Vorlesung 25 am 12.01.2023

Inhalte: Differentialrechnung 4

4 Differentialrechnung

Regel von Bernoulli l´Hospital

Berechnung von Grenzwerten bei unbestimmten Ausdrücke

.

Regel von Bernoulli l´Hospital

Berechnung von Grenzwerten bei unbestimmten Ausdrücke

Grenzwertbestimmung

Grenzwerte - bestimmbare Ausdrücke

$\infty + \infty \to \infty$	$z.B.\ n^2 + n \to \infty$
$\infty \cdot \infty \to \infty$	$z.B.\ n^2 \cdot n \to \infty$
$\infty \cdot (-\infty) \to -\infty$	$z.B.\ n^2 \cdot (-n) \to -\infty$
$\frac{1}{\infty} \to 0$	$z.B.\ \frac{1}{n} \to 0$
$\frac{1}{0} \to \infty$	$z.B.\ \frac{1}{\frac{1}{n}} \to \infty$
$0^{\infty} \to 0$	$z.B.\ \left(\frac{1}{n}\right)^n \to 0$
$\infty^{\infty} \to \infty$	$z.B.\ (n)^n \to \infty$

Grenzwerte - unbestimmte Ausdrücke

$$\frac{0}{0},\quad \frac{\infty}{\infty},\quad 0 \cdot \infty,\quad \infty - \infty,\quad 0^0,\quad \infty^0,\quad 1^{\infty}$$

Erläuterungen siehe nächste Seiten

Lösung mit Regel von Bernoulli-l'Hospital

Rückblick Unbestimmte Ausdrücke

Grenzwerte - unbestimmte Ausdrücke

Typ $\frac{0}{0}$ *bedeutet* $\frac{Zähler \to 0}{Nenner \to 0}$

Erläuterung: $Zähler \to 0$ *würde bedeuten Wert des Ausdrucks geht gegen* 0

$Nenner \to 0$ *würde bedeuten Wert des Ausdrucks geht gegen* ∞

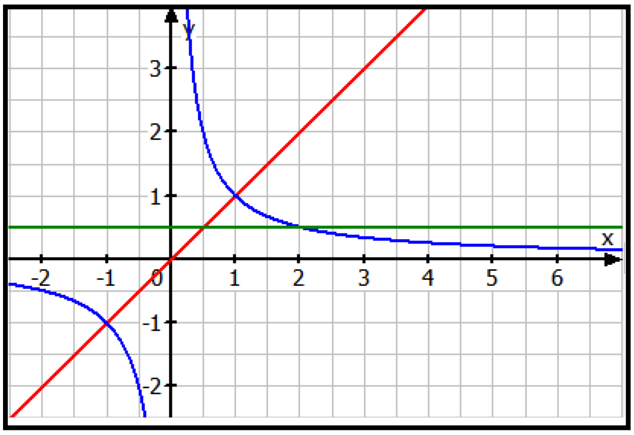
Welcher Teil des Ausdrucks ist stärker?

Beispiele:

$$\lim_{x\to\infty} \frac{\frac{1}{x}}{\frac{1}{x^2}} \to \infty$$

$$\lim_{x\to\infty} \frac{\frac{1}{x^2}}{\frac{1}{x}} \to 0$$

$$\lim_{x\to\infty} \frac{\frac{1}{x^2}}{\frac{2}{x^2}} \to \frac{1}{2}$$



Typ $\frac{\infty}{\infty}$ *bedeutet* $\frac{Zähler \to \infty}{Nenner \to \infty}$

Erläuterung: $Zähler \to \infty$ *würde bedeuten Wert des Ausdrucks geht gegen* ∞

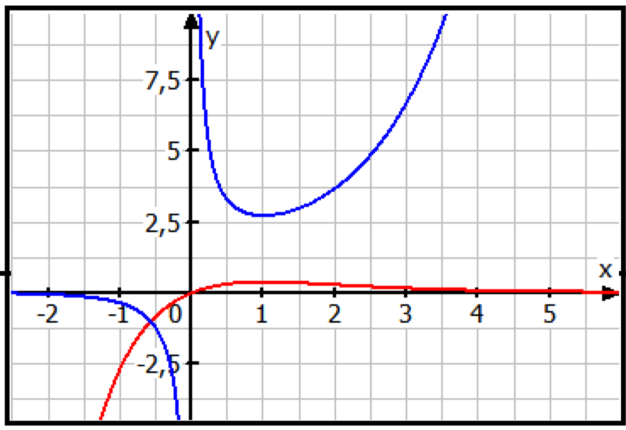
$Nenner \to \infty$ *würde bedeuten Wert des Ausdrucks geht gegen* 0

Welcher Teil des Ausdrucks ist stärker?

Beispiele:

$$\lim_{x\to\infty} \frac{x}{e^x} \to 0$$

$$\lim_{x\to\infty} \frac{e^x}{x} \to \infty$$



Grenzwerte - unbestimmte Ausdrücke

Typ 0^0 *bedeutet* $(Basis \to 0)^{Exponent \to 0}$

Erläuterung: *Basis* $\to 0$ *würde bedeuten Wert des Ausdrucks geht gegen* 0

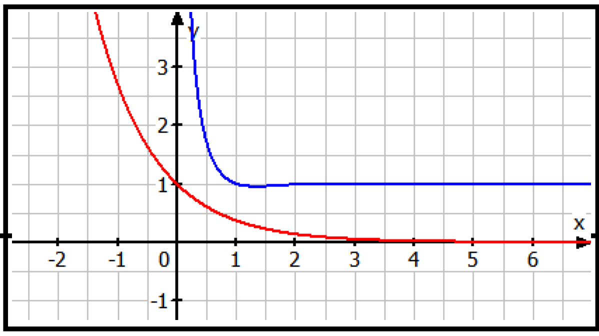
Exponent $\to 0$ *würde bedeuten Wert des Ausdrucks geht gegen* 1

Welcher Teil des Ausdrucks ist stärker?

Beispiele:

$$\boxed{\lim_{x\to\infty}\left(\frac{1}{e^{x^2}}\right)^{\frac{1}{x}} \to 0}$$

$$\boxed{\lim_{x\to\infty}\left(\frac{1}{x}\right)^{\frac{1}{e^{x^2}}} \to 1}$$



Typ ∞^0 *bedeutet* $(Basis \to \infty)^{Exponent \to 0}$

Erläuterung: *Basis* $\to \infty$ *würde bedeuten Wert des Ausdrucks geht gegen* ∞

Exponent $\to 0$ *würde bedeuten Wert des Ausdrucks geht gegen* 1

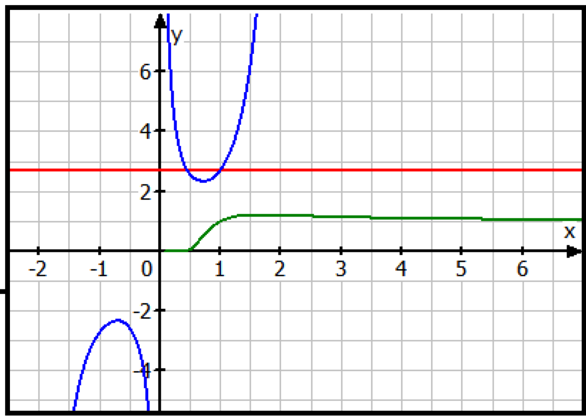
Welcher Teil des Ausdrucks ist stärker?

Beispiele:

$$\boxed{\lim_{x\to\infty}(e^x)^{\frac{1}{x}} \to e}$$

$$\boxed{\lim_{x\to\infty}(e^{x^2})^{\frac{1}{x}} \to \infty}$$

$$\boxed{\lim_{x\to\infty}(x)^{\frac{1}{x^2}} \to 1}$$



Grenzwerte - unbestimmte Ausdrücke

Typ $\infty - \infty$ *bedeutet* (*Ausdruck*1 $\to \infty$) $-$ (*Ausdruck*2 $\to \infty$)

Erläuterung: *Ausdruck*1 *schneller* $\to \infty$ *als Ausdruck*2 $\Rightarrow$ *Gesamtausdruck geht gegen* ∞

*Ausdruck*2 *schneller* $\to \infty$ *als Ausdruck*1 $\Rightarrow$ *Gesamtausdruck geht gegen* $-\infty$

Welcher Teil des Ausdrucks ist stärker?

Beispiele:

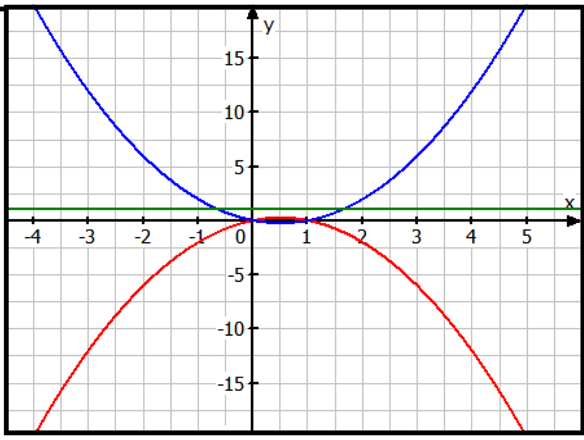
$$\lim_{x\to\infty}(x^2 - x) \to \infty$$

$$\lim_{x\to\infty}(x - x^2) \to -\infty$$

$$\lim_{x\to\infty}((\underbrace{x^2+1}_{\infty}) - \underbrace{x^2}_{\infty}) \to 1$$

*Ausdruck*1 *und* 2 *streben gleich schnell* $\to \infty$

$\Rightarrow$ *Gesamtausdruck geht gegen einen festen Wert*



Typ $0 \cdot \infty$ *bedeutet* (*Faktor*1 $\to 0$) $\cdot$ (*Faktor*2 $\to \infty$)

Erläuterung: *Faktor*1 $\to 0$ *würde bedeuten Wert des Ausdrucks geht gegen* 0

*Faktor*2 $\to \infty$ *würde bedeuten Wert des Ausdrucks geht gegen* ∞

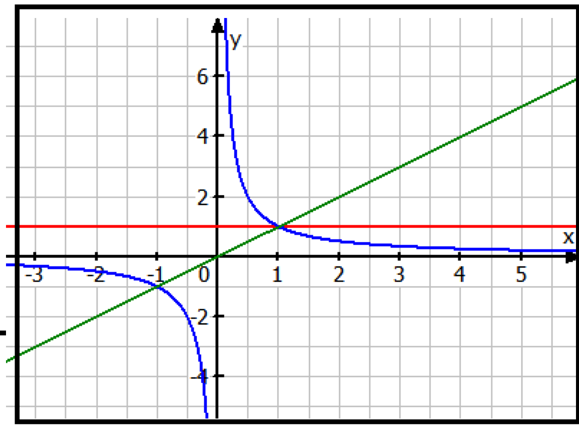
Welcher Teil des Ausdrucks ist stärker?

Beispiele:

$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{1}{x}\right)x \to 1$$

$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{1}{x^2}\right)x \to 0$$

$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{1}{x}\right)x^2 \to \infty$$



•

Grenzwerte - unbestimmte Ausdrücke

$\color{red}{Typ\ 1^{\infty}}$ *bedeutet* $(Basis \to 1)^{(Exponent \to \infty)}$

Erläuterung : *Basis* $\to 1$ *bedeutet Gesamtausdruck geht gegen* 1

Exponent $\to \infty$ *bedeutet Gesamtausdruck geht gegen* ∞

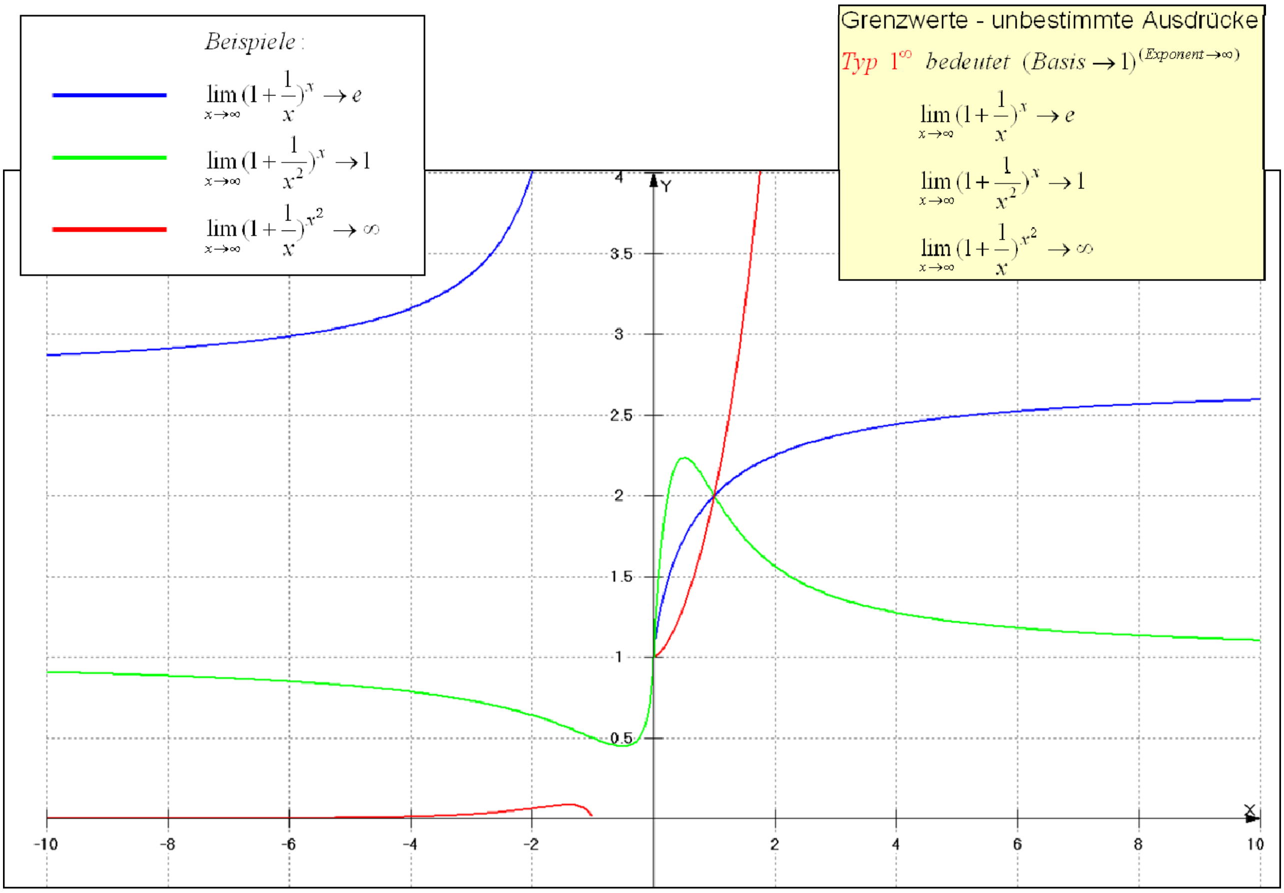
Welcher Teil des Ausdrucks ist stärker?

Beispiele :

$$\boxed{\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^{x} \to e}$$

$$\boxed{\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x^2}\right)^{x} \to 1}$$

$$\boxed{\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^{x^2} \to \infty}$$



Regel von Bernoulli-l'Hospital

(hilft bei der Grenzwertbestimmung bei unbestimmten Ausdrücken)

Satz 4.14: Regel von Bernoulli-l´Hospital

Es seien $f, g : [a,b] \to \mathbb{R}$ reelle stetige Funktionen, die auf (a,b) differenzierbar sind. Ferner sei $g'(x) \neq 0 \ \forall x \in (a,b)$.

Ist $x_0 \in [a,b]$ mit $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = 0 = \lim\limits_{x\to x_0} g(x)$

und existiert $\lim\limits_{x\to x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)}$, so existiert auch $\lim\limits_{x\to x_0} \frac{f(x)}{g(x)}$ und es ist

$$\lim_{x\to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)}$$

Bemerkungen:

1. Die obige Regel ist für die Grenzwertbestimmung bei unbestimmten Ausdrücken „$\frac{0}{0}$“ beschrieben.
2. Die Regel ist ebenso anwendbar bei unbestimmten Ausdrücken „$\frac{\infty}{\infty}$“, d.h. wenn $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = \infty = \lim\limits_{x\to x_0} g(x)$.
3. Die Regel ist ebenso anwendbar bei der Grenzwertberechnung für $x \to \infty \ (bzw. -\infty)$.
4. Die weiteren unbestimmten Ausdrücke $0\cdot\infty$, $\infty-\infty$, 0^0, ∞^0, 1^∞, die bei einer Grenzwertberechnung auftreten können, werden durch Umformungen auf einen der Fälle „$\frac{0}{0}$“ oder „$\frac{\infty}{\infty}$“ zurückgeführt (→ siehe Vorlesung) und können dann ebenfalls über die Regel von Bernoulli-l'Hospital gelöst werden.
5. Die Regel von Bernoulli-l´Hospital kann auch mehrfach hintereinander angewendet werden.
6. Achtung: Zähler und Nenner getrennt ableiten!

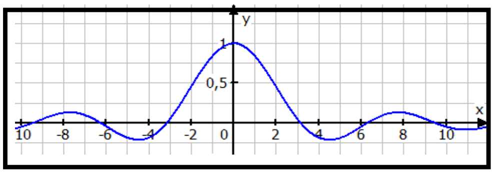
Beispiel:

Regel von Bernoulli-l'Hospital

Beispiel 1: Typ „$\frac{0}{0}$"

Vorgehen:

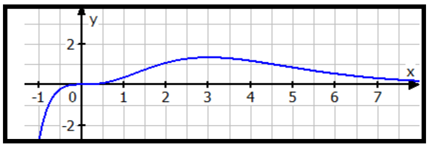
$$f(x) = \frac{\sin x}{x}$$



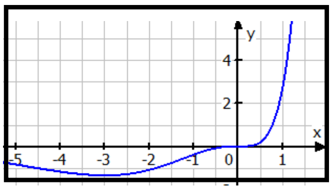
Beispiel 2: Typ „$\frac{\infty}{\infty}$"

Vorgehen:

$$\lim_{x \to \infty} \frac{x^3}{e^x}$$



$$\lim_{x \to \infty} \frac{x^3}{e^{-x}}$$



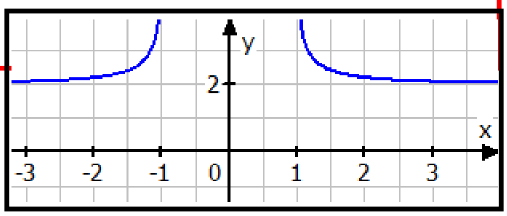
Regel von Bernoulli-l'Hospital

Beispiel 3: Typ „$0 \cdot \infty$"

Vorgehen:

$$\lim_{x \to \infty} \left(\ln\left(\frac{x+1}{x-1}\right) \cdot x \right)$$

Funktionsverlauf:

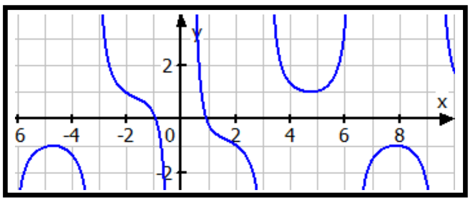


Regel von Bernoulli-l'Hospital

Beispiel 4: Typ „$\infty - \infty$"

$$\lim_{x \to 0} \left(\frac{1}{x^3} - \frac{1}{\sin x} \right)$$

Vorgehen:



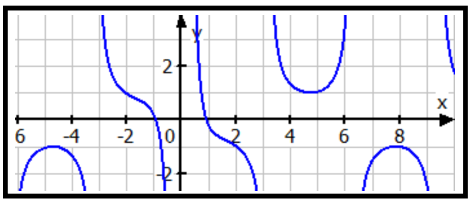
Regel von Bernoulli-l'Hospital

Beispiel 5:

Typ „0^0, 1^∞, ∞^0"

$$\lim_{x \to \frac{\pi}{2}} (\sin x)^{\frac{1}{\cos x}}$$

Vorgehen:



Zusammenfassung - Regel von Bernoulli-l´Hospital
"Umgang mit unbestimmten Ausdrücken"

Typ „$\frac{0}{0}$" / Typ „$\frac{\infty}{\infty}$"

Bernoulli-l´Hospital direkt anwendbar

Typ „$0 \cdot \infty$"

Vorgehen:

$$\underbrace{f(x)}_{\downarrow\, 0} \cdot \underbrace{g(x)}_{\downarrow\, \infty}$$

$$= \frac{f(x)}{\frac{1}{g(x)}} \qquad \text{Typ „}\frac{0}{0}\text{"}$$

$\Rightarrow$ Bern. l´Hosp. anwendbar

Typ „$\infty - \infty$"

Vorgehen:

$$\underbrace{f(x)}_{\downarrow\, \infty} - \underbrace{g(x)}_{\downarrow\, \infty}$$

$$= \frac{1}{\frac{1}{f(x)}} - \frac{1}{\frac{1}{g(x)}}$$

$$= \frac{\frac{1}{g(x)} - \frac{1}{f(x)}}{\frac{1}{f(x)} \cdot \frac{1}{g(x)}} \qquad \text{Typ} = \text{„}\frac{0}{0}\text{"}$$

$\Rightarrow$ Bern. l´Hosp. anwendbar

Typ „$0^0, 1^\infty, \infty^0$"

Vorgehen:

$$\lim_{x \to x_0} f(x)^{g(x)}$$

$$= \lim_{x \to x_0} e^{\ln\left(f(x)^{g(x)}\right)}$$

$$= \lim_{x \to x_0} e^{g(x) \cdot \ln f(x)}$$

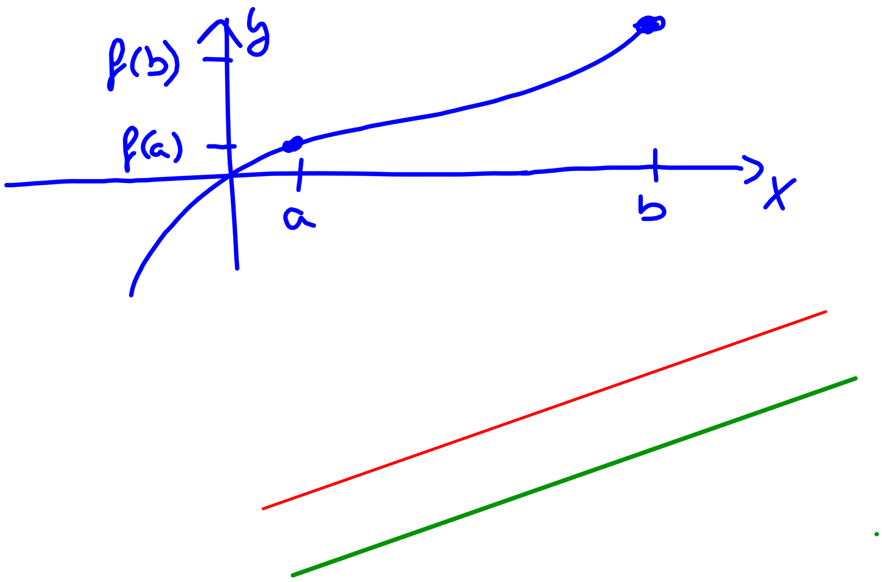
$$= e^{\underbrace{\lim_{x \to x_0} g(x) \cdot \ln f(x)}_{\text{Prüfen, ob hier Typ „}\frac{0}{0}\text{" oder „}\frac{\infty}{\infty}\text{"}}}$$

Mittelwertsatz der Differentialrechnung

Satz von Rolle

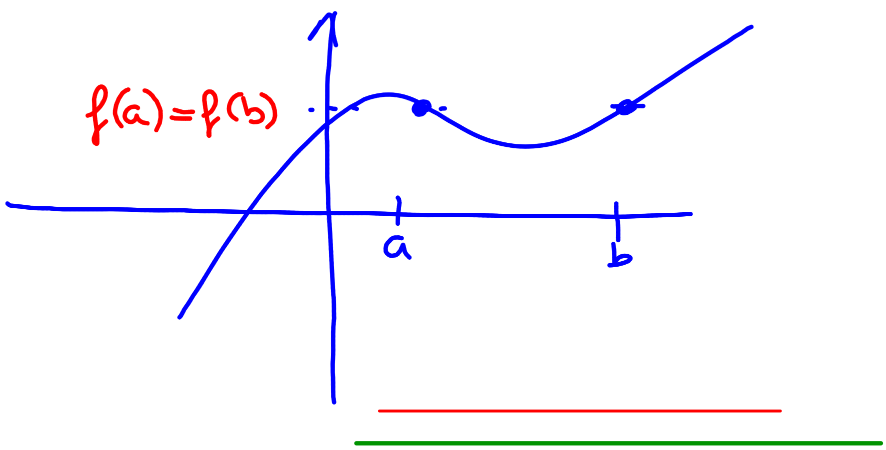
Satz 6.10: Mittelwertsatz der Differentialrechnung

Ist die reelle Funktion f stetig auf $[a,b]$ und differenzierbar auf (a,b),
so gibt es ein $x_0 \in (a,b)$ mit $f'(x_0) = \dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}$.



Satz 6.11: Satz von Rolle

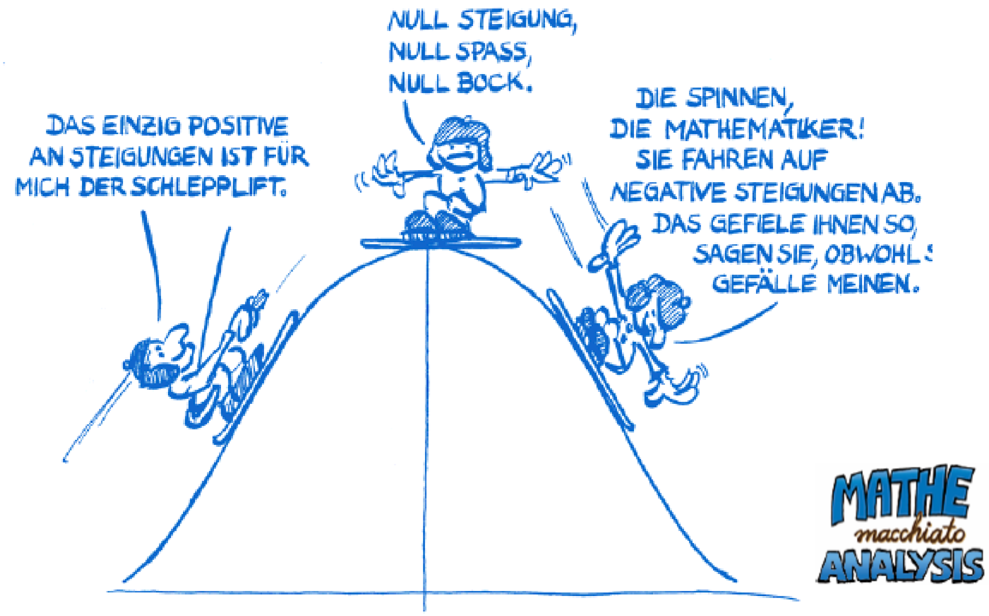
Ist die reelle Funktion f stetig auf $[a,b]$ und differenzierbar auf (a,b) und gilt $f(a)=f(b)$,
so existiert ein $x_0 \in (a,b)$ mit $f'(x_0)=0$.



Bemerkung:
Es kann auch mehrere Punkte mit einer waagerechten Tangente im Intervall geben.

Extremwertprobleme

Extremwerte



4.4.2 Extremwertprobleme

In praktischen Anwendungen der Mathematik geht es häufig darum beispielsweise Aufwände zu minimieren oder Gewinne zu maximieren. Diese zu minimierenden oder maximierenden Größen hängen in den meisten Fällen von einer oder mehreren anderen Größen ab. Problemstellungen dieses Typs werden Extremwertprobleme genannt.

Vorgehensweise zur Lösung von Extremwertproblemen:

1.Schritt:

Festlegung der zu optimierenden Größe

2.Schritt:

- Ausnutzung von Beziehungen zwischen den Variablen (Nebenbedingungen) (z.B. bekannte geometrische oder physikalische Beziehungen)
- Aufstellen der Zielfunktion

3.Schritt:

Bestimmung der Extremwerte der Zielfunktion

4.Schritt:

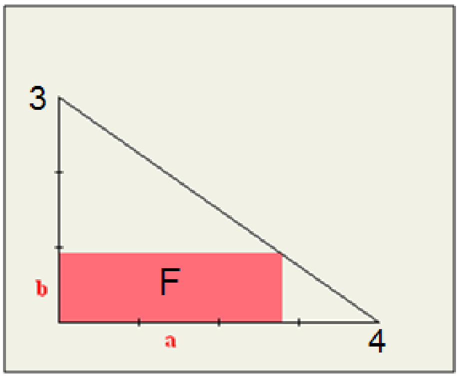
Untersuchung der Zielfunktion an den Rändern des Definitionsbereiches

5.Schritt:

Umsetzen der Ergebnisse der Extremwertberechnung auf die Problemstellung und Überprüfung der Lösung.

Beispiel: Extremwertprobleme

Aufgabe:
- In ein rechtwinkliges Dreieck soll ein **Rechteck eingeschrieben** werden.
- Wie sind die Seitenlängen a und b zu wählen, damit die **Fläche F des Rechtecks maximal** wird?



Vorgehen:

- Fläche F beschreiben (**Zielfunktion**): $F(a,b) = a \cdot b$

- Abhängigkeiten für a und b ermitteln (**Nebenbedingung**)
- Verwendung der Eigenschaft, dass der Punkt (a,b) auf der eingezeichneten Gerade liegt, d.h. b kann in Abhängigkeit dieser Geradengleichung über a ausgedrückt werden.

$$b = -\tfrac{3}{4}a + 3$$

- Fläche F (**Zielfunktion einer Variablen**):

$$F(a) = a \cdot \left(-\tfrac{3}{4}a + 3\right) = -\tfrac{3}{4}a^2 + 3a$$

- Bestimmen des Wertes für a,der **F(a) maximiert**

$$F'(a) = -\tfrac{3}{2}a + 3 = 0$$

$$\Rightarrow bei\ a = 2\ \ waagerechte\ Tangente$$

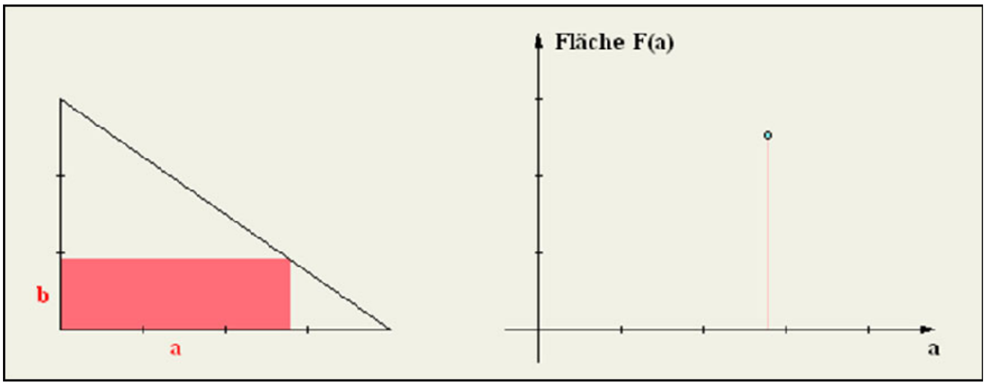
$$F''(2) = -\tfrac{3}{2} < 0\ \ \Rightarrow Maximum\ mit\ F(2) = 3$$

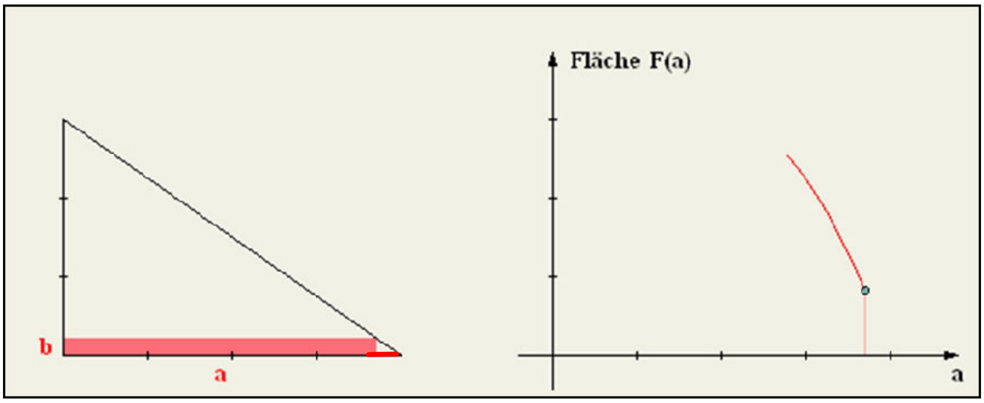
$$Ränder:\ \ F(0) = F(4) = 0\ \ \Rightarrow a = 2$$

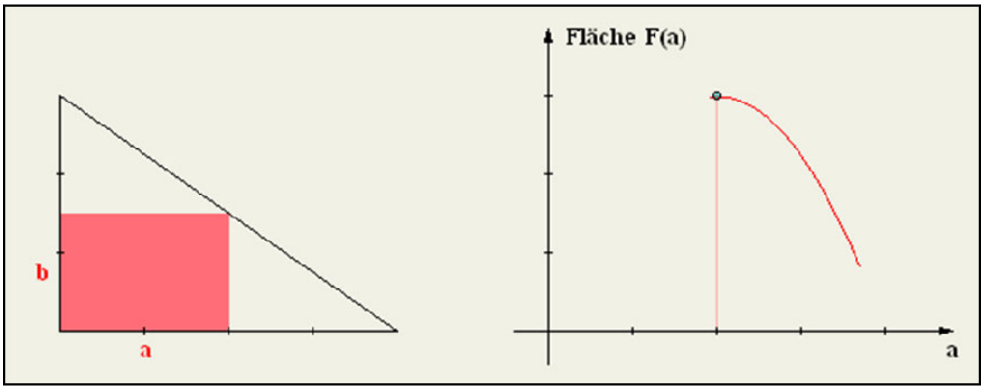
$$über\ die\ Nebenbedingung \Rightarrow b = \tfrac{3}{2}$$

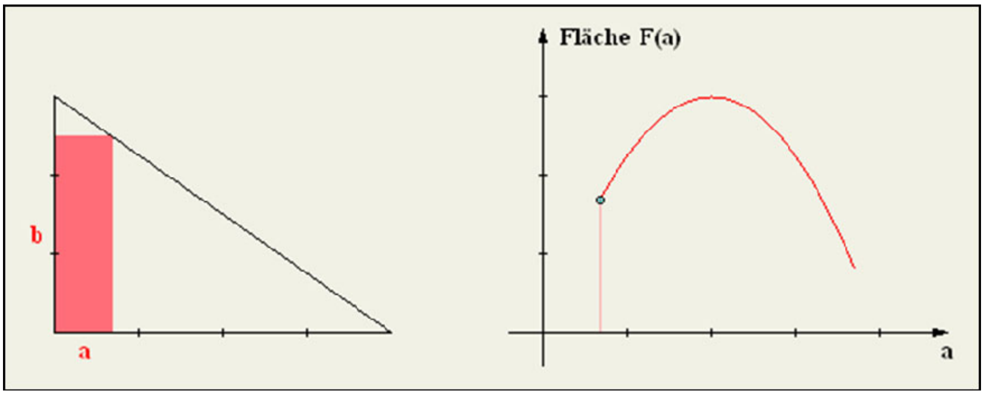
- Der maximale Flächenwert 3 ist die Hälfte der Dreiecksfläche.

Veranschaulichung des Funktionsverlaufes der Zielfunktion



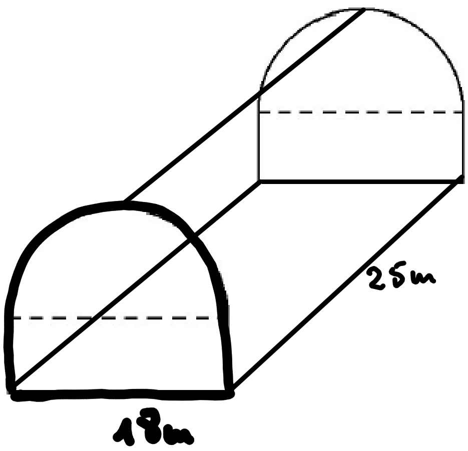




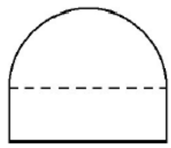


Beispiel: Extremwertaufgabe

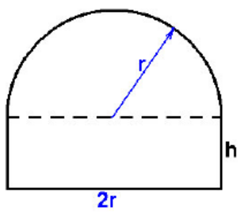
Der Querschnitt eines 25m langen Tunnels besteht aus einem Rechteck mit aufgesetztem Halbkreis (siehe Abbildung). Der Umfang der Querschnittsfläche beträgt 18m. Wie ist der Radius des Halbkreises zu wählen, damit das Tunnelvolumen möglichst groß wird?



Der Querschnitt eines 25m langen Tunnels besteht aus einem Rechteck mit aufgesetztem Halbkreis (siehe Abbildung). Der Umfang der Querschnittsfläche beträgt 18m. Wie ist der Radius des Halbkreises zu wählen, damit das Tunnelvolumen möglichst groß wird?



0. Skizze:



1) Zielfunktion: $V(r,h) = \left(2rh + \frac{\pi}{2}r^2\right)\cdot 25$

2) Nebenbedingung: $u = 2r + 2h + \pi r = 18 \rightarrow 2h = 18 - 2r - \pi r \rightarrow \underline{h = 9 - r - \frac{\pi}{2}r}$

3) Umformen der Zielfunktion: $V(r) = \left(r\cdot(18 - 2r - \pi r) + \frac{\pi}{2}r^2\right)\cdot 25 = \underline{25\cdot\left(18r - \left(2 + \frac{\pi}{2}\right)r^2\right)}$

4) Extremstelle(n): $V'(r) = 25\cdot\left(18 - 2\left(2+\frac{\pi}{2}\right)\cdot r\right) \rightarrow 25\cdot\left(18 - 2\left(2+\frac{\pi}{2}\right)\cdot r\right) = 0 \rightarrow \underline{r_E = \frac{18}{4+\pi} \approx 2{,}52} \rightarrow \underline{h \approx 2{,}52}$

5) Nachweis des Maximums: $V''(r) = 25\cdot(-4-\pi) < 0$ Maximum

Antwort:
Der Radius des Halbkreises muss 2,52m groß sein.

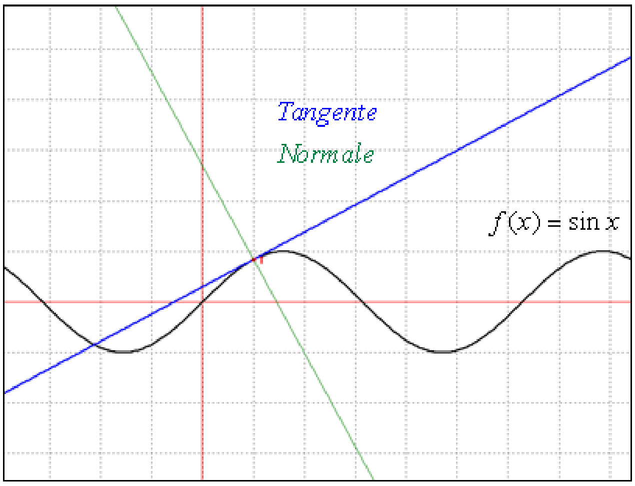
http://www.meinelt-online.de/fos/lb3/36_extremwert_lsg.pdf

•

Tangente und Normale

Tangente und Normale

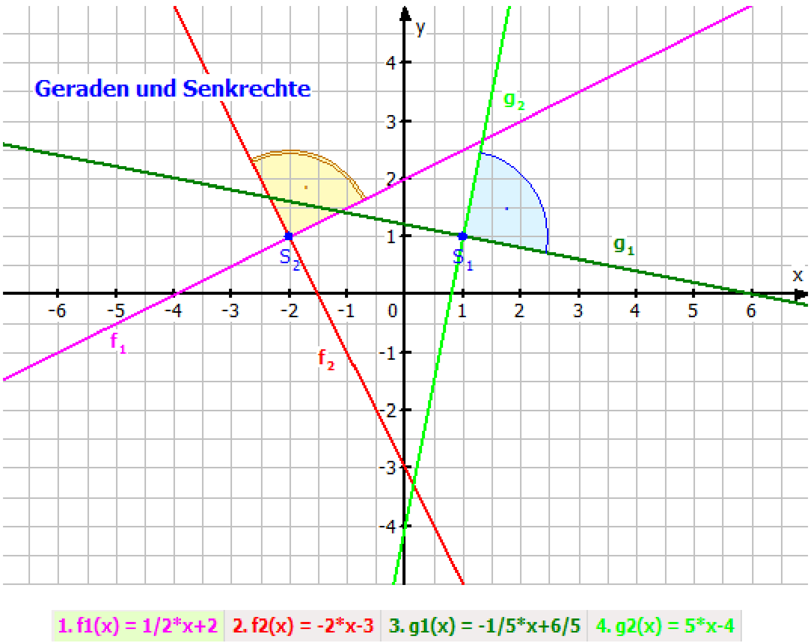
Veranschaulichung: Tangente und Normale



Definition 6.6: Normale

Eine **Normale** ist eine Gerade durch den Punkt x_0, die auf der Tangenten an die Kurve im Punkt x_0 senkrecht steht, d.h. die Normale und die Tangente schneiden sich im Winkel $\frac{\pi}{2}(90^\circ)$.

Beispiele: Gerade und Senkrechte



•

6.4.3 Tangente und Normale

Satz 6.19: Tangentengleichung

Die Tangente $f_t(x)$ an die Kurve der differenzierbaren Funktion f im Punkt $(x_0, f(x_0))$ ist gegeben durch:

$$\frac{f_t(x) - f(x_0)}{x - x_0} = f'(x_0) \qquad \text{(Punkt-Steigungsform)}$$

bzw.

$$f_t(x) = f(x_0) + f'(x_0)\,(x - x_0)\,.$$

Der Steigungswinkel ist $\varphi_{ft} = \arctan f'(x_0)$, da $f'(x_0) = \tan(\varphi_{ft})$.

Definition 6.5: Schnittwinkel

Der Schnittwinkel α der Kurven der differenzierbaren Funktionen f und g im Punkt $(x_0, y_0)\ mit\ y_0 = f(x_0) = g(x_0)$ wird definiert als Schnittwinkel der Tangenten an f und g in diesem Punkt, d.h. der Differenzwinkel der Steigungswinkel der beiden Tangenten.

Einer der beiden **Schnittwinkel** ist gegeben durch

$$\alpha = \arctan f'(x_0) - \arctan g'(x_0)\,.$$

Satz 6.20: Normalengleichung

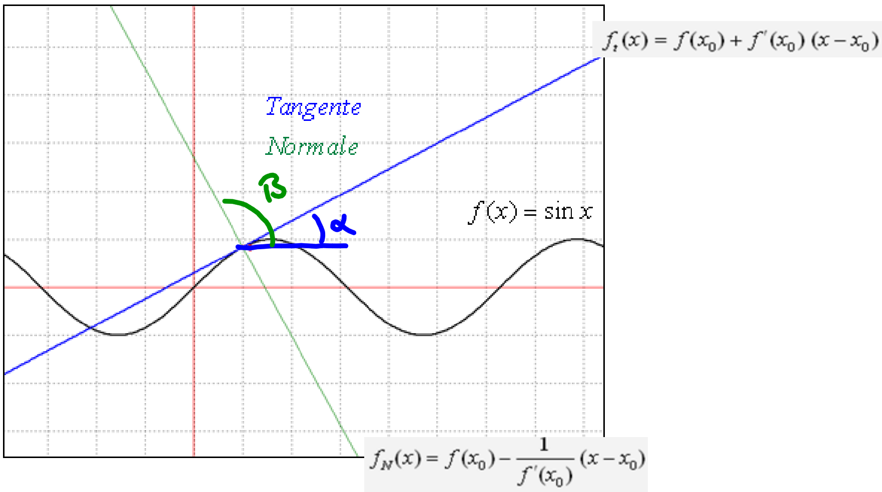
Die Normale $f_N(x)$ der Kurve der differenzierbaren Funktion f im Punkt $(x_0, f(x_0))$ mit $f'(x_0) \neq 0$ hat

(a) die Steigung $f_N'(x_0) = \dfrac{-1}{f'(x_0)}$,

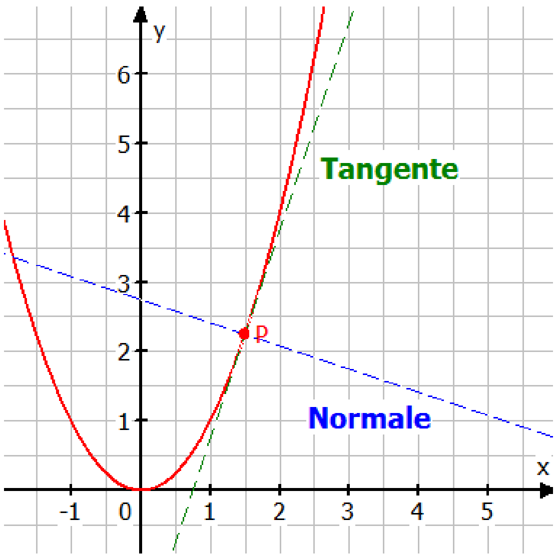
(b) die Gleichung $f_N(x) = f(x_0) - \dfrac{1}{f'(x_0)}(x - x_0)$.

Bemerkung:
Falls $f'(x_0) = 0$ ist, dann ist die Normale die senkrechte Gerade $x = x_0$.

Veranschaulichung: Tangente und Normale



Beispiel: 1. f(x) = x^2 2. t(x) = 3*x-2,25 3. n(x) = -1/3*x+2,75



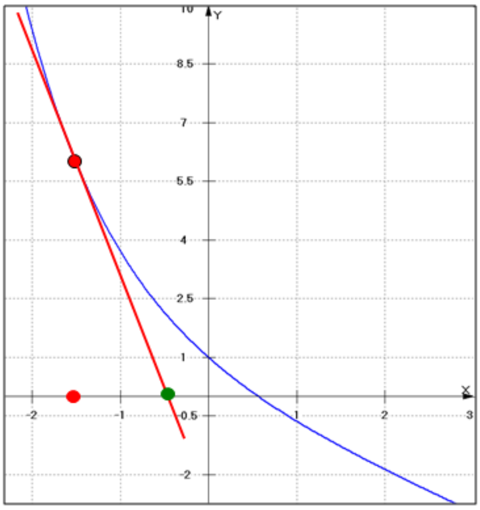
Numerische Verfahren zur Nullstellensuche

Newton Verfahren

Newtonverfahren

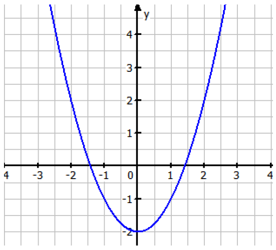
Charakteristika des Newtonverfahrens:

- **nur ein Startwert**
- **Ableitung der Funktion** wird benötigt, d.h. f muss stetig differenzierbar sein
- Nullstelle der Tangenten am Iterationswert ergibt den nächsten Iterationswert
- Verfahren ist quadratisch konvergent, d.h. die Anzahl der gültigen Nachkommastellen verdoppelt sich pro Iterationsschritt
- Startwert muss Konvergenzbedingung genügen, sonst kann es zu Divergenz und Oszillationen kommen.
- Rechenaufwand: höherer Rechenaufwand als bei den anderen Verfahren, pro Iterationsschritt eine Funktionsauswertung, eine erste Ableitung und eine Division notwendig ist.

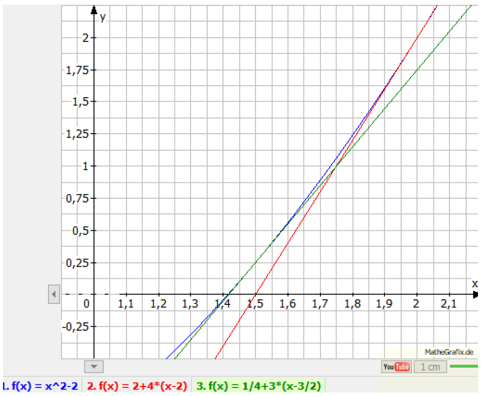


Newtonverfahren

Herleitung der Iterationsvorschrift: $x_{k+1} := x_k - \frac{f(x_k)}{f'(x_k)}$



Beispiel:



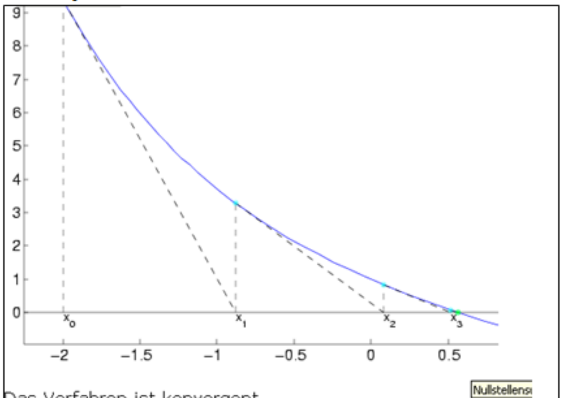
Newtonverfahren

Algorithmus

Dies führt zu folgendem Verfahren:

1. INIT: Gegeben sei x_0
2. $0 \to k$
3. $x_{k+1} := x_k - \dfrac{f(x_k)}{f'(x_k)}$
4. FALLS $f(x_{k+1}) = 0$
   RETURN x_{k+1}
5. FALLS $|x_{k+1} - x_k| < \mathrm{tol}$
   RETURN x_{k+1}
6. $k + 1 \to k$
7. WEITER bei 3.

Beispiel



Das Verfahren ist konvergent.

$\tilde{x}$ = 5.671433e−01

$f(\tilde{x})$ = 1.110223e−16

Auswertungen von f : 8
Auswertungen von f ' : 7
Benötigte Iterationen : 7

http://www.math.tu-berlin.de/~numlab/index_3_pop.html

Allgemeine Formulierung des Tangentenverfahrens von Newton

Ausgehend von einem geeigneten Startwert x_0, der die Konvergenzbedingung

$$\left| \frac{f(x_0) \cdot f''(x_0)}{[f'(x_0)]^2} \right| < 1 \quad \text{erfüllt,}$$

erhält man aus der Iterationsvorschrift

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}, \quad n = 0, 1, 2, 3, \ldots$$

eine Folge von Näherungswerten x_0, x_1, x_2,... für die gesuchte Lösung der Gleichung $f(x) = 0$.

Die Folge konvergiert mit Sicherheit gegen die gesuchte Lösung, wenn die Konvergenzbedingung für jeden dieser Näherungswerte x_i erfüllt ist.

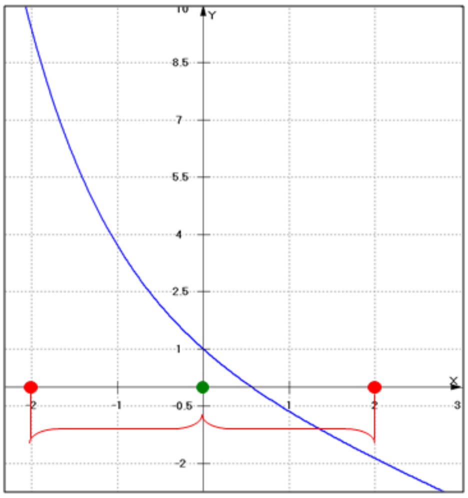
Rückblick Bisektionsverfahren

Charakteristika des Bisektionsverfahrens:

- Intervallhalbierungsverfahren
- Startintervall muss Nullstelle enthalten, d.h. Funktionswerte der Intervallgrenzen haben einen Vorzeichenwechsel
- Iteratives Verkleinern des Intervalls mit Hilfe des Intervallmittelpunktes
- Verfahren ist linear konvergent.
- Anzahl notwendiger Iterationen n, die für eine vorgegebene Genauigkeit benötigt werden, kann vorher berechnet werden:

Startintervall [a,b]: $n \geq \frac{\ln(\frac{b-a}{\varepsilon})}{\ln 2}$

- Geringer Rechenaufwand: Pro Iterationsschritt Auswertung eines Funktionswertes und eine Multiplikation notwendig.



Bisektionsverfahren

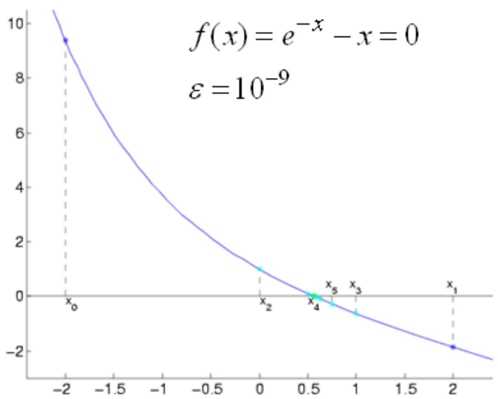
Algorithmus

1. INIT: Gegeben ist ein Intervall $[a,b]$ mit $f(a)f(b) < 0$
2. $m = \frac{a+b}{2}$
3. FALLS $f(m) = 0$
   RETURN m
4. FALLS $|a-b| < \mathrm{tol}$
   RETURN m
5. FALLS $f(a)f(m) < 0$
   DANN WEITER bei 1. mit $[a,m]$
   SONST WEITER bei 1. mit $[m,b]$

Beispiel

$f(x) = e^{-x} - x = 0$

$\varepsilon = 10^{-9}$



Das Verfahren ist konvergent.

$\tilde{x}$ = 5.671433e−01

$f(\tilde{x})$ = 1.663308e−10

Auswertungen von f : 34
Auswertungen von f ' : 0
Benötigte Iterationen : 32

Bisektions-/Sekanten-/Newton-Verfahren für $x^2 - 2 = 0$

k	Bisektionsverf.	Sekantenverf.	Newton-Verfahren
0	1.500000000000000	1.000000000000000	2.000000000000000
1	1.250000000000000	2.000000000000000	1.500000000000000
2	1.375000000000000	1.333333333333333	1.416666666666667
3	1.437500000000000	1.428571428571429	1.414215686274510
4	1.406250000000000	1.413793103448276	1.414213562374690
5	1.421875000000000	1.414211438474870	1.414213562373095
6	1.414062500000000	1.414213562688870	
7	1.417968750000000	1.414213562373095	
8	1.416015625000000		
9	1.415039062500000		
10	1.414550781250000		
11	1.414306640625000		
12	1.414184570312500		
13	1.414245605468750		
14	1.414215087890625		
15	1.414199829101562		
16	1.414207458496094		
17	1.414211273193359		
18	1.414213180541992		

Konvergenzordnung der Verfahren
Bisektionsverfahren: α=1
Regula Falsi: α=1
Sekantenverfahren: α=1.618
Verfahren von Muller: α=1.839
Newtonverfahren: α=2

nach A. Rieder http://www.mathematik.uni-karlsruhe.de/prakmath/

Bisektions-/Sekanten-/Newton-Verfahren für $x^2 - 2 = 0$

Test der Konvergenzordnung

$$\frac{|x_{k+1} - \sqrt{2}|}{|x_k - \sqrt{2}|^p}$$

mit

$p = 1$ Bisektion
$p = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ Sekante
$p = 2$ Newton

Unsere Rechnungen zeigen: Bisketionsverf. konvergiert nicht mit linearer Ordnung.

k	Bisektionsverf.	Sekantenverf.	Newton-Verfahren
1	0.23879	0.192153	0.333333
2	0.59383	0.839920	0.352941
3	0.34198	0.403287	0.353522
4	0.96206	0.616685	
5	0.01971	0.476724	
6	24.8585		
7	0.47988		
8	0.45808		
9	0.40850		
10	0.27601		
11	0.31148		
12	1.10523		
13	0.04760		
14	9.00236		
15	0.444459		
16	0.375037		
17	0.166798		
18	1.497633		

nach A. Rieder http://www.mathematik.uni-karlsruhe.de/prakmath/

Aufgaben

Aufgabe:

Berechnen Sie die nachfolgenden Grenzwerte mit Hilfe der Regeln von Bernoulli-l´Hospital:

a) $\lim\limits_{x \to 0} \frac{\sin(2x)}{x^2}$

b) $\lim\limits_{x \to \frac{\pi}{2}} (\frac{\pi}{2} - x) \tan x$

c) $\lim\limits_{x \to 1} x^{\frac{1}{x-1}}$

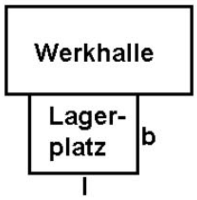
d) $\lim\limits_{x \to \infty} \frac{-2x^2 + 1}{x^2 + 6}$

e) $\lim\limits_{x \to -\infty} \frac{-2x^2 + 1}{x^2 + 6}$

Aufgabe: Extremwertaufgabe

Vor einer Werkhalle soll ein rechteckiger Lagerplatz mit einer Fläche von 450m² angelegt werden. Dazu ist der Platz an 3 Seiten zu umzäumen, an der 4. Seite begrenzt ihn die Werkhalle. Die Abmessungen des Lagerplatzes sollen so gewählt werden, dass die Gesamtlänge des Zaunes minimal wird.
Berechnen Sie für diesen Fall Länge und Breite des Platzes und die Gesamtlänge des Zaunes!

0. Skizze:



http://www.meinelt-online.de/fos/lb3/36_extremwert_lsg.pdf