Übungen 2 am 19.10.2022

Vektoren - Matrizen -

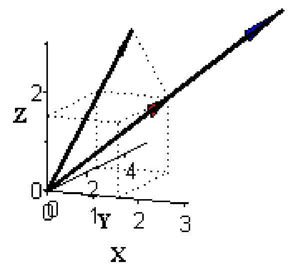
Lineare Gleichungssysteme

Aufgabe zum Thema Vektoren

Aufgabe 1: Skalarprodukt von Vektoren

Gegeben sind die beiden Vektoren

$$\underline{u} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} \qquad \underline{v} = \begin{pmatrix} 3 \\ 5 \\ 3 \end{pmatrix}$$



(a) Berechnen Sie das Skalarprodukt der beiden Vektoren.

(b) Wie groß ist der Winkel zwischen den beiden Vektoren?

(c) Berechnen Sie den Projektionsvektor $\underline{u}_v$,

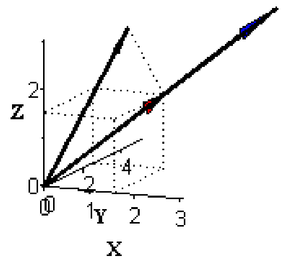
d.h. der Anteil von $\underline{u}$, der in Richtung $\underline{v}$ zeigt?

•

Lösung - Aufgabe 1:

Gegeben sind die beiden Vektoren

$$\underline{u} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} \qquad \underline{v} = \begin{pmatrix} 3 \\ 5 \\ 3 \end{pmatrix}$$



(a) Berechnen Sie das Skalarprodukt der beiden Vektoren.

$$\langle \underline{u}, \underline{v} \rangle = \underline{u}^T \cdot \underline{v} = (1\ 2\ 3) \begin{pmatrix} 3 \\ 5 \\ 3 \end{pmatrix} = 1 \cdot 3 + 2 \cdot 5 + 3 \cdot 3 = 22$$

(b) Wie groß ist der Winkel zwischen den beiden Vektoren?

$$\langle \underline{u}, \underline{v} \rangle = |\underline{v}| \cdot |\underline{u}| \cdot \cos\varphi \Rightarrow \cos\varphi = \frac{\langle \underline{u}, \underline{v} \rangle}{|\underline{v}| \cdot |\underline{u}|}$$

$$\Rightarrow \varphi = \arccos\left(\frac{\langle \underline{u}, \underline{v} \rangle}{|\underline{v}| \cdot |\underline{u}|}\right)$$

$$\Rightarrow \varphi = \arccos\left(\underbrace{\frac{22}{\sqrt{43}\sqrt{14}}}_{0{,}89}\right) = 26{,}27^\circ$$

- Siehe a) $\langle \underline{u}, \underline{v} \rangle = 22$
- $|\underline{v}| = \sqrt{3^2 + 5^2 + 3^2} = \sqrt{43}$
- $|\underline{u}| = \sqrt{1^2 + 2^2 + 3^2} = \sqrt{14}$

(c) Berechnen Sie den Projektionsvektor $\underline{u}_v$,

d.h. der Anteil von $\underline{u}$, der in Richtung $\underline{v}$ zeigt?

→ nächste Seite

(c) Berechnen Sie den Projektionsvektor $\underline{u}_v$,
d.h. der Anteil von $\underline{u}$, der in Richtung $\underline{v}$ zeigt?

Projektionsvektor

$$\underline{u}_v = \underbrace{|\underline{u}_v|}_{\text{Länge des Projektionsvektors}} \cdot \underbrace{\frac{1}{|\underline{v}|}}_{\text{normierter Vektor in Richtung } \underline{v}} \cdot \underline{v}$$

Es gilt
$\langle \underline{u}, \underline{v} \rangle = |\underline{u}_v| \cdot |\underline{v}| \Rightarrow |\underline{u}_v| = \frac{\langle \underline{u}, \underline{v} \rangle}{|\underline{v}|}$

$$\underline{u}_v = \frac{\langle \underline{u}, \underline{v} \rangle}{|\underline{v}|} \cdot \frac{1}{|\underline{v}|} \cdot \underline{v}$$

Es gilt
$\langle \underline{u}, \underline{v} \rangle = \underline{u}^T \cdot \underline{v}$

$$\Rightarrow \boxed{\underline{u}_v = \frac{\underline{u}^T \cdot \underline{v}}{|\underline{v}|^2} \cdot \underline{v}}$$

Konkrete Berechnung für dieses Beispiel

$$\underline{u}_v = \frac{(1\ 2\ 3)\begin{pmatrix}3\\5\\3\end{pmatrix}}{\left(\sqrt{3^2+5^2+3^2}\right)^2} \cdot \begin{pmatrix}3\\5\\3\end{pmatrix}$$

$$= \frac{22}{43}\begin{pmatrix}3\\5\\3\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\frac{66}{43}\\ \frac{110}{43}\\ \frac{66}{43}\end{pmatrix}$$

Aufgabe zum Thema Matrizen

Aufgabe 2:
Berechnen Sie das Produkt der gegebenen Matrizen

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 3 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 4 & -2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$$

3×2 $\quad$ 2×2 $\quad$ 3×2

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} =$$

1×4 $\quad$ 4×1 $\quad$ 1×1

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} =$$

1×4 $\quad$ 4×1 $\quad$ 4×4

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} =$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 4 & -1 & 5 \\ 2 & 7 & 0 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 5 \\ 3 & 6 \end{pmatrix}$$

2×4 $\quad$ 4 $\quad$ 3×2

Aufgabe 2:

Berechnen Sie das Produkt der gegebenen Matrizen

$$\underbrace{A=\begin{pmatrix}2&2\\3&0\\-1&1\end{pmatrix}}_{(3\times 2)\text{-Matrix}} \quad \underbrace{B=\begin{pmatrix}4&-2\\1&-1\end{pmatrix}}_{(2\times 2)\text{-Matrix}} \quad \underbrace{AB=\begin{pmatrix}10&-6\\12&-6\\-3&1\end{pmatrix}}_{(3\times 2)\text{-Matrix}}$$

$$\underbrace{\overbrace{\begin{pmatrix}2&0&-1&1\end{pmatrix}}^{A}}_{\substack{(1\times 4)\\A}} \underbrace{\overbrace{\begin{pmatrix}0\\1\\1\\3\end{pmatrix}}^{B}}_{\substack{(4\times 1)\\B}} = \underbrace{\begin{pmatrix}2\end{pmatrix}}_{(1\times 1)} \qquad (A\cdot B)^T$$

$A\cdot B \neq BA$

$$\underbrace{\overbrace{\begin{pmatrix}0\\1\\1\\3\end{pmatrix}}^{B}}_{\substack{(4\times 1)\\B}} \underbrace{\overbrace{\begin{pmatrix}2&0&-1&1\end{pmatrix}}^{A}}_{\substack{(1\times 4)\\A}} = \underbrace{\begin{pmatrix}0&0&0&0\\2&0&-1&1\\2&0&-1&1\\6&0&-3&3\end{pmatrix}}_{(4\times 4)}$$

$(A\cdot B)^T = B^T \cdot A^T$

$$\underbrace{\overbrace{\begin{pmatrix}0&1&1&3\end{pmatrix}}^{B^T}}_{\substack{(1\times 4)\\B^T}} \underbrace{\overbrace{\begin{pmatrix}2\\0\\-1\\1\end{pmatrix}}^{A^T}}_{\substack{(4\times 1)\\A^T}} = \underbrace{\begin{pmatrix}2\end{pmatrix}}_{(1\times 1)} \qquad B^T A^T$$

$$\underbrace{\begin{pmatrix}1&4&-1&5\\2&7&0&3\end{pmatrix}}_{(2\times 4)} \underbrace{\begin{pmatrix}1&4\\2&5\\3&6\end{pmatrix}}_{(3\times 2)}$$

Keine Multiplikation möglich

Aufgaben zum Thema Lineare Gleichungssysteme

Aufgabe 3:

Aufgabe:

$$\text{Lösen Sie das LGS} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 3 \\ 3 & 1 & 6 \end{pmatrix} \underline{x} = \begin{pmatrix} 6 \\ 8 \\ 21 \end{pmatrix}$$

mit der Gauß – Elimination

– *durch Rückwärtseinsetzen*

– *durch Elimination der Staffel – Einsen*

•

Aufgabe 3:

Aufgabe:

Lösen Sie das LGS $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 3 \\ 3 & 1 & 6 \end{pmatrix} \underline{x} = \begin{pmatrix} 6 \\ 8 \\ 21 \end{pmatrix}$

mit der Gauß – Elimination

– *durch Rückwärtseinsetzen*

– *durch Elimination der Staffel – Einsen*

Lösung:

- Erweiterte Koeffizientenmatrix

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 6 \\ 1 & -1 & 3 & 8 \\ 3 & 1 & 6 & 21 \end{array}\right) \begin{array}{l} \\ -z_1 \\ -3\cdot z_1 \end{array}$$

- Gauß-Elimination

$$\rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 6 \\ 0 & -2 & 2 & 2 \\ 0 & -2 & 3 & 3 \end{array}\right) \begin{array}{l} \\ \\ -z_3 \end{array} \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 6 \\ 0 & -2 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right)$$

- Rückwärts-Einsetzen

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 6 \\ 0 & -2 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right) \Rightarrow \boxed{x_3 = 1}$$

$$\Rightarrow -2x_2 + 2\underbrace{x_3}_{=1} = 2 \Rightarrow \boxed{x_2 = 0}$$

$$\Rightarrow x_1 + \overbrace{x_2}^{=0} + \overbrace{x_3}^{=1} = 6 \Rightarrow \boxed{x_1 = 5}$$

$$\Rightarrow L = \left\{ \underline{x} = \begin{pmatrix} 5 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$$

- oder Isolation der Staffeleinsen

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 6 \\ 0 & -2 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right) \begin{array}{l} -z_3 \\ -2z_3 \\ \\ \end{array} \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & 5 \\ 0 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right) \begin{array}{l} \\ :(-2) \\ \\ \end{array}$$

$$\rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & 5 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right) \begin{array}{l} -z_2 \\ \\ \\ \end{array} \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 5 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right) \Rightarrow \underline{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Aufgabe:
Bestimmen Sie die Lösbarkeit der folgenden LGS.
Wie sehen jeweils die Lösungen aus?

a) $A|b = \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 3 & 4 & 1 \\ 0 & 7 & 8 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{array}\right)$

$Rg\,A|b = 3$

$Rg\,A = 2$

$\Rightarrow Rg\,A \neq Rg\,A|b$

$\Rightarrow$ keine Lösung

b) $A|b = \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 3 & 4 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$

c) $A|b = \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 3 & 4 & 1 \\ 0 & 6 & 7 & 8 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \end{array}\right)$

d) $A|b = \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 3 & 4 & 1 \\ 0 & 6 & 7 & 8 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 \end{array}\right)$

e) ~~$A|b = \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 3 & 4 & 1 \\ 0 & 6 & 7 & 8 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \end{array}\right)$~~

$\hat{=}$ c)

f) $A|b = \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 3 & 4 & 1 \\ 0 & 7 & 8 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$

Übersicht: Rang einer Matrix und Lösbarkeit eines LGS

Satz 5.2: Lösbarkeit eines linearen mxn-Gleichungssystems

(a) Ein lineares mxn-Gleichungssystem $A\underline{x}=\underline{b}$ ist dann und nur dann lösbar, wenn der Rang der Koeffizientenmatrix A mit dem Rang der erweiterten Koeffizientenmatrix A|b übereinstimmt:

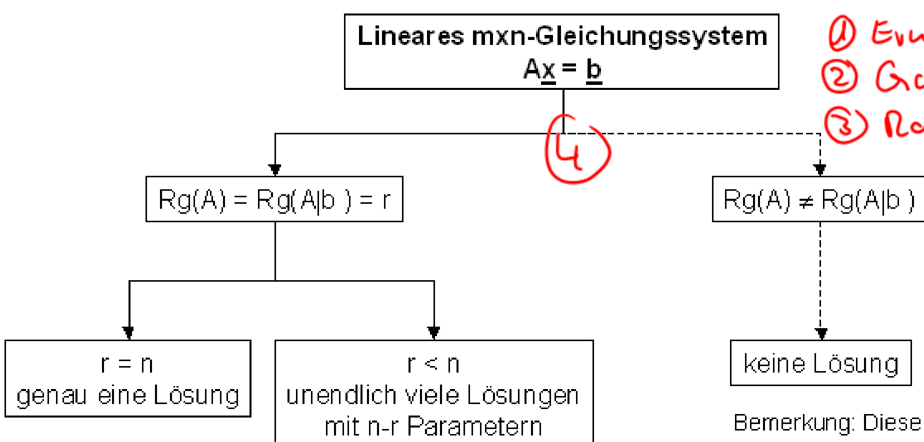
$$Rg(A) = Rg(A|b) = r$$

(b) Im Falle der Lösbarkeit besitzt das lineare System die folgende Lösungsmenge:

für r = n: genaue eine Lösung

für r < n: unendlich viele Lösungen, wobei n - r der insgesamt n Unbekannten frei wählbare Parameter sind.

Kriterien für die Lösbarkeit eines linearen m x n-Gleichungssystems Ax=b



① Erw. Koeffizientenmatrix
② Gaußelimination
③ Rang Interpretation

Bemerkung: Dieser Fall kann nur für ein inhomogenes System auftreten, da ein homogenes System stets die triviale Lösung hat.

rechte Seite $\underline{b}$ ist der Nullvektor

Aufgabe:
Bestimmen Sie die Lösbarkeit der folgenden LGS.
Wie sehen jeweils die Lösungen aus?

a) $A|b = \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 3 & 4 & 1 \\ 0 & 7 & 8 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{array}\right)$

b) $A|b = \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 3 & 4 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$

c) $A|b = \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 3 & 4 & 1 \\ 0 & 6 & 7 & 8 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \end{array}\right)$

d) $A|b = \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 3 & 4 & 1 \\ 0 & 6 & 7 & 8 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 \end{array}\right)$

f) $A|b = \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 3 & 4 & 1 \\ 0 & 7 & 8 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$

a) keine Lösung: Rg A $\neq$ RgA|b

b) unendlich viele Lösungen mit 2 freien Parametern

c) unendlich viele Lösungen

d) keine Lösung

f) keine Lösung

Aufgabe :
Bestimmen Sie die Lösbarkeit der folgenden LGS.
Wie sehen jeweils die Lösungen aus?

$L = \left\{ \underline{x} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} -\frac{3}{2} \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}_{\lambda,\mu \in \mathbb{R}} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$

$2x_1 + 3\underset{x_2=\mu}{x_2} + 4\underset{x_3=\lambda}{x_3} = 1 \Rightarrow \underline{x_1 = \frac{1}{2} - \frac{3}{2}\mu - 2\lambda}$

a)

$$A|b = \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 3 & 4 & 1 \\ 0 & 7 & 8 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{array}\right)$$

$Rg\,A = 2$

$Rg\,A|b = 3$

$L = \emptyset$

$\Rightarrow Rg\,A \neq Rg\,A|b \Rightarrow$ Keine Lösung

b)

$$A|b = \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 3 & 4 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

$\left.\begin{array}{l} Rg\,A = 1 \\ Rg\,A|b = 1 \end{array}\right\} \Rightarrow r = 1,\ n = 3$

$\Rightarrow$ unendl. viele Lösungen mit 2 freien Parametern

c)

$$A|b = \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 3 & 4 & 1 \\ 0 & 6 & 7 & 8 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \end{array}\right) \begin{array}{l} \mathrm{I} \\ \mathrm{II} \\ \mathrm{III} \end{array}$$

$\left.\begin{array}{l} Rg\,A = 3 \\ Rg\,A|b = 3 \end{array}\right\} r = 3,\ n = 4$

$r = 3 < n = 4$

$\Rightarrow$ unendl. viele Lösungen mit $4 - 3 = 1$ freien Parameter

III $\boxed{x_4 = 2}$

II $6x_2 + 7x_3 + \overbrace{8x_4}^{=16} = 0$, $\boxed{x_3 = \lambda}$, $x_4 = 2$

$\Rightarrow x_2 = (-16 - 7\lambda)\frac{1}{6} = \boxed{-\frac{8}{3} - \frac{7}{6}\lambda}$

I $x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 4x_4 = 1$

$x_1 + 2\left(-\frac{8}{3} - \frac{7}{6}\lambda\right) + 3\lambda + 4 \cdot 2 = 1$

$x_1 + \frac{8}{3} + \frac{2}{3}\lambda = 1 \Rightarrow \underline{x_1 = -\frac{5}{3} - \frac{2}{3}\lambda}$

$L = \left\{ \underline{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{5}{3} \\ -\frac{8}{3} \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} -\frac{2}{3} \\ -\frac{7}{6} \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$

d)

$$A|b = \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 3 & 4 & 1 \\ 0 & 6 & 7 & 8 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 \end{array}\right)$$

$Rg\,A = 2$

$Rg\,A|b = 3$

$L = \emptyset$

$\Rightarrow Rg\,A \neq Rg\,A|b \Rightarrow$ Keine Lösung

f)

$$A|b = \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 3 & 4 & 1 \\ 0 & 7 & 8 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

$Rg\,A = 2$

$Rg\,A|b = 3$

$L = \emptyset$

$\Rightarrow Rg\,A \neq Rg\,A|b \Rightarrow$ Keine Lösung

Aufgabe: Lösbarkeit von LGS erkennen

Lösbarkeit von LGS – Erkennen nach der Gauß – Elimination

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & -5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \text{ unendlich viele Lösungen (2 Parameter)}$$

Rg A=1

Rg A|b=1

$\Rightarrow$ Rg A = Rg A|b = 1 < n=3 $\Rightarrow$ unendl. viele Lösungen mit 3−1=2 freien Parametern

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 2 & 3 & -5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \text{ unendlich viele Lösungen (2 Parameter)}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 0 & 3 & -5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \text{ unendlich viele Lösungen (2 Parameter)}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \text{ unendlich viele Lösungen (2 Parameter)}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 0 & 0 & -5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \text{ keine Lösung}$$

Lösbarkeit von LGS – Erkennen nach der Gauß – Elimination

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & -5 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \text{ unendlich viele Lösungen (1 Parameter)}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & -5 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \text{ unendlich viele Lösungen (1 Parameter)}$$

$$\underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & | & 1 \\ 0 & 1 & 0 & | & 1 \\ 0 & 0 & 1 & | & 1 \end{pmatrix}}_{Rg A = 3}$$

$Rg A|b = 3$

Aufgabe

Erstellen Sie ein lineares 3x3-Gleichungssystem, dass...

a) genau eine Lösung hat

b) keine Lösung hat

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & | & 1 \\ 0 & 1 & 0 & | & 1 \\ 0 & 0 & 0 & | & 1 \end{pmatrix}$$

c) unendlich viele Lösungen mit 1 freien Parameter hat

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & | & 1 \\ 0 & 1 & 0 & | & 1 \\ 0 & 0 & 0 & | & 0 \end{pmatrix} \begin{matrix} \rightarrow x_1 = 1 \\ \rightarrow x_2 = 1 \\ \rightarrow x_3 = \lambda, \ \lambda \in \mathbb{R} \end{matrix}$$

$$L = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \lambda \in \mathbb{R} \right\}$$

Aufgabe

Erstellen Sie ein lineares 3x3-Gleichungssystem, dass....

a) genau eine Lösung hat

b) keine Lösung hat

c) unendlich viele Lösungen mit 1 freien Parameter hat

Lösung

a)
- LGS mit $Rg\,A = Rg\,A|b = 3$ und $n=3$ gesucht
- $\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 6 \\ 0 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{array}\right)$
- Lösung des angegebenen LGS

  $x_3 = 2$

  $x_2 + x_3 = 3 \Rightarrow x_2 = 1 \qquad \Rightarrow L = \left\{ \underline{x} = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \right\}$

  $x_1 + x_2 + x_3 = 6 \Rightarrow x_1 = 3$
- mögliche Umformungen $\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 6 \\ 0 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{array}\right) \begin{array}{l} \\ +2\cdot Z_1 \\ +3\cdot Z_1 + Z_2 \end{array} \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 6 \\ 2 & 3 & 3 & 15 \\ 3 & 4 & 5 & 23 \end{array}\right)$

b) LGS mit $\text{Rang}\,A \neq \text{Rang}\,A|b$ gesucht
- $\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 6 \\ 0 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{array}\right) \Rightarrow L = \emptyset$

  $\text{Rang}\,A = 2$ und $\text{Rang}\,A|b = 3$

c)
- LGS mit $Rg\,A = Rg\,A|b = 2$ und $n=3$ gesucht
- $\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 6 \\ 0 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$
- Lösung des angegebenen LGS

  $x_2 + x_3 = 3 \Rightarrow x_2 = 3 - \lambda \qquad L = \left\{ \underline{x} = \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \lambda \in \mathbb{R} \right\}$

  Wahl $x_3 = \lambda$

  $x_1 + x_2 + x_3 = 6 \Rightarrow x_1 = 6 - \lambda - (3 - \lambda) \Rightarrow x_1 = 3$
- Mögliche Umformungen

  $\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 6 \\ 0 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \begin{array}{l} \\ \\ +3\cdot Z_1 + Z_2 \end{array} \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 6 \\ 0 & 1 & 1 & 3 \\ 3 & 4 & 4 & 21 \end{array}\right)$

Aufgabe

Bestimmen Sie die Lösbarkeit des nachfolgenden LGS in Abhängigkeit von a und b.

a) $\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & a & 1 \end{array}\right)$

$a = 0 \Rightarrow \text{Rg}\, A \neq \text{Rg}\, A|b \Rightarrow$ keine Lösung

$a \neq 0 \Rightarrow \text{Rg}\, A = \text{Rg}\, A|b = n \Rightarrow$ genau 1 Lösung

b) $\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & a \end{array}\right) \longrightarrow a \in \mathbb{R}$

c) $\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & a & b \end{array}\right)$

d) $\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & a & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right)$

•

Aufgabe

Bestimmen Sie die Lösbarkeit des nachfolgenden LGS in Abhängigkeit von a und b.

a) $\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & a & 1 \end{array}\right) \to$ Fallunterscheidung

- $a \neq 0 \Rightarrow \text{Rang}\,A = \text{Rang}\,A|b = 3 \overset{!}{=}$ Anzahl Variablen $\Rightarrow$ genau eine Lösung
- $a = 0 \Rightarrow \text{Rang}\,A \neq \text{Rang}\,A|b \Rightarrow$ keine Lösung

b) $\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & a \end{array}\right) \to a \in \mathbb{R}$ beliebig, es gilt immer $\text{Rang}\,A = \text{Rang}\,A|b = 3 \overset{!}{=}$ Anzahl Variablen $\Rightarrow$ immer genau eine Lösung

c) $\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & a & b \end{array}\right) \to$ Fallunterscheidung:

- $a = 0 \wedge b \neq 0 \Rightarrow \text{Rg}\,A \neq \text{Rg}\,A|b \Rightarrow$ keine Lösung
- $a = 0 \wedge b = 0 \Rightarrow \text{Rg}\,A = \text{Rg}\,A|b = 2 \overset{!}{<} n = 3 \Rightarrow$ unendl. viele Lösungen
- $a \neq 0 \Rightarrow \text{Rg}\,A = \text{Rg}\,A|b = 3 = n = 3 \Rightarrow$ genau eine Lösung

d) $\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & a & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right) \to$ Fallunterscheidung:

- $a \neq 0 \Rightarrow \text{Rg}\,A = \text{Rg}\,A|b = 3 \overset{!}{=} n = 3 \Rightarrow$ genau eine Lösung
- $a = 0 \Rightarrow$ Gaußelimination noch nicht beendet

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right)_{-Z_2} \to \underbrace{\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{array}\right)}_{\text{Rg}\,A \neq \text{Rg}\,A|b \Rightarrow \text{keine Lösung}}$$

Aufgabe

b) Wählen Sie aus den folgenden Vektoren die maximale Anzahl linear unabhängiger Vektoren aus und begründen Sie dieses über eine Rechnung!

$$\begin{pmatrix}-4\\0\\-5\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}-1\\-2\\-5\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}-5\\1\\2\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}-1\\-2\\-5\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}-8\\0\\-10\end{pmatrix}$$

c) Zeigen Sie, dass die Zeilenvektoren der nachfolgenden Matrix linear abhängig sind!

$$\begin{pmatrix}2 & -2 & 4\\1 & -1 & 1\\1 & -1 & 5\end{pmatrix}$$

$$a_1\begin{pmatrix}-4\\0\\-5\end{pmatrix} + a_2\begin{pmatrix}-1\\-2\\-5\end{pmatrix} + a_3\begin{pmatrix}-5\\1\\2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}$$

$$\rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c}-4 & -1 & -5 & 0\\0 & -2 & 1 & 0\\-5 & -5 & 2 & 0\end{array}\right)$$

→ Gauß.

→ Interpr. Dreieck

•

Aufgabe 5:

b) Wählen Sie aus den folgenden Vektoren die maximale Anzahl linear unabhängiger Vektoren aus und begründen Sie dieses über eine Rechnung!

$$\underbrace{\begin{pmatrix}-4\\0\\-5\end{pmatrix}}_{\underline{v}_1}, \underbrace{\begin{pmatrix}-1\\-2\\-5\end{pmatrix}}_{\underline{v}_2}, \underbrace{\begin{pmatrix}-5\\1\\2\end{pmatrix}}_{\underline{v}_3}, \underbrace{\begin{pmatrix}1\\2\\5\end{pmatrix}}_{\underline{v}_4}, \underbrace{\begin{pmatrix}-8\\0\\-10\end{pmatrix}}_{\underline{v}_5}$$

- $\underline{v}_1$ und $\underline{v}_5$ sind linear abhängig, da $\underline{v}_5 = 2\cdot\underline{v}_1$
- $\underline{v}_2$ und $\underline{v}_4$ sind linear abhängig, da $\underline{v}_4 = (-1)\,\underline{v}_2$
- Annahme $\underline{v}_1, \underline{v}_2, \underline{v}_3$ sind linear unabhängig

Nachweis:

$$a_1\cdot\begin{pmatrix}-4\\0\\-5\end{pmatrix} + a_2\begin{pmatrix}-1\\-2\\-5\end{pmatrix} + a_3\begin{pmatrix}-5\\1\\2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}$$

→ Bestimmung a_1, a_2, a_3 über das lineare Gleichungssystem 3 Gleichungen für 3 Unbekannte

---

① Auflösen der Gleichungen + Einsetzen

$$\text{I} \quad a_1\cdot(-4) + a_2(-1) + a_3(-5) = 0$$
$$\text{II} \quad a_2(-2) + a_3\cdot 1 = 0$$
$$\text{III} \quad a_1(-5) + a_2(-5) + a_3\cdot 2 = 0$$

$$\text{I}: \; a_1 = -\frac{1}{4}a_2 - \frac{5}{4}a_3 \Rightarrow a_1 = -\frac{1}{8}a_3 - \frac{5}{4}a_3$$

$$\text{II}: \; \boxed{a_2 = \frac{1}{2}a_3} \qquad \boxed{a_1 = -\frac{11}{8}a_3}$$

$$\text{III}: \; -\frac{11}{8}a_3(-5) + \frac{1}{2}a_3(-5) + a_3\cdot 2 = 0$$

$$\frac{55}{8}a_3 - \frac{5}{2}a_3 + 2a_3 = 0$$

$$\frac{51}{8}a_3 = 0 \Rightarrow \boxed{a_3 = 0} \Rightarrow \boxed{a_1 = 0}$$
$$\Rightarrow \boxed{a_2 = 0}$$

⇒ Vektoren sind linear unabhängig

oder ② Gauß-Elimination

$$\left(\begin{array}{ccc|c}-4 & -1 & -5 & 0\\0 & -2 & 1 & 0\\-5 & -5 & 2 & 0\end{array}\right) -\frac{5}{4}z_1$$

$$\rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c}-4 & -1 & -5 & 0\\0 & -2 & 1 & 0\\0 & -\frac{15}{4} & \frac{33}{4} & 0\end{array}\right) -\frac{15}{8}z_2$$

$$\rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c}-4 & -1 & -5 & 0\\0 & -2 & 1 & 0\\0 & 0 & \frac{51}{8} & 0\end{array}\right) \begin{array}{l}\Rightarrow a_1 = 0\\ \Rightarrow a_2 = 0\\ \Rightarrow a_3 = 0\end{array}$$

⇒ Vektoren sind linear unabhängig

c) Zeigen Sie, dass die Zeilenvektoren der nachfolgenden Matrix linear abhängig sind!

$$\begin{pmatrix} 2 & -2 & 4 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 5 \end{pmatrix}$$

Nachweis über die Gauß-Elimination

$$\begin{pmatrix} 2 & -2 & 4 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 5 \end{pmatrix} \begin{matrix} \\ -\frac{1}{2}z_1 \\ -\frac{1}{2}z_1 \end{matrix} = \begin{pmatrix} 2 & -2 & 4 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} \begin{matrix} \\ \\ +3\cdot z_2 \end{matrix} = \begin{pmatrix} 2 & -2 & 4 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Die Zeile 3 kann als Linearkombination der Zeilen 1 und 2 dargestellt werden

$\Rightarrow$ Die 3 Zeilenvektoren sind linear abhängig

$\Rightarrow$ Nur 2 Zeilen sind linear unabhängig

$\Rightarrow$ Der Rang der Matrix ist 2

Auswertung der Gauß-Elim.

$$\Rightarrow \left(\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} - \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 4 \end{pmatrix}\right)\cdot(+3) + \left(\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 5 \end{pmatrix} - \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 4 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \underbrace{+3}_{a_1=3}\cdot\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} + \underbrace{\left(-\frac{3}{2}-\frac{1}{2}\right)}_{a_2=-2}\begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 4 \end{pmatrix} + \underbrace{1}_{a_3=1}\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$\Rightarrow$ Vektoren sind linear abhängig, da a_1, a_2, a_3 nicht alle $= 0$ sind

$\Rightarrow$ Der Vektor $\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 5 \end{pmatrix} = -3\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} + 2\begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 4 \end{pmatrix}$ ist als Linearkombination der anderen Vektoren darstellbar.

Aufgabe: Vertiefende Aufgabe zum Thema Lösbarkeit eines LGS

Gauß-Elimination

Gegeben seien $p \in \mathbb{R},\ A = \begin{pmatrix} p & 1 & 2 \\ 2 & 1 & p \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix},\ \underline{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 3-p \end{pmatrix}.$

a) Für welche p hat $A\underline{x} = \underline{b}$ genau eine Lösung?

b) Für welche p hat $A\underline{x} = \underline{b}$ keine Lösung?

c) Für welche p hat $A\underline{x} = \underline{b}$ mehr als eine Lösung? Geben Sie in diesem Fall die Lösungsmenge an.

•

Aufgabe 6: Vertiefende Aufgabe zum Thema Lösbarkeit eines LGS

Gauß-Elimination

Gegeben seien $p \in \mathbb{R}$, $A = \begin{pmatrix} p & 1 & 2 \\ 2 & 1 & p \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$, $\underline{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 3-p \end{pmatrix}$.

a) Für welche p hat $A\underline{x} = \underline{b}$ genau eine Lösung?

b) Für welche p hat $A\underline{x} = \underline{b}$ keine Lösung?

c) Für welche p hat $A\underline{x} = \underline{b}$ mehr als eine Lösung? Geben Sie in diesem Fall die Lösungsmenge an.

$$A\,|\,b = \left(\begin{array}{ccc|c} p & 1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & p & 1 \\ 1 & 1 & 2 & 3-p \end{array}\right) \begin{array}{l} \leftarrow \textit{Vertauschen der Zeilen} \\ \\ \leftarrow \end{array}$$

$$A\,|\,b = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 2 & 3-p \\ 2 & 1 & p & 1 \\ p & 1 & 2 & 1 \end{array}\right) \begin{array}{l} \\ -2\cdot \textit{Zeile}\,1 \\ -p\cdot \textit{Zeile}\,1 \end{array}$$

$$A\,|\,b = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 2 & 3-p \\ 0 & -1 & p-4 & 1-2(3-p) \\ 0 & 1-p & 2-2p & 1-p(3-p) \end{array}\right) \begin{array}{l} \\ \cdot(-1) \\ \\ \end{array}$$

$$A\,|\,b = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 2 & 3-p \\ 0 & +1 & 4-p & 5-2p) \\ 0 & 1-p & 2-2p & p^2-3p+1 \end{array}\right) \begin{array}{l} \\ \\ -(1-p)\cdot \textit{Zeile}\,2 \end{array}$$

$$A\,|\,b = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 2 & 3-p \\ 0 & 1 & 4-p & 5-2p) \\ 0 & 0 & 2-2p-(1-p)(4-p) & p^2-3p+1-(1-p)(5-2p) \end{array}\right)$$

$$A\,|\,b = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 2 & 3-p \\ 0 & 1 & 4-p & 5-2p) \\ 0 & 0 & -p^2+3p-2 & \underbrace{p^2-3p+1-(1-p)(5-2p)}_{-p^2+4p-4} \end{array}\right)$$

$\neq 0$

$= 0$

$= 0$

$\neq 0$

Wann ist $a_{33} = 0$?

$-p^2 + 3p - 2 = 0$

$p^2 - 3p + 2 = 0$

$p_{1|2} = \frac{3}{2} \pm \sqrt{\frac{9}{4} - 2}$

$p_{1|2} = \frac{3}{2} \pm \frac{1}{2}$

$\Rightarrow p_1 = 1 \vee p_2 = 2$

$a_{33} \neq 0$

für $p \neq 1$, $p \neq 2$

$p = 1$:

$$A|b = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 2 & 3-p \\ 0 & 1 & 4-p & 5-2p) \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{array}\right)$$

$Rang\ A\ = 2\ und\ \ Rang\ A|b = 3$

$\Rightarrow Rang\ A \neq Rang\ A|b \ \Rightarrow\ keine\ Lösung$

$p = 2$:

$$A|b = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

$Rang\ A\ = 2\ und\ \ Rang\ A|b = 2$

$\Rightarrow Rang\ A = Rang\ A|b \ \Rightarrow\ unendlich\ viele\ Lösungen$

$x_3 = \lambda$

$x_2 = 1 - 2\lambda$

$x_1 = 0$

$$\underline{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1-2\lambda \\ \lambda \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$$