HAW Hamburg – Fakultät TI
Department Informations- und Elektrotechnik
Prof. Dr.-Ing. Karin Landenfeld

Abschlussklausur Mathematik 1 / EE-B1
Termin: 25.6.2018

Name, Vorname	
Matrikelnummer	

	Aufgabe 1	Aufgabe 2	Aufgabe 3	Aufgabe 4	Aufgabe 5	Aufgabe 6
Maximal erreich-bare Punktzahl	12	20	12	14	14	10
Erreichte Punkte						

Erreichte Punkte gesamt	
Leistungspunkte	
Datum/ Unterschrift	

Hinweise:

- Schreiben Sie die Lösungen bitte soweit es geht **in die Aufgabenblätter.**
- Falls Sie zusätzliche **eigene Blätter** benötigen, nehmen Sie bitte für jede Aufgabe ein separates Blatt und beschriften Sie es oben mit Namen und Aufgabennummer.
- Stellen Sie Ihre **Lösungen mit dem Rechengang und der Begründung** nachvollziehbar dar. Bloßes Hinschreiben von Ergebnissen bringt <u>keine Punkte</u>.
- Erlaubte Unterlagen: 4 Seiten mit handschriftlich erstellter Formelsammlung,
davon 1 Seite als Kopie erlaubt
- Kein Taschenrechner, kein Laptop, kein Kommunikationsgeräte, …!

Aufgabe 1 (12 Punkte): Lineare Gleichungssysteme

a) Gegeben ist das lineare Gleichungssystem

$$\begin{aligned} x_1 - x_2 + 2x_3 + x_4 &= 10 \\ 2x_1 + x_2 + x_3 + 5x_4 &= 17 \\ 3x_1 - 3x_2 + 2x_3 + x_4 &= 8 \quad \text{mit } a, b \in \mathbb{R} \\ 2x_1 + 3x_2 - x_3 - ax_4 &= b \end{aligned}$$

Lösen Sie das lineare Gleichungssystem mit dem Gaußschen Eliminationsverfahren.

(1) Geben Sie die Lösung für den Spezialfall $a = -3,\ b = 5$ an.

(2) Für welche Werte der Parameter a und b ist das Gleichungssystem eindeutig lösbar, nicht lösbar oder hat unendlich viele Lösungen? Begründen Sie jeweils Ihre Antworten mit Hilfe des Rangs!

b) Berechnen Sie für das nachfolgend gegebene LGS die allgemeine Lösung:

$$\begin{pmatrix} 2 & 2 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \underline{x} = \begin{pmatrix} 5 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Aufgabe 2 (20 Punkte): Funktionen und Differentialrechnung

Gegeben ist die Funktion $f(x) = \frac{1}{x} - \frac{1}{x+1}$.

a) Bestimmen Sie den Definitionsbereich.

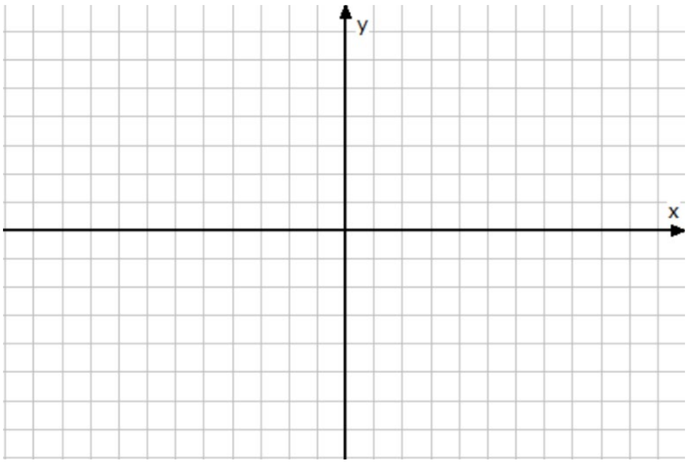
b) Bestimmen Sie das Verhalten der Funktion für $x \to \infty$ und $x \to -\infty$.

c) Berechnen Sie das Verhalten an den Definitionslücken. Interpretieren Sie die Ergebnisse.

d) Bestimmen Sie die Nullstellen, Extremwerte/Sattelpunkte, Wendepunkte.

e) Skizzieren Sie die Funktion mit Hilfe der Aufgabenteile a) – d).

f) Berechnen und skizzieren Sie die Tangente an der Stelle $x = 1$.



Aufgabe 3 (12 Punkte): Komplexe Zahlen

a) Ermitteln Sie die komplexe Zahl $z = a + bj \in \mathbb{C}$, die die folgende Gleichung löst:
$\frac{(2+3j)}{2} z + \frac{5+2j}{1+j} = 8 + 2j$.

b) Stellen Sie die komplexe Zahl $w = \left(\sqrt{\frac{3}{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}} j \right)^{30} \in \mathbb{C}$ in Polarkoordinaten und kartesischen Koordinaten.

Aufgabe 4 (14 Punkte): Mengen, Logik und Beweise

a) Gegeben sind die Mengen $A = (-\infty, 4]$ und $B = (1, \infty)$. Geben Sie die dazugehörigen nachfolgenden Mengen an und stellen Sie diese grafisch auf einem Zahlenstrahl dar.

$A \cap B$

$A \cup B$

$A \setminus B$

$B \setminus A$

b) Gegeben ist der logische Ausdruck $p \vee ((p \Rightarrow q) \Rightarrow (p \wedge \neg q))$

(1) Stellen Sie eine Wahrheitstabelle für den logischen Ausdruck auf.

(2) Vereinfachen Sie den logischen Ausdruck mit Hilfe gültiger Rechengesetze.

c) Zeigen Sie mit Hilfe der Vollständigen Induktion die folgende Aussage:

$$1+\frac{2^0}{3^1}+\frac{2^2}{3^2}+\frac{2^4}{3^3}+\ldots+\frac{2^{2(n-1)}}{3^n}=1+\sum_{k=1}^{n}\frac{2^{2(k-1)}}{3^k} = \left(\frac{4}{3}\right)^n \qquad \forall n\in\mathbb{N} \; mit \; n\geq 1$$

Aufgabe 5 (14 Punkte): Folgen und Grenzwerte

a) Gegeben ist die Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}\ mit\ a_n = \frac{n(n+3)-4}{n^2-1}$.

Untersuchen Sie die Konvergenz der Folge mit Grenzwert $a=1$ mit Hilfe der Grenzwertdefinition. Verwenden Sie für ε folgende Werte (i) $\varepsilon = \frac{1}{10}$, (ii) $\varepsilon = \frac{1}{100}$, (iii) $\varepsilon > 0\ beliebig$. Welche Schlussfolgerung ziehen Sie?

b) Gegeben ist die Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}\ mit\ a_n = \frac{1}{\sqrt{n}} + \frac{10}{n^2}$.

(i) Prüfen Sie, ob die Folge monoton fallend ist.

(ii) Prüfen Sie die Beschränktheit der Folge.

(iii) Welche Aussagen können Sie mit (i) und (ii) zur Konvergenz treffen?

c) Berechnen Sie den Grenzwert $\lim\limits_{n \to \infty} \left(n - 5 - \frac{n^3}{n^2 + 5} \right)$

(1) durch reine Umformung der Folgenvorschrift

(2) mit Verwendung der Regeln von Bernoulli l'Hospital

Aufgabe 6 (10 Punkte): : Funktionen und Stetigkeit

Für die nachfolgend gegebenen Funktionen ermitteln und begründen Sie folgenden Eigenschaften: (1) den Definitionsbereich und (2) Stetigkeit oder stetige Ergänzbarkeit. Im Falle stetiger Ergänzbarkeit geben Sie die stetig ergänzte Funktion an.

a) $f(x) = \dfrac{x^2 - 5x + 6}{x - 2}$

b) $f(x) = \begin{cases} \dfrac{|x|}{x}, \; \text{für } x \neq 0 \\ 1, \; \text{für } x = 0 \end{cases}$

c) $f(x) = \begin{cases} x^2 - 1, \; \text{für } x \geq 2 \\ 5x - 7, \; \text{für } x \leq 2 \end{cases}$

Anhang:

Grundlegende Werte der trigonometrischen Funktionen:

Grad	Bogenmaß	sin	cos	tan
0°	0	0	1	0
30°	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}\sqrt{3} = 0.866$	$\frac{1}{3}\sqrt{3} = \frac{1}{\sqrt{3}} = 0.577$
45°	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{1}{2}\sqrt{2} = 0.707$	$\frac{1}{2}\sqrt{2} = 0.707$	1
60°	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{1}{2}\sqrt{3} = 0.866$	$\frac{1}{2}$	$\sqrt{3} = 1.732$
90°	$\frac{\pi}{2}$	1	0	$\pm\infty$
135°	$\frac{3\pi}{4}$	$\frac{1}{2}\sqrt{2} = 0.707$	$-\frac{1}{2}\sqrt{2} = -0.707$	-1
180°	π	0	-1	0
270°	$\frac{3\pi}{2}$	-1	0	$\pm\infty$