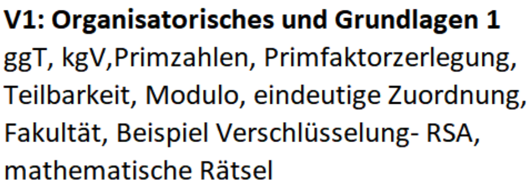
Vorlesung 2 - Grundlagen 2

Montag 26.09.2022 3.+4. Viertel

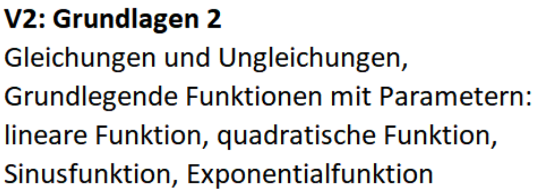
Inhalt:

- **aus Grundlagen 1**
  - Teiler, Vielfache, modulo
  - ggt/ kgV
  - Primzahlenfaktorzerlegung
  - Euklidischer Algorithmus



V1: Organisatorisches und Grundlagen 1
ggT, kgV,Primzahlen, Primfaktorzerlegung, Teilbarkeit, Modulo, eindeutige Zuordnung, Fakultät, Beispiel Verschlüsselung- RSA, mathematische Rätsel

- **Grundlagen 2**
  - Gleichungen und Ungleichungen
  - Grundlegende Funktionen mit Parametern



V2: Grundlagen 2
Gleichungen und Ungleichungen, Grundlegende Funktionen mit Parametern: lineare Funktion, quadratische Funktion, Sinusfunktion, Exponentialfunktion

RSA-Verschlüsselung

Empfänger

Person A

Sender

Person B

1) Schlüsselbildung

Wahl von Primzahlen

pA* = *23

qA* = *13

(in der Realität mindestens 100 Stellen)

Berechnung

nA = pA * qA = 23 * 13 = **299**

φ (nA) = (pA – 1) (qA – 1) = 22 * 12 = **264**

Wahl

eA* = *5

(gewählt mit den Bedingungen:

1 < eA < 264∧ ggT(eA,264) = 1)

Berechnung

dA so, dass eA * dA mod φ (nA) = 1

(5 * dA) mod 264 = 1 ⇒ **dA = 53**

Schlüssel

öffentlicher Schlüssel: **(eA, nA)=(5, 299)**

privater Schlüssel : **dA = 53**

Mathematische Begriffe

- Primzahlen
- Teiler und Modulo
- ggT und teilerfremd

Schlüssel-Berechnung

2) Schlüsselverteilung

öffentlicher Schlüssel: **(eA, nA)=(5, 299)** ⇨

Schlüssel-Übermittlung

3) Verschlüsselung

Verschlüsselung der Nachricht

Nachricht m = ***99***

Formel: $c = m^{eA} \bmod nA$

$c = 99^5 \bmod 299 = 86$

verschlüsselte Nachricht c = ***86***

Berechnung der verschlüsselten Nachricht

⇦ verschlüsselte Nachricht c wird an A übertragen

Nachrichten-Übermittlung

4) Entschlüsselung

Verwendung des

privaten Schlüssel : **dA = 53**

und des

öffentlichen Schlüssel: **(eA, nA)=(5, 299)**

$m = c^{dA} \bmod nA$

$m = 86^{53} \bmod 299 = 99$

entschlüsselte Meldung ist: m = 99

Berechnung der entschlüsselten Nachricht

Definition 1.1: Teiler und Vielfaches

Eine Zahl $\overset{28}{a} \in \mathbb{Z}$ heißt **durch** $\overset{7}{b} \in \mathbb{Z}, b \neq 0$ **teilbar**,
wenn es eine ganze Zahl $\overset{4}{q} \in \mathbb{Z}$ gibt, so dass $\overset{28=7\cdot 4}{a = b \cdot q}$ ist.

Diese Eigenschaft kann gesprochen über verschiedene Sätze ausgedrückt werden:

„in Zeichen $b \mid a$, gesprochen b teilt a“

„ b ist ein Teiler von a .“

„ a ist ein Vielfaches von b “

„Die Zahl b passt genau q - mal in die Zahl a.“

Beispiel:

28 *ist durch* 7 *teilbar*

7 *teilt* 28, *geschrieben* $7 \mid 28$ → 7 ist ein Teiler von 28 → 28 ist ein Vielfaches von 7

$28 = 7 \cdot 4$ "7 *passt genau* 4 – *mal in die* 28"

Satz 1.1: Teilbarkeitsregeln

1. Gilt $c \mid b$ und $b \mid a$, so gilt auch $c \mid a$:
2. Gilt $b_1 \mid a_1$ *und* $b_2 \mid a_2$, so gilt auch $b_1 b_2 \mid a_1 a_2$

Beispiel:

1. $3 \mid \underset{2\cdot 3}{6}$ *und* $6 \mid \underset{3\cdot 6}{18} \Rightarrow 3 \mid \underset{(2\cdot 3)\cdot 3 = 6\cdot 3}{18}$
2. $3 \mid \boxed{6}$ *und* $4 \mid \boxed{8} \Rightarrow \underset{3\cdot 4 \mid 6\cdot 8}{12 \mid 48}$

Definition 1.2: Division mit Rest

Für zwei ganze Zahlen $a, b \in \mathbb{Z}$ mit $b \neq 0$ gibt es genau eine Darstellung

$a = b\,q + \boxed{r}$ mit $q, r \in \mathbb{Z}$ und $0 \le r < b$, *falls* $b > 0$

und $0 \le r < -b$, *falls* $b < 0$.

a heißt Dividend, b Divisor
und r Rest der ganzzahligen Division von a durch b.

Definition 1.3: modulo, Rest der ganzzahligen Division

$a \bmod b$ ist der Rest, den a bei der Division durch b lässt,

d.h. wenn $a = b \cdot q + r$ mit $q, r \in \mathbb{Z}$ und $0 \le r < b$

so ist $a \bmod b = r$.

im Moment ℕ natürliche Zahlen

Beispiel:

$9 \bmod 2 = 1 \;\Leftrightarrow 9 = 2 \cdot 4 + 1$

1 ist der Rest der ganzzahligen Division von 9 durch 2.

weiteres Beispiel :

$28 = 7 \cdot 4 + 0$

$29 = 7 \cdot 4 + \boxed{1}$

$30 = 7 \cdot 4 + 2$

$31 = 7 \cdot 4 + 3$

$32 = 7 \cdot 4 + 4$

$33 = 7 \cdot 4 + 5$

$34 = 7 \cdot 4 + 6$

$35 = 7 \cdot 5 + 0$

$30 \bmod 7 = 2$

$31 \bmod 7 = 3$

Rest 0, ... 6
bei einer ganzzahligen
Division durch 7

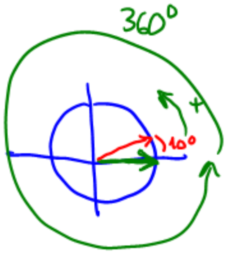
Bemerkung

Die Reste einer ganzzahligen Division durch b liegen zwischen 0, 1, ..., (b-1).

Beispiel

Vektor mit Winkel 730° im Kreis skizzieren

$730° = \underbrace{360° \cdot 2}_{\text{Umdrehungen}} + \underbrace{10°}_{\text{Lage}}$



Teilbarkeitsregeln

https://www.gut-erklaert.de/mathematik/teilbarkeitsregeln-mathematik.html

Teilbar durch 2:

Eine Zahl ist durch 2 teilbar wenn sie eine gerade Zahl ist.

↑ letzte Ziffer 0,2,4,6,8

Teilbarbarkeit durch 3:

Eine Zahl ist durch 3 teilbar, wenn ihre Quersumme durch 3 teilbar ist.

Teilbar durch 4:

Eine Zahl ist durch 4 teilbar, wenn die letzten beiden Stellen der Zahl durch 4 teilbar sind. $12\boxed{16}$

Teilbar durch 5:

Eine Zahl ist durch 5 teilbar, wenn die letzte Stelle eine 0 oder 5 ist.

Teilbarkeit durch 6:

Eine Zahl ist durch 6 teilbar wenn diese durch 2 und durch 3 teilbar sind.

Teilen durch 7:

Es gibt viele Teilbarkeitsregeln für die Zahl 7. Keine davon ist ganz einfach. Folgende Variante halte ich für am leichtesten und rechne dazu ein Beispiel vor

Beispiel mit 2268:

Wir teilen die Zahl immer in zwei Teile auf. Die letzte Ziffer (rot) und einfach alles was davor ist (blau).

- 161

Wir multiplizieren die letzte Stelle mit 2:

- 1 · 2 = 2

Von dem vorderen Teil der Zahl (16) ziehen wir dieses Ergebnis (2) ab.

- 16 - 2 = 14

Ist dieses Ergebnis (14) durch 7 ohne Rest teilbar ist auch 161 ohne Rest durch 7 teilbar. Dies ist hier der Fall.

Teilbarkeit durch 8:

$1\boxed{104}$

Eine Zahl ist durch 8 teilbar, wenn die letzten drei Stellen durch 8 teilbar sind.

Teilbar durch 9:

Eine Zahl ist durch 9 teilbar, wenn die Quersumme durch 9 teilbar ist.

Teilbar durch 10, 100, 1000:

Eine Zahl ist durch 10 teilbar, wenn diese auf 0 endet.

Größter gemeinsamer Teiler

Der **größte gemeinsamer Teiler**, kurz **ggT**, ist die größte natürliche Zahl, die zwei oder mehrere ganze Zahlen ohne Rest teilt. Nachfolgend sind einige Definitionen dargestellt, die diese Eigenschaft formal beschreiben.

Definition 1.4: größter gemeinsamer Teiler ggT

Sind $a,b,d \in \mathbb{Z}$ und gilt $d \mid a$ und $d \mid b$,
so heißt d **gemeinsamer Teiler** von a und b.

Wenn für jeden anderen gemeinsamen Teiler c von a und b gilt: $c \mid d$,
so heißt d **größter gemeinsamer Teiler** von a und b
und wird mit $d = ggt(a,b)$ bezeichnet.

Beispiele: 2|12 und 2|18 sowie 3|12 und 3|18

(1) ggT(12,18)=6, denn $\overbrace{6 \mid 12 \text{ und } 6 \mid 18}^{\text{und}}$ und größere Teiler d sind nicht vorhanden
2 und 3 sind weitere Teiler von 12 und 18, aber beides sind kleinere Zahlen und sind als Faktor in der 6 enthalten, denn $2 \mid 6$ und $3 \mid 6$.
Es gibt keine größere Zahl als 6, die sowohl 12 als auch 18 teilt.

(2) ggT(100,20)=20,

(3) ggT(-4,14)=2

(4) ggT(3,8)=1

Beispiel: ggT $(\underset{3\cdot2\cdot2}{12}, \underset{5\cdot7}{35}) = 1$

Bemerkung:

- Ist der ggT(a,b)=1, so heißen die Zahlen teilerfremd.
- Ist der ggT(a,b)=b, so ist a ein Vielfaches von b

Euklidischer Algorithmus

Satz 1.2: Grundlage für den Euklidischen Algorithmus

Seien *a* und *b* ganze Zahlen mit $a \neq 0$. Seien *q* und *r* Zahlen, für die gilt: $b = q \cdot a + r$.

Dann gilt ***ggT(b,a)=ggT(a,r)***.

Beispiel: $ggT(105, 63) = ggT(63, 42)$

$105 = 63 \cdot 1 + 42$

Euklidischer Algorithmus zur Berechnung des ggT:

Der ggT kann mittels des Euklidischen Algorithmus berechnet werden.

Eingangsgrößen sind zwei natürliche Zahlen *a* und *b*. Bei der Berechnung verfährt man nach Euklid wie folgt:

1. setze *m* = *a*; *n* = *b*
2. ist *m* < *n*, so vertausche *m* und *n*
3. berechne *r* mit $m = q \cdot n + r$ (d.h. r ist Rest der ganzzahligen Division)
4. setze *m* = *n*, *n* = *r*
5. ist $r \neq 0$ fahre fort mit Schritt 2 , ist *r=0*, dann ist *m* der gesuchte ggT

Nach Ablauf des Verfahrens hat man **mit *m* den ggT von *a* und *b* gefunden**.

Beispiel des Euklidischen Algorithmus:

„Wie häufig passt es hinein"

Bestimmung des ggT von $a = 105$ *und* $b = 63$

Dividend	Teiler		Rest
m	n	q	r
105	63		
105 =	63 ·	1 +	42
63 =	42 ·	1 +	21
42 =	21 ·	2	0
21			

→ Ende

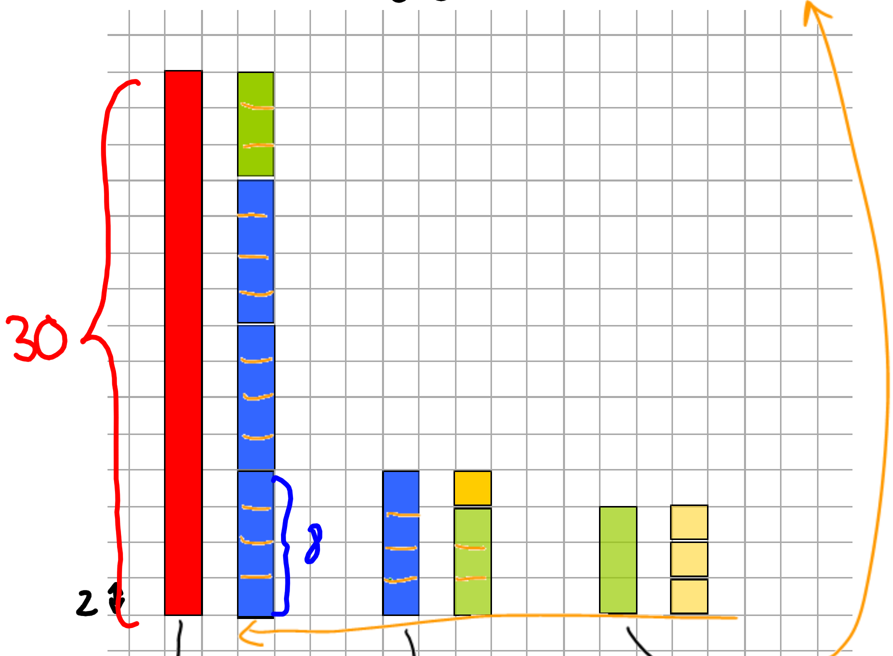
ggT(105,63)

21 *ist der ggT von* 63 *und* 105

Erläuterungen zum Euklidischen Algorithmus

Warum funktioniert das so?

Gesucht ggT (30, 8) = 2



$30 = 3 \cdot 8 + 6$ $8 = 1 \cdot 6 + 2$ $6 = 3 \cdot 2 + \boxed{0}$

Dividend

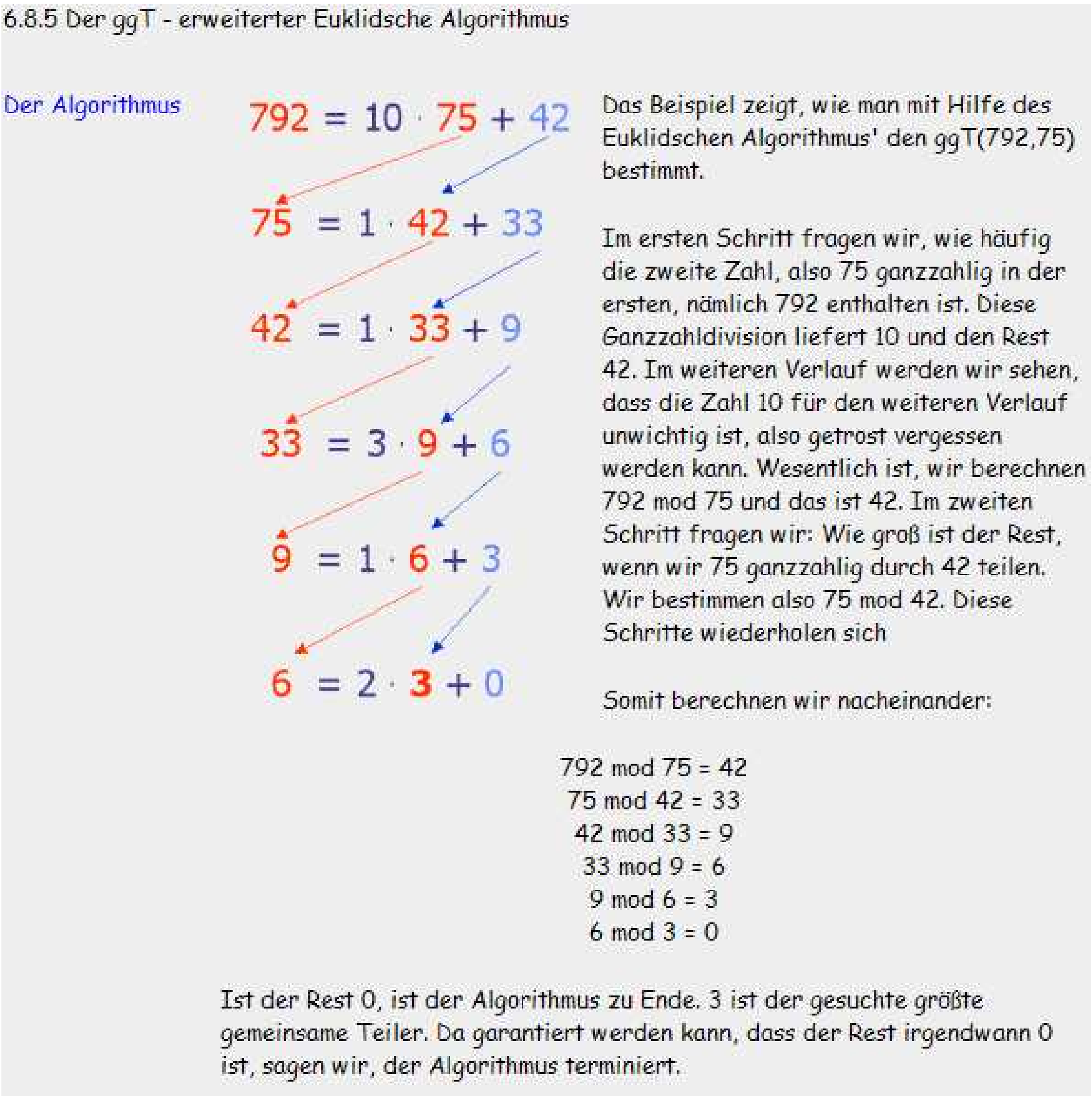
Teiler wird Dividend

Rest wird neuer Teiler

Rest wird neuer Teiler

Algorithmus beendet, da Dividend ein Vielfaches des Teilers ist

Algorithmus zur Berechnung des größten gemeinsamen Teilers(ggT) zweier Zahlen



6.8.5 Der ggT - erweiterter Euklidsche Algorithmus

Der Algorithmus

$$792 = 10 \cdot 75 + 42$$
$$75 = 1 \cdot 42 + 33$$
$$42 = 1 \cdot 33 + 9$$
$$33 = 3 \cdot 9 + 6$$
$$9 = 1 \cdot 6 + 3$$
$$6 = 2 \cdot 3 + 0$$

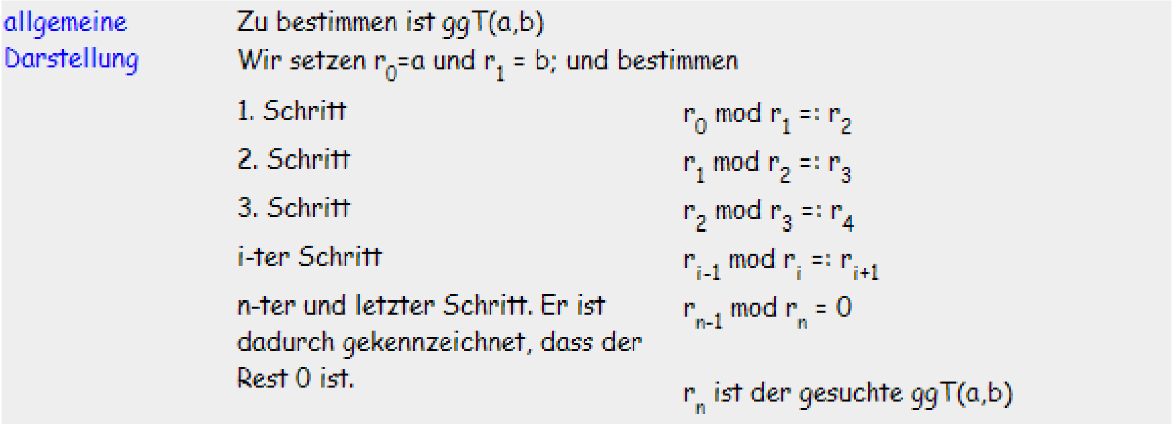
Das Beispiel zeigt, wie man mit Hilfe des Euklidschen Algorithmus' den ggT(792,75) bestimmt.

Im ersten Schritt fragen wir, wie häufig die zweite Zahl, also 75 ganzzahlig in der ersten, nämlich 792 enthalten ist. Diese Ganzzahldivision liefert 10 und den Rest 42. Im weiteren Verlauf werden wir sehen, dass die Zahl 10 für den weiteren Verlauf unwichtig ist, also getrost vergessen werden kann. Wesentlich ist, wir berechnen 792 mod 75 und das ist 42. Im zweiten Schritt fragen wir: Wie groß ist der Rest, wenn wir 75 ganzzahlig durch 42 teilen. Wir bestimmen also 75 mod 42. Diese Schritte wiederholen sich

Somit berechnen wir nacheinander:

792 mod 75 = 42
75 mod 42 = 33
42 mod 33 = 9
33 mod 9 = 6
9 mod 6 = 3
6 mod 3 = 0

Ist der Rest 0, ist der Algorithmus zu Ende. 3 ist der gesuchte größte gemeinsame Teiler. Da garantiert werden kann, dass der Rest irgendwann 0 ist, sagen wir, der Algorithmus terminiert.



allgemeine Darstellung

Zu bestimmen ist ggT(a,b)
Wir setzen r_0=a und r_1 = b; und bestimmen

1. Schritt	r_0 mod r_1 =: r_2
2. Schritt	r_1 mod r_2 =: r_3
3. Schritt	r_2 mod r_3 =: r_4
i-ter Schritt	r_{i-1} mod r_i =: r_{i+1}
n-ter und letzter Schritt. Er ist dadurch gekennzeichnet, dass der Rest 0 ist.	r_{n-1} mod r_n = 0 r_n ist der gesuchte ggT(a,b)

Aufgabe

$ggT(969, 627) =$

mit dem Euklidischen Algorithmus

m	n	q	r
969	627		

$969 = 627 \cdot 1 + 342$

$627 = 342 \cdot 1 + 285$

$342 = 285 \cdot 1 + 57$

$285 = \underbrace{\boxed{57}}_{} \cdot 5 + \boxed{0}$ Ende

$ggT(969, 627) = 57$

Kleinstes gemeinsames Vielfaches

Das **kleinste gemeinsame Vielfache**, kurz **kgV**, ist die kleinste natürliche Zahl, die zwei oder mehrere ganze Zahlen ohne Rest teilt. Nachfolgend sind einige Definitionen dargestellt, die diese Eigenschaft formal beschreiben.

Definition 1.5: kleinstes gemeinsames Vielfaches kgV

Sind $a, b, d \in \mathbb{Z}$

Ein Zahl $d \in \mathbb{Z}$ heißt **kleinstes gemeinsames Vielfaches** von a und b, bezeichnet $kgV(a,b)$ wenn folgende Bedingungen erfüllt sind:

(1) Sowohl a als auch von b sind Teiler von d : $a \mid d$ und $b \mid d$

(2) Es gibt keine kleinere Zahl, für die die Eigenschaft (1) erfüllt ist.

Beispiel

$$\frac{1 \cdot 3}{12 \cdot 3} + \frac{1 \cdot 2}{18 \cdot 2} = \cancel{\frac{18 + 12}{12 \cdot 18}}$$

$$= \frac{5}{\underbrace{36}_{kgV}} \leftarrow$$

36 ist kgV(12,18)
mit Eigenschaft 12|36 und 18|36
und ist kleinste Zahl

1.4.3 Primzahlen und Primfaktorzerlegung

Definition 1.6: Primzahl : 2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29, ...

Eine natürliche Zahl p wird eine Primzahl genannt, falls p>1 ist und 1 und p die einzigen natürlichen Zahlen sind, die p teilen.

Definition 1.7: Primfaktorzerlegung

Unter der **Primfaktorzerlegung**, auch als **Zerlegung in Primfaktoren** bezeichnet, versteht man die Darstellung einer natürlichen Zahl $a \in \mathbb{N}$ als Produkt von Primzahlen

$$a = p_1 \cdot p_2 \cdot p_3 \cdot \ldots \cdot p_n \quad \text{mit} \quad Primzahlen \;\; p_1, p_2, p_3, \ldots, p_n \, , n \in \mathbb{N}$$

Die in der Primfaktorzerlegung einer Zahl auftretenden Primzahlen $p_1, p_2, p_3, \ldots, p_n$ nennt man die **Primfaktoren** dieser Zahl.

Beispiele:

600 300 150 75 25 5

$$\overset{2^3 \cdot 2}{}$$

1200 = 2 · 2 · 2 · 2 · 3 · 5 · 5 = $2^4 \cdot 3 \cdot 5^2$ mit Primfaktoren 2, 3, 5

6936 = 2 · 2 · 2 · 3 · 17 · 17 = $2^3 \cdot 3 \cdot 17^2$ mit Primfaktoren 2, 3, 17

ggT(1200, 6936) = 24 (= 2 · 2 · 2 · 3) (= $2^3 \cdot 3$)

Satz 1.3: Fundamentalsatz der Arithmetik

Der **Fundamentalsatz der Arithmetik** besagt, dass jede natürliche Zahl eine Primfaktorzerlegung besitzt und dass diese, bis auf die Reihenfolge der Faktoren, eindeutig ist.

!

kgV(1200, 6936) = $2^4 \cdot 3 \cdot 5^2 \cdot 17^2$ = 346.800

Satz 1.4: Primfaktorzerlegung zur Berechnung des ggT und des kgV

Den größten gemeinsamen Teiler ggT und auch das kleinste gemeinsame Vielfache kgV kann man auch aus der Primfaktorzerlegung von *a* und *b* bestimmen.

Für den **ggT(a,b)** verwendet man **alle Primfaktoren, die *a* und *b* gemeinsam haben**, und multipliziert diese. („Schnittmenge der Primfaktoren“)

Kommen Faktoren mit einem Exponenten vor, wird jeweils der kleinste Exponent genommen.

Für das **kgV(a,b)** wird **jeder Primfaktor mit dem jeweils höchsten Exponenten** verwendet, und anschließend multipliziert. („Obermenge der Primfaktoren“)

Kommen Faktoren mit einem Exponenten vor, wird jeweils der größteExponent genommen.

Beispiel:

$a = 63 = 3*3*7$

$b = 105 = 3*5*7$

ggT $(63, 105) = 3*7 = 21$

kgV $(63, 105) = 3*3*5*7 = 315$

Satz 1.5: ggT und kgV

Für zwei Zahlen $a,b \in \mathbb{N}$ gilt der folgende Zusammenhang für den größten gemeinsamen Teiler ggT(a,b) und kgV(a,b):

$$kgV(a,b) = \frac{a \cdot b}{ggT(a,b)}$$

Beispiel:

$a = 63 = 3*3*7$

$b = 105 = 3*5*7$

ggT $(63, 105) = 3*7 = 21$

kgV $(63, 105) = \frac{63 \cdot 105}{21} = \frac{\cancel{3}*3*\cancel{7} \cdot 3*5*7}{\cancel{3}*\cancel{7}} = 315$

Weiteres Beispiel

$1200 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 5 = 2^4 \cdot 3 \cdot 5^2$

$6936 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 17 \cdot 17 = 2^3 \cdot 3 \cdot 17^2$

Aufgaben

1) ggT(270,6)

kgV(270,6) } zu Hause

Primfaktorzerlegung

$270 = 2\cdot 135 = 2\cdot 3\cdot 45 = 2\cdot 3\cdot 3\cdot 15 = \underline{2}\cdot\underline{\underline{3}\cdot 3\cdot 3}\cdot\underline{5}$

$60 = 2\cdot 30 = 2\cdot 2\cdot 15 = \underline{\underline{2}\cdot 2}\cdot\underline{3}\cdot\underline{\underline{5}}$

ggT(270,60) = 30

kgV(270,60)
= 2·2·3·3·3·5 = 540

2) Digitale Vorlesungsaufgaben } zu Hause

Grundlagen 2

(1) Gleichungen
  Äquivalenzumformungen

(2) Quadratische Funktion
  Nullstellen
  Linearfaktorzerlegung
  Polynomdivision

(3) Grundlegende Funktionen mit Parametern
  Lineare Funktion/Gerade mit Parametern
  Quadratische Funktion mit Parametern
  Sinus-Funktion mit Parametern
  e-Funktion " "

(4) Ungleichungen

Gleichungen

Beispiel:

3(x-4) = 15

$3x-12=15$ Distributivgesetz

$-12+3x=15$ Kommutativgesetz

$3x=15+12$

$x=9$

1. Distributivgesetz

$a\cdot(b+c) = a\cdot b + a\cdot c$

→ Ausmultiplizieren

← Ausklammern

Kommutativgesetz

$a+b=b+a$ ~~$a-b=b-a$~~

$a\cdot b=b\cdot a$

Äquivalenzumformungen zum Lösen von Gleichungen

Viele Lösungsverfahren für Gleichungen beruhen auf Umformungen der Gleichungsterme, die die Lösungsmenge aber nicht verändern dürfen, genannt **Äquivalenzumformungen**.

Äquivalenzumformungen sind unter anderm :

→ **Ersetzen eines Terms durch einen äquivalenten Ausdruck** ,

z.B. gültige Rechengesetze wie das Distributivgesetz, Kommutativgesetz, Assoziativgesetz

z.B. $3(x-4)=15 \quad \Leftrightarrow \quad 3x-12=15$

→ **Addition und Subtraktion gleicher Zahlen oder Terme auf beiden Seiten**.

z.B. $3x-12=15 \quad \Leftrightarrow \quad 3x=27$

$8x=2x+3 \quad \Leftrightarrow \quad 6x=3$

→ **Multiplikation und Division mit derselben von 0 verschiedenen Zahl** oder demselben Term, der nie den Wert 0 annimmt, auf beiden Seiten der Gleichung,

z.B. $3x=27 \quad \Leftrightarrow \quad x=9$

→ **Quadratwurzelziehen auf beiden Seiten**, wobei disjunktive Aussageformen entstehen,

z.B. $x^2=9 \quad \Leftrightarrow \quad |x|=3 \quad \Leftrightarrow \quad x=3 \vee x=-3$

Erläuterung:

- $x^2=9 \Leftrightarrow x=\pm\sqrt{9} = \pm 3 \Leftrightarrow x=+3 \overset{\vee}{\text{oder}} x=-3$ „schnelle Weg"
- $x^2=9 \Leftrightarrow |x|=\sqrt{9} \Rightarrow |x|=3 \Leftrightarrow x=3$ oder $x=-3$ „offizieller Weg"

$\overline{|\cdot|}$ $\overline{\sqrt{\ }}$

$L=\{-3,3\}$

! Das Quadrieren beider Gleichungsseiten ist keine Äquivalenzumformung.

z.B. Die Lösungsmenge der Gleichung $x=-x$ ist durch $L=\{0\}$ gegeben.

Die Lösungsmenge der quadrierten Gleichung $x^2=(-x)^2$ ist $L=\mathbb{R}$.

Durch Quadrierung können also Lösungen hinzukommen. Daher ist stets bei den durch Quadrierung entstandenen Lösungskandidaten die tatsächliche Lösung durch Probe des ursprünglichen Problems zu bestimmen.

Dieses gilt ebenso für die Lösung von Ungleichungen durch Quadrieren.

Sind nicht äquivalent, da Lösungsmenge verändert wurde

Beispiel: $x=3 \overset{\lightning}{\Rightarrow} x^2=3^2 \Leftrightarrow x^2=9 \Leftrightarrow x=3$ oder $x=-3$

Quadrieren beider Gleichungsseiten ist keine Äquivalenzumformung

es ist eine Lösung dazu gekommen

Beispiel: Lösen Quadratischer Gleichungen

$$x^2 + x - 6 = -x + 2$$

$$\Leftrightarrow \quad \underbrace{x^2 + 2x - 8}_{f(x)} = 0 \qquad p=2 \quad q=-8$$

Nullstellenbestimmung von quadratischen Polynomen

... mit pq-Formel

- normalisierte Normalform

$1 \cdot x^2 + px + q = 0$

$x_{1|2} = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{\frac{p^2}{4} - q}$

Beispiel:

$x_{1|2} = -\frac{2}{2} \pm \sqrt{\frac{2^2}{4} - (-8)}$

$= -1 \pm \sqrt{1+8}$

$= -1 \pm 3$

$\boxed{x_1 = +2} \vee \boxed{x_2 = -4}$

$L = \{\boxed{2, -4}\}$

Linearfaktorzerlegung

$f(x) = (x - \overset{\text{Nullstelle1}}{x_1}) \cdot (x - \overset{\text{Nullstelle2}}{x_2})$

$= (x-2)(x-(-4))$

$= (x-2)(x+4)$

... mit quadratischer Ergänzung

- normalisierte Normalform
- $(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$

$\longleftarrow$

Beispiel

$x^2 + 2x - 8 = 0$

$\underbrace{(x+1)^2}_{x^2+2x+1} - 1 - 8 = 0 \quad \Rightarrow \underbrace{(x+1)^2 - 9}_{f(x)} = 0$

Scheitelpunkt

$(x - \overset{x_s}{(-1)}) \quad y_s$

$(x+1)^2 = 9$

$\Leftrightarrow |x+1| = 3$

$\Rightarrow x+1 = 3 \vee x+1 = -3$

$\Rightarrow x = 2 \vee x = -4$

$L = \{2, -4\}$

3 verschiedene Schreibweisen der gleichen Funktion

$f(x) = x^2 + 2x - 8$

$f(x) = (x-2)(x+4)$ „Nullstellen erkennbar"

$f(x) = (x+1)^2 - 9$ „Scheitelpunkt erkennbar"

Beispiel: Lösen Quadratischer Gleichungen

$$x^2 + x - 6 = -x + 2$$

$$\Leftrightarrow \quad x^2 + 2x - 8 = 0$$

oder Mitternachtsformel wenn

$\boxed{a}x^2+px-q = 0$

Nullstellenbestimmung von quadratischen Polynomen

... mit pq-Formel

- Voraussetzung: normierte Normalform, d.h. Koeffizient vor x² ist gleich 1

Lösung mit pq – Formel

$$x^2 + 2x - 8 = 0$$

$$\Leftrightarrow \quad x_{1/2} = -\frac{2}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{2}{2}\right)^2 - (-8)}$$

$$\Leftrightarrow \quad x_{1/2} = -1 \pm \sqrt{9}$$

$$\Leftrightarrow \quad x_{1/2} = -1 \pm 3$$

$$\Leftrightarrow \quad \boxed{x = 2 \quad \vee \quad x = -4}$$

... mit quadratischer Ergänzung

- Voraussetzung: normierte Normalform, d.h. Faktor vor x² ist gleich 1
- Rückwärtsverwendug der binomischen Formel $(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$

Lösung mit quadratischer Ergänzung

$$x^2 + 2x - 8 = 0$$

$$\Leftrightarrow \quad x^2 + 2x = 8$$

$$\Leftrightarrow \quad (x + \frac{2}{2})^2 - 1 = 8$$

$$\Leftrightarrow \quad (x+1)^2 = 9$$

$$\Leftrightarrow \quad x + 1 = 3 \quad \vee \quad x + 1 = -3$$

$$\Leftrightarrow \quad x = 2 \quad \vee \quad x = -4$$

3 verschiedene Schreibweisen der gleichen Funktion

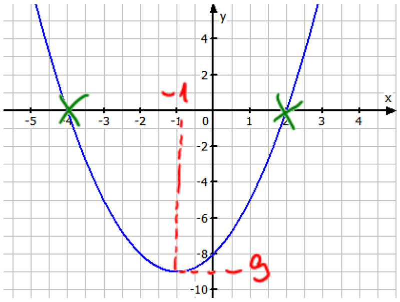
$f(x) = x^2+2x-8$

$\boxed{f(x) = (x-2)(x+4)}$ „Nullstellen erkennbar"

$f(x) = (x+1)^2-9$ „Scheitelpunkt erkennbar"

$x_s = -1$ $\quad y_s$

$(x-\underbrace{(-1)}_{x_s})$



Linearfaktorzerlegung des quadratischen Polynoms

- Linearfaktoren sind jeweils: (x - Nullstelle)
- einzelne Linearfaktoren werden multipliziert

Beispiel: $p(x) = x^2 + 2x - 8 = (x-2)(x+4)$

Aufgabe: Lösung einer Quadratischen Gleichung $x^2 - x - 6 = 0$

mit pq-Formel

$$x^2 \underbrace{- x}_{p} \underbrace{- 6}_{q} = 0$$

$$x_{1/2} = -\left(\frac{-1}{2}\right) \pm \sqrt{\frac{1}{4} - (-6)}$$

$$= \frac{1}{2} \pm \sqrt{\frac{1}{4} + \frac{24}{4}}$$

$$= \frac{1}{2} \pm \sqrt{\frac{25}{4}}$$

$$= \frac{1}{2} \pm \frac{5}{2} \Rightarrow x_1 = 3 \vee x_2 = -2 \text{ Nullstellen}$$

Linearfaktorzerlegung

$$p(x) = x^2 - x - 6 = (x-3)(x-(-2))$$

$$= (x-3)(x+2) \qquad \text{Nullstellen } x_1 = 3,\ x_2 = -2$$

---

oder mit quadratischer Ergänzung

$$x^2 - x - 6 = 0$$

$$\Rightarrow \boxed{x^2 - 1 \cdot x} = 6$$

$$\Rightarrow \overset{= x^2 - x + \frac{1}{4}}{\boxed{\left(x - \frac{1}{2}\right)^2}} - \frac{1}{4} = 6$$

$$\left(x - \frac{1}{2}\right)^2 = \frac{25}{4} \rightarrow \left(x - \frac{1}{2}\right)^2 - \frac{25}{4} = 0$$

$$x - \frac{1}{2} = \pm \frac{5}{2} \Rightarrow x_1 = 3 \vee x_2 = -2 \text{ Nullstellen}$$

- **Scheitelpunktform**

$$p(x) = \Big(x - \underset{x_s}{\boxed{\tfrac{1}{2}}}\Big)^2 \underbrace{- \frac{25}{4}}_{y_s} \quad \text{Scheitelpunkt}$$

Visualisierung

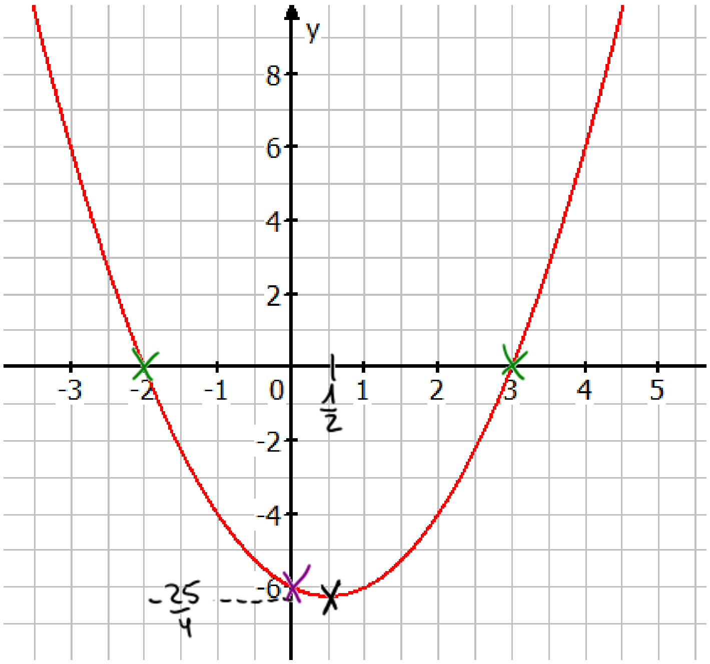
nach oben geöffnet, da positive Wert

$p(x) = x^2 - x \underline{- 6}$ y-Achsendurchgang bei $x = 0$

$(x-\textcircled{3})\ x-(\textcircled{-2}))$

$= (x-3)(x+2)$ → Nullstellen

$= (x-\underbrace{\tfrac{1}{2}}_{x_s})^2 \underbrace{- \frac{25}{4}}_{y_s}$ Scheitelpunkt



I. Gleichungen

Gleichungen sind spezielle Aussageformen, bei denen i.a. zwei Terme gleichgesetzt werden, was für verschiedene Belegungen von Variablen falsche oder wahre Aussagen ergibt.

Rechenhinweise zur Lösung von Gleichungen:

(1) Lösung von quadratischen Gleichungen

pq-Formel
oder quadratische Ergänzung

$$x^2 + px + q = 0$$

$$\text{Lösung in } \mathbb{R}: \; x_{1/2} = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{\underbrace{\frac{p^2}{4} - q}_{\geq 0}}, \; \text{wenn } \frac{p^2}{4} - q \geq 0$$

$$\text{Lösung in } \mathbb{C}: \; x_{1/2} = -\frac{p}{2} \pm i\sqrt{q - \frac{p^2}{4}}, \; \text{wenn } \frac{p^2}{4} - q < 0$$

später
Abschnitt komplexe
Zahlen

x_1 und x_2 sind zueinander konjugiert komplex $(x_1 = x_2{}^*, x_2 = x_1{}^*)$

(2) Lösung von Gleichungen höherer Ordnung

→ Die Darstellung einer Gleichung in der Form

$$p(x) = x^n + a_{n-1}x^{n-1} + a_{n-2}x^{n-2} + \ldots + a_1 x + a_0$$

heißt **Normalform eines Polynoms n-ten Grades**.

$n=2: \; p(x) = x^2 + \overset{p}{\overset{\downarrow}{a_1}}x + \overset{q}{\overset{\downarrow}{a_0}}$ Funktion
Parabel | Polynom 2. Grades | quadratische

$n=3: \; p(x) = x^3 + a_2 x^2 + a_1 x^1 + a_0$
Polynom 3. Grades | Kubische Funktion

→ Hat ein Polynom *n*-ten Grades die Nullstellen $x_1, x_2, \ldots, x_n$, dann lässt sich die Gleichung in der Form

$$p(x) = (x - x_1) \cdot (x - x_2) \cdot \ldots \cdot (x - x_n)$$

darstellen. Diese Form ist die **Produktdarstellung der Gleichung *n*-ten Grades über Linearfaktoren**.

Eine Lösung x_i ist eine k-fache Lösung, wenn in der Produktdarstellung der Faktor $(x - x_i)$ k-mal auftaucht.

Beispiel: $p(x) = x^3 - 2x^2 - 5x + 6$ Normalform

$= (x-1)(x+2)(x-3)$ Linearfaktordarstellung

•

Zusammenfassung: Parameter der quadratischen Funktion

$$f(x) = ax^2 + bx + c$$

Einfluss der Parameter auf die Lage und Form der Funktion

$$f(x) = ax^2 + bx + c$$

a>0 Parabel nach oben geöffnet
a<0 Parabel nach unten geöffnet

ist steiler
|a|>1 Parabel (in y-Richtung gestreckt)
0<|a|<1 Parabel (in y-Richtung gestaucht)
ist flacher

$$f(x) = (x+d)^2 + e$$

Darstellungsform nach quadratischer Ergänzung

Scheitelpunktform

d>0 Parabel nach links verschoben
d<0 .... nach rechts verschoben
e>0 .... nach oben verschoben
e<0 .... nach unten verschoben

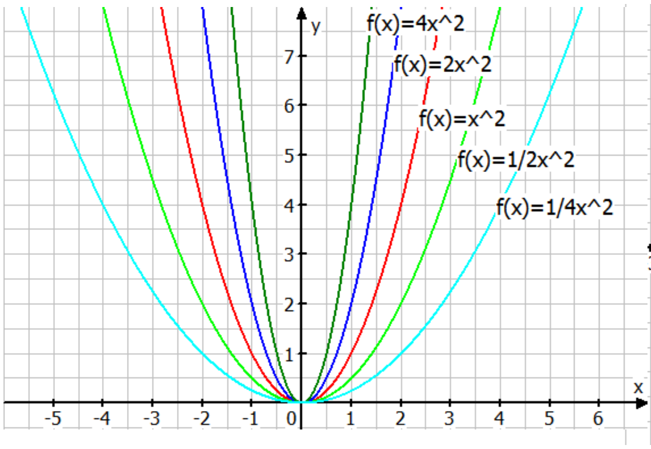
$\boxed{(x-2)^2}$
und rechts um 2 verschoben
$(x+\underbrace{(-2)}_{})$

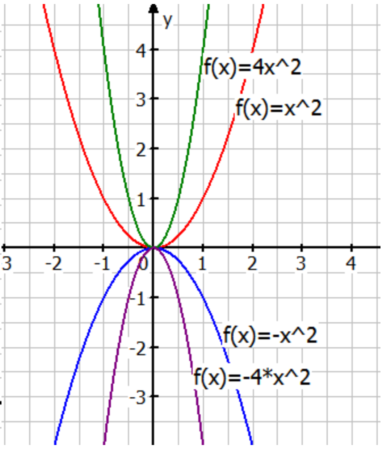
$$f(x) = (x+f)(x+g)$$

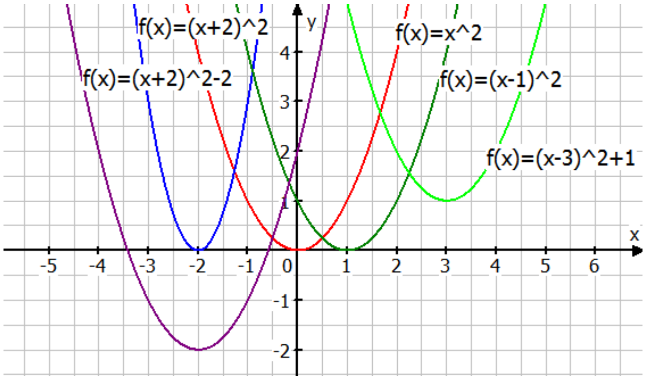
Darstellungsform nach Zerlegung in Linearfaktoren

Linearfaktorzerlegung

Lage der Nullstellen der Funktion sind erkennbar: $x_1=-f$ und $x_2=-g$





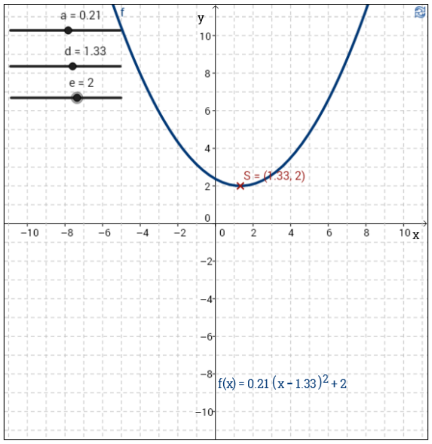


Applet zur Visualisierung des Einflusses der Parameter einer Funktion

$f(x)=ax^2+bx+c$ und $f(x)=a(x+b)^2+c$

auf die Lage und den Verlauf der Funktion

$f(x)=a(x+d)^2+e$



$$f(x) = \underbrace{a}_{\uparrow}(x\underbrace{+d}_{\uparrow})^2 \underbrace{+e}$$

+e: Vertikale Verschiebung

a: Skalierung

+d: horizontale Verschiebung

Beispiel: $f(x)=(x\underline{-2})^2$

Verschiebung um 2 nach rechts

$f(x)=(x\underline{+2})^2$

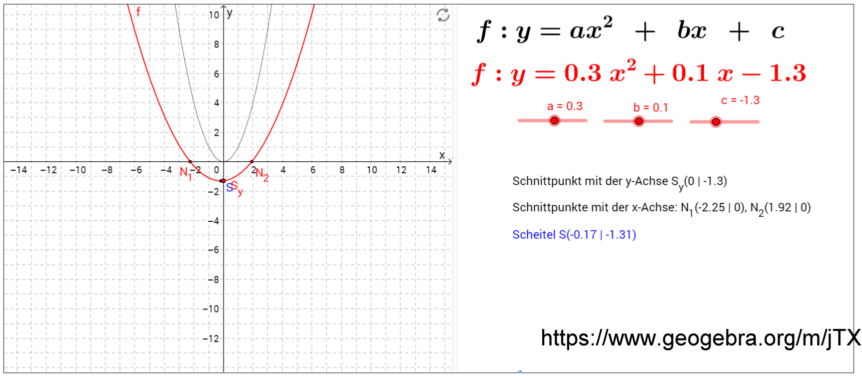
Verschiebung um 2 nach links

https://viamint.haw-hamburg.de/Content/Slidercontent/Mathe/Funktionen/Modulmaterialien/Applets/03_1/l_Applet.html

$f(x)=ax^2+bx+c$

Quadratische Funktion in Normalform

Quadratische Funktion in Normalform



$f : y = ax^2 + bx + c$

$f : y = 0.3\,x^2 + 0.1\,x - 1.3$

a = 0.3 b = 0.1 c = -1.3

Schnittpunkt mit der y-Achse $S_y(0 \mid -1.3)$

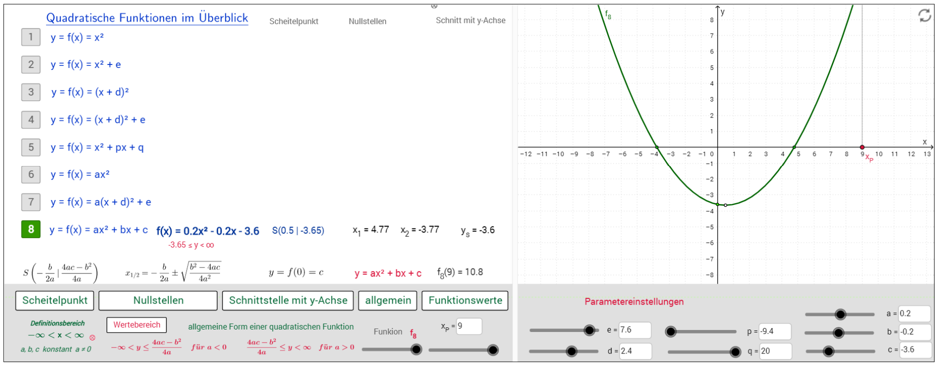
Schnittpunkte mit der x-Achse: $N_1(-2.25 \mid 0)$, $N_2(1.92 \mid 0)$

Scheitel S(-0.17 | -1.31)

https://www.geogebra.org/m/jTXgXKFc

Quadratische Funktion in Normalform

Quadratische Funktionen


Quadratische Funktionen im Überblick

Scheitelpunkt Nullstellen Schnitt mit y-Achse

1 y = f(x) = x²
2 y = f(x) = x² + e
3 y = f(x) = (x + d)²
4 y = f(x) = (x + d)² + e
5 y = f(x) = x² + px + q
6 y = f(x) = ax²
7 y = f(x) = a(x + d)² + e
8 y = f(x) = ax² + bx + c f(x) = 0.2x² - 0.2x - 3.6 S(0.5 | -3.65) x_1 = 4.77 x_2 = -3.77 y_s = -3.6

-3.65 ≤ y < ∞

$S\left(-\frac{b}{2a} \mid \frac{4ac-b^2}{4a}\right)$ $x_{1/2} = -\frac{b}{2a} \pm \sqrt{\frac{b^2-4ac}{4a^2}}$ $y = f(0) = c$ y = ax² + bx + c $f_8(9)$ = 10.8

Definitionsbereich $-\infty < x < \infty$ a, b, c konstant a ≠ 0

Wertebereich $-\infty < y \le \frac{4ac-b^2}{4a}$ für $a<0$ $\frac{4ac-b^2}{4a} \le y < \infty$ für $a>0$

allgemeine Form einer quadratischen Funktion

Funkion f_8 x_P = 9

Parametereinstellungen

e = 7.6
d = 2.4
p = -9.4
q = 20
a = 0.2
b = -0.2
c = -3.6

https://www.geogebra.org/m/VwZ5xehZ