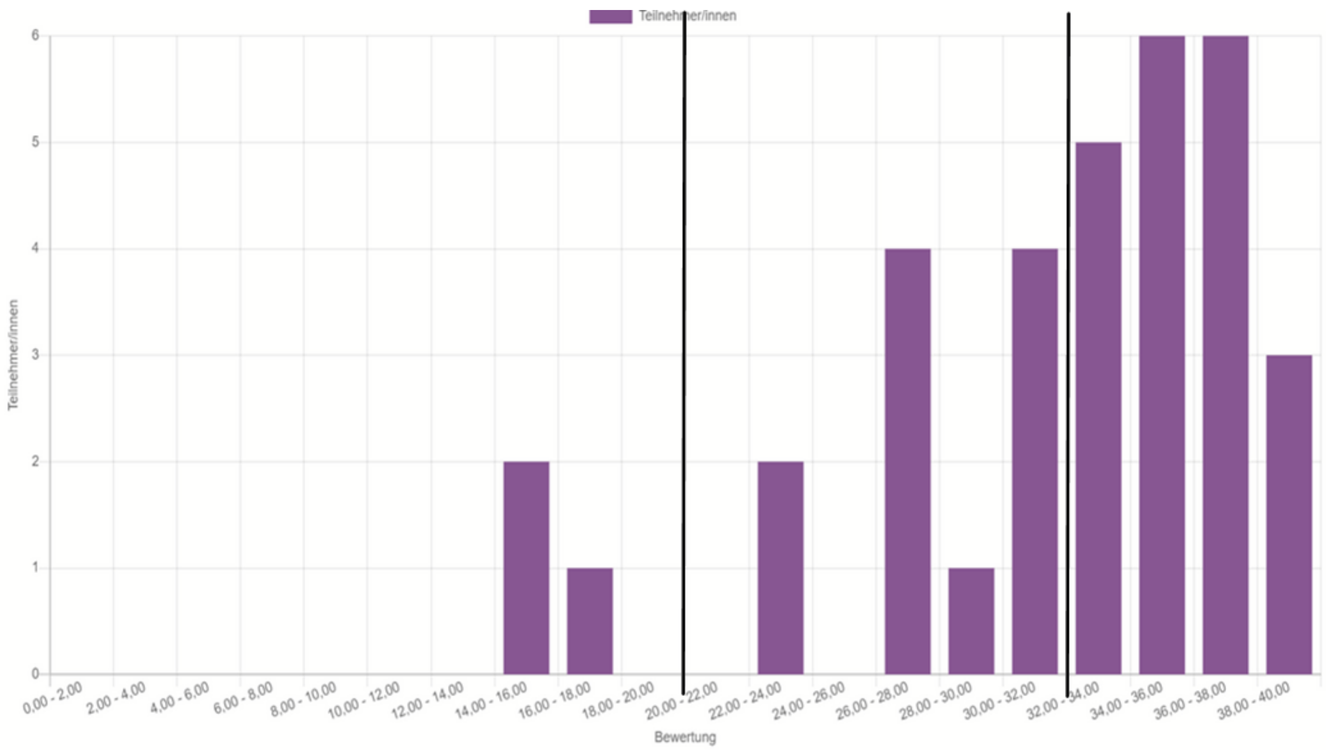
Vorlesung 15 am 10.11.2022

Folgen 3

Folgen und Grenzwerte

4 Folgen und Reihen

Ergebnisse PVL 2 vom 9.11.2022



3/34 = 9%

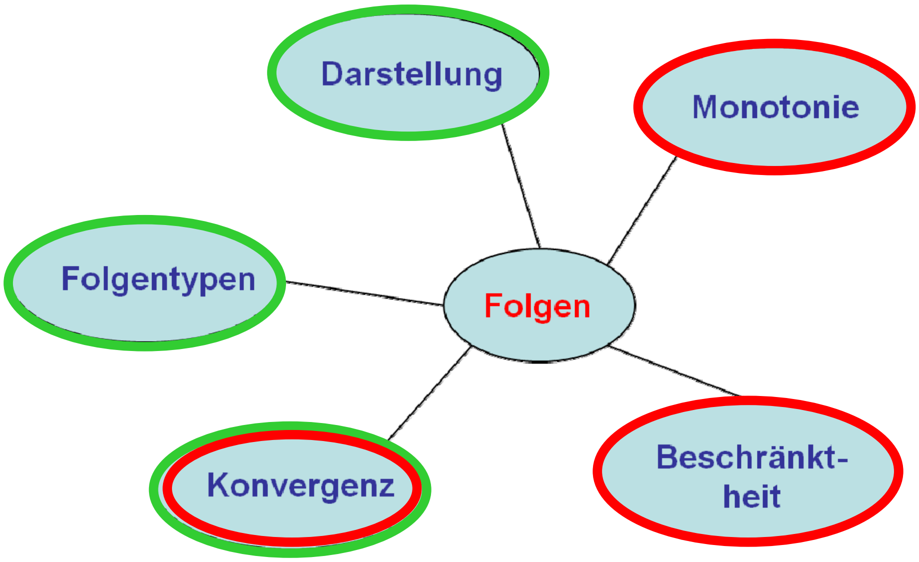
nicht bestanden

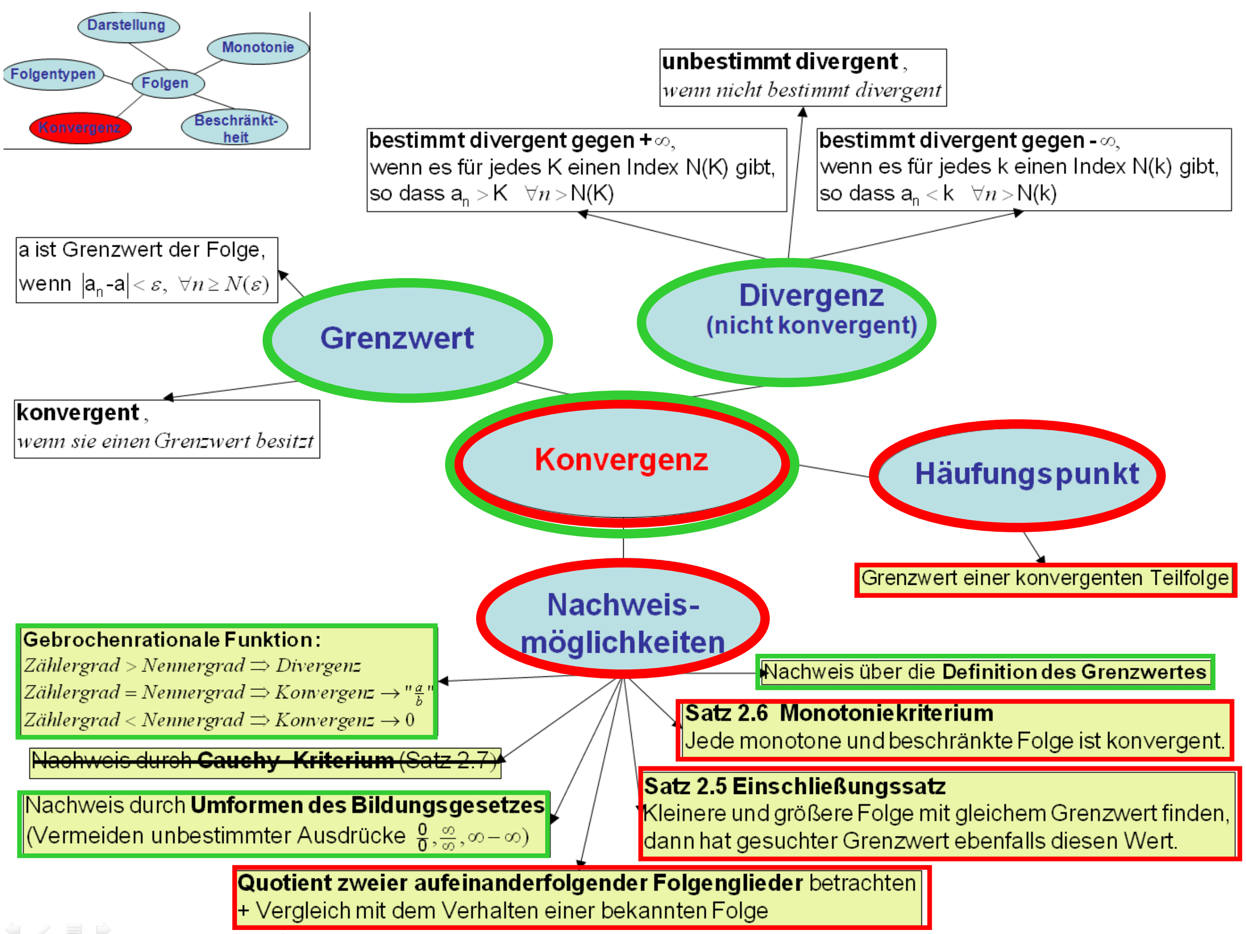
11/34 = 32%

20/34 = 59% mit Bonuspunkt

bestanden 31/34 = 91%

Begriffe im Zusammenhang mit Folgen $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$





Grenzwert und Konvergenz einer Folge

√ **(1) Nachweis eines vermuteten Grenzwertes**

√ **(2) Berechnen des Grenzwertes anhand der Folgenbeschreibung**

- √ Umformen der Folgenvorschrift zur Vermeidung eines unbestimmten Ausdrucks
- √ durch Vergleich mit einer geometrischen Folge

(3) Nachweis der Konvergenz einer Folge
ohne direkte Berechnung des Grenzwerts

Grenzwert einer Folge

durch Vergleich mit einer geometrischen Folge,

Vorgehen: Bestimmung des Quotienten von zwei Folgenglieder und Betrachtung des Quotienten für n→∞

Beispiel:

Gegeben sei die Folge $a_n = \frac{n^2}{3^n}$.

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n^2 \to \infty}{3^n \to \infty}$$ unbestimmter Ausdruck „Typ $\frac{\infty}{\infty}$"

Vorgehen hier: „Vergleich mit einer geometrischen Folge"

- Prüfung, ob sich die Folge im Unendlichen wie eine geometrische Folge verhält
- Betrachten des Quotienten von je 2 aufeinanderfolgenden Folgengliedern

$$q = \frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{\frac{(n+1)^2}{3^{n+1}}}{\frac{n^2}{3^n}} = \frac{(n+1)^2}{\cancel{3^{n+1}}_{3}} \cdot \frac{\cancel{3^n}_{1}}{n^2} = \frac{n^2+2n+1}{3n^2}$$

- wie verhält sich der Quotient für $n\to\infty$

$$\lim_{n\to\infty} q = \lim_{n\to\infty} \frac{1 \cdot n^2+2n+1}{3n^2} = \frac{1}{3}$$

Grad der Polynome im Zähler gleich
⇒ Grenzwert ist Quotient der Koeffizienten

- Folge verhält sich für $n\to\infty$ wie geometrische Folge mit $|q|<1$ und konvergiert daher gegen $a=0$.

4.2.2 Rechnen mit konvergenten Folgen

Satz 4.1: Grenzwertsätze

Es seien $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ und $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ zwei konvergente Folgen mit Grenzwert a bzw. b.

Dann gelten folgende Aussagen:

- Folge der Summen $(a_n+b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ist konvergent mit Grenzwert $a+b$
- Folge der Differenzen $(a_n-b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ist konvergent mit Grenzwert $a-b$
- Folge der Quotienten $\left(\frac{a_n}{b_n}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ ist konvergent mit Grenzwert $\frac{a}{b}$, wenn $b \neq 0$ und $b_n \neq 0 \quad \forall n \in \mathbb{N}$ gilt.
- Folge der Produkte $(a_n \cdot b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ist konvergent mit Grenzwert $a \cdot b$

Beispiel

Sei $a_n = 1 + \frac{1}{2^n}$ *mit* $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 1$

und $b_n = \frac{2n+1}{n-1}$ *mit* $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = 2$.

Dann gilt

$$\lim_{n\to\infty} a_n + b_n = \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{2^n}\right) + \frac{2n+1}{n-1} = 1+2 = 3$$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{1+\frac{1}{2^n}}{\frac{2n+1}{n-1}} = \frac{1}{2}$$

a =

b =

.

Definition 4.9: Häufungspunkt

Als **Häufungspunkt** einer Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ bezeichnet man jede Zahl $a \in \mathbb{R}$, die Grenzwert einer konvergenten Teilfolge von $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ist.

Definition 4.10: Teilfolge

Als **Teilfolge** einer Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ bezeichnet man jede Folge $a_{n_1}, a_{n_2}, a_{n_3}, \ldots, a_{n_k}, \ldots$ also $(a_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ mit $n_1 < n_2 < n_3 < \ldots < n_k < \ldots$ mit $n_k \in \mathbb{N}$.

Beispiele: Häufungspunkt

1. Die Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *mit* $a_n = \frac{1}{2^n}$ ist eine Nullfolge und hat den Häufungspunkt 0.
2. Die Folge 1,-1,1,-1,1,-1,...., also $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *mit* $a_n = (-1)^n$, ist eine alternierende Folge mit den 2 Häufungspunkten 1 und -1.

Beispiele: Teilfolgen

Folge $a_n = \frac{1}{n}$: $1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \frac{1}{5}, \frac{1}{6}, \frac{1}{7}, \frac{1}{8}, \frac{1}{9}, \ldots..$

Teilfolge b_n: $1, \frac{1}{3}, \frac{1}{5}, \frac{1}{7}, \frac{1}{9}, \ldots.$ alle ungeraden Folgenglieder

Teilfolge c_n: $\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \frac{1}{5}, \frac{1}{6}, \frac{1}{7}, \frac{1}{8}, \frac{1}{9}, \ldots..$ nur 1. Folgenglied weggelassen

keine Teilfolge d_n: $1, \frac{1}{3}, \frac{1}{2}, \frac{1}{5}, \frac{1}{4}, \frac{1}{7}, \frac{1}{6}, \frac{1}{9}, \frac{1}{8}, \ldots..$ *Reihenfolge stimmt nicht*

Teilfolge e_n: $1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \frac{1}{5}, \frac{1}{6}, \frac{1}{7}, \frac{1}{8}, \frac{1}{9}, \ldots..$ *Die ~~Reihe~~ Folge selbst ist auch Teilfolge*

Beispiele:

Beispiel 1: Folge ist unbestimmt divergent
mit zwei Häufungspunkten

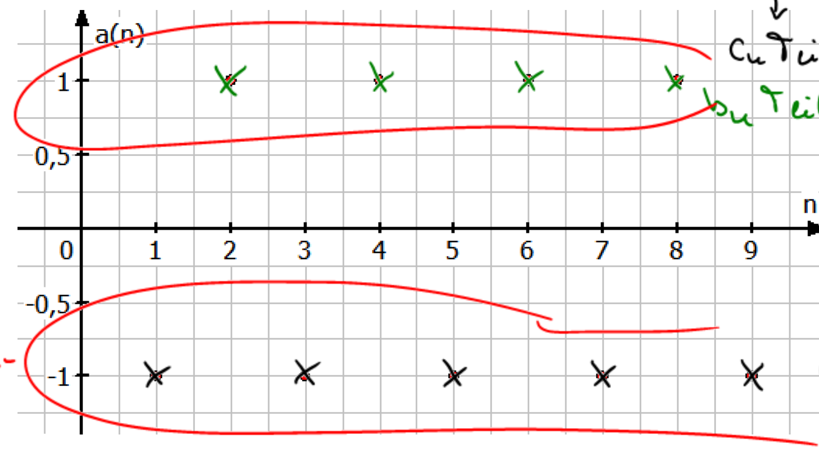
a_n: -1,1,-1,1,-1,1,-1,1,....

b_n Teilfolge 1,1,1,1.... → konvergent $b=1$

c_n Teilfolge -1,-1,-1, ... → konvergent $c=-1$

Grenzwerte der Teilfolgen → Häufungspunkt

Häufungspunkt 1



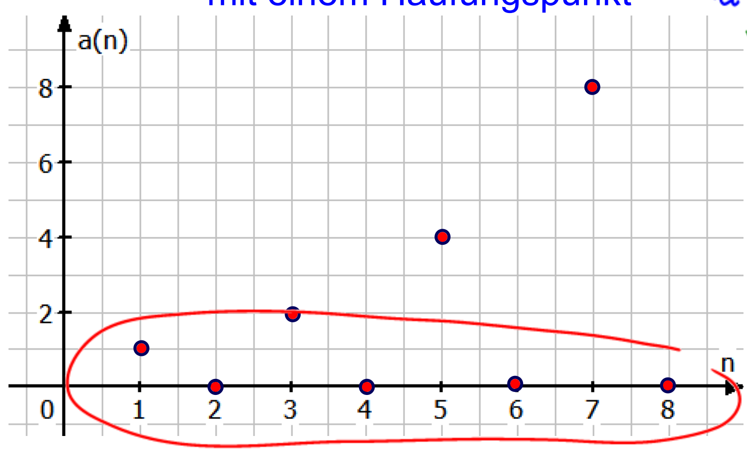
Häufungspunkt 2

Beispiel 2: Folge ist unbestimmt divergent
mit einem Häufungspunkt

a_n: 1,0,2,0,4,0,8,0,....

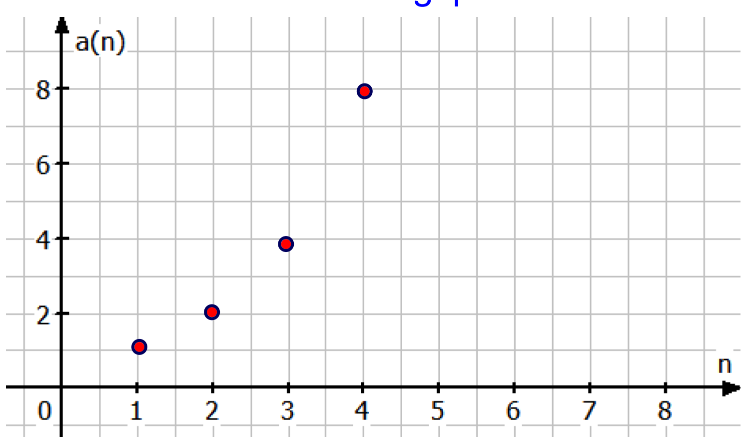
b_n: 1,2,4,8,... hat keinen Grenzwert

c_n: 0,0,0,0,... Grenzwert $c=0$ → HP



Beispiel 3: Folge ist bestimmt divergent
ohne Häufungspunkt

1,2,4,8,16,....

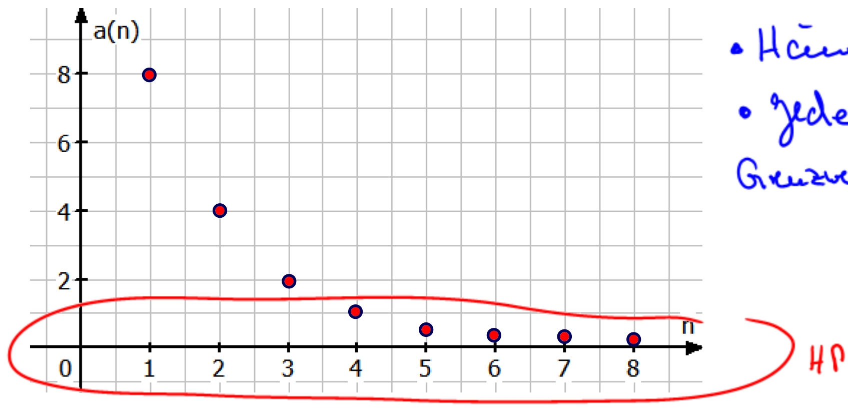


es gibt keine konvergente Teilfolge und damit auch keinen HP

Bemerkung: divergente Folge
- mit 2 HP
- mit 1 HP
- ohne HP

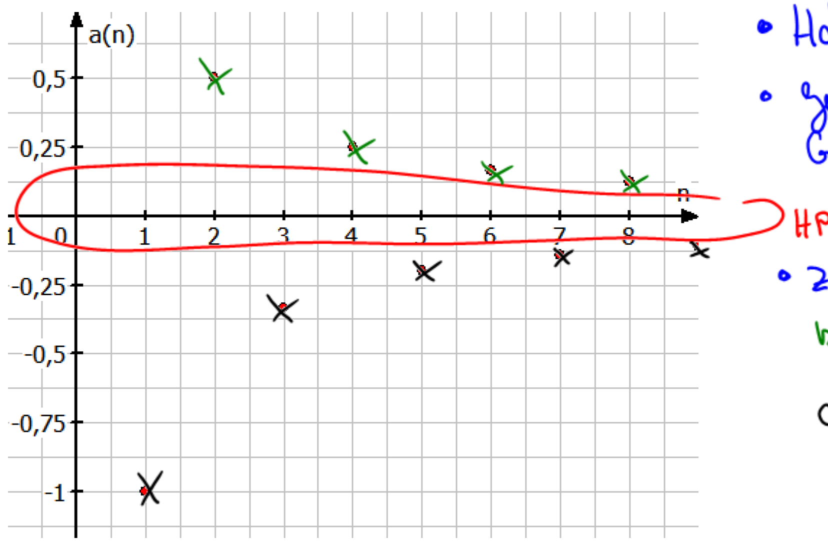
Beispiele:

Beispiel 4: Folge ist konvergent
mit einem Häufungspunkt a_n: 8,4,2,1,1/2,1/4, 1/8,....



- Häufungspunkt HP $a=0$
- jede Teilfolge hat den Grenzwert $a=0$.

Beispiel 5: Folge ist konvergent
mit einem Häufungspunkt a_n: -1,1/2,-1/4,1/8,-1/16,1/32,....



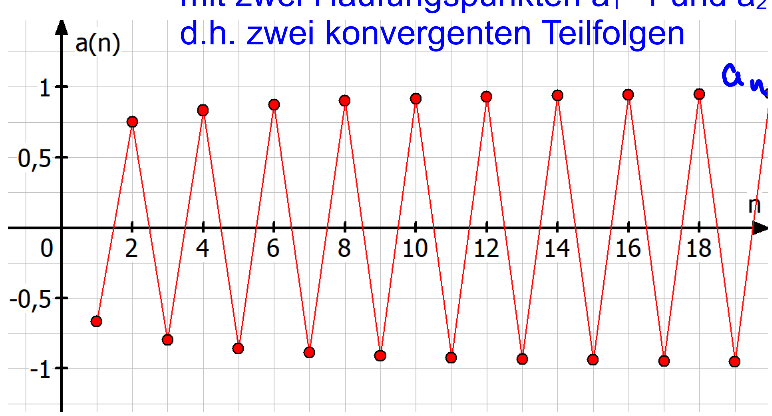
- Häufungspunkt HP $a=0$
- jede Teilfolge hat den Grenzwert $a=0$
- z.B.

$b_n: \frac{1}{2}, \frac{1}{8}, \frac{1}{32}, \dots \to b=0$

$c_n: -1, -\frac{1}{4}, -\frac{1}{16}, \dots \to c=0$

Beispiel 6: Folge ist unbestimmt divergent
mit zwei Häufungspunkten $a_1=1$ und $a_2=-1$,
d.h. zwei konvergenten Teilfolgen

$$a_n = (-1)^n \frac{n+1}{n+2}$$



Bemerkungen/ Aussagen zu Häufungspunkten:

(1) Eine konvergente Folge hat ihren Grenzwert als Häufungspunkt.

Konvergenz $\Rightarrow$ Folge hat genau 1 HP (notwendige Bed. Konvergenz, aber nicht hinreichend)

$\not\Leftarrow$ (siehe Beispiel divergente Folgen)

(2) Ist $(a_n)_{n\in \mathbb{N}}$ eine beschränkte Folge mit genau einem Häufungspunkt, dann ist die Folge konvergent.

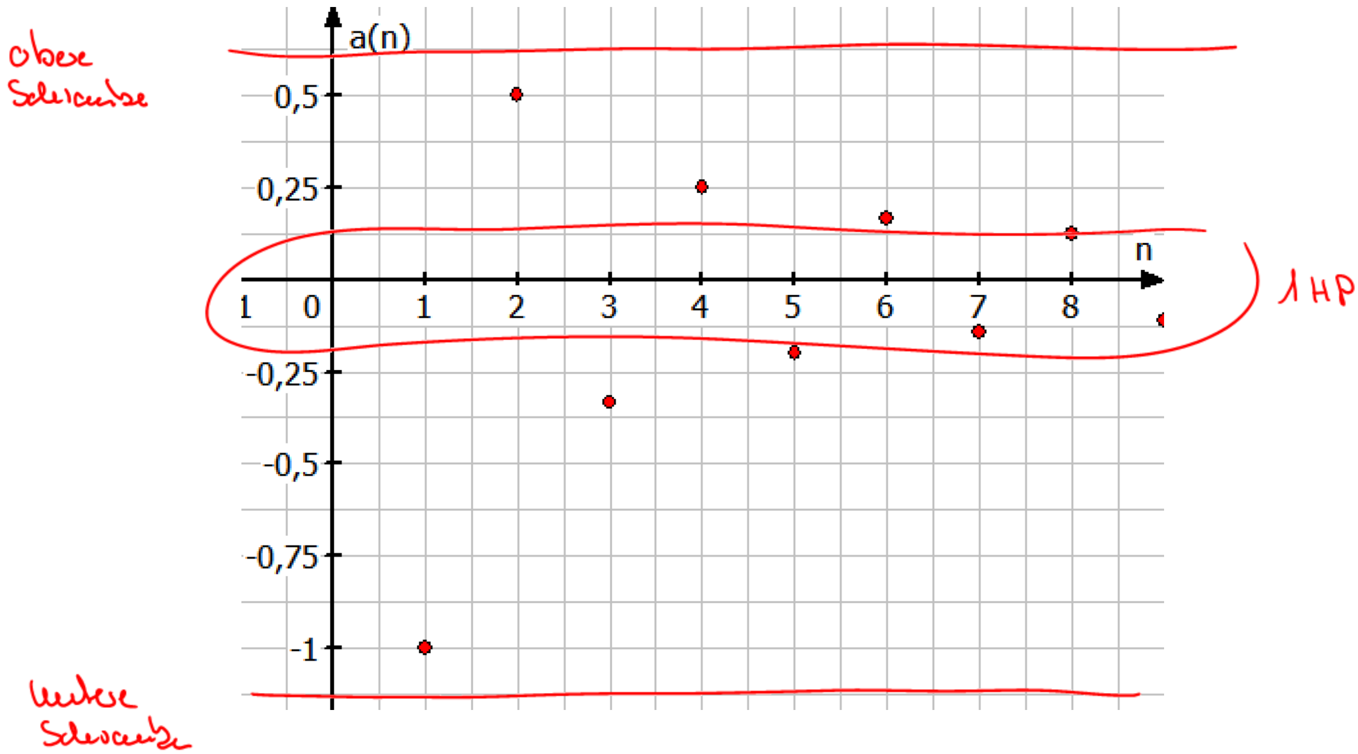
Konvergenz $\Leftarrow$ 1 HP + Beschränktheit ist dann hinreichend für Konvergenz

(3) Folgen, die mindestens einen Häufungspunkt haben, müssen nicht konvergent sein.

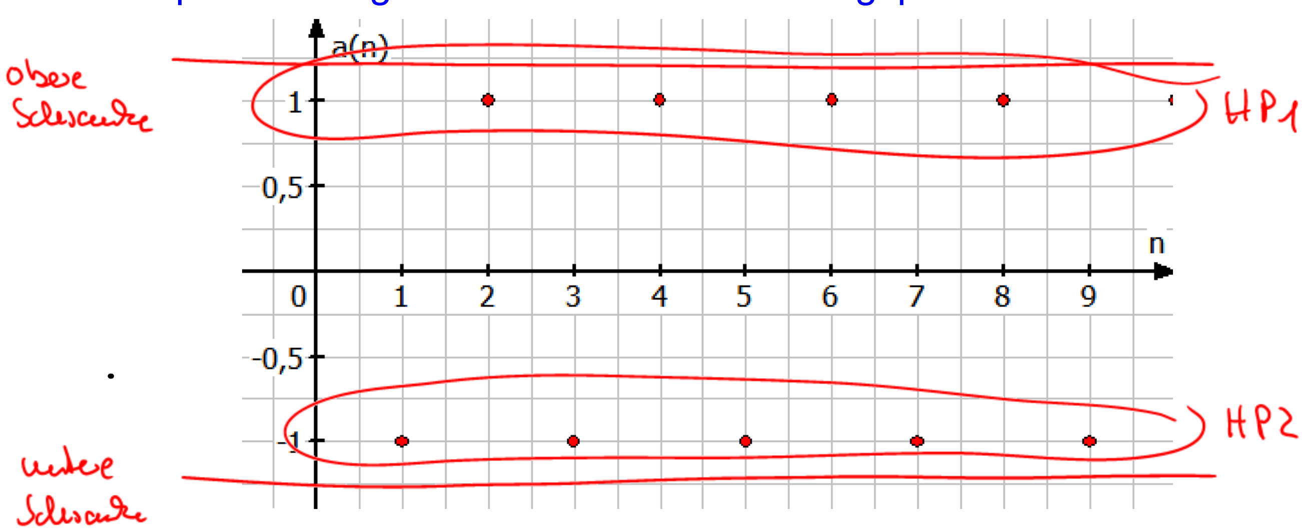
(4) Folgen mit mehr als einem Häufungspunkt sind divergent (unbestimmt divergent).

Satz 2.4: Satz von Bolzano-Weierstraß
Jede beschränkte reelle Zahlenfolge besitzt eine konvergente Teilfolge.
oder anders formuliert
Jede beschränkte reelle Zahlenfolge hat mindestens einen Häufungspunkt.

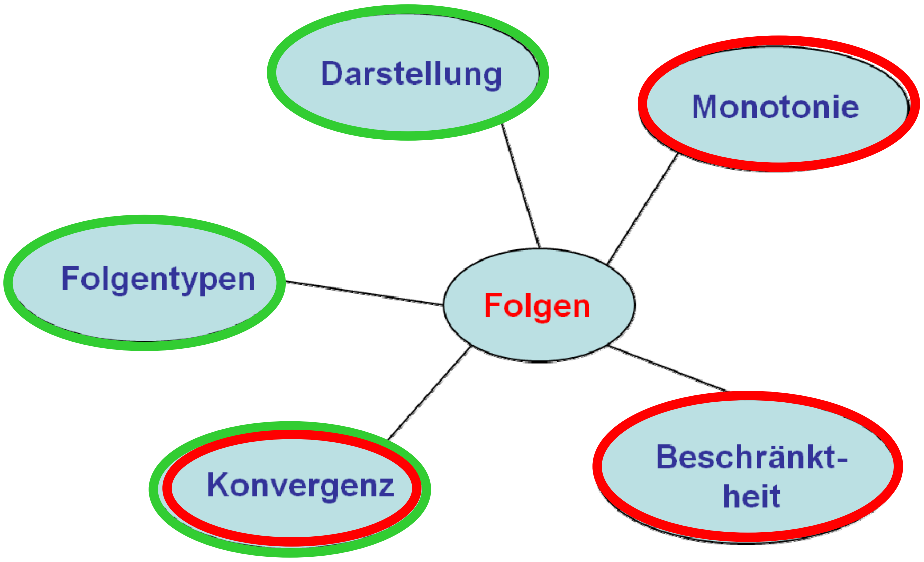
Beispiel 1: Folge beschränkt mit einem Häufungspunkt

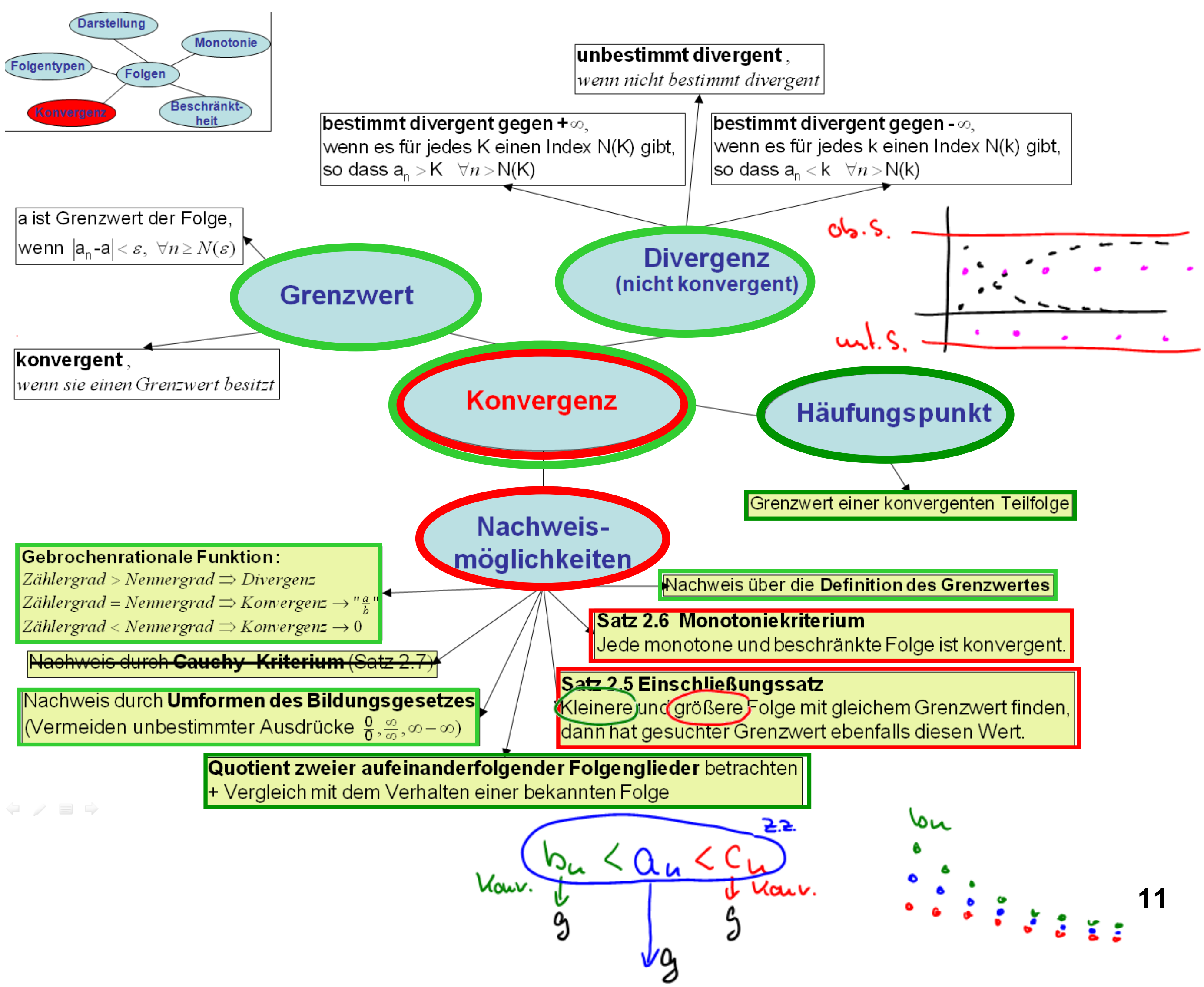


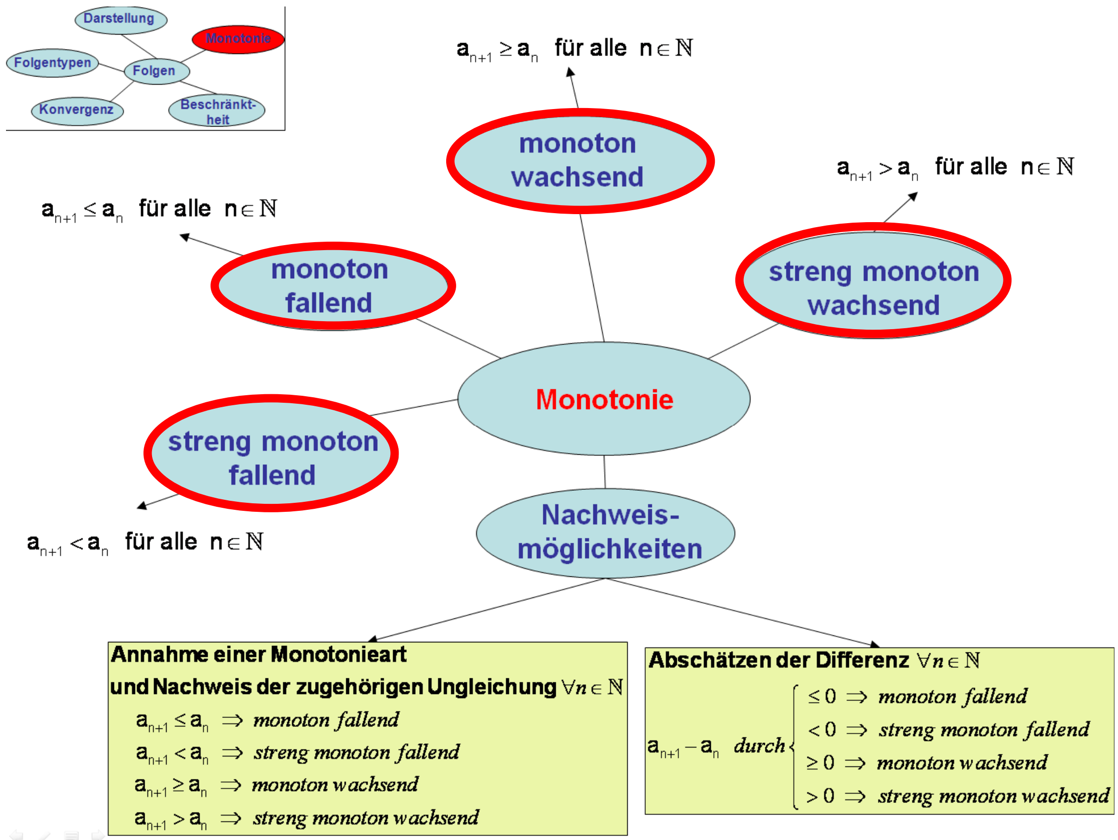
Beispiel 2: Folge beschränkt mit 2 Häufungspunkten

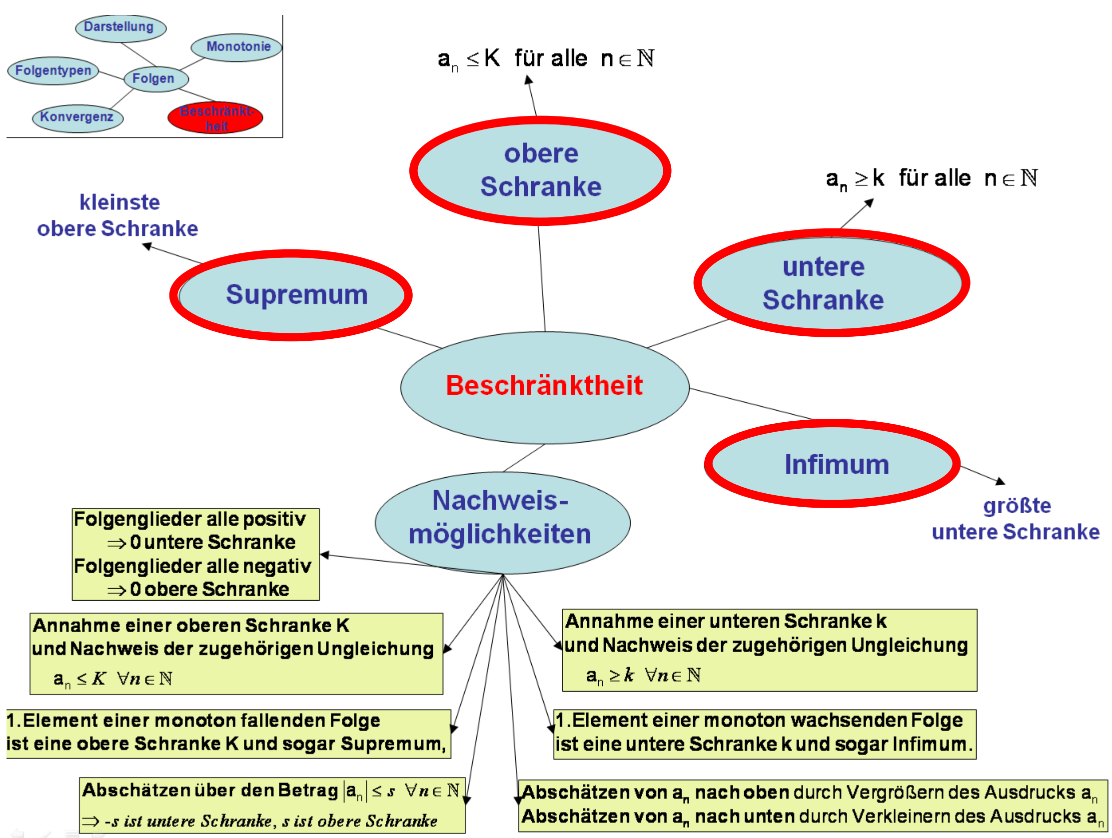


Begriffe im Zusammenhang mit Folgen $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$






Darstellung
Monotonie
Folgentypen
Folgen
Konvergenz
Beschränkt-heit
$a_{n+1} \geq a_n$ für alle $n \in \mathbb{N}$
monoton wachsend
$a_{n+1} > a_n$ für alle $n \in \mathbb{N}$
$a_{n+1} \leq a_n$ für alle $n \in \mathbb{N}$
monoton fallend
streng monoton wachsend
Monotonie
streng monoton fallend
Nachweis-möglichkeiten
$a_{n+1} < a_n$ für alle $n \in \mathbb{N}$
Annahme einer Monotonieart und Nachweis der zugehörigen Ungleichung $\forall n \in \mathbb{N}$
$a_{n+1} \leq a_n \Rightarrow$ *monoton fallend*
$a_{n+1} < a_n \Rightarrow$ *streng monoton fallend*
$a_{n+1} \geq a_n \Rightarrow$ *monoton wachsend*
$a_{n+1} > a_n \Rightarrow$ *streng monoton wachsend*
Abschätzen der Differenz $\forall n \in \mathbb{N}$
$a_{n+1} - a_n$ *durch* $\begin{cases} \leq 0 \Rightarrow \textit{monoton fallend} \\ < 0 \Rightarrow \textit{streng monoton fallend} \\ \geq 0 \Rightarrow \textit{monoton wachsend} \\ > 0 \Rightarrow \textit{streng monoton wachsend} \end{cases}$


Darstellung
Monotonie
Folgentypen
Folgen
Konvergenz
Beschränktheit
$a_n \leq K$ für alle $n \in \mathbb{N}$
obere Schranke
$a_n \geq k$ für alle $n \in \mathbb{N}$
kleinste obere Schranke
Supremum
untere Schranke
Beschränktheit
Infimum
größte untere Schranke
Nachweis-möglichkeiten
Folgenglieder alle positiv $\Rightarrow$ 0 untere Schranke
Folgenglieder alle negativ $\Rightarrow$ 0 obere Schranke
Annahme einer oberen Schranke K und Nachweis der zugehörigen Ungleichung $a_n \leq K \;\; \forall n \in \mathbb{N}$
Annahme einer unteren Schranke k und Nachweis der zugehörigen Ungleichung $a_n \geq k \;\; \forall n \in \mathbb{N}$
1.Element einer monoton fallenden Folge ist eine obere Schranke K und sogar Supremum,
1.Element einer monoton wachsenden Folge ist eine untere Schranke k und sogar Infimum.
Abschätzen über den Betrag $|a_n| \leq s \;\; \forall n \in \mathbb{N}$
$\Rightarrow -s$ *ist untere Schranke,* s *ist obere Schranke*
Abschätzen von a_n nach oben durch Vergrößern des Ausdrucks a_n
Abschätzen von a_n nach unten durch Verkleinern des Ausdrucks a_n

Eigenschaften: Monotonie

4.1.3 Monotonie

Definition 4.4: Monotonie

Eine Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ heißt

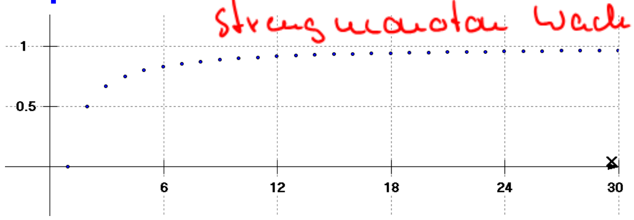
- **monoton wachsend**, wenn $\boxed{a_{n+1} \geq a_n}$ für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt.
- **monoton fallend**, wenn $\boxed{a_{n+1} \leq a_n}$ für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt.
- **streng monoton wachsend**, wenn $\boxed{a_{n+1} > a_n}$ für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt.
- **streng monoton fallend**, wenn $\boxed{a_{n+1} < a_n}$ für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt.

Beispiel:

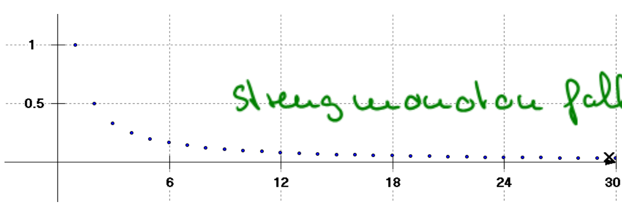
1. Die Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *mit* $a_n = \frac{n}{n+1}$ ist streng monoton wachsend.
2. Die Folge 0.9, 0.7, 1.0, 0.8, 1.1,.... ist weder monoton wachsend noch monoton fallend.
3. Die Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *mit* $a_n = \frac{2}{n} - \frac{1}{n^2}$ ist streng monoton fallend.

Beispiele:

streng monoton wachsend



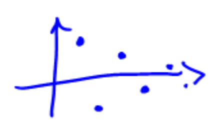
$$a_n = 1 - \frac{1}{n}$$



streng monoton fallend

$$a_n = \frac{1}{n}$$

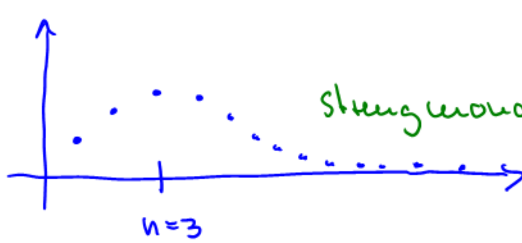
Bemerkung:



(1) Eine **alternierende Folge** ist weder monoton wachsend noch monoton fallend.

(2) Eine **konstante Folge** ist sowohl monoton wachsend als auch monoton fallend.

(3) Manchmal kann die Monotonie für Bereich von n angegeben.



streng monoton fallend ab n=3

$\forall n \in \mathbb{N}$ mit $n \geq 3$

4.1.3 Monotonie

Definition 4.4: Monotonie

Eine Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ heißt

- **monoton wachsend,** wenn $a_{n+1} \geq a_n$ für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt.
- **monoton fallend,** wenn $a_{n+1} \leq a_n$ für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt.
- **streng monoton wachsend,** wenn $a_{n+1} > a_n$ für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt.
- **streng monoton fallend,** wenn $a_{n+1} < a_n$ für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt.

Beispiel:

1. Die Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *mit* $a_n = \frac{n}{n+1}$ ist streng monoton wachsend.
2. Die Folge 0.9, 0.7, 1.0, 0.8, 1.1,.... ist weder monoton wachsend noch monoton fallend.
3. Die Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *mit* $a_n = \frac{2}{n} - \frac{1}{n^2}$ ist streng monoton fallend.

Nachweis der Monotonie - 2 Möglichkeiten

mit einer Annahme

(1) Nachweis, dass eine der Beziehungen gilt:

(I) Annahme treffen z.B. monoton wachsend

$$\overbrace{a_{n+1} \geq a_n}^{a_{n+1}-a_n \geq 0} \;\vee\; \overbrace{a_{n+1} > a_n}^{a_{n+1}-a_n > 0} \;\vee\; \overbrace{a_{n+1} \leq a_n}^{a_{n+1}-a_n \leq 0} \;\vee\; \overbrace{a_{n+1} < a_n}^{a_{n+1}-a_n < 0} \qquad \forall n \in \mathbb{N}$$

(II) gültige Umformungen

(III) welche Aussage prüfen

(2) Betrachtung der Differenz $a_{n+1} - a_n$

mit anschließender Überprüfung, ob der Ausdruck positiv oder negativ ist des Ausdrucks

.

(I) Ansatz $\boxed{a_{n+1} - a_n}$

- $\geq 0 \Rightarrow$ Folge ist monoton wachsend
- $> 0 \Rightarrow$ Folge ist streng monoton wachsend
- $\leq 0 \Rightarrow$ Folge ist monoton fallend
- $< 0 \Rightarrow$ Folge ist streng monoton fallend

(II) gültige Umformungen

(III) Auswertung

.

Beispiel: Nachweis der Montonie

Sei $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit $a_n = \frac{3n+1}{n+1}$ gegeben

1. Beweismöglichkeit:

Annahme: Folge sei monoton wachsend

zz: $a_{n+1} \overset{>}{\geqslant} a_n \quad \forall n \in \mathbb{N}$

I Annahme

$$\frac{3(n+1)+1}{(n+1)+1} \overset{>}{\geqslant} \frac{3n+1}{n+1}$$

II Umformungen

$$\frac{3n+4}{n+2} \overset{>}{\geqslant} \frac{3n+1}{n+1} \quad \Big| \cdot \underbrace{(n+1)}_{>0} \cdot \underbrace{(n+2)}_{>0}$$

$$(n+1)(3n+4) \overset{>}{\geqslant} (3n+1)(n+2)$$

$$\underline{3n^2} + \underline{7n} + 4 \overset{>}{\geqslant} \underline{3n^2} + \underline{7n} + 2$$

III Prüfung wahre Aussage

$$4 \overset{>}{\geqslant} 2$$ wahre Aussage $\Rightarrow$ Annahme gezeigt

auch $4>2$ ist wahre Aussage $\Rightarrow$ Folge ist sogar streng monoton wachsend

2. Beweismöglichkeit:

Differenz der Folgenglieder betrachten

$a_{n+1} - a_n$

I Ansatz

$$= \frac{3(n+1)+1}{(n+1)+1} - \frac{3n+1}{n+1}$$

$$= \frac{(3n+4)\cdot(n+1)}{(n+2)\cdot(n+1)} - \frac{(3n+1)\cdot(n+2)}{(n+1)\cdot(n+2)}$$

II Umformungen

$$= \frac{(3n^2+7n+4) - (3n^2+7n+2)}{(n+2)(n+1)}$$

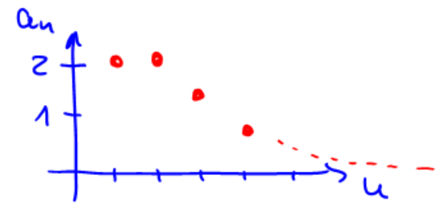
III Auswertung

$$= \boxed{\frac{\overset{>0}{2}}{\underbrace{(n+2)}_{>0}\underbrace{(n+1)}_{>0}}} > 0 \Rightarrow \text{Folge ist streng monoton wachsend}$$

Beispiel: Nachweis der Montonie

Folge $a_n = \frac{2^n}{n!}$

$n=1: \; 2$
$n=2: \; 2$
$n=3: \; \frac{4}{3}$
$n=4: \; \frac{2}{3}$



1. Beweismöglichkeit:

Annahme: monoton fallend

$$a_{n+1} \leq a_n$$

$$\frac{2^{n+1}}{(n+1)!} \leq \frac{2^n}{n!} \qquad | \cdot \underbrace{(n+1)!}_{>0} \cdot \underbrace{n!}_{>0}$$

$$2^{n+1} \cdot \cancel{n!} \leq 2^n \cdot \underbrace{(n+1)!}_{\underbrace{1 \cdot 2 \cdot \ldots \cdot n}_{\cancel{n!}} \cdot (n+1)} \qquad | : \underbrace{n!}_{>0}$$

$$2^{n+1} \leq 2^n (n+1) \qquad | : 2^n$$

$$2 \leq n+1 \Rightarrow \text{wahre Aussage} \Rightarrow \text{Folge ist monoton fallend}$$

für $n=1$: Gleichheit erfüllt

2. Beweismöglichkeit:

Differenz der Folgenglieder betrachten

$$a_{n+1} - a_n$$

$$= \frac{2^{n+1}}{(n+1)!} - \underbrace{\frac{2^n}{n!} \cdot \frac{(n+1)}{(n+1)}}_{(n+1)!}$$

$$= \frac{2^{n+1} - 2^n (n+1)}{(n+1)!}$$

$$= \frac{2^n (2 - (n+1))}{(n+1)!}$$

$$= \frac{\overset{>0}{2^n} \overbrace{(1-n)}^{n=1:\; =0,\; n \geq 2:\; <0}}{\underbrace{(n+1)!}_{>0}} \leq 0 \Rightarrow \text{Folge ist monoton fallend}$$

Eigenschaften: Beschränktheit

Definition 4.2: Beschränktheit

Eine Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ heißt **nach oben beschränkt** durch eine reelle Konstante K,

wenn $\boxed{a_n \le K \text{ für alle } n \in \mathbb{N}}$ gilt. K ist eine obere Schranke

Eine Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ heißt **nach unten beschränkt** durch eine reelle Konstante k,

wenn $\boxed{a_n \ge k \text{ für alle } n \in \mathbb{N}}$ gilt. k ist eine untere Schranke

Eine nach oben und unten beschränkte Folge heißt **beschränkt**. K und k heißen **Schranken**.

Definition 4.3: Supremum, Infimum

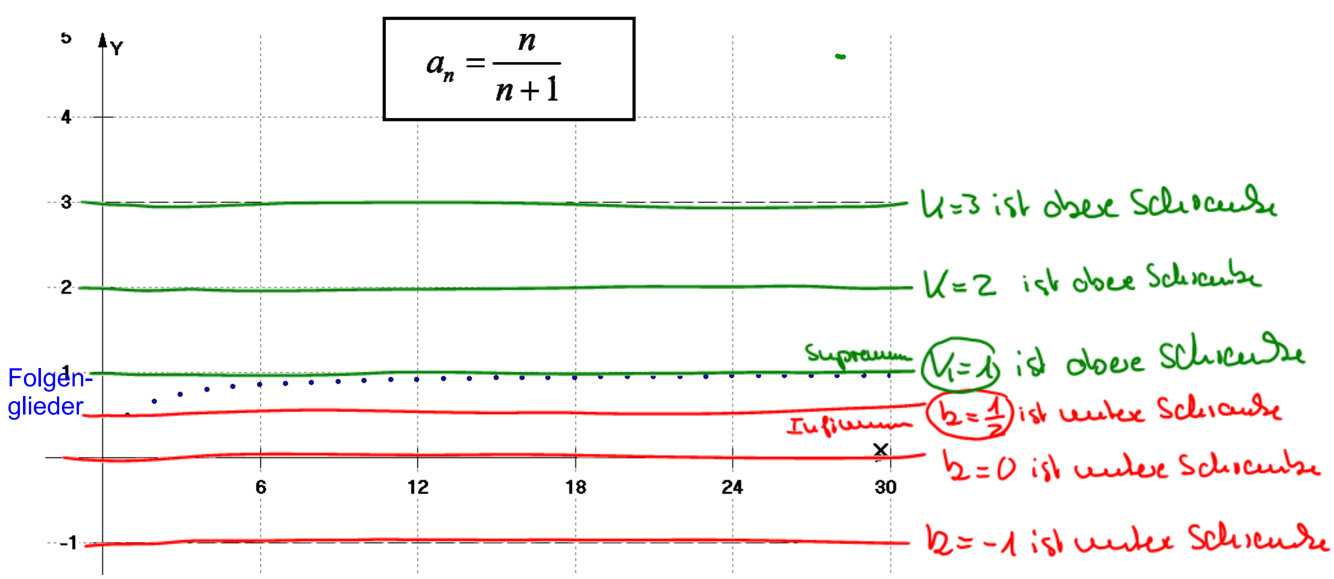
Die kleinste obere Schranke einer Folge heißt **Supremum** (oder obere Grenze).

Die größte untere Schranke einer Folge heißt **Infimum**.

Beispiel:

Die Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *mit* $a_n = \frac{n}{n+1}$ ist nach oben beschränkt mit K=1 und nach mit k=0. K=1 ist gleichzeitig das Supremum. Das Infimum ist k=$\frac{1}{2}$.

Beispiel:

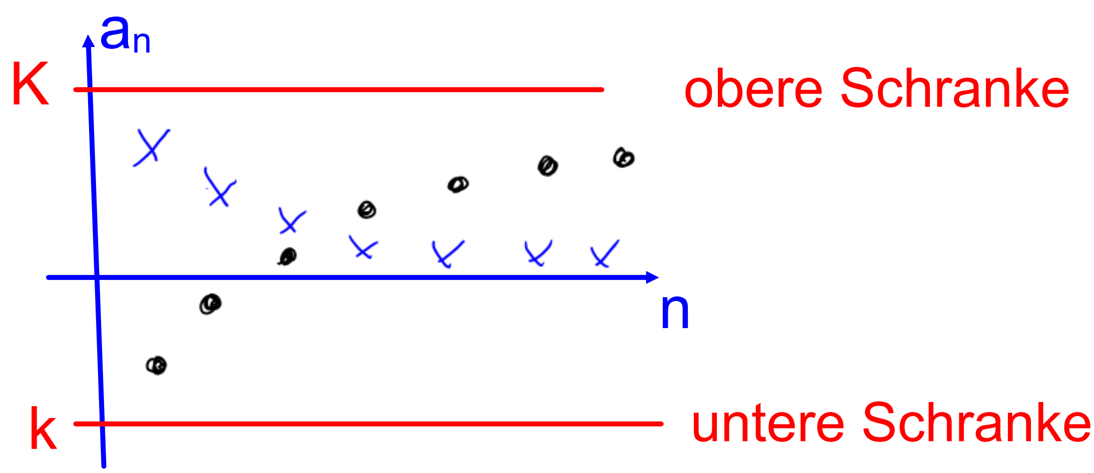


Visualisierung des Begriffes "Beschränktheit"

Alle Folgenglieder sind

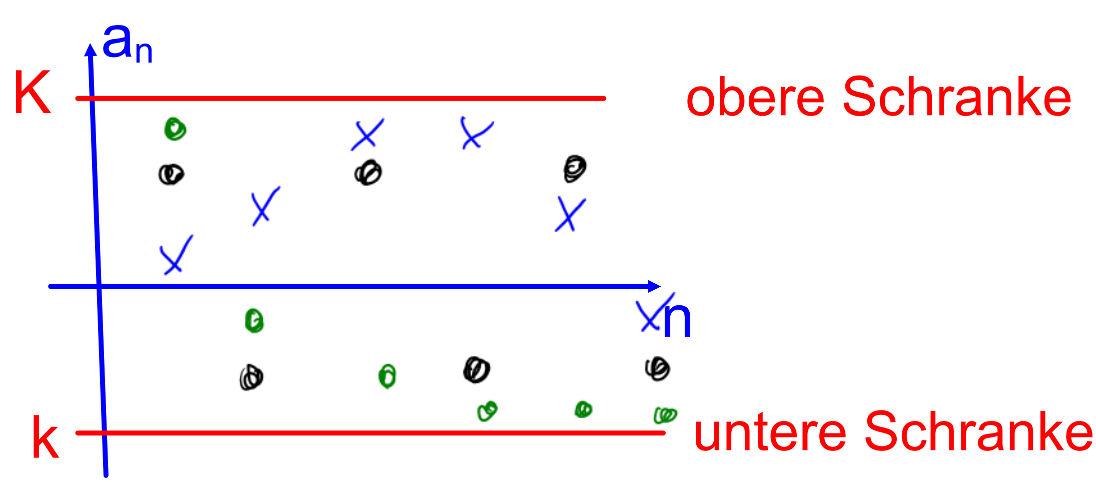
kleiner als eine reelle Zahl K, genannt obere Schranke

und größer als eine reelle Zahl k, genannt untere Schranke



"Beschränktheit-Monotonie-Konvergenz"

Zwischen den Schranken kann die Folge sowohl monoton als auch nicht monoton, konvergent oder nicht konvergent verlaufen



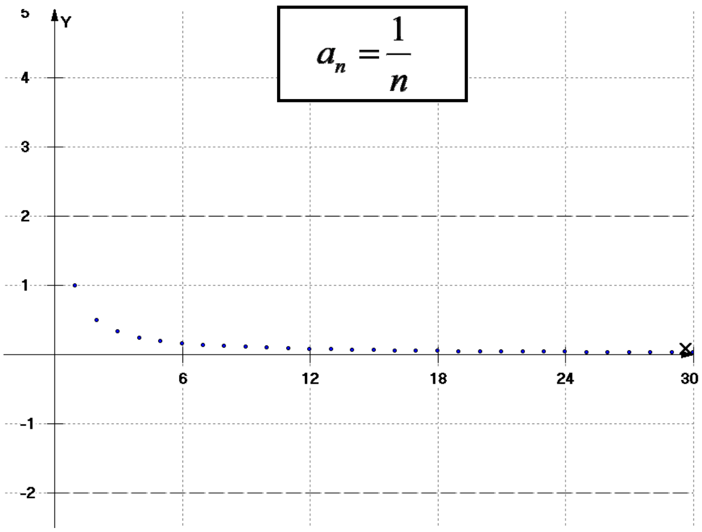
Aus der Konvergenz einer Folge kann nicht auf die Monotonie einer Folge geschlossen werden.

Beispiele zur Beschränktheit

Visualisierung des Begriffes "Beschränktheit"

Alle Folgenglieder sind kleiner als eine reelle Zahl K, genannt obere Schranke

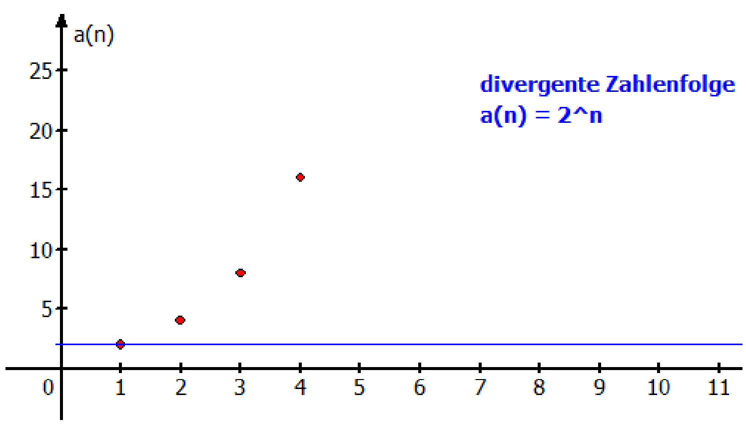
und größer als eine reelle Zahl k, genannt untere Schranke



ist **beschränkt**,

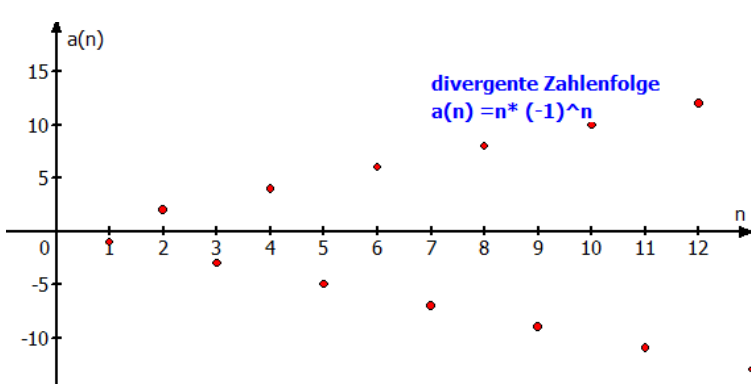
da die Folge sowohl nach **oben** durch **K=2** als auch nach **unten** durch **k=-2** beschränkt ist.

K=1 ist das **Supremum** (die kleinste obere Schranke) und **k=0** das **Infimum** (die größte untere Schranke)



ist nur nach **unten beschränkt**, durch **k=2** beschränkt ist.

k=2 ist auch das **Infimum**



ist **nicht beschränkt**,

Nachweis der Beschränktheit

1) durch Umformen des Bildungsgesetzes(Folgenvorschrift)

2) mit Hilfe der Beschränktheitsbedingung über den Betrag

$|x| < 4 \Rightarrow -4 < x < 4$

$(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *ist beschränkt* $\Leftrightarrow \exists s \in \mathbb{R}_0^+ : |a_n| \leq s \ \forall n \in \mathbb{N}$ $\quad -s < a_n < +s$

~~liefern~~ liefert eine untere Schranke $-s$ und eine obere Schranke s

3) bei bekannter Monotonie

Folge ist monoton wachsend:
 1.Folgenglied ist untere Schranke(sogar Infimum)
Folge ist monoton fallend:
 1.Folgenglied ist obere Schranke(sogar Supremum

Beispiel 1: Umformen des Bildungsgesetzes

Abschätzen für eine obere Schranke

Variante 1: $\frac{3n+1}{n+1} \overset{\text{Polynomdivision}}{=} 3 - \frac{2}{\underbrace{n+1}_{>0}} < 3 \Rightarrow K = 3$ ist obere Schranke $\forall n \in \mathbb{N}$

Polynomdivision
$(3n+1) : (n+1) = 3 - \frac{2}{n+1}$
$-(3n+3)$
-2

Variante 2: $\frac{3n+1}{n+1} < \frac{3n+1}{n} \leq \frac{3n+n}{n} = \frac{4n}{n} = 4 \Rightarrow K = 4$ ist obere Schranke

Nenner verkleinern   Zähler vergrößern

Abschätzen für eine untere Schranke

Variante 1: $\frac{\overbrace{3n+1}^{>0}}{\underbrace{n+1}_{>0}} > 0 \Rightarrow k = 0$ ist untere Schranke $\forall n \in \mathbb{N}$

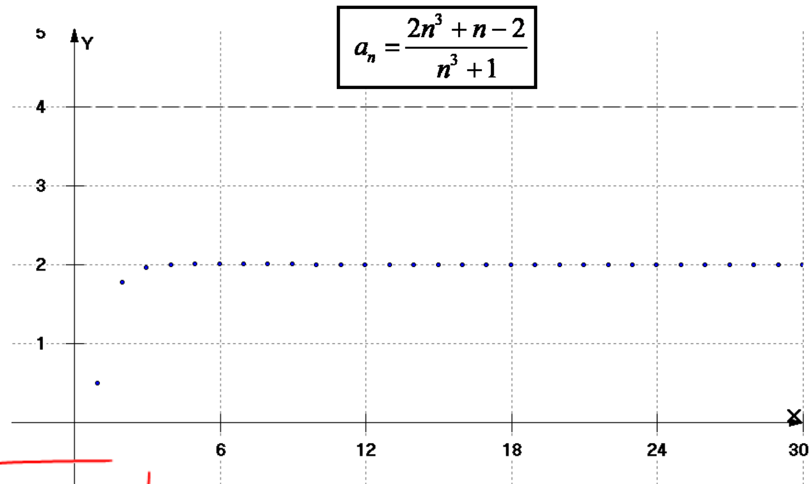
Variante 2: $\frac{3n+1}{n+1} > \frac{3n}{n+1} \geq \frac{3n}{n+n} = \frac{3n}{2n} = \frac{3}{2}$ $\quad k = \frac{3}{2}$ ist untere Schranke

Zähler verkleinern   Nenner vergrößern

Bemerkung:
Durch Abschätzen kann man die Existenz einer Schranke nachweisen. Die Schranke ist aber nicht eindeutig. Je gröber die Abschätzung ist, desto weiter liegt die Schranke von den Folgengliedern entfernt.

Nachweis der Beschränktheit

Beispiel 2: Abschätzen über den Betrag



Ansatz

$$|a_n| = \left|\frac{\overbrace{2n^3+n-2}^{>0 \text{ wenn}}}{\underbrace{\underbrace{n^3+1}_{>0}}_{>0}}\right| = \frac{2n^3+n-2}{n^3+1} < S$$

$$< \frac{2n^3+n}{n^3+1}$$

Zähler vergrößern

$$< \frac{2n^3+n}{n^3}$$

Nenner verkleinern

$$\leq \frac{2n^3+n^3}{n^3}$$

$$= \frac{3\cancel{n^3}}{\cancel{n^3}}$$

$$= 3 \; S \quad \Rightarrow \quad -S = -3 = k \text{ ist untere Schranke}$$

$$+S = +3 = K \text{ ist obere Schranke}$$

$$-3 < \boxed{\frac{2n^3+n-2}{n^3+1}} < 3$$

Nachweis der Beschränktheit durch Abschätzen

Strategien zum Abschätzen bei Brüchen

(1) Einen Bruch nach oben abschätzen,
d.h. einen größeren Bruch erreichen

durch
Zähler vergrößern
und/oder
Nenner verkleinern

(2) Einen Bruch nach unten abschätzen,

d.h. einen kleineren Bruch erreichen

durch
Zähler verkleinern
und/oder
Nenner vergrößern

.

Beispiel 2: Abschätzen über den Betrag

Gegenbeispiel: Divergente Folge

$$|a_n| = \left| \frac{n^2+2}{n+1} \right|$$

in Übungen

Nur Unterschranke durch Abschätzen bestimmen

$$a_n = \frac{n^2+2}{n+1}$$

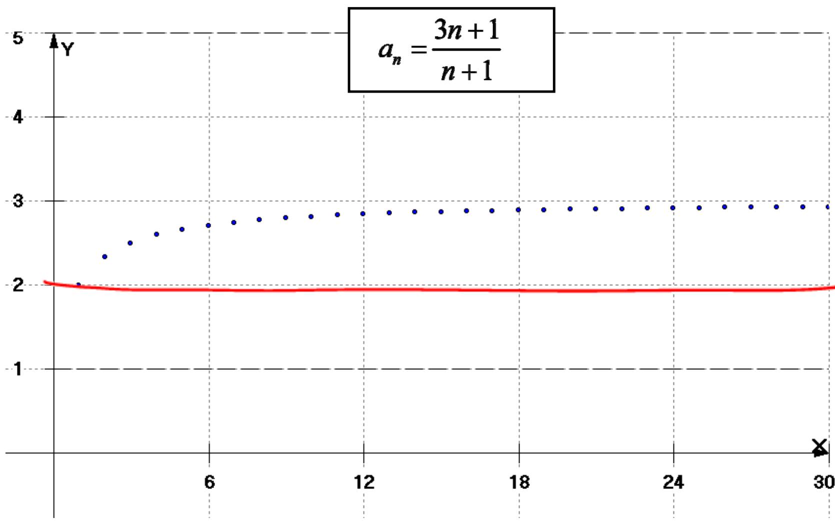
in den Übungen

Nachweis der Beschränktheit

Beispiel 3: bei bekannter Monotonie

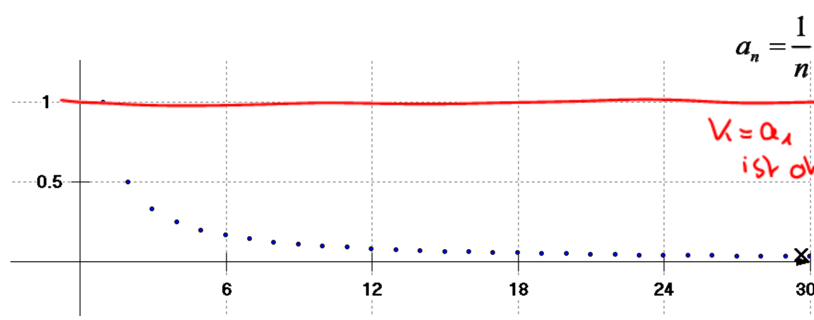
Folge ist monoton wachsend:
1.Folgenglied ist untere Schranke(sogar Infimum)
Folge ist monoton fallend:
1.Folgenglied ist obere Schranke(sogar Supremum

Siehe auch vorne



streng
Folge ist monoton wachsend

$b = a_1 = 2$ ist untere Schranke (Infimum)



Folge ist streng monoton fallend

$K = a_1$ ist obere Schranke (Supremum)

Richtig oder falsch?

http://math-www.uni-paderborn.de/~mathkit/Inhalte/Folgen/preview/index.html

Welche der folgenden Behauptungen sind richtig, welche sind falsch?

Jede monotone Folge ist konvergent.
- ○ richtig
- ○ falsch

Jede beschränkte Folge ist konvergent.
- ○ richtig
- ○ falsch

Jede konvergente Folge ist monoton und beschränkt.
- ○ richtig
- ○ falsch

in den Übungen

Jede divergente Folge ist nicht beschränkt.
- ○ richtig
- ○ falsch

in den Übungen

Was hat Konvergenz mit Monotonie zu tun?

monoton + konvergent Beispiel $a_n = \frac{1}{n}$

nicht monoton + konvergent Beispiel: $a_n = (-1)^n \cdot \frac{1}{n}$

monoton + nicht konvergent Beispiel: $a_n = n$

nicht monoton + nicht konvergent Beispiel $a_n = (-1)^n \cdot n$

⇒ alleine aus der Monotonie kann man nicht auf die Konvergenz einer Folge schließen und umgekehrt auch nicht

Monotonie $\not\Rightarrow$ Konvergenz

Konvergenz $\not\Rightarrow$ Monotonie

Was hat Konvergenz mit Beschränktheit zu tun?

beschränkt + konvergent Beispiel: $a_n = \frac{1}{n}$

beschränkt + nicht konvergent Beispiel: $a_n = (-1)^n$

⇒ alleine aus der Beschränktheit kann man nicht auf Konvergenz schließen

Beschränkt $\not\Rightarrow$ Konvergenz

nicht beschränkt + konvergent Beispiel: gibt es nicht

nicht beschränkt + nicht konvergent Beispiel: $a_n = (-1)^n \cdot n$

⇒ aus der Konvergenz einer Folge kann man auf die Beschränktheit schließen

Konvergenz ⇒ Beschränkt

Folgerungen: Wann kann man auf Konvergenz einer Folge schließen?

- Monotonie $\not\Rightarrow$ Konvergenz
- Beschränktheit $\not\Rightarrow$ Konvergenz
- Monotonie + Beschränktheit ⇒ Konvergenz

und das besagt das Monotoniekriterium

Zusammenfassung der vorherigen Seite

Konvergenz $\Rightarrow$ Beschränktheit

Satz 2.3:
Jede konvergente Folge ist beschränkt.

Monotonie + Beschränktheit
$\Rightarrow$ Konvergenz

Satz 2.6: Monotoniekriterium
Eine monotone und beschränkte Zahlenfolge ist stets konvergent.

Nachweis der Konvergenz einer Folge mit Hilfe des Monotoniekriteriums:

(1) Nachweis Monotonie
(2) Nachweis Beschränktheit

$\Big\}$ $\Rightarrow$ Folge ist konvergent

Beispiel:
Die Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *mit* $a_n = \frac{1}{\sqrt[3]{n}}$ ist konvergent, da sie erstens die Schranken 0(unten) und 1(oben) hat und zweitens monoton fallend ist.

Aufgabe 4:

Weisen Sie mit Hilfe des Monotoniekriteriums(Satz 2.6) nach, dass die Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit $a_n = \frac{2^n}{n!}$ konvergent ist.

<table>
<tr><td><u>Folgenvorschrift</u>
$a_n = \frac{2^n}{n!}$
<u>Aufzählung der ersten fünf Folgenelemente</u></td><td><u>Graphische Darstellung der Folge</u></td></tr>
<tr><td><u>Monotonie</u></td><td rowspan="2"><u>Beschränktheit</u>
Obere Schranke:

Supremum:

Untere Schranke:

Infimum:</td></tr>
<tr><td><u>Konvergenz/ Grenzwert</u></td></tr>
</table>

Aufgabe 4:

Weisen Sie mit Hilfe des Monotoniekriteriums(Satz 2.6) nach, dass die Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit $a_n = \frac{2^n}{n!}$ konvergent ist.

Reihenfolge der Vorgehensweise

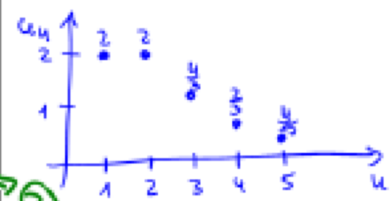
Folgenvorschrift

$$a_n = \frac{2^n}{n!}$$

Aufzählung der ersten fünf Folgenelemente

(1) $a_1=2,\ a_2=2,\ a_3=\frac{4}{3},\ a_4=\frac{2}{3},\ a_5=\frac{4}{15}$ (2)

Graphische Darstellung der Folge



Monotonie

(3)

$$a_{n+1}-a_n = \frac{2^{n+1}}{(n+1)!} - \frac{2^n}{n!}\cdot\frac{(n+1)}{(n+1)}$$

$$= \frac{2^{n+1}-2^n(n+1)}{(n+1)!}$$

$$= \frac{2^n(2-n-1)}{(n+1)!}$$

$$= \frac{\overbrace{2^n}^{>0}\overbrace{(1-n)}^{\geq 0\ \forall n\in\mathbb{N}}}{\underbrace{(n+1)!}_{>0}}$$

$\leq 0 \Rightarrow$ Folge ist monoton fallend

Beschränktheit

Obere Schranke:

(4) Folge ist monoton fallend

$\Rightarrow$ 1. Folgenglied ist obere Schranke und gleichzeitig Supremum

$\Rightarrow K = a_1 = 2$ ist eine obere Schranke

Supremum:

(5) $K = a_1 = 2$ ist das Supremum.

Untere Schranke:

(6) $a_n = \frac{\overbrace{2^n}^{>0}}{\underbrace{(n+1)!}_{>0}} > 0$

Folgenglieder sind stets positiv

$\Rightarrow k = 0$ ist eine untere Schranke

Infimum:

(9) Das Infimum ist $k=0$, da der Grenzwert der monoton fallenden Folge $a=0$ ist.

Konvergenz/ Grenzwert

(7) Die Folge ist monoton fallend und beschränkt

$\Rightarrow$ Die Folge ist aufgrund des Monotoniekriteriums konvergent

(8) Berechnung des Grenzwertes durch Vergleich mit einer geometrischen Folge:

$$\lim_{n\to\infty} q = \lim_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n\to\infty}\frac{\frac{2^{n+1}}{(n+1)!}}{\frac{2^n}{n!}} = \lim_{n\to\infty}\frac{2^{n+1}}{(n+1)!}\cdot\frac{n!}{2^n}$$

$$= \lim_{n\to\infty}\frac{2}{n+1} = 0$$

$\Rightarrow$ im Unendlichen verhält sich die Folge wie eine geometrische Folge mit $|q|<1$

$\Rightarrow$ Die Folge konvergiert gegen den Grenzwert $a=0$

Konvergenzkriterien

Bestimmung des Grenzwertes durch Vergleich mit bekannten Folgen

Satz 4.2: Vergleichssatz zur Bestimmung von Konvergenz

Es seien $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ und $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ zwei konvergente Folgen mit Grenzwert a bzw. b. Ferner sei $(c_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine weitere Folge und N_0 ein endlicher Index.
Dann gelten die Aussagen:

(1) Aus $a_n = b_n \ \forall n \geq N_0$ folgt für die Grenzwerte $a = b$.

(2) Aus $a_n \leq b_n \ \forall n \geq N_0$ folgt für die Grenzwerte $a \leq b$.

(3) Aus $a_n < b_n \ \forall n \geq N_0$ folgt für die Grenzwerte $a \leq b$.

(4) Aus $a_n \leq c_n \leq b_n \ \forall n \geq N_0$ und $a = b$ folgt die Konvergenz der Folge $(c_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit dem Grenzwert $c = a$ (Einschließungssatz).

2.2.3 Konvergenzkriterien

Satz 2.5: Einschließungskriterium

Es seien $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ zwei konvergente Folgen mit dem Grenzwert a.

Gilt für die Elemente der Folge $(c_n)_{n\in\mathbb{N}}$ $\forall n \geq N_0$ die Einschließung $a_n \leq c_n \leq b_n$, so ist die Folge $(c_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergent mit Grenzwert a.

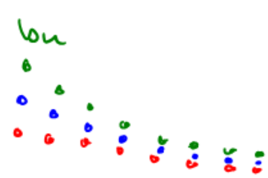
Beispiel:

Die Folge $(c_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *mit* $c_n = \frac{\sin n}{n}$ ist konvergent mit Grenzwert 0, da zwischen den beiden Nullfolgen $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *mit* $a_n = \frac{-1}{n}$ und $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *mit* $b_n = \frac{1}{n}$ liegt.

Beispiel:

z.z.

$$\text{Konv.}\ \underset{\substack{\downarrow\\ g}}{b_n} < \underset{\substack{\downarrow\\ g}}{a_n} < \underset{\substack{\downarrow\\ g}}{c_n}\ \text{Konv.}$$



Zusammenfassung Folgen: Was haben wir gelernt?

(1) Folgen allgemein/ Spezielle Folgen

- Geometrische Folgen
- Arithmetische Folgen
- Alternierende Folgen
- Harmonische Folge
- ......

(2) Konvergenz

- Nachweis eines vermuteten Grenzwertes

Nachweis eines vermuteten Grenzwertes a über die Genzwertbedigung der Definition:

$$|a_n - a| < \varepsilon$$

Ergebnis: Index n(ε), ab dem die Folgenwerte nur noch um ε vom Grenzwert abweichen.

Wert ε vorgeben ⇒ Index n(ε) berechnen

- Berechnung eines Grenzwertes: Umformen des Bildungsgesetzes

- Berechnung eines Grenzwertes. Vergleich mit geometrischer Folge

- Nachweis der Konvergenz über Beschränktheit und Monotonie

(3) Monotonie

- Nachweis über einen festen Ansatz einer speziellen Monotonieart

- Nachweis über die Betrachtung der Differenz

(4) Beschränktheit

- direkter Nachweis einer vermuteten Schranke

- Abschätzung über die Folgenvorschrift nach oben bzw. nach unten

- Abschätzen über den Betrag

- Ausnutzen der Kenntnis einer Monotonie