Vorlesung 7 - 6.10.2022

Vorlesungsthemen

(1) ... noch zu Grundlagen 4 - Mengen

- Grundlagen der Kombinatorik

(2) Vektoren

- Einführungsbeispiele Vektoren-Matrizen-LGS
- Definition eines Vektors
- Rechenregeln mit Vektoren
- Skalarprodukt und Vektorprodukt

Mengen - Umformungen von Mengenausdrücken

Beispiel:

Die aufgestellten Regeln erlauben es, komplizierte Ausdrücke zu vereinfachen.

$\boxed{(A\cap B)\cup\left(\overline{\overline{A}\cup B}\right)=}$

$(A\cap B)\cup\left(\overline{\overline{A}}\cap\overline{B}\right)=$ (gilt nach der ersten De Morganschen Regel)

$(A\cap B)\cup\left(A\cap\overline{B}\right)=$ (gilt nach dem Satz 1.10 (doppeltes Komplement))

„Ausklammern von A"

$A\cap\left(\underbrace{B\cup\overline{B}}_{G}\right)=$ (gilt nach dem Distributivgesetz)

äquivalent $\boxed{A}$ (gilt nach dem Satz 1.10 und 1.6)

Weiteres Beispiel/ Aufgabe:

$\overline{(M\cap(\overline{N}\cap P)}) \cup (N\cap M)$

$=(\overline{M}\cup(\overline{\overline{N}\cap P}))\cup(N\cap M)$

De Morgansche Regeln

zu Hause

$M\cup(N\cap K)$
$=(M\cup N)\cap(M\cup K)$
$M\cap(N\cup K)$
$=(M\cap N)\cup(M\cap K)$

Distributivgesetze bei Mengen

$\cancel{(x+y)\cdot(x+z)}$
$\cancel{x+(y\cdot z)}$

$(x\cdot y)\cdot(z+k)$
$=x\cdot y\cdot z+x\cdot y\cdot k$

bei reellen Zahlen

$\overline{(M\cap(\overline{N}\cap P)}) \cup (N\cap M)$

Assoziativgesetz

$=(\overline{M}\cup(\overline{\overline{N}\cap P}))\cup(N\cap M)$

De Morganschen Regeln

$=(\overline{M}\cup(\overline{\overline{N}}\cup\overline{P}))\cup(N\cap M)$

Regel doppeltes Komplement

$=(\overline{M}\cup(N\cup\overline{P}))\cup(N\cap M)$

Distributivgesetz

$=(\overline{M}\cup(N\cup\overline{P})\cup N)\cap(\overline{M}\cup(N\cup\overline{P})\cup M)$

„Kommutativ- und Assoziativgesetz

$=(\overline{M}\cup\underbrace{N\cup N}_{=N}\cup\overline{P})\cap(\underbrace{\underbrace{\underbrace{\overline{M}\cup M}_{=G\text{ Grundmenge}}\cup N}_{G}\cup\overline{P}}_{G})$

$=(\overline{M}\cup N\cup\overline{P})\cap G$

G neutrales Element bzgl ∩

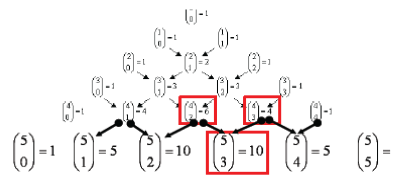
$=\boxed{\overline{M}\cup N\cup\overline{P}}$

Eigenschaften des "Pascalschen Dreiecks"

Satz 1.12:

Seien $n,k \in \mathbb{N}_0$ und $n \geq k$. Dann gilt für den Binomialkoeffizienten n über k die folgende Rekursion:

$$\binom{n}{k} = \begin{cases} 1 & , \textit{falls } k=0, k=n \\ \binom{n-1}{k} + \binom{n-1}{k-1} & , \textit{sonst} \end{cases}$$



zu zeigen $\underbrace{\binom{n-1}{k-1}+\binom{n-1}{k}}_{\text{Start}} \overset{!}{=} \underbrace{\binom{n}{k}}_{\text{Ziel}}$

Start $\rightsquigarrow$ Ziel: gültige Umformungen

$$\boxed{\binom{n}{k} = \frac{n!}{(n-k)!\,k!}}$$

$$\underbrace{\binom{n-1}{k-1}+\binom{n-1}{k}}_{\text{Start}} = \frac{(n-1)!}{((n-1)-(k-1))!\,(k-1)!} + \frac{(n-1)!}{((n-1)-k)!\,k!}$$

Definition

$$= \frac{(n-1)!}{(n-k)!\,(k-1)!}\cdot\frac{k}{k} + \frac{(n-1)!}{(n-k-1)!\,k!}\cdot\frac{(n-k)}{(n-k)}$$

Erweitern für Hauptnenner

$$= \frac{(n-1)!\cdot k}{(n-k)!\,k!} + \frac{(n-1)!\,(n-k)}{(n-k)!\,k!}$$

$$= \frac{(n-1)!\cdot k + (n-1)!\,(n-k)}{(n-k)!\,k!}$$

$$= \frac{(n-1)!\cdot(k+n-k)}{(n-k)!\,k!}$$

Ausklammern

$$= \frac{(n-1)!\cdot n}{(n-k)!\,k!}$$

$$= \frac{n!}{(n-k)!\,k!}$$

$$= \underbrace{\binom{n}{k}}_{\text{Ziel}}$$

Damit ist die Behauptung bewiesen!

Eigenschaften des "Pascalschen Dreiecks"

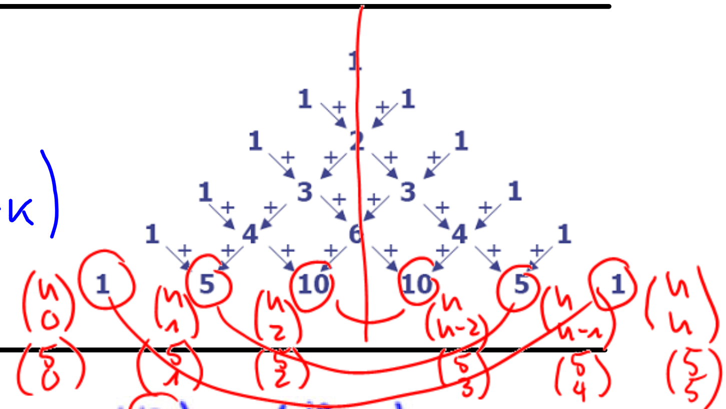
Satz 1.13: Eigenschaften des Binomialkoeffizienten

Seien $n, k \in \mathbb{N}_0$ und $n \geq k$. Dann gilt für den Binomialkoeffizienten n über k:

1. $\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$

2. $\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} = |P(M)| = 2^n$, d.h. die Anzahl der Teilmengen einer n-elementigen Menge ist gleich der Summe der Binomialkoeffizienten, also einer Zeile im Pascalschen Dreieck.

Erläuterung der Formel: $\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$



Erläuterung der Formel: $\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$

Def. $\frac{n!}{(n-k)!k!}$ Start $\longrightarrow$ Ziel Def. $\frac{n!}{(n-(n-k))!(n-k)!}$

„gültige Umformungen"

Nachweis:

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{(n-k)!k!}$$

Start

$$= \frac{n!}{k!(n-k)!} = \frac{n!}{(+n-n+k)!(n-k)!}$$

Kommutativgesetz

„0 addiert" ≙ „+n − n"

$$= \frac{n!}{(n-(n-k))!(n-k)!} = \binom{n}{n-k} \checkmark$$

Def. Ziel

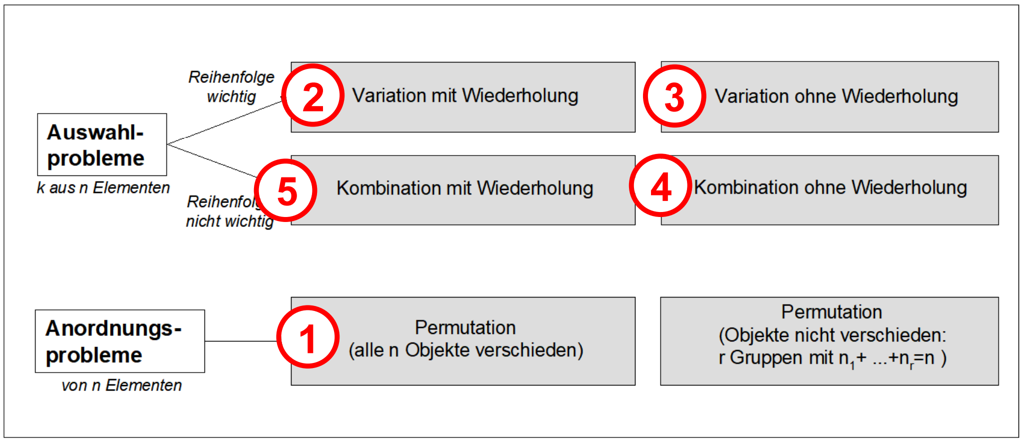
2.: n k

$$\frac{n!}{(n-(n-k))!(n-k)!}$$

Anwendung Mengen und Binomalkoeffizient

1.6 Grundelemente der Kombinatorik

Die Kombinatorik untersucht Anordnungen und Auswahlmengen von Objekten endlicher Mengen. Sie ist grundlegend für die Wahrscheinlichkeitstheorie und war früher auch Teil der Wahrscheinlichkeitstheorie. Sie wird jetzt aber eigenständig betrachtet.



Satz 1.15: Das allgemeine Zählprinzip

Es seien Mengen $M_1, M_2, ..., M_n$ mit den Mächtigkeiten $|M_1| = m_1$, $|M_2| = m_2$, ..., $|M_n| = m_n$ gegeben. Für die Konstruktion von n-Tupeln $(x_1, x_2, ..., x_n)$ mit $x_i \in M_i$ gibt es $m_1 \cdot m_2 \cdot ... \cdot m_n$ verschiedene Möglichkeiten.

Beispiel:

Besteht ein Autokennzeichen $\boxed{HH}\boxed{A}\boxed{K}\boxed{146}$ nach dem Zulassungsbezirk aus ein oder zwei Buchstaben und einer dreistelligen Zahl: $\boxed{-}\boxed{-}\boxed{---} = (x_1, x_2, x_3)$ mit x_1 aus der Menge der 26 Buchstaben, x_2 aus der Menge der 26 Buchstaben oder kein Buchstabe und x_3 einer 3-stelligen Zahl zwischen 1 und 999, dann gibt es

$$m_1 \cdot m_2 \cdot m_3 = 26 \cdot 27 \cdot 999 = 701298$$ Fahrzeuge, die zugelassen werden können.

$10 \cdot 10 \cdot 10$
$= 1000 - 1$

da 000 als Ziffern nicht erlaubt

•

Kombinatorik

Gegeben sei eine Menge von n Elementen

1 Anordnung von n Elementen → Permutation

Wie viele Möglichkeiten gibt es n Elemente anzuordnen?

$$\underbrace{n}_{\text{Möglichkeiten für 1. Stelle}} \cdot \underbrace{(n-1)}_{\text{Möglichkeiten für 2. Stelle}} \cdot \underbrace{(n-2)}_{\text{Möglichkeiten für 3. Stelle}} \cdot \ldots \cdot \underbrace{1}_{\text{Möglichkeiten für n. Stelle}} = n!$$

Beispiel: 5 gegebene Ziffern anordnen

Beispiel: 5 Ziffern anordnen

12345
23154
41235

$5! = 120$ Möglichkeiten

$5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 5!$

2 Auswahl von k Elementen aus n Elementen mit mehrfacher Verwendung von Elementen → Variation mit Wiederholung (Reihenfolge wichtig)

$$\underbrace{n}_{\text{Möglichkeiten für 1. Auswahl}} \cdot \underbrace{n}_{\text{Möglichkeiten für 2. Auswahl}} \cdot \underbrace{n}_{\text{Möglichkeiten für 3. Auswahl}} \cdot \ldots \cdot \underbrace{n}_{\text{Möglichkeiten für k. Auswahl}} = n^k$$

Beispiel: Zeichenketten mit 4 Buchstaben aus einer Grundmenge von 26 Buchstaben des Alphabets

Beispiel: Zeichenketten mit 4 Buchstaben

ALLE ELLA
QUER
HAUS

$26 \cdot 26 \cdot 26 \cdot 26 = 26^4$

3 Auswahl von k Elementen aus n Elementen ohne mehrfache Verwendung von Elementen → Variation ohne Wiederholung (Reihenfolge wichtig)

$$\underset{\text{Möglichkeiten für 1. Auswahl}}{n} \cdot \underset{\text{Möglichkeiten für 2. Auswahl}}{(n-1)} \cdot \underset{\text{Möglichkeiten für 3. Auswahl}}{(n-2)} \cdot \ldots \cdot \underset{\text{Möglichkeiten für k. Auswahl}}{\overbrace{(n-(k-1))}^{(n-k+1)}} = \frac{n!}{(n-k)!}$$

Beispiel: Pferderennen - mögliche Siegerpodestbelegungen (Platz1-3) bei Rennen mit 5 Pferden

Anzahl Möglichkeiten für die Medaillenränge 1-3 beim Pferderennen von 5 Pferden

1 2 4
1 2 5
5 3 4
4 1 2
⋮

$\underset{\text{Möglichkeiten}}{5 \cdot 4 \cdot 3} = 60$ Möglichkeiten für die Medaillenränge

$= \frac{5!}{(5-3)!} = \frac{5!}{2!} = 5 \cdot 4 \cdot 3$

4 Auswahl von k Elementen aus n Elementen ohne mehrfache Verwendung von Elementen → ~~Variation~~ ohne Wiederholung (Reihenfolge nicht wichtig!) } Kombination

$\frac{n!}{(n-k)!}$ Möglichkeiten der Auswahl ohne mehrfache Verwendung (mit Reihenfolge)

dividiert durch die Anzahl Permutationen $k!$ von k Elementen
(verschiedene Reihenfolgemöglichkeiten von k Elementen)

d.h. $\frac{\frac{n!}{(n-k)!}}{k!} = \frac{n!}{(n-k)!\,k!} = \binom{n}{k}$ „Binomialkoeffizient"
Möglichkeiten für eine k-elementige Teilmenge einer n-elementigen Menge

Beispiel: Lotto - 6 Kugeln aus 49 Kugeln

Beispiel: Lotto 6 aus 49

$$\binom{49}{6} = \frac{49!}{43!\,6!}$$

1.6.4 Zusammenfassung: Permutation-Variation-Kombination

Auswahl-probleme

2 Variation mit Wiederholung

$$\boxed{{}^{W}V_n^k = n^k}$$

3 Variation ohne Wiederholung

$$\boxed{V_n^k = \frac{n!}{(n-k)!} = n \cdot \ldots \cdot (n-k+1)}$$

Sonderfall k=n: Permutation

5 Kombination mit Wiederholung

$$\boxed{{}^{W}C_n^k = \binom{n+k-1}{k} = \frac{n+k-1!}{(n-1)! \cdot k!}}$$

4 Kombination ohne Wiederholung

$$\boxed{C_n^k = \binom{n}{k} = \frac{n!}{(n-k)! \cdot k!}}$$

Anordnungs-probleme

1 Permutation (alle n Objekte verschieden)

$$\boxed{P_n = n!}$$

Permutation (Objekte nicht verschieden: r Gruppen mit $n_1 + \ldots + n_r = n$)

$$\boxed{P_{n_1, n_2, \ldots, n_r} = \frac{n!}{n_1! \cdot n_2! \cdot \ldots \cdot n_r!}}$$

Auswahlprobleme und Anordnungsprobleme

Auswahl-probleme

Beispiel „Ziehen 2 aus 3“

Reihenfolge wichtig, gleiche Elemente erlaubt

Variation mit Wiederholung

"Zeichenketten"/ "Autokennzeichen"

Reihenfolge wichtig, keine gleichen Elemente

Variation ohne Wiederholung

"Pferderennen"

Kombination mit Wiederholung

"Würfeln"

Keine Reihenfolge, gleiche Elemente erlaubt

Kombination ohne Wiederholung

"Lotto"

Keine Reihenfolge, keine gleichen Elemente

Anordnungs-probleme

Beispiel „Anordnen von 3“

Permutation

"Sitzordnungen"

1.6.4 Zusammenfassung: Permutation-Variation-Kombination

Auswahlprobleme

2 Variation mit Wiederholung

$$\boxed{{}^{w}V_n^{\,k} = n^k}$$

3 Variation ohne Wiederholung

$$\boxed{V_n^{\,k} = \frac{n!}{(n-k)!} = n \cdot \ldots \cdot (n-k+1)}$$

Sonderfall k=n: Permutation

Kombination mit Wiederholung

$$\boxed{{}^{w}C_n^{\,k} = \binom{n+k-1}{k} = \frac{n+k-1!}{(n-1)! \cdot k!}}$$

4 Kombination ohne Wiederholung

$$\boxed{C_n^{\,k} = \binom{n}{k} = \frac{n!}{(n-k)! \cdot k!}}$$

Anordnungsprobleme

1 Permutation (alle n Objekte verschieden)

$$\boxed{P_n = n!}$$

Permutation (Objekte nicht verschieden: r Gruppen mit $n_1 + \ldots + n_r = n$)

$$\boxed{P_{n_1, n_2, \ldots, n_r} = \frac{n!}{n_1! \cdot n_2! \cdot \ldots \cdot n_r!}}$$

Auswahlprobleme und Anordnungsprobleme

Auswahlprobleme

Beispiel „Ziehen 2 aus 3"

Reihenfolge wichtig, gleiche Elemente erlaubt

Variation mit Wiederholung

Beispiel: Zeichencodierung

Sei n=2, nämlich die Menge $M = \{0,1\}$. Dann lassen sich durch ein Datenelement von k Bit Länge genau 2^k Zeichen darstellen. Jeder Variation kann also ein Zeichen zugeordnet werden. Ist k=8, also ein Byte, dann können damit $2^8 = 256$ Zeichen codiert werden. In zwei Byte (k=16) können $2^{16} = 65536$ Zeichen dargestellt werden.

Reihenfolge wichtig, keine gleichen Elemente

Variation ohne Wiederholung

Beispiel: Pferdewette

Die Möglichkeiten einer Einlaufwette beim Pferderennen lassen sich aus der Formel für einer Variation ohne Wiederholung berechnen, denn beim Pferderennen wird aus einer gegebenen Menge von Pferden (z.B. n=15) die Reihenfolge des Einlaufes der ersten Pferde (z.B k=5) vorhergesagt. Die Anzahl der Möglichkeiten einer solchen Vorhersage ist $V_{15}^{\,5} = \frac{15!}{(15-5)!} = 15 \cdot \ldots \cdot (15-5+1) = 15 \cdot 14 \cdot 13 \cdot 12 \cdot 11 = 360360$.

Kombination mit Wiederholung

Beispiel: Würfelexperiment

Bei einem Würfelexperiment wird mit zwei Würfeln geworfen. Welche möglichen Kombinationen an Augenzahlen gibt es für die gefallenen Würfel?

Es handelt sich hierbei um eine Kombination mit Wiederholung. Die zwei Würfel (k=2) sind nicht unterscheidbar und die Menge, aus der „gezogen" wird, hat die Mächtigkeit n=6. Daher sind die möglichen Würfe über die Formel ${}^{w}C_6^{\,2} = \binom{6+2-1}{2} = \frac{(6+2-1)!}{(6-1)! \cdot 2!} = \frac{7 \cdot 6}{2} = 21$ bestimmbar.

Keine Reihenfolge, gleiche Elemente erlaubt

Kombination ohne Wiederholung

Beispiel: Zahlenlotto

Das typische Beispiel für eine Kombination ohne Wiederholung ist das Zahlenlotto 6 aus 49, bei dem 6 Zahlen (k=6) aus 49 Zahlen (n=49) ohne Berücksichtigung einer Reihenfolge gezogen werden. Für diese Ziehung der Zahlen gibt es $C_{49}^{\,6} = \binom{49}{6} = \frac{49!}{(49-6)! \cdot 6!} = \frac{49 \cdot 48 \cdot 47 \cdot 46 \cdot 45 \cdot 44}{6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1} = 13.983.816$ Möglichkeiten.

Keine Reihenfolge, keine gleichen Elemente

Anordnungsprobleme

Beispiel „Anordnen von 3"

Permutation

"Sitzordnungen"

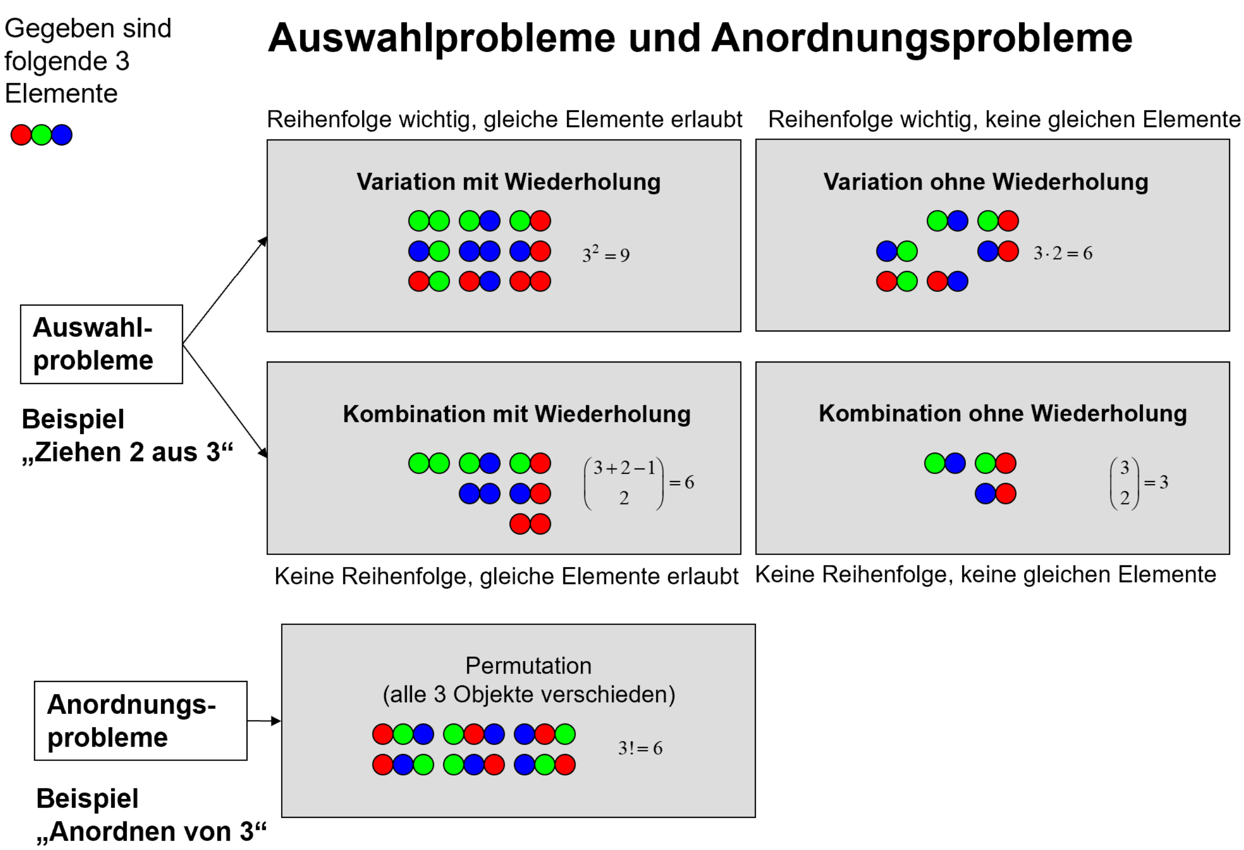
1.6.4 Zusammenfassung: Permutation-Variation-Kombination

Auswahlprobleme

Variation mit Wiederholung 2 $\boxed{{}^{w}V_n^k = n^k}$	Variation ohne Wiederholung 3 $\boxed{V_n^k = \dfrac{n!}{(n-k)!} = n \cdot \ldots \cdot (n-k+1)}$ Sonderfall k=n: Permutation
Kombination mit Wiederholung 5 $\boxed{{}^{w}C_n^k = \binom{n+k-1}{k} = \dfrac{n+k-1!}{(n-1)! \cdot k!}}$	Kombination ohne Wiederholung 4 $\boxed{C_n^k = \binom{n}{k} = \dfrac{n!}{(n-k)! \cdot k!}}$

Anordnungsprobleme

Permutation (alle n Objekte verschieden) 1 $\boxed{P_n = n!}$	Permutation (Objekte nicht verschieden: r Gruppen mit $n_1 + \ldots + n_r = n$) $\boxed{P_{n_1, n_2, \ldots, n_r} = \dfrac{n!}{n_1! \cdot n_2! \cdot \ldots \cdot n_r!}}$



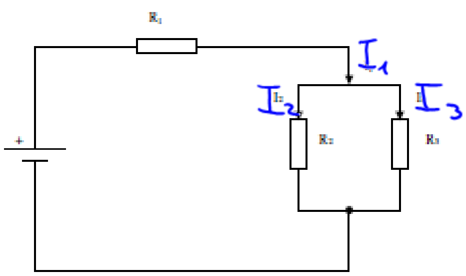
Teil 2: Vektoren

Kapitel 9: Vektoren und Matrizen - Einführungsbeispiel für Anwendung

Lineare Gleichungssysteme- Widerstandnetzwerk- Kirchhoffsche Regeln

...aber was hat das Gleichungssystem mit Matrizen und Vektoren zu tun?

Beispiel: Ein kleines „Widerstandsnetzwerk“



Welche Ströme I_1, I_2, I_3 fließen bei gegebenen Widerständen R_1, R_2, R_3 und gegebener Spannung U ?

Kirchhoffsche Regeln:

- Knotenpunktregel:

$$I_1 - I_2 - I_3 = 0$$

- Maschenregel:

$$\begin{aligned} R_1 I_1 + R_2 I_2 &= U \\ R_2 I_2 - R_3 I_3 &= 0 \end{aligned}$$

gesuchte Ströme

Wir erhalten also das folgende Gleichungssystem für die Unbekannten I_1, I_2, I_3:

Lineares Gleichungssystem mit 3 Gleichungen und 3 Unbekannten (gesuchten Variablen)

$$\boxed{\begin{aligned} 1\cdot I_1 - 1\cdot I_2 - 1\cdot I_3 &= 0 \\ R_1 I_1 + R_2 I_2 + 0\cdot I_3 &= U \\ 0\cdot I_1 + R_2 I_2 - R_3 I_3 &= 0 \end{aligned}} \rightarrow \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ R_1 & R_2 & 0 \\ 0 & R_2 & -R_3 \end{pmatrix}}_{\text{Koeffizientenmatrix } A} \underbrace{\begin{pmatrix} I_1 \\ I_2 \\ I_3 \end{pmatrix}}_{\text{Vektor der gesuchten Variablen}} = \underbrace{\begin{pmatrix} 0 \\ U \\ 0 \end{pmatrix}}_{\underline{b} \text{ Vektor der Konstanten}}$$

Gesucht sind Werte für I_1, I_2, I_3, die diese drei Gleichungen zugleich erfüllen, also die UND-Verknüpfung der drei Gleichungen.
Systematisches Lösungsverfahren?

allgemeine Notation eines LGS

$$\boxed{A\underline{x} = \underline{b}} \leftarrow A\cdot\underline{I} = \underline{b} \leftarrow$$

$$\underline{I} = \begin{pmatrix} I_1 \\ I_2 \\ I_3 \end{pmatrix}$$

allgemein

$$\underline{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$$

Allgemeine Notation: Lineare Gleichungssysteme (LGS)

$A \cdot \underline{x} = \underline{b}$ ist ein allgemeines LGS
mit $\underline{m}$ Gleichungen
und $\underline{n}$ Unbekannten (gesuchten Variablen)

1.Gleichung: $a_{11} x_1 + a_{12} \cdot x_2 + a_{13} \cdot x_3 + \ldots\ldots + a_{1n} \cdot x_n = b_1$

Spalte (zugehörig zu x_1)
Zeile (Gleichung)

2.Gleichung: $a_{21} x_1 + a_{22} \cdot x_2 + a_{23} x_3 + \ldots\ldots + a_{2n} x_n = b_2$

$\vdots$

m. Gleichung: $a_{m1} x_1 + a_{m2} \cdot x_2 + a_{m3} \cdot x_3 + \ldots + a_{mn} x_n = b_m$

$$\Longleftrightarrow \quad m \text{ Zeilen} \left\{ \underbrace{\overbrace{\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & a_{m3} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}}^{n\text{ - Spalten}}}_{A} \right. \underbrace{\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}}_{\underline{x}} = \underbrace{\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}}_{\underline{b}}$$

A Koeffizientenmatrix ist eine $(m \times n)$-Matrix

Anzahl Zeilen (m), Anzahl Spalten (n)

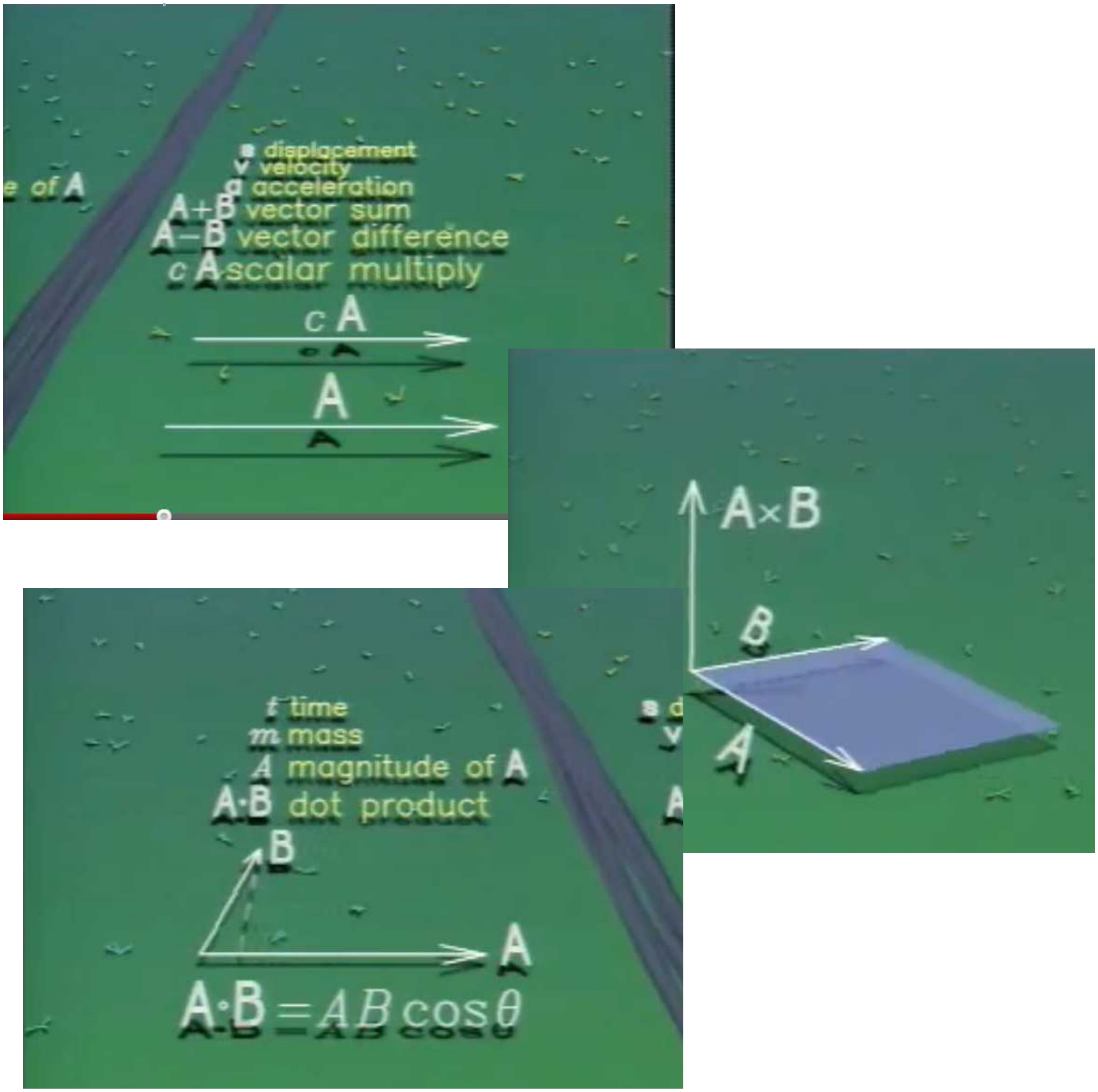
$\underline{x}$ n-dimensionaler Vektor, Vektor der gesuchten Variablen

$\underline{b}$ „rechte Seite b" $\hat{=}$ Vektor der Konstanten ist ein m-dimensionaler Vektor

$\Longleftrightarrow$ $\boxed{\text{Allgemeine Notation } \; A\underline{x} = \underline{b}}$ mit A $(m \times n)$-Matrix $\Big\}$ $(m \times n)$-LGS $\Rightarrow$ m Gleichungen, n Unbekannte

Vektoren - Einführung
(Rückblick Einführung Physik)

http://www.youtube.com/watch?NR=1&v=xJBGfPfE4fQ



Einführung - Vektoren

Was ist eine skalare Größe (Skalar)?

- Angabe eines einzigen Zahlenwertes (+Einheit)

Wo brauche ich zur Beschreibung mehrere skalare Größen?

$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$

- Angabe einer Position in der Ebene oder im Raum
- Beschreibung räumlicher Objekte durch Breite, Höhe, Tiefe
- Beschreibung einer Bewegung durch Richtung und Betrag der Geschwindigkeit
- Beschreibung mehrerer Eingangsgrößen und Ausgangsgrößen eines Systems

$\underbrace{\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ \text{temperatur} \\ \text{luftdruck} \end{pmatrix}}_{\underline{v}}$ 5dimensionaler Vektor

$\underline{v} \rightarrow \boxed{A} \rightarrow \underline{w}$

"Die Zusammenfassung mehrerer skalarer Größen zu einem Ganzen ist ein **Vektor.**"

9.1 Vektoren

9.1.1 Definitionen

Definition 9.1: Vektor

Ein Vektor ist eine gerichtete Größe, die durch die Angabe des Betrages und der Richtung bestimmt ist (z.B. Kraft).

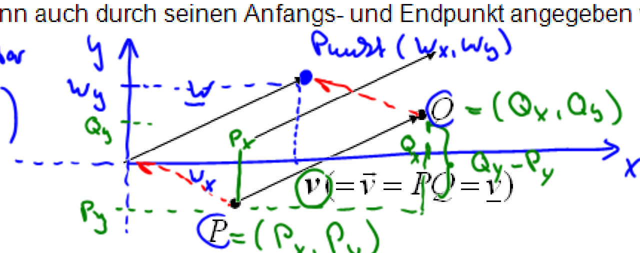
Ein Vektor kann durch einen gerichteten Pfeils dargestellt werden, wobei die Länge des Pfeils den Betrag widerspiegelt.

Alle gleichlangen, parallelen und gleichgerichteten Pfeile entsprechen dem gleichen Vektor.

Ein Vektor kann auch durch seinen Anfangs- und Endpunkt angegeben werden.

Ortsvektor

$\underline{w} = \begin{pmatrix} w_x \\ w_y \end{pmatrix}$



$\underbrace{}_{Q_x - P_x}$

$\underline{v} = \begin{pmatrix} Q_x - P_x \\ Q_y - P_y \end{pmatrix}$ ← Ausdehnung in x-Richtung ← in y-Richtung

Verschiedene Schreibweisen für Vektoren

$\vec{v} = \mathbf{v} = \underline{v} = \overline{PQ} = \vec{PQ}$

Einen Vektor, der im Ursprung beginnt, nennt man **Ortsvektor.**

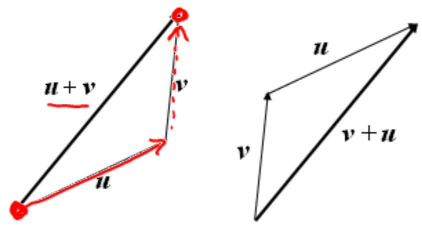
Skript hier

Definition 9.2: Rechnen mit Vektoren

Addition: Die Summe $\boldsymbol{u}+\boldsymbol{v}$ zweier Vektoren entsteht durch Aneinanderlegen der zwei Vektoren $\boldsymbol{u}$ und $\boldsymbol{v}$.

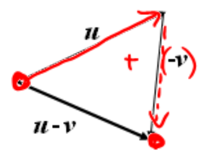
Der Endpunkt von $\boldsymbol{u}$ ist der Anfangspunkt von $\boldsymbol{v}$. $\boldsymbol{u}+\boldsymbol{v}$ ist dann der eindeutig bestimmte Vektor, der vom Anfangspunkt von $\boldsymbol{u}$ zum Endpunkt von $\boldsymbol{v}$ geht. Der Endpunkt von

Die Vektoraddition ist kommutativ, d.h. es gilt $\boldsymbol{u}+\boldsymbol{v}=\boldsymbol{v}+\boldsymbol{u}$.



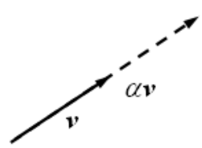
Subtraktion: Die Differenz $\boldsymbol{u}-\boldsymbol{v}$ zweier Vektoren entsteht durch Aneinanderlegen der zwei Vektoren $\boldsymbol{u}$ und $(-\boldsymbol{v})$, d.h. $\boldsymbol{u}+(-\boldsymbol{v})=\boldsymbol{u}-\boldsymbol{v}$.

Der Vektor $(-\boldsymbol{v})$ ist der Vektor, der dem Vektor $\boldsymbol{v}$ entgegen gerichtet ist.



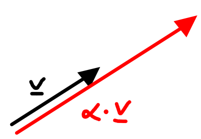
Multiplikation mit einem Skalar: Die Multiplikation des Vektors $\boldsymbol{v}$ mit einer skalaren Größe (Zahl) α streckt bzw. staucht den Vektor $\boldsymbol{v}$ um den Faktor α.

Der Vektor $\alpha\cdot\boldsymbol{v}$ ist parallel zu $\boldsymbol{v}$. Er ist gleich orientiert, wenn $\alpha>0$ und entgegengesetzt orientiert, wenn $\alpha<0$.



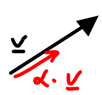
Einfluss von α

$\alpha \geq 1$



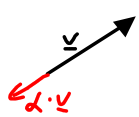
Streckung des Vektors
bei gleicher Richtung
($\alpha = 1$: Länge bleibt gleich)

$0 \leq \alpha \leq 1$



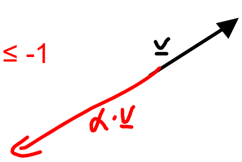
Stauchung des Vektors
bei gleicher Richtung

$-1 \leq \alpha \leq 0$



Stauchung des Vektors
mit Richtungsumkehr
($\alpha = -1$: Länge bleibt gleich)

$\alpha \leq -1$

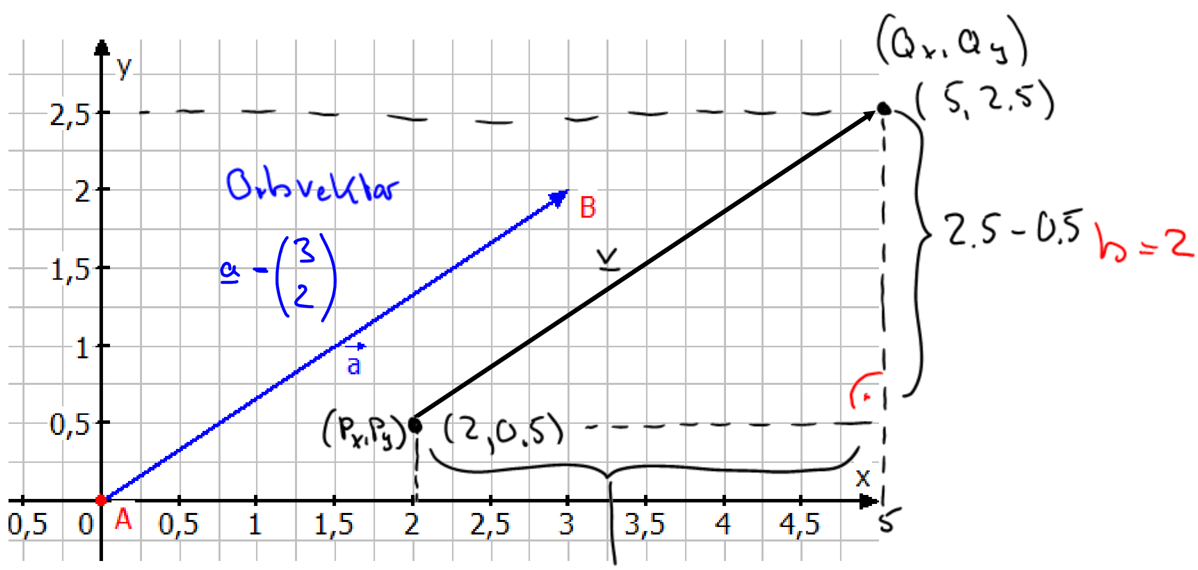


Streckung des Vektors
mit Richtungsumkehr

Darstellung von Vektoren durch Koordinaten

- Der Vektor $\boldsymbol{v}$ kann durch seine **Koordinaten** $\begin{pmatrix}\alpha\\\beta\end{pmatrix}$, d.h. durch seine Anteile in x- und in y-Richtung $\boldsymbol{v} = \begin{pmatrix}v_x\\v_y\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\alpha\\\beta\end{pmatrix}$ dargestellt werden.
- Alle Repräsentanten des Vektors haben die gleiche Koordinatendarstellung, die über **„Anfangspunkt des Vektors – Endpunkt des Vektors"** bestimmt werden kann.
- Soll ein Vektor von seinem Anfangspunkt aus aufgetragen werden, so gilt: **„Anfangspunkt + Vektor= Endpunkt des Vektors"**

Beispiel



Bestimmung des Vektors:

$$\underline{V} = \begin{pmatrix} 5-2 \\ 2{,}5-0{,}5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} Q_x - P_x \\ Q_y - P_y \end{pmatrix} \begin{matrix} \leftarrow \text{Differenz in x-Richt.} \\ \leftarrow \text{Differenz in y-Richt.} \end{matrix}$$

Länge eines Vektors:

$$|\underline{V}| = \sqrt{3^2 + 2^2}$$

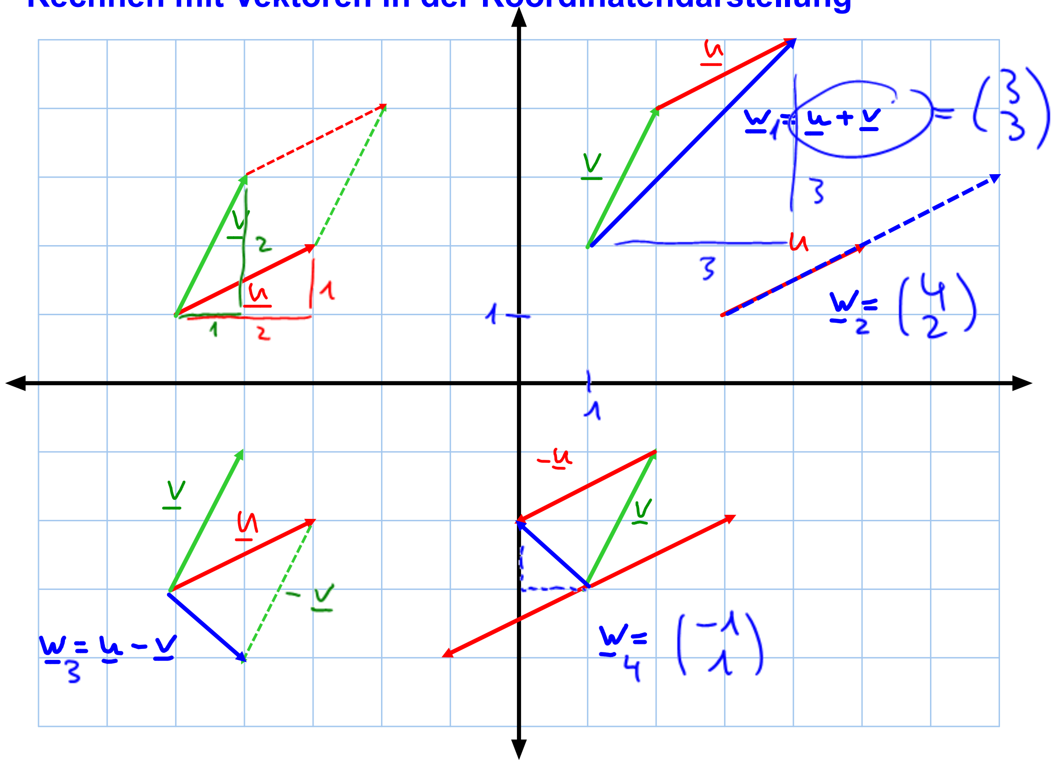
$$\sqrt{a^2 + b^2}$$

Länge eines Vektors

Allgemein

$$\underline{V} = \begin{pmatrix} V_x \\ V_y \end{pmatrix} = \sqrt{(V_x)^2 + (V_y)^2}$$

Rechnen mit Vektoren in der Koordinatendarstellung



$\underline{v} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$

$\underline{u} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$

$\underline{w}_1 = \underline{u} + \underline{v} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \end{pmatrix}$

$\underline{w}_2 = 2\underline{u} = 2 \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \end{pmatrix}$

$\underline{w}_3 = \underline{u} - \underline{v} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$

$\underline{w} = \underline{v} - \underline{u} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$

9.1.2 Koordinatendarstellung in der Ebene

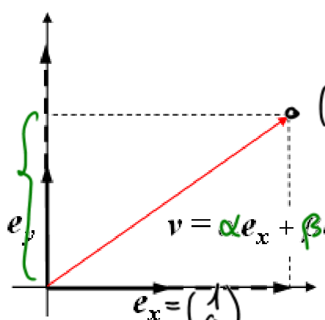
Wir betrachten in diesem Abschnitt die Vektoren und ihre Darstellung im kartesischen Koordinatensystem.

Definition 9.4: Einheitsvektor

Einen Vektor der Länge 1 nennt man **Einheitsvektor**. Die am häufigsten verwendeten Einheitsvektoren in der Ebene sind die folgenden Vektoren in Richtung einer der Koordinatenachsen: $\boldsymbol{e}_x = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ oder $\boldsymbol{e}_y = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Darstellung eines Vektors in der Ebene:

Jeder Vektor $\boldsymbol{v}$ in der Ebene kann durch eine Linearkombination der Einheitsvektoren $\boldsymbol{e}_x$ oder $\boldsymbol{e}_y$ dargestellt werden:



$\underbrace{\begin{pmatrix} 0 \\ \beta \end{pmatrix} = \beta \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \beta \cdot \underline{e}_y}$

$\boldsymbol{v} = \alpha\boldsymbol{e}_x + \beta\boldsymbol{e}_y = \alpha\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \beta\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ \beta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix}$

$\alpha \cdot e_x = \alpha\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha \\ 0 \end{pmatrix}$

$$\boldsymbol{v} = \alpha\boldsymbol{e}_x + \beta\boldsymbol{e}_y \quad \textit{mit} \quad \boldsymbol{e}_x = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \textit{und} \quad \boldsymbol{e}_y = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\boldsymbol{v} = \alpha\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \beta\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix}$$

Definition 9.3: Linearkombination von Vektoren

Einen Vektor $\boldsymbol{z} = \alpha\boldsymbol{u} + \beta\boldsymbol{v}$ nennt man eine **Linearkombination** der Vektoren $\boldsymbol{u}$ und $\boldsymbol{v}$

$\underline{z} = \alpha\, \underline{u} + \beta \cdot \underline{v}$

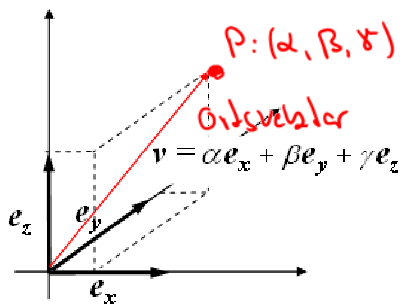
mit $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ reelle Zahlen

•

9.1.3 Koordinatendarstellung im Raum

Darstellung eines Vektors im 3-dimensionalen Raum:

Im 3-dimensionalen Raum gibt es 3 Koordinatenachsen, daher kann jeder Vektor $\boldsymbol{v}$ im Raum durch eine Linearkombination der 3 Einheitsvektoren $\underbrace{\boldsymbol{e_x}}_{\boldsymbol{e}_1=\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}} = \begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}$, $\underbrace{\boldsymbol{e_y}}_{\boldsymbol{e}_2=\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}} = \begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}$ oder $\underbrace{\boldsymbol{e_z}}_{\boldsymbol{e}_3=\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}} = \begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}$ dargestellt werden.



$$= \alpha\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix} + \beta\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix} + \gamma\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix}\alpha\\\beta\\\gamma\end{pmatrix} \text{ mit } \alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$$

Darstellung eines Vektors im n-dimensionalen Raum:

Im n-dimensionalen Raum gibt es n Koordinatenachsen, daher kann jeder Vektor $\boldsymbol{v}$ durch eine Linearkombination der n Einheitsvektoren $\boldsymbol{e_1} = \begin{pmatrix}1\\0\\\vdots\\0\end{pmatrix}$, $\boldsymbol{e_2} = \begin{pmatrix}0\\1\\\vdots\\0\end{pmatrix}$, …, $\boldsymbol{e_n} = \begin{pmatrix}0\\0\\\vdots\\1\end{pmatrix}$ dargestellt werden:

$$\boldsymbol{v} = \alpha\begin{pmatrix}1\\0\\\vdots\\0\end{pmatrix} + \beta\begin{pmatrix}0\\1\\\vdots\\0\end{pmatrix} + \ldots + \sigma\begin{pmatrix}0\\0\\\vdots\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\alpha\\\beta\\\vdots\\\sigma\end{pmatrix}$$

Jeder Vektor wird als **Spaltenvektor** dargestellt. Bei der Verwendung eines **Zeilenvektors** kann der Spaltenvektor transponiert dargestellt werden.

$$\boldsymbol{v} = \begin{pmatrix}v_1\\v_2\\\vdots\\v_n\end{pmatrix}^T = \begin{pmatrix}v_1 & v_2 & \cdots & v_n\end{pmatrix}$$

Transponieren

Aus Spaltenvektor wird Zeilenvektor

Beispiel: $\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}^T = \begin{pmatrix}1 & 2 & 3\end{pmatrix}$ oder

Aus Zeilenvektor wird Spaltenvektor

$\begin{pmatrix}1 & 2 & 3\end{pmatrix}^T = \begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}$

Definition 9.5: Rechnen mit Vektoren in Koordinatendarstellung

Die **Addition** und **Subtraktion** von Vektoren sowie die **Multiplikation mit einem Skalar** erfolgt koordinatenweise.

$$\boldsymbol{u} \pm \boldsymbol{v} = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \vdots \\ u_n \end{pmatrix} \pm \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u_1 \pm v_1 \\ u_2 \pm v_2 \\ \vdots \\ u_n \pm v_n \end{pmatrix} \qquad \alpha \boldsymbol{v} = \begin{pmatrix} \alpha v_1 \\ \alpha v_2 \\ \vdots \\ \alpha v_n \end{pmatrix}$$

Beispiel:

$$2 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \\ 5 \\ 10 \end{pmatrix}$$

Der **Betrag (Norm, Länge) eines Vektors** berechnet sich mit Hilfe des Satzes von Pythagoras:

$$|\boldsymbol{v}| = \sqrt{v_1^2 + v_2^2 + \ldots + v_n^2} \quad (= \|\boldsymbol{v}\|)$$

Der Vektor heißt normiert, falls $|\boldsymbol{v}| = 1$.

Beispiel:

$$\left| \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} \right| = \sqrt{1^2 + 2^2 + 3^2} = \sqrt{14}$$

z.B. $\left| \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right| = \sqrt{1^2 + 0^2 + 0^2} = 1$

•

Normierung eines Vektors

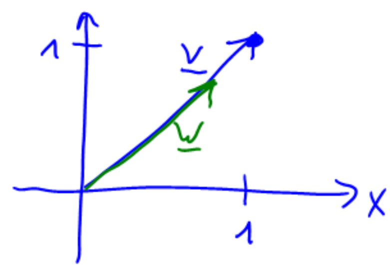
Gegeben sei ein Vektor $\underline{v}$ mit der Länge $|\underline{v}|$

Ein Vektor $\underline{w} = \frac{1}{|\underline{v}|} \cdot \underline{v}$ hat die Länge $|\underline{w}| = 1$ und zeigt in die gleiche Richtung wie der Vektor $\underline{v}$.

Der Vektor $\underline{w}$ heißt normierter Vektor, wenn Länge 1

Beispiel:

$\underline{v} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ mit $|\underline{v}| = \sqrt{1^2 + 1^2} = \sqrt{2}$



$\underline{w} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}$

zeigt in Richtung $\underline{v}$
und hat die Länge $|\underline{w}| = 1$,
da $|\underline{w}| = \sqrt{\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2 + \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2} = \sqrt{\frac{1}{2} + \frac{1}{2}} = \sqrt{1} = 1$

Vorgehensweise: Normierung eines Vektors

- Gegeben ist ein Vektor $\underline{v} = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix}$
- Länge des Vektors: $|\underline{v}| = \sqrt{v_1^2 + v_2^2 + .. + v_n^2}$
- $\underline{w} = \frac{\underline{v}}{|\underline{v}|} = \frac{1}{|\underline{v}|} \cdot \underline{v}$ ist der Vektor, der in die gleiche Richtung wie $\underline{v}$ zeigt und die Länge $|\underline{w}| = 1$ hat.

Skalarprodukt ↓ wo geht es hin? auch hier brauchen wir Normierung. Siehe unten Projektions-Vektor

Skalarprodukt von Vektoren - physikalische Veranschaulichung

- Das Skalarprodukt entspricht der Arbeit, die unter der Einwirkung einer konstanten Kraft geleistet wird.

- Sind Kraft und Bewegungsrichtung gleichgerichtet, dann ist die Arbeit:

  $W = |\underline{F}| \cdot |\underline{s}|$

- Kann sich ein Massenpunkt aber nur entlang einer Richtung $\underline{e}_s$ bewegen, die nicht mit der Kraft übereinstimmt, dann ist die geleistete Arbeit die Komponente $|\underline{F}_s|$ der Kraft $\underline{F}$ in Richtung $\underline{e}_s$ multipliziert mit dem Weg $|\underline{s}|$:

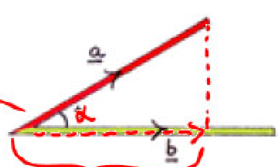
  $W = |\underline{F}_s| \cdot |\underline{s}| = |\underline{F}| \cdot \cos\alpha \cdot |\underline{s}|$

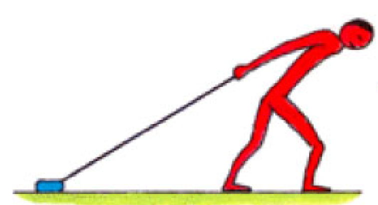
- Allgemein ist die Arbeit W das Skalarprodukt aus Kraft und Weg:

  $W = \langle \underline{F}, \underline{s} \rangle \; (= \underline{F} \cdot \underline{s})$

- **Skalar-Produkt** (oder auch Punkt-Produkt oder inneres Produkt)

da $\cos\alpha = \frac{|a_b|}{|a|}$





$\underline{a} \cdot \underline{b} = |\underline{a}|\,|\underline{b}| \cos\alpha$

aus http://www.netcomuk.co.uk/~jenolive/vect6.html

Projektion von $\underline{a}$ auf $\underline{b}$

d.h. der Anteil von $\underline{a}$ der in Richtung $\underline{b}$ wirkt

$|a_b| = |a| \cdot \cos\alpha$ mit $\underline{a}_b = \underbrace{\underline{b} \cdot \frac{1}{|\underline{b}|}}_{\text{auf 1 normierter Vektor } \underline{b}} |\underline{a}_b|$ } Projektions-vektor

$\boxed{\text{Skalarprodukt}}$ $\underline{a} \cdot \underline{b} = \langle \underline{a}, \underline{b} \rangle = |\underline{a}_b| \cdot |\underline{b}| = |\underline{a}| \cdot \cos\alpha \cdot |\underline{b}|$

$\boxed{\langle \underline{a}, \underline{b} \rangle = |\underline{a}|\,|\underline{b}| \cos\alpha}$

Sonderfälle
$\alpha = 0$
$\cos\alpha = 1$
$\Rightarrow \langle \underline{a}, \underline{b} \rangle = |a| \cdot |b|$

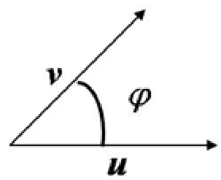
$\alpha = 90° \Rightarrow \cos\alpha = 0$
$\Rightarrow \langle a, b \rangle = 0$

Skalarprodukt (oder inneres Produkt oder Punktprodukt genannt)

Das **Skalarprodukt** $<\boldsymbol{uv}>$ (auch inneres Produkt $\boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{v}$ bezeichnet) zweier Vektoren

$\boldsymbol{u} = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \vdots \\ u_n \end{pmatrix}$ und $\boldsymbol{v} = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix}$ ist eine skalare Größe und ist definiert durch

$$\boxed{\boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{v} := <\boldsymbol{uv}> := |\boldsymbol{u}||\boldsymbol{v}|\cos\varphi, \quad mit\ \varphi\, Winkel\ zwischen\ \boldsymbol{u}\, und\ \boldsymbol{v}}$$



1.Berechnungsmöglichkeit

Das Skalarprodukt läßt sich außerdem über die Summe der einzelnen Komponenten der Vektoren berechnen.

$$\boxed{<\boldsymbol{uv}> = \boldsymbol{u}^T\boldsymbol{v} = \begin{pmatrix} u_1 & u_2 & \cdots & u_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix} = \sum_{i=1}^{n} u_i v_i}$$

2.Berechnungsmöglichkeit

Zwei Vektoren heißen **orthogonal**, wenn $\boldsymbol{v}^T\boldsymbol{u} = 0$, d.h. die beiden Vektoren stehen senkrecht (normal, im rechten Winkel) aufeinander.

Der **Betrag (Norm, Länge) eines Vektors** läßt sich mit Hilfe des Skalarproduktes auch wie folgt angeben:

$$|\boldsymbol{v}| = \sqrt{\boldsymbol{v}^T\boldsymbol{v}}$$

Der **Winkel zwischen zwei Vektoren** lässt sich mit Hilfe des Skalarproduktes und der Beträge der Vektoren berechnen:

$$\cos\varphi = \frac{<\boldsymbol{uv}>}{|\boldsymbol{v}||\boldsymbol{u}|} \quad mit\ 0 \le \varphi \le 360°\ Winkel\ zwischen\ \boldsymbol{u}\ und\ \boldsymbol{v}$$

Gesetze für das Rechnen mit Skalarprodukten

Es gilt: $\langle \underline{u}, \underline{v} \rangle = \langle \underline{v}, \underline{u} \rangle$ Kommutativ

$\lambda \langle \underline{u}, \underline{v} \rangle = \langle \lambda \underline{u}, \underline{v} \rangle = \langle \underline{u}, \lambda \underline{v} \rangle$ „assoziativ" $\lambda \in \mathbb{R}$

$\langle \underline{u}, \underline{v}+\underline{w} \rangle = \langle \underline{u}, \underline{v} \rangle + \langle \underline{u}, \underline{w} \rangle$ distributiv nächste Woche

Vektorprodukt (oder Kreuzprodukt
oder äußeres Produkt bezeichnet)

Definition 9.6: Vektorprodukt (für Vektoren im $\mathbb{R}^3$)

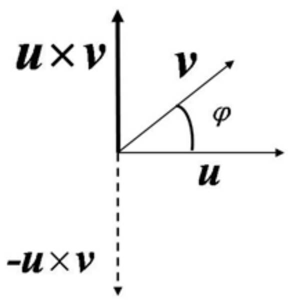
Im dreidimensionalen Raum $\mathbb{R}^3$ definiert man für zwei Vektoren Vektoren

$\boldsymbol{u} = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{pmatrix}$ und $\boldsymbol{v} = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix}$ das **Vektorprodukt** $\boldsymbol{u} \times \boldsymbol{v}$ (auch **Kreuzprodukt** bezeichnet)
wie folgt

$$\boldsymbol{u} \times \boldsymbol{v} = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u_2v_3 - u_3v_2 \\ u_3v_1 - u1v_3 \\ u_1v_2 - u_2v_1 \end{pmatrix}$$

Das Vektorprodukt hat folgende Eigenschaften:

(1) Der Vektor $\boldsymbol{w} = \boldsymbol{u} \times \boldsymbol{v}$ ist senkrecht zu $\boldsymbol{u}$ und $\boldsymbol{v}$, d.h. es gilt $\boldsymbol{w}^T\boldsymbol{u} = 0$ und $\boldsymbol{w}^T\boldsymbol{v} = 0$.



(2) Für den Betrag gilt:

$$|\boldsymbol{w}| = |\boldsymbol{u} \times \boldsymbol{v}| := |\boldsymbol{u}||\boldsymbol{v}|\sin\varphi, \quad mit\ 0 \le \varphi \le 90°\ Winkel\ zwischen\ \boldsymbol{u}\ und\ \boldsymbol{v}$$

(3) Das Vektorprodukt ist nicht kommutativ: $\boldsymbol{u} \times \boldsymbol{v} = -\boldsymbol{v} \times \boldsymbol{u}$

weitere Rechenregeln für das Vektorprodukt

$\lambda(\underline{u} \times \underline{v}) = (\lambda \underline{u}) \times \underline{v} = \underline{u} \times (\lambda \underline{v})$

$\underline{u} \times (\underline{v} + \underline{w}) = (\underline{u} \times \underline{v}) + (\underline{u} \times \underline{w})$

(4) $|\underline{u} \times \underline{v}|$ = Fläche des von $\underline{u}$ und $\underline{v}$ aufgespannten Parallelogramms