7 Differentialrechnung

Inhaltsverzeichnis des Kapitels

7.1 Differenzierbarkeit einer Funktion

7.1.1 Definitionen

Definition 4.1: Differentialquotient in $x = x_0$, Differenzierbarkeit in $x = x_0$

Die Funktion $f(x)$ heißt **an der Stelle x_0 differenzierbar**, wenn der folgende Grenzwert existiert

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} .$$

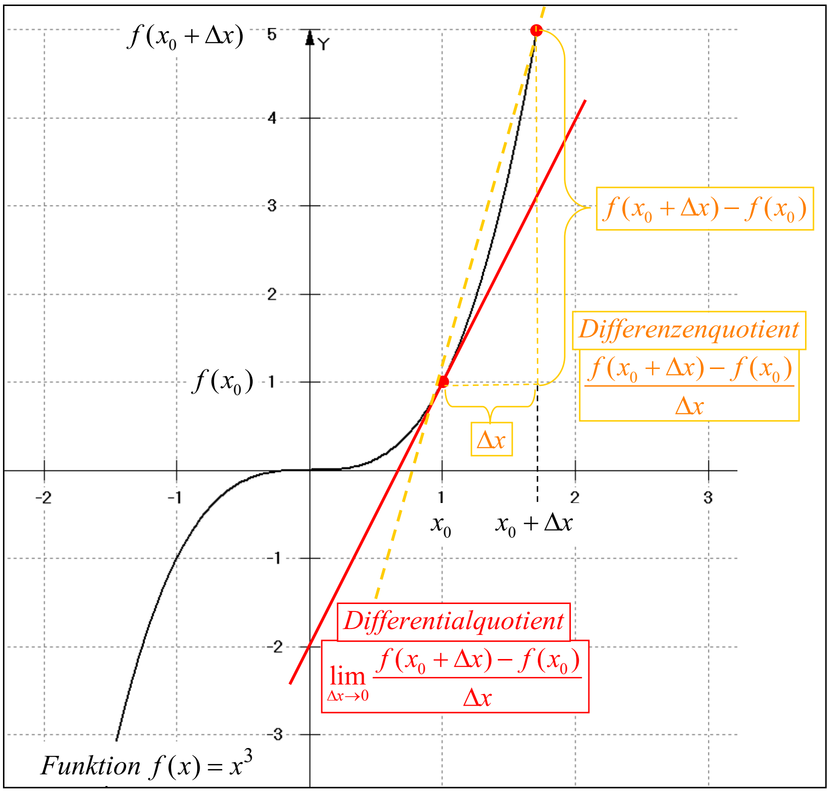
Man bezeichnet ihn als die (erste) **Ableitung** von $y = f(x)$ an der Stelle $x = x_0$ oder als **Differentialquotient** von $y = f(x)$ an der Stelle $x = x_0$ und wird auch wie folgt bezeichnet:

$$y'(x_0),\ f'(x_0),\ \left.\frac{dy}{dx}\right|_{x=x_0} \ oder\ \frac{df}{dx}(x_0) .$$

Der Ausdruck $\frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}$ wird als **Differenzenquotient** bezeichnet.

Veranschaulichung:

Differenzenquotient und Differentialquotient im Punkt x_0 der Funktion f



$$\textit{Differenzenquotient}\ \frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}:$$

$$\textit{Steigung der Sekanten durch } (x_0, f(x_0)) \textit{ und } (x_0+\Delta x, f(x_0+\Delta x))$$

$$\textit{Differentialquotient}\ \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}:$$

$$\textit{Steigung der Tangenten in } (x_0, f(x_0))$$

Beispiel: Steigung der Funktion mit dem Differentialquotienten

Steigung der Funktion $f(x)=x^2$ an der Stelle $x_0=1$ mit Berechnung über den Differentialquotienten

$$\textit{Formel Differentialquotient für } x=x_0:\ f'(x_0)=\lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}$$

$$f'(1)=\lim_{\Delta x \to 0} \frac{(1+\Delta x)^2-1^2}{\Delta x}=\lim_{\Delta x \to 0} \frac{2\Delta x+(\Delta x)^2}{\Delta x}=\lim_{\Delta x \to 0} 2+\Delta x=2$$

Definition 4.2: 1.Ableitung einer Funktion f

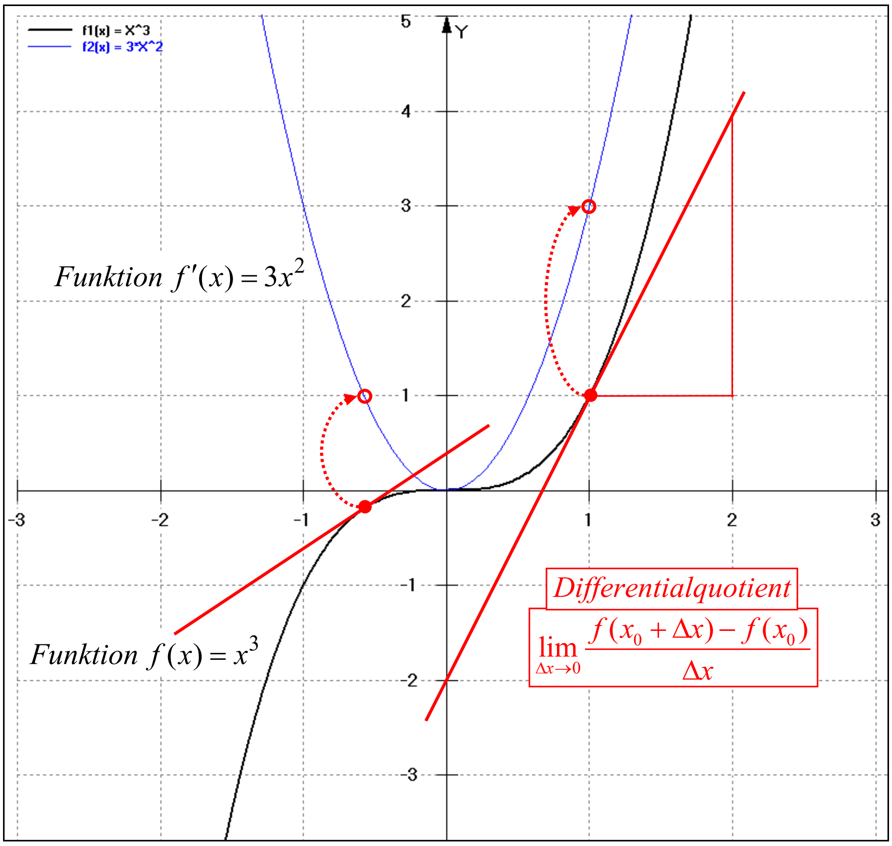
Die **Funktion** f heißt **differenzierbar**, wenn f an jeder Stelle des Definitionsbereiches $D(f)$ differenzierbar ist.

Die **Funktion** f' heißt **Ableitung** von f (bzw. 1.Ableitung von f).

Veranschaulichung:

Funktion der 1.Ableitung:
Werte der Differentialquotienten in allen Punkten x_0 der Funktion f

$$\boxed{1.Ableitung\ \ f':\ x_0} \longrightarrow \begin{array}{c}\boxed{Differentialquotient}\\ \boxed{\lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}}\end{array}$$



Beispiel: Ableitungsfunktion mit dem Differentialquotienten

Funktion der 1.Ableitung für die Funktion $f(x)=x^2$

$$\textit{Formel allgemeiner Differentialquotient}: \; f'(x)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}$$

$$f'(x)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{(x+\Delta x)^2-x^2}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{2x\Delta x+(\Delta x)^2}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}2x+\Delta x$$

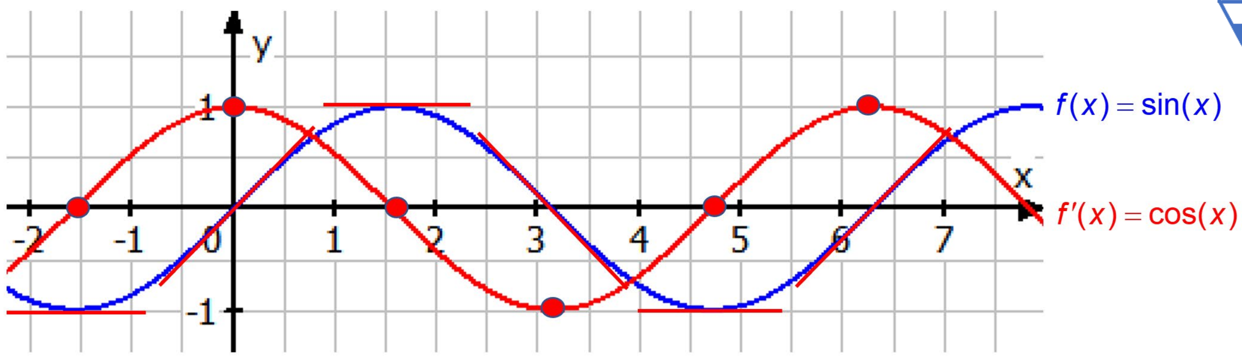
$$f'(x)=2x$$

Steigung der Funktion $f(x)=x^2$ an der Stelle $x_0=1$ mit Verwendung der Funktion der 1.Ableitung

$$\textit{Funktion der } 1.\textit{Ableitung } f'(x)=2x$$

$$f'(1)=2\cdot 1=2$$

Beispiel: Graphisches Differenzieren



Vorgehen:

- Tangentensteigungen der gegebenen Funktion f(x) sind die Funktionswerte der gesuchten Ableitungsfunktion f´(x)
- Steigungen der Tangenten von f(x) als Punkt skizzieren
- Die Verbindung der Punkte ist die gesuchte Ableitungsfunktion f´(x)

7.1.2 Grundlegende Ableitungen elementarer Funktionen

	Funktion $f(x)$	1. Ableitung $f'(x)$
Konstante Funktion	c	0
Potenzfunktion	$x^n,\ n \in \mathbb{N},\ x > 0$ $x^a,\ a \in \mathbb{R},\ x > 0$	$n \cdot x^{n-1},\ n \in \mathbb{N},\ x > 0$ $a \cdot x^{a-1},\ a \in \mathbb{R},\ x > 0$
Sonderfall Wurzelfunktion	$\sqrt{x} = x^{\frac{1}{2}},\ x > 0$	$\frac{1}{2\sqrt{x}} = \frac{1}{2} x^{-\frac{1}{2}},\ x > 0$
Trigonometrische Funktionen	$\sin x,\ x \in \mathbb{R}$ $\cos x,\ x \in \mathbb{R}$ $\tan x,\ x \neq (2k+1)\frac{\pi}{2}$ $\cot x,\ x \neq k\frac{\pi}{2}$	$\cos x,\ x \in \mathbb{R}$ $-\sin x,\ x \in \mathbb{R}$ $\frac{1}{\cos^2 x},\ x \neq (2k+1)\frac{\pi}{2}$ $-\frac{1}{\sin^2 x},\ x \neq k\frac{\pi}{2}$
Zyklometrische Funktionen	$\arcsin x,\ x \in (-1,1)$ $\arccos x,\ x \in (-1,1)$ $\arctan x,\ x \in \mathbb{R}$ $arc\cot x,\ x \in \mathbb{R}$	$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}},\ x \in (-1,1)$ $-\frac{1}{\sqrt{1-x^2}},\ x \in (-1,1)$ $\frac{1}{1+x^2},\ x \in \mathbb{R}$ $-\frac{1}{1+x^2},\ x \in \mathbb{R}$
Exponentialfunktionen	e^x a^x	e^x $\ln a \cdot a^x$
Logarithmusfunktionen	$\ln x,\ x > 0$ $\log_a x,\ x > 0$	$\frac{1}{x},\ x > 0$ $\frac{1}{\ln a \cdot x},\ x > 0$

7.2 Differentiationsregeln

Satz 4.1: Faktorregel

Ein konstanter Faktor bleibt beim Differenzieren erhalten:

$$y = c \cdot f(x) \;\Rightarrow\; y' = c \cdot f'(x)$$

Beispiel: $y = 10 \cdot x^2 \;\Rightarrow\; y' = 10 \cdot 2x = 20x$

Satz 4.2: Summenregel

Eine Summe von Funktionen darf gliedweise differenziert werden:

$$y = f(x) + g(x) \;\Rightarrow\; y' = f'(x) + g'(x)$$

Beispiel: $y = x^2 + \sin x \;\Rightarrow\; y' = 2x + \cos x$

Satz 4.3: Produktregel

Die Ableitung einer Funktion, die aus einem Produkt von Teilfunktionen besteht, wird mit folgendem Ausdruck berechnet:

$$y = f(x) \cdot g(x) \;\Rightarrow\; y' = f'(x) \cdot g(x) + f(x) \cdot g'(x)$$

Beispiel: $y = x^2 \cdot \sin x \;\Rightarrow\; y' = 2x \cdot \sin x + x^2 \cdot \cos x$

Satz 4.4: Quotientenregel

Die Ableitung einer Funktion, die aus einem Quotienten von Teilfunktionen besteht, wird mit folgendem Ausdruck berechnet:

$$y = \frac{f(x)}{g(x)} \;\Rightarrow\; y' = \frac{f'(x) \cdot g(x) - f(x) \cdot g'(x)}{g^2(x)}$$

Sonderfall: **Reziprokregel**

$$y = \frac{1}{g(x)} \;\Rightarrow\; y' = \frac{-g'(x)}{g^2(x)}$$

Beispiel: $y = \dfrac{x^2}{\sin x} \;\Rightarrow\; y' = \dfrac{2x \cdot \sin x - x^2 \cdot \cos x}{(\sin x)^2} \left(= \dfrac{x(2 - x \cdot \cot x)}{\sin x} \right)$

Satz 4.5: Kettenregel

Die Ableitung einer zusammengesetzten (verketteten) Funktion erhält man als Produkt aus äußerer und innerer Ableitung:

$$y = f(g(x)) \;\Rightarrow\; y' = f'(g(x)) \cdot g'(x)$$

Substitution $u = g(x)$: $y = f(u) \;\Rightarrow\; y' = \dfrac{dy}{du} \cdot \dfrac{du}{dx}$

Beispiel: $y = \sin(x^2) \;\Rightarrow\; y' = \cos(x^2) \cdot 2x$

Satz 4.6: Ableitung der Umkehrfunktion

Sei $y = f(x)$ umkehrbar und $x = f^{-1}(y)$ die nach x aufgelöste Funktion, dann gilt für die Ableitungen:

$$\left[f^{-1}(y) \right]' = \frac{1}{f'(x)} \quad mit \quad f'(x) \neq 0$$

Beispiel:

$$y = f(x) = \ln x \;\Rightarrow\; x = f^{-1}(y) = e^y$$

$$f'(x) = \frac{1}{\left(f^{-1}(y)\right)'} = \frac{1}{\left(e^y\right)'} = \frac{1}{e^y} = \frac{1}{e^{\ln x}} = \frac{1}{x} \quad \Rightarrow (\ln x)' = \frac{1}{x}$$

Satz 4.7: Logarithmische Differentiation

Die Ableitung einer Funktion $y = f(x) = [u(x)]^{v(x)}$ kann berechnet werden mit:

$$\left[\ln f(x) \right]' = \frac{f'(x)}{f(x)} \quad mit \quad f(x) \neq 0$$

Beispiel:

$$y = f(x) = e^x$$

$$f'(x) = \left(e^x\right)' = \left[\ln(e^x) \right]' \cdot e^x = [x]' \cdot e^x = e^x$$

Satz 4.8: Implizite Differentiation
Eine Funktion in impliziter Darstellung $F(x, y) = 0$ wird abgeleitet, indem alle x-Terme mit den bekannten Regeln abgeleitet werden und auf die y-Terme, die auch nach x abgeleitet werden müssen, die Kettenregel angewendet wird.

7.3 Eigenschaften differenzierbarer Funktionen

Satz 4.9:

(a) Eine Funktion, die in x_0 differenzierbar ist, ist in x_0 auch stetig
(d.h. Stetigkeit ist eine notwendige Bedingung für Differenzierbarkeit).

(b) Eine Funktion, die in x_0 stetig ist, muss in x_0 nicht differenzierbar sein (d.h. Stetigkeit ist keine hinreichende Bedingung für Differenzierbarkeit).

Definition 4.3: Ableitungen höherer Ordnung

Für die differenzierbare Funktion $f(x)$ bezeichne $f^{(0)}(x) := f(x)$ die Funktion selbst und $f^{(1)}(x) := f'(x)$ die erste Ableitung.

Für $n > 1$ ist $f^{(n)}(x)$ die Ableitung der Funktion $f^{(n-1)}(x)$. Die Funktion $f^{(n)}(x)$ ist die **n-te Ableitung** (oder Ableitung n-ter Ordnung) **der Funktion f**, d.h.

$$f^{(0)}(x) := f(x)$$

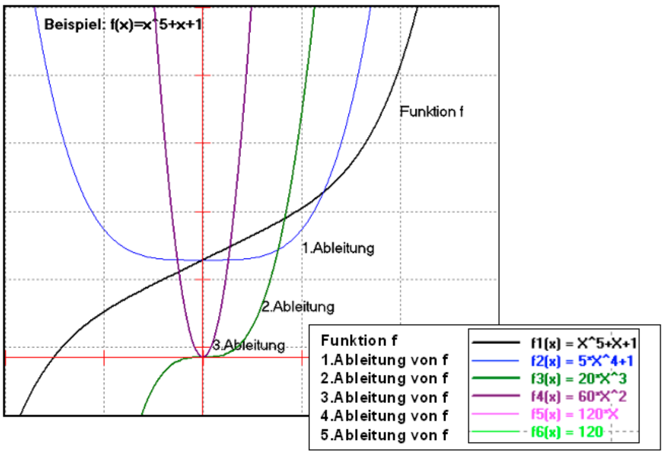
$$f^{(1)}(x) := \left(f^{(0)}(x)\right)'$$

$$f^{(2)}(x) := \left(f^{(1)}(x)\right)'$$

$$f^{(3)}(x) := \left(f^{(2)}(x)\right)'$$

$$\vdots$$

$$f^{(n)}(x) := \left(f^{(n-1)}(x)\right)'$$



Satz 4.10: Mittelwertsatz der Differentialrechnung

Ist die reelle Funktion f stetig auf $[a,b]$ und differenzierbar auf (a,b),

so gibt es ein $x_0 \in (a,b)$ mit $f'(x_0) = \dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}$.

Satz 4.11: Satz von Rolle

Ist die reelle Funktion f stetig auf $[a,b]$ und differenzierbar auf (a,b) und gilt $f(a) = f(b)$,

so existiert ein $x_0 \in (a,b)$ mit $f'(x_0) = 0$.

Satz 4.12:

Die reelle Funktion sei auf dem Intervall I differenzierbar. Es gelten dann folgende Aussagen:

(a) f ist genau dann konstant, wenn $f'(x) = 0 \;\; \forall x \in I$ erfüllt ist.

(b) f ist monoton steigend, wenn $f'(x) \geq 0 \;\; \forall x \in I$,

f ist monoton fallend, wenn $f'(x) \leq 0 \;\; \forall x \in I$,

f ist streng monoton steigend, wenn $f'(x) > 0 \;\; \forall x \in I$,

f ist streng monoton fallend, wenn $f'(x) < 0 \;\; \forall x \in I$.

Satz 4.13: verallgemeinerter Mittelwertsatz der Differentialrechnung

Sind die reellen Funktionen f und g auf $[a,b]$ stetig und mindestens auf (a,b) differenzierbar, und ist $g'(x) \neq 0 \;\; \forall x \in (a,b)$ so existiert ein $x_0 \in (a,b)$ mit

$$\frac{f'(x_0)}{g'(x_0)} = \frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)} \qquad \text{(mit } g(a) \neq g(b),\; da\; g'(x) \neq 0 \text{)}.$$

Satz 4.14: Regel von Bernoulli-l´Hospital

Es seien $f, g : [a,b] \to \mathbb{R}$ reelle stetige Funktionen, die auf (a,b) differenzierbar sind.
Ferner sei $g'(x) \neq 0 \ \ \forall x \in (a,b)$.

Ist $x_0 \in [a,b]$ mit $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = 0 = \lim\limits_{x \to x_0} g(x)$

und existiert $\lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{f'(x)}{g'(x)}$, so existiert auch $\lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{f(x)}{g(x)}$ und es ist

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \to x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)}$$

Bemerkungen:

1. Die obige Regel ist für die Grenzwertbestimmung bei unbestimmten Ausdrücken „$\frac{0}{0}$“ beschrieben.
2. Die Regel ist ebenso anwendbar bei unbestimmten Ausdrücken „$\frac{\infty}{\infty}$“, d.h. wenn $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = \infty = \lim\limits_{x \to x_0} g(x)$.
3. Die Regel ist ebenso anwendbar bei der Grenzwertberechnung für $x \to \infty \ (bzw. -\infty)$.
4. Die weiteren unbestimmten Ausdrücke $0 \cdot \infty,\ \infty - \infty,\ 0^0,\ \infty^0,\ 1^\infty$, die bei einer Grenzwertberechnung auftreten können, werden durch Umformungen auf einen der Fälle „$\frac{0}{0}$“ oder „$\frac{\infty}{\infty}$“ zurückgeführt (→ siehe Vorlesung) und können dann ebenfalls über die Regel von Bernoulli-l’Hospital gelöst werden.

7.4 Anwendungen der Differentialrechnung

7.4.1 Kurvendiskussionen

Analyse einer Funktion und ihres Graphen

- Bestimmung markanter Eigenschaften und
- spezieller Punkte und Eigenschaften, die aus ihren Ableitungen abgeleitet werden können.

Zusammenfassung Kurvendiskussion:

1. Definitionsbereich/ Definitionslücken (hebbar?)/ Bildbereich
2. Symmetrie
3. Nullstellen
4. Pole (Vorzeichenwechsel?)
5. Ableitungen (bis 3.Ableitung sinnvoll)
6. Extremwerte (lokale Minima/ Maxima)
7. Wendepunkte, Sattelpunkte
8. Monotonieverhalten
9. Asymptoten (Verhalten für $x \to \pm\infty$)
10. Stetigkeit ($\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$)

+ parallele Erstellung einer Zeichnung

Aussagen der 1.Ableitung:

- gibt Steigungen der Kurventangenten wieder
- $f'(x)$ *positiv* : Tangente hat positive Steigung im Punkt x
- $f'(x)$ *negativ* : Tangente hat negative Steigung im Punkt x
- $f'(x) = 0$: Tangente hat Steigung 0 im Punkt x (notwendige Bedingung für lokalen Extremwert)

Aussagen der 2.Ableitung:

- gibt Steigungen der Kurventangenten der 1.Ableitung wieder
- macht qualitative Aussagen über das Krümmungsverhalten von f(x)
- $f''(x)\ positiv$: Linkskrümmung der Kurve
- $f''(x)\ negativ$: Rechtskrümmung der Kurve
- quantitatives Maß über die Stärke der Krümmung: $\kappa(x) = \dfrac{f''(x)}{\left[1+(f'(x))^2\right]^{\frac{3}{2}}}$

Definition 4.4: Wendepunkt/ Sattelpunkt

Kurvenpunkte, in denen sich der Drehsinn der Tangenten ändert, heißen **Wendepunkte**.
Wendepunkte mit waagerechter Tangente werden als **Sattelpunkte** bezeichnet.

Satz 4.15:

Die Funktion f sei im Intervall $[a,b]$ differenzierbar.

Gilt $f'(x_0) = 0\ \ und\ \ f''(x_0) < 0$, dann hat f in x_0 ein **lokales Maximum**.

Gilt $f'(x_0) = 0\ \ und\ \ f''(x_0) > 0$, dann hat f in x_0 ein **lokales Minimum**.

Satz 4.16:

Die Funktion f sei im Intervall $[a,b]$ differenzierbar.

Gilt $f''(x_0) = 0\ \ und\ \ f'''(x_0) \neq 0$, dann hat f in x_0 einen **Wendepunkt**.

Gilt zusätzlich $f'(x_0) = 0$, dann hat f in x_0 einen **Sattelpunkt**.

Satz 4.17: Allgemeines Kriterium für lokalen Extremwert

Die Funktion f besitzt in x_0 eine waagerechte Tangente, d.h. $f'(x_0) = 0$.

Die nächste an dieser Stelle nicht verschwindende Ableitung sei die n-te Ableitung $f^{(n)}(x_0) \neq 0$.

- Dann besitzt f in x_0 einen **lokalen Extremwert**, falls die **Ordnung n dieser Ableitung gerade** ist,

  insbesondere ein lokales Minimum, wenn $f^{(n)}(x_0) > 0$

  bzw. ein lokales Maximum, wenn $f^{(n)}(x_0) < 0$.

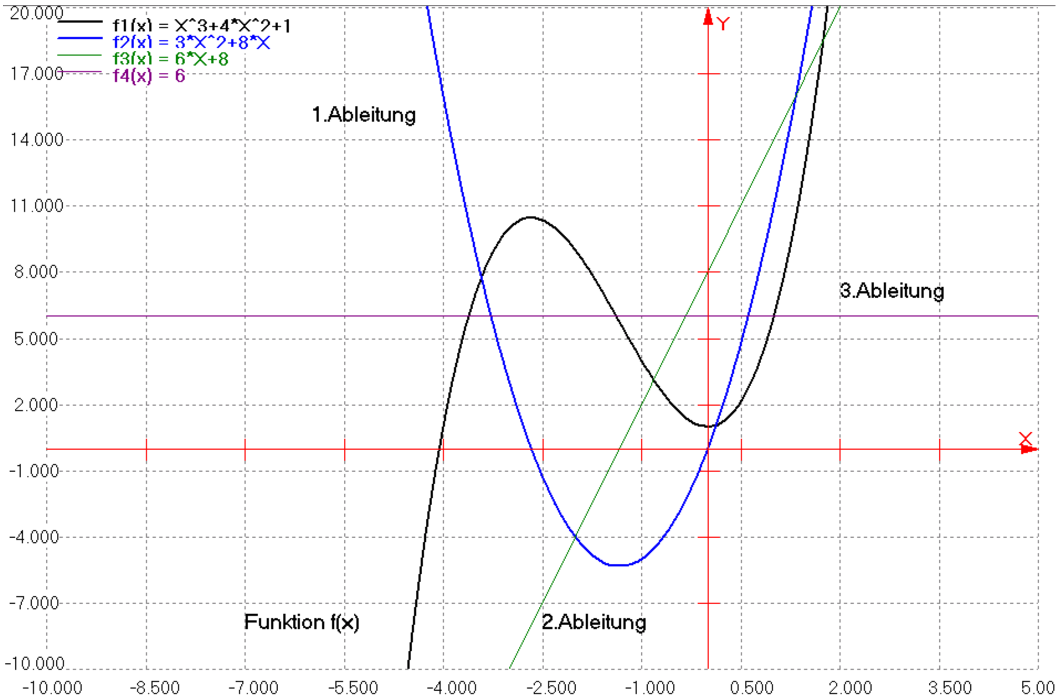
- Ist die **Ordnung n ungerade**, so besitzt f in x_0 einen **Sattelpunkt**.

Satz 4.18: Aussagen zum Wendepunkt

Die Funktion f besitzt in x_0 einen Wendepunkt, falls

1. $f''(x_0) = 0 \;\; und \;\; f'''(x_0) \neq 0$ oder
2. $f''(x_0) = 0 \;\; und \;\; f''(x_0) \; hat \; bei \; x_0 \; einen \; Vorzeichenwechsel$
3. $f''(x_0) = f'''(x_0) = 0 \;\; und \;\; für \; die \;\; k - fache \; Ableitung \; ist \; erstmalig$
   $f^{(k)}(x_0) \neq 0 : \;\; \exists n \in \mathbb{N} : k = 2n + 1, \; d.h. \; k \; ist \; ungerade.$

Beispiel: Funktion mit 1.-3.Ableitung



Zusammenfassung:

- $f(x)=0$ $\Rightarrow$ Nullstelle
- $f'(x)=0$
  - $f''(x)>0$ $\Rightarrow$ Minimum, Kurve hat Linkskrümmung
  - $f''(x)<0$ $\Rightarrow$ Maximum, Kurve hat Rechtskrümmung
  - $f''(x)=0$
    - $f'''(x)>0$ $\Rightarrow$ Sattelpunkt (von Rechts- auf Linkskrümmung)
    - $f'''(x)<0$ $\Rightarrow$ Sattelpunkt (von Links- auf Rechtskrümmung)
    - $f'''(x)=0$ $\Rightarrow$ unklar, ob Extremwert oder Sattelpunkt
      weitere Ableitungen bilden, bis n-te Ableitung $\neq 0$
      n gerade $\Rightarrow$ *Extremwert*, *n ungerade* $\Rightarrow$ *Sattelpunkt*
- $f''(x)=0$
  - $f'''(x)>0$ $\Rightarrow$ Wendepunkt (von Rechts- auf Linkskrümmung)
  - $f'''(x)<0$ $\Rightarrow$ Wendepunkt (von Links- auf Rechtskrümmung)
  - $f'''(x)=0$ $\Rightarrow$ unklar, ob Wendepunkt
    weitere Ableitungen bilden, bis n-te Ableitung $\neq 0$
    n ungerade $\Rightarrow$ *Wendepunkt*

7.4.2 Extremwertprobleme

In praktischen Anwendungen der Mathematik geht es häufig darum beispielsweise Aufwände zu minimieren oder Gewinne zu maximieren. Diese zu minimierenden oder maximierenden Größe hängen in den meisten Fällen von einer oder mehreren anderen Größen ab. Problemstellungen dieses Typs werden Extremwertprobleme genannt.

Vorgehensweise zur Lösung von Extremwertproblemen:

1.Schritt:

Festlegung der zu optimierenden Größe

2.Schritt:

- Ausnutzung von Beziehungen zwischen den Variablen (Nebenbedingungen) (z.B. bekannte geometrische oder physikalische Beziehungen)
- Aufstellen der Zielfunktion

3.Schritt:

Bestimmung der Extremwerte der Zielfunktion

4.Schritt:

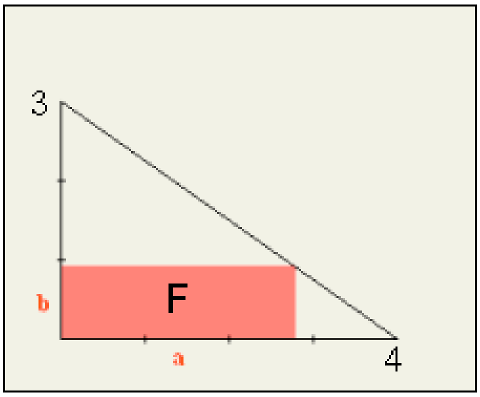
Untersuchung der Zielfunktion an den Rändern des Definitionsbereiches

5.Schritt:

Umsetzen der Ergebnisse der Extremwertberechnung auf die Problemstellung und Überprüfung der Lösung.

Aufgabe:

- In ein rechtwinkliges Dreieck soll ein **Rechteck eingeschrieben** werden.
- Wie sind die Seitenlängen a und b zu wählen, damit die **Fläche F des Rechtecks maximal** wird?



Vorgehen:

- Fläche F beschreiben (**Zielfunktion**): $F(a,b) = a \cdot b$
- Abhängigkeiten für a und b ermitteln (**Nebenbedingung**)
- Verwendung der Eigenschaft, dass der Punkt (a,b) auf der eingezeichneten Gerade liegt, d.h. b kann in Abhängigkeit dieser Geradengleichung über a ausgedrückt werden.

$$b = -\tfrac{3}{4}a + 3$$

- Fläche F (**Zielfunktion einer Variablen**):

$$F(a) = a \cdot \left(-\tfrac{3}{4}a + 3\right) = -\tfrac{3}{4}a^2 + 3a$$

- Bestimmen des Wertes für a,der **F(a) maximiert**

$$F'(a) = -\tfrac{3}{2}a + 3 = 0$$

$$\Rightarrow \textit{bei } a = 2 \quad \textit{waagerechte Tangente}$$

$$F''(2) = -\tfrac{3}{2} < 0 \quad \Rightarrow \textit{Maximum mit } F(2) = 3$$

$$\textit{Ränder}: \quad F(0) = F(4) = 0 \quad \Rightarrow a = 2$$

$$\textit{über die Nebenbedingung} \Rightarrow b = \tfrac{3}{2}$$

- Der maximale Flächenwert 3 ist die Hälfte der Dreiecksfläche.

7.4.3 Tangente und Normale

Eine Tangente ist eine Gerade an einer Funktion, die diese Funktion in einem Punkt berührt und die dieselbe Steigung in diesem Punkt hat, wie die Funktion.

Die Tangente hat die Form einer Geraden in Punkt-Steigungsform, bei der zur Bestimmung die Steigung der Geraden und ein Punkt, durch den die Gerade geht, gegeben ist.

$$f(x) = a\,(x - x_1) + y_1 \quad \textit{mit Steigung a durch den Punkt } (x_1, y_1)$$

Satz 4.19: Tangentengleichung

Die Tangente $f_t(x)$ an die Kurve der differenzierbaren Funktion f im Punkt $(x_0, f(x_0))$ ist gegeben durch:

$$\frac{f_t(x) - f(x_0)}{x - x_0} = f'(x_0) \qquad \text{(Punkt-Steigungsform)}$$

bzw.

$$f_t(x) = f(x_0) + f'(x_0)\,(x - x_0)\,.$$

Der Steigungswinkel ist $\varphi_{ft} = \arctan f'(x_0)$, da $f'(x_0) = \tan(\varphi_{ft})$.

Bemerkung:

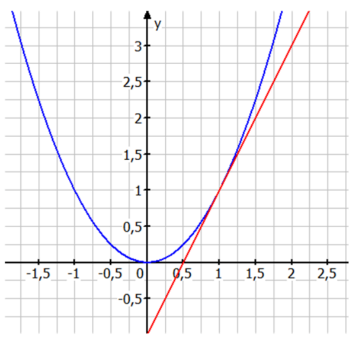
- Eine Tangente wird auch zur Linearisierung einer Funktion in einem Punkt verwendet.
- Eine Tangente ist ein Taylorpolynom erster Ordnung für die Funktion f(x) mit dem Entwicklungspunkt x_0.

Beispiel:

Tangente an die Funktion $f(x)=x^2$ im Punkt ($x_0=1, y_0=1$)

$$f_t(x) = f'(x_0)(x - x_0) + y_0$$

$$f_t(x) = 2(x-1)+1$$
$$= 2x - 1$$



Definition 4.5: Schnittwinkel

Der Schnittwinkel α der Kurven der differenzierbaren Funktionen f und g im Punkt $(x_0, y_0)\ mit\ y_0 = f(x_0) = g(x_0)$ wird definiert als Schnittwinkel der Tangenten an f und g in diesem Punkt, d.h. der Differenzwinkel der Steigungswinkel der beiden Tangenten.

Einer der beiden **Schnittwinkel** ist gegeben durch

$$\alpha = \arctan f'(x_0) - \arctan g'(x_0).$$

Definition 4.6: Normale

Eine **Normale** ist eine Gerade durch den Punkt x_0, die auf der Tangenten an die Kurve im Punkt x_0 senkrecht steht, d.h. die Normale und die Tangente schneiden sich im Winkel $\frac{\pi}{2}(90^\circ)$.

Satz 4.20: Normalengleichung

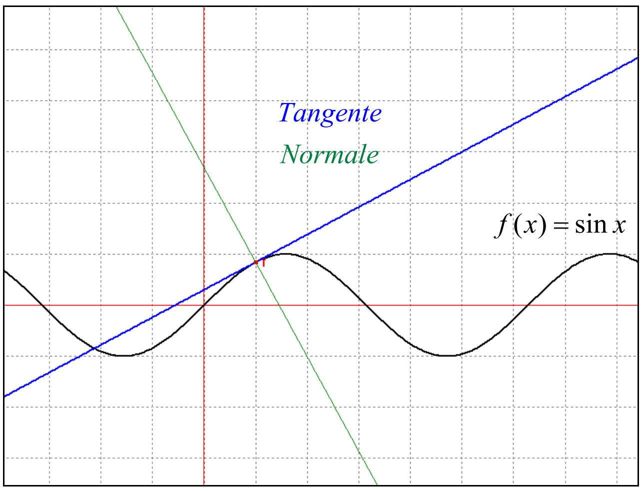
Die Normale $f_N(x)$ der Kurve der differenzierbaren Funktion f im Punkt $(x_0, f(x_0))$ mit $f'(x_0) \neq 0$ hat

(a) die Steigung $f_N{}'(x_0) = \dfrac{-1}{f'(x_0)}$,

(b) die Gleichung $f_N(x) = f(x_0) - \dfrac{1}{f'(x_0)}(x - x_0)$.

Bemerkung:
Falls $f'(x_0) = 0$ ist, dann ist die Normale die senkrechte Gerade $x = x_0$.

Beispiel und Veranschaulichung: Tangente und Normale



$$f_t(x) = \frac{1}{2\sqrt{2}} + \frac{1}{2\sqrt{2}}\left(x - \tfrac{\pi}{4}\right)$$

$$f_N(x) = \frac{1}{2\sqrt{2}} - 2\sqrt{2}\left(x - \tfrac{\pi}{4}\right)$$

7.4.4 Tangentenverfahren von Newton

Die Bestimmung von Lösungen der Gleichung $f(x)=0$, d.h. die Nullstellenberechnung, einer nicht-linearen Funktionen kann nicht immer explizit durchgeführt werden.

Das Tangentenverfahren von Newton ist eine iterative Methode zur Bestimmung von Nullstellen einer differenzierbaren Funktion, d.h. mit Verwendung der 1.Ableitung der Funktion.

Idee:

→ Die Grundidee besteht in dem iterativen Anlegen von Tangenten an die Funktion f und der Ermittlung der Nullstellen dieser Tangenten.

→ Ausgehend von einem Startwert x_0 wird die Tangente ermittelt.

→ Die Nullstelle dieser Tangenten ist die verbesserte Annäherung an die Nullstelle der Funktion und damit der nächste Iterationspunkt, an dem wieder die Tangente und die Nullstelle der Tangenten ermittelt wird.

→ Die Iteration wird solange fortgesetzt, bis die Nullstelle der Funktion mit der vorgegebenen Genauigkeit erreicht wird.

→ Wenn alles gut geht, erreicht man den Schnittpunkt des Funktionsgraphen mit der x-Achse und damit eine Nullstelle.

Allgemeine Formulierung des Tangentenverfahrens von Newton

Ausgehend von einem geeigneten Startwert x_0, der die Konvergenzbedingung

$$\left|\frac{f(x_0)\cdot f''(x_0)}{\left[f'(x_0)\right]^2}\right|<1 \quad \text{erfüllt,}$$

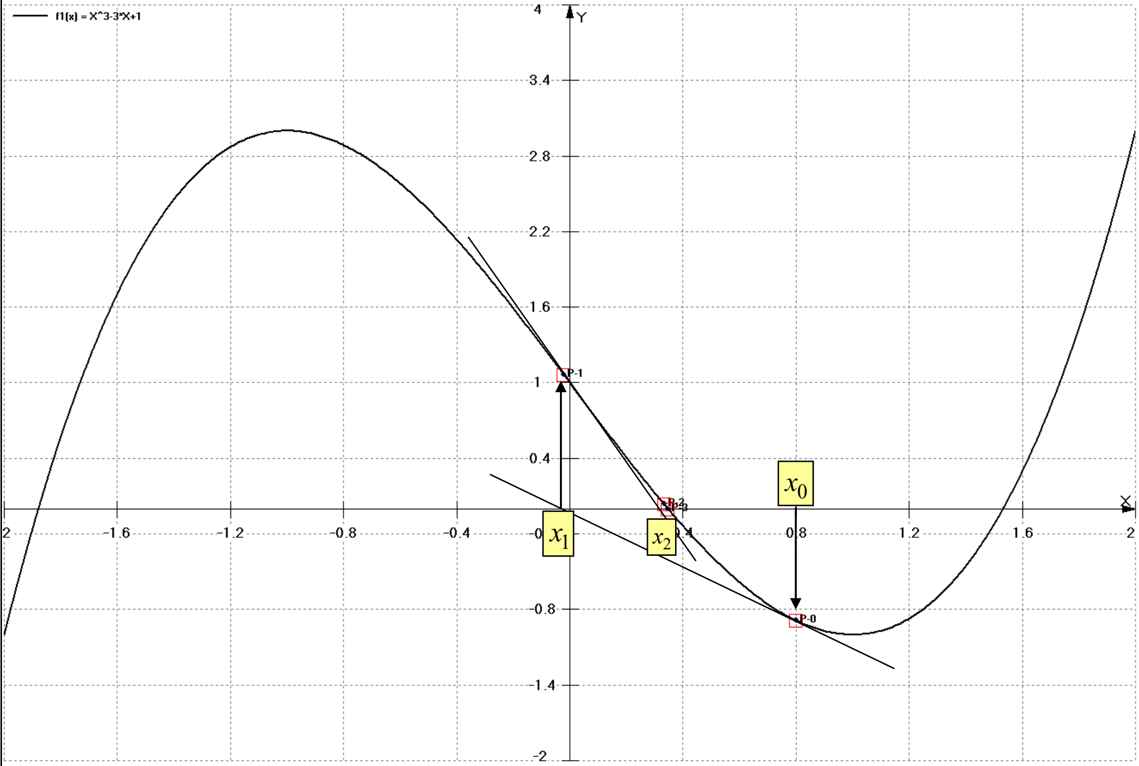
erhält man aus der Iterationsvorschrift

$$x_{n+1}=x_n-\frac{f(x_n)}{f'(x_n)},\quad n=0,1,2,3,...$$

eine Folge von Näherungswerten x_0, x_1, x_2,... für die gesuchte Lösung der Gleichung $f(x)=0$. Die Iteration wird solange durchgeführt, bis eine gewünschte Genauigkeit erreicht ist.

Die Folge konvergiert mit Sicherheit gegen die gesuchte Lösung, wenn die Konvergenzbedingung für jeden dieser Näherungswerte x_i erfüllt ist.

Beispiel: Tangentenverfahren nach Newton



Ablauf des Newton-Verfahrens:

Iterationsschritt	$x_{n+1} = x_n - \dfrac{f(x_n)}{f'(x_n)}, \quad n = 0,1,2,3,\ldots$
n = 0	Startwert $x_0 = \frac{4}{5} = 0.8$
n = 1	$x_1 = x_0 - \dfrac{f(x_0)}{f'(x_0)} = \frac{4}{5} - \dfrac{f(\frac{4}{5})}{f'(\frac{4}{5})}$ $= \frac{4}{5} - \dfrac{(\frac{4}{5})^3 - 3(\frac{4}{5}) + 1}{3(\frac{4}{5})^2 - 3}$ $= -\frac{3}{135} = -0.022$
n = 2	$x_2 = x_1 - \dfrac{f(x_1)}{f'(x_1)} = -\frac{3}{135} - \dfrac{f(-\frac{3}{135})}{f'(-\frac{3}{135})}$ $= -\frac{3}{135} - \dfrac{(-\frac{3}{135})^3 - 3(-\frac{3}{135}) + 1}{3(-\frac{3}{135})^2 - 3}$ $= 0{,}3335$
n = 3	.....