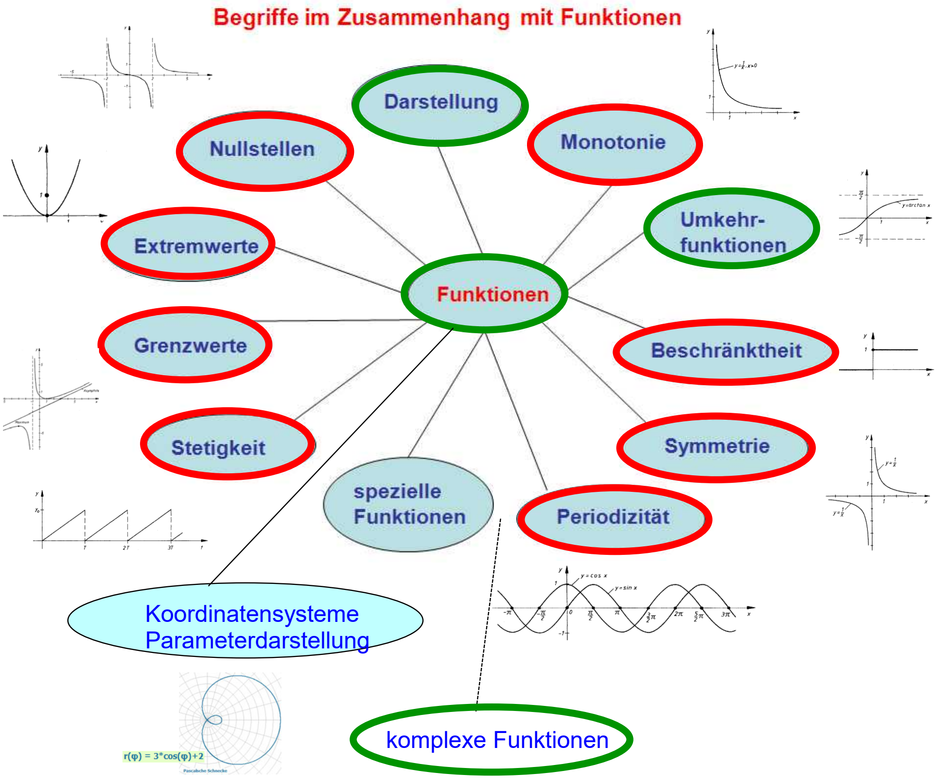
Vorlesung 20 am 07.12.2022

Inhalte: Funktionen 2

- Grenzwerte und Stetigkeit


Begriffe im Zusammenhang mit Funktionen
Darstellung
Nullstellen
Monotonie
Umkehr-funktionen
Extremwerte
Funktionen
Grenzwerte
Beschränktheit
Stetigkeit
Symmetrie
spezielle Funktionen
Periodizität
Koordinatensysteme Parameterdarstellung
r(φ) = 3*cos(φ)+2
komplexe Funktionen

•

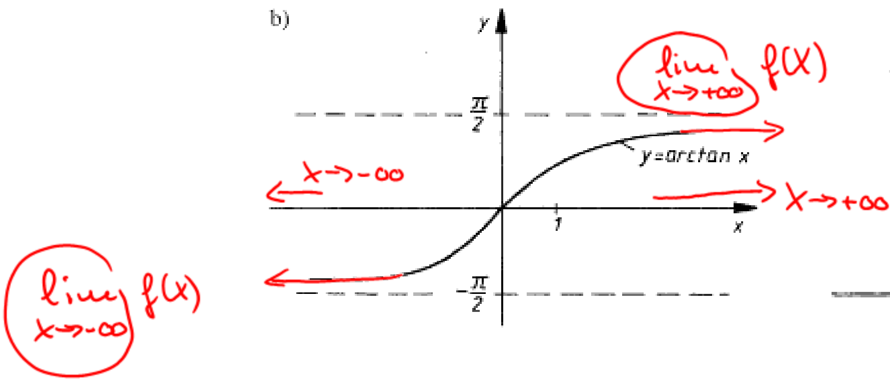
Grenzwerte für Funktionen

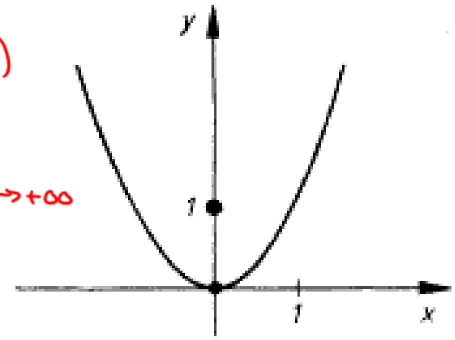
jetzt

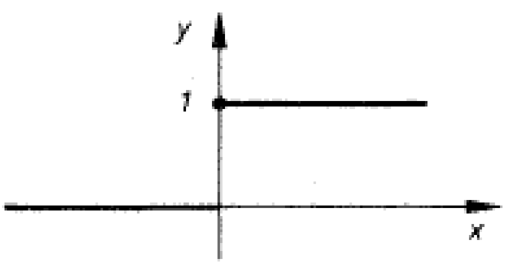
Grenzwert $x \to \infty$ Grenzwert $x \to -\infty$

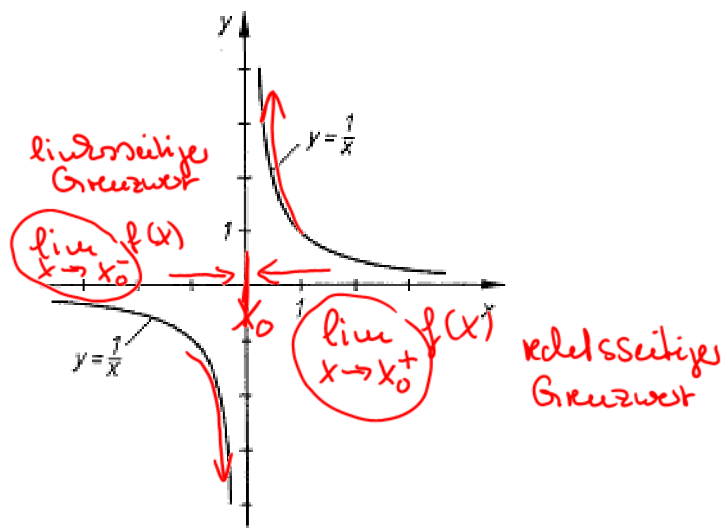
Grenzwert $x \to x_0$ /Grenzwert $x \to x_0^-$ / Grenzwert $x \to x_0^+$

Stetigkeit

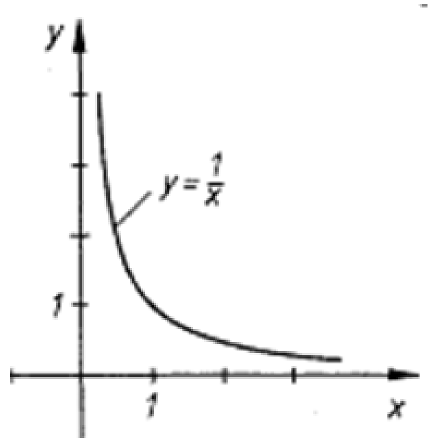








$$f(x) = \begin{cases} 1, & x \geq 0 \\ 0, & x < 0 \end{cases}$$

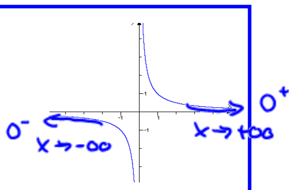


5.4 Grenzwert und Stetigkeit

5.4.1 Grenzwerte von Funktionen

Grenzwertermittlung x-> ∞ (bzw. x->-∞)
Berechnung, wie sich die Funktion für immer größer (bzw. immer kleiner) werdende x-Werte verhält?

Beispiel 1: $f(x)=\frac{1}{x}$



Grenzwert einer Funktion für x->∞

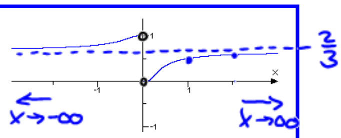
$$\lim_{x\to\infty} f(x) = \lim_{x\to\infty} \frac{1}{x} = 0^+$$ (von oben gegen x-Achse $y=0$)

Grenzwert einer Funktion für x->-∞

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty} \frac{1}{x} = \lim_{x\to\infty} \frac{1}{-x} = \lim_{x\to\infty} -\frac{1}{x} = 0^-$$ (von unten gegen x-Achse $y=0$)

Setze (-x) statt x und betrachte dann wieder Grenzwert $x\to+\infty$

Beispiel 2: $y = f(x)=\frac{2}{2^{\frac{1}{x}}+2}$



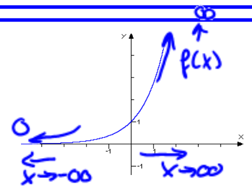
Grenzwert einer Funktion für x->∞

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = \lim_{x\to\infty} \frac{2}{2^{\frac{1}{x}}+2} = \frac{2}{3}$$

Grenzwert einer Funktion für x->-∞

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty} \frac{2}{2^{\frac{1}{x}}+2} = \frac{2}{3}$$

Beispiel 3: $f(x)=e^x$



Grenzwert einer Funktion für x->∞

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = \lim_{x\to\infty} e^x =$$

Grenzwert einer Funktion für x->-∞

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty} e^x = \lim_{x\to+\infty} e^{-x} = \lim_{x\to\infty} \frac{1}{e^x} = 0$$

x durch -x ersetzen
$x\to+\infty$ statt $x\to-\infty$

Bemerkung:
Der Grenzwert einer Funktion für **x->-∞** kann auf den Grenzwert einer Funktion für **x->+∞** zurückgeführt werden, wenn in dem zu betrachtenden Ausdruck **x** durch **(-x)** ersetzt wird.

Statt $\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} f(-x)$ betrachten

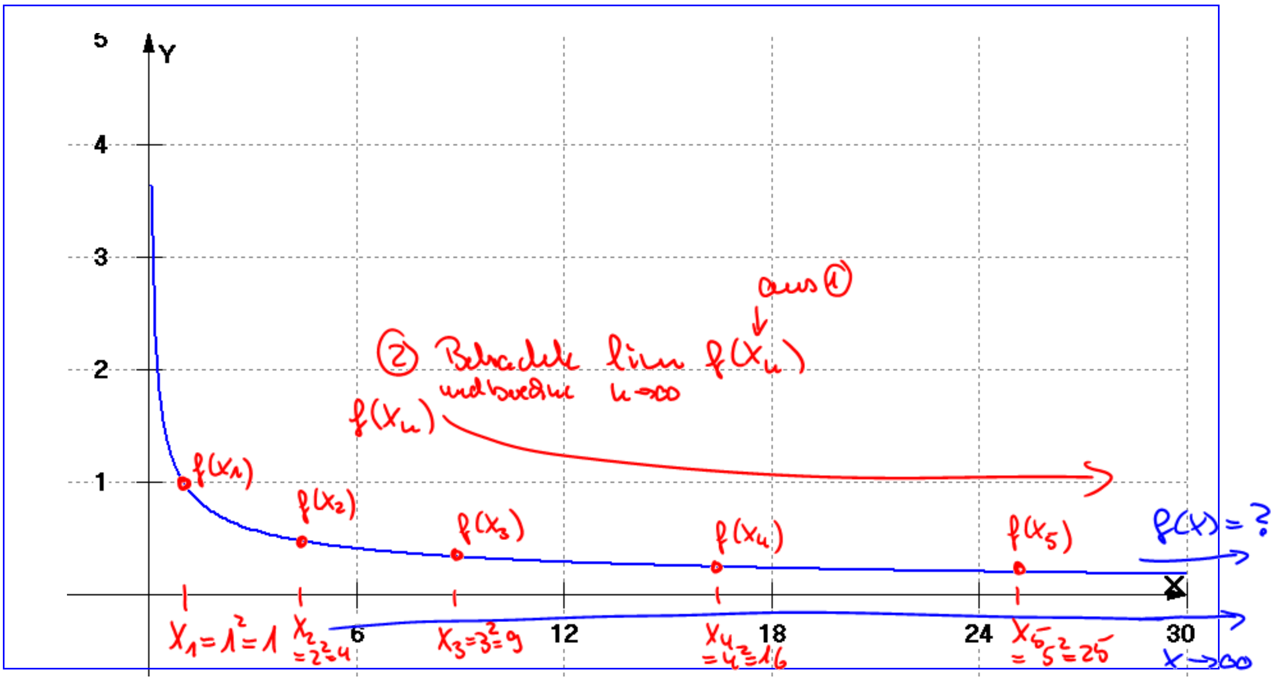
5.4 Grenzwert und Stetigkeit

5.4.1 Grenzwerte von Funktionen

Definition 5.15: **Grenzwert $x \to \pm\infty$ - Definition mit Hilfe von Folgen**

Besitzt für alle Folgen $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit $x_n \to \infty(-\infty)$ für $n \to \infty$ die Folge der Funktionswerte $(f(x_n))_{n\in\mathbb{N}}$ den gleichen Grenzwert g, so heißt g der **Grenzwert von $f(x)$ für $x \to \infty(-\infty)$.**

Schreibweise: $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = g$ (bzw. $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = g$)



Wahl

① Folge: $x_n = n^2$ mit der Eigenschaft $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = \infty$

Beispiel : Grenzwertberechnung über Folgen

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{x}}$$

$\uparrow x_n$

$$\lim_{x\to\infty} \frac{1}{\sqrt{x}} = \lim_{n\to\infty} f(x_n) = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt{n^2}} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0$$

Folge $x_n = n^2$
und Grenzwert $n \to \infty$

Beispiele: Grenzwert einer Funktion für x->x_0

Grenzwertermittlung $x \to x_0$

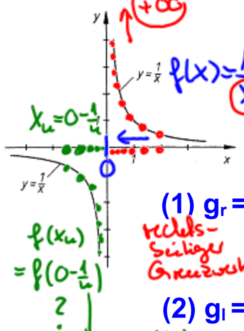
Grenzwert $x \to x_0$ /Grenzwert $x \to x_0^-$ / Grenzwert $x \to x_0^+$

$f(x)=\frac{1}{x}$ $D=\mathbb{R}\setminus\{0\}$

Überprüfung des Verhaltens an der Definitionslücke

Grenzwert $x \to x_0$ $x_0=0$

$x \to 0$



- Betrachtung $f(x_u)$
- Übergang auf $u\to\infty$
- Folge $x_u=0+\frac{1}{u}$ mit $\lim_{u\to\infty} 0+\frac{1}{u}=0$

(1) $g_r=\lim_{x\to 0^+} f(x) = \lim_{u\to\infty} f(\underbrace{0+\tfrac{1}{u}}_{x}) = \lim_{u\to\infty}\frac{1}{0+\frac{1}{u}} = \lim_{u\to\infty} u = +\infty$

rechts-seitiger Grenzwert

(2) $g_l=\lim_{x\to 0^-} f(x) = \lim_{u\to\infty} f(0-\tfrac{1}{u}) = \lim_{u\to\infty}\frac{1}{0-\frac{1}{u}} = \lim_{u\to\infty} -u = -\infty$

links-seitiger Grenzwert

- Folge, die von links auf $x_0=0$ zuläuft

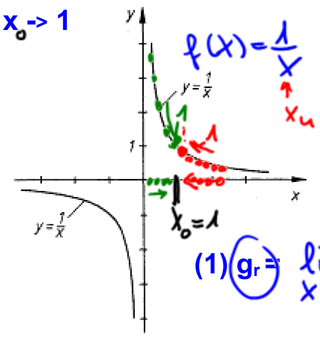
$x_u=0-\frac{1}{u}$ mit $\lim_{u\to\infty} x_u = \lim_{u\to\infty} 0-\frac{1}{u}=0$

- Übergang $\lim_{u\to\infty}$
- Betrachtung $f(x_u)$

(3) Grenzwert existiert nicht, da $g_r=\infty$ (bzw. $g_l=-\infty$)

einer der Grenzwerte (links/rechts-seitig) nicht existiert

Grenzwert x_0-> 1



- $f(x_u)$
- $\lim_{u\to\infty}$
- $x_u=1+\frac{1}{u}$ mit $\lim_{u\to\infty} x_u=1$

(1) $g_r=\lim_{x\to 1^+} f(x) = \lim_{u\to\infty} f(\underbrace{1+\tfrac{1}{u}}_{x_u}) = \lim_{u\to\infty}\frac{1}{1+\frac{1}{u}} = \lim_{u\to\infty}\frac{1}{\frac{u+1}{u}} = \lim_{u\to\infty}\frac{1\cdot u}{1\cdot u+1} = 1$

(2) $g_l=\lim_{x\to 1^-} f(x) = \lim_{u\to\infty} f(1-\tfrac{1}{u}) = \lim_{u\to\infty}\frac{1}{1-\frac{1}{u}} = \lim_{u\to\infty}\frac{1}{\frac{u-1}{u}} = \lim_{u\to\infty}\frac{1\cdot u}{1\cdot u-1} = 1$

- $x_u=1-\frac{1}{u}$ mit $\lim_{u\to\infty} x_u=1$
- $\lim_{u\to\infty}$
- $f(x_u)$

(3) $g_r \overset{!}{=} g_l$ $=g=1$ Grenzwert an der Stelle $x_0=1$

Bedingung für die Existenz des Grenzwerts

Berechnung des Grenzwertes an einer Stelle x_0

Definition 5.12: **Grenzwert $x \to x_0$ - Definition mit Hilfe von Folgen**

Sei f eine reelle Funktion.

Wenn für jede Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit dem Grenzwert x_0 mit $x_n \in D$ und $x_n \neq x_0 \ \forall n \in \mathbb{N}$, die Folge $\left(f(x_n)\right)_{n\in\mathbb{N}}$ den Grenzwert g besitzt (d.h. $\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n) = g$), dann heißt g **der Grenzwert von f bei der Annäherung an** x_0.

Schreibweise: $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = g$

Definition 5.14: **linksseitiger/ rechtsseitiger Grenzwert $x \to x_0$**

Für jede von links gegen x_0 strebende Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ (d.h. $x_n < x_0 \ \forall n \in \mathbb{N}$) sei

$$\lim_{n\to\infty} f(x_n) = \lim_{\substack{x\to x_0 \\ x<x_0}} f(x) = g_l \qquad \left(=: \lim_{x\to x_0^-} f(x)\right)$$

g_l heißt **linksseitiger Grenzwert** von f(x) für $x \to x_0^-$.

Für jede von rechts gegen x_0 strebende Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ (d.h. $x_n > x_0 \ \forall n \in \mathbb{N}$) sei

$$\lim_{n\to\infty} f(x_n) = \lim_{\substack{x\to x_0 \\ x>x_0}} f(x) = g_r \qquad \left(=: \lim_{x\to x_0^+} f(x)\right)$$

g_r heißt **rechtsseitiger Grenzwert** von f(x) für $x \to x_0^+$.

.

Grenzwert einer Funktion für x->x_0

(1) rechtsseitiger Grenzwert für x->x_0

$$g_r = \lim_{x \to x_0^+} f(x) = \lim_{n \to \infty} f\left(x_0 + \frac{1}{n}\right)$$

günstige Verwendung der Folge $x_n = x_0 + \frac{1}{n}$

(2) linksseitiger Grenzwert für x->x_0

$$g_l = \lim_{x \to x_0^-} f(x) = \lim_{n \to \infty} f\left(x_0 - \frac{1}{n}\right)$$

günstige Verwendung der Folge $x_n = x_0 - \frac{1}{n}$

(3) Grenzwert für x->x_0

Existieren die Grenzwerte g_r und g_l, d.h. $g_r, g_l \neq \pm\infty$,

und gilt $\boxed{g_r = g_l}$,

so existiert der Grenzwert $\lim_{x \to x_0} f(x)$

und es gilt $\boxed{\lim_{x \to x_0} f(x) = g_r (g_l)}$

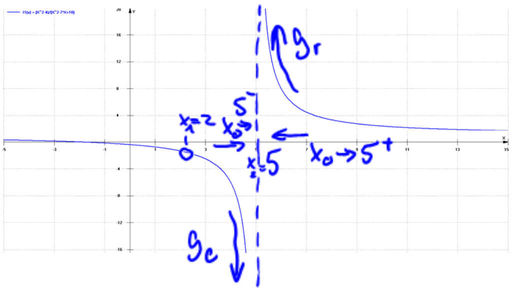
Bemerkung 1:
Es ist ausreichend, nur eine Folge von links und und eine Folge von rechts zu wählen, da diese repräsentativ sind!

Bemerkung 2:
Sobald der Grenzwert von einer Seite nicht existiert, existiert der Grenzwert in dem Punkt nicht.

Beispiel zur Grenzwertberechnung :

$$f(x)=\frac{x^2-4}{x^2-7x+10} = \frac{x^2-4}{(x-5)(x-2)}$$

Def.bereich $D=\mathbb{R}\setminus\{2,5\}$



Beispiel: Grenzwert für $\boxed{x\to 5}$

① rechtsseitiger Grenzwert g_r

$$g_r = \lim_{x\to 5^+} f(x) = \lim_{n\to\infty} \frac{(5+\frac{1}{n})^2-4}{(5+\frac{1}{n})^2-7(5+\frac{1}{n})+10} = \lim_{n\to\infty} \frac{25+\frac{10}{n}+\frac{1}{n^2}-4}{25+\frac{10}{n}+\frac{1}{n^2}-35-\frac{7}{n}+10}$$

$x_n = 5+\frac{1}{n}$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{\underbrace{21+\underbrace{\tfrac{10}{n}}_{\to 0}+\underbrace{\tfrac{1}{n^2}}_{\to 0}}_{\to +21}}{\underbrace{\underbrace{\tfrac{3}{n}}_{\to 0}+\underbrace{\tfrac{1}{n^2}}_{\to 0}}_{\to 0^+}} = +\infty$$

alternative Berechnung durch Erweiterung mit n

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{(21+\frac{10}{n}+\frac{1}{n^2})\cdot n}{(\frac{3}{n}+\frac{1}{n^2})\cdot n} = \lim_{n\to\infty} \frac{\underbrace{21\cdot n}_{\to +\infty}+\underbrace{10}_{\to 10}+\underbrace{\tfrac{1}{n}}_{\to 0}}{\underbrace{3+\underbrace{\tfrac{1}{n}}_{\to 0}}_{\to 3}} = +\infty$$

② linksseitiger Grenzwert g_l

$$g_l = \lim_{x\to 5^-} f(x) = \lim_{n\to\infty} \frac{(5-\frac{1}{n})^2-4}{(5-\frac{1}{n})^2-7(5-\frac{1}{n})+10}$$

$x_n = 5-\frac{1}{n}$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{25-\frac{10}{n}+\frac{1}{n^2}-4}{25-\frac{10}{n}+\frac{1}{n^2}-35+\frac{7}{n}+10} = \lim_{n\to\infty} \frac{(21-\frac{10}{n}+\frac{1}{n^2})\cdot n}{(-\frac{3}{n}+\frac{1}{n^2})\cdot n} = \lim_{n\to\infty} \frac{\underbrace{\underbrace{21n}_{\to +\infty}-\underbrace{10}_{\to 10}+\underbrace{\tfrac{1}{n}}_{\to 0}}_{\to +\infty}}{\underbrace{\underbrace{-3}_{\to -3}+\underbrace{\tfrac{1}{n}}_{\to 0}}_{\to -3}} = -\infty$$

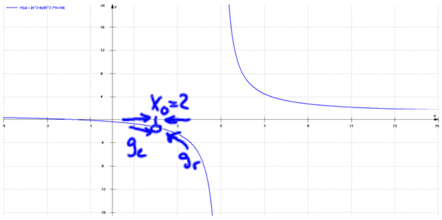
③ gemeinsamer Grenzwert g ?

Ist $g_l = g_r$?

Kein Grenzwert vorhanden, da g_l nicht existiert (und auch g_r nicht existiert)

Beispiel zur Grenzwertberechnung - Fortsetzung:

$$f(x)=\frac{x^2-4}{x^2-7x+10}$$



Beispiel: Grenzwert für $\boxed{x\to 2}$

① rechtsseitiger Grenzwert g_r

$$\boxed{g_r} = \lim_{x\to 2^+} f(x) \underset{x_n=2+\frac{1}{n}}{=} \lim_{n\to\infty} f\left(2+\frac{1}{n}\right) = \lim_{n\to\infty}\frac{\left(2+\frac{1}{n}\right)^2-4}{\left(2+\frac{1}{n}\right)^2-7\left(2+\frac{1}{n}\right)+10}$$

$$= \lim_{n\to\infty}\frac{4+\frac{4}{n}+\frac{1}{n^2}-4}{4+\frac{4}{n}+\frac{1}{n^2}-14-\frac{7}{n}+10} = \lim_{n\to\infty}\frac{\left(\frac{4}{n}+\frac{1}{n^2}\right)\cdot n}{\left(-\frac{3}{n}+\frac{1}{n^2}\right)n} = \lim_{n\to\infty}\frac{4+\frac{1}{n}}{-3+\frac{1}{n}} = \boxed{-\frac{4}{3}}$$

Erweitern mit n, da unbest. Ausdruck; $\frac{1}{n}\to 0$

② linksseitiger Grenzwert g_l

$$g_l = \lim_{x\to 2^-} f(x) \underset{x_n=2-\frac{1}{n}}{=} \dots \lim_{n\to\infty} f\left(2-\frac{1}{n}\right) = \lim_{n\to\infty}\frac{\left(2-\frac{1}{n}\right)^2-4}{\left(2-\frac{1}{n}\right)^2-7\left(2-\frac{1}{n}\right)+10}$$

$$= \lim_{n\to\infty}\frac{4-\frac{4}{n}+\frac{1}{n^2}-4}{4-\frac{4}{n}+\frac{1}{n^2}-14+\frac{7}{n}+10} = \lim_{n\to\infty}\frac{\left(\frac{4}{n}+\frac{1}{n^2}\right)\cdot n}{\left(+\frac{3}{n}+\frac{1}{n^2}\right)n} = \lim_{n\to\infty}\frac{-4+\frac{1}{n}}{+3+\frac{1}{n}} = \boxed{-\frac{4}{3}}$$

Erweitern mit n, da unbest. Ausdruck; $\frac{1}{n}\to 0$

③ gemeinsamer Grenzwert g?

Ist $g_l = g_r$? $\quad g_r = -\frac{4}{3} = g_l = \boxed{-\frac{4}{3} =: g \text{ Grenzwert}}$

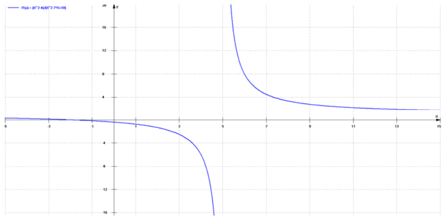
Umformen durch Kürzen in eine ähnliche Funktion, aber nicht gleiche Funktion:

$$\Rightarrow f(x)=\frac{x^2-4}{x^2-7x+10}$$

Beispiel zur Grenzwertberechnung - Zusammenfassung:

$$f(x)=\frac{x^2-4}{x^2-7x+10}=\frac{x^2-4}{(x-2)(x-5)}$$

$$\textit{Definitionsbereich } D=\mathbb{R}\setminus\{2,5\}$$



Definitionslücke im Punkt $x_0 = 2$: **Grenzwert existiert**

$$g_r=g_l=-\frac{4}{3}$$

$$\lim_{x\to 2} f(x)=\frac{x^2-4}{x^2-7x+10}=-\frac{4}{3}$$

Grenzwert existiert - Heben der Definitionslücke möglich

- durch minimale Veränderung der Funktion
- Grenzwert wird, als Funktionswert in der Definitionslücke definiert

$$f_1(x)=\begin{cases}\dfrac{x^2-4}{x^2-7x+10}, & x\neq 2\\ g=-\dfrac{4}{3}, & x=2\end{cases} \qquad \textit{Definitionsbereich } D_1=\mathbb{R}\setminus\{5\}$$

=

Umformen durch Kürzen in eine ähnliche Funktion, aber nicht gleiche Funktion: } ≙ „stetige Ergänzung durch Herauskürzen des Linearfaktors"

$$f_1(x)=\frac{x^2-4}{x^2-7x+10}=\frac{\cancel{(x-2)}(x+2)}{\cancel{(x-2)}(x-5)}=\frac{x+2}{x-5}$$

$$\textit{Definitionsbereich } D_1=\mathbb{R}\setminus\{5\}$$

$\Rightarrow$ in $x_0=2$ sind alle Eigenschaften der Stetigkeit erfüllt

(1) $x_0=2\in D$ ✓

(2) $x_0=2: g_r=g_l=:g$ ✓

(3) $x_0=2: g=f(2)$ ✓

Definitionslücke im Punkt $x_0 = 5$: **kein Grenzwert vorhanden**

$$g_r=\infty$$

$$g_l=-\infty$$

kein Grenzwert vorhanden - Heben der Definitionslücke nicht möglich

- Funktionswerte streben an der Definitionslücke gegen $\pm\infty$
- Funktion hat einen Pol im Punkt x_0

Weiteres Beispiel: Grenzwert x_0=0

$$\textit{Beispiel}: \quad f(x) = \frac{|x|+x}{x}$$

(1) Rechtsseitiger Grenzwert g_R in dem Punkt x_0=0

$$\boxed{g_r = \lim_{x\to 0^+} \frac{|x|+x}{x} \underset{\uparrow\, x_n = 0+\frac{1}{n}}{=} \lim_{n\to\infty} \frac{|\overbrace{0+\tfrac{1}{n}}^{>0}| + 0 + \tfrac{1}{n}}{0+\tfrac{1}{n}} = \lim_{n\to\infty}\frac{\tfrac{1}{n}+\tfrac{1}{n}}{\tfrac{1}{n}} = \lim_{n\to\infty}\frac{\tfrac{2}{n}}{\tfrac{1}{n}} = 2}$$

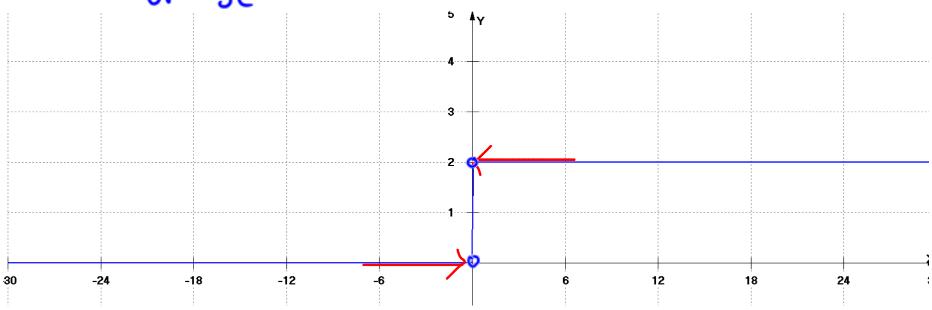
(2) Linksseitiger Grenzwert g_L in dem Punkt x_0=0

$$\boxed{g_l = \lim_{x\to 0^-} \frac{|x|+x}{x} \underset{\uparrow\, x_n = 0-\frac{1}{n}}{=} \lim_{n\to\infty} \frac{|\overbrace{0-\tfrac{1}{n}}^{<0}| + 0 - \tfrac{1}{n}}{0-\tfrac{1}{n}} = \lim_{n\to\infty}\frac{-\left(-\tfrac{1}{n}\right)-\tfrac{1}{n}}{-\tfrac{1}{n}} = \lim_{n\to\infty}\frac{0}{-\tfrac{1}{n}} = \lim_{n\to\infty} 0 = 0}$$

vor dem Grenzübergang

(3) Da der Linksseitige Grenzwert g_L ungleich dem Rechtsseitigen Grenzwert g_R ist, existiert kein Grenzwert g in dem Punkt x_0=0!

$g_r \neq g_l$



Satz 5.1: Rechenregeln für Grenzwerte von Funktionen

Voraussetzung: Die jeweiligen Grenzwerte der Funktionen $\lim\limits_{x\to x_0} f_1(x) = g_1$ und $\lim\limits_{x\to x_0} f_2(x) = g_2$ existieren. $\lim\limits_{x\to x_0}\left(C\cdot f_1(x)\right) = C\cdot \lim\limits_{x\to x_0} f_1(x)\;\; (= C\cdot g_1)$ mit konstantem $C\in\mathbb{R}$

Wie bei Folgen

(1) $\lim\limits_{x\to x_0}\left(f_1(x)\pm f_2(x)\right) = \lim\limits_{x\to x_0} f_1(x) \pm \lim\limits_{x\to x_0} f_2(x)\;\; (= g_1 \pm g_2)$

(2) $\lim\limits_{x\to x_0}\left(f_1(x)\cdot f_2(x)\right) = \lim\limits_{x\to x_0} f_1(x) \cdot \lim\limits_{x\to x_0} f_2(x)\;\; (= g_1 \cdot g_2)$

(3) $\lim\limits_{x\to x_0}\left(\dfrac{f_1(x)}{f_2(x)}\right) = \dfrac{\lim\limits_{x\to x_0} f_1(x)}{\lim\limits_{x\to x_0} f_2(x)}\;\; \left(= \dfrac{g_1}{g_2}\right)$ mit $g_2 \neq 0$

(4) $\lim\limits_{x\to x_0}\left(\sqrt[n]{f_1(x)}\right) = \sqrt[n]{\lim\limits_{x\to x_0} f_1(x)}\;\; (= \sqrt[n]{g_1})$

(5) $\lim\limits_{x\to x_0}\left(f_1(x)\right)^n = \left(\lim\limits_{x\to x_0} f_1(x)\right)^n\;\; (= (g_1)^n)$

(6) $\lim\limits_{x\to x_0}\left(a^{f_1(x)}\right) = a^{\lim\limits_{x\to x_0} f_1(x)}\;\; (= a^{g_1})$

(7) $\lim\limits_{x\to x_0}\left(\log_a f_1(x)\right) = \log_a\left(\lim\limits_{x\to x_0} f_1(x)\right)\cdot\;\; (= \log_a g_1)$

Satz 5.2: Rechenregeln für Grenzwerte mit 0 und $\pm\infty$

Alle Grenzwerte gelten für $x \to x_0 \;\; mit \;\; x_0 \in \mathbb{R} \cup \pm\infty$.

wie bei Folgen

(1) $f(x) \to +\infty \quad \Leftrightarrow \quad -f(x) \to -\infty$

(2) $f(x) \to +\infty,\; g(x) \to t \in \mathbb{R} \cup +\infty \quad \Rightarrow \quad f(x) + g(x) \to +\infty$

(3) $f(x) \to +\infty,\; g(x) \to t \quad \Rightarrow \quad f(x) \cdot g(x) \to \begin{cases} +\infty, & für \;\; 0 < t \le +\infty \\ -\infty, & für \;\; -\infty \le t < 0 \end{cases}$

(4) $g(x) \to \pm\infty \quad \Rightarrow \quad \dfrac{1}{g(x)} \to 0$

(5) $0 < g(x) \to 0 \quad \Rightarrow \quad \dfrac{1}{g(x)} \to +\infty$

(6) $Für \;\; f(x) \to 0,\; g(x) \to +\infty,\; h(x) \to t \;\; gilt \;\; bei \;\; positiver \;\; Basis$

$$f(x)^{h(x)} \to \begin{cases} 0, & für \;\; 0 < t \le +\infty \\ \infty, & für \;\; -\infty \le t < 0 \end{cases}$$

$$g(x)^{h(x)} \to \begin{cases} \infty, & für \;\; 0 < t \le +\infty \\ 0, & für \;\; -\infty \le t < 0 \end{cases}$$

$$h(x)^{g(x)} \to \begin{cases} 0, & für \;\; 0 < t < 1 \\ \infty, & für \;\; 1 < t \le +\infty \end{cases}$$

(7) Die folgenden noch unbestimmten Ausdrücke $\boxed{\dfrac{0}{0},\; \dfrac{\infty}{\infty},\; 0 \cdot \infty,\; \infty - \infty,\; 0^0,\; \infty^0,\; 1^\infty}$ können häufig mit den Regeln von Bernoulli-l´Hospital (siehe Kapitel 6) bestimmt werden.

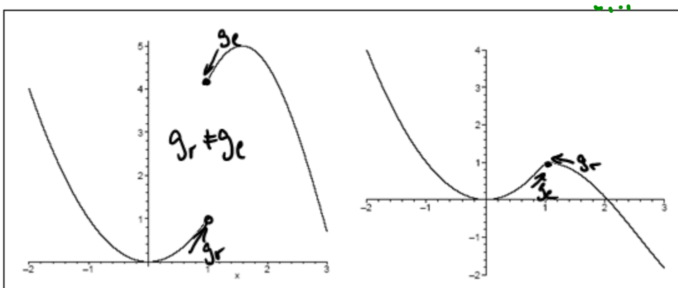
3.4.2 Stetigkeit von Funktionen

Definition 3.16: Stetigkeit (1)

Eine in x_0 und einer gewissen Umgebung von x_0 definierte Funktion $y = f(x)$ heißt **an der Stelle** x_0 **stetig**, wenn der Grenzwert an dieser Stelle vorhanden ist und mit dem Funktionswert übereinstimmt (2)

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)\,.$$ (3)

Eine Funktion, die an jeder Stelle ihres Definitionsbereiches stetig ist, wird als **stetige Funktion** bezeichnet.



Graph einer unstetigen und einer stetigen Funktion

aus www.mathematik.de

3 Bedingungen für die Stetigkeit an einer Stelle x_0:

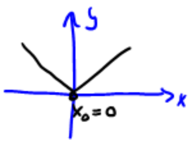
(1) Funktion muss in x_0 definiert sein: $\boxed{x_0 \in D}$

(2) Grenzwert in x_0 vorhanden: $\boxed{g_e = g_r =: g}$

(3) Grenzwert = Funktionswert: $\boxed{g = f(x_0)}$

Beispiel 1:

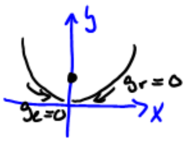
$f(x) = |\,x\,|$



f(x) erfüllt Punkt 1) , Punkt 2), und Punkt (3) und ist daher stetig.

Beispiel 2:

$$f(x) = \begin{cases} x^2, & \text{wenn } x \neq 0 \\ 1, & \text{wenn } x = 0 \end{cases}$$

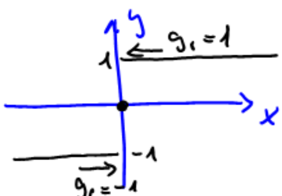


f(x) erfüllt Punkt 1) und Punkt 2), aber Punkt (3) nicht. f(x) ist daher nicht stetig. $D = \mathbb{R}$ $g_r = g_e = 0 = g$ $f(0) = 1 \neq g = 0$

Beispiel 3:

$$\mathrm{sgn}(x) = f(x) = \begin{cases} 1, & \text{wenn } x > 0 \\ 0, & \text{wenn } x = 0 \\ -1, & \text{wenn } x < 0 \end{cases}$$

Vorzeichenfunktion



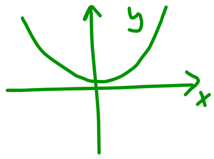
$D = \mathbb{R}$

f(x) erfüllt Punkt 1), aber Punkt 2) ist nicht erfüllt, da kein Grenzwert in x = 0 vorhanden. f(x) ist daher nicht stetig. in $x_0 = 0$

Stetigkeit von Funktionen - Beispiele

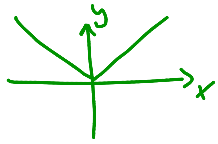
(1) $f(x) = x^2$

- $D = \mathbb{R}$
- stetig auf D

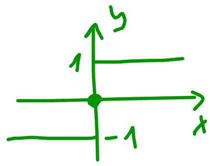


(2) $f(x) = |x| = \begin{cases} x, & x \geq 0 \\ -x, & x < 0 \end{cases}$

- $D = \mathbb{R}$
- stetig auf D

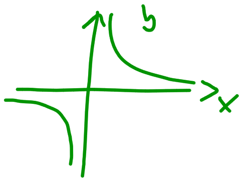


(3) $f(x) = \mathrm{sgn}(x) = \begin{cases} +1, & x > 0 \\ 0, & x = 0 \\ -1, & x < 0 \end{cases}$ (signum)



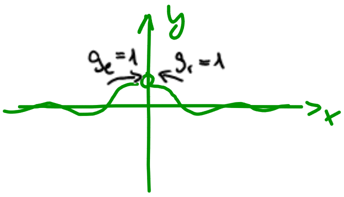
- $D = \mathbb{R}$
- nicht stetig in $x_0 = 0$

(4) $f(x) = \frac{1}{x}$



- $D = \mathbb{R} \setminus \{0\}$
- stetig auf D

(5) $f(x) = \frac{\sin x}{x}$



- $D = \mathbb{R} \setminus \{0\}$
- stetig auf D
- es gibt aber einen Grenzwert in $x_0 = 0$: $g_r = g_l = 1 =: g$

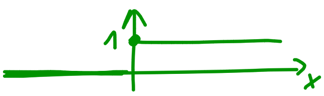
„stetige Ergänzung"

Grenzwert als Funktionswert in der Definitionslücke gesetzt

$f_1(x) = \begin{cases} \frac{\sin x}{x}, & x \neq 0 \\ \boxed{1}, & \underline{x = 0} \end{cases}$ x_0

- $D = \mathbb{R}$
- Stetigkeit: (1) $x_0 \in D$ ✓ ($x_0 = 0$) (2) $g = g_r = g_l = 1$ ✓ (3) $g = f(0) = 1$ ✓

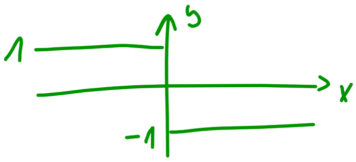
(6) $f(x) = \begin{cases} 1, & x \geq 0 \\ 0, & x < 0 \end{cases}$



- $D = \mathbb{R}$
- nicht stetig in $x_0 = 0$, da Bed. (2) $g_r = g_l$ nicht erfüllt
- stetig in $\mathbb{R} \setminus \{0\}$

in $x_0 = 0$ nicht stetig ergänzbar, da kein Grenzwert in x_0 existiert

(7) $f(x) = \begin{cases} -1, & x > 0 \\ 1, & x < 0 \end{cases}$



- $D = \mathbb{R} \setminus \{0\}$
- stetig auf D

Bezeichnungen der Stetigkeit

Definition 5.17: Unstetigkeitsstellen

(1) Eine in x_0 und einer gewissen Umgebung von x_0 definierte Funktion $y = f(x)$ heißt **an der Stelle x_0 unstetig**, wenn eine der beiden Aussagen zutrifft:

$\neg$ (3) (1) Der Grenzwert von $f(x)$ in x_0 ist vorhanden, aber verschieden von $f(x_0)$.

$\vee$

$\neg$ (2) (2) Der Grenzwert von $f(x)$ in x_0 ist nicht vorhanden.

Bedingungen für Unstetigkeit:

(1) Funktion $f(x)$ in x_0 definiert: $\boxed{x_0 \in D}$

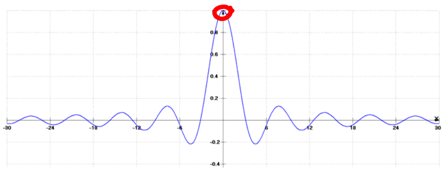
$\neg$(2) Grenzwert nicht vorhanden: $\boxed{g_r \neq g_l \text{ oder } g_r/g_l = \pm\infty}$

oder

$\neg$(3) $g \neq f(x_0)$

Beispiel:

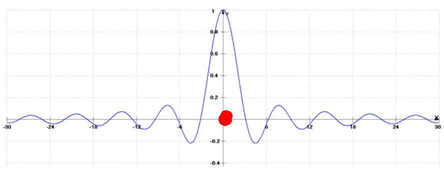
$f(x) = \frac{\sin x}{x}$



weder stetig noch unstetig,
da im Punkt $x_0=0$ nicht definiert,

Beispiel:

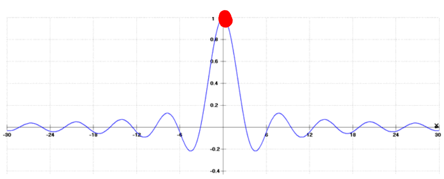
$f(x) = \begin{cases} \frac{\sin x}{x}, & x \neq 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases}$



unstetig im Punkt $x_0=0$,
da Bedingung "Grenzwert ungleich Funktionswert" zutrifft.

Beispiel:

$f(x) = \begin{cases} \frac{\sin x}{x}, & x \neq 0 \\ 1, & x = 0 \end{cases}$



stetig im Punkt $x_0=0$,
da alle Bedingung für Stetigkeit erfüllt sind:

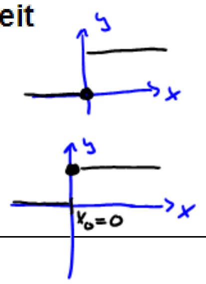
1) x_0 definiert
2) Grenzwert in x_0 existiert
3) Grenzwert gleich Funktionswert in x_0

Definition 5.18: linksseitige/rechtsseitige Stetigkeit

Eine Funktion $y = f(x)$ heißt **an der Stelle** x_0

linksseitig stetig, wenn $\lim\limits_{x \to x_0^-} f(x) = f(x_0)$,

rechtsseitig stetig, wenn $\lim\limits_{x \to x_0^+} f(x) = f(x_0)$.



Definition 5.19: Stetigkeit im Intervall

Eine Funktion $y = f(x)$ heißt **stetig im offenen Intervall** (a,b), wenn $f(x)$ in jedem Punkt des Intervalls stetig ist.

Eine Funktion $y = f(x)$ heißt **stetig im abgeschlossenen Intervall** $[a,b]$, wenn $f(x)$ im offenen Intervall (a,b) stetig ist, sowie in $x = a$ rechtsseitig und in $x = b$ linksseitig stetig ist.

Definition 5.20: stetig ergänzbar

Eine Funktion $y = f(x)$ mit einer Definitionslücke ist **stetig ergänzbar**, wenn für diese Stelle der Grenzwert existiert. Der Grenzwert wird dann als Funktionswert eingesetzt.

Man spricht in diesem Fall auch von einer **„hebbaren" Definitionslücke**.

Beispiele: siehe $\frac{\sin x}{x}$

und gebrochen rationale Funktion

Satz 5.3: Rechenregeln für stetige Funktionen

Sind die Funktionen $f_1(x)$ und $f_2(x)$ bei $x = x_0$ stetig, so sind auch die folgenden zusammengesetzten Funktionen im Punkt $x = x_0$ stetig:

(1) $C_1 \cdot f_1(x) \pm C_2 \cdot f_2(x)$ mit konstanten $C_1, C_2 \in \mathbb{R}$

(2) $f_1(x) \cdot f_2(x)$

(3) $\dfrac{f_1(x)}{f_2(x)}$ mit $f_2(x_0) \neq 0$

(4) $f_1(x)^{f_2(x)}$ mit $f_1(x_0) > 0$

Zusammenfassung: Grenzwerte und Stetigkeit von Funktionen

(1) Grenzwert in x_0

Grenzwert existiert in x_0,

wenn g_l und g_r existieren (d.h. $\neq \pm\infty$)

und $g_r = g_l \underbrace{=: g}_{\text{Grenzwert wird definiert mit diesem Wert}}$

(2) Stetigkeit in x_0

(1) $x_0 \in D$

(2) $g := g_l = g_r$

(3) $g = f(x_0)$

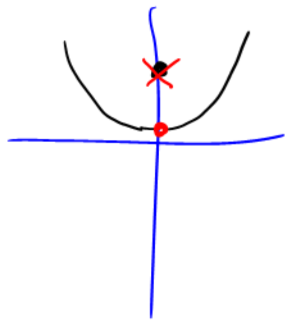
(3) Unstetigkeit in x_0

(1) $x_0 \in D$

$\neg$ (2) $g_l \neq g_r$ oder g_l bzw. g_r existiert nicht

$\neg$ (3) $g \neq f(x_0)$

(4) Stetige Ergänzbarkeit in x_0



- in x_0 definiert oder auch nicht
- Grenzwert in x_0 existiert: $g_r = g_l$
- an der Stelle x_0 wird Funktionswert $f(x)$ durch Grenzwert ersetzt: $f(x_0) := g$

  (bei gebrochen rationalen Funktion entspricht dieses dem Herauskürzen des Linearfaktors)

(5) Bemerkung

In einer Definitionslücke ist die Funktion weder stetig noch unstetig.