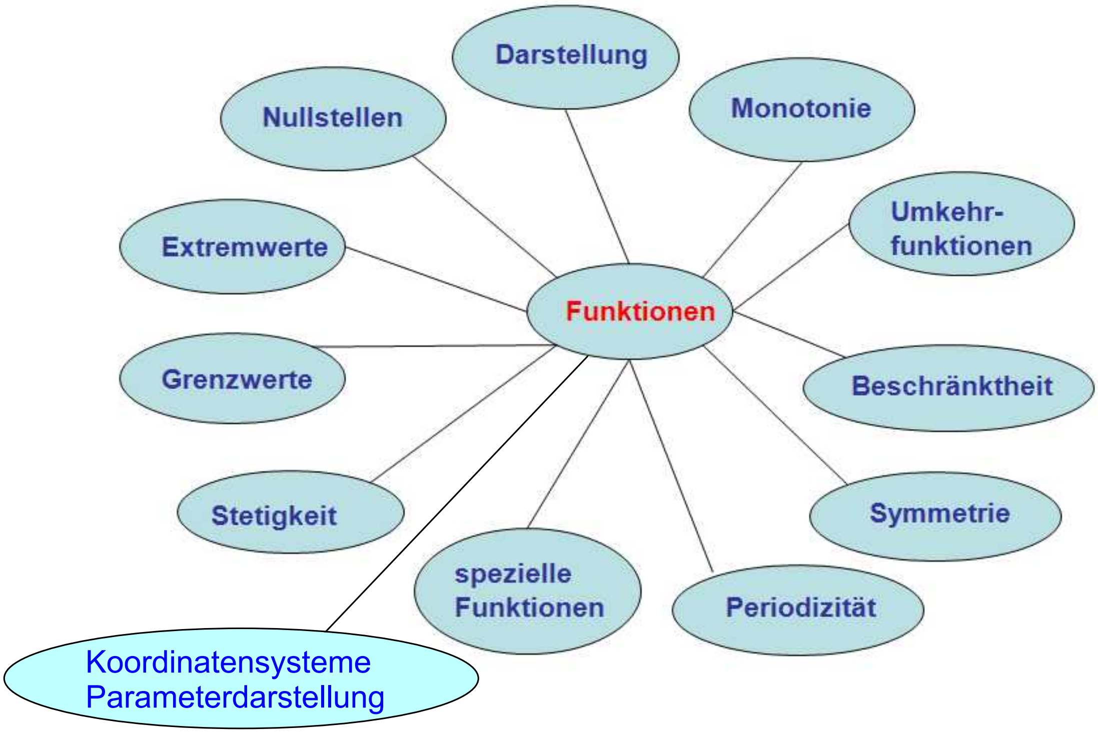
Vorlesung 23 am 21.12.2022

Inhalte: Funktionen 5 - Differentialrechnung2

- Grundlegende Funktionen

4 Differentialrechnung

Begriffe im Zusammenhang mit Funktionen



Nachweismöglichkeit der Symmetrie:

$$f(-x) = \ldots = \begin{cases} f(x) & \Rightarrow \text{gerade Symmetrie} \\ -f(x) & \Rightarrow \text{ungerade Symmetrie} \\ \text{etwas anderes} & \Rightarrow \text{keine Symmetrie} \end{cases}$$

Nachweis der Periodizität:

Ansatz: $f(x+p) \overset{!}{=} f(x)$

p so bestimmen, dass die Gleichung $\forall x \in \mathbb{R}$ erfüllt ist.

Nachweis der Monotonie - Möglichkeiten

1. **Annahme einer Monotonie und Nachweis der Gültigkeit der entsprechenden Ungleichung** $\forall x_1, x_2 \in I$

2. **Ansatz über die Differenz**

$$f(x_2) - f(x_1) \begin{cases} < 0 & \Rightarrow \text{streng monoton fallend} \\ \leq 0 & \Rightarrow \text{monoton fallend} \\ > 0 & \Rightarrow \text{streng monoton wachsend} \\ \geq 0 & \Rightarrow \text{monoton wachsend} \end{cases}$$

$\forall x_1, x_2 \in I$

Nachweismöglichkeiten der Beschränktheit:

- wie bei Folgen

- durch Abschätzen der Funktionsvorschrift
  - nach unten
  - nach oben
  - über den Betrag, damit erhält man gleichzeitig eine untere und obere Schranke

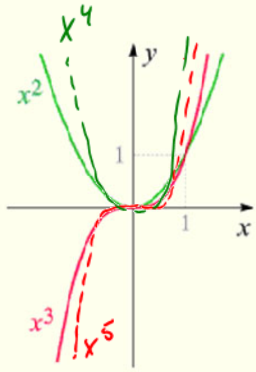
- Kenntnis über Funktionsverläufe von Grundfunktionen
- Nachweis durch Annahme einer Schranke und zeigen der Gültigkeit der Aussage

Potenzfunktionen

Steckbrief der Funktionen $x \longrightarrow x^m$ für natürliches m (m = 1, 2, 3, ...)

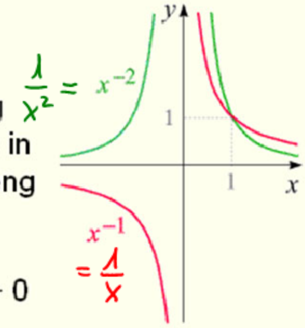
- Definitionsbereich: R
- Wertebereich: für gerades m: R_0^+;
  für ungerades m: $\mathbb{R}$
- Injektivität: für gerades m: nicht injektiv; für ungerades m: injektiv
- Monotonie: für gerades m: nicht monoton; für ungerades m: streng monoton wachsend
- Periodizität: keine
- Positivität: für gerades m: überall ≥ 0
- Nullstellen: bei x = 0 Nullstelle m-ter Ordnung
- Asymptoten: keine
- Unendlichkeitsstellen: keine

auf $\mathbb{R}$ sondern nur für Intervalle



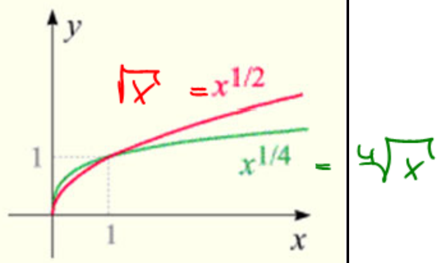
Steckbrief der Funktionen $x \longrightarrow x^m$ für negatives ganzzahliges m (m = –1, –2, –3, ...)

- Definitionsbereich: $R \setminus \{0\}$
- Wertebereich: für gerades m: R^+; für ungerades m: $R \setminus \{0\}$
- Injektivität: für gerades m: nicht injektiv; für ungerades m: injektiv
- Monotonie: für gerades m: im Bereich $x < 0$ streng monoton wachsend, im Bereich $x > 0$ streng monoton fallend; für ungerades m: in den Bereichen $x < 0$ und $x > 0$ streng monoton fallend
- Periodizität: keine
- Positivität: für gerades m: überall > 0
- Nullstellen: keine
- Asymptoten: beide Koordinatenachsen
- Unendlichkeitsstellen: Pol $|m|$-ter Ordnung bei x = 0



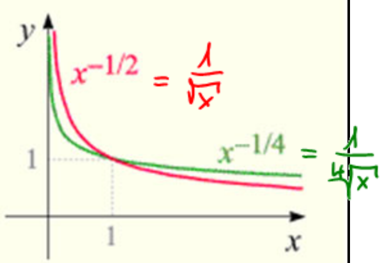
Steckbrief der Funktionen $x \longrightarrow x^m$ für positives reelles nicht-ganzzahliges m

- Definitionsbereich: R_0^+
- Wertebereich: R_0^+
- Injektivität: injektiv
- Monotonie: streng monoton wachsend
- Periodizität: keine
- Positivität: überall ≥ 0
- Nullstellen: $x = 0$
- Asymptoten: keine
- Unendlichkeitsstellen: keine



Steckbrief der Funktionen $x \longrightarrow x^m$ für negatives reelles nicht-ganzzahliges m

- Definitionsbereich: R^+
- Wertebereich: R^+
- Injektivität: injektiv
- Monotonie: streng monoton fallend
- Periodizität: keine
- Positivität: überall > 0
- Nullstellen: keine
- Asymptoten: ~~keine~~ $y=0$ für $x \to +\infty$
- Unendlichkeitsstellen: bei $x = 0$



Potenzfunktionen mit rationalem Exponenten

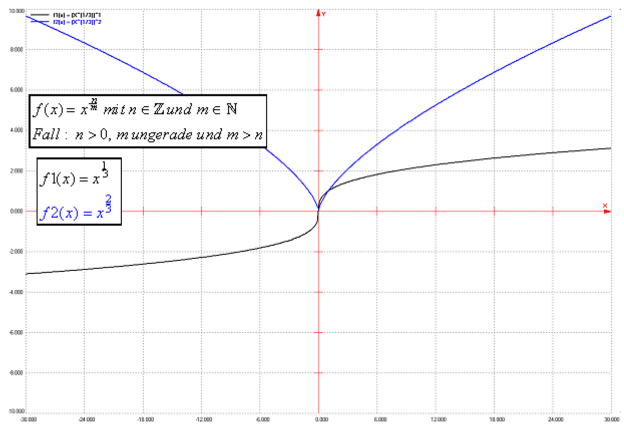
definiert als $x^{\frac{n}{m}} = \sqrt[m]{x^n}$

Zusammenfassung: Potenzfunktion mit rationalem Exponenten

$f(x) = x^{\frac{n}{m}}$ $mit\ n \in \mathbb{Z}\ und\ m \in \mathbb{N}$

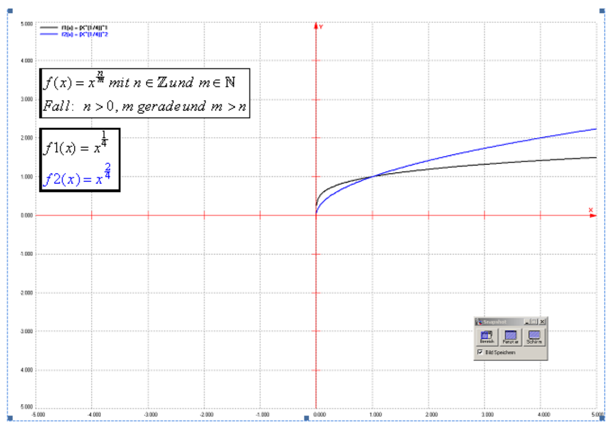
Eigenschaften	$n>0$ $m\ ungerade$	$n>0$ $m\ gerade$	$n<0$ $m\ ungerade$	$n<0$ $m\ gerade$
Definitionsbereich	$\mathbb{R}$	$[0,\infty)$	$\mathbb{R}\setminus\{0\}$	$(0,\infty)$
Bildbereich	n gerade: $\mathbb{R}_0^+$, n ungerade: $\mathbb{R}$,	$\mathbb{R}_0^+$	n gerade: $\mathbb{R}^+$, n ungerade: $\mathbb{R}\setminus\{0\}$,	$\mathbb{R}^+$
Beschränktheit	n gerade: untere Schranke 0 n ungerade: unbeschränkt	untere Schranke 0	n gerade: untere Schranke 0 n ungerade: unbeschränkt	untere Schranke 0
Monotonie	n gerade: für $x \geq 0$ streng monoton wachsend, für $x \leq 0$ streng monoton fallend n ungerade: streng monoton wachsend	streng monoton wachsend	n gerade: für $x \geq 0$ streng monoton fallend, für $x \leq 0$ streng monoton wachsend n ungerade: streng monoton fallend	streng monoton fallend

Beispiele für Potenzfunktionen mit rationalem Exponenten für m>n>0



siehe auch

http://www.realmath.de/Neues/Klasse10/potfkt2/ggbxhochnrat.html



5.5.4 Exponential- und Logarithmusfunktionen

Definition 5.27: Exponentialfunktion

Eine reelle Funktion $f(x) = a^x \; mit \; a > 0$ bezeichnet man als eine allgemeine **Exponentialfunktion zur Basis a** (Schreibweise auch $\exp_a(x)$).

Ist die Basis die Zahl e, so wird diese spezielle Exponentialfunktion $f(x) = e^x$ auch **e-Funktion** genannt.

Zusammenfassung: Exponentialfunktion

Eigenschaften	$f(x) = a^x \; mit \; 0 < a < 1$	$f(x) = a^x \; mit \; a > 1$
Definitionsbereich	$\mathbb{R}$	$\mathbb{R}$
Bildbereich	$(0, \infty)$	$(0, \infty)$
Beschränktheit	untere Schranke: 0	untere Schranke: 0
Monotonie	streng monoton fallend	streng monoton steigend
Umkehrfunktion	existiert	existiert
Symmetrie	-	-
Periodizität	-	-
Asymptoten	$y = 0 \; (für \; x \to \infty)$	$y = 0 \; (für \; x \to -\infty)$
Nullstellen	-	-
Minimum/Maximum	-	-
Besonderheiten:	fester Punkt: (0,1)	fester Punkt: (0,1)

Bemerkungen zur e-Funktion:

(1) e-Funktion hat nur positive Werte

(2) ... keine Nullstelle

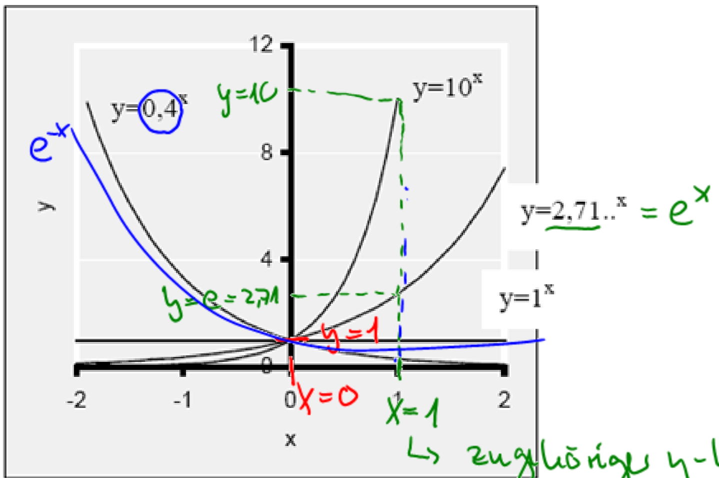
(3) ... keinen Extremwert

(4) ...

Beispiele einiger Exponentialfunktionen

$\left(\frac{1}{2}\right)^x = \frac{1}{2^x} = 2^{-x}$

$\left(\frac{1}{2{,}71}\right)^x = \left(\frac{1}{e}\right)^x = \frac{1}{e^x} = e^{-x}$



↳ zugehörige y-Wert ist der Wert der Basis

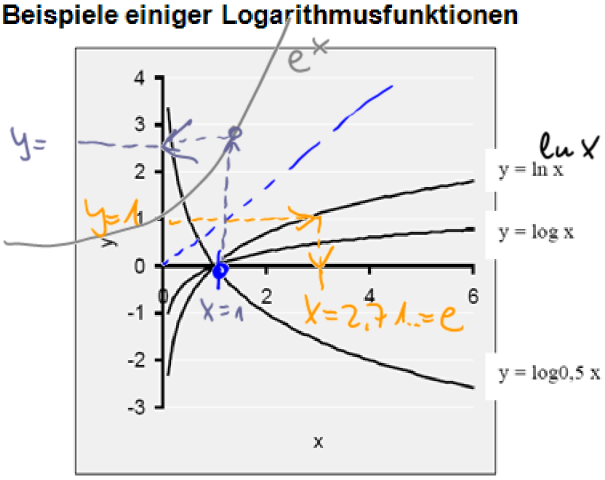
Bemerkung:

Verlauf e^{-x} und e^x ist an der y-Achse gespiegelt.

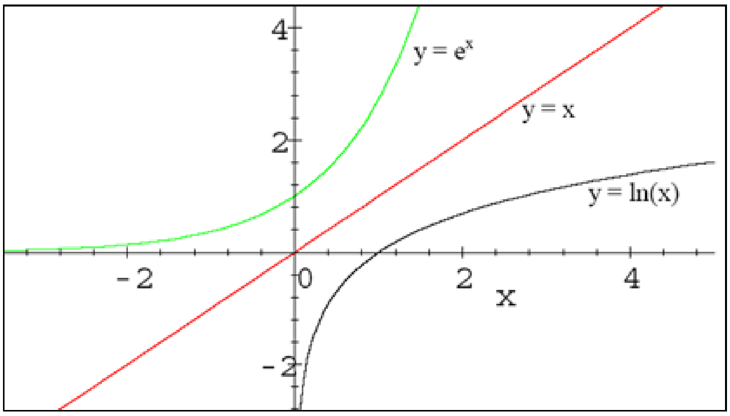
Zusammenfassung: Logarithmusfunktion

Eigenschaften	$f(x) = \log_a x$
Definitionsbereich	$\mathbb{R}^+$
Bildbereich	$(-\infty, \infty)$
Beschränktheit	-
Monotonie	streng monoton wachsend (a>1) streng monoton fallend (0<a<1)
Umkehrfunktion	existiert → $f^{-1}(x) = a^x$
Symmetrie	-
Periodizität	-
Asymptoten	- → Pol bei x = 0
Nullstellen	x=1
Minimum/Maximum	-
Besonderheiten:	fester Punkt: (1,0)

Beispiele einiger Logarithmusfunktionen



Wo findet man die Basis bei der Logarithmusfunktion?
→ bei y=1 zugehöriger x-Wert ist die Basis



Exponentialfunktion e^x mit Umkehrfunktion ln(x)

Satz 5.13: Rechenregeln für Logarithmusfunktionen

Für alle reellen x>0, y>0 gilt:

$$\log_a(x \cdot y) = \log_a x + \log_a y$$

$$\log_a\left(\frac{x}{y}\right) = \log_a x - \log_a y$$

$$\log_a\left(\frac{1}{y}\right) = -\log_a y$$

$$\alpha \log_a x = \log_a x^\alpha, \quad \text{für alle } \alpha \in \mathbb{R}$$

Satz 5.14: Umrechnung von Logarithmen

Jede Logarithmusfunktion zur Basis a kann durch einen andere Logarithmusfunktion zur Basis b ausgedrückt werden, in dem mit einer Konstanten $\frac{1}{\log_b a}$ multipliziert wird:

$$\log_a x = \frac{\log_b x}{\log_b a} \quad \text{für alle } x > 0 \qquad \text{z.B. } \log_a x = \frac{\ln x}{\ln a} \quad \text{für alle } x > 0.$$

Umrechnungsfaktor

Beispiel: $2^6 \Rightarrow \log_2 64 = 6$

$8^2 \Rightarrow \log_8 64 = 2$

$$\log_8 64 = \frac{\log_2 64}{\underbrace{\log_2 8}_{=3}} = \frac{6}{3} = 2$$

Zusammenfassung 1: Trigonometrische Funktionen

Eigenschaften	$f(x)=\sin x$	$f(x)=\cos x$
Definitionsbereich	$\mathbb{R}$	$\mathbb{R}$
Bildbereich	$[-1,1]$	$[-1,1]$
Beschränktheit	obere Schranke: 1 untere Schranke: -1	obere Schranke: 1 untere Schranke: -1
Monotonie	nur im Intervall	nur im Intervall
Umkehrfunktion	nur im Intervall	nur im Intervall
Symmetrie	ungerade	gerade
Periodizität	primitive Periode 2π	primitive Periode 2π
Asymptoten	-	-
Nullstellen	$x=k\pi,\ k\in\mathbb{Z}$	$x=\frac{\pi}{2}(2k+1),\ k\in\mathbb{Z}$
Minimum/Maximum	lokale Maxima: $x=\frac{\pi}{2}(4k+1),\ k\in\mathbb{Z}$ lokale Minima: $x=\frac{\pi}{2}(4k+3),\ k\in\mathbb{Z}$	lokale Maxima: $x=\pi 2k,\ k\in\mathbb{Z}$ lokale Minima: $x=\pi(2k+1),\ k\in\mathbb{Z}$
Besonderheiten	-	-

Zusammenfassung 2: Trigonometrische Funktionen

Eigenschaften	$f(x)=\tan x$	$f(x)=\cot x$
Definitionsbereich	$\mathbb{R}\setminus\{\frac{\pi}{2}(2k+1),\ k\in\mathbb{Z}\}$	$\mathbb{R}\setminus\{k\pi,\ k\in\mathbb{Z}\}$
Bildbereich	$\mathbb{R}$	$\mathbb{R}$
Beschränktheit	-	-
Monotonie	nur im Intervall	nur im Intervall
Umkehrfunktion	nur im Intervall	nur im Intervall
Symmetrie	ungerade	ungerade
Periodizität	primitive Periode π	primitive Periode π
Asymptoten	-	-
Nullstellen	$x=k\pi,\ k\in\mathbb{Z}$	$x=\frac{\pi}{2}(2k+1),\ k\in\mathbb{Z}$
Pole	$x=(2k+1)\frac{\pi}{2},\ k\in\mathbb{Z}$	$x=k\pi,\ k\in\mathbb{Z}$
Minimum/Maximum	-	-
Besonderheiten	-	-

Bemerkungen zu den trigonometrischen Funktionen:

(1) sin(x)/cos(x) haben nur Werte zwischen -1 und 1

(2) ... sind 2π−periodisch

(3) ... haben pro Periode ein Minimum und ein Maximum

(4)

3.5.5 Trigonometrische Funktionen

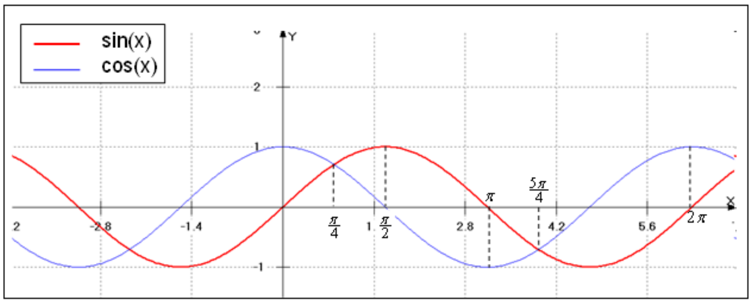


Abbildung 1 Trigonometrische Funktionen Sinus und Cosinus

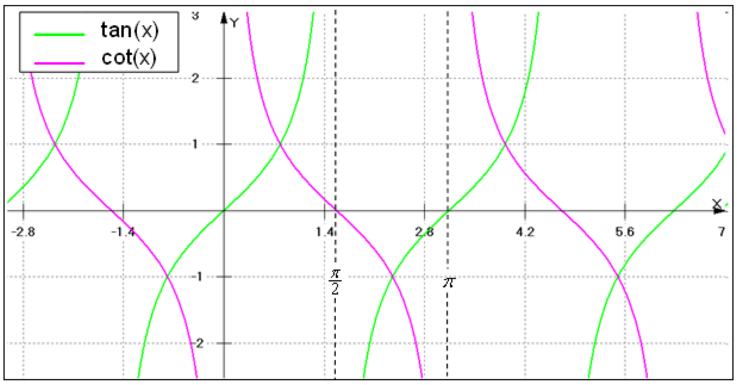


Abbildung 2 Trigonometrische Funktionen Tangens und Cotangens

Werte für spezielle Winkel:

α	sin α	cos α	tan α	cot α
0°	0	1	0	$\pm\infty$
30°	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}\sqrt{3}$	$\frac{1}{3}\sqrt{3}$	$\sqrt{3}$
45°	$\frac{1}{2}\sqrt{2}$	$\frac{1}{2}\sqrt{2}$	1	1
60°	$\frac{1}{2}\sqrt{3}$	$\frac{1}{2}$	$\sqrt{3}$	$\frac{1}{3}\sqrt{3}$
90°	1	0	$\pm\infty$	0
180°	0	−1	0	$\pm\infty$
270°	−1	0	$\pm\infty$	0

Satz 5.15: Beziehungen zwischen den trigonometrischen Funktionen

Die nachfolgend dargestellten Beziehungen stellen nur eine Auswahl dar.

(1) $\tan x = \frac{\sin x}{\cos x}, \quad \cot x = \frac{\cos x}{\sin x} = \frac{1}{\tan x}$

(2) Verschiebung sin gegenüber cos

$$\cos x = \sin(x + \tfrac{\pi}{2}), \quad \sin x = \cos(x - \tfrac{\pi}{2})$$

(3) Trigonometrischer Pythagoras

$$\sin^2 x + \cos^2 x = 1$$

(4) Umrechnung der Winkelfunktionen untereinander

$$\sin x = \sqrt{1 - \cos^2 x}, \quad \cos x = \sqrt{1 - \sin^2 x}$$

$$\tan x = \frac{\sin x}{\sqrt{1 - \sin^2 x}} = \frac{\sqrt{1 - \cos^2 x}}{\cos x}$$

(5) Additionstheoreme

$$\sin(x_1 \pm x_2) = \sin x_1 \cos x_2 \pm \cos x_1 \sin x_2$$
$$\cos(x_1 \pm x_2) = \cos x_1 \cos x_2 \mp \sin x_1 \sin x_2$$
$$\tan(x_1 \pm x_2) = \frac{\tan x_1 \pm \tan x_2}{1 \mp \tan x_1 \tan x_2}$$
$$\cot(x_1 \pm x_2) = \frac{\cot x_1 \cot x_2 \mp 1}{\cot x_2 \pm \cot x_1}$$

(6) $\sin x_1 + \sin x_2 = 2 \sin \frac{x_1 + x_2}{2} \cos \frac{x_1 - x_2}{2}$

$$\cos x_1 + \cos x_2 = 2 \cos \frac{x_1 + x_2}{2} \cos \frac{x_1 - x_2}{2}$$

5.5.6 Zyklometrische Funktionen

Die Umkehrfunktionen der trigonometrischen Funktionen werden zyklometrische Funktionen genannt.

Zur Bildung der Umkehrfunktionen muss der Definitionsbereich der trigonometrischen Funktionen eingeschränkt werden:

$\sin : \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right] \to [-1,1]$

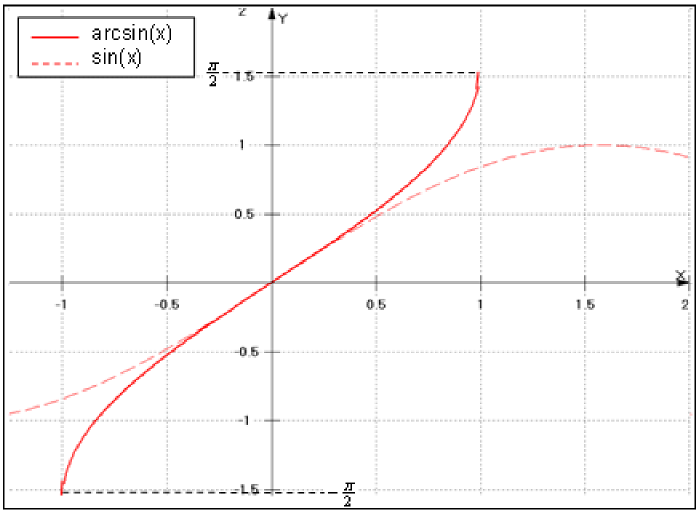
$$\arcsin y := \sin^{-1} y = \{x \mid \sin x = y\} \cap \left[-\tfrac{\pi}{2}, \tfrac{\pi}{2}\right]$$

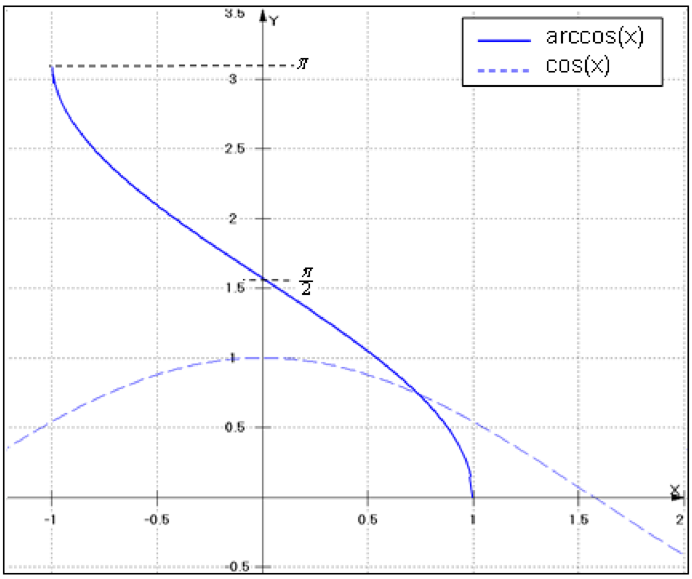
$$\arcsin : [-1,1] \to \left[-\tfrac{\pi}{2}, \tfrac{\pi}{2}\right]$$

$\cos : [0,\pi] \to [-1,1]$

$$\arccos y := \cos^{-1} y = \{x \mid \cos x = y\} \cap [0,\pi]$$

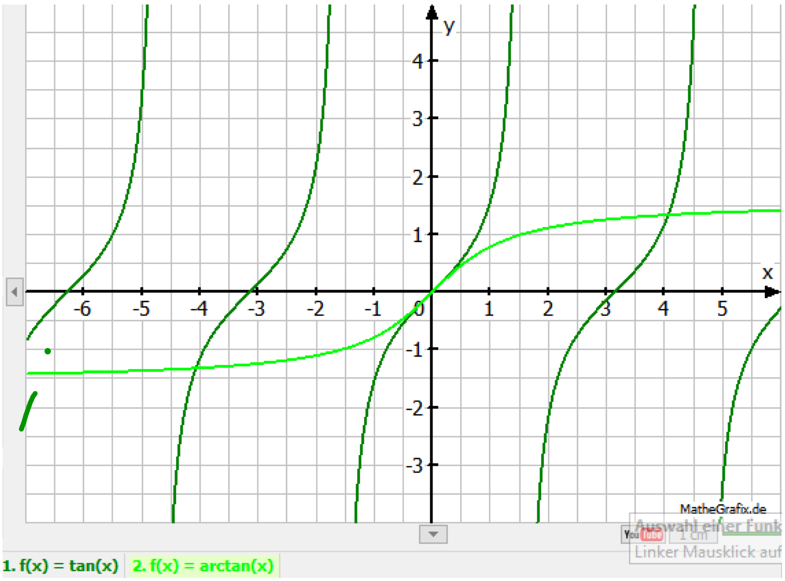
$$\arccos : [-1,1] \to [0,\pi]$$





$f(x) = \tan x$

- $D = \mathbb{R} \setminus \{(2n+1)\frac{\pi}{2}, n \in \mathbb{Z}\}$
- $W = \mathbb{R}$
- umkehrbar für $D = (-\frac{\pi}{2}, +\frac{\pi}{2})$

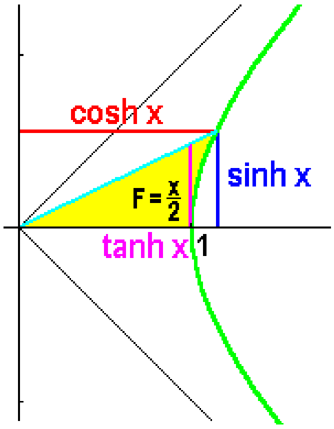


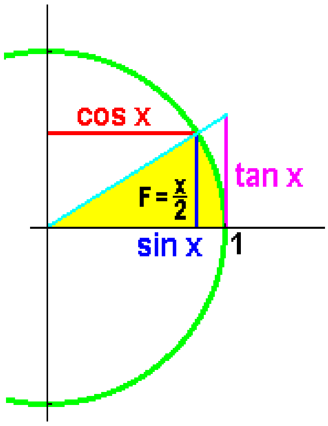
Umkehrfunktion $f^{-1}(x) = \arctan(x)$

- $D = \mathbb{R}$
- $W = (-\frac{\pi}{2}, +\frac{\pi}{2})$

5.5.7 Hyperbel-und Areafunktionen

Hyperbelfunktionen verhalten sich zur Hyperbel analog wie sich die trigonometrischen Funktionen im Einheitskreis verhalten.





Einheitshyperbel: $x^2 - y^2 = 1$ Einheitskreis: $x^2 + y^2 = 1$

•

Definition 5.29: Hyperbelfunktionen

Hyperbelfunktionen sind wie folgt definiert:

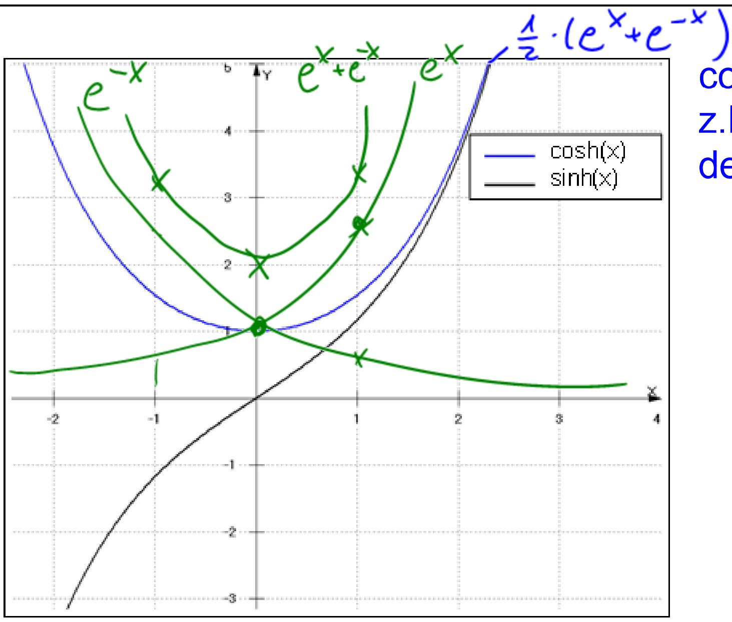
Sinus hyperbolicus $\sinh x = \frac{1}{2}\left(e^{x} - e^{-x}\right)$ $mit\ D = \mathbb{R},\ B = (-\infty, \infty)$

Cosinus hyperbolicus $\cosh x = \frac{1}{2}\left(e^{x} + e^{-x}\right)$ $mit\ D = \mathbb{R},\ B = [1, \infty)$

Tangens hyperbolicus $\tanh x = \dfrac{\sinh x}{\cosh x} = \dfrac{e^{x} - e^{-x}}{e^{x} + e^{-x}}$ $mit\ D = \mathbb{R},\ B = (-1, 1)$

Cotangens hyperbolicus

$$\coth x = \frac{\cosh x}{\sinh x} = \frac{e^{x} + e^{-x}}{e^{x} - e^{-x}} \quad mit\ D = \mathbb{R}\setminus\{0\},\ B = (-\infty, -1) \cup (1, \infty)$$



cosh(x) = "Kettenlinie"
z.B. "Leitung zwischen den Strommasten"

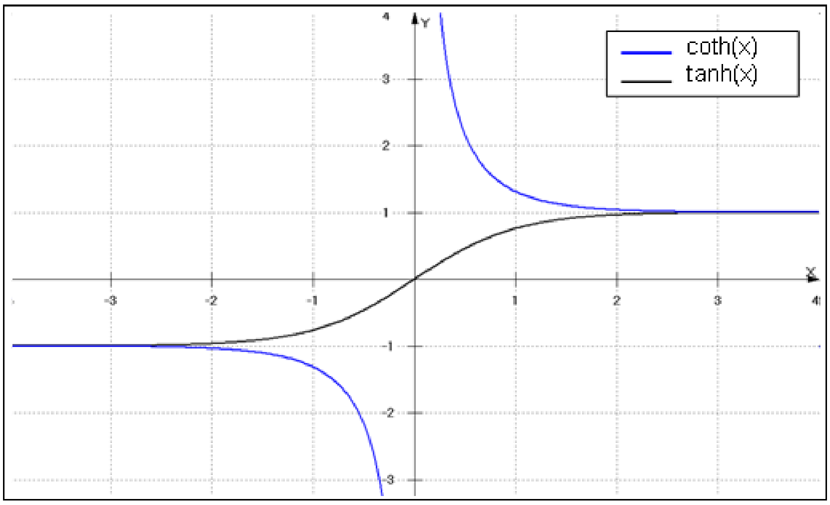


Abbildung 4 Hyperbelfunktionen

	Sinus Hyperbolicus	Kosinus Hyperbolicus
Definitionsbereich	$-\infty < x < +\infty$	$-\infty < x < +\infty$
Wertebereich	$-\infty < f(x) < +\infty$	$1 \leq f(x) < +\infty$
Periodizität	keine	keine
Monotonie	streng monoton steigend	$-\infty < x \leq 0$ streng monoton fallend $0 \leq x < \infty$ streng monoton steigend
Symmetrien	Punktsymmetrie zum Ursprung	Achsensymmetrie zur Ordinate
Asymptotische Funktionen	$a_1(x) = \frac{1}{2}e^{x}, \quad x \to \infty$	$a_1(x) = \frac{1}{2}e^{x}, \quad x \to \infty$
	$a_2(x) = -\frac{1}{2}e^{-x}, \quad x \to -\infty$	$a_2(x) = \frac{1}{2}e^{-x}, \quad x \to -\infty$
Nullstellen	$x = 0$	keine
Sprungstellen	keine	keine
Polstellen	keine	keine
Extrema	keine	Minimum bei $x = 0$
Wendestellen	$x = 0$	keine

aus Wikipedia

Satz 5.17: Beziehungen zwischen den Hyperbelfunktionen

$$\sinh x + \cosh x = e^x$$

ähnlich trig Pyth.

$$\cosh^2 x - \sinh^2 x = 1$$

$$\sinh(-x) = -\sinh x$$ ungerade Fkt | punktsymm.

$$\cosh(-x) = \cosh x$$ gerade Fkt. | achsensymm.

$$\cosh(x+y) = \cosh x \cosh y + \sinh x \sinh y$$

$$\sinh(x+y) = \cosh x \sinh y + \sinh x \cosh y$$

$$(\sinh x)' = \frac{1}{2}(e^x - e^{-x})' = \frac{1}{2}(e^x - e^{-x}\cdot(-1)) = \frac{1}{2}(e^x + e^{-x}) = \cosh x$$

$$(\cosh x)' = \ldots = \sinh x$$

„Zweier Zyklus beim Differenzieren und Integrieren"

Definition 5.30: Areafunktionen

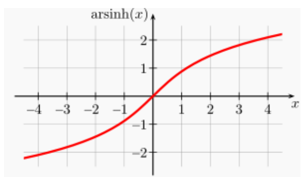
Die Umkehrfunktionen der Hyperbelfunktionen werden Areafunktionen genannt und sind wie folgt definiert:

$$ar\sinh x := \ln(x + \sqrt{x^2+1}), \quad x \in \mathbb{R}$$

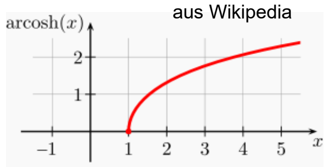
$$ar\cosh x := \pm\ln(x + \sqrt{x^2-1}), \quad x \geq 1$$

$$ar\tanh x := \tfrac{1}{2}\ln\frac{1+x}{1-x}, \quad |x| < 1$$

$$ar\coth x := \tfrac{1}{2}\ln\frac{x+1}{x-1}, \quad |x| > 1$$



aus Wikipedia



Koordinatensysteme - Funktionen

- Darstellung in Polarkoordinaten
- Parameterdarstellung

.

Funktionen

• Darstellung in Polarkoordinaten

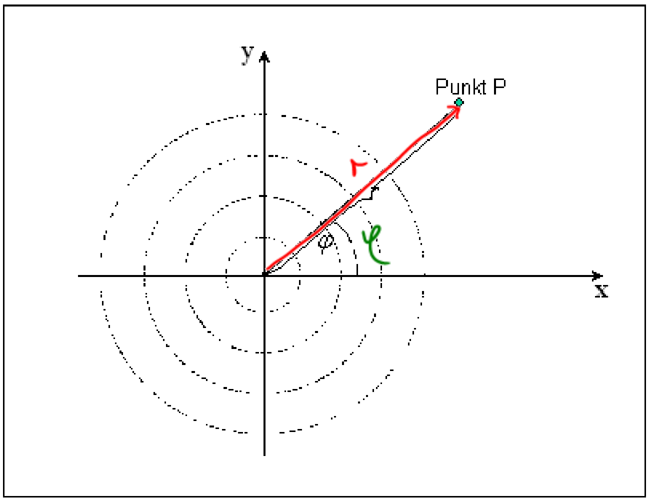
5.3.3 Übergang Kartesische Koordinaten - Polarkoordinaten

Definition 5.11: Polarkoordinaten

Die Polarkoordinaten (r,φ) eines Punktes P der Ebene bestehen aus einer **Abstandskoordinate** r und einer **Winkelkoordinate** φ.

r ist der Abstand des Punktes P vom Koordinatenursprung.

φ ist der Winkel zwischen dem vom Koordinatenursprung zum Punkt P gerichteten Radiusvektor und der positiven x-Achse.



- Die Transformationsgleichungen zum Übergang von kartesischen Koordinaten auf Polarkoordinaten und umgekehrt sind nachfolgend dargestellt:

Kartesische Koordinaten → Polarkoordinaten

$$r = \sqrt{x^2 + y^2} \quad und \quad \tan\varphi = \frac{y}{x} \quad (+\pi \; im \; 2./3. Quadranten)$$

Polarkoordinaten → kartesische Koordinaten

$$x = r \cdot \cos\varphi \quad und \quad y = r \cdot \sin\varphi$$

Funktionen

- **Darstellung in Polarkoordinaten**

→ φ ist die unabhängige Variable ($\hat{=} x$)

→ r ist die abhängige Variable ($\hat{=} y$)

- **Beispiel:**

$r(\varphi) = 2\varphi$ mit $0 \leq \varphi < 2\pi$ D:

ist eine Funktion in Polarkoordinaten

P_0: $\varphi = 0$: $r(0) = 2 \cdot 0 = 0$

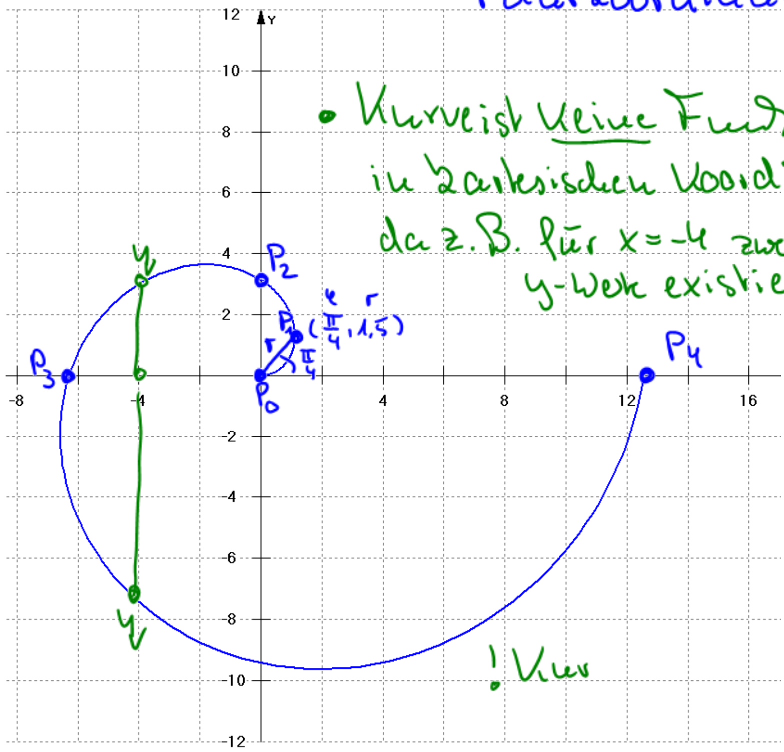
P_1: $\varphi = \frac{\pi}{4}$: $r(\frac{\pi}{4}) = 2 \cdot \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{2} = 1{,}5..$

P_2: $\varphi = \frac{\pi}{2}$: $r(\frac{\pi}{2}) = 2 \cdot \frac{\pi}{2} = \pi$

P_3: $\varphi = \pi$: $r(\pi) = 2 \cdot \pi$

⋮

P_4: $\varphi = 2\pi$: $r(2\pi) = 4 \cdot \pi$



- Kurve ist keine Funktion in kartesischen Koordinaten, da z.B. für $x = -4$ zwei y-Werte existieren

! Kurv

Funktionen: Parameterdarstellung

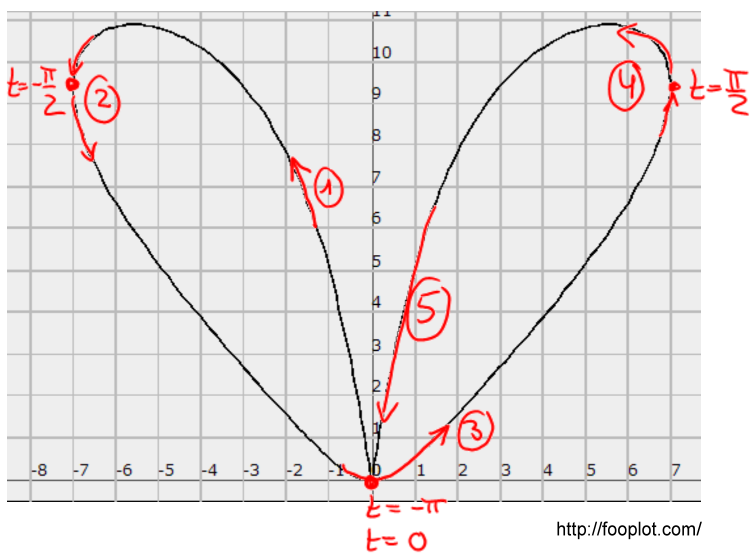
- Eine Kurve wird durch 2 Gleichungen beschrieben.
- Die x-Koordinate und die y-Koordinate werden getrennt voneinander in Abhängigkeit einer Hilfsvariablen (dem sogenannten Parameter) beschrieben.
- Häufig ist der verwendete Parameter die Variable t, als Symbol für die Zeit.
- y(t) und x(t) sind die abhängigen Variablen und werden im kartesischen x-y-Koordinatensystem skizziert.
- t ist die unabhängige Variable und wird in der Regel nicht skizziert, sondern zum Teil nur an einzelnen Punkten benannt.
- Jede Funktion f(x) kann auch in einer Parameterdarstellung angegeben werden mit x(t) = t und y(t) = f(t). → z.B. $y = x^2$ Funktion

! Die Umkehrung gilt nicht!

Parameterdarstellung $\begin{cases} x(t) = t \\ y(t) = t^2 \end{cases}$

Beispiel:

x(t)=6*sin(t)−sin(3*t)
y(t)=6*t*sin(t)
mit −π<t<π



http://fooplot.com/

Wie wird die Kurve mit dem Parameter −π<t<π durchlaufen?

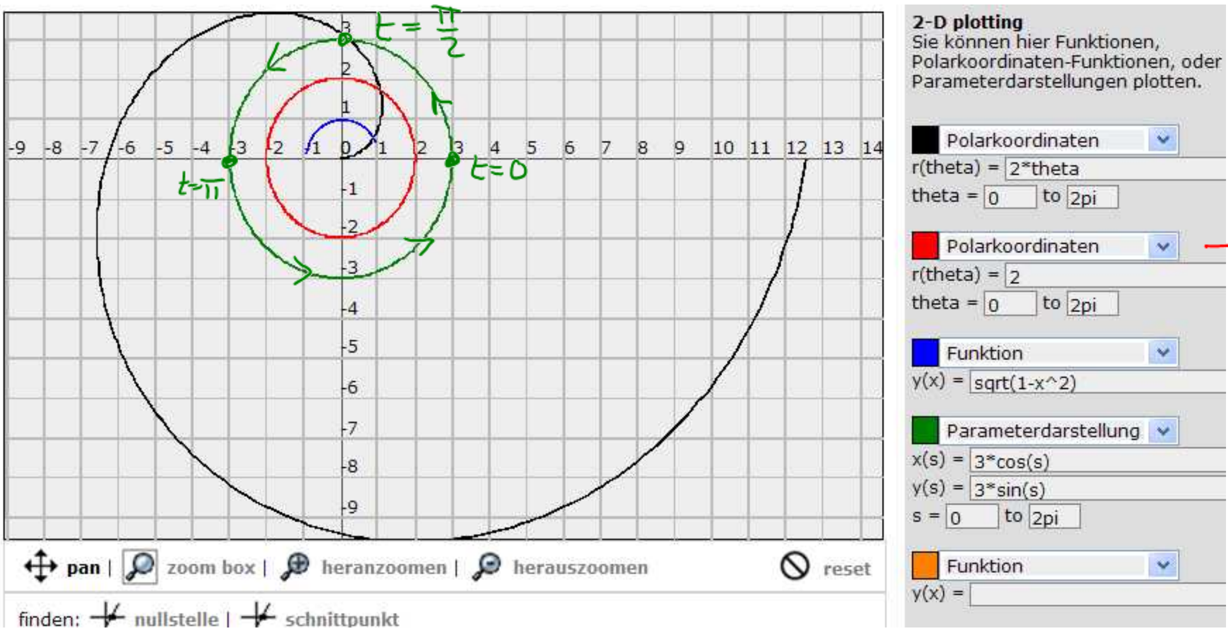
$t=-\pi$: $x(-\pi)=6\cdot\sin(-\pi)-\sin(3\cdot(-\pi))=0$ $y(-\pi)=6\cdot(-\pi)\cdot\sin(-\pi)=0$

$t=-\frac{\pi}{2}$: $x(-\frac{\pi}{2})= \ldots = -7$ $y(-\frac{\pi}{2})= \ldots = 3\pi$

$t=0$: $x(0)= \ldots = 0$ $y(0)= \ldots = 0$

$t=\frac{\pi}{2}$: $x(\frac{\pi}{2})= \ldots = 7$ $y(\frac{\pi}{2})= \ldots = 3\pi$

Zweidimensionale Kurven in anderen Darstellungen



→ Kreis in Polarkoordinaten $r(\varphi)=2$

http://fooplot.com/

Beispiele:

Funktion in Polarkoordinaten $r(\varphi) = 2\varphi$ mit $0 \leq \varphi < 2\pi$ → siehe Seite vorher

Kreis → Funktion in Polarkoordinaten $r(\varphi) = 2$ mit $0 \leq \varphi < 2\pi$

Halbkreis → Funktion in kartesischen Koordinaten $f(x) = \sqrt{1-x^2}$ mit $-1 \leq x < \leq 1$

Kreis → Kurve in Parameterdarstellung $x(t) = 3\cos(t)$, $y(t) = 3\sin(t)$ mit $0 \leq t < 2\pi$

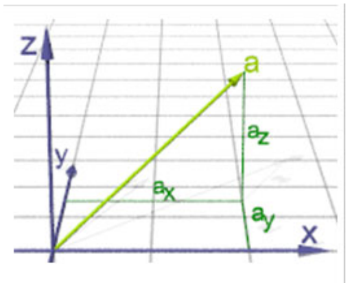
$t=0$: $x(0) = 3\cdot\cos(0) = 3$
$y(0) = 3\cdot\sin(0) = 0$

$t=\frac{\pi}{2}$: $x(\frac{\pi}{2}) = 3\cdot\cos(\frac{\pi}{2}) = 0$
$y(\frac{\pi}{2}) = 3\cdot\sin(\frac{\pi}{2}) = 3$

$t=\pi$: $x(\pi) = 3\cdot\cos(\pi) = -3$
$y(\pi) = 3\cdot\sin(\pi) = 0$

Ergänzung: Koordinaten im Raum in verschiedenen Darstellungen

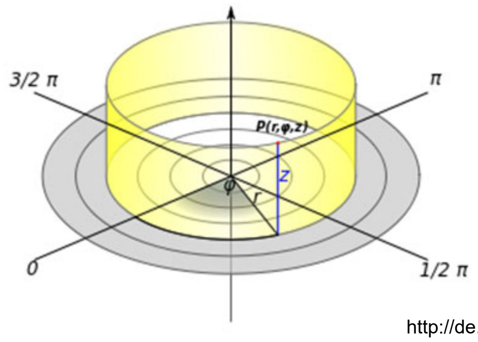
- räumliche kartesische Koordinaten (x,y,z)



http://www.mathepedia.de/Raum.aspx

- Zylinderkoordinaten (r, ϕ, z)

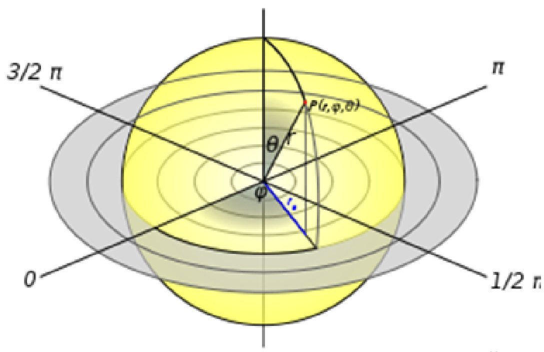
Polarkoordinaten in der Ebene,
ergänzt um die Höhenangabe in kartesischen Koordinaten



http://de.wikipedia.org/wiki/Polarkoordinaten

- Kugelkoordinaten (r, ϕ, θ)

Polarkoordinaten in der Ebene,
ergänzt um eine weitere Winkelangabe θ für die Höhe



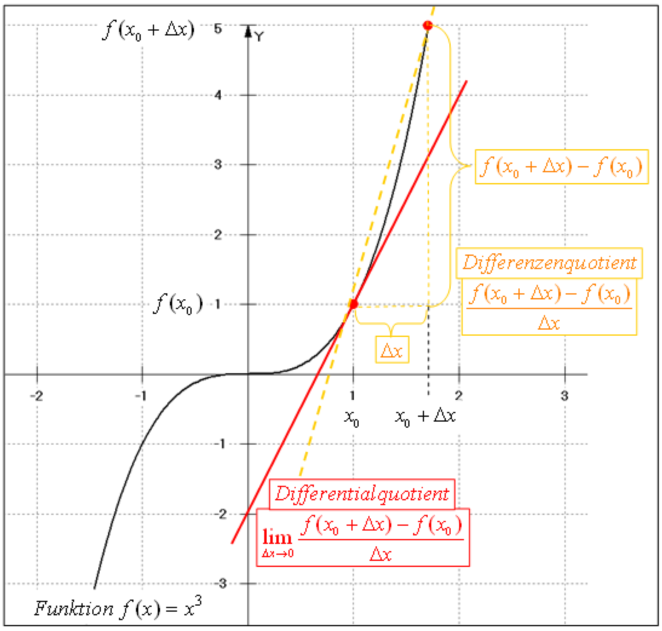
http://de.wikipedia.org/wiki/Polarkoordinaten

Differentialrechnung

•

Rückblick: Differenzenquotient - Differentialquotient

Veranschaulichung:
Differenzenquotient und Differentialquotient im Punkt x_0 der Funktion f



Differenzenquotient:

$$\frac{\Delta f}{\Delta x}(x_0)=\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}$$

Steigung der Sekanten durch die Punkte $(x_0,f(x_0))$ und $(x_0+\Delta x, f(x_0+\Delta x))$

Differentialquotient :

Differentialquotient im Punkt x_0

$$f'(x_0)=\frac{df}{dx}(x_0)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}$$

Steigung der Tangenten im Punkt $(x_0,f(x_0))$

Differentialquotient für x

$$f'(x)=\frac{df}{dx}(x)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}$$

1.Ableitung der Funktion f(x) = Funktion der Steigungen der Funktion f(x)

Differenzierbarkeit

Definition 6.1: differenzierbar, Ableitung, Differentialquotient

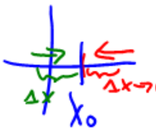
Die Funktion $f(x)$ heißt **an der Stelle** x_0 **differenzierbar**, wenn der folgende Grenzwert existiert

$$\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}.$$

Bemerkung: Differenzierbarkeit $\hat{=}$ Steigkeit des Differential-quotienten

$g_r = \lim_{x\to x_0^+} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$

Differenzierbarkeit einer Funktion $f(x)$ an der Stelle x_0



$\Delta x \to 0^+$ $\Leftrightarrow$ Differentialquotient $\frac{df}{dx}(x_0)$ existiert

$g_l = \lim_{x\to x_0^-} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$

$\Leftrightarrow$ Grenzwert $\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}$ existiert

$\Leftrightarrow$ Grenzwert des Differentialquotient von rechts an x_0

$$\boxed{g_r = \lim_{\Delta x\to 0^+}\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}}$$

Steigung in x_0 von rechts

und Grenzwert des Diff.-quotienten von links an x_0

$$\boxed{g_l = \lim_{\Delta x\to 0^-}\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}}$$

Steigung in x_0 von links

müssen gleich sein

$\Leftrightarrow$ Steigungen von rechts an x_0 (g_r)

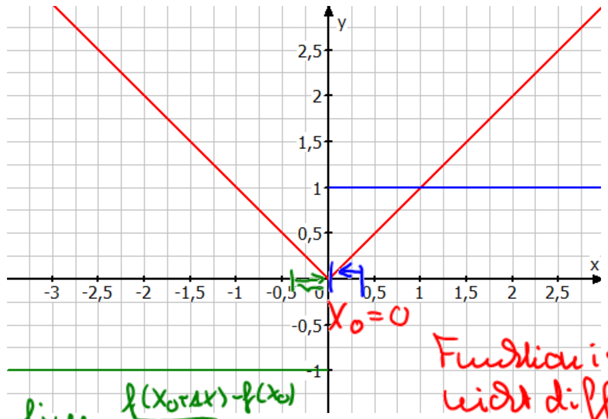
und Steigungen von links an x_0 (g_l)

sind identisch

Linksseitiger und rechtsseitiger Grenzwert für die Grenzwertberechnung des Differentialquotienten

Beispiel:

Differenzierbarkeit der Betragsfunktion



$g_r = \lim_{\Delta x \to 0^+} \frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}$

g_l

$\lim_{\Delta x \to 0^-} \frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}$

$x_0 = 0$

Funktion ist in $x_0 = 0$ nicht differenzierbar, da der Differentialquotient in x_0 nicht existiert $\lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}$,

da $g_r = 1$, d.h. Steigung von rechts ist +1

$g_l = -1$, d.h. Steigung von links ist -1

Betragsfunktion f(x) = |x|

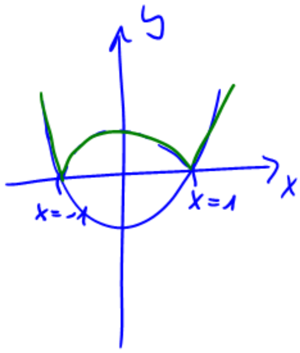
(1) ...im Punkt $x_0=1$

(2) ...im Punkt $x_0=0$

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x} \underset{\substack{x_0=0 \\ f(x)=|x|}}{=} \lim_{\Delta x \to 0} \frac{|0+\Delta x|-|0|}{\Delta x} = \begin{cases} g_r \text{ ---- } = +1 \\ g_l \text{ --- } = -1 \end{cases}$$

$$g_r = \lim_{\underbrace{\Delta x}_{>0} \to 0^+} \frac{|\overbrace{0+\Delta x}^{>0}|-|0|}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0^+} \frac{(0+\Delta x)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0^+} \frac{\cancel{\Delta x}^{1}}{\cancel{\Delta x}_{1}} = \lim_{\Delta x \to 0^+} 1 = +1$$

$$g_l = \lim_{\underbrace{\Delta x}_{<0} \to 0^-} \frac{|\overbrace{0+\Delta x}^{<0}|-|0|}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0^-} \frac{-(0+\Delta x)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0^-} \frac{-\cancel{\Delta x}^{1}}{\cancel{\Delta x}_{1}} = \lim_{\Delta x \to 0^-} (-1) = -1$$

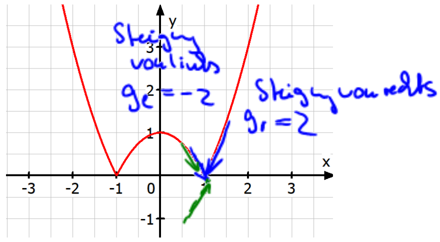


Aufgabe: Differenzierbarkeit

Gegeben ist die Funktion $f(x) = \underline{|x^2 - 1|}$

Ist die Funktion f(x) im Punkt x = 1 differenzierbar?

•



Aufgabe 2

$$f(x) = |x^2 - 1|$$

Ist die Funktion im Punkt $x=1$ differenzierbar?

$$g_r = \lim_{\Delta x \to 0^+} \frac{\overbrace{|(1+\Delta x)^2 - 1|}^{f(\overset{=1}{x_0}+\Delta x)} - \overbrace{|1^2 - 1|}^{f(\overset{=1}{x_0})}}{\Delta x}$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0^+} \frac{|1 + 2\Delta x + (\Delta x)^2 - 1|}{\Delta x}$$

$$= \lim_{\underbrace{\Delta x}_{>0} \to 0^+} \frac{|\overbrace{2\Delta x + (\Delta x)^2}^{>0}|}{\Delta x}$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0^+} \frac{\cancel{\Delta x}(2+\Delta x)}{\cancel{\Delta x}} = \lim_{\Delta x \to 0^+} 2 + \Delta x = 2$$

$$g_l = \lim_{\underbrace{\Delta x}_{<0} \to 0^-} \frac{|(1+\Delta x)^2 - 1| - |1 - 1|}{\Delta x}$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0^-} \frac{|2\Delta x + (\Delta x)^2|}{\Delta x}$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0^-} \frac{|\overbrace{\overbrace{\Delta x}^{<0}\,\overbrace{(2+\Delta x)}^{>0,\ \text{wenn } \Delta x < 2}}^{<0}|}{\Delta x}$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0^-} \frac{-(\cancel{\Delta x})(2+\Delta x)}{\cancel{\Delta x}} = \lim_{\Delta x \to 0^-} -(2+\Delta x) = -2$$

$\Rightarrow$ $f(x)$ ist nicht differenzierbar

Grundlegende Ableitungsfunktionen

Ableitungsregeln

Zusammenfassung: Ableitungen elementarer Funktionen

	Funktion $f(x)$	1. Ableitung $f'(x)$
Konstante Funktion	c	0
Potenzfunktion	$x^n,\ n\in\mathbb{N},\ x>0$ $x^a,\ a\in\mathbb{R},\ x>0$	$n\cdot x^{n-1},\ n\in\mathbb{N}$ $a\cdot x^{a-1},\ a\in\mathbb{R},\ x\in D$
Sonderfall Wurzelfunktion	$\sqrt{x}=x^{\frac{1}{2}},\ x>0$	$\frac{1}{2\sqrt{x}}=\frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}},\ x\in D$
Trigonometrische Funktionen	$\sin x,\ x\in\mathbb{R}$ $\cos x,\ x\in\mathbb{R}$ $\tan x,\ x\neq(2k+1)\frac{\pi}{2}$ $\cot x,\ x\neq k\frac{\pi}{2}$	$\cos x,\ x\in\mathbb{R}$ $-\sin x,\ x\in\mathbb{R}$ $\frac{1}{\cos^2 x},\ x\neq(2k+1)\frac{\pi}{2}$ $-\frac{1}{\sin^2 x},\ x\neq k\frac{\pi}{2}$
Zyklometrische Funktionen	$\arcsin x,\ x\in(-1,1)$ $\arccos x,\ x\in(-1,1)$ $\arctan x,\ x\in\mathbb{R}$ $arc\cot x,\ x\in\mathbb{R}$	$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}},\ x\in(-1,1)$ $-\frac{1}{\sqrt{1-x^2}},\ x\in(-1,1)$ $\frac{1}{1+x^2},\ x\in\mathbb{R}$ $-\frac{1}{1+x^2},\ x\in\mathbb{R}$
Exponentialfunktionen	e^x a^x	e^x $\ln a\cdot a^x$
Logarithmusfunktionen	$\ln x,\ x>0$ $\log_a x,\ x>0$	$\frac{1}{x},\ x>0$ $\frac{1}{\ln a\cdot x},\ x>0$

$\sin x$
$\downarrow$ Diff.
$\cos x$
$\downarrow$ Diff.
$-\sin x$
$\downarrow$ Diff.
$-\cos x$
Diff.

6.2 Differentiationsregeln Zusammenfassung

Satz 6.1: Faktorregel

Ein konstanter Faktor bleibt beim Differenzieren erhalten:

$$\boxed{y = c \cdot f(x) \Rightarrow y' = c \cdot f'(x)}$$

Beispiel: $(2 \cdot \sin x)' = 2(\sin x)' = 2 \cdot \cos x$

Satz 6.2: Summenregel

Eine Summe von Funktionen darf gliedweise differenziert werden:

$$\boxed{y = f(x) + g(x) \Rightarrow y' = f'(x) + g'(x)}$$

Beispiel: $(x^2 + \sin x)' = (x^2)' + (\sin x)' = 2x + \cos x$

Satz 6.3: Produktregel

Die Ableitung einer Funktion, die aus einem Produkt von Teilfunktionen besteht, wird mit folgendem Ausdruck berechnet:

$$\boxed{y = f(x) \cdot g(x) \Rightarrow y' = f'(x) \cdot g(x) + f(x) \cdot g'(x)}$$

Beispiel: $(x^2 \cdot \sin x)' = (x^2)' \sin x + x^2 (\sin x)'$

$= 2x \cdot \sin x + x^2 \cdot \cos x$

Satz 6.4: Quotientenregel

Die Ableitung einer Funktion, die aus einem Quotienten von Teilfunktionen besteht, wird mit folgendem Ausdruck berechnet:

$$\boxed{y = \frac{f(x)}{g(x)} \Rightarrow y' = \frac{f'(x) \cdot g(x) - f(x) \cdot g'(x)}{g^2(x)}}$$

Beispiel: $\left(\frac{x^2}{\sin x}\right)' = \frac{(x^2)' \sin x - x^2 (\sin x)'}{(\sin x)^2}$

$= \frac{2x \cdot \sin x - x^2 \cdot \cos x}{(\sin x)^2}$

Sonderfall: **Reziprokregel**

$$y = \frac{1}{g(x)} \Rightarrow y' = \frac{-g'(x)}{g^2(x)}$$

Satz 6.5: Kettenregel

Die Ableitung einer zusammengesetzten (verketteten) Funktion erhält man als Produkt aus äußerer und innerer Ableitung:

$$\boxed{y = f(g(x)) \Rightarrow y' = f'(g(x)) \cdot g'(x)}$$

Substitution $u = g(x)$: $y = f(u) \Rightarrow y' = \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dx}$

Beispiel: $(\sin(\overbrace{x^2}^{\text{Subst. } u=}))'$

$= \underbrace{(\sin(u))'}_{\text{äußere Abl.}} \underbrace{(x^2)'}_{\text{innere Abl.}}$

$= \cos(u) \cdot 2x$

$= \underbrace{\cos(x^2)}_{\text{Ableitung der äußeren Fkt.}} \cdot \underbrace{2x}_{\text{Ableitung der inneren Fkt}}$

innere Fkt. unverändert

jetzt

Satz 6.6: Ableitung der Umkehrfunktion

Sei $y = f(x)$ umkehrbar und $x = f^{-1}(y)$ die nach x aufgelöste Funktion, dann gilt für die Ableitungen:

$$\boxed{\left[f^{-1}(y)\right]' = \frac{1}{f'(x)} \quad mit \quad f'(x) \neq 0} \qquad \Rightarrow \boxed{f'(x) = \frac{1}{\left[f^{-1}(y)\right]'}}$$

Satz 6.7: Logarithmische Differentiation

Die Ableitung einer Funktion $y = f(x) = [u(x)]^{v(x)}$ kann berechnet werden mit:

$$\boxed{\left[\ln f(x)\right]' = \frac{f'(x)}{f(x)} \quad mit \quad f(x) \neq 0} \qquad \Rightarrow \boxed{f'(x) = \left[\ln(f(x))\right]' f(x)}$$

Satz 4.2: Summenregel

Eine Summe von Funktionen darf gliedweise differenziert werden:

$$y = f(x) + g(x) \Rightarrow y' = f'(x) + g'(x)$$

Beispiel: $y = x^2 + \sin x \Rightarrow y' = 2x + \cos x$

Herleitung der Summenregel mit Hilfe des Differentialquotienten:

$$f(x) = h(x) + g(x)$$

! andere Bezeichnung der Teilfunktionen

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x}$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{(h(x+\Delta x) + g(x+\Delta x)) - (h(x) + g(x))}{\Delta x}$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \left(\frac{h(x+\Delta x) - h(x)}{\Delta x} + \frac{g(x+\Delta x) - g(x)}{\Delta x} \right)$$

$$= \underbrace{\lim_{\Delta x \to 0} \frac{h(x+\Delta x) - h(x)}{\Delta x}}_{\text{Diff.quot.}}^{h'(x)} + \underbrace{\lim_{\Delta x \to 0} \frac{g(x+\Delta x) - g(x)}{\Delta x}}_{\text{Diff.quot.}}^{g'(x)}$$

$$\boxed{f'(x) = h'(x) + g'(x)}$$

Summenregel

Satz 4.3: Produktregel

Die Ableitung einer Funktion, die aus einem Produkt von Teilfunktionen besteht, wird mit folgendem Ausdruck berechnet:

$$y = f(x)\cdot g(x) \;\Rightarrow\; y' = f'(x)\cdot g(x) + f(x)\cdot g'(x)$$

Beispiel: $y = x^2 \cdot \sin x \;\Rightarrow\; y' = 2x\cdot\sin x + x^2\cdot\cos x$

Herleitung mit Hilfe des Differentialquotienten:

$f(x) = h(x)\cdot g(x)$

$(h\cdot g)' \overset{\text{zu zeigen}}{=} h'\cdot g + h\cdot g'$

! andere Bezeichnung der Teilfunktionen

$$f'(x) = \lim_{\Delta x\to 0} \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x}$$

$$f'(x) = \lim_{\Delta x\to 0} \frac{h(x+\Delta x)\,g(x+\Delta x) - h(x)\,g(x)}{\Delta x}$$

$$= \lim_{\Delta x\to 0} \frac{h(x+\Delta x)\,g(x+\Delta x) - h(x)\,g(x+\Delta x) + h(x)\cdot g(x+\Delta x) - h(x)\,g(x)}{\Delta x}$$

$$= \lim_{\Delta x\to 0} \frac{h(x+\Delta x)\,g(x+\Delta x) - h(x)\,g(x+\Delta x)}{\Delta x} + \frac{h(x)\,g(x+\Delta x) - h(x)\,g(x)}{\Delta x}$$

$$= \lim_{\Delta x\to 0} g(x+\Delta x)\,\underbrace{\frac{h(x+\Delta x)-h(x)}{\Delta x}}_{h'(x)} + \lim_{\Delta x\to 0} h(x)\,\underbrace{\frac{g(x+\Delta x)-g(x)}{\Delta x}}_{g'(x)}$$

$$\boxed{f'(x) = g(x)\cdot h'(x) + h(x)\cdot g'(x)}$$

Produktregel

Satz 4.4: Quotientenregel

Die Ableitung einer Funktion, die aus einem Quotienten von Teilfunktionen besteht, wird mit folgendem Ausdruck berechnet:

$$y = \frac{f(x)}{g(x)} \Rightarrow y' = \frac{f'(x) \cdot g(x) - f(x) \cdot g'(x)}{g^2(x)}$$

Sonderfall: **Reziprokregel**

$$y = \frac{1}{g(x)} \Rightarrow y' = \frac{-g'(x)}{g^2(x)}$$

Beispiel: $y = \frac{x^2}{\sin x} \Rightarrow y' = \frac{2x \cdot \sin x - x^2 \cdot \cos x}{(\sin x)^2} \left(= \frac{x(2 - x \cdot \cot x)}{\sin x} \right)$

Herleitung mit Hilfe der Produktregel:

$$y = \frac{f(x)}{g(x)}$$

$$\boxed{\text{Gesucht ist } y'}$$

$$(y \cdot g(x))' = (f(x))'$$

mit Produkt-regel

$$y' \cdot g(x) + y \cdot g'(x) = f'(x)$$

$$y' = \frac{f'(x) - \overset{= \frac{f(x)}{g(x)}}{y} \cdot g'(x)}{g(x)}$$

$$= \frac{f'(x) - \frac{f(x)}{g(x)} \cdot g'(x)}{g(x)} = \frac{\frac{f'(x) \cdot g(x)}{g(x)} - \frac{f(x) \cdot g'(x)}{g(x)}}{g(x)}$$

$$= \frac{\frac{f'(x) \cdot g(x) - f(x) g'(x)}{g(x)}}{g(x)}$$

$$\boxed{y' = \left(\frac{f(x)}{g(x)}\right)' = \frac{f'(x) \cdot g(x) - f(x) \cdot g'(x)}{(g(x))^2}}$$ Quotientenregel

Satz 4.5: Kettenregel

Die Ableitung einer zusammengesetzten (verketteten) Funktion erhält man als Produkt aus äußerer und innerer Ableitung:

$$\boxed{y = f(g(x)) \Rightarrow y' = f'(g(x)) \cdot g'(x)}$$

Substitution $u = g(x)$: $y = f(u) \Rightarrow y' = \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dx}$

Beispiel: $y = \sin(x^2) \Rightarrow y' = \cos(x^2) \cdot 2x$

allgemeine Herleitung - Kettenregel

Siehe oben

Beispiel:

$$(f(x))' = \Big(\sin\big(\underbrace{\tfrac{1}{x}}_{u}\big)\Big)' = (\sin(u))'\left(\tfrac{1}{x}\right)'$$

$$= \cos(\underset{=\frac{1}{x}}{u}) \cdot (x^{-1})'$$

$$= \cos\left(\tfrac{1}{x}\right) \cdot (-1) \cdot x^{-2}$$

$$= \cos\left(\tfrac{1}{x}\right) \cdot \left(-\tfrac{1}{x^2}\right)$$

$$(f(x))' = \left(e^{\sin(2x)}\right)' = \underset{\text{äuß. Abl.}}{e^{\sin(2x)}} \cdot \underset{\text{innere Abl. 1}}{(\sin(2x))'}$$

$$\underset{1}{e^{\sin(2x)}} \quad \underset{\text{äußere Abl. 2}}{\cos(2x)} \cdot \underset{\text{innere Abl. 2}}{2} \qquad = e^{\sin(2x)} \cdot \cos(2x) \cdot 2$$

hier geht es in der nächsten Vorlesung weiter

Satz 4.6: Ableitung der Umkehrfunktion

Sei $y = f(x)$ umkehrbar und $x = f^{-1}(y)$ die nach x aufgelöste Funktion, dann gilt für die Ableitungen:

$$\left[f^{-1}(y)\right]' = \frac{1}{f'(x)} \quad mit \quad f'(x) \neq 0$$

$$\Rightarrow \boxed{f'(x) = \frac{1}{\left[f^{-1}(y)\right]'}}$$

Herleitung der Methode "Ableitung über die Umkehrfunktion"

$$(x)' = \left(f^{-1}(f(x))\right)' \quad mit \; y = f(x) \text{ mit Umkehrfunktion } \mathrm{f}^{-1}(\mathrm{x})$$

$$1 = \left(f^{-1}(f(x))\right)'$$

$$1 = \left(f^{-1}(\mathrm{y})\right)' f'(x)$$

$$f'(x) = \frac{1}{\left[f^{-1}(y)\right]'}$$

Beispiel

$y = f(x) = \ln x$

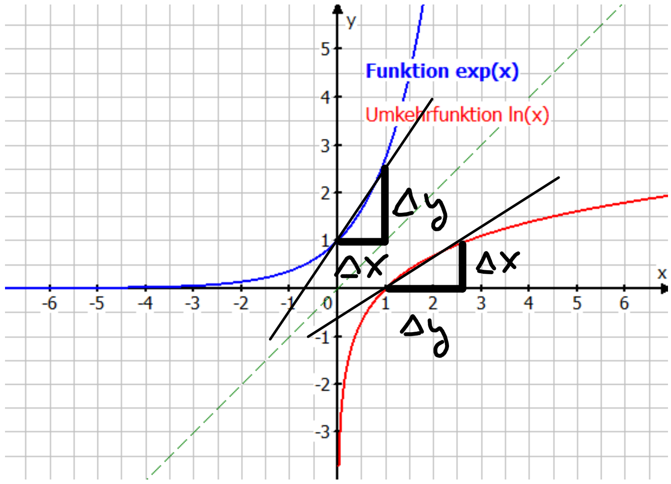
Warum gilt die Formel für die Ableitung über die Umkehrfunktion?

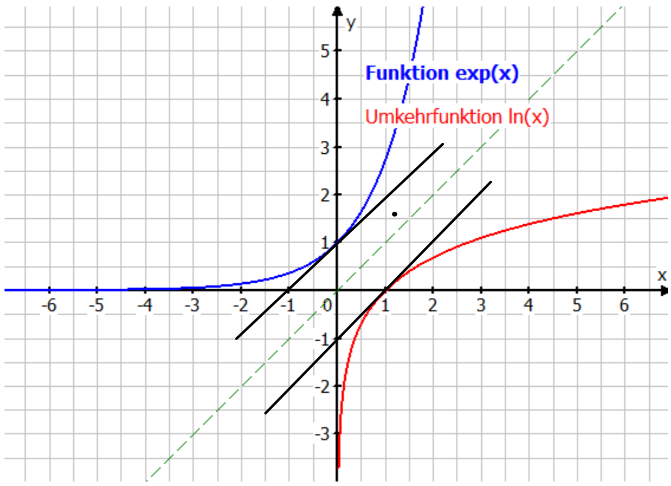
Satz 4.6: Ableitung der Umkehrfunktion

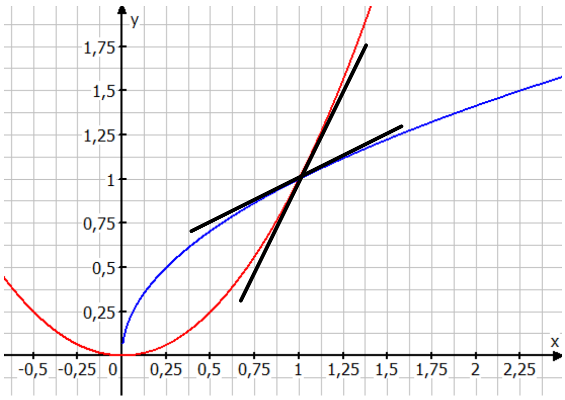
Sei $y = f(x)$ umkehrbar und $x = f^{-1}(y)$ die nach x aufgelöste Funktion, dann gilt für die Ableitungen:

$$\left[f^{-1}(y)\right]' = \frac{1}{f'(x)} \quad mit \quad f'(x) \neq 0$$

Veranschaulichung







Satz 4.7: Logarithmische Differentiation

Die Ableitung einer Funktion $y = f(x) = [u(x)]^{v(x)}$ kann berechnet werden mit:

$$[\ln f(x)]' = \frac{f'(x)}{f(x)} \quad mit \quad f(x) \neq 0$$

Warum sieht die Formel so aus?

Beispiel 1: $y = f(x) = e^x$

Beispiel 2: $y = f(x) = x^{\sin x}$

Aufgabe:

a) Gegeben ist die Funktion $f(x) = (\sin x)^{\cos x}$.

Bestimmen Sie die Funktion der 1. Ableitung.

Hinweis: Logarithmisches Differenzieren

b) Aufgabe: Ableiten über die Umkehrfunktion

Gesucht $f'(x)$ für $f(x) = \arccos(x) \; (=y)$

Hinweis: Bekannt $g'(x)$ für $\underbrace{g(x)}_{\hat{=} f^{-1}} = \cos(x)$: $g'(x) = -\sin x$

$\hat{=} f^{-1}$ der Umkehrfunktion von $f(x)$

•