5 Vektoren , Matrizen und Vektorräume

5 Vektoren , Matrizen und Vektorräume 1
5.1 Vektoren 1
5.1.1 Definitionen 1
5.1.2 Koordinatendarstellung in der Ebene 4
5.1.3 Koordinatendarstellung im Raum 6
5.2 Matrizen 10
5.2.1 Grundlegende Definitionen und Eigenschaften 10
5.2.2 Matrix als lineare Abbildung 16
5.3 Vektorräume 17
5.3.1 Definition und Beispiele 17
5.3.2 Eigenschaften eines Vektorraumes über $\mathbb{R}$ 19

Bemerkung:

Die Beispiele für dieses Kapitel werden in der Vorlesung vorgestellt.

5.1 Vektoren

5.1.1 Definitionen

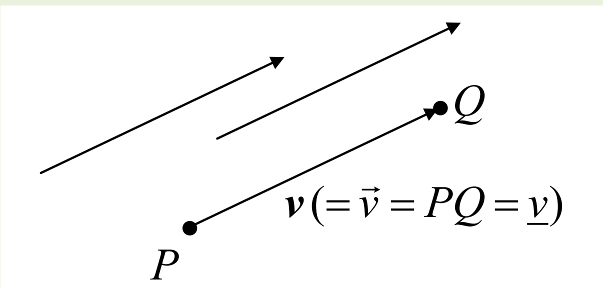
Definition 3.1: Vektor

Ein **Vektor** ist eine gerichtete Größe, die durch die Angabe des Betrages und der Richtung bestimmt ist (z.B. Kraft).

Ein Vektor kann durch einen gerichteten Pfeils dargestellt werden, wobei die Länge des Pfeils den Betrag widerspiegelt.

Alle gleichlangen, parallelen und gleichgerichteten Pfeile entsprechen dem gleichen Vektor.

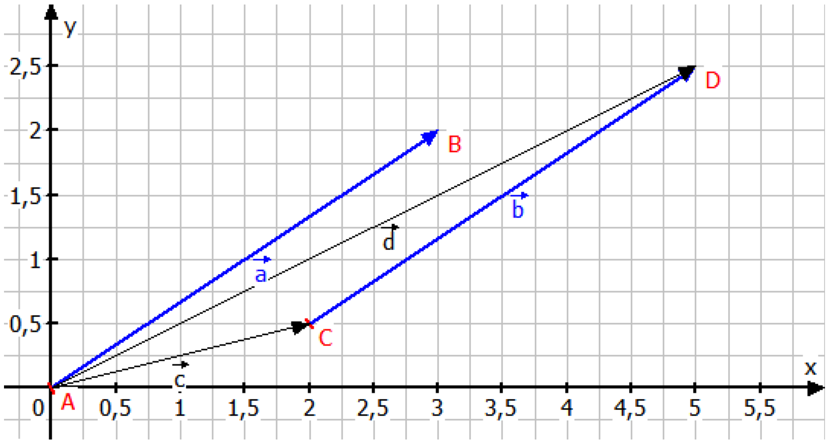
Ein Vektor kann auch durch seinen Anfangs- und Endpunkt angegeben werden.



Ein **Ortsvektor** ist ein Vektor, der von einem festen Bezugspunkt zu einem Punkt P zeigt. In der Regel ist dieses in einem kartesischen Koordinatensystem der Ursprung.

Ortsvektor $\boldsymbol{v} = 0P$ ist ein Vektor, der im Ursprung beginnt.

Beispiel:



Der Vektor $\vec{a} = AB = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix}$ ist ein Ortsvektor.

Der $\vec{b} = CD$ ist der gleiche Vektor, der jedoch nicht als Ortsvektor dargestellt ist.

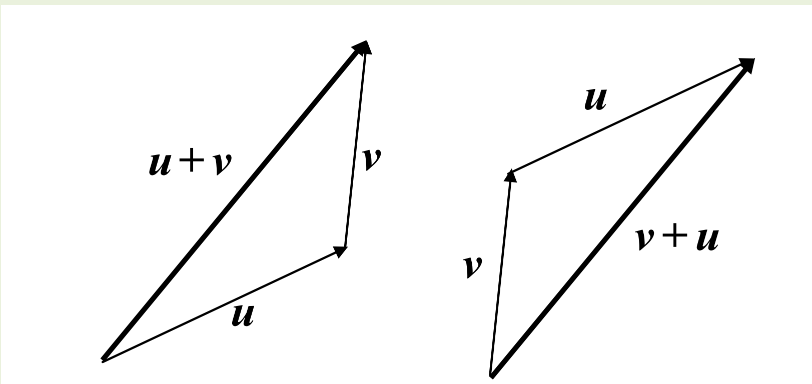
Der Vektor $\vec{b} = \vec{d} - \vec{c}$ ist die Differenz der Ortsvektoren $\vec{d}$ und $\vec{c}$.

Definition 3.2: Rechnen mit Vektoren

Addition: Die Summe $\boldsymbol{u} + \boldsymbol{v}$ zweier Vektoren entsteht durch Aneinanderlegen der zwei Vektoren $\boldsymbol{u}$ und $\boldsymbol{v}$.

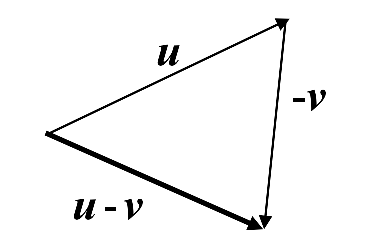
Der Endpunkt von $\boldsymbol{u}$ ist der Anfangspunkt von $\boldsymbol{v}$. $\boldsymbol{u} + \boldsymbol{v}$ ist dann der eindeutig bestimmte Vektor, der vom Anfangspunkt von $\boldsymbol{u}$ zum Endpunkt von $\boldsymbol{v}$ geht. Der Endpunkt von

Die Vektoraddition ist kommutativ, d.h. es gilt $\boldsymbol{u} + \boldsymbol{v} = \boldsymbol{v} + \boldsymbol{u}$.



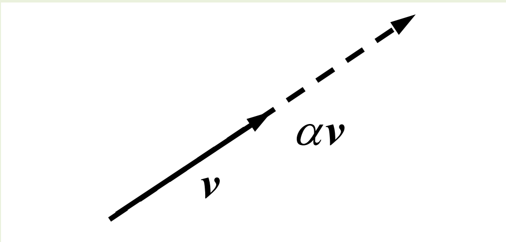
Subtraktion: Die Differenz $\boldsymbol{u}-\boldsymbol{v}$ zweier Vektoren entsteht durch Aneinanderlegen der zwei Vektoren $\boldsymbol{u}$ und $(-\boldsymbol{v})$, d.h. $\boldsymbol{u}+(-\boldsymbol{v})=\boldsymbol{u}-\boldsymbol{v}$.

Der Vektor $(-\boldsymbol{v})$ ist der Vektor, der dem Vektor $\boldsymbol{v}$ entgegen gerichtet ist.



Multiplikation mit einem Skalar: Die Multiplikation des Vektors $\boldsymbol{v}$ mit einer skalaren Größe (Zahl) α streckt bzw. staucht den Vektor $\boldsymbol{v}$ um den Faktor α.

Der Vektor $\alpha\cdot\boldsymbol{v}$ ist parallel zu $\boldsymbol{v}$. Er ist gleich orientiert, wenn $\alpha>0$ und entgegengesetzt orientiert, wenn $\alpha<0$.



Definition 3.3: Linearkombination von Vektoren

Einen Vektor $\boldsymbol{z}=\alpha\boldsymbol{u}+\beta\boldsymbol{v}$ nennt man eine **Linearkombination** der Vektoren $\boldsymbol{u}$ und $\boldsymbol{v}$

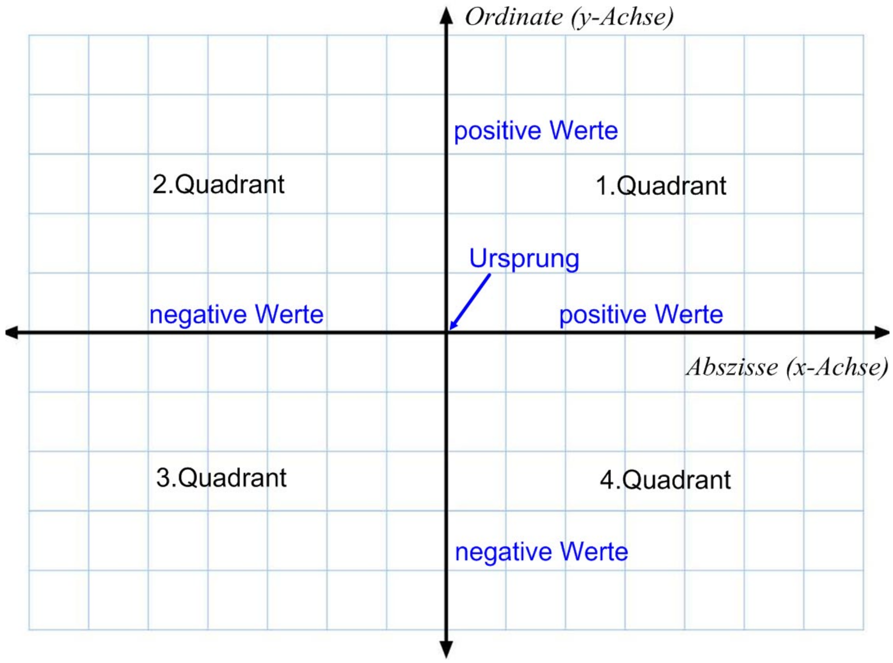
5.1.2 Koordinatendarstellung in der Ebene

Wir betrachten in diesem Abschnitt die Vektoren und ihre Darstellung im kartesischen Koordinatensystem.

Bemerkung am Rande:

Ein **kartesisches Koordinatensystem** ist ein Koordinatensystem mit Achsen senkrecht(orthogonal) aufeinander stehenden Koordinatenachsen. Der Name geht auf den französischen Mathematiker René Descartes(1596 - 1650) zurück. Dieses ist das bekannteste Koordinatensystem, das für die Darstellung der Funktionen im zwei- oder dreidimensionalen Raum verwendet wird.

Im zweidimensionalen Raum wird die waagerechte Achse (x-Achse) Abszisse genannt, die senkrechte Achse(y-Achse) wird Ordinate genannt genannt.



Die einzelnen Bereiche im Koordinatensystem werden Quadranten(Viertelebenen) genannt. Sie sind gegen den Uhrzeigersinn nummeriert.

Im dreidimensionalen Raum wir die räumliche Achse (z-Achse) Applikate genannt.

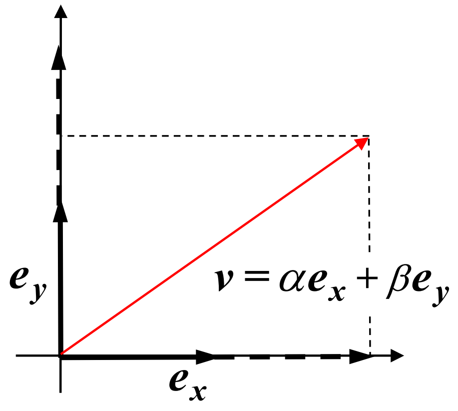
Andere Koordinatensysteme sind in im zweidimensionalen Raum das Polarkoordinatensystem, sowie im dreidimensionalen Raum das Kugelkoordinaten- und das Zylinderkoordinatensystem.

Definition 3.4: Einheitsvektor

Einen Vektor der Länge 1 nennt man **Einheitsvektor**. Die am häufigsten verwendeten Einheitsvektoren in der Ebene sind die folgenden Vektoren in Richtung einer der Koordinatenachsen: $\boldsymbol{e}_x = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ oder $\boldsymbol{e}_y = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Darstellung eines Vektors in der Ebene:

Jeder Vektor $\boldsymbol{v}$ in der Ebene kann durch eine Linearkombination der Einheitsvektoren $\boldsymbol{e}_x$ oder $\boldsymbol{e}_y$ dargestellt werden:



$$\boldsymbol{v} = \alpha \boldsymbol{e}_x + \beta \boldsymbol{e}_y \quad mit \quad \boldsymbol{e}_x = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \; und \; \boldsymbol{e}_y = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\boldsymbol{v} = \alpha \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix}$$

► Der Vektor $\boldsymbol{v}$ kann durch seine **Koordinaten** $\begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix}$, d.h. durch seine Anteile in x- und in y-Richtung $\boldsymbol{v} = \begin{pmatrix} v_x \\ v_y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix}$ dargestellt werden.

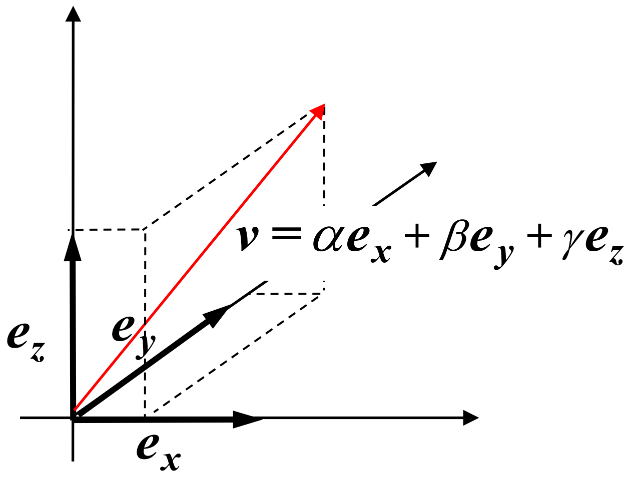
► Alle Repräsentanten des Vektors haben die gleiche Koordinatendarstellung, die über **„Anfangspunkt des Vektors – Endpunkt des Vektors"** bestimmt werden kann.

► Soll ein Vektor von seinem Anfangspunkt aus aufgetragen werden, so gilt: **„Anfangspunkt + Vektor= Endpunkt des Vektors"**

5.1.3 Koordinatendarstellung im Raum

Darstellung eines Vektors im 3-dimensionalen Raum:

Im 3-dimensionalen Raum gibt es 3 Koordinatenachsen, daher kann jeder Vektor $\boldsymbol{v}$ im Raum durch eine Linearkombination der 3 Einheitsvektoren $\boldsymbol{e}_x = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\boldsymbol{e}_y = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ oder $\boldsymbol{e}_z = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ dargestellt werden.



$$\boldsymbol{v} = \alpha \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \gamma \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad mit\ \alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$$

Darstellung eines Vektors im n-dimensionalen Raum:

Im n-dimensionalen Raum gibt es n Koordinatenachsen, daher kann jeder Vektor $\boldsymbol{v}$ durch eine Linearkombination der n Einheitsvektoren $\boldsymbol{e_1} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$, $\boldsymbol{e_2} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \ldots,$ $\boldsymbol{e_n} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}$ dargestellt werden:

$$\boldsymbol{v} = a_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} + a_2 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} + \ldots + a_n \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}, \quad mit\ a_1, \ldots, a_n \in \mathbb{R}$$

Jeder Vektor wird als **Spaltenvektor** dargestellt. Bei der Verwendung eines **Zeilenvektor**s kann der Spaltenvektor transponiert dargestellt werden.

$$\boldsymbol{v} = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix}^T = \begin{pmatrix} v_1 & v_2 & \cdots & v_n \end{pmatrix}$$

Definition 3.5: Rechnen mit Vektoren in Koordinatendarstellung

Die **Addition** und **Subtraktion** von Vektoren sowie die **Multiplikation mit einem Skalar** erfolgt koordinatenweise.

$$\boldsymbol{u} \pm \boldsymbol{v} = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \vdots \\ u_n \end{pmatrix} \pm \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u_1 \pm v_1 \\ u_2 \pm v_2 \\ \vdots \\ u_n \pm v_n \end{pmatrix} \qquad \alpha \boldsymbol{v} = \begin{pmatrix} \alpha v_1 \\ \alpha v_2 \\ \vdots \\ \alpha v_n \end{pmatrix}$$

Der **Betrag (Norm, Länge) eines Vektors** berechnet sich mit Hilfe des Satzes von Pythagoras:

$$|\boldsymbol{v}| = \sqrt{v_1^2 + v_2^2 + \ldots + v_n^2} \quad (= \|\boldsymbol{v}\|)$$

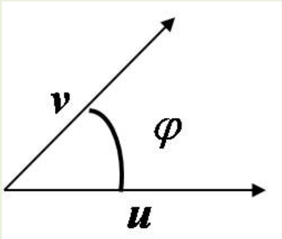
Der Vektor heißt **normiert**, falls $|\boldsymbol{v}| = 1$.

Definition 3.7: Vektorprodukt (für Vektoren im $\mathbb{R}^3$)

Das **Skalarprodukt** $< \boldsymbol{uv} >$ (auch inneres Produkt $\boldsymbol{u} \cdot \boldsymbol{v}$ bezeichnet) zweier Vektoren

$\boldsymbol{u} = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \vdots \\ u_n \end{pmatrix}$ und $\boldsymbol{v} = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix}$ ist eine skalare Größe und ist definiert durch

$$\boldsymbol{u} \cdot \boldsymbol{v} := < \boldsymbol{uv} > := |\boldsymbol{u}||\boldsymbol{v}| \cos\varphi, \quad mit\ \varphi\ Winkel\ zwischen\ \boldsymbol{u}\ und\ \boldsymbol{v}$$



Das Skalarprodukt läßt sich außerdem über die Summe der einzelnen Komponenten der Vektoren berechnen.

$$< \boldsymbol{uv} > = \boldsymbol{u}^T \boldsymbol{v} = \begin{pmatrix} u_1 & u_2 & \cdots & u_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix} = \sum_{i=1}^{n} u_i v_i$$

Zwei Vektoren heißen **orthogonal**, wenn $\boldsymbol{v}^T \boldsymbol{u} = 0$, d.h. die beiden Vektoren stehen senkrecht (normal, im rechten Winkel) aufeinander.

Der **Betrag (Norm, Länge) eines Vektors** läßt sich mit Hilfe des Skalarproduktes auch wie folgt angeben:

$$|\boldsymbol{v}| = \sqrt{\boldsymbol{v}^T \boldsymbol{v}}$$

Der **Winkel zwischen zwei Vektoren** lässt sich mit Hilfe des Skalarproduktes und der Beträge der Vektoren berechnen:

$$\boldsymbol{cos\varphi} = \frac{<\boldsymbol{uv}>}{|\boldsymbol{v}||\boldsymbol{u}|} \quad mit\ 0 \le \varphi \le 360°\ Winkel\ zwischen\ \boldsymbol{u}\ und\ \boldsymbol{v}$$

Definition 3.8: Vektorprodukt (für Vektoren im $\mathbb{R}^3$)

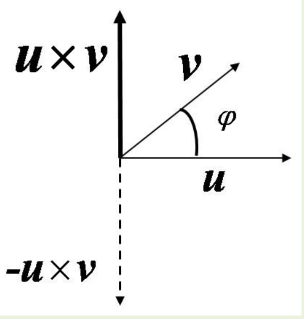
Im dreidimensionalen Raum $\mathbb{R}^3$ definiert man für zwei Vektoren Vektoren

$\boldsymbol{u} = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{pmatrix}$ und $\boldsymbol{v} = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix}$ das **Vektorprodukt** $\boldsymbol{u} \times \boldsymbol{v}$ (auch **Kreuzprodukt** bezeichnet) wie folgt

$$\boldsymbol{u} \times \boldsymbol{v} = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u_2v_3 - u_3v_2 \\ u_3v_1 - u1v_3 \\ u_1v_2 - u_2v_1 \end{pmatrix}$$

Das Vektorprodukt hat folgende Eigenschaften:

(1) Der Vektor $\boldsymbol{w} = \boldsymbol{u} \times \boldsymbol{v}$ ist senkrecht zu $\boldsymbol{u}$ und $\boldsymbol{v}$, d.h. es gilt $\boldsymbol{w}^T\boldsymbol{u} = 0$ und $\boldsymbol{w}^T\boldsymbol{v} = 0$.



(2) Für den Betrag gilt:

$$|\boldsymbol{w}| = |\boldsymbol{u} \times \boldsymbol{v}| := |\boldsymbol{u}||\boldsymbol{v}|\sin\varphi, \quad mit\ 0 \le \varphi \le 90°\ Winkel\ zwischen\ \boldsymbol{u}\ und\ \boldsymbol{v}$$

(3) Das Vektorprodukt ist nicht kommutativ: $\boldsymbol{u} \times \boldsymbol{v} = -\ \boldsymbol{v} \times \boldsymbol{u}$

5.2 Matrizen

5.2.1 Grundlegende Definitionen und Eigenschaften

Definitionen 3.9: Matrix

A= $\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$

- rechteckiges Schema reeller Zahlen: **m x n – Matrix**
- m Zeilen, n Spalten
- a_{ij} , i **Zeilenindex**, j **Spaltenindex**
- $\begin{pmatrix} a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \end{pmatrix}$ i-ter **Zeilenvektor** der Matrix
- $\begin{pmatrix} a_{1j} \\ a_{2j} \\ \vdots \\ a_{mj} \end{pmatrix}$ j-ter **Spaltenvektor** der Matrix

Beispiel:

$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & -1 \\ 3 & -2 & 1 & 1 \\ -5 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$ ist eine 4x4 – Matrix mit 4 Zeilen und 4 Spalten

Definitionen 3.10: Eigenschaften von Matrizen und spezielle Matrizen

- Eine Matrix A heißt **quadratisch**, wenn die Anzahl der Zeilen gleich der Anzahl der Spalten ist.
- $a_{11}, a_{22}, \ldots, a_{nn}$ heißen **Diagonalelemente**.

- Eine quadratische Matrix heißt **symmetrisch**, wenn für die Elemente der Matrix gilt: $a_{ij} = a_{ji},\ i, j = 1,..,n$

- Eine n x m - Matrix A^T mit $a_{ij}^{\ T} = a_{ji},\ i = 1,..,m,\ \ j = 1,..,n$ ist die **transponierte Matrix** zur m x n - Matrix *A.*

- Eine quadratische Matrix D, bei der nur die Diagonalelemente ungleich Null sind, nennen wir **Diagonalmatrix**.

$$D = diag(a_{11}, a_{22}, ..., a_{nn}) = \begin{pmatrix} a_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & a_{22} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

- Eine **obere Dreiecksmatrix** ist eine n x n – Matrix A, für deren Elemente die Bedingung $a_{ij} = 0,\ \ \forall i > j\ \ mit\ i = 1,..,m,\ j = 1,..,n$ gilt.

- Eine **untere Dreiecksmatrix** ist eine n x n – Matrix A, für deren Elemente die Bedingung $a_{ij} = 0,\ \ \forall i < j\ \ mit\ i = 1,..,m,\ j = 1,..,n$ gilt.

- A heißt **Stufenmatrix mit r Stufen**, wenn es Spaltenindizes k(1)<...< k(r) gibt, so dass $a_{1k(1)} \neq 0, ..., a_{rk(r)} \neq 0$ ist und

$$a_{ij} = 0\ mit\ \ j < k(i)\ \ für\ i = 1,..,r\ \ und$$
$$a_{ij} = 0\ mit\ \ j\ beliebig\ \ für\ i = r+1,...,m\ .$$

- Eine Matrix, deren Elemente alle Null sind, heißt **Nullmatrix**.

- Eine Matrix, deren Elemente alle Eins sind, heißt **Einsmatrix**.

- Eine quadratische Diagonalmatrix, deren Diagonalelemente alle 1, sind nennen wir **Einheitsmatrix I**:

$$a_{ij} = \delta_{ij} = \begin{cases} 1, i = j \\ 0, i \neq j \end{cases}, \qquad \delta_{ij}\ heißt\ Kronecker - Delta.$$

Beispiel:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & -1 \\ 0 & -2 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$ ist eine obere Dreiecksmatrix.

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & -1 \\ 0 & -2 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 3 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$ ist eine symmetrische Matrix.

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$ ist eine Diagonalmatrix.

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$ ist eine 4x4 - Einheitsmatrix.

Definitionen 3.11: Rechnen mit Matrizen

- **Gleichheit von Matrizen:**

  Zwei Matrizen A und B sind gleich, wenn sie dieselbe Zeilen- und Spaltenanzahl haben und alle Elemente der Matrix übereinstimmen.

- **Summe A + B:**

  Zwei m x n - Matrizen A und B werden addiert, in dem die entsprechenden Elemente der Matrix addiert werden.

  (Matrizen mit unterschiedlicher Spalten- oder Zeilenanzahl können nicht addiert werden!)

- **Differenz A - B:**

  Zwei m x n - Matrizen A und B werden subtrahiert, in dem die entsprechenden Elemente der Matrix subtrahiert werden.

  (Matrizen mit unterschiedlicher Spalten- oder Zeilenanzahl können nicht subtrahiert werden!)

- **Multiplikation mit einer Konstanten:**

  Eine Matrix A wird mit einer Konstanten $c \in \mathbb{R}$ multipliziert, in dem jedes Element von A mit c multipliziert wird.

Definitionen 3.12: Multiplikation von Matrizen

- **Multiplikation A · B:**

  Sei A eine m x p – Matrix und B eine p x n – Matrix,
  dann ist die m x n – Matrix C das **Produkt von A und B** mit

$$c_{ij} = \sum_{k=1}^{p} a_{ik} \cdot b_{kj} = a_{i1}b_{1j} + a_{i2}b_{2j} + \ldots + a_{in}b_{nj},$$

$$i = 1,..,m, \quad j = 1,..,n$$

Bemerkung:
- Jedes Element entsteht aus „**Zeile** · **Spalte**“,
  d.h. Summe der Produkte der Zeilen- mit den Spaltenelementen)
- Ein Produkt von Matrizen ist dann möglich,
  wenn (Spaltenanzahl von A) = (Zeilenanzahl von B)

- **Falk-Schema** zur Hilfestellung bei der Multiplikation

  Beispiel: Sei A eine 2 x 3 – Matrix und B eine 3 x 4 – Matrix.

$$\begin{array}{cc} & \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} & b_{14} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} & b_{24} \\ b_{31} & b_{32} & b_{33} & b_{34} \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} \sum_{11} & \sum_{12} & \sum_{13} & \sum_{14} \\ \sum_{21} & \sum_{22} & \sum_{23} & \sum_{24} \end{pmatrix} \end{array}$$

$$mit \sum_{ij} = c_{ij} = \sum_{k=1}^{3} a_{ik} \cdot b_{kj} = a_{i1}b_{1j} + a_{i2}b_{2j} + a_{i3}b_{3j}$$

$$i = 1,2 \; und \; j = 1,2,3,4$$

Das Produkt C=A · B ist eine 2 x 4 – Matrix.

Beispiel: Multiplikation von Matrizen

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 5 & 1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 0 & 1 \\ 3 & 3 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Das Produkt der beiden Matrizen ergibt die folgende 2x4 - Matrix

$$A\,B = \begin{pmatrix} 14 & 11 & 3 & 3 \\ 13 & 8 & 1 & 5 \end{pmatrix}$$

Satz 3.1:

Für A, B mxn-Matrizen (Schreibweise $A, B \in M(m,n)$) und $\lambda \in \mathbb{R}$ gilt:

(a) $(A+B)^T = A^T + B^T$

(b) $(\lambda A)^T = \lambda A^T$

(c) $(A^T)^T = A$

Satz 3.2:

Seien $A, A' \in M(m,n),\ B, B' \in M(n,r),\ C \in M(r,s)\ und\ \lambda \in \mathbb{R}$, dann gilt

- **Distributivgesetz** $A(B+B') = AB + AB'\ und\ (A+A')B = AB + A'B$
- $A(\lambda B) = (\lambda A)B = \lambda(AB)$
- **Assoziativgesetz** $(AB)C = A(BC)$
- $(AB)^T = B^T A^T$

Bemerkung: Die Matrixmultiplikation ist nicht kommutativ.

Satz 3.3:

Das Produkt zweier passender oberer Dreiecksmatrizen ist wieder eine obere Dreiecks-matrix.

Beispiel:

$$AB = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 5 \\ 0 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -2 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & 0 & -6 \\ 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & -4 \end{pmatrix}$$

Definition 3.13: Inverse Matrix:

Ist A eine quadratische Matrix und gibt es eine Matrix B mit

$$AB = I = BA,$$

so ist A **invertierbar** und B heißt die **Inverse** zu A (Schreibweise: $B = A^{-1}$).

Eine Matrix mit einer Inversen nennt man **regulär**.

Satz 3.4 Berechnung einer Inversen Matrix für eine 2x2 - Matrix

Für eine 2x2-Matrix berechnet sich die Inverse Matrix wie folgt:

$$Ist\ A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix},\ dann\ ist\ A^{-1} = \frac{1}{a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}} \begin{pmatrix} a_{22} & -a_{12} \\ -a_{21} & a_{11} \end{pmatrix}$$

:

Beispiel:

$$Für\ A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} ist\ A^{-1} = \frac{1}{-2} \begin{pmatrix} 4 & -2 \\ -3 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ \frac{3}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix} die\ inverse\ Matrix.$$

Satz 3.5:

Sind B und C Inverse einer Matrix A, dann ist B= C.

Satz 3.6: Rechenregeln für Inverse Matrizen

Sind A und B reguläre quadratische Matrizen, dann gilt:

(a) A^{-1} ist regulär mit $(A^{-1})^{-1} = A$.

(b) Das Produkt von regulären Matrizen ist regulär: $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$.

(c) A^T ist regulär mit $(A^T)^{-1} = (A^{-1})^T$.

(d) Für $\lambda \neq 0$ gilt $(\lambda A)^{-1} = \frac{1}{\lambda} A^{-1}$.

(e) Eine Diagonalmatrix D ist invertierbar mit $D^{-1} = diag(\frac{1}{a_{11}}, \frac{1}{a_{22}}, \ldots, \frac{1}{a_{nn}})$.

Satz 3.7:

Ist A eine reguläre obere (untere) Dreiecksmatrix, dann ist auch A^{-1} eine obere (untere) Dreiecksmatrix.

5.2.2 Matrix als lineare Abbildung

Definition 3.14:

Jede Matrix $A \in \mathbb{R}^{mxn}$ definiert eine **lineare Abbildung** $f: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ durch die Vorschrift

$$f: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$$

$$\underline{x} \to A\underline{x} = \begin{pmatrix} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots a_{1n}x_n \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots a_{2n}x_n \\ \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots a_{mn}x_n \end{pmatrix}$$

Eine Abbildung $f: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ heißt **linear**, wenn für alle $\underline{x_1}, \underline{x_2} \in \mathbb{R}^n$ und für alle $\lambda \in \mathbb{R}$ gilt:

1. $f(\underline{x_1} + \underline{x_2}) = f(\underline{x_1}) + f(\underline{x_2})$
2. $f(\lambda \underline{x_1}) = \lambda f(\underline{x_1})$

5.3 Vektorräume

Der Begriff eines Vektorraumes ist eine abstrakte algebraische Struktur, die die typischen Eigenschaften z.B. des $\mathbb{R}^2$, des $\mathbb{R}^3$, des $\mathbb{R}^n$, der nxn-Matrizen, der Polynome vom Grad n, in Axiome zusammenfasst. Somit gelten dann die Sätze, die auf diesen Axiomen aufbauen, für alle speziellen Vektorräume.

5.3.1 Definition und Beispiele

Definition 3.15: Vektorraum

Es sei $(K,+,\cdot)$ ein Körper (z.B. die reellen Zahlen $\mathbb{R}$ oder $\mathbb{C}$ oder $\mathbb{Q}$) und

V eine Menge mit einer inneren Verknüpfung „+“ zwischen den Elementen aus V und einer äußeren Verknüpfung „ · “, genannt skalare Multiplikation zwischen den Elementen aus K und V:

$$\cdot : \begin{cases} KxV \to V \\ (\alpha, v) \to \alpha \cdot v \end{cases}$$ definiert.

Ein Element $v \in V$ heißt ein Vektor und ein Element $\alpha \in K$ heißt ein Skalar. V heißt ein Vektorraum über dem Körper K bzw. ein K-Vektorraum, wenn die folgenden Eigenschaften gelten:

(1) $(V,+)$ ist eine kommutative Gruppe, d.h.

(1.1) es gilt das Assoziativgesetz: $(u+v)+w = u+(v+w) \quad \forall u,v,w \in V$

(1.2) es existiert ein Nullvektor $0 \in V$: $v+0 = 0+v = v \quad \forall v \in V$

(1.3) zu jedem Vektor $v \in V$ existiert ein inverser Vektor $-v \in V$ mit

$$v+(-v) = (-v)+v = 0$$

(1.4) es gilt das Kommutativgesetz: $u+v = v+u \quad \forall u,v \in V$

(2) Es gelten die folgenden Gesetze für die Multiplikation von Skalaren mit Vektoren:

(2.1) $(\alpha \cdot \beta) \cdot v = \alpha \cdot (\beta \cdot v) \qquad \forall \alpha, \beta \in K, \ \forall v \in V$

(2.2) $(\alpha + \beta) \cdot v = \alpha \cdot v + \beta \cdot v \qquad \forall \alpha, \beta \in K, \ \forall v \in V$

(2.3) $\alpha \cdot (u+v) = \alpha \cdot u + \alpha \cdot v \qquad \forall \alpha \in K, \ \forall u,v \in V$

(2.4) $1 \cdot v = v \qquad \forall v \in V$

Beispiele:

(1) $\boxed{\text{Vektorraum } \mathbb{R}^n}$

- Für $n \in \mathbb{N}$ ist die Menge aller n-Tupel das n-fache kartesische Produkt

  $\mathbb{R}^n := \mathbb{R} \times \ldots \times \mathbb{R}$

- Für die Elemente $\underline{u} \in \mathbb{R}^n$ ist die folgende Spaltenschreibweise vereinbart:

  $$\underline{u} = \begin{pmatrix} u_1 \\ \vdots \\ u_n \end{pmatrix} mit\ u_1,..,u_n \in \mathbb{R}.$$

- Bezüglich der Addition (innere Verknüpfung)

  $$\begin{pmatrix} u_1 \\ \vdots \\ u_n \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} u_1 + v_1 \\ \vdots \\ u_n + v_n \end{pmatrix} \quad \forall\ \underline{u}, \underline{v} \in \mathbb{R}^n$$

  und der Vervielfachung (äußere Verknüpfung)

  $$\alpha \cdot \begin{pmatrix} u_1 \\ \vdots \\ u_n \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} \alpha \cdot u_1 \\ \vdots \\ \alpha \cdot u_n \end{pmatrix} \quad \forall\ \alpha \in \mathbb{R}, \forall \underline{u} \in \mathbb{R}^n$$

  ist $\mathbb{R}^n$ ein reeller Vektorraum.

(2) $\boxed{\text{Matrizen } \mathbb{R}^{m \times n}}$

- Die mxn-Matrizen bilden mit der inneren Verknüpfung „Matrixaddition"

  $$+ : \begin{cases} \mathbb{R}^{m \times n} \times \mathbb{R}^{m \times n} & \to \mathbb{R}^{m \times n} \\ (A, B) & \to A + B \end{cases}$$ und

- der äußeren Verknüpfung „Multiplikation einer Matrix mit einem Skalar"

  $$\cdot : \begin{cases} \mathbb{R}^{m \times n} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}^{m \times n} \\ (A, \alpha) \quad \to \alpha \cdot A \end{cases}$$

  einen Vektorraum über $\mathbb{R}$.

(3) Reelle Polynome P_n

- Die Menge P_n aller reellen Polynome vom Grad $\leq$n ist zusammen mit der inneren Verknüpfung „Polynomaddition“ und
- der äußeren Verknüpfung „Muliplikation mit einer reellen Zahl“
ein Vektorraum über $\mathbb{R}$.

5.3.2 Eigenschaften eines Vektorraumes über $\mathbb{R}$

Definition 3.16: Linearkombination, lineare Unabhängigkeit

Die Summe

$$\alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \ldots + \alpha_n v_n \in V$$

mit n Elementen eines Vektorraumes $v_1, v_2, \ldots, v_n \in V$ und $\alpha_1, \ldots, \alpha_n \in \mathbb{R}$

heißt eine **Linearkombination** der Vektoren $v_1, v_2, \ldots, v_n$.

Sind alle Skalare $\alpha_i = 0, \ \forall i = 1,..,n$, gewählt, so heißt die Linearkombination trivial.

Elemente $v_1, v_2, \ldots, v_n$ des Vektorraumes heißen voneinander **linear unabhängig**, wenn sich kein Element als Linearkombination der anderen Elemente darstellen lässt. Das bedeutet, wenn aus

$$\alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \ldots + \alpha_n v_n = 0 \quad \Rightarrow \quad \alpha_1 = 0, \alpha_2 = 0, \ldots, \alpha_n = 0,$$

sind die Vektoren $v_1, v_2, \ldots, v_n$ linear unabhängig.

Gibt es mindestens eine andere Lösung $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n \neq (0, 0, \ldots, 0)$ zur Erfüllung der Gleichung $\alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \ldots + \alpha_n v_n = 0$, dann heißen die Elemente **linear abhängig,**

d.h. es gibt ein Element, dass durch eine Linearkombination der anderen Vektoren dargestellt werden kann z.B. das Element n mit $v_n = \alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \ldots + \alpha_{n-1} v_{n-1}$.

Bezeichnung:

Die Elemente des Vektorraumes V werden auch Vektoren genannt, auch wenn sie nicht immer im eigentlichen Sinne Vektoren sind.

Sie werden in ihrer allgemeinen Schreibweise nicht mit einem Unterstrich versehen.

Definition 3.17: Untervektorraum

Sei V ein Vektorraum über $\mathbb{R}$.

Eine Teilmege $U \subseteq V$ heißt **Untervektorraum** von V, wenn $U \neq \varnothing$ und wenn für alle $u, v \in U$ und für alle $\alpha \in \mathbb{R}$ gilt:

$$u + v \in U, \quad \alpha u \in U .$$

Ein Untervektorraum U von V ist zusammen mit der durch V gegebenen Addition und Skalarmultiplikation selbst ein Vektorraum.

Definition 3.18: lineare Hülle

Sei V ein Vektorraum über $\mathbb{R}$.

Die Menge aller Linearkombinationen der Vektorraumelemente $v_1, v_2, ..., v_n$

$$span\{v_1, v_2, ..., v_n\} := \left\{ v \in V \,\middle|\, v = \sum_{j=1}^{n} \alpha_j v_j \ mit\ \alpha_j \in \mathbb{R} \right\} \subseteq V$$

heißt **lineare Hülle** von $v_1, v_2, ..., v_n$.

Die lineare Hülle ist der von $v_1, v_2, ..., v_n$ aufgespannte Untervektorraum von V und damit selbst ein Vektorraum über $\mathbb{R}$.

Definition 3.19: Basis

Sei V ein Vektorraum über $\mathbb{R}$.

Ein n-Tupel ($v_1, v_2, ..., v_n$) von Elementen aus V heißt Basis von V, wenn gilt:

(1) $v_1, v_2, ..., v_n$ sind linear unabhängig.

(2) V wird von den Basisvektoren aufgespannt, d.h. $V = span\{v_1, v_2, ..., v_n\}$

Satz 3.8: Eindeutigkeit

Sei V ein Vektorraum über $\mathbb{R}$ mit einer Basis ($v_1, v_2, ..., v_n$).

Dann ist jedes $v \in V$ in eindeutiger Weise als Linearkombination des Basisvektoren darstellbar, d.h. zu jedem $v \in V$ gibt es genau ein $\begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n$, für das gilt $v = \alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + ... + \alpha_{n-1} v_{n-1}$.

Definition 3.20: Dimension

Besitzt ein Vektorraum V über $\mathbb{R}$ eine Basis ($v_1, v_2, ..., v_n$),

so heißt V ein endlich-dimensionaler Vektorraum und n die Dimension von V, geschrieben als $\dim V = n$.

Satz 3.9: Eigenschaften

Sei V ein Vektorraum über $\mathbb{R}$ mit $\dim V = n$ für ein $n \in \mathbb{N}$. Dann gilt:

(1) Je n linear unabhängige Vektoren aus V bilden eine Basis von V.

(2) Eine Menge von mehr als n Vektoren ist stets linear abhängig.

(3) Ist $V = span\{v_1, v_2, ..., v_n\}$, dann ist ($v_1, v_2, ..., v_n$) eine Basis von V.

Definition 3.21: Spaltenraum und Zeilenraum einer Matrix

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \underline{a}_1 & \underline{a}_2 & \cdots & \underline{a}_n \end{pmatrix}$$

sei eine beliebige reelle mxn-Matrix und $\underline{a}_1, \underline{a}_2, \ldots, \underline{a}_n$ seien ihre Spaltenvektoren. Dann heißt die Menge aller Linearkombinationen dieser Spaltenvektoren, d.h. die Menge

$$span(A) = \left\{ \underline{y} \in \mathbb{R}^{m\times 1} \middle| y = \lambda_1 \underline{a}_1 + \lambda_2 \underline{a}_2 + \ldots + \lambda_n \underline{a}_n \right\}$$

Spaltenraum der Matrix A.

Der Spaltenraum von A ist ein Untervektorraum von $\mathbb{R}^{m\times 1}$.

Ebenso wird der Untervektorraum, der durch die Zeilen aufgespannt wird,

Zeilenraum der Matrix A genannt.

Sind nur maximal r der n Spaltenvektoren von A linear unabhängig, so gilt:

$$\dim\left(span(A)\right) = r$$

$$\begin{aligned} &\dim\left(span(A)\right) = r \\ &= Anzahl\ der\ Staffeleinsen\ nach\ der\ Gauß-Elimination \\ &= rg(A) = Rang\ der\ Matrix \end{aligned}$$

Definition 3.22: Rang einer Matrix

Der **Spaltenrang** einer Matrix A ist die maximale Anzahl linear unabhängiger Spalten der Matrix.

Der **Zeilenrang** einer Matrix A ist die maximale Anzahl linear unabhängiger Zeilen der Matrix.

Der Zeilenrang ist immer gleich dem Spaltenrang und wird **Rang der Matrix** genannt. (Schreibweise: Rang(A) oder Rg(A))

Zusätzlicher Anhang:

Orthogonale Matrizen

- Eine orthogonale Matrix ist eine reelle quadratische Matrix $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$, deren Spalten ein System orthogonaler Einheitsvektoren bilden.
- Für orthogonale Matrizen gilt: $A^T A = I$, d.h. $A^{-1} = A^T$
- Eine orthogonale Matrix lässt den Winkel zwischen Vektoren unverändert.
- Der Betrag der Determinante einer orthogonalen Matrix ist 1.
- Die Eigenwerte haben den Wert +1 oder -1.

Unitäre Matrizen

- Eine unitäre Matrix ist für die komplexen Matrizen das, was eine orthogonale Matrix für die reellen Matrizen ist.
- Eine unitäre Matrix ist eine komplexe quadratische Matrix $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$, deren Spalten ein System orthogonaler Einheitsvektoren bilden.
- Eine Matrix $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$ wird „transponiert", in dem die adjungierte Matrix $\overline{A} = (A^*)^T$ verwendet wird, d.h. die einzelnen Elemente werden konjugiert komplex betrachtet und dann die Matrix transponiert.
- Es gilt: $A\overline{A} = I$, d.h. $A^{-1} = \overline{A}$