Übungen 1 - 05.10.2022

Thema Grundlagen und Crashkurse

Aufgabe:

Bestimmen Sie die Ableitungsfunktion von

a) $f(x)=\cos\left(e^{x^2}\right)$

$$f'(x) = \underbrace{-\sin\left(e^{x^2}\right)}_{\text{äußere}} \cdot \underbrace{\overbrace{e^{x^2}}^{\text{äußere}} \cdot \overbrace{2x}^{\text{innere}}}_{\text{innere}}$$

Kettenregel

b) $f(x)=\frac{\sin x}{\cos x}$

$$f'(x) = \frac{\cos x\cdot\cos x - \sin x\cdot(-\sin x)}{(\cos x)^2}$$

$1+\frac{\sin^2 x}{\cos^2 x} = 1+\tan^2 x$

Quotientenregel

$\sin^2 x+\cos^2 x = 1$

trigonometrischer Pythagoras $\rightarrow$ $= \frac{1}{(\cos x)^2} = (\tan(x))'$

c) $p(x) = (f(x)\cdot g(x))(h(x)\cdot k(x))$

Produktregel, mehrfach

$$= (f\cdot g)'\cdot(h\cdot k) + (f\cdot g)\cdot(h\cdot k)'$$

$$= (f'g+f\cdot g')(h\cdot k) + (f\cdot g)\cdot(h'\cdot k + h\cdot k')$$

$$= f'g\,h\cdot k + f g' h\cdot k + f\cdot g h'\cdot k + f g h\cdot k'$$

$(\sin x\cdot e^x\cdot x^2\cdot\cos x)'$

$= \underline{\cos x}\cdot e^x\cdot x^2\cdot\cos x$

$+ \sin x\cdot\underline{e^x}\cdot x^2\cdot\cos x$

$+ \sin x\cdot e^x\cdot\underline{(2x)}\cos x$

$+ \sin x\cdot e^x\cdot x^2\cdot(-\sin x)$

d) $f(x)=\frac{1}{1+x^2}$

Quotientenregel

$$f'(x) = \frac{0\cdot(1+x^2)-1\cdot 2x}{(1+x^2)^2} = \frac{-2x}{(1+x^2)^2}$$

e) $f(x)=\frac{e^{2x}}{(x-1)^2}$

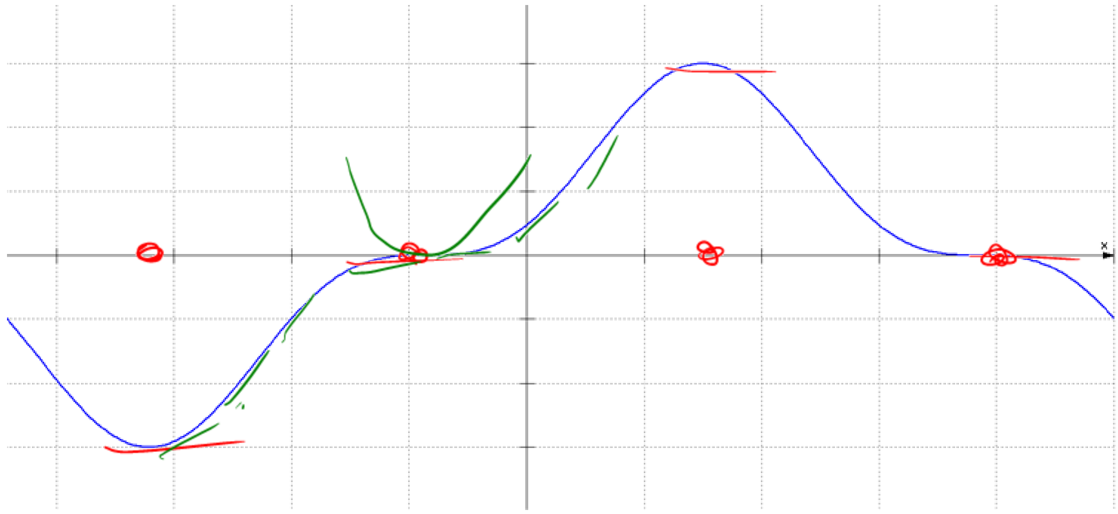
Quotientenregel und Kettenregel

$$f'(x) = \frac{e^{2x}\cdot 2(x-1)^{\cancel{2}\,1} - e^{2x}\cdot 2\cancel{(x-1)}}{(x-1)^{\cancel{4}\,3}}$$

$$= \frac{2e^{2x}(x-1)-2e^{2x}}{(x-1)^3} = \frac{2e^{2x}(x-2)}{(x-1)^3}$$

Aufgabe 2: Differentialrechnung-graphisches Ableiten

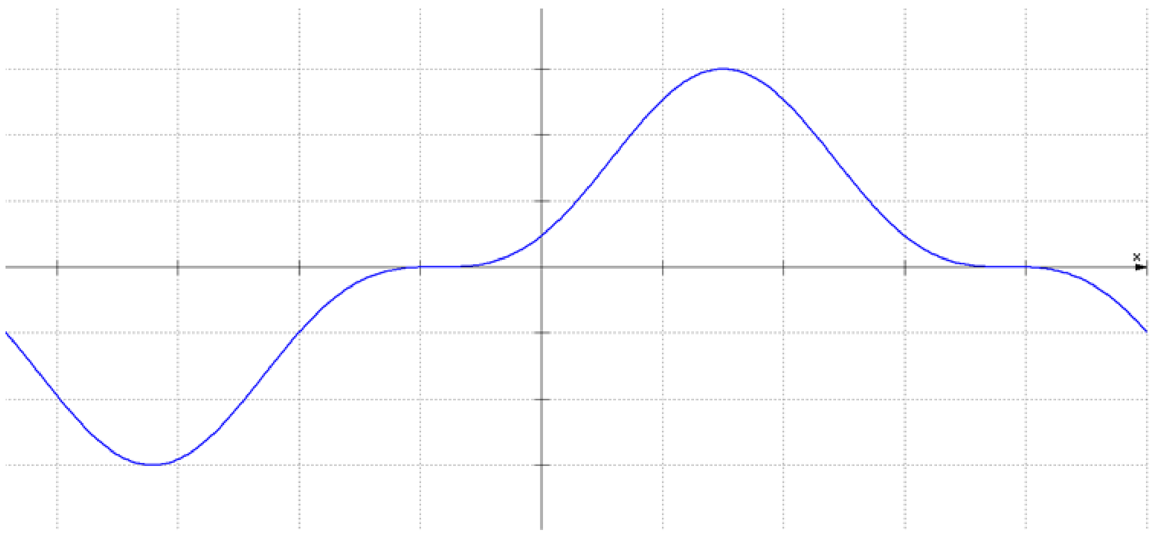
Skizzieren Sie für die dargestellte Funktion die Funktion der 1.Ableitung!

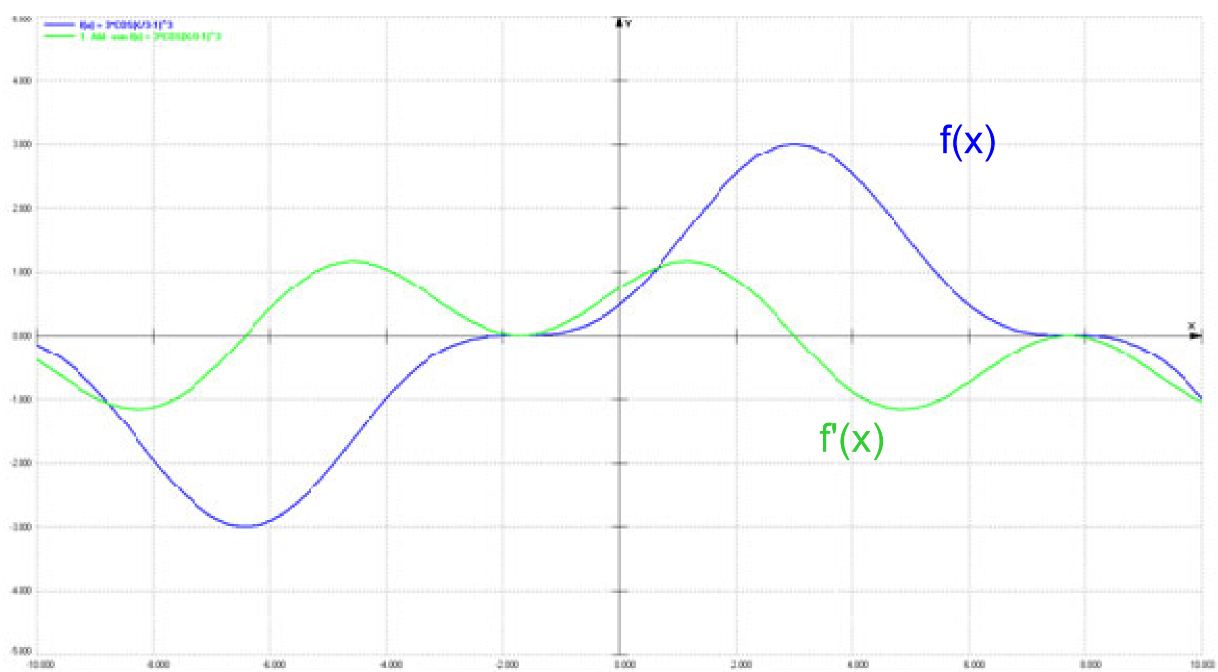


.

Aufgabe 2: Differentialrechnung-graphisches Ableiten

a) Skizzieren Sie für die dargestellte Funktion die Funktion der 1.Ableitung!





Aufgabe 4: Differentialrechnung- Tangentenberechnung

a) Linearisieren Sie die Funktion

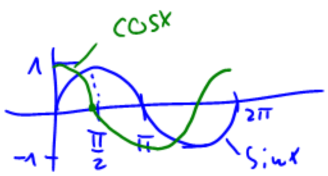
$$f(x) = \cos x$$

im Punkt $x = \frac{\pi}{2}$

Tangente im Punkt $(x_0, f(x_0))$ an die Funktion $f(x)$

$$\boxed{f_t(x) = f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0)}$$

$$f'(x) = -\sin x$$

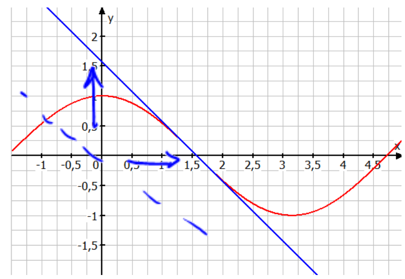


$$f_t(x) = \left(-\sin\frac{\pi}{2}\right)\left(x - \frac{\pi}{2}\right) + \cos\frac{\pi}{2}$$

$$= (-1)\left(x - \frac{\pi}{2}\right) + 0$$

$$= -x + \frac{\pi}{2}$$

$$= -\left(x - \frac{\pi}{2}\right)$$

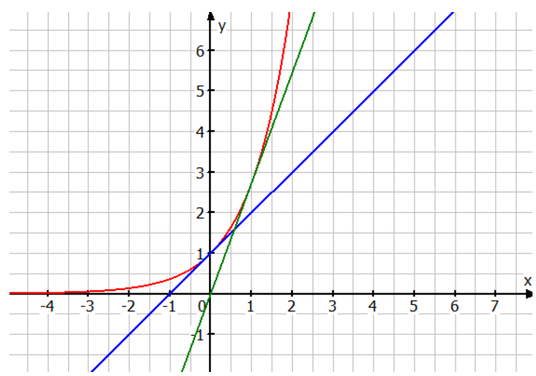


b) Linearisieren Sie die Funktion

$$f(x) = e^x$$

im Punkt x=0
im Punkt x=1

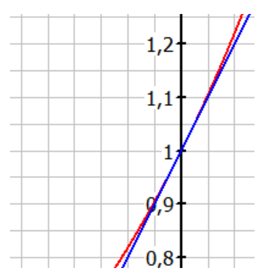
$$f'(x) = e^x$$



$x_0 = 0$: $f_t(x) = e^0(x - 0) + e^0$

$$= 1(x) + 1$$

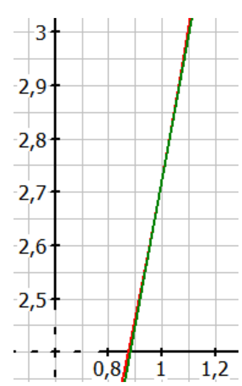
$$= x + 1$$



$x_0 = 1$: $f_t(x) = e^1(x - 1) + e^1$

$$= e \cdot x - e + e$$

$$= e \cdot x$$



Aufgabe 5: Integralrechnung

Berechnen Sie die nachfolgenden Integrale

grundlegende Integrale

a) $$\int e^{\frac{1}{2}x} - 1 \, dx = \frac{e^{\frac{1}{2}x}}{\frac{1}{2}} - x + C = 2 \cdot e^{\frac{1}{2}x} - x + C, \; C \in \mathbb{R}$$

innenliegender Ausdruck

b) $$\int_{-2}^{2} e^{\frac{1}{2}x} - 1 \, dx = \left[2 \cdot e^{\frac{1}{2}x} - x\right]_{-2}^{2} = \left(2 \cdot e^{\frac{1}{2}\cdot 2} - 2\right) - \left(2 \cdot e^{\frac{1}{2}(-2)} - (-2)\right)$$

Stammfunktion siehe a)

$$= 2 \cdot e - 2 - 2 \cdot e^{-1} - 2$$

$$= 2 \cdot e - 2 \cdot \frac{1}{e} - 4 = \underline{0{,}7}$$

c) $$\int_{-2}^{2} \left| e^{\frac{1}{2}x} - 1 \right| dx = \left| \int_{-2}^{0} e^{\frac{1}{2}x} - 1 \, dx \right| + \left| \int_{0}^{2} e^{\frac{1}{2}x} - 1 \, dx \right|$$

$$= \left| \left[2 \cdot e^{\frac{1}{2}x} - x\right]_{-2}^{0} \right| + \left| \left[2 \cdot e^{\frac{1}{2}x} - x\right]_{0}^{2} \right|$$

$$= \left| (2 \cdot e^{0} - 0) - (2 \cdot e^{\frac{1}{2}(-2)} - (-2)) \right| + \left| (2 \cdot e^{\frac{1}{2}\cdot 2} - 2) - (2 \cdot e^{\frac{1}{2}\cdot 0} - 0) \right|$$

$$= \left| 2 - 2 \cdot \frac{1}{e} - 2 \right| + \left| 2 \cdot e - 2 - 2 \right|$$

$$= \left| -2 \cdot \frac{1}{e} \right| + \left| 2 \cdot e - 4 \right| = \left| -0{,}735 \right| + \left| 1{,}436 \right| = 2{,}171$$

Bemerkung

$$\left[F(x) + C\right]_{a}^{b}$$

$$= (F(b) + \cancel{C}) - (F(a) + \cancel{C})$$

$$= F(b) - F(a)$$

Frage 4

Unvollständig

Erreichbare Punkte: 1,00

Frage markieren

Frage bearbeiten

Auf wie viele Nullen endet das Produkt der Zahlen 1 bis 100?

Wählen Sie eine Antwort:

- 20
- 2
- 100
- 24
- 15
- 10

Prüfen

Frage:
Auf wie viele Nullen endet das Produkt der Zahlen 1 bis 100?

a) 2
b) 10
c) 15
d) 20
e) 24
f) 100

$$100! = 1\cdot 2\cdot 3\cdot \underbrace{4}_{2\cdot 2}\cdot 5\cdot 6\cdot 7\cdot 8\cdot 9\cdot 10\cdot 11 \sim \underbrace{15}_{3\cdot 5}\cdot 20 \cdots 100$$

10

Hinweis:
Zähle die Anzahl der 5, die als Primfaktoren in den einzelnen Faktoren von 1 bis 100 auftauchen!

Lösung:
Jede 5 ergibt mit einem Primfaktor 2 eine 10 und damit eine Null.

Primfaktoren 5 stecken in 5, 10, 15, 20, 25 2mal, 30, 35 40, 45, 50 2mal, 55, 60, 65, 70, 75 2mal, 80,85, 90,95, 100 2mal
und damit ist 24 die korrekte Lösung

Frage 7:
Auf wie viele Nullen endet das Produkt der Zahlen 1 bis 100?

a) 2
b) 10
c) 15
d) 20
e) 24 ✓
f) 100

$$\prod_{i=1}^{100} i = 1\cdot2\cdot3\cdot4\cdot5\cdot6\cdot7\cdot8\cdot9\cdot10\cdot11\cdot\ldots\cdot99\cdot100$$

$$= 100! \quad \text{100-Fakultät}$$

$$\hat{=}$$

$$5796\ldots0000000000$$

Wie viele Primfaktoren mit 5 gibt es?

Primfaktoren 2 ausreichend vorhanden

Primfaktor 5 · Primfaktor 2 ergibt eine 0

5	$\rightarrow 5$
10	$2\cdot5$
15	$3\cdot5$
20	$4\cdot5$
25	$5\cdot5$
30	$6\cdot5$
35	$7\cdot5$
40	$8\cdot5$
45	$9\cdot5$
50	$5\cdot10=5\cdot5\cdot2$
55	$5\cdot11$
60	$5\cdot12$
65	$5\cdot13$
70	$5\cdot14$
75	$5\cdot15=5\cdot5\cdot3$
80	$5\cdot16$
85	$5\cdot17$
90	$5\cdot18$
95	$5\cdot19$
100	$5\cdot20=5\cdot2\cdot10=5\cdot2\cdot2\cdot5$

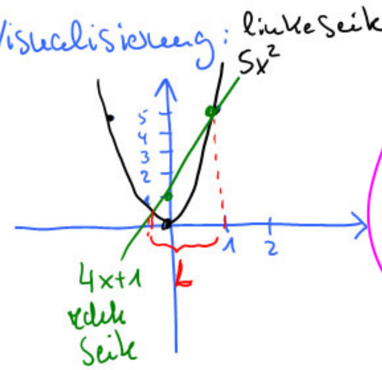
24 „5"er Primfaktoren

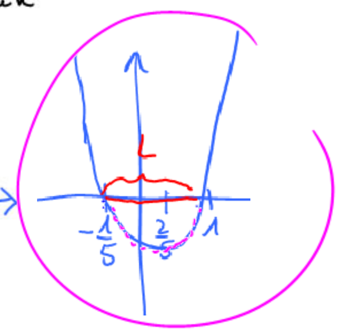
Aufgabe 1: Ungleichungen

$$\underbrace{5x^2}_{\text{linke Seite als Funktion}} \le \underbrace{4x+1}_{\text{rechte Seite als Funktion}}$$

a) Bestimmen Sie die Lösungsmenge!

b) Visualisierung:





$5x^2 \le 4x+1$

$\underbrace{5x^2-4x-1}\le 0$

in Linearfaktoren zerlegen $5\underbrace{\left(x^2-\frac{4}{5}x-\frac{1}{5}\right)}\le 0$

$$x_{1,2} = +\frac{2}{5} \pm \sqrt{\frac{4}{25}+\frac{1}{5}}$$

$$= +\frac{2}{5} \pm \sqrt{\frac{9}{25}}$$

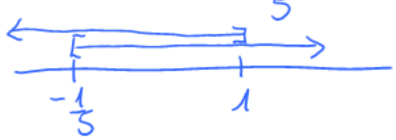
$$= +\frac{2}{5} \pm \frac{3}{5}$$

$x_1 = 1, \; x_2 = -\frac{1}{5}$

$\Rightarrow 5(x-1)\left(x+\frac{1}{5}\right) \le 0$

Fallunterscheidung $\Rightarrow$ ① $(x-1) \le 0 \wedge \left(x+\frac{1}{5}\right) \ge 0$

$x \le 1 \wedge x \ge -\frac{1}{5}$



$L_1 = \left[-\frac{1}{5}, 1\right]$

② $(x-1) \ge 0 \wedge \left(x+\frac{1}{5}\right) \le 0$

$x \ge 1 \wedge x \le -\frac{1}{5}$

$L_2 = \emptyset$

Lösungsmenge

$L = L_1 \cup L_2$

$= \left[-\frac{1}{5}, 1\right]$

Aufgabe 2

$$\frac{1}{x-1} < \frac{1}{x+2} \quad \Big| \cdot (x-1)$$

$$1 < \frac{(x-1)}{x+2} \quad , \text{ wenn } (x-1) > 0$$

$$1 > \frac{(x-1)}{x+2} \quad , \text{ wenn } (x-1) < 0$$

•

Aufgabe 2

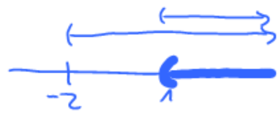
$$\frac{1}{x-1} < \frac{1}{x+2} \quad \Big| \cdot (x-1) \quad \Rightarrow \quad 1 < \frac{x-1}{x+2} \quad \Big| \cdot (x+2)$$

mit ? $x-1>0$

$x+2 < x-1$? mit $x+2>0$

Fallunterscheidung

(1) $(x-1>0) \wedge (x+2>0)$



$\Rightarrow x+2 < x-1 \Rightarrow 2<-1$ falsche Aussage → liefert keine Lösung für Ungleichung

(2) $(x-1<0) \wedge (x+2<0)$

$\Rightarrow x+2 < x-1 \Rightarrow 2<-1$ falsche Aussage → liefert keine Lösung für Ungleichung

(3) $(x-1<0) \wedge (x+2>0)$

$\Rightarrow x+2 > x-1 \Rightarrow 2>-1$ wahre Aussage → $x \in (-2,1)$ lösen die Ungleichung

(4) $(x-1>0) \wedge (x+2<0)$

$\Rightarrow x+2 > x-1 \Rightarrow 2>-1$ wahre Aussage, aber es gibt keine x-Werte, die die Voraussetzungen erfüllen

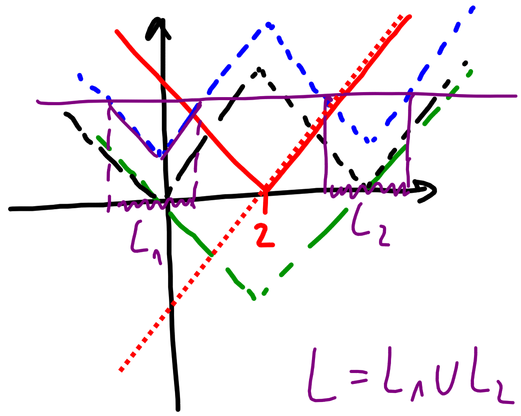
$\Rightarrow L = (-2,1)$ ist die Lösungsmenge für die Ungleichung

Erweiterte Aufgabenstellungen mit Beträgen

$$f(x) = \big|\,|x-2| - 2\,\big| + 1 \le 2$$

$$\big|\,|x-2| - 2\,\big| + 1 \le 2$$

Grafische Lösung



$L = L_1 \cup L_2$

Rechnerische Lösung

$$\big|\,|x-2| - 2\,\big| \le 1$$

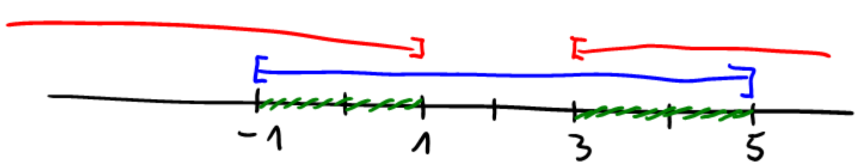
$$\Rightarrow \; -1 \le |x-2| - 2 \le 1$$

$$\Rightarrow \; 1 \le |x-2| \le 3$$

$$(1 \le |x-2|) \wedge (|x-2| \le 3)$$

$$((1 \le x-2) \vee (-1 \ge x-2)) \wedge (-3 \le x-2 \le 3)$$

$$(3 \le x) \vee (1 \ge x) \quad \wedge \quad (-1 \le x \le 5)$$



$$L = [-1, 1] \cup [3, 5]$$

Aufgabe:

Vereinfachen Sie folgenden Ausdruck:

$$y = \sqrt{\binom{n}{n-1} \cdot \frac{(n^2+2n+1)(n+1)}{(n^3-n)(n-1)}}$$

$\boxed{1}$ $y = \frac{n+1}{n-1} \cdot \sqrt{\frac{1}{n-1}}$

√ $\boxed{2}$ $y = \frac{n+1}{n-1}$

$\boxed{3}$ $y = \frac{n+1}{n-1} \cdot \sqrt{\frac{n+1}{n-1}}$

http://elearning-material.htw-berlin.de/KM2/test.xhtml#binomische_formeln

Lösung:

$$y = \sqrt{\binom{n}{n-1} \frac{(n^2+2n+1)(n+1)}{(n^3-n)(n-1)}}$$

$$= \sqrt{\frac{n!}{(n-(n-1)!)(n-1)!} \cdot \frac{(n+1)^2(n+1)}{n(n^2-1)(n-1)}}$$

Def. $\binom{n}{k}$
Binomische Formel
Ausklammern

$$= \sqrt{\frac{\cancel{n!}^{(n-1)!}}{1!(n-1)!} \cdot \frac{(n+1)^2\cancel{(n+1)}}{\cancel{n}\cancel{(n+1)}(n-1)(n-1)}}$$

$$= \sqrt{\frac{\cancel{(n-1)!}}{\cancel{(n-1)!}} \cdot \frac{(n+1)^2}{(n-1)^2}}$$

$$= \frac{n+1}{n-1}$$