Physik 1
(PH1-B-REE1)

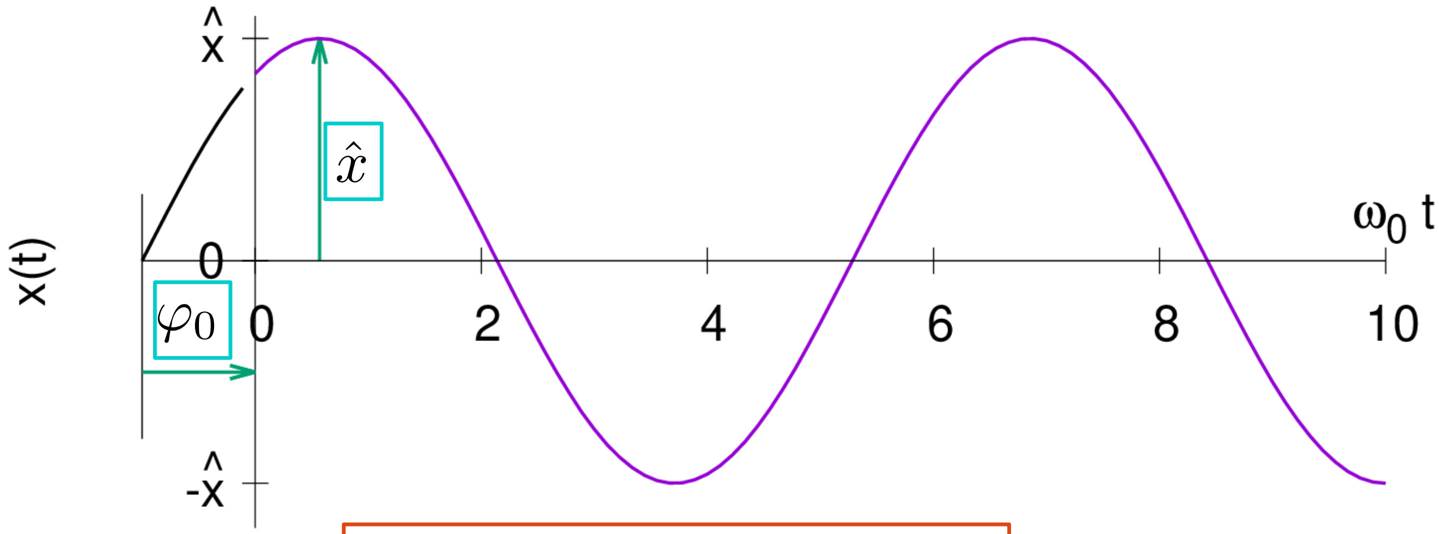
Michael Erhard

Inhalt

15 Schwingungen (Teil 2)

14.1 Wiederholung: Schwingungen

Mathematische Beschreibung



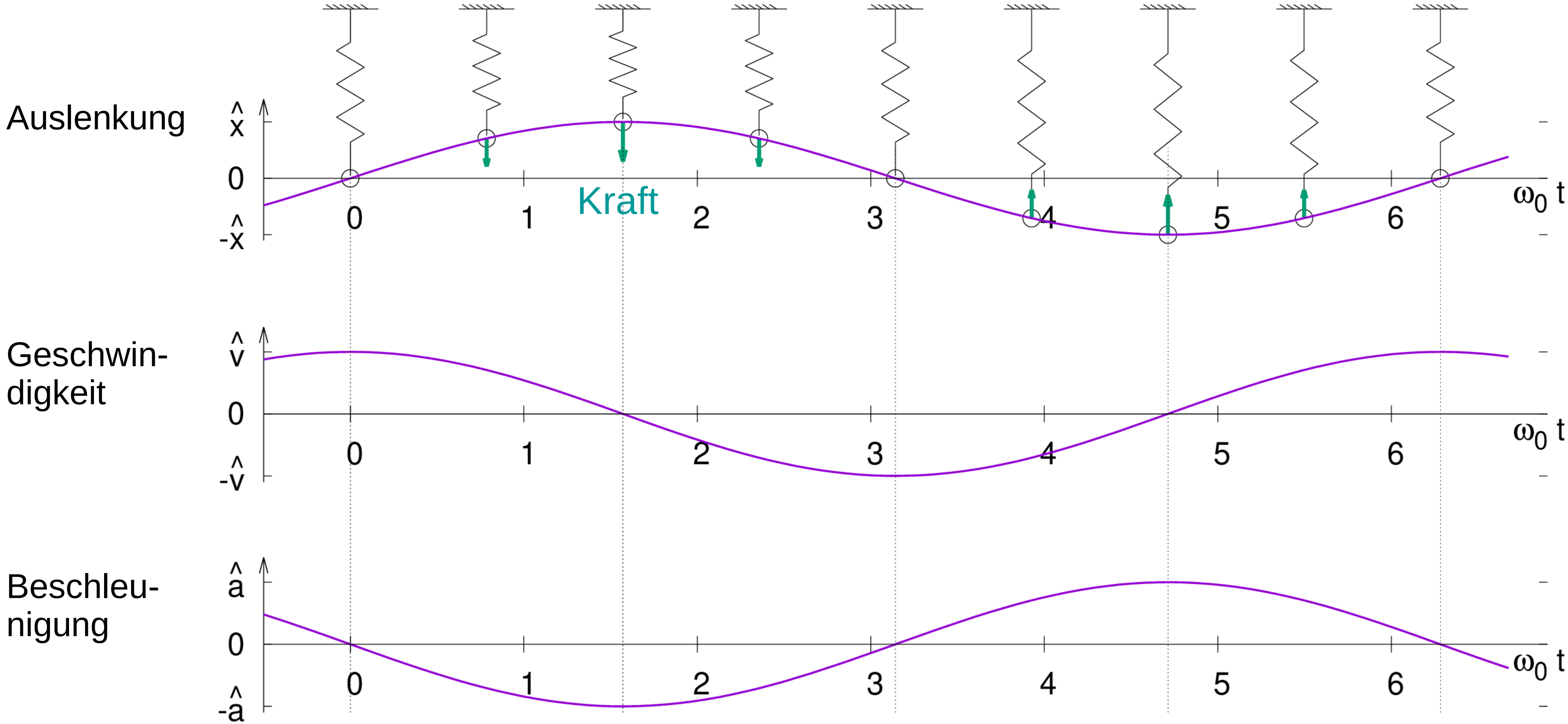
$$\boxed{x(t) = \hat{x}\sin(\omega_0 t + \varphi_0)}$$

Kreisfrequenz $\omega_0 = 2\pi f = \dfrac{2\pi}{T}$ Einheit $[\omega_0] = 1\,\dfrac{1}{s} = 1\,\dfrac{\text{rad}}{s}$

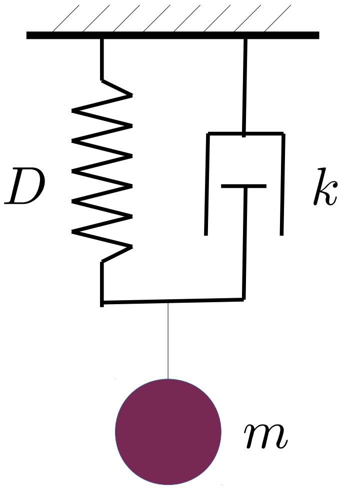
Spitzen/Scheitelwert $\hat{x}$ Anfangsphasenwinkel φ_0

14.1 Wiederholung: Schwingungen

Beispiel: Feder-Masse-Schwinger



15.1 Gedämpfte Schwingungen



Wir fügen nun Verluste durch Reibung ein (Beispiel Federpendel).

Bewegungsgleichung durch Newton ($F = m\,a$)

$$m\,\ddot{x}(t) = -D\,x(t) - k\,\dot{x}(t)$$

rückstellende Kraft Reibung

Eigenschaften der Reibungskraft:

- wirkt entgegen der Bewegungsrichtung
- ist proportional zur Geschwindigkeit
  Beispiele: Flüssigkeitsreibung (Stokes), Wirbelstrombremse, lineare Systeme in der Elektrotechnik

15.1.1 Allgemeine DGL

Umstellung der DGL $m\,\ddot{x}(t) = -D\,x(t) - k\,\dot{x}(t)$bt

$$\ddot{x}(t) + \frac{k}{m}\,\dot{x}(t) + \frac{D}{m}\,x(t) = 0$$

Wir führen nun wieder allgemeine Konstanten ein

Allgemeine DGL

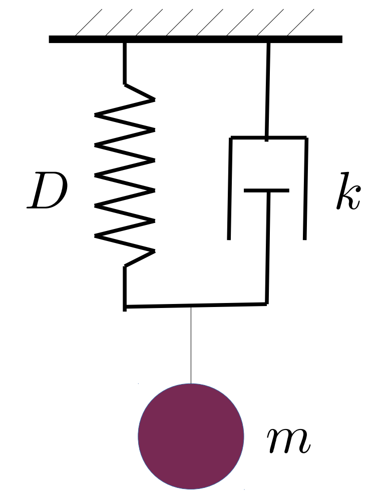
$$\ddot{x}(t) + 2\vartheta\omega_0\,\dot{x}(t) + \omega_0^2\,x(t) = 0$$

mit **Resonanzfrequenz** ω_0

und **Dämpfung** ϑ

15.1.1 Allgemeine DGL

Beispiel 1: Stoßdämpfer (gedämpftes Federpendel)



$$\ddot{x}(t) + \frac{k}{m}\,\dot{x}(t) + \frac{D}{m}\,x(t) = 0$$

m ... Masse

D ... Federkonstante

k ... Reibungskonstante

Umgeformt gilt

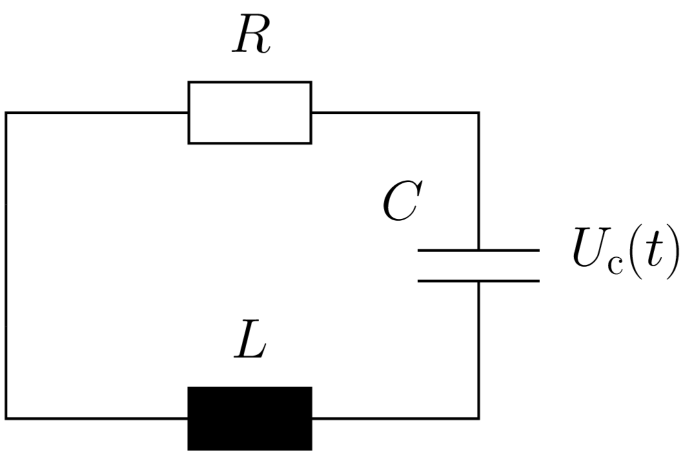
$$\ddot{x}(t) + 2\vartheta\omega_0\,\dot{x}(t) + \omega_0^2\,x(t) = 0$$

$$\text{mit} \quad \omega_0 = \sqrt{\frac{D}{m}} \quad \text{und} \quad \vartheta = \frac{k}{2\sqrt{D\,m}}$$

15.1.1 Allgemeine DGL

Beispiel 2: Serienschwingkreis

$$\ddot{U}_\mathrm{c}(t) + \frac{R}{L}\,\dot{U}_\mathrm{c}(t) + \frac{1}{LC}\,U_\mathrm{c}(t) = 0$$



$$\begin{aligned} R &\quad \ldots \quad \text{Widerstand} \\ L &\quad \ldots \quad \text{Induktivität} \\ C &\quad \ldots \quad \text{Kapazität} \end{aligned}$$

Umgeformt gilt dann

$$\ddot{x}(t) + 2\vartheta\omega_0\,\dot{x}(t) + \omega_0^2\,x(t) = 0$$

$$\text{mit} \quad \omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}} \quad \text{und} \quad \vartheta = \frac{R}{2}\sqrt{\frac{C}{L}}$$

15.1.2 Lösung der DGL

DGL

$$\boxed{\ddot{x}(t) + 2\vartheta\omega_0\,\dot{x}(t) + \omega_0^2\,x(t) = 0}$$

Ansatz mit

$$\begin{aligned} x(t) &= x_0 \mathrm{e}^{\lambda t} \\ \Rightarrow \dot{x}(t) &= x_0 \lambda \mathrm{e}^{\lambda t} = \lambda\, x(t) \\ \Rightarrow \ddot{x}(t) &= x_0 \lambda^2 \mathrm{e}^{\lambda t} = \lambda^2\, x(t) \end{aligned}$$

eingesetzt ergibt $(\lambda^2 + 2\vartheta\omega_0\,\lambda + \omega_0^2)\,x(t) = 0$

$$\Rightarrow \quad \lambda^2 + 2\vartheta\omega_0\,\lambda + \omega_0^2 = 0$$

Lösungen:

$$\boxed{\lambda_{1/2} = \omega_0(-\vartheta \pm \sqrt{\vartheta^2 - 1})}$$

HAW HAMBURG

15.1.2 Lösung der DGL

Die allgemeine Lösung der DGL (ohne Beweis) lautet dann

$$x(t) = x_1 \mathrm{e}^{\lambda_1 t} + x_2 \mathrm{e}^{\lambda_2 t}$$

Die Konstanten x_1 und x_2 werden durch die *Anfangsbedingungen* bestimmt, z.B. Auslenkung $x(0)$ und Geschwindigkeit $\dot{x}(0)$ für $t = 0$.

15.1.2 Lösung der DGL

Wir müssen nun Fälle unterscheiden (nach Vorzeichen des Terms unter Wurzel)

$$\lambda_{1/2} = \omega_0(-\vartheta \pm \sqrt{\vartheta^2 - 1})$$

große Dämpfung

$$\vartheta \geq 1$$

geringe Dämpfung

$$\vartheta < 1$$

Aperiodischer Fall

$$x(t) = x_1 \mathrm{e}^{-\delta_1 t} + x_2 \mathrm{e}^{-\delta_2 t}$$

$$\delta_{1/2} = \omega_0(\vartheta \mp \sqrt{\vartheta^2 - 1})$$

Periodischer Fall

$$\lambda_{1/2} = -\delta \pm \mathrm{j}\omega$$

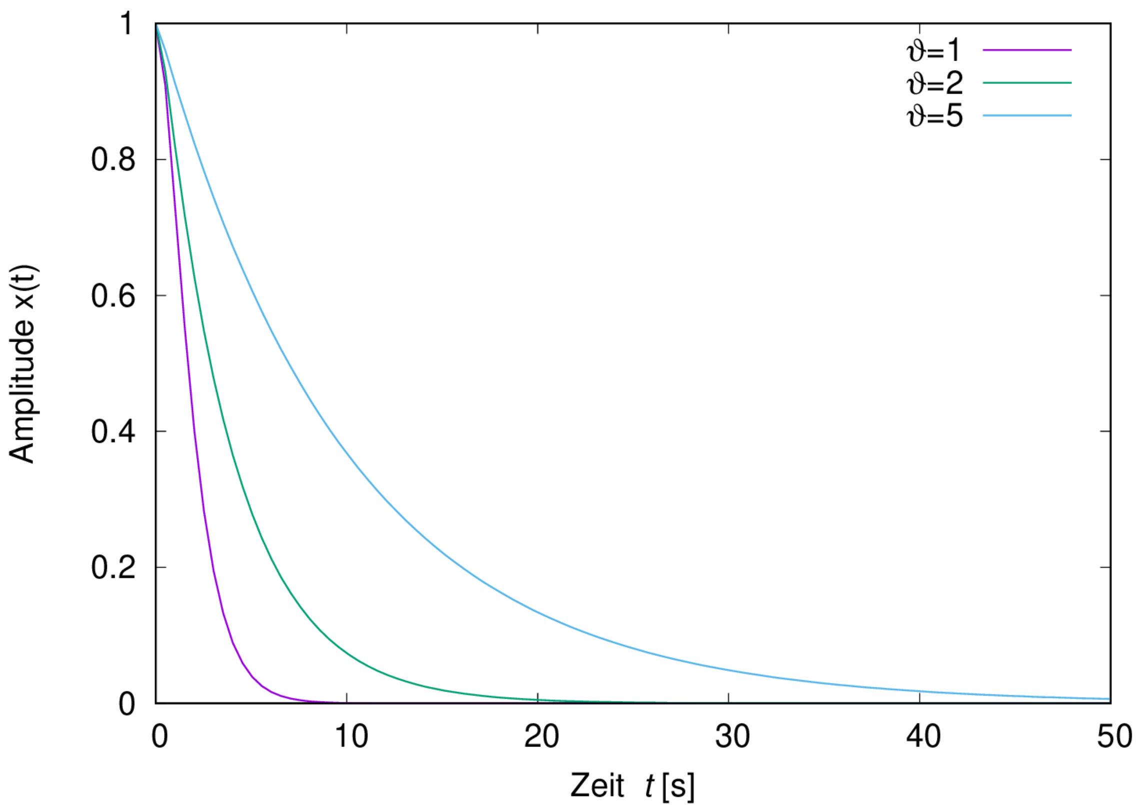
$$x(t) = x_1 \mathrm{e}^{-\delta t} \mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega t} + x_2 \mathrm{e}^{-\delta t} \mathrm{e}^{-\mathrm{j}\omega t}$$

$$\text{mit } \delta = \omega_0 \vartheta \text{ und } \omega = \omega_0 \sqrt{1 - \vartheta^2}$$

15.1.2 Lösung der DGL

Aperiodischer Fall (Kriechfall), es gilt Dämpfung $\vartheta > 1$

$$x(t) = x_1 \mathrm{e}^{-\delta_1 t} + x_2 \mathrm{e}^{-\delta_2 t} \qquad \delta_{1/2} = \omega_0(\vartheta \mp \sqrt{\vartheta^2 - 1})$$



$$\begin{aligned} \omega_0 &= 1\,\mathrm{rad/s} \\ x(0) &= 1 \\ \dot{x}(0) &= 0 \end{aligned}$$

15.1.2 Lösung der DGL

Bei Dämpfung $\vartheta = 1$ spricht man vom **aperiodischen Grenzfall**

- Dieser Fall ist für technische Anwendungen interessant, weil er in der Regel ein schnelles System ohne Überschwinger charakterisiert, wie es oft gefordert wird.
- Die mathematisch exakte Lösung hat hier die Form (ohne weiteren Beweis)

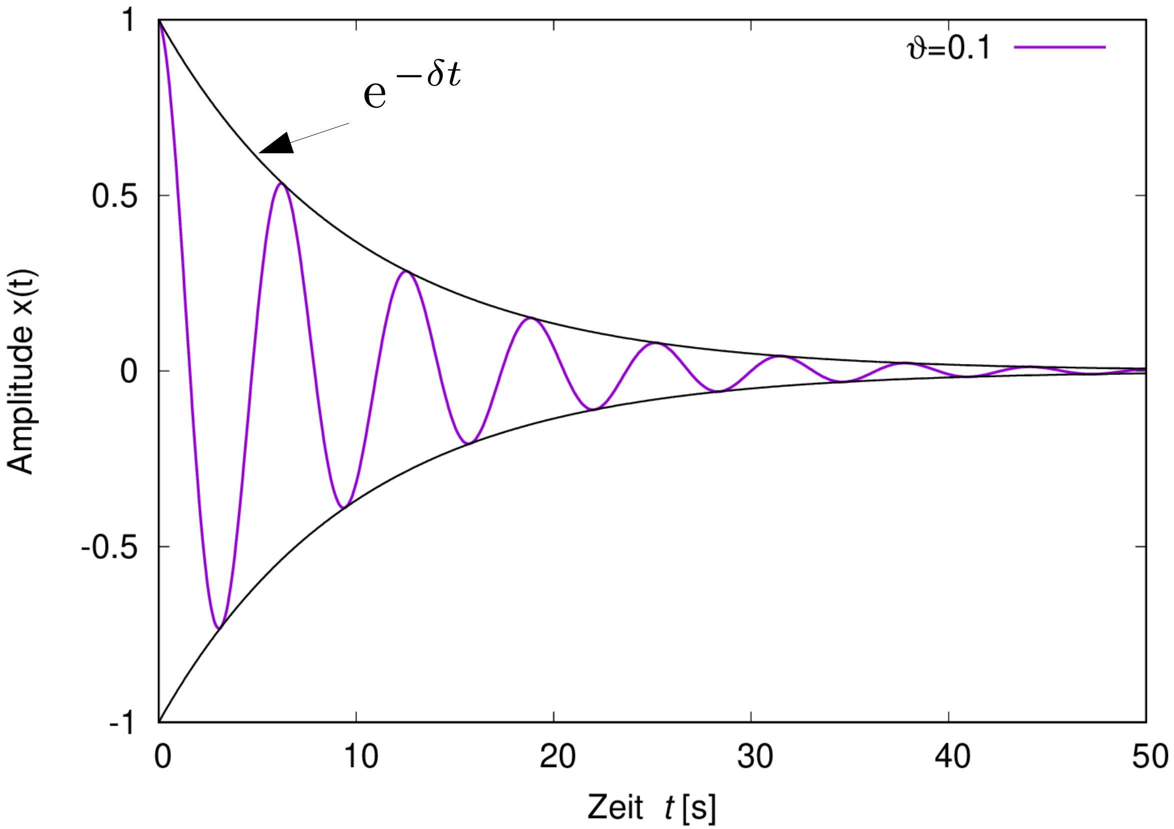
$$x(t) = (x_1 + x_2\, t)\mathrm{e}^{-\omega_0 t}$$

15.1.2 Lösung der DGL

Periodischer Fall ($\vartheta < 1$), es gilt

$$\begin{aligned} x(t) &= x_1 \mathrm{e}^{-\delta t} \mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega t} + x_2 \mathrm{e}^{-\delta t} \mathrm{e}^{-\mathrm{j}\omega t} \\ &= x_0 \mathrm{e}^{-\delta t} \cos(\omega t + \phi_0) \end{aligned}$$

$$\text{mit } \delta = \omega_0 \vartheta \text{ und } \omega = \omega_0 \sqrt{1 - \vartheta^2}$$



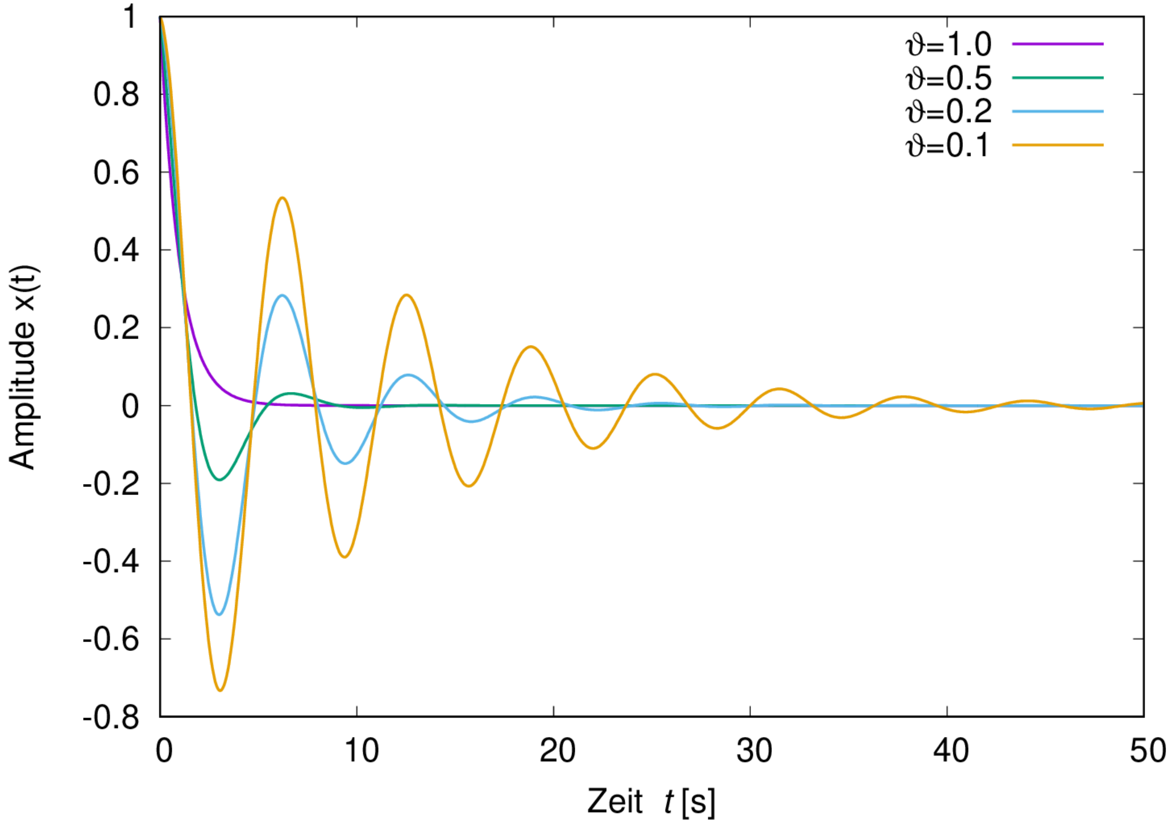
$$\begin{aligned} \omega_0 &= 1\,\mathrm{rad/s} \\ x(0) &= 1 \\ \dot{x}(0) &= 0 \end{aligned}$$

15.1.2 Lösung der DGL

Periodischer Fall ($\vartheta < 1$), es gilt

$$x(t) = x_1 \mathrm{e}^{-\delta t} \mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega t} + x_2 \mathrm{e}^{-\delta t} \mathrm{e}^{-\mathrm{j}\omega t}$$
$$= x_0 \mathrm{e}^{-\delta t} \cos(\omega t + \phi_0)$$

mit $\delta = \omega_0 \vartheta$ und $\omega = \omega_0 \sqrt{1 - \vartheta^2}$

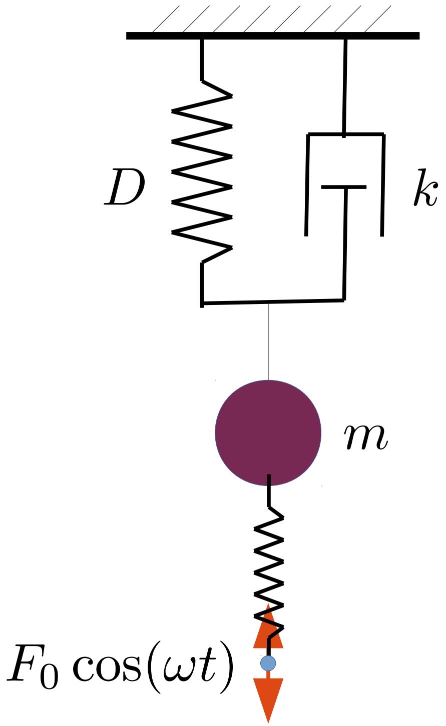


$$\omega_0 = 1\,\mathrm{rad/s}$$
$$x(0) = 1$$
$$\dot{x}(0) = 0$$

Erzwungene Schwingungen

15.2 Erzwungene Schwingung

Das System wird nun mit einer *periodischen* externen Kraft angeregt



Es gilt wieder nach Newton

$$m\,\ddot{x}(t) + D\,x(t) + k\,\dot{x}(t) \quad = \quad F_0 \cos(\omega t)$$

rückstellende Kraft Reibung externe Kraft

15.2.1 Allgemeine DGL

Umstellung der DGL $m\,\ddot{x}(t) = -D\,x(t) - k\,\dot{x}(t)$ ergibt

$$\ddot{x}(t) + \frac{k}{m}\,\dot{x}(t) + \frac{D}{m}\,x(t) = \frac{F_0}{m}\cos(\omega t)$$

Wir führen nun wieder allgemeine Konstanten ein

Allgemeine DGL

$$\ddot{x}(t) + 2\vartheta\omega_0\,\dot{x}(t) + \omega_0^2\,x(t) = \omega_0^2\,x_0\,\cos(\omega t)$$

mit **Resonanzfrequenz** $\omega_0 = \sqrt{\frac{D}{m}}$ **Amplitude** $x_0 = \frac{F_0}{D}$

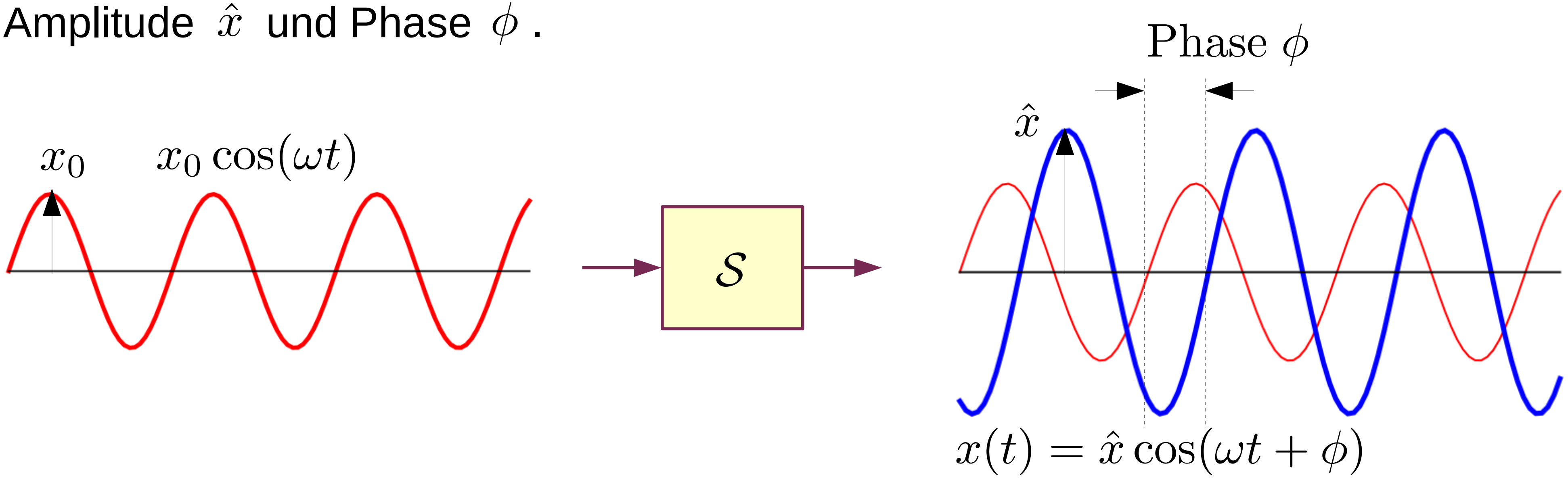
und **Dämpfung** $\vartheta = \frac{k}{2\sqrt{D\,m}}$

15.2.2 Stationäre Lösung der DGL

Für den stationären Zustand, d.h. nach Abklingen des Einschwingvorgangs, folgt aufgrund der Linearität (ohne Beweis)

$$x(t) = \hat{x}\cos(\omega t + \phi)$$

Das System reagiert mit der Anregungsfrequenz, jedoch mit unterschiedlicher Amplitude $\hat{x}$ und Phase ϕ .



15.2.2 Stationäre Lösung der DGL

Für das Verhältnis der Amplituden als Funktion der Frequenz ω gilt

(Betragsgang)

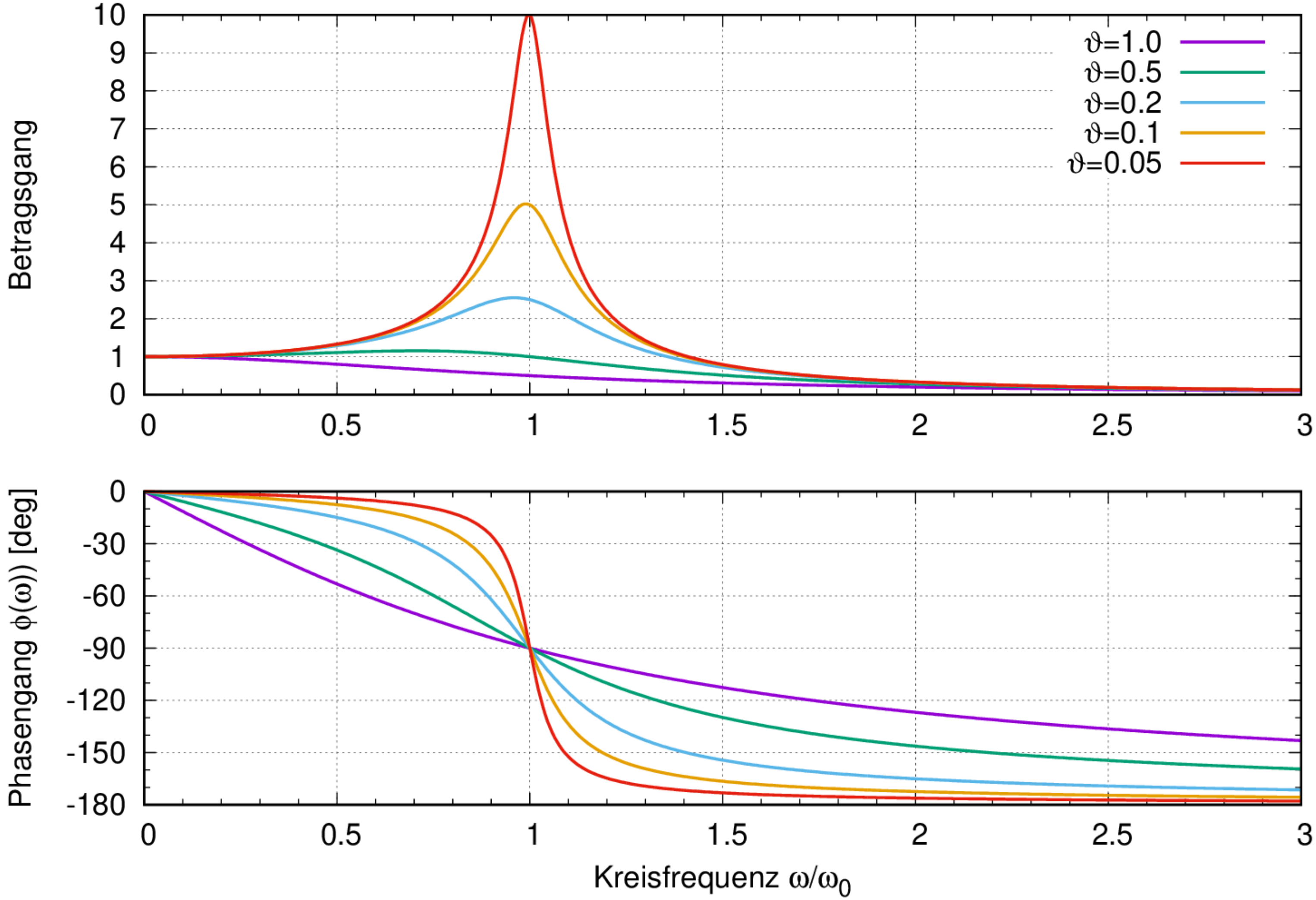
$$\frac{\hat{x}}{x_0} = \frac{\omega_0^2}{\sqrt{(\omega_0 - \omega)^2 + (2\vartheta\omega_0\,\omega)^2}}$$

Für die Phase als Funktion der Frequenz ω folgt **(Phasengang)**

$$\tan\phi = -\frac{2\vartheta\omega_0\omega}{(\omega_0^2 - \omega^2)}$$

Betrags- und Phasengang werden auch als **Frequenzgang** des Systems bezeichnet, die Auftragung erfolgt u.a. als Bode-Diagramm.

15.2.2 Frequenzgang



Anmerkung: hier werden abweichend vom Bode-Diagramm lineare Achsenskalierungen verwendet.

15.2.2 Frequenzgang und Resonanz

Anmerkungen:

- Die Resonanzfrequenz (Frequenz maximaler Amplitude) verschiebt sich durch die Dämpfung etwas, sie liegt bei $\omega_{\mathrm{res}} = \omega_0 \sqrt{1 - 2\vartheta^2}$

- Man kann eine Güte als Kehrwert der Dämpfung definieren, diese gibt die Resonanzüberhöhung an

$$Q = \frac{1}{2\vartheta} \quad \Rightarrow \quad Q \approx \frac{x_{\mathrm{res}}}{x_0}$$

- Die Resonanzbreite (Abfall des Betragsgangs auf $1/\sqrt{2}$) ergibt sich zu

$$\Delta\omega \approx \frac{\omega_0}{Q}$$