Vorlesung 3 - Grundlagen 3

Dienstag 27.09.2022 3.+4. Viertel

Inhalt:

- **Grundlagen**
  - Grundlegende Funktionen mit Parametern
  - Betragsfunktion
  - Ungleichungen
  - Gleichungen und Ungleichungen mit Beträgen

V2: Grundlagen 2
~~Gleichungen und~~ Ungleichungen, Grundlegende Funktionen mit Parametern: lineare Funktion, ~~quadratische Funktion~~, Sinusfunktion, Exponentialfunktion

V3: Grundlagen 3
Betragsfunktion, Gleichungen und Ungleichungen mit Beträgen

Zusammenfassung: Parameter der quadratischen Funktion

$$f(x) = ax^2 + bx + c$$

Einfluss der Parameter auf die Lage und Form der Funktion

$f(x) = ax^2 + bx + c$

a>0 Parabel nach oben geöffnet
a<0 Parabel nach unten geöffnet

a>1 Parabel in y-Richtung gestreckt
0<a<1 Parabel in y-Richtung gestaucht

$f(x) = (x+d)^2 + e$

Darstellungsform nach quadratischer Ergänzung

Scheitelpunktform

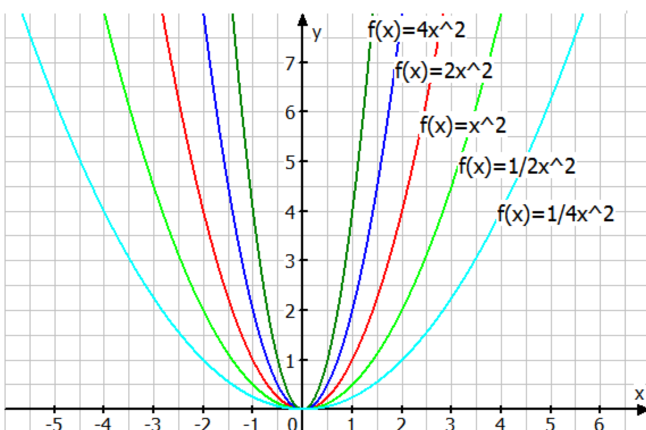
d>0 Parabel nach links verschoben
d<0 .... nach rechts verschoben
e>0 .... nach oben verschoben
e<0 .... nach unten verschoben

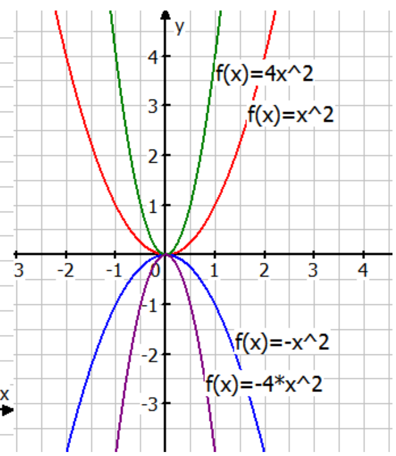
$f(x) = (x+f)(x+g)$

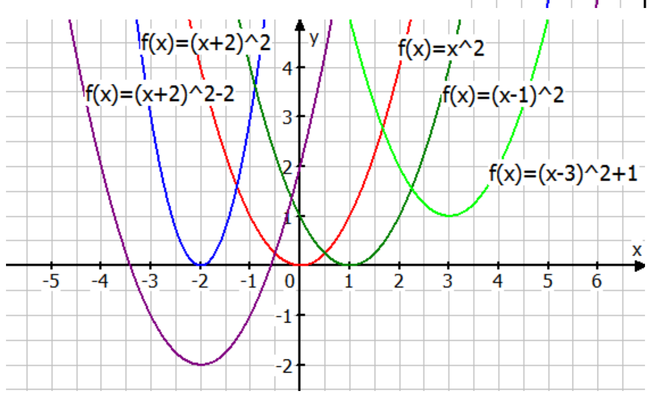
Darstellungsform nach Zerlegung in Linearfaktoren

Linearfaktorzerlegung

Lage der Nullstellen der Funktion sind erkennbar: $x_1=-f$ und $x_2=-g$







Aufgabe 1:

Welche Funktion gehört **nicht** zu einem der Graphen?

~~(A)~~ $f(x) = x^2 - 5$

$= (x-0)^2 - 5$

~~(B)~~ $f(x) = (x+2)^2 - 3$

~~(C)~~ $f(x) = x^2 + 3$

$= (x-0)^2 + 3$

✓ (D) $f(x) = x^2 - 6x + 8$

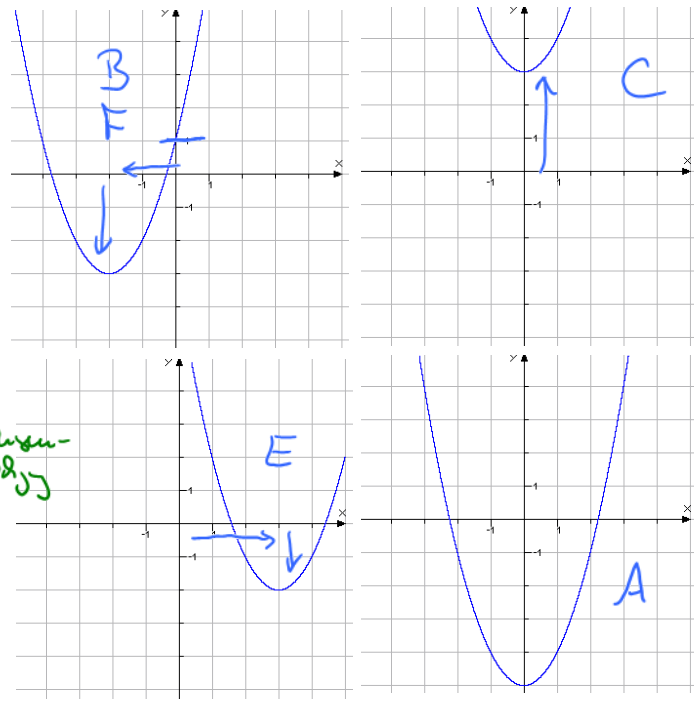
y-Achsen-abschnitt

~~(E)~~ $f(x) = (x-3)^2 - 2$

~~(F)~~ $f(x) = x^2 + 4x + 1$

$= (x+2)^2 - 3$

Scheitelpunktform



.

Zusammenfassung: Grundlegende Funktionen mit ihren Parametern

Gegeben sei eine Grundfunktion $f(x)$.

Die Funktion $g(x) = a \cdot f(b(x+c)) + d$ ist eine Funktion,

die die Grundfunktion durch die Parameter a,b,c,d verändert.

Die Parameter bewirken

a – Skalierung der Funktionswerte (Streckung, Stauchung)

b – Skalierung der x – Werte

c – Verschiebung entlang der (x – Achse) horizontal / negativ nach rechts positiv nach links

d – Verschiebung entlang der (y – Achse) vertikal

Beispiel:

$f(x) = \sin x$

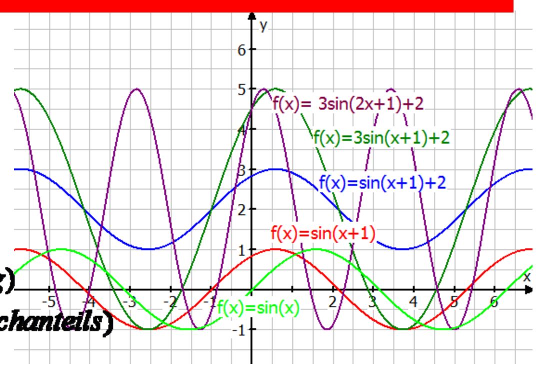
$g(x) = a \cdot sin(b(x+c)) + d$

a – Skalierung der Funktionswerte (Amplitudenänderung)

b – Skalierung der x – Werte (Frequenzänderung)

c – Verschiebung entlang der x – Achse (Phasenverschiebung)

d – Verschiebung entlang der y – Achse (Addition eines Gleichanteils)



Beispiel:

$f(x) = x^2$

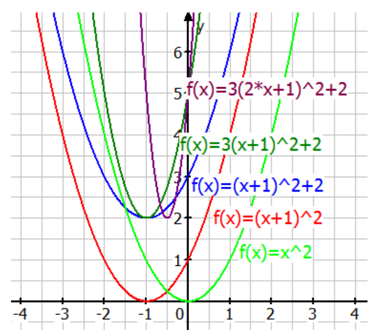
$g(x) = a \cdot (b(x+c))^2 + d$

a – Skalierung der Funktionswerte (Streckung / Stauchung / Öffnung)

b – Skalierung der x – Werte (beinflusst a)

c – Verschiebung entlang der x – Achse

d – Verschiebung entlang der y – Achse



Beispiel:

$f(x) = |x|$

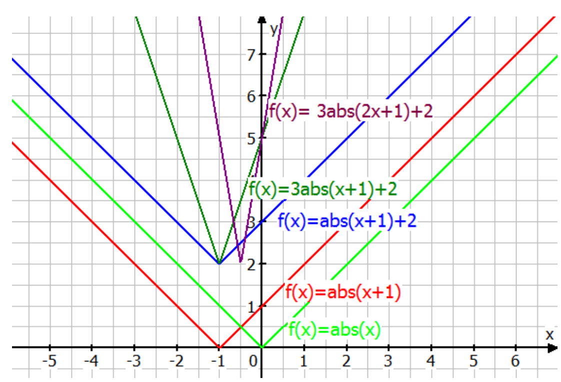
$g(x) = a \cdot |b(x+c)| + d$

a – Skalierung der Funktionswerte (Steigung)

b – Skalierung der x – Werte (beinflusst a)

c – Verschiebung entlang der x – Achse

d – Verschiebung entlang der y – Achse



Lineare Funktionen (Geraden) mit Parametern

... auch hier passt unsere Beschreibung von Funktionen mit einer Grundfunktion und ihren Parametern:

f(x)=x ⇒ g(x)= a(x+c)+b
Grundfunktion
mit a Steigung
c Verschiebung in x-Richtung
b Verschiebung in y-Richtung

- **Allgemeine Gleichung einer Geraden**

$y = f(x) = mx + b$ *Normalform* Polynom 1. Grades

Steigung y-Achsen-abschnitt

mit Steigung m und Höhenverschiebung in y – Richtung b

$= m\left(x + \frac{b}{m}\right)$

Verschiebung in x – Richtung $\frac{b}{m}$

(positiver Wert Verschiebung nach links
negativer Wert Verschiebungnach rechts)

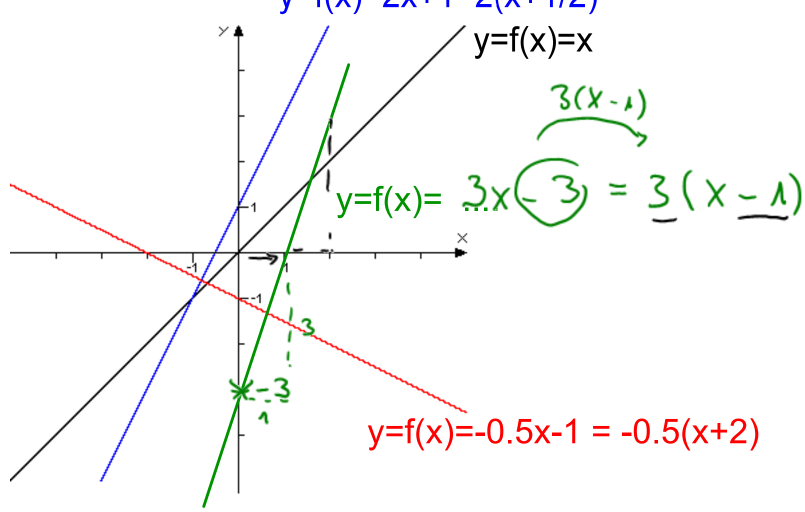
$f(x) = m(x+c)$

mit Steigung m und Verschiebung in x – Richtung c

$f(x) = a\cdot(x+c)+b$ *Punkt – Steigungsform*

$f(x) = m(x-x_0)+f(x_0)$ *Gerade durch den Punkt* $(x0, f(x0))$ *mit Steigung m*

Beispiele:



sin - Funktion mit ihren Parametern

Gegeben sei eine Grundfunktion $f(x)$.

Die Funktion $g(x) = a \cdot f(b(x+c)) + d$ *ist eine Funktion,*

die die Grundfunktion durch die Parameter a, b, c, d verändert.

Die Parameter bewirken

a – Skalierung der Funktionswerte (Streckung, Stauchung)

b – Skalierung der x – Werte

c – Verschiebung entlang der x – Achse

d – Verschiebung entlang der y – Achse

Beispiel :

$f(x) = \sin x$

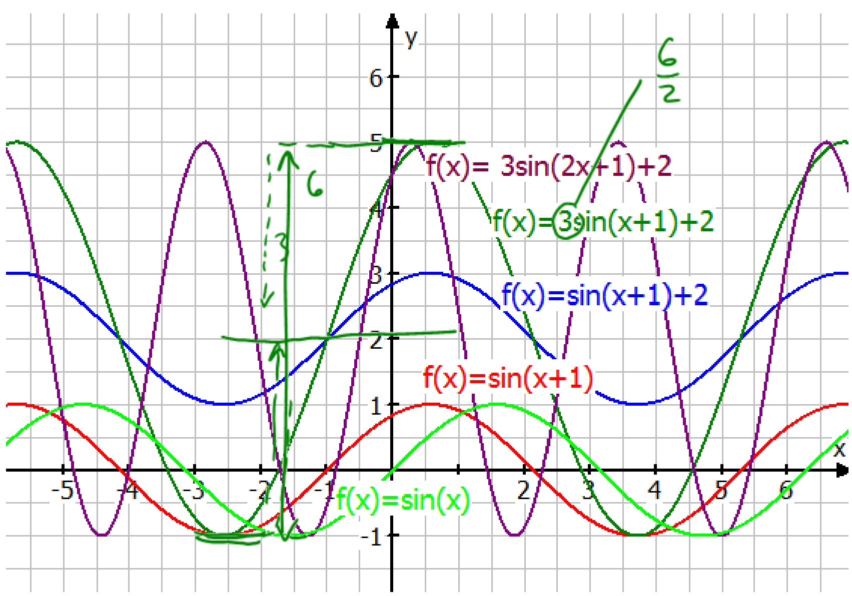
$g(x) = a \cdot \sin(b(x+c)) + d$

a – Skalierung der Funktionswerte (Amplitudenänderung)

b – Skalierung der x – Werte (Frequenzänderung)

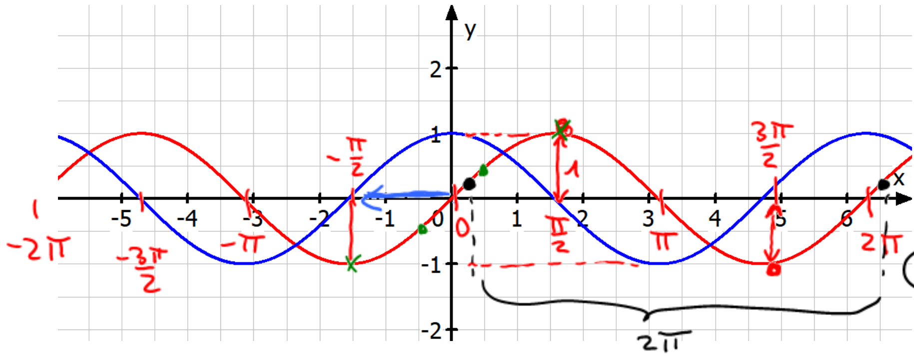
c – Verschiebung entlang der x – Achse (Phasenverschiebung)

d – Verschiebung entlang der y – Achse (Addition eines Gleichanteils)



•

Charakteristische Punkte der einfachen Sinusfunktion



$f(x) = \sin x$

$\boxed{p = \text{Periode } 2\pi}$

Nullstellen

$x_i = i \cdot \pi$, $i \in \mathbb{Z}$ ganze Zahlen

Extremwerte

$x_i = (2i+1)\frac{\pi}{2}$, $i \in \mathbb{Z}$

Beschreibung für ungerade Zahlen

$= \ldots, -\frac{3\pi}{2}, -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}, \frac{5\pi}{2} \ldots$

•

Grundlegende Formeln:

$\sin(x) = -\sin(-x)$ $\Leftrightarrow -\sin(x) = \sin(-x)$

$\cos(x) = \cos(-x)$

$\sin(x) = \sin(x + 2\pi)$

$\cos(x) = \cos(x + 2\pi)$

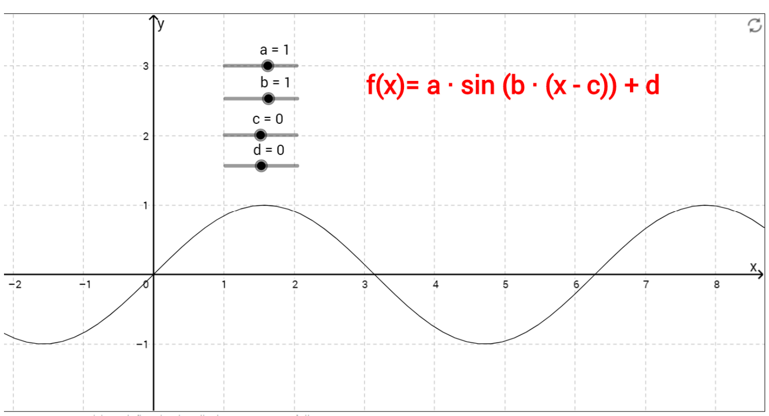
$\cos(x) = \sin(x + \frac{\pi}{2})$

$\sin^2(x) + \cos^2(x) = 1$ (*trigonometrischer Pythagoras*)

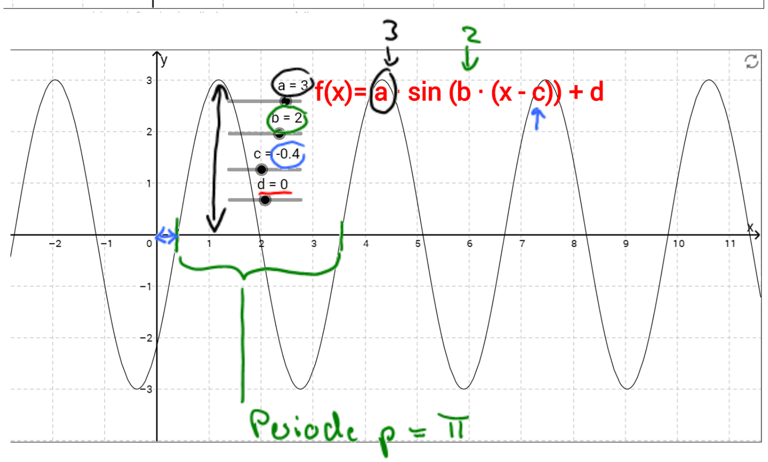
Die allgemeine Sinusfunktion

Funktion [a sin(b x + c)] + d

https://www.geogebra.org/m/jBnVB9TB



$f(x) = \sin x$



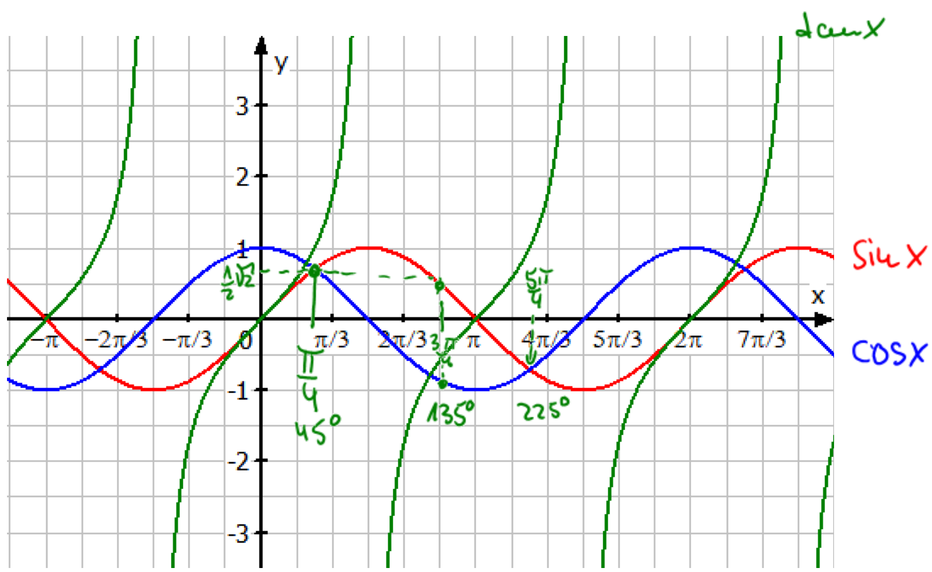
$f(x) = 3\sin(2(x - 0.4)) + 0$

Charakteristische Werte der einfachen trigonometrischen Funktionen

Grundlegende Werte der trigonometrischen Funktionen:

Grad	Bogenmaß	sin	cos	tan
0°	0	0	1	0
30°	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}\sqrt{3} = 0.866$	$\frac{1}{3}\sqrt{3} = \frac{1}{\sqrt{3}} = 0.577$
45°	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{1}{2}\sqrt{2} = 0.707$	$\frac{1}{2}\sqrt{2} = 0.707$	1
60°	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{1}{2}\sqrt{3} = 0.866$	$\frac{1}{2}$	$\sqrt{3} = 1.732$
90°	$\frac{\pi}{2}$	1	0	$\pm\infty$
135°	$\frac{3\pi}{4}$	$+\frac{1}{2}\sqrt{2} = 0.707$	$-\frac{1}{2}\sqrt{2} = -0.707$	-1
180°	π	0	-1	0
270°	$\frac{3\pi}{2}$	-1	0	$\pm\infty$
120°	$\frac{2\pi}{3}$	$\frac{1}{2}\sqrt{3}$	$-\frac{1}{2}$	$-\sqrt{3}$
225°	$\frac{5\pi}{4}$	$-\frac{1}{2}\sqrt{2}$	$-\frac{1}{2}\sqrt{2}$	1

Tabelle „rückwärts" lesen $\Rightarrow \arcsin\left(\frac{1}{2}\right) = 30° = \frac{\pi}{6}$



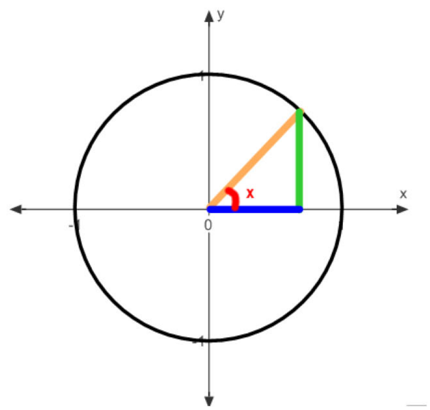
Allgemeine Formeln am rechtwinkligen Dreieck

$$\sin(x) = \frac{\text{Gegenkathete}}{\text{Hypotenuse}}$$

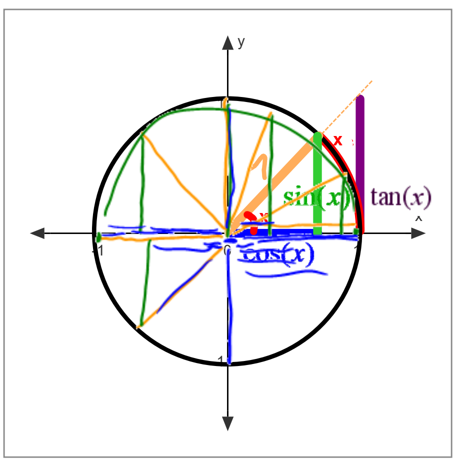
$$\cos(x) = \frac{\text{Ankathete}}{\text{Hypotenuse}}$$

$$\tan(x) = \frac{\text{Gegenkathete}}{\text{Ankathete}}$$

$$\tan(x) = \frac{\sin(x)}{\cos(x)}$$



Sinus und Cosinus am Einheitskreis, d.h. $\text{Hypotenuse} = 1$



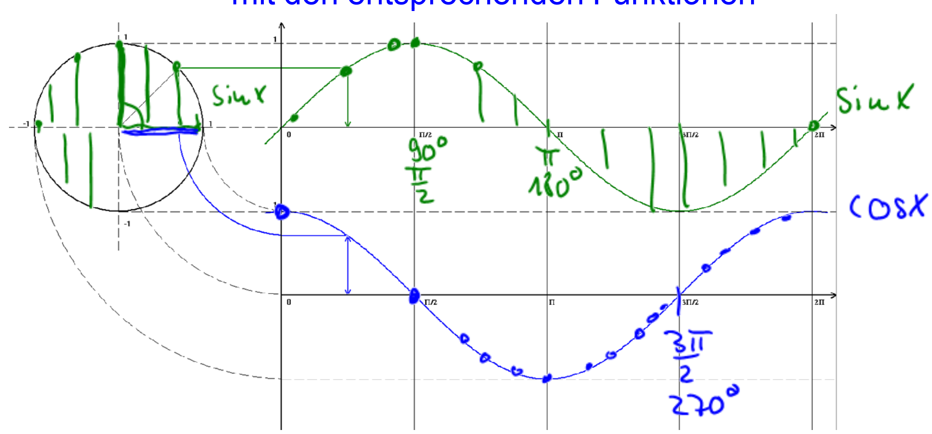
$$\sin(x) = \frac{\text{Gegenkathete}}{1}$$

$$\cos(x) = \frac{\text{Ankathete}}{1}$$

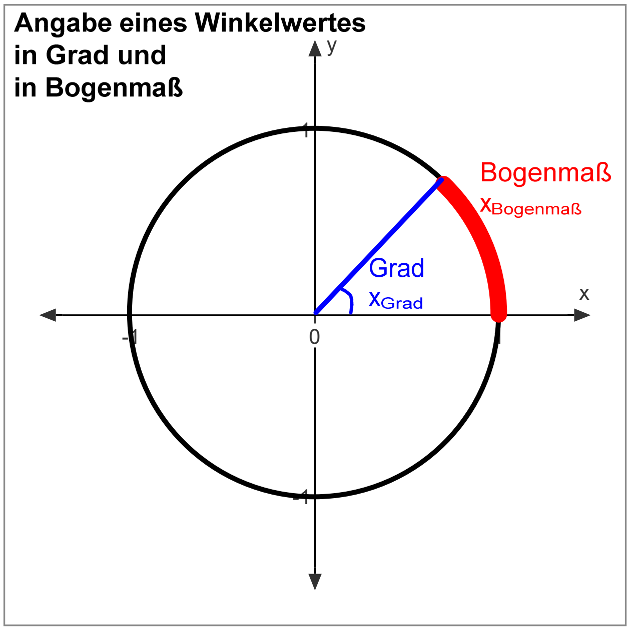
$$\tan(x) = \frac{\text{Gegenkathete}}{\text{Ankathete}}$$

$$\tan(x) = \frac{\sin(x)}{\cos(x)}$$

Zusammenhang "Sinus und Cosinus am Einheitskreis" mit den entsprechenden Funktionen



Winkelumrechnung Grad ↔ Bogenmaß



$$\frac{x_{Bogenmaß}}{2\pi} = \frac{x_{Gradmaß}}{360°}$$

allgemeine Formeln:

$$x_{Bogenmaß} = 2\pi \frac{x_{grad}}{360°}$$

$$x_{grad} = 360° \frac{x_{Bogenmaß}}{2\pi}$$

Beispiele:

$$x_{grad} = 45° \quad \Rightarrow \quad x_{Bogenmaß} = 2\pi \frac{x_{grad}}{360°} = \ldots \quad \frac{\pi}{4}$$

$$x_{grad} = 180° \quad \Rightarrow \quad x_{Bogenmaß} = 2\pi \frac{x_{grad}}{360°} = \ldots \quad \pi$$

$$x_{Bogenmaß} = \frac{\pi}{2} \quad \Rightarrow \quad x_{grad} = 360° \frac{x_{Bogenmaß}}{2\pi} = \ldots \quad 90°$$

$$x_{Bogenmaß} = 2\pi \quad \Rightarrow \quad x_{grad} = 360° \frac{x_{Bogenmaß}}{2\pi} = \ldots \quad 360°$$

Exponentialfunktion und ihre Parameter

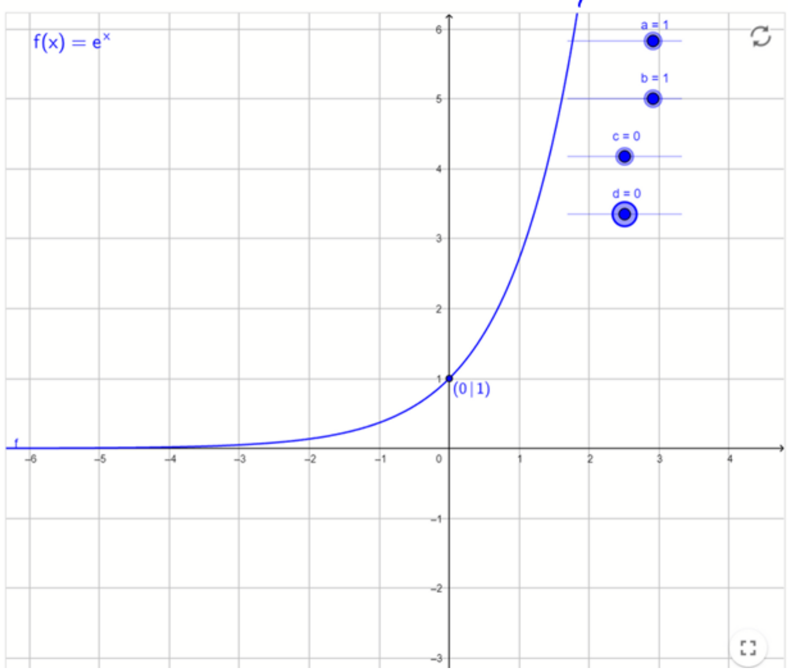
Exponentialfunktion

https://www.geogebra.org/m/qb8V5Adq

Autor: Ishak Yilmaz, Raimundo

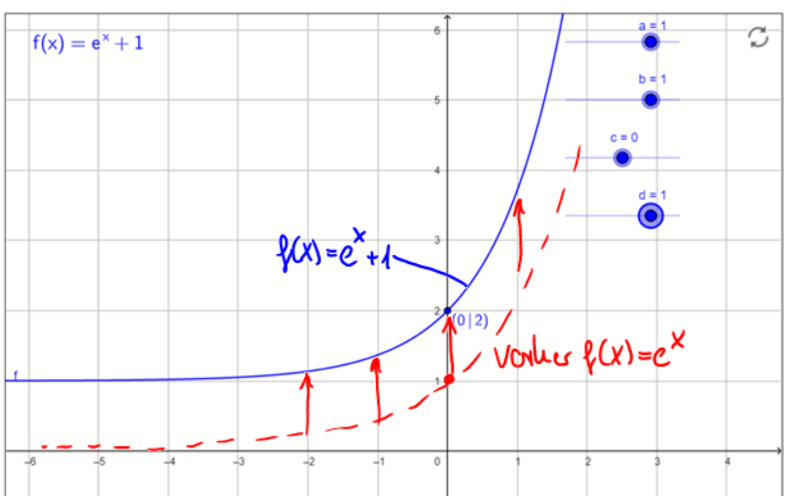
Exponentialfunktion

$f(x) = e^x$



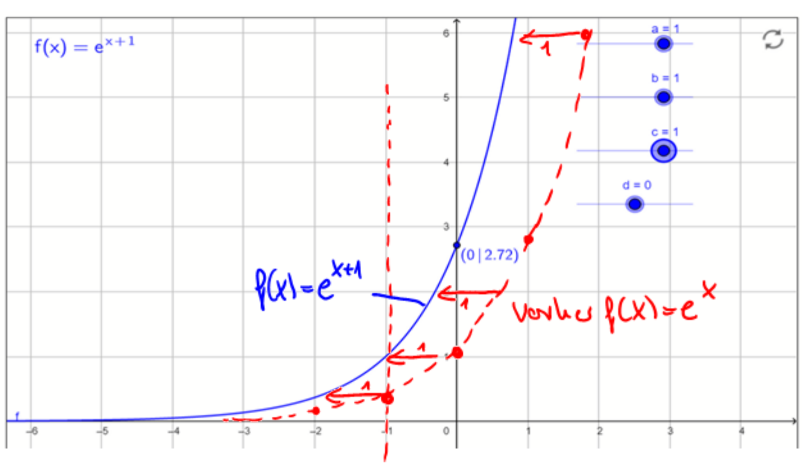
$$f(x) = a \cdot e^{b(x+c)} + d$$

$$\left.\begin{array}{l} a = 1 \\ b = 1 \\ c = 0 \\ d = 0 \end{array}\right\} f(x) = e^x$$



$$\left.\begin{array}{l} a = 1 \\ b = 1 \\ c = 0 \\ d = 1 \end{array}\right\} f(x) = e^x \underline{+1}$$

vertikale Verschiebung



$$\left.\begin{array}{l} a = 1 \\ b = 1 \\ c = 1 \\ d = 0 \end{array}\right\} f(x) = e^{x+1}$$

horizontale Verschiebung nach links

Betragsfunktion mit ihren Parametern

Gegeben sei eine Grundfunktion $f(x)$.

Die Funktion $g(x) = a \cdot f(b(x+c)) + d$ ist eine Funktion,

die die Grundfunktion durch die Parameter a,b,c,d verändert.

Die Parameter bewirken

a – Skalierung der Funktionswerte (Streckung, Stauchung)

b – Skalierung der x – Werte

c – Verschiebung entlang der x – Achse

d – Verschiebung entlang der y – Achse

Beispiel:

$f(x) = |x|$

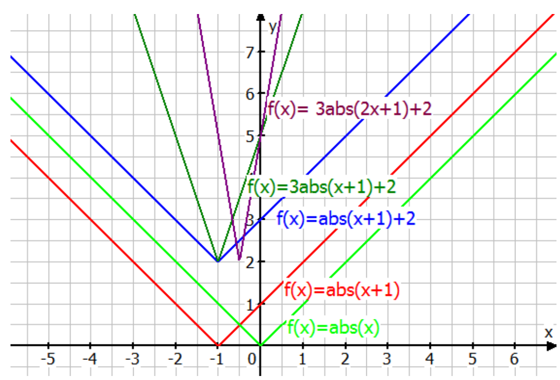
$g(x) = a \cdot |b(x+c)| + d$

a – Skalierung der Funktionswerte (Steigung)

b – Skalierung der x – Werte (beinflusst a)

c – Verschiebung entlang der x – Achse

d – Verschiebung entlang der y – Achse



•

Definition "Betrag einer Zahl" und "Betragsfunktion"

Definition 2.3: Betrag einer reellen Zahl

Für $x \in \mathbb{R}$ bezeichnet $|x|$ den Betrag von x. Dieser ist definiert durch

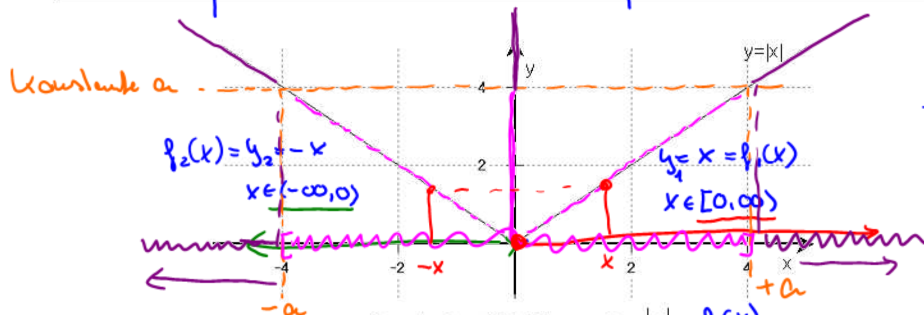
$$\mathrm{abs}(x) = |x| := \begin{cases} x & falls\ x \geq 0 \\ -x & falls\ x < 0 \end{cases}$$

$\rightarrow |+2| = +2$

$|-2| = -(-2) = +2$

$|2-5| = |-3| = 3$

Abstand: $|5-2| = |3| = 3$



Graph der Abbildung $y = |x| = f(x)$

Vorgehensweise "Auflösen des Betrags"

$|x| = a \Leftrightarrow x = a \vee -x = a \Leftrightarrow x = a \vee x = -a$ (Konstante; oder)

$|x| \leq a \Leftrightarrow x \leq a \wedge -x \leq a \;|\cdot(-1) \Leftrightarrow -a \leq x \leq a$ (und; $\Rightarrow x \geq -a$; $-a \leq x \wedge x \leq a$) — Ungleichungskette: $x \in [-a, a]$

$|x| \geq a \Leftrightarrow x \geq a \vee -x \geq a \Leftrightarrow x \geq a \vee x \leq -a$ (oder)

"Rechenregeln für den Betrag"

Satz 2.3: Eigenschaften des Betrages

Seien $x, y \in \mathbb{R}$. Dann gilt:

✓ (1) $|x| \geq 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}$

✓ (2) $|x| = 0 \Leftrightarrow x = 0$

✓ (3) $|x| = |-x|$

✓ (4) $|x \cdot y| = |x| \cdot |y|$ Bsp: $|(-2) \cdot 4| = |-2| \cdot |4| = 2 \cdot 4 = 8$; $|-8| = 8$

✓ (5) $\left|\frac{x}{y}\right| = \frac{|x|}{|y|}$, falls $y \neq 0$ Bsp: $\left|\frac{-2}{4}\right| = \frac{|-2|}{|4|} = \frac{1}{2}$

✓ (6) $|x + y| \leq |x| + |y|$ (Dreiecksungleichung) Bsp: $\underbrace{|4 + (-2)|}_{=|2|=2} \leq \underbrace{\underbrace{|4|}_{=4} + \underbrace{|-2|}_{=2}}_{=6} \Rightarrow 2 \leq 6$

✓ (7) $|x - y| \leq |x| + |y|$, $|x - y|$ heißt Abstand der beiden reellen Zahlen x und y.

(8) $||x| - |y|| \leq |x - y|$ → Bsp: $||2| - |-4|| \leq |2 - (-4)|$; $= |2-4| = |-2| = 2$; $|2+4| = |6| = 6$

(9) Auflösen der Betragszeichen :

$|x| = a \Leftrightarrow x = a \vee -x = a \Leftrightarrow x = a \vee x = -a$

$|x| \leq a \Leftrightarrow x \leq a \wedge -x \leq a \Leftrightarrow -a \leq x \leq a$

$|x| \geq a \Leftrightarrow x \geq a \vee -x \geq a \Leftrightarrow x \geq a \vee x \leq -a$

Beispiele für eine "überall sichtbare" Betragsfunktion

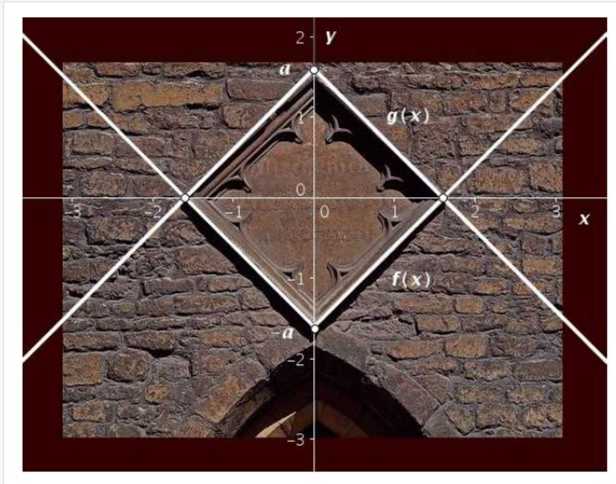


Abb. L12: Die Betragsfunktionen $y = f(x)$ und $y = g(x)$

$$f(x) = |x| - a, \quad g(x) = -|x| + a, \quad a = 1.6$$

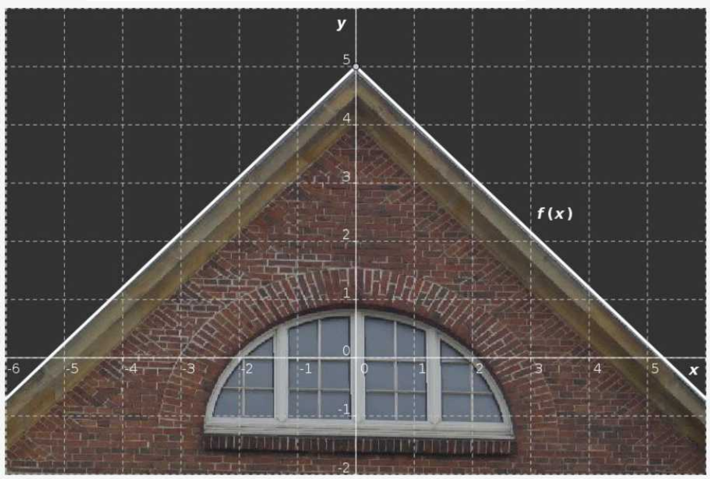


Abb. 3-1: Darstellung der Betragsfunktionen $y = f(x)$ (Mönckebergstraße, Hamburg)

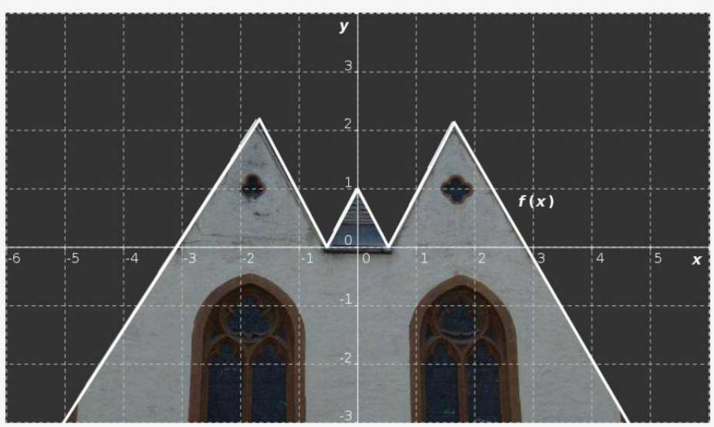


Abb. L13e: Eine Darstellung einer Betragsfunktion

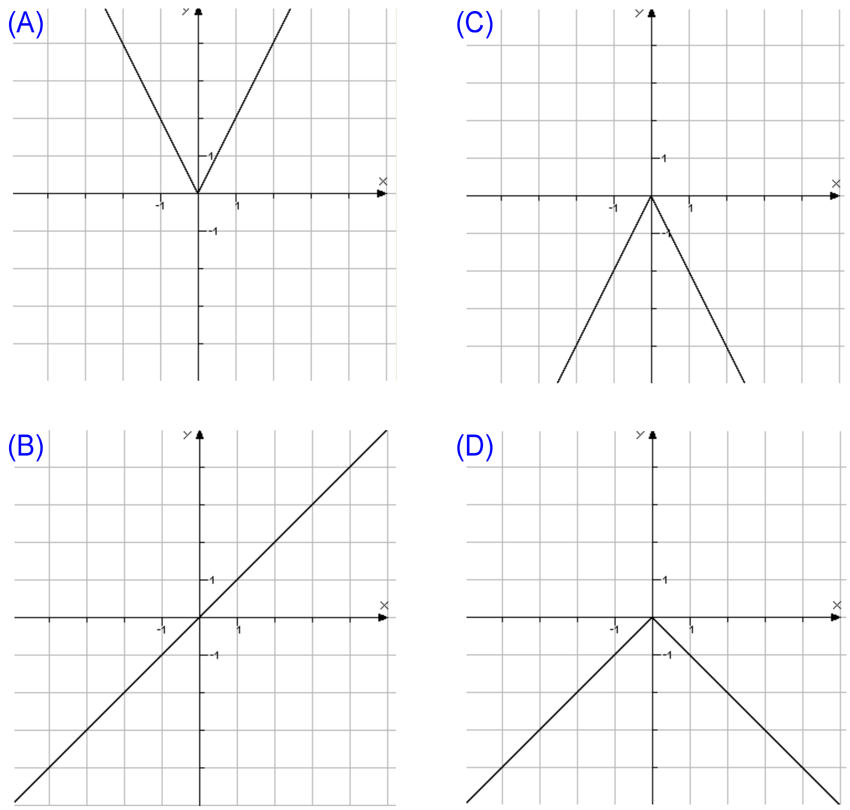
5f

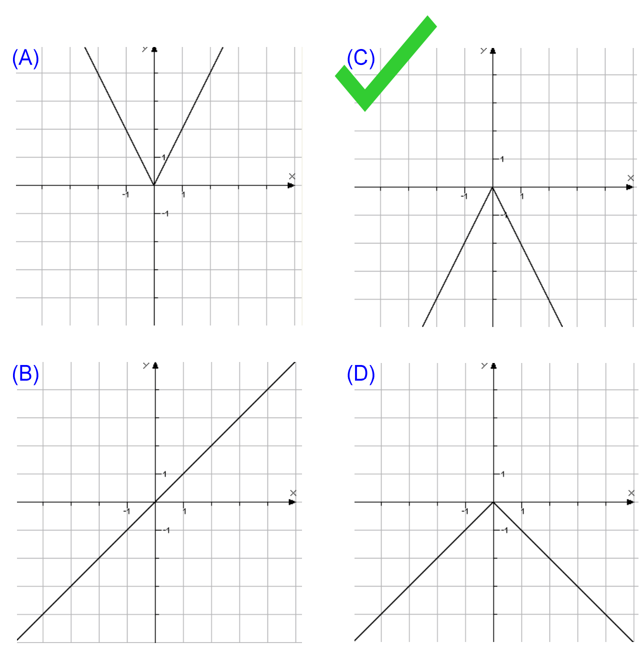
Ma 1 – Lubov Vassilevskaya

Aufgabe 2: "Betragsfunktion"

Welche Grafik gehört zur Funktionsgleichung

$$f(x) = -|2x| \qquad ?$$





Aufgabe 3: Lösen von Gleichungen mit Beträgen

Welche Lösung hat die Gleichung $\underbrace{|x|-1=2}$?

$\Leftrightarrow |x| = 3$

$\Rightarrow x=3 \vee x=-3$

$(A) \quad x=1$

$(B) \quad x=3$

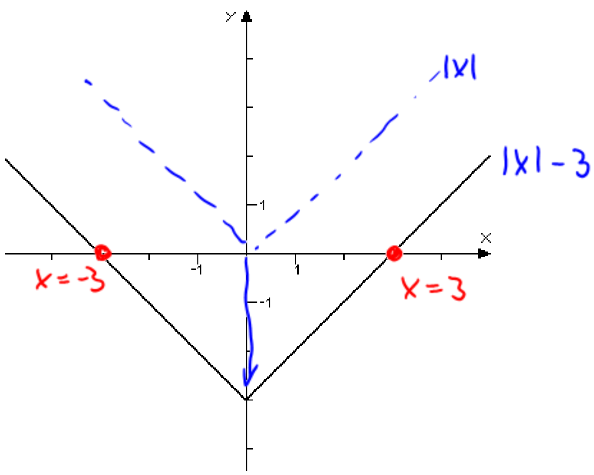
$(C) \quad x=3$ *und* $x=-3$ *ist die korrekte Antwort*

$(D) \quad x=1$ *und* $x=-1$

Begründung:

$|x|-1=2 \Rightarrow |x|=3 \Rightarrow \overbrace{|x|-3}^{f(x)} = 0$ } Nullstellen von $f(x)$ gesucht

entspricht den Nullstellen der Funktion $f(x)=|x|-3$



Rechnerisch erfordert $|x|-3=0$ ***eine Fallunterscheidung für*** $x\geq 0$ ***und*** $x<0$:

(1) $x\geq 0$: *Es gilt* $|x|=x$

$|x|-3=0 \Leftrightarrow x-3=0 \Leftrightarrow x=3$

(2) $x<0$: *Es gilt* $|x|=-x$

$|x|-3=0 \Leftrightarrow -x-3=0 \Leftrightarrow x=-3$

Aufgabe 4: Lösen von Gleichungen mit Beträgen

Welche Lösung hat die Gleichung $|x-1|-1=2$?

$$\Updownarrow$$

$$|x-1| = 3$$

(A) $x=4$ *und* $x=-4$

✓ (B) $x=-2$ *und* $x=4$

(C) $x=3$ *und* $x=-3$

(D) *keine der obigen Lösungen*

① Einsetzmethode

② Auflösemethode Fallunterscheidung

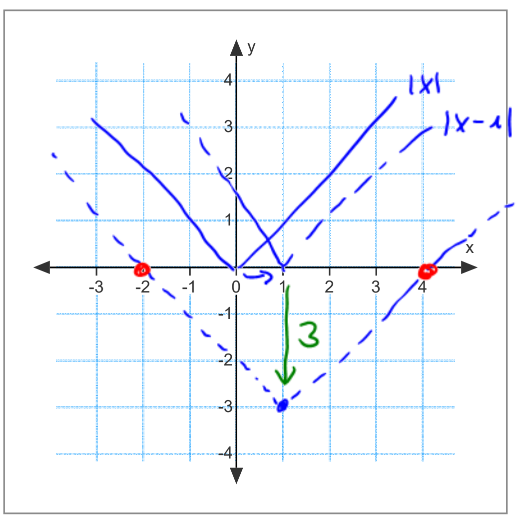
$x-1=3 \ \vee \ -(x-1)=3$

$x=4 \ \vee \ -x+1=3$

$x=-2$

③ als Funktion graphisch

$\underbrace{|x-1|-3}_{f(x)} = 0$ } Nullstellen gesucht



Nst.

$\Rightarrow x=-2, \ x=4$

Aufgabe 4: Lösen von Gleichungen mit Beträgen

Welche Lösung hat die Gleichung $|x-1|-1=2$?

(A) $x=4$ *und* $x=-4$

(B) $x=-2$ *und* $x=4$

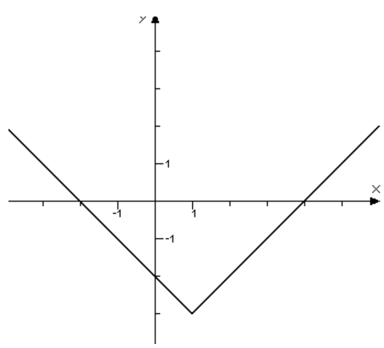
(C) $x=3$ *und* $x=-3$

(D) *keine der obigen Lösungen*

Begründung:

$|x-1|-1=2$

entspricht den Nullstellen der Funktion $f(x)=|x-1|-3$



Rechnerisch erfordert $|x-1|-3=0$ *eine Fallunterscheidung für* $x-1\geq 0$ *und* $x-1<0$:

(1) $x-1\geq 0$, *d.h.* $x\geq 1$: *Es gilt* $|x-1|=x-1$

$|x-1|-3=0 \Leftrightarrow x-4=0 \Leftrightarrow x=4$

(2) $x-1<0$, *d.h.* <1: *Es gilt* $|x-1|=-(x-1)$

$|x-1|-3=0 \Leftrightarrow -(x-1)-3=0 \Leftrightarrow x=-2$

Aufgabe 5: Lösen von Gleichungen mit Beträgen

Welche Lösung hat die Gleichung $|x+1|+2=1$?

$\Leftrightarrow \underbrace{|x+1|} = -1$

Betrag kann nicht negativ werden

(A) $x=-4$

(B) $x=-4$ *und* $x=-2$

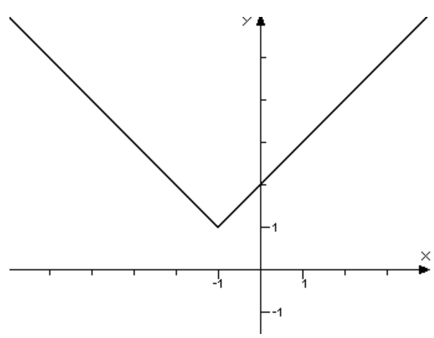
(C) $x=-2$

(D) *keine der obigen Lösungen*

Begründung:

$|x+1|+2=1 \Leftrightarrow \overbrace{|x+1|+1}^{f(x)} = 0$ } Nst. gesucht

entspricht den Nullstellen der Funktion $f(x)=|x+1|+1$



keine Nst

$L=\emptyset$
keine Lösung

Rechnerisch erfordert $|x+1|+1=0$ *eine Fallunterscheidung für* $x+1\geq 0$ *und* $x+1<0$:

(1) $x+1\geq 0$, *d.h.* $x\geq -1$: *Es gilt* $|x+1|=x+1$

$|x+1|+1=0 \Leftrightarrow x+2=0 \Leftrightarrow x=-2,$

dieses ist aber ein Widerspruch zur Voraussetzung $\Rightarrow$ *keine Lösung*

(2) $x+1<0$, *d.h.* $x<-1$: *Es gilt* $|x+1|=-(x+1)$

$|x+1|+1=0 \Leftrightarrow -(x+1)+1=0 \Leftrightarrow x=0,$

dieses ist aber ein Widerspruch zur Voraussetzung $\rightarrow$ *keine Lösung*

Die Gleichung $|x+1|+1=0$ *hat keine Lösung*

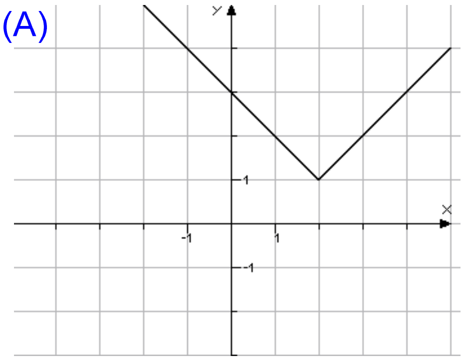
und damit hat auch $|x+1|+2=1$ *keine Lösung*!

Aufgabe 6: "Betragsfunktion"

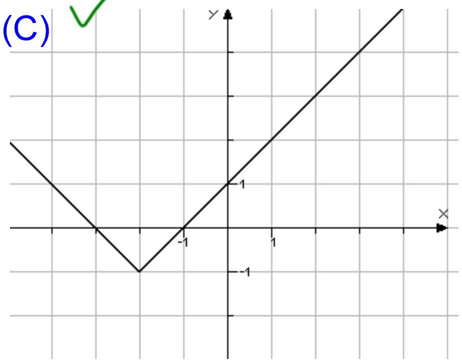
Welche Grafik gehört zur Funktionsgleichung

$$f(x) = \left|\underbrace{x+2}_{\text{nach links}}\right| \overbrace{-1}^{\text{nach unten}} \quad ?$$

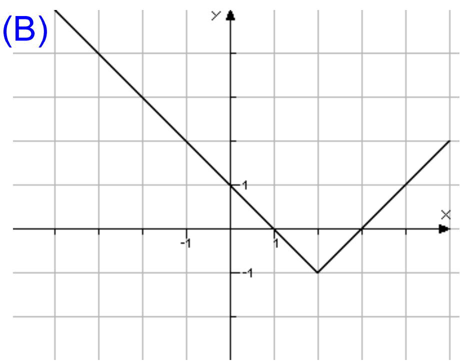
(A)



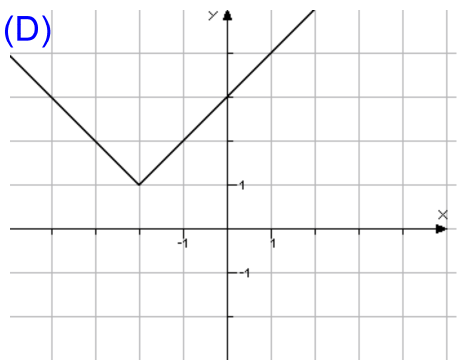
(C)



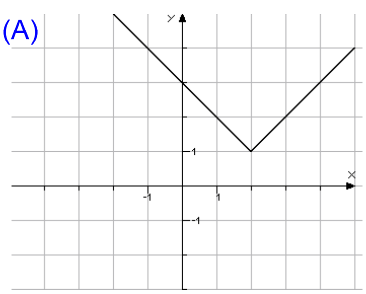
(B)



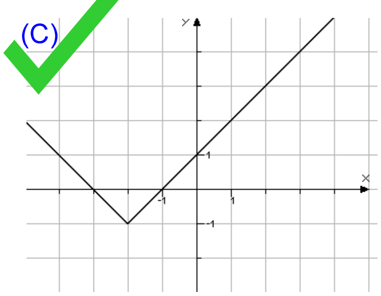
(D)



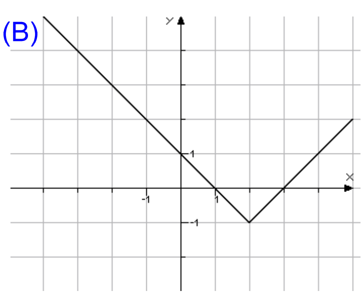
(A)



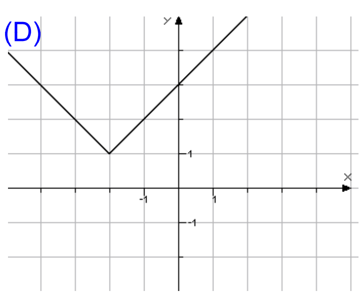
(C)



(B)



(D)



rechnerisch

Fallunterscheidung

$x \geq 0 \wedge x \geq 1$ → $x \geq 1$

$x \geq 0 \wedge x < 1$ → $0 \leq x < 1$

$x < 0 \wedge x \geq 1$ entfällt

$x < 0 \wedge x < 1$ → $x < 0$

Aufgabe 7: "Betragsfunktion"

Welche Grafik gehört zur Funktionsgleichung

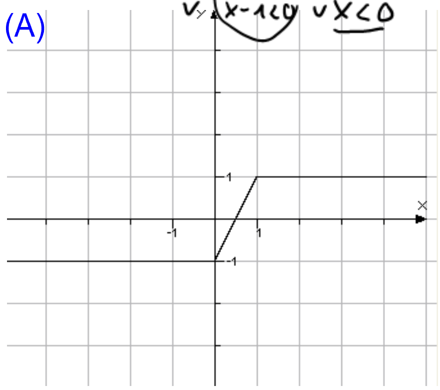
$$f(x) = \underbrace{|x-1|}_{x-1 \geq 0 \,\vee\, x-1<0} - \underbrace{|x|}_{x \geq 0 \,\vee\, x<0} \;?$$

$x<0$: $f_1(x) = |x-1| - |x| = -(x-1) - (-x) = -x+1+x = 1$

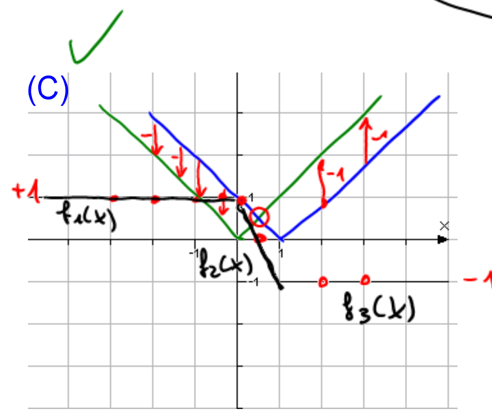
$0 \leq x < 1$: $f_2(x) = |x-1| - |x| = -(x-1) - x = -x+1-x = -2x+1$

$x \geq 1$: $f_3(x) = \underbrace{|x-1|}_{\geq 0} - \underbrace{|x|}_{\geq 0} = (x-1) - x = x-1-x = -1$

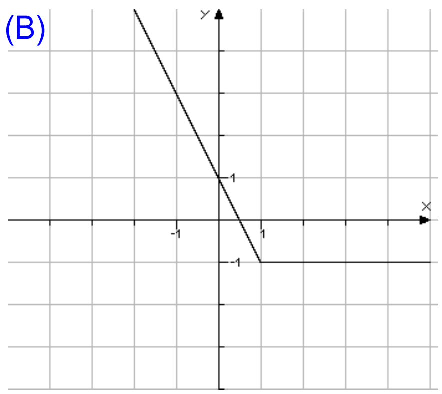
(A)



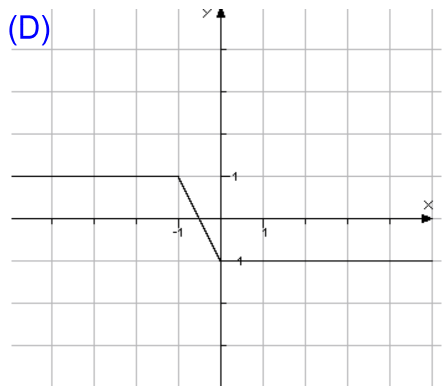
(C)



(B)



(D)



Zusammenfassung verschiedener Betragsfunktions-Typen

Verschiebung der Funktion |x| ....

$f(x) = |x+a|$ ... um a nach links

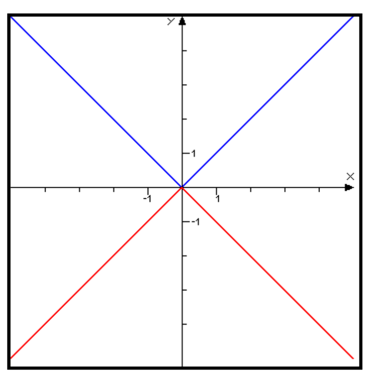
$f(x) = |x-a|$ ... um a nach rechts

$f(x) = |x|+a$ ... um a nach oben

$f(x) = |x|-a$ ... um a nach unten

$f(x) = |ax|$ Veränderung der Steigung

$f(x) = -|x|$ Spiegelung der Funktion |x| an der x-Achse



Funktion f(x) = |x|

Funktion f(x) = - |x|

•

Ungleichungen

Lösen von Ungleichungen

Beispiel: x - 2 > 2x + 15 $| +2 \Rightarrow x > 2x + 17 \; | -2x$

$\Rightarrow -x > 17 \; | \cdot(-1)$

$\Rightarrow x < -17$

$L = \{x \in \mathbb{R} \mid x < -17\}$

$= (-\infty, -17)$

Bsp:

$2 < 4 \; | \cdot(-1)$

$-2 > -4$

II. Ungleichungen

Beim Rechnen mit Ungleichungen gelten die nachfolgenden Regeln.

Rechenregeln für Ungleichungen

(1) Zwei Ungleichungen $x < y$ und $y < z$ fasst man in einer Ungleichungskette zusammen: $x < y < z$.

(2) Aus $x < y$ folgt: $x \cdot z < y \cdot z$, falls $z > 0$

$x \cdot z \overset{!}{>} y \cdot z$, falls $z < 0$

(3) Aus $x < y$ und $w < z$, folgt $x + w < y + z$.

(4) Aus $x < y$ und $w > z$, folgt $x - w < y - z$.

(5) Aus $0 < x < y$ und $0 < w < z$, folgt $x \cdot w < y \cdot z$.

(6) Ist $0 < x < y$, so ist $\frac{1}{x} \overset{!}{>} \frac{1}{y} > 0$. $2 < 4 \xrightarrow{\text{Kehrwert}} \frac{1}{2} \overset{!}{>} \frac{1}{4}$

(7) Aus $0 < x < y$ und $w > z > 0$, folgt $\frac{x}{w} < \frac{y}{z}$.

(8) Aus $x \cdot y > 0$ folgt: Entweder gilt $\underbrace{x > 0 \text{ und } y > 0}_{}$ (1.Fall) oder $x < 0$ und $y < 0$ (2.Fall).

(9) Aus $x \cdot y < 0$ folgt: Entweder gilt $x > 0$ und $y < 0$ (1.Fall) oder $x < 0$ und $y > 0$ (2.Fall).

Rechenhinweise zur Lösung von Ungleichungen:

(1) Das **Auflösen komplizierter Ungleichungen** kann manchmal vereinfacht werden, wenn man das **Ungleichheitszeichen erstmal durch ein Gleichheitszeichen ersetzt** und dann durch Ausprobieren feststellt, auf welcher Seite der Lösungen der Gleichung die Lösungen der Ungleichung liegen.

(2) Bei der Multiplikation einer Ungleichung mit einer negativen Zahl kehrt sich das Ungleichungszeichen um.

Ist das **Vorzeichen bei der Multiplikation nicht bekannt**, so muss eine **Fallunterscheidung** durchgeführt werden. Die Lösung der Ungleichung ist dann die Vereinigung der Lösungsmengen beider Fälle.

Gute Erläuterungen zum Selbststudium

http://www.mathematik.net/ungleichungen/0-inhalt-ungleich-1.htm

Quadratische Ungleichung

Beispiel:

Gesucht ist die Lösungsmenge der quadratischen Ungleichung

$$\boxed{2x^2 - 2x - 12 \leq 0\ .}$$

→ graphisch

Die Definitionsmenge ist ganz $\mathbb{R}$.

Die quadratische Gleichung

$$2x^2 - 2x - 12 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x^2 - x - 6 = 0$$

hat die Nullstellen $x_1 = -2$ und $x_1 = 3$.

$x \in [-2, 3]$

Somit gilt $(x+2)(x-3) \leq 0$

Fall 1: $(x+2) \geq 0 \; und \; (x-3) \leq 0$

$x \geq -2 \; und \; x \leq 3$,d.h. die Teillösungsmenge ist $L_1 = [-2, 3]$

Fall 2: $(x+2) \leq 0 \; und \; (x-3) \geq 0$

$x \leq -2 \; und \; x \geq 3$,d.h. die Teillösungsmenge ist $L_2 = \emptyset$

Die Gesamtlösungsmenge ist $L_1 \cup L_2 = [-2, 3]$

↑ Vereinigungsmenge

Ungleichungen mit Beträgen

$$\boxed{|x| \le a}$$
$$\Rightarrow \underbrace{x \le a \;\wedge\; -x \le a}_{-a \le x \le a}$$
$$\boxed{\Rightarrow -a \le x \le a}$$

$$\boxed{|x| \ge a}$$
$$\Rightarrow \; x \ge a \;\vee\; -x \ge a$$
$$\boxed{\Rightarrow \; x \ge a \;\vee\; x \le -a}$$

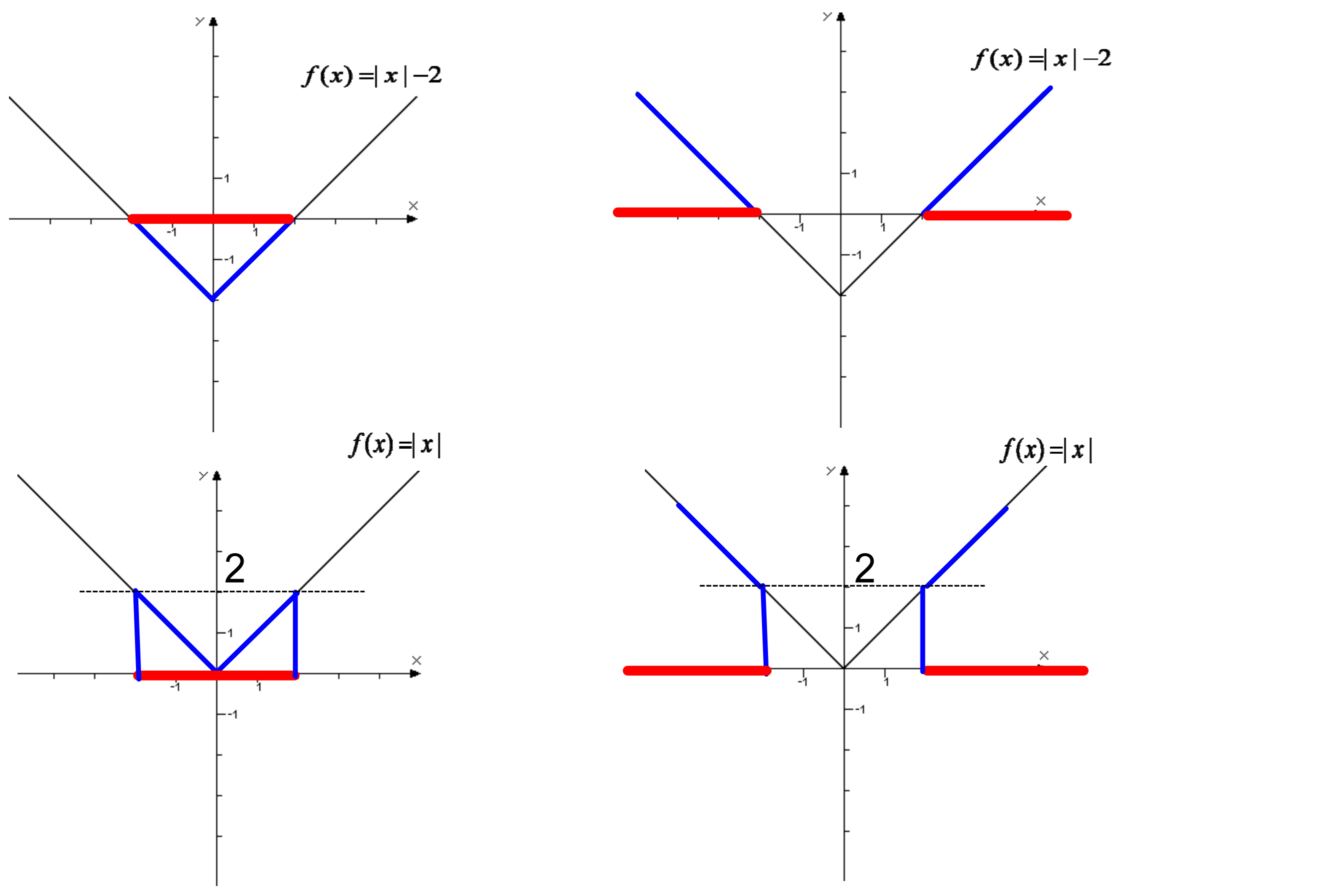
Beispiel :

$$\boxed{|x| \le 2}$$
$$\Rightarrow \underbrace{x \le 2 \;\wedge\; -x \le 2}_{-2 \le x \le 2}$$
$$\boxed{\Rightarrow -2 \le x \le 2} \qquad L = [-2,2]$$

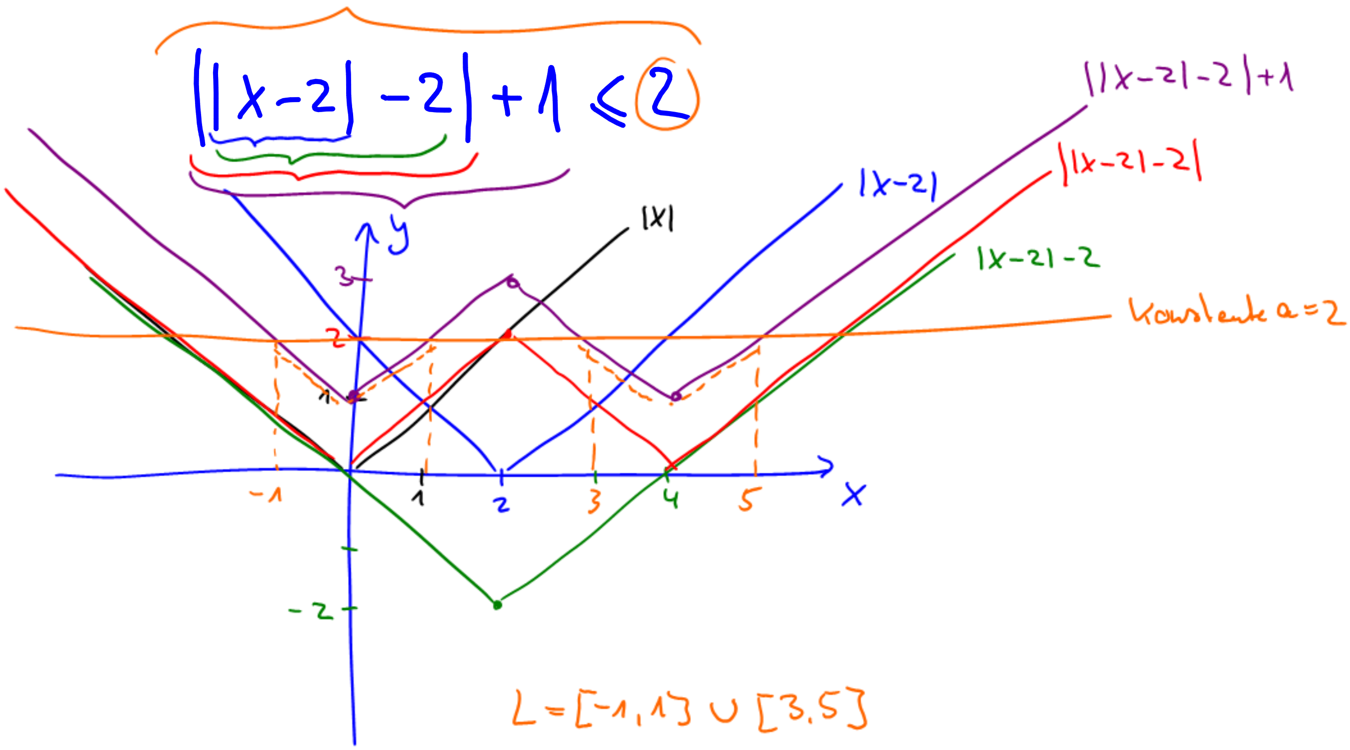
Beispiel :

$$\boxed{|x| \ge 2}$$
$$\Rightarrow x \ge 2 \;\vee\; -x \ge 2$$
$$\boxed{\Rightarrow x \ge 2 \;\vee\; x \le -2} \qquad L = (-\infty,-2] \cup [2,\infty)$$

Veranschaulichung:



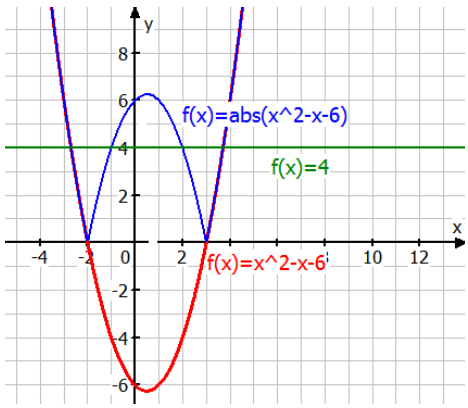
Beispiel: Erweiterte Aufgabenstellungen mit Beträgen

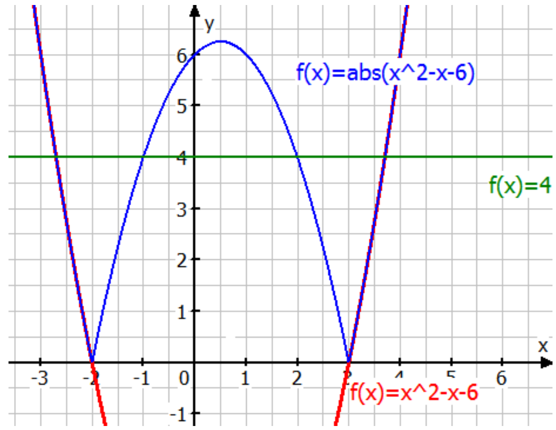


•

Beispiel: Ungleichung mit Betrag

$|x^2 - x - 6| < 4$





Lösung:

$$|x^2 - x - 6| < 4$$

Auflösen des Betrags gemäß der Regeln

$$-4 < x^2 - x - 6 < 4$$

$$\underbrace{-4 < x^2 - x - 6}_{Ungleichung\,1} \wedge \underbrace{x^2 - x - 6 < 4}_{Ungleichung\,2}$$

Bestimmen der Lösungsmenge für Ungleichung 1:

$$-4 < x^2 - x - 6$$

$$0 < x^2 - x - 2$$

Zerlegung des quadratischen Polynoms in Linearfaktoren

$$0 < (x+1)(x-2)$$

$$2\ Fälle:\ \underbrace{((x+1) > 0 \wedge (x-2) > 0\ )}_{Fall\,1} \vee \underbrace{((x+1) < 0 \wedge (x-2) < 0\ )}_{Fall\,2}$$

Fall 1: $(x+1) > 0 \wedge (x-2) > 0$

$$x > -1 \wedge x > 2 \quad \Rightarrow L_1 = (2,\infty)$$

Fall 2: $(x+1) < 0 \wedge (x-2) < 0$

$$x < -1 \wedge x < 2 \quad \Rightarrow L_2 = (\infty,-1)$$

zu Hause
weiter
nachvollziehen

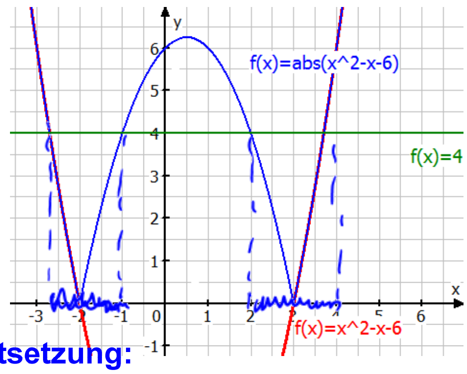
Bestimmen der Lösungsmenge für Ungleichung 2:

$$x^2 - x - 6 < 4$$

$\boxed{\textit{nächste Seite}}$

Beispiel: Ungleichung mit Betrag

$|x^2 - x - 6| < 4$



Lösung - Fortsetzung:

$$|x^2 - x - 6| < 4$$

Auflösen des Betrags gemäß der Regeln

$$-4 < x^2 - x - 6 < 4$$

$$\underbrace{-4 < x^2 - x - 6}_{Ungleichung\ 1} \wedge \underbrace{x^2 - x - 6 < 4}_{Ungleichung\ 2}$$

Bestimmen der Lösungsmenge für Ungleichung 1:

$$L_1 = (2, \infty)$$

$$L_2 = (-\infty, -1)$$

Bestimmen der Lösungsmenge für Ungleichung 2:

Zerlegung des quadratischen Polynoms in Linearfaktoren

$$x_{1/2} = \frac{1}{2} + \sqrt{\frac{1}{4} + 10} = \frac{1}{2} + \sqrt{\frac{41}{4}}$$

$$x_1 = \frac{1 + \sqrt{41}}{2} = 3.7 \vee x_1 = \frac{1 \;\; \sqrt{41}}{2} = -2.7$$

$$x^2 - x - 6 < 4$$

$$x^2 - x - 10 < 0$$

Zerlegung des quadratischen Polynoms in Linearfaktoren

$$x^2 - x - 10 = 0 \Rightarrow x_1 = 3.7 \vee x_2 = -2.7$$

$$(x - 3.7)(x + 2.7) < 0$$

$$2\ Fälle: \underbrace{((x-3.7) > 0 \wedge (x+2.7) < 0\ )}_{Fall\ 1} \vee \underbrace{((x-3.7) < 0 \wedge (x+2.7) > 0\ )}_{Fall\ 2}$$

$$Fall\ 1:\ (x-3.7) > 0 \wedge (x+2.7) < 0$$

$$x > 3.7 \wedge x < -2.7 \quad \Rightarrow L_3 = \varnothing$$

$$Fall\ 2:\ (x-3.7) < 0 \wedge (x+2.7) > 0$$

$$x < 3.7 \wedge x > -2.7 \quad \Rightarrow L_4 = (-2.7, 3.7)$$

Durchschnitt

Gesamtlösungsmenge

$$L = (L_1 \cup L_2) \cap (L_3 \cup L_4)$$

$$= ((2,\infty) \cup (-\infty,-1)) \cap (\varnothing \cup (-2.7, 3.7))$$

$$= (-2.7, -1) \cup (2, 3.7)$$

Aufgaben

Aufgabe 1: Ungleichungen

$$5x^2 \leq 4x+1$$

a) Bestimmen Sie die Lösungsmenge!

Hinweis: Verwenden Sie die Linearfaktorzerlegung.

b) Visualisieren Sie die Ungleichung!

zu Hause

Aufgabe 2

$$\frac{1}{x-1} < \frac{1}{x+2}$$

Bestimmen Sie die Lösungsmenge!

•