REPRÉSENTATIONS DES GROUPES FUSCHIENS VIA L'ALGÈBRE DES COURBES DANS LES SURFACES

CHRISTOPHER-LLOYD SIMON

Mon projet concerne la théorie des représentations d'un réseau Γ de $G = \mathrm{PSL}_2(\mathbb{R})$ et de ses variations par déformation du réseau, autrement-dit des fonctions $\mathrm{Aut}(\Gamma) \times \mathrm{Aut}(G)$-automorphes sur l'espace $\mathrm{Hom}(\Gamma; G)$. C'est l'analogue en caractéristique d'Euleur négative, à l'analyse des fonctions Λ-périodiques pour un réseau $\Lambda \subset \mathbb{R}^2$, de leurs variations sur l'espace des réseaux $\mathrm{GL}_2(\mathbb{R}) \subset \mathrm{Hom}(\mathbb{Z}^2; \mathbb{R}^2)$, et de leur modularité sous l'action du groupe $\mathrm{GL}_2(\mathbb{Z}) \times \mathrm{SO}_2(\mathbb{R})$. Je souhaite proposer une *approche topologique et combinatoire pour étudier la théorie des représentations* du réseau $\Gamma \subset \mathrm{PSL}_2(\mathbb{R})$ et de son groupe d'automorphismes $\mathrm{Aut}(\Gamma)$, en étudiant l'interaction entre une algèbre de formes modulaires (ayant une un incarnation arithmétique) et une algèbre de caractères (ayant une description topologique).

La section 1 introduit ces thématiques dans le case du groupe modulaire $\Gamma = \mathrm{PSL}_2(\mathbb{Z})$ en présentant quelques observations et conjectures. Le section 2 esquisse dans le cas des surfaces compactes sans-bord, certaines idées plus générales du projet qui ne sont apparentes qu'en genre supérieur, proposant des liens précis entre l'arithmétique des représentations d'un réseau $\Gamma \subset G$ et la topologie des courbes dans la surface $\Gamma\backslash\mathbb{H}$. Enfin la section 3 rappelle le lien la point de vue moderne de la théorie des représentations de manière à reformuler certaines des conjectures évoquées en termes de bases de formes automorphes.

Motivations historiques. La théorie des représentations des réseaux $\Gamma \subset \mathrm{PSL}_2(\mathbb{R})$ a germé au 19e siècle de l'arithmétique des formes quadratiques, avec la géométrie du plan hyperbolique $\mathbb{H}$ comme expliqué dans [Kle79, Cox89]). Elle a donné naissance à l'analyse des formes différentielles sur la surface de Riemann $\Gamma\backslash\mathbb{H}$, motivée par les équations différentielles (monodromie des fonctions hypergéométriques), et la théorie des nombres (périodes des fonctions elliptiques), comme raconté dans [Gra00, dSG10]. Ces dernières sont liées par la combinatoire des développements en série entière (formes modulaires) ou en fractions continuées (polynômes orthogonaux), étudiées par exemple dans [Khr08].

Cette unité grandiose se reflète en particulier dans les ponts entre les diverses théories de Galois (arithmétique, topologique, fonctionnelle, différentielle), détaillés dans [Gro97, DD79]. Au cours du 20e siècle, la description des fibrés vectoriels sur la variété $\Gamma\backslash \mathrm{PSL}_2(\mathbb{R})$, ou des familles de fonctions Γ-automorphes sur $\mathrm{PSL}_2(\mathbb{R})$, a lancé la théorie des représentations de Γ.

Ces domaines se rencontrent encore ([KZ01, Zag18], [Mir07, McM13]) dans l'investigation des *périodes et volumes* associés au groupe Γ (généralisant les nombres d'intersection et nombres de solutions d'équations), dont on cherche à comprendre les propriétés algébriques (structure de groupe), arithmétiques (congruence, transcendance), ou dynamiques (croissance, distribution).

1. Classes de conjugaison du groupe modulaire : intersection des géodésiques et séries de Poincaré

Géométrie hyperbolique. Le groupe $\mathrm{PGL}_2(\mathbb{R})$ des automorphismes de la droite projective réelle $\mathbb{RP}^1$, agit par transformation de Möbius :

$$\gamma = \left(\begin{smallmatrix} a & b \\ c & d \end{smallmatrix}\right) \in \mathrm{PGL}_2(\mathbb{R}) \quad \gamma(z) = \tfrac{az+b}{cz+d} \qquad \tfrac{d\gamma}{dz} = \tfrac{\det(\gamma)}{(cz+d)^2}$$

transitivement sur les triplets de points distincts, en préservant le birapport de quatre points :

$$\mathrm{bir}(\alpha_-, \alpha_+, \beta_-, \beta_+) = \tfrac{(\alpha_+-\alpha_-)(\beta_+-\beta_-)}{(\alpha_+-\beta_-)(\beta_+-\alpha_-)}$$

Le sous-groupe $\mathrm{PSL}_2(\mathbb{R})$ d'indice deux préservant l'orientation de $\mathbb{RP}^1$ agit transitivement sur les triplets de points cycliquement ordonnés. L'action de $\mathrm{PGL}_2(\mathbb{R})$ s'étend à la droite projective complexe $\mathbb{CP}^1$, et celle de $\mathrm{PSL}_2(\mathbb{R})$ préserve le demi-plan $\mathbb{H} = \{z \in \mathbb{C} \mid \Im(z) > 0\}$.

La structure complexe sur $\mathbb{H}$ est conforme à une unique métrique hyperbolique, dont la distance hyperbolique λ entre $w, z \in \mathbb{H}$ est donnée par le birapport $\mathrm{bir}(\bar{z}, z, \bar{w}, w)^{-1} = \left(\cosh \frac{\lambda}{2}\right)^2$. Ceci réalise $\mathrm{PSL}_2(\mathbb{R})$ comme le groupe d'isométries directes du plan hyperbolique.

Tout $\gamma \in \mathrm{PSL}_2(\mathbb{R}) \setminus \{1\}$ a deux points fixes $\gamma_-, \gamma_+ \in \mathbb{CP}^1$, et il est qualifié d'elliptique, parabolique ou hyperbolique selon qu'il en ait $0, 1, 2$ distincts dans $\mathbb{RP}^1$. Un élément hyperbolique γ agit par translation le long d'un axe $(\gamma_-, \gamma_+) \subset \mathbb{H}$ joignant ses points fixes répulsif et attractif $\gamma_-, \gamma_+ \in \mathbb{RP}^1$. Pour deux translations $\alpha, \beta \in \mathrm{PSL}_2(\mathbb{R})$, leurs axes $(\alpha_-, \alpha_+), (\beta_-, \beta_+) \subset \mathbb{H}$ s'intersectent si et seulement si $\mathrm{bir}(\alpha, \beta) := \mathrm{bir}(\alpha_-, \alpha_+, \beta_-, \beta_+) > 1$, auquel cas c'est avec un angle $\theta \in]-\pi, \pi[$ orienté de α vers β donné par $\mathrm{sign}(\theta) = \mathrm{sign}\sin(\theta)$ et :

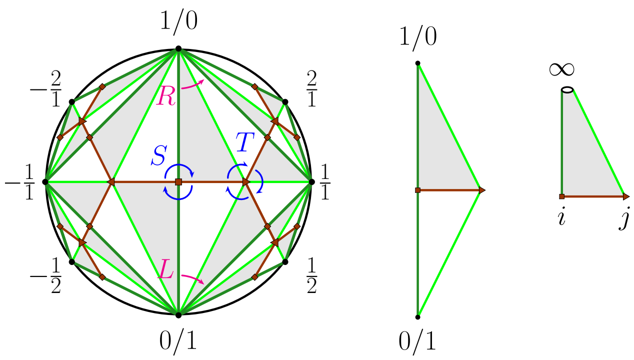
$$\cos(\theta) = \mathrm{sign}(\mathrm{tr}(\alpha)\,\mathrm{tr}(\beta))\frac{\mathrm{tr}(\alpha\beta) - \mathrm{tr}(\alpha\beta^{-1})}{\sqrt{\mathrm{disc}\,\alpha\,\mathrm{disc}\,\beta}} = \frac{1}{\mathrm{bir}(\alpha,\beta)} - \frac{1}{\mathrm{bir}(\alpha,\beta^{-1})}$$

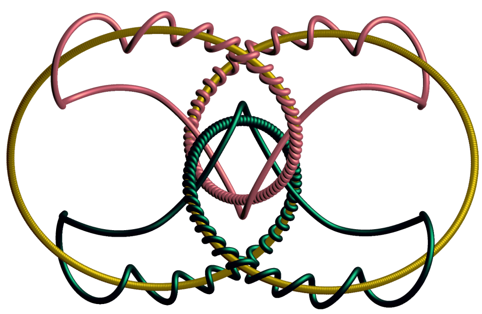
Notons que $\theta \mapsto -\theta$ par transposition de (α, β), et $\theta \mapsto \mathrm{sign}(\theta)\pi - \theta$ par inversion de α ou β.

Géodésiques modulaires. Le groupe modulaire $\mathrm{PSL}_2(\mathbb{Z})$ agit proprement discontinuement sur $\mathbb{H}$ avec pour quotient l'orbifold modulaire $\mathbb{M}$, une surface hyperbolique de genre zéro ayant une cuspide associée au point fixe $\infty \in \mathbb{QP}^1 \subset \partial\mathbb{H}$ de R ainsi que deux singularités coniques d'ordre 2 et 3 associées aux points fixes $i, j \in \mathbb{H}$ de S et T.

$$S = \left(\begin{smallmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{smallmatrix}\right) \quad T = \left(\begin{smallmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 0 \end{smallmatrix}\right) \qquad L = T^{-1}S = \left(\begin{smallmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{smallmatrix}\right) \quad R = TS^{-1} = \left(\begin{smallmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right)$$

Ainsi, $\pi_1(\mathbb{M}) = \mathrm{PSL}_2(\mathbb{Z})$ est l'amalgame $\mathbb{Z}/2 * \mathbb{Z}/3$ de ses sous-groupes engendrés par S et T.





Les classes d'homotopie libre de lacets de $\mathbb{M}$ correspondent aux classes de conjugaison de son groupe fondamental $\pi_1(\mathbb{M}) = \mathrm{PSL}_2(\mathbb{Z})$. Les classes elliptiques $[S]$ et $[T]^{\pm 1}$ correspondent aux lacets entourant ± 1 fois les singularités coniques i et j, les classes paraboliques $[R]^n$ correspondent aux lacets entourant n fois la cuspide, et les classe hyperboliques $[\alpha]$ correspondent aux géodésiques fermées de $\mathbb{M}$, appelées *géodésiques modulaires*.

Le fibré tangent unitaire de $\mathbb{M} = \Gamma\backslash\mathbb{H}$ est la variété $\mathbb{U} = \Gamma\backslash \mathrm{PSL}_2(\mathbb{R})$. Il se trouve que $\mathbb{U}$ est homéomorphe à une sphère privée d'un noeud de trêfle, parallèle au relevé d'un lacet de $\mathbb{M}$ entourant la cuspide correspondant à la classe $[R]$. Voir [GL16] pour une introduction visuelle.

Les géodésiques de $\mathbb{M}$ se relèvent en les orbites périodiques du flot géodésique dans $\mathbb{U}$, dont les primitives sont appelées *noeuds modulaires*. On peut dont définir le nombre d'enlacement entre un noeud modulaire et le trêfle noté $\mathrm{Rad}(\alpha) := \mathrm{lk}(\alpha, R)$ étudié dans [Ati87, Ghy07], ainsi que l'enlacement entre deux noeuds modulaires $\mathrm{lk}(\alpha, \beta)$ étudié dans [Sim22, Sim24].

Associons à $\gamma \in \Gamma$ hyperbolique primitif le polynôme quadratique $q_\gamma(z) = \frac{(z-\gamma_+)(z-\gamma_-)}{(\gamma_+ - \gamma_-)}$.

Cela permet de définir une correspondance entre les éléments hyperboliques primitifs de $\mathrm{PSL}_2(\mathbb{Z})$ et les formes quadratiques binaires entières indéfinies primitives, équivariante sous l'action de $\mathrm{PSL}_2(\mathbb{Z})$ par conjugaison et changement de variables, et préservant le discriminant.

Formes modulaires et périodes. Une fonction $f\colon \mathbb{H} \to \mathbb{C}$ est une forme Γ-modulaire de poids $2k$ lorsqu'elle est holomorphe et satisfait $f(\gamma\tau)\,(\gamma'(\tau))^k = f(\tau)$ pour tout $\gamma \in \Gamma$, $\tau \in \mathbb{H}$, autrement-dit lorsque $f(z)dz^k$ est une forme différentielle holomorphe de poids k sur $\Gamma\backslash\mathbb{H}$.

Ensemble, elles constituent une $\mathbb{C}$-algèbre $\mathcal{M}(\Gamma) = \bigoplus_k \mathcal{M}^{2k}(\Gamma)$ graduée par le poids $k \in \mathbb{N}$, dont la dimension des composantes homogènes $\mathcal{M}^{2k}(\Gamma)$ croit comme $k \times \chi(\mathbb{M}) = k/6$ (voir [Ser70]

La série d'Eisenstein $E^k\colon \mathbb{H} \to \mathbb{C}$ de poids $2k \geq 4$ est obtenue en moyennant $(dz/q_R(z))^k$ sous l'action de Γ modulo le stabilisateur $\Gamma_R = \langle R\rangle$ de la forme $q_R(z) = z^2$:

$$E^k(z) = \sum_{\gamma \in \langle R\rangle\backslash\Gamma} \left(\frac{\gamma'(z)}{q_R(\gamma z)}\right)^k = \frac{1}{2}\sum_{\gcd(a,b)=1}\left(\frac{1}{(az+b)^2}\right)^k \quad \text{où} \quad q_R(z) = z^2$$

On peut montrer que l'algèbre $\mathcal{M}(\Gamma)$ est isomorphe à l'algèbre plynomiale $\mathbb{C}[E^4, E^6]$

La période de $\varphi \in \mathcal{M}^{2k}(\Gamma)$ le long d'une géodésique hyperbolique $[\gamma] \subset \mathbb{M}$ est obtenue en intégrant la 1-forme $\varphi(z)dz^k \div (dz/q_\gamma(z))^{k-1}$ le long de $[\gamma]$:

$$r_\gamma^k(\varphi) = \int_{[\gamma]} \varphi(z) q_\gamma(z)^{k-1} dz$$

Ces périodes contiennent, pour de bon choix de φ, des invariants arithmétiques subtils de γ.

Par exemple pour $\Delta = (E_4^3 - E_6^2)/12^3$ la fonction discriminant, la partie imaginaire de la période $r_\gamma^1(\Delta'/\Delta)$ retrouve le nombre de Rademacher $\mathrm{Rad}([\gamma])$, ayant de multiples interprétations : la somme alternée des coefficients dans la fraction continuée de γ_+, le nombre d'enlacement dans le fibré unitaire tangent de $\mathbb{M}$ entre le noeud modulaire correspondant au relevé de la géodésique $[\gamma] \subset \mathbb{M}$ et un noeud de trèfle correspondant au relevé du lacet $[R] \subset \mathbb{M}$ (voir le rapport).

Produit hermitien et séries de Poincaré. Le $\mathbb{C}$-espace vectoriel $\mathcal{M}^{2k}(\Gamma)$ est muni d'un produit hermitien, obtenu en intégrant le produit $(\varphi(z)dz^k) \wedge (\overline{\psi(z)dz^k})$ avec la forme volume de poids k sur un domaine fondamental de $\mathbb{H}$ sous l'action de Γ, comme le triangle $\infty 0 j$:

$$\langle \varphi \mid \psi\rangle_{2k} = \int_{\Gamma\backslash\mathbb{H}} \varphi(z)\overline{\psi(z)}\left(\tfrac{dz\wedge d\bar z}{|z-\bar z|^2}\right)^k = \int_{\Gamma\backslash\mathbb{H}} \varphi(z)\overline{\psi(z)}\left(\tfrac{dxdy}{y^2}\right)^k.$$

On l'appelle la forme de Weil–Peterssen.

Pour $\alpha \in \Gamma$ hyperbolique et $k \in \mathbb{N}_{\geq 2}$, on associe la série de Poincaré $\Theta_\alpha^k\colon \mathbb{H} \to \mathbb{C}$ obtenue en moyennant $(dz/q_\alpha(z))^k$ sous l'action de Γ modulo le stabilisateur $\Gamma_\alpha = \langle\alpha\rangle$ de la forme q_α :

$$\Theta_\alpha^k(z) = \sum_{\gamma \in \langle\alpha\rangle\backslash\Gamma}\left(\frac{\gamma'(z)}{q_\alpha(\gamma z)}\right)^k \quad \text{où} \quad q_\alpha(z) = \frac{(z-\alpha_+)(z-\alpha_-)}{(\alpha_+ - \alpha_-)}.$$

On peut montrer que c'est une forme Γ-modulaire de poids $2k$, caractérisée par le fait que pour tout $\varphi \in \mathcal{M}^{2k}(\Gamma)$ on ait *l'identité entre période et produit scalaire* $r_\gamma^k(\varphi) = \langle \Theta_\alpha^k \mid \varphi\rangle_{2k}$.

Cette relation a permis à S. Katok [Kat85] de montrer que les Θ_γ^k engendrent le sous-espace $\mathcal{S}^{2k}(\Gamma) \subset \mathcal{M}^{2k}(\Gamma)$ des formes modulaires cuspidales (qui s'annulent au voisinage de ∞). La détermination de bases de $\mathcal{S}^k(\Gamma)$ formées de fonctions Θ_γ^k reste un problème ouvert, approché dans diverses situations par [Kra85, GM86, KM87, Kat89]. Je comptes exploiter la topologie des courbes dans les surfaces pour construire de telles bases.

Les produits scalaires $\langle\Theta_\alpha^k \mid \Theta_\beta^k\rangle$ contiennent les relations linéaires entre les Θ_γ^k, ainsi que divers invariants arithmétiques et topologiques attachés aux paires de classes hyperboliques. Nous verrons plus tard qu'ils encodent une bonne partie de la théorie des représentations de Γ.

Question 1.1 (Hypothèse d'universalité). *Peut-on trouver une « polarisation » de la forme d'enlacement entre noeuds modulaire par rapport à la forme de Weil–Peterssen entre formes modulaires, à savoir une suite de fonctions $F_k\colon \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ indexées par $k \in \mathbb{N}$ telles que pour tout $\alpha, \beta \in \Gamma$ hyperbolique :*

$$\mathrm{lk}(\alpha, \beta) = \sum_{k=0}^{\infty} F_k(\langle \Theta_\alpha^k \mid \Theta_\beta^k \rangle) \quad ?$$

Cette question m'intéresse car elle permettrait d'exprimer les quasi-caractères du groupe modulaire en termes de l'arithmétique du groupe modulaire, fournissant une vaste généralisation de l'identité $\mathrm{lk}(R, \gamma) = \mathrm{Rad}(\gamma)$ susmentionnée.

En effet, d'une part le Théorème 1.10 du rapport extrait de [Sim24] *montre comment les nombres d'enlacement permettent de construire une base de l'espace des quasi-caractères du groupe modulaire. D'autre part, les produits scalaires $\langle \Theta_\alpha^k \mid \Theta_\beta^k \rangle$ sont reliés par un changement de base de l'espace des formes modulaires aux coefficients de structure pour la théorie des représentations de $\mathrm{PSL}_2(\mathbb{Z})$, ou du point de vue de la théorie analytique des nombres aux valeurs centrales des séries L de formes automorphes de Maass Hecke.*

Les coefficients des F_k réalisant ce « changement de base » contiendrait également (par analogie avec la théorie des polynômes orthogonaux) des interprétations combinatoires.

Un exemple d'application de la conjecture précédente consisterait à relier les propriétés statistiques des nombres d'enlacement $\mathrm{lk}(\alpha, \beta)$ et des produits scalaires $\langle \Theta_\alpha^k \mid \Theta_\beta^k \rangle$.

Certaines propriétés de distribution des périodes de formes modulaires sont étudiées dans [Sha01], et de la fonction de Rademacher dans [Sar10, Moz13]. Les travaux [McM13, Uek21, CS23] démontrent des « lois de Chebotarev » pour la distribution des classes d'homologies d'orbites périodiques de certains flots en dimension 3. Le cas des noeuds modulaires est évoqué mais la conjecture suivante n'est pas abordée.

Conjecture 1.2 (Loi de Chebotarev). *Dans* [Sim24] *on montre (voir rapport) l'importance des quantités $\mathrm{C}(\alpha, \beta) = \mathrm{lk}(\alpha, \beta) - \mathrm{lk}(\alpha^{-1}, \beta)$ pour $\alpha, \beta \in \mathrm{PSL}_2(\mathbb{Z})$ hyperboliques (ils fournissent une base de l'espace des quasi-caractères du groupe modulaire).*

Rappelons que l'enlacement retrouve l'intersection selon $\frac{1}{2}i(\alpha, \beta) = \mathrm{lk}(\alpha, \beta) + \mathrm{lk}(\alpha^{-1}, \beta)$, et que $i(\alpha, \alpha)$ vaut le double du nombre de points doubles. Mentionnons également que [CL12] *montre que les nombres d'auto-intersection renormalisés par la longueur combinatoire suivent une distribution normale.*

Fixons des classes hyperboliques $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$, et considérons une suite d'éléments $\beta \in \mathrm{PSL}_2(\mathbb{Z})$ tels que $\mathrm{disc}(\beta) \to \infty$. Le vecteur des

$$\frac{\mathrm{C}(\alpha_i, \beta)}{\sqrt{i(\alpha_j, \alpha_j) i(\beta, \beta)}}$$

converge en distribution, avec pour marginales (non-indépendantes) des lois normales centrées. Je ne suis pas certain l'expression exacte des variances (n'ayant pas encore expérimenté ces conjectures) mais les formules algorithmique et combinatoire [Sim24, Section 5 et Section 7] *suggèrent qu'on puisse exprimer la matrice de variance-covariance en termes des nombres d'enlacement $\mathrm{lk}(\alpha_i, \alpha_j)$ et $\mathrm{C}(\alpha_i, \alpha_j)$.*

On peut proposer des variations et raffinements de ces résultats, et j'ajouterai seulement qu'on peut conjecturer des résultats d'équidistribution intéresssants pour les valeurs p-adiques de ces nombres d'enlacement.

Plusieurs approches de preuve sont possibles : certaines reposent sur l'analyse harmonique et la formule des traces de Selberg (dans l'esprit de [LRS09]*), d'autres sur des méthodes dynamique en théorie ergodique des nombres* [PP90, BAPP19].

Nombres d'intersection symplectiques. Pour deux géodésiques modulaires $[\alpha], [\beta] \subset \mathbb{M}$, définissons leur *nombre d'intersection symplectique* de degré $k \in \mathbb{N}$ comme la somme sur leurs intersections $p \in [\alpha] \pitchfork [\beta]$ du $\operatorname{sign}(\theta_p)$ fois l'évaluation en $\cos(\theta_p)$ du k^{e} polynôme de Legendre :

$$\mathrm{W}_k(\alpha,\beta) = \sum_{p\in[\alpha]\pitchfork[\beta]} \operatorname{sign}(\theta_p) \times \mathrm{L}_k(\cos(\theta_p))$$

La suite de polynômes $(\mathrm{L}_k)_{k\in\mathbb{N}}$ est échelonnée par le degré et orthogonale pour le produit scalaire $\int_{-1}^{+1} PQ$ avec normalisation $\int_{-1}^{+1} L_k^2 = \frac{2}{2k+1}$. Les premiers termes sont $\mathrm{L}_0(X) = 1$, $\mathrm{L}_1(X) = X$.

En particulier $\mathrm{W}_0(\alpha,\beta) = [\alpha]\cdot[\beta]$ est le nombre d'intersection algébrique, qui est nul puisque la forme d'intersection sur $H_1(\mathbb{M};\mathbb{Z}) = 0$ est triviale ($\mathbb{M}$ est de genre zéro).

Notons que si l'on omet le $\operatorname{sign}(\theta)$, on retrouve les « cocycles d'enlacement arithmétique » $\mathrm{C}_q(\alpha,\beta)$ introduits dans [Sim24] (voir rapport), dont on montre qu'ils dégénèrent vers les *cocycles d'enlacement topologique* $\mathrm{C}_\alpha(\beta) = \operatorname{lk}(\alpha,\beta) - \operatorname{lk}(\alpha^{-1},\beta)$.

La définition des $\mathrm{W}_k(\alpha,\beta)$ est motivée par la formule de S. Katok [Kat85] :

$$\forall k \in \mathbb{N}^*, \quad \Im(\langle \Theta_\alpha^{k+1} \mid \Theta_\beta^{k+1}\rangle) = 2^{2k}\binom{2k}{k}^{-1}\left(\frac{\sqrt{\operatorname{disc}(\alpha)\operatorname{disc}(\beta)}}{\operatorname{sign}((\operatorname{tr}\alpha)(\operatorname{tr}\beta))}\right)^k \mathrm{W}_k(\alpha,\beta)$$

(Les polynômes de Legendre sont omniprésent en théorie des représentations, car ce sont les fonctions sphériques du groupe $\mathrm{PSL}_2(\mathbb{R})$ associé à son sous groupe compact maximal $\mathrm{PSO}_2(\mathbb{R})$.)

Notons que L_k a la même parité que k. Par conséquent les symétries de θ entraînent l'antisymétrie $\mathrm{W}_k(\alpha,\beta) = -\mathrm{W}_k(\beta,\alpha)$ et la relation $\mathrm{W}_k(\alpha,\beta) = -(-1)^k\,\mathrm{W}_k(\alpha^{-1},\beta)$.

Conjecture 1.3 (Annulations)**.** *Mes expérimentations avec PARI/GP suggèrent que*

$$(\forall \alpha,\beta \in \mathrm{PSL}_2(\mathbb{Z}), \quad \mathrm{W}_k(\alpha,\beta) = 0) \quad \iff \quad (k = 0 \ \text{ ou } \ k \mid 6)$$

Le prochain paragraphe esquisse les raisons géométriques pour de telles annulations, reposant sur la géométrie symplectique des variétés de représentations $\operatorname{Hom}(\Gamma;\mathrm{PSL}_2(\mathbb{R}))$ *pour* Γ *un sous-groupe normal de* $\mathrm{PSL}_2(\mathbb{Z})$*. C'est également une source de motivations pour la section 2.*

Je suis donc confiant dans la véracité de cette conjecture et la stratégie de preuve (ainsi que leur généralisation aux groupes Fuchsiens qui deviendra évidente par la suite).

L'étude de ces nombres d'intersection fournira des indices supportant un lien conjectural entre les coefficients de structure pour deux algèbres : l'une reposant sur l'arithmétique des formes Γ*-modulaires (ou la théorie des représentations du groupe* $\mathrm{PSL}_2(\mathbb{R})$ *sur l'espace* $\mathrm{L}^2(\Gamma\backslash\mathrm{PSL}_2(\mathbb{R}))$*), et l'autre reposant sur la topologie des courbes dans la surface* $\Gamma\backslash\mathbb{H}$ *(encodant les déformations dans l'espace des représentations* $\operatorname{Hom}(\Gamma,\mathrm{PSL}_2(\mathbb{R}))$*).*

La suite L_k est également définie par sa série génératrice $\sum \mathrm{L}_k(x)q^k = \frac{1}{\sqrt{1+2xq+q^2}}$, d'où

$$\mathrm{W}(\alpha,\beta)(q) = \sum_{k=0}^{\infty}\mathrm{W}_k(\alpha,\beta)q^k = \sum_{p\in[\alpha]\pitchfork[\beta]} \frac{\operatorname{sign}(\theta_p)}{\sqrt{1-2\cos(\theta_p)q+q^2}}$$

L'expression des $\cos(\theta)$ entraîne $\mathrm{W}_k(\alpha,\beta) \in \mathbb{Q}[\sqrt{\operatorname{disc}(\alpha)\operatorname{disc}(\beta)}]$ (en particulier $\mathrm{W}_k(\alpha,\beta) \in \mathbb{Q}$ si $\alpha_\pm$ et $\beta_\pm$ engendrent la même extension quadratique de $\mathbb{Q}$).

Conjecture 1.4 (Modularité)**.** *Pour* $N \in \mathbb{N}^*$*, le sous groupe de congruence* $\Gamma_0(N) \subset \mathrm{PSL}_2(\mathbb{Z})$ *est défini par l'ensemble* $\{\left(\begin{smallmatrix} a & b \\ c & d\end{smallmatrix}\right) \in \mathrm{PSL}_2(\mathbb{Z}) \mid c = 0 \bmod N\}$.

Je conjecture que la série $W(\alpha,\beta)(q)$ *en la variable* $q = \exp(i2\pi\tau)$ *converge pour* $\Im(\tau) > 0$*, et définit une forme modulaire de poids 2 pour le groupe* $\Gamma_0(N)$ *de niveau* $N = \operatorname{disc}(\alpha)\operatorname{disc}(\beta)$*. (Nous savons par ailleurs qu'elle est cuspidale, au sens où* $W_0(\alpha,\beta) = 0$*.)*

Cette conjecture repose sur l'étude des opérateurs de Hecke associés aux sous-groupes de congruence du groupe modulaire, mais je n'en dirai pas plus à ce propos, et renvoie à [Ric22] *pour la construction de telles formes modulaires utilisant des nombres d'intersection analogues.*

Je suis sceptique quand à la formulation exacte de cette conjecture, mais on peut la mettre efficacement à l'épreuve à l'aide d'outils informatiques (comme PARI/GP et le LMFBD).

Explications. Un réseau $\Gamma \subset \mathrm{PSL}_2(\mathbb{R})$ agit sur le plan hyperbolique $\mathbb{H}$ avec pour quotient une orbiface hyperbolique $F = \Gamma\backslash\mathbb{H}$. Les classes d'homotopie libre de lacets de F correspondent aux classes de conjugaison de son groupe fondamental Γ.

Considérons la composante connexe $\mathcal{X}_F$ de l'inclusion $\iota\colon \Gamma \hookrightarrow \mathrm{PSL}_2(\mathbb{R})$ dans l'espace des représentations fidèles, discrètes et de covolume fini $\rho\colon \Gamma \to \mathrm{PSL}_2(\mathbb{R})$ modulo conjugaison par $\mathrm{PSL}_2(\mathbb{R})$ au but. Les quotients $F[\rho] = \rho(\Gamma)\backslash\mathbb{H}$ sont des orbifaces hyperboliques orientés, tous isotopes à $F = F[\iota]$.

Si $\gamma \in \Gamma$ est d'ordre infini, alors $\rho(\gamma)$ est parabolique ou hyperbolique, et la fonction $\rho \mapsto |\rho(\gamma)|$ retourne respectivement 0 ou la longueur l'unique géodésique associée dans $F[\rho]$. Ces fonctions déterminent $[\rho]$ et fournissent des coordonnées sur $\mathcal{X}(\Gamma)$.

Par exemple, si F est un tore troué de groupe fondamental $\Gamma = \mathbb{Z}_X * \mathbb{Z}_Y$, alors $\mathcal{X}_F$ est la « partie non-bornée » de la cubique de Markov réelle $\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 + z^2 = xyz\}$.

Pour deux géodésiques $[\alpha], [\beta] \subset F$, les intersections $p \in [\alpha] \pitchfork [\beta]$ persistent par déformation de $\iota \rightsquigarrow \rho$ tout en préservant leur signe $\mathrm{sign}_p(\alpha, \beta)$, mais les angles $\theta_p[\rho]$ dépendent de ρ. On peut ainsi définir leur nombres d'intersection

$$\mathrm{W}_k(\alpha, \beta)[\rho] = \sum_{p \in \alpha \pitchfork \beta} \mathrm{sign}(\alpha_p, \beta_p)\, \mathrm{L}(\cos(\theta_p[\rho]))$$

Les fonctions de longueur permettent de munir $\mathcal{X}(\Gamma)$ d'une structure de Poisson, qui est non-dégénérée si Γ est cocompact ([Gol84]), et la somme $\mathrm{W}_1(\alpha, \beta)(\rho)$ coïncide avec la formule de Wolpert [Wol81] pour le crochet de Poisson $\{|\alpha|, |\beta|\}$ évalué au point ρ. D'après [KM87], les nombres $\mathrm{W}_k(\alpha, \beta)(\rho)$ correspondent à des *crochets de Poisson de degrés supérieurs*.

Le groupe des automorphismes extérieurs $\mathrm{Out}(\Gamma) = \mathrm{Aut}(\Gamma)/\mathrm{Int}(\Gamma)$ agit continûment sur $\mathcal{X}(\Gamma)$, et le quotient $F = \mathrm{Out}(\Gamma)\backslash\mathcal{X}(\Gamma)$ est une orbifold dont les singularités sont stratifiées selon les stabilisateurs de $\mathrm{Out}(\Gamma)$ agissant sur $\mathcal{X}(\Gamma)$. Par ailleurs, pour tout sous-groupe $\Gamma' \subset \Gamma$, la restriction des représentations induit une injection $\mathcal{X}_F \to \mathcal{X}_{F'}$, et la représentation d'inclusion se relève en un point fixe sous l'action du groupe de Galois $\Gamma/\Gamma' \hookrightarrow \mathrm{Out}(\Gamma')$.

Si $\Gamma = \mathrm{PSL}_2(\mathbb{Z})$ et $\Gamma' = \mathrm{PSL}_2(\mathbb{Z})'$ est son sous groupe dérivé alors $\Gamma/\Gamma' = \mathbb{Z}/2 \times \mathbb{Z}/3$ donc le relevé de ι admet un stabilisateur d'ordre 6. Or $\Gamma' = \mathbb{Z}_X * \mathbb{Z}_Y$ pour $X = LR$ et $Y = RL$ donc $\dim \mathcal{X}_{F'} = 2$, et je pense que ces conditions entraînent l'annulation des W_k pour $k \mid 6$.

2. Coefficients de structure des algèbres de courbes dans les surfaces : variété des caractères et formes modulaires

Résumé. La plupart des notions définies et des conjectures énoncées dans le cas du groupe modulaire peuvent se généraliser au cas d'un réseau $\Gamma \subset \mathrm{PSL}_2(\mathbb{R})$, avec des variations selon la topologie de l'orbifold quotient F ou le caractère arithmétique de Γ.

La géométrie et l'arithmétique de Γ est intimement liée à l'analyse spectrale des opérateurs de Laplace et de Hecke agissant sur l'algèbre des formes différentielles $\Omega^*(F)$. A tout $\gamma \in \Gamma$, on peut associer des formes modulaires $\Theta^k_\gamma(z) \in \mathcal{M}^{2k}(F) \hookrightarrow \Omega^*(F)$ qui ne dépendent que de la classe de conjugaison de γ, et l'ensemble des $\Theta^k_\gamma(z)$ engendre $\mathcal{M}^{2k}(F)$. Les valeurs propres des opérateurs de Laplace et de Hecke peuvent être reliées aux produits hermitiens $\langle \Theta^k_\alpha \mid \Theta^k_\beta \rangle$. Ces produits scalaires, qui contiennent toute la richesse arithmétique des formes Γ-modulaires, s'expriment également en termes de la position géométrique relative des géodésiques $[\alpha], [\beta] \subset F$.

Par ailleurs, on peut déformer le réseau en considérant les représentations $\rho\colon \Gamma \to \mathrm{PSL}_2(\mathbb{R})$ proches de l'inclusion $\iota\colon \Gamma \to \mathrm{PSL}_2(\mathbb{R})$. A tout $\gamma \in \Gamma$ correspond une fonction trace $t_\gamma\colon \rho \to \operatorname{tr}\rho(\gamma)$ qui ne dépend que de la classe de conjugaison de γ, et l'ensemble des t_γ pour $\gamma \in \Gamma$ engendre linéairement l'algèbre des fonctions régulières sur $\mathrm{Hom}(\Gamma; \mathrm{PSL}_2(\mathbb{R}))$ invariantes par $\mathrm{PSL}_2(\mathbb{R})$ conjugaison. Ces fonctions satisfont des relations de trace qui peuvent être comprises en termes de la topologie des courbes dans F, par des calculs algébriques ou diagrammatiques.

Je souhaite comprendre les variations de l'algèbre des formes modulaires $\mathcal{M}^*(\rho(\Gamma))$ en termes des variations de la représentation fidèle et discrète $[\rho] \in \mathcal{X}_F \subset \mathrm{Hom}(\Gamma; \mathrm{PSL}_2(\mathbb{R}))/\!/\,\mathrm{PSL}_2(\mathbb{R})$.

Les variations infiniment petites (espace tangent en $T_\rho\mathcal{X}_F$) et infiniment grandes (dégénérescences au bord $\partial\mathcal{X}_F$) des produits scalaires $\langle \Theta^k_\alpha \mid \Theta^k_\beta \rangle$ ne dépendront plus que de la topologie combinatoire des courbes dans F. L'objectif sera d'établir des liens arithmétiques et combinatoires entre l'algèbre des formes modulaires $\mathcal{M}^*(\Gamma)$ et l'algèbre des fonctions traces $\mathbb{C}[\mathcal{X}_F]$.

Algèbre des caractères. Pour simplifier la présentation, supposons que $\Gamma \subset \mathrm{PSL}_2(\mathbb{R})$ n'ait pas d'éléments elliptiques ou paraboliques (bien que ces éventualités m'intéressent autant), de sorte que le quotient $F = \Gamma\backslash\mathbb{H}$ soit une surface hyperbolique compacte déterminée à homéomorphisme près par son genre g.

Une *courbe* de F est une classe d'homotopie libre de lacets non-orientés, et une *multicourbe* est un multi-ensemble de courbes. L'ensemble MC des multicourbes est d'une fonction $i(\alpha, \beta)$ comptant le nombre d'intersections $\mathrm{Card}(\alpha \pitchfork \beta)$ minimal parmi les représentants génériques de $\alpha \cup \beta$. Une multicourbe γ est simple lorsque $i(\gamma, \gamma) = 0$. Notons MS l'ensemble des multicourbes simples sans composantes triviales.

Du côté de la théorie des déformations, la variété des caractères $\mathcal{X}$ est définie comme le quotient algébrique de la variété des représentations $\mathrm{Hom}(\Gamma; \mathrm{SL}_2(\mathbb{C}))$ par l'action de $\mathrm{SL}_2(\mathbb{C})$-conjugaison au but. C'est une variété algébrique affine dont l'anneau des fonctions $\mathbb{C}[\mathcal{X}]$ est engendré par les fonctions trace $t_\gamma\colon \rho \mapsto \operatorname{tr}\rho(\gamma)$ pour $\gamma \in \Gamma$. et l'idéal des relations entre les fonctions t_γ est engendré par $t_1 = 2$ et $t_\alpha t_\beta - t_{\alpha\beta} - t_{\alpha\beta^{-1}}$ pour tout $\alpha, \beta \in \Gamma$. La fonction t_γ ne dépend que de la courbe correspondante $\gamma \subset F$.

Les relations de trace entraînent, comme expliqué dans la section 2 du rapport, que pour toute multicourbe $\gamma = \{\gamma_1, \ldots, \gamma_n\} \in \mathrm{MC}$, la fonction $t_\gamma = t_{\gamma_1} \ldots t_{\gamma_n}$ peut être décomposée en une combinaison linéaire :

$$t_\gamma = \sum_\kappa c_\kappa(\gamma) t_\kappa$$

Il découle des travaux de [PS00] que cette décomposition est unique de sorte que les MS indexe une base linéaire de $\mathbb{C}[\mathcal{X}]$. En particulier on peut définir le *support* de $f = \sum c_\kappa t_\kappa \in \mathbb{C}[\mathcal{X}]$ décomposé dans cette base comme $\mathrm{Supp}(f) = \{\kappa \in \mathrm{MS} \mid c_\kappa \neq 0\} \subset \mathrm{MS}$.

La base MS privilégiée du point de vue la topologique, est également préservée par le groupe des automorphismes de l'anneau $\mathbb{C}[\mathcal{X}]$, comme nous avons montré dans [MS21]. Il est donc naturel de chercher à comprendre les coefficients de structure pour la multiplication et le crochet de Poisson dans cette base des multicourbes simples.

La variété $\mathcal{X}$ possède une structure symplectique [Gol84, Gol86], et la formule de Wolpert [Wol81] exprime le crochet de Poisson de fonctions trace comme une somme des cosinus des angles d'intersections :

$$\tfrac{\operatorname{sign}(\operatorname{tr}\alpha\operatorname{tr}\beta)}{\sqrt{\operatorname{disc}\alpha\operatorname{disc}\beta}}\{t_\alpha, t_\beta\} = \sum_{p\in[\alpha]\pitchfork[\beta]} \operatorname{sign}(\theta_p)\cdot\cos(\theta_p)$$

La variété des caractères $\mathcal{X}$ est compactifiée par un espace $\mathbb{P}\,\mathrm{ML}$ ayant diverses incarnations (laminations mesurées, valuations simples, actions sur des arbres réels), et que l'on peut toujours interpréter comme une complétion du projectifié $\mathbb{P}\,\mathrm{MS}$ des multicourbes simples.

Renvoyons au rapport pour plus de détails.

Polytopes de Newton et coefficients de structure. L'ensemble MS est muni de la forme d'intersection $i\colon\ \mathrm{MC}\times\mathrm{MC}\to\mathbb{R}_+$ qui est non-dégénérée, au sens où si $\alpha,\beta\in\mathrm{MS}$ satisfait $i(\alpha,\gamma) = i(\alpha,\gamma)$ pour tout $\gamma\in\mathrm{MS}$, alors $\alpha=\beta$. La restriction $i\colon\ \mathrm{MS}\times\mathrm{MS}\to\mathbb{R}_+$ reste non-dégénérée, et il en va de même pour sa complétion $i\colon\ \mathrm{ML}\times\mathrm{ML}\to\mathbb{R}_+$.

Définition 2.1 (Polytope de Newton)**.** *Pour un ensemble $E\subset\mathrm{ML}$, on définit son dual, et son enveloppe convexe selon :*

$$E^* = \{\lambda\in\mathrm{ML}\mid \forall\mu\in E\colon i(\lambda,\mu)\le 1\}\quad\text{et}\quad \mathrm{Conv}(E) = (E^*)^*$$

Pour $f\in\mathbb{C}[\mathcal{X}]$, on définit son polytope de Newton dual et son polytope de Newton par :

$$\Delta^*(f) = \mathrm{Supp}(f)^* = \mathrm{E}(f)^*\quad\text{et}\quad \Delta(f) = \Delta^*(f)^* = \mathrm{Conv}\,\mathrm{E}(f)$$

(Cette définition du polytope de Newton par « bi-dualité » permet de contourner la notion de structure convexe, qui fait défaut sur ML).

Pour deux polytopes quelconques de ML, on peut choisir des fonctions génériques $f,g\in\mathbb{C}[\mathcal{X}]$ dont ce sont les polytopes de Newton et définir leur somme, de leur produit, de leur crochet de Poisson selon $\Delta(f+g)$ et $\Delta(fg)$ et $\Delta(\{f,g\})$. La compréhension de cette algèbre de polytopes est un premier pas vers la compréhension des coefficients de structure de $(\mathbb{C}[\mathcal{X}],\times,\{\})$.

C'est un analogue du calcul de Minkowski pour les polytopes dans l'espace des valuations d'une algèbre polynomiale libre $\mathbb{C}[\mathbb{C}^n]$.

Conjecture 2.2 (Distribution des Polytopes de Newton)**.** *Fixons une multicourbe $\beta\in\mathrm{MC}$ qui remplit la surface, et considérons l'ensemble $\{\alpha\in\mathrm{MC}\mid i(\alpha,\beta)<L\}$ muni de la probabilité uniforme, dans la limite où $L\to\infty$.*

Alors les polytopes de Newton projectifiés $\Delta(t_\alpha)$ convergent dans $\mathbb{P}\,\mathrm{ML}$ vers $\Delta^*(t_\beta)$ pour la topologie de Gromov Hausdorff, ou pour la mesure de la différence symmétrique renormalisée par le maximum des mesures. On peut également faire tendre β vers un courant géodésique remplissant quelconque tel que le courant de Liouville pour une métrique hyperbolique.

La preuve de cette conjecture devrait découler assez simplement des résultats de [Mir16, RS19] *(évoqués dans le dernier paragraphe du rapport).*

Question 2.3 (Convergence binomiale des coefficients $c_\kappa(t_\alpha)$)**.** *Considérons la même situation, avec une multicourbe $\beta\in\mathrm{MC}$ remplissant la surface, et l'ensemble $\{\alpha\in\mathrm{MC}\mid i(\alpha,\beta)<L\}$ muni de la probabilité uniforme, dans la limite où $L\to\infty$.*

Les coefficients $|c_\kappa(\alpha)|$ des t_α dans la base MS convergent-ils (après renormalisation) vers une distribution de probabilité géométrique sur le polytope. Nous avons montré dans [MS24] *que $|c_\kappa(\alpha)| = 1$ vaut 1 pour $\kappa\in\mathrm{E}(t_\alpha)$ un point extrémal de $\Delta(t_\alpha)$, et je m'attends à ce que les probabilités des coefficients $|c_\kappa(\alpha)|$ croissent un peu comme des coefficients binomiaux vers l'intérieur (j'imagine qu'ils comptent le nombre de chemins de κ vers le bord de $\mathbb{P}\,\Delta^*(t_\beta)$).*

Cette dernière question me paraît très importante, à l'instar des conjectures d'ergodicité quantique et comparable aux propriétés asymptotiques des caractères des groupes symmétriques. Cependant, elle semble difficile à étudier à cause des simplifications des termes dans l'algèbre des courbes lors de la résolution des intersections. Il serait plus raisonnable de commencer à montrer une « loi de Chebotarev » en ne considérant que les classes dans $H_2(F;\mathbb{Z}/2)$ des $\kappa\in\mathrm{Supp}(t_\alpha)$.

Algèbre des formes modulaires. Du côté de l'analyse harmonique, l'espace $\mathrm{L}^2(\Gamma\backslash \mathrm{PSL}_2(\mathbb{R}))$ contient une copie de l'algèbre graduée $\mathcal{M}(\Gamma)$ des formes différentielles holomorphes sur $\Gamma\backslash\mathbb{H}$, dont les composantes homogènes $\mathcal{M}^k(\Gamma)$ sont orthogonales et de dimension finie. (C'est une construction classique qui remonte à Borel [Bor97], rappelée en appendice suivant [LRS09].)

On peut associer à un élément $\gamma \in \Gamma$ des éléments $\Theta_\gamma^k \in \mathcal{M}^k(\Gamma)$ qui ne dépendent que de sa classe de sa conjugaison, et ces éléments engendrent linéairement $\mathcal{M}^k(\Gamma)$. La fonction Θ_γ^k est caractérisée par le fait que pour tout $f \in \mathcal{M}^k(\Gamma)$, le produit scalaire hermitien $\langle \Theta_\gamma^k \mid f\rangle$ retrouve la période $\int_{\vec{\gamma}} f(g)dg$ de f le long de l'orbite périodique $\vec{\gamma} \subset \Gamma\backslash G$.

Les parties imaginaires des produits scalaires entre fonctions Θ_γ^k ont été exprimées par S. Katok [Kat85, KM87] en termes des angles d'intersection des géodésiques $\alpha, \beta \subset F$:

$$\Im(\langle \Theta_\alpha^{k+1} \mid \Theta_\beta^{k+1}\rangle) = 2^{2k}\binom{2k}{k}^{-1}\left(\frac{\sqrt{\operatorname{disc}(\alpha)\operatorname{disc}(\beta)}}{\operatorname{sign}((\operatorname{tr}\alpha)(\operatorname{tr}\beta))}\right)^k \sum_{p\in[\alpha]\pitchfork[\beta]} \operatorname{sign}(\theta_p)\cdot \mathrm{L}_k(\cos(\theta_p))$$

L'ensemble des fonctions Θ_γ^k engendre $\mathcal{M}^k(\Gamma)$, mais la construction de bases de $\mathcal{M}^k(\Gamma)$ formées de fonctions Θ_γ^k reste un problème ouvert, abordé dans [Kat85, KM87, Kat89].

Conjecture 2.4 (Base). *Je propose la construction d'une base Hilbertienne pour la complétion de l'espace préhilbertien $\mathcal{M}(\Gamma)$ dans $\mathrm{L}^2(\Gamma\backslash G)$.*

Pour cela associons à $\gamma \in \Gamma$ la fonction $\sum_k c_k(\gamma)\Theta_{\gamma,k}$ où les coefficients $c_k(\gamma) \in \mathbb{C}$ dépendent simplement de $\operatorname{disc}(\gamma) = \operatorname{tr}(\gamma)^2 - 4$. *Je conjecture que la famille des $\Theta_\mu = \prod \Theta_{\mu_j}$ indexée par l'ensemble* MS *des multicourbes simples forme une base de $\mathcal{M}(\Gamma)$.*

Je souhaite exploiter cette base pour relier les coefficients de structure de la multiplication $\Theta_\alpha\Theta_\beta = \sum c(\alpha,\beta;\gamma)\Theta_\gamma$ à ceux du produit tensoriel des représentations de Γ, et des crochets de Poisson entre ces fonctions theta $\{\Theta_\alpha, \Theta_\beta\}$ et les fonctions trace $\{t_\alpha, t_\beta\}$.

Les approches de [PK23] *inspirées par la théorie conforme des champs, en particulier le calcul des coefficients de corrélations, semblent pertienentes pour ces questions de constructions de bases et de coefficients de structure.*

Coefficients de structure. Je souhaite comprendre les variations de l'algèbre $\mathcal{M}^k(\Gamma)$ lorsque l'on déforme du réseau $\Gamma \subset \mathrm{PSL}_2(\mathbb{R})$ et le dégénère vers le bord de sa variété des caractères X.

Conjecture 2.5. *L'un des objectifs sera d'établir des liens entre les coefficients de structure de l'algèbre $\mathcal{M}(\Gamma)$ pour le produit tensoriel et le crochet de Poisson et les coefficients de structure de l'algèbre $\mathbb{C}[X]$ pour la multiplication et le crochet de Poisson dans leurs bases privilégiées.*

On voudra d'abord relier les coefficients de structure pour le produit tensoriel de formes automorphes (donnés par des valeurs spéciales de fonction L), et les coefficients de structure pour le produit des fonctions dans l'algèbre des caractères (qui peuvent être calculés combinatoirement, et même diagrammatiquement en dessinant des courbes dans F). On voudra ensuite relier les produits scalaires hermitiens de certaines formes modulaires (ou des périodes de formes modulaires le long de géodésiques) aux crochets de crochets de Poisson entre les fonctions trace sur la variété des caractères. On voudra enfin faire dégénérer ces identités vers le bord de la variété des caractères pour retrouver des invariants topologiques tels que des nombres d'intersections de géodésiques de F, ou des nombres d'enlacements de leurs relevés dans U.

Remarque 2.6 (Stratégie). *La stratégie sera d'étudier des algèbres des fonctions sur le produit $G \times \operatorname{Hom}(\Gamma, G)$ invariantes par l'action de $\Gamma \rtimes \operatorname{Aut}(\Gamma)$ selon $(\gamma,\varphi)\cdot(g,\rho) = (\rho(\gamma)g, \varphi(\rho))$.*

En effet, l'isomorphisme Shimura [KM87] *établit un isomorphisme entre l'algèbre des formes modulaires (dont les périodes nous intéressent) et la cohomologie du groupe Γ à valeurs dans les puissances tensorielles (où les produits scalaires sont calculables).*

Or cette dernière est reliée à la structure locale espace tangent et crochets de Poisson) de ses variétés de caractères (à valeurs dans $\mathrm{PSL}_n(\mathbb{R})$ ou $\mathrm{PSp}_{2n}(\mathbb{R})$), dont l'algèbre des fonctions est encodée par la topologie des multicourbes (via les fonctions traces).

Cohomologie bornée. L'action de $G = \mathrm{PSL}_2(\mathbb{R})$ par multiplication à droite sur son compact maximal $K = \mathrm{PSO}_2(\mathbb{R})$, l'injecte dans le groupe $\mathrm{Homeo}^+(K)$ des homéomorphismes du cercle. Notons que le groupe $\Gamma \rtimes \mathrm{Aut}(\Gamma)$ s'injecte également dans $\mathrm{Homeo}^+(K)$. Or, E. Ghys a montré dans [Ghy87] que les représentations d'un groupe quelconque Γ dans $\mathrm{Homeo}^+(K)$ correspondent, modulo semi-conjugaison, à ses cocycles bornés à valeurs dans $\{-1, 0, 1\}$, soit « les points entiers de la sphère unité » de l'espace de Banach $H^2_b(\Gamma; \mathbb{R})$. Je pense que la compactification $\mathcal{X} \cup \mathbb{P}\mathrm{ML}$ de la variété des caractères s'injecte continuement dans cet espace $H^2_b(\Gamma; \mathbb{R})$, en interprétant le points de $\mathbb{P}\mathrm{ML}$ comme des actions de Γ sur des arbres réels.

Par ailleurs, pour un réseau $\Gamma \subset G$ sans torsion, Brooks–Series ont construit dans [BS84] des cocycles bornés, et [Gri95] a montré comment en extraire une base de Shauder. Dans le cas du groupe modulaire $\Gamma = \mathrm{PSL}_2(\mathbb{Z})$, on montre dans [Sim24] (voir section 1 du rapport) comment les nombres d'enlacement donnent lieu à des quasicaractères $\mathrm{C}_\alpha(\beta) = \mathrm{lk}(\alpha, \beta) - \mathrm{lk}(\alpha, \beta^{-1})$. C'est ainsi que l'on obtient une nouvelle base de Shauder de l'espace $H^2_b(\Gamma; \mathbb{R})$ qui est indexée par l'ensemble des classes de conjugaison hyperboliques modulo inversion de $\alpha \in \mathrm{PSL}_2(\mathbb{Z})$, et que l'on comprend comme une théorie de Fourier des quasi-caractères.

On montre également que la « periode » $\mathrm{C}_\alpha(\beta)$ est retrouvée comme la limite à l'unique point du bord de la variété des caractères de $\mathrm{PSL}_2(\mathbb{Z})$ (correspondant à son action sur l'arbre de Farey) d'une somme analogue à celle de Wolpert :

$$\mathrm{C}(\alpha, \beta) = \mathrm{lk}(\alpha, \beta) - \mathrm{lk}(\alpha, \beta^{-1}) = \lim_{\rho \to +\infty} \sum_{p \in [\alpha] \pitchfork [\beta]} \cos(\theta_\rho(p))$$

Conjecture 2.7. *Ce cercle d'idées suggère que la cohomologie bornée est adaptée pour exprimer les limites au bord de la variété des caractères des périodes des Θ_α, lorsque α est hyperbolique.*

(Lorsque α est parabolique, l'analogue de la série Θ_α est une série d'Eisenstein, dont les périodes sont données le logarithme de la fonction eta de Dedekind, ou le cocycle de Rademacher [Ati87], que Barge–Ghys ont identifié dans [BG92] avec la classe d'Euleur en cohomologie bornée.)

3. Appendice sur les formes automorphes

Dans cet appendice on explique brièvement la point de vue moderne de la théorie des représentations sur les formes modulaires consistant à les relever en des fonctions sur sur le groupe. On termine par un bref commentaire sur les utilités des différentes bases de formes automorphes.

Décomposition d'Iwasawa. Le groupe de Lie $G = \mathrm{PSL}_2(\mathbb{R})$ a un sous-groupe compact maximal $K = \{K(\theta) \mid \theta \in \mathbb{R}\}$, un sous-groupe abélien maximal $A = \{A(y) \mid y \in \mathbb{R}^*_+\}$ et un sous-groupe nilpotent maximal $N = \{N(x) \mid x \in \mathbb{R}\}$, fournissant la décomposition $G = NAK$, avec :

$$N(x) = \left(\begin{smallmatrix} 1 & x \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right) \quad A(y) = \begin{pmatrix} y^{+1/2} & 0 \\ 0 & y^{-1/2} \end{pmatrix} \quad K(\theta) = \begin{pmatrix} \cos(\theta) & -\sin(\theta) \\ \sin(\theta) & \cos(\theta) \end{pmatrix}$$

L'action de G par multiplication à gauche sur G préserve la métrique $\frac{1}{y^2}(dx^2 + dy^2) + \frac{1}{\pi} d\theta^2$ (propageant la forme de Killing sur son algèbre de Lie $\mathfrak{g}$, égal à son espace tangent à l'identité), dont la forme volume associée $\frac{1}{\pi y^2}(dx \wedge dy) \cdot d\theta$ définit la mesure de Haar bi-invariante sur G.

Après avoir quotienté par l'action de K par multiplication à droite, on trouve l'action à gauche sur son espace symétrique G/K par isométries pour la métrique quotient, égale à $\log \|PQ^{-1}\|^2$ où $\|M\|^2 = \mathrm{tr}({}^tRR)$ est la norme d'opérateur.

Le groupe $\mathrm{PSL}_2(\mathbb{R})$ agit également sur $\mathbb{H} = \{z = x + iy \in \mathbb{C} \mid y = \Im(z) > 0\}$ selon

$$\gamma = \left(\begin{smallmatrix} a & b \\ c & d \end{smallmatrix}\right) \in \mathrm{PSL}_2(\mathbb{R}) \quad \gamma(z) = \tfrac{az+b}{cz+d} \qquad \tfrac{d\gamma}{dz} = \tfrac{1}{(cz+d)^2} \quad \Im(\gamma z) = \tfrac{1}{|cz+d|}$$

préservant la métrique hyperbolique $\frac{1}{y^2}(dx^2 + dy^2)$. Cette action est transitive, et le stabilisateur de i est K, qui agit librement sur son cercle des vecteurs tangents unitaires $\mathbb{S}_i\mathbb{H}$. Ainsi G agit transitivement sur le fibré tangent unitaire $\mathbb{S}\mathbb{H}$. Les orbites des points bases $i \in \mathbb{H}$ et $(i, 1) \in \mathbb{S}\mathbb{H}$ fournissent des isométries d'entrelacement $G \to \mathbb{S}\mathbb{H}$ et $G/K = NE \to \mathbb{H}$ dont les inverses sont $(x + iy, e^{i\theta}) \mapsto N(x)A(y)K(\theta)$ et $x + iy \mapsto N(x)A(y)$.

Algèbre de Lie et opérateurs différentiels. Définissons l'algèbre de Lie $\mathfrak{g} = \mathfrak{sl}_2(\mathbb{R})$ comme ses champs de vecteurs invariants à gauche. Elle s'identifie avec son espace tangent à l'identité, à savoir les matrices de trace nulle, où l'action de $m \in \mathfrak{g}$ sur une fonction lisse $f \in \mathscr{C}^\infty(G)$ est donnée par $p \cdot f(P) = \frac{d}{dt} f(P\exp(tp))|_{t=0}$.

L'algèbre de Lie enveloppante $\mathcal{U}(\mathfrak{g})$ correspond aux opérateurs différentiels sur G. C'est une algèbre de associative contenant $\mathfrak{g}$ et dont le centre $\mathcal{Z}(\mathfrak{g})$ est l'algèbre polynomiale $\mathbb{C}[\mathfrak{d}]$ engendrée par l'opérateur de Casimir $\mathfrak{d} = y^2(\partial_x^2 + \partial_y^2) + y\partial_x\partial_\theta = \frac{1}{2}\left(\partial_L\partial_R + \partial_R\partial_L - \frac{1}{2}(\partial_\theta)^2\right)$ où :

$$\partial_R = +2ie^{+2i\theta}\left(y\partial_z + \tfrac{1}{4}\partial\theta\right) \qquad \partial_z = \tfrac{1}{2}(\partial_x - i\partial_y)$$
$$\partial_L = -2ie^{-2i\theta}\left(y\partial_{\overline{z}} + \tfrac{1}{4}\partial\theta\right) \qquad \partial_{\overline{z}} = \tfrac{1}{2}(\partial_x + i\partial_y)$$

Fonctions automorphes. La $\mathbb{C}$-algèbre des fonctions complexes $\mathscr{C}^\infty(G)$ est munie d'une action par $\Gamma\times G$ selon $(\gamma, P)\cdot\varphi(M) = \varphi(\gamma^{-1}MP)$ et par l'algèbre $\mathcal{U}(\mathfrak{g})$ des opérateurs différentiels. L'action de $\Gamma \times G$ commute avec le centre $\mathcal{Z}(\mathfrak{g}) = \mathbb{C}[\mathfrak{d}]$, donc le sous-espace $\mathscr{C}^\infty(\Gamma\backslash G)$ des fonctions Γ-invariantes admet une action par $\mathbb{C}[\mathfrak{d}]$ et G qui commutent.

Le fibré tangent unitaire $U = \Gamma\backslash G$ est une variété munie de l'action à droite de G préservant la métrique quotient et sa forme volume. L'espace Hilbertien $\mathrm{L}^2(\Gamma\backslash G)$ pour le produit scalaire $\langle\varphi, \psi\rangle = \int_U \overline{\varphi}\psi$ est muni de la représentation régulière à droite de G selon $g_0 \cdot \varphi(g) = \varphi(g_0^{-1}g)$ et du prolongement de l'opérateur de Casimir $\mathfrak{d}$.

L'opérateur de Casimir $\mathfrak{d}$ est autoadjointe, et avec l'action à droite du groupe abélien compact K, donc on peut simultanément les « diagonaliser » en base orthogonale. Une fonction propre $f \in \mathscr{C}^\infty(\Gamma\backslash G)$ sous l'action de $\mathbb{C}[\mathfrak{d}] \times K$ avec valeurs propres $(\lambda, k) \in \mathbb{R}\times\mathbb{Z}$, satisfait :

$$\mathfrak{d}f(M) = \lambda f(M) \qquad f(M\cdot K(\theta)) = f(M)\exp(i2k\theta)$$

Dans ce cas, les fonctions $\partial_L f$ et $\partial_R f$ restent équivariantes sous l'action de $\mathbb{C}[\mathfrak{d}] \times K$ avec pour valeurs propres $(\lambda, k-1)$ et $(\lambda, k+1)$.

Une forme différentielle sur $\Gamma\backslash\mathbb{H}$ de poids k notée $f(z)dz^k$ se relève en une fonction sur $\Gamma\backslash G$ par la formule $\varphi(M) = f(M(i))M'(i)^{-k}$ satisfaisant $\varphi(MK(\theta)) = \varphi(M)\exp(-i2k\theta)$. En particulier pour $k = 0$, les fonctions propres du Laplacien sur $\mathbb{H}$ pour la valeur λ se relèvent en les fonction propres sur G sous l'action de $\mathbb{C}[\mathfrak{d}] \times K$ pour la valeur propre $(\lambda, 0)$.

Décomposition spectrale. L'hypothèse Γ cocompact entraine que $\mathfrak{d}$ a un spectre discret, et l'on peut décomposer $\mathrm{L}^2_0(\Gamma\backslash G)$ en la somme des espaces propres pour l'action du groupe compact abélien K selon les valeurs propres e^{ik} indexés par son groupe dual $k \in \mathbb{Z}$

$$\mathrm{L}^2(\Gamma\backslash G) = \mathbb{C}\cdot 1 \oplus \mathrm{L}^2_0(\Gamma\backslash G) \qquad \mathrm{L}^2_0(\Gamma\backslash G) = \bigoplus_{-\infty}^{+\infty} W_k$$

et sur lesquels l'opérateur de Casimir agit comme la multiplication par $k(1-k)$.

En particulier les fonctions de W_0 sont constantes sur les fibres de $U \to F$ et descendent en des fonctions harmoniques sur F. Pour $k \neq 0$, les espaces W^k et W^{-k} se correspondent par conjugaison complexe $F \mapsto \overline{F}$, et nous avons une identification entre W^k et l'espace $\mathcal{M}^{2k}(\Gamma)$ des formes modulaires (toutes cuspidales dans le cas compact), via le relevé susmentionné.

Remarque 3.1. *Pour tout $k \in \mathbb{Z}$, l'espace W_k se décompose en la somme $W_k = \bigoplus_{j=1}^\infty W_j^k$ de représentations irréductibles pour l'action de $(\mathfrak{d}, K)$ et des opérateurs de Hecke. On peut ensuite exprimer $W_j^k = \mathrm{Vect}_C\{\dots, \partial_L^2\phi_j^k, \partial_L^1\phi_j^k, \phi_j^k, \partial_R^1\phi_j^k, \partial_L^2\phi_j^k, \dots\}$ où les fonctions spéciales ϕ_j^k appelées fonctions propre de Maass-Hecke. (Voir* [Bor97, Iwa02]*.)*

Les fonctions ϕ_j^k satisfont des propriétés arithmétiques remarquables (les coefficients de leurs développements de Fourier sont les valeurs propres des opérateurs de Hecke), et sont souvent utilisées en conjonction avec la formule des traces pour montrer des résulats d'équidistribution (voir [LRS09] *par exemple).*

Ainsi, il serait intéressant d'exprimer les séries Θ_γ^k en fonction des ϕ_j^k et de comparer les bases formées par l'une et l'autre.

Références

[Ati87] Michael Atiyah. The logarithm of the Dedekind η-function. *Math. Ann.*, 278(1-4) :335–380, 1987. 2, 10

[BAPP19] Anne Broise-Alamichel, Jouni Parkkonen, and Frédéric Paulin. *Equidistribution and counting under equilibrium states in negative curvature and trees*, volume 329 of *Progress in Mathematics*. Birkhäuser/Springer, Cham, [2019] ©2019. Applications to non-Archimedean Diophantine approximation, Appendix by Jérôme Buzzi. 4

[BG92] Jean Barge and Étienne Ghys. Cocycle d'Euler et de Maslov. *Math. Ann.*, 294 :235–265, 1992. 10

[Bor97] Armand Borel. *Automorphic forms on* $\mathrm{SL}_2(\mathbf{R})$, volume 130 of *Cambridge Tracts in Mathematics*. Cambridge University Press, Cambridge, 1997. 9, 11

[BS84] Robert Brooks and Caroline Series. Bounded cohomology for surface groups. *Topology*, 23(1) :29–36, 1984. 10

[CL12] Moira Chas and Steven P. Lalley. Self-intersections in combinatorial topology : statistical structure. *Invent. Math.*, 188(2) :429–463, 2012. 4

[Cox89] David A. Cox. *Primes of the form* $x^2 + ny^2$. A Wiley-Interscience Publication. John Wiley & Sons, Inc., New York, 1989. Fermat, class field theory and complex multiplication. 1

[CS23] Solly Coles and Richard Sharp. Distribution of periodic orbits in the homology group of a knot complement, 2023. 4

[DD79] Régine Douady and Adrien Douady. *Algèbre et théories galoisiennes. 2*. CEDIC, Paris, 1979. Théories galoisiennes. [Galois theories]. 1

[dSG10] Henri Paul de Saint-Gervais. *Uniformisation des surfaces de Riemann*. ENS Éditions, Lyon, 2010. Retour sur un théorème centenaire. [A look back at a 100-year-old theorem], The name of Henri Paul de Saint-Gervais covers a group composed of fifteen mathematicians : Aurélien Alvarez, Christophe Bavard, François Béguin, Nicolas Bergeron, Maxime Bourrigan, Bertrand Deroin, Sorin Dumitrescu, Charles Frances, Étienne Ghys, Antonin Guilloux, Frank Loray, Patrick Popescu-Pampu, Pierre Py, Bruno Sévennec, and Jean-Claude Sikorav. 1

[Ghy87] Étienne Ghys. Groupes d'homéomorphismes du cercle et cohomologie bornée. In *The Lefschetz centennial conference, Part III (Mexico City, 1984)*, volume 58 of *Contemp. Math.*, pages 81–106. Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1987. 10

[Ghy07] Étienne Ghys. Knots and dynamics. In *International Congress of Mathematicians. Vol. I*, pages 247–277. Eur. Math. Soc., Zürich, 2007. 2

[GL16] Étienne Ghys and Jos Leys. Lorenz and modular flows : a visual introduction. http ://www.ams.org/publicoutreach/feature-column/fcarc-lorenz, 2016. 2

[GM86] William M. Goldman and John J. Millson. Eichler-Shimura homology and the finite generation of cusp forms by hyperbolic Poincaré series. *Duke Math. J.*, 53(4) :1081–1091, 1986. 3

[Gol84] William M. Goldman. The symplectic nature of fundamental groups of surfaces. *Adv. in Math.*, 54(2) :200–225, 1984. 6, 8

[Gol86] William M. Goldman. Invariant functions on Lie groups and Hamiltonian flows of surface group representations. *Invent. Math.*, 85(2) :263–302, 1986. 8

[Gra00] Jeremy J. Gray. *Linear differential equations and group theory from Riemann to Poincaré*. Birkhäuser Boston, Inc., Boston, MA, second edition, 2000. 1

[Gri95] R. I. Grigorchuk. Some results on bounded cohomology. In *Combinatorial and geometric group theory (Edinburgh, 1993)*, volume 204 of *London Math. Soc. Lecture Note Ser.*, pages 111–163. Cambridge Univ. Press, Cambridge, 1995. 10

[Gro97] Alexander Grothendieck. Esquisse d'un programme. In L. Schneps and P. Lochak, editors, *Geometric Galois Actions*, volume London Math. Soc. Lecture Notes 242, pages 5–48. Cambridge University Press, 1997. 1

[Iwa02] Henryk Iwaniec. *Spectral methods of automorphic forms*, volume 53 of *Graduate Studies in Mathematics*. American Mathematical Society, Providence, RI ; Revista Matemática Iberoamericana, Madrid, second edition, 2002. 11

[Kat85] Svetlana Katok. Closed geodesics, periods and arithmetic of modular forms. *Invent. Math.*, 80(3) :469–480, 1985. 3, 5, 9

[Kat89] Svetlana Katok. Finite spanning sets for cusp forms and a related geometric result. *J. Reine Angew. Math.*, 395 :186–195, 1989. 3, 9

[Khr08] Sergey Khrushchev. *Orthogonal polynomials and continued fractions*, volume 122 of *Encyclopedia of Mathematics and its Applications*. Cambridge University Press, Cambridge, 2008. From Euler's point of view. 1

[Kle79] Felix Klein. *Development of mathematics in the 19th century*, volume IX of *Lie Groups : History, Frontiers and Applications*. Math Sci Press, Brookline, MA, 1979. With a preface and appendices by Robert Hermann, Translated from the German by M. Ackerman. 1

[KM87] Svetlana Katok and John J. Millson. Eichler-Shimura homology, intersection numbers and rational structures on spaces of modular forms. *Trans. Amer. Math. Soc.*, 300(2) :737–757, 1987. 3, 6, 9

[Kra85] Irwin Kra. Cusp forms associated to loxodromic elements of Kleinian groups. *Duke Math. J.*, 52(3) :587–625, 1985. 3

[KZ01] Maxim Kontsevich and Don Zagier. Periods. In *Mathematics unlimited—2001 and beyond*, pages 771–808. Springer, Berlin, 2001. 1

[LRS09] Wenzhi Luo, Zeév Rudnick, and Peter Sarnak. The variance of arithmetic measures associated to closed geodesics on the modular surface. *J. Mod. Dyn.*, 3(2) :271–309, 2009. 4, 9, 11

[McM13] Curtis T. McMullen. Knots which behave like the prime numbers. *Compos. Math.*, 149(8) :1235–1244, 2013. 1, 4

[Mir07] Maryam Mirzakhani. Weil-Petersson volumes and intersection theory on the moduli space of curves. *J. Amer. Math. Soc.*, 20(1) :1–23, 2007. 1

[Mir16] M. Mirzakhani. Counting mapping class group orbits of curves on hyperbolic surfaces. arXiv :1601.03342, 2016. 8

[Moz13] C. J. Mozzochi. Linking numbers of modular geodesics. *Israel J. Math.*, 195(1) :71–95, 2013. 4

[MS21] Julien Marché and Christopher-Lloyd Simon. Automorphisms of character varieties. *Ann. H. Lebesgue*, 4 :591–603, 2021. arXiv version. 7

[MS24] Julien Marché and Christopher-Lloyd Simon. Valuations on the character variety : Newton polytopes and residual Poisson bracket. *Geom. Topol.*, 28(2) :593–625, 2024. arXiv version. 8

[PK23] Sridip Pal Petr Kravchuk, Dalimil Mazac. Automorphic spectra and the conformal bootstrap. `https://arxiv.org/abs/2111.12716`arXiv :2111.12716, 2023. 9

[PP90] William Parry and Mark Pollicott. Zeta functions and the periodic orbit structure of hyperbolic dynamics. *Astérisque*, (187-188) :268, 1990. 4

[PS00] Józef H. Przytycki and Adam S. Sikora. On skein algebras and $\mathrm{Sl}_2(\mathbf{C})$-character varieties. *Topology*, 39(1) :115–148, 2000. 7

[Ric22] James Rickards. Hecke operators acting on optimal embeddings in indefinite quaternion algebras. *Acta Arith.*, 204(4) :347–367, 2022. 5

[RS19] Kasra Rafi and Juan Souto. Geodesic currents and counting problems. *Geometric and Functional Analysis*, 29 :871–889, 2019. 8

[Sar10] Peter Sarnak. Linking numbers of modular knots. *Commun. Math. Anal.*, 8(2) :136–144, 2010. 4

[Ser70] Jean-Pierre Serre. *Cours d'arithmétique*, volume 2 of *Collection SUP : "Le Mathématicien"*. Presses Universitaires de France, Paris, 1970. 3

[Sha01] Richard Sharp. Closed geodesics and periods of automorphic forms. *Adv. Math.*, 160(2) :205–216, 2001. 4

[Sim22] Christopher-Lloyd Simon. *Arithmetic and Topology of Modular knots*. Thèse, Université de Lille, June 2022. HAL version. 2

[Sim24] Christopher-Lloyd Simon. Linking numbers of modular knots, 2024. To appear in Geometry and Topology for publication, arXiv version. 2, 4, 5, 10

[Uek21] Jun Ueki. Chebotarev links are stably generic. *Bull. Lond. Math. Soc.*, 53(1) :82–91, 2021. 4

[Wol81] Scott Wolpert. An elementary formula for the Fenchel-Nielsen twist. *Comment. Math. Helv.*, 56(1) :132–135, 1981. 6, 8

[Zag18] Don Zagier. The arithmetic and topology of differential equations. In *European Congress of Mathematics*, pages 717–776. Eur. Math. Soc., Zürich, 2018. 1