HAW Hamburg – Fakultät TI
Department Informations- und Elektrotechnik
Prof. Dr.-Ing. Karin Landenfeld

Abschlussklausur Mathematik 1 / EE-B1
Termin: 30.1.2019 11:00 Uhr

Zeitdauer: 120 Minuten

Name, Vorname	
Matrikelnummer	

	Aufgabe 1	Aufgabe 2	Aufgabe 3	Aufgabe 4	Aufgabe 5	Aufgabe 6
Maximal erreichbare Punktzahl	12	16	16	16	14	12
Erreichte Punkte						

Erreichte Punkte gesamt	
Leistungspunkte	
Datum/ Unterschrift	

Hinweise:

- Schreiben Sie die Lösungen bitte soweit es geht **in die Aufgabenblätter.**
- Falls Sie zusätzliche **eigene Blätter** benötigen, nehmen Sie bitte für jede Aufgabe ein separates Blatt und beschriften Sie es oben mit Namen und Aufgabennummer.
- Stellen Sie Ihre **Lösungen mit dem Rechengang und der Begründung** nachvollziehbar dar. Bloßes Hinschreiben von Ergebnissen bringt <u>keine Punkte</u>.
- Erlaubte Unterlagen: 4 Seiten mit handschriftlich erstellter Formelsammlung, davon 1 Seite als Kopie erlaubt
- Kein Taschenrechner, kein Laptop, kein Kommunikationsgeräte, …!

Aufgabe 1 (12 Punkte): Funktionen

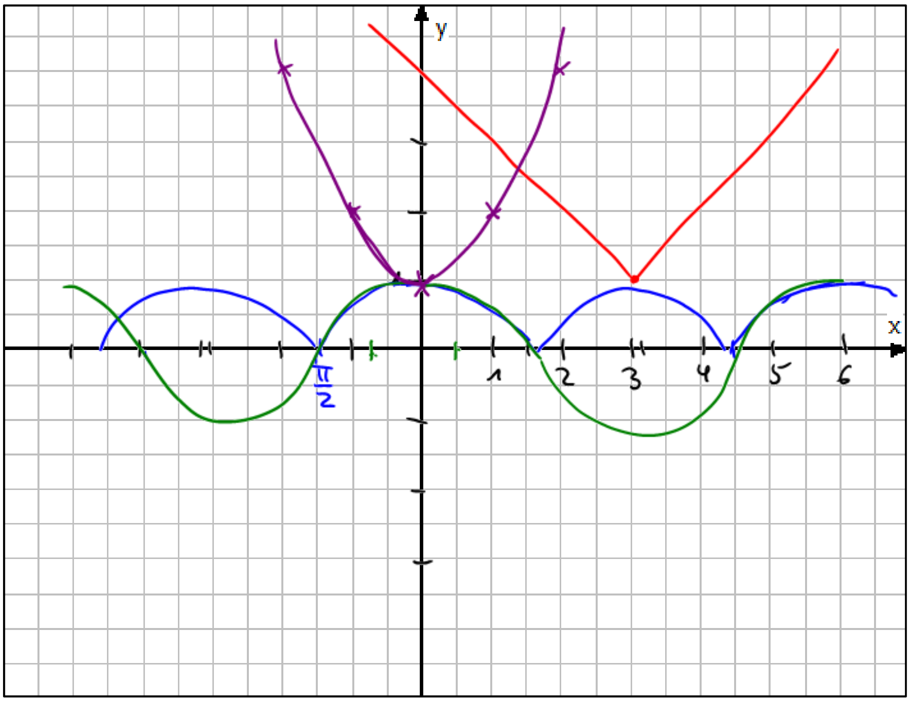
a) Skizzieren Sie in dem nebenstehenden Koordinatensystem die folgenden Funktionen

$f_1(x) = |x-3| + 1$

$f_2(x) = \left|\sin(x + \frac{\pi}{2})\right|$

$f_3(x) = \cos(|x|)$ gerade $\cos(x) = \cos(-x)$

$f_4(x) = 2^{|x|}$



b) Beweisen Sie, dass die Funktion

$$f : [1, e] \to \mathbb{R} \ mit \ f(x) = \frac{1}{x} - \ln(x)$$

im Intervall $[1, e]$ genau eine Nullstelle hat.

1. Nullstellensatz anwenden
   - Stetige Funktion in $D = \mathbb{R}^+$
   - $f(1) = \underbrace{1}_{>0}$, $f(e) = \underbrace{\frac{1}{e} - 1}_{<0}$ ⇒ Vorzeichenwechsel in den Funktionswerten an den Intervallrändern

⇒ mindestens eine Nullstelle im Intervall $[1, e]$ aufgrund Nullstellensatz

2. Monotonie nachweisen

↳ monoton fallend: $f'(x) \overset{!}{<} 0$

$$\underbrace{-\frac{1}{x^2} - \frac{1}{x}}_{<0 \ \forall x \in D} \overset{!}{<} 0$$

Aufgabe 2 **(16 Punkte): Funktionen und Grenzwerte**

a) Bestimmen und begründen Sie für die nachfolgend gegebene gebrochen rationale Funktion

$$f(x) = \frac{x(x+2)}{(x+1)^2 (x-2)^1}$$

- den Definitionsbereich

$D = \mathbb{R} \setminus \{-1, 2\} = \{ x \in \mathbb{R} \mid x \neq -1 , x \neq 2\} = (-\infty, -1) \cup (-1, 2) \cup (2, \infty)$

- die Nullstellen

$N = \{0, -2\}$

- die Asymptoten

$h(x) = 0$, da Zählergrad < Nennergrad
bzw. echt gebr. rat. Fkt.

- die Pole (inklusive der Art des VZ-Wechsels)

Hinweis: Berechnen Sie die Grenzwerte an den Polen mit Hilfe von Folgen.

$x = -1$: → Pol ohne VZW, da Vielfachheit des Linearfaktors ist gerade

$$\rightarrow g_r = \lim_{x \to -1^+} \frac{x(x+2)}{(x+1)^2 (x-2)} \underset{\substack{\uparrow \\ x_n = -1 + \frac{1}{n}}}{\overset{\substack{\text{übergang} \\ \text{auf Folgen} \\ \downarrow}}{=}} \lim_{n \to \infty} \frac{(-1+\frac{1}{n})(-1+\frac{1}{n}+2)}{(-1+\frac{1}{n}+1)^2 (-1+\frac{1}{n}-2)}$$

$$= \lim_{n \to \infty} \frac{(-1+\frac{1}{n})(1+\frac{1}{n})}{(\frac{1}{n})^2 (-3+\frac{1}{n})} = \lim_{n \to \infty} \frac{-1+\frac{1}{n^2}}{-\frac{3}{n^2}+\frac{1}{n^3}} \cdot \frac{n^2}{n^2}$$

↑ Erweiterung mit dem Kehrwert der höchsten Nennerpotenz

$$= \lim_{n \to \infty} \frac{\underbrace{\underbrace{-n^2}_{\to -\infty} + 1}_{\to -\infty}}{\underbrace{-3 + \underbrace{\frac{1}{n}}_{\to 0}}_{\to -3}} = +\infty$$

⇒ Pol ohne VZW gegen $+\infty$ $\quad g_r = +\infty, \; g_l = +\infty$

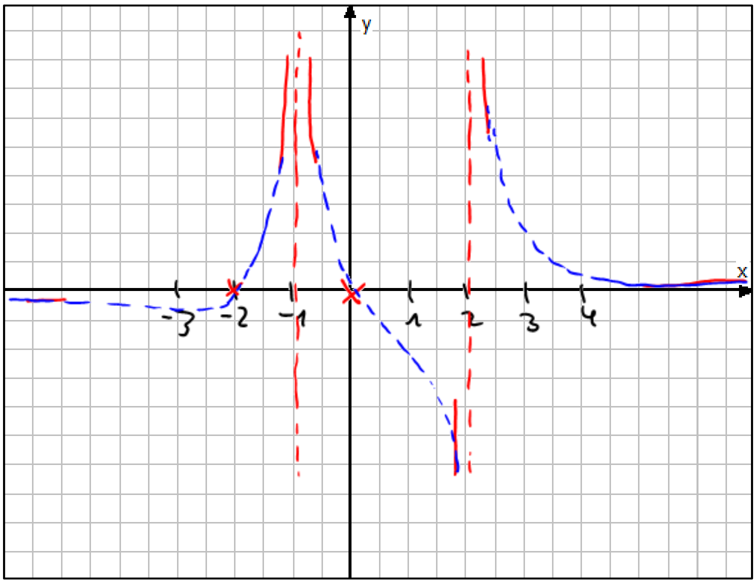
$x = 2$: → Pol mit VZW, da Vielfachheit 1 des Linearfaktors also ungerade

$$\rightarrow g_r = \lim_{x \to 2^+} \frac{x(x+2)}{(x+1)^2 (x-2)} = \text{......} \text{ wie oben } = +\infty$$

↑ zu Hause

$\Rightarrow g_l = -\infty$

- Skizzieren Sie die Kurve in dem beiliegenden Diagramm.



b) Berechnen Sie die nachfolgenden Grenzwerte mit Verwendung der Regeln von Bernoulli l'Hospital:

(1) $$\lim_{x\to 0}\frac{x-\log(x+1)}{1-\cos x} = \lim_{x\to 0}\frac{1-\frac{1}{x+1}}{-(-\sin x)} = \lim_{x\to 0}\frac{-\frac{0\cdot(x+1)-1\cdot 1}{(x+1)^2}}{\cos x}$$

„Typ $\frac{0}{0}$"   „Typ $\frac{0}{0}$"

$$= \lim_{x\to 0}\frac{\frac{1}{(x+1)^2}}{\cos x} = 1$$ (fertig und gr.)

(2) $$\lim_{x\to 1}\left(\frac{1}{\ln x}-\frac{1}{x-1}\right) = \lim_{x\to 1}\frac{(x-1)-\ln x}{\ln x\,(x-1)} = \lim_{x\to 1}\frac{1-\frac{1}{x}}{\frac{1}{x}(x-1)+\ln x\cdot 1}$$

$(-\infty)-(-\infty)$, $+\infty$, $+\infty$

$x\to 1^+$, 1^-

„Typ $\infty-\infty$"

⇒ umformen notwendig

→ Hauptnenner, da Typ Bruch ist

„Typ $\frac{0}{0}$"

$= 1-\frac{1}{x}+\ln x$

$$= \lim_{x\to 1}\frac{\frac{1}{x^2}}{\frac{1}{x^2}+\frac{1}{x}} = \frac{1}{2}$$

„Typ $\frac{0}{0}$"

Aufgabe 3 (16 Punkte): : Differentialrechung

a) Berechnen Sie alle Stellen, in denen die Funktion

$$f:[-\pi,\pi]\to\mathbb{R} \ \ mit \ \ f(x)=\cos(x)-\cos^2(x)$$

ein lokales Minimum oder Maximum annimmt.

- $f'(x) = -\sin x - \underbrace{2\cos x}_{\text{äußere Abl.}} \cdot \underbrace{(-\sin x)}_{\text{innere Abl.}}$ Kettenregel
  $= \sin x\,(2\cos x - 1)$

| Produktregel geht auch
$(\cos x \cdot \cos x)'$
$= -\sin x \cdot \cos x + \cos x\,(-\sin x)$
$= -2\sin x \cdot \cos x$

- notw. Bed. $f'(x) \overset{!}{=} 0$

$$\sin x\,(2\cos x - 1) = 0$$

$\sin x = 0$ $\vee$ $2\cos x - 1 = 0$

$x = -\pi, 0, \pi, 2\pi, \dots$ $\Rightarrow \cos x = \frac{1}{2} \Rightarrow x = \frac{\pi}{3}, -\frac{\pi}{3}, \dots$

kritische Punkte: $x_1 = -\pi$, $x_2 = -\frac{\pi}{3}$, $x_3 = 0$, $x_4 = \frac{\pi}{3}$, $x_5 = \pi$

- hinr. Bed $f''(x_0) \neq 0$
  $f''(x_0) > 0 \Rightarrow$ Min.
  $f''(x_0) < 0 \Rightarrow$ Max

$\rightarrow f''(x) = \dots = 2\cos^2 x - 2\sin^2 x - \cos x$

$\rightarrow f''(-\pi) = \dots = 3 \Rightarrow$ Min

$f''(0) = \dots = 1 \Rightarrow$ Min

$f''(\pi) = \dots = 3 \Rightarrow$ Min

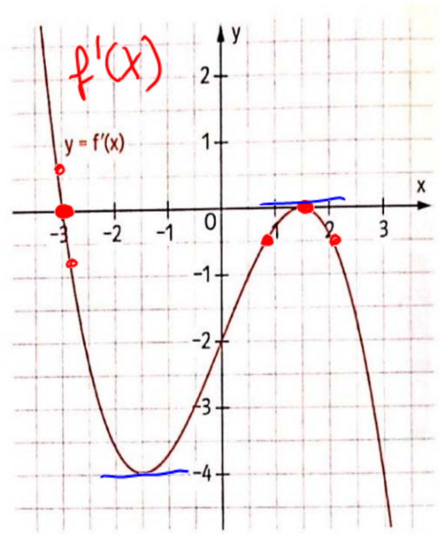
$f''(-\frac{\pi}{3}) = \dots = -\frac{3}{2} \Rightarrow$ Max

$f''(\frac{\pi}{3}) = \dots = -\frac{3}{2} \Rightarrow$ Max

b) In der Abbildung ist der Graph $f'(x)$ einer unbekannten Funktion $f(x)$ gegeben.

Welche der folgenden Aussagen sind wahr und welche sind falsch?

Begründen Sie jeweils Ihre Antwort!



Aussage 1:

f hat im Bereich $-4 < x < 3$ zwei lokale Extremwerte.

falsch, da bei $x = 1{,}5$ die 1. Ableitung keinen VZW hat hat f hier keinen lokalen Extremwert

Aussage 2:

f ist im Bereich $-3 < x < 3$ monoton fallend.

richtig, da $f'(x) \leq 0$ in $[-3, 3]$

Aussage 3:

Der Graph von f hat an der Stelle $x = 1{,}5$ einen Punkt mit waagerechter Tangente, der weder Hoch– noch Tiefpunkt ist.

richtig, da $f'(1{,}5) = 0$ und links und rechts davon negative Steigung vorliegt

Aussage 4:

Der Graph von f ändert an der Stelle $x = 0$ sein Krümmungsverhalten.

falsch, da $f''(0) \neq 0$

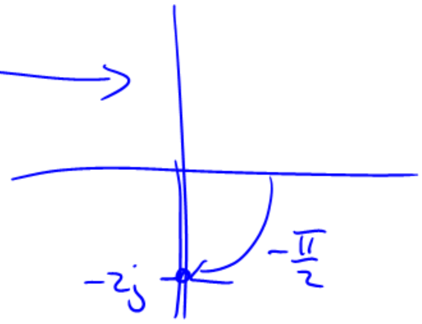
Aussage 5:

f'' hat im sichtbaren Bereich genau eine Nullstelle.

falsch, da $f'(x)$ an zwei Stellen waagerechte Tangente hat, d.h. $f''(x) = 0$

Aufgabe 4 (16 Punkte): Komplexe Zahlen

a) Bestimmen Sie die folgende komplexe Zahl mit ihren kartesischen Koordinaten $z = \frac{3+j}{4+3j} + 2e^{-j\frac{\pi}{2}},\ z \in \mathbb{C}$.



$$= \frac{(3+j)(4-3j)}{(4+3j)(4-3j)} + (0-2j)$$

$$= \frac{12-9j+4j+3}{16+9} - 2j$$

$$= \frac{15-5j}{25} - 2j$$

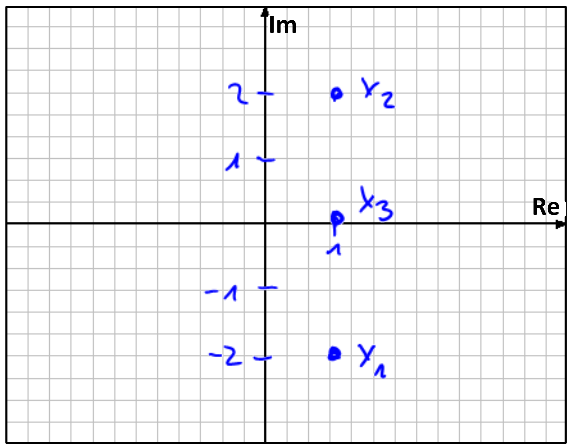
$$= \frac{15}{25} - \frac{1}{5}j - 2j$$

$$= \frac{3}{5} - \frac{11}{5}j$$

b) Bestimmen Sie für das folgende Polynom 3.Grades die Linearfaktorzerlegung $p(x) = x^3 - 3x^2 + 7x - 5$ an und skizzieren Sie die Nullstellen in der Gaußschen Zahlenebene.

Hinweis: Eine Nullstelle ist gegeben: $x_1 = 1 - 2j$.

$\Rightarrow$ $x_2 = 1 + 2j$
bei kompl. Nst.



$\Rightarrow$ 2 Linearfaktoren bekannt

$(x-(1-2j))\cdot(x-(1+2j))$ Produkt

$= \dots = \underbrace{x^2-2x+5}_{\text{zug. quadr. Pol.}}$

$\Rightarrow$ Polynomdivision

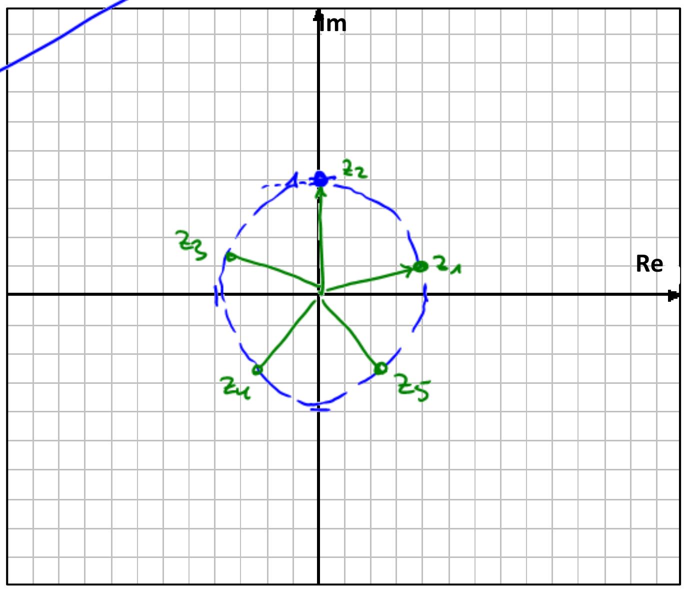
$(x^3-3x^2+7x-5)(x^2-2x+5) = \underbrace{x-1}_{\text{3. Linearfaktor}}$

$\vdots$

$\Rightarrow$ $x_3 = 1$ ist die 3. Nullst.

c) Berechnen Sie alle komplexen Lösungen für $z = \sqrt[5]{j}$ und skizzieren Sie diese in der Gaußschen Zahlenebene.

Polar board.



$$z = \sqrt[5]{\underbrace{1}_{r} \cdot e^{j\overbrace{\tfrac{\pi}{2}}^{\varphi}}}$$

z_1: $\varphi_1 = \frac{\varphi}{5} = \frac{\pi}{10}$

$r_1 = \sqrt[5]{r} = 1$

$z_1 = 1 \cdot e^{j\frac{\pi}{10}}$

$\Delta\varphi = \frac{2\pi}{5}$ 5 Lösungen gleichmäßig im Kreis verteilt

$z_2 = 1 \cdot e^{j\left(\frac{\pi}{10} + \frac{2\pi}{5}\right)} = 1 \cdot e^{j\frac{\pi}{2}}$

$z_3 = 1 \cdot e^{j\left(\frac{\pi}{10} + 2\frac{2\pi}{5}\right)}$

$z_4 = 1 \cdot e^{j\left(\frac{\pi}{10} + 3\frac{2\pi}{5}\right)}$

$z_5 = 1 \cdot e^{j\left(\frac{\pi}{10} + 4\cdot\frac{2\pi}{5}\right)}$

Aufgabe 5 (14 Punkte): Vektoren, Matrizen, Lineare Gleichungssysteme

a) Bestimmen Sie die Lösungsmenge des folgenden linearen Gleichungssystems und begründen Sie Ihre Vorgehensweise!

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \\ x_6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$$

- unterbestimmtes LGS $\to$ 3 Gleichungen für 6 Var.
  $\Rightarrow$ LGS hat keine eindeutige Lösung

- $\left(\begin{array}{cccccc|c} 0 & 1 & 2 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 3 \end{array}\right)$ Gauß-Elim. beendet

  $\underbrace{\underbrace{\quad}_{Rg\,A = 3}}_{Rg\,A|b = 3}$ $\Rightarrow Rg\,A = Rg\,A|b = 3 < 6 = n$ Anz. Var

  $\Rightarrow$ unendl. viele Lsg mit $6-3=3$ freien Par.

- Zeile 3: $x_6 = 3$

  Zeile 2: $x_5 = \lambda,\ \lambda \in \mathbb{R}$ freier Parameter

  $x_4 + 1\cdot\lambda + 0\cdot 3 = 2 \Rightarrow x_4 = 2 - \lambda$

  Zeile 1: $x_3 = \mu,\ \mu \in \mathbb{R}$ freier Parameter

  $1\cdot x_2 + 2\cdot\mu + \underline{0\cdot(2-\lambda)} + 1\cdot\lambda + 1\cdot 3 = 1 \Rightarrow x_2 = -2 - \lambda - 2\mu$

  $x_1 = \beta,\ \beta \in \mathbb{R}$ freier Parameter

- $$L = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \\ x_6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ 0 \\ 2 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix},\ \beta, \mu, \lambda \in \mathbb{R} \right\}$$

b) Prüfen Sie die folgenden Vektoren auf lineare Unabhängigkeit

$$\underline{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \ \underline{v}_2 = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}, \ \underline{v}_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ q \end{pmatrix}$$

(1) Für welche Werte des Parameters $q \in \mathbb{R}$ sind die drei Vektoren $\underline{v}_1$, $\underline{v}_2$, $\underline{v}_3$ linear unabhängig und für welche Werte von $q \in \mathbb{R}$ sind die Vektoren linear abhängig.
Hinweis: Formulieren und lösen Sie diese Aufgabe mit Hilfe eines linearen Gleichungssystems. Begründen Sie Ihre Vorgehensweise!

- $a \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} + b \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} + c \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ q \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ Bed. für lin. Unabh.: $a = b = c = 0$

- LGS-Formulierung

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 2 & 2 & 3 \\ 1 & -1 & q \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & 1 & 0 \\ 2 & 2 & 3 & 0 \\ 1 & -1 & q & 0 \end{array}\right) \xrightarrow[\text{Gauß}]{\cdots\cdots} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & 1 & 0 \\ 0 & -4 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & q-2 & 0 \end{array}\right)$$

Rg $A = 3$, wenn $q \neq 2$
Rg $A = 2$, wenn $q = 2$

Rg $A|b = 3$, wenn $q \neq 2$
Rg $A|b = 2$, wenn $q = 2$

$\Leftarrow$

- Wenn $q \neq 2$, dann sind die Vektoren linear unabhängig
- wenn $q = 2$, dann lin. abhängig

(2) Geben Sie für den Fall der linearen Abhängigkeit aus (1) die konkrete Linearkombination an.

$$q = 2: \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & 1 & 0 \\ 0 & -4 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \Rightarrow$$

$a \quad b \quad c$

$c = \lambda$, $\lambda \in \mathbb{R}$ frei wählbar $\quad 4$
$-4 \cdot b + \lambda = 0 \Rightarrow b = \frac{1}{4}\lambda \Rightarrow b = 1 \quad a = -7$
$1a + 3 \cdot b + 1 \cdot c = 0 \Rightarrow a + \frac{3}{4}\lambda + \lambda = 0 \Rightarrow a = -\frac{7}{4}\lambda$

Wähle $c = \lambda = 4$

$$\begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} = +7\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} - 4\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix} \Leftarrow \underset{-7}{a}\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} + \underset{1}{b}\begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} + \underset{4}{c}\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix} \overset{!}{=} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Aufgabe 6 **(12 Punkte): Logik und Beweise**

a) Gegeben ist der folgende logische Ausdruck $D := (A \Rightarrow B) \wedge (A \Rightarrow C)$.

(1) Ermitteln Sie mit Hilfe der Wahrheitstabelle den Wahrheitswert des logischen Ausdrucks D in Abhängigkeit von den Wahrheitswerten der Aussagen A, B, C .

(2) Erstellen Sie mit Hilfe der Wahrheitstabelle für D eine KNF sowie eine DNF.

(3) Vereinfachen Sie D mit gültigen Rechengesetzen soweit wie möglich.

A	B	C	A ⇒ B	A ⇒ C	D		
w	w	w			w		
w	w	f			f		
w	f	w			f		
w	f	f			f		
f	w	w			w		
f	w	f			w		
f	f	w			w		
f	f	f			w		

(2) KNF: $(\neg A \vee \neg B \vee C) \wedge (\neg A \vee B \vee \neg C) \wedge (\neg A \vee B \vee C)$

DNF: $(A \wedge B \wedge C) \vee (\neg A \wedge B \wedge C) \vee (\neg A \wedge B \wedge \neg C) \vee (\neg A \wedge \neg B \wedge C) \vee (\neg A \wedge \neg B \wedge \neg C)$

(3) $(A \Rightarrow B) \wedge (A \Rightarrow C)$

$\Leftrightarrow$ $(\neg A \vee B) \wedge (\neg A \vee C)$

$\neg A \vee (B \wedge C)$

$A \Rightarrow (B \wedge C)$

b) Zeigen Sie mit Hilfe der Vollständigen Induktion die folgende Aussage:

$$\textit{Sei } A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix},$$

$$\textit{dann gilt für das } n-\textit{fache Produkt } A^n = \begin{pmatrix} 2^n & 2^n - 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

(1) Ind. anfang $n=1$

$$A^1 = \begin{pmatrix} 2^1 & 2^1-1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}^1$$

✓

(2) Ind. schritt

Ind. annahme: $A^n = \begin{pmatrix} 2^n & 2^n-1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

Ind. beh.: $\underset{\text{Start}}{A^{n+1}} = \underset{\text{Ziel}}{\begin{pmatrix} 2^{n+1} & 2^{n+1}-1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}}$

Ind. schluss:

$$\underbrace{A^{n+1}}_{\text{Start}} = \underbrace{A^n}_{\uparrow \text{ Ind. annahme}} \cdot A = \begin{pmatrix} 2^n & 2^n-1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 2^{n+1} ✓ & 2^n \cdot 1 + (2^n-1)\cdot 1 \\ 0 ✓ & 1 ✓ \end{pmatrix}$$

$$= 2^n + 2^n - 1 = 2 \cdot 2^n - 1$$

$$= 2^1 \cdot 2^n - 1 = 2^{n+1} - 1 ✓$$

Ziel erreicht

Anhang:

Grundlegende Werte der trigonometrischen Funktionen:

Grad	Bogenmaß	sin	cos	tan
0°	0	0	1	0
30°	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}\sqrt{3} = 0.866$	$\frac{1}{3}\sqrt{3} = \frac{1}{\sqrt{3}} = 0.577$
45°	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{1}{2}\sqrt{2} = 0.707$	$\frac{1}{2}\sqrt{2} = 0.707$	1
60°	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{1}{2}\sqrt{3} = 0.866$	$\frac{1}{2}$	$\sqrt{3} = 1.732$
90°	$\frac{\pi}{2}$	1	0	$\pm\infty$
135°	$\frac{3\pi}{4}$	$\frac{1}{2}\sqrt{2} = 0.707$	$-\frac{1}{2}\sqrt{2} = -0.707$	-1
180°	π	0	-1	0
270°	$\frac{3\pi}{2}$	-1	0	$\pm\infty$