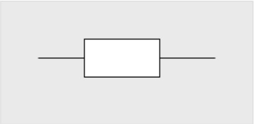
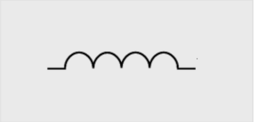
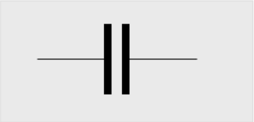
GRUNDLAGEN DER ELEKTROTECHNIK 1

Vorlesung 11
Wechselspannung – Impedanz und Admittanz

HAW.martinlapke@gmail.com

Widerstand		$\underline{Z} = R$
Spule		$\underline{Z} = j\omega L$
Kondensator		$\underline{Z} = \frac{1}{j\omega C}$

WECHSELSTROM

Inhalte der Kapitel 5 bis 7: Wechselstrom

7 Wechselstrom

- Wechselstrom-Messbrücken
- Wechselstromleistung – Blindstromkompensation - Leistungsanpassung
- Impedanz und Admittanz
- Darstellung im Zeitbereich | komplexe Darstellung

6 Magnetisches Feld

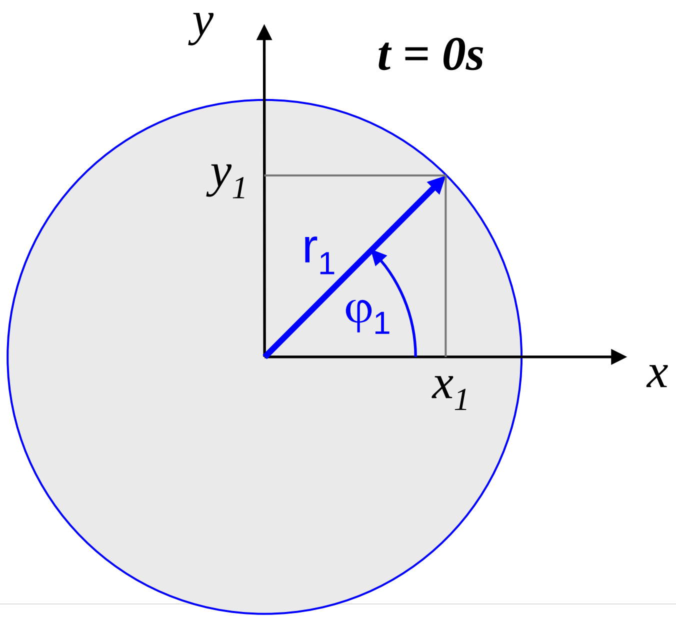
- Spule
- Magnetisches Feld

5 Elektrisches Feld

- Kondensator
- Elektrisches Feld

REVIEW: ZEIGERDARSTELLUNG IN KARTESISCHEN KOORDINATEN

- Polarkoordinaten
  Beschreibung des Zeigers durch Länge und Winkel (r_1, φ_1)
- Kartesische Koordinaten
  Beschreibung durch Punkt in einem Koordinatenkreuz (x_1, y_1)



$$x_1 = r_1 \cos \varphi_1$$

$$y_1 = r_1 \sin \varphi_1$$

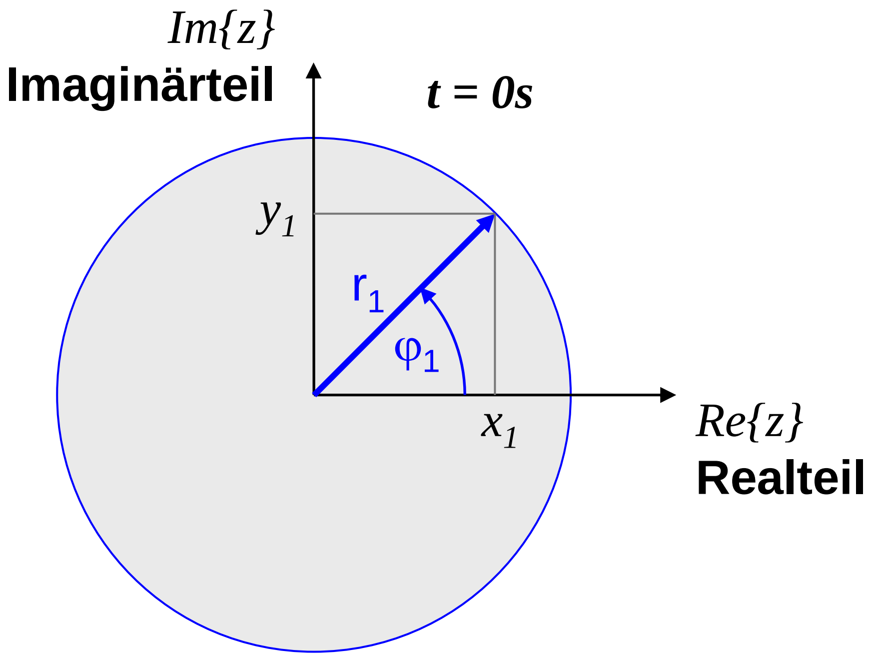
$$r_1 = \sqrt{x_1^{\,2} + y_1^{\,2}}$$

$$\varphi_1 = \arctan \frac{y_1}{x_1}$$

REVIEW: ZEIGERDARSTELLUNG MIT KOMPLEXEN ZAHLEN

2 reelle Zahlen x_1 und y_1 werden durch nur eine einzige Zahl $\underline{z}$ ersetzt.

$\underline{z}$ ist eine komplexe Zahl



Komplexe Ebene

statt (x_1, y_1) schreiben wir:

$$\underline{z} = x_1 + j\,y_1$$

Realteil

Imaginärteil

REVIEW: EULERSCHE FORMEL

Es gilt für komplexe Zahlen die Eulersche Formel:

$$\boxed{e^{j\varphi} = \cos\varphi + j\sin\varphi}$$

Nutzen:

Eine komplexe Zahl in Polarkoordinaten mit r, φ kann sehr kompakt als Exponentialfunktion dargestellt werden:

$$\boxed{\underline{z} = r \cdot e^{j\varphi}}$$

REVIEW: KOMPLEXE WECHSELGRÖSSEN

Mit der Eulerschen Formel folgt für die komplexe Größe:

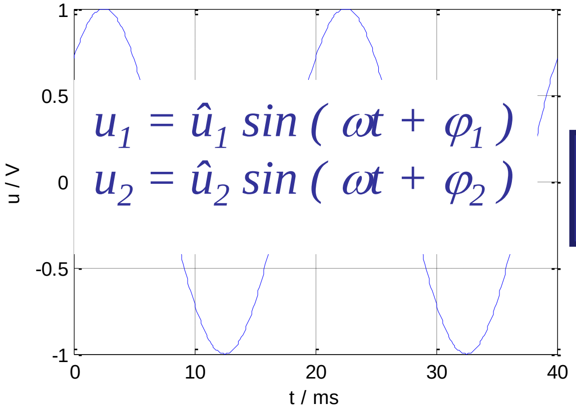
$$\boxed{\underline{u}(t) = \hat{u}\cos(\omega t + \varphi) + j\hat{u}\sin(\omega t + \varphi) = \hat{u} \cdot e^{j\varphi} e^{j\omega t}}$$

$\underline{\hat{u}} = \hat{u} \cdot e^{j\varphi}$	komplexe Amplitude
$\lvert\underline{\hat{u}}\rvert = \hat{u}$	Betrag der komplexen Amplitude
$\arg(\hat{u}) = \varphi$	Phasenwinkel der komplexen Amplitude
$e^{j\omega t}$	Winkelfaktor

$\Rightarrow$ Eine Zeitfunktion lässt sich in der komplexe Ebene darstellen als:

$$\boxed{\underline{u}(t) = \underline{\hat{u}} \cdot e^{j\omega t}}$$

REVIEW:
IDEE DER KOMPLEXEN WECHSELSPANNUNGSRECHNUNG



$$u_1 = \hat{u}_1 \sin(\omega t + \varphi_1)$$
$$u_2 = \hat{u}_2 \sin(\omega t + \varphi_2)$$

Transformation in komplexe Ebene

$$\underline{u}_1 = x_1 + j\,y_1 = r_1\, e^{j\varphi_1}$$
$$\underline{u}_2 = x_2 + j\,y_2 = r_2 e^{j\varphi_2}$$

Rechnung, z.B.:

$$\underline{u}_1 \cdot \underline{u}_2 = r_1 \cdot r_2\; e^{\,j(\varphi 1 + \varphi 2)}$$

Rücktransformation in Zeitbereich

$$u_{ges} = \mathrm{Im}\{\underline{u}_1 \cdot \underline{u}_2\}$$

Viele Rechnungen sind einfacher mit komplexen Zahlen als im Zeitbereich mit Sinusfunktionen

- Addition und Subtraktion (häufig für Kirchhoffsche Gesetze)
- Multiplikation und Division (häufig für ohmsches Gesetz)
- Ableitung und Integration (häufig für Kondensator und Induktivität)

7 WECHSELSPANNUNG

SPULE

Spannung und Strom an der Spule:

$$u = L \cdot \frac{di}{dt}$$

Komplexe Strom- und Spannungsgrößen an der Spule:

$\underline{i}(t) = \underline{I} e^{j\omega t}$ mit $\underline{I} = I = \hat{\imath} / \sqrt{2}$ (komplexer Effektivwert des Stroms)

$$\Rightarrow \underline{u} = \underline{U} e^{j\omega t} = L \cdot \frac{d}{dt}\left(\underline{I} \cdot e^{j\omega t}\right) = L \cdot \underline{I} \cdot \frac{d}{dt}\left(e^{j\omega t}\right) = L \cdot \underline{I} \cdot (j\omega) e^{j\omega t}$$

$$\Rightarrow \underline{U} = j\omega L \cdot \underline{I}$$

statt Ableiten nur noch mit $j\omega$ multiplizieren

VERGLEICH MIT DEM OHMSCHEN WIDERSTAND

Widerstand bei Gleichstrom: $U = R \cdot I$

Spule bei Wechselstrom: $\underline{U} = j\omega L \cdot \underline{I}$

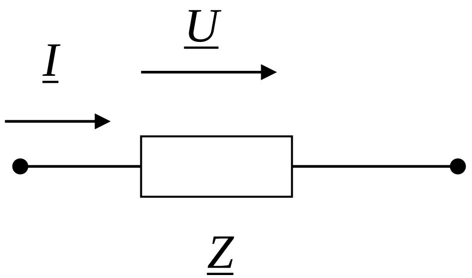
$j\omega L$ ist mit Widerstand bei Gleichstromnetzwerk vergleichbar

$\Rightarrow j\omega L$ nennen wir: Impedanz

IMPEDANZ $\underline{Z}$

Verallgemeinerung des Widerstands auf Wechselstrom

$$\underline{Z} = \frac{\underline{U}}{\underline{I}} = \frac{\underline{\hat{u}}}{\underline{\hat{\imath}}}$$



$\underline{Z}$ ist ein komplexer Zeiger mit der Einheit [$\underline{Z}$] = 1Ω

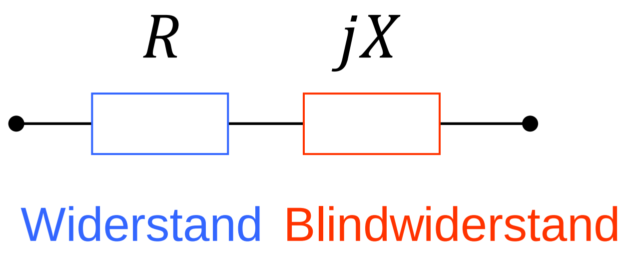
Definitionen:

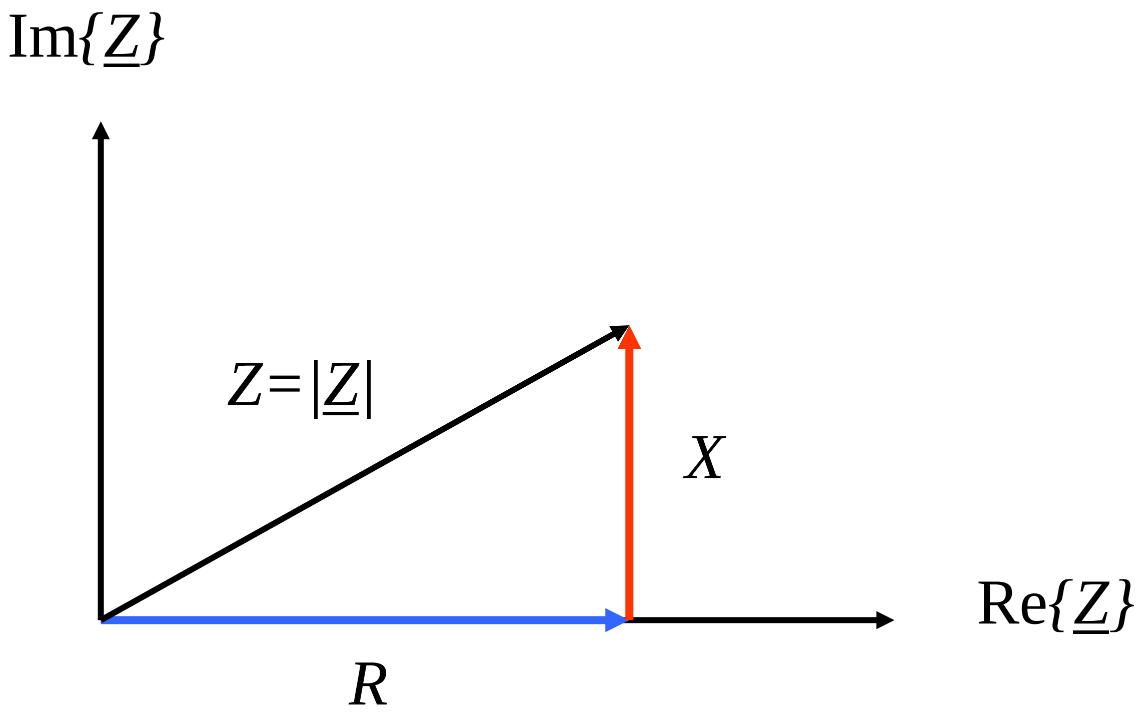
- $Z = |\underline{Z}|$ Absolutwert der Impedanz
- $\varphi = \arg(\underline{Z})$ Phasenwinkel der Impedanz
- $R = Re\{\underline{Z}\}$ Widerstand
- $X = Im\{\underline{Z}\}$ Blindwiderstand (Reaktanz) : engl. „reactance"

IMPEDANZ $\underline{Z}$

in der komplexen Ebene:

$$\underline{Z} = R + jX = Z\, e^{j\varphi}$$





Es gilt:

- $R > 0$
- X kann auch negativ sein

AUFGABE

Sei $\underline{U} = 12V\angle 0°$ und $\underline{I} = 2A\ \angle -34°$.

Bestimmen Sie Impedanz, Widerstand und Reaktanz.

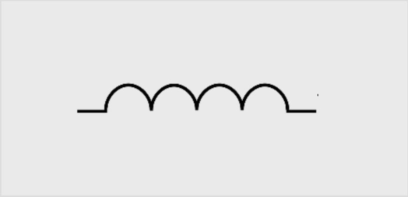
$$\underline{Z} = \frac{\underline{U}}{\underline{I}} = \frac{12V\angle 0°}{2A\angle -34°} = \frac{12V \cdot e^{j0°}}{2A \cdot e^{-j34°}} = 6\Omega \cdot e^{j34°} = 4{,}97\Omega + j\,3{,}36\Omega$$

$$R = 4{,}97\Omega$$

$$\underline{Z} = R + jX$$

$$X = 3{,}36\Omega$$

IMPEDANZ EINER SPULE



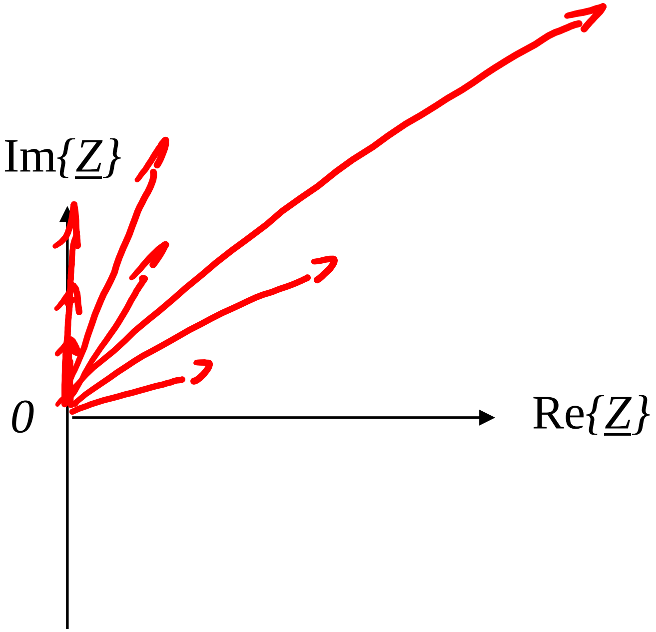
Komplexer Strom und Spannung an Spule:

$$\underline{U} = j\omega L \underline{I}$$

$$\underline{Z} = \frac{\underline{U}}{\underline{I}}$$

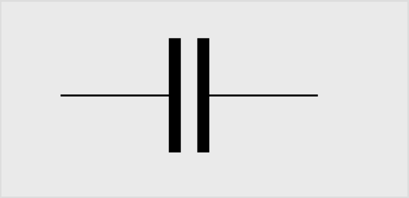
Impedanz einer Spule:

$$\boxed{\begin{aligned} \underline{Z} &= j\omega L \\ R &= 0 \\ X &= \omega L \end{aligned}}$$



Im allgemeinen nennt man eine Last $\underline{Z}$ **induktiv**, wenn $X > 0$.

AUFGABE: IMPEDANZ EINES KONDENSATORS



Kondensatorgleichung:

$$i = C \cdot \frac{du}{dt}$$

$$\underline{U} = 1/\sqrt{2}\, e^{j\varphi}$$

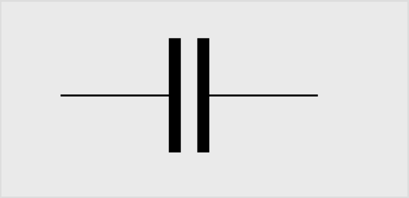
Es sei: $\underline{u}(t) = \underline{U} e^{j\omega t}$ mit $\underline{U} = U = \hat{u}/\sqrt{2}$ (komplexer Effektivwert)

$$\Rightarrow \underline{i} = \underline{I} \cancel{e^{j\omega t}} = C \cdot \frac{d}{dt}\left(\underline{U} \cdot e^{j\omega t}\right) = C \cdot \underline{U} \frac{d}{dt}\left(e^{j\omega t}\right) = C \cdot \underline{U} \cdot j\omega \cdot \cancel{e^{j\omega t}}$$

$$\Rightarrow \underline{I} = C\, \underline{U} \cdot j\omega$$

Impedanz eines Kondensators: $\underline{Z} = \frac{\underline{U}}{\underline{I}} = \frac{1}{j\omega C}$

IMPEDANZ EINES KONDENSATORS

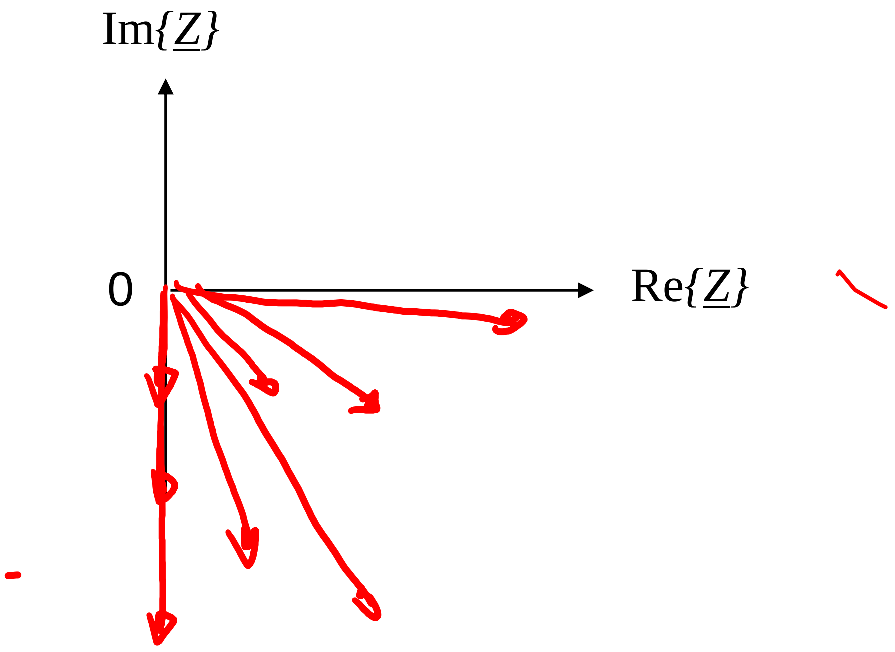


Komplexe Spannung und Strom am Kondensator:

$$\underline{U} = \frac{1}{j\omega C}\,\underline{I} = -j\,\frac{1}{\omega C}\,\underline{I}$$

$\underline{Z} = R + jX$

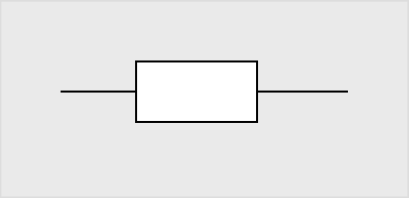
Impedanz eines Kondensators:



$$\boxed{\begin{aligned} \underline{Z} &= \frac{1}{j\omega C} = -j\,\frac{1}{\omega C} \\ R &= \mathrm{Re}\{\underline{Z}\} = 0 \\ X &= \mathrm{Im}\{\underline{Z}\} = -\frac{1}{\omega C} \end{aligned}}$$

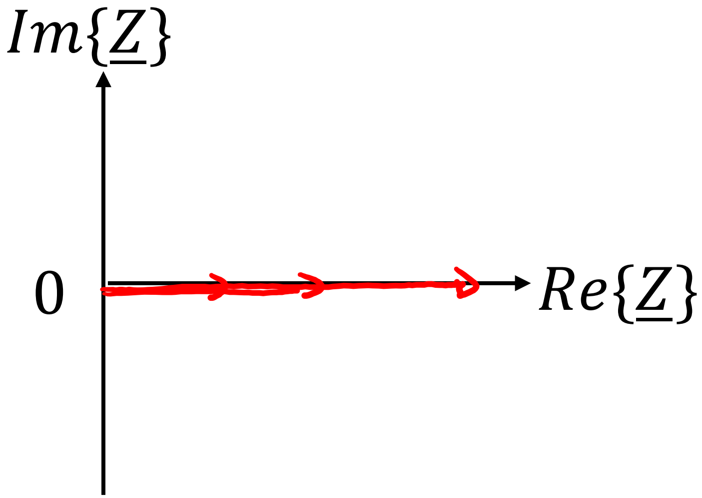
Man nennt eine Last kapazitiv, wenn $X < 0$.

IMPEDANZ EINES WIDERSTANDES



Komplexe Spannung und Strom am Widerstand:

$$\underline{U} = R \cdot \underline{I}$$



Impedanz eines Widerstandes:

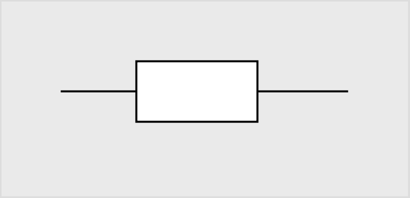
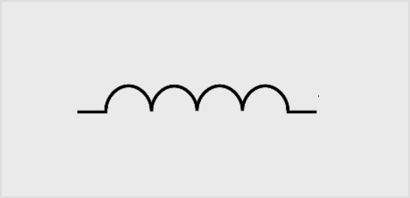
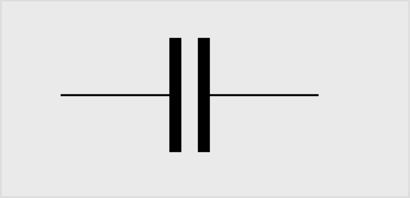
$$\underline{Z} = R$$

$$R = Re\{\underline{Z}\} = R$$

$$X = 0$$

Man nennt eine Last ohmsch, wenn $X = 0$ und $R = const.$

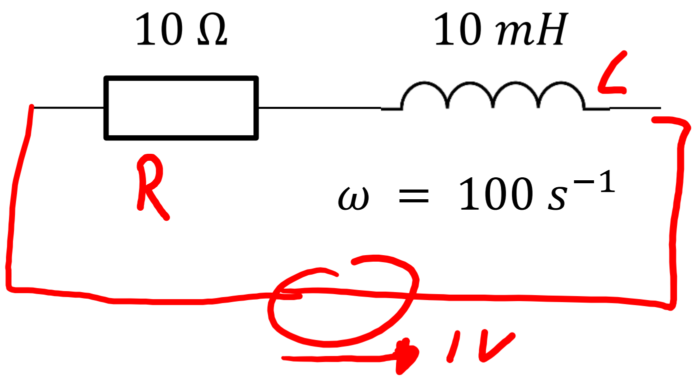
ZUSAMMENFASSUNG: IMPEDANZ

Widerstand		$\underline{Z} = R$
Spule		$\underline{Z} = j\omega L$
Kondensator		$\underline{Z} = \frac{1}{j\omega C}$

BEISPIEL: RECHNEN MIT IMPEDANZEN

$$f = \frac{\omega}{2\pi} = \frac{100\,s^{-1}}{2\pi} = 15{,}9\,Hz$$

Serien- und Parallelschaltung von Impedanzen rechnet man genau wie bei Widerständen

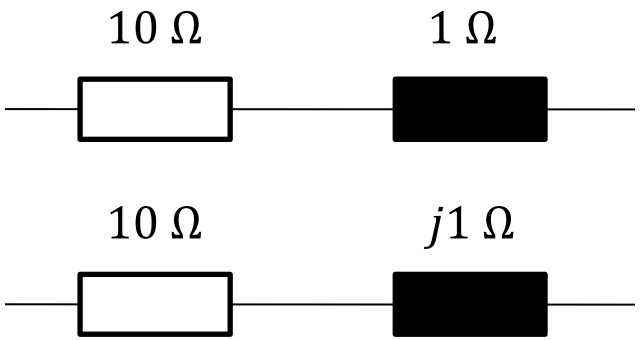


$$\underline{Z} = j\omega L + R$$

$$= j\,100\,s^{-1} \cdot 0{,}01\,H + 10\,\Omega$$

$$= j\,1\,\Omega + 10\,\Omega$$

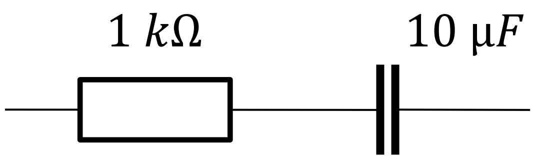
Alternative Darstellung:



$$\underline{Z} = R + j\omega L = 10\,\Omega + j\,1\,\Omega$$

AUFGABE

Wie groß ist die Impedanz der Serienschaltung?



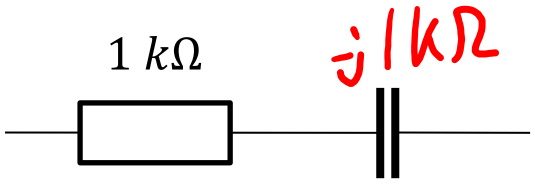
$$\omega = 100\ s^{-1}$$

$$\underline{Z}_{C_1} = \frac{1}{j\omega C_1} = \frac{1}{j\cdot 100 s^{-1}\cdot 10 \mu F}$$

$$= \frac{1}{j\, 100 s^{-1}\cdot 10\cdot 10^{-6} F} = \frac{1}{j\cdot 10^{-3}\,\Omega^{-1}}$$

$$= -j\, 1000\,\Omega = -j\, 1k\Omega$$

Alternative Darstellung:



$$\underline{Z} = \underline{Z}_R + \underline{Z}_{C_1} = R - j\frac{1}{\omega C_1}$$

$$= R + \frac{1}{j\omega C_1}$$

7 WECHSELSPANNUNG

ADMITTANZ $\underline{Y}$

Leitwert in Gleichstromnetzwerken: $G = 1/R$

In Wechselstromnetzwerken nennt man den korrespondierenden komplexen Leitwert auch:

Admittanz $\underline{Y} = 1/\underline{Z}$

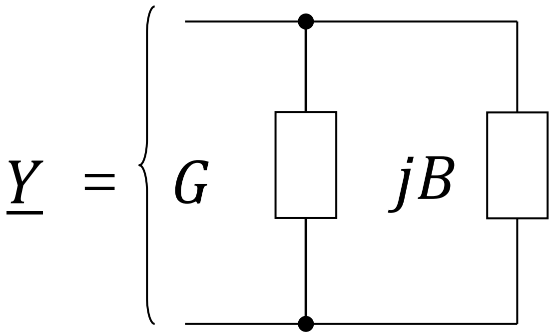
$$\underline{Y} = G + j\,B$$

mit:

„Conductance"

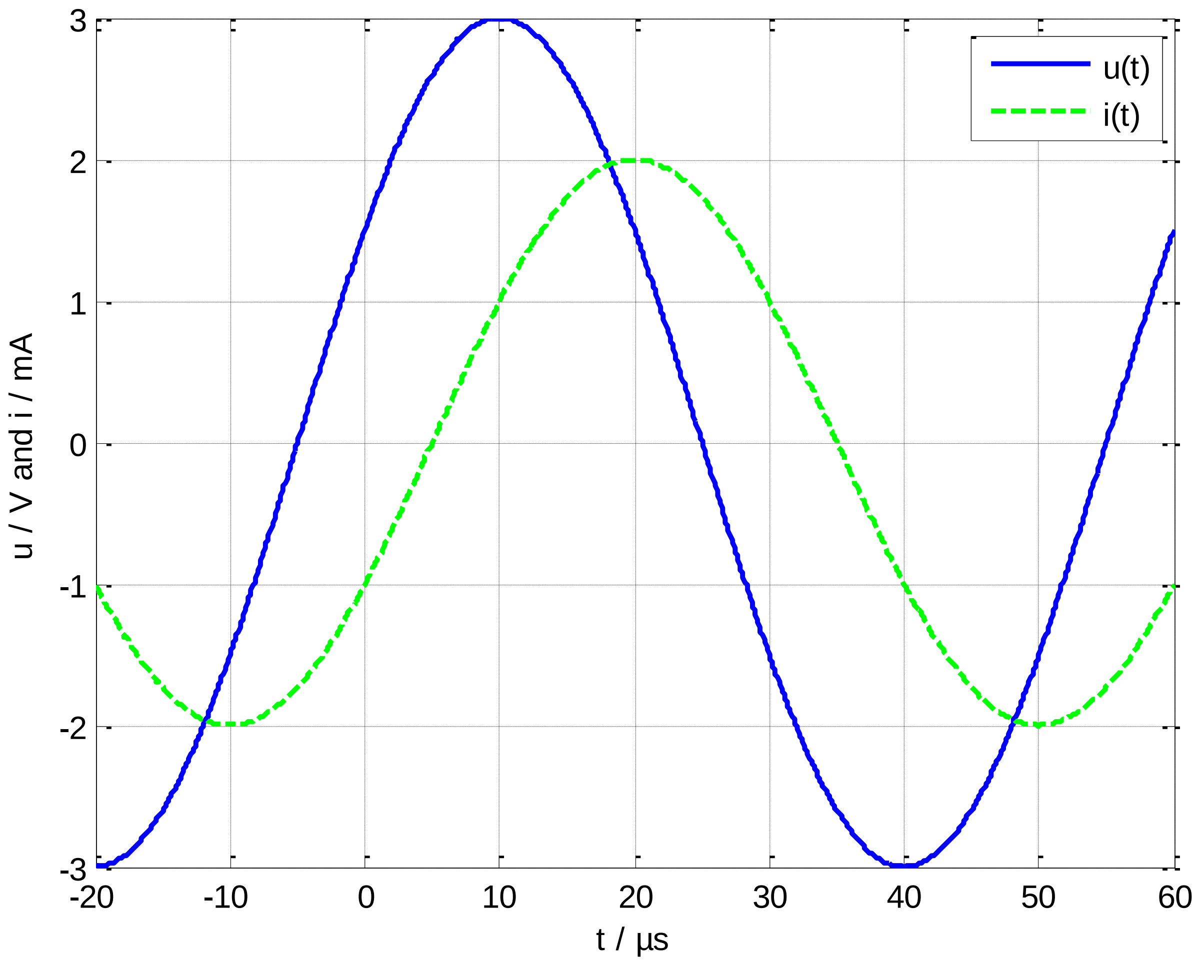
$G = Re\{\underline{Y}\}$ Wirkleitwert oder Konduktanz

$B = Im\{\underline{Y}\}$ Blindleitwert oder Suszeptanz



AUFGABE: BESTIMMEN SIE $\underline{Z}$ UND $\underline{Y}$

$\varphi = \frac{\Delta t}{T} \cdot 360°$



$\varphi_u = 360° \cdot \frac{5\mu s}{60\mu s} = 30°$

$\hat{\underline{U}} = 3V/\sqrt{2} \angle 30°$

$\hat{\underline{I}} = 2mA/\sqrt{2} \angle -30°$ $\quad \varphi_i = -30°$

$\underline{Z} = \underline{U}/\underline{I} = \frac{3V}{2mA} \frac{\angle 30°}{\angle -30°} = 1{,}5\,k\Omega \angle 60°$

$= 750\Omega + j1300\Omega$

$\underline{Y} = \frac{1}{\underline{Z}} = \frac{1}{1{,}5\,k\Omega} \cdot \angle -60°$

$= 0{,}33\,mS - j\,0{,}577\,mS$

BEISPIEL: REIHENSCHALTUNG

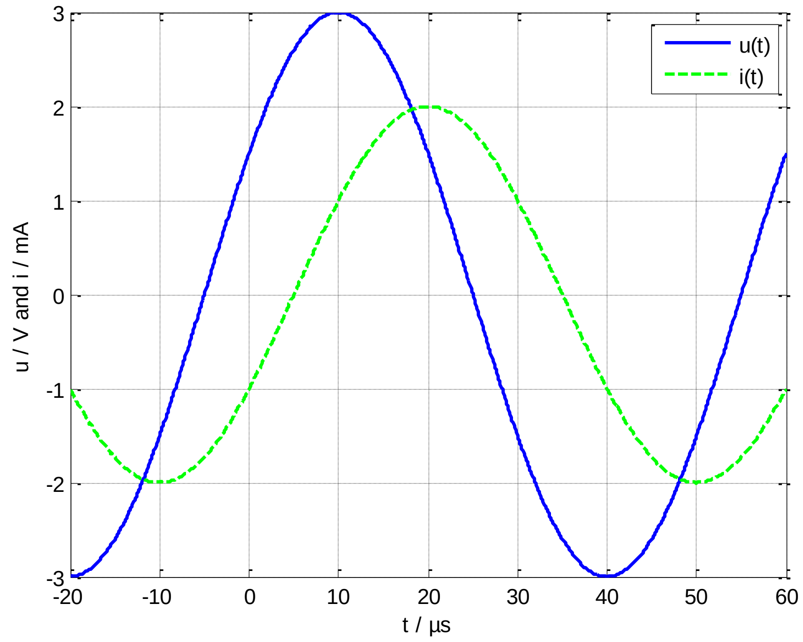
Wir haben berechnet:

$$\underline{Z} = 750\,\Omega + j\,1299\,\Omega$$

$$\underline{Y} = 0.333\,mS - j\,0.577\,mS$$

R L

$\Rightarrow \underline{Z}_g = R + j\omega L$



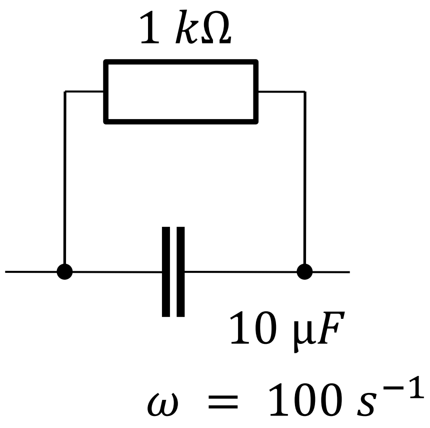
Sei $\underline{Z}$ eine Reihenschaltung von Widerstand und Spule. Welche Werte haben die Bauelemente?

$f = 1/T = 1/60\,\mu s = 16{,}67\,kHz$

$R = 750\,\Omega$

$\omega L = 1299\,\Omega \Longrightarrow L = \dfrac{1299\,\Omega}{2\pi f} = 12{,}4\,mH$

BEISPIEL: PARALLELE IMPEDANZEN



über Impedanz

$$\underline{Z} = \frac{\underline{Z}_R \cdot \underline{Z}_C}{\underline{Z}_R + \underline{Z}_C} = \ldots =$$

über Admittanz

$$\underline{Y} = \underline{Y}_R + \underline{Y}_C$$

$$\Rightarrow \underline{Z} = 1/\underline{Y}$$

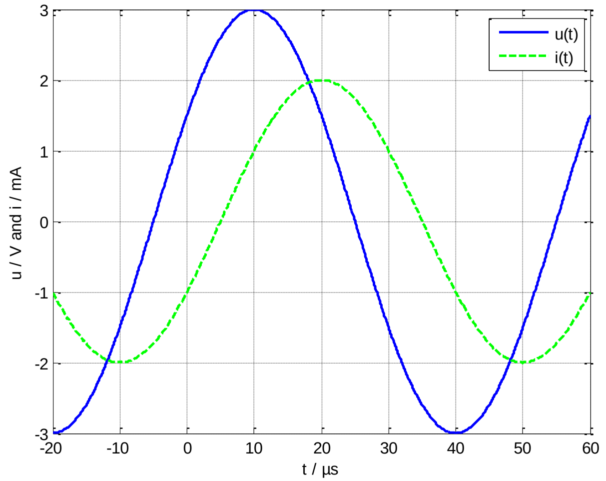
AUFGABE: PARALLELSCHALTUNG

Wir haben berechnet:

$\underline{Z} = 750\,\Omega + j\,1299\,\Omega$

$\underline{Y} = 0.333\,mS - j\,0.577\,mS$

Tipp: Bei Parallelschaltung addieren sich die Leitwerte.



Sei $\underline{Y}$ eine Parallelschaltung von Widerstand und Spule.
Welche Werte haben die Bauelemente?

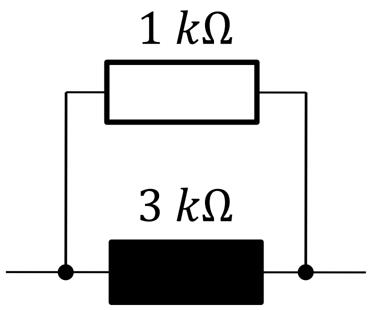
$f = 1/60\ \mu s = 16\,667\ Hz \Rightarrow \omega = 2\pi f = 104\,720\ s^{-1}$

$G\ =$

$B\ =$

HAW Hamburg
Fakultät TI
Technik und Informatik

AUFGABE: BESTIMMEN SIE DIE IMPEDANZ

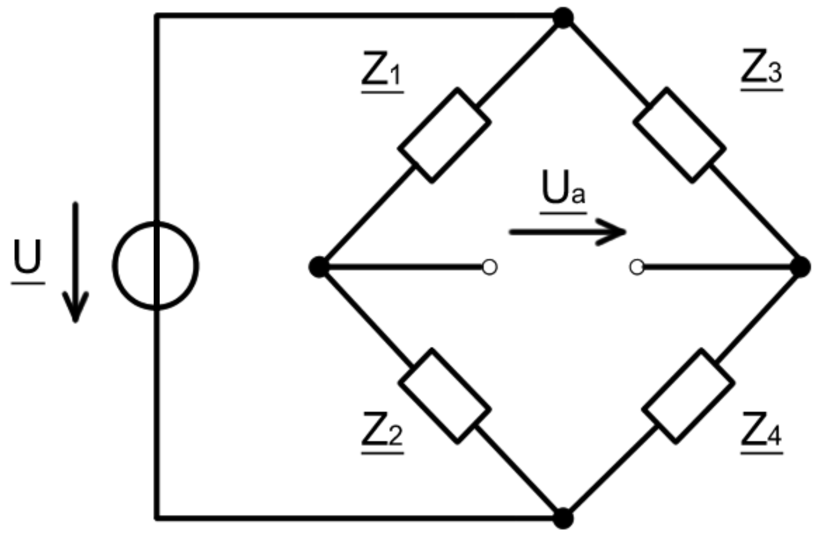


FRAGE

Was sind die grundsätzlichen Unterschiede zwischen einer ohmschen Last und einer kapazitiven oder induktiven Last?

ANWENDUNG: BRÜCKENSCHALTUNG BEI WECHSELSPANNUNG

Wechselspannung zur Speisung einer Wheatstone-Brücke
$\Rightarrow$ Messung von induktiven und kapazitiven Elementen



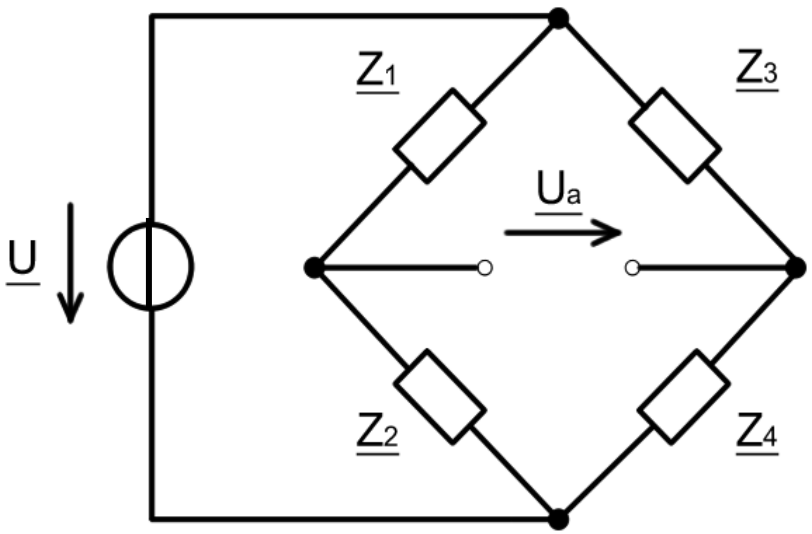
Brückenabgleich:

Brückenspannung:

7 WECHSELSPANNUNG

BRÜCKENSCHALTUNG BEI WECHSELSPANNUNG

Wechselspannung zur Speisung einer Wheatstone-Brücke
$\Rightarrow$ Messung von induktiven und kapazitiven Elementen

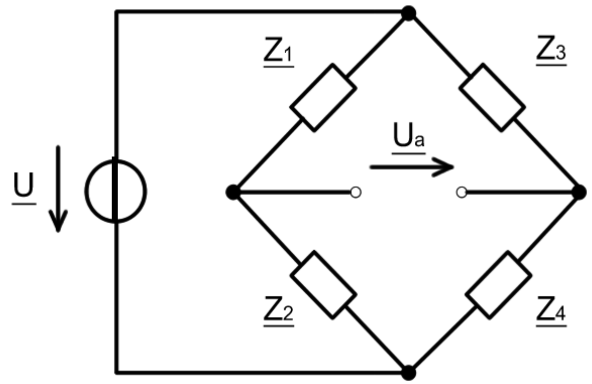


Brückenabgleich:

Brückenspannung:

WECHSELSTROMMESSBRÜCKEN

Es gibt Brückenschaltungen für spezielle Messaufgaben (als Abgleichbrücke)

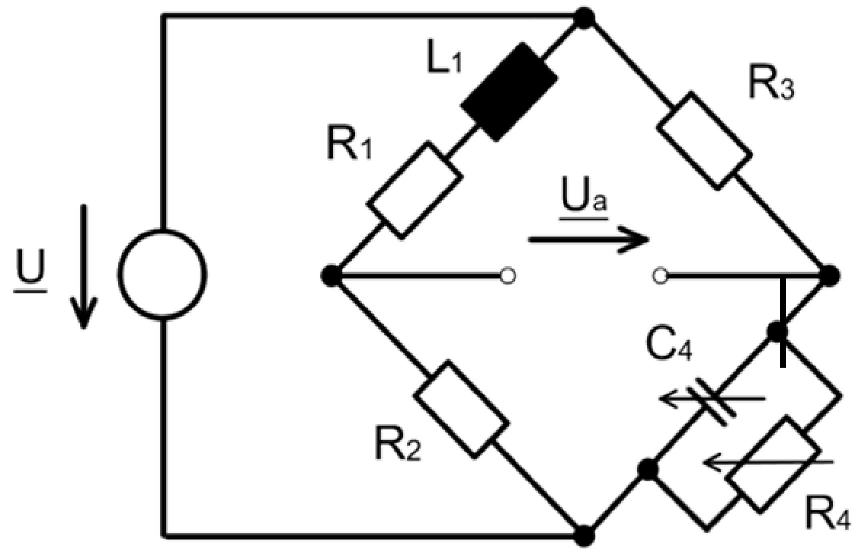


- Spule L_1 (mit Verlustwiderstand R_1)
  → Maxwell-Wien-Brücke

- Kondensator C_1 (mit parasitärem Element R_1)
  → Kapazitätsbrücke

- Frequenz ω
  → Wien-Robinson-Brücke

MAXWELL-WIEN BRÜCKE FÜR SPULEN

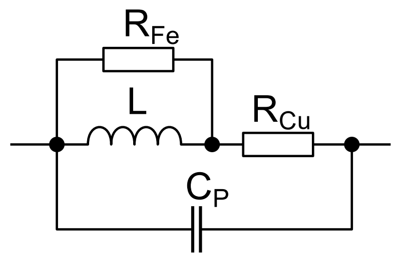


Unbekannte Spule:

$\underline{Z}_1 = R_1 + j\omega L_1$

Warum der Widerstand R_1 ?

→ Spulen- Ersatzschaltbild



L	Induktivität (ideal)
R_{Cu}	Kupferwiderstand
R_{Fe}	frequenzabhängiger Kernwiderstand
C_P	Wicklungs- & Anschlusskapazität

Prinzip für alle Wechselstrom-Messbrücken:

Sowohl der **Real-** als auch der **Imaginärteil** müssen übereinstimmen

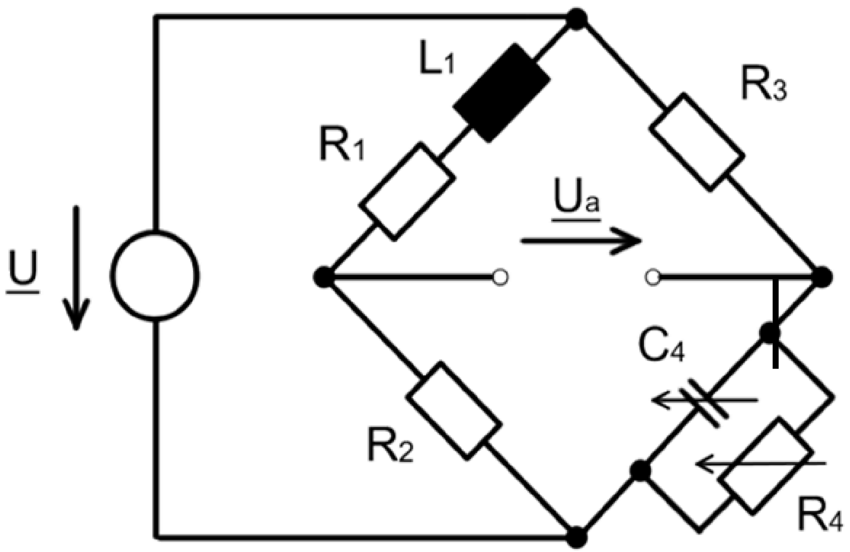
→ **2 Abgleichbedingungen**

→ 2 Parameter (R_4, C_4)

MAXWELL-WIEN BRÜCKE: ERGEBNIS

Unbekannte Spule:

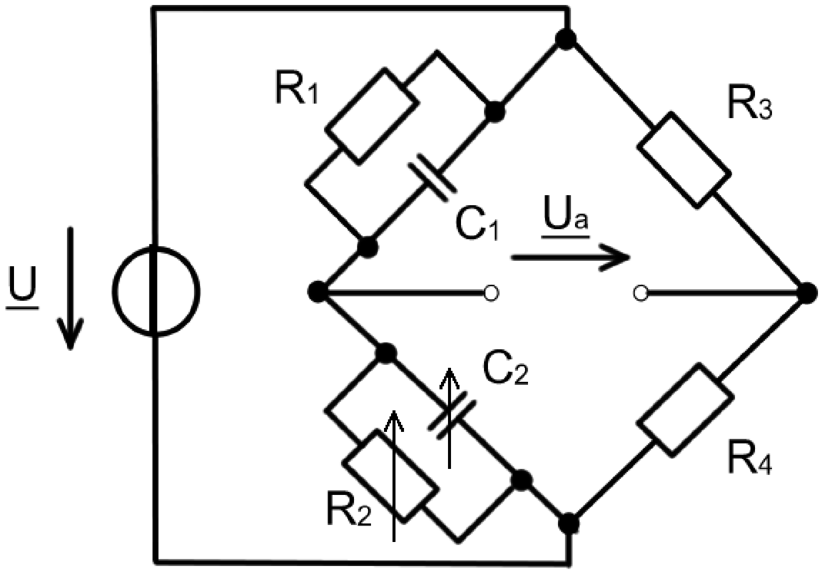
$$\underline{Z}_1 = R_1 + j\,\omega L_1$$



Abgleichbedingungen:

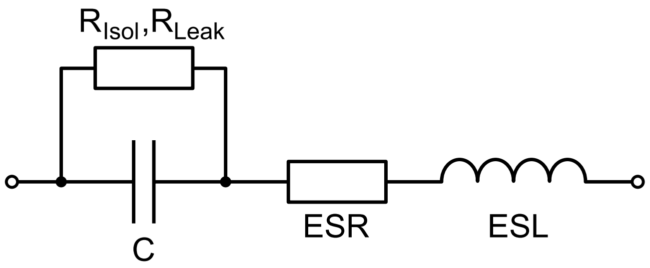
$$\boxed{\begin{aligned} R_1 &= \frac{R_2 R_3}{R_4} \\ L_1 &= R_2 R_3 C_4 \end{aligned}}$$

KAPAZITÄTSMESSBRÜCKE



Wheatstonesche Brücke zur Bestimmung unbekannter Kondensatoren.

Wozu der Widerstand R_1 ?



C	Kapazität
R_{isol} *bzw.* R_{Leak}	Isolationswiderstand des Dielektrikums bzw. Reststrom bei Elektrolyt-kondensatoren
ESR	(*engl. Equivalent Series Resistance*) - ohmschen Leitungs- und die dielektrischen Umpolungsverluste
ESL	(*engl. Equivalent Series Inductivity*) - parasitäre Induktivität

Aufgabe:
Die Brücke werde abgeglichen. Man liest R_2 und C_2 an einer Skala ab.

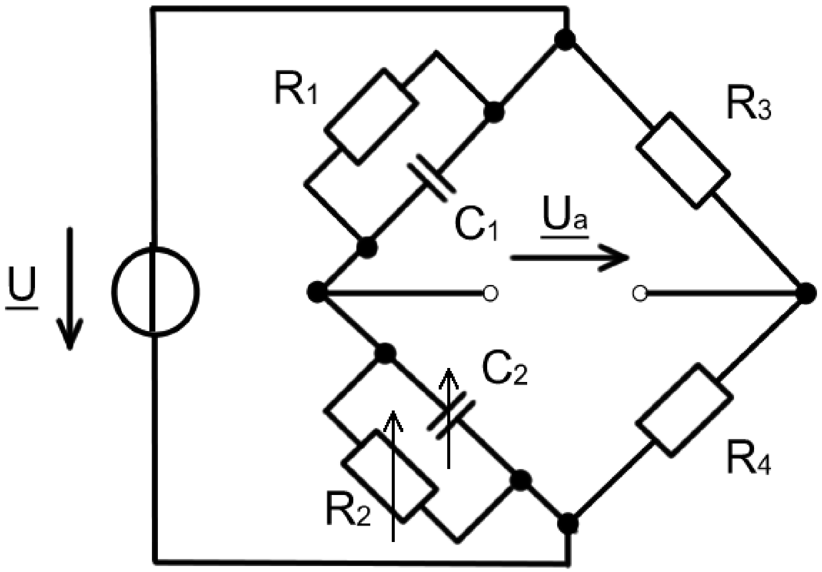
- Wie groß sind R_1 und C_1?

***Hinweis**: Admittanz nutzen !*

KAPAZITÄTSBRÜCKE: ERGEBNIS

unbekannte Kapazität:

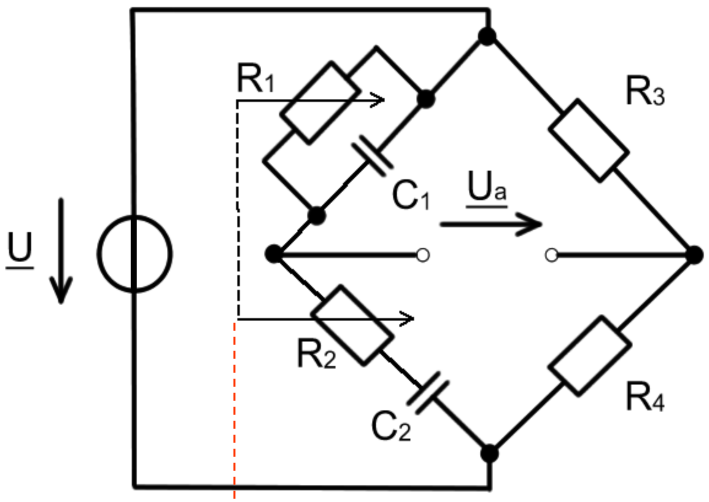
$$\underline{Y}_1 = 1/R_1 + j\omega C_1$$



Abgleichbedingungen:

$$\boxed{\begin{aligned} R_1 &= \frac{R_2 R_3}{R_4} \\ C_1 &= \frac{C_2 R_4}{R_3} \end{aligned}}$$

WIEN-ROBINSON-BRÜCKE



Tandem-Potentiometer

Zur Messung einer Frequenz ω

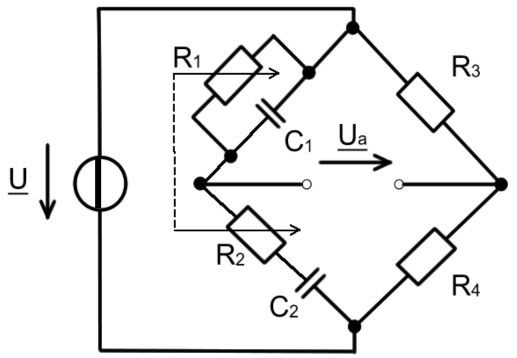
Abgleichbedingungen:

$$\boxed{1 = \omega^2 R_1 R_2 C_1 C_2 \text{ und } \frac{C_1}{C_2} + \frac{R_2}{R_1} = \frac{R_4}{R_3}}$$

Sei $C_1 = C_2 = C,\ R_1 = R_2$ und $R_4 = 2R_3$

$$\Rightarrow \omega = \frac{1}{RC}$$

WIEN-ROBINSON-BRÜCKE



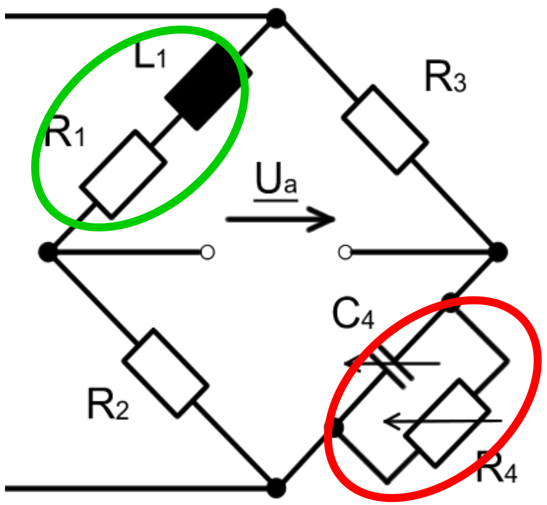
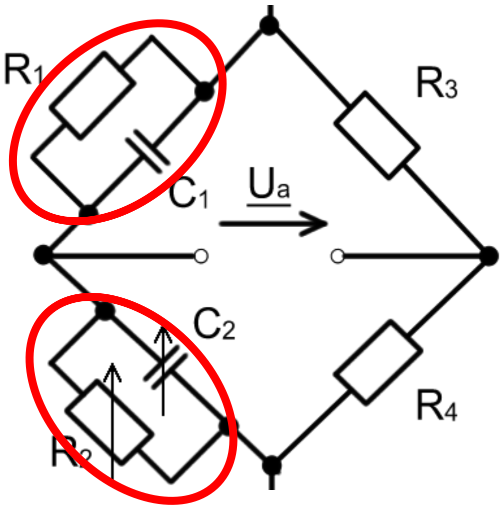
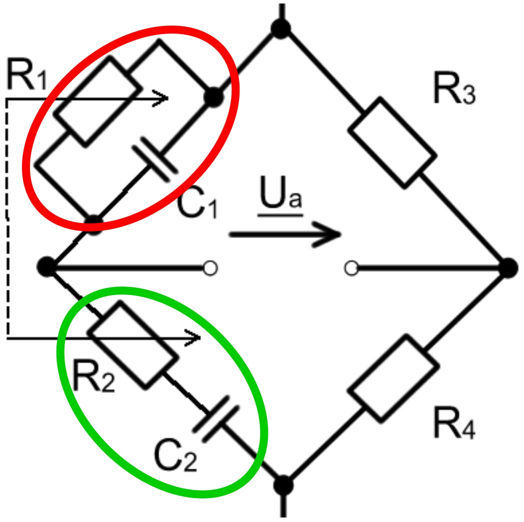
Abgleichbedingungen:

$$\boxed{1 = \omega^2 R_1 R_2 C_1 C_2 \text{ und } \frac{C_1}{C_2} + \frac{R_2}{R_1} = \frac{R_4}{R_3}}$$

Aufgabe:
Wählen Sie $C_1 = C_2 = C$ und $R_1 = R_2 = R$ und $R_4 = 2\,R_3$.

Wenn Sie C und R kennen bzw. an einer Skala ablesen können, wie ergibt sich dann die gesuchte Frequenz?

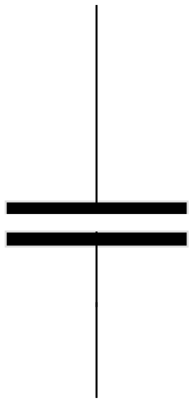
WECHSELSTROMMESSBRÜCKEN

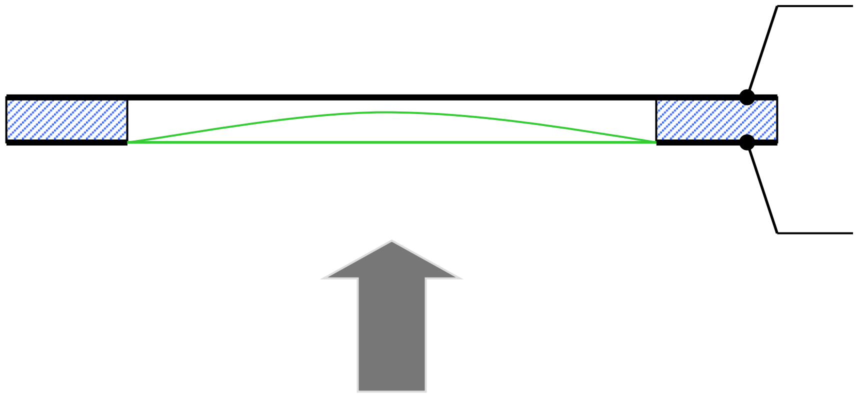
Maxwell-Wien-Brücke	Kapazitätsbrücke	Wien-Robinson-Brücke
für Spulen	für Kondensatoren	zur Frequenzmessung
		

Reihenschaltung Parallelschaltung

ANWENDUNG: KAPAZITIVER DRUCKSENSOR

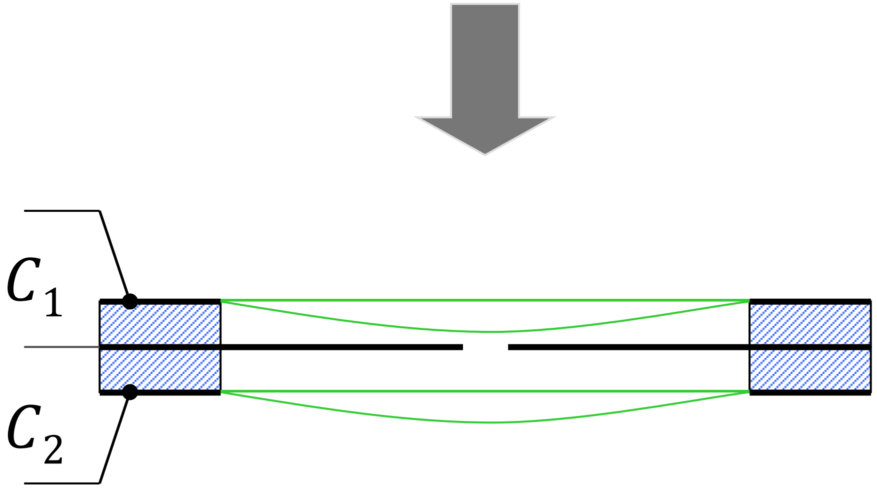
$$\boxed{C = \varepsilon \frac{A}{d}}$$

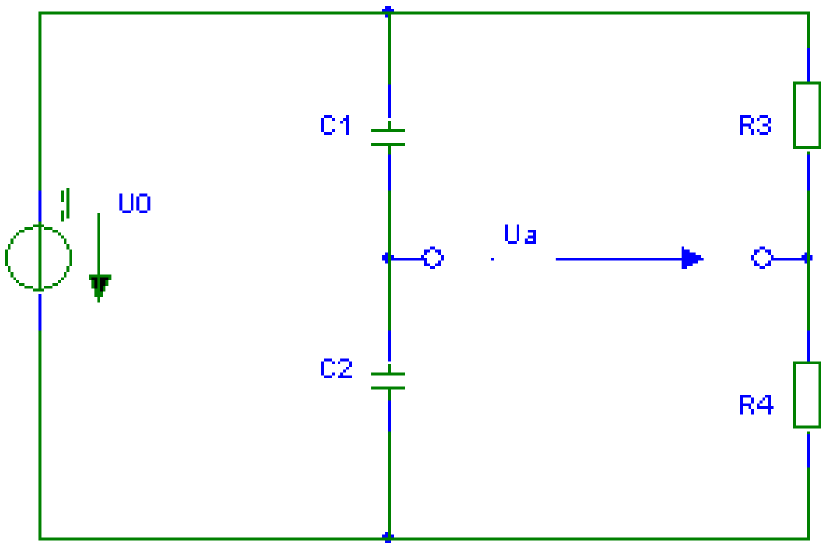




Ceracore UCS2 Foto: Endress+Hauser
www.endress.com

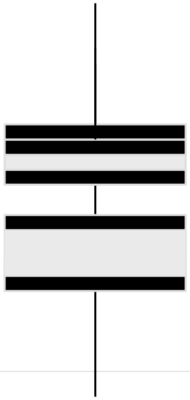
ANWENDUNG: DIFFERENTIALDRUCKSENSOR





$$C_1 = \varepsilon \frac{A}{d-x}, \quad C_2 = \varepsilon \frac{A}{d+x}, \quad R_3 = R_4 = R$$

C_1
C_2



$$\Rightarrow U_a = U_0 \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{A}{k \cdot d} \cdot p \propto p$$

mit k: Federkonstante

NEBENRECHNUNGEN DRUCKSENSOR

WAS SIE MITNEHMEN SOLLEN…

Impedanz und Admittanz

- Definition + Begriffe Reaktanz, Wirkleitwert und Blindleitwert kennen
- Rechnen mit Impedanzen beherrschen
  1. Impedanz bestimmen (oder Admittanz)
  2. Rechnen wie mit Widerständen – aber komplex

- Impedanz von

R: $\underline{Z}_R = R$

L: $\underline{Z}_L = j\omega L$

C: $\underline{Z}_C = 1/j\omega C$

WAS SIE MITNEHMEN SOLLEN …

Wechselstrommessbrücken

- Brückenarten und deren Anwendung verstehen
- Abgleichbedingung anwenden

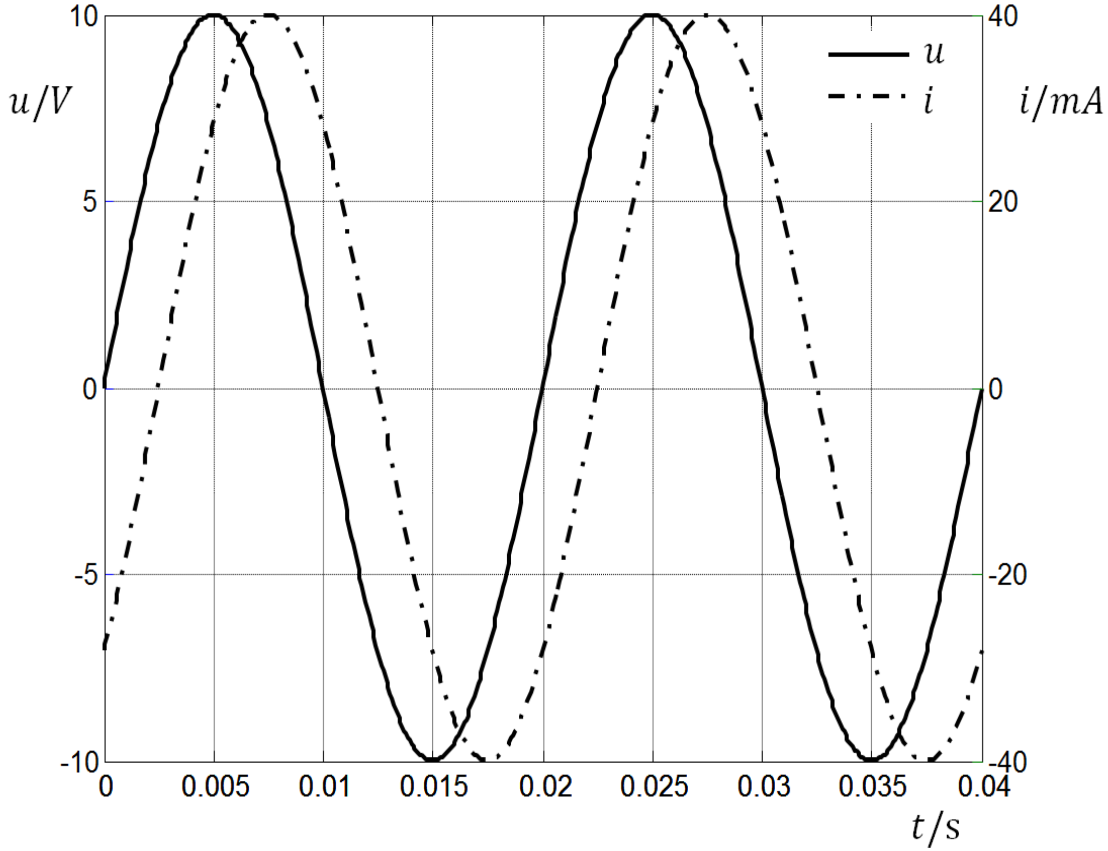
A) Maxwell-Wien-Brücke

B) Kapazitätsmessbrücke

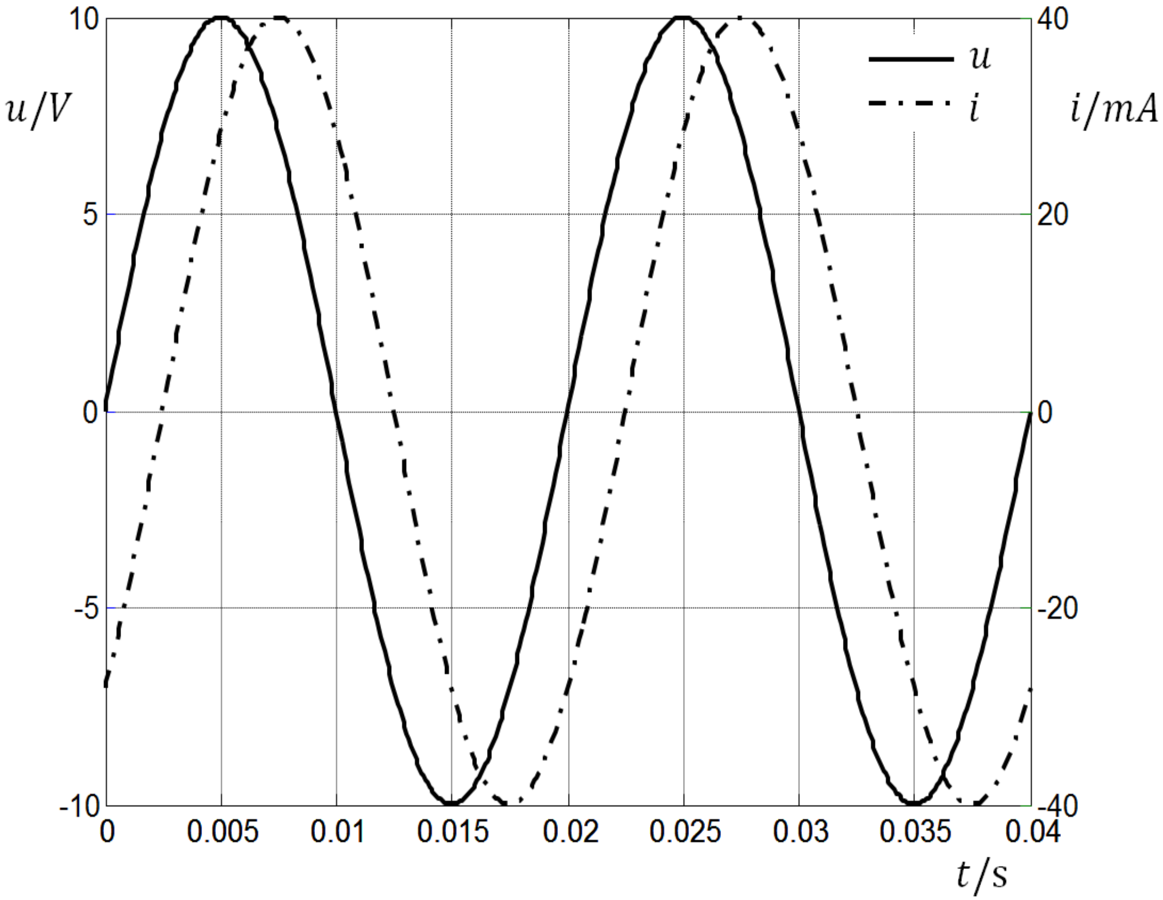
C) Wien-Robinson-Brücke

ÜBUNG ++ WS13

Gegeben sind die beiden nachfolgend dargestellten Zeitsignale: Eine Spannung $u(t)$ über einer unbekannten Impedanz Z und ein zugehöriger Strom $i(t)$, der durch diese Impedanz fließt.



ÜBUNG ++ WS13



a) Welche Kreisfrequenz haben die Signale?
b) Geben Sie die Effektivwerte U und I der beiden Signale an.
c) Geben Sie die Phase φ_i des Stromsignals an (in°)
d) Ist die unbekannte Impedanz Z induktiv oder kapazitiv? Begründen Sie Ihre Antwort.
e) Berechnen Sie Betrag und Phase der unbekannten Impedanz Z und skizzieren Sie Z in der komplexen Ebene.
f) Nehmen Sie an, dass $Z = 250\Omega \angle 45°$ beträgt und aus zwei parallel geschalteten Komponenten besteht. Geben Sie die Werte dieser Komponenten an.
g) Geben Sie Scheinleistung und Leistungsfaktor an.