

Übungen 7 - Differentialrechnung  
11.1.2023

## Aufgabe 1: Extremwerte und begleitende Eigenschaften

aus <http://www.mathe-online.at/tests/anwdiff/minmax.html>

- a) Welche der angegebenen Funktionen besitzen an der Stelle  $x=0$  ein **lokales Minimum** und welche ein **lokales Maximum**?

|                 |                |                |               |
|-----------------|----------------|----------------|---------------|
| $(1+x^2)^{1/2}$ | $\cos x$       | $x^2 e^x$      | $-x^4 e^{-x}$ |
|                 |                |                |               |
| $\sin^2 x$      | $e^x + e^{-x}$ | $(1+x^2)^{-1}$ | $e^{-x^2}$    |
|                 |                |                |               |

- b) Welche Eigenschaften haben differenzierbare Funktionen?

| Eine Stelle $x$ , an der $f'(x) = 0$ ist, kann  | Eine Stelle $x$ , an der $f'(x) = 0$ ist, ist mit Sicherheit  |
|---|---|
| eine Nullstelle sein <input type="checkbox"/>   | eine Nullstelle <input type="checkbox"/>  |
| eine lokale Extremstelle sein <input type="checkbox"/>  | ein lokales Extremum <input type="checkbox"/>   |
| eine Sattelstelle sein <input type="checkbox"/>   | eine Sattelstelle <input type="checkbox"/>  |
| eine Wendestelle sein <input type="checkbox"/>  | eine Wendestelle <input type="checkbox"/>   |
| Sei $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ differenzierbar. An jeder lokalen Maximumstelle $x$ gilt | Sei $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ differenzierbar. An jeder lokalen Minimumstelle $x$ gilt |
| $f'(x) = 0$ <input type="checkbox"/>  | $f(x) = f'(x) = 0$ <input type="checkbox"/>   |
| $f'(x) = 0$ und $f''(x) < 0$ <input type="checkbox"/>   | $f''(x) < 0$ <input type="checkbox"/>   |
| $f'(x) = 0$ und $f''(x) > 0$ <input type="checkbox"/>   | $f''(x) > 0$ <input type="checkbox"/>   |
| $f'(x) = f''(x) = 0$ <input type="checkbox"/>   | $f''(x) \neq 0$ <input type="checkbox"/>  |

## Aufgabe 2: Kurvendiskussion

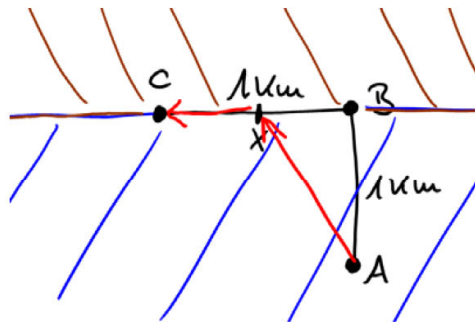
$$f(x) = \frac{e^x}{x}$$

### Zusammenfassung Kurvendiskussion:

1. Definitionsbereich/ Definitionslücken (hebbar?)/ Bildbereich
  2. Symmetrie
  3. Nullstellen
  4. Pole (Vorzeichenwechsel?)
  5. Ableitungen (bis 3. Ableitung sinnvoll)
  6. Extremwerte (lokale Minima/ Maxima)
  7. Wendepunkte, Sattelpunkte
  8. Monotonieverhalten
  9. Asymptoten (Verhalten für  $x \rightarrow \pm\infty$ )
  10. Stetigkeit ( $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0)$ )
- + parallele Erstellung einer Zeichnung

### Aufgabe 3: Extremwertproblem „Schnellster Weg von A nach C“

Eine Person befindet sich mit einem Boot im Punkt A (eines stillen Gewässers) genau 1 km vom nächsten Punkt B der geradlinigen Küste entfernt und möchte zu einem Punkt C an der Küste gelangen, der vom Punkt B genau 1 km entfernt ist.



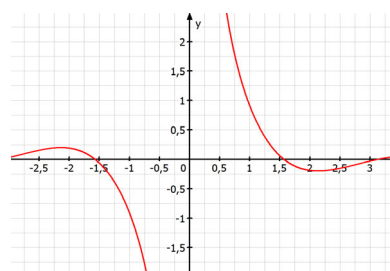
Mit dem Boot bewegt sich die Person mit 3 km/h und an Land zu Fuß mit 5 km/h. Welchen Punkt X muss die Person an der Küste ansteuern, damit sie möglichst schnell am Punkt C ankommt?

Wie lange würde die Person bei C unter alleiniger Verwendung des Bootes mindestens benötigen?

### Aufgabe 4:

Berechnen Sie die nachfolgenden Grenzwerte mit Hilfe der Regeln von Bernoulli-l'Hospital:

a)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(2x)}{x^2}$



.

### Klausuraufgabe zu Bernoulli-l'Hospital:

- b) Berechnen Sie die nachfolgenden Grenzwerte mit Verwendung der Regeln von Bernoulli l'Hospital:

$$(1) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x - \ln(x+1)}{1 - \cos x}$$

.