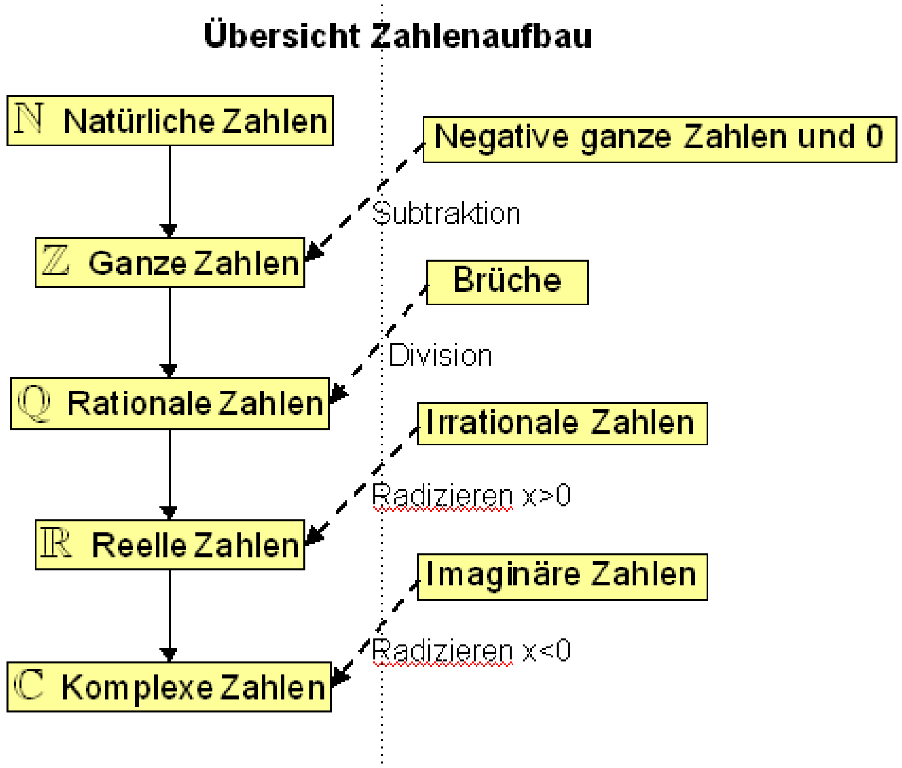
3 Zahlensysteme

Inhaltsverzeichnis

3.1 Zahlenaufbau

In der nachfolgenden Abbildung ist ein Überblick des Zahlenaufbaus gegeben.



$\mathbb{N} = \{1, 2, 3, 4, ...\}$ *Menge der natürlichen Zahlen*

$\mathbb{Z} = \{..., -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, ...\}$ *Menge der ganzen Zahlen*

$\mathbb{N}_0 = \mathbb{N} \cup \{0\}$ *Menge der nichtnegativen ganzen Zahlen*

$\mathbb{Q} = \left\{ \frac{m}{n} \middle| \, m \in \mathbb{Z}, n \in \mathbb{N} \right\}$ *Menge der rationalen Zahlen*

$\mathbb{Q}^+ = \left\{ \frac{m}{n} \middle| \, m \in \mathbb{N}, n \in \mathbb{N} \right\}$ *Menge der positiven rationalen Zahlen*

$\mathbb{Q}_0^+ = \left\{ \frac{m}{n} \middle| \, m \in \mathbb{N}_0, n \in \mathbb{N} \right\}$ *Menge der nichtnegativen rationalen Zahlen*

$\mathbb{Q}^\times = \mathbb{Q} \setminus \{0\}$ *Menge der von Null verschiedenen rationalen Zahlen*

$\mathbb{R} =$ *Menge der reellen Zahlen*

$\mathbb{C} =$ *Menge der komplexen Zahlen*

Es gilt: $\mathbb{N} \subset \mathbb{N}_0 \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R} \subset \mathbb{C}$

$\mathbb{N} \subset \mathbb{N}_0 = \mathbb{Z}_0^+ \subset \mathbb{Q}_0^+ \subset \mathbb{R}_0^+ \subset \mathbb{C}_0^+$

3.1.1 Die natürlichen Zahlen

Die natürlichen Zahlen sind die Zahlen der nachfolgend dargestellten Zahlenmenge:

$$\boxed{\mathbb{N} = \{1, 2, 3, 4, ...\} \quad \textit{Menge der natürlichen Zahlen}}$$

Sie liegen auf einem Zahlenstrahl alle rechts vom Ursprung.

Die Grundlage der Theorie der natürlichen Zahlen bilden die Peano-Axiome (Giuseppe Peano (1858 - 1932)).

Definition 2.1: Peano-Axiome

Die Menge $\mathbb{N}$ der natürlichen Zahlen ist durch folgende Eigenschaften charakterisiert:

(P1) 1 ist eine natürliche Zahl

(P2) Jede natürliche Zahl hat genau einen von 1 verschiedenen Nachfolger, der eine natürliche Zahl ist.

(P3) 1 ist kein Nachfolger einer natürlichen Zahl.

(P4) Verschiedene natürliche Zahlen haben verschiedene Nachfolger.

(P5) Für jede Teilmenge M von $\mathbb{N}$ mit den Eigenschaften:

(1) $1 \in M$ und

(2) Ist $n \in M$, so ist auch der Nachfolger Element von M,

gilt: $M = \mathbb{N}$.

Bemerkung:

- Das letzte Peano-Axiom bildet die Grundlage für die vollständige Induktion.
- Die Peano-Axiome können auch bei 0 beginnen, wenn man 0 in die natürlichen Zahlen mit einschließt.
- $\boxed{\mathbb{N}_0 = \{0, 1, 2, 3, 4, ...\} \quad \textit{bezeichnet die Menge der natürlichen Zahlen einschließlich der Zahl } 0}$

Weitere Eigenschaften der natürlichen Zahlen:

- Die **Addition** und die **Multiplikation** sind Verknüpfungen, die innerhalb der natürlichen Zahlen **uneingeschränkt durchführbar** sind, d.h. das Ergebnis dieser beiden Operationen liegt wieder in den natürlichen Zahlen.
- Für diese beiden Verknüpfungen der natürlichen Zahlen gelten das Kommutativgesetz, das Assoziativgesetz und das Distributivgesetz.

3.1.2 Die ganzen Zahlen

Die natürlichen Zahlen ergänzt um den Ursprung und die Negativen der natürlichen Zahlen, die links vom Ursprung liegen, bilden die ganzen Zahlen:

$$\boxed{\mathbb{Z} = \{\ldots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \ldots\} \quad \textit{Menge der ganzen Zahlen}}$$

Eigenschaften der ganzen Zahlen:

- Die **Addition**, die **Multiplikation** und die **Subtraktion** sind Operationen, die innerhalb der ganzen Zahlen **uneingeschränkt durchführbar** sind, d.h. das Ergebnis dieser Operationen liegt wieder in den ganzen Zahlen.
- Für Addition und die Multiplikation gelten das Kommutativgesetz, das Assoziativgesetz und das Distributivgesetz.

3.1.3 Die rationalen Zahlen

Die ganzen Zahlen ergänzt um die Brüche bilden die rationalen Zahlen. Rationale Zahlen sind entweder endliche Dezimalbrüche wie $-\frac{7}{1} = -7$, $\frac{27}{6} = 4\frac{3}{6} = 4{,}5$ oder $\frac{9}{4} = 2{,}25$ oder unendliche periodische Dezimalbrüche wie
$\frac{1}{3} = 0{,}333.. = 0{,}\overline{3}$ oder $\frac{8}{33} = 0{,}2424.. = 0{,}\overline{24}$ oder $\frac{29}{22} = 1{,}31818.. = 1{,}3\overline{18}$.

$$\boxed{\mathbb{Q} = \left\{ \tfrac{m}{n} \,\middle|\, m \in \mathbb{Z}, n \in \mathbb{N} \right\} \quad \textit{Menge der rationalen Zahlen}}$$

Eigenschaften der rationalen Zahlen:

- Brüche können zwischen den ganzen Zahlen eingeordnet werden.
- Der Zahlenstrahl mit den rationalen Zahlen enthält noch Lücken.
- Die **Addition**, die **Multiplikation**, die **Subtraktion** und die **Division** sind Operationen, die innerhalb der rationalen Zahlen **uneingeschränkt durchführbar** sind, d.h. das Ergebnis dieser Operationen liegt wieder in den rationalen Zahlen.
- Jeder abbrechende oder periodische Dezimalbruch lässt sich als Bruch $\frac{b}{a}$ mit $b \in \mathbb{Z}, a \in \mathbb{N}$ darstellen. Dieses kann nach der folgenden Regel durchgeführt werden:
  - → Die **Ziffern der Vorperiode** liefern einen Bruch, der im Zähler die Ziffern der Vorperiode enthält und im Nenner die Zehnerpotenz, die im Exponenten die Anzahl der Ziffern der Vorperiode enthält.
  - → Dieser wird addiert mit einem Bruch, der im Zähler aus **der Ziffernfolge der Periode** und im Nenner eine Folge von Neunen (Anzahl = Länge der Periode) gefolgt von einer Folge von Nullen (Anzahl = Länge der Vorperiode) besteht.
  - → Beispiel: $0{,}112\overline{34} = \frac{112}{1000} + \frac{34}{99000} = \frac{11122}{99000}$

Allgemeine Umrechnungsformel

für die periodische Zahl x mit einer Vorperiode v(m Stellen)

→ *und einer Periode p(n Stellen):*

$$x = \frac{v(10^n - 1) + p}{10^m(10^n - 1)} \quad \text{mit} \quad x = 0.\underbrace{v}_{m\,Stellen}\overline{\underbrace{p}_{n\,Stellen}}$$

→

Herleitung der allgemeinen Umrechnungsformel :

(1) $x = 0.\underbrace{v}_{m\,Stellen}\overline{\underbrace{p}_{n\,Stellen}}$ $\quad\Big|$ *Multiplikation mit 10^{m+n}, so dass die Vorperiode und genau eine Periode vor dem Komma stehen*

$$x \cdot 10^{m+n} = vp.\overline{\underbrace{p}_{n\,Stellen}}$$

(2) $x = 0.\underbrace{v}_{m\,Stellen}\overline{\underbrace{p}_{n\,Stellen}}$ $\quad\Big|$ *Multiplikation mit 10^m, so dass die Vorperiode genau vor dem Komma steht*

$$x \cdot 10^m = v.\overline{\underbrace{p}_{n\,Stellen}}$$

Differenz der Gleichungen (1) und (2) bilden

$$x \cdot 10^{m+n} - x \cdot 10^m = \color{red}{vp}.\overline{\underbrace{p}_{n\,Stellen}} - v.\overline{\underbrace{p}_{n\,Stellen}} \quad \Big| \color{red}{\textit{Achtung : vp bedeutet Ziffernfolge und keine Multiplikation}}$$

$$x \cdot 10^m(10^n - 1) = \color{red}{vp} - v$$

$$x = \frac{1}{10^m(10^n - 1)}(v10^n + p - v) \quad \Big| \textit{Umwandlung der Ziffernfolge in Zahl}$$

$$x = \frac{v(10^n - 1) + p}{10^m(10^n - 1)}$$

→

Beispiel für Herleitung der allgemeinen Umrechnungsformel :

(1) $x = 0.\underbrace{112}_{3\,Stellen}\overline{\underbrace{34}_{2\,Stellen}}$ $\quad|$ *Multiplikation mit* 10^5*, so dass die Vorperiode und genau eine Periode vor dem Komma stehen*

$$x \cdot 10^5 = 11234.\overline{\underbrace{34}_{2\,Stellen}}$$

(2) $x = 0.\underbrace{112}_{3\,Stellen}\overline{\underbrace{34}_{2\,Stellen}}$ $\quad|$ *Multiplikation mit* 10^3*, so dass die Vorperiode genau vor dem Komma steht*

$$x \cdot 10^3 = 112.\overline{\underbrace{34}_{2\,Stellen}}$$

Differenz der Gleichungen (1) *und* (2) *bilden*

$$x \cdot 10^5 - x \cdot 10^3 = 11234.\overline{\underbrace{34}_{2\,Stellen}} - 112.\overline{\underbrace{34}_{2\,Stellen}} \quad |\textit{Achtung : vp bedeutet Ziffernfolge und keine Multiplikation}$$

$$x \cdot 10^3(10^2 - 1) = 11234 - 112$$

$$x = \frac{1}{10^3(10^2-1)}(112 \cdot 10^2 + 34 - 112) \quad |\textit{Umwandlung der Ziffernfolge in Zahl}$$

$$x = \frac{112(10^2-1)+34}{10^3(10^2-1)} = \frac{112 \cdot 99 + 34}{99000} = \frac{11122}{99000} \; \textit{Ergebnis}$$

Gleichheit der Formel und der beschriebenen Vorgehensweise zeigen

$$x = \frac{v(10^n-1)+p}{10^m(10^n-1)} = \frac{v}{10^m} + \frac{p}{10^m(10^n-1)}$$

$$x = \frac{112(10^2-1)+34}{10^3(10^2-1)} = \frac{112}{10^3} + \frac{34}{10^3(10^2-1)} = \frac{112}{1000} + \frac{34}{99000} \; \textit{Vorgehensweise der Regel}$$

3.1.4 Die reellen Zahlen

Die rationalen Zahlen ergänzt um die irrationalen Zahlen, wie z.B. $\sqrt{2}$, e und π bilden die reellen Zahlen.

$$\boxed{\mathbb{R} = \textit{Menge der reellen Zahlen}}$$

Eigenschaften der reellen Zahlen:

- Die **Addition**, die **Multiplikation**, die **Subtraktion**, die **Division** und **das Radizieren positiver Werte** sind Operationen, die innerhalb der reellen Zahlen **uneingeschränkt durchführbar** sind, d.h. das Ergebnis dieser Operationen liegt wieder in den reellen Zahlen.
- Die irrationalen Zahlen, z.B. $\sqrt{2}$, lassen sich durch rationale Zahlen approximieren, in dem man schrittweise die Position auf der Zahlengeraden durch Intervallschachtelung eingrenzt.

$$\begin{array}{llll}
1^2 = 1 \; und \; 2^2 = 4 & \Rightarrow 1 & < \sqrt{2} & < 2 \\
1,4^2 = 1,96 \; und \; 1,5^2 = 2,25 & \Rightarrow 1,4 & < \sqrt{2} & < 1,5 \\
1,41^2 = 1,9881 \; und \; 1,42^2 = 2,0164 & \Rightarrow 1,41 & < \sqrt{2} & < 1,42 \\
\qquad \ldots & \Rightarrow 1,414 & < \sqrt{2} & < 1,415 \\
 & \Rightarrow 1,4142 & < \sqrt{2} & < 1,4143 \\
 & \Rightarrow 1,41421 & < \sqrt{2} & < 1,41422 \\
 & \Rightarrow 1,414213 & < \sqrt{2} & < 1,414214
\end{array}$$

  Setzt man das Verfahren beliebig weit fort, so erhält man den Wert für $\sqrt{2}$ beliebig genau.

- Irrationale Zahlen sind nicht exakt angebbar. Sie müssen auf eine vereinbarte Anzahl von Nachkommastellen gerundet werden.
- Alle reellen Zahlen lassen sich in eineindeutiger Weise als Punkte auf der Zahlengeraden abbilden und bedecken die Zahlengerade lückenlos.
- Für das Rechnen mit reellen Zahlen gelten folgende Bezeichnungen und Regeln (Axiomensystem für $\mathbb{R}$) für $w, x, y, z \in \mathbb{R}$**:**

Axiome bezüglich der Addition:

(A1)	$x+(y+z)$	$=$	$(x+y)+z$		(Assoziativität)
(A2)	$x+y$	$=$	$y+x$		(Kommutativität)
(A3)	Es gibt ein Element $0 \in \mathbb{R}$ mit				
	$x+0$	$=$	$0+x$	$=x$	(neutrales Element der Addition, Nullelement)
(A4)	Zu jedem Element $x \in \mathbb{R}$ gibt es ein Element $-x \in \mathbb{R}$ mit				
	$x+(-x)$	$=$	$(-x)+x$	$=0$	(inverses Element der Addition)

Axiome bezüglich der Multiplikation:

(A5)	$x\cdot(y\cdot z)$	$=$	$(x\cdot y)\cdot z$		(Assoziativität)
(A6)	$x\cdot y$	$=$	$y\cdot x$		(Kommutativität)
(A7)	Es gibt ein Element $1\in\mathbb{R}$ mit				
	$x\cdot 1$	$=$	$1\cdot x$	$=x$	(neutrales Element der Multiplikation, Einselement)
(A8)	Zu jedem Element $x\in\mathbb{R}$ gibt es ein Element $x^{-1}(=\frac{1}{x})\in\mathbb{R}$ mit				
	$x\cdot x^{-1}$	$=$	$x^{-1}\cdot x$	$=1$	(inverses Element)

Das inverse Element der Multiplikation kann auch wie folgt geschrieben werden $x^{-1}=\frac{1}{x}$.

Eine gültige Rechenregel ist das Distributivgesetz

(A9)	$x\cdot(y+z)$	$=$	$x\cdot y+x\cdot z$	(Distributivität)

Diese Axiome (A1)-(A9)werden auch Körperaxiome genannt.

Weitere Axiome für die reellen Zahlen sind die Ordnungsaxiome:

(A10)	Es gilt genau eine der drei Beziehungen: $x<y, x=y, x>y,$
(A11)	Aus $x<y$ und $y<z$ folgt $x<z$.
(A12)	Aus $x<y$ folgt $x+z<y+z$ für alle z.
(A13)	Aus $x<y$ und $0<z$ folgt $x\cdot z<y\cdot z$.

Gilt $x<y$, so gilt insbesondere die schwächere Aussage $x\le y$.

Das Archimedische Axiom gilt für die reellen Zahlen:

(A14)	Zu $x\in\mathbb{R}, y\in\mathbb{R}$ mit $0<x, 0<y$ existiert ein $n\in\mathbb{N}$ mit $n\cdot x>y$.

Das Vollständigkeitsaxiom vervollständigt die Beschreibung von $\mathbb{R}$:

(A15)	Zu jeder nach oben beschränkten Menge reeller Zahlen, die mindestens ein Element enthält, existiert ein Supremum in $\mathbb{R}$.

d.h. die reellen Zahlen sind vollständig.

Hierzu benötigt man die folgenden Definitionen:

→ Ist M eine Menge reeller Zahlen und gilt für jedes $x\in M$ die Beziehung $x\le k$ für ein $k\in\mathbb{R}$, so heißt M **nach oben beschränkt**, und k heißt **obere Schranke** von M.

→ Gibt es keine kleinere obere Schranke, d.h. ist k die kleinste obere Schranke von M, so heißt k das **Supremum** von M.

Bemerkung: Die Axiome (A1) - (A14) gelten ebenso für die rationalen Zahlen. Das Axiom (A15) gilt jedoch nicht für rationale Zahlen.

3.2 Die komplexen Zahlen

3.2.1 Definition der komplexen Zahlen

Die reellen Zahlen ergänzt um die imaginären Zahlen bilden die komplexen Zahlen.

Die komplexen Zahlen ermöglichen die Lösung der Gleichung $x^2+1=0$, die innerhalb der reellen Zahlen nicht lösbar ist. Durch das Einführen der imaginären Einheit $j^2=-1$ lässt sich die Lösung der Gleichung $x^2+1=0 \Leftrightarrow x=\sqrt{-1}$ mit $x=j$ angeben.

$$\boxed{\mathbb{C}=\left\{z \middle| z=a+jb \; mit \; a\in\mathbb{R}, b\in\mathbb{R}\right\} \quad Menge\ der\ komplexen\ Zahlen}$$

Eigenschaften der komplexen Zahlen:

- Die **Addition**, die **Multiplikation**, die **Subtraktion**, die **Division** und **das Radizieren** sind Operationen, die innerhalb der komplexen Zahlen **uneingeschränkt durchführbar** sind, d.h. das Ergebnis dieser Operationen liegt wieder in den komplexen Zahlen.

Komplexe Zahlen

Algebraische Form (kartesische Koordinaten) Komponentendarstellung	Betrag/Phase (Polarkoordinaten): trigonometrische Form	Exponentialdarstellung
$z=a+j\cdot b$ a Realteil b Imaginärteil	$z=r\cdot(\cos\varphi+j\cdot\sin\varphi)$ r Betrag φ Winkel	$z=r\cdot e^{j\varphi}$ r Betrag φ Winkel

Umrechnung

$$a=r\cdot\cos\varphi,\quad b=r\cdot\sin\varphi$$

$$r=\sqrt{a^2+b^2},\quad \varphi=\arctan\frac{b}{a}$$

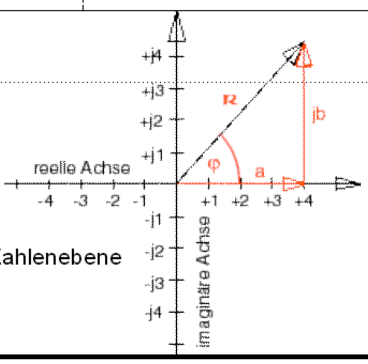
$$\cos\varphi+j\cdot\sin\varphi=e^{j\varphi}$$

Euler-Gleichung

Hinweis zur Verwendung des arctan:

a	b	φ	Rechnerwert
+	+	$\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$	
0	+	$\frac{\pi}{2}$	
-	+	$\left[\frac{\pi}{2},\pi\right]$	$+\pi$
-	-	$\left[\pi,\frac{3\pi}{2}\right]$	$+\pi$
0	-	$\frac{3\pi}{2}$	
+	-	$\left[\frac{3\pi}{2},2\pi\right]$	$+2\pi$

Gauß´sche Zahlenebene



Gleichheit komplexer Zahlen

•Zwei komplexe Zahlen sind einander gleich, wenn ihre Imaginärteile und Realteile beide gleich sind.
•Zwei komplexe Zahlen sind einander gleich, wenn ihre Beträge und Winkel beide gleich sind.

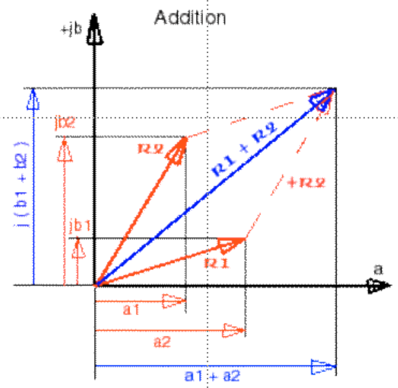
3.2.2 Rechnen mit Komplexen Zahlen

Komplexe Zahlen		
Algebraische Form	**Betrag/Phase: trigonometrische Form**	**Exponentialdarstellung**
$z = a + j \cdot b$ a Realteil, b Imaginärteil	$z = r \cdot (\cos\varphi + j \cdot \sin\varphi)$ r Betrag, φ Winkel	$z = r \cdot e^{j\varphi}$ r Betrag, φ Winkel

Addition

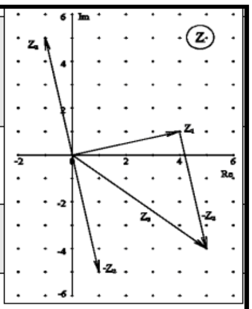
Komplexe Zahlen werden addiert, in dem die Komponenten Realteil und Imaginärteil einzeln addiert werden.

$z_1 + z_2 =$ $(a_1 + a_2) + j \cdot (b_1 + b_2)$	$z_1 + z_2 = r_1 \cdot \cos\varphi_1 + r_2 \cdot \cos\varphi_2$ $+ j \cdot (r_1 \cdot \sin\varphi_1 + r_2 \cdot \sin\varphi_2)$	$z_1 + z_2 =$ $r_1 \cdot e^{j\varphi_1} + r_2 \cdot e^{j\varphi_2}$



Negation (Punktspiegelung am Ursprung)

Die komplexe Zahl wird negiert, in dem die Komponenten negiert werden.
Die negierte komplexe Zahl zeigt in die entgegengesetzte Richtung.



$$-z = -a + j \cdot (-b)$$

Eine komplexe Zahl in Betrags-und Phasedarstellung wird negiert, in dem der Winkel um □ (180°) vergrößert wird, der Betrag bleibt dabei gleich.

$-z = r \cdot \left(\cos(\varphi + \pi) + j \cdot \sin(\varphi + \pi)\right)$	$-z = r \cdot e^{j(\varphi + \pi)}$

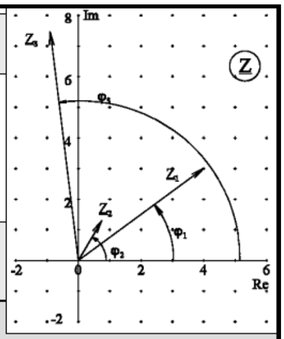
Subtraktion

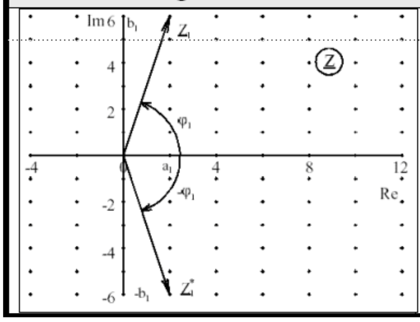
Komplexe Zahlen werden voneinander subtrahiert, in dem die Real- und Imaginärteile einzeln subtrahiert werden.

$z_1 - z_2 =$ $(a_1 - a_2) + j \cdot (b_1 - b_2)$	$z_1 - z_2 =$ $r_1 \cdot \cos\varphi_1 - r_2 \cdot \cos\varphi_2 +$ $j \cdot (r_1 \cdot \sin\varphi_1 - r_2 \cdot \sin\varphi_2) =$ $r_1 \cdot \cos\varphi_1 + r_2 \cdot \cos(\varphi_2 + \pi) +$ $j \cdot (r_1 \cdot \sin\varphi_1 + r_2 \cdot \sin(\varphi_2 + \pi))$	$z_1 - z_2 = r_1 \cdot e^{j\varphi_1} - r_2 \cdot e^{j\varphi_2}$ $= r_1 \cdot e^{j\varphi_1} + r_2 \cdot e^{j(\varphi_2 + \pi)}$

Komplexe Zahlen		
Algebraische Form	**Betrag/Phase: trigonometrische Form**	**Exponentialdarstellung**
$z = a + j \cdot b$ a **Realteil,** b **Imaginärteil**	$z = r \cdot (\cos\varphi + j \cdot \sin\varphi)$ r **Betrag,** φ **Winkel**	$z = r \cdot e^{j\varphi}$ r **Betrag,** φ **Winkel**

Multiplikation		
$z_1 \cdot z_2 = (a_1 a_2 - b_1 b_2) + j \cdot (b_1 a_2 + a_1 b_2)$		
Komplexe Zahlen werden miteinander multipliziert, in dem die Beträge miteinander multipliziert werden und die Winkel addiert werden.		
	$z_1 \cdot z_2 = r_1 \cdot r_2 \cdot \begin{pmatrix} \cos(\varphi_1 + \varphi_2) \\ + j \cdot \sin(\varphi_1 + \varphi_2) \end{pmatrix}$	$z_1 \cdot z_2 = (r_1 \cdot r_2) \cdot e^{j(\varphi_1 + \varphi_2)}$



konjugiert komplexe Zahl (Achsenspiegelung an der reellen Achse)		
Die konjugiert komplexe Zahl einer komplexen Zahl erhält man, in dem der Realteil beibehalten wird und der Imaginärteil negiert wird. Die konjugiert komplexe Zahl wird durch einen Stern gekennzeichnet.		
$z^* = a - j \cdot b$		
Die konjugiert komplexe Zahl in Betrag- und Winkel-Schreibweise erhält man, in dem der Winkel negiert wird.		
	$z^* = r \cdot \left(\cos(-\varphi) + j \cdot \sin(-\varphi)\right)$	$z^* = r \cdot e^{-j\varphi}$

Bemerkung: Die konjugiert komplexe Zahl wird in der Literatur mit z^* oder auch $\overline{z}$ bezeichnet.

Komplexe Zahlen		
Algebraische Form	**Betrag/Phase: trigonometrische Form**	**Exponentialdarstellung**
$z = a + j \cdot b$ a Realteil, b Imaginärteil	$z = r \cdot (\cos\varphi + j \cdot \sin\varphi)$ r Betrag, φ Winkel	$z = r \cdot e^{j\varphi}$ r Betrag, φ Winkel

Addition von konjugiert komplexen Zahlen Die Addition von konjugiert komplexen Zahlen ergibt den doppelten Realteil.		
$z + z^* = 2a$		
Subtraktion von konjugiert komplexen Zahlen Die Subtraktion von konjugiert komplexen Zahlen ergibt den doppelten Imaginärteil.		
$z - z^* = 2j \cdot b$		
Multiplikation von konjugiert komplexen Zahlen Die Multiplikation von konjugiert komplexen Zahlen ergibt das Betragsquadrat.		
$z \cdot z^* = a^2 + b^2$	$z \cdot z^* = r^2$	
Aussagen zu konjugiert komplexen Zahlen		
$(z^*)^* = z$ $(z+w)^* = z^* + w^*$ $(z \cdot w)^* = z^* \cdot w^*$	$\lvert z\rvert = \sqrt{z \cdot z^*}$ $\frac{z}{w} = \frac{1}{\lvert w\rvert^2} \cdot z \cdot w^*,\ w \neq 0$	(konjugiert komplexe Erweiterung)

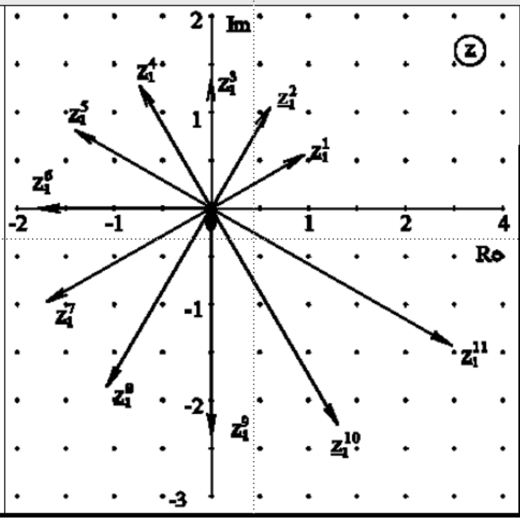
Inversion einer komplexen Zahlen Eine komplexe Zahl wird invertiert, in dem der Betrag invertiert und der Winkel negiert wird.		
$z_2 = \frac{1}{z} = \frac{1}{a+jb}$ $= \frac{a}{a^2+b^2} - j\frac{b}{a^2+b^2}$		$z_2 = \frac{1}{z} = \frac{1}{r \cdot e^{j\varphi}}$ $= \frac{1}{r} e^{-j\varphi}$
Division von komplexen Zahlen Komplexe Zahlen werden durcheinander dividiert, in dem die Beträge durcheinander dividiert werden und die Winkel voneinander subtrahiert werden.		
$\frac{z_1}{z_2} = \frac{a_1a_2 + b_1b_2}{a_2^2 + b_2^2}$ $+ j\frac{b_1a_2 - a_1b_2}{a_2^2 + b_2^2}$		$\frac{z_1}{z_2} = \frac{r_1}{r_2} e^{j(\varphi_1 - \varphi_2)}$

Komplexe Zahlen		
Algebraische Form	**Betrag/Phase: trigonometrische Form**	**Exponentialdarstellung**
$z = a + j \cdot b$ a Realteil, b Imaginärteil	$z = r \cdot (\cos\varphi + j \cdot \sin\varphi)$ r Betrag, φ Winkel	$z = r \cdot e^{j\varphi}$ r Betrag, φ Winkel

Potenzen komplexer Zahlen

Eine Zahl wird potenziert, in dem der Betrag mit dem Exponenten potenziert wird und der Winkel mit dem Exponenten multipliziert wird.

$$z^n = (a + j \cdot b)^n$$



$$z^n = (r \cdot e^{j\varphi})^n = r^n \cdot e^{j\varphi \cdot n}$$

$$z = 1.1 \cdot e^{j \cdot \frac{\pi}{6}}$$

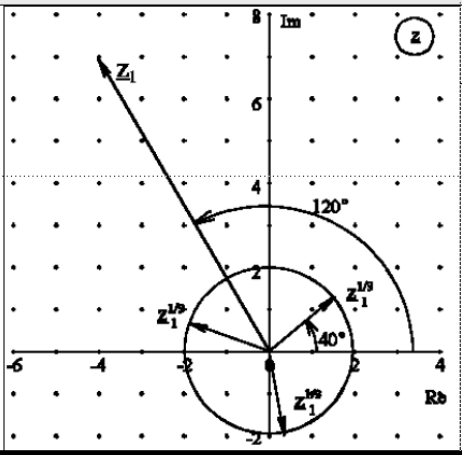
$$z^2 = 1.1^2 \cdot e^{j \cdot \frac{\pi}{3}}$$

$$z^3 = 1.1^3 \cdot e^{j \cdot \frac{\pi}{2}}$$

$$z^{11} = 1.1^{11} \cdot e^{j \cdot \frac{11\pi}{6}}$$

Wurzeln komplexer Zahlen

- Bei der n-ten Wurzel ergeben sich n Lösungen.
- Der Betrag ergibt sich aus der n-ten Wurzel des Betrages.
- Den Winkel <u>einer</u> Lösung erhält man durch Dividieren des Winkel durch n.
- Die anderen Lösungen liegen auf eine Kreis verteilt im Abstand von 360°/n.



$$z = 8 \cdot e^{j \cdot \frac{2\pi}{3}}$$

$$\sqrt[3]{z} = 2 \cdot e^{j \cdot \frac{2\pi}{9}}$$

$$\sqrt[3]{z} = 2 \cdot e^{j \cdot \frac{8\pi}{9}}$$

$$\sqrt[3]{z} = 2 \cdot e^{j \cdot \frac{14\pi}{9}}$$

$$\sqrt[n]{z} = (r \cdot e^{j(\varphi + k \cdot 2\pi)})^{1/n} = \sqrt[n]{r} \cdot e^{j(\frac{\varphi}{n} + \frac{k}{n} 2\pi)}$$

$$mit\ k = 0,..,n-1$$

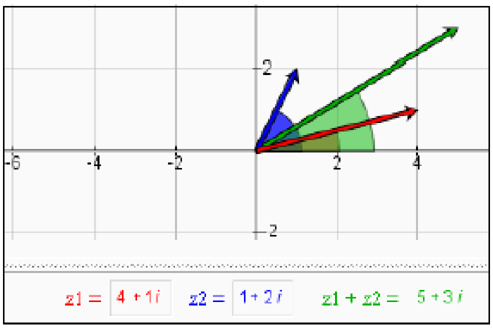
Bemerkung:

- Die n-ten Wurzeln liegen im Abstand von $\frac{2\pi}{n}$ auf einem Kreis mit dem Radius $\sqrt[n]{r}$ um den Nullpunkt der Gauß'schen Zahlenebene und bilden ein regelmäßiges n-Eck.
- Die erste Lösung z_0 nennt man auch Hauptwert von $\sqrt[n]{z}$.

3.2.3 Zusammenfassung und Visualisierung

in kartesischen Koordinaten
in Polarkoordinaten

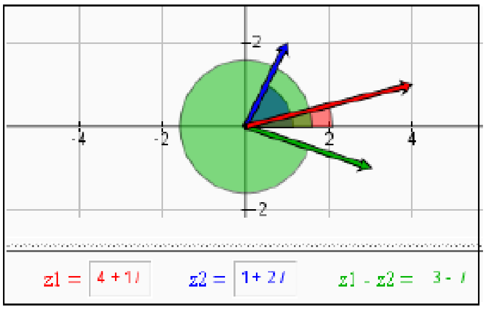
Addition



$$z_1 + z_2 = (a_1 + a_2) + j \cdot (b_1 + b_2)$$

$$z_1 + z_2 = r_1 \cdot e^{j\varphi_1} + r_2 \cdot e^{j\varphi_2}$$

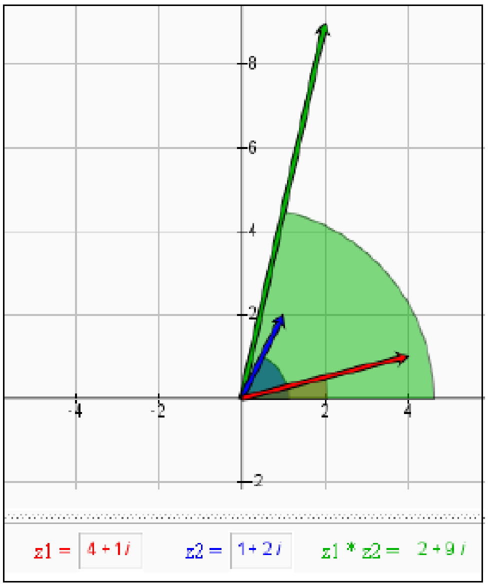
Subtraktion



$$z_1 - z_2 = (a_1 - a_2) + j \cdot (b_1 - b_2)$$

$$z_1 - z_2 = r_1 \cdot e^{j\varphi_1} - r_2 \cdot e^{j\varphi_2} = r_1 \cdot e^{j\varphi_1} + r_2 \cdot e^{j(\varphi_2 + \pi)}$$

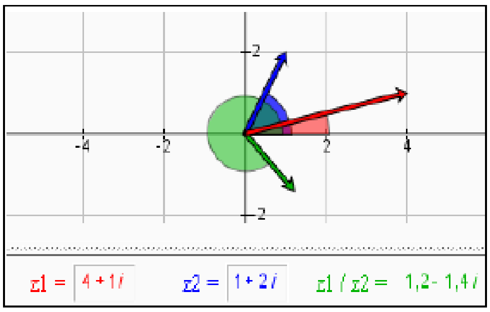
Multiplikation



$$z_1 \cdot z_2 = (a_1 a_2 - b_1 b_2) + j \cdot (b_1 a_2 + a_1 b_2)$$

$$z_1 \cdot z_2 = (r_1 \cdot r_2) \cdot e^{j(\varphi_1 + \varphi_2)}$$

Division

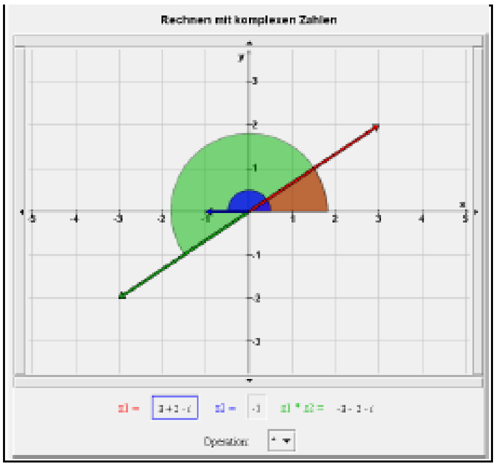


$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{a_1 a_2 + b_1 b_2}{a_2^2 + b_2^2} + j \frac{b_1 a_2 - a_1 b_2}{a_2^2 + b_2^2}$$

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{r_1}{r_2} e^{j(\varphi_1 - \varphi_2)}$$

in kartesischen Koordinaten
in Polarkoordinaten

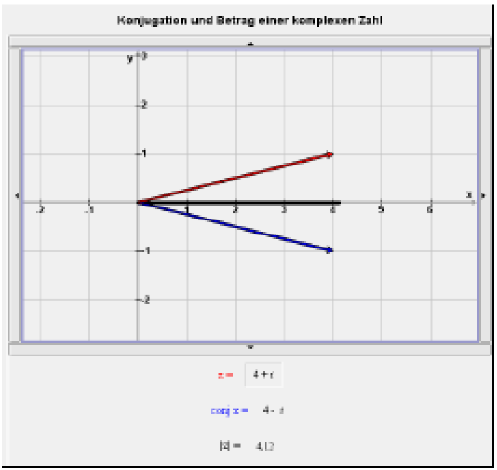
Negation



$$-z = -a + j\cdot(-b)$$

$$-z = r\cdot e^{j(\varphi+\pi)}$$

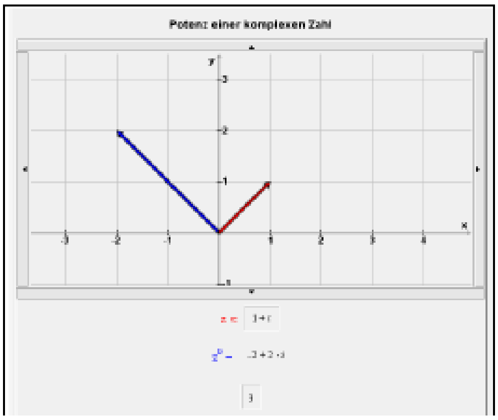
konjugiert komplex



$$z^* = a - j\cdot b$$

$$z^* = r\cdot e^{-j\varphi}$$

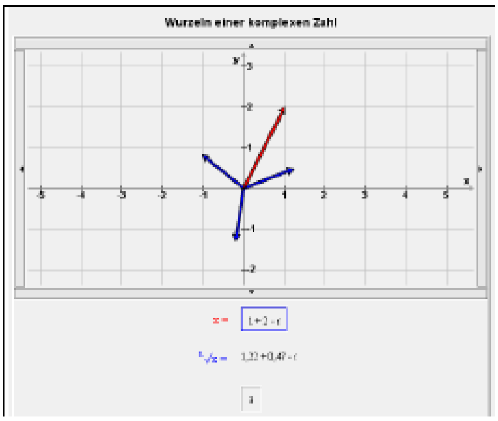
Potenz



$$z^n = (a + j\cdot b)^n$$

$$z^n = (r\cdot e^{j\varphi})^n = r^n\cdot e^{j\varphi\cdot n}$$

Wurzel



$$\sqrt[n]{z} = \left(r\cdot e^{j(\varphi+k\cdot 2\pi)}\right)^{1/n} = \sqrt[n]{r}\cdot e^{j(\frac{\varphi}{n}+\frac{k}{n}2\pi)}$$

$$mit\ k = 0,\ldots,n-1$$

Zusammenfassung der Operationen mit komplexen Zahlen

	algebraische Darstellung (kartesische Koordinaten)	Exponentialdarstellung (Polarkoordinaten)
Addition	$z_1 + z_2 = (a_1 + a_2) + j \cdot (b_1 + b_2)$	$z_1 + z_2 = r_1 \cdot e^{j\varphi_1} + r_2 \cdot e^{j\varphi_2}$
Negation	$-z = -a + j \cdot (-b)$	$-z = r \cdot e^{j(\varphi+\pi)}$
Subtraktion	$z_1 - z_2 = (a_1 - a_2) + j \cdot (b_1 - b_2)$	$z_1 - z_2 = r_1 \cdot e^{j\varphi_1} - r_2 \cdot e^{j\varphi_2} = r_1 \cdot e^{j\varphi_1} + r_2 \cdot e^{j(\varphi_2+\pi)}$
Multiplikation	$z_1 \cdot z_2 = (a_1 a_2 - b_1 b_2) + j \cdot (b_1 a_2 + a_1 b_2)$	$z_1 \cdot z_2 = (r_1 \cdot r_2) \cdot e^{j(\varphi_1+\varphi_2)}$
Potenz	$z^n = (a + j \cdot b)^n$	$z^n = (r \cdot e^{j\varphi})^n = r^n \cdot e^{j\varphi n}$
Division	$\frac{z_1}{z_2} = \frac{a_1 a_2 + b_1 b_2}{a_2^2 + b_2^2} + j \frac{b_1 a_2 - a_1 b_2}{a_2^2 + b_2^2}$	$\frac{z_1}{z_2} = \frac{r_1}{r_2} e^{j(\varphi_1-\varphi_2)}$
Wurzel		$\sqrt[n]{z} = (r \cdot e^{j(\varphi+k \cdot 2\pi)})^{1/n} = \sqrt[n]{r} \cdot e^{j(\frac{\varphi}{n}+\frac{k}{n}2\pi)}$ $mit\ k = 0,\dots,n-1$
konjugiert komplexe Zahl	$z^* = a - j \cdot b$	$z^* = r \cdot e^{-j\varphi}$

3.3 Abzählbarkeit

Wie viele natürliche Zahlen, wie viele ganze Zahlen und wie viele rationale Zahlen gibt es?

Definition 2.2: abzählbar, überabzählbar

Man definiert $\aleph_0 := |\mathbb{N}|$ (Aleph Null) als Mächtigkeit von $\mathbb{N}$. Eine Menge A heißt

abzählbar, wenn $|A| < \aleph_0 = |\mathbb{N}|$.

abzählbar unendlich, wenn $|A| = \aleph_0 = |\mathbb{N}|$.

überabzählbar unendlich, wenn $|A| > \aleph_0 = |\mathbb{N}|$.

Satz 2.1: Mächtigkeit der ganzen Zahlen

Die ganzen Zahlen $\mathbb{Z}$ sind **abzählbar unendlich**, d.h. $|\mathbb{Z}| = |\mathbb{N}| = \aleph_0$.

Satz 2.2: Mächtigkeit der rationalen Zahlen

Die rationalen Zahlen $\mathbb{Q}$ sind **abzählbar unendlich**, d.h. $|\mathbb{Q}| = |\mathbb{N}| = \aleph_0$.

Bemerkung:

1. Es gibt also genausoviele ganze wie natürliche Zahlen.
2. Es gibt also genausoviele rationale wie natürliche Zahlen.
3. Jede der Mengen $\mathbb{Z}$ und $\mathbb{Q}$ können so durchnummeriert werden, dass jedes Element genau eine Nummer aus $\mathbb{N}$ bekommt und jede Zahl aus $\mathbb{N}$ genau einmal als Nummer verwendet wird.
4. Die reellen Zahlen können im Unterschied zu den rationalen Zahlen nicht “durchnummeriert” werden. Es gibt also mehr reelle Zahlen als rationale Zahlen.

Satz 2.2: Mächtigkeit der reellen Zahlen

Die reellen Zahlen $\mathbb{R}$ sind **überabzählbar unendlich**, d.h. $|\mathbb{R}| > |\mathbb{N}|$.