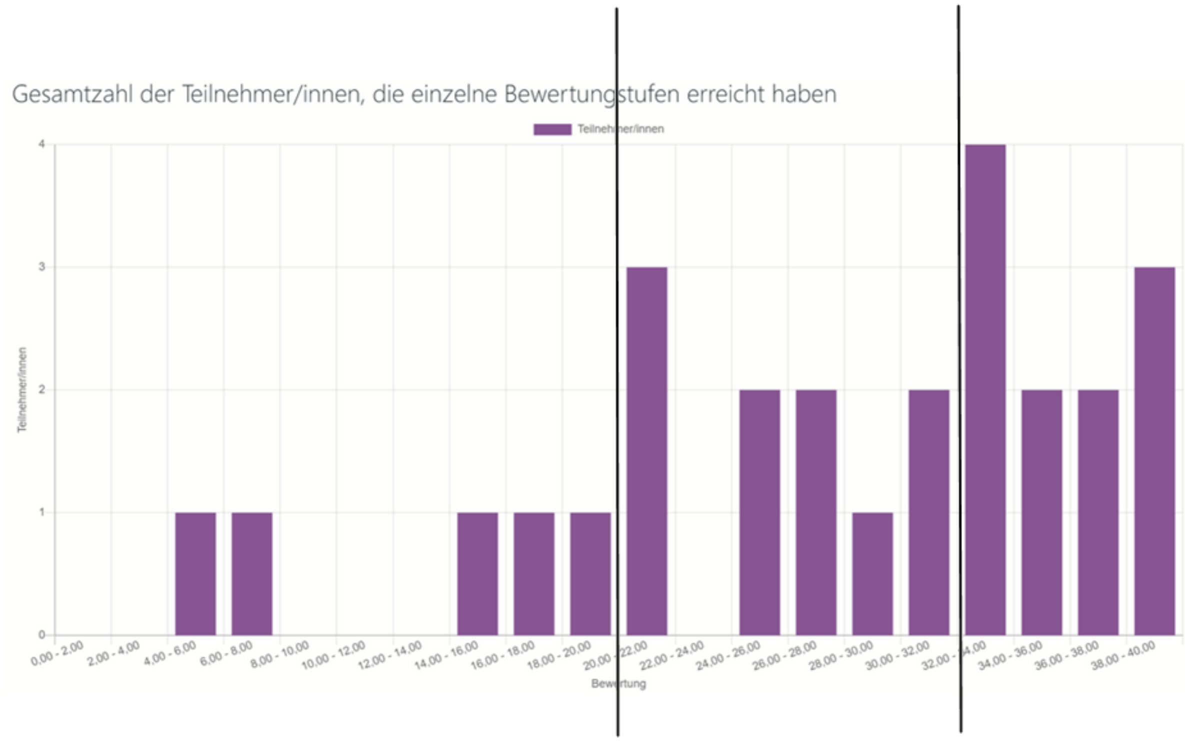
## Vorlesung 21 am 08.12.2022

**Inhalte: Funktionen**
- Eigenschaften



| | | |
|---|---|---|
| | **Do 1.12. 1.+2.Viertel**<br>**V19: Funktionen 1**<br>Relationen, Abbildungen, Bijektivität, Umkehrfunktion, Matrix als lineare Abbildung | Übungsaufgaben Funktionen 1 (Abbildung, Umkehrfunktion) |
| **12**<br>**KW 49**<br>**5.12.-9.12.** | **Mi 7.12. 3.+4. +5.Viertel PVL3 im PC-Pool**<br>**V20: Funktionen 2**<br>Eigenschaften von Funktionen, Grenzwerte bei Funktionen<br>PVL-Test 3: Folgen und Komplexe Zahlen | Übungsaufgaben Funktionen 2 (Grenzwerte) |
| | **Do 8.12. 1.+2.Viertel**<br>**V21: Funktionen 3**<br>Stetigkeit, Unstetigkeit, Stetige Ergänzbarkeit, Zwischenwertsatz, Nullstellensatz, Bisektionsverfahren | Übungsaufgaben Funktionen 3 (Stetigkeit)<br>Übungsaufgaben Funktionen 4 (Eigenschaften) |
| **13**<br>**KW 50**<br>**12.12.-16.12.** | **Mi 14.12.. 3.+4.+5. Viertel PC-Pool 1301a/b**<br>**Übungen 6 - Funktionen**<br>(12:10 Uhr Gruppe 3, 14:10 Uhr Gruppe 1, 15:55 Uhr Gruppe 2) | |
| | **Do 15.12. 1.+2.Viertel**<br>**V22: Funktionen 4**<br>Spezielle Funktionen, Polynome, gebrochen rationale Funtionen, Funktionen in Polarkoordinaten, in Parameterdarstellung | Übungsaufgaben Funktionen 5 |
| **14**<br>**KW 51**<br>**19.12.-23.12.** | **Mi 21.12. 3.+4. (+5.) Viertel**<br>**V23: Differentialrechnung 2**<br>Differenzierbarkeit, weitere Ableitungsmethoden,Extremwerte | Übungsaufgaben Differentialrechnung 3 (Differentialquotient, Differenzierbarkeit, grafische Interpretation) |

vorläufige Ergebnisse PVL 3 vom 7.12.2022




5/ 26 = 19,2 %

10/ 26 = 38,5 %

11/ 26 = 42,3 %

Beispiel: Anwendung von Stetigkeit und Differenzierbarkeit → z.B. aber auch Grundlage für numerische Verfahren

# Praktische Grundlagen von Regelsystemen

**Stetigkeit und stetige Differenzierbarkeit aller Systeme**

*Prof. E. Dittmar,* Gummersbach

**Dieser Beitrag schließt den Beweis für die Stetigkeit und gleichmäßige stetige Differenzierbarkeit aller Regelsysteme ab. Wesentliche Grundgedanken mit praktischen Anwendungen wurden bereits in [1] angeführt. Im Zentrum stand die Dynamik der Regelgetriebe und der entscheidende Einfluss des Messortes auf die Regelungen.**

## 1 Einführung

Der vorhergehende Beitrag schloss mit dem Fazit: Die Energie lässt keine Sprünge zu. Dieser Beweis ist deshalb so wichtig, weil auf diesem Ergebnis wichtige Verfahren aufbauen, wie

- die Laplace-Transformation mit der Algebraisierung der Differentialgleichungen
- die komplexe Übertragungsfunktion mit dem Frequenzgang
- das Frequenzkennlinien-Verfahren mit der Stabilität nach Bode
- viele Optimierungs-Verfahren wie die lineare und betragsoptimale Optimierung.

Für die Darstellung und insgesamt für die Regelsysteme ist ein gewisses Maß an angewandter Mathematik nötig, aber der Art, dass dies in der Praxis noch gut verständlich ist. Auf die unnötig übertriebene Mathematisierung wurde bereits im letzten Beitrag hingewiesen.

Dieser Beweis wird an dem bereits bekannten Elektroantrieb (Bild ❶a) geführt. Ferner wird mit der Getriebeübersetzung ü = 1 gerechnet, da die Fälle ü < 1 und ü > 1 bereits in der Fallunterscheidung [1] untersucht wurden.

## 2 Bedeutung der Stetigkeit und der Linearität

Wenn das System des Elektroantriebs stetig, stetig differenzierbar und damit linear, oder wegen der Stetigkeit im Arbeitspunkt A linearisierbar ist, kann die Laplace-Transformation angewandt werden zur Berechnung der komplexen Übertragungsfunktion F = f(s) mit dem Frequenzgang:

$$F(s)\big|_{s=(\sigma+j\omega)} = F(j\omega) \text{ mit } \omega = 2\pi f \quad (1)$$

und der Zeitkonstanten des Systems

$$T = \frac{1}{\omega_E} = \frac{1}{2\pi f_E}$$

Die Gleichung 1 soll hier kurz interpretiert werden, sie wird später bei der Untersuchung der komplexen Übertragungsfunktion zusammen mit dem Frequenzgang genauer erörtert.

Der Realanteil des Laplace-Transformation-Operators ist σ = 0 bei den ungedämpften Schwingungen, die am meisten in technischen Anwendungen vorkommen. Die Differentialgleichung des Motorsystems ist eine Differentialgleichung 1. Ordnung und beschreibt das Drehzahlverhalten $n = f(t)$ im Zeitbereich, auch Oberbereich genannt. Die Laplace-Transformation transformiert die Differentialgleichungen in den Frequenzbereich, auch Unterbereich genannt. Der Vorteil liegt darin, dass die Differentialgleichungen in algebraische Gleichungen übergehen, wobei sich der Systeminhalt nicht ändert.

Mit algebraischen Gleichungen ist viel leichter zu rechnen als mit Differentialgleichungen. Dies macht sich besonders bei komplexen Systemen bemerkbar. Ohne die Algebraisierung wäre die Systemreduktion gar nicht anwendbar und damit auch keine lineare oder betragsoptimale Optimierung. Es kann die Signalflussdiagramm-Algebra mit dem Signalflussdiagramm selbst angewandt werden. Das Signalflussdiagramm ist ein besonderes Kennzeichen der gesamten Regelungstechnik und gibt die gezeichnete mathematische Struktur der Regelungen wieder.

Die Fourier-Transformation ist im Ansatz der Gleichung 1 schon mit enthalten. Die Z-Transformation wird für die praktischen Grundlagen der digitalen Regelsysteme nicht gebraucht. Die digitalen Regelalgorithmen verhalten sich aufgrund der kleinen Abtastzeit $T_{ab}$, die gegenüber der Hauptzeitkonstante $T_s$ sehr viel kleiner ist, quasi analog.

Es gilt nach Gleichung 19 [1] zusammen mit der kleinsten Zeitkonstanten $T_{min}$ des Systems:

$$T_{ab} = 0{,}1\, T_{min}$$

Am Verlauf der Regelgröße $x = f(t)$ ist nicht zu erkennen, ob in einem Regelkreis ein digitaler oder analoger Regler arbeitet.

**Autor**

Prof. *Edgar Dittmar* ist beamteter Hochschulprofessor für elektronische Steuerungstechnik, Regel- und Computersysteme der Universität Siegen.

## 3 Stetigkeit und Linearität technischer Systeme

Die Untersuchungen [1] über das Massenträgheitsmoment Θ sind beim nachfolgenden Beweis für die Stetigkeit und die stetige Differenzierbarkeit deshalb so wichtig, weil es der Träger der System-Energie ist. Zu zeigen ist: Alle technischen Systeme, die einen Energieinhalt und damit eine System-Zeitkonstante T haben sind analog, stetig, stetig differenzierbar und linear oder linearisierbar im Arbeitspunkt. Die Energie lässt in der Natur keine Sprünge zu.

### 3.1 Beweis der Stetigkeit

Als anschauliches Beispiel wird auf den Motorantrieb zurückgegriffen, der mit allen Kurven für den Beweis der Stetigkeit und gleichmäßigen stetigen Differenzierbarkeit in Bild ❶ dargestellt ist.

Die Differentialgleichung lautet:

$$T\frac{d}{dt}x_a + x_a = K_s x_e \quad (2)$$

Die Eingangsgröße als Eingangssprung der Spannung $x_{e0} = U_{m,0}$ ist an der Stelle t = 0 unstetig (Bild ❶b):

$$x_e(t) = x_{e0}\begin{cases} t \geq 0 & x = x_{e0} \\ t \leq 0 & x = 0 \end{cases} \quad (3)$$

Der Drehzahlverlauf $x_a = n$ als Übertragungsfunktion lautet:

$$x_a = K\, x_{e0}\,(1 - e^{-\frac{t}{T}}) \quad (4)$$

Dieser Verlauf beginnt an der Stelle $t = 0$ mit einer endlichen Steigung, steigt gleichmäßig stetig an und ist in jedem Punkt für $t \geq 0$ stetig differenzierbar.

Dabei muss die Massenträgheit Θ durch die elektrische Energie beschleunigt werden:

$$E_e = U_{m,0}\int_0^{5T} i_m \, dt \quad (5)$$

Diese Umwandlung von elektrischer in mechanische Energie

$$E_k = \frac{1}{2}\Theta\omega_{max}^2 \text{ oder } E_k = \frac{\pi^2}{1800}\Theta n_{max}^2 \quad (6)$$

(mit n in [U/min]) ändert sich nicht sprunghaft, und damit kann sich die Drehzahl $n$ auch nur gleichmäßig stetig ändern. Daraus

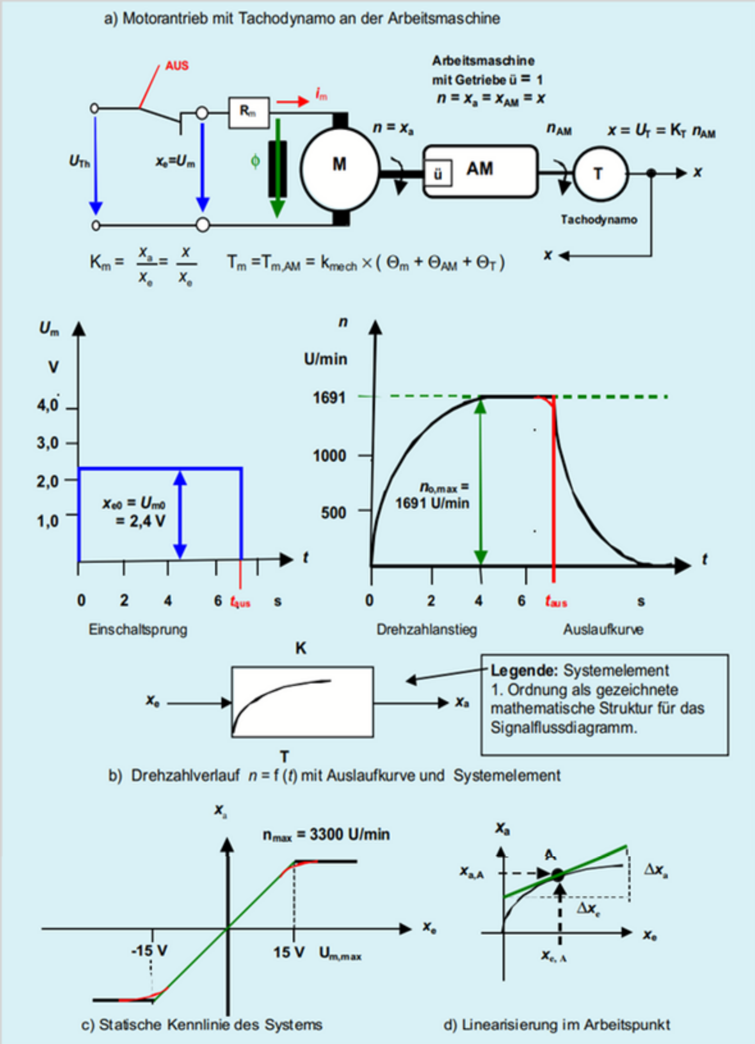


https://www.elektropraktiker.de/ep-2003-01-34-38.pdf?eID=tx_nawsecuredl&falld=6171&hash=60bf1944b70f8e70d5d4d5321d48587e

folgt: Die Energie eines Systems kann sich nie sprungartig ändern.
Noch deutlicher wird dieses Naturgesetz an der Auslaufkurve des Motorantriebs (Bild ❶b). Zum Zeitpunkt $t = t_{aus}$ ist die Drehzahl:

$$n\big|_{t=t_{aus}} = n_{max} \quad \rightarrow \quad n = 0 \tag{7}$$

Aufgrund der in dem Massenträgheitsmoment Θ gespeicherten Energie fällt die Drehzahl vom Maximalwert nicht sprungartig, sondern stetig auf Null ab. Wäre das System nicht stetig, würde die Drehzahl $n$ an der Stelle $t_{aus}$ sofort auf Null abfallen. Aber für die Werte $t \geq t_{aus}$ beginnt die Auslaufkurve des Motorantriebs nach Gleichung 7.
An der Stelle $t = t_{aus}$ haben der Verlauf des Drehzahlanstiegs und der Auslaufkurve den gleichen Wert $n_{max}$ = 1691 [U/min]. Daraus folgt, dass der Drehzahlverlauf an der Stelle $t = t_{aus}$ stetig und damit der gesamte Verlauf der Drehzahlkurve nach Bild ❶b stetig ist, aber theoretisch nicht stetig differenzierbar, da es an der Stelle $t = t_{aus}$ zwei Steigungen gibt und damit zwei Differentialquotienten. Der schwarze Kurvenverlauf zeigt an der Stelle $t = t_{aus}$ einen Knick. Das ist der ungünstigste denkbare Fall.
Versuche haben aber gezeigt, dass der Drehzahlverlauf nach Bild ❶b aufgrund der glättenden Wirkung der Massenträgheit Θ keinen Knick aufweist, wie in der theoretischen Kurve, sondern abgerundet ist (rote Linie im Bild). Damit wird der Drehzahlverlauf $n = f(t)$ über den gesamten Verlauf auch gleichmäßig stetig differenzierbar, und es ist bewiesen, dass das System im ganzen Wertebereich analog und stetig, gleichmäßig stetig differenzierbar und linear ist.




❶ **Stetigkeit und Linearisierbarkeit technischer Systeme**

### 3.2 Linearität und Linearisierbarkeit der statischen Kennlinie

Zu dieser dynamischen Untersuchung, die den zeitlichen Verlauf $x_a = f(t)$ beschreibt, muss nun noch die Linearität der statischen Kennlinie untersucht werden:

$$x_a = f(x_e) \tag{8}$$

Die Differentialgleichung des Systems muss sowohl das dynamische als auch das statische Verhalten richtig beschreiben. Das statische Verhalten ist dadurch gekennzeichnet, dass sich das System im Ausgleichszustand befindet. Der Ausgleichszustand ist dann erreicht, wenn die zeitliche Änderung nach Null geht. Dies ist theoretisch für $t \rightarrow \infty$ erreicht:

$$\lim_{t\to\infty}\left(T\frac{d}{dt}x_a + x_a = K_s x_e\right) \tag{9}$$
$$\rightarrow x_a = Kx_e \text{ (statische Kennlinie)}$$

In der technischen Praxis ist die Unendlichkeit mit der Ausgleichszeit $t_0$ (Bild ❶b: Drehzahlanstieg) erreicht bei:

$$t_0 = t_\infty = 5T = 5T_m = 5 \cdot 0{,}8\ \text{s} = 4\ \text{s} \tag{10}$$

Mit $t = t_0$ in Gleichung 4 ergibt sich eine sehr gute Näherung:

$$x_a = Kx_{e0}\left(1 - \frac{1}{e^5}\right) = Kx_{e0}(1 - 0{,}0067)$$
$$\rightarrow \Delta f = 6{,}7\ ‰ \quad \text{Näherungsfehler} \tag{11}$$

Für den Motorantrieb lautet die statische Kennlinie der Motordrehzahl:

$$n_0 = K_m \cdot U_{m,0} \tag{12}$$

Der Index 0 zeigt an, dass der Ausgleichszustand erreicht ist. Die Enddrehzahl $n_0$ steigt proportional mit der jeweiligen anliegenden Motorspannung $U_{m,0}$ an.

Weil die statische Kennlinie aus der Differentialgleichung abgeleitet ist, deren Lösung über den ganzen Wertebereich stetig und stetig differenzierbar ist, muss auch in allen Fällen die statische Kennlinie stetig und stetig differenzierbar sein. Die Ausgangsgröße $x_a$ folgt immer analog der Eingangsgröße $x_e$.
Ist der Übertragungsfaktors K = konstant, ist die statische Kennlinie (Bild ❶c) und damit das System selbst im geltenden Wertebereich linear. Damit erfüllt das System alle Anforderungen: stetig, stetig differenzierbar, analog und linear.
Die ersten drei Anforderungen von stetig bis analog erfüllen alle technischen Systeme und sind damit mindestens im Arbeitspunkt A linearisierbar (Bild ❶d) . Dann kann, wie eingangs bereits dargestellt, die Laplace-Transformation angewandt werden.
Der geltende Wertebereich der Linearität eines Systems ist durch die obere und untere Begrenzung gegeben, wie dies aus der

## Grenzwert einer Funktion für $x \to x_0$

### (1) rechtsseitiger Grenzwert für $x \to x_0$

$$g_r = \lim_{x \to x_0^+} f(x) = \lim_{n \to \infty} f\left(x_0 + \frac{1}{n}\right)$$

günstige Verwendung der Folge $x_n = x_0 + \frac{1}{n}$

### (2) linksseitiger Grenzwert für $x \to x_0$

$$g_l = \lim_{x \to x_0^-} f(x) = \lim_{n \to \infty} f\left(x_0 - \frac{1}{n}\right)$$

günstige Verwendung der Folge $x_n = x_0 - \frac{1}{n}$

### (3) Grenzwert für $x \to x_0$

Existieren die Grenzwerte $g_r$ und $g_l$, d.h. $g_r, g_l \neq \pm\infty$,

und gilt $\boxed{g_r = g_l}$,

so existiert der Grenzwert $\lim_{x \to x_0} f(x)$

und es gilt $\boxed{\lim_{x \to x_0} f(x) = g_r \ (g_l)}$

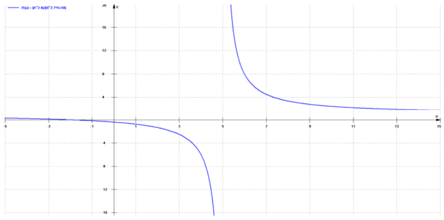
Bemerkung 1:
Es ist ausreichend, nur eine Folge von links und und eine Folge von rechts zu wählen, da diese repräsentativ sind!

Bemerkung 2:
Sobald der Grenzwert von einer Seite nicht existiert, existiert der Grenzwert in dem Punkt nicht.

## Beispiel zur Grenzwerte bei gebrochen rationalen Funktionen

$$f(x)=\frac{x^2-4}{x^2-7x+10}=\frac{x^2-4}{(x-2)(x-5)}$$

$$\textit{Definitionsbereich } D=\mathbb{R}\setminus\{2,5\}$$



Definitionslücke im Punkt $x_0 = 2$: **Grenzwert existiert**

$$g_r=g_l=-\frac{4}{3}$$

$$\lim_{x\to 2} f(x)=\frac{x^2-4}{x^2-7x+10}=-\frac{4}{3}$$

**Grenzwert existiert - Heben der Definitionslücke möglich**
- durch minimale Veränderung der Funktion
- Grenzwert wird als Funktionswert in der Definitionslücke definiert

$$f_1(x)=\begin{cases}\dfrac{x^2-4}{x^2-7x+10}, & x\neq 2\\ -\dfrac{4}{3}, & x=2\end{cases} \qquad \textit{Definitionsbereich } D_1=\mathbb{R}\setminus\{5\}$$

Umformen durch Kürzen in eine ähnliche Funktion, aber nicht gleiche Funktion:

$$f_1(x)=\frac{x^2-4}{x^2-7x+10}=\frac{\cancel{(x-2)}(x+2)}{\cancel{(x-2)}(x-5)}=\frac{x+2}{x-5}$$

$$\textit{Definitionsbereich } D_1=\mathbb{R}\setminus\{5\}$$

Definitionslücke im Punkt $x_0 = 5$ : **kein Grenzwert vorhanden**

$$g_r=\infty$$

$$g_l=-\infty$$

**kein Grenzwert vorhanden - Heben der Definitionslücke nicht möglich**
- Funktionswerte streben an der Definitionslücke gegen $\pm\infty$
- Funktion hat einen Pol im Punkt $x_0$

## Zusammenfassung:
## Grenzwerte und Stetigkeit von Funktionen

### (1) Grenzwert in $x_0$

Grenzwert existiert in $x_0$,

wenn $g_l$ und $g_r$ existieren ($\neq \pm\infty$)

und $g_l = g_r =: g$

### (2) Stetigkeit in $x_0$

① $x_0 \in D$

② $g := g_l = g_r$

③ $g = f(x_0)$

### (3) Unstetigkeit in $x_0$

① $x_0 \in D$

$\neg$② $g_l \neq g_r$ bzw existieren nicht

$\vee$

$\neg$③ $g \neq f(x_0)$

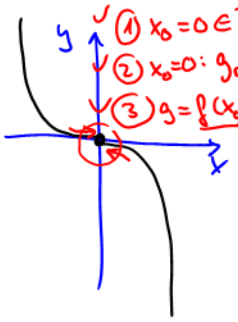
## (4) Stetige Ergänzbarkeit in $x_0$

- in $x_0$ definiert oder auch nicht
- Grenzwert muss in $x_0$ existieren
  $g := g_l = g_r$
- an der Stelle $x_0$ den Grenzwert als Funktionswert setzen
  $f(x_0) := g$
  (bei gebrochen rationalen Funktion kann dieses auch durch Herauskürzen des Linearfaktors erfolgen)

## (5) Bemerkung

- in einer Definitionslücke existiert die Funktion nicht, sodass Bed. ① der Stetigkeit / Unstetigkeit nicht erfüllt
- Grenzwerte können an jeder Definitionslücke berechnet werden

## Aufgabe 1:




✓ (1) $x_0 = 0 \in D$
✓ (2) $x_0 = 0$: $g_l = g_r = 0 =: g$
✓ (3) $g = f(x_0) = 0$

**Die reelle Funktion**

$$f(x) = \begin{cases} x^2 & \text{für } x < 0 \\ -x^2 & \text{für } x \geq 0 \end{cases}$$

**ist**

- überall stetig ✓
- an der Stelle 0 unstetig f
- an den Stellen ± 1 unstetig f

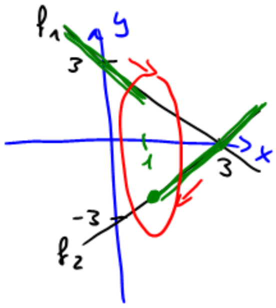
✓ (1) $x_0 = 1 \in D$
¬(2) f (2) $g_l = 2$, $g_r = -2$
$g_l \neq g_r$

**Die reelle Funktion**

$$g(x) = \begin{cases} 3 - x \quad f_1 & \text{für } x < 1 \\ x - 3 \quad f_2 & \text{für } x \geq 1 \end{cases}$$

**ist**

- überall stetig f
- an der Stelle 1 unstetig ✓
- an der Stelle 3 unstetig f




$$g(x) = \frac{(x-\sqrt{2})(x+\sqrt{2})}{x+2} \Leftarrow$$

$D = \mathbb{R} \setminus \{-2\}$

**Die reelle Funktion** $f(x) = \dfrac{x^2 - 2}{x + 2}$

- f besitzt eine stetig hebbare Definitionslücke
- ✓ besitzt eine Definitionslücke, die nicht stetig hebbar ist
- f besitzt keine Definitionslücke

$D = \mathbb{R} \setminus \{-2\}$, da $x = -2$ eine Nennernullstelle

**Die reelle Funktion** $g(x) = \dfrac{x^2 - 4}{x + 2} = \dfrac{(x-2)\cancel{(x+2)}}{\cancel{(x+2)}}$

- besitzt eine stetig hebbare Definitionslücke ✓ $x = -2$ ist eine Definitionslücke in $g(x)$, die durch Herauskürzen des Linearfaktors stetig ergänzt wird, d.h. Definitionslücke wird stetig geschlossen
- besitzt eine Definitionslücke, die nicht stetig hebbar ist f
- besitzt keine Definitionslücke f

$\Rightarrow g_1(x) = x - 2$ mit $D = \mathbb{R}$

alternative Formulierung für $g_1(x)$

$$g_1(x) = \begin{cases} \dfrac{x^2 - 4}{x + 2}, & x \neq -2 \\ -4, & x = -2 \end{cases}$$

$\uparrow$
$g_r = g_l$

$$g_r = \lim_{x \to -2^+} g(x) = \ldots = -4$$

$$g_l = \lim_{x \to -2^-} g(x) = \ldots = -4$$

$$f(x) = \frac{(x-\sqrt{2})(x+\sqrt{2})}{x^2+2} \Leftarrow$$

**Die reelle Funktion** $f(x) = \dfrac{x^2 - 2}{x^2 + 2}$

- f besitzt eine stetig hebbare Definitionslücke
- f besitzt eine Definitionslücke, die nicht stetig hebbar ist
- ✓ besitzt keine Definitionslücke, da keine Nennernullstelle

# Aufgabe 1:

**Die reelle Funktion**

$$f(x) = \begin{cases} x^2 & \text{für} \quad x < 0 \\ -x^2 & \text{für} \quad x \geq 0 \end{cases}$$

**ist**

| | |
|---|---|
| überall stetig | Richtig |
| an der Stelle $0$ unstetig | Falsch |
| an den Stellen $\pm 1$ unstetig | Falsch |

**Die reelle Funktion**

$$g(x) = \begin{cases} 3 - x & \text{für} \quad x < 1 \\ x - 3 & \text{für} \quad x \geq 1 \end{cases}$$

**ist**

| | |
|---|---|
| überall stetig | Falsch |
| an der Stelle $1$ unstetig | Richtig |
| an der Stelle $3$ unstetig | Falsch |

**Die reelle Funktion** $f(x) = \frac{x^2 - 2}{x + 2}$

| | |
|---|---|
| besitzt eine stetig hebbare Definitionslücke | Falsch |
| besitzt eine Definitionslücke, die nicht stetig hebbar ist | Richtig |
| besitzt keine Definitionslücke | Falsch |

**Die reelle Funktion** $g(x) = \frac{x^2 - 4}{x + 2}$

| | |
|---|---|
| besitzt eine stetig hebbare Definitionslücke | Richtig |
| besitzt eine Definitionslücke, die nicht stetig hebbar ist | Falsch |
| besitzt keine Definitionslücke | Falsch |

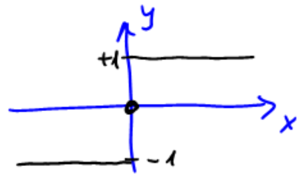
**Die reelle Funktion** $f(x) = \frac{x^2 - 2}{x^2 + 2}$

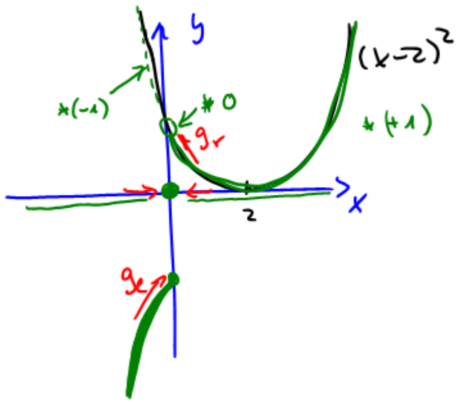
| | |
|---|---|
| besitzt eine stetig hebbare Definitionslücke | Falsch |
| besitzt eine Definitionslücke, die nicht stetig hebbar ist | Falsch |
| besitzt keine Definitionslücke | Richtig |

**Aufgabe 2:**
Prüfen Sie die Stetigkeit der nachfolgenden Funktion im Punkt x = 0.

$$f(x) = (x-2)^2 \operatorname{sgn}(x)$$

$$\operatorname{sgn}(x): \begin{cases} +1, & x > 0 \\ 0, & x = 0 \\ -1, & x < 0 \end{cases}$$




$D = \mathbb{R}$

.

## Aufgabe 2:
Prüfen Sie die Stetigkeit der nachfolgenden Funktion im Punkt x = 0.

$$f(x) = (x-2)^2 \operatorname{sgn}(x)$$

$f(x) = (x-2)^2 \operatorname{sgn}(x)$

(1) *ist* $x_0 = 0$ *definiert*

(2) *Grenzwerte:*

$x_n = 0 - \frac{1}{n}$

$$g_L = \lim_{x\to 0^-} f(x) = \lim_{x\to 0^-} (x-2)^2 \operatorname{sgn}(x) = \lim_{n\to\infty} (0 - \tfrac{1}{n} - 2)^2 \operatorname{sgn}(0 - \tfrac{1}{n})$$

$$= \lim_{n\to\infty} (\underbrace{+\underbrace{\tfrac{1}{n^2}}_{\to 0} + \underbrace{\tfrac{4}{n}}_{\to 0} + 4}_{\to 4}) \underbrace{\operatorname{sgn}(\underbrace{0 - \tfrac{1}{n}}_{<0})}_{\to -1} = \boxed{-4}$$

$$g_R = \lim_{x\to 0^+} f(x) = \lim_{x\to 0^+} (x-2)^2 \operatorname{sgn}(x) = \lim_{n\to\infty} (0 + \tfrac{1}{n} - 2)^2 \operatorname{sgn}(0 + \tfrac{1}{n})$$

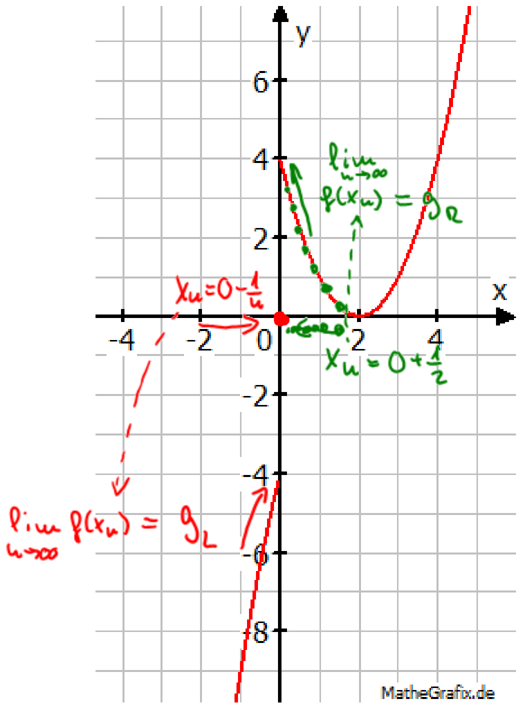
$x_n = 0 + \frac{1}{n}$

$$= \lim_{n\to\infty} (\underbrace{+\tfrac{1}{n^2} - \tfrac{4}{n} + 4}_{\to 4}) \underbrace{\operatorname{sgn}(\underbrace{0 + \tfrac{1}{n}}_{>0})}_{\to +1} = \boxed{4}$$

$g_L \neq g_R \Rightarrow$ *Grenzwert existiert nicht*

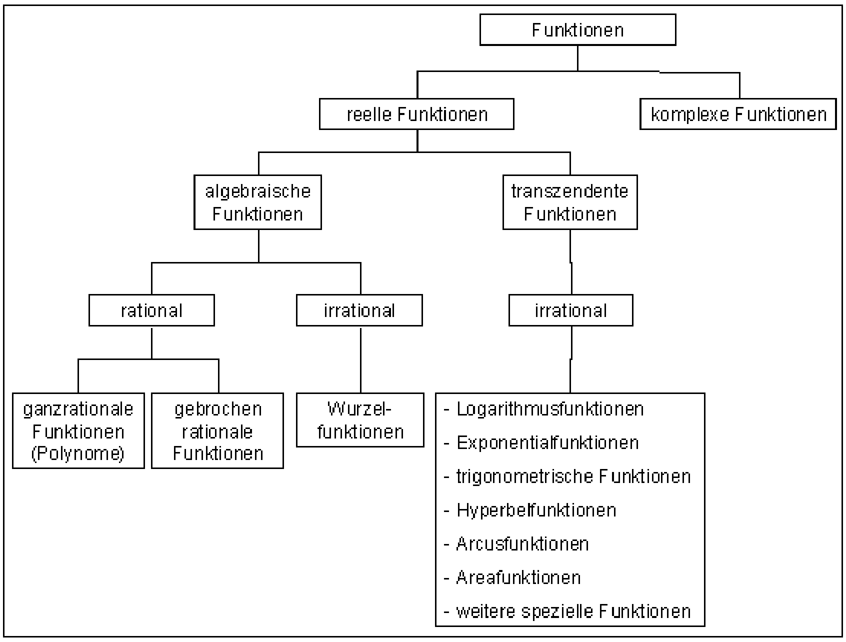
$\Rightarrow$ *Funktion ist in* $x_0 = 0$ *nicht stetig, da Bedingung 2) "Grenzwert existiert" nicht erfüllt ist*

*Funktion ist in* $x_0 = 0$ *unstetig, da Bedingung 2) der Stetigkeit verletzt ist*

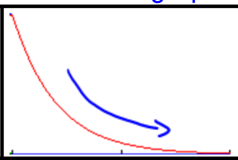
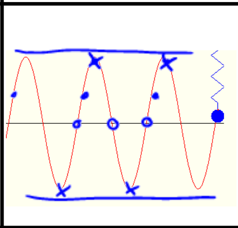
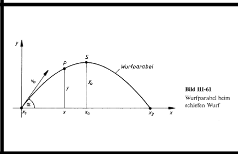
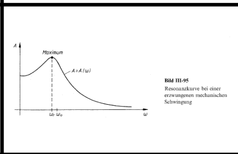
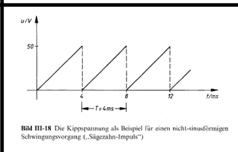
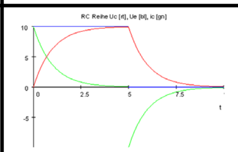
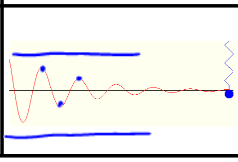


## Funktionen und ihre Eigenschaften

## Übersicht der Funktionen



## Verschiedene Funktionstypen

| Funktion | Funktionsgraph | Eigenschaften |
|---|---|---|
| **Exponentialfunktion**<br><br>Anwendungsbeispiel:<br>Entladen eines<br>Kondensators |  | • monoton fallend<br>• konvergent |
| **Trigonometrische Funktionen**<br><br>Anwendungsbeispiel:<br>Harmonische Schwingungen, z.B. Strom/<br>Spannung, Federpendel |  | • periodisch<br>• Beschränktheit<br>• Extremwerte<br>• Nullstellen |
| **Ganzrationale Funktionen**<br><br>Anwendungsbeispiel<br>Wurfparabel |  | • Maximum |
| **Gebrochenrationale Funktionen**<br><br>Anwendungsbeispiel<br>Resonanzvorgänge |  | • Maximum |
| **Spezielle kombinierte Funktionsverläufe**<br>.<br>.<br>. |  | • periodisch<br>• Unstetigkeit |
| **Spezielle kombinierte Funktionsverläufe**<br>.<br>.<br>. |  | • monoton fallend<br>• monoton steigend |
| **Spezielle kombinierte Funktionsverläufe**<br>.<br>.<br>. |  | • Extremwerte<br>• Beschränktheit |

# Verschiedene Funktionstypen

**Eigenschaften:**

- ✓ Definitionsbereich
- Monotonie
- Beschränktheit
- Symmetrie
- Periodizität
- Nullstellen
- Minimum/ Maximum
- ✓ Bijektivität
- ✓ Umkehrfunktion
- Pol
- Asymptote

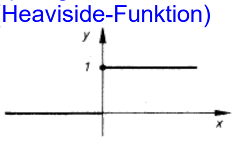
} → bei gebrochen rationalen Fkt.

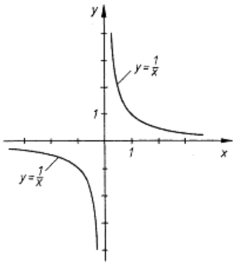
✓ **Grenzwert $x \to \pm\infty$**

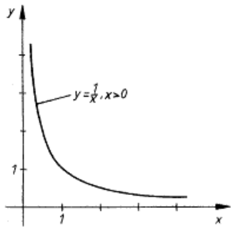
✓ **Grenzwert $x \to x_0$**

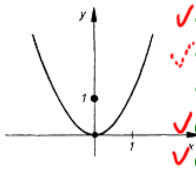
✓ **Stetigkeit**

Sprungfunktion
(Heaviside-Funktion)

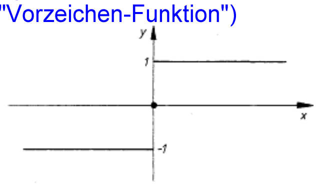


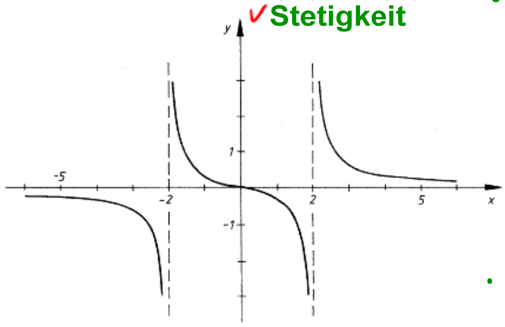


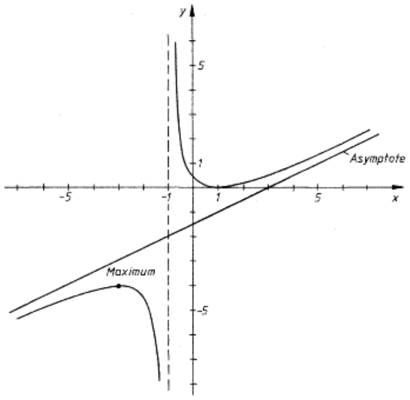



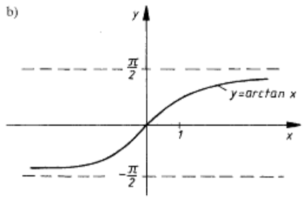



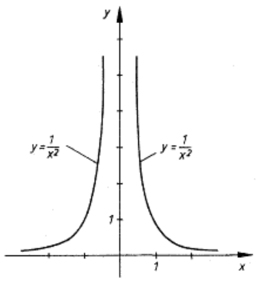
Signum-Funktion
("Vorzeichen-Funktion")

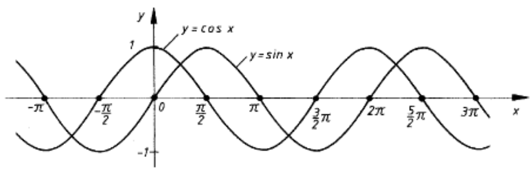


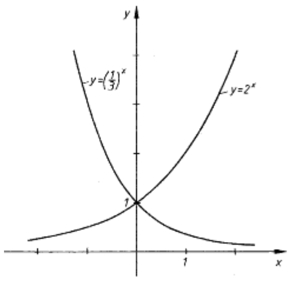




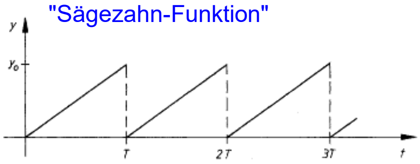




"Sägezahn-Funktion"



aus Papula, Mathematik für Ingenieure

# Funktionen

## 5.1 Definition und Darstellung

**Definition 5.1: reelle Funktion einer reellen Variablen**

Eine reelle **Funktion f** ist eine Vorschrift, die jedem Element x einer Menge $D \subseteq \mathbb{R}$ eindeutig eine reelle Zahl y einer Menge $B \subseteq \mathbb{R}$ zuordnet:

$$f: D \to B$$
$$x \to y = f(x)$$

x ist die unabhängige Variable, y die abhängige Variable.

**Darstellungsformen einer Funktion:**

- Verbale Beschreibung der Zuordnung
- tabellarische Darstellung
- graphische Darstellung

---

- **Darstellung in impliziter/ expliziter Darstellung**

**Definition 5.2: implizite/ explizite Funktionsdarstellung**

Die Darstellung einer Funktion wird

- **implizit** genannt, wenn die Funktionsgleichung nicht nach einer Variablen x bzw. y aufgelöst ist, sondern in der Form F(x,y)=0 vorliegt.
- **explizit** genannt, wenn die Funktionsgleichung nach einer Variablen aufgelöst ist, z.B. y=f(x).

**Beispiele**

| Funktionsdarstellung: | explizit | | implizit |
|---|---|---|---|
| | $y = x^2 + \sin x$ | $\leftrightarrows$ | $y - x^2 - \sin x = 0$ |
| | existiert nicht | $\leftarrow$ | $y \sin(y) - x^2 - \sin x = 0$ |

**Bemerkung:**

(1) Aus einer **expliziten** Darstellung kann **immer** eine **implizite** Darstellung erstellt werden.

(2) Aus einer **impliziten** Darstellung kann **nicht immer** eine **explizite** Darstellung erreicht werden.

.

## 5.2 Eigenschaften von Funktionen

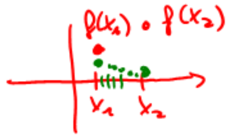
### 5.2.1 Monotonie

**Definition 5.4: Monotonie einer Funktion**

Eine Funktion f heißt in einem Intervall $I \subseteq D$

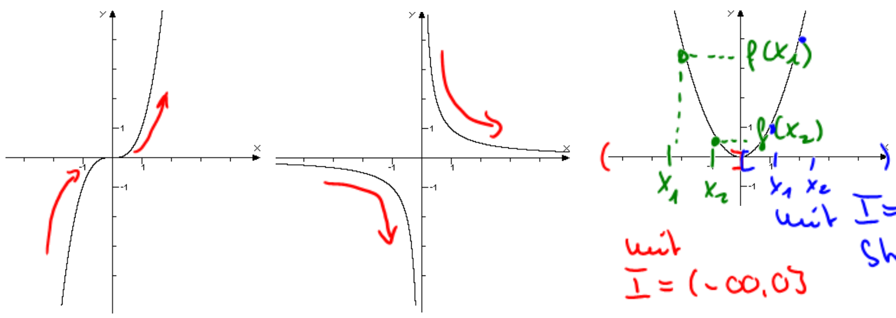
- **monoton steigend**, wenn $\forall x_1, x_2 \in I$ mit $x_1 < x_2$ gilt $f(x_1) \leq f(x_2)$,
- **streng monoton steigend**, wenn $\forall x_1, x_2 \in I$ mit $x_1 < x_2$ gilt $f(x_1) < f(x_2)$,
- **monoton fallend**, wenn $\forall x_1, x_2 \in I$ mit $x_1 < x_2$ gilt $f(x_1) \geq f(x_2)$,
- **streng monoton fallend**, wenn $\forall x_1, x_2 \in I$ mit $x_1 < x_2$ gilt $f(x_1) > f(x_2)$.

$a_{n+1} \geq a_n$




Erläuterung:

Beispiele:




mit $I = [0, \infty)$ Streng monoton steigend

mit $I = (-\infty, 0]$

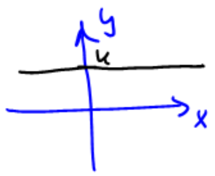
Streng monoton fallend

Streng monoton steigend $\forall x \in (-\infty, \infty)$

Streng monoton fallend mit $x \in (-\infty, 0) \cup (0, \infty)$

---

Bemerkung:




Eine Konstante Funktion ist sowohl monoton steigend als auch monoton fallend über $D = \mathbb{R}$

## Nachweis der Monotonie

**Möglichkeiten**

1. **Annahme einer Monotonie und Nachweis der Gültigkeit der entsprechenden Ungleichung** $\forall x_1, x_2 \in I$ mit $x_1 < x_2$

$\forall x_1, x_2 \in I$ mit $x_1 < x_2$

monoton steigend $f(x_1) \leq f(x_2)$

monoton fallend $f(x_1) \geq f(x_2)$

2. **Ansatz über die Differenz**

$$f(x_2) - f(x_1) \begin{cases} < 0 & \Rightarrow \text{streng monoton fallend} \\ \leq 0 & \Rightarrow \text{monoton fallend} \\ > 0 & \Rightarrow \text{streng monoton wachsend} \\ \geq 0 & \Rightarrow \text{monoton wachsend} \end{cases}$$

$\forall x_1, x_2 \in I$

**Beispiele:**

(1) $f(x) = 13x + 10$

Ansatz 1 Annahme: streng monoton steigend z.z. $f(x_1) \overset{<}{\leq} f(x_2)$

$\Rightarrow 13x_1 + 10 \overset{<}{\leq} 13x_2 + 10$

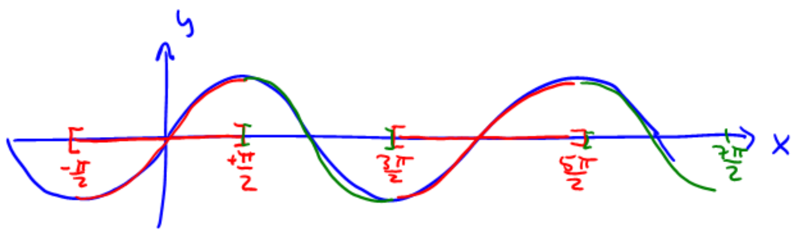
$\Rightarrow 13x_1 \overset{<}{\leq} 13x_2$

$\Rightarrow x_1 \overset{<}{\leq} x_2$ ist wahre Aussage, da per Annahme $x_1 \overset{\checkmark}{<} x_2$ sein muss

Ansatz 2 $f(x_2) - f(x_1) = (13x_2 + 10) - (13x_1 + 10)$

$= 13\underbrace{(x_2 - x_1)}_{>0\text{, da per Annahme } x_1 < x_2 \Rightarrow x_2 - x_1 > 0} > 0 \Rightarrow$ streng monoton wachsend

(2) $f(x) = \sin x$




- streng monoton steigend in $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}] \cup [\frac{3\pi}{2}, \frac{5\pi}{2}]$

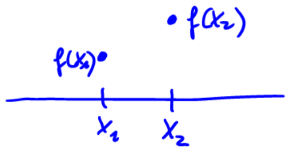
allgemein in $[(4n-1)\frac{\pi}{2}, (4n+1)\frac{\pi}{2}]$ mit $n \in \mathbb{Z}$

- streng monoton fallend in $[+\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}] \cup [\frac{5\pi}{2}, \frac{7\pi}{2}] \cup \ldots$

Beispiel

Monotonie: $f(x) = 2(x-1)^2+1$

(1) Annahme monoton steigend




$f(x_2) \geq f(x_1)$ mit $x_2 > x_1$

$2(x_2-1)^2+1 \geq 2(x_1-1)^2+1$

$2(x_2^2-2x_2+1)+1 \geq 2(x_1^2-2x_1+1)^2+1$

$x_2^2-2x_2+1 \geq x_1^2-2x_1+1$

$x_2^2-2x_2 \geq x_1^2-2x_1$

$x_2^2-x_1^2-2x_2+2x_1 \geq 0$

$x_2^2-x_1^2-2(x_2-x_1) \geq 0$

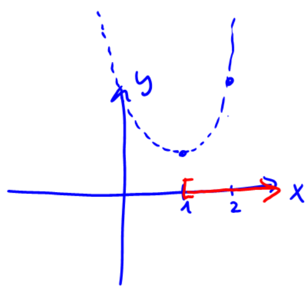
$(x_2-x_1)(x_2+x_1)-2(x_2-x_1) \geq 0$

$\underbrace{(x_2-x_1)}_{>0,}\underbrace{(x_2+x_1-2)}_{\geq 0} \geq 0$

mit $x_2>x_1$ gemäß Voraussetzung

$\Rightarrow x_2+x_1-2 \geq 0$

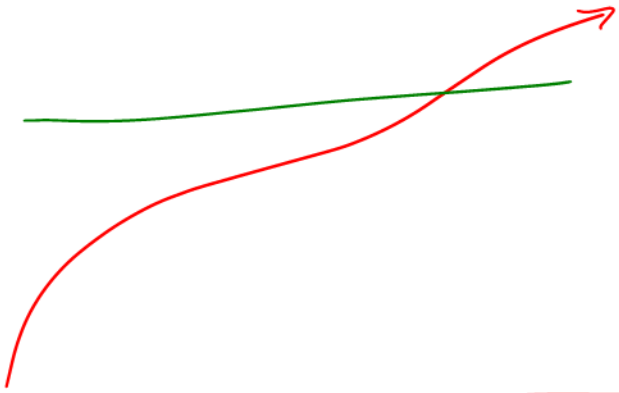
$\underbrace{x_2+x_1 \geq 2}_{\forall x_1, x_2 \geq 1 \text{ erfüllt}}$

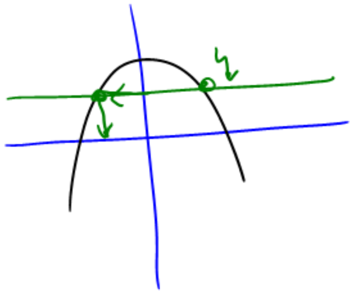



•

Frage:

Was hat **Monotonie** mit **Injektivität** zu tun?





streng monoton steigend $\Leftarrow$ injektiv

.

### 5.2.2 Beschränktheit

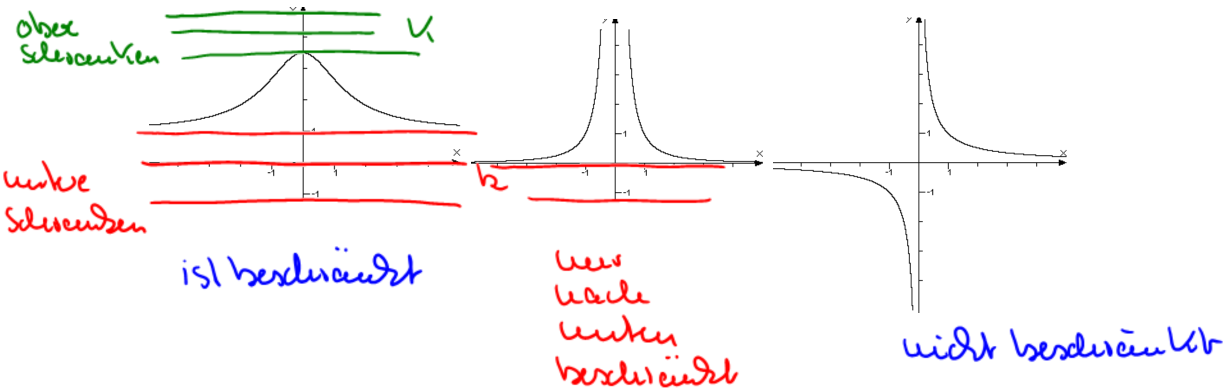
**Definition 5.5: Beschränktheit einer Funktion**

Eine Funktion f heißt in einem Intervall $I \subseteq D$

- **beschränkt nach unten**, wenn es eine Konstante $k$ gibt mit
  $f(x) \geq k \quad \forall x \in I$,
- **beschränkt nach oben**, wenn es eine Konstante $K$ gibt mit
  $f(x) \leq K \quad \forall x \in I$
- Im Falle der Existenz einer Konstanten $M$ mit $|f(x)| \leq M \; \forall x \in I$ heißt die Funktion **beschränkt** auf $I$.

$-M < f(x) < M$

Beispiele:




**Nachweismöglichkeiten der Beschränktheit:**
- wie bei Folgen

- durch Abschätzen der Funktionsvorschrift
  - nach unten
  - nach oben
  - über den Betrag, damit erhält man gleichzeitig eine untere und obere Schranke

- Kenntnis über Funktionsverläufe von Grundfunktionen
- Nachweis durch Annahme einer Schranke und zeigen der Gültigkeit der Aussage

.

# Beschränkt oder unbeschränkt?

Welche der angegebenen Funktionen sind **beschränkt** (d.h. nach oben *und* nach unten beschränkt), welche sind **unbeschränkt** (d.h. nicht beschränkt)? Die beiden Kästchen in der untersten Zeile lassen sich durch Mausziehen bewegen - ordnen Sie sie den Funktionsausdrücken zu! Der Button "Zurücksetzen" stellt die Ausgangsposition mit zufällig plazierten Kästchen wieder her. Die Auswertung durch ein Punktesystem erfolgt unterhalb des Tests.

$\cos(e^x)$

beschränkt, da $\cos x$ beschränkt mit $K=1$, $k=-1$

$(x^2+1)/(x^2+2) = \frac{x^2+1}{x^2+2}$

Grenzwert $a=1$

beschränkt
$K=1$ obere Schranke
$k=0$ untere Schranke

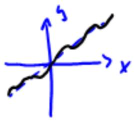
$\sin(x^2)$

beschränkt, da $\sin x$ beschränkt mit $K=1$, $k=-1$

$|x|-x$

$x \geq 0: 0$
$x < 0: -2x$
$|-2|-(-2) = 4$

nicht beschränkt
untere Schranke $k=0$



$x + \sin x$

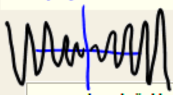
unbeschränkt

$x^2+4x$

nicht beschränkt, aber untere Schranke vorhanden
$k=-4$

$x \sin x$

unbeschränkt



$(1+x^2)^{-1} = \frac{1}{1+x^2}$

beschränkt
obere Schranke: $K=1$
untere Schranke: $k=0$

beschränkt | unbeschränkt

http://www.mathe-online.at/tests/fun2/beschraenktodernicht.html

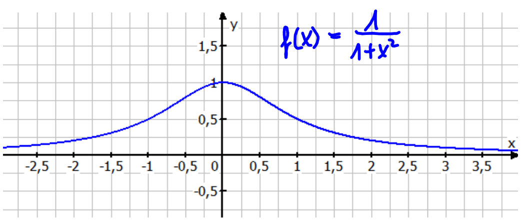
## Beschränkt oder unbeschränkt?

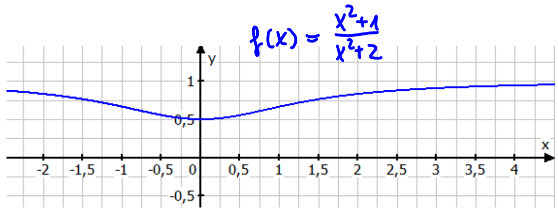
Welche der angegebenen Funktionen sind **beschränkt** (d.h. nach oben *und* nach unten beschränkt), welche sind **unbeschränkt** (d.h. nicht beschränkt)? Die beiden Kästchen in der untersten Zeile lassen sich durch Mausziehen bewegen - ordnen Sie sie den Funktionsausdrücken zu! Der Button "Zurücksetzen" stellt die Ausgangsposition mit zufällig plazierten Kästchen wieder her. Die Auswertung durch ein Punktesystem erfolgt unterhalb des Tests.

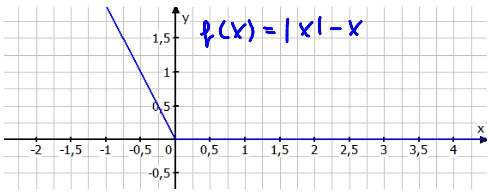
| | | | |
|---|---|---|---|
| $\cos(e^x)$ | $(x^2+1)/(x^2+2)$ | $\sin(x^2)$ | $\lvert x\rvert - x$ |
| | | | |
| $x + \sin x$ | $x^2 + 4x$ | $x \sin x$ | $(1+x^2)^{-1}$ |
| | | | |

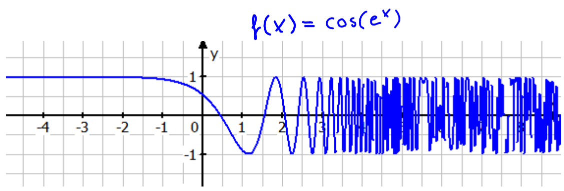
**beschränkt** **unbeschränkt**

http://www.mathe-online.at/tests/fun2/beschraenktodernicht.html




## Beschränkt oder unbeschränkt?

Welche der angegebenen Funktionen sind **beschränkt** (d.h. nach oben *und* nach unten beschränkt), welche sind **unbeschränkt** (d.h. nicht beschränkt)? Die beiden Kästchen in der untersten Zeile lassen sich durch Mausziehen bewegen - ordnen Sie sie den Funktionsausdrücken zu! Der Button "Zurücksetzen" stellt die Ausgangsposition mit zufällig plazierten Kästchen wieder her. Die Auswertung durch ein Punktesystem erfolgt unterhalb des Tests.

| | | | |
|---|---|---|---|
| Richtig | Richtig | Richtig | Richtig |
| $\cos(e^x)$ | $(x^2+1)/(x^2+2)$ | $\sin(x^2)$ | $\lvert x\rvert - x$ |
| beschränkt | beschränkt | beschränkt | unbeschränkt |
| $x + \sin x$ | $x^2 + 4x$ | $x \sin x$ | $(1+x^2)^{-1}$ |
| unbeschränkt | unbeschränkt | unbeschränkt | beschränkt |
| Richtig | Richtig | Richtig | Richtig |

**beschränkt** **unbeschränkt**

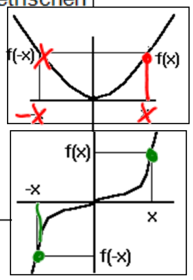
Auswerten Zurücksetzen

### 5.2.3 Symmetrie

**Definition 5.6: Symmetrie**

Eine Funktion f heißt in einem zum Koordinatenursprung symmetrischen Intervall $[-a,a] = I \subseteq D$

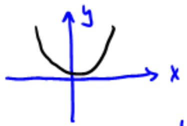
- **gerade oder achsensymmetrisch**, wenn für jedes $x \in I$ gilt:
  $f(-x) = f(x)$
- **ungerade oder punktsymmetrisch**, wenn für jedes $x \in I$ gilt:
  $f(-x) = -f(x)$




**Beispiele:**

(1) Typische Vertreter einer geraden Funktion

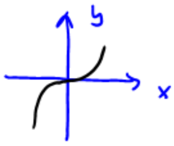
$f(x) = x^2$




$f(x) = \cos x$


(2) Typische Vertreter einer ungeraden Funktion

$f(x) = x^3$




$f(x) = \sin x$


**Nachweismöglichkeit der Symmetrie:**

$f(-x) = \ldots\ldots\ldots =$
- $f(x) \Rightarrow$ gerade
- $-f(x) \Rightarrow$ ungerade
- etwas anderes $\Rightarrow$ keine Symmetrie

Start — Umformungen — Ziel — Interpretation

**Beispiel: Nachweis der Symmetrie**

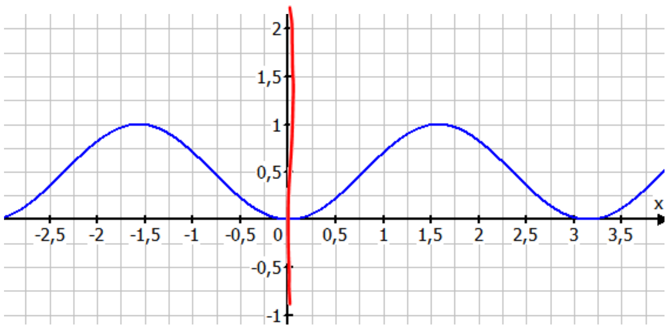
$$f(x) = (\sin(x))^2$$

gerade oder ungerade oder gemischt

$$\boxed{f(-x)} = (\underbrace{\sin(-x)}_{=-\sin x,\ \text{da } \sin x \text{ ungerade}})^2 = (-\sin(x))^2 = \underbrace{(\sin(x))^2}_{=\boxed{f(x)}}$$

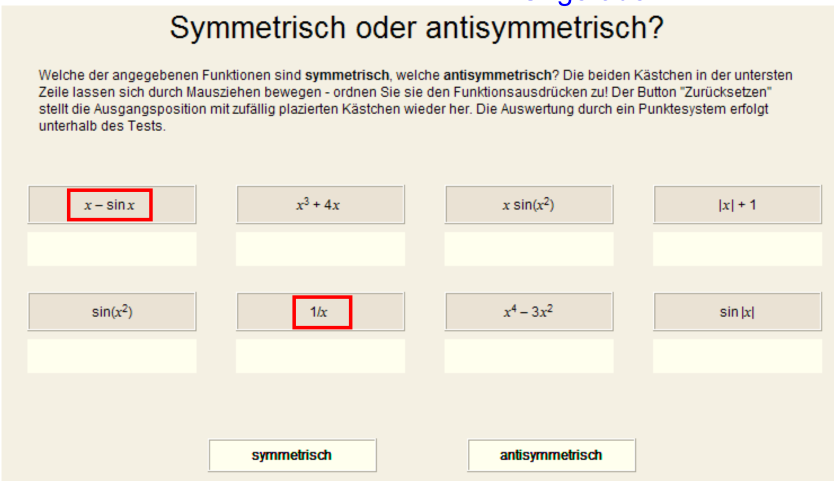
Start

$\Rightarrow$ f(x) ist gerade



## Beispiele: Nachweis der Symmetrie

Achsensymmetrisch Gerade — Punktsymmetrisch Ungerade

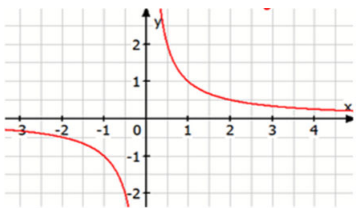



http://www.mathe-online.at/tests/fun2/symmoderantisymm.html

$f(x) = \frac{1}{x}$

$\boxed{f(-x)} = \frac{1}{-x} = -\frac{1}{x} = \boxed{-f(x)}$

$\Rightarrow$ ungerade Funktion



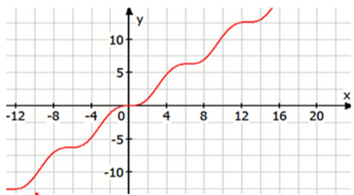
$f(x) = x - \sin x$

$\boxed{f(-x)} = (-x) - \underbrace{\sin(-x)}_{= -\sin(x),}$ da sin x ungerade

$= -x - (-\sin x)$

$= -\underbrace{(x - \sin x)}_{f(x)}$

$= \boxed{-f(x)}$ $\Rightarrow$ ungerade Funktion



Achsensymmetrisch
Gerade

Punktsymmetrisch
Ungerade

## Symmetrisch oder antisymmetrisch?

Welche der angegebenen Funktionen sind **symmetrisch**, welche **antisymmetrisch**? Die beiden Kästchen in der untersten Zeile lassen sich durch Mausziehen bewegen - ordnen Sie sie den Funktionsausdrücken zu! Der Button "Zurücksetzen" stellt die Ausgangsposition mit zufällig plazierten Kästchen wieder her. Die Auswertung durch ein Punktesystem erfolgt unterhalb des Tests.

Rest zu Hause ....

| | | | |
|---|---|---|---|
| $\boxed{x - \sin x}$ | $x^3 + 4x$ | $x \sin(x^2)$ | $\lvert x\rvert + 1$ |
| | | | |
| $\sin(x^2)$ | $\boxed{1/x}$ | $x^4 - 3x^2$ | $\sin \lvert x\rvert$ |
| | | | |

symmetrisch antisymmetrisch

http://www.mathe-online.at/tests/fun2/symmoderantisymm.html

## Symmetrisch oder antisymmetrisch?

Welche der angegebenen Funktionen sind **symmetrisch**, welche **antisymmetrisch**? Die beiden Kästchen in der untersten Zeile lassen sich durch Mausziehen bewegen - ordnen Sie sie den Funktionsausdrücken zu! Der Button "Zurücksetzen" stellt die Ausgangsposition mit zufällig plazierten Kästchen wieder her. Die Auswertung durch ein Punktesystem erfolgt unterhalb des Tests.

| | | | |
|---|---|---|---|
| Richtig | Richtig | Richtig | Richtig |
| $x - \sin x$ | $x^3 + 4x$ | $x \sin(x^2)$ | $\lvert x\rvert + 1$ |
| antisymmetrisch | antisymmetrisch | antisymmetrisch | symmetrisch |
| $\sin(x^2)$ | $1/x$ | $x^4 - 3x^2$ | $\sin \lvert x\rvert$ |
| symmetrisch | antisymmetrisch | symmetrisch | symmetrisch |
| Richtig | Richtig | Richtig | Richtig |

symmetrisch antisymmetrisch

Auswerten Zurücksetzen

### 5.2.4 Periodizität

**Definition 5.7: Periodizität**

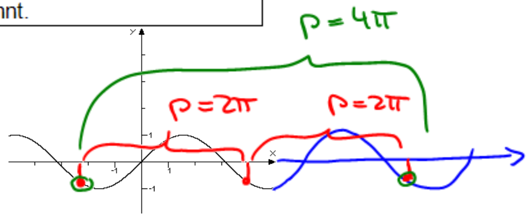
Eine Funktion f mit dem Definitionsbereich $D = \mathbb{R}$ heißt **periodisch** mit der **Periode** $p > 0$, wenn für $\boxed{\text{jedes } x \in D}$ gilt $\boxed{f(x+p) = f(x)}$.

Mit $p$ ist auch jedes ganzzahlige Vielfache von $p$ eine Periode. Die kleinste Periode wird auch primitive Periode genannt.

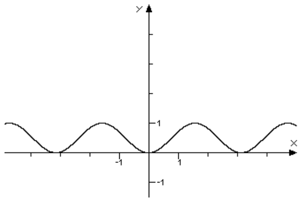
**Beispiel:**

(1) $\sin x$ *ist periodisch mit der Periode* $2\pi$. primitive $p=$

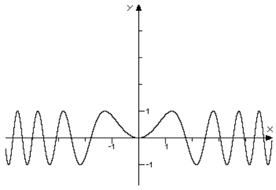
also auch $p = 4\pi$ ist eine Periode von $\sin x$




(2) $(\sin x)^2$ *ist periodisch mit der Periode* $\pi$.



(3) $\sin(x^2)$ *ist nicht periodisch.*



**Nachweis der Periodizität:**

Ansatz: $f(x+p) \overset{!}{=} f(x)$

p so bestimmen, dass die Gleichung erfüllt ist

.

## Nachweis der Periodizität:

**(2)** $(\sin x)^2$ *ist periodisch mit der Periode* $\pi$.

> *Es gilt:*
> $\sin x \,\sin y = \frac{1}{2}\big(\cos(x-y) - \cos(x+y)\big)$

Ansatz: $f(x+p) \overset{!}{=} f(x)$

$(\sin(x+p))^2 = (\sin x)^2$

$\sin(x+p)\sin(x+p) = \sin x \sin x$

$\frac{1}{2}\big(\cos((x+p)-(x+p)) - \cos((x+p)+(x+p))\big) = \frac{1}{2}\big(\cos(x-x) - \cos(x+x)\big)$

$\frac{1}{2}\big(\underbrace{\cos(0)}_{1} - \cos(2x+2p)\big) = \frac{1}{2}\big(\underbrace{\cos(0)}_{1} - \cos(2x)\big)$

$\frac{1}{2}\big(1 - \cos(2x+2p)\big) \overset{!}{=} \frac{1}{2}\big(1-\cos(2x)\big)$

$\Rightarrow 2p = 2\pi$, da der $\cos x$ $2\pi$-Periodisch ist

$\Rightarrow p = \pi$, dann ist die Gleichung $\forall x \in \mathbb{R}$ erfüllt

$\Rightarrow f(x) = (\sin x)^2$ ist $\pi$-periodisch

primitive Periode $\pi$

**(3)** $\sin(x^2)$ *ist nicht periodisch.*

Ansatz: $f(x+p) \overset{!}{=} f(x)$

$\sin((x+p)^2) = \sin(x^2)$

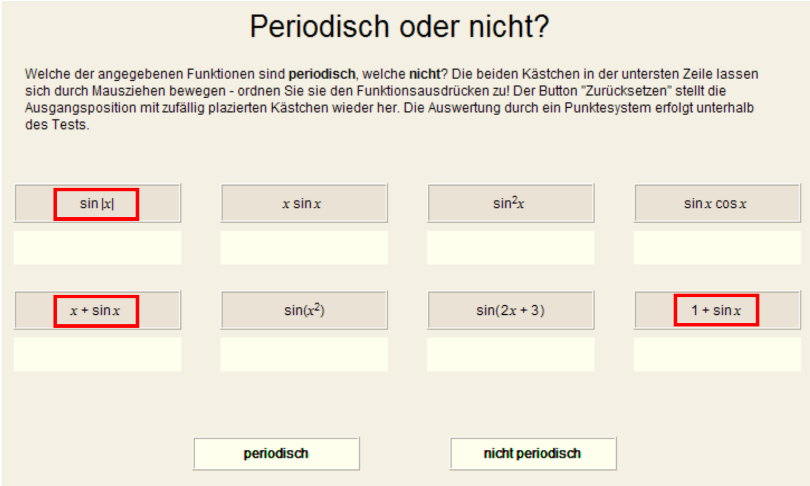
$\Rightarrow \sin(x^2 + \underbrace{2px + p^2}) = \sin(x^2)$

$\Rightarrow 2px + p^2 = 2\pi$

$\Rightarrow$ $p$ hängt von $x$ ab,

d.h. es gibt kein $p$, sodass die Gleichung $\forall x \in \mathbb{R}$ erfüllt ist

$\Rightarrow f(x) = \sin(x^2)$ ist nicht periodisch




Aufgabe für zu Hause

http://www.mathe-online.at/tests/fun2/periodischodernicht.html

<u>Nachweis Periodizität</u>

$f(x) = \sin(|x|)$

Bedingung: $\sin(\underbrace{|x+p|}) \overset{!}{=} \sin(|x|)$

nicht auflösbar
zu $|x| + p$,
da Dreiecksungleichung
gilt $|x+p| \leq |x| + |p|$
Gleichheit nur erfüllt,
wenn $x > 0 \wedge p > 0$

$\Rightarrow$ nicht periodisch

---

$f(x) = x + \sin(x)$

Bedingung: $f(x+p) \overset{!}{=} f(x)$

$x+p + \sin(x+p) \overset{!}{=} x + \sin(x)$

$\Rightarrow p = 2\pi$
damit sin-Wert gleich

aber $x + p \neq x$

$\Rightarrow$ $f(x)$ ist nicht periodisch

---

$f(x) = 1 + \sin(x)$

Bedingung: $f(x+p) \overset{!}{=} f(x)$

$1 + \sin(x+p) = 1 + \sin(x)$

$\Rightarrow p = 2\pi$

$1 = 1$
ist stets erfüllt

$\Rightarrow$ $f(x)$ ist periodisch mit $p = 2\pi$

### 3.2.5 Nullstellen

**Definition 3.8: Nullstelle**

Eine **Nullstelle der Funktion** $f: D \to B$ ist ein $x \in D$ mit $f(x) = 0$.

**Beispiele**:

$f(x) = x^2$ Nullstellen-bedingung $\Rightarrow$ Bedingung $f(x) \stackrel{!}{=} 0 \Rightarrow x^2 = 0$
$\Rightarrow x = 0$

$f(x) = x^2 + 1$ .... $\Rightarrow x^2 + 1 = 0 \Rightarrow x^2 = -1 \Rightarrow$ keine reellen Nst

$f(x) = x^2 - 1$ ... $\Rightarrow x^2 - 1 = 0 \Rightarrow x^2 = +1 \Rightarrow$ 2 Nst $x_{1/2} = \pm 1$

$f(x) = \sin x$ ... $\Rightarrow \sin x = 0 \Rightarrow x = \ldots, -\pi, 0, \pi, 2\pi, 3\pi, \ldots$
$\Rightarrow x = n \cdot \pi$ mit $n \in \mathbb{Z}$

–

### 5.2.6 Minimum und Maximum

**Definition 5.9: Minimum, Maximum**

Eine Funktion $f: D \to B$ hat im Punkt $x_e \in D$

ein **globales Maximum**, wenn gilt $\forall x \in D: f(x) \leq f(x_e)$,

ein **globales Minimum**, wenn gilt $\forall x \in D: f(x) \geq f(x_e)$,

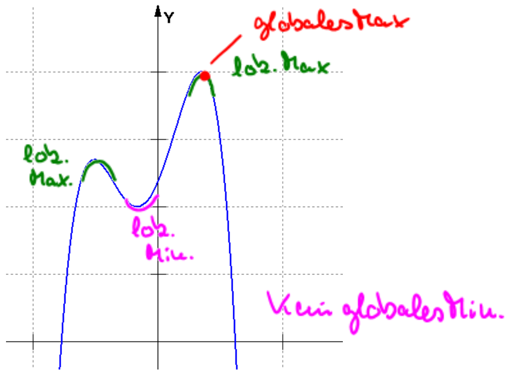
ein **lokales Maximum**, wenn

$\exists \varepsilon > 0: \forall x \in (x_e - \varepsilon, x_e + \varepsilon) \cap D \text{ gilt } f(x) \leq f(x_e)$,

ein **lokales Minimum**, wenn

$\exists \varepsilon > 0: \forall x \in (x_e - \varepsilon, x_e + \varepsilon) \cap D \text{ gilt } f(x) \geq f(x_e)$.

**Beispiele**:




.

Aufgabe für zu Hause

**Multiple Choice Test mit Mehrfachantworten**

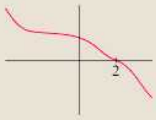
# Eigenschaften von Funktionen

**Die Funktion, deren Graph die nebenstehende Kurve ist, ist im gezeigten Bereich**

- monoton wachsend ☐
- streng monoton wachsend ☐
- monoton fallend ☐
- streng monoton fallend ☐
- positiv ☐
- negativ ☐

Auswertung: ___ von ___ Punkten erzielt

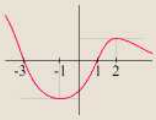
**Die Funktion, deren Graph die nebenstehende Kurve ist,**




- ist bei $x = 0$ positiv ☐
- ist bei $x = 2$ positiv ☐
- ist bei $x = -2$ negativ ☐
- hat bei $x = 2$ eine Nullstelle ☐
- ist monoton wachsend ☐
- ist monoton fallend ☐

Auswertung: ___ von ___ Punkten erzielt

**Die Funktion $f$, deren Graph die nebenstehende Kurve ist,**




- ist im Intervall $[-3, 1]$ monoton fallend ☐
- ist im Intervall $[-3, -1]$ monoton fallend ☐
- ist im Intervall $[-1, 2]$ monoton wachsend ☐
- ist im offenen Intervall $(-3, 1)$ negativ ☐
- ist im abgeschlossenen Intervall $[-3, 1]$ negativ ☐
- erfüllt $f(2) < f(0)$ ☐
- erfüllt $f(2) > f(0)$ ☐

Auswertung: ___ von ___ Punkten erzielt

**Die Funktion $x \to 2x^2$ ist**

- monoton wachsend ☐
- monoton fallend ☐
- überall positiv ☐
- überall nicht-negativ ☐
- eine Funktion zweiter Ordnung ☐
- eine Polynomfunktion ☐

Auswertung: ___ von ___ Punkten erzielt

**Die Funktion $x \to -3(x-1)^2$ ist**

- bei $x = 0$ negativ ☐
- bei $x = 1$ negativ ☐
- für alle negativen $x$ negativ ☐
- für alle positiven $x$ negativ ☐
- eine Funktion zweiter Ordnung ☐
- eine Funktion dritter Ordnung ☐

Auswertung: ___ von ___ Punkten erzielt

http://www.mathe-online.at/tests/fun1/eigensch.html