HAW Hamburg
Fakultät TI
Technik und Informatik

GRUNDLAGEN DER ELEKTROTECHNIK 1

Teil 7:

b) Mesung von Widerständen

GLEICHSTROM

Inhalte der Kapitel 1 – 4: Gleichstrom

4 Widerstandsmessung

3 Gleichstrommessung

2 Gleichstromnetzwerke

- gesteuerte Quellen
- Nichtlineare Quellen und Lasten
- Leistungsanpassung
- Kirchhoff'sche Gesetze
  - Reihenschaltung
  - Parallelschaltung
- Lineare Quellen
  - Ersatzquellen
  - Überlagerungssatz
- Netzwerkanalyse
  - Knotenpotentialanalyse
  - Maschenanalyse

1 Grundlegende Begriffe und Definitionen

- Widerstand
- Arbeit, Leistung, Wirkungsgrad
- Ladung, Spannung, Strom

4 WIDERSTANDSMESSUNG

4.1 Ohmmeter mit Stromquelle

4.2 Vierleiter-Anschlusstechnik für kleine Widerstände

4.3 Wheatstonesche Brücke

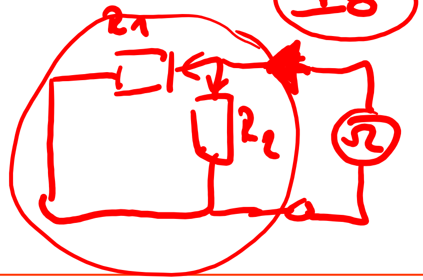
4.4 Temperaturmessung mit Pt-100

4.5 Messung der Strömungsgeschwindigkeit

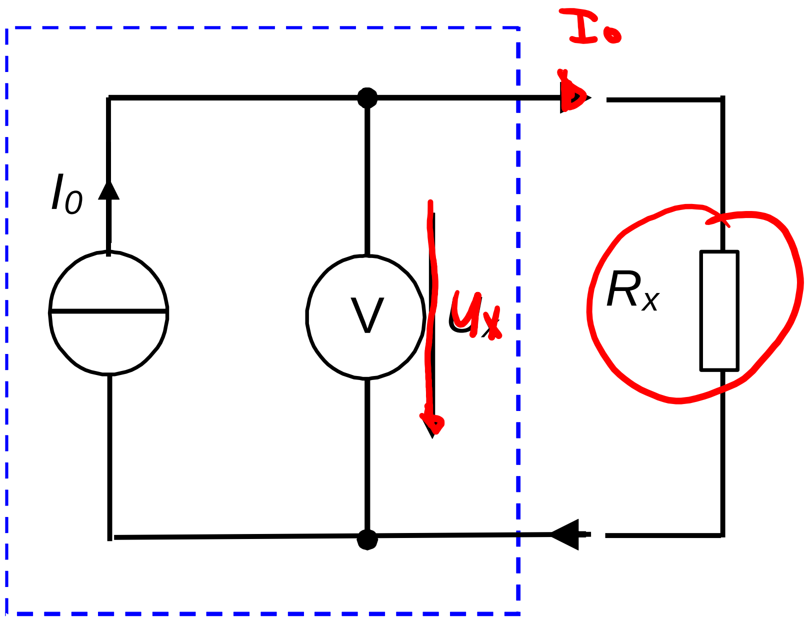
4.6 Dehnungsmessstreifen

WAS IST EIN OHMMETER ?

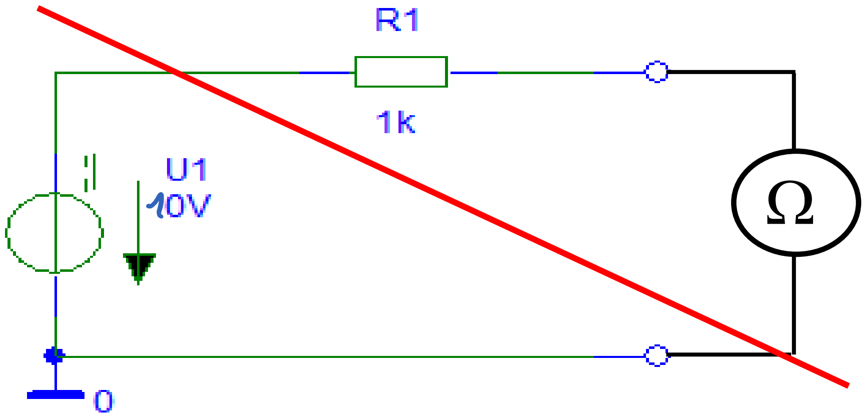
$U_x = R_x \cdot I_0 \Rightarrow R_x = \frac{U_x}{I_0}$



Eine Stromquelle mit Voltmeter:



Wichtig:
Widerstände nie in einer Schaltung messen!



Prof. Dr.-Ing. Martin Lapke

4 WIDERSTANDSMESSUNG

4.1 Ohmmeter mit Stromquelle

4.2 Vierleiter-Anschlusstechnik für kleine Widerstände

4.3 Wheatstonesche Brücke

4.4 Temperaturmessung mit Pt-100

4.5 Messung der Strömungsgeschwindigkeit

4.6 Dehnungsmessstreifen

Prof. Dr.-Ing. Martin Lapke

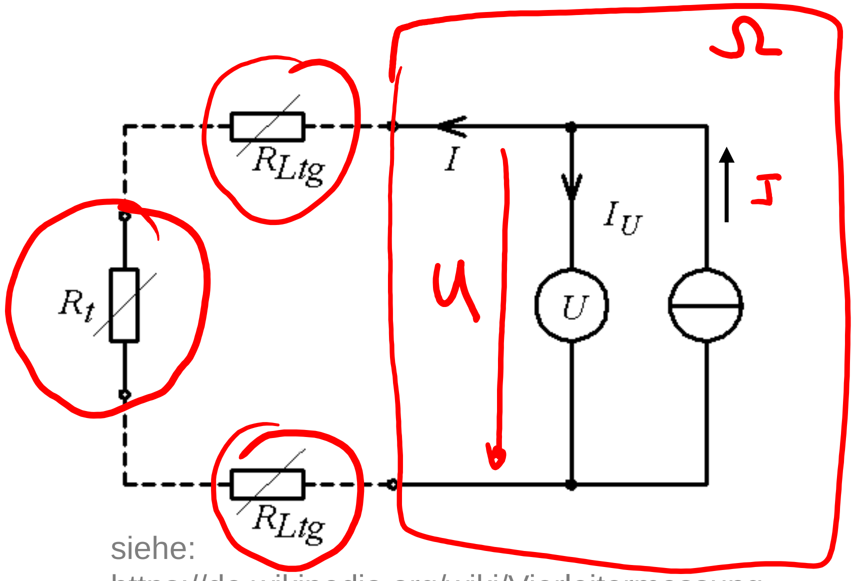
VIERLEITER-ANSCHLUSSTECHNIK

2-Leiter-Technik

4-Leiter-Technik für höchste Genauigkeit

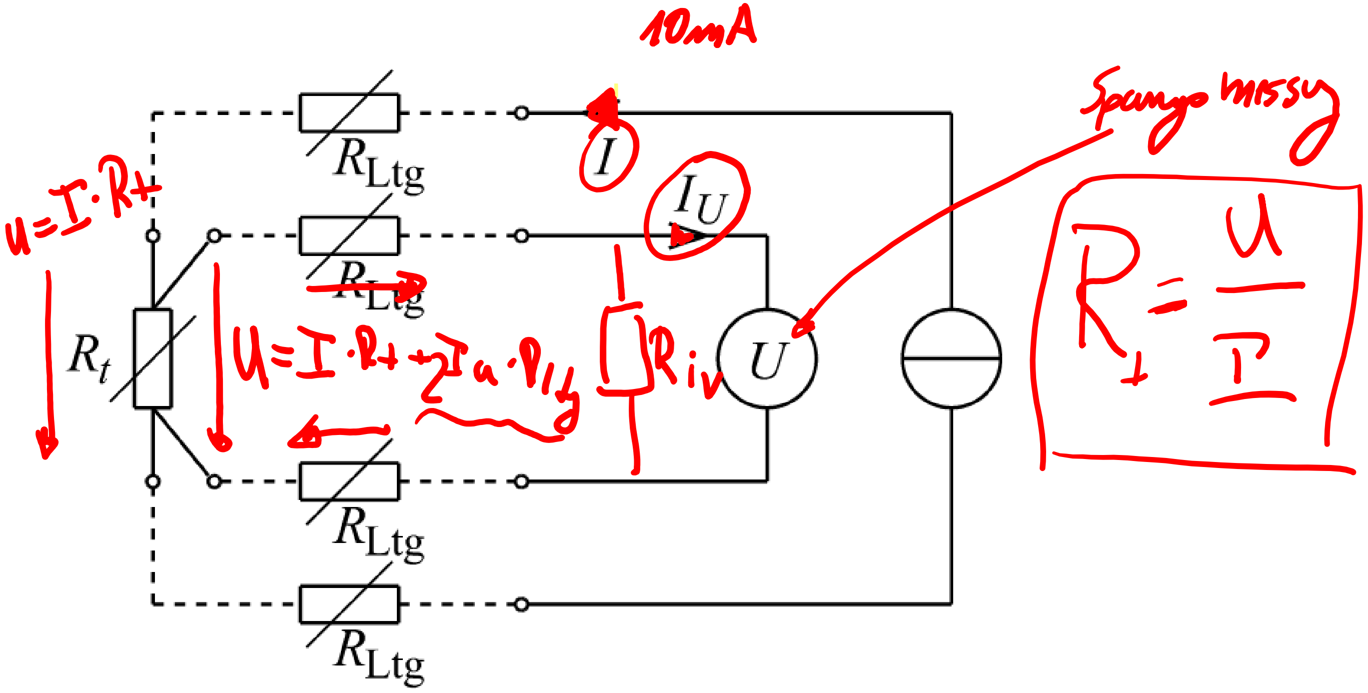
klein

≠ 1 Ω



siehe: https://de.wikipedia.org/wiki/Vierleitermessung

$u = I \cdot R_t$



$$R_t = \frac{U}{I}$$

$$R_t = \frac{U}{I}$$

Problem:

R_{Ltg} = Übergangswiderstand
+ Zuleitungswiderstand

⇒ Fehlmessung durch $I \cdot R_{Ltg}$

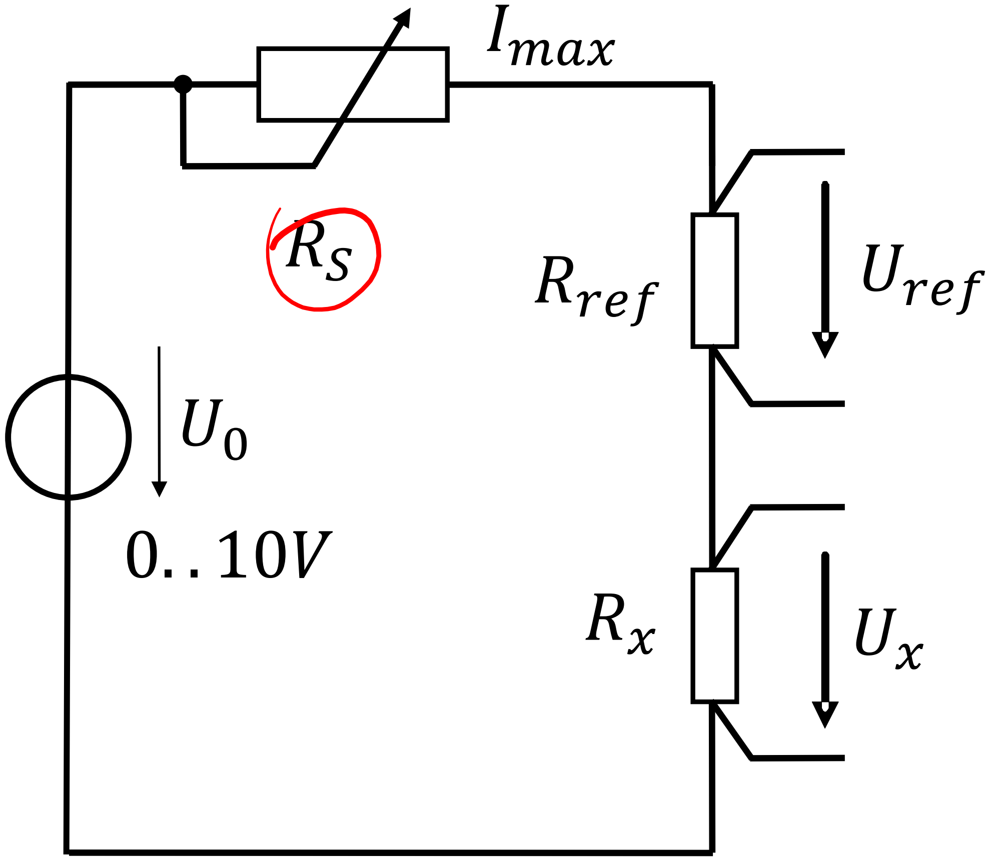
$$U = R_{Ltg} \cdot I + R_t \cdot I + R_{Ltg} \cdot I$$

Lösung:

R_{Ltg} ist zwar ebenso groß, aber $\boxed{I_U << I}$

→ kaum Auswirkung auf Spannungsmessung

WIDERSTANDSMESSUNG MIT VIERLEITERTECHNIK



R_S : Strombegrenzung

R_{ref}: bekannterReferenzwiderstand schimm

$I = U_{ref}/R_{ref}$ Strom via Spannungsmessung

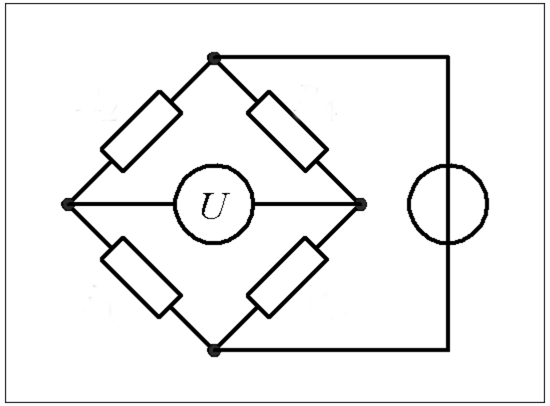
R_x: Prüfling (unbekannter Widerstand)

$$R_x = \frac{U_x}{I} = \frac{U_x}{U_{ref}/R_{ref}}$$

Prof. Dr.-Ing. Martin Lapke

4 WIDERSTANDSMESSUNG

DIE WHEATSTONE'SCHE BRÜCKENSCHALTUNG



- Ziel: Messung von Widerständen

- zuerst beschrieben von
  Samual Hunter Christie

- Aber:
  Wheatstone hat als erster den Nutzen der Brückenschaltung zur präzisen Messung von Widerständen erkannt.

- Wann? 1833

- Wheatstone erfand darauf den variablen Widerstand in 1840

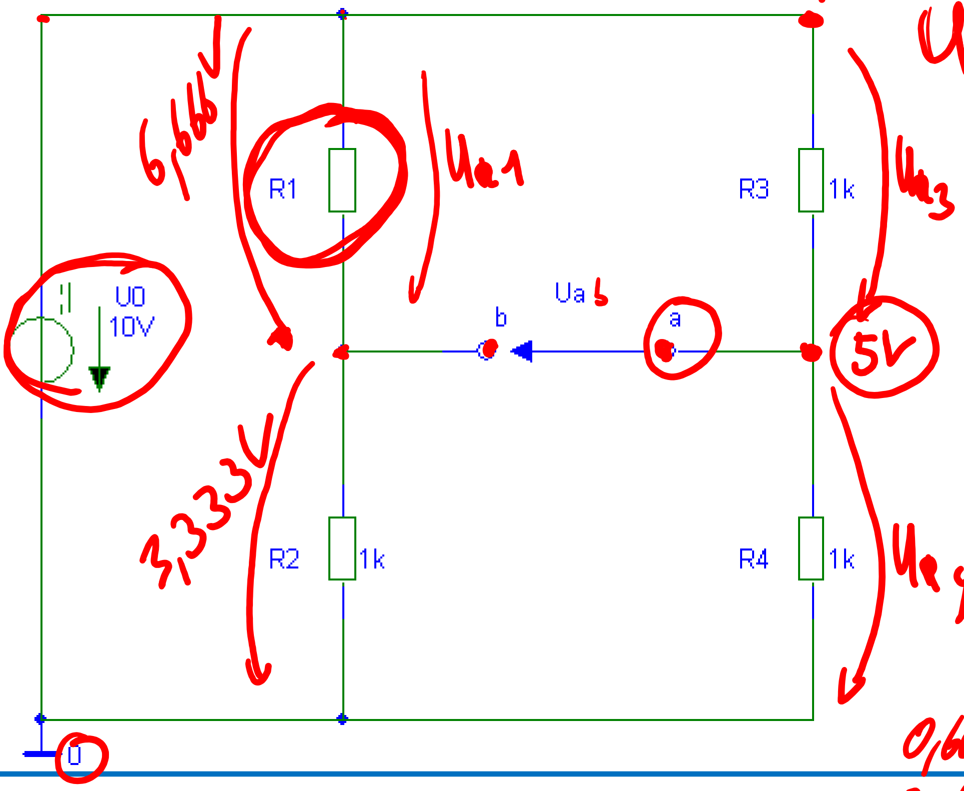
WIE MESSEN WIR DAMIT DEN WIDERSTAND?

$U_{R4} = U_{a,0} = U_0 \cdot \frac{R_4}{R_3+R_4} = U_0 \cdot \frac{R}{2R}$

$R_3 = R_4 = R$

Aufgabe: Mit einem Voltmeter $(R_{I,V} >> 1k\Omega)$ messen Sie $U_{ab} = 1{,}667\,V$.

Wie groß ist R_1?



$A.\ 3\ k\Omega$

$B.\ 2\ k\Omega$

$C.\ 1\ k\Omega$

$U_{ab} = \phi_a - \phi_b$

$= U_{a,0} - U_{b,0}$

$= 5V - U_{b,0} = 1{,}667V$

$\Rightarrow U_{b0} = 3{,}333V$

$U_{R1} = 6{,}667V = \underset{10V}{U_0} \cdot \frac{R_1}{R_1 + \underset{1k\Omega}{R_2}}$

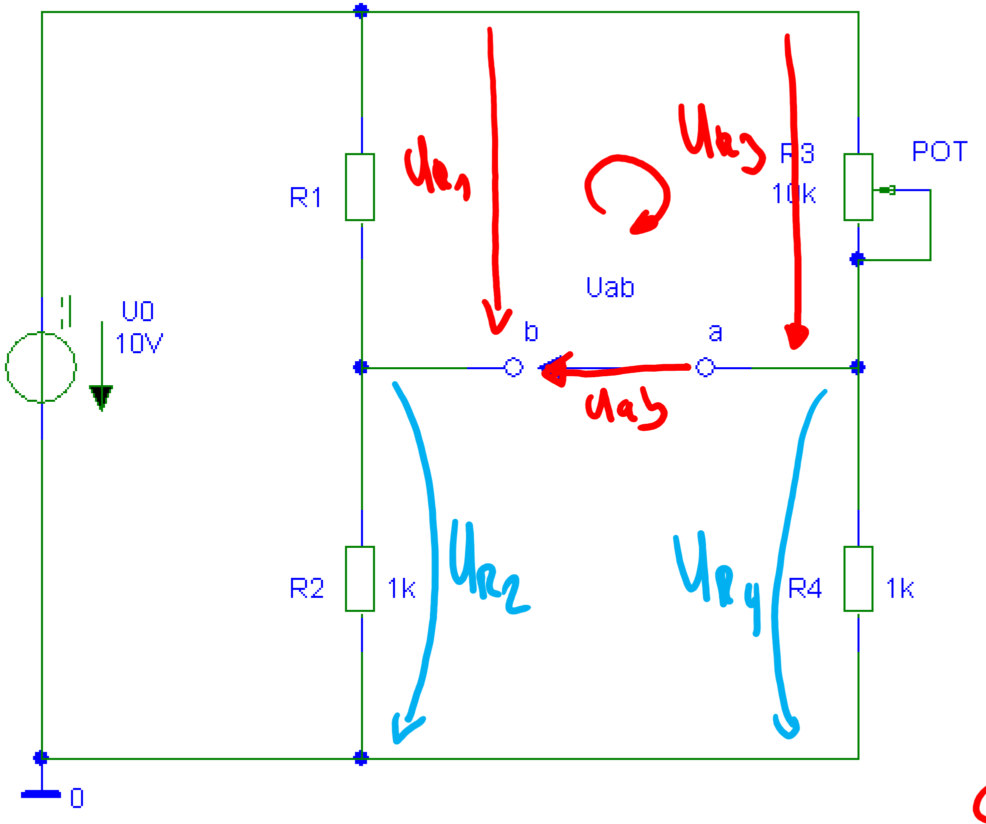
$0{,}667\,(R_1 + 1k\Omega) = R_1 \Leftrightarrow 0{,}667V\,R_1 + 0{,}667 \cdot 1k\Omega$

$0{,}667\,(1k\Omega) = 0{,}333\,R_1 \Leftrightarrow R_1 = \frac{0{,}667 \cdot 1k\Omega}{0{,}333} = 2k\Omega$

Betriebsart	⇒ Ausschlagbrücke
Einer von 4 Widerständen ist der “Sensor”	⇒ Viertelbrücke

ANDERE BETRIEBSART: ABGLEICHBRÜCKE

Wählen Sie R_3 , so dass $U_{ab} = 0$



gesucht: $\boxed{U_{ab} = U_{R1} - U_{R3}}$

$$U_{R1} = U_0 \cdot \frac{R_1}{R_1+R_2} \qquad U_{R3} = U_0 \cdot \frac{R_3}{R_3+R_4}$$

$$\Leftrightarrow U_{ab} = \cancel{U_0} \cdot \frac{R_1}{R_1+R_2} - \cancel{U_0} \cdot \frac{R_3}{R_3+R_4} \overset{!}{=} 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{R_1}{R_1+R_2} = \frac{R_3}{R_3+R_4}$$

$$\Leftrightarrow R_1(R_3+R_4) = R_3(R_1+R_2)$$

$$\Leftrightarrow \cancel{R_1 R_3} + R_1 R_4 = \cancel{R_3 R_1} + R_3 R_2$$

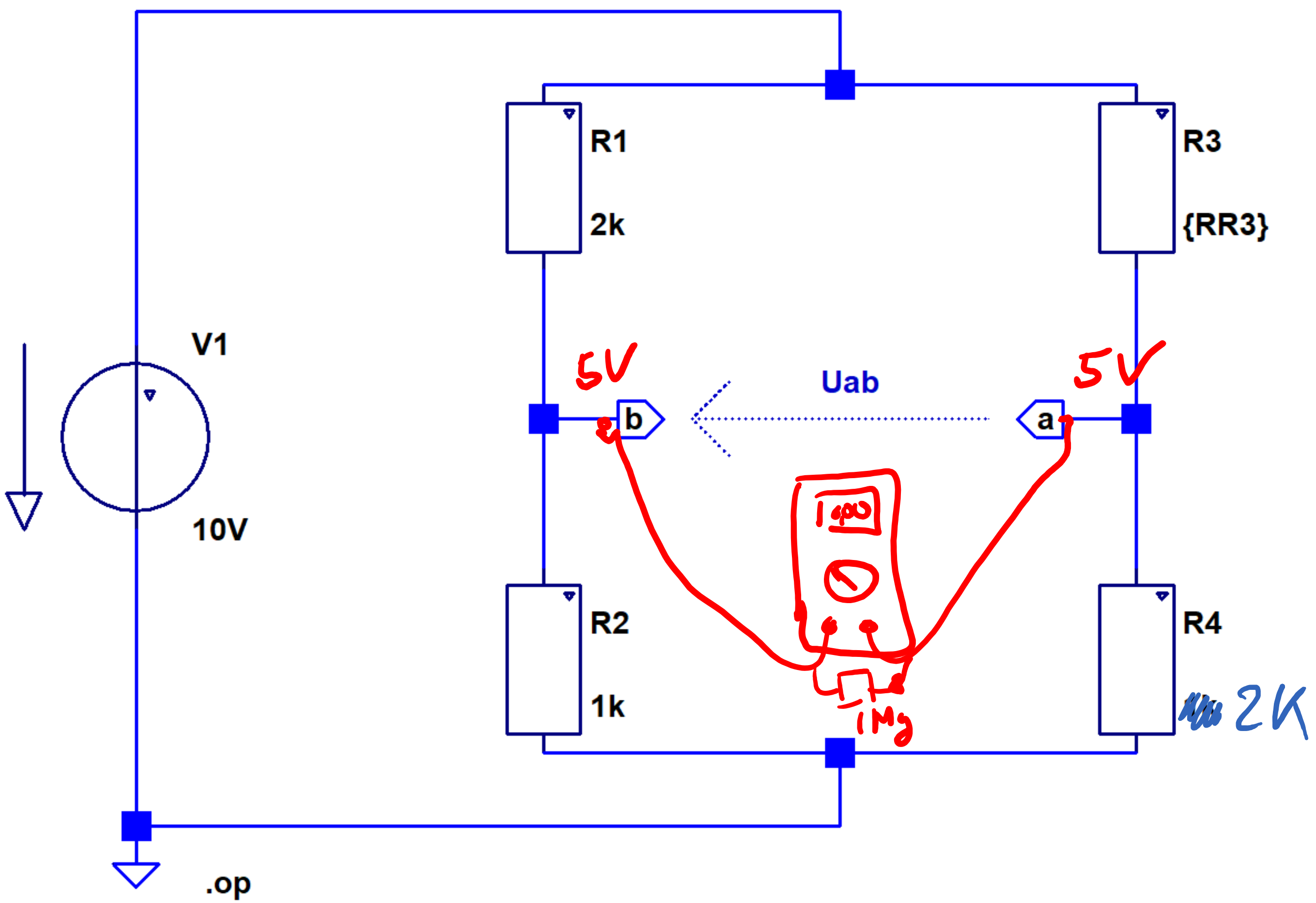
$$\Leftrightarrow R_1 R_4 = R_3 \cdot R_2$$

$$\boxed{\frac{R_1}{R_2} = \frac{R_3}{R_4}}$$

$$U_{ab} = U_{R4} - U_{R2}$$

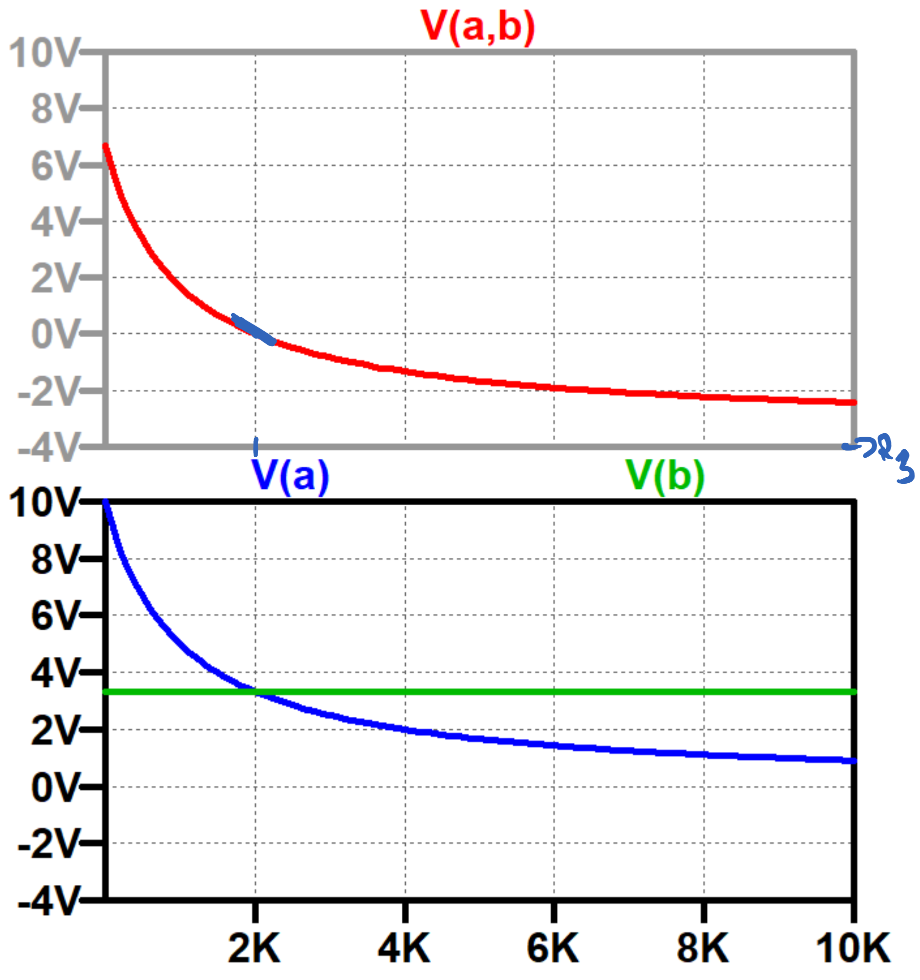
$$U_0 \frac{R_4}{R_3+R_4} - U_0 \cdot \frac{R_2}{R_2+R_1}$$

SIMULATION DER BRÜCKENSPANNUNG



.op

.step param RR3 1 10k 100



VORTEIL DER ABGLEICHBRÜCKE

Frage:
Was ist der Hauptvorteil der Abgleichbrücke?

A. ~~Man benötigt 4 Widerstände.~~
B. Bereits geringe Widerstandsabweichungen können erkannt werden.
C. Sehr genaue Messung, da kein Strom durch das Messgerät fließt.

AUSSCHLAGBRÜCKE FÜR DIE MESSUNG VON $\boxed{\Delta R_1}$

U_{ab} für kleine Abweichungen von R_1 vom Abgleichpunkt

Uab=0 ⇒ Uab = 0 + kleine Ändg

Es gilt im Abgleich: $\boxed{\frac{R_1}{R_2} = \frac{R_3}{R_4}} \Leftrightarrow \boxed{R_1 \cdot R_4 = R_2 \cdot R_3}$

Es gilt bei $\boxed{R_1 + \Delta R_1}$:

$$U_{ab} = U_{R4} - U_{R2} = U_0 \cdot \left(\frac{R_4}{R_3 + R_4} - \frac{R_2}{R_1 + \Delta R_1 + R_2} \right)$$

$$\Leftrightarrow \frac{U_{ab}}{U_0} = \frac{R_4 \cdot (R_1 + \Delta R_1 + R_2) - R_2 \cdot (R_3 + R_4)}{(R_3 + R_4) \cdot (R_1 + \Delta R_1 + R_2)}$$

$$\Leftrightarrow \frac{U_{ab}}{U_0} = \frac{R_1 R_4 + \Delta R_1 R_4 + R_2 R_4 - R_2 R_3 - R_2 R_4}{(R_3 + R_4) \cdot (R_1 + \Delta R_1 + R_2)}$$

$$\Leftrightarrow \frac{U_{ab}}{U_0} = \frac{\Delta R_1 R_4}{(R_3 + R_4) \cdot (R_1 + \Delta R_1 + R_2)}$$

$$\Rightarrow \frac{U_{ab}}{U_0} \approx \frac{R_4}{(R_3 + R_4) \cdot (R_1 + R_2)} \cdot \Delta R_1$$

Spezialfall: $R_1 = R_2 = R_3 = R_4 = R$

$$U_{ab} \approx U_0 \cdot \frac{\Delta R}{4R}$$

AUSSCHLAGBRÜCKE FÜR DIE MESSUNG VON ΔR_1

U_{ab} bei kleinen Abweichungen von R_1 vom Abgleichpunkt

- Wir nennen:
  - **Brückenverhältnis** $a = \dfrac{R_2}{R_1} = \dfrac{R_4}{R_3}$
  - relative **Verstimmung** der Brücke $v = \dfrac{\Delta R_1}{R_1}$

$$\frac{U_{ab}}{U_0} \approx \frac{R_4}{(R_1 + R_2)(R_3 + \underset{R}{R_4})} \cdot \Delta R_1 \quad \Rightarrow \quad \frac{U_{ab}}{U_0} \approx \frac{a}{(1+a)^2} \cdot v$$

BRÜCKENEMPFINDLICHKEIT

Änderung von U_{ab} in Abhängigkeit von R_1 im Abgleichpunkt

$$E_0 = \frac{dU_{ab}}{dR_1} \approx \frac{\Delta U_{ab}}{\Delta R_1} = \frac{U_{ab}}{\Delta R_1} \text{ für } \frac{R_1}{R_2} = \frac{R_3}{R_4}$$

Für $\Delta R_1 \ll R_1$ ergibt sich mit $$\frac{U_{ab}}{\cancel{U_0}} \approx \frac{a}{(1+a)^2} \cdot \frac{\Delta R_1}{R_1} \; U_0$$

$$E_0 = \frac{a}{(1+a)^2} \cdot \frac{1}{R_1} \cdot U_0$$

MAXIMALE BRÜCKENEMPFINDLICHKEIT – MATHEMATISCH

Der mathematische Weg: $E_0 \approx \frac{U_0}{R_1} \cdot \frac{a}{(1+a)^2} = k \cdot \frac{a}{(1+a)^2}$

Extremum $\Leftrightarrow$ $dE_0 / da = 0$

Regel: $(u/v)' = \frac{u'v - v'u}{v^2}$

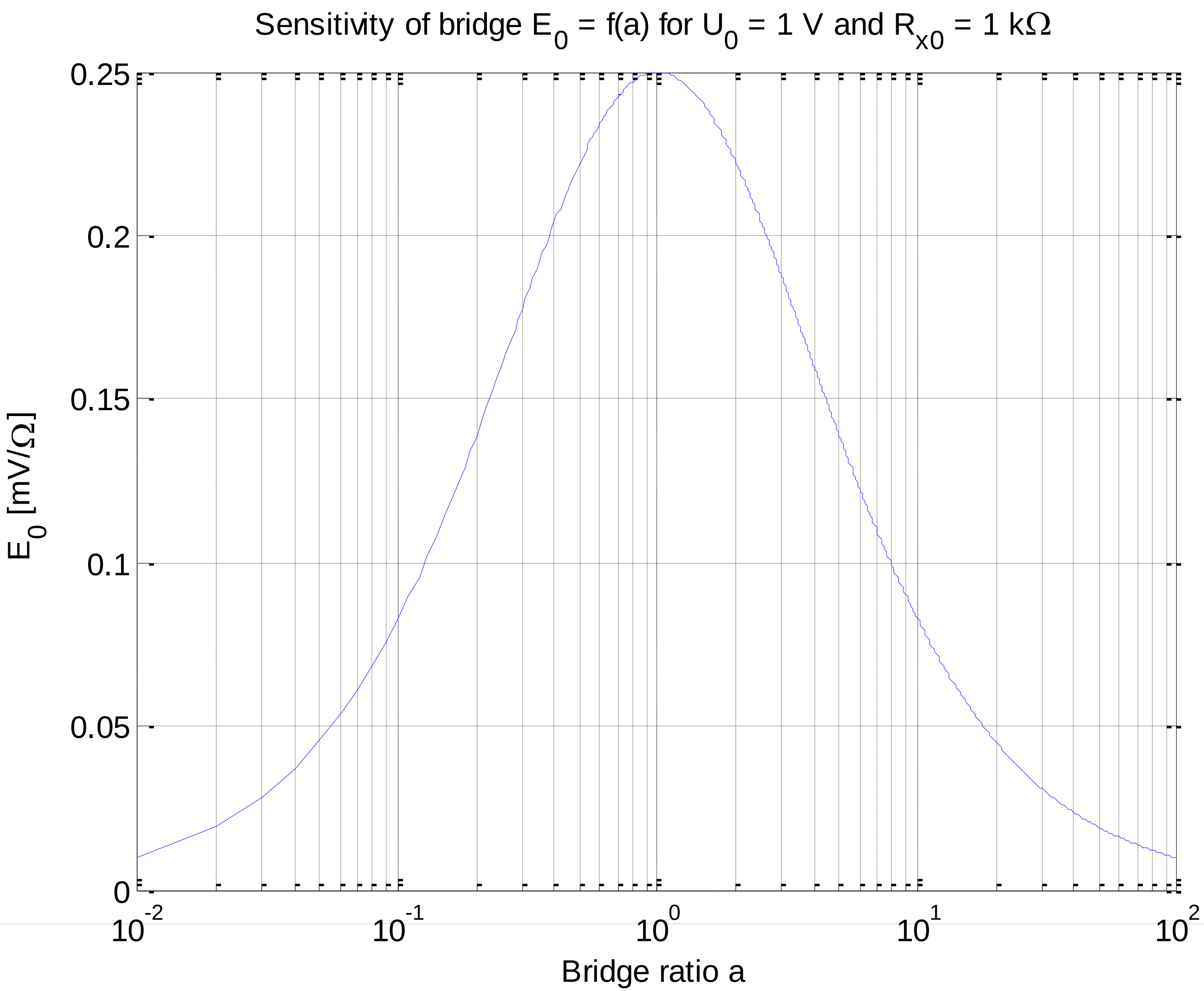
$u = a \Rightarrow u' = 1$

$v = (1+a)^2 \Rightarrow v' = 2 \cdot (1+a)$

$$\frac{dE_0}{da} = \frac{u'v - v'u}{v^2} = 0 \Leftrightarrow u'v = v'u$$

$\Leftrightarrow \ \ldots \Leftrightarrow a^2 = 1 \longrightarrow a = \pm 1$

MAXIMALE BRÜCKENEMPFINDLICHKEIT – GRAPHISCH



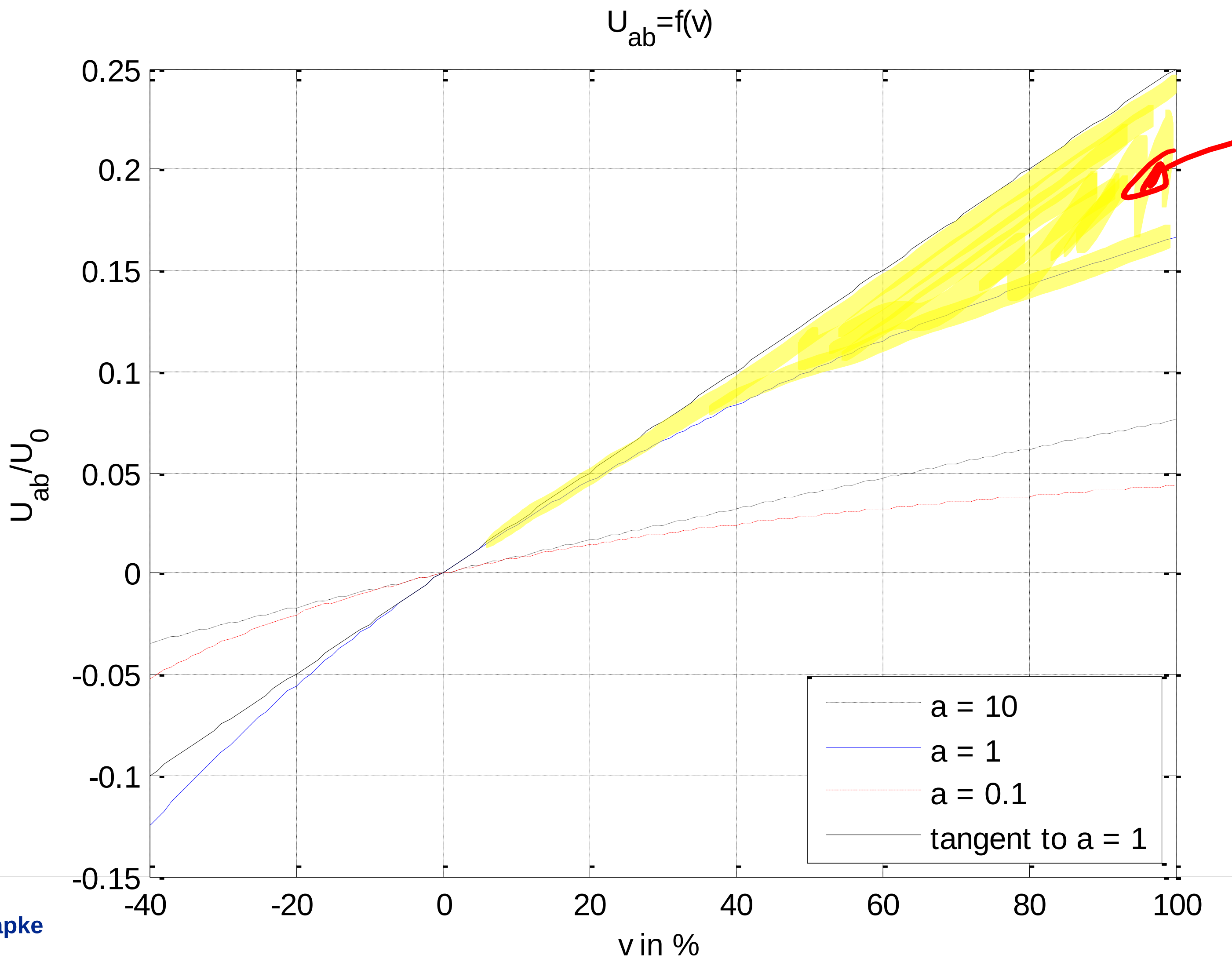
$$E_0 \approx \frac{U_0}{R_1} \cdot \frac{a}{(1+a)^2}$$

Für $a = 1$ erhalten wir:

$$E_{0,max} = \frac{U_0}{R_1}\left(\frac{1}{(1+1)^2}\right)$$

$$= \frac{U_0}{4R_1}$$

EINFLUSS DES BRÜCKENVERHÄLTNISSES a AUF E_0



Linearitätsfehler

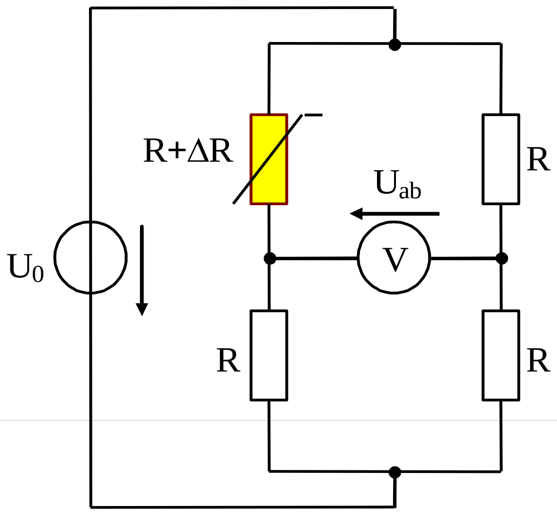
KONSEQUENZ FÜR BRÜCKENSCHALTUNGEN

Frage: Welche Konsequenz folgt aus dem Verlauf von E_0 und a ?

$$\Longrightarrow \quad a = 1$$

$$\Longrightarrow R_1 = R_2 \qquad\qquad R_3 = R_4$$

$\Rightarrow$ Typische Konfiguration:



$$U_{ab} \approx U_0 \cdot \frac{\Delta R}{4R}$$

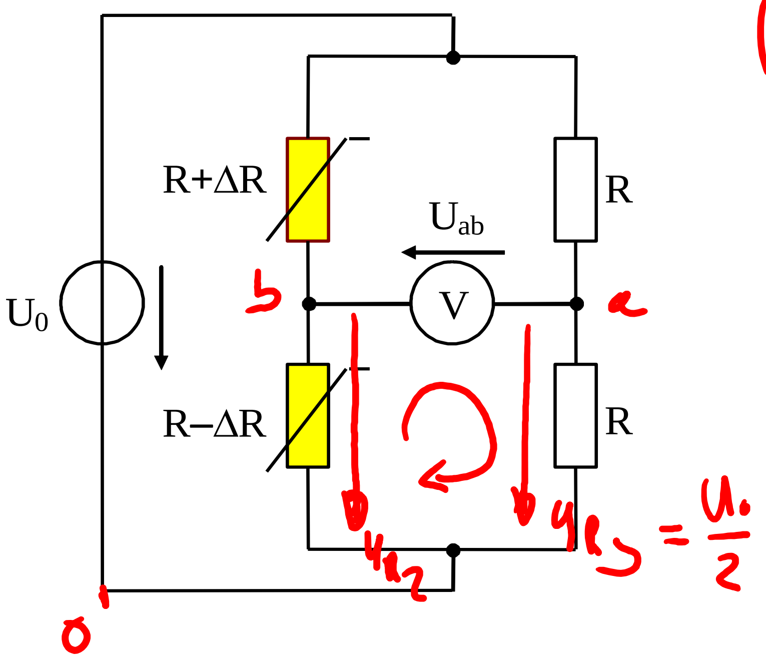
Viertelbrücke:
1 von 4 Widerständen ist aktiv

10^{00}

HALBBRÜCKE

Berechnen Sie die Brückenspannung für 2 aktive Widerstände.

Funktioniert dies auch, wenn die Widerstände sich gleichsinnig verändern?



$$U_{ab} = U_{R3} - U_{R2} = U_a - U_b$$

$$= \frac{U_0}{2} - U_0 \cdot \frac{R-\Delta R}{(R+\Delta R)+(R-\Delta R)}$$

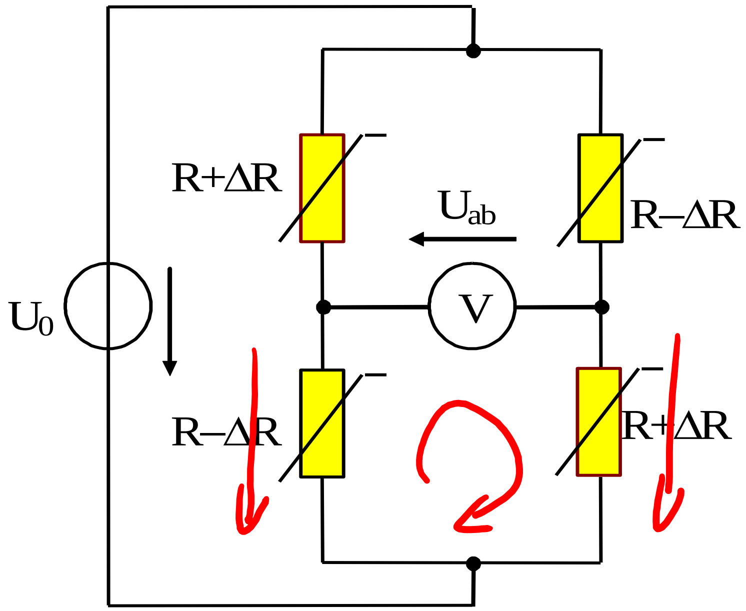
$$= \frac{U_0}{2} - U_0\left(\frac{R-\Delta R}{2R}\right) = \frac{U_0}{2} - U_0\frac{\cancel{R}}{2\cancel{R}} + U_0\frac{\Delta R}{2R}$$

$$= U_0 \frac{\Delta R}{2R}$$

VOLLBRÜCKE

Berechnen Sie die Brückenspannung für 4 aktive Widerstände.

Achten Sie dabei auf die Anordnung der Widerstände.



$$U_{ab} = U_0 \, \frac{\Delta R}{R}$$

ANWENDUNGSBEISPIELE

- Messtechnik
  - Temperatur
  - Durchflussgeschwindigkeit
  - Dehnungsmessstreifen

4 WIDERSTANDSMESSUNG

4.1 Ohmmeter mit Stromquelle

4.2 Vierleiter-Anschlusstechnik für kleine Widerstände

4.3 Wheatstonesche Brücke

4.4 Temperaturmessung mit Pt-100

4.5 Messung der Strömungsgeschwindigkeit

4.6 Dehnungsmessstreifen

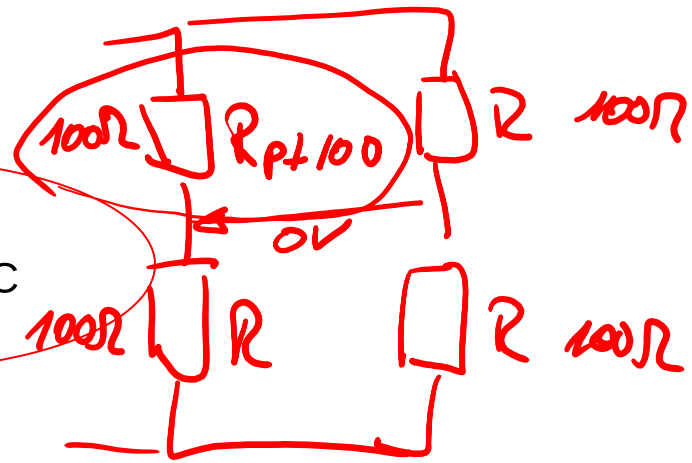
Prof. Dr.-Ing. Martin Lapke

TEMPERATURMESSUNG

$$U_{ab} \approx U_0 \cdot \frac{\Delta R_1}{R}$$

$T = 0°C$

- Typische Sensoren für die Temperaturmessung



- Pt-100
  - Platin
  - Nennwiderstand von 100 Ω bei ϑ_0=0°
  - Gebräuchlichster Typ

Vorsicht: bei Pt100 stets 0° C als Referenz!

$\Delta T \rightarrow \Delta R_1$

$$\Rightarrow U_{ab_{20°C}} \rightarrow U_0 \cdot \frac{\Delta R_1}{\underset{100\Omega}{R}}$$

- Ni-100
  - Nickel

Prof. Dr.-Ing. Martin Lapke

TEMPERATURABHÄNGIGKEIT

aktuelle Temp.

- Wiederholung Grundlagen : $R = R_{20}\left(1 + \alpha(\vartheta - \vartheta_{20})\right)$

  α = Temperaturkoeffizient

  Referenzwerte

- für Temperaturmessung:
  - für hohe Genauigkeit ist die lineare Approximation nicht ausreichend
  - Bezugstemperatur $\vartheta_0 = 0°$

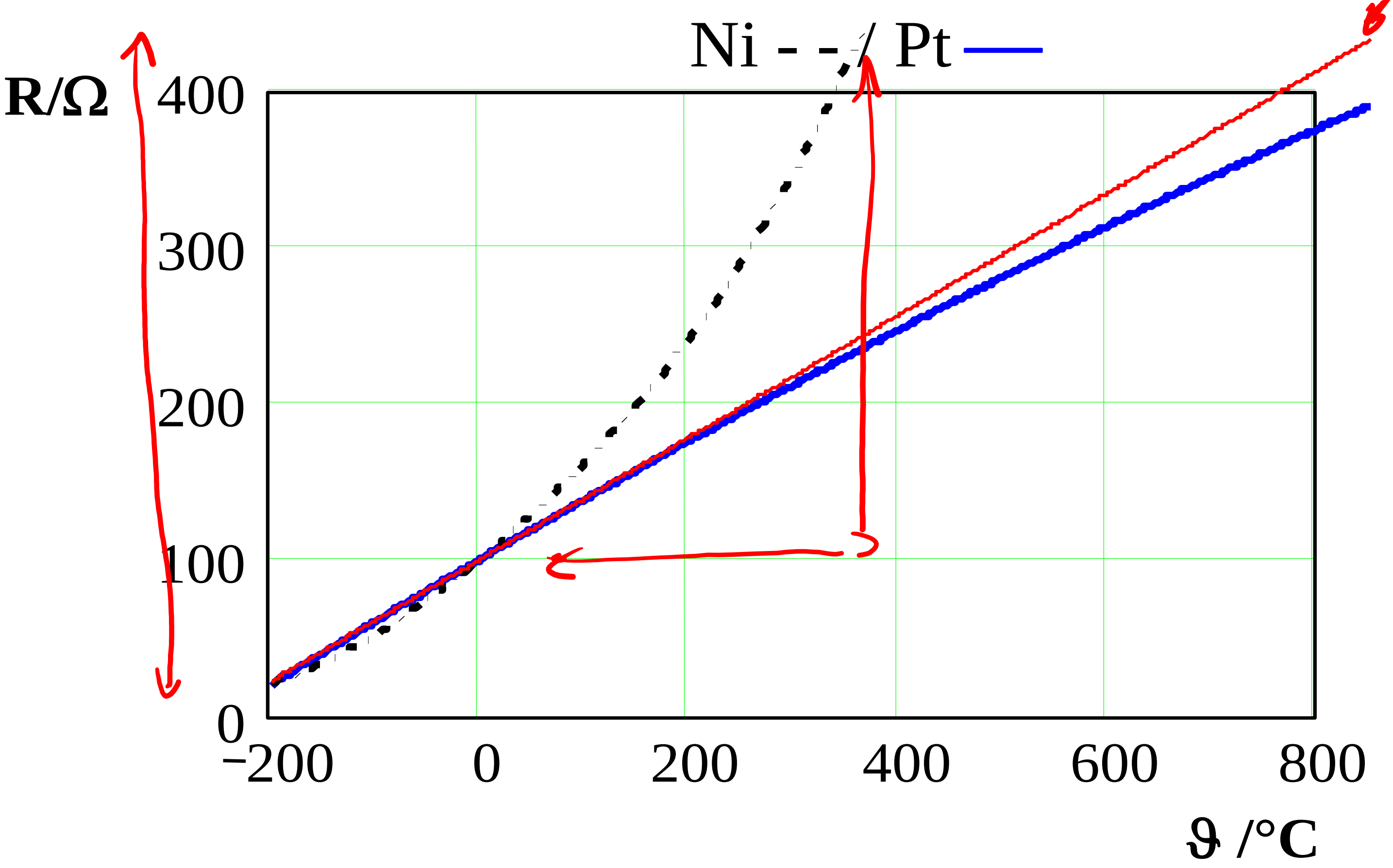
$$R(\vartheta) = R_0\left(1 + \alpha(\vartheta - \vartheta_0) + \beta(\vartheta - \vartheta_0)^2 + \gamma(\vartheta - \vartheta_0)^4\right)$$

Rote Kurve

Sensor	α	β	γ
Pt-100 $0 \ldots 850°C$	$3.90802 \cdot 10^{-3}/K$	$-\,0.580195 \cdot 10^{-6}/K^2$	0
Ni-100 $-60 \ldots 180°C$	$5.485 \cdot 10^{-3}/K$	$+\,6.65 \cdot 10^{-6}/K^2$	$28.05 \cdot 10^{-12}/K$

PT-100 VERSUS NI-100

lineare Näherung



Vorteil des Pt-100:

gute Näherung über lineare Approximation über großen Temperaturbereich

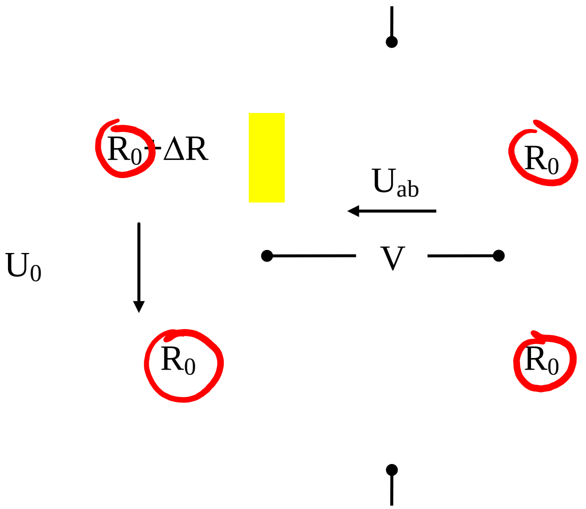
Vorteil des Ni-100:

Höhere „Dynamik"

Prof. Dr.-Ing. Martin Lapke

TEMPERATURMESSBRÜCKE

Bestimmen Sie U_{ab} als Funktion der Temperatur ϑ.



Lösung: $U_{ab} = U_0 \cdot \frac{\Delta R}{R}$

$$R_t = R_0 \cdot (1 + \alpha \cdot \vartheta)$$

$$U_{ab} \approx U_0 \cdot \frac{\Delta R}{4R_0}$$

$$\Delta R = R_t - R_0$$

$$R_{pt100} = R_0(1 + \alpha(\vartheta - 0°))$$

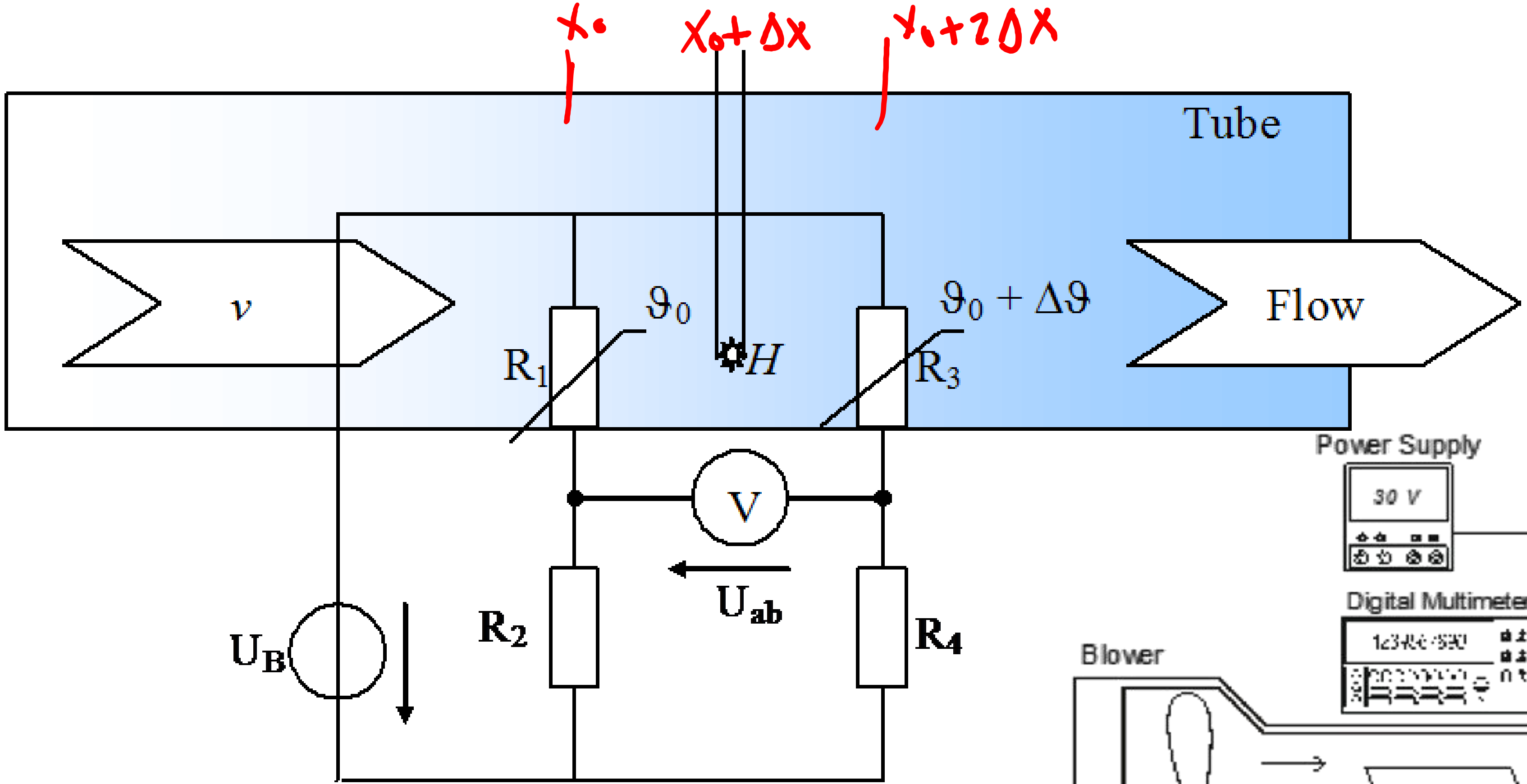
$$R_{pt100} - R_0 = \Delta R = \alpha \cdot R_0 (\vartheta)$$

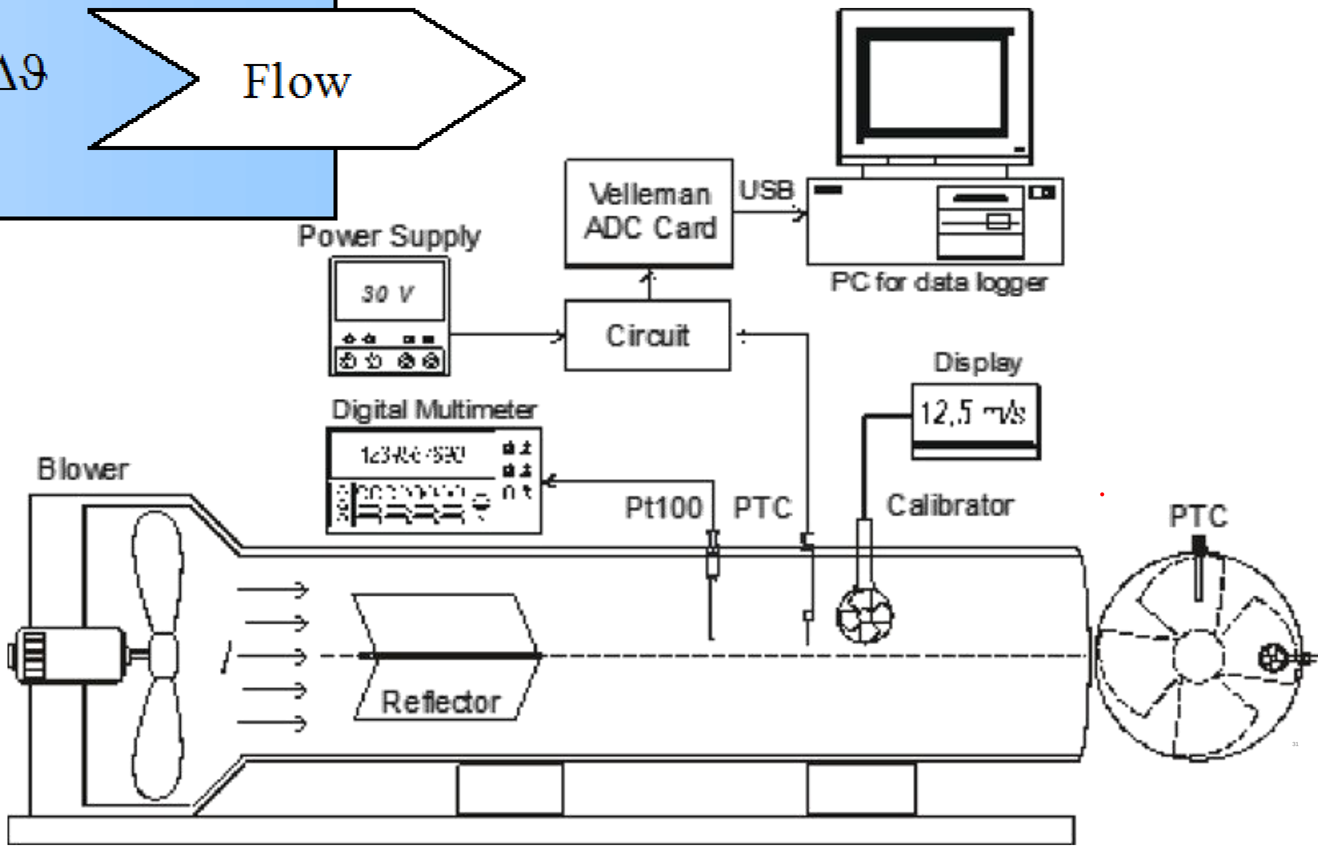
$$\Rightarrow U_{ab} \approx U_0 \cdot \frac{\alpha \cdot R_0 \vartheta}{4 \cdot R_0} \approx U_0 \alpha \cdot \frac{1}{4} \cdot \vartheta$$

4 WIDERSTANDSMESSUNG

MESSUNG DER DURCHFLUSSGESCHWINDIGKEIT

mittels eines Widerstandsthermometers



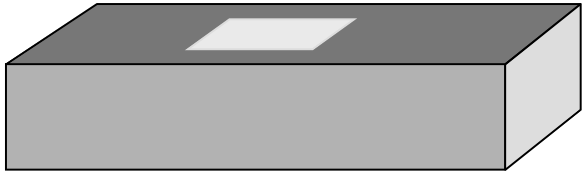


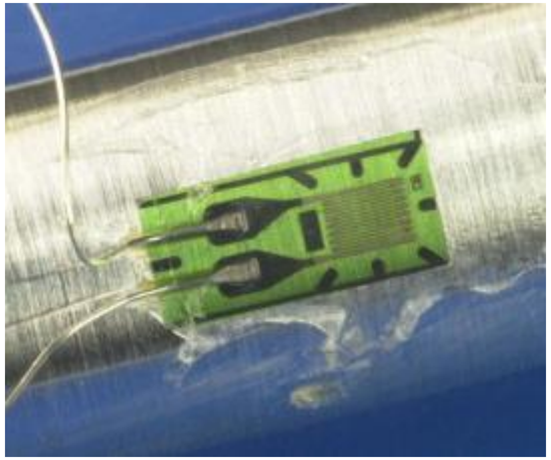
4 WIDERSTANDSMESSUNG

Prof. Dr.-Ing. Martin Lapke

DEHNUNGSMESSSTREIFEN (DMS)

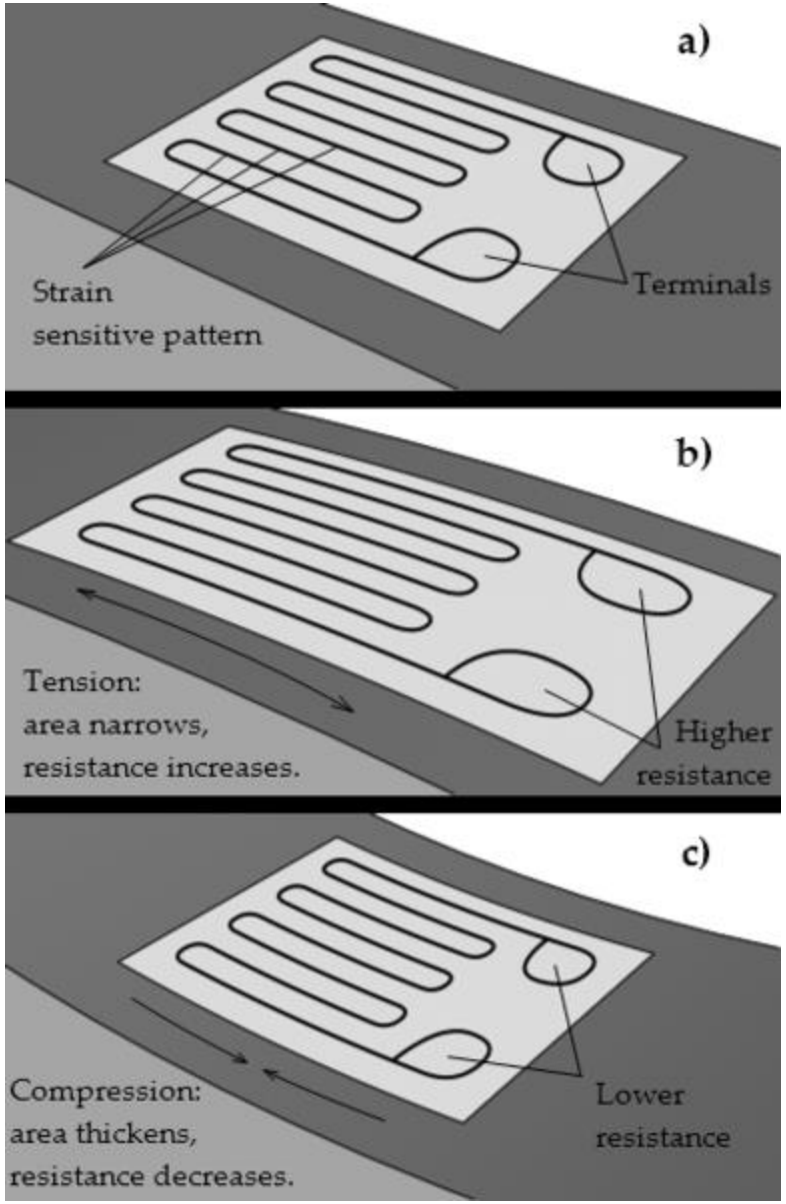
- Messung der Verformung





- Messprinzip:

$$R = f(Länge)$$

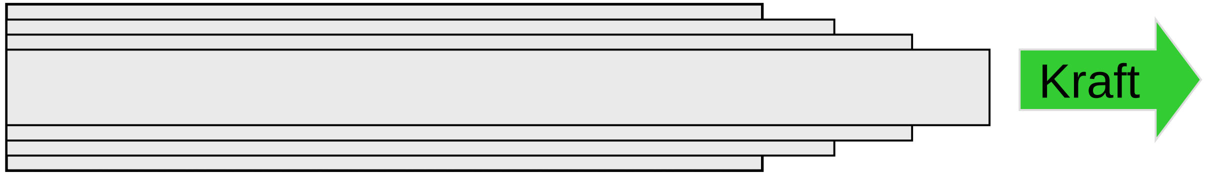


WIESO HÄNGT DER WIDERSTAND VON DER LÄNGE AB?

- Metallischer Leiter
  - $\rho:$ spezifischer Widerstand
  - $\ell:$ Länge
  - $A:$ Querschnittsfläche
  - $R = \rho \cdot \frac{\ell}{A}$
- Es habe der Leiter einen Durchmesser D
  - $A = \pi \frac{D^2}{4}$

$$\Rightarrow R = 4 \cdot \rho \cdot \frac{\ell}{\pi D^2}$$

WAS PASSIERT, WENN SICH ALLE VARIABLEN ÄNDERN?



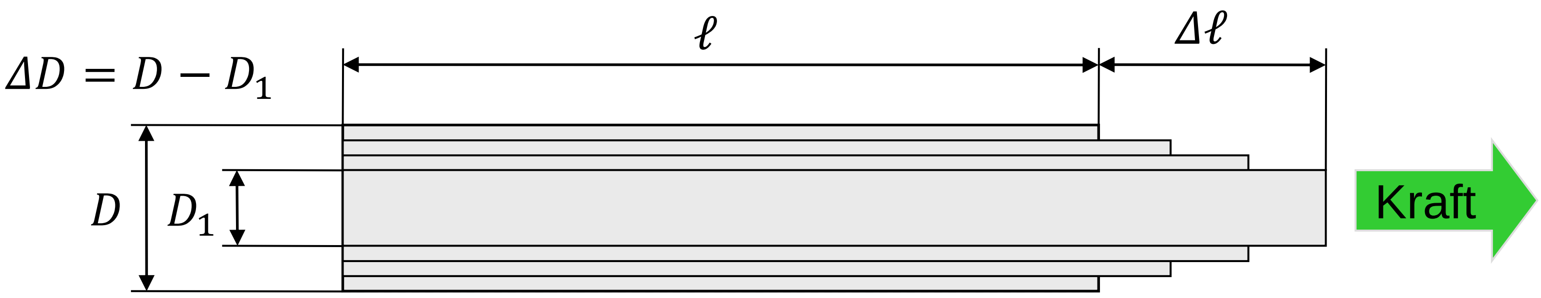
Zieht man an dem Leiter, wird er länger <u>und</u> dünner

Wie verändert sich dann der Widerstand ? $\Rightarrow$ totales Differential

$$\Rightarrow \quad \Delta y = \frac{\partial f}{\partial x_1}\Delta x_1 + \frac{\partial f}{\partial x_2}\Delta x_2 + \ldots\ldots + \frac{\partial f}{\partial x_N}\Delta x_N \text{ von } \quad R = \frac{4 \cdot \rho \cdot \ell}{\pi \cdot D^2} = y = f(\rho, \ell, D)$$

- $\frac{\partial R}{\partial \rho} = \frac{4 \cdot \ell \rho}{\pi D^2 \rho} = \frac{R}{\rho}$
- $\frac{\partial R}{\partial \ell} = R/\ell$
- $\frac{\partial R}{\partial D} = -2 \cdot \frac{4 \rho \ell}{\pi D^3} \frac{1/D}{1/D} = -2 \cdot \frac{R}{D}$
- $\frac{\Delta R}{R} = \Delta\rho/\rho + \Delta\ell/\ell - 2 \cdot \frac{\Delta D}{D}$

ZUGBELASTUNG



- $\Delta\rho / \rho = 0$ (für Halbleiter-DMS ist dies jedoch signifikant)
- $\Delta\ell / \ell$ **Dehnung ε**
- $\Delta D / D$ **Querkontraktion**
- $\mu = -\dfrac{\Delta D / D}{\Delta \ell / \ell}$ **Poissonzahl**

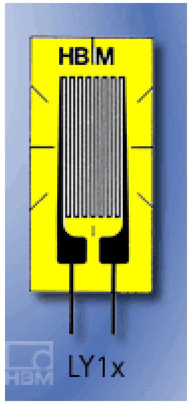
Metalle haben eine Poissonzahl von $\mu \approx 0.5$ $\Rightarrow \dfrac{\Delta D}{D} \approx -\dfrac{1}{2}\dfrac{\Delta\ell}{\ell}$

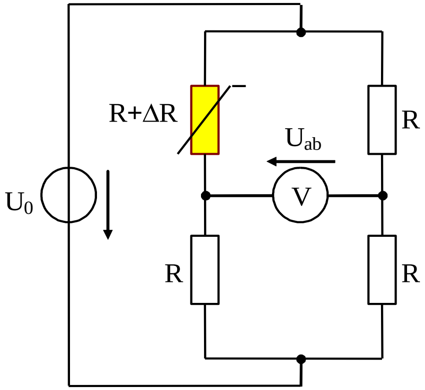
$$\Rightarrow \quad \frac{\Delta R}{R} = \cancel{\frac{\Delta\rho}{\rho}} + \frac{\Delta\ell}{\ell} - \frac{2\Delta D}{D} = \varepsilon - 2\cdot\left(-\frac{1}{2}\varepsilon\right) = 2\varepsilon = K\cdot\varepsilon$$

Der sogenannte K-Faktor ist für Metalle **K ≅ 2**.

DMS UND WHEATSTONE‘SCHE BRÜCKE

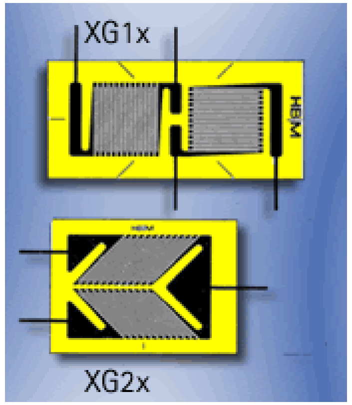
- Viertelbrücke

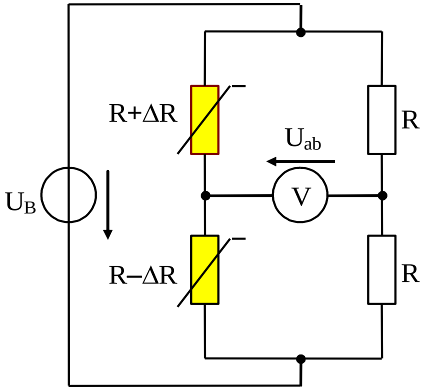




$$U_{ab} = \frac{U_0}{4}\frac{\Delta R}{R} = \varepsilon \cdot K \cdot \frac{U_0}{4}$$

- Halbbrücke





$$U_{ab} = \frac{U_0}{2}\frac{\Delta R}{R} = \varepsilon \cdot K \cdot \frac{U_0}{2}$$

WAS SIE MITNEHMEN SOLLEN …

- Umgang mit dem Ohmmeter
- Messung von sehr kleinen Widerständen
- Wheatstone'sche Brückenschaltung
  - Abgleichbrücke
  - Ausschlagbrücke
  - viertel – halb – voll
- Anwendungen
  - Temperaturmessung
  - Messung der Durchflussgeschwindigkeit
  - Dehnungsmessung