Ψηφιακή Επεξεργασία Σήματος

1η Εργαστηριακή Άσκηση

Ομάδα LAB30242833

Τρίμας Χρήστος	***2016030054***
Χριστοδουλίδης Κυριάκος	***2016030025***

Σκοπός εργαστηριακής άσκησης:

Σκοπός της 1ης εργαστηριακής άσκησης του μαθήματος Ψηφιακή επεξεργασία σήματος, είναι η επανάληψη βασικών εννοιών των σημάτων και συστημάτων, και η υλοποίηση μάλιστα αυτών σε matlab. Συγκεκριμένα, αποκτήθηκε μια πρώτη επαφή με συνελίξεις σημάτων στο matlab, την μετατροπή σημάτων από τον χρόνο στην συχνότητα, καθώς και τη δειγματοληψία σημάτων, έννοιες χρήσιμες τόσο για τα επόμενα εργαστήρια του μαθήματος, όσο και για τα υπόλοιπα τηλεπικοινωνιακά μαθήματα.

Θεωρία:

Για την επιτυχή ολοκλήρωση της άσκησης χρειάστηκε κατανόηση των εννοιών:
Διακριτός Μετασχηματισμός Φουριέρ(DFT), Συνέλιξη(Convolution), Δειγματοληψία.

DFT: περιγράφεται για ένα διακριτό σήμα ορισμένο σε διάστημα: $0 \leq n \leq N-1$,

$$X(k) = \sum_{n=0}^{N-1} x(n) e^{-j2k\pi n/N}, k = 0, \ldots, N-1$$

Αντίστοιχα, αν μας δοθεί ο DFT ενός σήματος, με αντίστροφο μετασχηματισμό Fourier μπορώ να πάρω το αρχικό σήμα x(n):

$$x(n) = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} X(k) e^{j2\pi nk/N}, n = 0, \ldots, N-1$$

Convolution: ορίζεται ως εξής:

$$h(n) = \sum_{-\infty}^{\infty} x(k) y(n-k)$$

και συμβολίζεται ως:

$$h[n] = x[n] * y[n]$$

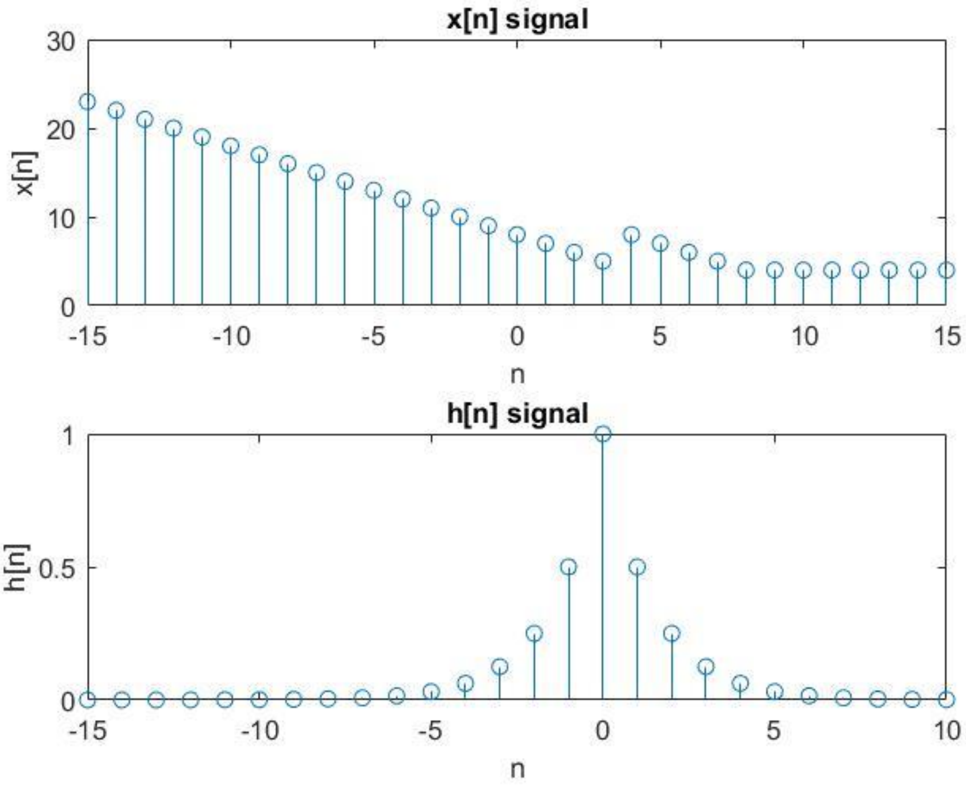
Δειγματοληψία: για ένα αναλογικό σήμα $x_a(t)$, μέσω της δειγματοληψίας επιδιώκουμε να κατασκευάσουμε το σήμα:

$$x(n) = Xa(nT)$$

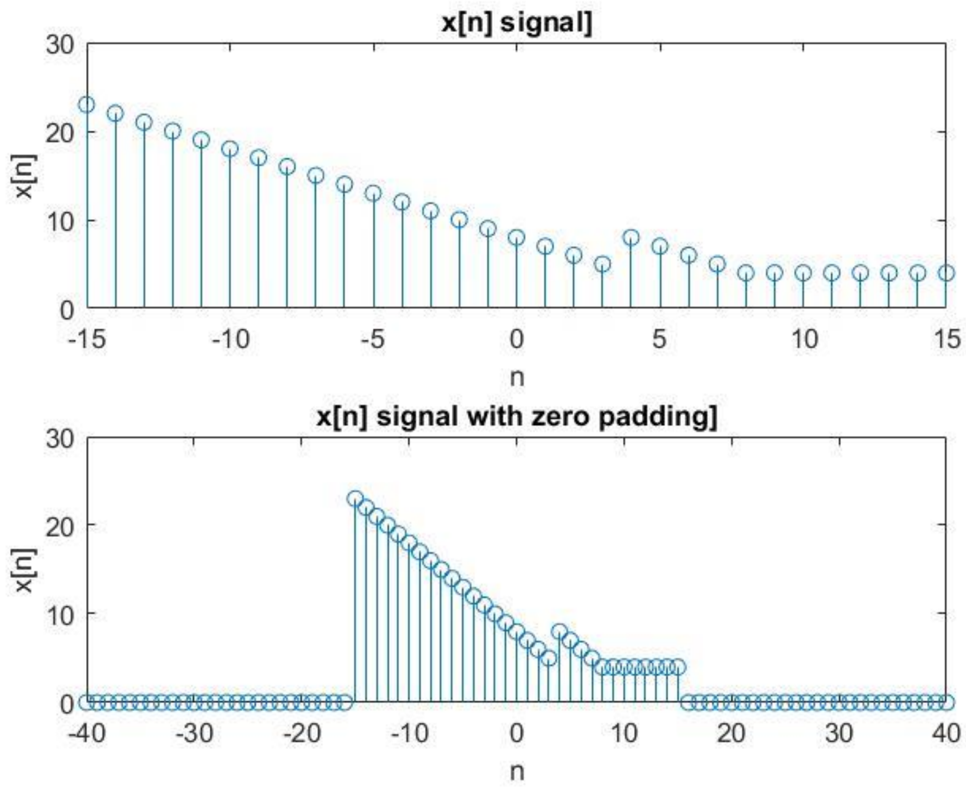
Όπου T η περίοδος δειγματοληψίας.

Διεξαγωγή του εργαστηρίου:

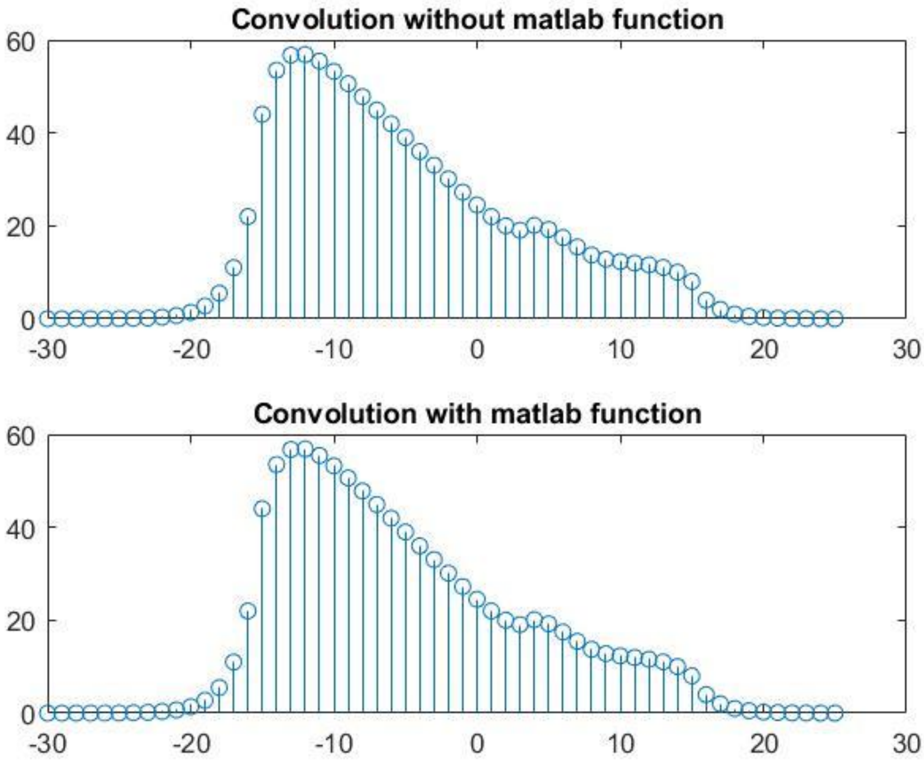
Για την Άσκηση 1Α, μας ζητήθηκε να υλοποιήσουμε την γραμμική συνέλιξη δύο διακριτών σημάτων. Επιλέχτηκαν τα x[n] =u[n-4]+r[-n+8] και h[n] = (1/2)^|n|.



Για τον υπολογισμό της συνέλιξης των σημάτων με τον ορισμό, υπολογίστηκε αρχικά το διάστημα συνέλιξης. Στη συνέχεια με χρήση της τεχνικής zero padding «γεμίσαμε» το σήμα x[n], έτσι ώστε να μπορούν να υλοποιηθούν οι πολλαπλασιασμοί με βάση τον ορισμό της συνέλιξης στην θεωρία μας.



Ακολουθεί ανάκλαση και μετατόπιση του σήματος h[n] για να δημιουργηθεί το σήμα h[n-k]. Τέλος, μέσω μια ρουτίνας υπολογίστηκε «εξαντλητικά» η συνέλιξη των δυο σημάτων, ενώ σαν τελευταίο βήμα, καλέσαμε την έτοιμη συνάρτηση του matlab conv και συγκρίναμε τα αποτελέσματα και των δυο μεθόδων.

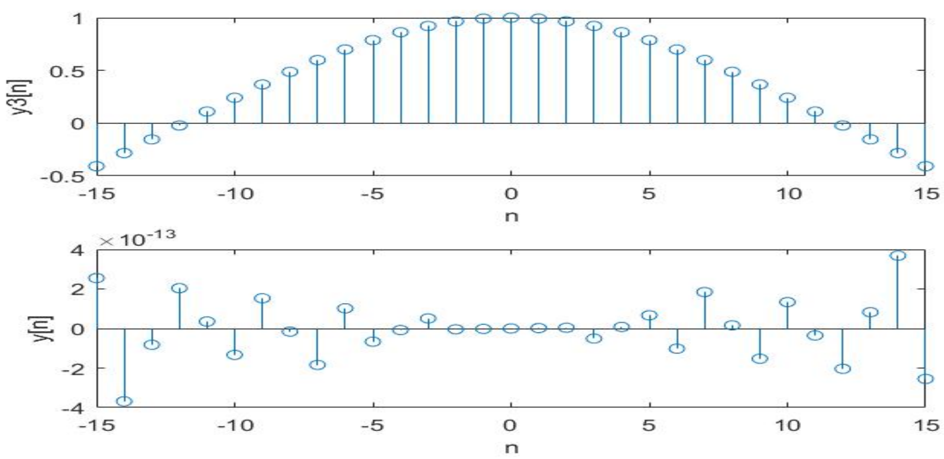


Το αποτέλεσμα με γυμνό μάτι φαίνεται να είναι το ίδιο.

Για το Β μέρος της $1^{ης}$ Άσκησης, κατασκευάσαμε τα εξής σήματα:

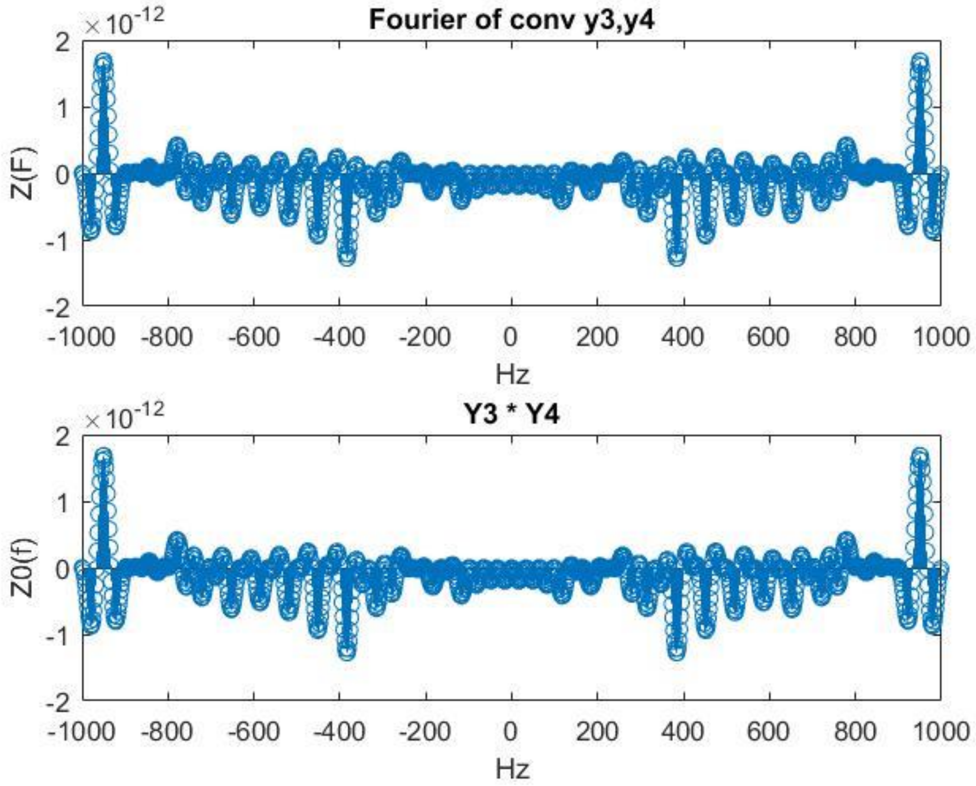
1) y3 = cos[25n]
2) y4 = sin[2π50n]

με το n να παίρνει τιμές στο διάστημα [-15,15].



Αρχικά υλοποιήσαμε την συνέλιξη αυτού του σήματος με την συνάρτηση conv(y3,y4) και στη συνέχεια με χρήση της έτοιμης συνάρτησης fft του matlab μετατρέψαμε το σήμα στη συχνότητα.

Κατά σειρά, κάναμε μετασχηματισμό Fourier σε κάθε σήμα ξεχωριστά, και στο τέλος τα πολλαπλασιάσαμε και συγκρίναμε τα αποτελέσματα της κάθε περίπτωσης.



Όπως φαίνεται από τα γραφήματα, η συνέλιξη των σημάτων στο πεδίο του χρόνου, ισοδυναμεί με πολλαπλασιασμό στην συχνότητα.

Για την Άσκηση 2, χρειάστηκε να σχεδιάσουμε το σήμα x(t) = 5cos(24πt) – 2sin(1.5πt) με t να ανήκει στο διάστημα [0,500ms], να το μετατρέψουμε στη συχνότητα και να βρεθεί η συχνότητα Nyquist του σήματος.

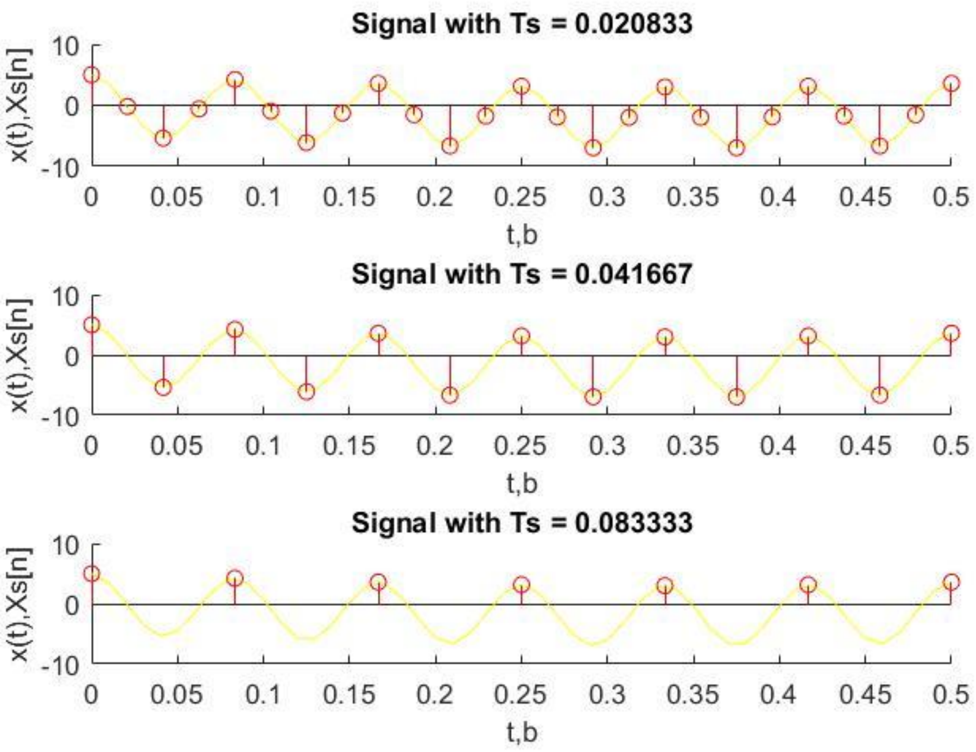
Ο Fourier του παραπάνω σήματος είναι:

$$\frac{5}{2}\{\delta(F-12)+\delta(F+12)\}+j\{\delta\left(F+\frac{3}{4}\right)-\delta(F-\frac{3}{4})$$

Για τον υπολογισμό της συχνότητας Nyquist, χρειάζεται να ανατρέξουμε στο αρχικό σήμα x(t). Το σήμα είναι 5cos(24πt) – 2sin(1.5πt), και άρα συχνότητες f1 = 12 και f2 = ¾ με αποτέλεσμα fmax = 12 Hz.

Για την πλήρη αποκατάσταση του σήματος, γνωρίζουμε από την θεωρία ότι fs πρέπει να είναι μεγαλύτερη το πού ίση με δυο φορές την μέγιστη συχνότητα. Η ελάχιστη συχνότητα η οποία το εγγυάται αυτό ονομάζεται συχνότητα Nyquist και είναι ίση με 24 Hz.

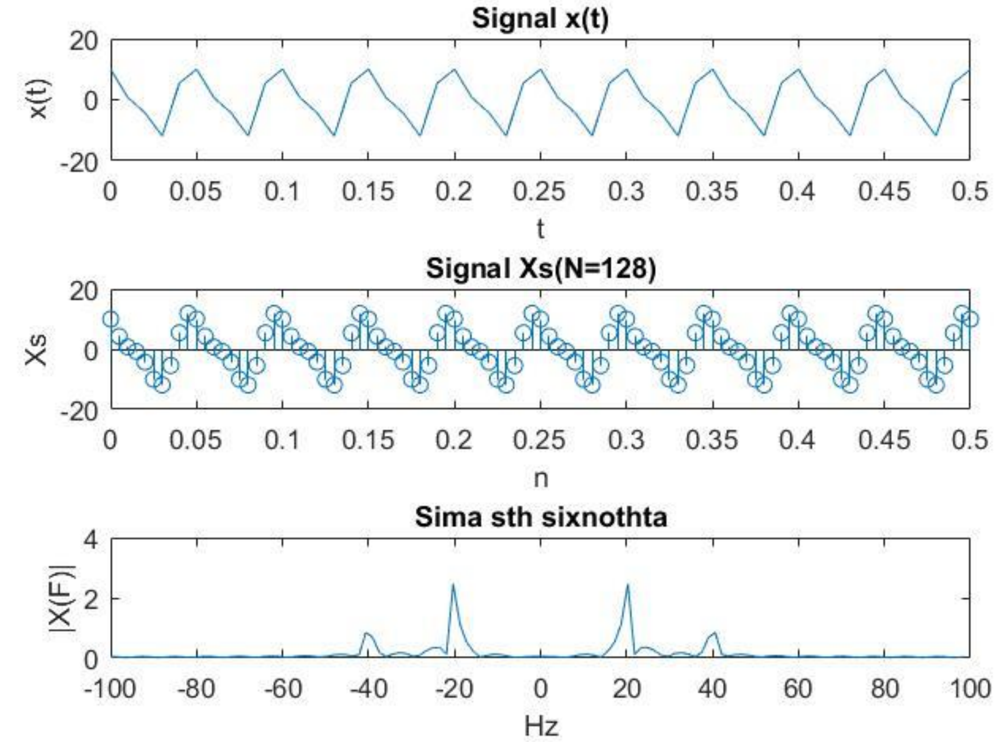
Για το εργαστηριακό κομμάτι, προχωρήσαμε σε δειγματοληψία του x(t) με τις περιπτώσεις τις οποίες μας ζητήθηκαν. Συγκεκριμένα, μέσα από μια ρουτίνα πραγματοποιήθηκε δειγματοληψία με T = [1/48 1/24 1/12] και παρουσιάστηκαν στο ακόλουθο γράφημα. Για την σωστή απεικόνιση της δειγματοληψίας, κατασκευάστηκε ο διακριτός «χρόνος» με την χρήση του τύπου n = t/Ts και τις συναρτήσεις του matlab floor και ceil, οι οποίες κάνουν στρογγυλοποίηση στον κοντινότερο ακέραιο, προς τα κάτω και προς τα πάνω αντίστοιχα.



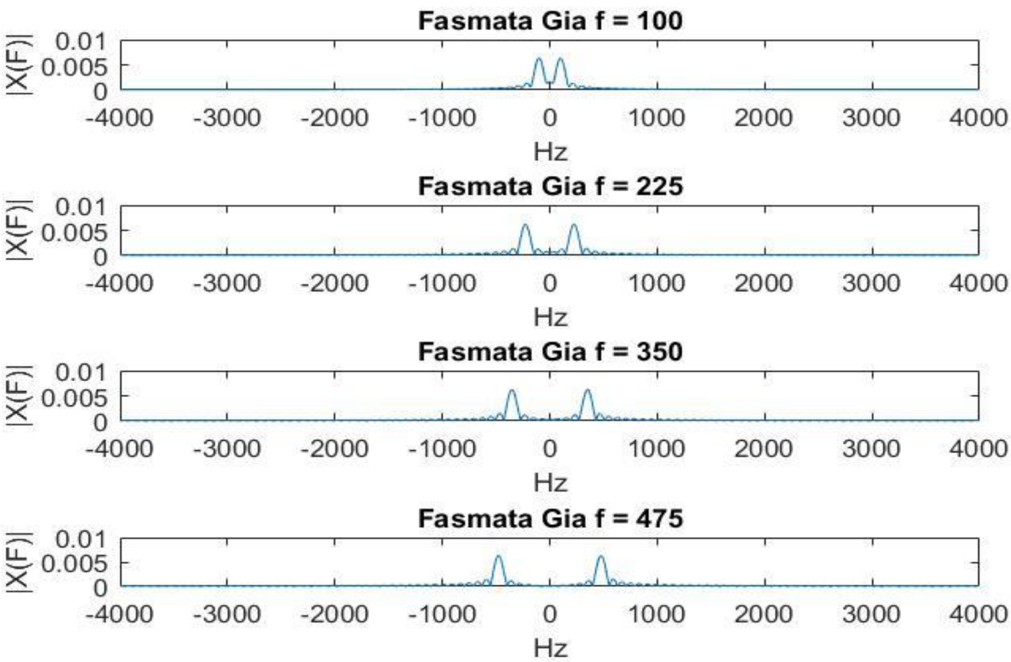
Από το προηγούμενο γράφημα εξάγονται τα εξής συμπεράσματα:

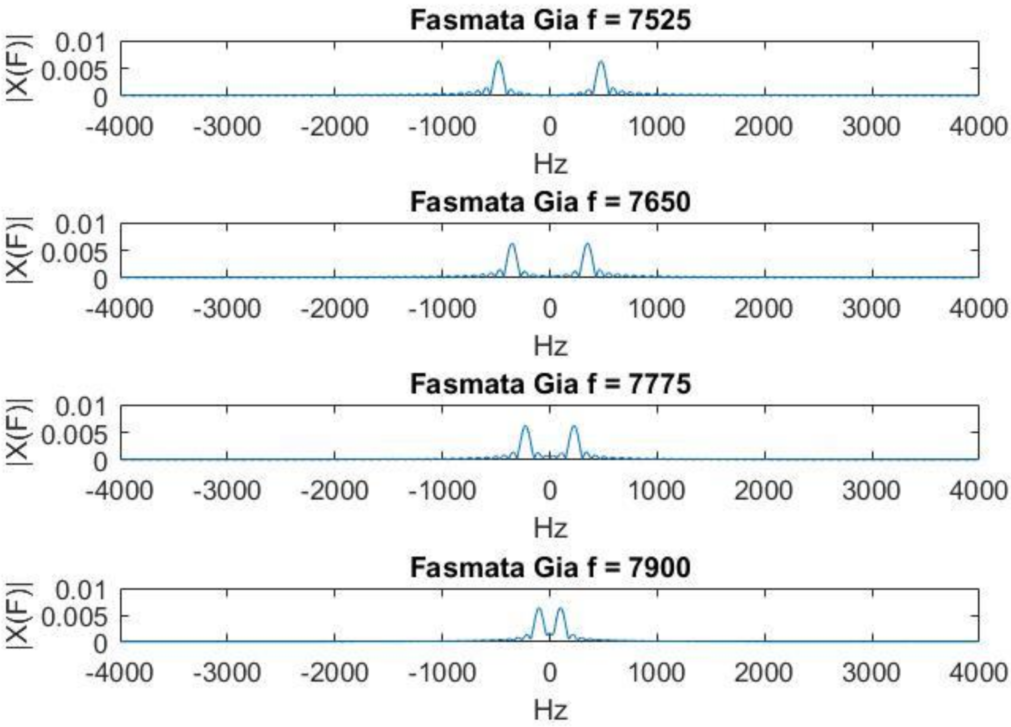
1) Όταν το fs είναι αρκετά μεγαλύτερο από το 2fmax, τότε η αποκατάσταση μπορεί να γίνει πλήρως, αφού η προσέγγιση είναι αρκετά ικανοποιητική.
2) Στην περίπτωση της συχνότητας Nyquist, έχουμε οριακά αποκατάσταση του σήματος μας, καθώς και η δειγματοληψία η ίδια είναι οριακά επαρκής.
3) Όταν το fs<2fmax, παρατηρείται το φαινόμενο της επικάλυψης, όπου τα δείγματα δεν φαίνεται να έχουν δημιουργηθεί από το αρχικό μας σήμα, αλλά από κάποιο άλλο σήμα με χαμηλότερη συχνότητα. Η αποκατάσταση σε αυτή την περίπτωση είναι αδύνατη.

Για την 3^{η} και τελευταία άσκηση του 1^{ου} εργαστηρίου, έγινε δειγματοληψία 128 δειγμάτων με συχνότητα την οποία επιλέξαμε εμείς, έτσι ώστε να μην εμφανιστεί το φαινόμενο της επικάλυψης. Για να το εξασφαλίσουμε αυτό επιλέξαμε 200 Hz, καθώς είναι μεγαλύτερη από 2fmax. Όπως και στην προηγούμενη άσκηση, έτσι και σε αυτή, κατασκευάσαμε τον διακριτό «χρόνο», και κάναμε μετασχηματισμό Fourier με κέντρο το μηδέν και την αναπαραστήσαμε στο ακόλουθο γράφημα.



Για το δεύτερο μισό της άσκησης, μας δόθηκε το σήμα $x(t) = \sin(2\pi f0t+\phi)$ και συχνότητα δειγματοληψίας 8000 Hz, φ τυχαίο και το διακριτό σήμα $x[n] = \sin(2\pi(f0/fs)n+\phi)$, το οποίο είναι προκύπτει από το x(t), αν $n = t/T_f$ ή αλλιώς $t = n/fs$. Στο επόμενο βήμα, μεταβάλλαμε την συχνότητα από 100-475 Hz και από 7525-7900 Hz με βήμα 125 αντίστοιχα και στις δυο περιπτώσεις.





Το φάσμα μεταξύ των συχνοτήτων 100-475 Hz μεγαλώνει, ενώ για τις συχνότητες 7525-7900 Hz το φάσμα μικραίνει. Αυτή η αύξηση συμβαίνει μέχρι την συχνότητα f=fs/2=4kHz, η οποία είναι και η συχνότητα Nyquist. Με το πέρασμα αυτής της τιμής το φάσμα μικραίνει και αρχίζει να δημιουργείται φαινόμενο aliasing, καθιστώντας την ανάκτηση αδύνατη.