Vorlesung 8 - 12.10.2022

Vorlesungsthemen

Vektoren

- Skalarprodukt und Vektorprodukt
- Punkt-Richtungsform einer Geraden
- Linearkombination/ lineare Abhängigkeit/ lineare Unabhängigkeit

Matrizen

- Definitionen
- Rechnen mit Matrizen

Skalarprodukt von Vektoren - physikalische Veranschaulichung

- Das Skalarprodukt entspricht der Arbeit, die unter der Einwirkung einer konstanten Kraft geleistet wird.

- Sind Kraft und Bewegungsrichtung gleichgerichtet, dann ist die Arbeit:

  $W = |\underline{F}| \cdot |\underline{s}|$

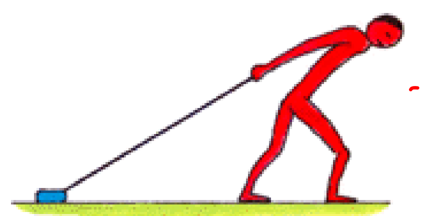
- Kann sich ein Massenpunkt aber nur entlang einer Richtung $\underline{e}_s$ bewegen, die nicht mit der Kraft übereinstimmt, dann ist die geleistete Arbeit die Komponente $|\underline{F}_s|$ der Kraft $\underline{F}$ in Richtung $\underline{e}_s$ multipliziert mit dem Weg $|\underline{s}|$:

  $W = |\underline{F}_s| \cdot |\underline{s}| = |\underline{F}| \cdot \cos\alpha \cdot |\underline{s}|$

- Allgemein ist die Arbeit W das Skalarprodukt aus Kraft und Weg:

  $W = \langle \underline{F}, \underline{s} \rangle \; (= \underline{F} \cdot \underline{s})$

- **Skalar-Produkt** (oder auch Punkt-Produkt oder inneres Produkt)



$\underline{a}_b$ ↑ Projektionsvektor

$\underbrace{\underline{a} \cdot \underline{b}}_{\langle \underline{a}, \underline{b} \rangle} = |\underline{a}|\,|\underline{b}| \cos\alpha$

aus http://www.netcomuk.co.uk/~jenolive/vect6.html

andere Notation für das Skalarprodukt

$\boxed{\langle \underline{a}, \underline{b} \rangle = \underbrace{|\underline{b}|}_{\text{Länge Vektor } \underline{b}} \cdot \underbrace{|\underline{a}_b|}_{\text{Länge des Projektionsvektors}} = |\underline{b}| \cdot |\underline{a}| \cos\alpha}$ Skalarprodukt von $\underline{a}$ und $\underline{b}$

Länge des Projektionsvektors, d.h. dem Anteil von $\underline{a}$, der in Richtung $\underline{b}$ geht

$|\underline{a}_b| = |\underline{a}| \cdot \cos\alpha$

Sonderfälle

$\alpha = 0$: Vektoren zeigen in gleiche Richtung $\langle \underline{a}, \underline{b} \rangle = |\underline{a}| \cdot |\underline{b}| \cdot \underbrace{\cos 0}_{=1} = |\underline{a}| \cdot |\underline{b}|$

$\alpha = 90°$: Vektoren stehen senkrecht aufeinander

$\langle \underline{a}, \underline{b} \rangle = |\underline{b}| \cdot |\underline{a}| \cdot \underbrace{\cos 90°}_{} = 0$

Skalarprodukt ist Null $\stackrel{}{=}0$

Aufgabe Projektionsvektor

$$\underline{a}_b = \underbrace{\underline{b} \cdot \frac{1}{|\underline{b}|}}_{\substack{\text{Vektor in}\\ \text{Richtung } \underline{b}\\ \text{mit}\\ \text{der Länge } 1}} \cdot \underbrace{|\underline{a}_b|}_{\substack{\text{Länge des}\\ \text{Projektionsvektor}}}$$

$= |\underline{a}| \cdot \cos\alpha$

oder $= \langle \underline{a}, \underline{b} \rangle \cdot \frac{1}{|\underline{b}|}$

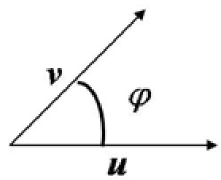
Skalarprodukt (oder inneres Produkt oder Punktprodukt genannt)

Das **Skalarprodukt** $<uv>$ (auch inneres Produkt $u \cdot v$ bezeichnet) zweier Vektoren

$$u = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \vdots \\ u_n \end{pmatrix} \text{ und } v = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix}$$

ist eine skalare Größe und ist definiert durch

$$\boxed{u \cdot v := <uv> := |u||v| \cos\varphi, \quad mit\ \varphi\ Winkel\ zwischen\ u\ und\ v}$$



1.Berechnungsmöglichkeit $= ?$

Das Skalarprodukt läßt sich außerdem über die Summe der einzelnen Produkte der Komponenten der Vektoren berechnen.

$$\boxed{<uv> = u^T v = \begin{pmatrix} u_1 & u_2 & \cdots & u_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix} = \sum_{i=1}^{n} u_i v_i} = u_1 \cdot v_1 + u_2 \cdot v_2 + \ldots + u_n \cdot v_n$$

2.Berechnungsmöglichkeit

Zwei Vektoren heißen **orthogonal**, wenn $v^T u = 0$ $\langle u,v\rangle = 0$, d.h. die beiden Vektoren stehen senkrecht (normal, im rechten Winkel) aufeinander.

Der **Betrag (Norm, Länge) eines Vektors** läßt sich mit Hilfe des Skalarproduktes auch wie folgt angeben:

$$|v| = \sqrt{v^T v} = \sqrt{\langle v,v\rangle} = \begin{pmatrix} v_1 & v_2 & \cdots & v_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix} = \sqrt{v_1 \cdot v_1 + v_2 \cdot v_2 + \ldots + v_n \cdot v_n} = \sqrt{v_1^2 + v_2^2 + \ldots + v_n^2}$$

Der **Winkel zwischen zwei Vektoren** lässt sich mit Hilfe des Skalarproduktes und der Beträge der Vektoren berechnen:

$$\cos\varphi = \frac{<uv>}{|v||u|} \quad mit\ 0 \le \varphi \le 360°\ Winkel\ zwischen\ u\ und\ v$$

Siehe Seite später

Gesetze für das Rechnen mit Skalarprodukten

Es gilt: $\langle \underline{u}, \underline{v} \rangle = \langle \underline{v}, \underline{u} \rangle$ Kommutativ

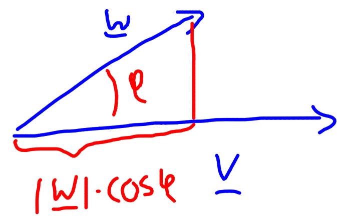
$\lambda \langle \underline{u}, \underline{v} \rangle = \langle \lambda \underline{u}, \underline{v} \rangle = \langle \underline{u}, \lambda \underline{v} \rangle$ „assoziativ" $\lambda \in \mathbb{R}$

$\langle \underline{u}, \underline{v} + \underline{w} \rangle = \langle \underline{u}, \underline{v} \rangle + \langle \underline{u}, \underline{w} \rangle$ distributiv

Skalarprodukt von Vektoren

(0) Eine "Multiplikation von Vektor" - das Ergebnis ist ein skalarer Wert.

(1)Das Skalarprodukt bezieht die Lage der Vektoren zueinander mit ein.



$$\underline{v} \cdot \underline{w} = \langle \underline{v}, \underline{w} \rangle = |\underline{v}| \cdot |\underline{w}| \cdot \cos\varphi$$

(2) Das Skalarprodukt der Einheitsvektoren ist 0.

(3) Ist das Skalarprodukt von zwei Vektoren = 0, so sind die Vektoren orthogonal zueinander, d.h. sie stehen senkrecht aufeinander.

z.B. $\underline{v} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}$ und $\underline{u} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix}$ stehen senkrecht aufeinander.

da $\langle \underline{v}, \underline{u} \rangle = (1 \;\; 2 \;\; -1) \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix} = 0$

•

Skalarprodukt von Vektoren

Herleitung der 2. Berechnungsmöglichkeit des Skalarprodukts

$|\underline{e}_2| = 1$, $\underline{e}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

$\underline{e}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $|\underline{e}_1| = 1$

- $\langle \underline{e}_1, \underline{e}_1 \rangle = 1 \rightarrow \langle \underline{e}_1, \underline{e}_1 \rangle = \underbrace{|\underline{e}_1|}_{=1} \cdot \underbrace{|\underline{e}_1|}_{=1} \cdot \underbrace{\cos 0°}_{=1} = 1$

  $\langle \underline{e}_1, \underline{e}_2 \rangle = 0 \rightarrow \langle \underline{e}_1, \underline{e}_2 \rangle = |\underline{e}_1| \cdot |\underline{e}_2| \cdot \underbrace{\cos 90°}_{=0} = 0$

  $\langle \underline{e}_2, \underline{e}_1 \rangle = 0$

  $\langle \underline{e}_2, \underline{e}_2 \rangle = 1 \rightarrow \langle \underline{e}_2, \underline{e}_2 \rangle = |\underline{e}_2| \cdot |\underline{e}_2| \cdot \cos 0° = 1$

- Für 2 Vektoren $\underline{u} = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix}$, $\underline{v} = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix}$ Vektoren in Komponentenschreibweise

Vektoren als Linearkombination der Einheitsvektoren

mit $\underline{u} = u_1 \cdot \underline{e}_1 + u_2 \cdot \underline{e}_2 = u_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + u_2 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ mit $u_1, u_2 \in \mathbb{R}$

$\underline{v} = v_1 \cdot \underline{e}_1 + v_2 \cdot \underline{e}_2$

$$\underline{u} \cdot \underline{v} = \langle \underline{u}, \underline{v} \rangle = (u_1 \cdot \underline{e}_1 + u_2 \cdot \underline{e}_2) \cdot (v_1 \underline{e}_1 + v_2 \cdot \underline{e}_2)$$

$$= u_1 \cdot v_1 \cdot \underbrace{\underline{e}_1 \cdot \underline{e}_1}_{=1} + u_1 \cdot v_2 \underbrace{\underline{e}_1 \cdot \underline{e}_2}_{=0}$$

Skalarprodukt

$$+ u_2 \cdot v_1 \cdot \underbrace{\underline{e}_2 \cdot \underline{e}_1}_{=0} + u_2 v_2 \underbrace{\underline{e}_2 \cdot \underline{e}_2}_{=1}$$

$$= u_1 \cdot v_1 + u_2 \cdot v_2$$

$$= (u_1 \; u_2) \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix}$$

$$= \underline{u}^T \cdot \underline{v}$$

$$= \sum_{i=1}^{2} u_i \cdot v_i$$

„Zeilenvektor und Spaltenvektor"

$\hat{=}$ komponentenweise Multiplikation und dann Addition

Beispiel 1

$$\underline{v} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix} \quad \underline{u} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\langle \underline{v}, \underline{u} \rangle = \underline{v}^T \cdot \underline{u} = (2 \ \ 3 \ \ 4) \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

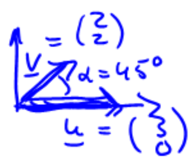
$$= 2 \cdot 1 + 3 \cdot (-1) + 4 \cdot 0$$

$$= 2 - 3 + 0$$

$$= -1$$

Beispiel 2

$$\underline{v} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix} \quad \underline{u} = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \end{pmatrix}$$



$$\left(\langle \underline{v}, \underline{u} \rangle = \right) \langle \underline{u}, \underline{v} \rangle = (3 \ \ 0) \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix} = 3 \cdot 2 + 0 \cdot 2 = 6$$

2. Berechnungsmöglichkeit

$$\langle \underline{u}, \underline{v} \rangle = |\underline{v}| \cdot |\underline{u}| \cdot \cos 45^\circ$$

1. Berechnungsmöglichkeit

$$= \left| \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix} \right| \cdot \left| \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \end{pmatrix} \right| \cdot \frac{1}{2} \cdot \sqrt{2}$$

$$= \sqrt{2^2 + 2^2} \cdot \sqrt{3^2 + 0^2} \cdot \frac{1}{2} \sqrt{2}$$

$$= \sqrt{\underbrace{8}_{2 \cdot 4}} \cdot \sqrt{9} \cdot \frac{1}{2} \sqrt{2}$$

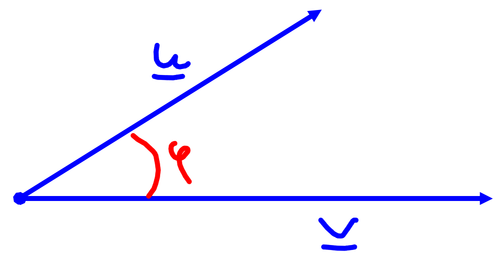
$$= \sqrt{2} \cdot \cancel{\underbrace{\sqrt{4}}_{=2}} \cdot 3 \cdot \frac{1}{\cancel{2}} \sqrt{2}$$

$$= 2 \cdot 3$$

$$= 6$$

Berechnung des Winkels zwischen zwei gegebenen Vektoren

$\underline{u}$ und $\underline{v}$ gegeben, φ gesucht



1.Ber.mögl. $\langle \underline{u}, \underline{v} \rangle = |\underline{u}| \cdot |\underline{v}| \cdot \cos\varphi$

einsetzen

2.Ber.mögl. $\langle \underline{u}, \underline{v} \rangle = \underline{u}^T \cdot \underline{v}$

$\Rightarrow \underline{u}^T \cdot \underline{v} = |\underline{u}| \cdot |\underline{v}| \cdot \cos\varphi$

$\Rightarrow (\cos\varphi) = \left(\frac{\underline{u}^T \cdot \underline{v}}{|\underline{u}||\underline{v}|}\right)$

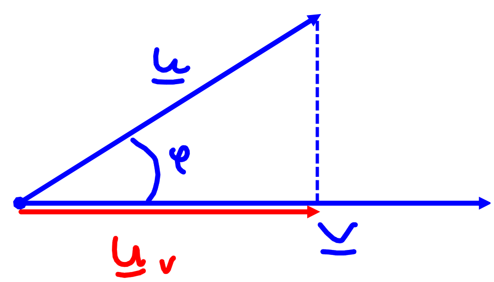
arccos, arccos

Umkehrfunktion

2.Ber.mögl.

$$\Rightarrow \boxed{\varphi = \arccos\left(\frac{\underline{u}^T \cdot \underline{v}}{|\underline{u}||\underline{v}|}\right) = \arccos\left(\frac{\langle \underline{u}, \underline{v} \rangle}{|\underline{u}||\underline{v}|}\right)}$$

Berechnung des Projektionsvektors



siehe vorne

Beispiel: Skalarprodukt im $\mathbb{R}^3$

$$\underline{v} = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix} \qquad \underline{w} = \begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \\ w_3 \end{pmatrix}$$

$$\langle \underline{v}, \underline{w} \rangle = \underline{v}^T \underline{w} = (v_1 \; v_2 \; v_3) \begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \\ w_3 \end{pmatrix}$$

$$= v_1 \cdot w_1 + v_2 \cdot w_2 + v_3 \cdot w_3$$

Beispiel:

Sei $\underline{v} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \qquad \underline{w} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}$

zu Hause

Sei $\underline{v} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \qquad \underline{w} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}$

$$\langle \underline{v}, \underline{w} \rangle = (1 \; 2 \; 1) \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix} = 1 \cdot 2 + 2 \cdot 3 + 1 \cdot 4 = 12$$

Wie groß ist der Winkel zwischen den beiden Vektoren?

zu Hause

$$\cos\alpha = \frac{\langle \underline{v}, \underline{w} \rangle}{|\underline{v}| \cdot |\underline{w}|} = \frac{12}{\sqrt{1^2+2^2+1^2}\,\sqrt{2^2+3^2+4^2}}$$

$$= \frac{12}{\sqrt{6} \cdot \sqrt{25}}$$

$$\Rightarrow \alpha = \arccos\left(\frac{12}{\sqrt{174}}\right)$$

$$\Rightarrow \alpha = 24{,}53°$$

Orthogonale, orthonormale und normierte Vektoren

Bedingung:
Skalarprodukt = 0

Bedingung:
Skalarprodukt = 0
und Länge =1

Bedingung:
Länge = 1

Beispiele: orthogonale Vektoren

$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ und $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

$\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ und $\begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix}$

Beispiele: orthonormale Vektoren

$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ und $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$

$\begin{pmatrix} \frac{2}{\sqrt{5}} \\ \frac{1}{\sqrt{5}} \end{pmatrix}$ und $\begin{pmatrix} \frac{-1}{\sqrt{5}} \\ \frac{2}{\sqrt{5}} \end{pmatrix}$

Beispiele: normierter Vektor

$\left|\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}\right| = 1$ und $\left|\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right| = 1$

$\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} \cdot \frac{1}{\sqrt{5}} = \begin{pmatrix} \frac{2}{\sqrt{5}} \\ \frac{1}{\sqrt{5}} \end{pmatrix}$ ist normierter Vektor zu $\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$

$\begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix} \cdot \frac{1}{\sqrt{5}} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{\sqrt{5}} \\ \frac{2}{\sqrt{5}} \end{pmatrix}$ " " " " $\begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix}$.

Übung 10: Arbeit an einer Punktladung in einem elektrischen Feld
Skalarprodukt

Anwendungsbeispiel (aus Papula) zum Selbststudium

Eine positive *Punktladung* $Q = 10^{-7}\,C$ soll in dem *konstanten* elektrischen Feld mit dem *Feldstärkevektor* $\vec{E} = \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ 5 \end{pmatrix} 10^6 \,\frac{\text{V}}{\text{m}}$ vom Punkt $P_1 = (-2; 3; 4)$ m aus *geradlinig* längs des *Richtungsvektors* $\vec{a} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$ m in *positiver* Richtung um 6 m verschoben werden (Bild I-15).

a) Welche *Arbeit* W wird dabei an der Punktladung verrichtet?

b) Welchen *Winkel* φ bildet der an der Punktladung angreifende Kraftvektor $\vec{F}$ mit dem Verschiebungsvektor $\vec{s}$?

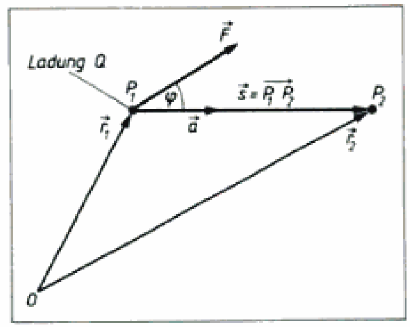


Bild I-15

Lehrbuch: Bd. 1, II.3.3.1	*Physikalische Grundlagen:* A10

Lösung:

a) Durch *Normierung* erhalten wir aus dem Richtungsvektor $\vec{a}$ den *Einheitsvektor* gleicher Richtung:

$$\vec{e}_a = \frac{\vec{a}}{|\vec{a}|} = \frac{1}{\sqrt{2^2 + (-1)^2 + 2^2}\ \text{m}} \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} \text{m} = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2/3 \\ -1/3 \\ 2/3 \end{pmatrix}$$

Der Verschiebungsvektor $\vec{s} = \overrightarrow{P_1P_2}$ hat die *gleiche* Richtung, jedoch die *6-fache* Länge. Somit ist

$$\vec{s} = \overrightarrow{P_1P_2} = 6\text{ m}\,\vec{e}_a = 6\text{ m}\begin{pmatrix} 2/3 \\ -1/3 \\ 2/3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ -2 \\ 4 \end{pmatrix} \text{m}$$

Die vom Feld verrichtete *Arbeit* ist definitionsgemäß das *skalare Produkt* aus dem Kraftvektor $\vec{F} = Q\vec{E}$ [A10] und dem Verschiebungsvektor $\vec{s}$:

$$\boxed{W = \vec{F}\cdot\vec{s} = Q\,(\vec{E}\cdot\vec{s}) = 10^{-7}\,C \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ 5 \end{pmatrix} 10^6\,\frac{\text{V}}{\text{m}} \cdot \begin{pmatrix} 4 \\ -2 \\ 4 \end{pmatrix} \text{m} = 10^{-1}\,(4 + 6 + 20)\ \text{Nm} = 3\ \text{Nm}}$$

b) Wir berechnen zunächst die benötigten Beträge der Vektoren $\vec{F}$ und $\vec{s}$:

$$|\vec{F}| = |Q\vec{E}| = Q\,|\vec{E}| = 10^{-7}\,C\cdot\sqrt{(1)^2 + (-3)^2 + (5)^2}\cdot 10^6\,\frac{\text{V}}{\text{m}} = 10^{-7}\,C\cdot 5{,}92\cdot 10^6\,\frac{\text{V}}{\text{m}} = 0{,}592\ \text{N}$$

$$|\vec{s}| = \sqrt{4^2 + (-2)^2 + 4^2}\ \text{m} = 6\ \text{m}$$

Für den gesuchten *Winkel* zwischen Kraftvektor und Verschiebungsvektor folgt damit

$$\boxed{\cos\varphi = \frac{\vec{F}\cdot\vec{s}}{|\vec{F}|\cdot|\vec{s}|} = \frac{W}{|\vec{F}|\cdot|\vec{s}|} = \frac{3\ \text{Nm}}{0{,}592\ \text{N}\cdot 6\ \text{m}} = 0{,}845 \quad\Rightarrow\quad \varphi = \arccos 0{,}845 = 32{,}3^\circ}$$

aus Papula: Mathematik für Ingenieure und Naturwissenschaftler-Anwendungsbeispiele http://www.viewegteubner.de/Buch/978-3-528-44355-9/Mathematik-fuer-Ingenieure-und-Naturwissenschaftler-Anwendungsbeispiele.html

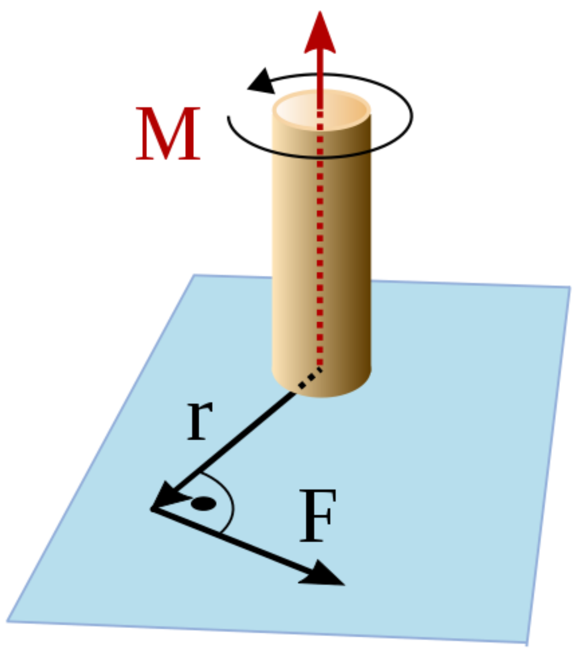
Kreuzprodukt ≙ Vektorprodukt von Vektoren - Beispiel einer physikalischen Veranschaulichung

- Ein Körper sei um einen festen Punkt O drehbar und im Punkt P dieses Körpers greift eine Kraft an, dann ist die Größe M

$M = |\underline{r}| \cdot |\underline{F}| \cdot \sin\alpha$ "Hebelarm mal Kraft"

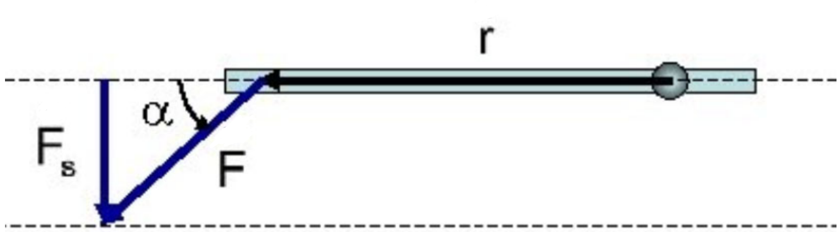
das Drehmoment von $\underline{F}$ bezüglich O.

- Der Drehmomentvektor $\underline{M}$ steht senkrecht zu der durch $\underline{r}$ und $\underline{F}$ gebildeten Ebene und kann als Richtung der Drehachse aufgefasst werden.



Vektor des Drehmomentes $\vec{M}$. Im gezeichneten Fall wirkt die Kraft $\vec{F}$ senkrecht zum Ortsvektor $\vec{r}$.

https://de.wikipedia.org/wiki/Drehmoment



https://slidetodoc.com/physik-fr-mediziner-und-zahnmediziner-vorlesung-01-prof/

Vektorprodukt (oder Kreuzprodukt
oder äußeres Produkt bezeichnet)

Definition 9.6: Vektorprodukt (für Vektoren im $\mathbb{R}^3$)

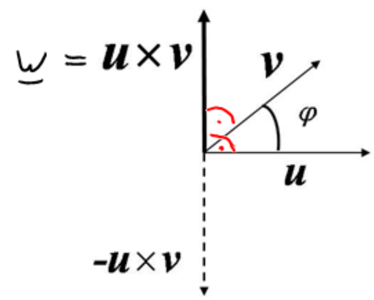
Im dreidimensionalen Raum $\mathbb{R}^3$ definiert man für zwei Vektoren Vektoren

$\boldsymbol{u} = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{pmatrix}$ und $\boldsymbol{v} = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix}$ das **Vektorprodukt** $\boldsymbol{u} \times \boldsymbol{v}$ (auch **Kreuzprodukt** bezeichnet)
wie folgt

$$\boldsymbol{u} \times \boldsymbol{v} = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \underline{u_2v_3 - u_3v_2} \\ \underline{u_3v_1 - u1v_3} \\ \underline{u_1v_2 - u_2v_1} \end{pmatrix}$$

Das Vektorprodukt hat folgende Eigenschaften:

(1) Der Vektor $\boldsymbol{w} = \boldsymbol{u} \times \boldsymbol{v}$ ist senkrecht zu $\boldsymbol{u}$ und $\boldsymbol{v}$, d.h. es gilt $\boldsymbol{w}^T\boldsymbol{u} = 0$ und $\boldsymbol{w}^T\boldsymbol{v} = 0$.



(2) Für den Betrag gilt:

$$|\boldsymbol{w}| = |\boldsymbol{u} \times \boldsymbol{v}| := |\boldsymbol{u}||\boldsymbol{v}|\sin\varphi, \quad mit\ 0 \le \varphi \le 90°\ Winkel\ zwischen\ \boldsymbol{u}\ und\ \boldsymbol{v}$$

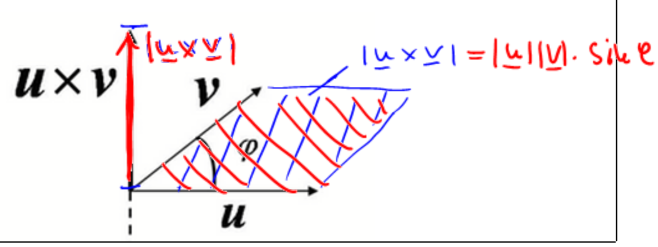
(3) Das Vektorprodukt ist nicht kommutativ: $\boldsymbol{u} \times \boldsymbol{v} = -\, \boldsymbol{v} \times \boldsymbol{u}$

weitere Rechenregeln für das Vektorprodukt

$\lambda(\underline{u} \times \underline{v}) = (\lambda \underline{u}) \times \underline{v} = \underline{u} \times (\lambda \underline{v})$

$\underline{u} \times (\underline{v} + \underline{w}) = (\underline{u} \times \underline{v}) + (\underline{u} \times \underline{w})$

(4) $|\underline{u} \times \underline{v}|$ = Fläche des von $\underline{u}$ und $\underline{v}$ aufgespannten Parallelogramms



Herleitung

Berechnungsvorschrift Vektorprodukt

$$\underbrace{\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}}_{\underline{x}} = \underbrace{\begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{pmatrix}}_{\underline{u}} \times \underbrace{\begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix}}_{\underline{v}}$$

Bed. 1 $\Rightarrow \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$ steht senkrecht auf $\begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{pmatrix}$ $\Rightarrow$ Skalarprodukt $\langle \underline{x}, \underline{u} \rangle \overset{!}{=} 0$

$\Rightarrow x_1 \cdot u_1 + x_2 \cdot u_2 + x_3 \cdot u_3 = 0$

und

Bed. 2 $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$ steht senkrecht auf $\begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix}$ $\Rightarrow$ Skalarprodukt $\langle \underline{x}, \underline{v} \rangle \overset{!}{=} 0$

$\Rightarrow x_1 \cdot v_1 + x_2 \cdot v_2 + x_3 \cdot v_3 = 0$

$\Rightarrow$ 2 Gleichungen für 3 Unbekannte

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} u_1 & u_2 & u_3 & 0 \\ v_1 & v_2 & v_3 & 0 \end{array}\right) \begin{array}{l} \cdot v_1 \\ \cdot u_1 \end{array} \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} u_1 v_1 & u_2 v_1 & u_3 v_1 & 0 \\ u_1 v_1 & u_1 v_2 & u_1 v_3 & 0 \end{array}\right) \begin{array}{l} \\ - Z_1 \end{array}$$

$$\rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} u_1 v_1 & u_2 v_1 & u_3 v_1 & 0 \\ 0 & u_1 v_2 - u_2 v_1 & u_1 v_3 - u_3 v_1 & 0 \end{array}\right)$$

$$\begin{array}{ccc} \uparrow & \uparrow & \uparrow \\ x_1 & x_2 & x_3 \end{array}$$

$Rg\,A \neq Rg\,Ab$

unendl. viele Lösung

abhängig von Wahl $x_3 = \lambda$

Fortsetzung Selbststudium für zuHause ✓

Zeile 2 $\Rightarrow (u_1 v_2 - u_2 v_1) \cdot x_2 + (u_1 v_3 - u_3 v_1)\, x_3 = 0$

Zeile 1 $\Rightarrow u_1 v_1 \cdot x_1 + u_2 v_1 \cdot x_2 + u_3 v_1 \cdot x_3 = 0$

Herleitung siehe auch
https://www.youtube.com/watch?v=-eNEI6hre

im Selbststudium für zu Hause

Zeile 1: $u_1 v_1 \cdot x_1 + u_2 v_1 \cdot x_2 + u_3 v_1 \cdot x_3 = 0$

Zeile 2: $(u_1 v_2 - u_2 v_1) \cdot x_2 + (u_1 v_3 - u_3 v_1)\, x_3 = 0$

$$\Rightarrow x_2 = -\frac{u_1 v_3 - u_3 v_1}{u_1 v_2 - u_2 v_1} \cdot x_3$$

$$\boxed{x_2 = \frac{u_3 v_1 - u_1 v_3}{u_1 v_2 - u_2 v_1}\, x_3}$$ einsetzen in Zeile 1

Zeile 1: $u_1 v_1 \cdot x_1 + u_2 v_1 \cdot \left(\frac{u_3 v_1 - u_1 v_3}{u_1 v_2 - u_2 v_1}\right) \cdot x_3 + u_3 v_1 x_3 = 0$

$$\Rightarrow u_1 v_1 \cdot x_1 + \frac{u_2 u_3 v_1^2 - u_2 u_1 v_1 v_3 + u_3 \cdot v_1 \cdot (u_1 v_2 - u_2 v_1)}{u_1 v_2 - u_2 v_1} \cdot x_3 = 0$$

$$\Rightarrow x_1 + \frac{\cancel{u_2 u_3 v_1^2} - u_2 \cancel{u_1} \cancel{v_1} v_3 + u_3 \cancel{u_1} \cancel{v_1} v_2 - \cancel{u_2 u_3 v_1^2}}{\cancel{u_1} \cancel{v_1} (u_1 v_2 - u_2 v_1)}\, x_3 = 0$$

$$\Rightarrow \boxed{x_1 = \frac{u_2 v_3 - u_3 v_2}{u_1 v_1 - u_2 v_1}\, x_3}$$

$$\Rightarrow \text{Vektor } \underline{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{u_2 v_3 - u_3 v_2}{u_1 v_1 - u_2 v_1} x_3 \\ \frac{u_3 v_1 - u_1 v_3}{u_1 v_2 - u_2 v_1} x_3 \\ x_3 \end{pmatrix} \underset{\substack{\uparrow \\ \text{Wahl} \\ x_3 = u_1 v_2 - u_2 v_1}}{=} \boxed{\begin{pmatrix} u_2 v_3 - u_3 v_2 \\ u_3 v_1 - u_1 v_3 \\ u_1 v_2 - u_2 v_1 \end{pmatrix} = \underline{x} = \underline{u} \times \underline{v}}$$

Berechnungsvorschrift für das Kreuzprodukt

Herleitung siehe auch

https://www.youtube.com/watch?v=-eNEI6hreJA

Übung 8: Kraftwirkung zwischen stromdurchflossenen Leitern
Vektorprodukt

Anwendungsbeispiel (aus Papula) zum Selbststudium

Zwei *parallele* elektrische *Leiter* (Drähte) mit der Länge l und dem gegenseitigen Abstand a werden von Strömen *gleicher* Stärke I und *gleicher* Richtung durchflossen. Das System befindet sich im Vakuum.

a) Welche *magnetische Feldstärke* H bzw. *magnetische Flußdichte* B erzeugt jeder der beiden Leiter am Ort des anderen Leiters?

b) Mit welcher *Kraft* $\vec{F}$ wirken die beiden Leiter aufeinander?

Lehrbuch: Bd. 1, II.3.4.1	*Physikalische Grundlagen:* A4, A5, A6

Lösung:

a) Bild I-13 zeigt das vom Leiter L_1 in seiner Umgebung erzeugte Magnetfeld. Die magnetischen Feldlinien sind *konzentrische* Kreise um die Leiterachse mit der eingezeichneten Richtung[3]. Die magnetische Feldstärke H [A4] besitzt im Abstand r von der Leiterachse den Wert

$$H(r) = \frac{I_1}{2\pi r} = \frac{I}{2\pi r}, \qquad r > 0$$

Die am Ort des *anderen* Leiters (Leiter L_2 am Ort $x = a$) erzeugte magnetische Feldstärke bzw. magnetische Flußdichte [A5] ist somit *betragsmäßig*

$$H(a) = \frac{I}{2\pi a} \quad \text{bzw.} \quad B(a) = \mu_0 H(a) = \frac{\mu_0 I}{2\pi a}$$

Umgekehrt erzeugt Leiter L_2 am Ort des Leiters L_1 ein Magnetfeld *gleicher* Stärke, jedoch *entgegengesetzter* Richtung.

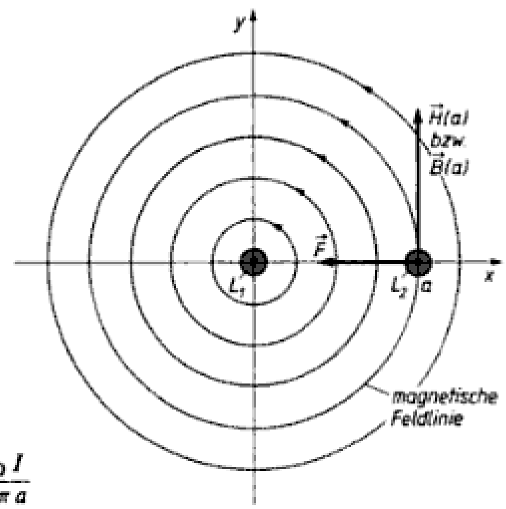


Bild I-13

b) Leiter L_2 erfährt im Magnetfeld des Leiters L_1 die *Kraft* [A6]

$$\vec{F} = I_2(\vec{l} \times \vec{B}) = I(\vec{l} \times \vec{B})$$

die *senkrecht* auf den Leiter L_1 hinweist (Bild I-13). Mit $\vec{l} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ l \end{pmatrix}$ und $\vec{B} = \begin{pmatrix} 0 \\ B(a) \\ 0 \end{pmatrix}$ folgt daraus schließlich[4]

$$\boxed{\vec{F} = I\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ l \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0 \\ B(a) \\ 0 \end{pmatrix} = IlB(a)\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = Il \cdot \frac{\mu_0 I}{2\pi a}\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \frac{\mu_0 I l^2}{2\pi a}\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}}$$

Wir interpretieren dieses Ergebnis wie folgt: Leiter L_2 erfährt eine Kraft in Richtung auf Leiter L_1, umgekehrt gilt das gleiche. Zwischen zwei *parallelen*, von Strömen *gleicher* Stärke und *gleicher* Richtung durchflossenen Leitern besteht somit eine *Anziehungskraft* vom Betrag $F = \dfrac{\mu_0 I l^2}{2\pi a}$.

aus Papula: Mathematik für Ingenieure und Naturwissenschaftler-Anwendungsbeispiele http://www.viewegteubner.de/Buch/978-3-528-44355-9/Mathematik-fuer-Ingenieure-und-Naturwissenschaftler-Anwendungsbeispiele.html

Vektoren zur Beschreibung einer Geraden

Punktrichtungsform einer Geraden

Parameterform (Punktrichtungsform) [Bearbeiten]

aus Wikipedia

Es gibt auch die Möglichkeit, eine Gerade mit Hilfe der Vektorrechnung zu beschreiben.

$$g:\ \vec{r} = \vec{r}_0 + \lambda \cdot \vec{u}$$

$\vec{r}_0$ ist der Ortsvektor eines fixen Punktes (z. B. P_0),

$\vec{u}$ ist der Richtungsvektor,

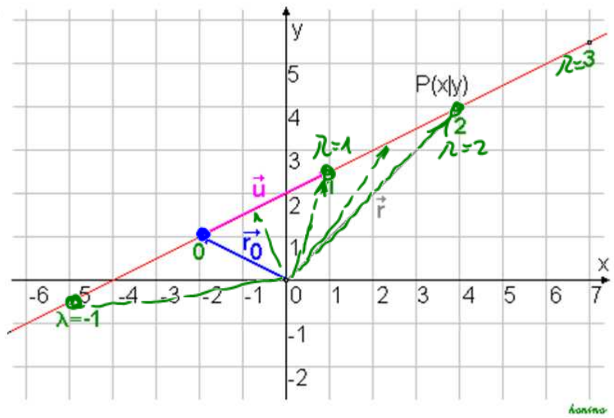
λ ist ein Skalar und gibt an, wie lange in diese Richtung gezählt wird.

Das Beispiel würde dann so aussehen:

$$g:\ \vec{r} = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix} + \lambda \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 1,5 \end{pmatrix}.$$

$\vec{u}$ $\lambda \in \mathbb{R}$

λ bildet hierbei die Koordinate eines affinen Koordinatensystems auf der Geraden, d. h. die Gerade wird (mit dem Nullpunkt bei P_0) mit den Werten von λ beziffert (im Bild grün gekennzeichnet).



Ortsvektor $\underline{r}_0$

Richtungsvektor der Geraden

Punktrichtungsform einer Ebene

Punkt-Richtungs-Form einer Ebene

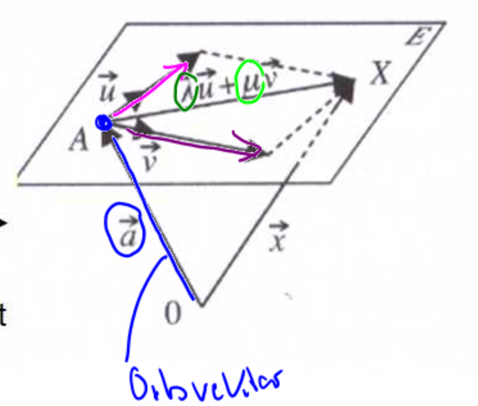
$$\vec{x} = \vec{a} + \lambda^* \vec{u} + \mu^* \vec{v}$$

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{bmatrix} + \lambda^* \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{bmatrix} + \mu^* \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{bmatrix}$$

A (5/0/1)

Gegeben:

- Der Punkt A mit dem Ortsvektor $\vec{a}$
- Zwei linear unabhängige Richtungsformen $\vec{u}$ und $\vec{v}$
- X sei ein beliebiger Punkt der Ebene



$$\vec{u} = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{bmatrix} \qquad \vec{v} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 4 \end{bmatrix}$$

Matrizen

9.2 Matrizen

Definitionen 9.6:

$$A=\left.\begin{pmatrix} \overbrace{a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n}}^{n \text{ Spaltenvektoren}} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}\right\} m \text{ Zeilenvektoren}$$

- rechteckiges Schema reeller Zahlen: m x n – **Matrix**
- m Zeilen, n Spalten
- a_{ij}, i **Zeilenindex**, j **Spaltenindex**
- $\begin{pmatrix} a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \end{pmatrix}$ i-ter **Zeilenvektor** der Matrix
- $\begin{pmatrix} a_{1j} \\ a_{2j} \\ \vdots \\ a_{mj} \end{pmatrix}$ j-ter **Spaltenvektor** der Matrix

Beispiel:

$$A=\begin{pmatrix} 2_{a_{11}} & 4 & -1 & 0 \\ 0 & 3_{a_{22}} & 12 & 8 \\ 7 & 2 & 0_{a_{33}} & \underbrace{1}_{=a_{34}} \end{pmatrix}$$

Spaltenanzahl

3 x 4 – Matrix

Zeilenanzahl

Bemerkung:
Elemente der Matrix können aber auch komplexe Zahlen oder Funktionen sein

- Eine Matrix A heißt **quadratisch**, wenn die Anzahl der Zeilen gleich der Anzahl der Spalten ist.
- Die Matrixelemente $a_{11}, a_{22}, \dots, a_{nn}$ der Matrix heißen **Diagonalelemente**.

Beispiel:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix}$$

a_{11}, a_{22}, a_{33}

3x3 - Matrix

$\uparrow = \uparrow$

- Eine n x m - Matrix A^T mit $a_{ij}^{\;T} = a_{ji}$, $i = 1,..,m$, $j = 1,..,n$ ist die **transponierte Matrix** zur m x n - Matrix A.

Bemerkung: transponierte Matrix: "Zeilen und Spalten vertauschen"

Beispiel:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 5 & 6 & 7 & 8 \\ 9 & 10 & 11 & 12 \end{pmatrix}$$

a_{12}, a_{14}, a_{23}

3x4 - Matrix

$$A^T = \begin{pmatrix} 1 & 5 & 9 \\ 2 & 6 & 10 \\ 3 & 7 & 11 \\ 4 & 8 & 12 \end{pmatrix}$$

a_{21}, a_{32}, a_{41}

4x3 - Matrix

- Eine quadratische Matrix heißt **symmetrisch**, wenn für die Elemente der Matrix gilt: $a_{ij} = a_{ji}$, $i, j = 1,..,n$

Beispiel:

$$\begin{pmatrix} 1 & 5 & 0 \\ 5 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 3 \end{pmatrix}$$

a_{12}, a_{13}, a_{21}, a_{31}

.

- Eine quadratische Matrix D, bei der nur die Diagonalelemente ungleich Null sind, nennen wir **Diagonalmatrix**.

$$D = \underbrace{diag(a_{11}, a_{22}, \ldots, a_{nn})}_{\text{mit mindestens einem Element} \neq 0} = \begin{pmatrix} a_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & a_{22} & \cdots & 0 \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

Beispiel:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 5 \end{pmatrix}$$

- Eine quadratische Diagonalmatrix, deren Diagonalelemente alle 1 sind, nennen wir **Einheitsmatrix I**:

$$E = I = \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix}}_{\text{Spalten sind die Einheitsvektoren}} \Bigg\} \text{ Zeilen sind die Einheitsvektoren}$$

$$a_{ij} = \delta_{ij} = \begin{cases} 1, & i = j \\ 0, & i \neq j \end{cases}, \qquad \delta_{ij} \text{ heißt Kronecker-Delta.}$$

- Eine Matrix, deren Elemente alle Null sind, heißt **Nullmatrix**.

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}$$

- Eine Matrix, deren Elemente alle Eins sind, heißt **Einsmatrix**.

$$? \; E = A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 1 & \cdots & 1 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & 1 & \cdots & 1 \end{pmatrix}$$

für alle Matrixelemente, bei denen der Zeilenindex größer als Spaltenindex

- Eine **obere Dreiecksmatrix** ist eine n x n – Matrix A, für deren Elemente die Bedingung $a_{ij} = 0, \ \forall i > j \ \ mit \ i = 1,..,m, \ j = 1,..,n$ gilt.

a_{32}

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & 0 & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

- Eine **untere Dreiecksmatrix** ist eine n x n – Matrix A, für deren Elemente die Bedingung $a_{ij} = 0, \ \forall i < j, \ mit \ i = 1,..,m, \ j = 1,..,n$ gilt.

Zeilenindex kleiner als Spaltenindex

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

Beispiel:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 3 & 4 & 2 \\ 0 & 0 & 5 & 3 \end{pmatrix}$$ obere Dreiecksmatrix

- A heißt **Stufenmatrix mit r Stufen**, wenn es Spaltenindizes k(1)<...< k(r) gibt, so dass $a_{1k(1)} \neq 0, \dots, a_{r\,k(r)} \neq 0$ ist und

$$a_{ij} = 0 \ mit \ j < k(i) \ für \ i = 1,..,r \ \ und$$

$$a_{ij} = 0 \ mit \ j \ beliebig \ \ für \ i = r+1,\dots,m$$

$A \in \mathbb{R}^{m\times n}$ heißt *Stufenmatrix*, falls $A = 0$ oder

$$A = \begin{pmatrix} 0 \dots 0 & a_{1j_1} & \dots\dots\dots\dots & a_{1n} \\ 0 \dots\dots & 0 & a_{2j_2} \dots\dots & a_{2n} \\ & & \vdots & \\ 0 \dots\dots\dots\dots & & 0 \ a_{rj_r} \dots & a_{rn} \\ 0 \dots\dots\dots\dots & & \dots\dots\dots & 0 \\ & & \vdots & \\ 0 \dots\dots\dots\dots & & \dots\dots\dots & 0 \end{pmatrix}$$

wobei $1 \leq r \leq \min\{m,n\}$, $1 \leq j_1 < \ldots < j_r \leq n$ und $a_{1j_1}, \ldots, a_{rj_r} \neq 0$.

„mehr Nullen als bei der Oberen Dreiecksmatrix“

Beispiel:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 0 & 0 & 7 & 8 & 9 & 10 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Rechnen mit Matrizen

- **Summe A + B:**

Zwei m x n - Matrizen A und B werden addiert, in dem die entsprechenden Elemente der Matrix addiert werden.

$$A+B=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & \cdots & b_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ b_{m1} & b_{m2} & \cdots & b_{mn} \end{pmatrix}=\underbrace{\begin{pmatrix} a_{11}+b_{11} & a_{12}+b_{12} & \cdots & a_{1n}+b_{1n} \\ a_{21}+b_{21} & a_{22}+b_{22} & \cdots & a_{2n}+b_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1}+b_{m1} & a_{m2}+b_{m2} & \cdots & a_{mn}+b_{mn} \end{pmatrix}}_{m \times n}$$

Bemerkung: Matrizen mit unterschiedlicher Spalten- oder Zeilenanzahl können nicht addiert werden!

Beispiel:

$$A+B=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} -1 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & 0 \\ 3 & 0 & -1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 & 2 & 5 \\ 5 & 6 & 6 \\ 10 & 8 & 8 \end{pmatrix}$$

- **Differenz A - B:**

Zwei m x n - Matrizen A und B werden subtrahiert, in dem die entsprechenden Elemente der Matrix subtrahiert werden.

$$A-B=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}-\begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & \cdots & b_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ b_{m1} & b_{m2} & \cdots & b_{mn} \end{pmatrix}=\underbrace{\begin{pmatrix} a_{11}-b_{11} & a_{12}-b_{12} & \cdots & a_{1n}-b_{1n} \\ a_{21}-b_{21} & a_{22}-b_{22} & \cdots & a_{2n}-b_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1}-b_{m1} & a_{m2}-b_{m2} & \cdots & a_{mn}-b_{mn} \end{pmatrix}}_{m \times n}$$

Bemerkung: Matrizen mit unterschiedlicher Spalten- oder Zeilenanzahl können nicht subtrahiert werden!

Beispiel:

$$A-B=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix}-\begin{pmatrix} -1 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & 0 \\ 3 & 0 & -1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 2 & 2 & 1 \\ 3 & 4 & 6 \\ 4 & 8 & 10 \end{pmatrix}$$

- **Multiplikation mit einer Konstanten:**

  Eine Matrix A wird mit einer Konstanten $c \in \mathbb{R}$ multipliziert, in dem jedes Element von A mit c multipliziert wird.

$$c \cdot A = c \cdot \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c \cdot a_{11} & c \cdot a_{12} & \cdots & c \cdot a_{1n} \\ c \cdot a_{21} & c \cdot a_{22} & \cdots & c \cdot a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ c \cdot a_{m1} & c \cdot a_{m2} & \cdots & c \cdot a_{mn} \end{pmatrix}$$

Beispiel:

"Ausmultiplizieren"

$$2 \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 6 \\ 8 & 10 & 12 \end{pmatrix}$$

"Ausklammern"

$$\begin{pmatrix} 100 & 200 & 300 \\ 1 & 400 & -10 \end{pmatrix} = 100 \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ \frac{1}{100} & 4 & -\frac{1}{10} \end{pmatrix}$$

- **Gleichheit von Matrizen:**

  Zwei Matrizen A und B sind gleich, wenn sie dieselbe Zeilen- und Spaltenanzahl haben und alle Elemente der Matrix übereinstimmen.

.

- **Multiplikation A · B:**

  Sei A eine m x p – Matrix und B eine p x n – Matrix,
  dann ist die m x n – Matrix C das **Produkt von A und B** mit

$$c_{ij} = \sum_{k=1}^{p} a_{ik} \cdot b_{kj} = a_{i1}b_{1j} + a_{i2}b_{2j} + \ldots + a_{in}b_{nj}, \quad \leftarrow \text{Skalarprodukte}$$

$$i = 1,..,m, \quad j = 1,..,n$$

Bemerkung:

- Jedes Element entsteht aus „**Zeile** · **Spalte**“, d.h. Summe der Produkte der Zeilen- mit den Spaltenelementen)
- Ein Produkt von Matrizen ist dann möglich, wenn (Spaltenanzahl von A) = (Zeilenanzahl von B)

Skalarprodukte „Zeile mal Spalte“ bilden

Beispiel:

$$\underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix}}_{2 \times 3} \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}}_{3 \times 2} = \begin{pmatrix} \overset{c_{11}}{1\cdot 1 + 2\cdot 3 + 3\cdot 1} & \overset{c_{12}}{1\cdot 2 + 2\cdot 4 + 3\cdot(-1)} \\ \overset{c_{21}}{4\cdot 1 + 5\cdot 3 \cdot 6\cdot 1} & \overset{c_{22}}{4\cdot 2 + 5\cdot 4 + 6\cdot(-1)} \end{pmatrix}$$

$$3 \overset{!}{=} 3$$

$$= \begin{pmatrix} 10 & 7 \\ 25 & 22 \end{pmatrix} \quad 2 \times 2$$

- **Falk-Schema** zur Hilfestellung bei der Multiplikation

  Beispiel: Sei A eine 2 x 3 – Matrix und B eine 3 x 4 – Matrix.

$$\begin{array}{cc} & \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} & b_{14} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} & b_{24} \\ b_{31} & b_{32} & b_{33} & b_{34} \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} \sum_{11} & \sum_{12} & \sum_{13} & \sum_{14} \\ \sum_{21} & \sum_{22} & \sum_{23} & \sum_{24} \end{pmatrix} \end{array}$$

$$mit \sum_{ij} = c_{ij} = \sum_{k=1}^{3} a_{ik} \cdot b_{kj} = a_{i1}b_{1j} + a_{i2}b_{2j} + a_{i3}b_{3j}$$

$$i = 1, 2 \text{ und } j = 1, 2, 3, 4$$

C=A · B ist eine 2 x 4 – Matrix.

Beispiel

$$\begin{array}{cc} & \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 10 & 7 \\ 25 & 22 \end{pmatrix} \end{array}$$

Beispiele zur Matrixmultiplikation

Beispiel 1:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

---

(1) Falk-Schema zur Berechnung A·B

---

(2) "Zeile mal Spalte"

$$A \cdot B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 6 & 4 \\ 1 & 4 & 2 \end{pmatrix}$$

(2x3)-Matrix (3x3)-Matrix (2x3)-Matrix

Zusammenfassende Bemerkungen zur Matrixmultiplikation:

- Bei der Matrixmultiplikation muss
  die Anzahl der Spalten der ersten Matrix
  gleich
  der Anzahl der Zeilen der zweiten Matrix sein!

- Die Multiplikation einer **m** x **n** -Matrix
  mit einer **n** x **r** -Matrix
  hat als Ergebnis eine **m** x **r** -Matrix!

$$A \cdot B \neq B \cdot A$$

- Die Matrixmultiplikation ist <u>nicht kommutativ!</u> !

- Es gilt aber: $\boxed{B^T \cdot A^T = (A \cdot B)^T}$

$$(A \cdot B)^T = B^T \cdot A^T$$

Beispiel:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

2x3-Matrix 3x3-Matrix

$$A \cdot B = \begin{pmatrix} 1\cdot1+2\cdot1+3\cdot0 & 1\cdot3+2\cdot0+3\cdot1 & 1\cdot1+2\cdot0+3\cdot1 \\ 1\cdot1+0\cdot1+1\cdot0 & 1\cdot3+0\cdot0+1\cdot1 & 1\cdot1+0\cdot0+1\cdot1 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 3 & 6 & 4 \\ 1 & 4 & 2 \end{pmatrix}$$

2x3-Matrix