

COURBES DANS LES SURFACES

RAPPORT DE RECHERCHE POUR LE CONCOURS N41 DU CNRS 2024

CHRISTOPHER-LLOYD SIMON

CENTRES D'INTÉRÊTS ET MOTIVATIONS MATHÉMATIQUES

Centres d'intérêts et compétences. Notre intérêt pour les mathématiques a deux sources principales : le désir de comprendre le monde qui nous entoure, et l'amusement que l'on éprouve durant la résolution des énigmes.

Ces deux aspects sont liés puisque les grands domaines (comme les systèmes dynamiques ou la théorie des jeux) reposent sur des théories plus spécifiques (comme la combinatoire, les probabilités, la théorie des groupes, les équations différentielles, ou la topologie).

Tout cela m'intéresse, et j'éprouve un grand plaisir à partager mes réflexions, écouter les spécialistes dans différents domaines.

Mes compétences principales (disons les domaines que j'ai étudié et dans lesquels j'ai publié ou initié des recherches) concernent :

- la géométrie classique (projective sur un corps quelconque, hyperbolique), en lien avec la théorie algébrique des nombres [Sim23a]
- la combinatoire algébrique (théorie des graphes, polynômes de Tutte, diagrammes de cordes) et la combinatoire analytique (fonctions génératrices), [GS20, Sim22c, Sim23b]
- topologie algébrique et de basse dimension (courbes dans les surfaces, théorie des noeuds) [Sim22a, Sim22b, Sim23b]
- géométrie des groupes hyperboliques et de leurs groupes d'automorphismes (actions sur des arbres, variété des caractères, cohomologie bornée) [MS21, MS24, Sim22b]
- géométrie algébrique réelle, théorie des singularités [GS20, Sim22c]

Ces recherches sont unies par l'étude (géométrique, arithmétique, topologique, combinatoire) des *courbes dans les surfaces*.

J'ai préféré concentrer ce rapport sur les thèmes développés dans mon projet de recherche (que j'ai lui-même restreint pour des questions de cohérence). Ainsi je ne parlerai pas des travaux concernant la combinatoire des diagrammes de cordes ou de leurs graphes d'entrelacement, que j'ai exploré dans mes premières publications [GS20, Sim22c] pour énumérer les classes d'isotopie de courbes algébriques réelles singulières, ainsi que dans ma dernière prépublication [Sim23b] pour analyser la structure grammaticale des classes d'isotopie de courbes dans les surfaces.

La suite de l'introduction rappelle mes balbutiements mathématiques concernant les propriétés statistiques asymptotiques des groupes symétriques, en vue de motiver les résultats présentés dans la suite de rapport concernant les groupes de surface, ainsi que les questions et conjectures proposées dans le projet de recherche.

La section 1 expose mes travaux concernant l'arithmétique et la topologie du groupe modulaire, apparaissant dans ma thèse [Sim22a] et les articles [Sim23a, Sim22b] qui l'ont suivi.

La section 2 présente mes travaux sur la variété des caractères d'une surface hyperbolique effectués en collaboration avec Julien Marché dans [MS21, MS24].

Combinatoire des groupes symétriques. Mes premiers engouements se sont manifestés au contact de la géométrie euclidienne (comme le théorème de Ptolémée) et de la combinatoire (en particulier la théorie des graphes). Cependant mon premier projet de recherche conséquent remonte à mes années de classes préparatoires, et je le mentionne car il reste encore une source d’inspirations et de questions.

En apprenant le théorème de Cayley selon lequel tout groupe se représente dans le groupe des permutation de ses éléments, j’ai cherché à comprendre l’ensemble des sous-groupes de \mathfrak{S}_n . On peut s’interroger sur la forme asymptotique de cet ensemble partiellement ordonné lorsque $n \rightarrow \infty$: distribution des sous-groupes selon le cardinal, des chaînes ou d’antichaînes selon la longueur, et ainsi de suite ; mais ces questions étaient (et demeurent) hors de ma portée.

Rétrospectivement, certaines d’entre elles devraient pouvoir être abordées en utilisant la théorie des algèbres d’incidence développée par Rota, en analysant la fonction zêta du poset. Toutefois, les progrès récents en théorie asymptotique des caractères du groupe symétrique me laissent penser qu’elles restent ouvertes et hautement difficiles.

Mon attention s’est donc portée sur la distribution asymptotique des classes de conjugaisons dans \mathfrak{S}_n (correspondant aux partitions de n), et de l’ordre des éléments de \mathfrak{S}_n (le ppcm des parts dans une partition). Cela a conduit à mon premier projet de recherche autonome, que j’ai présenté à l’entrée de l’ENS Lyon. Les résultats principaux sont couverts par la théorie du dénombrement de Polya ou les recherches d’Erdős–Túran en théorie statistique des groupes.

Il est aisé de compter le nombre a_c d’éléments dans \mathfrak{S}_n dans la classe de conjugaison associée à la partition $c \in \mathbb{N}^{(\mathbb{N}^*)}$ de $n(c) = c_1 \times 1 + c_2 \times 2 + \dots$, et d’en déduire leur série génératrice :

$$a_c = \frac{n!}{\prod_{j \geq 1} j^{c_j} c_j!} \quad \text{donc} \quad \sum_{c \in \mathbb{N}^{(\mathbb{N}^*)}} a_c X^c \frac{T^{n(c)}}{n(c)!} = \exp \left(\sum_{j \geq 1} \frac{1}{j} X_j T^j \right) \quad \text{où} \quad X^c = X_1^{c_1} X_2^{c_2} \dots$$

Le coefficient de $T^n X^c$ est la probabilité qu’un élément de \mathfrak{S}_n soit dans la classe de conjugaison indexée par c , et on peut en déduire que pour un sous-ensemble $S \subset \mathbb{N}^*$ tel que $\sum 1/s$ converge, les variables aléatoires $c_s : \mathfrak{S}_n \rightarrow \mathbb{N}$ comptant le nombre de s -cycles convergent en loi lorsque $n \rightarrow \infty$ vers des lois de Poisson indépendantes de paramètres $1/s$.

Concernant la distribution des ordres $W_n(\sigma)$ des éléments $\sigma \in \mathfrak{S}_n$ (égale à ppcm(c_j)), un théorème d’Erdős et Tùran stipule que la variable aléatoire $\log W_n$ converge en loi lorsque $n \rightarrow \infty$ vers une loi normale de moyenne $\mu_n = \frac{1}{2} \log(n)^2$ et de variance $\sigma_n^2 = \frac{1}{3} \log(n)^3$.

Motivations. Les résultats précédents peuvent être formulés comme des réponses très précises à la question : à quoi ressemble une classe de conjugaison aléatoire du groupe symétrique \mathfrak{S}_∞ sur une infinité dénombrable d’éléments ?

Les classes de conjugaison d’un groupe fini sont en dualité avec les caractères de ses représentations irréductibles de dimension finie (qui forment une base linéaire de l’algèbre des fonctions invariantes par conjugaison sur le groupe). Dans le cas du groupe \mathfrak{S}_n , ces deux familles d’objets sont naturellement indexées par les partitions de l’entier n .

On peut donc évaluer le caractère $\chi_\mu : \mathfrak{S}_n \rightarrow \mathbb{C}$ associé à une partition μ de n sur la classe de conjugaison associée à une partition ν de n pour obtenir un entier $\chi_\mu(\nu) \in \mathbb{Z}$. Par ailleurs, le produit tensoriel des représentations irréductibles se décompose en une somme de représentations irréductibles, pour définir les coefficients de structure $c_\gamma(\alpha, \beta) \in \mathbb{Z}$ pour la multiplication des caractères nommés d’après Littlewood-Richardson :

$$\chi_\mu \times \chi_\nu = \sum_{\kappa} c_\kappa(\mu, \nu) \chi_\kappa$$

Les propriétés arithmétiques et combinatoires des coefficients $\chi_\mu(\nu)$ et $c_\kappa(\mu, \nu)$ (et leurs statistiques) sont le sujet de recherches récentes. Elles sont une source de motivation et d’inspiration pour étudier de manière analogue les nombres d’enlacement des noeuds modulaires et les coefficients de structures des algèbres de caractères des groupes de surface.

1. ARITHMÉTIQUE ET TOPOLOGIE DU GROUPE MODULAIRE

Dans cette section, on présente quelques résultats des articles [Sim23a, Sim22b] issus de ma thèse [Sim22a], à propos de l'arithmétique et de la topologie du groupe modulaire.

Géométrie hyperbolique. Le groupe $\mathrm{PGL}_2(\mathbb{R})$ des automorphismes de la droite projective réelle \mathbb{RP}^1 , agit par transformation de Möbius :

$$\gamma = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathrm{PGL}_2(\mathbb{R}) \quad \gamma(z) = \frac{az+b}{cz+d} \quad \frac{d\gamma}{dz} = \frac{\det(\gamma)}{(cz+d)^2}$$

transitivement sur les triplets de points distincts, en préservant le birapport de quatre points :

$$\mathrm{bir}(\alpha_-, \alpha_+, \beta_-, \beta_+) = \frac{(\alpha_+ - \alpha_-)(\beta_+ - \beta_-)}{(\alpha_+ - \beta_-)(\beta_+ - \alpha_-)}$$

Le sous-groupe $\mathrm{PSL}_2(\mathbb{R})$ d'indice deux préservant l'orientation de \mathbb{RP}^1 agit transitivement sur les triplets de points cycliquement ordonnés. L'action de $\mathrm{PGL}_2(\mathbb{R})$ s'étendent à la droite projective complexe \mathbb{CP}^1 , et celle de $\mathrm{PSL}_2(\mathbb{R})$ préserve le demi-plan $\mathbb{H} = \{z \in \mathbb{C} \mid \Im(z) > 0\}$.

La structure complexe sur \mathbb{H} est conforme à une unique métrique hyperbolique dont la distance hyperbolique λ entre $w, z \in \mathbb{H}$ est donnée par le birapport $\mathrm{bir}(\bar{z}, z, \bar{w}, w)^{-1} = (\cosh \frac{\lambda}{2})^2$. Ceci réalise $\mathrm{PSL}_2(\mathbb{R})$ comme le groupe d'isométries directes du plan hyperbolique.

Tout $\gamma \in \mathrm{PSL}_2(\mathbb{R}) \setminus \{1\}$ a deux points fixes $\gamma_-, \gamma_+ \in \mathbb{CP}^1$, et il est qualifié d'elliptique, parabolique ou hyperbolique selon qu'il en ait 0, 1, 2 distincts dans \mathbb{RP}^1 . Un élément hyperbolique γ agit par translation le long d'un axe $(\gamma_-, \gamma_+) \subset \mathbb{H}$ joignant ses points fixes répulsif et attractif $\gamma_-, \gamma_+ \in \mathbb{RP}^1$, d'une longueur $|\lambda| = \log \mathrm{bir}(\gamma z, \gamma_-, z, \gamma_+)$, satisfaisant $|\mathrm{tr}(\gamma)| = 2 \cosh(\frac{1}{2}|\lambda|)$.

Définition 1.1 (Birapport et Cosinus). *Considérons des translations α et $\beta \in \mathrm{PSL}_2(\mathbb{R})$ d'axes (α_-, α_+) et (β_-, β_+) dans \mathbb{H} . Définissons leur birapport*

$$\mathrm{bir}(\alpha, \beta) = \mathrm{bir}(\alpha_-, \alpha_+, \beta_-, \beta_+) \quad \text{qui satisfait} \quad 1 = \frac{1}{\mathrm{bir}(\alpha, \beta)} + \frac{1}{\mathrm{bir}(\alpha, \beta^{-1})}$$

ainsi que leur cosinus en choisissant des relevés quelconques $\alpha, \beta \in \mathrm{SL}_2(\mathbb{R})$ par :

$$\cos(\alpha, \beta) = \mathrm{sign}(\mathrm{tr}(\alpha) \mathrm{tr}(\beta)) \frac{\mathrm{tr}(\alpha\beta) - \mathrm{tr}(\alpha\beta^{-1})}{\sqrt{\mathrm{disc} \alpha \mathrm{disc} \beta}} \quad \text{égal à} \quad \cos(\alpha, \beta) = \frac{1}{\mathrm{bir}(\alpha, \beta)} - \frac{1}{\mathrm{bir}(\alpha, \beta^{-1})}$$

Lemme 1.2 (Birapport et géométrie). *Considérons des translations $\alpha, \beta \in \mathrm{PSL}_2(\mathbb{R})$. Leurs axes (α_-, α_+) et (β_-, β_+) s'intersectent dans \mathbb{H} si et seulement si $\mathrm{bir}(\alpha_-, \alpha_+, \beta_-, \beta_+) > 1$, autrement dit si et seulement si $-1 < \cos(\alpha, \beta) < +1$.*

Si leurs axes (α_-, α_+) et (β_-, β_+) s'intersectent dans \mathbb{H} , alors c'est avec un angle $\theta \in]-\pi, \pi[$ orienté de α vers β selon $\mathrm{sign}(\theta) = \mathrm{sign}(\alpha, \beta)$ et satisfaisant $\cos(\theta) = \cos(\alpha, \beta)$, soit :

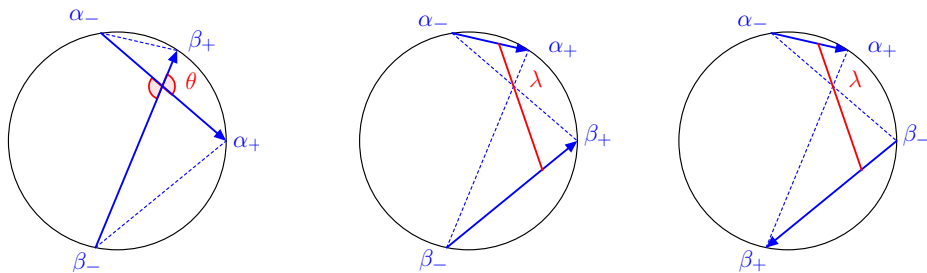
$$\frac{1}{\mathrm{bir}(\alpha, \beta)} = \frac{1 + \cos(\theta)}{2} = \left(\cos \frac{\theta}{2}\right)^2$$

Notons que $\theta \mapsto -\theta$ par transposition de (α, β) , et $\theta \mapsto \mathrm{sign}(\theta)\pi - \theta$ par inversion de α ou β .

Si leurs axes (α_-, α_+) et (β_-, β_+) sont disjoints dans $\mathbb{H} \sqcup \mathbb{RP}^1$, alors ils sont joints par un unique arc otho-géodésique de longueur $\lambda \in \mathbb{R}$. Son signe $\mathrm{sign}(\lambda) = \mathrm{sign} \mathrm{bir}(\alpha_-, \alpha_+, \beta_-, \beta_+)$ compare les co-orientations induites par chaque axe (il vaut $+1$ ou -1 selon que $(\alpha_-, \alpha_+, \beta_-, \beta_+)$ ou $(\alpha_-, \alpha_+, \beta_+, \beta_-)$ soient cycliquement ordonnés). Il satisfait $\cos(\alpha, \beta) = \mathrm{sign}(\lambda) \cosh(\lambda)$, soit :

$$\frac{1}{\mathrm{bir}(\alpha, \beta)} = \frac{1 + \cosh(\lambda)}{2} = \left(\cosh \frac{\lambda}{2}\right)^2 \quad \text{et} \quad \frac{1}{\mathrm{bir}(\alpha, \beta)} = \frac{1 - \cosh(\lambda)}{2} = -\left(\sinh \frac{\lambda}{2}\right)^2$$

Notons que λ est invariant par transposition de (α, β) , et $\lambda \mapsto -\lambda$ par inversion de α ou β .



Arithmétique des formes quadratiques. Dans [Sim23a], on décrit précisément les orbites d'éléments semi-simples de $\mathrm{PSL}_2(\mathbb{K}')$ par $\mathrm{PSL}_2(\mathbb{K})$ -conjugaison pour des corps $\mathbb{K} \subset \mathbb{K}'$ de caractéristique $\neq 2$. On en déduit les orbites d'éléments hyperboliques de $\mathrm{PSL}_2(\mathbb{R})$ par $\mathrm{PSL}_2(\mathbb{K})$ -conjugaison pour $\mathbb{K} \subset \mathbb{R}$ (on pourra penser à $\mathbb{K} = \mathbb{Q}$ comme c'est le cas le plus riche).

Théorème 1.3 (\mathbb{K} -équivalence). *Fixons un corps $\mathbb{K} \subset \mathbb{R}$. Des translations $\alpha, \beta \in \mathrm{PSL}_2(\mathbb{R})$ sont conjuguées par un élément de $\mathrm{PSL}_2(\mathbb{K})$ si et seulement si $\mathrm{disc}(\alpha) = \Delta = \mathrm{disc}(\beta)$ et $\mathrm{bir}(\alpha, \beta) \equiv 1 \pmod{\mathrm{Norm}_{\mathbb{K}} \mathbb{K}(\sqrt{\Delta})^\times}$ est la norme d'un élément de l'extension quadratique $\mathbb{K}(\sqrt{\Delta})$.*

Plus précisément, si $\mathrm{bir}(\alpha, \beta) \notin \{1, \infty\}$, les éléments $\gamma \in \mathrm{SL}_2(\mathbb{K})$ tels que $\gamma\alpha\gamma^{-1} = \beta$ sont paramétrés par les \mathbb{K} -points de la conique de Pell-Fermat :

$$(x, y) \in \mathbb{K} \times \mathbb{K} : \quad (2x)^2 - \Delta y^2 = \mathrm{bir}(\alpha, \beta) \quad \text{selon} \quad \gamma(x, y) = x(1 + \mathbf{b}\mathbf{a}^{-1}) + y(\mathbf{a} + \mathbf{b}).$$

où $\mathbf{a} = \mathrm{sign}(\mathrm{tr} \alpha) (\alpha - \frac{1}{2} \mathrm{tr}(\alpha))$ et $\mathbf{b} = \mathrm{sign}(\mathrm{tr} \beta) (\beta - \frac{1}{2} \mathrm{tr}(\beta))$ pour des relevés $\alpha, \beta \in \mathrm{SL}_2(\mathbb{K})$.

Nous dirons que $\alpha, \beta \in \mathrm{PSL}_2(\mathbb{R})$ sont \mathbb{K} -équivalentes si elles sont conjuguées par $\mathrm{PSL}_2(\mathbb{K})$. Notons $\mathrm{Cl}_{\mathbb{K}}(\Delta)$ l'ensemble des classes de conjugaison de $\mathrm{PSL}_2(\mathbb{K})$ de discriminant $\Delta > 0$. Il contient un élément distingué que l'on appelle la *classe principale*, déterminé par

$$\gamma_{\pm} = \frac{1 \pm \sqrt{\Delta}}{2} \quad \text{si} \quad \Delta \equiv 1 \pmod{4} \quad \text{et} \quad \gamma_{\pm} = \frac{\pm \sqrt{\Delta}}{2} \quad \text{si} \quad \Delta \equiv 0 \pmod{4}$$

Corollaire 1.4 (Bilinéarité du birapport). *Le birapport $(\alpha, \beta) \mapsto \mathrm{bir}(\alpha, \beta)$ définit une application $\mathrm{Cl}_{\mathbb{K}}(\Delta) \times \mathrm{Cl}_{\mathbb{K}}(\Delta) \rightarrow \mathbb{K} \pmod{\mathbb{K}(\sqrt{\Delta})^\times}$ qui induit une structure de produit bilinéaire sur $\mathrm{Cl}_{\mathbb{K}}(\Delta)$ pour laquelle l'élément neutre est la classe principale.*

Un élément $\gamma \in \mathrm{PSL}_2(\mathbb{Z})$ est dit *primitif* s'il n'est pas la puissance non-triviale d'un autre. Associons à tout élément hyperbolique primitif $\gamma \in \mathrm{PSL}_2(\mathbb{Z})$ l'unique forme quadratique binaire entière primitive qui est positivement proportionnelle à $(x - y\gamma_+)(x - y\gamma_-)$, en formules :

$$\gamma = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathrm{PSL}_2(\mathbb{Z}) \quad \longleftrightarrow \quad Q_{\gamma}(x, y) = \frac{\mathrm{sign}(a+d)}{\mathrm{pgcd}(c, d-a, -b)} (cx^2 + (d-a)xy - by^2) \in \mathcal{Q}(\mathbb{Z}^2)$$

Cela définit une correspondance bijective entre les éléments hyperboliques primitifs de $\mathrm{PSL}_2(\mathbb{Z})$ et les formes quadratiques binaires entières indéfinies primitives, qui est équivariante sous l'action de $\mathrm{PSL}_2(\mathbb{Z})$ par conjugaison et changement de variables, préservant le discriminant.

L'ensemble $\mathrm{Cl}(\Delta)$ des $\mathrm{PSL}_2(\mathbb{Z})$ -classes de formes quadratiques de discriminant Δ est fini et possède une structure de groupe abélien découverte par Gauss, compatible avec la multiplication des valeurs représentées par les formes quadratiques.

Deux formes quadratiques sont dites de même *genre* lorsqu'elles représentent les mêmes entiers. Cela entraîne qu'elles ont le même discriminant Δ , et revient à dire qu'elles ont les mêmes valeurs pour tous les caractères d'ordre deux $\mathrm{Cl}(\Delta) \rightarrow \mathbb{Z}/2$ du groupe des classes. Ainsi l'ensemble de genres correspond au quotient $\mathrm{Cl}(\Delta)/\mathrm{Cl}(\Delta)^2$ par le sous-groupe des carrés.

Dans [Sim23a] on relie la \mathbb{Q} -équivalence des classes de conjugaisons hyperboliques de $\mathrm{PSL}_2(\mathbb{Z})$ à l'équivalence des genres de formes quadratiques associées.

Théorème 1.5 (Genres et \mathbb{Q} -équivalence). *Soient $\alpha, \beta \in \mathrm{PSL}_2(\mathbb{Z})$ hyperboliques primitifs.*

Si Q_{α}, Q_{β} sont de même genre alors elles sont $\mathrm{PSL}_2(\mathbb{Q})$ -équivalentes. Si Q_{α}, Q_{β} sont $\mathrm{PSL}_2(\mathbb{Q})$ -équivalentes et de discriminant Δ fondamental, alors elles sont de même genre.

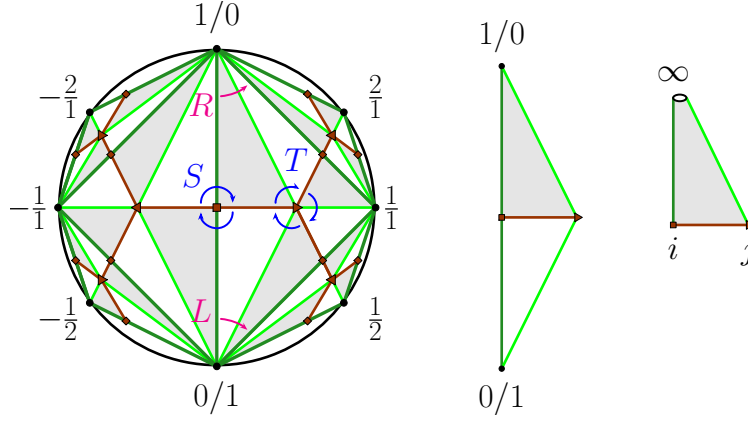
(Un discriminant Δ est dit *fondamental* lorsque c'est le discriminant de l'anneau des entiers du corps $\mathbb{Q}(\sqrt{\Delta})$, ce qui équivaut à dire que $\Delta \equiv 1 \pmod{4}$ et Δ est sans facteurs carrés, ou $\Delta \equiv 0 \pmod{4}$ et $\Delta/4$ est sans facteurs carrés.)

De nombreuses questions concernant l'arithmétique des formes quadratiques (conjecture du nombre de classes de Gauss) ou l'approximation diophantienne de leurs racines (conjecture d'unicité de Markov) peuvent se reformuler en termes de propriétés géométriques et topologiques des géodésiques modulaires, introduites dans le prochain paragraphe.

Arithmétique des géodésiques modulaires. Le groupe modulaire $\mathrm{PSL}_2(\mathbb{Z})$ agit proprement discontinuement sur \mathbb{H} avec pour quotient l'orbiface modulaire \mathbb{M} , une surface hyperbolique de genre zéro ayant une cuspside associée au point fixe $\infty \in \mathbb{QP}^1 \subset \partial\mathbb{H}$ de R ainsi que deux singularités coniques d'ordre 2 et 3 associées aux points fixes $i, j \in \mathbb{H}$ de S et T .

$$S = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad T = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad L = T^{-1}S = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \quad R = TS^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Ainsi, $\pi_1(\mathbb{M}) = \mathrm{PSL}_2(\mathbb{Z})$ est l'amalgame $\mathbb{Z}/2 * \mathbb{Z}/3$ de ses sous-groupes engendrés par S et T .



Les classes d'homotopie libre de lacets de \mathbb{M} correspondent aux classes de conjugaison de son groupe fondamental $\pi_1(\mathbb{M}) = \mathrm{PSL}_2(\mathbb{Z})$. Les classes elliptiques $[S]$ et $[T]^{\pm 1}$ correspondent aux lacets entourant ± 1 fois les singularités coniques i et j , les classes paraboliques $[R]^n$ correspondent aux lacets entourant n fois la cuspside, et toute classe hyperbolique $[\gamma]$ correspond à une unique géodésique fermée de \mathbb{M} appelée *géodésique modulaire*.

La géodésique modulaire associée à la classe hyperbolique $[\gamma]$ vaut $|\gamma| = 2 \sinh^{-1}(\sqrt{\mathrm{disc}(\gamma)}/2)$. Ainsi, deux géodésiques modulaires ont la même longueur si et seulement si elles correspondent à des classes de $\mathrm{PSL}_2(\mathbb{Z})$ qui sont \mathbb{K} -équivalentes pour $\mathbb{K} = \mathbb{Q}(\{\sqrt{\Delta} \mid \Delta \in \mathbb{N}\})$. Cela fournit une description géométrique de l'ensemble $\mathrm{Cl}(\Delta)$ des classes de formes quadratiques binaires entières de discriminant $\Delta > 0$.

Le prochain Théorème obtenu dans ma thèse [Sim22a] fournit une interprétation de la \mathbb{K} -équivalence pour toute extension $\mathbb{Q} \subset \mathbb{K} \subset \mathbb{C}$.

Théorème 1.6. *Deux géodésiques de même longueur $2 \sinh^{-1}(\sqrt{\Delta}/2)$ sont \mathbb{K} -équivalentes si et seulement si l'une des conditions équivalentes a lieu :*

θ Elles ont un point d'intersection d'angle $\theta \in]-\pi, \pi[$ tel que $(\cos \frac{\theta}{2})^2 = \frac{1}{(2x)^2 - \Delta y^2}$ pour $x, y \in \mathbb{K}$, auquel cas tous les angles d'intersection ont cette propriété.

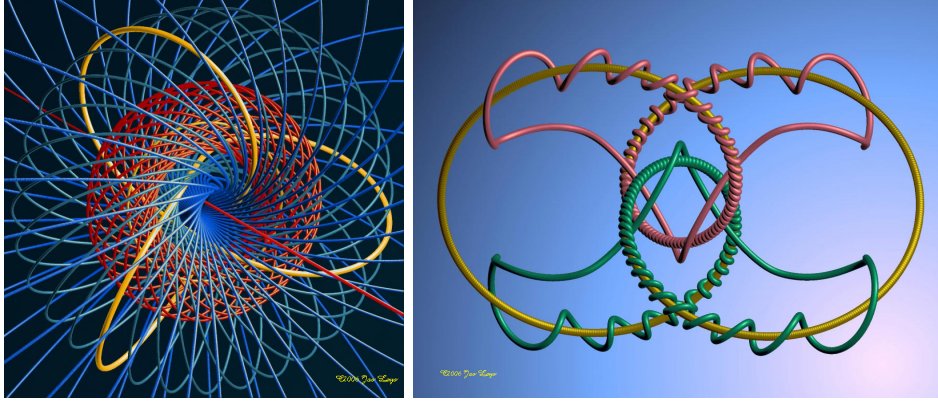
λ Elles ont une ortho-géodesique de longueur $\lambda \in \mathbb{R}_+^*$ telle que $(\cosh \frac{\lambda}{2})^2 = \frac{1}{(2x)^2 - \Delta y^2}$ pour $x, y \in \mathbb{K}$, auquel cas toutes les ortho-geodesics coorientées ont cette propriété.

Ce Théorème 1.6 fournit, avec le Théorème 1.5 et le Corollaire 1.4, une interprétation de la multiplication des genres de formes quadratiques en termes de la multiplication dans $\mathbb{Q} \bmod \mathrm{Norm}_{\mathbb{Q}} \mathbb{Q}(\sqrt{\Delta})^\times$ des quantités géométriques $(\cos \frac{\theta}{2})^2$ et $(\cosh \frac{\lambda}{2})^2$.

Enlacement des noeuds modulaires. Le fibré tangent unitaire de $\mathbb{M} = \mathrm{PSL}_2(\mathbb{Z}) \backslash \mathbb{H}$ est la variété $\mathbb{U} = \mathrm{PSL}_2(\mathbb{Z}) \backslash \mathrm{PSL}_2(\mathbb{R})$. Les géodésiques de \mathbb{M} se relèvent en les orbites périodiques du flot géodésique dans \mathbb{U} , et les relevés des géodésiques primitives définissent les *noeuds modulaires*.

Il se trouve que \mathbb{U} est homéomorphe à une sphère privée d'un noeud de trèfle, parallèle au relevé d'un lacet de \mathbb{M} entourant la cuspside correspondant à la classe $[R]$. On peut donc définir le nombre d'enlacement $\mathrm{lk}(R, \gamma)$ entre un noeud modulaire et le trèfle, ainsi que le nombre d'enlacement $\mathrm{lk}(\alpha, \beta)$ entre deux noeuds modulaires.

Pour comprendre la topologie des noeuds modulaire, rappelons une description combinatoire des conjugaison de $\mathrm{PSL}_2(\mathbb{Z})$.



La fibration de Seifert $\mathbb{U} \rightarrow \mathbb{M}$ et deux noeuds modulaires, extraits de [l'article en ligne \[GL16\]](#) proposant une introduction animée à la dynamique de $\mathrm{PSL}_2(\mathbb{Z})$.

Le monoïde $\mathrm{SL}_2(\mathbb{N}) \subset \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$ des matrices à coefficients ≥ 0 est librement engendré par L et R , et s'identifie à son image $\mathrm{PSL}_2(\mathbb{N}) \subset \mathrm{PSL}_2(\mathbb{Z})$ que l'on appelle le *monoïde euclidien*.

Dans $\mathrm{PSL}_2(\mathbb{Z})$, la classe de conjugaison d'un élément d'ordre infini intersecte $\mathrm{PSL}_2(\mathbb{N})$ selon les permutations cycliques d'un $L&R$ -mot non-vide. La classe de conjugaison est hyperbolique lorsque le mot cyclique contient chacun des lettres L et R , et la classe est primitive si et seulement si le mot cyclique est primitif. Cela permet en particulier de définir le nombre Rademacher de la classe de conjugaison de $\gamma \in \mathrm{PSL}_2(\mathbb{N})$ comme $\mathrm{Rad}(\gamma) = \#R - \#L$.

Dans son article [Ati87] sur le logarithme de la fonction eta de Dedekind, M. Atiyah a montré l'omniprésence de la fonction de Rademacher en l'identifiant avec pas moins de six autres fonctions apparaissant dans diverses autres branches des mathématiques (cocycle de Meyer, périodes d'une série d'Eisenstein, valeurs spéciales des séries de Shimizu, défaut de signature de Hirzebruch, etc). Dans [Ghy07], É Ghys montre que l'invariant de Rademacher coïncide avec l'enlacement avec le noeud de trèfle : $\mathrm{Rad}(\gamma) = \mathrm{lk}(R, \gamma)$, et conclut en demandant pour des interprétations *arithmétiques et combinatoires de l'enlacement entre deux noeuds modulaires*.

Enlacement et caractères du groupe modulaire. Les métriques hyperboliques complètes sur l'orbiface \mathbb{M} correspondent aux représentations fidèles et discrètes $\rho: \mathrm{PSL}_2(\mathbb{Z}) \rightarrow \mathrm{PSL}_2(\mathbb{R})$ modulo $\mathrm{PSL}_2(\mathbb{R})$ -conjugaison au but. Elles forment une variété algébrique réelle paramétrée par $q \in \mathbb{R}^*$ en déformant L et R selon :

$$L_q = \begin{pmatrix} q & 0 \\ 1 & q^{-1} \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad R_q = \begin{pmatrix} q & 1 \\ 0 & q^{-1} \end{pmatrix}$$

(C'est un ouvert Zariski dense de la variété algébrique affine $\mathrm{Hom}(\mathrm{PSL}_2(\mathbb{Z}); \mathrm{SL}_2(\mathbb{C})) // \mathrm{SL}_2(\mathbb{C})$, que l'on appelle variété des caractères, expliquant le titre du paragraphe.)

Les classes de conjugaison hyperboliques de $\mathrm{PSL}_2(\mathbb{Z})$ correspondent toujours aux géodésiques du quotient $\mathbb{M}_q = \rho_q(\mathrm{PSL}_2(\mathbb{Z})) \backslash \mathbb{H}$ qui n'entourent pas le cusp, et les points d'intersection entre deux géodésiques $[\alpha_q] \cap [\beta_q] \subset \mathbb{M}_q$ persistent par déformation (seuls les angles varient).

Définition 1.7. Pour $\alpha, \beta \in \mathrm{PSL}_2(\mathbb{Z})$ hyperboliques, définissons les sommes sur les angles d'intersection $\theta_q \in]-\pi, \pi[$ des géodésiques q -modulaires $[\alpha_q], [\beta_q] \subset \mathbb{M}_q$:

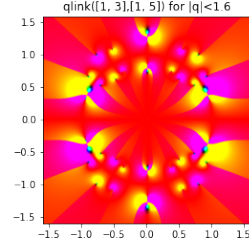
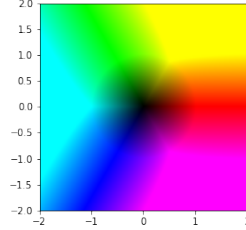
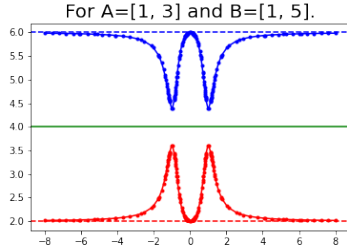
$$L_q(\alpha, \beta) = \frac{1}{2} \sum \left(\cos \frac{\theta_q}{2} \right)^2 \quad \text{et} \quad C_q(\alpha, \beta) = \frac{1}{2} \sum (\cos \theta_q)$$

Lorsque $q \rightarrow \infty$, l'orbiface hyperbolique \mathbb{M}_q a un coeur convexe qui se rétracte par déformation sur un voisinage tubulaire très fin de l'arc géodésique reliant ses singularités. Sa préimage dans le revêtement universel \mathbb{H} est un voisinage tubulaire très fin d'un arbre trivalent. A la limite, on retrouve l'action de $\mathrm{PSL}_2(\mathbb{Z})$ sur l'arbre trivalent \mathcal{T} , et en étudiant sa combinatoire on prouve le théorème suivant.

Théorème 1.8 (Enlacement comme évaluation au bord). *Pour $\alpha, \beta \in \text{PSL}_2(\mathbb{Z})$ hyperboliques,*

$$L_q(A, B) \xrightarrow{q \rightarrow \infty} \text{lk}(\alpha, \beta) \quad C_q(A, B) \xrightarrow{q \rightarrow \infty} \text{lk}(\alpha, \beta) - \text{lk}(\alpha^{-1}, \beta) = \text{lk}(\alpha, \beta) - \frac{1}{4}i(\alpha, \beta)$$

Ainsi les fonctions L_q & C_q interpolent entre la géométrie en $q = 1$ du groupe arithmétique $\text{PSL}_2(\mathbb{Z}) \subset \text{PSL}_2(\mathbb{R})$ et la topologie en $q = +\infty$ de l'action combinatoire $\text{PSL}_2(\mathbb{Z}) \subset \text{Aut}(\mathcal{T})$.



Les figures représentent pour $\alpha = RL^3$ et $\beta = RL^5$: les graphes réels de $q \mapsto 2L_q(\alpha, \beta)$ et de $q \mapsto 2L_q(\alpha, \beta^{-1})$ avec leur moyenne $\frac{1}{2}i(\alpha, \beta)$; puis le graphe complexe de $q \mapsto 2L_q(\alpha, \beta)$.

Enlacement et quasicharactères du groupe modulaire. Parmi les trois preuves proposées par É. Ghys du fait $\text{lk}(R, \gamma) = \text{Rad}(\gamma)$ exploite le fait que la fonction $\text{Rad} : \text{PSL}_2(\mathbb{Z}) \rightarrow \mathbb{Z}$ est un quasi-morphisme homogène...

Pour un groupe Γ , une fonction $\phi : \Gamma \rightarrow \mathbb{R}$ est un *quasimorphisme* lorsque sa dérivée :

$$d\phi : \Gamma \times \Gamma \rightarrow \mathbb{R} \quad d\phi(\alpha, \beta) = \phi(\beta) - \phi(\alpha\beta) + \phi(\alpha) \quad \text{satisfait} \quad \|d\phi\|_\infty < \infty$$

Il est *homogène* lorsque $\phi(\alpha^n) = n\phi(\alpha)$ pour tout $\alpha \in \Gamma$ et $n \in \mathbb{Z}$.

Tout quasimorphisme ϕ est à distance borné d'un unique quasimorphisme homogène φ , à savoir son homogénéisation $\varphi(\gamma) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n}\phi(\gamma^n)$. Si un quasi-morphisme est homogène alors il est borné à moins qu'il ne soit identiquement nul, il s'annule sur les classes de torsion, et il est invariant par conjugaison.

Le \mathbb{R} -espace vectoriel $\text{QMH}(\Gamma)$ des quasi-morphismes homogènes est muni de la topologie faible (convergence ponctuelle) et d'une semi-norme $\|d\phi\|_\infty$ ayant pour noyau le sous-espace $\ker \|d\phi\|_\infty = H^1(\Gamma; \mathbb{R}) \subset \text{QMH}(\Gamma)$ des morphismes. Le quotient $\mathcal{QX}(\Gamma) = \text{QMH}(\Gamma)/H^1(\Gamma)$ est un espace de Banach, que l'on appelle l'espace des *quasicharactères*.

Théorème 1.9 (Quasicharactères d'enlacement). *Pour $\alpha \in \text{PSL}_2(\mathbb{Z})$ d'ordre infini, définissons*

$$\forall \beta \in \text{PSL}_2(\mathbb{Z}) : \quad C_\alpha(\beta) = \text{lk}(\alpha, \beta) - \text{lk}(\alpha^{-1}, \beta)$$

La fonction $C_\alpha : \text{PSL}_2(\mathbb{Z}) \rightarrow \mathbb{Z}$ est un quasi-morphisme homogène, et il est trivial si et seulement si α est conjugué à α^{-1} .

Soit \mathcal{P} l'ensemble des classes de conjugaison primitives de $\text{PSL}_2(\mathbb{Z})$ et \mathcal{P}_0 le sous-ensemble de celles qui sont stables par inversion. Partitionons $\mathcal{P} \setminus \mathcal{P}_0 = \mathcal{P}_- \sqcup \mathcal{P}_+$ en deux sous-ensembles en bijection par l'inversion. On peut choisir d'inclure $R \in \mathcal{P}_+$ et notons que $C_R = \text{lk}(R, \cdot)$.

Théorème 1.10 (Base de Schauder). *La famille des $C_\alpha : \text{PSL}_2(\mathbb{Z}) \rightarrow \mathbb{Z}$ pour $\alpha \in \mathcal{P}_+$ forme une base de Schauder du \mathbb{R} -espace vectoriel topologique $\mathcal{QX}(\text{PSL}_2(\mathbb{Z}))$ au sens où :*

- $\forall f \in \mathcal{QX}(\text{PSL}_2(\mathbb{Z})), \quad \exists! (c_\alpha(f))_\alpha \in \mathbb{R}^{\mathcal{P}_+}, \quad f = \sum_\alpha c_\alpha(f) \cdot C_\alpha$
- Les fonctionnelles $c_\alpha : \mathcal{QX}(\text{PSL}_2(\mathbb{Z})) \rightarrow \mathbb{R}$ sont continues

Remarque 1.11 (Coefficients de Fourier). *Nous interprétons cela comme une théorie de Fourier pour les quasicharactères du groupe modulaire, avec une base de fonctions « cosignes » C_α donnée par la forme d'enlacement, et « les coefficients de Fourier » $f \mapsto c_\alpha(f)$ sur l'espace des quasicharactères s'apparentent aux périodes de f le long des orbites $\alpha \subset \mathbb{U}$.*

(Pour prouver la liberté de la famille $\{C_\alpha \mid \alpha \in \mathcal{P}_+\}$, nous étions amenés à montrer que la forme d'enlacement est non-dégénérée : si $\alpha, \beta \in \text{PSL}_2(\mathbb{Z})$ ont le même nombre d'enlacement $\text{lk}(\alpha, \gamma) = \text{lk}(\beta, \gamma)$ pour tout $\gamma \in \text{PSL}_2(\mathbb{Z})$ hyperbolique, alors α et β sont conjugués.)

2. ALGÈBRE DES COURBES DANS UNE SURFACE HYPERBOLIQUE

Dans cette section, on commence par définir des structures algébriques associées à l'ensemble des courbes dans une surface en utilisant des méthodes purement topologiques et combinatoires. L'objectif est de formuler les questions qui nous intéressent et d'énoncer quelques résultats obtenus à leur propos, sans recourir à des notions trop techniques. Les origines géométriques de ces structures seront expliquées dans les derniers paragraphes.

Ensemble, elles introduisent une partie des motivations de mes travaux avec Julien Marché [MS21, MS24], sans viser l'exhaustivité ni la généralité des résultats.

Algèbre des courbes dans une surface. Soit F une surface et Γ son groupe fondamental. Pour faciliter la présentation, supposons que F soit compacte sans bord orientée de genre $g \geq 2$.

Les classes d'homotopie libre de lacets de F correspondent aux classes de conjugaison de Γ , et les classes modulo inversion définissent les *courbes* de F . Une *multicourbe* est un multi-ensemble de courbes (éventuellement vide), et l'ensemble MC des multicourbes est muni de l'union $\alpha \cup \beta$.

Les multicourbes sont munies d'une *fonction d'intersection* $i(\alpha, \beta)$ comptant le nombre d'intersections $\text{Card}(\alpha \cap \beta)$ minimal parmi les représentants génériques de $\alpha \cup \beta$. La fonction d'intersection est symétrique et additive pour l'union, à savoir $i(\alpha \cup \beta, \gamma) = i(\alpha, \gamma) + i(\beta, \gamma)$. Une multicourbe γ est simple lorsque $i(\gamma, \gamma) = 0$.

Remarque 2.1. La forme d'intersection est non-dégénérée au sens où si $\alpha, \beta \in \text{MC}$ satisfait $i(\alpha, \gamma) = i(\beta, \gamma)$ pour tout $\gamma \in \text{MC}$, alors $\alpha = \beta$.

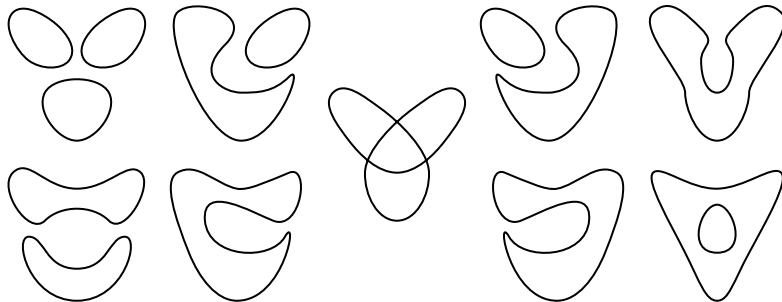
Le \mathbb{Z} -module libre $\mathbb{Z} \text{MC}$ est muni d'un produit commutatif, à savoir la fonction bilinéaire symétrique $\mathbb{Z} \text{MC} \times \mathbb{Z} \text{MC} \rightarrow \mathbb{Z} \text{MC}$ qui étend l'union des multicourbes. Définissons le quotient $\mathbb{Z}[\mathcal{C}]$ du \mathbb{Z} -module $\mathbb{Z} \text{MC}$ par le \mathbb{Z} -module engendré par les relations d'équivalence locales : Notons $f_\gamma = \prod_{j=1}^n f_{\gamma_j} \in \mathbb{Z}[\mathcal{C}]$ le représentant d'une multicourbe courbe $\gamma = \{\gamma_1, \dots, \gamma_n\} \in \text{MC}$.

$$\text{Red curve} + \text{Black X} + \text{Blue saddle} = 0 \quad \text{Purple circle} = -2$$

Remarque 2.2 (SL_2 -équivalence). Nous verrons que pour $\alpha, \beta \in \Gamma$, l'égalité $f_\alpha = f_\beta$ dans $\mathbb{Z}[\mathcal{C}]$ est équivalente à l'égalité des traces $\text{tr}(\rho(\alpha)) = \text{tr}(\rho(\beta))$ pour toute représentation $\rho: \Gamma \rightarrow \text{SL}_2(\mathbb{C})$, ou à l'égalité des longueurs $l(\alpha) = l(\beta)$ pour toute métrique hyperbolique sur F .

Cette relation d'équivalence a des classes finies mais de cardinal arbitrairement grand, correspondant aux multiplicités des Laplaciens de métriques hyperboliques génériques.

Les relations locales permettent de résoudre les intersections successivement, et d'exprimer toute multicourbe comme une combinaison linéaire d'éléments dans l'ensemble MS des multicourbes simples (éventuellement vides mais) sans composantes triviales. En effet, si l'on choisit un représentant transverse de $\gamma \in \text{MC}$, alors on peut exprimer f_γ comme une somme sur les $2^{i(\gamma, \gamma)}$ résolutions d'intersections $\sigma: \gamma \cap \gamma \rightarrow \{\pm 1\}$. Chaque résolution donne lieu à une multicourbe simple $\sigma(\gamma)$, équivalente à $(-2)^{z_\sigma} \kappa_\sigma$ pour $\kappa_\sigma \in \text{MS}$.



On peut montrer qu'une telle décomposition est unique de sorte que MS indexe une base linéaire de $\mathbb{Z}[\mathcal{C}]$. (Cela découle des travaux de [DCP17] en théorie géométrique des invariants). Ainsi toute multicourbe $\gamma \in \text{MC}$ détermine une famille de coefficients $c_\kappa(\gamma) \in \mathbb{Z}$, et la multiplication de $\mathbb{Z}[\mathcal{C}]$ est encodée par ses coefficients de structure $c_\kappa(\mu, \nu) \in \mathbb{Z}$, selon :

$$\forall \gamma \in \text{MC} : f_\gamma = \sum_{\kappa \in \text{MS}} c_\kappa(\gamma) f_\kappa \quad \forall \mu, \nu \in \text{MS} : f_\mu f_\nu = \sum_{\kappa \in \text{MS}} c_\kappa(\mu, \nu) f_\kappa$$

Définissons le *support* de $f = \sum c_\kappa f_\kappa \in \mathbb{Z}[\mathcal{C}]$ décomposé dans la base des multicourbes simples comme $\text{Supp}(f) = \{\kappa \in \text{MS} \mid c_\kappa \neq 0\} \subset \text{MS}$.

Question 2.3. *On souhaiterait comprendre les coefficients $c_\kappa(\mu, \nu)$ et plus généralement $c_\kappa(\gamma)$, ou de manière moins ambitieuse la forme du support $\text{Supp}(f_\gamma)$ pour $\gamma \in \text{MC}$.*

D'après la remarque précédente, ces quantités topologiques encodent une grande richesse liée à la géométrie de F et la théorie des représentations de Γ .

Valuations et polytope de Newton. Bien que la base des multicourbes simples MS ne soit pas monomiale (stable par multiplication), on peut toutefois définir des notions de degré, monome dominant, et polytope de Newton, afin d'étudier les coefficients de structure dominants.

Définition 2.4 (Valuation). *Une valuation de $\mathbb{Z}[\mathcal{C}]$ est une fonction $v : \mathbb{Z}[\mathcal{C}] \rightarrow \mathbb{R} \cup \{-\infty\}$ telle que pour tout $f, g \in \mathbb{Z}[\mathcal{C}]$ on ait $v(fg) = v(f) + v(g)$ et $v(f + g) \leq \max(v(f), v(g))$.*

L'ensemble \mathcal{V} des valuations est muni de la convergence faible- $$.*

Définition 2.5 (Valuations simples). *Une valuation $v \in \mathcal{V}$ de $\mathbb{Z}[\mathcal{C}]$ sera dite simple lorsque :*

$$(\text{simple}) \quad \forall f \in \mathbb{Z}[\mathcal{C}] \quad v(f) = \max\{v(f_\kappa) \mid \kappa \in \text{MS}, c_\kappa \neq 0\}$$

L'ensemble ML des valuations simples est un fermé \mathcal{V} .

La [MS21, Proposition 1.1] affirme que les valuations simples sont données par les fonction d'intersection contre des multicourbes simples.

Proposition 2.6 (Valuations simples = laminations mesurées). *Pour toute multicourbe simple λ , il existe une unique valuation simple $v_\lambda \in \text{ML}$ satisfaisant :*

$$\forall \gamma \in \text{MC}, \quad v_\lambda(f_\gamma) = i(\lambda, \gamma)$$

L'ensemble $\{rv_\lambda \mid r \in \mathbb{R}, \lambda \in \text{MS}\}$ des multiples de telles valuations simples a pour complétion l'ensemble ML de toutes les valuations simples.

Cette proposition pose trois difficultés. Tout d'abord [Thu09, Lemma 7] permet de montrer que la fonction d'intersection $i(\lambda, \cdot)$ définie contre $\gamma \in \text{MC}$, ne dépende que de la classe $t_\gamma \in \mathbb{Z}[\mathcal{C}]$, et satisfait la relation [simple](#). Ensuite la relation $v_\lambda(fg) = v_\lambda(f) + v_\lambda(g)$ qui découle de certaines pro. Enfin la caractérisation des valuations simples comme limites de multicourbes simples.

Nous définissons alors dans [MS24] l'ensemble de Newton $E(f_\alpha) \subset \text{MS}$ de f_α , par analogie avec les points extrémaux du polytope de Newton ordinaire d'un polynôme.

Définition 2.7 (Ensemble de Newton). *Pour $f \in \mathbb{Z}[\mathcal{C}]$, un élément $\mu \in \text{Supp}(f)$ sera dit extrémal s'il existe $\lambda \in \text{MS}$ telle que $i(\lambda, \mu) > i(\lambda, \nu)$ pour tout autre $\nu \in \text{Supp}(f) \setminus \{\mu\}$.*

L'ensemble de Newton $E(f)$ est l'ensemble des multicourbes extrémales dans f .

Théorème 2.8 (Les multicourbes sont unitaires). *Pour toute multicourbe $\gamma = \{\gamma_1, \dots, \gamma_n\}$ avec $\gamma_i \in \Gamma \setminus \{1\}$, l'élément $f_\gamma \in \mathbb{Z}[\mathcal{C}]$ est unitaire, au sens où $c_\kappa(\gamma) = 1$ pour tout $\kappa \in E(f_\gamma)$.*

Définissons la multicourbe simple $L_\mu(\nu)$ comme la résolution $+1$ de $\mu \cup \nu$ (qui tourne à gauche de μ vers ν). La résolution -1 (qui tourne à droite de μ vers ν) correspond à $L_\nu(\mu)$. Ce sont les produits de Luo [Luo10], qui montre particulier dans Lemma 8.1 que $L_\mu(\nu) \in \text{MS}$ (sans composantes triviales) et prouve dans son Theorem 2.1 plusieurs propriétés à leurs égards.

Proposition 2.9 (Produits de Luo). *Soit $\mu, \nu \in \text{MS}$. Les produits de Luo $L_\mu(\nu), L_\nu(\mu) \in \text{MS}$ sont extrémaux pour le produit $f_\mu f_\nu$, et si $i(\mu, \nu) > 0$ alors $L_\mu(\nu) \neq L_\nu(\mu)$.*

Remarque 2.10 (MS-equivalence). *La relation d'équivalence définie sur MC par $\alpha \sim \beta$ lorsque $i(\alpha, \lambda) = i(\beta, \lambda)$ pour tout $\lambda \in \text{MS}$ est caractérisée par l'égalité $E(f_\alpha) = E(f_\beta)$.*

Cette relation est plus faible que la SL_2 -équivalence (caractérisée par l'égalité $f_\alpha = f_\beta$), et ses classes sont en particulier de cardinal arbitrairement grand. On peut montrer (bien que cela n'ait pas été écrit) que ses classes sont finies.

On peut ainsi espérer utiliser la croissance des éléments dans le groupe Γ au sens de la longueur des mots et de l'auto intersection, de manière à pouvoir encadrer les multiplicités des Laplacien hyperboliques génériques.

Crochet de Poisson. L'algèbre des courbes $\mathbb{Z}[\mathcal{C}]$ est également munie d'un crochet de Poisson : une fonction bilinéaire $\{\cdot, \cdot\} : \mathbb{Z}[\mathcal{C}] \times \mathbb{Z}[\mathcal{C}] \rightarrow \mathbb{Z}[\mathcal{C}]$ qui est un crochet de Lie (satisfaisant les identités d'alternance $\{f, g\} + \{g, f\} = 0$ et de Jacobi $\{f, \{g, h\}\} + \{h, \{f, g\}\} + \{g, \{h, f\}\} = 0$) et qui est compatible avec le produit selon l'identité de Leibnitz $\{f, gh\} = \{f, g\} + \{f, h\}$.

D'après la bilinéarité, il suffit de définir le crochet de Poisson des multicourbes simples, et d'après la propriété de Leibnitz il suffit de la définir entre multicourbes simples. La définition suivante vaut pour $\alpha, \beta \in \Gamma$ représentant des courbes quelconques. Choisissons un représentant transverse de $\alpha \cup \beta \subset F$, et pour chaque point d'intersection $p \in \alpha \pitchfork \beta$ notons $\alpha_p, \beta_p \in \pi_1(F, p)$ les classes d'homotopie basées en p et $\text{sign}_p(\alpha_p, \beta_p)$ le signe de l'intersection. La formule :

$$\{f_\alpha, f_\beta\} = \sum_{p \in \alpha \cap \beta} \text{sign}(\alpha_p, \beta_p) (f_{\alpha_p \beta_p} - f_{\alpha_p \beta_p^{-1}})$$

se prolonge en un crochet de Poisson. A nouveau la découverte de ce crochet par Goldman dans [Gol86] repose sur les méthodes géométriques introduites dans le prochain paragraphe.

Question 2.11. *Comme pour le produit, le crochet de Poisson est encodé par ses coefficients de structure dans la base des multicourbes, à savoir les $c_\kappa(f_\mu, f_\nu) \in \mathbb{Z}$ pour $\kappa, \mu, \nu \in \text{MS}$.*

On aimerait comprendre ces coefficients, à commencer par l'ensemble de Newton de $\{f_\mu, f_\nu\}$ et ses coefficients dominants.

Proposition 2.12. *Pour tout $f, g \in \mathbb{Z}[\mathcal{C}]$ on a l'inclusion $E(\{f, g\}) \subset E(fg)$.*

On peut également exprimer $\{f_\alpha, f_\beta\}$ pour $\alpha, \beta \in \text{MC}$, en choisissant un représentant transverse de la multicourbe $\gamma = \alpha \cup \beta$, comme la somme sur l'ensemble de ses $2^{i(\gamma, \gamma)}$ résolutions $\sigma : \gamma \pitchfork \gamma \rightarrow \{\pm 1\}$ de la résolution $(-2)^{z(\sigma)} \kappa(\sigma)$ pondérée par le produit des $\sigma(p)$ pour $p \in \alpha \cap \beta$:

$$\{f_\alpha, f_\beta\} = \sum_{\sigma} \left(\prod_p \sigma(p) \right) (-2)^{z(\sigma)} f_{\kappa(\sigma)} = \sum_{\kappa \in \text{MS}} w_\kappa f_\kappa$$

où $w_\kappa = \sum_{\sigma} (-2)^{z(\sigma)} \prod_p \sigma_\kappa(p)$ est la somme sur les résolutions $\sigma_\kappa : \gamma \pitchfork \gamma \rightarrow \{\pm 1\}$ de $\gamma = \alpha \cup \beta$ qui donnent lieu à la multicourbe simple $\kappa \in \text{MS}$, du produit des signes $\sigma_\kappa(p)$ pour $p \in \alpha \cap \beta$.

Le théorème suivant [MS24] donne une interprétation combinatoire de certains coefficients de structure du crochet de Poisson, dont le sens algèbro-géométrique (comme valeurs résiduelles) sera évoqué dans le dernier paragraphe.

Théorème 2.13 (Valeurs résiduelles du crochet de Poisson). *Soient $\alpha, \beta \in \text{MC}$.*

Pour tout $\kappa \in E(f_\alpha f_\beta)$ le coefficient $c_\kappa(\{f_\alpha, f_\beta\})$ vaut w_κ , et correspond à la valeur résiduelle du crochet de Poisson en tout $v_\lambda \in \text{ML}$ tel que $i(\lambda, \kappa) = \arg \max\{i(\lambda, \mu) \mid \mu \in E(\{f_\alpha, f_\beta\})\}$.

Pour $\mu, \nu \in \text{MS}$ le paragraphe précédent définit les produits de Luo $L_\mu(\nu), L_\nu(\mu) \in \text{MS}$.

Proposition 2.14 (Produits de Luo). *Soit $\mu, \nu \in \text{MS}$. Les coefficients des produits de Luo $L_\mu(\nu)$ et $L_\nu(\mu)$ dans le crochet de Poisson $\{f_\mu, f_\nu\}$ valent $i(\mu, \nu)$ et $-i(\mu, \nu)$. Ainsi les coefficients de structure du crochet de Poisson retrouvent les nombres d'intersection géométriques.*

Question 2.15. *Que peut-on dire des propriétés statistiques et asymptotiques des coefficients de structure $c_\kappa(f_\alpha f_\beta)$ et $c_\kappa(\{f_\alpha, f_\beta\})$ pour $\alpha, \beta \in \text{MC}$ lorsque $i(\alpha, \beta) \rightarrow \infty$?*

Variété des caractères : compactification et automorphismes. Dans ce dernier paragraphe, on explique l'origine algébro-géométrique de l'algèbre des courbes $\mathbb{Z}[\mathcal{C}]$ de la surface F , de l'espace ML des valuations simples, et des valeurs résiduelles du crochet de Poisson.

Variété des caractères. La variété des représentations $\text{Hom}(\Gamma, \text{SL}_2(\mathbb{C}))$ admet une action algébrique par conjugaison de $\text{SL}_2(\mathbb{C})$ au but. L'anneau des fonctions invariantes, noté $\mathbb{C}[\mathcal{X}]$, est engendré par les fonctions trace $t_\gamma: \rho \mapsto \text{tr } \rho(\gamma)$ pour $\gamma \in \Gamma$, et l'idéal des relations entre les t_γ est engendré par $t_1 = 2$ et

$$\forall \alpha, \beta \in \Gamma, \quad t_\alpha t_\beta - t_{\alpha\beta} - t_{\alpha\beta^{-1}}.$$

Le quotient algébrique $\text{Hom}(\Gamma, \text{SL}_2(\mathbb{C})) // \text{SL}_2(\mathbb{C})$ est défini comme le spectre $\mathcal{X} := \text{Spec } \mathbb{C}[\mathcal{X}]$. En particulier les \mathbb{C} -points de \mathcal{X} , définis comme les morphismes d'anneaux $\mathbb{C}[\mathcal{X}] \rightarrow \mathbb{C}$, sont donnés par l'évaluation $\text{ev}_\rho: t_\gamma \mapsto t_\gamma(\rho)$ en une représentation.

L'application $f_\gamma \mapsto (-t_\gamma)$ pour $\gamma \in \Gamma$ se prolonge en un isomorphisme $\mathbb{C} \otimes \mathbb{Z}[\mathcal{C}] \rightarrow \mathbb{C}[\mathcal{X}]$ entre l'algèbre des courbes et l'algèbre des caractères. En particulier $\mathbb{C}[\mathcal{X}]$ possède une base linéaire indexée par MS qui est privilégiée du point de vue topologique, et nous en donnons une caractérisation algébrique dans [MS21] reposant sur la Proposition 2.6.

La variété des caractères est également munie d'une forme symplectique construite par Atiyah–Bott–Weil–Petersson–Goldman [Gol84], et c'est ainsi que Goldman a découvert dans [Gol86] la structure de Poisson sur $\mathbb{C}[\mathcal{X}]$.

Compactification. Dans une série d'articles novateurs commençant par [MS84], Morgan-Shalen ont construit une compactification de la variété des caractères par un ensemble de valuations, dans l'esprit de la compactification de Riemann-Zariski d'une variété algébrique. Ils y ont également plongé la compactification de Thurston de l'espace de Teichmüller par l'espace des laminations mesurées. Cependant, ce plongement utilise un processus de dégénérescence qui n'est pas tout à fait explicite : notre Proposition 2.6 précise cette correspondance.

Une valuation simple v donne lieu à une action du groupe Γ sur un arbre réel (dans l'arbre de Bass-Serre de $\text{SL}_2(\mathbb{C}(\mathcal{X}), \mathfrak{o}_v)$), qui est duale à une lamination mesurée λ de F . Ainsi nous avons trois modèles pour la compactification de \mathcal{X} : topologique (laminations mesurées), algébrique (valuations simples), géométrique (actions géométriques sur des arbres réels). Ces trois points de vue fournissent diverses stratifications de ML selon dimension de l'espace tangent, et la structure symplectique se prolonge aux points lisses du bord. Renvoyons à [Bon88, Ota15] pour les constructions, et à [PP91, SB01] pour le prolongement de la structure symplectique au bord.

Dans [MS24] nous définissons un modèle algébrique pour l'espace tangent $T_\lambda \text{ML}$ en un point lisse $\lambda \in \text{ML}$ avec une structure symplectique, et construisons des symplectomorphismes avec les modèles pré-existants. L'objectif est de fournir des interprétations algébriques et combinatoires de certains coefficients de structure pour la multiplication et le crochet de Poisson au bord.

Automorphismes. Nous déterminons dans [MS21] le groupe $\text{Aut}(\mathcal{X})$ des automorphismes de la variété algébrique des caractères \mathcal{X} , autrement dit de son algèbre des fonctions $\mathbb{C}[\mathcal{X}]$.

Le théorème de Dehn–Nielsen–Baer [FM12] identifie le groupe des difféotopies $\text{Mod}(F) = \text{Diff}(F)/\text{Diff}_0(F)$ à $\text{Out}(\Gamma) = \text{Aut}(\Gamma)/\text{Int}(\Gamma)$. Ce groupe agit par automorphismes algébriques de la variété des caractères \mathcal{X} selon $\varphi \cdot [\rho] = [\rho \circ \varphi^{-1}]$ ou sur l'algèbre des caractères $\mathbb{C}[\mathcal{X}]$ selon $\varphi \cdot t_\gamma = t_{\varphi(\gamma)}$. Comme nous considérons les représentations à valeurs dans l'extension centrale $\mathbb{Z}/2 \rightarrow \text{SL}_2(\mathbb{C}) \rightarrow \text{PSL}_2(\mathbb{C})$, nous avons également une action par multiplication de $H^1(F; \mathbb{Z}/2) = \text{Hom}(\Gamma; \{\pm 1\})$ selon $\rho \mapsto [\epsilon \times \rho]$ ou $t_\gamma \mapsto \epsilon(\gamma)t_\gamma$.

Ces deux actions fournissent un morphisme du produit semi-direct $H^1(\Gamma; \mathbb{Z}/2) \rtimes \text{Out}(\Gamma)$ vers le groupe des automorphismes algébriques de la variété des caractères $\text{Aut}(\mathcal{X})$.

Théorème 2.16. *Le morphisme $H^1(\Gamma; \mathbb{Z}/2) \rtimes \text{Out}(\Gamma) \rightarrow \text{Aut}(\mathcal{X})$ est surjectif. Pour $g > 2$ il est injectif, et pour $g = 2$ son noyau est $\mathbb{Z}/2$ engendré par l'involution hyperelliptique.*

La stratégie de preuve consiste à étudier l'action de $\text{Aut}(\mathcal{X})$ sur la compactification de $\mathbb{C}[\mathcal{X}]$ par l'espace ML, et d'exploiter ses diverses incarnations (topologique, algébrique, géométrique).

Algèbre des polytopes de Newton. Rappelons que MC est muni de la forme d'intersection $i: \text{MC} \times \text{MC} \rightarrow \mathbb{R}_+$ qui est non-dégénérée, au sens où si $\alpha, \beta \in \text{MS}$ satisfait $i(\alpha, \gamma) = i(\beta, \gamma)$ pour tout $\gamma \in \text{MS}$, alors $\alpha = \beta$. D'après la remarque 2.10, sa restriction à $i: \text{MS} \times \text{MS} \rightarrow \mathbb{R}_+$ est toujours non-dégénérée. Il en va de même pour sa complétion $i: \text{ML} \times \text{ML} \rightarrow \mathbb{R}_+$.

Définition 2.17 (Polytope de Newton). *Pour un ensemble $E \subset \text{ML}$, on définit son dual, et son enveloppe convexe selon :*

$$E^* = \{\lambda \in \text{ML} \mid \forall \mu \in E: i(\lambda, \mu) \leq 1\} \quad \text{et} \quad \text{Conv}(E) = (E^*)^*$$

Pour $f \in \mathbb{Z}[\mathcal{C}]$, on définit son polytope de Newton dual et son polytope de Newton par :

$$\Delta^*(f) = \text{Supp}(f)^* = E(f)^* \quad \text{et} \quad \Delta(f) = \Delta^*(f)^* = \text{Conv } E(f)$$

On peut penser à $\Delta(f)$ comme à l'enveloppe convexe de ses points extrémaux $E(f)$, bien que la notion usuelle de convexité n'ait pas de sens sur ML.

Pour $f \in \mathbb{C}[\mathcal{X}]$, l'identification de la Proposition 2.6 entre laminations mesurées et valuations simples permet d'écrire $\Delta^*(f) = \{v_\lambda \in \text{ML} \mid v_\lambda(f) \leq 1\}$, et d'après l'équation simple :

$$(1) \quad \Delta^*(f) = \bigcap_{\mu \in E(f)} \Delta^*(f_\mu)$$

Ces « cônes élémentaires » $\Delta^*(t_\mu) = \{v \in \text{ML} \mid v(t_\mu) < 1\}$ sont décrit par des systèmes d'inéquations linéaires explicites dans une carte PL quelconque de ML. La non dégénérescence de $i: \text{ML} \times \text{ML} \rightarrow \mathbb{R}_+$ entraîne que $E^*(\mu)$ détermine μ .

Pour deux polytopes quelconques de ML, on peut choisir des fonctions génériques $f, g \in \mathbb{C}[\mathcal{X}]$ dont ce sont les polytopes de Newton et définir leur somme, de leur produit, de leur crochet de Poisson selon $\Delta(f + g)$ et $\Delta(fg)$ et $\Delta(\{f, g\})$. La compréhension de cette algèbre de polytopes est un premier pas vers la compréhension des coefficients de structure de $(\mathbb{C}[\mathcal{X}], \times, \{ \})$.

C'est un analogue du calcul de Minkowski pour les polytopes dans l'espace des valuations d'une algèbre polynomiale libre $\mathbb{C}[\mathbb{C}^n]$.

Volumes dans l'espace des modules. Le prolongement de la structure symplectique sur (la strate de dimension maximale de) sur la variété ML induit une notion de volume. Le théorème d'ergodicité de Masur pur l'action de $\text{Mod}(F)$ sur ML entraîne qu'elle est proportionnelle à la mesure Borelienne qui pour un ouvert $U \subset \text{ML}$ vaut la limite

$$\text{vol}(U) = \lim_{r \rightarrow \infty} \frac{1}{r^{6g-6}} \text{Card}(r \cdot U \cap \text{MS})$$

On peut alors demander une interprétation topologique de $\text{vol } \Delta^*(f_\alpha)$. Il est nul à moins que α ne soit remplissante, au sens où $i(\lambda, \alpha) > 0$ pour tout $\lambda \in \text{MS}$. Lorsque $\alpha \in \text{MC}$ est remplissante, un célèbre théorème de M. Mirzakhani [Mir16] étendu par Rafi et Souto [RS19], estime le nombre d'éléments dans son orbite sous l'action de $\text{Mod}(F)$ lorsqu'une borne sur leur complexité tend vers l'infini. Plus précisément, fixons $\beta \in \text{MC}$, et notons $m_g > 0$ le volume de l'espace des modules des métriques hyperboliques complètes sur F pour la forme de Weil–Petersson. Leur théorème peut être reformulé comme :

$$(2) \quad \lim_{r \rightarrow \infty} \frac{m_g}{r^{6g-6}} \text{Card}\{\varphi \in \text{Mod}(F) \mid i(\beta, \varphi(\alpha)) \leq r\} = \frac{1}{m_g} \text{vol } \Delta^*(t_\beta) \text{vol } \Delta^*(t_\alpha)$$

(Ce résultat vaut également dans la limite où β tend vers un courant géodésique, par exemple une lamination mesurée ou une métrique hyperbolique sur F .) L'équation (1) fournit un procédé constructif pour calculer les constantes de Mirzakhani $\text{vol } \Delta^*(t_\alpha)$, qui montre en particulier que ces volumes sont rationnels, et la reformulation (2) révèle qu'ils ne dépendent que de $E(t_\alpha)$.

Mirzakhani a même montré que $\text{Card}\{\varphi \in \text{Mod}(F) \mid i(\beta, \varphi(\alpha)) \leq r\}$ est un polynôme en r de degré $6g - 6$. Terminons par une question, motivée par une analogie avec le théorème BKK.

Question 2.18 (Volumes mixtes des Polytopes de Newton). *Pour $\alpha, \beta \in \text{MC}$, le polynôme $V_r(\alpha, \beta) = m_g \text{Card}\{\varphi \in \text{Mod}(F) \mid i(\beta, \varphi(\alpha)) \leq r\}$ à ses coefficients rationnels que l'on peut exprimer en termes des « volumes mixtes » des polytopes de Newton $\Delta(t_\alpha)$ et $\Delta(t_\beta)$.*

RÉFÉRENCES

- [Ati87] Michael Atiyah. The logarithm of the Dedekind η -function. *Math. Ann.*, 278(1-4) :335–380, 1987. [6](#)
- [Bon88] Francis Bonahon. The geometry of Teichmüller space via geodesic currents. *Invent. Math.*, 92(1) :139–162, 1988. [11](#)
- [DCP17] Corrado De Concini and Claudio Procesi. *The invariant theory of matrices*, volume 69 of *University Lecture Series*. American Mathematical Society, Providence, RI, 2017. [9](#)
- [FM12] Benson Farb and Dan Margalit. *A primer on mapping class groups*, volume 49 of *Princeton Mathematical Series*. Princeton University Press, Princeton, NJ, 2012. [11](#)
- [Ghy07] Étienne Ghys. Knots and dynamics. In *International Congress of Mathematicians. Vol. I*, pages 247–277. Eur. Math. Soc., Zürich, 2007. [6](#)
- [GL16] Étienne Ghys and Jos Leys. Lorenz and modular flows : a visual introduction. <http://www.ams.org/publicoutreach/feature-column/fcarc-lorenz>, 2016. [6](#)
- [Gol84] William M. Goldman. The symplectic nature of fundamental groups of surfaces. *Adv. in Math.*, 54(2) :200–225, 1984. [11](#)
- [Gol86] William M. Goldman. Invariant functions on Lie groups and Hamiltonian flows of surface group representations. *Invent. Math.*, 85(2) :263–302, 1986. [10](#), [11](#)
- [GS20] Étienne Ghys and Christopher-Lloyd Simon. On the topology of a real analytic curve in the neighborhood of a singular point. *Astérisque*, Some aspects of the theory of dynamical systems : a tribute to Jean-Christophe Yoccoz. Vol. I(415) :1–33, 2020. [HAL version](#). [1](#)
- [Luo10] Feng Luo. Simple loops on surfaces and their intersection numbers. *J. Differential Geom.*, 85(1) :73–115, 2010. [9](#)
- [Mir16] M. Mirzakhani. Counting mapping class group orbits of curves on hyperbolic surfaces. [arXiv :1601.03342](https://arxiv.org/abs/1601.03342), 2016. [12](#)
- [MS84] J. W. Morgan and P. B. Shalen. Valuations, trees, and degenerations of hyperbolic structures. I. *Ann. of Math. (2)*, 120(3) :401–476, 1984. [11](#)
- [MS21] Julien Marché and Christopher-Lloyd Simon. Automorphisms of character varieties. *Ann. H. Lebesgue*, 4 :591–603, 2021. [arxiv version](#). [1](#), [8](#), [9](#), [11](#)
- [MS24] Julien Marché and Christopher-Lloyd Simon. Valuations on the character variety : Newton polytopes and residual poisson bracket. *Geometry and Topology*, to appear :X–Y, 2024. [arxiv version](#). [1](#), [8](#), [9](#), [10](#), [11](#)
- [Ota15] Jean-Pierre Otal. Compactification of spaces of representations after Culler, Morgan and Shalen. In *Berkovich spaces and applications*, volume 2119 of *Lecture Notes in Math.*, pages 367–413. Springer, Cham, 2015. [11](#)
- [PP91] Athanase Papadopoulos and Robert C. Penner. La forme symplectique de Weil-Petersson et le bord de Thurston de l’espace de Teichmüller. *C. R. Acad. Sci. Paris Sér. I Math.*, 312(11) :871–874, 1991. [11](#)
- [RS19] Kasra Rafi and Juan Souto. Geodesic currents and counting problems. *Geometric and Functional Analysis*, 29 :871–889, 2019. [12](#)
- [SB01] Yaşar Sözen and Francis Bonahon. The Weil-Petersson and Thurston symplectic forms. *Duke Math. J.*, 108(3) :581–597, 2001. [11](#)
- [Sim22a] Christopher-Lloyd Simon. *Arithmetic and Topology of Modular knots*. Thèse, Université de Lille, June 2022. [HAL version](#). [1](#), [3](#), [5](#)
- [Sim22b] Christopher-Lloyd Simon. Linking numbers of modular knots, 2022. Submitted for publication, [arxiv version](#). [1](#), [3](#)
- [Sim22c] Christopher-Lloyd Simon. Topologie et dénombrement des courbes algébriques réelles. *Ann. Fac. Sci. Toulouse Math. (6)*, 31(2) :383–422, 2022. [arxiv version](#). [1](#)
- [Sim23a] Christopher-Lloyd Simon. Conjugacy classes in $\mathrm{PSL}_2(\mathbb{K})$. *Mathematics Research Reports*, 4 :23–45, 2023. [arxiv version](#). [1](#), [3](#), [4](#)
- [Sim23b] Christopher-Lloyd Simon. Loops in surfaces, chord diagrams, interlace graphs : operad factorisations and generating grammars, 2023. Submitted for publication, [arxiv version](#). [1](#)
- [Thu09] D. Thurston. Geometric intersection of curves on surfaces. preprint, 2009. [9](#)