Vorlesung 17 am 23.11.2022

Komplexe Zahlen 2

Inhalt:

Rückblick
Komplexe Zahlen in Polarkoordinaten

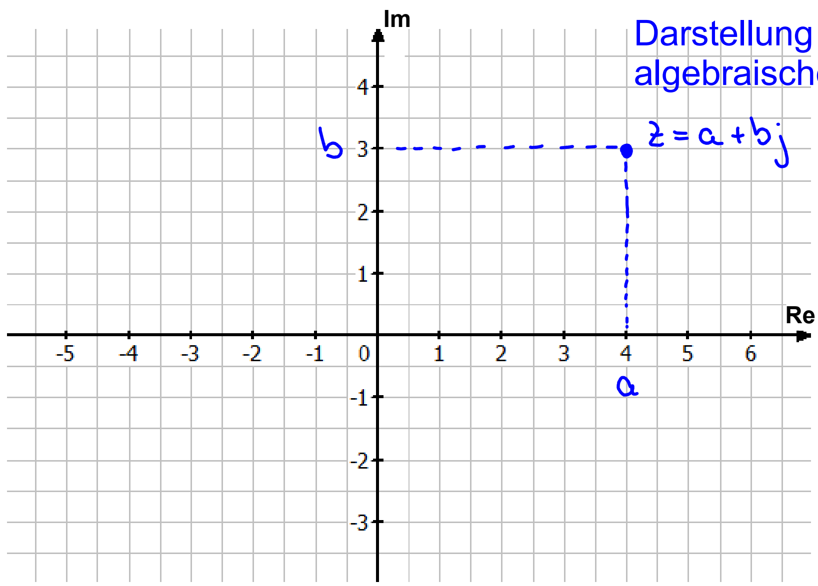
Umrechnung kartesische Koordinaten - Polarkoordinaten

Rechnen mit komplexen Zahlen in Polarkoordinaten

Aufbau einer komplexen Zahl in kartesischen Koordinaten

> Eine komplexe Zahl z = a + bj hat in der Gaußschen Zahlenebene die Koordinaten (a,b).

Gaußschen Zahlenebene



Darstellung in der algebraischen Form

Komplexe Zahlen

Algebraische Form (kartesische Koordinaten) Komponentendarstellung	Betrag/Phase (Polarkoordinaten): trigonometrische Form	Exponentialdarstellung
$z = a + j \cdot b$ a **Realteil** b **Imaginärteil**	$z = r \cdot (\cos\varphi + j \cdot \sin\varphi)$ r **Betrag** φ **Winkel**	$z = r \cdot e^{j\varphi}$ r **Betrag** φ **Winkel**

Umrechnung

$$a = r \cdot \cos\varphi, \quad b = r \cdot \sin\varphi$$

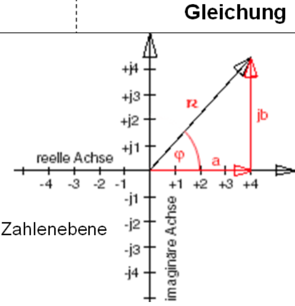
$$r = \sqrt{a^2 + b^2}, \quad \varphi = \arctan\tfrac{b}{a}$$

$$\cos\varphi + j \cdot \sin\varphi = e^{j\varphi}$$

Euler-Gleichung

Hinweis zur Verwendung des arctan:

a	b	φ	Rechnerwert
+	+	$[0, \frac{\pi}{2}]$	
0	+	$\frac{\pi}{2}$	
-	+	$[\frac{\pi}{2}, \pi]$	$+\pi$
-	-	$[\pi, \frac{3\pi}{2}]$	$+\pi$
0	-	$\frac{3\pi}{2}$	
+	-	$[\frac{3\pi}{2}, 2\pi]$	$+2\pi$

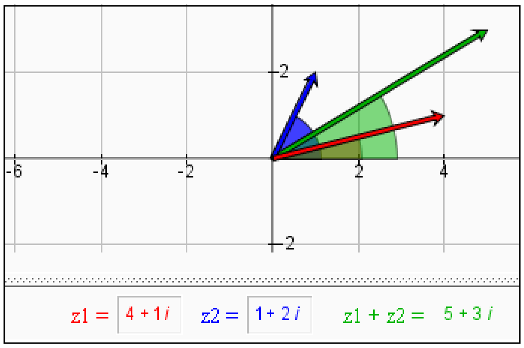


Gauß´sche Zahlenebene

Zusammenfassung: Operationen mit komplexen Zahlen

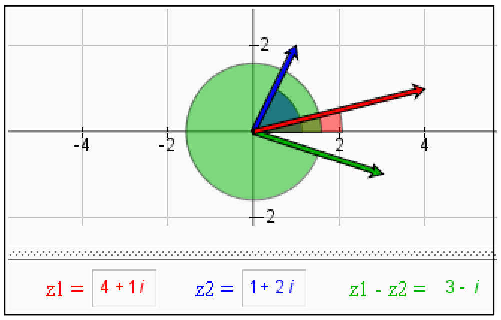
mit z=a+bj algebraische Form in kartesischen Koordinaten (Re, Im)

Addition



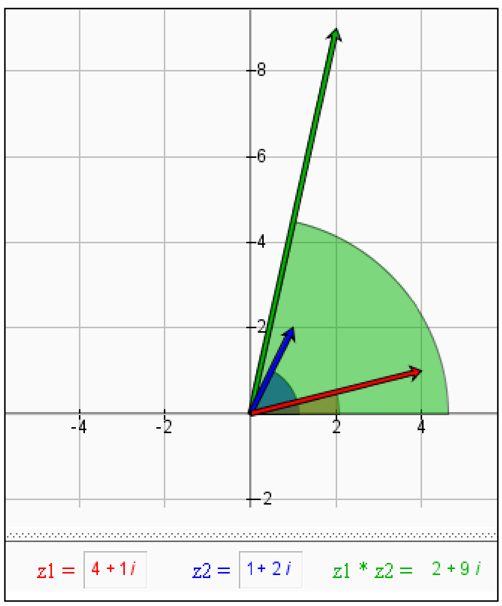
$$z_1 + z_2 = (a_1 + a_2) + j \cdot (b_1 + b_2)$$

Subtraktion



$$z_1 - z_2 = (a_1 - a_2) + j \cdot (b_1 - b_2)$$

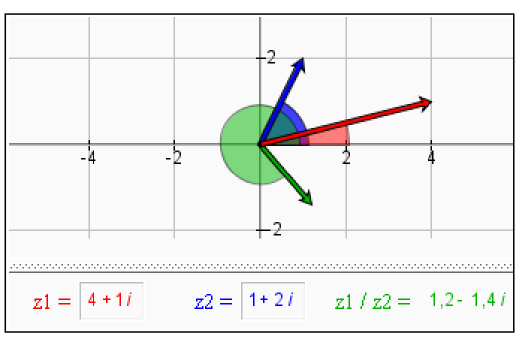
Multiplikation



$$z_1 \cdot z_2 = (a_1 a_2 - b_1 b_2) + j \cdot (b_1 a_2 + a_1 b_2)$$

Division

Inversion



$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{a_1 a_2 + b_1 b_2}{a_2^{\,2} + b_2^{\,2}} + j \frac{b_1 a_2 - a_1 b_2}{a_2^{\,2} + b_2^{\,2}}$$

$$z_2 = \frac{1}{z} = \frac{1}{a + jb} = \frac{a}{a^2 + b^2} - j \frac{b}{a^2 + b^2}$$

Erläuterung: konjugiert komplexe Erweiterung

Inversion

$$z_2 = \frac{1}{z} = \frac{1}{a+jb} = \frac{a}{a^2+b^2} - j\frac{b}{a^2+b^2}$$

$z = a + b\cdot j$

$$\frac{1}{z} = \frac{1}{a+bj}\cdot\underbrace{\frac{(a-bj)}{(a-bj)}}_{\text{konjugiert komplexe Erweiterung}}$$

$$= \frac{a-bj}{a^2-(bj)^2} = \frac{a-bj}{a^2-b^2\underbrace{j^2}_{-1}}$$

$$= \frac{a-bj}{a^2+b^2} = \underbrace{\frac{a}{a^2+b^2}}_{Re} - \underbrace{\frac{b}{a^2+b^2}}_{Im}j$$

Division

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{a_1a_2+b_1b_2}{a_2^2+b_2^2} + j\frac{b_1a_2-a_1b_2}{a_2^2+b_2^2}$$

$z_1 = a_1 + b_1\cdot j$

$z_2 = a_2 + b_2\cdot j$

$$z_3 = \frac{a_1+b_1j}{a_2+b_2j}\cdot\frac{a_2-b_2j}{a_2-b_2j}$$

Erweitern mit der konj. komplexen Zahl des Nenners, d.h. „konjugiert komplexe Erweiterung"

$$= \frac{(a_1+b_1j)(a_2-b_2j)}{\underbrace{(a_2+b_2j)(a_2-b_2j)}_{\text{3. bin. Formel im Nenner}}}$$

$$= \frac{a_1a_2 - a_1b_2j + b_1a_2j - b_1b_2\overbrace{j^2}^{-1}}{(a_2)^2 - \underbrace{(b_2j)^2}_{(b_2^2\cdot j^2) = (b_2^2\cdot(-1))}}$$

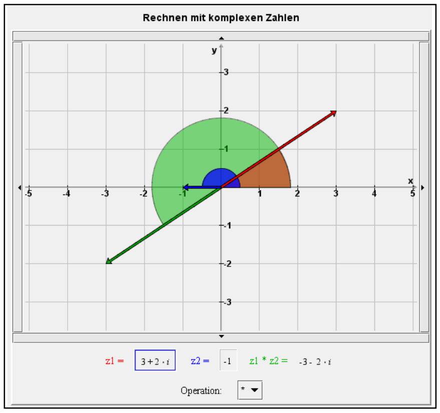
$$= \frac{a_1a_2+b_1b_2+j(b_1a_2-a_1b_2)}{a_2^2+b_2^2}$$

$$= \underbrace{\frac{a_1a_2+b_1b_2}{a_2^2+b_2^2}}_{Re} + j\underbrace{\frac{b_1a_2-a_1b_2}{a_2^2+b_2^2}}_{Im}$$

Zusammenfassung: Operationen mit komplexen Zahlen

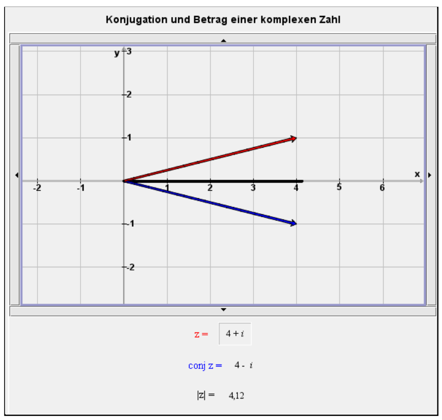
mit z=a+bj algebraische Form in kartesischen Koordinaten (Re, Im)

Negation



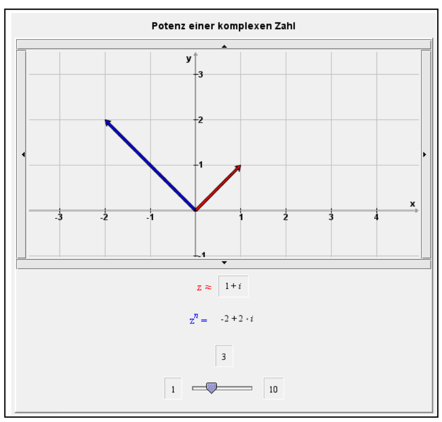
$$-z = -a + j \cdot (-b)$$

konjugiert komplex



$$z^* = a - j \cdot b$$

Potenz



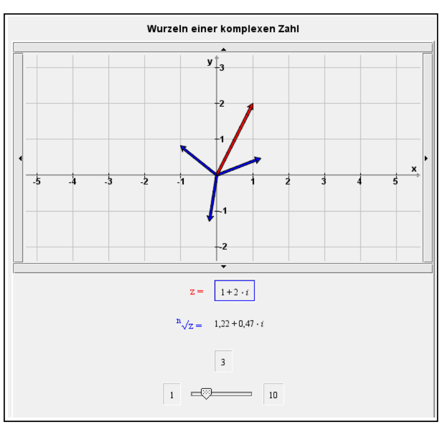
$$z^n = (a + j \cdot b)^n$$

Beispiel

$z = (3+2j)^4$

Berechnung später mit Polarkoordinaten

Wurzeln



Beispiel

$z = \sqrt[3]{8+2j}$

Berechnung später mit Polarkoordinaten

Aufgabe aus der letzten Vorlesung:

Gegeben sind die komplexen Zahlen

$z_1 = 2 + 2j$

$z_2 = -1 + j$

Berechnen Sie

$z_3 = z_1 \cdot z_2$

und

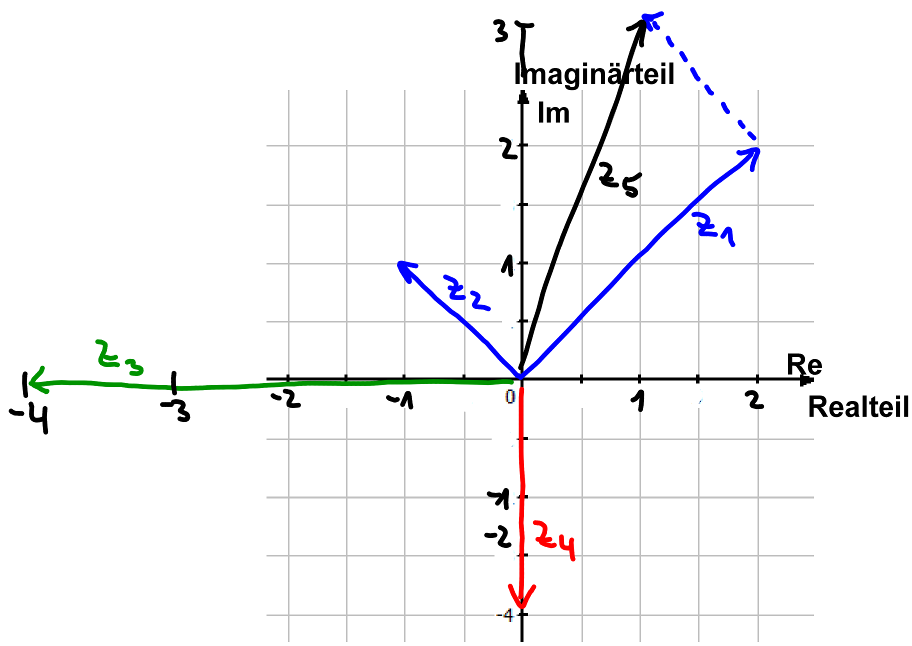
$z_4 = \frac{z_1}{z_2}$

und $z_5 = z_1 + z_2$

$z_3 = z_1 \cdot z_2 = (2+2j)(-1+j) = -2+2j-2j+2(j^2) = -2-2 = -4$

$z_4 = \frac{z_1}{z_2} = \frac{(2+2j)}{(-1+j)} \cdot \frac{(-1-j)}{(-1-j)} = \frac{-2-2j-2j-2j^2}{(-1)^2-(j^2)} = \frac{-4j}{1-(-1)} = -2j$

$z_5 = z_1 + z_2 = 2+2j+(-1+j) = 1+3j$



Aufgabe aus der letzten Vorlesung:
Berechnen und skizzieren Sie

$z_0 = j^0 = 1$

$z_1 = j^1 = j$

$z_2 = j^2 = -1$

$z_3 = j^3 = j^2 \cdot j = (-1) \cdot j = -j$

$z_4 = j^4 = j^2 \cdot j^2 = (-1) \cdot (-1) = 1$

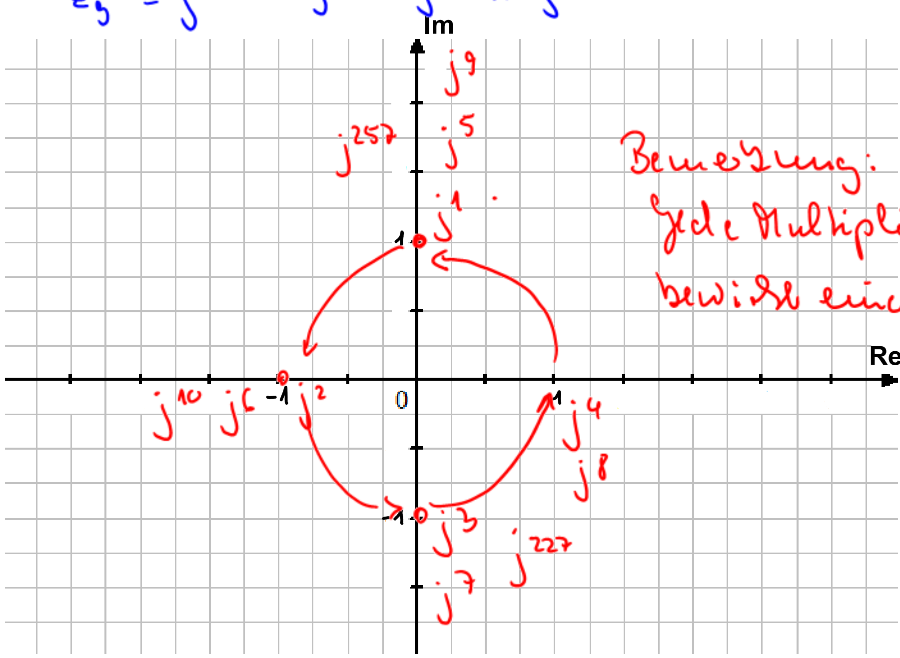
$z_5 = j^5 = j^4 \cdot j = j$

$z_6 = j^6 = -1$

$z_7 = j^{30} = j^{30 \bmod 4} = j^2 = -1$

$z_8 = j^{227} = j^{227 \bmod 4} = j^3 = -j$

$z_9 = j^{257} = j^{256} \cdot j = 1 \cdot j$



Bemerkung:
Jede Multiplikation mit j bewirkt eine Drehung um $90°$ bzw. $\frac{\pi}{2}$

Polarkoordinaten und Rechnen mit Polarkoordinaten

2.1.5 Die komplexen Zahlen

Die reellen Zahlen ergänzt um die imaginären Zahlen bilden die komplexen Zahlen.

Die komplexen Zahlen ermöglichen die Lösung der Gleichung $x^2+1=0$, die innerhalb der reellen Zahlen nicht lösbar ist. Durch das Einführen der imaginären Einheit $j^2=-1$ lässt sich die Lösung der Gleichung $x^2+1=0 \Leftrightarrow x=\sqrt{-1}$ mit $x=j$ angeben.

$$\boxed{\mathbb{C}=\{z \mid z=a+jb \text{ mit } a\in\mathbb{R}, b\in\mathbb{R}\} \quad \textit{Menge der komplexen Zahlen}}$$

	Komplexe Zahlen	
Algebraische Form (kartesische Koordinaten) Komponentendarstellung	**Betrag/Phase (Polarkoordinaten): trigonometrische Form**	**Exponentialdarstellung**
$z=a+j\cdot b$ a **Realteil** b **Imaginärteil**	$z=r\cdot(\cos\varphi+j\cdot\sin\varphi)$ r **Betrag** φ **Winkel**	$z=r\cdot e^{j\varphi}$ r **Betrag** φ **Winkel**

Umrechnung

$$a=r\cdot\cos\varphi,\quad b=r\cdot\sin\varphi$$

$$r=\sqrt{a^2+b^2},\quad \varphi=\arctan\tfrac{b}{a}$$

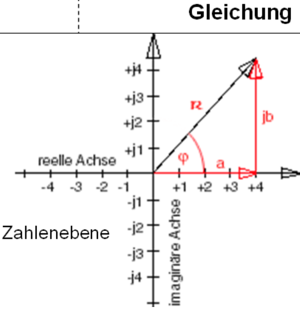
$$\cos\varphi+j\cdot\sin\varphi=e^{j\varphi}$$

Euler-Gleichung

Hinweis zur Verwendung des arctan:

a	b	φ	Rechnerwert
+	+	$[0, \frac{\pi}{2}]$	
0	+	$\frac{\pi}{2}$	
-	+	$[\frac{\pi}{2}, \pi]$	$+\pi$
-	-	$[\pi, \frac{3\pi}{2}]$	$+\pi$
0	-	$\frac{3\pi}{2}$	
+	-	$[\frac{3\pi}{2}, 2\pi]$	$+2\pi$

Gauß´sche Zahlenebene



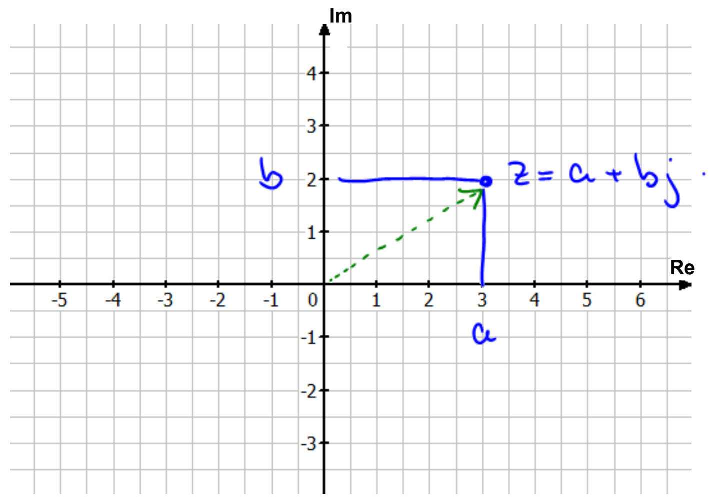
Gleichheit komplexer Zahlen

- Zwei komplexe Zahlen sind einander gleich, wenn ihre Imaginärteile und Realteile <u>beide</u> gleich sind.
- Zwei komplexe Zahlen sind einander gleich, wenn ihre Beträge und Winkel <u>beide</u> gleich sind.

Aufbau einer komplexen Zahl in kartesischen Koordinaten (a,b)

Eine komplexe Zahl z = a + bj hat in der Gaußschen Zahlenebene die Koordinaten (a,b).

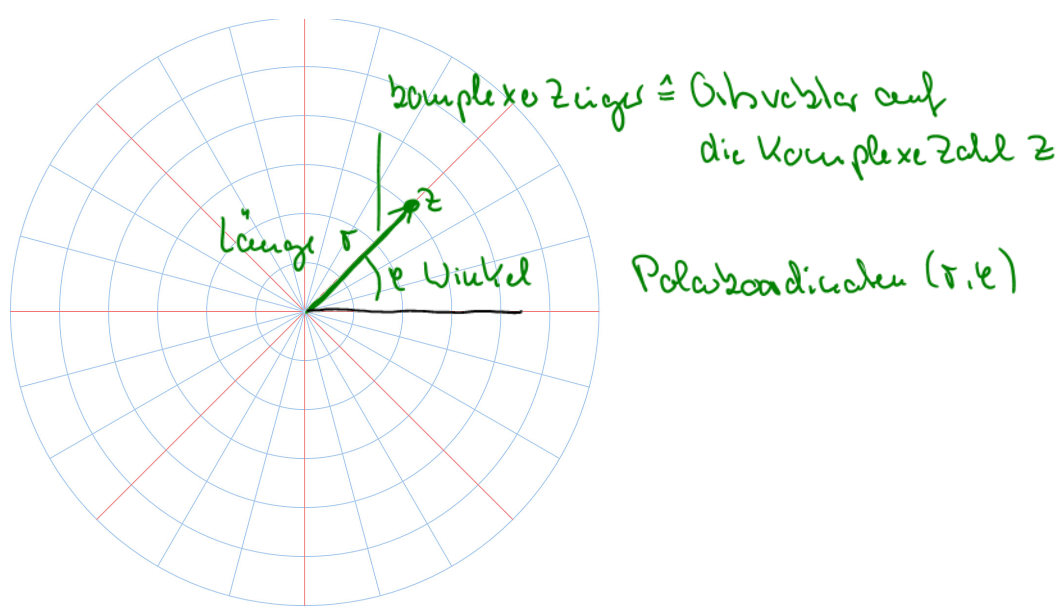
Gaußschen Zahlenebene mit Darstellung der kartesischen Koordinaten

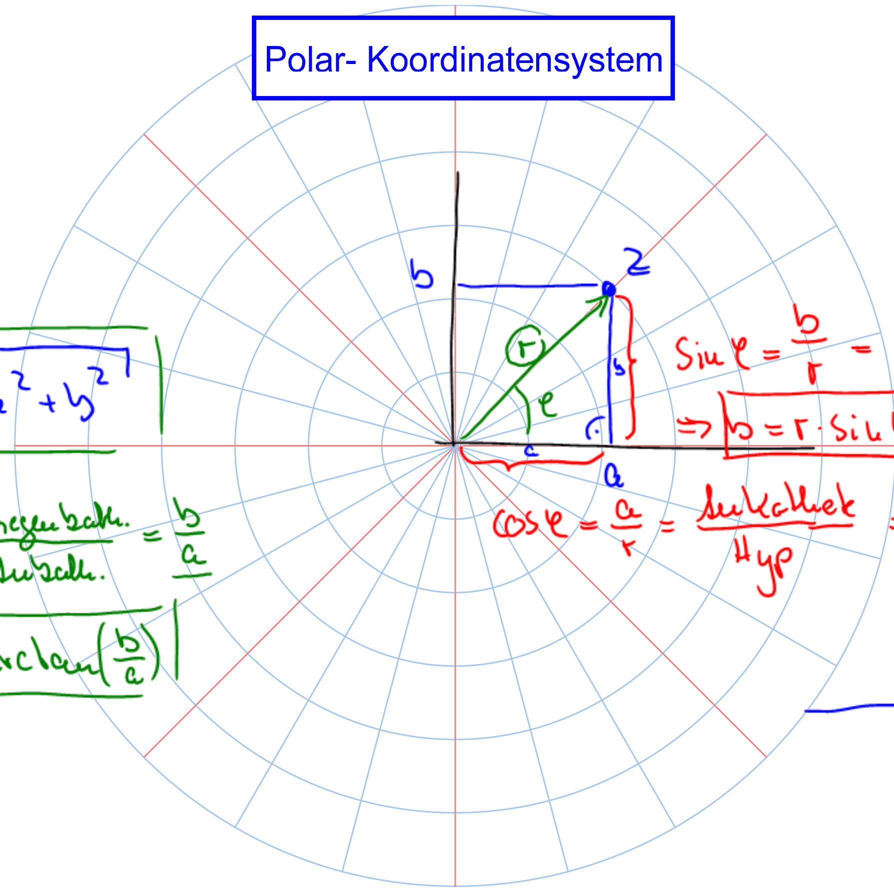


Aufbau einer komplexen Zahl in Polar-Koordinaten (r,φ)

Eine komplexe Zahl z ist auch durch die zwei Angaben Winkel φ und Betrag r des komplexen Zeigers(Pfeil) darstellbar.

Gaußschen Zahlenebene mit Darstellung der Polar-Koordinaten





$$\boxed{r = \sqrt{a^2 + b^2}}$$

$$\tan\varphi = \frac{\text{Gegenkath.}}{\text{Ankath.}} = \frac{b}{a}$$

$$\boxed{\varphi = \arctan\left(\frac{b}{a}\right)}$$

$$\sin\varphi = \frac{b}{r} = \frac{\text{Gegenkathete}}{\text{Hypotenuse}} \Rightarrow \boxed{b = r\cdot\sin\varphi}$$

$$\cos\varphi = \frac{a}{r} = \frac{\text{Ankathete}}{\text{Hyp}} \Rightarrow \boxed{a = r\cdot\cos\varphi}$$

Zusammenfassungen übernächste Seite

Verschiedene Darstellungsmöglichkeiten für komplexe Zahlen

$$\underline{z} = \underset{r\cdot\cos\varphi}{\underset{\uparrow}{a}} + \underset{r\cdot\sin\varphi}{\underset{\uparrow}{b}}\,j$$

$= r\cdot\cos\varphi + r\cdot\sin\varphi\cdot j$ trigonometrische Form (Polarkoordinaten)

$= r\cdot(\underbrace{\cos\varphi + \sin\varphi\cdot j}_{e^{\varphi j}})$ Eulersche Formel Eulersche Gleichung

$= \boxed{r\cdot e^{\varphi j}}$

Exponentialform einer komplexen Zahl mit Polarkoordinaten

.

Begründung/ Veranschaulichung der Eulerschen Gleichung

Die Exponentialform einer komplexen Zahl

Neben der Komponentenform oder der trigonometrischen Darstellung kann jede komplexe Zahl in einer weiteren wichtigen Darstellungsart, der Exponentialform geschrieben werden. Sie kann hergeleitet werden, wenn anstatt der Sinus- und Kosinusfunktionen deren Potenzreihen geschrieben werden.

$$\boxed{\sin x = \frac{x}{1!} - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \dots \qquad (1)}$$

Reihe mit „ungeraden Potenzen von x"

$$\boxed{\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \dots \qquad (2)}$$

Reihe mit „geraden Potenzen von x"

die sin x Reihe wird mit dem Faktor j, der imaginären Einheit, multipliziert und liefert:

$$j \cdot \sin x = j \cdot \frac{x}{1!} - j \cdot \frac{x^3}{3!} + j \cdot \frac{x^5}{5!} - j \cdot \frac{x^7}{7!} + \dots \qquad (3)$$

die Addition der Reihen (2) und (3) ergeben:

$$\cos x + j \cdot \sin x = 1 + j \cdot \frac{x}{1!} - \frac{x^2}{2!} - j \cdot \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + j \cdot \frac{x^5}{5!} - \frac{x^6}{6!} - j \cdot \frac{x^7}{7!} + \dots \qquad (4)$$

die Potenzreihe mit der Euler'schen Zahl e lautet:

jx jx $(jx)^2$ $(jx)^3$ $(jx)^4$

$$\boxed{e^x = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \frac{x^5}{5!} + \frac{x^6}{6!} + \frac{x^7}{7!} + \dots} \qquad (5)$$

Reihe mit Potenzen von x } Potenzreihe

=

x wird mit der imaginären Einheit j multipliziert, man erhält bei Beachtung, dass $j^2 = -1$ ist:

$$\boxed{e^{j \cdot x} = 1 + j \cdot \frac{x}{1!} - \frac{x^2}{2!} - j \cdot \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + j \cdot \frac{x^5}{5!} - \frac{x^6}{6!} - j \cdot \frac{x^7}{7!} + \dots \qquad (6)}$$

die Reihen (4) und (6) sind einander gleich. Das Ergebnis ist die Eulersche Gleichung:

$$\boxed{e^{j \cdot x} = \cos x + j \cdot \sin x}$$

Eulerschen Gleichung

beide Seiten werden mit dem Modul $|\underline{Z}|$ der komplexen Zahl multipliziert
die Variable x wird durch den Winkel φ ersetzt

$$|\underline{Z}| \cdot e^{j \cdot \varphi} = |\underline{Z}| \cdot (\cos \varphi + j \cdot \sin \varphi)$$

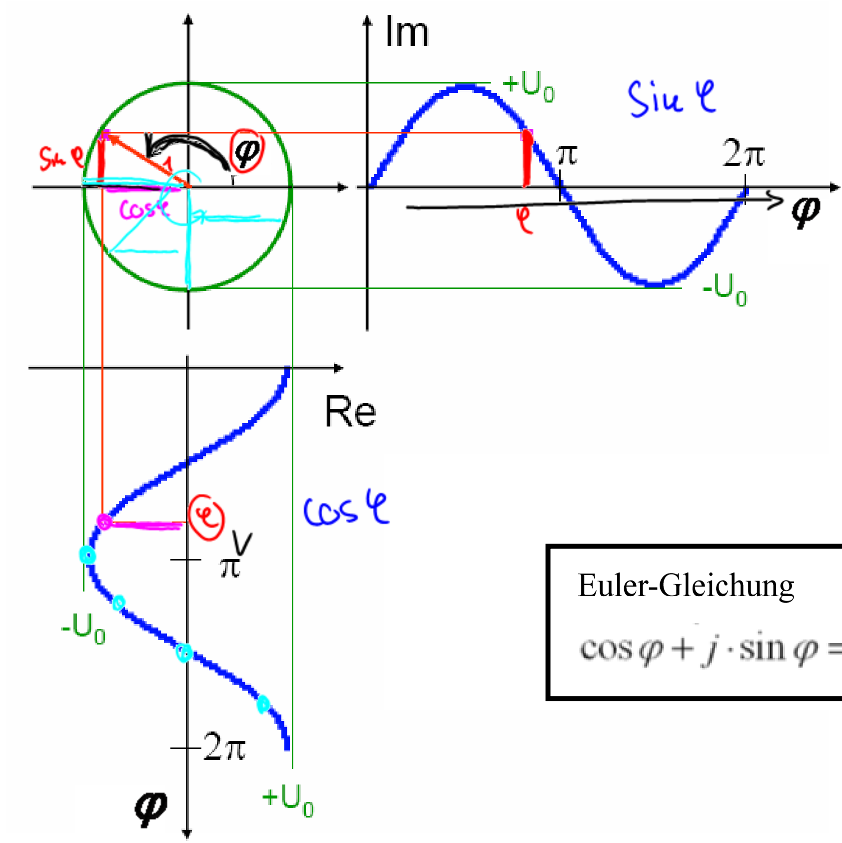
man erhält die Exponentialform einer komplexen Zahl

$$\boxed{\underline{Z} = |\underline{Z}| \cdot e^{j \cdot \varphi} = r \cdot e^{j \cdot \varphi}}$$

http://www.elektroniktutor.de/mathe/komplex.html

•

Eulersche Gleichung



Euler-Gleichung

$$\cos\varphi + j\cdot\sin\varphi = e^{j\varphi}$$

Erläuterung zur Eulerschen Gleichung

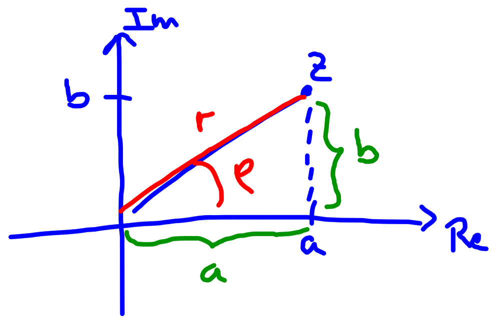
reelle Achse

Projektion des komplexen Zeigers auf die x-Achse
bei einer vollen Umdrehung des Zeigers
Für den Winkel $0 \leq \varphi \leq 2\pi$ (ganze Kreisumdrehung) ergibt sich die cos - Funktion

imaginäre Achse

Projektion des komplexen Zeigers auf die y-Achse bei einer vollen Umdrehung des Zeigers
Für den Winkel $0 \leq \varphi \leq 2\pi$ (ganze Kreisumdrehung) ergibt sich die sin - Funktion

Herleitung der Umrechnungsformeln zwischen Polarkoordinaten und kartesischen Koordinaten



$\tan\varphi = \frac{\text{Gegenk.}}{\text{Ank.}}$

$\tan\varphi = \frac{b}{a}$

$\varphi = \arctan\frac{b}{a}$

bisher: $z = a + bj$ algebraische Form mit kartesischen Koordinaten

jetzt: $z = r \cdot e^{j\varphi}$ Exponentialdarstellung mit Polarkoordinaten
Betrag **r** (Länge des Zeigers) und Winkel φ (Phase)

(1) Umrechnung von Polarkoordinaten in kartesische Koordinaten

$$\boxed{\begin{aligned} a &= r \cdot \cos\varphi \\ b &= r \cdot \sin\varphi \end{aligned}}$$

, wenn r und φ gegeben

(2) Umrechnung von kartesischen Koordinaten in Polarkoordinaten

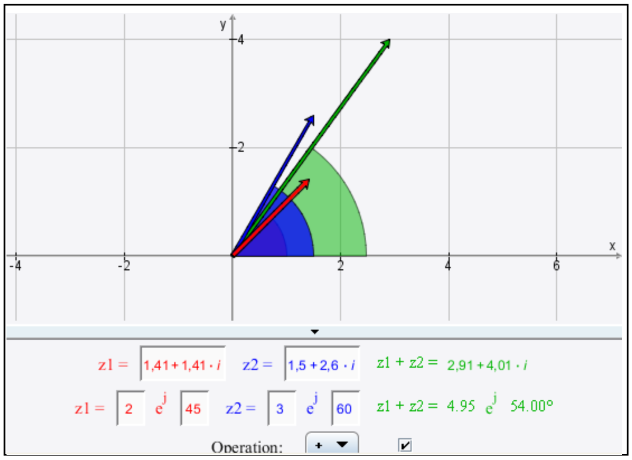
$$\boxed{\begin{aligned} r &= \sqrt{a^2 + b^2} \\ \varphi &= \arctan\left(\frac{b}{a}\right) \end{aligned}}$$

, wenn a, b gegeben

+ Zusatzregeln

Operationen mit komplexen Zahlen

Addition



$$z_1 + z_2 = (a_1 + a_2) + j \cdot (b_1 + b_2)$$

kartesische Koordinaten

Addition mit Polarkoordinaten:

$z_1 = r_1 \cdot e^{j\varphi_1}$

$z_2 = r_2 \cdot e^{j\varphi_2}$

$$\boxed{z_1 + z_2 = r_1 \cdot e^{j\varphi_1} + r_2 \cdot e^{j\varphi_2}}$$

keine weitere Zusammenfassung in dieser Darstellungsform möglich

Ausnahme: $\varphi_1 = \varphi_2$

$z_1 = 2 \cdot e^{j\frac{\pi}{3}}$

$z_2 = 3 \cdot e^{j\frac{\pi}{3}}$

$z_3 = z_1 + z_2$

$= 2 \cdot e^{j\frac{\pi}{3}} + 3 \cdot e^{j\frac{\pi}{3}}$

$= e^{j\frac{\pi}{3}}(2+3)$

$= 5 \cdot e^{j\frac{\pi}{3}}$

Beispiel:

$z_1 = 2 \cdot e^{j\frac{\pi}{4}}$

$z_2 = 3 \cdot e^{j\frac{\pi}{3}}$

$$z_3 = z_1 + z_2 = \underbrace{2 \cdot e^{j\frac{\pi}{4}} + 3 \cdot e^{j\frac{\pi}{3}}}$$

Keine Angabe von Polarkoordinaten (r_3, φ_3) von z_3 möglich

Wenn gefordert, dann Umrechnung

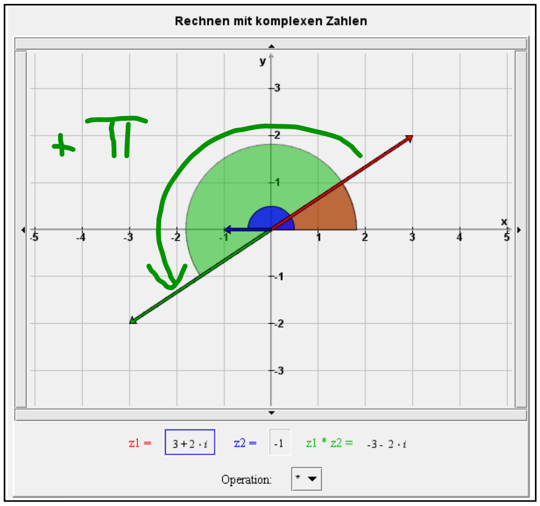
→ z_1 und z_2 in kartesische Koordinaten

→ dann Addition zu z_3

→ dann Rücktransformation in Polarkoordinaten

Operationen mit komplexen Zahlen

Negation



$$-z = -a + j \cdot (-b)$$

kartesische Koordinaten

Negation mit Polarkoordinaten:

$z = r \cdot e^{j\varphi}$

$$\boxed{-z = r \cdot e^{j(\varphi + \pi)}}$$

oder 180°

Beispiel:

$z_2 = 3e^{j\frac{\pi}{3}}$

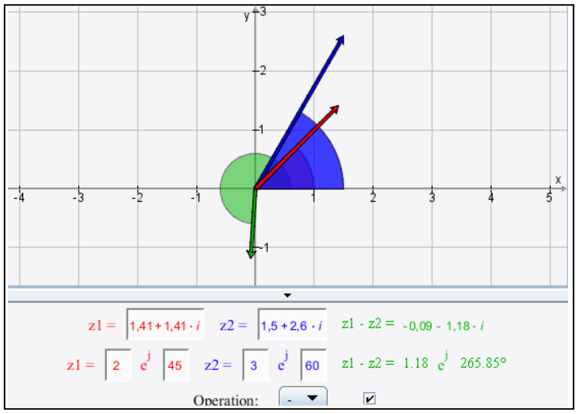
$-z_2 = 3 \cdot e^{j(\frac{\pi}{3} + \pi)}$

$= 3 \cdot e^{j(\frac{4\pi}{3})}$

.

Operationen mit komplexen Zahlen

Subtraktion



$$z_1 - z_2 = (a_1 - a_2) + j \cdot (b_1 - b_2)$$

kartesische Koordinaten

Subtraktion mit Polarkoordinaten:

$$\boxed{\begin{aligned} z_1 - z_2 &= r_1 \cdot e^{j\varphi_1} - r_2 \cdot e^{j\varphi_2} \\ &= r_1 \cdot e^{j\varphi_1} + r_2 \cdot e^{j(\varphi_2 + \pi)} \end{aligned}}$$

keine weitere Zusammenfassung in dieser Darstellungsform möglich

Beispiel:

$z_1 = 2 \cdot e^{j\frac{\pi}{4}}$

$z_2 = 3 \cdot e^{j\frac{\pi}{3}}$

$$z_1 - z_2 = \underbrace{2 \cdot e^{j\frac{\pi}{4}} - 3 \cdot e^{j\frac{\pi}{3}}}_{\text{nicht weiter zusammenfassen}}$$

→ alternatives Vorgehen siehe Addition

Ausnahme: $\varphi_1 = \varphi_2$

$z_1 = 3 \cdot e^{j\frac{\pi}{3}}$

$z_2 = 2 \cdot e^{j\frac{\pi}{3}}$

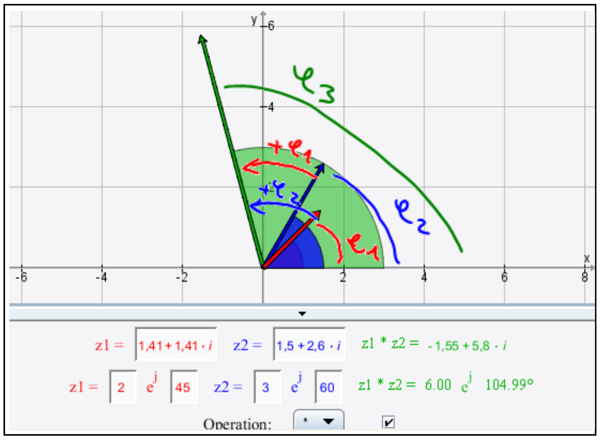
$$z_1 - z_2 = 3 \cdot e^{j\frac{\pi}{3}} - 2 \cdot e^{j\frac{\pi}{2}}$$
$$= (3 - 2) e^{j\frac{\pi}{3}}$$
$$= e^{j\frac{\pi}{3}}$$

.

Operationen mit komplexen Zahlen

Multiplikation

$z_1 = a_1 + b_1 j$
$z_2 = a_2 + b_2 j$



$$\boxed{\begin{aligned} z_1 \cdot z_2 = (a_1 a_2 - b_1 b_2) \\ + j \cdot (b_1 a_2 + a_1 b_2) \end{aligned}}$$

kartesische Koordinaten

Multiplikation mit Polarkoordinaten:

$z_1 = r_1 \cdot e^{j\varphi_1}$
$z_2 = r_2 \cdot e^{j\varphi_2}$

$$\boxed{z_1 \cdot z_2 = (r_1 \cdot r_2) \cdot e^{j(\varphi_1 + \varphi_2)}}$$

$$\begin{aligned} z_3 = z_1 \cdot z_2 &= (r_1 \cdot e^{j\varphi_1}) \cdot (r_2 \cdot e^{j\varphi_2}) \\ &= (r_1 \cdot r_2) \cdot e^{j\varphi_1} \cdot e^{j\varphi_2} \\ &= r_1 \cdot r_2 \cdot e^{j\varphi_1 + j\varphi_2} \\ &= \underbrace{r_1 \cdot r_2}_{r_3} \cdot e^{j\underbrace{(\varphi_1 + \varphi_2)}_{\varphi_3}} \end{aligned}$$

r_3: Längen multiplizieren sich

φ_3: Winkel addieren sich

Beispiel:

$z_1 = 2 \cdot e^{j\frac{\pi}{4}}$

$z_2 = 3 \cdot e^{j\frac{\pi}{3}}$

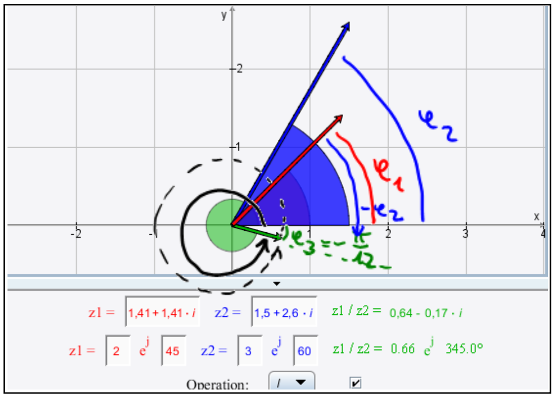
$$z_3 = z_1 \cdot z_2 = 2 \cdot 3 \cdot e^{j\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{3}\right)}$$
$$= 6 \cdot e^{j\left(\frac{7\pi}{12}\right)}$$

Bemerkung:
Länge einer komplexen Zeigers wird auch Betrag genannt

.

Operationen mit komplexen Zahlen

Division



$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{a_1 a_2 + b_1 b_2}{a_2^2 + b_2^2} + j\frac{b_1 a_2 - a_1 b_2}{a_2^2 + b_2^2}$$

$$z_2 = \frac{1}{z} = \frac{1}{a+jb} = \frac{a}{a^2+b^2} - j\frac{b}{a^2+b^2}$$

Kehrwert (Spezialfall mit $a_1=1$ und $b_1=0$)

kartesische Koordinaten

Division mit Polarkoordinaten:

$z_1 = r_1 \cdot e^{j\varphi_1}$

$z_2 = r_2 \cdot e^{j\varphi_2}$

$$\boxed{\frac{z_1}{z_2} = \frac{r_1}{r_2} e^{j(\varphi_1 - \varphi_2)}}$$

$$z_3 = \frac{z_1}{z_2} = \frac{r_1 \cdot e^{j\varphi_1}}{r_2 \cdot e^{j\varphi_2}} = \frac{r_1}{r_2} \cdot e^{j\varphi_1} \cdot e^{-j\varphi_2}$$

$$= \underbrace{\frac{r_1}{r_2}}_{r_3} \cdot e^{j\underbrace{(\varphi_1 - \varphi_2)}_{\varphi_3}}$$

r_3: Beträge dividieren

φ_3: Winkel subtrahieren

Beispiel:

$z_1 = 2 \cdot e^{j\frac{\pi}{4}}$

$z_2 = 3 \cdot e^{j\frac{\pi}{3}}$

$z_3 = \frac{2}{3} \cdot e^{j(\frac{\pi}{4} - \frac{\pi}{3})}$

$= \frac{2}{3} \cdot e^{j(-\frac{\pi}{12})}$ Winkel mathematisch negativ angegeben ≙ mit dem Uhrzeiger von der reellen Achse aus gesehen

$= \frac{2}{3} \cdot e^{j(-\frac{\pi}{12}) + \underbrace{2\pi}_{=\frac{24\pi}{12}}}$ für mathematisch positiven Winkel ≙ gegen den Uhrzeiger von der reellen Achse aus

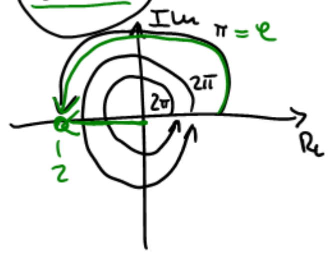
$= \frac{2}{3} \cdot e^{j \cdot \frac{23\pi}{12}}$

Bemerkung

- Winkelangaben $> 2\pi$ oder $> 360°$ müssen über modulo-Rechnung in den Wertbereich $0 \leq \varphi \leq 360°$ hineingerechnet werden
- bei Winkel in Bogenmaß: mod 2π
- bei Winkel in Gradmaß: mod $360°$

- Beispiel: $z = 2 \cdot e^{j \cdot 5\pi} = 2 \cdot e^{j(5\pi \bmod 2\pi)} = 2 \cdot e^{j \cdot \underbrace{\pi}_{\varphi}}$

$\varphi = 5\pi$

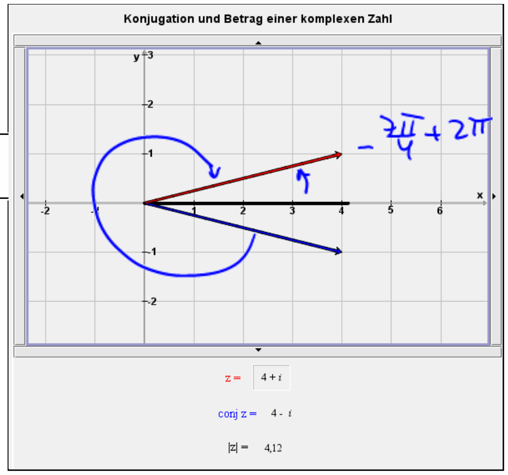


Operationen mit komplexen Zahlen

konjugiert komplex

zu

$$z = a + j \cdot b$$



$$z^* = a - j \cdot b$$

kartesische Koordinaten

konjugiert komplexe Zahl in Polarkoordinaten :

$$z = r \cdot e^{j\varphi}$$

$$\boxed{z^* = r \cdot e^{-j\varphi}} = r \cdot e^{j(2\pi - \varphi)}$$

für mathematisch positive Winkel-angabe

Beispiel:

$$z = 2 \cdot e^{j\frac{\pi}{4}}$$

$$z^* = 2 \cdot e^{j\left(-\frac{\pi}{4}\right)} = 2 \cdot e^{j\left(2\pi - \frac{\pi}{4}\right)} = 2 \cdot e^{j \cdot \frac{7\pi}{4}}$$

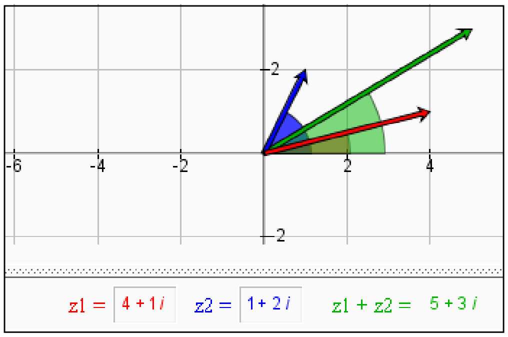
.

Zusammenfassung: Operationen mit komplexen Zahlen

mit z=a+bj algebraische Form

in kartesischer Koordinaten (Re, Im)

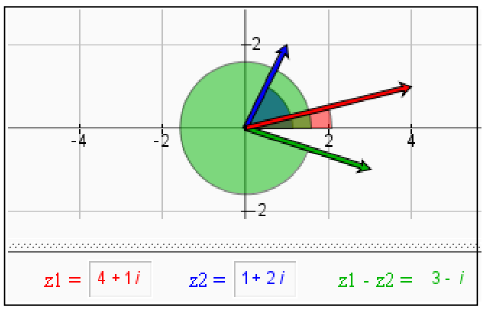
Addition



$$z_1 + z_2 = (a_1 + a_2) + j \cdot (b_1 + b_2)$$

$$z_1 + z_2 = r_1 \cdot e^{j\varphi_1} + r_2 \cdot e^{j\varphi_2}$$

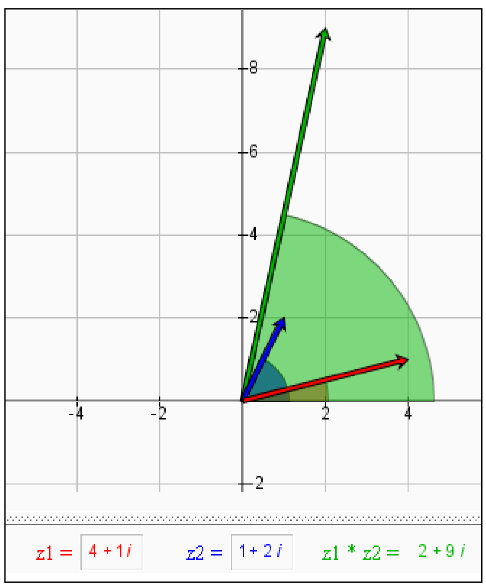
Subtraktion



$$z_1 - z_2 = (a_1 - a_2) + j \cdot (b_1 - b_2)$$

$$z_1 - z_2 = r_1 \cdot e^{j\varphi_1} - r_2 \cdot e^{j\varphi_2} = r_1 \cdot e^{j\varphi_1} + r_2 \cdot e^{j(\varphi_2 + \pi)}$$

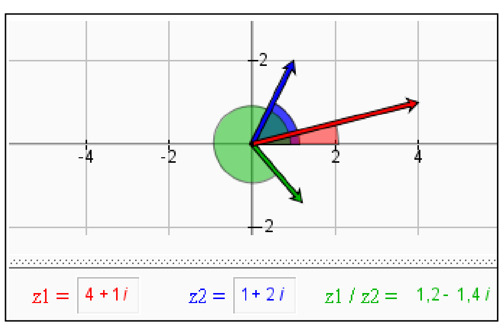
Multiplikation



$$z_1 \cdot z_2 = (a_1 a_2 - b_1 b_2) + j \cdot (b_1 a_2 + a_1 b_2)$$

$$z_1 \cdot z_2 = (r_1 \cdot r_2) \cdot e^{j(\varphi_1 + \varphi_2)}$$

Division



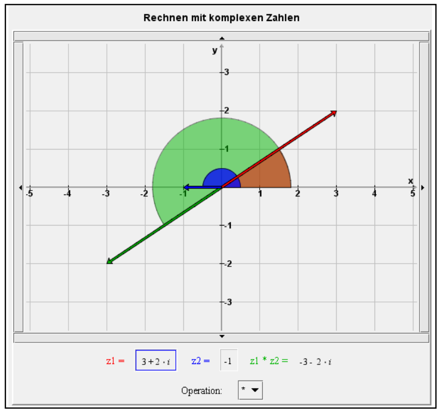
$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{a_1 a_2 + b_1 b_2}{a_2^2 + b_2^2} + j \frac{b_1 a_2 - a_1 b_2}{a_2^2 + b_2^2}$$

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{r_1}{r_2} e^{j(\varphi_1 - \varphi_2)}$$

Zusammenfassung: Operationen mit komplexen Zahlen

mit z=a+bj algebraische Form in kartesischen Koordinaten (Re, Im)

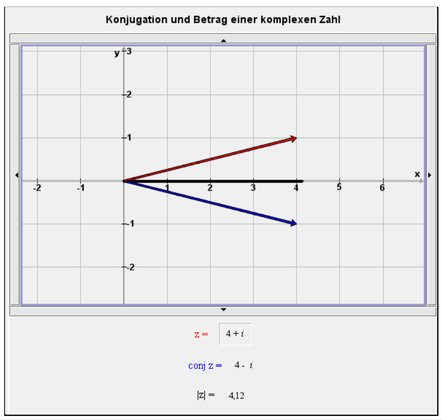
Negation



$$-z = -a + j\cdot(-b)$$

$$-z = r\cdot e^{j(\varphi+\pi)}$$

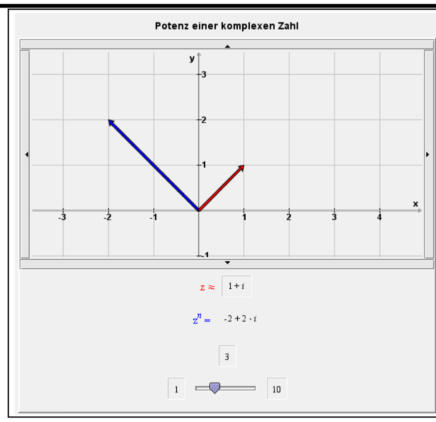
konjugiert komplex



$$z^* = a - j\cdot b$$

$$z^* = r\cdot e^{-j\varphi}$$

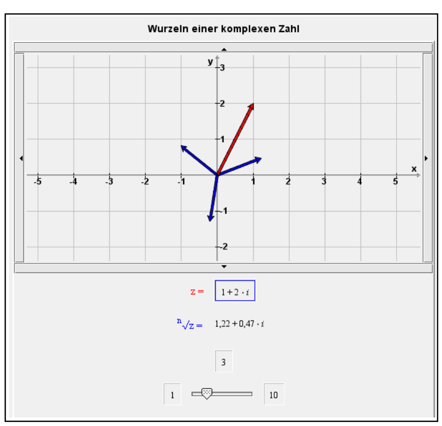
Potenz



$$z^n = (a + j\cdot b)^n$$

$$z^n = (r\cdot e^{j\varphi})^n = r^n\cdot e^{j\varphi\cdot n}$$

Wurzel

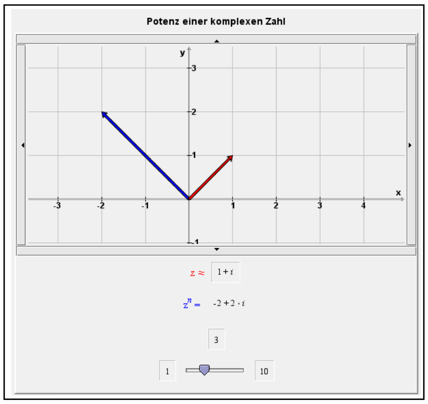


$$\sqrt[n]{z} = (r\cdot e^{j(\varphi+k\cdot 2\pi)})^{1/n} = \sqrt[n]{r}\cdot e^{j(\frac{\varphi}{n}+\frac{k}{n}2\pi)}$$

$$\mathit{mit}\ k = 0,\ldots,n-1$$

Operationen mit komplexen Zahlen

Potenz



$$z^n = (a + j \cdot b)^n$$

kartesische Koordinaten

Potenzen mit Polarkoordinaten:

$z = r \cdot e^{j\varphi}$

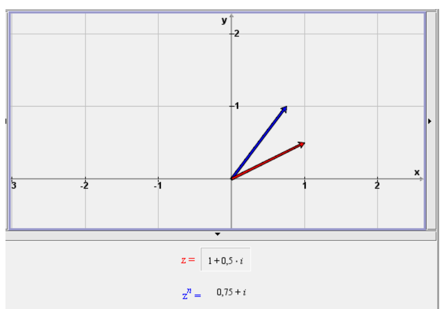
$$\boxed{\begin{aligned} z^n &= (r \cdot e^{j\varphi})^n \\ &= r^n \cdot e^{j\varphi \cdot n} \end{aligned}}$$

$$z^4 = (r \cdot e^{j\varphi})^4 = r^4 \cdot \underbrace{(e^{j\varphi})^4}_{\text{Potenz von Potenzen}} = r^4 \cdot e^{j\varphi \cdot 4}$$

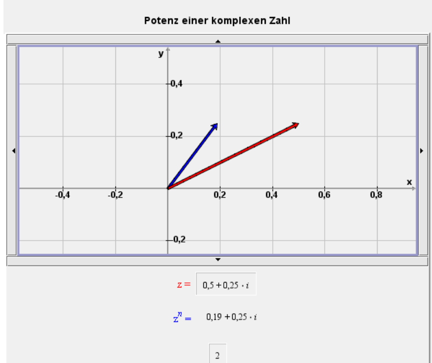
Beispiel:

$$z = (2 \cdot e^{j\frac{\pi}{4}})^3 = 2^3 \cdot e^{j\frac{\pi}{4} \cdot 3} = 8 \cdot e^{j\frac{3\pi}{4}}$$

Beispiel:



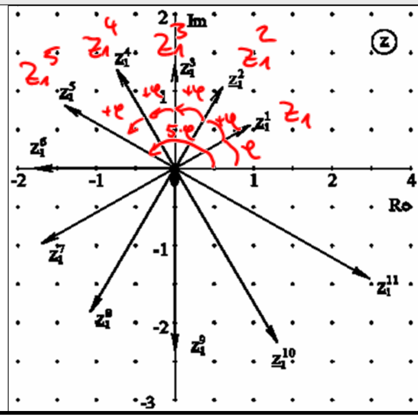
Betrag z > 1
Betrag z^n > Betrag z



Betrag z < 1
Betrag z^n < Betrag z

Betrag z = 1
Betrag z^n = Betrag z
keineVeränderung in der Länge des Zeigers

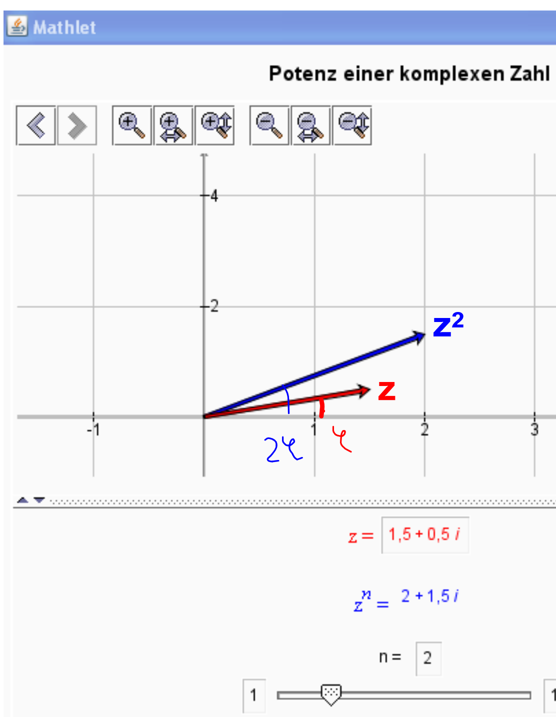
Potenzen komplexer Zahlen

<table>
<tr><th colspan="3">Komplexe Zahlen</th></tr>
<tr><th>Algebraische Form</th><th>Betrag/Phase: trigonometrische Form</th><th>Exponentialdarstellung</th></tr>
<tr><td>$z = a + j \cdot b$
a Realteil, b Imaginärteil</td><td>$z = r \cdot (\cos\varphi + j \cdot \sin\varphi)$
r Betrag, φ Winkel</td><td>$z = r \cdot e^{j\varphi}$
r Betrag, φ Winkel</td></tr>
<tr><th colspan="3">Potenzen komplexer Zahlen</th></tr>
<tr><td colspan="3">Eine Zahl wird potenziert, in dem der Betrag mit dem Exponenten potenziert wird und der Winkel mit dem Exponenten multipliziert wird.</td></tr>
<tr><td>$z^n = (a + j \cdot b)^n$</td><td></td><td>$z^n = (r \cdot e^{j\varphi})^n$
$= r^n \cdot e^{j\varphi \cdot n}$
$z = 1.1 \cdot e^{j \cdot \frac{\pi}{6}}$
$z^2 = 1.1^2 \cdot e^{j \cdot \frac{\pi}{3}}$
$z^3 = 1.1^3 \cdot e^{j \cdot \frac{\pi}{2}}$
$z^{11} = 1.1^{11} \cdot e^{j \cdot \frac{11\pi}{6}}$</td></tr>
</table>

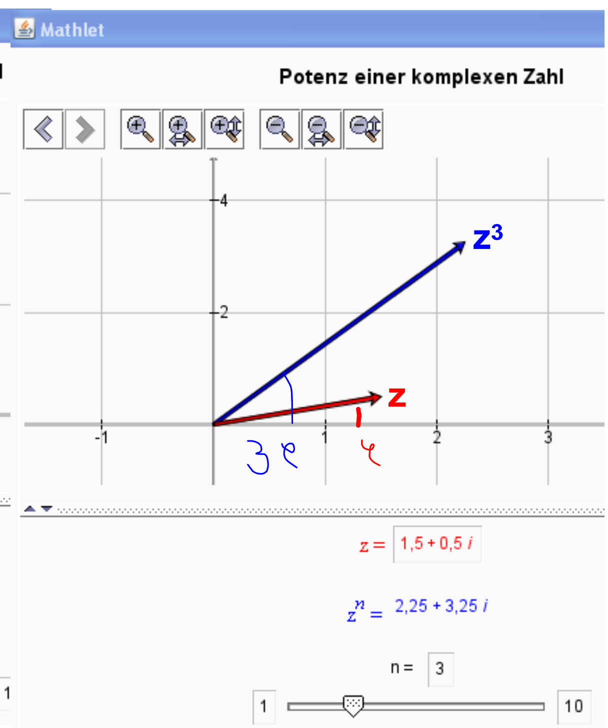
Formeln von Moivre

Beispiele:

2. Potenz einer komplexen Zahl

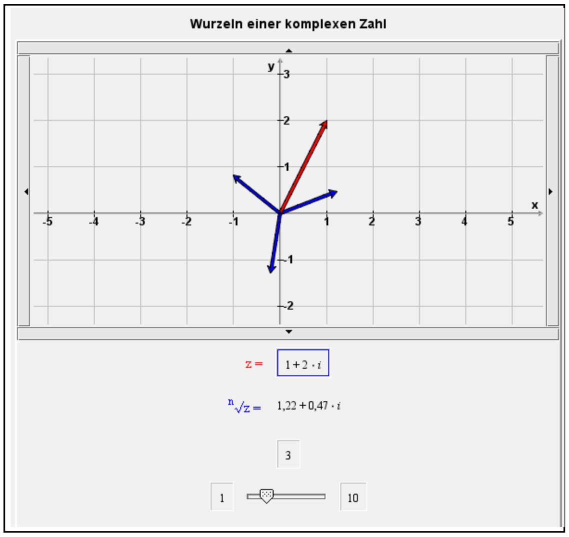


3. Potenz einer komplexen Zahl



Operationen mit komplexen Zahlen

Wurzel



kartesische Koordinaten

Wurzeln mit Polarkoordinaten:

$$\boxed{\begin{aligned}\sqrt[n]{z} &= \left(r\cdot e^{j(\varphi+k\cdot 2\pi)}\right)^{1/n} \\ &= \sqrt[n]{r}\cdot e^{j\left(\frac{\varphi}{n}+\frac{k}{n}2\pi\right)} \\ &\text{mit } k = 0,..,n-1\end{aligned}}$$

Beispiel:

siehe nächste Seite

Beispiel: Einführung Wurzeln komplexer Zahlen

- Lösung für $z = \sqrt[2]{4 \cdot e^{j\frac{\pi}{2}}}$ gesucht
- Es wird eine Zahl z_1 gesucht, die mit sich selbst multipliziert den Radikanden ergibt: $z_1^2 = 4 \cdot e^{j\frac{\pi}{2}}$

$\sqrt[2]{4}$
$x^2 = 4$
$x = -2$
$x = +2$
$x = \pm\sqrt{4}$

1. Lösung:

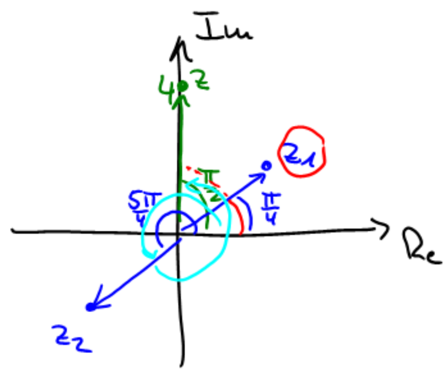
$$\boxed{z_1 = +\sqrt[2]{4 \cdot e^{j\frac{\pi}{2}}}}$$
$$= \sqrt[2]{4} \cdot \sqrt[2]{e^{j\frac{\pi}{2}}}$$
$$= 2 \cdot \left(e^{j\frac{\pi}{2}}\right)^{\frac{1}{2}}$$
$$= 2 \cdot e^{j\frac{\pi}{4}}$$

$\rightarrow$ Probe: $\left(2 \cdot e^{j\frac{\pi}{4}}\right)^2 = 2^2 \cdot \left(e^{j\frac{\pi}{4}}\right)^2 = 4 \cdot e^{j\frac{\pi}{4}\cdot 2} = 4 \cdot e^{j\frac{\pi}{2}}$ ✓

2. Lösung

$$\boxed{z_2 = -\sqrt[2]{4 \cdot e^{j\frac{\pi}{2}}}}$$
$$= -\sqrt[2]{4} \cdot \sqrt[2]{e^{j\frac{\pi}{2}}}$$
$$= -\underbrace{2 \cdot e^{j\frac{\pi}{4}}}$$
$$= 2 \cdot e^{j\left(\frac{\pi}{4}+\pi\right)}$$
$$= 2 \cdot e^{j\cdot\frac{5\pi}{4}}$$

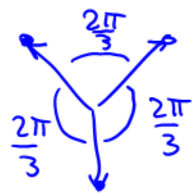
$\rightarrow$ Probe: $\left(2 \cdot e^{j\frac{5\pi}{4}}\right)^2 = 2^2 \cdot e^{j\frac{5\pi}{4}\cdot 2} = 4 \cdot e^{j\frac{5\pi}{2}} = 4 \cdot e^{j\left(2\pi+\frac{\pi}{2}\right)} = 4 \cdot e^{j\frac{\pi}{2}}$ ✓



weiteres Beispiel:

$$z = 8\cdot e^{j\frac{\pi}{2}}$$

$$z_{1,2,3} = \sqrt[3]{8\cdot e^{j\frac{\pi}{2}}} \checkmark$$



3 Lösungen gleichmäßig im Kreis verteilt

⇒ Abstand ist jeweils $\frac{2\pi}{3}$

1.Lösung

$$z_1 = \sqrt[3]{8\cdot e^{j\frac{\pi}{2}}} = \sqrt[3]{8}\cdot\left(e^{j\frac{\pi}{2}}\right)^{\frac{1}{3}} = 2\cdot e^{j\underbrace{\frac{\pi}{6}}_{\text{Winkel der 1. Lösung}}}$$

2.Lösung

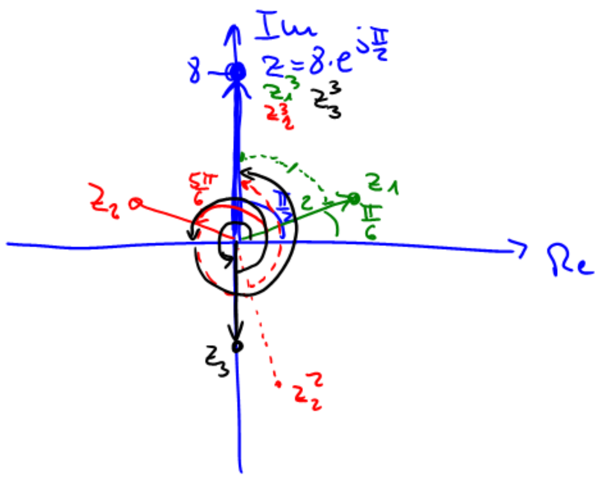
$$z_2 = \sqrt[3]{8}\cdot e^{j\left(\underbrace{\frac{\pi}{6}}_{\text{Winkel 1. Lösung}} + \overbrace{\frac{2\pi}{3}}^{\text{Winkel zwischen je 2 Lösungen}}\right)} = 2\cdot e^{j\cdot\frac{5\pi}{6}}$$

Probe:

$$\left(2\cdot e^{j\frac{5\pi}{6}}\right)^3 = 2^3\cdot e^{j\frac{5\pi}{6}\cdot 3} = 8\cdot e^{j\frac{15\pi}{6}} = 8\cdot e^{j\left(\underbrace{\frac{12\pi}{6}}_{2\pi \uparrow \text{ einmal herum}} + \underbrace{\frac{3\pi}{6}}_{\frac{\pi}{2}}\right)} = 8\cdot e^{j\frac{\pi}{2}} \checkmark$$

3.Lösung

$$z_3 = \sqrt[3]{8}\cdot e^{j\left(\underbrace{\frac{\pi}{6}}_{\text{Winkel 1. Lösung}} + 2\cdot\overbrace{\frac{2\pi}{3}}^{\text{zweimal Winkel zwischen je 2 Lösungen}}\right)} = 2\cdot e^{j\cdot\frac{9\pi}{6}} = 2\cdot e^{j\frac{3\pi}{2}}$$

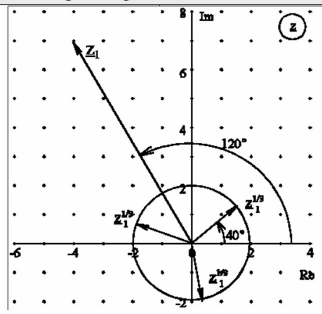


Probe

$$\left(2\cdot e^{j\frac{3\pi}{2}}\right)^3 = 2^3\cdot e^{j\frac{3\pi}{2}\cdot 3} = 8\cdot e^{j\frac{9\pi}{2}} = 8\cdot e^{j\left(\underbrace{\frac{4\pi}{2}+\frac{4\pi}{2}}_{\text{zweimal herum}}+\frac{\pi}{2}\right)} = 8\cdot e^{j\frac{\pi}{2}} \checkmark$$

Wurzeln komplexer Zahlen

- Bei der n-ten Wurzel ergeben sich n Lösungen.
- Der Betrag ergibt sich aus der n-ten Wurzel des Betrages.
- Den Winkel <u>einer</u> Lösung erhält man durch Dividieren des Winkel durch n.
- Die anderen Lösungen liegen auf einem Kreis verteilt im Abstand von 360°/n. $\mathrel{/\!/}\ \frac{2\pi}{n}$



$z = 8\cdot e^{j\cdot\frac{2\pi}{3}}$

$\sqrt[3]{z} = 2\cdot e^{j\cdot\frac{2\pi}{9}}$

$\sqrt[3]{z} = 2\cdot e^{j\cdot\frac{8\pi}{9}}$

$\sqrt[3]{z} = 2\cdot e^{j\cdot\frac{14\pi}{9}}$

$$\sqrt[n]{z} = (r\cdot e^{j(\varphi+k\cdot 2\pi)})^{1/n} = \sqrt[n]{r}\cdot e^{j(\frac{\varphi}{n}+\frac{k}{n}2\pi)} = \sqrt[n]{r}\cdot e^{j\left(\frac{\varphi}{n}+k\frac{2\pi}{n}\right)}$$

$mit\ k = 0,..,n-1$

Formeln von Moivre

$k = 0,1,..,n-1$ für die verschiedenen Lösungen

Bemerkung:

- Die n-ten Wurzeln liegen im Abstand von $\frac{2\pi}{n}$ auf einem Kreis mit dem Radius $\sqrt[n]{r}$ um den Nullpunkt der Gauß'schen Zahlenebene und bilden ein regelmäßiges n-Eck.
- Die erste Lösung z_0 nennt man auch Hauptwert von $\sqrt[n]{z}$.

Beispiel: siehe vorne

Lösungen für $\sqrt[n]{r\cdot e^{j\varphi}}$ gesucht

Vorgehen (Anwenden obiger Formel)

$k=0$: 1. Lösung

$z_1 = \sqrt[n]{r}\cdot e^{j\frac{\varphi}{n}}$ Winkel der 1. Lösung

$k=1$: 2. Lösung

$z_2 = \sqrt[n]{r}\cdot e^{j\left(\frac{\varphi}{n}+\frac{2\pi}{n}\right)}$ Abstand zwischen je 2 Lösungen

$k=2$: 3. Lösung

$z_3 = \sqrt[n]{r}\cdot e^{j\left(\frac{\varphi}{n}+2\cdot\frac{2\pi}{n}\right)}$

$k=3$: 4. Lösung

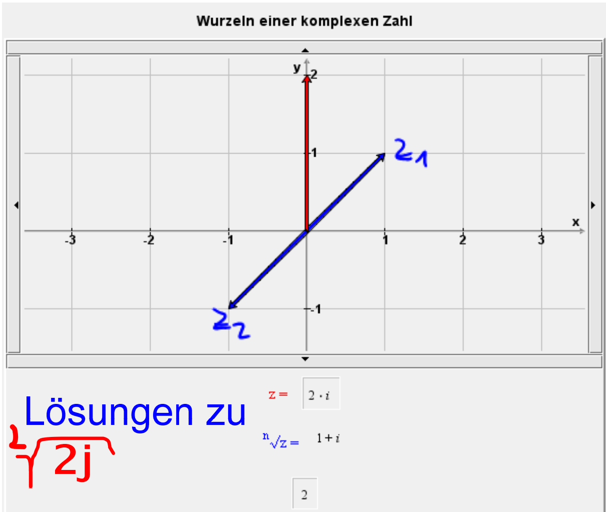
$z_4 = \sqrt[n]{r}\cdot e^{j\left(\frac{\varphi}{n}+3\cdot\frac{2\pi}{n}\right)}$

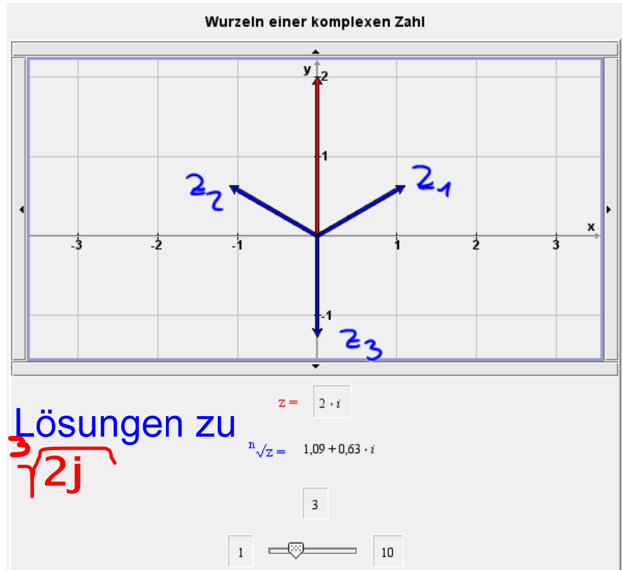
$\vdots$

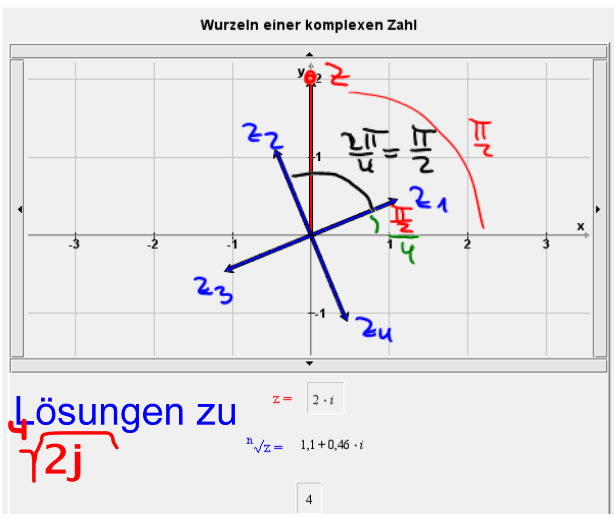
$k=n-1$: n. Lösung

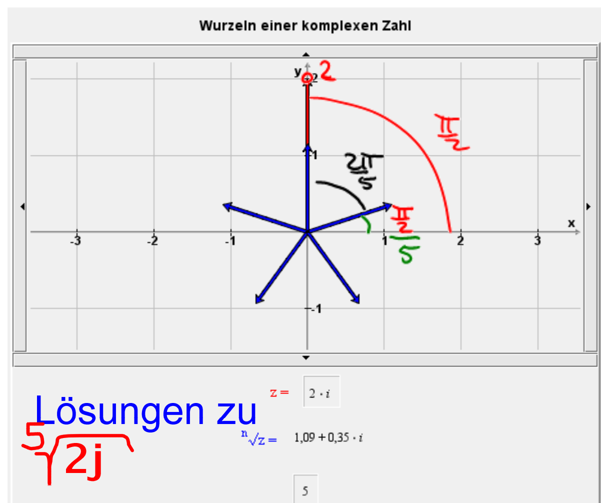
$z_n = \sqrt[n]{r}\cdot e^{j\left(\frac{\varphi}{n}+(n-1)\cdot\frac{2\pi}{n}\right)}$

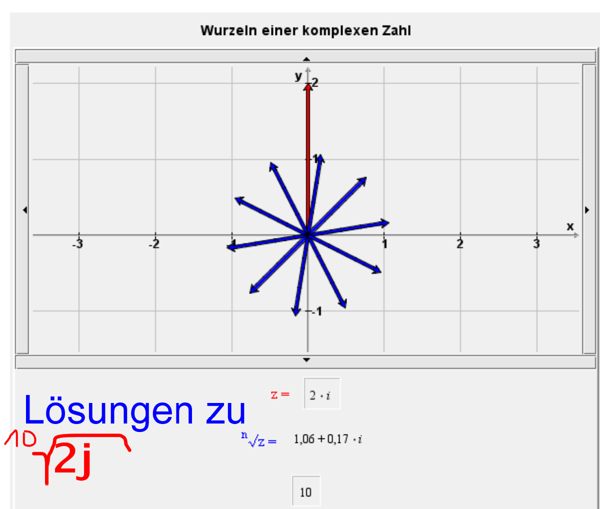
Verschiedene Wurzeln von z=2j











Zusammenfassung der Operationen mit komplexen Zahlen

	algebraische Darstellung (kartesische Koordinaten)	Exponentialdarstellung (Polarkoordinaten)
Addition	$z_1 + z_2 = (a_1 + a_2) + j \cdot (b_1 + b_2)$	$z_1 + z_2 = r_1 \cdot e^{j\varphi_1} + r_2 \cdot e^{j\varphi_2}$
Negation	$-z = -a + j \cdot (-b)$	$-z = r \cdot e^{j(\varphi+\pi)}$
Subtraktion	$z_1 - z_2 = (a_1 - a_2) + j \cdot (b_1 - b_2)$	$z_1 - z_2 = r_1 \cdot e^{j\varphi_1} - r_2 \cdot e^{j\varphi_2} = r_1 \cdot e^{j\varphi_1} + r_2 \cdot e^{j(\varphi_2+\pi)}$
Multiplikation	$z_1 \cdot z_2 = (a_1 a_2 - b_1 b_2) + j \cdot (b_1 a_2 + a_1 b_2)$	$z_1 \cdot z_2 = (r_1 \cdot r_2) \cdot e^{j(\varphi_1+\varphi_2)}$
Potenz	$z^n = (a + j \cdot b)^n$	$z^n = (r \cdot e^{j\varphi})^n = r^n \cdot e^{j\varphi \cdot n}$
Division	$\frac{z_1}{z_2} = \frac{a_1 a_2 + b_1 b_2}{a_2^2 + b_2^2} + j \frac{b_1 a_2 - a_1 b_2}{a_2^2 + b_2^2}$	$\frac{z_1}{z_2} = \frac{r_1}{r_2} e^{j(\varphi_1-\varphi_2)}$
Wurzel		$\sqrt[n]{z} = (r \cdot e^{j(\varphi+k\cdot 2\pi)})^{1/n} = \sqrt[n]{r} \cdot e^{j(\frac{\varphi}{n}+\frac{k}{n}2\pi)}$ mit $k = 0,..,n-1$
konjugiert komplexe Zahl	$z^* = a - j \cdot b$	$z^* = r \cdot e^{-j\varphi}$

Aufgabe:

Berechnen Sie $z = (2+2j) \cdot 2 \cdot e^{j\frac{\pi}{2}}$

Aufgabe:

Berechnen Sie $z = \sqrt[4]{16 \cdot e^{j\frac{\pi}{2}}}$

•