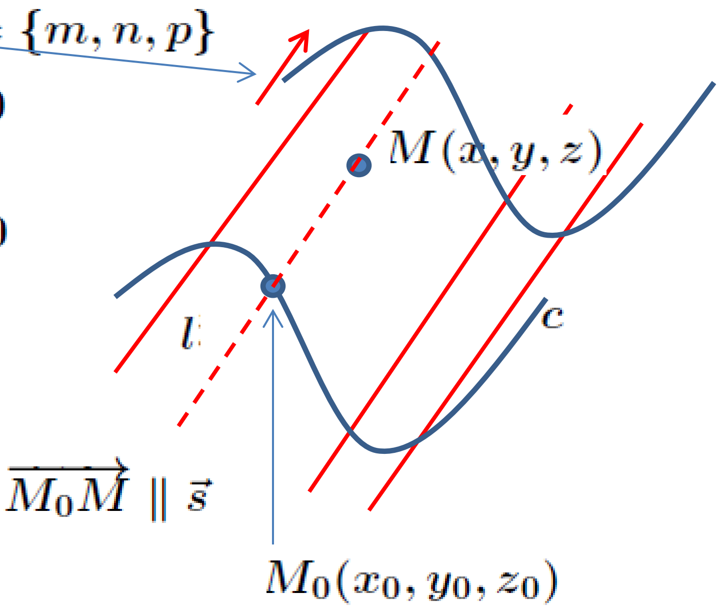


设一个柱面的母线方向向量为$\vec{s}=\{m,n,p\}$

准线c的方程为: $\begin{cases} F(x,y,z)=0 \\ G(x,y,z)=0 \end{cases}$

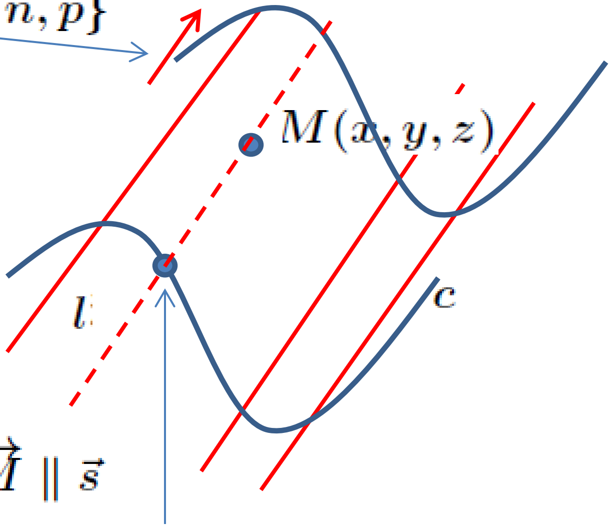
$$\exists t\in\mathbb{R}\quad s.t.\quad \overrightarrow{M_0M}=t\vec{s}$$

故有$\begin{cases} F(x_0,y_0,z_0)=0 \\ G(x_0,y_0,z_0)=0 \\ x=x_0+mt \\ y=y_0+nt \\ z=z_0+pt \end{cases}$



设一个柱面的母线方向向量为$\vec{s}=\{m,n,p\}$

准线c的方程为: $\begin{cases} F(x,y,z)=0 \\ G(x,y,z)=0 \end{cases}$



$M_0(x_0,y_0,z_0)$

$\overrightarrow{M_0M} \parallel \vec{s}$

$\exists t \in \mathbb{R} \quad s.t. \quad \overrightarrow{M_0M} = t\vec{s}$

故有$\begin{cases} F(x_0,y_0,z_0)=0 \\ G(x_0,y_0,z_0)=0 \\ x=x_0+mt \\ y=y_0+nt \\ z=z_0+pt \end{cases}$

消去x_0,y_0,z_0,则得

$\begin{cases} F(x-mt,y-nt,z-pt)=0 \\ G(x-mt,y-nt,z-pt)=0 \end{cases}$

再消去参数t，即得到柱面的方程

比如取一个圆为准线，垂直于该圆的直线为母线，则得到圆柱面。

比如取一个圆为准线，垂直于该圆的直线为母线，则得到圆柱面。

圆柱面有一条对称轴l，圆柱面上每一点到l的距离都相等，等于准线圆的半径

比如取一个圆为准线，垂直于该圆的直线为母线，则得到圆柱面。

圆柱面有一条对称轴l，圆柱面上每一点到l的距离都相等，等于准线圆的半径

若圆柱的半径为R，对称轴为z轴，

则准线方程为$\begin{cases} x^2 + y^2 = R^2 \\ z = 0 \end{cases}$ 柱面方程为$x^2 + y^2 = R^2$

定理

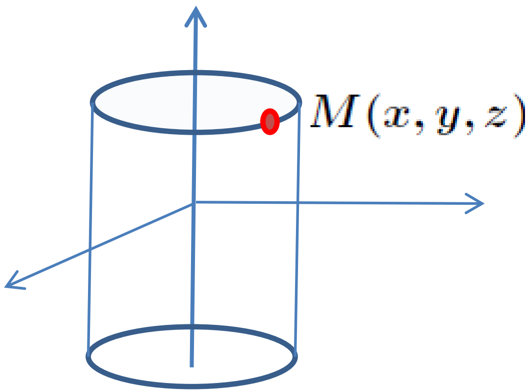
一个柱面的母线平行于z轴(或x轴，y轴)，则它的方程中不含有z(或x,y)；

反之，若一个三元方程中不含有z(或x,y)，

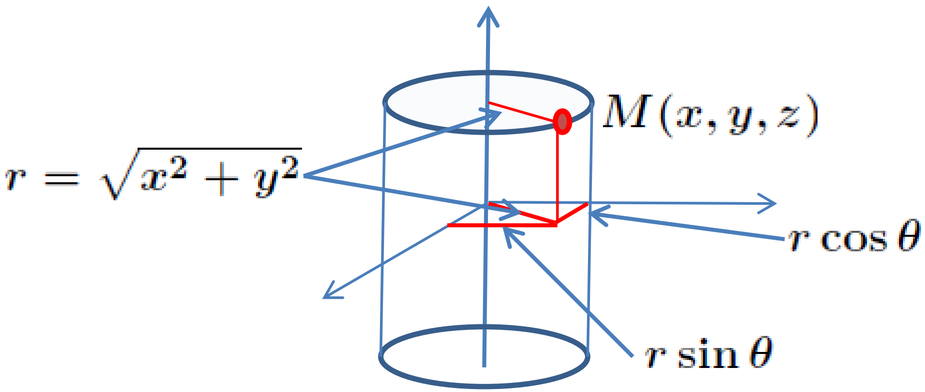
则它表示一个母线平行于z 轴(或x轴，y轴)的柱面。

空间中任意一点$M(x,y,z)$必在以$r=\sqrt{x^2+y^2}$为半径z轴为对称轴的圆柱面上

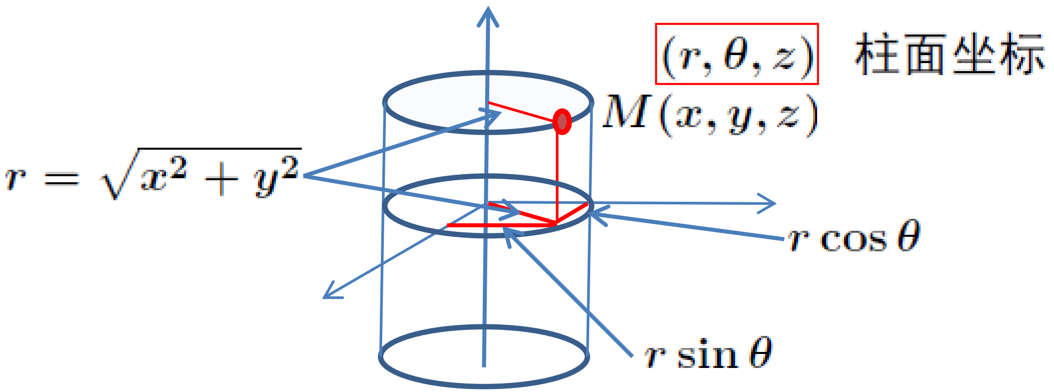
空间中任意一点$M(x,y,z)$必在以$r=\sqrt{x^2+y^2}$为半径z轴为对称轴的圆柱面上



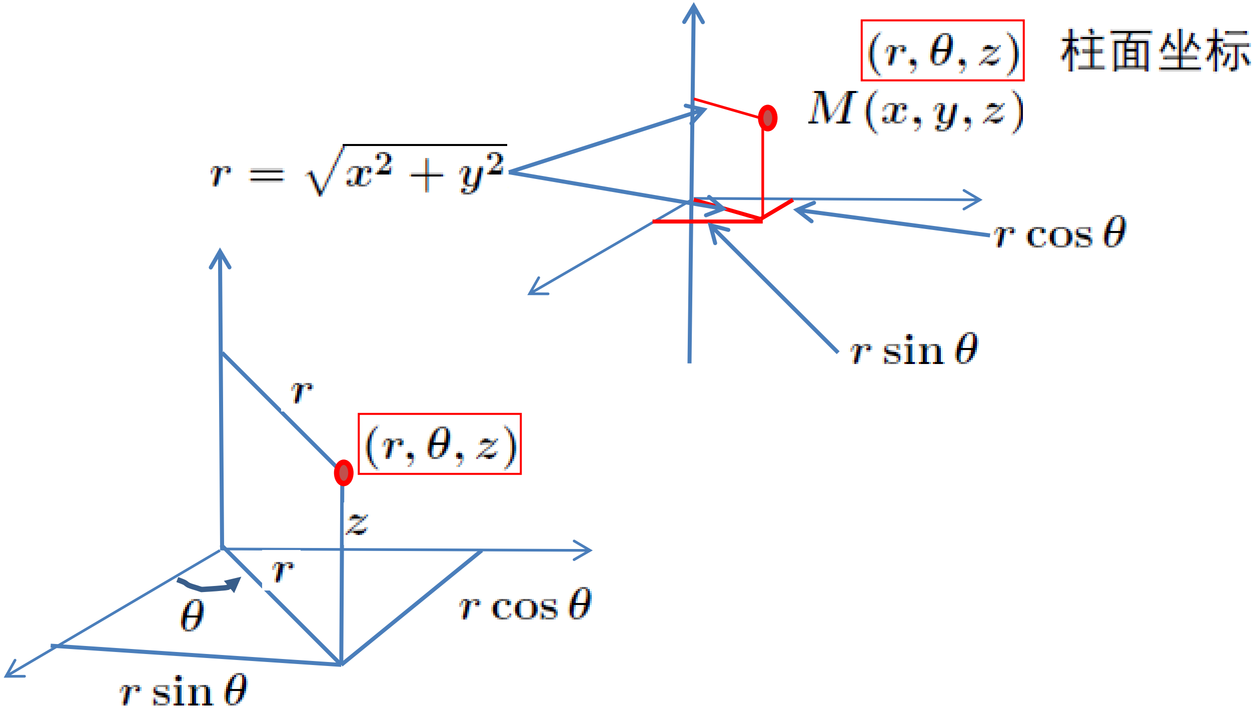
空间中任意一点$M(x,y,z)$必在以$r=\sqrt{x^2+y^2}$为半径z轴为对称轴的圆柱面上



空间中任意一点$M(x,y,z)$必在以$r=\sqrt{x^2+y^2}$为半径z轴为对称轴的圆柱面上

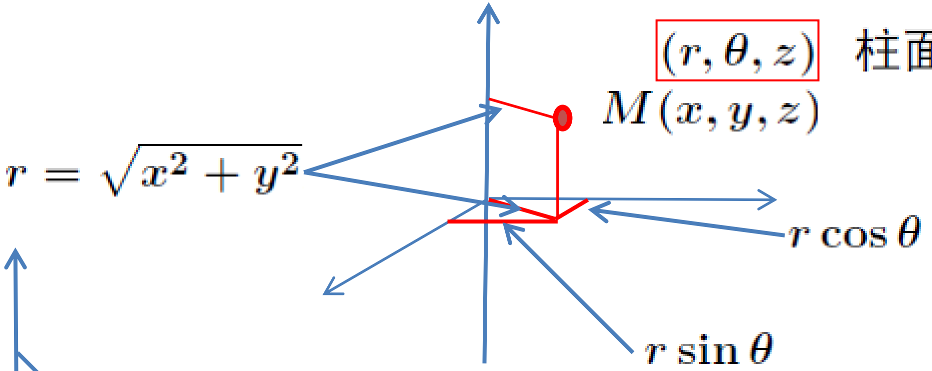


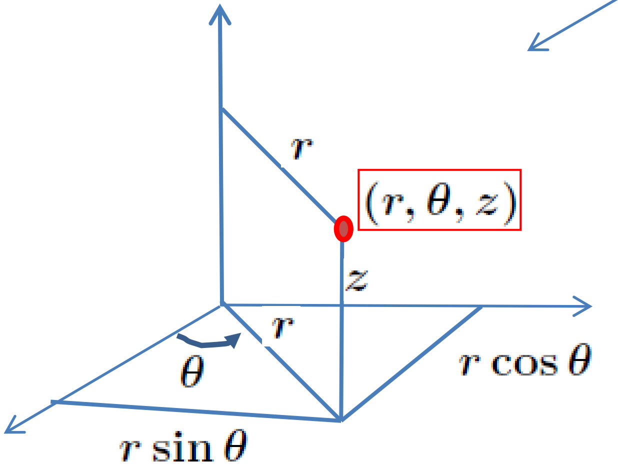
$$0 \le \theta \le 2\pi, 0 \le r \le \infty, -\infty \le z \le \infty$$



$$0 \le \theta \le 2\pi, 0 \le r \le \infty, -\infty \le z \le \infty$$

$\boxed{(r, \theta, z)}$ 柱面坐标





$$\boxed{\begin{cases} x = r\cos\theta \\ y = r\sin\theta \\ z = z \end{cases}}$$