

Topologie des courbes algébriques réelles

Combinatoire des diagrammes de cordes analytiques

Christopher-Lloyd Simon

Department de mathématiques
ENS Lyon

Stage sous la direction de Étienne Ghys, 2018

Sommaire

Topologie des singularités algébriques réelles

- Des singularités aux invariants combinatoires
- Quels invariants proviennent de singularités ?

Décomposition de Cunningham et combinatoire des buissons

- Décomposition de Cunningham
- Opérade des Buissons
- Enumération des buissons

Combinatoire des diagrammes analytiques

- Structure d'opérade et grammaire inambigüe
- Dénombrement des diagrammes

Outline

Topologie des singularités algébriques réelles

Des singularités aux invariants combinatoires

Quels invariants proviennent de singularités ?

Décomposition de Cunningham et combinatoire des buissons

Décomposition de Cunningham

Opérade des Buissons

Enumération des buissons

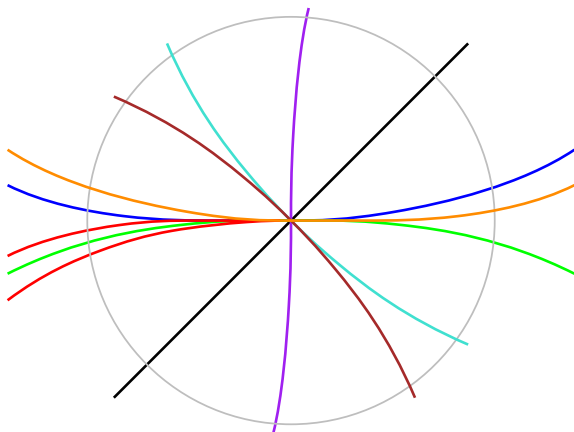
Combinatoire des diagrammes analytiques

Structure d'opérade et grammaire inambigüe

Dénombrement des diagrammes

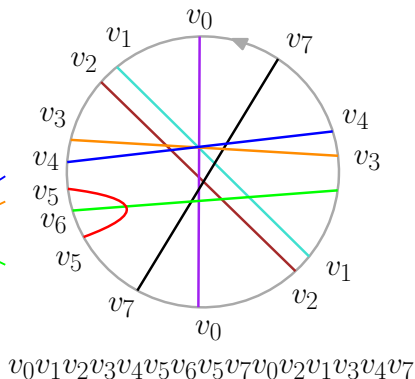
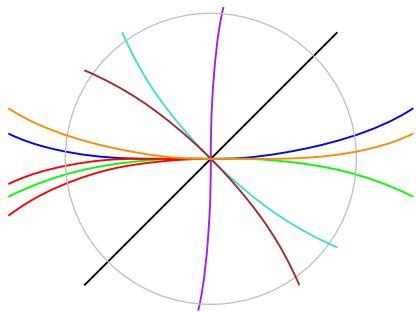
Courbes algébriques singulières du plan réel

- ▶ Une courbe algébrique du plan réel : $F(x, y) = 0$, $F \in \mathbb{R}[x, y]$.
- ▶ Point singulier $\partial_x F(0, 0) = \partial_y F(0, 0) = 0$.
- ▶ En rouge : $x^5 + x^4 + 2yx^2 + y^2 = 0$.

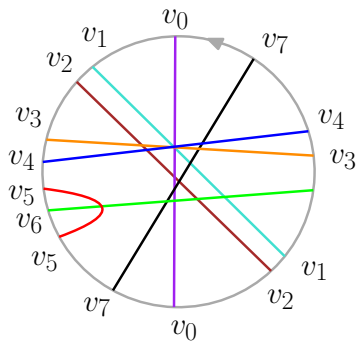


De la courbe au diagramme de cordes

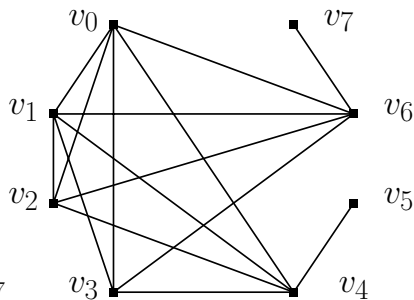
- ▶ Branches paramétrées par séries de Puiseux : $\sum_{n \geq n_0} a_n x^{\frac{n}{m}}$
- ▶ A homéo près : des segments sortant de la singularité
- ▶ Segments viennent par paires : diagramme de cordes



Graphe d'entrelacement du diagramme de cordes



$v_0 v_1 v_2 v_3 v_4 v_5 v_6 v_5 v_7 v_0 v_2 v_1 v_3 v_4 v_7$



Quels invariants proviennent de singularités ?

De la description récursive aux motifs interdits par les graphes d'entrelacements

Définition

Si un diagramme de cordes c possède comme motif :

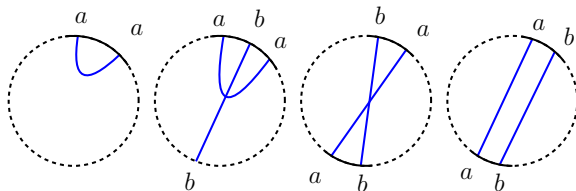


Figure – une corde isolée, une fourche, des vrais ou faux jumeaux,

on appelle simplification le diagramme c' obtenu en enlevant la corde a d'un tel motif.

Quels invariants proviennent de singularités ?

De la description récursive aux motifs interdits par les graphes d'entrelacements

Etienne Ghys a montré à coup d'éclatements une

Théorème (description récursive des diagrammes analytiques)

- ▶ *Le mot vide est un diagramme analytique.*
- ▶ *Si un diagramme non vide ne contient pas de corde isolée, de fourche, ou une paire de jumeaux ; alors il n'est pas analytique.*
- ▶ *Si par contre il contient un tel motif, alors il est analytique si et seulement si une simplification du diagramme l'est aussi.*

Quels invariants proviennent de singularités ?

De la description récursive aux motifs interdits par les graphes d'entrelacements

Théorème (Ghys-S : graphes d'entrelacements des singularités)

Un graphe provient d'une singularité ssi il est :

- ▶ *Décomposable : Description récursive analogue aux diagrammes analytiques (non triviale!).*

Quels invariants proviennent de singularités ?

De la description récursive aux motifs interdits par les graphes d'entrelacements

Théorème (Ghys-S : graphes d'entrelacements des singularités)

Un graphe provient d'une singularité ssi il est :

- ▶ *Distance-héréditaire : condition métrique sur les sous-graphes.*
- ▶ *Buisson : condition métrique sur 4 points à la Gromov.*

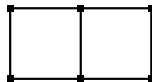
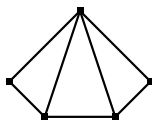
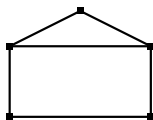
Quels invariants proviennent de singularités ?

De la description récursive aux motifs interdits par les graphes d'entrelacements

Théorème (Ghys-S : graphes d'entrelacements des singularités)

Un graphe provient d'une singularité ssi il est :

- ▶ *Ne contient pas de maison, gemme, domino ou $(n \geq 5)$ -cycle comme graphe induit.*

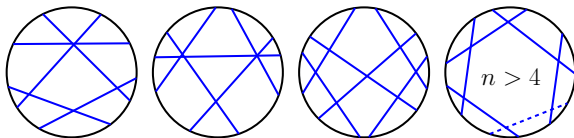


Quels invariants proviennent de singularités ?

De la description récursive aux motifs interdits par les graphes d'entrelacements

Corollaire (Ghys-S)

Un diagramme de cordes est analytique ssi il ne contient pas l'un des motifs suivants.



Outline

Topologie des singularités algébriques réelles

Des singularités aux invariants combinatoires

Quels invariants proviennent de singularités ?

Décomposition de Cunningham et combinatoire des buissons

Décomposition de Cunningham

Opérade des Buissons

Enumération des buissons

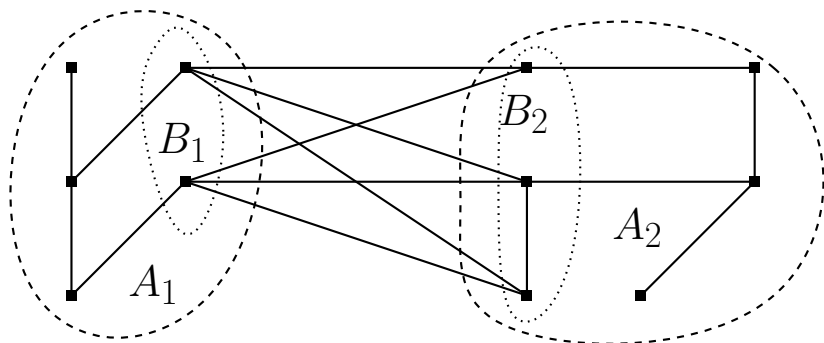
Combinatoire des diagrammes analytiques

Structure d'opérade et grammaire inambigüe

Dénombrement des diagrammes

Décomposition de Cunningham d'après Gioan-Paul

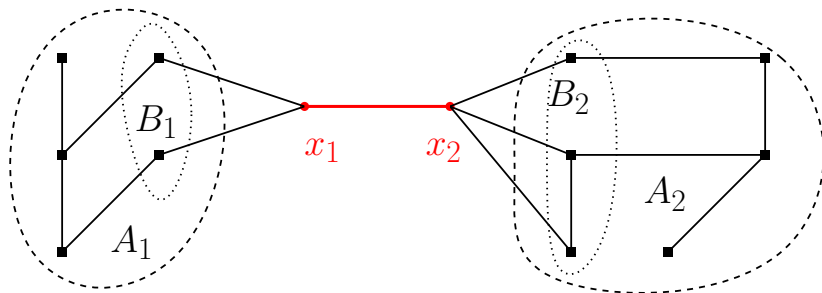
Dans un graphes connexe, on définit une décomposition (A_1, A_2) :



On demande $|A_k| > 1$.

Décomposition de Cunningham d'après Gioan-Paul

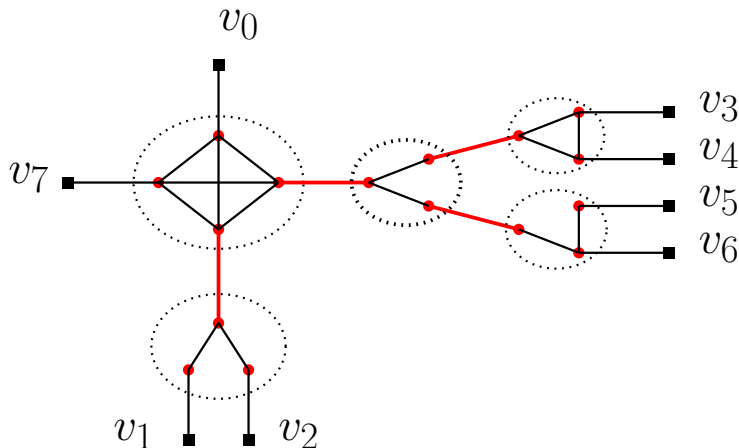
On la factorise avec des sommets de contrôle :



On a un arbre-de-graphes. Nœuds induits par $A_k \cup \{x_k\}$. On continue jusqu'à ce ue les nœuds soient premiers ou dégénérés.

Décomposition de Cunningham d'après Gioan-Paul

Ca peut ressembler à ceci :



Ici tous les sommets sont dégénérés : star-clique.

Décomposition de Cunningham d'après Gioan-Paul

L'arbre-de-graphes est réduit si pas de clique-join ou star-join :

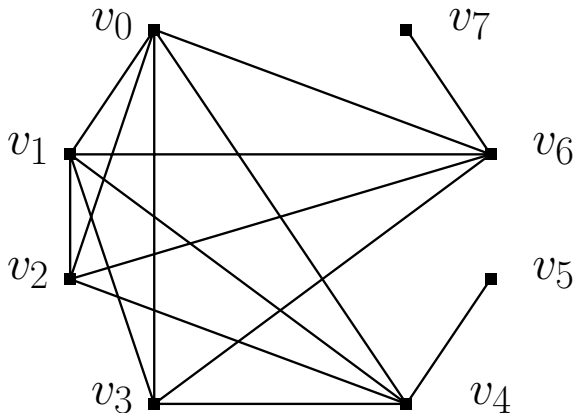


Théorème (Cunningham, Gioan-Paul)

Tout graphe admet une unique décomposition en arbre-de-graphes réduits.

Décomposition de Cunningham d'après Gioan-Paul

Réciproquement on récupère le graphe d'accessibilité des feuilles :

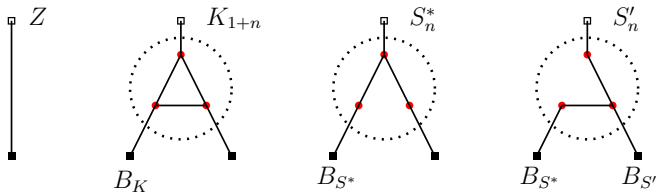


Buissons : arbres-de-graphes-dégénérés

Opéade

Corollaire (de la décomposition de Cunningham)

Un buissons provient d'un unique arbre-de-graphes-dégénérés réduit. Désormais on pense aux buissons comme des SK-arbres.



Opéade

On enracine les buissons en une feuille, on étiquette les feuilles, on compose en branchant racines des enfants sur feuilles des parents.

Buissons connexes étiquetés

Grammaire analytique et smooth implicit function schema

$$B_K(z) = z + \sum_{n>1} \frac{B_{S^*}^n}{n!} + \sum_{n>1} B_{S'} \frac{B_{S^*}^{n-1}}{(n-1)!}$$

$$B_{S^*}(z) = z + \sum_{n>1} \frac{B_K^n}{n!} + \sum_{n>1} B_{S'} \frac{B_{S^*}^{n-1}}{(n-1)!}$$

$$B_{S'}(z) = z + \sum_{n>1} \frac{B_K^n}{n!} + \sum_{n>1} \frac{B_{S^*}^n}{n!}$$

Buissons connexes étiquetés

Grammaire analytique et smooth implicit function schema

Théorème (CS)

Le nombre B_n de buissons connexes enracinés étiquetés de taille n équivaut à

$$\frac{b}{2\sqrt{\pi n^3}} \cdot \beta^{-n} \cdot n!$$

$\beta = 2\sqrt{3} - 1 + 2 \log \frac{1+\sqrt{3}}{2}$ vérifie $6 < \beta^{-1} < 7$ et $b = \sqrt{\frac{\beta}{\sqrt{3}}}$.

Premiers termes :

0, 1, 4, 38, 596, 13072, 368488, 12693536,
516718112, 24268858144, 1291777104256,
76845808729472, 5052555752407424

Outline

Topologie des singularités algébriques réelles

Des singularités aux invariants combinatoires

Quels invariants proviennent de singularités ?

Décomposition de Cunningham et combinatoire des buissons

Décomposition de Cunningham

Opérade des Buissons

Enumération des buissons

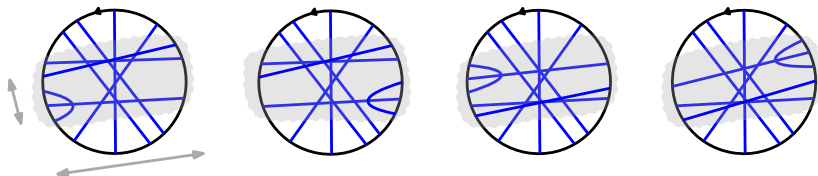
Combinatoire des diagrammes analytiques

Structure d'opérade et grammaire inambigüe

Dénombrement des diagrammes

Opérade sur les diagrammes analytiques connexes marqués

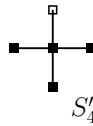
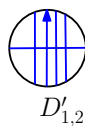
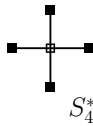
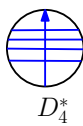
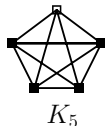
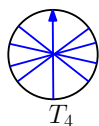
- ▶ Relever la décomposition en KS-arbres des buissons (enracinés non étiquetés) aux diagrammes connexes enracinés.
- ▶ A un buisson correspond plusieurs diagrammes de cordes qui diffèrent par des mutations :



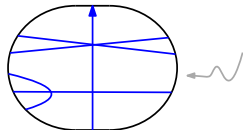
- ▶ Un diagramme enraciné possède une gauche et une droite.
- ▶ Un arbre enraciné induit un ordre partiel sur ses nœuds.

Opérade sur les diagrammes analytiques connexes marqués

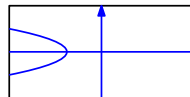
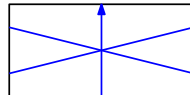
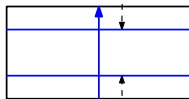
Un cordage est un arbre dont les noeuds sont décoré de poulies :



Enraciné, non étiqueté. Retenir gauche et droite lors de l'insertion.



v_1^+
 v_2^+



gauche

droit

Grammaire inambigüe

Lemme (Grammaire inambigüe)

Un diagramme analytique enraciné connexe est la contraction d'un unique cordage.

Equations pour cette grammaire analytique

$$C_T(z) = z + \sum_{n>1} C_{D^*}^n + \sum_{k+l>0} C_{D'} C_{D^*}^{k+l}$$

$$C_{D^*}(z) = z + \sum_{n>1} C_T^n + \sum_{k+l>0} C_{D'} C_{D^*}^{k+l}$$

$$C_{D'}(z) = z + \sum_{n>1} C_{D^*}^n + \sum_{n>1} C_T^n$$

Diagrammes analytiques linéaires connexes

Algébricité de la série génératrice, Asymptotique, Formule close

Théorème (CS)

Algébricité de la série : $2C^3 + (z + 2)C^2 + (2z - 1)C + z = 0$.

Asymptotique : $C_n \sim c_0 n^{-\frac{3}{2}} \gamma^{-n}$ avec $13 < \gamma^{-1} < 14$:

$$\gamma = \frac{1}{12} \left(49 - \frac{433}{\sqrt[3]{24407 - 1272\sqrt{318}}} - \sqrt[3]{24407 - 1272\sqrt{318}} \right)$$

Formule par inversion de Lagrange :

$$C_n = \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} \binom{n-1+k}{n-1} \binom{2n+k}{n-1-k} 2^k$$

Premiers termes :

1, 4, 27, 226, 2116, 21218, 222851, 2420134, 26954622, 306203536.

Diagramme analytiques linéaires

Algèbricité de la série génératrice, Asymptotique

Lemme

Les series generatrices A et C sont liées par l'équation

$$A = 1 + zA^2 \cdot (1 + C(zA^2))$$

Idée de la preuve

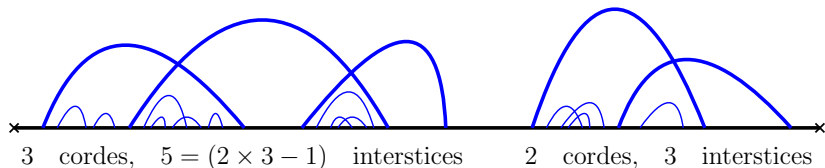


Diagramme analytiques linéaires

Algébricité de la série génératrice, Asymptotique

Théorème (CS)

Série génératrice algébrique :

$$(z^3 + z^2)A^6 - z^2A^5 - 4zA^4 + (8z + 2)A^3 - (4z + 6)A^2 + 6A - 2 = 0$$

Asymptotique : $A_n \sim a_0 n^{-\frac{3}{2}} \alpha^{-n}$ où $15 < \alpha^{-1} < 16$.

Premiers termes vérifiés algorithmiquement :

1, 1, 3, 15, 105, 923, 9417, 105815, 1267681, 15875631, 205301361

Diagrammes de cordes analytiques

Asymptotique

Théorème (CS)

$$\tilde{A}_n \sim \frac{A_n}{n} \sim a_0 n^{-\frac{5}{2}} \alpha^{-n}$$

Idée de preuve

- ▶ Formule des classes
- ▶ Définition d'un diagramme quotient
- ▶ Possible si pas d'inversions de cordes
- ▶ Analyse et comparaison

Résumé

Et merci de m'avoir écouté !

- ▶ **Description** de la topologie des singularités
- ▶ Outil : éclatement.
- ▶ **Enumération** des configurations locales
- ▶ Outils : Grammaire inambigüe + combinatoire analytique.
- ▶ Ironie : asymptotique des coefficients s'étudie via la géométrie des singularités des séries génératrices.
- ▶ Que faire ensuite ? Perturber. Stratification. Surfaces.