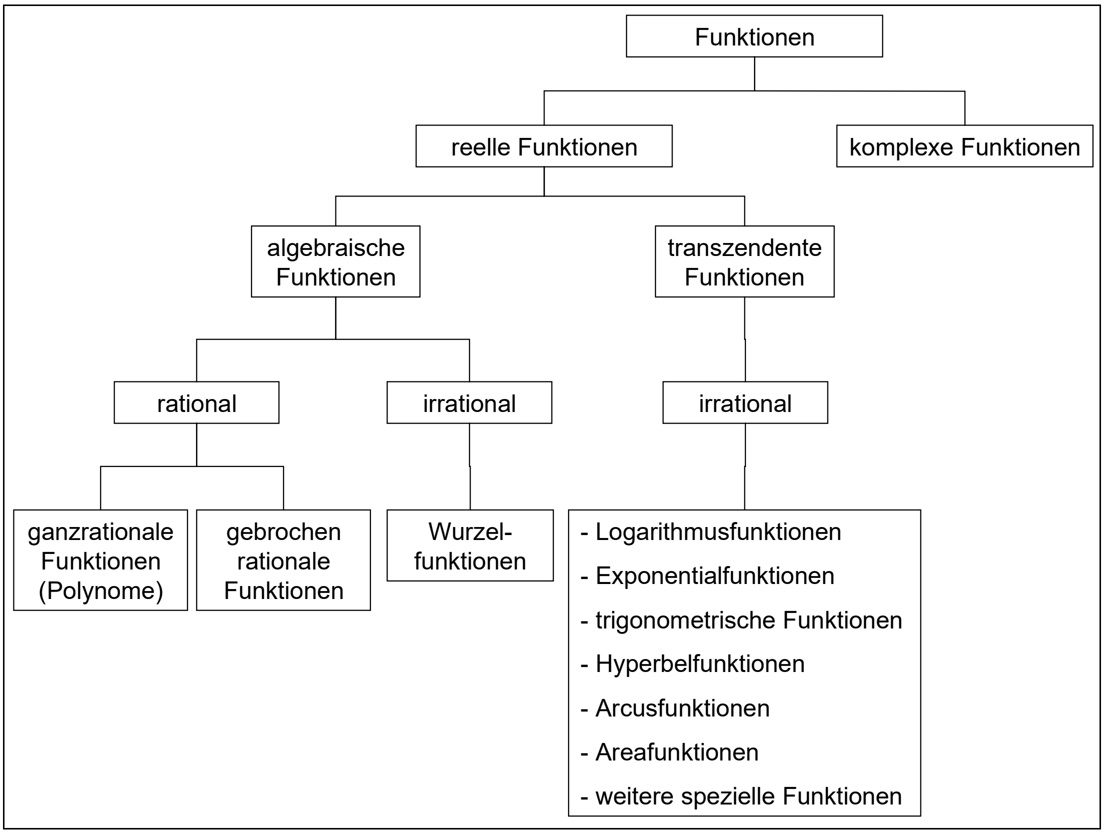
8 Funktionen

Nachfolgend ist eine **Übersicht über die verschiedenen Funktionen** gegeben, die in diesem Kapitel angesprochen werden.



8.1 Definition und Darstellung

Definition 8.1: reelle Funktion einer reellen Variablen

Eine reelle **Funktion f** ist eine Vorschrift, die jedem Element x einer Menge $D \subseteq \mathbb{R}$ eindeutig eine reelle Zahl y einer Menge $B \subseteq \mathbb{R}$ zuordnet:

$$\begin{aligned} f:\ & D \to B \\ & x \to y = f(x) \end{aligned}$$

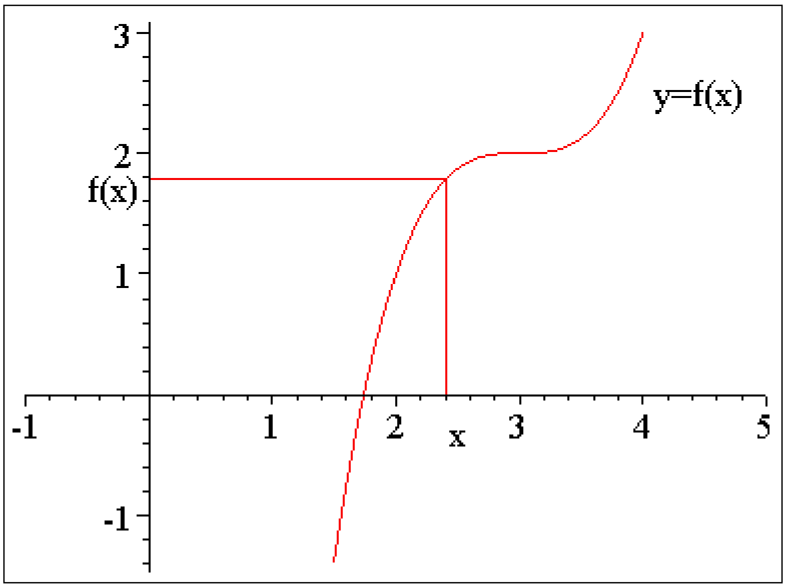
x ist die unabhängige Variable, y die abhängige Variable.

Darstellungsformen einer Funktion:

- Verbale Beschreibung der Zuordnung
- tabellarische Darstellung
- graphische Darstellung

- analytische Beschreibung durch explizite oder implizite Gleichungen
- in kartesischen Koordinaten
- in Polarkoordinaten
- in Parameterdarstellung

Beispiel einer Funktion:



Definition 8.2: implizite/ explizite Funktionsdarstellung

Die Darstellung einer Funktion wird

- **implizit** genannt, wenn die Funktionsgleichung nicht nach einer Variablen x bzw. y aufgelöst ist, sondern in der Form F(x,y)=0 vorliegt.
- **explizit** genannt, wenn die Funktionsgleichung nach einer Variablen aufgelöst ist, z.B. y=f(x).

Definition 8.3: Verkettung von Funktionen

X, Y, Z seien nicht leere Mengen mit Funktionen $f\colon X \to Y,\ g\colon Y \to Z$.

Die durch $h(x) := g \circ f(x) = g(f(x))$ definierte Funktion $h\colon X \to Z$ ist eine **verkettete Funktion**. Dabei ist f die innere und g die äußere Funktion.

Im Vergleich andere Verknüpfungen von Funktionen:

Addition von Funktionen

f und g seien reelle Funktionen $f,g \;:\; D \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$

Dann ist die Addition von Funktionen für alle $x \in D$ definiert

$$h := f + g \;:\; D \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \quad mit\ (f+g)(x) := f(x) + g(x)$$

Multiplikationen von Funktionen

f und g seien reelle Funktionen $f,g \;:\; D \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$

Dann ist die Multiplikation von Funktionen für alle $x \in D$ definiert

$$k := f \cdot g \;:\; D \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \quad mit\ (f \cdot g)(x) := f(x) \cdot g(x)$$

8.2 Eigenschaften von Funktionen

8.2.1 Monotonie

Definition 8.4: Monotonie einer Funktion

Eine Funktion f heißt in einem Intervall $I \subseteq D$

- **monoton steigend**, wenn $\forall\, x_1, x_2 \in I$ mit $x_1 < x_2$ gilt $f(x_1) \leq f(x_2)$,
- **streng monoton steigend**, wenn $\forall\, x_1, x_2 \in I$ mit $x_1 < x_2$ gilt $f(x_1) < f(x_2)$,
- **monoton fallend**, wenn $\forall\, x_1, x_2 \in I$ mit $x_1 < x_2$ gilt $f(x_1) \geq f(x_2)$,
- **streng monoton fallend**, wenn $\forall\, x_1, x_2 \in I$ mit $x_1 < x_2$ gilt $f(x_1) > f(x_2)$.

8.2.2 Beschränktheit

Definition 8.5: Beschränktheit einer Funktion

Eine Funktion f heißt in einem Intervall $I \subseteq D$

- **beschränkt nach unten**, wenn es eine Konstante k gibt mit
  $f(x) \geq k \;\; \forall\, x \in I$,
- **beschränkt nach oben**, wenn es eine Konstante K gibt mit
  $f(x) \leq K \;\; \forall\, x \in I$.
- Im Falle der Existenz einer Konstanten M mit $|f(x)| \leq M \;\; \forall x \in I$ heißt die Funktion **beschränkt** auf I.

8.2.3 Symmetrie

Definition 8.6: Symmetrie

Eine Funktion f heißt in einem zum Koordinatenursprung symmetrischen Intervall $[-a, a] = I \subseteq D$

- **gerade oder achsensymmetrisch**, wenn für jedes $x \in I$ gilt:
  $f(-x) = f(x)$,
- **ungerade oder punktsymmetrisch**, wenn für jedes $x \in I$ gilt:
  $f(-x) = -f(x)$

8.2.4 Periodizität

Definition 8.7: Periodizität

Eine Funktion f mit dem Definitionsbereich $D = \mathbb{R}$ heißt **periodisch** mit der **Periode** $p > 0$, wenn für jedes $x \in D$ gilt $f(x+p) = f(x)$.

Mit p ist auch jedes ganzzahlige Vielfache von p eine Periode. Die kleinste Periode wird auch primitive Periode genannt.

8.2.5 Nullstellen

Definition 8.8: Nullstelle

Eine **Nullstelle der Funktion** $f: D \to B$ ist ein $x \in D$ mit $f(x) = 0$.

8.2.6 Minimum und Maximum

Definition 8.9: Minimum, Maximum

Eine Funktion $f: D \to B$ hat im Punkt $x_e \in D$

ein **globales Maximum**, wenn gilt $\forall x \in D: \ f(x) \le f(x_e)$,

ein **globales Minimum**, wenn gilt $\forall x \in D: \ f(x) \ge f(x_e)$,

ein **lokales Maximum**, wenn

$\exists \varepsilon > 0: \ \forall x \in (x_e - \varepsilon, x_e + \varepsilon) \cap D \ \ gilt \ \ f(x) \le f(x_e)$,

ein **lokales Minimum**, wenn

$\exists \varepsilon > 0: \ \forall x \in (x_e - \varepsilon, x_e + \varepsilon) \cap D \ \ gilt \ \ f(x) \ge f(x_e)$.

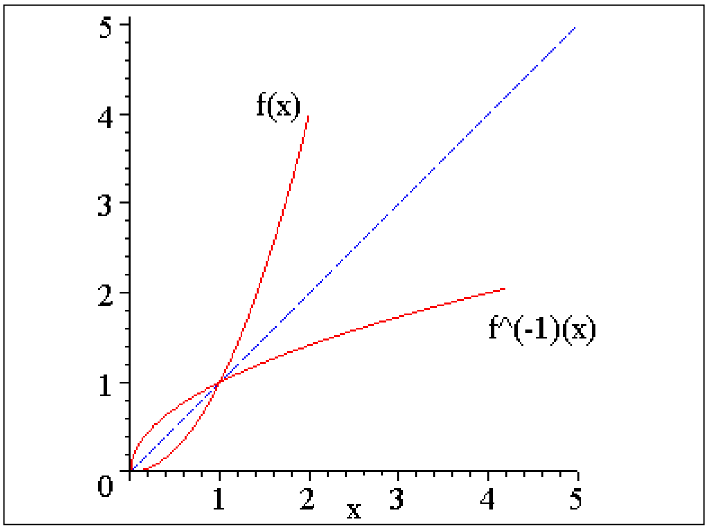
8.2.7 Umkehrfunktion

Definition 8.10: Umkehrfunktion

Ist die Funktion $f: D \to B$ eine eineindeutige Zuordnung (d.h. bijektiv), so ist die Zuordnung $y \in B$ zu $x \in D$ wieder eine Funktion, die als Umkehrfunktion $x = f^{-1}(y)$ zu $y = f(x)$ bezeichnet wird.

Formal erfolgt in der Regel in der Umkehrfunktion wieder die Umbennung von x und y.

Beispiel einer Funktion mit ihrer Umkehrfunktion:



- Funktion $f(x) = x^2$ mit Umkehrfunktion f-1(x) = sqrt(x) im Intervall [0,∞)
- entspricht einer Spiegelung an der Geraden y = x

8.3 Koordinatentransformationen

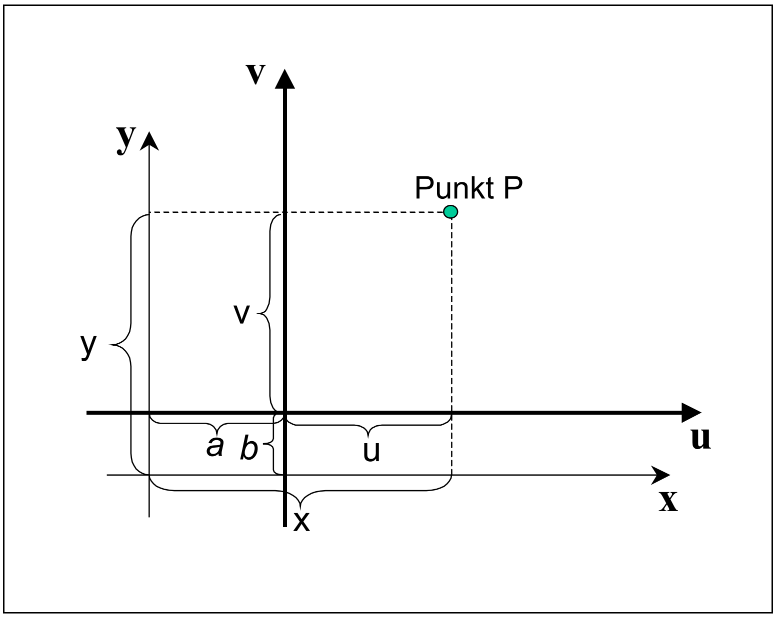
8.3.1 Parallelverschiebung eines kartesischen Koordinatensystems

- Ein kartesisches (x,y)-Koordinatensystem geht durch Parallelverschiebung der Koordinatenachsen in ein ebenfalls rechtwinkliges (u,v)-Koordinatensystem über.
- Ein beliebiger Punkt P mit den Koordinaten (x,y) besitzt im neuen System die Koordinaten (u,v).
- Zwischen den Koordinaten bestehen dann die folgenden Transformationsgleichungen:

$x = u + a$ bzw. $u = x - a$

$y = v + b$ bzw. $v = y - b$.

- (a,b) ist der Ursprung des neuen (u,v)-Koordinatensystems im ursprünglichen (x,y)-Koordinatensystem.

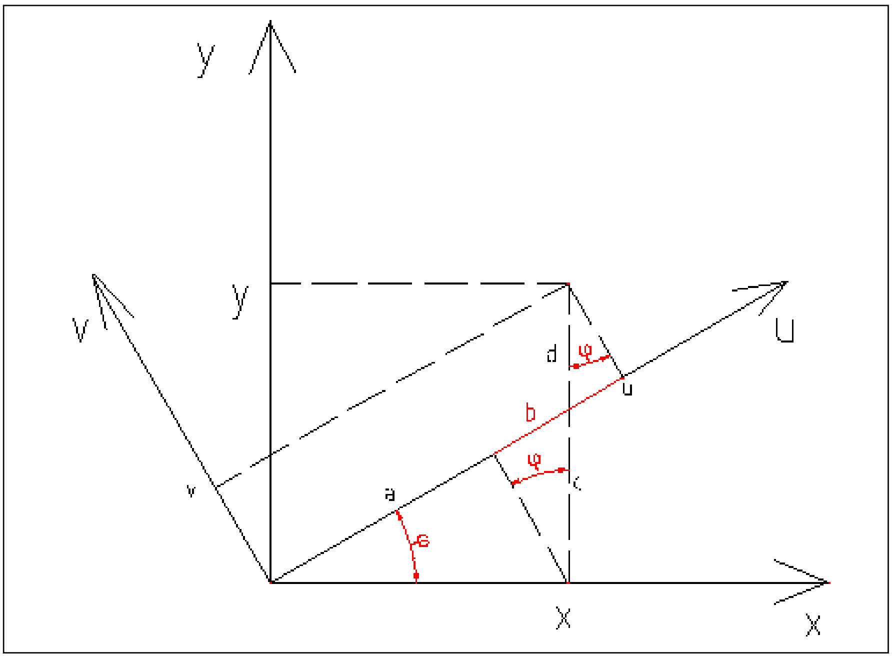


8.3.2 Drehung eines kartesischen Koordinatensystems

- Ein kartesisches (x,y)-Koordinatensystem geht durch Drehung der Koordinatenachsen in ein ebenfalls rechtwinkliges (u,v)-Koordinatensystem über. Der Ursprung wird bei der Drehung nicht verändert.

- Ein beliebiger Punkt P mit den Koordinaten (x,y) besitzt im neuen System die Koordinaten (u,v). Die neuen Koordinaten lassen sich mit den folgenden Transformationsgleichungen berechnen.

  Sei φ der Winkel, um den das Koordinatensystem gedreht wird, dann gilt
  $$\begin{aligned} u &= x\cos\varphi + y\sin\varphi \\ v &= -x\sin\varphi + y\cos\varphi \end{aligned}.$$

- 

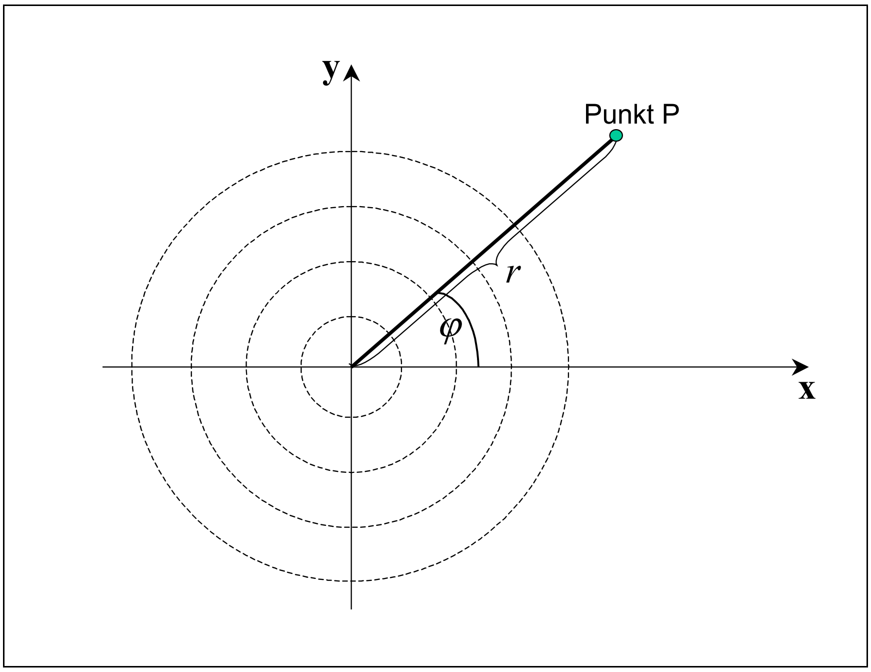
8.3.3 Übergang Kartesische Koordinaten - Polarkoordinaten

Definition 8.11: Polarkoordinaten

Die Polarkoordinaten (r,φ) eines Punktes P der Ebene bestehen aus einer **Abstandskoordinate** r und einer **Winkelkoordinate** φ.

r ist der Abstand des Punktes P vom Koordinatenursprung.

φ ist der Winkel zwischen dem vom Koordinatenursprung zum Punkt P gerichteten Radiusvektor und der positiven x-Achse.



- Die Transformationsgleichungen zum Übergang von kartesischen Koordinaten auf Polarkoordinaten und umgekehrt sind nachfolgend dargestellt:

  Kartesische Koordinaten $\rightarrow$ Polarkoordinaten

  $$r = \sqrt{x^2 + y^2} \quad und \quad \tan\varphi = \frac{y}{x} \quad \left(+\pi \; im \; 2./3. Quadranten\right)$$

  Polarkoordinaten $\rightarrow$ kartesische Koordinaten

  $$x = r \cdot \cos\varphi \quad und \quad y = r \cdot \sin\varphi$$

8.4 Grenzwert und Stetigkeit

8.4.1 Grenzwerte von Funktionen

Definition 8.12: Grenzwert $x \to x_0$

Sei f eine reelle Funktion.

Wenn für jede Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit dem Grenzwert x_0 mit $x_n \in D$ und $x_n \neq x_0 \ \forall n \in \mathbb{N}$, die Folge $\left(f(x_n)\right)_{n\in\mathbb{N}}$ den Grenzwert g besitzt (d.h. $\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n) = g$), dann heißt g **der Grenzwert von f bei der Annäherung an** x_0.

Schreibweise: $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = g$

Definition 8.13: weitere Definitionsmöglichkeit für Grenzwert $x \to x_0$

Die Zahl g **heißt Grenzwert der reellen Funktion f bei der Annäherung an** x_0, also $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = g$, wenn es zu jeder noch so kleinen Zahl $\varepsilon > 0$ eine Zahl $\delta > 0$ gibt, so dass stets

$\left|f(x) - g\right| < \varepsilon$ gilt, wenn $\left|x - x_0\right| < \delta$ ist.

Definition 8.14: linksseitiger/ rechtsseitiger Grenzwert $x \to x_0$

Für jede von links gegen x_0 strebende Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ (d.h. $x_n < x_0 \ \forall n \in \mathbb{N}$) sei

$$\lim_{n\to\infty} f(x_n) = \lim_{\substack{x\to x_0 \\ x<x_0}} f(x) = g_l \qquad \left(=: \lim_{x\to x_0^-} f(x)\right)$$

g_l heißt **linksseitiger Grenzwert** von f(x) für $x \to x_0^-$.

Für jede von rechts gegen x_0 strebende Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ (d.h. $x_n > x_0 \ \forall n \in \mathbb{N}$) sei

$$\lim_{n\to\infty} f(x_n) = \lim_{\substack{x\to x_0 \\ x>x_0}} f(x) = g_r \qquad \left(=: \lim_{x\to x_0^+} f(x)\right)$$

g_r heißt **rechtsseitiger Grenzwert** von f(x) für $x \to x_0^+$.

Definition 8.15: Grenzwert $x \to \pm\infty$

Besitzt für alle Folgen $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit $x_n \to \infty(-\infty)$ für $n \to \infty$ die Folge der Funktionswerte $\left(f(x_n)\right)_{n\in\mathbb{N}}$ den gleichen Grenzwert g, so heißt g der **Grenzwert von $f(x)$ für $x \to \infty(-\infty)$.**

Schreibweise: $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = g \quad (bzw. \lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = g)$

Satz 8.1: Rechenregeln für Grenzwerte von Funktionen

Voraussetzung: Die jeweiligen Grenzwerte der Funktionen $\lim\limits_{x\to x_0} f_1(x) = g_1$ und $\lim\limits_{x\to x_0} f_2(x) = g_2$ existieren. $\lim\limits_{x\to x_0}\left(C\cdot f_1(x)\right) = C\cdot \lim\limits_{x\to x_0} f_1(x)\ \ (= C\cdot g_1)$ mit konstantem $C\in\mathbb{R}$

(1) $\lim\limits_{x\to x_0}\left(f_1(x)\pm f_2(x)\right) = \lim\limits_{x\to x_0} f_1(x) \pm \lim\limits_{x\to x_0} f_2(x)\ \ (= g_1 \pm g_2)$

(2) $\lim\limits_{x\to x_0}\left(f_1(x)\cdot f_2(x)\right) = \lim\limits_{x\to x_0} f_1(x) \cdot \lim\limits_{x\to x_0} f_2(x)\ \ (= g_1 \cdot g_2)$

(3) $\lim\limits_{x\to x_0}\left(\dfrac{f_1(x)}{f_2(x)}\right) = \dfrac{\lim\limits_{x\to x_0} f_1(x)}{\lim\limits_{x\to x_0} f_2(x)} \quad \left(= \dfrac{g_1}{g_2}\right)$ mit $g_2 \neq 0$

(4) $\lim\limits_{x\to x_0}\left(\sqrt[n]{f_1(x)}\right) = \sqrt[n]{\lim\limits_{x\to x_0} f_1(x)}\ \ (= \sqrt[n]{g_1})$

(5) $\lim\limits_{x\to x_0}\left(f_1(x)\right)^n = \left(\lim\limits_{x\to x_0} f_1(x)\right)^n\ \ (= (g_1)^n)$

(6) $\lim\limits_{x\to x_0}\left(a^{f_1(x)}\right) = a^{\lim\limits_{x\to x_0} f_1(x)}\ \ (= a^{g_1})$

(7) $\lim\limits_{x\to x_0}\left(\log_a f_1(x)\right) = \log_a\left(\lim\limits_{x\to x_0} f_1(x)\right)\cdot\ \ (= \log_a g_1)$

Satz 8.2: Rechenregeln für Grenzwerte mit 0 und $\pm\infty$

Alle Grenzwerte gelten für $x \to x_0 \;\; mit \;\; x_0 \in \mathbb{R} \cup \pm\infty$.

(1) $f(x) \to +\infty \quad \Leftrightarrow \quad -f(x) \to -\infty$

(2) $f(x) \to +\infty,\; g(x) \to t \in \mathbb{R} \cup +\infty \quad \Rightarrow \quad f(x) + g(x) \to +\infty$

(3) $f(x) \to +\infty,\; g(x) \to t \quad \Rightarrow \quad f(x) \cdot g(x) \to \begin{cases} +\infty, & f\ddot{u}r \;\; 0 < t \le +\infty \\ -\infty, & f\ddot{u}r \;\; -\infty \le t < 0 \end{cases}$

(4) $g(x) \to \pm\infty \quad \Rightarrow \quad \dfrac{1}{g(x)} \to 0$

(5) $0 < g(x) \to 0 \quad \Rightarrow \quad \dfrac{1}{g(x)} \to +\infty$

$F\ddot{u}r \;\; f(x) \to 0,\; g(x) \to +\infty,\; h(x) \to t \;\; gilt \;\; bei \;\; positiver \;\; Basis$

(6)

$$f(x)^{h(x)} \to \begin{cases} 0, & f\ddot{u}r \;\; 0 < t \le +\infty \\ \infty, & f\ddot{u}r \;\; -\infty \le t < 0 \end{cases}$$

$$g(x)^{h(x)} \to \begin{cases} \infty, & f\ddot{u}r \;\; 0 < t \le +\infty \\ 0, & f\ddot{u}r \;\; -\infty \le t < 0 \end{cases}$$

$$h(x)^{g(x)} \to \begin{cases} 0, & f\ddot{u}r \;\; 0 < t < 1 \\ \infty, & f\ddot{u}r \;\; 1 < t \le +\infty \end{cases}$$

(7) Die folgenden noch unbestimmten Ausdrücke

$\frac{0}{0},\; \frac{\infty}{\infty},\; 0 \cdot \infty,\; \infty - \infty,\; 0^0,\; \infty^0,\; 1^\infty$ können häufig mit den Regeln von Bernoulli-l´Hospital(siehe Kapitel 6) bestimmt werden.

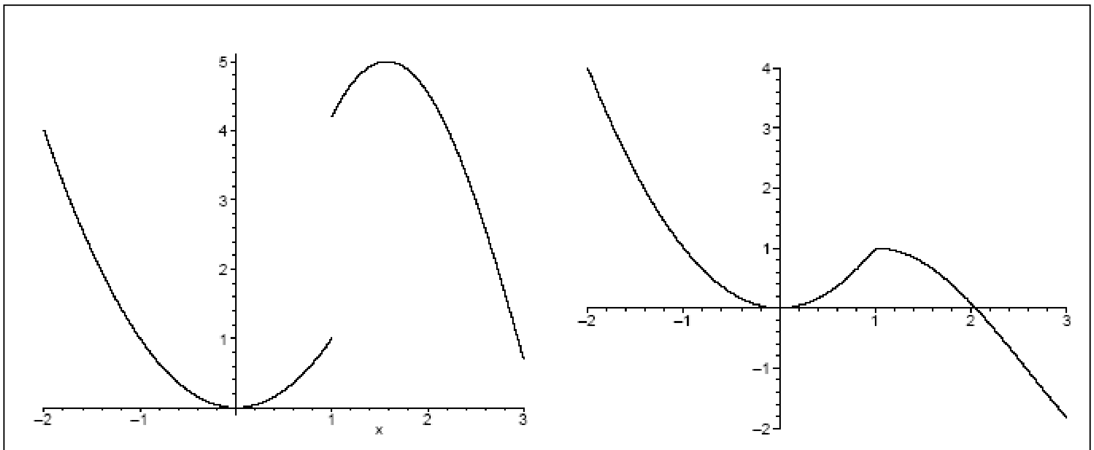
8.4.2 Stetigkeit von Funktionen

Definition 8.16: Stetigkeit

Eine in x_0 und einer gewissen Umgebung von x_0 definierte Funktion $y = f(x)$ heißt **an der Stelle x_0 stetig**, wenn der Grenzwert an dieser Stelle vorhanden ist und mit dem Funktionswert übereinstimmt

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0).$$

Eine Funktion, die an jeder Stelle ihres Definitionsbereiches stetig ist, wird als **stetige Funktion** bezeichnet.



Graph einer unstetigen und einer stetigen Funktion

aus www.mathematik.de

Definition 8.17: Unstetigkeitsstellen

Eine in x_0 und einer gewissen Umgebung von x_0 definierte Funktion $y = f(x)$ heißt **an der Stelle x_0 unstetig**, wenn eine der beiden Aussagen zutrifft:

(1)Der Grenzwert von $f(x)$ in x_0 ist vorhanden, aber verschieden von $f(x_0)$.

(2) Der Grenzwert von $f(x)$ in x_0 ist nicht vorhanden.

Definition 8.18: linksseitige/rechtseitige Stetigkeit

Eine Funktion $y = f(x)$ heißt **an der Stelle** x_0

linksseitig stetig, wenn $\lim\limits_{x \to x_0^-} f(x) = f(x_0)$,

rechtsseitig stetig, wenn $\lim\limits_{x \to x_0^+} f(x) = f(x_0)$.

Definition 8.19: Stetigkeit im Intervall

Eine Funktion $y = f(x)$ heißt **stetig im offenen Intervall** (a,b), wenn $f(x)$ in jedem Punkt des Intervalls stetig ist.

Eine Funktion $y = f(x)$ heißt **stetig im abgeschlossenen Intervall** $[a,b]$, wenn $f(x)$ im offenen Intervall (a,b) stetig ist, sowie in $x = a$ rechtsseitig und in $x = b$ linksseitig stetig ist.

Definition 8.20: stetig ergänzbar

Eine Funktion $y = f(x)$ mit einer Definitionslücke ist **stetig ergänzbar**, wenn für diese Stelle der Grenzwert existiert. Der Grenzwert wird dann als Funktionswert eingesetzt.

Man spricht in diesem Fall auch von einer **„hebbaren" Definitionslücke**.

Satz 8.3: Rechenregeln für stetige Funktionen

Sind die Funktionen $f_1(x)$ und $f_2(x)$ bei $x = x_0$ stetig, so sind auch die folgenden zusammengesetzten Funktionen im Punkt $x = x_0$ stetig:

(1) $C_1 \cdot f_1(x) \pm C_2 \cdot f_2(x)$ mit konstanten $C_1, C_2 \in \mathbb{R}$

(2) $f_1(x) \cdot f_2(x)$

(3) $\dfrac{f_1(x)}{f_2(x)}$ mit $f_2(x_0) \neq 0$

(4) $f_1(x)^{f_2(x)}$ mit $f_1(x_0) > 0$

Satz 8.4: Zwischenwertsatz

Ist die Funktion $y = f(x)$ im abgeschlossenen Intervall $[a,b]$ stetig, so wird jeder y-Wert zwischen den Funktionswerten $f(a)$ und $f(b)$ für ein $x \in [a,b]$ als Funktionswert angenommen.

Satz 8.5: Nullstellensatz

Ist die Funktion $y = f(x)$ im abgeschlossenen Intervall $[a,b]$ stetig und gilt $f(a) \cdot f(b) < 0$ (d.h. die Funktionswerte am Rand enthalten einen Vorzeichenwechsel), so gibt es im Inneren von $[a,b]$ mindestens eine Nullstelle der Funktion.

Satz 8.6:

Ist die Funktion $y = f(x)$ im abgeschlossenen Intervall $[a,b]$ stetig, so nimmt die Funktion in $[a,b]$ ihr Maximum und Minimum an.

8.5 Elementare Funktionen

8.5.1 Ganzrationale Funktionen

Definition 8.21: ganzrationale Funktion/ Polynom

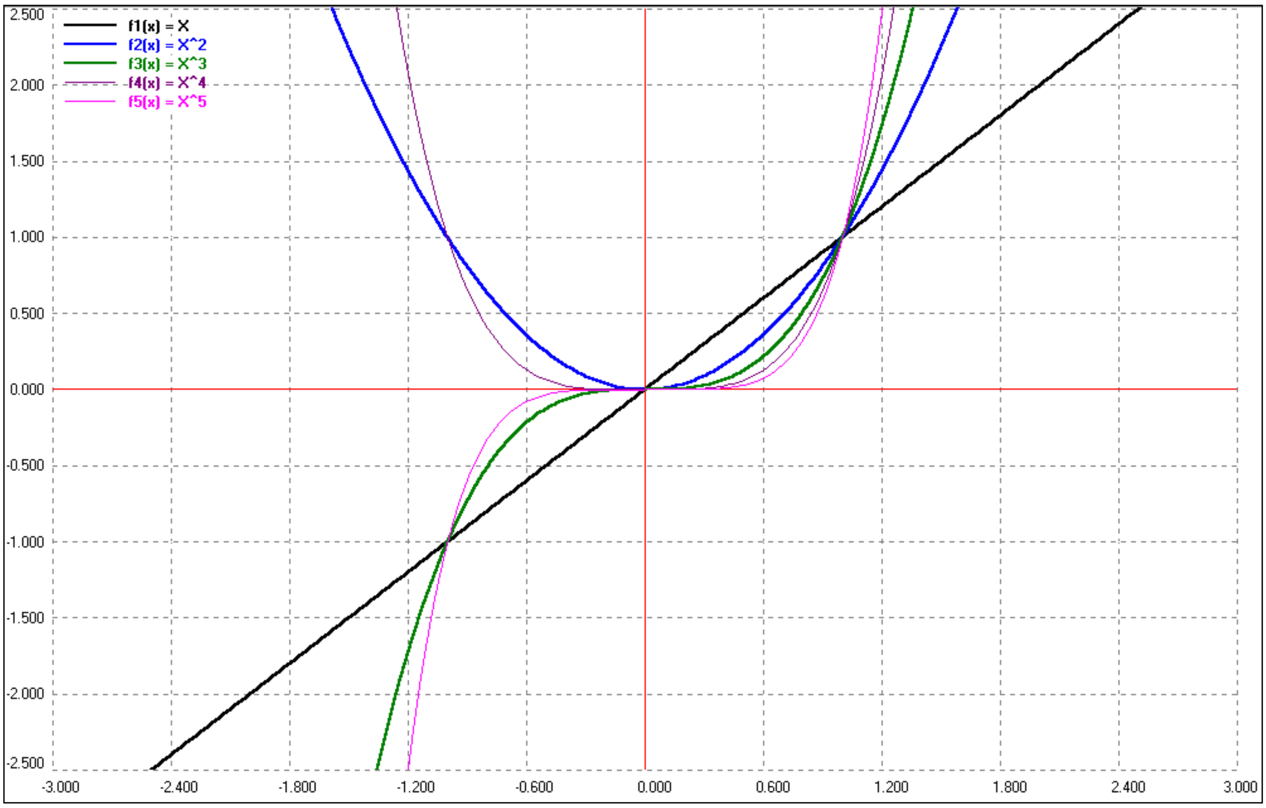
Funktionen $f:\mathbb{R}\rightarrow\mathbb{R}$ vom Typ

$$f(x)=a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1}+\ldots+a_1 x + a_0$$

werden als **ganzrationale Funktionen** oder **Polynome** bezeichnet (Schreibweise auch $p_n(x)$).

Die reellen Zahlen $a_0, a_1, a_2, \ldots, a_n$ heißen **Polynomkoeffizienten**. Der höchste Exponent *n* in der Funktionsgleichung bestimmt den **Grad des Polynoms**.

Beispiele verschiedener Polynome:



Einfache Typen der ganzrationalen Funktionen:

Grad des Polynoms n=0: konstante Funktion

$$p_0(x) = a_0 \; mit \; a_0 \neq 0 \;\; (a_0 = 0: \text{Nullpolynom})$$

Grad des Polynoms n=1: lineare Funktion

$$p_1(x) = a_1 x + a_0$$

Grad des Polynoms n=2: quadratische Funktion

$$p_2(x) = a_2 x^2 + a_1 x + a_0$$

Grad des Polynoms n=3: kubische Funktion

$$p_3(x) = a_3 x^3 + a_2 x^2 + a_1 x + a_0$$

Satz 8.7: Nullstellensatz

Besitzt das Polynom $f(x)$ vom Grad *n* an der Stelle x_1 eine Nullstelle, d.h. $f(x_1) = 0$, so ist die Funktion auch in der Form

$$f(x) = (x - x_1) f_1(x)$$

darstellbar.

$(x - x_1)$ heißt **Linearfaktor**. $f_1(x)$ heißt das **1.reduzierte Polynom vom Grad *(n-1)***, das man durch *Polynomdivision* erhält.

Satz 8.8: Fundamentalsatz der Algebra

Ein Polynom $f(x)$ vom Grad *n* besitzt in der Menge $\mathbb{C}$ der komplexen Zahlen genau n Nullstellen $x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n$, die nicht alle verschieden sein müssen.

$f(x)$ besitzt dann eine Produktzerlegung in Linearfaktoren

$$f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0 = a_n (x - x_1)(x - x_2) \ldots . (x - x_n)$$

Bemerkung:

- Die Nullstellen können auch bei reellen Koeffizienten schon komplex sein. In Bezug auf eine reelle Faktorzerlegung können somit quadratische irreduzible Faktoren auftreten.
- Komplexe Lösungen treten bei reellen Koeffizienten immer paarweise konjugiert komplex auf.
- Eine Polynomfunktion n-ten Grades besitzt höchstens n (reelle) Nullstellen.
- Bei einer mehrfachen Nullstelle, tritt der Linearfaktor mehrfach auf.

Satz 8.9: Wurzelsatz von Vieta

Zwischen den Nullstellen $x_i \ (i = 1, 2, ..., n)$ und den Koeffizienten a_i für $i = 1, 2, ..., n$ eines Polynoms $f(x)$ mit normiertem höchsten Koeffizienten $a_n = 1$ bestehen die Beziehungen

$$x_1 + x_2 + ... + x_n = (-1)^1 a_{n-1}$$

$$x_1 x_2 + x_1 x_3 + ... + x_1 x_n + x_2 x_3 + ... + x_{n-1} x_n ..... = (-1)^2 a_{n-2}$$

....

$$x_1 x_2 x_3 \cdot .... \cdot x_n = (-1)^n a_0$$

8.5.1.1 Horner-Schema

- effiziente Methode für verschiedene Berechnungen bei Polynomen
- Umformung des Polynoms $p(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0$ in die Form
  $p(x) = x\Bigl(x\Bigl(\ldots\Bigl(x\Bigl(x\bigl(a_n x + a_{n-1}\bigr) + a_{n-2}\Bigr) + a_{n-3}\Bigr) + \ldots + a_2\Bigr) + a_1\Bigr) + a_0$
- **Realisierung in 3-zeiliger Tabelle**

  1.Zeile: Koeffizienten $a_n \quad a_{n-1} \quad a_{n-2} \quad .... \quad a_1 \quad a_0$

  2.Zeile: 1.Element ist 0, weitere Elemente während Berechnung ergänzt

  3.Zeile: während Berechnung ergänzt
- **Rechengang im Zickzack**:
  - von links nach rechts
  - pro Spalte:

    Addition der 1. + 2. Zeileneinträge und notieren in 3.Zeile,

    Wert der 3.Zeile mit x_0 multiplizieren und in der 2.Zeile der nächsten Spalte notieren.
  - In der letzten Spalte in der 3.Zeile steht das Ergebnis für $p(x_0)$
- **Horner-Schema für n=4**

$$
\begin{array}{c|ccccc}
 & a_4 & a_3 & a_2 & a_1 & a_0 \\
x_0 & 0 & b_3 x_0 & b_2 x_0 & b_1 x_0 & b_0 x_0 \\
\hline
 & + & + & + & + & + \\
 & b_3 \nearrow \cdot x_0 & b_2 \nearrow \cdot x_0 & b_1 \nearrow \cdot x_0 & b_0 \nearrow \cdot x_0 & p(x_0)
\end{array}
$$

- **Zwischenrechnungswerte** b_i (hier: b_3, b_2, b_1, b_0) definieren ein Polynom vom Grad (n-1) und erfüllen die Gleichung:

  $$p(x) = (x - x_0)(b_3 x^3 + b_2 x^2 + b_1 x + b_0) + p(x_0)$$

  Ist $p(x_0) = 0$, dann ist $p(x)$ ohne Rest durch $(x - x_0)$ teilbar und x_0 ist Nullstelle. Somit ist die Abspaltung eines Linearfaktors $(x - x_0)$ durch Polynomdivision mit dem Horner-Schema durchführbar.

8.5.1.2 Polynom-Interpolation

- **Problem:** Von einer Funktion sind nur Punkte vorhanden, aber die Funktion selbst ist unbekannt.

  Ziel: Näherungsfunktion (hier Polynom) finden, die mit der unbekannten Funktion in den Stützstellen übereinstimmt.

- **Interpolationsaufgabe:** Gegeben sind (n+1) Datenpaare $(x_i, y_i),\ i = 0,1,\dots,n$, die als Stützstellen der Interpolation bezeichnet werden. Es wird ein Polynom $p_n(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0$ vom Grad n gesucht, welches über die Datenpaare interpoliert, d.h. die (n+1) Interpolationsbedingungen $y_i = p_n(x_i),\ i = 0,1,\dots,n$ erfüllt.

- **Ziel der Polynominterpolation**: Bestimmung der Polynomkoeffizienten $a_n, a_{n-1}, \dots, a_1, a_0$ des Polynoms $p_n(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0$.

- Lösungsansatz über das **Interpolationspolynom von Newton**:
  Das Newtonsche Interpolationspolynom n-ten Grades durch (n+1) vorgegebene Stützpunkte $P_i = (x_i, y_i),\ i = 0,1,\dots,n$ lautet

  $$y = p_n(x) = \hat{a}_0 + \hat{a}_1(x-x_0) + \hat{a}_2(x-x_0)(x-x_1) + \dots + \hat{a}_n(x-x_0)(x-x_1)\dots(x-x_{n-1})$$

  Die Berechnung der Koeffizienten $\hat{a}_0, \hat{a}_1, \dots, \hat{a}_{n-1}, \hat{a}_n$ erfolgt über das Schema der dividierten Differenzen.

- **Dividierte Differenzen** (rekursiv definiert):

  $$\left[x_0, x_1\right] = \frac{y_0 - y_1}{x_0 - x_1}$$

  $$\left[x_1, x_2\right] = \frac{y_1 - y_2}{x_1 - x_2}$$

  $\vdots$ dividierte Differenzen 1.Ordnung

  $$\left[x_{n-1}, x_n\right] = \frac{y_{n-1} - y_n}{x_{n-1} - x_n}$$

$$\left[x_0, x_1, x_2\right] = \frac{\left[x_0, x_1\right] - \left[x_1, x_2\right]}{x_0 - x_2}$$

$$\left[x_1, x_2, x_3\right] = \frac{\left[x_1, x_2\right] - \left[x_2, x_3\right]}{x_1 - x_3}$$

$\vdots$ dividierte Differenzen 2.Ordnung

$$\left[x_{n-2}, x_{n-1}, x_n\right] = \frac{\left[x_{n-2}, x_{n-1}\right] - \left[x_{n-1}, x_n\right]}{x_{n-2} - x_n}$$

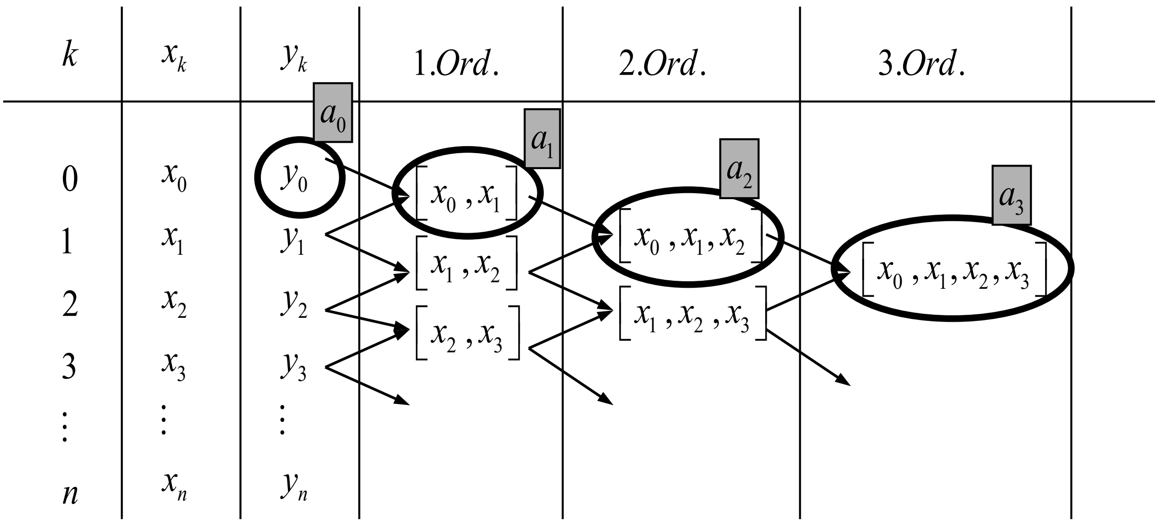
$\vdots$

$$\left[x_i, x_{i+1}, x_{i+2}, x_{i+3}\right] = \frac{\left[x_i, x_{i+1}, x_{i+2}\right] - \left[x_{i+1}, x_{i+2}, x_{i+3}\right]}{x_i - x_{i+3}}$$ dividierte Differenzen 3.Ordnung

$\vdots$

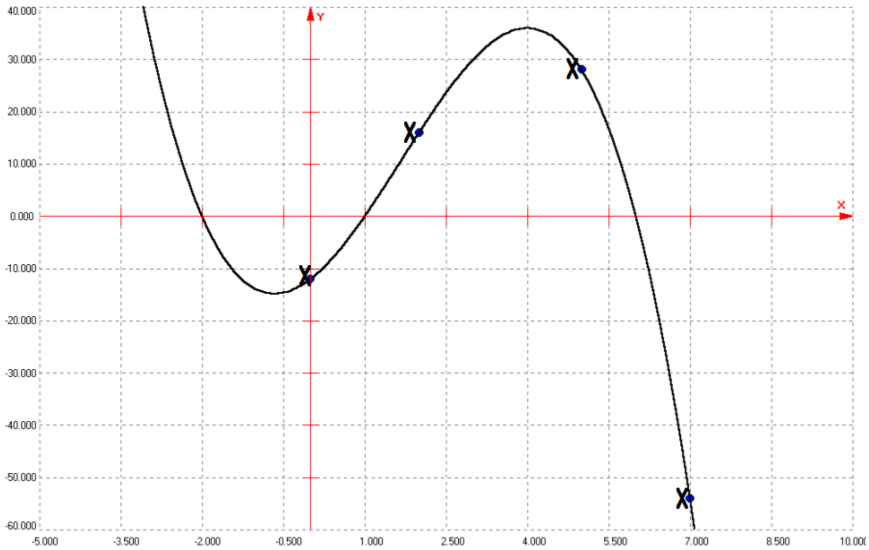
$$\left[x_i, x_{i+1}, \ldots, x_{i+k}\right] = \frac{\left[x_i, x_{i+1}, \ldots, x_{i+k-1}\right] - \left[x_{i+1}, \ldots, x_{i+k}\right]}{x_i - x_{i+k}}$$ dividierte Differenzen k.Ordnung

- **Schema der dividierten Differenzen:**



Die gesuchten Koeffizienten $a_0, a_1, \ldots, a_{n-1}, a_n$ des Newtonschen Interpolationspolynoms stehen in der oberen Schrägzeile des Schemas der dividierten Differenzen.

Beispiel eines Newtonschen Interpolationspolynoms 3. Grades
durch die Punkte(0,-12), (2,16), (5,28), (7,-54)



8.5.2 Gebrochen rationale Funktionen

Definition 8.22: gebrochen rationale Funktion

Reelle Funktionen vom Typ

$$f(x) = \frac{a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0}{b_m x^m + b_{m-1} x^{m-1} + \ldots + b_1 x + b_0} = \frac{Z(x)}{N(x)}$$

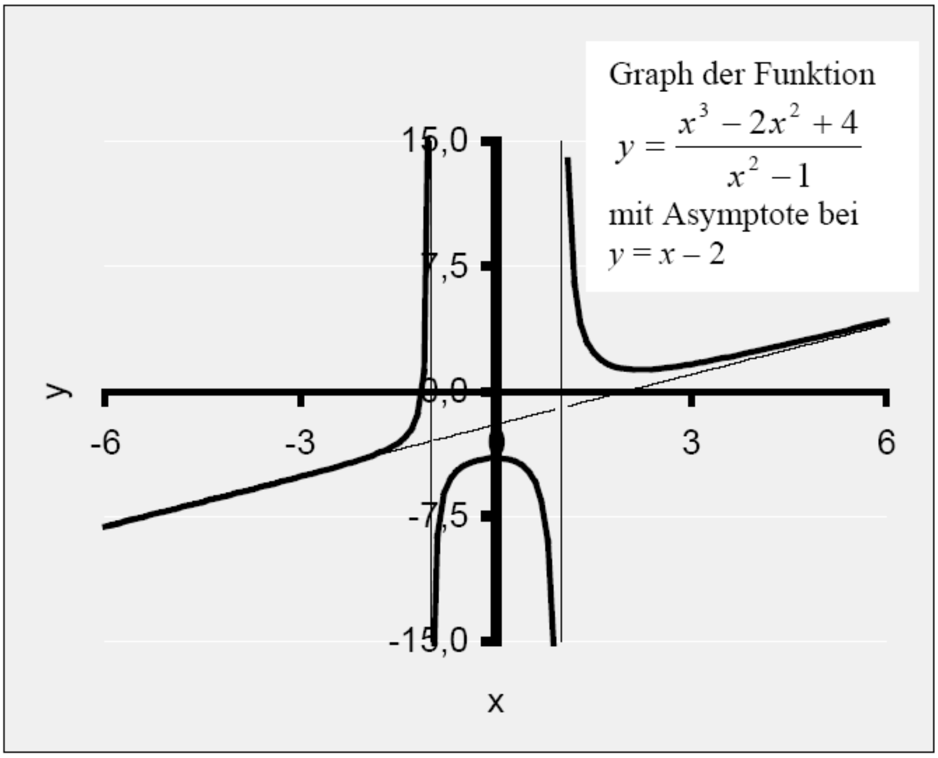
werden als **gebrochen rationale Funktionen** bezeichnet.

Das Polynom $Z(x)$ heißt hierbei das **Zählerpolynom** und $N(x)$ das **Nennerpolynom**.

Ist der Zählergrad kleiner dem Nennergrad, d.h. $n < m$, so heißt die Funktion **echt gebrochen**.

Ist der Zählergrad größer oder gleich dem Nennergrad, d.h. $n \geq m$, so heißt die Funktion **unecht gebrochen**.

Beispiel einer gebrochen rationalen Funktion



aus Bartels Uni-Frankfurt

Definition 8.23: Polstelle

Eine Stelle x_0, in deren unmittelbarer Umgebung die Funktionswerte über alle Grenzen hinaus fallen oder wachsen heißen **Pole** bzw. **Polstellen**.

Pole mit Vorzeichenwechsel:

$$\lim_{x \to x_0^+} f(x) = +\infty, \; \lim_{x \to x_0^-} f(x) = -\infty \quad (bzw.\, umgekehrt)$$

Pole ohne Vorzeichenwechsel:

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = +\infty \quad (bzw. -\infty)$$

Definition 8.24: Asymptote einer gebrochen rationalen Funktion

Eine Funktion h(x) heißt **Asymptote** einer gebrochen rationalen Funktion f(x), wenn gilt:

$$\lim_{|x| \to \infty} \left| f(x) - h(x) \right| = 0$$

d.h. für große x nähert sich die Funktion f(x) an die Funktion h(x) an.

Satz 8.10:

Jede unecht gebrochene rationale Funktion lässt sich durch Polynomdivision eindeutig in eine Summe aus einem Polynom und einer echt gebrochenen rationalen Funktion zerlegen.

$$f(x) = \frac{Z(x)}{N(x)} = h(x) + \frac{r(x)}{N(x)}$$

Hat $Z(x)$ den Grad n und $N(x)$ den Grad m, so ist (n-m) der Grad von $h(x)$. $r(x)$ hat höchstens den Grad (m-1).

Satz 8.11:

Jede gebrochen rationale Funktion f besitzt eine Asymptote.

(a) Ist f echt gebrochen, so ist die Asymptote von f die Nullfunktion.

(b) Ist f unecht gebrochen, so ist die Asymptote von f das Polynom h, das bei der Polynomdivision entsteht.

Zusammenfassung: Gebrochen rationale Funktionen

Eigenschaften	$f(x)=\dfrac{a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+\ldots+a_1x+a_0}{b_mx^m+b_{m-1}x^{m-1}+\ldots+b_1x+b_0}=\dfrac{Z(x)}{N(x)}$
Definitionsbereich	$\mathbb{R}\setminus\left\{x \middle\vert N(x)\neq 0\right\}$
Bildbereich	$\mathbb{R}$
Beschränktheit	auf einem abgeschlossenen Intervall aus ihrem Definitonsbereich stets beschränkt
Monotonie	
Umkehrfunktion	
Symmetrie	
Periodizität	-
Stetigkeit	im gesamten Definitionsbereich stetig (aber nicht an den Nullstellen des Nennerspolynoms, die aber auch nicht zum Definitionsbereich gehören)
Asymptote	für jede rationale Funktion vorhanden
Nullstellen	$\left\{x\in D \middle\vert Z(x)=0\wedge N(x)\neq 0\right\}$
Polstellen	$\left\{x\in \mathbb{R} \middle\vert N(x)=0\wedge Z(x)\neq 0\right\}$ nicht hebbare Lücke
Minimum/Maximum	
Besonderheiten:	$\left\{x\in \mathbb{R} \middle\vert N(x)=0\wedge Z(x)= 0\right\}$ hebbare Lücke

Bemerkung: Nicht gefüllte Tabellenfelder bedeuten, dass hier keine allgemeingültige Aussage gemacht werden kann, d.h. es hängt von der einzelnen Funktion ab.

8.5.3 Potenz- und Wurzelfunktionen

Definition 8.25: Potenzfunktionen

mit natürlichem Exponenten:

Die Funktion $f(x) = x^n \; mit \; n \in \mathbb{N}$ ist die einfachste Potenzfunktion und wird auch **Potenzfunktion mit natürlichem Exponenten** genannt.

mit rationalem Exponenten:

Die Funktion $f(x) = x^{\frac{n}{m}} \; mit \; n \in \mathbb{Z} \; und \; m \in \mathbb{N}$ heißt eine **Potenzfunktion mit rationalem Exponenten**. Es gilt hier: $f(x) = x^{\frac{n}{m}} = \left(\sqrt[m]{x}\right)^n$.

mit reellem Exponenten:

Die Funktion $f(x) = x^a \; mit \; a \in \mathbb{R}, x > 0$ ist eine **Potenzfunktion mit reellem Exponenten**, für die gilt: $f(x) = x^a = e^{\ln x^a} = e^{a \ln x}$, $x > 0$

Definition 8.26: Wurzelfunktion

Beschränkt man sich auf Funktionen $y = f(x) = x^n \; und \; x \geq 0$, so existiert wegen der strengen Monotonie im gesamten Definitionsbereich die Umkehrfunktion $y = f^{-1}(x) = x^{\frac{1}{n}}$. Diese werden **Wurzelfunktionen** genannt.

Zusammenfassung: Potenzfunktion mit rationalem Exponenten

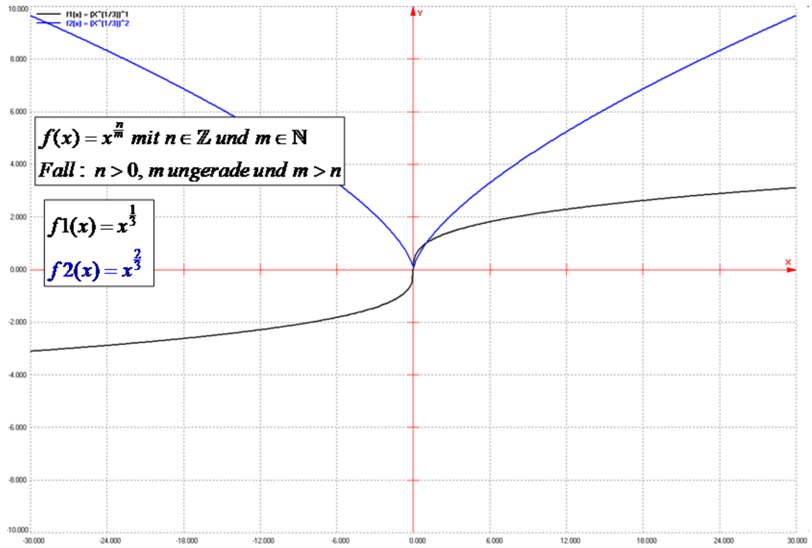
$$f(x) = x^{\frac{n}{m}} \; mit \; n \in \mathbb{Z} \; und \; m \in \mathbb{N}$$

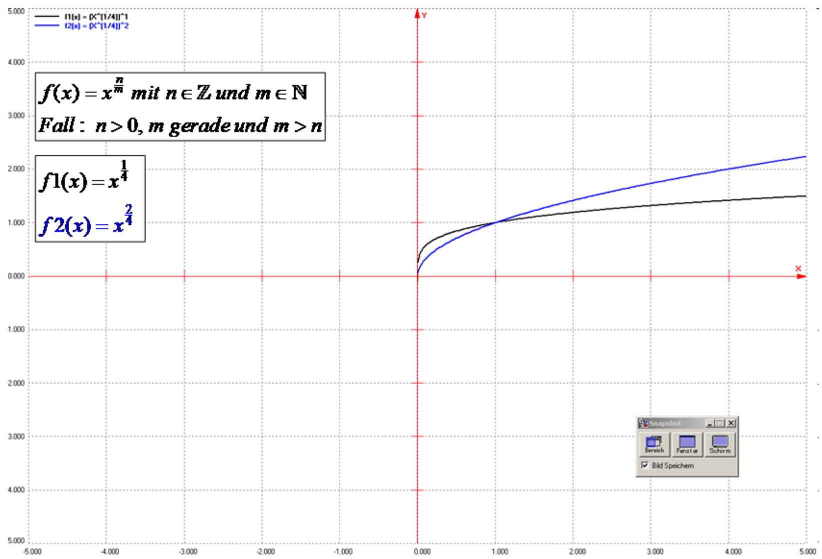
Eigenschaften	$n>0$ $m\ ungerade$	$n>0$ $m\ gerade$	$n<0$ $m\ ungerade$	$n<0$ $m\ gerade$
Definitionsbereich	$\mathbb{R}$	$[0,\infty)$	$\mathbb{R}\setminus\{0\}$	$(0,\infty)$
Bildbereich	n gerade: $\mathbb{R}_0^+$, n ungerade: $\mathbb{R}$,	$\mathbb{R}_0^+$	n gerade: $\mathbb{R}^+$, n ungerade: $\mathbb{R}\setminus\{0\}$,	$\mathbb{R}^+$
Beschränktheit	n gerade: untere Schranke 0 n ungerade: unbeschränkt	untere Schranke 0	n gerade: untere Schranke 0 n ungerade: unbeschränkt	untere Schranke 0
Monotonie	n gerade: für $x\ge 0$ streng monoton wachsend , für $x\le 0$ streng monoton fallend n ungerade: streng monoton wachsend	streng monoton wachsend	n gerade: für $x\ge 0$ streng monoton fallend , für $x\le 0$ streng monoton wachsend n ungerade: streng monoton fallend	streng monoton fallend
Umkehrfunktion	n gerade: in Teilintervallen vorhanden n ungerade: vorhanden	vorhanden	n gerade: in Teilintervallen vorhanden n ungerade: vorhanden	vorhanden
Symmetrie	n gerade: achsensymmetrisch n ungerade: punktsymmetrisch	-	n gerade: achsensymmetrisch n ungerade: punktsymmetrisch	-
Periodizität	-	-	-	-
Asymptoten	-	-	y=0	y=0
Nullstellen	x=0	x=0		
Polstellen	-	-	x=0	x=0

Eigenschaften	$n > 0$ m *ungerade*	$n > 0$ m *gerade*	$n < 0$ m *ungerade*	$n < 0$ m *gerade*
Minimum/Maximum	n gerade: Minimum bei x=0 n ungerade: -	x=0	-	-
Besonderheiten:	-	-	-	-

Beispiele für Potenzfunktionen mit rationalem Exponenten für m>n>0

Die schwarz dargestellten Funktionen entsprechen im ersten Quadranten den Wurzelfunktionen.





8.5.4 Exponential- und Logarithmusfunktionen

Definition 8.27: Exponentialfunktion

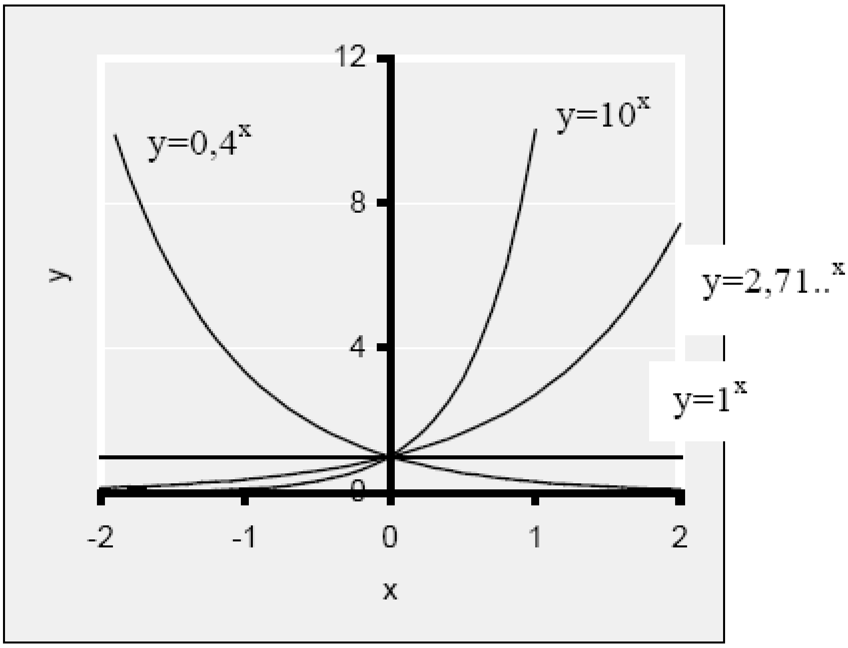
Eine reelle Funktion $f(x)=a^x \; mit \; a>0$ bezeichnet man als eine allgemeine **Exponentialfunktion zur Basis a** (Schreibweise auch $\exp_a(x)$).

Ist die Basis die Zahl e, so wird diese spezielle Exponentialfunktion $f(x)=e^x$ auch **e-Funktion** genannt.

Zusammenfassung: Exponentialfunktion

Eigenschaften	$f(x)=a^x \; mit \; 0<a<1$	$f(x)=a^x \; mit \; a>1$
Definitionsbereich	$\mathbb{R}$	$\mathbb{R}$
Bildbereich	$(0,\infty)$	$(0,\infty)$
Beschränktheit	untere Schranke: 0	untere Schranke: 0
Monotonie	streng monoton fallend	streng monoton steigend
Umkehrfunktion	existiert	existiert
Symmetrie	-	-
Periodizität	-	-
Asymptoten	$y=0\,(\,für\; x\to\infty)$	$y=0\,(\,für\; x\to-\infty)$
Nullstellen	-	-
Minimum/Maximum	-	-
Besonderheiten:	fester Punkt: (0,1)	fester Punkt: (0,1)

Beispiele einiger Exponentialfunktionen



Satz 8.12: Rechenregeln für Exponentialfunktionen

Für alle positiven a, b und alle reellen x, y gilt:

$a^{x+y} = a^x \cdot a^y$ (Additionstheorem der Exponentialfunktion)

$(a^x)^y = a^{x \cdot y}$

$(a \cdot b)^x = a^x \cdot b^x$

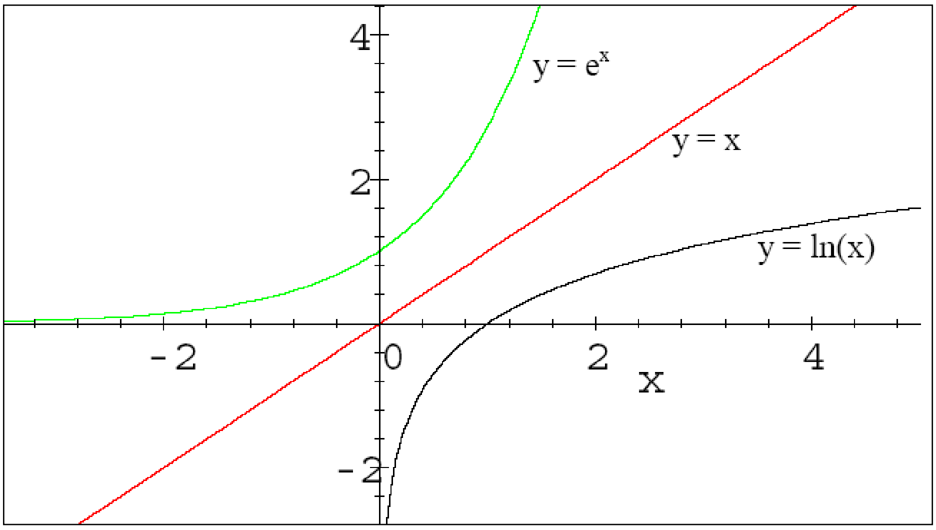
Definition 8.28: Logarithmusfunktion

Die Umkehrfunktion der allgemeinen **Exponentialfunktion** $f(x) = a^x \; mit \; a > 1, x \in \mathbb{R}$ wird als Logarithmusfunktion zur Basis a bezeichnet:

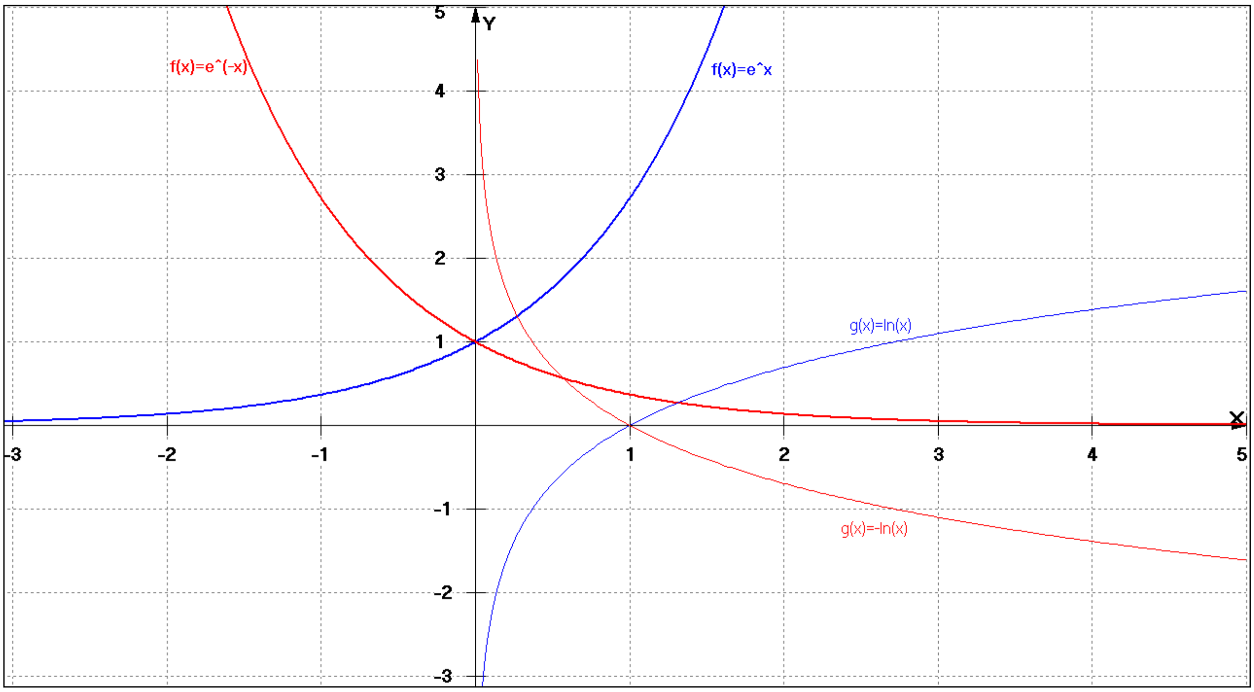
$$y = f^{-1}(x) = \log_a x \quad .$$

Im Fall $a = e$ wird die Funktion natürlicher Logarithmus genannt:

$$y = f^{-1}(x) = \ln x \quad .$$



Exponentialfunktion eˣ mit Umkehrfunktion ln(x)



Exponentialfunktionen e^x **und** $e^{-x}(=\frac{1}{e^x})$ **mit Umkehrfunktionen** $\ln(x)$ **und** $-\ln(x)$

Es gilt:

$$x = \ln(e^x)$$

$$x = -\ln(e^{-x}) \quad oder \quad x = \ln(\frac{1}{e^x}) = \ln(1) - \ln(e^x) = -\ln(e^x)$$

Satz 8.13: Rechenregeln für Logarithmusfunktionen

Für alle reellen x>0, y>0 gilt:

$$\log_a(x \cdot y) = \log_a x + \log_a y$$

$$\log_a\left(\frac{x}{y}\right) = \log_a x - \log_a y$$

$$\log_a\left(\frac{1}{y}\right) = -\log_a y$$

$$\alpha \log_a x = \log_a x^\alpha, \quad \textit{für alle } \alpha \in \mathbb{R}$$

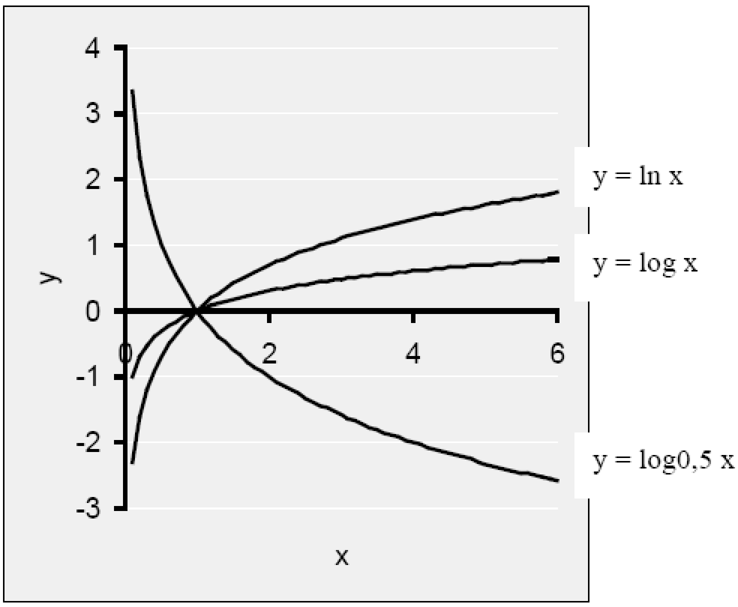
Satz 8.14: Umrechnung von Logarithmen

Jede Logarithmusfunktion zur Basis a kann durch einen andere Logarithmusfunktion zur Basis b ausgedrückt werden, in dem mit einer Konstanten $\frac{1}{\log_b a}$ multipliziert wird:

$$\log_a x = \frac{\log_b x}{\log_b a} \quad \textit{für alle } x > 0$$

z.B. $\log_a x = \frac{\ln x}{\ln a} \quad \textit{für alle } x > 0$.

Beispiele einiger Logarithmusfunktionen



Zusammenfassung: Logarithmusfunktion

Eigenschaften	$f(x) = \log_a x$
Definitionsbereich	$\mathbb{R}^+$
Bildbereich	$(-\infty, \infty)$
Beschränktheit	-
Monotonie	streng monoton wachsend (a>1) streng monoton fallend (0<a<1)
Umkehrfunktion	existiert
Symmetrie	-
Periodizität	-
Asymptoten	-
Nullstellen	x=1
Minimum/Maximum	-
Besonderheiten:	fester Punkt: (1,0)

8.5.5 Trigonometrische Funktionen

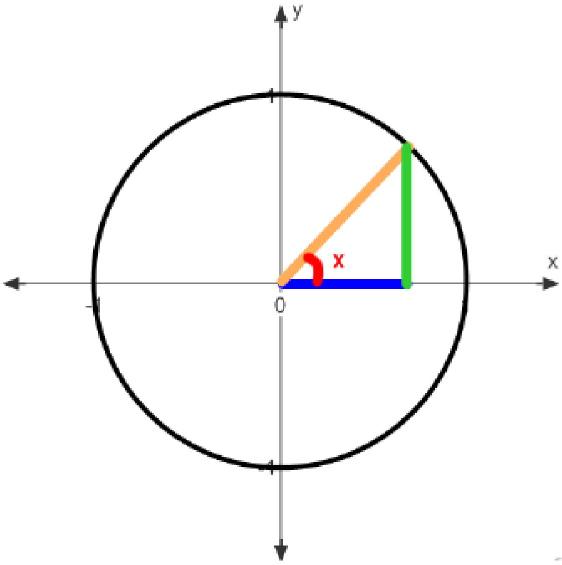
Allgemeine Beziehungen am rechtwinkligen Dreieck:

$$\sin(x) = \frac{\text{Gegenkathete}}{\text{Hypotenuse}}$$

$$\cos(x) = \frac{\text{Ankathete}}{\text{Hypotenuse}}$$

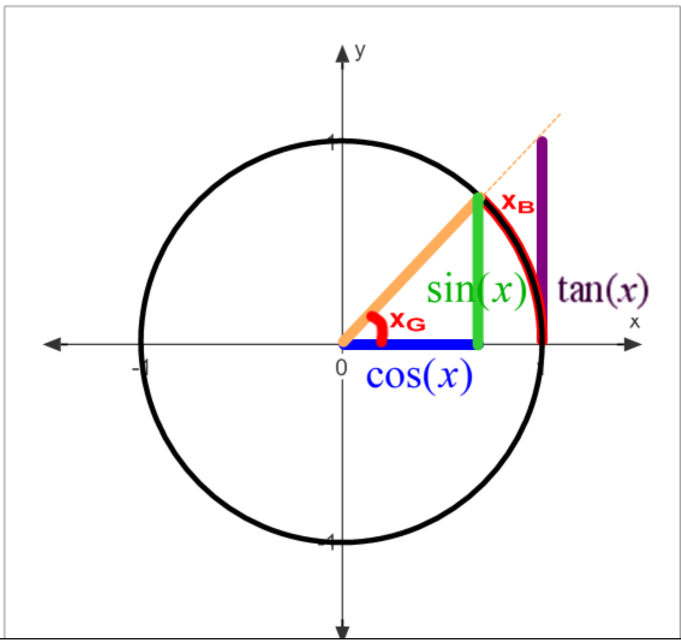
$$\tan(x) = \frac{\text{Gegenkathete}}{\text{Ankathete}}$$

$$\tan(x) = \frac{\sin(x)}{\cos(x)}$$



Sinus und Cosinus am Einheitskreis

Sinus und Cosinus am Einheitskreis, d.h. $\text{Hypotenuse} = 1$



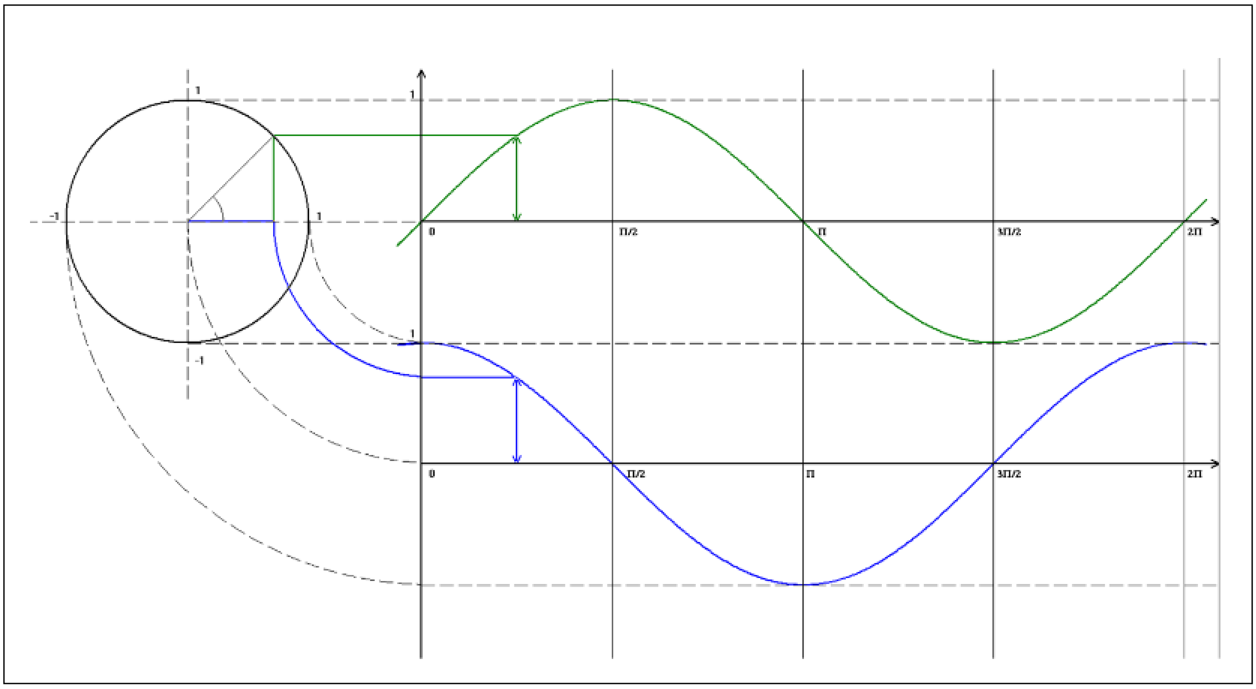
$$\sin(x) = \frac{\text{Gegenkathete}}{1}$$

$$\cos(x) = \frac{\text{Ankathete}}{1}$$

$$\tan(x) = \frac{\text{Gegenkathete}}{\text{Ankathete}}$$

$$\tan(x) = \frac{\sin(x)}{\cos(x)}$$

Zusammenhang Sinus und Cosinus am Einheitskreis mit den entsprechenden Funktionen:



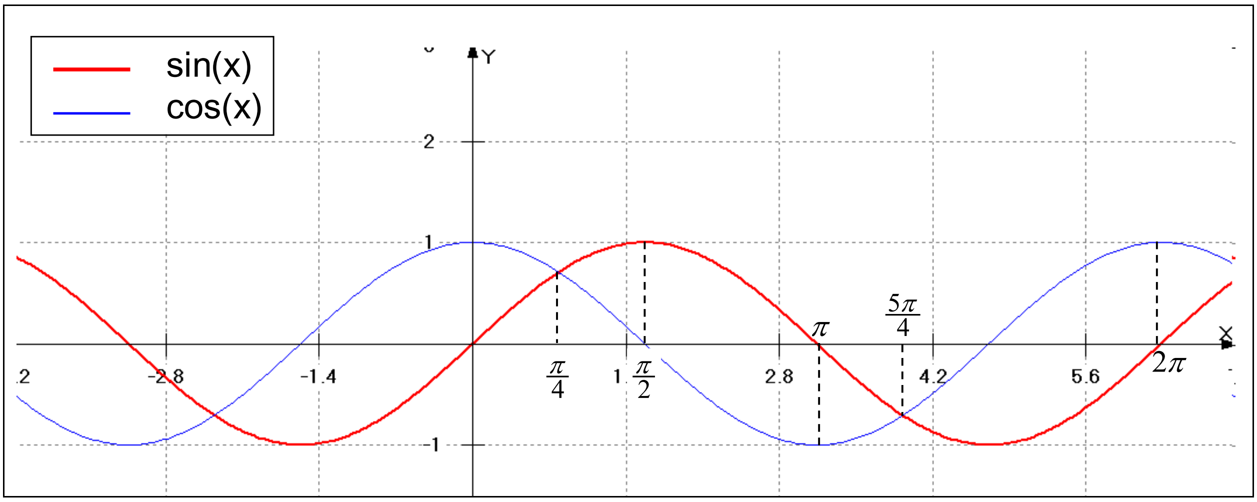


Abbildung 1 Trigonometrische Funktionen Sinus und Cosinus

Zusammenfassung 1: Trigonometrische Funktionen sin(x) und cos(x)

Eigenschaften	$f(x) = \sin x$	$f(x) = \cos x$
Definitionsbereich	$\mathbb{R}$	$\mathbb{R}$
Bildbereich	$[-1,1]$	$[-1,1]$
Beschränktheit	obere Schranke: 1 untere Schranke: -1	obere Schranke: 1 untere Schranke: -1
Monotonie	nur im Intervall	nur im Intervall
Umkehrfunktion	nur im Intervall	nur im Intervall
Symmetrie	ungerade	gerade
Periodizität	primitive Periode 2π	primitive Periode 2π
Asymptoten	-	-
Nullstellen	$x = k\pi,\, k \in \mathbb{Z}$	$x = \frac{\pi}{2}(2k+1),\, k \in \mathbb{Z}$
Minimum/Maximum	lokale Maxima: $x = \frac{\pi}{2}(4k+1),\, k \in \mathbb{Z}$ lokale Minima: $x = \frac{\pi}{2}(4k+3),\, k \in \mathbb{Z}$	lokale Maxima: $x = \pi 2k,\, k \in \mathbb{Z}$ lokale Minima: $x = \pi(2k+1),\, k \in \mathbb{Z}$
Besonderheiten	-	-

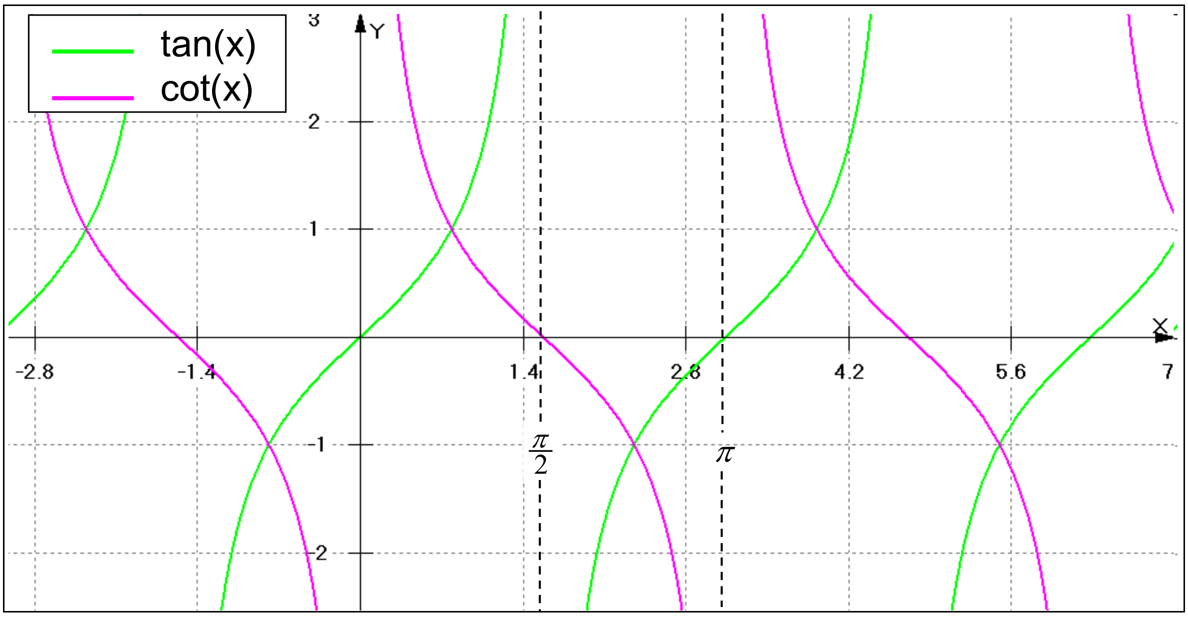


Abbildung 2 Trigonometrische Funktionen Tangens und Cotangens

Zusammenfassung 2: Trigonometrische Funktionen tan(x) und cot(x)

Eigenschaften	$f(x) = \tan x$	$f(x) = \cot x$
Definitionsbereich	$\mathbb{R} \setminus \left\{\frac{\pi}{2}(2k+1), k \in \mathbb{Z}\right\}$	$\mathbb{R} \setminus \left\{k\pi, k \in \mathbb{Z}\right\}$
Bildbereich	$\mathbb{R}$	$\mathbb{R}$
Beschränktheit	-	-
Monotonie	nur im Intervall	nur im Intervall
Umkehrfunktion	nur im Intervall	nur im Intervall
Symmetrie	ungerade	ungerade
Periodizität	primitive Periode π	primitive Periode π
Asymptoten	-	-
Nullstellen	$x = k\pi, k \in \mathbb{Z}$	$x = \frac{\pi}{2}(2k+1), k \in \mathbb{Z}$
Pole	$x = (2k+1)\frac{\pi}{2}, k \in \mathbb{Z}$	$x = k\pi, k \in \mathbb{Z}$
Minimum/Maximum	-	-
Besonderheiten	-	-

Werte für spezielle Winkel:

α	$\sin\alpha$	$\cos\alpha$	$\tan\alpha$	$\cot\alpha$
0°	0	1	0	$\pm\infty$
30°	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}\sqrt{3}$	$\frac{1}{3}\sqrt{3}$	$\sqrt{3}$
45°	$\frac{1}{2}\sqrt{2}$	$\frac{1}{2}\sqrt{2}$	1	1
60°	$\frac{1}{2}\sqrt{3}$	$\frac{1}{2}$	$\sqrt{3}$	$\frac{1}{3}\sqrt{3}$
90°	1	0	$\pm\infty$	0
180°	0	–1	0	$\pm\infty$
270°	–1	0	$\pm\infty$	0

Satz 8.15: Beziehungen zwischen den trigonometrischen Funktionen

Die nachfolgend dargestellten Beziehungen stellen nur eine Auswahl dar.

(1) $$\tan x = \frac{\sin x}{\cos x},\ \cot x = \frac{\cos x}{\sin x} = \frac{1}{\tan x}$$

(2)Verschiebung sin gegenüber cos

$$\cos x = \sin(x + \tfrac{\pi}{2}),\quad \sin x = \cos(x - \tfrac{\pi}{2})$$

(3)Trigonometrischer Pythagoras

$$\sin^2 x + \cos^2 x = 1$$

(4)Umrechnung der Winkelfunktionen untereinander

$$\sin x = \sqrt{1-\cos^2 x},\quad \cos x = \sqrt{1-\sin^2 x}$$

$$\tan x = \frac{\sin x}{\sqrt{1-\sin^2 x}} = \frac{\sqrt{1-\cos^2 x}}{\cos x}$$

(5)Additionstheoreme

$$\sin(x_1 \pm x_2) = \sin x_1 \cos x_2 \pm \cos x_1 \sin x_2$$
$$\cos(x_1 \pm x_2) = \cos x_1 \cos x_2 \mp \sin x_1 \sin x_2$$
$$\tan(x_1 \pm x_2) = \frac{\tan x_1 \pm \tan x_2}{1 \mp \tan x_1 \tan x_2}$$
$$\cot(x_1 \pm x_2) = \frac{\cot x_1 \cot x_2 \mp 1}{\cot x_2 \pm \cot x_1}$$

(6) $$\sin x_1 + \sin x_2 = 2\sin\frac{x_1+x_2}{2}\cos\frac{x_1-x_2}{2}$$

$$\cos x_1 + \cos x_2 = 2\cos\frac{x_1+x_2}{2}\cos\frac{x_1-x_2}{2}$$

8.5.6 Zyklometrische Funktionen

Die Umkehrfunktionen der trigonometrischen Funktionen werden zyklometrische Funktionen genannt.

Zur Bildung der Umkehrfunktionen muss der Definitionsbereich der trigonometrischen Funktionen eingeschränkt werden:

$$\sin : \left[-\tfrac{\pi}{2}, \tfrac{\pi}{2}\right] \to [-1, 1]$$

$$\arcsin y := \sin^{-1} y = \{x \mid \sin x = y\} \cap \left[-\tfrac{\pi}{2}, \tfrac{\pi}{2}\right]$$

$$\arcsin : [-1, 1] \to \left[-\tfrac{\pi}{2}, \tfrac{\pi}{2}\right]$$

$$\cos : [0, \pi] \to [-1, 1]$$

$$\operatorname{arc}\cos y := \cos^{-1} y = \{x \mid \cos x = y\} \cap [0, \pi]$$

$$\operatorname{arc}\cos : [-1, 1] \to [0, \pi]$$

$$\tan : \left(-\tfrac{\pi}{2}, \tfrac{\pi}{2}\right) \to \mathbb{R}$$

$$\operatorname{arc}\tan y := \tan^{-1} y = \{x \mid \tan x = y\} \cap \left(-\tfrac{\pi}{2}, \tfrac{\pi}{2}\right)$$

$$\operatorname{arc}\tan : \mathbb{R} \to \left(-\tfrac{\pi}{2}, \tfrac{\pi}{2}\right)$$

$$\cot : (0, \pi) \to \mathbb{R}$$

$$\operatorname{arc}\cot y := \cot^{-1} y = \{x \mid \cot x = y\} \cap (0, \pi)$$

$$\operatorname{arc}\cot : \mathbb{R} \to (0, \pi)$$

Satz 8.16: Beziehungen zwischen den zyklometrischen Funktionen

$$\arcsin x + \arccos x = \tfrac{\pi}{2}$$

$$\arctan x + \operatorname{arc}\cot x = \tfrac{\pi}{2}$$

$$\arccos(-x) = \pi - \arccos x$$

$$\operatorname{arc}\cot(-x) = \pi - \operatorname{arc}\cot x$$

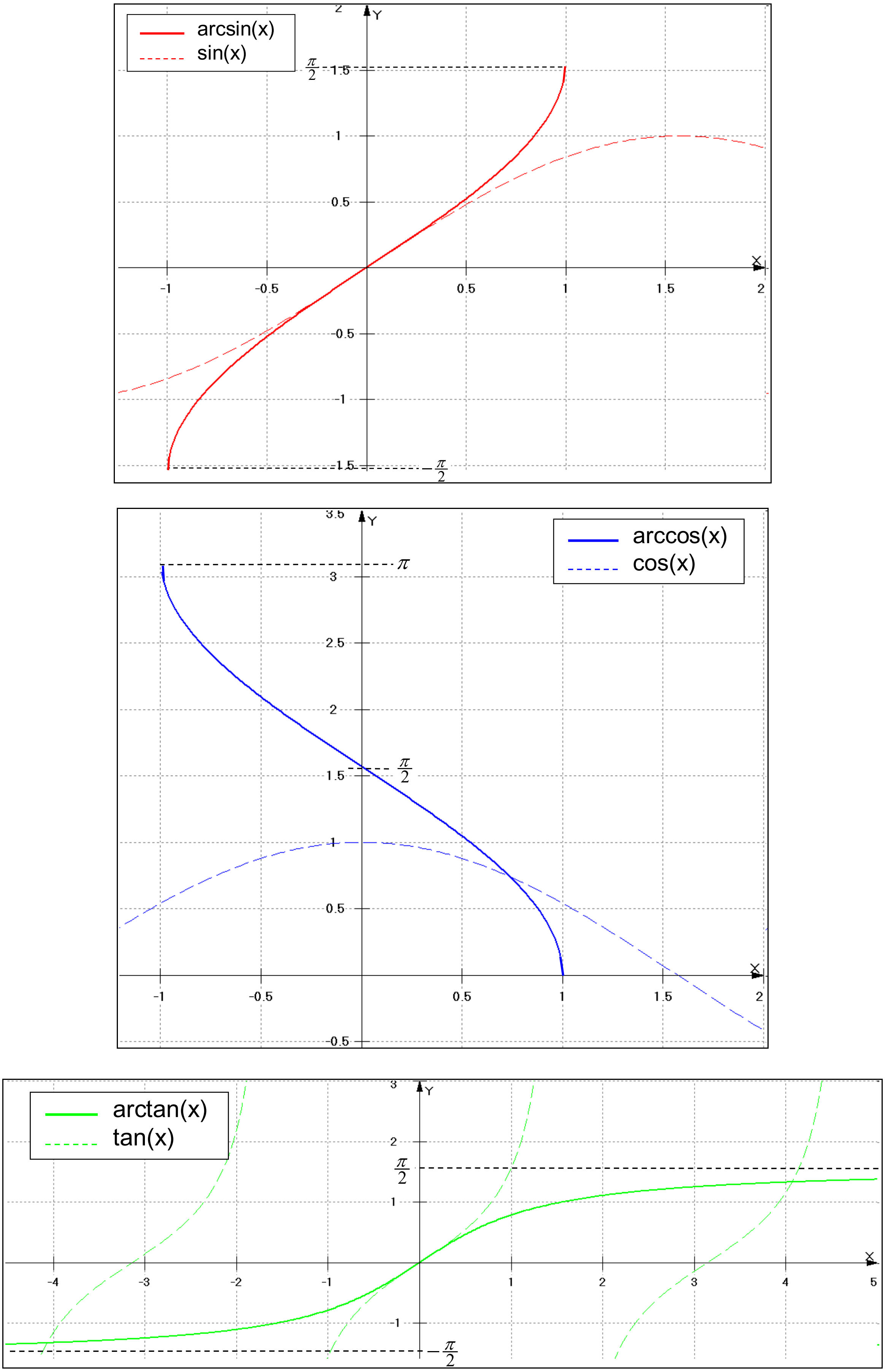
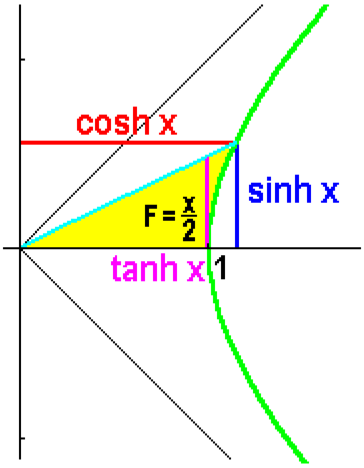
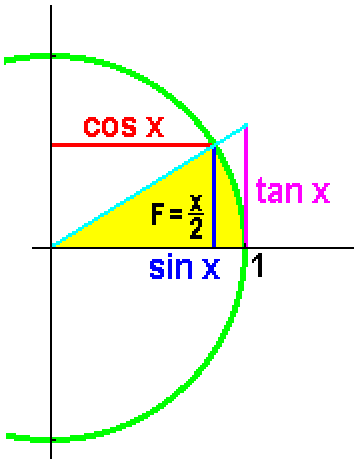


Abbildung 3 Zyklometrische Funktionen

8.5.7 Hyperbel-und Areafunktionen

Hyperbelfunktionen verhalten sich zur Hyperbel analog wie sich die trigonometrischen Funktionen im Einheitskreis verhalten.





Einheitshyperbel: $x^2 - y^2 = 1$ Einheitskreis: $x^2 + y^2 = 1$

Definition 8.29: Hyperbelfunktionen

Hyperbelfunktionen sind wie folgt definiert:

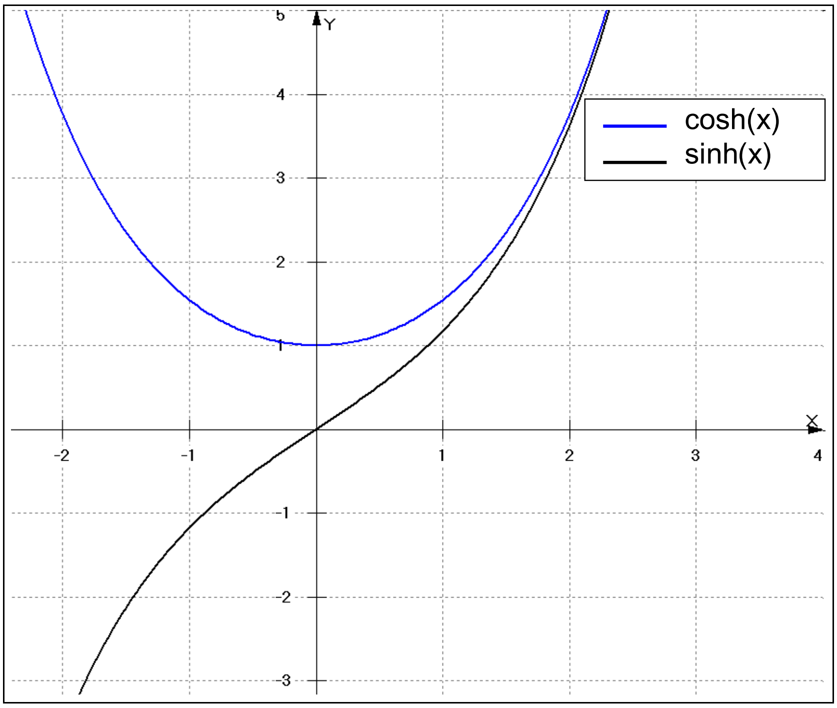
Sinus hyperbolicus $\sinh x = \frac{1}{2}\left(e^x - e^{-x}\right) \; mit \; D = \mathbb{R},\; B = (-\infty, \infty)$

Cosinus hyperbolicus $\cosh x = \frac{1}{2}\left(e^x + e^{-x}\right) \; mit \; D = \mathbb{R}, B = [1, \infty)$

Tangens hyperbolicus $\tanh x = \dfrac{\sinh x}{\cosh x} = \dfrac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}} \; mit \; D = \mathbb{R}, B = (-1, 1)$

Cotangens hyperbolicus

$$\coth x = \frac{\cosh x}{\sinh x} = \frac{e^x + e^{-x}}{e^x - e^{-x}} \; mit \; D = \mathbb{R} \setminus \{0\}, B = (-\infty, -1) \cup (1, \infty)$$



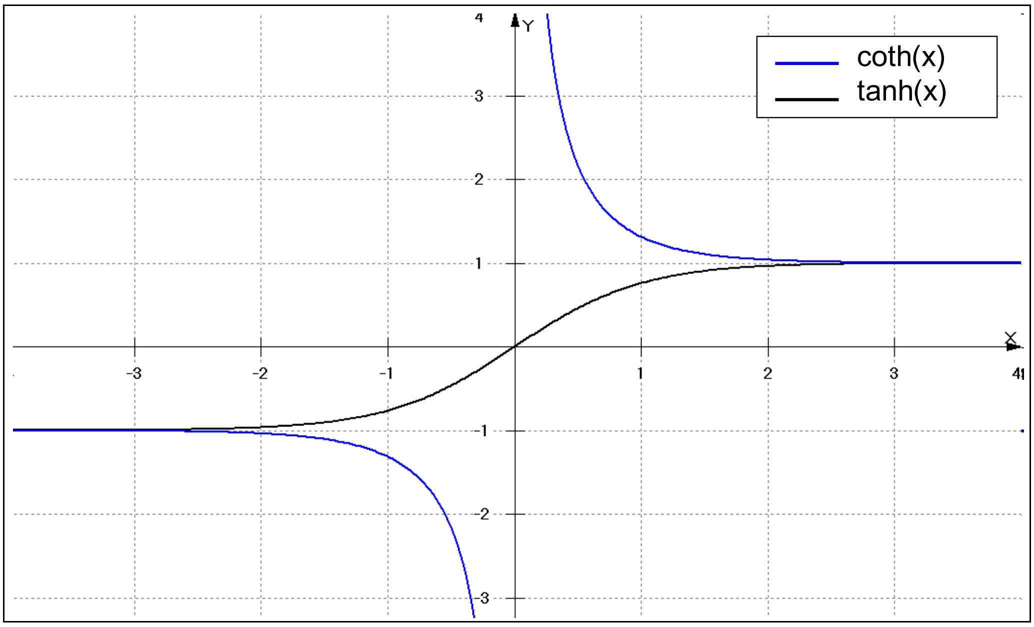


Abbildung 4 Hyperbelfunktionen

Satz 8.17: Beziehungen zwischen den Hyperbelfunktionen

$$\sinh x + \cosh x = e^x$$

$$\cosh^2 x - \sinh^2 x = 1$$

$$\sinh(-x) = -\sinh x$$

$$\cosh(-x) = \cosh x$$

$$\cosh(x+y) = \cosh x \cosh y + \sinh x \sinh y$$

$$\sinh(x+y) = \cosh x \sinh y + \sinh x \cosh y$$

Definition 8.30: Areafunktionen

Die Umkehrfunktionen der Hyperbelfunktionen werden Areafunktionen genannt und sind wie folgt definiert:

$$ar\sinh x := \ln(x + \sqrt{x^2+1}), \quad x \in \mathbb{R}$$

$$ar\cosh x := \pm\ln(x + \sqrt{x^2-1}), \quad x \geq 1$$

$$ar\tanh x := \tfrac{1}{2}\ln\frac{1+x}{1-x}, \quad |x| < 1$$

$$ar\coth x := \tfrac{1}{2}\ln\frac{x+1}{x-1}, \quad |x| > 1$$