Vorlesung 18 am 24.11.2022

Inhalt: Komplexe Zahlen

Umrechnung Polarkoordinaten - kartesische Koordinaten

Eigenschaften

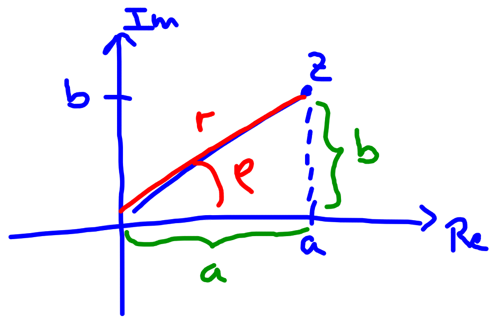
Funktionen in Polarkoordinaten
Funktionen in Parameterdarstellung

Komplexe Funktionen

Zusammenfassung der Operationen mit komplexen Zahlen

	algebraische Darstellung (kartesische Koordinaten)	Exponentialdarstellung (Polarkoordinaten)
Addition	$z_1 + z_2 = (a_1 + a_2) + j \cdot (b_1 + b_2)$	$z_1 + z_2 = r_1 \cdot e^{j\varphi_1} + r_2 \cdot e^{j\varphi_2}$
Negation	$-z = -a + j \cdot (-b)$	$-z = r \cdot e^{j(\varphi + \pi)}$
Subtraktion	$z_1 - z_2 = (a_1 - a_2) + j \cdot (b_1 - b_2)$	$z_1 - z_2 = r_1 \cdot e^{j\varphi_1} - r_2 \cdot e^{j\varphi_2} = r_1 \cdot e^{j\varphi_1} + r_2 \cdot e^{j(\varphi_2 + \pi)}$
Multiplikation	$z_1 \cdot z_2 = (a_1 a_2 - b_1 b_2) + j \cdot (b_1 a_2 + a_1 b_2)$	$z_1 \cdot z_2 = (r_1 \cdot r_2) \cdot e^{j(\varphi_1 + \varphi_2)}$
Potenz	$z^n = (a + j \cdot b)^n$	$z^n = (r \cdot e^{j\varphi})^n = r^n \cdot e^{j\varphi \cdot n}$
Division	$\frac{z_1}{z_2} = \frac{a_1 a_2 + b_1 b_2}{a_2^2 + b_2^2} + j \frac{b_1 a_2 - a_1 b_2}{a_2^2 + b_2^2}$	$\frac{z_1}{z_2} = \frac{r_1}{r_2} e^{j(\varphi_1 - \varphi_2)}$
Wurzel		$\sqrt[n]{z} = (r \cdot e^{j(\varphi + k \cdot 2\pi)})^{1/n} = \sqrt[n]{r} \cdot e^{j(\frac{\varphi}{n} + \frac{k}{n} 2\pi)}$ mit $k = 0,..,n-1$
konjugiert komplexe Zahl	$z^* = a - j \cdot b$	$z^* = r \cdot e^{-j\varphi}$

Herleitung der Umrechnungsformeln zwischen Polarkoordinaten und kartesischen Koordinaten



$z = a + bj$ algebraische Form mit kartesischen Koordinaten

$z = r \cdot e^{j\varphi}$ Exponentialdarstellung mit Polarkoordinaten
Betrag **r** (Länge des Zeigers) und Winkel φ (Phase)

(1) Umrechnung von
Polarkoordinaten in kartesische Koordinaten

$$\boxed{\begin{aligned} a &= r \cdot \cos\varphi \\ b &= r \cdot \sin\varphi \end{aligned}}$$

, wenn r und φ gegeben

(2) Umrechnung von
kartesischen Koordinaten in Polarkoordinaten

$$\boxed{\begin{aligned} r &= \sqrt{a^2+b^2} \\ \varphi &= \arctan\left(\frac{b}{a}\right) \end{aligned}}$$

, wenn a, b gegeben

+ Zusatzregeln

Aufgabe:

Berechnen Sie $z = (2+2j) \cdot 2 \cdot e^{j\frac{\pi}{2}}$

Variante 1: $z = \underbrace{(\overset{a}{2} + \overset{b}{2}j)} \cdot 2 \cdot e^{j\frac{\pi}{2}}$

$= \sqrt{2^2+2^2} \cdot e^{j\arctan(\underbrace{\frac{2}{2}}_{1})} = \sqrt{8} \cdot e^{j\frac{\pi}{4}}$

$r = \sqrt{a^2+b^2}$

$\varphi = \arctan\left(\frac{b}{a}\right)$

$= \sqrt{8} \cdot e^{j\frac{\pi}{4}} \cdot 2 \cdot e^{j\frac{\pi}{2}}$

$= 2\underbrace{\sqrt{8}}_{\sqrt{4}\cdot\sqrt{2}} \cdot e^{j\left(\frac{\pi}{4}+\frac{\pi}{2}\right)}$

$= \underbrace{4\cdot\sqrt{2}}_{r} \cdot e^{j\underbrace{\frac{3\pi}{4}}_{\varphi}} = 4\cdot\sqrt{2} \cdot \underbrace{\cos\frac{3\pi}{4}}_{=-\frac{1}{2}\sqrt{2}} + 4\cdot\sqrt{2} \cdot \underbrace{\sin\frac{3\pi}{4}}_{=+\frac{1}{2}\sqrt{2}} j$

$a = r \cdot \cos\varphi$

$b = r \cdot \sin\varphi$

$= -4 + 4j$

Variante 2: $z = (2+2j) \cdot \underbrace{2 \cdot e^{j\frac{\pi}{2}}}$

$= 2 \cdot \cos\frac{\pi}{2} + 2 \cdot \sin\frac{\pi}{2} j = 2 \cdot 0 + 2 \cdot 1 j = 2j$

$= (2+2j) \cdot 2j$

$= 4j + 4\underbrace{j^2}_{=-1}$

$= -4 + 4j$ $= \sqrt{(-4)^2+4^2} \cdot e^{j\left(\arctan\left(-\frac{4}{4}\right) + \pi\right)}$

Sonderfall → gleich

$= \sqrt{32} \cdot e^{j\left(-\frac{\pi}{4}+\pi\right)}$

$= 4\cdot\sqrt{2} \cdot e^{j\frac{3\pi}{4}}$

Aufgabe:

Berechnen Sie $z = \sqrt[4]{16 \cdot e^{j\frac{\pi}{2}}}$

- Winkel der 1. Lösung: $\varphi_1 = \frac{\varphi}{n} = \frac{\frac{\pi}{2}}{4} = \frac{\pi}{8}$
- Winkel zwischen je zwei Lösungen: $\Delta\varphi = \frac{2\pi}{n} = \frac{2\pi}{4} = \frac{\pi}{2}$
- Betrag aller Lösungen: $r = \sqrt[4]{16} = 2$
- 1. Lösung (Hauptlösung)

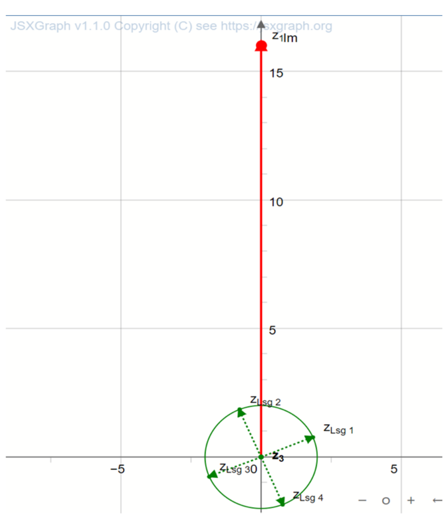
  $z_1 = 2 \cdot e^{j\frac{\pi}{8}}$

- 4. Wurzel => 4 Lösungen

  $z_2 = 2 \cdot e^{j\left(\frac{\pi}{8} + 1\frac{\pi}{2}\right)} = 2 \cdot e^{j \cdot \frac{5\pi}{8}}$

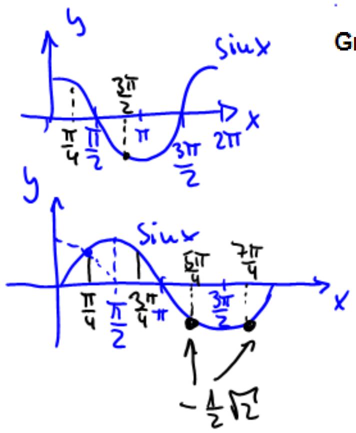
  $z_3 = 2 \cdot e^{j\left(\frac{\pi}{8} + 2\cdot\frac{\pi}{2}\right)} = 2 \cdot e^{j \cdot \frac{9\pi}{8}}$

  $z_4 = 2 \cdot e^{j\left(\frac{\pi}{8} + 3\cdot\frac{\pi}{2}\right)} = 2 \cdot e^{j \frac{13\pi}{8}}$



https://viamint.haw-hamburg.de/Content/Slidercontent/Mathe/KomplexeZahlen/Modulmaterialien/Applets/AppletVideos/applet.html

Grundlegende Werte der Trigonometrie



Grundlegende Werte trigonometrischer Funktionen:

Grad	Bogenmaß	sin	cos	tan
0°	0	0	1	0
30°	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}\sqrt{3}$	$\frac{1}{3}\sqrt{3}=\frac{1}{\sqrt{3}}$
45°	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{1}{2}\sqrt{2}=0.707$	$\frac{1}{2}\sqrt{2}=0.707$	1
60°	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{1}{2}\sqrt{3}$	$\frac{1}{2}$	$\sqrt{3}=1.732$
90°	$\frac{\pi}{2}$	1	0	±∞
135°	$\frac{3\pi}{4}$	$\frac{1}{2}\sqrt{2}=0.707$	$-\frac{1}{2}\sqrt{2}=-0.707$	-1
180°	π	0	-1	0
270°	$\frac{3\pi}{2}$	-1	0	±∞

$\tan(\frac{\pi}{4})$

$\arctan(1)$

$\frac{\pi}{4} = \arctan(1)$

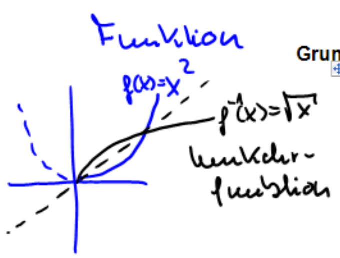
$\arctan(\tan\frac{\pi}{4}) = \arctan(1)$

$\tan\frac{\pi}{4} = 1$

$\varphi = \arctan(1)$

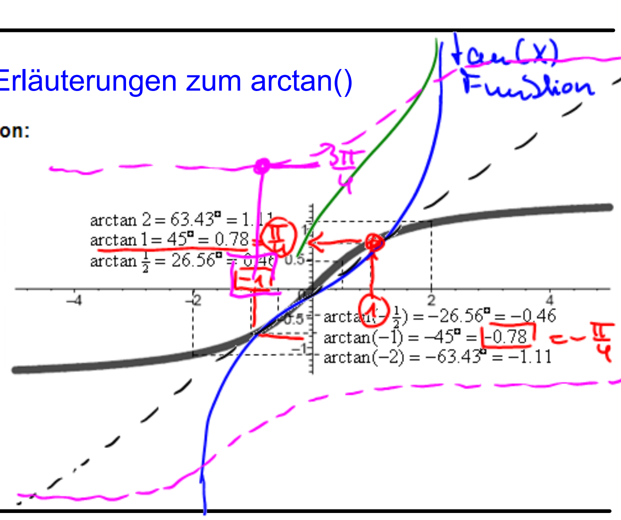
$\varphi = \frac{\pi}{4}$

Erläuterungen zum arctan()



Grundlegende Werte der arctan-Funktion:

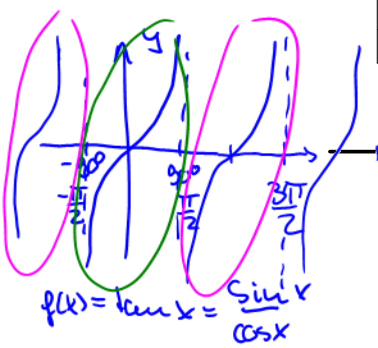
x	arctan(x)
→+∞	90° bzw. $\frac{\pi}{2}$
$\sqrt{3}=1.732$	60° bzw. $\frac{\pi}{3}$
1	45° bzw. $\frac{\pi}{4}$
0	0
-1	-45° bzw. $-\frac{\pi}{4}$
$\sqrt{3}=1.732$	-60° bzw. $-\frac{\pi}{3}$
→−∞	-90° bzw. $-\frac{\pi}{2}$



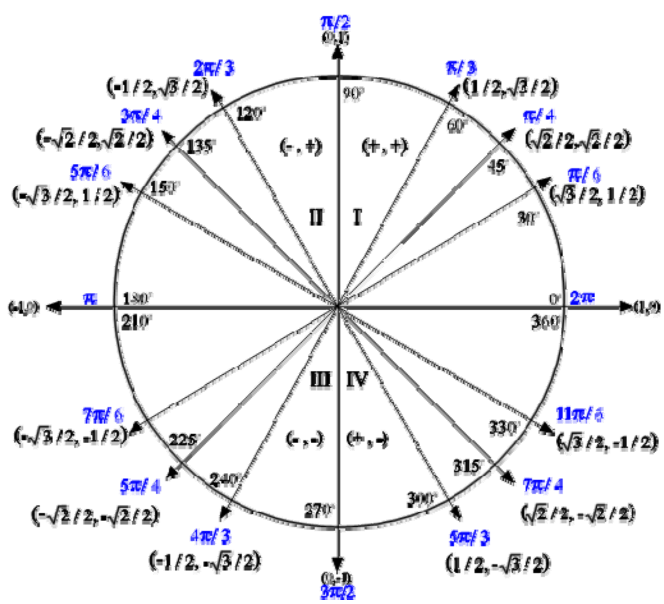
wird benötigt für Winkel im II. + III. Quadr.

arctan x Umkehrfunktion

Weitere Teilfunktion von tan(x) als Umkehrfunktion

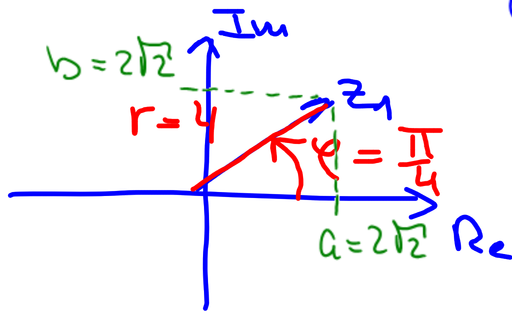


Winkel in Bogenmaß und Gradmaß und Richtungen



Beispiel 1: Umrechnung kartesische Koordinaten - Polarkoordinaten

(im I. Quadrant)



$$z_1 = \underbrace{4}_{r} \cdot e^{j\overbrace{\frac{\pi}{4}}^{}_{\varphi}}$$

(1) Umrechnung in Kartesische Koordinaten

$$\underline{a} = r \cdot \cos\varphi = 4 \cdot \cos\frac{\pi}{4} = 4 \cdot \frac{1}{2} \cdot \sqrt{2} = \underline{2\sqrt{2}}$$

$$\underline{b} = r \cdot \sin\varphi = 4 \cdot \sin\frac{\pi}{4} = 4 \cdot \frac{1}{2}\sqrt{2} = \underline{2\sqrt{2}}$$

(2) Umrechnung in Polarkoordinaten

$$r = \sqrt{a^2+b^2} = \sqrt{(2\sqrt{2})^2+(2\sqrt{2})^2} = \sqrt{8+8} = \sqrt{16} = 4$$

$$\varphi = \arctan\frac{b}{a} = \arctan\left(\frac{2\sqrt{2}}{2\sqrt{2}}\right) = \arctan(1) = \frac{\pi}{4}$$

Grundlegende Werte der Trigonometrie

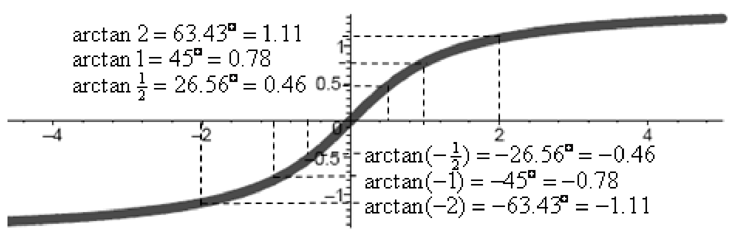
Grundlegende Werte trigonometrischer Funktionen:

Grad	Bogenmaß	sin	cos	tan
0°	0	0	1	0
30°	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}\sqrt{3}$	$\frac{1}{3}\sqrt{3}=\frac{1}{\sqrt{3}}$
45°	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{1}{2}\sqrt{2}=0.707$	$\frac{1}{2}\sqrt{2}=0.707$	1
60°	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{1}{2}\sqrt{3}$	$\frac{1}{2}$	$\sqrt{3}=1.732$
90°	$\frac{\pi}{2}$	1	0	$\pm\infty$
135°	$\frac{3\pi}{4}$	$\frac{1}{2}\sqrt{2}=0.707$	$-\frac{1}{2}\sqrt{2}=-0.707$	-1
180°	π	0	-1	0
270°	$\frac{3\pi}{2}$	-1	0	$\pm\infty$

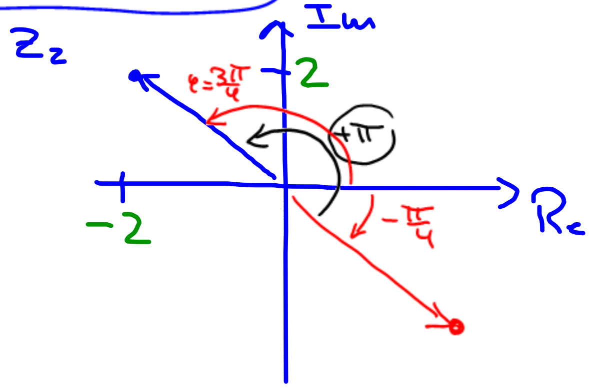
Erläuterungen zum arctan()

Grundlegende Werte der arctan-Funktion:

x	arctan(x)
$\to +\infty$	**90°** bzw. $\frac{\pi}{2}$
$\sqrt{3}=1.732$	**60°** bzw. $\frac{\pi}{3}$
1	**45°** bzw. $\frac{\pi}{4}$
0	**0**
-1	**- 45°** bzw. $-\frac{\pi}{4}$
$\sqrt{3}=1.732$	**-60°** bzw. $-\frac{\pi}{3}$
$\to -\infty$	**-90°** bzw. $-\frac{\pi}{2}$



Beispiel 2: ~~Umrechnung~~ kartesische Koordinaten - Polarkoordinaten
z aus 2.Quadranten



$z_2 = \underbrace{-2}_{a} \underbrace{+2}_{b} j$ in kartesischen Koordinaten

(2) Umrechnung in Polarkoordinaten

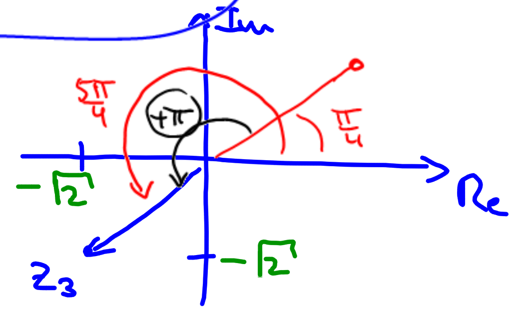
$r = \sqrt{a^2+b^2} = \sqrt{(-2)^2+(+2)^2} = \sqrt{8} = 2\sqrt{2}$

$\varphi = \arctan\frac{b}{a} = \arctan\left(\frac{2}{-2}\right)^{+\pi} = \arctan(-1)^{+\pi}$, da II. Quadr.

$= -\frac{\pi}{4} \underbrace{+\pi}$
Korrektur für II. Quadr.

$= \frac{3\pi}{4}$

Beispiel 3: Umrechnung kartesische Koordinaten - Polarkoordinaten
z aus 3.Quadranten



$$z_3 = \underbrace{-\sqrt{2}}_{a} \underbrace{- j\sqrt{2}}_{b}$$ Kartesische Koordinaten

(2) Umrechnung in Polarkoordinaten

$$r = \sqrt{a^2+b^2} = \sqrt{(-\sqrt{2})^2 + (-\sqrt{2})^2} = 2$$

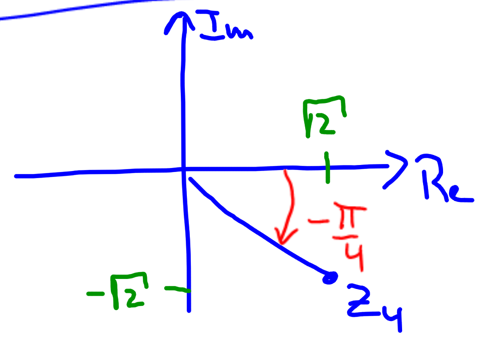
$$\varphi = \arctan\frac{b}{a} = \arctan\left(\frac{-\sqrt{2}}{-\sqrt{2}}\right) + \pi = \arctan(1) + \pi$$

Korrektur

$$= \frac{\pi}{4} + \pi$$, da III. Quadr.

$$= \frac{5\pi}{4}$$

Beispiel 4: Umrechnung kartesische Koordinaten - Polarkoordinaten
z aus 4.Quadranten



$$z_4 = \underbrace{\sqrt{2}}_{a} \underbrace{-}\, j\underbrace{\sqrt{2}}_{b}$$ in kartesischen Koordinaten

(2) Umrechnung in Polarkoordinaten

$$r = \sqrt{a^2+b^2} = \sqrt{(\sqrt{2})^2 + (-\sqrt{2})^2} = 2$$

$$\varphi = \arctan\frac{b}{a} = \arctan\left(\frac{-\sqrt{2}}{\sqrt{2}}\right) = \arctan(-1)$$

$$= -\frac{\pi}{4}$$ Winkel korrekt

$$= -\frac{\pi}{4} + 2\pi$$ für math. positive Angabe des Winkel

$$= \frac{7\pi}{4}$$

Wie muss man die Umrechnung für den Winkel durchführen, wenn der Realteil oder der Imaginärteil = 0 sind?

kartesische Koordinaten $\longrightarrow$ Polarkoordinaten

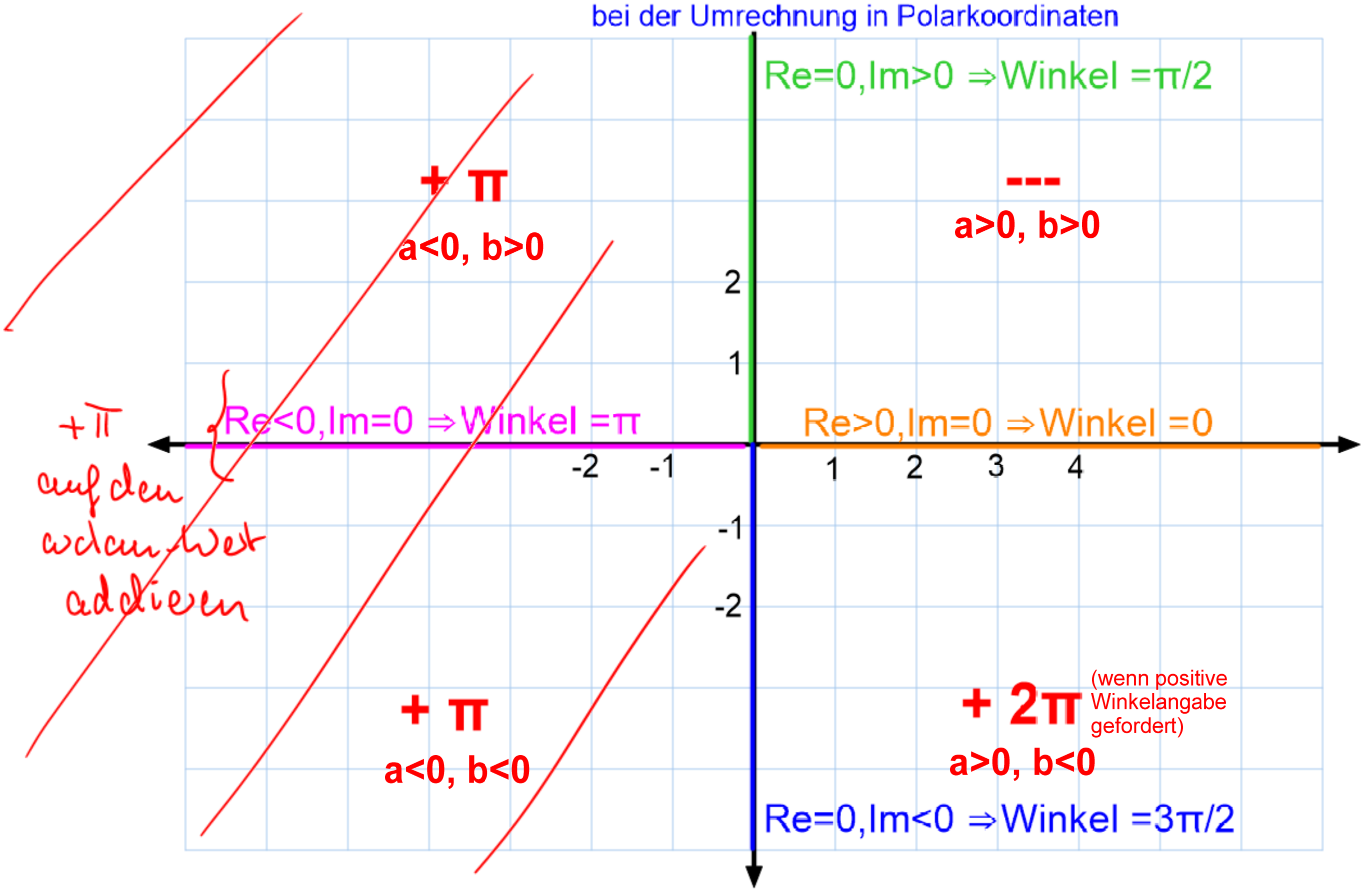
$$r = \sqrt{a^2 + b^2}, \quad \varphi = \arctan \tfrac{b}{a}$$

$z = a + bj$ $\qquad$ $z = r \cdot e^{j\varphi}$

Sonderfall a=0:
Umrechnungsformel mit b/a nicht definiert,
b>0, dann Winkel $\varphi = 90° = \frac{\pi}{2}$
b<0, dann Winkel $\varphi = 270° = \frac{3\pi}{2}$

Sonderfall b=0:
a>0, dann Winkel $\varphi = 0° = 0 \; (= 2\pi)$
a<0, dann Winkel $\varphi = 180° = \pi$

Zusammenfassung: Winkelveränderung des arctan()-Wertes bei der Umrechnung in Polarkoordinaten



•

Zusammenfassung der Koordinaten-Umrechnung

2.1.5 Die komplexen Zahlen

Die reellen Zahlen ergänzt um die imaginären Zahlen bilden die komplexen Zahlen.

Die komplexen Zahlen ermöglichen die Lösung der Gleichung $x^2+1=0$, die innerhalb der reellen Zahlen nicht lösbar ist. Durch das Einführen der imaginären Einheit $j^2=-1$ lässt sich die Lösung der Gleichung $x^2+1=0 \Leftrightarrow x=\sqrt{-1}$ mit $x=j$ angeben.

$$\boxed{\mathbb{C}=\{z \mid z=a+jb \text{ mit } a\in\mathbb{R}, b\in\mathbb{R}\} \quad \textit{Menge der komplexen Zahlen}}$$

Komplexe Zahlen

Algebraische Form (kartesische Koordinaten) Komponentendarstellung	Betrag/Phase (Polarkoordinaten): trigonometrische Form	Exponentialdarstellung
$z=a+j\cdot b$ a **Realteil** b **Imaginärteil**	$z=r\cdot(\cos\varphi+j\cdot\sin\varphi)$ r **Betrag** φ **Winkel**	$z=r\cdot e^{j\varphi}$ r **Betrag** φ **Winkel**

Umrechnung

$$a=r\cdot\cos\varphi,\quad b=r\cdot\sin\varphi$$

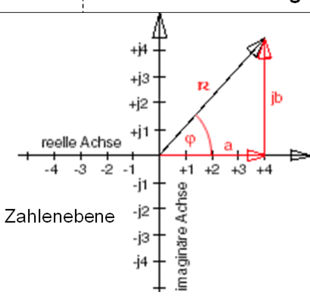
$$r=\sqrt{a^2+b^2},\quad \varphi=\arctan\tfrac{b}{a}$$

$$\cos\varphi+j\cdot\sin\varphi=e^{j\varphi}$$

Euler-Gleichung

Hinweis zur Verwendung des arctan:

a	b	φ	Rechnerwert
+	+	$[0,\frac{\pi}{2}]$	
0	+	$\frac{\pi}{2}$	
-	+	$[\frac{\pi}{2},\pi]$	$+\pi$
-	-	$[\pi,\frac{3\pi}{2}]$	$+\pi$
0	-	$\frac{3\pi}{2}$	
+	-	$[\frac{3\pi}{2},2\pi]$	$(+2\pi)$

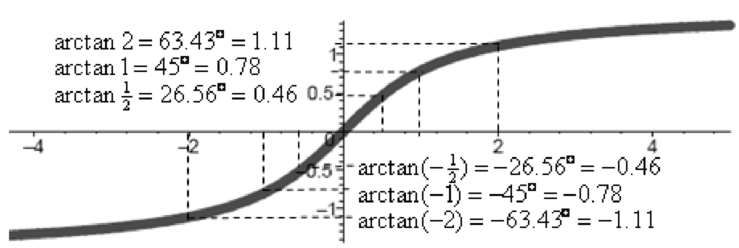


Gauß´sche Zahlenebene

Erläuterungen zum arctan()

Grundlegende Werte der arctan-Funktion:

x	arctan(x)
$\to+\infty$	**90°** bzw. $\frac{\pi}{2}$
$\sqrt{3}=1.732$	**60°** bzw. $\frac{\pi}{3}$
1	**45°** bzw. $\frac{\pi}{4}$
0	**0**
-1	**- 45°** bzw. $-\frac{\pi}{4}$
$\sqrt{3}=1.732$	**-60°** bzw. $-\frac{\pi}{3}$
$\to-\infty$	**-90°** bzw. $-\frac{\pi}{2}$



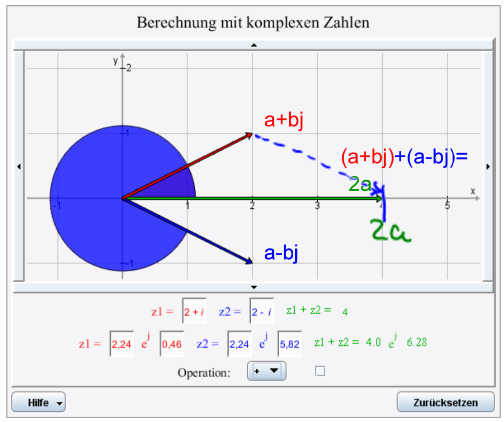
Eigenschaften komplexer Zahlen

	Addition von konjugiert komplexen Zahlen **Die Addition von konjugiert komplexen Zahlen ergibt den doppelten Realteil.**	
(1)	$z + z^* = 2a$	
	Subtraktion von konjugiert komplexen Zahlen **Die Subtraktion von konjugiert komplexen Zahlen ergibt den doppelten Imaginärteil.**	
(2)	$z - z^* = 2\,j \cdot b$	
	Multiplikation von konjugiert komplexen Zahlen **Die Multiplikation von konjugiert komplexen Zahlen ergibt das Betragsquadrat.**	
(3)	$z \cdot z^* = a^2 + b^2$	$z \cdot z^* = r^2$ mit $r = \sqrt{a^2+b^2} = \lvert z \rvert$
	Aussagen zu konjugiert komplexen Zahlen	
	$\boxed{(z^*)^* = z}$ $(z+w)^* = z^* + w^*$ $(z \cdot w)^* = z^* \cdot w^*$	$r = \lvert z \rvert = \sqrt{z \cdot z^*}$ $\frac{z}{w} = \frac{1}{\lvert w \rvert^2} \cdot z \cdot w^*,\ w \neq 0$ (konjugiert komplexe Erweiterung)

(1) $z + z^* =$

$(a + \cancel{bj}) + (a - \cancel{bj})$

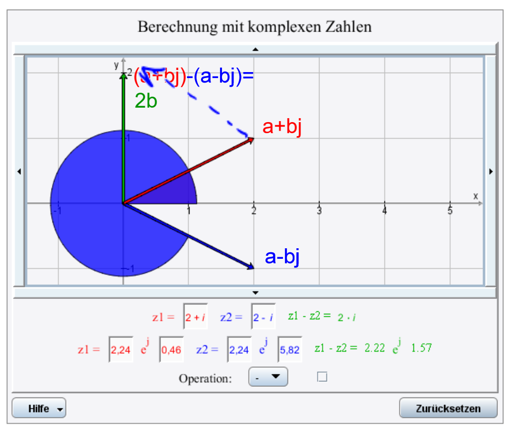
$= 2a$



(2) $z - z^* =$

$(\cancel{a} + bj) - (\cancel{a} - bj)$

$= 2\, b \cdot j$



(3) $z \cdot z^* =$

$(a+bj)(a-bj)$

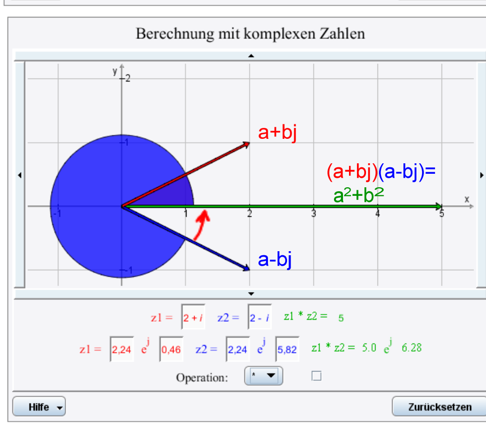
$= a^2 - (bj)^2$

$= \underbrace{a^2 + b^2} = r^2$

$z = a + bj$

$r = \sqrt{a^2+b^2}$

Betrag



Quadratische Polynome und Polynome höheren Grades

Quadratische Polynome und Polynome höheren Grades

Graphische Veranschaulichung der
Lage der Nullstellen und Funktionsverlauf des Polynoms 2.Grades

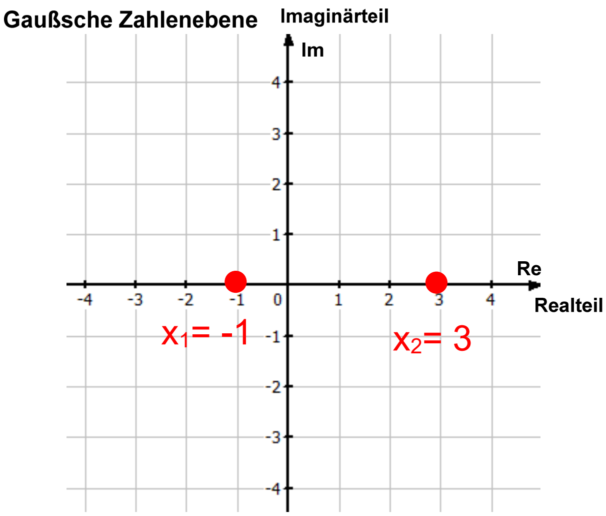
$x_1 = -1,\ x_2 = 3$

Linearfaktorzerlegung

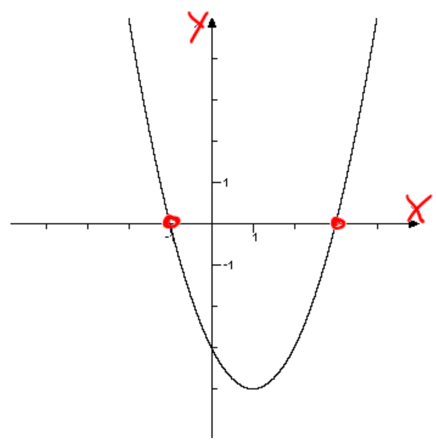
- Linearfaktoren sind $(x - \text{Nullstelle})$, also $(x - x_i)$

(1) $\mathbf{x^2 - 2x - 3 = 0}$ hat 2 reelle Nullstellen

$= (x-(-1))(x-3) = (x+1)(x-3)$



Gaußsche Zahlenebene für Darstellung der Nullstellen



xy-Ebene für Funktionsdarstellung

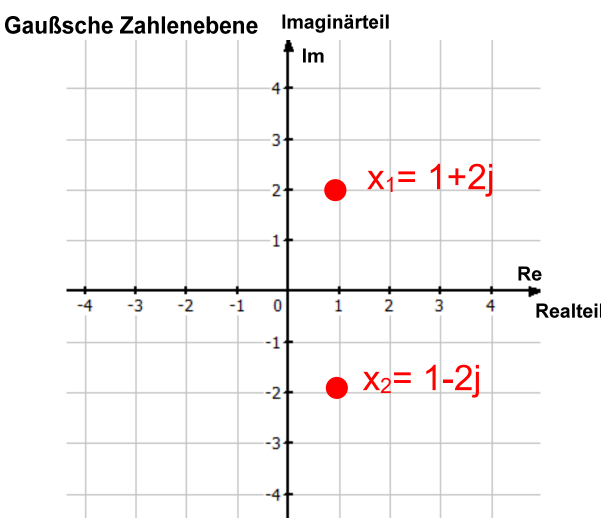
komplexe Nst. treten stets im Paar auf

$x_{1|2} = 1 \pm \sqrt{1-5} = 1 \pm \sqrt{-4} = 1 \pm 2j \Rightarrow x_1 = 1 + 2j$
$x_2 = 1 - 2j$

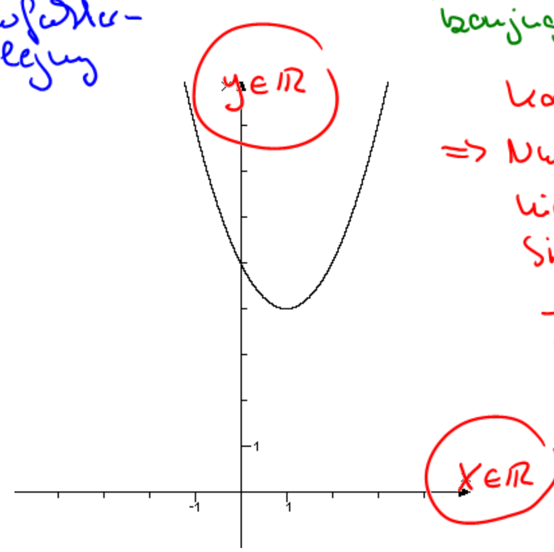
Nst. zueinander konjugiert komplex

(2) $\mathbf{x^2 - 2x + 5 = 0}$ hat 2 komplexe Nullstellen

$= (x-(1+2j))(x-(1-2j))$ Linearfaktorzerlegung



Gaußsche Zahlenebene für Darstellung der Nullstellen



xy-Ebene für Funktionsdarstellung

komplexe ⇒ Nullstellen nicht sichtbar in $\mathbb{R}^2$

→ komplexe Funktionen

Bemerkungen zum Fundamentalsatz der Algebra

(1) Jedes Polynom kann als Linearfaktorzerlegung mit reellen und/oder komplexen Nullstellen geschrieben werden.

Beispiel aus der Vorlesung:

$$f(x) = x^2 - 10x + 40$$

Nullstellen: $x_1 = 5 + \sqrt{15}\,j$

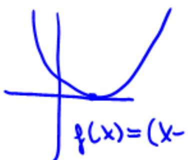
$x_2 = 5 - \sqrt{15}\,j$

$f(x) = (x-1)(x+2)$

2 verschiedene reelle Nst

$$\Rightarrow f(x) = (x - x_1)(x - x_2) = (x - (5 + \sqrt{15}\,j))(x - (5 - \sqrt{15}\,j))$$

$$= (x - 5 - \sqrt{15}\,j)(x - 5 + \sqrt{15}\,j)$$



$f(x) = (x-1)^2$

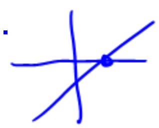
doppelte reelle Nst.

(2) Komplexe Nullstellen treten stets konjugiert komplex auf.

(3a) Jedes Polynom 2. Grades (quadratisches Polynom) hat immer 2 Nullstellen: 2 reelle oder 2 kompl.

hat zwei konj. kompl. Nst

(3) Jedes Polynom mit ungeradem Grad hat mindestens eine reelle Nullstelle.



$f(x) = x - 2$ hat genau 1 reelle Nst

(4) Es können mehrfache Nullstellen auftreten und damit auch gleiche Linearfaktoren.

$$f(x) = (x-1)^4 = (x-1)(x-1)(x-1)(x-1)$$

Bemerkung

- Vielfachheit der Nst gerade $\Rightarrow$ Berührpunkt mit x-Achse
- Vielfachheit der Nst ungerade $\Rightarrow$ Schnittpunkt mit x-Achse

z. B. $p(x) = (x-1)^2(x+3)(x-2+j)(x-2-j)$

(5) Ist eine Nullstelle x_1 bekannt, so bildet der Ausdruck $(x-x_1)$ einen Linearfaktor.

(6) Ein bekannter Linearfaktor kann durch Polynomdivision von dem Polynom abgespalten werden.
Das entstehende Polynom hat einen um eins kleineren Grad als das Ausgangspolynom.

Aufgabe

$$p(x) = x^4 + 2x^3 + x^2 + 8x - 12$$

mit $x_1 = 2j$ ist eine Nullstelle von $p(x)$ $\longrightarrow$ Linearfaktor $(x-2j)$

Bestimmen Sie alle Nullstellen!

Variante 1

$$(x^4+2x^3+x^2+8x-12) : (x-2j) = \frac{x^3 \ldots\ldots}{} : (x+2j) = \ldots x^2$$

$\vdots$

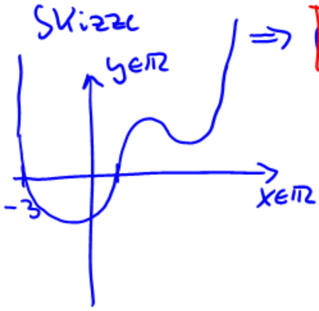
zu Hause

Variante 2

$x_1 = 2j$ Nst $\Rightarrow$ Linearfaktor $(x-2j)$

$\Rightarrow x_2 = -2j$ ist Nst $\Rightarrow$ Linearfaktor $(x-(-2j)) = (x+2j)$

Skizze



$$\Rightarrow \boxed{p(x)} = \underbrace{x^2 \ldots}_{\text{gesucht}} \cdot \underbrace{(x-2j)(x+2j)}_{= x^2-(2j)^2 = x^2+4} = \boxed{(x-1)(x+3)(x-2j)(x+2j)}$$

ist Linearfaktorzerlegung von $p(x)$

$\dfrac{p(x)}{x^2+4} \longrightarrow$ Polynomdivision

Nullstellen:

$x_1 = 2j$, $x_2 = -2j$ } 2 komplexe Nst

$x_3 = 1$, $x_4 = -3$ } 2 reelle Nst.

$$
\begin{array}{l}
(x^4+2x^3+x^2+8x-12) : (x^2+4) = \underbrace{x^2+2x-3}_{\text{gesuchter Ausdruck}} \\
-(x^4+4x^2) \\
\quad 2x^3-3x^2+8x-12 \\
\quad -(2x^3+8x) \\
\qquad -3x^2-12 \\
\qquad -(-3x^2-12) \\
\qquad\qquad 0
\end{array}
$$

$\downarrow$ pq-Formel für Nullstelle

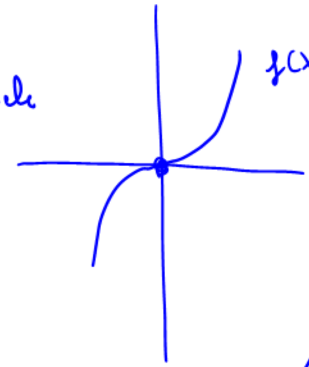
$$x_{3/4} = -1 \pm \sqrt{1+3}$$

$$x_3 = 1, \quad x_4 = -3$$

$\Rightarrow$ Linearfaktoren $(x-1)$ und $(x+3)$

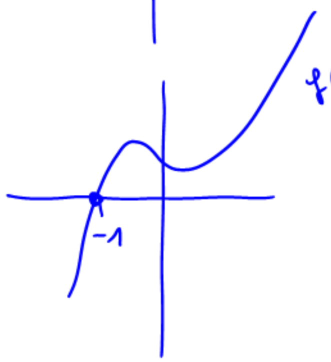
- Polynom 3. Grades hat immer 3 Nullstellen

- Beispiele



$f(x) = x^3 = (x-0)(x-0)(x-0)$

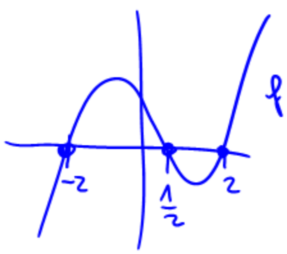
$x=0$ ist dreifache reelle Nst.



$f(x) = (x-(-1))(x-2j)(x+2j)$

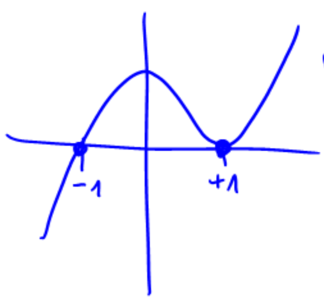
hat 1 reelle Nst.

und 2 komplexe Nst.



$f(x) = (x-(-2))(x-\frac{1}{2})(x-2)$

hat 3 verschiedene reelle Nst



$f(x) = (x-(-1))(x-1)^2 = (x+1)(x-1)^2$

hat 3 reelle Nst.

$\rightarrow$ eine einfache Nst

$\rightarrow$ eine doppelte Nst.

Polynom 3. Grades $\rightarrow$ 3 reelle

$\rightarrow$ 1 reelle + 2 kompl. Nst.

Polynom 5. Grades $\rightarrow$ 5 reelle

$\rightarrow$ 3 reelle + 2 kompl. Nst.

$\rightarrow$ 1 reelle + 4 kompl. Nst.

Linearfaktorzerlegung von Polynomen

Satz 2.6: Fundamentalsatz der Algebra:

Sei $p(x) = x^n + a_{n-1}x^{n-1} + a_{n-2}x^{n-2} + \ldots + a_1 x + a_0 \in \mathbb{C}$ ein komplexes Polynom, dann gibt es genau n komplexe (reelle + komplex) Nullstellen $x_1, x_2, \ldots, x_n \in \mathbb{C}$, die nicht notwendigerweise paarweise verschieden sein müssen, und es gilt

$$p(x) = (x - x_1) \cdot (x - x_2) \cdot \ldots \cdot (x - x_n).$$

(Beweis von Carl Friedrich Gauß, 1777-1855)

Bemerkung:

Sind alle Koeffizienten a_i reell, dann sind alle Nullstellen reell oder sie treten paarweise konjugiert komplex.

(1) Lösung von quadratischen Gleichungen

$$x^2 + px + q = 0$$

$$\text{Lösung in } \mathbb{R}: \ x_{1/2} = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{\frac{p^2}{4} - q}, \ \text{wenn } \frac{p^2}{4} - q \geq 0$$

$$\text{Lösung in } \mathbb{C}: \ x_{1/2} = -\frac{p}{2} \pm i\sqrt{q - \frac{p^2}{4}}, \ \text{wenn } \frac{p^2}{4} - q < 0$$

$$x_1 \text{ und } x_2 \text{ sind zueinander konjugiert komplex } (x_1 = x_2{}^*, \ x_2 = x_1{}^*)$$

(2) Lösung von Gleichungen höherer Ordnung

→ Die Darstellung einer Gleichung in der Form

$$p(x) = x^n + a_{n-1}x^{n-1} + a_{n-2}x^{n-2} + \ldots + a_1 x + a_0$$

heißt **Normalform eines Polynoms n-ten Grades**.

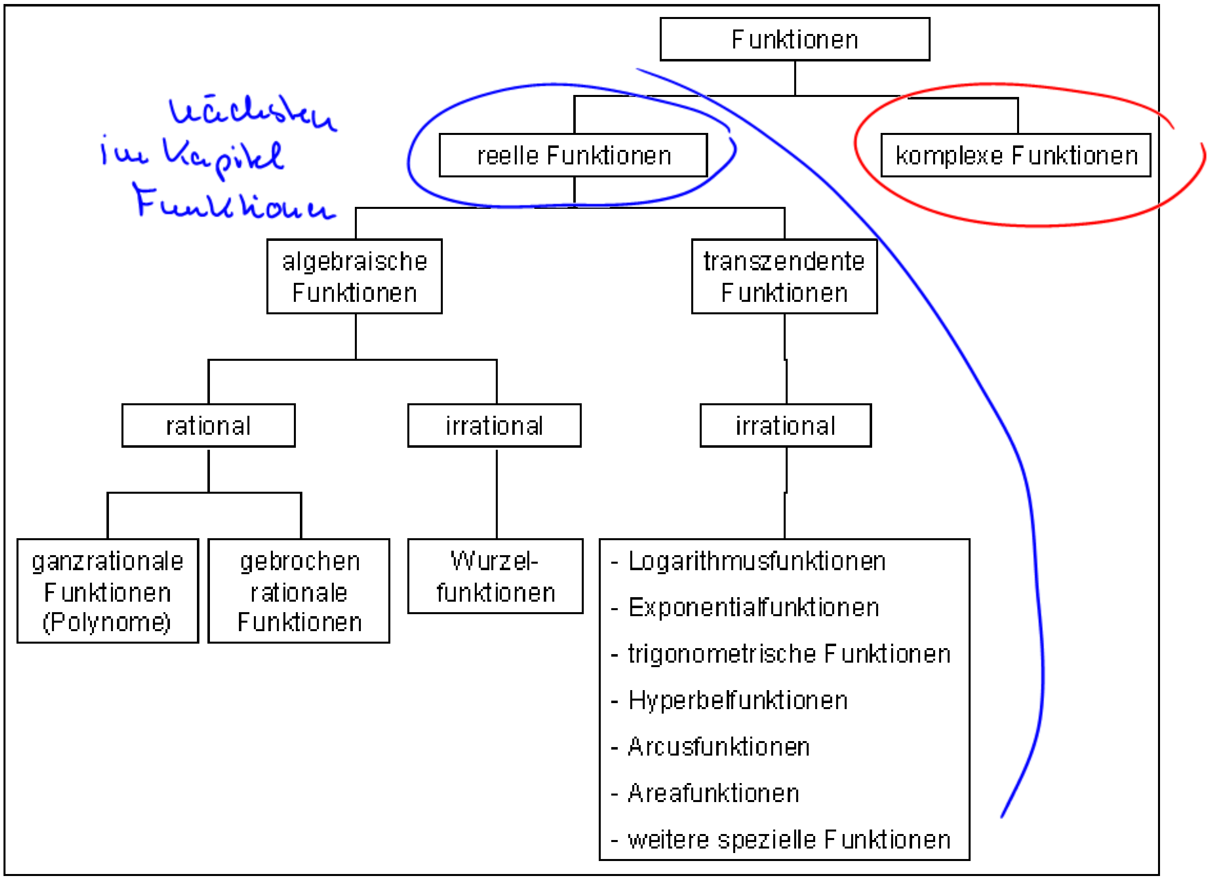
→ Hat ein Polynom *n*-ten Grades die Nullstellen $x_1, x_2, \ldots, x_n$, dann lässt sich die Gleichung in der Form

$$p(x) = (x - x_1) \cdot (x - x_2) \cdot \ldots \cdot (x - x_n)$$

darstellen. Diese Form ist die **Produktdarstellung der Gleichung *n*-ten Grades über Linearfaktoren**.

Eine Lösung x_i ist eine k-fache Lösung, wenn in der Produktdarstellung der Faktor $(x - x_i)$ k-mal auftaucht.

Übersicht der Funktionen



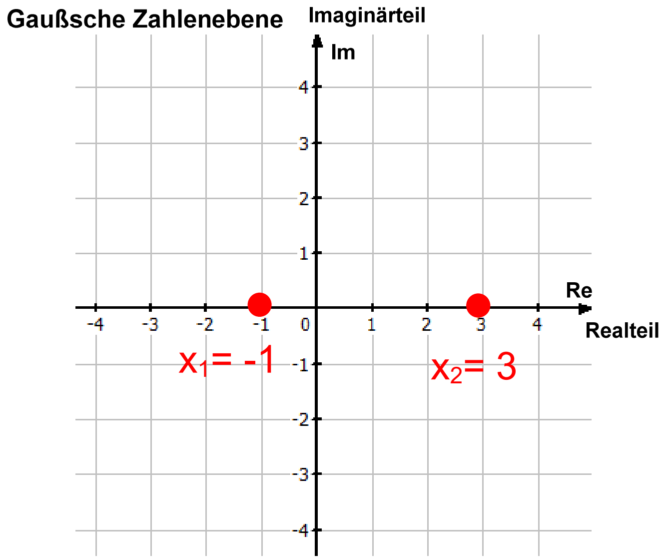
•

Grundlagen zum Thema

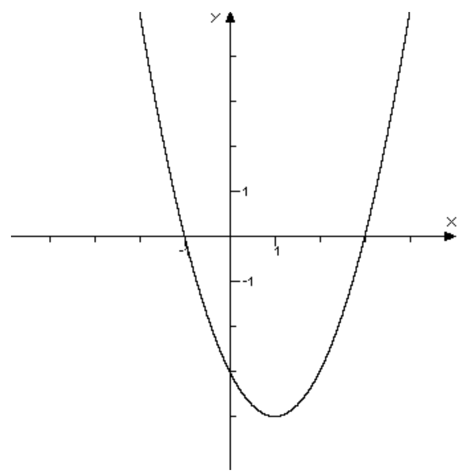
"Komplexe Funktionen"

Graphische Veranschaulichung
Lage der Nullstellen und Funktionsverlauf des Polynoms 2.Grades

(1) $\mathbf{x^2 - 2x - 3 = 0}$ hat 2 reelle Nullstellen

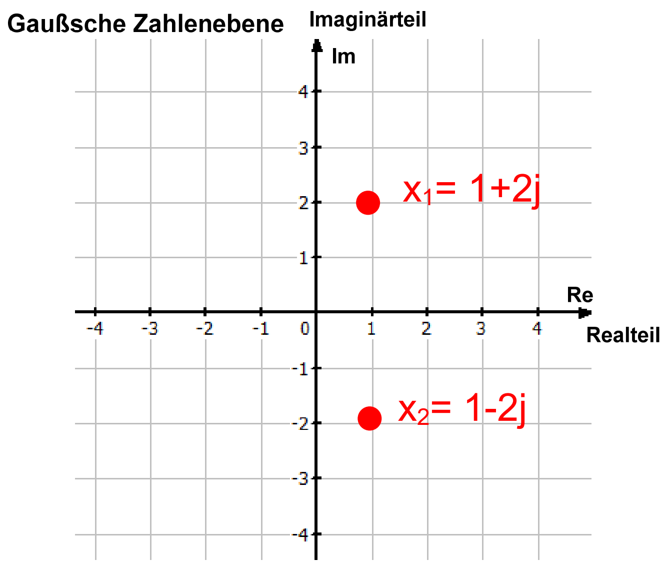


Gaußsche Zahlenebene für
Darstellung der Nullstellen

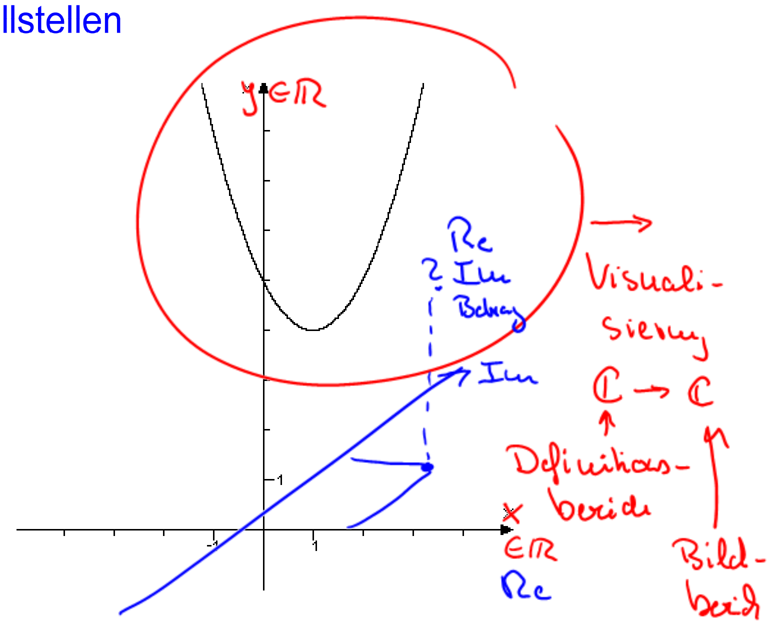


xy-Ebene für
Funktionsdarstellung

(2) $\mathbf{x^2 - 2x + 5 = 0}$ hat 2 komplexe Nullstellen



Gaußsche Zahlenebene für
Darstellung der Nullstellen

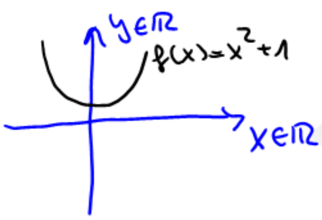


xy-Ebene für
Funktionsdarstellung

Nullstellen der Funktion f(x) = x^2+1

Funktion im Reellen

$$f: \begin{cases} \mathbb{R} \to \mathbb{R} \\ x \to y = f(x) = x^2+1 \end{cases}$$

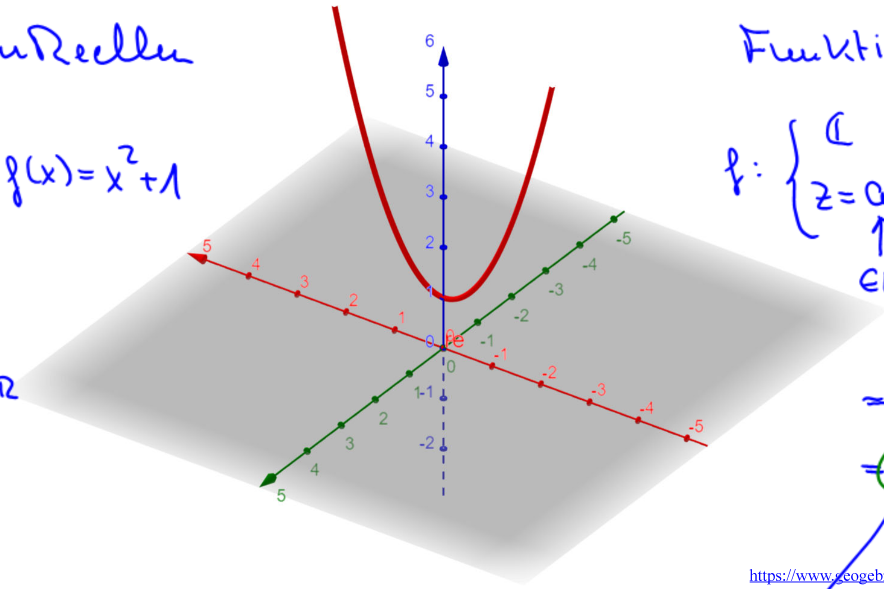


$x^2+1=0$

$\Rightarrow x^2=-1$

$\Rightarrow x_{1,2} = \pm j$

Übergang, dass komplexe Zahlen zuglassen



https://www.geogebra.org/m/DAzA2Qgk

Funktion im Komplexen

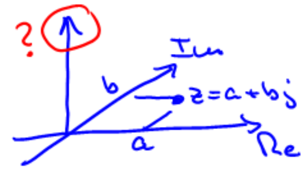
$$f: \begin{cases} \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C} \\ z = \underset{\in\mathbb{R}}{a} + \underset{\in\mathbb{R}}{b}j \to f(z) \end{cases}$$

$f(z) = z^2+1$

$= (a+bj)^2+1$

$= a^2+2abj+(bj)^2+1$

$= \underbrace{a^2-b^2+1}_{Re} + \underbrace{2ab}_{Im} j$



- Die Funktion f(x) = x^2+1
  hat innerhalb der reellen Zahlen keine Nullstelle.
- Innerhalb der komplexen Zahlen gibt es zwei Nullstellen

  $x_1 = j$ und $x_2 = -j$

- Wo sieht man an der Abbildung $f(z)=0$?

? • Was muss für $f(z)=0$ erfüllt sein?

$\Rightarrow Re(z)=0$ und $Im(z)=0$

Betrag z

$= \sqrt{Re(z)^2+Im(z)^2}$

$\Rightarrow$ Betrag $z = 0$!?

Berechnung der Nullstellen im Komplexen

- Bedingungen:

② $Re\, f(z)=0: \; a^2-b^2+1=0$

① $Im\, f(z)=0: \; \underbrace{2ab=0}$

$a=0 \lor b=0$

Einsetzen in ②: $-b^2+1=0$ $\Downarrow$ $b^2=1$ $\Downarrow$ $b_{1,2}=\pm 1$ $\Downarrow$

Einsetzen in ②: $a^2+1=0$ $\Downarrow$ $a^2=-1$ nicht lösbar mit $a\in\mathbb{R}$

zwei Lösungen für $z=a+bj$

$z_1 = 0+1\cdot j, \; z_2 = 0-1\cdot j$

https://www.geogebra.org/m/DAzA2Qgk

re : $\left.\begin{array}{l} x = t \\ y = 0 \\ z = t^2 + 1 \end{array}\right\} -5 \le t \le 5$

Funktion in mehreren Variablen

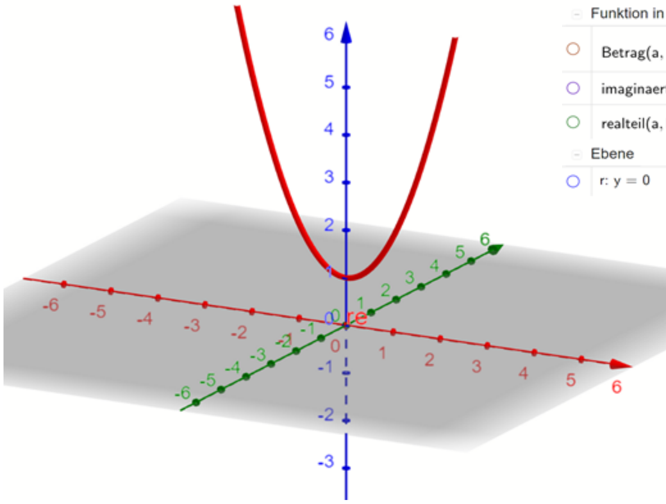
Betrag(a, b) $= \sqrt{(a^2 - b^2 + 1)^2 + (2\,a\,b)^2}$

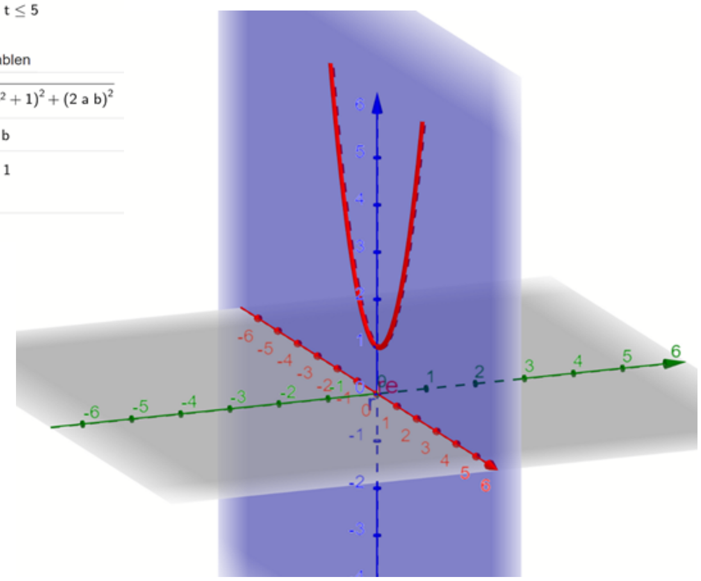
imaginaerteil(a, b) $= 2\,a\,b$

realteil(a, b) $= a^2 - b^2 + 1$

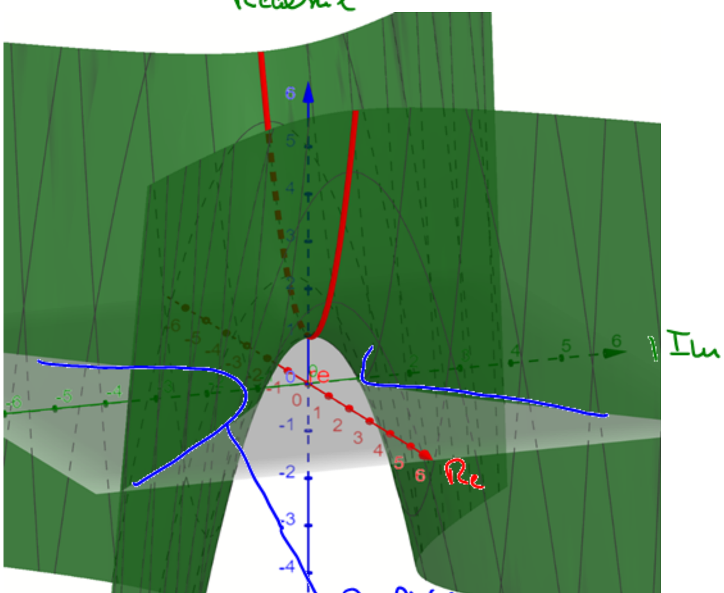
Ebene

r: $y = 0$



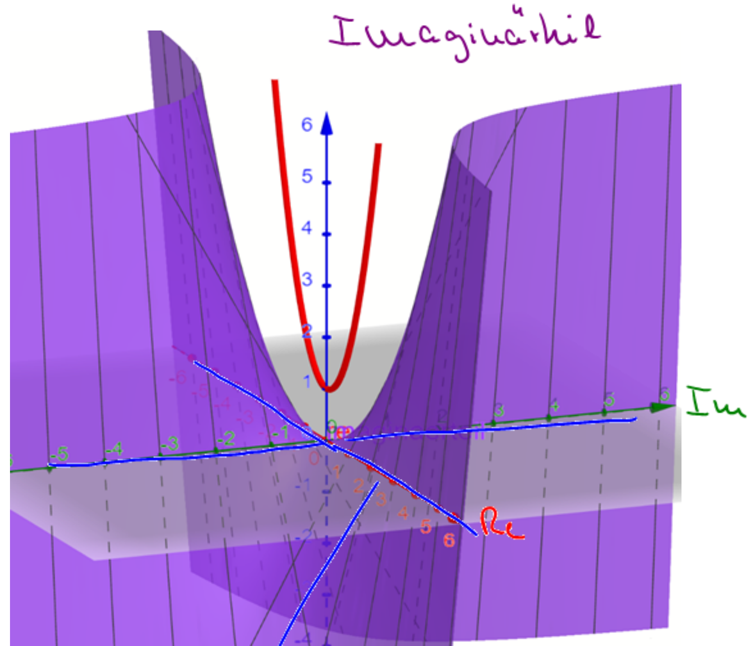


Realteil

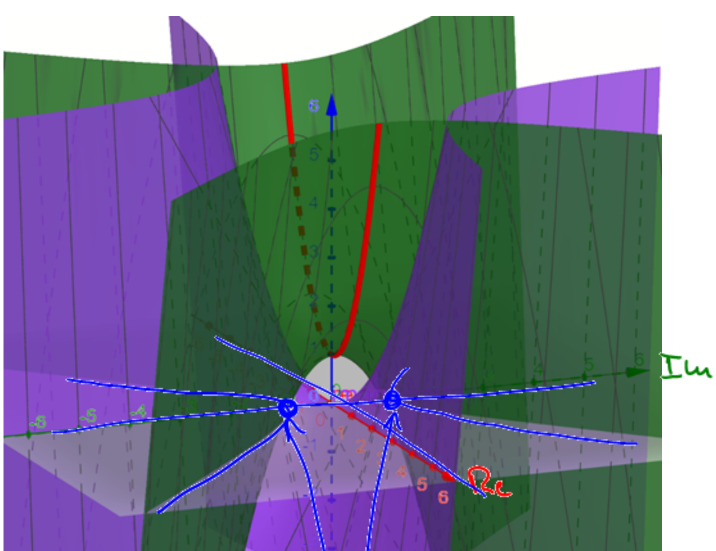


Realteil = 0

Imaginärteil

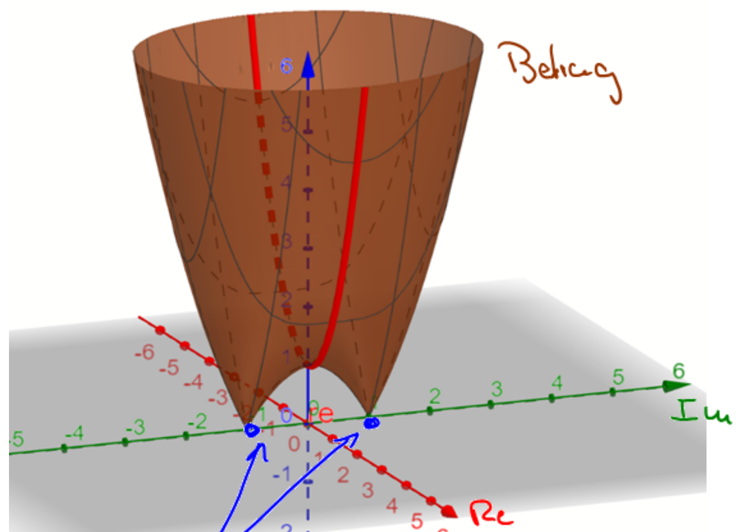


Imaginärteil = 0



bei $z_1 = j$ und $z_2 = -j$ ist Realteil = 0 und Imaginärteil = 0

Betrag



Betrag = 0 bei $z_1 = j$, $z_2 = -j$

Komplexe Funktionen

Definition 5.1: komplexe Funktion

Unter einer **komplexen Funktion** versteht man eine Funktion, für deren Definitions- und Bildbereich komplexe Zahlen zugelassen sind:

$$f : \underbrace{D}_{\subseteq \mathbb{C}} \to \mathbb{C} \quad mit \ D \subseteq \mathbb{C}$$

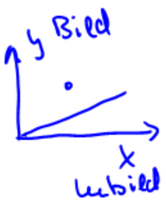
Die Zuordnungsvorschrift ordnet einer komplexen Zahl $z = x + j \cdot y$ genau eine komplexe Zahl $w = f(z) = f(x + j \cdot y) = u + j \cdot v = u(x,y) + j \cdot v(x,y)$ zu.

Die Menge D ist der Definitionsbereich von f (z-Ebene).
Die Menge $W = f(D) = \{ f(z) | z \in D \}$ ist der Bild- oder Wertebereich von f (w-Ebene).

Darstellungsmöglichkeiten:

1. Zwei Gauß´sche Zahlenebenen:
   - eine z-Ebene für die Darstellung der Urbildmenge
   - eine w-Ebene für die Darstellung der Bildmenge
2. Zwei 3-dimensionale Darstellungen getrennt für:
   - Realteil und
   - Imaginärteil

   } Siehe Beispiel vorher
3. Eine 3-dimensionale Darstellung für die Darstellung des Realteils als dritte Dimension und eine Einfärbung der Fläche gemäß dem Imaginärteil.

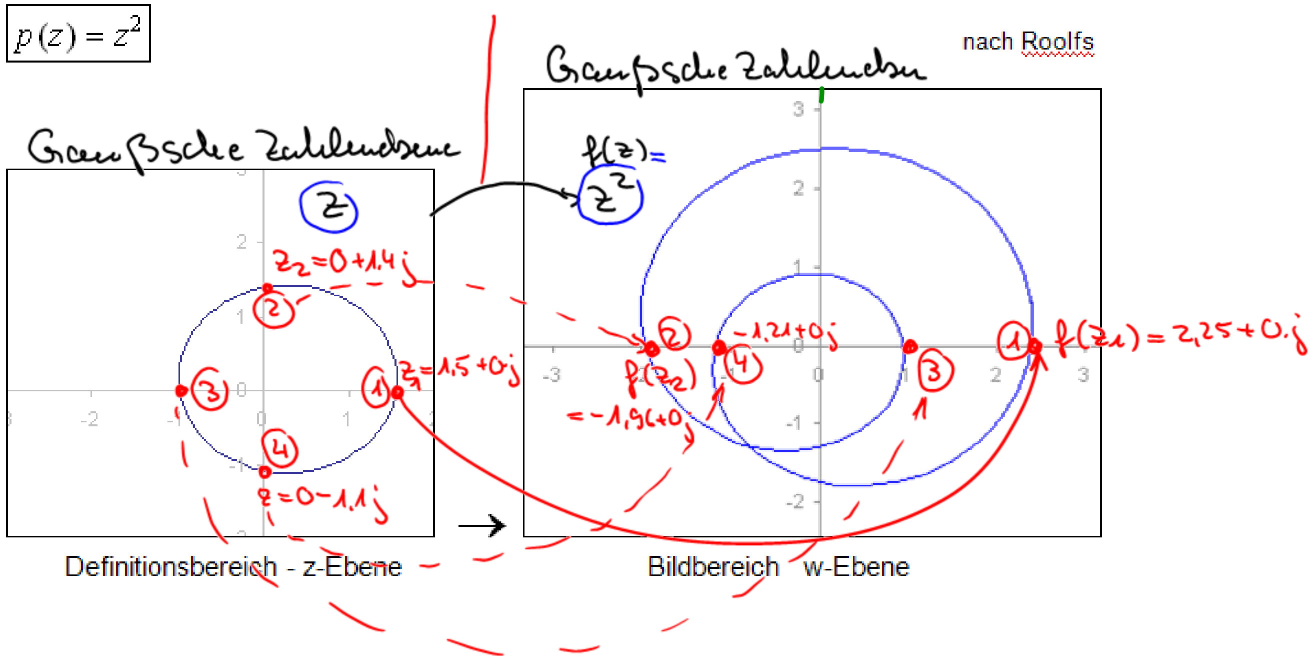


Beispiele

$\boxed{p(z)=z^2}$

Was macht die Funktion mit dem Kreis?

nach Roolfs

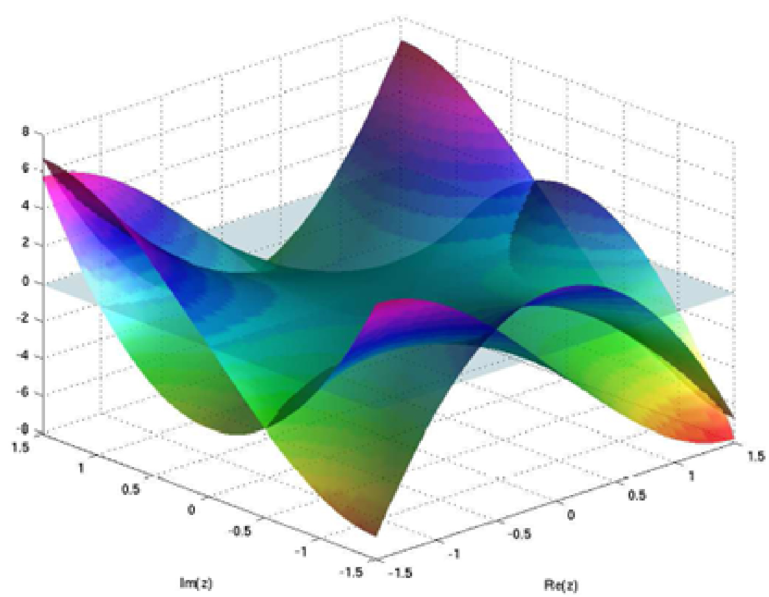


Definitionsbereich - z-Ebene → Bildbereich w-Ebene

$\boxed{p(z)=z^3-1}$

nach K. Höllig/ Uni Stuttgart

dargestellt sind Re(p(z)), Im(p(z)) und die z-Ebene (Urbild-Bereich)



5.3 Elementare komplexe Funktionen

Bei rationalen Funktionen (gebrochen- oder ganzrational) ist die Zuordnungsvorschrift aufgrund der Grundrechenarten für komplexe Zahlen klar definiert.

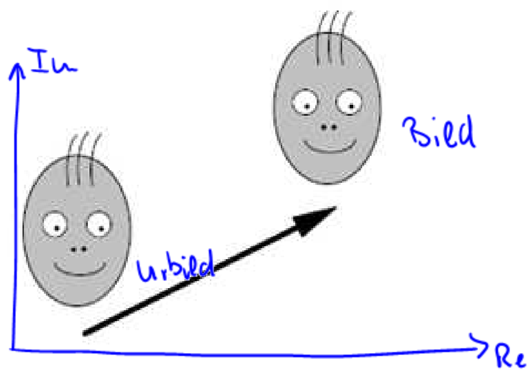
5.3.1 Lineare Funktionen

Lineare komplexe Funktionen sind gegeben durch

$$\boxed{w = f(z) = az + b \quad mit\ a, b \in \mathbb{C}}$$

(1) $\boxed{a = 1,\ b = s + j \cdot t \in \mathbb{C}:}$ $\boxed{w = f(z) = z + b}$

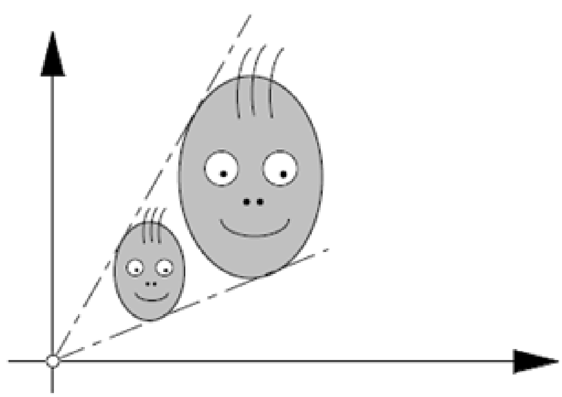
$$w = f(z) = f(x + jy) = (x + s) + j(y + t)$$



Translation (nach H. Walser)

(2) $\boxed{a \in \mathbb{R},\ b = 0}$ $\boxed{w = f(z) = az}$

$$w = f(z) = f(x + jy) = ax + j \cdot ay$$



Zentrische Streckung vom Ursprung aus (nach H.Walser)

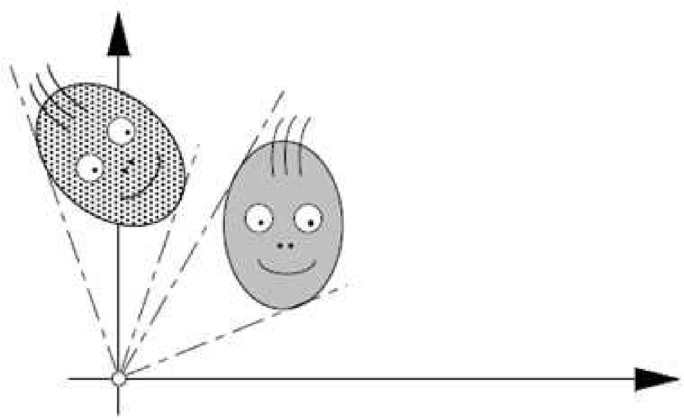
(3) $\boxed{a \in \mathbb{C},\ |a| = 1, b = 0:}$ $\quad \boxed{w = f(z) = az}$

$$w = f(z) = f(x + jy) = (\cos\varphi_a x - \sin\varphi_a y) + j(\cos\varphi_a y + \sin\varphi_a x)$$

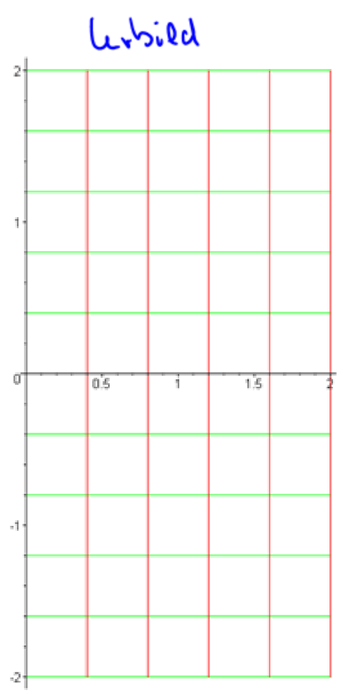
$$mit\ a = \cos\varphi_a + j\sin\varphi_a$$

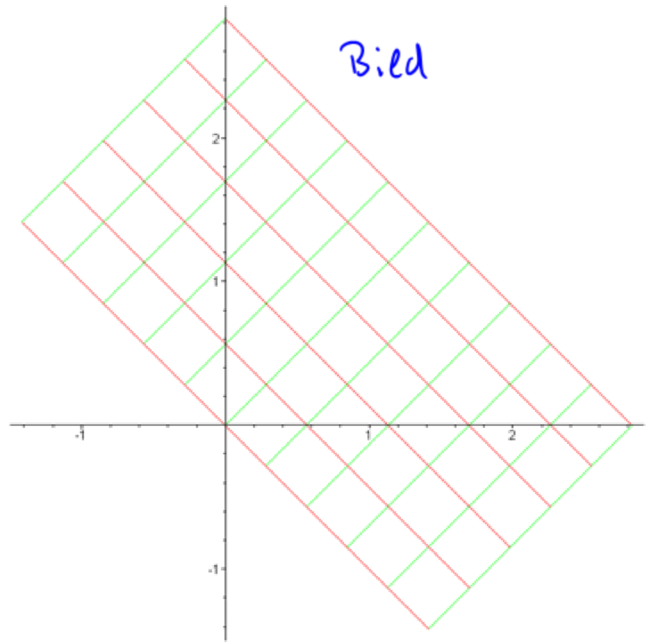
oder anders $w = f(z) = |z| e^{j(\varphi_a + \varphi_z)}$ $\quad mit\ z = |z| e^{j\varphi_z}\ und\ a = e^{j\varphi_a}$

Drehung um den Ursprung mit dem Winkel φ_a



Drehung um den Ursprung (nach H.Walser)





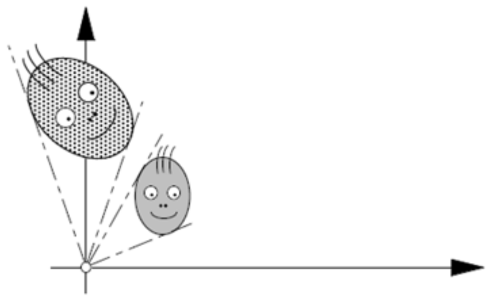
$$w = f(z) = (\tfrac{1}{2}\sqrt{2} + j\tfrac{1}{2}\sqrt{2})z$$

Drehung um $\varphi_a = 0{,}785$ (=45°)

(4) $\boxed{a \in \mathbb{C}\ beliebig, b = 0:}$ $\boxed{w = f(z) = az}$

$w = f(z) = |z||a|e^{j(\varphi_a+\varphi_z)}$

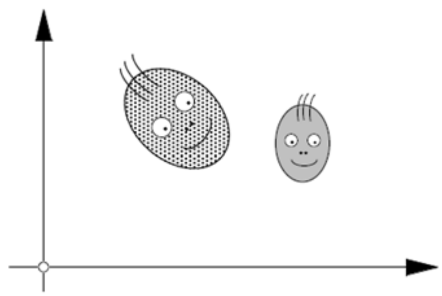
Drehung um den Ursprung mit dem Winkel φ_a und dem Streckungsfaktor $|a|$.



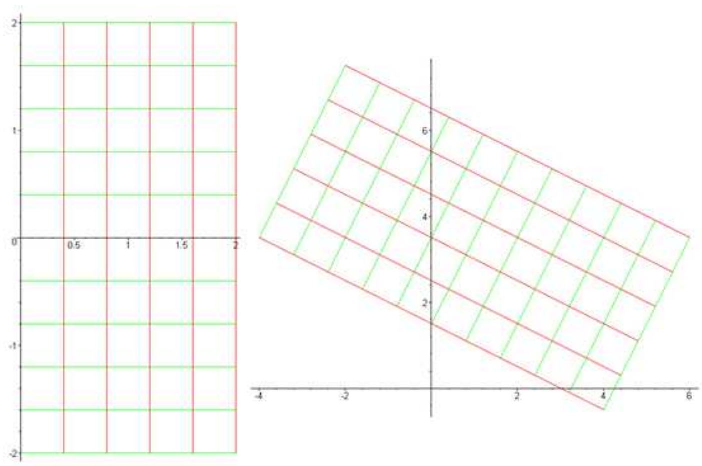
(5) $\boxed{a, b \in \mathbb{C}:}$ $\boxed{w = f(z) = az + b}$

Form der allgemeinen linearen Abbildung

Drehstreckung mit dem Zentrum $\frac{b}{1-a}$ mit dem Winkel φ_a und dem Streckungsfaktor $|a|$.



Drehstreckung allgemein (nach H.Walser)



$$w = f(z) = (1 + j2)z + (0 + 1.5j)$$

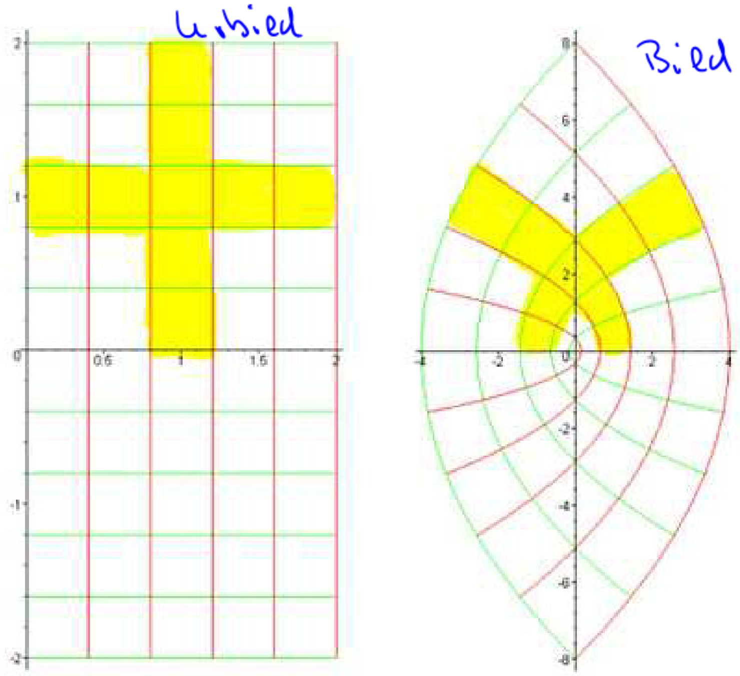
Drehstreckung mit dem Zentrum $-\frac{3}{4}$ mit dem Winkel φ_a=1,107 (63°) und dem Streckungsfaktor $|a|$=2,236.

5.3.2 Quadratische Funktionen

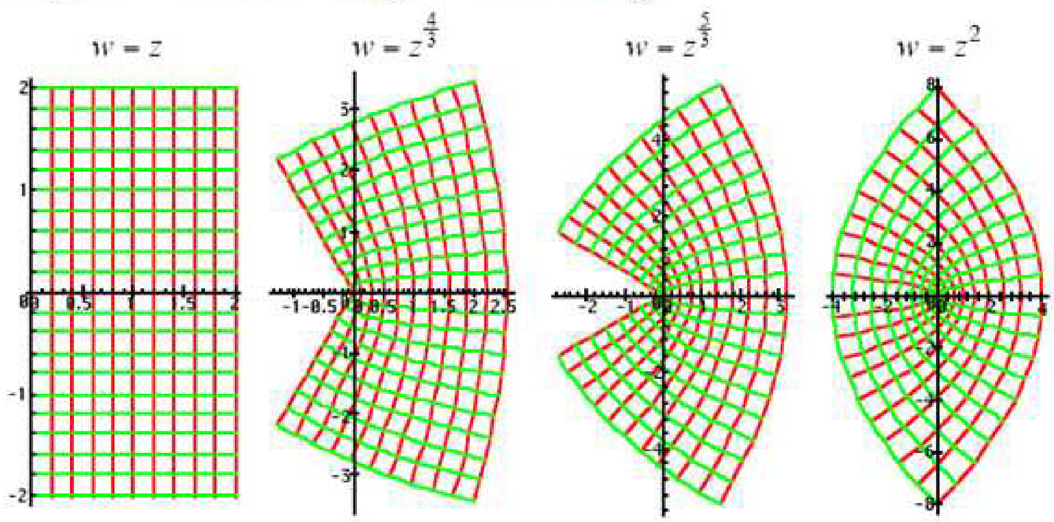
(1) $\boxed{w = f(z) = z^2}$

Eine senkrechte Gerade wird abgebildet auf eine liegende, nach links offene Parabel.

Eine waagerechte Gerade wird abgebildet auf eine liegende, nach rechts offene Parabel mit Brennpunkt im Ursprung.



Dynamische Vorstellung zur Entstehung:

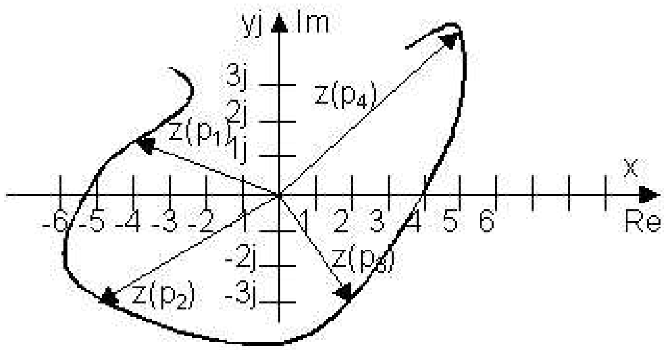


„Herumbiegen" der rechten Halbebene

5.6 Ortskurven

Eine Ortskurve ist keine komplexe Funktionen im eigentlichen Sinne, sondern die Darstellung einer komplexen Zahl in der Gaußschen Zahlebene abhängig von einem reellen Parameter.

Ortskurve z(p), erzeugt durch den Parameter p:



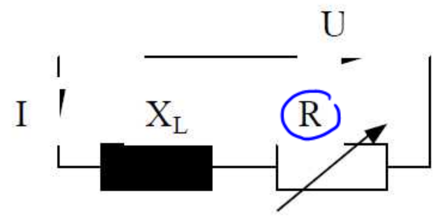
$$z : \begin{cases} \mathbb{R} \to \mathbb{C} \\ p \to z(p) = a + bj \end{cases}$$

Ist z(p) eine periodische Funktion von p, d. h. es ist z(p+P)=z(p) mit Periode P, dann ist die Ortskurve geschlossen.

Ortskurven werden in der Elektrotechnik häufig verwendet um zu beschreiben, wie Impedanzen und Spannungs-, Strom oder Leistungsverhältnisse von variierenden Frequenzen abhängen. Ortskurven zeigen die frequenzabhängigen Eigenschaften von ein- und Zweitoren vollständig.

Beispiel 1: Veränderlicher ohm´scher Widerstand in Serie mit Induktivität

$XL := 5 \cdot \Omega$ $U := 25V$



$Z(R) := R + j \cdot XL$ Der komplexe Gesamtwiderstand

$Y(R) := \frac{1}{Z(R)}$ Der komplexe Leitwert

$I(R) := \frac{U}{Z(R)}$ $\in \mathbb{C}$ Der komplexe Strom (proportional zum Leitwert!)

$\in \mathbb{C}$

Tabellarische Darstellung der interessierenden Werte in Abhängigkeit von R

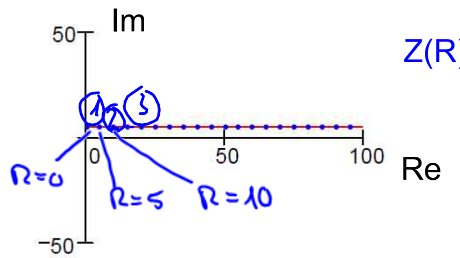
$R := 0\Omega, 5\Omega .. 100\Omega$

Z(R) I(R)

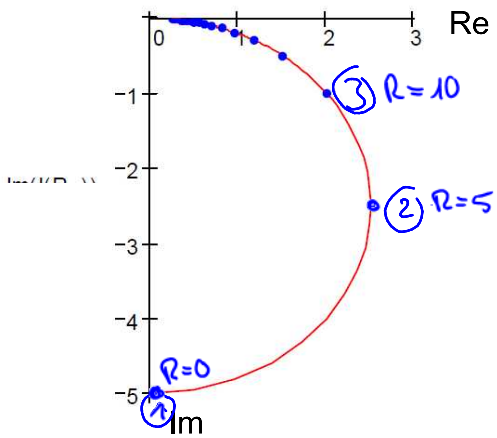
R = (Ω)	Re(Z(R)) = (Ω)		Im(Z(R)) = (Ω)	|Z(R)| = (Ω)	I(R) = (A)	Re(I(R)) = (A)	Im(I(R)) = (A)
0	0	1	5	5	-5i	0	-5
5	5	2	5	7.071	2.5-2.5i	2.5	-2.5
10	10	3	5	11.18	2-1i	2	-1
15	15		5	15.811	1.5-0.5i	1.5	-0.5
20	20		5	20.616	1.176-0.294i	1.176	-0.294
25	25		5	25.495	0.962-0.192i	0.962	-0.192
30	30		5	30.414	0.811-0.135i	0.811	-0.135
35	35		5	35.355	0.7-0.1i	0.7	-0.1
40	40		5	40.311	0.615-0.077i	0.615	-0.077
45	45		5	45.277	0.549-0.061i	0.549	-0.061
50	50		5	50.249	0.495-0.05i	0.495	-0.05
55	55		5	55.227	0.451-0.041i	0.451	-0.041
60	60		5	60.208	0.414-0.034i	0.414	-0.034
65	65		5	65.192	0.382-0.029i	0.382	-0.029
70	70		5	70.178	0.355-0.025i	0.355	-0.025
75	75		5			0.332	-0.022

http://www.math-tech.at/Beispiele/upload/ro_Ortskurven.PDF

R_ := 0Ω , 0.5Ω .. 100Ω   Parameter

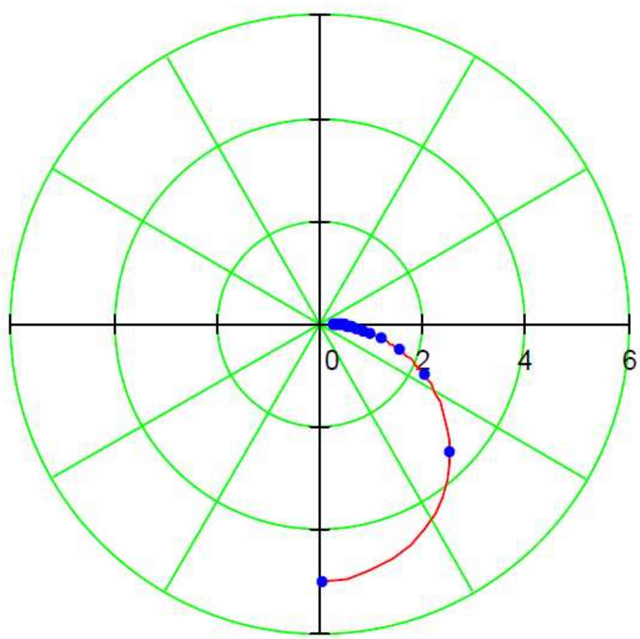


Z(R)   **Die Ortskurve des komplexen Widerstandes**



I(R)   **Die Ortskurve des komplexen Stromes hat dieselbe Form wie die Ortskurve des komplexen Leitwertes, da der Strom direkt proportional zum Leitwert ist (Proportionalitätsfaktor ist U)**

Am Beispiel der Stromortskurve zeigen wir, wie die gleiche Ortskurve im Kreisdiagramm kann natürlich auch unterschiedlich formatiert werden):



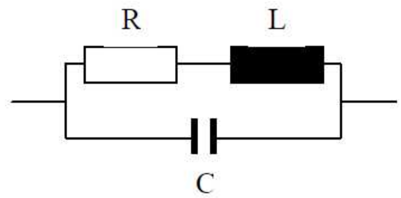
arg(I(R_)), arg(I(R))

Komplexe Funktionen

Beispiel 2: Ortskurve und Frequenzgang für einen Zweipol (C parallel zu (R+L))

Wir definieren konkrete Werte:

$L := 0.1 \cdot H$ $C := 32 \cdot 10^{-6} \cdot F$ $R := 20 \cdot \Omega$



$\omega(f) := 2 \cdot \pi \cdot f$

$f := 1 \cdot Hz .. 200 \cdot Hz$ $f_2 := 10 \cdot Hz, 20 \cdot Hz .. 210 \cdot Hz$

(f_2 für einzelne Punkte der Ortskurve)

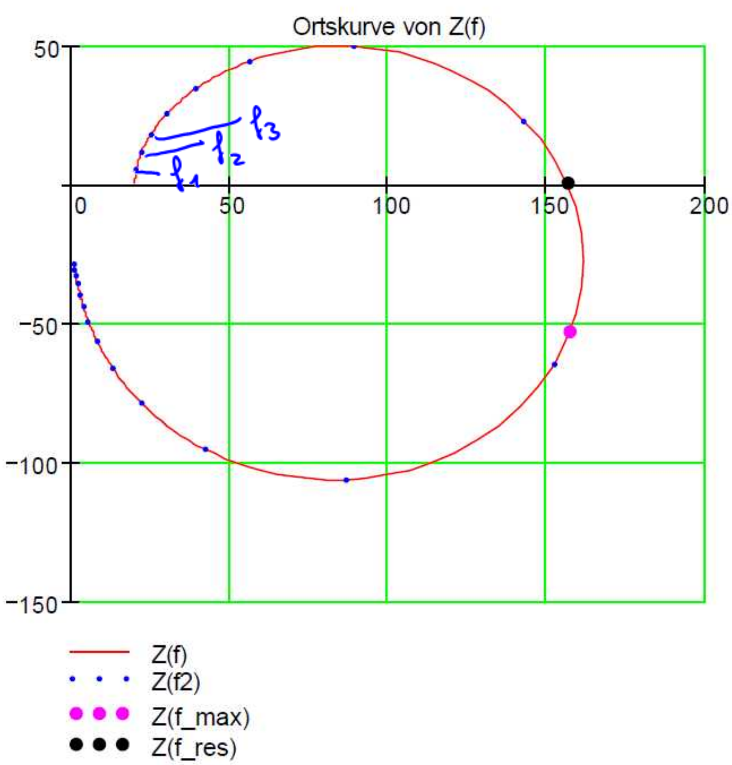
$Z1(f) := R + j \cdot \omega(f) \cdot L$ $Z2(f) := \dfrac{-j}{\omega(f) \cdot C}$

$Z(f) := \dfrac{Z1(f) \cdot Z2(f)}{Z1(f) + Z2(f)}$ Definition des Gesamtwiderstandes (Parallelschaltung)

Weitere zu zeichnende Funktionen:

$Z_{Betrag}(f) := |Z(f)|$ $\Phi_Z(f) := \arg(Z(f))$

Zeichnerische Darstellungen

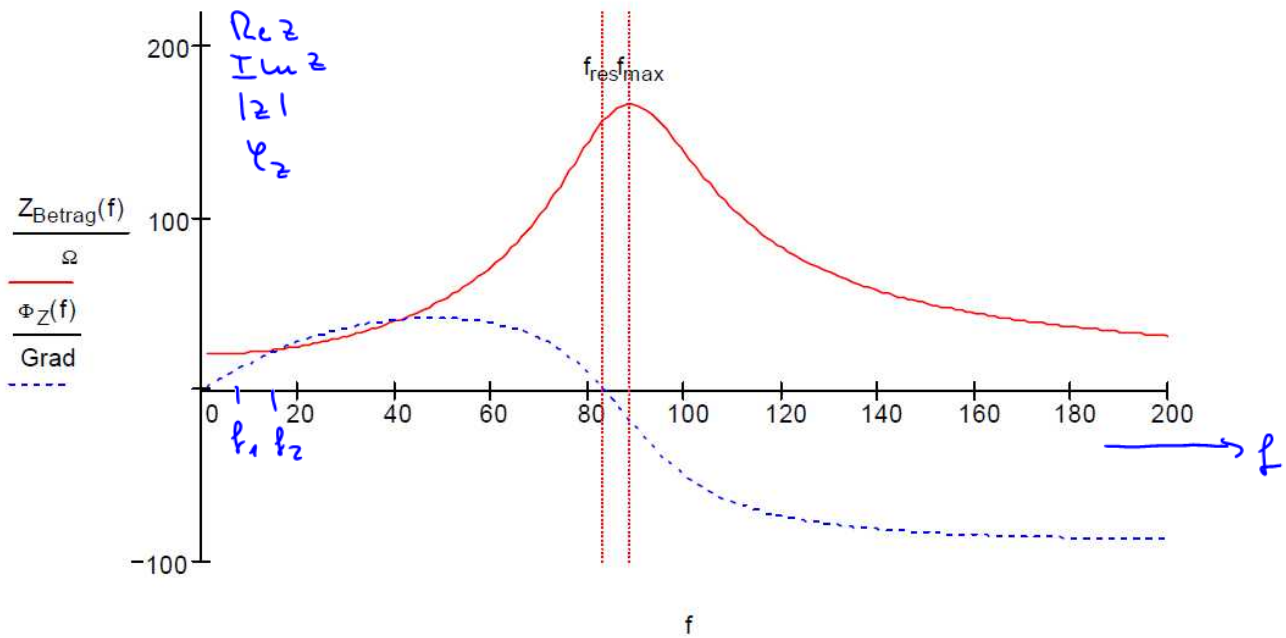


Die Ortskurve beginnt bei f=0 Hz als rein reeller Widerstand (R=20 Ω)

Der Zeigerendpunkt von Z_max wurde als magenta-Punkt eingezeichnet, der Zeigerendpunkt von Z_res als schwarzer Punkt.

Darstellung von Betrag und Phasenlage in Abhängigkeit von der Frequenz (das entspricht also dem, was aus der Ortskurve "auf einmal" herausgelesen werden kann.
Man beachte: In diesem Diagramm werden verschiedene Achseneinheiten für die beiden Funktionen verwendet!!

Die Funktionswerte von bei f_max bzw. f_res entsprechen der Zeigerlänge und damit dem Abstand der in der Ortskurve markierten (dicken) Punkte vom Koordiantenursprung.



http://www.math-tech.at/Beispiele/upload/ro_Ortskurven.PDF

Koordinatensysteme - Funktionen

- Darstellung in Polarkoordinaten
- Parameterdarstellung

später bei Funktionen

Später

Funktionen

- ## Darstellung in Polarkoordinaten

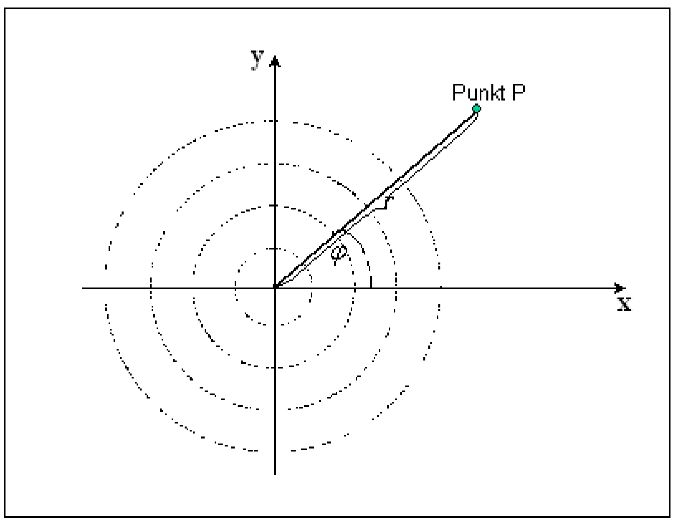
5.3.3 Übergang Kartesische Koordinaten - Polarkoordinaten

Definition 5.11: Polarkoordinaten

Die Polarkoordinaten (r, φ) eines Punktes P der Ebene bestehen aus einer **Abstandskoordinate** r und einer **Winkelkoordinate** φ.

r ist der Abstand des Punktes P vom Koordinatenursprung.

φ ist der Winkel zwischen dem vom Koordinatenursprung zum Punkt P gerichteten Radiusvektor und der positiven x-Achse.



- Die Transformationsgleichungen zum Übergang von kartesischen Koordinaten auf Polarkoordinaten und umgekehrt sind nachfolgend dargestellt:

  Kartesische Koordinaten $\rightarrow$ Polarkoordinaten

  $$r = \sqrt{x^2 + y^2} \quad und \quad \tan\varphi = \frac{y}{x} \quad (+\pi \text{ im } 2./3. \text{ Quadranten})$$

  Polarkoordinaten $\rightarrow$ kartesische Koordinaten

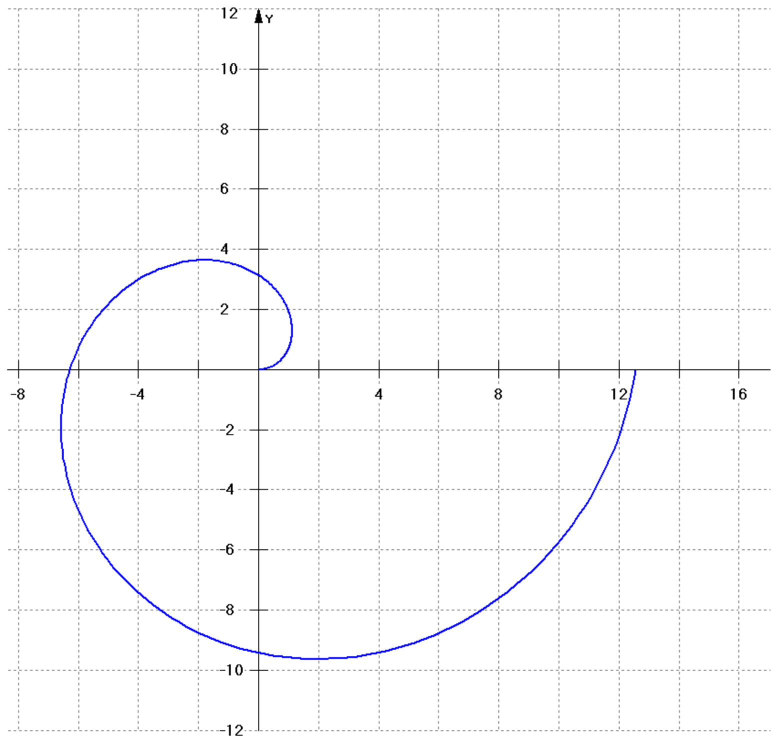
  $$x = r \cdot \cos\varphi \quad und \quad y = r \cdot \sin\varphi$$

Funktionen

später

- **Darstellung in Polarkoordinaten**

- **Beispiel:**
  $r(\varphi) = 2\varphi$ mit $0 \leq \varphi < 2\pi$



.

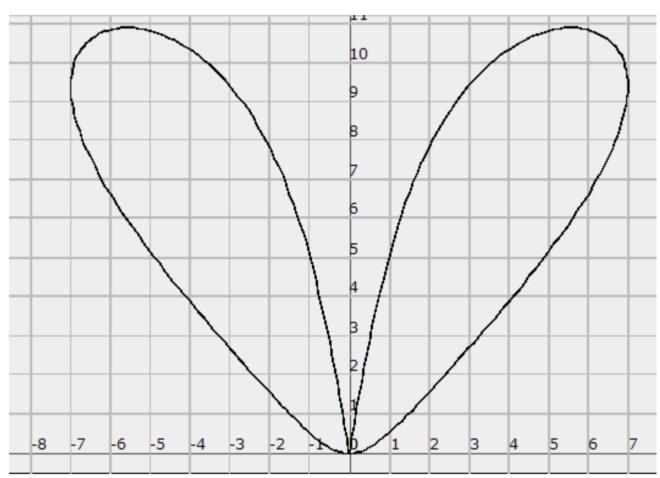
später

Funktionen: Parameterdarstellung

- Eine Kurve wird durch 2 Gleichungen beschrieben.
- Die x-Koordinate und die y-Koordinate werden getrennt voneinander in Abhängigkeit einer Hilfsvariablen (dem sogenannten Parameter) beschrieben.
- Häufig ist der verwendete Parameter die Variable t, als Symbol für die Zeit.
- y(t) und x(t) sind die abhängigen Variablen und werden im kartesischen x-y-Koordinatensystem skizziert.
- t ist die unabhängige Variable und wird in der Regel nicht skizziert, sondern zum Teil nur an einzelnen Punkten benannt.
- Jede Funktion f(x) kann auch in einer Parameterdarstellung angegeben werden mit $x(t) = t$ und $y(t) = f(t)$.
Die Umkehrung gilt nicht!

Beispiel:

$x(t)=6*\sin(t)-\sin(3*t)$
$y(t)=6*t*\sin(t)$
mit $-\pi<t<\pi$



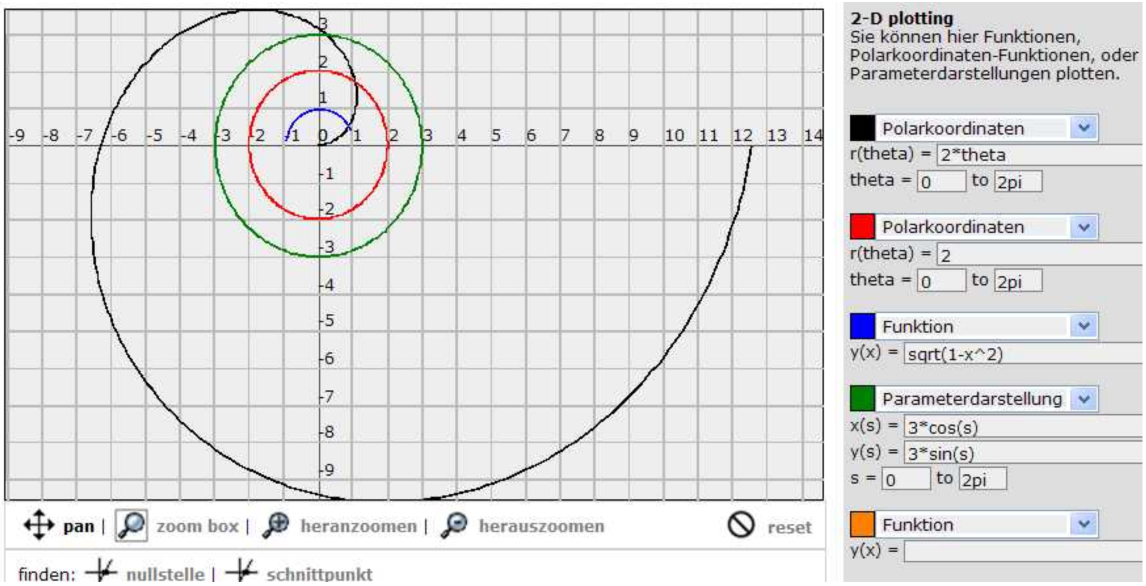
http://fooplot.com/

Wie wird die Kurve mit dem Parameter $-\pi<t<\pi$ durchlaufen?

-

Späte

Zweidimensionale Kurven in anderen Darstellungen



http://fooplot.com/

Beispiele:

Funktion in Polarkoordinaten $r(\varphi) = 2\varphi$ mit $0 \le \varphi < 2\pi$

Funktion in Polarkoordinaten $r(\varphi) = 2$ mit $0 \le \varphi < 2\pi$

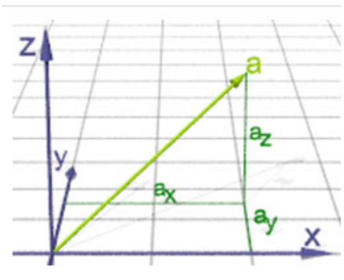
Funktion in kartesischen Koordinaten $f(x) = \sqrt{1-x^2}$ mit $-1 \le x < \le 1$

Kurve in Parameterdarstellung $x(t) = 3\cos(t)$, $y(t) = 3\sin(t)$ mit $0 \le t < 2\pi$

später

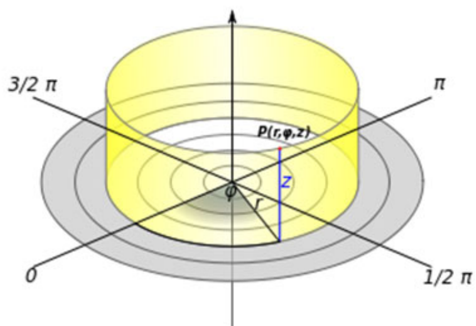
Ergänzung: Koordinaten im Raum in verschiedenen Darstellungen

- räumliche kartesische Koordinaten (x,y,z)



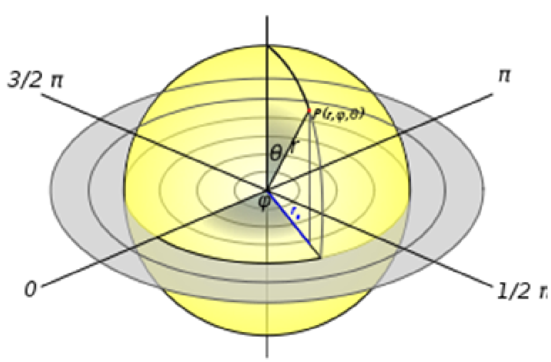
http://www.mathepedia.de/Raum.aspx

- Zylinderkoordinaten (r, ϕ, z)
Polarkoordinaten in der Ebene,
ergänzt um die Höhenangabe in kartesischen Koordinaten



http://de.wikipedia.org/wiki/Polarkoordinaten

- Kugelkoordinaten (r, ϕ, θ)
Polarkoordinaten in der Ebene,
ergänzt um eine weitere Winkelangabe θ für die Höhe



http://de.wikipedia.org/wiki/Polarkoordinaten