Filter- und Trackingverfahren

Übungsblatt 1

1. Aufgabe: multivariate Normalverteilungen

Eine Multivariate Normalverteilung $\mathcal{N}(\boldsymbol{\mu}, \boldsymbol{\Sigma})$ ist durch die Wahrscheinlichkeitsdichtefunktion

$$p(\boldsymbol{x}) = \frac{1}{\sqrt{(2\pi)^n \det(\boldsymbol{\Sigma})}} \cdot \exp\left[-\frac{1}{2}(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{\mu})^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\Sigma}^{-1}(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{\mu})\right], \quad n = \dim(x)$$

gegeben.

(a) Zeigen Sie, dass Kovarianzmatrizen symmetrisch sind.

(b) In welchem Intervall liegt die Kovarianz zweier Zufallsvariablen, wenn die jeweiligen Varianzen bekannt sind? (Hinweis: Korrelationskoeffizient, Cauchy-Schwarz-Ungleichung)

(c) Die Datei `"norm2D.txt"` enthält die Realisierungen einer zweidimensionalen Zufallsvariable X. Stellen Sie diese in Matlab als Punktwolke dar, schreiben Sie ein Matlab-Programm zur Berechnung von Mittelwert und Kovarianzmatrix der Zufallsvariable X und plotten Sie die zugehörige Wahrscheinlichkeitsdichtefunktion.

(d) Der Zufallsgenerator randn() erzeugt unkorrelierte mehrdimensionale Zufallsvektoren, welche standardnormalverteilt sind. Geben Sie ein Verfahren an, mit dem sich, unter Nutzung dieses Zufallsgenerators, trotzdem Zufallsvektoren einer beliebigen mehrdimensionalen Normalverteilung $\mathcal{N}(\boldsymbol{\mu}, \boldsymbol{\Sigma})$ erzeugen lassen. (Hinweis: Nutzen Sie die Eigenwertzerlegung der Kovarianzmatrix $\boldsymbol{\Sigma} = \boldsymbol{V}\boldsymbol{D}\boldsymbol{V}^{\mathrm{T}}$)

(e) Variieren Sie ausgehend von der 2D-Kovarianzmatrix

$$\boldsymbol{\Sigma} = \begin{bmatrix} \Sigma_{11} & \Sigma_{12} \\ \Sigma_{12} & \Sigma_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 100 & 0 \\ 0 & 100 \end{bmatrix}$$

einer mittelwertfreien Normalverteilung einzeln zunächst die Varianzen (Σ_{11} und Σ_{22}) im Intervall $[0, 100]$ und anschließend die Kovarianz (Σ_{12}) in den in 1b) errechneten Intervallgrenzen. Plotten Sie jede Variation als Punktwolke mit dem Verfahren aus 1d) und beschreiben Sie ausgehend von den Ergebnissen verbal den Einfluss der einzelnen Elemente der Kovarianzmatrix auf die Geometrie der Punktwolke.

2. Aufgabe: direkte lineare Least-Squares Schätzung

Ein sinusförmiges Spannungssignal wurde an N=100 Stützstellen mit einem sehr schlechten ADC abgetastet. Insgesamt wurde die Abstatung T=200 mal zu verschiedenen Zeiten wiederholt. Die Datei `"samples.txt"` enthält die T Sätze von N Abtastwerten.

(a) Eine Abtastung soll durch ein Polynom dritten Grades angenähert werden. Geben Sie die Berechnung der Polynomkoeffizienten nach dem Least-Squares Verfahren in Matrix-Schreibweise an. (Hinweis: Notwendige Bedingung eines Minimums)

(b) Implementieren sie das Fitting in Matlab und animieren Sie den Verlauf der Polynomapproximationen über die Datensequenz für alle Zeitschritte T=1,...,200.