Vorlesung 14 am 09.11.2022

Folgen und Grenzwerte

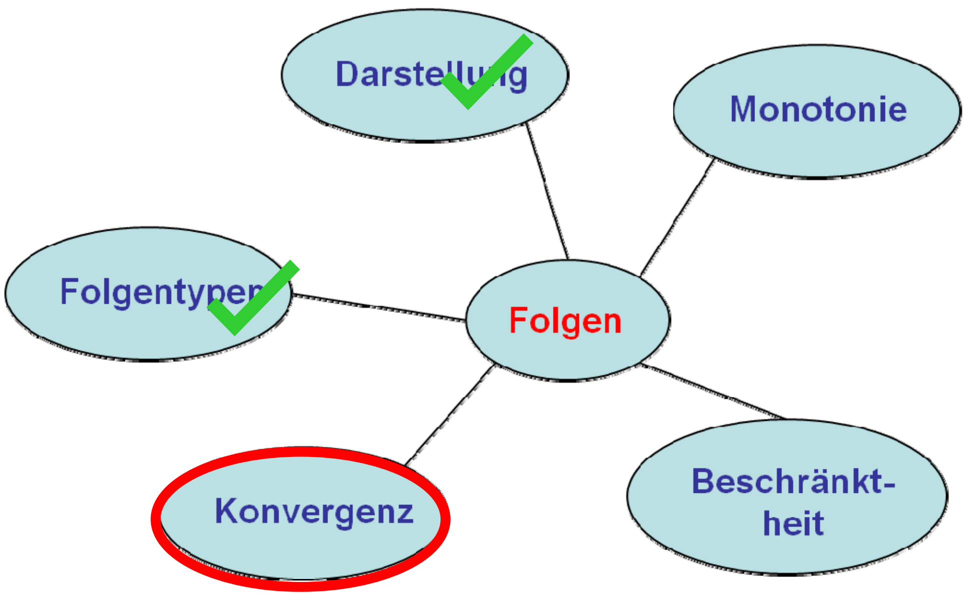
4 Folgen und Reihen

Unbestimmte Ausdrücke

•

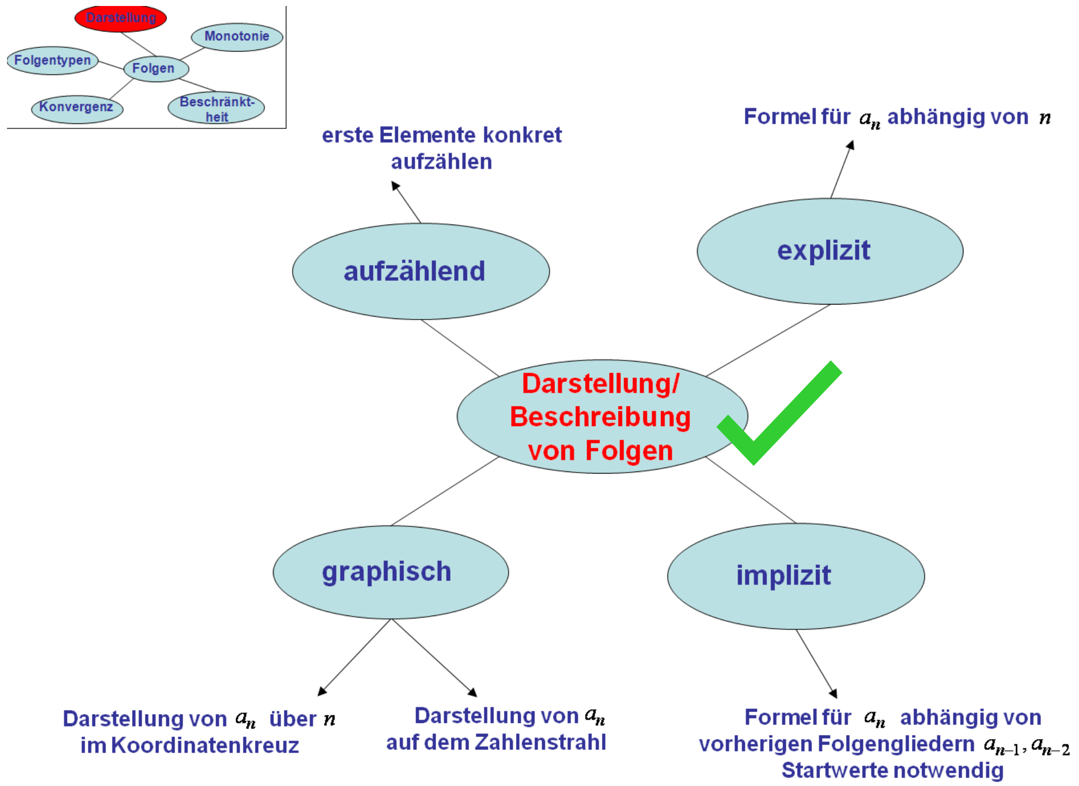
Überblick des Kapitels Folgen

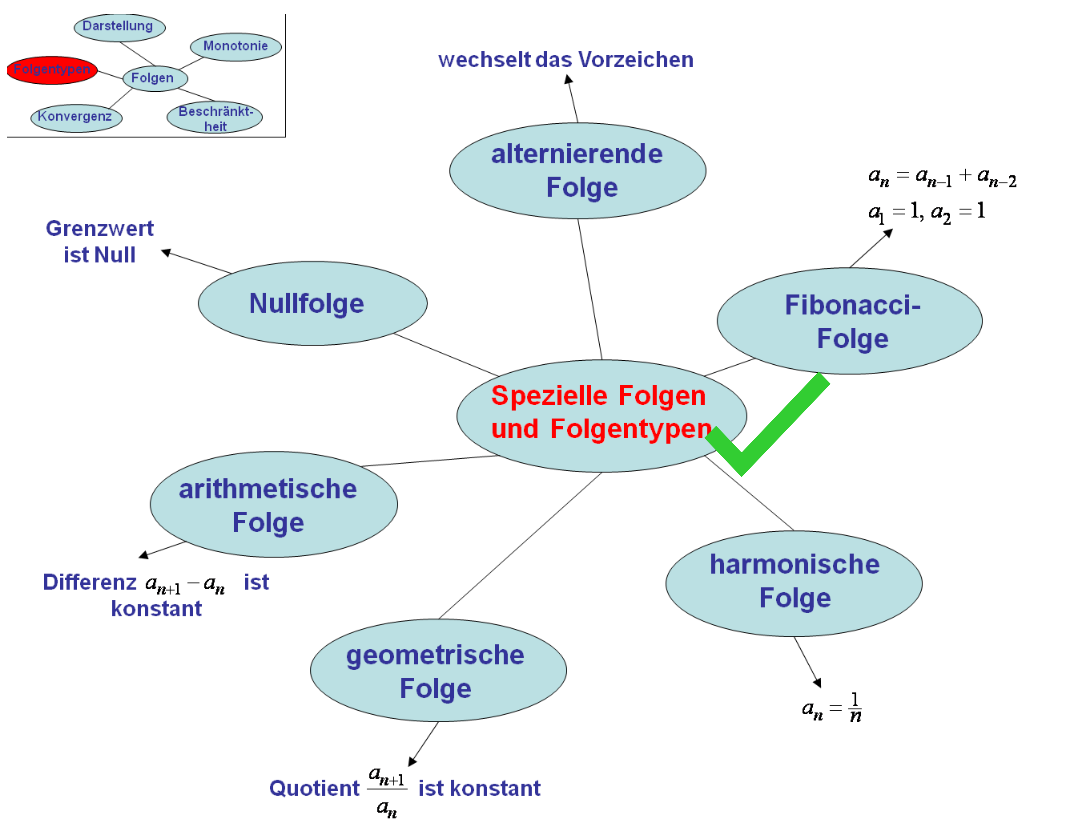
Begriffe im Zusammenhang mit Folgen $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$



•

Überblick des Kapitels Folgen





Beispiel: Implizite/ rekursive Folgen
und rekursive Funktionen/Algorithmen

+1 +4 +18

Folge a_n: 1, 2, 6, 24, 120, ... **aufzählend**

·2 ·3 ·4 ·5

1!, 2!, 3!, 4!, 5!, ...

$a_n = n!$ **explizit**

$a_n = a_{n-1} \cdot n\ ,\ a_1 = 1$ **implizit** | rekursiv

Programmcode

```
// *************************************************************
// Autor/en: http://www.online-vba.de - Marc Wershoven
// Verwendung der Quelltexte auf eigene Gefahr!
// Es gelten die Nutzungsbedingungen von www.Online-VBA.de!
// Original-Quelltext: www.online-vba.de/cpp_rekfaku.php
// *************************************************************
```

```c
#include <stdio.h>

int fak(int zahl);

void main ()
{
        int eingabe;
    //Benutzerabfrage
        printf("Zahl eingeben: ");
        scanf("%i",&eingabe);
    //Funktion Fakultät rekursive Lösung
        printf("Fakultaet von %i = %i ",eingabe,fak(eingabe));
}

int fak(int zahl)
{
        if(zahl<=1)
            return 1; //Fakultät <=1 liefert eine 1 zurück
        else
            return(zahl*fak(zahl-1)); //Rekursiver Aufruf
}
```

// eingabe = 5

fak(5) = 120

120
fak(5) ← 5 · fak(4)

24
5 · fak(4) ← 4 · fak(3)

6
4 · fak(3) ← 3 · fak(2)

2
3 · fak(2) ← 2 · fak(1)

2 · fak(1) ← 1

Beispiel: Implizite/ rekursive Folgen
und rekursive Funktionen/Algorithmen

Folge a_n: 1, 2, 6, 24, 120, ... **aufzählend**

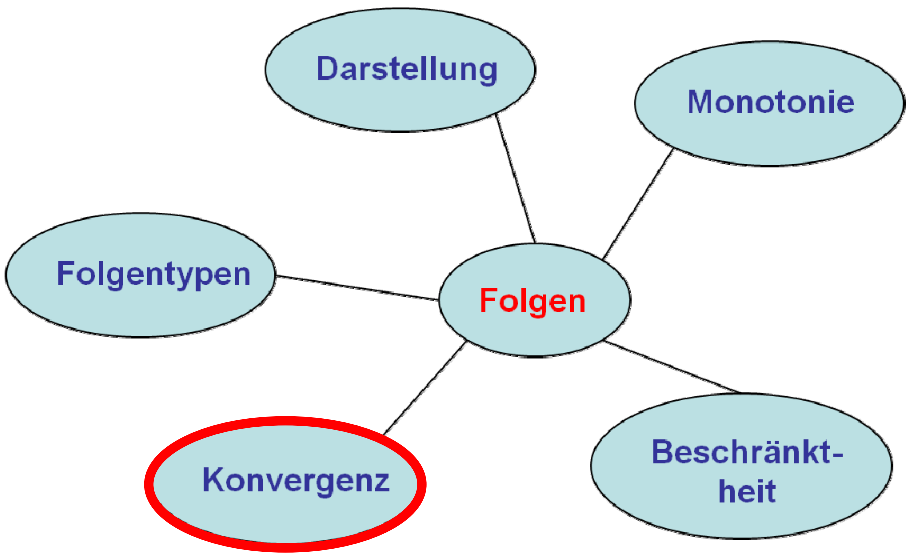
a_n = **explizit**

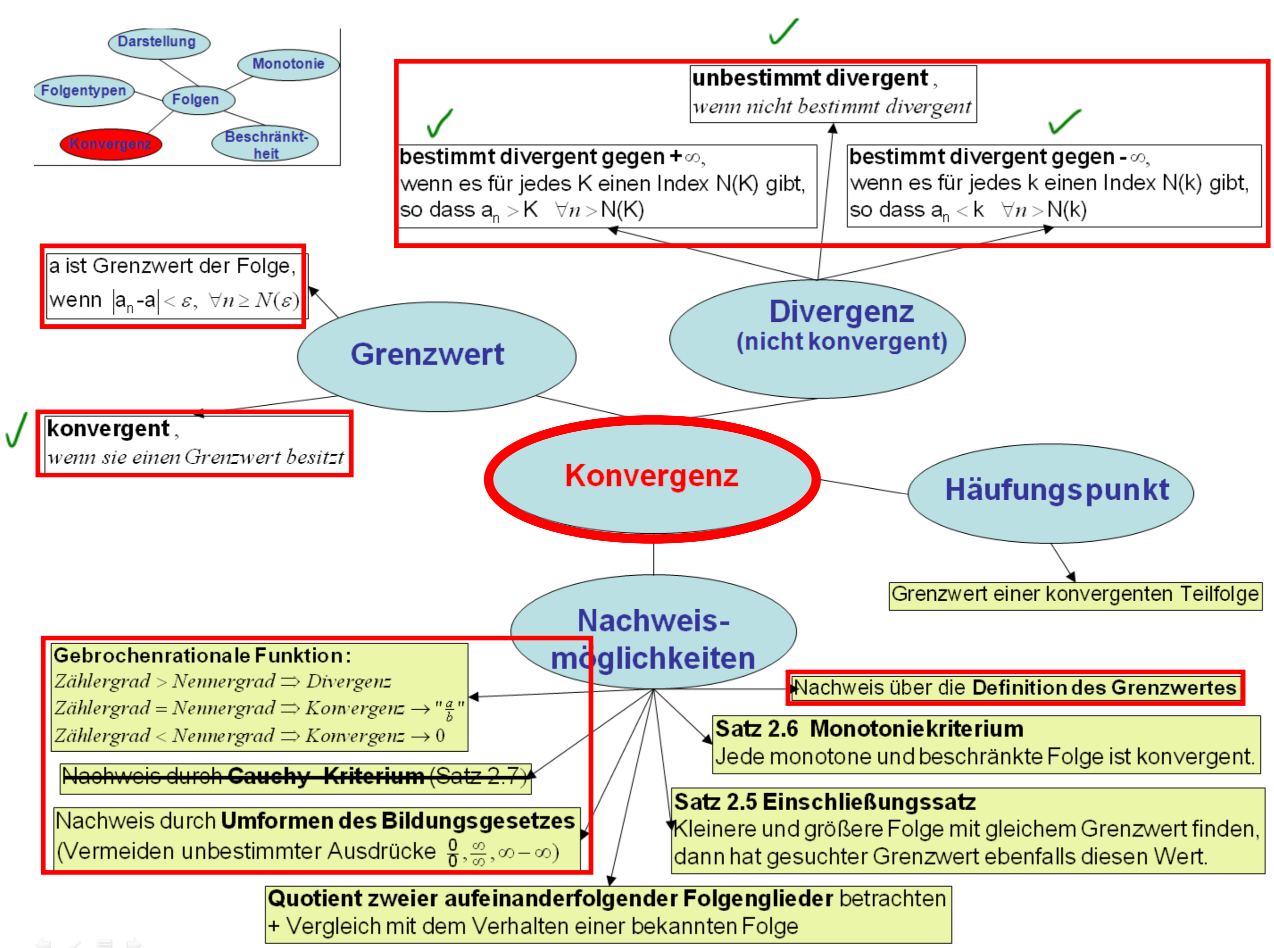
a_n = **implizit**

Programmcode

```
#include <stdio.h>

int fak(int zahl);

void main ()
{
      int eingabe;
  //Benutzerabfrage
      printf("Zahl eingeben: ");
      scanf("%i",&eingabe);
  //Funktion Fakultät rekursive Lösung
      printf("Fakultaet von %i = %i ",eingabe,fak(eingabe));
}

// rekursive Funktion zur Fakultätsberechnung
int fak(int zahl)
{
      if(zahl<=1)
          return 1; //Fakultät <=1 liefert eine 1 zurück
      else
          return(zahl*fak(zahl-1)); //Rekursiver Aufruf
}
```

Begriffe im Zusammenhang mit Folgen $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$

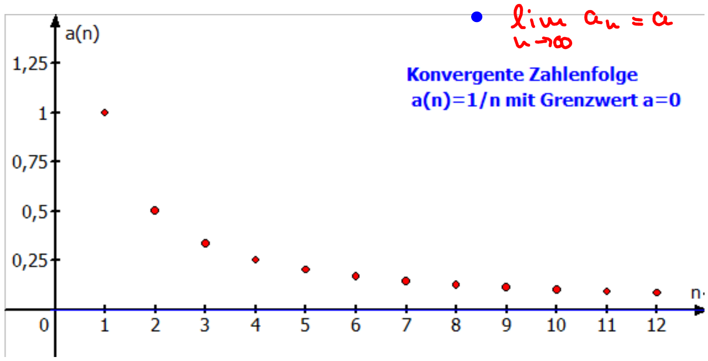




Eigenschaften von Folgen -
Divergente und konvergente Folgen

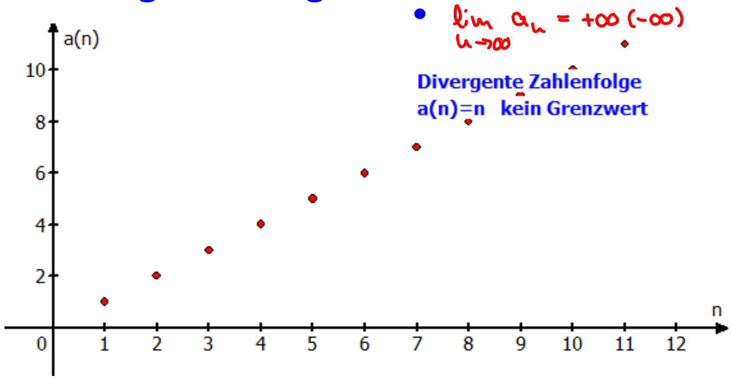
konvergente Folgen/ Grenzwert:

- Die Folgenglieder nähern sich mit wachsendem n einem festen Wert an, dem Grenzwert a der Folge.
- $\lim\limits_{n \to \infty} a_n = a$



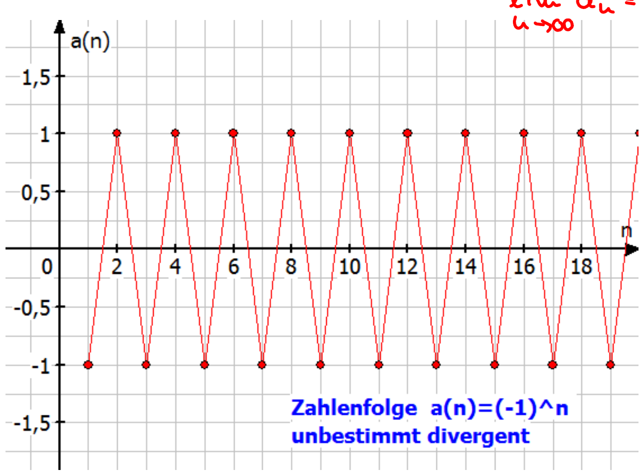
bestimmt divergente Folgen:

- Die Folgenglieder werden immer größer (kleiner)
- $\lim\limits_{n \to \infty} a_n = +\infty \ (-\infty)$



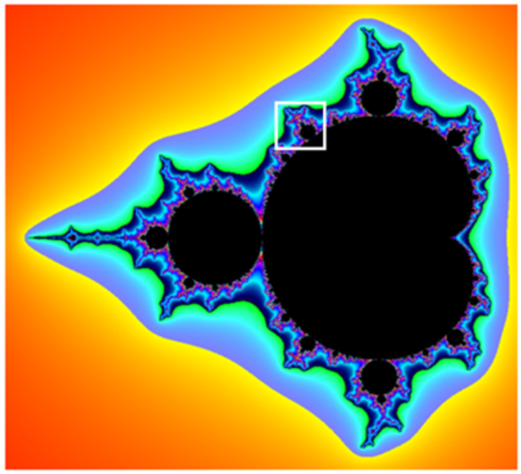
unbestimmt divergente Folgen:

- Die Folgenglieder nähern sich keinem festen Wert an.
- $\lim\limits_{n \to \infty} a_n = \pm 1 \ (\pm\infty, ..)$



Das „Apfelmännchen“ und seine Folgen

Das „Apfelmännchen“, auch Mandelbrot-Menge genannt, wurde von Benoit Mandelbrot (französischer Mathematiker mit polnischer Herkunft, geboren 1924) im Jahr 1980 erstmals computergrafisch dargestellt.



erstellt mit FractalForge

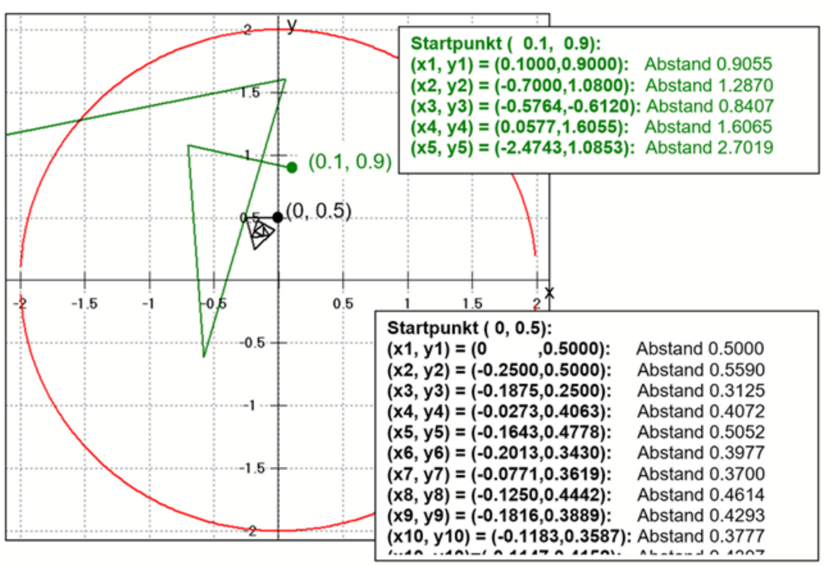
Die Punktfolgen des Apfelmännchens:

Die komplexen Zahlen z_n können durch ihren Real- und Imaginärteil als Punkt $z_n = (x_n, y_n)$ des xy-Koordinatensystems betrachtet werden.

Durch Umrechnung von Realteil und Imaginärteil der komplexen Zahlenfolge $z_{n+1} = z_n^2 + c$ mit $c = (a, b)$, $z_0 = 0$ des Apfelmännchens in die x- und y-Koordinaten ergibt sich ausgehend von jedem Startpunkt (a, b) für die einzelnen Koordinaten folgende Iterationsvorschrift:

$$\begin{aligned} x_{n+1} &= (x_n)^2 - (y_n)^2 + a \\ y_{n+1} &= 2 \cdot x_n \cdot y_n + b \end{aligned} \quad \text{für } n = 1, 2, 3, \ldots \quad \text{mit} \quad \begin{aligned} x_1 &= 0 \\ y_1 &= 0 \end{aligned}$$

In der nachfolgenden Abbildung sind zwei Punktfolgenverläufe ausgehend von den Punkten $(a, b) = (0, 0.5)$ und $(a, b) = (0.1, 0.9)$ dargestellt.



Konvergenz und Divergenz der Punktfolgen:

Für die Punktfolgen der verschiedenen Startpunkte der xy-Ebene wird jeweils geprüft, ob sie

- konvergent oder
- divergent sind.

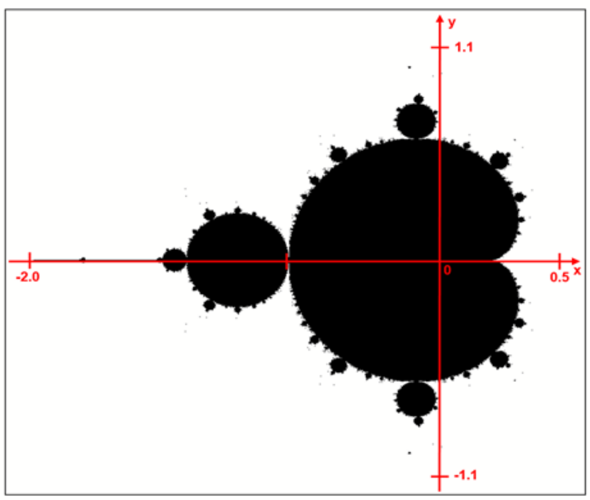
Die Punktfolgen werden als **konvergent** betrachtet, wenn sie nach 200 Iterationsschritten immer noch einen Abstand kleiner als 2 vom Ursprung haben, d.h. wenn die Punkte aller 200 Iterationsschritte sich stets im Ursprungskreis mit dem Radius 2 befinden.

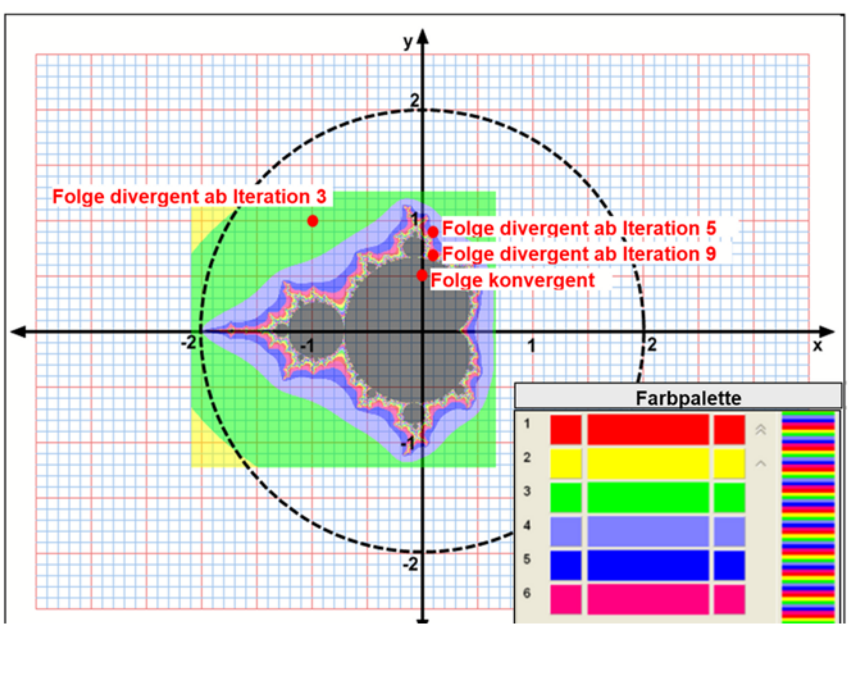
Die Punktfolgen heißen **divergent**, wenn sie den Ursprungskreis mit dem Radius 2 bei einem Iterationsschritt kleiner als 200 verlassen.

Für die divergenten Folgen ist es wichtig, bei welchem Iterationsschritt sie den Ursprungskreis verlassen. Diesen Iterationsschritt wollen wir hier **Divergenznummer** nennen.

Mandelbrot-Menge:

Die Mandelbrot-Menge ist die Menge der Punkte der xy-Ebene, die die Startpunkte von konvergenten Folgen sind. Dieses sind die Punkte, die das Apfelmännchen bilden, das in der nachfolgenden Abbildung schwarz dargestellt ist.



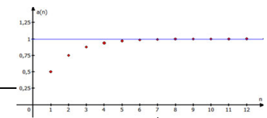


Eigenschaften von Folgen

konvergente Folgen/ Grenzwert:

Folgenglieder a_n streben mit immer größer werdendem Index n **gegen einen festen Wert**, den Grenzwert a.
Sie können ihn erreichen, müssen ihn aber nicht erreichen.

"konvergent" $n \to \infty: \; a_n \to a$



Definition 4.6: Grenzwert/ Konvergenz

Eine Zahl a heißt **Grenzwert** der Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$, wenn es zu jedem $\varepsilon > 0$ einen Index $N(\varepsilon)$ gibt, so dass gilt:

$$|a_n - a| < \varepsilon \quad \text{für alle } n \geq N(\varepsilon).$$

Im Fall der Existenz eines Grenzwertes a heißt die Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ **konvergent**, im anderen Fall **divergent**.

Definition 4.7: Nullfolge

Eine Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$, die gegen $a = 0$ konvergiert, heißt **Nullfolge**.

---

divergente Folgen:

Definition 4.8: bestimmte/unbestimmte Divergenz

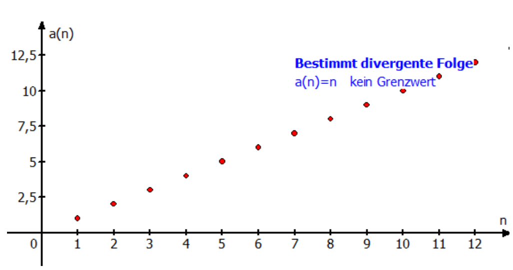
Nicht konvergente Folgen werden als **divergent** bezeichnet.
Eine Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ heißt **bestimmt divergent** gegen $+\infty$ (bzw. $-\infty$), wenn für beliebiges $K > 0$ stets ein Index N(K) existiert, so dass gilt $a_n > K$ (bzw. $a_n < K$) für n größer N(K).

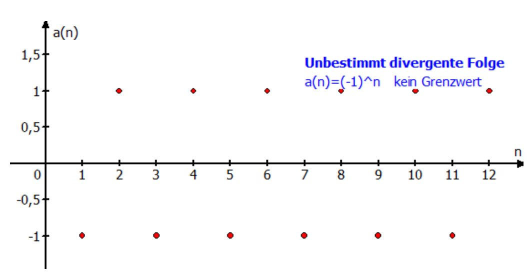
Divergente Folgen, die nicht bestimmt divergieren, heißen **unbestimmt divergent**.

"bestimmt divergent" $n \to \infty: \; a_n \to \infty \;\; oder \; a_n \to -\infty$

"unbestimmt divergent" $n \to \infty: \; a_n \; nicht \; konvergent$

$a_n \not\to \infty \;\; oder \; a_n \not\to -\infty$

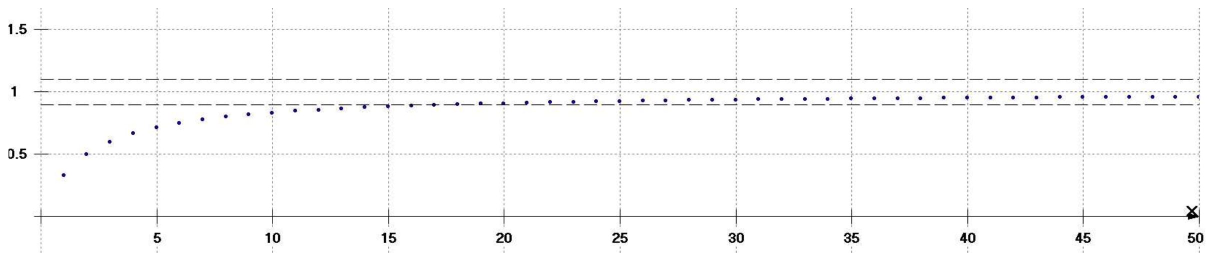




Einführung Grenzwert einer Folge

Beispiel:

$$a_n = \frac{n}{n+2}$$



Glied	Wert
1	0,3333
2	0,5000
3	0,6000
4	0,6667
5	0,7143
6	0,7500
7	0,7778
8	0,8000
9	0,8182
10	0,8333
11	0,8462
12	0,8571
13	0,8667
14	0,8750
15	0,8824
16	0,8889
17	0,8947
18	0,9000
19	0,9048
20	0,9091
21	0,9130
22	0,9167
23	0,9200
24	0,9231
25	0,9259
26	0,9286
27	0,9310
28	0,9333
29	0,9355
30	0,9375
31	0,9394
32	0,9412
33	0,9429
34	0,9444
35	0,9459

Wie sehen die Folgenglieder a_n aus, wenn n immer größer wird?

Die Folgenglieder a_n streben gegen 1
Grenzwert a = 1

- **Was ist ein Grenzwert?**
- **Wie kann man zeigen, dass ein Wert ein Grenzwert ist?**
- **Wie findet man den Grenzwert?**
- **Kann man den Grenzwert berechnen?**

Konvergenz von Folgen - Grundlagen

Was ist ein Grenzwert?
Was bedeutet es, wenn eine Folge konvergent ist?

Definition 4.6: Grenzwert/ Konvergenz

Eine Zahl a heißt **Grenzwert** der Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$, wenn es zu jedem $\varepsilon > 0$ einen Index $N(\varepsilon)$ gibt, so dass gilt:

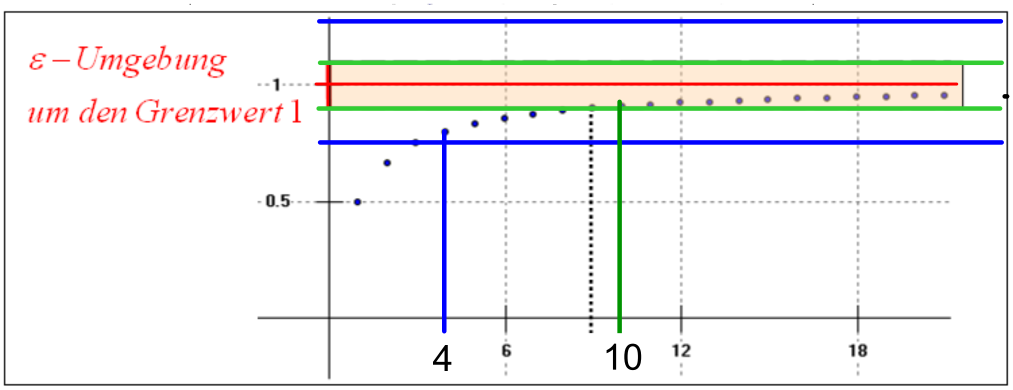
$$|a_n - a| < \varepsilon \quad \text{für alle } n \geq N(\varepsilon).$$

Im Fall der Existenz eines Grenzwertes a heißt die Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ **konvergent**, im anderen Fall **divergent**.

Beispiel:

Die Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *mit* $\boxed{a_n = \frac{n}{n+1}}$ ist konvergent gegen den $\boxed{\text{Grenzwert } 1}$.

Für $\boxed{\varepsilon = 0.25}$ gibt es $N(\varepsilon)$ =4, für $\boxed{\varepsilon = 0.1}$ gibt es $N(\varepsilon)$ =10, mit der Eigenschaft, dass alle höheren Folgenelemente in der ε-Umgebung von 1 liegen.



Bemerkung:

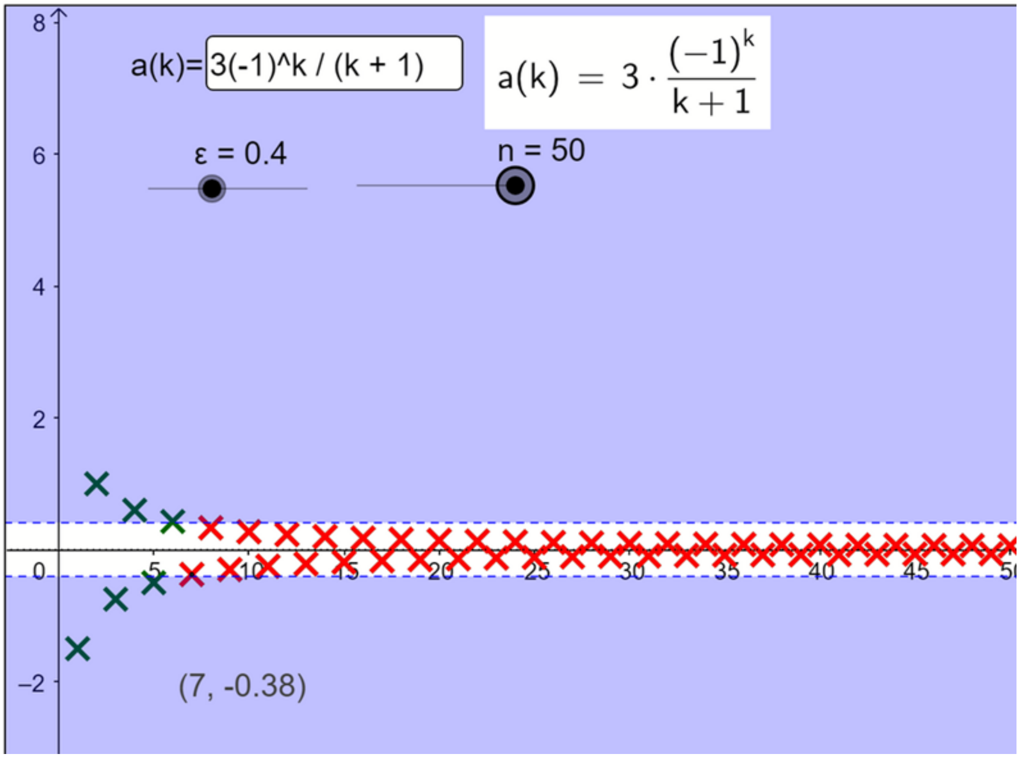
Eine Folge heißt **konvergent gegen den Grenzwert a**, wenn sich die Folgenglieder mit wachsendem n dem Wert a annähern.

Grenzwert von Folgen - Epsilonumgebung

Autor: Kurt Söser

Thema: Grenzwert oder Limes

Hier siehst du, ab welchem Folgenglied sich alle Folgenglieder bei einer konvergenten Folge in einer Epsilon-Umgebung des Grenzwertes befinden.



https://www.geogebra.org/m/SPB3YJ4J#material/Gn4Y8Bfu

Konvergenz von Folgen - Grundlagen

Was ist eine ε- Umgebung?

4.2 Konvergenz von Folgen

4.2.1 Grenzwert

Definition 4.5: ε-Umgebung

Ist $x_0 \in \mathbb{R}$ eine reelle Zahl und ε eine beliebige positive reelle Zahl, dann heißt das Intervall

Abstand

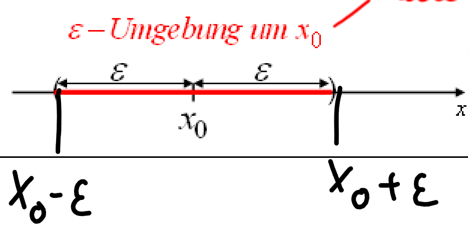
$$U_\varepsilon(x_0) := \{x \in \mathbb{R} \mid |x - x_0| < \varepsilon\}$$

alle reellen Zahlen für die gilt

eine ε**-Umgebung von** x_0.

ε – Umgebung um x_0

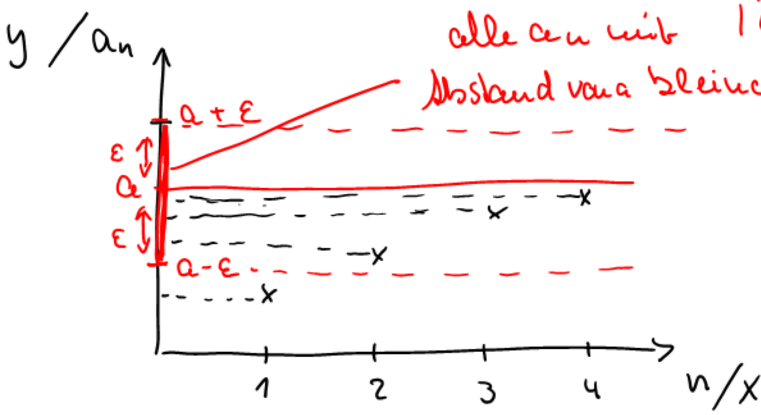
alle Punkte, die einen Abstand < ε vom Punkt x_0 haben



Abstand

alle a_n mit $|a_n - a|$

Abstand von a kleiner als ε



Grenzwert einer Folge

(1) Nachweis eines vermuteten Grenzwertes

Nachweis eines vermuteten Grenzwertes a über die Grenzwertbedigung der Definition:

$|a_n - a| < \varepsilon$

Ergebnis: Index N(ε), ab dem die Folgenwerte nur noch um ε vom Grenzwert abweichen.

Wert ε vorgeben ⇒ Index N(ε) berechnen

$\forall \varepsilon \in \mathbb{R}\ \exists N(\varepsilon): |a_n - a| < \varepsilon \quad \forall n \in \mathbb{N}$ mit $n \geq N(\varepsilon)$

Beispiel 1

Beispiel 2

Beispiel 3 - a) falscher Grenzwert

b) korrekter Grenzwert

(2) Bestimmen des Grenzwertes anhand der Folgenbeschreibung

(a) 4 Beispiele - gebrochen rationale Funktionen:
- **Beispiel 4**
- **Beispiel 5**
- **Beispiel 6**
- **Beispiel 7**

(b) ein weiteres Beispiel 8

(3) Grenzwertbestimmung durch Vergleich mit einer geometrischen Folge

.

Grenzwert einer Folge

(1) Nachweis eines vermuteten Grenzwertes - Beispiel 1

Nachweis eines vermuteten Grenzwertes a über die Genzwertbedigung der Definition:

$|a_n - a| < \varepsilon$

Ergebnis: Index n(ε), ab dem die Folgenwerte nur noch um ε vom Grenzwert abweichen.

Wert ε vorgeben ⇒ Index n(ε) berechnen

Beispiel 1

Folge $\underbrace{a_n = \frac{1}{n}}_{\text{harmonische Folge}}$ hat den Grenzwert $a = 0$

I Ansatz

$|a_n - a| < \varepsilon$ mit $a_n = \frac{1}{n}$, $a = 0$

$\Rightarrow \left|\frac{1}{n} - 0\right| < \varepsilon$

$\Rightarrow \left|\frac{1}{n}\right| < \varepsilon$

$\Rightarrow \frac{1}{n} < \varepsilon$

Betrag entfällt, da n>0

$\Rightarrow 1 < \varepsilon \cdot n$ mit $n > 0$

II Auflösen nach n

$\Rightarrow \frac{1}{\varepsilon} < n$ mit $\varepsilon > 0$

$\Rightarrow \boxed{n > \frac{1}{\varepsilon}}$

erste natürliche Zahl > 10

erster Index des Folgengliedes im ε-Schlauch

III ε-Werte einsetzen N(ε) bestimmen

Wahl: $\varepsilon = 0{,}1 = \frac{1}{10} \Rightarrow n > 10 \Rightarrow N(\varepsilon) = 11$

$\varepsilon = 0{,}01 = \frac{1}{100} \Rightarrow n > 100 \Rightarrow N(\varepsilon) = 101$

Grenzwert einer Folge

(1) Nachweis eines vermuteten Grenzwertes - Beispiel 2

$|a_n - a| < \varepsilon$

Nachweis eines vermuteten Grenzwertes a über die Genzwertbedigung der Definition:

$|a_n-a|< \varepsilon$

Ergebnis: Index n(ε), ab dem die Folgenwerte nur noch um ε vom Grenzwert abweichen.

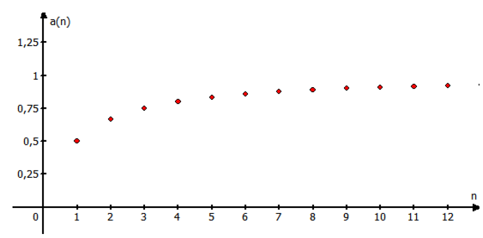
Wert ε vorgeben ⇒ Index n(ε) berechnen

Beispiel 2:

Zeigen Sie mit Hilfe der Definition des Grenzwertes, dass die Folge

$a_n = \frac{n}{n+1}$

den Grenzwert a = 1 hat.



$|a_n - a| < \varepsilon$

⋮

$n > \ldots$

Wähle $\varepsilon = 0.5 = \frac{1}{2}$

$\varepsilon = 0.01 = \frac{1}{100}$

.

Grenzwert einer Folge

(1) Nachweis eines vermuteten Grenzwertes - $\boxed{\text{Beispiel 2}}$

Nachweis eines vermuteten Grenzwertes a über die Genzwertbedigung der Definition:

$|a_n - a| < \varepsilon$

Ergebnis: Index n(ε), ab dem die Folgenwerte nur noch um ε vom Grenzwert abweichen.

Wert ε vorgeben ⇒ Index n(ε) berechnen

Beispiel 2:

Zeigen Sie mit Hilfe der Definition des Grenzwertes, dass die Folge

$$a_n = \frac{n}{n+1}$$

den Grenzwert a = 1 hat.

I

$$|a_n - a| = \left| \frac{n}{n+1} - 1 \right| < \varepsilon \qquad 1 = \frac{n+1}{n+1}$$

$$\Leftrightarrow \left| \frac{n-(n+1)}{n+1} \right| < \varepsilon$$

$$\Leftrightarrow \left| \frac{-1}{n+1} \right| < \varepsilon \qquad (-1 < 0,\ n+1 > 0,\ \tfrac{-1}{n+1} < 0)$$

$$\Leftrightarrow \frac{+1}{n+1} < \varepsilon \quad \text{mit } \varepsilon > 0,\ n+1 > 0 \qquad \left(\tfrac{+1}{n+1} > 0\right)$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{\varepsilon} < n+1$$

II

$$\Leftrightarrow \boxed{n > \frac{1}{\varepsilon} - 1} = \frac{1-\varepsilon}{\varepsilon}$$

Index, ab dem alle Folgenglieder im ε-Schlauch liegen

III

Wähle $\varepsilon = 0.5 = \frac{1}{2}$ $\Rightarrow n > \frac{1}{\frac{1}{2}} - 1 = 1$

$\Rightarrow N(\varepsilon) = 2$

Wähle $\varepsilon = 0.01 = \frac{1}{100}$ $\Rightarrow n > \frac{1}{\frac{1}{100}} - 1 = 99$

$\Rightarrow N(\varepsilon) = 100$

Grenzwert einer Folge

(1) Nachweis eines vermuteten Grenzwertes - Beispiel 3 - falscher Grenzwert

Nachweis eines vermuteten Grenzwertes a über die Genzwertbedigung der Definition:

$|a_n - a| < \varepsilon$

Ergebnis: Index n(ε), ab dem die Folgenwerte nur noch um ε vom Grenzwert abweichen.

Wert ε vorgeben ⇒ Index n(ε) berechnen

Beispiel 3:

Zeigen Sie mit Hilfe der Definition des Grenzwertes, dass die Folge

$$a_n = \frac{2n+1}{n+1}$$

den Grenzwert **a = 1** hat.

I $|a_n - a| < \varepsilon$

$\Rightarrow \left|\frac{2n+1}{n+1} - 1\right| < \varepsilon$

$\Rightarrow \left|\frac{2n+1-(n+1)}{n+1}\right| < \varepsilon$

$\Rightarrow \left|\underbrace{\frac{n}{n+1}}_{>0 \Rightarrow \text{Betrag entfällt}}\right| < \varepsilon$

$\Rightarrow \underbrace{\frac{n}{n+1}}_{} < \varepsilon$

Polynomdivision

$\frac{n}{n+1} \rightarrow n : (n+1) = 1 - \frac{1}{n+1}$

$\underline{-(n+1)}$

-1

$\Rightarrow 1 - \frac{1}{n+1} < \varepsilon$

$\Rightarrow 1 - \varepsilon < +\frac{1}{n+1} \quad \Big| \begin{array}{l} *(n+1) \\ :(1-\varepsilon) \end{array}$

$n+1 < \frac{1}{1-\varepsilon}$ mit $\varepsilon < 1$ $\Rightarrow \boxed{n < \frac{1}{1-\varepsilon} - 1}$

II

III Wähle $\varepsilon = \frac{1}{2} \Rightarrow n < 1$ ↯

es gibt für kein n, d.h. kein Folgenglied liegt in ε-Schlauch

$\Rightarrow$ Grenzwertbedingung nicht erfüllt!

Grenzwert einer Folge

(1) Nachweis eines vermuteten Grenzwertes - $\boxed{\text{Beispiel 3 - korrekter Grenzwert}}$

Zeigen Sie mit Hilfe der Definition des Grenzwertes, dass die Folge

$$a_n = \frac{2n+1}{n+1}$$

den Grenzwert a = 2 hat.

Nachweis eines vermuteten Grenzwertes a über die Genzwertbedigung der Definition:

$|a_n - a| < \varepsilon$

Ergebnis: Index n(ε), ab dem die Folgenwerte nur noch um ε vom Grenzwert abweichen.

Wert ε vorgeben ⇒ Index n(ε) berechnen

Nachweis:

$$2 = \frac{2}{1}\frac{(n+1)}{(n+1)} = \frac{2(n+1)}{n+1}$$

(I) $$|a_n - a| = \left|\frac{2n+1}{n+1} - 2\right| < \varepsilon$$

$$\Leftrightarrow \left|\frac{2n+1-2(n+1)}{n+1}\right| < \varepsilon$$

$$\Leftrightarrow \left|\frac{-1}{n+1}\right| < \varepsilon$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{n+1} < \varepsilon$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{\varepsilon} - 1 < n$$

(II) $$\Leftrightarrow n > \frac{1}{\varepsilon} - 1$$

$$\frac{1}{\frac{1}{10}} = \frac{\frac{1}{1}}{\frac{1}{10}} = \frac{1}{1}\cdot\frac{10}{1} = 10$$

(III) Wähle $\varepsilon = 0.1 = \frac{1}{10}$

$\Rightarrow n > 9 \Rightarrow N(\varepsilon) = 10$

ab diesem Index liegen alle Folgenglieder im ε-Schlauch von 0.1 um den Grenzwert a = 2

Grenzwert einer Folge

(1) **Nachweis** eines vermuteten Grenzwertes

Nachweis eines vermuteten Grenzwertes a über die Grenzwertbedigung der Definition:

$$|a_n - a| < \varepsilon$$

Ergebnis: Index N(ε), ab dem die Folgenwerte nur noch um ε vom Grenzwert abweichen.

Wert ε vorgeben ⇒ Index N(ε) berechnen

$\forall \varepsilon \in \mathbb{R}\ \exists N(\varepsilon): |a_n - a| < \varepsilon \quad \forall n \in \mathbb{N}$ mit $n \geq N(\varepsilon)$

✓ **Beispiel 1**

✓ **Beispiel 2**

✓ **Beispiel 3 - a) falscher Grenzwert**

b) korrekter Grenzwert

(2) **Bestimmen des Grenzwertes** anhand der Folgenbeschreibung

(a) 4 Beispiele - gebrochen rationale Funktionen:
- **Beispiel 4**
- **Beispiel 5**
- **Beispiel 6**
- **Beispiel 7**

(b) ein weiteres Beispiel 8

(3) Grenzwertbestimmung durch Vergleich mit einer geometrischen Folge

.

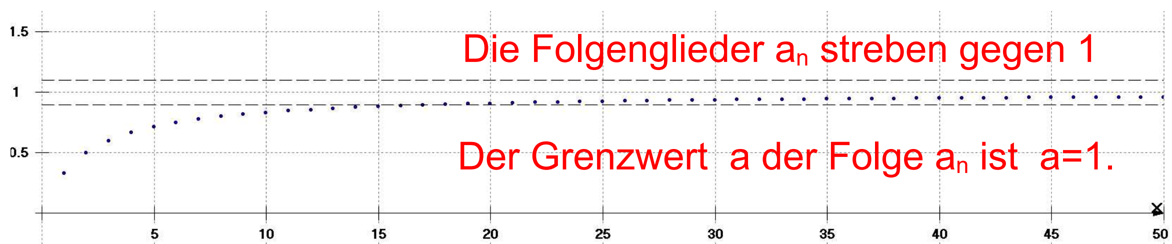
Grenzwert einer Folge

(2) Bestimmen des Grenzwertes anhand der Folgenbeschreibung

(a) Beispiele - gebrochen rationale Funktionen

Beispiel 4:

$$a_n = \frac{n}{n+2}$$



Berechnung des Grenzwertes durch Umformen der Folgenbeschreibung

Umformung „Erweitern" mit $\frac{1}{n}$

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} \frac{\overset{\to\infty}{n}}{\underset{\to\infty}{n+2}} = \lim_{n\to\infty} \frac{n\frac{1}{n}}{(n+2)\frac{1}{n}} = \lim_{n\to\infty} \frac{\overset{\to 1}{1}}{1+\underset{\to 0}{\frac{2}{n}}} = 1$$

unbestimmter Ausdruck

bestimmbarer Ausdruck $\to 1$

„Typ $\frac{\infty}{\infty}$" unbestimmter Ausdruck

Beispiele:

in diesem Fall jeweils durch Umformung „Kürzen"

bestimmbare Ausdrücke

un-bestimmte Ausdrücke

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n^2}{n} = \lim_{n\to\infty} n = \underline{\infty}$$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n}{n^2} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} = \underline{0}$$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{3n^2}{4n^2} = \lim_{n\to\infty} \frac{3}{4} = \underline{\frac{3}{4}}$$

Unbestimmte Ausdrücke - Was bedeutet das?

Grenzwertbestimmung

Grenzwerte - bestimmbare Ausdrücke

$\infty + \infty \;\rightarrow\; \infty$	$z.B.\; n^2 + n \rightarrow \infty$
$\infty \cdot \infty \;\rightarrow\; \infty$	$z.B.\; n^2 \cdot n \rightarrow \infty$
$\infty \cdot (-\infty) \;\rightarrow\; -\infty$	$z.B.\; n^2 \cdot (-n) \rightarrow -\infty$
$\frac{1}{\infty} \;\rightarrow\; 0$	$z.B.\; \frac{1}{n} \rightarrow 0$
$\frac{1}{0} \;\rightarrow\; \infty$	$z.B.\; \frac{1}{\frac{1}{n}} \rightarrow \infty$
$0^{\infty} \rightarrow 0$	$z.B.\; \left(\frac{1}{n}\right)^n \rightarrow 0$
$\infty^{\infty} \rightarrow \infty$	$z.B.\; (n)^n \rightarrow \infty$

Grenzwerte - unbestimmte Ausdrücke

$$\frac{0}{0},\quad \frac{\infty}{\infty},\quad 0\cdot\infty,\quad \infty-\infty,\quad 0^0,\quad \infty^0,\quad 1^{\infty}$$

Erläuterungen siehe nächste Seiten

.

Grenzwerte - unbestimmte Ausdrücke

Typ $\frac{0}{0}$ *bedeutet* $\frac{Zähler \to 0}{Nenner \to 0}$

Erläuterung: *Zähler* $\to 0$ *würde bedeuten Wert des Ausdrucks geht gegen* 0

Nenner $\to 0$ *würde bedeuten Wert des Ausdrucks geht gegen* ∞

Welcher Teil des Ausdrucks ist stärker?

Beispiele:

$\lim_{x\to\infty} \frac{\frac{1}{x} \to 0}{\frac{1}{x^2} \to 0} \to \infty$ $\lim_{x\to\infty} x \to \infty$

$\lim_{x\to\infty} \frac{\frac{1}{x^2} \to 0}{\frac{1}{x} \to 0} \to 0$ $\lim_{x\to\infty} \frac{1}{x} = 0$

$\lim_{x\to\infty} \frac{\frac{1}{x^2} \to 0}{\frac{2}{x^2} \to 0} \to \frac{1}{2}$ $\lim_{x\to\infty} \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$

Vorher

Typ $\frac{\infty}{\infty}$ *bedeutet* $\frac{Zähler \to \infty}{Nenner \to \infty}$

Erläuterung: *Zähler* $\to \infty$ *würde bedeuten Wert des Ausdrucks geht gegen* ∞

Nenner $\to \infty$ *würde bedeuten Wert des Ausdrucks geht gegen* 0

Welcher Teil des Ausdrucks ist stärker?

Beispiele:

$\lim_{x\to\infty} \frac{x}{e^x} \to 0$

$\lim_{x\to\infty} \frac{e^x}{x} \to \infty$

Beispiele:

$\lim_{x\to\infty} \frac{x+1}{2x^2+4} \to 0$

$\lim_{x\to\infty} \frac{x^2+1}{2x+4} \to \infty$

$\lim_{x\to\infty} \frac{x^2+1}{2x^2+4} \to \frac{1}{2}$

Grenzwerte - unbestimmte Ausdrücke

Typ 0^0 *bedeutet* $(Basis \to 0)^{Exponent \to 0}$

Erläuterung: *Basis* $\to 0$ *würde bedeuten Wert des Ausdrucks geht gegen* 0

Exponent $\to 0$ *würde bedeuten Wert des Ausdrucks geht gegen* 1

Welcher Teil des Ausdrucks ist stärker?

Beispiele:

$\lim_{x\to\infty} (\frac{1}{e^x})^{\frac{1}{x}} \to 0$

$\lim_{x\to\infty} (\frac{1}{x})^{\frac{1}{x^2}} \to 1$

Typ ∞^0 *bedeutet* $(Basis \to \infty)^{Exponent \to 0}$

Erläuterung: *Basis* $\to \infty$ *würde bedeuten Wert des Ausdrucks geht gegen* ∞

Exponent $\to 0$ *würde bedeuten Wert des Ausdrucks geht gegen* 1

Welcher Teil des Ausdrucks ist stärker?

Beispiele:

$\lim_{x\to\infty} (e^x)^{\frac{1}{x}} \to e$

$\lim_{x\to\infty} (e^{x^2})^{\frac{1}{x}} \to \infty$

$\lim_{x\to\infty} (x)^{\frac{1}{x^2}} \to 1$

Grenzwerte - unbestimmte Ausdrücke

Typ $\infty - \infty$ *bedeutet* $(Ausdruck1 \to \infty) - (Ausdruck2 \to \infty)$

Erläuterung: *Ausdruck1 schneller* $\to \infty$ *als Ausdruck2* $\Rightarrow$ *Gesamtausdruck geht gegen* ∞

Ausdruck2 schneller $\to \infty$ *als Ausdruck1* $\Rightarrow$ *Gesamtausdruck geht gegen* $-\infty$

Welcher Teil des Ausdrucks ist stärker?

Beispiele:

$$\lim_{x\to\infty}(x^2 - x) \to \infty$$

$$\lim_{x\to\infty}(x - x^2) \to -\infty$$

$$\lim_{x\to\infty}((\underbrace{x^2+1}_{\infty}) - \underbrace{x^2}_{\infty}) \to 1 \quad \text{Ausdruck1 und 2 streben gleich schnell} \to \infty$$

$\Rightarrow$ *Gesamtausdruck geht gegen einen festen Wert*

Typ $0 \cdot \infty$ *bedeutet* $(Faktor1 \to 0) \cdot (Faktor2 \to \infty)$

Erläuterung: *Faktor1* $\to 0$ *würde bedeuten Wert des Ausdrucks geht gegen 0*

Faktor2 $\to \infty$ *würde bedeuten Wert des Ausdrucks geht gegen* ∞

Welcher Teil des Ausdrucks ist stärker?

Beispiele:

$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{1}{x}\right)x \to 1$$

$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{1}{x^2}\right)x \to 0$$

$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{1}{x}\right)x^2 \to \infty$$

Grenzwerte - unbestimmte Ausdrücke

Typ 1^∞ *bedeutet* $(Basis \to 1)^{(Exponent \to \infty)}$

Erläuterung: *Basis* $\to 1$ *bedeutet Gesamtausdruck geht gegen 1*

Exponent $\to \infty$ *bedeutet Gesamtausdruck geht gegen* ∞

Welcher Teil des Ausdrucks ist stärker?

Beispiele:

$$\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x \to e$$

$$\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x^2}\right)^x \to 1$$

$$\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^{x^2} \to \infty$$

Beispiele: Grenzwert einer Folge

(2) Bestimmen des Grenzwertes anhand der Folgenbeschreibung
(a) - Beispiele - gebrochen rationale Ausdrücke

Bestimmen des Grenzwertes

Umformung der Folgenvorschrift zur Vermeidung unbestimmter Ausdrücke

$$\frac{0}{0},\quad \frac{\infty}{\infty},\quad 0\cdot\infty,\quad \infty-\infty,\quad 0^0,\quad \infty^0,\quad 1^\infty$$

Beispiel 5: $\boxed{a_n = \frac{2n+1}{n+1}}$ $\rightarrow a=2$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{2n+1}{n+1} = \lim_{n\to\infty}\frac{(2n+1)\cdot\frac{1}{n}}{(n+1)\cdot\frac{1}{n}} = \lim_{n\to\infty}\frac{2+\frac{1}{n}}{1+\frac{1}{n}} = \frac{2}{1} = \boxed{2=a}$$

„Typ $\frac{\infty}{\infty}$" — Erweitern mit $\frac{1}{n}$

konvergent mit Grenzwert $a=2$

Beispiel 6: $\boxed{a_n = \frac{2n+1}{n^2+1}}$ $\rightarrow a=0$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{2n+1}{n^2+1} = \lim_{n\to\infty}\frac{(2n+1)\cdot\frac{1}{n^2}}{(n^2+1)\cdot\frac{1}{n^2}} = \lim_{n\to\infty}\frac{\frac{2}{n}+\frac{1}{n^2}}{1+\frac{1}{n^2}} = \frac{0}{1} = \boxed{0=a}$$

„Typ $\frac{\infty}{\infty}$" — Erweitern mit $\frac{1}{n^2}$

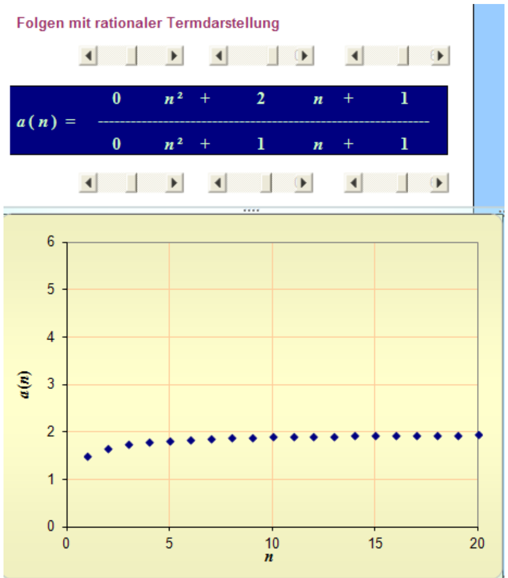
konvergent mit Grenzwert $a=0$

Beispiel 7: $\boxed{a_n = \frac{2n^2+1}{n+1}}$ $\rightarrow$ divergent

$$\lim_{n\to\infty}\frac{2n^2+1}{n+1} = \lim_{n\to\infty}\frac{(2n^2+1)\cdot\frac{1}{n}}{(n+1)\cdot\frac{1}{n}} = \lim_{n\to\infty}\frac{2n+\frac{1}{n}}{1+\frac{1}{n}} = \infty$$

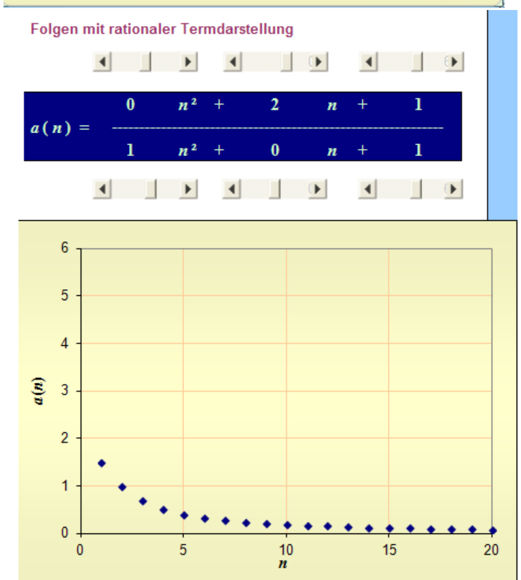
„Typ $\frac{\infty}{\infty}$" — Erweitern mit $\frac{1}{n}$

kein Grenzwert, Folge ist divergent



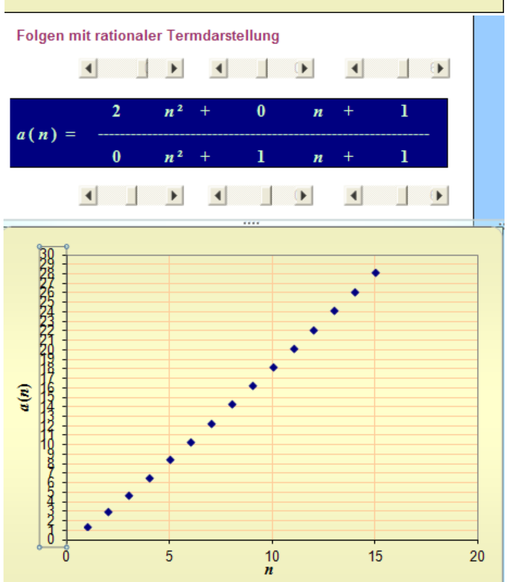
Beispiel 5:

$$a = \lim_{n\to\infty} \frac{2n+1}{n+1} = 2$$



Beispiel 6:

$$a = \lim_{n\to\infty} \frac{2n+1}{n^2+1} = 0$$



Beispiel 7:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{2n^2+1}{n+1} = \infty$$

http://www.mathe-online.at/galerie/grenz/grenz.html

(2) Bestimmen des Grenzwertes anhand der Folgenbeschreibung

(a) für gebrochen rationale Folgen, d.h. Polynome im Zähler und Nenner des Bruches

Regel:
für die Bestimmung des Grenzwertes gebrochen rationalen Ausdrücken **(mit Umformung der Brüche)**

Erweitern des Bruches mit dem Kehrwert der höchsten Nennerpotenz von n

Regel:
für die Bestimmung des Grenzwertes gebrochen rationaler Funktionen (**ohne Umformung der Brüche**)

(1) Ist der **Grad** des **Zähler**polynoms **größer** als der **Grad** des **Nenner**polynoms,
dann strebt die Folge gegen ∞, d.h. sie divergiert

Bsp. $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{n^5}{n^4+1}$

(2) Ist der **Grad** des **Zähler**polynoms **gleich** dem **Grad** des **Nenner**polynoms,
dann konvergiert die Folge gegen den **Quotienten der Koeffizienten der höchsten Potenzen der Polynome** des Zählers und Nenners ,

Bsp

(3) Ist der **Grad** des **Zähler**polynoms **kleiner** als der **Grad** des **Nenner**polynoms,
dann konvergiert die Folge gegen **0.**

Bsp: $a_n = \frac{5n^2+n}{2n^3+1}$

Beispiel: $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{\overset{\nearrow\infty}{3n^5+4n^4+2n^2}}{\underset{\searrow\infty}{7n^5+2n+1}} = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{(3n^5+4n^4+2n^2)\cdot\frac{1}{n^5}}{(7n^5+2n+1)\cdot\frac{1}{n^5}} = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{\overset{\nearrow 3}{3+\overset{\nearrow 0}{\frac{4}{n}}+\overset{\nearrow 0}{\frac{2}{n^3}}}}{\underset{\searrow 7}{7+\underset{\downarrow 0}{\frac{2}{n^4}}+\underset{\downarrow 0}{\frac{1}{n^5}}}} = \frac{3}{7} = a$

Typ $\frac{\infty}{\infty}$

Erweitern mit $\frac{1}{n^5}$ — Kehrwert der höchsten Nennerpotenz

Beispiele: Grenzwert einer Folge

(2b) Bestimmen des Grenzwertes anhand der Folgenbeschreibung
durch Umformen des Bildungsgesetzes - Beispiel 2

Bestimmen des Grenzwertes
Umformung der Folgenvorschrift zur Vermeidung unbestimmter Ausdrücke
$\frac{0}{0}$, $\frac{\infty}{\infty}$, $0\cdot\infty$, $\infty-\infty$, 0^0, ∞^0, 1^∞

Beispiel 8: Umformen des Bildungsgesetzes beim Typ "∞-∞"

Sei $a_n = \sqrt{2n+3} - \sqrt{2n-1}$.

Bestimmen Sie den Grenzwert!

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\overbrace{\sqrt{2n+3}}^{\to\infty} - \overbrace{\sqrt{2n-1}}^{\to\infty}}{1} \cdot \underbrace{\frac{\sqrt{2n+3}+\sqrt{2n-1}}{\sqrt{2n+3}+\sqrt{2n-1}}}$$

„Typ ∞-∞"

Einrichtung so, dass im Zähler die 3. binomische Formel angewendet werden kann

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{\left(\sqrt{2n+3}\right)^2 - \left(\sqrt{2n-1}\right)^2}{\sqrt{2n+3}+\sqrt{2n-1}} = \lim_{n\to\infty} \frac{(2n+3)-(2n-1)}{\sqrt{2n+3}+\sqrt{2n-1}}$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{\overset{\to 4}{4}}{\underbrace{\underset{\to+\infty}{\sqrt{2n+3}} + \underset{\to+\infty}{\sqrt{2n-1}}}_{\to+\infty}} = 0$$

.

Fragen: Grenzwerte von Folgen

Übungsaufgabe

http://math-www.uni-paderborn.de/~mathkit/Inhalte/Folgen/preview/index.html

$\lim_{n\to\infty} \frac{1\cdot n^2+4n-1}{1\cdot n^2-3n}$

(A) 0

(B) 1 → gleiche Potenzen im Zähler und Nenner
Grenzwert ist Quotient der Koeffizienten
der höchsten Potenzen

(C) ∞

$\lim_{n\to\infty} \frac{2n}{4n^2+3}$

(A) $\frac{1}{2}$

(B) $\frac{1}{4}$

(C) 0 → Nennergrad größer als Zählergrad

$\lim_{n\to\infty} \frac{3\cdot 2^n+2}{2^{n+1}} = \lim_{n\to\infty} \frac{3\cdot 2^n+2}{2\cdot 2^n} = \lim_{n\to\infty} \frac{3\cdot \cancel{2^n}}{2\cdot \cancel{2^n}} + \frac{\cancel{2}\cdot 1}{\cancel{2}\cdot 2^n} = \frac{3}{2}$

$\frac{1}{2^n} \to 0$

(A) $\frac{1}{2}$

(B) 1

(C) $1\frac{1}{2} = \frac{3}{2}$

$2^n = \underbrace{2\cdot 2\cdot 2\cdot \ldots \cdot 2}_{n\text{-mal}}$

$2^{n+1} = \underbrace{\underbrace{2\cdot 2\cdot 2\cdot \ldots \cdot 2}_{2^n}\cdot 2}_{(n+1)\text{-mal}} = 2^n \cdot 2$

$\lim_{n\to\infty} \frac{5n}{2n+8}$

gleiche Potenzen
im Zähler und Nenner

(A) $2\frac{1}{2}$

(B) $\frac{5}{10}$

(C) 0

$\lim_{n\to\infty} \frac{\left(1-2\sqrt{n}\right)^2}{4n-4\sqrt{n}+1} = \lim_{n\to\infty} \frac{1-\cancel{4\sqrt{n}}+4n}{4n-\cancel{4\sqrt{n}}+1} = 1$

(A) ∞

(B) -1

(C) 1

Fragen: Grenzwerte von Folgen

Übungsaufgabe

(A)
(B)
(C)
[redacted]

$\lim_{n\to\infty} \frac{n^2+4n-1}{n^2-3n}$ $\to\infty$ unbestimmter Ausdruck $\frac{\infty}{\infty}$, Erweitern mit $\frac{1}{n^2}$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n^2+4n-1}{n^2-3n} = \lim_{n\to\infty} \frac{\cancel{n^2}\cdot\frac{1}{\cancel{n^2}}+4\cancel{n}\cdot\frac{1}{n^{\cancel{2}}}-1\cdot\frac{1}{n^2}}{\cancel{n^2}\cdot\frac{1}{\cancel{n^2}}-3\cancel{n}\cdot\frac{1}{n^{\cancel{2}}}}$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{1+\frac{4}{n}-\frac{1}{n^3}}{1-\frac{3}{n}} = \frac{1}{1} = 1$$

(A)
(B)
(C)
[redacted]

$\lim_{n\to\infty} \frac{2n}{4n^2+3}$ $\to\infty$ unbestimmter Ausdruck $\frac{\infty}{\infty}$, Erweitern mit $\frac{1}{n^2}$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{2n}{4n^2+3} = \lim_{n\to\infty} \frac{2\cancel{n}\cdot\frac{1}{n^{\cancel{2}}}}{4\cancel{n^2}\cdot\frac{1}{\cancel{n^2}}+3\cdot\frac{1}{n^2}}$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{2}{n}}{4+\frac{3}{n^2}} = \frac{0}{4} = 0$$

(A)
(B)
(C)
[redacted]

$\lim_{n\to\infty} \frac{3\cdot 2^n+2}{2^{n+1}}$ $\to\infty$ unbestimmter Ausdruck $\frac{\infty}{\infty}$, Erweitern mit $\frac{1}{2^{n+1}}$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{3\cdot 2^n+2}{2^{n+1}} = \lim_{n\to\infty} \frac{3\cdot\cancel{2^n}\cdot\frac{1}{\cancel{2^{n+1}}}+\frac{2}{2^{n+1}}}{\cancel{2^{n+1}}\cdot\frac{1}{\cancel{2^{n+1}}}}$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{3}{2}+\frac{1}{2^n} = \frac{3}{2}$$

(A)
(B)
(C)
[redacted]

$\lim_{n\to\infty} \frac{5n}{2n+8}$ $\to\infty$ unbestimmter Ausdruck $\frac{\infty}{\infty}$, Erweitern mit $\frac{1}{n}$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{5n}{2n+8} = \lim_{n\to\infty} \frac{5\cancel{n}\cdot\frac{1}{\cancel{n}}}{2\cancel{n}\cdot\frac{1}{\cancel{n}}+8\cdot\frac{1}{n}}$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{5}{2+\frac{8}{n}} = \frac{5}{2}$$

(A)
(B)
(C)
[redacted]

$$\lim_{n\to\infty} \frac{(1-2\sqrt{n})^2}{4n-4\sqrt{n}+1} = \lim_{n\to\infty} \frac{(1-2\sqrt{n})^2}{(2\sqrt{n}-1)^2}$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{((-1)(2\sqrt{n}-1))^2}{(2\sqrt{n}-1)^2} = \lim_{n\to\infty} \frac{(-1)^2\cancel{(2\sqrt{n}-1)^2}}{\cancel{(2\sqrt{n}-1)^2}} = 1$$

umformen

http://math-www.uni-paderborn.de/~mathkit/Inhalte/Folgen/preview/index.html