2 Logik

Inhaltsverzeichnis

2.1 Aussagenlogik

Logik stellt Sprachen zur Darstellung von Wissen zur Verfügung.

- Logik erlaubt, nach festen Regeln anderes Wissen abzuleiten.
- Aussagenlogik untersucht unter anderem, wie aus wahren Aussagen andere wahre Aussagen folgen.

2.1.1 Aussagen

Definition 2.1: Aussage

Eine **Aussage** ist die gedankliche Widerspiegelung eines Sachverhalts in Form eines Satzes einer natürlichen oder künstlichen Sprache. Aussagen sind dadurch gekennzeichnet, dass man in der Regel klar entscheiden kann, ob sie wahr oder falsch sind.

Bemerkungen:

- Aussagen genügen dem **Prinzip der Zweiwertigkeit**, d.h. sie sind Bestandteil einer zweiwertigen Logik (im Gegensatz dazu die mehrwertige oder Fuzzy-Logik).
- Aussagen werden in der Regel mit großen Buchstaben A, B, C,... bezeichnet.

Definition 2.2: Wahrheitswert einer Aussage

Man nennt „wahr“ bzw. „falsch“ den **Wahrheitswert** der Aussage und bezeichnet ihn mit $\omega(A) = w$ bzw. $\omega(A) = f$. Die Wahrheitswertemenge hat somit zwei Elemente $\{w, f\}$. Die Wahrheitswerte werden auch als aussagenlogische Konstanten bezeichnet.

Beispiel:

(1) Die Aussage $A :=$“Regen ist nass.“ hat den Wahrheitswert $\omega(A) = w$.

(2) Die Aussage $A :=$“12 ist durch 4, 3 und 2 teilbar.“ hat den Wahrheitswert $\omega(A) = w$.

(3) Die Aussage $A :=$“12 ist <u>nur</u> durch 4, 3 und 2 teilbar.“ hat den Wahrheitswert $\omega(A) = f$.

(4) Die Aussage $A :=$“ $x^2 = -1$ hat keine reelle Lösung.“ hat den Wahrheitswert $\omega(A) = w$.

(5) Keine Aussage im Sinne der Aussagenlogik ist die Aussage „Mädchen mit Zöpfen sind hübsch.“, da diese Aussage nicht objektiv mit wahr oder falsch beantwortet werden kann.

2.1.2 Logische Operationen

Definition 2.3: Logische Operationen

Logische Operationen sind ein- bzw. zweistellige Verknüpfungen, die auf Aussagen angewandt, neue Aussagen bzw. Aussageverbindungen erzeugen.

Die zweistelligen logischen Operationen $\odot$ sind Abbildungen auf der Menge der Wahrheitswerte W=$\{w,f\}$, die jedem Paar von Elementen (A,B) jeweils ein anderes Element $A \odot B$ aus W zuweist:

$$\odot : \begin{cases} \{w,f\} \times \{w,f\} \to \{w,f\} \\ \quad (A,B) \qquad \to A \odot B \end{cases}.$$

Die Wahrheitswerte der verknüpften Aussage kann man in Abhängigkeit von den Wahrheitswerten der Grundaussagen A und B in sogenannten **Wahrheitstafeln** (oder auch **Wahrheitstabellen**) darstellen.

Die nachfolgende Tabelle zeigt eine **Übersicht über die 5 logischen Operationen**. Dabei ist (2.1) eine einstellige Verknüpfung, (2.2) – (2.5) hingegen sind zweistellige Verknüpfungen.

Name	**Symbol**	**Sprechweisen, Bedeutung**	
Negation	$\neg A$	nicht A, Verneinung	**(2.1)**
Konjunktion	$A \wedge B$	A und B	**(2.2)**
Disjunktion	$A \vee B$	A oder B, (auch Alternative genannt), Inklusives Oder	**(2.3)**
Implikation	$A \Rightarrow B$	wenn A, dann B; aus A folgt B; A impliziert B; A ist hinreichend für B, B ist notwendig für A	**(2.4)**
Äquivalenz	$A \Leftrightarrow B$	A genau dann, wenn B; A ist logisch äquivalent zu B; A ist notwendig und hinreichend für B	**(2.5)**

- Die logische Bedeutung dieser Verknüpfungen wird durch Wahrheitstabellen definiert.
- Die logische Bedeutung entspricht nicht in jedem Fall der Bedeutung des entsprechenden natürlichsprachlichen Ausdrucks.

(2.1) Negation

Die Negation $\neg A$ einer Aussage A ist genau dann wahr, wenn A falsch ist, d.h.

A	$\neg A$
w	*f*
f	*w*

(2.2) Konjunktion

Die Konjunktion $A \wedge B$ ist genau dann wahr, wenn sowohl A als auch B wahr sind, d.h.

A	B	$A \wedge B$
w	w	w
w	f	f
f	w	f
f	f	f

(2.3) Disjunktion

Die Disjunktion $A \vee B$ ist genau dann wahr, wenn mindestens eine der Aussagen A und B wahr ist, d.h.

A	B	$A \vee B$
w	w	w
w	f	w
f	w	w
f	f	f

Bemerkung: Das „logische oder“ ist immer als „einschließendes oder“ zu verstehen.

(2.4) Implikation

Die Implikation $A \Rightarrow B$ ist genau dann falsch, wenn A wahr und B falsch ist, d.h.

A	B	$A \Rightarrow B$
w	w	w
w	f	f
f	w	w
f	f	w

Bemerkung zur Implikation:

- Die Implikation $A \Rightarrow B$ ist eine abkürzende Schreibweise für $\neg A \vee B$.Dieses zeigt auch die nachfolgende Wahrheitstafel:

A	B	$\neg A$	$\neg A \vee B$
w	w	f	w
w	f	f	f
f	w	w	w
f	f	w	w

- Eine „wenn–dann“ Formulierung ist nicht in jedem Fall mit einer Beziehung zwischen Ursache und Wirkung in Zusammenhang zu bringen. Zum Beispiel ist die Implikation

„$(+1=-1)\Rightarrow((+1)^2=(-1)^2)$“ wahr, obwohl die Aussage $(+1=-1)$ falsch ist, d.h. die Aussage „aus einer falschen Aussage kann durchaus eine wahre Aussage folgen“ ist wahr. Ebenso ist die Aussage „Wenn der Mond aus grünem Käse ist, dann ist 4 eine Primzahl“ logisch wahr, obwohl beide Aussagen falsch sind und zwischen ihnen kein kausaler Zusammenhang besteht.

- Ist eine Abhängigkeit gegeben, so kann man die Einträge leicht nachvollziehen:

A :=“es regnet“	*B := „die Straße ist nass“*	$A \Rightarrow B$
w (es regnet)	*w (die Straße ist nass)*	*w*
w (es regnet)	*f (die Straße ist nicht nass)*	*f*
f (es regnet nicht)	*w (die Straße ist nass)*	*w*
f (es regnet nicht)	*f (die Straße ist nicht nass)*	*w*

- Was bedeutet hinreichend bzw. notwendig?

  $A \Rightarrow B$ bedeutet: A ist hinreichend für B, B ist notwendig für A.

  Besteht ein kausaler Zusammenhang, so kann man die Bedeutung leicht nachvollziehen. Sei A die Aussage „es regnet“, B die Aussage „die Straße ist nass“, und $A \Rightarrow B$ die Aussage „Wenn es regnet, dann ist die Straße nass“:

  A ist hinreichend für B, bedeutet, es ist „ausreichend“ zu wissen, dass es regnet, um dann zu folgern, dass die Straße nass ist.

  B ist notwendig für A, bedeutet dass es eine Voraussetzung ist, dass die Straße nass ist, wenn es regnet, d.h. A wahr sein soll.

(2.5) Äquivalenz

Die Äquivalenz $A \Leftrightarrow B$ ist genau dann wahr, wenn A und B wahr oder A und B falsch sind, d.h.

A	*B*	$A \Leftrightarrow B$
w	*w*	*w*
w	*f*	*f*
f	*w*	*f*
f	*f*	*w*

Beispiele:

(1) Die Negation der Aussage „Das Gras ist grün“ ist „Das Gras ist nicht grün“.

(2) $\neg(5 \textit{ ist eine Primzahl}) = (5 \textit{ ist keine Primzahl})$ ist eine falsche Aussage.

(3) Die Konjunktion der beiden Aussagen A := „Der Apfel ist ein Obst.“ und B := „Die Bohne ist ein Obst“ ist falsch, d.h. für den Wahrheitswert gilt: $\omega(A \wedge B) = f$

(4) Die Disjunktion der beiden Aussagen „$(-2<0)$“ und „$(5 \textit{ ist keine Primzahl})$“ ist wahr.

2.1.3 Logische Verbindungen

Logische Verbindungen (oder Aussagenverbindungen) entstehen durch Verkettung mehrerer Aussagen mittels logischer Operatoren.

Zur Vereinfachung der Schreibweise und zum Verzicht einer notwendigen Klammerung sind Vorrangregeln festgelegt. In der folgenden Reihenfolge bindet jede logische Operation stärker, d.h. wird zuerst ausgewertet:

- zuerst Negation,
- dann Konjunktion,
- dann Disjunktion,
- dann Implikation und
- dann Äquivalenz

Ist das Setzen von Klammern notwendig, so werden sie von innen nach außen interpretiert.

Der Wahrheitswert einer logischen Verbindung lässt sich mit Hilfe von Wahrheitstafeln bestimmen.

Beispiel

Die Aussageverbindung $C := (A \wedge (B \Rightarrow \neg A)) \Rightarrow \neg B$ wird durch Auswertung der einzelnen Komponenten über eine Wahrheitstafel ausgewertet.

A	B	$\neg A$	$\neg B$	$(B \Rightarrow \neg A)$	$A \wedge (B \Rightarrow \neg A)$	$C := (A \wedge (B \Rightarrow \neg A)) \Rightarrow \neg B$
w	w	f	f	f	f	w
w	f	f	w	w	w	w
f	w	w	f	w	f	w
f	f	w	w	w	f	w

Die Aussageverbindung C ist also stets wahr.

Definition 2.4: Tautologie

Eine Aussage, die stets wahr ist, heißt **Tautologie**, z.B. $A \vee \neg A$ (Satz vom ausgeschlossenen Dritten).

Tautologien liefern auch Vorgehensweisen zu Beweistechniken von Aussagen.

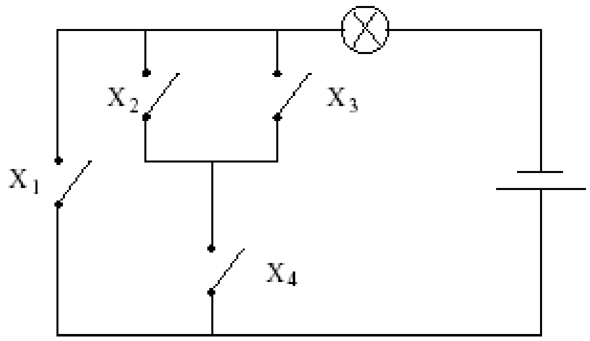
Definition 2.5: Kontradiktion

Eine Aussage, die stets falsch ist, heißt **Kontradiktion**, z.B. $A \wedge \neg A$ (Satz vom ausgeschlossenen Widerspruch).

Beispiel: Technische Realisierung

In einer technischen Realisierung bei der „Schalter geschlossen“ bedeutet „es fließt Strom“ und „Schalter geöffnet“ bedeutet „es fließt kein Strom“ entspricht die

- Konjunktion: Reihenschaltung zweier Schalter, d.h. es fließt nur Strom, wenn beide Schalter geschlossen sind
- Disjunktion: Parallelschaltung zweier Schalter, d.h. es fließt nur dann kein Strom, wenn beide Schalter geöffnet sind.
- Beispiel: Die im Bild angegebene Schaltung entspricht der logischen Verbindung $X_1 \vee (X_4 \wedge (X_2 \vee X_3))$.



2.1.4 Grundgesetze der Aussagenlogik

Definition 2.6: Gleichheit logischer Ausdrücke

Zwei logische Ausdrücke A und B sind **gleich** (oder **logisch äquivalent**), wenn sie die gleichen Wahrheitstafeln besitzen. Dann schreiben wir A = B. (Es ist auch die Schreibweise $A \equiv B$ oder $A \Leftrightarrow B$ gebräuchlich.)

Satz 2.1: Grundgesetze der Aussagenlogik

Für beliebige logische Ausdrücke A, B, C gelten folgende Behauptungen:

(1) **Kommutativgesetz**

$$A \wedge B = B \wedge A \;\; und \;\; A \vee B = B \vee A$$

(2) **Assoziativgesetz**

$$\left(A \wedge B\right) \wedge C = A \wedge (B \wedge C) \;\; und \;\; \left(A \vee B\right) \vee C = A \vee (B \vee C)$$

(3) **Distributivgesetz**

$$A \wedge (B \vee C) = \left(A \wedge B\right) \vee \left(A \wedge C\right) \;\; und \;\; A \vee (B \wedge C) = \left(A \vee B\right) \wedge \left(A \vee C\right)$$

(4) **Satz von der doppelten Negation:**

$$\neg(\neg A) = A$$

(5) **Idempotenzgesetze**

$$A \wedge A = A \;\; und \;\; A \vee A = A$$

(6) **Dominanzgesetz**

$$A \wedge f = f,\ A \wedge w = A \ \ und \ \ A \vee f = A,\ A \vee w = w$$

(7) **Satz vom ausgeschlossenen Dritten**

$$A \wedge \neg A = f \ \ und \ \ A \vee \neg A = w$$

(8) **Satz von der Transitivität**

$$\left[(A \Rightarrow B) \wedge (B \Rightarrow C)\right] \Rightarrow (A \Rightarrow C)$$

(9) **Satz von der Kontraposition**

$$(A \Rightarrow B) \Leftrightarrow (\neg B \Rightarrow \neg A)$$

(10) **De Morganschen Regeln**

a) $\neg(A \wedge B) \Leftrightarrow \neg A \vee \neg B$

(Negation der Konjunktion ist die Disjunktion der negierten Elemente)

$\neg(A \vee B) \Leftrightarrow \neg A \wedge \neg B$

(Negation der Disjunktion ist die Konjunktion der negierten Elemente)

Ein Nachweis für die Gültigkeit dieser Gesetze kann in jedem Fall durch das Aufstellen der Wahrheitstafeln gegeben werden.

Weitere logische Operatoren:

- $A \ XOR \ B$ ist das „exklusive ODER“ (d.h. entweder oder, aber nicht in beiden) und kann auch ausgedrückt werden durch $(A \wedge \neg B) \vee (\neg A \wedge B)$

A	B	$A\ XOR\ B$	$(A \wedge \neg B)$	$(\neg A \wedge B)$
f	f	f	f	f
f	w	w	f	w
w	f	w	w	f
w	w	f	f	f

- $A \ NAND \ B := \neg(A \wedge B)$ ist die Umkehrung vom „logischen UND“ (wird auch Sheffer-Operator genannt und $|$ geschrieben)

A	B	$A \wedge B$	$\neg(A \wedge B)$
f	f	f	w
f	w	f	w
w	f	f	w
w	w	w	f

- $A\ \ NOR\ \ B := \neg(A \vee B)$ ist die Umkehrung vom „logischen ODER“ (wird auch Peirce-Operator genannt und $\downarrow$ geschrieben)

A	B	$A \vee B$	$\neg(A \vee B)$
f	f	f	w
f	w	w	f
w	f	w	f
w	w	w	f

Bemerkungen:

- Die logischen Operatoren $\neg, \wedge, \vee, \mid\ , \downarrow$ sind von besonderem Interesse. Sie sind durch sogenannte Gatter sehr leicht elektronisch zu realisieren.
- Es kann jedoch auch gezeigt werden, dass man für die Realisierung einer Schaltung, die vorgegebene Wahrheitswerte realisieren soll, nicht unbedingt alle logischen Operatoren braucht. Dieses gibt der nachfolgenden Satz wieder.

Satz 2.2

Jeder logische Ausdruck kann durch einen Ausdruck ersetzt werden, der nur die Operatoren $\neg, \wedge, \vee$ enthält.

Zum Beweis:

Durch die Richtigkeit der nachfolgenden Aussagen kann gezeigt werden, dass dieses möglich ist.

- $A\ XOR\ B = (A \wedge \neg B) \vee (\neg A \wedge B)$
- $A \Rightarrow B \quad = \quad \neg A \vee B$
- $A \Leftrightarrow B \quad = \quad (A \Rightarrow B) \wedge (B \Rightarrow A) \quad = \quad (\neg A \vee B) \wedge (A \vee \neg B)$
- $A \downarrow B \quad = \quad \neg(A \vee B)$
- $A \mid B \quad = \quad \neg(A \wedge B)$

Satz 2.3

Die drei booleschen Grundoperationen $\neg, \wedge, \vee$ können als Hintereinanderausführung von ausschließlich NAND-Funktionen oder ausschließlich NOR-Funktionen geschrieben werden.

Zum Beweis für NAND:

$$A \wedge B = (A \wedge B) \vee f = \neg(\neg(A \wedge B) \wedge w) = (A\ NAND\ B)\ NAND\ w$$

$$A \vee B = (A \wedge w) \vee (B \wedge w) = \neg(\neg(A \wedge w) \wedge \neg(B \wedge w)) = (A\ NAND\ w)\ NAND\ (B\ NAND\ w)$$

$$\neg A = \neg(A \wedge w) = A\ NAND\ w$$

2.1.5 Normalformen

Unterschiedliche Formen der gleichen Aussage erschweren oft die Lesbarkeit und führen zum Wunsch nach Standardformen. Normalformen sind für die Entwicklung logischer Schaltkreise wichtig. Insbesondere konjunktive Normalformen spielen in der logischen Programmierung eine Rolle.

Definition 2.7: Literal

Ein **Literal** ist ein Ausdruck, der entweder aus einer einzelnen logischen Aussagenvariable (atomare Aussage) oder ihrer Negation besteht.

Definition 2.8: disjunktive Normalform (DNF)

Ein logischer Ausdruck befindet sich in **disjunktiver Normalform**, wenn er ausschließlich Disjunktionen von Konjunktionen von Literalen enthält.

$$K_1 \vee K_2 \vee K_3 \vee .... \vee K_n \quad mit \quad K_i = L_{i1} \wedge L_{i2} \wedge ... \wedge L_{im}, \quad L_{ij} \; Literal$$

Definition 2.9: konjunktive Normalform (KNF)

Ein logischer Ausdruck befindet sich in **konjunktiver Normalform**, wenn er ausschließlich Konjunktionen von Disjunktionen von Literalen enthält.

$$D_1 \wedge D_2 \wedge D_3 \wedge .... \wedge D_n \quad mit \quad D_i = L_{i1} \vee L_{i2} \vee ... \vee L_{im}, \quad L_{ij} \; Literal$$

Beispiele:

(1) $A, \neg A, w, f$ sind Beispiele für Literale

(2) Der Ausdruck $(A \vee B) \wedge (\neg A \vee B \vee w)$ ist in konjunktiver Normalform.

(3) Der Ausdruck $(A \wedge B) \vee (\neg A \wedge C) \vee C$ ist in disjunktiver Normalform.

Satz 2.4:

Zu jeder aussagenlogischen Verbindung gibt es (mindestens) eine logisch äquivalente disjunktive Normalform und (mindestens) eine logisch äquivalente konjunktive Normalform.

Umwandlung in Normalform:

(1) Systematische Umwandlung in eine KNF/ DNF in 3 Schritten:

(1) Elimination von $\Rightarrow$ mittels $A \Rightarrow B \;=\; \neg A \vee B$ und
$\Leftrightarrow$ mittels $A \Leftrightarrow B \;=\; (\neg A \vee B) \wedge (A \vee \neg B)$

(2) Verteilung von $\neg$ auf atomare Ausdrücke mittels DeMorgansche Regeln:
$\neg(A \wedge B) \Leftrightarrow \neg A \vee \neg B$, $\neg(A \vee B) \Leftrightarrow \neg A \wedge \neg B$ sowie $\neg(\neg A) = A$

(3) Umwandlung in eine Konjunktion von Disjunktionen (KNF) bzw. Disjunktion von Konjunktionen (DNF) mittels Distributivgesetze: $A \vee (B \wedge C) = (A \vee B) \wedge (A \vee C)$, $A \wedge (B \vee C) = (A \wedge B) \vee (A \wedge C)$

Beispiel:

$$
\begin{aligned}
&A \Rightarrow \neg(B \Rightarrow C) \quad \textit{Umwandlung in konjunktive Normalform} \\
&\textit{Schritt } 1: \quad = \neg A \vee \neg(\neg B \vee C) \\
&\textit{Schritt } 2: \quad = \neg A \vee (\neg\neg B \wedge \neg C) \\
&\phantom{\textit{Schritt } 2:} \quad = \neg A \vee (B \wedge \neg C) \\
&\textit{Schritt } 3: \quad = (\neg A \vee B) \wedge (\neg A \vee \neg C)
\end{aligned}
$$

(2) Bestimmung von KNF/ DNF aus einer Wahrheitstafel

Ist eine Wahrheitstafel mit Eingangsvariablen $x_1, x_2, ..., x_n$ und einer Ausgangsvariablen $f(x_1, x_2, ..., x_n)$ gegeben, so kann aus ihr direkt die KNF bzw. DNF für $f(x_1, x_2, ..., x_n)$ abgelesen werden:

DNF:

- Zu jeder Zeile der Wahrheitstafel, die den Funktionswert *w* liefert, konstruiert man einen Booleschen Ausdruck, der nur die Operationen $\wedge$ und $\neg$ enthält und genau für die Eingabedaten dieser Zeile den Wert *w* annimmt.
- Die so erhaltenen Ausdrücke werden dann mit $\vee$ verknüpft.

KNF:

- Zu jeder Zeile der Wahrheitstafel, die den Funktionswert *f* liefert, konstruiert man einen Booleschen Ausdruck, der nur die Operationen $\vee$ und $\neg$ enthält und genau für die Eingabedaten dieser Zeile den Wert *f* annimmt.
- Die so erhaltenen Ausdrücke werden dann mit $\wedge$ verknüpft.

Beispiel:

A	B	C	$f(A,B,C)$
w	*w*	*w*	*w*
w	*w*	*f*	*w*
w	*f*	*w*	*f*
w	*f*	*f*	*f*
f	*w*	*w*	*f*
f	*w*	*f*	*w*
f	*f*	*w*	*w*
f	*f*	*f*	*f*

DNF: $f(A,B,C)=(A\wedge B\wedge C)\vee(A\wedge B\wedge\neg C)\vee(\neg A\wedge B\wedge\neg C)\vee(\neg A\wedge\neg B\wedge C)$

KNF: $f(A,B,C)=(\neg A\vee B\vee\neg C)\wedge(\neg A\vee B\vee C)\wedge(A\vee\neg B\vee\neg C)\wedge(A\vee B\vee C)$

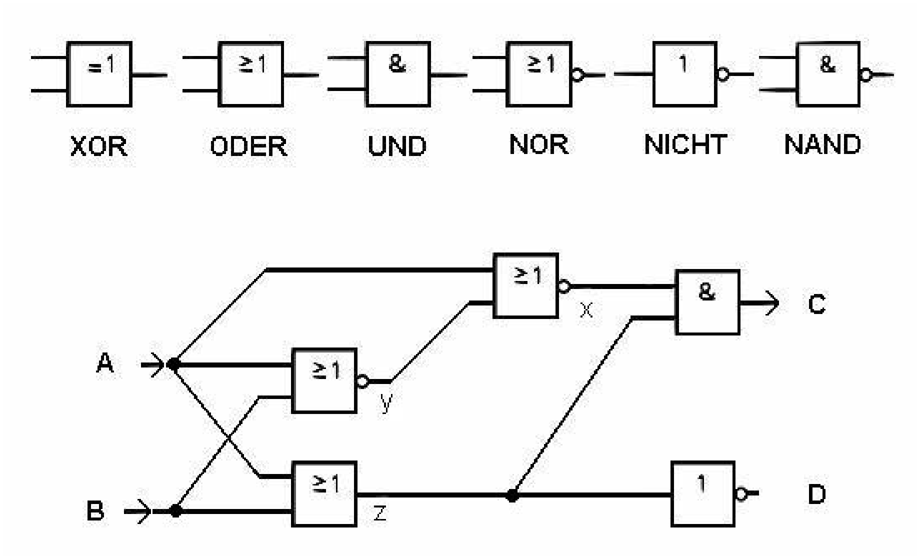
Da in diesen Teilausdrücken jeweils alle Booleschen Variablen vorkommen, nennt man diese Darstellungen eine **kanonische DNF bzw. KNF**.

Bemerkung:

- Mit der beschriebenen Ermittlung von DNF und KNF aus der Wahrheitstafel bekommt man nicht immer die kürzeste Schreibweise. Für eine kürzere Schreibweise wird die Ermittlung von DNF und KNF über Karnaugh-Diagramme verwendet. Diese Methode soll hier aber nicht weiter vertieft werden.

Beispiel: Anwendung Schaltkreise

- Schaltkreise haben n Eingänge und m Ausgänge.
- Jeder Eingang (Ausgang) kann entweder wahr oder falsch sein.
- Ausgänge hängen logisch von den Eingängen ab.
- Schaltkreise werden aus logischen Komponenten zusammengesetzt:



Für das obige Beispiel soll eine Abhängigkeit der Ausgänge C und D von den Eingängen A und B angegeben werden und in eine konjunktive Normalform gebracht werden.

$$C = x \wedge z$$
$$D = \neg z$$
$$mit \;\; z = (A \vee B),\;\; y = A \;NOR\; B = \neg(A \vee B),\;\; x = A \;NOR\; y = \neg(A \vee y) \;\; ergibt \;\; sich$$
$$C = \neg(A \vee y) \wedge (A \vee B) = \neg(A \vee \neg(A \vee B)) \wedge (A \vee B)$$
$$D = \neg(A \vee B)$$

Die konjunktive Normalform erhält man nun durch Umformen nach Schritt 2 und 3 (Schritt 1 wurde bereits bei der Angabe von x und y erledigt):

$$C = \neg(A \vee \neg(A \vee B)) \wedge (A \vee B) = (\neg A \wedge \neg\neg(A \vee B)) \wedge (A \vee B) \;\; (Schritt\ 2)$$
$$= \big((\neg A \wedge A) \vee (\neg A \wedge B)\big) \wedge (A \vee B) = \big(f \vee (\neg A \wedge B)\big) \wedge (A \vee B) \;\; (Schritt\ 3)$$
$$= (\neg A \wedge B) \wedge (A \vee B) = (\neg A \wedge B \wedge A) \vee (\neg A \wedge B \wedge B)$$
$$= f \vee (\neg A \wedge B) = \neg A \wedge B$$
$$D = \neg(A \vee B) = \neg A \wedge \neg B \;\; (Schritt\ 2)\ (Schritt\ 3\ entfällt)$$

2.2 Prädikatenlogik

2.2.1 Aussageformen

Definition 2.10: Aussageform (oder auch Prädikat)

Eine **Aussageform** ist ein Satz, der eine oder mehrere Variablen enthält und der nach dem Ersetzen der Variablen durch konkrete Werte in eine Aussage übergeht.

Eine Aussageform $A(x)$ ist **ein einstelliges Prädikat** $\boldsymbol{A}$. Durch Einsetzen konkreter Werte für x aus einer geeigneten Grundmenge wird die Aussageform zu einer Aussage und ist somit in Abhängigkeit von der Variablen x entweder wahr oder falsch.

Ein **n-stelliges Prädikat** $\boldsymbol{P}$ ist eine Abbildung $P: M_1 \times M_2 \times ... \times M_n \to \{w, f\}$, wobei $M_1, M_2, ..., M_n$ beliebige Mengen sind.

Aussageformen lassen sich ebenso verknüpfen wie Aussagen.

Beispiele:

(1) Die Aussageform

$$A(x) := \text{"}Punkte\ P_1 = (1,2), P_2 = (2,4)\ und\ P_3 = (3,x)\ liegen\ auf\ einer\ Geraden.\text{"}$$

Ist ein eintelliges Prädikat und hat für die Aussage $A(6)$ den Wahrheitswert $\omega(A(6)) = w$ und für die Aussage $A(8)$ den Wahrheitswert $\omega(A(8)) = f$.

(2) Die Aussageform $B(x,y) := \text{"}x = 5y\text{"}$ ist ein zweistelliges Prädikat. Es hat für die Aussage $B(25,5)$ den Wahrheitswert $\omega(B(25,5)) = w$ und für die Aussage $B(12,3)$ den Wahrheitswert $\omega(B(12,3)) = f$.

(3) Die Aussageform $A(x) := \text{"}x\ teilt\ 60\text{"}$ hat als Grundmenge die natürlichen Zahlen.

(4) Die Aussageform $A(x) := \text{"}x\ liegt\ an\ der\ Isar\text{"}$ hat als Grundmenge Städtenamen.

(5) Zum Beispiel $A(x) \Rightarrow B(x)$ meint, dass die Implikation wahr ist für alle x aus der Grundmenge.

Zum Beispiel ist $\underbrace{x^2 \geq 2}_{A(x)} \Rightarrow \underbrace{|x| > 1}_{B(x)}$ für alle x-Werte aus der Grundmenge der reellen Zahlen wahr.

Die **Logik der Aussageformen**, auch **Prädikatenlogik** genannt, ist ein für die Informatik wichtiges Teilgebiet, welches zur Formalisierung und zum Beweis von Programmeigenschaften dient. Der formale Nachweis der Korrektheit eines Programms (Verifikation) bedeutet, dass nicht nur getestet wird, sondern anhand einer Spezifikation die Korrektheit für alle Eingaben bewiesen wird.

2.2.2 Quantoren

Definition 2.11: Allquantor

Sei A(x) eine Aussageform mit der Variablen $x \in M$ (vgl. Abschnitt 2.1.1).

Wir schreiben: $\boxed{\forall x \in M : A(x)}$ als Abkürzung für die Aussage

„Für alle x der Menge M gilt, dass die Aussage A(x) wahr ist“.

$\forall$ heißt **Allquantor** (Zeichen ist ein „umgedrehtes A“).

Eine alternative Notationen wäre z. B. $\forall_{x \in M}$.

Definition 2.12: Existenzquantor

Sei A(x) eine Aussageform mit der Variablen $x \in M$ (vgl. Abschnitt 2.1.1).

Wir schreiben: $\boxed{\exists x \in M : A(x)}$ als Abkürzung für die Aussage

„Es existiert **mindestens ein x** aus der Menge M, so dass die Aussage A(x) wahr ist“.

$\exists$ heißt **Existenzquantor** (Zeichen ist ein „gespiegeltes E“)

Eine alternative Notationen wäre z. B. $\exists_{x \in M}$.

Für den folgenden Sonderfall gibt es eine ergänzende Schreibweise:

Wir schreiben: $\boxed{\exists! x \in M : A(x)}$ als Abkürzung für die Aussage

„Es existiert **genau ein x** aus der Menge M, so dass die Aussage A(x) wahr ist“.

$\exists!$ heißt **Quantor der eindeutigen Existenz**

Eine alternative Notationen wäre z. B. $\exists!_{x \in M}$.

Satz 2.5: Negation von Quantoren

Eine Negation von Quantoren kann in der folgenden Form beschrieben werden:

Negation des Allquantors:

$$\boxed{\neg\big(\forall x \in M : A(x)\big) \Leftrightarrow \exists x \in M : \neg A(x)}$$

„Nicht für alle x aus M gilt die Aussage A(x)“

ist gleichbedeutend mit

„Es gibt ein x aus M, für dass A(x) nicht gilt, d.h. A(x) falsch ist.“

Negation des Existenzquantors:

$$\boxed{\neg\big(\exists x \in M : A(x)\big) \Leftrightarrow \forall x \in M : \neg A(x)}$$

„Es gibt kein x aus M, so dass A(x) wahr ist“

ist gleichbedeutend mit

„Für alle x aus M gilt, dass A(x) nicht gilt, d.h. A(x) falsch ist.“

Beispiele

(1) Die wahre Aussage „Für alle ganzen Zahlen x gilt, dass das Quadrat der Zahl x positiv ist“ kann mit dem Allquantor kürzer geschreiben werden: $\forall x \in \mathbb{Z} : x^2 \geq 0$.

(2) Die Aussage A := „$\forall x \in \mathbb{R} : "x^2 = 1"$“ hat den Wahrheitswert $\omega(A) = f$, da die Gleichung nicht für alle reellen Zahlen gilt. Die Aussage B := „$\exists x \in \mathbb{R} : "x^2 = 1"$“hat den Wahrheitswert $\omega(B) = w$, da die Gleichung für die reelle Zahl x=1 erfüllt.

(3) Die wahre Aussage „Für alle ganzen Zahlen x gibt es mindestens eine ganze Zahl y, so dass die Summe von x und y gleich Null ist“ kann mit zwei Quantoren kürzer geschrieben werden: $\forall x \in \mathbb{Z}\ \exists y \in \mathbb{Z} : x + y = 0$.

(4) Die Aussage „Es gibt mindestens eine ganze Zahl y, so dass für alle ganzen Zahlen x gilt, dass die Summe von x und y gleich Null ist.“, d.h. $\exists y \in \mathbb{Z}\ \forall x \in \mathbb{Z} : x + y = 0$ ist falsch.

2.3 Boolesche Algebra

Die Boolesche Algebra geht auf den Mathematiker George Boole (1815-1864) zurück. Er hat eine algebraische Grundlegung für die Rechengesetze der Aussagenlogik geliefert.

Die Boolesche Algebra erfasst die Gemeinsamkeiten zwischen Aussagen, Mengen und Schaltalgebren. Die Boolesche Algebra ist ein heute unentbehrliches Hilfsmittel beim Entwurf logischer Schaltungen und digitaler Rechenanlagen.

2.3.1 Definition und Gesetze

Definition 2.13: Boolesche Algebra

Eine **Boolesche Algebra** $(A, \#, *, \neg, 0, 1)$ ist eine algebraische Struktur, die aus einer nicht leeren Menge A besteht, für deren Elemente folgende Operationen erklärt sind:

2-stellig:	$*$	$: A \times A \to A$	(Boolesches Produkt)
2-stellig:	$\#$	$: A \times A \to A$	(Boolesche Summe)
1-stellig:	$\neg$	$: A \to A$	(Boolesches Komplement)
0-stellig:	$0,1$	$: A$	(feste Elemente aus A mit $0 \neq 1$)

so dass für alle x; y; z $\in$ A die folgenden Gleichungen (Axiome) gelten:

(1) Kommutativität	$x * y = y * x$	$x \# y = y \# x$
(2) Distributivität	$x * (y \# z) = (x * y) \# (x * z)$	$x \# (y * z) = (x \# y) * (x \# z)$
(3) neutrales Element	$x * 1 = x$ *1 wird das neutrale Element des Booleschen Produkts genannt.*	$x \# 0 = x$ *0 wird das neutrale Element der Booleschen Summe genannt.*
(4) komplementäre Elemente (Negation)	$x * \neg x = 0$	$x \# \neg x = 1$

Bemerkung:

- Eine **algebraische Struktur** ist eine Menge mit auf ihr definierten Verknüpfungen, deren Ergebnisse wieder in dieser Menge liegen.
- Die neutralen Elemente (Nullelement und Einselement) werden auch **Boolesche Konstanten** genannt.
- Die Booleschen Variablen werden die Variablen der jeweiligen Grundmenge genannt.
- Boolesche Ausdrücke sind Verknüpfungen von Booleschen Variablen, und Boolesche Funktionen werden Abbildungen $A \times A \times .... \times A \to A$ genannt.

Satz 2.6: Gesetze einer Booleschen Algebra

Folgende **Sätze** gelten für eine Boolesche Algebra:

(1) **Idempotenzgesetze**

Die Operatoren $\#, *$ sind idempotent,
d.h. für alle $x \in A$ gilt $x \# x = x$ und $x * x = x$.

(2) **Dominanzgesetz**

Für alle $x \in A$ gilt: $x \# 1 = 1$ und $x * 0 = 0$

(3) **Absorptionsgesetze**

Für alle $x, y \in A$ gilt: $x * (x \# y) = x$ und $x \#(x * y) = x$

(4) **Assoziativgesetze**

Für alle $x, y, z \in A$ gilt: $x * (y * z) = (x * y) * z$ $\qquad x \#(y \# z) = (x \# y) \# z$

(5) **DeMorgansche Gesetze**

Für alle $x, y \in A$ gilt: $\neg(x \# y) = \neg x * \neg y$ und $\neg(x * y) = \neg x \# \neg y$.

(6) **Doppelte Komplementbildung**

Für alle $x, y \in A$ gilt: $\neg\neg x = x$

(7) **Komplementarität der neutralen Elemente**

Die neutralen Elemente (0, 1) sind wechselseitig komplementär.

Es gilt: $\neg 0 = 1$ und $\neg 1 = 0$

Beweis (1):

Voraussetzung: Sei $x \in A$ beliebig.

$x \# x =_3 (x \# x) * 1 =_4 (x \# x) * (x \# \neg x) =_2 x \#(x * \neg x) =_4 x \# 0 =_3 x$ und

$x * x =_3 (x * x) \# 0 =_4 (x * x) \#(x * \neg x) =_2 x * (x \# \neg x) =_4 x * 1 =_3 x$

$\textit{angewendete Axiome der Def.2.11:} \; =_3 \textit{neutrales Element} \quad =_4 \textit{Negation} \quad =_2 \textit{Distributivität}$

Die Sätze (2) – (7) sollen hier nicht bewiesen werden, können aber alle aus den Axiomen der Booleschen Algebra abgeleitet werde.

Bemerkung:

Können für eine Algebraische Struktur mit den entsprechenden definierten Verknüpfungen, die vier Axiome der Definition 2.13 nachgewiesen werden, so handelt es sich um eine Boolesche Algebra und somit gelten die Gesetze der Booleschen Algebra (Satz 2.6) ohne einen erneuten Beweis.

2.3.2 Mengenalgebra

Ein Beispiel für eine Boolesche Algebra ist die **Potenzmengen-Algebra**.

Hierfür geht das 6-Tupel der allgemeinen Booleschen Algebra

$(A, \#, *, \neg, 0, 1)$ über in **(P(M),** $\cup, \cap, \neg, \varnothing$ **,M)**.

Eine genaue Beschreibung dieser Booleschen Algebra ist in dem nachfolgenden Satz gegeben.

Satz 2.7:

Ist E eine beliebige Menge und P(E) die Potenzmenge von E, so machen die Operationen

Vereinigung	$\cup$	als	$\#$	
Schnitt	$\cap$	als	$*$	
Komplement	$\overline{}$	als	$\neg$	mit $\overline{M} = E \setminus M = \{x \in E : x \notin M\}$

sowie die Konstanten

leere Menge	$\varnothing$	als	0	(neutrales Element der Vereinigung)
Menge	E	als	1	(neutrales Element der Schnittbildung)

die Potenzmenge P(E) zu einer Booleschen Algebra (P(E), $\cup, \cap, \neg, \varnothing$, E).

Veranschaulichung

Wir wollen uns die einzelnen geltenden Axiome einer Booleschen Algebra in der mengentheoretischen Schreibweise für die Potenzmengen-Algebra verdeutlichen.

Die Mengen M, N, O seien Elemente von P(E).

(1) **Kommutativität** $x * y = y * x$ und $x \# y = y \# x$

Es gilt: $M \cap N = N \cap M$ und $M \cup N = N \cup M$.

Dieses ist genau das Kommutativgesetz des Kapitels 1.

(2) **Distributivität** $x * (y \# z) = (x * y) \# (x * z)$ und $x \# (y * z) = (x \# y) * (x \# z)$

$M \cap (N \cup O) = (M \cap N) \cup (M \cap O)$ und $M \cup (N \cap O) = (M \cup N) \cap (M \cup O)$

Dieses ist genau das Distributivgesetz des Kapitels 1.

(3) **Neutrales Element** $x * 1 = x$ und $x \# 0 = x$

$M \cap E = M$ und $M \cup \varnothing = M$

Eine Veranschaulichung erfolgt im nachfolgenden Beispiel.

(4) **Negation** $x * \neg x = 0$ und $x \# \neg x = 1$

$M \cap \overline{M} = \varnothing$ und $M \cup \overline{M} = E$

Beispiel: Potenzmengen-Algebra

E = $\{1, 2, 3\}$, P(E) = $\{\varnothing, \{1\}, \{2\}, \{3\}, \{1,2\}, \{1,3\}, \{2,3\}, \{1,2,3\}\}$

(P(E), $\cup, \cap, ^{-}, \varnothing$, E) ist eine Potenzmengen-Algebra.

Die Eigenschaft **„Neutrales Element:** $M \cap E = M$ und $M \cup \varnothing = M$ “soll an diesem Beispiel kurz veranschaulicht werden

Sei M = $\{1, 2, 3\}$, dann ist

$\{1, 2, 3\} \cap \{1, 2, 3\} = \{1, 2, 3\}$ und $\{1, 2, 3\} \cup \varnothing = \{1, 2, 3\}$

Sei M = $\{1, 2\}$, dann ist

$\{1, 2\} \cap \{1, 2, 3\} = \{1, 2\}$ und $\{1, 2\} \cup \varnothing = \{1, 2\}$

Außerdem soll die Eigenschaft „**Negation** $M \cap \overline{M} = \varnothing$ und $M \cup \overline{M} = E$ “ hier verdeutlicht werden:

Sei M = $\{1, 2, 3\}$ und $\overline{M} = E \setminus M = \{x \in E : x \notin M\} = \{x \in \{1,2,3\} : x \notin \{1,2,3\}\} = \varnothing$, dann gilt

$\{1, 2, 3\} \cap \varnothing = \varnothing$ und $\{1, 2, 3\} \cup \varnothing = E$

Sei M = $\{1, 2\}$ und $\overline{M} = E \setminus M = \{x \in E : x \notin M\} = \{x \in \{1,2,3\} : x \notin \{1,2\}\} = \{3\}$, dann gilt

$\{1,2\} \cap \{3\} = \varnothing$ und $\{1,2\} \cup \{3\} = E$.

2.3.3 Algebra der Wahrheitswerte

Ein weiteres Beispiel ist die zweielementige **Boolesche Algebra der Wahrheitswerte** „wahr“ und „falsch“.

Satz 2.8:

Ist B die Menge der Wahrheitswerte $\{w, f\}$, so machen die Operationen

Disjunktion	$\vee$	als	#	
Konjunktion	$\wedge$	als	$*$	
Komplement	$\neg$	als	$\neg$	

sowie die logischen Konstanten

falsch	f	als	0	(neutrales Element der Disjunktion)
wahr	w	als	1	(neutrales Element der Konjunktion)

die Menge B zu einer Booleschen Algebra (B, $\vee, \wedge, \neg, w, f$).

Die Operationen $\vee, \wedge, \neg$ wurden im Kapitel 2.1 „Aussagenlogik“ durch ihre Wahrheitstafeln definiert. Die Operationen genügen den definierenden Axiomen der Booleschen Algebra, wie man ebenfalls anhand der Wahrheitstafeln entsprechend Kapitel 2.1.2 erkennen kann. Eine Zusammenfassung ist nachfolgend gegeben:

(1) Kommutativität	$x \wedge y = y \wedge x$	$x \vee y = y \vee x$
(2) Distributivität	$x \wedge (y \vee z) = (x \wedge y) \vee (x \wedge z)$	$x \vee (y \wedge z) = (x \vee y) \wedge (x \vee z)$
(3) neutrales Element	$x \wedge w = x$	$x \vee f = x$
(4) Negation	$x \wedge \neg x = f$	$x \vee \neg x = w$

2.3.4 Schaltalgebra

Ein weiteres Beispiel für eine Boolesche Algebra aus der technischen Anwendung ist die Schaltalgebra.

Satz 2.9:

Sei B die Menge $\{oS, gS\}$ mit *oS* := „offener Schalter“ und *gS*:= „geschlossener Schalter“ und den Operationen

Parallelschaltung *P* als #

Serienschaltung *S* als $*$

und der Komplementbildung $\overline{oS} = gS \;\; und \;\; \overline{gS} = oS$

sowie den logischen Konstanten

oS als 0 (neutrales Element der Parallelschaltung)

gS als 1 (neutrales Element der Serienschaltung)

so gelten die Axiome der Booleschen Algebra. Diese Algebra wird Schaltalgebra genannt.

Bemerkungen:

- Häufig wird für die Schaltalgebra auch $\{1,0\}$ als Trägermenge verwendet und die Booleschen Operationen werden ebenso wie bei der Algebra der Wahrheitswerte mit $\wedge$ (Serienschaltung) bzw. $\vee$ (Parallelschaltung) bezeichnet.

- Die Schaltalgebra und die Algebra der Wahrheitswerte sind sehr nah verwandt und werden häufig im fließenden Übergang verwendet. Im Kapitel 2.1 wurden die technischen Schaltungen als Anwendungsbeispiel für die Aussagenlogik gezeigt.

- Die nachfolgende Tabelle gibt einen Überblick über die Äquivalenzen, der einzelnen Booleschen Algebren (nach Taube, FH Furtwangen):

Operation	Boolesche Algebra	Aussagenlogik	Mengenlehre	Schaltzeichen	Kontaktschalter	Wahrheitstabelle
UND	* (Boolesches Produkt)	$\wedge$ (Konjunktion)	$\cap$	&	— x — y — Reihenschaltung	x y x * y 0 0 0 0 1 0 1 0 0 1 1 1
ODER	+ (Boolesche Summe)	$\vee$ (Disjunktion)	$\cup$	≥ 1	x y Parallelschaltung	x y x + y 0 0 0 0 1 1 1 0 1 1 1 1
NICHT	x' (Boolesches Komplement	$\neg$ (Negation)	G \ A	1	— $\bar{x}$ — Ruhekontakt	x x' 0 1 1 0

2.4 Beweistechniken

2.4.1 Was ist ein Beweis?

Definition 2.14: Beweis

Ein Beweis ist eine vollständige und folgerichtige Argumentation über die Korrektheit einer Aussage.

- Eine Aussage enthält üblicherweise **Voraussetzungen und Behauptungen**.
- Die Argumentation muss die Gültigkeit der Behauptungen in all den Situationen nachweisen, in denen die Voraussetzung gilt.
- Hierbei ist die **Vollständigkeit der Argumentation** verlangt, d.h. jeder mögliche Einzelfall muss durch die Argumentation überdeckt werden.
- Außerdem ist die **Folgerichtigkeit** verlangt, so dass jedes einzelne Argument in der Argumentationskette als korrekt abgesichert ist.

- **Ein Beweis ist also eine Kette von Aussagen, die gemeinsam haben, dass sie alle wahr sind, falls die Voraussetzungen der Aussage wahr sind.**

Als Vorbereitung für einen durchzuführenden Beweis muss zunächst eine Aussage in eine mathematische Aussage umformuliert werden, d.h. die Aussage muss abstrahiert werden. Um Aussagen zu beweisen, benötigt man immer andere bekannte Tatsachen, die schon bewiesen sind.

In den nachfolgenden Abschnitten 2.4.3 bis 2.4.5 werden grundlegende Beweistechniken mit ihrer Vorgehensweise und dem logischen Hintergrund beschrieben.

Einige Beweistechniken basieren auf dem Vorhandensein von Tautologien in der Aussagenlogik (vgl. Kapitel 2.1.4), d.h. auf eine logische Gleichwertigkeit zweier verschiedener Aussageverbindungen.

Logisch gleichwertige Ausdrücke haben in der Wahrheitstafel überall die gleichen Einträge. Werden sie dann mit $\Leftrightarrow$ verknüpft, erhält man eine Tautologie.

2.4.2 Notwendige und hinreichende Bedingung

Wir wollen davon ausgehen, dass wir die Wahrheit einer Aussage beweisen wollen, die sich aus der Voraussetzung V und der Behauptung B zusammensetzt.

Man kann hier die folgenden Fälle unterscheiden:

1. $\boxed{V \Rightarrow B}$

   V ist eine hinreichende Bedingung für B.

   Dieses bedeutet, dass man von der Richtigkeit von V, auf die Richtigkeit von B schließen kann.

   B ist eine notwendige Bedingung für V.

   Dieses bedeutet: Wenn B nicht richtig ist, kann V nicht richtig sein.

2. $\boxed{V \Leftarrow B}$

   V ist eine notwendige Bedingung für B.

   B ist eine hinreichende Bedingung für V.

   Dieses bedeutet, dass man von der Richtigkeit von B, auf die Richtigkeit von V schließen kann. Wäre V falsch, so könnte B nicht wahr sein.

3. $\boxed{V \Leftrightarrow B}$

   V ist eine notwendige und hinreichende Bedingung für B

   und umgekehrt ist B auch eine notwendige und hinreichende Bedingung für V.

Beispiel 1:

Die Schlussfolgerung

„es regnet“ $\Leftarrow$ “man sieht am Himmel einen Regenbogen“ ist richtig,

d.h. **„es regnet“** ist eine **notwendige Bedingung** für das **„Erscheinen eines Regenbogens“.**

Hingegen ist die Aussage

„es regnet“ $\Rightarrow$ “man sieht am Himmel einen Regenbogen“ nicht richtig,

da der Regenbogen nicht immer erscheint, wenn es regnet, sondern nur dann, wenn auch die Sonne scheint. **„es regnet“** ist also **keine hinreichende Bedingung** für das **„Erscheinen eines Regenbogens“** (sondern nur eine notwendige Bedingung)**.**

Bemerkung:

- In der Implikation im obigen Beispiel 1 ist die Aussage „es regnet“ eine notwendige Bedingung. Hingegen war die Aussage „es regnet“ im Beispiel des Kapitels 2.1.2 eine hinreichende Bedingung für die Aussage „die Straße ist nass“.
- „Eselsbrücke“: „**H**inreichende Bedingung“ $\Rightarrow$ „**N**otwendige Bedingung“

  „**H**“ $\Rightarrow$ „**N**“

Beispiel 2:

Sei $V: a = b$ die Voraussetzung und $B: a^2 = b^2$ die Behauptung:

V ist eine hinreichende aber keine notwendige Bedingung für B, d.h. folgende Aussage: $a = b \Rightarrow a^2 = b^2$ ist richtig (V hinreichend). Die Aussage $a = b \Leftarrow a^2 = b^2$ ist hingegen falsch (V nicht notwendig), da z.B. sowohl $a = 2,\ b = 2$ als auch $a = -2,\ b = +2$ eine Lösung für $a^2 = b^2 = 4$ sind.

2.4.3 Direkter Beweis

Vorgehensweise:

Beim direkten Beweis einer Implikation $A \Rightarrow B$ geht man von einer wahren Aussage A aus und schließt durch Aneinanderreihung von korrekten (geltenden) Implikationen auf die Aussage „B ist wahr".

Logischer Hintergrund:

Die nachfolgende Aussage ist eine Tautologie

$$\big((A \Rightarrow C) \wedge (C \Rightarrow B)\big) \Rightarrow (A \Rightarrow B) \qquad \text{(bzw. } \big(A \wedge (A \Rightarrow C) \wedge (C \Rightarrow B)\big) \Rightarrow B\text{)}$$

Die Allgemeingültigkeit dieser Aussage verifiziert man anhand der nachfolgenden Wahrheitstafel.

A	B	C	$A \Rightarrow C$	$C \Rightarrow B$	$(A \Rightarrow C) \wedge (C \Rightarrow B)$	$A \Rightarrow B$	$\big((A \Rightarrow C) \wedge (C \Rightarrow B)\big) \Rightarrow (A \Rightarrow B)$
w	*w*	*w*	*w*	*w*	*w*	*w*	*w*
w	*w*	*f*	*f*	*w*	*f*	*w*	*w*
w	*f*	*w*	*w*	*f*	*f*	*f*	*w*
w	*f*	*f*	*f*	*w*	*f*	*f*	*w*
f	*w*	*w*	*w*	*w*	*w*	*w*	*w*
f	*w*	*f*	*w*	*w*	*w*	*w*	*w*
f	*f*	*w*	*w*	*f*	*f*	*w*	*w*
f	*f*	*f*	*w*	*w*	*w*	*w*	*w*

Veranschaulichung:

Es sei A die Aussage „Es regnet" und B die Aussage „Die Straße ist nass". Dann ist die Implikation $A \Rightarrow B$ bewiesen, wenn wir aus einer wahren Aussage A , d. h. „Es regnet" und bereits bewiesener Aussagen auf die Aussage B „Die Straße ist nass" schließen können.

Sei $A \Rightarrow C$ die bewiesene Aussage „Wenn es regnet, fallen Wassertropfen vom Himmel“ und $C \Rightarrow B$ die bewiesene Aussage „Wenn Wassertropfen vom Himmel fallen, wird der Boden nass“. Hieraus kann nun gefolgert werden, dass dann bei Regen auch die Straße nass wird.

Beispiel:

Satz: Wenn die natürliche Zahl n durch 6 teilbar ist, dann ist sie auch durch 3 teilbar.

Direkter Beweis:

Wenn die natürliche Zahl n durch 6 teilbar ist, dann $\exists k \in \mathbb{N} : n = 6 \cdot k$.

Die Zahl 6 ist darstellbar als Produkt $6 = 2 \cdot 3$, durch Einsetzen erhalten wir dann $n = 2 \cdot 3 \cdot k$.

Hieraus ist ersichtlich, dass n durch 3 teilbar ist.

2.4.4 Indirekter Beweis

Ein indirekter Beweis einer Implikation $A \Rightarrow B$ wird dann verwendet, wenn ein direkter Beweis nicht zum Ziel führt oder sich ein indirekter Beweis leichter durchführen lässt. Es gibt zwei Varianten „**Beweis durch Kontraposition**“ und „**Beweis durch Widerspruch**“, die auf den Äquivalenzen

$$(A \Rightarrow B) \Leftrightarrow (\neg B \Rightarrow \neg A) \Leftrightarrow \neg(A \wedge \neg B)$$

beruhen. Die beiden indirekten Beweistechniken werden in den nachfolgenden Unterabschnitten genauer erläutert.

2.4.4.1 Beweis durch Kontraposition

Vorgehensweise:

Man nimmt an, dass B falsch ist und leitet daraus ab, dass A falsch ist. Hiermit ist dann die Wahrheit der Aussage $\neg B \Rightarrow \neg A$ bewiesen und damit $A \Rightarrow B$.

Logischer Hintergrund:

Die nachfolgende Aussage ist eine Tautologie und zeigt damit die logische Äquivalenz der beiden Teilaussagen:

$$(A \Rightarrow B) \Leftrightarrow (\neg B \Rightarrow \neg A)$$

Diese Äquivalenz ist an der folgenden Wahrheitstafel erkennbar.

A	B	$\neg A$	$\neg B$	$A \Rightarrow B$	$\neg B \Rightarrow \neg A$	$(A \Rightarrow B) \Leftrightarrow (\neg B \Rightarrow \neg A)$
f	f	w	w	w	w	w
f	w	w	f	w	w	w
w	f	f	w	f	f	w
w	w	f	f	w	w	w

Veranschaulichung:

Es ist gleichwertig zu beweisen „Wenn es regnet, ist die Straße nass.“ oder “Ist die Straße nicht nass, so regnet es nicht.“

Beispiel:

Satz: Ist n eine durch 4 teilbare natürliche Zahl, so ist n+3 keine Quadratzahl.

Indirekter Beweis durch Kontraposition:

Wir nehmen an, n+3 sei eine Quadratzahl, d.h. es gibt eine natürliche Zahl k mit $n+3=k^2$.

1. Fall: k gerade, d.h. es gibt $m \in \mathbb{N}$ mit $k = 2m$.
Dann ist $k^2 = 4m^2$ durch 4 teilbar und folglich ist $n = k^2 - 3$ nicht durch 4 teilbar.

2. Fall: k ungerade, d.h. es gibt $m \in \mathbb{N}_0$ mit $k = 2m+1$.
Dann ist $k^2 = 4m^2 + 4m + 1$, d.h. $k^2 - 1$ ist durch 4 teilbar, also $n = k^2 - 3 = (k^2 - 1) - 2$ nicht.

2.4.4.2 Beweis durch Widerspruch

Vorgehensweise:

Man nimmt an, dass A wahr und B falsch ist, um daraus einen Widerspruch herzuleiten. Hiermit ist dann die Wahrheit der Aussage $\neg(A \wedge \neg B)$ bewiesen und damit $A \Rightarrow B$.

Logischer Hintergrund:

Die nachfolgende Aussage ist eine Tautologie und zeigt damit die logische Äquivalenz der beiden Teilaussagen:

$(A \Rightarrow B) \Leftrightarrow \neg(A \wedge \neg B)$ (bzw. $(A \Rightarrow B) \Leftrightarrow ((A \wedge \neg B) \Rightarrow \mathit{falsch})$)

Die Allgemeingültigkeit dieser Aussage verifiziert man anhand der nachfolgenden Wahrheitstafel.

A	B	$\neg B$	$A \Rightarrow B$	$A \wedge \neg B$	$\neg(A \wedge \neg B)$	$(A \Rightarrow B) \Leftrightarrow \neg(A \wedge \neg B)$
f	f	w	w	f	w	w
f	w	f	w	f	w	w
w	f	w	f	w	f	w
w	w	f	w	f	w	w

Veranschaulichung:

Es ist gleichwertig die Aussage „Wenn es regnet, ist die Straße nass.“ zu beweisen oder die Aussage “es regnet und die Straße ist nicht nass.“ zu einem Widerspruch zu führen.

Beispiel:

Wir kommen mit diesem Beispiel auf den Satz aus Abschnitt 2.4.3 zurück und beweisen ihn nicht direkt, sondern indirekt durch Widerspruch.

Satz: Wenn die natürliche Zahl n durch 6 teilbar ist, dann ist sie auch durch 3 teilbar.

Indirekter Beweis durch Widerspruch:

Wir nehmen an: n ist durch 6 teilbar und n ist nicht durch 3 teilbar.

Es gibt also $k \in \mathbb{N} : n = 6 \cdot k$ und es gilt: $\forall l \in \mathbb{N} : n \neq 3 \cdot l$.

Mit der Gültigkeit von $6 = 2 \cdot 3$ erhalten wir $n = 2 \cdot 3 \cdot k = (2 \cdot k) \cdot 3$.

Mit $l = 2 \cdot k$ haben wir eine natürliche Zahl l mit $n = 3 \cdot l$ gefunden. Dieses stellt jedoch einen Widerspruch zur Annahme dar, und der obige Satz ist bewiesen.

2.4.5 Methode der vollständigen Induktion

Die Methode der vollständigen Induktion (oder kurz vollständige Induktion) wird häufig dann angewendet, wenn All-Aussagen zu natürlichen Zahlen vorliegen z.B. in Form einer von n abhängigen Formel. Die **Beweisidee** für eine von natürlichen Zahlen abhängige Aussage A(n) mit n = 1, 2, 3, ... besteht darin, die Behauptung für das kleinste n zu beweisen und dann einen Schluss von n auf n+1 durchzuführen, d.h. von einer gültigen Aussage A(n) auf die Gültigkeit von A(n+1) zu schließen.

Vorgehensweise:

Der **Beweis durch vollständige Induktion** gliedert sich in einzelne Schritte:

Induktionsanfang:

Die Aussage wird für die kleinste natürliche Zahl, für die die Aussage wahr sein soll, bewiesen.

Induktionsschritt von n auf n+1:

Im Induktionsschritt soll von einer wahren Aussage A(n) auf die Gültigkeit von A(n+1) geschlossen werden. Der Induktionsschritt gliedert sich in drei Teilschritte:

Induktionsannahme:

Es wird angenommen, dass die Aussage $A(n)$ wahr ist.

Induktionsbehauptung:

Die Aussage $A(n+1)$ soll gezeigt werden.

Induktionsschluss:

Es wird die Gültigkeit von $A(n+1)$ durch Anwenden von $A(n)$ und weiterer bewiesener Aussagen nachgewiesen.

Beispiel:

Satz: Für alle natürlichen Zahlen n gilt $2^n > n$, d.h. $\forall n \in \mathbb{N}\ gilt\ A(n):\ 2^n > n$.

Induktionsanfang:

n=1: $2^1 = 2 > 1$, d.h. A(1) ist wahr.

Induktionsschritt von n auf n+1:

Induktionsannahme:

Es wird angenommen, dass die Aussage $A(n):\ 2^n > n$ wahr ist.

Induktionsbehauptung:

Die Aussage $A(n+1):\ 2^{n+1} > n+1$ soll gezeigt werden.

Induktionsschluss:

$2^{n+1} = 2^n \cdot 2 > n \cdot 2 = n + n \geq n+1$

Somit ist die Behauptung der Aussage A(n+1) bewiesen.

2.4.6 Weitere Beweistechniken

Beweis durch Gegenbeispiel

Es ist gezeigt, dass die Schlussfolgerung „ $A \Rightarrow B$ “ falsch ist, wenn ein Beispiel gefunden werden kann, bei dem A wahr und B falsch ist. Dann kann die Behauptung „ $A \Rightarrow B$ “ nicht wahr sein, d.h. die Implikation gilt nicht.

Beispiel:

Die Implikation („x ist eine natürliche ungerade Zahl“ $\Rightarrow$ „x ist eine Primzahl“) ist falsch, da für x = 9 die Aussage „x ist eine natürliche ungerade Zahl“ wahr ist und die Aussage „x ist eine Primzahl“ ist falsch. Mit diesem Gegenbeispiel ist gezeigt, dass die Implikation nicht allgemein gilt.

Würde man den Gültigkeitsbereich der Implikation auf alle natürlichen ungeraden Zahlen x mit $1 < x \leq 7$ einschränken, so wäre die Implikation gültig.

Existenzbeweis

Dieses ist häufig ein konstruktiver Beweis, wobei ein Element konstruiert wird, das der Behauptung genügt.

Eindeutigkeitsbeweis

In einem Eindeutigkeitsbeweis wird gezeigt, dass es genau ein Element gibt, dass der Bedingung genügt. Hierzu nimmt man meistens die Existenz zweier Elemente an, die der Bedingung genügen und zeigt, dass diese identisch sind.

2.4.7 Zusammenfassung und Beispiele

► Beweis einer Implikation

Hat man einen Satz mit einer Aussage der Gestalt

$$A \Rightarrow B,$$

so gibt es mehrere Möglichkeiten, ihn zu beweisen.

(1) Direkter Beweis:

Man nimmt an, die Vorraussetzung A ist wahr und schließt hieraus, dass die Behauptung B wahr ist.

(2) Indirekter Beweis:

Für den indirekten Beweis gibt es zwei Varianten:

(a) Kontraposition: Man nimmt an, dass B falsch ist und leitet daraus ab, dass A falsch ist. Hiermit ist dann die Wahrheit der Aussage $\neg B \Rightarrow \neg A$ bewiesen und damit $A \Rightarrow B$.

(b) Widerspruch: Man nimmt an, dass A wahr und B falsch ist, um daraus einen Widerspruch herzuleiten. Hiermit ist dann die Wahrheit der Aussage $\neg(A \wedge \neg B)$ bewiesen und damit $A \Rightarrow B$.

► Beweis einer Äquivalenz

Hat man einen Satz mit einer Aussage der Gestalt

$$A \Leftrightarrow B,$$

so kann dieser entweder

(a) über eine Aneinanderreihung von korrekten (geltenden) Äquivalenzen bewiesen werden

oder

(b) der Beweis kann in zwei Teilschritten durchgeführt werden: Teilschritt 1: $A \Rightarrow B$, Teilschritt 2: $A \Leftarrow B$. In jedem Teilschritt ist die Wahl einer der anderen Beweismethoden notwendig.

► Beweis einer Aussage über natürliche Zahlen

Der Beweis einer All-Aussage zu natürlichen Zahlen (z.B. in Form einer von n abhängigen Formel) erfolgt in der Regel über das Prinzip der vollständigen Induktion.

Beispiele:

(1) Satz: Für alle natürlichen Zahlen *n* gilt: $1+2+....+n=\frac{n(n+1)}{2}$.

Zu zeigen ist: Es gilt $\forall n\in\mathbb{N}$ die Aussage $A(n)$: $\sum_{i=1}^{n} i=\frac{n(n+1)}{2}$.

Der Beweis erfolgt durch **vollständige Induktion**:

Induktionsanfang: Für n=1 gilt $\sum_{i=1}^{1} i=1=\frac{1(1+1)}{2}$, damit ist $A(1)\ wahr$.

Induktionsschritt von n auf n+1:

Induktionsannahme: Sei $A(n):\sum_{i=1}^{n} i=\frac{n(n+1)}{2}$ mit $n\geq 1$ wahr.

Induktionsbehauptung: $\sum_{i=1}^{n+1} i=\frac{(n+1)(n+2)}{2}$

Induktionsschluss:

$$\sum_{i=1}^{n+1} i=\sum_{i=1}^{n} i+(n+1)=\frac{n(n+1)}{2}+(n+1)=\frac{n(n+1)+2(n+1)}{2}=\frac{n^2+3n+2}{2}=\frac{(n+1)(n+2)}{2}$$

Somit ist $A(n+1)$ wahr und die Aussage gilt für alle natürlichen Zahlen.

(2) Satz: Eine natürliche Zahl n ist genau dann gerade, wenn ihr Quadrat gerade ist.

Mit der Aussage A: „$n\in\mathbb{N}$ ist gerade“ und der Aussage B: „n^2 ist gerade“ kann der obige Satz formuliert werden als: $A\Leftrightarrow B$, d.h. $n\in\mathbb{N}\ ist\ gerade \Leftrightarrow n^2\ ist\ gerade$

Der Beweis wird in zwei Teilschritten durchgeführt: $A\Rightarrow B$ und $B\Rightarrow A$.

Beweis $A\Rightarrow B$ durch einen direkten Beweis:

Da $n\in\mathbb{N}$ gerade ist, gibt es eine natürliche Zahl *m* mit $n=2\cdot m$.

Dann ist $n^2=(2\cdot m)\cdot(2\cdot m)=4\cdot m^2=2\cdot\left(2\cdot m^2\right)$.

Hieraus folgt, dass n^2 gerade ist, da $2\cdot m^2$ eine natürliche Zahl ist.

Beweis $B\Rightarrow A$ durch einen indirekten Beweis (Kontraposition):

d.h. es wird $\neg A\Rightarrow\neg B$ gezeigt.

Gilt $\neg A$, so ist $n\in\mathbb{N}$ ungerade und $\exists\, m\in\mathbb{N}$ mit $n=2\cdot m-1$.

Dann ist $n^2=(2\cdot m-1)\cdot(2\cdot m-1)=4\cdot m^2-4\cdot m+1=2\cdot\left(2\cdot m^2-2\cdot m+1\right)-1$.

Hieraus folgt, dass n^2 ungerade ist, da $2\cdot m^2-2\cdot m+1$ eine natürliche Zahl ist.

Somit gilt: $\neg B$.

Aus beiden Beweisteilschritten folgt insgesamt: $A\Leftrightarrow B$.

(3) Aussage: "Die Wurzel aus 2 ist keine rationale Zahl."

Zu zeigen: $\sqrt{2}$ ist keine rationale Zahl

Beweis durch einen indirekten Beweis (Widerspruch)

Wir nehmen also an $\sqrt{2}$ sei eine rationale Zahl und versuchen, daraus einen Widerspruch herzuleiten.

Ist $\sqrt{2}$ eine rationale Zahl, dann gibt es nach Definition der rationalen Zahlen zwei ganze Zahlen p und q mit $\boxed{\sqrt{2} = \frac{p}{q}}$. Ohne Beschränkung der Allgemeinheit (o.B.d.A.) seien p und q teilerfremd, ansonsten kürze man den Bruch solange bis sie teilerfremd sind.

Somit gilt $2 = \left(\frac{p}{q}\right)^2 = \frac{p^2}{q^2}$, also $\boxed{2q^2 = p^2}$.

Das bedeutet, dass $\boxed{p^2 \text{ eine gerade Zahl}}$ ist. Dann muss aber auch $\boxed{p \text{ eine gerade Zahl}}$ sein (siehe vorheriges Beispiel).

Nach Definition bedeutet das, dass es eine ganze Zahl a gibt mit $\boxed{p = 2a}$.

Das setzen wir ein und erhalten: $\boxed{2q^2 = (2a)^2 = 4a^2}$.

Division durch 2 liefert: $\boxed{q^2 = 2a^2}$, also muss auch $\boxed{q \text{ eine gerade Zahl}}$ sein.

Das ist ein $\boxed{\text{Widerspruch}}$, denn wir hatten den Bruch $\frac{p}{q}$ so weit gekürzt, wie es ging.

Die Behauptung ist bewiesen.

2.5 Anwendungsbeispiele

2.5.1 „Beweise der Informatiker oder der programmierenden Ingenieure“

Informatiker „beweisen“ in allen Bereichen, d.h. sie prüfen, ob z.B.

- ein Algorithmus in allen Spezialfällen richtig arbeitet,
- eine Switch-Anweisung alle Möglichkeiten abdeckt,
- eine Systemarchitektur tragfähig ist,
- alle Anforderungen des Kunden gleichzeitig realisiert werden können,
- der auftretende Fehler ein Fehler in der Schlussfolgerung oder in den Eingangsdaten ist,
- u.v.a.m..

2.5.2 Programmieren

Die logischen Operatoren und Verknüpfungen findet man in der Programmierung sehr häufig. Hiermit werden Abfragen und Schleifen des Programmablaufes gesteuert.

Das nachfolgende Beispiel stellt einen kurzen Ausschnitt aus einem C-Code dar, in dem die gewählte Aktion über eine Zahl eingelesen wird:

```
int bitop, erfolg;
printf ("\n** Test der bitweisen Operatoren **\n");
erfolg=0;                                    // Abfrage, ob eine Zahl einge-
while(erfolg == 0 || bitop < 0 || bitop > 6)// lesen wurde und ob sie im ge-
{                                            // wünschten Wertebereich liegt
   printf("\nGeben Sie den gewünschten Bitoperator ein \n");
   printf(" 1 = << , 2 = >> , 3 = & , 4 = | , 5 = ^ , 6 = ~ , 0 = Ende :");
   fflush(stdin);
   erfolg=scanf (" %d",&bitop);  // erfolg ist gleich 0, wenn ein Buchstabe
}                                // eingelesen wird

switch (bitop)  // Verzweigen in die gewünschte Aktion
{  ……
```

2.5.3 Berechnung von Schaltjahren

Schaltjahre sind die Jahre ...,1896,1904,...,1996, 2000, 2004,...,2096,2104,....

Schaltjahre sind diejenigen Jahre, deren Jahreszahl ohne Rest durch 4 teilbar ist, die aber nicht durch 100 teilbar sind. Ausnahme bilden die Jahre, die durch 400 teilbar sind, sie sind Schaltjahre.

Die Berechnung von Schaltjahren erfolgt mit Hilfe der Zusammensetzung mehrerer Aussagen, mit denen überprüft werden kann, ob das Jahr x ein Schaltjahr ist oder nicht:

- A: x ist durch 4 teilbar
- B: x ist durch 100 teilbar
- C: x ist durch 400 teilbar

Das Jahr x ist ein Schaltjahr, wenn die Aussage $(A \wedge \neg B) \vee C$ bzw. gleichwertig $A \wedge \neg(B \wedge \neg C)$ bzw. $(C \vee \neg B) \wedge A$ wahr ist.

Eine mögliche C++-Realisierung wäre:

$$\begin{gathered} if((x\%4 == 0) \qquad !((x\%100 == 0)(x\%400! = 0))) \\ //Februar\ hat\ 29\ Tage \\ else \\ //Februar\ hat\ 28\ Tage \end{gathered}$$