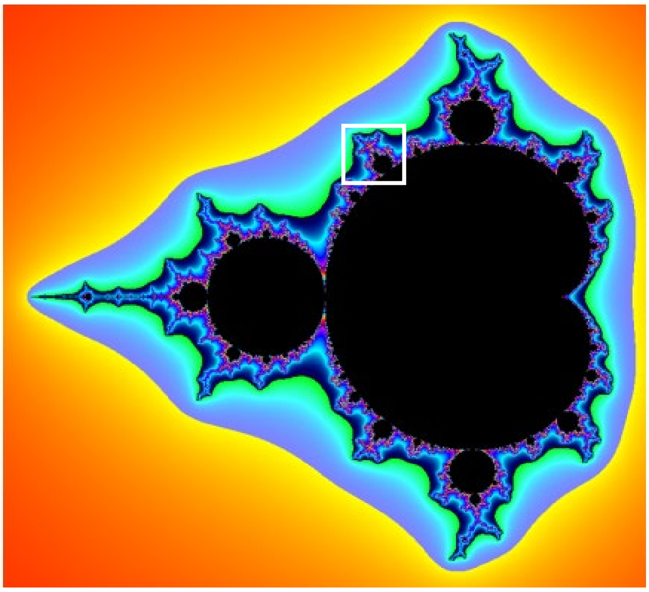
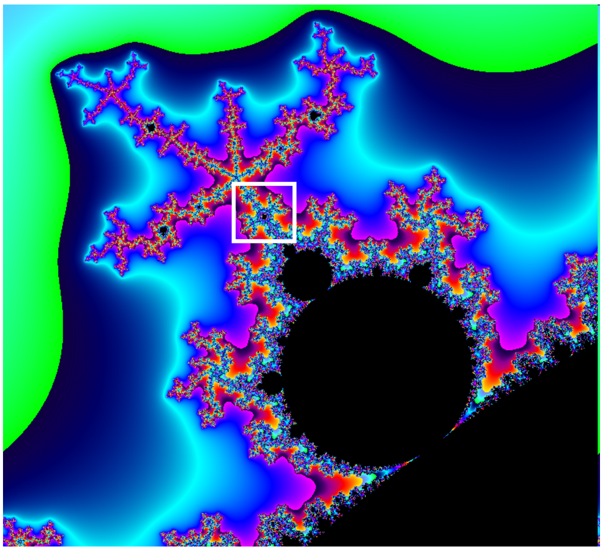
Das „Apfelmännchen“ und seine Folgen

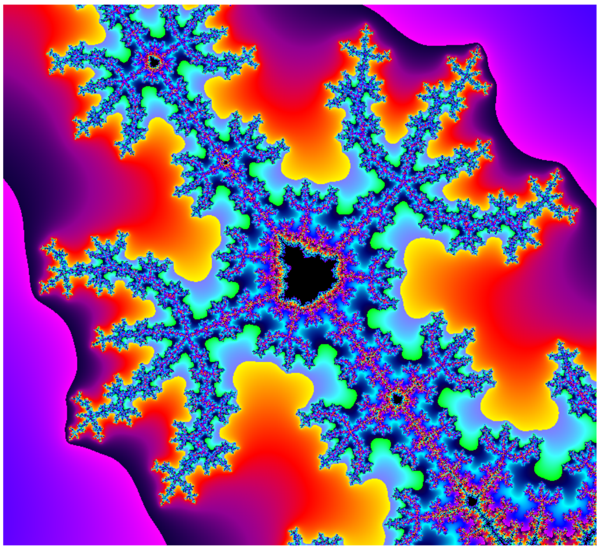
Das „Apfelmännchen“, auch Mandelbrot-Menge genannt, wurde von Benoit Mandelbrot (französischer Mathematiker mit polnischer Herkunft, geboren 1924) im Jahr 1980 erstmals computergrafisch dargestellt.



erstellt mit FractalForge

Charakteristisch für das Apfelmännchen ist die „Selbstähnlichkeit“, d.h. die Struktur des Apfelmännchens ist an vielen Stellen in kleinerer Form wieder vorhanden. Dieses kann man durch Zoomen der Grafik erkennen.





Durch weiteres Zoomen der Grafik und Veränderungen an der Farbgebung können die verschiedensten Bilder erzeugt werden.

Wo steckt hier nun die Mathematik?

Das Apfelmännchen entsteht durch die Betrachtung komplexer Zahlenfolgen und deren Konvergenz (schwarze Bildbereiche) sowie der Schnelligkeit der Divergenz der Folgen (farbige Bildbereiche).

Die Grundlagen zum Verständnis des Apfelmännchens und seiner Folgen sollen im folgenden betrachtet werden.

I. Grundlegende Begriffe zum Thema Folgen

Dieser Abschnitt erläutert den Begriff der Folge, wie sie dargestellt werden kann und wann sie konvergent oder divergent genannt wird.

Definition einer Folge:

Eine Vorschrift, die jeder natürlichen Zahl n genau eine reelle Zahl a_n zuordnet, heißt unendliche **reelle Zahlenfolge** oder kurz **Folge** und wird mit $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ bezeichnet.

Die einzelnen Elemente $a_1, a_2, a_3, ..., a_n, ...$ der Folge heißen **Folgenglieder**, wobei der Index die Nummer des Folgengliedes angibt.

Beispiel:
Eine Zuordnung $n \to a_n$ für $n = 1, 2, 3, ...$ sei wie folgt gegeben:

$1 \to 1$
$2 \to 3$
$3 \to 6$
$4 \to 10$
$5 \to 15$
….

Darstellungsmöglichkeiten für Folgen:

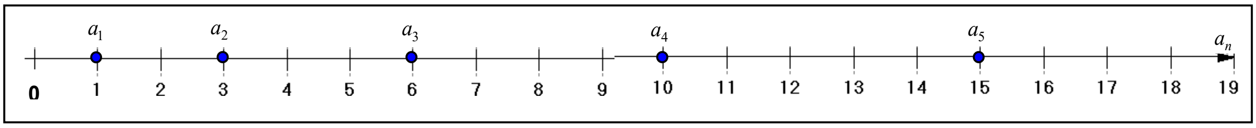
→ **durch Aufzählung einiger Folgenglieder**

Beispiel: 1, 3, 6, 10, 15, ….

→ **durch grafische Darstellung auf der reellen Achse**

Die Werte der Folgenglieder werden auf der reellen Achse eingezeichnet. Der Index der Folgenglieder wird nur durch Beschriftung der Werte sichtbar.

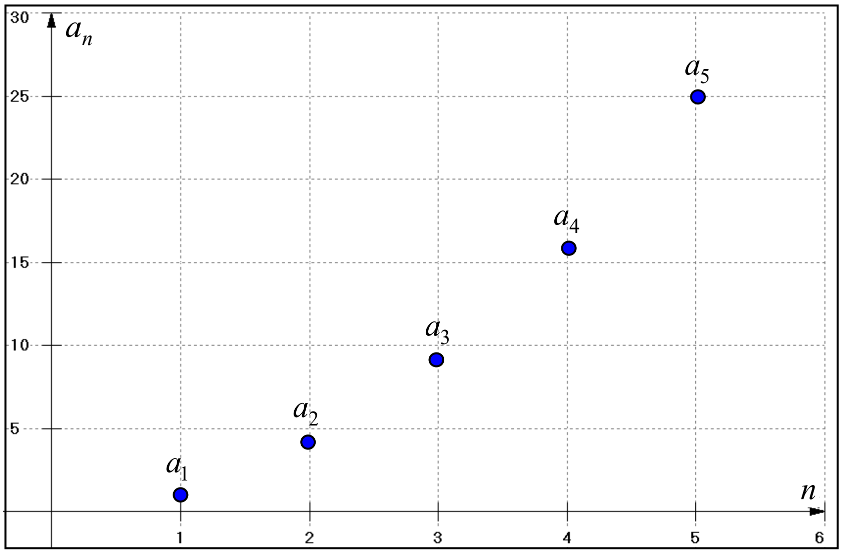
Beispiel:



→ **durch grafische Darstellung im xy-Koordinatensystem**

Die Folgenglieder werden als Punkte im xy-Koordinatensystem eingezeichnet. Der Index der Folgenglieder entspricht dem Wert auf der waagerechten reellen Achse (x-Achse). Die Werte der Folgenglieder werden in Richtung der senkrechten reellen Achse (y-Achse) eingetragen.

Beispiel:



→ **durch Angabe der Berechnungsvorschrift für die Folgenglieder**

1.Möglichkeit: explizite Beschreibung

d.h. abhängig vom Index des Folgengliedes

Beispiel:

1, 3, 6, 10, 15, ... hat die explizite Beschreibung: $\boxed{a_n = \frac{n\,(n+1)}{2}}$

2.Möglichkeit: implizite Beschreibung

d.h. Verwendung vorhergehender Folgenglieder (Rekursionsvorschrift)

Beispiel:

1, 3, 6, 10, 15, ... hat die implizite Beschreibung: $\boxed{a_n = a_{n-1} + n,\ a_1 = 1}$

Beispiele spezieller Folgen:

1. Die Folge 1,3,5,7,9... , also $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit $a_n = a_{n-1} + 2$ und $a_1 = 1$, ist eine **arithmetische Folge**, d.h. die Differenz aufeinander folgender Glieder ist konstant.

2. Die Folge $\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \frac{1}{16} ...$, also $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ mit $a_n = \frac{1}{2} a_{n-1}$ und $a_1 = \frac{1}{2}$, ist eine **geometrische Folge**, d.h. der Quotient aufeinander folgender Glieder ist konstant.

Konvergenz und Divergenz von Folgen:

→ Eine Folge heißt **konvergent**, wenn sich die Folgenglieder bei immer größer werdendem Index einem festen Wert annähern. Dieser feste Wert heißt **Grenzwert der Folge**.

Beispiel:

Die Folgenglieder der Folge
$\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \frac{1}{16}, \frac{1}{32}, \frac{1}{64}, \frac{1}{128}, \frac{1}{256}, \frac{1}{512}, \frac{1}{1024}, ...$ nähern sich dem Wert 0 an.

0 ist also der Grenzwert der Folge.

→ Eine Folge heißt **divergent**, wenn die Folgenglieder bei wachsendem Index immer größer werden. Die Folge hat keinen Grenzwert, die Folgenglieder streben gegen ∞ (unendlich).

Beispiele:

Die Folgenglieder der Folge 1, 3, 5, 7, 9, 11, 13, ... werden immer größer. Die Folge ist also divergent.

Die Folgenglieder der Folge
1, 10, 100, 1000, 10000, 100000, 1000000, ... werden ebenfalls immer größer. Die Folge ist also auch divergent. Die Divergenzgeschwindigkeit ist jedoch wesentlich größer als bei der vorhergehenden Folge.

II. Erweiterung auf Punktfolgen

Da das Apfelmännchen durch die Betrachtung komplexer Zahlenfolgen $(z_n)_{n \in \mathbb{N}}$ mit $z_{n+1} = z_n^2 + c$ und $z_0 = 0$ sowie einer komplexen Zahl c entsteht, ist es notwendig die Definition der reellen Zahlenfolgen zu erweitern.

Interpretation einer komplexen Folge als Punktfolge:

Interpretiert man für die Darstellung den **Realteil der komplexen Zahlen als x-Koordinate** und den **Imaginärteil als y-Koordinate**, so kann man die komplexen Zahlenfolgen als reelle Punktfolgen im xy-Koordinatensystem auffassen.

Definition reeller Punktfolgen:

Die Punktfolgen sind eine Erweiterung der reellen Zahlenfolgen auf eine zweite Dimension. Die Folgenglieder einer Punktfolge bestehen aus zwei Angaben, nämlich aus einem x-Koordinatenwert und einem y-Koordinatenwert.

Eine **Folge von Punkten** $(x_n, y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ **in der Ebene**, also im xy-Koordinatensystem, wird durch

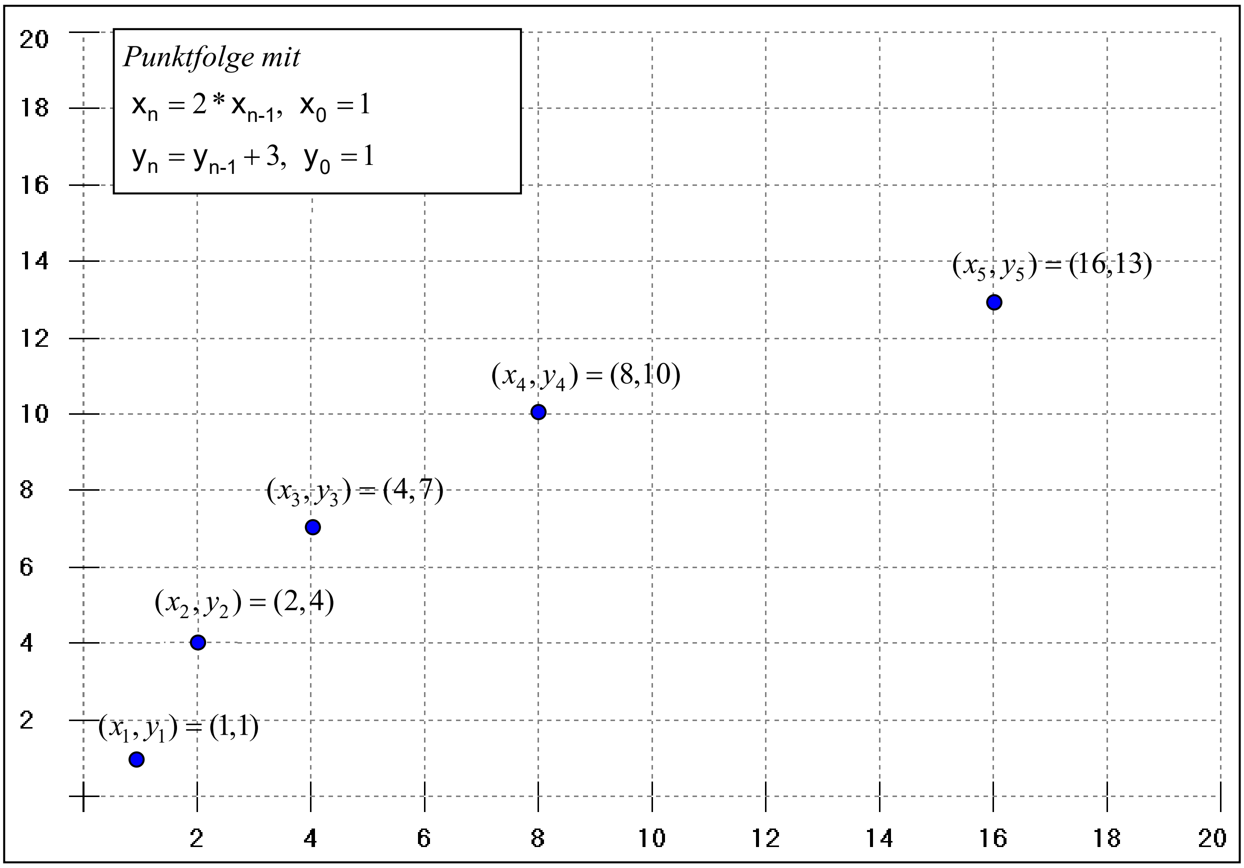
→ Angabe einer Berechnungsvorschrift für die x-Koordinate $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ und

→ Angabe einer Berechnungsvorschrift für die y-Koordinate $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$

beschrieben.

Beispiel:

$(x_n, y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit $\boxed{x_n = 2 * x_{n-1},\ x_0 = 1}$ und $\boxed{y_n = y_{n-1} + 3,\ y_0 = 1}$



Der Index der Folgenglieder ist in dieser Darstellung der Punktfolgen nur an der Beschriftung der Folgenglieder zu erkennen.

Für jedes Folgenglied (x_n, y_n), $n = 1,2,3,...$ kann der **Abstand** d_n **zum Ursprung**, d.h. die Länge der direkten Verbindung vom Punkt (x_n, y_n) zum Punkt $(0,0)$, über die folgende Gleichung berechnet werden:

$$d_n=\sqrt{(x_n)^2+(y_n)^2}$$

Beispiel: $d_1= \sqrt{(1)^2+(1)^2} = \sqrt{2} = 1.41$

$$d_2= \sqrt{(2)^2+(4)^2} = \sqrt{20} = 4.47$$

III. Das Apfelmännchen

Das Apfelmännchen entsteht durch die Betrachtung einer komplexen Zahlenfolge $z_{n+1} = z_n^2 + c$ für $z_0 = 0$ und einer komplexen Zahl c.

Die Iterationsvorschrift bildet abhängig von c konvergente, langsam divergente bzw. schnell divergente Punktfolgen. Als Maß für die Konvergenz bzw. Divergenz wird der Abstand der Folgenglieder zum Ursprung betrachtet. Vergibt man entsprechend der Konvergenz bzw. Schnelligkeit der Divergenz Farben, so entsteht ein „Apfelmännchen“ (**Mandelbrotmenge**).

Die Punktfolgen des Apfelmännchens:

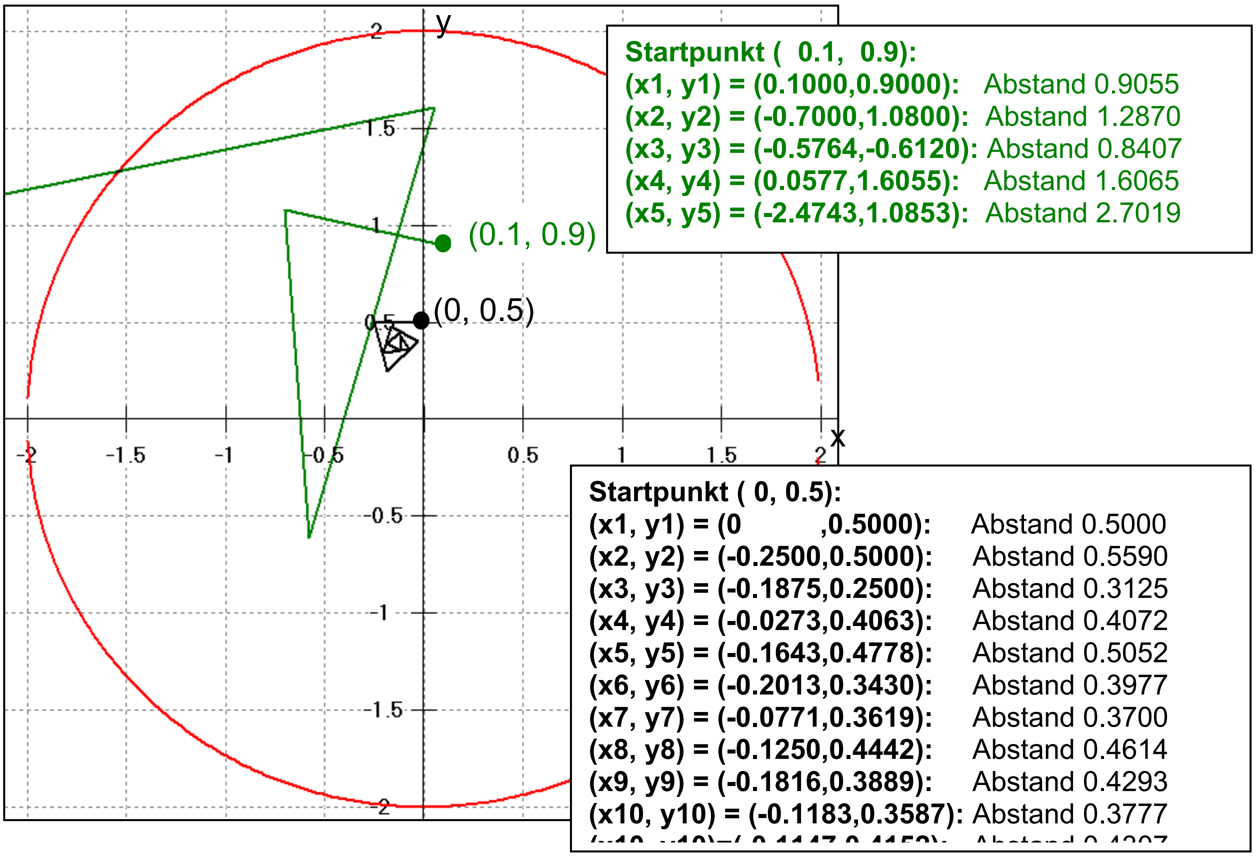
Die komplexen Zahlen z_n können durch ihren Real- und Imaginärteil als Punkt $z_n = (x_n, y_n)$ des xy-Koordinatensystems betrachtet werden.

Durch Umrechnung von Realteil und Imaginärteil der komplexen Zahlenfolge $z_{n+1} = z_n^2 + c$ mit $c = (a, b)$, $z_0 = 0$ des Apfelmännchens in die x- und y-Koordinaten ergibt sich ausgehend von jedem Startpunkt (a, b) für die einzelnen Koordinaten folgende Iterationsvorschrift:

$$\begin{matrix} x_{n+1}= (x_n)^2 - (y_n)^2 + a \\ y_{n+1}= 2\cdot x_n \cdot y_n + b \end{matrix} \quad \text{für } n = 1, 2, 3, \ldots \quad \text{mit} \quad \begin{matrix} x_1= 0 \\ y_1= 0 \end{matrix}$$

In der nachfolgenden Abbildung sind zwei Punktfolgenverläufe ausgehend von den Punkten $(a, b) = (0, 0.5)$ und $(a, b) = (0.1, 0.9)$ dargestellt.

Beispiele:



Konvergenz und Divergenz der Punktfolgen:

Für die Punktfolgen der verschiedenen Startpunkte der xy-Ebene wird jeweils geprüft, ob sie

- konvergent oder
- divergent sind.

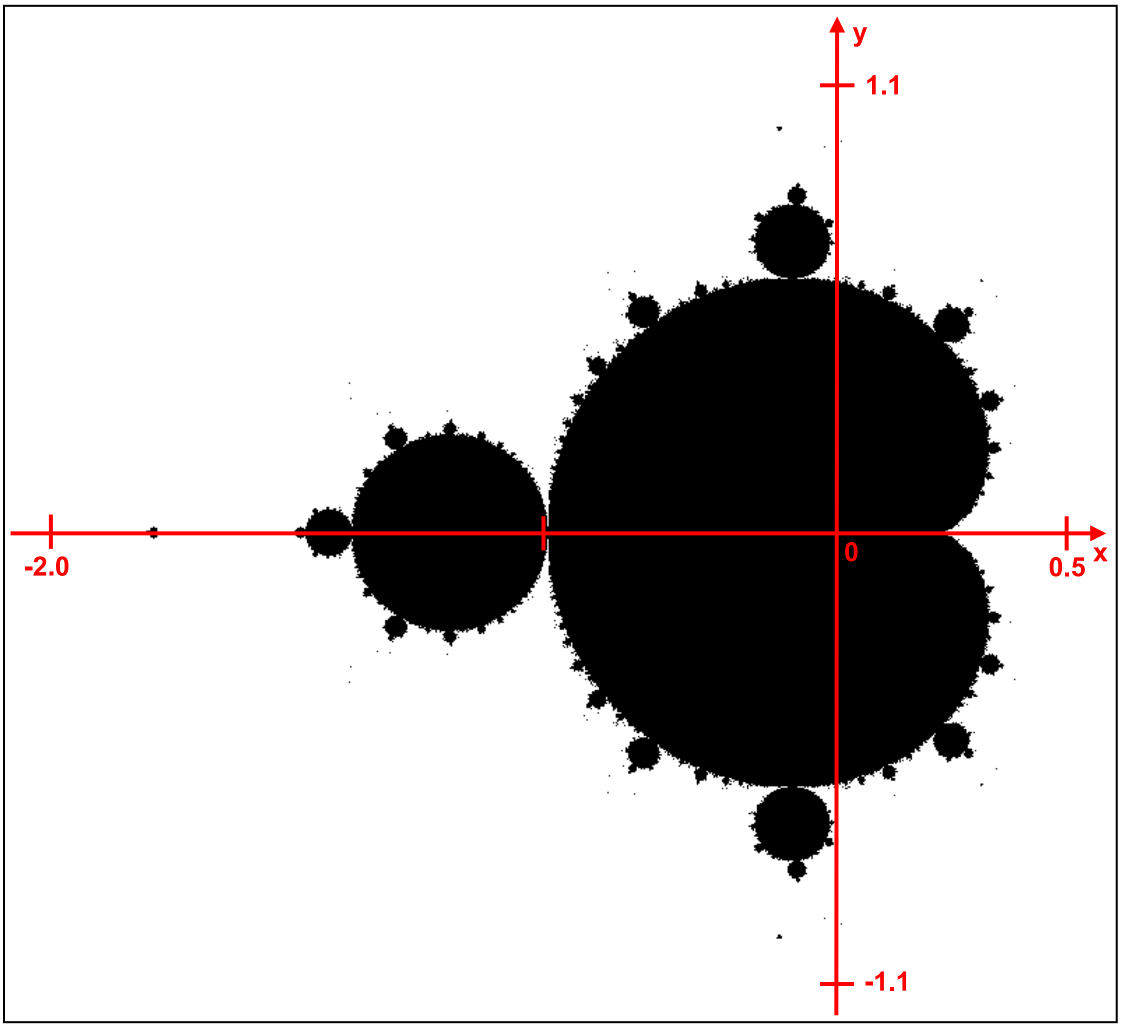
Die Punktfolgen werden als **konvergent** betrachtet, wenn sie nach 200 Iterationsschritten immer noch einen Abstand kleiner als 2 vom Ursprung haben, d.h. wenn die Punkte aller 200 Iterationsschritte sich stets im Ursprungskreis mit dem Radius 2 befinden.

Die Punktfolgen heißen **divergent**, wenn sie den Ursprungskreis mit dem Radius 2 bei einem Iterationsschritt kleiner als 200 verlassen.

Für die divergenten Folgen ist es wichtig, bei welchem Iterationsschritt sie den Ursprungskreis verlassen. Diesen Iterationsschritt wollen wir hier **Divergenznummer** nennen.

Mandelbrot-Menge:

Die Mandelbrot-Menge ist die Menge der Punkte der xy-Ebene, die die Startpunkte von konvergenten Folgen sind. Dieses sind die Punkte, die das Apfelmännchen bilden, das in der nachfolgenden Abbildung schwarz dargestellt ist.



Alle in dieser Abbildung weißen Punkte der xy-Ebene sind Startpunkte für divergente Folgen. Für eine farbige Darstellung des Apfelmännchens werden diese Punkte nach ihrer Divergenznummer, d.h. ab welcher Iteration sie als divergent angesehen werden, klassifiziert.

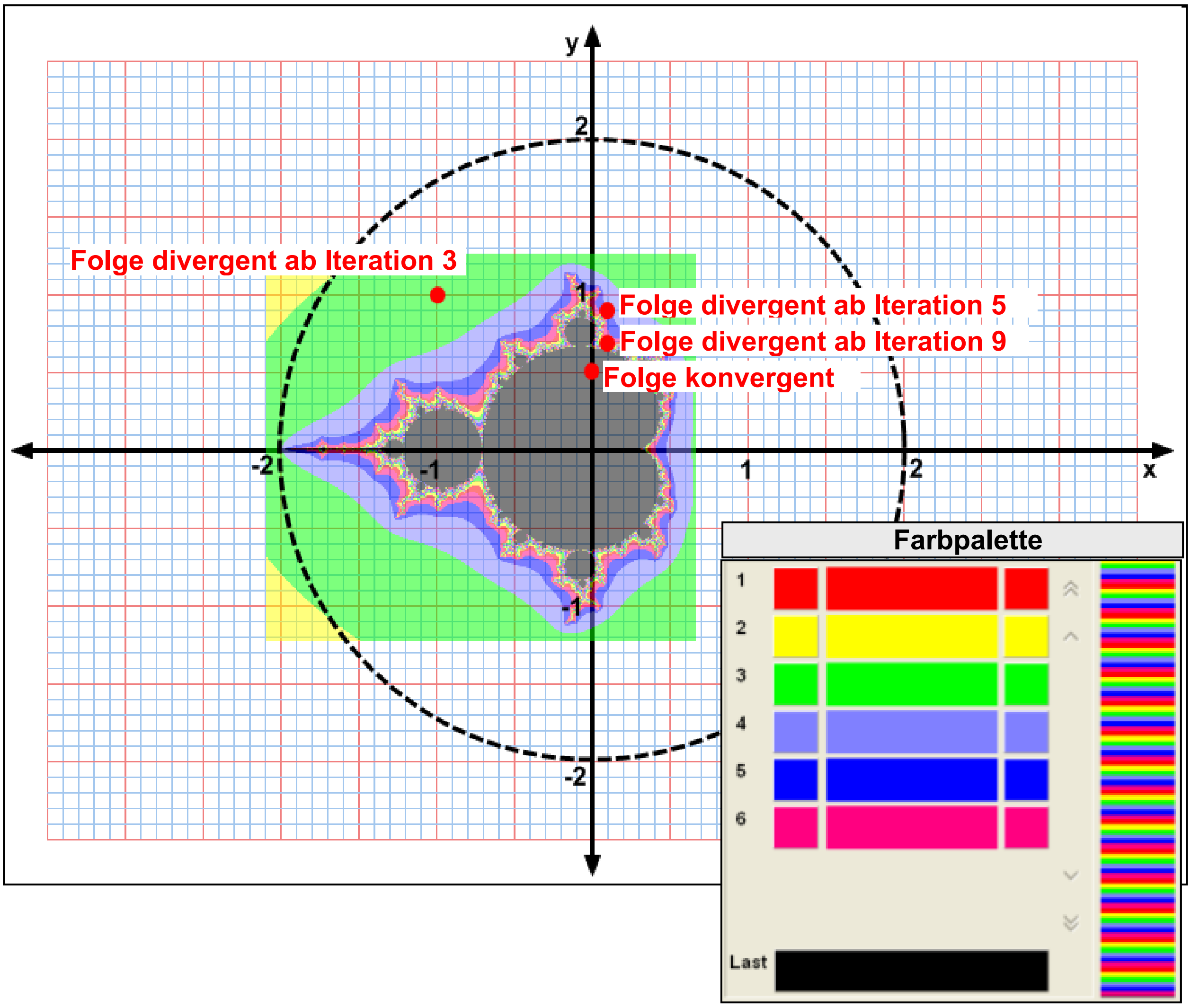
In den meisten Fällen kann die Farbgebung für die verschiedenen Divergenznummern in der Software in Farbtabellen angegeben werden.

Die nachfolgende Abbildung stellt den Zusammenhang der Divergenznummern mit der Farbgebung des Apfelmännchens dar.

Startpunkt (0.1, 0.7):
(x1, y1)=(0.1000,0.7000): Betrag 0.7071
(x2, y2)=(-0.3800,0.8400): Betrag 0.9220
(x3, y3)=(-0.4612,0.0616): Betrag 0.4653
(x4, y4)=(0.3089,0.6432): Betrag 0.7135
(x5, y5)=(-0.2183,1.0974): Betrag 1.1189
(x6, y6)=(-1.0566,0.2210): Betrag 1.0794
(x7, y7)=(1.1675,0.2330): Betrag 1.1906
(x8, y8)=(1.4089,1.2441): Betrag 1.8795
(x9, y9)=(0.5371,4.2055): Betrag 4.2397
Divergenznummer 9

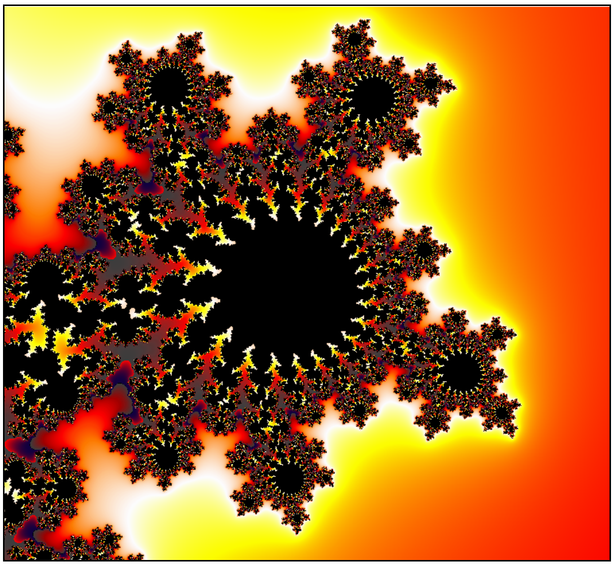
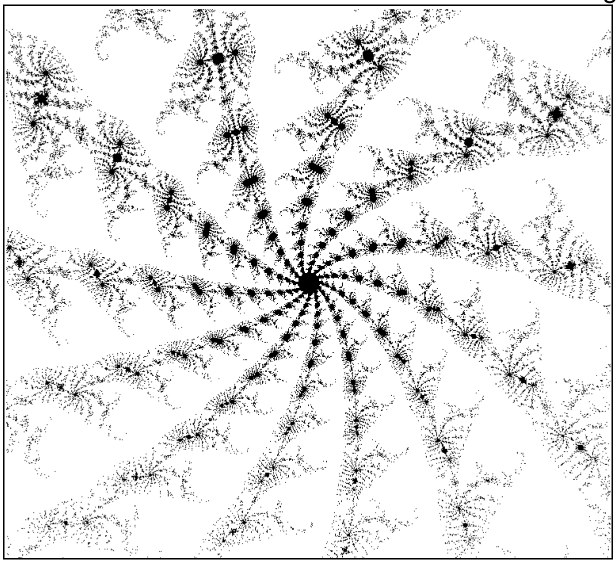
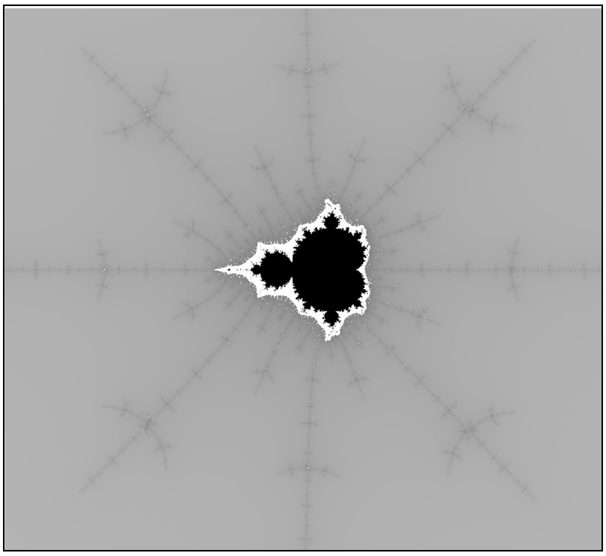
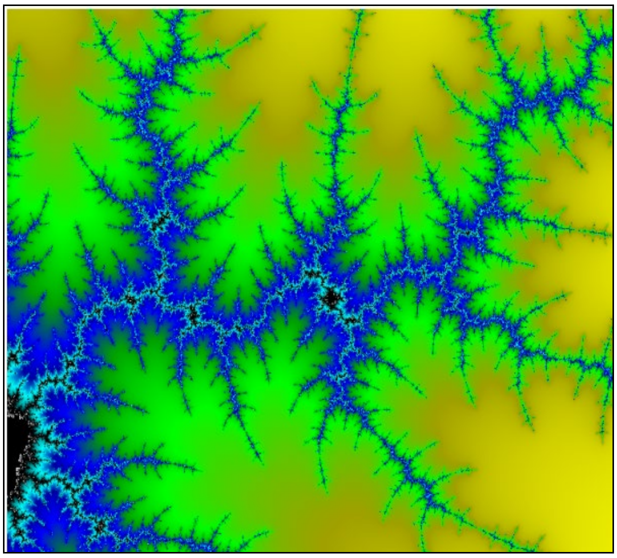
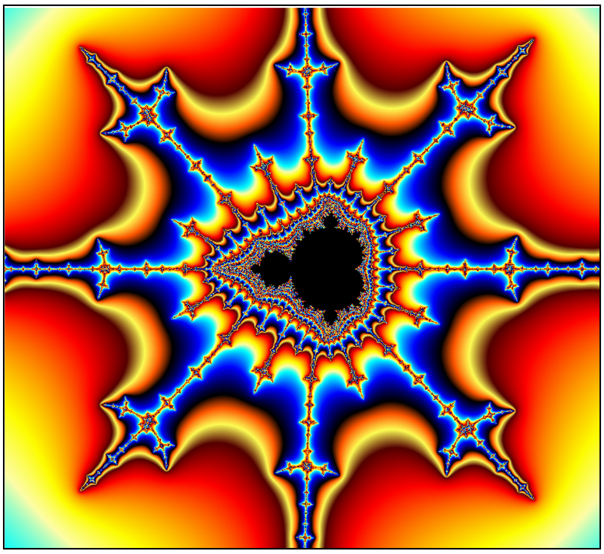
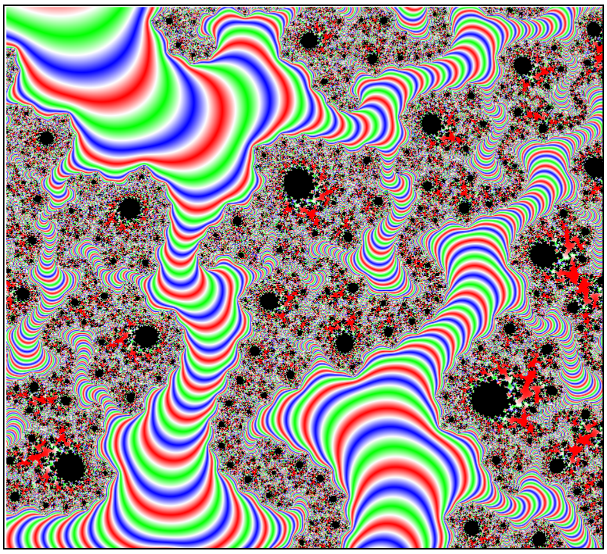
Startpunkt (-1.0, 1.0):
(x1, y1)=(-1.0000,1.0000): Betrag 1.4142
(x2, y2)=(-1.0000,-1.0000): Betrag 1.4142
(x3, y3)=(-1.0000,3.0000): Betrag 3.1623
Divergenznummer 3

Startpunkt (0, 0.5): **Folge konvergent** (siehe vorherige Abbildung)
Startpunkt (0.1, 0.9): **Folge divergent mit Divergenznummer 5** (siehe vorherige Abbildung)



Je nach Wahl der Farbpalette, Zoomposition und -tiefe entstehen viele verschiedene Grafiken, die „voller Mathematik“ stecken!

erstellt mit FractalForge

Literaturhinweise:

(1) http://www.fractovia.org/uberto/
http://sourceforge.net/projects/fractalforge (Freeware-Programm)

(2) http://www.mathematische-basteleien.de/apfelmaennchen.htm

(3) http://www.matheprisma.uni-wuppertal.de/Module/Rekurs/index.htm

(4) http://www.mathematik.ch/anwendungenmath/fractal/julia/