# Übungen zur Vorlesung Physik 1 — Lösungen

## Aufgabe 58: Drehbewegung

(Im Skript Aufgabe 6.11) Eine Bohrmaschine habe eine maximale Drehzahl von 3000 Umdrehungen pro Minute, die sie in 1,2 s bei konstanter Beschleunigung erreicht. Bestimmen Sie die maximale Winkelgeschwindigkeit und die Winkelbeschleunigung.
**Lösung:** Maximale Winkelgeschwindigkeit

$$\omega = \frac{3000\,\mathrm{U/min} \cdot 1\,\mathrm{min}}{60\,\mathrm{s}} 2\pi = 100\pi\,\frac{1}{\mathrm{s}} \approx 314{,}2\,\frac{\mathrm{rad}}{\mathrm{s}}$$

Für die Winkelbeschleunigung gilt

$$\alpha = \frac{\Delta\omega}{\Delta t} = \frac{100\pi\,\frac{\mathrm{rad}}{\mathrm{s}}}{1{,}2\,\mathrm{s}} \approx 261{,}8\,\frac{\mathrm{rad}}{\mathrm{s}^2}$$

## Aufgabe 59: Trägheitsmoment, Rotationsenergie

Ein Fußball mit 69 cm Umfang und 430 g Masse habe beim Elfmeterschießen eine Geschwindigkeit von 72 km/h und drehe sich dabei mit 10 Umdrehungen pro Sekunde. Bestimmen Sie die kinetische und Rotationsenergie des Fußballs. (Hinweis: Wir nehmen vereinfacht an, dass die Hülle des Balls sehr dünn ist.)
**Lösung:** Für die kinetische Energie gilt

$$E_{\mathrm{kin}} = \frac{1}{2} m\, v^2 = \frac{1}{2} 0{,}43\,\mathrm{kg} \cdot \left(\frac{72\,\mathrm{m}}{3{,}6\,\mathrm{s}}\right)^2 = 86\,\mathrm{J}$$

Mit $r = U/(2\pi)$ und $J = \frac{2}{3} m\, r^2$ (Hohlkugel) folgt für die Rotationsenergie

$$E_{\mathrm{rot}} = \frac{1}{2} J\omega^2 = \frac{1}{2}\left(\frac{2}{3} m\, r^2\right)\omega^2 = \frac{1}{3} m\, r^2\, \omega^2 = \frac{0{,}43\,\mathrm{kg}\left(\frac{0{,}69}{2\pi}\right)^2\,\mathrm{m}^2 \cdot (2\pi \cdot 10)^2 1/\mathrm{s}^2}{3} \approx 6{,}82\,\mathrm{J}$$

## Aufgabe 60: Rotationsenergie

Eine 2 kg wiegende runde Scheibe mit 30 cm Durchmesser rotiere um ihren Schwerpunkt mit der Drehachse senkrecht zur Fläche mit 3000 U/min.

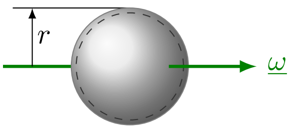
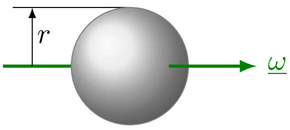
a) Wie hoch ist die in ihr gespeicherte Energie?
**Lösung:** Mit dem Trägheitsmoment für die Scheibe $J = \frac{1}{2} m\, r^2$ folgt

$$E_{\mathrm{rot}} = \frac{J}{2}\omega^2 = \frac{1}{4} m\, r^2\, \omega^2 = \frac{2\,\mathrm{kg} \cdot 0{,}15^2\,\mathrm{m}^2 \cdot \left(\frac{3000 \cdot 2\pi}{60\,\mathrm{s}}\right)^2}{4} \approx 1{,}11\,\mathrm{kJ}$$

b) Wie hoch müsste die Scheibe angehoben werden, so dass sich die gleiche potentielle Energie ergibt?
**Lösung:** Aus Energieerhaltung folgt

$$m\, g_0\, h = \frac{1}{4} m\, r^2\, \omega^2 \quad \Rightarrow \quad h = \frac{r^2\, \omega^2}{4 g_0} = \frac{0{,}15^2\,\mathrm{m}^2 \cdot \left(\frac{3000 \cdot 2\pi}{60\,\mathrm{s}}\right)^2}{4 \cdot 9{,}81\,\mathrm{m/s}^2} \approx 56{,}6\,\mathrm{m}$$

## Aufgabe 61

| Abbildung | Beschreibung | Trägheitsmoment |
|---|---|---|
|  | Hohle Kugel | $J = \frac{2m}{3}\, r^2$ |
|  | Volle Kugel | $J = \frac{2m}{5}\, r^2$ |

Eine hohle und eine massive Kugel rollen mit gleichen Anfangsgeschwindigkeiten von $v_0 = 10\,\mathrm{m/s}$ eine schiefe Ebene hinauf. Welche Höhendifferenzen können sie jeweils überwinden, bis sie zum Stillstand kommen?

**Lösung:** Aus Energieerhaltung berechnet man

$$\begin{aligned} E_{\text{pot}} &= E_{\text{kin}} + E_{\text{rot}} \\ m\, g_0\, h &= \frac{m}{2} v_0^2 + \frac{J}{2}\left(\frac{v_0}{r}\right)^2 \\ h &= \frac{1}{2g_0}\left(1 + \frac{J}{mr^2}\right) v_0^2 \end{aligned}$$

Für die Hohlkugel gilt somit

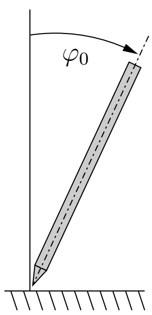
$$h = \frac{1}{2g_0}\left(1 + \frac{2}{3}\right) v_0^2 = \frac{5}{6}\,\frac{v_0^2}{g_0} = \frac{5}{6}\,\frac{100\,\mathrm{m^2/s^2}}{9{,}81\,\mathrm{m/s^2}} \approx 8{,}49\,\mathrm{m}$$

Analog für die Vollkugel

$$h = \frac{7}{10}\,\frac{v_0^2}{g_0} \approx 7{,}14\,\mathrm{m}$$

## Aufgabe 62: Trägheitsmoment

Ein Bleistift der Länge $l = 15\,\mathrm{cm}$ wird aus einen Winkel von $\varphi_0 = 20°$ zur Senkrechten gestellt und losgelassen. Welche Winkelgeschwindigkeit $\omega$ hat er kurz vor dem waagrechten Auftreffen auf die Tischoberfläche? Der Einfluss der Spitze und des Durchmessers sollen vernachlässigt werden (dünner Stab).



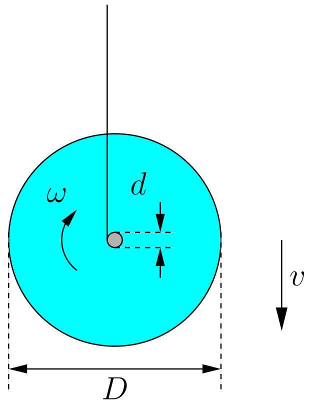

**Lösung:** Energieerhaltung (potentielle Energie des Schwerpunktes) liefert

$$E_{\text{pot}} = E_{\text{rot}} \quad \Rightarrow \quad m\, g_0\, \frac{l}{2}\, \cos\varphi_0 = \frac{J}{2}\omega^2$$

Mit $J = \frac{m}{3} l^2$ ergibt sich

$$g_0 \frac{l}{2} \cos\varphi_0 = \frac{1}{6} l^2 \omega^2 \quad \Rightarrow \quad \omega = \sqrt{\frac{3 g_0}{l} \cos\varphi_0} \approx \sqrt{\frac{3 \cdot 9{,}81\,\mathrm{m/s^2}}{0{,}15\,\mathrm{m}} \cos 20°} \approx 13{,}58\,\mathrm{rad/sec}.$$

## Aufgabe 63: Trägheitsmoment




Ein Maxwell-Rad (siehe Vorlesung) bestehe aus einer massiven Scheibe mit Durchmesser $D = 10\,\mathrm{cm}$. Die Achse, auf die die Aufhängefäden gewickelt sind, hat den Durchmesser $d = 6\,\mathrm{mm}$. Masse und Trägheit der rausstehenden Achsenteile sollen venachlässigt werden. Das Rad fällt nun aus anfänglicher Ruhe um die Höhe $h = 50\,\mathrm{cm}$.

a) Wie groß sind Vertikalgeschwindigkeit $v$ und Drehzahl $\omega$ nach dem Fall um die Höhe $h$.

b) In welchem Verhältnis stehen kinetische (Translations-)Energie und Rotationsenergie zueinander?

**Lösung:**

a) Energieerhaltung

$$E_{\mathrm{pot}} = E_{\mathrm{kin}} + E_{\mathrm{rot}} \quad \Rightarrow \quad m\, g_0\, h = \frac{m}{2} v^2 + \frac{J}{2} \omega^2.$$

Durch die Kopplung $v = \frac{d}{2}\omega$ und das Trägheitsmoment einer Scheibe $J = \frac{m}{2}\left(\frac{D}{2}\right)^2$ ergibt sich

$$g_0\, h = \frac{\omega^2}{8}\left(d^2 + \frac{D^2}{2}\right)$$

Die Rotationsgeschwindigkeit beträgt dann

$$\omega = 2\sqrt{\frac{2\, g_0\, h}{d^2 + \frac{D^2}{2}}} \approx 2\sqrt{\frac{2 \cdot 9{,}81\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2} \cdot 0{,}5\,\mathrm{m}}{36 \cdot 10^{-6}\,\mathrm{m}^2 + 0{,}005\,\mathrm{m}^2}} \approx 88{,}27\,\mathrm{rad/s}.$$

und die Vertikalgeschwindigkeit

$$v = \frac{d}{2}\omega = \sqrt{\frac{2 g_0 h}{1 + \frac{D^2}{2d^2}}} \approx \sqrt{\frac{2 \cdot 9{,}81\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2} \cdot 0{,}5\,\mathrm{m}}{1 + \frac{100^2\,\mathrm{mm}^2}{2 \cdot 36\,\mathrm{mm}^2}}} \approx 0{,}265\,\mathrm{m/s}.$$

b) Es gilt

$$\frac{E_{\mathrm{kin}}}{E_{\mathrm{rot}}} = \frac{\frac{m}{2} v^2}{\frac{J}{2}\omega^2} = \frac{\left(\frac{d}{2}\omega\right)^2}{\frac{1}{2}\left(\frac{D}{2}\right)^2 \omega^2} = \frac{d^2}{\frac{D^2}{2}} = \frac{2d^2}{D^2} = \frac{36 \cdot 10^{-6}\,\mathrm{m}^2}{\frac{0{,}01\,\mathrm{m}^2}{2}} = 0{,}0072.$$