GRUNDLAGEN DER ELEKTROTECHNIK 1

Vorlesung 10 - Wechselspannung

Inhalte der Kapitel 5 bis 7: Wechselstrom

7 Wechselstrom

- Wechselstrom-Messbrücken
- Wechselstromleistung – Blindstromkompensation - Leistungsanpassung
- Impedanz und Admittanz
- Darstellung im Zeitbereich | komplexe Darstellung

6 Magnetisches Feld

- Spule
- Magnetisches Feld

5 Elektrisches Feld

- Kondensator
- Elektrisches Feld

7 WECHSELSPANNUNG

7.1 Sinusförmige Größen

7.2 Komplexe Wechselstromrechnung

7.3 Elektrische Impedanz

7.4 Admittanz

7.5 Wechselstromleistung

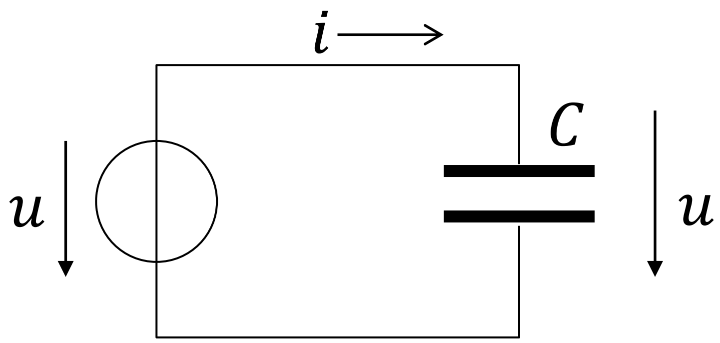
7.6 Blindstromkompensation

7.7 Leistungsanpassung bei Impedanzen

7.8 Wechselstrom-Messbrücken

EINLEITUNG

Was ist anders, wenn sich Strom und Spannung im Zeitablauf verändern?



Gleichspannung $u = U = const.$

- Kondensator lädt sich auf
- $I = 0$

Wechselspannung $u = f(t) = u(t)$

- $i = C \cdot \frac{du}{dt}$

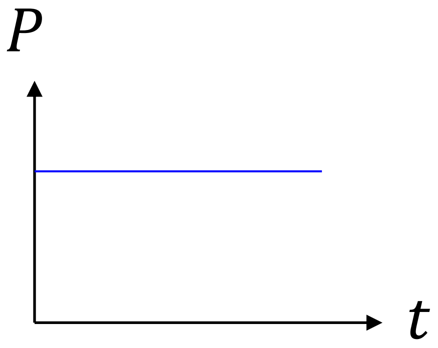
  ~ 90° Phasenverschoben zur Sp.
- $\Rightarrow i(t) \neq 0 \Rightarrow i(t) = i$

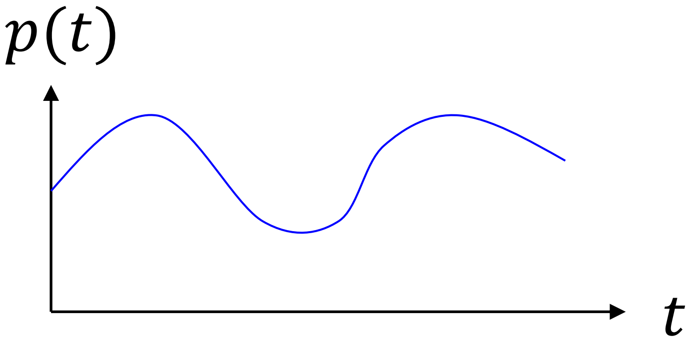
es fließt ein Strom!

RECAP: ZEITABHÄNGIGE GRÖßEN

zeitlich veränderliche Größen in Kleinbuchstaben $u, i, \ldots$

$P = const.$ aber $p(t) = f(t)$





Kurzform bei Spannung und Strom:

$$u(t) = u$$

$$i(t) = i$$

RECAP: PERIODISCHE GRÖßEN

T = Periodendauer

Periodische Funktion: wiederholt ihre Werte nach einer bestimmten Zeit T

Schwingung: periodischer Vorgang innerhalb der Periode T

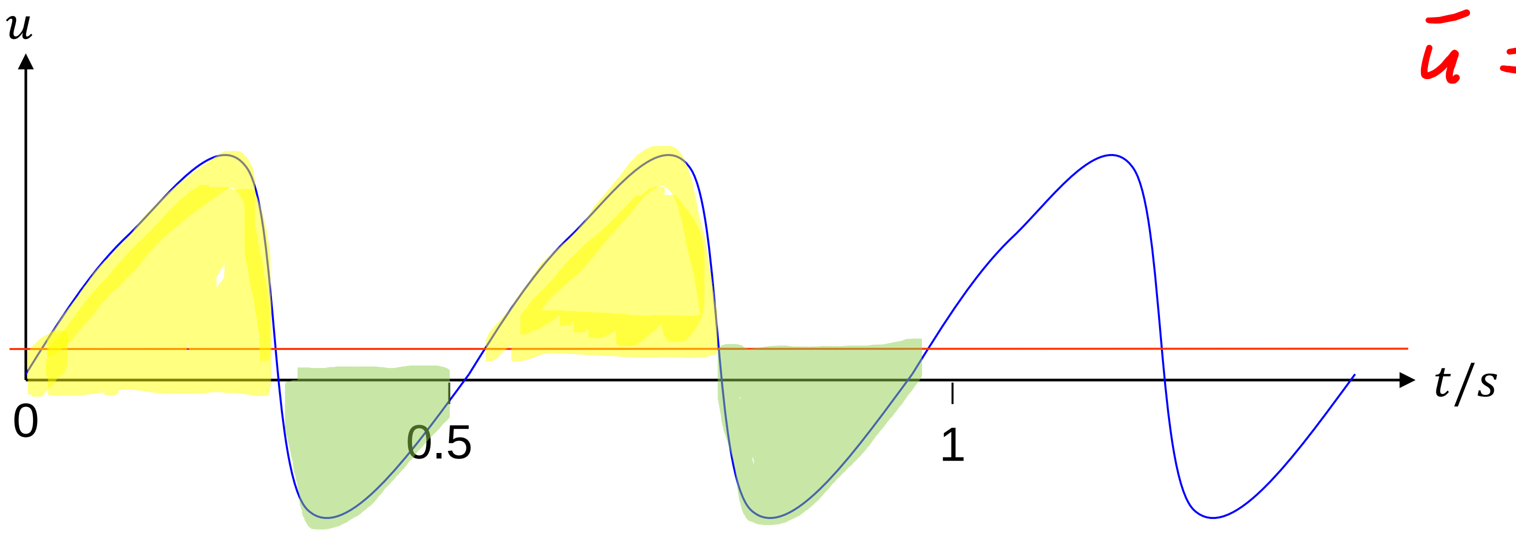
Frequenz: $f = 1/T$ $\quad [f] = 1/s = 1\ \text{Hertz}\ (1\ \text{Hz})$
Anzahl der Schwingungen pro Sekunde

Scheitelwert U_S: maximaler Wert des Signals

Amplitude $\hat{u}$: maximale Auslenkung um die Ruhelage

↳ Mittelwert

$$\bar{u} = \frac{1}{T}\int_0^T u(t)\,dt$$

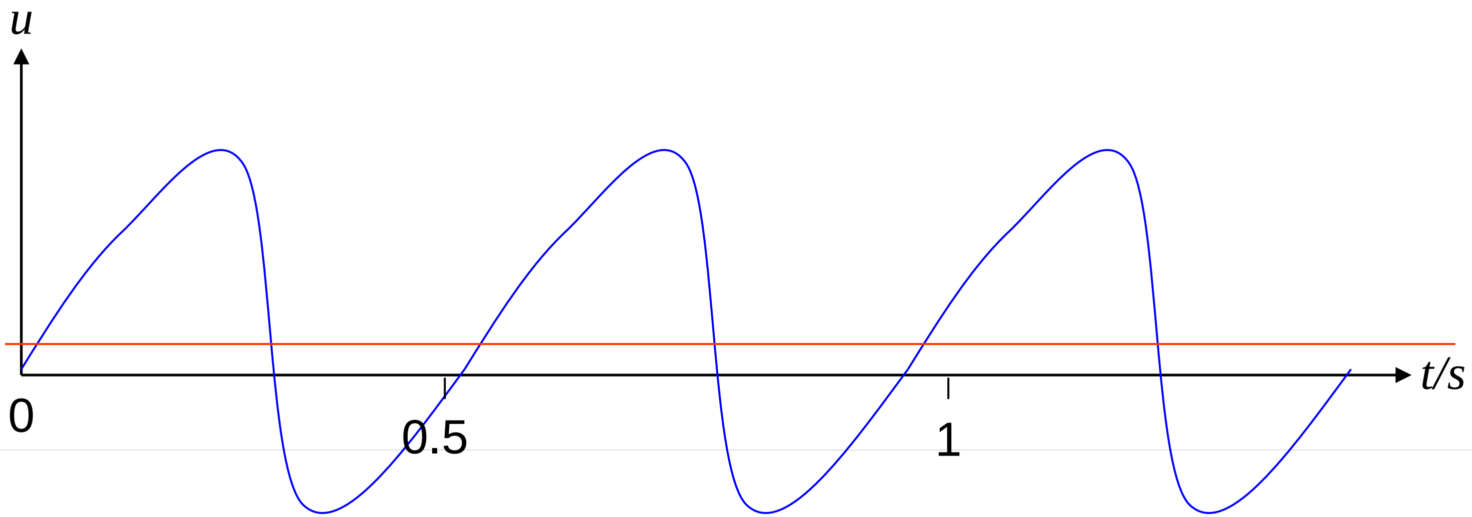


RECAP: MITTELWERT $\bar{u}$

arithmetisches Mittel von u von einer Periode

$$\bar{u} = \frac{1}{T}\int_0^T u\,dt$$

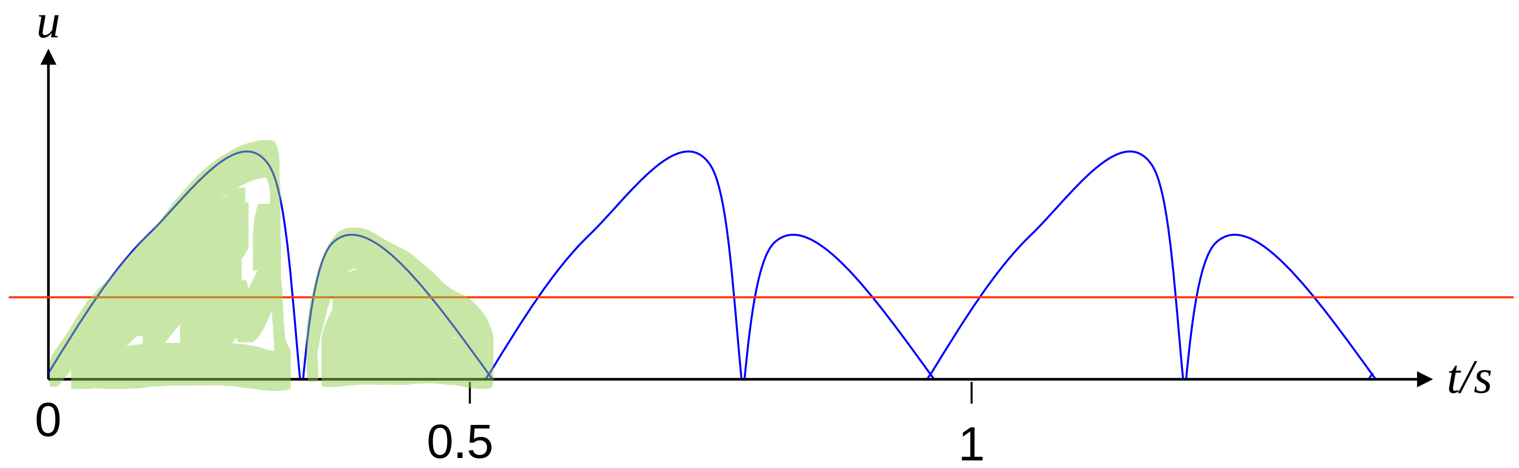
Integral = Fläche zwischen Kurve und x-Achse über eine Periode
aber: Flächen unterhalb der x-Achse zählen negativ.



RECAP: GLEICHRICHTWERT $\overline{|u|}$

arithmetisches Mittel des Absolutwertes von einer Periode

$$\overline{|u|} = \frac{1}{T}\int_0^T |u|\,dt$$



Näherung

Gleichrichtwert = Nutzbar z.B. um den Effektivwert zu „messen"

RECAP: EFFEKTIVWERT (RMS VALUE)

root

square

$$I = \sqrt{\frac{1}{T}\int_0^T i^2 dt}$$

mean

$$P = U \cdot I = U^2/R$$

Effektivwert des Stroms:

$$\boxed{I = \sqrt{\frac{1}{T}\int_0^T i^2 dt}}$$

Effektivwert der Spannung:

$$\boxed{U = \sqrt{\frac{1}{T}\int_0^T u^2 dt}}$$

WARUM BRAUCHT MAN DEN EFFEKTIVWERT?

Werden periodische Funktionen durch den Effektivwert beschrieben,
sind die Formeln aus der Gleichstromanalyse nutzbar !

Beispiel zur Ermittlung einer Leistung in R aus Spannung:

$$P = \underline{U} \cdot \underline{I} = U^2/R = R \cdot \underline{I}^2$$

$\Rightarrow$ Wir kommen ohne Integralrechnung aus !

Wenn bei Wechselspannungsgröße keine weiteren Angaben stehen, handelt es sich um den Effektivwert.

SINUSFÖRMIGE GRÖßEN

Phase, Phasenverschiebung, Phasenwinkel

Gegeben: $u = \hat{u}\sin(\omega t + \varphi_0)$

Kreisfrequenz

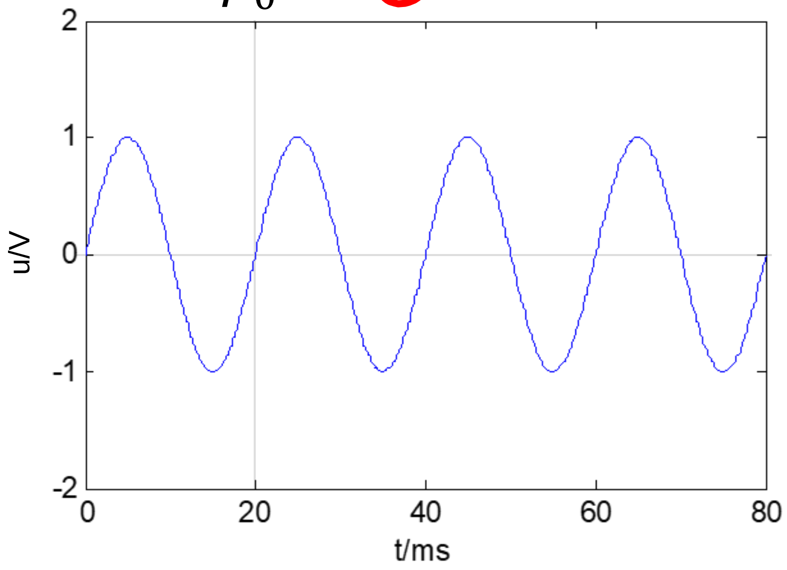
Winkelgeschwindigkeit

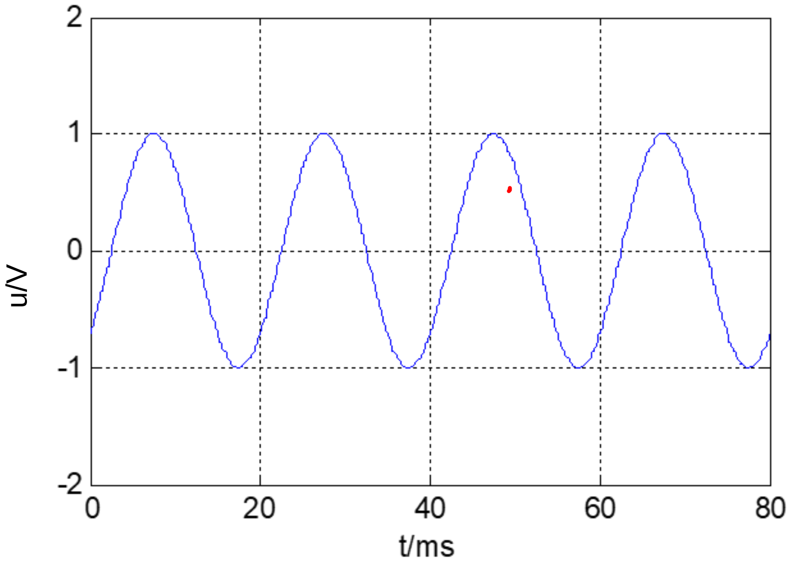
mit: $\hat{u}$, $\omega = 2\pi f$, φ_0

Hier: $\hat{u} = 1V$

$T = 20ms \Rightarrow f = \frac{1}{T} = 50Hz \Rightarrow \omega = 2\pi f = 314\,s^{-1}$

$\varphi_0 = 0$





Verzögert um:

$\varphi_0 = -45°$

$-\pi/4$

SINUSSCHWINGUNG UND KREIS

Welchen Zusammenhang gibt es mit einem Kreis?

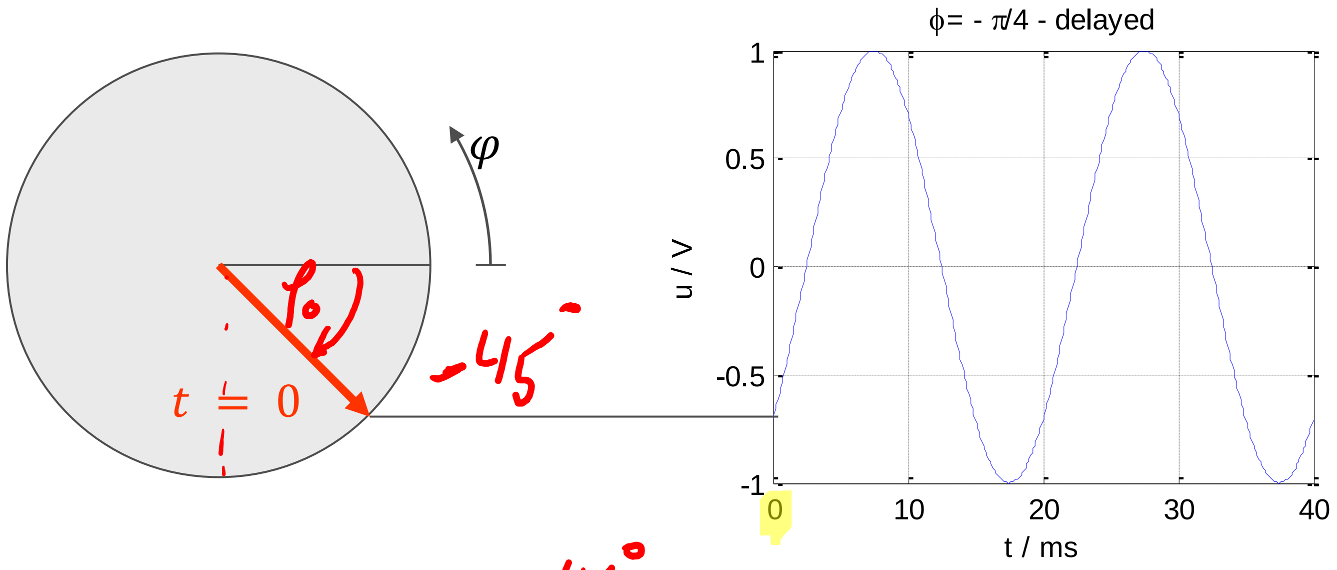
Federpendel
https://www.geogebra.org/m/X86hJ8cy

Sinus auf dem Einheitskreis
https://www.geogebra.org/m/Z26WBQgM

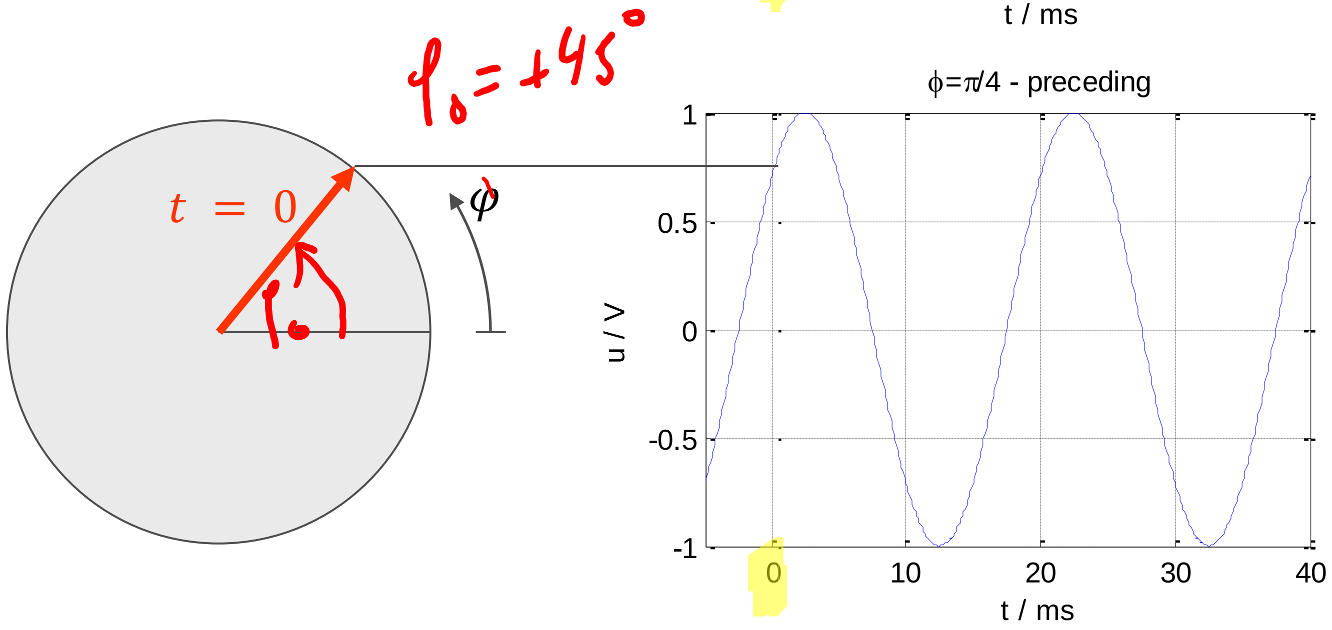
BESTIMMUNG DES PHASENWINKELS

nachlaufend: $\varphi_0 < 0$

”gegenüber einer Schwingung die bei $t = 0$ mit $\varphi = 0$ beginnt”



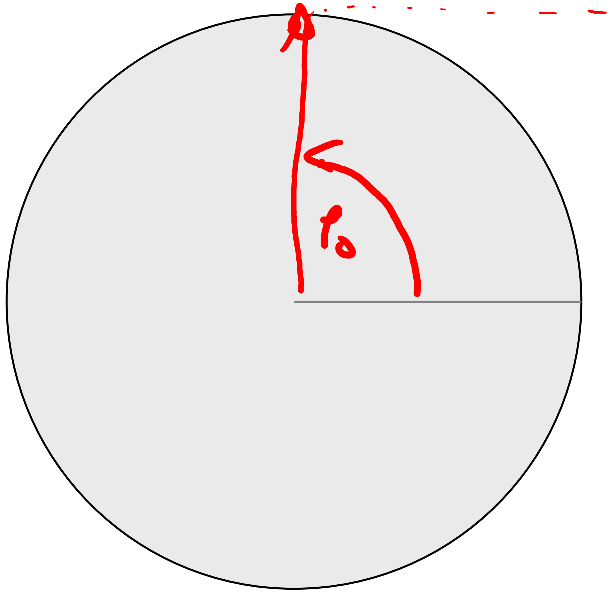
vorauseilend: $\varphi_0 > 0$

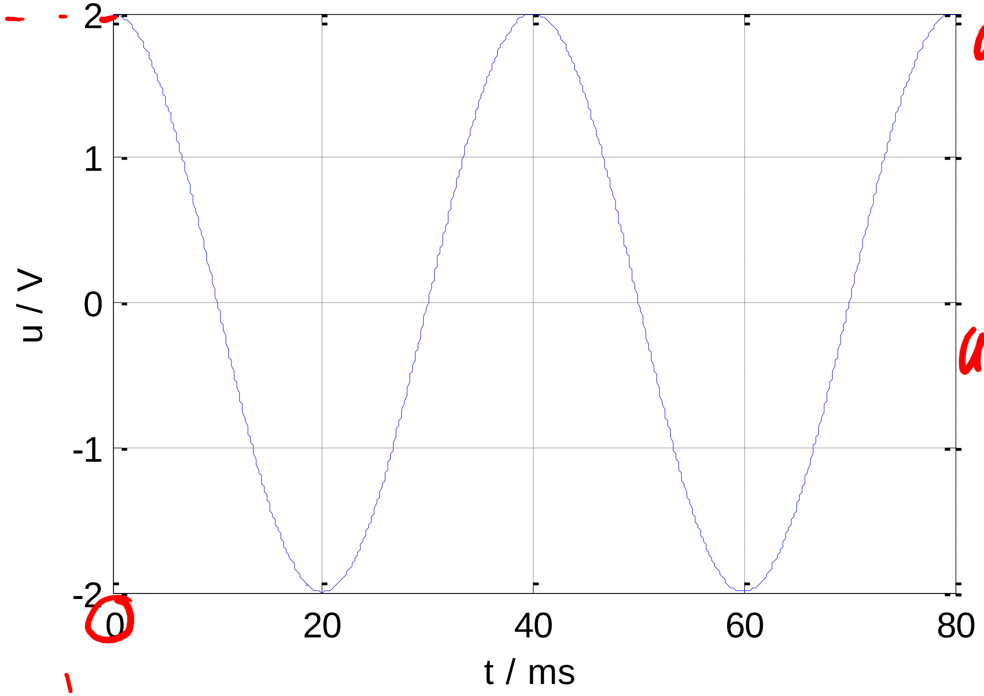


ÜBUNG

$u(t) = \hat{u} \cdot \sin(\omega t + \varphi_0)$

Bestimmen Sie die Parameter der Sinusfunktion.





$u(t) = 2V \cdot \sin(50\pi t + 90°)$

$u(t) = 2V \cdot \cos(50\pi t)$

$\hat{u} = 2V$

$\omega = 2\pi f = 2\pi \cdot \frac{1}{T}$; $T = 40\,ms$ $\Rightarrow \omega = 157\,s^{-1} = 50\pi\,s^{-1}$

$\varphi_0 = 90° = \pi/2$

ZWISCHENRESUMÉE

- Erster Teilerfolg:

  Statt Lösen eines Integrals von Sinusfunktionen reicht eine einfache Multiplikation, um die Leistung zu berechnen.

- Nächste Vereinfachung:
  Die Gleichungen für Strom und Spannung an Kondensator und Spule erfordern Ableiten und Integrieren.

  Wir können dies umgehen, indem wir mit komplexen Zahlen rechnen.

WECHSELSTROM

Inhalte der Kapitel 5 bis 7: Wechselstrom

7 Wechselstrom

- Wechselstrom-Messbrücken
- Wechselstromleistung – Blindstromkompensation - Leistungsanpassung
- Impedanz und Admittanz
- Darstellung im Zeitbereich | komplexe Darstellung

6 Magnetisches Feld

- Spule
- Magnetisches Feld

5 Elektrisches Feld

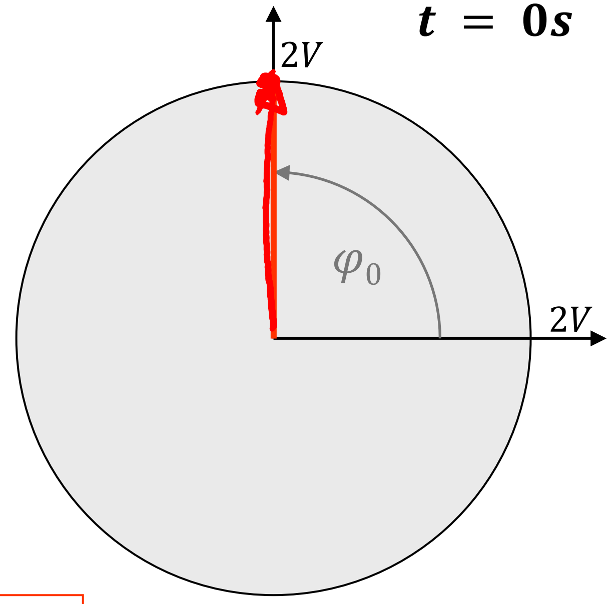
- Kondensator
- Elektrisches Feld

7 WECHSELSPANNUNG

ZEIGERDARSTELLUNG

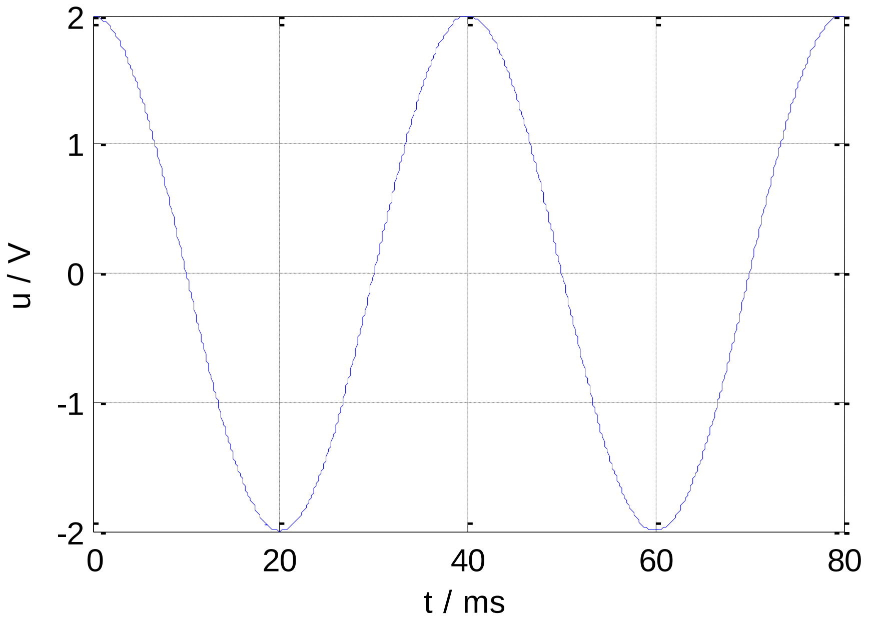
Wir beschreiben eine sinusförmige Spannung $u = \hat{u}\sin(\omega t + \varphi_0)$ durch einen „Foto“ des Vektors zur Zeit $t = 0$.

$\boldsymbol{t = 0s}$



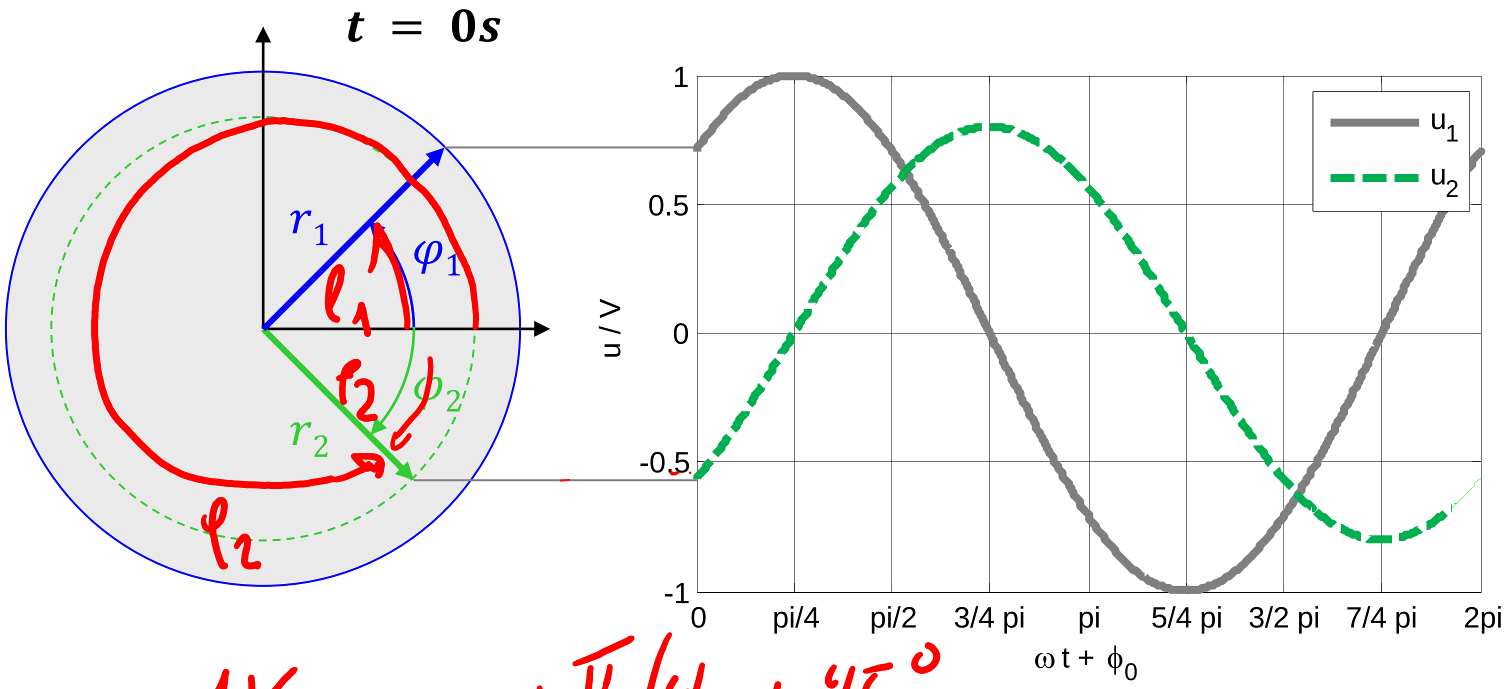
Zeigerdarstellung (Phasor)

$\omega = 157\, s^{-1}$



BESTIMMEN SIE DIE PHASENDIFFERENZ $\Delta\varphi$

Phasendifferenz $\Delta\varphi$ zwischen zwei Sinusspannungen



$\Rightarrow \Delta\varphi = \varphi_1 - \varphi_2$

$=$

$\Delta\varphi = 45° - (-45°)$

$= 90°$

$r_1 = 1V \quad \varphi_1 = +\pi/4 = +45°$

$r_2 = 0{,}8V \quad \varphi_2 = -\pi/4 = -45°$

$= 7/4\,\pi =$

Wir sagen: „u_1 eilt u_2“ voraus, oder „u_2 folgt u_1”

$= \pi/4 - (-\pi/4) = \pi/2$

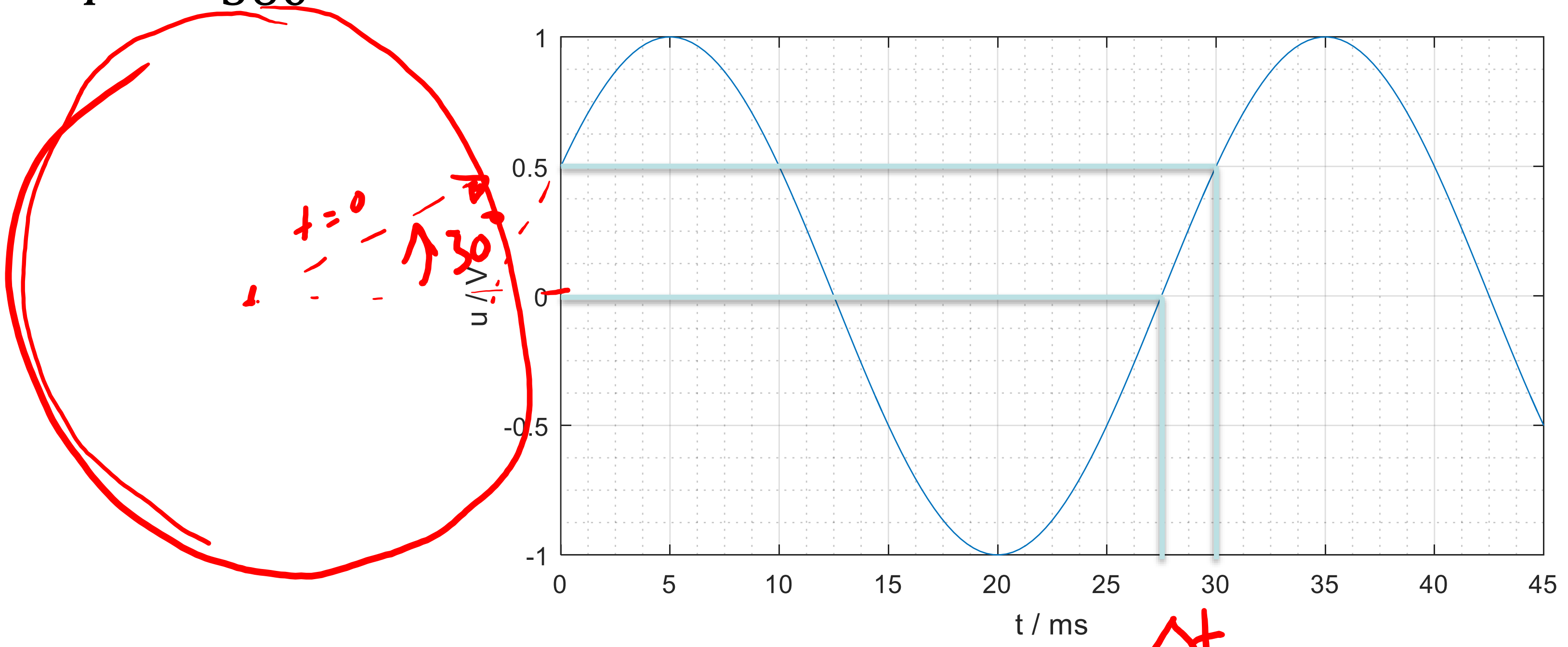
BESTIMMUNG DER PHASE PER DREISATZ

Periodendauer T ermitteln

zeitlichen Versatz Δt der Schwingung ermitteln

$\frac{\Delta t}{T} = \frac{\Delta\varphi}{360°}$ nach $\Delta\varphi$ auflösen und Vorzeichen prüfen

$$\frac{\Delta t}{T} = \frac{\Delta\varphi}{2\pi} = \frac{\Delta\varphi}{360°}$$



Δt

2,5 ms

$$\Delta\varphi = 2\pi \cdot \frac{\Delta t}{T}$$

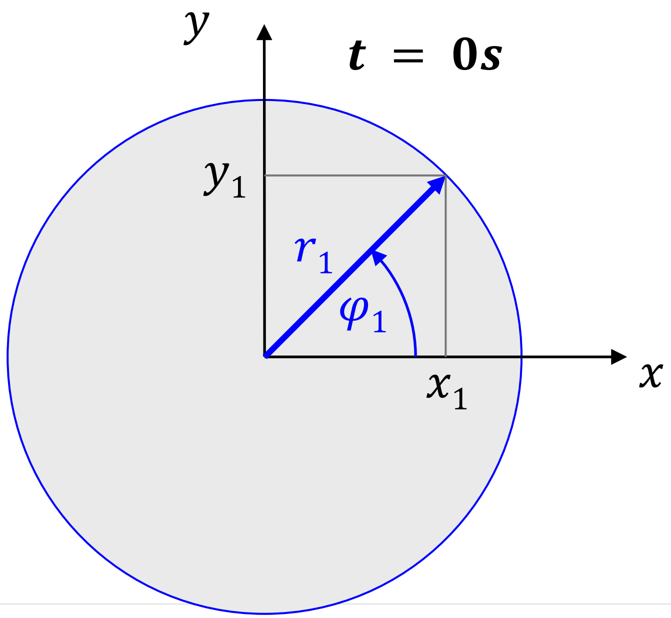
$$= 2\pi \cdot \frac{2{,}5\,ms}{30\,ms} = \frac{2\pi}{12}$$

$$= +\pi/6 = +30°$$

10:00

ZEIGERDARSTELLUNG IN KARTESISCHEN KOORDINATEN

- Polarkoordinaten
  Beschreibung des Zeigers durch Länge und Winkel (r_1, φ_1)
- Kartesische Koordinaten
  Beschreibung durch Punkt in einem Koordinatenkreuz (x_1, y_1)



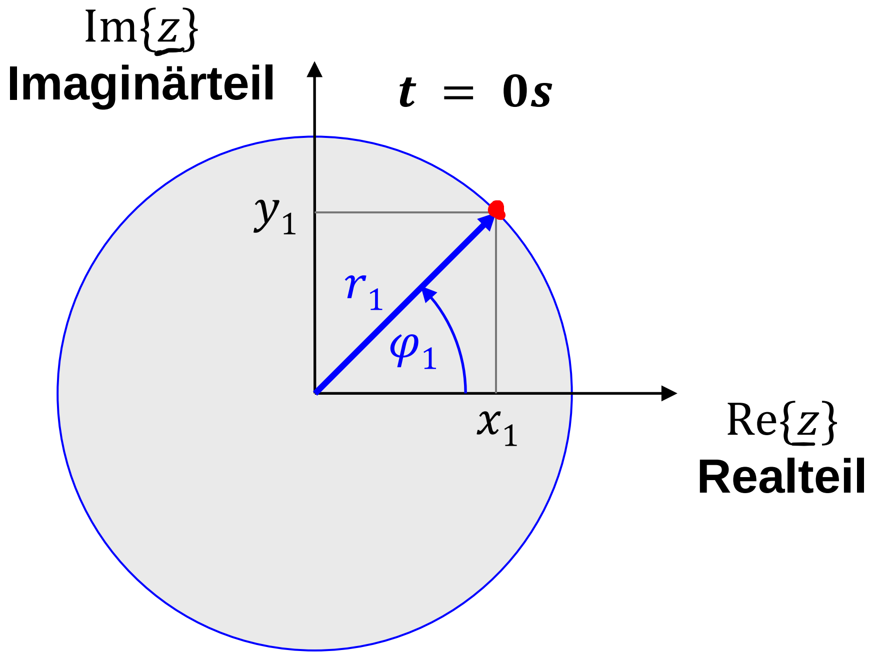
$$x_1 = r_1 \cdot \cos \varphi_1$$

$$y_1 = r_1 \cdot \sin \varphi_1$$

ZEIGERDARSTELLUNG MIT KOMPLEXEN ZAHLEN

2 reelle Zahlen x_1 und y_1 werden durch nur eine einzige Zahl $\underline{z}$ ersetzt.

$\underline{z}$ ist eine komplexe Zahl



Komplexe Ebene

statt (x_1, y_1) schreiben wir:

$$\underline{z} = x_1 + j\, y_1$$

Realteil

Imaginärteil

DIE IMAGINÄRE ZAHL i (IN DER E-TECHNIK j)

Wir setzen:

$$\boxed{j^2 = -1}$$

Warnung:

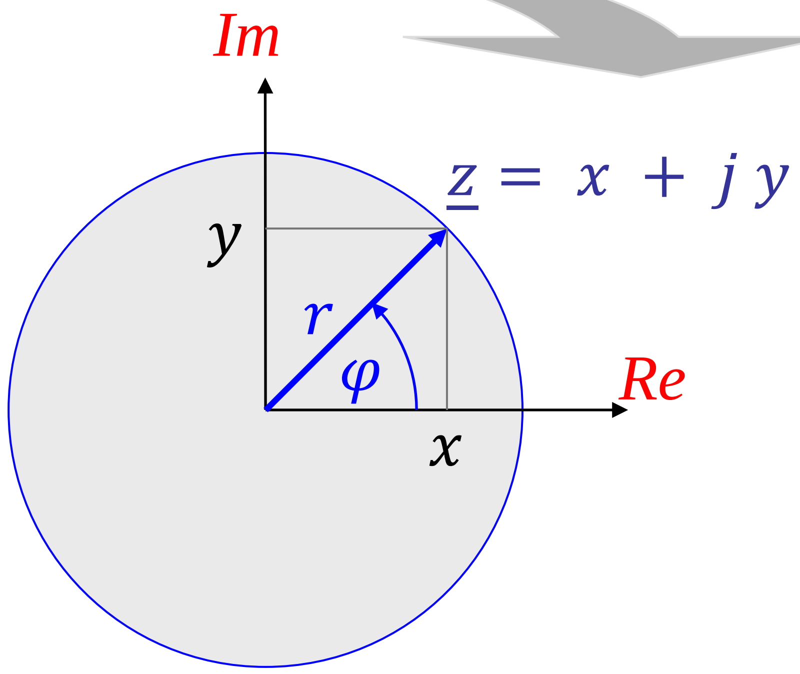
Vorsicht beim Umgang mit der Wurzel.

Dies führt in bestimmten Rechnungen zu einem falschen Ergebnis!

KARTESISCHE KOORDINATEN & POLARKOORDINATEN

$|\underline{z}| = \mathrm{Re}\{\underline{z}\}^2 + \mathrm{Im}\{\underline{z}\}^2$

$\arg\{\underline{z}\} = \arctan\left(\frac{\mathrm{Im}\{\underline{z}\}}{\mathrm{Re}\{\underline{z}\}}\right)$



kartesische Koordinaten

$$x = r \cdot \cos\varphi$$
$$y = r \cdot \sin\varphi$$

Polarkoordinaten

$$r = \sqrt{x^2 + y^2}$$
$$\varphi = \arctan\frac{y}{x}$$

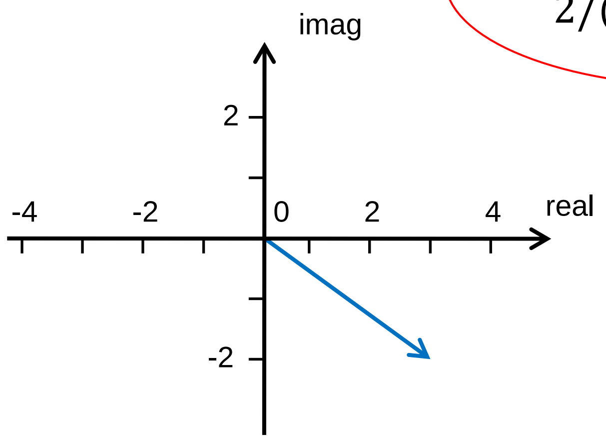
Wichtig:
-3 / 4 = 3 / -4
aber verschiedene
Winkel ϕ !

arctan2: $E \rightarrow\ ]-\pi, +\pi]$ oder $[-\pi, +\pi[$

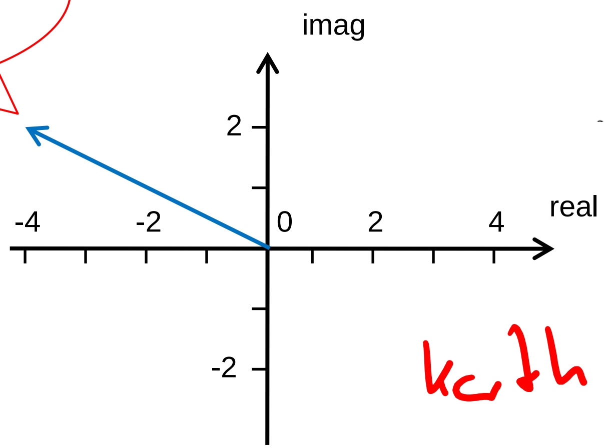
$$(x, y) \mapsto \begin{cases} \arctan\left(\frac{y}{x}\right) & \text{für } x > 0 \\ \arctan\left(\frac{y}{x}\right) + \pi & \text{für } x < 0,\ y > 0 \\ \pm\pi & \text{für } x < 0,\ y = 0 \\ \arctan\left(\frac{y}{x}\right) - \pi & \text{für } x < 0,\ y < 0 \\ +\frac{\pi}{2} & \text{für } x = 0,\ y > 0 \\ -\frac{\pi}{2} & \text{für } x = 0,\ y < 0 \end{cases}$$

AUFGABE

Beschreiben Sie den komplexen Zeiger sowie in Polarkoordinaten und in kartesischen Koordinaten



Vorsicht bei arctan:
$2/(-4) \neq (-2)/4$



arctan2: $E \to \left]-\pi, +\pi\right]$ oder $\left[-\pi, +\pi\right[$

$$(x, y) \mapsto \begin{cases} \arctan\left(\frac{y}{x}\right) & \text{für } x > 0 \\ \arctan\left(\frac{y}{x}\right) + \pi & \text{für } x < 0,\ y > 0 \\ \pm\pi & \text{für } x < 0,\ y = 0 \\ \arctan\left(\frac{y}{x}\right) - \pi & \text{für } x < 0,\ y < 0 \\ +\frac{\pi}{2} & \text{für } x = 0,\ y > 0 \\ -\frac{\pi}{2} & \text{für } x = 0,\ y < 0 \end{cases}$$

kart: $(-4; 2)$

$z_2 = -4 + j2$

Pol: $\left(\sqrt{(-4)^2 + 2^2}\ ;\ \arctan\left(\frac{-4}{2}\right)\right)$

HAW Hamburg
Fakultät TI
Technik und Informatik

EULERSCHE FORMEL

Es gilt für komplexe Zahlen die Eulersche Formel:

$$e^{j\varphi} = \cos\varphi + j \cdot \sin\varphi$$

Nutzen:
Eine komplexe Zahl in Polarkoordinaten mit r, φ kann sehr kompakt als Exponentialfunktion dargestellt werden:

$$\underline{z} = r \cdot e^{j\varphi}$$

SIE GLAUBEN NICHT, DASS $e^{j\varphi} = \cos\varphi + j\sin\varphi$?

$$e^{j\varphi} = \cos\varphi + j\sin\varphi$$

$$\Leftrightarrow \frac{\cos\varphi + j\sin\varphi}{e^{j\varphi}} = 1$$

$$\Leftrightarrow e^{-j\varphi} \cdot (\cos\varphi + j\sin\varphi) = 1 = f(\varphi)$$

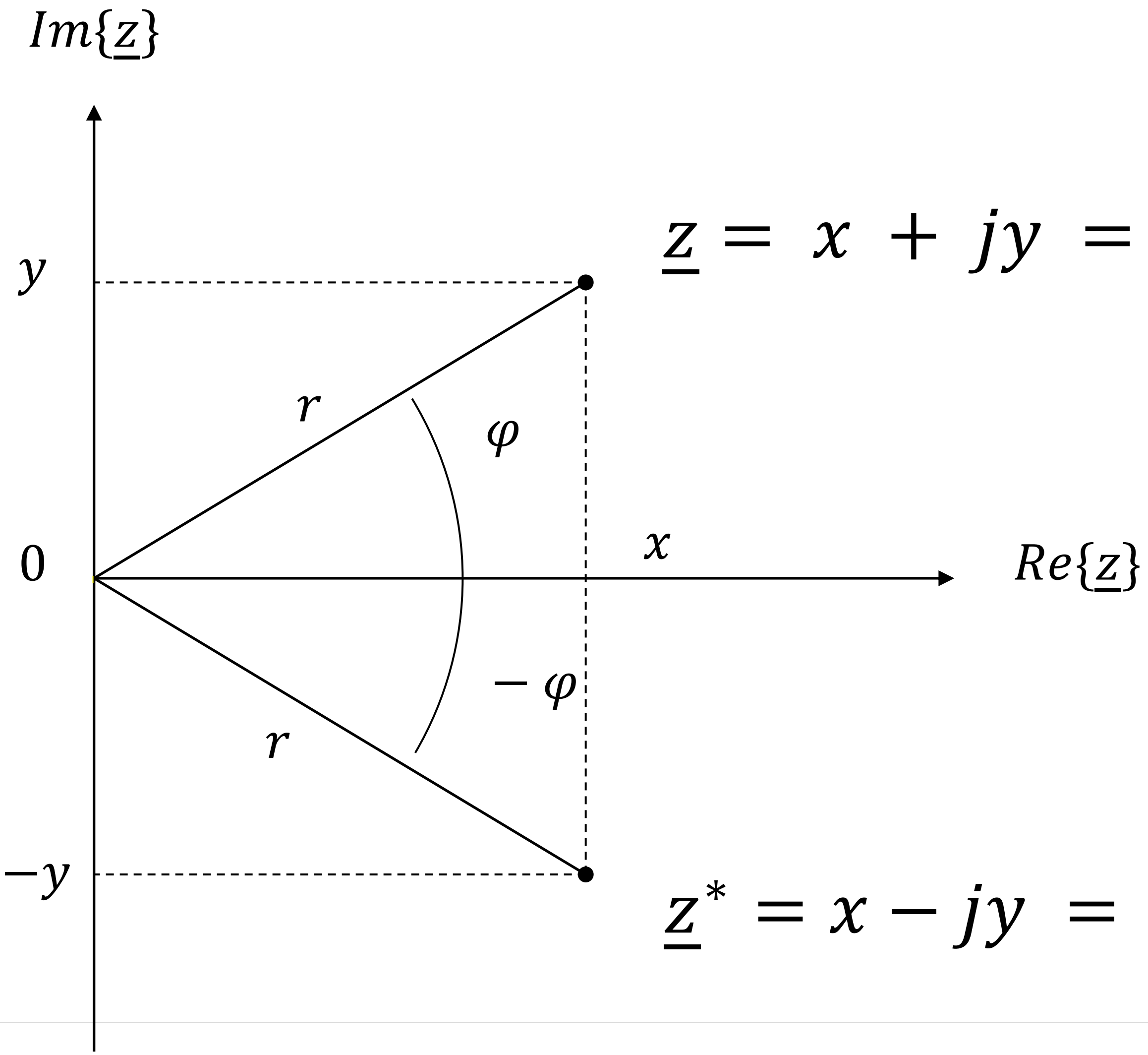
$$\frac{df(\varphi)}{d\varphi} = -je^{-j\varphi} \cdot (\cos\varphi + j\sin\varphi) + e^{-j\varphi} \cdot (-\sin\varphi + j\cos\varphi) = 0$$

$$\Rightarrow f(\varphi) = const,$$

mit $f(0) = e^{-j0} \cdot (\cos 0 + j\sin 0) = 1$

$\Rightarrow f(\varphi) = 1$ für alle φ

KOMPLEXE EBENE



$$\underline{z} = x + jy = r\, e^{j\varphi}$$

$$\underline{z}^* = x - jy = r e^{-j\varphi}$$

RECHNEN MIT KOMPLEXEN ZAHLEN

1. Binomische Formel

$$(a+b)\,(a-b) = a^2 - b^2$$

$$(1+3j)\,(1-3j) = 1^2 + 3^2 = \mathrm{Re}\{\underline{z}\}^2 + \mathrm{Im}\{\underline{z}\}^2$$

$$\underline{z} \cdot \underline{z}^* =$$

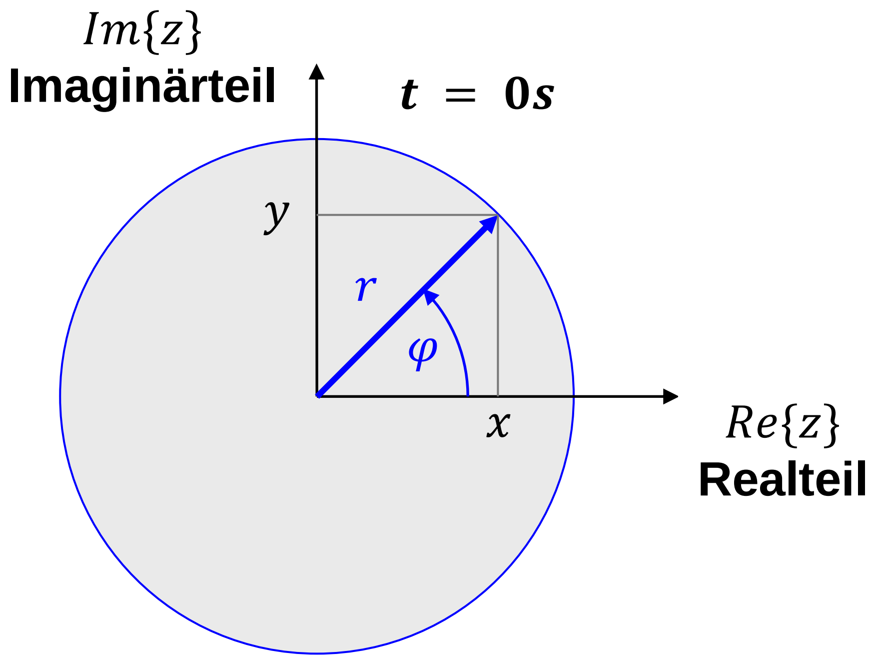
2. Im Ergebnis keine komplexe Zahl im Nenner!

$$\frac{1+3j}{1-2j} = \frac{1+3j\,(1+2j)}{(1-2j)(1+2j)} = \frac{(1+3j)(1+2j)}{1+4} = \frac{1+5j-6}{5} = \frac{-5+5j}{5} = -1+j$$

3. Division oder Multiplikation in Polar-Form

$$\frac{2e^{j\frac{\pi}{4}}}{4e^{-j\frac{\pi}{4}}} = \frac{2}{4} \cdot e^{\left(j\,\pi/4 - (-j\,\pi/4)\right)} = \frac{1}{2} \cdot e^{j\,\pi/2} = \left(\tfrac{1}{2} \angle \pi/2\right)$$

TRANSFORMATION VON u IN KOMPLEXE EBENE



gegeben:

$u(t)$ im Zeitbereich

$$u = \hat{u}\sin(\omega t + \varphi_0)$$

$u(t)$ in Zeigerdarstellung

$$r = \hat{u}, \qquad \varphi = \omega t + \varphi_0$$

$\Rightarrow$ $u(t)$ in kartesischen Koordinaten

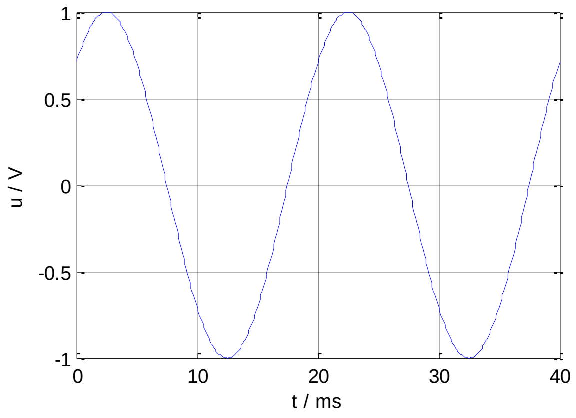
$$x(t) = \hat{u}\cos(\omega t + \varphi_0)$$
$$y(t) = \hat{u}\sin(\omega t + \varphi_0)$$

Transformation von u in die komplexe Ebene:

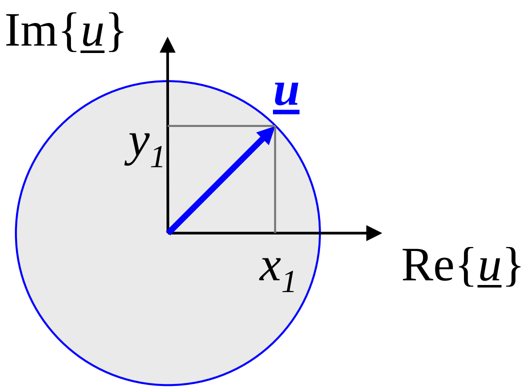
$$\underline{u} = x + j\,y = \hat{u}\cos(\omega t + \varphi_0) + j\,\hat{u}\sin(\omega t + \varphi_0)$$

ZEITBEREICH UND KOMPLEXE EBENE

Zeitbereich



Komplexe Ebene



u ⊙ j ⊕ $\hat{u}\cos(\omega t + \varphi_0)$

$$u = \hat{u}\sin(\omega t + \varphi_0)$$

$$\underline{u}(t) = \hat{u}\cos(\omega t + \varphi_0) + j\,\hat{u}\sin(\omega t + \varphi_0)$$

$u = \mathrm{Im}\{\underline{u}\}$

KOMPLEXE WECHSELGRÖßEN

Mit der Eulerschen Formel folgt für die komplexe Größe:

$$\boxed{\underline{u}(t) = \hat{u}\cos(\omega t + \varphi_0) + j\,\hat{u}\sin(\omega t + \varphi_0) = \hat{u} \cdot e^{j\varphi_0} e^{j\omega t}}$$

$\underline{\hat{u}} = \hat{u} \cdot e^{j\varphi_0}$	komplexe Amplitude
$\lvert\underline{\hat{u}}\rvert = \hat{u}$	Betrag der komplexen Amplitude
$\arg(\underline{\hat{u}}) = \varphi_0$	Phasenwinkel der komplexen Amplitude
$e^{\,j\omega t}$	Winkelfaktor

$\Rightarrow$ Eine Zeitfunktion lässt sich in der komplexe Ebene darstellen als:

$$\boxed{\underline{u}(t) = \underline{\hat{u}} \cdot e^{j\omega t}}$$

ZEIGERDARSTELLUNG EINER WECHSELGRÖßE

Zeigerdarstellung einer sinusförmigen Wechselgröße:

- durch komplexe Amplitude zu der Zeit $t = 0$ beschrieben
- Zeiger entspricht $\underline{u}(0)$

Anmerkungen

- anstelle von $\hat{u} \cdot e^{j\varphi}$ schreibt man auch: $\hat{u} \angle \varphi$
- man verwendet auch den Effektivwert: $\underline{U} = U \angle \varphi$

$U = \hat{u} / \sqrt{2}$

BEISPIEL

Es sei:

Wir benötigen eine Formelsammlung, um zu erkennen, dass dies wieder sinusförmig ist.

$$u_1(t) = 20\mu V \cdot \sin(\omega t - \pi/6)$$

$$u_2(t) = 32\mu V \cdot \sin(\omega t + \pi/3)$$

$$\Rightarrow u_s(t)/\mu V = 20 \cdot \sin(\omega t \overset{-}{\cancel{+}} \pi/6) + 32 \cdot \sin(\omega t + \pi/3)$$

$\underline{\hat{u}_1} = \underline{20}\ \mu V \angle \underline{-\pi/6} = \underline{10\sqrt{3}}\ \mu V - j\ \underline{10}\ \mu V$

$\underline{\hat{u}_2} = \underline{32}\ \mu V \angle \underline{+\pi/3} = \underline{16}\ \mu V + j\ \underline{16 \cdot \sqrt{3}}\ \mu V$

$\underline{\hat{u}_s} = \underline{33{,}32}\ \mu V + j\ \underline{17{,}71}\ \mu V = \underline{36{,}85}\ \mu V \angle \underline{0{,}501}$

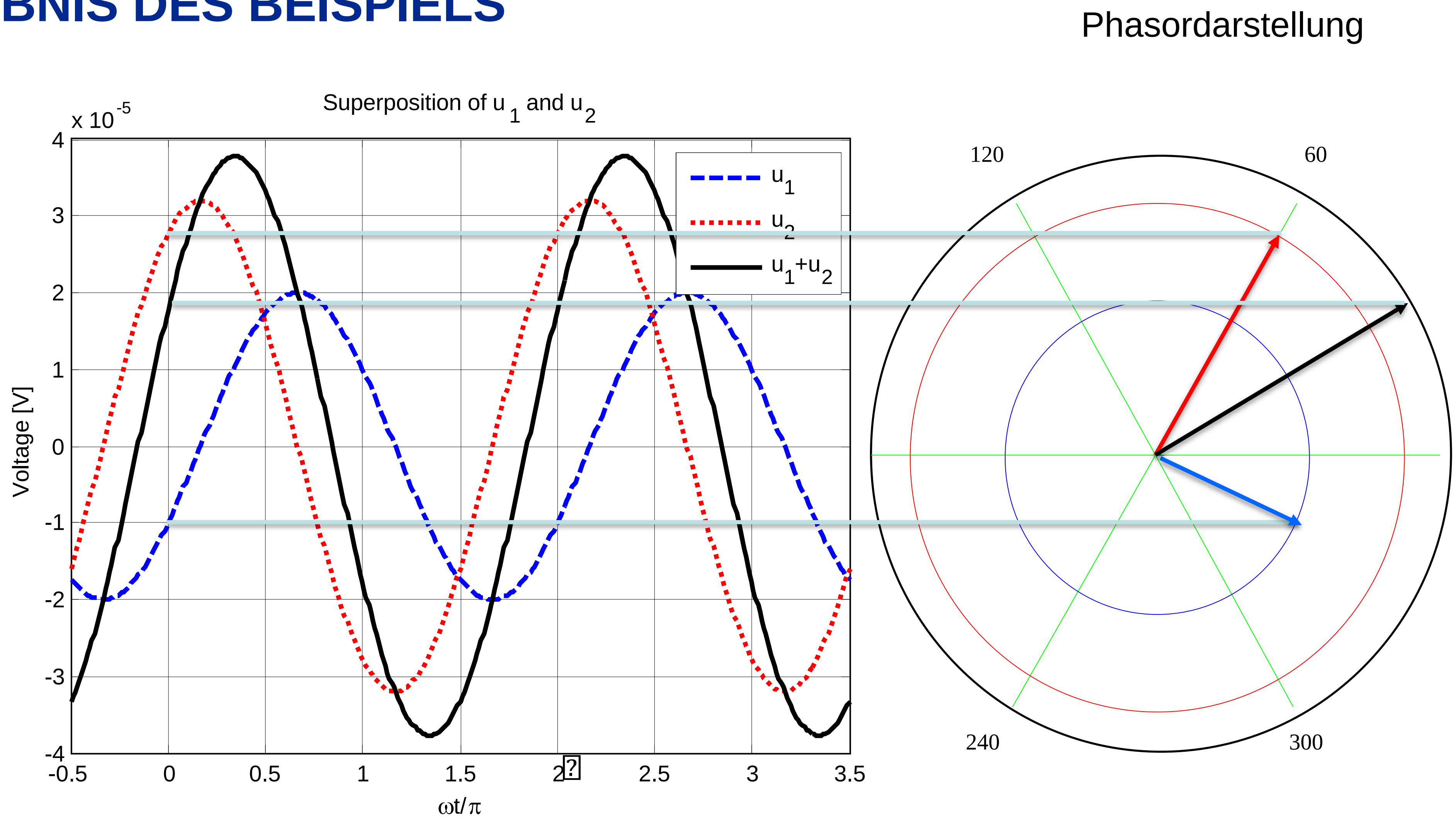
$\angle 28{,}7°$

Die Summe der Spannungen ist eine sinusförmige Spannung

mit der Amplitude $\underline{36{,}85\ \mu V}$

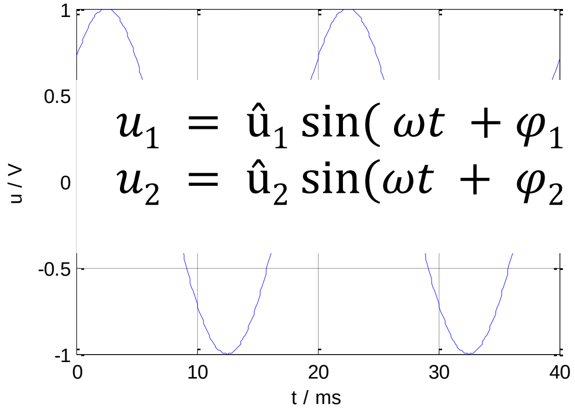
und der Phase $\underline{28{,}7}\ °$

ERGEBNIS DES BEISPIELS



$\underline{u_s} = 37{,}7\mu V \quad 28°$

IDEE DER KOMPLEXEN WECHSELSPANNUNGSRECHNUNG



$$u_1 = \hat{u}_1 \sin(\omega t + \varphi_1)$$
$$u_2 = \hat{u}_2 \sin(\omega t + \varphi_2)$$

Transformation in komplexe Ebene

$$\underline{u}_1 = x_1 + j\,y_1 = r_1\,e^{j\varphi_1}$$
$$\underline{u}_2 = x_2 + j\,y_2 = r_2 e^{j\varphi_2}$$

Rechnung, z.B.:

$$\underline{u}_1 \cdot \underline{u}_2 = r_1 r_2 e^{j(\varphi_1+\varphi_2)}$$

Rücktransformation in Zeitbereich

$$u_{ges} = Im\{\underline{u}_1 \cdot \underline{u}_2\}$$

Viele Rechnungen sind einfacher mit komplexen Zahlen als im Zeitbereich mit Sinusfunktionen

- Addition und Subtraktion (häufig für Kirchhoffsche Gesetze)
- Multiplikation und Division (häufig für ohmsches Gesetz)
- Ableitung und Integration (häufig für Kondensator und Induktivität)

WAS SIE MITNEHMEN SOLLEN…

Kenngrößen periodischer Funktionen

- Frequenz, Periode
- Spitzenwert, Amplitude, Mittelwert, Gleichrichtwert, Effektivwert

$$\overline{|u|} = \frac{1}{T}\int_0^T |u|dt$$

$$I = \underbrace{\sqrt{\underbrace{\frac{1}{T}\int_0^T \overbrace{i^2}^{\text{square}} dt}_{\text{mean}}}}_{\text{root}}$$

$$\bar{u} = \frac{1}{T}\int_0^T u dt$$

Effektivwert

- berechnen und erklären

Kenngrößen sinusförmiger Funktionen

- Mittelwert und Effektivwert

$$U = \frac{\hat{u}}{\sqrt{2}}$$

WAS SIE MITNEHMEN SOLLEN…

Zeigerdarstellung

Phasendifferenz

Rechnen mit komplexen Zahlen

Transformation zwischen Zeitbereich und komplexer Ebene