1.1	V	A	V	A		Z	Ü
1.2	V	A	V	A		Z	Ü

Vorlesung 4 am 28.9.2022

Differentialrechnung 1 - Crashkurs

Inhalt:

- Rückblick: Funktionen mit Parametern
- **Einführung Differentialrechnung**
  - Geradengleichung/ Tangentengleichung
  - Differenzenquotient
  - Differentialquotient
  - Graphische Bedeutung
  - Ableitungsregeln
  - Extremwerte

Lernziele:

(0) Anwendung

(1) Was ist ein Differenzenquotient? Was ist ein Differentialquotienten? Was ist der Unterschied zwischen beiden?

(2) Wie berechnet man den Differentialquotienten?

(3) Was ist eine Tangente? Wie lautet die Tangentengleichung in einem Punkt?

(4) Wann heißt eine Funktion differenzierbar?

(5) Welche Rechenregeln zur Berechnung der 1.Ableitung gibt es und wie wendet man sie an?

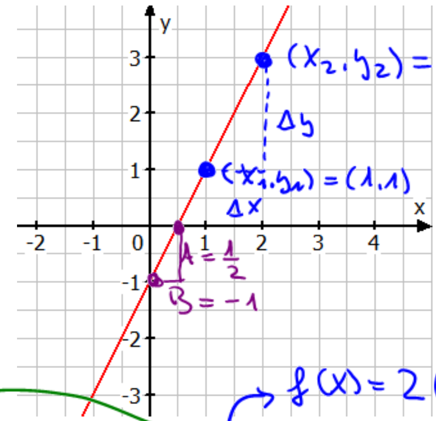
(6) Welchen graphischen Zusammenhang haben eine Funktion und ihre Ableitungen?

(7) Welche Aussagen machen die 1. und 2. Ableitung einer Funktion über die Funktion?

(8) Wie berechnet man Extremwerte?

Verschiedene Darstellungmöglichkeiten einer Geraden

Bemerkung:
Zur Bestimmung einer Geradengleichung sind stets zwei Angaben notwendig.



$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{3-1}{2-1} = \frac{2}{1} = 2$$

$f(x) = 2(x-1) + 1$

$f(x) = 2x - 1$

- **Allgemeine Gleichung einer Geraden**

$$y = f(x) = \underbrace{m}_{\text{Steigung}} x + \underbrace{b}_{\text{y-Achsen-abschnitt}}$$

Polynom 1.Grades

mit Steigung m und Höhenverschiebung in y – Richtung b

- **Zwei-Punkte-Form einer Geraden**

$$f(x) = \underbrace{\frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}}_{\frac{\Delta y}{\Delta x}} (x - x_1) + y_1 \quad \text{mit } P_1 = (x_1, y_1) \text{ und } P_2 = (x_2, y_2)$$

Differenzenquotient

Steigungsdreieck

- **Punkt-Steigungs-Form einer Geraden**

Tangenten

$$f(x) = a(x - x_1) + y_1 \quad \text{mit } P_1 = (x_1, y_1) \text{ und Steigung } a \text{ der Geraden}$$

- **Achsen-Abschnitts-Form einer Geraden** (Spezialfall der Zwei-Punkte-Form)

(A,0) (0,B) zwei spezielle Punkte

$$f(x) = \underbrace{\frac{-B}{A}}_{\text{Steigung}} x + B, \quad \text{mit } A \text{ und } B \text{ Achsenabschnitte } (A: x-\text{Achse}, B: y-\text{Achse})$$

$$f(x) = \frac{-(-1)}{\frac{1}{2}} \cdot x + (-1) = 2 \cdot x - 1$$

Beispiel: $B = -1$, $A = \frac{1}{2}$

Beispiel

Eine Gerade verläuft durch die Punkte $(\overset{x_2}{\underset{x_1}{3}},\overset{y_2}{\underset{y_1}{2}})$ und $(\overset{x_1}{\underset{x_2}{0}},\overset{y_1}{\underset{y_2}{5}})$.

Bestimmen Sie die zugehörige Geradengleichung.

Zwei-Punkt-Form $$f(x) = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}(x - x_1) + y_1$$

$$= \frac{2-5}{3-0}(x-0)+5$$

$$= \frac{-3}{3}x + 5 = -x+5$$

$$f(x) = \frac{5-2}{0-3}\cdot(x-3)+2$$

$$= \frac{3}{-3}(x-3)+2$$

$$= -x+3+2 = -x+5$$

Bemerkung:

Gerade ist unabhängig von der Wahl, welcher Punkt (x_1,y_1) und (x_2,y_2) ist

Warum betrachten wir zu Beginn der Differentialrechnung Geraden und ihre Beschreibung?

> Differentialrechnung beschäftigt sich mit der Steigung einer Funktion, die in einem Punkt durch die Steigung der Tangenten (Gerade) visualisiert werden kann.

Linearisierung einer Funktion f(x) in einem Punkt (x_0, y_0)

bedeutet
Approximation einer Funktion durch Angabe ihrer Tangenten in einer kleinen Umgebung um einen Punkt

Satz 6.19: Tangentengleichung

Die Tangente $f_t(x)$ an die Kurve der differenzierbaren Funktion f im Punkt $(x_0, f(x_0))$ ist gegeben durch:

$$\frac{f_t(x) - f(x_0)}{x - x_0} = f'(x_0) \qquad \text{(Punkt-Steigungsform)}$$

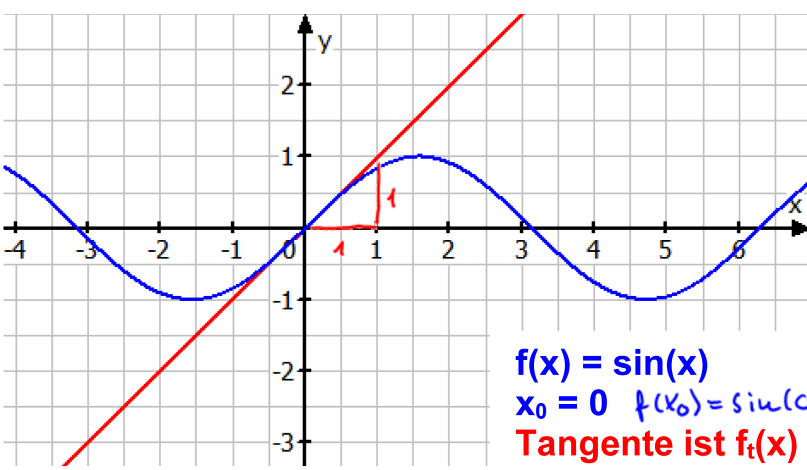
bzw.

$$\boxed{f_t(x) = f(x_0) + f'(x_0)\,(x - x_0)} . \quad = \boxed{f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0)}$$

Tangenten-gleichung

Der Steigungswinkel ist $\varphi_{ft} = \arctan f'(x_0)$, da $f'(x_0) = \tan(\varphi_{ft})$.

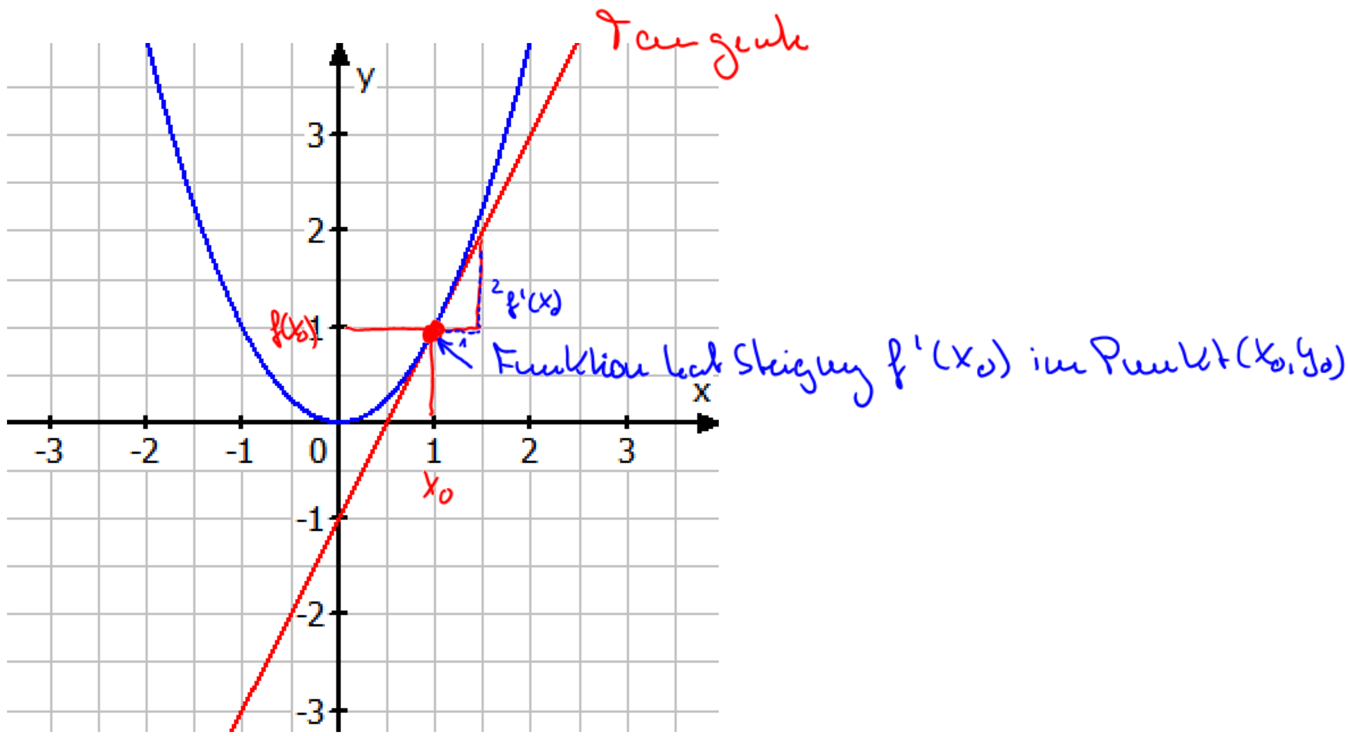
Beispiel:



f(x) = sin(x)
x_0 = 0 $f(x_0) = \sin(0) = 0$
Tangente ist $f_t(x)$ = $x = 1 \cdot (x - 0) + 0 = x$

Steigung $\quad x_0 \quad f(x_0)$

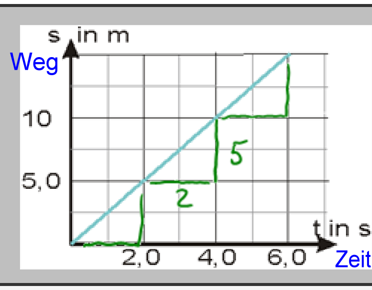
Weiteres Beispiel zur Linearisierung einer Funktion durch ihre Tangente



$f(x) = x^2$
für $x_0 = 1$, $f(x_0) = x_0^2 = 1^2 = 1$
Tangente ist $f_t(x)$ = $\underbrace{f'(x_0)}_{2}(x - \underset{\uparrow 1}{x_0}) + \underbrace{f(x_0)}_{1} = 2(x-1)+1 = 2x-1$

Bestimmung der Steigung der Funktion in einem Punkt mit Hilfe der Ableitung der Funktion.....

Einführung - Frage 1



Das obige Diagramm verdeutlicht die linearen Bewegungen eines Körpers. Welche der folgenden Aussagen sind richtig?

(A) ☑ Der Körper bewegt sich mit gleichbleibender Geschwindigkeit. — da eine Gerade überall die gleiche Steigung hat

(B) ☐ Der Körper bewegt sich mit zunehmender Geschwindigkeit.

(C) ☐ Der Körper hat die Geschwindigkeit 10 m/s

(D) ☐ Der Körper hat die Geschwindigkeit 5 m/s

(E) ☑ Der Körper hat die Geschwindigkeit 2,5 m/s , da die Steigung der Geraden $\frac{\text{Weg}}{\text{Zeit}}$ die Geschwindigkeit wiedergibt

$\frac{\Delta s}{\Delta t} = \frac{5}{2}$

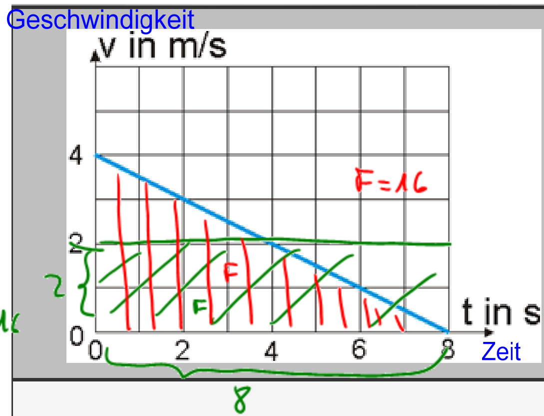
http://www.abfrager.de/gymnasium/klasse9/physik/geradlinigebewegungen.htm

Bemerkung: Schlussfolgerung von s auf v mit Hilfe der Differentialrechnung

Einführung - Frage 2

Durchschnitts- $\bar{v}$ geschwindigkeit

F=16



Das obige Zeit-Geschwindigkeits-Diagramm zeigt die Bewegung eines Körpers in 8 Sekunden.

(A) ○ **Der Körper bewegt sich gar nicht.**

(B) ○ **Der Körper bewegt sich um 32 m weiter.**

(C) ○ **Der Körper bewegt sich um 32 m rückwärts.**

(D) ✓ **Der Körper bewegt sich um 16 m weiter.**

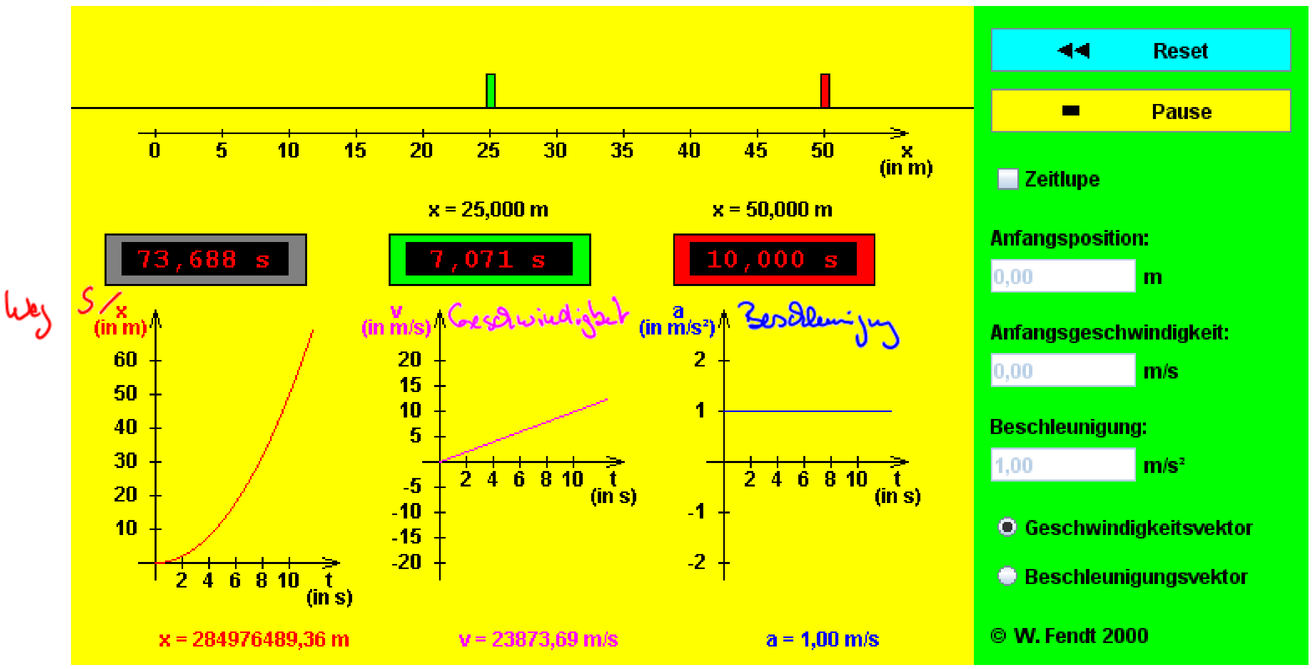
(E) ○ **Der Körper bewegt sich um 16 m rückwärts.**

Bemerkung: Schlussfolgerung von v auf s
mit Hilfe Integralrechnung

Kinematik

Bewegung mit konstanter Beschleunigung

- Position x als Funktion der Zeit t
- Geschwindigkeit v als Funktion der Zeit t
- Beschleunigung a als Funktion der Zeit t



https://www.walter-fendt.de/html5/phde/acceleration_de.htm

Integralrechnung

$s(t) \rightleftarrows v(t) \rightleftarrows a(t)$

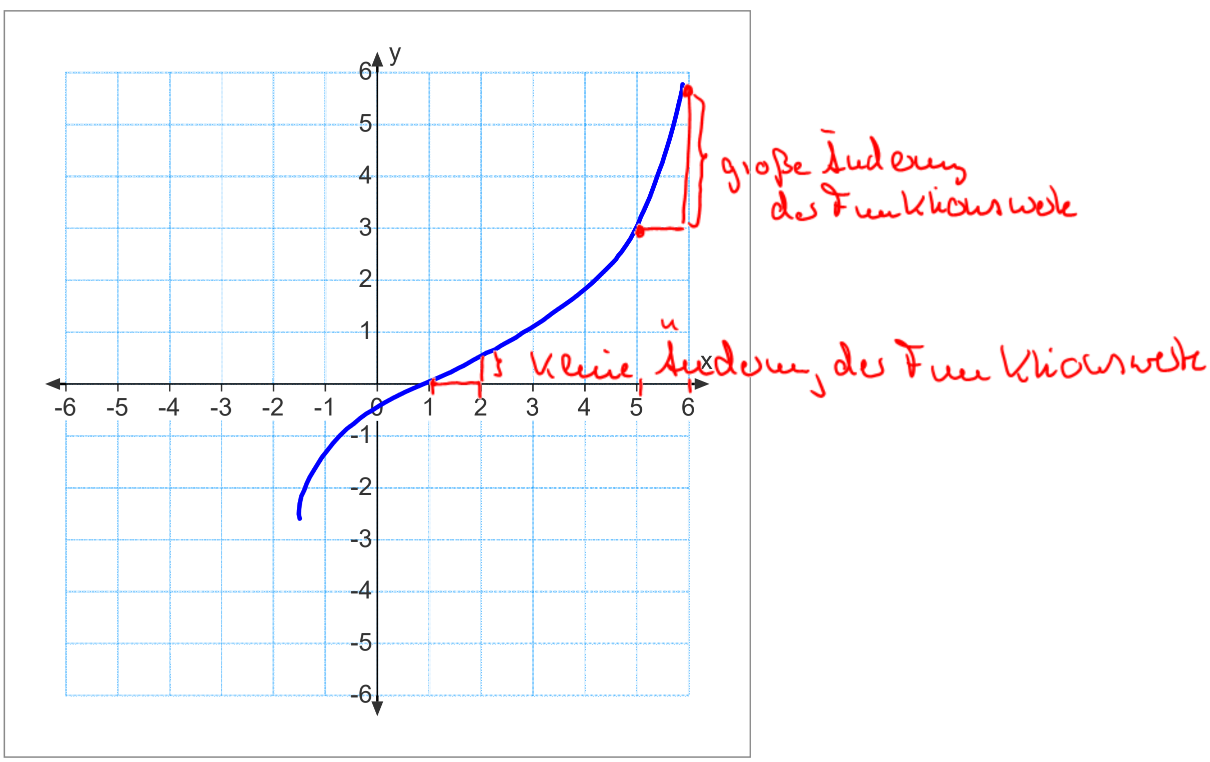
Differentialrechnung

•

4 Differentialrechnung

Ziel:

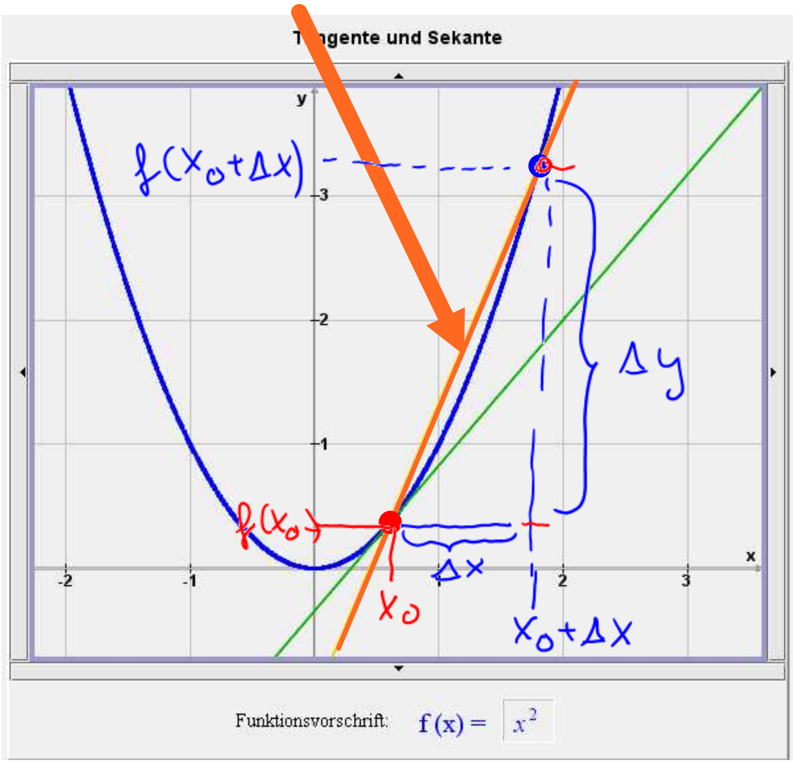
- Steigungen bestimmen
- Bestimmen „wie schnell ändern sich die Funktionswerte“



Differentialrechnung: Veranschaulichung

Differenzenquotient:

Steigung der Sekanten durch die Punkte $(x_0, f(x_0))$ und $(x_0+\Delta x,\ f(x_0+\Delta x))$



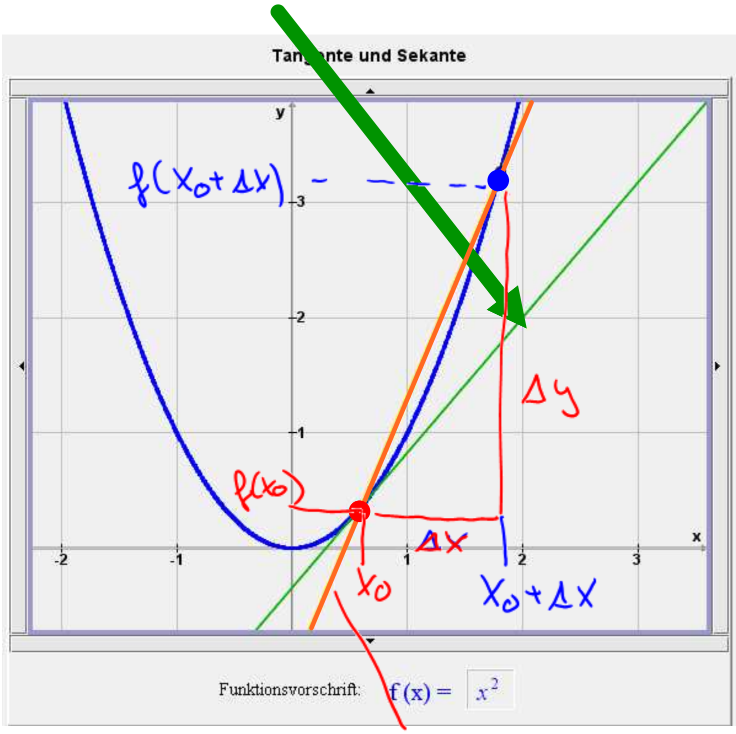
http://www.math.ethz.ch/~lemuren/public/visualization/analysis/TangentAndSecant.html

Steigung der Sekanten $\boxed{\dfrac{\Delta y}{\Delta x} = \dfrac{f(x_0+\Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}} = \dfrac{\text{Änderung y-Werte}}{\text{Änderung x-Werte}}$

Differenzenquotient

Differentialrechnung: Veranschaulichung

Differentialquotient:
Steigung der Tangenten im Punkt $(x_0, f(x_0))$



Steigung der Sekanten
Differenzenquotient

$$f'(x_0) = \frac{dy}{dx}(x_0) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}(x_0) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}$$

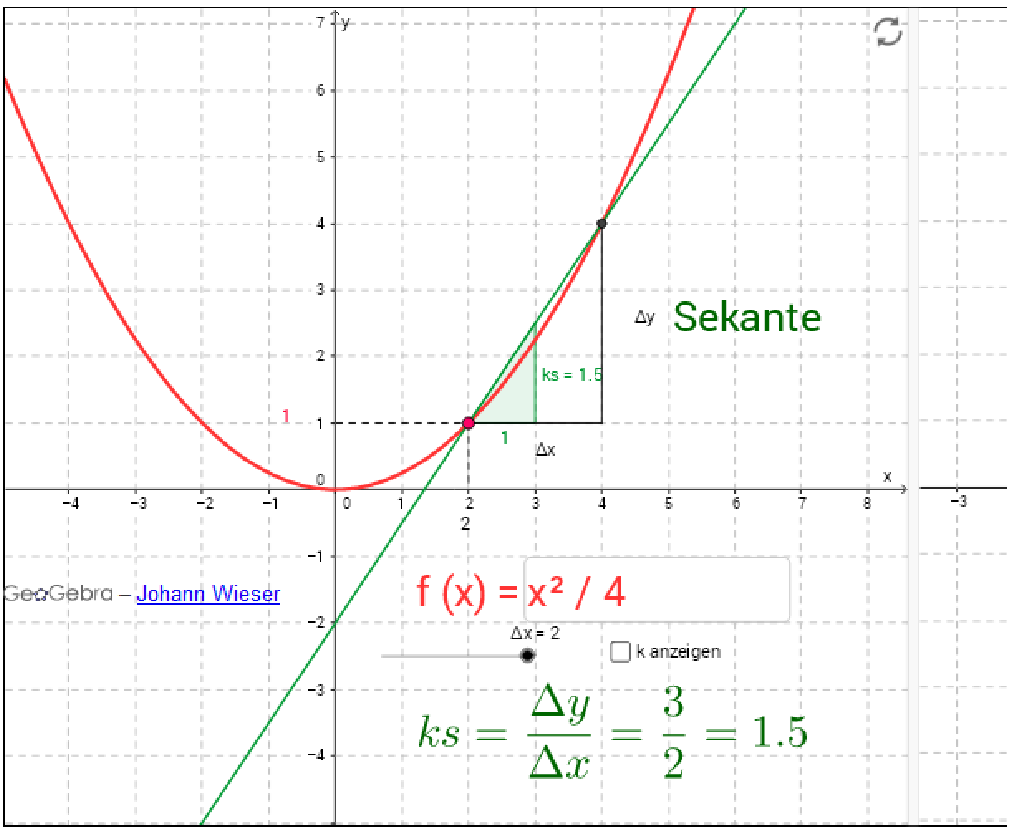
Grenzwert
Δx wird immer kleiner und strebt gegen 0

Differentialquotient an der Stelle x_0
≙ Steigung an der Stelle x_0 der Funktion
≙ Steigung der Tangenten an der Stelle x_0

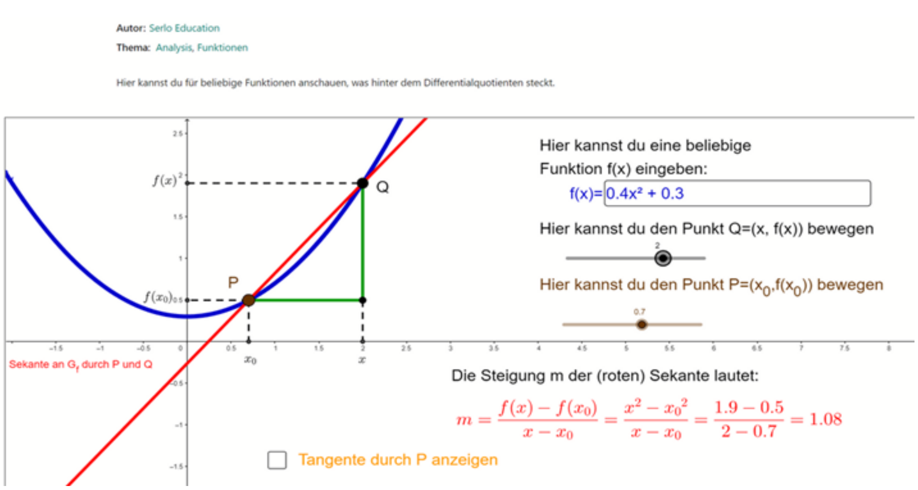
Differentialrechnung: Veranschaulichung

Differenzenquotient:
Steigung der Sekanten durch die Punkte $(x_0, f(x_0))$ und $(x_0+\Delta x, f(x_0+\Delta x))$

Differentialquotient:
Steigung der Tangenten im Punkt $(x_0, f(x_0))$



https://www.geogebra.org/m/RPtTff4M



https://www.geogebra.org/m/VchexR9f

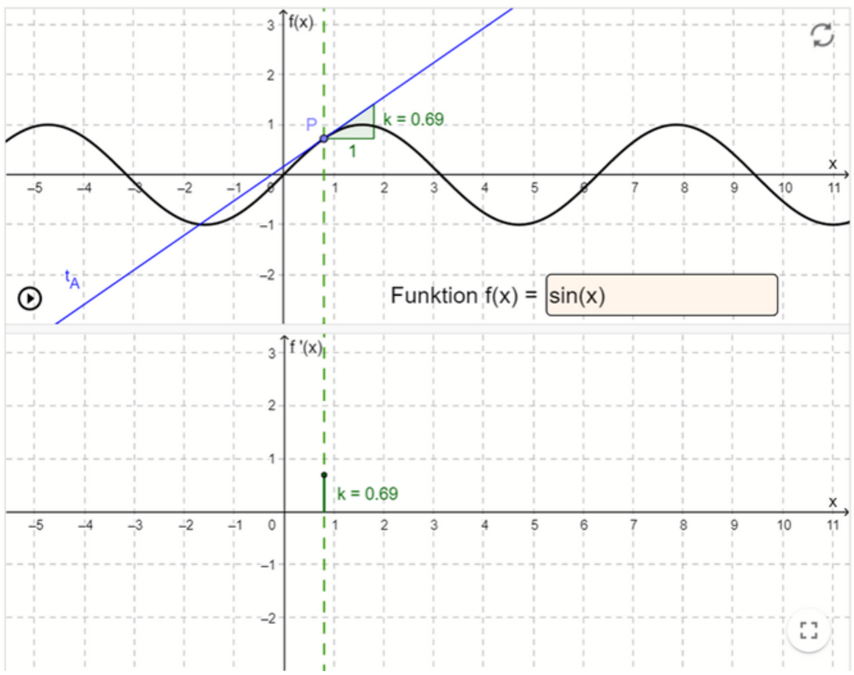
Grafisches Ableiten

Autor: Andreas Lindner

Thema: Ableitung oder Differentialquotient, Differentialrechnung

Der Wert k zeigt die Steigung der Tangente im Punkt P an.

Aufgabe
Spielen Sie die Animation ab.
Geben Sie eine andere Funktion im Eingabefeld ein.



https://www.geogebra.org/m/eWcuw4jY

4.1 Differenzierbarkeit einer Funktion

Definition 4.1: differenzierbar, Ableitung, Differentialquotient

Die Funktion $f(x)$ heißt **an der Stelle** x_0 **differenzierbar**, wenn der folgende Grenzwert existiert

d.h. die Steigung existiert

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}.$$

Grenzwertbestimmbar

Man bezeichnet ihn als die (erste) **Ableitung** von $y = f(x)$ an der Stelle $x = x_0$ oder als **Differentialquotient** von $y = f(x)$ an der Stelle $x = x_0$ und wird auch wie folgt bezeichnet:

$$y'(x_0),\ f'(x_0),\ \left.\frac{dy}{dx}\right|_{x=x_0} \ oder\ \frac{df}{dx}(x_0).$$

Der Ausdruck $\frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}$ wird als **Differenzenquotient** bezeichnet.

Definition 4.2: 1.Ableitung einer Funktion f $\Rightarrow f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x}$

Die **Funktion** f heißt **differenzierbar**, wenn f an jeder Stelle des Definitionsbereiches $D(f)$ differenzierbar ist.

Die **Funktion** f' heißt **Ableitung** von f (bzw. 1.Ableitung von f).

Tangente im Punkt (x_0,y_0)

Die Gleichung der Tangenten im Punkt (x_0, y_0) lautet:

$$f_t(x) = \underbrace{f'(x_0)}_{\text{Steigung der Geraden}}(x - x_0) + y_0$$

(Punkt – Steigungs – Form einer Geraden)

.

1.Ableitung/ Differentialquotient

$$f'(x_0) = \frac{df}{dx}(x_0) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0+\Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}$$

Beispiel: $f(x) = x^2$

- Steigung/ Differentialquotient im Punkt $x_0 = 1$ berechnen

$$f'(x_0) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0+\Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}$$

zu bestimmen $x_0 = 1$

$$f'(1) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(1+\Delta x) - f(1)}{\Delta x}$$

$f(x) = x^2$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{(1+\Delta x)^2 - 1^2}{\Delta x}$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\cancel{1^2} + 2\cdot 1\Delta x + (\Delta x)^2 - \cancel{1^2}}{\Delta x}$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\cancel{\Delta x}\cdot(2+\Delta x)}{\cancel{\Delta x}\ 1}$$

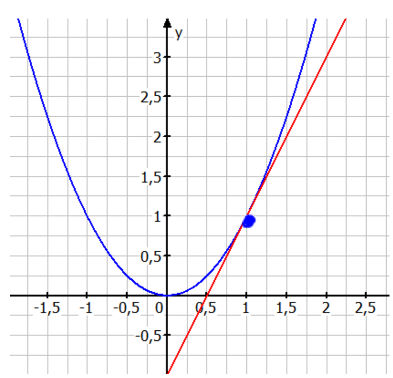
$$= \lim_{\Delta x \to 0} 2 + \underbrace{\Delta x}_{\to 0} = 2 \Rightarrow f'(1) = 2$$

$f(x) = x^2$ hat an der Stelle $x = 1$ die Steigung 2

Tangente im Punkt (x_0=1,y_0=1)

$$f_t(x) = f'(x_0)(x - x_0) + y_0$$

$$f_t(x) = 2(x-1)+1$$
$$= 2x - 1$$



Funktion allgemeines

1.Ableitung/ Differentialquotient

$$f'(x) = \frac{df}{dx}(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x}$$

Beispiel: $f(x) = x^2$

- allgemein: Differentialquotient für $x_0 = x$ berechnen

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x}$$

zu bestimmen

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x}$$

$f(x) = x^2$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{(x+\Delta x)^2 - x^2}{\Delta x}$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\cancel{x^2} + 2 \cdot x \cdot \Delta x + (\Delta x)^2 - \cancel{x^2}}{\Delta x}$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\cancel{\Delta x} \cdot (2x + \Delta x)}{\cancel{\Delta x}_1}$$

! Grenzübergang ist hier noch nicht möglich, da wir den unbestimmten Ausdruck „$\frac{0}{0}$" erhalten

$f(x) = x^2$ hat an der Stell... die Steigung ...

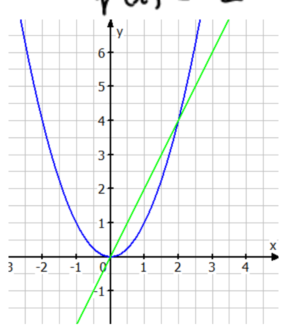
$$= \lim_{\Delta x \to 0} 2x + \underbrace{\Delta x}_{\to 0} = 2x \Rightarrow f'(x) = 2x$$

$x_0 = 1$ $x_0 = 1$

$f'(1) = 2$

Funktion f(x)

Funktion der 1.Ableitung f'(x)



Definition 6.2: 1.Ableitung einer Funktion f

Die **Funktion** f heißt **differenzierbar**, wenn f an jeder Stelle des Definitionsbereiches $D(f)$ differenzierbar ist.

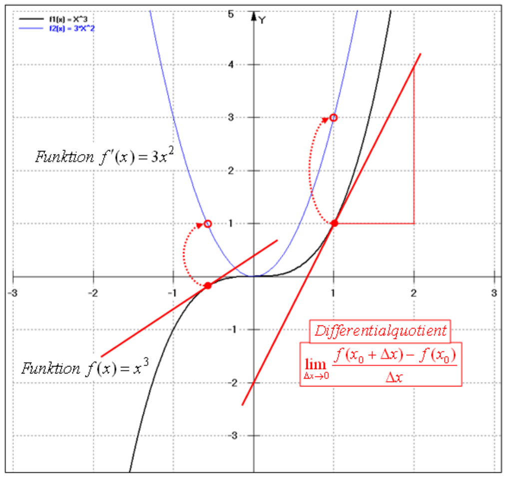
Die **Funktion** f' heißt **Ableitung** von f (bzw. 1.Ableitung von f).

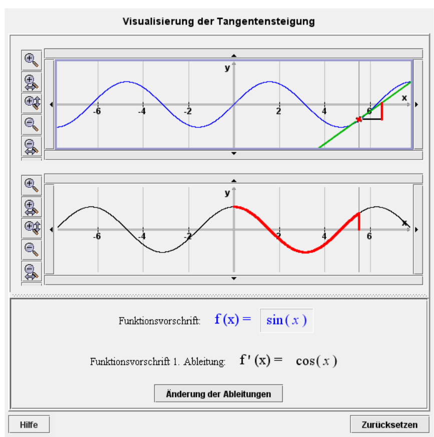
Zusammenhang: Funktion und Funktion der Ableitung

Veranschaulichung:

Funktion der 1.Ableitung: Werte der Differentialquotienten in allen Punkten x_0 der Funktion f

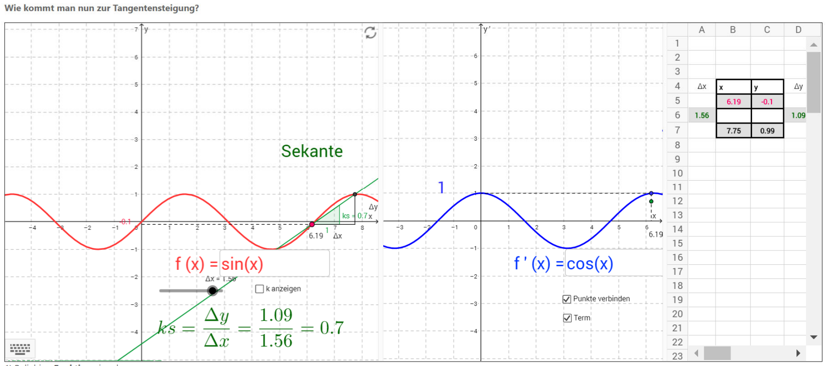
$$\text{1.Ableitung } f': x_0 \longrightarrow \underbrace{\lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}}_{\text{Differentialquotient}}$$





Sekanten- , Tangentensteigung, Ableitungsfunktion

Die **Ableitungsfunktion f '** ordnet jeder Stelle x die **Tangentensteigung** der Ausgangsfunktion f (an der Stelle x) zu.
Wie kommt man nun zur Tangentensteigung?



1) Beliebige **Funktion** eingeben
2) Bei gegebener Funktion alle **Tangenten** darstellen (Berührungspunkt ziehen) - **Tangentensteigung** im Diagramm daneben
3) Bei gegebener Funktion und gegebener Stelle x Näherungs**sekanten** darstellen (Schieberegler) - **Sekantensteigung** im Diagramm daneben

https://www.geogebra.org/m/RPtTff4M

Potenzregel:

Ableitung von Potenzfunktionen

erstes Beispiel: $f(x) = x^{2}$ $\quad$ $2-1$ $\quad$ $f'(x) = \frac{d f}{dx}(x) = \underline{2x}$

allgemein: $\boxed{f(x) = x^{n} \rightarrow f'(x) = n \cdot x^{n-1}}$

Exponent von $f(x)$ um 1 reduziert

Exponent von $f(x)$ als Faktor nach vorne

Beispiele:

$$f(x) = x^3 \rightarrow f'(x) = 3x^2$$

$$f(x) = \frac{1}{3} x^3 \rightarrow f'(x) = \frac{1}{3} \cdot 3x^2 = x^2$$

$$f(x) = x^{10} \rightarrow f'(x) = 10x^9$$

$$f(x) = x^{\frac{1}{2}} = \sqrt{x} \rightarrow f'(x) = \frac{1}{2} x^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{\sqrt{x}} = \frac{1}{2\sqrt{x}}$$

$$f(x) = x^{-2} \rightarrow f'(x) = (-2) x^{-3} = (-2) \cdot \frac{1}{x^3} = \frac{-2}{x^3}$$

$$f(x) = \frac{1}{x} = x^{-1} \rightarrow f'(x) = (-1) \cdot x^{-2} = \frac{-1}{x^2}$$

z.B.

$f(x)=3$

$f'(x)=0$

Zusammenfassung: Ableitungen elementarer Funktionen

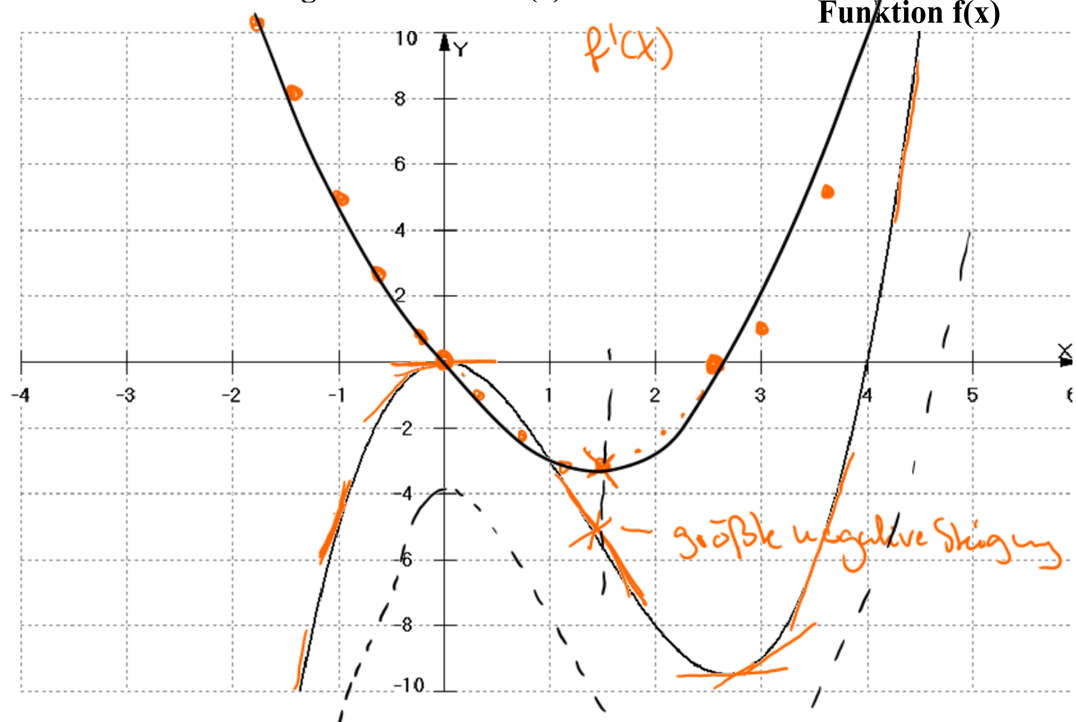
	Funktion $f(x)$	1. Ableitung $f'(x)$
Konstante Funktion	$c \in \mathbb{R}$	0
Potenzfunktion	$x^n,\ n \in \mathbb{N},\ x > 0$	$n \cdot x^{n-1},\ n \in \mathbb{N}$
	$x^a,\ a \in \mathbb{R},\ x > 0$	$a \cdot x^{a-1},\ a \in \mathbb{R},\ x \in D$
Sonderfall Wurzelfunktion	$\sqrt{x} = x^{\frac{1}{2}},\ x > 0$	$\frac{1}{2\sqrt{x}} = \frac{1}{2} x^{-\frac{1}{2}},\ x \in D$
Trigonometrische Funktionen	$\sin x,\ x \in \mathbb{R}$	$\cos x,\ x \in \mathbb{R}$
	$\cos x,\ x \in \mathbb{R}$	$-\sin x,\ x \in \mathbb{R}$
	$\tan x,\ x \neq (2k+1)\frac{\pi}{2}$	$\frac{1}{\cos^2 x},\ x \neq (2k+1)\frac{\pi}{2}$
	$\cot x,\ x \neq k\frac{\pi}{2}$	$-\frac{1}{\sin^2 x},\ x \neq k\frac{\pi}{2}$
Zyklometrische Funktionen	$\arcsin x,\ x \in (-1,1)$	$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}},\ x \in (-1,1)$
	$\arccos x,\ x \in (-1,1)$	$-\frac{1}{\sqrt{1-x^2}},\ x \in (-1,1)$
	$\arctan x,\ x \in \mathbb{R}$	$\frac{1}{1+x^2},\ x \in \mathbb{R}$
	$\mathrm{arc}\cot x,\ x \in \mathbb{R}$	$-\frac{1}{1+x^2},\ x \in \mathbb{R}$
Exponentialfunktionen	e^x	e^x
	a^x	$\ln a \cdot a^x$
Logarithmusfunktionen	$\ln x,\ x > 0$	$\frac{1}{x},\ x > 0$
	$\log_a x,\ x > 0$	$\frac{1}{\ln a \cdot x},\ x > 0$

Graphische Herleitung

Wie schnell ändern sich die Funktionswerte einer Funktion?

Graphische Bestimmung von f'(x) zur Funktion f(x)

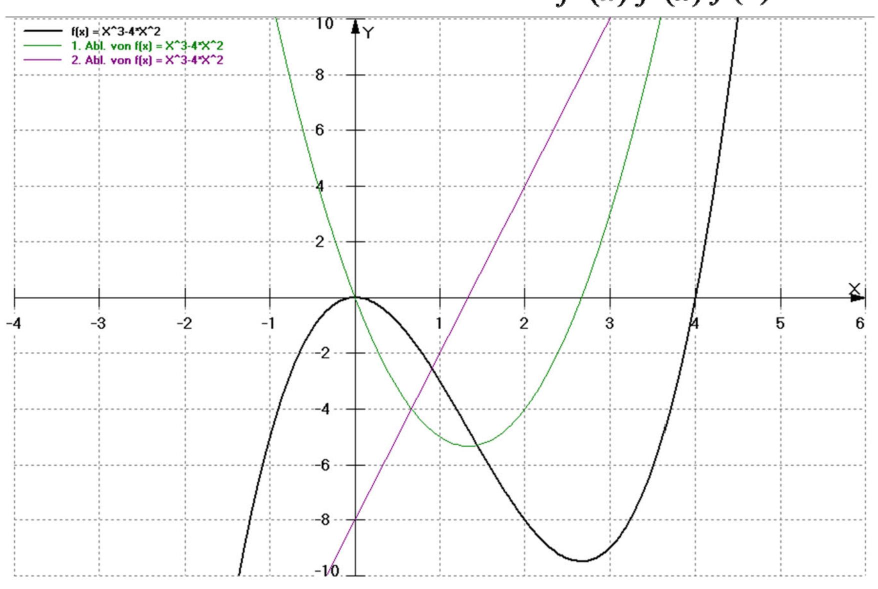
Eine Funktion f'(x), die die Änderung der Funktionswerte einer Funktion f(x) wiedergibt, heißt die 1.Ableitungsfunktion von f(x)



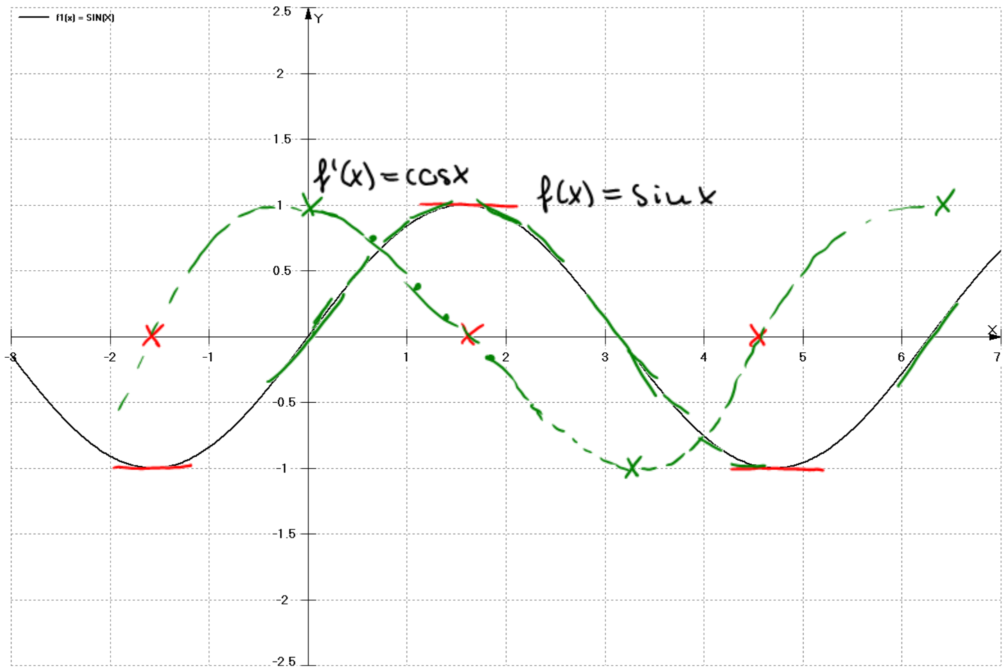
Vorgehensweise:
Tangentensteigungen der gegebenen Funktion sind die Funktionswerte der Funktion der 1.Ableitung

Beispiel:

$f''(x)\ f'(x)\ f(x)$

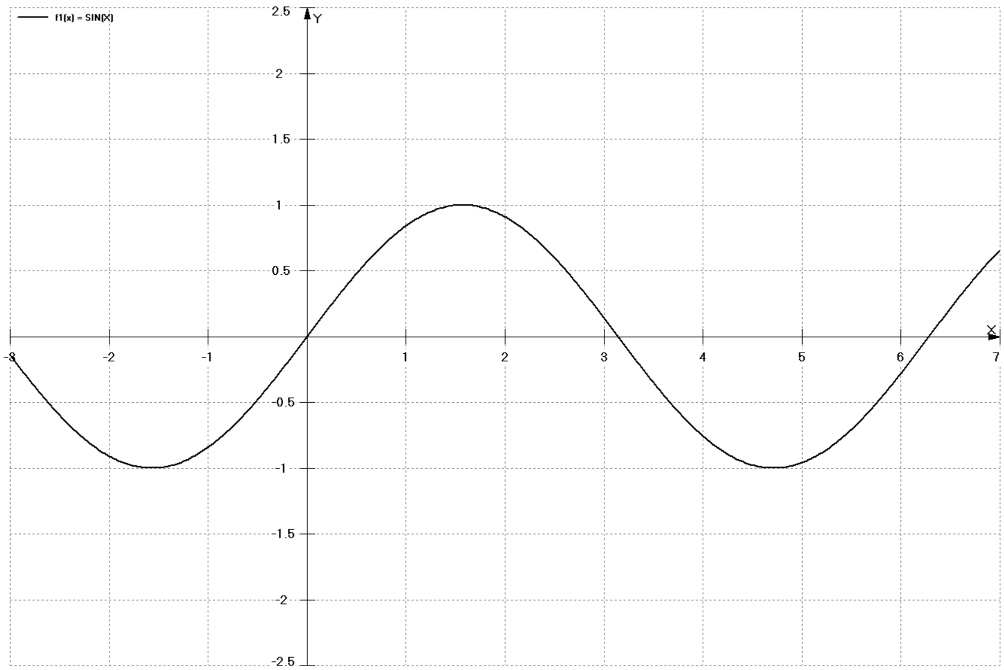


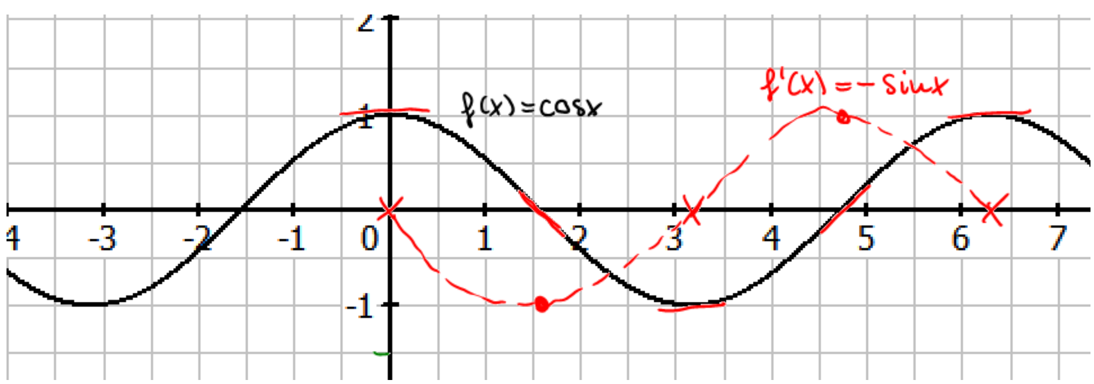
Graphische Bestimmung von f'(x) zur Funktion f(x)=sin(x)



•

Graphische Bestimmung von f'(x) zur Funktion f(x)=sin(x)





Zyklus der Ableitungen der trigonometrischen Funktionen

Differenzieren

$(\sin x)' = \cos x$

$(\cos x)' = -\sin x$

$(-\sin x)' = -\cos x$

$(-\cos x)' = \sin x$

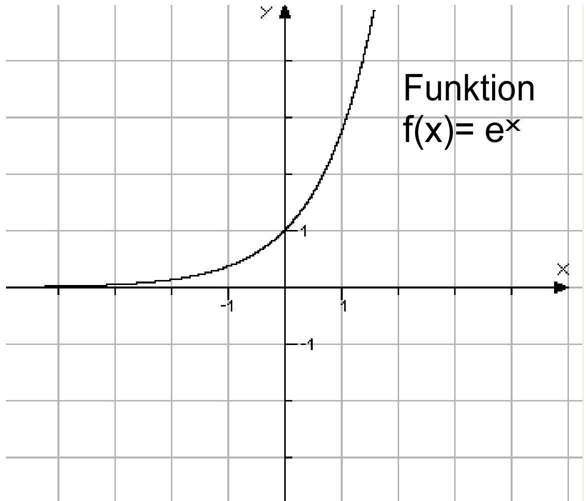
Integrieren

Zusammenfassung: Ableitungen elementarer Funktionen

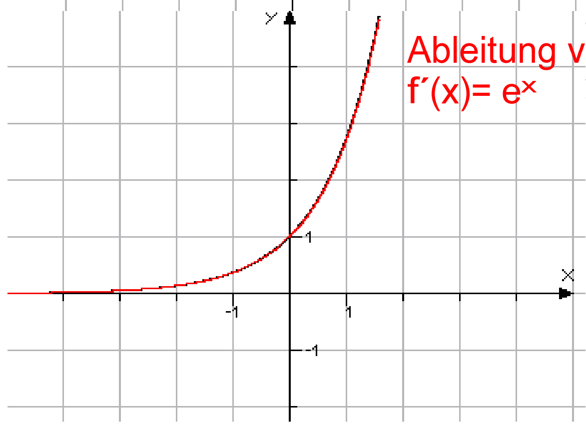
	Funktion $f(x)$	1. Ableitung $f'(x)$
Konstante Funktion	c	0
Potenzfunktion	$x^n,\ n \in \mathbb{N},\ x > 0$ $x^a,\ a \in \mathbb{R},\ x > 0$	$n \cdot x^{n-1},\ n \in \mathbb{N}$ $a \cdot x^{a-1},\ a \in \mathbb{R},\ x \in D$
Sonderfall Wurzelfunktion	$\sqrt{x} = x^{\frac{1}{2}},\ x > 0$	$\frac{1}{2\sqrt{x}} = \frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}},\ x \in D$
Trigonometrische Funktionen	$\sin x,\ x \in \mathbb{R}$ $\cos x,\ x \in \mathbb{R}$ $\tan x,\ x \neq (2k+1)\frac{\pi}{2}$ $\cot x,\ x \neq k\frac{\pi}{2}$	$\cos x,\ x \in \mathbb{R}$ $-\sin x,\ x \in \mathbb{R}$ $\frac{1}{\cos^2 x},\ x \neq (2k+1)\frac{\pi}{2}$ $-\frac{1}{\sin^2 x},\ x \neq k\frac{\pi}{2}$
Zyklometrische Funktionen	$\arcsin x,\ x \in (-1,1)$ $\arccos x,\ x \in (-1,1)$ $\arctan x,\ x \in \mathbb{R}$ $arc\cot x,\ x \in \mathbb{R}$	$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}},\ x \in (-1,1)$ $-\frac{1}{\sqrt{1-x^2}},\ x \in (-1,1)$ $\frac{1}{1+x^2},\ x \in \mathbb{R}$ $-\frac{1}{1+x^2},\ x \in \mathbb{R}$
Exponentialfunktionen	e^x a^x	e^x $\ln a \cdot a^x$
Logarithmusfunktionen	$\ln x,\ x > 0$ $\log_a x,\ x > 0$	$\frac{1}{x},\ x > 0$ $\frac{1}{\ln a \cdot x},\ x > 0$

→ später

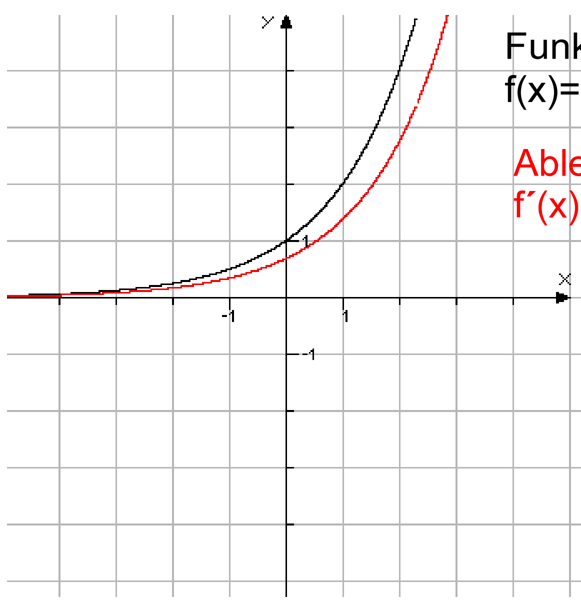
Hinweis: Ableitung der Exponentialfunktion $f(x)=e^x$



Bemerkung:
Für e^x stimmen an jeder Stelle x Funktionswert und Steigungswert überein.



Hinweis: Ableitung der Exponentialfunktion $f(x)=2^x$



6.2 Differentiationsregeln

Erläuterung der Regeln 1-5 ohne Beweis

Satz 6.1: Faktorregel

Ein konstanter Faktor bleibt beim Differenzieren erhalten:

$$\boxed{y = c \cdot f(x) \;\Rightarrow\; y' = c \cdot f'(x)}$$

Satz 6.2: Summenregel

Eine Summe von Funktionen darf gliedweise differenziert werden:

$$\boxed{y = f(x) + g(x) \;\Rightarrow\; y' = f'(x) + g'(x)}$$

Satz 6.3: Produktregel

Die Ableitung einer Funktion, die aus einem Produkt von Teilfunktionen besteht, wird mit folgendem Ausdruck berechnet:

$$\boxed{y = f(x) \cdot g(x) \;\Rightarrow\; y' = f'(x) \cdot g(x) + f(x) \cdot g'(x)}$$

Satz 6.4: Quotientenregel

Die Ableitung einer Funktion, die aus einem Quotienten von Teilfunktionen besteht, wird mit folgendem Ausdruck berechnet:

$$\boxed{y = \frac{f(x)}{g(x)} \;\Rightarrow\; y' = \frac{f'(x) \cdot g(x) - f(x) \cdot g'(x)}{g^2(x)}}$$

Sonderfall: **Reziprokregel**

$$y = \frac{1}{g(x)} \;\Rightarrow\; y' = \frac{-g'(x)}{g^2(x)}$$

Satz 6.5: Kettenregel

Die Ableitung einer zusammengesetzten (verketteten) Funktion erhält man als Produkt aus äußerer und innerer Ableitung:

$$\boxed{y = f(g(x)) \;\Rightarrow\; y' = f'(g(x)) \cdot g'(x)}$$

Substitution $u = g(x)$: $y = f(u) \;\Rightarrow\; y' = \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dx}$

Satz 6.6: Ableitung der Umkehrfunktion

Sei $y = f(x)$ umkehrbar und $x = f^{-1}(y)$ die nach x aufgelöste Funktion, dann gilt für die Ableitungen:

$$\left[f^{-1}(y)\right]' = \frac{1}{f'(x)} \quad mit \quad f'(x) \neq 0$$

$$\Rightarrow \boxed{f'(x) = \frac{1}{\left[f^{-1}(y)\right]'}}$$

Satz 6.7: Logarithmische Differentiation

Die Ableitung einer Funktion $y = f(x) = [u(x)]^{v(x)}$ kann berechnet werden mit:

$$[\ln f(x)]' = \frac{f'(x)}{f(x)} \quad mit \quad f(x) \neq 0$$

$$\Rightarrow \boxed{f'(x) = [\ln(f(x))]' \, f(x)}$$

4.2 Differentiationsregeln

Satz 4.1: Faktorregel

Ein konstanter Faktor bleibt beim Differenzieren erhalten:

$$y = c \cdot f(x) \Rightarrow y' = c \cdot f'(x)$$

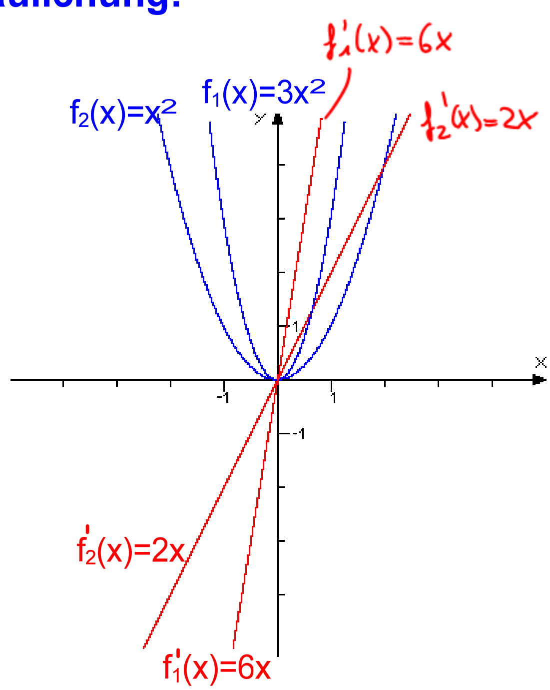
Beispiel: $y = 10 \cdot x^2 \Rightarrow y' = 10 \cdot 2x = 20x$

Beispiele:

$$(f(x))' = (10 \cdot x^2)' = 10 \cdot (x^2)' = 10(2 \cdot x) = 20x$$

$$(f(x))' = (3 \cdot \sin x)' = 3 \cdot (\sin x)' = 3 \cdot \cos x$$

Veranschaulichung:



Bemerkung:
Faktor in der Funktion bleibt als Faktor in der Ableitung enthalten, d.h. Ableitung ist um den gleichen Faktor verstärkt/ geschwächt wie die Funktion selbst.

Satz 4.2: Summenregel

Eine Summe von Funktionen darf gliedweise differenziert werden:

$$y = f(x) + g(x) \Rightarrow y' = f'(x) + g'(x)$$

Beispiel: $y = x^2 + \sin x \;\Rightarrow\; y' = 2x + \cos x$

Beispiel:

$$\left(f(x)\right)' = \left(x^2 + \sin x\right)' = \left(x^2\right)' + \left(\sin x\right)'$$
$$= 2x + \cos x$$

Satz 4.3: Produktregel

Die Ableitung einer Funktion, die aus einem Produkt von Teilfunktionen besteht, wird mit folgendem Ausdruck berechnet:

$$y = f(x) \cdot g(x) \Rightarrow y' = f'(x) \cdot g(x) + f(x) \cdot g'(x)$$

Beispiel: $y = x^2 \cdot \sin x \;\Rightarrow\; y' = 2x \cdot \sin x + x^2 \cdot \cos x$

$$y = f(x) \cdot g(x) = f \cdot g$$

$$y' = f' \cdot g + f \cdot g'$$

Beispiel:

$$(y)' = (\underbrace{x^2}_{f} \cdot \underbrace{\sin x}_{g})' = \underbrace{2x}_{f'} \cdot \underbrace{\sin x}_{g} + \underbrace{x^2}_{f} \cdot \underbrace{\cos x}_{g'}$$

Satz 4.4: Quotientenregel

Die Ableitung einer Funktion, die aus einem Quotienten von Teilfunktionen besteht, wird mit folgendem Ausdruck berechnet:

$$y = \frac{f(x)}{g(x)} \Rightarrow y' = \frac{f'(x)\cdot g(x) - f(x)\cdot g'(x)}{g^2(x)}$$

Sonderfall: **Reziprokregel**

$$y = \frac{1}{g(x)} \Rightarrow y' = \frac{-g'(x)}{g^2(x)}$$

Beispiel: $y = \frac{x^2}{\sin x} \Rightarrow y' = \frac{2x\cdot\sin x - x^2\cdot\cos x}{(\sin x)^2} \left(= \frac{x(2 - x\cdot\cot x)}{\sin x} \right)$

Beispiel 1:

$$\left(f(x)\right)' = \left(\frac{\overset{f}{x^2}}{\underset{g}{\sin x}}\right)' = \frac{f'\cdot g - f\cdot g'}{g^2} = \frac{2x\cdot\sin x - x^2\cdot\cos x}{(\sin x)^2}$$

Beispiel 2:

$$f(x) = \frac{x}{(x+1)^2} = \text{zu Hause}$$

.

Satz 6.5: Kettenregel

Die Ableitung einer zusammengesetzten (verketteten) Funktion erhält man als Produkt aus äußerer und innerer Ableitung:

$$\boxed{y = f(g(x)) \Rightarrow y' = \underbrace{f'(g(x))}_{\text{„äußere Ableitung"}} \cdot \overbrace{g'(x)}^{\text{„innere Ableitung"}}}$$

„innere Ableitung" → Ableitung der inneren Funktion

„äußere Ableitung" → Ableitung der äußeren Funktion, die innere Funktion bleibt unverändert enthalten

Substitution $u = g(x)$: $y = f(u) \Rightarrow y' = \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dx}$

$$y' = \frac{dy}{dx} \cdot \frac{du}{du} = \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dx}$$

Beispiel: $y = \sin(x^2) \Rightarrow y' = \cos(x^2) \cdot 2x$

Beispiel 1:

$$(f(x))' = (\underbrace{\sin}_{f}(\underbrace{\overbrace{x^2}^{u}}_{g}))' = \underbrace{\cos(x^2)}_{\substack{f' \\ \text{äußere} \\ \text{Abl.}}} \cdot \underbrace{2x}_{\substack{g' \\ \text{innere} \\ \text{Abl.}}}$$

Beispiel 2:

$$(g(x))' = ((4x+1)^3)' = \underbrace{3 \cdot (4x+1)^2}_{\substack{\text{äußere} \\ \text{Abl.}}} \cdot \underbrace{4}_{\substack{\text{innere} \\ \text{Abl.}}} = 12 \cdot (4x+1)^2$$

$f = z^3$ äußere Fkt.

$g = z = 4x+1$ innere Fkt.

Beispiel 3:

$$(h(x))' = (\underbrace{\cos}_{f}(\underbrace{(\overbrace{4x+1}^{h})^3}_{g}))' = \underbrace{-\sin}_{\substack{f' \\ \text{1. äußere} \\ \text{Abl.}}} \underbrace{((4x+1)^3)}_{g(h(x))} \underbrace{\underbrace{(\overbrace{3(4x+1)^2}^{\text{2. äußere Abl.}})}_{g'(h(x))} \cdot \underbrace{\overbrace{4}^{\text{2. innere Abl.}}}_{h'(x)}}_{\text{1. innere Abl.}}$$

Dreifach geschachtelt $f(g(h(x)))$

$$= -\sin((4x+1)^3) \cdot 12 \cdot (4x+1)^2$$

Beispiel 4:

$$(p(x))' = (\sin(e^{-2x+1}))' = \cos(e^{-2x+1}) \cdot e^{-2x+1} \cdot (-2)$$

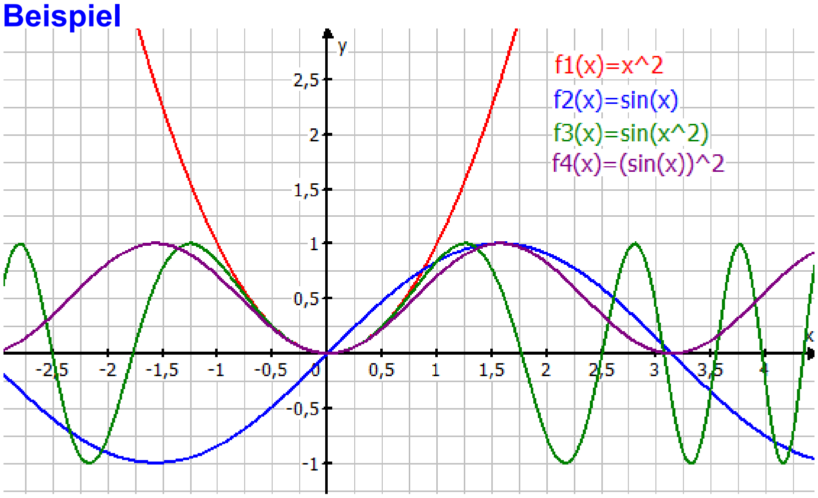
Erläuterung zur Verkettung von Funktionen

Definition 5.3: Verkettung von Funktionen

X, Y, Z seien nicht leere Mengen mit Funktionen $f: X \to Y$, $g: Y \to Z$.

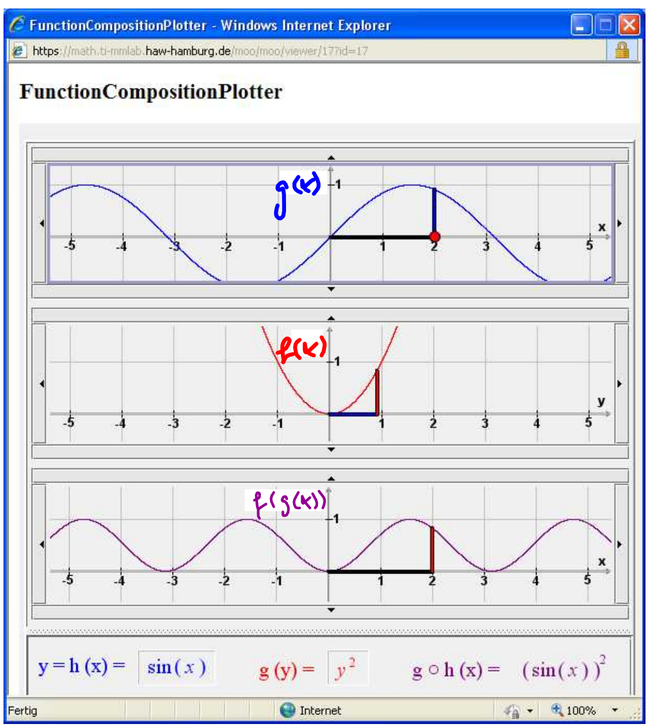
Die durch $h(x) := g \circ f(x) = g(f(x))$ definierte Funktion $h: X \to Z$ ist eine **verkettete Funktion**. Dabei ist f die innere und g die äußere Funktion.

Beispiel



Veranschaulichung der Verkettung von Funktionen

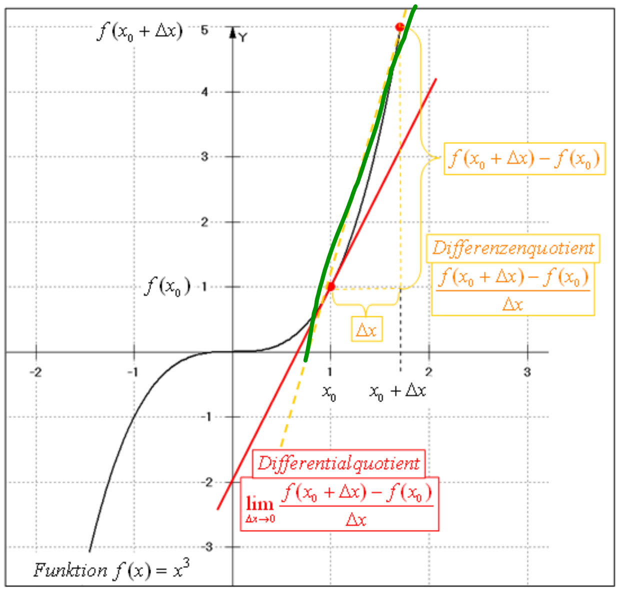
$f(x) \circ g(x) = x^2 \circ \sin(x) = f(g(x)) = (\sin(x))^2$



Bemerkung:
Die Verkettung von Funktionen ist **nicht kommutativ!**

Zusammenfassung:
Differenzenquotient - Differentialquotient - Funktion der 1.Ableitung

Veranschaulichung:
Differenzenquotient und Differentialquotient im Punkt x_0 der Funktion f



Differenzenquotient:

$$\frac{\Delta f}{\Delta x}(x_0) = \frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}$$

Steigung der Sekanten durch die Punkte $(x_0, f(x_0))$ und $(x_0+\Delta x, f(x_0+\Delta x))$

Differentialquotient :

Differentialquotient im Punkt x_0

$$f'(x_0) = \frac{df}{dx}(x_0) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}$$

Steigung der Tangenten im Punkt $(x_0, f(x_0))$

Differentialquotient für x

$$f'(x) = \frac{df}{dx}(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}$$

1.Ableitung der Funktion f(x) = Funktion der Steigungen der Funktion f(x)

6.2 Differentiationsregeln Zusammenfassung

Satz 6.1: Faktorregel

Ein konstanter Faktor bleibt beim Differenzieren erhalten:

$$\boxed{y = c \cdot f(x) \;\Rightarrow\; y' = c \cdot f'(x)}$$

Satz 6.2: Summenregel

Eine Summe von Funktionen darf gliedweise differenziert werden:

$$\boxed{y = f(x) + g(x) \;\Rightarrow\; y' = f'(x) + g'(x)}$$

Satz 6.3: Produktregel

Die Ableitung einer Funktion, die aus einem Produkt von Teilfunktionen besteht, wird mit folgendem Ausdruck berechnet:

$$\boxed{y = f(x) \cdot g(x) \;\Rightarrow\; y' = f'(x) \cdot g(x) + f(x) \cdot g'(x)}$$

Satz 6.4: Quotientenregel

Die Ableitung einer Funktion, die aus einem Quotienten von Teilfunktionen besteht, wird mit folgendem Ausdruck berechnet:

$$\boxed{y = \frac{f(x)}{g(x)} \;\Rightarrow\; y' = \frac{f'(x) \cdot g(x) - f(x) \cdot g'(x)}{g^2(x)}}$$

Sonderfall: **Reziprokregel**

$$y = \frac{1}{g(x)} \;\Rightarrow\; y' = \frac{-g'(x)}{g^2(x)}$$

Satz 6.5: Kettenregel

Die Ableitung einer zusammengesetzten (verketteten) Funktion erhält man als Produkt aus äußerer und innerer Ableitung:

$$\boxed{y = f(g(x)) \;\Rightarrow\; y' = f'(g(x)) \cdot g'(x)}$$

Substitution $u = g(x)$: $y = f(u) \;\Rightarrow\; y' = \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dx}$

Satz 6.6: Ableitung der Umkehrfunktion

Sei $y = f(x)$ umkehrbar und $x = f^{-1}(y)$ die nach x aufgelöste Funktion, dann gilt für die Ableitungen:

$$\left[f^{-1}(y)\right]' = \frac{1}{f'(x)} \quad mit \;\; f'(x) \neq 0 \qquad \Rightarrow \boxed{f'(x) = \frac{1}{\left[f^{-1}(y)\right]'}}$$

Satz 6.7: Logarithmische Differentiation

Die Ableitung einer Funktion $y = f(x) = [u(x)]^{v(x)}$ kann berechnet werden mit:

$$\left[\ln f(x)\right]' = \frac{f'(x)}{f(x)} \quad mit \;\; f(x) \neq 0 \qquad \Rightarrow \boxed{f'(x) = \left[\ln(f(x))\right]' f(x)}$$

Zusammenfassung: Ableitungen elementarer Funktionen

	Funktion $f(x)$	1. Ableitung $f'(x)$
Konstante Funktion	c	0
Potenzfunktion	$x^n,\ n\in\mathbb{N},\ x>0$ $x^a,\ a\in\mathbb{R},\ x>0$	$n\cdot x^{n-1},\ n\in\mathbb{N}$ $a\cdot x^{a-1},\ a\in\mathbb{R},\ x\in D$
Sonderfall Wurzelfunktion	$\sqrt{x}=x^{\frac{1}{2}},\ x>0$	$\frac{1}{2\sqrt{x}}=\frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}},\ x\in D$
Trigonometrische Funktionen	$\sin x,\ x\in\mathbb{R}$ $\cos x,\ x\in\mathbb{R}$ $\tan x,\ x\neq(2k+1)\frac{\pi}{2}$ $\cot x,\ x\neq k\frac{\pi}{2}$	$\cos x,\ x\in\mathbb{R}$ $-\sin x,\ x\in\mathbb{R}$ $\frac{1}{\cos^2 x},\ x\neq(2k+1)\frac{\pi}{2}$ $-\frac{1}{\sin^2 x},\ x\neq k\frac{\pi}{2}$
Zyklometrische Funktionen	$\arcsin x,\ x\in(-1,1)$ $\arccos x,\ x\in(-1,1)$ $\arctan x,\ x\in\mathbb{R}$ $arc\cot x,\ x\in\mathbb{R}$	$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}},\ x\in(-1,1)$ $-\frac{1}{\sqrt{1-x^2}},\ x\in(-1,1)$ $\frac{1}{1+x^2},\ x\in\mathbb{R}$ $-\frac{1}{1+x^2},\ x\in\mathbb{R}$
Exponentialfunktionen	e^x a^x	e^x $\ln a\cdot a^x$
Logarithmusfunktionen	$\ln x,\ x>0$ $\log_a x,\ x>0$	$\frac{1}{x},\ x>0$ $\frac{1}{\ln a\cdot x},\ x>0$

Ableitungen und ihre Aussagen

Aussagen der 1.Ableitung:

- gibt Steigungen der Kurventangenten wieder
- $f'(x)$ *positiv*: Tangente hat positive Steigung im Punkt x
- $f'(x_0)$ *negativ*: Tangente hat negative Steigung im Punkt x_0
- $f'(x_0) = 0$: Tangente hat Steigung 0 im Punkt x (notwendige Bedingung für lokalen Extremwert)

Aussagen der 2.Ableitung:

- gibt Steigungen der Kurventangenten der 1.Ableitung wieder
- macht qualitative Aussagen über das Krümmungsverhalten von f(x)
- $f''(x)$ *positiv*: Linkskrümmung der Kurve
- $f''(x)$ *negativ*: Rechtskrümmung der Kurve
- quantitatives Maß über die Stärke der Krümmung: $\kappa = \dfrac{f''(x)}{\left[1+(f'(x))^2\right]^{\frac{3}{2}}}$

$f(x)=x^2$

Links-krümmung

$f'(x) = 2x$

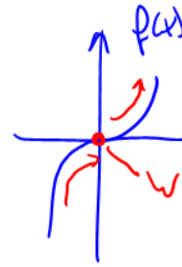
$f''(x) = 2$

Definition 6.4: Wendepunkt/ Sattelpunkt ≙ Krümmungswechsel

Kurvenpunkte, in denen sich der Drehsinn der Tangenten ändert, heißen **Wendepunkte**.

Wendepunkte mit waagerechter Tangente werden als **Sattelpunkte** bezeichnet.

$f(x)=x^3$



WP

$f(x)=-x^2$

$f'(x)=-2x$

$f''(x)=-2$

Rechts-krümmung

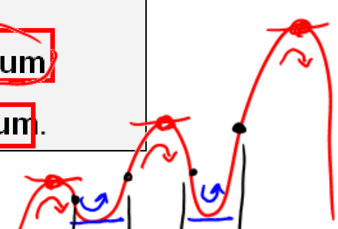
Satz 6.15:

Die Funktion f sei im Intervall $[a,b]$ differenzierbar.

Gilt $f'(x_0)=0 \;\; und \;\; f''(x_0) < 0$, dann hat f in x_0 **ein lokales Maximum**

Gilt $f'(x_0)=0 \;\; und \;\; f''(x_0) > 0$, dann hat f in x_0 **ein lokales Minimum**.

notwendig



WP1 2 3 4

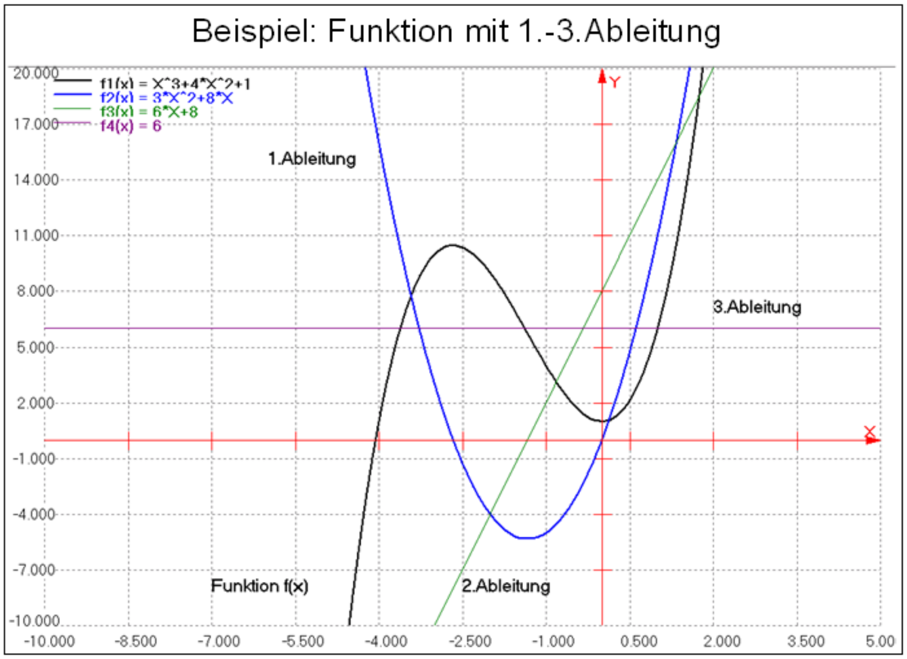
Satz 6.16:

Die Funktion f sei im Intervall $[a,b]$ differenzierbar.

Gilt $f''(x_0)=0 \;\; und \;\; f'''(x_0) \neq 0$, dann hat f in x_0 einen **Wendepunkt**.

Gilt zusätzlich $f'(x_0)=0$, dann hat f in x_0 einen **Sattelpunkt**.

Beispiel zur Extremwert- und Wendepunktbestimmung



$f(x) = x^3 + 4x^2 + 1$
$f'(x) = 3x^2 + 8x$
$f''(x) = 6x + 8$
$f'''(x) = 6$

Extremwertbestimmung: notwendige Bedingung $f'(x)=0$

$f'(x) = 0 \Rightarrow 3x^2 + 8x = 0$
$x(3x+8) = 0$
$\Rightarrow x=0 \vee x= - 8/3$ zwei kritische Punkte

Untersuchung des Verhaltens für x=0:

$f''(0) = 6(0) + 8 = 8 > 0 \Rightarrow$ Minimum in x=0
mit Funktionswert $f(0) = 1$

Untersuchung des Verhaltens für x=- 8/3:

$f''(- 8/3) = 6(- 8/3) + 8 = -8 < 0 \Rightarrow$ Maximum in x= - 8/3
mit Funktionswert f(- 8/3) = ...

Wendepunktbestimmung: notwendige Bedingung $f''(x)=0$

$f''(x) = 0 \Rightarrow 6x + 8 = 0$
$\Rightarrow x = -4/3$

Untersuchung des Verhaltens für x=-4/3:

$f'''(-4/3) = 6 \neq 0$ $\Rightarrow$ Wendepunkt
> 0 $\Rightarrow$ Wechsel von Rechts- auf Linkskrümmung

Aufgaben zum Üben

Aufgabe 1

Berechnen Sie die Ableitung von $f(x) = \frac{1}{x}$

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x}$$

mit Hilfe des Differentialquotienten!

Beispiel 2:

$$f(x) = \frac{x}{(x+1)^2}$$

Aufgabe 2: Wie sieht die Produktregel für 3 Faktoren aus?

$$(f \cdot g \cdot h)' = \ldots$$

Frage 3:

Bestimmen Sie die Ableitungsfunktion von $f(x) = \sin(\ln(x^2))$

Hinweis $\boxed{f(x) = \ln x, \; x > 0 \quad f'(x) = \frac{1}{x}, \; x > 0}$

(A) $f'(x) = \dfrac{\cos(\ln(x))}{x}$

(B) $f'(x) = 2x\cos(\ln(x^2))$

(C) $f'(x) = \dfrac{\cos(\ln(x^2))}{x^2}$

(D) $f'(x) = \dfrac{2\cos(\ln(x^2))}{x}$

Aufgabe 1 Differentialquotient für $f(x)=\frac{1}{x}$ $f(2)=\frac{1}{2}$

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x}$$

$f(x)=\frac{1}{x}$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\frac{1 \cdot x}{(x+\Delta x)x} - \frac{1 \cdot (x+\Delta x)}{x \cdot (x+\Delta x)}}{\Delta x}$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\frac{x-(x+\Delta x)}{(x+\Delta x)\, x}}{\Delta x}$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\frac{x-x-\Delta x}{(x+\Delta x)\cdot x}}{\Delta x}$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\frac{-\Delta x}{(x+\Delta x)\cdot x}}{\frac{\Delta x}{1}}$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{-\cancel{\Delta x}\cdot 1}{(x+\Delta x)\cdot x \cdot \cancel{\Delta x}}$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{-1}{\underbrace{(x+\Delta x)\cdot x}_{x^2+0\cdot x}}, \quad \Delta x \to 0$$

$$= \frac{-1}{x^2}$$

$$\frac{1}{2}\cdot\frac{4}{4} - \frac{1}{8} = \frac{4}{8} - \frac{1}{8} = \frac{4-1}{8}$$

$$\frac{1}{3}\cdot\frac{4}{4} - \frac{1}{4}\cdot\frac{3}{3} = \frac{4-3}{3\cdot 4} = \frac{1}{12}$$

Kehrwert

$$\frac{\frac{a}{b}}{\frac{c}{d}} = \frac{a}{b}\cdot\frac{d}{c}$$

Vergleich mit Potenzregel

$$\left(\frac{1}{x}\right)' = \left(x^{-1}\right)' = (-1)\cdot x^{-2} = \frac{-1}{x^2}$$

Aufgabe

$$\left(\frac{x}{(x+1)^2}\right)' = \frac{(x)'\cdot(x+1)^2 - x\cdot\left((x+1)^2\right)'}{\left((x+1)^2\right)^2} = \frac{1\cdot \overbrace{x^{\overbrace{1-1}^{0}}}^{1}\cdot (x+1)^2 - x\cdot \underbrace{2(x+1)}_{\text{äußere Abl.}}\cdot \overbrace{1}^{\text{innere Abl.}}}{(x+1)^4}$$

Quotientenregel $\frac{f'\cdot g - f\cdot g'}{g^2}$
und
Kettenregel

$$= \frac{(x+1)^2 - 2x(x+1)}{(x+1)^4} = \frac{\cancel{(x+1)}\left((x+1)-2x\right)}{(x+1)^{\cancel{4}\,3}}$$

$$= \frac{x+1-2x}{(x+1)^3} = \frac{-x+1}{(x+1)^3}$$

Aufgabe

$$(f\cdot g\cdot h)' = \left((f\cdot g)\cdot h\right)' = \underbrace{(f\cdot g)'}_{=\left(f'\cdot g + f\cdot g'\right)}\cdot h + f\cdot g\cdot h'$$

$$= f'\cdot g\cdot h + f\cdot g'\cdot h + f\cdot g\cdot h'$$

Bsp: $(\sin x\cdot e^x\cdot x^2)'$

$$= \cos x\cdot e^x\cdot x^2 + \sin x\cdot e^x\cdot x^2 + \sin x\cdot e^x\cdot 2x$$

$(\ln(x))' = \frac{1}{x}$

$(\ln(x^2))' = \frac{1}{x^2}\cdot 2x$

Aufgabe

$$(f(x))' = \left(\sin\left(\ln(x^2)\right)\right)' = \cos\left(\ln(x^2)\right)\cdot\frac{1}{x^2}\cdot 2x$$

$$= \cos\left(\ln(x^2)\right)\cdot\frac{2}{x}$$