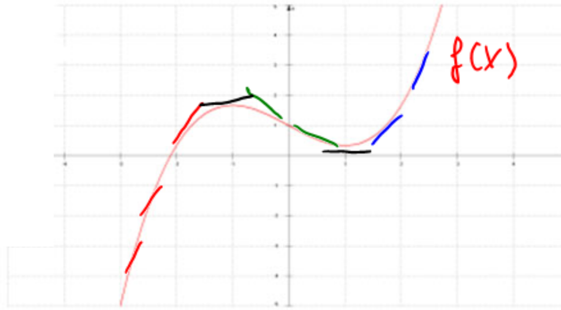
Vorlesung 5 am 29.9.2022

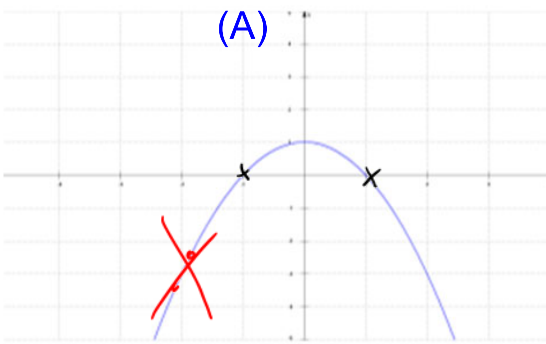
Inhalt: Integralrechnung - Crashkurs

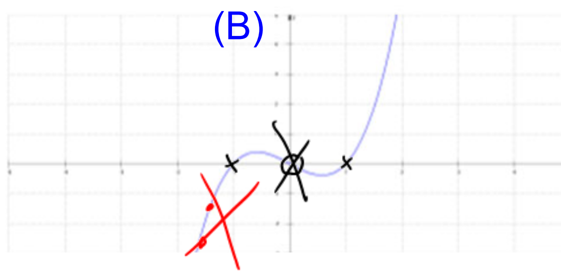
- **Einführung Integralrechnung**
  - Zusammenhang Differentialrechnung
  - Graphische Bedeutung
  - Stammfunktion
  - Unbestimmtes Integral
  - Bestimmtes Integral - Flächenberechnung
  - Ein paar Integrationsregeln

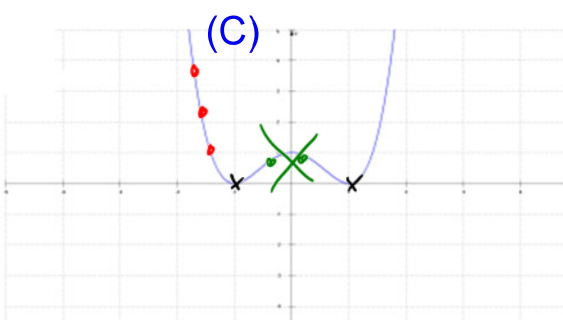
Einstiegsfrage 1:

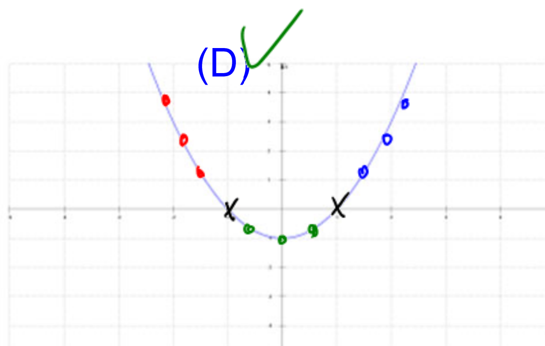
Welche dieser Funktionen
ist die zu **f(x)**
gehörige Funktion **f´(x)**?











Graphische Konstruktion einer Ableitungsfunktion - Vorgehensweise:

(1) Steigung =0 $\Rightarrow$ Ableitungsfunktion hat Funktionwert 0

(2) positive Steigungen $\Rightarrow$ Ableitungsfunktion hat positive Funktionswerte

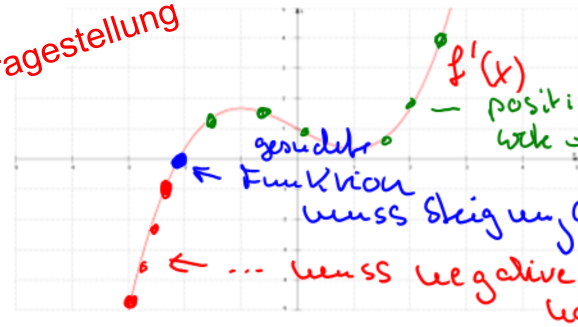
(3) negative Steigungen $\Rightarrow$ Ableitungsfunktion hat negative Funktionswerte

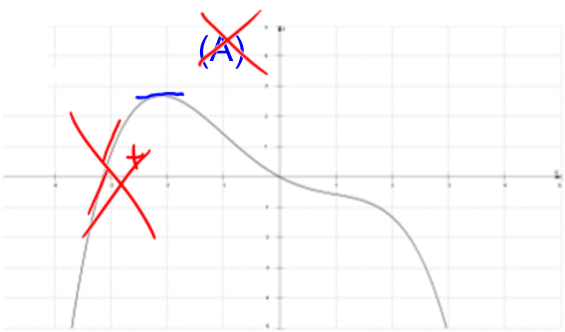
(4) Punkte zu einem Funktionsverlauf verbinden

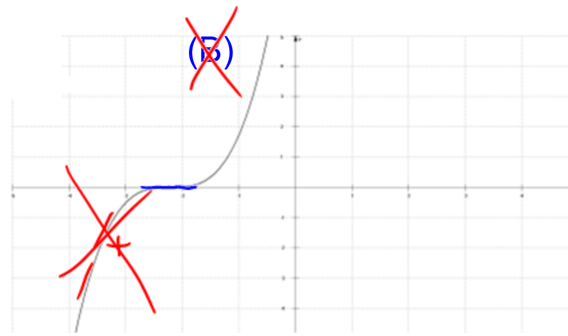
Einstiegsfrage 2:

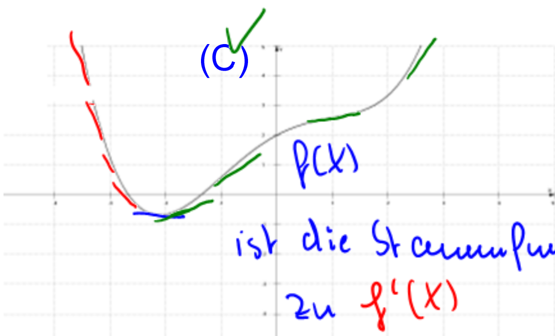
Welche dieser Funktionen ist die zu **f´(x)** gehörige Funktion **f(x)**?

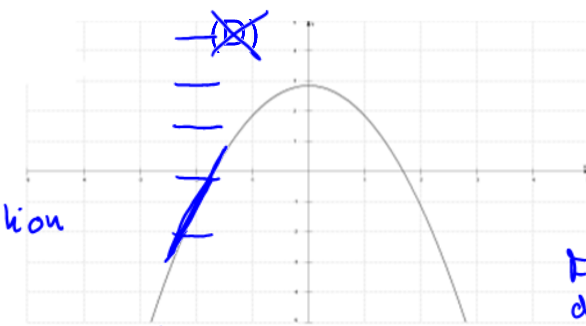
! andere Fragestellung











Höhenverschiebung

$$\int \underbrace{f'(x)}_{\text{Funktion, die die Steigungen einer gesuchten Funktion angibt}} dx = \underbrace{f(x)}_{\text{Stammfunktion}} + C$$

Funktion, die die Steigung hat

$$\int \underbrace{f(x)}_{\text{Funktion der Steigungen}} dx = \underbrace{F(x)}_{} + C$$

$F'(x) = f(x)$

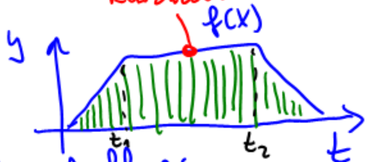
Graphische Konstruktion einer Stammfunktion - Vorgehensweise:

(1) Funktionswerte in f'(x) =0 ⇒ Stammfunktion hat Steigung 0

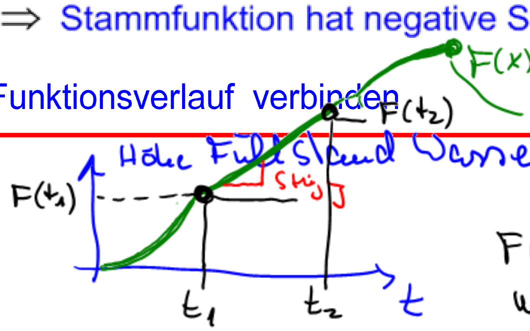
(2) positive Funktionswerte ⇒ Stammfunktion hat positive Steigungen

(3) negative Funktionswerte ⇒ Stammfunktion hat negative Steigungen

(4) Tangentenstücke zu einem Funktionsverlauf verbinden



Wasserhahn Wasserdurchfluss



Höhe Füllstand Wassereimer

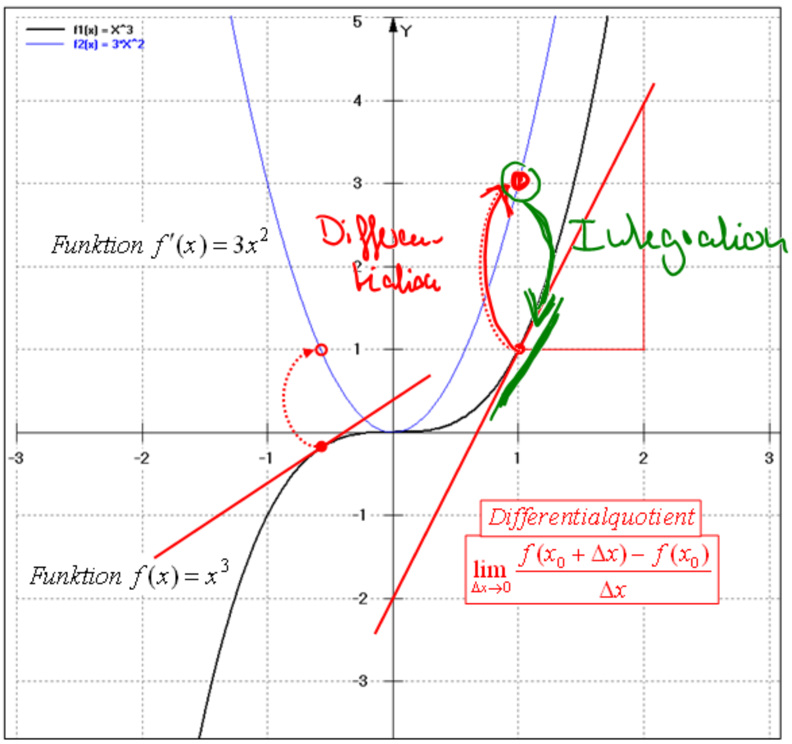
Wieviel Wasser ist im Eimer

$F(t_2) - F(t_1)$ Wassermenge, die zwischen t_1 und t_2 geflossen ist

Veranschaulichung:

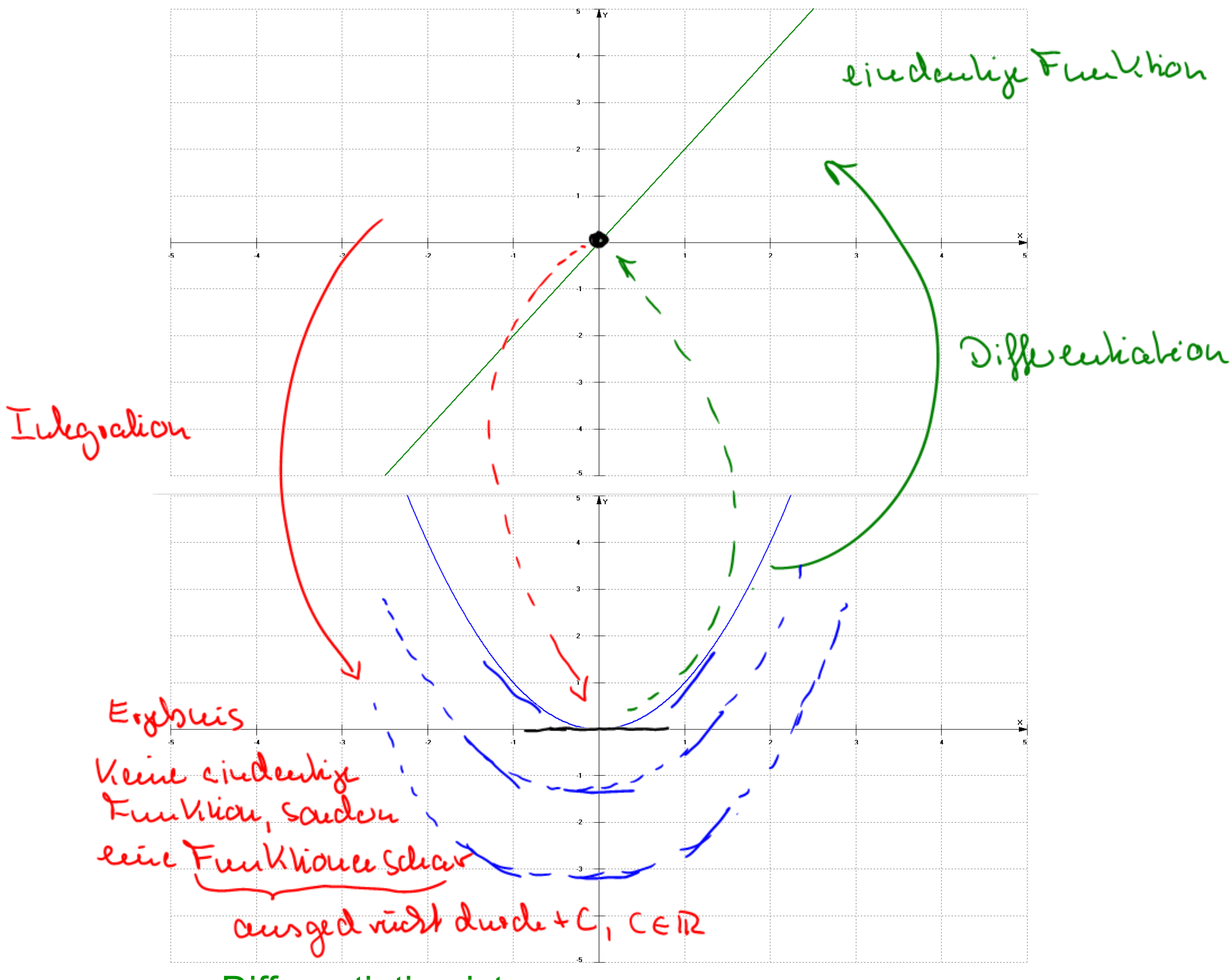
Funktion der 1.Ableitung: Werte der Differentialquotienten in allen Punkten x_0 der Funktion f

$$\boxed{1.\mathit{Ableitung}\ \ f':\ x_0} \longrightarrow \begin{array}{c}\boxed{\mathit{Differentialquotient}}\\ \boxed{\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}}\end{array}$$



•

Zusammenhang Differentiation und Integration



Differentiation ist ....

die Schlussfolgerung von einer gegebenen Funktion auf die Funktion, die die Steigungswerte als Funktionswerte hat.

Integration ist ....

die Schlussfolgerung von einer gegebenen Funktion mit Steigungswerten auf die Funktion, die diese Werte als Tangentensteigungen hat.

Grafische Ermittlung einer Stammfunktion zu einer gegebenen Funktion f

Gegeben:

$(f'(x))$

Eine **Funktion f(x)** mit den Steigungen einer gesuchten Funktion F(x).

Gesucht:

Stammfunktion F(x) mit $F'(x) = f(x)$

anders formuliert

Stammfunktion $F(x) + C = \int f(x)\,dx$ $(f'(x))$

$(F(x)+C)' = F'(x) + (C)' = F'(x) = f(x)$

Konstante $C \in \mathbb{R}$

Graphische Konstruktion einer Stammfunktion - Vorgehensweise:

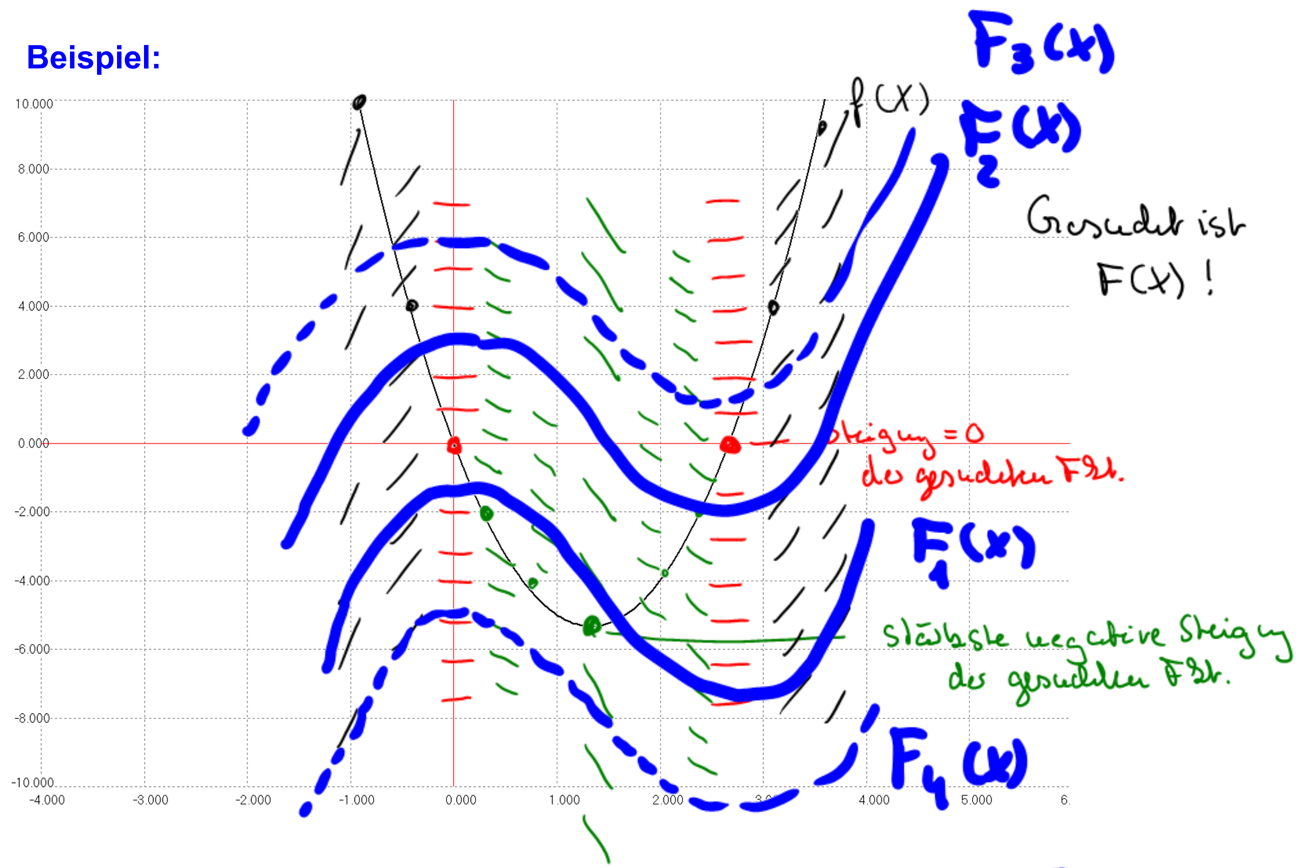
(1) Funktionswerte =0 ⇒ Stammfunktion hat Steigung 0

(2) positive Funktionswerte ⇒ Stammfunktion hat positive Steigungen

(3) negative Funktionswerte ⇒ Stammfunktion hat negative Steigungen

(4) Konstruktion kleiner Tangentenstücke aufgrund der Steigungsinformation in f(x) / Verbindung der Tangentenstücke zu einer Skizze des Funktionsverlaufs

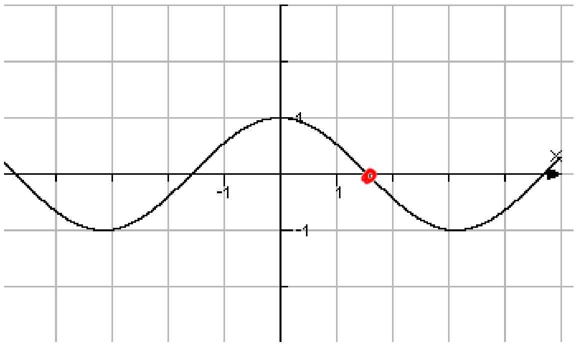
Beispiel:



$F(x) + C$ mit $(F(x)+C)' = f(x)$

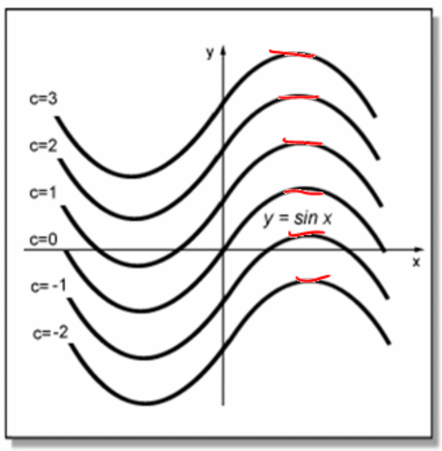
$F(x) + C,\ C \in \mathbb{R}$ bzw. Höhenverschie-

Beispiel: Graphische Ermittlung der Stammfunktion



Beispiel:

$$\int \underbrace{\cos x}_{f(x)}\, dx = \underbrace{\sin x}_{F(x)} + C \quad , \text{ mit } C \in \mathbb{R}$$



Rückblick

Integration ist die Umkehrung der Differentiation

Funktion

Funktion

$f(x)$

Ableitungsfunktion

Integration

$\int f(x)dx = F(x) + C$ mit $C \in \mathbb{R}$

Differentiation

$F'(x) = f(x)$

Stammfunktion

$F(x)$

Funktion

Funktion

Beispiel:

Beschleunigungs-Zeit-Diagramm

a(t)

$\int a(t)dt = v(t)$

Integration

Differentiation

$v'(t) = a(t)$

Geschwindigkeits-Zeit-Diagramm

v(t)

$\int v(t)dt = s(t)$

Integration

Differentiation

$s'(t) = v(t)$

Weg-Zeit-Diagramm

s(t)

Definitionen

8.1.1 Das unbestimmte Integral

Definition 8.1: Stammfunktion

Die auf dem Intervall $[a,b]$ differenzierbare Funktion $F(x)$ heißt **Stammfunktion** von $f(x)$, wenn für alle $x \in [a,b]$ gilt:

$$F'(x) = f(x).$$

Beispiel: $F(x) = \dfrac{x^3}{3}$ *ist eine Stammfunktion zu* $f(x) = x^2$

$$\left(\frac{x^3}{3}\right)' = \frac{1}{3}\left(x^3\right)' = \frac{1}{\cancel{3}} \cdot \cancel{3}x^2 = x^2$$

Satz 8.1:

Ist $F(x)$ eine Stammfunktion der Funktion $f(x)$, so hat jede andere Stammfunktion von $f(x)$ die Form $F(x)+C$ mit $C \in \mathbb{R}$ eine beliebige reelle Konstante, d.h. zwei Stammfunktionen unterscheiden sich nur um eine Konstante.

Beispiel: $F(x) = \dfrac{x^3}{3} + 1$ *ist auch eine Stammfunktion zu* $f(x) = x^2$

$$\left(\frac{x^3}{3} + C\right)' = \left(\frac{x^3}{3}\right)' + (C)' = \frac{1}{3} \cdot 3x^2 + 0 = x^2$$

Definition 8.2: Unbestimmtes Integral

Das unbestimmte Integral $\int f(x)dx$ ist die Menge aller Stammfunktionen von $f(x)$: $\int f(x)dx = \underbrace{F(x)+C}_{\text{Kurzschreibweise}},\ C \in \mathbb{R}$.

Beispiel:

$$\int x^2 dx = \frac{x^3}{3} + C,\ C \in \mathbb{R} \quad \textit{ist das unbestimmte Integral}$$

Potenzregel - allgemeines Integral einer Potenz von x

***allgemein*:**

Merkregel für Integration von Potenzen
- Exponent um 1 erhöhen
- durch den neuen Exponenten teilen

$$\boxed{\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C,}\quad C \in \mathbb{R} \quad \textit{ist das unbestimmte Integral}$$

$n \neq -1$!

$$\left(\frac{x^{n+1}}{n+1} + C\right)' = \left(\frac{1}{n+1}\cdot x^{n+1}\right)' + (C)' \overset{\text{Faktorregel}}{=} \frac{1}{n+1}\cdot\left(x^{n+1}\right)' + (C)' = \frac{1}{\cancel{n+1}}\cdot(\cancel{n+1})\,x^{\overbrace{(n+1)-1}^{n}} + 0 = x^n$$

Beispiele:

$$\int x^{13}dx = \frac{x^{14}}{14} + C,\ C\in\mathbb{R}$$

$$\int \underbrace{\sqrt{x}}_{x^{\frac12}}\,dx = \frac{x^{\frac12+1}}{\frac12+1} + C = \frac{x^{\frac32}}{\frac32} + C = \frac{2}{3}\cdot x^{\frac32} + C$$

$$\int \underbrace{\frac{1}{\sqrt{x}}}_{x^{-\frac12}}\,dx = \frac{x^{-\frac12+1}}{\underbrace{-\frac12+1}_{\frac12}} + C = 2\cdot x^{\frac12} + C = 2\sqrt{x} + C$$

$$= \frac{x^{\frac12}}{\frac12} = \frac{\frac{\sqrt{x}}{1}}{\frac{1}{2}} = \frac{2\cdot\sqrt{x}}{1\cdot 1} = 2\sqrt{x}$$

$$\int 1\,dx = \int \underbrace{x^0}_{1}\,dx = \frac{x^{0+1}}{0+1} + C = x^1 + C = x + C$$

$(x)' = 1$

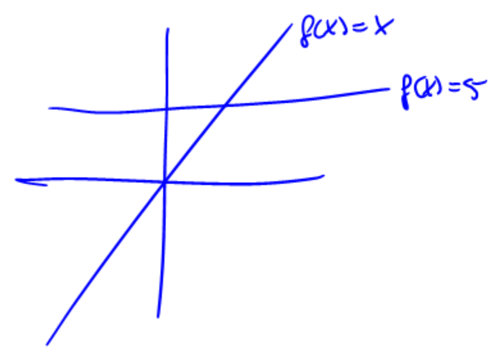
$(5)' = 0$

$$\int 5\cdot 1\,dx = 5\cdot\int 1\,dx = 5x + C$$

Aber:

$$\int \frac{1}{x}\,dx = \ln|x| + C$$

$$= \int x^{-1}dx \neq \cancel{\frac{x^{-1+1}}{\underbrace{-1+1}_{=0}}}$$



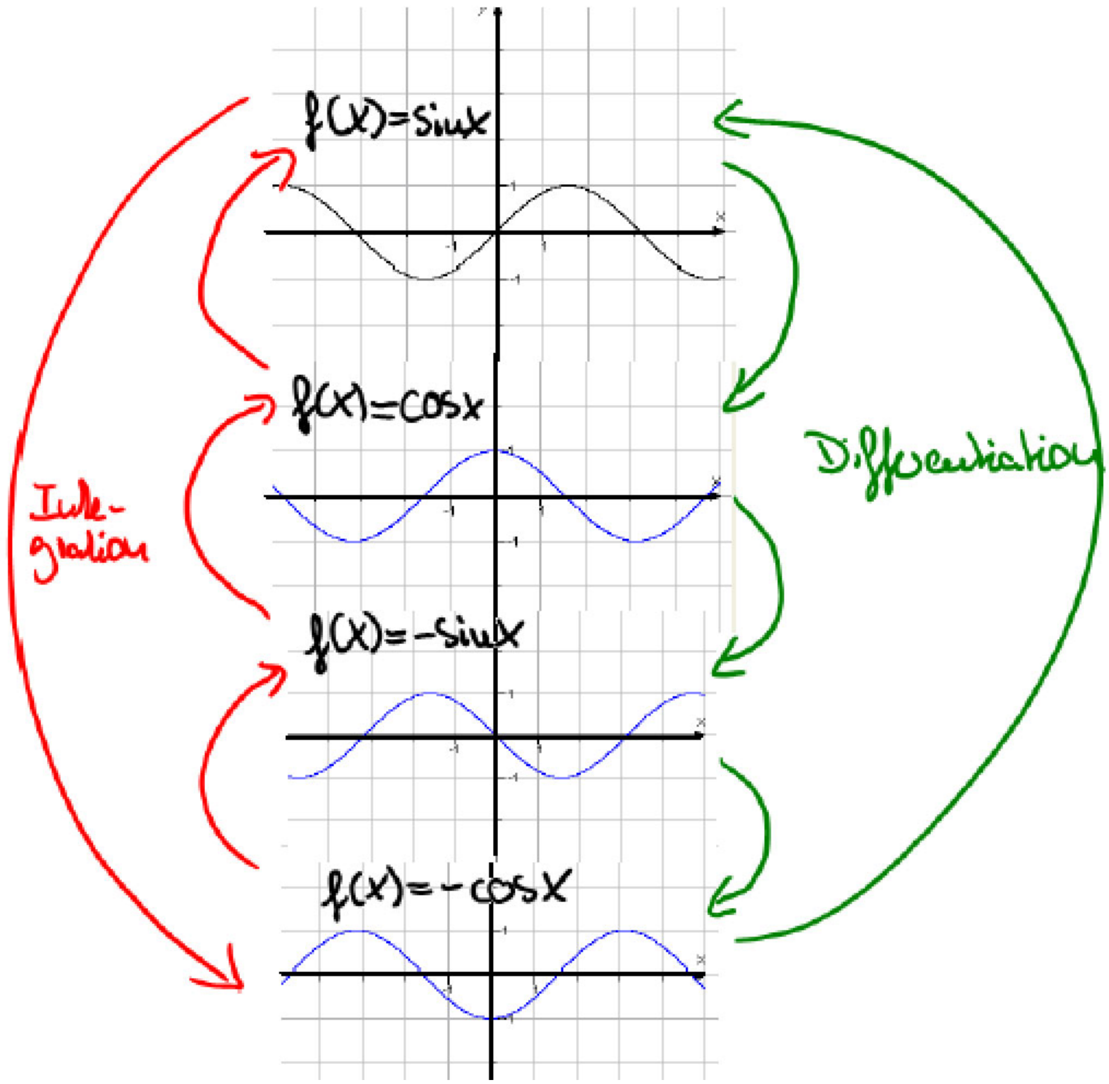
8.1.2 Tabelle der grundlegenden Stammfunktionen

$$\int f(x)\,dx = F(x)+C,\ C\in\mathbb{R}\ bzw.\ F'(x)=f(x)$$

Differentiation

$f(x)$	Integration	$F(x)$
$r,\ r\in\mathbb{R}$		$rx,\ r\in\mathbb{R}$
x^n		$\frac{x^{n+1}}{n+1},\ n\in\mathbb{N}$, $n\in\mathbb{R}\setminus\{-1\}$ $n\neq -1$
$\frac{1}{x}$		$\ln\lvert x\rvert,\ x\neq 0$
$\ln(x)$		$x\ln(x)-x,\ x>0$
e^x		e^x
e^{ax}		$\frac{1}{a}e^{ax},\ a\neq 0$
a^x		$\frac{1}{\ln a}a^x,\ a>0$
$\sin(x)$		$-\cos(x)$
$\cos(x)$		$\sin(x)$
$\tan(x)$		$-\ln\lvert\cos(x)\rvert,\ x\neq(2k+1)\frac{\pi}{2}$
$\cot(x)$		$\ln\lvert\sin(x)\rvert,\ x\neq k\pi$
$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$		$\arcsin(x),\ \lvert x\rvert<1$
$\frac{1}{1+x^2}$		$\arctan(x)$
$\frac{1}{1-x^2}$		$\frac{1}{2}\ln\frac{1+x}{1-x}=ar\tanh(x),\ \lvert x\rvert<1$
$\frac{1}{\sin^2 x}$		$-\cot(x)$
$\frac{1}{\cos^2 x}$		$\tan(x)$

Differentiation und Integration der trigonometrischen Funktionen



.

Frage 4:

Bestimmen Sie ~~die~~ eine Stammfunktion F(x) der Funktion f(x) = $(1-x)^2$?

(A) $\left(F(x)\right)' = \left(\frac{1}{3}(1-x)^3\right)' = \frac{1}{\cancel{3}}\cancel{3}(1-x)^2\cdot(-1) = -(1-x)^2$

(B) $\left(F(x)\right)' = \left(-\frac{1}{3}(1-x)^3\right)' = -\frac{1}{\cancel{3}}\cdot\cancel{3}(1-x)^2\cdot(-1) = +(1-x)^2$ ✓

(C) $F(x) = 2(1-x)$

(D) $F(x) = -2(1-x)$

(E) $F(x) = -2(1-x)^2$

Erläuterung des Beispiels: Integrieren bei einer verketteten Funktion mit einem innen liegenden linearen Ausdruck

Weitere Beispiele:

$$\int (10x+3)^7 dx = \frac{1}{8}\cdot(10x+3)^8\cdot\frac{1}{10} + C = \frac{(10x+3)^8}{80} + C$$

$$= \frac{(10x+3)^8}{8\cdot 10}$$

$$\int \cos(2x)\,dx = \frac{1}{2}\cdot\sin(2x) + C$$

$(2x)' = 2$

$$\left(\frac{1}{2}\cdot\sin(2x) + C\right)' = \frac{1}{\cancel{2}}\cos(2x)\cdot\cancel{2}$$

Funktion mit innen liegender linearer Funktion

Potenzfunktion mit innen liegender linearer Funktion (Gerade)

$$f(x) = (ax+b)^n$$

$$F(x) = \frac{(ax+b)^{n+1}}{(n+1)\cdot a}$$

!!!! und nur dann

Potenzregel + zusätzlich Division durch die Ableitung der inneren linearen Funktion

Kettenregel

Probe: $$(F(x))' = \left(\frac{(ax+b)^{n+1}}{(n+1)\cdot a}\right)' = \frac{1}{\cancel{(n+1)}\cdot \cancel{a}} \cdot \underbrace{\cancel{(n+1)}\,(ax+b)^n}_{\text{äußere Abl.}} \cdot \underbrace{\cancel{a}}_{\text{innere Ableitung}} = (ax+b)^n = f(x) \checkmark$$

$$= \frac{1}{(n+1)\cdot a}\cdot\left((ax+b)^{n+1}\right)'$$

Allgemeine Funktion mit innen liegender linearer Funktion

äußere Grundfunktion g

$$f(x) = g(\underline{ax+b})$$

innen liegender linearer Ausdruck

$$F(x) = \underbrace{G(ax+b)}_{\text{Stammfunktion der Grundfunktion}} \cdot \underbrace{\frac{1}{a}}_{\text{Division durch Ableitung der inneren Funktion}}$$

Prüfen der grundlegenden Stammfunktion durch Ableiten der Stammfunktion

	Funktion $f(x)$	Integrieren / Diff.	Stammfunktion $F(x)$
(1)	$r,\ r\in\mathbb{R}$		$rx,\ r\in\mathbb{R}$
(2)	x^n		$\frac{x^{n+1}}{n+1},\ n\in\mathbb{N}$
(3)	$\frac{1}{x}$		$\ln\lvert x\rvert,\ x\neq 0$
(4)	$\ln(x)$		$x\ln(x)-x,\ x>0$
(5)	e^x		e^x
(6)	e^{ax}		$\frac{1}{a}e^{ax},\ a\neq 0$
(7)	a^x		$\frac{1}{\ln a}a^x,\ a>0$

$\int \frac{1}{x}\,dx = \ln\lvert x\rvert + C$

$\int \ln x\,dx = x\cdot\ln x - x + C$

$\int e^x\,dx = e^x + C$

$\int e^{ax}\,dx = \frac{e^{ax}}{a} + C$

(1) $(r\cdot x)' = r$

(2) $\left(\frac{x^{n+1}}{n+1}\right)' = (n+1)\frac{x^n}{n+1} = x^n$

(3) $(\ln\lvert x\rvert)'$:
$x>0$: $=(\ln(x))' = \frac{1}{x}$
$x<0$: $=(\ln(-x))' = \frac{1}{-x}\cdot(-1) = \frac{1}{x}$

(4) $(\underbrace{x\cdot\ln(x)}_{\text{Prod. regel}} - x)' = 1\cdot\ln(x) + x\cdot\frac{1}{x} - 1 = \ln x + 1 - 1 = \ln x$

(5) $(e^x)' = e^x$

(6) $\left(e^{ax}\cdot\frac{1}{a}\right)' = \frac{1}{\cancel{a}}\cdot e^{ax}\cdot\cancel{a} = e^{ax}$

(7) $\left(\frac{1}{\ln a}\cdot a^x\right)' = \frac{1}{\cancel{\ln a}}\cdot a^x\cdot\cancel{\ln a} = a^x$

$(a^x)' = a^x\cdot\ln a$

.

Frage 5:
Wie lautet eine Stammfunktion zu a^{bx} ?

(A) $F(x) = a^{bx}$

(B) $F(x) = ba^{bx}$

✓(C) $F(x) = \dfrac{a^{bx}}{b \ln a}$

(D) $F(x) = \dfrac{a^{bx}}{\ln a}$

(E) $F(x) = a^{bx} b \ln a$

Wie sieht das unbestimmt Integral aus?

8.1.4 Rechenregeln für Integrale

Unter der Voraussetzung, dass alle Funktionen existieren, gelten die folgenden Rechenregeln:

(1) Faktorregel

$$\int_a^b \lambda f(x)\,dx = \lambda \int_a^b f(x)\,dx$$

(2) Summenregel

$$\int_a^b f(x)+g(x)\;\;dx = \int_a^b f(x)\,dx + \int_a^b g(x)\,dx$$

jetzt

Gilt auch für unbestimmte Integrale

(3) Aneinanderreihen von Integrationsintervallen

$$\int_a^b f(x)\,dx + \int_b^c f(x)\,dx = \int_a^c f(x)dx$$

(4) Vertauschen der Grenzen

$$\int_a^b f(x)\,dx = -\int_b^a f(x)\,dx$$

(5) Sonderfall: gleiche Integrationsgrenzen

$$\int_a^a f(x)\,dx = 0$$

nächstes Semester

(6) Monotonie

$$f(x) \le g(x)\,, \forall x \in \;a,b\; \Rightarrow \int_a^b f(x)\,dx \le \int_a^b g(x)dx$$

(7) Abschätzung über den Betrag

$$\left|\int_a^b f(x)\,dx\right| \le \int_a^b |f(x)|\,dx$$

8.1.4 Rechenregeln für Integrale

Unter der Voraussetzung, dass alle Funktionen existieren, gelten die folgenden Rechenregeln:

(1) Faktorregel

$$\int \lambda f(x)\,dx = \lambda \int f(x)\,dx \;,\; \lambda \in \mathbb{R}$$

gelten für bestimmtes und unbestimmtes Integral

(2) Summenregel

$$\int \big(f(x) + g(x)\big)\,dx = \int f(x)\,dx + \int g(x)\,dx$$

Beispiele:

(1)
$$\int 2x\,dx = 2\int x\,dx = 2\left(\frac{x^2}{2} + C\right) = x^2 + C \;,\; C \in \mathbb{R}$$
$$= x^2 + \underbrace{2C}_{\in \mathbb{R}}$$
C

(2)
$$\int 2x + \sin x\,dx = \int 2x\,dx + \int \sin x\,dx$$
$$= 2\,\frac{x^2}{2} + (-\cos x) + C$$
$$= x^2 - \cos x + C \;,\; C \in \mathbb{R}$$

Unbestimmtes Integral - Bestimmtes Integral

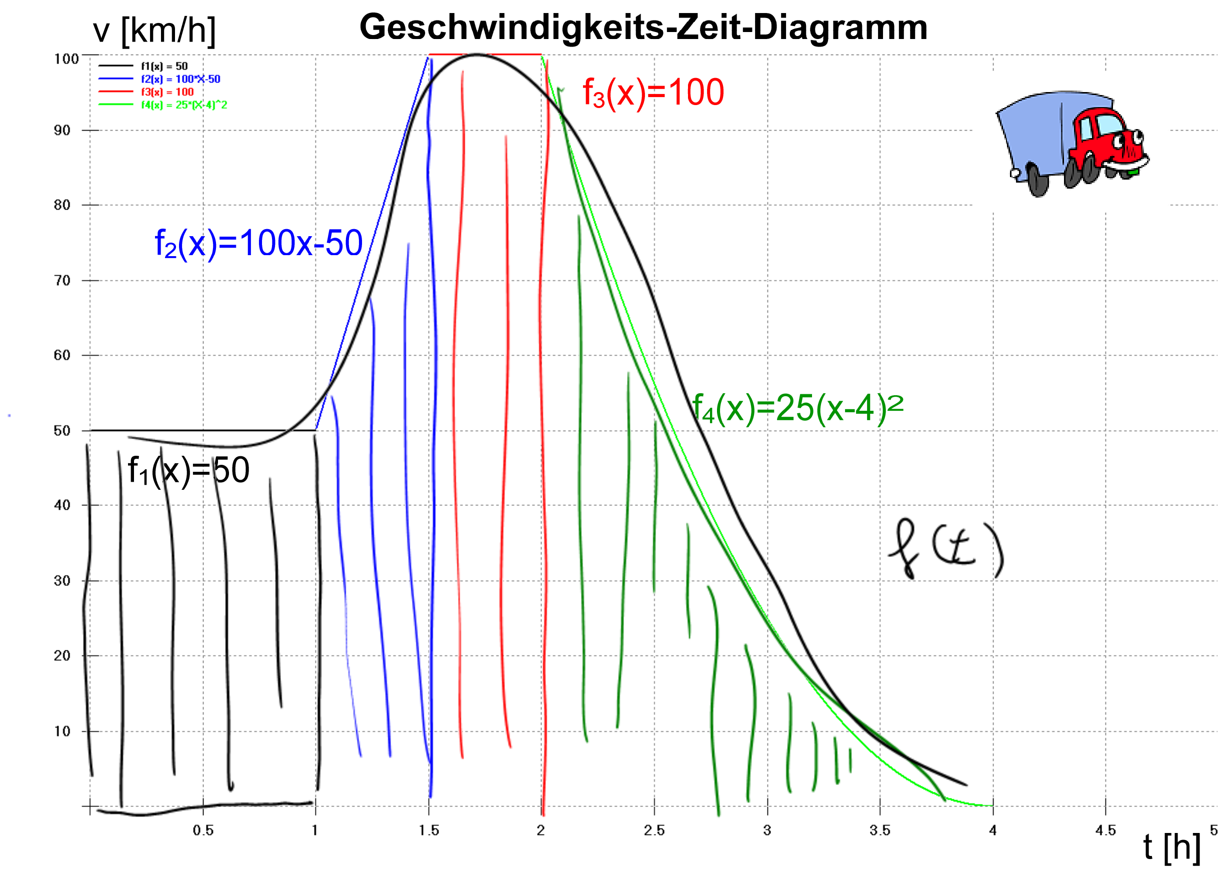
$\int f(x)dx: \quad \textit{Unbestimmtes Integral}$ ⟵ unendliche viele Funktionen

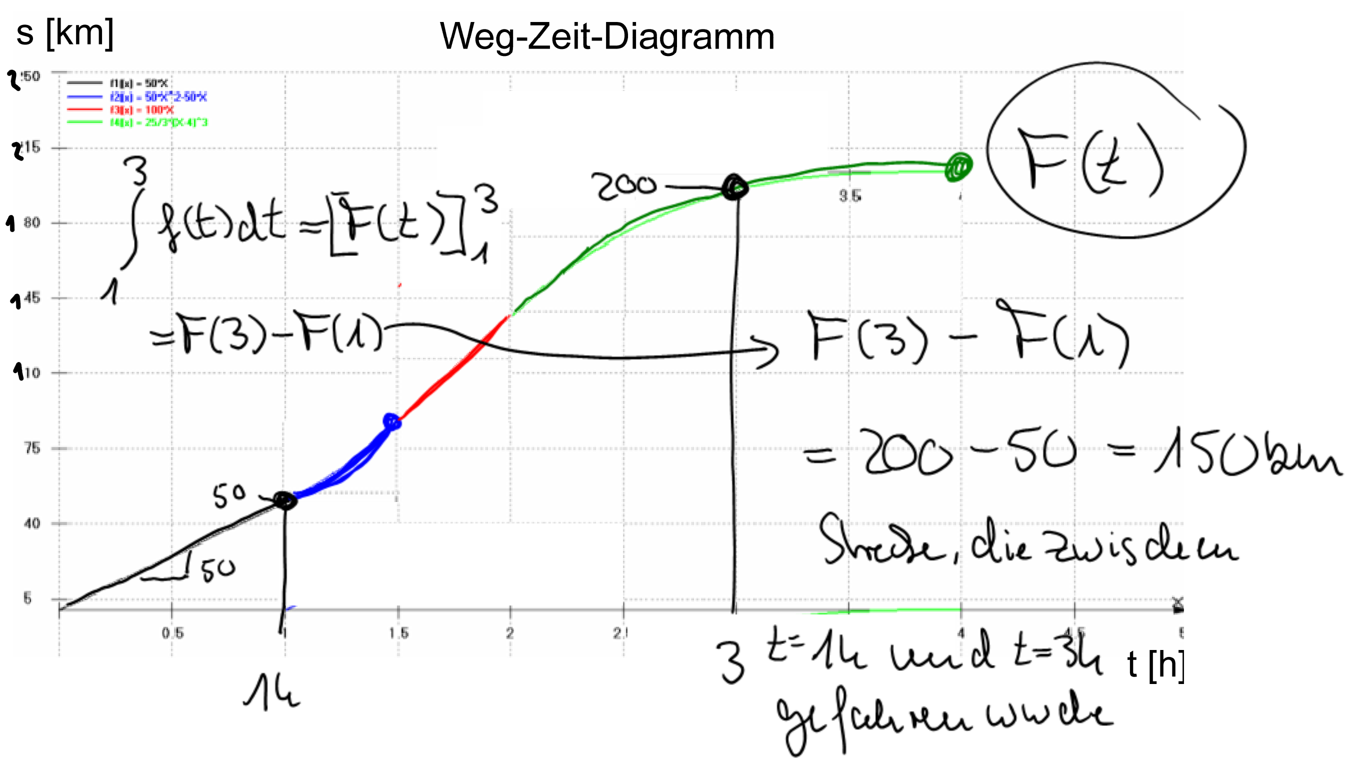
$F(x) \textit{ mit } F'(x) = f(x): \quad \textit{Stammfunktion}$ ⟵ eine Funktion

$\int_a^b f(x)dx: \quad \textit{Bestimmtes Integral}$ ⟵ ein Zahlenwert

•

Graphischer Ansatz ("Flächenbetrachtung") für die bestimmte Integration





$$\int_1^3 f(t)\,dt = \left[F(t)\right]_1^3 = F(3)-F(1) \rightarrow F(3)-F(1)$$

$$= 200 - 50 = 150\,\text{km}$$

Strecke, die zwischen $t=1h$ und $t=3h$ gefahren wurde

Erläuterungen

- gefahrene Strecke ist die Fläche unter der Funktion der Geschwindigkeit

- kontinuierliche Summation der Flächen der oberen Funktion(v-t-Diagramm) und Aufzeichnen des Flächenwertes ergibt die untere Funktion(s-t-Diagramm). Dieses ist die **Integralfunktion** und damit auch eine **Stammfunktion**

- Die gefahrene Strecke zwischen je zwei Zeitpunkten t_1 und t_2 kann aus der Differenz der Funktionswerte des s-t-Diagramms ermittelt werden.

Dieses ist dann der **Wert des bestimmten Integrals** des v-t-Diagramms zwischen den Zeitpunkten t_1 und t_2

Beispiele dazu siehe nachfolgende Seite

$[F(x)]_a^b$

$$\int_{t_1}^{t_2} v(t)dt = s(t_2) - s(t_1) \qquad allgemein: \int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a)$$

⇒ Diese beiden Berechnungsmöglichkeiten führen auf den **Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung.**

Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung

2. Version

Für eine stetige Funktion $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ gilt:

Ist F eine beliebige Stammfunktion von f, so gilt $\int_a^b f(x)\,dx = F(b)-F(a)$.

Schreibweisen: $[F(x)]_a^b$ $oder$ $F(x)|_a^b$

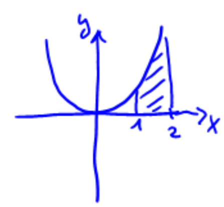
Bemerkungen:

(1) Ein bestimmtes Integral in einem Intervall [a,b] ist als Differenz der 2 Stammfunktionswerte der Intervallgrenzen F(b) und F(a) berechenbar.

(2) Bei einem bestimmten Integral kann die Integrationskonstante C vernachlässigt werden, da sie sich bei der Differenzbildung der Stammfunktionswerte weghebt!

Beispiel:

$$\int_1^2 x^2\,dx = \left[\frac{x^3}{3}\right]_1^2 = \frac{2^3}{3} - \frac{1^3}{3} = \frac{8}{3} - \frac{1}{3} = \frac{7}{3}$$



$$\int_a^b f(x)\,dx = [F(x)]_a^b = F(b) - F(a)$$

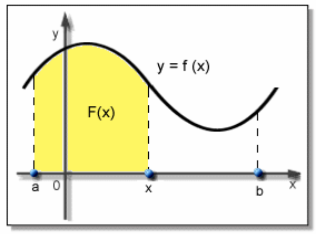
•

Satz 8.3: Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung

1. Version

Für eine stetige Funktion $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ gilt:

Das Integral als Funktion der oberen Grenze $F(x):=\int_a^x f(t)\,dt$ ist eine Stammfunktion von f.



nach Meyberg/Vachenauer

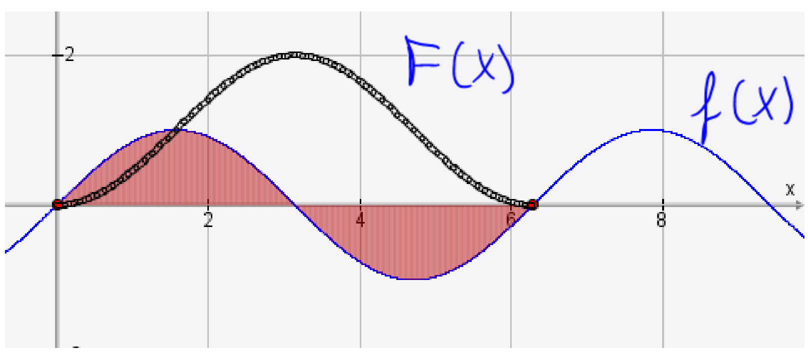
Bemerkungen:

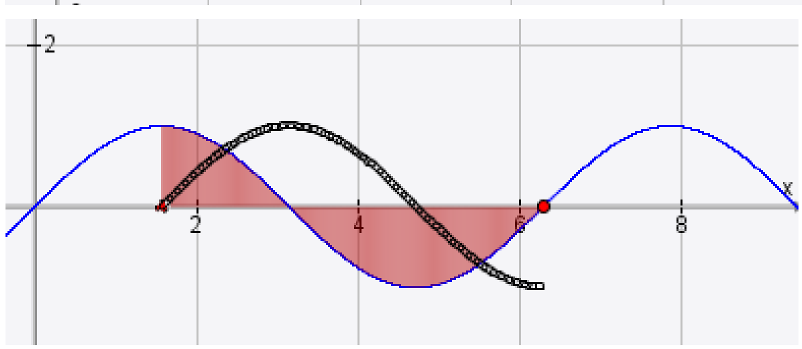
(1) Die Stammfunktion ist über $F(x) = \int_a^x f(t)\,dt$ ermittelbar.

(2) Aufsummieren der "orientierten Flächen" ergibt eine Stammfunktion.

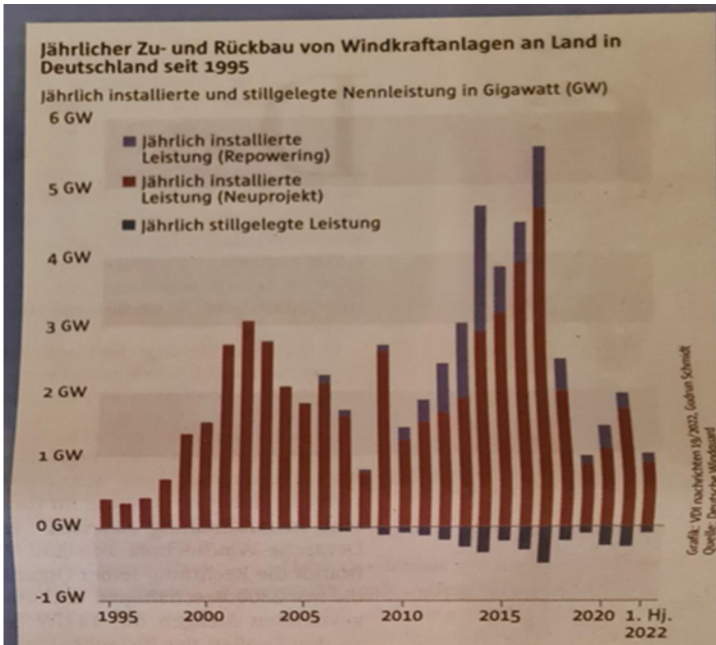
(3) Die Stammfunktion hängt vom Startpunkt a bei der Summation ab. Eine Änderung von a ergibt eine Änderung der Höhenverschiebung der Stammfunktion. Diese Höhenbverschiebung geht in die Stammfunktion in die Integrationskonstant C ein.

Beispiel: Integralfunktion ("orientierter Flächenzuwachs")





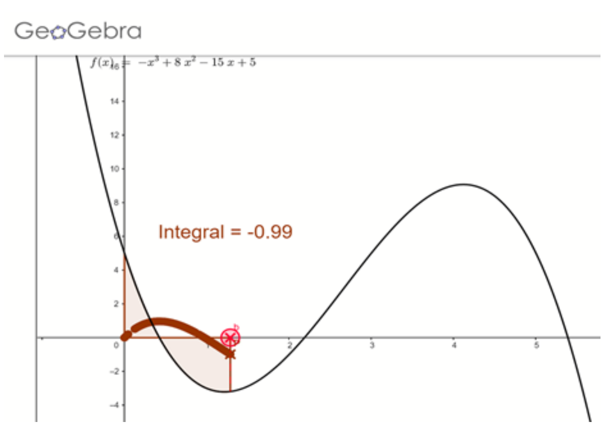
aus
VDI-Nachrichten
09/2022



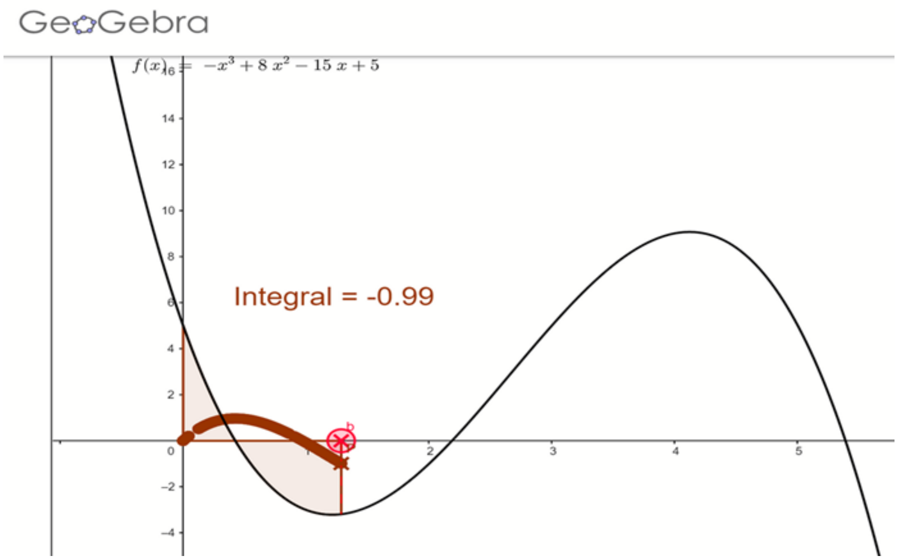
Den Zubau von Windkraftanlagen an Land in Deutschland beobachtet die Deutsche Windguard seit vielen Jahren. Im ersten Halbjahr 2022 kamen an Land 238 Anlagen mit einer Leistung von zusammen 977 MW neu hinzu, etwa so viel wie im Vorjahreszeitraum. Davon wurden 35 Anlagen mit 133 MW im Rahmen von Repowering neu errichtet. Im selben Zeitraum wurden 82 Anlagen mit 99 MW rückgebaut.

Beispiel
Integralfunktion

Die kumulierte Leistung von Windkraftanlagen in Deutschland betrug nach Angaben der Deutschen Windguard zum 30. Juni 2022 in Deutschland zusammen 56 848 MW, die bereitgestellt wurde durch 28 287 Windkraftanlagen.



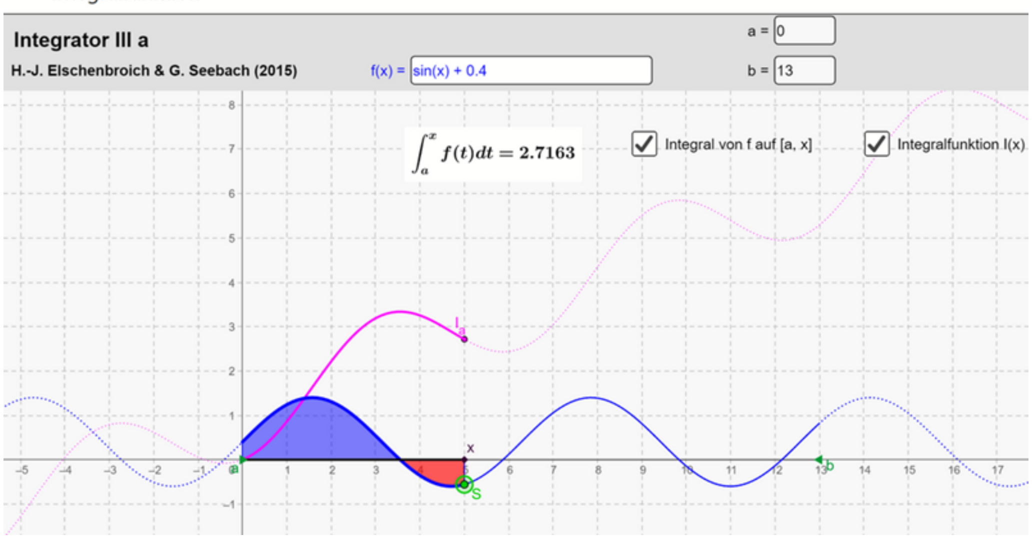
https://www.geogebra.org/m/uwG9QHZW



Visualisierung
Integralfunktion

https://www.geogebra.org/m/uwG9QHZW

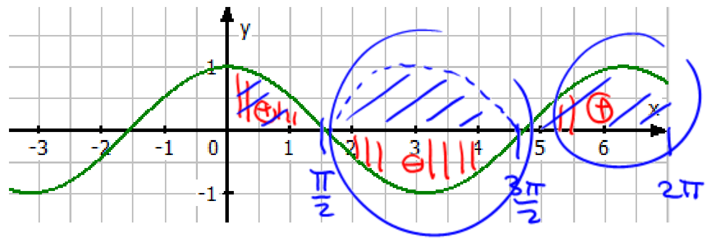
Integralfunktion



https://www.geogebra.org/m/G4ZQZVHQ

Vorgehensweise zur Berechnung des bestimmten Integrals

(1) Stammfunktion bestimmen
(2) Auswerten der Stammfunktion
 an der oberen und unteren Integrationsgrenze
(3) Differenz bilden
 ("oberer - unterer Stammfunktionswert")



Beispiele

$\boxed{\text{bestimmtes Integral}}$ $$\int_0^{2\pi} \cos x \, dx = \left[\sin x\right]_0^{2\pi} = \sin(2\pi) - \sin(0) = 0 - 0 = 0$$

$\boxed{\text{Flächenberechnung}}$ $$\int_0^{2\pi} |\cos x| \, dx = \underbrace{\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos x \, dx}_{1} + \underbrace{\int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}} -\cos x \, dx}_{2} + \underbrace{\int_{\frac{3\pi}{2}}^{2\pi} \cos x \, dx}_{1} = 4$$

! Beachtung an den Nullstellen unterbrechen

$$= \left|\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos x \, dx\right| + \left|\int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}} \cos x \, dx\right| + \left|\int_{\frac{3\pi}{2}}^{2\pi} \cos x \, dx\right|$$

$$|1| + |-2| + |1| = 4$$

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos x \, dx = \ldots \quad \text{zu Hause} \quad \ldots = 1$$

$$\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos x \, dx = \ldots \quad \text{zu Hause} \quad \ldots = 2$$

Zusammenfassung

Graphische Ermittlung einer Stammfunktion

(1) Interpretation der Steigungen der Funktion und skizzieren der Stammfunktion mit diesen Werten

(2) Skizzieren des "orientierten Flächenzuwaches"

- beginnend bei einem beliebigen x-Wert
- kontinuierlich betrachtet entspricht dieses der Integralfunktion, die eine spezielle Stammfunktion entsprechend ermittelt (Hauptsatz der Integralrechnung 1.Version)
- Flächen oberhalb der x-Achse zählen positiv, Flächen unterhalb der x-Achse negativ

Analytische Berechnung einer Stammfunktion

- Verwendung grundlegender Integrale
- Anwenden der Integrationsmethoden (partielle Integration)
- Anwenden der Integrationsregeln

Berechnung eines bestimmten Integrals

(1) analytisch

Berechnung einer Stammfunktion

Anwenden des Hauptsatzes der Integralrechung durch Einsetzen der Grenzen in die Stammfunktion

(1) Stammfunktion bestimmen

(2) Auswerten der Stammfunktion an der oberen und unteren Integrationsgrenze

(3) Differenz bilden ("oberer - unterer Stammfunktionswert")

$$\int_a^b f(x)dx = \left[F(x)\right]_a^b = F(b) - F(a)$$

(2) graphisch

Graphische Ermittlung einer Stammfunktion

Anwenden des Hauptsatzes der Integralrechung(2.Version) durch Ablesen der Stammfunktionswerte aus der Graphik

$$\int_a^b f(x)dx = ...Graphik.... = F(b) - F(a)$$

Bestimmtes Integral und Flächenberechnung

$\int f(x)dx$: *Unbestimmtes Integral* ← unendliche viele Funktionen (Stammfunktionen)

$F(x)$ *mit* $F'(x) = f(x)$: *Stammfunktion* ← eine Funktion

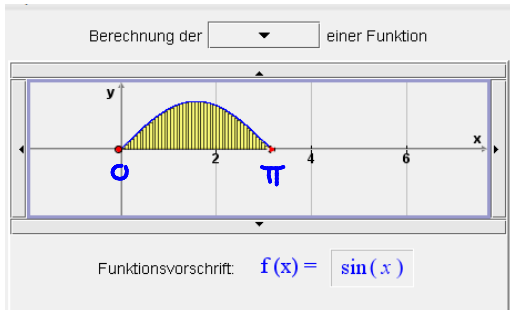
$\int_a^b f(x)dx$: *Bestimmtes Integral* ← ein Zahlenwert

$\boxed{\int_a^b |f(x)|dx : \text{ Fläche} \quad \longleftarrow \quad \text{ein Zahlenwert}}$

↳ Beispiel siehe 2 Seiten vorher

•

Beispiel: Bestimmtes Integral und Fläche

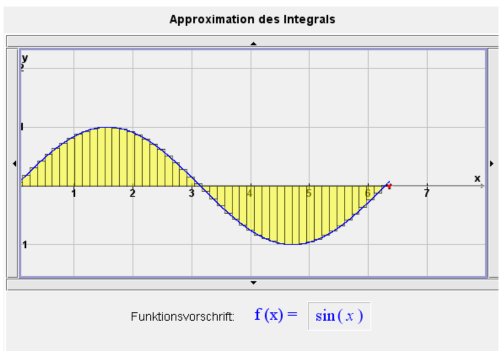


bestimmtes Integral

$$\int_0^{\pi} \sin x\,dx = \left[-\cos x\right]_0^{\pi}$$

$$= -\cos\pi - (-\cos 0)$$

$$= -(-1) - (-1) \quad = 2$$

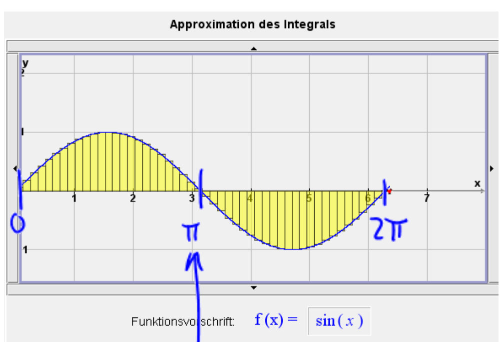


bestimmtes Integral

$$\int_0^{2\pi} \sin x\,dx = \left[-\cos x\right]_0^{2\pi}$$

$$= -\cos 2\pi - (-\cos 0)$$

$$= -1 \quad - (-1) \quad = 0$$



Unterbrechung des Integrals an der Nullstelle

Fläche

$$\int_0^{2\pi} |\sin x|\,dx$$

$$= \left|\int_0^{\pi} \sin x\,dx\right| + \left|\int_{\pi}^{2\pi} \sin x\,dx\right|$$

$$= \left|\left[-\cos x\right]_0^{\pi}\right| + \left|\left[-\cos x\right]_{\pi}^{2\pi}\right|$$

$$= \left|-\cos\pi - (-\cos 0)\right| + \left|-\cos 2\pi - (-\cos\pi)\right|$$

$$= \left|-(-1) - (-1)\right| + \left|-1 - (-(-1))\right|$$

$$= |+2| + |-2|$$

$$= 2 + 2$$

$$= 4$$

Flächenberechung zwischen einer Funktion und der x-Achse

8.5 Anwendungen

8.5.1 Flächenberechnung

(1) Fläche zwischen Kurve und x-Achse

Die Berechnung der Fläche F zwischen der Kurve und der x-Achse muss abhängig vom Kurvenverlauf unterschiedlich durchgeführt werden:

(a) Kurve verläuft oberhalb der x-Achse

$$F = \int_a^b f(x)dx$$

(b) Kurve verläuft unterhalb der x-Achse

$$F = \int_a^b -f(x)dx$$

allgemein

$$F = \int_a^b | f(x) | \, dx$$

(c) Kurve verläuft oberhalb und unterhalb der x-Achse

- Zerlegung des Integrationsintervalls an den Nullstellen
- Berechnung der Teilflächen wie bei (a) oder (b)
- Addition der Teilflächen

1.Möglichkeit

- Zerlegung an den Nullstellen
- Berechnung der einzelnen bestimmten Integrale in den Intervallen mit jeweiler Bestimmung der einzelnen Beträge
- Addition der Beträge

2.Möglichkeit

- Betragsstriche unter dem Integral anwenden
- Vorgehen dann aber wie bei 1. oder 2.Möglichkeit

3.Möglichkeit

•

Wie kann man die Fläche zwischen einer Funktion und der x-Achse berechnen?

$$\boxed{F = \int_a^b | f(x) | \, dx}$$

Vorgehensweise zur Berechnung der Fläche zwischen Funktion und x-Achse:

Flächenberechnung ist erkennbaran den Betragsstrichen der Funktion innerhalb des Integrals ((Eine Flächenberechnung wird formuliert mit Betragsstrichen des Integranden)

(1) Nullstellen der Funktion ermitteln

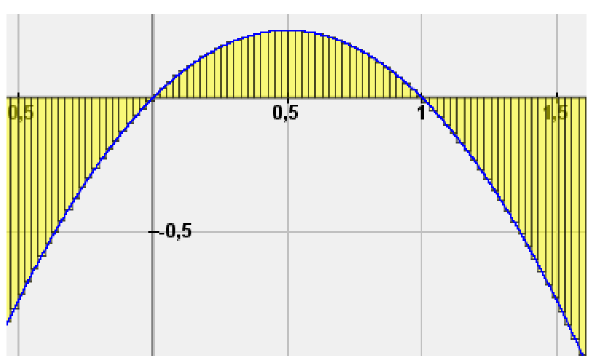
(2) Integration an den Nullstellen ermitteln

(3) a) Betrag der Einzelintegrale nehmen

oder b) Funktion in den Intervallen mit negativen Funktionswerten negieren

(4) Summation der einzelnen Teilintegrale

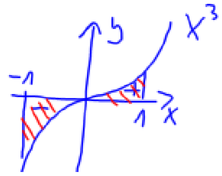
Fläche zwischen x-Achse und Funktion



•

Beispiel 1 - Bestimmtes Integral und Flächenberechnung

Beispiel: $f(x) = x^3$

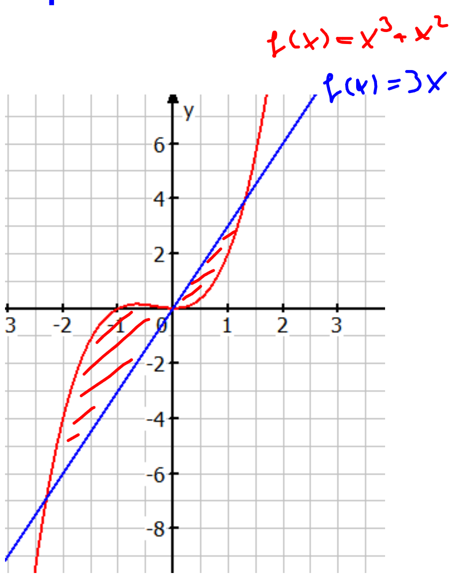


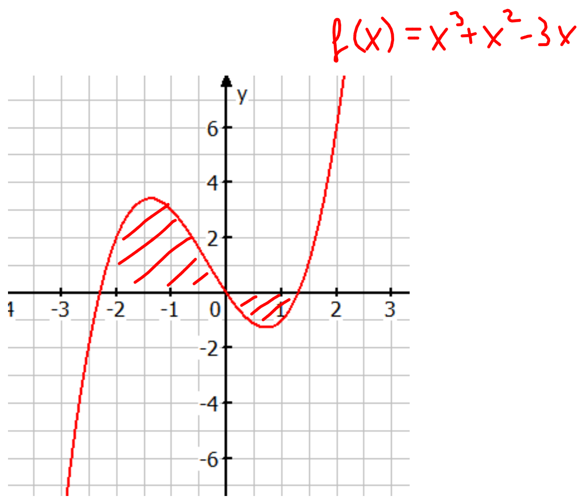
(1) bestimmtes Integral im Intervall [-1, 1]

(2) Fläche zwischen Funktion und x-Achse im Intervall [-1, 1]

in den Übungen

Beispiel 2 - Flächenberechnung

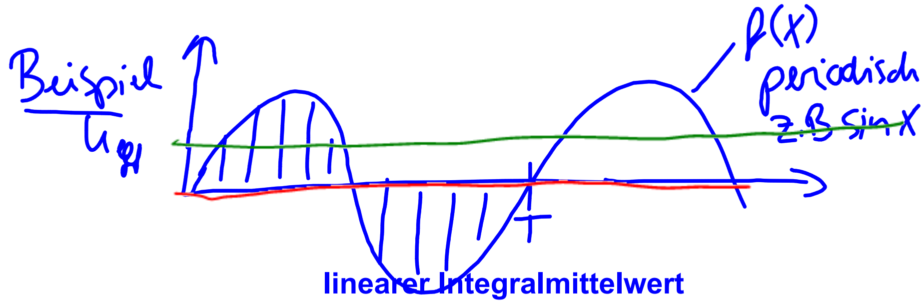




in den Übungen

•

Mittelwertbildung bei der Wechselspannung



linearer Integralmittelwert

linearer Integralmittelwert

$$\overline{y}_1 = \left[\int_a^b f(x)\,dx\right] \cdot \frac{1}{b-a}$$

$$\overline{y}_1 = \left[\int_0^T f(x)\,dx\right] \cdot \frac{1}{T} = 0$$

quadratischer Mittelwert

$$\overline{y}_2 = \sqrt{\frac{1}{b-a}\int_a^b (f(x))^2\,dx}$$

z.B. zeitlicher Verlauf der Wechselspannung

$$u(t) = u_0 \cdot \sin(\omega t) \quad \text{mit } \omega = \frac{2\pi}{T}$$

quadr. Mittelwert $\overline{u_2} = \sqrt{\frac{1}{T}\int_0^T u_0^2 (\sin \omega t)^2\,dt}$

$$= \frac{u_0}{\sqrt{2}} \quad \text{Effektivspannung } U_{eff}$$