Vorlesung 10 am 20.10.2022

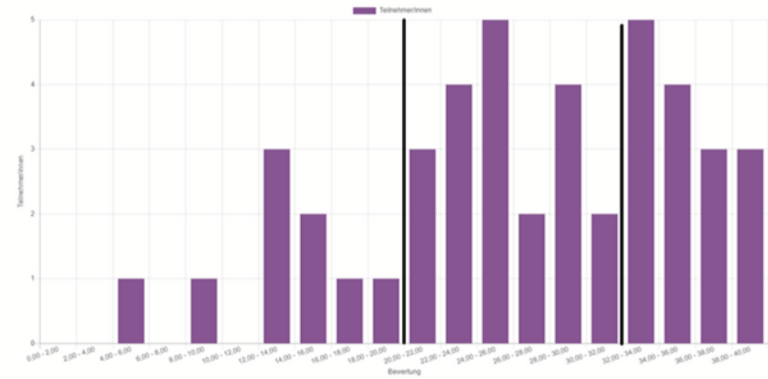
Rückblick: Lineare Gleichungssysteme

Vorbereitung:

viaMINT-Modul Werkzeugkasten (enthält Aussagenlogik und Summenzeichen)

Teil 2: Logik

PVL-Test 1 vom 12.10.2022

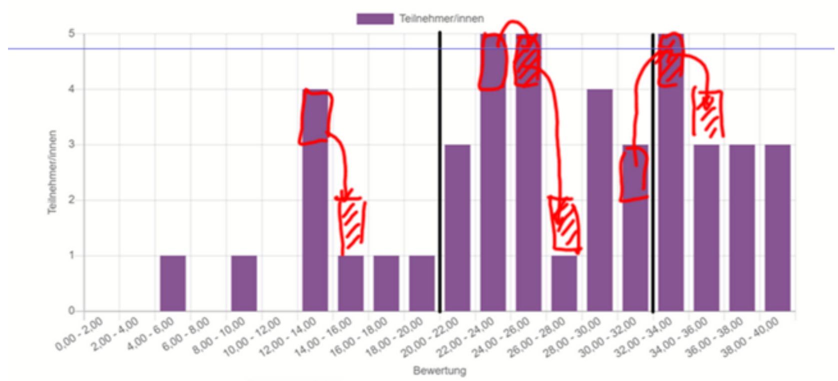


Punkte<20:
9/44= 20%

20<Punkte<32:
20/44= 48%

Punkte >32:
15/44= 32%

bestanden
35/44= 80%



Punkte<20:
9/44= 20%

20<Punkte<32:
21/44= 48%

Punkte >32:
14/44= 32%

Ortsvektoren $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$

Ebene $\underbrace{\mathbb{R}^2}$

$(x,y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}$

Raum $\underbrace{\mathbb{R}^3}$

Punkte $(x,y,z) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}$

Kartesisches Produkt

Ortsvektoren $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$

Satz: Darstellung eines Vektors in der Ebene (mit 2 Komponenten)

(1) **Jeder Vektor der Ebene** kann durch Linearkombination der **zwei Einheitsvektoren** dargestellt werden.

Satz: Darstellung eines Vektors im Raum (mit 3 Komponenten)

(1) **Jeder Vektor im Raum** kann durch Linearkombination der **drei Einheitsvektoren** dargestellt werden.

(2) Die Einheitsvektoren sind linear unabhängig.

(2) Die Einheitsvektoren sind linear unabhängig.

(3) Die 2 Einheitsvektoren bilden eine Basis für den R^2 – Vektoren sind linear unabhängig und spannen die gesamte Ebene $\mathbb{R}^2$ auf

(3) Die 3 Einheitsvektoren bilden eine Basis für den R^3

(4) Jeder Vektor **der Ebene** kann durch Linearkombination **zweier linear unabhängiger Vektoren** dargestellt werden.

(4) Jeder Vektor **im Raum** kann durch Linearkombination **dreier linear unabhängiger Vektoren** dargestellt werden.

(5) Je **zwei** linear unabhängige Vektoren bilden eine Basis für den R^2

(5) Je **drei** linear unabhängige Vektoren bilden eine Basis für den $R3$

(6) **Drei** Vektoren **der Ebene** sind immer linear abhängig.

(6) **Vier** Vektoren i**m Raum** sind immer linear abhängig.

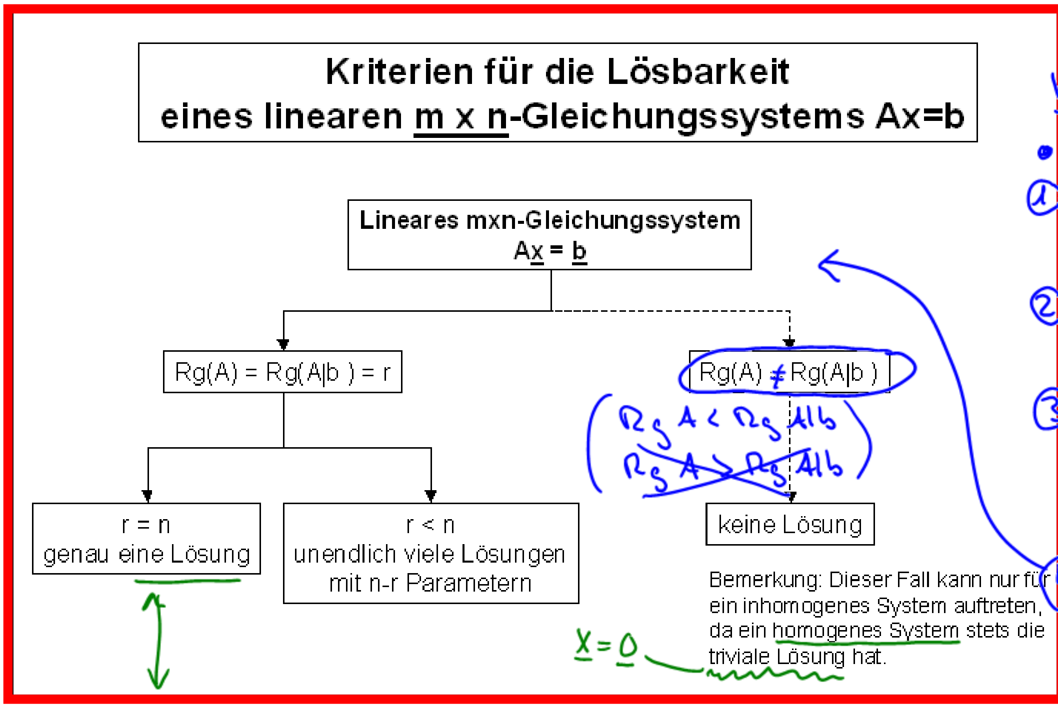
(7) Zwei Vektoren, die in die gleiche oder entgegengesetze Richtung zeigen, sind linear abhängig.

(7) Zwei Vektoren, die in die gleiche oder entgegengesetze Richtung zeigen, sind linear abhängig.

(8) Sind **zwei Vektoren** linear abhängig, so kann **nicht jeder Vektor der Ebene** als Linearkombination dieser beiden Vektoren dargestellt werden.

(8) Sind **drei Vektoren** linear abhängig, so kann **nicht jeder Vektor im Raum** als Linearkombination dieser beiden Vektoren dargestellt werden.

Lösbarkeit eines LGS



Vorgehen

- LGS gegeben

① Erweiterte Koeffizienten-matrix aufstellen

② Gauß-Elimination durchführen

③ Ränge bestimmen $Rg\,A$ und $Rg\,A|b$ Anzahl der Variablen n

④ Ränge interpretieren gemäß Schema

⑤ Lösung bestimmen und Lösungsmenge angeben

Bemerkung: **Homogenes LGS**: rechte Seite b ist der Nullvektor

Inhomogenes LGS: rechte Seite b ist ungleich dem Nullvektor

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 0 \\ 0 & 4 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 6 & 0 \end{array}\right) \rightarrow \underline{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \underline{0}$$

Rangbestimmung nach der Gauß-Elimination

zu ③

Rang der Matrix rg(A)

= *Anzahl der Staffeleinsen (nach der Gauß – Elimination)*

= *Anzahl der Zeilen ungleich dem Nullvektor (nach der Gauß-Elimination)*

= *Anzahl der linear unabhängigen Zeilen in der Matrix*

Was passiert, wenn ....

(1) **m=n**, d.h. genau so viele Gleichungen wie Unbekannte
z.B. 3x3-Gleichungssystem

(2) **m<n,** d.h. weniger Gleichungen als Unbekannte
z.B. 3x4-Gleichungssystem

(3) **m>n**, d.h. mehr Gleichungen als Unbekannte
z.B. 4x3-Gleichungssystem

Lösbarkeit für ein mxn - LGS

(1) für ein mxn LGS immer über den Rang der Koeffizientenmatrix A und den Rang der erweiterten Koeffizientenmatrix A|b

(2) Rangbestimmung
z.B. über die Anzahl der Zeilen ungleich dem Nullvektor
nach der Gaußelimination

Beispiele:

(1) **m=n**, d.h. genau so viele Gleichungen wie Unbekannte

Beispiel: 3x3-Gleichungssystem

...nach der Gauß-Elimination

$$A|b = \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 3 & 4 & 1 \\ 0 & 7 & 8 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{array}\right)$$

$\operatorname{Rg} A = 3$

$\operatorname{Rg} A|b = 3$

$(\operatorname{Rg} A = \operatorname{Rg} A|b)$
$\wedge\ (\operatorname{Rg} A = n)$
$\Rightarrow$ genau eine Lösung

$$A|b = \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 3 & 4 & 1 \\ 0 & 7 & 8 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{array}\right)$$

$\operatorname{Rg} A = 2$

$\operatorname{Rg} A|b = 3$

$\operatorname{Rg} A \neq \operatorname{Rg} A|b$
$\Rightarrow$ keine Lösung

$$A|b = \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 3 & 4 & 1 \\ 0 & 7 & 8 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

$\operatorname{Rg} A = 2$

$\operatorname{Rg} A|b = 2$

$\operatorname{Rg} A = \operatorname{Rg} A|b$
$\wedge\ (\operatorname{Rg} A < n)$
$\Rightarrow$ unendl. viele Lösungen
mit 1 freien Parameter

$$A|b = \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 3 & 4 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

$\operatorname{Rg} A = 1$

$\operatorname{Rg} A|b = 1$

$\operatorname{Rg} A = \operatorname{Rg} A|b$
$\wedge\ (\operatorname{Rg} A < n)$
$\Rightarrow$ unendl. viele Lösungen
mit 2 freien Parametern

m = n: Anzahl der Variablen n = 3 und m = 3 Gleichungen

r = Rang A = Rang A|b = 3 ⇒ eindeutig lösbar

r = Rang A = Rang A|b = 2 ⇒ unendl. viele Lsg. mit 1 freien Parameter

r = Rang A = Rang A|b = 1 ⇒ unendl. viele Lsg. mit 2 freien Parametern

Rang A ≠ Rang A|b ⇒ keine Lösung

(n-r) freie Parameter

Beispiele:

(2) **m<n,** d.h. weniger Gleichungen als Unbekannte

Beispiel: 3x4-Gleichungssystem

...nach der Gauß-Elimination

$$A|b = \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 3 & 4 & 1 \\ 0 & 6 & 7 & 8 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 2 \end{array}\right)$$

$\text{Rg}\,A = 3$, $\text{Rg}\,A|b = 3$

Rg A = Rg A|b
∧ (Rg A < n)
⇒ unendl. viele Lösungen
mit 1 freien Parameter

$$A|b = \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 3 & 4 & 1 \\ 0 & 6 & 7 & 8 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \end{array}\right)$$

$\text{Rg}\,A = 3$, $\text{Rg}\,A|b = 3$

Rg A = Rg A|b
∧ (Rg A < n)
⇒ unendl. viele Lösungen
mit 1 freien Parameter

$$A|b = \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 3 & 4 & 1 \\ 0 & 6 & 7 & 8 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

$\text{Rg}\,A = 2$, $\text{Rg}\,A|b = 2$

Rg A = Rg A|b
∧ (Rg A < n)
⇒ unendl. viele Lösungen
mit 2 freien Parametern

$$A|b = \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 3 & 4 & 1 \\ 0 & 6 & 7 & 8 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 \end{array}\right)$$

$\text{Rg}\,A = 2$, $\text{Rg}\,A|b = 3$

Rg A ≠ Rg A|b
⇒ keine Lösung

m < n: Anzahl der Variablen n = 4 und m = 3 Gleichungen

Der Fall "genau eine Lösung" (Rang A = Rang A|b = n) kann für ein unterbestimmtes Gleichungssystem (mit m Zeilen < n Anzahl der Variablen) nicht auftreten!

(n-r) freie Parameter

r = Rang A = Rang A|b = 3 ⇒ unendl. viele Lsg. mit 1 freien Parameter

r = Rang A = Rang A|b = 2 ⇒ unendl. viele Lsg. mit 2 freien Parametern

r = Rang A = Rang A|b = 1 ⇒ unendl. viele Lsg. mit 3 freien Parametern

Rang A ≠ Rang A|b ⇒ keine Lösung

(3) **m>n**, d.h. mehr Gleichungen als Unbekannte

Beispiel: 4x3-Gleichungssystem

...nach der Gauß-Elimination

$$A|b=\left(\begin{array}{ccc|c}2&3&4&1\\0&7&8&0\\0&0&1&2\\0&0&0&0\end{array}\right)$$

Rg A = 3

Rg A|b = 3

(Rg A = Rg A|b) ∧ (Rg A = n) ⇒ genau eine Lösung

$$A|b=\left(\begin{array}{ccc|c}2&3&4&1\\0&7&8&0\\0&0&1&2\\0&0&0&3\end{array}\right)$$

Rg A = 3

Rg A|b = 4

Rg A ≠ Rg A|b ⇒ keine Lösung

$$A|b=\left(\begin{array}{ccc|c}2&3&4&1\\0&7&8&0\\0&0&0&2\\0&0&0&0\end{array}\right)$$

Rg A = 2

Rg A|b = 3

Rg A ≠ Rg A|b ⇒ keine Lösung

$$A|b=\left(\begin{array}{ccc|c}2&3&4&1\\0&7&8&0\\0&0&0&0\\0&0&0&0\end{array}\right)$$

Rg A = 2

Rg A|b = 2

Rg A = Rg A|b ∧ (Rg A < n) ⇒ unendl. viele Lösungen mit 1 freien Parameter

m > n: Anzahl der Variablen n = 3 und m = 4 Gleichungen

Ein Rang 4 kann bei der Matrix nicht auftreten, da nur 3 Spalten vorhanden sind! Es gilt immer Zeilenrang = Spaltenrang

Rang über Gauß-Elimination und zählen Zeilen ≠ Nullzeile

r = Rang A = Rang A|b = 3 ⇒ eindeutig Lösbar

r = Rang A = Rang A|b = 2 ⇒ unendl. viele Lsg. mit 1 freien Parametern

r = Rang A = Rang A|b = 1 ⇒ unendl. viele Lsg. mit 2 freien Parametern

(n-r) freie Parameter

Rang A ≠ Rang A|b ⇒ keine Lösung

Beispiel unterbestimmtes LGS

Gegeben sei das nachfolgende LGS nach der Gauß-Elimination.
Bestimmen Sie die Lösung!

$$\left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 2 & 0 & -1 & 3 & 1 \\ 0 & 4 & 7 & 5 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

$\uparrow\ \uparrow\ \uparrow\ \uparrow\ \uparrow$ $n = 5$ Anzahl Variablen

$\mathrm{Rg}\,A = 3$

$\mathrm{Rg}\,A|b = 3$

$\Rightarrow r = \mathrm{Rg}\,A = \mathrm{Rg}\,A|b = 3 < n = 5$

$\Rightarrow$ unendlich viele Lösungen mit $n - r = 5 - 3 = 2$ freien Parametern

$$\left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 2 & 0 & -1 & 3 & 1 \\ 0 & 4 & 7 & 5 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

$\Rightarrow$ Gleichung 3: $2 \cdot x_5 = 6 \Rightarrow \boxed{x_5 = 3}$

$\Rightarrow$ Gleichung 2: $4 \cdot x_2 + 7 \cdot x_3 + 5 \cdot x_4 + 1 \cdot \boxed{3} = 2$

$\Rightarrow$ 2 Parameter frei wählbar $\boxed{x_4 = \lambda \in \mathbb{R}}$, $\boxed{x_3 = \mu \in \mathbb{R}}$

$\Rightarrow 4 \cdot x_2 + 7 \cdot \mu + 5 \cdot \lambda = -1$

$\Rightarrow \boxed{x_2 = (-1 - 7\mu - 5 \cdot \lambda) \cdot \frac{1}{4}}$

$\Rightarrow$ Gleichung 1: $1 \cdot x_1 + 2 \cdot x_2 - 1 \cdot x_4 + 3 x_5 = 1$

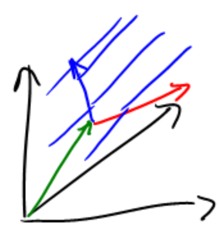
$\Rightarrow 1 \cdot x_1 + \frac{2}{4} \cdot (-1 - 7\mu - 5\lambda) - \lambda + 3 \cdot 3 = 1$

$\Rightarrow \cancel{x_1 = -6 + 14\mu + 11\lambda}$

$x_1 - \frac{1}{2} - \frac{7}{2}\mu - \frac{5}{2}\lambda - \lambda + 9 = 1$

$\boxed{x_1 = -\frac{15}{2} + \frac{7}{2}\mu + \frac{7}{2}\lambda}$

$$\underline{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -6 + 14\mu + 11\lambda \\ -1 - 7\mu - 5\lambda \\ \mu \\ \lambda \\ 3 \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} -6 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} 14 \\ -7 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 11 \\ -5 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}}_{\text{Ebene}} \text{ mit } \mu, \lambda \in \mathbb{R}$$

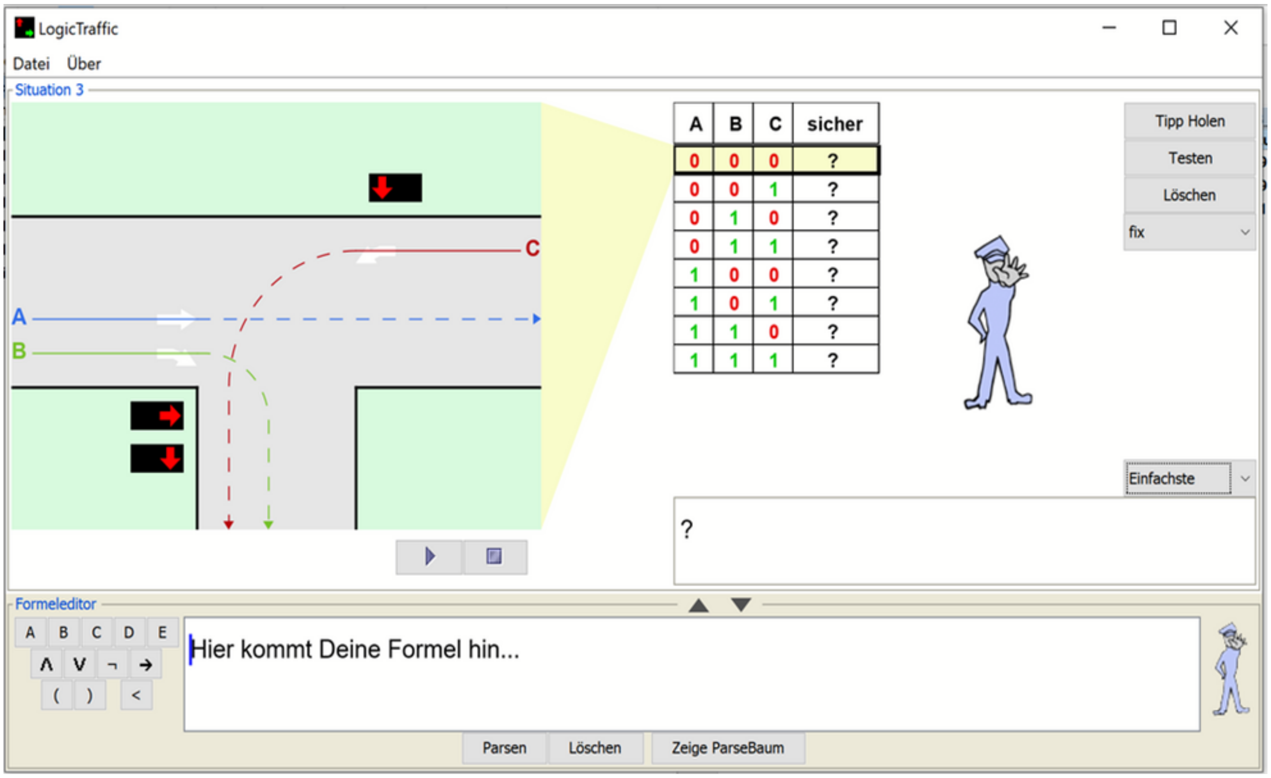


$$L = \left\{ \underline{x} = \begin{pmatrix} -\frac{15}{2} \\ -\frac{1}{4} \\ 0 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} \frac{7}{2} \\ -\frac{7}{4} \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} \frac{7}{2} \\ -\frac{5}{4} \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \text{ mit } \mu, \lambda \in \mathbb{R} \right\}$$

Logik

•

LogicTraffic: Aussagenlogik zur Sicherheit bei Strassenkreuzungen



https://logictraffic.ch/

https://www.swisseduc.ch/informatik/infotraffic/logictraffic/

LogicTraffic: Aussagenlogik zur Sicherheit bei Strassenkreuzungen
Matej Mrnjec, André Bussmann, Ruedi Arnold (sowie Unterstützung von Michael Hielscher)

Anwendung: Schaltnetze

Beispiel:

Beschreibung einer Schaltfunktion

Gesamtzusammenhänge

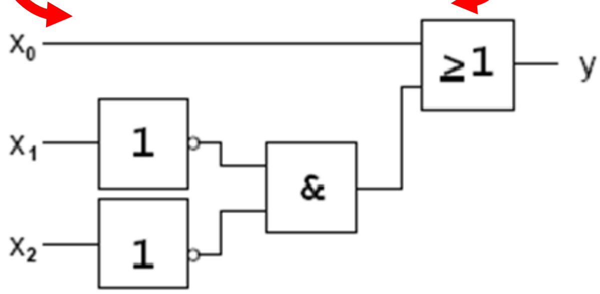
- Wertetabelle

x_0	x_1	x_2	$y = f(x_0, x_1, x_2)$
0	0	0	1
0	0	1	0
0	1	0	0
0	1	1	0
1	0	0	1
1	0	1	1
1	1	0	1
1	1	1	1

- Funktionsgleichung

$$y = x_0 \vee (\bar{x}_1 \wedge \bar{x}_2)$$

- Schaltnetz



Aufgabe:
Aus einer gegebenen Schaltung eine Wahrheits-tafel erstellen!

Aufgabe:
Aus einer gegebenen Wahrheitstafel eine logische Formel erstellen!

Aufgabe:
Aus einer gegebenen logischen Formel ein Schaltnetz erstellen!

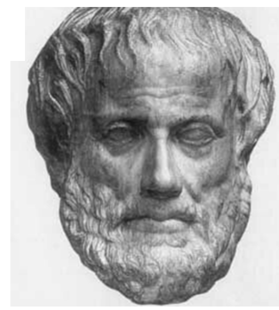
http://www.uni-koblenz.de/~physik/informatik

Logik als Grundlage der Rationalität

Logik ist letztendlich die Grundlage jeglicher Wissenschaft und jeglicher rationaler Argumentation.

Das heisst: Wir alle müssen einige Grundregeln des logischen Denkens akzeptieren, sonst gibt es kein „vernünftiges" Denken (und Handeln).

→ **Aristoteles**, Begründer der Logik
* 384 v. Chr. in Stageira
† 322 v. Chr. in Chalkis



George Boole

Begründer der Aussagenlogik
- englischer Mathematiker
  * 1815 in Lincoln
  † 1864 in Ballintemple (Irland)

⇨ Boolesche Variablen
- Können immer nur einen von zwei Werten annehmen
  - true/false, wahr/falsch, 1/0
- In vielen Programmiersprachen als „Datentyp" vorhanden
  - Oft gebraucht für bedingte Anweisungen
  - z.B. in Java, C, PHP, Pascal oder VisualBasic

aus www.swisseduc.ch/informatik

Was sind Aussagen?

Aussagen sind **Sätze**, die entweder **wahr (1)** oder **falsch (0)** sind.

- 2+4=6 1
- Zürich ist die Hauptstadt der Schweiz. 0
- Peter (23) ist älter als Paul (17). 1

Keine Aussagen:

unklar!

- Wo ist der Bahnhof?
- Ruhe jetzt!
- Bern ist eine schöne Stadt.
- Dieses Wasser (20°) ist kalt.

Aussagenlogik

Aussagen...

...werden durch **Variablen** repräsentiert

...haben **Wahrheitswert** (wahr/falsch, resp. 0/1)

- **A** = „Zürich ist die Hauptstadt der Schweiz." 0
- **B** = „2+4=6" 1

Aussagenlogische Formeln sind zusammengesetzte Aussagen:

- **Wahrheitswert** (wahr/falsch, resp. 0/1)
  - **A** UND **B** 0
  - **A** ODER **B** 1
  - (NICHT **A**) UND **B** 1

aus www.swisseduc.ch/informatik

Was sind Aussagen?

Aussagen sind **Sätze**, die entweder **wahr (1)** oder **falsch (0)** sind.

- 2+4=6 1 w
- Zürich ist die Hauptstadt der Schweiz. 0 f
- Peter (23) ist älter als Paul (17). 1 w

Keine Aussagen:

- Wo ist der Bahnhof?
- Ruhe jetzt!
- Bern ist eine schöne Stadt.
- Dieses Wasser (20°) ist kalt.

unklar!

Aussagenlogik

Aussagen...

...werden durch **Variablen** repräsentiert

...haben **Wahrheitswert** (wahr/falsch, resp. 0/1)

- **A** = „Zürich ist die Hauptstadt der Schweiz." 0
- **B** = „2+4=6" 1

Aussagenlogische Formeln sind zusammengesetzte Aussagen:

– **Wahrheitswert** (wahr/falsch, resp. 0/1)

- **A** UND **B** 0
- **A** ODER **B** 1
- (NICHT **A**) UND **B** 1

aus www.swisseduc.ch/informatik

3.1 Aussagenlogik

Logik stellt Sprachen zur Darstellung von Wissen zur Verfügung.

- Logik erlaubt, nach festen Regeln anderes Wissen abzuleiten.
- Aussagenlogik untersucht unter anderem, wie aus wahren Aussagen andere wahre Aussagen folgen.

3.1.1 Aussagen

Definition 3.1: Aussage

Eine **Aussage** ist die gedankliche Widerspiegelung eines Sachverhalts in Form eines Satzes einer natürlichen oder künstlichen Sprache. Aussagen sind dadurch gekennzeichnet, dass man in der Regel klar entscheiden kann, ob sie wahr oder falsch sind.

Bemerkungen:

- Aussagen genügen dem **Prinzip der Zweiwertigkeit**, d.h. sie sind Bestandteil einer zweiwertigen Logik (im Gegensatz dazu die mehrwertige oder Fuzzy-Logik).
- Aussagen werden in der Regel mit großen Buchstaben A, B, C,... bezeichnet.

Definition 3.2: Wahrheitswert einer Aussage

Man nennt „wahr" bzw. „falsch" den **Wahrheitswert** der Aussage und bezeichnet ihn mit $\omega(A) = w$ bzw. $\omega(A) = f$. Die Wahrheitswertemenge hat somit zwei Elemente $\{w, f\}$. Die Wahrheitswerte werden auch als aussagenlogische Konstanten bezeichnet.

Aussagen im mathematischen Sinn
sind stets entscheidbar ***wahr* oder *falsch***:

$$\omega: \begin{cases} \text{Aussage} \to \{w, f\} \\ A \to \omega(A) = w \\ \quad\;\; \omega(A) = f \end{cases}$$

- "Jede Potenz von 10 ist durch 2 teilbar."
  ist eine wahre Aussage.
- "Jede Primzahl ist durch 2 teilbar."
  ist eine falsche Aussage.

- **"Der Klassenraum ist voll."** ist keine Aussage im mathematischen Sinn. Die Aussage ist subjektiv und kann von unterschiedlichen Personen unterschiedlich mit wahr oder falsch beantwortet werden.
- **"Im Klassenraum sind alle 50 Plätze besetzt."** ist eine Aussage im mathematischen Sinn, da sie eindeutig mit wahr oder falsch beantwortet werden kann.

Zusammengesetzte Aussagen…

…sind ebenfalls Aussagen, also
auch entweder **wahr** oder **falsch.**

- Peter (23) ist älter als Paul (17) **und** 4+4=9. 0
- Peter (23) ist älter als Paul (17) **und** 2+4=6. 1
- Zürich ist die Hauptstadt der Schweiz **oder** Bern ist die Hauptstadt der Schweiz. 1

aus www.swisseduc.ch/informatik

Verknüpfung von Aussagen durch logische Operatoren:

3.1.2 Logische Operationen

Definition 3.3: Logische Operationen

Logische Operationen sind ein- bzw. zweistellige Verknüpfungen, die auf Aussagen angewandt, neue Aussagen bzw. Aussageverbindungen erzeugen.

Die zweistelligen logischen Operationen $\odot$ sind Abbildungen auf der Menge der Wahrheitswerte W=$\{w,f\}$, die jedem Paar von Elementen (A,B) jeweils ein anderes Element $A \odot B$ aus W zuweist: Kartesisches Produkt

$$\odot : \begin{cases} \{w,f\} \times \{w,f\} \to \{w,f\} \\ (A,B) \quad \to A \odot B \end{cases}$$

Die Wahrheitswerte der verknüpften Aussage kann man in Abhängigkeit von den Wahrheitswerten der Grundaussagen A und B in sogenannten **Wahrheitstafeln** (oder auch **Wahrheitstabellen**) darstellen.

Name	**Symbol**	**Sprechweisen, Bedeutung**	
Negation	$\neg A$	nicht A, Verneinung | andere Notation $\overline{A}$	**(3.1)**
Konjunktion	$A \wedge B$	A und B	**(3.2)**
Disjunktion	$A \vee B$	A oder B, (auch Alternative genannt), Inklusives Oder	**(3.3)**
Implikation	$A \Rightarrow B$	wenn A, dann B; aus A folgt B; A impliziert B; A ist hinreichend für B, B ist notwendig für A	**(3.4)**
Äquivalenz	$A \Leftrightarrow B$	A genau dann, wenn B; A ist logisch äquivalent zu B; A ist notwendig und hinreichend für B	**(3.5)**

Erläuterung kartesisches Produkt

Definition 1.14: kartesisches Produkt

Seien M und N Mengen. Das ***kartesische Produkt*** $M \times N$ von M und N ist die Menge aller Paare mit erstem Element aus M und zweitem Element aus N:

$$M \times N := \{(m,n) \mid m \in M \text{ und } n \in N\}.$$ mit Mächtigkeit

$|M \times N| = |M| \cdot |N|$

Beispiel:

$\{1,2,3,4\} \times \{1,2,3\} =$

{(1,1),(1,2),(1,3),(2,1),(2,2)(2,3),(3,1),(3,2),(3,3),(4,1),(4,2),(4,3)}

$|\underline{\{1,2,3,4\}} \times \{\underline{1,2,3}\}| = \underline{4} \cdot \underline{3} = 12$

{w,f} x {w,f} =

{(w,w), (w,f), (f,w), (f,f)} $\longrightarrow$ Zeilen der Wahrheitstafel für zwei Operanden

$|\{w,f\} \times \{w,f\}| = 2 \cdot 2 = 4$

beliebige Verknüpfung

A	B	A ⊙ B
w	w	....
w	f	...
f	w	...
f	f	...

abhängig vom Operator

•

Logische Operationen

$\wedge$	$\vee$	$\neg$	$\mid$	$\downarrow$		$\Rightarrow$	$\Leftrightarrow$
AND	OR	NOT	NAND	NOR	XOR		
Konjunktion	Disjunktion	Negation	Sheffer-Op.	Peirce-Op.	exkl.Oder	Implikation	Äquivalenz

AND

A	B	$A \wedge B$
w	w	w
w	f	f
f	w	f
f	f	f

inklusiv

OR

A	B	$A \vee B$
w	w	w
w	f	w
f	w	w
f	f	f

beide Bed. erfüllt

NOT

A	$\neg A$
w	f
f	w

nicht AND

NAND

A	B	$A \wedge B$	$\neg(A \wedge B)$
f	f	f	w
f	w	f	w
w	f	f	w
w	w	w	f

nicht OR

NOR

A	B	$A \vee B$	$\neg(A \vee B)$
f	f	f	w
f	w	w	f
w	f	w	f
w	w	w	f

① ②

A	B	$\neg A$	$\neg A \vee B$
w	w	f	w
w	f	f	f
f	w	w	w
f	f	w	w

passt nicht zu oben

exklusiv ODER

XOR

A	B	A XOR B
f	f	f
f	w	w
w	f	w
w	w	f

$(A \wedge \neg B) \vee (\neg A \wedge B)$

A	B	A XOR B
w	w	f
w	f	w
f	w	w
f	f	f

Unterschied zur OR

nicht im Durchschnitt

$\Updownarrow$

gleiche Wahrheitstabelle bedeutet, dass die Ausdrücke äquivalent sind

„wenn.., dann"

Implikation $\Rightarrow$

A	B	$A \Rightarrow B$
w	w	w
w	f	f
f	w	w
f	f	w

„genau dann, wenn.."

Äquivalenz

A	B	$A \Leftrightarrow B$
w	w	w
w	f	f
f	w	f
f	f	w

$(A \Rightarrow B) \wedge (B \Rightarrow A)$

$(\neg A \vee B) \wedge (\neg B \vee A)$

$$A \Rightarrow B \quad \Leftrightarrow \quad \neg A \vee B$$

äquivalent

Erläuterung der Wahrheitstafel XOR und des äquivalenten Ausdrucks

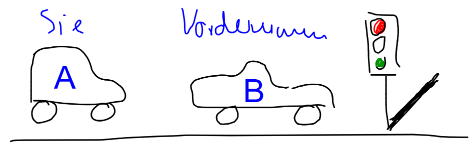
$$XOR \Leftrightarrow (A \wedge \neg B) \vee (\neg A \wedge B)$$

A	B	$\neg B$	$\neg A$	$A \wedge \neg B$	$\neg A \wedge B$	$(A \wedge \neg B) \vee (\neg A \wedge B)$	XOR	XOR $\Leftrightarrow$ $(A \wedge \neg B) \vee (\neg A \wedge B)$
w	w	f	f	f	f	f	f	w
w	f	w	f	w	f	w	w	w
f	w	f	w	f	w	w	w	w
f	f	w	w	f	f	f	f	w

Ausdrücke XOR und $(A \wedge \neg B) \vee (\neg A \wedge B)$ sind äquivalent

Tautologie

Beispiel zur Implikation:



A: "Sie kommen (bei grün) über die Ampel"	**B:** "Ihr Vordermann kommt (bei grün) über die Ampel"	$A \Rightarrow B$
w	w	w
w	f	f
f	w	w
f	f	w

$$A \Rightarrow B$$

$$\underbrace{\boxed{\text{A: "Sie kommen (bei grün) über die Ampel"}}} \Rightarrow \underbrace{\boxed{\text{B: "Ihr Vordermann kommt (bei grün) über die Ampel"}}}$$

A ist die hinreichende Bedingung, dafür dass B erfüllt ist.

B ist die notwendige Bedingung, dafür dass A erfüllt ist

$$\boxed{\neg A \Leftarrow \neg B}$$

„ich komme auch nicht über die Ampel" „B kommt nicht über die Ampel"

Seite vorher

$\boxed{\neg A \vee B} \Leftrightarrow \boxed{A \Rightarrow B} \overset{\text{äquivalent}}{\underset{\text{gleichbedeutend}}{\Longleftrightarrow}} \boxed{\neg B \Rightarrow \neg A}$

Bemerkung zur Implikation:

- Die Implikation $\boxed{A \Rightarrow B \text{ ist eine abkürzende Schreibweise für } \neg A \vee B}$. Dieses zeigt auch die nachfolgende Wahrheitstafel:

A	B	$\neg A$	$\neg A \vee B$
w	w	f	w
w	f	f	f
f	w	w	w
f	f	w	w

- Was bedeutet hinreichend bzw. notwendig?

  $\boxed{A \Rightarrow B \text{ bedeutet: A ist hinreichend für B, B ist notwendig für A.}}$

  Besteht ein kausaler Zusammenhang, so kann man die Bedeutung leicht nachvollziehen. Sei A die Aussage „es regnet", B die Aussage „die Straße ist nass", und $A \Rightarrow B$ die Aussage „Wenn es regnet, dann ist die Straße nass":

  A ist hinreichend für B, bedeutet, es ist „ausreichend" zu wissen, dass es regnet, um dann zu folgern, dass die Straße nass ist.

  B ist notwendig für A, bedeutet dass es eine Voraussetzung ist, dass die Straße nass ist, wenn es regnet, d.h. A wahr sein soll.

Die logischen Ausdrücke

$A \Rightarrow B$ und $\neg B \Rightarrow \neg A$ und $\neg A \vee B$

haben die gleichen Einträge in der Wahrheitstabelle und sind daher gleichwertig oder äquivalent.

Aufstellen von Wahrheitstafeln

- Es wird eine Tabelle erstellt, in der die beteiligten logischen Variablen sowie die gewünschten logischen Ausdrücke die **Spalten** bilden.
- Bei **zwei logischen Variablen** bilden alle Elemente des kartesischen Produktes {w,f} x {w,f} die **2^2=4 Zeilen** der Tabelle.

A	B	
w	w	
w	f	
f	w	
f	f	

- Bei **drei logischen Variablen** ergeben sich die **2^3=8 Zeilen** durch die Elemente des kartesischen Produktes {w,f} x {w,f} x {w,f}

A	B	C	
w	w	w	
w	w	f	
w	f	w	
w	f	f	
f	w	w	
f	w	f	
f	f	w	
f	f	f	

A	B	C	D
w	w	w	w
w	w	w	f
w	w	f	w
w	w	f	f
w	f	w	w
w	f	w	f
w	f	f	w
w	f	f	f
f	w	w	w
f	w	w	f
f	w	f	w
f	w	f	f
f	f	w	w
f	f	w	f
f	f	f	w
f	f	f	f

bei 4 Aussagen
$16 = 2^4$ Zeilen

- Eintragen eines logischen Ausdrucks in die Wahrheitstabelle mit Hilfe einer Zerlegung in Teilausdrücke, die dann die Spalten der Wahrheitstabelle bilden.

Beispiel: $\neg A \vee \neg B$

A	B	$\neg A$	$\neg B$	$\neg A \vee \neg B$
w	w	f	f	f
w	f	f	w	w
f	w	w	f	w
f	f	w	w	w

gleiche Einträge

$\neg A \vee \neg B$

$\Longleftrightarrow$

$\neg(A \wedge B)$

DeMorgansche Regeln

NAND

A	B	$A \wedge B$	$\neg(A \wedge B)$
f	f	f	w
f	w	f	w
w	f	f	w
w	w	w	f

Beispiel: $(A \wedge B) \vee (\neg C \Rightarrow A)$

A	B	C	$A \wedge B$	$\neg C$	$\neg C \Rightarrow A$	$(A \wedge B) \vee (\neg C \Rightarrow A)$
w	w	w	w	f	w	w
w	w	f	w	w	w	w
w	f	w	f	f	w	w
w	f	f	f	w	w	w
f	w	w	f	f	w	w
f	w	f	f	w	f	f
f	f	w	f	f	w	w
f	f	f	f	w	f	f

3.1.3 Logische Verbindungen

Logische Verbindungen (oder Aussagenverbindungen) entstehen durch Verkettung mehrerer Aussagen mittels logischer Operatoren.

Zur Vereinfachung der Schreibweise und zum Verzicht einer notwendigen Klammerung sind Vorrangregeln festgelegt. In der folgenden Reihenfolge bindet jede logische Operation stärker, d.h. wird zuerst ausgewertet:

- zuerst Negation,
- dann Konjunktion,
- dann Disjunktion,
- dann Implikation und
- dann Äquivalenz

Ist das Setzen von Klammern notwendig, so werden sie von innen nach außen interpretiert.

Beispiel

Die Aussageverbindung $\boxed{C := (A \wedge (B \Rightarrow \neg A)) \Rightarrow \neg B}$ wird durch Auswertung der einzelnen Komponenten über eine Wahrheitstafel ausgewertet.

A	B	$\neg A$	$\neg B$	$(B \Rightarrow \neg A)$	$A \wedge (B \Rightarrow \neg A)$	$C := (A \wedge (B \Rightarrow \neg A)) \Rightarrow \neg B$
w	w	f	f	f	f	w
w	f	f	w	w	w	w
f	w	w	f	w	f	w
f	f	w	w	w	f	w

Die Aussageverbindung C ist also stets wahr.

Definition 3.4: Tautologie

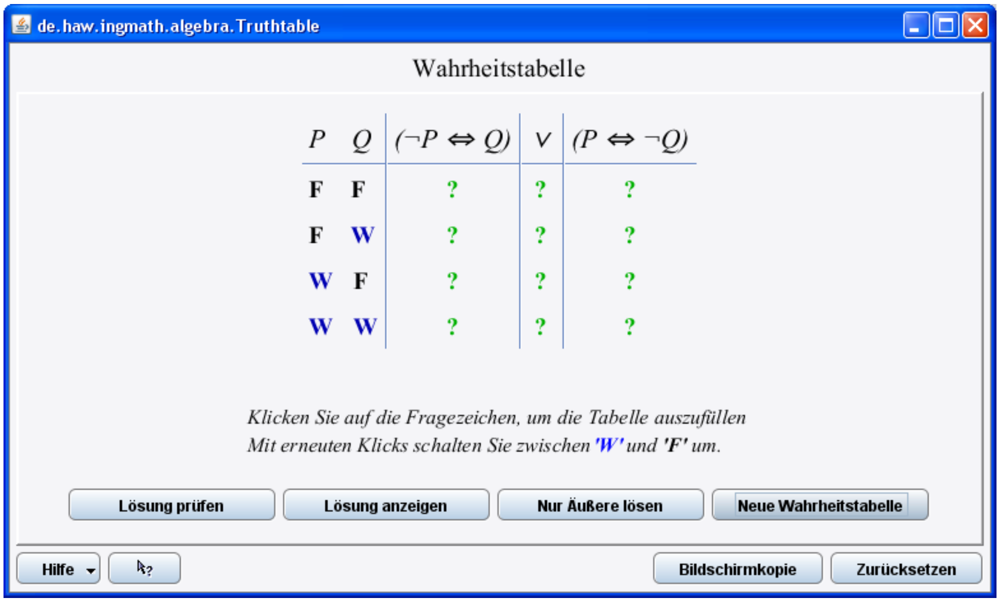
Eine Aussage, die stets wahr ist, heißt **Tautologie**, z.B. $A \vee \neg A$ (Satz vom ausgeschlossenen Dritten).

Tautologien liefern auch Vorgehensweisen zu Beweistechniken von Aussagen.

Definition 3.5: Kontradiktion

Eine Aussage, die stets falsch ist, heißt **Kontradiktion**, z.B. $A \wedge \neg A$ (Satz vom ausgeschlossenen Widerspruch).

Aufgabe: Wahrheitstabelle



Aufgaben: Wahrheitstabelle für Logische Ausdrücke

Aufgabe 1

Wahrheitstabelle

P	Q	$\neg(\neg P \wedge Q)$	$\wedge$	$\neg(\neg P \Rightarrow Q)$
F	F	?	?	?
F	W	?	?	?
W	F	?	?	?
W	W	?	?	?

Klicken Sie auf die Fragezeichen, um die Tabelle auszufüllen
Mit erneuten Klicks schalten Sie zwischen ***'W'*** *und* ***'F'*** *um.*

Lösung prüfen | Lösung anzeigen | Nur Äußere lösen | Neue Wahrheitstabelle

Lösung

Wahrheitstabelle

P	Q	$\neg(\neg P \wedge Q)$	$\wedge$	$\neg(\neg P \Rightarrow Q)$
F	F	W	W	W
F	W	F	F	F
W	F	W	F	F
W	W	W	F	F

Diese Lösung ist richtig. Klicken Sie auf 'Zurücksetzen', um die eingetragenen Werte zu löschen.

Aufgabe 2

Wahrheitstabelle

P	Q	$(\neg P \wedge Q)$	$\Rightarrow$	$\neg(\neg P \vee Q)$
F	F	?	?	?
F	W	?	?	?
W	F	?	?	?
W	W	?	?	?

Klicken Sie auf die Fragezeichen, um die Tabelle auszufüllen
Mit erneuten Klicks schalten Sie zwischen ***'W'*** *und* ***'F'*** *um.*

Lösung prüfen | Lösung anzeigen | Nur Äußere lösen | Neue Wahrheitstabelle

Lösung

Wahrheitstabelle

P	Q	$(\neg P \wedge Q)$	$\Rightarrow$	$\neg(\neg P \vee Q)$
F	F	F	W	F
F	W	W	F	F
W	F	F	W	W
W	W	F	W	F

Diese Lösung ist richtig. Klicken Sie auf 'Zurücksetzen', um die eingetragenen Werte zu löschen.

hier geht es nächste Woche weiter

Grundgesetze der Aussagenlogik

Satz 3.1: Grundgesetze der Aussagenlogik

Für beliebige logische Ausdrücke A, B, C gelten folgende Behauptungen:

(1) **Kommutativgesetz**

$A \wedge B = B \wedge A \text{ und } A \vee B = B \vee A$

(2) **Assoziativgesetz**

$(A \wedge B) \wedge C = A \wedge (B \wedge C) \text{ und } (A \vee B) \vee C = A \vee (B \vee C)$

(3) **Distributivgesetz**

$A \wedge (B \vee C) = (A \wedge B) \vee (A \wedge C) \text{ und } A \vee (B \wedge C) = (A \vee B) \wedge (A \vee C)$

(4) **Satz von der doppelten Negation:**

$\neg(\neg A) = A$

(5) **Idempotenzgesetze**

$A \wedge A = A \text{ und } A \vee A = A$

(6) **Dominanzgesetz**

$A \wedge f = f,\ A \wedge w = A \text{ und } A \vee f = A,\ A \vee w = w$

(7) **Satz vom ausgeschlossenen Dritten**

$A \wedge \neg A = f \text{ und } A \vee \neg A = w$

(8) **Satz von der Transitivität**

$[(A \Rightarrow B) \wedge (B \Rightarrow C)] \Rightarrow (A \Rightarrow C)$

(9) **Satz von der Kontraposition**

$(A \Rightarrow B) \Leftrightarrow (\neg B \Rightarrow \neg A)$

Ist eine Zahl durch 2 teilbar, dann ist sie gerade.
$\Leftrightarrow$
Ist eine Zahl nicht gerade, dann ist sie nicht durch 2 teilbar.

(10) **De Morganschen Regeln**

a) $\neg(A \wedge B) \Leftrightarrow \neg A \vee \neg B$

(Negation der Konjunktion ist die Disjunktion der negierten Elemente)

$\neg(A \vee B) \Leftrightarrow \neg A \wedge \neg B$

(Negation der Disjunktion ist die Konjunktion der negierten Elemente)