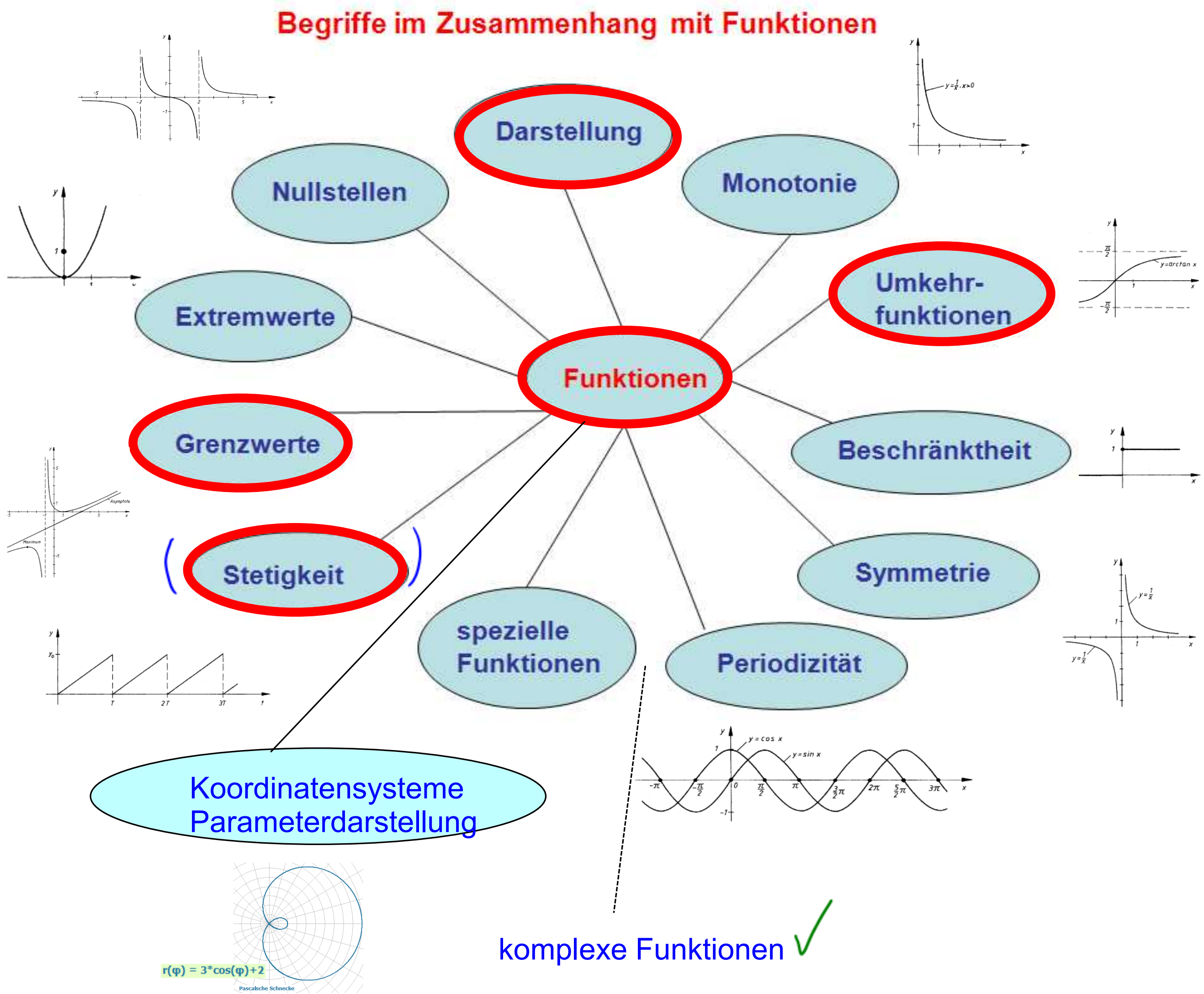
Vorlesung 19 am 01.12.2022

Inhalte: Funktionen 1

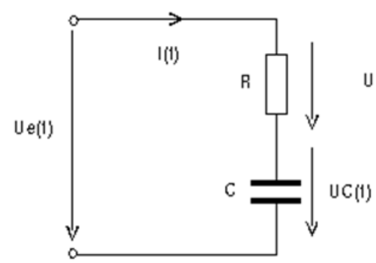
- Abbildung/ Funktionen
- Eigenschaften von Funktionen
- Umkehrfunktion
- Grenzwerte (und Stetigkeit)


Begriffe im Zusammenhang mit Funktionen
Darstellung
Nullstellen
Monotonie
Umkehr-
funktionen
Extremwerte
Funktionen
Grenzwerte
Beschränktheit
(Stetigkeit)
Symmetrie
spezielle
Funktionen
Periodizität
Koordinatensysteme
Parameterdarstellung
r(φ) = 3*cos(φ)+2
Pascalsche Schnecke
komplexe Funktionen ✓

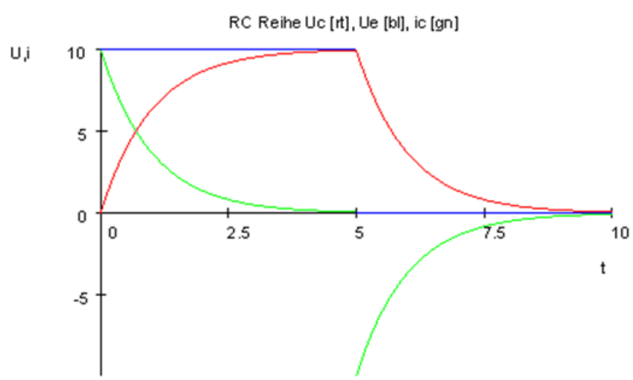
Reihenschaltung von Widerstand und Kondensator

Die erste Simulation gibt Auskunft über den zeitlichen Strom-Spannung-Verlauf an Kondensatoren. Zum einfacheren Vergleich der Strom- bzw. Spannungskurven wurden die Kennwerte der Bauteile so gewählt, dass beide Größen in einer vergleichbaren Größenordnung liegen. Damit können sowohl Strom- als auch Spannungskurven in ein Diagramm eingezeichnet werden, wobei die angegebenen Maßzahlen an den Achsen für beide Einheiten (Volt, Ampere) gelten.

Die Simulation basiert auf dem abgebildeten Schaltbild der Schaltung 1 mit den Kennwerten R = 1Ω, C = 1F.



Schaltung 1: Reihenschaltung von Widerstand und Kondensator



Es wird die oben gezeigte Schaltung simuliert, wobei als Eingangsspannung $U_e(t)$ ein Impuls mit der Amplitude $U_{emax} = 10V$ und der Dauer $T = 5s$ angelegt wird. Es ergibt sich das folgende Diagramm. Die Eingangsspannung ist blau dargestellt, die Spannung $U_c(t)$ am Kondensator rot und der Strom $i(t)$ durch die Schaltung grün.

Erläuterung des Zeitdiagramms

Beim Einschalten der Spannung $U_e(t)$ steigt der Strom sofort sprunghaft an, da der ungeladene Kondensator zu diesem Zeitpunkt noch wie ein Kurzschluss wirkt. Der Strom $i_C(t)$ wird nur durch den Widerstand R begrenzt. Der Kondensator lädt sich nun gemäß einer Exponentialfunktion bis auf den Maximalwert der Eingangsspannung $U_{emax} = 10V$ auf. Der Ladestrom nimmt entsprechend ab. Zum Zeitpunkt $T = 5s$ wird die Eingangsspannung auf Null abgeschaltet. Dies entspricht einem Kurzschluss an den Eingangsklemmen der Schaltung. Dadurch entlädt sich der Kondensator C über den Widerstand R. Der Entladestrom wird durch den Widerstand begrenzt und sinkt exponentiell auf Null ab. Da der Kondensator entladen wird, kehrt sich die Stromrichtung um.

http://www-math.upb.de/~mathkit/Inhalte/ETechnikMuPAD/preview/

Menge - kartesisches Produkt - Relation - Abbildung

Definition 1.1: Menge (Georg Cantor, 1845-1918)

Eine **Menge** ist eine Zusammenfassung von genau bestimmten, unterscheidbaren Objekten zu einem Ganzen. Diese Objekte heißen **Elemente der Menge**.

Definition 1.14: kartesisches Produkt

Seien M und N Mengen. Das ***kartesische Produkt*** $M \times N$ von M und N ist die Menge aller Paare mit erstem Element aus M und zweitem Element aus N:

$$M \times N := \{(m,n) \mid m \in M \text{ und } n \in N\}.$$

Beispiel: kartesisches Produkt

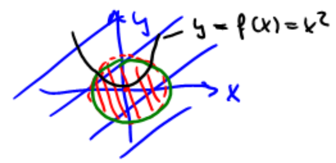
Das kartesische Produkt der Mengen A := { u, v } und B := { 2, 7, 0} ist die Menge

$$A \times B := \{(u,2),(u,7),(u,0),(v,2),(v,7),(v,0)\}.$$

Das kartesische Produkt enthält 6 Elemente.

Beispiel:
$M = \mathbb{R}$, $N = \mathbb{R}$
$M \times N = \mathbb{R} \times \mathbb{R} = \mathbb{R}^2$
$= \{(x,y) \mid x \in \mathbb{R} \wedge y \in \mathbb{R}\}$

Kartesisches Koordinatensystem in der Ebene



Definition 1.17: zweistellige Relation

Sind M und N Mengen, so heißt jede Teilmenge R der Menge $M \times N$ (kartesisches Produkt) eine **zweistellige Relation von M nach N**,

$$R \subseteq M \times N,$$

und jede Teilmenge der Menge $M \times M$ heißt **eine Relation auf (oder in) M**,

$$R \subseteq M \times M.$$

Beispiel: Relation

$R = \{(x,y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \mid x^2 + y^2 \le 1\}$ *ist eine Relation auf den reellen Zahlen*

$R = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid y = x^2\}$ ist eine Relation

Definition 1.26: Abbildung

Seien D, B beliebige Mengen. Eine Relation $R \subseteq D \times B$ heißt eine **Abbildung von D nach B**, wenn es für jedes Element $x \in D$ genau ein Paar $(x, y) \in R$ gibt. ≙ auf der linken Seite geht genau ein Pfeil ab

Das Element $y \in B$ heißt dann das **Bild von** $x \in D$ und wird auch mit $R(x)$ bezeichnet. $x \in D$ heißt ein **Urbild von y.** D heißt der **Definitionsbereich** und B der **Bildbereich** (oder auch Wertebereich) von R. (Urbildbereich)

- Eine Abbildung enthält also keine zwei verschiedenen Paare mit identischem ersten Element.

Definition 1.26* (alternativ): Abbildung

Seien M, N Mengen und sei jedem $x \in M$ genau ein $y \in N$ zugeordnet, dann heisst diese Zuordnung eine **Abbildung von M nach N**.

Ist $f: M \to N$ eine Abbildung, so heißt

$D(f) := M$	die **Definitionsmenge(oder –bereich)** von f,
$x \in M$	das **Argument**,
$f(x) \in N$	der durch die Abbildung zugeordnete Wert
N	die **Zielmenge**,

$$f(M) := \{y \in N \mid \text{es gibt ein } x \in M \text{ mit } y = f(x)\} = \{f(x) \mid x \in M\}$$

die **Bildmenge(oder –bereich),** die Wertemenge(oder –bereich) von f

Veranschaulichung der Definition einer Abbildung/Funktion

$M=\{1,2,3,4\}$

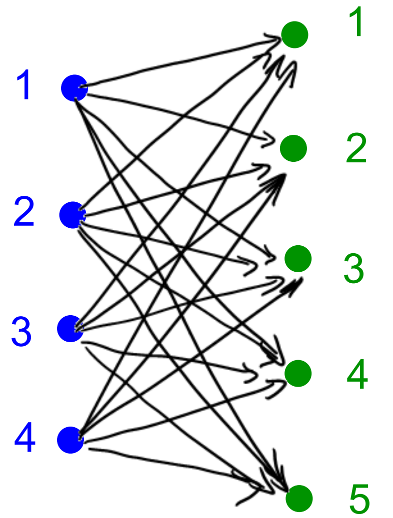
$N=\{1,2,3,4,5\}$

Pfeil endet auf der rechten Seite

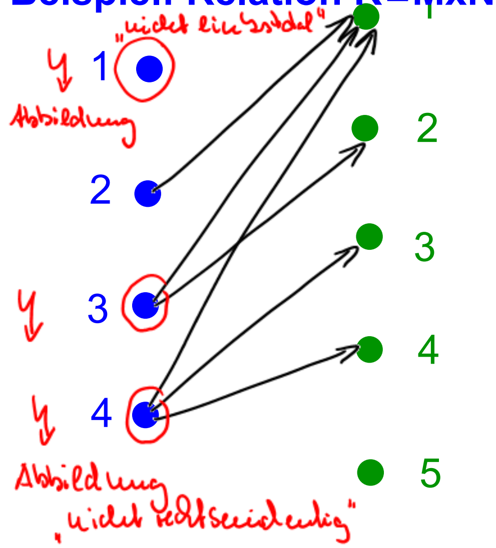
Pfeilbeginnt auf der linken Seite

$\{(1,1),(1,2),(1,3),(1,4),(1,5),(2,1),\ldots\}$

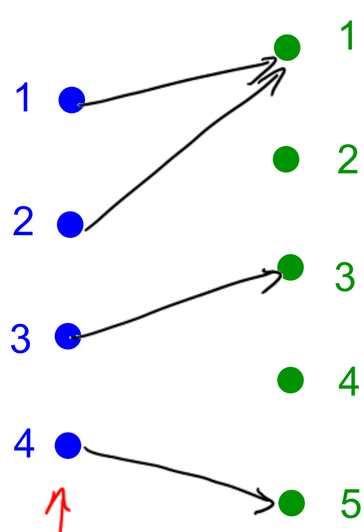
Kartesisches Produkt = MxN



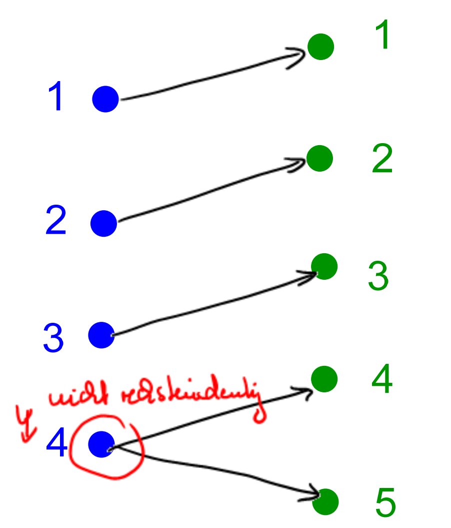
Beispiel: Relation R⊆MxN



Beispiel: Abbildung 1



Beispiel: keine Abbildung



Begriff „linkstotal" ↑ mindestens ein Pfeil

Begriff „rechtseindeutig" ↑ höchstens ein Pfeil

Abbildung

$A=\{(1,1),(2,1),(3,3),(4,5)\} \subset M \times N$ ist auch eine Relation

Für eine Abbildung muss auf der linken Seite „genau ein Pfeil" abgehen

5.1 Definition und Darstellung

Definition 5.1: reelle Funktion einer reellen Variablen

Eine reelle **Funktion f** ist eine Vorschrift, die jedem Element x einer Menge $D \subseteq \mathbb{R}$ eindeutig eine reelle Zahl y einer Menge $B \subseteq \mathbb{R}$ zuordnet:

$$f: D \to B$$
$$x \to y = f(x)$$

$\{(x, \overset{y}{f(x)}) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \mid y = f(x)\} = M$

x ist die unabhängige Variable, y die abhängige Variable.

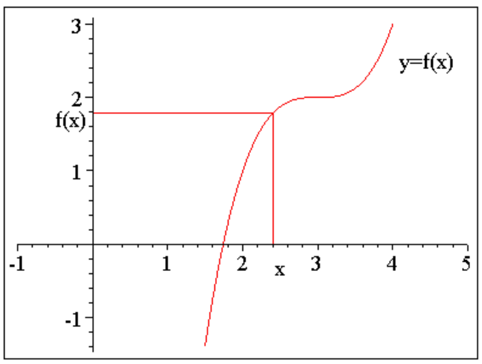
nächste Seite

ist eine Abbildung, wenn die Eigenschaften linkstotal und rechtseindeutig erfüllt sind

Darstellungsformen einer Funktion:

- Verbale Beschreibung der Zuordnung
- tabellarische Darstellung
- graphische Darstellung
- analytische Beschreibung durch explizite oder implizite Gleichungen
- in kartesischen Koordinaten
- in Polarkoordinaten
- in Parameterdarstellung

Beispiel einer Funktion:



Bemerkungen:

(1) Eine reelle Funktion kann im kartesischen Koordinatensystem dargestellt werden.

(2) Das kartesische Koordinatensystem beinhaltet alle Punkte der Ebene, die durch die Paare $(x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ dargestellt werden.

(3) Das kartesische Produkt $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ ist definiert durch

$$\mathbb{R} \times \mathbb{R} = \{(x, y) | x \in \mathbb{R} \text{ und } y \in \mathbb{R}\}$$

(4) Allgemein ist das kartesische Produkt zweier Mengen M und N definiert durch

$$M \times N = \{(m, n) | m \in M \text{ und } n \in N\}$$

.

Definition einer Funktion

Definition 5.1: reelle Funktion einer reellen Variablen

Eine reelle **Funktion** f ist eine Vorschrift, die jedem Element x einer Menge (1) $D \subseteq \mathbb{R}$ eindeutig eine reelle Zahl y einer Menge $B \subseteq \mathbb{R}$ zuordnet:

$$f: D \to B \quad (2)$$
$$x \to y = f(x)$$

x ist die unabhängige Variable, y die abhängige Variable.

Bemerkungen:

Eine reelle Funktion ist eine linkstotale (1), rechtseindeutige (2) Relation.

Die Relation ist eine Teilmenge des kartesischen Produkt

$$\mathbb{R} \times \mathbb{R} = \{(x, y) | x \in \mathbb{R} \; und \; y \in \mathbb{R}\} \; .$$

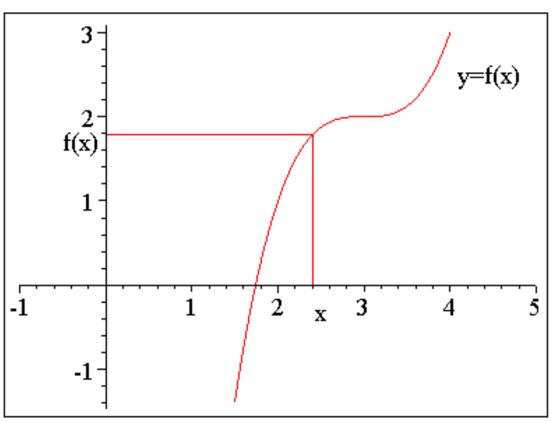
Die Definition beinhaltet zwei Bedingungen:

Beide Bedingungen
mit einer **parallelen Geraden zur y-Achse testen**: } Senkrechtentest

(1) für alle x-Werte des Definitionsbereiches einen Schnittpunkt mit der Kurve

(2) für alle x-Werte des Definitionsbereiches nur genau ein Schnittpunkt mit der Kurve

Beispiel einer Funktion:

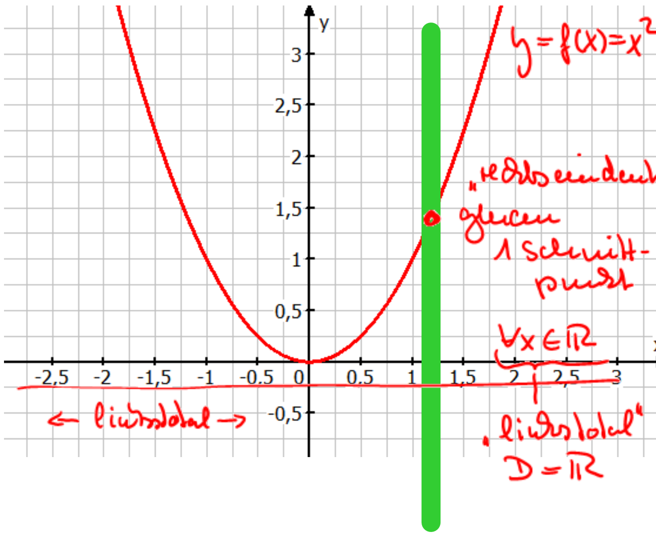


.

Erläuterung der Funktionsdefinition

Eine reelle **Funktion f** ist eine Vorschrift, die jedem Element x einer Menge $D \subseteq \mathbb{R}$ eindeutig eine reelle Zahl y einer Menge $B \subseteq \mathbb{R}$ zuordnet:

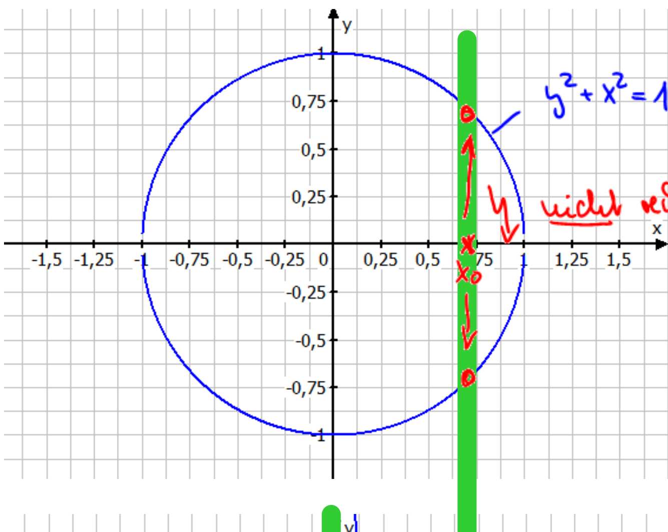
zwei Bedingungen



Beide Bedingungen mit einer **parallelen Geraden zur y-Achse testen**:

(1) für alle x-Werte des Definitionsbereiches einen Schnittpunkt mit der Kurve

(2) für alle x-Werte des Definitionsbereiches nur genau ein Schnittpunkt mit der Kurve



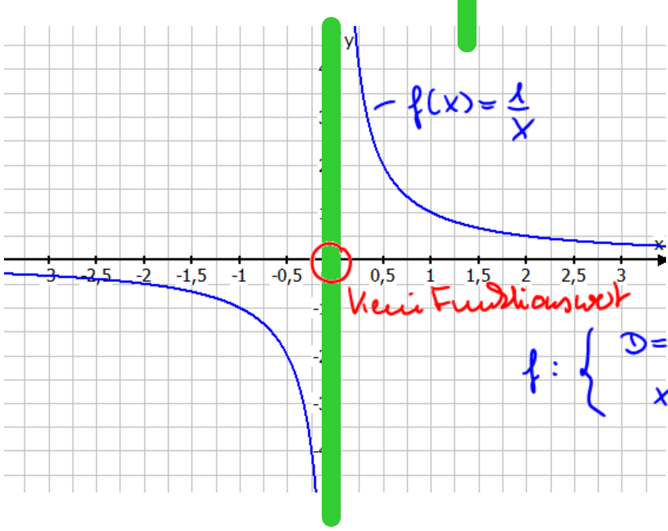
$y^2+x^2=1 \Rightarrow y=\pm\sqrt{1-x^2}$

oberer Teil $y=f(x)=+\sqrt{1-x^2}$ ist rechtseindeutig

y nicht rechtseindeutig, da wir für einen x-Wert zwei y-Werte haben

und mit $x \in [-1,1]=D$ auch linkstotal und dann eine Abbildung bzw. Funktion

$$f: \begin{cases} D=[-1,1] \to \mathbb{R} \\ x \to y=+\sqrt{1-x^2} \end{cases}$$



$$f: \begin{cases} D=\mathbb{R}\setminus\{0\} \to \mathbb{R} \\ x \to y=\frac{1}{x} \end{cases}$$ ist eine Abbildung/Funktion

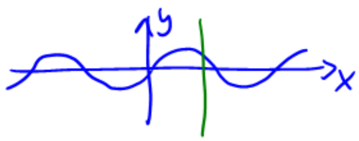
Beispiele: Funktion? / keine Funktion?

$$f_1: \begin{cases} \mathbb{R} \to \mathbb{R} \\ x \to \sin x \end{cases}$$

Bedingungen:

✓ **(1)** für alle x-Werte gibt es mindestens einen Schnittpunkt

✓ **(2)** für alle x-Werte nur höchstens einen Schnittpunkt mit dem grafischen Verlauf



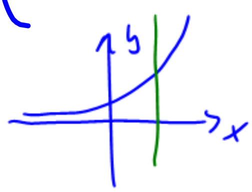
$f_1(x)$ ist eine Funktion

$$f_2: \begin{cases} \mathbb{R} \to \mathbb{R} \\ x \to e^x \end{cases}$$

Bedingungen:

✓ **(1)** für alle x-Werte gibt es mindestens einen Schnittpunkt

✓ **(2)** für alle x-Werte nur höchstens einen Schnittpunkt mit dem grafischen Verlauf



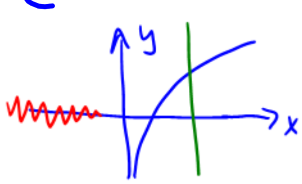
$f_2(x)$ ist eine Funktion

$$f_3: \begin{cases} \overset{D=}{\mathbb{R}} \to \mathbb{R} \\ x \to \ln x \end{cases}$$

Bedingungen:

↯ **(1)** für alle x-Werte gibt es mindestens einen Schnittpunkt

✓ **(2)** für alle x-Werte nur höchstens einen Schnittpunkt mit dem grafischen Verlauf



$f_3(x)$ ist <u>keine Funktion</u>, da nicht linkstotal

$f_3^*(x): \begin{cases} D=\mathbb{R}^+=(0,\infty) & \mathbb{R} \\ x \to \ln x \end{cases}$ $f_3(x)$ ist <u>eine</u> Funktion

---

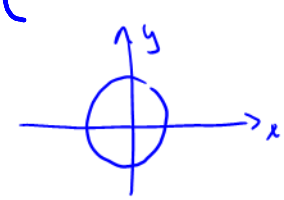
$$f_4: \begin{cases} \overset{D=}{\mathbb{R}} \to \mathbb{R} \\ x \to \pm\sqrt{1-x^2} \end{cases}$$

Bedingungen:

↯ **(1)** für alle x-Werte gibt es mindestens einen Schnittpunkt <u>nicht linkstotal</u>

↯ **(2)** für alle x-Werte nur höchstens einen Schnittpunkt mit dem grafischen Verlauf <u>nicht</u> rechtseindeutig

ist keine Funktion



$f_4^*(x): \begin{cases} D=[-1,1] \to \mathbb{R} \\ x \to +\sqrt{1-x^2} \end{cases}$ ist <u>eine</u> Funktion

Funktionen

- **Definitionsbereich**

- Bereich der x-Werte, für den die Funktion definiert ist, d.h. für den jedem $x \in \mathbb{R}$ ein $y \in \mathbb{R}$ zuzuordnen ist.

- Der Definitionsbereich wird als Menge/ Intervall angegeben.

- In einigen Fällen kann durch Einschränkung des Definitionsbereiches eine Zuordnungsvorschrift zu einer Funktion gemacht werden.

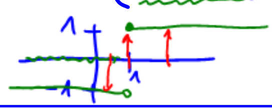
Beispiele

Angabe des maximalen Definitionsbereiches, so dass f(x) eine Funktion ist, d.h. also linkstotal und rechtseindeutig

$f_1(x) = \frac{1}{x}$ $\quad D = \mathbb{R} \setminus \{0\}$

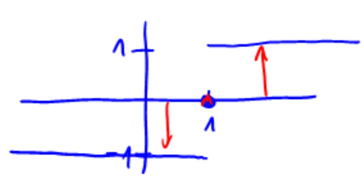
$f_2(x) = \sqrt{x-1}$ $\quad D = [1, \infty)$

$$f_3(x) = \begin{cases} 1, & x \geq 1 \\ -1, & x < 1 \end{cases} \qquad D = \mathbb{R}$$

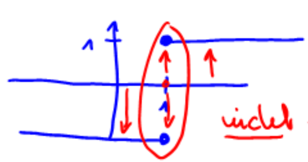


$$f_4(x) = \begin{cases} 1, & x \geq 1 \\ -1, & x < 0 \end{cases} \qquad D = (-\infty, 0) \cup [1, \infty)$$

$$f_5(x) = \begin{cases} 1, & x > 1 \\ 0, & x = 1 \\ -1, & x < 1 \end{cases} \qquad D = \mathbb{R}$$



$$f_6(x): \begin{cases} 1, & x \geq 1 \\ -1, & x \leq 1 \end{cases}$$



nicht rechtseindeutig

$$f_6^*(x): \begin{cases} 1, & x > 1 \\ -1, & x \leq 1 \end{cases}$$ ist rechtseindeutig

Eigenschaften: Injektivität, Surjektivität, Bijektivität

Funktion und Umkehrfunktion

•

Eigenschaften: Injektivität/ Surjektivität/Bijektivität

Abbildung

linkstotal: es geht "links" bei jedem Punkt mindestens ein Pfeil ab

rechtseindeutig: es geht "links" bei jedem Punkt maximal ein Pfeil ab

Surjektivität:

rechtstotal: es kommt "rechts" bei jedem Punkt mindestens ein Pfeil an

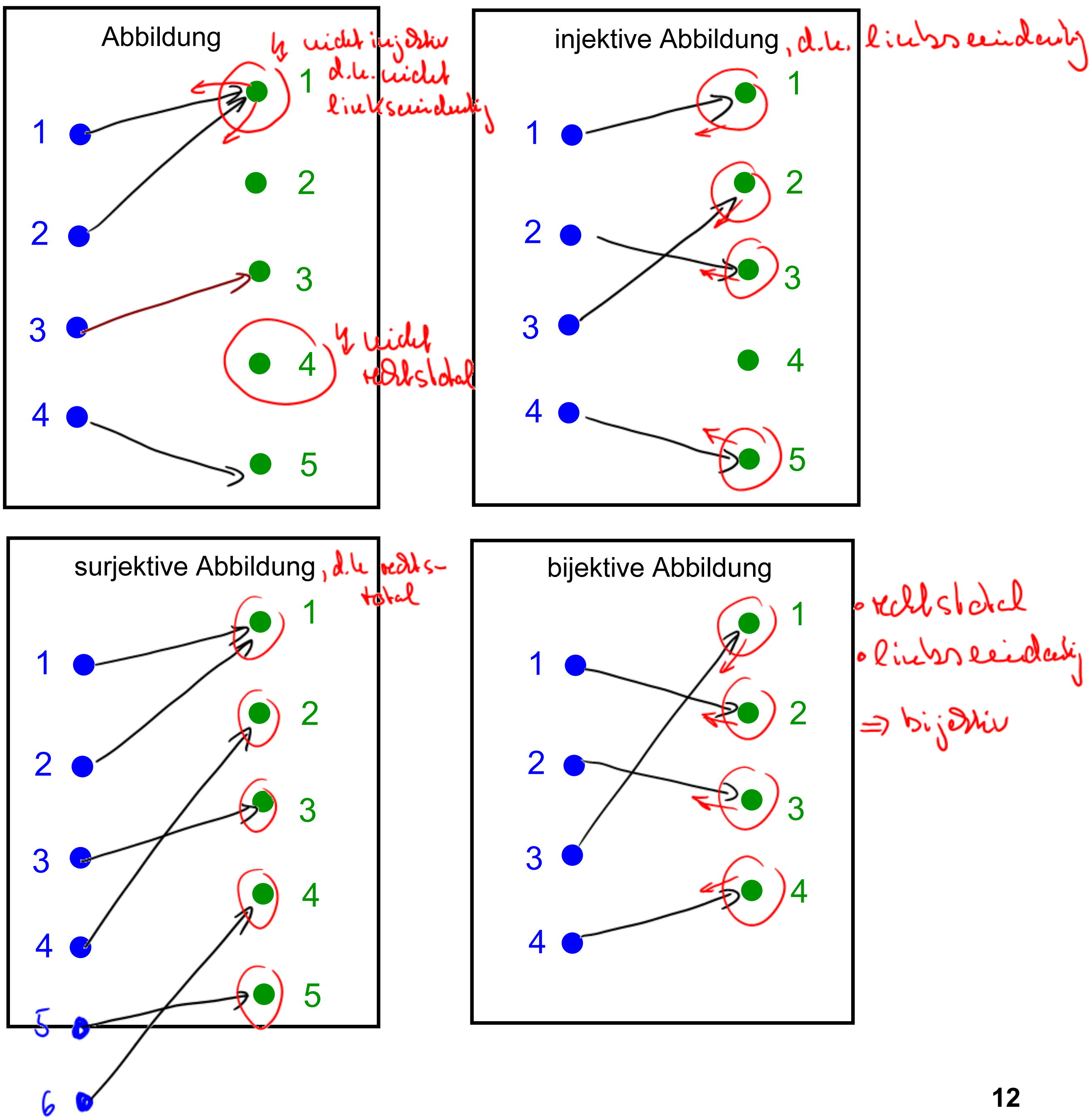
Injektivität:

linkseindeutig: es kommt "rechts" bei jedem Punkt höchstens ein Pfeil an

Bijektivität:

rechtstotal und linkseindeutig, d.h. injektiv und surjektiv

es kommt "rechts" bei jedem Punkt genau ein Pfeil an



Definition 1.28: injektiv, surjektiv, bijektiv

rechts kommt höchstens ein Pfeil an

Eine Abbildung $f:\begin{cases} M \to N \\ x \to f(x) \end{cases}$ heißt

- **injektiv**, wenn jedes Element $y \in N$ aus der Bildmenge **höchstens ein Urbild** besitzt., d.h. linkseindeutig
- **surjektiv**, wenn jedes Element $y \in N$ aus der Bildmenge **mindestens ein Urbild** besitzt., d.h. rechtstotal
- **bijektiv**, wenn sie **injektiv und surjektiv** ist.

rechts kommt mindestens ein Pfeil an

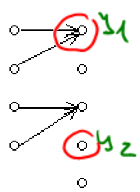
Veranschaulichung der Definition 1.28:

- Surjektivität bedeutet, dass der Bildbereich komplett abgedeckt ist, also keine „überflüssigen“ Elemente enthält.
- Injektivität bedeutet, dass man von jedem Element des Bildbereichs eindeutig auf sein Urbild schließen kann (falls es überhaupt existiert).

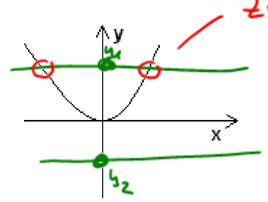
In der nachfolgenden Abbildung wird davon ausgegangen, dass in der Pfeildarstellung alle Elemente der beiden Mengen dargestellt sind und in der grafischen Darstellung der Definitionsbereich und der Bildbereich die reellen Zahlen sind.

Horizontalentest

Beispiel:

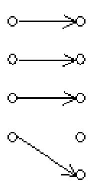


nicht injektiv,
nicht surjektiv

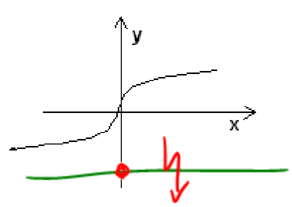


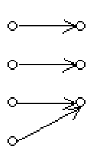
Zwei Schnittpunkte mit Funktion ⇒ nicht injektiv

Kein Schnittpunkt mit Funktion ⇒ nicht surjektiv

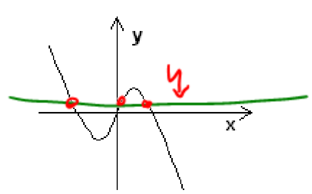


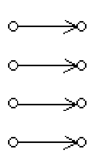
injektiv,
nicht surjektiv



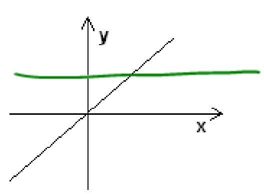


nicht injektiv,
surjektiv





injektiv, ✓
surjektiv ✓



✓

Erläuterung der Eigenschaften Injektivität/ Surjektivität

injektiv,

wenn jedes Element $y \in N$ aus der Bildmenge **höchstens ein Urbild** besitzt.

surjektiv,

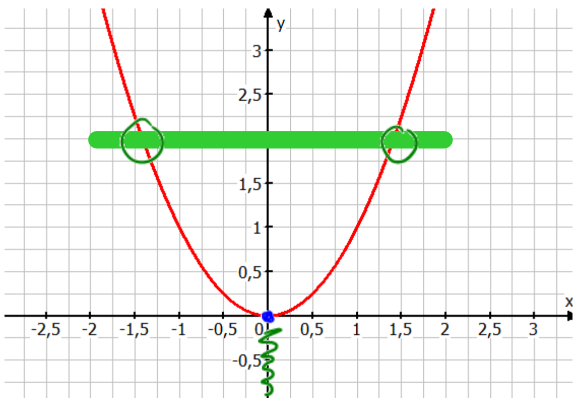
wenn jedes Element $y \in N$ aus der Bildmenge **mindestens ein Urbild** besitzt.

Beide Bedingungen mit einer parallelen Geraden zur x-Achse testen:

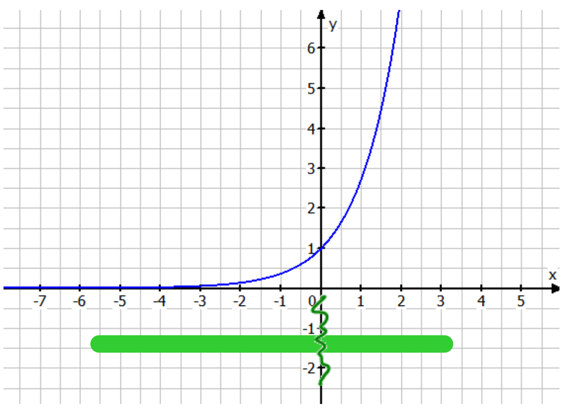
(1) injektiv,
die Kurve wird für alle Parallelen höchstens einmal geschnitten

(2) surjektiv,
die Kurve wird für alle Parallelen mindestens einmal geschnitten

- nicht injektiv
- nicht surjektiv

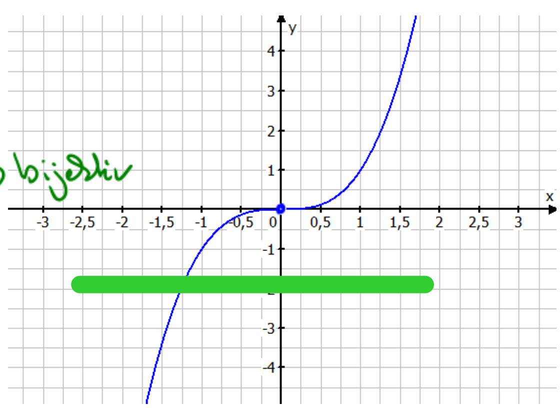


- injektiv
- nicht surjektiv

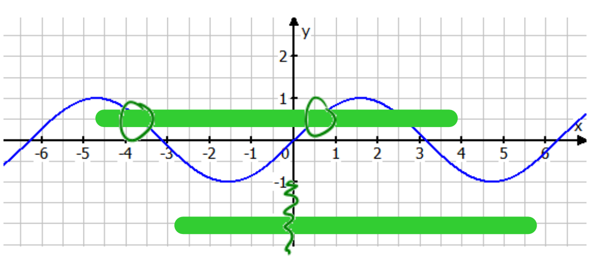


- injektiv
- surjektiv

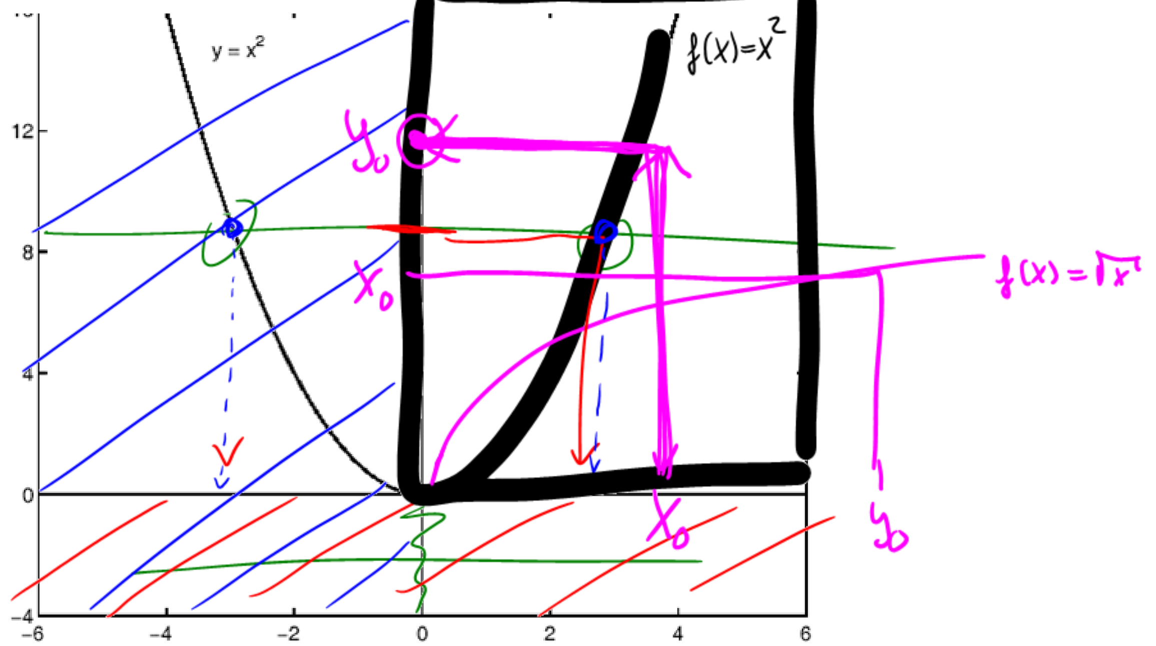
} ⇒ bijektiv



- nicht injektiv
- nicht surjektiv



Beispiel:



D= B=

- $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R},\quad x\to y=x^2$ weder injektiv noch surjektiv
- $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}_0^+,\quad x\to y=x^2$ surjektiv
- $f:\mathbb{R}_0^+\to\mathbb{R},\quad x\to y=x^2$ injektiv
- $f:\mathbb{R}_0^+\to\mathbb{R}_0^+,\quad x\to y=x^2$ bijektiv $\Rightarrow$ Umkehrfunktion vorhanden

$y=f(x)=x^2$

D_f B_f

① Prüfung Bijektivität

ⓐ Funktion

ⓑ Injektiv

ⓒ Surjektiv

$D_{f^{-1}} = \mathbb{R}_0^+$ $\quad B_{f^{-1}} = \mathbb{R}_0^+$

$$f^{-1}:\begin{cases} B_f \to D_f \\ x \to \sqrt{x} \end{cases}$$

② Berechnung der Umkehrfunktion

ⓐ • Auflösen nach x

$y = x^2$

$x = +\sqrt{y}$

ⓑ • Umbenennen von y und x

$y = +\sqrt{x}$

$f(x)=\sqrt{x}$ ist die Umkehrfunktion zu $f(x)=x^2$

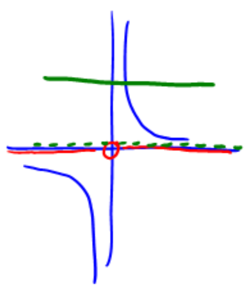
$f^{-1}(x)$ ist die Bezeichnung für die Umkehrfunktion

Beispiele: Funktion/ keine Funktion/ Injektivität/ Surjektivität

$$f_1 : \begin{cases} D = \mathbb{R} \to B = \mathbb{R} \\ x \to \frac{1}{x} \end{cases}$$

ist keine Funktion, da $x=0$ kein Bild hat

$$f_2 : \begin{cases} D = \mathbb{R}\setminus\{0\} \to B = \mathbb{R} \\ x \to \frac{1}{x} \end{cases}$$



ist eine Funktion (linkstotal, rechtseindeutig)

weitere Eigenschaften

- injektiv
- nicht surjektiv, da $y=0$ kein Bildpunkt eines x-Wertes ist

---

$$f_3 : \begin{cases} B = \mathbb{R}\setminus\{0\} \to D = \mathbb{R}\setminus\{0\} \\ x \to \frac{1}{x} \end{cases}$$

ist eine Funktion

weitere Eigenschaften

$$\left.\begin{array}{l} \bullet \text{ injektiv} \\ \bullet \text{ surjektiv} \end{array}\right\} \text{bijektiv} \Rightarrow \text{es existiert eine Umkehrfunktion}$$

Überprüfungsmöglichkeiten der Eigenschaften

Graphische Überprüfung der Injektivität

Prüfung der Injektivität mit Hilfe einer Parallelen zur x-Achse:
Ist über die gesamten Werte des Bildbereiches stets höchstens ein Schnittpunkt der Parallelen mit dem Funktionsgraphen gegeben, dann ist die Funktion injektiv.

Graphische Überprüfung der Surjektivität

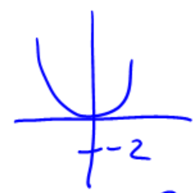
Prüfung der Surjektivität mit Hilfe einer Parallelen zur x-Achse:
Ist über die gesamten Werte des Bildbereiches stets mindestens ein Schnittpunkt der Parallelen mit dem Funktionsgraphen gegeben, dann ist die Funktion surjektiv.

Rechnerische Überprüfung der Injektivität

Start mit zwei gleichen y-Werten
Nachweis führen,
dass dann auch die x-Werte gleich sein müssen

Ausgangspunkt: $y_1 = y_2$

$$f(x_1) = f(x_2)$$
$$\dots$$
$$\Rightarrow x_1 = x_2$$



Rechnerische Überprüfung der Surjektivität

Start mit einem y_1-Wert $y_1 = f(x_1)$

z.B. $y = -2 = x^2$

$x = \pm\sqrt{-2} \Rightarrow$ in $\mathbb{R}$ nicht möglich

Herleiten des zugehörigen x_1-Wertes
durch Umformen der Funktionsvorschrift

$\Rightarrow y = -2$ hat kein Urbild x

$\Rightarrow f(x)$ ist surjektiv

"Auflösen nach $x \in D$"

Bijektivität bedeutet
für alle Elemente des Bildbereiches gibt es genau ein Urbild.
- injektiv ,
  d.h. für alle Elemente des Bildbereiches gibt es höchstens ein Urbild
- und surjektiv ,
  d.h. alle Elemente des Bildbereiches haben mindestens ein Urbild im Definitionsbereich

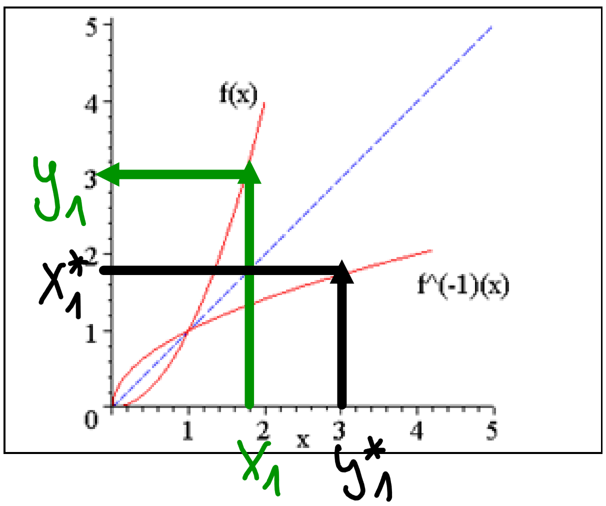
5.2.7 Umkehrfunktion

Definition 5.10: Umkehrfunktion

Ist die Funktion $f: D \rightarrow B$ eine eineindeutige Zuordnung (d.h. bijektiv), so ist die Zuordnung $y \in B$ zu $x \in D$ wieder eine Funktion, die als Umkehrfunktion $x = f^{-1}(y)$ zu $y = f(x)$ bezeichnet wird.

Formal erfolgt in der Regel in der Umkehrfunktion wieder die Umbennung von x und y.

Beispiel einer Funktion mit ihrer Umkehrfunktion:



Satz 1.21: Umkehrabbildung

Ist eine Abbildung $f: M \rightarrow N$ bijektiv, so kann jedem $y \in N$ sein Urbild $x \in M$ zugeordnet werden.

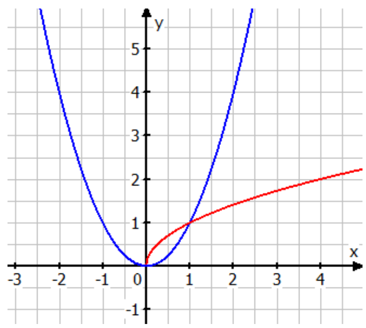
Definition 1.29: Umkehrabbildung oder inverse Abbildung

Diese Abbildung $f^{-1}: N \rightarrow M$ mit $y \rightarrow x = f^{-1}(y)$ heißt **Umkehrabbildung zu *f* oder die zu *f* inverse Abbildung**.

Umkehrfunktionen - Beispiele

Beispiele:

- Betrachtet man die bijektive Abbildung $f: \mathbb{R}_0^+ \to \mathbb{R}_0^+,\ x \to y = x^2$ des vorherigen Beispiels, so erhält man die Umkehrabbildung $f^{-1}: \mathbb{R}_0^+ \to \mathbb{R}_0^+$ durch Umkehrung der Abbildungsvorschrift $y \to x = \sqrt{y}$.



Siehe Seite vorher

Vorgehen zur Bestimmung der Umkehrfunktion einer Funktion y = f(x):

(1) Prüfung auf Bijektivität

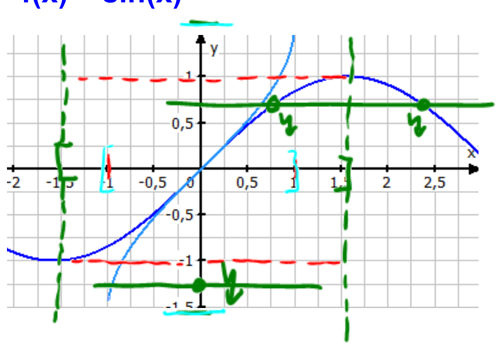
ggfs. Definitionsbereich oder Bildbereich einschränken

(2) Auflösen der Funktionsgleichung nach x

(3) Benennung x und y vertauschen

(4) Umkehrabbildung wird dann $f^{-1}(x)$ genannt.

- **f(x) = sin(x)**



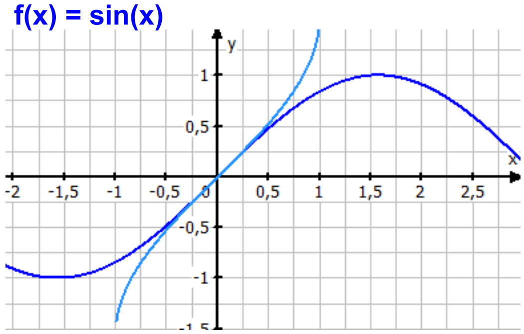
$f: \begin{cases} \mathbb{R} \to \mathbb{R} \\ x \to \sin x \end{cases}$ ist Funktion

$f^*: \begin{cases} [-\frac{\pi}{2}, +\frac{\pi}{2}] \to [-1, +1] \\ x \to \sin x \end{cases}$

$f^{*-1}: \begin{cases} [-1, +1] \to [-\frac{\pi}{2}, +\frac{\pi}{2}] \\ x \to \arcsin x \end{cases}$

Trigonometrische Funktionen und Umkehrfunktionen

- **f(x) = sin(x)**



$f: \begin{cases} \mathbb{R} \to \mathbb{R} \\ x \to \sin x \end{cases}$

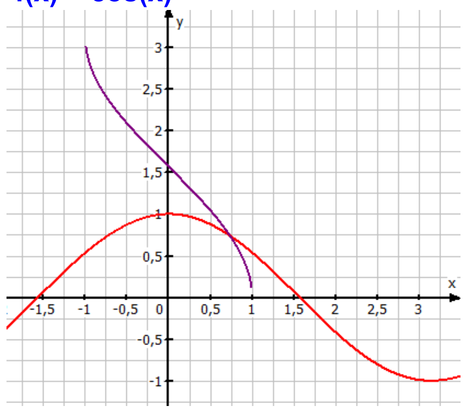
- ist nicht injektiv
- ist nicht surjektiv

$f: \begin{cases} [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}] \to [-1,1] \\ x \to \sin x \end{cases}$

- ist injektiv
- ist surjektiv

$f^{-1}: \begin{cases} [-1,1] \to [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}] \\ x \to \arcsin x \end{cases}$

- **f(x) = cos(x)**

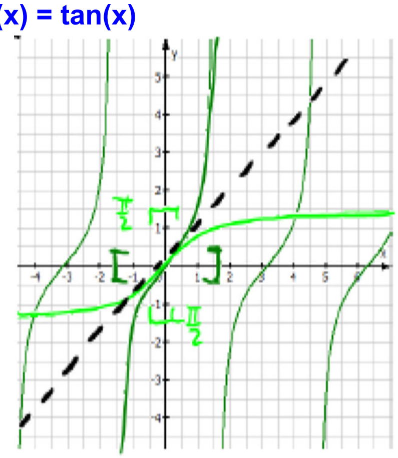


$f: \begin{cases} [0,\pi] \to [-1,1] \\ x \to \cos x \end{cases}$

bijektiv

$f^{-1}: \begin{cases} [-1,1] \to [0,\pi] \\ x \to \arccos x \end{cases}$

- **f(x) = tan(x)**



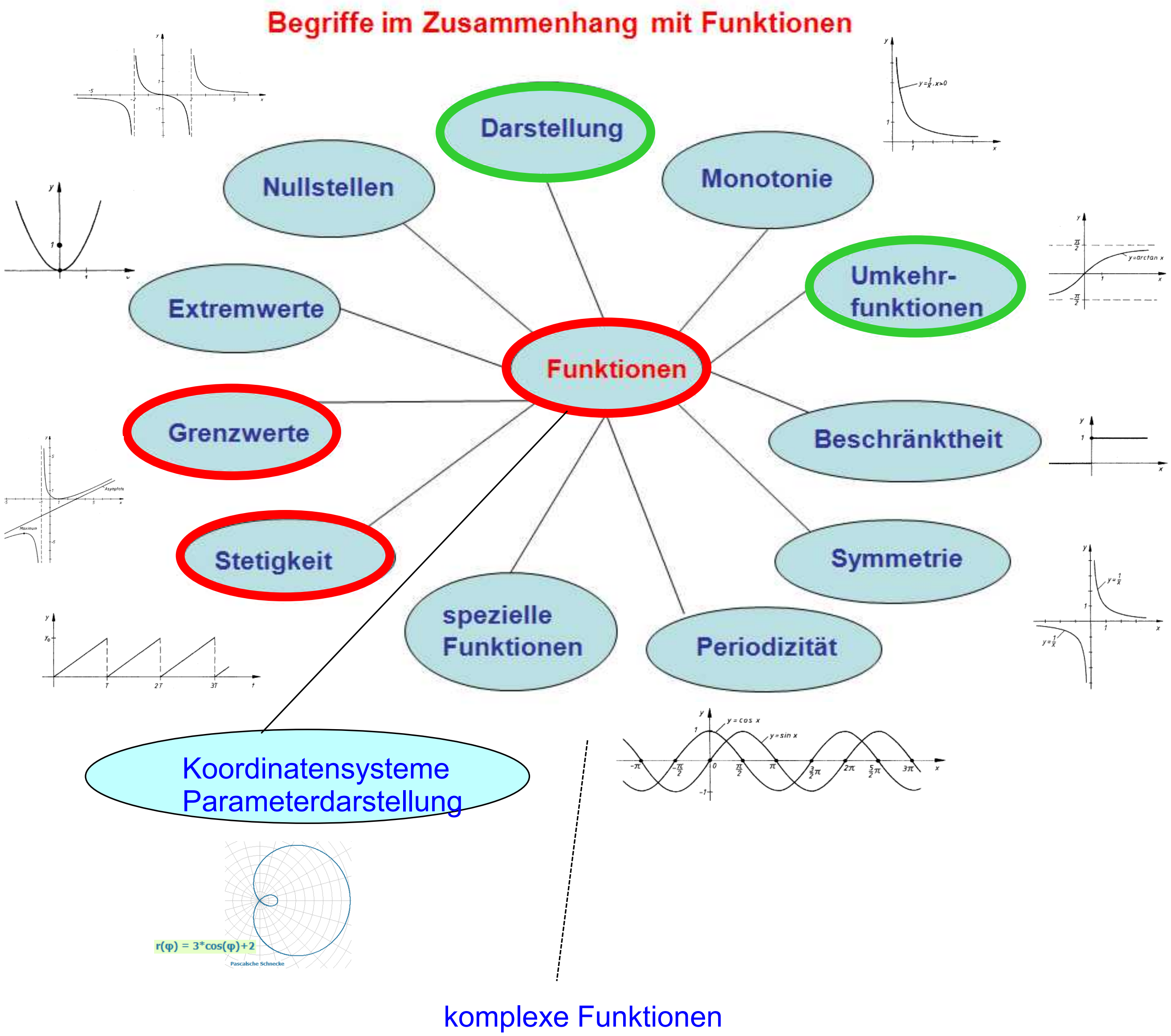
$f: \begin{cases} (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}) \to \mathbb{R} \\ x \to \tan x \end{cases}$

bijektiv ⇒ umkehrbar

$f^{-1}: \begin{cases} \mathbb{R} \to (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}) \\ x \to \arctan x \end{cases}$

Grundlegende Werte der trigonometrischen Funktionen:

Grad	Bogenmaß	sin	cos	tan
0°	0	0	1	0
30°	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}\sqrt{3} = 0.866$	$\frac{1}{3}\sqrt{3} = \frac{1}{\sqrt{3}} = 0.577$
45°	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{1}{2}\sqrt{2} = 0.707$	$\frac{1}{2}\sqrt{2} = 0.707$	1
60°	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{1}{2}\sqrt{3} = 0.866$	$\frac{1}{2}$	$\sqrt{3} = 1.732$
90°	$\frac{\pi}{2}$	1	0	$\pm\infty$
135°	$\frac{3\pi}{4}$	$\frac{1}{2}\sqrt{2} = 0.707$	$-\frac{1}{2}\sqrt{2} = -0.707$	-1
180°	π	0	-1	0
270°	$\frac{3\pi}{2}$	-1	0	$\pm\infty$


Begriffe im Zusammenhang mit Funktionen
Darstellung
Nullstellen
Monotonie
Umkehr-
funktionen
Extremwerte
Funktionen
Grenzwerte
Beschränktheit
Stetigkeit
Symmetrie
spezielle
Funktionen
Periodizität
Koordinatensysteme
Parameterdarstellung
r(φ) = 3*cos(φ)+2
Pascalsche Schnecke
komplexe Funktionen

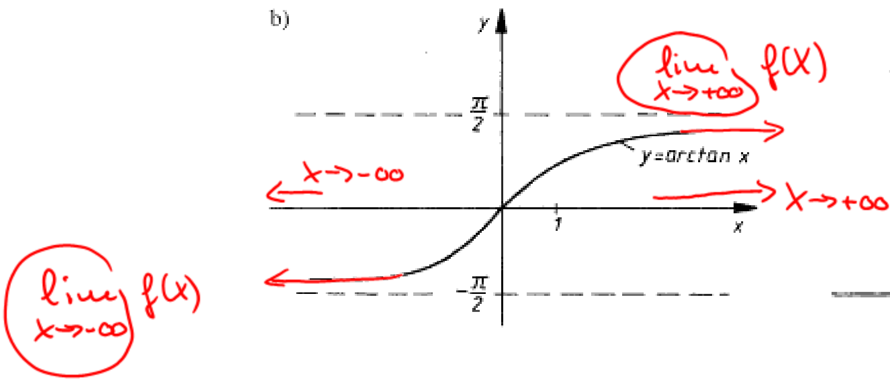
Grenzwerte für Funktionen

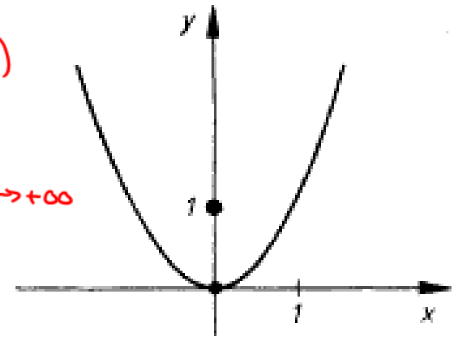
jetzt

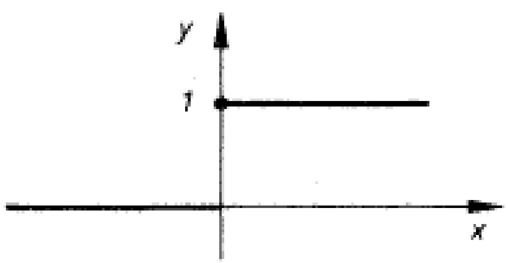
Grenzwert $x \to \infty$ Grenzwert $x \to -\infty$

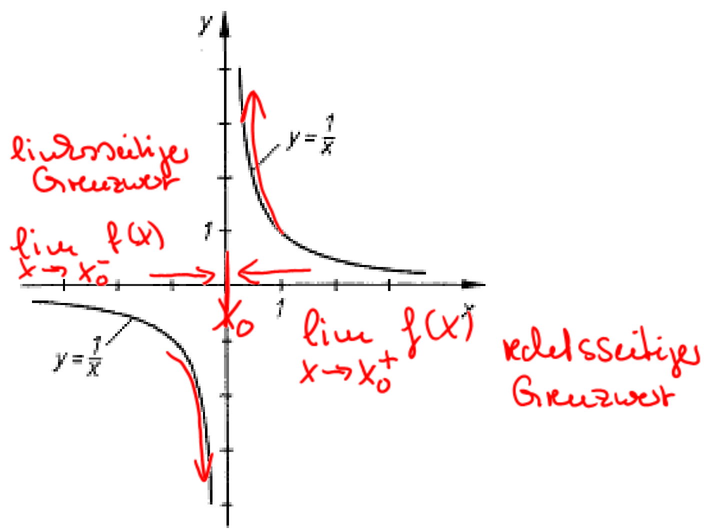
Grenzwert $x \to x_0$ /Grenzwert $x \to x_0^-$ / Grenzwert $x \to x_0^+$

Stetigkeit

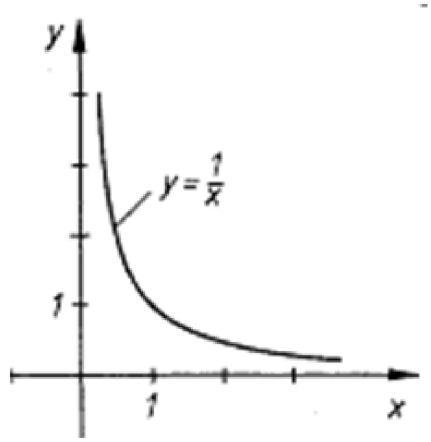








$$f(x) = \begin{cases} 1, & x \geq 0 \\ 0, & x < 0 \end{cases}$$



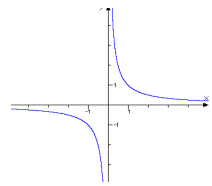
Vorlesungsende 1.12.2022

5.4 Grenzwert und Stetigkeit

5.4.1 Grenzwerte von Funktionen

Grenzwertermittlung x-> ∞ (bzw. x->-∞)
Berechnung, wie sich die Funktion für immer größer (bzw. immer kleiner) werdende x-Werte verhält?

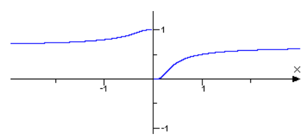
Beispiel 1: $f(x) = \frac{1}{x}$



Grenzwert einer Funktion für x->∞

Grenzwert einer Funktion für x->-∞

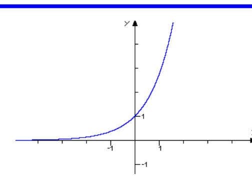
Beispiel 2: $f(x) = \frac{2}{2^{\frac{1}{x}} + 2}$



Grenzwert einer Funktion für x->∞

Grenzwert einer Funktion für x->-∞

Beispiel 3: $f(x) = e^x$



Grenzwert einer Funktion für x->∞

Grenzwert einer Funktion für x->-∞

Bemerkung:
Der Grenzwert einer Funktion für **x->-∞** kann auf den Grenzwert einer Funktion für **x->+∞** zurückgeführt werden, wenn in dem zu betrachtenden Ausdruck **x** durch **(-x)** ersetzt wird.

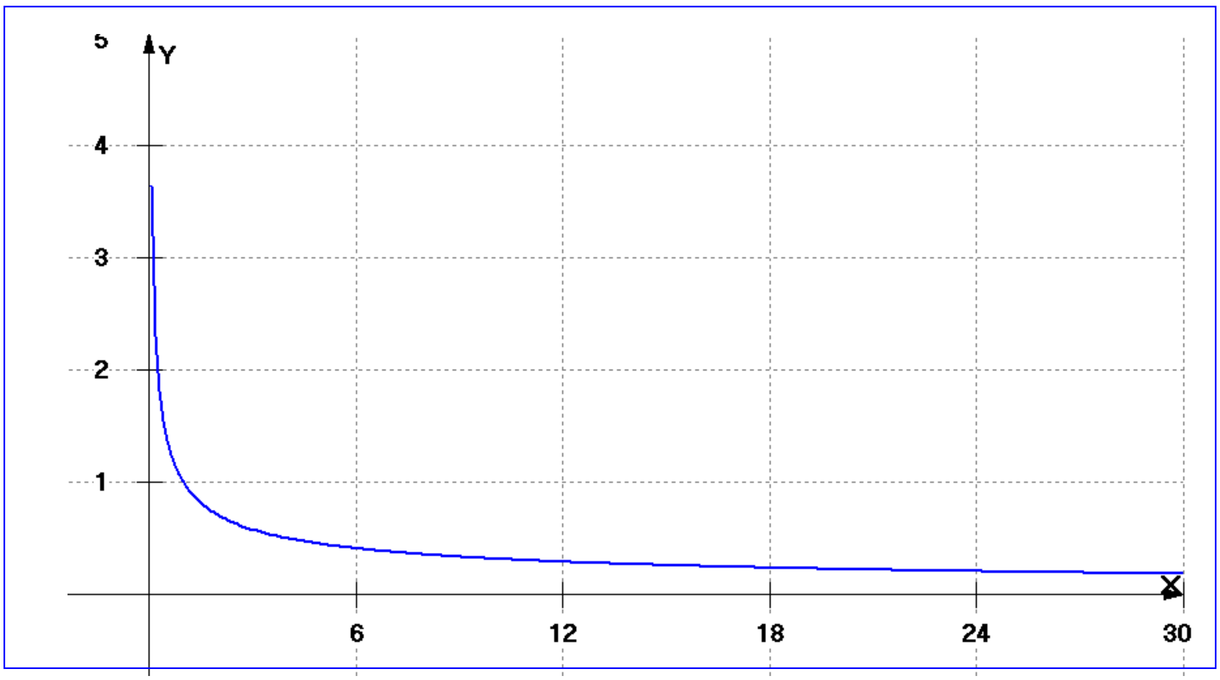
5.4 Grenzwert und Stetigkeit

5.4.1 Grenzwerte von Funktionen

Definition 5.15: Grenzwert $x \to \pm\infty$ **- Definition mit Hilfe von Folgen**

Besitzt für alle Folgen $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit $x_n \to \infty(-\infty)$ für $n \to \infty$ die Folge der Funktionswerte $\left(f(x_n)\right)_{n\in\mathbb{N}}$ den gleichen Grenzwert g, so heißt g der **Grenzwert von** $f(x)$ **für** $x \to \infty(-\infty)$.

Schreibweise: $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = g \quad (bzw.\ \lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = g)$



Beispiel : Grenzwertberechnung über Folgen

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{x}}$$

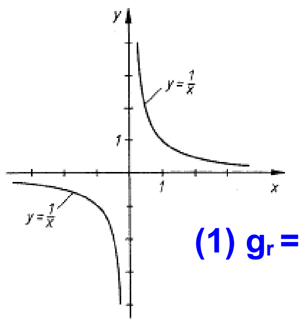
$$\lim_{x\to\infty} \frac{1}{\sqrt{x}} =$$

Beispiele: Grenzwert einer Funktion für x->x_0

Grenzwertermittlung $x \to x_0$

Grenzwert $x \to x_0$ /Grenzwert $x \to x^-_0$ / Grenzwert $x \to x^+_0$

Grenzwert
x -> 0

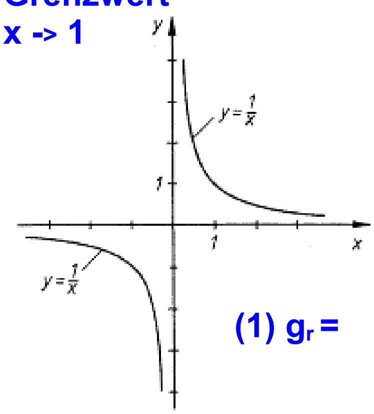


(1) g_r =

(2) g_l =

(3)

Grenzwert
x -> 1



(1) g_r =

(2) g_l =

(3)

Berechnung des Grenzwertes an einer Stelle x_0

Definition 5.12: Grenzwert $x \to x_0$ **- Definition mit Hilfe von Folgen**

Sei f eine reelle Funktion.

Wenn für jede Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit dem Grenzwert x_0 mit $x_n \in D$ und $x_n \neq x_0 \;\; \forall n \in \mathbb{N}$, die Folge $\left(f(x_n)\right)_{n\in\mathbb{N}}$ den Grenzwert g besitzt (d.h. $\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n) = g$), dann heißt g **der Grenzwert von f bei der Annäherung an** x_0.

Schreibweise: $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = g$

Definition 5.14: linksseitiger/ rechtsseitiger Grenzwert $x \to x_0$

Für jede von links gegen x_0 strebende Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ (d.h. $x_n < x_0 \;\; \forall n \in \mathbb{N}$) sei

$$\lim_{n\to\infty} f(x_n) = \lim_{\substack{x\to x_0 \\ x<x_0}} f(x) = g_l \qquad \left(=: \lim_{x\to x_0^-} f(x)\right)$$

g_l heißt **linksseitiger Grenzwert** von f(x) für $x \to x_0^-$.

Für jede von rechts gegen x_0 strebende Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ (d.h. $x_n > x_0 \;\; \forall n \in \mathbb{N}$) sei

$$\lim_{n\to\infty} f(x_n) = \lim_{\substack{x\to x_0 \\ x>x_0}} f(x) = g_r \qquad \left(=: \lim_{x\to x_0^+} f(x)\right)$$

g_r heißt **rechtsseitiger Grenzwert** von f(x) für $x \to x_0^+$.

•

Grenzwert einer Funktion für $x \to x_0$

(1) rechtsseitiger Grenzwert für $x \to x_0$

(2) linksseitiger Grenzwert für $x \to x_0$

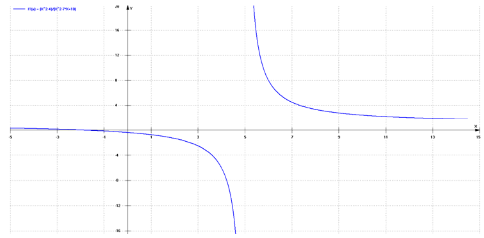
(3) Grenzwert für $x \to x_0$

Bemerkung 1:
Es ist ausreichend, nur eine Folge von links und und eine Folge von rechts zu wählen, da diese repräsentativ sind!

Bemerkung 2:
Sobald der Grenzwert von einer Seite nicht existiert, existiert der Grenzwert in dem Punkt nicht.

Beispiel zur Grenzwertberechnung :

$$f(x) = \frac{x^2-4}{x^2-7x+10}$$



Beispiel: Grenzwert für $\boxed{x \to 5}$

① rechtsseitiger Grenzwert g_r

$$g_r = \lim_{x \to 5^+} f(x) \underset{\uparrow}{=} \ldots$$

$$x_n = 5 + \frac{1}{n}$$

② linksseitiger Grenzwert g_l

$$g_l = \lim_{x \to 5^-} f(x) \underset{\uparrow}{=} \ldots$$

$$x_n = 5 - \frac{1}{n}$$

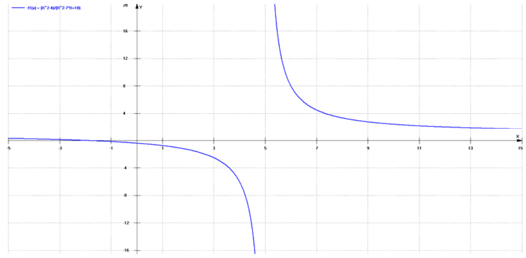
③ gemeinsamer Grenzwert g?

Ist $g_l = g_r$?

.

Beispiel zur Grenzwertberechnung - Fortsetzung:

$$f(x)=\frac{x^2-4}{x^2-7x+10}$$



Beispiel: Grenzwert für $\boxed{x \to 2}$

① rechtsseitiger Grenzwert g_r

$$g_r = \lim_{x\to 2^+} f(x) = \dots \qquad \uparrow \quad x_n = 2+\frac{1}{n}$$

② linksseitiger Grenzwert g_ℓ

$$g_\ell = \lim_{x\to 2^-} f(x) = \dots \qquad \uparrow \quad x_n = 2-\frac{1}{n}$$

③ gemeinsamer Grenzwert g?

Ist $g_\ell = g_r$?

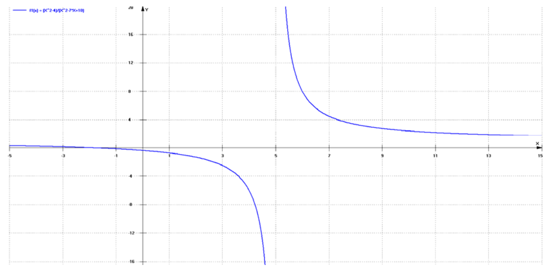
Umformen durch Kürzen in eine ähnliche Funktion, aber nicht gleiche Funktion:

$$\Rightarrow \quad f(x)=\frac{x^2-4}{x^2 \quad 7x \mid 10}$$

Beispiel zur Grenzwertberechnung - Zusammenfassung:

$$f(x) = \frac{x^2 - 4}{x^2 - 7x + 10} = \frac{x^2 - 4}{(x-2)(x-5)}$$

$$\textit{Definitionsbereich } D = \mathbb{R} \setminus \{2,5\}$$



Definitionslücke im Punkt $x_0 = 2$: **Grenzwert existiert**

$$g_r = g_l = -\frac{4}{3}$$

$$\lim_{x \to 2} f(x) = \frac{x^2 - 4}{x^2 - 7x + 10} = -\frac{4}{3}$$

Grenzwert existiert - Heben der Definitionslücke möglich

- durch minimale Veränderung der Funktion
- Grenzwert wird als Funktionswert in der Definitionslücke definiert

$$f_1(x) = \begin{cases} \dfrac{x^2 - 4}{x^2 - 7x + 10}, & x \neq 2 \\ -\dfrac{4}{3}, & x = 2 \end{cases} \qquad \textit{Definitionsbereich } D_1 = \mathbb{R} \setminus \{5\}$$

Umformen durch Kürzen in eine ähnliche Funktion, aber nicht gleiche Funktion:

$$f_1(x) = \frac{x^2 - 4}{x^2 - 7x + 10} = \frac{\cancel{(x-2)}(x+2)}{\cancel{(x-2)}(x-5)} = \frac{x+2}{x-5}$$

$$\textit{Definitionsbereich } D_1 = \mathbb{R} \setminus \{5\}$$

Definitionslücke im Punkt $x_0 = 5$: **kein Grenzwert vorhanden**

$$g_r = \infty$$

$$g_l = -\infty$$

kein Grenzwert vorhanden - Heben der Definitionslücke nicht möglich

- Funktionswerte streben an der Definitionslücke gegen $\pm\infty$
- Funktion hat einen Pol im Punkt x_0

Weiteres Beispiel: Grenzwert x_0=0

$$Beispiel: \quad f(x) = \frac{|x| + x}{x}$$

(1) Rechtsseitiger Grenzwert g_R in dem Punkt x_0=0

(2) Linksseitiger Grenzwert g_L in dem Punkt x_0=0

(3) Da der Linksseitige Grenzwert g_L ungleich dem Rechtsseitigen Grenzwert g_R ist, existiert kein Grenzwert g in dem Punkt x_0=0!