Vorlesung 6 - 04.10.2022

Grundlagen 4 - Mengen

(1) Definition

(2) Operatoren auf Mengen

(3) Rechengesetze

(4) Binomialkoeffizient und Pascalsches Dreieck

(5) Grundlagen der Kombinatorik

1.5 Mengen

Wir beginnen mit einer Wiederholung der Grundbegriffe der Mengenlehre.

1.5.1 Definitionen und Beschreibungen

Definition 1.8: Menge (Georg Cantor, 1845-1918)

Eine **Menge** ist eine Zusammenfassung von genau bestimmten, unterscheidbaren Objekten zu einem Ganzen. Diese Objekte heißen **Elemente der Menge**.

Wir schreiben

$x \in M$, falls x ein Element von M ist und $\in$

$x \notin M$, falls x kein Element von M ist. $\notin$

Bemerkung:

- Es muss dabei eindeutig bestimmbar sein, ob ein Objekt zu einer Menge gehört oder nicht.
- Mengen werden üblicherweise mit lateinischen Großbuchstaben und deren Elemente mit Kleinbuchstaben angegeben.

Beispiel:

(1) Die Menge der Sonntage im Jahr ist eine Menge im mathematischen Sinn gemäß Definition 1.1..

(2) Die Menge Wasser im Regenfass ist hingegen keine Menge im mathematischen Sinn, da sie keine unterscheidbaren Objekte enthält.

(3) Die Menge der natürlichen Zahlen ist eine Menge gemäß Definition 1.1.

Definition: Mächtigkeit einer Menge

Die Anzahl der Elemente in einer Menge bezeichnet man als Mächtigkeit der Menge und notiert dieses mit den "Betragsstrichen" um die Menge: |M|

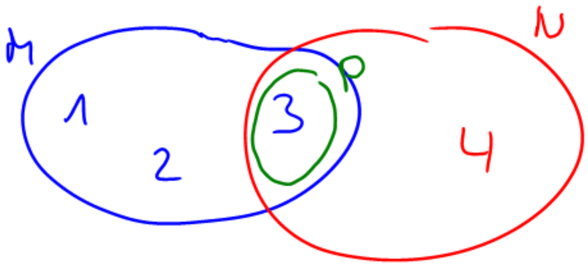
Beispiel:

- Menge mit den Elementen a, b, c, d
- $M = \{a, b, c, d\}$
- $|M| = 4$
- $a \in M$, $e \notin M$

Darstellungsmöglichkeiten für Mengen:

Beispiel:
Die Elemente 1, 2 und 3 sind in einer Menge M zusammengefasst, die Elemente 3 und 4 gehören zur Menge N und das Element 3 zur Menge P.

(1) graphisch über Venn-Diagramme



(2) aufzählend/ mit Mengenklammer

$M = \{1, 2, 3\}$

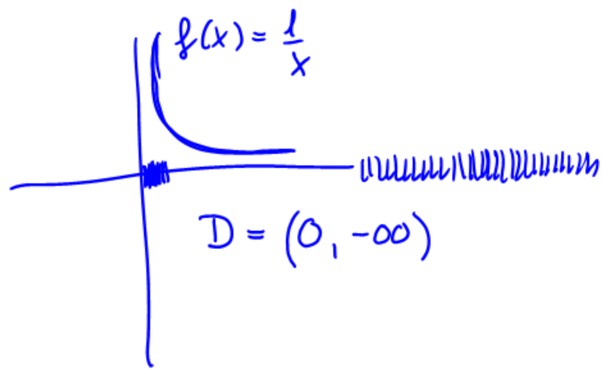
$N = \{3, 4\}$

$P = \{3\}$

(3) beschreibend/ mit Mengenklammer

$M = \{x \in \mathbb{N} \mid 1 \leq x \leq 3\}$ (für die gilt)

oder $= \{x \in \mathbb{N} \mid 0 < x < 4\}$

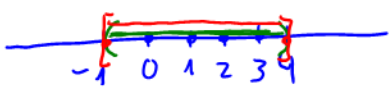


$D = (0, -\infty)$

(4) als Intervall (! Intervalle nur für reelle Zahlen)

Beispiel:
-1<x<4 mit x aus den reellen Zahlen

$I_1 = (-1, 4)$



offenes Intervall (andere Notation $]-1,4[$)

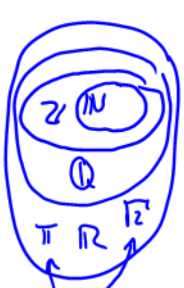
digitale Aufgaben (OO(-1,4))

$I_2 = [-1, 4]$ $\quad -1 \leq x \leq 4$

abgeschlossenes Intervall

(digitale Aufgaben CC(-1,4))

(5) Symbole für spezielle Mengen von Zahlen



irrationalen Zahlen

- $\mathbb{N}$ Menge der natürlichen Zahlen $\mathbb{N} = \{1, 2, 3, \ldots\}$
  $\mathbb{N}_0 = \{0, 1, 2, 3, \ldots\}$
- $\mathbb{Z}$ Menge der ganzen Zahlen $\mathbb{Z} = \{\ldots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \ldots\}$
- $\mathbb{Q}$ rationale Zahlen $\mathbb{Q} = \{\frac{p}{q}, p \in \mathbb{Z}, q \in \mathbb{N}\}$ Menge der Brüche
- $\mathbb{R}$ reelle Zahlen

Dezimalzahlen, die nicht abbrechen und nicht periodisch sind

1.5.2 Mengenbeziehungen

bei digitalen Aufgaben

Definition 1.9: Leere Menge

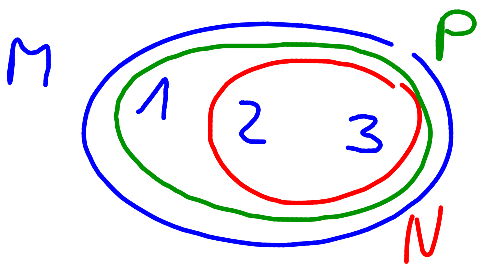
Es gibt genau eine Menge ohne Elemente, die leere Menge $\varnothing$. oder $\{\ \}$

$L = \varnothing$ oder $L = \{\ \}$

Definition 1.10: Teilmenge

Eine Menge N, die nur Elemente einer Menge M enthält, heißt **Teilmenge** (oder Untermenge) von M. Teilmenge (Schreibweise $N \subseteq M$) bedeutet:

$N \subseteq M$, falls gilt $x \in N \Rightarrow x \in M$.



$N \subseteq M$ "echte" Teilmenge $N \subset M$ ≙ Gleichheit nicht erlaubt

$P \subseteq M$

aber auch $M \subseteq P$

Bemerkung:

- Mengen können Mengen auch als Elemente enthalten
- Beispiel: $M = \{\underbrace{1, 2, 5}_{M_1}, \{1\}, \{1,3\}\}$ mit $|M| = 5$

$M_1 = \{1,2,5\}$

$1 \in M$
$2 \in M$
$5 \in M$
$\{1\} \in M$
$\{1,3\} \in M$

$\{1,2\} \subseteq M$, $\{1,2\} \subset M$
$\{1,2,\{1,3\}\} \subseteq M$

-

Frage 1:

Welche der folgenden Aussagen ist wahr ?

f (A) $\{2\} \subseteq \{1, \{1, 2\}\}$, da $2 \in \{1, \{1,2\}\}$ $N = \{1, \{2\}\}$

$\{2\} \in \{1, \{2\}\}$

f (B) $\{7, 9\} \subseteq \{\underbrace{x}_{\in \mathbb{N}} \mid \underbrace{x > 8}_{9,10,11}\}$, da $7 \in \{x \mid x > 8\}$

$\{\{2\}\} \subseteq \{1, \{2\}\}$ Teilmenge

f (C) $\{1, 2\} \notin \{1, 2, \{1, 2\}\}$ $\in$ ✓

✓ (D) $\{1, 2\} \subseteq \{1, 2, \{1, 2\}\}$

also auch $\{1,2\} \subseteq \{1, 2, \{1,2\}\}$ ist korrekt

(E) keine der Aussagen unter (A)-(D)

Intervalle

- Intervalle sind spezielle Mengen
- Intervalle sind Teilmengen der reellen Zahlen

Abgeschlossenes Intervall: $[a,b]=\{x\in\mathbb{R}\,|\,a\le x\le b\}$

Offenes Intervall: $(a,b)=\{x\in\mathbb{R}\,|\,a< x< b\}$

Halboffenes Intervall: $[a,b)=\{x\in\mathbb{R}\,|\,a\le x< b\}$

$(a,b]=\{x\in\mathbb{R}\,|\,a< x\le b\}$

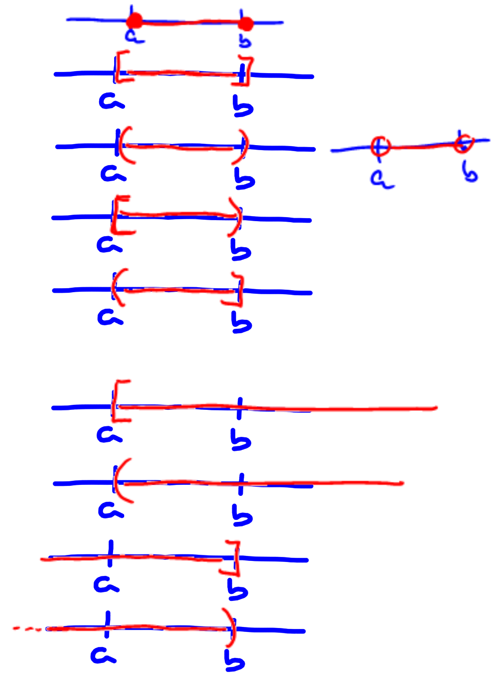
Weitere gebräuchliche Schreibweisen:

$[a,\infty)=\{x\in\mathbb{R}\,|\,a\le x\}$

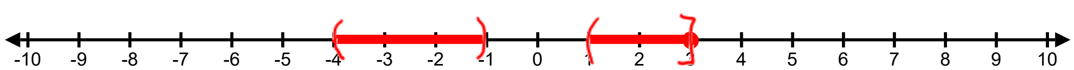
$(a,\infty)=\{x\in\mathbb{R}\,|\,a< x\}$

$(-\infty,b]=\{x\in\mathbb{R}\,|\,x\le b\}$

$(-\infty,b)=\{x\in\mathbb{R}\,|\,x< b\}$



Beispiel 1: Intervalle



Lösungsmenge L = $(-4,-1)\cup(1,3]$

$=\{x\in\mathbb{R}\,|\,(-4<x<-1)\vee(1<x\le 3)\}$

ODER

•

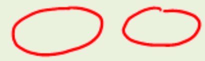
1.5.3 Operationen mit Mengen

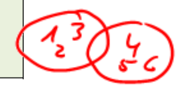
Definition 1.14: Durchschnitt von Mengen

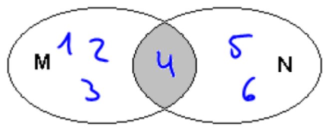
Die Durchschnittsmenge zweier Mengen M und N ist die Menge aller Elemente, die sowohl zu M als auch zu N gehören:

$$M \cap N := \{x \mid x \in M \text{ und } x \in N\}$$

M und N heißen **disjunkte Mengen**, falls $M \cap N = \varnothing$.







Durchschnittsmenge

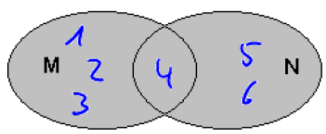
Beispiel:
M={1,2,3,4}
N={4,5,6}

$M \cap N = \{4\}$

Definition 1.15: Vereinigung von Mengen

Die Vereinigungsmenge zweier Mengen M und N ist die Menge aller Elemente, die zu M oder zu N (oder zu beiden) gehören:

$$M \cup N := \{x \mid x \in M \text{ oder } x \in N\}$$



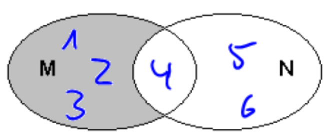
Vereinigungsmenge

$M \cup N = \{1,2,3,4,5,6\}$

Definition 1.16: Differenzmenge

Die Differenzmenge zweier Mengen M und N ist die Menge aller Elemente, die zu M aber nicht zu N gehören:

$$M \setminus N := \{x \mid x \in M \text{ und } x \notin N\}.$$



Differenzmenge

$M \setminus N = \{1,2,3\}$

„ohne"

$N \setminus M = \{5,6\}$

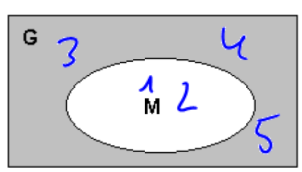
Definition 1.17: Komplement

Die Komplementmenge einer Menge M (bezüglich der Grundmenge G) ist die Menge aller Elemente von G, die nicht zu M gehören:

$$\overline{M} := \{x \mid x \in G \text{ und } x \notin M\}.$$

M^c

oder andere Notation



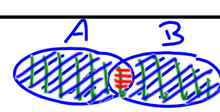
Komplement

$G = \{1,2,3,4,5\}$ $M = \{1,2\}$

$\overline{M}_{G=M\cup N} = \{3,4,5\}$

Bemerkung:

"Symmetrische Differenz"
entspricht "Exklusiv ODER" der Logik



$M \triangle N =$

$A \triangle B := \{x \mid x \in A \text{ oder } x \in B, \text{ aber nicht } x \in A \cap B\}$

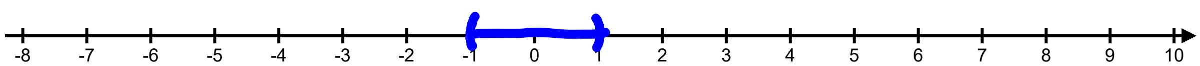
$= (A \cup B) \setminus (A \cap B)$

Intervalle in Mengenschreibweise

mit verschiedenen Operatoren

Welche Beschreibungen der Lösungsmenge gibt es?

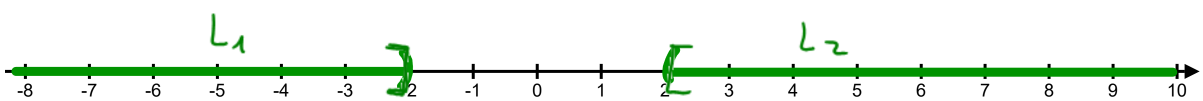
$$|x| < 1$$



$$L = (-1, 1)$$
$$= \{x \in \mathbb{R} \mid -1 < x < 1\}$$

$$|x| \geq 2$$

$$L = \overbrace{(-\infty, -2]}^{L_1} \cup \overbrace{[2, \infty)}^{L_2} = \{x \in \mathbb{R} \mid x \leq -2 \vee x \geq 2\}$$

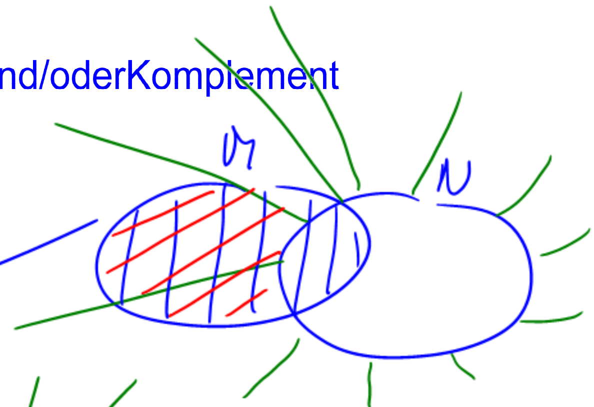


Frage 2:

Wie kann man die Differenzmenge

$M \setminus N$ = ...

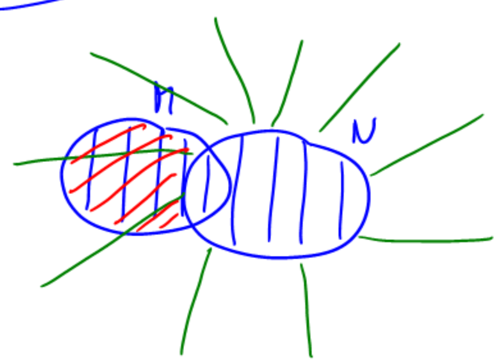
mit Hilfe von Durchschnitt, Vereinigung und/oderKomplement ausdrücken?

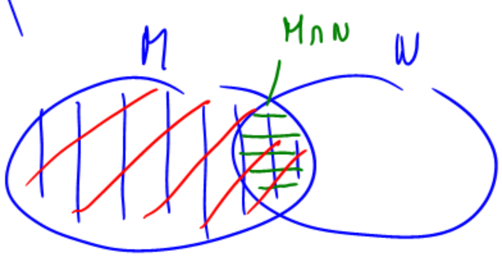


f (A) $M \cup (M \cap N)$

✓ (B) $M \cap \overline{N}$

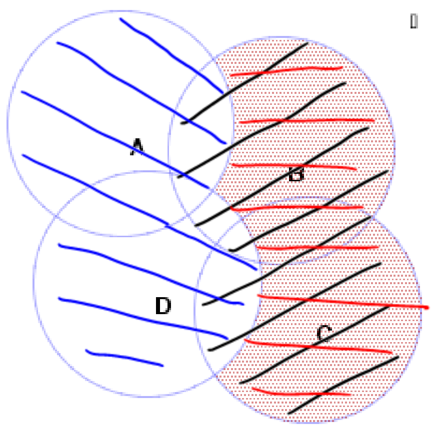
✓ (C) $(M \cup N) \cap \overline{N}$





Frage 3:

Welche Menge ist im folgenden Venn-Diagramm (rot schraffiert) visualisiert?



(A)	$(B \cup C) \setminus (A \cup D)$	○
(B)	$(A \cup C) \setminus B$	○
(C)	$(A \cup B \cup C) \setminus D$	○
(D)	$(A \setminus B) \cup (C \setminus D)$	○
(E)	Keine der obigen Anworten trifft zu.	○

https://www.mumie-hosting.net/demo/protected/course/home?course=3

•

Definition 1.18: Mächtigkeit einer Menge

Die Anzahl der Elemente einer endlichen Menge M wird mit $|M|$ bezeichnet und die **Mächtigkeit** (auch Länge oder Kardinalität) von M genannt.

Satz 1.7: Mächtigkeiten von Mengen

$|M|=3$ $|N|=2$

(1) Sind M und N disjunkte endliche Mengen, so gilt $|M \cup N| = |M| + |N|$.

$\{1, 2, 3\}$ $\{4, 5\}$ $|M \cup N| = 5$

(2) Für alle endlichen Mengen M und N gilt: $\underbrace{|M \cup N|}_{5} = \underbrace{|M|}_{3} + \underbrace{|N|}_{3} - \underbrace{|M \cap N|}_{1}$.

$\{1, 2, 3\}$ $\{3, 4, 5\}$ $|M|=3$ $|N|=3$

(3) Für alle endlichen Mengen M und N gilt: $\underbrace{|M \setminus N|}_{2} = \underbrace{|M|}_{3} - \underbrace{|M \cap N|}_{1} = \underbrace{|M \cup N|}_{5} - \underbrace{|N|}_{3}$.

(4) Für alle endlichen Mengen M gilt: $|P(M)| = 2^{|M|}$

da die Elemente im Durchschnitt sonst doppelt gezählt sind

Beispiele:

$|\{1,2,3\}| = 3,\ |\emptyset| = 0,\ |\{\emptyset\}| = 1$

$M = \{1,2,3,4\},\ N = \{1,3,5\}$

$|M \cup N| = |M| + |N| - |M \cap N| = 4 + 3 - 2 = 5$

P(M) ist die Potenzmenge einer Menge M, beinhaltet alle Teilmengen einer Menge M

Zusammenfassung: **Mengen und Operationen am Beispiel**

$\cup$ *Vereinigung*

$\cap$ *Durchschnitt*

$\setminus$ *Differenz*

$\overline{}$ *Komplement*

$\triangle$ *symmetrische Differenz*

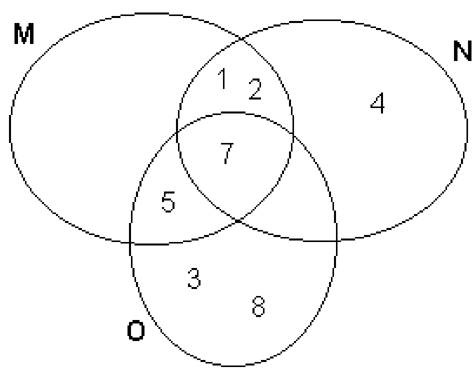
$\in$ *Element*

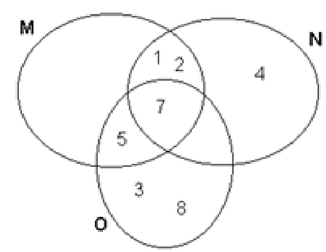
$\subseteq$ *Teilmenge*

$\varnothing$ *leere Menge*

Beispiel:

Gegeben sei das folgende Venn-Diagramm





der Mengen M, N und O mit

$M := \{1,2,5,7\}$, $N := \{1,2,4,7\}$, $O := \{3,5,7,8\}$

Es existieren folgende Mengen:

- Durchschnittsmengen:

  $M \cap N := \{1,2,7\}$ $\quad M \cap O := \{5,7\}$ $\quad N \cap O := \{7\}$

- Vereinigungsmengen:

  $M \cup N := \{1,2,5,7,4\}$ $\quad M \cup O := \{1,2,5,7,3,8\}$ $\quad N \cup O := \{1,2,4,7,5,3,8\}$

- Differenzmengen:

  $M \setminus N := \{5\}$ $\quad M \setminus O := \{1,2\}$ $\quad N \setminus O := \{1,2,4\}$

  $N \setminus M := \{4\}$ $\quad O \setminus M := \{3,8\}$ $\quad O \setminus N := \{3,5,8\}$

- Komplementärmengen (in Bezug auf die Grundmenge $M \cup N \cup O$):

  $\overline{M} := \{3,8,4\}$ $\quad \overline{O} := \{1,2,4\}$ $\quad \overline{N} := \{5,3,8\}$

1.5.4 Grundgesetze der Mengenalgebra

Satz 1.8: Rechengesetze bei Mengen

Seien M, N, O Mengen, dann gilt:

Kommutativgesetze $M \cap N = N \cap M$ beim Durchschnitt

$M \cup N = N \cup M$ bei der Vereinigung

Assoziativgesetze $(M \cap N) \cap O = M \cap (N \cap O)$ beim Durchschnitt

$(M \cup N) \cup O = M \cup (N \cup O)$ bei der Vereinigung

Distributivgesetze $M \cup (N \cap O) = (M \cup N) \cap (M \cup O)$ 1.Distributivgesetz

$M \cap (N \cup O) = (M \cap N) \cup (M \cap O)$ 2.Distributivgesetz

bei den reellen Zahlen

$3 \cdot 4 = 4 \cdot 3$

$3 + 4 = 4 + 3$

$(3 \cdot 4)5 = 3 \cdot (4 \cdot 5)$

$(3+4)+5 = 3+(4+5)$

$3 \cdot (4+5) = 3 \cdot 4 + 3 \cdot 5$

$\cancel{3+(4 \cdot 2) = (3+4) \cdot (3+2)}$

2. Distributivgesetz gilt hier nicht!

Beispiel:

Kommutativgesetz
$$\{1,2\} \cup \{2,4\} = \{1,2,4\}$$
$$\{2,4\} \cup \{1,2\} = \{1,2,4\}$$

Assoziativgesetz
$$(\{1,2\} \cap \{2,4\}) \cap \{2,5\} = \{2\} \cap \{2,5\} = \{2\}$$
$$\{1,2\} \cap (\{2,4\} \cap \{2,5\}) = \{1,2\} \cap \{2\} = \{2\}$$

Distributivgesetz
$$\{1,2\} \cap (\{2,4\} \cup \{2,5\}) = \ldots\ldots$$

Bemerkung: Distributivgesetz bei den reellen Zahlen

$2 \cdot (3+4) =$ ✓ $\cancel{2+(3 \cdot 4) =}$

Satz 1.9:

Sei M Teilmenge einer Grundmenge G, dann gilt:

(1) $\overline{\overline{M}} = M$ (**doppeltes Komplement**)

(2) $\overline{M} \cup M = G$ *und* $\overline{M} \cap M = \varnothing$

(3) $M \cap M = M$ (**Idempotenzgesetz für Durchschnitt**)

$M \cap \varnothing = \varnothing$

$M \cap G = M$ (G ist **neutrales Element für Durchschnitt**)

$M \cap N = N$ *mit* $N \subseteq M$

(4) $M \cup M = M$ (**Idempotenzgesetz für Vereinigung**)

$M \cup \varnothing = M$ ($\varnothing$ ist **neutrales Element für Vereinigung**)

$M \cup G = G$

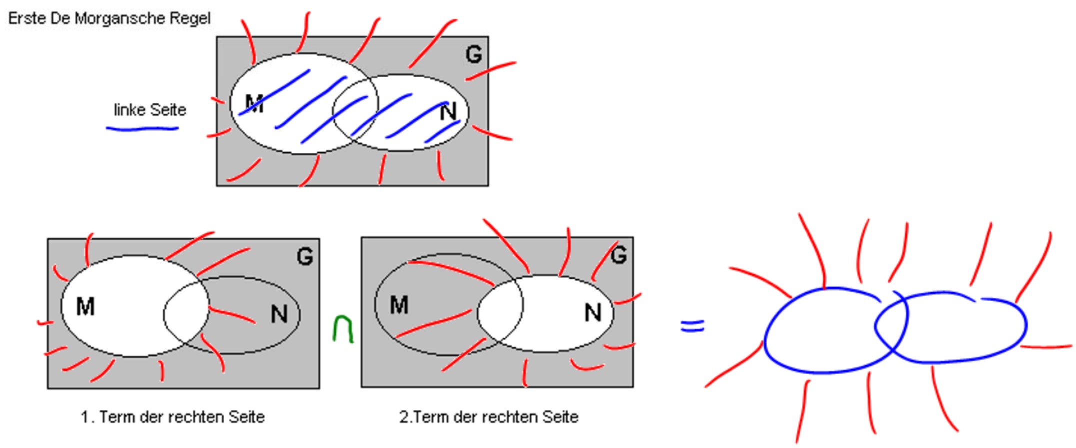
$M \cup N = M$ *mit* $N \subseteq M$

Satz 1.10: De Morgansche Regeln

Seien M und N Teilmengen einer Grundmenge G, dann gilt:

$$\overline{(M \cup N)} = \overline{M} \cap \overline{N} \quad und \quad \overline{(M \cap N)} = \overline{M} \cup \overline{N}$$

Erläuterung der De Morganschen Regeln anhand der Venn-Diagramme:



•

Frage 4:

Welche der Aussagen ist richtig?

Seien A, B Mengen einer gemeinsamen Obermenge Ω.

(A) $A \cap (A \cup B) = B$

(B) $A \cup A = \varnothing$ (leere Menge)

(C) $A \cap (A \cup B) = \varnothing$ (leere Menge)

(D) $A \cap (A \cup B) = A$

(E) keine der Aussagen ist richtig

zu Hause

Lösung: $A \cap (A \cup B)$

$= (A \cap A) \cup (A \cap B)$ Distributiv-gesetz

$= A \cup \underbrace{(A \cap B)}_{\text{Teilmenge von } A}$

$= A$ A vereinigt mit einer Teilmenge von A ergibt wieder A

Mengen - Umformungen von Mengenausdrücken

Beispiel:

Die aufgestellten Regeln erlauben es, komplizierte Ausdrücke zu vereinfachen.

$$\boxed{(A\cap B)\cup\left(\overline{\overline{A}\cup B}\right)=}$$

$(A\cap B)\cup\left(\overline{\overline{A}}\cap\overline{B}\right)=$ (gilt nach der ersten De Morganschen Regel)

$(A\cap B)\cup\left(A\cap\overline{B}\right)=$ (gilt nach dem Satz 1.10 (doppeltes Komplement))

„Ausklammern von A"

$A\cap\left(\underbrace{B\cup\overline{B}}_{G}\right)=$ (gilt nach dem Distributivgesetz)

äquivalent $\boxed{A}$ (gilt nach dem Satz 1.10 und 1.6)

Weiteres Beispiel/ Aufgabe:

$$\left(\overline{M\cap(\overline{N}\cap P)}\right)\cup(N\cap M)$$

$$=\left(\overline{M}\cup\left(\overline{\overline{N}\cap P}\right)\right)\cup(N\cap M)$$

zu Hause

⋮

$$\left(\overline{M\cap(\overline{N}\cap P)}\right)\cup(N\cap M)$$

Assoziativgesetz

$$=\left(\overline{M}\cup\left(\overline{\overline{N}\cap P}\right)\right)\cup(N\cap M)$$

De Morganschen Regeln

$$=\left(\overline{M}\cup\left(\overline{\overline{N}}\cup\overline{P}\right)\right)\cup(N\cap M)$$

Regel doppeltes Komplement

$$=\left(\overline{M}\cup(N\cup\overline{P})\right)\cup(N\cap M)$$

Distributivgesetz

$$=\left(\overline{M}\cup(N\cup\overline{P})\cup N\right)\cap\left(\overline{M}\cup(N\cup\overline{P})\cup M\right)$$

„Kommutativ- und Assoziativgesetz

$$=(\overline{M}\cup\underbrace{N\cup N}_{=N}\cup\overline{P})\cap(\underbrace{\overline{M}\cup M}_{=G\ \text{Grundmenge}}\cup N\cup\overline{P})$$

$$=(\overline{M}\cup N\cup\overline{P})\cap G$$

G neutrales Element bzgl ∩

$$=\boxed{\overline{M}\cup N\cup\overline{P}}$$

Binomialkoeffizienten und Pascalsches Dreieck

•

Definition 1.11: Mengengleichheit

Zwei Mengen sind genau dann gleich, wenn sie dieselben Elemente enthalten.

Die Gleichheit der Mengen M und N (Schreibweise M = N) bedeutet:

M = N, falls gilt $x \in M$ genau dann, wenn $x \in N$ (d.h. $x \in M \Leftrightarrow x \in N$),

d.h. falls gilt: $M \subseteq N \text{ und } N \subseteq M$.

Beispiel:

(1) Sei $M = \{x \mid x \in \mathbb{N} \text{ und } x \leq 3\}$ und $N = \{1,2,3\}$, dann gilt $M = N$.

(2) Sei $M = \{x \mid x \in \mathbb{Z} \text{ und } x \leq 3\}$ und $N = \{1,2,3\}$, dann gilt $M \neq N$, aber $N \subseteq M$.

Satz 1.6: Aussagen zu Teilmengen

(1) Jede Menge hat die Menge selbst und die leere Menge als Teilmenge.

(2) Die leere Menge hat nur sich selbst als Teilmenge.

(3) Eine Menge mit n Elementen hat 2^n Teilmengen.

Definition 1.12: Mengensystem

Eine Menge von Mengen heißt auch Mengensystem.

Beispiel:

$\{\{1,2\},\{1\},\{3\}\}$ und $\{\{1,2\},\{A\},\{\square, \bigcirc, \triangle\},\varnothing\}$ sind Mengensysteme.

Definition 1.13: Potenzmenge

Die Menge aller Teilmengen einer Menge M heißt **Potenzmenge zu M**: $P(M) := \{X \mid X \subseteq M\}$.

Die Potenzmenge einer Menge M mit n Elementen hat 2^n Elemente.

Beispiel:

Sei $M = \{0,1,2\}$, dann ist $P(M) := \{\varnothing,\{0\},\{1\},\{2\},\{0,1\},\{0,2\},\{1,2\},\{0,1,2\}\}$ und enthält 8 Teilmengen als Elemente.

Beispiel: Menge $M = \{1,2,3,4\}$ mit $|M| = 4 = n$

eine Zeile des Pascalschen Dreiecks

Teilmengen von M:

Teilmengen 0-elementig: 1 $\varnothing$,

1-elementig: 4 $\{1\},\{2\},\{3\},\{4\}$

2-elementig: 6 $\{1,2\},\{2,3\},\{3,4\},\{1,4\},\{2,4\},\{1,3\}$

3-elementig: 4 $\{1,3,4\},\{1,2,3\},\{2,3,4\},\{1,2,4\}$

4-elementig: 1 $\{1,2,3,4\}$

$16 = 2^4 = 2^{|M|} = 2^n$

1.5.5 Der Binomialkoeffizient

Der Binomialkoeffizient gibt die Anzahl der Teilmengen mit k Elemeten einer Menge mit n Elementen an.

Definition 1.21: Binomialkoeffizient

Für $n, k \in \mathbb{N}_0$ mit $n \geq k$ definiert man den Binomialkoeffizienten n über k

$$\binom{n}{k} := \frac{n!}{(n-k)! \cdot k!} = \frac{n(n-1)(n-2)\cdot \ldots \cdot (n-k+1)}{1 \cdot \ldots \cdot (k-2)(k-1)k}$$

Insbesondere gilt $\binom{0}{0} := 1$, $\binom{n}{n} := 1$, $\binom{n}{0} := 1$ (da $0! = 1$ gilt).

Beispiel:
Wie viele Teilmengen mit 2 Elementen(k=2) hat eine 4-elementige Menge (n=4)?

$$M = \{1, 2, 3, 4\}$$

Geben Sie die Potenzmenge vom M an.

vorbereitet
Siehe nächste Seite

Beispiel: " Lotto 6 aus 49" = 13.983.816 Teilmengen

$$\binom{49}{6} = \frac{49!}{\underbrace{(49-6)!}_{43!}\,6!} = \frac{\cancel{1}\cdot\cancel{2}\cdot\ldots\cdot\cancel{43}\cdot 44\cdot \overset{3}{\cancel{45}}\cdot 46\cdot 47\cdot \cancel{48}\cdot 49}{\cancel{1}\cdot\cancel{2}\cdot\ldots\cdot\cancel{43}\cdot 1\cdot\cancel{2}\cdot\cancel{3}\cdot\cancel{4}\cdot\cancel{5}\cdot\cancel{6}}$$

Wahrscheinlich $p = \frac{1}{13.983.816}$ $= 0{,}0000000715$

6 elementigen Teilmengen einer 49-elementigen Menge
= Anzahl der Möglichkeiten beim Lotto

Aufgabe:
Wie viele 6-elementige Teilmengen einer 8-elementigen Menge gibt es?

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{(n-k)!\,k!}$$

(A) 48

✓(B) 28

(C) 12

(D) 36

$$\binom{8}{6} = \frac{8!}{(8-6)!\,6!} = \frac{\overset{7\cdot 8}{\cancel{8!}}}{\underbrace{2!}_{1\cdot 2}\,\cancel{6!}} = 28$$

"Pascalsche Dreieck" und Binomialkoeffizienten

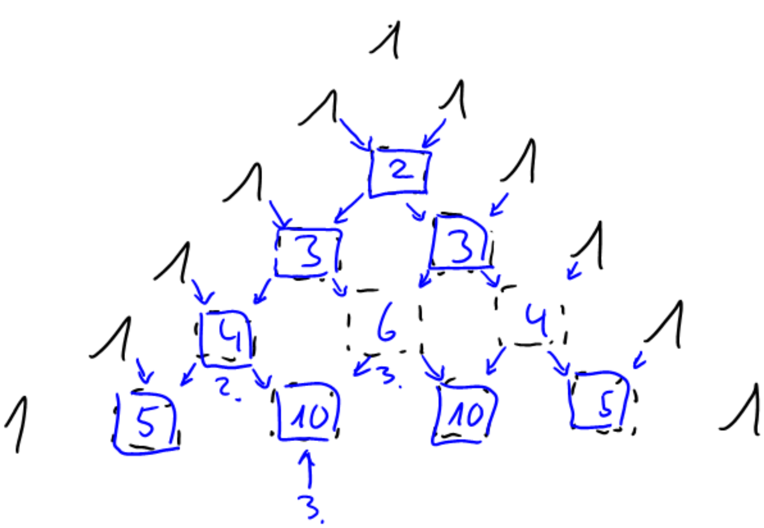
Pascalsches Dreieck - Aufbau

Menge mit		Anzahl der Teilmengen
0 Elementen →	$\binom{0}{0}=1$	$1 = 2^0$
1 Element →	$\binom{1}{0}=1 \quad \binom{1}{1}=1$	$2 = 2^1$
2 Elementen →	$\binom{2}{0}=1 \quad \binom{2}{1}=2 \quad \binom{2}{2}=1$	$4 = 2^2$
3 Elementen →	$\binom{3}{0}=1 \quad \binom{3}{1}=3 \quad \binom{3}{2}=3 \quad \binom{3}{3}=1$	$8 = 2^3$
4 Elementen →	$\binom{4}{0}=1 \quad \binom{4}{1}=4 \quad \binom{4}{2}=6 \quad \binom{4}{3}=4 \quad \binom{4}{4}=1$	$16 = 2^4$

Binomialkoeffizient, gibt die Anzahl 2-elementiger Teilmengen einer 4-elementigen Menge an

Binomische Formel

$$(a+b)^2 = 1a^2 + 2ab + 1b^2$$
$$= \binom{2}{0}a^2 + \binom{2}{1}ab + \binom{2}{2}b^2$$



Sätze zum Binomialkoeffizienten

Eigenschaften des "Pascalschen Dreiecks"

Satz 1.12:

Seien $n,k \in \mathbb{N}_0$ und $n \geq k$. Dann gilt für den Binomialkoeffizienten n über k die folgende Rekursion:

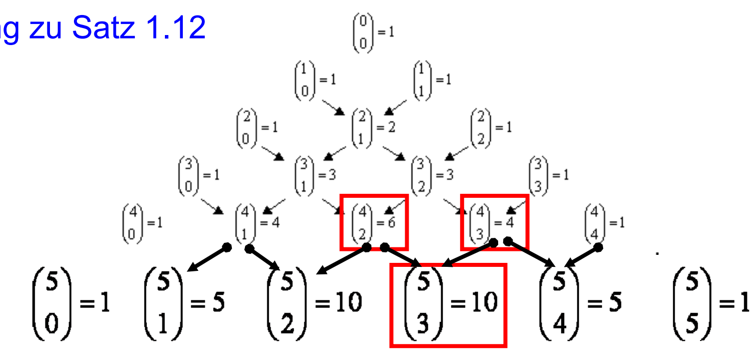
$$\binom{n}{k} = \begin{cases} 1 & , falls\ k=0, k=n \\ \binom{n-1}{k} + \binom{n-1}{k-1} & , sonst \end{cases}$$

Zeile drüber

Beispiele:

$$\binom{8}{5} = \frac{8!}{5!(8-5)!} = \frac{8!}{5!\,3!} = \frac{6 \cdot 7 \cdot 8}{3!} = 56 \quad und \quad \binom{8}{5} = \binom{7}{5} + \binom{7}{4} = 21 + 35 = 56$$

Erläuterung zu Satz 1.12

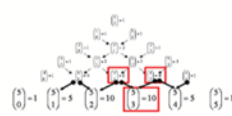


Beweis:

Selbst-Studium

Nachweis Satz 1.12:

zu zeigen $\underbrace{\binom{n-1}{k-1} + \binom{n-1}{k}}_{Start} \overset{!}{=} \underbrace{\binom{n}{k}}_{Ziel}$



$$\underbrace{\binom{n-1}{k-1} + \binom{n-1}{k}}_{Start} = \frac{(n-1)!}{(n-1-(k-1))!\,(k-1)!} + \frac{(n-1)!}{(n-1-k)!\,k!}$$

Definition

$$= \frac{(n-1)!}{(n-k)!\,(k-1)!} \cdot \frac{k}{k} + \frac{(n-1)!}{(n-k-1)!\,k!} \cdot \frac{(n-k)}{(n-k)}$$

Erweitern für Hauptnenner

$$= \frac{(n-1)! \cdot k}{(n-k)!\,k!} + \frac{(n-1)!\,(n-k)}{(n-k)!\,k!}$$

$$= \frac{(n-1)! \cdot k + (n-1)!\,(n-k)}{(n-k)!\,k!}$$

$$= \frac{(n-1)! \cdot (k+n-k)}{(n-k)!\,k!}$$

Ausklammern

$$= \frac{(n-1)! \cdot n}{(n-k)!\,k!}$$

$$= \frac{n!}{(n-k)!\,k!}$$

$$= \underbrace{\binom{n}{k}}_{Ziel}$$

Damit ist die Behauptung bewiesen

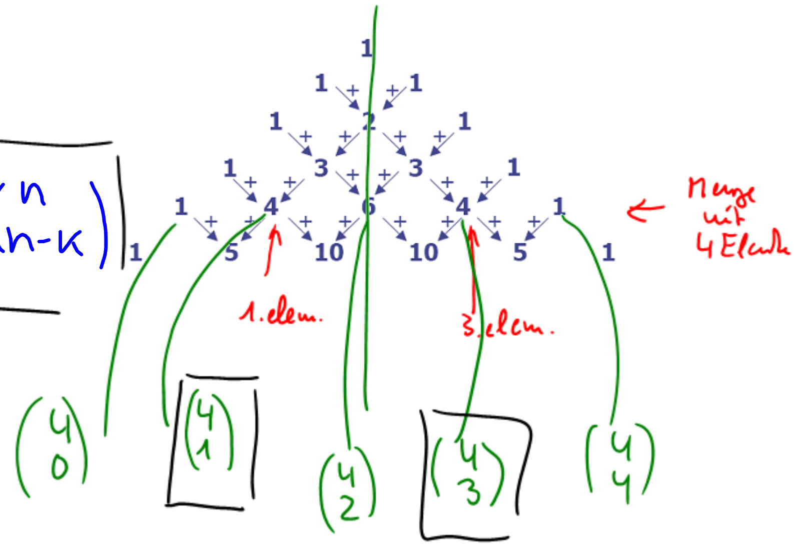
Satz 1.13: Eigenschaften des Binomialkoeffizienten

Seien $n, k \in \mathbb{N}_0$ und $n \geq k$. Dann gilt für den Binomialkoeffizienten n über k:

1. $\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$

2. $\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} = |P(M)| = 2^n$, d.h. die Anzahl der Teilmengen einer n-elementigen Menge ist gleich der Summe der Binomialkoeffizienten, also einer Zeile im Pascalschen Dreieck.

Erläuterung der Formel: $\boxed{\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}}$



Erläuterung der Formel: $\underbrace{\binom{n}{k}}_{\text{Start}} = \underbrace{\binom{n}{n-k}}_{\text{Ziel}}$

Start → Ziel

"gültige Umformungen"

Selbststudium

Nachweis:

$$\underbrace{\binom{n}{k}}_{\text{Start}} = \frac{n!}{(n-k)!\,k!}$$

$$\overset{\text{Kommutativgesetz}}{=} \frac{n!}{k!\,(n-k)!} \overset{\text{„0" addiert}}{=} \frac{n!}{(+n-n+k)!\,(n-k)!}$$

$$= \frac{n!}{(n-(n-k))!\,(n-k)!} \overset{\text{Def.}}{=} \underbrace{\binom{n}{n-k}}_{\text{Ziel}} \checkmark$$

.

Sätze zum Binomialkoeffizienten

Satz 1.14: Binomischer Lehrsatz (oder Binomialsatz)

Für $n \in \mathbb{N}_0$ und $a, b \in \mathbb{R}$ gilt:

$$(a+b)^n = \binom{n}{0}a^n + \binom{n}{1}a^{n-1}b^1 + \binom{n}{2}a^{n-2}b^2 + \ldots + \binom{n}{n-1}a^1 b^{n-1} + \binom{n}{n}b^n$$

$$= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^{n-k} b^k$$

Erinnerung 1.Binomische Formel

$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$

$(a+b)^3 = a^3 + 3a^2b^1 + 3a^1b^2 + b^3$

$\binom{3}{0}a^3 + \binom{3}{1}a^2 b + \binom{3}{2}ab^2 + \binom{3}{3}b^3$

1
1 1
1 2 1
1 3 3 1
1 4 6 4 1
1 5 10 10 5 1

$$(a+b)^6 = \binom{6}{0}a^6 + \binom{6}{1}a^5 \cdot b^1 + \binom{6}{2}a^4b^2 + \underbrace{\binom{6}{3}}_{} a^3b^3 + \binom{6}{4}a^2b^4 + \binom{6}{5}ab^5 + \binom{6}{6} + b^6$$

$$= \frac{6!}{(6-3)! \cdot 3!} = \frac{6!}{3! \, 3!} = \frac{4 \cdot 5 \cdot 6}{3!} = 20$$

Aufgabe: Der binomische Ausdruck $(x+y)^{15}$ kann mit Hilfe des binomischen Satzes als Summe dargestellt werden. Bestimmen Sie die Koeffizienten A und B bei den Summanden mit den Potenzen $x^{12}y^3$ bzw. x^4y^{11}.

$\boxed{1}$ $A = 455$ $B = 1365$

$\boxed{2}$ $A = 1265$ $B = 455$

$\boxed{3}$ $A = 330$ $B = 220$

Zu Hause

Lösung:

$$(x+y)^{15} = \dots \binom{15}{3} x^{12} y^3 \dots \binom{15}{11} x^4 y^{11} \dots$$

Summe der Exponenten

$$\binom{15}{3} = \frac{15!}{(15-3)!\cdot 3!} = \frac{15!}{12!\,3!} = \frac{13\cdot 14\cdot 15}{1\cdot 2\cdot 3} = 13\cdot 7\cdot 5 = 455$$

$$\binom{15}{11} = \frac{15!}{(15-11)!\,11!} = \frac{15!}{4!\,11!} = \frac{12\cdot 13\cdot 14\cdot 15}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4} = 13\cdot 7\cdot 15 = 1365$$

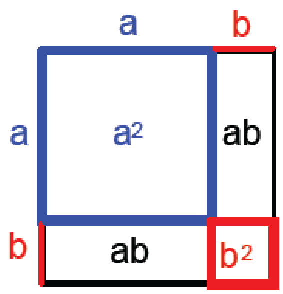
1.5.6 Binomische Formeln

$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$ 1.Binomische Formel

$(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$ 2.Binomische Formel

$(a-b)(a+b) = a^2 - b^2$ 3.Binomische Formel

Veranschaulichung der 1.Binomischen Formel



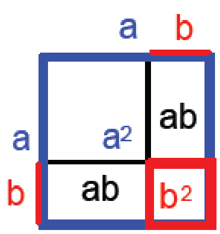
$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$ 1.Binomische Formel

Beispiel:

$(x+4)^2 =$

$(2x + \frac{1}{3}y^2)^2 =$

Veranschaulichung der 2.Binomischen Formel



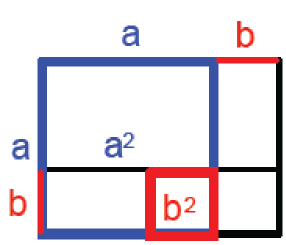
$(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$ 2.Binomische Formel

Beispiel:

$(x-3)^2 =$

$(\frac{1}{2}z - x \cdot z)^2 =$

Veranschaulichung der 3.Binomischen Formel



$(a-b)(a+b) = a^2 - b^2$ 3.Binomische Formel

Beispiel:

$(x-1)(x+1) =$

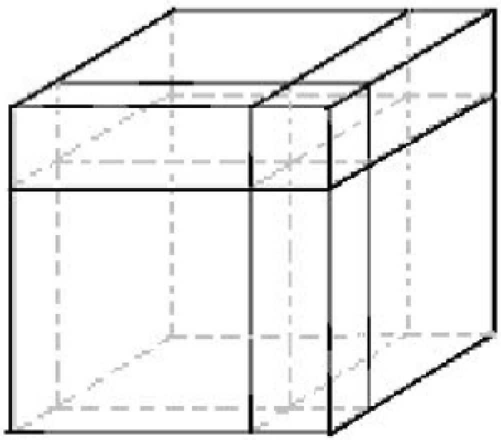
$(4x-y)(4x+y) =$

Berechnen Sie den Ausdruck $(a + b)^3$

und veranschaulichen Sie ihn geometrisch!

Veranschaulichung der Formel

$$(a + b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$$



http://www.schillerschule-hannover.de/uploads/media/mog09_Probewettbewerb_Loesung.pd

Beispiel:

Berechnen Sie ein Beispiel: $(2x+3)^3$

zu Hause

$$(2x)^3 + 3(2x)^2 \cdot 3 + 3(2x)^1 \cdot 3^2 + 3^3$$
$$= 8 \cdot x^3 + 18x^2 + 54x + 27$$

Anwendung Mengen und Binomalkoeffizient

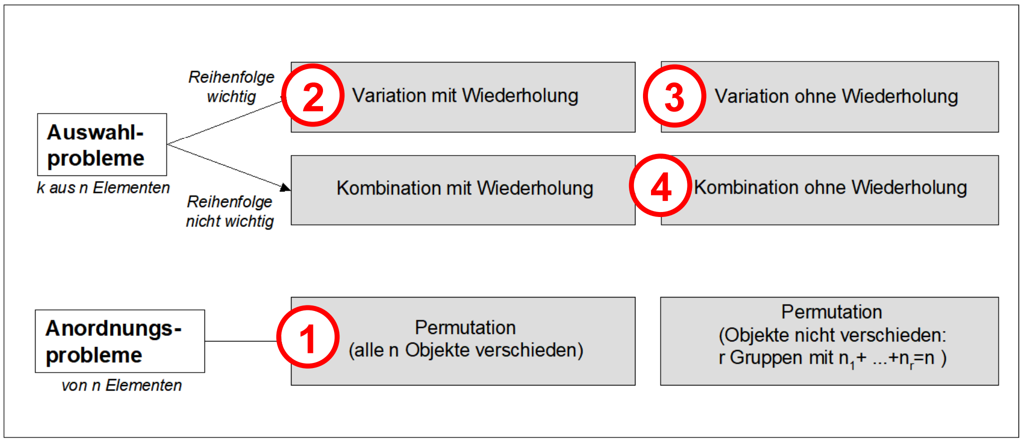
Kombinatorik

•

Anwendung Mengen und Binomalkoeffizient

1.6 Grundelemente der Kombinatorik

Die Kombinatorik untersucht Anordnungen und Auswahlmengen von Objekten endlicher Mengen. Sie ist grundlegend für die Wahrscheinlichkeitstheorie und war früher auch Teil der Wahrscheinlichkeitstheorie. Sie wird jetzt aber eigenständig betrachtet.



Satz 1.15: Das allgemeine Zählprinzip

Es seien Mengen $M_1, M_2, ..., M_n$ mit den Mächtigkeiten $|M_1| = m_1, |M_2| = m_2, ..., |M_n| = m_n$ gegeben. Für die Konstruktion von n-Tupeln $(x_1, x_2, ..., x_n)$ mit $x_i \in M_i$ gibt es $m_1 \cdot m_2 \cdot ... \cdot m_n$ verschiedene Möglichkeiten.

Beispiel:

Besteht ein Autokennzeichen $\boxed{HH}\boxed{A}\boxed{K}\boxed{146}$ nach dem Zulassungsbezirk aus ein oder zwei Buchstaben und einer dreistelligen Zahl: $\boxed{-}\boxed{-}\boxed{---} = (x_1, x_2, x_3)$ mit x_1 aus der Menge der 26 Buchstaben, x_2 aus der Menge der 26 Buchstaben oder kein Buchstabe und x_3 einer 3-stelligen Zahl zwischen 1 und 999, dann gibt es

$m_1 \cdot m_2 \cdot m_3 = 26 \cdot 27 \cdot 999 = 701298$ Fahrzeuge, die zugelassen werden können.

Kombinatorik

Gegeben sei eine Menge von n Elementen

1 Anordnung von n Elementen → Permutation

Wie viele Möglichkeiten gibt es n Element anzuordnen?

$$\underset{\text{Möglichkeiten für 1. Stelle}}{n} \cdot \underset{\text{Möglichkeiten für 2. Stelle}}{(n-1)} \cdot \underset{\text{Möglichkeiten für 3. Stelle}}{(n-2)} \cdot \ldots \cdot \underset{\text{Möglichkeiten für n. Stelle}}{1} = n!$$

> Beispiel: 5 Ziffern anordnen
>
> 12345
> 23154
> 41235
> ⋮
>
> } 5! = 120 Möglichkeiten

2 Auswahl von k Elementen aus n Elementen
mit mehrfacher Verwendung von Elementen → Variation mit Wiederholung (Reihenfolge wichtig)

$$\underset{\text{Möglichkeiten für 1. Auswahl}}{n} \cdot \underset{\text{Möglichkeiten für 2. Auswahl}}{n} \cdot \underset{\text{Möglichkeiten für 3. Auswahl}}{n} \cdot \ldots \cdot \underset{\text{Möglichkeiten für k. Auswahl}}{n} = n^k$$

> Beispiel: Zeichenketten mit 4 Buchstaben
>
> ALLE
> QUER
> HAUS
> ↑↑↑↑
> $26 \cdot 26 \cdot 26 \cdot 26 = 26^4$

3 Auswahl von k Elementen aus n Elementen ohne mehrfache Verwendung von Elementen → Variation ohne Wiederholung (Reihenfolge wichtig)

$$\underset{\substack{\text{Möglichkeiten}\\\text{für 1. Auswahl}}}{n} \cdot \underset{\substack{\text{Möglichkeiten}\\\text{für 2. Auswahl}}}{(n-1)} \cdot \underset{\substack{\text{Möglichkeiten}\\\text{für 3. Auswahl}}}{(n-2)} \cdot \ldots \cdot \underset{\substack{\text{Möglichkeiten}\\\text{für k. Auswahl}}}{\overbrace{(n-(k-1))}^{(n-k+1)}} = \frac{n!}{(n-k)!}$$

Beispiel: Pferderennen

Anzahl Möglichkeiten für die Medaillenränge 1–3 beim Pferderennen von 5 Pferden

1 2 4
1 2 5
5 3 4
4 1 2
⋮

$5 \cdot 4 \cdot 3 = 60$ Möglichkeiten für die Medaillenränge $= \frac{5!}{(5-3)!} = \frac{5!}{2!} = 5 \cdot 4 \cdot 3$

Möglichkeiten

4 Auswahl von k Elementen aus n Elementen ohne mehrfache Verwendung von Elementen → Variation ohne Wiederholung (Reihenfolge nicht wichtig!)

$\frac{n!}{(n-k)!}$ Möglichkeiten der Auswahl ohne mehrfache Verwendung (mit Reihenfolge)

dividiert durch die Anzahl Permutationen $k!$ von k Elementen (verschiedene Reihenfolgemöglichkeiten von k Elementen)

d.h. $\frac{\frac{n!}{(n-k)!}}{k!} = \frac{n!}{(n-k)!\,k!} = \binom{n}{k}$ „Binomialkoeffizient" Möglichkeiten für eine k-elementige Teilmenge einer n-elementigen Menge

Beispiel: Lotto 6 aus 49

$$\binom{49}{6} = \frac{49!}{43!\,6!}$$

1.6.4 Zusammenfassung: Permutation-Variation-Kombination

Auswahl-probleme

Variation mit Wiederholung

2 $^{W}V_n^{\,k} = n^k$

Variation ohne Wiederholung

3 $V_n^{\,k} = \dfrac{n!}{(n-k)!} = n \cdot \ldots \cdot (n-k+1)$

Sonderfall k=n: Permutation

Kombination mit Wiederholung

$^{W}C_n^{\,k} = \binom{n+k-1}{k} = \dfrac{n+k-1!}{(n-1)! \cdot k!}$

Kombination ohne Wiederholung

4 $C_n^{\,k} = \binom{n}{k} = \dfrac{n!}{(n-k)! \cdot k!}$

Anordnungs-probleme

Permutation
(alle n Objekte verschieden)

1 $P_n = n!$

Permutation
(Objekte nicht verschieden:
r Gruppen mit n_1+ ...+n_r=n)

$P_{n_1, n_2, \ldots, n_r} = \dfrac{n!}{n_1! \cdot n_2! \cdot \ldots \cdot n_r!}$

Auswahlprobleme und Anordnungsprobleme

Auswahl-probleme

Beispiel „Ziehen 2 aus 3“

Reihenfolge wichtig, gleiche Elemente erlaubt	Reihenfolge wichtig, keine gleichen Elemente
Variation mit Wiederholung **"Zeichenketten"/ "Autokennzeichen"**	**Variation ohne Wiederholung** **"Pferderennen"**
Kombination mit Wiederholung **"Würfeln"**	**Kombination ohne Wiederholung** **"Lotto"**
Keine Reihenfolge, gleiche Elemente erlaubt	Keine Reihenfolge, keine gleichen Elemente

Anordnungs-probleme

Beispiel „Anordnen von 3“

Permutation

"Sitzordnungen"

1.6.4 Zusammenfassung: Permutation-Variation-Kombination

Auswahl-probleme

2 Variation mit Wiederholung

$$\boxed{{}^{w}V_{n}^{\,k} = n^{k}}$$

3 Variation ohne Wiederholung

$$\boxed{V_{n}^{\,k} = \frac{n!}{(n-k)!} = n \cdot \ldots \cdot (n-k+1)}$$

Sonderfall k=n: Permutation

Kombination mit Wiederholung

$$\boxed{{}^{w}C_{n}^{\,k} = \binom{n+k-1}{k} = \frac{n+k-1!}{(n-1)! \cdot k!}}$$

4 Kombination ohne Wiederholung

$$\boxed{C_{n}^{\,k} = \binom{n}{k} = \frac{n!}{(n-k)! \cdot k!}}$$

Anordnungs-probleme

1 Permutation (alle n Objekte verschieden)

$$\boxed{P_n = n!}$$

Permutation (Objekte nicht verschieden: r Gruppen mit $n_1 + \ldots + n_r = n$)

$$\boxed{P_{n_1, n_2, \ldots, n_r} = \frac{n!}{n_1! \cdot n_2! \cdot \ldots \cdot n_r!}}$$

Auswahlprobleme und Anordnungsprobleme

Auswahl-probleme

Beispiel „Ziehen 2 aus 3"

Reihenfolge wichtig, gleiche Elemente erlaubt

Variation mit Wiederholung

Beispiel: Zeichencodierung

Sei n=2, nämlich die Menge $M = \{0,1\}$. Dann lassen sich durch ein Datenelement von k Bit Länge genau 2^k Zeichen darstellen. Jeder Variation kann also ein Zeichen zugeordnet werden. Ist k=8, also ein Byte, dann können damit $2^8 = 256$ Zeichen codiert werden. In zwei Byte (k=16) können $2^{16} = 65536$ Zeichen dargestellt werden.

Reihenfolge wichtig, keine gleichen Elemente

Variation ohne Wiederholung

Beispiel: Pferdewette

Die Möglichkeiten einer Einlaufwette beim Pferderennen lassen sich aus der Formel für einer Variation ohne Wiederholung berechnen, denn beim Pferderennen wird aus einer gegebenen Menge von Pferden (z.B. n=15) die Reihenfolge des Einlaufes der ersten Pferde (z.B k=5) vorhergesagt. Die Anzahl der Möglichkeiten einer solchen Vorhersage ist $V_{15}^{\,5} = \frac{15!}{(15-5)!} = 15 \cdot \ldots \cdot (15-5+1) = 15 \cdot 14 \cdot 13 \cdot 12 \cdot 11 = 360360$.

Kombination mit Wiederholung

Beispiel: Würfelexperiment

Bei einem Würfelexperiment wird mit zwei Würfeln geworfen. Welche möglichen Kombinationen an Augenzahlen gibt es für die gefallenen Würfel?

Es handelt sich hierbei um eine Kombination mit Wiederholung. Die zwei Würfel (k=2) sind nicht unterscheidbar und die Menge, aus der „gezogen" wird, hat die Mächtigkeit n=6. Daher sind die möglichen Würfe über die Formel ${}^{w}C_{6}^{\,2} = \binom{6+2-1}{2} = \frac{(6+2-1)!}{(6-1)! \cdot 2!} = \frac{7 \cdot 6}{2} = 21$ bestimmbar.

Keine Reihenfolge, gleiche Elemente erlaubt

Kombination ohne Wiederholung

Beispiel: Zahlenlotto

Das typische Beispiel für eine Kombination ohne Wiederholung ist das Zahlenlotto 6 aus 49, bei dem 6 Zahlen (k=6) aus 49 Zahlen (n=49) ohne Berücksichtigung einer Reihenfolge gezogen werden. Für diese Ziehung der Zahlen gibt es $C_{49}^{\,6} = \binom{49}{6} = \frac{49!}{(49-6)! \cdot 6!} = \frac{49 \cdot 48 \cdot 47 \cdot 46 \cdot 45 \cdot 44}{6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1} = 13.983.816$ Möglichkeiten.

Keine Reihenfolge, keine gleichen Elemente

Anordnungs-probleme

Beispiel „Anordnen von 3"

Permutation

"Sitzordnungen"

1.6.4 Zusammenfassung: Permutation-Variation-Kombination

Auswahlprobleme

2 Variation mit Wiederholung

$$^{W}V_n^{\,k} = n^k$$

3 Variation ohne Wiederholung

$$V_n^{\,k} = \frac{n!}{(n-k)!} = n \cdot \ldots \cdot (n-k+1)$$

Sonderfall k=n: Permutation

Kombination mit Wiederholung

$$^{W}C_n^{\,k} = \binom{n+k-1}{k} = \frac{n+k-1!}{(n-1)! \cdot k!}$$

4 Kombination ohne Wiederholung

$$C_n^{\,k} = \binom{n}{k} = \frac{n!}{(n-k)! \cdot k!}$$

Anordnungsprobleme

1 Permutation (alle n Objekte verschieden)

$$P_n = n!$$

Permutation (Objekte nicht verschieden: r Gruppen mit $n_1 + \ldots + n_r = n$)

$$P_{n_1, n_2, \ldots, n_r} = \frac{n!}{n_1! \cdot n_2! \cdot \ldots \cdot n_r!}$$

Gegeben sind folgende 3 Elemente

Auswahlprobleme und Anordnungsprobleme