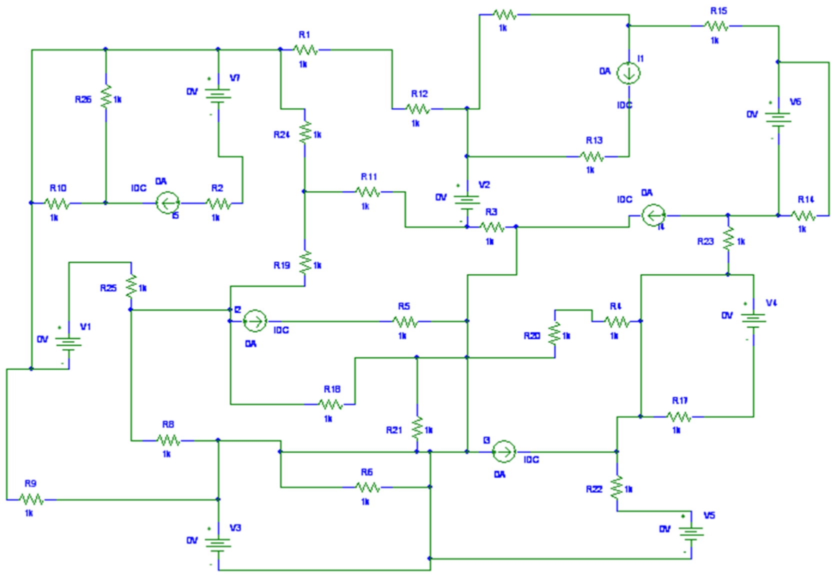
HAW Hamburg
Fakultät TI
Technik und Informatik

GRUNDLAGEN DER ELEKTROTECHNIK ET1

Teil 5:
Netzwerkanalyse - Maschenstromverfahren & Knotenpotentialverfahren



Inhalte der Kapitel 1 – 4: Gleichstrom

4 Widerstandsmessung

3 Gleichstrommessung

2 Gleichstromnetzwerke

- gesteuerte Quellen
- Nichtlineare Quellen und Lasten
- Leistungsanpassung
- Kirchhoff'sche Gesetze
  - Reihenschaltung
  - Parallelschaltung
- Lineare Quellen
  - Ersatzquellen
  - Überlagerungssatz
- Netzwerkanalyse
  - Knotenpotentialanalyse
  - $\boxed{\text{Maschenanalyse}}$

1 Grundlegende Begriffe und Definitionen

- Widerstand
- Arbeit, Leistung, Wirkungsgrad
- Ladung, Spannung, Strom

2 GLEICHSTROMSCHALTUNGEN

2.1	Zählpfeilsystem	**Grundlagen**
2.2	Grundlegende Begriffe	
2.3	Kirchhoffsche Gesetze	
2.4	Parallel- und Reihenschaltung von Widerständen	
2.5	Strom- und Spannungsteiler	
2.6	Lineare Quellen	
2.7	Umwandlung in Ersatzquellen	**Methoden**
2.8	Überlagerungsprinzip	
2.9	**Netzwerkanalyse**	
2.10	Leistungsanpassung	**Sonstiges**
2.11	Nichtlineare Quellen und Verbraucher	
2.12	Gesteuerte Quellen	

REVIEW: BASISVERFAHREN ÜBER ZWEIGSTRÖME

1. Zweigströme definieren
2. Zweigspannungen definieren (Richtung wie Zweigströme)
3. Knoten nummerieren (0 für Masseknoten - GND)
4. Maschen nummerieren und Umlaufsinn festlegen
   (für jedes Fenster im Uhrzeigersinn)
5. Kirchhoffs Maschenregel für jede Masche anwenden
6. Kirchhoffs Knotenregel für k-1 Knoten anwenden
   (Masseknoten auslassen)

SYSTEMATISCHE NETZWERKANALYSE

Netzwerk mit z Zweigen

- z Zweigströme
- z Zweigspannungen

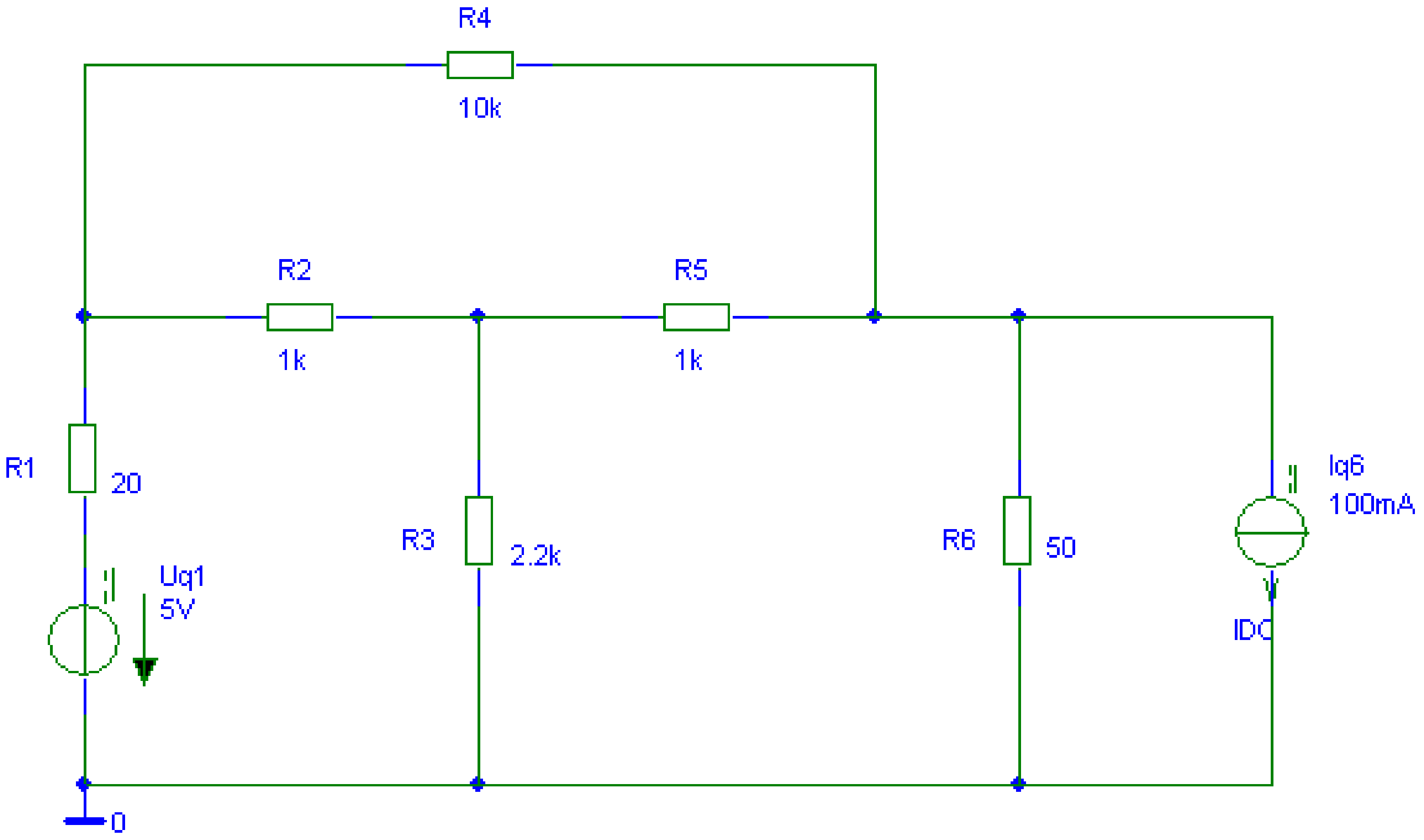
$\Rightarrow$ $2\,z$ Gleichungen erforderlich

Systematisch vorgehen, um den Überblick zu behalten!

3 Methoden der Netzwerkanalyse

- **Basisverfahren**
  einfache Anwendung der Kirchhoffschen Gesetze
- **Maschenstromverfahren**
  Reduzierung der Gleichungszahl durch Definition von Maschenströmen
- **Knotenpotentialverfahren**
  Reduzierung der Gleichungszahl durch Definition von Knotenspannungen
  (= Spannung des Knotens zu Masse)

MOTIVATION 1



MOTIVATION 2

$$\Big\{\Big\{\mathrm{I1} \to \frac{\mathrm{Iq6}\ (\mathrm{R2}\ (\mathrm{R3}+\mathrm{R5})+\mathrm{R3}\ (\mathrm{R4}+\mathrm{R5}))\ \mathrm{R6}+(\mathrm{R4}\,\mathrm{R5}+\mathrm{R3}\ (\mathrm{R4}+\mathrm{R5})+(\mathrm{R4}+\mathrm{R5})\ \mathrm{R6}+\mathrm{R2}\ (\mathrm{R3}+\mathrm{R5}+\mathrm{R6}))\ \mathrm{Uq1}}{\mathrm{R3}\,\mathrm{R4}\,\mathrm{R5}+\mathrm{R2}\,\mathrm{R4}\ (\mathrm{R3}+\mathrm{R5})+\mathrm{R3}\ (\mathrm{R4}+\mathrm{R5})\ \mathrm{R6}+\mathrm{R2}\ (\mathrm{R3}+\mathrm{R4}+\mathrm{R5})\ \mathrm{R6}+\mathrm{R1}\ (\mathrm{R4}\,\mathrm{R5}+\mathrm{R3}\ (\mathrm{R4}+\mathrm{R5})+(\mathrm{R4}+\mathrm{R5})\ \mathrm{R6}+\mathrm{R2}\ (\mathrm{R3}+\mathrm{R5}+\mathrm{R6}))},$$

$$\mathrm{I2} \to \frac{\mathrm{Iq6}\ (\mathrm{R3}\,\mathrm{R4}-\mathrm{R1}\,\mathrm{R5})\ \mathrm{R6}+\mathrm{R4}\ (\mathrm{R3}+\mathrm{R5})\ \mathrm{Uq1}+(\mathrm{R4}+\mathrm{R5})\ \mathrm{R6}\,\mathrm{Uq1}}{\mathrm{R3}\,\mathrm{R4}\,\mathrm{R5}+\mathrm{R2}\,\mathrm{R4}\ (\mathrm{R3}+\mathrm{R5})+\mathrm{R3}\ (\mathrm{R4}+\mathrm{R5})\ \mathrm{R6}+\mathrm{R2}\ (\mathrm{R3}+\mathrm{R4}+\mathrm{R5})\ \mathrm{R6}+\mathrm{R1}\ (\mathrm{R4}\,\mathrm{R5}+\mathrm{R3}\ (\mathrm{R4}+\mathrm{R5})+(\mathrm{R4}+\mathrm{R5})\ \mathrm{R6}+\mathrm{R2}\ (\mathrm{R3}+\mathrm{R5}+\mathrm{R6}))},$$

$$\mathrm{I3} \to \frac{-\mathrm{Iq6}\ (\mathrm{R2}\,\mathrm{R4}+\mathrm{R1}\ (\mathrm{R2}+\mathrm{R4}+\mathrm{R5}))\ \mathrm{R6}+(\mathrm{R4}\,\mathrm{R5}+(\mathrm{R2}+\mathrm{R4}+\mathrm{R5})\ \mathrm{R6})\ \mathrm{Uq1}}{\mathrm{R3}\,\mathrm{R4}\,\mathrm{R5}+\mathrm{R2}\,\mathrm{R4}\ (\mathrm{R3}+\mathrm{R5})+\mathrm{R3}\ (\mathrm{R4}+\mathrm{R5})\ \mathrm{R6}+\mathrm{R2}\ (\mathrm{R3}+\mathrm{R4}+\mathrm{R5})\ \mathrm{R6}+\mathrm{R1}\ (\mathrm{R4}\,\mathrm{R5}+\mathrm{R3}\ (\mathrm{R4}+\mathrm{R5})+(\mathrm{R4}+\mathrm{R5})\ \mathrm{R6}+\mathrm{R2}\ (\mathrm{R3}+\mathrm{R5}+\mathrm{R6}))},$$

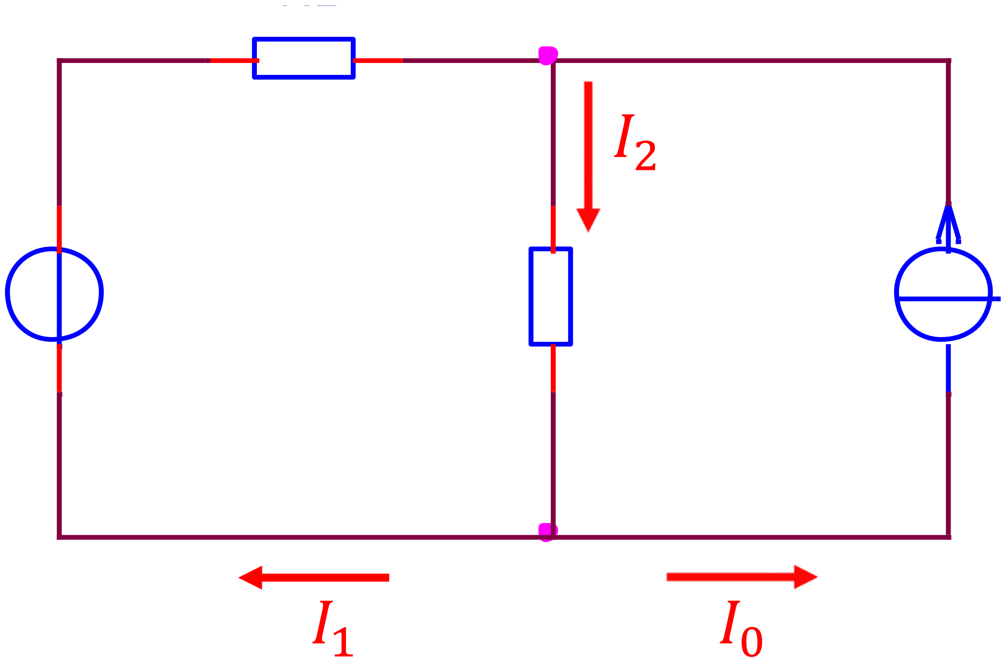
$$\mathrm{I4} \to \frac{\mathrm{Iq6}\,\mathrm{R2}\,\mathrm{R3}\,\mathrm{R6}+\mathrm{Iq6}\ (\mathrm{R1}+\mathrm{R2}+\mathrm{R3})\ \mathrm{R5}\,\mathrm{R6}+\mathrm{R3}\,\mathrm{R5}\,\mathrm{Uq1}+\mathrm{R2}\ (\mathrm{R3}+\mathrm{R5}+\mathrm{R6})\ \mathrm{Uq1}}{\mathrm{R3}\,\mathrm{R4}\,\mathrm{R5}+\mathrm{R2}\,\mathrm{R4}\ (\mathrm{R3}+\mathrm{R5})+\mathrm{R3}\ (\mathrm{R4}+\mathrm{R5})\ \mathrm{R6}+\mathrm{R2}\ (\mathrm{R3}+\mathrm{R4}+\mathrm{R5})\ \mathrm{R6}+\mathrm{R1}\ (\mathrm{R4}\,\mathrm{R5}+\mathrm{R3}\ (\mathrm{R4}+\mathrm{R5})+(\mathrm{R4}+\mathrm{R5})\ \mathrm{R6}+\mathrm{R2}\ (\mathrm{R3}+\mathrm{R5}+\mathrm{R6}))},$$

$$\mathrm{I5} \to \frac{\mathrm{Iq6}\ (\mathrm{R1}\,\mathrm{R2}+(\mathrm{R1}+\mathrm{R2}+\mathrm{R3})\ \mathrm{R4})\ \mathrm{R6}+(\mathrm{R3}\,\mathrm{R4}-\mathrm{R2}\,\mathrm{R6})\ \mathrm{Uq1}}{\mathrm{R3}\,\mathrm{R4}\,\mathrm{R5}+\mathrm{R2}\,\mathrm{R4}\ (\mathrm{R3}+\mathrm{R5})+\mathrm{R3}\ (\mathrm{R4}+\mathrm{R5})\ \mathrm{R6}+\mathrm{R2}\ (\mathrm{R3}+\mathrm{R4}+\mathrm{R5})\ \mathrm{R6}+\mathrm{R1}\ (\mathrm{R4}\,\mathrm{R5}+\mathrm{R3}\ (\mathrm{R4}+\mathrm{R5})+(\mathrm{R4}+\mathrm{R5})\ \mathrm{R6}+\mathrm{R2}\ (\mathrm{R3}+\mathrm{R5}+\mathrm{R6}))},$$

$$\mathrm{I6} \to \frac{-\mathrm{Iq6}\ (\mathrm{R2}\,\mathrm{R3}\,\mathrm{R4}+\mathrm{R1}\,\mathrm{R3}\ (\mathrm{R2}+\mathrm{R4})+(\mathrm{R2}+\mathrm{R3})\ \mathrm{R4}\,\mathrm{R5}+\mathrm{R1}\ (\mathrm{R2}+\mathrm{R3}+\mathrm{R4})\ \mathrm{R5})+(\mathrm{R2}\ (\mathrm{R3}+\mathrm{R5})+\mathrm{R3}\ (\mathrm{R4}+\mathrm{R5}))\ \mathrm{Uq1}}{\mathrm{R3}\,\mathrm{R4}\,\mathrm{R5}+\mathrm{R2}\,\mathrm{R4}\ (\mathrm{R3}+\mathrm{R5})+\mathrm{R3}\ (\mathrm{R4}+\mathrm{R5})\ \mathrm{R6}+\mathrm{R2}\ (\mathrm{R3}+\mathrm{R4}+\mathrm{R5})\ \mathrm{R6}+\mathrm{R1}\ (\mathrm{R4}\,\mathrm{R5}+\mathrm{R3}\ (\mathrm{R4}+\mathrm{R5})+(\mathrm{R4}+\mathrm{R5})\ \mathrm{R6}+\mathrm{R2}\ (\mathrm{R3}+\mathrm{R5}+\mathrm{R6}))},$$

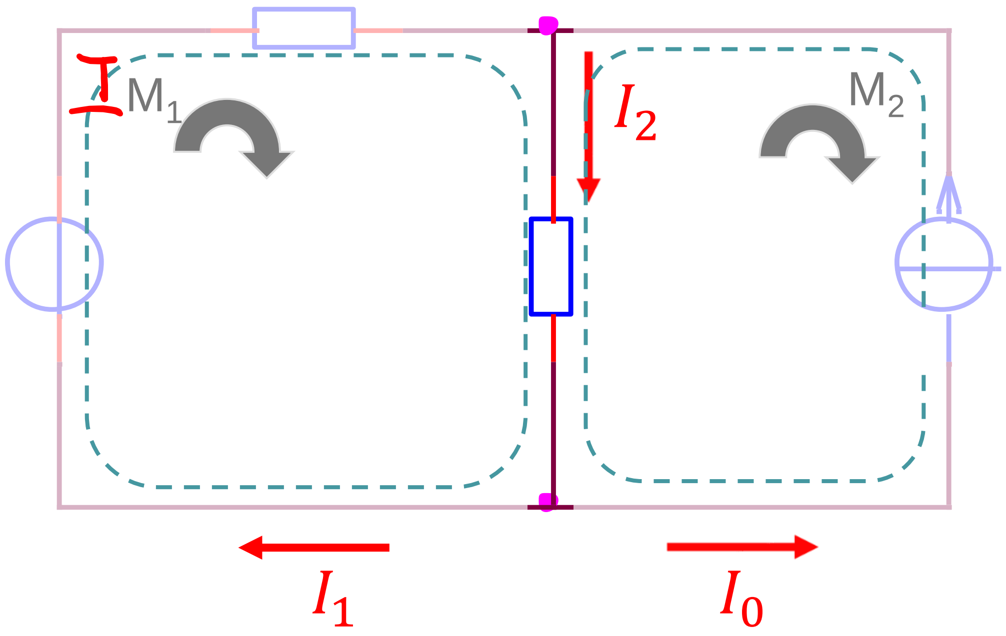
$$\mathrm{Uq6} \to \frac{-\mathrm{Iq6}\ (\mathrm{R2}\,\mathrm{R3}\,\mathrm{R4}+\mathrm{R1}\,\mathrm{R3}\ (\mathrm{R2}+\mathrm{R4})+(\mathrm{R2}+\mathrm{R3})\ \mathrm{R4}\,\mathrm{R5}+\mathrm{R1}\ (\mathrm{R2}+\mathrm{R3}+\mathrm{R4})\ \mathrm{R5})\ \mathrm{R6}+(\mathrm{R2}\ (\mathrm{R3}+\mathrm{R5})+\mathrm{R3}\ (\mathrm{R4}+\mathrm{R5}))\ \mathrm{R6}\,\mathrm{Uq1}}{\mathrm{R3}\,\mathrm{R4}\,\mathrm{R5}+\mathrm{R2}\,\mathrm{R4}\ (\mathrm{R3}+\mathrm{R5})+\mathrm{R3}\ (\mathrm{R4}+\mathrm{R5})\ \mathrm{R6}+\mathrm{R2}\ (\mathrm{R3}+\mathrm{R4}+\mathrm{R5})\ \mathrm{R6}+\mathrm{R1}\ (\mathrm{R4}\,\mathrm{R5}+\mathrm{R3}\ (\mathrm{R4}+\mathrm{R5})+(\mathrm{R4}+\mathrm{R5})\ \mathrm{R6}+\mathrm{R2}\ (\mathrm{R3}+\mathrm{R5}+\mathrm{R6}))}\Big\}\Big\}$$

DEFINITION MASCHENSTROM



Maschenströme = Ströme in den **Verbindungszweigen**

DEFINITION MASCHENSTROM



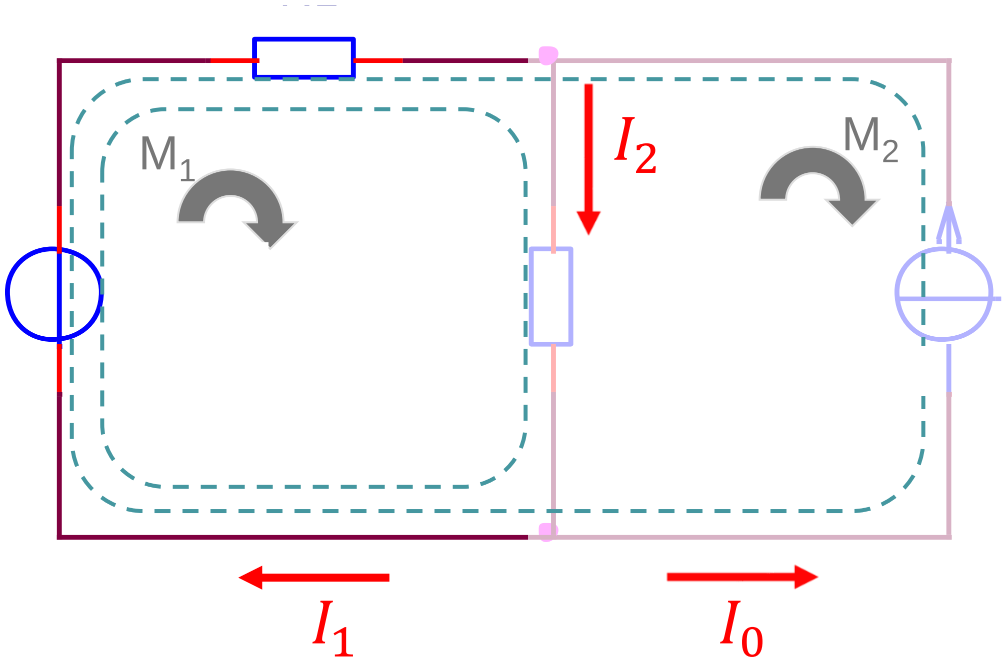
$$I_{M1} = I_1$$

$$I_0 = -I_{M2}$$

$$I_2 = I_{M1} - I_{M2}$$

Maschenströme = Ströme in den **Verbindungszweigen**

DEFINITION MASCHENSTROM



$I_{M1} = I_2$

$I_{M2} = -I_0$

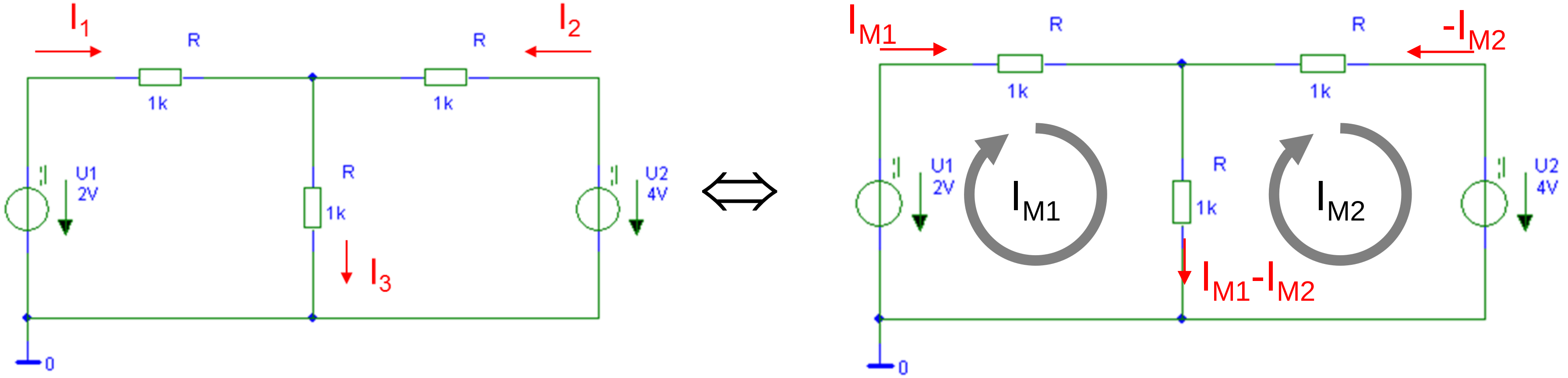
$I_1 = I_{M1} + I_{M2}$

Maschenströme = Ströme in den **Verbindungszweigen**

MASCHENSTROMVERFAHREN

Grundidee:

- statt z Zweigströme nur m Maschenströme mit $m < z$ (keine I_q !)



I_1, I_2 u. I_3 lassen sich durch I_{M1}, I_{M2} ausdrücken

MASCHENSTROMVERFAHREN

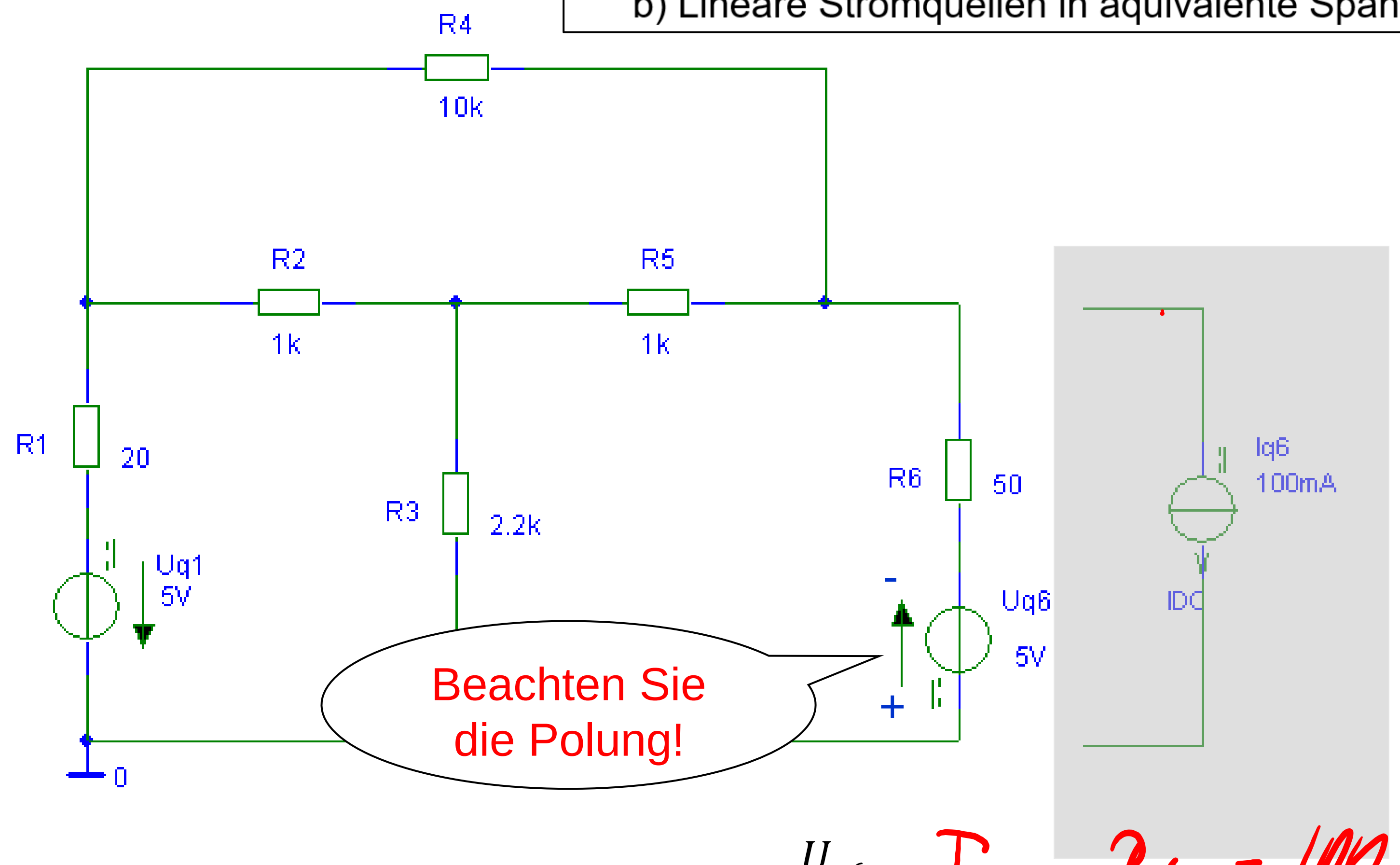
1. In 5 Schritten ans Ziel:

Netzwerk wo möglich vereinfachen:
 a) Parallele Widerstände zusammenfassen
 b) Lineare Stromquellen in äquivalente Spannungsquellen umwandeln

2. Zweigströme definieren
3. Maschenstrom in jedem “Fenster” im Uhrzeigersinn definieren
4. Zweigströme als Funktion der Maschenströme aufstellen
5. Maschenregel anwenden
6. LGS vom Rang m für Maschenströme lösen
7. Bei Bedarf: Zweigströme aus Maschenströmen berechnen

SCHRITT 1: VEREINFACHEN

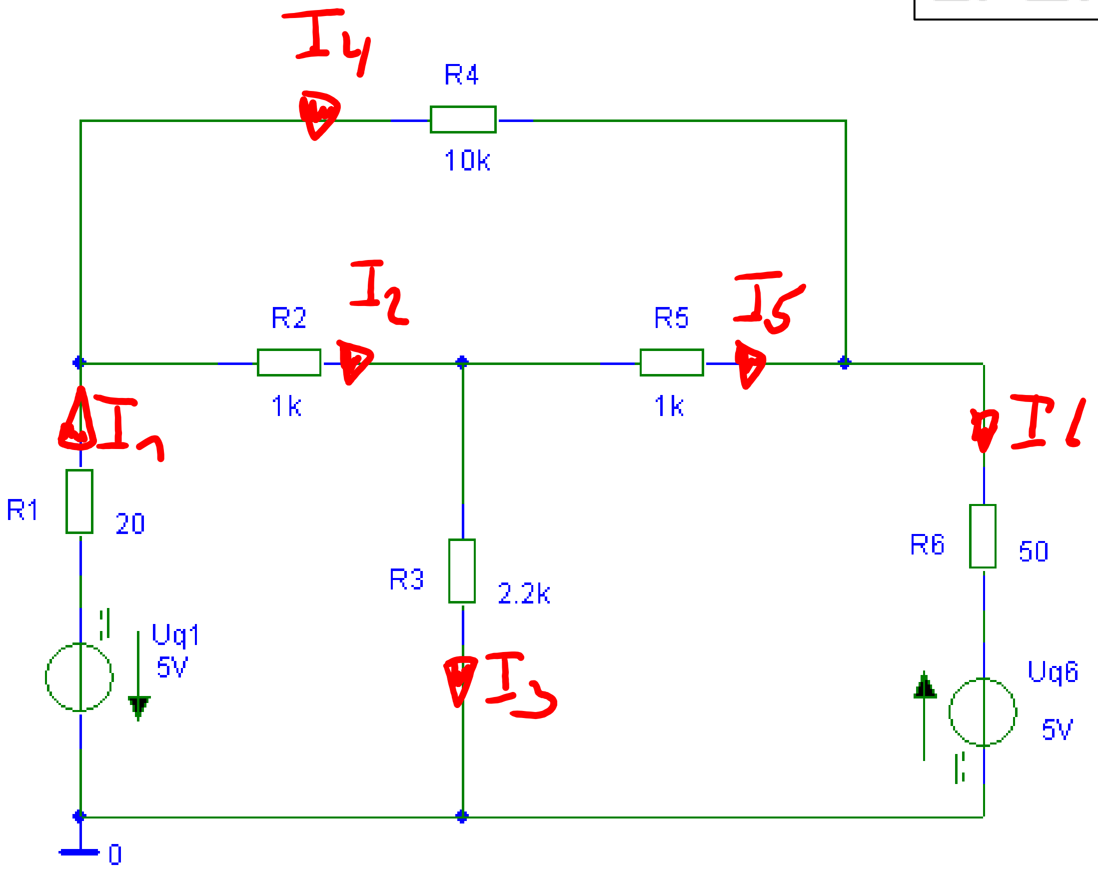
1. Netzwerk wo möglich vereinfachen:
   a) Parallele Widerstände zusammenfassen
   b) Lineare Stromquellen in äquivalente Spannungsquellen umwandeln



$U_{q6} = I_{q6} \cdot R_6 = 100mA \cdot 50\Omega = 5V$

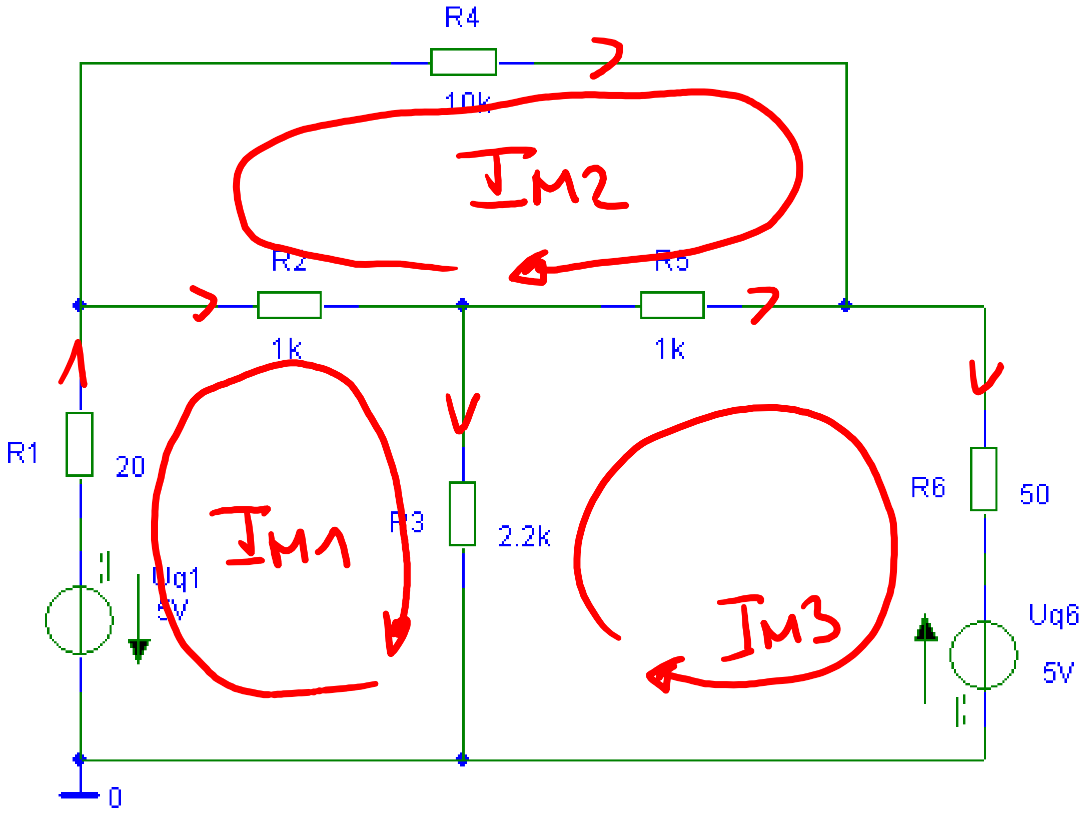
SCHRITT 2: ZWEIGSTRÖME

2. Zweigströme definieren



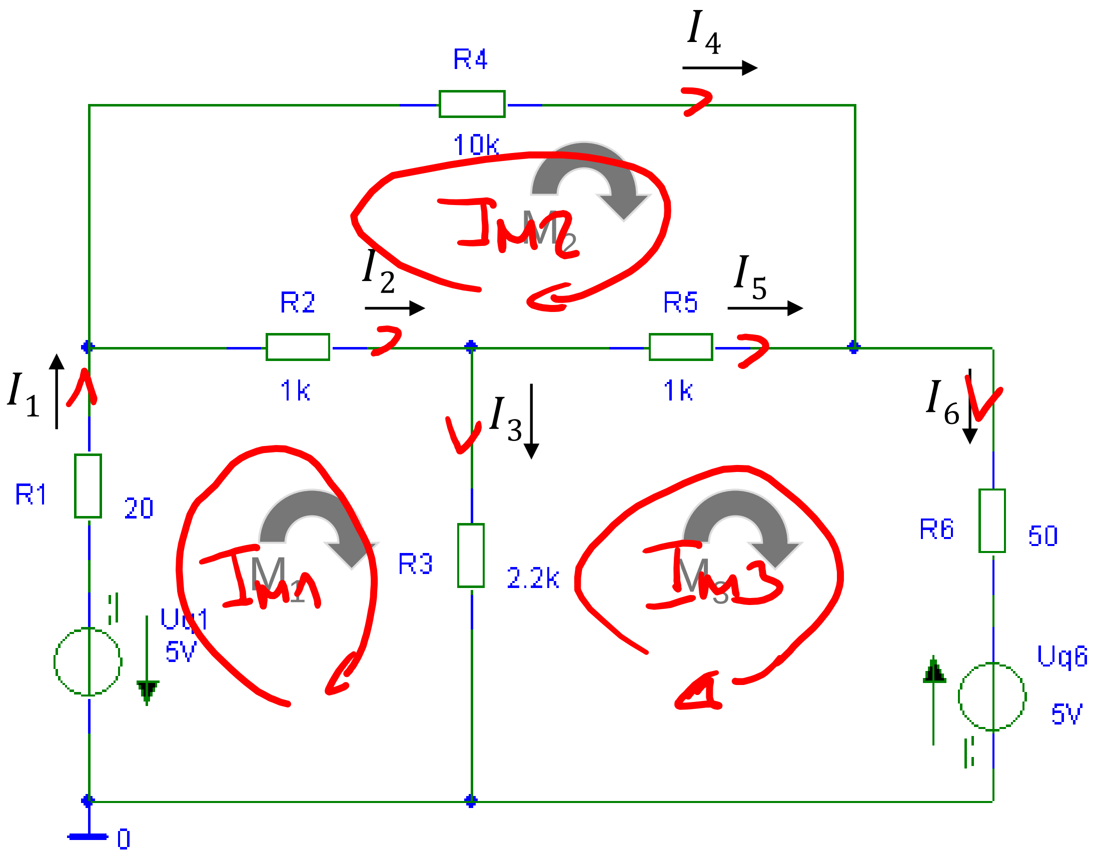
SCHRITT 3: MASCHENSTRÖME

3. Maschenstrom in jedem “Fenster” im Uhrzeigersinn definieren



SCHRITT 4: ZWEIGSTRÖME DEFINIEREN

ZWEIGSTRÖME = f(MASCHENSTRÖME)



$I_1 = I_{M1}$

$I_2 = I_{M1} - I_{M2}$

$I_3 = I_{M1} - I_{M3}$

$I_4 = I_{M2}$

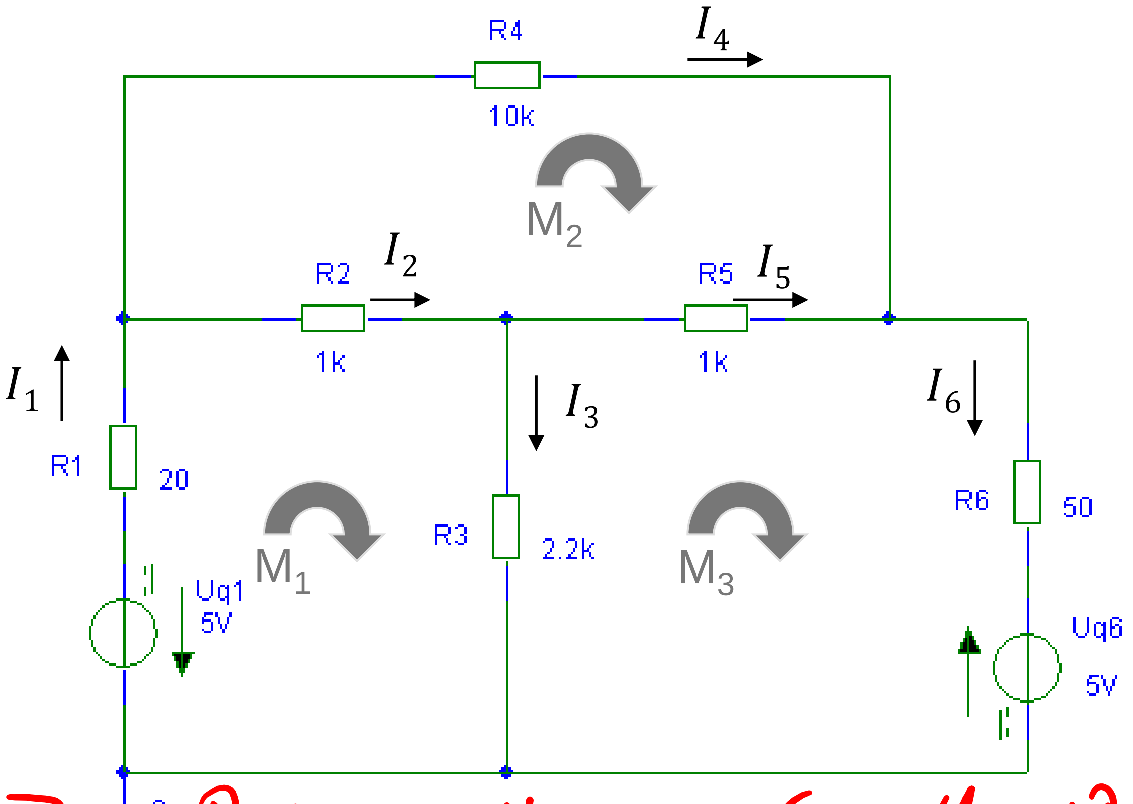
$I_5 = I_{M3} - I_{M2}$

$I_6 = I_{M3}$

4. Zweigströme als Funktion der Maschenströme aufstellen

SCHRITT 5: MASCHENREGEL

5. Maschenregel anwenden



Aus Schritt 4:

$$
\begin{aligned}
I_1 &= I_{M1} \\
I_2 &= I_{M1} - I_{M2} \\
I_3 &= I_{M1} - I_{M3} \\
I_4 &= I_{M2} \\
I_5 &= -I_{M2} + I_{M3} \\
I_6 &= I_{M3}
\end{aligned}
$$

M1: $R_1 I_1 + R_2 I_2 + R_3 I_3 - U_{q1} = 0 \Leftrightarrow -U_{q1} + R_1 I_{M1} + R_2 (I_{M1} - I_{M2}) + R_3 (I_{M1} - I_{M3}) = 0$

M2: $R_4 I_4 - R_5 I_5 - R_2 I_2 = 0 \Leftrightarrow R_4 \cdot I_{M2} - R_5 (-I_{M2} + I_{M3}) - R_2 (I_{M1} - I_{M2}) = 0$

M3: $R_5 I_5 + R_6 I_6 - U_{q6} - R_3 I_3 = 0 \Leftrightarrow R_5 (-I_{M2} + I_{M3}) + R_6 I_{M3} - U_{q6} - R_3 (I_{M1} - I_{M3}) = 0$

6. LGS vom Rang m für Maschenströme lösen
7. Bei Bedarf: Zweigströme aus Maschenströmen berechnen

MASCHENGLEICHUNGEN AUFRÄUMEN

M1: $R_1\, I_{M1} + R_2\,(I_{M1} - I_{M2}) + R_3\,(I_{M1} - I_{M3}) = U_{q1}$

M2: $-R_2(I_{M1} - I_{M2}) + R_4\, I_{M2} - R_5(-I_{M2} + I_{M3}) = 0$

M3: $-R_3(I_{M1} - I_{M3}) + -R_5(I_{M2} - I_{M3}) + R_6 I_{M3} = U_{q6}$

Nach aufsteigendem Index der Maschenströme sortieren:

M1: $(R_1 + R_2 + R_3) \cdot I_{M1} + (-R_2) I_{M2} + (-R_3) \cdot I_{M3} = U_{q1}$

M2: $(-R_2) \cdot I_{M1} + (R_2 + R_4 + R_5) I_{M2} + (-R_5) \cdot I_{M3} = 0$

M3: $(-R_3) \cdot I_{M1} + (-R_5) I_{M2} + (R_3 + R_5 + R_6) \cdot I_{M3} = U_{q6}$

6. LGS vom Rang m für Maschenströme lösen
7. Bei Bedarf: Zweigströme aus Maschenströmen berechnen

LINEARES GLEICHUNGSSYSTEM

$$I_{M1} \qquad\qquad I_{M2} \qquad\qquad I_{M3}$$

M1: $(R_1 + R_2 + R_3)I_{M1} \quad - R_2 I_{M2} \quad - R_3 I_{M3} \quad = U_{q1}$

M2: $-R_2 I_{M1} \quad + (R_2 + R_4 + R_5)I_{M2} \quad - R_5 I_{M3} \quad = 0$

M3: $-R_3 I_{M1} \quad - R_5 I_{M2} \quad + (R_3 + R_5 + R_6)I_{M3} \quad = U_{q6}$

MATRIXSCHREIBWEISE

$$\begin{array}{cc} & \begin{array}{ccc} I_{M1} & I_{M2} & I_{M3} \end{array} \\ \begin{array}{c} \text{M1:} \\ \text{M2:} \\ \text{M3:} \end{array} & \begin{pmatrix} (R_1+R_2+R_3) & -R_2 & -R_3 \\ -R_2 & +(R_2+R_4+R_5) & -R_5 \\ -R_3 & -R_5 & +(R_3+R_5+R_6) \end{pmatrix} \end{array} \cdot \begin{pmatrix} I_{M1} \\ I_{M2} \\ I_{M3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} U_{q1} \\ 0 \\ U_{q6} \end{pmatrix}$$

Maschen-Widerstands-Matrix **M** • Vektor **I** = Vektor **U**

Frage:

Woran erinnert diese Gleichung?

$M \cdot \vec{I} = \vec{U}$

Wie löse ich diese in Matlab?

I=M\U

VORTEILE DES MASCHENSTROMVERFAHRENS

(oft auch kurz als Maschenanalyse bezeichnet)

1. Nur 3 statt 6 Gleichungen (oder „k-1" statt „z")
2. ⇒ Es gibt eine Abkürzung!

Beachte: Maschenstromverfahren bei idealen Stromquellen

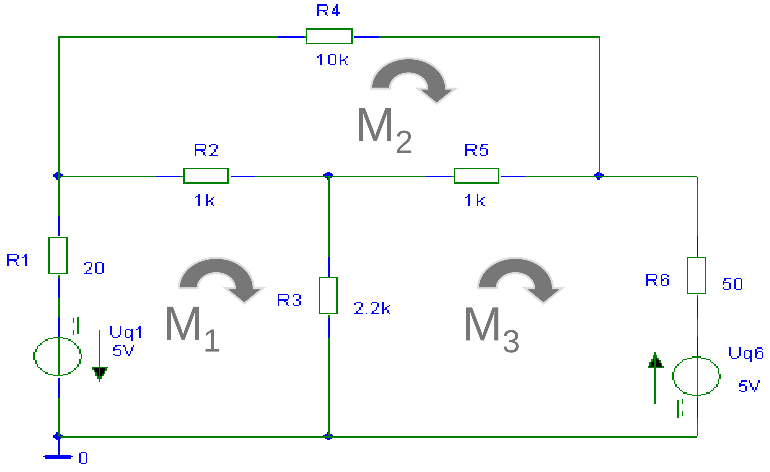
Wenn es eine ideale Stromquelle zwischen zwei Knoten ohne Innenwiderstand gibt, kann diese nicht in eine lineare Spannungsquelle umgewandelt werden.
⇒ Basisverfahren anwenden

MASCHENANLYSE AUF DER ÜBERHOLSPUR

1. Jedes Element auf der Hauptdiagonalen n_{ii} ist die Summe der Widerstände in Masche i.
2. Jedes andere Element n_{ik} ist die Summe der Widerstände, die sowohl in Masche i als auch k sind.
   → (positiv wennI_{Mi} und I_{Mk} gleichsinning fließen, sonst negativ)
3. Jedes Element des Lösungsvektors u_i ist die Summe der Spannungsquellen in der Masche i.
   → (positiv, wenn die Richtung von u_i entgegengesetzt zu I_{Mi} ist, sonst negativ)

1. HAUPTDIAGONALE = $\sum R_S$ IN MASCHE

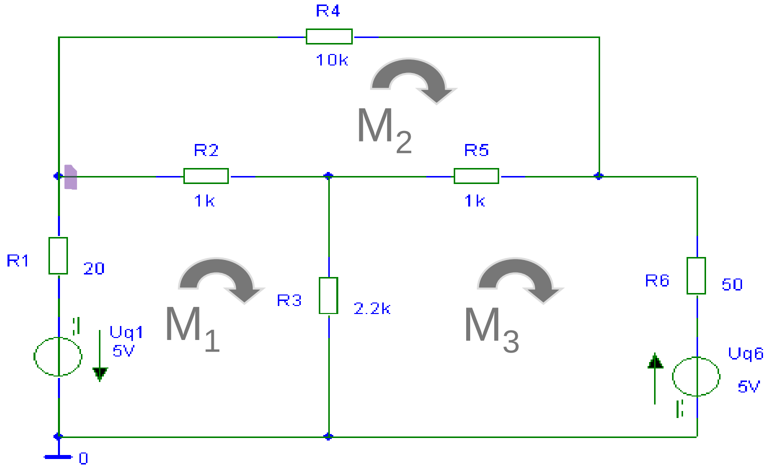
$$
\begin{array}{cc}
 & \begin{array}{ccc} I_{M1} & I_{M2} & I_{M3} \end{array} \\
\begin{array}{c} \text{M1:} \\ \text{M2:} \\ \text{M3:} \end{array} &
\begin{pmatrix}
\boxed{R_1+R_2+R_3} & ? & ? \\
? & \boxed{R_4+R_5+R_2} & ? \\
? & ? & \boxed{R_3+R_5+R_6}
\end{pmatrix}
\cdot
\begin{pmatrix} I_{M1} \\ I_{M2} \\ I_{M3} \end{pmatrix}
=
\begin{pmatrix} ? \\ ? \\ ? \end{pmatrix}
\end{array}
$$



2. ELEMENT i, k = $\sum R$ IN MASCHE i UND k

(positiv wenn Maschenstrom i und k gleichsinnig)

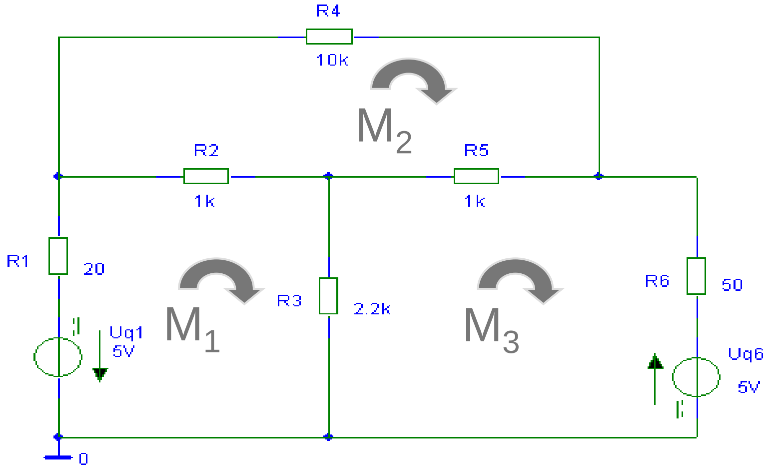
$$
\begin{array}{l} \\ \text{M1:} \\ \text{M2:} \\ \text{M3:} \end{array}
\begin{array}{c}
\begin{array}{ccc} \quad I_{M1} \quad & \quad I_{M2} \quad & \quad I_{M3} \quad \end{array} \\
\begin{pmatrix}
R_1 + R_2 + R_3 & \boxed{-R_2} & \boxed{-R_3} \\
\boxed{-R_2} & R_2 + R_4 + R_5 & \boxed{-R_5} \\
\boxed{-R_3} & \boxed{-R_5} & R_3 + R_5 + R_6
\end{pmatrix}
\end{array}
\cdot
\begin{pmatrix} I_{M1} \\ I_{M2} \\ I_{M3} \end{pmatrix}
=
\begin{pmatrix} \\ \\ \\ \end{pmatrix}
$$



3. U-VEKTOR = $\sum U_q$ IN MASCHE i

(positiv wenn u_q entgegengesetzt zu Maschenstrom I_{Mi})

$$
\begin{array}{ll}
 & \begin{array}{ccc} I_{M1} & I_{M2} & I_{M3} \end{array} \\
\begin{array}{l} \text{M1:} \\ \text{M2:} \\ \text{M3:} \end{array} &
\begin{pmatrix}
R_1 + R_2 + R_3 & -R_2 & -R_3 \\
-R_2 & R_2 + R_4 + R_5 & -R_5 \\
-R_3 & -R_5 & R_3 + R_5 + R_6
\end{pmatrix}
\cdot
\begin{pmatrix} I_{M1} \\ I_{M2} \\ I_{M3} \end{pmatrix}
=
\begin{pmatrix} \boxed{U_{q1}} \\ \boxed{0} \\ \boxed{U_{q6}} \end{pmatrix}
\end{array}
$$



ÜBERPRÜFUNG DER MATRIX

$$
\begin{array}{ll}
 & \begin{array}{ccc} \quad I_{M1} \quad & \quad I_{M2} \quad & \quad I_{M3} \quad \end{array} \\
\begin{array}{l} \text{M1:} \\ \text{M2:} \\ \text{M3:} \end{array} & \begin{pmatrix} R_1 + R_2 + R_3 & -R_2 & -R_3 \\ -R_2 & R_2 + R_4 + R_5 & -R_5 \\ -R_3 & -R_5 & R_3 + R_5 + R_6 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} I_{M1} \\ I_{M2} \\ I_{M3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} U_{q1} \\ 0 \\ U_{q6} \end{pmatrix}
\end{array}
$$

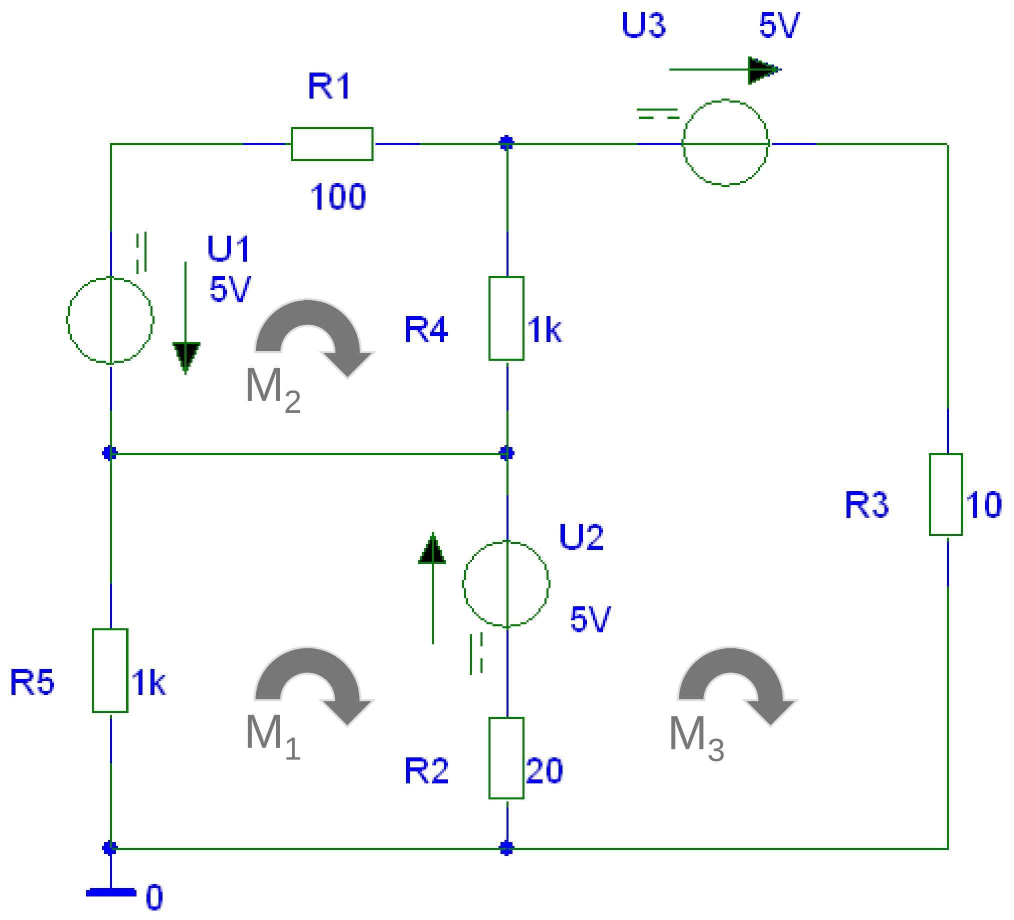
Allgemeine Eigenschaften der Maschen-Widerstands-Matrix:

- Matrix ist symmetrisch zur Hauptdiagonale
- Jedes Element auf der Hauptdiagonalen ist positiv

GRUPPENÜBUNG (2ER GRUPPEN, 15 MIN)

Aufgabe: Stellen Sie die Matrixgleichung auf.

Ziel: Jeder kann es selbst anwenden!

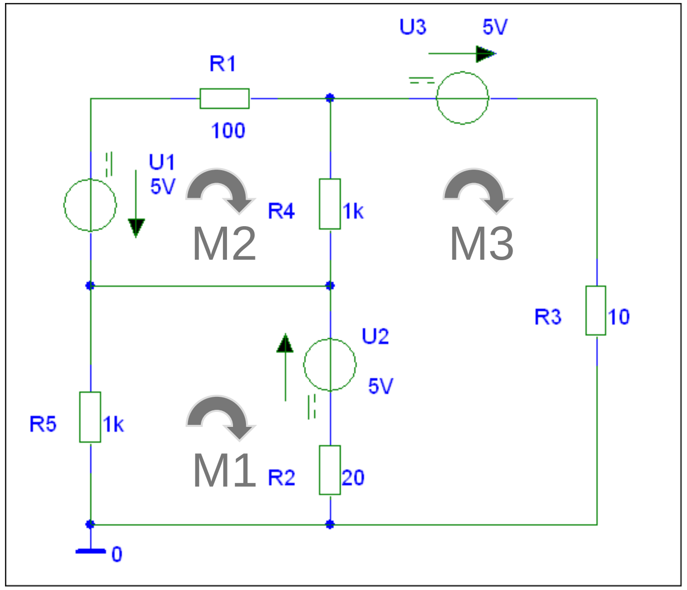


MASCHENANLYSE AUF DER ÜBERHOLSPUR

1. Jedes Element auf der Hauptdiagonalen n_{ii} ist die Summe der Widerstände in Masche i.
2. Jedes andere Element n_{ik} ist die Summe der Widerstände, die sowohl in Masche i als auch k sind.
   → (positiv wenn I_{Mi} und I_{Mk} gleichsinning fließen, sonst negativ)
3. Jedes Element des Lösungsvektors u_i ist die Summe der Spannungsquellen in der Masche i.
   → (positiv, wenn die Richtung von u_i entgegengesetzt zu I_{Mi} ist, sonst negativ)

LÖSEN DES LINEAREN GLEICHUNGSSYSTEMS

Ergebnis der Maschenanalyse:



$$\begin{pmatrix} R_2 + R_5 & 0 & -R_2 \\ 0 & R_1 + R_4 & -R_4 \\ -R_2 & -R_4 & R_2 + R_3 + R_4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} I_{M1} \\ I_{M2} \\ I_{M3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} U_2 \\ U_1 \\ -U_2 - U_3 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1020\Omega & 0 & -20\Omega \\ 0 & 1100\Omega & -1000\Omega \\ -20\Omega & -1000\Omega & 1030\Omega \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} I_{M1} \\ I_{M2} \\ I_{M3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5V \\ 5V \\ -10V \end{pmatrix}$$

GAUß'SCHE ELIMINATION

$$\begin{array}{ccccccc} 1020\Omega \cdot I_{M1} & + & 0 & - & 20\Omega \cdot I_{M3} & = & 5V \\ 0 & + & 1100\Omega \cdot I_{M2} & - & 1000\Omega \cdot I_{M3} & = & 5V \\ -20\Omega \cdot I_{M1} & - & 1000\Omega \cdot I_{M2} & + & 1030\Omega \cdot I_{M3} & = & -10V \end{array}$$

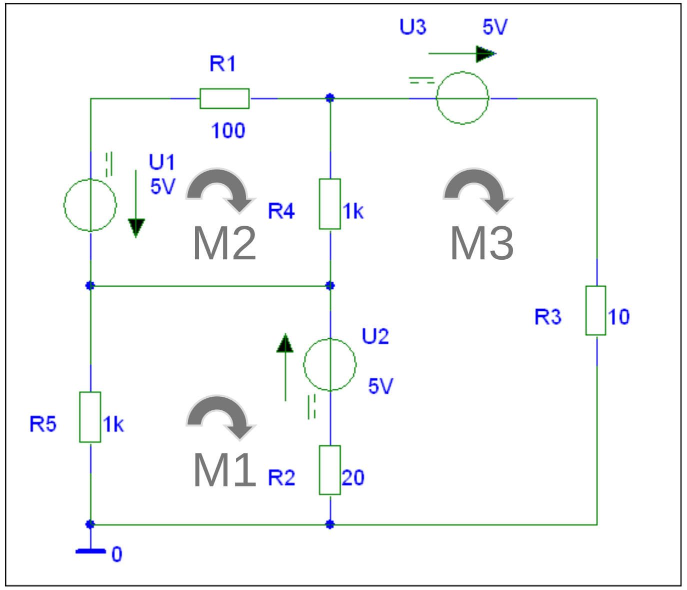
	IM1	IM2	IM3	U
	1020	0	-20	5
		1100	-1000	5
	-20	-1000	1030	-10
	1	0	-0,0196	0,0049
		1100	-1000	5
(20)	-20	-1000	1030	-10
		1100	-1000	5
		-1000	1029,608	-9,902
		1	-0,9091	0,0045
(1000)		-1000	1029,608	-9,902
			120,517	-5,357

$\Rightarrow I_{M3}$ = (-5.357 / 120.517) A = -44,45mA

$\Rightarrow I_{M2}$ = (0.0045+0.9091 (-0.04445)) A = -35,91mA

$\Rightarrow I_{M1}$ = (0.0049+0.0196 (-0.04445)) A = 4.03 mA

DIE MATLAB-LÖSUNG



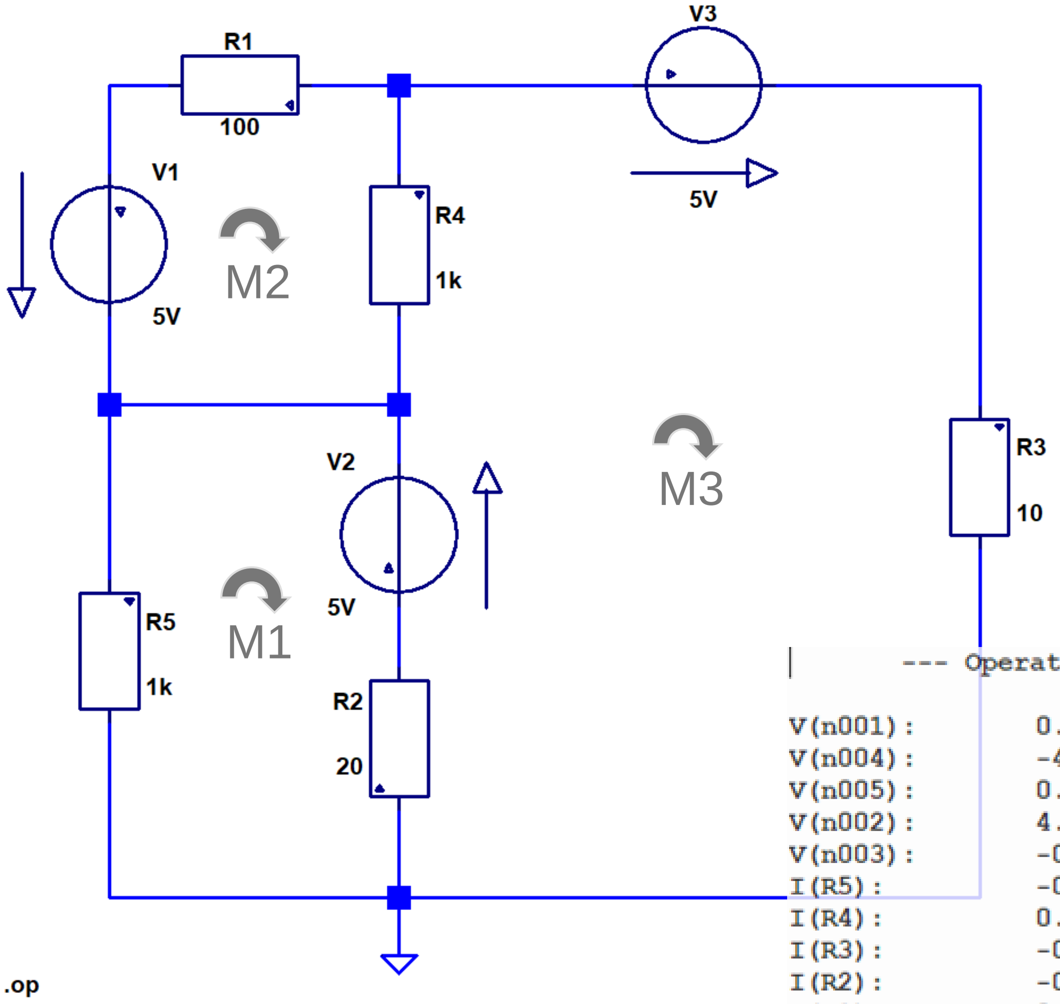
$$\begin{pmatrix} 1020\Omega & 0 & -20\Omega \\ 0 & 1100\Omega & -1000\Omega \\ -20\Omega & -1000\Omega & 1030\Omega \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} I_{M1} \\ I_{M2} \\ I_{M3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5V \\ 5V \\ -10V \end{pmatrix}$$

```
Y=[1020 0 -20; 0 1100 -1000; -20 -1000 1030]
U=[5;5;-10]
IM =Y\U
```

Tipp:
ingenieurmäßiges Zahlenformat
über: *format short eng*

```
Y =

        1020           0         -20
           0        1100       -1000
         -20       -1000        1030


U =

     5
     5
   -10


IM =

    0.0040
   -0.0359
   -0.0444
```

SIMULATION IN LTSPICE




```
--- Operating Point ---

V(n001):     0.969531      voltage
V(n004):     -4.03047      voltage
V(n005):     0.969531      voltage
V(n002):     4.55554       voltage
V(n003):     -0.444461     voltage
I(R5):       -0.00403047   device_current
I(R4):       0.00858601    device_current
I(R3):       -0.0444461    device_current
I(R2):       -0.0484766    device_current
I(R1):       0.0358601     device_current
I(V3):       -0.0444461    device_current
I(V2):       -0.0484766    device_current
I(V1):       0.0358601     device_current
```

Vergleiche mit Matlab-Ergebnis:

```
Y =

        1020           0         -20
           0        1100       -1000
         -20       -1000        1030


U =

     5
     5
   -10


IM =

    0.0040
   -0.0359
   -0.0444
```

SYSTEMATISCHE NETZWERKANALYSE

Netzwerk mit z Zweigen

- z Zweigströme
- z Zweigspannungen

$\Rightarrow$ 2 z Gleichungen erforderlich

Systematisch Vorgehen, um den Überblick zu behalten!

3 Methoden der Netzwerkanalyse

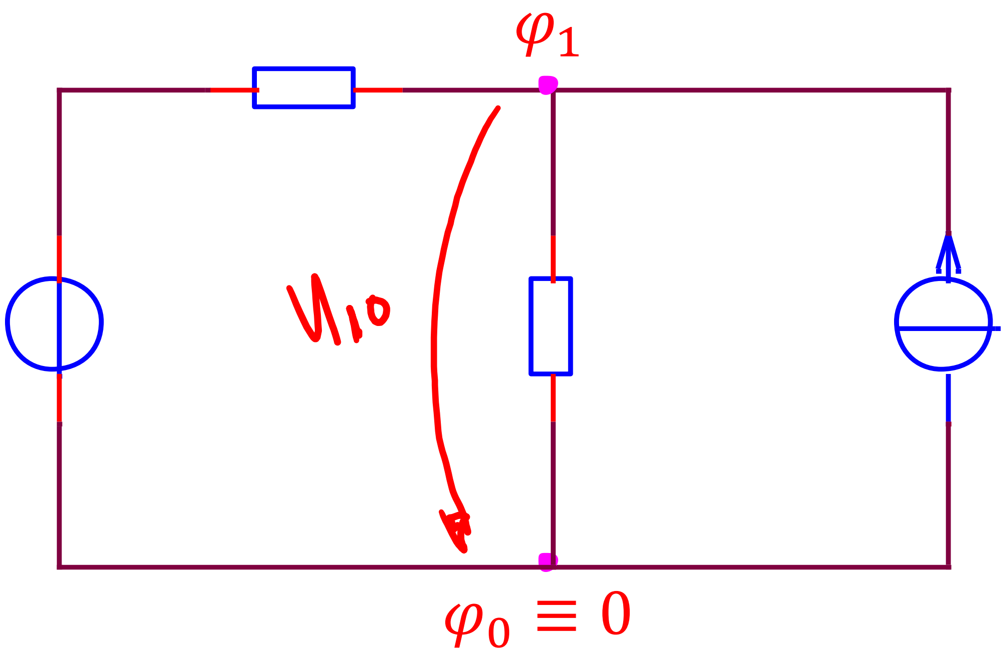
- **Basisverfahren**
  einfache Anwendung der Kirchhoffschen Gesetze
- **Maschenstromverfahren**
  Reduzierung der Gleichungszahl durch Definition von Maschenströmen
- **Knotenpotentialverfahren**
  Reduzierung der Gleichungszahl durch Definition von Knotenspannungen
  (= Spannung des Knotens zu Masse)

DEFINITION KNOTENPOTENTIAL

$U_{10} = \varphi_1 - \varphi_0$

mit $\varphi_0 = 0\,V$

$\Rightarrow U_{10} = \varphi_1$



Knotenpotential = Spannungsdifferenz zwischen Knoten und Referenzknoten

KNOTENPOTENTIALVERFAHREN: IDEE

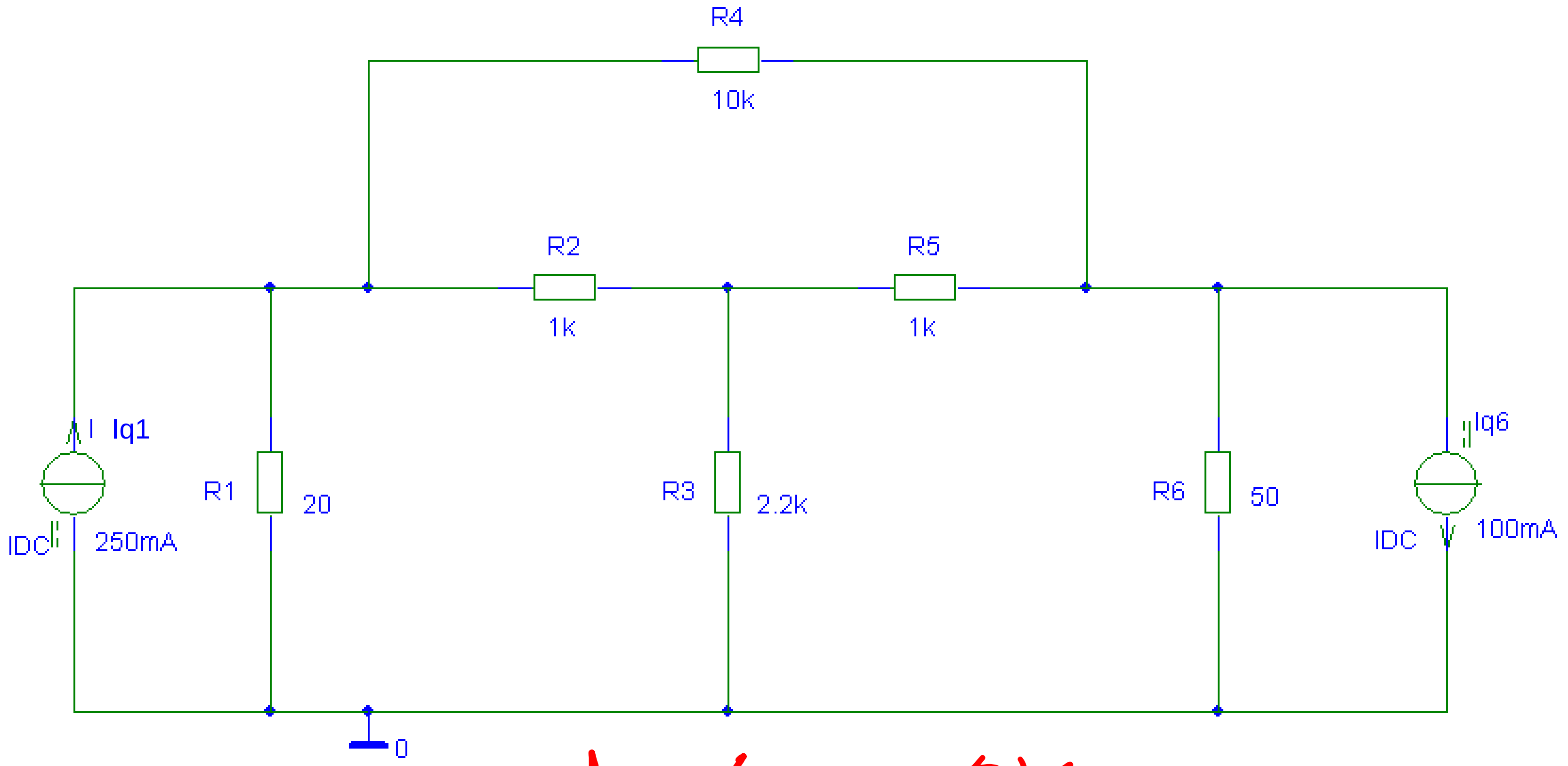
- Ströme in Knotengleichungen mit Ohmschem Gesetz durch Widerstände und Potentialdifferenzen ersetzen
- LGS nur für Knotenpotentiale lösen

KNOTENPOTENTIALVERFAHREN

1. Netzwerk wo möglich vereinfachen:
   a) Parallele Widerstände zusammenfassen
   b) Lineare Spannungsquellen in äquivalente Stromquellen umwandeln
2. Knotenpotentiale definieren:
   Referenzknoten φ_0 = Masse = 0, Knotenpotential φ_i für jeden Knoten
3. Zweigströme definieren und durch Knotenpotentiale ausdrücken
4. Knotengleichungen aufstellen
5. LGS vom Rang $k - 1$ für Knotenpotentiale lösen
6. Bei Bedarf: Zweigströme aus Knotenpotentialen berechnen

SCHRITT 1: NETZWERK VEREINFACHEN

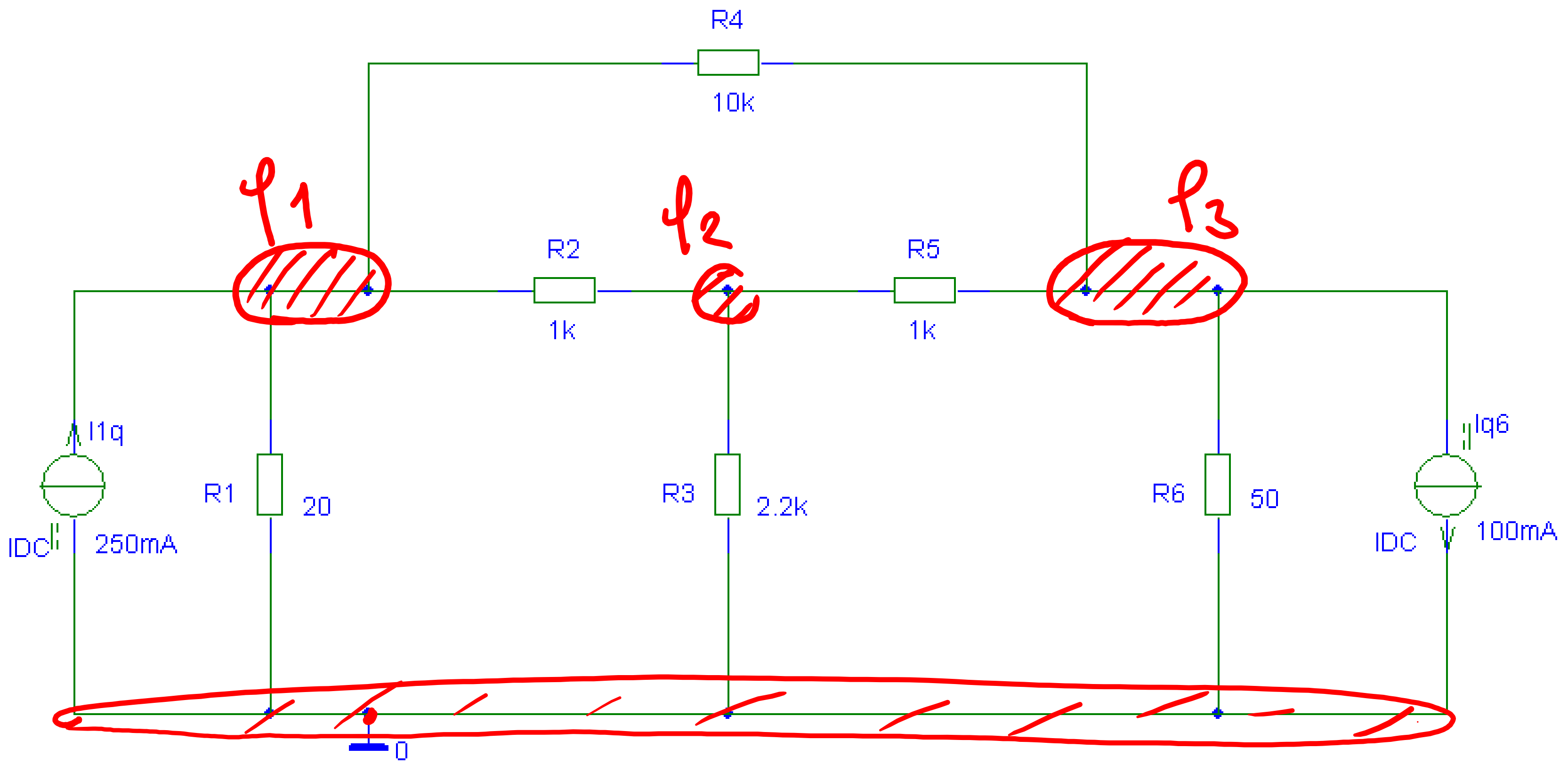
1. Netzwerk wo möglich vereinfachen:
   a) Parallele Widerstände zusammenfassen
   b) Lineare Spannungsquellen in äquivalente Stromquellen umwandeln



$$I_{q1} = U_{q1}/R_1 = \frac{5V}{20\Omega} = 250mA$$

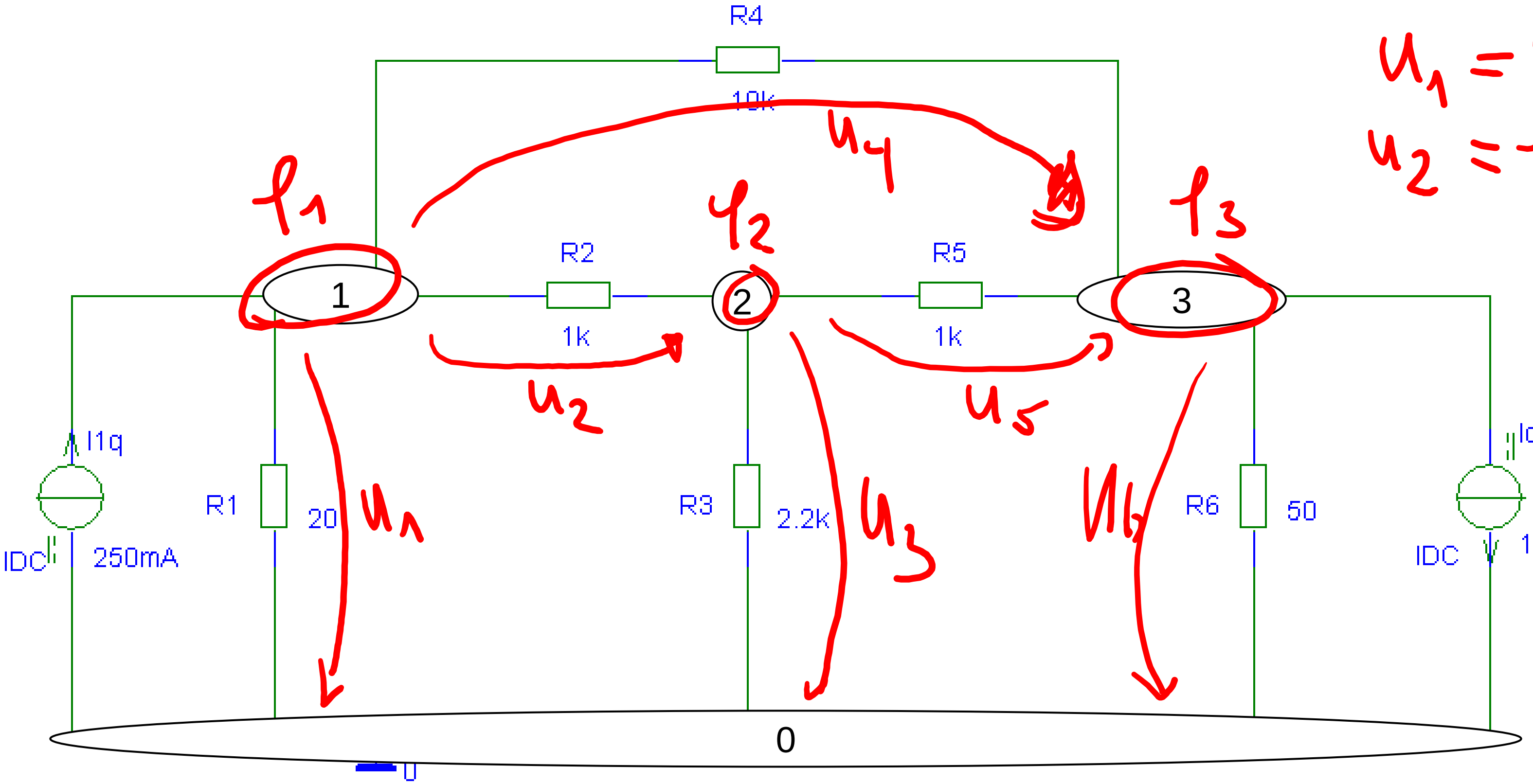
SCHRITT 2A: NUMMERIERUNG DER KNOTEN

2. Knotenpotentiale definieren:
   Referenzknoten φ_0 = Masse = 0, Knotenpotential φ_i für jeden Knoten



SCHRITT 2B: KNOTENPOTENTIALE

2. Knotenpotentiale definieren:
   Referenzknoten φ_0 = Masse = 0, Knotenpotential φ_i für jeden Knoten



$u_1 = \varphi_1 - \varphi_0 = \varphi_1$

$u_2 = \varphi_1 - \varphi_2$

$u_3 = \varphi_2$

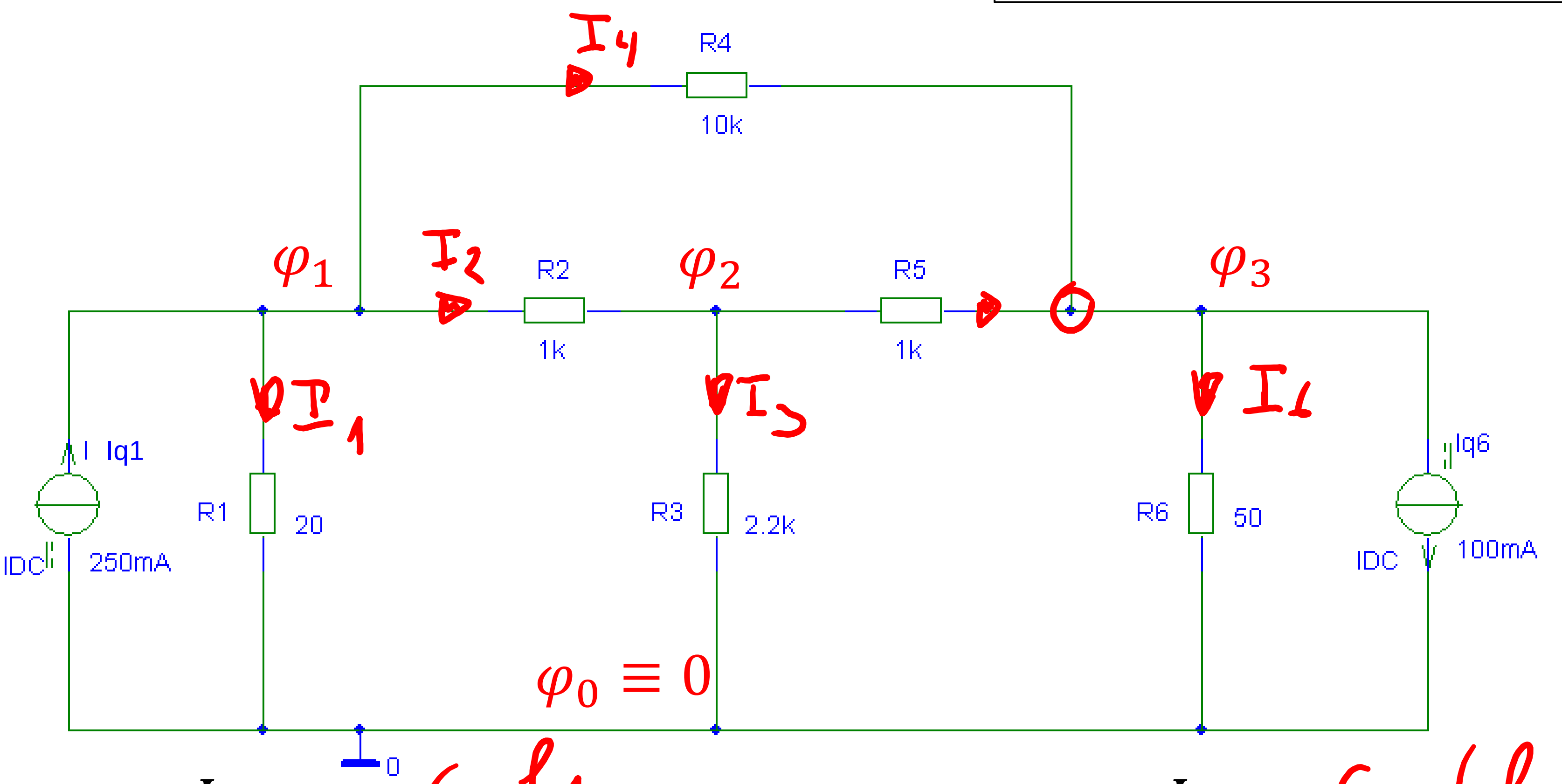
$u_4 = \varphi_1 - \varphi_3$

$u_5 = \varphi_2 - \varphi_3$

$u_6 = \varphi_3$

SCHRITT 3: ZWEIGSTRÖME DEFINIEREN
(UND DURCH KNOTENPOTENTIALE AUSDRÜCKEN)

3. Zweigströme definieren und durch Knotenpotentiale ausdrücken



$I_1 = G_1 \cdot \varphi_1$

$I_2 = G_2 (\varphi_1 - \varphi_2)$

$I_3 = G_3 \cdot \varphi_2$

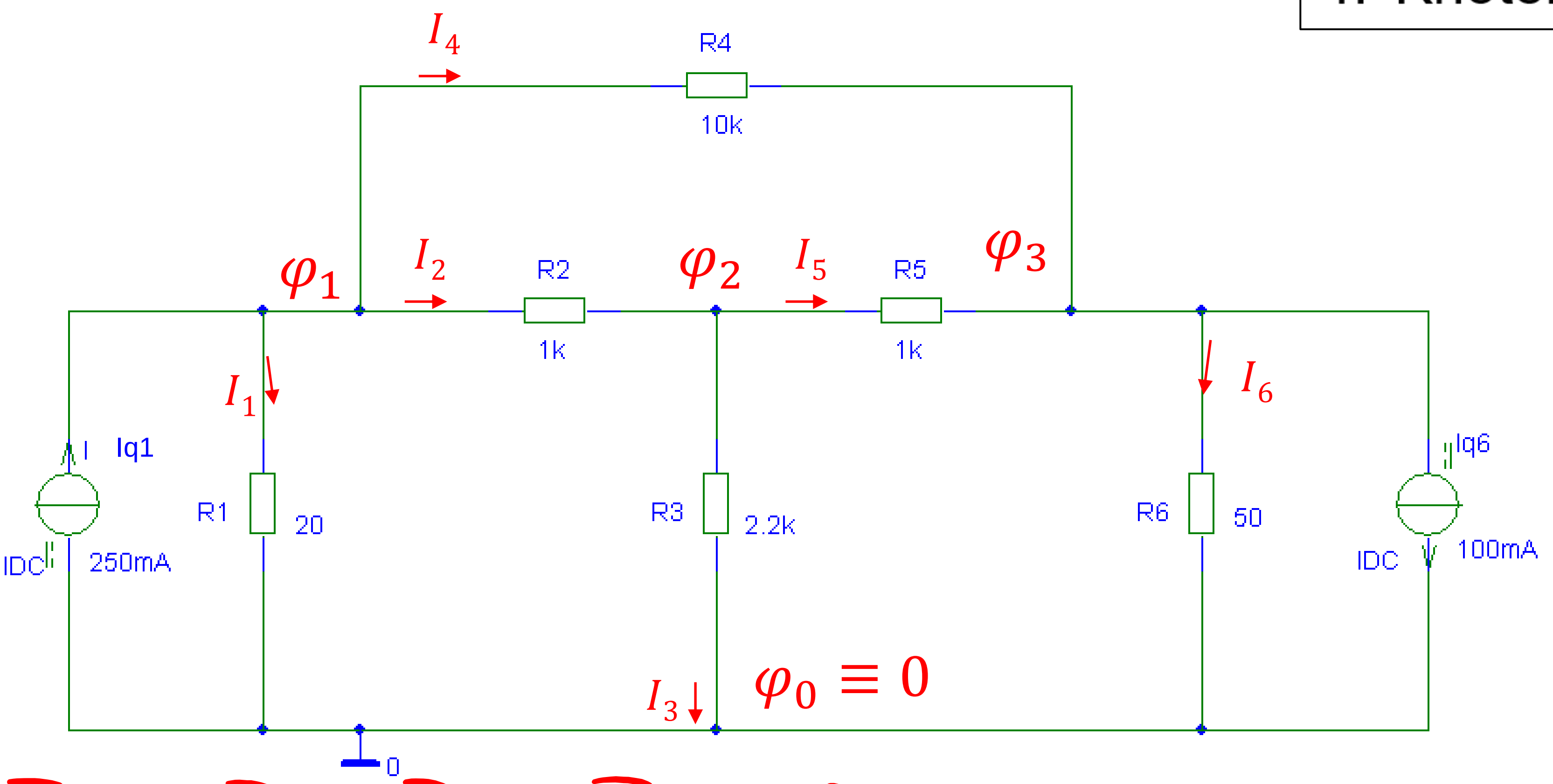
$I_4 = G_4 (\varphi_1 - \varphi_3)$

$I_5 = G_5 (\varphi_2 - \varphi_3)$

$I_6 = G_6 \cdot \varphi_3$

SCHRITT 4: KNOTENGLEICHUNGEN AUFSTELLEN

4. Knotengleichungen aufstellen



K1: $I_{q1} - I_1 - I_2 - I_4 = 0$

K2: $I_2 - I_5 - I_3 = 0$

K3: $I_4 + I_5 - I_6 - I_{q6} = 0$

GLEICHUNGEN LÖSEN

5. LGS vom Rang $k-1$ für Knotenpotentiale lösen
6. Bei Bedarf: Zweigströme aus Knotenpotentialen berechnen

K1: $I_{q1} - I_1 - I_2 - I_4 = 0$

K2: $I_2 - I_3 - I_5 = 0$

K3: $I_4 + I_5 - I_6 - I_{q6} = 0$

Ströme:

$I_1 = G_1 \varphi_1$

$I_2 = G_2 (\varphi_1 - \varphi_2)$

$I_3 = G_3 \varphi_2$

$I_4 = G_4 (\varphi_1 - \varphi_3)$

$I_5 = G_5 (\varphi_2 - \varphi_3)$

$I_6 = G_6 \varphi_3$

Durch Einsetzen erhalten wir:

K1: $I_{q1} - G_1\varphi_1 - G_2(\varphi_1 - \varphi_2) - G_4(\varphi_1 - \varphi_3) = 0$

K2: $G_2(\varphi_1 - \varphi_2) - G_3\varphi_2 - G_5(\varphi_2 - \varphi_3) = 0$

K3: $G_4(\varphi_1 - \varphi_3) + G_5(\varphi_2 - \varphi_3) - G_6\varphi_3 - I_{q6} = 0$

POTENTIALE SORTIEREN

$$
\begin{array}{llllll}
\text{K1:} & (G_1 + G_2 + G_4)\,\varphi_1 & -\,G_2\,\varphi_2 & -\,G_4\,\varphi_3 & = & I_{q1} \\
\text{K2:} & -G_2\,\varphi_1 & +\,(G_2 + G_3 + G_5)\,\varphi_2 & -\,G_5\,\varphi_3 & = & 0 \\
\text{K3:} & -G_4\,\varphi_1 & -\,G_5\,\varphi_2 & +\,(G_4 + G_5 + G_6)\,\varphi_3 & = & -I_{q6}
\end{array}
$$

$$
\begin{array}{cc}
 & \begin{array}{ccc} \quad\color{red}{\varphi_1}\quad & \quad\color{red}{\varphi_2}\quad & \quad\color{red}{\varphi_3}\quad \end{array} \\
\begin{array}{c} \text{K1:} \\ \text{K2:} \\ \text{K3:} \end{array} &
\begin{pmatrix}
(G_1 + G_2 + G_4) & -\,G_2 & -\,G_4 \\
-G_2 & +\,(G_2 + G_3 + G_5) & -\,G_5 \\
-G_4 & -\,G_5 & +\,(G_4 + G_5 + G_6)
\end{pmatrix}
\cdot
\begin{pmatrix} \varphi_1 \\ \varphi_2 \\ \varphi_3 \end{pmatrix}
=
\begin{pmatrix} I_{q1} \\ 0 \\ -I_{q6} \end{pmatrix}
\end{array}
$$

Leitwert-Matrix **N** · Vektor **U** = Vektor **I**

VORTEILE DES KNOTENPOTENTIALVERFAHRENS

1. Anstatt 6 Gleichungen die wir lösen müssen nur 3
   (k-1) anstatt „2z"
2. ⇒ Es gibt auch eine Abkürzung!

Vorsicht:

Kein Knotenpotialverfahren bei idealen Spannungsquellen

Wenn zwischen zwei Knoten eine ideale Spannungsquelle (ohne Widerstand) geschaltet ist, kann diese nicht in eine Stromquelle umgewandelt werden.
⇒ Basisverfahren

BESTIMMUNG DER KNOTEN-LEITWERT-MATRIX

„positive"

1. jedes Element der **Hauptdiagonalen** $n_{i,i}$ ist die Summe der Leitwerte, die mit dem Knoten i verbunden sind

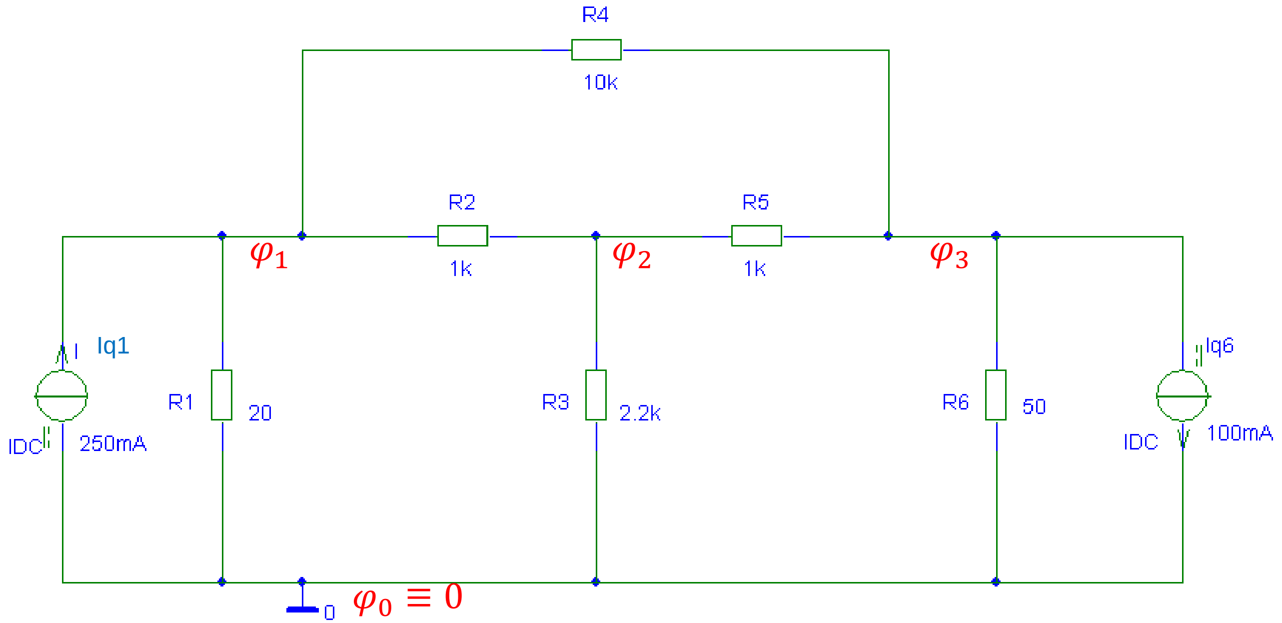
2. jedes **andere Element** $n_{i,k}$ ist die negative Summe der Leitwerte, die direkt die Knoten i und k verbinden

3. jedes Element des Quellstromvektors I_i enthält die Stromquellen, die mit dem Knoten i verbunden sind.
   (positiv, falls der Strom auf den Knoten zufließt und negativ, falls der Strom von dem Knoten wegfließt)

SCHRITT 1: HAUPTDIAGONALE = $\sum G_i$

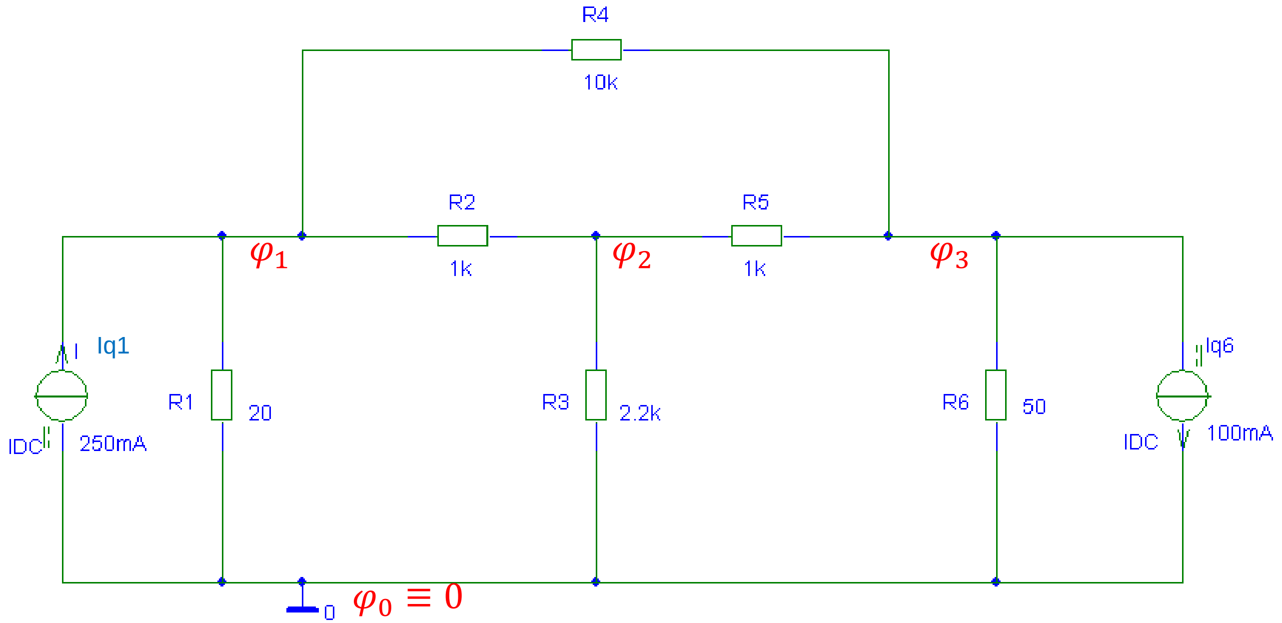
Leitwerte?

$$
\begin{array}{l}
\text{K1:} \\
\text{K2:} \\
\text{K3:}
\end{array}
\begin{pmatrix}
\boxed{G_1+G_2+G_4} & ? & ? \\
? & \boxed{G_2+G_5+G_3} & ? \\
? & ? & \boxed{G_4+G_5+G_6}
\end{pmatrix}
\cdot
\begin{pmatrix}
\varphi_1 \\
\varphi_2 \\
\varphi_3
\end{pmatrix}
=
\begin{pmatrix}
? \\
? \\
?
\end{pmatrix}
$$



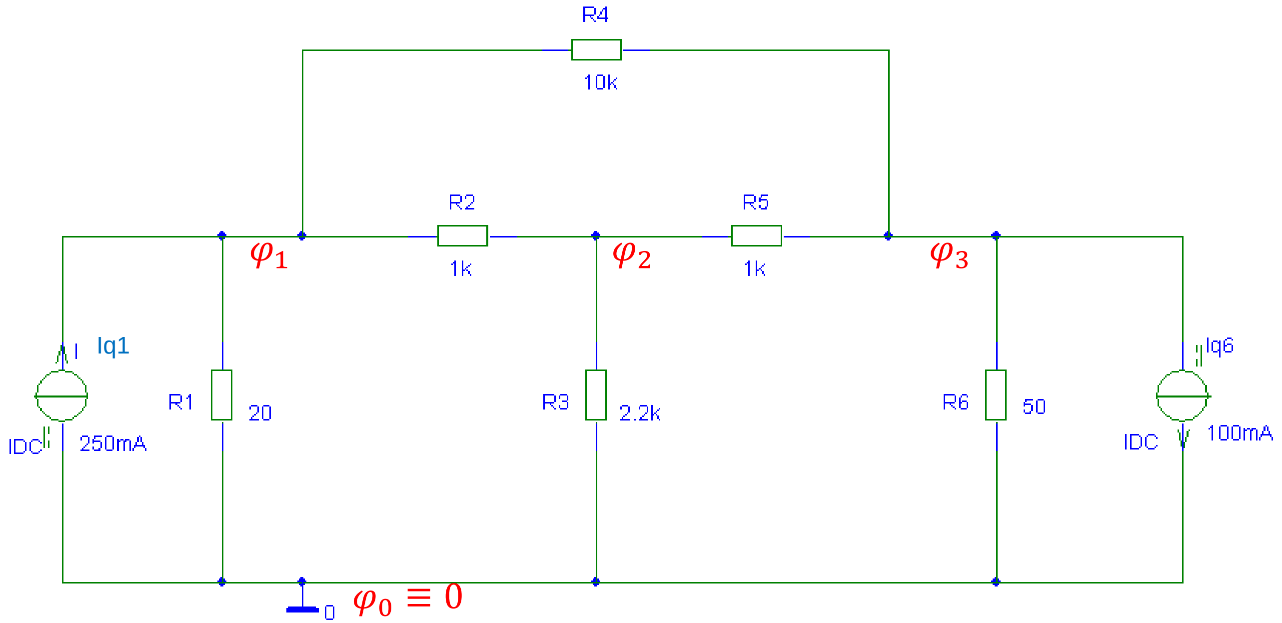
SCHRITT 2: NEBENDIAGONALE = $-\sum G_{i,k}$

$$
\begin{array}{l}
\text{K1:} \\ \text{K2:} \\ \text{K3:}
\end{array}
\begin{pmatrix}
G_1 + G_2 + G_4 & \boxed{-G_2} & \boxed{-G_4} \\
\boxed{-G_2} & G_2 + G_3 + G_5 & \boxed{-G_5} \\
\boxed{-G_4} & \boxed{-G_5} & G_4 + G_5 + G_6
\end{pmatrix}
\cdot
\begin{pmatrix}
\varphi_1 \\ \varphi_2 \\ \varphi_3
\end{pmatrix}
=
\begin{pmatrix}
? \\ ? \\ ?
\end{pmatrix}
$$



SCHRITT 3: STROMVEKTOR = $\sum I_q$ (+ WENN ZUFLIEßEND)

$$\begin{array}{l} \text{K1:} \\ \text{K2:} \\ \text{K3:} \end{array} \begin{pmatrix} G_1 + G_2 + G_4 & -G_2 & -G_4 \\ -G_2 & G_2 + G_3 + G_5 & -G_5 \\ -G_4 & -G_5 & G_4 + G_5 + G_6 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \varphi_1 \\ \varphi_2 \\ \varphi_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \boxed{+I_{q1}} \\ \boxed{0} \\ \boxed{-I_{q6}} \end{pmatrix}$$



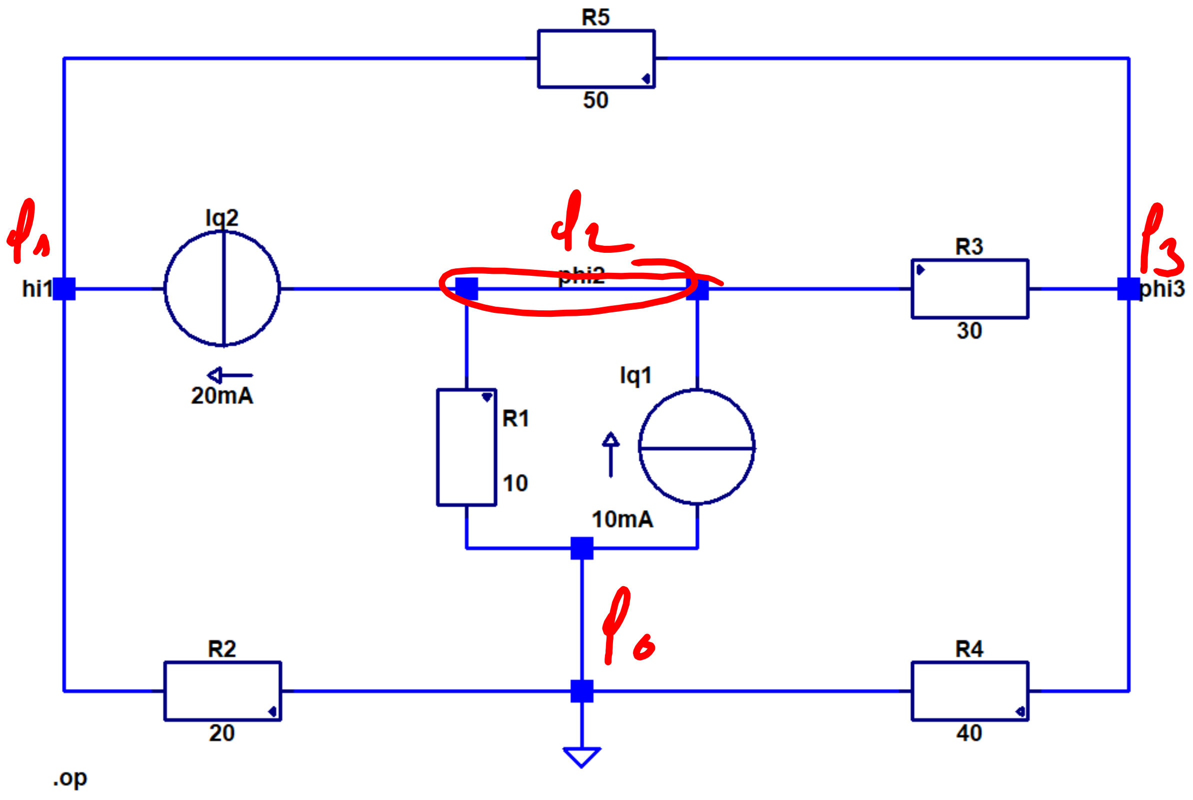
ÜBERPRÜFUNG DER MATRIX

$$
\begin{array}{l}
\text{K1:} \\
\text{K2:} \\
\text{K3:}
\end{array}
\begin{pmatrix}
(G_1 + G_2 + G_4) & -G_2 & -G_4 \\
-G_2 & +(G_2 + G_3 + G_5) & -G_5 \\
-G_4 & -G_5 & +(G_4 + G_5 + G_6)
\end{pmatrix}
\cdot
\begin{pmatrix}
\varphi_1 \\
\varphi_2 \\
\varphi_3
\end{pmatrix}
=
\begin{pmatrix}
I_{q1} \\
0 \\
-I_{q6}
\end{pmatrix}
$$

- Die Matrix ist symmetrisch zur Hauptdiagonalen.
- Jedes Element auf der Hauptdiagonalen ist positiv.
- Jedes Element, das nicht auf der Hauptdiagonalen liegt, ist negativ.
- Die Summe aller Elemente in einer Zeile ist die Summe der Leitwerte zwischen dem Knoten i und dem Referenzknoten.

AUFGABE

Stellen Sie mit dem Knotenpotentialverfahren die Matrix-gleichung für das folgende Netzwerk auf:



BESTIMMUNG DER KNOTEN-LEITWERT-MATRIX

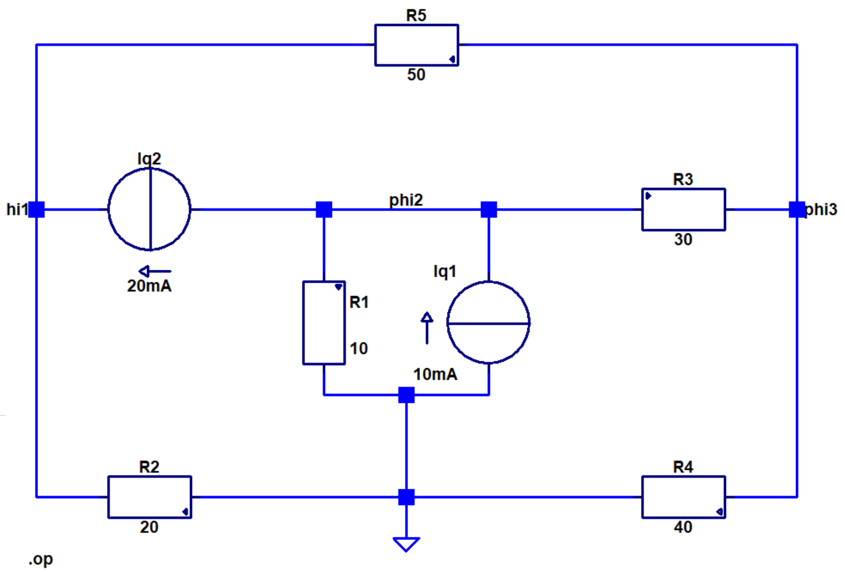
1. jedes Element der **Hauptdiagonalen** $n_{i,i}$ ist die Summe der Leitwerte, die mit dem Knoten i verbunden sind
2. jedes **andere Element** $n_{i,k}$ ist die negative Summe der Leitwerte, die direkt die Knoten i und k verbinden
3. jedes Element des Quellstromvektors I_i enthält die Stromquellen, die mit dem Knoten i verbunden sind.
   (positiv, falls der Strom auf den Knoten zufließt und negativ, falls der Strom von dem Knoten wegfließt)

LÖSUNG

$$\begin{pmatrix} G_2+G_5 & 0 & -G_5 \\ 0 & G_1+G_3 & -G_3 \\ -G_5 & -G_3 & G_3+G_4+G_5 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \varphi_1 \\ \varphi_2 \\ \varphi_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} I_{q2} \\ I_{q1}-I_{q2} \\ 0 \end{pmatrix}$$

```
%Solution in Matlab
G1 = 1/10; G2 = 1/20; G3 = 1/30; G4 = 1/40; G5 = 1/50;
Iq1 = 10e-3; Iq2 = 20e-3;
N = [G2+G5 0 -G5; 0 G1+G3 -G3; -G5 -G3 G3+G4+G5]
I = [Iq2 Iq1-Iq2 0]'
U = N\I
```

$$\Rightarrow \quad \begin{aligned} \varphi_1 &= 300\,mV, \\ \varphi_2 &= -62{,}5\,mV, \\ \varphi_3 &= 50\,mV \end{aligned}$$




```
--- Operating Point ---

V(phi2):    -0.0625     voltage
V(phi1):    0.3         voltage
V(phi3):    0.05        voltage
I(Iq2):     0.02        device_current
I(Iq1):     0.01        device_current
I(R5):      -0.005      device_current
I(R4):      0.00125     device_current
I(R3):      -0.00375    device_current
I(R2):      -0.015      device_current
I(R1):      -0.00625    device_current
```

WAS SIE MITNEHMEN SOLLEN…

Basisverfahren über Zweigströme

- verstehen
- Vor- und Nachteile kennen
- anwenden können

Maschenstromverfahren

- verstehen und Vorteile benennen können
- Direktaufstellung der Matrix mit Formelsammlung anwenden können
- Plausibilitätsprüfung des Ergebnisses anwenden

Knotenpotentialverfahren (Standardverfahren)

- verstehen und Vorteile benennen können
- Direktaufstellung der Matrix auswendig beherrschen
- Plausibilitätsprüfung des Ergebnisses anwenden

Anregung:

- Wenden Sie bei Übungsaufgaben die Maschenanalyse an und überprüfen Sie die Ergebnisse mit einem Spice-Simulator.

WANN WELCHES VERFAHREN ?