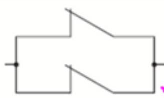
Vorlesung 12 27.10.2022

Logik 3

Beweistechniken
Prädikantenlogik - Quantoren

Korrektur für Vorlesungs-pdf 11 -Logik 2

NAND (NICHT-UND)	A, B → & → Q	$Q = \overline{A \wedge B}$ $= \neg(A \wedge B)$	<table><tr><th>A</th><th>B</th><th>Q</th></tr><tr><td>0</td><td>0</td><td>1</td></tr><tr><td>0</td><td>1</td><td>1</td></tr><tr><td>1</td><td>0</td><td>1</td></tr><tr><td>1</td><td>1</td><td>0</td></tr></table>	 Öffner in Reihenschaltung
NOR (NICHT-ODER)	A, B → ≥1 → Q	$Q = \overline{A \vee B}$ $= \neg(A \vee B)$	<table><tr><th>A</th><th>B</th><th>Q</th></tr><tr><td>0</td><td>0</td><td>1</td></tr><tr><td>0</td><td>1</td><td>0</td></tr><tr><td>1</td><td>0</td><td>0</td></tr><tr><td>1</td><td>1</td><td>0</td></tr></table>	 Öffner in Parallelschaltung

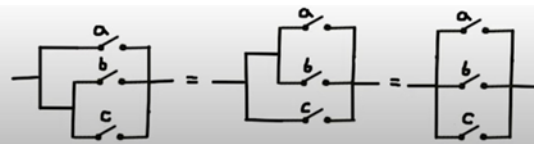
$\left.\begin{array}{l} A = 1 \\ B = 1 \end{array}\right\}$ wenn Schalter geöffnet wird

Abbildungen sind vertauscht

Visualisierung der Rechengesetze der Booleschen Algebra

Assoziativgesetz

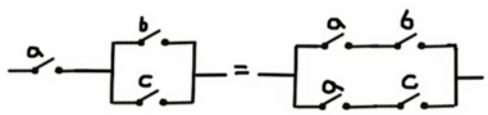
$a \vee (b \vee c) = (a \vee b) \vee c = a \vee b \vee c$,



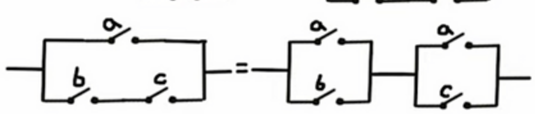
$\vee$ als Parallelschaltung

Distributivgesetz

$a \wedge (b \vee c) = (a \wedge b) \vee (a \wedge c)$,



$a \vee (b \wedge c) = (a \vee b) \wedge (a \vee c)$,



$\vee$ als Parallelschaltung

$\wedge$ als Reihenschaltung

https://www.youtube.com/watch?v=H8smM8fQWe8

Beweistechniken

Logisches Folgern

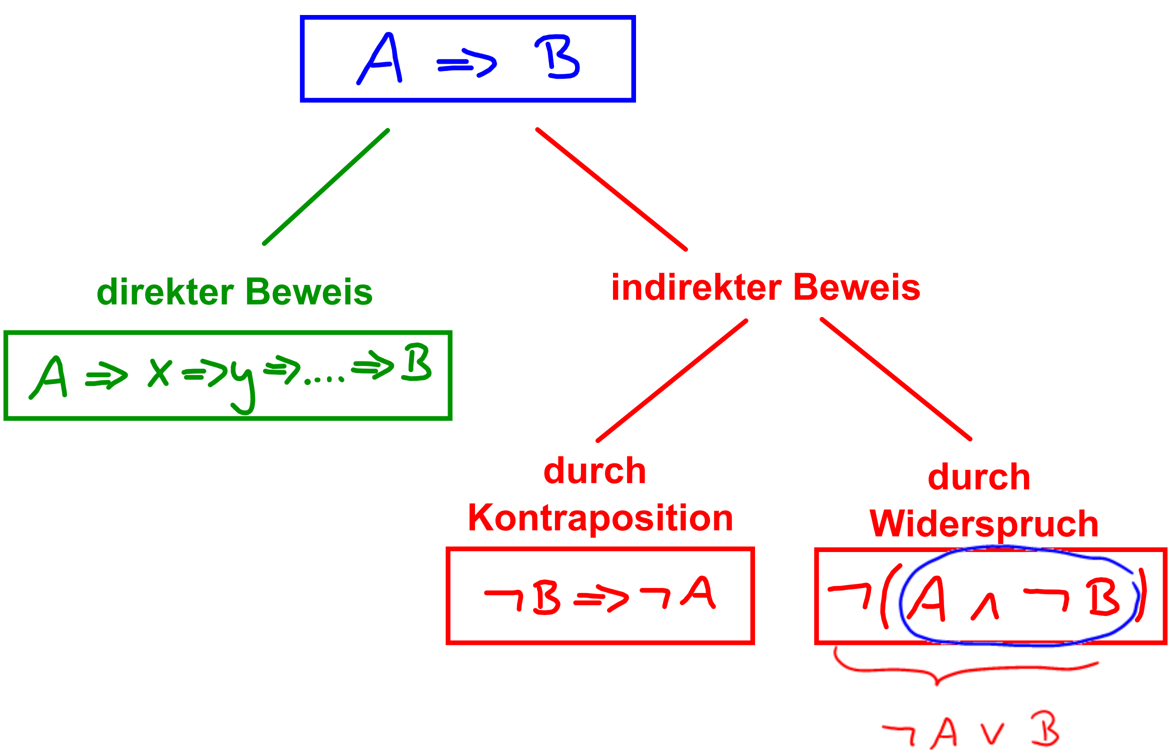
3.4 Beweistechniken

3.4.1 Was ist ein Beweis?

Ein Beweis ist eine vollständige und folgerichtige Argumentation über die Korrektheit einer Aussage.

- Eine Aussage enthält üblicherweise **Voraussetzungen und Behauptungen**.
- Die Argumentation muss die Gültigkeit der Behauptungen in all den Situationen nachweisen, in denen die Voraussetzung gilt.
- Hierbei ist die **Vollständigkeit der Argumentation** verlangt, d.h. jeder mögliche Einzelfall muss durch die Argumentation überdeckt werden.
- Außerdem ist die **Folgerichtigkeit** verlangt, so dass jedes einzelne Argument in der Argumentationskette als korrekt abgesichert ist.

Ein Beweis ist also eine Kette von Aussagen, die gemeinsam haben, dass sie alle wahr sind, falls die Voraussetzungen der Aussage wahr sind.



3.4.3 Direkter Beweis $\boxed{A \Rightarrow \ldots \Rightarrow \ldots \Rightarrow \ldots \Rightarrow B}$

Beim direkten Beweis einer Implikation $A \Rightarrow B$ geht man von einer wahren Aussage A aus und schließt durch Aneinanderreihung von korrekten (geltenden) Implikationen auf die Aussage „B ist wahr".

Logischer Hintergrund:

Die nachfolgende Aussage ist eine Tautologie Satz v. d. Transitivität

$\boxed{((A \Rightarrow C) \wedge (C \Rightarrow B)) \Rightarrow (A \Rightarrow B)}$ (bzw. $(A \wedge (A \Rightarrow C) \wedge (C \Rightarrow B)) \Rightarrow B$)

Die Allgemeingültigkeit dieser Aussage verifiziert man anhand der nachfolgenden Wahrheitstafel.

A	B	C	$A \Rightarrow C$	$C \Rightarrow B$	$(A \Rightarrow C) \wedge (C \Rightarrow B)$	$A \Rightarrow B$	$((A \Rightarrow C) \wedge (C \Rightarrow B)) \Rightarrow (A \Rightarrow B)$
w	w	w	w	w	w	w	w
w	w	f	f	w	f	w	w
w	f	w	w	f	f	f	w
w	f	f	f	w	f	f	w
f	w	w	w	w	w	w	w
f	w	f	w	w	w	w	w
f	f	w	w	f	f	w	w
f	f	f	w	w	w	w	w

Tautologie

Veranschaulichung:

Es sei A die Aussage „Es regnet" und B die Aussage „Die Straße ist nass". Dann ist die Implikation $A \Rightarrow B$ bewiesen, wenn wir aus einer wahren Aussage A , d. h. „Es regnet" und bereits bewiesener Aussagen auf die Aussage B „Die Straße ist nass" schließen können.

Sei $A \Rightarrow C$ die bewiesene Aussage „Wenn es regnet, fallen Wassertropfen vom Himmel" und $C \Rightarrow B$ die bewiesene Aussage „Wenn Wassertropfen vom Himmel fallen, wird der Boden nass". Hieraus kann nun gefolgert werden, dass dann bei Regen auch die Straße nass wird.

siehe nächste Seite

Beispiel:

Satz: Wenn die natürliche Zahl n durch 6 teilbar ist, dann ist sie auch durch 3 teilbar.

Direkter Beweis:

Wenn die natürliche Zahl n durch 6 teilbar ist, dann $\exists k \in \mathbb{N} : n = 6 \cdot k$.

Die Zahl 6 ist darstellbar als Produkt $6 = 2 \cdot 3$, durch Einsetzen erhalten wir dann $n = 2 \cdot 3 \cdot k$.

Hieraus ist ersichtlich, dass n durch 3 teilbar ist.

Beispiel für einen direkten Beweis $\boxed{A \Rightarrow \ldots \Rightarrow \ldots \Rightarrow \ldots \Rightarrow B}$

Start A $\Longrightarrow$ Ziel B $\exists l \in \mathbb{N}: n = 3 \cdot l$

Beispiel:

Satz: Wenn die natürliche Zahl n durch 6 teilbar ist, dann ist sie auch durch 3 teilbar.

Direkter Beweis:

Wenn die natürliche Zahl n durch 6 teilbar ist, dann $\exists k \in \mathbb{N}: n = 6 \cdot k$.

Die Zahl 6 ist darstellbar als Produkt $6 = 2 \cdot 3$, durch Einsetzen erhalten wir dann $n = 2 \cdot 3 \cdot k$.

Hieraus ist ersichtlich, dass n durch 3 teilbar ist.

Aussage A

Start: $\boxed{6 \text{ teilt } n}$ gültige Rechengesetze

$6 \mid n$

$\exists k \in \mathbb{N}: n = 6 \cdot k$ Primfaktorzerlegung

$\exists k \in \mathbb{N}: n = (2 \cdot 3) \cdot k$ Kommutativgesetz

$\exists k \in \mathbb{N}\ n = (3 \cdot 2) \cdot k$ Assoziativgesetz

$\exists k \in \mathbb{N}: n = 3 \cdot \underbrace{(2 \cdot k)}_{l}$

$\exists l \in \mathbb{N}: n = 3 \cdot l \Rightarrow$ $\boxed{n \text{ ist durch 3 teilbar}}$

mit $l = 2k$ Aussage B Ziel

Damit ist die Aussage bewiesen.

■

q.e.d.

(was zu beweisen)

✓

•

3.4.4 Indirekter Beweis

Ein indirekter Beweis einer Implikation $A \Rightarrow B$ wird dann verwendet, wenn ein direkter Beweis nicht zum Ziel führt oder sich ein indirekter Beweis leichter durchführen lässt. Es gibt zwei Varianten „**Beweis durch Kontraposition**" und „**Beweis durch Widerspruch**", die auf den Äquivalenzen

$$(A \Rightarrow B) \Leftrightarrow (\neg B \Rightarrow \neg A) \Leftrightarrow \neg(A \wedge \neg B)$$

beruhen. Die beiden indirekten Beweistechniken werden in den nachfolgenden Unterabschnitten genauer erläutert.

„direkter Beweis"

$A \Rightarrow \ldots \Rightarrow \ldots \Rightarrow \ldots$

Indirekter Beweis für $A \Rightarrow B$

Start Ziel

3.4.4.1 Beweis durch Kontraposition $\boxed{\neg B \Rightarrow \neg A}$

Man nimmt an, dass B falsch ist und leitet daraus ab, dass A falsch ist. Hiermit ist dann die Wahrheit der Aussage $\neg B \Rightarrow \neg A$ bewiesen und damit $A \Rightarrow B$.

Logischer Hintergrund:

Die nachfolgende Aussage ist eine Tautologie und zeigt damit die logische Äquivalenz der beiden Teilaussagen:

$$\boxed{(A \Rightarrow B) \Leftrightarrow (\neg B \Rightarrow \neg A)}$$

Diese Äquivalenz ist an der folgenden Wahrheitstafel erkennbar.

A	B	$\neg A$	$\neg B$	$A \Rightarrow B$	$\neg B \Rightarrow \neg A$	$(A \Rightarrow B) \Leftrightarrow (\neg B \Rightarrow \neg A)$
f	f	w	w	w	w	w
f	w	w	f	w	w	w
w	f	f	w	f	f	w
w	w	f	f	w	w	w

Veranschaulichung:
Es ist gleichwertig zu beweisen „Wenn es regnet, ist die Straße nass." oder "Ist die Straße nicht nass, so regnet es nicht."

weiteres Beispiel siehe nächste Seite

Beispiel:

Satz: Ist n eine durch 4 teilbare natürliche Zahl, so ist n+3 keine Quadratzahl.

Indirekter Beweis durch Kontraposition:

Wir nehmen an, n+3 sei eine Quadratzahl, d.h. es gibt eine natürliche Zahl k mit n+3=k^2.

1. Fall: k gerade, d.h. es gibt $m \in \mathbb{N}$ mit $k = 2m$.
Dann ist $k^2 = 4m^2$ durch 4 teilbar und folglich ist $n = k^2 - 3$ nicht durch 4 teilbar.

2. Fall: k ungerade, d.h. es gibt $m \in \mathbb{N}_0$ mit $k = 2m+1$.
Dann ist $k^2 = 4m^2 + 4m + 1$, d.h. $k^2 - 1$ ist durch 4 teilbar, also $n = k^2 - 3 = (k^2 - 1) - 2$ nicht.

Beispiele

$n=16$ $n+3=19 \neq k^2$

$n=12$ $n+3=15 \neq k^2$

$n=20$ $23 \neq k^2$

Beispiel für einen indirekten Beweis - Beweis durch Kontraposition

$\boxed{\neg B \Rightarrow \neg A}$

Beispiel: $\neg A$: n ist nicht durch 4 teilbar

Satz: $\underbrace{\text{Ist n eine durch 4 teilbare natürliche Zahl}}_{A}$, so $\underbrace{\text{ist n+3 keine Quadratzahl}}_{B}$.

Indirekter Beweis durch Kontraposition:

Wir nehmen an, n+3 sei eine Quadratzahl, d.h. es gibt eine natürliche Zahl k mit n+3=k^2.

1. Fall: k gerade, d.h. es gibt $m \in \mathbb{N}$ mit $k = 2m$.
Dann ist $k^2 = 4m^2$ durch 4 teilbar und folglich ist $n = k^2 - 3$ nicht durch 4 teilbar.

2. Fall: k ungerade, d.h. es gibt $m \in \mathbb{N}_0$ mit $k = 2m+1$.
Dann ist $k^2 = 4m^2 + 4m + 1$, d.h. $k^2 - 1$ ist durch 4 teilbar, also $n = k^2 - 3 = (k^2-1) - 2$ nicht.

zu zeigen: $A \Rightarrow B$

$\neg(\exists k \in \mathbb{N} : n+3 = k^2)$

$\boxed{A: \exists m \in \mathbb{N} : n = 4 \cdot m} \Rightarrow \boxed{B: \forall k \in \mathbb{N} : n+3 \neq k^2}$

$\neg(\exists m \in \mathbb{N} : n = 4 \cdot m)$

zu zeigen
Kontraposition: $\neg B \Rightarrow \neg A$

Start $\boxed{\neg B: \exists k \in \mathbb{N} : n+3 = k^2} \Rightarrow \boxed{\neg A: \forall m \in \mathbb{N} : n \neq 4m}$ Ziel

Start: $\exists k \in \mathbb{N} : n+3 = k^2$

Fallunterscheidung

k ist gerade

$k = 2 \cdot \ell$ mit $\ell \in \mathbb{N}$

Fall 1 $\Downarrow$

$n+3 = (2 \cdot \ell)^2$

$n = \underbrace{\underbrace{4\ell^2}_{\text{durch 4 teilbar}} - 3}_{\text{nicht durch 4 teilbar}}$

$\Leftrightarrow \neg A$ Fall 1

k ist ungerade

$k = 2\ell + 1$ mit $\ell \in \mathbb{N}_0$

alternativ ($k = 2\ell - 1$ mit $\ell \in \mathbb{N}$)

Fall 2 $\Downarrow$

$n+3 = (2\ell+1)^2$

$n = 4\ell^2 + 4\ell + 1 - 3$

$n = \underbrace{\underbrace{4(\ell^2+\ell)}_{\text{durch 4 teilbar}} - 2}_{\text{nicht durch 4 teilbar}}$

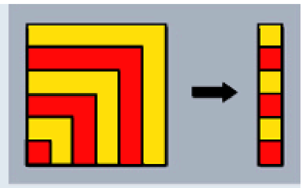
$\Leftrightarrow \neg A$ Fall 2

Ziel $\Rightarrow \neg A$ ✓

Beispiel für einen indirekten Beweis - Beweis durch Kontraposition

$\boxed{\neg B \Rightarrow \neg A}$

Gesucht ist diesmal ein Beweis für den Satz:
Wenn das Quadrat einer natürlichen Zahl n gerade ist, so ist auch n gerade.



Beispiel:
$n^2 = 16 \Rightarrow n = 4$
$= 36 \quad 6$
$64 \quad 8$

Prinzip	Beispiel
1. Schritt: Formuliere den zu beweisenden Satz $A \to B$.	$\underbrace{\text{Wenn } n^2 \text{ gerade ist}}_{A}$, so $\underbrace{\text{ist auch } n \text{ gerade}}_{B}$. $\Rightarrow$
2. Schritt: Nehme $\neg B$ an.	Angenommen $\neg B$: n ist ungerade $\neg B$
3. Schritt: Leite weitere Aussagen aus der Annahme $\neg B$ ab.	Wenn n ungerade ist, kann es in der Form $n = 2k + 1$ geschrieben werden, wobei k eine natürliche Zahl ist.
4. Schritt: Folgere hieraus $\neg A$.	Mit $n = 2k + 1$ folgt für n^2: $n^2 = (2k+1)^2 = (2k)^2 + 2 \cdot (2k) \cdot 1 + 1^2 = 4k^2 + 4k + 1 = 2 \cdot (2k^2 + 2k) + 1$ Somit ist n^2 wieder eine ungerade Zahl, also gilt $\neg A$. $\neg A$
Nach der Kontrapositionsregel ist durch das Zeigen von $\neg B \to \neg A$ auch gleichzeitig $A \to B$ bewiesen.	Der zu beweisende Satz $A \to B$ ist somit bewiesen. ✓

http://www-ai.math.uni-wuppertal.de/~schaefer/infoI_WS09/Logik/index.htm?31

•

Widerspruch zur Annahme

Annahme ... → falsch → wahr

Indirekter Beweis

3.4.4.2 Beweis durch Widerspruch $\boxed{\neg(A \wedge \neg B)}$

Man nimmt an, dass A wahr und B falsch ist, um daraus einen Widerspruch herzuleiten. Hiermit ist dann die Wahrheit der Aussage $\neg(A \wedge \neg B)$ bewiesen und damit $A \Rightarrow B$.

Logischer Hintergrund:

Die nachfolgende Aussage ist eine Tautologie und zeigt damit die logische Äquivalenz der beiden Teilaussagen:

$\boxed{(A \Rightarrow B) \Leftrightarrow \neg(A \wedge \neg B)}$ (bzw. $(A \Rightarrow B) \Leftrightarrow ((A \wedge \neg B) \Rightarrow \mathit{falsch})$)

Die Allgemeingültigkeit dieser Aussage verifiziert man anhand der nachfolgenden Wahrheitstafel.

A	B	$\neg B$	$A \Rightarrow B$	$A \wedge \neg B$	$\neg(A \wedge \neg B)$	$(A \Rightarrow B) \Leftrightarrow \neg(A \wedge \neg B)$
f	f	w	w	f	w	w
f	w	f	w	f	w	w
w	f	w	f	w	f	w
w	w	f	w	f	w	w

Veranschaulichung:
Es ist gleichwertig die Aussage „Wenn es regnet, ist die Straße nass." zu beweisen oder die Aussage "es regnet und die Straße ist nicht nass." zu einem Widerspruch zu führen.

Beispiel:

Wir kommen mit diesem Beispiel auf den Satz aus Abschnitt 3.4.3 zurück und beweisen ihn nicht direkt, sondern indirekt durch Widerspruch.

siehe nächste Seite

Satz: Wenn die natürliche Zahl n durch 6 teilbar ist, dann ist sie auch durch 3 teilbar.

Indirekter Beweis durch Widerspruch:

Wir nehmen an: n ist durch 6 teilbar und n ist nicht durch 3 teilbar.

Es gibt also $k \in \mathbb{N} : n = 6 \cdot k$ und es gilt: $\forall l \in \mathbb{N} : n \neq 3 \cdot l$.

Mit der Gültigkeit von $6 = 2 \cdot 3$ erhalten wir $n = 2 \cdot 3 \cdot k = (2 \cdot k) \cdot 3$.

Mit $l = 2 \cdot k$ haben wir eine natürliche Zahl l mit $n = 3 \cdot l$ gefunden. Dieses stellt jedoch einen Widerspruch zur Annahme dar, und der obige Satz ist bewiesen.

Beispiel für einen indirekten Beweis - Beweis durch Widerspruch

$\boxed{\neg(A \wedge \neg B)}$

Satz: Wenn die natürliche Zahl n durch 6 teilbar ist, dann ist sie auch durch 3 teilbar.

$\underbrace{\text{Wenn die natürliche Zahl n durch 6 teilbar ist}}_{A} \Rightarrow \underbrace{\text{dann ist sie auch durch 3 teilbar}}_{B}$

Indirekter Beweis durch Widerspruch:

Wir nehmen an: n ist durch 6 teilbar und n ist nicht durch 3 teilbar.

Es gibt also $k \in \mathbb{N} : n = 6 \cdot k$ und es gilt: $\forall l \in \mathbb{N} : n \neq 3 \cdot l$.

Mit der Gültigkeit von $6 = 2 \cdot 3$ erhalten wir $n = 2 \cdot 3 \cdot k = (2 \cdot k) \cdot 3$.

Mit $l = 2 \cdot k$ haben wir eine natürliche Zahl l mit $n = 3 \cdot l$ gefunden. Dieses stellt jedoch einen Widerspruch zur Annahme dar, und der obige Satz ist bewiesen.

Annahme:

$A \wedge \underline{\neg B}$

Ziel: Widerspruch erhalten

n ist durch 6 teilbar

$\exists k \in \mathbb{N} : n = 6 \cdot k$

$\Downarrow$

Siehe direkter Beweis

$\Downarrow$

$\exists k \in \mathbb{N} : n = 3(2k)$

$n = 3 \cdot l$ mit $l = 2k$

n ist nicht durch 3 teilbar

$\nexists l \in \mathbb{N} : n = 3 \cdot l \Rightarrow \underline{\forall l \in \mathbb{N} : n \neq 3 \cdot l}$

es gibt kein

offiziell

Widerspruch

$\Rightarrow A \wedge \neg B$ ist falsch

$\Rightarrow \neg(A \wedge \neg B)$ ist wahr

$\Rightarrow A \Rightarrow B$ ist wahr

$\Rightarrow$ Aussage ist bewiesen

Beispiel für einen indirekten Beweis - Beweis durch Widerspruch

$\boxed{\neg(A \wedge \neg B)}$

Im *Widerspruchs-Beweis* wird anstelle von $p \to q$ die logisch äquivalente Aussage $(p \wedge \neg q) \to \mathsf{f}$ bewiesen. Eine Aussage der Art $r \to \mathsf{f}$ ist genau dann wahr, wenn r falsch ist. Also ist ein Widerspruchs-Beweis von $p \to q$ ein Beweis dafür, dass $p \wedge \neg q$ falsch ist. Dazu genügt es, eine falsche Aussage aus der Hypothese $p \wedge \neg q$ herzuleiten. Zur Illustration des Vorgehens beweisen wir die Aussage

Wenn a und b gerade natürliche Zahlen sind, dann ist auch $a \cdot b$ gerade.

mittels Widerspruchs-Beweis. Wir zeigen dazu, dass die Aussage

a und b sind gerade natürliche Zahlen, und $a \cdot b$ ist ungerade.

falsch ist. Diese Aussage ist gleichzeitig auch die Hypothese.

$p \wedge \neg q$: a und b sind gerade, und $a \cdot b$ ist ungerade

s_1: a ist gerade, und $b = 2 \cdot k$ für eine ganze Zahl k, (Definition einer geraden Zahl)

s_2: a ist gerade, und $a \cdot b = a \cdot (2 \cdot k)$ für eine ganze Zahl k, (Multiplikation von a und b)

s_3: a ist gerade, und $a \cdot b = (a \cdot 2) \cdot k$ für eine ganze Zahl k, (Assoziativität von $\cdot$)

s_4: a ist gerade, und $a \cdot b = (2 \cdot a) \cdot k$ für eine ganze Zahl k, (Kommutativität von $\cdot$)

s_5: a ist gerade, und $a \cdot b = 2 \cdot (a \cdot k)$ für eine ganz Zahl k, (Assoziativität von $\cdot$)

s_6: a ist gerade, und $a \cdot b = 2 \cdot k'$ für eine ganze Zahl k', (Ersetzung von $a \cdot k$ durch k')

s_7: a ist gerade, und $a \cdot b$ ist gerade, und $a \cdot b$ ist ungerade. (Definition einer geraden Zahl)

Meinel/ Mundhenk - http://www.scribd.com/sorin_va/d/54137774/35-Beweis-durch-Kontraposition

•

3.4.6 Weitere Beweistechniken

Beweis durch Gegenbeispiel

Es ist gezeigt, dass die Schlussfolgerung „$A \Rightarrow B$" falsch ist, wenn ein Beispiel gefunden werden kann, bei dem A wahr und B falsch ist. Dann kann die Behauptung „$A \Rightarrow B$" nicht wahr sein, d.h. die Implikation gilt nicht.

Beispiel:

Die Implikation („x ist eine natürliche ungerade Zahl" $\Rightarrow$ „x ist eine Primzahl") ist falsch, da für x = 9 die Aussage „x ist eine natürliche ungerade Zahl" wahr ist und die Aussage „x ist eine Primzahl" ist falsch. Mit diesem Gegenbeispiel ist gezeigt, dass die Implikation nicht allgemein gilt.

Würde man den Gültigkeitsbereich der Implikation auf alle natürlichen ungeraden Zahlen >1 und ≤ 7 einschränken, so wäre die Implikation gültig.

Existenzbeweis

Dieses ist häufig ein konstruktiver Beweis, wobei ein Element konstruiert wird, das der Behauptung genügt.

Eindeutigkeitsbeweis

In einem Eindeutigkeitsbeweis wird gezeigt, dass es genau ein Element gibt, dass der Bedingung genügt. Hierzu nimmt man meistens die Existenz zweier Elemente an, die der Bedingung genügen und zeigt, dass diese identisch sind.

direkt mit Verwendung nur von Äquivalenzen $\Leftrightarrow$

oder zwei einzelne Nachweise

Beispiel: Beweis einer Äquivalenz $(A \Leftrightarrow B) \Leftrightarrow (A \Rightarrow B \wedge B \Rightarrow A)$

mit ggfs. unterschiedlichen Methoden

(2) Satz: Eine natürliche Zahl n ist genau dann gerade, wenn ihr Quadrat gerade ist.

Mit der Aussage A: „$n \in \mathbb{N}$ ist gerade“ und der Aussage B: „n^2 ist gerade“ kann der obige Satz formuliert werden als: $A \Leftrightarrow B$, d.h. $n \in \mathbb{N}\, \textit{ist gerade} \Leftrightarrow n^2 \textit{ ist gerade}$

Der Beweis wird in zwei Teilschritten durchgeführt: $A \Rightarrow B$ und $B \Rightarrow A$.

Beweis $A \Rightarrow B$ durch einen direkten Beweis:

Da $n \in \mathbb{N}$ gerade ist, gibt es eine natürliche Zahl *m* mit $n = 2 \cdot m$.

Dann ist $n^2 = (2 \cdot m) \cdot (2 \cdot m) = 4 \cdot m^2 = 2 \cdot (2 \cdot m^2)$.

Hieraus folgt, dass n^2 gerade ist, da $2 \cdot m^2$ eine natürliche Zahl ist.

Beweis $B \Rightarrow A$ durch einen indirekten Beweis (Kontraposition):

d.h. es wird $\neg A \Rightarrow \neg B$ gezeigt.

Gilt $\neg A$, so ist $n \in \mathbb{N}$ ungerade und $\exists\, m \in \mathbb{N}$ mit $n = 2 \cdot m - 1$.

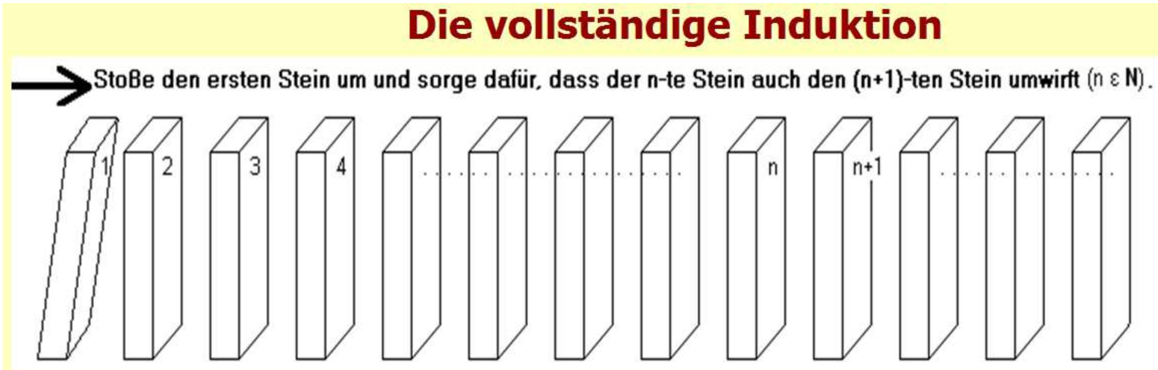
Dann ist $n^2 = (2 \cdot m - 1) \cdot (2 \cdot m - 1) = 4 \cdot m^2 - 4 \cdot m + 1 = 2 \cdot (2 \cdot m^2 - 2 \cdot m + 1) - 1$.

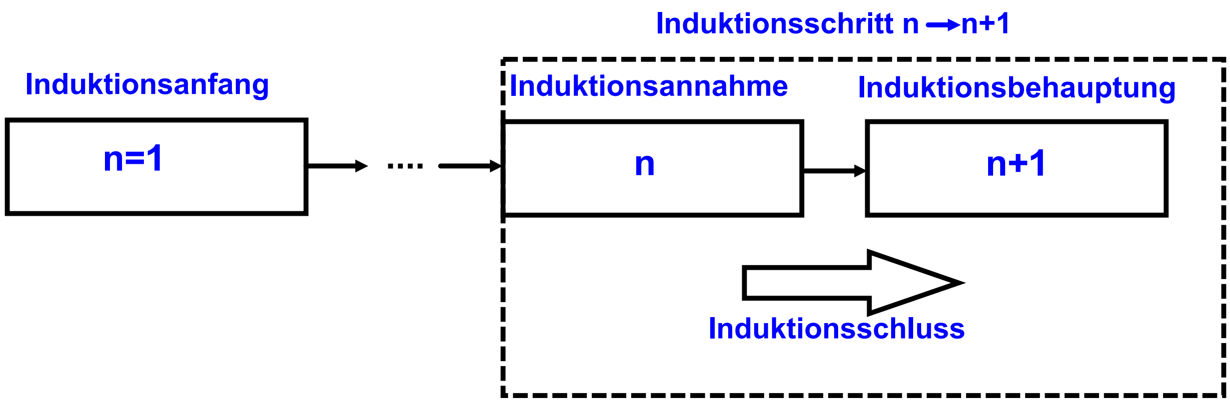
Hieraus folgt, dass n^2 ungerade ist, da $2 \cdot m^2 - 2 \cdot m + 1$ eine natürliche Zahl ist.

Somit gilt: $\neg B$.

Aus beiden Beweisteilschritten folgt insgesamt: $A \Leftrightarrow B$.

Beweistechnik - vollständige Induktion





Die Grundlage der Theorie der natürlichen Zahlen bilden die Peano-Axiome (Giuseppe Peano (1858 - 1932)).

Definition 2.1: Peano-Axiome

Die Menge $\mathbb{N}$ der natürlichen Zahlen ist durch folgende Eigenschaften charakterisiert:

(P1) 1 ist eine natürliche Zahl

(P2) Jede natürliche Zahl hat genau einen von 1 verschiedenen Nachfolger, der eine natürliche Zahl ist.

(P3) 1 ist kein Nachfolger einer natürlichen Zahl.

(P4) Verschiedene natürliche Zahlen haben verschiedene Nachfolger.

(P5) Für jede Teilmenge M von $\mathbb{N}$ mit den Eigenschaften:

(1) $1 \in M$ und

(2) Ist $n \in M$, so ist auch der Nachfolger Element von M,

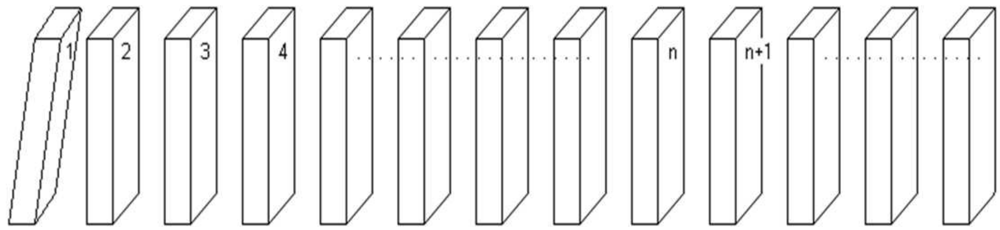
gilt: $M = \mathbb{N}$.

Bemerkung:

- Das letzte Peano-Axiom bildet die Grundlage für die vollständige Induktion.
- Die Peano-Axiome können auch bei 0 beginnen, wenn man 0 in die natürlichen Zahlen mit einschließt.

Die vollständige Induktion

→ Stoße den ersten Stein um und sorge dafür, dass der n-te Stein auch den (n+1)-ten Stein umwirft (n ε N).



http://www.kilchb.de/vollstind.html

Beispiele:

$1+2+3+4+5+\ldots+n$

Die Summe der ersten n natürlichen Zahlen kann über einen Bruch $\frac{n(n+1)}{2}$ ***berechnet werden:*** ***Es gilt*** $\sum_{k=1}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2}$ Gaußsche Summenformel

Video zur Vollständigen Induktion

Video: http://www.youtube.com/watch?v=209kMfr_0Pk&feature=related

3.4.5 Methode der vollständigen Induktion

Die Methode der vollständigen Induktion (oder kurz vollständige Induktion) wird häufig dann angewendet, wenn All-Aussagen zu natürlichen Zahlen vorliegen z.B. in Form einer von n abhängigen Formel. Die **Beweisidee** für eine von natürlichen Zahlen abhängige Aussage A(n) mit n = 1, 2, 3, ... besteht darin, die Behauptung für das kleinste n zu beweisen und dann einen Schluss von n auf n+1 durchzuführen, d.h. von einer gültigen Aussage A(n) auf die Gültigkeit von A(n+1) zu schließen.

Der **Beweis durch vollständige Induktion** gliedert sich in einzelne Schritte:

Induktionsanfang: A(1)

Die Aussage wird für die kleinste natürliche Zahl, für die die Aussage wahr sein soll, bewiesen.

kann auch n = 2, 3 oder...

Induktionsschritt von n auf n+1:

Im Induktionsschritt soll von einer wahren Aussage A(n) auf die Gültigkeit von A(n+1) geschlossen werden. Der Induktionsschritt gliedert sich in drei Teilschritte:

Induktionsannahme: A(n)

Es wird angenommen, dass die Aussage $A(n)$ wahr ist.

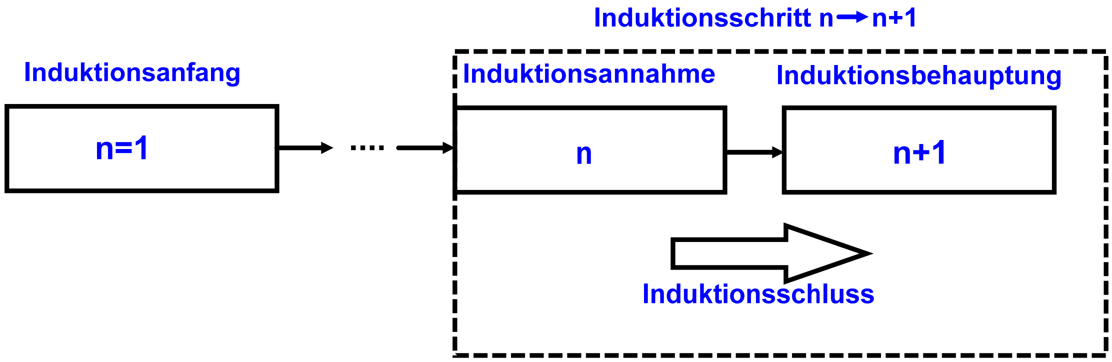
Induktionsbehauptung: A(n+1)

Die Aussage $A(n+1)$ soll gezeigt werden.

Induktionsschluss: A(n+1) ist gültig, wenn A(n) gültig

Es wird die Gültigkeit von $A(n+1)$ durch Anwenden von $A(n)$ und weiterer bewiesener Aussagen nachgewiesen.

Beweistechnik - vollständige Induktion



Vorgehensschema für die vollständige Induktion

(1) zu beweisende Aussage:

(2) Induktionsanfang:

(3) Induktionsschritt n $\longrightarrow$ n+1:

(a) Induktionsannahme

(b) Induktionsbehauptung (z.z.)

(c) Induktionsschluss

Nachweis der Induktionsbehauptung A(n+1)
- vom "Start" zum "Ziel"
- mit Verwendung von A(n)

Beispiel 1:

Die Summe der ersten n natürlichen Zahlen kann über einen Bruch $\frac{n(n+1)}{2}$ berechnet werden: *Es gilt* $\sum_{k=1}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2}$ $\forall n \in \mathbb{N}$

Vorgehensschema für die vollständige Induktion

(1) zu beweisende Aussage:

$$\sum_{k=1}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2}$$

(2) Induktionsanfang: $A(1)$

$n=1$: linke Seite $\sum_{k=1}^{1} k = 1 \overset{\checkmark}{=}$ rechte Seite $\frac{1(1+1)}{2} = 1$ Aussage ist für $n=1$ korrekt

(3) Induktionsschritt n ⟶ n+1:

für n setzen wir $n+1$ ein! mit Vereinfachung

(a) Induktionsannahme $A(n)$ Aussage für n

$$\sum_{k=1}^{n} k = \boxed{\frac{n(n+1)}{2}}$$

(b) Induktionsbehauptung (z.z.) $A(n+1)$

$$\underbrace{\sum_{k=1}^{n+1} k}_{\text{Start}} = \frac{(n+1)((n+1)+1)}{2} = \underbrace{\frac{(n+1)(n+2)}{2}}_{\text{Ziel}} = \frac{n^2+3n+2}{2}$$

(c) Induktionsschluss $A(n+1)$ mit Hilfe von $A(n)$ zeigen und gültigen Umformungen

$$\underbrace{\sum_{k=1}^{n+1} k}_{\text{Start}} = \underbrace{\sum_{k=1}^{n} k}_{\text{Summe 1 bis n}}{}^{A(n)} + \underbrace{(n+1)}_{(n+1).\ \text{Summand Abspaltung}}$$

aufgrund Ind.annahme

$$= \boxed{\frac{n(n+1)}{2}} + n + 1 = \frac{n(n+1)+2(n+1)}{2}$$

$$= \frac{n^2+3n+2}{2} = \boxed{\frac{(n+1)(n+2)}{2}} \checkmark$$

Ziel

zu Hause

Beispiel 3:

Die Summe der ungeraden Zahlen bis n ergibt die Quadratzahl n^2.

Es gilt $\sum_{k=1}^{n}(2k-1) = n^2$ $\forall n \in \mathbb{N}$

Vorgehensschema für die vollständige Induktion

(1) zu beweisende Aussage:

(2) Induktionsanfang:

(3) Induktionsschritt n $\longrightarrow$ n+1:

(a) Induktionsannahme

(b) Induktionsbehauptung (z.z.)

(c) Induktionsschluss

Beispiel - Vollständige Induktion

(1) zu beweisende Aussage:

Die Summe der ungeraden Zahlen bis n ergibt die Quadratzahl n^2.

Es gilt $\sum_{k=1}^{n}(2k-1) = n^2$ $\quad \forall n \in \mathbb{N}$

(2) Induktionsanfang:

$$\sum_{k=1}^{1}(2k-1) = 1 \overset{!}{=} 1^2 = 1 \quad \checkmark$$

(3) Induktionsschritt n ⟶ n+1:

(a) Induktionsannahme $A(n)$

$$\sum_{k=1}^{n}(2k-1) = n^2$$

(b) Induktionsbehauptung (z.z.) $A(n+1)$

$$\sum_{k=1}^{n+1}(2k-1) = (n+1)^2$$

(c) Induktionsschluss zu zeigen $A(n+1)$ mit Hilfe $A(n)$

$$\underbrace{\sum_{k=1}^{n+1}(2k-1)}_{\substack{A(n+1)\ \text{linke Seite} \\ \text{START}}} = \underbrace{\left(\sum_{k=1}^{n}(2k-1)\right)}_{A(n)} + 2(n+1) - 1$$

$$= n^2 + 2n + 1$$

$$= \underbrace{(n+1)^2}_{\substack{A(n+1)\ \text{ZIEL} \\ \text{rechte Seite}}} \quad \checkmark$$

Prädikatenlogik

Prädikatenlogik

Definition 3.10: Aussageform (oder auch Prädikat)

Eine **Aussageform** ist ein Satz, der eine oder mehrere Variablen enthält und der nach dem Ersetzen der Variablen durch konkrete Werte in eine Aussage übergeht.

Eine Aussageform $A(x)$ ist somit in Abhängigkeit von der Variablen x entweder wahr oder falsch, wobei x aus einer geeigneten Grundmenge sein muss.

(1) Die Aussageform

$$A(x) := \text{" Punkte } P_1 = (1,2), P_2 = (2,4) \text{ und } P_3 = (3,x) \text{ liegen auf einer Geraden."}$$

hat für die Aussage $A(6)$ den Wahrheitswert $\omega(A(6)) = w$ und für die Aussage $A(8)$ den Wahrheitswert $\omega(A(8)) = f$.

(2) Die Aussageform $B(x,y) := "x = 5y"$ hat für die Aussage $B(25,5)$ den Wahrheitswert $\omega(B(25,5)) = w$ und für die Aussage $B(12,3)$ den Wahrheitswert $\omega(B(12,3)) = f$.

(3) Aussage „Hamburg liegt an der Elbe" → wahr
Aussage „Bremen liegt an der Elbe" → falsch
einstelliges P Prädikat / Aussageform „ x liegt an der Elbe"
mit $x \in M_1 = \{$ alle Städte Deutschlands $\}$

$$P_1(x): \begin{cases} x \in M_1 \to \{w, f\} \\ \text{Hamburg} \to w \\ \text{Bremen} \to f \\ \vdots \end{cases}$$

Quantoren

„Für alle Städte Deutschlands gilt: Sie liegen an der Elbe" $\underbrace{\forall x \in M_1 : P_1(x)}$ → Aussage → falsch

„Es gibt mindestens eine Stadt Deutschlands, die an der Elbe liegt" $\underbrace{\exists x \in M_1 : P_1(x)}$ → Aussage → wahr

Bemerkung:
Ein **n-stelliges Prädikat** P ist eine Abbildung $P: M_1 \times M_2 \times ... \times M_n \to \{w, f\}$, wobei $M_1, M_2, ..., M_n$ beliebige Mengen sind.

(4) Beispiel zweistelliges Prädikat
P_2 : „ x liegt an y"
$x \in M_1 = \{$ alle Städte Deutschlands $\}$
$y \in M_2 = \{$ alle Flüsse Deutschlands $\}$

$\underbrace{\forall x \in M_1 \forall y \in M_2 : P_2(x,y)}$
Aussage
↓
falsch

$$P_2: \begin{cases} M_1 \times M_2 \to \{w, f\} \\ \quad \in \\ (x,y) \longrightarrow \dots \end{cases}$$

(Hamburg, Elbe) → w
(Hamburg, Rhein) → f
(München, Rhein) → f
⋮

3.2.2 Quantoren

Sei A(x) eine Aussageform mit der Variablen $x \in M$ (vgl. Abschnitt 3.1.1). Wir schreiben:

Aussage

- $\boxed{\forall x \in M : A(x)}$ als Abkürzung für die Aussage „Für alle x der Menge M ist A(x) wahr".

  „Für alle"

  ∀ heißt **Allquantor** (Zeichen ist ein „umgedrehtes A")

  Eine alternative Notationen wäre z. B. $\forall_{x \in M}$.

Aussage

- $\boxed{\exists x \in M : A(x)}$ als Abkürzung für die Aussage „Es existiert mindestens ein x aus der Menge M, so dass A(x) wahr ist".

  „Es gibt mindestens"

  ∃ heißt **Existenzquantor** (Zeichen ist ein „gespiegeltes E")

  Eine alternative Notationen wäre z. B. $\exists_{x \in M}$.

- $\boxed{\text{Sonderfall } \exists ! x \in M : A(x)}$ als Abkürzung für die Aussage „Es existiert **genau ein x** aus der Menge M, so dass A(x) wahr ist".

  ∃! heißt **Quantor der eindeutigen Existenz**

  Eine alternative Notationen wäre z. B. $\exists !_{x \in M}$.

- Ein Quantor ist ein Operator der Prädikatenlogik macht ein einstelliges Prädikat zu einer Aussage

- Zwei Quantoren machen ein zweistelliges Prädikat zu einer Aussage.

Beispiel:

$P(x) =$ „x ist grün" mit $x \in M = \{$ alle Äpfel $\}$

(1) $\forall x \in M : P(x) \rightarrow$ „alle Äpfel sind grün" → falsch

(2) $\exists x \in M : P(x) \rightarrow$ „es gibt mindestens einen grünen Apfel" → wahr

(3) | ¬(1) $\neg(\forall x \in M : P(x)) \rightarrow$ „nicht alle Äpfel sind grün"

$\Updownarrow$

$\exists x \in M : \neg P(x)$ „es gibt mindestens einen Apfel, der nicht grün ist"

(4) | ¬(2) $\neg(\exists x \in M : P(x)) \rightarrow$ „es gibt keinen grünen Apfel"

$\Updownarrow$

$\forall x \in M : \neg P(x)$ „alle Äpfel sind nicht grün"

Quantoren mit zweistelligen Prädikaten

- Zwei Quantor machen ein zweistelliges Prädikat zu einer Aussage.
- Allgemein gilt: Ein Quantor mach ein n-stelliges Prädikat zu einem (n-1)-Stelligen Prädikat. Ein 0-stelliges Prädikat ist eine Aussage)

Beispiel $Q(x,y) \Leftrightarrow$ „x kennt y"

$x,y \in \underbrace{\text{Studenten der HAW}}_{M}$

(1) $\forall x \in M\ \forall y \in M : Q(x,y)$ $\rightarrow$ „alle Studierenden kennen alle anderen"
„jeder kennt jeden"

$\neg$(1) $\neg(\forall x \in M\ \forall y \in M : Q(x,y))$

$\exists x \in M\ \exists y \in M : \neg Q(x,y)$ $\rightarrow$ „es gibt mindestens einen Studierenden, der einen anderen nicht kennt"
„es gibt mindestens einen der keinen kennt"

(2) $\forall x \in M\ \exists y \in M : Q(x,y)$ ----

⋮

Quantoren mit zweistelligen Prädikaten

- Zwei Quantoren machen ein zweistelliges Prädikat zu einer Aussage.
- Allgemein gilt: Ein Quantor macht ein n-stelliges Prädikat zu einem (n-1)-Stelligen Prädikat. Ein 0-stelliges Prädikat ist eine Aussage)

Beispiel $Q(x,y) \Leftrightarrow$ „x kennt y"

$x,y \in \{\text{Studenten der HAW (w,m)}\} = M$

① $\forall x \in M \ \forall y \in M: Q(x,y) \Leftrightarrow$ „jeder kennt jeden" $\Leftrightarrow$ „alle Studierenden kennen alle anderen"

$\neg$①: $\neg(\forall x \in M \forall y \in M: Q(x,y))$

$\Leftrightarrow \exists x \in M \ \exists y \in M: \neg Q(x,y) \Leftrightarrow$ „mindestens einer kennt mindestens einen nicht" (alle Studenten)

② $\forall x \in M \ \exists y \in M: Q(x,y) \Leftrightarrow$ „jeder kennt mindestens einen Studenten"

$\neg$②: $\neg(\forall x \in M \ \exists y \in M: Q(x,y))$

$\Leftrightarrow \exists x \in M \ \forall y \in M: \neg Q(x,y) \Leftrightarrow$ „es gibt mindestens einen Studenten, der alle anderen Studenten nicht kennt"

$\Leftrightarrow$ „mindestens einer kennt keinen" $\Leftrightarrow$ „mindestens einer kennt alle nicht"

③ $\exists x \in M \ \forall y \in M: Q(x,y) \Leftrightarrow$ „es gibt mindestens einen Studenten, der alle anderen kennt"

$\neg$③: $\neg(\exists x \in M \ \forall y \in M: Q(x,y))$

$\Leftrightarrow \forall x \in M \ \exists y \in M: \neg Q(x,y) \Leftrightarrow$ „alle kennen mindestens einen nicht"

④ $\exists x \in M \ \exists y \in M: Q(x,y) \Leftrightarrow$ „es gibt mindestens einen Studenten, der mindestens einen kennt"

$\neg$④: $\neg(\exists x \in M \ \exists y \in M: Q(x,y))$

$\Leftrightarrow \forall x \in M \ \forall y \in M: \neg Q(x,y) \Leftrightarrow$ „alle kennen alle nicht"

$\Leftrightarrow$ „alle kennen keinen"

Negation von Aussagen mit Quantoren

Eine **Negation von Quantoren** kann in der folgenden Form beschrieben werden:

- $\boxed{\neg(\forall x \in M : A(x)) \Leftrightarrow \exists x \in M : \neg A(x)}$

  Nicht für alle x aus M gilt A(x), d.h. es gibt ein x aus M, für dass A(x) falsch ist.

- $\boxed{\neg(\exists x \in M : A(x)) \Leftrightarrow \forall x \in M : \neg A(x)}$

  Es gibt kein x aus M, so dass A(x) wahr ist, d.h. für alle x aus M ist A(x) falsch.

- **Negation von Quantoren:**

Die Negation von Quantoren wird durchgeführt, in dem sich die Quantoren "umdrehen" und die Negation vor der Aussage steht.

Beispiele:

aber $\exists x \in \mathbb{R} : x^2 = 1$ ist eine wahre Aussage

Aussage A := „$\forall x \in \mathbb{R}$: "$x^2 = 1$" “ hat den Wahrheitswert $\omega(A) = f$

$$\neg(\forall x \in \mathbb{R} : x^2 = 1)$$
$$\Leftrightarrow \exists x \in \mathbb{R} : \neg(x^2 = 1)$$
$$\Leftrightarrow \exists x \in \mathbb{R} : x^2 \neq 1$$ → wahre Aussage z.B. $x = 2$

$\exists y \in \mathbb{Z}\ \forall x \in \mathbb{Z} : x + y = 0$ ist falsch

$$\neg(\exists y \in \mathbb{Z}\ \forall x \in \mathbb{Z} : x + y = 0)$$
$$\Leftrightarrow \forall y \in \mathbb{Z}\ \exists x \in \mathbb{Z} : x + y \neq 0)$$ → wahre Aussage z.B. $y = 2$, $x = 3$

$\forall x \in \mathbb{Z}\ \exists y \in \mathbb{Z} : x + y = 0$ ist wahr

•