第一换元法

- 不定积分的第一换元法：若ϕ是可微函数，$g(x)=f(\phi(x))\phi'(x)$，$F'(y)=f(y)$，则有$F(\phi(x))'=g(x)$，即如果$\int f(y)dy=F(y)+C$，则有$\int f(\phi(x))\phi'(x)dx=F(\phi(x))+C$．积分过程可写成：

$$\int f(\phi(x))\phi'(x)dx \xlongequal{y=\phi(x)} \int f(y)dy = F(y)+C \xlongequal{y=\phi(x)} F(\phi(x))+C.$$

- 注：这里$y=\phi(x)$不要求可逆，$\phi'(x)$可以有零点.

第一换元法

- 不定积分的第一换元法：若ϕ是可微函数，$g(x)=f(\phi(x))\phi'(x)$，$F'(y)=f(y)$，则有$F(\phi(x))'=g(x)$，即如果$\int f(y)dy=F(y)+C$，则有$\int f(\phi(x))\phi'(x)dx=F(\phi(x))+C$. 积分过程可写成:

$$\int f(\phi(x))\phi'(x)dx \xlongequal{y=\phi(x)} \int f(y)dy = F(y)+C$$
$$\xlongequal{y=\phi(x)} F(\phi(x))+C.$$

- 注：这里$y=\phi(x)$不要求可逆，$\phi'(x)$可以有零点.

用第一换元法求不定积分1

- 例: $\int f(kx)dx = \frac{1}{k}\int f(kx)d(kx) = \frac{1}{k}F(kx) + C$, 这里$F' = f$.
- 例:

$$\int \tan x dx = \int \frac{\sin x}{\cos x} dx = -\int \frac{(\cos x)'}{\cos x} dx$$

$$\xlongequal{y=\cos(x)} -\int \frac{dy}{y} = -\ln|y| + C \xlongequal{y=\cos(x)} -\ln|\cos x| + C.$$

这里不定积分是在某个区间$(k\pi - \frac{\pi}{2}, k\pi + \frac{\pi}{2})$.

用第一换元法求不定积分1

- 例: $\int f(kx)dx = \frac{1}{k}\int f(kx)d(kx) = \frac{1}{k}F(kx) + C$, 这里$F' = f$.
- 例:

$$\int \tan x dx = \int \frac{\sin x}{\cos x}dx = -\int \frac{(\cos x)'}{\cos x}dx$$

$$\xlongequal{y=\cos(x)} -\int \frac{dy}{y} = -\ln|y| + C \xlongequal{y=\cos(x)} -\ln|\cos x| + C.$$

这里不定积分是在某个区间$(k\pi - \frac{\pi}{2}, k\pi + \frac{\pi}{2})$.

用第一换元法求不定积分2

- 例:$m \neq n$,

$$
\begin{aligned}
\int \sin nx \sin mx dx &= \frac{1}{2}\int (\cos(n-m)x - \cos(n+m)x) dx \\
&= \frac{1}{2}\Big(\int \cos(n-m)x dx - \int \cos(n+m)x dx\Big) \\
&= \frac{1}{2}\Big(\frac{1}{n-m}\int \cos(n-m)x d(n-m)x \\
&\quad - \frac{1}{n+m}\int \cos(n+m)x d(n+m)x\Big) \\
&= \frac{1}{2}\Big(\frac{\sin(n-m)x}{n-m} - \frac{\sin(n+m)x}{n+m}\Big) + C.
\end{aligned}
$$

用第一换元法求不定积分3

- $$\int \frac{dx}{a^2 - x^2} = \frac{1}{2a} \int \Big(\frac{1}{a-x} + \frac{1}{a+x} \Big) dx$$
$$= \frac{1}{2a} \Big(\int \frac{d(a-x)}{a-x} + \int \frac{d(a+x)}{a+x} \Big) = \frac{1}{2a} \ln \Big| \frac{a+x}{a-x} \Big| + C.$$
- $\int \frac{dx}{a^2 + x^2} = \frac{1}{a} \int \frac{d(\frac{x}{a})}{1 + (\frac{x}{a})^2} = \frac{1}{a} \arctan \frac{x}{a} + C.$
- $\int \frac{dx}{\sqrt{a^2 - x^2}} = \int \frac{d(\frac{x}{a})}{\sqrt{1 - (\frac{x}{a})^2}} = \arcsin \frac{x}{a} + C.$

用第一换元法求不定积分3

- $$\int \frac{dx}{a^2-x^2} = \frac{1}{2a}\int \Big(\frac{1}{a-x}+\frac{1}{a+x}\Big)dx$$
$$= \frac{1}{2a}\Big(\int \frac{d(a-x)}{a-x} + \int \frac{d(a+x)}{a+x}\Big) = \frac{1}{2a}\ln\left|\frac{a+x}{a-x}\right| + C.$$
- $\displaystyle\int \frac{dx}{a^2+x^2} = \frac{1}{a}\int \frac{d(\frac{x}{a})}{1+(\frac{x}{a})^2} = \frac{1}{a}\arctan\frac{x}{a} + C.$
- $\displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt{a^2-x^2}} = \int \frac{d(\frac{x}{a})}{\sqrt{1-(\frac{x}{a})^2}} = \arcsin\frac{x}{a} + C.$

用第一换元法求不定积分3

- $$\int \frac{dx}{a^2-x^2} = \frac{1}{2a}\int \left(\frac{1}{a-x}+\frac{1}{a+x}\right)dx$$
  $$= \frac{1}{2a}\left(\int \frac{d(a-x)}{a-x} + \int \frac{d(a+x)}{a+x}\right) = \frac{1}{2a}\ln\left|\frac{a+x}{a-x}\right| + C.$$
- $\displaystyle \int \frac{dx}{a^2+x^2} = \frac{1}{a}\int \frac{d(\frac{x}{a})}{1+(\frac{x}{a})^2} = \frac{1}{a}\arctan\frac{x}{a} + C.$
- $\displaystyle \int \frac{dx}{\sqrt{a^2-x^2}} = \int \frac{d(\frac{x}{a})}{\sqrt{1-(\frac{x}{a})^2}} = \arcsin\frac{x}{a} + C.$

用第一换元法求不定积分4

例：求$\int \frac{dx}{\sin x}$.

- 方法1.

$$\int \frac{dx}{\sin x} = \int \frac{dx}{2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}} = \int \frac{dx}{2\tan\frac{x}{2}\cos^2\frac{x}{2}}$$
$$= \int \frac{d\tan\frac{x}{2}}{\tan\frac{x}{2}} = \ln\left|\tan\frac{x}{2}\right| + C.$$

- 方法2.

$$\int \frac{dx}{\sin x} = \int \frac{\sin x dx}{1-\cos^2 x} = -\int \frac{d\cos x}{1-\cos^2 x}$$
$$= \frac{1}{2}\ln\left|\frac{1-\cos x}{1+\cos x}\right| + C.$$

- 注：上面得到的两个结果相同. 事实上，$\frac{1-\cos x}{1+\cos x} = \tan^2\frac{x}{2}$.

用第一换元法求不定积分4

例：求$\int \frac{dx}{\sin x}$.

- 方法1.

$$\int \frac{dx}{\sin x} = \int \frac{dx}{2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}} = \int \frac{dx}{2\tan\frac{x}{2}\cos^2\frac{x}{2}}$$
$$= \int \frac{d\tan\frac{x}{2}}{\tan\frac{x}{2}} = \ln\left|\tan\frac{x}{2}\right| + C.$$

- 方法2.

$$\int \frac{dx}{\sin x} = \int \frac{\sin x dx}{1-\cos^2 x} = -\int \frac{d\cos x}{1-\cos^2 x}$$
$$= \frac{1}{2}\ln\left|\frac{1-\cos x}{1+\cos x}\right| + C.$$

- 注：上面得到的两个结果相同. 事实上，$\frac{1-\cos x}{1+\cos x} = \tan^2\frac{x}{2}$.

用第一换元法求不定积分4

例：求$\int \frac{dx}{\sin x}$.

- 方法1.

$$\int \frac{dx}{\sin x} = \int \frac{dx}{2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}} = \int \frac{dx}{2\tan\frac{x}{2}\cos^2\frac{x}{2}}$$

$$= \int \frac{d\tan\frac{x}{2}}{\tan\frac{x}{2}} = \ln\left|\tan\frac{x}{2}\right| + C.$$

- 方法2.

$$\int \frac{dx}{\sin x} = \int \frac{\sin x dx}{1-\cos^2 x} = -\int \frac{d\cos x}{1-\cos^2 x}$$

$$= \frac{1}{2}\ln\left|\frac{1-\cos x}{1+\cos x}\right| + C.$$

- 注：上面得到的两个结果相同. 事实上，$\frac{1-\cos x}{1+\cos x} = \tan^2\frac{x}{2}$.

不定积分的第二换元法1

- 设$x=\phi(t)$可逆，且ϕ,ϕ^{-1}均可导($\phi'(x)\neq 0$)，若$F'(t)=f(\phi(t))\phi'(t)$，则有$F(\phi^{-1}(x))'=f(x)\phi'(t)\frac{1}{\phi'(t)}=f(x)$.即$F(\phi^{-1}(x))$是$f(x)$的原函数，积分过程可写成：

$$\int f(x)dx \xlongequal{x=\phi(t)} \int f(\phi(t))\phi'(t)dt = F(t)+C$$

$$\xlongequal{t=\phi^{-1}(t)} F(\phi^{-1}(x))+C$$

- 注：不定积分的第二换元法要求ϕ可逆.
- 常用变换（目的是去根号）：含有根号$\sqrt{a^2-x^2}$时，用变换$x=a\sin t, |t|<\frac{\pi}{2}$，此时

$$t=\arcsin\frac{x}{a}, \sqrt{a^2-x^2}=a\cos t, dx=a\cos tdt.$$

不定积分的第二换元法1

- 设$x = \phi(t)$可逆，且ϕ, ϕ^{-1}均可导($\phi'(x) \neq 0$)，若$F'(t) = f(\phi(t))\phi'(t)$，则有$F(\phi^{-1}(x))' = f(x)\phi'(t)\frac{1}{\phi'(t)} = f(x)$.即$F(\phi^{-1}(x))$是$f(x)$的原函数，积分过程可写成：

$$\int f(x)dx \xlongequal{x=\phi(t)} \int f(\phi(t))\phi'(t)dt = F(t) + C$$
$$\xlongequal{t=\phi^{-1}(t)} F(\phi^{-1}(x)) + C$$

- 注：不定积分的第二换元法要求ϕ可逆.
- 常用变换（目的是去根号）：含有根号$\sqrt{a^2 - x^2}$时，用变换$x = a\sin t, |t| < \frac{\pi}{2}$，此时

$$t = \arcsin\frac{x}{a}, \sqrt{a^2 - x^2} = a\cos t, dx = a\cos t dt.$$

不定积分的第二换元法1

- 设$x = \phi(t)$可逆，且ϕ, ϕ^{-1}均可导($\phi'(x) \neq 0$)，若$F'(t) = f(\phi(t))\phi'(t)$，则有$F(\phi^{-1}(x))' = f(x)\phi'(t)\frac{1}{\phi'(t)} = f(x)$.即$F(\phi^{-1}(x))$是$f(x)$的原函数，积分过程可写成：

$$\int f(x)dx \xlongequal{x=\phi(t)} \int f(\phi(t))\phi'(t)dt = F(t) + C$$

$$\xlongequal{t=\phi^{-1}(t)} F(\phi^{-1}(x)) + C$$

- 注：不定积分的第二换元法要求ϕ可逆.
- 常用变换（目的是去根号）：含有根号$\sqrt{a^2 - x^2}$时，用变换$x = a\sin t$, $|t| < \frac{\pi}{2}$，此时

$$t = \arcsin \frac{x}{a}, \sqrt{a^2 - x^2} = a\cos t, dx = a\cos tdt.$$

不定积分的第二换元法2

- 含有根号$\sqrt{x^2-a^2}$时，对$x>a$用变换$x=\frac{a}{\cos t}$，$t\in(0,\frac{\pi}{2})$，此时

$$t=\arccos\frac{a}{x},\sqrt{x^2-a^2}=a\tan t,dx=\frac{a\sin t}{\cos^2 t}dt.$$

对$x<-a$用变换$x=-\frac{a}{\cos t}$，$t\in(0,\frac{\pi}{2})$，此时

$$t=\arccos(-\frac{x}{a}),\sqrt{x^2-a^2}=a\tan t,dx=-\frac{a\sin t}{\cos^2 t}dt.$$

- 含有根号$\sqrt{a^2+x^2}$ 时，用变换$x=a\tan t$，$|t|<\frac{\pi}{2}$. 此时

$$t=\arctan\frac{x}{a},\sqrt{a^2+x^2}=\frac{a}{\cos t},dx=\frac{a}{\cos^2 t}dt.$$

不定积分的第二换元法2

- 含有根号$\sqrt{x^2-a^2}$时，对$x>a$用变换$x=\frac{a}{\cos t}$，$t\in(0,\frac{\pi}{2})$，此时
$$t=\arccos\frac{a}{x},\sqrt{x^2-a^2}=a\tan t,dx=\frac{a\sin t}{\cos^2 t}dt.$$
对$x<-a$用变换$x=-\frac{a}{\cos t}$，$t\in(0,\frac{\pi}{2})$，此时
$$t=\arccos(-\frac{x}{a}),\sqrt{x^2-a^2}=a\tan t,dx=-\frac{a\sin t}{\cos^2 t}dt.$$
- 含有根号$\sqrt{a^2+x^2}$ 时，用变换$x=a\tan t$，$|t|<\frac{\pi}{2}$. 此时
$$t=\arctan\frac{x}{a},\sqrt{a^2+x^2}=\frac{a}{\cos t},dx=\frac{a}{\cos^2 t}dt.$$

用第二换元法求不定积分1

- 例：

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x+1}+1} \xlongequal[t>0]{x=t^2-1} \int \frac{2tdt}{t+1} = 2\int (1-\frac{1}{t+1})dt$$

$$= 2(t-\ln(1+t)) + C \xlongequal{t=\sqrt{x+1}} 2(\sqrt{x+1} - \ln(1+\sqrt{x+1})) + C.$$

- 例：设$a>0$, $x = a\sin t$, $|t| < \frac{\pi}{2}$. $t = \arcsin\frac{x}{a}$

$$\int \sqrt{a^2-x^2}dx \xlongequal{x=a\sin t} \int \sqrt{a^2\cos^2 t} \cdot a\cos tdt = a^2 \int \cos^2 tdt$$

$$= \frac{a^2}{2}(t+\sin t\cos t) + C = \frac{a^2}{2}\left(\arcsin\frac{x}{a} + \frac{x}{a}\sqrt{1-(\frac{x}{a})^2}\right) + C$$

$$= \frac{a^2}{2}\arcsin\frac{x}{a} + \frac{x}{2}\sqrt{a^2-x^2} + C.$$

用第二换元法求不定积分1

- 例：

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x+1}+1} \xlongequal[t>0]{x=t^2-1} \int \frac{2tdt}{t+1} = 2\int (1-\frac{1}{t+1})dt$$

$$= 2(t-\ln(1+t))+C \xlongequal{t=\sqrt{x+1}} 2(\sqrt{x+1}-\ln(1+\sqrt{x+1}))+C.$$

- 例：设$a>0$, $x=a\sin t$, $|t|<\frac{\pi}{2}$. $t=\arcsin\frac{x}{a}$

$$\int \sqrt{a^2-x^2}dx \xlongequal{x=a\sin t} \int \sqrt{a^2\cos^2 t}\cdot a\cos tdt = a^2\int \cos^2 tdt$$

$$= \frac{a^2}{2}(t+\sin t\cos t)+C = \frac{a^2}{2}\left(\arcsin\frac{x}{a}+\frac{x}{a}\sqrt{1-(\frac{x}{a})^2}\right)+C$$

$$= \frac{a^2}{2}\arcsin\frac{x}{a}+\frac{x}{2}\sqrt{a^2-x^2}+C.$$

用第二换元法求不定积分2

- 例：利用变换$x = a\tan t$，$|t| < \frac{\pi}{2}$, $t = \arctan\frac{x}{a}$.

$$\int \frac{dx}{\sqrt{a^2 + x^2}} \xlongequal{x=a\tan t} \int \frac{1}{\frac{a}{\cos t}} \frac{a}{\cos^2 t} dt = \int \frac{dt}{\cos t}$$

$$= \int \frac{d\sin t}{1-\sin^2 t} = \frac{1}{2}\ln\frac{1+\sin t}{1-\sin t} + C = \ln\frac{1+\sin t}{\cos t} + C$$

$$= \ln\left(\frac{\sqrt{a^2+x^2}}{a} + \frac{x}{a}\right) + C_1 = \ln(x + \sqrt{x^2+a^2}) + C.$$

用第二换元法求不定积分3

- 例：求$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2-a^2}}$，积分区间$(a,+\infty)$.
- 解：$x>a$，利用变换$x=\frac{a}{\cos t}$，$t\in(0,\frac{\pi}{2})$，$t=\arccos\frac{a}{x}$

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2-a^2}} \xlongequal{x=\frac{a}{\cos t}} \int \frac{1}{a^2\tan t}\frac{a\sin t}{\cos^2 t}dt = \int \frac{dt}{\cos t}$$

$$= \frac{1}{2}\ln\frac{1+\sin t}{1-\sin t} + C = \ln\frac{1+\sin t}{\cos t} + C$$

$$= \ln\left(\frac{\sqrt{x^2-a^2}}{a}+\frac{x}{a}\right) + C_1 = \ln\left|x+\sqrt{x^2-a^2}\right| + C.$$

用第二换元法求不定积分3

- 例：求$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2-a^2}}$，积分区间$(a,+\infty)$.
- 解：$x>a$，利用变换$x=\frac{a}{\cos t}$，$t\in(0,\frac{\pi}{2})$，$t=\arccos\frac{a}{x}$

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2-a^2}} \xlongequal{x=\frac{a}{\cos t}} \int \frac{1}{a^2\tan t}\frac{a\sin t}{\cos^2 t}dt = \int \frac{dt}{\cos t}$$
$$= \frac{1}{2}\ln\frac{1+\sin t}{1-\sin t} + C = \ln\frac{1+\sin t}{\cos t} + C$$
$$= \ln\left(\frac{\sqrt{x^2-a^2}}{a} + \frac{x}{a}\right) + C_1 = \ln\left|x+\sqrt{x^2-a^2}\right| + C.$$

用第二换元法求不定积分4

- 例： 求$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2-a^2}}$，积分区间$(-\infty, a)$.
- 解： $x<-a$，利用变换$x=-\frac{a}{\cos t}$，$t\in(0,\frac{\pi}{2})$，$t=\arccos(-\frac{a}{x})$

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2-a^2}} \xlongequal[t\in(0,\frac{\pi}{2})]{x=-\frac{a}{\cos t}} -\int \frac{1}{a^2\tan t}\frac{a\sin t}{\cos^2 t}dt = -\int \frac{dt}{\cos t}$$

$$= -\ln\frac{1+\sin t}{\cos t} + C_1 = -\ln\left|-x+\sqrt{x^2-a^2}\right| + C_2$$

$$= \ln\left|x+\sqrt{x^2-a^2}\right| + C.$$

- 总结: $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2-a^2}} = \ln\left|x+\sqrt{x^2-a^2}\right| + C.$

用第二换元法求不定积分4

- 例：求$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2-a^2}}$，积分区间$(-\infty, a)$.
- 解：$x<-a$，利用变换$x=-\frac{a}{\cos t}$，$t\in(0,\frac{\pi}{2})$，$t=\arccos(-\frac{a}{x})$

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2-a^2}} \xlongequal[t\in(0,\frac{\pi}{2})]{x=-\frac{a}{\cos t}} -\int \frac{1}{a^2\tan t}\frac{a\sin t}{\cos^2 t}dt = -\int \frac{dt}{\cos t}$$

$$= -\ln\frac{1+\sin t}{\cos t} + C_1 = -\ln\left|-x+\sqrt{x^2-a^2}\right| + C_2$$

$$= \ln\left|x+\sqrt{x^2-a^2}\right| + C.$$

- 总结：$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2-a^2}} = \ln\left|x+\sqrt{x^2-a^2}\right| + C.$

用第二换元法求不定积分4

- 例：求$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2-a^2}}$，积分区间$(-\infty, a)$.
- 解：$x<-a$，利用变换$x=-\frac{a}{\cos t}$，$t\in(0,\frac{\pi}{2})$，$t=\arccos(-\frac{a}{x})$

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2-a^2}} \xlongequal[t\in(0,\frac{\pi}{2})]{x=-\frac{a}{\cos t}} -\int \frac{1}{a^2\tan t}\frac{a\sin t}{\cos^2 t}dt = -\int \frac{dt}{\cos t}$$
$$= -\ln\frac{1+\sin t}{\cos t} + C_1 = -\ln\left|-x+\sqrt{x^2-a^2}\right| + C_2$$
$$= \ln\left|x+\sqrt{x^2-a^2}\right| + C.$$

- 总结: $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2-a^2}} = \ln\left|x+\sqrt{x^2-a^2}\right| + C.$

分部积分法

- 设$u(x), v(x)$可微，由于$(uv)' = u'v + uv'$，若$\int u'(x)v(x)dx = F(x) + C$，则有$(u(x)v(x) - F(x))' = u(x)v'(x)$，即

$$\int u(x)v'(x)dx = u(x)v(x) - \int u'(x)v(x)dx.$$

- 注：选$u(x)$使得$u'(x)$比较简单，如$\ln x$，反三角函数，多项式，a^x，三角函数.

分部积分法

- 设$u(x), v(x)$可微，由于$(uv)' = u'v + uv'$, 若$\int u'(x)v(x)dx = F(x) + C$, 则有$(u(x)v(x) - F(x))' = u(x)v'(x)$, 即

$$\int u(x)v'(x)dx = u(x)v(x) - \int u'(x)v(x)dx.$$

- 注：选$u(x)$使得$u'(x)$比较简单，如$\ln x$, 反三角函数，多项式，a^x, 三角函数.

利用分部积分法求不定积分1

- $\int P(x)e^x dx$, 其中$P(x)$为多项式.

$$\int P(x)e^x dx = \int P(x)de^x = P(x)e^x - \int P'(x)e^x dx.$$

- $\int x^n \ln x dx$, 其中$P(x)$为多项式.

$$\int x^n \ln x dx = \frac{1}{n+1}\int \ln x dx^{n+1} = \frac{x^{n+1}\ln x}{n+1} - \frac{1}{n+1}\int x^n dx$$
$$= \frac{1}{n+1}x^{n+1}\ln x - \frac{1}{(n+1)^2}x^{n+1} + C.$$

利用分部积分法求不定积分1

- $\int P(x)e^x dx$, 其中$P(x)$为多项式.

$$\int P(x)e^x dx = \int P(x)de^x = P(x)e^x - \int P'(x)e^x dx.$$

- $\int x^n \ln x dx$, 其中$P(x)$为多项式.

$$\begin{aligned}\int x^n \ln x dx &= \frac{1}{n+1}\int \ln x dx^{n+1} = \frac{x^{n+1}\ln x}{n+1} - \frac{1}{n+1}\int x^n dx \\ &= \frac{1}{n+1}x^{n+1}\ln x - \frac{1}{(n+1)^2}x^{n+1} + C.\end{aligned}$$

利用分部积分法求不定积分2

- $\int \arctan x dx$,

$$\int \arctan x dx = x \arctan x - \int \frac{x}{1+x^2} = x \arctan x - \frac{1}{2}\ln(1+x^2) + C.$$

- $I_n = \int \cos^n x dx$,

$$I_n = \int \cos^{n-1} x d\sin x = \cos^{n-1}\sin x + (n-1)\int \cos^{n-2}\sin^2 x dx = \cos^{n-1}\sin x + (n-1)(I_{n-2} - I_n).$$

从而得得到递推公式$I_n = \frac{1}{n}\cos^{n-1}\sin x + \frac{n-1}{n} I_{n-2}$. 由$I_0 = x + C$, $I_1 = \sin x + C$可求出所有的I_n.

利用分部积分法求不定积分2

- $\int \arctan x dx$,

$$\int \arctan x dx = x \arctan x - \int \frac{x}{1+x^2}$$
$$= x \arctan x - \frac{1}{2}\ln(1+x^2) + C.$$

- $I_n = \int \cos^n x dx$,

$$I_n = \int \cos^{n-1} x d\sin x = \cos^{n-1}\sin x + (n-1)\int \cos^{n-2}\sin^2 x dx$$
$$= \cos^{n-1}\sin x + (n-1)(I_{n-2} - I_n).$$

从而得得到递推公式$I_n = \frac{1}{n}\cos^{n-1}\sin x + \frac{n-1}{n}I_{n-2}$. 由$I_0 = x + C$, $I_1 = \sin x + C$可求出所有的I_n.

利用分部积分法求不定积分3

- $I_n = \int \frac{dt}{(t^2+a^2)^n}$, $n \geq 1, a > 0$.

$$
\begin{aligned}
I_n =& \frac{t}{(t^2+a^2)^n} + 2n \int \frac{t^2+a^2-a^2}{(t^2+a^2)^{n+1}} dt \\
=& \frac{t}{(t^2+a^2)^n} + 2nI_n - 2na^2 I_{n+1},
\end{aligned}
$$

从而得得到递推公式$I_{n+1} = \frac{2n-1}{2na^2} I_n + \frac{t}{2na^2(t^2+a^2)^n}$. 由$I_1 = \frac{1}{a}\arctan\frac{t}{a} + C$, 可得所有的$I_n$, 如: $I_2 = \frac{1}{2a^3}\arctan\frac{t}{a} + \frac{t}{2a^2(t^2+a^2)} + C$.

利用分部积分法求不定积分4

- 求不定积分$I = \int e^{ax} \cos bxdx$.

$$
\begin{aligned}
I =& \frac{1}{a} \int \cos bxde^{ax} = \frac{1}{a} \cos bx \cdot e^{ax} + \frac{b}{a} \int e^{ax} \sin bxdx \\
=& \frac{1}{a} \cos bx \cdot e^{ax} + \frac{b}{a^2} \left(e^{ax} \sin bx - b \int e^{ax} \cos bxdx \right),
\end{aligned}
$$

从而得得到公式$I = \frac{e^{ax}}{a^2+b^2}(a \cos bx + b \sin bx) + C$. 类似可得

$$
\int e^{ax} \sin bxdx = \frac{e^{ax}}{a^2 + b^2}(a \sin bx - b \cos bx) + C.
$$

- 注：上述结果可用于进一步计算$\int xe^{ax} \cos bxdx = \int xdF(x) = xF(x) + \int F(x)dx$，其中$F(x) = \frac{e^{ax}}{a^2+b^2}(a \cos bx + b \sin bx)$.

利用分部积分法求不定积分4

- 求不定积分$I=\int e^{ax}\cos bxdx$.

$$
\begin{aligned}
I=&\frac{1}{a}\int\cos bxde^{ax}=\frac{1}{a}\cos bx\cdot e^{ax}+\frac{b}{a}\int e^{ax}\sin bxdx\\
=&\frac{1}{a}\cos bx\cdot e^{ax}+\frac{b}{a^2}\left(e^{ax}\sin bx-b\int e^{ax}\cos bxdx\right),
\end{aligned}
$$

从而得得到公式$I=\frac{e^{ax}}{a^2+b^2}(a\cos bx+b\sin bx)+C$. 类似可得

$$\int e^{ax}\sin bxdx=\frac{e^{ax}}{a^2+b^2}(a\sin bx-b\cos bx)+C.$$

- 注：上述结果可用于进一步计算$\int xe^{ax}\cos bxdx=\int xdF(x)=xF(x)+\int F(x)dx$, 其中$F(x)=\frac{e^{ax}}{a^2+b^2}(a\cos bx+b\sin bx)$.

一些重要的不定积分

- $\int \frac{dx}{a^2-x^2} = \frac{1}{2a}\int \left(\frac{1}{a-x}+\frac{1}{a+x}\right)dx = \frac{1}{2a}\ln\left|\frac{a+x}{a-x}\right| + C.$
- $\int \frac{dx}{a^2+x^2} = \frac{1}{a}\int \frac{d(\frac{x}{a})}{1+(\frac{x}{a})^2} = \frac{1}{a}\arctan\frac{x}{a} + C.$
- $\int \frac{dx}{\sqrt{a^2-x^2}} = \int \frac{d(\frac{x}{a})}{1-(\frac{x}{a})^2} = \arcsin\frac{x}{a} + C.$
- $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2\pm a^2}} = \ln|x+\sqrt{x^2\pm a^2}| + C.$
- $\int \sqrt{a^- x^2}dx = \frac{a^2}{2}\arcsin\frac{x}{a} + \frac{x}{2}\sqrt{a^- x^2} + C.$
- $\int \sqrt{x^2\pm a^2}dx = \frac{1}{2}(x\sqrt{x^2\pm a^2} \pm a^2\ln|x+x\sqrt{x^2\pm a^2}|) + C.$

证明：$I = x\sqrt{x^2\pm a^2} - \int \frac{x^2}{\sqrt{x^2\pm a^2}}dx = x\sqrt{x^2\pm a^2} - I \pm \int \frac{a^2}{\sqrt{x^2\pm a^2}}.$

一些重要的不定积分

- $\int \frac{dx}{a^2-x^2} = \frac{1}{2a}\int \left(\frac{1}{a-x}+\frac{1}{a+x}\right)dx = \frac{1}{2a}\ln\left|\frac{a+x}{a-x}\right| + C.$
- $\int \frac{dx}{a^2+x^2} = \frac{1}{a}\int \frac{d(\frac{x}{a})}{1+(\frac{x}{a})^2} = \frac{1}{a}\arctan\frac{x}{a} + C.$
- $\int \frac{dx}{\sqrt{a^2-x^2}} = \int \frac{d(\frac{x}{a})}{1-(\frac{x}{a})^2} = \arcsin\frac{x}{a} + C.$
- $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2\pm a^2}} = \ln|x+\sqrt{x^2\pm a^2}| + C.$
- $\int \sqrt{a^- x^2}dx = \frac{a^2}{2}\arcsin\frac{x}{a} + \frac{x}{2}\sqrt{a^- x^2} + C.$
- $\int \sqrt{x^2\pm a^2}dx = \frac{1}{2}(x\sqrt{x^2\pm a^2} \pm a^2\ln|x+x\sqrt{x^2\pm a^2}|) + C.$

证明：$I = x\sqrt{x^2\pm a^2} - \int \frac{x^2}{\sqrt{x^2\pm a^2}}dx = x\sqrt{x^2\pm a^2} - I \pm \int \frac{a^2}{\sqrt{x^2\pm a^2}}.$

简单有理式的不定积分1

- 有理式：一般有理式$\frac{P(x)}{Q(x)}=\frac{a_0x^n+a_1x^{n-1}+\cdots+a_n}{b_0x^m+b_1x^{m-1}+\cdots+b_m}$. 其中$a_0,b_0$不为0. 当$n<m$时，称为（有理）真分式，任何有理式可分解为多项式和真分式之和. 如

$$\frac{x^3}{x^2+1}=\frac{x(x^2+1)-x}{x^2+1}=x-\frac{x}{x^2+1}.$$

- $\displaystyle\int\frac{1}{x-a}dx=\ln|x-a|+C.$
- $n>1$时，$\displaystyle\int\frac{1}{(x-a)^n}dx=\frac{1}{1-n}(x-a)^{1-n}+C.$

简单有理式的不定积分1

- 有理式：一般有理式$\frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{a_0x^n+a_1x^{n-1}+\cdots+a_n}{b_0x^m+b_1x^{m-1}+\cdots+b_m}$. 其中$a_0, b_0$不为0. 当$n < m$时，称为（有理）真分式，任何有理式可分解为多项式和真分式之和. 如

$$\frac{x^3}{x^2+1} = \frac{x(x^2+1)-x}{x^2+1} = x - \frac{x}{x^2+1}.$$

- $\int \frac{1}{x-a} dx = \ln|x-a| + C.$
- $n > 1$时，$\int \frac{1}{(x-a)^n} dx = \frac{1}{1-n}(x-a)^{1-n} + C.$

简单有理式的不定积分1

- 有理式：一般有理式$\frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{a_0x^n+a_1x^{n-1}+\cdots+a_n}{b_0x^m+b_1x^{m-1}+\cdots+b_m}$. 其中$a_0, b_0$不为0. 当$n < m$时，称为（有理）真分式，任何有理式可分解为多项式和真分式之和. 如

$$\frac{x^3}{x^2+1} = \frac{x(x^2+1)-x}{x^2+1} = x - \frac{x}{x^2+1}.$$

- $\displaystyle\int \frac{1}{x-a}dx = \ln|x-a| + C.$
- $n > 1$时，$\displaystyle\int \frac{1}{(x-a)^n}dx = \frac{1}{1-n}(x-a)^{1-n} + C.$

简单有理式的不定积分2

回例题 回注记 回根式积分

- 设$q > \frac{p^2}{4}$,$x^2+px+q=(x+\frac{p}{2})^2+(q-\frac{q^2}{4})$, 设$a=\sqrt{q-\frac{p^2}{4}}$.

$$\int \frac{Bx+C}{x^2+px+q}dx$$

$$=\frac{B}{2}\int \frac{d(x^2+px+q)}{x^2+px+q}+(C-\frac{Bp}{2})\int \frac{dx}{(x+\frac{p}{2})^2+(q-\frac{q^2}{4})}$$

$$=\frac{B}{2}\ln(x^2+px+q)+(C-\frac{Bp}{2})\frac{1}{a}\arctan\frac{x+\frac{p}{2}}{a}+K$$

简单有理式的不定积分3

- 设$q > \frac{p^2}{4}$,$n > 1$，设$a = \sqrt{q - \frac{p^2}{4}}$.

$$\int \frac{Bx + C}{(x^2 + px + q)^n} dx$$
$$= \frac{B}{2} \int \frac{d(x^2 + px + q)}{(x^2 + px + q)^n} + (C - \frac{Bp}{2}) \int \frac{dx}{(x + \frac{p}{2})^2 + (q - \frac{q^2}{4})^n}$$
$$= \frac{B}{2(1 - n)}(x^2 + px + q)^{1-n} + (C - \frac{Bp}{2}) \int \frac{dx}{(x + \frac{p}{2})^2 + (q - \frac{q^2}{4})^n}$$

其中不定积分$\int \frac{dx}{(x+\frac{p}{2})^2+(q-\frac{q^2}{4})^n}$由$I_n = \int \frac{dx}{(x^2+a^2)^n}$的递推公式得出.

多项式的分解1

- 任何多项式$Q(x)=b_0x^m+b_1x^{m-1}+\cdots+b_m$, 设$a_1,a_2,\cdots,a_k$是$Q(x)=0$的所有实根，重数分别为$n_1,n_2,\cdots,n_k$. 则$Q(x)$可分解为

$$\begin{aligned}Q(x)=(x-a_1)^{n_1}(x-a_2)^{n_2}\cdots(x-a_k)^{n_k}\\ \cdot(x^2+p_1x+q_1)^{m_1}\cdots(x^2+p_lx+q_l)^{m_l}\end{aligned}$$

  其中$m=n_1+n_2+\cdots+n_k+2(m_1+m_2+\cdots+m_l)$.

- 例：$x^4+1=(x^2+1)^2-2x^2=(x^2-\sqrt{2}x+1)(x^2+\sqrt{2}x+1)$

多项式的分解1

- 任何多项式$Q(x)=b_0x^m+b_1x^{m-1}+\cdots+b_m$，设$a_1,a_2,\cdots,a_k$是$Q(x)=0$的所有实根，重数分别为$n_1,n_2,\cdots,n_k$. 则$Q(x)$可分解为

$$\begin{aligned}Q(x)=&(x-a_1)^{n_1}(x-a_2)^{n_2}\cdots(x-a_k)^{n_k}\\&\cdot(x^2+p_1x+q_1)^{m_1}\cdots(x^2+p_lx+q_l)^{m_l}\end{aligned}$$

  其中$m=n_1+n_2+\cdots+n_k+2(m_1+m_2+\cdots+m_l)$.
- 例：$x^4+1=(x^2+1)^2-2x^2=(x^2-\sqrt{2}x+1)(x^2+\sqrt{2}x+1)$

多项式的分解2

- 注：由代数基本定理，$Q(x)$可分解为

$$Q(x) = (x-a_1)^{n_1}(x-a_2)^{n_2}\cdots(x-a_k)^{n_k} \\ \cdot(x-c_1)^{m_1}(x-\bar{c}_1)^{m_1}\cdots(x-c_l)^{m_1}(x-\bar{c}_l)^{m_l}$$

其中$c_1,\bar{c}_1,\cdots c_l,\bar{c}_l$是虚根（成对出现）．$(x-c_j)(x-\bar{c}_j) = x^2+p_jx+q_j.(j=1,\cdots l)$.

- 注：多项式的因式分解问题本质上就是求解多项式方程. 16世纪意大利数学家Tartagia 和Ferrari给出了三次方程和四次方程的解法. 5次及以上方程没有一般的公式.

多项式的分解2

- 注：由代数基本定理，$Q(x)$可分解为

$$
\begin{aligned}
Q(x) = &(x-a_1)^{n_1}(x-a_2)^{n_2}\cdots(x-a_k)^{n_k} \\
&\cdot(x-c_1)^{m_1}(x-\bar{c}_1)^{m_1}\cdots(x-c_l)^{m_1}(x-\bar{c}_l)^{m_l}
\end{aligned}
$$

其中$c_1,\bar{c}_1,\cdots c_l,\bar{c}_l$是虚根（成对出现）．$(x-c_j)(x-\bar{c}_j)=x^2+p_jx+q_j.(j=1,\cdots l)$.

- 注：多项式的因式分解问题本质上就是求解多项式方程. 16世纪意大利数学家Tartagia 和Ferrari给出了三次方程和四次方程的解法. 5次及以上方程没有一般的公式.

多项式的分解2

- 1826年阿贝尔发表了《五次方程代数解法不可能存在》一文，第一个正式从否定的角度来谈求根公式的存在．他证明了"具有未定系数的、高于4次的方程是不能用根式求解的"．不过他的思想当时是有很多人（包括高斯在内）表示不理解，而且他的证明也还不很清楚，有一些漏洞．
- 伽罗华理论的大意是：每个方程对应于一个域，即含有方程全部根的域，称为这方程的伽罗华域，这个域对应一个群，即这个方程根的置换群，称为这方程的伽罗华群．伽罗华域的子域和伽罗华群的子群有一一对应关系；当且仅当一个方程的伽罗华群是可解群时，这方程是根式可解的．对$n \geq 5$，我们完全可以构造一个n次多项式，使得它所对应的伽罗华群不是可解群．因此对每个$n \geq 5$，都存在一个不是根式可解的n次多项式．这样就彻底解决了一般五次以上方程的根式不可解性．

有理式的分解

- 任何有理真分式可以分解为以下四类简单分式之和：$\frac{1}{x-a}$, $\frac{1}{(x-a)^n}(n>1)$, $\frac{Bx+C}{x^2+px+q}$, $\frac{Bx+C}{(x^2+px+q)^n}(n>1)$.
- 例：$P(x)$是二次多项式，$Q(x)=(x-a)(x^2+px+q)(q>\frac{p^2}{4})$, 设$Q_1(x)=x^2+px+q$, 则有

$$\frac{P(x)}{Q(x)}=\frac{P(a)/Q_1(a)}{x-a}+\frac{\frac{P(x)-\frac{P(a)}{Q_1(a)}(x^2+px+q)}{x-a}}{x^2+px+q}$$

有理式的分解

- 任何有理真分式可以分解为以下四类简单分式之和：$\frac{1}{x-a}$，$\frac{1}{(x-a)^n}(n>1)$，$\frac{Bx+C}{x^2+px+q}$，$\frac{Bx+C}{(x^2+px+q)^n}(n>1)$.
- 例：$P(x)$是二次多项式，$Q(x)=(x-a)(x^2+px+q)(q>\frac{p^2}{4})$，设$Q_1(x)=x^2+px+q$，则有

$$\frac{P(x)}{Q(x)}=\frac{P(a)/Q_1(a)}{x-a}+\frac{\frac{P(x)-\frac{P(a)}{Q_1(a)}(x^2+px+q)}{x-a}}{x^2+px+q}$$

有理式真分式分解的待定系数法1

- 把有理式的分母分解为

$$Q(x)=(x-a_1)^{n_1}(x-a_2)^{n_2}\cdots(x-a_k)^{n_k}\\ \cdot(x^2+p_1x+q_1)^{m_1}\cdots(x^2+p_lx+q_l)^{m_l}.$$

- 有理真分式$\frac{P(x)}{Q(x)}$可分解为

$$\frac{P(x)}{Q(x)}=\frac{A_{11}}{x-a_1}+\frac{A_{21}}{(x-a_1)^2}+\cdots+\frac{A_{n_11}}{(x-a_1)^{n_1}}\\ +\frac{A_{12}}{x-a_2}+\frac{A_{22}}{(x-a_2)^2}+\cdots+\frac{A_{n_22}}{(x-a_2)^{n_2}}+\cdots\\ +\frac{B_{11}x+C_{11}}{x^2+p_1x+q_1}+\frac{B_{21}x+C_{21}}{(x^2+p_1x+q_1)^2}+\cdots+\frac{B_{m_11}x+C_{m_11}}{(x^2+p_1x+q_1)^{m_1}}\\ +\cdots$$

有理式真分式分解的待定系数法1

- 把有理式的分母分解为

$$Q(x) = (x-a_1)^{n_1}(x-a_2)^{n_2}\cdots(x-a_k)^{n_k} \cdot (x^2+p_1x+q_1)^{m_1}\cdots(x^2+p_lx+q_l)^{m_l}.$$

- 有理真分式$\frac{P(x)}{Q(x)}$可分解为

$$\begin{aligned}\frac{P(x)}{Q(x)} &= \frac{A_{11}}{x-a_1} + \frac{A_{21}}{(x-a_1)^2} + \cdots + \frac{A_{n_1 1}}{(x-a_1)^{n_1}} \\ &+ \frac{A_{12}}{x-a_2} + \frac{A_{22}}{(x-a_2)^2} + \cdots + \frac{A_{n_2 2}}{(x-a_2)^{n_2}} + \cdots \\ &+ \frac{B_{11}x+C_{11}}{x^2+p_1x+q_1} + \frac{B_{21}x+C_{21}}{(x^2+p_1x+q_1)^2} + \cdots + \frac{B_{m_1 1}x+C_{m_1 1}}{(x^2+p_1x+q_1)^{m_1}} \\ &+ \cdots\end{aligned}$$

有理式真分式分解的待定系数法2

- 上面分解等式两边同乘以$Q(x)$，两边是次数不大于$m-1$的多项式．比较两边的多项式，可得到m方程，从而解出待定系数（一共是$n_1+\cdots+n_k+2(m_1+\cdots+m_l)=m$个待定系数）．
- 例：$\frac{1}{x^4+1}=\frac{ax+b}{x^2+\sqrt{2}x+1}+\frac{cx+d}{x^2-\sqrt{2}x+1}$，两边同乘以$(x^2+\sqrt{2}x+1)(x^2-\sqrt{2}x+1)=x^4+1$，得

$$1=(a+c)x^3+(b-\sqrt{2}a+d+\sqrt{2}c)x^2 \\ +(-\sqrt{2}b+a+\sqrt{2}d+c)x+b+d$$

得方程组$\begin{cases} a+c=0 \\ b-\sqrt{2}a+d+\sqrt{2}c=0 \\ -\sqrt{2}b+a+\sqrt{2}d+c=0 \\ b+d=1 \end{cases}$ 有解$\begin{cases} a=-c=\frac{1}{2\sqrt{2}} \\ b=d=\frac{1}{2} \end{cases}$，

有理式真分式分解的待定系数法2

- 上面分解等式两边同乘以$Q(x)$，两边是次数不大于$m-1$的多项式．比较两边的多项式，可得到m方程，从而解出待定系数（一共是$n_1+\cdots+n_k+2(m_1+\cdots+m_l)=m$个待定系数）．
- 例：$\frac{1}{x^4+1}=\frac{ax+b}{x^2+\sqrt{2}x+1}+\frac{cx+d}{x^2-\sqrt{2}x+1}$，两边同乘以$(x^2+\sqrt{2}x+1)(x^2-\sqrt{2}x+1)=x^4+1$，得

$$\begin{aligned}1=(a+c)x^3+(b-\sqrt{2}a+d+\sqrt{2}c)x^2\\+(-\sqrt{2}b+a+\sqrt{2}d+c)x+b+d\end{aligned}$$

得方程组$\begin{cases}a+c=0\\b-\sqrt{2}a+d+\sqrt{2}c=0\\-\sqrt{2}b+a+\sqrt{2}d+c=0\\b+d=1\end{cases}$ 有解$\begin{cases}a=-c=\frac{1}{2\sqrt{2}}\\b=d=\frac{1}{2}\end{cases}$，

有理式真分式分解的待定系数法3

- 上面我们得到了分解

$$\frac{1}{x^4+1}=\frac{\frac{1}{2\sqrt{2}}x+\frac{1}{2}}{x^2+\sqrt{2}x+1}+\frac{-\frac{1}{2\sqrt{2}}x+\frac{1}{2}}{x^2-\sqrt{2}x+1}.$$

- 由上面的分解我们可以写出不定积分 简单有理式积分

$$\int\frac{1}{x^4+1}dx=\frac{1}{4\sqrt{2}}\ln(x^2+\sqrt{2}x+1)-\frac{1}{4\sqrt{2}}\ln(x^2-\sqrt{2}x+1)$$
$$+\frac{1}{2\sqrt{2}}\arctan(\sqrt{2}x+1)+\frac{1}{2\sqrt{2}}\arctan(\sqrt{2}x-1)+C.$$

万能变换

- 三角函数有理式：三角函数进行有限次加、减、乘、除运算所得的表达式. 等价于$\sin x, \cos x$ 进行有限次加、减、乘、除运算所得的表达式, 可表示为$R(\sin x, \cos x)$,其中$R(x, y)$是二元多项式.
- 理论上，三角函数有理式的不定积分可以用的变换$x = 2\arctan t$（称为万能变换）转化为有理式的积分, 此时$\sin x = \frac{2t}{1+t^2}$, $\cos x = \frac{1-t^2}{1+t^2}$, $dx = \frac{2tdt}{1+t^2}$

$$\int R(\sin x, \cos x)dx \xlongequal{x=2\arctan t} \int R(\frac{2t}{1+t^2}, \frac{1-t^2}{1+t^2})\frac{2tdt}{1+t^2}$$

万能变换

- 三角函数有理式：三角函数进行有限次加、减、乘、除运算所得的表达式. 等价于$\sin x, \cos x$ 进行有限次加、减、乘、除运算所得的表达式，可表示为$R(\sin x, \cos x)$,其中$R(x, y)$是二元多项式.
- 理论上，三角函数有理式的不定积分可以用的变换$x = 2\arctan t$（称为万能变换）转化为有理式的积分，此时$\sin x = \frac{2t}{1+t^2}$，$\cos x = \frac{1-t^2}{1+t^2}$，$dx = \frac{2tdt}{1+t^2}$

$$\int R(\sin x, \cos x)dx \xlongequal{x=2\arctan t} \int R(\frac{2t}{1+t^2}, \frac{1-t^2}{1+t^2})\frac{2tdt}{1+t^2}$$

其它三角变换

- 若$R(\sin x, \cos x) = f(\sin x)\cos x$，作变换$t = \sin x$，

$$\int f(\sin x)\cos x dx \xlongequal{t=sinx} \int f(t)dt.$$

- 若$R(\sin x, \cos x) = f(\cos x)\sin x$，作变换$t = \cos x$，

$$\int f(\cos x)\sin x dx \xlongequal{t=cosx} -\int f(t)dt.$$

- 若$R(\sin x, \cos x) = f(\tan x)$，作变换$t = \tan x$，$dx = \frac{dt}{1+t^2}$，

$$\int f(\tan x)dx \xlongequal{t=tanx} \int f(t)\frac{dt}{1+t^2}.$$

其它三角变换

- 若$R(\sin x, \cos x) = f(\sin x)\cos x$，作变换$t = \sin x$，

$$\int f(\sin x)\cos x dx \xlongequal{t=sinx} \int f(t)dt.$$

- 若$R(\sin x, \cos x) = f(\cos x)\sin x$，作变换$t = \cos x$，

$$\int f(\cos x)\sin x dx \xlongequal{t=cosx} -\int f(t)dt.$$

- 若$R(\sin x, \cos x) = f(\tan x)$，作变换$t = \tan x$，$dx = \frac{dt}{1+t^2}$，

$$\int f(\tan x)dx \xlongequal{t=tanx} \int f(t)\frac{dt}{1+t^2}.$$

其它三角变换

- 若$R(\sin x, \cos x) = f(\sin x)\cos x$，作变换$t = \sin x$，

$$\int f(\sin x)\cos x dx \xlongequal{t=sinx} \int f(t)dt.$$

- 若$R(\sin x, \cos x) = f(\cos x)\sin x$，作变换$t = \cos x$，

$$\int f(\cos x)\sin x dx \xlongequal{t=cosx} -\int f(t)dt.$$

- 若$R(\sin x, \cos x) = f(\tan x)$，作变换$t = \tan x$，$dx = \frac{dt}{1+t^2}$，

$$\int f(\tan x)dx \xlongequal{t=tanx} \int f(t)\frac{dt}{1+t^2}.$$

三角函数有理式的不定积分1

- 例：求不定积分

$$\int \frac{\sin x \cos x}{1+\sin^2 x} = \int \frac{\sin x}{1+\sin^2 x} d\sin x = \frac{1}{2}(1+\sin^2 x) + C$$

也可用正切变换：

$$\int \frac{\sin x}{1+\sin^2 x} = \int \frac{\tan x \cos x}{1+2\tan^2 x} dx \xlongequal{t=\tan x} \int \frac{t dt}{(1+2t^2)(1+t^2)}$$

$$= \frac{1}{2}\int \left(\frac{2}{1+2t^2} - \frac{1}{1+t^2}\right) dt^2 = \frac{1}{2}(\ln(1+2t^2) - \ln(1+t^2)) + C$$

$$= \frac{1}{2}\ln\frac{1+2\tan^2 x}{1+\tan^2 x} + C = \frac{1}{2}(1+\sin^2 x) + C.$$

三角函数有理式的不定积分2

- 求不定积分

$$
\begin{aligned}
&\int \frac{\cos x}{\sin x+\cos x} = \int \frac{1}{1+\tan x}dx \\
&\xlongequal{t=tanx} \int \frac{dt}{(1+t)(1+t^2)} = \frac{1}{2}\int (\frac{1}{1+t} - \frac{t-1}{1+t^2})dt \\
&= \frac{1}{2}(\ln|1+t| - \frac{1}{2}\ln(1+t^2) + \arctan t) + C \\
&= \frac{1}{2}(\ln|1+\tan x| - \ln|\sec x| + x) + C \\
&= \frac{1}{2}(x + \ln|\sin x+\cos x|) + C.
\end{aligned}
$$

- 注：上面计算要求$x \neq k\pi - \frac{\pi}{4}, k\pi + \frac{\pi}{2}$

三角函数有理式的不定积分2

- 求不定积分

$$\int \frac{\cos x}{\sin x + \cos x} = \int \frac{1}{1 + \tan x} dx$$

$$\xlongequal{t = \tan x} \int \frac{dt}{(1+t)(1+t^2)} = \frac{1}{2}\int (\frac{1}{1+t} - \frac{t-1}{1+t^2}) dt$$

$$= \frac{1}{2}(\ln|1+t| - \frac{1}{2}\ln(1+t^2) + \arctan t) + C$$

$$= \frac{1}{2}(\ln|1+\tan x| - \ln|\sec x| + x) + C$$

$$= \frac{1}{2}(x + \ln|\sin x + \cos x|) + C.$$

- 注：上面计算要求$x \neq k\pi - \frac{\pi}{4}, k\pi + \frac{\pi}{2}$

三角函数有理式的不定积分3

- 上面不定积分也可如下计算

$$\int \frac{\cos x}{\sqrt{2}\sin(x+\frac{\pi}{4})} \xlongequal{t=x+\frac{\pi}{4}} \int \frac{\frac{\sqrt{2}}{2}(\cos t + \sin t)dt}{\sqrt{2}\sin t}$$
$$= \int \frac{1}{2}(1+\frac{\cos t}{\sin t})dt = \frac{1}{2}(t+\ln|\sin t|)+C$$
$$= \frac{1}{2}(x+\ln|\sin x+\cos x|)+C'.$$

- 注：上面计算只要求$x+\frac{\pi}{4}\neq k\pi$. 与函数定义域一致.

三角函数有理式的不定积分3

- 上面不定积分也可如下计算

$$\int \frac{\cos x}{\sqrt{2}\sin(x+\frac{\pi}{4})} \xlongequal{t=x+\frac{\pi}{4}} \int \frac{\frac{\sqrt{2}}{2}(\cos t+\sin t)dt}{\sqrt{2}\sin t}$$
$$= \int \frac{1}{2}(1+\frac{\cos t}{\sin t})dt = \frac{1}{2}(t+\ln|\sin t|)+C$$
$$= \frac{1}{2}(x+\ln|\sin x+\cos x|)+C'.$$

- 注：上面计算只要求$x+\frac{\pi}{4}\neq k\pi$. 与函数定义域一致.

三角多项式的不定积分1

- 方法1：利用倍角公式、积化和差降低次数，如

$$\int \sin^4 x \cos^2 x dx = \int \frac{1}{4} \sin^2 2x \sin^2 x dx$$

$$= \frac{1}{16} \int (1 - \cos 4x)(1 - \cos 2x) dx$$

$$= \frac{1}{16} \int (1 - \cos 2x - \cos 4x + \frac{1}{2}(\cos 2x + \cos 6x)) dx$$

$$= \frac{1}{16}(x - \frac{1}{4} \sin 2x - \frac{1}{4} \sin 4x + \frac{1}{12} \sin 6x) + C$$

三角多项式的不定积分2

- 方法2：利用递推公式. 设$I_{m,n} = \int \sin^m x \cos^n x dx$,则有

$$
\begin{aligned}
I_{m,n} &= \frac{\sin^{m+1} x \cos^{n-1} x}{m+n} + \frac{n-1}{m+n} I_{m,n-2} \\
&= -\frac{\sin^{m-1} x \cos^{n+1} x}{m+n} + \frac{m-1}{m+n} I_{m-2,n}
\end{aligned}
$$

证明：

$$
\begin{aligned}
I_{m,n} &= \frac{1}{m+1} \int \cos^{n-1} x d \sin^{m+1} x \\
&= \frac{\sin^{m+1} x \cos^{n-1} x}{m+1} + \frac{n-1}{m+1} \int \sin^{m+2} x \cos^{n-2} x dx \\
&= \frac{\sin^{m+1} x \cos^{n-1} x}{m+1} + \frac{n-1}{m+1} (I_{m,n-2} - I_{m,n})
\end{aligned}
$$

三角多项式的不定积分3

- $I_{1,0} = -\cos x + C$, $I_{0,1} = \sin x + C$, $I_{2,0} = \frac{1}{2}x - \frac{1}{2}\sin x\cos x + C$, $I_{2,0} = \frac{1}{2}x + \frac{1}{2}\sin x\cos x + C$.
- 例：

$$\int \sin^4 x\cos^2 x dx = I_{4,2} = -\frac{\sin^3 x\cos^3 x}{6} + \frac{1}{2}I_{2,2}$$

$$= -\frac{\sin^3 x\cos^3 x}{6} + \frac{1}{2}\left(\frac{\sin^3 x\cos x}{4} + \frac{1}{4}I_{2,0}\right)$$

$$= -\frac{1}{6}\sin^3 x\cos^3 x + \frac{1}{8}\sin^3 x\cos x + \frac{1}{16}(x - \sin x\cos x) + C$$

关于三角有理式不定积分的一个注记

- 考虑不定积分($t=\tan\frac{x}{2}$时，$x=2\arctan t$) 回简单有理式积分

$$\int\frac{dx}{\sin x+2}\xlongequal{t=\tan\frac{x}{2}}\int\frac{1}{\frac{2t}{1+t^2}+2}\frac{2dt}{1+t^2}=\int\frac{dt}{1+t+t^2}$$

$$=\frac{2}{\sqrt{3}}\arctan\frac{2t+1}{\sqrt{3}}+C=\frac{2}{\sqrt{3}}\arctan\frac{2\tan\frac{x}{2}+1}{\sqrt{3}}+C.$$

- 上面被积函数的定义域为$\mathbb{R}$，但是得到的函数是在$(2k\pi-\pi,2k\pi+\pi)$上定义的函数，且在端点处的单边极限存在. 可以通过调整在每个区间$(2k\pi-\pi,2k\pi+\pi)$上的任意常数C，得到的原函数延拓到$\mathbb{R}$，然后验证该函数确实是处处可导，确实是$\mathbb{R}$上的原函数，从而求出严格意义下的不定积分.

关于三角有理式不定积分的一个注记

- 考虑不定积分($t=\tan\frac{x}{2}$时，$x=2\arctan t$) 回简单有理式积分

$$\int\frac{dx}{\sin x+2}\xlongequal{t=\tan\frac{x}{2}}\int\frac{1}{\frac{2t}{1+t^2}+2}\frac{2dt}{1+t^2}=\int\frac{dt}{1+t+t^2}$$

$$=\frac{2}{\sqrt{3}}\arctan\frac{2t+1}{\sqrt{3}}+C=\frac{2}{\sqrt{3}}\arctan\frac{2\tan\frac{x}{2}+1}{\sqrt{3}}+C.$$

- 上面被积函数的定义域为$\mathbb{R}$，但是得到的函数是在$(2k\pi-\pi,2k\pi+\pi)$上定义的函数，且在端点处的单边极限存在．可以通过调整在每个区间$(2k\pi-\pi,2k\pi+\pi)$上的任意常数C，得到的原函数延拓到$\mathbb{R}$，然后验证该函数确实是处处可导，确实是$\mathbb{R}$上的原函数，从而求出严格意义下的不定积分．

某些根式的不定积分1

- 复习：含根式$\sqrt{a^2-x^2}$, $\sqrt{a^2+x^2}$, $\sqrt{x^2-a^2}$分别通过变换$x=a\sin t$, $x=a\tan t$, $x=\pm\frac{a}{\cos t}$化成三角有理式的积分.
- 被积函数可写成为$R(x,\sqrt[n]{ax+b})$时（$R(x,y)$是二元有理函数）,令$t=\sqrt[n]{ax+b}$, $x=\frac{t^n-b}{a}$,从而有

$$\int R(x,\sqrt[n]{ax+b})dx=\int R(\frac{t^n-b}{a},t)\frac{nt^{n-1}}{a}dt.$$

某些根式的不定积分1

- 复习：含根式$\sqrt{a^2-x^2}$, $\sqrt{a^2+x^2}$, $\sqrt{x^2-a^2}$分别通过变换$x=a\sin t$, $x=a\tan t$, $x=\pm\frac{a}{\cos t}$化成三角有理式的积分.
- 被积函数可写成为$R(x,\sqrt[n]{ax+b})$时（$R(x,y)$是二元有理函数），令$t=\sqrt[n]{ax+b}$, $x=\frac{t^n-b}{a}$,从而有

$$\int R(x,\sqrt[n]{ax+b})dx=\int R(\frac{t^n-b}{a},t)\frac{nt^{n-1}}{a}dt.$$

某些根式的不定积分2

- 例： 回简单有理式积分

$$\int \frac{dx}{3x+\sqrt[3]{3x+2}} \xlongequal[x=\frac{1}{3}(t^3-2)]{t=\sqrt[3]{3x+2}} \int \frac{t^2 dt}{t^3+t-2}$$

$$= \int (\frac{\frac{1}{4}}{t-1} + \frac{\frac{3}{4}t+\frac{1}{2}}{t^2+t+2})dt$$

$$= \frac{1}{4}\ln|\sqrt[3]{3x+2}-1| + \frac{3}{8}\ln(\sqrt[3]{(3x+2)^2}$$

$$+\sqrt[3]{3x+2}+2) + \frac{1}{4\sqrt{7}}\arctan\frac{2\sqrt[3]{3x+2}+1}{\sqrt{7}} + C$$

某些根式的不定积分3

- 被积函数可写成为$R(x,\sqrt[n]{\frac{ax+b}{cx+d}})$时,令$\sqrt[n]{\frac{ax+b}{cx+d}}$, $x=\frac{dt^n-b}{-ct^n+a}$.
- 例:

$$\int x\sqrt{\frac{x-1}{x+1}}dx \xlongequal[x=\frac{1+t^2}{1-t^2}]{t=\sqrt{\frac{x-1}{x+1}}} \int \frac{1+t^2}{1-t^2}t\frac{4t^2}{(1-t^2)^2}dt$$

$$=\frac{1}{2}\ln\left|\frac{1-t}{1+t}\right|+\frac{3}{2}\left(\frac{1}{1+t}-\frac{1}{1-t}\right)+\frac{1}{2}\frac{1}{(1-t)^2}-\frac{1}{2}\frac{1}{(1+t)^2}+C$$

某些根式的不定积分3

- 被积函数可写成为$R(x,\sqrt[n]{\frac{ax+b}{cx+d}})$时,令$\sqrt[n]{\frac{ax+b}{cx+d}}$, $x=\frac{dt^n-b}{-ct^n+a}$.
- 例:

$$\int x\sqrt{\frac{x-1}{x+1}}dx \xlongequal[x=\frac{1+t^2}{1-t^2}]{t=\sqrt{\frac{x-1}{x+1}}} \int \frac{1+t^2}{1-t^2}t\frac{4t^2}{(1-t^2)^2}dt$$

$$=\frac{1}{2}\ln\left|\frac{1-t}{1+t}\right|+\frac{3}{2}\left(\frac{1}{1+t}-\frac{1}{1-t}\right)+\frac{1}{2}\frac{1}{(1-t)^2}-\frac{1}{2}\frac{1}{(1+t)^2}+C$$

某些根式的不定积分4

- 被积函数可含有二次根式$\sqrt{ax^2+bx+c}$，可以通过线性变换化把根式变为$\sqrt{a^2-x^2}$，$\sqrt{a^2+x^2}$，$\sqrt{x^2-a^2}$.
- 例：

$$\int\frac{dx}{(2x+1)^2\sqrt{4x^2+4x+5}}\xlongequal{t=2x+1}\frac{1}{2}\int\frac{dt}{t^2\sqrt{t^2+4}}$$

$$\xlongequal{t=\tan\theta}\frac{1}{2}\int\frac{1}{4\tan^2\theta\frac{2}{\cos^2\theta}}\cdot\frac{2d\theta}{\cos^2\theta}=\frac{1}{8}\int\frac{\cos\theta}{\sin^2\theta}d\theta$$

$$=-\frac{1}{8}\frac{1}{\sin\theta}+C=-\frac{1}{8}\frac{\sqrt{t^2+4}}{t}+C=-\frac{1}{8}\frac{4x^2+4x+5}{2x+1}+C.$$

某些根式的不定积分4

- 被积函数可含有二次根式$\sqrt{ax^2+bx+c}$, 可以通过线性变换化把根式变为$\sqrt{a^2-x^2}$, $\sqrt{a^2+x^2}$, $\sqrt{x^2-a^2}$.
- 例：

$$\int \frac{dx}{(2x+1)^2\sqrt{4x^2+4x+5}} \xlongequal{t=2x+1} \frac{1}{2}\int \frac{dt}{t^2\sqrt{t^2+4}}$$

$$\xlongequal{t=\tan\theta} \frac{1}{2}\int \frac{1}{4\tan^2\theta\frac{2}{\cos^2\theta}}\cdot\frac{2d\theta}{\cos^2\theta} = \frac{1}{8}\int \frac{\cos\theta}{\sin^2\theta}d\theta$$

$$= -\frac{1}{8}\frac{1}{\sin\theta}+C = -\frac{1}{8}\frac{\sqrt{t^2+4}}{t}+C = -\frac{1}{8}\frac{4x^2+4x+5}{2x+1}+C.$$