Vorlesung 24 am 22.12.2022

Inhalte: Differentialrechnung 3

4 Differentialrechnung

4 Differentialrechnung 1

4.1 Differenzierbarkeit einer Funktion 2
4.2 Differentiationsregeln 5
4.3 Eigenschaften differenzierbarer Funktionen 7
4.4 Anwendungen der Differentialrechnung 10
4.4.1 Kurvendiskussionen 10
4.4.2 Extremwertprobleme 14
4.4.3 Tangente und Normale 16
4.4.4 Tangentenverfahren von Newton 18
4.5 Regeln von Bernoulli-l'Hospital

•

6.2 Differentiationsregeln Zusammenfassung

Satz 6.1: Faktorregel

Ein konstanter Faktor bleibt beim Differenzieren erhalten:

$$\boxed{y = c \cdot f(x) \;\Rightarrow\; y' = c \cdot f'(x)}$$

Satz 6.2: Summenregel

Eine Summe von Funktionen darf gliedweise differenziert werden:

$$\boxed{y = f(x) + g(x) \;\Rightarrow\; y' = f'(x) + g'(x)}$$

Satz 6.3: Produktregel

Die Ableitung einer Funktion, die aus einem Produkt von Teilfunktionen besteht, wird mit folgendem Ausdruck berechnet:

$$\boxed{y = f(x) \cdot g(x) \;\Rightarrow\; y' = f'(x) \cdot g(x) + f(x) \cdot g'(x)}$$

Satz 6.4: Quotientenregel

Die Ableitung einer Funktion, die aus einem Quotienten von Teilfunktionen besteht, wird mit folgendem Ausdruck berechnet:

$$\boxed{y = \frac{f(x)}{g(x)} \;\Rightarrow\; y' = \frac{f'(x) \cdot g(x) - f(x) \cdot g'(x)}{g^2(x)}}$$

Sonderfall: **Reziprokregel**

$$y = \frac{1}{g(x)} \;\Rightarrow\; y' = \frac{-g'(x)}{g^2(x)}$$

Satz 6.5: Kettenregel

Die Ableitung einer zusammengesetzten (verketteten) Funktion erhält man als Produkt aus äußerer und innerer Ableitung:

$$\boxed{y = f(g(x)) \Rightarrow y' = f'(g(x)) \cdot g'(x)}$$

Substitution $u = g(x)$: $y = f(u) \;\Rightarrow\; y' = \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dx}$

Satz 6.6: Ableitung der Umkehrfunktion

Sei $y = f(x)$ umkehrbar und $x = f^{-1}(y)$ die nach x aufgelöste Funktion, dann gilt für die Ableitungen:

$$\boxed{\left[f^{-1}(y)\right]' = \frac{1}{f'(x)} \quad mit \quad f'(x) \neq 0} \qquad \Rightarrow \boxed{f'(x) = \frac{1}{\left[f^{-1}(y)\right]'}} \; !$$

✓

jetzt

Satz 6.7: Logarithmische Differentiation

Die Ableitung einer Funktion $y = f(x) = [u(x)]^{v(x)}$ kann berechnet werden mit:

$$\boxed{\left[\ln f(x)\right]' = \frac{f'(x)}{f(x)} \quad mit \quad f(x) \neq 0} \qquad \Rightarrow \boxed{f'(x) = \left[\ln(f(x))\right]' f(x)} \; !$$

Satz 4.6: Ableitung der Umkehrfunktion

Sei $y = f(x)$ umkehrbar und $x = f^{-1}(y)$ die nach x aufgelöste Funktion, dann gilt für die Ableitungen:

$$\left[f^{-1}(y)\right]' = \frac{1}{f'(x)} \quad mit \quad f'(x) \neq 0$$

$$\Rightarrow \boxed{f'(x) = \frac{1}{\left[f^{-1}(y)\right]'}}$$

$$x = \underbrace{f^{-1}}_{\text{Umkehrfunktion zu } f(x)}(f(x))$$

Gesucht ist $f'(x)$ bei Kenntnis der Ableitung von $f^{-1}(x)$

Herleitung der Methode "Ableitung über die Umkehrfunktion"

$$\underbrace{(x)'}_{\text{äußere Fkt}} = \left(f^{-1}(\underbrace{f(x)}_{\substack{y \text{ Substitution} \\ \text{innere Funktion}}})\right)' \quad mit\ y = f(x) \text{ mit Umkehrfunktion } f^{-1}(x)$$

$$1 = \left(f^{-1}(f(x))\right)'$$

↳ Kettenregel anwenden

$$1 = \underbrace{\left(f^{-1}(y)\right)'}_{\text{Abl. äußere Fkt.}} \underbrace{f'(x)}_{\text{Ableitung innere Fkt.}}$$

$$\boxed{f'(x) = \frac{1}{\left[f^{-1}(y)\right]'}}$$

Beispiel

$$y = \boxed{f(x) = \ln x}$$

Verwendung: $\boxed{f'(x) = \frac{1}{(f^{-1}(y))'}}$

$$\boxed{f'(x)} = \frac{1}{(f^{-1}(y))'} = \frac{1}{(e^y)'} = \frac{1}{e^y} = \frac{1}{e^{\ln x}} = \boxed{\frac{1}{x}}$$

- Umkehrfunktion zu $f(x) = \ln x$ ist $f^{-1}(x) = e^x$
- Verwendung y als unabhängige Variable

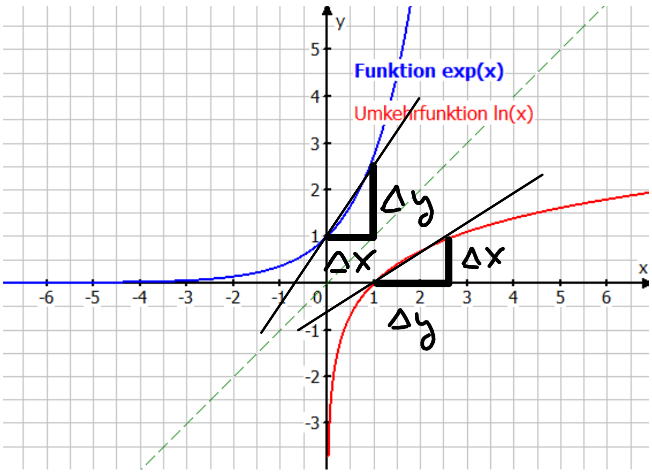
Ableitung e^y bekannt

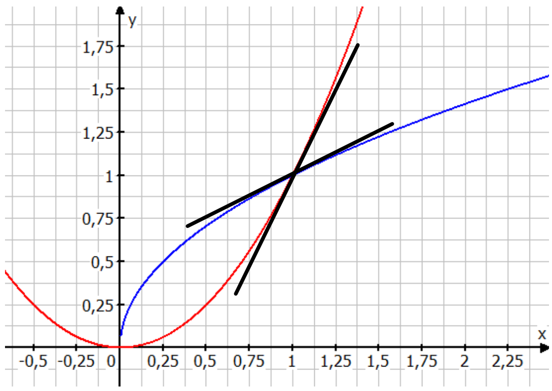
$y = f(x)$ Rücksubst. mit $y = \ln x$

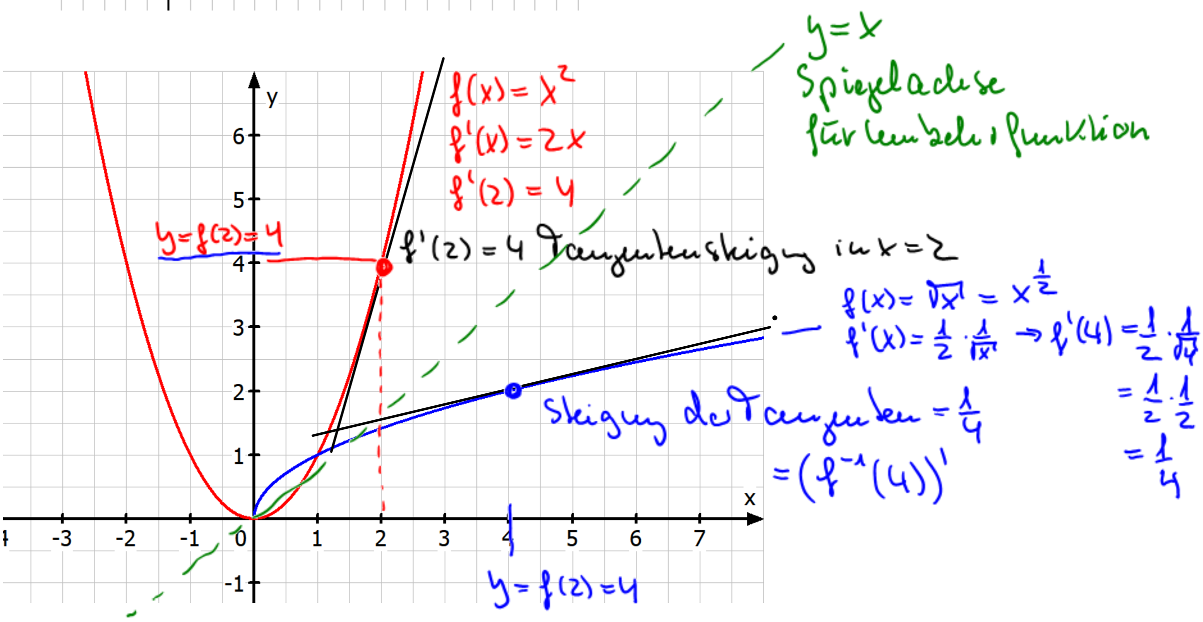
Warum gilt die Formel für die Ableitung über die Umkehrfunktion?

> **Satz 4.6: Ableitung der Umkehrfunktion**
>
> Sei $y = f(x)$ umkehrbar und $x = f^{-1}(y)$ die nach x aufgelöste Funktion, dann gilt für die Ableitungen:
>
> $$\left[f^{-1}(y)\right]' = \frac{1}{f'(x)} \quad mit \quad f'(x) \neq 0$$

Veranschaulichung







Satz 4.7: Logarithmische Differentiation → Anwendung für Funktionen mit Basis ist Funktion von x, Exponent ist Funktion von x

Die Ableitung einer Funktion $y = f(x) = [u(x)]^{v(x)}$ kann berechnet werden mit:

$$[\ln f(x)]' = \frac{f'(x)}{f(x)} \quad mit \quad f(x) \neq 0 \;\rightarrow\; \boxed{f'(x) = f(x) \cdot (\ln(f(x)))'}$$

Warum sieht die Formel so aus? Gesucht ist $f'(x)$

$$(\underbrace{\ln}_{\text{äußere Fkt}}(\underbrace{\overbrace{f(x)}^{u}}_{\text{innere Fkt}}))' = \frac{1}{\underbrace{u}_{=f(x)}} \cdot f'(x) = \frac{1}{f(x)} \cdot f'(x) \Rightarrow \boxed{f'(x) = f(x) \cdot [\ln(f(x))]'}$$

↑ Anwendung Kettenregel

Beispiel 1: $y = f(x) = e^x$

Anwendung $f'(x) = f(x)\,[\ln(f(x))]'$

$$\boxed{f'(x) = f(x) \cdot [\ln(f(x))]'}$$
$$= e^x \cdot [\ln(e^x)]'$$
$$= e^x \cdot [x \cdot \underbrace{\ln(e)}_{=1}]'$$
$$= e^x \cdot [x]'$$
$$= e^x \cdot 1 = \boxed{e^x}$$

Beispiel 1a: $f(x) = 2^x$, $2 = a$ $\quad \boxed{f(x) = e^x}$

$$\boxed{f'(x) = \underbrace{2}_{a}{}^x \cdot [\ln(\underbrace{2}_{a}{}^x)]'}$$
$$= 2^x \cdot [x \cdot \ln \underbrace{2}_{a}]'$$
$$= \underbrace{2}_{a}{}^x \cdot \boxed{\ln 2} = \boxed{\underbrace{a^x \cdot \ln a}_{= f'(x)}}$$

Beispiel 2: $y = f(x) = x^{\sin x}$

Anwendung $f'(x) = f(x) \cdot [\ln(f(x))]'$

$$\boxed{f'(x) = f(x) \cdot [\ln(f(x))]'}$$

$f(x) = x^{\sin x}$ ↗ $= x^{\sin x} \cdot [\ln(x^{\sin x})]'$

Logarithmusgesetz ↗ $= x^{\sin x} \cdot [\sin x \cdot \ln x]'$

⇒ Exponentialfunktion geht über in Produkt

$$= \boxed{x^{\sin x} \cdot [\cos x \cdot \ln x + \sin x \cdot \tfrac{1}{x}]}$$

↑ Produktregel

Aufgabe:

a) Gegeben ist die Funktion $\boxed{f(x) = (\sin x)^{\cos x}}$. mit log. Diff.

Bestimmen Sie die Funktion der 1. Ableitung.

Hinweis: Logarithmisches Differenzieren

b) Aufgabe: Ableiten über die Umkehrfunktion

Gesucht $f'(x)$ für $\boxed{f(x) = \arccos(x) \; (=y)}$ mit Umkehrfkt.

Hinweis: Bekannt $g'(x)$ für $\underbrace{g(x)}_{\hat{=} f^{-1} \text{ der Umkehrfunktion von } f(x)} = \cos(x)$: $g'(x) = -\sin x$

- benötigt wird trig. Pythagoras $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$

$$\Rightarrow \sin x = \sqrt{1 - \cos^2 x}$$

•

Aufgabe:

a) Gegeben ist die Funktion $\boxed{f(x) = (\sin x)^{\cos x}}$.
Bestimmen Sie die Funktion der 1. Ableitung $f'(x)$

Lösung - Aufgabe 3a:

- Anwendung Ableitungsregel „Logarithmisches Differenzieren"
- $(\ln(f(x)))' = \frac{1}{f(x)} \cdot f'(x) \Rightarrow f'(x) = f(x) \cdot (\ln(f(x)))'$
- $\boxed{f'(x)} = (\sin x)^{\cos x} \cdot (\ln((\sin x)^{\cos x}))'$

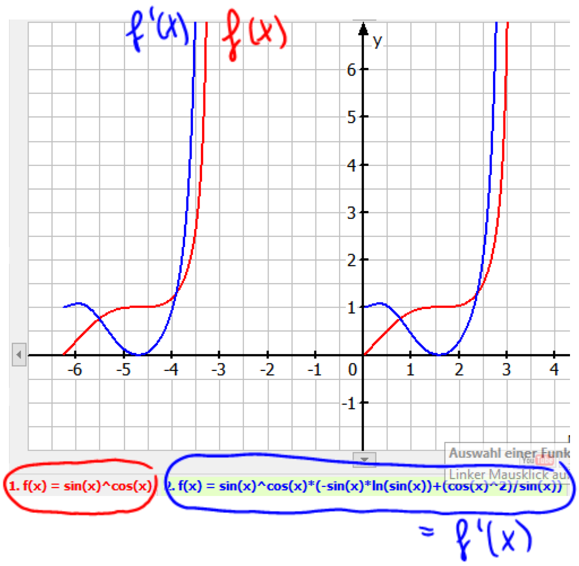
$$= (\sin x)^{\cos x} \cdot (\cos x \cdot \ln(\sin x))'$$

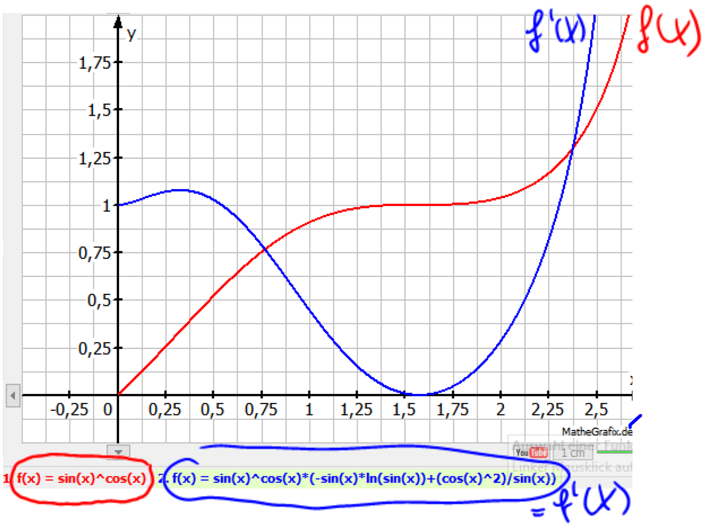
$(\ln(\sin x))'$ mit Kettenregel

$$= (\sin x)^{\cos x} \cdot \left((-\sin x) \cdot \ln(\sin x) + \cos x \left(\frac{1}{\sin x} \cdot \cos x\right)\right)$$

Produktregel

$$\boxed{= (\sin x)^{\cos x} \cdot \left(-\sin x \cdot \ln(\sin x) + \frac{\cos^2 x}{\sin x}\right)}$$





Aufgabe:

b) Aufgabe: Ableiten über die Umkehrfunktion

Gesucht $f'(x)$ für $y = f(x) = \arccos(x)$

Hinweis: Bekannt $g'(x)$ für $\underbrace{g}_{\hat{=} f^{-1}}(x) = \cos(x)$: $g'(x) = -\sin x$

$\hat{=} f^{-1}$ die Umkehrfunktion von $f(x)$

Lösung - Aufgabe 3b:

- $f'(x) = \dfrac{1}{(f^{-1}(y))'}$ hergeleiteter Ansatz

- $f'(x) = \dfrac{1}{(\cos y)'} = \dfrac{1}{-\sin y} = \dfrac{1}{-\sin(\arccos x)}$

$y = \arccos x$

$$= \frac{1}{-\sqrt{1+\cos^2(\arccos x)}} = \frac{1}{-\sqrt{1+x^2}}$$

$\sin^2 x + \cos^2 x = 1$

$\Rightarrow \sin \underset{\arccos x}{x} = \sqrt{1-\cos^2 \underset{\arccos x}{x}}$

$$\Rightarrow \boxed{(\arccos x)' = \frac{1}{-\sqrt{1+x^2}}}$$

Ableitungen und ihre Aussagen

Extremwertbestimmung

Definition 6.3: Ableitungen höherer Ordnung

Für die differenzierbare Funktion $f(x)$ bezeichne $f^{(0)}(x) := f(x)$ die Funktion selbst und $f^{(1)}(x) := f'(x)$ die erste Ableitung.

Für $n > 1$ ist $f^{(n)}(x)$ die Ableitung der Funktion $f^{(n-1)}(x)$. Die Funktion $f^{(n)}(x)$ ist die **n-te Ableitung** (oder Ableitung n-ter Ordnung) **der Funktion f**, d.h. $f^{(0)}(x) := \boxed{f(x)}$

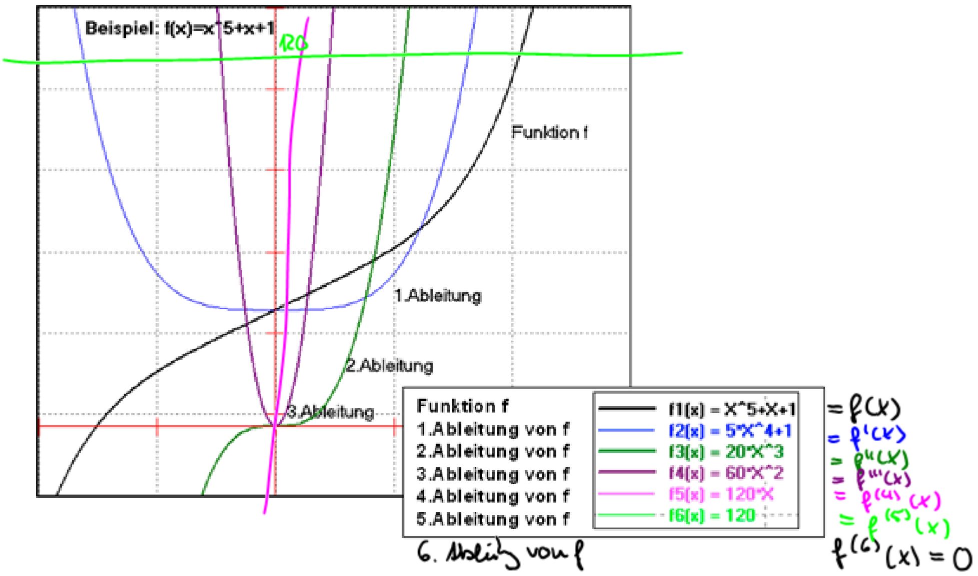
$f'(x) = f^{(1)}(x) := \left(f^{(0)}(x)\right)'$ Steigung der Funktion

$f''(x) = f^{(2)}(x) := \left(f^{(1)}(x)\right)'$ Krümmungsverhalten

$f'''(x) = f^{(3)}(x) := \left(f^{(2)}(x)\right)'$ entscheidet über vorhandenen Krümmungswechsel

$\vdots$

$f^{(n)}(x) := \left(f^{(n-1)}(x)\right)'$



Beispiel:

f´(x) ist die Funktion mit den Steigungswerten der Funktion f(x)

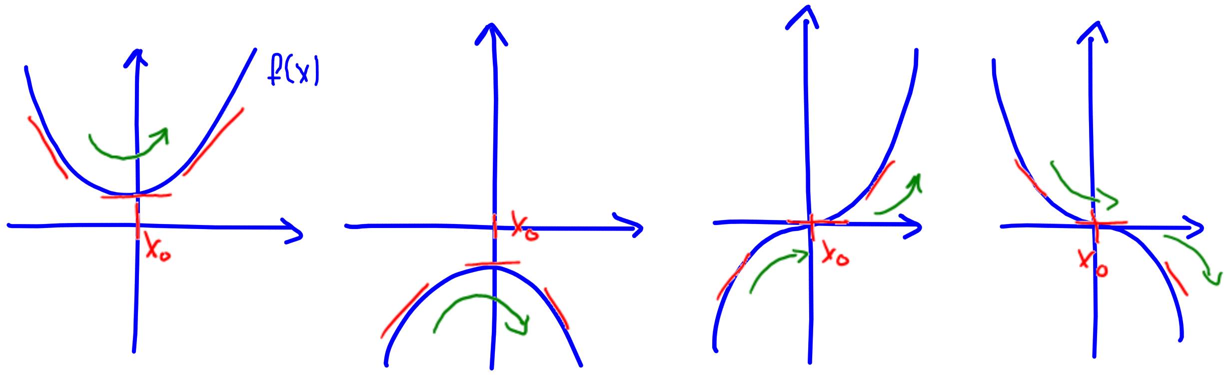
f´´(x) ist die Funktion mit den Steigungswerten der Funktion f´(x)

....

....

•

Ableitungen und ihre Aussagen



$f'(x)$ Steigung	• $\boxed{f'(x_0)=0}$ notwend. Bed. für Extremwert	• $\boxed{f'(x_0)=0}$ notwend. Bed. für Extremwert	• $\boxed{f'(x_0)=0}$ notwend. Bed. für Extremwert	• $\boxed{f'(x_0)=0}$ notwend. Bed. für Extremwert
	• Wechsel von negativer auf positive Steigung	• Wechsel von pos. auf neg. Steigung	• Kein Steigungswechsel	• Kein Steigungswechsel
$f''(x)$ Krümmungsverhalten	• Links-Krümmung $\boxed{f''(x_0)>0}$	• Rechts-Krümmung $\boxed{f''(x_0)<0}$	• Krümmungswechsel von Rechts- auf Linkskrümmung $\boxed{f''(x)=0}$	• Krümmungswechsel von Links- auf Rechtskrümmung $\boxed{f''(x)=0}$
	• hinreichende Bedingung für Minimum	• hinreichende Bedingung für Maximum	• notwendige Bed. für Wendepunkt	• notwendige Bed. für Wendepunkt
$f'''(x)$ für Krümmungswechsel	•	•	• $\boxed{f'''(x)>0}$ hinreichende Bed. für Wendepunkt mit Wechsel von Rechts- auf Linkskrümmung	• $\boxed{f'''(x)<0}$ hinreichende Bed. für Wendepunkt mit Wechsel von Links- auf Rechtskrümmung

Ableitungen und ihre Aussagen

Aussagen der 1.Ableitung:

- gibt Steigungen der Kurventangenten wieder
- $f'(x_0)$ *positiv*: Tangente hat positive Steigung im Punkt x_0
- $f'(x_0)$ *negativ*: Tangente hat negative Steigung im Punkt x_0
- $\boxed{f'(x_0) = 0}$: Tangente hat Steigung 0 im Punkt x_0 (notwendige Bedingung für lokalen Extremwert)

Extremwert-berechnung:

① notwendige Bedingung $f'(x) \stackrel{!}{=} 0$ auswerten

② x-Werte, die die notwendige Bedingungen erfüllen
→ „Extremwertkandidaten"
oder offiziell „kritische Punkte" → x_0

③ höhere Ableitungen bilden und überprüfen, welches Verhalten vorliegt
→ solange, bis eine Ableitung am kritischen Punkt x_0 ungleich 0 ist

•

Ableitungen und ihre Aussagen

Aussagen der 2.Ableitung:

- gibt Steigungen der Kurventangenten der 1.Ableitung wieder
- macht qualitative Aussagen über das Krümmungsverhalten von f(x)
- $f''(x)\ positiv:$ Linkskrümmung der Kurve
- $f''(x)\ negativ:$ Rechtskrümmung der Kurve
- quantitatives Maß über die Stärke der Krümmung: $\kappa = \dfrac{f''(x)}{\left[1+(f'(x))^2\right]^{\frac{3}{2}}}$

Kappa

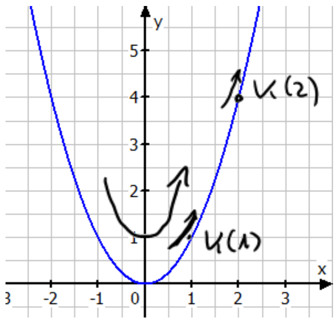
Beispiel: Berechnung der Krümmung

$$f(x) = x^2$$

$$f'(x) = 2x$$

$$f''(x) = 2$$

Links-Krümmung



Krümmung im Punkt x=1

$$\kappa(1) = \frac{f''(1)}{\left[1+(f'(1))^2\right]^{\frac{3}{2}}}$$

$$= \frac{2}{\left[1+(2\cdot 1)^2\right]^{\frac{3}{2}}} = \frac{2}{5^{\frac{3}{2}}}$$

$$= \sqrt[2]{5^3}$$

$$\vdots$$

$$= \frac{2}{\sqrt{125}}$$

$$= 0{,}18$$

Krümmung im Punkt x=2

$$\kappa(2) = \frac{f''(2)}{\left[1+(f'(2))^2\right]^{\frac{3}{2}}}$$

$$= \frac{2}{\left[1+(2\cdot 2)^2\right]^{\frac{3}{2}}}$$

$$= \frac{2}{\sqrt{17^3}}$$

$$= 0{,}028$$

Krümmung

Definition 6.4: Wendepunkt/ Sattelpunkt

Kurvenpunkte, in denen sich der Drehsinn der Tangenten ändert, heißen **Wendepunkte**.

Wendepunkte mit waagerechter Tangente werden als **Sattelpunkte** bezeichnet.

Extremwert

Satz 6.15:

Die Funktion f sei im Intervall $[a,b]$ differenzierbar.

notw. Bed. — hinreichende Bed.

Gilt $f'(x_0)=0 \;\; und \;\; f''(x_0)<0$, dann hat f in x_0 ein **lokales Maximum**.

Gilt $f'(x_0)=0 \;\; und \;\; f''(x_0)>0$, dann hat f in x_0 ein **lokales Minimum**.

hinr. Bed.

Wendepunkt

Satz 6.16:

Die Funktion f sei im Intervall $[a,b]$ differenzierbar.

notw. Bed. — hinr. Bed.

Gilt $f''(x_0)=0 \;\; und \;\; f'''(x_0)\neq 0$ dann hat f in x_0 einen **Wendepunkt**.

Gilt zusätzlich $f'(x_0)=0$ dann hat f in x_0 einen **Sattelpunkt**

f´´´(x) >0: Krümmungswechsel rechts auf links

f´´´(x) <0: Krümmungswechsel links auf rechts

Minimum in x_0:

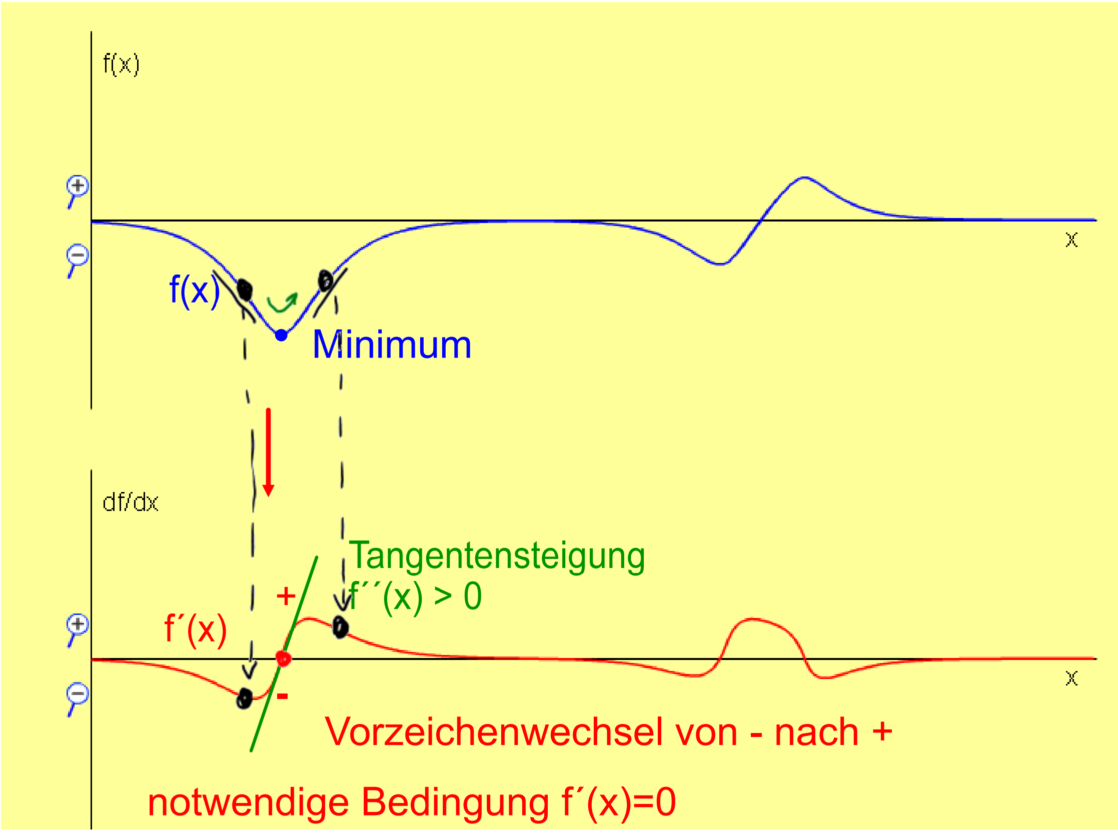
- notwendige Bedingung $f'(x_0)=0$ (Nullstelle in der 1.Ableitung)
- hinreichende Bedingung

entweder

Vorzeichenwechsel der Funktionswerte $f'(x)$ an der Nullstelle x_0 von - nach +

oder

$f''(x_0)$ ist positiv



•

Maximum in x_0:

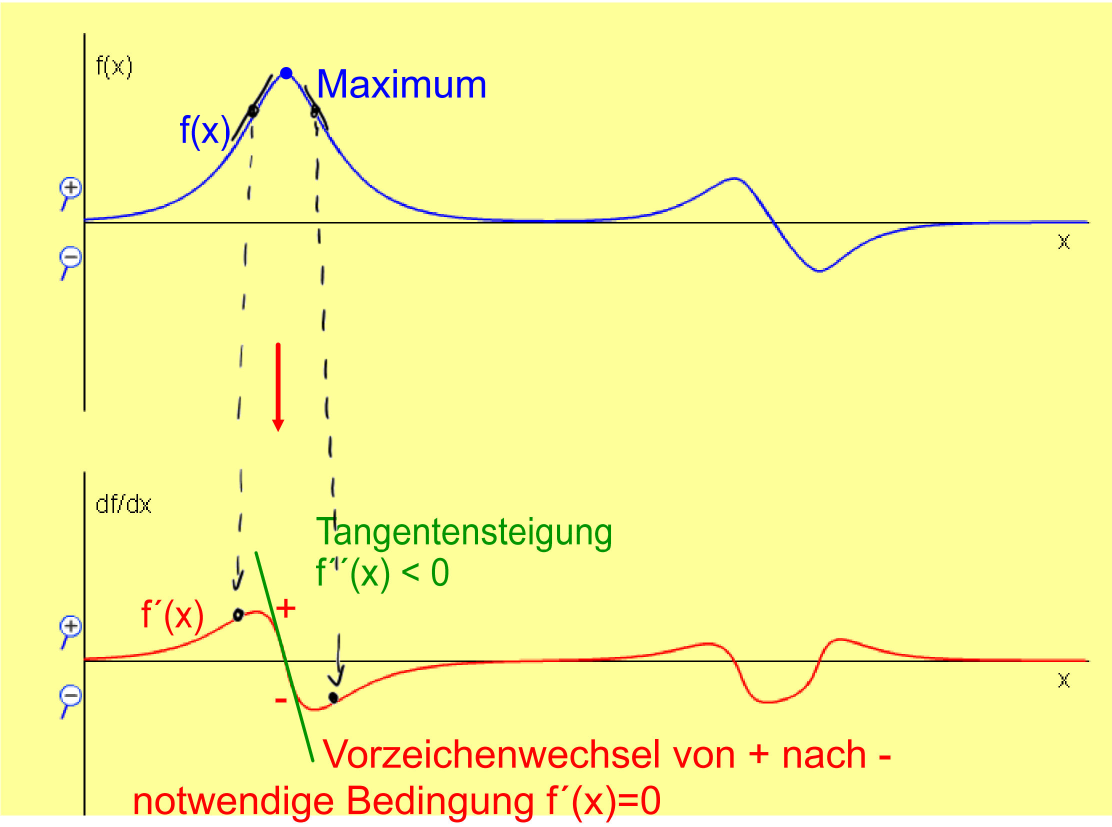
- notwendige Bedingung $f'(x_0)=0$ (Nullstelle in der 1.Ableitung)
- hinreichende Bedingung

entweder

Vorzeichenwechsel der Funktionswerte $f'(x)$ an der Nullstelle x_0 von + nach -

oder

$f''(x_0)$ ist negativ



.

Zusammenfassung: Bedingungen für Nullstelle, Extremwert, Wendepunkt

- $f(x)=0$ $\Rightarrow$ Nullstelle
- $f'(x)=0$
  - $f''(x)>0$ $\Rightarrow$ Minimum, Kurve hat Linkskrümmung
  - $f''(x)<0$ $\Rightarrow$ Maximum, Kurve hat Rechtskrümmung
  - $f''(x)=0$
    - $f'''(x)>0$ $\Rightarrow$ Sattelpunkt (von Rechts- auf Linkskrümmung)
    - $f'''(x)<0$ $\Rightarrow$ Sattelpunkt (von Links- auf Rechtskrümmung)
    - $f'''(x)=0$ $\Rightarrow$ unklar, ob Extremwert oder Sattelpunkt
      weitere Ableitungen bilden, bis n-te Ableitung $\neq 0$
      n *gerade* $\Rightarrow$ *Extremwert*, n *ungerade* $\Rightarrow$ *Sattelpunkt*
- $f''(x)=0$
  - $f'''(x)>0$ $\Rightarrow$ Wendepunkt (von Rechts- auf Linkskrümmung)
  - $f'''(x)<0$ $\Rightarrow$ Wendepunkt (von Links- auf Rechtskrümmung)
  - $f'''(x)=0$ $\Rightarrow$ unklar, ob Wendepunkt
    weitere Ableitungen bilden, bis n-te Ableitung $\neq 0$
    n *ungerade* $\Rightarrow$ *Wendepunkt*

Satz 6.17 und 6.18 sind in obiger Zusammenfassung enthalten

Satz 6.17: Allgemeines Kriterium für lokalen Extremwert

Die Funktion f besitzt in x_0 eine waagerechte Tangente, d.h. $f'(x_0)=0$.

Die nächste an dieser Stelle nicht verschwindende Ableitung sei die n-te Ableitung $f^{(n)}(x_0)\neq 0$.

- Dann besitzt f in x_0 einen **lokalen Extremwert**, falls die **Ordnung n dieser Ableitung gerade** ist,

  insbesondere ein lokales Minimum, wenn $f^{(n)}(x_0)>0$

  bzw. ein lokales Maximum, wenn $f^{(n)}(x_0)<0$.

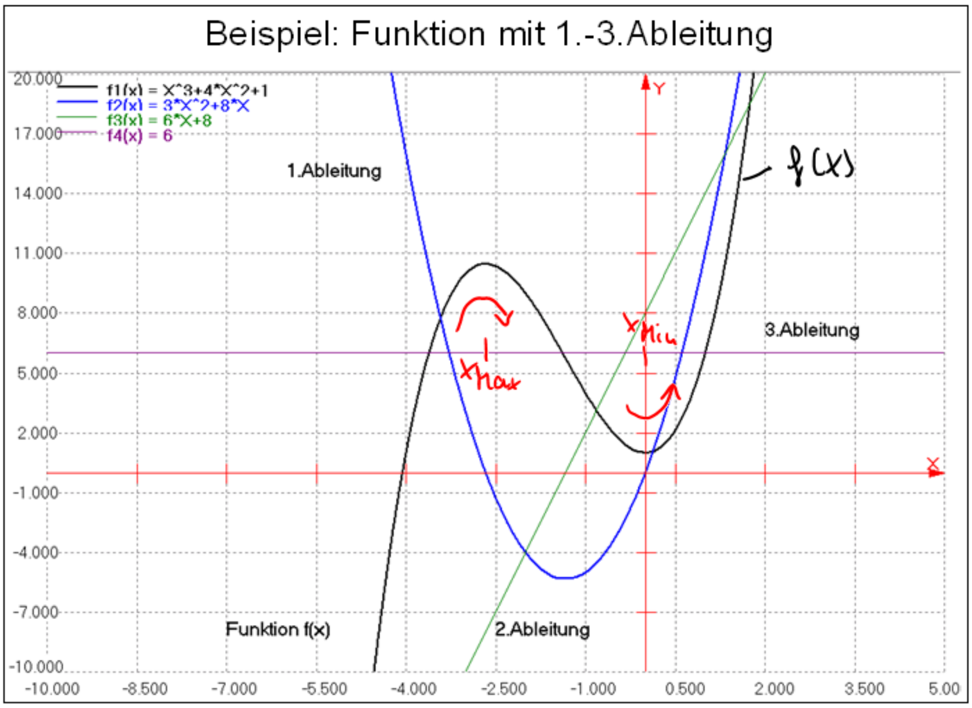
- Ist die **Ordnung n ungerade** so besitzt f in x_0 einen **Sattelpunkt**.

Satz 6.18: Aussagen zum Wendepunkt

Die Funktion f besitzt in x_0 einen Wendepunkt, falls

1. $f''(x_0)=0 \;\; und \;\; f'''(x_0)\neq 0$ oder
2. $f''(x_0)=0 \;\; und \;\; f''(x_0)$ *hat bei* x_0 *einen Vorzeichenwechsel*
3. $f''(x_0)=f'''(x_0)=0$ *und für die* $k-$*fache Ableitung ist erstmalig*
   $f^{(k)}(x_0)\neq 0: \;\; \exists n\in\mathbb{N}: k=2n+1$, *d.h. k ist ungerade*

Beispiel zur Extremwert- und Wendepunktbestimmung



$f(x) = x^3 + 4x^2 + 1$
$f'(x) = 3x^2 + 8x$
$f''(x) = 6x + 8$
$f'''(x) = 6$

Extremwertbestimmung: notwendige Bedingung $f'(x)=0$

$f'(x) \overset{!}{=} 0 \Rightarrow 3x^2 + 8x = 0$
notw. Bed.
$x(3x+8) = 0$
$\Rightarrow x=0 \vee x= -8/3$ zwei kritische Punkte

Untersuchung des Verhaltens für $x=0$:
$f''(0) = 6(0) + 8 = 8 > 0 \Rightarrow$ Minimum in $x=0$
mit Funktionswert $f(0) = 1$

Untersuchung des Verhaltens für $x=-8/3$:
$f''(-8/3) = 6(-8/3) + 8 = -8 < 0 \Rightarrow$ Maximum in $x= -8/3$
mit Funktionswert $f(-8/3) = \ldots$

Wendepunktbestimmung: notwendige Bedingung $f''(x)=0$

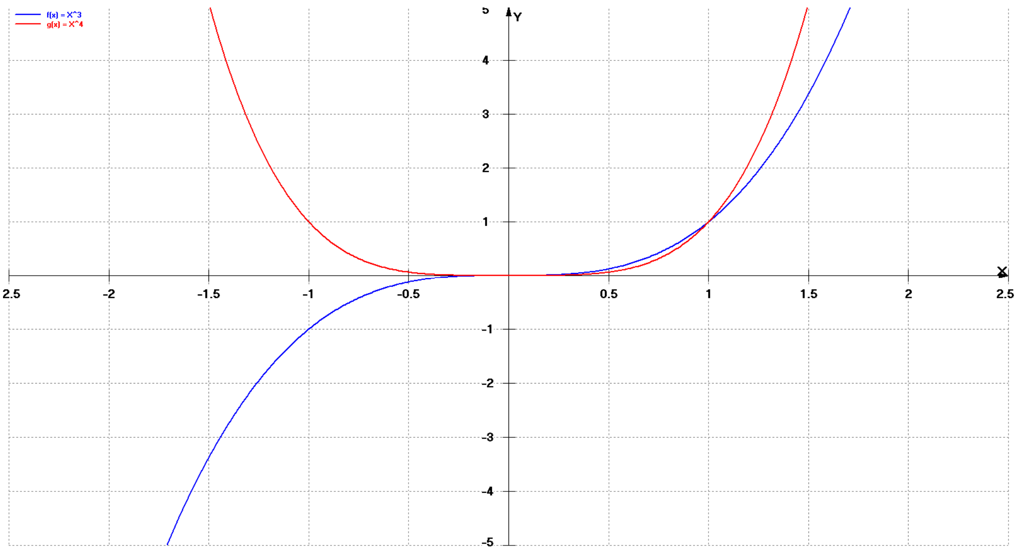
$f''(x) \overset{!}{=} 0 \Rightarrow 6x + 8 = 0$
notw. WP
$\Rightarrow x = -4/3$

Untersuchung des Verhaltens für $x=-4/3$:

$f'''(-4/3) = 6 \neq 0$ $\Rightarrow$ Wendepunkt
> 0 $\Rightarrow$ Wechsel von Rechts- auf Linkskrümmung

Beispiel zur Extremwertbestimmung

Übung



Extremwert in x=0

$g(x) = x^4$

$g'(x) = 4x^3$

notwendig Bed. $g'(x) \overset{!}{=} 0$

$\Rightarrow x = 0$

$g''(x) = 12x^2 \rightarrow g''(0) = 0$

$\dashrightarrow g'''(x) = 24x \rightarrow g'''(0) = 0$

$\dashrightarrow g^{(4)}(x) = 24 \rightarrow g^{(4)}(0) = 24 \neq 0 \; \underbrace{> 0}$

4.te Ableitung ist gerade Ableitung $\Rightarrow$ Extremwert

Linkskrümmung

$\Rightarrow$ Minimum

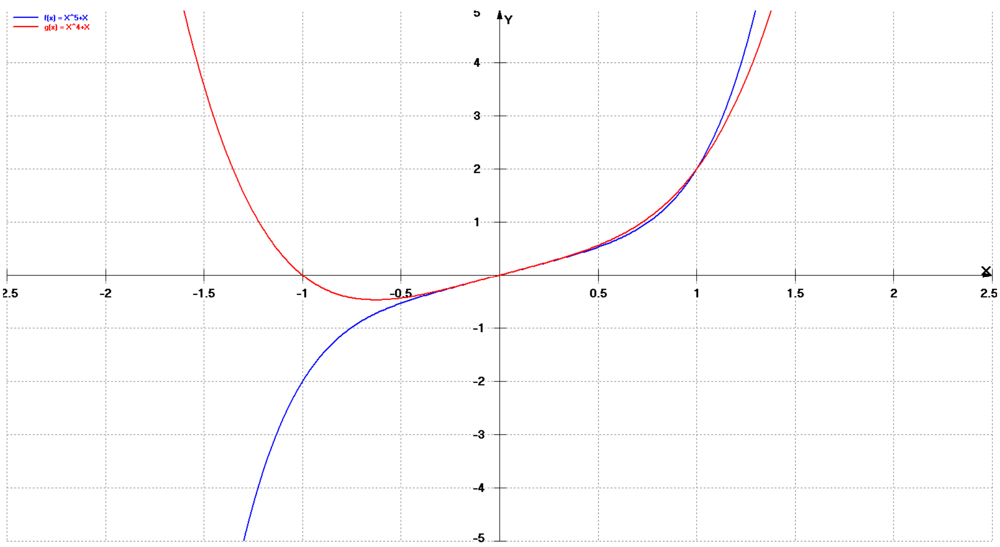
kein Extremwert in x=0

$f(x) = x^3$

zu Hause

Beispiel zur Wendepunktbestimmung

Übung



Wendepunkt in x=0

$f(x) = x^5 + x$

zu Hause

kein Wendepunkt in x=0

$g(x) = x^4 + x$

zu Hause

Kurvendiskussionen

Zusammenfassung Kurvendiskussion:

1. Definitionsbereich/ Definitionslücken (hebbar?)/ Bildbereich
2. Symmetrie
3. Nullstellen
4. Pole (Vorzeichenwechsel?)
5. Ableitungen (bis 3.Ableitung sinnvoll)
6. Extremwerte (lokale Minima/ Maxima)
7. Wendepunkte, Sattelpunkte
8. Monotonieverhalten
9. Asymptoten (Verhalten für $x \to \pm\infty$)
10. Stetigkeit ($\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$)

\+ parallele Erstellung einer Zeichnung

Beispiel: $f(x) = \frac{x^3}{2(x-1)}$

Beispiel $f(x) = \dfrac{x^3}{2(x-1)}$

1) Definitionsbereich/Definitionslücken

$N(x) = 2(x-1) \overset{!}{=} 0 \quad \Rightarrow x = 1$

$Z(x) = x^3 \overset{!}{=} 0 \quad \Rightarrow x = 0$

Definitionslücke: $x = 1$ (Nennernullstellen, die keine Zählernullstellen sind)

Definitionsbereich: $D = \mathbb{R}\setminus\{1\}$

2) Symmetrie

$$f(-x) = \frac{(-x)^3}{2((-x)-1)} = \frac{-x^3}{-2(x+1)} = \frac{x^3}{2(x+1)} \quad \begin{cases} \neq f(x) & \Rightarrow \text{nicht gerade} \\ \neq -f(x) & \Rightarrow \text{nicht ungerade} \end{cases}$$

$\Rightarrow f(x)$ ist weder gerade noch ungerade

$\Rightarrow f(x)$ ist nicht symmetrisch

3) Nullstellen

$\underline{x = 0}$ ist <u>dreifache</u> Zählernullstelle ($\neq$ Nennernullstelle)

$\Rightarrow$ bei $x = 0$ liegt ein Schnittpunkt mit der x-Achse vor

4) Pole

$\underline{x = 1}$ ist <u>einfache</u> Nennernullstelle ($\neq$ Zählernullstelle)

$\Rightarrow$ bei $x = 1$ liegt ein Pol mit Vorzeichenwechsel vor

$$g_r = \lim_{x\to 1^+} \underset{\uparrow \; x_n = 1+\frac{1}{n}}{\frac{x^3}{2(x-1)}} = \lim_{n\to\infty} \frac{(1+\frac{1}{n})^3}{2(1+\frac{1}{n}-1)} = \lim_{n\to\infty} \frac{(1+\frac{1}{n})^3}{\frac{2}{n}} = \lim_{n\to\infty} \frac{n(1+\frac{1}{n})^3}{2} = +\infty$$

$g_l = -\infty$, da ein Pol mit Vorzeichenwechsel vorliegt

5) Ableitungen
6) Extremwerte
7) Wendepunkte
8) Monotonieverhalten

} nachfolgende Seiten

9) Asymptoten / Verhalten $x \to +\infty / -\infty$

$$f(x) = \frac{x^3}{2(x-1)} \underset{\uparrow}{=} \underbrace{\frac{1}{2}(x^2+x+1)}_{\text{Asymptote}} + \frac{1}{2(x-1)}$$

Polynom-division

$$x^3 : (2x-2) = \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{2}x + \frac{1}{2} + \frac{1}{2(x-1)}$$
$$\begin{array}{l} -(x^3 - x^2) \\ \hline \quad x^2 \\ \quad -(x^2 - x) \\ \hline \qquad +x \\ \qquad -(+x-1) \\ \hline \qquad\quad +1 \end{array}$$

$h(x) = \frac{1}{2}(x^2+x+1)$ ist die Asymptote von $f(x)$

für $x \to \pm\infty$ verhält sich die Funktion $f(x)$ wie die Funktion $h(x)$

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = \overbrace{\frac{1}{2}(x^2+x+1)}^{\to +\infty} + \overbrace{\frac{1}{2(x-1)}}^{\to 0} = +\infty$$

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = \overbrace{\frac{1}{2}(x^2+x+1)}^{\to +\infty} + \overbrace{\frac{1}{2(x-1)}}^{\to 0} = +\infty$$

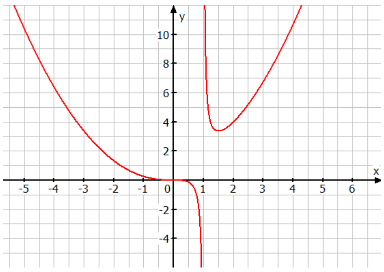
10) Stetigkeit

Die Funktion $f(x)$ ist eine gebrochen rationale Funktion ohne hebbare Definitionslücken (da es keine gleichen Zähler- und Nennernullstellen und damit keine heraus-kürzbaren Linearfaktoren gibt).

$f(x)$ ist in ihrem Definitionsbereich stetig.

Beispiel - Kurvendiskussion

$$f(x)=\frac{x^3}{2(x-1)}$$



5. Ableitungen (bis 3.Ableitung sinnvoll)
6. Extremwerte (lokale Minima/ Maxima)
7. Wendepunkte, Sattelpunkte

5) Ableitungen

$$f(x)=\frac{x^3}{2(x-1)}$$

$$f'(x)\underset{\uparrow \text{ Quot.regel}}{=}\frac{(x^3)'\cdot 2(x-1)-x^3\cdot(2\cdot(x-1))'}{(2(x-1))^2}=\ldots=\frac{4x^3-6x^2}{4(x-1)^2}$$

$$f''(x)\underset{\uparrow \text{ Quot.regel}}{=}\frac{(4x^3-6x^2)'(4\cancel{(x-1)^2}^{\,1})-(4x^3-6x^2)\cdot\underbrace{(4(x-1)^2)'}_{8\cancel{(x-1)}}}{(4\cancel{(x-1)^2)^2}_{3}}$$

$$=\ldots=\frac{x^3-3x^2+3x}{(x-1)^3}$$

$$f'''(x)=\ldots=\frac{-3}{(x-1)^4}$$

Hinweis: „Kürzen" in der Rechnung möglich

6) Extremwerte

① notwendige Bed: $f'(x) \overset{!}{=} 0$

$$\frac{4x^3-6x^2}{4(x-1)^2} \overset{!}{=} 0 \Rightarrow \underbrace{4x^3-6x^2 \overset{!}{=} 0}_{\text{Zählernullstellen}}$$

$$\Rightarrow x^2(4x-6)=0$$

$$\Rightarrow \underbrace{x_1=0}_{\text{doppelt}} \lor x_2=\frac{3}{2}$$ zwei kritische Punkte

② Einsetzen in 2. Ableitung $f''(x)=\frac{x^3-3x^2+3x}{(x-1)^3}$

$x=0$:

$f''(0)=\frac{0}{-1}=0$ ---> keine Aussage, ob Min/Max/WP

Verwendung 3. Ableitung notwendig $f'''(x)=\frac{-3}{(x-1)^4}$

$f'''(0)=\frac{-3}{1}=-3<0$

$\Rightarrow$ Ableitung ist ungerade $\Rightarrow$ kein Extremwert sondern Sattelpunkt von Links- auf Rechts Kr.

$x_2=\frac{3}{2}$:

$$f''\left(\frac{3}{2}\right)=\frac{\left(\frac{3}{2}\right)^3-3\left(\frac{3}{2}\right)^2+3\cdot\left(\frac{3}{2}\right)}{\left(\frac{3}{2}-1\right)^3}=9>0 \Rightarrow$$ Minimum bei $x_2=\frac{3}{2}$ mit $f\left(\frac{3}{2}\right)=\dots$

7) Wendepunkte

notwend. Bed: $f''(x) \overset{!}{=} 0$

$$\frac{x^3-3x^2+3x}{(x-1)^3} \overset{!}{=} 0 \Rightarrow \underbrace{x^3-3x^2+3x=0}_{\text{Zählernullstelle}}$$

$$\Rightarrow x(x^2-3x+3)=0$$

$$\Rightarrow x_1=0 \lor \underbrace{x^2-3x+3=0}_{\text{hat keine reellen Nst}}$$

$x_{1/2}=\frac{3}{2}\pm\sqrt{\underbrace{\frac{9}{4}-3}_{<0}}$

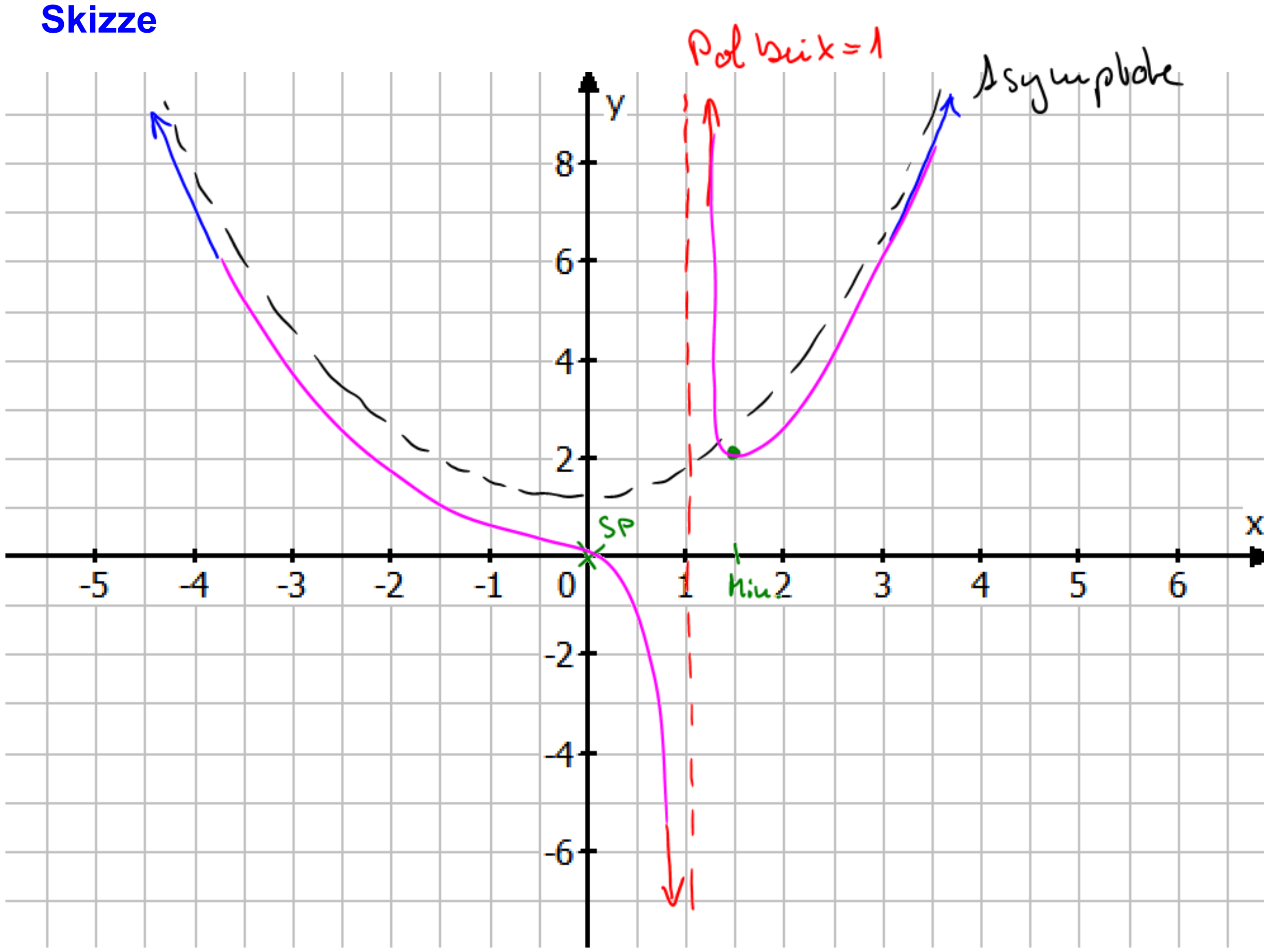
$x_1=0$: einziger WP-Kandidat

$f'''(0)=\dots=-3<0$ WP, sogar Sattelpunkt mit Wechsel Links- auf Rechts

8) Monotonieverhalten

-

Skizze



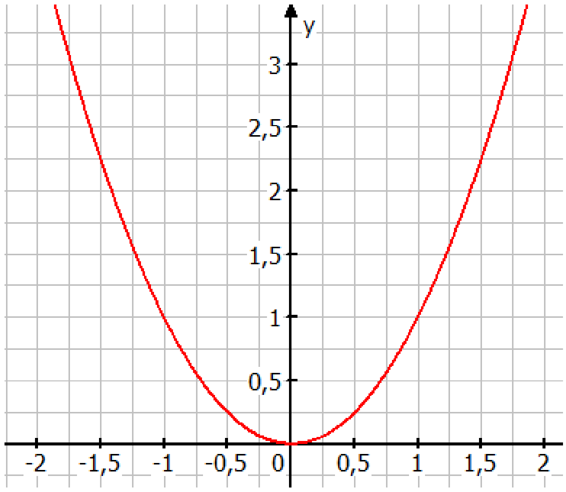
•

Monotonie der Funktion und 1.Ableitung

Definition 5.4: Monotonie einer Funktion

Eine Funktion f heißt in einem Intervall $I \subseteq D$

- **monoton steigend**, wenn $\forall\, x_1, x_2 \in I$ mit $x_1 < x_2$ gilt $f(x_1) \leq f(x_2)$,
- **streng monoton steigend**, wenn $\forall\, x_1, x_2 \in I$ mit $x_1 < x_2$ gilt $f(x_1) < f(x_2)$,
- **monoton fallend**, wenn $\forall\, x_1, x_2 \in I$ mit $x_1 < x_2$ gilt $f(x_1) \geq f(x_2)$,
- **streng monoton fallend**, wenn $\forall\, x_1, x_2 \in I$ mit $x_1 < x_2$ gilt $f(x_1) > f(x_2)$.



Monotonieaussage mit Hilfe der 1. Ableitung

Satz 6.12:

Die reelle Funktion sei auf dem Intervall I differenzierbar. Es gelten dann folgende Aussagen:

(a) f ist genau dann konstant, wenn $f'(x) = 0 \quad \forall x \in I$ erfüllt ist.

(b) f ist monoton steigend, wenn $f'(x) \geq 0 \quad \forall x \in I$,

f ist monoton fallend, wenn $f'(x) \leq 0 \quad \forall x \in I$,

f ist streng monoton steigend, wenn $f'(x) > 0 \quad \forall x \in I$,

f ist streng monoton fallend, wenn $f'(x) < 0 \quad \forall x \in I$.

Beispiel

$f(x) = e^x \cdot \sin x$

$f'(x) = e^x \cdot \sin x + e^x \cdot (\cos x)$

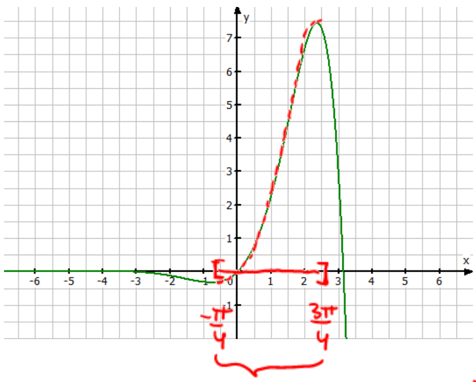
monoton wachsend: $f'(x) \geq 0$

$\Rightarrow e^x \cdot \sin x + e^x \cdot \cos x \overset{!}{\geq} 0$

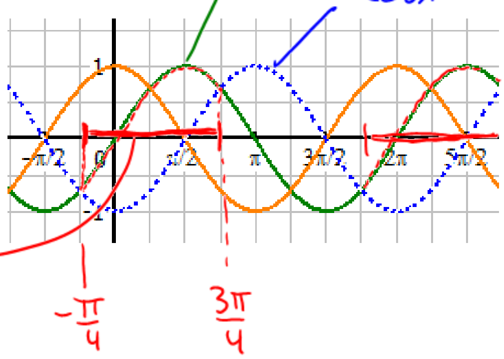
$\underbrace{e^x}_{>0}\underbrace{(\sin x + \cos x)}\geq 0$

$\sin x + \cos x \geq 0$

$\sin x \geq -\cos x$



Intervall, in dem die Funktion monoton steigend ist



x-Werte, die die Ungleichung erfüllen

$x \in \left[-\frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{4}\right]$

und danach periodisch mit 2π

Regel von Bernoulli l´Hospital

Berechnung von Grenzwerten bei unbestimmten Ausdrücke

Ausblick

.

Regel von Bernoulli-l'Hospital

(hilft bei der Grenzwertbestimmung bei unbestimmten Ausdrücken)

Satz 4.14: Regel von Bernoulli-l´Hospital

Es seien $f, g : [a,b] \to \mathbb{R}$ reelle stetige Funktionen, die auf (a,b) differenzierbar sind. Ferner sei $g'(x) \neq 0 \ \forall x \in (a,b)$.

Ist $x_0 \in [a,b]$ mit $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = 0 = \lim\limits_{x \to x_0} g(x)$

und existiert $\lim\limits_{x \to x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)}$, so existiert auch $\lim\limits_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)}$ und es ist

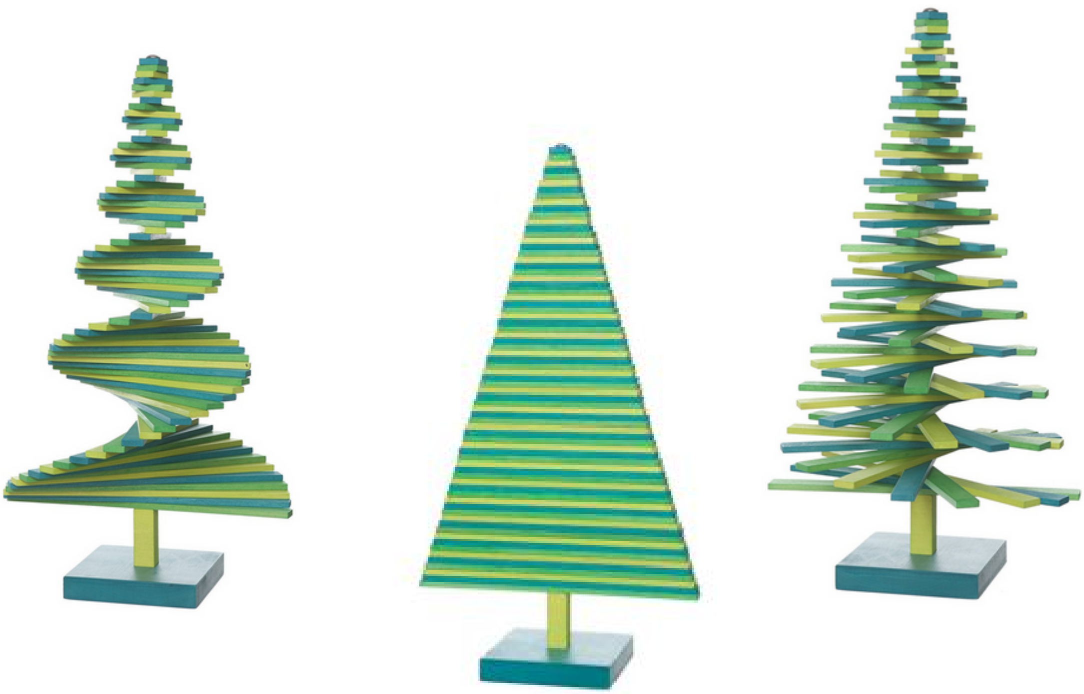
$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \to x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)}$$

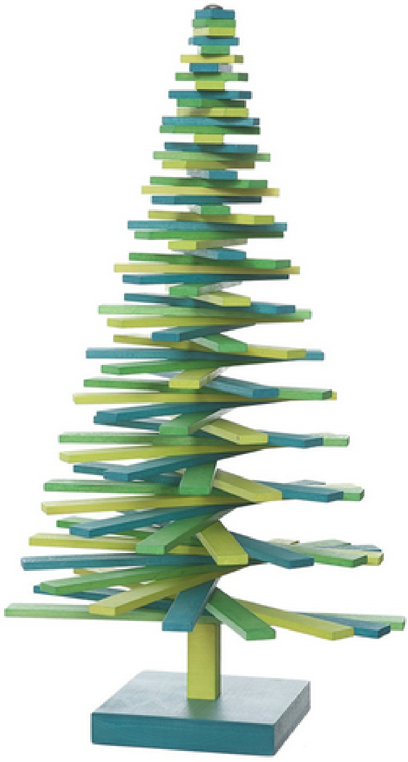
Bemerkungen:

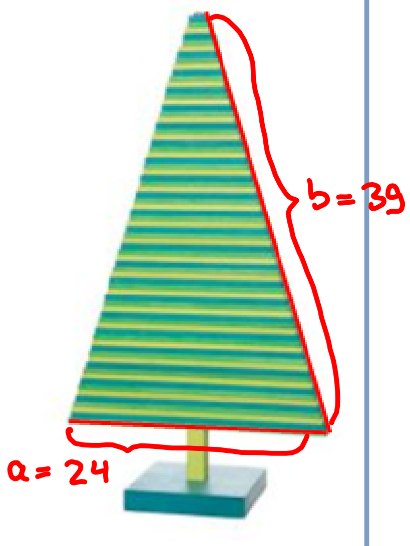
1. Die obige Regel ist für die Grenzwertbestimmung bei unbestimmten Ausdrücken „$\frac{0}{0}$" beschrieben.
2. Die Regel ist ebenso anwendbar bei unbestimmten Ausdrücken „$\frac{\infty}{\infty}$", d.h. wenn $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = \infty = \lim\limits_{x \to x_0} g(x)$.
3. Die Regel ist ebenso anwendbar bei der Grenzwertberechnung für $x \to \infty \ (bzw. -\infty)$.
4. Die weiteren unbestimmten Ausdrücke $0 \cdot \infty$, $\infty - \infty$, 0^0, ∞^0, 1^∞, die bei einer Grenzwertberechnung auftreten können, werden durch Umformungen auf einen der Fälle „$\frac{0}{0}$" oder „$\frac{\infty}{\infty}$" zurückgeführt (⟶ siehe Vorlesung) und können dann ebenfalls über die Regel von Bernoulli-l'Hospital gelöst werden.
5. Die Regel von Bernoulli-l´Hospital kann auch mehrfach hintereinander angewendet werden.
6. Achtung: Zähler und Nenner getrennt ableiten!

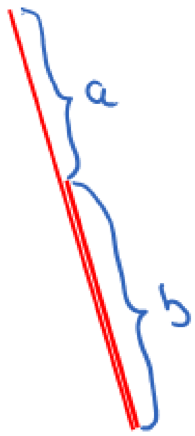
Beispiel:

" Schöne Weihnachten!!! "









$$\frac{a}{b} = \frac{b}{a+b}$$

„Goldener Schnitt"

$$\frac{a}{b} = \frac{24}{39} = 0{,}615$$

$$\frac{b}{a+b} = \frac{39}{63} = 0{,}619$$

https://www.canva.com/de_de/lernen/goldener-schnitt-einfach-erklaert/

AREAWARE - Infinite Tree by Johannes Molin - Grün