Vorlesung 16 am 17.11.2022

(1) Zahlen: Natürliche/ rationale/ reelle Zahlen

(2) Komplexe Zahlen 1

Einführung

Komplexe Zahlen in kartesischen Koordinaten

Darstellung

Rechnen mit komplexen Zahlen

Komplexe Zahlen in Polarkoordinaten

Umrechnung kartesische Koordinaten - Polarkoordinaten

Rechnen mit komplexen Zahlen in Polarkoordinaten

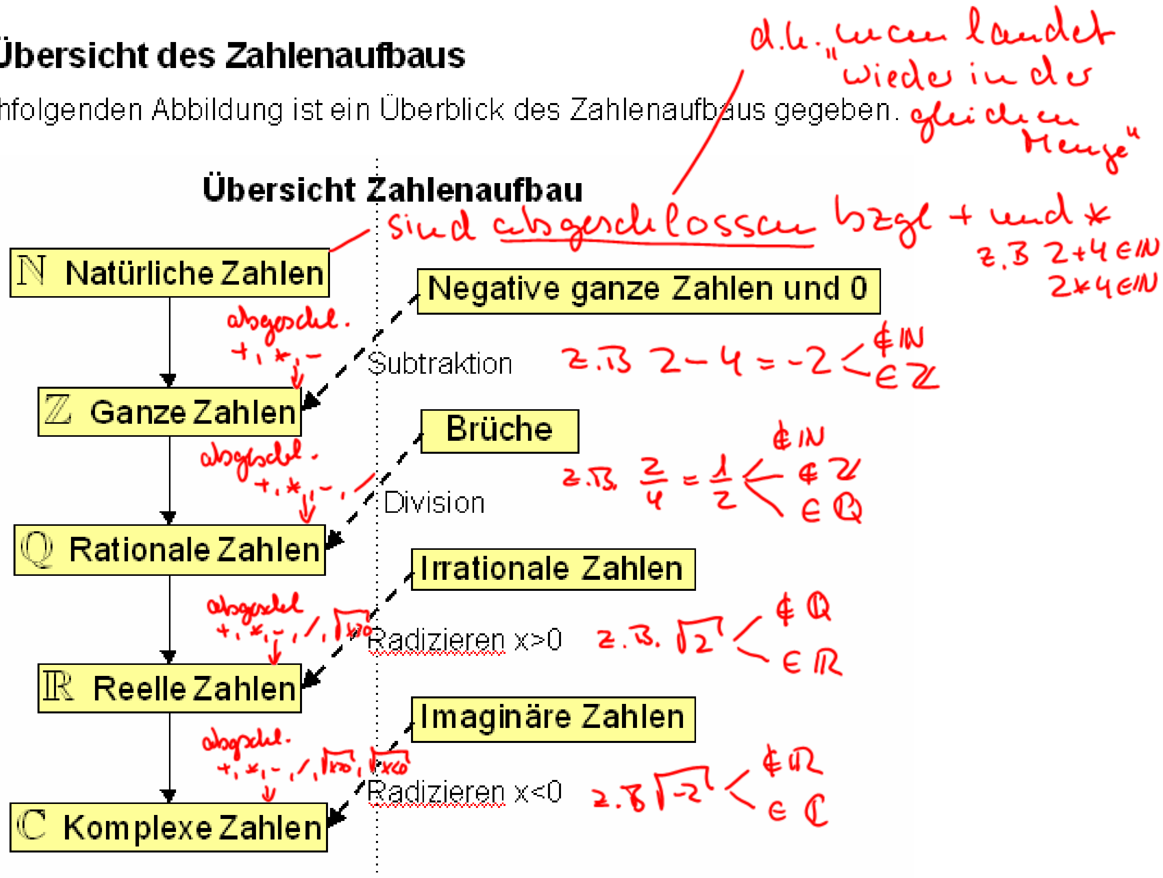
Komplexe Funktionen

Funktionen in anderen Koordinaten und als Parameterdarstellung

Zahlen und Zahlensysteme

2.1.6 Übersicht des Zahlenaufbaus

In der nachfolgenden Abbildung ist ein Überblick des Zahlenaufbaus gegeben.



$\mathbb{N} = \{1,2,3,4,....\}$ *Menge der natürlichen Zahlen*

$\mathbb{Z} = \{...,-3,-2,-1,0,1,2,3,...\}$ *Menge der ganzen Zahlen*

$\mathbb{N}_0 = \mathbb{N} \cup \{0\}$ *Menge der nichtnegativen ganzen Zahlen*

$\mathbb{Q} = \left\{\frac{m}{n} \,\middle|\, m \in \mathbb{Z}, n \in \mathbb{N}\right\}$ *Menge der rationalen Zahlen*

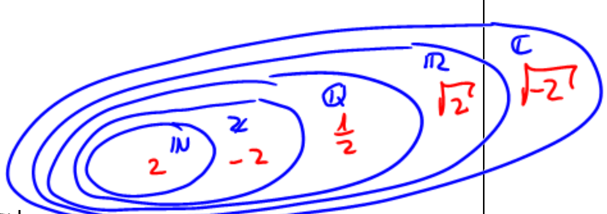
$\mathbb{Q}^+ = \left\{\frac{m}{n} \,\middle|\, m \in \mathbb{N}, n \in \mathbb{N}\right\}$ *Menge der positiven rationalen Zahlen*

$\mathbb{Q}_0^+ = \left\{\frac{m}{n} \,\middle|\, m \in \mathbb{N}_0, n \in \mathbb{N}\right\}$ *Menge der nichtnegativen rationalen Zahlen*

$\mathbb{Q}^\times = \mathbb{Q} \setminus \{0\}$ *Menge der von Null verschiedenen rationalen Zahlen*

$\mathbb{R} =$ *Menge der reellen Zahlen*

$\mathbb{C} =$ *Menge der komplexen Zahlen*



Es gilt: $\mathbb{N} \subset \mathbb{N}_0 \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R} \subset \mathbb{C}$

$\mathbb{N} \subset \mathbb{N}_0 = \mathbb{Z}_0^+ \subset \mathbb{Q}_0^+ \subset \mathbb{R}_0^+ \subset \mathbb{C}_0^+$

2.1.1 Die natürlichen Zahlen

Die natürlichen Zahlen sind die Zahlen der nachfolgend dargestellten Zahlenmenge:

$$\boxed{\mathbb{N} = \{1, 2, 3, 4, \ldots\} \ \textit{Menge der natürlichen Zahlen}}$$

Sie liegen auf einem Zahlenstrahl alle rechts vom Ursprung.

Weitere Eigenschaften der natürlichen Zahlen:

- Die **Addition** und die **Multiplikation** sind Verknüpfungen, die innerhalb der natürlichen Zahlen **uneingeschränkt durchführbar** sind, d.h. das Ergebnis dieser beiden Operationen liegt wieder in den natürlichen Zahlen.

2.1.2 Die ganzen Zahlen

Die natürlichen Zahlen ergänzt um den Ursprung und die Negativen der natürlichen Zahlen, die links vom Ursprung liegen, bilden die ganzen Zahlen:

$$\boxed{\mathbb{Z} = \{\ldots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \ldots\} \ \textit{Menge der ganzen Zahlen}}$$

Eigenschaften der ganzen Zahlen:

- Die **Addition**, die **Multiplikation** und die **Subtraktion** sind Operationen, die innerhalb der ganzen Zahlen **uneingeschränkt durchführbar** sind, d.h. das Ergebnis dieser Operationen liegt wieder in den ganzen Zahlen.

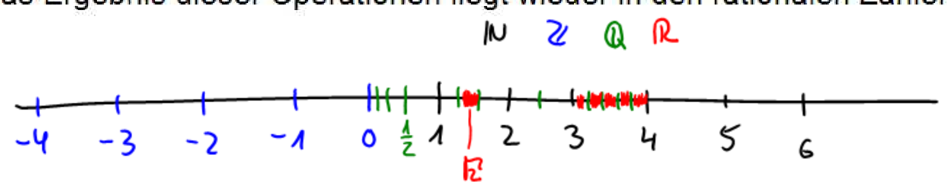
2.1.3 Die rationalen Zahlen

Die ganzen Zahlen ergänzt um die Brüche bilden die rationalen Zahlen. Rationale Zahlen sind entweder endliche Dezimalbrüche wie $-\frac{7}{1} = -7$, $\frac{27}{6} = 4\frac{3}{6} = 4,5$ oder $\frac{9}{4} = 2,25$, $\frac{1}{8} = 0.125$ oder unendliche periodische Dezimalbrüche wie $\frac{1}{3} = 0,333.. = 0,\overline{3}$ oder $\frac{8}{33} = 0,2424.. = 0,\overline{24}$ oder $\frac{29}{22} = 1,31818.. = 1,3\overline{18}$.

$$\boxed{\mathbb{Q} = \left\{\tfrac{m}{n} \,\middle|\, m \in \mathbb{Z}, n \in \mathbb{N}\right\} \ \textit{Menge der rationalen Zahlen}}$$

Eigenschaften der rationalen Zahlen:

- Brüche können zwischen den ganzen Zahlen eingeordnet werden.
- Der Zahlenstrahl mit den rationalen Zahlen enthält noch Lücken.
- Die **Addition**, die **Multiplikation**, die **Subtraktion** und die **Division** sind Operationen, die innerhalb der rationalen Zahlen **uneingeschränkt durchführbar** sind, d.h. das Ergebnis dieser Operationen liegt wieder in den rationalen Zahlen.



Zahlenstrahl ist komplett mit den reellen Zahlen

$1 : 8 = 0{,}125$
10
8
20
16
40
40
0

Rationale Zahlen: Umrechnung Bruch in Dezimalzahl

- durch schriftliche Division

  $\frac{1}{8} = 0{,}125$ abbrechende Dezimalzahlen, d.h. endliche Anzahl an Nachkommastellen

- Beispiele: $\frac{1}{3} = 0{,}333.. = 0{,}\overline{3}$ unendliche, aber periodische Dezimalzahlen

$$\tfrac{8}{33} = 0{,}2424.. = 0{,}\overline{24}$$

$$\tfrac{29}{22} = 1{,}31818.. = 1{,}3\overline{18}$$

Rationale Zahlen: Umrechnung Dezimalzahl in Bruch

Jeder abbrechende oder periodische Dezimalbruch lässt sich als Bruch $\frac{b}{a}$ mit $b \in \mathbb{Z}, a \in \mathbb{N}$ darstellen. Dieses kann nach der folgenden Regel durchgeführt werden:

$0.1 = \frac{1}{10}$
$0.01 = \frac{1}{100}$
$0.001 = \frac{1}{1000}$

→ Die **Ziffern der Vorperiode** liefern einen Bruch, der im Zähler die Ziffern der Vorperiode enthält und im Nenner die Zehnerpotenz, die im Exponenten die Anzahl der Ziffern der Vorperiode enthält.

→ Dieser wird addiert mit einem Bruch, der im Zähler aus **der Ziffernfolge der Periode** und im Nenner eine Folge von Neunen (Anzahl = Länge der Periode) gefolgt von einer Folge von Nullen (Anzahl = Länge der Vorperiode) besteht.

→ Beispiel: $\boxed{0{,}\underbrace{112}_{\text{Vorperiode}}\underbrace{\overline{34}}_{\text{Periode}}} = \frac{112}{1000} + \frac{34}{99000} = \boxed{\frac{11122}{99000}}$

Anzahl Ziffern der Vorperiode
Anzahl Ziffern der Periode

→ *Allgemeine Umrechnungsformel*
für die periodische Zahl x mit einer Vorperiode v(m Stellen) und einer Periode p(n Stellen):

$$x = \frac{v(10^n - 1) + p}{10^m(10^n - 1)} \quad mit \quad x = 0.\underbrace{v}_{m\,Stellen}\underbrace{\overline{p}}_{n\,Stellen}$$

→ Beispiel mit Verwendung der Formel:

$$x = 0.\underbrace{112}_{3\,Stellen}\underbrace{\overline{34}}_{2\,Stellen}$$

$$x = \frac{112(10^2 - 1) + 34}{10^3(10^2 - 1)} = \frac{112}{10^3} + \frac{34}{10^3(10^2 - 1)} = \frac{112}{1000} + \frac{34}{99000}$$

2.1.4 Die reellen Zahlen

Die rationalen Zahlen ergänzt um die irrationalen Zahlen, wie z.B. $\sqrt{2}$, e und π bilden die reellen Zahlen.

unendliche, nicht periodische Dezimalzahlen

alle Dezimal-Zahlen, die nicht als Bruch darstellbar

$$\boxed{\mathbb{R} = \mathit{Menge\ der\ reellen\ Zahlen}}$$

Eigenschaften der reellen Zahlen:

- Die **Addition**, die **Multiplikation**, die **Subtraktion**, die **Division** und **das Radizieren positiver Werte** sind Operationen, die innerhalb der reellen Zahlen **uneingeschränkt durchführbar** sind, d.h. das Ergebnis dieser Operationen liegt wieder in den reellen Zahlen.

2.1.5 Die komplexen Zahlen

Die reellen Zahlen ergänzt um die imaginären Zahlen bilden die komplexen Zahlen.

Die komplexen Zahlen ermöglichen die Lösung der Gleichung $x^2+1=0$, die innerhalb der reellen Zahlen nicht lösbar ist. Durch das Einführen der imaginären Einheit $j^2=-1$ lässt sich die Lösung der Gleichung $x^2+1=0 \Leftrightarrow x=\sqrt{-1}$ mit $x=j$ angeben.

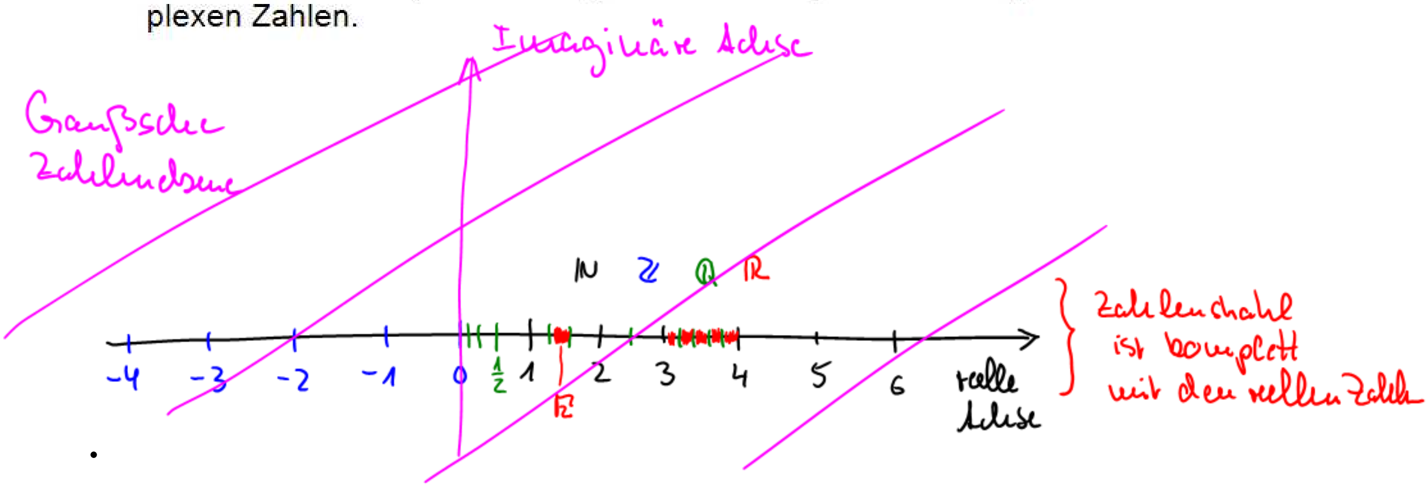
$$\boxed{\mathbb{C}=\{z \mid z=a+jb \text{ mit } a\in\mathbb{R},\, b\in\mathbb{R}\} \text{ Menge der komplexen Zahlen}}$$

imaginäre Anteil = Imaginärteil

reelle Anteil = Realteil

Eigenschaften der komplexen Zahlen:

- Die **Addition**, die **Multiplikation**, die **Subtraktion**, die **Division** und **das Radizieren** sind Operationen, die innerhalb der komplexen Zahlen **uneingeschränkt durchführbar** sind, d.h. das Ergebnis dieser Operationen liegt wieder in den komplexen Zahlen.



Eigenschaften der reellen Zahlen

Eigenschaften der reellen Zahlen:

- Die **Addition**, die **Multiplikation**, die **Subtraktion**, die **Division** und **das Radizieren positiver Werte** sind Operationen, die innerhalb der reellen Zahlen **uneingeschränkt durchführbar** sind, d.h. das Ergebnis dieser Operationen liegt wieder in den reellen Zahlen.
- Die irrationalen Zahlen, z.B. $\sqrt{2}$, lassen sich durch rationale Zahlen approximieren, in dem man schrittweise die Position auf der Zahlengeraden durch Intervallschachtelung eingrenzt.

$$\begin{array}{llll}
1^2 = 1 \; und \; 2^2 = 4 & \Rightarrow 1 & < \sqrt{2} & < 2 \\
1{,}4^2 = 1{,}96 \; und \; 1{,}5^2 = 2{,}25 & \Rightarrow 1{,}4 & < \sqrt{2} & < 1{,}5 \\
1{,}41^2 = 1{,}9881 \; und \; 1{,}42^2 = 2{,}0164 & \Rightarrow 1{,}41 & < \sqrt{2} & < 1{,}42 \\
\ldots & \Rightarrow 1{,}414 & < \sqrt{2} & < 1{,}415 \\
 & \Rightarrow 1{,}4142 & < \sqrt{2} & < 1{,}4143 \\
 & \Rightarrow 1{,}41421 & < \sqrt{2} & < 1{,}41422 \\
 & \Rightarrow 1{,}414213 & < \sqrt{2} & < 1{,}414214
\end{array}$$

  Setzt man das Verfahren beliebig weit fort, so erhält man den Wert für $\sqrt{2}$ beliebig genau.

- Irrationale Zahlen sind nicht exakt angebbar. Sie müssen auf eine vereinbarte Anzahl von Nachkommastellen gerundet werden.
- Alle reellen Zahlen lassen sich in eineindeutiger Weise als Punkte auf der Zahlengeraden abbilden und bedecken die Zahlengerade lückenlos.

-

Axiome der reellen Zahlen

Axiome bezüglich der Addition:

(A1)	$x+(y+z)$	$=$	$(x+y)+z$		(Assoziativität)
(A2)	$x+y$	$=$	$y+x$		(Kommutativität)
(A3)	Es gibt ein Element $0 \in \mathbb{R}$ mit				
	$x+0$	$=$	$0+x$	$=x$	(neutrales Element der Addition, Nullelement)
(A4)	Zu jedem Element $x \in \mathbb{R}$ gibt es ein Element $-x \in \mathbb{R}$ mit				
	$x+(-x)$	$=$	$(-x)+x$	$=0$	(inverses Element der Addition)

Axiome bezüglich der Multiplikation:

(A5)	$x\cdot(y\cdot z)$	$=$	$(x\cdot y)\cdot z$		(Assoziativität)
(A6)	$x\cdot y$	$=$	$y\cdot x$		(Kommutativität)
(A7)	Es gibt ein Element $1 \in \mathbb{R}$ mit				
	$x\cdot 1$	$=$	$1\cdot x$	$=x$	(neutrales Element der Multiplikation, Einselement)
(A8)	Zu jedem Element $x \in \mathbb{R}$ gibt es ein Element $x^{-1}(=\frac{1}{x}) \in \mathbb{R}$ mit				
	$x\,x^{-1}$ $=\frac{1}{x}$	$=$	$x^{-1}\cdot x$	$=1$	(inverses Element)

Das inverse Element der Multiplikation kann auch wie folgt geschrieben werden $x^{-1}=\frac{1}{x}$.

Eine gültige Rechenregel ist das Distributivgesetz

(A9)	$x\cdot(y+z)$	$=$	$x\cdot y+x\cdot z$	(Distributivität)

nur 1. Distr.ges.

Diese Axiome (A1)-(A9)werden auch Körperaxiome genannt.

Weitere Axiome für die reellen Zahlen sind die Ordnungsaxiome:

(A10)	Es gilt genau eine der drei Beziehungen: $x<y, x=y, x>y$,
(A11)	Aus $x<y$ und $y<z$ folgt $x<z$.
(A12)	Aus $x<y$ folgt $x+z<y+z$ für alle z.
(A13)	Aus $x<y$ und $0<z$ folgt $x\cdot z<y\cdot z$.

Gilt $x<y$, so gilt insbesondere die schwächere Aussage $x\leq y$.

Das Archimedische Axiom gilt für die reellen Zahlen:

(A14)	Zu $x\in\mathbb{R}, y\in\mathbb{R}$ mit $0<x, 0<y$ existiert ein $n\in\mathbb{N}$ mit $n\cdot x>y$.

Das Vollständigkeitsaxiom vervollständigt die Beschreibung von $\mathbb{R}$:

(A15)	Zu jeder nach oben beschränkten Menge reeller Zahlen, die mindestens ein Element enthält, existiert ein Supremum in $\mathbb{R}$.

Aufgabe - Teil 1:
Welche der folgenden Zahlen sind rationale Zahlen und welche nicht?

$(A)\ 3$ $\in \mathbb{Q}$
$\in \mathbb{N}$

$(B)\ \frac{1}{8}$ $\subset \mathbb{Q}$

$(C)\ \sqrt{2}$ $\notin \mathbb{Q}$
$(\in \mathbb{C})$
$\in \mathbb{R}$

$(D)\ 0.\overline{3}$ $\in \mathbb{Q}$

$(E)\ -1$ $\in \mathbb{Q}$
$\in \mathbb{Z}$

$(F)\ \frac{1}{3}$ $\in \mathbb{Q}$

$(G)\ 0.125$ $\in \mathbb{Q}$

$(H)\ 0$ $\in \mathbb{Q}$
$\in \mathbb{Z}$ $\in \mathbb{N}_0$

$(I)\ \pi$ $\notin \mathbb{Q}$
$\in \mathbb{R}$

$(J).\ -1.32671...$ $\notin \mathbb{Q}$
$\in \mathbb{R}$

Mächtigkeit der Mengen $\mathbb{N}$, $\mathbb{R}$, ..

Wie viele natürliche Zahlen gibt es? $|\mathbb{N}|$
1,2,3,4,.... unendlich viele

Wie viele gerade Zahlen gibt es?
2,4,6,.... unendlich viele

Wie viele ungerade Zahlen gibt es?
1,3,5,... unendlich viele

Wie viele ganze Zahlen gibt es?
...,-2,-1,0,1,2,... unendlich viele

Wie viele rationale Zahlen gibt es?
unendlich viele

abzählbar unendlich viele

Wie viele reelle Zahlen gibt es?
Kein Abzählschema vorhanden / überabzählbar unendl. viele

Abzählschema für die natürlichen Zahlen

1, 2, 3, 4, 5, 6, ...

Abzählschema für die ganzen Zahlen

... -5, -4, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4, 5, ...

Abzählschema für die rationalen Zahlen

$\frac{1}{1}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{5}$	$\cdots$
$\frac{2}{1}$	$\frac{2}{2}$	$\frac{2}{3}$	$\frac{2}{4}$	$\frac{2}{5}$	$\cdots$
$\frac{3}{1}$	$\frac{3}{2}$	$\frac{3}{3}$	$\frac{3}{4}$	$\frac{3}{5}$	$\cdots$
$\frac{4}{1}$	$\frac{4}{2}$	$\frac{4}{3}$	$\frac{4}{4}$	$\frac{4}{5}$	$\cdots$
$\frac{5}{1}$	$\frac{5}{2}$	$\frac{5}{3}$	$\frac{5}{4}$	$\frac{5}{5}$	$\cdots$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	

https://de.wikibooks.org/wiki/Mathe_f%C3%BCr_Nicht-Freaks:_M%C3%A4chtigkeit_von_Mengen

$\cdots$	$-\frac{1}{3}$	$-\frac{1}{2}$ (6)	$-\frac{1}{1}$ (5)	0 (1)	$\frac{1}{1}$ (2)	$\frac{1}{2}$ (13)	$\frac{1}{3}$ (14)	$\cdots$
$\cdots$	$-\frac{2}{3}$	$-\frac{2}{2}$ (7)	$-\frac{2}{1}$ (4)		$\frac{2}{1}$ (3)	$\frac{2}{2}$ (12)	$\frac{2}{3}$ (15)	$\cdots$
$\cdots$	$-\frac{3}{3}$	$-\frac{3}{2}$ (8)	$-\frac{3}{1}$ (9)		$\frac{3}{1}$ (10)	$\frac{3}{2}$ (11)	$\frac{3}{3}$ $\cdots$	$\cdots$
	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$		$\vdots$	$\vdots$		

2.2.4 Abzählbarkeit

Wie viele natürliche Zahlen, wie viele ganze Zahlen und wie viele rationale Zahlen gibt es?

Definition 2.2: abzählbar, überabzählbar

Man definiert $\aleph_0 := |\mathbb{N}|$ (Aleph Null) als Mächtigkeit von $\mathbb{N}$.

Eine Menge A heißt

abzählbar, wenn $|A| < \aleph_0 = |\mathbb{N}|$.

abzählbar unendlich, wenn $|A| = \aleph_0 = |\mathbb{N}|$.

überabzählbar unendlich, wenn $|A| > \aleph_0 = |\mathbb{N}|$.

Satz 2.1: Mächtigkeit der ganzen Zahlen

Die ganzen Zahlen $\mathbb{Z}$ sind **abzählbar unendlich**, d.h. $|\mathbb{Z}| = |\mathbb{N}| = \aleph_0$.

Satz 2.2: Mächtigkeit der rationalen Zahlen

Die rationalen Zahlen $\mathbb{Q}$ sind **abzählbar unendlich**, d.h. $|\mathbb{Q}| = |\mathbb{N}| = \aleph_0$.

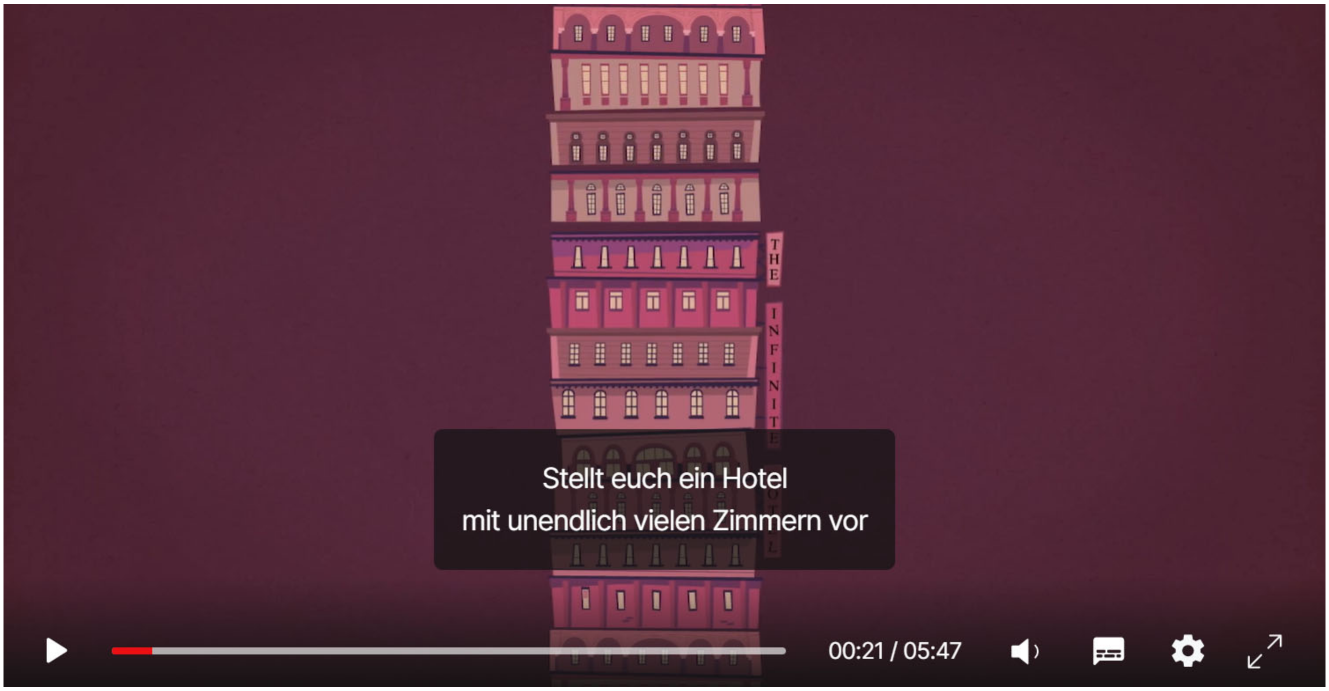
Bemerkung:

1. Es gibt also genausoviele ganze wie natürliche Zahlen.
2. Es gibt also genausoviele rationale wie natürliche Zahlen.
3. Jede der Mengen $\mathbb{Z}$ und $\mathbb{Q}$ können so durchnummeriert werden, dass jedes Element genau eine Nummer aus $\mathbb{N}$ bekommt und jede Zahl aus $\mathbb{N}$ genau einmal als Nummer verwendet wird.
4. Die reellen Zahlen können im Unterschied zu den rationalen Zahlen nicht "durchnummeriert" werden. Es gibt also mehr reelle Zahlen als rationale Zahlen.

Satz 2.2: Mächtigkeit der reellen Zahlen

Die reellen Zahlen $\mathbb{R}$ sind **überabzählbar unendlich**, d.h. $|\mathbb{R}| > |\mathbb{N}|$.

Hilberts - Hotel

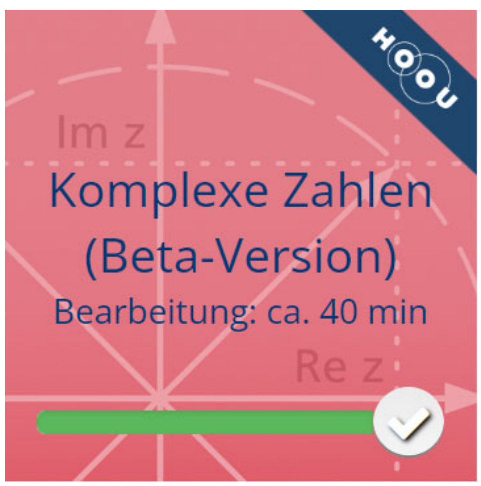


https://www.ted.com/talks/jeff_dekofsky_the_infinite_hotel_paradox/transcript?language=de

Komplexe Zahlen

Lernmodul Komplexe Zahlen auf viaMINT

https://viamint.haw-hamburg.de/course/view.php?id=257



Anwendungsbeispiele für komplexe Zahlen

7.8 Komplexer Widerstand in Wechselstromnetzwerken

Für die Analyse linearer Wechselstromnetzwerke ist die komplexe Schreibweise vorteilhaft. Schreibt man für die Spannung und Stromstärke

Exponentialform einer komplexen Zahl

$$U(t) = U_0 e^{\mathrm{i}(\omega t+\varphi)}, \quad I(t) = I_0 e^{\mathrm{i}(\omega t+\psi)}$$

$I_0 \cdot e^{j(\omega t+\varphi)}$ $\boxed{i}$ imaginäre Einheit

j " "

im Ingenieurbereich

so ist der komplexe Widerstand

$$Z = U(t)/I(t)$$

zeitunabhängig. Für die Grundelemente

Widerstand R	Spule L	Kondensator C

$Z = R$	$Z = \mathrm{i}\omega L$	$Z = (\mathrm{i}\omega C)^{-1} = \frac{1}{j\omega C}$

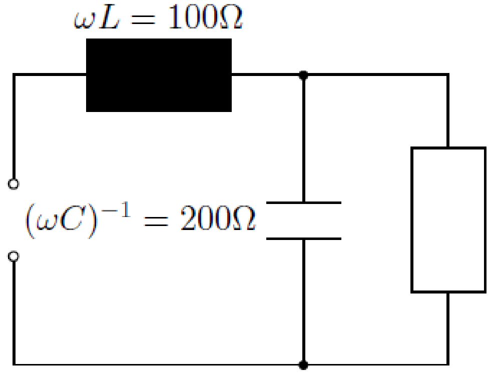
addieren sich die komplexen Widerstände bei Serienschaltung:

$$Z_{\text{gesamt}} = Z_1 + Z_2$$

und ihre Kehrwerte bei Parallelschaltung:

$$\frac{1}{Z_{\text{gesamt}}} = \frac{1}{Z_1} + \frac{1}{Z_2} \quad \Rightarrow \quad Z_{\text{gesamt}} = \frac{Z_1 Z_2}{Z_1 + Z_2}.$$

Man bezeichnet $\operatorname{Re} Z$ als Wirkwiderstand, $\operatorname{Im} Z$ als Blindwiderstand und $|Z|$ als Scheinwiderstand oder Impedanz.
Beispielsweise beträgt für den Schaltkreis



Realteil Imaginärteil

$\underbrace{92.31}\ - \underbrace{38.46}\ j$

Kartesische Form einer komplexen Zahl

der Gesamtwiderstand

$$Z_{\text{gesamt}} = \mathrm{i}\omega L + \frac{R(\mathrm{i}\omega C)^{-1}}{R + (\mathrm{i}\omega C)^{-1}} = 100\mathrm{i}\Omega + \frac{300\Omega(-200\mathrm{i}\Omega)}{300\Omega - 200\mathrm{i}\Omega} \approx (92.31 - 38.46\mathrm{i})\Omega$$

Bei einer Wechselspannung von $U_{\text{effektiv}} = 220\text{V}$ fließt dabei ein Effektivstrom von

$$I_{\text{effektiv}} = \frac{U_{\text{effektiv}}}{|Z|} = \frac{220\text{V}}{100\Omega} = 2.2\text{A}.$$

aus http://mo.mathematik.uni-stuttgart.de/kurse/kurs7/kurs7_broschuere.pdf

Anwendungsbeispiel: Harmonische Schwingung

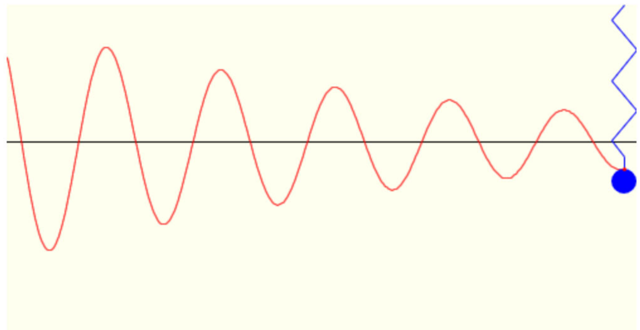
http://www.matheprisma.de/Module/Schwingu/index.htm

Ein Federpendel kann durch die nachfolgende Differentialgleichung beschrieben werden:

DGL 2.Ordnung

$$y'' + k \cdot y' + \omega^2 y = 0$$

(Reibung) k
(Federstärke) ω^2



Bei der Lösung der Differentialgleichung kommen wir auf die Lösung eines quadratischen Polynoms:

$$z^2 + \overset{\in\mathbb{R}}{k} \cdot z + \overset{\in\mathbb{R}}{\omega^2} = 0$$

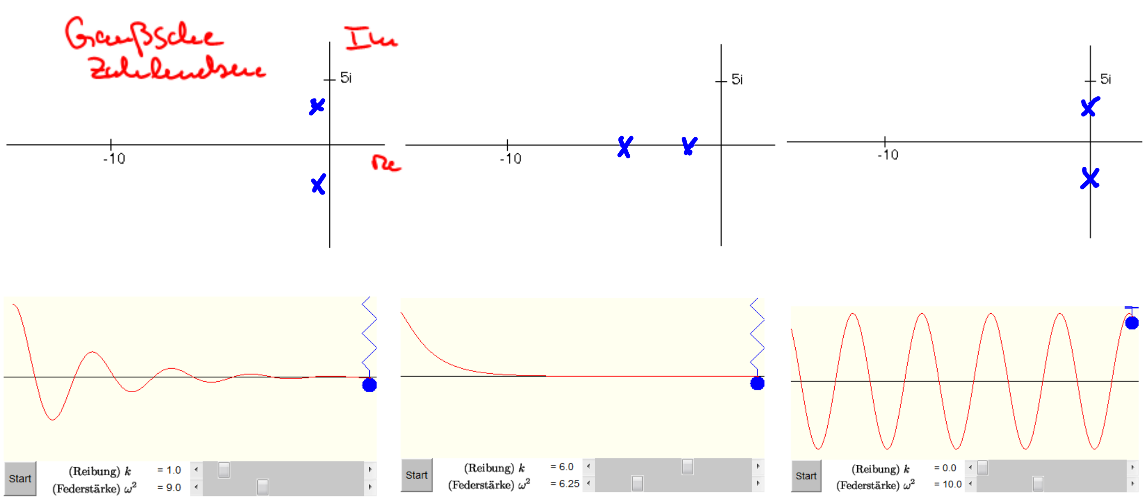
hier mit der Variablen z

in der komplexen Zahlenebene.

Es ist (Lösungsformel für die quadratische Gleichung)

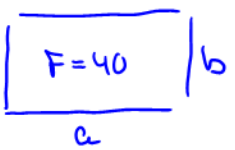
$$z_{1,2} = -(k/2) \pm \sqrt{(k/2)^2 - \omega^2}$$

Die Nullstellen des quadratischen Polynoms hängen von Reibung und Federstärke ab und beeinflussen die Schwingung:



Einführungsbeispiel - Komplexe Zahlen:
Zerlegen Sie eine Strecke der Länge 10 so in zwei Teilstrecken a und b, dass das Rechteck mit den Seitenlängen a und b den Flächeninhalt 40 hat. Es soll also a + b = 10 und a * b = 40 gelten.

http://www.math-kit.de/2002/demo2/CN-PB-XML-cob/rep//Manifest12/complexBegin.html



Bedingungen:

$a + b = 10 \rightarrow b = 10 - a$

$a \cdot b = 40$

$\Rightarrow a \cdot (10 - a) = 40$

$\Rightarrow a^2 - 10a + 40 = 0$ quadr. Polynom lösen innerhalb der komplexen Zahlen

pq-Formel

$a_{1/2} = 5 \pm \sqrt{25 - 40}$

$= 5 \pm \sqrt{-15}$

$= 5 \pm \sqrt{15 \cdot (-1)}$

$= 5 \pm \sqrt{15} \cdot \sqrt{-1}$

$\Rightarrow a_1 = \underset{\text{reeller Anteil} \,\hat{=}\, \text{Realteil}}{5} + \underbrace{\sqrt{15}\,j}_{\text{Imaginärteil}}$

$a_2 = 5 - \sqrt{15}\,j$

reeller Anteil ≙ Realteil

Imaginärteil

Zwei Nst. innerhalb der komplexen Zahlen

für $a_1 = 5 + \sqrt{15}\,j$

$b_1 = 10 - (5 + \sqrt{15}\,j) = 5 - \sqrt{15}\,j$

Linearfaktorzerlegung

$a^2 - 10a + 40$

$= (a - a_1)(a - a_2)$

$= (a - (5 + \sqrt{15}\,j))(a - (5 - \sqrt{15}\,j))$

Definition innerhalb der komplexen Zahlen

$j^2 = -1$

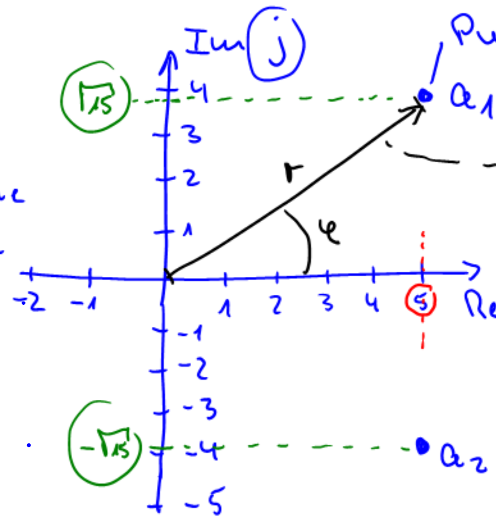
$j = \sqrt{-1}$ imaginäre Einheit

für die komplexe Zahl in kartesischer Form oder auch algebraische Form

$a_1 = 5 + \sqrt{15}\,j$

Punkt mit Koordinaten $\underbrace{(5, \sqrt{15})}_{\text{Kartesischen Koordinaten einer komplexen Zahl}}$

Gaußsche Zahlenebene



komplexer Zeiger auf a_1

- mit den Polarkoordinaten mit Länge r und Winkel φ
- verwendet in Exponentialform $a_1 = r \cdot e^{j\varphi}$

$$a^2-10a+40$$
$$=(a-a_1)(a-a_2)$$
$$=(a-\underbrace{(5+\sqrt{15}j)}_{})(a-\underbrace{(5-\sqrt{15}j)}_{})$$

$$=a^2-a(5-\sqrt{15}j)-a(5+\sqrt{15}j)+(5+\sqrt{15}j)(5-\sqrt{15}j)$$
$$=a^2-5a+\cancel{\sqrt{15}aj}-5a-\cancel{\sqrt{15}aj}+25-\cancel{5\sqrt{15}j}+\cancel{5\sqrt{15}j}-(\sqrt{15})^2\underbrace{j^2}_{-1}$$
$$=a^2-10a+25-(\sqrt{15})^2\cdot(-1)$$
$$=a^2-10a+25+15$$
$$=a^2-10a+40$$

$\mathbb{C}$

Komplexe Zahlen - Einführung

- Imaginäre Einheit: $j = \sqrt{-1}$, $j^2 = -1$
- Wurzelziehen aus negativen Zahlen in $\mathbb{C}$ erlaubt
- Quadratische Polynome sind in $\mathbb{C}$ immer lösbar und ein Polynom ist immer über Linearfaktoren zerlegbar
  z_1, z_2 sind die Nullstellen eines Polynoms
  $z^2 + pz + q = (z - z_1)(z - z_2)$

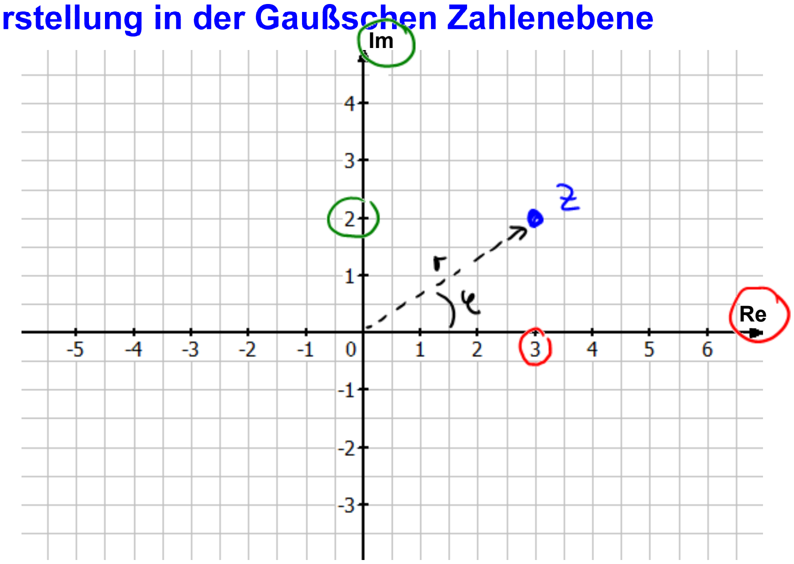
Aufbau einer komplexen Zahl in kartesischen Koordinaten

Algebraische Form oder kartesische Form $z = \underbrace{3}_{\text{Realteil}} + \underbrace{2}_{\text{Imaginärteil}} j$ (3,2) sind die kartesischen Koordinaten

Eine komplexe Zahl z = a + bj hat in der Gaußschen Zahlenebene die Koordinaten (a,b).

(Kartesische)

Darstellung in der Gaußschen Zahlenebene



Aufbau einer komplexen Zahl in Polar-Koordinaten (r, φ)

$z = r \cdot e^{j\varphi}$ in Exponentialform

Eine komplexe Zahl z ist auch durch die zwei Angaben Winkel φ und Betrag r des komplexen Zeigers(Pfeil) darstellbar.

2.1.5 Die komplexen Zahlen

Die reellen Zahlen ergänzt um die imaginären Zahlen bilden die komplexen Zahlen.

Die komplexen Zahlen ermöglichen die Lösung der Gleichung $x^2+1=0$, die innerhalb der reellen Zahlen nicht lösbar ist. Durch das Einführen der imaginären Einheit $j^2=-1$ lässt sich die Lösung der Gleichung $x^2+1=0 \Leftrightarrow x=\sqrt{-1}$ mit $x=j$ angeben.

$$\boxed{\mathbb{C}=\{z \mid z=a+jb \text{ mit } a\in\mathbb{R},\, b\in\mathbb{R}\} \quad \textit{Menge der komplexen Zahlen}}$$

Komplexe Zahlen

Algebraische Form (kartesische Koordinaten) Komponentendarstellung	Betrag/Phase (Polarkoordinaten): trigonometrische Form	Exponentialdarstellung
$z=a+j\cdot b$ a Realteil b Imaginärteil	$z=r\cdot(\cos\varphi+j\cdot\sin\varphi)$ r Betrag φ Winkel	$z=r\cdot e^{j\varphi}$ r Betrag φ Winkel

Umrechnung

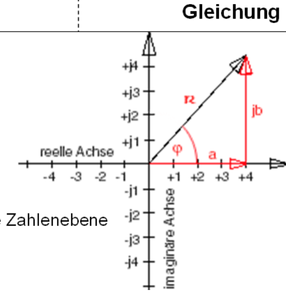
$a=r\cdot\cos\varphi,\; b=r\cdot\sin\varphi$ (←)

$r=\sqrt{a^2+b^2},\; \varphi=\arctan\frac{b}{a}$ (→)

$\cos\varphi+j\cdot\sin\varphi=e^{j\varphi}$ (↔) **Euler-Gleichung**

Hinweis zur Verwendung des arctan:

a	b	φ	Rechnerwert
+	+	$[0,\frac{\pi}{2}]$	
0	+	$\frac{\pi}{2}$	
-	+	$[\frac{\pi}{2},\pi]$	$+\pi$
-	-	$[\pi,\frac{3\pi}{2}]$	$+\pi$
0	-	$\frac{3\pi}{2}$	
+	-	$[\frac{3\pi}{2},2\pi]$	$+2\pi$



Gauß´sche Zahlenebene

Gleichheit komplexer Zahlen

- Zwei komplexe Zahlen sind einander gleich, wenn ihre Imaginärteile und Realteile <u>beide</u> gleich sind.
- Zwei komplexe Zahlen sind einander gleich, wenn ihre Beträge und Winkel <u>beide</u> gleich sind.

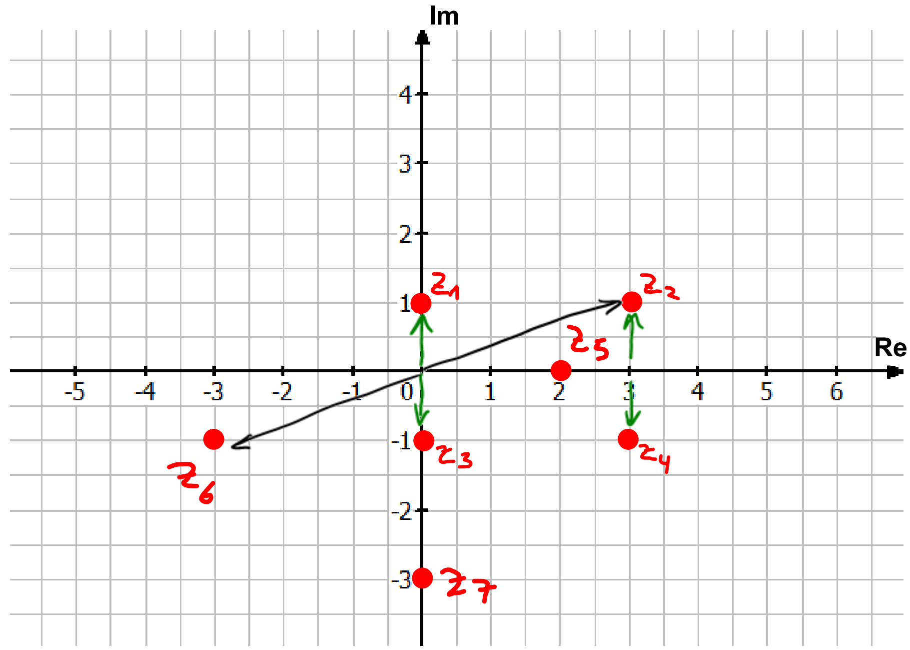
Bemerkung:

- Alle Punkte auf der <u>reellen Achse</u> der Gaußschen Zahlenebene haben den Imaginärteil = 0. Dieses sind die reellen Zahlen.Jede reelle Zahl ist auch eine komplexe Zahl.
- Alle Punkte auf der imaginären Achse der Gaußschen Zahlenebene haben den Realteil = 0. Dieses sind die Imaginären Zahlen.

reelle Zahl
$z=2$
$z=2+0\cdot j$
$(2,0)$

imaginäre Zahl
$z=0+2j$
$(0,2)$

Darstellung in der Gaußschen Zahlenebene - Beispiele



- Angabe der komplexen Zahlen aus der Abbildung

$z_1 = 0 + 1 \cdot j = j$

$z_2 = 3 + 1 \cdot j = \underline{3 + j}$

$z_3 = 0 + (-1) \cdot j = -j$

$z_4 = 3 + (-1) \cdot j = 3 - j$

$z_5 = 2 + 0 \cdot j = 2$

$z_6 = -3 + (-1) j = \underline{-3 - j}$

$z_7 = 0 + (-3) \cdot j = -3j$

- z_6 ist z_2 negiert

$z_6 = -3 - j = -(3+j) = -z_2$

- z_2 ist z_6 negiert

$z_2 = 3 + j = (-1)(-1)(3+j) = (-1)(-3-j)$
$= -z_6$

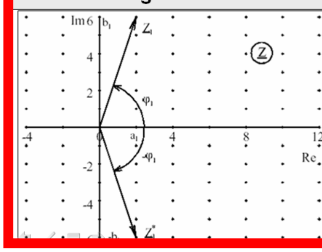
- Wie hängen einige der komplexen Zahlen aus der Abbildung zusammen?

- gespiegelt an der reellen Achse, d.h. zueinander konjugiert komplex

$z_1 = j, \; z_3 = -j \rightarrow z_1^* = z_3, \; z_3^* = z_1$

$z_2 = 3 + j, \; z_4 = 3 - j \rightarrow z_2^* = z_4, \; z_4^* = z_2$

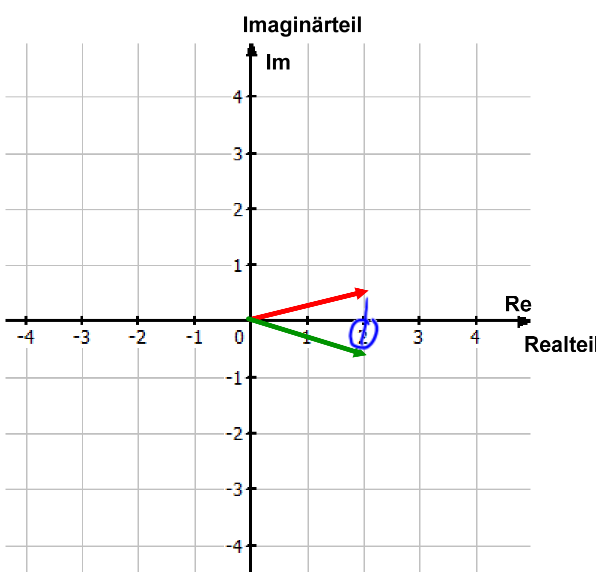
Konjugiert komplexe Zahl

Komplexe Zahlen		
Algebraische Form	Betrag/Phase: trigonometrische Form	Exponentialdarstellung
$z = a + j \cdot b$ a Realteil, b Imaginärteil	$z = r \cdot (\cos\varphi + j \cdot \sin\varphi)$ r Betrag, φ Winkel	$z = r \cdot e^{j\varphi}$ r Betrag, φ Winkel
konjugiert komplexe Zahl (Achsenspiegelung an der reellen Achse) **Die konjugiert komplexe Zahl einer komplexen Zahl erhält man, in dem der Realteil beibehalten wird und der Imaginärteil negiert wird. Die konjugiert komplexe Zahl wird durch einen Stern gekennzeichnet.**		
$z^* = a - j \cdot b$		
Die konjugiert komplexe Zahl in Betrag- und Winkel-Schreibweise erhält man, in dem der Winkel negiert wird.		
	$z^* = r \cdot \left(\cos(-\varphi) + j \cdot \sin(-\varphi)\right)$	$z^* = r \cdot e^{-j\varphi}$

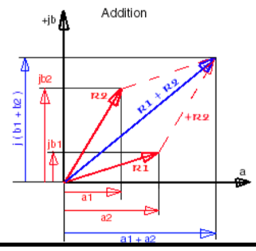
oder auch $\bar{z}$ notiert

Beispiel: $z_1 = 2 + \frac{1}{2}j = z_2^*$

$z_2 = 2 - \frac{1}{2}j = z_1^*$



Addition komplexer Zahlen

Komplexe Zahlen		
Algebraische Form	**Betrag/Phase: trigonometrische Form**	**Exponentialdarstellung**
$z = a + j \cdot b$ a Realteil, b Imaginärteil	$z = r \cdot (\cos\varphi + j \cdot \sin\varphi)$ r Betrag, φ Winkel	$z = r \cdot e^{j\varphi}$ r Betrag, φ Winkel
Addition Komplexe Zahlen werden addiert, in dem die Komponenten Realteil und Imaginärteil einzeln addiert werden.		
$z_1 + z_2 =$ $(a_1 + a_2) + j \cdot (b_1 + b_2)$	$z_1 + z_2 = r_1 \cdot \cos\varphi_1 + r_2 \cdot \cos\varphi_2$ $+ j \cdot (r_1 \cdot \sin\varphi_1 + r_2 \cdot \sin\varphi_2)$	$z_1 + z_2 =$ $r_1 \cdot e^{j\varphi_1} + r_2 \cdot e^{j\varphi_2}$
		

Erläuterung der Berechnung:

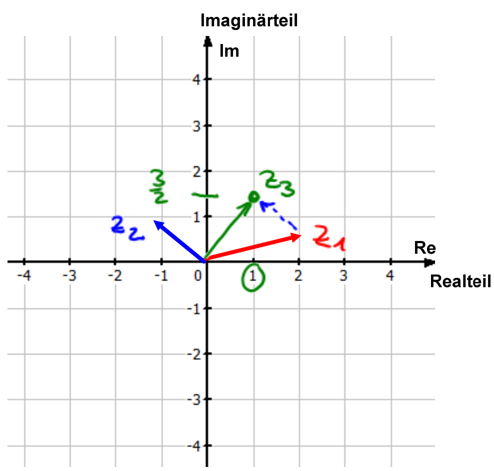
$$\left.\begin{array}{l} z_1 = a_1 + b_1 \cdot j \\ z_2 = a_2 + b_2 \cdot j \end{array}\right\} z_1 + z_2 = \underbrace{(a_1 + a_2)}_{Re} + \underbrace{(b_1 + b_2)}_{Im} j$$

Beispiel:

$z_1 = 2 + \frac{1}{2} j$

$z_2 = -1 + j$

$$z_3 = z_1 + z_2$$
$$= \left(2 + \frac{1}{2} j\right) + (-1 + j)$$
$$= 2 - 1 + \frac{1}{2} j + j$$
$$= 1 + \left(\frac{1}{2} + 1\right) j$$
$$= \underbrace{1}_{Re} + \underbrace{\frac{3}{2}}_{Im} j$$



Negation und Subtraktion komplexer Zahlen

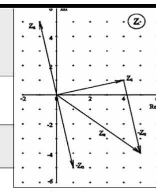
Negation (Punktspiegelung am Ursprung)

Die komplexe Zahl wird negiert, in dem die Komponenten negiert werden. Die negierte komplexe Zahl zeigt in die entgegengesetzte Richtung.

$-z = -a + j\cdot(-b)$

Eine komplexe Zahl in Betrags-und Phasedarstellung wird negiert, in dem der Winkel um π (180°) vergrößert wird, der Betrag bleibt dabei gleich.

$-z = r\cdot(\cos(\varphi+\pi) + j\cdot\sin(\varphi+\pi))$ $\quad -z = r\cdot e^{j(\varphi+\pi)}$



Subtraktion

Komplexe Zahlen werden voneinander subtrahiert, in dem die Real- und Imaginärteile einzeln subtrahiert werden.

$z_1 - z_2 = (a_1-a_2)+j\cdot(b_1-b_2)$	$z_1 - z_2 = r_1\cdot\cos\varphi_1 - r_2\cdot\cos\varphi_2 + j\cdot(r_1\cdot\sin\varphi_1 - r_2\cdot\sin\varphi_2) = r_1\cdot\cos\varphi_1 + r_2\cdot\cos(\varphi_2+\pi) + j\cdot(r_1\cdot\sin\varphi_1 + r_2\cdot\sin(\varphi_2+\pi))$	$z_1 - z_2 = r_1\cdot e^{j\varphi_1} - r_2\cdot e^{j\varphi_2} = r_1\cdot e^{j\varphi_1} + r_2\cdot e^{j(\varphi_2+\pi)}$

Erläuterung der Negation:

$$z = a+bj = -(a+bj) = -a-bj$$

Erläuterung der Berechnung der Subtraktion:

$$\left.\begin{array}{l} z_1 = a_1 + b_1\cdot j \\ z_2 = a_2 + b_2\cdot j \end{array}\right\} \quad z_3 = z_1 - z_2$$

$$= \underbrace{(a_1 - a_2)}_{Re} + \underbrace{(b_1 - b_2)}_{Im} j$$

Beispiel:

$$\left.\begin{array}{l} z_1 = 2+\frac{1}{2}j \\ z_2 = -1+j \end{array}\right\}$$

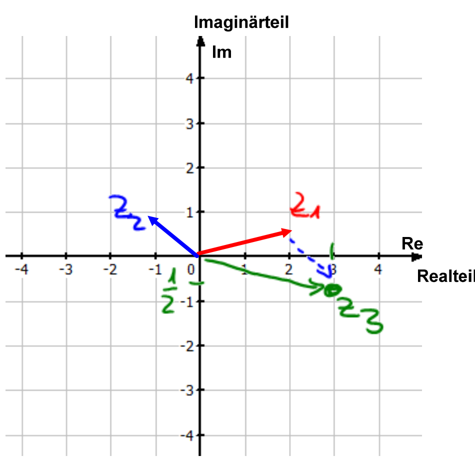
$$z_3 = z_1 - z_2$$

$$= (2+\tfrac{1}{2}j) - (-1+j)$$

$$= 2+1+\tfrac{1}{2}j - j$$

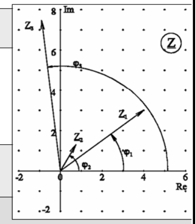
$$= 3 + (\tfrac{1}{2} - 1)\cdot j$$

$$= \underbrace{3}_{Re} - \underbrace{\tfrac{1}{2}}_{Im} j$$



Multiplikation komplexer Zahlen

Komplexe Zahlen		
Algebraische Form	**Betrag/Phase: trigonometrische Form**	**Exponentialdarstellung**
$z = a + j \cdot b$ a Realteil, b Imaginärteil	$z = r \cdot (\cos\varphi + j \cdot \sin\varphi)$ r Betrag, φ Winkel	$z = r \cdot e^{j\varphi}$ r Betrag, φ Winkel
Multiplikation		
~~$z_1 \cdot z_2 = (a_1 a_2 - b_1 b_2) + j \cdot (b_1 a_2 + a_1 b_2)$~~		
Komplexe Zahlen werden miteinander multipliziert, in dem die Beträge miteinander multipliziert werden und die Winkel addiert werden.		
	$z_1 \cdot z_2 = r_1 \cdot r_2 \cdot \begin{pmatrix} \cos(\varphi_1 + \varphi_2) \\ + j \cdot \sin(\varphi_1 + \varphi_2) \end{pmatrix}$	$z_1 \cdot z_2 = (r_1 \cdot r_2) \cdot e^{j(\varphi_1 + \varphi_2)}$



nicht unbedingt verwenden

Erläuterung der Berechnung:

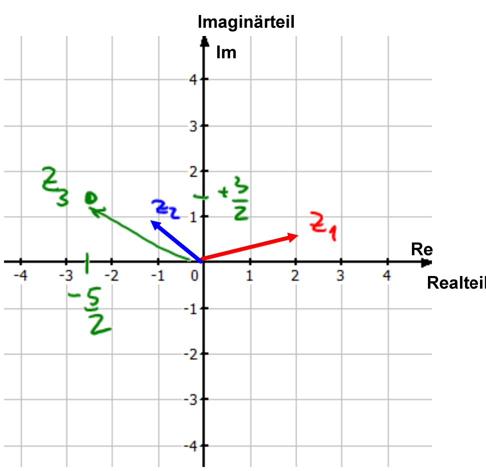
$$z_1 = a_1 + b_1 \cdot j$$
$$z_2 = a_2 + b_2 \cdot j$$

$$z_3 = (a_1 + b_1 j)(a_2 + b_2 j)$$
$$= a_1 \cdot a_2 + a_1 b_2 j + a_2 b_1 j + b_1 b_2 \underbrace{j^2}_{=-1}$$
$$= \underbrace{(a_1 \cdot a_2 - b_1 b_2)}_{Re} + \underbrace{(a_1 b_2 + a_2 b_1)}_{Im} j$$

Beispiel:

$$z_1 = 2 + \frac{1}{2} j$$
$$z_2 = -1 + j$$

$$z_3 = z_1 \cdot z_2$$
$$= \left(2 + \frac{1}{2} j\right)(-1 + j)$$
$$= 2 \cdot (-1) + 2 \cdot j + \frac{1}{2} j (-1) + \frac{1}{2} \underbrace{j^2}_{=-1}$$
$$= -2 - \frac{1}{2} + j\left(2 - \frac{1}{2}\right)$$
$$= \underbrace{-\frac{5}{2}}_{Re} + \underbrace{\frac{3}{2}}_{Im} j$$



Rechnen mit komplexen Zahlen - Multiplikation
Visualisierung des vorgehenden Beispiels

Beispiel

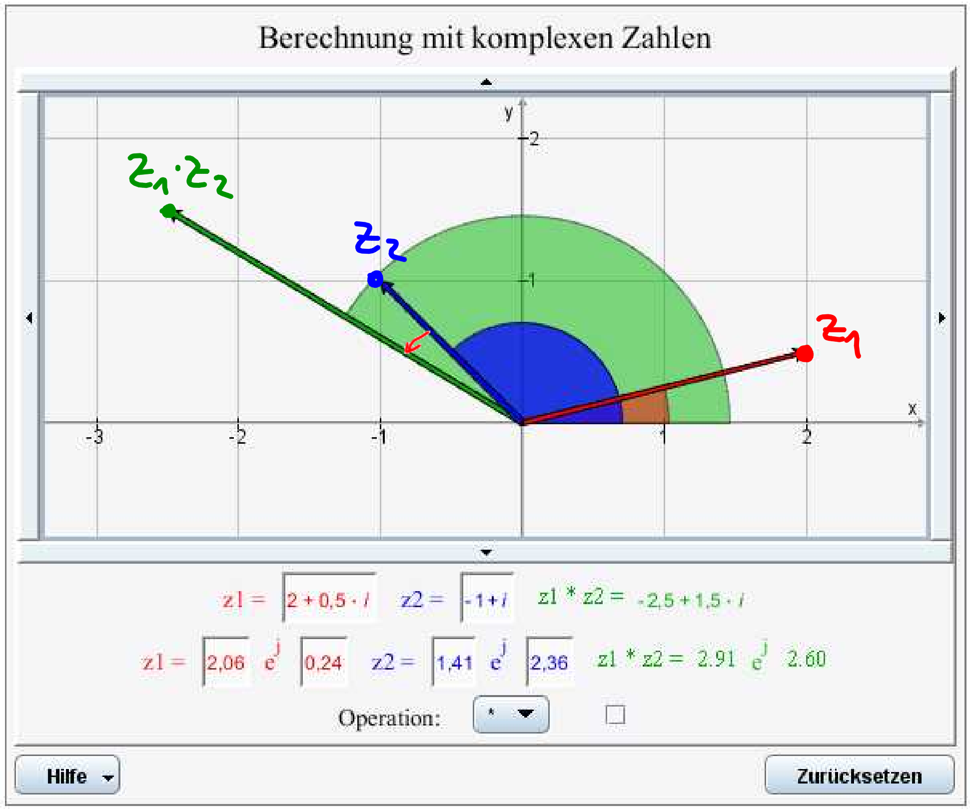
$z_1 = 2 + \frac{1}{2} j$

$z_2 = -1 + j$

$z_1 \cdot z_2$

$= -\frac{5}{2} + \frac{3}{2} j$

ComplexComputationHAW



Inversion und Division komplexer Zahlen

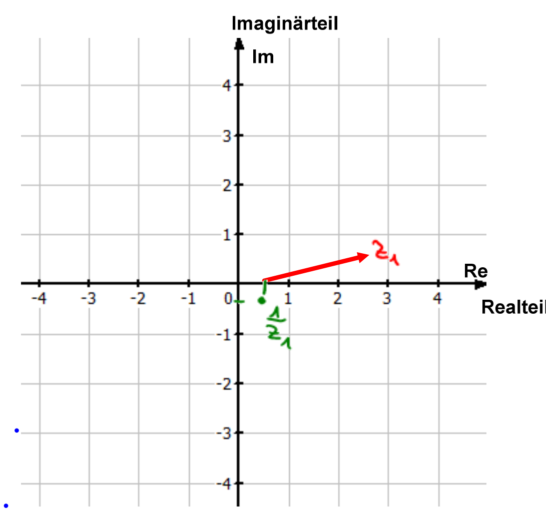
Inversion einer komplexen Zahlen Eine komplexe Zahl wird invertiert, in dem der Betrag invertiert und der Winkel negiert wird.	
$z_2 = \frac{1}{z} = \frac{1}{a+jb}$ $= \frac{a}{a^2+b^2} - j\frac{b}{a^2+b^2}$	$z_2 = \frac{1}{z} = \frac{1}{r\cdot e^{j\varphi}}$ $= \frac{1}{r}e^{-j\varphi}$
Division von komplexen Zahlen **Komplexe Zahlen werden durcheinander dividiert, in dem die Beträge durcheinander dividiert werden und die Winkel voneinander subtrahiert werden.**	
$\frac{z_1}{z_2} = \frac{a_1a_2+b_1b_2}{a_2^2+b_2^2}$ $+j\frac{b_1a_2-a_1b_2}{a_2^2+b_2^2}$	$\frac{z_1}{z_2} = \frac{r_1}{r_2}e^{j(\varphi_1-\varphi_2)}$

Erläuterung der Berechnung des Kehrwerts:

$z = a + jb$

Beispiel:

$z_1 = 2 + \frac{1}{2}j$



$$z_2 = \frac{1}{z_1} = \frac{1}{2+\frac{1}{2}j}\cdot\underbrace{\frac{2-\frac{1}{2}j}{2-\frac{1}{2}j}}$$

konjugiert komplexe Erweiterung mit Ziel 3. binomische Formel anwenden

$$= \frac{2-\frac{1}{2}j}{(2+\frac{1}{2}j)(2-\frac{1}{2}j)} = \frac{2-\frac{1}{2}j}{4-(\frac{1}{2}j)^2}$$

$$= \frac{2-\frac{1}{2}j}{4-\frac{1}{4}(-1)} = \frac{2-\frac{1}{2}j}{\frac{17}{4}} = \underbrace{\frac{8}{17}}_{Re} - \underbrace{\frac{2}{17}}_{Im}j$$

Inversion und **Division komplexer Zahlen**

Inversion einer komplexen Zahlen Eine komplexe Zahl wird invertiert, in dem der Betrag invertiert und der Winkel negiert wird.	
$z_2 = \frac{1}{z} = \frac{1}{a+jb}$ $= \frac{a}{a^2+b^2} - j\frac{b}{a^2+b^2}$	$z_2 = \frac{1}{z} = \frac{1}{r \cdot e^{j\varphi}}$ $= \frac{1}{r} e^{-j\varphi}$
Division von komplexen Zahlen Komplexe Zahlen werden durcheinander dividiert, in dem die Beträge durcheinander dividiert werden und die Winkel voneinander subtrahiert werden.	
$\frac{z_1}{z_2} = \frac{a_1a_2+b_1b_2}{a_2^2+b_2^2}$ $+j\frac{b_1a_2-a_1b_2}{a_2^2+b_2^2}$	$\frac{z_1}{z_2} = \frac{r_1}{r_2} e^{j(\varphi_1-\varphi_2)}$

Erläuterung der Division:

$z_1 = a_1 + b_1 \cdot j$

$z_2 = a_2 + b_2 \cdot j$

$$z_3 = \frac{a_1+b_1 j}{a_2+b_2 j} \cdot \underbrace{\frac{a_2-b_2 j}{a_2-b_2 j}}_{\text{konj. kompl. Erweiterung}}$$

$$= \frac{(a_1+b_1 j)(a_2-b_2 j)}{a_2^2 - b_2^2 j^2} = \frac{(a_1 \cdot a_2 + b_1 b_2) + (a_2 b_1 - a_1 b_2) j}{a_2^2 + b_2^2}$$

$$= \frac{a_1 \cdot a_2 + b_1 b_2}{a_2^2 + b_2^2} + \frac{(a_2 b_1 - a_1 b_2)}{a_2^2 + b_2^2} j$$

Beispiel:

$z_1 = 2 + \frac{1}{2} j$

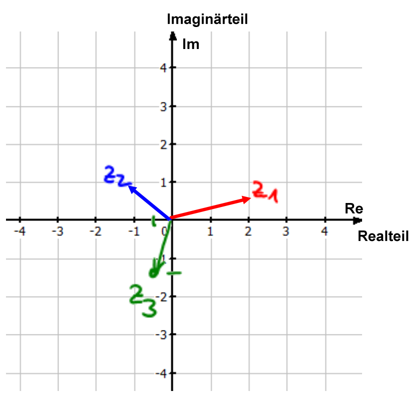
$z_2 = -1 + j$

$$z_3 = \frac{z_1}{z_2} = \frac{(2+\frac{1}{2}j)}{(-1+j)} \cdot \underbrace{\frac{(-1-j)}{(-1-j)}}_{\text{konj. kompl. Erw.}}$$

$$= \frac{(-2) - 2j - \frac{1}{2}j - \frac{1}{2}\underbrace{j^2}_{=-1}}{(-1)^2 - \underbrace{j^2}_{=-1}}$$

$$= \frac{(-2+\frac{1}{2}) + j(-2-\frac{1}{2})}{2}$$

$$= \frac{-\frac{3}{2} - \frac{5}{2} j}{2} = -\frac{3}{4} - \frac{5}{4} j$$



Rechnen mit komplexen Zahlen - Division
Visualisierung des vorgehenden Beispiels

ComplexComputationHAW

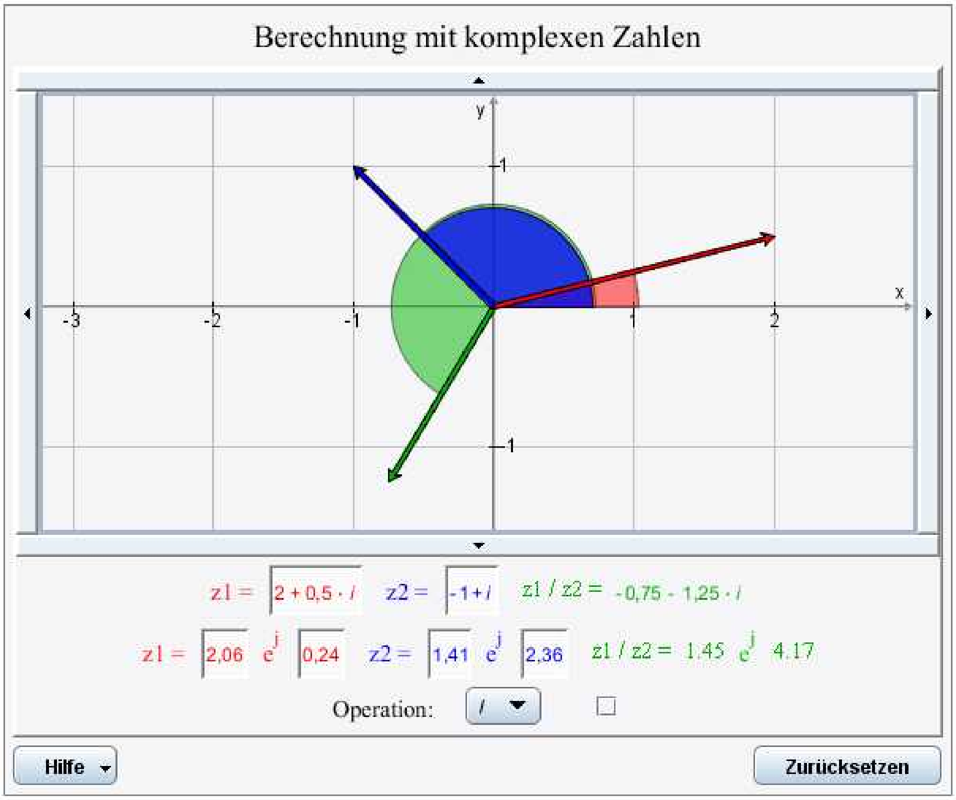
Beispiel

$z_1 = 2 + \frac{1}{2} j$

$z_2 = -1 + j$

$z_3 = \frac{z_1}{z_2}$

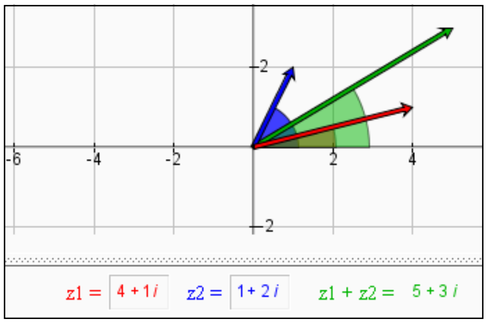
$= -0{,}75 - 1{,}25 j$



Zusammenfassung: Operationen mit komplexen Zahlen

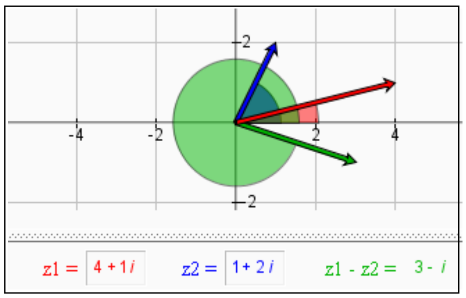
mit z=a+bj algebraische Form
in kartesischer Koordinaten (Re, Im)

Addition



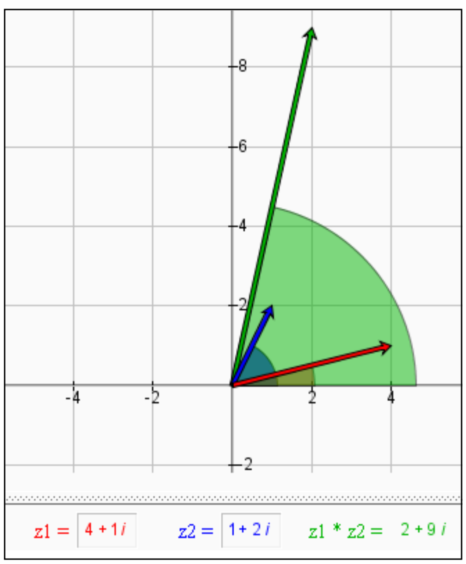
$$z_1 + z_2 = (a_1 + a_2) + j \cdot (b_1 + b_2)$$

Subtraktion



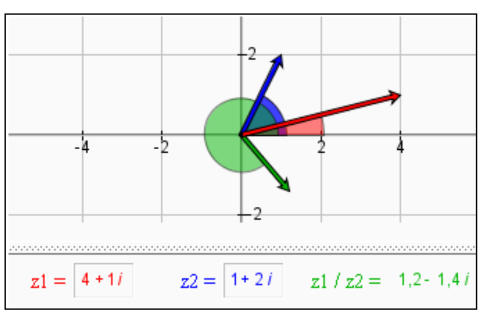
$$z_1 - z_2 = (a_1 - a_2) + j \cdot (b_1 - b_2)$$

Multiplikation



$$z_1 \cdot z_2 = (a_1 a_2 - b_1 b_2) + j \cdot (b_1 a_2 + a_1 b_2)$$

Division



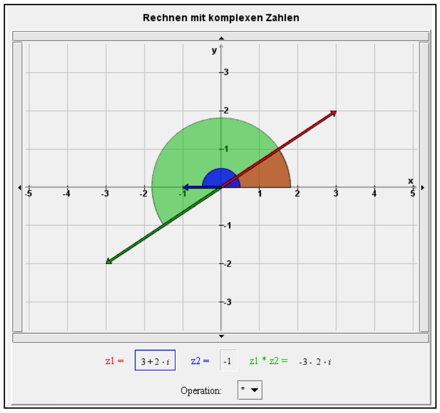
$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{a_1 a_2 + b_1 b_2}{a_2^2 + b_2^2} + j \frac{b_1 a_2 - a_1 b_2}{a_2^2 + b_2^2}$$

$$z_2 = \frac{1}{z} = \frac{1}{a + jb} = \frac{a}{a^2 + b^2} - j \frac{b}{a^2 + b^2}$$

Zusammenfassung: Operationen mit komplexen Zahlen

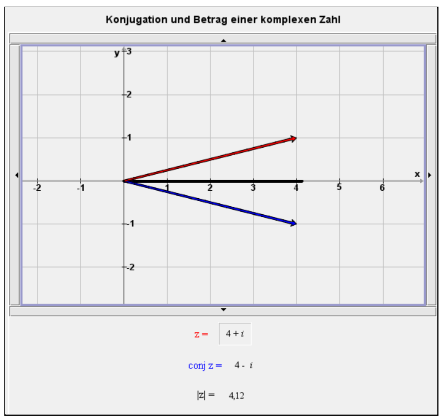
mit z=a+bj algebraische Form in kartesischen Koordinaten (Re, Im)

Negation



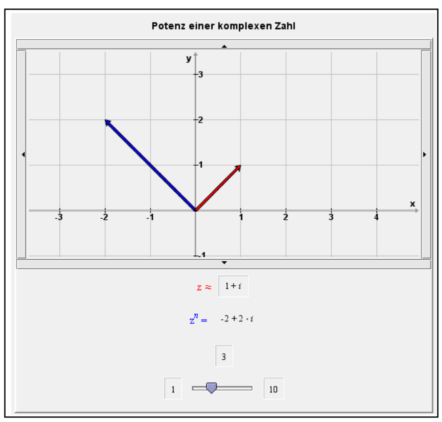
$$-z = -a + j \cdot (-b)$$

konjugiert komplex



$$z^* = a - j \cdot b$$

Potenz



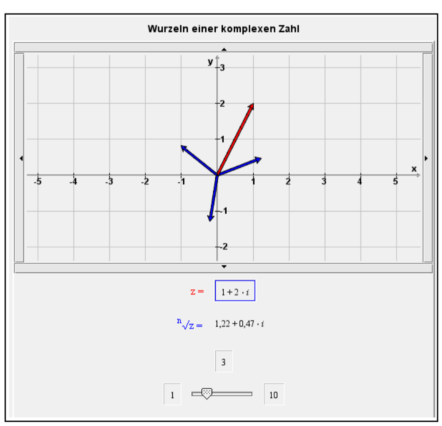
$$z^n = (a + j \cdot b)^n$$

Beispiel

$z = (3+2j)^4$

Berechnung später mit Polarkoordinaten

Wurzel



Beispiel

$z = \sqrt[3]{8+2j}$

Berechnung später mit Polarkoordinaten

Aufgabe:

zu Hause

Gegeben sind die komplexen Zahlen

$$z_1 = 2 + 2j$$
$$z_2 = -1 + j$$

Berechnen Sie

$$z_3 = z_1 \cdot z_2$$

und

$$z_4 = \frac{z_1}{z_2}$$

und $z_5 = z_1 + z_2$

Aufgabe:
Berechnen und skizzieren Sie

zu Hause

$z_0 = j^0 =$

$z_1 = j^1 =$

$z_2 = j^2 =$

$z_3 = j^3 =$

$z_4 = j^4 =$

$z_5 = j^5 =$

$z_6 = j^6 =$

$z_7 = j^{30} =$

$z_8 = j^{227} =$