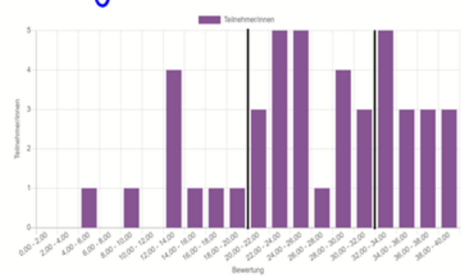
Ergebnis PVL-Test 1



Vorlesung 9 - 13.10.2022

Vorlesungsthemen

Vektoren

- Linearkombination/ lineare Abhängigkeit/ lineare Unabhängigkeit

Lineare Gleichungssysteme

- Gauß-Elimination zur Lösung eines LGS
- Lösbarkeit eines LGS
- Lösbarkeit über-/unterbestimmter LGS

•

Bachelor-Studiengang Regenerative Energiesysteme und Energiemanagement – Elektro- und Informationstechnik	
Mathematik 1	
Modulkennziffer	MA1 / MAÜ1
Modulkoordination/ Modulverantwortliche/r	Prof. Dr.-Ing. Karin Landenfeld
Dauer/ Semester/ Angebotsturnus	ein Semester / 1. Semester / jedes Wintersemester
Leistungspunkte (LP) / Semesterwochenstunden (SWS)	8 LP 6 + 1 SWS
Arbeitsaufwand (Workload)	Präsenzstudium: 126 h Selbststudium: 114 h !
Art des Moduls	Pflichtmodul

Bachelor-Studiengang Regenerative Energiesysteme und Energiemanagement – Elektro- und Informationstechnik	
Physik 1	
Modulkennziffer	PH1
Modulkoordination/ Modulverantwortliche/r	Prof. Dr. Robert Heß
Dauer/ Semester/ Angebotsturnus	ein Semester / 1. Semester / jedes Wintersemester
Leistungspunkte (LP) / Semesterwochenstunden (SWS)	4 LP 3 SWS
Arbeitsaufwand (Workload)	Präsenzstudium: 54 h Selbststudium: 66 h !
Art des Moduls	Pflichtmodul

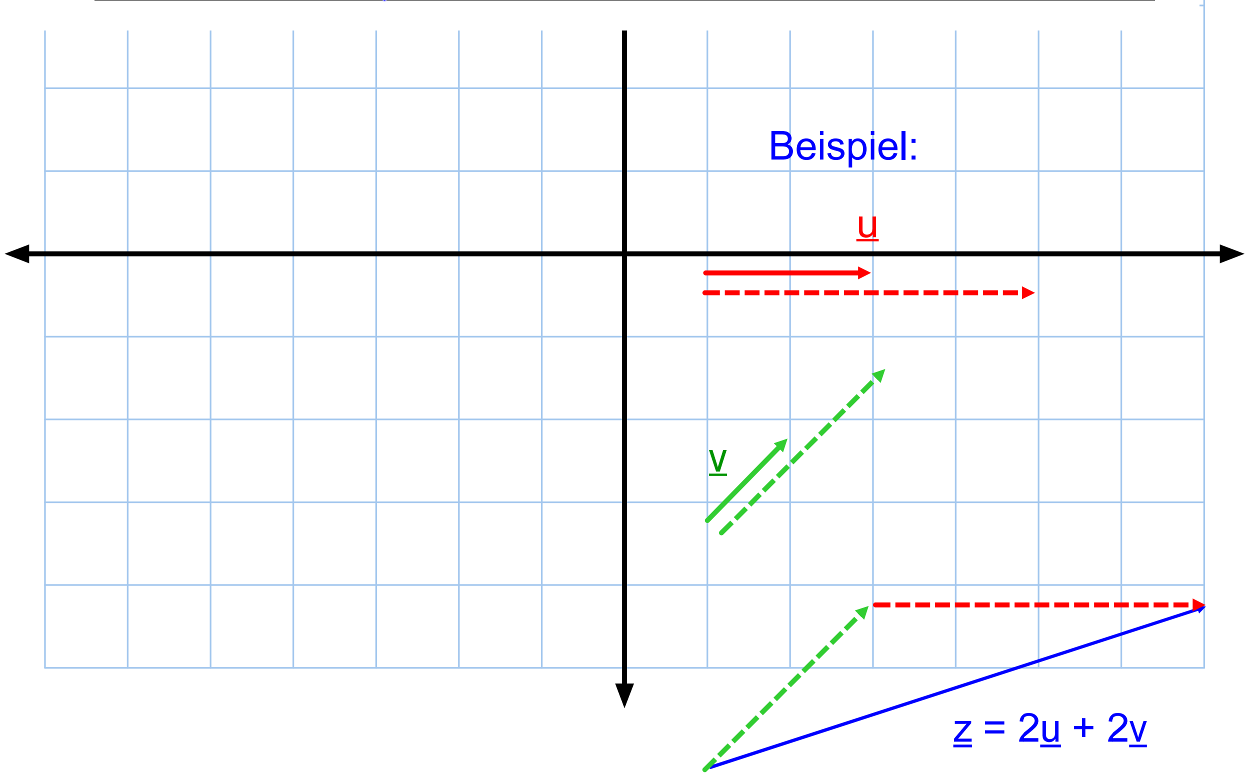
Bachelor-Studiengang Regenerative Energiesysteme und Energiemanagement - Elektro- und Informationstechnik	
Elektrotechnik 1	
Modulkennziffer	ET1 / ETP1
Modulkoordination/ Modulverantwortliche/r	Prof. Dr.-Ing. Martin Lapke
Dauer/ Semester/ Angebotsturnus	ein Semester / 1. Semester / jedes Wintersemester
Leistungspunkte (LP) / Semesterwochenstunden (SWS)	6 LP 4 + 1 SWS
Arbeitsaufwand (Workload)	Präsenzstudium: 90 h Selbststudium: 90 h !
Art des Moduls	Pflichtmodul

lineare Unabhängigkeit von Vektoren
Basis
Rang einer Matrix

Linearkombination und lineare Abhängigkeit

Definition 9.3: Linearkombination von Vektoren

Einen Vektor $z = \alpha u + \beta v$ nennt man eine **Linearkombination** der Vektoren u und v mit $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$



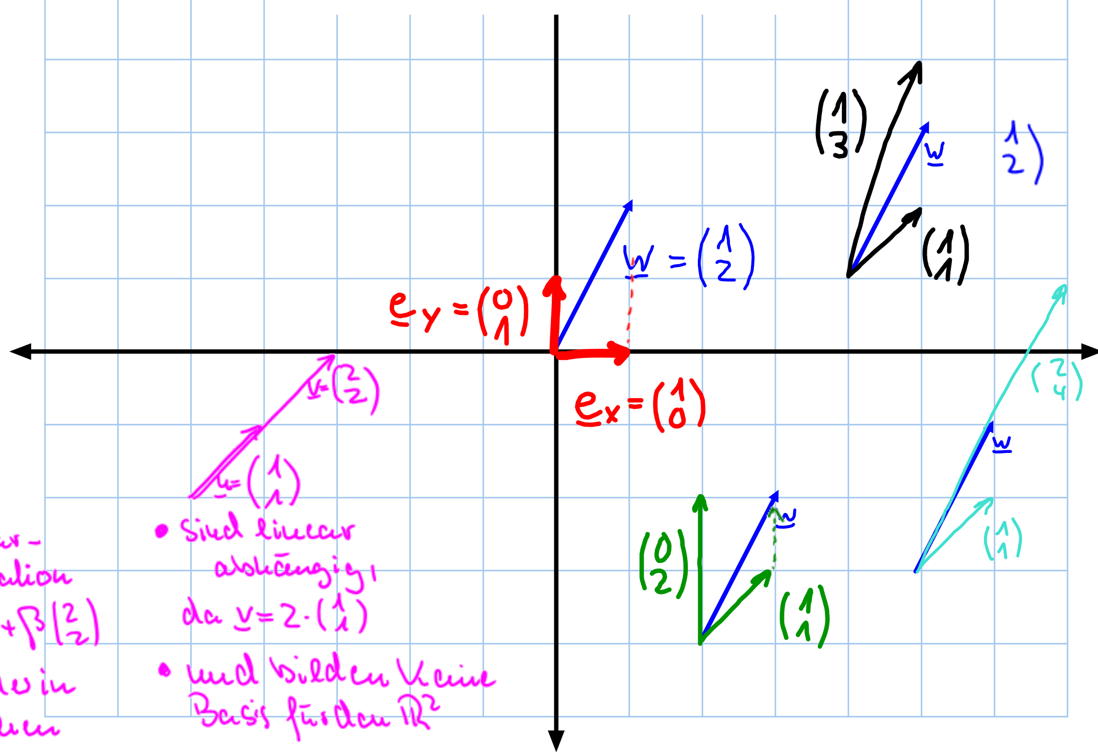
- z = 2u + 2v
- $z = 2 \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix} + 2 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ 2 \end{pmatrix}$

Spalte 3 der Matrix ist eine Linearkombination aus Spalte 1 und 2

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 6 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 1 \\ 6 & 2 \end{pmatrix}$$

- z ist eine Linearkombination der Vektoren u und v .
- z kann mit Hilfe der Vektoren u und v ausgedrückt werden.
- z ist linear abhängig von u und v.

Linearkombination und Basis



$x \cdot \binom{1}{3} + y \binom{1}{1} = \binom{1}{2}$

$\Rightarrow x \cdot 1 + y \cdot 1 = 1$
$\quad x \cdot 3 + y \cdot 1 = 2$

$\rightarrow$ LGS lösen ...

$\Rightarrow x = \frac{1}{2}, y = \frac{1}{2}$

• Jede Linearkombination $\underline{v} = \alpha \binom{1}{1} + \beta \binom{2}{2}$ liegt wieder in der gleichen Richtung

• Sind linear abhängig, da $\underline{v} = 2 \cdot \binom{1}{1}$

• und bilden keine Basis für den $\mathbb{R}^2$

Darstellung des Vektors w durch Linearkombination verschiedener Basisvektoren

$\underline{w} = 1 \cdot \binom{1}{0} + 2 \cdot \binom{0}{1}$ $\quad$ $\underline{w}$ ist Lin.Kom. von $\underbrace{\binom{1}{0} \text{ und } \binom{0}{1}}_{\text{bilden eine Basis für die Ebene } \mathbb{R}^2}$

oder

$\binom{1}{2} = \underline{w} = 1 \cdot \binom{1}{1} + \frac{1}{2} \cdot \binom{0}{2}$ $\quad$ w ist Lin.Kom. von $\underbrace{\binom{1}{1} \text{ und } \binom{0}{2}}_{\text{bilden eine Basis}}$

oder

$\underline{w} = 0 \cdot \binom{1}{1} + \frac{1}{2} \cdot \binom{2}{4}$ $\quad$ $\underline{w}$ ist Lin.Kom. von $\underbrace{\binom{1}{1} \text{ und } \binom{2}{4}}_{\text{bilden eine Basis}}$

oder

$\binom{1}{2} = \underline{w} = \frac{1}{2} \binom{1}{1} + \frac{1}{2} \binom{1}{3}$ $\quad$ w ist Lin.Kom. von $\underbrace{\binom{1}{1} \text{ und } \binom{1}{3}}_{\text{bilden eine Basis}}$

. Basis

• Zwei Vektoren $\underline{u}$ und $\underline{v}$ bilden dann eine Basis des $\mathbb{R}^2$ (Ebene), wenn jeder Vektor (Punkt) der Ebene als Linearkombination dargestellt werden kann.

- Zwei Vektoren bilden eine Basis, wenn sie linear unabhängig sind,
  d.h. ein Vektor <u>nicht</u> als Linearkombination der anderen Vektoren darstellbar ist.
  (Sonderfall im $\mathbb{R}^2$: ein Vektor ist <u>nicht</u> ein Vielfaches des anderen Vektors)

weitere Beispiele "Linearkombinationen"

① $\begin{pmatrix}3\\3\\1\end{pmatrix} = \overset{=1}{a}\begin{pmatrix}1\\2\\0\end{pmatrix} + \overset{=1}{b}\begin{pmatrix}2\\1\\1\end{pmatrix}$

Der Vektor $\begin{pmatrix}3\\3\\1\end{pmatrix}$ ist eine Linear Kombination

der Vektoren $\begin{pmatrix}1\\2\\0\end{pmatrix}$ und $\begin{pmatrix}2\\1\\1\end{pmatrix}$ mit $a=1$ und $b=1$.

$\Rightarrow$ Es gilt: $1\cdot\begin{pmatrix}3\\3\\1\end{pmatrix} - 1\begin{pmatrix}1\\2\\0\end{pmatrix} - 1\cdot\begin{pmatrix}2\\1\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}$

② Wie hängen die Vektoren $\underbrace{\begin{pmatrix}6\\2\\4\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}2\\1\\3\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}7\\3\\8\end{pmatrix}}$ zusammen?

Vektoren sind linear abhängig

$\begin{pmatrix}7\\3\\8\end{pmatrix} = \frac{1}{2}\cdot\begin{pmatrix}6\\2\\4\end{pmatrix} + 2\cdot\begin{pmatrix}2\\1\\3\end{pmatrix}$

$1\cdot\underbrace{\begin{pmatrix}7\\3\\8\end{pmatrix}}_{v_1} - \frac{1}{2}\underbrace{\begin{pmatrix}6\\2\\4\end{pmatrix}}_{v_2} - 2\underbrace{\begin{pmatrix}2\\1\\3\end{pmatrix}}_{v_3} = \begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}$

$\alpha_1 \neq 0 \quad \alpha_2 \neq 0 \quad \alpha_3 \neq 0$ $\Rightarrow$ Vektoren sind linear abhängig

mindestens ein $\alpha_i \neq 0$

③ Wie hängen die Vektoren $\begin{pmatrix}1\\2\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}2\\1\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\1\\2\end{pmatrix}$ zusammen?

$\alpha_1\cdot\begin{pmatrix}1\\2\\0\end{pmatrix} + \alpha_2\begin{pmatrix}2\\1\\1\end{pmatrix} + \alpha_3\begin{pmatrix}1\\1\\2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}$

$\alpha_1=0 \quad \alpha_2=0 \quad \alpha_3=0$ notwendig, damit Gleichung erfüllt

$\Rightarrow$ 3 Vektoren sind linear unabhängig

④ $\alpha_1\cdot\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix} + \alpha_2\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix} + \alpha_3\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}$

notwendig $\alpha_1=0 \quad \alpha_2=0 \quad \alpha_3=0$ $\Rightarrow$ Vektoren sind linear unabhängig

damit die Gleichung erfüllt ist

d.h. keiner der Vektoren kann als Lin. Komb. der anderen Vektoren dargestellt werden

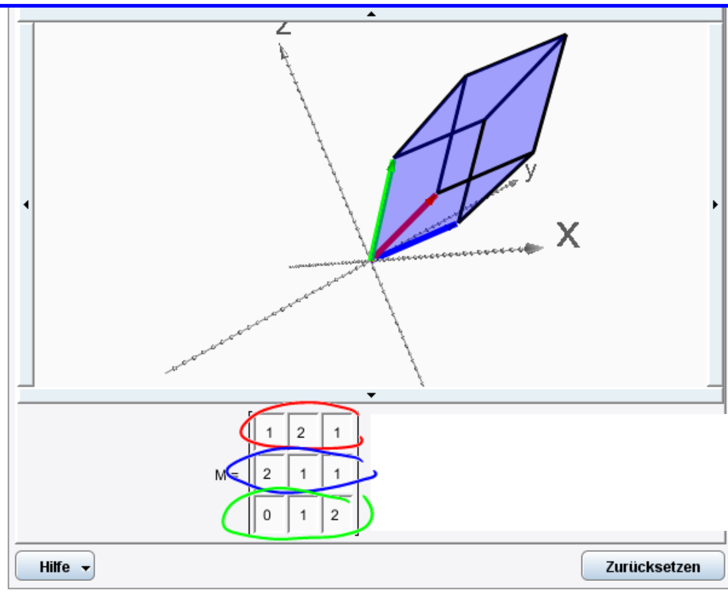
Lineare Abhängigkeit Spalten-/Zeilenvektoren - Rang der Matrix

Lineare Unabhängigkeit von drei Vektoren $\underline{v}$, $\underline{w}$ und $\underline{z}$ im Raum

$$a\underline{w} + b\underline{v} + c\underline{z} = \underline{0} \quad \text{nur mit } a = 0,\, b = 0 \text{ und } c = 0 \text{ lösbar}$$

Ein Vektor kann nicht durch die anderen beiden Vektoren als Linearkombination beschrieben werden.

Die Vektoren liegen nicht auf einer Ebenen.

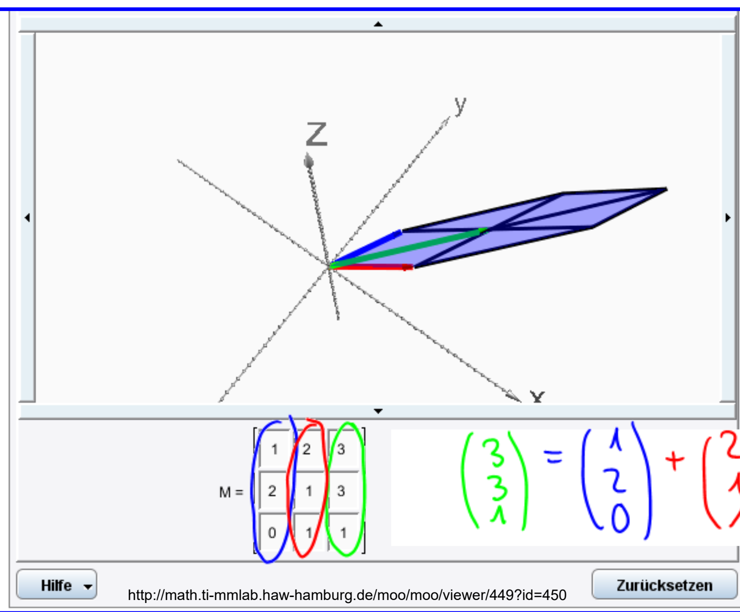


Lineare Abhängigkeit von drei Vektoren $\underline{v}$, $\underline{w}$ und $\underline{z}$ im Raum

$$\underline{z} = a\underline{w} + b\underline{v} \;\Leftrightarrow\; a\underline{w} + b\underline{v} + c\underline{z} = \underline{0} \quad \text{mit } a, b, c \neq 0 \text{ lösbar}$$

Ein Vektor kann durch die anderen beiden Vektoren als Linearkombination beschrieben werden.

Die Vektoren liegen auf einer Ebenen.



$$\begin{pmatrix}3\\3\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1\\2\\0\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}2\\1\\1\end{pmatrix}$$

Vier Vektoren sind im Raum immer linear abhängig.

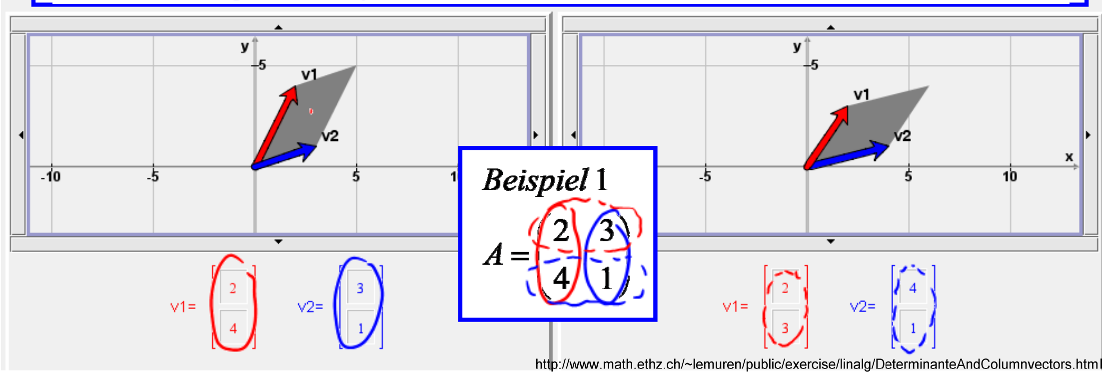
Lineare Abhängigkeit Spalten-/Zeilenvektoren - Rang der Matrix

Lineare Unabhängigkeit von zwei Vektoren $\underline{v}$ und $\underline{w}$ in der Ebene

$a\underline{w}+b\underline{v}=\underline{0}$ *nur mit* $a=0$ *und* $b=0$ *lösbar*

Ein Vektor kann nicht durch den anderen Vektor als Linearkombination beschrieben werden.

Die Vektoren liegen nicht auf einer Geraden.



Lineare Unabhängigkeit der Spaltenvektoren der Matrix A

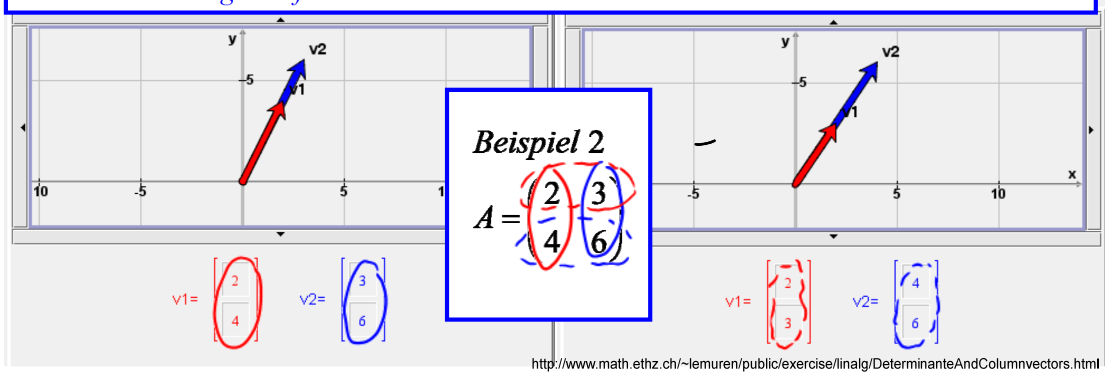
Lineare Unabhängigkeit der Zeilenvektoren der Matrix A

Lineare Abhängigkeit von zwei Vektoren $\underline{v}$ und $\underline{w}$ in der Ebene

$\underline{v}=a\underline{w}$ *mit* $a\in\mathbb{R}$ $\quad\Leftrightarrow a\underline{w}+b\underline{v}=\underline{0}$ *mit* $a,b\neq 0\in\mathbb{R}$

Ein Vektor kann durch den anderen Vektor durch Linearkombination beschrieben werden.

Die Vektoren liegen auf einer Geraden.



Lineare Abhängigkeit der Spaltenvektoren der Matrix A

Lineare Abhängigkeit der Zeilenvektoren der Matrix A

Lineare Abhängigkeit von drei Vektoren $\underline{v}$, $\underline{w}$ und $\underline{z}$ in der Ebene

$\underline{z}=a\underline{w}+b\underline{v}$ *mit* $a\in\mathbb{R}$ $\quad\Leftrightarrow a\underline{w}+b\underline{v}+c\underline{z}=\underline{0}$ *mit* $a,b,c\neq 0\in\mathbb{R}$

Drei Vektoren sind in der Ebene immer linear abhängig.

Ein Vektor kann durch die anderen beiden Vektoren als Linearkombination beschrieben werden.

Definition 9.11: Linearkombination, lineare Unabhängigkeit

Die Summe

$$\alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \ldots + \alpha_n v_n \in V$$

mit n Elementen eines Vektorraumes $v_1, v_2, \ldots, v_n \in V$ und $\alpha_1, \ldots, \alpha_n \in \mathbb{R}$

heißt eine **Linearkombination** der Vektoren $v_1, v_2, \ldots, v_n$.

Sind alle Skalare $\alpha_i = 0,\ \forall i = 1,..,n$, gewählt, so heißt die Linearkombination trivial.

Elemente $v_1, v_2, \ldots, v_n$ des Vektorraumes heißen voneinander **linear unabhängig**, wenn sich kein Element als Linearkombination der anderen Elemente darstellen lässt. Das bedeutet, wenn aus

$$\boxed{\alpha_1 \underline{v}_1 + \alpha_2 \underline{v}_2 + \ldots + \alpha_n \underline{v}_n = 0 \quad \Rightarrow \quad \alpha_1 = 0, \alpha_2 = 0, \ldots, \alpha_n = 0}\,,$$

sind die Vektoren $\underline{v}_1, \underline{v}_2, \ldots, \underline{v}_n$ linear unabhängig. $\alpha_1, \ldots, \alpha_n \in \mathbb{R}$

Gibt es mindestens eine andere Lösung $\boxed{(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n) \neq (0,0,\ldots,0)}$ zur Erfüllung der Gleichung $\boxed{\alpha_1 \underline{v}_1 + \alpha_2 \underline{v}_2 + \ldots + \alpha_n \underline{v}_n = 0}$, dann heißen die Elemente **linear abhängig,** d.h. es gibt ein Element, dass durch eine Linearkombination der anderen Vektoren dargestellt werden kann z.B. das Element n mit $v_n = \alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \ldots + \alpha_{n-1} v_{n-1}$.

Definition 9.12: Basis

Sei V ein Vektorraum über $\mathbb{R}$.

Ein n-Tupel $(v_1, v_2, \ldots, v_n)$ von Elementen aus V heißt Basis von V wenn gilt:

(1) $v_1, v_2, \ldots, v_n$ sind linear unabhängig.

(2) V wird von den Basisvektoren aufgespannt, d.h. $V = \underline{span}\{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$

$\mathbb{R}^2$ 2 Vektoren
$\mathbb{R}^3$ 3 Vektoren

Satz 9.10: Eindeutigkeit

Sei V ein Vektorraum über $\mathbb{R}$ mit einer Basis $(v_1, v_2, \ldots, v_n)$.

Dann ist jedes $v \in V$ in eindeutiger Weise als Linearkombination des Basisvektoren darstellbar, d.h. zu jedem $v \in V$ gibt es genau ein $\begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n$, für das gilt

$v = \alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \ldots + \alpha_{n-1} v_{n-1}$.

Satz: Darstellung eines Vektors in der Ebene (mit 2 Komponenten)

$\mathbb{R}^2$

(1) **Jeder Vektor der Ebene** kann durch Linearkombination der **zwei Einheitsvektoren** dargestellt werden.

$\mathbb{R}^3$

Satz: Darstellung eines Vektors im Raum (mit 3 Komponenten)

(1) **Jeder Vektor im Raum** kann durch Linearkombination der **drei Einheitsvektoren** dargestellt werden.

(2) Die Einheitsvektoren sind linear unabhängig.

(2) Die Einheitsvektoren sind linear unabhängig.

(3) Die Einheitsvektoren bilden eine Basis für den R^2

(3) Die Einheitsvektoren bilden eine Basis für den R^3

(4) Jeder Vektor **der Ebene** kann durch Linearkombination **zweier linear unabhängiger Vektoren** dargestellt werden.

(4) Jeder Vektor **im Raum** kann durch Linearkombination **dreier linear unabhängiger Vektoren** dargestellt werden.

(5) Je **zwei** linear unabhängige Vektoren bilden eine Basis für den R^2

(5) Je **drei** linear unabhängige Vektoren bilden eine Basis für den R^2

(6) **Drei** Vektoren **der Ebene** sind immer linear abhängig.

(6) **Vier** Vektoren i**m Raum** sind immer linear abhängig.

(7) Zwei Vektoren, die in die gleiche oder entgegengesetze Richtung zeigen, sind linear abhängig.

(7) Zwei Vektoren, die in die gleiche oder entgegengesetze Richtung zeigen, sind linear abhängig.

(8) Sind **zwei Vektoren** linear abhängig, so kann **nicht jeder Vektor der Ebene** als Linearkombination dieser beiden Vektoren dargestellt werden.

(8) Sind **drei Vektoren** linear abhängig, so kann **nicht jeder Vektor im Raum** als Linearkombination dieser beiden Vektoren dargestellt werden.

Lineare Gleichungssysteme

Einführungsbeispiel: Lösung (2x2) - LGS

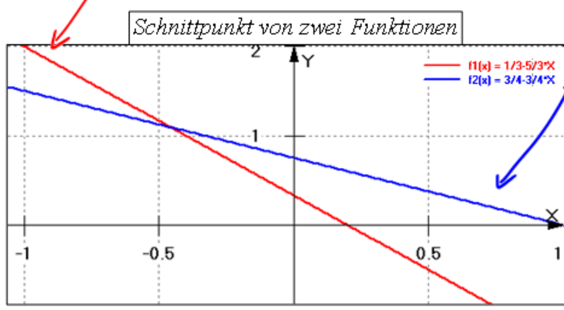
Einfacher Fall: zwei Gleichungen mit 2 Unbekannten

$$\begin{array}{lrcrcl} (1) & \overset{x}{5x_1} & + & \overset{y}{3x_2} & = & 1 \\ (2) & \underset{x}{3x_1} & + & \underset{y}{4x_2} & = & 3 \end{array}$$

$\rightarrow y = -\frac{5}{3}x + \frac{1}{3}$

$\rightarrow y = -\frac{3}{4}x + \frac{3}{4}$

Geometrische Interpretation:
Die beiden Gleichungen repräsentieren jeweils eine Gerade in der Ebene. Eine Lösung des Gleichungssystems ist der Schnittpunkt der beiden Geraden.



Lösungsmethoden

1. Lösen durch Einsetzen

- Auflösen der 2.Gleichung nach x_2 und Einsetzen in die 1.Gleichung

2. Lösung durch Gleichsetzen

- Beide Gleichungen nach x_2 auflösen
- Gleichsetzen und umformen zur Berechnung von x_1 (anschließend durch Rückwärtseinsetzen Berechnung von x_2):

3. Lösen durch Addition und Subtraktion

- Multiplikation der Gleichungen mit Konstanten:

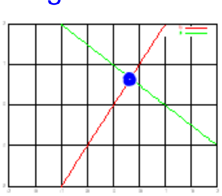
$$\begin{array}{rcrcll} 5x_1 & + & 3x_2 & = & 1 & (\cdot 4) \\ 3x_1 & + & 4x_2 & = & 3 & (\cdot 3) \end{array} \quad \Rightarrow \quad \begin{array}{rcrcl} 20x_1 & + & 12x_2 & = & 4 \\ 9x_1 & + & 12x_2 & = & 9 \end{array}$$

- Elimination von x_2 durch Subtraktion der Gleichungen, Berechnung von x_1 (anschließend durch Rückwärtseinsetzen Berechnung von x_2):

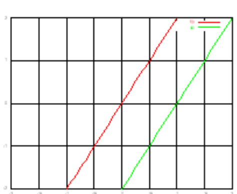
Ansatz für Gauß-Elimination

$$\begin{array}{l} 11x_1 + 0 = -5 \\ x_1 = -\dfrac{5}{11}, \quad x_2 = \dfrac{12}{11} \end{array}$$

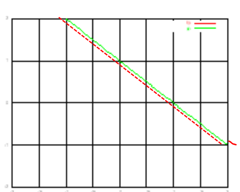
Mögliche auftretende Fälle für 2 Gleichungen:



genau eine Lösung



keine Lösung



unendlich viele Lösungen

Gauß-Elimination

Idee des Gauß-Eliminationsverfahrens:

Das Verfahren besteht darin, durch wiederholtes Anwenden elementarer Zeilenumformungen die erweiterte Koeffizientenmatrix in ein gestaffeltes System umwandeln

Start Ziel

Verwendung elementarer Umformungen

Grundlage des Verfahrens:

Elementare Zeilenumformungen für die erweiterte Koeffizientenmatrix verändern die Lösung des linearen Gleichungssystems nicht. Elementare Zeilenumformungen sind:

- Addition eines Vielfachen einer Zeile zu einer anderen Zeile
- Multiplikation einer Zeile mit einer reellen Zahl $\lambda \neq 0$
- Vertauschen von zwei Zeilen

Durchführung der Gauß-Elimination:

Liegt die erweiterte Koeffizientenmatrix eines linearen Gleichungssystems mit m Gleichungen und n Unbekannten vor, dann bestimmt die Gauß-Elimination die Lösungen in folgenden Schritten:

1. Wir bestimmen die am **weitesten links liegende Spalte**, die von Null verschiedene Werte enthält.
2. Ist die oberste Zahl der in Schritt 1 gefundenen Spalte eine Null, dann vertauschen wir die erste Zeile mit einer geeigneten anderen Zeile.
3. Ist α das erste Element der in Schritt 1 gefundenen Spalte, dann dividieren wir die erste Zeile durch α, um die **führende 1** zu erzeugen.
4. Wir **addieren** jeweils die **mit einer passenden Variablen multiplizierte erste Zeile zu den übrigen Zeilen**, um unterhalb der führenden Eins Nullen zu erzeugen.
5. Wir werden die ersten vier Schritte auf den Teil der Matrix an, den wir durch Streichen der ersten Zeile erhalten, und **wiederholen** dieses Verfahren, bis wir die erweiterte Koeffizientenmatrix eines gestaffelten Systems erhalten haben.
6. Wir lösen das gestaffelte System durch **Rückwärtssubstitution**

   oder Isolation der Staffel-Einsen

Gaußelimination - Zusammenfassung

(1) Erweiterte Koeffizientenmatrix in Stufenform (mit erlaubten Zeilenumformungen) bringen **"Triangulation"**

- Vertauschen von Zeilen
- Multiplikation einer Zeile mit einer Konstanten
- Addition des Vielfachen einer Zeile zu einer anderen Zeile

(2) Lösbarkeit an dieser Stufenform ablesbar **"Lösbarkeit"**

(3) Bestimmen der Lösung (wenn vorhanden) **"Lösung ermitteln"**

Möglichkeit 1: "Rückwärtssubstitution" (ZSF-Zeilenstufenform)

Möglichkeit 2: "Isolieren der Staffeleinsen" (Normierte ZSF)

Möglichkeit 1: "Rückwärtssubstitution" (ZSF-Zeilenstufenform)

Definition 5.3:

Ein lineares Gleichungssystem mit m Gleichungen und n Unbekannten dessen Koeffizienten eine obere Dreiecksmatrix bilden, heißt ein **gestaffeltes lineares Gleichungssystem.**

Gestaffelte lineare Gleichungssysteme können sukzessiv durch Rückwärtssubstitution gelöst werden:

$$x_i = \frac{1}{a_{ii}}\left(b_i - \sum_{k=i+1}^{n} a_{ik} \cdot x_k\right), \quad i = n, .., 1$$

Treten bei der Rückwärtssubstitution freie Variablen auf, weisen wir diesen Parameter zu und bestimmen die Lösung in Abhängigkeit von diesen Parametern.

Möglichkeit 2: "Isolieren der Staffeleinsen" (Normierte ZSF)

Gaußeliminationsschritte -von unten nach oben- mit dem Ziel die Elemente im oberen Dreiecksbereich zu Null zu machen

und rechts nach links

1. Beispiel: **Beispiel Gauß-Elimination**

Lineares ~~Gleichungssystem~~ mit 4 Unbekannten und 4 Gleichungen

$$\begin{array}{rrrrcr} x_1 & -x_2 & & & = & 5 \\ -x_1 & +2x_2 & -x_3 & & = & 0 \\ & -x_2 & +2x_3 & -x_4 & = & 1 \\ & & -x_3 & +2x_4 & = & 0 \end{array} \longrightarrow \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & +2 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & +2 \end{pmatrix}}_{\text{Koeffizientenmatrix des LGS}} \underbrace{\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix}}_{\text{gesuchter Vektor}} = \underbrace{\begin{pmatrix} 5 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}}_{\text{rechte Seite } \vec{b} \text{ der Konstanten}}$$

Erweiterte Koeffizientenmatrix des linearen Gleichungssystems

$$\begin{array}{c} z_1 \\ z_2 \\ z_3 \\ z_4 \end{array} \left(\begin{array}{rrrr|r} 1 & -1 & 0 & 0 & 5 \\ -1 & 2 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 2 & 0 \end{array}\right) \begin{array}{c} \\ +z_1 \\ \\ \\ \end{array}$$

Gaußelimination arbeitet immer mit den ganzen Zeilen einer erweiterten Koeffizientenmatrix

zu 1. ~~1.Spalte~~

zu 2. Element ist 1, kein Vertauschen notwendig

zu 3. Division durch α=1 kann entfallen

zu 4. Addition der 1.Zeile zur 2.Zeile

$$\left(\begin{array}{rrrr|r} 1 & -1 & 0 & 0 & 5 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 5 \\ 0 & -1 & 2 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 2 & 0 \end{array}\right) \begin{array}{c} \\ \\ +z_2 \\ \\ \end{array}$$

zu 5. Betrachtung der Untermatrix mit gestrichener 1.Zeile

zu 1. 2.Spalte (neue 1.Spalte hat ja nur Nullen)

zu 2. Element ist 1, kein Vertauschen notwendig

zu 3. Division durch α=1 kann entfallen

zu 4. Addition der 2.Zeile zur 3.Zeile

$$\begin{array}{c} \mathrm{I} \\ \mathrm{II} \\ \mathrm{III} \\ \mathrm{IV} \end{array} \left(\begin{array}{rrrr|r} 1 & -1 & 0 & 0 & 5 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 5 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 6 \\ 0 & 0 & -1 & 2 & 0 \end{array}\right) \begin{array}{c} \\ \\ \\ +z_3 \end{array}$$

zu 5. Betrachtung der Untermatrix mit gestrichener 1. und 2.Zeile

zu 1. 3.Spalte (neue 1. und 2.Spalte hat ja nur Nullen)

zu 2. Element ist 1, kein Vertauschen notwendig

zu 3. Division durch α=1 kann entfallen

zu 4. Addition der 3.Zeile zur 4.Zeile

Ziel: obere Dreiecksmatrix

$$\left(\begin{array}{rrrr|r} 1 & -1 & 0 & 0 & 5 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 5 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & \boxed{1} & \boxed{6} \end{array}\right) \begin{array}{l} \Rightarrow 1\cdot x_1 - \overset{17}{x_2} + 0\cdot \overset{12}{x_3} + 0\cdot \overset{6}{x_4} = 5 \Rightarrow x_1 = 22 \\ \Rightarrow 1\cdot x_2 - \overset{12}{x_3} + 0\cdot \overset{6}{x_4} = 5 \Rightarrow x_2 = 17 \\ \Rightarrow 1\cdot x_3 - 1\cdot \overset{6}{x_4} = 6 \Rightarrow x_3 = 12 \\ \Rightarrow 1\cdot x_4 = 6 \Rightarrow x_4 = 6 \end{array}$$

zu 5. Betrachtung der Untermatrix mit gestrichener 1. ,2., 3. Zeile,fertig

zu 6. Rückwärtssubstitution ergibt die Lösung

$x_4 = 6,\ x_3 = 12,\ x_2 = 17,\ x_1 = 22$

$$\underbrace{L}_{\text{Lösungsmenge des LGS}} = \left\{ \begin{pmatrix} 22 \\ 17 \\ 12 \\ 6 \end{pmatrix} \right\}$$

Ermittlung der Lösung nach der Gauß-Elimination

1. durch Rückwärts-Substitution

Einsetzen

Siehe vorherige Seite

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & 0 & 0 & 5 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 5 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & \boxed{1} & \boxed{6} \end{array}\right)$$

$\Rightarrow x_1 - x_2 = 5 \Rightarrow x_1 - 17 = 5 \Rightarrow x_1 = 22$

$\Rightarrow x_2 - x_3 = 5 \Rightarrow x_2 - 12 = 5 \Rightarrow x_2 = 17$

$\Rightarrow x_3 - x_4 = 6 \Rightarrow x_3 - 6 = 6 \Rightarrow x_3 = 12$

$\Rightarrow x_4 = 6$

$$L = \left\{ \underline{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 22 \\ 17 \\ 12 \\ 6 \end{pmatrix} \right\}$$

2. durch Isolation der Staffel-Einsen

→ Matrix soll eine Diagonalmatrix mit 1 in der Hauptdiagonalen

Vorgehen:
„Gauß-Schritte" von rechts nach links und von unten nach oben

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & 0 & 0 & 5 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 5 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & \boxed{1} & \boxed{6} \end{array}\right) + Z_4$$

$$\rightarrow \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & 0 & 0 & 5 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 5 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 12 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 6 \end{array}\right) + Z_3$$

$$\rightarrow \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & 0 & 0 & 5 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 17 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 12 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 6 \end{array}\right) + Z_2$$

$$\rightarrow \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 & 22 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 17 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 12 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 6 \end{array}\right)$$

$\rightarrow x_1 = 22$
$\rightarrow x_2 = 17$
$\rightarrow x_3 = 12$
$\rightarrow x_4 = 6$

$$L = \left\{ \begin{pmatrix} 22 \\ 17 \\ 12 \\ 6 \end{pmatrix} \right\}$$

Lösungsvektor ist direkt ablesbar

•

Erläuterung der Formel zur Rückwärtssubstitution

Möglichkeit 1: "Rückwärtssubstitution" (ZSF-Zeilenstufenform)

Definition 5.3:

Ein lineares Gleichungssystem mit m Gleichungen und n Unbekannten dessen Koeffizienten eine obere Dreiecksmatrix bilden, heißt ein **gestaffeltes lineares Gleichungssystem.**

Gestaffelte lineare Gleichungssysteme können sukzessiv durch Rückwärtssubstitution gelöst werden:

$$x_i = \frac{1}{a_{ii}}(b_i - \sum_{k=i+1}^{n} a_{ik} \cdot x_k), \ i = n,..,1$$

Treten bei der Rückwärtssubstitution freie Variablen auf, weisen wir diesen Parameter zu und bestimmen die Lösung in Abhängigkeit von diesen Parametern.

$$\begin{array}{c} \left(\begin{array}{cccc|c} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} & b_1 \\ 0 & a_{22} & a_{23} & a_{24} & b_2 \\ 0 & 0 & a_{33} & a_{34} & b_3 \\ 0 & 0 & 0 & a_{44} & b_4 \end{array}\right) \end{array} \begin{array}{c} \underline{I} \\ \underline{II} \\ \underline{III} \\ \underline{IV} \end{array}$$

$\underline{IV} \Rightarrow a_{44} x_4 = b_4 \Rightarrow x_4 = b_4 \cdot \frac{1}{a_{44}}$

$\Rightarrow x_4 = b_4 \cdot \frac{1}{a_{44}}$

$\underline{III} \Rightarrow a_{33}x_3 + a_{34}x_4 = b_3 \Rightarrow x_3 = (b_3 - a_{34}x_4)\frac{1}{a_{33}}$

$\Rightarrow x_3 = \left(b_3 - \sum_{k=4}^{4} a_{3k}x_k\right) \cdot \frac{1}{a_{33}}$

$\underline{II} \Rightarrow a_{22}x_2 + a_{23}x_3 + a_{24}x_4 = b_2 \Rightarrow x_2 = (b_2 - a_{23}x_3 - a_{24}x_4)\frac{1}{a_{22}}$

$\Rightarrow x_2 = \left(b_2 - \sum_{k=3}^{4} a_{2k}x\right) \cdot \frac{1}{a_{22}}$

$\underline{I} \Rightarrow a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + a_{14}x_4 = b_1 \Rightarrow x_1 = (b_1 - a_{12}x_2 - a_{13}x_3 - a_{14}x_4) \cdot \frac{1}{a_{11}}$

$\Rightarrow x_1 = \left(b_1 - \sum_{k=2}^{4} a_{1k}x_k\right)\frac{1}{a_{11}}$

$$\boxed{x_i = \left(b_i - \sum_{k=i+1}^{4} a_{ik}x_k\right) \cdot \frac{1}{a_{ii}} \quad \text{für } i = 4, \dots, 1}$$

Aufgabe:

$$\begin{aligned} x_1 + 2x_2 + x_3 &= 3 \\ 2x_1 + x_2 &= 1 \\ 3x_1 + 2x_2 + x_3 &= 1 \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}}_{A} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}}_{\underline{b}}$$

Lösung des LGS durch Gauß-Elimination

$$\begin{array}{c} \begin{array}{cccc} 2 & 4 & 2 & 6 \end{array} \\ \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & 3 \\ 2 & 1 & 0 & 1 \\ 3 & 2 & 1 & 1 \end{array}\right) \end{array} \begin{array}{l} \\ -2 \cdot z_1 \\ \underline{-3 \cdot z_1} \end{array}$$

$$\rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & 3 \\ 0 & -3 & -2 & -5 \\ 0 & -4 & -2 & -8 \end{array}\right) \begin{array}{l} \\ | :(-3) \\ | \cdot(-1) \end{array}$$

$$\rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & \frac{2}{3} & \frac{5}{3} \\ 0 & 4 & 2 & 8 \end{array}\right) \begin{array}{l} \\ \\ -4 \cdot z_2 \end{array}$$

$$\rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & \frac{2}{3} & \frac{5}{3} \\ 0 & 0 & 2-4\cdot\frac{2}{3} & 8-4\cdot\frac{5}{3} \end{array}\right)$$

$$\rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & \frac{2}{3} & \frac{5}{3} \\ 0 & 0 & -\frac{2}{3} & \frac{4}{3} \end{array}\right)$$

1.Möglichkeit zur Berechnung der Lösung "Rückwärtssubstitution"

2.Möglichkeit zur Berechnung der Lösung "Isolieren der Staffeleinsen"

Aufgabe:

$$\begin{aligned} x_1 + 2x_2 + x_3 &= 3 \\ 2x_1 + x_2 \quad\quad &= 1 \\ 3x_1 + 2x_2 + x_3 &= 1 \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}}_{A} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}}_{\underline{b}}$$

Lösung des LGS durch Gauß-Elimination

(1) Erweiterte Koeffizientenmatrix

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & 3 \\ 2 & 1 & 0 & 1 \\ 3 & 2 & 1 & 1 \end{array}\right) \begin{array}{l} \\ -2\cdot z_1 \\ -3\cdot z_1 \end{array}$$

$$\rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & 3 \\ 0 & -3 & -2 & -5 \\ 0 & -4 & -2 & -8 \end{array}\right) \begin{array}{l} \\ :(-3) \\ \\ \end{array}$$

$$\rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & \frac{2}{3} & \frac{5}{3} \\ 0 & -4 & -2 & -8 \end{array}\right) \begin{array}{l} \\ \\ +4\cdot z_2 \end{array}$$

$$\rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & \frac{2}{3} & \frac{5}{3} \\ 0 & 0 & \frac{2}{3} & -\frac{4}{3} \end{array}\right) \Rightarrow$$

„genau eine Lösung“

1.Möglichkeit zur Berechnung der Lösung "Rückwärtssubstitution"

$$\begin{array}{c} Z_1 \\ Z_2 \\ Z_3 \end{array} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & \frac{2}{3} & \frac{5}{3} \\ 0 & 0 & \frac{2}{3} & -\frac{4}{3} \end{array}\right)$$

$$Z_1 \Rightarrow x_1 + 2\overset{3}{x_2} + \overset{-2}{x_3} = 3 \Rightarrow x_1 + 2 \cdot 3 - 2 = 3 \Rightarrow x_1 = -1$$

$$Z_2 \Rightarrow x_2 + \frac{2}{3} x_3 = \frac{5}{3} \Rightarrow x_2 = 3$$

$$Z_3 \Rightarrow \frac{2}{3} x_3 = -\frac{4}{3} \Rightarrow x_3 = -2$$

$$L = \left\{ \underline{x} = \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ -2 \end{pmatrix} \right\}$$

2.Möglichkeit zur Berechnung der Lösung "Isolieren der Staffeleinsen"

$$\rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & \frac{2}{3} & \frac{5}{3} \\ 0 & 0 & \frac{2}{3} & -\frac{4}{3} \end{array}\right) \cdot \frac{3}{2} \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & \frac{2}{3} & \frac{5}{3} \\ 0 & 0 & 1 & -2 \end{array}\right) \begin{array}{l} -Z_3 \\ -\frac{2}{3} Z_3 \\ \end{array}$$

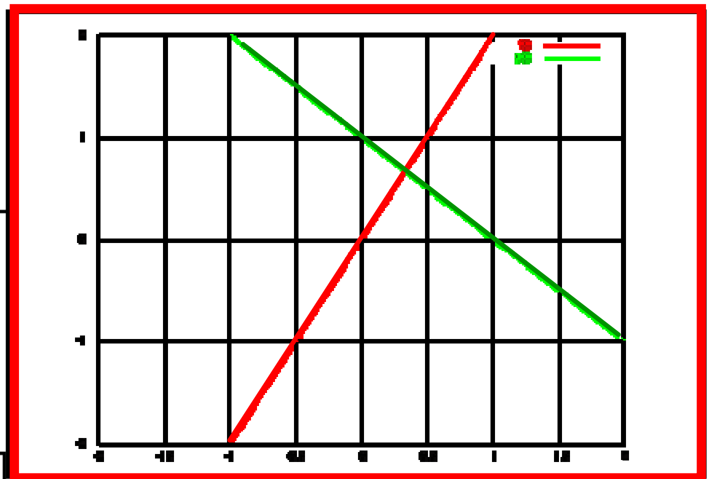
$$\rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 0 & 5 \\ 0 & 1 & 0 & \frac{9}{3} \\ 0 & 0 & 1 & -2 \end{array}\right) \begin{array}{l} -2Z_2 \\ \\ \end{array} \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & -2 \end{array}\right)$$

$$\Rightarrow L = \left\{ \underline{x} = \boxed{\begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ -2 \end{pmatrix}} \right\}$$

Beispiele: 2 Gleichungen mit 2 Variablen und verschiedenen Lösungsmengen

Beispiel 1
Geometrische Interpretation (n=2 Geraden):

$$y = 2x$$
$$y = -x + 1$$



LGS: y sei x_2
x sei x_1

$$\begin{aligned} -2x_1 &+ x_2 = 0 \\ x_1 &+ x_2 = 1 \end{aligned}$$

$$\downarrow$$

$$\begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\downarrow$$

$$\det A = -3 \neq 0$$

$$\downarrow$$

$$\left(\begin{array}{cc|c} -2 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{array}\right)$$

$$\downarrow \text{Gauß-Elimination}$$

$$\left(\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & \frac{2}{3} \end{array}\right)$$

$$x_2 = \frac{2}{3}, \quad x_1 = \frac{1}{3}$$

Schnittpunktberechnung
"x-Wert mit gleichem y-Wert?"

$$2x = -x + 1$$

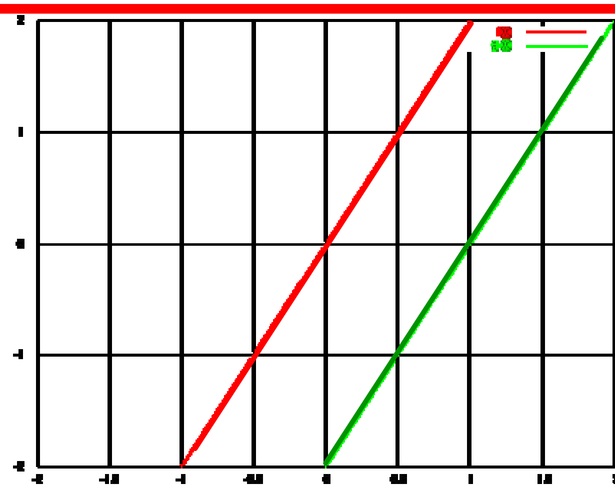
$$x = \frac{1}{3}, \quad y = \frac{2}{3}$$

Anzahl der Zeilen ≠ Nullvektor

Rang A = 2
Rang A|b = 2
Rang A = Rang A|b = n=2 (Anzahl der Variablen)
⇒LGS hat genau eine Lösung

Beispiel 2
Geometrische Interpretation (n=2 Geraden):

$$y = 2x$$
$$y = 2x - 2$$



LGS: y sei x_2
x sei x_1

$$\begin{aligned} -2x_1 + x_2 &= 0 \\ -2x_1 + x_2 &= -2 \end{aligned}$$

$\downarrow$

$$\begin{pmatrix} -2 & 1 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \end{pmatrix}$$

$\downarrow$

$$\det A = 0$$

$\downarrow$

$$\left(\begin{array}{cc|c} -2 & 1 & 0 \\ -2 & 1 & -2 \end{array}\right)$$

$\downarrow$ *Gauß – Elimination*

$$\left(\begin{array}{cc|c} -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{array}\right)$$

$RangA = 1$

$RangA \mid b = 2$

$RangA \neq RangA \mid b$

$\Rightarrow$ *keine Lösung*

Schnittpunktberechnung

"x – Wert mit gleichem y – Wert?"

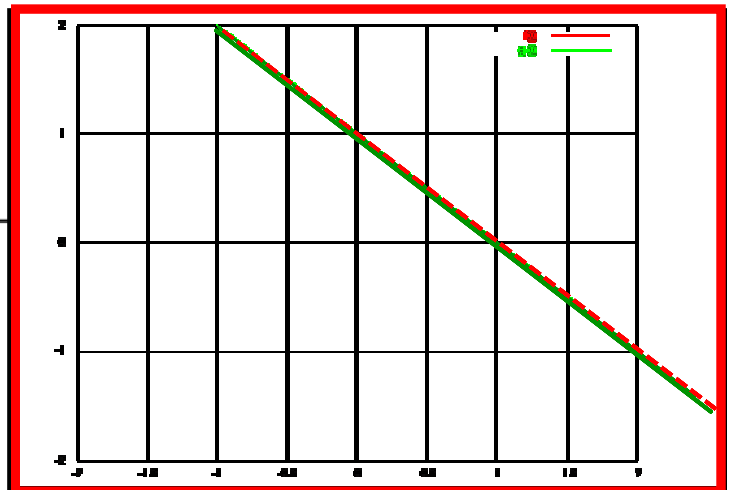
$2x = 2x - 2$

$0 = -2$ *Widerspruch!*

$\Rightarrow$ *kein Schnittpunkt*

Beispiel 3
Geometrische Interpretation (n=2 Geraden):

$$y = -x + 1$$
$$2y = -2x + 2$$



LGS: y sei x_2
x sei x_1

$$\begin{aligned} x_1 \quad &+ x_2 = 1 \\ 2x_1 \quad &+ 2x_2 = 2 \end{aligned}$$

$$\downarrow$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$$\downarrow$$

$$\det A = 0$$

$$\downarrow$$

$$\left(\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 2 \end{array}\right)$$

$$\downarrow \; Gauß-Elimination$$

$$\left(\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

$Rang A = 1 \;\; und \;\; Rang A|b = 1$

$Rang A = Rang A|b \overset{!}{<}$ n=2 (Anzahl der Variablen)

$\Rightarrow$ *unendlich viele Lösungen*

$x_2 = \lambda$

$x_1 = 1 - \lambda$

Schnittpunktberechnung

"*x-Wert mit gleichem y-Wert?*"

$-x + 1 = \frac{1}{2}(-2x + 2)$

$0 = 0$ *stets wahr!*

$\Rightarrow$ *auf der ganzen Geraden gleiche Werte*

Definition 9.14: Rang einer Matrix

Der **Spaltenrang** einer Matrix A ist die maximale Anzahl linear unabhängiger Spalten der Matrix.

Der **Zeilenrang** einer Matrix A ist die maximale Anzahl linear unabhängiger Zeilen der Matrix.

Der Zeilenrang ist immer gleich dem Spaltenrang und wird **Rang der Matrix** genannt. (Schreibweise: Rang(A) oder Rg(A))

Anzahl Zeilen ≠ Nullvektor =

$$\boxed{\begin{aligned}&\text{Anzahl der Staffeleinsen nach der Gauß-Elimination}\\&= rg(A) = \text{Rang der Matrix}\end{aligned}}$$

Rückblick

Definitionen 5.5: Linearkombination, lineare Unabhängigkeit

Die nachfolgend dargestellte Summe von n Vektoren

$$\lambda_1 \underline{v}_1 + \lambda_2 \underline{v}_2 + \ldots + \lambda_n \underline{v}_n \quad mit \quad \lambda_1, \ldots, \lambda_n \in \mathbb{R}$$

heißt eine **Linearkombination** der Vektoren $\underline{v}_1, \underline{v}_2, \ldots, \underline{v}_n$.

Vektoren heißen von einander **linear unabhängig**, wenn sich kein Vektor als Linearkombination der anderen Vektoren darstellen lässt. Das bedeutet, wenn aus $\lambda_1 \underline{v}_1 + \lambda_2 \underline{v}_2 + \ldots + \lambda_n \underline{v}_n = 0 \Rightarrow \lambda_1 = 0, \lambda_2 = 0, \ldots, \lambda_n = 0$, sind die Vektoren $\underline{v}_1, \underline{v}_2, \ldots, \underline{v}_n$ linear unabhängig.

Beispiele:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} : \text{Rang } A = 3$$

$$\underline{I} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} : \text{Rang } A = 3$$

$$B = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 4 & 2 & -2 \\ 1 & \frac{1}{2} & 1 \end{pmatrix} \quad z_2 = 2 \cdot z_1 \Rightarrow \text{Zeile 1 und 2 sind linear abhängig}$$

$\Rightarrow$ Rang B ist 2

Bemerkung:
Das „Ablesen von Zeilen ≠ Nullvektor" funktioniert nur nach der Gauß-Elimination!

$$C = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \text{Rang } A = 1$$

$$D = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} : \text{Rang } A = 2$$

Beispiel 1: Gauß-Elimination - eindeutige Lösung

$$\begin{matrix} \frac{1}{3}x+\frac{2}{3}y+z=\frac{10}{3} \\ -5x+\frac{1}{2}y+z=4 \\ 2x+y+z=2 \end{matrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & \frac{2}{3} & 1 \\ -5 & \frac{1}{2} & 1 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} \frac{10}{3} \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix}$$

Gauß – Elimination

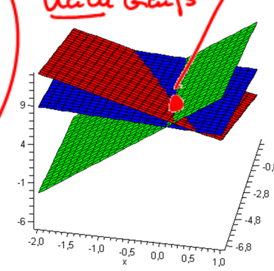
$$\left(\begin{array}{ccc|c} \frac{1}{3} & \frac{2}{3} & 1 & \frac{10}{3} \\ -5 & \frac{1}{2} & 1 & 4 \\ 2 & 1 & 1 & 2 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 10 \\ -5 & \frac{1}{2} & 1 & 4 \\ 2 & 1 & 1 & 2 \end{array}\right)$$

$$\to \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 10 \\ 0 & \frac{21}{2} & 16 & 54 \\ 0 & -3 & -5 & -18 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 10 \\ 0 & 1 & \frac{5}{3} & 6 \\ 0 & \frac{21}{2} & 16 & 54 \end{array}\right)$$

$$\to \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 10 \\ 0 & 1 & \frac{5}{3} & 6 \\ 0 & 0 & \frac{-9}{6} & -9 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 10 \\ 0 & 1 & \frac{5}{3} & 6 \\ 0 & 0 & 1 & 6 \end{array}\right)$$

Erweiterte Koeffizienten Matrix nach Gauß

genau 1 Lösung



Lösung : $z=6, y=-4, x=0$

$$\underbrace{Rg\,A = Rg\,A|b = 3 \overset{!}{=} n=3}_{\Downarrow}$$

Anzahl Var.

$\Downarrow$ genau 1 Lösung

.

Beispiel 2: Gauß-Elimination - keine Lösung

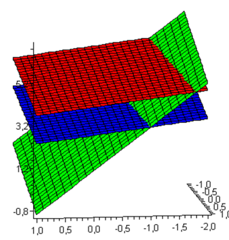
$$\begin{aligned}\frac{1}{3}x+\frac{2}{3}y+z&=\frac{10}{3}\\ \frac{1}{3}x+\frac{2}{3}y+z&=\frac{14}{3}\\ 2x+y+z&=2\end{aligned} \Leftrightarrow \begin{pmatrix}\frac{1}{3} & \frac{2}{3} & 1\\ \frac{1}{3} & \frac{2}{3} & 1\\ 2 & 1 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\frac{10}{3}\\ \frac{14}{3}\\ 2\end{pmatrix}$$

Gauß – Elimination

$$\left(\begin{array}{ccc|c}\frac{1}{3} & \frac{2}{3} & 1 & \frac{10}{3}\\ \frac{1}{3} & \frac{2}{3} & 1 & \frac{14}{3}\\ 2 & 1 & 1 & 2\end{array}\right) \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c}\frac{1}{3} & \frac{2}{3} & 1 & \frac{10}{3}\\ 0 & 0 & 0 & \frac{4}{3}\\ 2 & 1 & 1 & 2\end{array}\right)$$

nach Gauß-Elim.

$$\rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c}1 & 2 & 3 & 10\\ 0 & 0 & 0 & \frac{4}{3}\\ 0 & -3 & -5 & -18\end{array}\right) \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c}1 & 2 & 3 & 10\\ 0 & -3 & -5 & -18\\ 0 & 0 & 0 & \frac{4}{3}\end{array}\right)$$



$$\underbrace{Rg\,A=2 \neq Rg\,A|b=3}$$

$\Rightarrow$ keine Lösung

Lösung : keine

.

Beispieln3: Gauß-Elimination - unendliche viele Lösungen

$$\begin{aligned}\frac{1}{3}x+\frac{2}{3}y+z&=\frac{10}{3}\\ -\frac{1}{2}x+\frac{1}{2}y+z&=4\\ 2x+y+z&=2\end{aligned} \Leftrightarrow \begin{pmatrix}\frac{1}{3} & \frac{2}{3} & 1\\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 1\\ 2 & 1 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\ y\\ z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\frac{10}{3}\\ 4\\ 2\end{pmatrix}$$

Gauß – Elimination

$$\left(\begin{array}{ccc|c}\frac{1}{3} & \frac{2}{3} & 1 & \frac{10}{3}\\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 1 & 4\\ 2 & 1 & 1 & 2\end{array}\right) \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c}1 & 2 & 3 & 10\\ 0 & \frac{3}{2} & \frac{5}{2} & 9\\ 2 & 1 & 1 & 2\end{array}\right)$$

$$\rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c}1 & 2 & 3 & 10\\ 0 & \frac{3}{2} & \frac{5}{2} & 9\\ 0 & -3 & -5 & -18\end{array}\right) \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c}1 & 2 & 3 & 10\\ 0 & 3 & 5 & 18\\ 0 & -3 & -5 & -18\end{array}\right)$$

$$\rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c}1 & 2 & 3 & 10\\ 0 & 3 & 5 & 18\\ 0 & 0 & 0 & 0\end{array}\right)$$

$\underbrace{Rg A = 2 \overset{!}{=} Rg A|b = 2 \overset{!}{<} n = 3}$ Anzahl d. Var.

⇒ unendl. viele Lösungen mit $3-2=1$ freien Parameter

Lösung : unendlich viele

$3 \cdot x_2 + 5 \overset{\lambda}{x_3} = 18$

Wähle $\boxed{x_3 = \lambda}$, $\lambda \in \mathbb{R}$

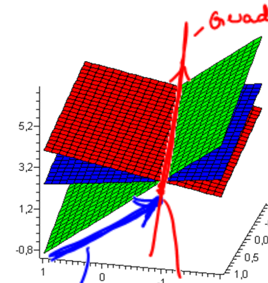
$\Rightarrow x_2 = \frac{18}{3} - \frac{5}{3}\lambda$

$\boxed{x_2 = 6 - \frac{5}{3}\lambda}$

$$z=\lambda,\ y=6-\frac{5}{3}\lambda,\ x=-2+\frac{1}{3}\lambda$$

$$L=\left\{\begin{pmatrix}x\\ y\\ z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-2\\ 6\\ 0\end{pmatrix}+\lambda\begin{pmatrix}\frac{1}{3}\\ -\frac{5}{3}\\ 1\end{pmatrix}, \lambda\in\mathbb{R}\right\}$$

Gerade mit Richtungsvektor



Ortsvektor

unendl. viele Lösungen
alle Punkte der Geraden

$1 \cdot x_1 + 2 \cdot \underset{6-\frac{5}{3}\lambda}{x_2} + 3\underset{\lambda}{x_3} = 10$

$x_1 + 2 \cdot (6 - \frac{5}{3}\lambda) + 3\lambda = 10 \Rightarrow \boxed{x_1 = -2 + \frac{1}{3}\lambda}$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix}x_1\\ x_2\\ x_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-2+\frac{1}{3}\lambda\\ 6-\frac{5}{3}\lambda\\ \lambda\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-2\\ 6\\ 0\end{pmatrix}+\lambda\begin{pmatrix}\frac{1}{3}\\ -\frac{5}{3}\\ 1\end{pmatrix}$$

Ortsvektor   Richtungs-Vektor

Rang einer Matrix und Lösbarkeit eines LGS

Satz 5.1:

a) Der Rang r einer mxn-Matrix A ist höchstens gleich der kleineren der beiden Zahlen m und n.

b) **Elementare Umformungen** einer mxn-Matrix A

Vertauschen von Zeile bzw. Spalten,

Multiplikation einer Zeile bzw. Spalte mit einer Zahl,

Addition eines Vielfachen einer anderen Zeile oder Spalte

überführen die Matrix A in eine **ranggleiche Matrix** B.

c) **Rangbestimmung mit Hilfe elementarer Umformungen**:

- Die Matrix wird mit Hilfe elementarer Umformungen in **Staffelform** gebracht.
- Der Rang von A ist gleich der **Anzahl r der nicht-verschwindenden Zeilen**.

Rangbestimmung nach der Gauß-Elimination

Rang der Matrix $rg(A)$

$= \textit{Anzahl der Staffeleinsen (nach der Gauß – Elimination)}$

= *Anzahl der Zeilen ungleich dem Nullvektor (nach der Gauß-Elimination)*

= *Anzahl der linear unabhängigen Zeilen in der Matrix*

Bestimmung der Lösbarkeit des LGS durch Rangbestimmung A und A|b nach der Gauß-Elimination

$rg(A)$: *Rang der Koeffizientenmatrix* A

$rg(A\,|\,b)$: *Rang der erweiterten Koeffizientenmatrix* $A\,|\,b$

Es gilt:

$rg(A) = rg(A\,|\,b) = \text{Anzahl der Variablen } n$

$\Rightarrow$ *das LGS ist eindeutig lösbar*

$rg(A) = rg(A\,|\,b) < \text{Anzahl der Variablen } n$

$\Rightarrow$ *das LGS hat unendliche viele Lösungen mit* $n - rg(A)$ *freien Parametern*

$rg(A) \overset{\neq}{<} rg(A\,|\,b)$

$\Rightarrow$ *das LGS hat keine Lösung*

Übersicht: Rang einer Matrix und Lösbarkeit eines LGS

Satz 5.2: Lösbarkeit eines linearen mxn-Gleichungssystems

(a) Ein lineares mxn-Gleichungssystem $A\underline{x}=\underline{b}$ ist dann und nur dann lösbar, wenn der Rang der Koeffizientenmatrix A mit dem Rang der erweiterten Koeffizientenmatrix A|b übereinstimmt:

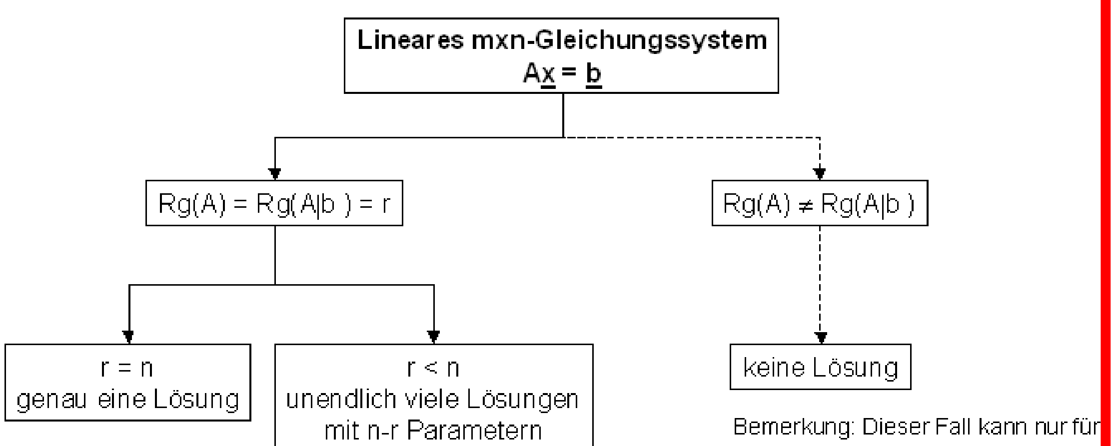
$$Rg(A) = Rg(A|b) = r$$

(b) Im Falle der Lösbarkeit besitzt das lineare System die folgende Lösungsmenge:

für r = n: genaue eine Lösung

für r < n: unendlich viele Lösungen, wobei n - r der insgesamt n Unbekannten frei wählbare Parameter sind.

Kriterien für die Lösbarkeit eines linearen m x n-Gleichungssystems Ax=b



Bemerkung: Dieser Fall kann nur für ein inhomogenes System auftreten, da ein homogenes System stets die triviale Lösung hat.

Übersicht verschiedener Beispiele eines 3x3-LGS am Ende der Gauß-Elimination

Lösbarkeit von LGS – Erkennen nach der Gauß – Elimination

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & -5 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{array}\right) \quad \textit{eindeutig lösbar}$$

zu Hause nachvollziehen

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & -5 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right) \quad \textit{eindeutig lösbar}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & -5 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{array}\right) \quad \textit{keine Lösung}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & -5 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \quad \textit{unendlich viele Lösungen (1 Parameter)}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & -5 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \quad \textit{unendlich viele Lösungen (1 Parameter)}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & -5 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \quad \textit{unendlich viele Lösungen (1 Parameter)}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & -5 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \quad \textit{keine Lösung}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & -5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \quad \textit{unendlich viele Lösungen (2 Parameter)}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 2 & 3 & -5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \quad \textit{unendlich viele Lösungen (2 Parameter)}$$

Erläuterung:
Lösungsmenge bei unendlichen vielen Lösungen mit 2 Parametern

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & -5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \textit{unendlich viele Lösungen } (2 \textit{ Parameter})$$

in Lösungen

•

Übersicht verschiedener Beispiele eines 3x3-LGS am Ende der Gauß-Elimination

Lösbarkeit von LGS – Erkennen nach der Gauß – Elimination

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & -5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \textit{ unendlich viele Lösungen (2 Parameter)}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 2 & 3 & -5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \textit{ unendlich viele Lösungen (2 Parameter)}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 0 & 3 & -5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \textit{ unendlich viele Lösungen (2 Parameter)}$$

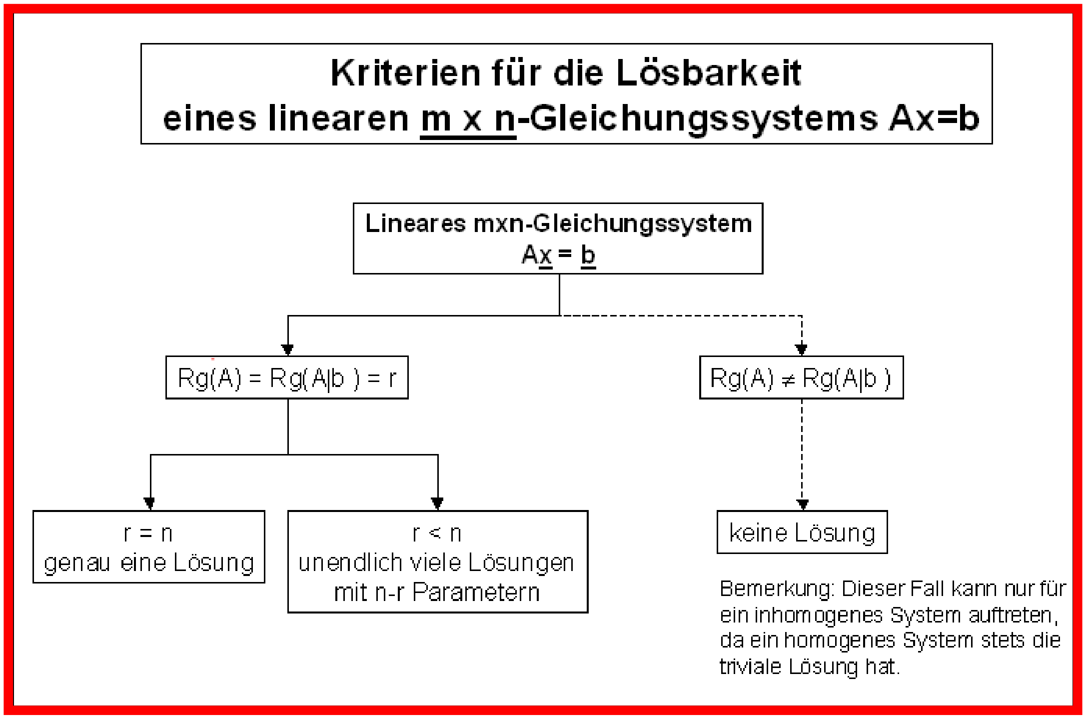
$$\left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \textit{ unendlich viele Lösungen (2 Parameter)}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 0 & 0 & -5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \textit{ keine Lösung}$$

Lösbarkeit von LGS – Erkennen nach der Gauß – Elimination

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & -5 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \textit{ unendlich viele Lösungen (1 Parameter)}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & -5 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \textit{ unendlich viele Lösungen (1 Parameter)}$$



Was passiert, wenn ....

(1) **m=n**, d.h. genau so viele Gleichungen wie Unbekannte

z.B. 3x3-Gleichungssystem

(2) **m<n,** d.h. weniger Gleichungen als Unbekannte

z.B. 3x4-Gleichungssystem

(3) **m>n**, d.h. mehr Gleichungen als Unbekannte

z.B. 4x3-Gleichungssystem

Lösbarkeit für ein mxn - LGS

(1) für ein mxn LGS immer über den Rang der Koeffizientenmatrix A und den Rang der erweiterten Koeffizientenmatrix A|b

(2) Rangbestimmung
z.B. über die Anzahl der Zeilen ungleich dem Nullvektor nach der Gaußelimination

Beispiele:

(1) **m=n**, d.h. genau so viele Gleichungen wie Unbekannte

zum Nachvollziehen zu Hause

z.B. 3x3-Gleichungssystem

$$A|b=\left(\begin{array}{ccc|c}2&3&4&1\\0&7&8&0\\0&0&1&2\end{array}\right)$$

Rang A = Rang A|b =3
und n=3
Rang A = Rang A|b = n
=> genau eine Lösung

$$A|b=\left(\begin{array}{ccc|c}2&3&4&1\\0&7&8&0\\0&0&0&2\end{array}\right)$$

Rang A = 2
Rang A|b =3
Rang A ≠ Rang A|b
=> keine Lösung

$$A|b=\left(\begin{array}{ccc|c}2&3&4&1\\0&7&8&0\\0&0&0&0\end{array}\right)$$

Rang A = Rang A|b =2
und n=3
Rang A = Rang A|b < n
=> unendl. viele Lösungen
mit einem freien Parameter

$$A|b=\left(\begin{array}{ccc|c}2&3&4&1\\0&0&0&0\\0&0&0&0\end{array}\right)$$

Rang A = Rang A|b =1
und n=3
Rang A = Rang A|b < n
=> unendl. viele Lösungen
mit zwei freien Parametern

m = n: Anzahl der Variablen n = 3 und m = 3 Gleichungen

r = Rang A = Rang A|b = 3 ⇒ eindeutig lösbar

(n-r) freie Parameter

r = Rang A = Rang A|b = 2 ⇒ unendl. viele Lsg. mit 1 freien Parameter

r = Rang A = Rang A|b = 1 ⇒ unendl. viele Lsg. mit 2 freien Parametern

Rang A ≠ Rang A|b ⇒ keine Lösung

in den Lösungen

Beispiele:

(2) **m<n,** d.h. weniger Gleichungen als Unbekannte

z.B. 3x4-Gleichungssystem

Möglichkeiten nach der Gauß-Elimination

$$A|b=\left(\begin{array}{cccc|c}1&2&3&4&1\\0&6&7&8&0\\0&0&1&1&2\end{array}\right)$$

Rang A = Rang A|b =3
und n=4
Rang A = Rang A|b < n
=> unendl. viele Lösungen
mit einem freien Parameter

$$A|b=\left(\begin{array}{cccc|c}1&2&3&4&1\\0&6&7&8&0\\0&0&0&1&2\end{array}\right)$$

Rang A = Rang A|b =3
und n=4
Rang A = Rang A|b < n
=> unendl. viele Lösungen
mit einem freien Parameter

$$A|b=\left(\begin{array}{cccc|c}1&2&3&4&1\\0&6&7&8&0\\0&0&0&0&0\end{array}\right)$$

Rang A = Rang A|b =2
und n=4
Rang A = Rang A|b < n
=> unendl. viele Lösungen
mit zwei freien Parametern

$$A|b=\left(\begin{array}{cccc|c}1&2&3&4&1\\0&6&7&8&0\\0&0&0&0&2\end{array}\right)$$

Rang A = 2
Rang A|b =3
Rang A ≠ Rang A|b
=> keine Lösung

m < n: Anzahl der Variablen n = 4 und m = 3 Gleichungen

Der Fall "genau eine Lösung" (Rang A = Rang A|b = n) kann für ein unterbestimmtes Gleichungssystem (mit m Zeilen < n Anzahl der Variablen) nicht auftreten!

(n-r) freie Parameter

r = Rang A = Rang A|b = 3 ⇒ unendl. viele Lsg. mit 1 freien Parameter

r = Rang A = Rang A|b = 2 ⇒ unendl. viele Lsg. mit 2 freien Parametern

r = Rang A = Rang A|b = 1 ⇒ unendl. viele Lsg. mit 3 freien Parametern

Rang A ≠ Rang A|b ⇒ keine Lösung

in den Lösungen

(3) **m>n**, d.h. mehr Gleichungen als Unbekannte

z.B. 4x3-Gleichungssystem

$$A|b=\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 3 & 4 & 1 \\ 0 & 7 & 8 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

Rang A = Rang A|b =3
und n=3
Rang A = Rang A|b = n
=> genau eine Lösung

$$A|b=\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 3 & 4 & 1 \\ 0 & 7 & 8 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{array}\right)$$

Rang A = 3
Rang A|b =4
Rang A $\neq$ Rang A|b
=> keine Lösung

$$A|b=\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 3 & 4 & 1 \\ 0 & 7 & 8 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

Rang A = 2
Rang A|b =3
Rang A $\neq$ Rang A|b
=> keine Lösung

$$A|b=\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 3 & 4 & 1 \\ 0 & 7 & 8 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

Rang A = Rang A|b =2
und n=3
Rang A = Rang A|b < n
=> unendl. viele Lösungen
mit einem freien Parameter

m > n: Anzahl der Variablen n = 3 und m = 4 Gleichungen

Ein Rang 4 kann bei der Matrix nicht auftreten, da nur 3 Spalten vorhanden sind!

r = Rang A = Rang A|b = 3 ⇒ eindeutig Lösbar

r = Rang A = Rang A|b = 2 ⇒ unendl. viele Lsg. mit 1 freien Parametern

r = Rang A = Rang A|b = 1 ⇒ unendl. viele Lsg. mit 2 freien Parametern

Rang A ≠ Rang A|b ⇒ keine Lösung

(n-r) freie Parameter