CAŁKOWANIE

Krzysztof Abram (gr. 11)

Opis zadania (specyfikacja problemu):

1. Metoda małych prostokątów:

   Założenia: Niech f: [a,b] → R, będzie ograniczona i ciągła na przedziale domkniętym [a,b].

   Metoda ta polega na sumowaniu pól bardzo „cienkich” prostokątów. Cienkich – dlatego, że ustalamy stałą wartość jednego boku (np. dx = 0.0001). Możemy ustalić liczbę przedziałów częściowych np. 1000, jednak ta metoda ma wadę. Nie wiemy jak wielki przedział zostanie zadany, czasem w dużym przedziale – podział na 1000 przedziałów częściowych może okazać się nie wystarczający. Drugi bok to wartość funkcji z lewej strony przedziału częściowego (Możemy wybrać dowolny punkt pośredni zawarty w bieżącym przedziale częściowym, w którym obliczamy wartość funkcji). Wzór:

   $$\int_a^b f(x)\,dx = \sum_{i=0}^{n-1} dx \cdot f(a + i \cdot dx)$$

   Gdzie: $n = ceil(\frac{|b-a|}{dx})$

   ceil – to funkcja sufit.

   Dane wejściowe:
   a – początek przedziału całkowania,
   b – koniec przedziału całkowania,
   f (x) – funkcja rzeczywista argumentu rzeczywistego,

   Dane wyjściowe:
   _int – wartość całki oznaczonej funkcji f(x) w przedziale [a,b],

   Zmienne pomocnicze:
   sign – znak całki oznaczonej, wynikający z przedziału (np. jeśli b < a, to sign = -1),
   _x – argument funkcji f (zwiększany dla każdej iteracji),
   _dx_rec – stała określająca krok inkrementaci,

2. Metoda małych trapezów:

   Założenia: Niech f: [a,b] → R, będzie ograniczona i ciągła na przedziale domkniętym [a,b].

   Metoda ta jest podobna do całkowania metodą małych prostokątów. Z tym, że tutaj sumujemy „małe” trapezy. Dla wartości dx (np. = 0.0001) obliczamy wartości funkcji na początku przedziału częściowego oraz na końcu. Później z podanych wartości obliczamy pole trapezu. Wzór:

   $$\int_a^b f(x)\,dx = \frac{1}{2} \cdot \sum_{i=0}^{n-1} dx \cdot (f(a + i \cdot dx) + f(a + (i+1) \cdot dx))$$

Gdzie n obliczamy tak samo jak przedtem.

Dane wejściowe:
a – początek przedziału całkowania,
b – koniec przedziału całkowania,
f (x) – funkcja rzeczywista argumentu rzeczywistego,

Dane wyjściowe:
_int – wartość całki oznaczonej funkcji f(x) w przedziale [a,b],

Zmienne pomocnicze:
sign – znak całki oznaczonej, wynikający z przedziału (np. jeśli b < a, to sign = -1),
_x – argument funkcji f (zwiększany dla każdej iteracji),
_b – wartość funkcji f na początku przedziału częściowego,
_e – wartość funkcji f na końcu przedziału częściowego,
_dx_trap – stała określająca krok inkrementacji,

3. Metoda Monte-Carlo (mc):

Założenia: Niech f: [a,b] → R, będzie ograniczona i ciągła na przedziale domkniętym [a,b].

Metoda ta polega losowaniu punktów w pewnym obszarze ograniczonym prostokątem (z góry oraz z dołu, z lewej i prawej strony). Następnie sprawdzamy ile punktów wpadło pod wykres funkcji f w przedziale od a do b. Stosunek liczby punktów pod wykresem do liczby wszystkich losowanych punktów przemnożony przez pole prostokąta (który ogranicza obszar wokół wykresu) – jest w przybliżeniu całką oznaczoną funkcji f na przedziale [a,b].

Uwaga: Podstawowym problemem tego algorytmu jest wyznaczanie wartości ograniczających wykres funkcji na przedziale domkniętym [a,b] (t.j maksimum oraz minimum). Problem ten można łatwo rozwiązać stosując przekształcenie wzoru na średnią wartość funkcji w przedziale [a,b]. Wzór:

$$\int_a^b f(x)\,dx = \frac{(b-a)\cdot\sum_{i=1}^{n} f(x_i)}{n}$$

Stosując powyższy wzór, gdzie xi – to i-ty punkt losowy, n – liczba wylosowanych punktów – dostajemy w przybliżeniu całkę oznaczoną funkcji f na przedziale [a,b].

Dane wejściowe:
a – początek przedziału całkowania,
b – koniec przedziału całkowania,
f (x) – funkcja rzeczywista argumentu rzeczywistego,

Dane wyjściowe:
_int – wartość całki oznaczonej funkcji f(x) w przedziale [a,b],

Zmienne pomocnicze:
sign – znak całki oznaczonej, wynikający z przedziału (np. jeśli b < a, to sign = -1),
N – ilość wszystkich punktów losowych,

n_per_mc – liczba punktów losowych przypadająca na jednostkę (np. dx = 1),

Pseudokody algorytmów całkowania:

Nazwa zmiennej _int bierze się od ang. integral – (pol) całka.

1. Metoda małych prostokątów:

K01: _int ← 0, _dx_rec ← 0.0001,
K02: **Jeżeli** b < a **to** a ↔ b**,** sign ← -1;
K03: _x ← a,
K04: **Dopóki** _x <= b **wykonuj** K05, K06:
   K05: _int ← _int + _dx_rec * f(_x),
   K06: _x ← _x + _dx_rec,
K07: _int ← sign * _int
K08: **Koniec**

2. Metoda małych trapezów:

K01: _int ← 0, dx ← 0.0001,
K02: **Jeżeli** b < a **to** a ↔ b**,** sign ← -1;
K03: _x ← a, _b ← f(_x),
K04: **Dopóki** _x <= b **wykonuj** K05, …, K07
   K05: _e ← f(_x + _dx_trap),
   K06: _int ← _int + _dx_trap * (_b + _e) / 2,
   K07: _b ← _e,
K08: _int ← _int * sign,
K09: **Koniec**

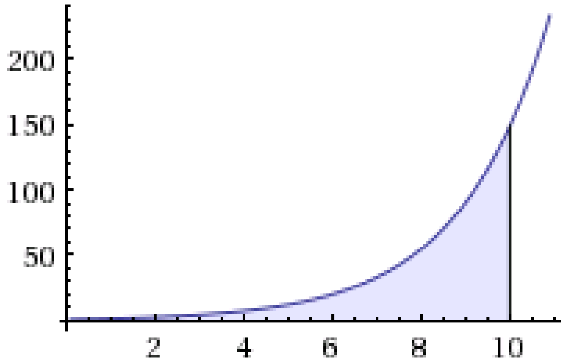
3. Metoda Monte-Carlo (mc):

K01: _int ← 0, n ← 0, _n_per_mc ← 100000,
K02: **Jeżeli** b < a **to** a ↔ b**,** sign ← -1;
K03: N ← _n_per_mc * ceil(abs(b - a)),
K04: **Dla** n < N **wykonuj** K05:
   K05: _int ← _int + f(**losuj** x z przedziału [a,b]),
K06: _int ← sign * [(b – a) * _int / N],
K07: **Koniec**

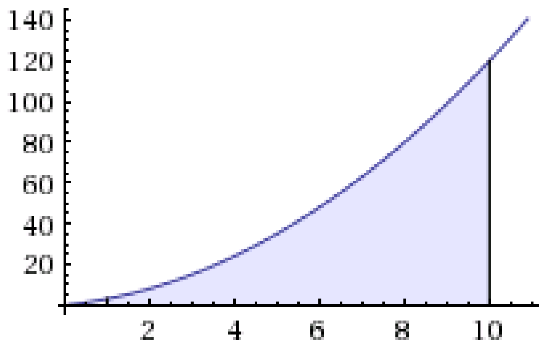
Wykresy badanych funkcji:

Dla każdej funkcji zaznaczono przedział całkowania [1, 10].

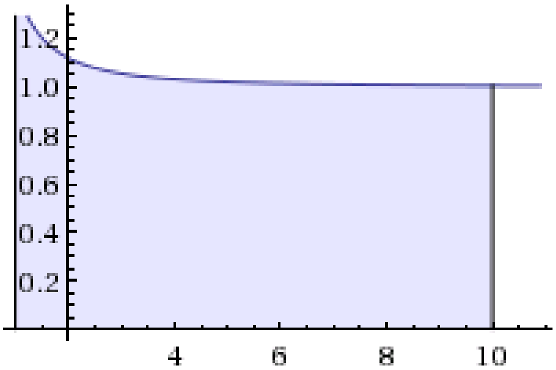
1. Funkcja pierwsza: $f(x)=\sqrt{e^x}$



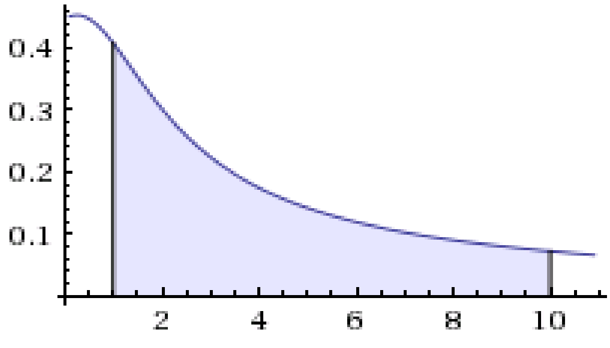
2. Funkcja druga: $f(x)=x^2+2x$



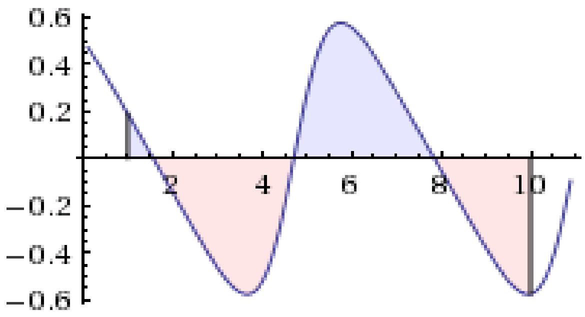
3. Funkcja trzecia: $f(x)=\dfrac{\sqrt{x^2+1}}{x}$



4. Funkcja czwarta: $f(x)=\dfrac{1}{\sqrt{2x^2-x+5}}$



5. Funkcja piąta: $f(x) = \frac{cosx}{sinx+2}$



Rozwiązania analityczne:

1. Funkcja pierwsza: $f(x) = \sqrt{e^x}$

   Całka nieoznaczona: $\int \sqrt{e^x}\, dx = 2\sqrt{e^x} + \text{constant}$

   Wynik całki oznaczonej: $\int_1^{10} \sqrt{e^x}\, dx = 2\left(e^5 - \sqrt{e}\right) \approx 293.53$

2. Funkcja druga: $f(x) = x^2 + 2x$

   Całka nieoznaczona: $\int (x^2 + 2x)\, dx = \frac{x^3}{3} + x^2 + \text{constant}$

   Wynik całki oznaczonej: $\int_1^{10} (x^2 + 2x)\, dx = 432$

3. Funkcja trzecia: $f(x) = \frac{\sqrt{x^2+1}}{x}$

   Całka nieoznaczona:

$$\int \frac{\sqrt{x^2+1}}{x}\, dx = \sqrt{x^2+1} - \log\left(\sqrt{x^2+1} + 1\right) + \log(x) + \text{constant}$$

   Wynik całki oznaczonej:

$$\int_1^{10} \frac{\sqrt{x^2+1}}{x}\, dx = -\sqrt{2} + \sqrt{101} + \log(10) + \log\left(1 + \sqrt{2}\right) - \log\left(1 + \sqrt{101}\right) \approx 9.4172$$

4. Funkcja czwarta: $f(x) = \frac{1}{\sqrt{2x^2 - x + 5}}$

   Całka nieoznaczona:

$$\int \frac{1}{\sqrt{2x^2 - x + 5}}\, dx = \frac{\sinh^{-1}\left(\frac{4x-1}{\sqrt{39}}\right)}{\sqrt{2}} + \text{constant}$$

Wynik całki oznaczonej:

$$\int_1^{10} \frac{1}{\sqrt{2x^2 - x + 5}}\, dx = \frac{\sinh^{-1}(\sqrt{39}) - \sinh^{-1}\left(\sqrt{\frac{3}{13}}\right)}{\sqrt{2}} \approx 1.4621$$

5. Funkcja piąta: $f(x) = \frac{cosx}{sinx + 2}$

Całka nieoznaczona:

$$\int \frac{\cos(x)}{\sin(x) + 2}\, dx = \log(\sin(x) + 2) + \text{constant}$$

Wynik całki oznaczonej:

$$\int_1^{10} \frac{\cos(x)}{\sin(x) + 2}\, dx = \log(2 + \sin(10)) - \log(2 + \sin(1)) \approx -0.66864$$

Tabela wyników:

Funkcja	Metoda prostokątów	Metoda trapezów	Monte-Carlo	Wynik analityczny
1	293.5363788181	293.5437174110	293.5097288717	293.5288756636
2	432.0061500147	432.0120001247	431.9905463815	432.0000000000
3	9.4173225275	9.4173020662	9.4172156536	9.4172015668
4	1.4620936878	1.4620768559	1.4616647199	1.4620696947
5	-0.6686627270	-0.6687010489	-0.6700662171	-0.6686434200

Można łatwo zauważyć, że w przypadku metody Monte-Carlo, dostajemy najmniej dokładny wynik. Natomiast w pozostałych metodach wynik jest znacznie dokładniejszy. Wykonywaliśmy obliczenia dla kroku dx = 0.0001, dalsze zwiększanie precyzji nieznacznie wpłynie na wynik końcowy.