# Vorlesung 23 am 21.12.2022

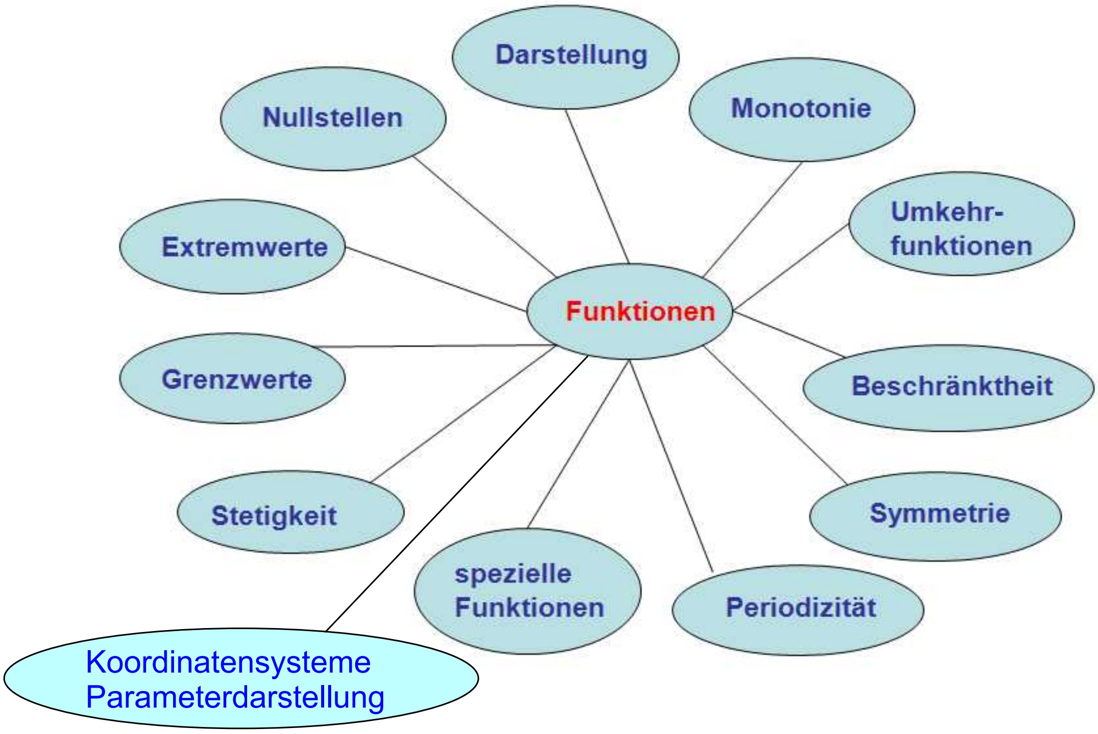
## Inhalte: Funktionen 5 - Differentialrechnung2

## - Grundlegende Funktionen



4 Differentialrechnung

## Begriffe im Zusammenhang mit Funktionen




**Nachweismöglichkeit der Symmetrie:**

$$f(-x) = \ldots = \begin{cases} f(x) & \Rightarrow \text{gerade Symmetrie} \\ -f(x) & \Rightarrow \text{ungerade Symmetrie} \\ \text{etwas anderes} & \Rightarrow \text{keine Symmetrie} \end{cases}$$

**Nachweis der Periodizität:**

Ansatz: $f(x+p) \overset{!}{=} f(x)$

$p$ so bestimmen, dass die Gleichung $\forall x \in \mathbb{R}$ erfüllt ist.

**Nachweis der Monotonie - Möglichkeiten**

1. **Annahme einer Monotonie und Nachweis der Gültigkeit der entsprechenden Ungleichung** $\forall x_1, x_2 \in I$
2. **Ansatz über die Differenz**

$$f(x_2) - f(x_1) \begin{cases} < 0 & \Rightarrow \text{streng monoton fallend} \\ \leq 0 & \Rightarrow \text{monoton fallend} \\ > 0 & \Rightarrow \text{streng monoton wachsend} \\ \geq 0 & \Rightarrow \text{monoton wachsend} \end{cases}$$

$\forall x_1, x_2 \in I$

**Nachweismöglichkeiten der Beschränktheit:**

- wie bei Folgen

- durch Abschätzen der Funktionsvorschrift
  - nach unten
  - nach oben
  - über den Betrag, damit erhält man gleichzeitig eine untere und obere Schranke

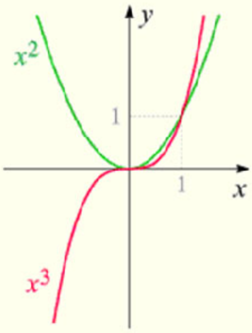
- Kenntnis über Funktionsverläufe von Grundfunktionen
- Nachweis durch Annahme einer Schranke und zeigen der Gültigkeit der Aussage

.

# Potenzfunktionen

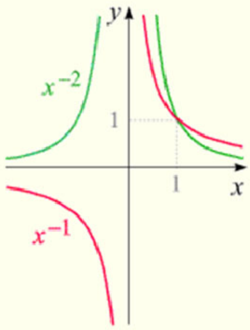
**Steckbrief der Funktionen $x \longrightarrow x^m$ für natürliches $m$ ($m$ = 1, 2, 3, ...)**

- Definitionsbereich: $R$
- Wertebereich: für gerades $m$: $R_0^+$; für ungerades $m$: $R$
- Injektivität: für gerades $m$: nicht injektiv; für ungerades $m$: injektiv
- Monotonie: für gerades $m$: nicht monoton; für ungerades $m$: streng monoton wachsend
- Periodizität: keine
- Positivität: für gerades $m$: überall $\geq 0$
- Nullstellen: bei $x = 0$ Nullstelle $m$-ter Ordnung
- Asymptoten: keine
- Unendlichkeitsstellen: keine



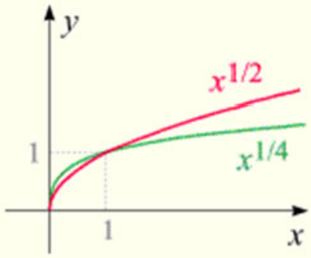

**Steckbrief der Funktionen $x \longrightarrow x^m$ für negatives ganzzahliges $m$ ($m$ = –1, –2, –3, ...)**

- Definitionsbereich: $R \setminus \{0\}$
- Wertebereich: für gerades $m$: $R^+$; für ungerades $m$: $R \setminus \{0\}$
- Injektivität: für gerades $m$: nicht injektiv; für ungerades $m$: injektiv
- Monotonie: für gerades $m$: im Bereich $x < 0$ streng monoton wachsend, im Bereich $x > 0$ streng monoton fallend; für ungerades $m$: in den Bereichen $x < 0$ und $x > 0$ streng monoton fallend
- Periodizität: keine
- Positivität: für gerades $m$: überall $> 0$
- Nullstellen: keine
- Asymptoten: beide Koordinatenachsen
- Unendlichkeitsstellen: Pol $|m|$-ter Ordnung bei $x = 0$



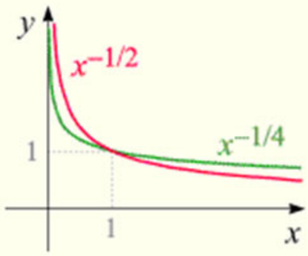
**Steckbrief der Funktionen $x \longrightarrow x^m$ für positives reelles nicht-ganzzahliges $m$**

- Definitionsbereich: $R_0^+$
- Wertebereich: $R_0^+$
- Injektivität: injektiv
- Monotonie: streng monoton wachsend
- Periodizität: keine
- Positivität: überall $\geq 0$
- Nullstellen: $x = 0$
- Asymptoten: keine
- Unendlichkeitsstellen: keine




**Steckbrief der Funktionen $x \longrightarrow x^m$ für negatives reelles nicht-ganzzahliges $m$**

- Definitionsbereich: $R^+$
- Wertebereich: $R^+$
- Injektivität: injektiv
- Monotonie: streng monoton fallend
- Periodizität: keine
- Positivität: überall $> 0$
- Nullstellen: keine
- Asymptoten: keine
- Unendlichkeitsstellen: bei $x = 0$




•

## Potenzfunktionen mit rationalem Exponenten

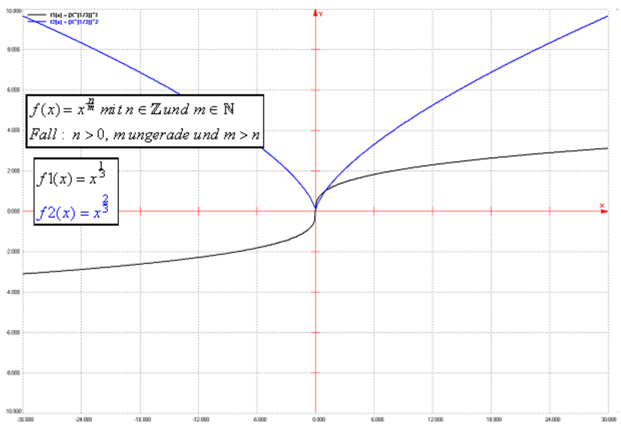
definiert als $x^{\frac{n}{m}} = \sqrt[m]{x^n}$

**Zusammenfassung**: Potenzfunktion mit rationalem Exponenten

$$f(x) = x^{\frac{n}{m}} \; mit\; n \in \mathbb{Z} \; und \; m \in \mathbb{N}$$

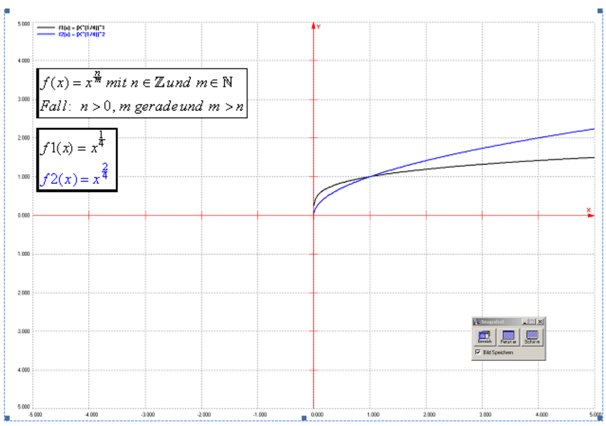
| **Eigenschaften** | $n > 0$ $m$ *ungerade* | $n > 0$ $m$ *gerade* | $n < 0$ $m$ *ungerade* | $n < 0$ $m$ *gerade* |
|---|---|---|---|---|
| **Definitionsbereich** | $\mathbb{R}$ | $[0, \infty)$ | $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ | $(0, \infty)$ |
| **Bildbereich** | n gerade: $\mathbb{R}_0^+$, n ungerade: $\mathbb{R}$, | $\mathbb{R}_0^+$ | n gerade: $\mathbb{R}^+$, n ungerade: $\mathbb{R} \setminus \{0\}$, | $\mathbb{R}^+$ |
| **Beschränktheit** | n gerade: untere Schranke 0 n ungerade: unbeschränkt | untere Schranke 0 | n gerade: untere Schranke 0 n ungerade: unbeschränkt | untere Schranke 0 |
| **Monotonie** | n gerade: für $x \geq 0$ streng monoton wachsend , für $x \leq 0$ streng monoton fallend n ungerade: streng monoton wachsend | streng monoton wachsend | n gerade: für $x \geq 0$ streng monoton fallend , für $x \leq 0$ streng monoton wachsend n ungerade: streng monoton fallend | streng monoton fallend |

### Beispiele für Potenzfunktionen mit rationalem Exponenten für m>n>0




siehe auch

http://www.realmath.de/Neues/Klasse10/potfkt2/ggbxhochnrat.html



### 5.5.4 Exponential- und Logarithmusfunktionen

**Definition 5.27: Exponentialfunktion**

Eine reelle Funktion $f(x) = a^x \; mit \; a > 0$ bezeichnet man als eine allgemeine **Exponentialfunktion zur Basis a** (Schreibweise auch $\exp_a(x)$).

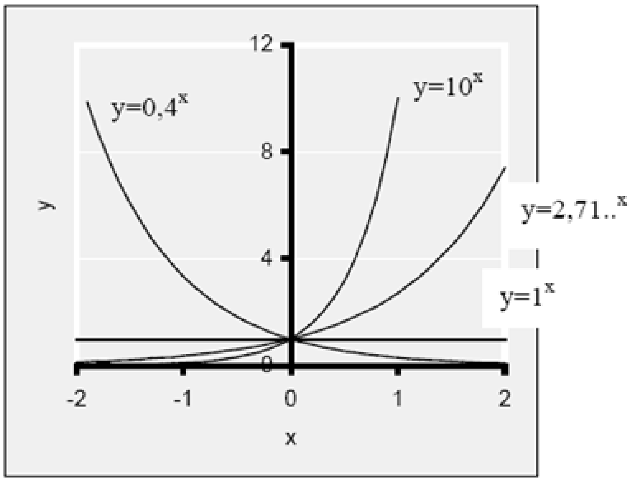
Ist die Basis die Zahl e, so wird diese spezielle Exponentialfunktion $f(x) = e^x$ auch **e-Funktion** genannt.

**Zusammenfassung**: Exponentialfunktion

| **Eigenschaften** | $f(x) = a^x \; mit \; 0 < a < 1$ | $f(x) = a^x \; mit \; a > 1$ |
|---|---|---|
| **Definitionsbereich** | $\mathbb{R}$ | $\mathbb{R}$ |
| **Bildbereich** | $(0, \infty)$ | $(0, \infty)$ |
| **Beschränktheit** | untere Schranke: 0 | untere Schranke: 0 |
| **Monotonie** | streng monoton fallend | streng monoton steigend |
| **Umkehrfunktion** | existiert | existiert |
| **Symmetrie** | - | - |
| **Periodizität** | - | - |
| **Asymptoten** | $y = 0 \, (f\ddot{u}r \; x \to \infty)$ | $y = 0 \, (f\ddot{u}r \; x \to -\infty)$ |
| **Nullstellen** | - | - |
| **Minimum/Maximum** | - | - |
| **Besonderheiten:** | fester Punkt: (0,1) | fester Punkt: (0,1) |

**Bemerkungen zur e-Funktion:**
(1) e-Funktion hat nur positive Werte
(2) ... keine Nullstelle
(3) ... keinen Extremwert
(4) ...

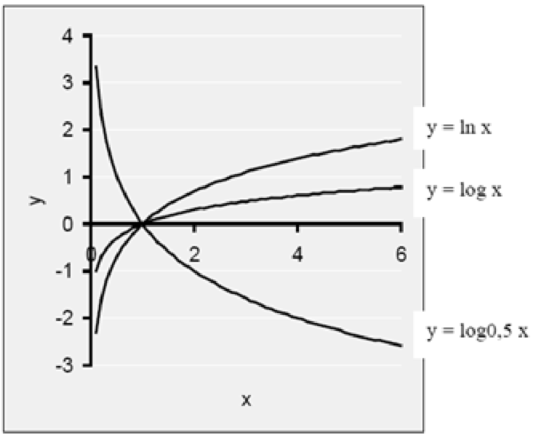
**Beispiele einiger Exponentialfunktionen**



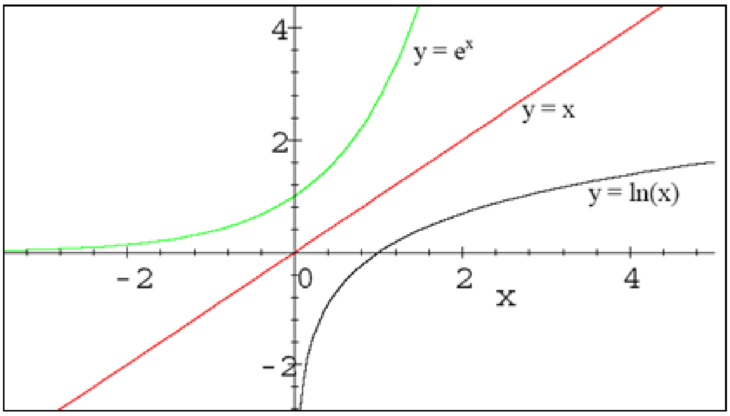
**Zusammenfassung**: Logarithmusfunktion

| **Eigenschaften** | $f(x) = \log_a x$ |
|---|---|
| **Definitionsbereich** | $\mathbb{R}^+$ |
| **Bildbereich** | $(-\infty, \infty)$ |
| **Beschränktheit** | - |
| **Monotonie** | streng monoton wachsend (a>1)<br>streng monoton fallend (0<a<1) |
| **Umkehrfunktion** | existiert |
| **Symmetrie** | - |
| **Periodizität** | - |
| **Asymptoten** | - |
| **Nullstellen** | x=1 |
| **Minimum/Maximum** | - |
| **Besonderheiten:** | fester Punkt: (1,0) |

**Beispiele einiger Logarithmusfunktionen**




•




**Exponentialfunktion $e^x$ mit Umkehrfunktion ln(x)**

**Satz 5.13: Rechenregeln für Logarithmusfunktionen**

Für alle reellen x>0, y>0 gilt:

$$\log_a(x \cdot y) = \log_a x + \log_a y$$

$$\log_a\left(\frac{x}{y}\right) = \log_a x - \log_a y$$

$$\log_a\left(\frac{1}{y}\right) = -\log_a y$$

$$\alpha \log_a x = \log_a x^\alpha, \quad \text{für alle } \alpha \in \mathbb{R}$$

**Satz 5.14: Umrechnung von Logarithmen**

Jede Logarithmusfunktion zur Basis a kann durch einen andere Logarithmusfunktion zur Basis b ausgedrückt werden, in dem mit einer Konstanten $\frac{1}{\log_b a}$ multipliziert wird:

$$\log_a x = \frac{\log_b x}{\log_b a} \quad \text{für alle } x > 0 \qquad \text{z.B. } \log_a x = \frac{\ln x}{\ln a} \quad \text{für alle } x > 0.$$

Beispiel: $2^6 \Rightarrow \log_2 64 = 6$

$8^2 \Rightarrow \log_8 64 = 2$

$\log_8 64 = \frac{\log_2 64}{\log_2 8} = \frac{6}{3} = 2$

**Zusammenfassung 1**: Trigonometrische Funktionen

| **Eigenschaften** | $f(x) = \sin x$ | $f(x) = \cos x$ |
|---|---|---|
| **Definitionsbereich** | $\mathbb{R}$ | $\mathbb{R}$ |
| **Bildbereich** | $[-1,1]$ | $[-1,1]$ |
| **Beschränktheit** | obere Schranke: 1<br>untere Schranke: -1 | obere Schranke: 1<br>untere Schranke: -1 |
| **Monotonie** | nur im Intervall | nur im Intervall |
| **Umkehrfunktion** | nur im Intervall | nur im Intervall |
| **Symmetrie** | ungerade | gerade |
| **Periodizität** | primitive Periode $2\pi$ | primitive Periode $2\pi$ |
| **Asymptoten** | - | - |
| **Nullstellen** | $x = k\pi, k \in \mathbb{Z}$ | $x = \frac{\pi}{2}(2k+1), k \in \mathbb{Z}$ |
| **Minimum/Maximum** | lokale Maxima:<br>$x = \frac{\pi}{2}(4k+1), k \in \mathbb{Z}$<br>lokale Minima:<br>$x = \frac{\pi}{2}(4k+3), k \in \mathbb{Z}$ | lokale Maxima:<br>$x = \pi 2k, k \in \mathbb{Z}$<br>lokale Minima:<br>$x = \pi(2k+1), k \in \mathbb{Z}$ |
| **Besonderheiten** | - | - |

**Zusammenfassung 2**: Trigonometrische Funktionen

| **Eigenschaften** | $f(x) = \tan x$ | $f(x) = \cot x$ |
|---|---|---|
| **Definitionsbereich** | $\mathbb{R} \setminus \{\frac{\pi}{2}(2k+1), k \in \mathbb{Z}\}$ | $\mathbb{R} \setminus \{k\pi, k \in \mathbb{Z}\}$ |
| **Bildbereich** | $\mathbb{R}$ | $\mathbb{R}$ |
| **Beschränktheit** | - | - |
| **Monotonie** | nur im Intervall | nur im Intervall |
| **Umkehrfunktion** | nur im Intervall | nur im Intervall |
| **Symmetrie** | ungerade | ungerade |
| **Periodizität** | primitive Periode $\pi$ | primitive Periode $\pi$ |
| **Asymptoten** | - | - |
| **Nullstellen** | $x = k\pi, k \in \mathbb{Z}$ | $x = \frac{\pi}{2}(2k+1), k \in \mathbb{Z}$ |
| **Pole** | $x = (2k+1)\frac{\pi}{2}, k \in \mathbb{Z}$ | $x = k\pi, k \in \mathbb{Z}$ |
| **Minimum/Maximum** | - | - |
| **Besonderheiten** | - | - |

**Bemerkungen zu den trigonometrischen Funktionen:**

(1) sin(x)/cos(x) haben nur Werte zwischen -1 und 1

(2) ... sind $2\pi$-periodisch

(3) ... haben pro Periode ein Minimum und ein Maximum

(4)

### 3.5.5 Trigonometrische Funktionen

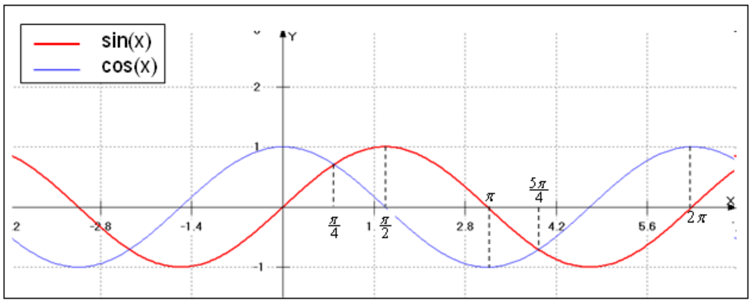



**Abbildung 1 Trigonometrische Funktionen Sinus und Cosinus**

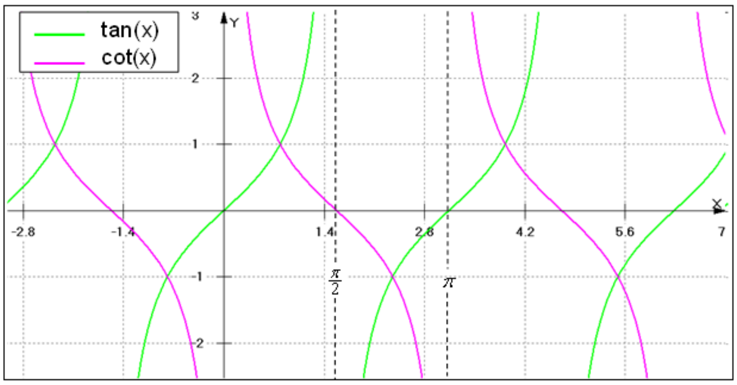



**Abbildung 2 Trigonometrische Funktionen Tangens und Cotangens**

## Werte für spezielle Winkel:

| $\alpha$ | $\sin\alpha$ | $\cos\alpha$ | $\tan\alpha$ | $\cot\alpha$ |
|---|---|---|---|---|
| 0° | 0 | 1 | 0 | $\pm\infty$ |
| 30° | $\frac{1}{2}$ | $\frac{1}{2}\sqrt{3}$ | $\frac{1}{3}\sqrt{3}$ | $\sqrt{3}$ |
| 45° | $\frac{1}{2}\sqrt{2}$ | $\frac{1}{2}\sqrt{2}$ | 1 | 1 |
| 60° | $\frac{1}{2}\sqrt{3}$ | $\frac{1}{2}$ | $\sqrt{3}$ | $\frac{1}{3}\sqrt{3}$ |
| 90° | 1 | 0 | $\pm\infty$ | 0 |
| 180° | 0 | $-1$ | 0 | $\pm\infty$ |
| 270° | $-1$ | 0 | $\pm\infty$ | 0 |

**Satz 5.15: Beziehungen zwischen den trigonometrischen Funktionen**

Die nachfolgend dargestellten Beziehungen stellen nur eine Auswahl dar.

(1) $\tan x = \dfrac{\sin x}{\cos x}, \quad \cot x = \dfrac{\cos x}{\sin x} = \dfrac{1}{\tan x}$

(2) Verschiebung sin gegenüber cos

$$\cos x = \sin(x + \tfrac{\pi}{2}), \quad \sin x = \cos(x - \tfrac{\pi}{2})$$

(3) Trigonometrischer Pythagoras

$$\sin^2 x + \cos^2 x = 1$$

(4) Umrechnung der Winkelfunktionen untereinander

$$\sin x = \sqrt{1-\cos^2 x}, \quad \cos x = \sqrt{1-\sin^2 x}$$

$$\tan x = \frac{\sin x}{\sqrt{1-\sin^2 x}} = \frac{\sqrt{1-\cos^2 x}}{\cos x}$$

(5) Additionstheoreme

$$\sin(x_1 \pm x_2) = \sin x_1 \cos x_2 \pm \cos x_1 \sin x_2$$
$$\cos(x_1 \pm x_2) = \cos x_1 \cos x_2 \mp \sin x_1 \sin x_2$$
$$\tan(x_1 \pm x_2) = \frac{\tan x_1 \pm \tan x_2}{1 \mp \tan x_1 \tan x_2}$$
$$\cot(x_1 \pm x_2) = \frac{\cot x_1 \cot x_2 \mp 1}{\cot x_2 \pm \cot x_1}$$

(6) $\sin x_1 + \sin x_2 = 2\sin\dfrac{x_1+x_2}{2}\cos\dfrac{x_1-x_2}{2}$

$$\cos x_1 + \cos x_2 = 2\cos\frac{x_1+x_2}{2}\cos\frac{x_1-x_2}{2}$$

### 5.5.6 Zyklometrische Funktionen

Die Umkehrfunktionen der trigonometrischen Funktionen werden zyklometrische Funktionen genannt.

Zur Bildung der Umkehrfunktionen muss der Definitionsbereich der trigonometrischen Funktionen eingeschränkt werden:

$$\sin : \left[-\tfrac{\pi}{2}, \tfrac{\pi}{2}\right] \to [-1,1]$$

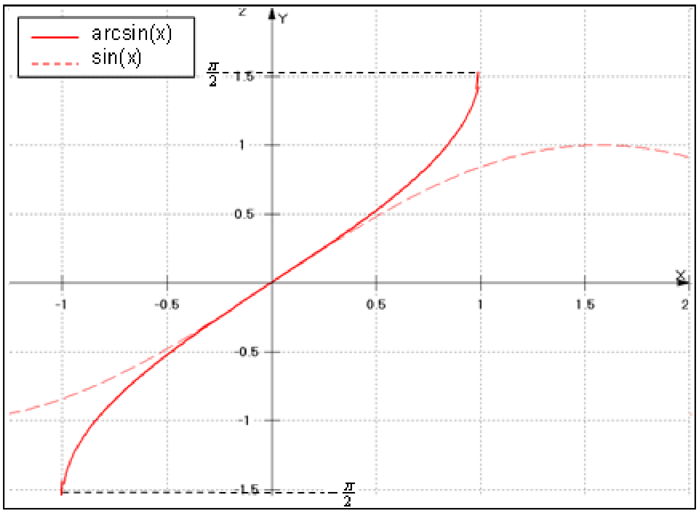
$$\arcsin y := \sin^{-1} y = \{x \mid \sin x = y\} \cap \left[-\tfrac{\pi}{2}, \tfrac{\pi}{2}\right]$$

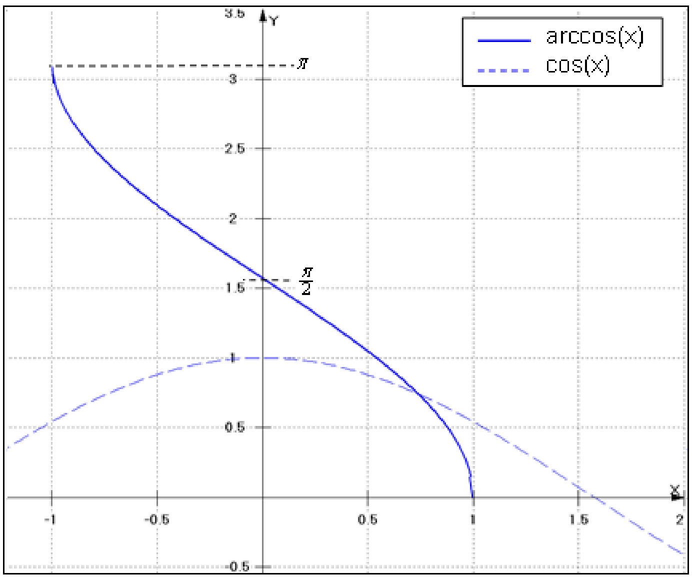
$$\arcsin : [-1,1] \to \left[-\tfrac{\pi}{2}, \tfrac{\pi}{2}\right]$$

$$\cos : [0,\pi] \to [-1,1]$$

$$\arccos y := \cos^{-1} y = \{x \mid \cos x = y\} \cap [0,\pi]$$

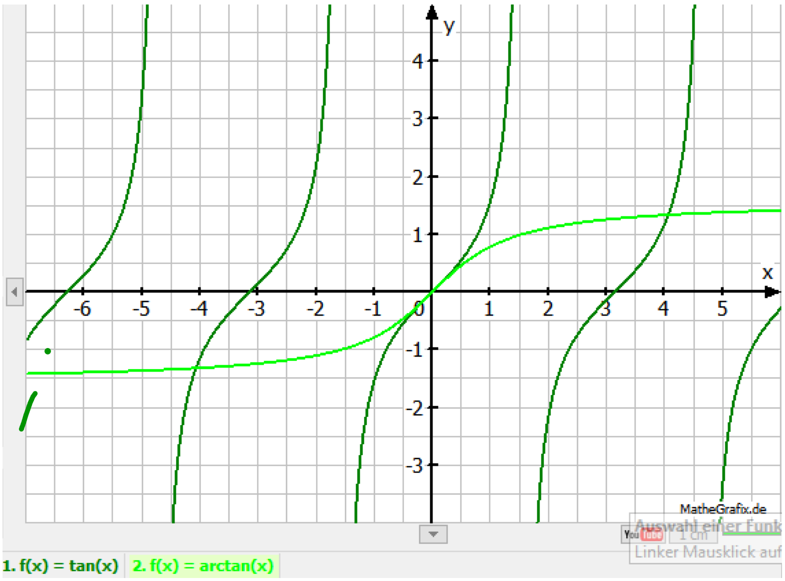
$$\arccos : [-1,1] \to [0,\pi]$$



$f(x) = \tan x$

- $D = \mathbb{R} \setminus \{(2n+1)\frac{\pi}{2}, n \in \mathbb{Z}\}$
- $W = \mathbb{R}$
- umkehrbar für $D = (-\frac{\pi}{2}, +\frac{\pi}{2})$



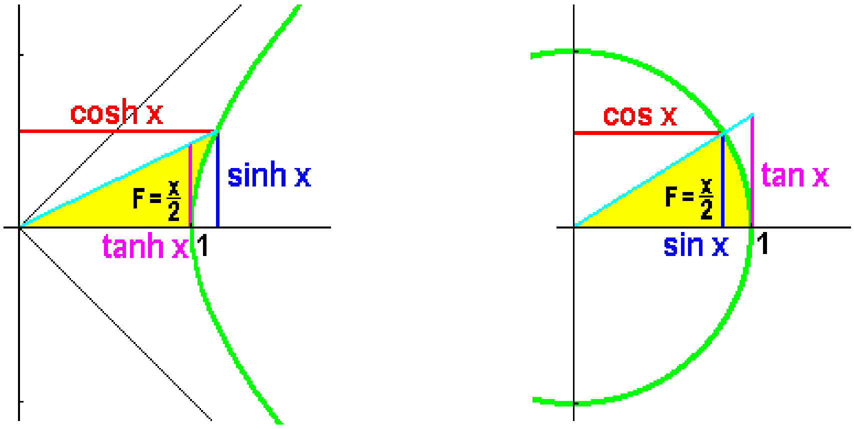

Umkehrfunktion

$f^{-1}(x) = \arctan(x)$

- $D = \mathbb{R}$
- $W = (-\frac{\pi}{2}, +\frac{\pi}{2})$

### 5.5.7 Hyperbel-und Areafunktionen

Hyperbelfunktionen verhalten sich zur Hyperbel analog wie sich die trigonometrischen Funktionen im Einheitskreis verhalten.




Einheitshyperbel: $x^2 - y^2 = 1$ Einheitskreis: $x^2 + y^2 = 1$

•

**Definition 5.29:** Hyperbelfunktionen

Hyperbelfunktionen sind wie folgt definiert:

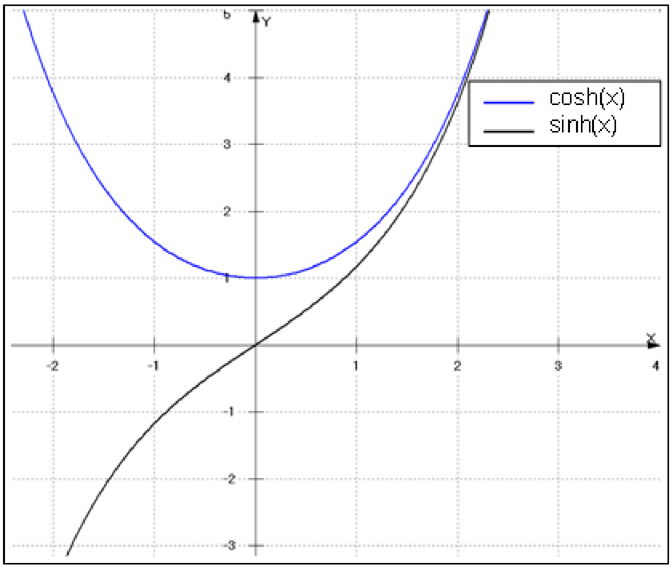
Sinus hyperbolicus $\sinh x = \frac{1}{2}\left(e^{x} - e^{-x}\right)$ *mit* $D = \mathbb{R}$, $B = (-\infty, \infty)$

Cosinus hyperbolicus $\cosh x = \frac{1}{2}\left(e^{x} + e^{-x}\right)$ *mit* $D = \mathbb{R}$, $B = [1, \infty)$

Tangens hyperbolicus $\tanh x = \dfrac{\sinh x}{\cosh x} = \dfrac{e^{x} - e^{-x}}{e^{x} + e^{-x}}$ *mit* $D = \mathbb{R}$, $B = (-1, 1)$

Cotangens hyperbolicus

$$\coth x = \frac{\cosh x}{\sinh x} = \frac{e^{x} + e^{-x}}{e^{x} - e^{-x}} \quad mit\ D = \mathbb{R} \setminus \{0\},\ B = (-\infty, -1) \cup (1, \infty)$$




cosh(x) = "Kettenlinie" z.B. "Leitung zwischen den Strommasten"

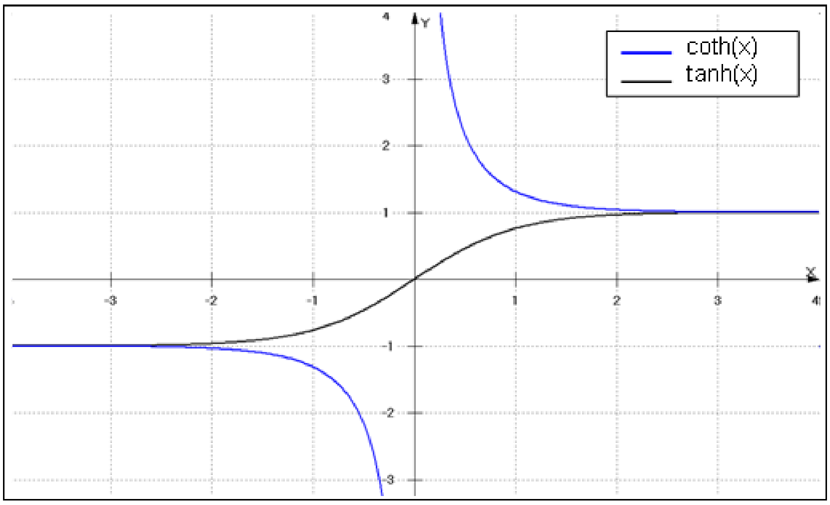



**Abbildung 4 Hyperbelfunktionen**

| | Sinus Hyperbolicus | Kosinus Hyperbolicus |
|---|---|---|
| Definitionsbereich | $-\infty < x < +\infty$ | $-\infty < x < +\infty$ |
| Wertebereich | $-\infty < f(x) < +\infty$ | $1 \leq f(x) < +\infty$ |
| Periodizität | keine | keine |
| Monotonie | streng monoton steigend | $-\infty < x \leq 0$ streng monoton fallend<br>$0 \leq x < \infty$ streng monoton steigend |
| Symmetrien | Punktsymmetrie zum Ursprung | Achsensymmetrie zur Ordinate |
| Asymptotische Funktionen | $a_1(x) = \frac{1}{2}e^{\,x}, \quad x \to \infty$ | $a_1(x) = \frac{1}{2}e^{\,x}, \quad x \to \infty$ |
| | $a_2(x) = -\frac{1}{2}e^{\,-x}, \quad x \to -\infty$ | $a_2(x) = \frac{1}{2}e^{\,-x}, \quad x \to -\infty$ |
| Nullstellen | $x = 0$ | keine |
| Sprungstellen | keine | keine |
| Polstellen | keine | keine |
| Extrema | keine | Minimum bei $x = 0$ |
| Wendestellen | $x = 0$ | keine |

aus Wikipedia

## Satz 5.17: Beziehungen zwischen den Hyperbelfunktionen

$$\sinh x + \cosh x = e^x$$

$$\cosh^2 x - \sinh^2 x = 1$$

$$\sinh(-x) = -\sinh x$$

$$\cosh(-x) = \cosh x$$

$$\cosh(x+y) = \cosh x \cosh y + \sinh x \sinh y$$

$$\sinh(x+y) = \cosh x \sinh y + \sinh x \cosh y$$

## Definition 5.30: Areafunktionen

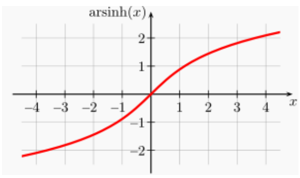
Die Umkehrfunktionen der Hyperbelfunktionen werden Areafunktionen genannt und sind wie folgt definiert:

$$ar\sinh x := \ln(x + \sqrt{x^2+1}), \quad x \in \mathbb{R}$$

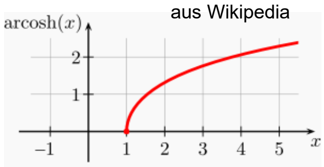
$$ar\cosh x := \pm\ln(x + \sqrt{x^2-1}), \quad x \geq 1$$

$$ar\tanh x := \tfrac{1}{2}\ln\frac{1+x}{1-x}, \quad |x| < 1$$

$$ar\coth x := \tfrac{1}{2}\ln\frac{x+1}{x-1}, \quad |x| > 1$$




aus Wikipedia



## Koordinatensysteme - Funktionen

- **Darstellung in Polarkoordinaten**
- **Parameterdarstellung**

.

# Funktionen

## • Darstellung in Polarkoordinaten

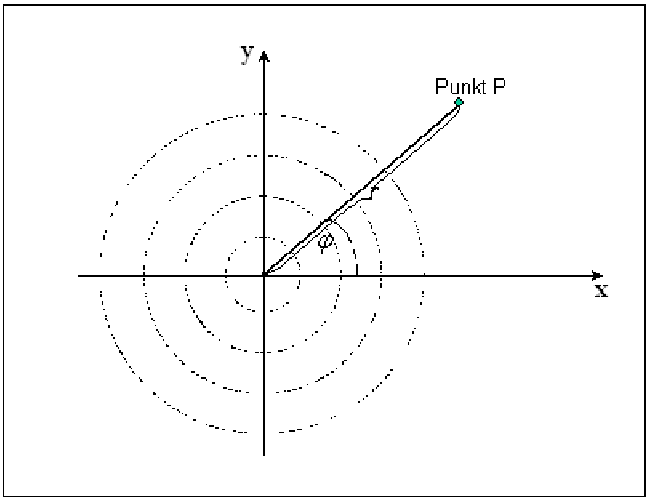
### 5.3.3 Übergang Kartesische Koordinaten - Polarkoordinaten

**Definition 5.11: Polarkoordinaten**

Die Polarkoordinaten $(r,\varphi)$ eines Punktes P der Ebene bestehen aus einer **Abstandskoordinate** $r$ und einer **Winkelkoordinate** $\varphi$.

$r$ ist der Abstand des Punktes P vom Koordinatenursprung.

$\varphi$ ist der Winkel zwischen dem vom Koordinatenursprung zum Punkt P gerichteten Radiusvektor und der positiven x-Achse.




- Die Transformationsgleichungen zum Übergang von kartesischen Koordinaten auf Polarkoordinaten und umgekehrt sind nachfolgend dargestellt:

  Kartesische Koordinaten $\rightarrow$ Polarkoordinaten

  $$r = \sqrt{x^2 + y^2} \quad und \quad \tan\varphi = \frac{y}{x} \quad (+\pi \text{ im } 2./3. \text{Quadranten})$$

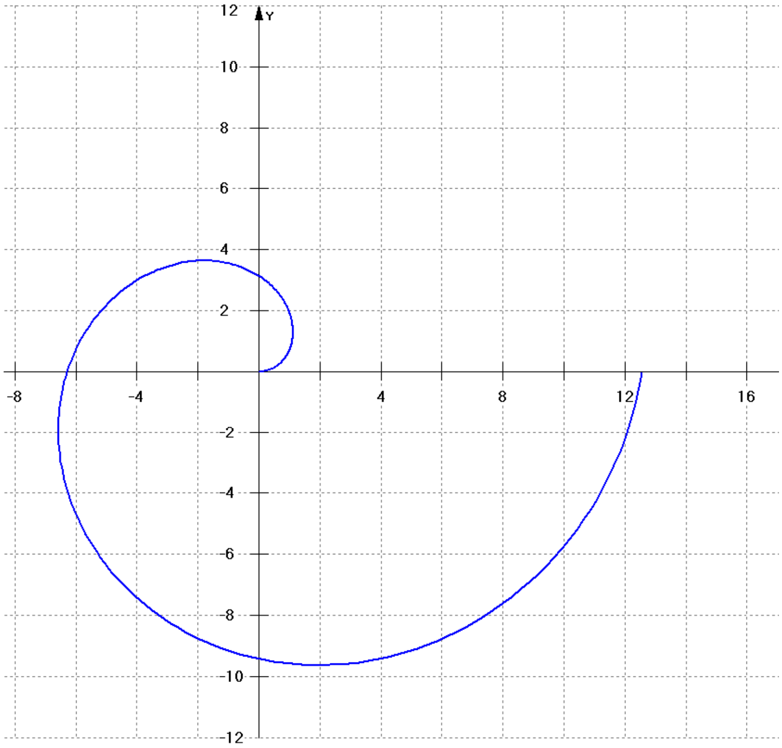
  Polarkoordinaten $\rightarrow$ kartesische Koordinaten

  $$x = r \cdot \cos\varphi \quad und \quad y = r \cdot \sin\varphi$$

# Funktionen

- **Darstellung in Polarkoordinaten**

- **Beispiel:**
  $r(\varphi) = 2\varphi$ mit $0 \le \varphi < 2\pi$



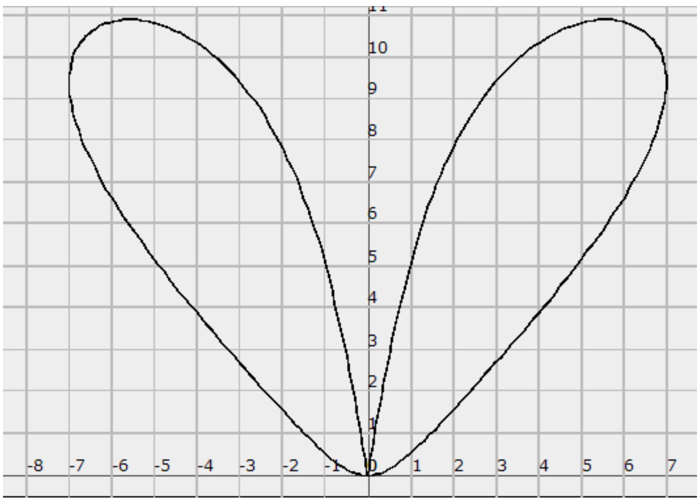

.

## Funktionen: Parameterdarstellung

- Eine Kurve wird durch 2 Gleichungen beschrieben.
- Die x-Koordinate und die y-Koordinate werden getrennt voneinander in Abhängigkeit einer Hilfsvariablen (dem sogenannten Parameter) beschrieben.
- Häufig ist der verwendete Parameter die Variable t, als Symbol für die Zeit.
- y(t) und x(t) sind die abhängigen Variablen und werden im kartesischen x-y-Koordinatensystem skizziert.
- t ist die unabhängige Variable und wird in der Regel nicht skizziert, sondern zum Teil nur an einzelnen Punkten benannt.
- Jede Funktion f(x) kann auch in einer Parameterdarstellung angegeben werden mit x(t) = t und y(t) = f(t).
Die Umkehrung gilt nicht!

**Beispiel:**

$x(t)=6*\sin(t)-\sin(3*t)$
$y(t)=6*t*\sin(t)$
mit $-\pi<t<\pi$

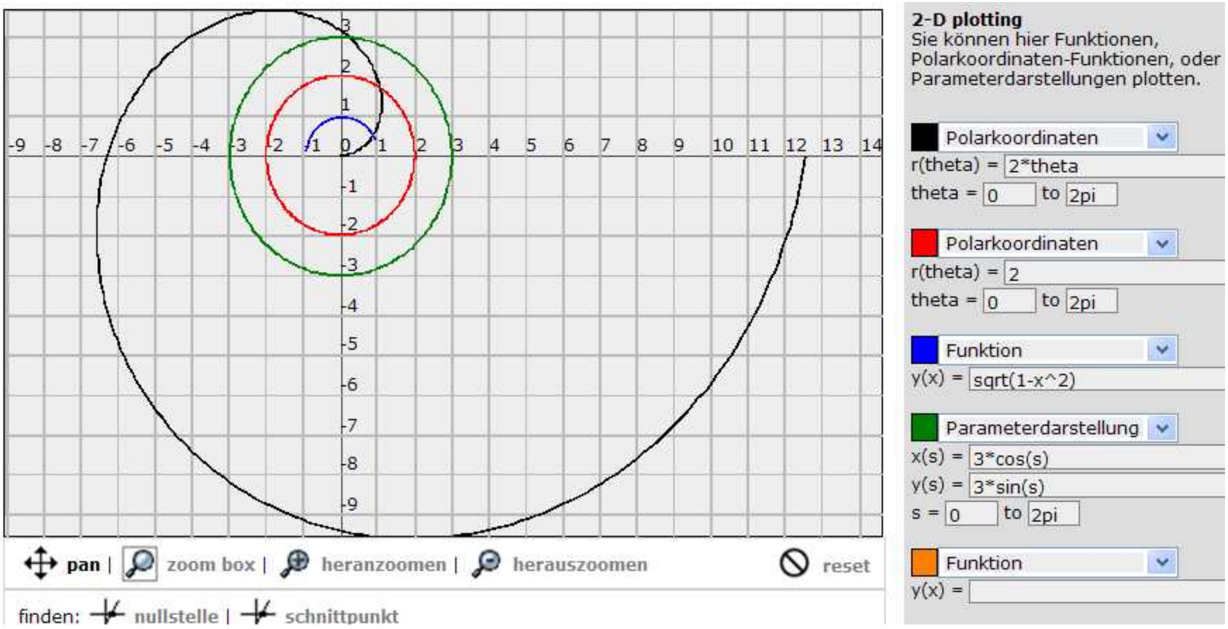



http://fooplot.com/

Wie wird die Kurve mit dem Parameter $-\pi<t<\pi$ durchlaufen?

-

## Zweidimensionale Kurven in anderen Darstellungen




http://fooplot.com/

### Beispiele:

Funktion in Polarkoordinaten $r(\varphi) = 2\varphi$ mit $0 \leq \varphi < 2\pi$

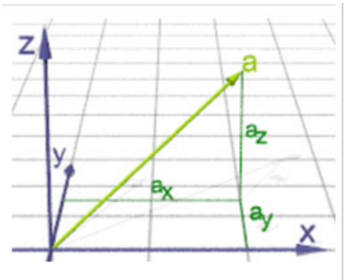
Funktion in Polarkoordinaten $r(\varphi) = 2$ mit $0 \leq \varphi < 2\pi$

Funktion in kartesischen Koordinaten $f(x) = \sqrt{1-x^2}$ mit $-1 \leq x < \leq 1$

Kurve in Parameterdarstellung $x(t) = 3\cos(t)$, $y(t) = 3\sin(t)$ mit $0 \leq t < 2\pi$

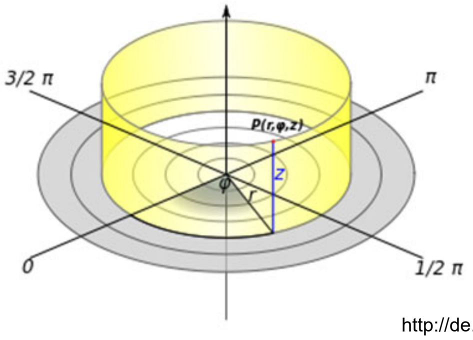
## Ergänzung: Koordinaten im Raum in verschiedenen Darstellungen

**- räumliche kartesische Koordinaten (x,y,z)**



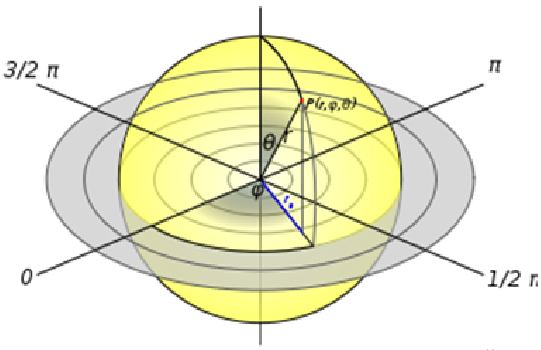

http://www.mathepedia.de/Raum.aspx

**- Zylinderkoordinaten (r, ϕ, z)**
Polarkoordinaten in der Ebene,
ergänzt um die Höhenangabe in kartesischen Koordinaten




http://de.wikipedia.org/wiki/Polarkoordinaten

**- Kugelkoordinaten (r, ϕ, θ)**
Polarkoordinaten in der Ebene,
ergänzt um eine weitere Winkelangabe θ für die Höhe



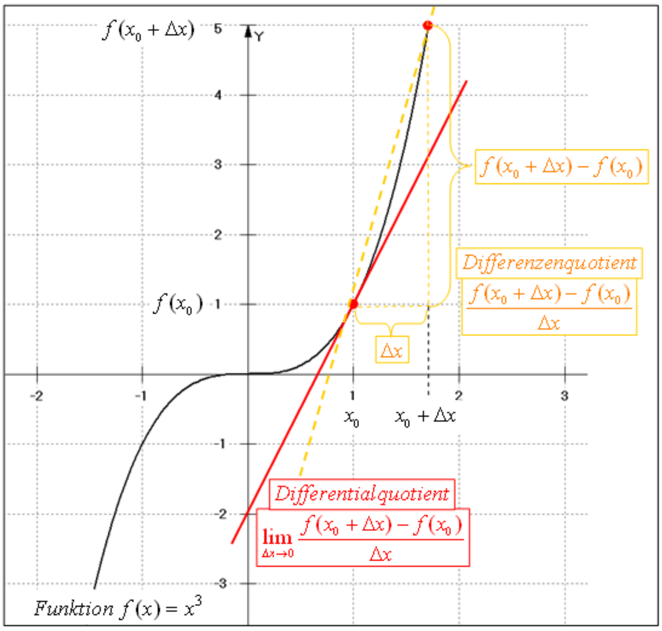

http://de.wikipedia.org/wiki/Polarkoordinaten

# Differentialrechnung

.

## Rückblick: Differenzenquotient - Differentialquotient

**Veranschaulichung:**
**Differenzenquotient und Differentialquotient** im Punkt $x_0$ der Funktion $f$




### Differenzenquotient:

$$\frac{\Delta f}{\Delta x}(x_0) = \frac{f(x_0+\Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}$$

Steigung der Sekanten durch die Punkte $(x_0,f(x_0))$ und $(x_0+\Delta x, f(x_0+\Delta x))$

### Differentialquotient :

Differentialquotient im Punkt $x_0$

$$f'(x_0) = \frac{df}{dx}(x_0) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0+\Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}$$

Steigung der Tangenten im Punkt $(x_0,f(x_0))$

Differentialquotient für x

$$f'(x) = \frac{df}{dx}(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x}$$

1.Ableitung der Funktion f(x) = Funktion der Steigungen der Funktion f(x)

## Differenzierbarkeit

**Definition 6.1:** differenzierbar, Ableitung, Differentialquotient

Die Funktion $f(x)$ heißt **an der Stelle** $x_0$ **differenzierbar**, wenn der folgende Grenzwert existiert

$$\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}\,.$$

Differenzierbarkeit einer Funktion $f(x)$ an der Stelle $x_0$

$\Leftrightarrow$ Differentialquotient $\frac{df}{dx}(x_0)$ existiert

$\Leftrightarrow$ Grenzwert $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}$ existiert

$\Leftrightarrow$ Grenzwert des Differentialquotient von rechts an $x_0$

$$\boxed{g_r=\lim_{\Delta x\to 0^+}\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}}$$

und Grenzwert des Diff.-quotienten von links an $x_0$

$$\boxed{g_l=\lim_{\Delta x\to 0^-}\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}}$$

müssen gleich sein

$\Leftrightarrow$ Steigungen von rechts an $x_0$ $(g_r)$

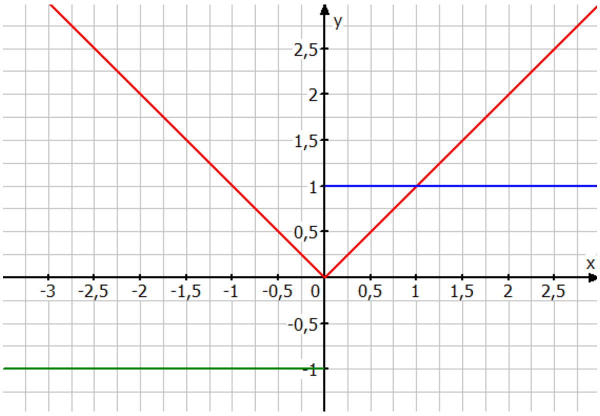
und Steigungen von links an $x_0$ $(g_l)$

sind identisch

## Linksseitiger und rechtsseitiger Grenzwert für die Grenzwertberechnung des Differentialquotienten

**Beispiel:**

**Differenzierbarkeit der Betragsfunktion**




**Betragsfunktion $f(x) = |x|$**

**(1) ...im Punkt $x_0=1$**

**(2) ...im Punkt $x_0=0$**

•

**Aufgabe:** Differenzierbarkeit

Gegeben ist die Funktion $f(x) = |x^2 - 1|$

Ist die Funktion f(x) im Punkt x = 1 differenzierbar?

## Grundlegende Ableitungsfunktionen

## Ableitungsregeln

**Zusammenfassung**: Ableitungen elementarer Funktionen

| | Funktion $f(x)$ | 1. Ableitung $f'(x)$ |
|---|---|---|
| Konstante Funktion | c | 0 |
| Potenzfunktion | $x^n,\ n \in \mathbb{N},\ x > 0$<br>$x^a,\ a \in \mathbb{R},\ x > 0$ | $n \cdot x^{n-1},\ n \in \mathbb{N}$<br>$a \cdot x^{a-1},\ a \in \mathbb{R},\ x \in D$ |
| Sonderfall Wurzelfunktion | $\sqrt{x} = x^{\frac{1}{2}},\ x > 0$ | $\frac{1}{2\sqrt{x}} = \frac{1}{2} x^{-\frac{1}{2}},\ x \in D$ |
| Trigonometrische Funktionen | $\sin x,\ x \in \mathbb{R}$<br>$\cos x,\ x \in \mathbb{R}$<br>$\tan x,\ x \neq (2k+1)\frac{\pi}{2}$<br>$\cot x,\ x \neq k\frac{\pi}{2}$ | $\cos x,\ x \in \mathbb{R}$<br>$-\sin x,\ x \in \mathbb{R}$<br>$\frac{1}{\cos^2 x},\ x \neq (2k+1)\frac{\pi}{2}$<br>$-\frac{1}{\sin^2 x},\ x \neq k\frac{\pi}{2}$ |
| Zyklometrische Funktionen | $\arcsin x,\ x \in (-1,1)$<br>$\arccos x,\ x \in (-1,1)$<br>$\arctan x,\ x \in \mathbb{R}$<br>$arc\cot x,\ x \in \mathbb{R}$ | $\frac{1}{\sqrt{1-x^2}},\ x \in (-1,1)$<br>$-\frac{1}{\sqrt{1-x^2}},\ x \in (-1,1)$<br>$\frac{1}{1+x^2},\ x \in \mathbb{R}$<br>$-\frac{1}{1+x^2},\ x \in \mathbb{R}$ |
| Exponentialfunktionen | $e^x$<br>$a^x$ | $e^x$<br>$\ln a \cdot a^x$ |
| Logarithmusfunktionen | $\ln x,\ x > 0$<br>$\log_a x,\ x > 0$ | $\frac{1}{x},\ x > 0$<br>$\frac{1}{\ln a \cdot x},\ x > 0$ |

## 6.2 Differentiationsregeln Zusammenfassung

**Satz 6.1: Faktorregel**

Ein konstanter Faktor bleibt beim Differenzieren erhalten:

$$y = c \cdot f(x) \;\Rightarrow\; y' = c \cdot f'(x)$$

**Satz 6.2: Summenregel**

Eine Summe von Funktionen darf gliedweise differenziert werden:

$$y = f(x) + g(x) \;\Rightarrow\; y' = f'(x) + g'(x)$$

**Satz 6.3: Produktregel**

Die Ableitung einer Funktion, die aus einem Produkt von Teilfunktionen besteht, wird mit folgendem Ausdruck berechnet:

$$y = f(x) \cdot g(x) \;\Rightarrow\; y' = f'(x) \cdot g(x) + f(x) \cdot g'(x)$$

**Satz 6.4: Quotientenregel**

Die Ableitung einer Funktion, die aus einem Quotienten von Teilfunktionen besteht, wird mit folgendem Ausdruck berechnet:

$$y = \frac{f(x)}{g(x)} \;\Rightarrow\; y' = \frac{f'(x) \cdot g(x) - f(x) \cdot g'(x)}{g^2(x)}$$

Sonderfall: **Reziprokregel**

$$y = \frac{1}{g(x)} \;\Rightarrow\; y' = \frac{-g'(x)}{g^2(x)}$$

**Satz 6.5: Kettenregel**

Die Ableitung einer zusammengesetzten (verketteten) Funktion erhält man als Produkt aus äußerer und innerer Ableitung:

$$y = f(g(x)) \;\Rightarrow\; y' = f'(g(x)) \cdot g'(x)$$

Substitution $u = g(x)$: $y = f(u) \;\Rightarrow\; y' = \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dx}$

---

**Satz 6.6: Ableitung der Umkehrfunktion**

Sei $y = f(x)$ umkehrbar und $x = f^{-1}(y)$ die nach x aufgelöste Funktion, dann gilt für die Ableitungen:

$$\left[f^{-1}(y)\right]' = \frac{1}{f'(x)} \quad mit \;\; f'(x) \neq 0$$

$$\Rightarrow f'(x) = \frac{1}{\left[f^{-1}(y)\right]'}$$

jetzt

**Satz 6.7: Logarithmische Differentiation**

Die Ableitung einer Funktion $y = f(x) = [u(x)]^{v(x)}$ kann berechnet werden mit:

$$\left[\ln f(x)\right]' = \frac{f'(x)}{f(x)} \quad mit \;\; f(x) \neq 0$$

$$\Rightarrow f'(x) = \left[\ln(f(x))\right]' f(x)$$

**Satz 4.2: Summenregel**

Eine Summe von Funktionen darf gliedweise differenziert werden:

$$y = f(x) + g(x) \Rightarrow y' = f'(x) + g'(x)$$

**Beispiel:** $y = x^2 + \sin x \Rightarrow y' = 2x + \cos x$

## Herleitung der Summenregel mit Hilfe des Differentialquotienten:

$$f(x) = h(x) + g(x)$$

! andere Bezeichnung der Teilfunktionen

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x}$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{(h(x+\Delta x) + g(x+\Delta x)) - (h(x) + g(x))}{\Delta x}$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \left( \frac{h(x+\Delta x) - h(x)}{\Delta x} + \frac{g(x+\Delta x) - g(x)}{\Delta x} \right)$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{h(x+\Delta x) - h(x)}{\Delta x} + \lim_{\Delta x \to 0} \frac{g(x+\Delta x) - g(x)}{\Delta x}$$

$$\boxed{f'(x) = h'(x) + g'(x)}$$ **Summenregel**

**Satz 4.3: Produktregel**

Die Ableitung einer Funktion, die aus einem Produkt von Teilfunktionen besteht, wird mit folgendem Ausdruck berechnet:

$$y = f(x)\cdot g(x) \Rightarrow y' = f'(x)\cdot g(x) + f(x)\cdot g'(x)$$

**Beispiel:** $y = x^2 \cdot \sin x \Rightarrow y' = 2x\cdot\sin x + x^2\cdot\cos x$

## Herleitung mit Hilfe des Differentialquotienten:

$$f(x) = h(x)\, g(x)$$

$$(h\cdot g)' \overset{\text{zu zeigen}}{=} h'\cdot g + h\cdot g'$$

! andere Bezeichnung der Teilfunktionen

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x}$$

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{h(x+\Delta x)\, g(x+\Delta x) - h(x)\, g(x)}{\Delta x}$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{h(x+\Delta x)\, g(x+\Delta x) - h(x)\cdot g(x+\Delta x) + h(x)\cdot g(x+\Delta x) - h(x)\, g(x)}{\Delta x}$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{h(x+\Delta x)\, g(x+\Delta x) - h(x)\, g(x+\Delta x)}{\Delta x} + \frac{h(x)\, g(x+\Delta x) - h(x)\, g(x)}{\Delta x}$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\underline{g(x+\Delta x)}\,(\underline{h(x+\Delta x) - h(x)})}{\Delta x} + \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\underline{h(x)}\,(\underline{g(x+\Delta x) - g(x)})}{\Delta x}$$

$$\boxed{f'(x) = g(x)\cdot h'(x) + h(x)\cdot g'(x)}$$

**Produktregel**

**Satz 4.4: Quotientenregel**

Die Ableitung einer Funktion, die aus einem Quotienten von Teilfunktionen besteht, wird mit folgendem Ausdruck berechnet:

$$y = \frac{f(x)}{g(x)} \Rightarrow y' = \frac{f'(x) \cdot g(x) - f(x) \cdot g'(x)}{g^2(x)}$$

Sonderfall: **Reziprokregel**

$$y = \frac{1}{g(x)} \Rightarrow y' = \frac{-g'(x)}{g^2(x)}$$

**Beispiel:** $y = \frac{x^2}{\sin x} \Rightarrow y' = \frac{2x \cdot \sin x - x^2 \cdot \cos x}{(\sin x)^2} \left( = \frac{x(2 - x \cdot \cot x)}{\sin x} \right)$

## Herleitung mit Hilfe der Produktregel:

$$y = \frac{f(x)}{g(x)}$$

$\boxed{\text{Gesucht ist } y'}$

**Satz 4.5: Kettenregel**

Die Ableitung einer zusammengesetzten (verketteten) Funktion erhält man als Produkt aus äußerer und innerer Ableitung:

$$\boxed{y = f(g(x)) \Rightarrow y' = f'(g(x)) \cdot g'(x)}$$

Substitution $u = g(x)$: $y = f(u) \Rightarrow y' = \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dx}$

**Beispiel:** $y = \sin(x^2) \Rightarrow y' = \cos(x^2) \cdot 2x$

## allgemeine Herleitung - Kettenregel

## Beispiel:

$f(x) = \sin\left(\frac{1}{x}\right)$

**Satz 4.6: Ableitung der Umkehrfunktion**

Sei $y = f(x)$ umkehrbar und $x = f^{-1}(y)$ die nach x aufgelöste Funktion, dann gilt für die Ableitungen:

$$\left[f^{-1}(y)\right]' = \frac{1}{f'(x)} \quad mit \;\; f'(x) \neq 0$$

$$\Rightarrow \boxed{f'(x) = \frac{1}{\left[f^{-1}(y)\right]'}}$$

---

*Herleitung der Methode "Ableitung über die Umkehrfunktion"*

$$(x)' = \left(f^{-1}(f(x))\right)' \quad mit \; y = f(x) \text{ mit Umkehrfunktion } \mathrm{f}^{-1}(\mathrm{x})$$

$$1 = \left(f^{-1}(f(x))\right)'$$

$$1 = \left(f^{-1}(\mathrm{y})\right)' f'(x)$$

$$f'(x) = \frac{1}{\left[f^{-1}(y)\right]'}$$

---

Beispiel

$y = f(x) = \ln x$

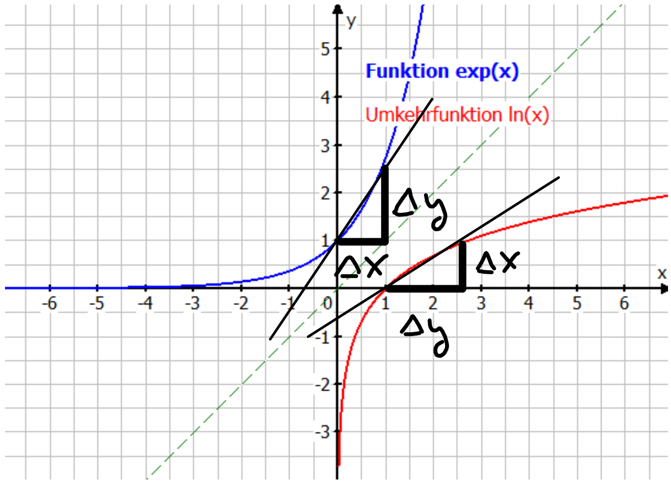
## Warum gilt die Formel für die Ableitung über die Umkehrfunktion?

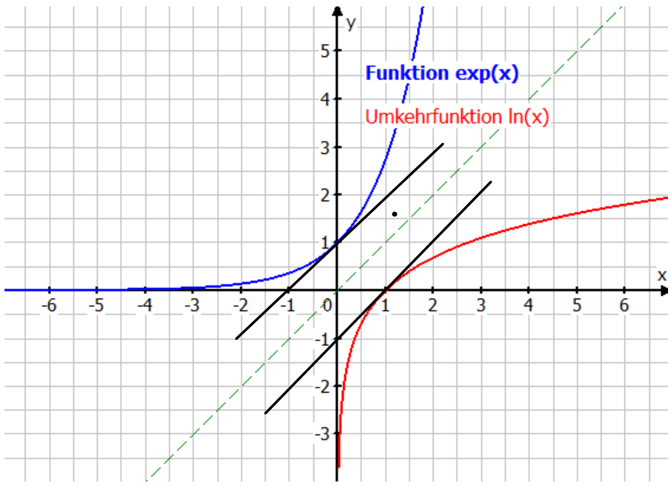
**Satz 4.6: Ableitung der Umkehrfunktion**

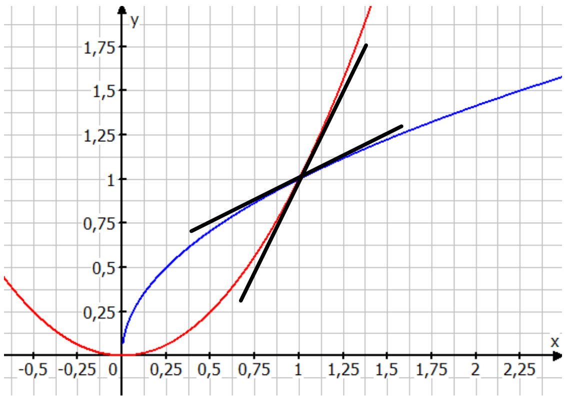
Sei $y = f(x)$ umkehrbar und $x = f^{-1}(y)$ die nach x aufgelöste Funktion, dann gilt für die Ableitungen:

$$\left[f^{-1}(y)\right]' = \frac{1}{f'(x)} \quad mit \;\; f'(x) \neq 0$$

## Veranschaulichung



**Satz 4.7: Logarithmische Differentiation**

Die Ableitung einer Funktion $y = f(x) = [u(x)]^{v(x)}$ kann berechnet werden mit:

$$[\ln f(x)]' = \frac{f'(x)}{f(x)} \quad mit \quad f(x) \neq 0$$

**Warum sieht die Formel so aus?**

---

Beispiel 1: $y = f(x) = e^x$

---

Beispiel 2: $y = f(x) = x^{\sin x}$

## Aufgabe:

a) Gegeben ist die Funktion $f(x) = (\sin x)^{\cos x}$.

Bestimmen Sie die Funktion der 1. Ableitung.

Hinweis: Logarithmisches Differenzieren

b) Aufgabe: Ableiten über die Umkehrfunktion

Gesucht $f'(x)$ für $f(x) = \arccos(x)\ (= y)$

Hinweis: Bekannt $g'(x)$ für $\underbrace{g(x)}_{\hat{=}\, f^{-1}} = \cos(x)$ : $g'(x) = -\sin x$

$\hat{=}\, f^{-1}$ der Umkehrfunktion von $f(x)$

## Ableitungen und ihre Aussagen

## Extremwertbestimmung

**Definition 6.3: Ableitungen höherer Ordnung**

Für die differenzierbare Funktion $f(x)$ bezeichne $f^{(0)}(x) := f(x)$ die Funktion selbst und $f^{(1)}(x) := f'(x)$ die erste Ableitung.

Für $n > 1$ ist $f^{(n)}(x)$ die Ableitung der Funktion $f^{(n-1)}(x)$. Die Funktion $f^{(n)}(x)$ ist die **n-te Ableitung** (oder Ableitung n-ter Ordnung) **der Funktion f**, d.h. $f^{(0)}(x) := f(x)$

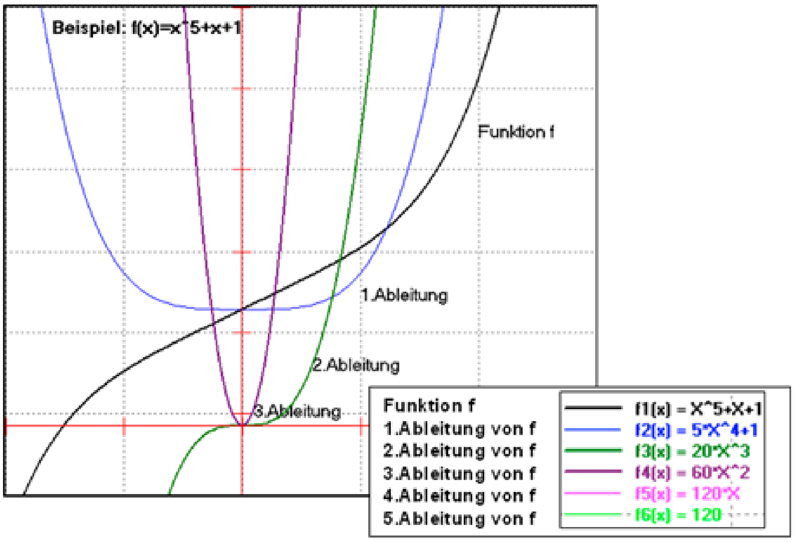
$$f^{(1)}(x) := \left(f^{(0)}(x)\right)'$$

$$f^{(2)}(x) := \left(f^{(1)}(x)\right)'$$

$$f^{(3)}(x) := \left(f^{(2)}(x)\right)'$$

$$\vdots$$

$$f^{(n)}(x) := \left(f^{(n-1)}(x)\right)'$$




**Beispiel:**

f´(x) ist die Funktion mit den Steigungswerten der Funktion f(x)

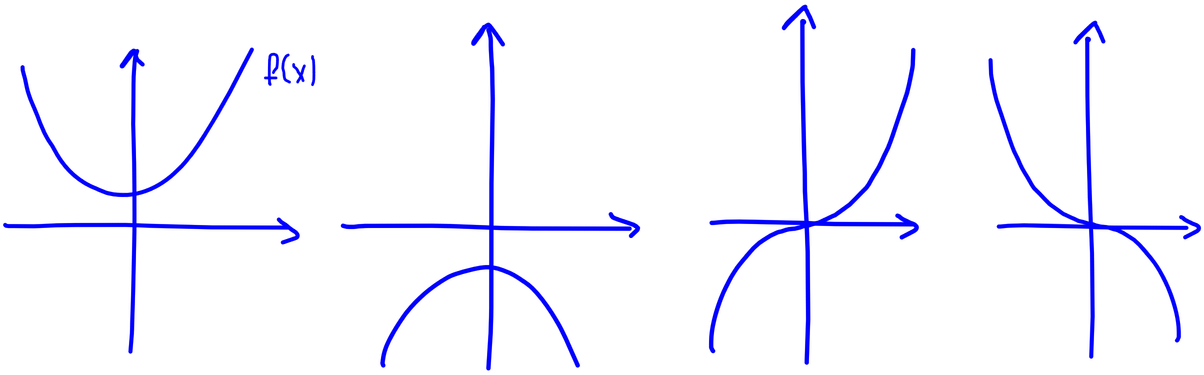
f´´(x) ist die Funktion mit den Steigungswerten der Funktion f´(x)

....

....

•

## Ableitungen und ihre Aussagen



# Ableitungen und ihre Aussagen

**Aussagen der 1.Ableitung:**

- gibt Steigungen der Kurventangenten wieder
- $f'(x_0)$ *positiv*: Tangente hat positive Steigung im Punkt $x_0$
- $f'(x_0)$ *negativ*: Tangente hat negative Steigung im Punkt $x_0$
- $f'(x_0) = 0$: Tangente hat Steigung 0 im Punkt $x_0$ (notwendige Bedingung für lokalen Extremwert)

•

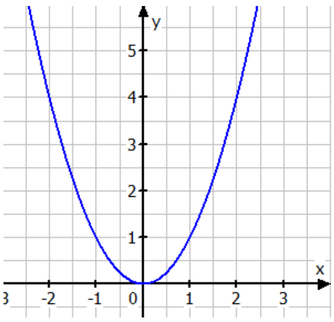
## Ableitungen und ihre Aussagen

**Aussagen der 2.Ableitung:**

- gibt Steigungen der Kurventangenten der 1.Ableitung wieder
- macht qualitative Aussagen über das Krümmungsverhalten von f(x)
- $f''(x)\ positiv:$ Linkskrümmung der Kurve
- $f''(x)\ negativ:$ Rechtskrümmung der Kurve
- quantitatives Maß über die Stärke der Krümmung: $\kappa = \dfrac{f''(x)}{\left[1+(f'(x))^2\right]^{\frac{3}{2}}}$

## Beispiel: Berechnung der Krümmung

$$f(x) = x^2$$




**Krümmung im Punkt x=1**

**Krümmung im Punkt x=2**

•

**Definition 6.4:** Wendepunkt/ Sattelpunkt

Kurvenpunkte, in denen sich der Drehsinn der Tangenten ändert, heißen **Wendepunkte**.

Wendepunkte mit waagerechter Tangente werden als **Sattelpunkte** bezeichnet.

**Satz 6.15:**

Die Funktion f sei im Intervall $[a,b]$ differenzierbar.

Gilt $\boxed{f'(x_0)=0 \;\; und \;\; f''(x_0)<0}$, dann hat f in $x_0$ ein **lokales Maximum**.

Gilt $\boxed{f'(x_0)=0 \;\; und \;\; f''(x_0)>0}$, dann hat f in $x_0$ ein **lokales Minimum**.

**Satz 6.16:**

Die Funktion f sei im Intervall $[a,b]$ differenzierbar.

Gilt $\boxed{f''(x_0)=0 \;\; und \;\; f'''(x_0)\neq 0}$ dann hat f in $x_0$ einen **Wendepunkt**.

Gilt $\boxed{\text{zusätzlich} \;\; f'(x_0)=0}$ dann hat f in $x_0$ einen **Sattelpunkt**.

f´´´(x) >0: Krümmungswechsel rechts auf links

f´´´(x) <0: Krümmungswechsel links auf rechts

**Minimum in $x_0$:**

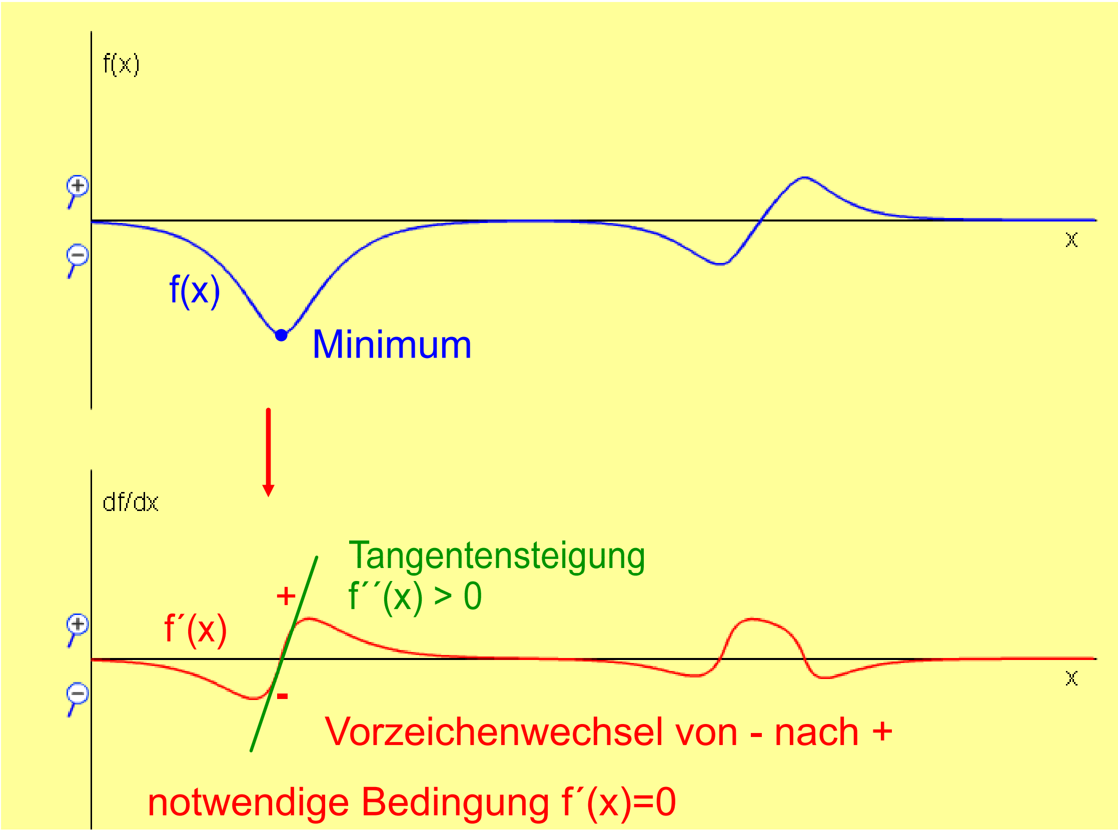
- notwendige Bedingung $f'(x_0)=0$ (Nullstelle in der 1.Ableitung)
- hinreichende Bedingung

  entweder

  Vorzeichenwechsel der Funktionswerte $f'(x)$ an der Nullstelle $x_0$ von - nach +

  oder

  $f''(x_0)$ ist positiv




•

**Maximum in $x_0$:**

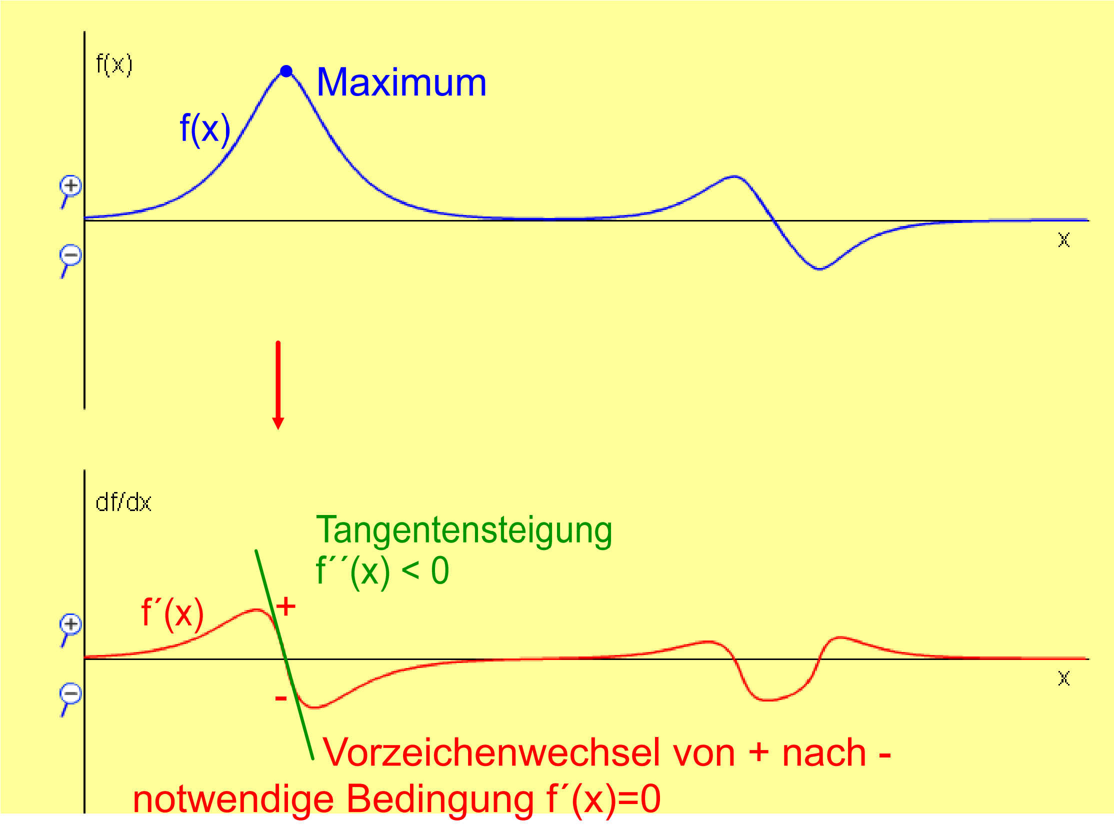
- notwendige Bedingung $f'(x_0)=0$ (Nullstelle in der 1.Ableitung)
- hinreichende Bedingung

entweder

Vorzeichenwechsel der Funktionswerte $f'(x)$ an der Nullstelle $x_0$ von + nach -

oder

$f''(x_0)$ ist negativ




•

**Zusammenfassung:** Bedingungen für Nullstelle, Extremwert, Wendepunkt

- $f(x)=0$ $\Rightarrow$ Nullstelle
- $f'(x)=0$
  - $f''(x)>0$ $\Rightarrow$ Minimum, Kurve hat Linkskrümmung
  - $f''(x)<0$ $\Rightarrow$ Maximum, Kurve hat Rechtskrümmung
  - $f''(x)=0$
    - $f'''(x)>0$ $\Rightarrow$ Sattelpunkt (von Rechts- auf Linkskrümmung)
    - $f'''(x)<0$ $\Rightarrow$ Sattelpunkt (von Links- auf Rechtskrümmung)
    - $f'''(x)=0$ $\Rightarrow$ unklar, ob Extremwert oder Sattelpunkt; weitere Ableitungen bilden, bis n-te Ableitung $\neq 0$; $n$ *gerade* $\Rightarrow$ *Extremwert*, $n$ *ungerade* $\Rightarrow$ *Sattelpunkt*
- $f''(x)=0$
  - $f'''(x)>0$ $\Rightarrow$ Wendepunkt (von Rechts- auf Linkskrümmung)
  - $f'''(x)<0$ $\Rightarrow$ Wendepunkt (von Links- auf Rechtskrümmung)
  - $f'''(x)=0$ $\Rightarrow$ unklar, ob Wendepunkt; weitere Ableitungen bilden, bis n-te Ableitung $\neq 0$; $n$ *ungerade* $\Rightarrow$ *Wendepunkt*

Satz 6.17 und 6.18 sind in obiger Zusammenfassung enthalten

**Satz 6.17:** Allgemeines Kriterium für lokalen Extremwert

Die Funktion f besitzt in $x_0$ eine waagerechte Tangente, d.h. $f'(x_0)=0$.

Die nächste an dieser Stelle nicht verschwindende Ableitung sei die n-te Ableitung $f^{(n)}(x_0)\neq 0$.

- Dann besitzt f in $x_0$ einen **lokalen Extremwert**, falls die **Ordnung n dieser Ableitung gerade** ist,

  insbesondere ein lokales Minimum, wenn $f^{(n)}(x_0)>0$

  bzw. ein lokales Maximum, wenn $f^{(n)}(x_0)<0$.
- Ist die **Ordnung n ungerade** so besitzt f in $x_0$ einen **Sattelpunkt**.

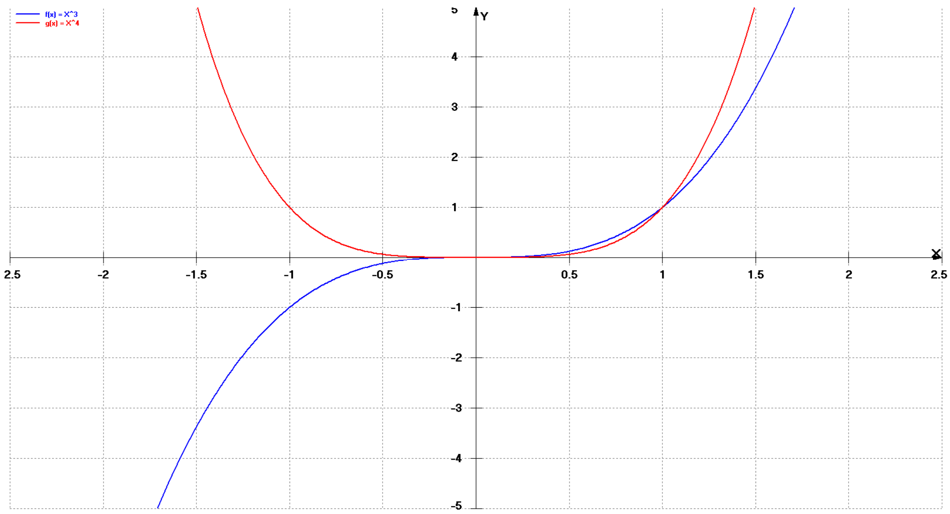
**Satz 6.18:** Aussagen zum Wendepunkt

Die Funktion f besitzt in $x_0$ einen Wendepunkt, falls

1. $f''(x_0)=0$ *und* $f'''(x_0)\neq 0$ oder
2. $f''(x_0)=0$ *und* $f''(x_0)$ *hat bei* $x_0$ *einen Vorzeichenwechsel*
3. $f''(x_0)=f'''(x_0)=0$ *und für die* $k-$*fache Ableitung ist erstmalig* $f^{(k)}(x_0)\neq 0: \quad \exists n\in\mathbb{N}: k=2n+1,$ *d.h.* $k$ *ist ungerade*.

## Beispiel zur Extremwertbestimmung

Übung

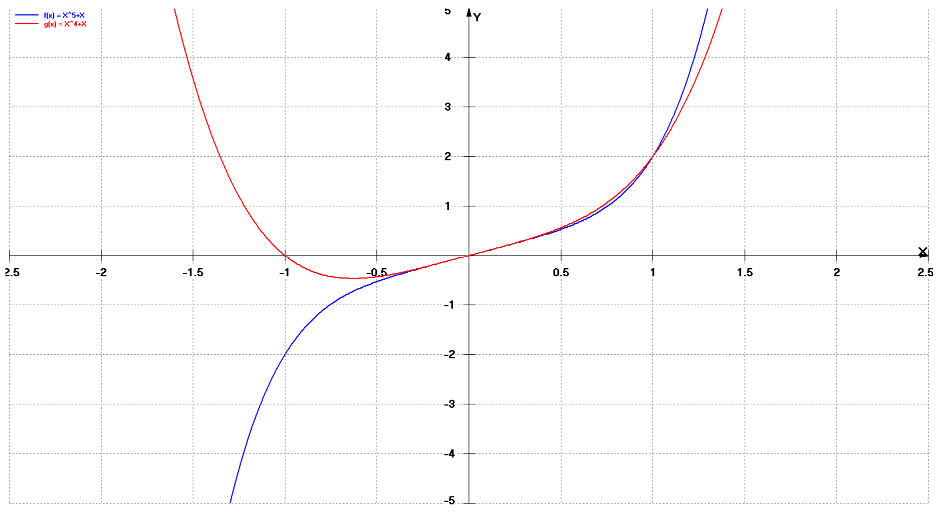



Extremwert in x=0
$g(x) = x^4$

kein Extremwert in x=0
$f(x) = x^3$

## Beispiel zur Wendepunktbestimmung

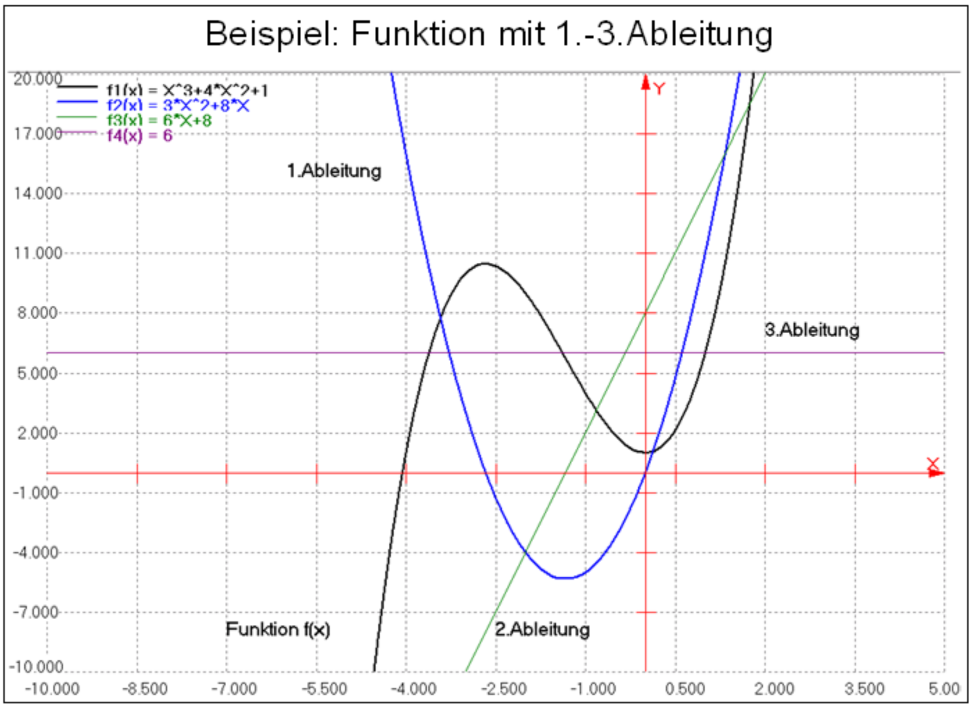
Übung




Wendepunkt in x=0
$f(x) = x^5 + x$

kein Wendepunkt in x=0
$g(x) = x^4 + x$

## Beispiel zur Extremwert- und Wendepunktbestimmung




$f(x) = x^3 + 4x^2 + 1$
$f'(x) = 3x^2 + 8x$
$f''(x) = 6x + 8$
$f'''(x) = 6$

**Extremwertbestimmung: notwendige Bedingung $f'(x)=0$**

$f'(x) = 0 \Rightarrow 3x^2 + 8x = 0$
$x(3x+8) = 0$
$\Rightarrow x=0 \vee x= -8/3$ zwei kritische Punkte

Untersuchung des Verhaltens für x=0:
$f''(0) = 6(0) + 8 = 8 > 0 \Rightarrow$ Minimum in x=0
mit Funktionswert $f(0) = 1$

Untersuchung des Verhaltens für x=- 8/3:
$f''(-8/3) = 6(-8/3) + 8 = -8 < 0 \Rightarrow$ Maximum in x= - 8/3
mit Funktionswert f(- 8/3) = ...

**Wendepunktbestimmung: notwendige Bedingung $f''(x)=0$**

$f''(x) = 0 \Rightarrow 6x + 8 = 0$
$\Rightarrow x = -4/3$

**Untersuchung des Verhaltens für x=-4/3:**

**$f'''(-4/3) = 6 \neq 0$** $\Rightarrow$ Wendepunkt
**$> 0$** $\Rightarrow$ Wechsel von Rechts- auf Linkskrümmung