Лабораторная работа №4

Модель гармонических колебаний

Адабор Кристофер Твум

Содержание

1 Цель работы

Построить математическую модель гармонического осциллятора.

2 Задание

3. Вариант № 15

Постройте фазовый портрет гармонического осциллятора и решение уравнения гармонического осциллятора для следующих случаев

1. Колебания гармонического осциллятора без затуханий и без действий внешней силы $\ddot{x}$+ 7.5=0
2. Колебания гармонического осциллятора с затуханием и без действий внешней силы $\ddot{x}$+5$\dot{x}$+7x = 0.
3. Колебания гармонического осциллятора с затуханием и под действием внешней силы $\ddot{x}$ +4$\dot{x}$ +2x = 5sin(t)

   На интервале t ∈[0; 40] (шаг 0.05) с начальными условиями и $x_0 = 0,\ y_0 = -1$.

3 Теоретическое введение

Гармонические колебания — колебания, при которых физическая величина изменяется с течением времени по гармоническому (синусоидальному, косинусоидальному) закону.

Уравнение гармонического колебания имеет вид

$$x(t) = A\sin(\omega t + \varphi_0)$$

или

$$x(t) = A\cos(\omega t + \varphi_0),$$

где x — отклонение колеблющейся величины в текущий момент времени t от среднего за период значения (например, в кинематике — смещение, отклонение колеблющейся точки от положения равновесия); A — амплитуда колебания, то есть максимальное за период отклонение колеблющейся величины от среднего за период значения, размерность A совпадает с размерностью x; ω (радиан/с, градус/с) — циклическая частота, показывающая, на сколько радиан (градусов) изменяется фаза колебания за 1 с;

$(\omega t + \varphi_0) = \varphi$ (радиан, градус) — полная фаза колебания (сокращённо — фаза, не путать с начальной фазой);

φ_0 (радиан, градус) — начальная фаза колебаний, которая определяет значение полной фазы колебания (и самой величины x) в момент времени $t = 0$. Дифференциальное уравнение, описывающее гармонические колебания, имеет вид

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \omega^2 x = 0.$$

[1].

4 Выполнение лабораторной работы

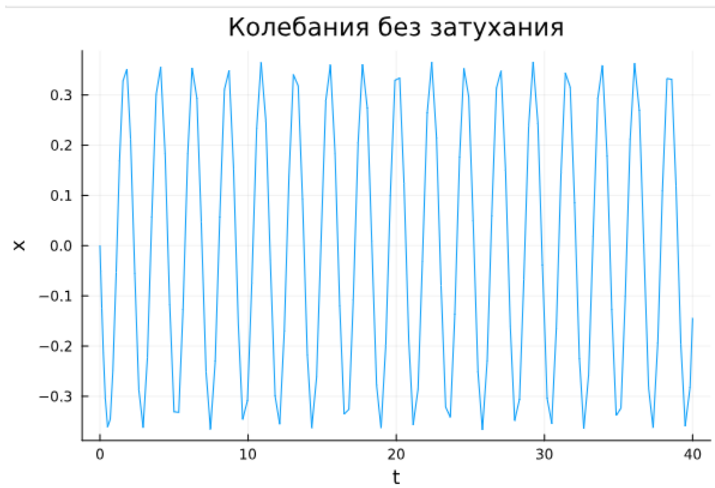
4.1 Модель колебаний гармонического осциллятора без затуханий и без действий внешней силы

Для начала реализуем эту модель на языке программирования Julia.

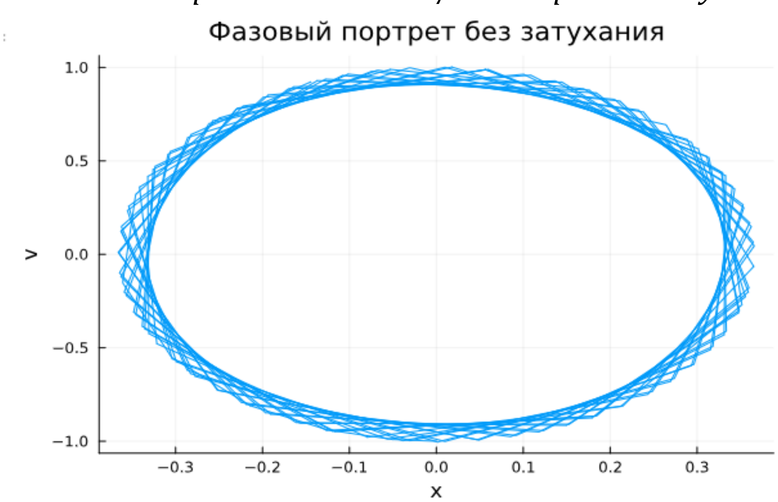
```
using DifferentialEquations, Plots

# Уравнение: x'' + 7.5x = 0

function osc1!(du, u, p, t)

   du[1] = u[2]

   du[2] = -7.5 * u[1]

end
```

```
u0 = [0.0, -1.0]

tspan = (0.0, 40.0)

prob1 = ODEProblem(osc1!, u0, tspan)

sol1 = solve(prob1, Tsit5(), dt=0.05)

# График x(t)

plot(sol1.t, sol1[1, :], xlabel="t", ylabel="x", title="Колебания без затухания", legend=false
)
```

В результате получаем следующие графики решения уравнения гармонического осциллятора (рис. [??]) и его фазового портрета (рис. [??]).



Колебания гармонического осциллятора без затуханий и без действий внешней силы



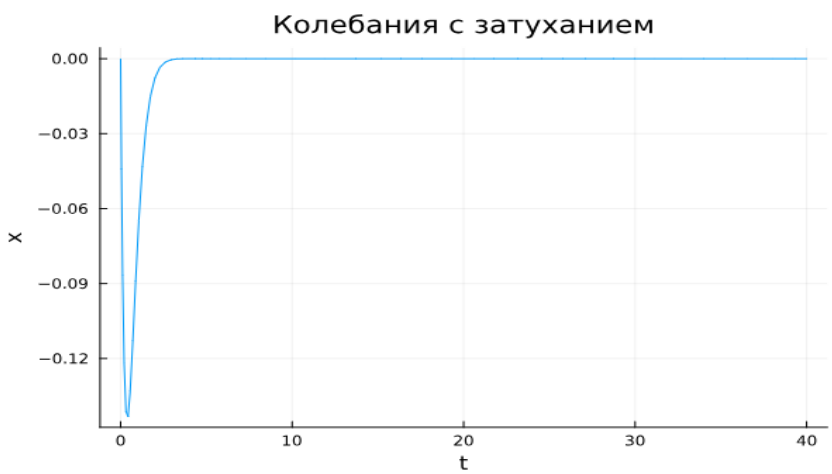
Фазовый портрет колебаний гармонического осциллятора без затуханий и без действий внешней силы

Можно заметить, что колебание осциллятора периодично, график не задухает.

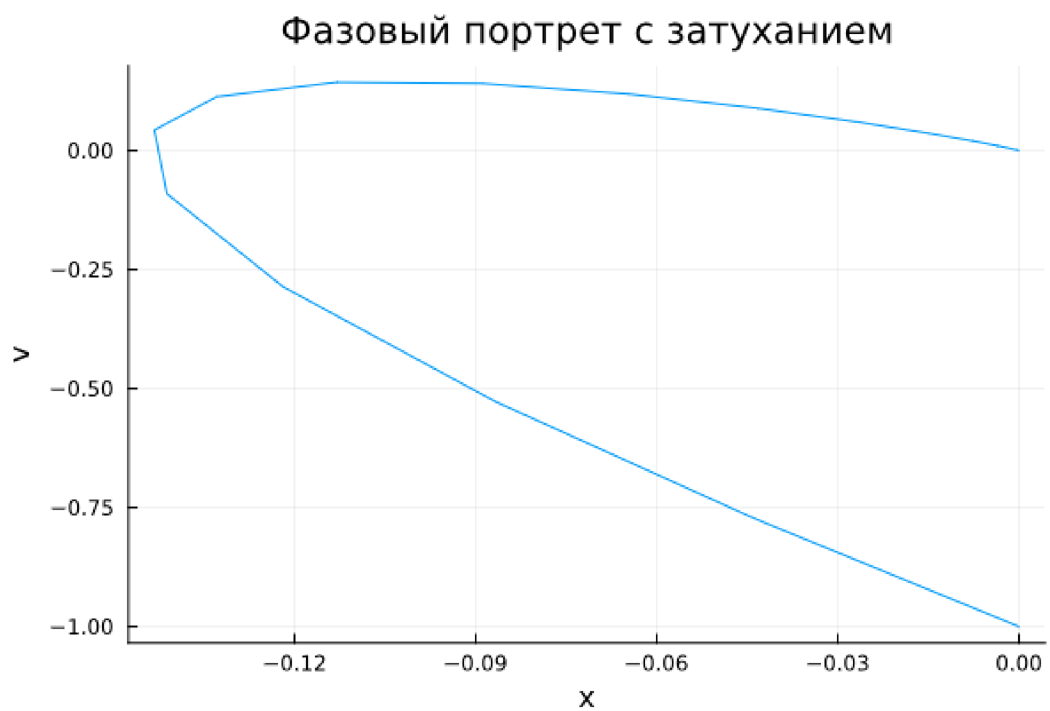
Теперь реализуем эту модель посредством OpenModelica.

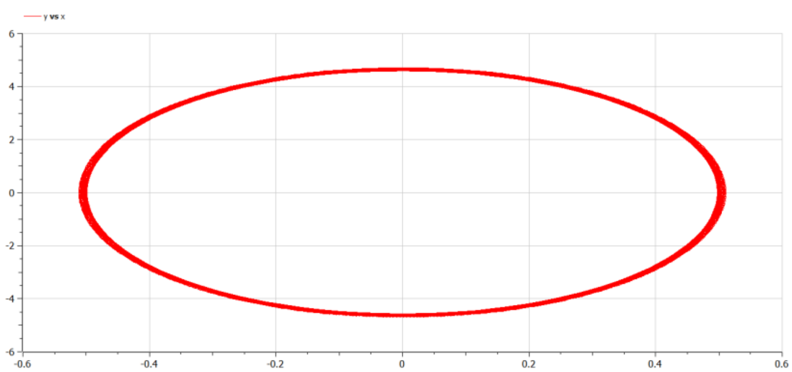
```
model lab4_1
  parameter Real g = 0;
  parameter Real w = 9.2;
  parameter Real x0 = -0.5;
  parameter Real y0 = 1;
  Real x(start=x0);
  Real y(start=y0);
equation
    der(x) = y;
    der(y) = -g .*y - w^2 .*x;
end lab4_1;
```

В результате получаем следующие графики решения уравнения гармонического осциллятора (рис. [??]) и его фазового портрета (рис. [??]).



Колебания гармонического осциллятора без затуханий и без действий внешней силы. OpenModelica





Фазовый портрет колебаний гармонического осциллятора без затуханий и без действий внешней силы. OpenModelica

Также несложно увидеть, что графики, полученные с помощью OpenModelica и Julia идентичны.

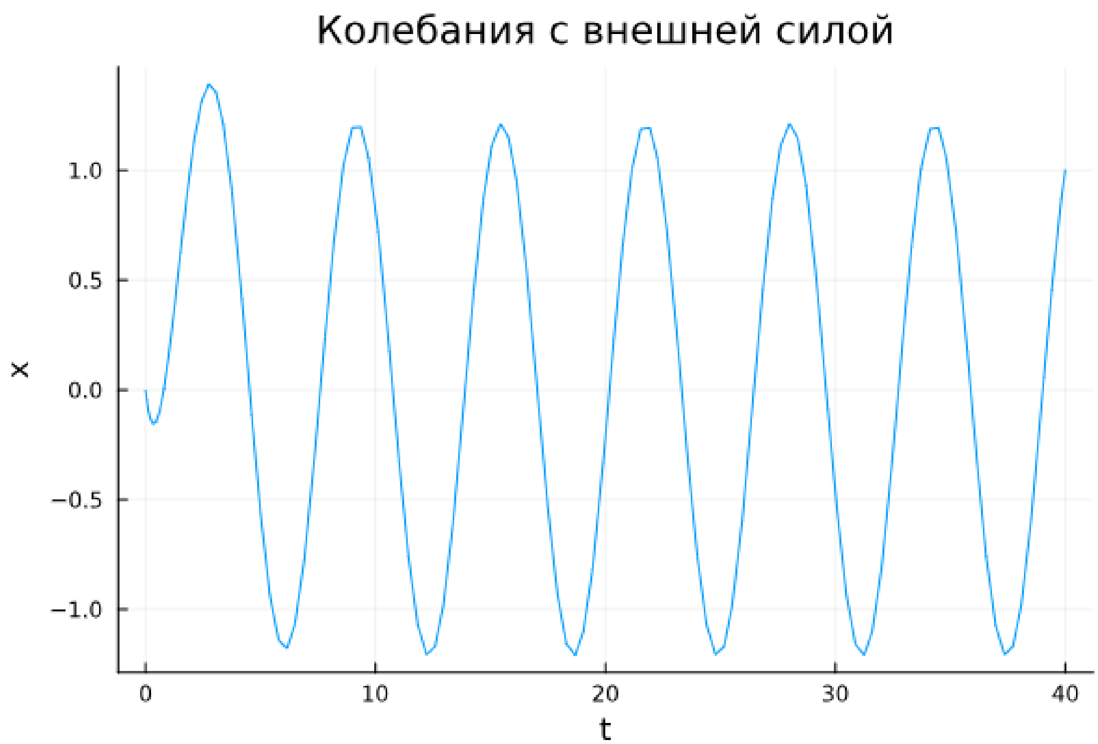
4.2 Модель колебаний гармонического осциллятора с затуханием и без действий внешней силы

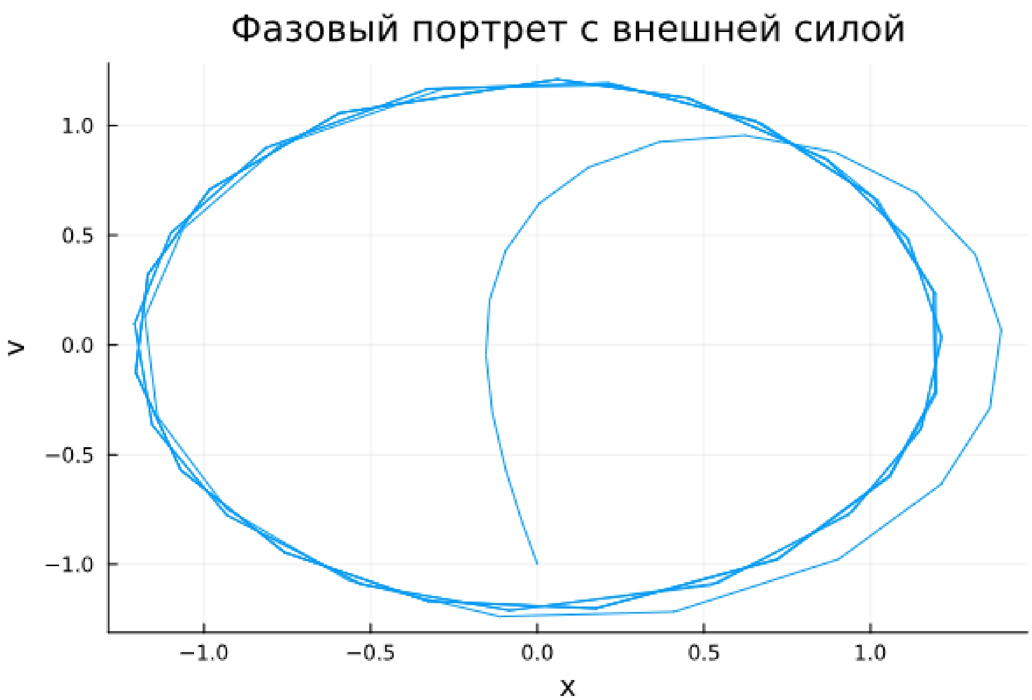
Реализуем эту модель на языке программирования Julia.

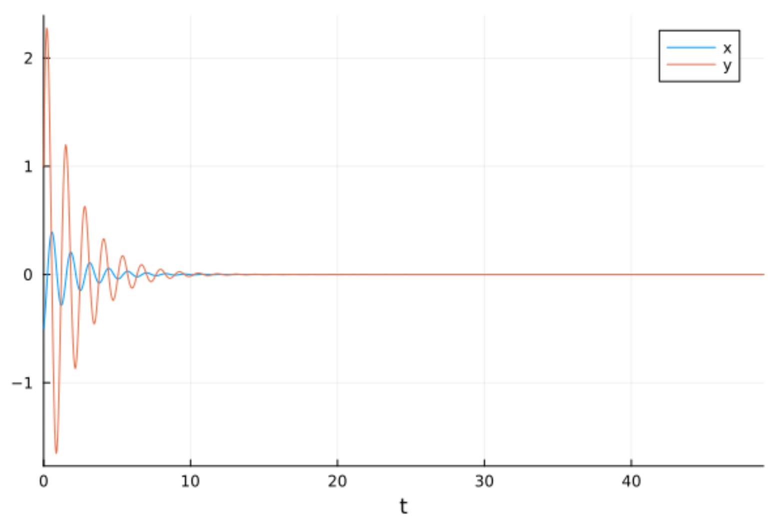
```
# Используемые библиотеки
using DifferentialEquations, Plots;

# Начальные условия
tspan = (0,49)
u0 = [-0.5, 1]
p2 = [1, 4.9]

# Задание функции
```

```
function f1(u, p, t)
    x, y = u
    g, w = p
    dx = y
    dy = -g .*y - w^2 .*x
    return [dx, dy]
end

# Постановка проблемы и ее решение
problem2 = ODEProblem(f1, u0, tspan, p2)
sol2 = solve(problem2, Tsit5(), saveat = 0.05)
```

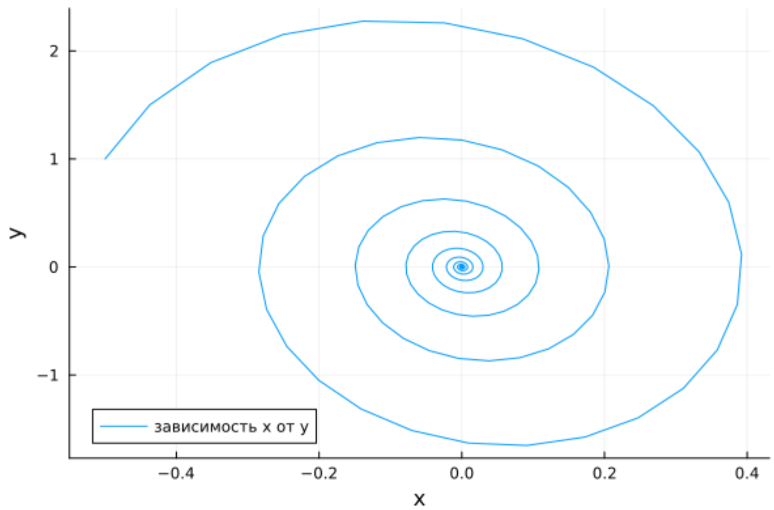
В результате получаем следующие графики решения уравнения гармонического осциллятора (рис. [??]) и его фазового портрета (рис. [??]).







Колебания гармонического осциллятора с затуханием и без действий внешней силы



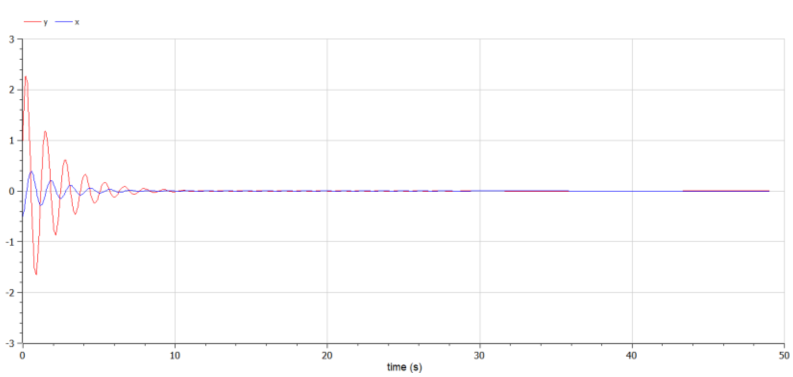
Фазовый портрет колебаний гармонического осциллятора с затуханием и без действий внешней силы

В этом случае сначала происходят колебания осциллятора, а затем график затухает, поскольку у нас есть параметр, отвечающий за потери энергии.

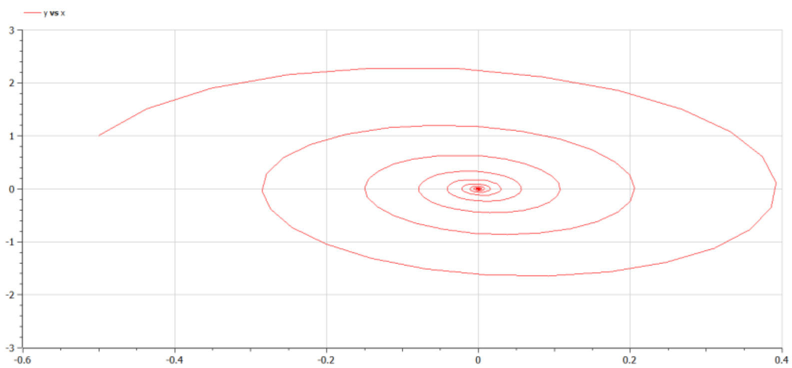
Теперь реализуем эту модель посредством OpenModelica.

```
model lab4_2
  parameter Real g = 1;
  parameter Real w = 4.9;
  parameter Real x0 = -0.5;
  parameter Real y0 = 1;
  Real x(start=x0);
  Real y(start=y0);
equation
    der(x) = y;
    der(y) = -g .*y - w^2 .*x;
end lab4_2;
```

В результате получаем следующие графики решения уравнения гармонического осциллятора (рис. [??]) и его фазового портрета (рис. [??]).



Колебания гармонического осциллятора с затуханием и без действий внешней силы. OpenModelica



Фазовый портрет колебаний гармонического осциллятора с затуханием и без действий внешней силы. OpenModelica

Во второй модели также несложно увидеть, что графики, полученные с помощью OpenModelica и Julia идентичны.

4.3 Модель колебаний гармонического осциллятора с затуханием и под действием внешней силы

Реализуем эту модель на языке программирования Julia.

```
u0 = [0.0, -1.0]

tspan = (0.0, 40.0)

prob1 = ODEProblem(osc1!, u0, tspan)

sol1 = solve(prob1, Tsit5(), dt=0.05)

# График x(t)

plot(sol1.t, sol1[1, :], xlabel="t", ylabel="x", title="Колебания без затухания", legend=false
)
```

```
plot(sol1[1, :], sol1[2, :], xlabel="x", ylabel="v", title="Фазовый портрет без затухания", le
gend=false)
```

```
function osc2!(du, u, p, t)

   du[1] = u[2]

   du[2] = -5.0 * u[2] - 7.0 * u[1]

end
```

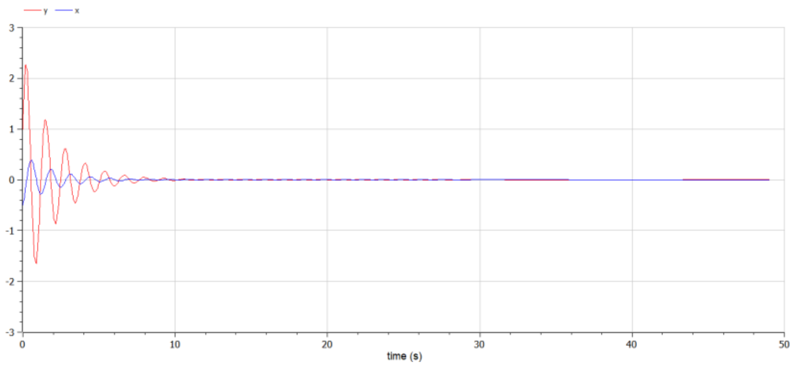
```
prob2 = ODEProblem(osc2!, u0, tspan)

sol2 = solve(prob2, Tsit5(), dt=0.05)


# x(t)

plot(sol2.t, sol2[1, :], xlabel="t", ylabel="x", title="Колебания с затуханием", legend=false)


function osc3!(du, u, p, t)

    du[1] = u[2]

    du[2] = -4.0 * u[2] - 2.0 * u[1] + 5.0 * sin(t)

end


prob3 = ODEProblem(osc3!, u0, tspan)

sol3 = solve(prob3, Tsit5(), dt=0.05)


# x(t)

plot(sol3.t, sol3[1, :], xlabel="t", ylabel="x", title="Колебания с внешней силой", legend=fa
lse)
```

```
model HarmonicOscillator

  parameter Real w = sqrt(7.5);

  Real x(start=0);

  Real v(start=-1);

equation

  der(x) = v;

  der(v) = -w^2 * x;

end HarmonicOscillator;
```

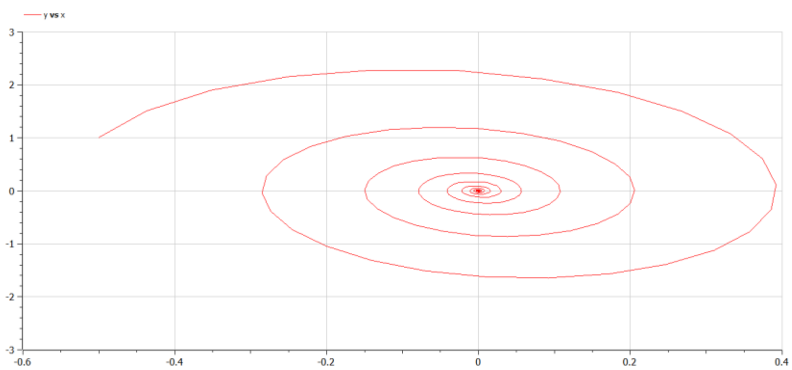
```
model DampedOscillator
  parameter Real c = 5;      // Коэффициент демпфирования
  parameter Real k = 7;      // Жесткость
  Real x(start=0);
  Real v(start=-1);
equation
  der(x) = v;
  der(v) = -c*v - k*x;
end DampedOscillator;
```

```
model ForcedDampedOscillator
  parameter Real c = 4;
  parameter Real k = 2;
  parameter Real F = 5;
  Real x(start=0);
  Real v(start=-1);
equation
  der(x) = v;
  der(v) = -c*v - k*x + F*sin(time);
end ForcedDampedOscillator;
```

В результате получаем следующие графики решения уравнения гармонического осциллятора (рис. [??]) и его фазового портрета (рис. [??]).



Колебания гармонического осциллятора с затуханием и под действием внешней силы. OpenModelica



Фазовый портрет колебаний гармонического осциллятора с затуханием и под действием внешней силы. OpenModelica

В третьем случае графики, полученные с помощью OpenModelica и Julia все также идентичны.

5 Выводы

В процессе выполнения данной лабораторной работы я построила математическую модель гармонического осциллятора.

Список литературы

1. Гармонические колебания [Электронный ресурс]. URL: https://ru.wikipedia.org/wiki/Гармонические_колебания.