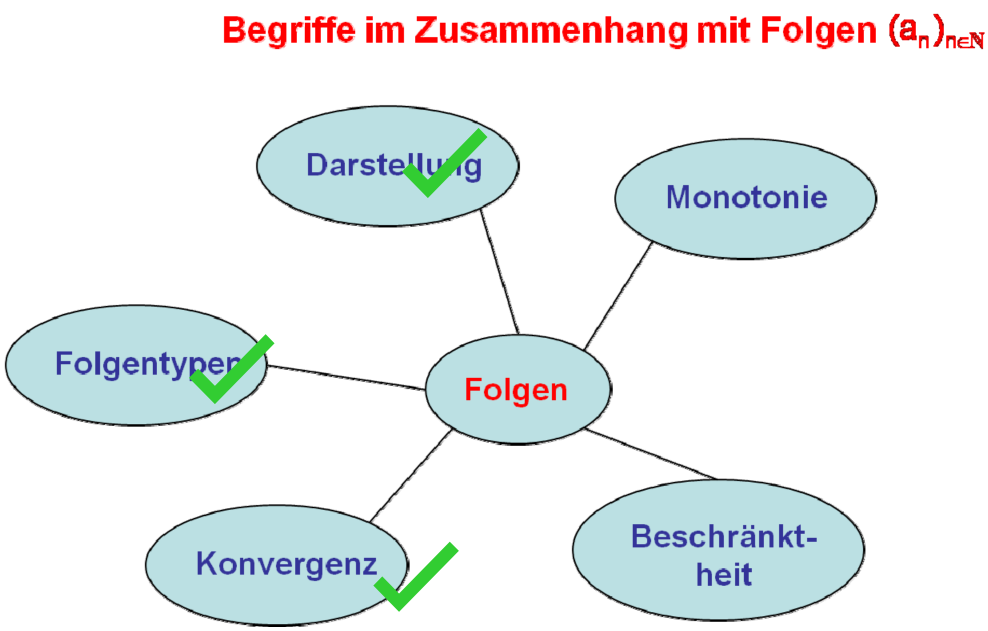
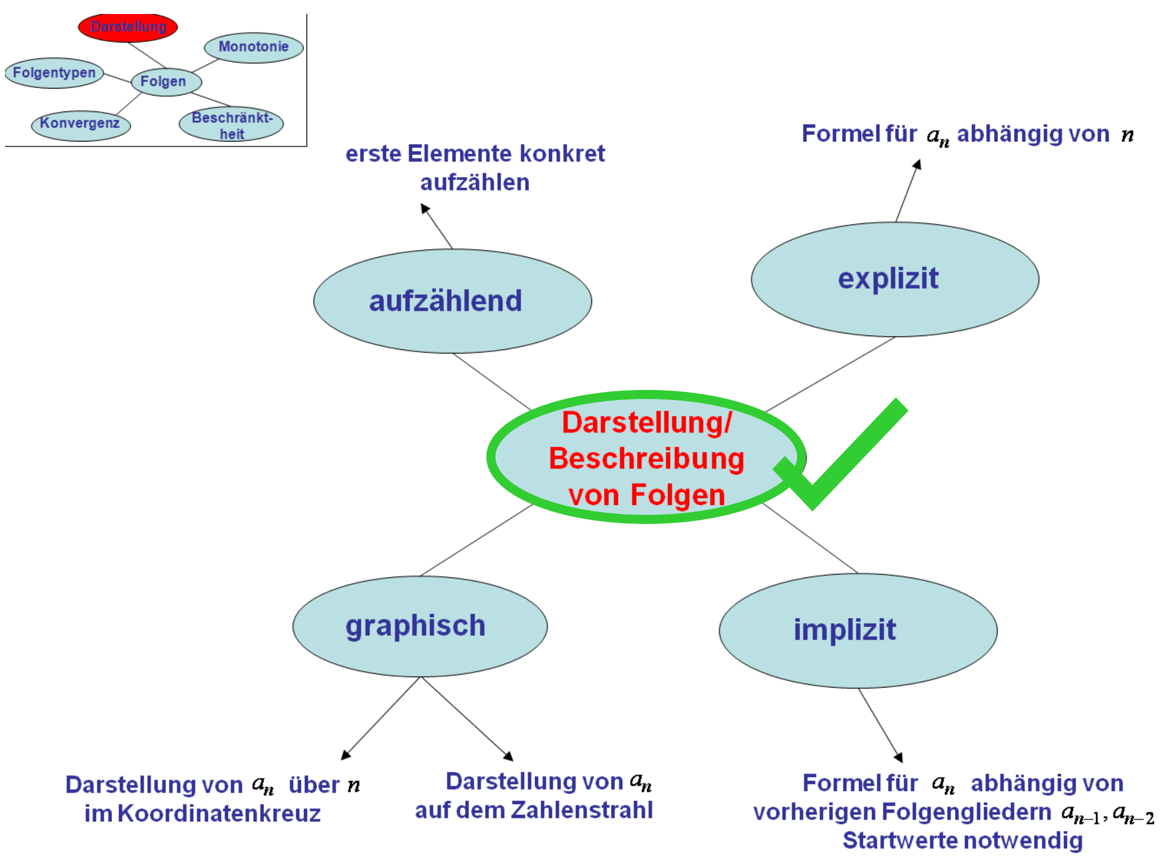
Übungen 4 am 16.11.2022

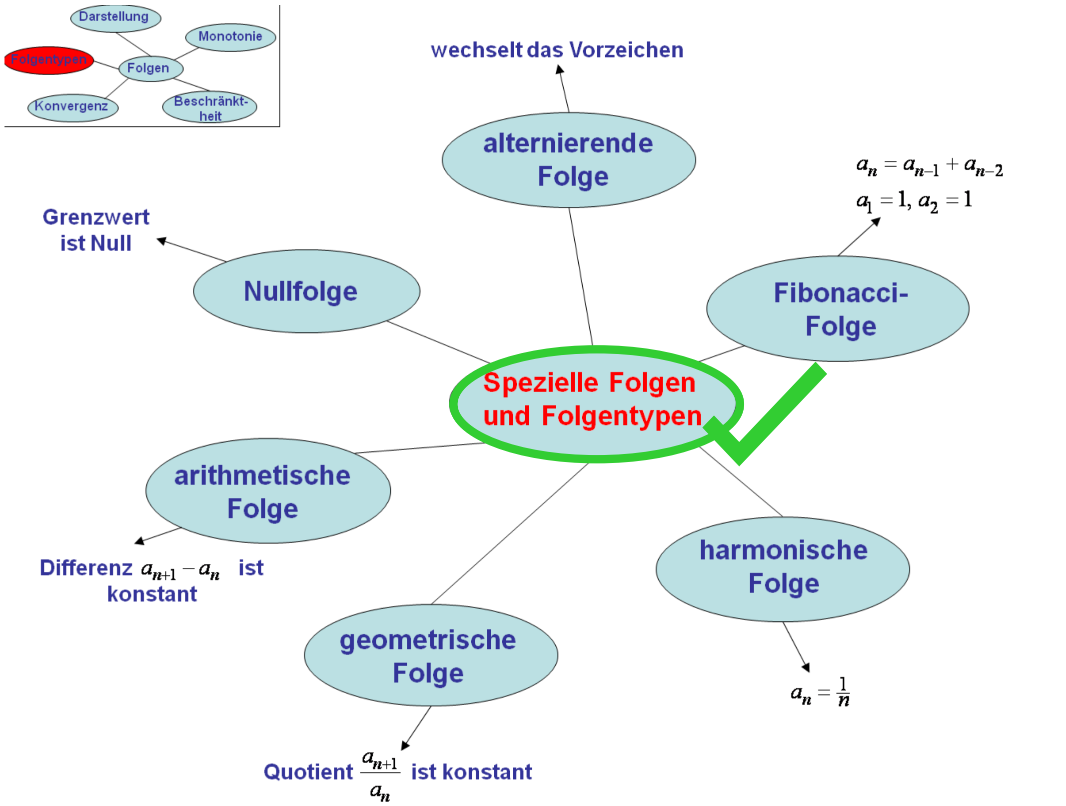
Folgen und Grenzwerte

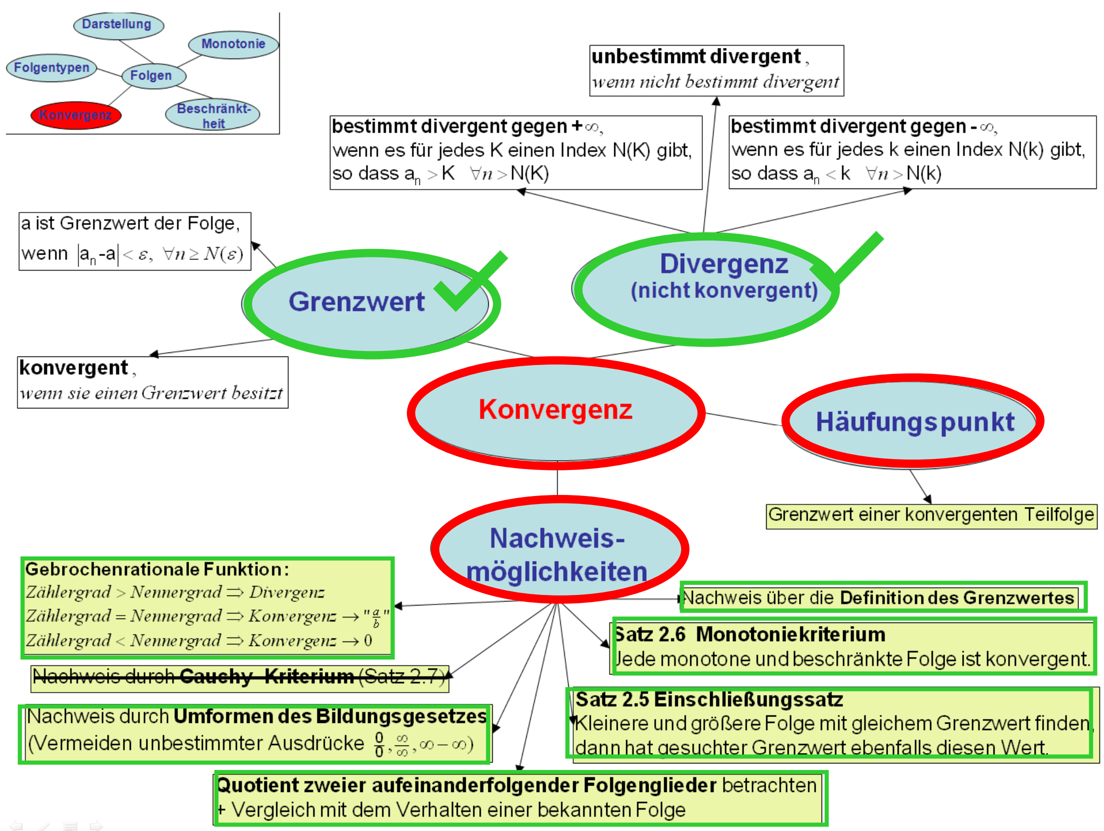
Überblick des Kapitels Folgen

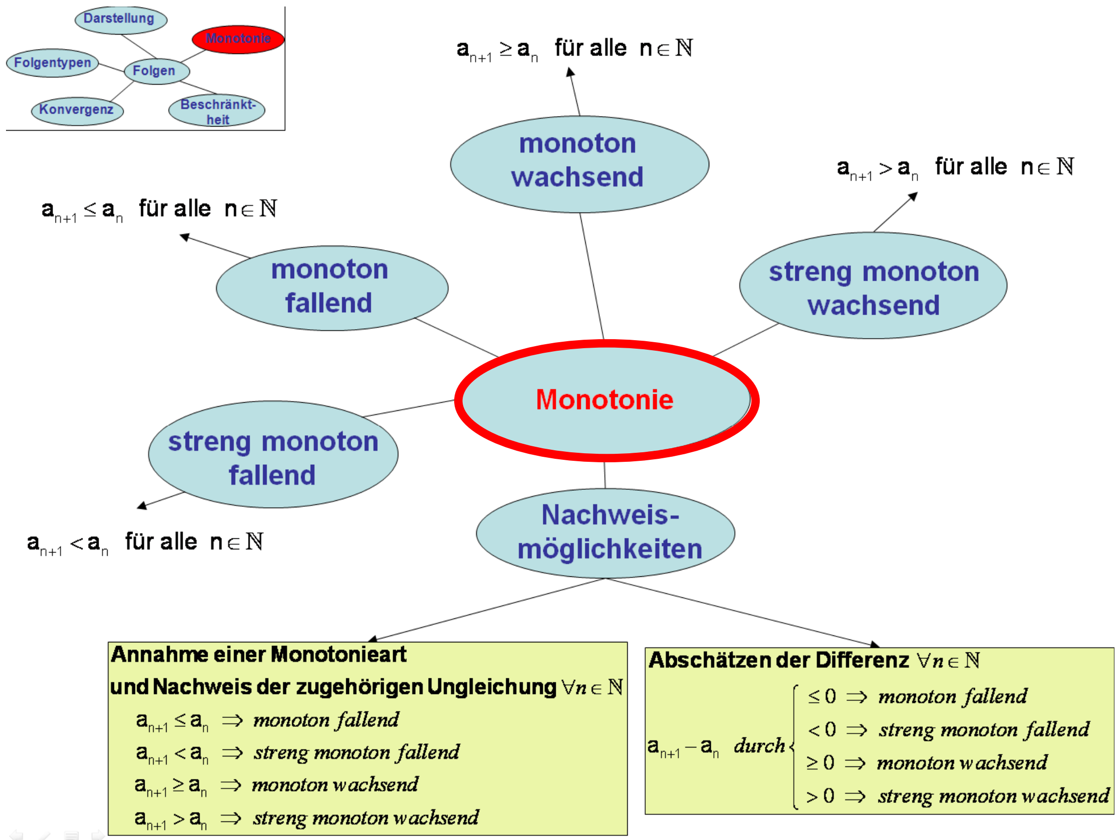


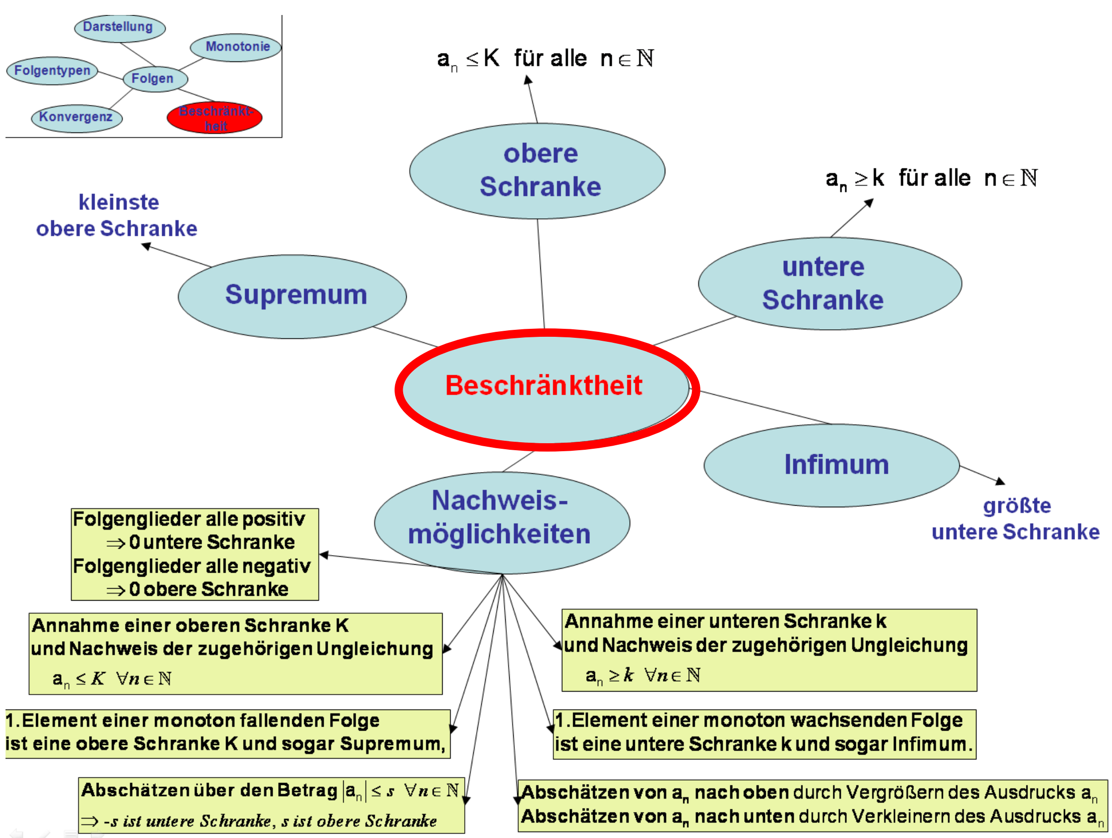


Überblick des Kapitels Folgen






Darstellung
Monotonie
Folgentypen
Folgen
Konvergenz
Beschränkt-heit
$a_{n+1} \geq a_n$ für alle $n \in \mathbb{N}$
monoton wachsend
$a_{n+1} > a_n$ für alle $n \in \mathbb{N}$
$a_{n+1} \leq a_n$ für alle $n \in \mathbb{N}$
monoton fallend
streng monoton wachsend
Monotonie
streng monoton fallend
$a_{n+1} < a_n$ für alle $n \in \mathbb{N}$
Nachweis-möglichkeiten
Annahme einer Monotonieart
und Nachweis der zugehörigen Ungleichung $\forall n \in \mathbb{N}$
$a_{n+1} \leq a_n \Rightarrow$ monoton fallend
$a_{n+1} < a_n \Rightarrow$ streng monoton fallend
$a_{n+1} \geq a_n \Rightarrow$ monoton wachsend
$a_{n+1} > a_n \Rightarrow$ streng monoton wachsend
Abschätzen der Differenz $\forall n \in \mathbb{N}$
$a_{n+1} - a_n$ durch $\begin{cases} \leq 0 \Rightarrow \text{monoton fallend} \\ < 0 \Rightarrow \text{streng monoton fallend} \\ \geq 0 \Rightarrow \text{monoton wachsend} \\ > 0 \Rightarrow \text{streng monoton wachsend} \end{cases}$


Darstellung
Monotonie
Folgentypen
Folgen
Konvergenz
Beschränkt-heit
$a_n \leq K$ für alle $n \in \mathbb{N}$
obere Schranke
$a_n \geq k$ für alle $n \in \mathbb{N}$
kleinste obere Schranke
Supremum
untere Schranke
Beschränktheit
Infimum
größte untere Schranke
Nachweis-möglichkeiten
Folgenglieder alle positiv $\Rightarrow$ 0 untere Schranke
Folgenglieder alle negativ $\Rightarrow$ 0 obere Schranke
Annahme einer oberen Schranke K und Nachweis der zugehörigen Ungleichung
$a_n \leq K \quad \forall n \in \mathbb{N}$
Annahme einer unteren Schranke k und Nachweis der zugehörigen Ungleichung
$a_n \geq k \quad \forall n \in \mathbb{N}$
1.Element einer monoton fallenden Folge ist eine obere Schranke K und sogar Supremum,
1.Element einer monoton wachsenden Folge ist eine untere Schranke k und sogar Infimum.
Abschätzen über den Betrag $|a_n| \leq s \quad \forall n \in \mathbb{N}$
$\Rightarrow$ -s ist untere Schranke, s ist obere Schranke
Abschätzen von a_n nach oben durch Vergrößern des Ausdrucks a_n
Abschätzen von a_n nach unten durch Verkleinern des Ausdrucks a_n

Beispiel 2: Abschätzen über den Betrag

Gegenbeispiel: Divergente Folge

Ziel: obere Schranke nachweisen

$$|a_n| = \left| \frac{\overbrace{n^2+2}^{>0}}{\underbrace{n+1}_{>0}} \right| \; \cdots\cdots \; < K$$

Betrag kann entfallen, da Argument stets >0 $\forall n \in \mathbb{N}$

$$= \frac{n^2+2}{n+1}$$

Nenner verkleinern

$$< \frac{n^2+2}{n}$$

über diese Vorgehensweise $\Rightarrow$ keine Schranke nachweisbar

Zähler vergrößern

$$\leq \frac{n^2+2n}{n} = n+2 \; \cancel{\leq}$$

ist nie möglich, da $n \to \infty$

Nur untere Schranke durch Abschätzen bestimmen

$$a_n = \frac{n^2+2}{n+1} \geq \frac{\cancel{n^2+2}}{\cancel{n^2+2}} \geq \underbrace{S = 1}_{\text{untere Schranke}}$$

(Zähler verkleinern) Nenner vergrößern

alternativ

$$\geq \frac{n^2}{n^2+n^2} = \frac{1}{2} = S \quad \text{andere untere Schranke}$$

Zähler verkleinern / Nenner vergrößern

oder

$$\geq \frac{n+1}{n+1} = 1 = S$$

Was hat Konvergenz mit Monotonie zu tun?

monoton + konvergent Beispiel $a_n = \frac{1}{n}$

nicht monoton + konvergent Beispiel: $a_n = (-1)^n \cdot \frac{1}{n}$

monoton + nicht konvergent Beispiel: $a_n = n$

nicht monoton + nicht konvergent Beispiel $a_n = (-1)^n \cdot n$

$\Rightarrow$ alleine aus der Monotonie kann man nicht auf die Konvergenz einer Folge schließen und umgekehrt auch nicht

Monotonie $\not\Rightarrow$ Konvergenz

Konvergenz $\not\Rightarrow$ Monotonie

Was hat Konvergenz mit Beschränktheit zu tun?

beschränkt + konvergent Beispiel: $a_n = \frac{1}{n}$

beschränkt + nicht konvergent Beispiel: $a_n = (-1)^n$

$\Rightarrow$ alleine aus der Beschränktheit kann man nicht auf Konvergenz schließen

Beschränkt $\not\Rightarrow$ Konvergenz

nicht beschränkt + konvergent Beispiel: gibt es nicht

nicht beschränkt + nicht konvergent Beispiel: $a_n = (-1)^n \cdot n$

$\Rightarrow$ aus der Konvergenz einer Folge kann man auf die Beschränktheit schließen

Konvergenz $\Rightarrow$ Beschränkt

Folgerungen: Wann kann man auf Konvergenz einer Folge schließen?

- Monotonie $\not\Rightarrow$ Konvergenz
- Beschränktheit $\not\Rightarrow$ Konvergenz
- Monotonie + Beschränktheit $\Rightarrow$ Konvergenz

das besagt das Monotoniekriterium

Zusammenfassung der vorherigen Seite

Konvergenz $\Rightarrow$ Beschränktheit

Satz 2.3:
Jede konvergente Folge ist beschränkt.

Beschränktheit und Monotonie $\Rightarrow$ Konvergenz

Satz 2.6: Monotoniekriterium
Eine monotone und beschränkte Zahlenfolge ist stets konvergent.

Nachweis der Konvergenz einer Folge mit Hilfe des Monotoniekriteriums:

$\left.\begin{array}{l}\text{(1) Nachweis Monotonie}\\ \text{(2) Nachweis Beschränktheit}\end{array}\right\} \Rightarrow$ Folge ist konvergent

Beispiel:
Die Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit $a_n = \frac{1}{\sqrt[3]{n}}$ ist konvergent, da sie erstens die Schranken 0(unten) und 1(oben) hat und zweitens monoton fallend ist.

•

Aufgabe 1a: Analyse der Folgen gemäß Schema

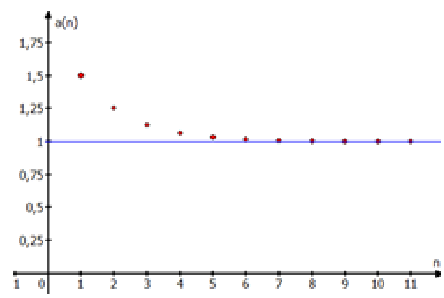
Folgenvorschrift

$$a_n = 1 + \frac{1}{2^n}$$

Aufzählung der ersten fünf Folgenelemente

$$\frac{3}{2}, \frac{5}{4}, \frac{9}{8}, \frac{17}{16}, \frac{33}{32}, \dots$$

Graphische Darstellung der Folge



Monotonie

Betrachtung der Differenz zweier Folgenglieder

$$a_{n+1} - a_n = 1 + \frac{1}{2^{n+1}} - \left(1 + \frac{1}{2^n}\right)$$

$$= \frac{1}{2^{n+1}} - \frac{1}{2^n} = \frac{1-2}{2^{n+1}}$$

$$= \frac{-1}{2^{n+1}} < 0$$

$\Rightarrow$ *Folge ist streng monoton fallend*

Beschränktheit

Nachweis durch Abschätzung über den Betrag

$$|a_n| = \left|1 + \frac{1}{2^n}\right| < |1+1| = 2$$

$\Rightarrow -2 < a_n < 2$

$\Rightarrow$ *Die Folge ist beschränkt.*

Obere Schranke:

$K = 2$ ist eine obere Schranke

Supremum:

Die Folge ist monoton fallend, daher ist das Folgenglied $a_1 = \frac{3}{2}$ das Supremum.

Untere Schranke:

$k = -2$ ist eine untere Schranke

Infimum:

Die Folge ist monoton fallend mit Grenzwert $a = 1$, daher ist der Grenzwert $a = 1$ das Infimum.

Konvergenz/ Grenzwert

Die Folge ist beschränkt und monoton fallend und ist damit konvergent. (gemäß Monotoniekriterium)

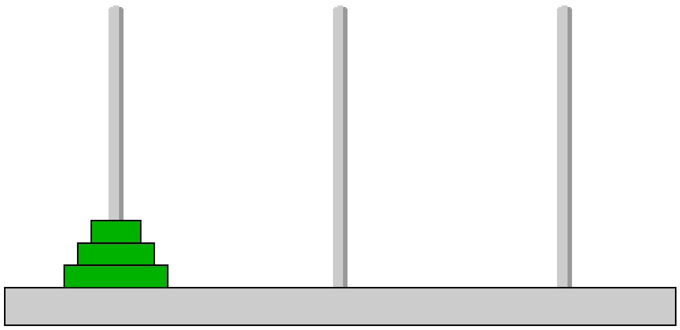
Grenzwert:

$$a = \lim_{n\to\infty}\left(1 + \frac{1}{2^n}\right)$$

$$= \lim_{n\to\infty} 1 + \lim_{n\to\infty} \frac{1}{2^n} = 1 + 0 = 1$$

Aufgaben

Aufgabe 1: Die Türme von Hanoi



http://www.matheprisma.de/Module/Rekurs/index.htm

https://www.mathematik.ch/spiele/hanoi_mit_grafik/

Spielregeln:

- Die Scheiben sollen so umgelegt werden, dass sie am Ende wieder pyramidenförmig auf einem anderen Stab liegen.
- Die Scheiben dürfen nur einzeln bewegt werden.
- Es darf dabei niemals eine größere auf einer kleineren Scheibe liegen.

Fragen:

(1) Wieviele Umlegungen braucht man bei 3 Scheiben?

(2) Wieviele Umlegungen braucht man bei 4 oder mehr Scheiben?

(3) Wie lautet die zugehörige Folge?
- Implizite Formulierung
- Explizite Formulierung

Anzahl der Scheiben	**n=1**	**n=2**	**n=3**	**n=4**	**n=5**	**...**	**n**
Anzahl der notwendigen Umlegungen	**a_1=**	**a_2=**	**a_3=**	**a_4=**	**a_5=**		explizit **a_n=** implizit **a_n=**

Aufgabe 2: Anwendungsbeispiel für Folgen: Zinsberechnung

Einzahlung: 1000 € einmalig
Verzinsung: 5% jährlich

Frage: Wie entwickelt sich das Guthaben auf dem Konto innerhalb der nächsten 10 Jahre?

.

Aufgabe 3: Nachweis eines vermuteten Grenzwertes einer Folge

Nachweis eines vermuteten Grenzwertes a über die Genzwertbedigung der Definition:
$|a_n - a| < \varepsilon$

Ergebnis: Index n(ε), ab dem die Folgenwerte nur noch um ε vom Grenzwert abweichen.
Wert ε vorgeben ⇒ Index n(ε) berechnen

Machen Sie sich klar, dass die Folgen den angegebenen Grenzwert g besitzen, und berechnen Sie jeweils das zu $\epsilon = \frac{1}{10}$ gehörende minimale n_0, von dem an alle weiteren Glieder a_n innerhalb der gegebenen $\epsilon-$ Umgebung liegen: $|a_n - g| < \epsilon$

a) $a_n = \frac{100}{n^3}; g = 0$

- ○ $n_0 = 9$
- ○ $n_0 = 10$
- ○ $n_0 = 11$

http://math-www.uni-paderborn.de/~mathkit/Inhalte/Folgen/preview/index.html

b) $a_n = \frac{1-\sqrt{n}}{2+\sqrt{n}}; g = -1$

- ○ $n_0 = 785$
- ○ $n_0 = 786$
- ○ $n_0 = 784$

Aufgabe 4: Berechnung eines Grenzwertes

a) Bestimmen Sie für die nachfolgend gegebenen Folgen, ob Sie konvergent oder divergent sind.

b) Berechnen Sie für die konvergenten Folgen den Grenzwert.

Folgen - konvergent oder divergent?

http://www.mathe-online.at/tests/grenz/konvdiv.html

Welche der angegebenen Folgen sind **konvergent** (d.h. besitzen einen Grenzwert für $n \to \infty$), welche sind **divergent**? Die beiden Kästchen in der untersten Zeile lassen sich durch Mausziehen bewegen - ordnen Sie sie den Ausdrücken, die die Folgen definieren, zu! Der Button "Zurücksetzen" stellt die Ausgangsposition mit zufällig plazierten Kästchen wieder her. Die Auswertung durch ein Punktesystem erfolgt unterhalb des Tests.

$\dfrac{n+1}{\lvert 2n-7 \rvert}$	$\dfrac{(-1)^n}{n^2+n}$	$\dfrac{n^{3/4}+1}{n^{1/2}+2}$	$\dfrac{6n^2+3n-1}{(n+4)^2}$
$\dfrac{2n^3+1}{3n^2+6n-2}$	$\dfrac{n^2+2}{7n-3}$	$\dfrac{(-1)^n(n+1)}{n+2}$	$\dfrac{2n+1}{3n-2}$

konvergent divergent

Aufgabe 5: Analyse der Folgen gemäß Schema

Analysieren Sie die Eigenschaften der nachfolgend gegebenen Folgen gemäß des vorgegebenen Schemas.

$$a_n = \frac{4n^2+n}{2n^2+1}$$

Analyse von Folgen – *Tabellarische Vorlage*

Folgenvorschrift $a_n = \frac{4n^2+n}{2n^2+1}$ **Aufzählung der ersten fünf Folgenelemente**	**Graphische Darstellung der Folge**
Monotonie	**Beschränktheit** **Obere Schranke:** **Supremum:**
Konvergenz/ Grenzwert	**Untere Schranke:** **Infimum:**

Aufgabe 6:

Richtig oder falsch?

http://math-www.uni-paderborn.de/~mathkit/Inhalte/Folgen/preview/index.html

Welche der folgenden Behauptungen sind richtig, welche sind falsch?

Jede monotone Folge ist konvergent.
- ○ richtig
- ○ falsch

Jede beschränkte Folge ist konvergent.
- ○ richtig
- ○ falsch

Jede konvergente Folge ist monoton und beschränkt.
- ○ richtig
- ○ falsch

Jede divergente Folge ist nicht beschränkt.
- ○ richtig
- ○ falsch

•