# RAPPORT SUR LE MÉMOIRE ARITHMÉTIQUE ET TOPOLOGIE DES NŒUDS MODULAIRES DE MR CHRISTOPHER-LLOYD SIMON

Ce mémoire porte sur *les nœuds modulaires*, un thème de recherche introduit par Étienne Ghys dans sa conférence au congés international de 2006. Il y étudie les nœuds modulaires, c'est-à-dire les orbites fermées du flot géodésique sur le fibré unitaire de la surface modulaire $M = \mathbb{H}/_{\mathrm{PSL}_2(\mathbb{Z}))}$, du point de vue de la théorie des nœuds. L'une des questions qu'il pose à la fin de son exposé est de donner une expression en termes arithmétiques ou combinatoire de *l'enlacement* entre deux nœuds modulaires associés à des classes de conjugaison $[A]$ et $[B]$ de $\mathrm{PSL}_2(\mathbb{Z})$.

Le résultat principal du mémoire de Christopher-Lloyd Simon apporte une réponse très satisfaisante à cette question : le Théorème 5.24 exprime cet enlacement $\mathrm{lk}([A], [B])$ comme la limite lorsque $q \to \infty$ de $L_q([A], [B])$, où $L_q([A], [B])$ est un certain invariant géométrique (une sorte de birapport moyen) de la paire de géodésiques $([A], [B])$ sur la surface hyperbolique $M_q$ et où $M_q$ est une déformation particulière de la métrique hyperbolique standard sur $M$. L'article de Ghys a révélé le lien étroit qui existe entre nœuds modulaires et *nœuds de Lorenz*. Ceux-ci sont par définition les orbites fermées du *flot de Lorenz*, un flot particulier sur $\mathbb{R}^3$ qui a la propriété que ses orbites fermées sont contenues dans une surface branchée, *le patron de Lorenz* défini de la manière suivante : c'est le quotient de la réunion des deux rectangles du plan $]0, \frac{1}{2}[\times[0, 1]$ et $]\frac{1}{2}, 1[\times[0, 1]$ où on identifie $]0, \frac{1}{2}[\times\{1\}$ (resp. $]\frac{1}{2}, 1[\times\{1\}$) avec $]0, 1[\times\{0\}$ par une homothétie de rapport 2. Il y a plusieurs façons de plonger ce *patron* dans $\mathbb{R}^3$, et la plus simple (le rectangle de gauche reste dans le plan et celui de droite se recolle par en-dessous) est le patron de Lorenz. Le patron porte un semi-flot naturel, provenant du champ de vecteurs vertical. Ghys a construit un plongement de ce patron dans $T^1M$ et montré que tout entrelacs d'orbites du flot géodésique pouvait être isotopé dans $T^1M$ sur une réunion d'orbites du flot de Lorenz : ainsi tout entrelacs modulaire est un entrelacs de Lorenz.

Le Théorème 5.24 est démontré à la fin du mémoire : pour y arriver, Simon a donné une nouvelle description du plongement du patron de Lorenz, ainsi qu'une analyse détaillée de la combinatoire de ses orbites et et de la combinatoire de $\mathrm{PSL}_2(\mathbb{Z})$ sous-jacente. Je vais esquisser les grandes lignes de sa démonstration ; j'évoquerai aussi quelques-uns des très nombreux résultats auxiliaires, indépendants du problème résolu, qui y sont abordés.

Le chapitre 1 contient une étude très poussée de l'action de $\mathrm{SL}_2$ sur son algèbre de Lie $\mathfrak{sl}_2$, inspirée par les propriétés du modèle de Minkowsky du disque hyperbolique, et faite dans une très grande généralité. Pour $\mathbb{K}$ un corps commutatif de caractéristique $\neq 2$, $V$ un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension 2, et $X$ le cône isotrope de la forme quadratique déterminant sur $\mathfrak{sl}(V)$, Simon construit une "paramétrisation" de $X$ : c'est une application homogène quadratique $\psi : V \to \mathfrak{sl}(V)$ à valeurs dans le cône isotrope $X$ et qui conjugue l'action naturelle de $SL(V)$ sur $V$ à son action adjointe sur $\mathfrak{sl}(V)$ (Lemme 1.33). Il introduit des notions nouvelles pour deux éléments $a$ et $b \in \mathfrak{sl}(V) \setminus X$ comme leur *cosinus* ou leur *birapport* (Définition 1.44). Puisque $a^2 = -\det a.\mathrm{Id}$ et $b^2 = -\det b.\mathrm{Id}$, $a$ et $b$ ont deux directions propres, quitte à remplacer $\mathbb{K}$ par un extension quadratique, on peut définir le birapport bir $(a, b)$ comme le birapport de leurs directions invariantes convenablement orientées par la même formule que sur $\mathbb{R}$ ; lorsque $\det a = \det b$, bir $(a, b) \in \mathbb{K}$ (Définition 1.44). Ce chapitre contient aussi plusieurs résultats fins sur les classes de conjugaison de $\mathfrak{sl}(V)$. Le Théorème 1.64 (Corollaire 1.66) donne une très jolie condition pour que deux éléments $a$ et $b \in \mathfrak{sl}(V) \setminus X$ de déterminant 1 soient conjugués par un élément de $SL_2(\mathbb{K})$ : il faut et il suffit que le birapport $\mathrm{bir}(a, b)$ soit la somme de deux carrés d'éléments de $\mathbb{K}$. Comme la relation d'être conjugué est transitive, on en déduit que si pour trois éléments $a$, $b$ et $c \in \mathfrak{sl}(V)$ de déterminant 1, $\mathrm{bir}(a, b)$ et $\mathrm{bir}(b, c)$ sont chacun la somme de deux carrés, il en sera de même pour bir $(a, c)$ (Scholie 1.68).

Simon donne ensuite une application du Théorème 1.64 à la classification des formes quadratiques sur $V$. L'espace des formes quadratiques est isomorphe à $\mathfrak{sl}_2(\mathbb{K})$ par l'application qui associe à $Q = lx^2 + mxy + ry^2$ la matrice $\frac{1}{2}\begin{pmatrix} .-m & -2r \\ 2l & m \end{pmatrix}$. Cette application préserve le discriminant (celui d'une matrice de $\mathfrak{sl}_2(V)$ est $-4.\det$ , p.47) et conjugue l'action de $SL_2(V)$ par changement de variables à son action adjointe sur $\mathfrak{sl}_2(V)$. On peut ainsi définir le birapport de deux formes quadratiques de même discriminant comme celui de leurs images dans $\mathfrak{sl}_2(V)$. On a : $\dfrac{1}{\text{bir}\,(Q_a, Q_b)} = \dfrac{\text{disc}\,(Q_a + Q_b)}{4\text{disc}\,(Q_a)}$. Le Corollaire 1.73 est une application directe du Théorème 1.64 : il établit une bijection *explicite* entre les applications de $SL_2(\mathbb{K})$ qui conjuguent deux formes quadratiques $Q_a$ et $Q_b$ de même discriminant $4\delta$ et les solutions sur $\mathbb{K}$ de l'équation de Pell-Fermat $x^2 - \delta y^2 = \chi$, où $4\chi$ est le birapport bir $(Q_a, Q_b)$. Lorsque $\mathbb{K} = \mathbb{Q}$, ce résultat s'applique à la classification des formes entières de même discriminant, l'existence de solutions de l'équation de Fermat-Pell s'interprêtant en termes du symbole de Hilbert (Théorème 1.75).

Une autre interprétation de nature plus géométrique du Corollaire 1.73 est que deux formes entières de même discriminant $\Delta > 0$ sont équivalentes sur $\mathbb{Q}$ si et seulement si la distance hyperbolique $\lambda$ entre leurs projections dans $M = \mathbb{H}/_{\text{PSL}_2(\mathbb{Z})}$ vérifie $\cosh\dfrac{\lambda}{2} = \dfrac{1}{\sqrt{x^2 - \Delta y^2}}$ pour $x,\, y \in \mathbb{Q}$ (Corollaire 1.97).

Dans le chapitre 2, Simon fait une étude combinatoire de $\text{PSL}_2(\mathbb{Z})$. Il utilise de manière essentielle *le lotus*, un complexe introduit par Patrick Popescu en 2011, défini comme le complexe $\Delta_1$ contenu dans le quadrant positif de $\mathbb{R}^2$ dont les sommets sont les vecteurs entiers non nuls à coordonnées $\geq 0$, dont une arête joint deux sommets lorsque ceux-ci forment une base de $\mathbb{Z}^2$ et auquel on rajoute une face pour chaque triangle qui apparaît. Un complexe simplicial $\Delta_2$ est ensuite obtenu en recollant $\Delta_1$ et son miroir par rapport à l'axe des $y$ puis en identifiant les deux arêtes $(1,0)(0,1)$ et $(-1,0)(0,1)$ (Figure 2.1, p. 106). Simon réalise $\Delta_2$ dans le disque hyperbolique : l'application $\psi$ du chapitre précédent envoie les sommets de $\Delta_2$ dans le cône isotrope $X$, on la prolonge de manière affine dans chaque triangle, puis par projection radiale dans $P(\mathfrak{sl}_2(\mathbb{R}))$. L'image de $\Delta_2$ est une triangulation idéale de $\mathbb{H} \cup \partial\mathbb{H}$ qui n'est autre que la *triangulation de Farey.* Si on rajoute un sommet au milieu de chaque arête du graphe dual de cette triangulation, on obtient un graphe $\mathcal{T}$ sur lequel $\text{PSL}_2(\mathbb{Z})$ agit. C'est l'arbre associé à la description comme produit amalgamé de $\text{PSL}_2(\mathbb{Z}) \simeq \mathbb{Z}_2 \star \mathbb{Z}_3$. Simon utilise l'écriture des mots sur ces générateurs pour montrer que toute classe de conjugaison $[A]$ de $\text{PSL}_2(\mathbb{Z})$ d'ordre infini est représentée par un mot en des puissances *positives* des éléments $L = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ et $R = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ et que ce mot est unique à permutation cyclique près (Théorème 2.11). Ces mots positifs sont *les représentants de Lyndon* de la classe de conjugaison $[A]$. Les éléments $L$ et $R$ engendrent librement un monoïde qui est exactement $\text{PSL}_2(\mathbb{N})$ (Lemme 2.18). L'observation que la classe de conjugaison de tout élément d'ordre infini de $\text{PSL}_2(\mathbb{Z})$ intersecte $\text{PSL}_2(\mathbb{N})$ en les permutations cycliques $\{\sigma^i A\}$ d'un même élément sera fondamentale dans la suite. En effet, pour toute matrice hyperbolique $A \in \text{PSL}_2(\mathbb{N})$, on peut "localiser" ses points fixes en fonction du mot qui la représente : d'abord l'axe de $A$ dans $\mathbb{H}$ coupe $0\infty$ (au niveau du lotus, $A$ possède en effet une direction propre de pente positive, et une de pente négative), ensuite, selon que le mot commence par $L$ ou par $R$, le point fixe attractif est $< 1$ ou $> 1$ et pareillement on peut localiser le point fixe répulsif selon la terminaison du mot (Lemme 2.20). Simon explique aussi comment l'écriture en fraction continue paire du point fixe $\alpha > 0$ permet de coder les triangles de la triangulation de Farey traversés par la géodésique joignant l'origine au point $\alpha \in \mathbb{R}P^1$ (Proposition 2.28).

La deuxième partie du mémoire est plus topologique. Le chapitre 3 porte sur les nœuds modulaires : ce sont les relevés au fibré unitaire tangent $T^1M$ des géodésiques fermées de $M$. Les géodésiques fermées correspondent aux classes de conjugaison de matrices hyperboliques de $\text{PSL}_2(\mathbb{Z})$. Simon décrit les géodésiques fermées qui passent par l'une des singularités de $M$ (Corollaire 3.4). Il montre ensuite comment perturber une géodésique qui passe par une singularité de sorte qu'elle contourne celle-ci (Définition 3.5). Il définit ensuite le nombre d'intersection entre deux géodésiques fermées en adaptant la définition du nombre d'intersection dans le cas des surfaces hyperboliques (sans singularités). Il définit ensuite des "représentants linéaires" des classes de conjugaison de $\text{PSL}_2(\mathbb{Z})$. On considère *le triangle de base* $\nabla_1$ du lotus, de sommets $(1,0)$, $(0,1)$ et $(1,1)$ (Figure 2.1, p. 106). Ce triangle porte un feuilletage induit par les droites radiales. Les directions attractives des $n$ représentants de Lyndon de $A$ intersectent ce triangle en $n$ segments. L'image de la réunion de ces segments par l'application du chapitre 2 (celle qui réalisait le lotus dans le disque hyperbolique) se projette sur $M$ en une courbe fermée qui représente la classe de conjugaison de $A$ : c'est *le représentant linéaire de* $[A]$. L'un des buts du chapitre suivant sera de montrer que le relevé à $T^1M$ de cette courbe est isotope au nœud géodésique représentant $A$.

Dans le chapitre 4, Simon introduit un patron qui porte toutes les courbes fermées "linéaires" construites précédemment. Le quotient du triangle de base $\nabla_1$ par la relation qui identifie le côté horizontal (resp. vertical) à l'hypothénuse par $L^{-1}$ (resp. $R^{-1}$) est une surface branchée qui porte un flot, le flot radial. Ce quotient est homéomorphe au patron de Lorenz introduit dans l'introduction. On peut le plonger dans $T^1M$, comme dans la construction des *représentants linéaires* au paragraphe précédent.

Son image, *le patron de Lorenz maître*, porte alors, par construction, tous les représentants linéaires des classes de conjugaison de $\mathrm{PSL}_2(\mathbb{Z})$. Le Théorème 4.24 dit que tout nœud ou entrelacs modulaire est isotope dans $T^1M$ à son représentant linéaire. Toutefois, ceci n'est pas entièrement démontré dans le manuscrit, Simon faisant référence à l'article de Ghys (voir Théorèmes 4.13 et 4.14). Simon utilise le patron pour calculer l'enlacement entre deux nœuds modulaires $[A]$ et $[B]$. Le patron étant plongé dans l'espace comme sur la Figure 4.7 (p. 183), les nœuds modulaires apparaissent sous forme de tresse, où les brins issus du côté $R$ sont au-dessus des brins issus de $L$. Pierre Dehornoy en avait déduit un expression algorithmique du nombre d'enlacement. C'est le nombre de couples $(A_i, B_j)$ où $A_i$ est un brin de $[A]$ qui croise un brin $B_j$ de $[B]$ et ces brins sont en bijection avec les représentants de Lyndon de $[A]$, $\sigma^i(A)$ et $\sigma^j(B)$ de $B$. Dire que les projections des brins correspondant à $\sigma^i A$ et $\sigma^j B$ se croisent équivaut à dire que les axes de ces éléments se croisent ce qu'on peut lire sur les mots de Lyndon. C'est ce que mesure la formule de la Proposition 4.27. Simon montre ensuite par un raisonnement de dénombrement délicat comment traduire cette expression en termes de l'action de $\mathrm{PSL}_2(\mathbb{Z})$ sur $\mathcal{T}$ (Théorème 4.44). La raison qu'une telle expression existe est que les axes de deux isométries de $\mathrm{PSL}_2(\mathbb{Z})$ se croisent dans $\mathbb{H}$ si et seulement si leurs axes "se croisent" dans $\mathcal{T}$.

La Proposition 4.27 et le Corollaire 4.42 donnent des expressions de l'enlacement qui sont de nature combinatoire. Dans le chapitre 5, Simon propose une expression géométrique. Pour démontrer que tout entrelacs modulaire pouvait être isotopé dans le patron de Lorenz, Ghys avait utilisé des déformations de la métrique hyperbolique sur $M$ en des métriques de volume infini et remarqué que le patron apparaissait lorsque la longueur de la courbe de bord tendait vers l'infini. Simon va utiliser les mêmes déformations pour faire apparaître l'enlacement comme limite d'invariants géométriques. Il étudie pour cela l'espace des représentations de $\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$ dans $\mathrm{SL}_2(\mathbb{R})$ à conjugaison près. Pour $q \in \mathbb{R}^*$, il définit la représentation $\rho_q : R \mapsto R_q = \begin{pmatrix} q & 1 \\ 0 & q^{-1} \end{pmatrix}$ et $L \mapsto L_q = \begin{pmatrix} q & 0 \\ 1 & q^{-1} \end{pmatrix}$. Toute représentation discrète et fidèle de $\mathrm{PSL}_2(\mathbb{Z})$ dans $\mathrm{PSL}_2(\mathbb{R})$ est conjuguée à une représentation $\rho_q$ (Corollaire 5.7). Une jolie propriété est que la fonction "trace de $A$", $F_A : q \mapsto TrA_q$ est un polynôme $\in \mathbb{Z}[q, q^{-1}]$ réciproque. Pour un élément $A \in \mathrm{SL}_2(\mathbb{N})$ d'ordre infini, les coefficients de $F_A$ sont positifs et son degré égal à la longueur combinatoire de $[A]$.

Les représentations $\rho_q$, avec $q \neq \pm 1$ sont des représentations *convexes cocompactes* : l'espace quotient de $\mathbb{H}$ par leur image est une surface hyperbolique $M_q$ homéomorphe à $M$, qui contient une sous-surface compacte à bord géodésique. On a de plus que les axes de deux éléments hyperboliques $A$ et $B$ de $\mathrm{PSL}_2(\mathbb{Z})$ se croisent dans $\mathbb{H}$ pour la représentation $\rho_q$ si et seulement si ils se croisent pour la représentation standard $\rho_1$.

Simon définit un nouvel invariant pour une paire de géodésiques fermées $([A], [B])$ sur $M_q$ (Définition 5.20) : c'est une somme, indexée par certaines paires $(A_i, B_j)$ de conjugués de $A$ et $B$ dont les axes s'intersectent, de la fonction $\cos^2(\theta_i^j/2)$ où $\theta_i^j$ est l'angle que font les deux axes (orientés). C'est un invariant qui ressemble au nombre d'intersection géométrique, mais un peu plus précis car il tient compte de la métrique. Soit $L_q([A], [B])$ cet invariant calculé sur la surface $M_q$. Le Théorème 5.24 dit que lorsque $q \to \infty$, $\frac{1}{2} L_q([A], [B]) \to \mathrm{lk}([A], [B])$. Simon le déduit du fait que lorsque $q \to \infty$ l'angle entre les axes de deux éléments hyperboliques de $\mathrm{PSL}_2(\mathbb{Z})$ dans $\mathbb{H}$ tend vers 0 ou $\pi$ selon que leurs axes dans $\mathcal{T}$ ont la même orientation le long de leur segment commun ou pas. On voit alors apparaître à la limite l'expression de l'enlacement $\mathrm{lk}([A], [B])$ du Théorème 4.44.

Je n'ai décrit ci-dessus qu'une partie du mémoire, en cherchant à indiquer une piste pour comprendre le théorème 5.24, qui est à mon avis le résultat principal. Le texte très dense, est rempli du début à la fin de Remarques et de Scholies instructives. J'ai été étonné par l'originalité de la présentation, par la richesse du contenu du chapitre 1 qui porte pourtant sur un sujet rabâché comme le modèle de Minkowski. J'ai beaucoup aimé le chapitre 5 avec l'étude explicite de la variété des caractères de $\mathrm{PSL}_2(\mathbb{Z})$ et en particulier la définition de l'enlacement comme fonction sur l'espace des caractères, et les études numériques de la fin. Le texte est quasiment complètement autonome, il n'y a que la réalisation du patron de Lorenz au chapitre 4 qui est admise ; je le regrette mais mon impression globale est très bonne. Je pense que c'est un mémoire de très haut niveau et je recommande la soutenance de la thèse.

À Toulouse, le 6 juin 2022

Jean-Pierre Otal

Otal