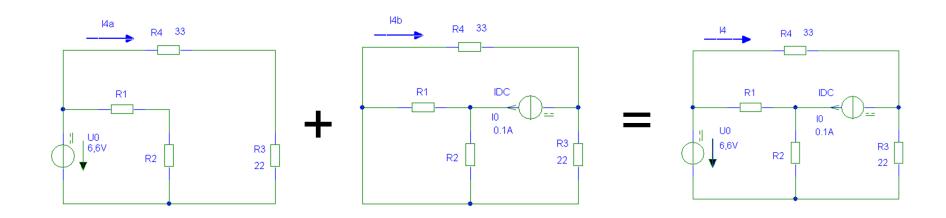


#### **GRUNDLAGEN DER ELEKTROTECHNIK ET1**

#### Teil 4 Netzwerkanalyse

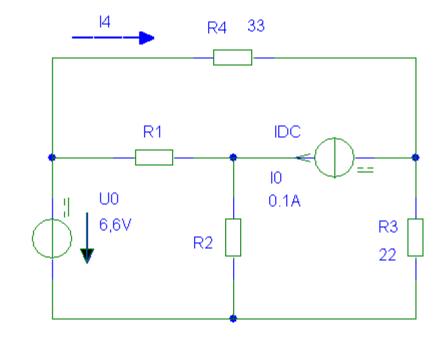


#### REVIEW: METHODE DES ÜBERLAGERUNGSPRINZIPS

- je Quelle ein Schaltbild:
  - alle anderen idealen Spannungsquellen kurzgeschlossen
  - alle anderen idealen Stromquellen entfernt
- je Schaltbild berechnet man dann den gesuchten Teilstrom oder die gesuchte Teilspannung
- Ergebnis
  - = Summe der Teilströme oder Teilspannungen (die Superposition)

#### **BEISPIEL**

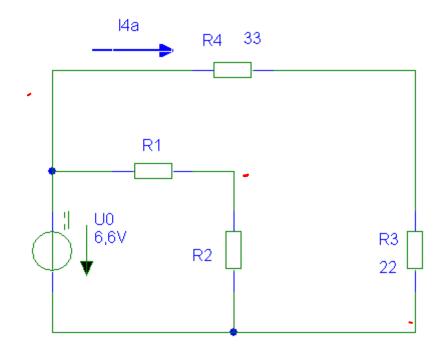
# Bestimmen Sie den Laststrom $I_4$





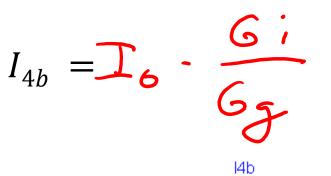
# 1. SCHALTBILD: EINFLUß VON $\boldsymbol{U}_0$

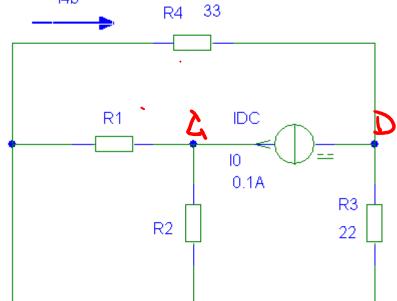
$$I_{4a} = \frac{V_0}{R_4 + R_3} = \frac{6.6V}{5052} = 120 \text{ mA}$$

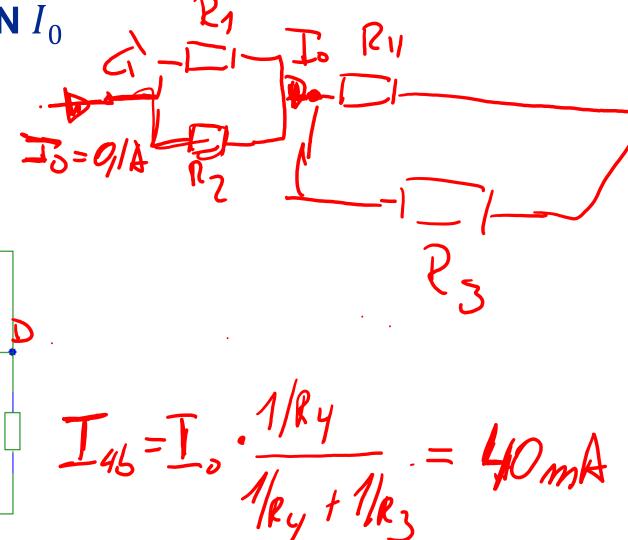




# 2. SCHALTBILD: EINFLUß VON $I_{\mathrm{0}}$

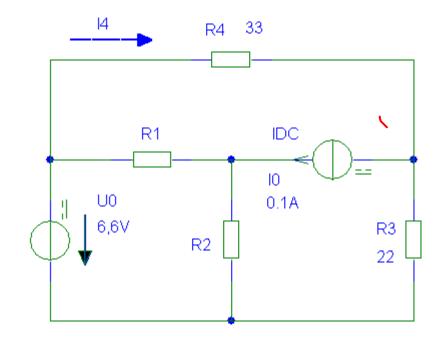






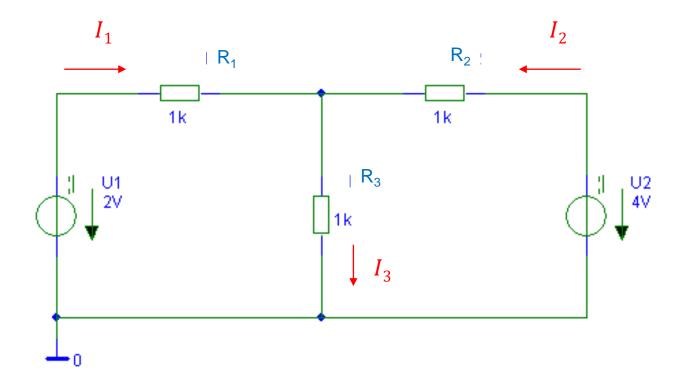
#### 3. SUPERPOSITION

$$I_4 = I_{4a} + I_{4b} = 120 \text{m/s} + 40 \text{m/s}$$

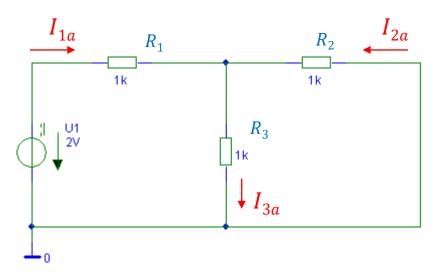


#### ÜBUNGSAUFGABE ZUR SUPERPOSITION

Bestimmen Sie den Strom  $I_3$  durch den mittleren Widerstand.



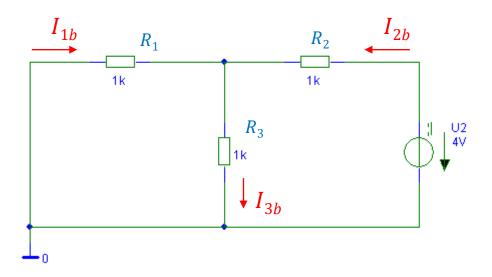
# 1. EINFLUSS VON $U_1$



$$I_{1a} =$$

$$I_{3a}$$

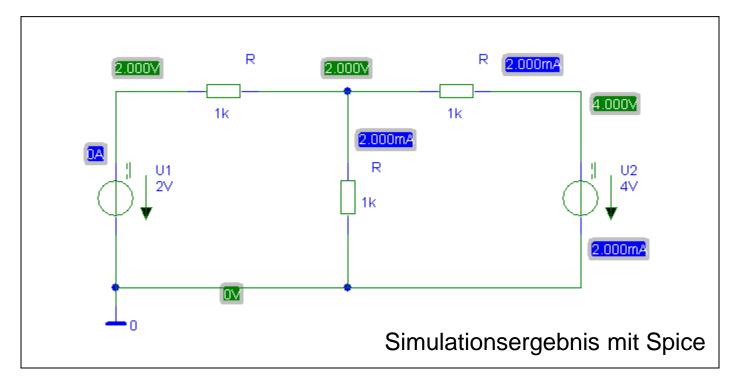
# 2. EINFLUSS VON $U_2$



$$I_{2b} =$$

$$I_{3b} =$$

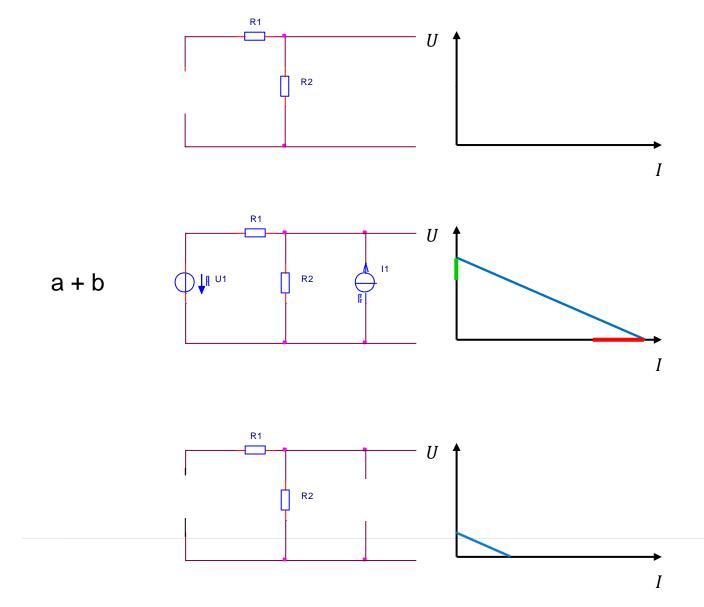
#### 3. SUPERPOSITION



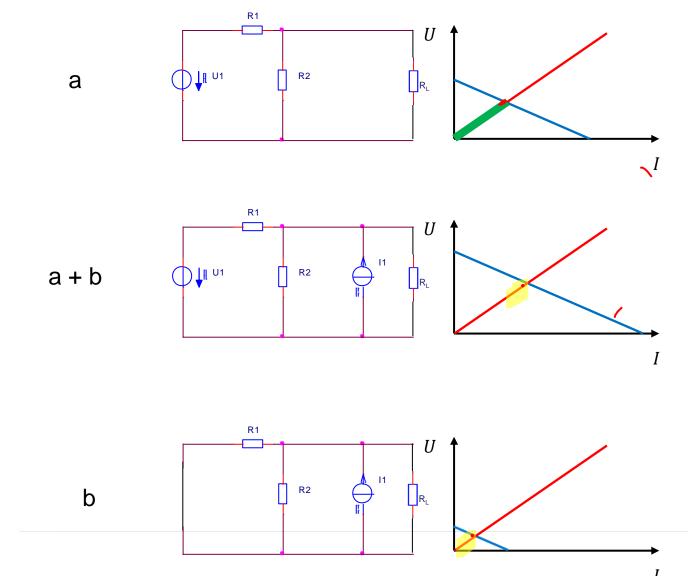
$$I_{3a} = 2/3 mA$$
  
 $I_{3b} = 4/3 mA$   
 $\Rightarrow I_3 =$ 

# ÜBERLAGERUNGSPRINZIP: VORÜBERLEGUNGEN **1** U1 Jo+In 11 **HAW Hamburg** Technik und Informatik

# ÜBERLAGERUNGSPRINZIP: VORÜBERLEGUNGEN



# ÜBERLAGERUNGSPRINZIP: VORÜBERLEGUNGEN



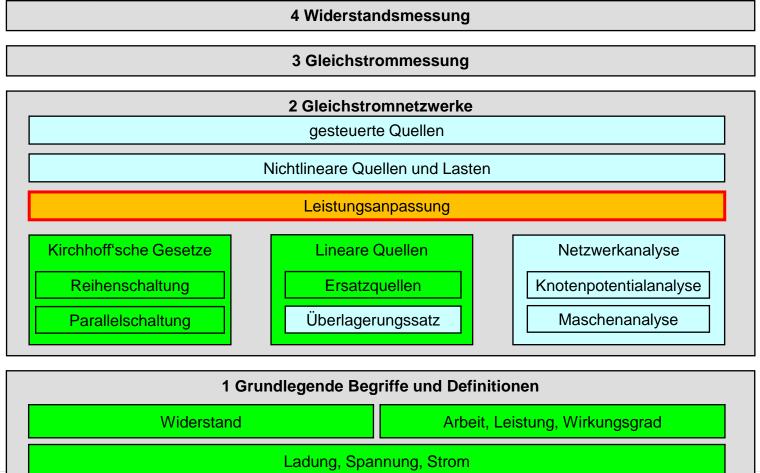
#### 2 GLEICHSTROMSCHALTUNGEN

| 2.1  | Zählpfeilsystem                                | Grundlagen |
|------|--|------------|
| 2.2  | Grundlegende Begriffe                          |            |
| 2.3  | Kirchhoffsche Gesetze                          |            |
| 2.4  | Parallel- und Reihenschaltung von Widerständer | ı          |
| 2.5  | Strom- und Spannungsteiler                     |            |
| 2.6  | Lineare Quellen                                |            |
| 2.7  | Umwandlung in Ersatzquellen                    | Methoden   |
| 2.8  | Überlagerungsprinzip                           |            |
| 2.9  | Netzwerkanalyse                                |            |
| 2.10 | Leistungsanpassung                             | Sonstiges  |
| 2.11 | Nichtlineare Quellen und Verbraucher           |            |
| 2.12 | Gesteuerte Quellen                             |            |



#### **GLEICHSTROM**

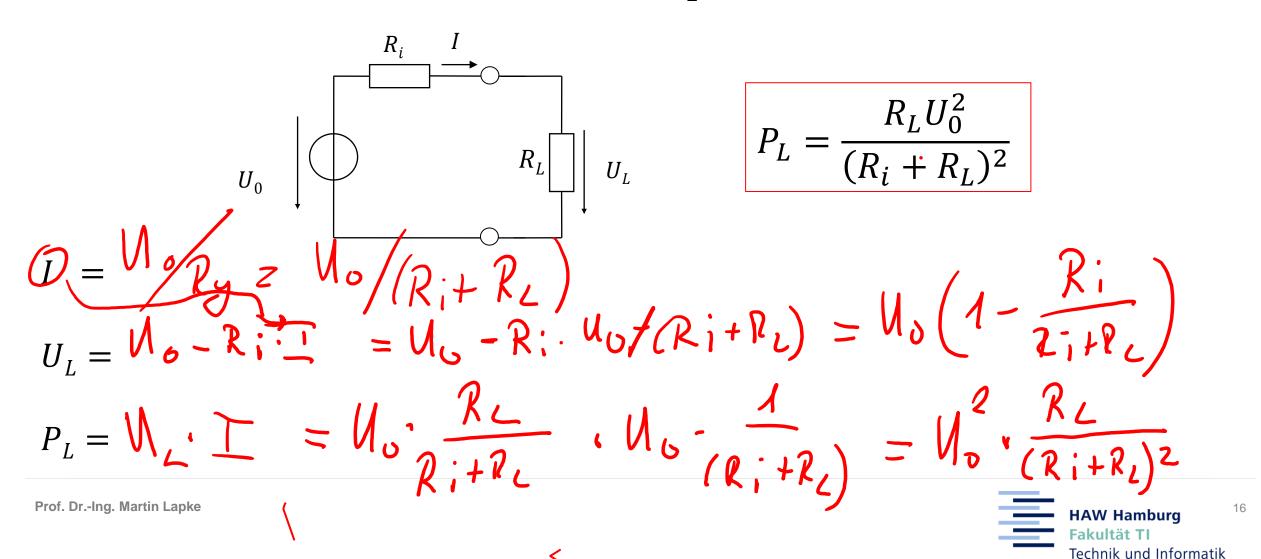
Inhalte der Kapitel 1 – 4: Gleichstrom



15

# LEISTUNG IN LAST $R_L$ BEI LINEARER QUELLE

Wie groß ist die Leistung, die in der Last  $R_L$  umgewandelt wird?



#### LEISTUNGSANPASSUNG BEI LINEARER QUELLE

Bei welchem Lastwiderstand ist die Leistung in  $R_L$  maximal?

Bet Welchern Lastwiderstand ist die Leistung in 
$$R_L$$
 maximal?

$$P_L = f(R_L) \text{ hat Maximum, wenn:} \quad \mathcal{P}_L = 0 \quad (=) \quad \frac{dP_L}{dR_L} = 0$$
Es gilt: 
$$\left(\frac{f}{g}\right)' = \frac{1}{g^2} \quad \mathcal{P}_L = 0$$
Mit: 
$$P_L = \frac{1}{g^2} \quad \mathcal{P}_L = \frac{1}{g^2} \quad \mathcal{P}_L = 0 \quad (=) \quad \mathcal{P}_L = 0$$

# **RECHNUNGEN (SAUBER)**

$$u = R_L U_0^2$$
  $v = (R_i + R_L)^2$   
 $u' = U_0^2$   $v' = 2(R_i + R_L)$ 

$$P_L = \frac{U_0^2 (R_i + R_L)^2 - R_L U_0^2 2(R_i + R_L)}{(R_i + R_L)^4}$$

$$P_L = 0 \quad \Leftrightarrow \quad R_L U_0^2 2(R_i + R_L) = U_0^2 (R_i + R_L)^2$$

$$R_L^2 = R_i^2$$
$$R_L = R_i$$

$$P_L(R_L) = \frac{R_i U_0^2}{(4R_i^2)} = \frac{U_0^2}{4R_i}$$

#### **MATEMATICA LÖSUNG**

https://develop.open.wolframcloud.com/app/

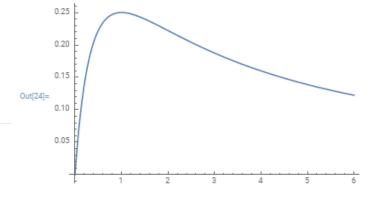
$$PL[RL_]:=U0^2*(RL/(RL+Ri)^2);$$

Out[20]= 
$$\frac{U0^2}{4 \text{ Ri}}$$

In[20]:= PL[Ri]

PL[Ri]

Plot[PL[RL]/.{U0->1,Ri->1},{RL,0,6}]



 $ln[1] = PL[RL_] := U0 ^ 2 * (RL/(RL + Ri) ^ 2);$ 

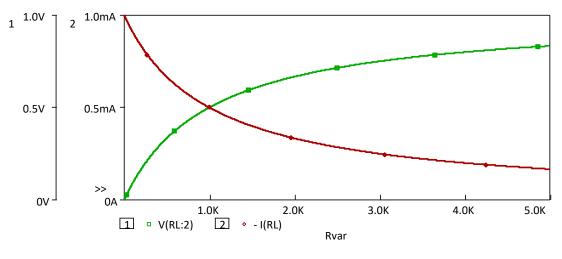
In[18]:= FullSimplify[D[PL[RL], RL]]

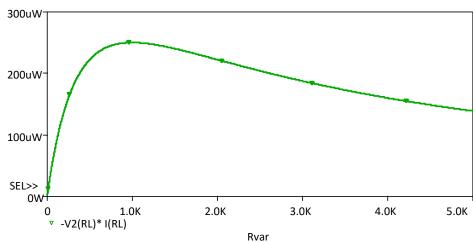
In[19]:= Solve[D[PL[RL], RL] == 0, RL]

D[PL[RL], RL]



#### LEISTUNGSANPASSUNG BEI LINEARER QUELLE





Die Leistung in  $R_L$  wird maximal für  $R_i = R_L$  und es gilt:

$$P_{L,\max} = \frac{{U_0}^2}{4R_i}$$

#### 2 GLEICHSTROMSCHALTUNGEN

| 2.1  | Zählpfeilsystem                                | Grundlagen |
|------|--|------------|
| 2.2  | Grundlegende Begriffe                          |            |
| 2.3  | Kirchhoffsche Gesetze                          |            |
| 2.4  | Parallel- und Reihenschaltung von Widerständer | ı          |
| 2.5  | Strom- und Spannungsteiler                     |            |
| 2.6  | Lineare Quellen                                |            |
| 2.7  | Umwandlung in Ersatzquellen                    | Methoden   |
| 2.8  | Überlagerungsprinzip                           |            |
| 2.9  | Netzwerkanalyse                                |            |
| 2.10 | Leistungsanpassung                             | Sonstiges  |
| 2.11 | Nichtlineare Quellen und Verbraucher           |            |
| 2.12 | Gesteuerte Quellen                             |            |



#### SYSTEMATISCHE NETZWERKANALYSE

#### Netzwerk mit z Zweigen

- z Zweigströme
- z Zweigspannungen
- ⇒ 2 z Gleichungen erforderlich

Systematisch vorgehen, um den Überblick zu behalten!

#### 3 Methoden der Netzwerkanalyse



- Basisverfahren (Zweigstromverfahren) einfache Anwendung der Kirchhoffschen Gesetze
- Maschenstromverfahren
   Reduzierung der Gleichungszahl durch Definition von Maschenströmen
- Knotenpotentialverfahren
   Reduzierung der Gleichungszahl durch Definition von Knotenspannungen

# **REVIEW: ZWEIG, KNOTEN, MASCHE**

Zweig: Ein oder mehrere Elemente in Serie ohne Abzweigung

Knoten: Verbindung von 2 oder mehr Zweigen.

Ein Netzwerk mit k Knoten hat genau k-1 unabhängige Knoten.

Masche: Jede geschlossene Schleife in einem Netzwerk.

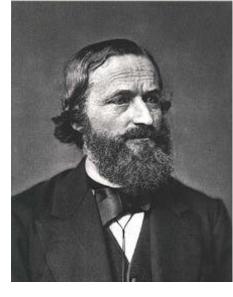
Anzahl der unabhängigen Maschen m = z - (k - 1)

#### KIRCHHOFFSCHE REGELN

# Knotenregel $\rightarrow k-1$ Knotengleichungen

"Die Summe aller zu- und abfließenden Ströme eines Knotens ist Null"

$$\sum_{Knoten} I_i = 0 \qquad \frac{I_1 - I_2}{I_3} \qquad I_1 - I_2 - I_3 = 0$$



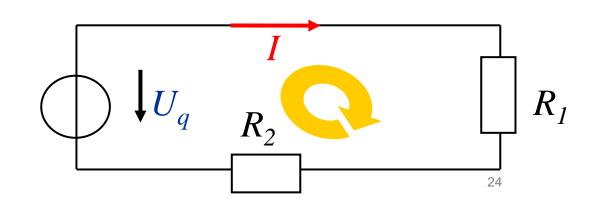
Gustav Kirchhoff 1824-1887

# Maschenregel $\rightarrow m$ Maschengleichungen

"Die Summe aller Teilspannungen einer Masche ist Null"

$$\sum_{Masche} U_i = 0$$

$$R_1 \cdot I + R_2 \cdot I - U_q = 0$$



#### **BASISVERFAHREN: IDEE**

#### Netzwerk mit z Zweigen. Gesucht:

- z Zweigströme
- z Zweigspannungen
- $\rightarrow$  2z Gleichungen erforderlich

$$k-1$$
 Knotengleichungen  
 $m=z-k+1$  Maschengleichungen

$$Z' = (k-1) + (2-k+1) = 2$$

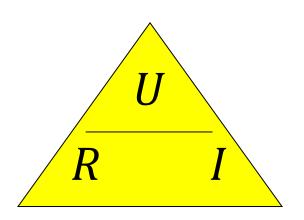




#### **OHMSCHES GESETZ**

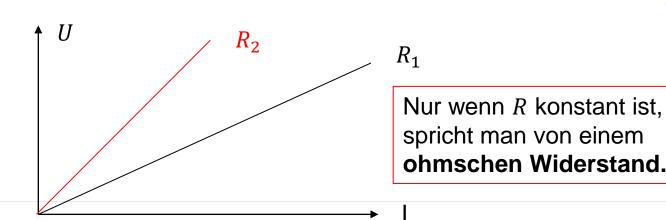
Bei einem metallischen Leiter und konstanter Temperatur ist der Widerstand *R* konstant.

⇒ Spannung proportional zum Strom



Ohmsches Gesetz:  $U = R \cdot I \text{ mit } R = \text{const.}$ 

Georg S. Ohm 1789 - 1854





#### **BASISVERFAHREN: IDEE**

# Netzwerk mit z Zweigen. Gesucht:

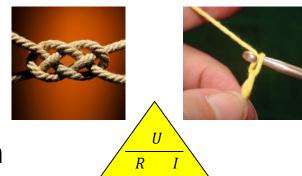
- z Zweigströme
- z Zweigspannungen
- $\rightarrow$  2z Gleichungen erforderlich



$$k-1$$

$$m = z - k + 1$$

Knotengleichungen m = z - k + 1 Maschengleichungen



Ohmsche Gleichungen

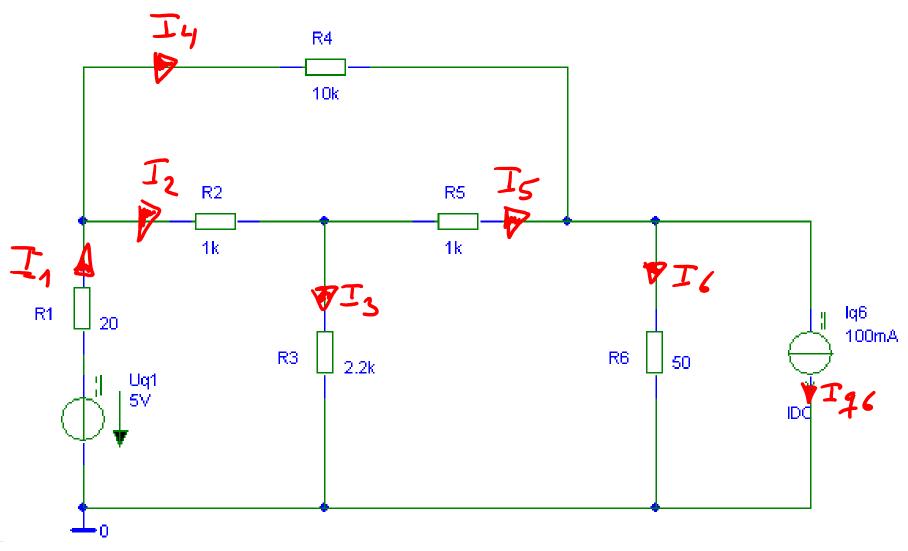
2z

Gleichungen

#### BASISVERFAHREN ÜBER ZWEIGSTRÖME

- 1. Zweigströme definieren
- 2. Zweigspannungen definieren (Richtung wie Zweigströme)
- 3. Knoten nummerieren (0 für Masseknoten GND)
- 4. Maschen nummerieren und Umlaufsinn festlegen (für jedes Fenster im Uhrzeigersinn)
- 5. Kirchhoffs Maschenregel für jede Masche anwenden
- 6. Kirchhoffs Knotenregel für k-1 Knoten anwenden (Masseknoten auslassen)

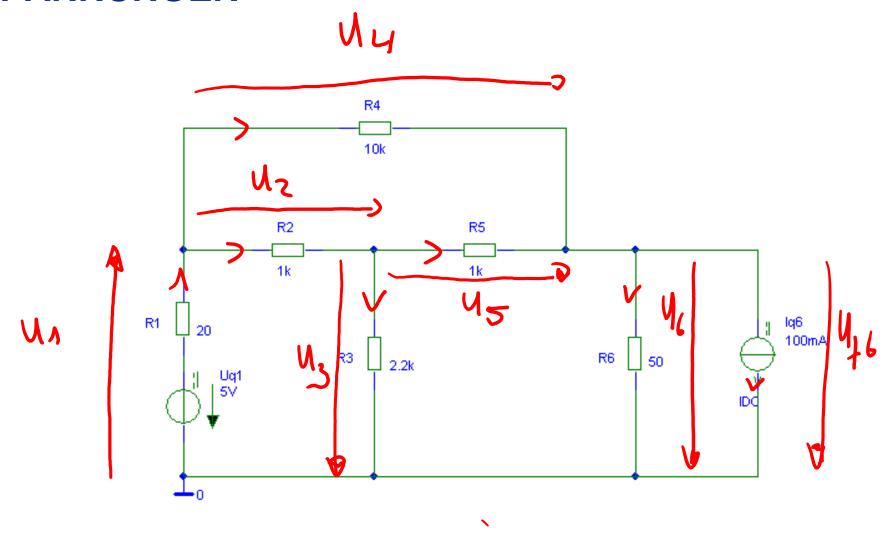
# **SCHRITT 1: ZWEIGSTRÖME**







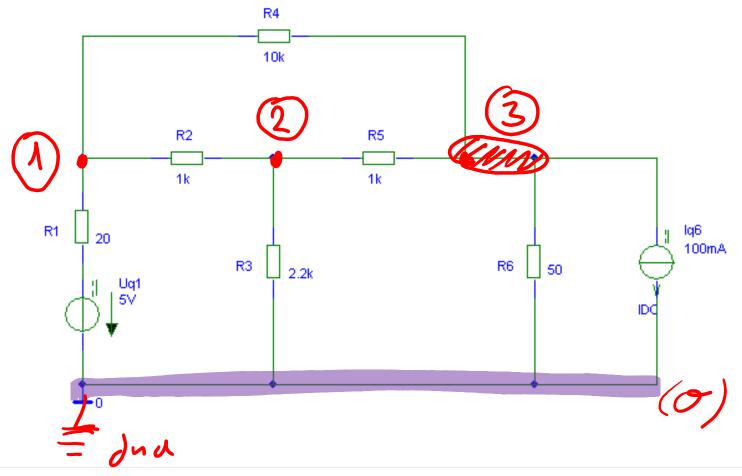
#### **SCHRITT 2: ZWEIGSPANNUNGEN**



2. Zweigspannungen definieren (Richtung wie Zweigströme)



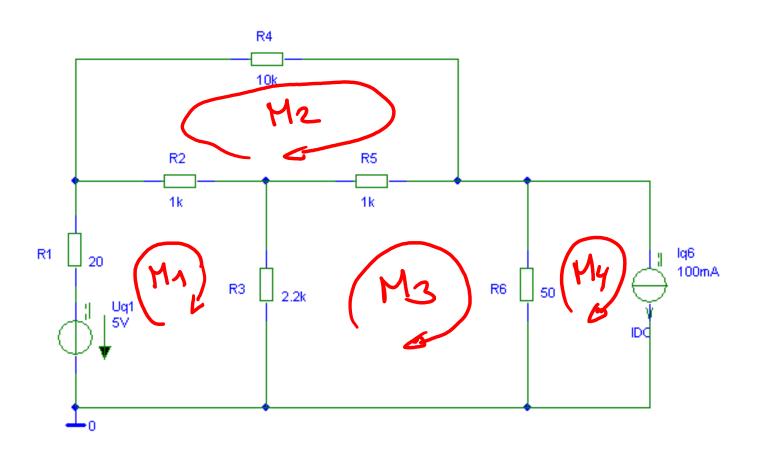
#### **SCHRITT 3: KNOTEN**



3. Knoten nummerieren (0 für Masseknoten - GND)



#### **SCHRITT 4: MASCHEN**



4. Maschen nummerieren und Umlaufsinn festlegen (für jedes Fenster im Uhrzeigersinn)



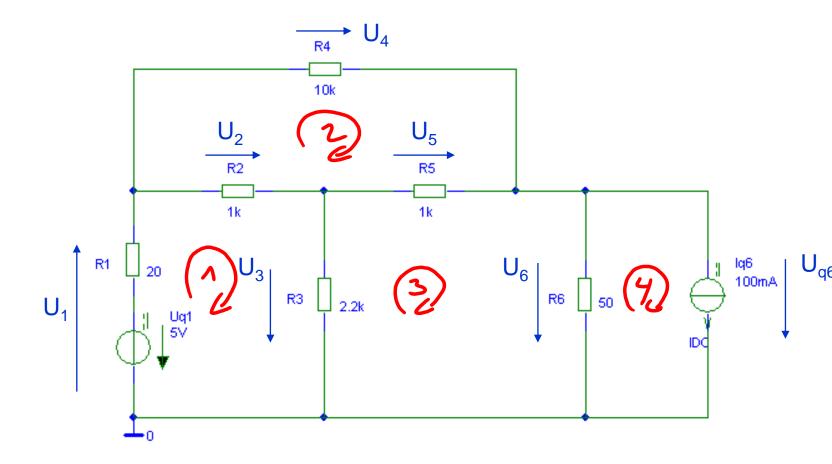
#### **SCHRITT 5: MASCHENREGEL**

M1: 
$$43 + 4_1 + 4_2 \ge 0$$
  
M2:  $44 - 4_2 - 4_5 = 0$ 

$$M2: U_4 - U_2 - U_5 = 0$$

M3: 
$$116 - 113 + 115 = 0$$

M4: 
$$116 + 1196 = 0$$

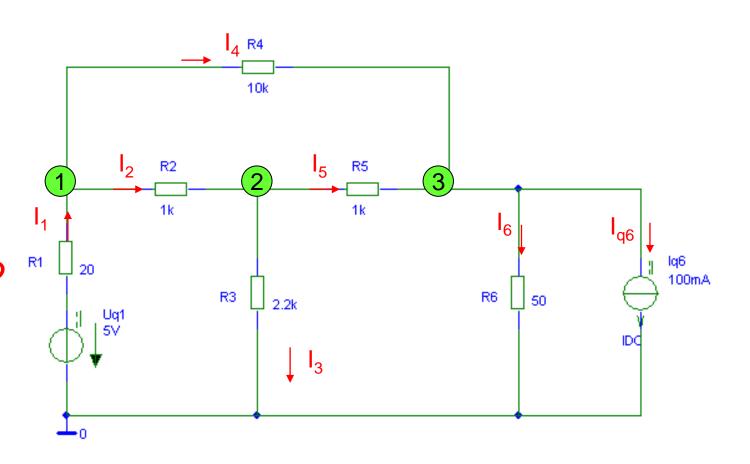


#### **SCHRITT 6: KNOTENREGEL**

$$K1: \overline{I}_1 - \overline{I}_2 - \overline{I}_4 = 0$$

$$K2: \overline{I_2} - \overline{I_5} - \overline{I_3} = 0$$

K3: 
$$I_5 + I_4 - I_6 - I_{46} = 0$$



6. Kirchhoffs Knotenregel für k-1 Knoten anwenden (Masseknoten auslassen)



# LÖSEN DER GLEICHUNGEN

Unbekannte:  $U_1 \dots U_6$ ,  $U_{q6}$ ,  $I_1 \dots I_6$ 

Gleichungen: 4 für Maschen- und 3 Knotengleichungen

→ 13 Unbekannte

→ 7 Gleichungen

# 4 055/4

#### Ohmsches Gesetz

• 
$$U_1 = R_1 I_1 - U_{q1}$$

•  $U_2 = R_2 I_2$ 

•  $U_3 = R_3 I_3$ 

 $\bullet \quad U_4 = R_4 I_4$ 

•  $U_5 = R_5 I_5$ 

•  $U_6 = R_6 I_6$ 

139 leich ungen

#### Vorgehen

- Alle Spannungen durch Ströme substituieren (6 Gleichungen für 6 Variablen)
- Nach Zweigströmen auflösen
- · Zweigspannungen über obige Gleichungen (ohmsches Gesetz) berechnen

#### LINEARES GLEICHUNGSSYSTEM

$$K1: I_1 - I_2 - I_4 = 0$$

$$K2: I_2 - I_3 - I_5 = 0$$

$$K3: I_4 + I_5 - I_6 - I_{a6} = 0$$

M1: 
$$U_1 + U_2 + U_3 = 0$$
  $\Leftrightarrow -U_{q1} + R_1I_1 + R_2I_2 + R_3I_3 = 0$ 

M2:  $-U_2 + U_4 - U_5 = 0$   $\Leftrightarrow -R_2I_2 + R_4I_4 - R_5I_5 = 0$ 

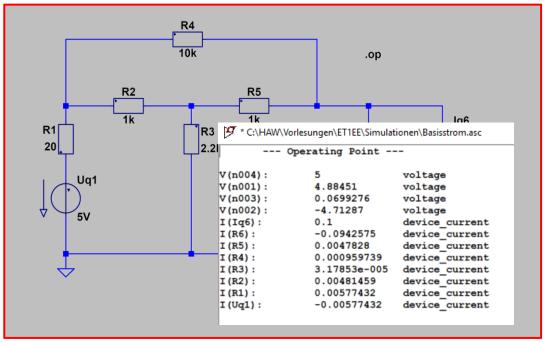
M3:  $-U_3 + U_5 + U_6 = 0$   $\Leftrightarrow -R_3I_3 + R_5I_5 + R_6I_6 = 0$ 

M4:  $-U_6 + U_{q6} = 0$   $\Leftrightarrow -R_6I_6 + U_{q6} = 0$ 

7 Gleichungen für die Unbekannten:  $T_1, T_2, T_3, T_4, T_5, T_6, U_46$ 

Lösung zum Beispiel über Gauß-Elimination

#### LÖSUNGEN



```
R1=1, R2=1, R3=1, R4=1, R5=1, R6=1, Uq1=1, Iq6=1
syms I1 I2 I3 I4 I5 I6 Uq6

eqn1 = I1 -I2 - I4 == 0;
eqn2 = I2 - I3 - I5 == 0;
eqn3 = I4 + I5 - I6 - Iq6 == 0;
eqn4 = R1*I1 - Uq1 + R2*I2 + R3*I3 == 0;
eqn5 = -R2*I2 + R4*I4 - R5*I5 == 0;
eqn6 = -R3*I3 + R5*I5 + R6*I6 == 0
eqn7 = -R3*I3 + R5*I5 + Uq6==0;

[M,U] = equationsToMatrix([eqn1, eqn2, eqn3, eqn4, eqn5, eqn6, eqn7], [I1, I2, I3, I4, I5, I6,Uq6])

I = M \ U

numerisch in Matlab über M \ U lösen
```

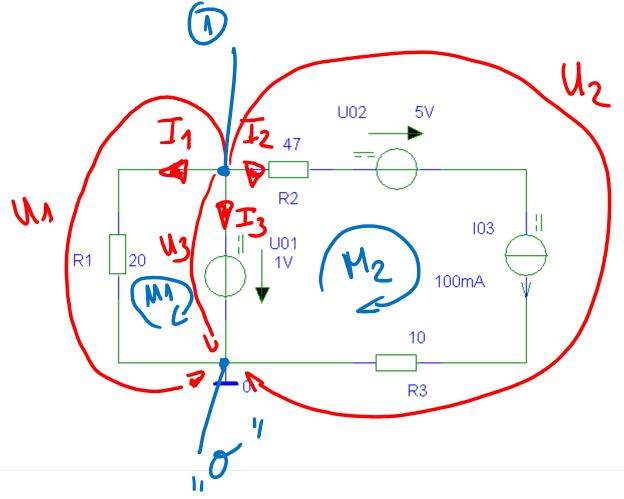
# Mathematica rechnet symbolisch (mit Variablen):

```
eqn1 = 11 - 12 - 14 == 0;
      eqn2 = 12 - 13 - 15 == 0;
      eqn3 = 14 + 15 - 16 - 1q6 == 0;
      eqn4 = R1*I1 - Uq1 + R2*I2 + R3*I3 == 0;
      eqn5 = -R2*I2 + R4*I4 - R5*I5 == 0;
      eqn6 = -R3*I3 + R5*I5 + R6*I6 == 0;
      eqn7 = -R3*I3 + R5*I5 + Uq6 ==0;
                              Solve[{eqn1,eqn2,eqn3,eqn4,eqn5,eqn6,eqn7},{I1,I2,I3,I4,I5,I6,Uq6}]
  → sol=
                          Iq6 (R2 (R3 + R5) + R3 (R4 + R5)) R6 + (R4 R5 + R3 (R4 + R5) + (R4 + R5) R6 + R2 (R3 + R5 + R6)) Uq1
\left\{\left\{\text{II} \rightarrow \frac{140 \, \left(\text{R2} \, \left(\text{R3} + \text{R5}\right) + \text{R3} \, \left(\text{R4} + \text{R5}\right) \, \text{R6} + \text{R2} \, \left(\text{R3} + \text{R4} + \text{R5}\right) \, \text{R6} + \text{R1} \, \left(\text{R4} \, \text{R5} + \text{R3} \, \left(\text{R4} + \text{R5}\right) + \left(\text{R4} + \text{R5}\right) \, \text{R6} + \text{R2} \, \left(\text{R3} + \text{R5} + \text{R6}\right)\right\}}{\right\}\right\}
                                                  Iq6 (R3 R4 - R1 R5) R6 + R4 (R3 + R5) Uq1 + (R4 + R5) R6 Uq1
      12 \rightarrow \frac{1}{R3 R4 R5 + R2 R4 (R3 + R5) + R3 (R4 + R5) R6 + R2 (R3 + R4 + R5) R6 + R1 (R4 R5 + R3 (R4 + R5) + (R4 + R5) R6 + R2 (R3 + R5 + R6))}
                     - Iq6 (R2 R3 R4 + R1 R3 (R2 + R4) + (R2 + R3) R4 R5 + R1 (R2 + R3 + R4) R5) + (R2 (R3 + R5) + R3 (R4 + R5)) Uq1
            - Iq6 (R2 R3 R4 + R1 R3 (R2 + R4) + (R2 + R3) R4 R5 + R1 (R2 + R3 + R4) R5) R6 + (R2 (R3 + R5) + R3 (R4 + R5)) R6 Uq1
      R3 R4 R5 + R2 R4 (R3 + R5) + R3 (R4 + R5) R6 + R2 (R3 + R4 + R5) R6 + R1 (R4 R5 + R3 (R4 + R5) + (R4 + R5) R6 + R2 (R3 + R5 + R6))
 sol/.{R1->20,R2->1000,R3->2200,R4->10000,R5->1000,R6->50,Uq1->5,Iq6->0.1}
    sol/. \{R1 \rightarrow 20, R2 \rightarrow 1000, R3 \rightarrow 2200, R4 \rightarrow 10000, R5 \rightarrow 1000, R6 \rightarrow 50, Uq1 \rightarrow 5, Iq6 \rightarrow 0.1\}
    \{\{I1 \rightarrow 0.00577432, I2 \rightarrow 0.00481459, I3 \rightarrow 0.0000317853, I4 \rightarrow 0.000959739, I5 \rightarrow 0.0047828, I6 \rightarrow -0.0942575, Uq6 \rightarrow -4.71287\}\}
```

https://develop.wolframcloud.com/app

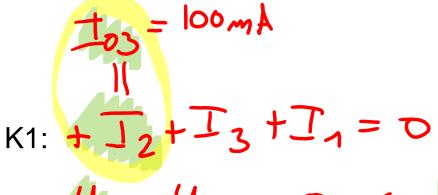
# **AUFGABE (1)**

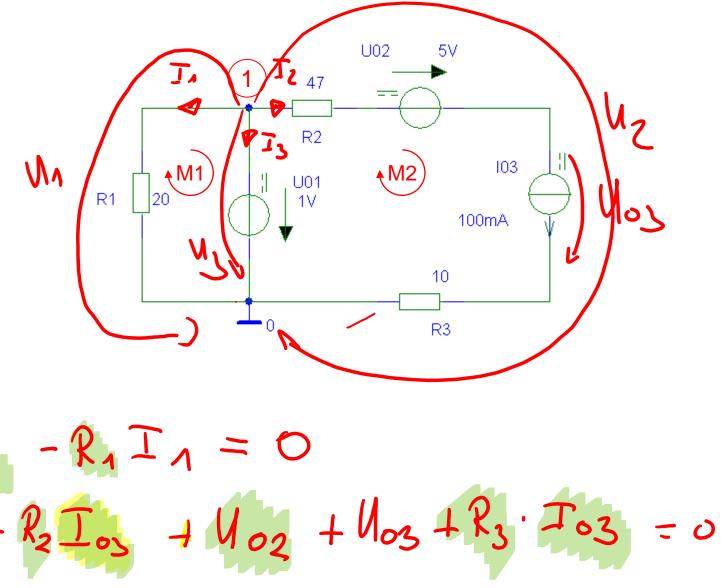
Definieren Sie Knoten und Maschen sowie Ströme und Spannungen.



# **AUFGABE (2)**

Stellen Sie die Gleichungen auf und lösen Sie diese.







$$T_3 = 100 \text{ m/A} - T_A$$

$$= -160 \text{ m/A}$$

$$100 \text{ m/A} + T_3 + T_A = 0$$

$$1V - 20 \text{ Q.} T_A = 0 \text{ J.} = 1 \text{ J.} = 50 \text{ m/A}$$

$$= 1V + 47 \text{ Q.} 100 \text{ m/A} + 5V + 403 + 10 \text{ Q.} 100 \text{ m/A} = 0$$

$$= 100 \text{ m/A} + 5V + 403 + 10 \text{ Q.} 100 \text{ m/A} = 0$$

$$= 100 \text{ m/A} + 5V + 403 + 10 \text{ Q.} 100 \text{ m/A} = 0$$

$$=> 1_{03} = 1V - 4,7 V - 5V - 1V$$
$$= -9,7V$$



#### KONTROLLE ÜBER MATHEMATICA

$$K1 = -I1 - I_2^2 - I03 == 0;$$
  
 $M1 = -R1 I1 + U01 == 0;$   
 $M2 = -U01 + R2 * I03 + U02 + U4 + R3 * I03 == 0;$ 

sol=Fullsimplify[Solve[{K1,M1,M2},{I1,I2,U4}]]

$$\left\{ \text{I1} \rightarrow \frac{\text{U01}}{\text{R1}}, \text{ I3} \rightarrow -\frac{\text{I03 R1} + \text{U01}}{\text{R1}}, \text{ U4} \rightarrow -\text{I03 R2} - \text{I03 R3} + \text{U01} - \text{U02} \right\} \right\}$$

 $N[sol]/.\{R1 -> 20, R2 -> 47, R3 -> 10, U01 -> 1, U02 -> 5, I03 -> 100*10^-3\}$ 

$$\left\{ \text{I1} \rightarrow \frac{1}{20}, \text{ I3} \rightarrow -0.15, \text{ U4} \rightarrow -9.7 \right\}$$



#### KONTROLLE DER LÖSUNG ÜBER MATLAB

#### Matlab File VL05.m

```
% Vorlesung 05 - Loesungsbeispiel für Lineare Gleichungen
%Zuweisung der Variablen
R1 = 20; R2 = 47; R3 = 10;
U01 = 1; U02 = 5; I03 = 100e-3;
%Definition der Matrix M mit den Spalten für I1, I2 und U04
M = [-1 \ -1 \ 0; R1 \ 0 \ 0; 0 \ 0 \ 1]
%Definition des Loesungsvektors (Spaltenvektor)
y = [103; -U01; U01-U02-R2*I03-R3*I03]
%Loesung der Gleichung mit x = [I1; I2; U04]
x = M \setminus y
```

#### Ergebnisse

$$M =$$
  $y =$   $x =$ 
 $-1 \quad -1 \quad 0 \quad 0.1000 \quad 0.0500$ 
 $20 \quad 0 \quad 0 \quad -1.0000 \quad 0.1500$ 
 $0 \quad 0 \quad 1 \quad -9.7000 \quad -9.7000$ 

#### SERVICE DES HAUSES: MATLAB-LIZENZ

HAW hat Studierenden-Lizenz von **Matlab** erworben <a href="http://www.etech.haw-hamburg.de/matlab">http://www.etech.haw-hamburg.de/matlab</a> (ca. 1 DVD als Download)

- Matlab ist der Standard an Universitäten, auch an der HAW
- Matlab ist:
  - leistungsfähiger "Taschenrechner"
  - dient zur Visualisierung von Messreihen im Labor
  - rechnet mit komplexen Zahlen
  - bietet Toolboxen für viele Fächer und wird in allen Semestern genutzt (Regelungstechnik, Signalverarbeitung, Bildverarbeitung, ...)
- aber: Lizenz nur für Lehrzwecke, nicht für kommerzielle Nutzung
- Matematica online Version

https://develop.wolframcloud.com/app (etwas schwerer in der Notation – ungewohnt)

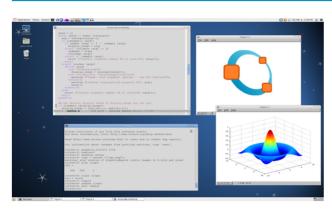
#### **ALTERNATIV: GNU OCTAVE**

# http://www.gnu.org/software/octave/

- weitgehend Matlab-kompatibel
- public domain / open source

#### **GNU Octave**





GNU Octave is a high-level interpreted language, primarily intended for numerical computations. It provides capabilities for the numerical solution of linear and nonlinear problems, and for performing other numerical experiments. It also provides extensive graphics capabilities for data visualization and manipulation. Octave is normally used through its interactive command line interface, but it can also be used to write non-interactive programs. The Octave language is quite similar to Matlab so that most programs are easily portable.

Octave is distributed under the terms of the GNU General Public License.





#### LTSPICE LAB

Versuchen Sie sich selbst an LTspice

https://www.haw-hamburg.de/ti-ie/labore/grundlagen-elektrotechnik/download.html

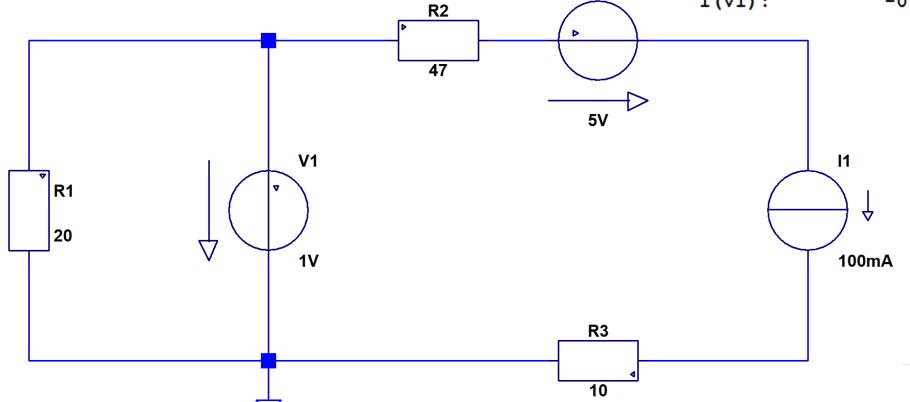
- zu Hause: Download LTSpice
- zeichnen Sie Ihre Lieblingsnetzwerk



#### LÖSUNG MIT SPICE

# Simulation in LTSpice

V(n001):1 -3.7V(n002): V(n004): V(n003): -8.7I(I1): 0.1 I(R3): 0.1 I(R2): 0.1 I(R1): 0.05 0.1 I(V2): I(V1): -0.15 voltage
voltage
voltage
voltage
device\_current
device\_current
device\_current
device\_current
device\_current
device\_current



**V2** 

#### WAS SIE MITNEHMEN SOLLEN...

#### Basisverfahren über Zweigströme

- immer einsetzbar
- Verfahren verstehen und anwenden können:
  - 1. Spannungen, Ströme, Knoten, Maschen festlegen
  - 2. Knotenregel anwenden
  - 3. Zweigspannungen durch Ohmsches Gesetz eliminieren
  - 4. Lösen nach Strömen, dann Spannungen über ohmsches Gesetz

Lösungen mittels Gauss, Matlab, Mathematica oder SPICE