Résumé

Pour commencer, je voudrai sincèrement remercier tous les membres du jury, pour leur travail et l'honneur qu'ils me font d'évaluer ma thèse.

Cette thèse est consacrée à l'étude du simple groupe modulaire $\mathrm{PSL}_2(\mathbb{Z})$, et plus particulièrement à des liens entre certaines structures arithmétiques et topologiques sur l'ensemble de ses classes de conjugaison, à savoir des relations d'équivalence ou des fonctions bilinéaires.

Pendant les 3/4 d'heures à venir, plutôt que de vous présenter mes tous mes résultats dans leur généralité maximale, j'ai choisi de vous raconter une histoire cohérente aboutissant à l'un de mes résultats principaux.

1 Le groupe modulaire et son action sur le plan hyperbolique

Le groupe $\mathrm{SL}_2(\mathbb{R})$ des matrices 2×2 de déterminant 1 à coefficients réels agit par conjugaison sur l'espace vectoriel $\mathfrak{sl}_2(\mathbb{R})$ des matrices réelles de trace 0. Cette action préserve la forme quadratique det de signature $(1, 2)$, en particulier son niveau 1 qui est l'hyperboloide $\mathbb{H}$ à deux nappes.

Celui-ci se projectifie sur le modèle de Cayley-Klein du plan hyperbolique $\mathbb{PH}$, dont le groupe des isométries directes est $\mathrm{PSL}_2(\mathbb{R})$. Ses isométries directes non-triviales se déclinent en trois types qui sont elliptique, parabolique, hyperbolique ; selon le nombre de points fixes distincts sur le bord $\partial\mathbb{PH}$ qui sont respectivement $0, 1, 2$; ou encore la valeur de leur discriminant $\mathrm{disc}(A) = (\mathrm{Tr}\, A)^2 - 4$.

Le groupe modulaire $\mathrm{PSL}_2(\mathbb{Z})$ agit discrètement sur le plan hyperbolique $\mathbb{PH}$. Les matrices elliptiques S et T agissent respectivement par rotation de π et $2\pi/3$ autour des points i et j. Leur composée est la matrice parabolique R qui admet le point fixe noté ∞ au bord.

Le quotient $\mathrm{PSL}_2(\mathbb{Z})\backslash\mathbb{HP}$ est l'orbifold modulaire $\mathbb{M}$, une surface hyperbolique avec deux singularités coniques d'ordre 2 et 3 ainsi qu'un cusp, respectivement les projections des points fixes de S, T, R.

Cet orbifold modulaire $\mathbb{M}$ est homéomorphe à la somme connexe des voisinages des singularités coniques i et j, donc son groupe fondamental $\mathrm{PSL}_2(\mathbb{Z})$ est l'amalagamme de ses sous-groupes cycliques $\mathbb{Z}/2$ et $\mathbb{Z}/3$ engendrés par S et T :

$$\mathrm{PSL}_2(\mathbb{Z}) = \mathbb{Z}/2 * \mathbb{Z}/3 \qquad S = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad T = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Les classes d'homotopie libre de lacets orientés dans l'orbifold modulaire $\mathbb{M}$ correspondent aux classes de conjugaison dans son groupe fondamental $\mathrm{PSL}_2(\mathbb{Z})$. J'attire votre attention sur le fait que la notion d'homotopie dans un orbifold est plus subtile que dans une surface lisse à cause des singularités. Un lacet non-trivial correspond à une classe de conjugaison :

— elliptique, s'il se rétracte sur la singularité i ou j : la classe de conjugaison est celle de S ou $T^{\pm 1}$, qui ont pour discriminant -4 ou -3, tous deux strictement négatifs.

— parabolique, s'il entoure (un certain nombre de fois) le cusp : la classe de conjugaison est celle (d'une puissance) de R, et son discriminant est nul.

— hyperbolique sinon, auquel cas il admet un unique représentant géodésique dans sa classe d'homotopie libre : c'est la projection dans $\mathbb{M}$ des axes de translation des matrices de la classe de conjugaison correspondante, qui agissent sur $\mathbb{HP}$ par translation hyperbolique.

La longueur λ de la géodésique est reliée au discriminant des matrices par la formule :

$$\left(2 \sinh \tfrac{\lambda}{2}\right)^2 = \mathrm{disc}(A)$$

2 Equivalence arithmétique des géodésiques modulaires

On se concentre désormais sur les liens entre la topologie des géodésiques hyperboliques de $\mathbb{M}$ et l'arithmétique des classes de conjugaison de matrices hyperboliques de $\mathrm{PSL}_2(\mathbb{Z})$.

On a vu que deux géodésiques hyperboliques ont la même longueur si et seulement si les classes de conjugaison correspondantes ont le même discriminant, ce qui équivaut à dire qu'elles admettent des représentants $A, B \in \mathrm{PSL}_2(\mathbb{Z})$ qui sont conjugués dans $\mathrm{PSL}_2(\mathbb{C})$.

Cette relation d'équivalence a des classes $\mathrm{Cl}(\Delta)$ qui sont finies mais dont le cardinal est non borné, et qui ont même une structure de groupe. Elle est donc très intéressante, et en plus d'une interprétation géométrique, nous en avons une formulation algébrique (approprié pour montrer le caractère non borné des classes en appliquant des résulats de Horowitz 1970), ainsi qu'une formulation arithmétique (appropriée pour la munir d'une structure de groupe introduite par Gauss 1800).

Sa formulation algébrique suggère la généralisation suivante. Considérons une extension $\mathbb{K}$ du corps des rationnels $\mathbb{Q}$, et définissons les matrices $A, B \in \mathrm{PSL}_2(\mathbb{Z})$ comme $\mathbb{K}$-équivalentes lorsqu'elles sont conjuguées dans $\mathrm{PSL}_2(\mathbb{K})$. Cela entraine en particulier l'égalité des discriminants. Le relation d'équivalence la plus fine est bien sur la $\mathbb{Q}$-équivalence. On voudrait :

1. comprendre comment le groupement des $\mathrm{PSL}_2(\mathbb{Z})$-classes en $\mathbb{K}$-classes varie avec $\mathbb{K}$.
2. des interprétations géométrique & arithmétique de la $\mathbb{K}$-équivalence.

Dans ma thèse, les réponses à ces questions découlent d'une étude détaillée de l'action adjointe du groupe $\mathrm{PSL}_2(\mathbb{K})$ sur son algèbre de Lie $\mathfrak{sl}_2(\mathbb{K})$. Pour l'exposé, je vais me restreindre à la seconde.

Théorème (Equivalence arithmetique des geodesiques modulaires)**.** *Deux classes de conjugaison de* $\mathrm{PSL}_2(\mathbb{Z})$ *de discrimiant* $\Delta > 0$ *sont* $\mathbb{K}$*-equivalentes si et seulement si les geodesiques modulaires correspondantes satisfont les conditions equivalentes suivantes :*

θ *Il existe un angle d'intersection orienté* θ *tel que :*

$$\left(\cos\tfrac{\theta}{2}\right)^2 = \tfrac{1}{x^2 - \Delta y^2} \qquad \text{pour} \quad x, y \in \mathbb{K}$$

auquel cas toutes les intersections orientées ont cette propriété.

λ *Il existe une ortho-geodesique co-orientée de longueur* λ *telle que :*

$$\left(\cosh\tfrac{\lambda}{2}\right)^2 = \tfrac{1}{x^2 - \Delta y^2} \qquad \text{pour} \quad x, y \in \mathbb{K}$$

auquel cas toutes les ortho-geodesiques co-orientées ont cette propriété.

Autrement-dit, les quantités géométriques des membres de gauche appartiennent au groupe des normes de l'extension quadratique $\mathbb{K}(\sqrt{\Delta})/\mathbb{K}$ *(qui est stable par inversion).*

Remarque. *En particulier, une géodésique a des auto-intersections et des auto-ortho-géodésiques co-orientées qui vérifient ces propriétés pour tout* $\mathbb{K}$*.*

De plus une géodésique est équivalente à son inverse ssi ses angles complémentaires et les otho-géodésiques non-co-orientées vérifient ces propriétés, autrement-dit lorsque c^2 *et* $1-c^2$ *sont des normes.*

Comme ces propriétés géométriques concernant les intersections et les ortho-géodésiques entre les géodésiques modulaires caracatérisent la $\mathbb{K}$*-équivalence, on en déduit qu'elles sont transitives.*

3 Enlacement des noeuds modulaires

Parlons maintenant de topologie...

Le fibré tangent unitaire $\mathbb{U} = \mathrm{PSL}_2(\mathbb{Z})\backslash \mathrm{PSL}_2(\mathbb{R})$ de $\mathbb{M} = \mathrm{PSL}_2(\mathbb{Z})\backslash\mathbb{PH}$ est une variété de dimension 3 et la structure du fibré de Seifert $\mathbb{U} \to \mathbb{M}$ révèle qu'elle est homeomorphe au complementaire d'un noeud de trêfle dans la sphere $\mathbb{S}^3$.

Les géodésiques fermées orientées de $\mathbb{M}$ se relèvent dans $\mathbb{U}$, et correspondent ainsi aux orbites periodiques du flot géodésique. Ces orbites périodiques décrivent des noeuds dans le complémentaire du noeud de trêfle, appellés *noeuds modulaires*. Ensemble, ils forment un entrelacs modulaire maître dont les composantes sont indéxées par les classes de conjugaison hyperboliques primitives de $\mathrm{PSL}_2(\mathbb{Z})$.

On aimerait comprendre sa topologie, à commencer par les nombres d'enlacements.

Rappelons désormais une paramétrization combinatoire des classes de conjugaison d'ordre infini dans $\mathrm{PSL}_2(\mathbb{Z})$. L'algorithme d'Euclide montre que le groupe $\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$ est engendré par les matrices de transvection $L\&R$, et plus précisément que son sous-monoide $\mathrm{SL}_2(\mathbb{N})$ des matrices à coefficients positifs est librement engendré par $L\&R$. Ce sous-monoide peut être identifié à son image $\mathrm{PSL}_2(\mathbb{N}) \subset \mathrm{PSL}_2(\mathbb{Z})$.

$$R = TS^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad L = T^{-1}S = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Dans $\mathrm{PSL}_2(\mathbb{Z})$, la classe de conjugaison d'un élément d'ordre infini intersecte $\mathrm{PSL}_2(\mathbb{N})$ selon les permutations cycliques d'un unique mot non vide en $L\&R$. La primitivité de la classe de conjugaison est équivalente à celle du mot cyclique, et la classe est hyperbolique ssi chacune des lettres apparait.

La combinatoire de ces mots cycliques encode la géométrie précise des entrelacs modulaires, et on va essayer d'en extraire des invariants topologiques. Les premières mesures de la complexité d'un mot binaire sont sa longueur combinatoire $\#R + \#L$, et la différence $\#R - \#L$ des nombres de lettres de chaque sorte. Définisson le *nombre de Rademacher* d'une classe de conjugaison hyperbolique du groupe modulaire comme $\mathrm{Rad}([A]) = \#R - \#L$ où $A \in \mathrm{PSL}_2(\mathbb{N})$.

L'invariant de Rademacher est omniprésent en mathématiques, comme l'a montré Michael Atiyah dans son article sur le logarithme de la fonction eta de Dedekind, en l'identifiant avec six autres fonctions apparaissant dans des domaines aussi variés que la géométrie symplectique, la physique statistique, la cohomologie des groupes, la théorie des singularités, la topologie et l'arithmétique.

En 2006, à l'occasion du congrès international des mathématiques, Etienne Ghys en a donné une nouvelle interprétation topologique, comme le nombre d'enlacement d'une orbite modulaire avec le noeud de trêfle. Il conclut son article en demandant des interprétations arithmétiques des nombres d'enlacements entre deux noeuds modulaires.

Pour aborder cette question, introduisons la fonction qui à deux géodésiques modulaires $[\gamma_A], [\gamma_B]$ associe la somme sur leurs angles d'intersection θ des quantités géométriques $\left(\cos\frac{\theta}{2}\right)^2$ dont on vient de donner une interprétation arithmétique :

$$\mathrm{L}_1([A],[B]) := \sum \left(\cos\tfrac{\theta}{2}\right)^2$$

C'est un réel positif dont on va étudier les variations lorsque l'on déforme la métrique hyperbolique complète de $\mathbb{M}$ en ouvrant le cusp.

Les métriques hyperboliques complètes sur l'orbifold $\mathbb{M}$ correspondent (via la monodromie de l'application développante) aux représentations fidèles et discrètes $\rho\colon \mathrm{PSL}_2(\mathbb{Z}) \to \mathrm{PSL}_2(\mathbb{R})$ de son groupe fondamental vers le groupe des isométries du plan hyperboliques, considérées à conjugaison près.

Elles forment la variété des caractères $X(\mathrm{PSL}_2(\mathbb{Z}), \mathrm{PSL}_2(\mathbb{R}))$ qui est un tore algébrique réel de dimension 1, paramétré par $q \in \mathbb{R}^*$ de telle sorte que la matrice $A_q = \rho_q(A)$ s'obtient d'une factorisation de A en un produit de $L\&R$ en remplaçant L par L_q et R par R_q.où

$$L_q = \begin{pmatrix} q & 0 \\ 1 & q^{-1} \end{pmatrix} \qquad \text{et} \qquad R_q = \begin{pmatrix} q & 1 \\ 0 & q^{-1} \end{pmatrix}.$$

Les classes de conjugaison hyperboliques de $\mathrm{PSL}_2(\mathbb{Z})$ indexent toujours les géodesiques hyperboliques du quotient $\mathbb{M}_q$ de $\mathbb{HP}$ par le groupe modulaire q-déformé $\rho_q(\mathrm{PSL}_2(\mathbb{Z}))$, à l'exception de celles qui entourent le cusp. On peut donc associer à deux classes hyperboliques $[A], [B]$ la somme $\mathrm{L}_q([A], [B])$ sur les angles d'intersections θ_q des géodésiques q-modulaires $[\gamma_{A_q}], [\gamma_{B_q}] \subset \mathbb{M}_q$ des quantités $\left(\cos \frac{1}{2}\theta_q\right)^2$.

$$\mathrm{L}_q([A], [B]) := \sum \left(\cos \tfrac{1}{2}\theta_q\right)^2$$

Cela définit une fonction de $q \in \mathbb{R}^*$, ou sur la variété des caractères de $\mathrm{PSL}_2(\mathbb{Z})$ dans $\mathrm{PSL}_2(\mathbb{R})$.

Théorème (Nombres d'enlacements comme évaluations de L_q au bord de la variété de caractères)**.** *La limite de $q \mapsto \mathrm{L}_q([A], [B])$ au bord de la variété des caractères est égale à l'enlacement des noeuds modulaires associés à A et B :*

$$\mathrm{L}_q([A], [B]) \xrightarrow[q \to +\infty]{} 2\,\mathrm{lk}([A], [B]).$$

Ainsi, la fonction $L_q([A], [B])$ associées à deux classes de conjugaisons hyperboliques $[A], [B]$ du groupe modulaire $\mathrm{PSL}_2(\mathbb{Z})$ fournit une interpolation entre une quantité arithmétique en $q = 1$ et une quantité topologique en $q = \infty$.

Remarque. *Lorsque $q \to \infty$, l'orbifold hyperbolique $\mathbb{M}_q$ a son coeur convexe qui se rétracte par déformation sur un petit voisinage de l'arc géodésique reliant ses singularités coniques i et j.*

La pré-image de cet arc dans le revêtement universel $\mathbb{HP}$ est un arbre trivalent. Dans la limite où $q \to \infty$, on retrouve une action bien connue du groupe modulaire $\mathrm{PSL}_2(\mathbb{Z})$ sur l'arbre trivalent infini planaire, et l'étude combintaoire de cette action joue un rôle important dans la preuve de ce théorème.

Ne méprisons pas les trêfles a trois feuilles, ils recèlent eux aussi, encore bien des mystères...