USC Dornsife
Dana and David Dornsife
College of Letters, Arts and Sciences

DEPARTMENT OF MATHEMATICS
*Francis Bonahon*
*Professor of Mathematics*

**Rapport sur la thèse de doctorat**
**de Christopher-Lloyd Simon**

La thèse de Christopher-Lloyd Simon est centrée sur un thème très précis, les matrices 2-2 à coefficients réels, ou même entiers. A priori, on pourrait naïvement penser qu'il s'agit là d'un cadre très limité et peut-être même trop élémentaire. Il n'en est évidemment rien, car tout l'intérêt de la thèse est de combiner différent aspects de ce sujet, entre autres:

- les propriétés arithmétiques du groupe $SL_2(\mathbf{K})$ de matrices de déterminant 1, où $\mathbf{K}$ est un corps de nombres réel, y compris le cas où $\mathbf{K}$ est le corps $\mathbf{Q}$ des nombres rationnels;
- les propriétés combinatoires de $SL_2(\mathbf{Z})$, et leur lien avec les fractions continues et les nombres algébriques quadratiques;
- les propriétés géométriques du plan hyperbolique $\mathbf{H}$, qui est l'espace symétrique associé au groupe de Lie $SL_2(\mathbf{R})$;
- les propriétés topologiques des nœuds modulaires dans l'espace, associés aux classes de conjugaison de $SL_2(\mathbf{Z})$.

Ces thèmes sont bien sûr classiques (à l'exception du dernier), mais une grande originalité de ce travail est de mettre l'accent sur l'algèbre de Lie $\mathbf{sl}_2(\mathbf{R})$ du groupe $SL_2(\mathbf{R})$, munie de la forme quadratique définie par le déterminant. Ceci fournit un outil qui a été peu (ou même jamais?) exploré et exploité jusqu'à présent et, au delà des résultats obtenus, l'une des contributions majeures de la thèse est de montrer la puissance de ces techniques.

Je vais maintenant grouper les résultats de la thèse par thèmes.

**Propriétés arithmétiques**

Le problème central est le suivant. Soit $\mathbf{K}$ un sous-corps du corps des réels, un exemple typique étant le corps $\mathbf{Q}$ formé des nombres rationnels. Si l'on se donne deux éléments du groupe $SL_2(\mathbf{K})$, ou de l'algèbre de Lie $\mathbf{sl}_2(\mathbf{K})$, quand est-ce que ces deux éléments sont conjugués par un élément de $SL_2(\mathbf{K})$? Il y a une obstruction évidente qui est que les deux éléments doivent avoir la même trace dans le premier cas, et le même déterminant dans le deuxième cas. Simon dégage une deuxième obstruction, d'origine géométrique, et montre que celle-ci résout complètement le problème.

Il considère d'abord le cas de deux éléments **a** et **b** de l'algèbre de Lie $\mathbf{sl}_2(\mathbf{K})$. Soient **a** et **b** deux éléments de cet espace, de même déterminant. Simon met en evidence un invariant supplémentaire, qui est le birapport de 2 paires de points respectivement associées à **a** et **b**. Il montre alors que **a** et **b** sont conjugués par un élément de $SL_2(\mathbf{K})$ si et seulement si une certaine équation de type Pell, déterminée par le birapport, admet une solution dans **K**. De plus, les éléments de $SL_2(\mathbf{K})$ qui conjuguent **a** et **b** sont paramétrés par les solutions de cette équation de Pell.

Ayant transformé le problème en un problème de théorie des nombres, Simon peut alors déterminer explicitement les classes de $SL_2(\mathbf{K})$-équivalence de $\mathbf{sl}_2(\mathbf{K})$, au moins quand $\mathbf{K} = \mathbf{Q}$. La thèse présente quelques exemples.

Il est ici important de remarquer que, alors que le problème d'origine et la solution sont de nature très arithmétique, celle-ci est obtenue par un détour qui utilise la géométrie de la forme quadratique de $\mathbf{sl}_2(\mathbf{K})$, qui est l'une des idées essentielles de la thèse.

**Propriétés arithmétiques et géométriques**

Simon applique alors ces résultats au cas de deux éléments A et B du groupe $SL_2(\mathbf{Z})$, demandant quand A et B sont conjugués par un élément de $SL_2(\mathbf{Q})$. Il utilise pout cela un dictionnaire établissant une correspondance entre

- les nombres algébriques quadratiques;
- les éléments du groupe $SL_2(\mathbf{Z})$;
- les formes quadratiques indéfinies en deux variables et à coefficients entiers;
- les vecteurs **a** de type espace dans le réseau dual de $\mathbf{sl}_2(\mathbf{Z})$ dans $\mathbf{sl}_2(\mathbf{R})$, la dualité étant définie par la forme quadratique de $\mathbf{sl}_2(\mathbf{R})$ que nous connaissons maintenant bien.

Quand on applique les résultats précédents aux éléments **a** et **b** de $\mathbf{sl}_2(\mathbf{R})$ associés aux éléments A et B de $SL_2(\mathbf{Z})$, ceux-ci ont une très jolie interprétation géométrique. En effet, A et B définissent deux géodésiques fermés $\alpha$ et $\beta$ dans l'orbifold modulaire $\mathbf{H}/SL_2(\mathbf{Z})$, quotient du plan hyperbolique **H** par l'action du groupe $SL_2(\mathbf{Z})$. Simon montre que A et B sont conjugués dans $SL_2(\mathbf{Q})$ si et seulement si ces deux géodésiques $\alpha$ et $\beta$ ont la même longueur $\lambda$ et satisfont les conditions géométriques équivalentes suivantes:

- il existe un point d'intersection de $\alpha$ et $\beta$ où une certaine équation de type Pell, déterminée par la longueur $\lambda$ et l'angle $\theta$ d'intersection de $\alpha$ et $\beta$ en ce point, admet une solution rationnelle;
- pour tout point d'intersection de $\alpha$ et $\beta$, l'équation de Pell ci-dessus admet une solution rationnelle;
- il existe un arc géodésique rencontrant orthogonalement $\alpha$ et $\beta$ en ses extrémités pour lequel une certaine équation de type Pell, déterminée par la longueur $\lambda$ de $\alpha$ et $\beta$ et de cet arc, admet une solution rationnelle;
- pour tout arc géodésique rencontrant orthogonalement $\alpha$ et $\beta$ en ses extrémités, l'équation de Pell ci-dessus admet une solution rationnelle.

La question est ainsi résolue par ce critère géométrique très curieux.

**Propriétés topologiques**

Les géodésiques fermées de $\alpha$ et $\beta$ de l'orbifold modulaire $\mathbf{H}/SL_2(\mathbf{Z})$ nous amènent à des questions plus topologiques. Il se trouve que le fibré tangent unitaire de $\mathbf{H}/SL_2(\mathbf{Z})$ est homéomorphe au complément du nœud de trèfle, et par conséquent se plonge de manière naturelle dans l'espace euclidien de dimension 3. Les géodésiques $\alpha$ et $\beta$ admettent un relèvement canonique dans ce fibré tangent, et définissent donc deux nœuds disjoints $K_\alpha$ et $K_\beta$ dans l'espace. Un invariant simple de cette configuration est le nombre d'entrelacement de $K_\alpha$ et $K_\beta$.

Rappelons que $\alpha$ et $\beta$ proviennent d'éléments A et B de $SL_2(\mathbf{Z})$, et plus précisément de leurs classes de conjugaison. Ces classes de conjugaison ont une description très classique en termes de mots cycliques en deux symboles, traditionnellement notés L et R. Un algorithme de Pierre Dehornoy détermine le nombre d'entrelacement de $K_\alpha$ et $K_\beta$ en fonction des deux mots correspondants. La section 4.2 de la thèse fournit une méthode différente pour calculer ce nombre d'entrelacement à partir de la combinatoire de A et B.

Celle-ci trouve son application dans le thème suivant.

**Propriétés topologiques et géométriques**

Nous retournons dans la géométrie hyperbolique. Le plongement de $SL_2(\mathbf{Z})$ and $SL_2(\mathbf{R})$ admet une déformation $SL_2(\mathbf{Z})_q$, en un sous-groupe discret de $SL_2(\mathbf{R})$, dépendant d'un paramètre $q>0$. Géométriquement, l'orbifold $\mathbf{H}/SL_2(\mathbf{Z})_q$ est obtenue à partir de l'orbifold modulaire $\mathbf{H}/SL_2(\mathbf{Z})$ en élargissant son cusp (d'aire finie) en un trou d'aire infinie contenant une géodésique fermée. En particulier, deux éléments A et B de $SL_2(\mathbf{Z})$ déterminent deux éléments $A_q$ et $B_q$ de $SL_2(\mathbf{Z})_q$, et deux géodésiques $\alpha_q$ et $\beta_q$ dans $\mathbf{H}/SL_2(\mathbf{Z})_q$. En chaque point d'intersection, Simon considère alors l'angle $\theta$ formé par $\alpha_q$ et $\beta_q$ en ce point, et la quantité $\cos^2 \theta/2$ qui était déjà à la base de son critère arithmétique. Il prend la somme $S_q$ de ces $\cos^2 \theta/2$ pour tous les points d'intersection.

À ce point-ci, tout est défini en dimension 2 dans l'orbifold $\mathbf{H}/SL_2(\mathbf{Z})_q$ mais Simon montre que, si l'on fait tendre q vers l'infini, on obtient une information de dimension 3. Plus précisément, la limite de $S_q$ quand q tend vers l'infini est précisément le nombre d'entrelacement des deux nœuds modulaires associés aux éléments A et B de $SL_2(\mathbf{Z})$. C'est vraiment très joli, et très surprenant.

La démonstration est basée sur les formules obtenues précédemment dans le cadre topologique.

Je pourrais continuer ainsi à énoncer des résultats de la thèse, mais je crois avoir mentionné ceux que je trouve les plus marquants. (Au passage, j'ai souvent négligé des hypothèses de généricité, ainsi que la différence entre le groupe $SL_2(\mathbf{R})$ et son quotient $PSL_2(\mathbf{R})$ d'indice 2.) J'espère surtout avoir montré qu'il s'agit là d'une thèse très substantielle, tant du point de vue de la quantité des résultats obtenus que de l'originalité de son approche.

J'ajouterais que l'auteur a privilégié la cohérence scientifique, en ne mettant ici qu'une partie de ses travaux de recherche et en se limitant à un thème très précis. Comme d'autres, il aurait pu viser la quantité en incluant ses œuvres complètes, comprenant des articles sur des thèmes différents de ceux de la thèse, qu'il a publiés ou disséminés sous forme de prépublications. Le résultat en aurait été une thèse encore plus massive, et le rapporteur est reconnaissant que l'auteur ait fait un choix différent. Cette décision a l'avantage de mettre en évidence l'originalité de ce travail, et les qualités scientifiques de son auteur. Celui-ci est visiblement très bien lancé pour sa carrière mathématique ultérieure.

En particulier, la thèse de doctorat soumise par Christopher-Lloyd Simon est d'un niveau très élevé, et je recommande très chaleureusement sa soutenance.

Francis Bonahon
Professeur de Mathématiques Émérite
Université de Californie Méridionale
(University of Southern California)

East Lansing, le 31 mai 2022.