Vorlesung 22 am 15.12.2022

Inhalte: Funktionen 4

- Eigenschaften
- Grundlegende Funktionen

Multiple Choice Test mit Mehrfachantworten

Eigenschaften von Funktionen

Die Funktion, deren Graph die nebenstehende Kurve ist, ist im gezeigten Bereich

monoton wachsend	☑	✓
streng monoton wachsend	☑	✓
monoton fallend	☐	
streng monoton fallend	☐	
positiv	☑	✓
negativ	☐	

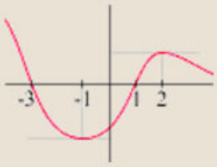
Auswertung: 6 von 6 Punkten erzielt

Die Funktion, deren Graph die nebenstehende Kurve ist,

ist bei $x = 0$ positiv	☑	✓
ist bei $x = 2$ positiv	☐	
ist bei $x = -2$ negativ	☐	
hat bei $x = 2$ eine Nullstelle	☑	✓
ist monoton wachsend	☐	
ist monoton fallend	☑	✓

Auswertung: 6 von 6 Punkten erzielt

Die Funktion f, deren Graph die nebenstehende Kurve ist,



ist im Intervall [-3, 1] monoton fallend	☐	
ist im Intervall [-3, -1] monoton fallend	☑	✓
ist im Intervall [-1, 2] monoton wachsend	☑	✓
ist im offenen Intervall (-3, 1) negativ	☑	✓
ist im abgeschlossenen Intervall [-3, 1] negativ	☐	
erfüllt $f(2) < f(0)$	☐	
erfüllt $f(2) > f(0)$	☑	✓

Die Funktion $x \to 2x^2$ ist

monoton wachsend	☐	
monoton fallend	☐	
überall positiv	☐	
überall nicht-negativ	☑	✓
eine Funktion zweiter Ordnung	☑	✓
eine Polynomfunktion	☑	✓

Auswertung: 5 von 6 Punkten erzielt

Die Funktion $x \to -3(x-1)^2$ ist

bei $x = 0$ negativ	☑	✓
bei $x = 1$ negativ	☐	
für alle negativen x negativ	☑	✓
für alle positiven x negativ	☐	
eine Funktion zweiter Ordnung	☑	✓
eine Funktion dritter Ordnung	☐	

Auswertung: 6 von 6 Punkten erzielt

http://www.mathe-online.at/tests/fun1/eigensch.html

Aufgabe 4:

Bestimmen Sie die Parameter $a, b \in \mathbb{R}$ für die gegebene Funktion $f(x)$ so, dass die Funktion stetig ist.

$$f(x) := \begin{cases} e^{ax+1} & \text{für } x \leq -1 & (f_1(x)) \\ x^2 & \text{für } -1 < x < 1 & (f_2(x)) \\ e^{x^2+b} & \text{für } x \geq 1 & (f_3(x)) \end{cases}$$

① ②

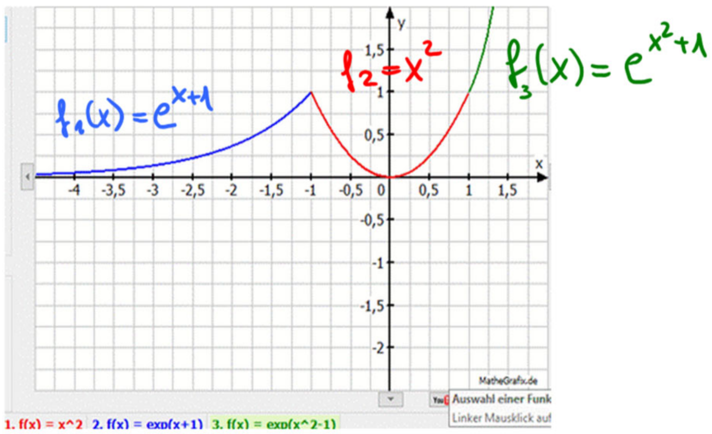
Lösung:

① Anschluss $f_1(x)$ und $f_2(x)$ bei $x = -1$

$$\left.\begin{array}{l} f_1(-1) = e^{a(-1)+1} \\ f_2(-1) = (-1)^2 = 1 \end{array}\right\} \Rightarrow e^{-a+1} = 1 \Rightarrow -a+1 = 0 \Rightarrow a = 1$$

② Anschluss $f_2(x)$ und $f_3(x)$ bei $x = 1$

$$\left.\begin{array}{l} f_2(1) = 1^2 = 1 \\ f_3(1) = e^{1^2+b} \end{array}\right\} \Rightarrow e^{1+b} = 1 \Rightarrow 1+b = 0 \Rightarrow b = -1$$



Damit sind alle 3 Bedingungen der Stetigkeit erfüllt.

Aufgabe 5: Fragen zum Verständnis zu den Themen Grenzwert und Stetigkeit

http://www.math.uni-hamburg.de/home/cm/lgm/analysis/stetigt.htm#ff1

Frage 1

Wir wollen uns zuerst an die Definition von stetig erinnern.

Eine Funktion $f: IR \to IR$ heißt ***stetig*** an der Stelle a : $\Leftrightarrow$

- ☐ a) Für jede Folge (x_n) gilt $f(x_n) \to f(a)$
- ☐ b) Für jede Folge $x_n \to a$ gilt $f(x_n) = f(a)$
- ☐ c) Es gibt genau eine Folge $x_n \to a$ mit $f(x_n) \to f(a)$
- ☐ d) Für jede Folge $f(x_n) \to f(a)$ gilt $x_n \to a$
- ✓ e) Für jede Folge $x_n \to a$ gilt $f(x_n) \to f(a)$

Bitte die richtigen Behauptungen ankreuzen!

Antwort zur Frage 1:

Richtig ist nur e):

Gehen wir die Behauptungen durch:

a) und b) Für jede Folge (x_n) gilt $f(x_n) \to f(a)$ bzw. $f(x_n) = f(a)$: Falsch – dies gilt nur für konstante Funktionen

c) Es gibt genau eine Folge $x_n \to a$ mit $f(x_n) \to f(a)$: Falsch – dies muss für *jede* Folge $x_n \to a$ gelten!

d) Für jede Folge $f(x_n) \to f(a)$ gilt $x_n \to a$: Falsch – sonst wären streng monotone Funktionen mit Sprungstellen stetig.

e) Für jede Folge $x_n \to a$ gilt $f(x_n) \to f(a)$: RICHTIG ! !

zurück zur Frage zur nächsten Frage

Aufgabe 5:

Frage 2

Wahr ☑ oder **Falsch** ☐ ?

Die Funktion $f : IR \to IR$, definiert durch $f(x) = |x| + 1$, ist an der Stelle $a = 1$ stetig

Antwort zur Frage 2:

Wahr ist richtig:

Das Kreuz an die richtige Stelle zu machen war einfach (deshalb auch nur einen Punkt). Aber wie sieht es mit einem Beweis aus?

Kurze Beweisskizze:

Sei (x_n) eine beliebige Folge, die gegen $a = 1$ konvergiert. Für $f(x_n)$ gilt dann $f(x_n) = |x_n| + 1$.

Auf Grund der Grenzwertsätze konvergiert $f(x_n)$ gegen $|1| + 1 = f(1)$.

Aufgabe 5:

Frage 3

Wahr ☐ oder **Falsch** ☑ ?

Wenn eine Funktion auf zwei Intervallen A und B (Teilmengen von IR) stetig ist, dann auch auf $A \cup B$.

Antwort zur Frage 3:

Das Kreuz gehört zu Falsch:

Wir geben ein Gegenbeispiel an:

Auf dem Intervall $A = [0,1[$ sei $f(x) = 0$, auf $B = [1,2[$ sei $f(x) = 1$.

Diese Funktion ist auf jedem der Intervalle stetig, aber auf der Vereinigung $[0,2]$ als Definitionsmenge nicht, denn für $a = 1$ gilt:

Jede konvergente Folge, die sich ihrem Grenzwert 1 "von links" nähert, hat als Bildfolge die konstante Nullfolge, aber es ist $f(1) = 1$, und dies ist nicht der Grenzwert der Nullfolge. (Man mache sich den Sachverhalt an einer Skizze klar)

3.2.5 Nullstellen

Definition 3.8: Nullstelle

Eine **Nullstelle der Funktion** $f: D \to B$ ist ein $x \in D$ mit $f(x) = 0$.

- Schnittpunkt mit der x-Achse
- $N = \{ x \in D \mid f(x) = 0 \}$ Menge der Nullstellen

Beispiele:

$f(x) = x^2$ Nullstellen-berechnung $\Rightarrow$ Bedingung $f(x) \overset{!}{=} 0 \Rightarrow x^2 = 0$
$\Rightarrow x = 0$

$f(x) = x^2 + 1$ .... $\Rightarrow x^2 + 1 \overset{!}{=} 0 \Rightarrow x^2 = -1 \Rightarrow$ k keine reellen Nst

$f(x) = x^2 - 1$ ... $\Rightarrow x^2 - 1 \overset{!}{=} 0 \Rightarrow x^2 = +1 \Rightarrow$ 2 Nst $x_{1/2} = \pm 1$

$f(x) = \sin x$ ... $\Rightarrow \sin x \overset{!}{=} 0 \Rightarrow x = \ldots, -\pi, 0, \pi, 2\pi, 3\pi, \ldots$
$\Rightarrow x = n \cdot \pi$ mit $n \in \mathbb{Z}$

Bemerkung:
- Faktorisieren bzw. Ausklammern hilft!

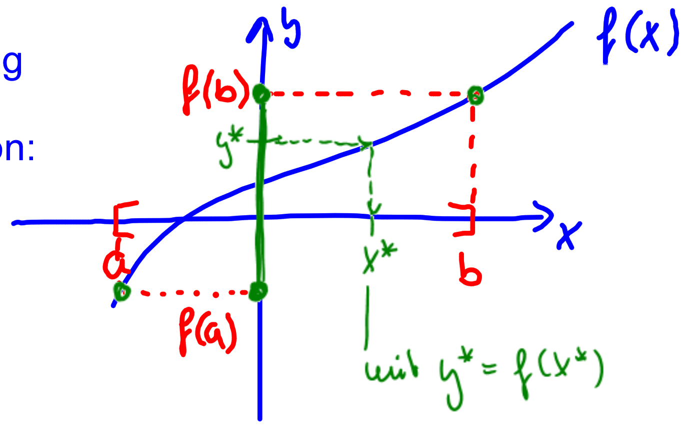
z.B. $\underline{x^2 \cdot \sin x + x \cdot \sin x \overset{!}{=} 0}$
$\sin x (x^2 + x) = 0$
$\underbrace{\sin x}_{x = n\cdot\pi,\ n \in \mathbb{Z}} \cdot \underbrace{(x+1)}_{x=-1} \cdot \underbrace{x}_{x=0} = 0$
$\vee \qquad \vee$

Menge der Nullstellen
$N = \{ n \cdot \pi \mid n \in \mathbb{Z} \} \cup \{-1\}$

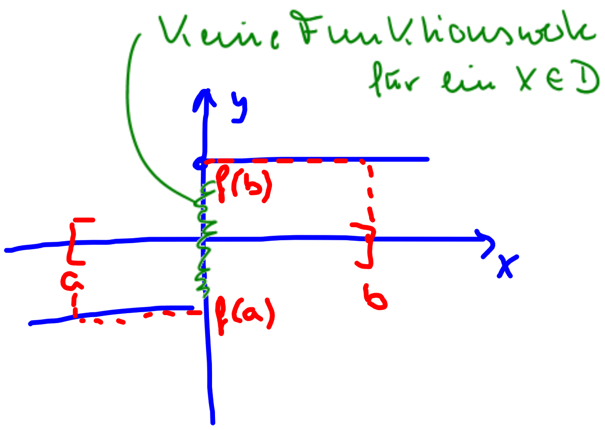
Satz 5.4: Zwischenwertsatz

Ist die Funktion $y = f(x)$ im abgeschlossenen Intervall $[a,b]$ stetig, so wird jeder y-Wert zwischen den Funktionswerten $f(a)$ und $f(b)$ für ein $x \in [a,b]$ als Funktionswert angenommen.

Veranschaulichung
Gültigkeit
für stetige Funktion:



Veranschaulichung
Nichtgültigkeit
für unstetige Funktion:

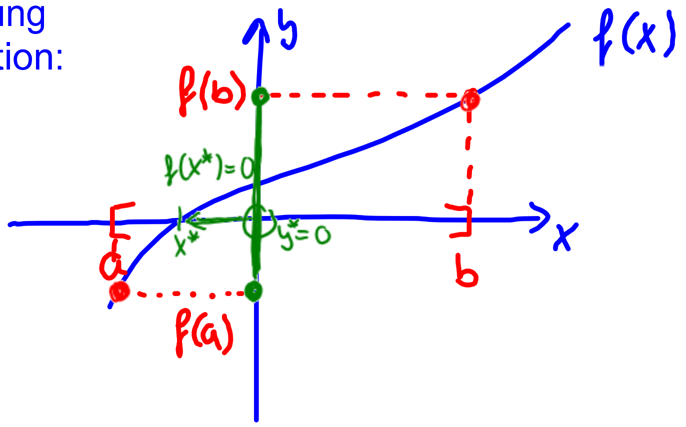


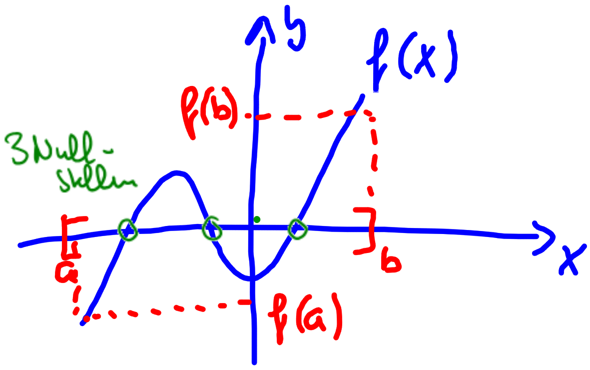
•

Satz 5.5: Nullstellensatz

Ist die Funktion $y = f(x)$ im abgeschlossenen Intervall $[a,b]$ stetig und gilt $f(a) \cdot f(b) < 0$ (d.h. die Funktionswerte am Rand enthalten einen Vorzeichenwechsel), so gibt es im Inneren von $[a,b]$ mindestens eine Nullstelle der Funktion. $y^* = 0$

Veranschaulichung für stetige Funktion:





.

Anwendung des Nullstellensatzes

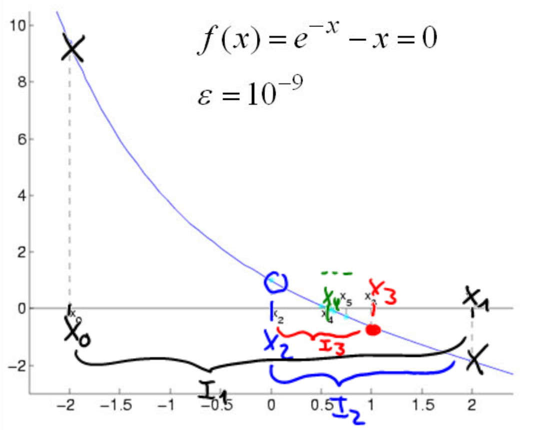
Numerische Nullstellenbestimmung durch das

Bisektionsverfahren

Algorithmus

1. INIT: Gegeben ist ein Intervall $[a,b]$ mit $f(a)f(b) < 0$
2. $m = \frac{a+b}{2}$
3. FALLS $f(m) = 0$
   RETURN m
4. FALLS $|a - b| < \text{tol}$
   RETURN m
5. FALLS $f(a)f(m) < 0$
   DANN WEITER bei 1. mit $[a,m]$
   SONST WEITER bei 1. mit $[m,b]$

Beispiel



Das Verfahren ist konvergent.

$\tilde{x}$ = 5.671433e−01

$f(\tilde{x})$ = 1.663308e−10

Auswertungen von f : 34
Auswertungen von f ' : 0
Benötigte Iterationen : 32

Grundlegende Idee des Bisektionsverfahrens:

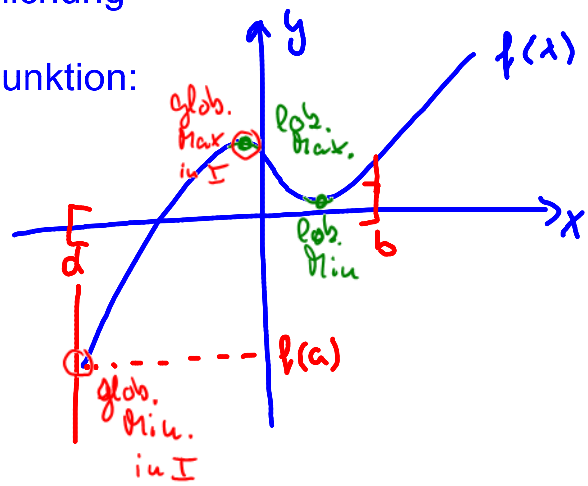
- Startintervall mit Vorzeichenwechsel der Funktionswerte
- Mittelpunkt des Intervalls bestimmen
- Funktionswert am Mittelpunkt bestimmen
- Neues Intervall wählen:
  [linke Seite, Mittelpunkt]
  oder
  [Mittelpunkt, rechte Seite]
  je nachdem in welchem Intervall ein Vorzeichenwechsel existiert
- iterieren bis Abstand zwischen den Grenzen < gegebenem ϵ
- Intervalllänge wird in jedem Schritt halbiert
- Anzahl notwendiger Iterationen n, die für eine vorgegebene Genauigkeit benötigt werden, $n \geq \frac{\ln\left(\frac{b-a}{\varepsilon}\right)}{\ln 2}$

•

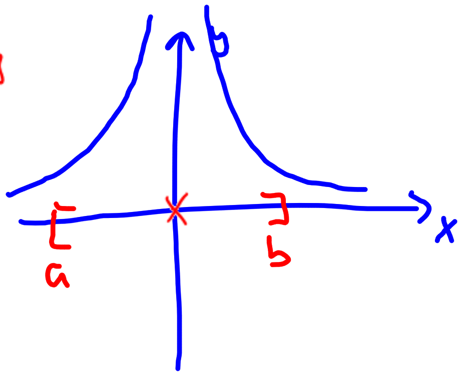
Satz 5.6:
Ist die Funktion $y = f(x)$ im abgeschlossenen Intervall $[a,b]$ stetig, so nimmt die Funktion in $[a,b]$ ihr Maximum und Minimum an.

I =

Veranschaulichung
Gültigkeit
für stetige Funktion:



Veranschaulichung
Nichtgültigkeit
für nicht stetige
Funktion: in [a,b]



•

5.5 Elementare Funktionen

5.5.1 Ganzrationale Funktionen

Definition 5.21: ganzrationale Funktion/ Polynom

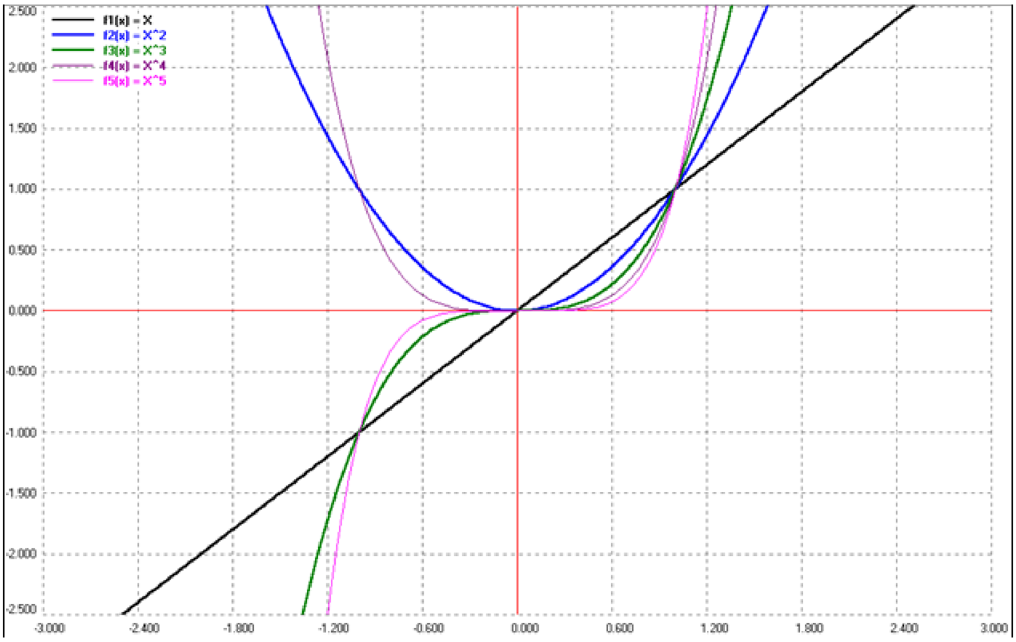
Funktionen $f:\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ vom Typ

$$f(x) = a_n x^{n} + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0$$

werden als **ganzrationale Funktionen** oder **Polynome** bezeichnet (Schreibweise auch $p_n(x)$).

Die reellen Zahlen $a_0, a_1, a_2, \ldots, a_n$ heißen **Polynomkoeffizienten**. Der höchste Exponent n in der Funktionsgleichung bestimmt den **Grad des Polynoms**.

Beispiele verschiedener Polynome:



Polynome unterschiedlichen Grades in der Normalform-Darstellung

$a_n, a_{n-1}, \dots, a_2, a_1, a_0 \in \mathbb{R}$

Polynom vom Grad 0: Konstante

$p_0(x) = a_0$

Polynom vom Grad 1: Gerade

$p_1(x) = a_1x + a_0$

Polynom vom Grad 2: quadratische Funktion

$p_2(x) = a_2x^2 + a_1x + a_0$

Polynom vom Grad 3: kubische Funktion

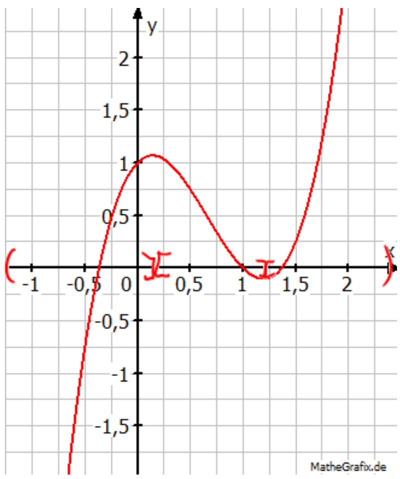
$p_3(x) = a_3x^3 + a_2x^2 + a_1x + a_0$

⋮

Polynom vom Grad n:

$p_n(x) = a_nx^n + a_{n-1}x^{n-1} + \dots + a_2x^2 + a_1x + a_0$

Beispiel:



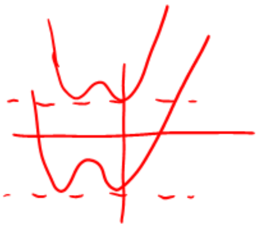
$$f(x) = 2x^3 - 4x^2 + x + 1$$

Eigenschaften von Polynomen

1) Definitionsbereich $D = \mathbb{R}$

2) Stetigkeit — in jedem Punkt von D stetig

3) Beschränktheit



Polynome mit ungeraden Grad sind unbeschränkt

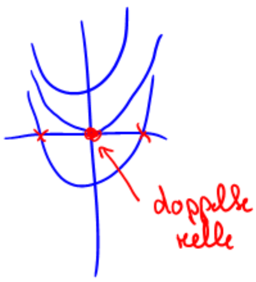
Polynome mit geraden Grad haben eine Schranke:

höchster Koeffizient > 0 ⇒ untere Schranke

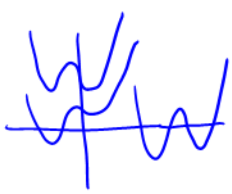
höchster Koeffizient < 0 ⇒ obere Schranke

4) Monotonie
- keine generelle Aussage möglich
- Beurteilung für jede Funktion in einzelnen Intervallen

5) Nullstellen



	reelle	(reelle +) komplexe
Grad 0	0	0 ← (Sonderfall Funktion f(x)=0 hat unendl. viele Nst)
1	1	1
2	0 oder 2	2
3	1 oder 3	3
4	0 oder 2 oder 4	4
5	1 oder 3 oder 5	5
n	⋮	⋮ n



Eigenschaften von Polynomen - Rückblick

Satz 5.7: Nullstellensatz

Besitzt das Polynom $f(x)$ vom Grad n an der Stelle x_1 eine Nullstelle, d.h. $f(x_1) = 0$, so ist die Funktion auch in der Form

$$f(x) = (x - x_1) f_1(x)$$

darstellbar.

$(x - x_1)$ heißt **Linearfaktor**. $f_1(x)$ heißt das **1.reduzierte Polynom vom Grad *(n-1)***, das man durch *Polynomdivision* erhält.

bereits behandelt

Satz 5.8: Fundamentalsatz der Algebra

Ein Polynom $f(x)$ vom Grad n besitzt in der Menge $\mathbb{C}$ der komplexen Zahlen genau n Nullstellen $x_1, x_2, x_3, \dots, x_n$, die nicht alle verschieden sein müssen.

$f(x)$ besitzt dann eine Produktzerlegung in Linearfaktoren

$$f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0 = a_n (x - x_1)(x - x_2) \dots (x - x_n)$$

bereits behandelt

Satz 5.9: Wurzelsatz von Vieta

Zwischen den Nullstellen x_i $(i = 1, 2, \dots, n)$ und den Koeffizienten a_i für $i = 1, 2, \dots, n$ eines Polynoms $f(x)$ mit normiertem höchsten Koeffizienten $a_n = 1$ bestehen die Beziehungen

$$x_1 + x_2 + \dots + x_n = (-1)^1 a_{n-1}$$

$$x_1 x_2 + x_1 x_3 + \dots + x_1 x_n + x_2 x_3 + \dots + x_{n-1} x_n \dots = (-1)^2 a_{n-2}$$

$$\dots$$

$$x_1 x_2 x_3 \cdot \dots \cdot x_n = (-1)^n a_0$$

Beispiel: für n=2

$p(x) = (x - 2)(x + 3)$ $= x^2 (+3)x (-2)x + (-2)\cdot 3$

$= x^2 + 1x - 6$

•

8.5.1.1 Horner-Schema

- effiziente Methode für verschiedene Berechnungen bei Polynomen
- Umformung des Polynoms $p(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0$ in die Form
  $p(x) = x\Big(x\Big(\ldots\Big(x\Big(x\big(a_n x + a_{n-1}\big) + a_{n-2}\Big) + a_{n-3}\Big) + \ldots + a_2\Big) + a_1\Big) + a_0$ iterative Berechnung
- **Realisierung in 3-zeiliger Tabelle**

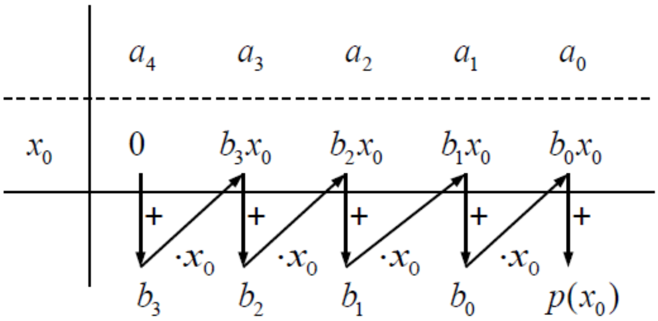
  1.Zeile: Koeffizienten $a_n \quad a_{n-1} \quad a_{n-2} \quad \ldots. \quad a_1 \quad a_0$

  2.Zeile: 1.Element ist 0, weitere Elemente während Berechnung ergänzt

  3.Zeile: während Berechnung ergänzt
- **Rechengang im Zickzack**:
  - von links nach rechts
  - pro Spalte:

    Addition der 1. + 2. Zeileneinträge und notieren in 3.Zeile,

    Wert der 3.Zeile mit x_0 multiplizieren und in der 2.Zeile der nächsten Spalte notieren.
  - In der letzten Spalte in der 3.Zeile steht das Ergebnis für $p(x_0)$
- **Horner-Schema für n=4**



- **Zwischenrechnungswerte** b_i (hier: b_3, b_2, b_1, b_0) definieren ein Polynom vom Grad (n-1) und erfüllen die Gleichung:

  $$p(x) = (x - x_0)(b_3 x^3 + b_2 x^2 + b_1 x + b_0) + p(x_0)$$

  Ist $p(x_0) = 0$, dann ist $p(x)$ ohne Rest durch $(x - x_0)$ teilbar und x_0 ist Nullstelle. Somit ist die Abspaltung eines Linearfaktors $(x - x_0)$ durch Polynomdivision mit dem Horner-Schema durchführbar.

Beispiel: Verwendung Horner-Schema

Beispiel: $f(x) = \underset{a_3}{1}\cdot x^3 + \underset{a_2}{2}x^2 - \underset{a_1}{5}x - \underset{a_0}{6}$

$x=3 \quad x=3 \quad x=3$

$\ldots \Rightarrow f(3) = 1\cdot 3^3 + 2\cdot 3^2 - 5\cdot 3 - 6 = 24$

(1) Berechnung von Funktionswerten

$x = 3$

	$a_3 = 1$	$a_2 = 2$	$a_1 = -5$	$a_0 = -6$
$x_0 = 3$	0	3	15	30
	1	5	10	24

$+ \quad \cdot x_0$

$\Rightarrow f(3) = 24$

alternative Berechnungsmöglichkeit durch Horner-Schema

(2) Abspaltung Linearfaktor als Alternative zur Polynomdivision

$x = 2$ sei Nullstelle

	$a_3 = 1$	$a_2 = 2$	$a_1 = -5$	$a_0 = -6$
$x_0 = 2$	0	2	8	6
	1	4	+3	0

$+ \quad \cdot x_0$

$\Rightarrow f(2) = 0$

Koeffizienten des reduzierten Polynoms (nach Abspaltung des Linearfaktors)

$\Downarrow$ verwendetes x_0 ist eine Nullstelle

$$f(x) = x^3 + 2x^2 - 5x - 6 = \underbrace{(1\cdot x^2 + 4\cdot x + 3)}_{\text{reduziertes Polynom}}\ \underbrace{(x-2)}_{\text{Linearfaktor zur Nullstelle } x_0 = 2}$$

$\uparrow$ sowohl auch über Polynomdivision ermittelt

8.5.1.2 Polynom-Interpolation

- **Problem:** Von einer Funktion sind nur Punkte vorhanden, aber die Funktion selbst ist unbekannt.

  Ziel: Näherungsfunktion (hier Polynom) finden, die mit der unbekannten Funktion in den Stützstellen übereinstimmt.

- **Interpolationsaufgabe:** Gegeben sind (n+1) Datenpaare $(x_i, y_i),\ i = 0,1,\ldots,n$, die als Stützstellen der Interpolation bezeichnet werden. Es wird ein Polynom $p_n(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0$ vom Grad n gesucht, welches über die Datenpaare interpoliert, d.h. die (n+1) Interpolationsbedingungen $y_i = p_n(x_i),\ i = 0,1,\ldots,n$ erfüllt.

- **Ziel der Polynominterpolation**: Bestimmung der Polynomkoeffizienten $a_n, a_{n-1}, \ldots, a_1, a_0$ des Polynoms $p_n(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0$.

- Lösungsansatz über das **Interpolationspolynom von Newton**:
  Das Newtonsche Interpolationspolynom n-ten Grades durch (n+1) vorgegebene Stützpunkte $P_i = (x_i, y_i),\ i = 0,1,\ldots,n$ lautet

$$\boxed{y = p_n(x) = \hat{a}_0 + \hat{a}_1(\underline{x - x_0}) + \hat{a}_2(\underline{x - x_0})(\underline{x - x_1}) + \ldots + \hat{a}_n(\underline{x - x_0})(\underline{x - x_1})\ldots(\underline{x - x_{n-1}})}$$

  Die Berechnung der Koeffizienten $\hat{a}_0, \hat{a}_1, \ldots, \hat{a}_{n-1}, \hat{a}_n$ erfolgt über das Schema der dividierten Differenzen.

- **Dividierte Differenzen** (rekursiv definiert):

„Steigungsdreiecke"

$$\left.\begin{aligned}
&[x_0, x_1] = \frac{y_0 - y_1}{x_0 - x_1}\\
&[x_1, x_2] = \frac{y_1 - y_2}{x_1 - x_2}\\
&\vdots\\
&[x_{n-1}, x_n] = \frac{y_{n-1} - y_n}{x_{n-1} - x_n}
\end{aligned}\right\}$$

dividierte Differenzen 1.Ordnung

„Vergleich der Steigungsdreiecke"

div. 1.Ord.

$$\left.\begin{aligned}
&[x_0, x_1, x_2] = \frac{[x_0, x_1] - [x_1, x_2]}{x_0 - x_2}\\
&[x_1, x_2, x_3] = \frac{[x_1, x_2] - [x_2, x_3]}{x_1 - x_3}\\
&\vdots\\
&[x_{n-2}, x_{n-1}, x_n] = \frac{[x_{n-2}, x_{n-1}] - [x_{n-1}, x_n]}{x_{n-2} - x_n}
\end{aligned}\right\}$$

dividierte Differenzen 2.Ordnung

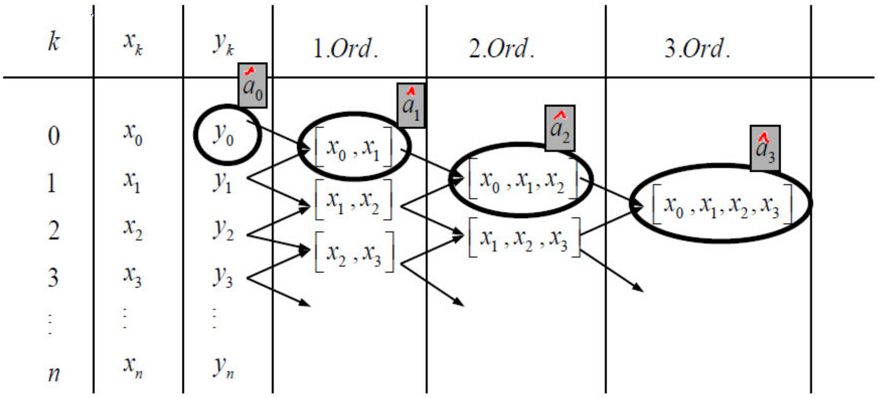
$\vdots$

$$[x_i, x_{i+1}, x_{i+2}, x_{i+3}] = \frac{[x_i, x_{i+1}, x_{i+2}] - [x_{i+1}, x_{i+2}, x_{i+3}]}{x_i - x_{i+3}}$$ dividierte Differenzen 3.Ordnung

$\vdots$

$$[x_i, x_{i+1}, \ldots, x_{i+k}] = \frac{[x_i, x_{i+1}, \ldots, x_{i+k-1}] - [x_{i+1}, \ldots, x_{i+k}]}{x_i - x_{i+k}}$$ dividierte Differenzen k.Ordnung

- **Schema der dividierten Differenzen:**

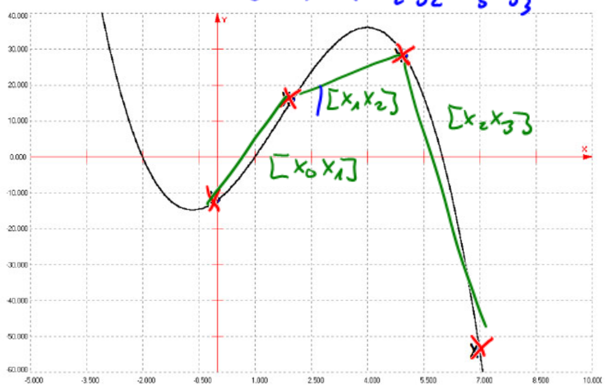


Die gesuchten Koeffizienten $a_0, a_1, \ldots, a_{n-1}, a_n$ des Newtonschen Interpolationspolynoms stehen in der oberen Schrägzeile des Schemas der dividierten Differenzen.

Beispiel eines Newtonschen Interpolationspolynoms 3. Grades

durch die Punkte(0,-12), (2,16), (5,28), (7,-54)

$x_0\ y_0\ \ x_1\ y_1\ \ x_2\ y_2\ \ x_3\ y_3$



	x_i	y_i	$[x_i\ x_j]$	$[x_i\ x_j\ x_k]$	$[x_i\ x_j\ x_k\ x_l]$
x_0	0	-12 $\hat{a}_0$	$\frac{-12-16}{0-2} = 14$ $\hat{a}_1$	$\frac{14-4}{0-5} = -2$ $\hat{a}_2$	$\frac{-2-(-9)}{0-7} = -1$ $\hat{a}_3$
x_1	2	16	$\frac{16-28}{2-5} = 4$	$\frac{4-(-41)}{2-7} = -9$	
x_2	5	28	$\frac{28-(-54)}{5-7} = -41$		
	7	-54			

$\hat{a}_i$ Koeffizienten des Newton-Interpolations-Polynoms

Newton-Interpolations-polynom

$$P_3(x) = -12 + 14\cdot(x-0) - 2(x-0)(x-2) - 1(x-0)(x-2)(x-5)$$

↑ eindeutig

Standardform berechenbar

Literatur: http://elsenaju.info/Rechner/Newton-Interpolation.htm

3.5.2 Gebrochen rationale Funktionen

Definition 3.22: gebrochen rationale Funktion

Reelle Funktionen vom Typ

$$f(x) = \frac{a_n x^{n} + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0}{b_m x^{m} + b_{m-1}x^{m-1} + \ldots + b_1 x + b_0} = \frac{Z(x)}{N(x)}$$

werden als **gebrochen rationale Funktionen** bezeichnet.

Das Polynom $Z(x)$ heißt hierbei das **Zählerpolynom** und $N(x)$ das **Nennerpolynom**.

Ist der Zählergrad kleiner dem Nennergrad, d.h. $n < m$, so heißt die Funktion **echt gebrochen**.

Ist der Zählergrad größer oder gleich dem Nennergrad, d.h. $n \geq m$, so heißt die Funktion **unecht gebrochen**.

Beispiele:

echt gebrochen rationale Fkt: $f(x) = \dfrac{x^2+1}{x^3+2x^2+4}$ ← Zählergrad = 2, ← Nennergrad = 3

unecht gebrochen rationale Fkt: $f(x) = \dfrac{x^2-x+1}{x+3}$ ← Zählergrad = 2, ← Nennergrad = 1

↓ Polynomdivision

$$(x^2-x+1):(x+3) = x-4+\frac{13}{x+3}$$
$$\begin{array}{l} -(x^2+3x) \\ \hline -4x+1 \\ -(-4x-12) \\ \hline 13 \end{array}$$

$$f(x) = \underbrace{x-4}_{\text{ganz rationale Fkt}} + \underbrace{\frac{13}{x+3}}_{\text{echt gebroch. rat. Fkt.}}$$

↑ Asymptote von $f(x)$: $h(x)$

Asymptote

Definition 3.24: Asymptote einer gebrochen rationalen Funktion

Eine Funktion h(x) heißt **Asymptote** einer gebrochen rationalen Funktion f(x), wenn gilt:

$$\lim_{|x|\to\infty} |f(x) - h(x)| \overset{!}{=} 0$$

$\hat{=} \lim_{x\to+\infty}$ und $\lim_{x\to-\infty}$

d.h. für große x nähert sich die Funktion f(x) an die Funktion h(x) an.

Beispiel $f(x) = \dfrac{x^2 - x + 1}{x+3} = \underbrace{x-4}_{\text{Asymptote } h(x) = x-4} + \dfrac{13}{x+3}$

$$\lim_{|x|\to\infty} |f(x) - h(x)|$$

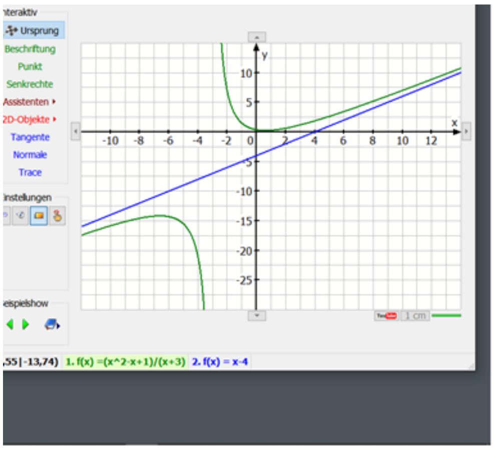
$$= \lim_{|x|\to\infty} \left| x - 4 + \frac{13}{x+3} - (x-4) \right|$$

$$= \lim_{|x|\to\infty} \left| \frac{13}{x+3} \right| = 0 \checkmark$$

$\Rightarrow$ h(x) ist Asymptote zu f(x)

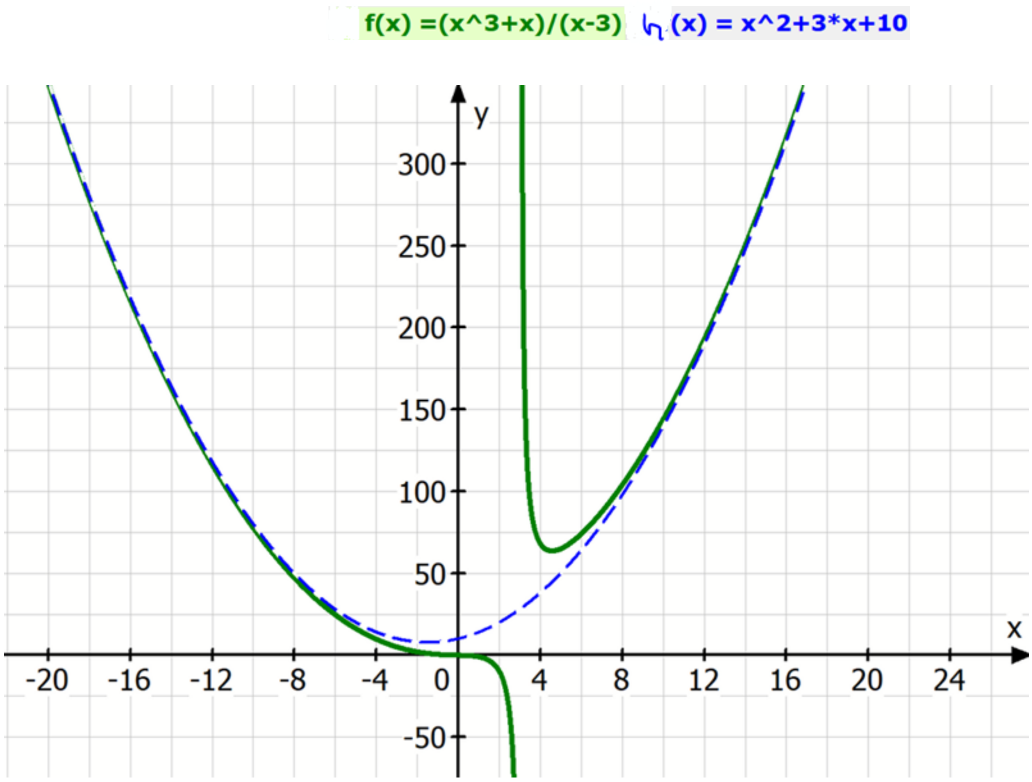
d.h.

f(x) verhält sich im Unendlichen wie h(x)



weiteres Beispiel :

$$f(x) = \frac{x^3+x}{x-3} = \underbrace{x^2+3x+10}_{\substack{\text{Asymptote} \\ h(x)}} + \frac{30}{x-3}$$



Aussagen über gebrochen rationale Funktionen

Satz 3.10:

Jede unecht gebrochene rationale Funktion lässt sich durch Polynomdivision eindeutig in eine Summe aus einem Polynom und einer echt gebrochenen rationalen Funktion zerlegen.

$$f(x) = \frac{\overset{\text{Grad 3}}{Z(x)}}{\underset{\text{Grad 1}}{N(x)}} = \underset{\text{Grad 2}}{h(x)} + \frac{r(x)}{N(x)}$$

Beispiel siehe nächste Seite

Hat $Z(x)$ den Grad n und $N(x)$ den Grad m, so ist (n-m) der Grad von $h(x)$. $r(x)$ hat höchstens den Grad (m-1).

z.B. $f(x) = \frac{x+1}{x^2+2x+2} = \underbrace{0}_{h(x)} + \frac{x+1}{x^2+2x+2}$

Satz 3.11: Asymptote

Jede gebrochen rationale Funktion f besitzt eine Asymptote.

(a) Ist f echt gebrochen, so ist die Asymptote von f die Nullfunktion. $\Rightarrow h(x) = 0$

(b) Ist f unecht gebrochen, so ist die Asymptote von f das Polynom h, das bei der Polynomdivision entsteht.

Definition 3.23: Polstelle

Eine Stelle x_0, in deren unmittelbarer Umgebung die Funktionswerte über alle Grenzen hinaus fallen oder wachsen heißen **Pole** bzw. **Polstellen**.

Pole mit Vorzeichenwechsel:

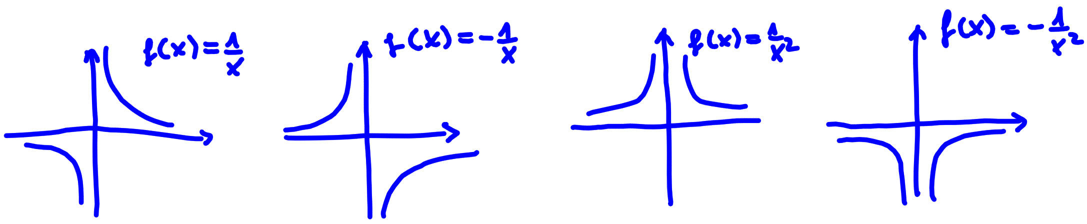
$$\lim_{x \to x_0^+} f(x) = +\infty, \quad \lim_{x \to x_0^-} f(x) = -\infty \quad (bzw. umgekehrt)$$

Pole ohne Vorzeichenwechsel:

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = +\infty \quad (bzw. -\infty)$$

$\hat{=}\ x \to x_0^+$ und $x \to x_0^-$

Beispiele:



- mit VZW $(-\infty|+\infty)$ mit VZW $(+\infty|-\infty)$ ohne VZW $(+\infty|+\infty)$ ohne VZW $(-\infty|-\infty)$

Zusammenfassung: Gebrochen rationale Funktionen

Eigenschaften	$f(x)=\frac{a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1}+\ldots+a_1 x + a_0}{b_m x^m + b_{m-1}x^{m-1}+\ldots+b_1 x+b_0}=\frac{Z(x)}{N(x)}$
Definitionsbereich	$\{x \mid N(x)\neq 0\}$
Bildbereich	$\mathbb{R}$
Beschränktheit	auf einem abgeschlossenen Intervall aus ihrem Definitonsbereich stets beschränkt
Monotonie	abhängig von der jeweiligen Funktion und ggfs. nur in Intervallen
Umkehrfunktion	abhängig von der jeweiligen Funktion und ggfs. nur in Intervallen
Symmetrie	abhängig von der jeweiligen Funktion und ggfs. nur in Intervallen
Periodizität	-
Stetigkeit	im gesamten Definitionsbereich stetig (aber nicht an den Nullstellen des Nennerspolynoms, die aber auch nicht zum Definitionsbereich gehören)
Asymptote	für jede gebrochen rationale Funktion vorhanden
Nullstellen	$\{x\in D \mid Z(x)=0 \wedge N(x)\neq 0\}$
Polstellen	$\{x\in \mathbb{R} \mid N(x)=0 \wedge Z(x)\neq 0\}$ nicht hebbare Lücke
Minimum/Maximum	
Besonderheiten:	$\{x\in \mathbb{R} \mid N(x)=0 \wedge Z(x)=0\}$ hebbare Lücke

Beispiel: $f(x) = \frac{(x-2)(x+3)}{(x-2)(x+4)}$

- Definitionslücken L ={ x∈IR | N(x)=0 }

  $L = \{2, -4\}$

- Definitionsbereich D ={ x∈IR | N(x)≠0 }

  $D = \mathbb{R} \setminus L = \mathbb{R} \setminus \{2, -4\}$

- Nullstellen N ={x∈IR | Z(x)=0 ∧ N(x)≠0}

  $N = \{-3\}$

- Hebbare Definitionslücken H={x∈IR | Z(x)=0 ∧ N(x)=0}

  $H = \{2\}$ $\qquad f^*(x) = \frac{\cancel{(x-2)}(x+3)}{\cancel{(x-2)}(x+4)}$

- Polstellen P ={x∈IR | Z(x)≠0 ∧ N(x)=0}

  $P = \{-4\}$ mit VZW, da Linearfaktor $(x+4)$ im Nenner die Vielfachheit 1 hat, d.h. ungerade

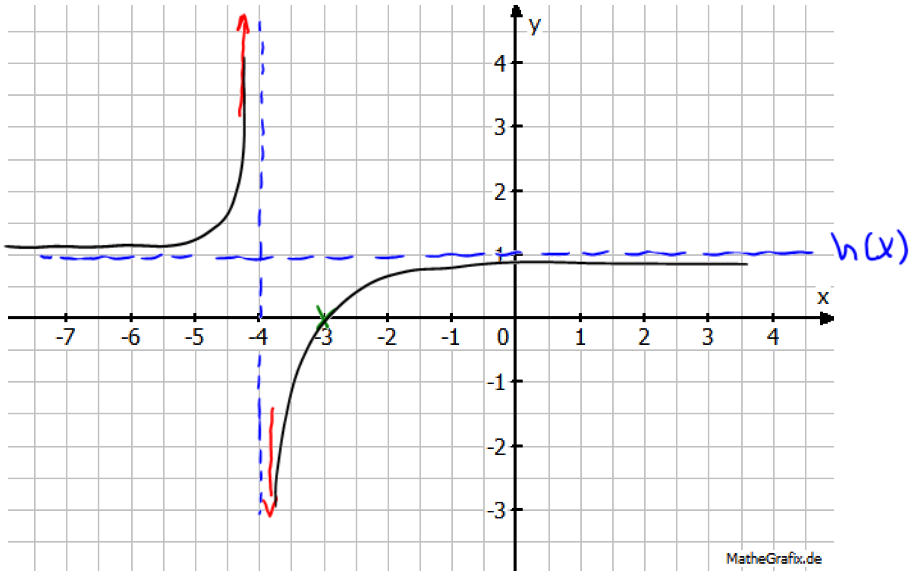
  $\lim_{x \to -4^+} \frac{x+3}{x+4} = \lim_{n \to \infty} \frac{-4+\frac{1}{n}+3}{-4+\frac{1}{n}+4} \cdot \frac{n}{n}$ $\quad x_n = -4 + \frac{1}{n}$

  $= \lim_{n \to \infty} \frac{-n+1}{1} = -\infty$

- Asymptote

  $f^*(x) = \frac{x+3}{x+4} = \underbrace{1}_{h(x)} - \frac{1}{x+4}$

- Skizze der Funktion



Vorgehen zur Analyse einer gebrochen rationalen Funktion

(1) Linearfaktoren für Zähler und Nenner bestimmen

(2) Definitionsbereich bestimmen

(3) hebbare Definitionslücken bestimmen

(4) Pole und Art der Pole bestimmen

mit Vz-Wechsel: wenn nach dem Kürzen N(x)=0 und Vielfachheit ist **ungerade**

ohne Vz-Wechsel: wenn nach dem Kürzen N(x)=0 und Vielfachheit ist **gerade**

(5) Nullstellen bestimmen

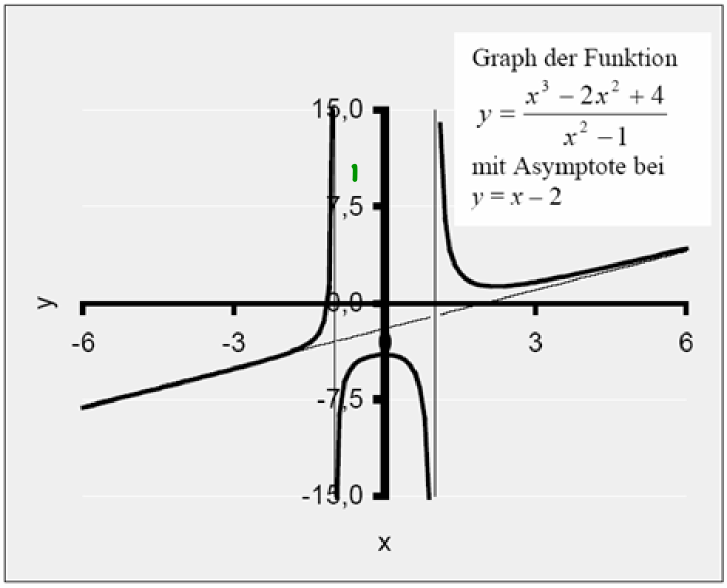
Schnittpunkt: wenn Z(x)=0 und Vielfachheit der Nst. ist **ungerade**

Berührpunkt: wenn Z(x)=0 und Vielfachheit der Nst. ist **gerade**

(6) Asymptoten bestimmen

(7) Skizzieren der Funktion mit diesen Angaben leicht möglich

Beispiel einer gebrochen rationalen Funktion



aus Bartels Uni-Frankfurt

Beispiele und Zusammenfassung: Gebrochenrationale Funktionen

Allgemein gilt:

Definitionslücken: wenn $N(x)=0$
hebbare Definitionslücken: wenn Linearfaktor herauskürzbar

Nullstellen - Schnittpunkt: wenn $Z(x)=0$ und Vielfachheit der Nst. ist **ungerade**

- Berührpunkt: wenn $Z(x)=0$ und Vielfachheit der Nst. ist **gerade**

Pole mit Vz-Wechsel: wenn nach dem Kürzen $N(x)=0$ und Vielfachheit ist **ungerade**

ohne Vz-Wechsel: wenn nach dem Kürzen $N(x)=0$ und Vielfachheit ist **gerade**

$$f(x)=\frac{x(x-2)^2(x+1)}{(x+2)^3(x+1)(x-1)^2(x-3)}$$

Beispiel

Definitionslücken: x=-1, x=-2, x=1, x=3
hebbare Definitionslücken: x=-1

Nullstellen - Schnittpunkt: x=0
- Berührpunkt: x=2 (doppelt)

Pole mit Vz-Wechsel: x=-2(dreifach), x=3 (einfach)
ohne Vz-Wechsel: x=1(doppelt)

$$g(x)=\frac{\overbrace{x^3+5x^2-x-5}^{(x-1)(x-5)(x+1)}}{(x-1)(x-2)^2}$$

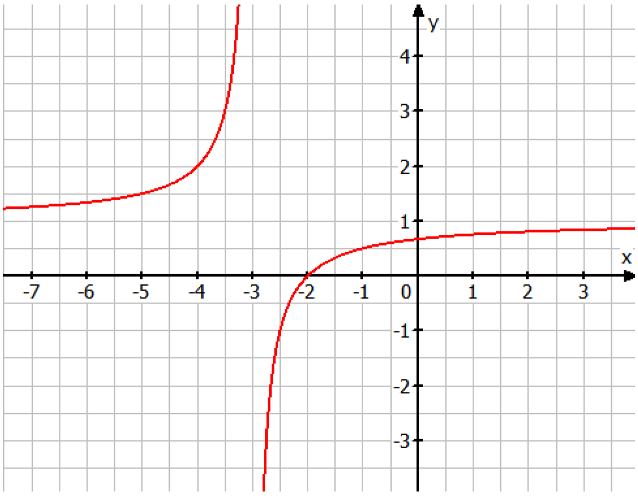
Beispiel

Definitionslücken: x=1, x=2
hebbare Definitonslücken: x=1

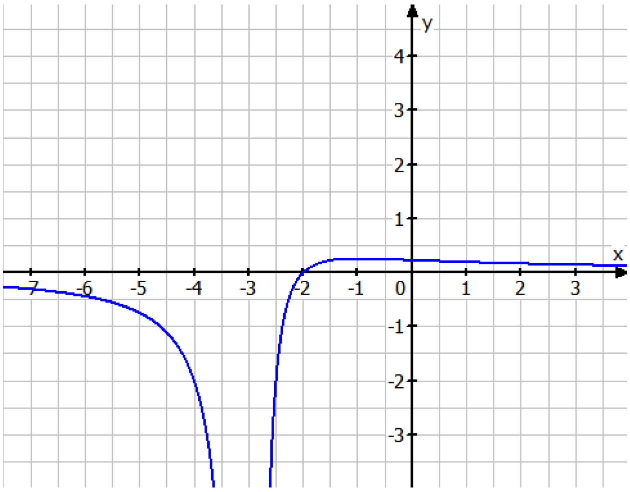
Nullstellen - Schnittpunkt: x=-1, x=5
- Berührpunkt:

Pole mit Vz-Wechsel:
ohne Vz-Wechsel: x=2

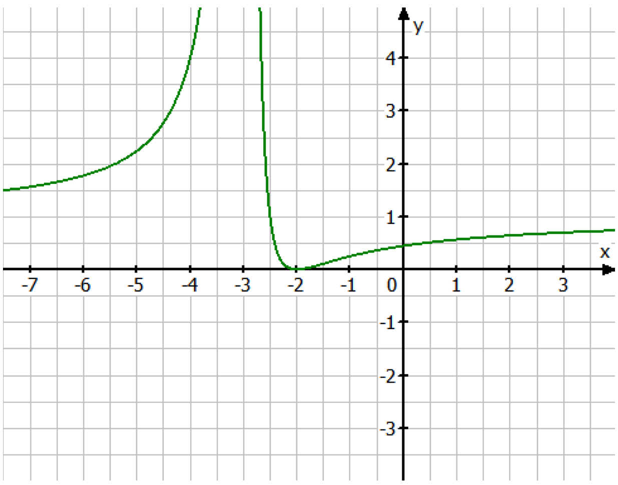
Beispiele: Gebrochenrationale Funktionen



$$f_1(x) = \frac{x+2}{x+3}$$



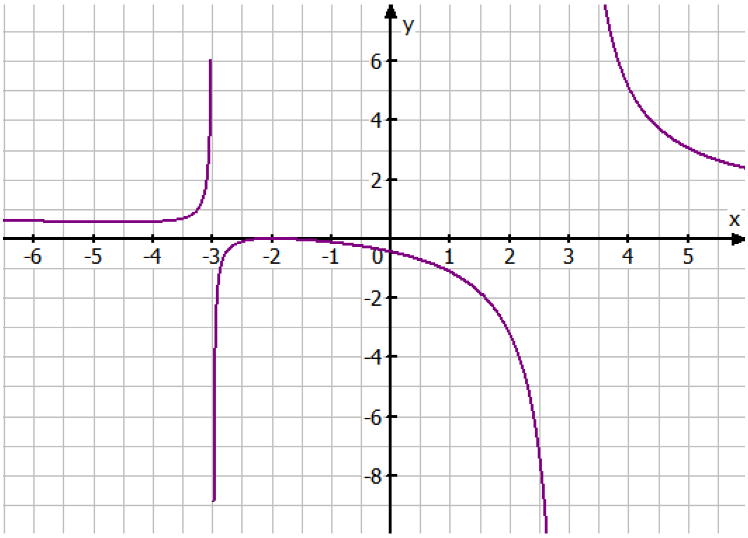
$$f_2(x) = \frac{x+2}{(x+3)^2}$$



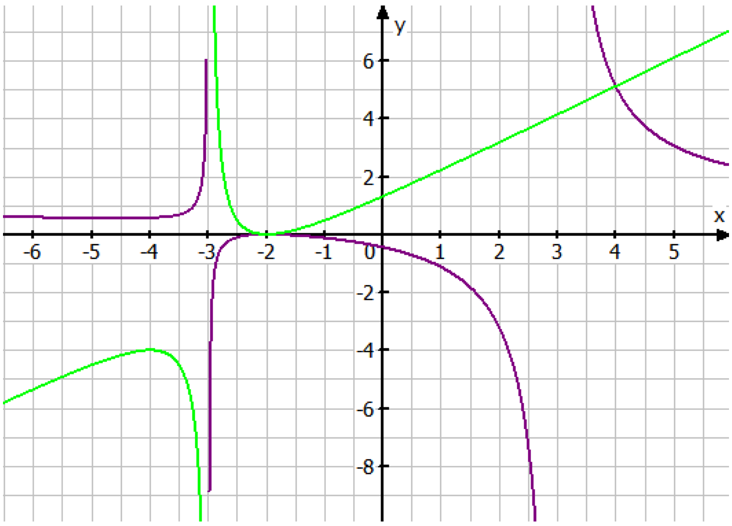
$$f_3(x) = \frac{(x+2)^2}{(x+3)^2}$$

•

Beispiele: Gebrochenrationale Funktionen



$$f_4(x) = \frac{(x+2)^2}{(x+3)(x-3)}$$



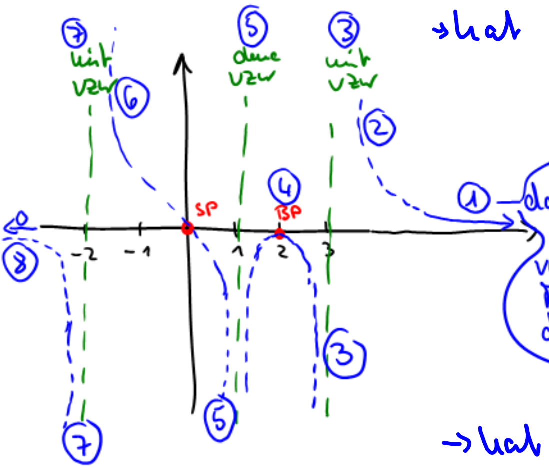
$$f_5(x) = \frac{(x+2)^2(x-3)}{(x+3)(x-3)}$$

Aufgabe 2:
Prüfen Sie die Funktion auf Stetigkeit, stetige Ergänzbarkeit, Pole, Art der Pole und Nullstellen.

c) $$f(x) = \frac{x(x-2)^2(x+1)}{(x+2)^3(x+1)(x-1)^2(x-3)}$$

- $D = \mathbb{R} \setminus \{-2, -1, 1, 3\}$
- Definitionslücken $x = -1$ ist herauskürzbar, d.h. bei $x = -1$ ist die Funktion stetig ergänzbar
- $f_3^*(x) = \dfrac{x(x-2)^2}{(x+2)^3(x-1)^2(x-3)^1}$ → Asymptote $h(x) = 0$, da echt gebroch. rat. Fkt.

→ hat $D = \mathbb{R} \setminus \{-2, 1, 3\}$



① da für $x > 3$ $f(x)$ stets > 0, verläuft die Funktion oberhalb der x-Achse gegen 0

→ hat zwei Nullstellen $x = 0$ (Schnittpunkt mit x-Achse, da Linearfaktor mit ungerader Potenz auftritt) und $x = 2$ (Berührpunkt mit x-Achse, da Linearfaktor mit gerader Potenz auftritt)

→ hat drei Pole $x = -2$ (mit Vorzeichenwechsel, da Linearfaktor mit ungerader Potenz auftritt)

$x = 1$ (ohne Vorzeichenwechsel, da Linearfaktor mit gerader Potenz auftritt)

$x = 3$ (mit Vorzeichenwechsel, da Linearfaktor mit ungerader Potenz auftritt)

Legende:
① .... ⑧ Weg der Schlussfolgerungen