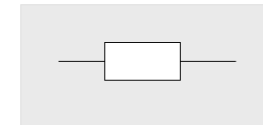


# GRUNDLAGEN DER ELEKTROTECHNIK 1

## Vorlesung 11

### Wechselspannung – Impedanz und Admittanz

Widerstand



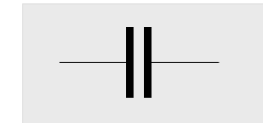
$$\underline{Z} = R$$

Spule



$$\underline{Z} = j\omega L$$

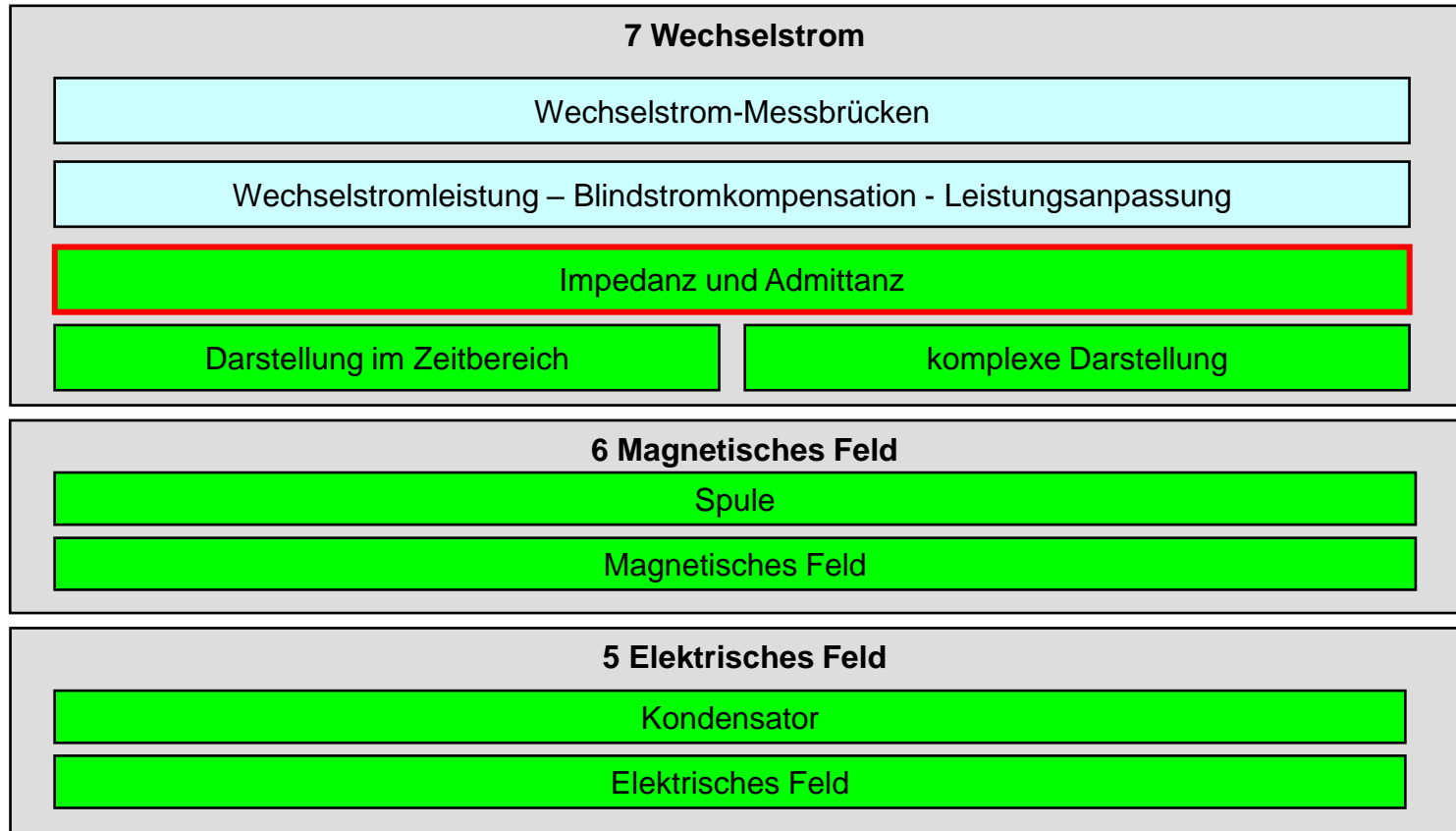
Kondensator



$$\underline{Z} = \frac{1}{j\omega C}$$

# WECHSELSTROM

## Inhalte der Kapitel 5 bis 7: Wechselstrom



# 7 WECHSELSPANNUNG

7.1 Sinusförmige Größen

7.2 Komplexe Wechselstromrechnung

**7.3 Elektrische Impedanz**

7.4 Admittanz

7.5 Wechselstromleistung

7.6 Blindstromkompensation

7.7 Leistungsanpassung bei Impedanzen

7.8 Wechselstrom-Messbrücken

# SPULE

Spannung und Strom an der Spule:



$$u =$$

Komplexe Strom- und Spannungsgrößen an der Spule:

$$\underline{i}(t) = \underline{I} e^{j\omega t} \text{ mit } \underline{I} = I = \hat{i} / \sqrt{2} \text{ (komplexer Effektivwert des Stroms)}$$

$$\Rightarrow \underline{u} = \underline{U} e^{j\omega t} =$$

$$\Rightarrow \underline{U} =$$

statt Ableiten nur noch mit  $j\omega$  multiplizieren

# VERGLEICH MIT DEM OHMSCHEN WIDERSTAND

Widerstand bei Gleichstrom:  $U =$

Spule bei Wechselstrom:  $\underline{U} =$

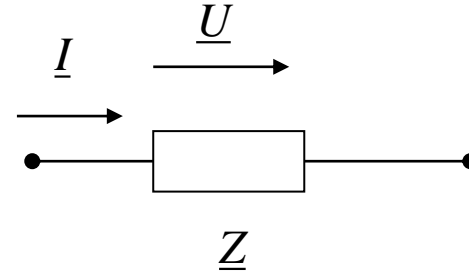
$j\omega L$  ist mit Widerstand bei Gleichstromnetzwerk vergleichbar

$\Rightarrow j\omega L$  nennen wir: **Impedanz**

# IMPEDANZ $\underline{Z}$

Verallgemeinerung des Widerstands auf Wechselstrom

$$\underline{Z} = \frac{\underline{U}}{\underline{I}} = \frac{\hat{u}}{\hat{i}}$$



$\underline{Z}$  ist ein komplexer Zeiger mit der Einheit  $[\underline{Z}] = 1\Omega$

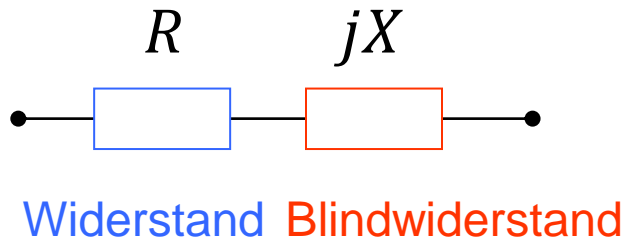
Definitionen:

- $Z = |\underline{Z}|$  Absolutwert der Impedanz
- $\varphi = \arg(\underline{Z})$  Phasenwinkel der Impedanz
- $R = \operatorname{Re}\{\underline{Z}\}$  Widerstand
- $X = \operatorname{Im}\{\underline{Z}\}$  **Blindwiderstand** (Reaktanz)

# IMPEDANZ $\underline{Z}$

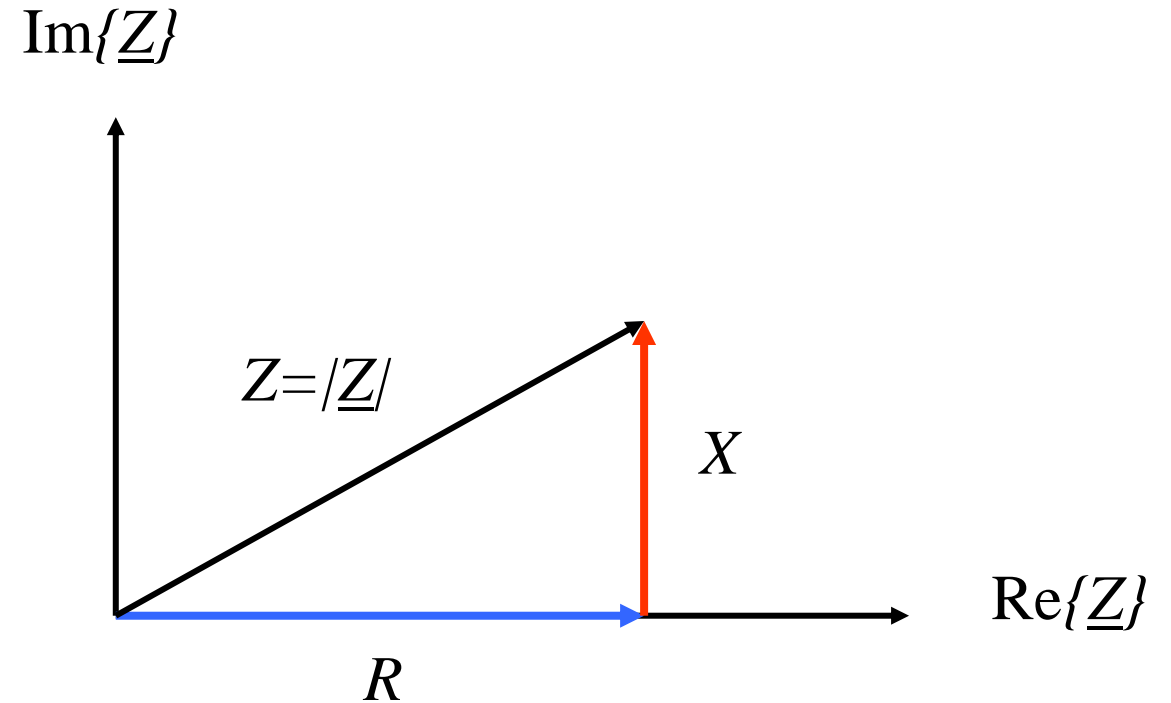
in der komplexen Ebene:

$$\underline{Z} = R + jX = Z e^{j\varphi}$$



Es gilt:

- $R > 0$
- $X$  kann auch negativ sein



# AUFGABE

Sei  $\underline{U} = 12V \angle 0^\circ$  und  $\underline{I} = 2A \angle -34^\circ$ .

Bestimmen Sie Impedanz, Widerstand und Reaktanz.

$\underline{Z} =$

$R =$

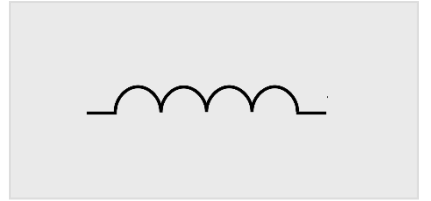
$X =$



# IMPEDANZ EINER SPULE

Komplexer Strom und Spannung an Spule:

$$\underline{U} = j\omega L \underline{I}$$

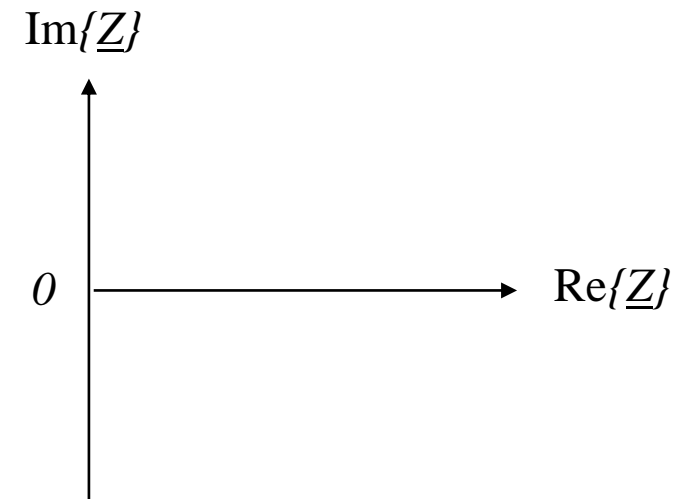


Impedanz einer Spule:

$$\underline{Z} =$$

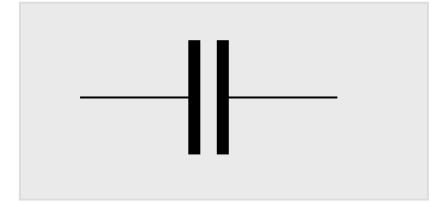
$$R =$$

$$X =$$



Im allgemeinen nennt man eine Last  $\underline{Z}$  **induktiv**, wenn  $X > 0$ .

# AUFGABE: IMPEDANZ EINES KONDENSATORS



Kondensatorgleichung:

$$\underline{i} =$$

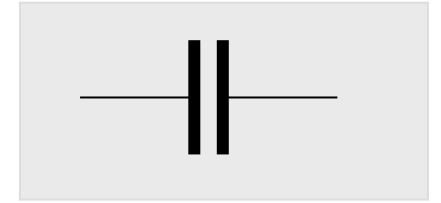
Es sei:  $\underline{u}(t) = \underline{U}e^{j\omega t}$  mit  $\underline{U} = U = \hat{u}/\sqrt{2}$  (komplexer Effektivwert)

$$\Rightarrow \underline{i} = \underline{I}e^{j\omega t} =$$

$$\Rightarrow \underline{I} =$$

Impedanz eines Kondensators:  $\underline{Z} =$

# IMPEDANZ EINES KONDENSATORS



Komplexe Spannung und Strom am Kondensator:

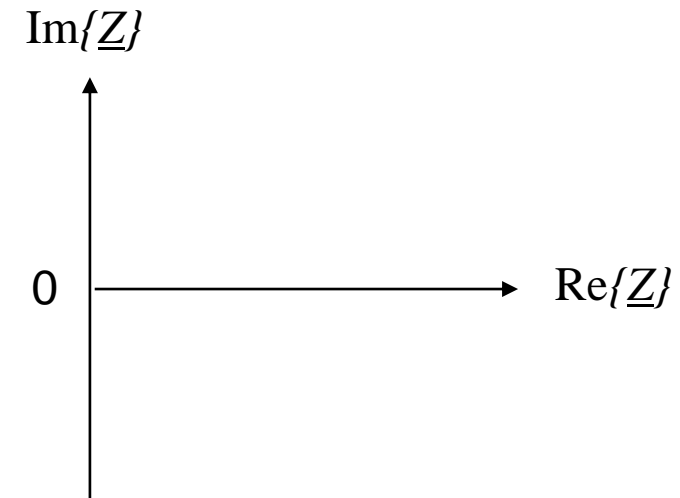
$$\underline{U} = \frac{1}{j\omega C} \underline{I} = -j \frac{1}{\omega C} \underline{I}$$

Impedanz eines Kondensators:

$$\underline{Z} =$$

$$R =$$

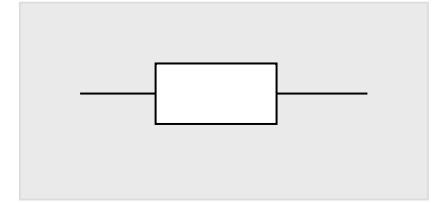
$$X =$$



Man nennt eine Last **kapazitiv**, wenn  $X < 0$ .

# IMPEDANZ EINES WIDERSTANDES

Komplexe Spannung und Strom am Widerstand:



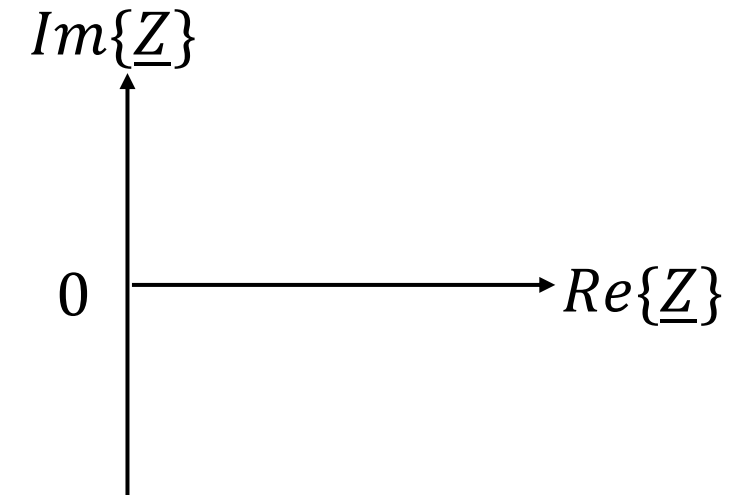
$$\underline{U} =$$

Impedanz eines Widerstandes:

$$\underline{Z} =$$

$$R =$$

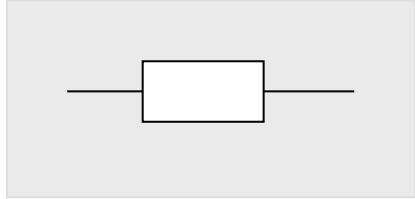
$$X =$$



Man nennt eine Last **ohmsch**, wenn  $X = 0$  und  $R = \text{const.}$

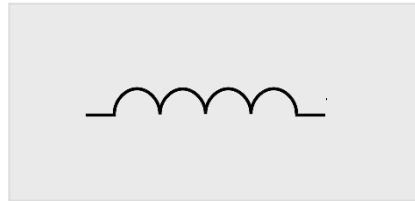
# ZUSAMMENFASSUNG: IMPEDANZ

Widerstand



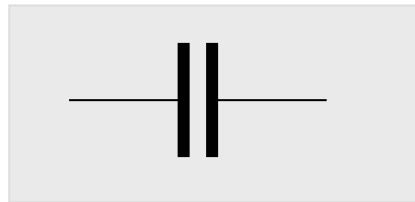
$$\underline{Z} = R$$

Spule



$$\underline{Z} = j\omega L$$

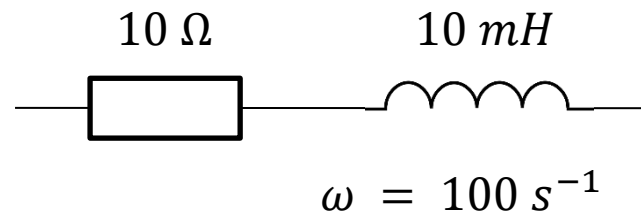
Kondensator



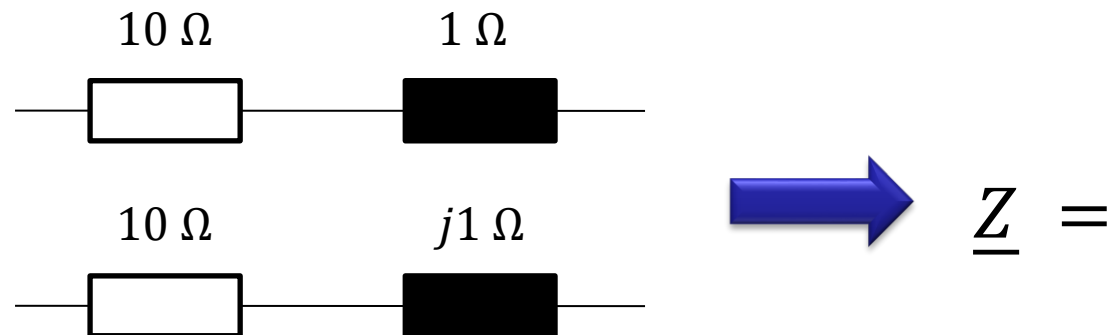
$$\underline{Z} = \frac{1}{j\omega C}$$

# BEISPIEL: RECHNEN MIT IMPEDANZEN

Serien- und Parallelschaltung von Impedanzen rechnet man genau wie bei Widerständen

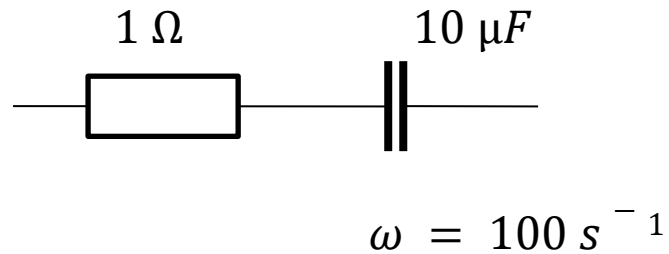


Alternative Darstellung:



# AUFGABE

Wie groß ist die Impedanz der Serienschaltung?



Alternative Darstellung:



# 7 WECHSELSPANNUNG

7.1 Sinusförmige Größen

7.2 Komplexe Wechselstromrechnung

7.3 Elektrische Impedanz

**7.4 Admittanz**

7.5 Wechselstromleistung

7.6 Blindstromkompensation

7.7 Leistungsanpassung bei Impedanzen

7.8 Wechselstrom-Messbrücken





# ADMITTANZ Y

Leitwert in Gleichstromnetzwerken:

$$G =$$

In Wechselstromnetzwerken nennt man den korrespondierenden **komplexen Leitwert** auch:

Admittanz Y =

$$\underline{Y} = G + j B$$

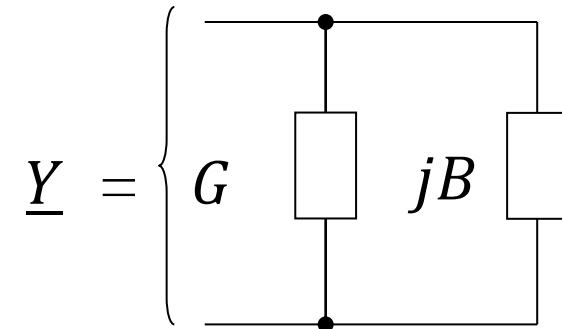
mit:

$$G = \operatorname{Re}\{\underline{Y}\}$$

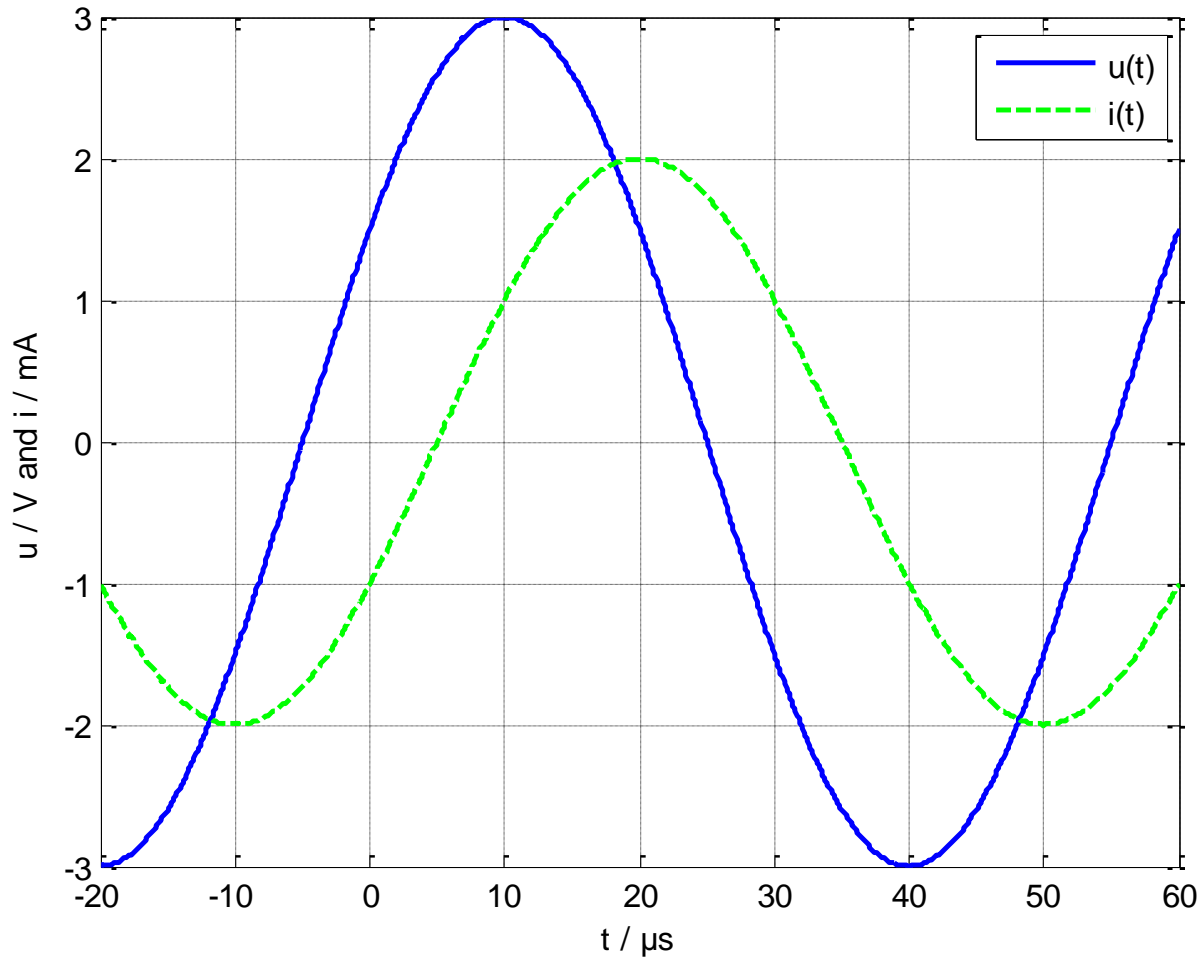
Wirkleitwert oder Konduktanz

$$B = \operatorname{Im}\{\underline{Y}\}$$

Blindleitwert oder Suszeptanz



# AUFGABE: BESTIMMEN SIE $\underline{Z}$ UND $\underline{Y}$



$$\underline{\hat{U}} =$$

$$\underline{\hat{I}} =$$

$$\underline{Z} =$$

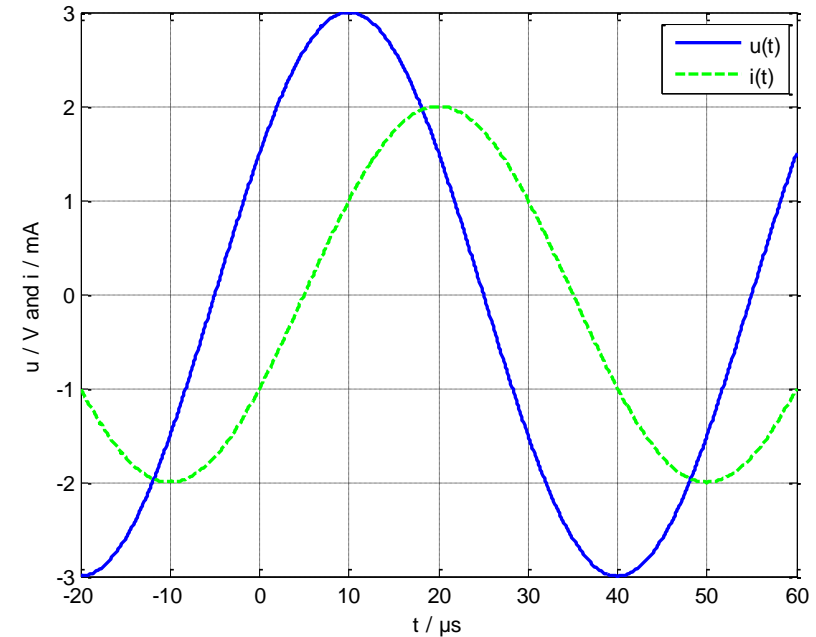
$$\underline{Y} =$$

## BEISPIEL: REIHENSCHALTUNG

Wir haben berechnet:

$$\underline{Z} = 750 \, \Omega + j 1299 \, \Omega$$

$$\underline{Y} = 0.333 \, mS - j 0.577 \, mS$$



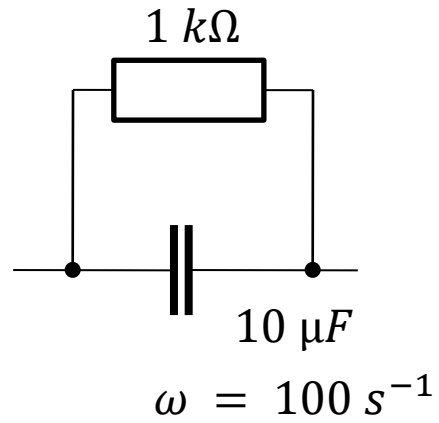
Sei  $\underline{Z}$  eine Reihenschaltung von Widerstand und Spule. Welche Werte haben die Bauelemente?

$$f =$$

$$R =$$

$$\omega L =$$

# BEISPIEL: PARALLELE IMPEDANZEN



über Impedanz

über Admittanz

# AUFGABE: PARALLELSCHALTUNG

Wir haben berechnet:

$$\underline{Z} = 750 \, \Omega + j 1299 \, \Omega$$

$$\underline{Y} = 0.333 \, mS - j 0.577 \, mS$$

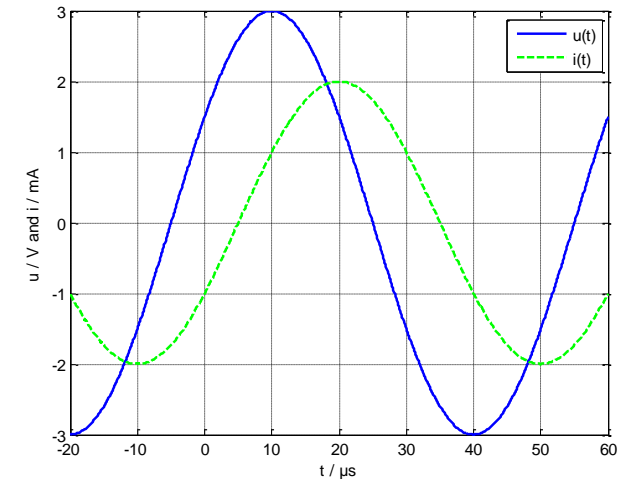
**Tipp:** Bei Parallelschaltung addieren sich die Leitwerte.

Sei  $\underline{Y}$  eine Parallelschaltung von Widerstand und Spule.  
Welche Werte haben die Bauelemente?

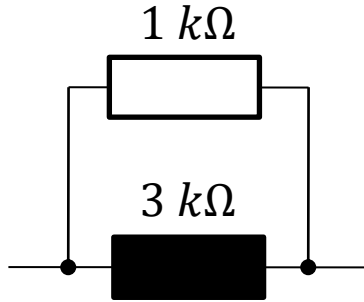
$$f = 1/60 \, \mu s = 16 \, 667 \, Hz \Rightarrow \omega = 2\pi f = 104 \, 720 \, s^{-1}$$

$$G =$$

$$B =$$



# AUFGABE: BESTIMMEN SIE DIE IMPEDANZ

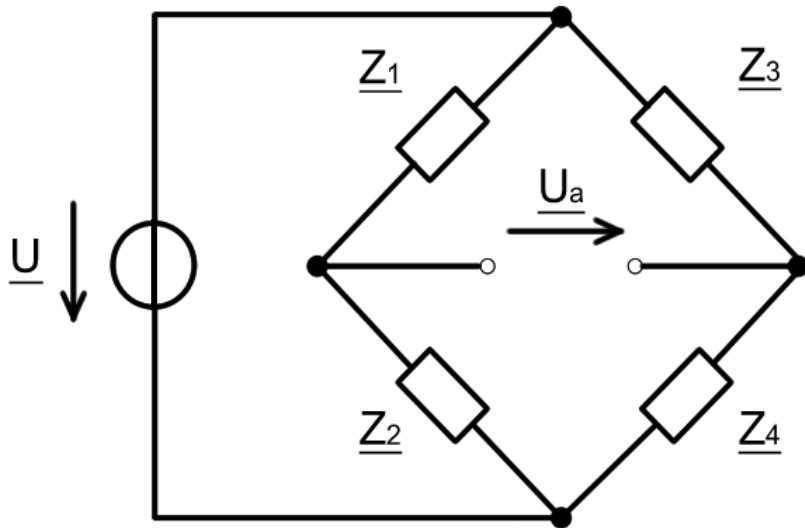


# FRAGE

Was sind die grundsätzlichen Unterschiede zwischen einer ohmschen Last und einer kapazitiven oder induktiven Last?

# ANWENDUNG: BRÜCKENSCHALTUNG BEI WECHSELSPANNUNG

Wechselspannung zur Speisung einer Wheatstone-Brücke  
⇒ Messung von induktiven und kapazitiven Elementen



Brückenabgleich:

Brückenspannung:



# 7 WECHSELSPANNUNG

7.1 Sinusförmige Größen

7.2 Komplexe Wechselstromrechnung

7.3 Elektrische Impedanz

7.4 Admittanz

7.5 Wechselstromleistung

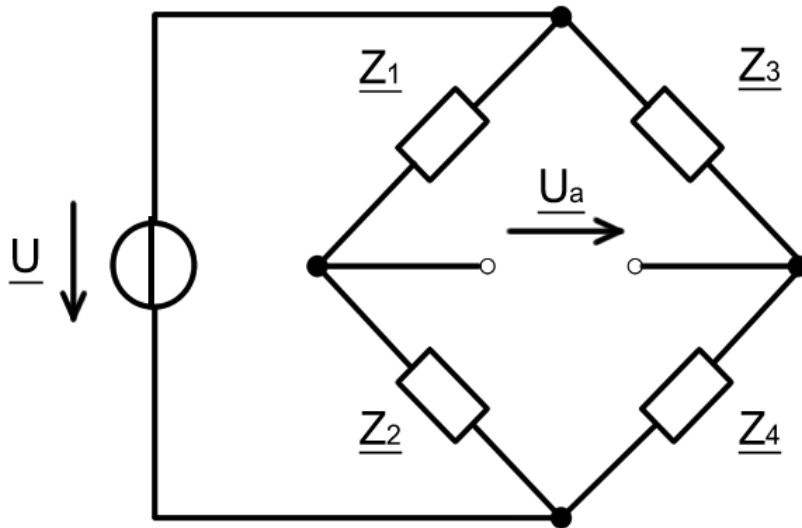
7.6 Blindstromkompensation

7.7 Leistungsanpassung bei Impedanzen

**7.8 Wechselstrom-Messbrücken**

# BRÜCKENSCHALTUNG BEI WECHSELSPANNUNG

Wechselspannung zur Speisung einer Wheatstone-Brücke  
⇒ Messung von induktiven und kapazitiven Elementen



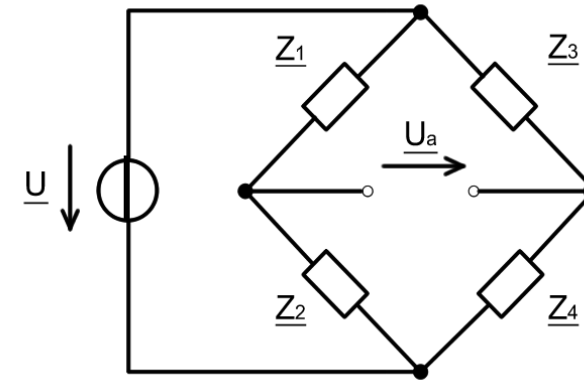
Brückenabgleich:

Brückenspannung:

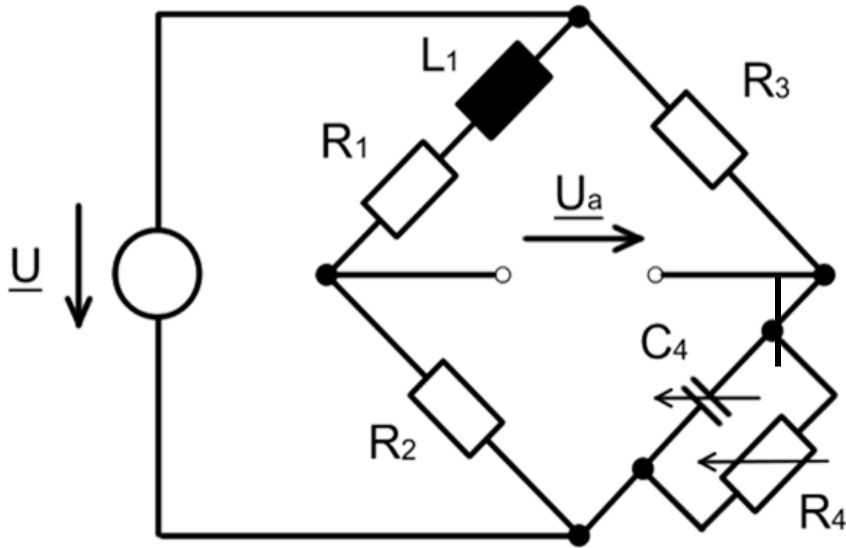
# WECHSELSTROMMESSBRÜCKEN

Es gibt Brückenschaltungen für spezielle Messaufgaben (als Abgleichbrücke)

- Spule  $L_1$  (mit Verlustwiderstand  $R_1$ )  
→ Maxwell-Wien-Brücke
- Kondensator  $C_1$  (mit parasitärem Element  $R_1$ )  
→ Kapazitätsbrücke
- Frequenz  $\omega$   
→ Wien-Robinson-Brücke



# MAXWELL-WIEN BRÜCKE FÜR SPULEN



Prinzip für alle Wechselstrom-Messbrücken:

Sowohl der **Real-** als auch der **Imaginärteil** müssen übereinstimmen

→ **2 Abgleichbedingungen**

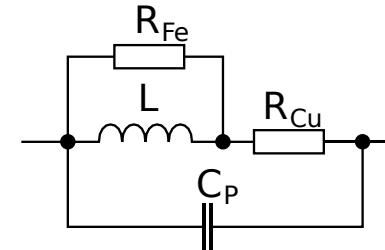
→ 2 Parameter ( $R_4$ ,  $C_4$ )

Unbekannte Spule:

$$\underline{Z}_1 = R_1 + j\omega L_1$$

Warum der Widerstand  $R_1$  ?

→ Spulen- Ersatzschaltbild



$L$  Induktivität (ideal)

$R_{Cu}$  Kupferwiderstand

$R_{Fe}$  frequenzabhängiger Kernwiderstand

$C_p$  Wicklungs- & Anschlusskapazität

# MAXWELL-WIEN BRÜCKE: ERGEBNIS

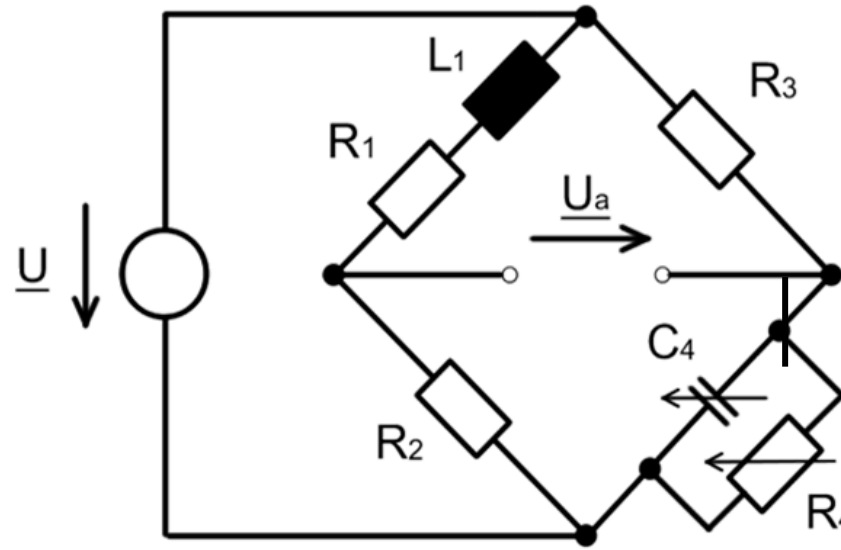
Unbekannte Spule:

$$\underline{Z}_1 = R_1 + j \omega L_1$$

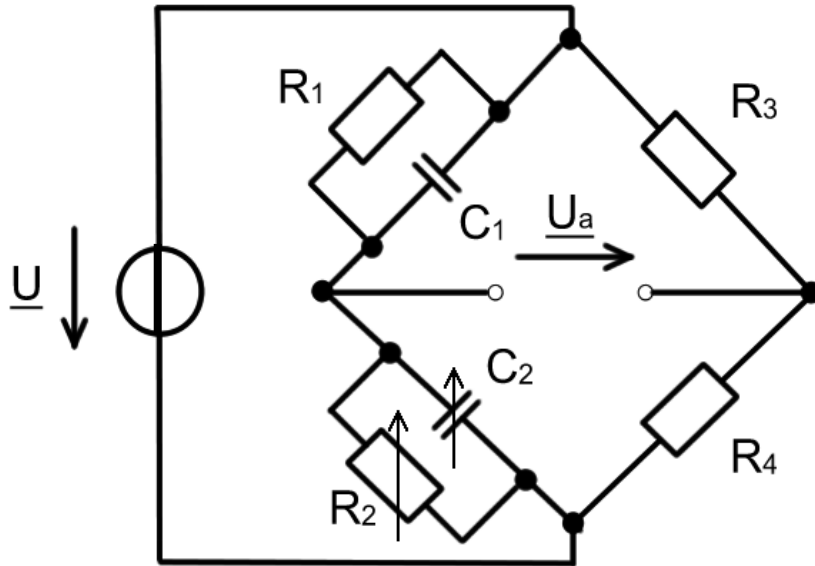
Abgleichbedingungen:

$$R_1 = \frac{R_2 R_3}{R_4}$$

$$L_1 = R_2 R_3 C_4$$



# KAPAZITÄTSMESSBRÜCKE



## Aufgabe:

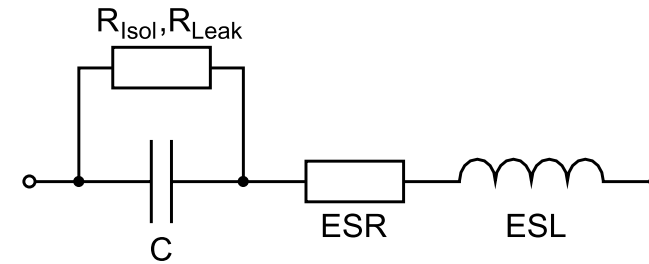
Die Brücke werde abgeglichen. Man liest  $R_2$  und  $C_2$  an einer Skala ab.

- Wie groß sind  $R_1$  und  $C_1$ ?

**Hinweis:** Admittanz nutzen !

Wheatstonesche Brücke zur Bestimmung unbekannter Kondensatoren.

Wozu der Widerstand  $R_1$  ?



$C$

Kapazität

$R_{isol}$  bzw.  
 $R_{Leak}$

Isolationswiderstand des Dielektrikums  
bzw. Reststrom bei Elektrolyt-  
kondensatoren

$ESR$

(engl. *Equivalent Series Resistance*)  
- ohmschen Leitungs- und die  
dielektrischen Umpolungsverluste

$ESL$

(engl. *Equivalent Series Inductivity*)  
- parasitäre Induktivität

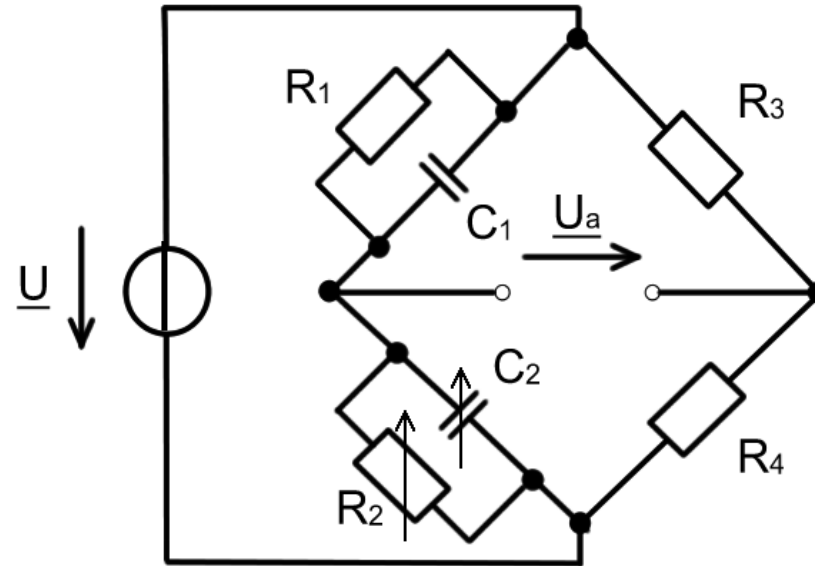
# KAPAZITÄTSBRÜCKE: ERGEBNIS

unbekannte Kapazität:

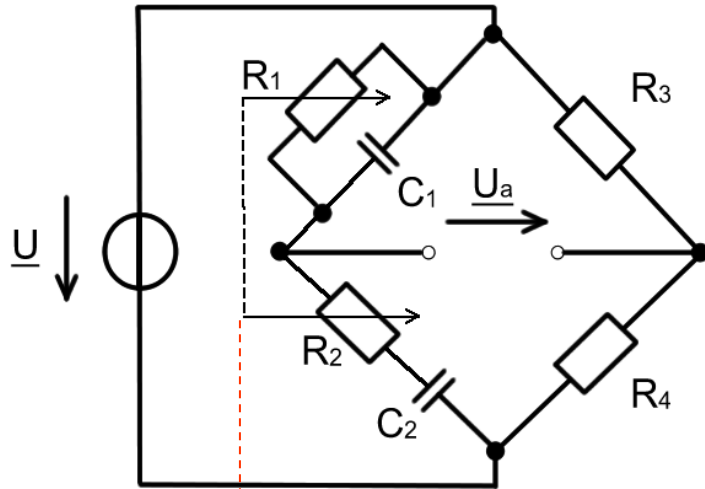
$$\underline{Y}_1 = 1/R_1 + j\omega C_1$$

Abgleichbedingungen:

$$R_1 = \frac{R_2 R_3}{R_4}$$
$$C_1 = \frac{C_2 R_4}{R_3}$$



# WIEN-ROBINSON-BRÜCKE



Tandem-Potentiometer

Zur Messung einer Frequenz  $\omega$

Abgleichbedingungen:

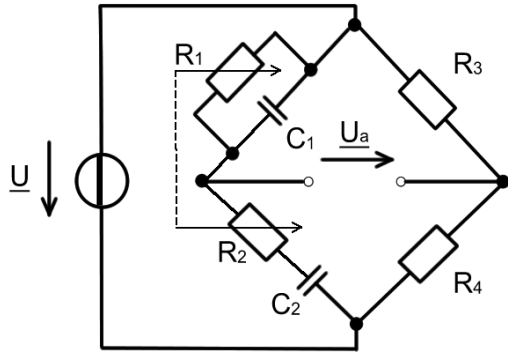
$$1 = \omega^2 R_1 R_2 C_1 C_2 \text{ und } \frac{C_1}{C_2} + \frac{R_2}{R_1} = \frac{R_4}{R_3}$$

Sei  $C_1 = C_2 = C$ ,  $R_1 = R_2$  und  $R_4 = 2R_3$

$$\Rightarrow \omega = \frac{1}{RC}$$



# WIEN-ROBINSON-BRÜCKE



Abgleichbedingungen:

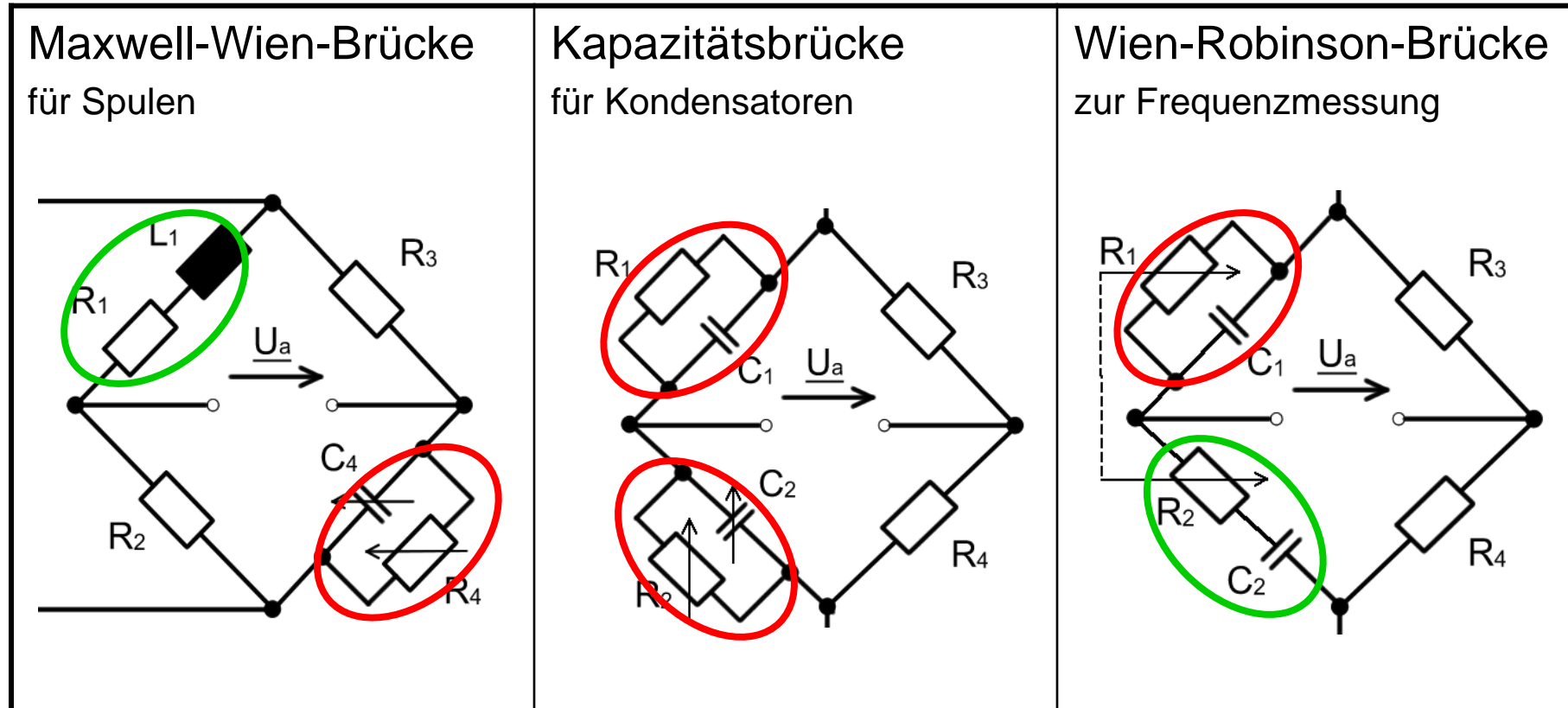
$$1 = \omega^2 R_1 R_2 C_1 C_2 \text{ und } \frac{C_1}{C_2} + \frac{R_2}{R_1} = \frac{R_4}{R_3}$$

Aufgabe:

Wählen Sie  $C_1 = C_2 = C$  und  $R_1 = R_2 = R$  und  $R_4 = 2 R_3$ .

Wenn Sie  $C$  und  $R$  kennen bzw. an einer Skala ablesen können, wie ergibt sich dann die gesuchte Frequenz?

# WECHSELSTROMMESSBRÜCKEN



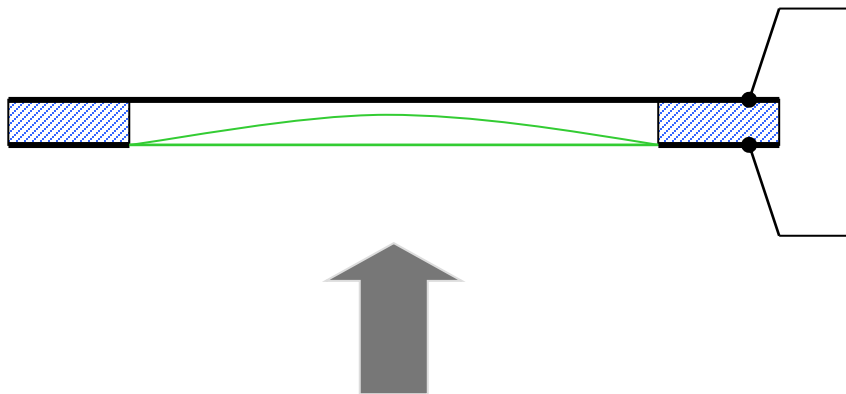
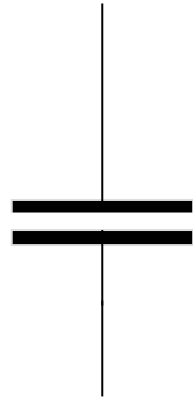
Reihenschaltung



Parallelschaltung

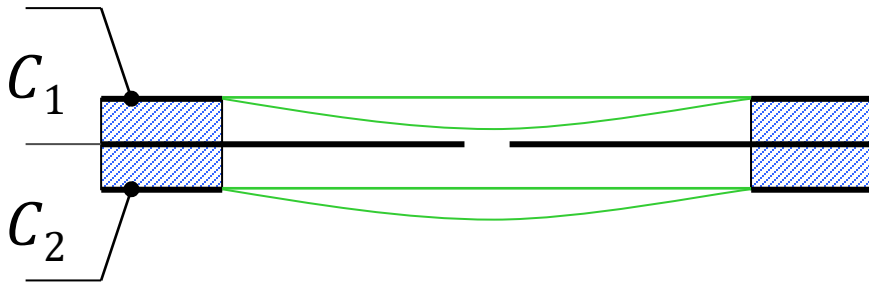
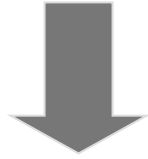
# ANWENDUNG: KAPAZITIVER DRUCKSENSOR

$$C = \varepsilon \frac{A}{d}$$



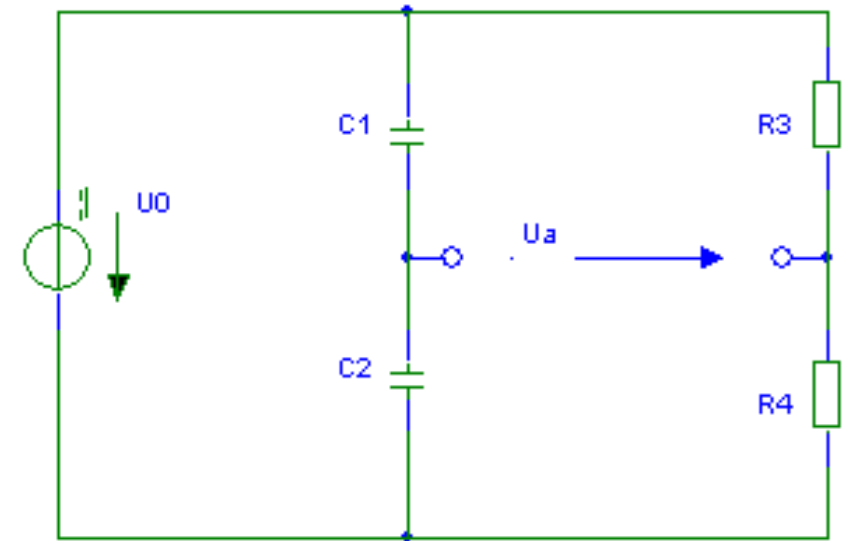
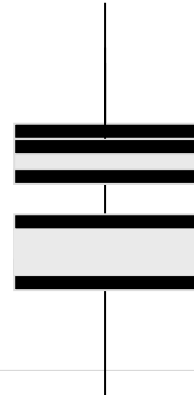
Ceracore UCS2 Foto: Endress+Hauser  
[www.endress.com](http://www.endress.com)

# ANWENDUNG: DIFFERENTIALDRUCKSENSOR



$$C_1 = \varepsilon \frac{A}{d - x}, \quad C_2 = \varepsilon \frac{A}{d + x}, \quad R_3 = R_4 = R$$

$C_1$   
 $C_2$



$$\Rightarrow U_a = U_0 \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{A}{k \cdot d} \cdot p \propto p$$

mit  $k$ : Federkonstante

# NEBENRECHNUNGEN DRUCKSENSOR

# WAS SIE MITNEHMEN SOLLEN...

## Impedanz und Admittanz

- Definition + Begriffe Reaktanz, Wirkleitwert und Blindleitwert kennen
- Rechnen mit Impedanzen beherrschen
  1. Impedanz bestimmen (oder Admittanz)
  2. Rechnen wie mit Widerständen – aber komplex
- Impedanz von

$R$ :

$L$ :

$C$ :

# WAS SIE MITNEHMEN SOLLEN ...

## Wechselstrommessbrücken

- Brückenarten und deren Anwendung verstehen
- Abgleichbedingung anwenden

A) Maxwell-Wien-Brücke

B) Kapazitätsmessbrücke

C) Wien-Robinson-Brücke