Vorlesung 13 am 3.11.2022

Folgen und Grenzwerte 1

4 Folgen und Reihen

4 Folgen 1

4.1 Folgen und ihre Eigenschaften 2

4.1.1 Definition und Darstellung 2

4.1.2 Beschränktheit 3

4.1.3 Monotonie 4

4.2 Konvergenz von Folgen 5

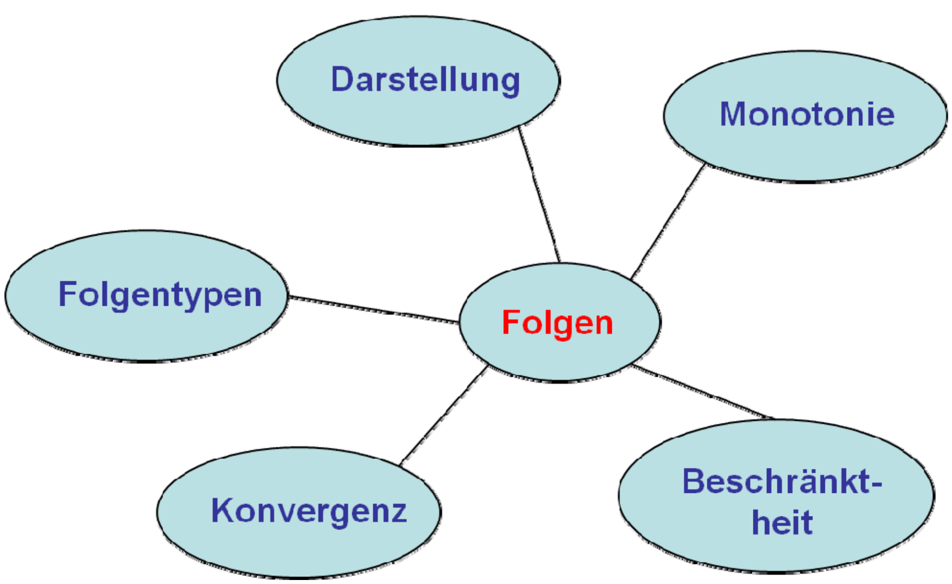
4.2.1 Grenzwert 5

4.2.2 Rechnen mit konvergenten Folgen 6

4.2.3 Konvergenzkriterien 8

4.3 Spezielle Folgen 9

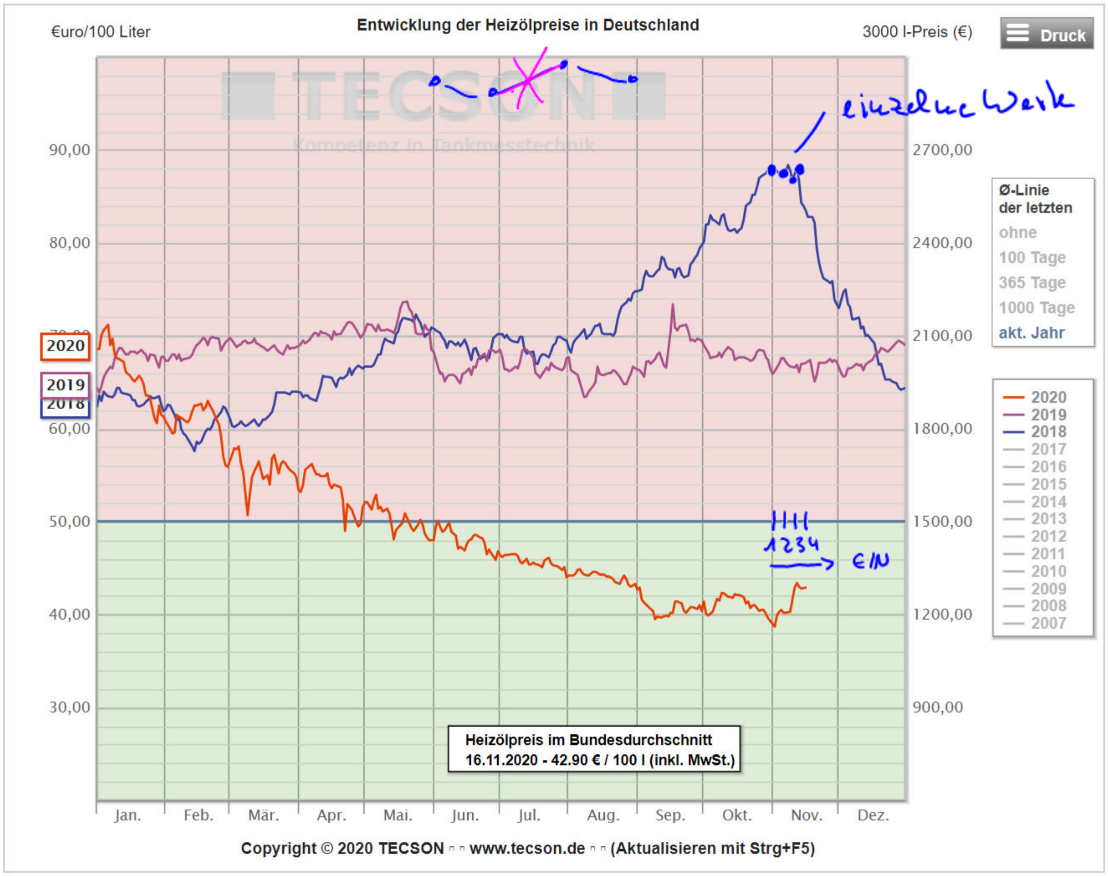
Begriffe im Zusammenhang mit Folgen $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$



•

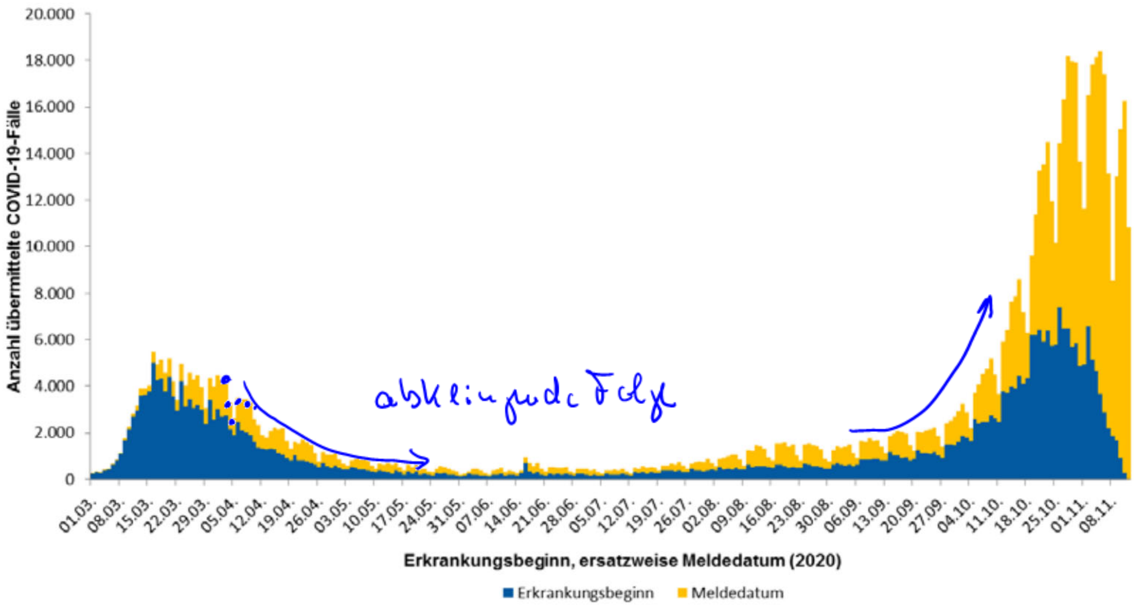
Anwendungsbeispiel - Folgen

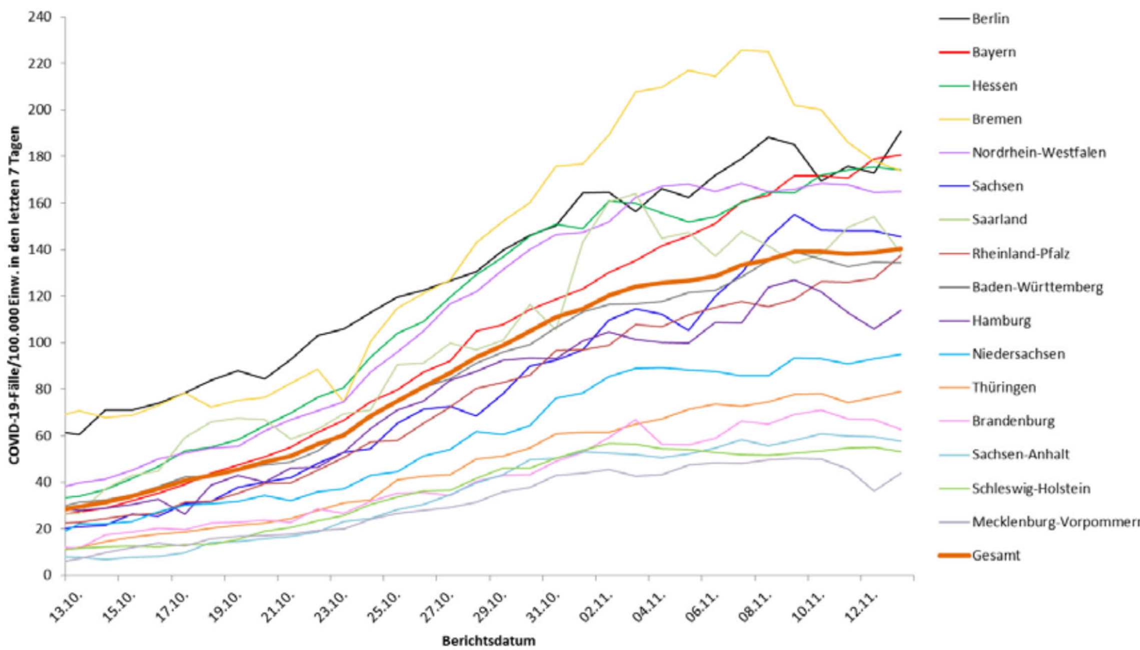
http://www.tecson.de/pheizoel.htm



diskrete Zeitpunkte auf der Zeitachse
z.B. die einzelnen Tage eines Monats

Anwendungsbeispiele - Folgen





https://www.rki.de/DE/Content/InfAZ/N/Neuartiges_Coronavirus/Situationsberichte/Nov_2020/2020-11-13-de.pdf?__blob=publicationFile

Anwendungsbeispiel - Folgen

Beispiel: Stromstärke I in Abhängigkeit eines Index n (Anzahl der Blöcke: Spannungsquelle und Widerstand)

Übung 1: Reihenschaltung aus n gleichen Spannungsquellen *Diskrete Funktion*

Bild II-1 zeigt eine *Reihenschaltung* aus n gleichen Spannungsquellen und einem Verbraucherwiderstand R_a. *Jede* der Spannungsquellen liefert die Quellenspannung U_q und hat den inneren Widerstand R_i. Bestimmen Sie die Abhängigkeit der *Stromstärke* I von der Anzahl n der Spannungsquellen.

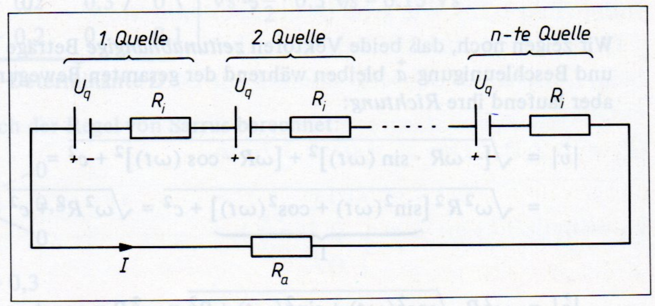


Bild II-1

Lehrbuch: Bd. 1, III.4	*Physikalische Grundlagen:* A13, A14

Lösung:

Wir fassen zunächst die n gleichen Spannungsquellen zu einer *Ersatzspannungsquelle* mit der Quellenspannung $U_0 = n\,U_q$ und dem Innenwiderstand $R_{ig} = n\,R_i$ zusammen [A13] (Bild II-2).

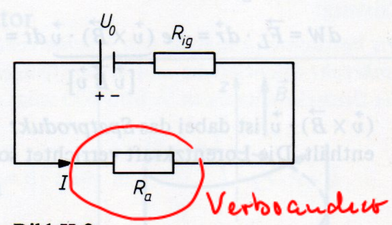


Bild II-2

Nach den *Kirchhoffschen Regeln* der *Reihenschaltung* [A13] beträgt der *Gesamtwiderstand* der Schaltung

$$R_g = R_{ig} + R_a = n\,R_i + R_a$$

Für die Stromstärke I erhält man damit nach dem *Ohmschen Gesetz* [A14]

$$\boxed{I = I(n) = \frac{U_0}{R_g} = \frac{n\,U_q}{n\,R_i + R_a}} \qquad n \in \mathbb{N}$$

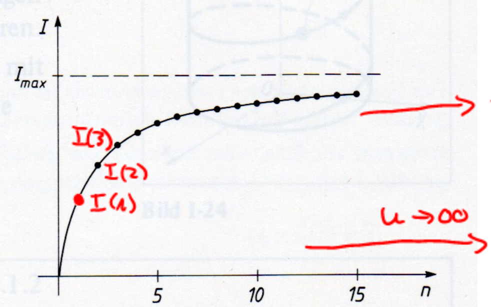


Bild II-3

n ist dabei eine *diskrete* Variable, die nur *positive ganzzahlige* Werte annehmen kann: $n = 1, 2, \ldots$. Graphisch erhalten wir die in Bild II-3 dargestellte *diskrete Funktion* (Punktfolge), die für $n \to \infty$ gegen den folgenden *Grenzwert* strebt:

$$\boxed{I_{max} = \lim_{n \to \infty} \left(\frac{n\,U_q}{n\,R_i + R_a} \right) = \lim_{n \to \infty} \left(\frac{U_q}{R_i + \frac{R_a}{n}} \right) = \frac{U_q}{R_i}}$$

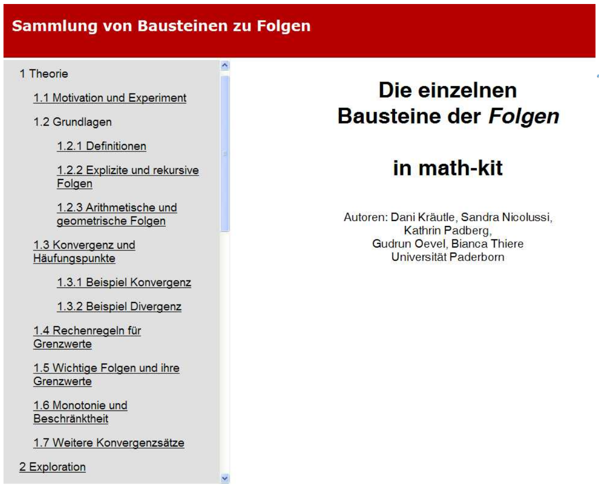
(sog. *Kurzschlußstrom;* man erhält ihn für $R_a = 0$, d.h. bei *fehlendem* Verbraucherwiderstand R_a).

aus Papula: Mathematik für Ingenieure und Naturwissenschaftler - Anwendungsbeispiele

Weitere Literatur im Internet zum Thema Folgen

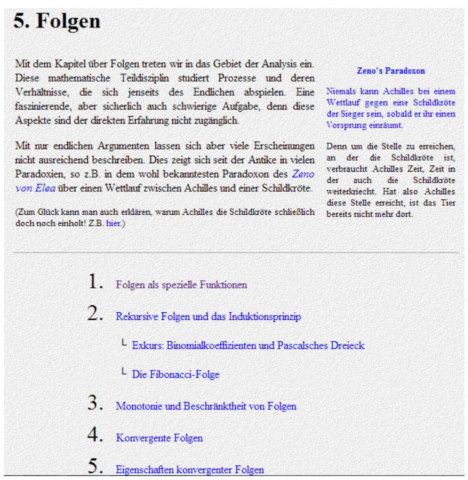
Folgen - Selbstlernmodul

http://www.math-kit.de/2003/content/FO-PB-XML-cob/folgen/preview/index.html



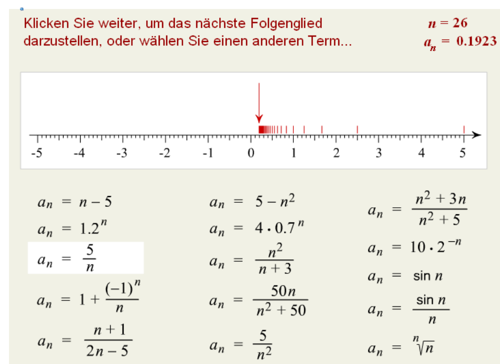
Folgen - Selbstlernmodul

http://www.mathproject.de/Folgen/folgen.htm



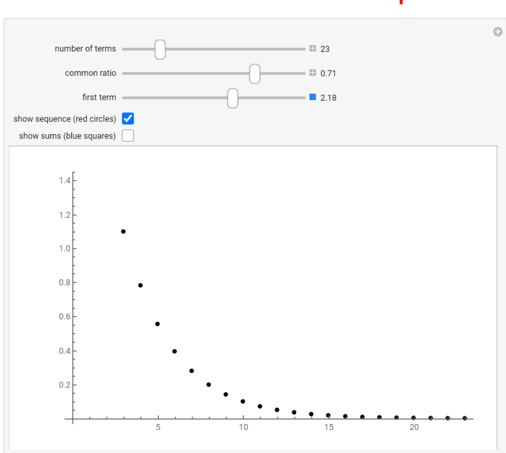
Folgen - Visualisierung eindimensional

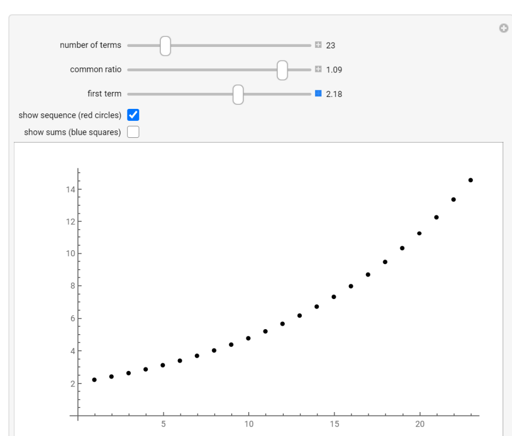
http://www.mathe-online.at/galerie/grenz/folgenz/index.html



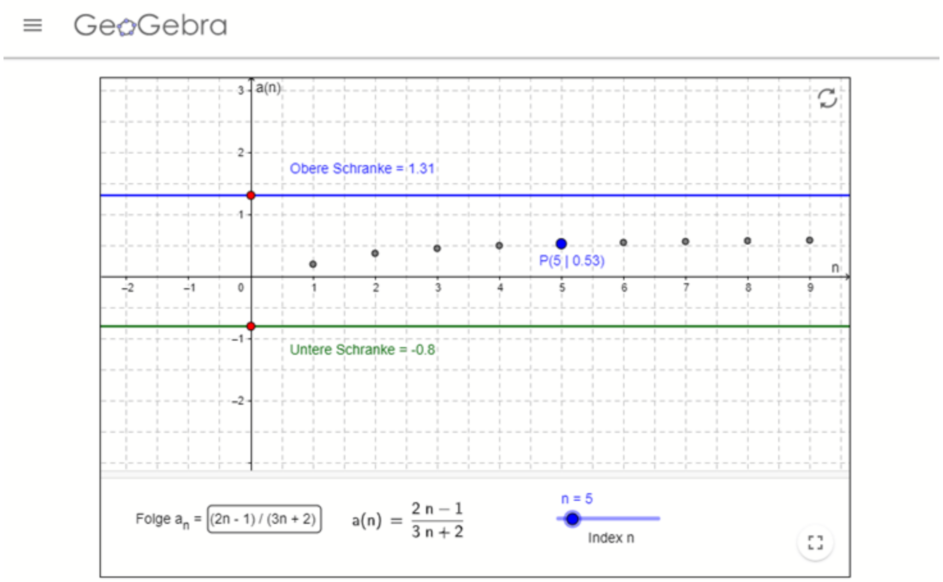
http://demonstrations.wolfram.com/PlotOfAGeometricSequenceAndItsPartialSums/

Plot of a Geometric Sequence





https://www.geogebra.org/m/bKZSca5A



Beispiele von Folgen wie in einem "Bewerbungstest"

Differenz von je zwei Folgengliedern

Bewerbungstest nach http://www.matheprisma.de/Module/Rekurs/index.htm

Aufgabe 1 1 3 5 7 9 11 13, 15, 17, 19, ...

+2 +2 +2 … 13−11 = 2 … 19−17 = 2

Wie geht es weiter?

Antwort:

Konstanter Abstand zwischen je zwei Folgenglieder: $d = 2$

→ arithmetische Folge

Aufgabe 2 1 3 6 10 15 ... 21, 28, ...

+2 +3 +4 +5 +6 +7

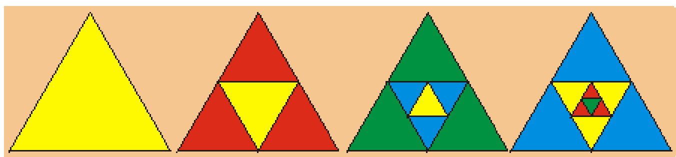
Wie geht es weiter?

Antwort:

→ Kein konstanter Abstand

→ Keine arithmetische Folge

Aufgabe 3



a) Wie viele nicht zusammengesetzte Dreicke hat die Figur in der fünften Stufe? (Bsp.: Die dritte Figur setzt sich aus 7 Dreiecken zusammen.)

Antwort: 1, 4, 7, 10, 13,

+3 +3 +3 +3

→ arithmetische Folge mit $d = 3$

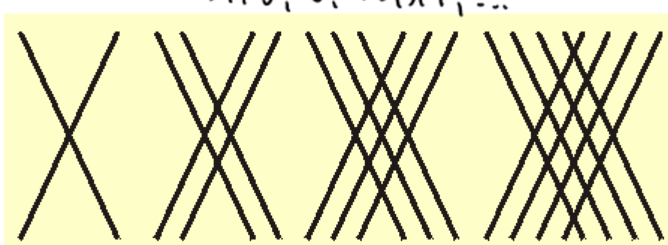
b) Wie viele Dreicke hat die Figur in der fünften Stufe insgesamt? (Bsp.: Die dritte Figur enthält insgesamt 9 Dreiecke.)

Antwort: 1, 5, 9, 13, 17, ...

+4 +4 +4 +4

→ arithmetische Folge mit $d = 4$

Aufgabe 4



Betrachte den Schnitt der folgenden Geraden.

Wie viele Schnittpunkte erwarten Sie im nächsten Bild?

Antwort: $1^2, 2^2, 3^2, 4^2, 5^2$

1, 4, 9, 16, 25, ...

+3 +5 +7 +9 +11

$n=1$, $n=2$, $n=3$, $n=4$, $n=5$

→ n^2 — explizite Folgenvorschrift

36^2

$n = 30$

Abstand sind alle ungeraden Zahlen

$2n+1$

Aufgabe 5

Geben Sie eine Tafel Schokolade herum. Jeder darf stets die Hälfte behalten. Wieviel darf die 5. Person behalten, wieviel die 10.Person?

$\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \frac{1}{16}, \frac{1}{32}, \dots$

$\frac{1}{2^4}$ explizite Folgenvorschrift

$\frac{\frac{1}{4}}{\frac{1}{2}} = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$, $\frac{\frac{1}{8}}{\frac{1}{4}} = \frac{1}{2}$, $\frac{\frac{1}{16}}{\frac{1}{8}} = \frac{1}{2}$

Quotient von je zwei Folgegliedern ist konstant

→ geometrische Folge mit $q = \frac{1}{2}$

Antwort:

Aufgabe 6 Wie geht es weiter? $\frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{3}{4}, \frac{4}{5}, \frac{5}{6}$

$n=1$, $n=2$, $n=3$, ...

Antwort: explizite Folgenvorschrift $\frac{n}{n+1}$

Aufgabe 7 Wie geht es weiter? 1,-1,1,-1,+1...

Antwort:

Vorzeichen wechselt kontinuierlich → alternierende Folge

explizite Folgen-Vorschrift

$-(-1)^n = (-1)(-1)^n = (-1)^{n+1}$

Lösungen **Bewerbungstest**

nach http://www.matheprisma.uni-wuppertal.de/Module/Rekurs/index.htm

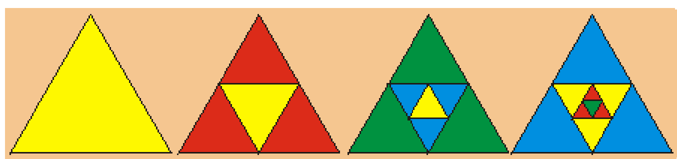
Aufgabe 1 **1 3 5 7 9 11 13 ...**
Wie geht es weiter?
Antwort: **15**

15 (+2) arithmetische Folge

Aufgabe 2 **1 3 6 10 15 ...**
Wie geht es weiter?
Antwort: **21**

21 (+n) keine arithmetische Folge

Aufgabe 3



1, 4, 7, 10,

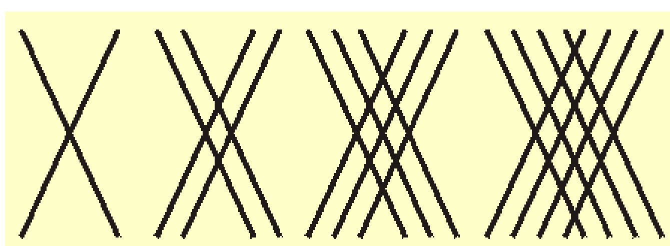
a) Wie viele nicht zusammengesetzte Dreicke hat die Figur in der fünften Stufe?
(Bsp.: Die dritte Figur setzt sich aus 7 Dreiecken zusammen.)
Antwort: **13**

arithmetische Folge 13 (+3)

b) Wie viele Dreicke hat die Figur in der fünften Stufe insgesamt?
(Bsp.: Die dritte Figur enthält insgesamt 9 Dreiecke.)
Antwort: **17**

1, 5, 9, 13, 17, ... (+4)

Aufgabe 4



arithmetische Folge

Betrachte den Schnitt der folgenden Geraden.
Wie viele Schnittpunkte erwarten Sie im nächsten Bild?
Antwort: **25**

1, 4, 9, 16, 25, ... (n^2)

Aufgabe 5

Geben Sie eine Tafel Schokolade herum. Jeder darf stets die Hälfte behalten. Wieviel darf die 5. Person behalten, wieviel die 10.Person?

$\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \frac{1}{16}, \dots$ geometrische Folge

Antwort: $\frac{1}{32}, \frac{1}{1024}$

$\frac{1}{2^n}$

Aufgabe 6 Wie geht es weiter? $\frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{3}{4}, \frac{4}{5}, \dots$

Antwort: $\frac{5}{6}, \frac{6}{7}$

$\frac{n}{n+1}$

Aufgabe 7 Wie geht es weiter? **1,-1,1,-1,...**

Antwort: 1

alternierende Folge

Folgen und Reihen

- Wir werden den wichtigen mathematischen Begriff der Konvergenz bzw. des Grenzwertes formulieren und erklären.

- Dieser fundamental wichtige Begriff ist bedeutsam für die gesamte Analysis.

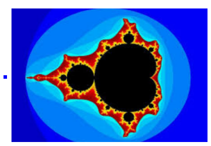
- Wir benutzen die Konvergenz beispielsweise, um

  - die Stetigkeit von Funktionen zu definieren

  - den Differentialquotienten als Grenzwert einer Folge von Differenzenquotienten zu erklären

  - das Integrieren als Grenzwert einer Folge von Riemannsummen einzuführen.

- Das "Apfelmännchen" entsteht durch Folgen komplexer Zahlen.

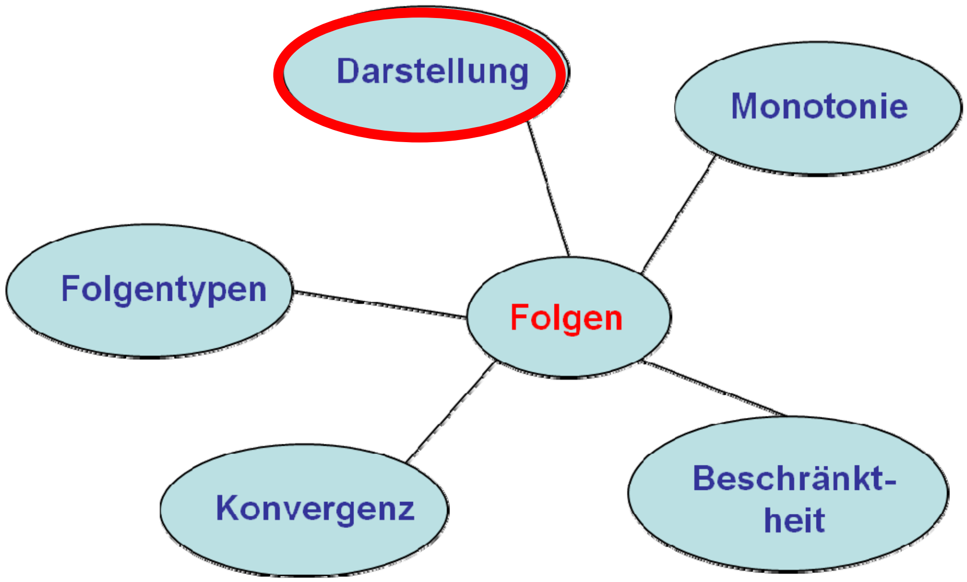


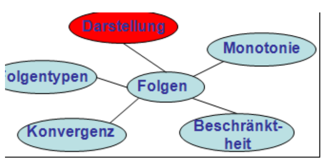
- Die Sinus-Kurve ist definiert als unendliche Reihe und eine Reihe ist eine spezielle Folge.

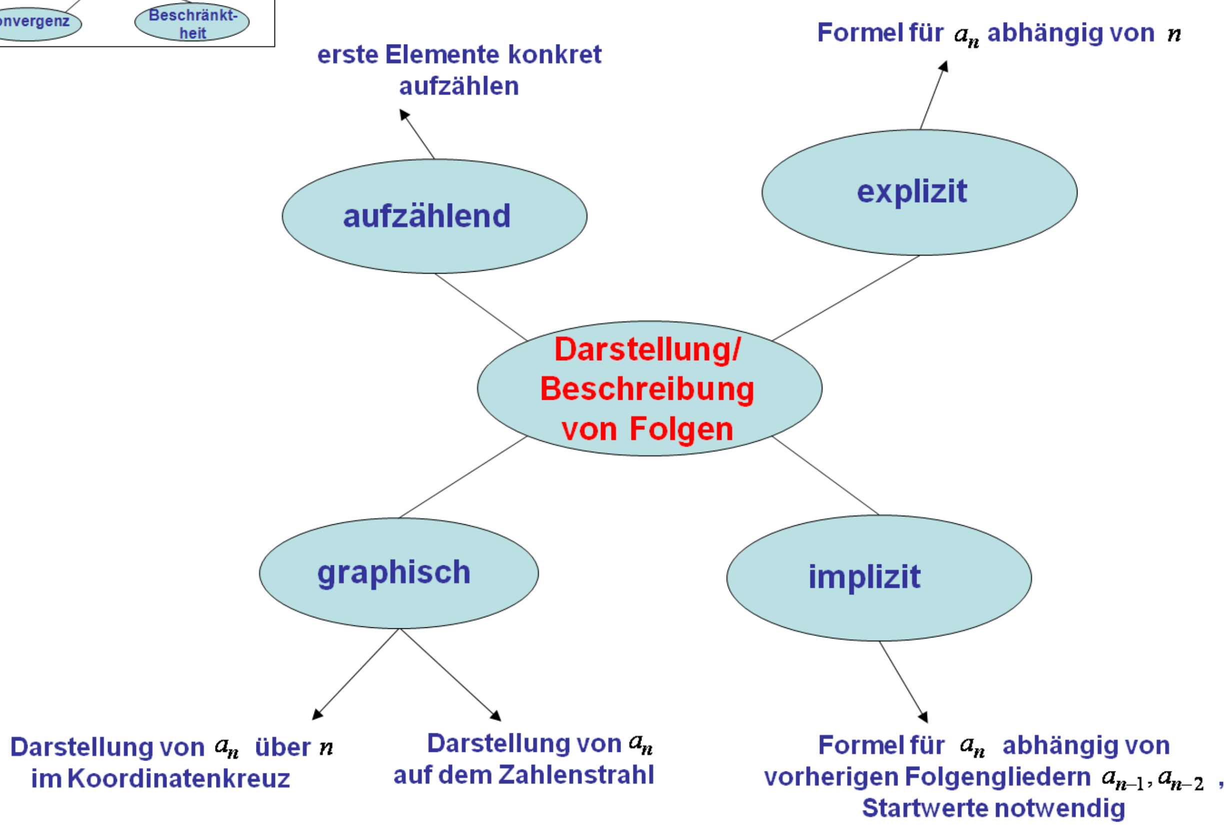
Beispiel einer Folge

1, 3, 6, 10, 15, 21, ...

Begriffe im Zusammenhang mit Folgen $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$







4.1.1 Definition und Darstellung

Definition 4.1: reelle Zahlenfolge

Eine Vorschrift, die jeder natürlichen Zahl n genau eine reelle Zahl a_n zuordnet, heißt unendliche **reelle Zahlenfolge** oder kurz Folge und wird mit $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$. Die einzelnen Elemente der Folge heißen **Folgenglieder** $a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n, \ldots$.

→ Folge mit $a_n = \frac{1}{2^n}$

→ Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ und $a_n = \frac{1}{2^n}$

Beispiel: $n \to a_n$

Eine Zuordnung $n \to a_n$ für $n = 1, 2, 3, \ldots$ sei wie folgt gegeben:

$1 \to 1$
$2 \to 3$
$3 \to 6$
$4 \to 10$
$5 \to 15$
....

$$a : \begin{cases} \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{R} \\ n \longrightarrow a(n) = \underbrace{a_n}_{\text{Notation}} \end{cases}$$

$$\underset{\substack{a_1\\n=1}}{1},\ \underset{\substack{a_2\\n=2}}{3},\ \underset{\substack{a_3\\n=3}}{6},\ \underset{\substack{a_4\\n=4}}{10},\ 15, \ldots, a_{n-1}, a_n, a_{n+1}$$

Bemerkung: Folge

- Abbildung von den natürlichen Zahlen in die reellen Zahlen
- Jeder natürlichen Zahl $n \in \mathbb{N}$ wird eine reelle Zahl a_n zugeordnet.
- erstes Folgenglied für n=1: a_1

Darstellungsmöglichkeiten für Folgen

Beispiel:

Eine Zuordnung $n \to a_n$ für $n = 1, 2, 3, \ldots$ sei wie folgt gegeben:

$1 \to 1$
$2 \to 3$
$3 \to 6$
$4 \to 10$
$5 \to 15$
....

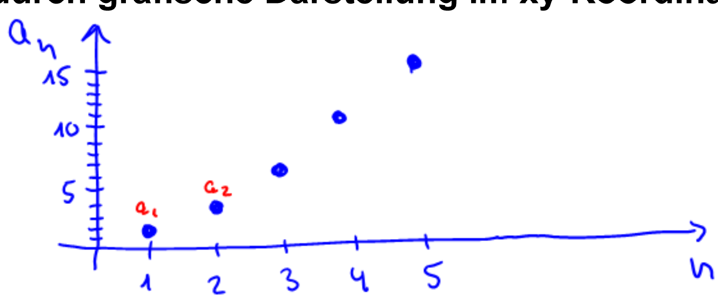
weitere Darstellungsmöglichkeiten

→ **durch Aufzählung einiger Folgenglieder**

$1, 3, 6, 10, 15, \ldots$

→ **durch grafische Darstellung auf der reellen Achse**

→ **durch grafische Darstellung im xy-Koordinatensystem**



→ **durch Angabe der Berechnungsvorschrift für die Folgenglieder**

1.Möglichkeit: explizite Beschreibung

Berechnung des Folgengliedes a_n nur unter Verwendung des Index n und Konstanten in der Rechenvorschrift.

$$\boxed{\text{explizite Beschreibung} \quad a_n = \frac{n(n+1)}{2}}$$

$$1 \xrightarrow{+2} 3 \xrightarrow{+3} 6 \xrightarrow{+4} 10 \xrightarrow{+5} 15 \quad \ldots\ldots \quad a_n$$

$$a_5$$

$$1 \qquad 1+2 \qquad 1+2+3 \qquad 1+2+3+4 \qquad 1+2+3+4+5$$

$$\sum_{k=1}^{1} k \qquad \sum_{k=1}^{2} k \qquad \sum_{k=1}^{3} k \qquad \sum_{k=1}^{4} k \qquad \sum_{k=1}^{5} k$$

$$a_n = \sum_{k=1}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2}$$

Gaußsche Summenformel

2.Möglichkeit: implizite Beschreibung

Berechnung des Folgengliedes a_n unter Verwendung vorhergehender Folgenglieder sowie n und Konstanten in der Rechenvorschrift.
Zusätzlich ist die Angabe eines Startwertes notwendig, damit die iterative Bestimmung der Folgenglieder starten kann.

$$a_n = a_{n-1} + n \quad \text{mit } a_1 = 1$$

4.1.1 Definition und Darstellung

Definition 4.1: reelle Zahlenfolge

Eine Vorschrift, die jeder natürlichen Zahl n genau eine reelle Zahl a_n zuordnet, heißt unendliche **reelle Zahlenfolge** oder kurz Folge und wird mit $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$. Die einzelnen Elemente der Folge heißen **Folgenglieder** $a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n, \ldots$.

Beispiel:
Eine Zuordnung $n \to a_n$ für $n = 1, 2, 3, \ldots$ sei wie folgt gegeben:

$1 \to 1$
$2 \to 3$
$3 \to 6$
$4 \to 10$
$5 \to 15$
....

Darstellungsmöglichkeiten für Folgen:

1. **Angabe einiger Werte**

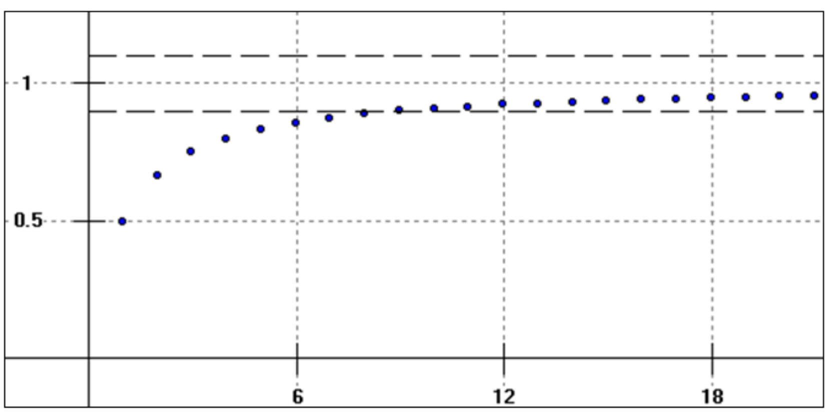
   Beispiele: 1, 4, 9, 16, ...

   1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, ...

   $1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \frac{1}{5}, \ldots$

2. **graphische Darstellung**

   Beispiel:



3. **explizite Formel**

   Beispiel: $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *mit* $a_n = \frac{n}{n+1}$

4. **implizite Formel (Rekursionsformel)**

   Beispiel: $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *mit* $a_n = a_{n-1} + a_{n-2}$ *und* $a_1 = 1,\ a_2 = 1$

1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, ... Fibonacci-Folge

Bemerkungen zur expliziten/ impliziten Beschreibung:

- Die implizite Beschreibung kann für eine **iterative Berechnung** verwendet werden.
- Werden in der impliziten Beschreibung **zwei vorherige Folgenglieder** verwendet, benötigt man auch zwei Startwerte.
- Mit der **expliziten Beschreibung** ist die **direkte Berechnung** eines Folgengliedes z.B. a_{100} unabhängig von der Kenntnis vorhergehender Folgenglieder möglich.
- Bei **impliziten Folgenbeschreibungen** ist die **Angabe einzelner Folgenwerte** z.B. a_{100} schwieriger, da z.B. a_{99} benötigt wird.

manchmal einfacher anzugeben

Beispiel 1:

Welche implizite und explizite Beschreibung hat die nachfolgende Folge?

arithmetische Folge $1, 3, 5, 7, 9, \ldots$ ($+2$ $+2$ $+2$ $+2$; $n=5$: $2\cdot 4+1$)

explizit $a_n = \underbrace{2}_{d}(n-1) + \underbrace{1}_{\text{Startwert}} = 2n-1$

implizit $a_n = a_{n-1} + \underbrace{2}_{+d}, \quad a_1 = 1$

Beispiel 2:

Welche Folge steckt hinter dieser impliziten Beschreibung?

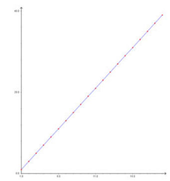
$$a_n = a_{n-1} + a_{n-2}, \quad a_1 = 1, a_2 = 1$$

siehe Seite vorher

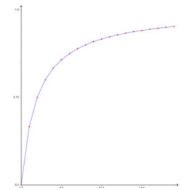
.

Zusammenfassung der Folgen des Bewerbungstests

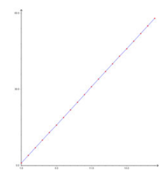
(1) $1,\ 3,\ 5,\ 7,\ 9,\ ,11, \dots$ explizit implizit



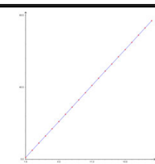
(2) $1,\ 3,\ 6,\ 10,\ 15, \dots$ explizit implizit



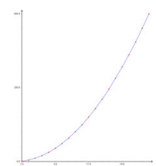
(3) $1,\ 4,\ 7,\ 10,\ 13, \dots$ explizit implizit



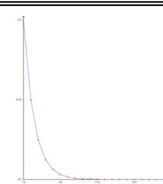
(4) $1,\ 5,\ 9,\ 13,\ 17, \dots$ explizit implizit



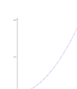
(5) $1,\ 4,\ 9,\ 16,\ 25, \dots$ explizit implizit

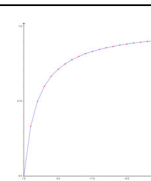


(6) $\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \frac{1}{16}, \frac{1}{32}, \dots$ explizit implizit

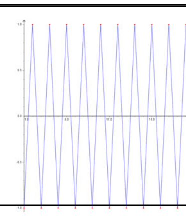


(7) $\frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{3}{4}, \frac{4}{5}, \frac{5}{6}, \dots$ explizit implizit



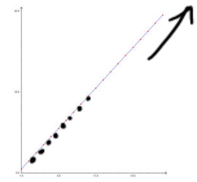
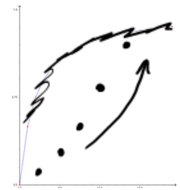
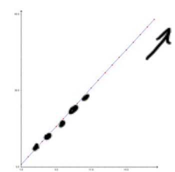
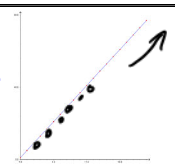
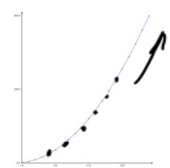
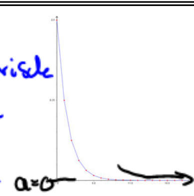
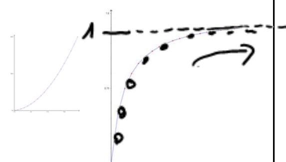
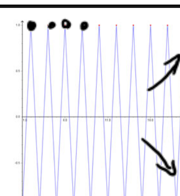


(8) $1, -1, 1, -1, 1, \dots.$ explizit implizit

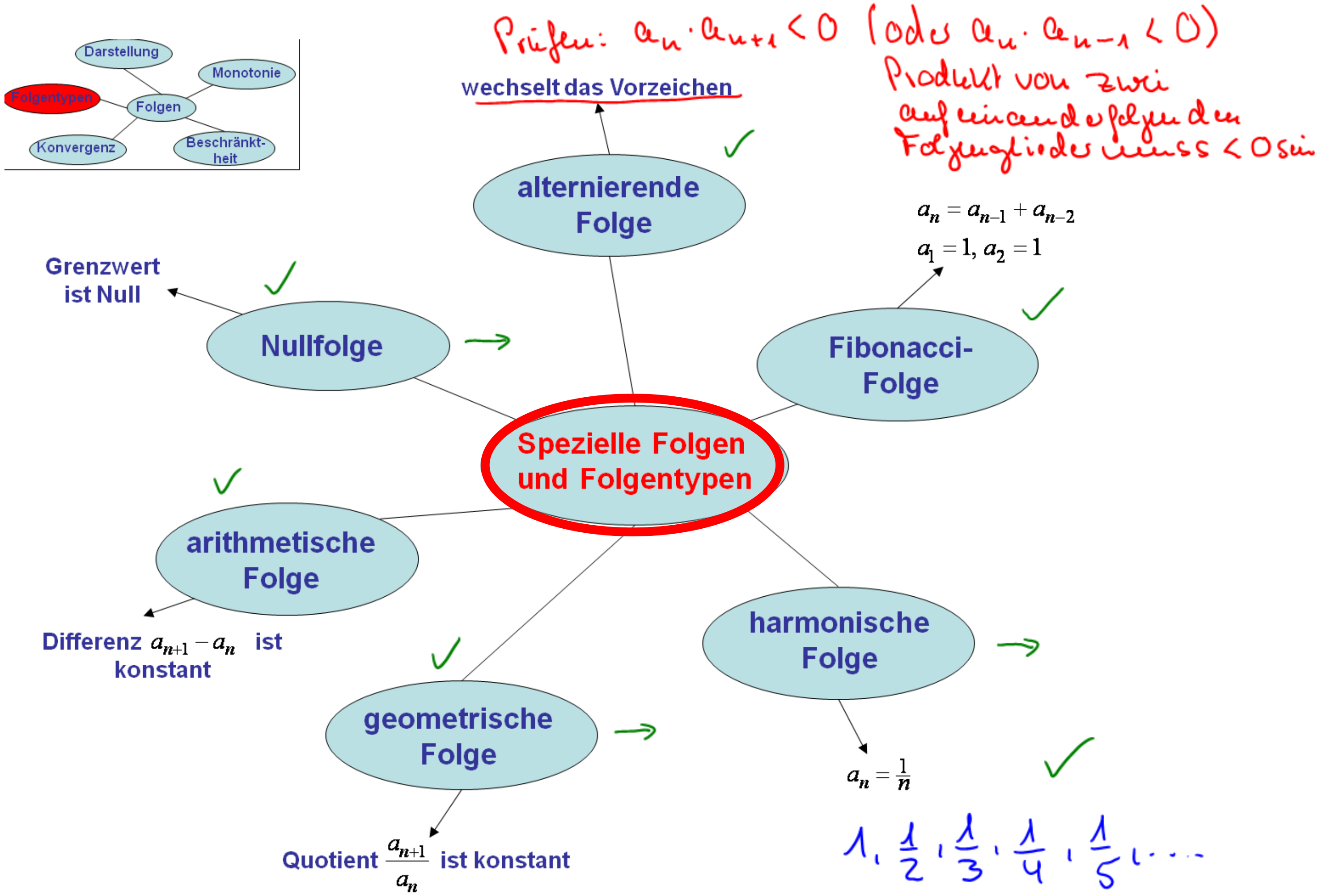


http://techmath.uibk.ac.at/numbau/alex/applets/folgen/applet.html

Zusammenfassung der Folgen des Bewerbungstests

Nr.	Folge	Formeln		Graph	
(1)	$1, 3, 5, 7, 9, ,11, \ldots$	explizit $a_n = 2n-1 = \underbrace{2}_{d}\cdot(n-1)+\underbrace{1}_{a_1}$ implizit $a_n = a_{n-1} + \underbrace{2}_{d}, \; a_1 = 1$	arithm. Folge $d=2$		bestimmt divergent
(2)	$1, 3, 6, 10, 15, \ldots$	explizit $a_n = \frac{n(n+1)}{2}$ Siehe vorne implizit $a_n = a_{n-1} + \underbrace{n}_{d}, \; a_1 = 1$			bestimmt divergent
(3)	$1, 4, 7, 10, 13, \ldots$	explizit $a_n = 3n-2 = 3\cdot(n-1)+\underbrace{1}_{a_1}$ implizit $a_n = a_{n-1} + \underbrace{3}_{d}, \; a_1 = 1$	arith. Folge $d=3$		bestimmt divergent
(4)	$1, 5, 9, 13, 17, \ldots$	explizit $a_n = 4n-3 = \underbrace{4}_{d}(n-1)+\underbrace{1}_{a_1}$ implizit $a_n = a_{n-1} + \underbrace{4}_{d}, \; a_1 = 1$	arith. Folge $d=4$		bestimmt divergent
(5)	$1, 4, 9, 16, 25, \ldots$ $+3 \; +5 \; +7 \; +9$ Abstand sind ungeraden Zahlen	explizit $a_n = n^2$ implizit $a_n = a_{n-1} + \underbrace{2n-1}_{\text{ungerade Zahl}}, \; a_1 = 1$			bestimmt divergent
(6)	$\underbrace{\frac{1}{2}}_{a_1}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \frac{1}{16}, \frac{1}{32}, \ldots$	explizit $a_n = \frac{1}{2^n} = \underbrace{\frac{1}{2}}_{a_1}\cdot\underbrace{\left(\frac{1}{2}\right)}_{q}^{n-1}$ implizit $a_n = a_{n-1}\underbrace{\frac{1}{2}}_{q}, \; a_1 = \frac{1}{2}$	geometrische Folge $q=\frac{1}{2}$		Konvergent gegen Grenzwert $a=0$ $\rightarrow$ Nullfolge
(7)	$\frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{3}{4}, \frac{4}{5}, \frac{5}{6}, \ldots$ $\frac{4}{5} = \frac{3}{4}\cdot\frac{4\cdot 4}{3\cdot 5}$ Alternative 1 $a_n = a_{n-1}\frac{n\cdot n}{(n-1)(n+1)}$	explizit $a_n = \frac{n}{n+1}$ implizit $a_n = a_{n-1} + \frac{1}{n^2+n}, \; a_1 = \frac{1}{2}$ Alternative 2			Konvergent mit Grenzwert $a=1$
(8)	$1, -1, 1, -1, 1, \ldots.$	explizit $a_n = (-1)^{n+1}$ implizit $a_n = a_{n-1}(-1), \; a_1 = 1$			unbestimmt divergent

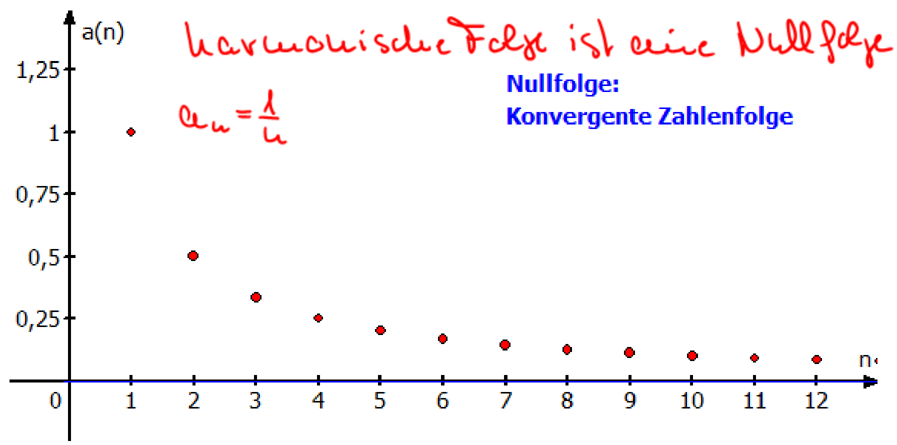
http://techmath.uibk.ac.at/numbau/alex/applets/folgen/applet.html


Darstellung
Monotonie
Folgentypen
Folgen
Konvergenz
Beschränkt-heit
Prüfen: $a_n \cdot a_{n+1} < 0$ (oder $a_n \cdot a_{n-1} < 0$)
Produkt von zwei aufeinanderfolgenden Folgengliedern muss < 0 sein
wechselt das Vorzeichen
alternierende Folge
$a_n = a_{n-1} + a_{n-2}$
$a_1 = 1, a_2 = 1$
Grenzwert ist Null
Nullfolge
Fibonacci-Folge
Spezielle Folgen und Folgentypen
arithmetische Folge
Differenz $a_{n+1} - a_n$ ist konstant
harmonische Folge
geometrische Folge
$a_n = \frac{1}{n}$
$1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \frac{1}{5}, \dots$
Quotient $\frac{a_{n+1}}{a_n}$ ist konstant

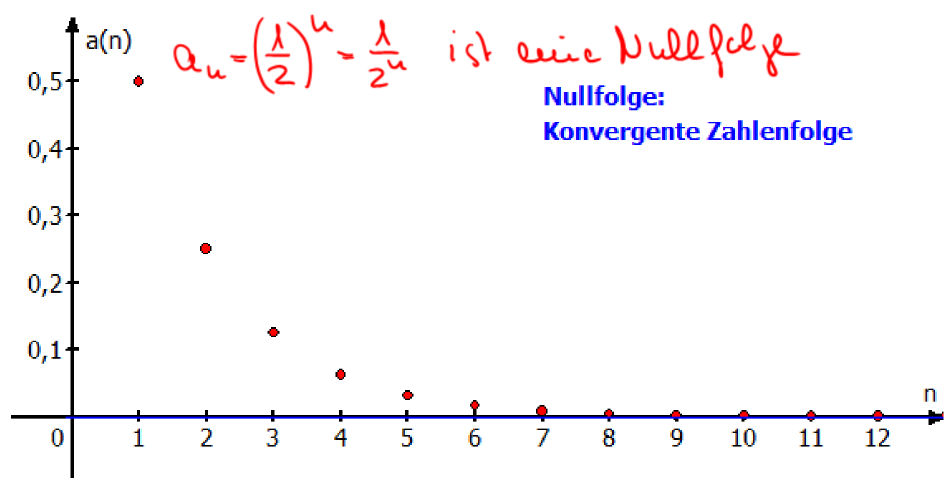
.

Nullfolge

Die Nullfolge ist eine Folge, die gegen den Wert 0 konvergiert, d.h. je mehr Folgenwerte wir betrachten desto mehr nähern sie sich dem festen Wert a=0 an.



Eine Nullfolge ist konvergent mit Grenzwert a=0.



Eigenschaften von Folgen

arithmetische Folgen:

2. Die Folge $1,3,5,7,9\ldots$ also $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *mit* $a_n = a_{n-1} + 2$ *und* $a_1 = 1$ ist eine **arithmetische Folge**, d.h. die Differenz aufeinander folgender Glieder ist konstant.

***Eigenschaft einer arithmetischen Folge*:**

$$d = a_{n+1} - a_n \quad \textit{konstant mit } d \in \mathbb{R},\ \forall n \in \mathbb{N}$$

***explizite Folgenvorschrift einer arithmetischen Folge*:**

$$a_n = a_1 + (n-1)d$$

implizite Folgenvorschrift

$a_n = a_{n-1} + d$

mit Startwert a_1

***Es gilt*:**

Ein Folgenglied ist das arithmetische Mittel seiner beiden Nachbarglieder:

$$a_n = \frac{a_{n+1} + a_{n-1}}{2} \textit{ mit } n \geq 2$$

Beispiel

$1, 3, 5, 7, 9, \ldots$

$\frac{5+9}{2} = \frac{14}{2} = 7$

geometrische Folgen:

3. Die Folge $1, \frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \frac{1}{16}\ldots$ also $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *mit* $a_n = \frac{1}{2}a_{n-1}$ *und* $a_1 = 1$ ist eine **geometrische Folge**, d.h. der Quotient aufeinander folgender Glieder ist konstant.

***Eigenschaft einer geometrischen Folge*:**

$$q = \frac{a_{n+1}}{a_n} \quad \textit{konstant mit } q \in \mathbb{R},\ \forall n \in \mathbb{N}$$

$a_5 = 1 \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = 1 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} = \frac{1}{16}$

***explizite Folgenvorschrift einer geometrischen Folge*:**

$$a_n = a_1 q^{n-1}$$

implizite Folgenvorschrift

$a_n = a_{n-1} \cdot q$

mit Startwert a_1

$\underset{a_1}{1}, \frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \frac{1}{16}, \ldots$

$q = \frac{1}{2}$ $q = \frac{1}{2}$ $q = \frac{1}{2}$ $q = \frac{1}{2}$

***Es gilt*:**

Ein Folgenglied ist das geometrische Mittel seiner beiden Nachbarglieder:

$$a_n = \sqrt{a_{n+1}a_{n-1}} \textit{ mit } n \geq 2$$

Beispiel:

$1, \frac{1}{2}, \underset{a_3}{\frac{1}{4}}, \underset{a_4}{\frac{1}{8}}, \underset{a_5}{\frac{1}{16}}, \ldots$

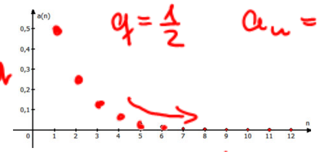
$a_4 = \sqrt{a_3 \cdot a_5} = \sqrt{\frac{1}{4} \cdot \frac{1}{16}} = \sqrt{\frac{1}{64}} = \frac{1}{8}$

Geometrische Folgen verschiedenen Typs

$\boxed{-1 < q < 1}$ Folge konvergiert

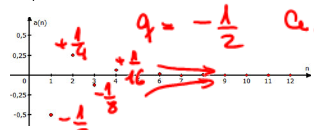
Beispiel:

$q = \frac{1}{2}$ Nullfolge Konvergent



$q = \frac{1}{2} \quad a_n = \left(\frac{1}{2}\right)^n =$

$q = -\frac{1}{2}$ Konvergent Nullfolge, alternierend



$q = -\frac{1}{2} \quad a_n = \left(-\frac{1}{2}\right)^n = (-1)^n \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^n$

alternierend prüfen:

$a_n \cdot a_{n+1} < 0$?

$= (-1)^n \left(\frac{1}{2}\right)^n \cdot (-1)^{n+1} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}$

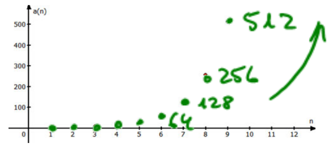
$= (-1)^{2n+1} \left(\frac{1}{2}\right)^{2n+1} = (-1)\left(\frac{1}{2}\right)^{2n+1} < 0$ ✓

ungerade Exponent

$q > 1$ Folge ist bestimmt divergiert gegen $+\infty$

Beispiel:

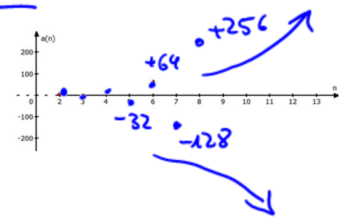
$q = 2 \quad a_n = 2^n$



$q < -1$ Folge ist unbestimmt divergent

Beispiel:

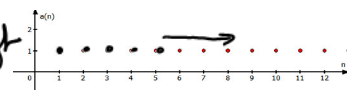
$q = (-2) \quad a_n = (-2)^n = (-1)^n \cdot 2^n$



$q = 1$ Folge ist konvergent

Beispiel:

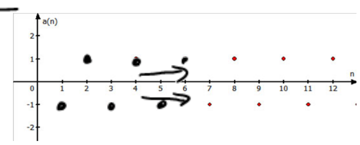
$q = 1 \quad a_n = 1^n$ konvergent mit Grenzwert $a = 1$

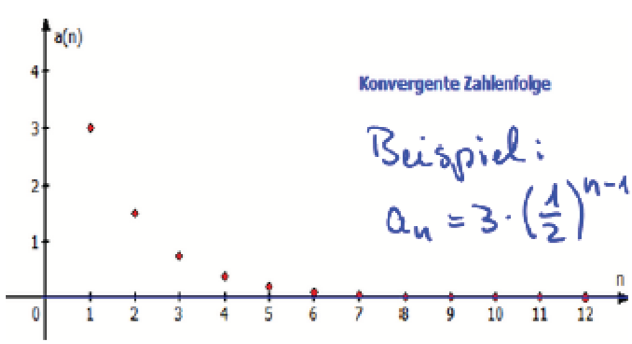


$q = -1$ Folge ist unbestimmt divergent

Beispiel:

$q = (-1) \quad a_n = (-1)^n$

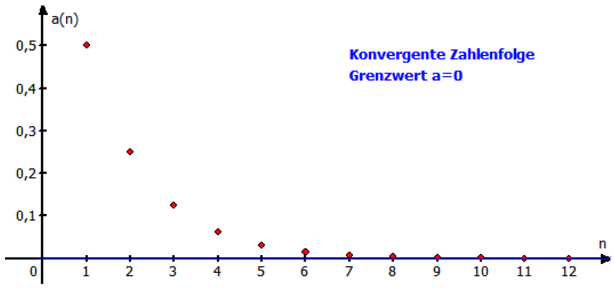


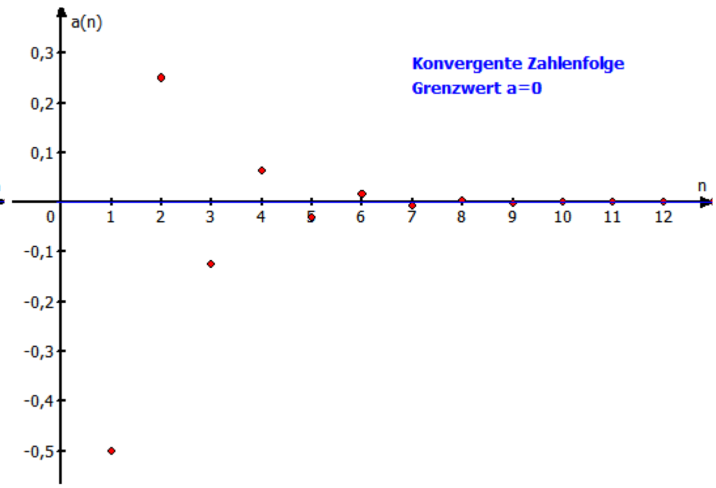


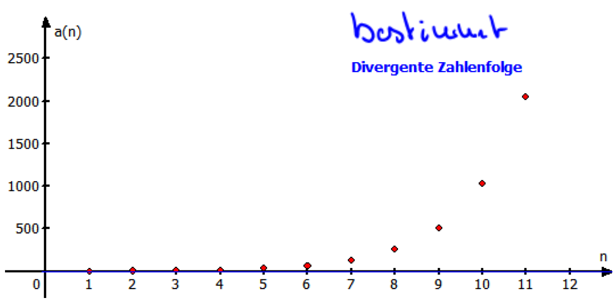
Beispiel: $a_n = 3 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$

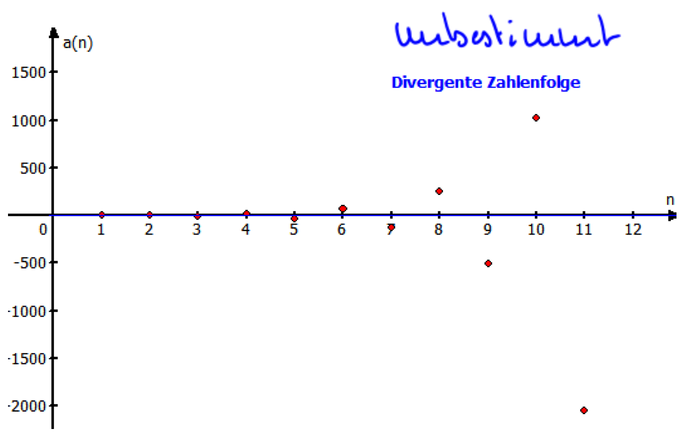
$a_n = a_1 \cdot q^{n-1}$ allgemeine Form einer geometrischen Folge mit Startwert a_1 und Quotient q

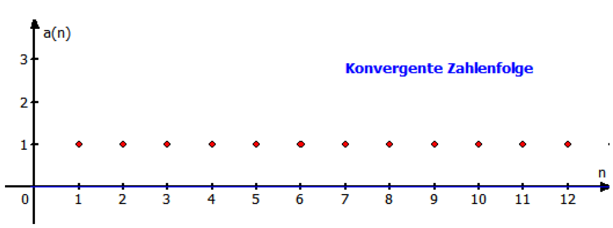
Erster Einblick:
Konvergenz - Bestimmte Divergenz - Unbestimmte Divergenz

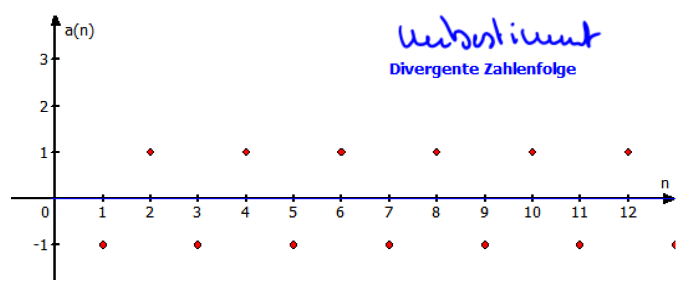












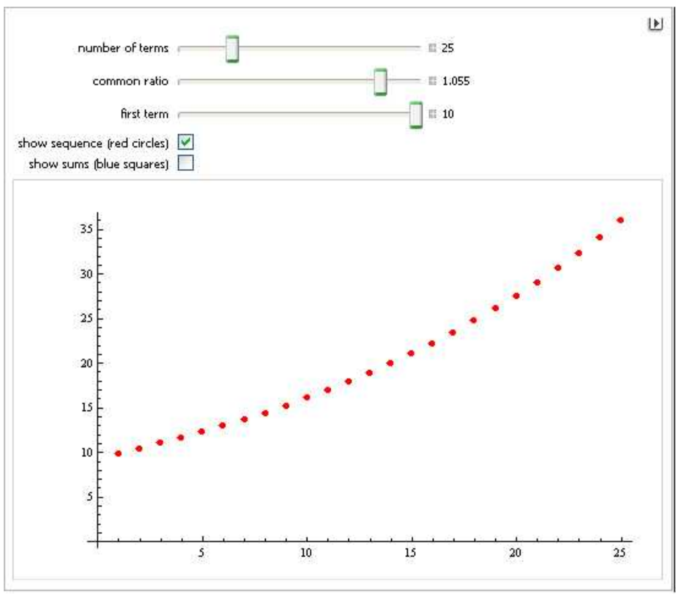
Zweidimensionale Visualisierung einer geometrischen Folge
(ähnlich dem vorhergehenden Beispiel)

Allgemeine geometrische Folge: $a_n = c \cdot q^n$

Geometrische Folge: $a_n = 10 \cdot 1{,}055^n$

hier mit einem Startwert 10 und einem Quotienten q=1,055 zwischen je zwei Folgengliedern

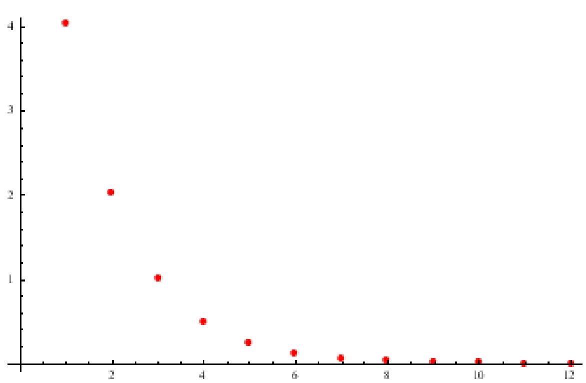
Plot of a Geometric Sequence and Its Partial Sums



http://demonstrations.wolfram.com/PlotOfAGeometricSequenceAndItsPartialSums/

Geometrische Folge: $a_n = 4 \cdot 0{,}5^n$

hier mit einem Startwert 4 und einem Quotienten q=0,5 zwischen je zwei Folgengliedern

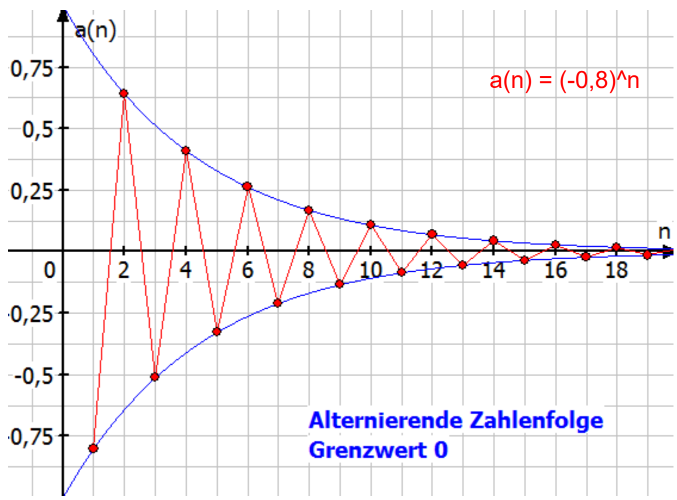


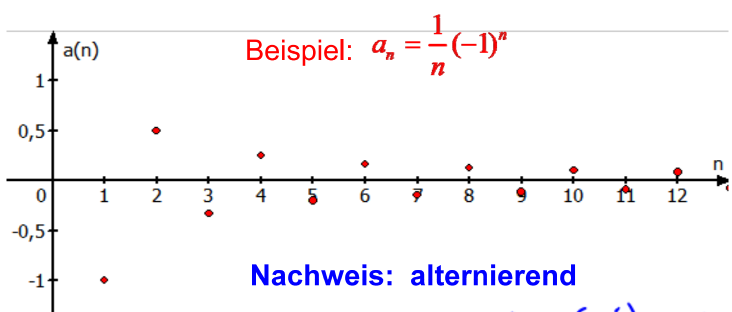
Eigenschaften von Folgen

alternierende Folgen:

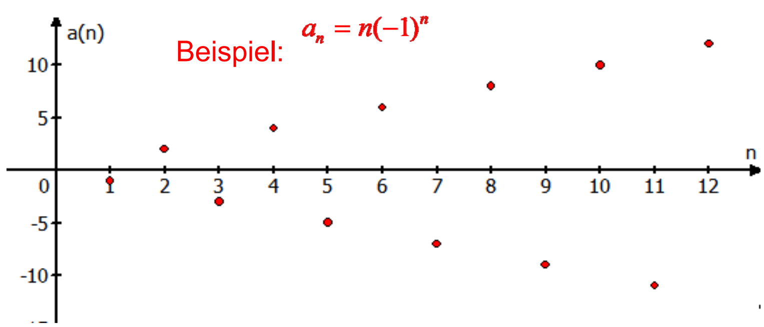
Beispiele spezieller Folgentypen:

1. Die Folge -1,1,-1,1,-1,... also $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *mit* $a_n = (-1)^n$ ist eine **alternierende Folge**, d.h. eine Folge mit fortlaufend wechselndem Vorzeichen $\forall k \in \mathbb{N}$: $a_k \cdot a_{k+1} < 0$.



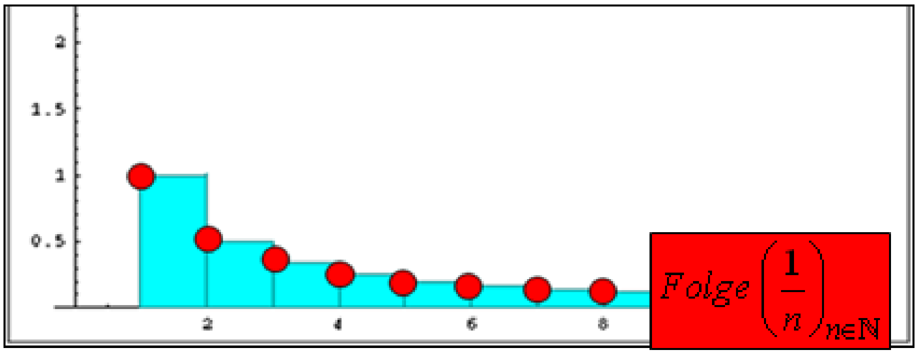


Siehe Seite vorher

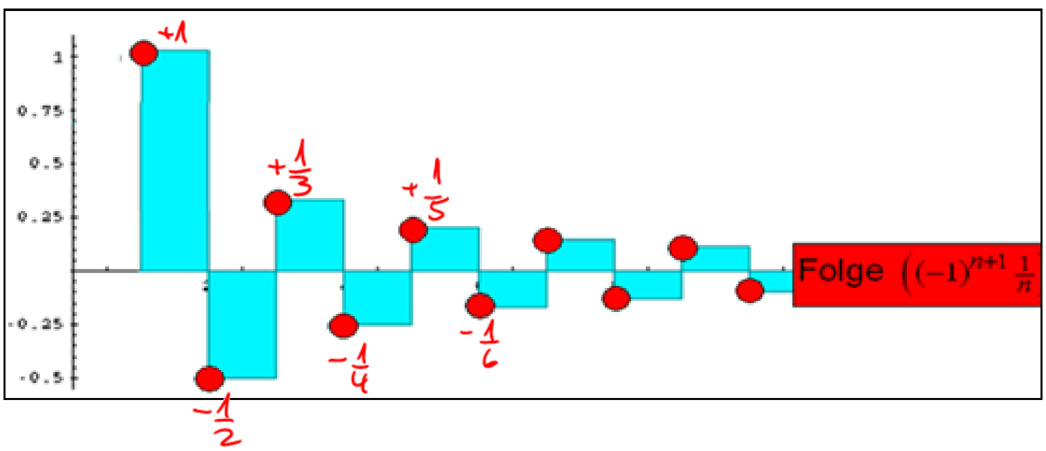


4.3 Spezielle Folgen

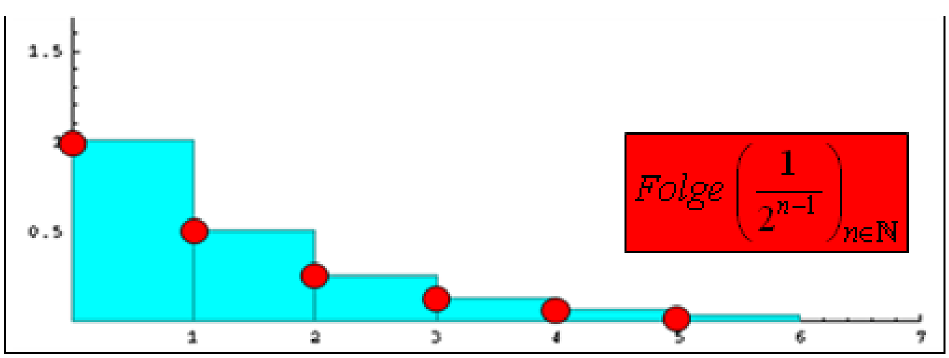
- Die **harmonische Folge** $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *mit* $a_n = \frac{1}{n}$ konvergiert gegen 0.



- Die **alternierende harmonische Folge** $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *mit* $a_n = (-1)^{n+1}\frac{1}{n}$ ist ebenfalls konvergent gegen den Grenzwert 0.

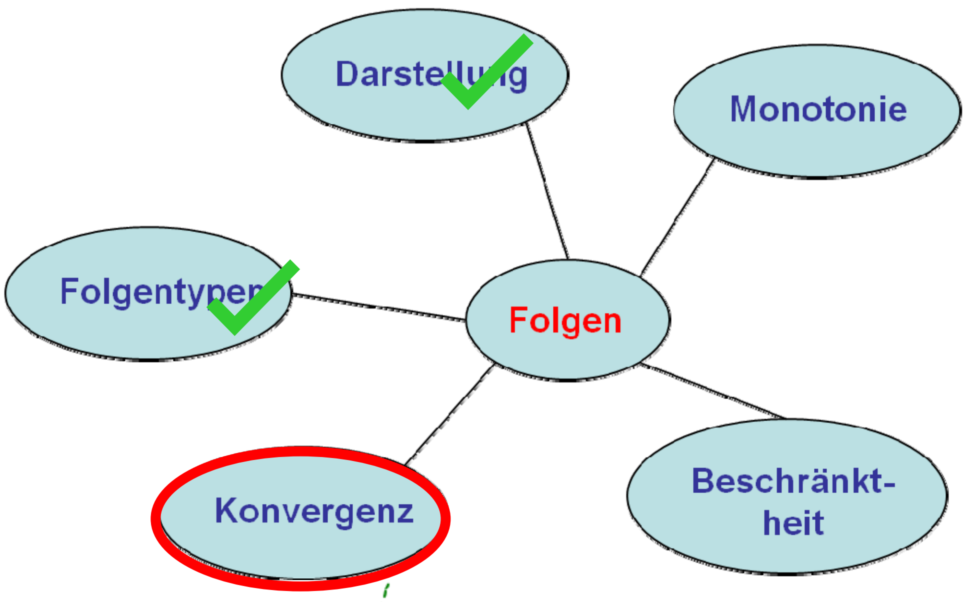


- Die **geometrische Folge** $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *mit* $a_n = q^{n-1}$ ist konvergent für $|q| < 1$ und divergent für $|q| \geq 1$.

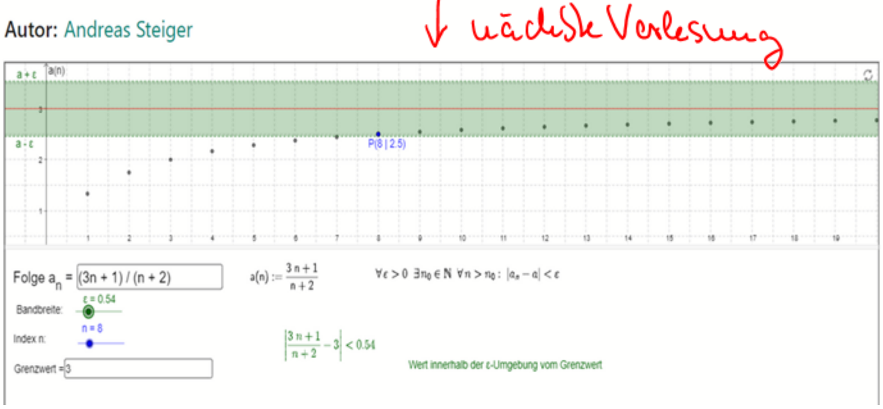


Überblick des Kapitels Folgen

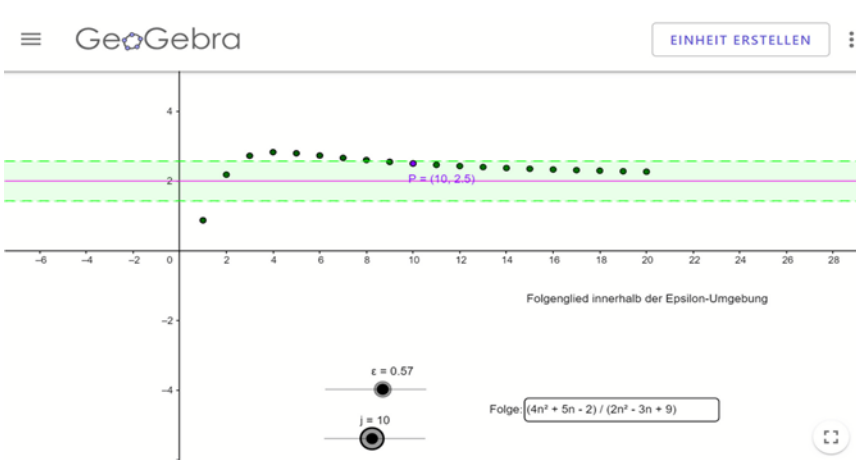
Begriffe im Zusammenhang mit Folgen $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$



nächste Vorlesung



https://www.geogebra.org/m/fnhbwxnc



https://www.geogebra.org/m/zwtf27q8