ΦΥΛΛΑΔΙΟ 2

ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ

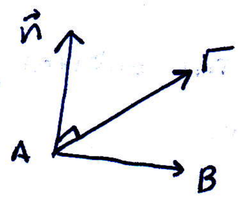
Χρηστος ΤΣΟΥΦΗΣ
ΣΗΜΜΥ, 1ο εξάμηνο

ασκ 1

α) $A(1,2,3)$

$B(0,0,1)$

$\Gamma(2,0,0)$



$\vec{AB} = (0-1, 0-2, 1-3) = (-1,-2,-2)$

$\vec{A\Gamma} = (2-1, 0-2, 0-3) = (1,-2,-3)$

$$\vec{n} = \vec{AB} \times \vec{A\Gamma} = \begin{vmatrix} i & j & k \\ -1 & -2 & -2 \\ 1 & -2 & -3 \end{vmatrix} = i\begin{vmatrix} -2 & -2 \\ -2 & -3 \end{vmatrix} - j\begin{vmatrix} -1 & -2 \\ 1 & -3 \end{vmatrix} + k\begin{vmatrix} -1 & -2 \\ 1 & -2 \end{vmatrix} =$$

$$= i(6-4) - j(3+2) + k(2+2) = 2i - 5j + 4k = (2,-5,4)$$

$\Pi: \ Ax + By + \Gamma z + \Delta = 0$

$2x - 5y + 4z + \Delta = 0$

$B \in \Pi: \ 2\cdot 0 - 5\cdot 0 + 4\cdot 1 + \Delta = 0 \Rightarrow \Delta = -4$

Άρα $\Pi: \ 2x - 5y + 4z - 4 = 0$

β) $Q: \ x - y + 3z - 6 = 0$

$A(1,0,2)$

Αφού $\Pi // Q$ θα έχουν το ίδιο κάθετο διάνυσμα $\vec{n} = (1,-1,3)$

$\Pi: \ Ax + By + \Gamma z + \Delta = 0$

$x - y + 3z + \Delta = 0$

$A \in \Pi: \ 1 - 0 + 3\cdot 2 + \Delta = 0 \Rightarrow \Delta = -7$

Άρα $\Pi: \ x - y + 3z - 7 = 0$

γ) $A(3,-1,2)$

$\Pi_1: \ x-y+z=3$

$\Pi_2: \ 3x-z=0$

Το Π είναι κάθετο στο παράλληλο διάνυσμα της ευθείας, το οποίο είναι κάθετο στα καθετ. διανύσματα των επιπέδων.

$\vec{n}_1 = (1,-1,1)$

$\vec{n}_2 = (3,0,-1)$

$$\vec{u} = \vec{n}_1 \times \vec{n}_2 = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 1 & -1 & 1 \\ 3 & 0 & -1 \end{vmatrix} = i\begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 0 & -1 \end{vmatrix} - j\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 3 & -1 \end{vmatrix} + k\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 3 & 0 \end{vmatrix} =$$

$$= i(1-0) - j(-1-3) + k(0+3) = i + 4j + 3k = (1,4,3)$$

Άρα: $\Pi: \ Ax+By+\Gamma z+\Delta=0$ με $\vec{u}=(1,4,3)$ $(\vec{u}\perp\Pi)$ και $A\in\Pi$:

$1\cdot 3 + 4(-1) + 3(\cdot 2) + \Delta = 0$

$3 - 4 + 6 + \Delta = 0$

$\Delta = -5$

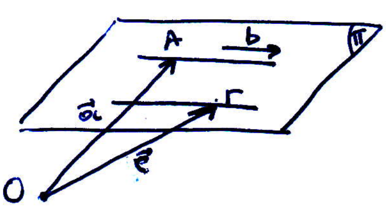
οπότε $\Pi: \ x + 4y + 3z - 5 = 0$

ασκ2

α) $\varepsilon_1: \ \vec{r} = \vec{a} + \lambda\vec{b}$

$\varepsilon_2: \ \vec{r} = \vec{c} + \mu\vec{b} \qquad \lambda,\mu\in\mathbb{R}$

$\varepsilon_1 /\!/ \varepsilon_2$ διότι έχουν το ίδιο παράλληλο διάνυσμα $\vec{b}$



Το επίπεδο είναι παράλληλο στα διανύσματα $\vec{b}$, $\vec{A\Gamma} = \vec{c} - \vec{a}$

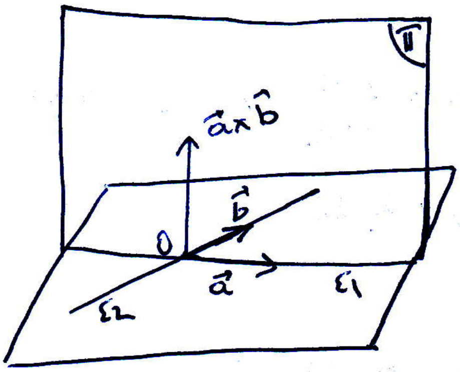
Επομένως, είναι κάθετο στο διάνυσμα $\vec{n} = \vec{b}\times\vec{AC} = \vec{b}\times(\vec{c}-\vec{a})$

Άρα, η διανυσματική εξίσωση του Π είναι: $(\vec{r}-\vec{a})\cdot\vec{n} = 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow (\vec{r}-\vec{a})\cdot\vec{n} = 0 \Rightarrow (\vec{r}-\vec{a})\cdot\left[\vec{b}\times(\vec{c}-\vec{a})\right] = 0 \Rightarrow (\vec{r}-\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}-\vec{a}) = 0$

β). $\vec{r} = \lambda \vec{a}$, $\lambda \in \mathbb{R}$

· Π: $\vec{r} = \lambda \vec{a}$, $\vec{r} = \mu \vec{b}$, $\vec{a} \times \vec{b} \neq \vec{0}$



Το Π διέρχεται από το O και είναι παράλληλο στα διανύσματα $\vec{a}$, $\vec{a} \times \vec{b}$. Άρα έχει ως κάθετο διάνυσμα το $\vec{n} = \vec{a} \times (\vec{a} \times \vec{b})$ όπου

$$\vec{a} \times (\vec{a} \times \vec{b}) = -(\vec{a} \times \vec{b}) \times \vec{a} = -\left[(\vec{a} \cdot \vec{a}) \cdot \vec{b} - (\vec{a} \cdot \vec{b}) \cdot \vec{a}\right] =$$

$$= -|\vec{a}|^2 \cdot \vec{b} + (\vec{a} \cdot \vec{b}) \cdot \vec{a}$$

και διέρχεται από το O.

Άρα $\vec{r} \cdot \vec{n} = 0$

ασκ 3

ε: $(\vec{r} - \vec{a}) \times \vec{n} = \vec{0}$

α) $\vec{n}$: παράλληλο διάνυσμα στην ε

$\vec{a}$: διάνυσμα θέσης ενός σημείου της ευθείας ε

β) $\Pi_1: x + y + z - 1 = 0 \longrightarrow \vec{n}_1 = (1, 1, 1)$

$\Pi_2: 4x - 3y - z + 1 = 0 \longrightarrow \vec{n}_2 = (4, -3, -1)$

$$\vec{n} = \vec{n}_1 \times \vec{n}_2 = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 1 & 1 & 1 \\ 4 & -3 & -1 \end{vmatrix} = i \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ -3 & -1 \end{vmatrix} - j \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 4 & -1 \end{vmatrix} + k \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 4 & -3 \end{vmatrix} =$$

$$= 2i + 5j - 7k = (2, 5, -7)$$

Για $z = 1$, $\begin{cases} x + y = 0 \\ 4x - 3y = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 3x + 3y = 0 \\ 4x - 3y = 0 \quad + \end{cases}$

$7x = 0 \Rightarrow x = 0 \Rightarrow y = 0 \longrightarrow A(0, 0, 1)$

Το A δεν είναι μοναδικό γιατί το σύστημα έχει άπειρες λύσεις.

Το $\vec{n} \parallel \varepsilon$ αλλά και κάθε $\lambda \vec{n}$ είναι παράλληλο στην ε.

ασκ4

$\varepsilon_1: \ x-3=0 \ , \ y+2z=10$

$\varepsilon_2: \ \dfrac{x+2}{3} = \dfrac{y+1}{2} = \dfrac{z+1}{2}$

• Ασύμβατες:

Για (ε_1): $x=3 \ , \ y+2z=10 \Rightarrow z = \dfrac{-y+10}{2} \Rightarrow z = \dfrac{y-10}{-2} \Rightarrow \dfrac{z-0}{1} = \dfrac{y-10}{-2}$

δηλ. περνάει από το $A_1(3, 10, 0)$ και $\vec{a}_1 = (0, -2, 1)$

Για (ε_2): $A_2(-2,-1,-1)$ και $\vec{a}_2 = (3,2,2)$

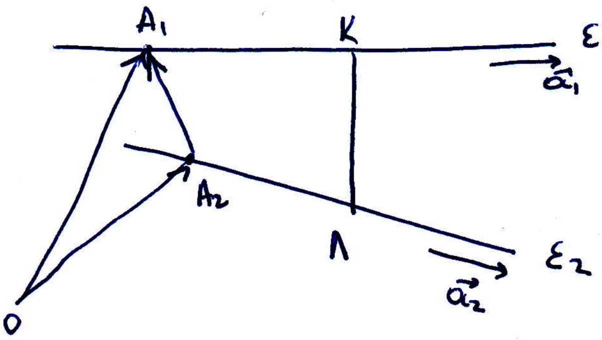
οπότε $\vec{r}_1 = (3, 10, 0)$, $\vec{r}_2 = (-2, -1, -1)$: $\vec{r}_1 - \vec{r}_2 = (5, 11, 1)$

• αρκεί $(\vec{r}_1 - \vec{r}_2, \vec{a}_1, \vec{a}_2) \neq 0 \Leftrightarrow \begin{vmatrix} 5 & 11 & 1 \\ 0 & -2 & 1 \\ 3 & 2 & 2 \end{vmatrix} \neq 0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 5(-4-2) - 11(0-3) + 1(0+6) \neq 0 \Leftrightarrow -40+33+6 \neq 0 \Leftrightarrow -1 \neq 0$, ισχύει.

Άρα $\varepsilon_1, \varepsilon_2$ ασύμβατες.

• Ίχνος, Μήκος:



Το τυχαίο K έχει συντεταγμένες $(3, -2t+10, t) \ t \in \mathbb{R}$

Το τυχαίο Λ έχει συντεταγμένες $(3\lambda-2, 2\lambda-1, 2\lambda-1) \ \lambda \in \mathbb{R}$

ενώ το τυχαίο διάνυσμα με άκρα πάνω στις ευθείες $\varepsilon_1, \varepsilon_2$ έχει συντεταγμένες $(3\lambda-5, 2\lambda+2t-11, 2\lambda-t-1)$

Αρκεί να ισχύει: $\begin{Bmatrix} \vec{K\Lambda} \perp \varepsilon_1 \\ \vec{K\Lambda} \perp \varepsilon_2 \end{Bmatrix} \Leftrightarrow \begin{Bmatrix} \vec{K\Lambda} \cdot \vec{a}_1 = 0 \\ \vec{K\Lambda} \cdot \vec{a}_2 = 0 \end{Bmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} -2(2\lambda+2t-11) + 1(2\lambda-t-1) = 0 \\ 3(3\lambda-5) + 2(2\lambda+2t-11) + 2(2\lambda-t-1) = 0 \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{Bmatrix} -2\lambda - 5t = -21 \\ 17\lambda + 2t = 39 \end{Bmatrix} \Leftrightarrow \begin{Bmatrix} t = 31/9 \\ \lambda = 17/9 \end{Bmatrix}$ οπότε $K\left(3, \dfrac{28}{9}, \dfrac{31}{9}\right)$

$\Lambda\left(\dfrac{33}{9}, \dfrac{25}{9}, \dfrac{25}{9}\right)$

και $d_{min}(\varepsilon_1, \varepsilon_2) = |\vec{K\Lambda}| = 1$

ασκ 5

$\vec{OA} = \vec{a}$, $\vec{OB} = \vec{b}$, $\vec{O\Gamma} = \vec{c}$

α) (βλ. Φυλ. 1)

$$E_{(AB\Gamma)} = \frac{1}{2}|\vec{AB} \times \vec{A\Gamma}| = \frac{1}{2}|(\vec{b}-\vec{a}) \times (\vec{c}-\vec{a})| =$$

$$= \frac{1}{2}|\vec{b}\times\vec{c} - \vec{b}\times\vec{a} - \vec{a}\times\vec{c} + \cancel{\vec{a}\times\vec{a}}^{\,0}| =$$

$$= \frac{1}{2}|\vec{a}\times\vec{b} + \vec{b}\times\vec{c} + \vec{c}\times\vec{a}|$$

β) Π: $6x - 3y - 2z - 6a = 0$

Τέμνει xx':	$y = z = 0$	:	$A(a,0,0)$
-‖- yy':	$x = z = 0$	:	$B(0,-2a,0)$
-‖- zz':	$x = y = 0$	:	$\Gamma(0,0,-3a)$

$$E_{(AB\Gamma)} = \frac{1}{2}|\vec{AB}\times\vec{A\Gamma}| = \frac{1}{2}|6a^2\vec{i} + 3a^2\vec{j} + 2a^2\vec{k}| = \frac{7a^2}{2}$$

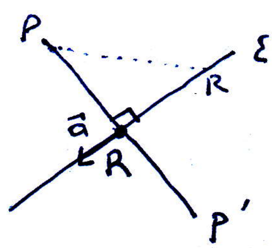
ασκ 6

$P(1,0,3)$

ε: $x = -y = -z$

Π: $x - y - z - 12 = 0$

α) ε: $\dfrac{x-0}{1} = \dfrac{y-0}{-1} = \dfrac{z-0}{-1}$ $\quad \vec{r} = \lambda\overset{\vec{a}}{(1,-1,-1)} + (0,0,0)$



Όπως $\vec{OR} = \vec{r} = (\lambda,-\lambda,-\lambda)$

$\vec{OP} = (1,0,3)$

$\vec{OP'} = (x,y,z)$

αρκεί $\vec{PR} \perp \vec{a}$

$\vec{PR} = \vec{r} - \vec{OP} = (\lambda-1, -\lambda, -\lambda-3)$

$\vec{RP} = (1-\lambda, \lambda, \lambda+3)$

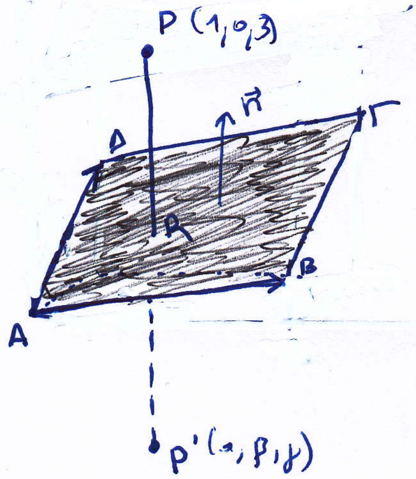
$\vec{RP}\cdot\vec{a} = 0 \Leftrightarrow (1-\lambda)\cdot 2 - (\lambda) - (\lambda+3) = 0 \Leftrightarrow 1-\lambda-\lambda-\lambda-3 = 0 \Rightarrow -3\lambda - 2 = 0$
$\Rightarrow \lambda = -\frac{2}{3}$

Άρα $\vec{RP} = (\frac{5}{3}, -\frac{2}{3}, \frac{7}{3})$

και $\vec{RP'} = -\vec{RP} \Rightarrow (x+\frac{2}{3}, y-\frac{2}{3}, z-\frac{2}{3}) = (-\frac{5}{3}, +\frac{2}{3}, -\frac{7}{3}) \Rightarrow$

$\Rightarrow x = -\frac{7}{3}$, $y = -\frac{4}{3}$, $z = -\frac{5}{3}$ δηλ. $P'(-\frac{7}{3}, -\frac{4}{3}, -\frac{5}{3})$

β)



Έστω $P'(α,β,γ)$ το συμμετρικό του P ως προς το $Π$, οπότε θα είναι συγγραμμικά τα: Το κάθετο διάνυσμα $\vec{n}(1,-1,-1)$ του $Π$ το διάνυσμα $\vec{PP'}(α-1, β, γ-3)$, οπότε:

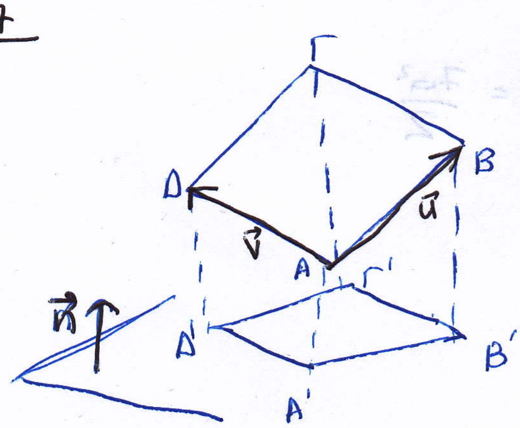
$$\frac{α-1}{1} = \frac{β}{-1} = \frac{γ-3}{-1} = t \quad (1)$$

Το μέσον $R\left(\frac{α+1}{2}, \frac{β}{2}, \frac{γ+3}{2}\right) \in Π$ οπότε έχουμε:

$$\frac{α+1}{2} - \frac{β}{2} - \frac{γ+3}{2} - 12 = 0 \Leftrightarrow α - β - γ = 26 \quad (2)$$

Από $(1), (2) \Rightarrow P'\left(\frac{31}{3}, -\frac{28}{3}, -\frac{19}{3}\right)$

<u>ασκ 7</u>



Έχουμε ότι

$$\vec{A'B'} = \vec{A'A} + \vec{AB} + \vec{BB'} = \vec{A'A} - \vec{B'B} + \vec{u}$$

$$\vec{A'Δ'} = \vec{A'A} + \vec{AΔ} + \vec{ΔΔ'} = \vec{A'A} - \vec{Δ'Δ} + \vec{v}$$

Γνωρίζουμε ότι

$$\vec{A'A} - \vec{B'B} \parallel \vec{n} \Leftrightarrow \vec{A'A} - \vec{B'B} = λ\vec{n}$$

$$\vec{A'A} - \vec{Δ'Δ} \parallel \vec{n} \Leftrightarrow \vec{A'A} - \vec{Δ'Δ} = μ\vec{n}$$

Όποτε, $\vec{A'B'} = \vec{u} + λ\vec{n}$, $\vec{A'Δ'} = \vec{v} + μ\vec{n}$ και άρα,

$$\vec{A'B'} \times \vec{A'Δ'} = (\vec{u} + λ\vec{n}) \times (\vec{v} + μ\vec{n}) = \vec{u} \times \vec{v} + (\vec{u} \times \vec{n})μ + (\vec{n} \times \vec{v})λ + \cancel{(\vec{n} \times \vec{n})}^{0} λμ \Rightarrow$$

$$\Rightarrow (\vec{A'B'} \times \vec{A'Δ'}) \cdot \vec{n} = (\vec{u} \times \vec{v}) \cdot \vec{n} + μ\cancel{(\vec{u} \times \vec{n}) \cdot \vec{n}}^{0} + λ\cancel{(\vec{n} \times \vec{v}) \cdot \vec{n}}^{0}$$

Ισχύει ότι $\vec{A'B'} \times \vec{A'Δ'} \parallel \vec{n}$ και άρα

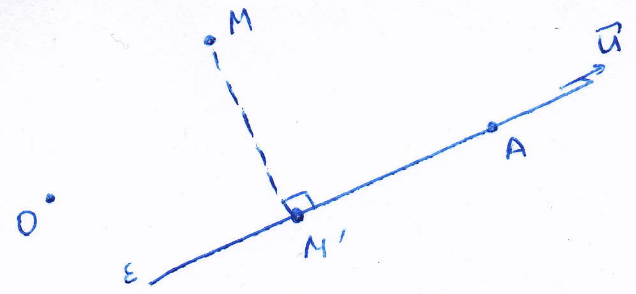
$$(\vec{A'B'} \times \vec{A'Δ'}) \cdot \vec{n} = \pm |\vec{A'B'} \times \vec{A'Δ'}| \cdot \cancel{|\vec{n}|}^{1} = \pm |\vec{A'B'} \times \vec{A'Δ'}|$$

Άρα $E_{(A'B'Γ'Δ')} = |\vec{A'B'} \times \vec{A'Δ'}| = |(\vec{u} \times \vec{v}) \cdot \vec{n}|$

$\varepsilon: \vec{r} = \vec{a} + t\vec{u}, \ t \in \mathbb{R}$

$M \notin (\varepsilon)$, r_M

$d(M, \varepsilon) = ;$



Η ευθεία έχει διανυσματική εξίσωση: $(\vec{r} - \vec{a}) \times \vec{u} = \vec{0} \Leftrightarrow \vec{r} \times \vec{u} = \vec{a} \times \vec{u}$

Έστω M' το ίχνος της M στην ε, με διανυσματική ακτίνα $\vec{r}_{M'}$. Είναι τότε

$\overrightarrow{M'M} = \vec{r}_M - \vec{r}_{M'} \Rightarrow \overrightarrow{M'M} \times \vec{u} = (\vec{r}_M - \vec{r}_{M'}) \times \vec{u} = \vec{r}_M \times \vec{u} - \vec{r}_{M'} \times \vec{u}$

Επειδή $M' \in (\varepsilon)$, θα είναι $\vec{r}_{M'} \times \vec{u} = \vec{a} \times \vec{u}$ και άρα $\overrightarrow{M'M} \times \vec{u} = \vec{r}_M \times \vec{u} - \vec{a} \times \vec{u} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \overrightarrow{M'M} \times \vec{u} = (\vec{r}_M - \vec{a}) \times \vec{u} \Rightarrow |\overrightarrow{M'M} \times \vec{u}| = |(\vec{r}_M - \vec{a}) \times \vec{u}| \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow |\overrightarrow{M'M}| \cdot |\vec{u}| \cdot \cancel{\sin\frac{\pi}{2}}^{1} = |(\vec{r}_M - \vec{a}) \times \vec{u}| \Leftrightarrow$

Όμως $|M'M| = d(M, \varepsilon)$ και άρα:

$$d(M, \varepsilon) = \frac{|(\vec{r}_M - \vec{a}) \times \vec{u}|}{|\vec{u}|}$$

<u>Εφαρμογή</u>

$\vec{r}_M = (1, 2, -1)$

$\vec{u} = \overrightarrow{AB} = (1, 2, 2)$

$\vec{r}_M - \vec{a} = (-1, 3, -5)$

$(\vec{r}_M - \vec{a}) \times \vec{u} = 11i - 3j - 5\vec{k}$

και $d(M, \varepsilon) = \dfrac{\sqrt{155}}{3}$