Physik 1
(PH1-B-REE1)

Michael Erhard

Themen heute

2. Fehler

2.1 Messfehler

2.2 Fehlerfortpflanzung

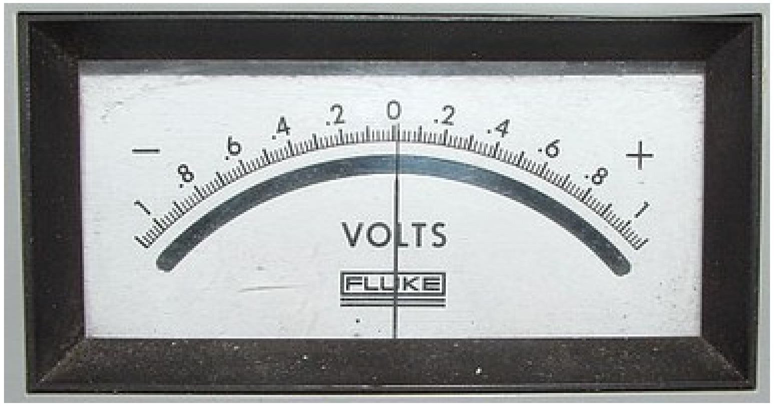
2.3 Arbeit

1.3 Vektorrechnung (Fortsetzung)

2. Messfehler und Fehlerfortpflanzung

2.1 Messfehler

„Wer misst, misst Mist“



- Eine Messung ist immer mit Fehlern behaftet
- Der gemessene Wert x_a weicht vom realen Wert x_r ab.
- Absoluter Fehler $$\Delta x = x_\mathrm{a} - x_\mathrm{r}$$
- Relativer Fehler $$\frac{\Delta x}{x_\mathrm{r}} = \frac{x_\mathrm{a}}{x_\mathrm{r}} - 1$$

2.1 Arten von Fehlern

Grobe Fehler

- defekte Messgeräte
- Zahlendreher
- falsches Instrument abgelesen
- unbekannte (undokumentierte!) Einstellungen am Messinstrument

Systematische Fehler

- schlecht abgeglichene Messinstrumente
- konstante Abweichungen / Offsets (verschobene Skala, ...)
- abweichende Messbedingungen (Temperatur, …)

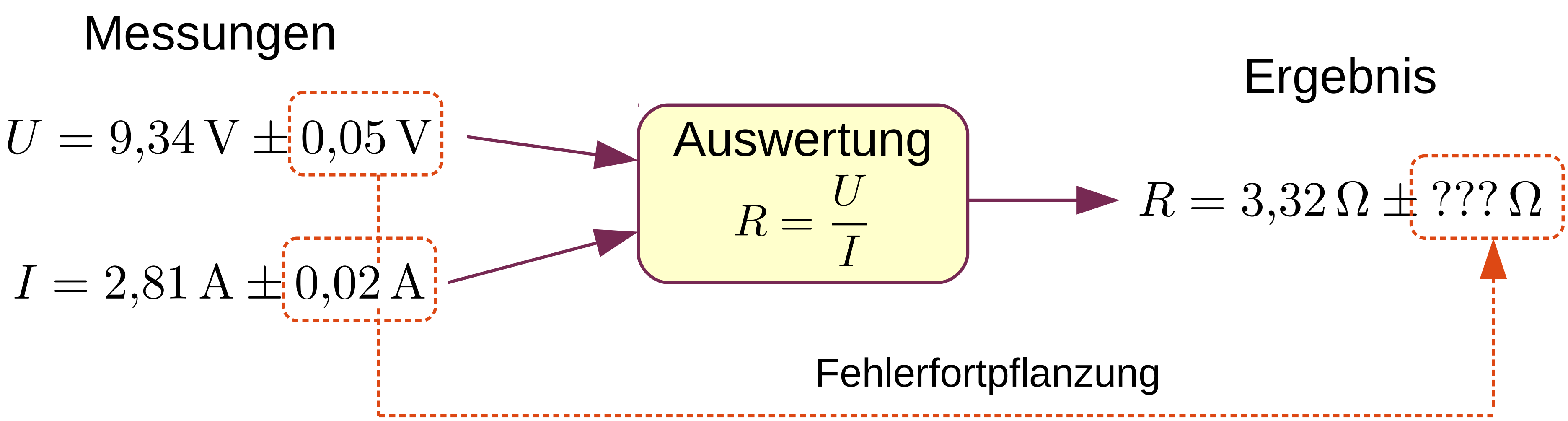
Zufällige Fehler

- Rauschen im Messsignal
- Störungen (z.B. elektromagnetische Störungen)
- sich ändernde (unbekannte) Umgebungsbedingungen

2.2 Umgang mit Messfehlern

Kunst liegt in der *Beherrschung* von Fehlern

- Minimierung der Fehler bei der Messung
- Protokollierung der Fehler: wie genau sind die Messungen?
  (z.B. $U = 9{,}34\,\mathrm{V} \pm 0{,}05\,\mathrm{V}$)
- Betrachtung der Auswirkungen auf das Ergebnis



2.2 Aufgabe

Sie schalten drei Widerstände mit den angegebenen Werten $R_1 = 100\,\Omega, R_2 = 150\,\Omega$ und $R_3 = 220\,\Omega$ in Reihe, sodass sich ein theoretischer Gesamtwiderstand von $R_{\mathrm{ges}} = R_1 + R_2 + R_3 = 470\,\Omega$ ergibt. Die Genauigkeit der Widerstände ist mit 1% angegeben.

Bestimmen Sie

1) die absoluten Fehler der drei einzelnen Widerstände
2) den absoluten Fehler des Gesamtwiderstandes
3) den relativen Fehler des Gesamtwiderstandes

2.2 Fehlerfortpflanzung

Motivation

Messungen

$U = 9{,}34\,\mathrm{V} \pm 0{,}05\,\mathrm{V}$

$I = 2{,}81\,\mathrm{A} \pm \boxed{0{,}02\,\mathrm{A}}$

Auswertung

$$R = \frac{U}{I}$$

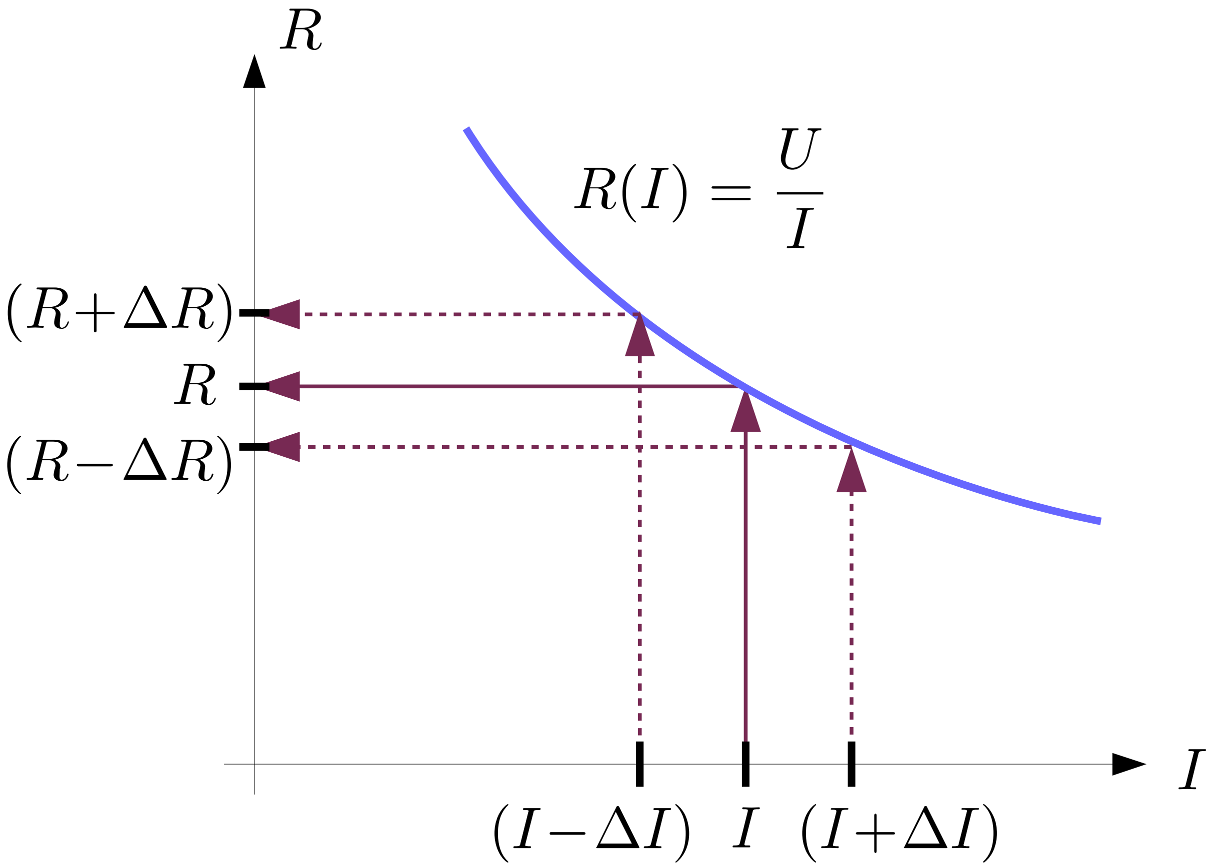
Ergebnis

$R = 3{,}32\,\Omega \pm \boxed{???\,\Omega}$

Einfluss von ΔI auf R ?

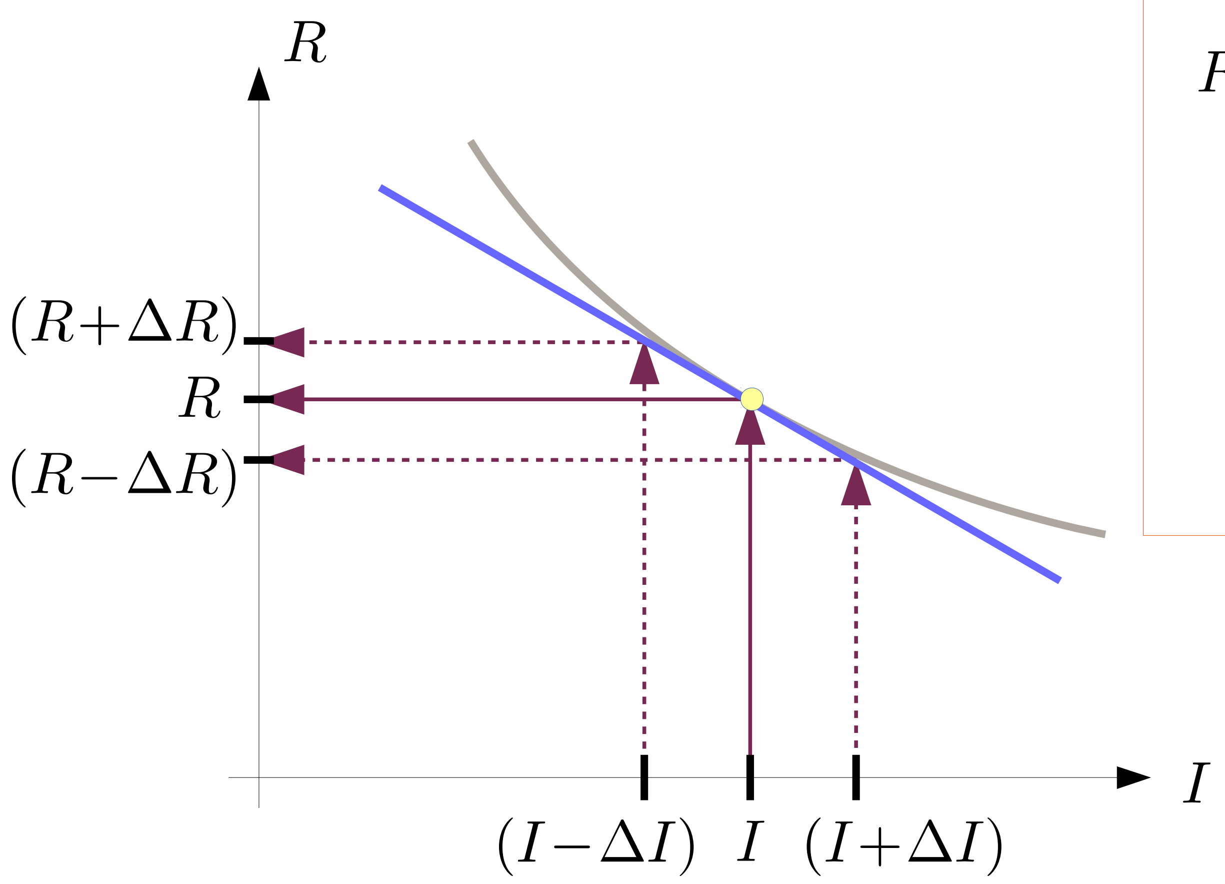
2.2 Fehlerfortpflanzung

Einfluss von ΔI auf R? $\quad (U = \text{const.})$

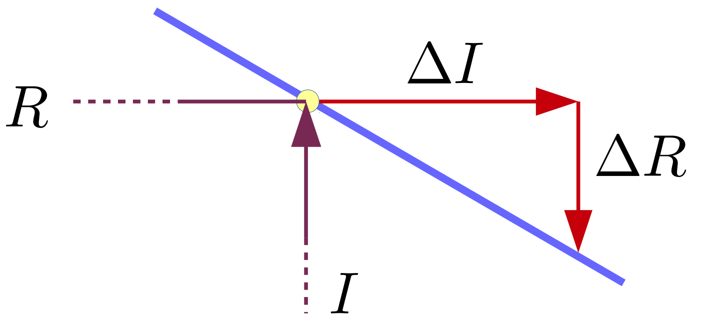


2.2 Fehlerfortpflanzung

Einfluss von ΔI auf R? $\quad (U = \text{const.})$



Näherung durch Tangente



$$\Delta R \approx \left| \frac{\mathrm{d}R(U,I)}{\mathrm{d}I} \right| \cdot \Delta I$$

$$\Delta R \approx \left| -\frac{U}{I^2} \right| \Delta I = \frac{U}{I^2} \Delta I$$

2.2 Einschub: partielle Ableitung

Definition Partielle Differentiation

Für die Funktion mehrerer Veränderlichen $f = f(x_1, \ldots, x_n)$ gilt

$$\frac{\partial f(x_1, \ldots, x_n)}{\partial x_i} := \lim_{\epsilon \to 0} \frac{f(x_1, \ldots, x_i + \epsilon, \ldots, x_n) - f(x_1, \ldots, x_i, \ldots, x_n)}{\epsilon}$$

Rechenregel

$$\frac{\partial f}{\partial x_i} =$$

Leite f nach x_i ab und betrachte alle anderen $x_j, j \neq i$ als Konstanten.

2.2 Partielle Ableitung

Für die Funktion $f(x_1, x_2) = \mathrm{e}^{x_1\,x_2}$ gilt

a) $$\frac{\partial f(x_1, x_2)}{\partial x_1} = \mathrm{e}^{x_1\,x_2}$$

b) $$\frac{\partial f(x_1, x_2)}{\partial x_1} = x_1\,\mathrm{e}^{x_1\,x_2}$$

c) $$\frac{\partial f(x_1, x_2)}{\partial x_1} = x_2\,\mathrm{e}^{x_1\,x_2}$$

d) $$\frac{\partial f(x_1, x_2)}{\partial x_1} = x_1\,x_2\,\mathrm{e}^{x_1\,x_2}$$

Fehlerfortpflanzung

Methode der **Größtfehlerabschätzung**

V.a. systematische Fehler heben sich meistens nicht auf, d.h. die Beträge der einzelnen Fehler werden im Betrag aufaddiert.

Allgemein: $y = f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$

Beitrag von Δx_i zum Fehler: $\Delta y = \left| \frac{\partial f}{\partial x_i} \right| \Delta x_i$

Gesetz der **Fehlerfortpflanzung**

$$\boxed{\Delta y = \left| \frac{\partial f}{\partial x_1} \right| \Delta x_1 + \left| \frac{\partial f}{\partial x_2} \right| \Delta x_2 + \cdots + \left| \frac{\partial f}{\partial x_n} \right| \Delta x_n}$$

Anwendung Fehlerfortpflanzung

Für die Produktform $f(x_1, x_2, \ldots, x_n) = a\, x_1^{p_1}\, x_2^{p_2} \cdots x_n^{p_n}$ gilt

$$\frac{\Delta f}{|f|} = |p_1| \frac{\Delta x_1}{|x_1|} + |p_2| \frac{\Delta x_2}{|x_2|} + \cdots + |p_n| \frac{\Delta x_n}{|x_n|}$$

Es werden die relativen Fehler, jeweils multipliziert mit Betrag des Exponenten, addiert.

Achtung: gilt nicht für Summen, z.B. $f(x_1, x_2) = 2x_1 + x_2$

Anwendung Fehlerfortpflanzung

Für die Produktform $f(x_1, x_2, \ldots, x_n) = a\, x_1^{p_1}\, x_2^{p_2} \cdots x_n^{p_n}$ gilt

$$\frac{\Delta f}{|f|} = |p_1| \frac{\Delta x_1}{|x_1|} + |p_2| \frac{\Delta x_2}{|x_2|} + \cdots + |p_n| \frac{\Delta x_n}{|x_n|}$$

Es werden die <u>relativen</u> Fehler, jeweils multipliziert mit Betrag des Exponenten, addiert.

Beweis: es gilt $\displaystyle \frac{\partial f}{\partial x_i} = p_i\, x_1^{p_1} \cdots x_i^{p_i - 1} \cdots x_n^{p_n} = p_i \frac{x_1^{p_1} \cdots x_i^{p_i - 1} \cdots x_n^{p_n}}{x_i} = \frac{p_i}{x_i} f$

und damit $\displaystyle \frac{\Delta f}{|f|} = \frac{1}{|f|} \sum_{i=1}^{n} \left| \frac{\partial f}{\partial x_i} \right| \Delta x_i = \frac{1}{|f|} \sum_{i=1}^{n} \frac{|p_i|}{|x_i|} |f| = \sum_{i=1}^{n} |p_i| \frac{\Delta x_i}{|x_i|} \quad \square$

2.3 Arbeit

2.3 Arbeit

- Was ist Arbeit im *physikalischen* Sinne?
- Einen schweren Gegenstand halten (Maßkrug-Stemmen) ist noch keine Arbeit…
- Formelzeichen (von „work"): W
- Mechanische Arbeit ist das Produkt aus Kraft und Weg $\boxed{W = F\,s}$
- Einheiten (abgeleitet Einheit: Joule)

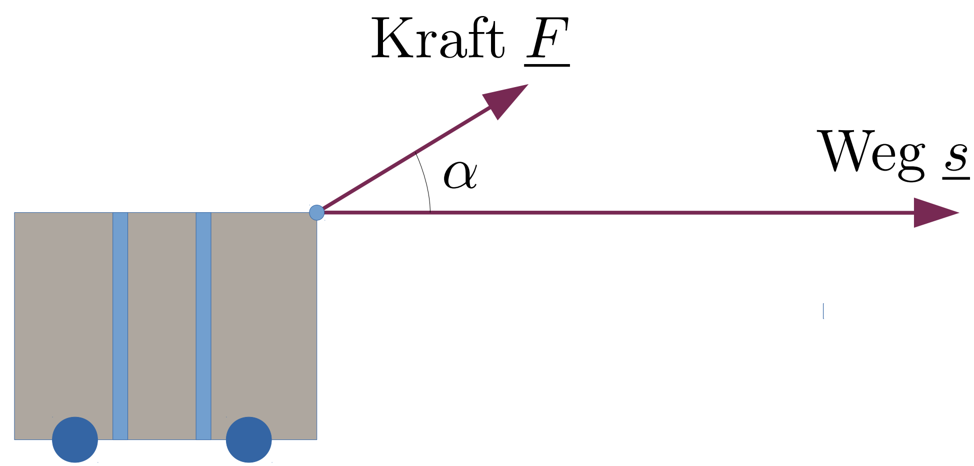
$$[W] = \mathrm{J} = \mathrm{Nm} = \frac{\mathrm{kg\,m^2}}{\mathrm{s^2}}$$

2.3 Beispiel / Aufgabe 1

Sie verschieben auf dem Dachboden eine schwere Kiste um 5 m mit einer horizontalen Kraft von 240 N. Wie viel Arbeit haben Sie geleistet?

2.3 Beispiel / Aufgabe 2

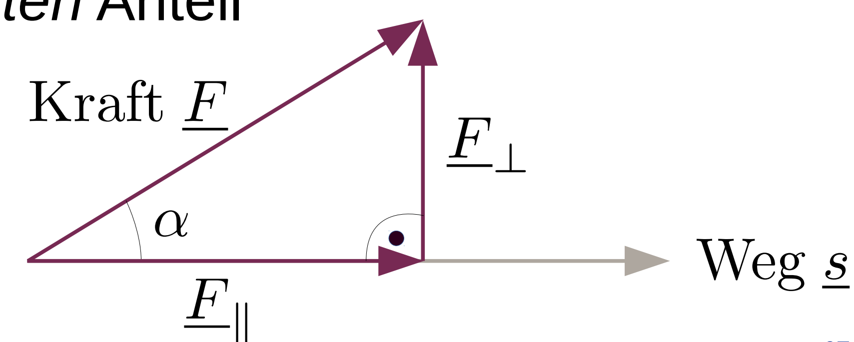
Arbeit beim Koffer ziehen?



besser

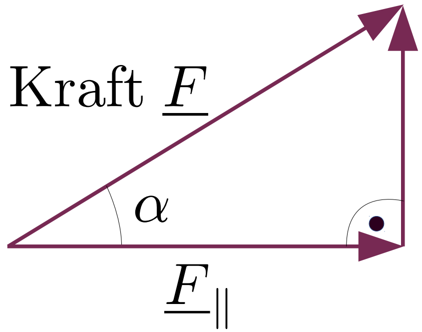
Arbeit = Kraft mal Weg = „Kraft **entlang des Weges**“ mal Weg

Zerlege Kraft in *parallelen* und *senkrechten* Anteil



2.3 Frage

Zerlegung der Kraft



Für die Kraft in Wegrichtung gilt

a) $|\underline{F}_{||}| = |\underline{F}| \cdot \sin\alpha$

b) $|\underline{F}_{||}| = |\underline{F}| \cdot \cos\alpha$

c) $|\underline{F}_{||}| = |\underline{F}| \cdot \tan\alpha$

d) keine Idee

1.3 Vektorrechnung Teil 2

1.3.5 Skalarprodukt

„Kraft **entlang des Weges**“ mal Weg

$$W = |\underline{F}_{||}|\ |\underline{s}| = |\underline{F}|(\cos\alpha)\ |\underline{s}|$$

Definiere Skalarprodukt

$$\underline{F} \cdot \underline{s} := |\underline{F}|\ |\underline{s}|\ \cos\alpha$$

Damit ist die Arbeit dann $\boxed{W = \underline{F} \cdot \underline{s}}$

1.3.5 Skalarprodukt

Definition Skalarprodukt

$$\underline{a} \cdot \underline{b} := |\underline{a}|\ |\underline{b}|\ \cos\alpha \qquad \alpha \ldots \text{Winkel zwischen } \underline{a} \text{ und } \underline{b}$$

Eigenschaften

- Abbildung von 2 Vektoren -> Skalar: $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$
- kommutativ, es gilt $\underline{a} \cdot \underline{b} = \underline{b} \cdot \underline{a}$
- Zwei Vektoren stehen senkrecht aufeinander, wenn Skalarprodukt verschwindet

$$\underline{a} \cdot \underline{b} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \underline{b} \perp \underline{a}$$

1.3.6 Skalarprodukt

Rechenregel für $\boxed{\underline{a} \cdot \underline{b}}$

in kartesischen Koordinaten

$$\underline{a} \cdot \underline{b} = \begin{pmatrix} a_x \\ a_y \\ a_z \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} b_x \\ b_y \\ b_z \end{pmatrix} = a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z$$

oder allgemein

$$\underline{a} \cdot \underline{b} = \sum_{i=1}^{n} a_i b_i$$

1.3.5 Skalarprodukt

Welcher Vektor steht senkrecht auf $\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$?

a) $\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$

b) $\begin{pmatrix} -1 \\ -1 \end{pmatrix}$

c) $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

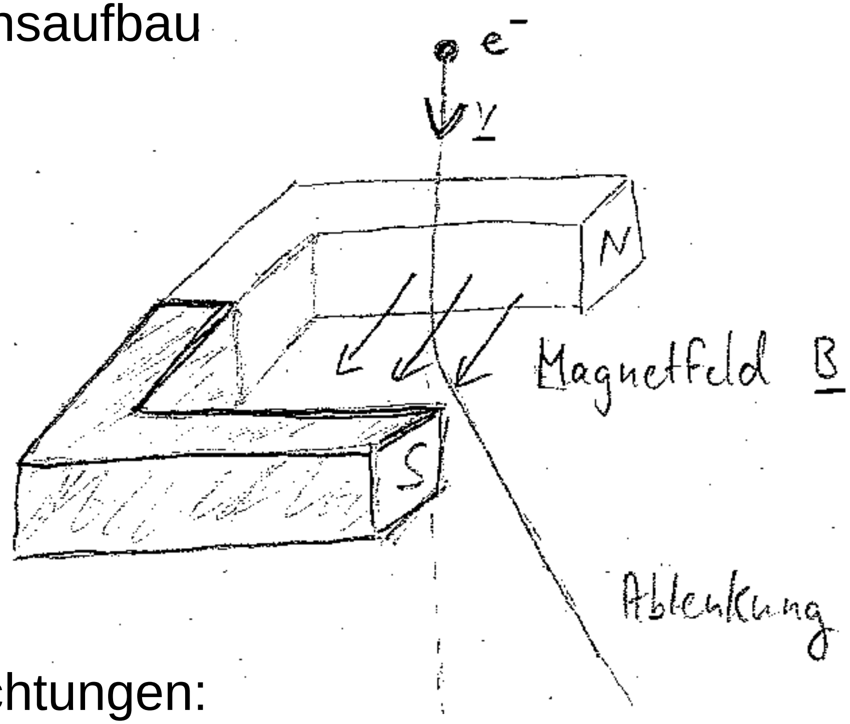
d) Vektor b) und c)

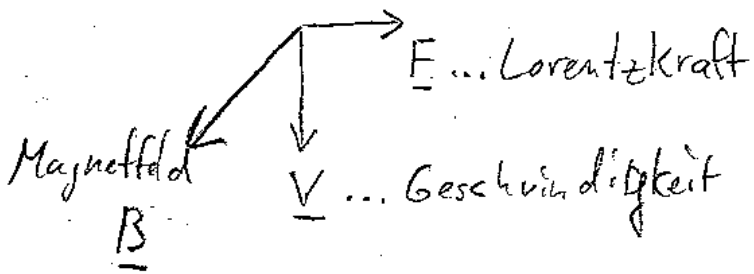
e) alle Vektoren

f) kein Vektor

1.3.6 Lorentzkraft (Motivation für Vektorprodukt)

Versuchsaufbau





Beobachtungen:

- Kraft steht senkrecht auf Magnetfeld und Geschwindigkeit $\underline{F} \perp \underline{B}, \underline{F} \perp \underline{v}$
- Kraft ist proportional zu Magnetfeld, Geschw. und Ladung $|\underline{F}| \propto |\underline{B}|, |\underline{v}|, q$

⇨ Lorentzkraft $\boxed{\underline{F} = q\,\underline{v} \times \underline{B}}$

(Hinweis $q < 0$, negative Ladung!)

1.3.6 Vektorprodukt oder Kreuzprodukt

Es gilt $\boxed{\underline{c} = \underline{a} \times \underline{b}}$

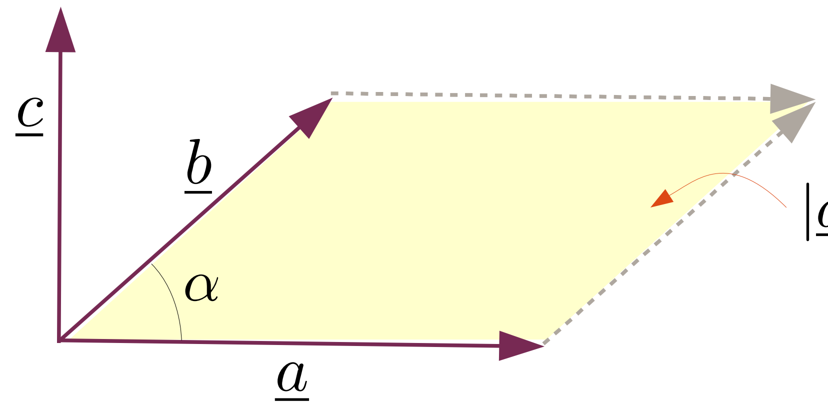
Eigenschaften

- $\underline{c}$ steht senkrecht auf $\underline{a}$ und $\underline{b}$
- nicht kommutativ $\underline{a} \times \underline{b} = -\underline{b} \times \underline{a}$
- $|\underline{c}| = |\underline{a}| \cdot |\underline{b}| \cdot \sin\alpha$

Vektoren bilden rechtshändiges System

$\underline{a}$ $\underline{b}$ $\underline{c}$

Daumen - Zeigefinger - Mittelfinger
der rechten Hand



$|\underline{a} \times \underline{b}| \ldots \text{Parallelogramm-Fläche}$

1.3.6 Vektorprodukt oder Kreuzprodukt

Rechenregel für $\boxed{\underline{c} = \underline{a} \times \underline{b}}$

in kartesischen Koordinaten

$$\begin{pmatrix} c_x \\ c_y \\ c_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_x \\ a_y \\ a_z \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} b_x \\ b_y \\ b_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_y b_z - a_z b_y \\ a_z b_x - a_x b_z \\ a_x b_y - a_y b_x \end{pmatrix}$$