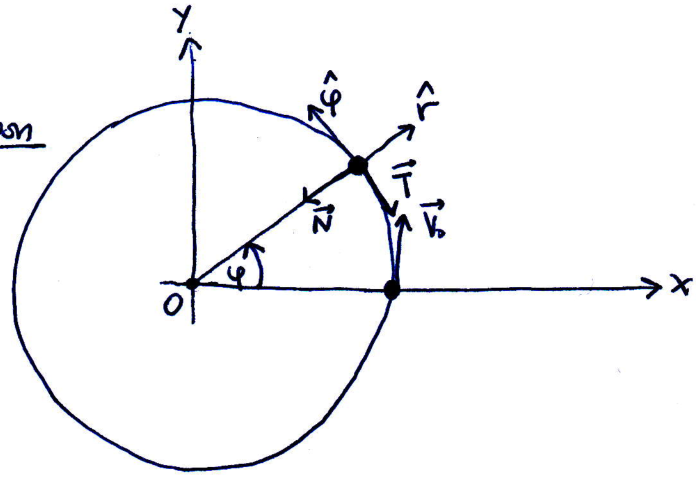
Β' ΣΕΙΡΑ ΑΣΚΗΣΕΩΝ

ΦΥΣΙΚΗ Ι

Χρήστος Τσούφης
ΣΗΜΜΥ, 1ο εξάμηνο.

ασκ 1

1η περίπτωση



$$\left.\begin{array}{l} x = r\cos\varphi \\ y = r\sin\varphi \end{array}\right\} \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} \hat{r} = \hat{x}\cos\varphi + \hat{y}\sin\varphi \\ \hat{\varphi} = -\hat{x}\sin\varphi + \hat{y}\cos\varphi \end{array}\right.$$

$$\vec{r} = r\cdot\hat{r}$$

$$\vec{v} = \dot{r}\cdot\hat{r} + r\dot{\varphi}\hat{\varphi}$$

$$\vec{a} = (\ddot{r} - r\dot{\varphi}^2)\hat{r} + (r\ddot{\varphi} + 2\dot{r}\dot{\varphi})\hat{\varphi}$$, με $r = R$ οπότε $\dot{r} = \ddot{r} = 0$

οπότε, έχουμε: $\vec{V} = r\cdot\dot{\varphi}\hat{\varphi}$

$$\vec{a} = \underbrace{-r\dot{\varphi}^2\hat{r}}_{\vec{a}_r} + \underbrace{r\ddot{\varphi}\hat{\varphi}}_{\vec{a}_\varphi}$$

- $\vec{N} = m\cdot\vec{a_r} = m\cdot a_r\cdot\hat{r} = m(-r\dot{\varphi}^2)\hat{r} = -mr\dot{\varphi}^2\hat{r}$
- $\vec{T} = -\mu N\hat{\varphi} = m\cdot\vec{a}_\varphi = m\cdot r\cdot\ddot{\varphi}\hat{\varphi}$

δηλ. $\|\vec{N}\| = mr\dot{\varphi}^2$

$\|\vec{T}\| = \cancel{m}\cancel{r}\ddot{\varphi} = \mu\cdot\cancel{m}\cancel{r}\dot{\varphi}^2$

$$\vec{N} = -mr\dot{\varphi}^2\hat{r}$$

$$\vec{T} = mr\ddot{\varphi}\hat{\varphi} = -\mu\cdot\|\vec{N}\|\cdot\hat{\varphi}$$

$$\cancel{m}\cancel{r}\ddot{\varphi} = -\mu \cancel{m}\cdot\cancel{r}\dot{\varphi}^2 \Rightarrow \quad \ddot{\varphi} = -\mu\cdot\dot{\varphi}^2 \qquad \text{θέτω} \quad \dot{\varphi} = \omega$$

οπότε έχουμε $\dot{\omega} = -\mu\cdot\omega^2$

$$\frac{d\omega}{dt} = -\mu\,\omega^2$$

$$\int_{t_0}^{t}\frac{d\omega}{\omega^2} = -\mu\int_{t_0}^{t} dt$$

$$\left[-\frac{1}{\omega(t)}\right]_{t_0}^{t} = -\mu\left[t\right]_{t_0}^{t}$$

$$-\left(\frac{1}{\omega(t)} - \frac{1}{\omega(t_0)}\right) = -\mu\,(t - \cancel{t_0}^{0})$$

$$-\frac{1}{\omega(t)} + \frac{1}{\omega(t_0)} = -\mu t$$

$$\frac{1}{\omega(t)} = \mu t + \frac{1}{\omega(t_0)} = \frac{1 + \mu\cdot t\cdot\omega(t_0)}{\omega(t_0)}$$

αλλά, $\omega(t_0) = \dot{\phi}(t_0 = 0) = \frac{v_0}{R} \Longrightarrow \omega(t) = \omega(t_0)\cdot\frac{1}{1+\mu\cdot t\cdot\omega(t_0)}$

$$\omega(t) = \frac{d\varphi}{dt} = \omega(t_0)\cdot\frac{1}{1+\mu\cdot t\cdot\omega(t_0)} \Longrightarrow$$

$$d\varphi = \omega(t_0)\cdot\frac{1}{1+\mu\cdot t\cdot\omega(t_0)}\cdot dt$$

$$\int_{t_0}^{t} d\varphi = \omega(t_0)\int_{t_0}^{t}\frac{1}{1+\mu\cdot t\cdot\omega(t_0)}\cdot dt = \frac{\cancel{\omega(t_0)}}{\cancel{\omega(t_0)}\cdot\mu}\int_{t_0}^{t}\frac{1}{1+\omega(t_0)\cdot\mu\cdot t}\,d\left(\omega(t_0)\cdot\mu\cdot t + 1\right)$$

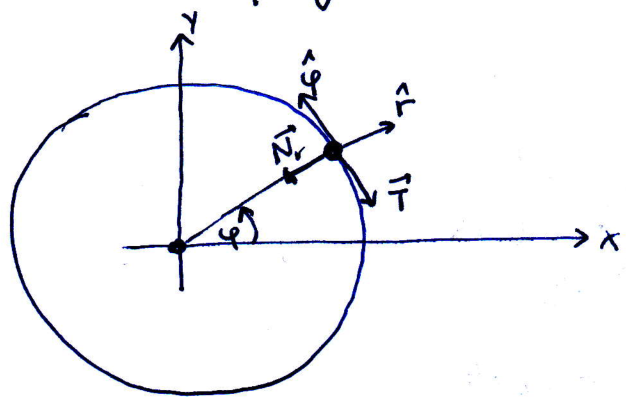
$$\left[\varphi(t)\right]_{t_0}^{t} = \frac{1}{\mu}\left[\ln(1+\mu\cdot t\cdot\omega(t_0)\right]_{t_0=0}^{t}$$

$$\varphi(t) - \cancel{\varphi(t_0)}^{0} = \frac{1}{\mu}\cdot\ln\left(1+\mu\cdot t\cdot\omega(t_0)\right)$$

$$\varphi(t) = \frac{1}{\mu}\ln\left(1 + \omega(t_0)\cdot\mu t\right) \qquad \omega(t_0) = \frac{v_0}{R}, \quad \varphi_0 = 0.$$

2η περίπτωση

με τριβή N από το τραπέζι (δάπεδο)



Στη 2η περίπτωση $T = \mu (mg)$ είναι από το οριζόντιο δάπεδο, εάν ο κυκλικός δίσκος δεν έχει τριβή, οπότε πάλι:

$\vec{v} = r \cdot \dot{\varphi} \cdot \hat{\varphi}$

$\vec{a} = - r \dot{\varphi}^2 \hat{r} + r \ddot{\varphi} \hat{\varphi}$

Τώρα, $\vec{T} = - T \cdot \hat{\varphi} = - \mu \cdot mg \, \hat{\varphi}$

$\cancel{m} \cdot \vec{a}_\varphi = \cancel{m} r \ddot{\varphi} \hat{\varphi} = - \mu \cancel{m} g \, \hat{\varphi}$

η $\vec{T}$ αντίθετη ως πάλι.

$r \ddot{\varphi} = - \mu g$

$\ddot{\varphi} = - \dfrac{\mu g}{R}$

$\dot{\omega} = - \dfrac{\mu g}{R}$ θέτω $\dot{\varphi} = \omega$

$\dfrac{d\omega}{dt} = - \dfrac{\mu g}{R}$

$\displaystyle\int_{t_0}^{t} d\omega = - \int_{t_0}^{t} \frac{\mu g}{R} dt$

$[\omega(t)]_{t_0}^{t} = - \dfrac{\mu g}{R} [t]_{t_0}^{t}$

$\omega(t) - \omega(t_0) = - \dfrac{\mu g}{R} (t - \cancel{t_0}^{\,0})$

$\omega(t) = \omega(t_0) - \dfrac{\mu g}{R} t \longrightarrow$

$\rightarrow \omega(t) = \omega(t_0) - \frac{\mu g}{R} \cdot t$

$$\dot{\varphi}(t) = \frac{d\varphi}{dt} = \frac{v(t_0)}{R} - \frac{\mu g}{R} \cdot t$$

$$\int_{t_0}^{t} d\varphi(t) = \frac{v(t_0)}{R} \int_{t_0}^{t} dt - \frac{\mu g}{R} \int_{t_0}^{t} t\, dt$$

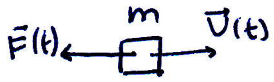
$$\left[\varphi(t)\right]_{t_0}^{t} = \frac{v(t_0)}{R}(t - t_0) - \frac{\mu g}{R}\left[\frac{t^2}{2}\right]_{t_0}^{t}$$

$$\varphi(t) - \cancelto{0}{\varphi(t_0)} = \frac{v(t_0)}{R} \cdot t - \frac{\mu g}{R} \cdot \frac{t^2}{2}$$

$$\varphi(t) = \frac{v(t_0)}{R} \cdot t - \frac{\mu g}{2R} \cdot t^2 \qquad (\varphi(t_0) = 0,\ t_0 = 0)$$

$\triangleright\ \dot{\varphi}(t) = \frac{v(t_0)}{R} - \frac{\mu g}{R} \cdot t = \omega(t)$

ασ 2



a)

$$\vec{F}(t) = -C \cdot \vec{v}(t) = -\frac{C_0}{(1+ax)^2} \cdot \vec{v}(t)$$

$$m \cdot \vec{a} = -\frac{C_0}{(1+ax)^2} \cdot \vec{v}(t)$$

$$m \cdot a_x = -\frac{C_0}{(1+ax)^2} \cdot v_x \qquad \left(\rightarrow a_x = \frac{dv_x}{dt} \right)$$

$$m \frac{dv_x}{dt} = -\frac{C_0}{(1+ax)^2} \cdot v_x$$

$$m \frac{dv_x}{\cancel{dt}} = -\frac{C_0}{(1+ax)^2} \cdot \frac{dx}{\cancel{dt}}$$

$$m \int_{t=0}^{t} dv_x = -\frac{C_0}{a} \int_{x=0}^{x(t)} (1+ax)^{-2} \, d(1+ax)$$

$$v_x(t) - v_0 = -\frac{C_0}{m \cdot a} \int_{x=0}^{x(t)} (1+ax)^{-2} \, d(1+ax)$$

$$v_x(t) = v_0 - \frac{C_0}{m \cdot a} \left[\frac{1}{-2+1} \cdot (1+ax)^{-2+1} \right]_{x=0}^{x}$$

$$v_x(t) = v_0 + \frac{C_0}{m \cdot a} \left[\frac{1}{1+ax} - 1 \right]$$

$$v_x(t) = v_0 - \frac{C_0}{m \cdot \cancel{a}} \cdot \frac{\cancel{a}x}{1+ax}$$

$$v_x(t) = v_0 - \frac{C_0}{m} \cdot \frac{x}{1+ax}$$

β) $0 = v_0 - \frac{C_0}{m} \cdot \frac{x_{max}}{1+a x_{max}} \Rightarrow \frac{v_0 \cdot m}{C_0} = \frac{x_{max}}{1+a \cdot x_{max}} \Rightarrow$

$\Rightarrow v_0 \cdot m + v_0 \cdot m \cdot a x_{max} = C_0 x_{max} \Rightarrow x_{max} (C_0 - v_0 \cdot m \cdot a) = v_0 \cdot m$

$\Rightarrow x_{max} = \frac{v_0 \cdot m}{C_0 - v_0 \cdot m \cdot a}$ για $C_0 > a v_0 m$

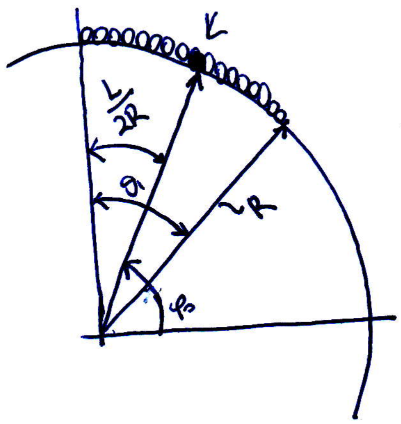
γ) $\lim_{x\to+\infty} U_x(t) = \lim_{x\to+\infty} V_0 - \frac{c_0}{m}\frac{x}{1+ax} = V_0 - \frac{c_0}{m}\cdot\frac{1}{a} = V_0 - \frac{c_0}{am}$

Θέτω $y = \frac{x}{1+ax}$ $\quad x\to+\infty$

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{x}{1+ax} = \lim_{x\to+\infty} \frac{x}{x\left(a+\frac{1}{x}\right)} = \lim_{x\to+\infty} \frac{1}{a+\frac{1}{x}} = \frac{1}{a}$$

ασκ 3

a)



$\theta_1 \cdot R = L \rightarrow \theta_1 = \frac{L}{R}$ (σε rad)

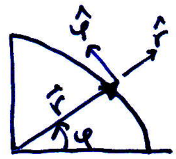
Υποθέτουμε ότι όλη η μάζα του είναι συγκεντρωμένη στο μέσον του μήκους της αλυσίδας (λόγω της ομοιογένειας), που για τη στιγμή εκκίνησης αντιστοιχεί στη γωνία $\frac{\theta_1}{2} = \frac{L}{2R}$.

Γράφουμε τις εξισώσεις πολική μορφή για την κίνηση μάζας που συγκεντρώνεται στο μέσον K της αλυσίδας.

1) Αρχή κίνησης $t_0=0$, το K είναι στο $\frac{\theta_1}{2}$ από την κατακόρυφο, άρα σε γωνία $\varphi(t_0)=\varphi_0 = \frac{\pi}{2} - \frac{\theta_1}{2}$ από την οριζόντια. Αυτό για να διατηρήσουμε τις σχέσεις των πολικών συντεταγμένων.

Εξισώσεις κίνησης σε πολικές συντεταγμένες:

$x = r\cos\varphi$
$y = r\sin\varphi$



$$\vec{V} = \dot{r}\hat{r} + r\dot{\varphi}\hat{\varphi}$$

$$\vec{a} = (\ddot{r} - r\dot{\varphi}^2)\hat{r} + (r\ddot{\varphi} + 2\dot{r}\dot{\varphi})\hat{\varphi}$$

$$\left.\begin{array}{l} \dfrac{dm}{ds} = \lambda \\ ds = r\,d\theta \end{array}\right\} dm = \lambda r\, d\theta$$

και $m = \lambda \cdot r \cdot \theta_{max}$

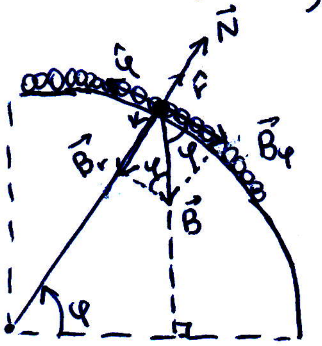
$0 < \theta_{max} < \frac{\pi}{2}$

και επειδή $r = R$ (σταθερό)

$$\vec{V} = r\dot{\varphi}\hat{\varphi}$$

$$\vec{a} = -r\dot{\varphi}^2\hat{r} + r\ddot{\varphi}\hat{\varphi}$$

Τη στιγμή $t_0 = 0$, που αφήνεται η αλυσίδα



$$\Sigma \vec{F}_r = \vec{N} - \vec{B}_r = \vec{N} - m\vec{g}\sin\varphi$$

$$\Sigma \vec{F}_\varphi = -mg\cos\varphi \cdot \hat{\varphi}$$ (το − επειδή πάει αντίθετα στο $\hat{\varphi}$)

$$\Sigma \vec{F}_r = m \cdot \vec{a}_r \Rightarrow m(-r\dot{\varphi}^2\hat{r}) = \vec{N} - m\vec{g}\sin\varphi$$

$$\Sigma \vec{F}_\varphi = -\cancel{m}g\cos\varphi \cdot \hat{\varphi} = \cancel{m}(r\ddot{\varphi}\hat{\varphi}) \rightarrow -g\cos\varphi = R\ddot{\varphi} \rightarrow$$

$$\rightarrow (-\cos\varphi)\cdot g = R\ddot{\varphi}$$

πολ/ζω με $\dot{\varphi} \rightarrow \quad \dot{\varphi}(-\cos\varphi)\cdot g = R \cdot \dot{\varphi}\ddot{\varphi}$

$$(\dot{\varphi}\dot{\varphi})' = \ddot{\varphi}\dot{\varphi} + \dot{\varphi}\ddot{\varphi} = 2\dot{\varphi}\ddot{\varphi} \Rightarrow \cancel{\tfrac{1}{2}}\cancel{2}\dot{\varphi}\ddot{\varphi} = \frac{1}{2}\cdot\frac{d}{dt}(\dot{\varphi}^2)$$

$$\dot{\varphi}(-\cos\varphi) = -\frac{d}{dt}(\sin\varphi)$$ δηλ.

$$-\dot{\varphi}(\cos\varphi) = -\frac{d}{dt}(\sin\varphi)$$

Άρα, $$\int_{t_0}^{t} -\frac{d}{\cancel{dt}}(\sin\varphi)\cdot g = \int_{t_0}^{t} \frac{1}{2}\cdot R \cdot \frac{d}{\cancel{dt}}(\dot{\varphi}^2) \rightarrow$$

$$\rightarrow \int_{t_0}^{t} -d(\sin\varphi)\cdot g = \int_{t_0}^{t} \frac{1}{2}\cdot R\cdot d(\dot\varphi^2)$$

$$-\left(\sin\varphi(t) - \sin\varphi(t_0)\right)g = \frac{R}{2}\left[\dot\varphi^2_{(t)} - \cancelto{0}{\dot\varphi^2(t_0)}\right]$$

Αλλά, για $t=t_0=0$ έχω $V(t_0) = r\cdot\dot\varphi(t_0) = 0 \Rightarrow \dot\varphi(t_0)=0$ άρα $\dot\varphi(t_0)=0$

άρα $$\frac{R}{2}\dot\varphi^2(t) = \left(\sin\varphi(t_0) - \sin\varphi(t)\right)g$$

$$\dot\varphi(t) = \pm\sqrt{\frac{2g}{R}\left(\sin\varphi(t_0) - \sin\varphi(t)\right)}$$

Υπενθύμιση: $\varphi(t_0) = \frac{\pi}{2} - \frac{\theta_1}{2} = \frac{\pi}{2} - \frac{L}{2R}$

$$\dot\varphi(t) = \pm\sqrt{\frac{2g}{R}\left(\sin\varphi(t_0) - \sin\varphi(t)\right)}$$ (και επιλέγω: $-\sqrt{\dots}$ γιατί η φ μειώνεται γενικά, δηλ ↘)

παρατηρώ ότι $\varphi(t_0) > \varphi(t)$

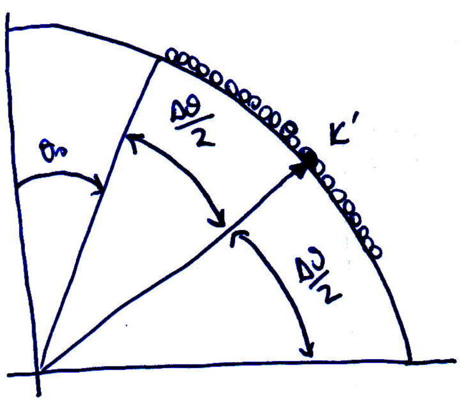
Για $t=0$ γράφε $\varphi(t) = \varphi(t_0)$ και $\dot\varphi(t_0) = 0$

Επίσης, για $t=0$

$$-\cos\varphi\cdot g = R\cdot\ddot\varphi(t) \longrightarrow \ddot\varphi(t=0) = -\frac{\cos\varphi_0\, g}{R}$$

$$\longrightarrow \ddot\varphi(t_0) = -\frac{g}{R}\cdot\cos\left(\frac{\pi}{2} - \frac{L}{2R}\right)$$

β)



Μετά από γωνία θ_0, το κέντρο της αλυσίδας θα βρίσκεται σε θέση

$$\phi = \left(\frac{\pi}{2} - \frac{L}{2R}\right) - \theta_0$$

$$\Delta\theta = \frac{L}{R} \quad \text{και} \quad \frac{\Delta\theta}{2} = \frac{L}{2R}$$

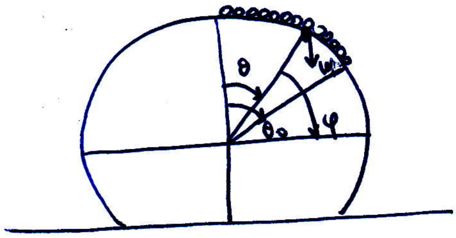
$$\varphi(t) = \frac{\pi}{2} - \theta_0 - \frac{\Delta\theta}{2}$$

$$\dot\phi = -\sqrt{\frac{2g}{R}(\sin\varphi_0 - \sin\varphi)}$$

$$\ddot\phi = -\frac{\cos\left(\frac{\pi}{2} - \frac{L}{2R} - \theta_0\right)\cdot g}{R}$$

ασκ3 (άλλη προσέγγιση)

α)



$\Sigma F_x = W_x$

και $dm = \rho\, ds = \rho R\, d\theta$

και $\theta_{max} = \frac{L}{R}$

$W_x = W\cos\varphi = W\sin\theta$ (αφού φ,θ συμπληρωματικές)

Επίσης $dF_{\epsilon\varphi} = dm \cdot g \cdot \sin\theta$

$dF_{\epsilon\varphi} = \rho \cdot R \cdot d\theta\, g \sin\theta$

Άρα $F_{\epsilon\varphi} = \int_0^{\theta_0} g\rho R \sin\theta\, d\theta = \rho g R \int_0^{\theta_0} \sin\theta\, d\theta = \rho g R \left[-\cos\theta\right]_0^{\theta_0}$

$\Rightarrow F_{\epsilon\varphi} = \rho g R\left(-\cos\theta_0 + \cos 0\right) = \rho g R\left(1 - \cos\theta_0\right) = \rho g R\left(1 - \cos\frac{L}{R}\right)$

Όμως, $F_{\epsilon\varphi} = m \cdot a$ την $t=0$

$\Rightarrow a = \frac{R}{L} \cdot g\left(1 - \cos\frac{L}{R}\right)$

β) Για τη ροπή αδράνειας του στερεού ισχύει $I = mR^2$

και $\Sigma\tau = I \cdot a_\gamma$ από το Θεμελιώδες Νόμο Στροφικής Κίνησης.

$\Rightarrow W_{x_{o\lambda}} \cdot R = mR^2 a_\gamma$

$\Rightarrow \int_{\theta_0}^{2\theta_0} dm \cdot g \cdot \sin\theta \cdot R = mR^2 a_\gamma$

$\Rightarrow \rho R^{\cancel{2}} g \left[-\cos\theta\right]_{\theta_0}^{2\theta_0} = m\cancel{R^2} a_\gamma$

$\Rightarrow \cancel{\rho}\, g\left(\cos\theta_0 - \cos 2\theta_0\right) = \cancel{\rho} \cdot L \cdot a_\gamma$

$\Rightarrow a_\gamma = \frac{g}{L}\left(\cos\theta_0 - 1\right)$

ΘΜΚΕ

$$\Delta K = W_{W_x} \Rightarrow K_{\tau\varepsilon\lambda} - \cancel{K_{\alpha\rho\chi}}^{\,0} = W_x \cdot R \cdot \Delta\theta$$

$$\Rightarrow \frac{1}{2} I \omega^2 = \rho R g (\cos\theta_0 - 1) R$$

$$\overset{\theta_0 = \frac{L}{R}}{\Rightarrow} \omega = \sqrt{\frac{2g}{R} (\cos\theta_0 - 1)}$$

α) Νόμοι Στροφικής Κίνησης

$I_{(o)} \ddot{\theta} = N_o$ $\qquad \ddot{\theta} \cdot R = a$ ή $\dot{\theta} \cdot R = \upsilon$ $\qquad dm = \rho_L \cdot R \cdot d\theta$

$$m R^2 \ddot{\theta} = N_o \Rightarrow m R^2 \cdot \frac{a}{R} = \int_0^{\theta_{max}} (g\, dm \cdot \sin\theta) \cdot R \qquad \rho_L = \frac{M}{L}$$

Άρα $$m \cancel{R^2} \cdot \frac{a}{\cancel{R}} = \int_0^{\theta_{max}} g \rho_L R d\theta \sin\theta \cdot R \Rightarrow \ldots \Rightarrow a = \frac{gR}{L} \int_0^{\theta_{max}} \sin\theta d\theta$$

$$\Rightarrow a = \frac{gR}{L} [-\cos\theta]_0^{\theta_{max}} \Rightarrow a = \frac{gR}{L}\left(1 - \cos\frac{L}{R}\right) \qquad \left.\begin{matrix} 2\pi \to 2\pi R \\ \theta_{max} \to L \end{matrix}\right\} \theta_{max} \to \frac{L}{R}$$

β) ▷ Η θέση της αλυσίδας καθορίζεται από τη γωνιακή μετατόπιση $\theta \equiv \theta_a$ δηλ. τη γωνία του άνω άκρου με το Ο.
Κατά μήκος της αλυσίδας δρουν εσωτερικές δυνάμεις που τελικά ομογενοποιούν την κίνησή της. Η αλυσίδα κινείται σαν ενιαίο σώμα με "ενιαία" επιτάχυνση.
Κατά την κίνηση σαν ενιαίο σώμα οι εσωτερικές δυνάμεις αγνοούνται.
Υπολογίζεται μόνο η επιταχύνουσα εξωτερική δύναμη → η συνολική εφαπτομενική συνιστώσα των επιμέρους κομματιών της αλυσίδας. Η κίνηση γίνεται σε μία διάσταση κατά μήκος του κυκλικού τόξου. Δεν χρειάζεται να χρησιμοποιήσουμε διανύσματα για τη διατύπωση των νόμων της κίνησής της.

$dm = \rho_L \cdot R d\theta$

$I_o = m R^2 = \rho_L \cdot L \cdot R^2$.

$$I_o \cdot \ddot{\theta}_a = \int_{\theta_a}^{\theta_1} [(g\, dm) \sin\theta] \cdot R \Rightarrow$$

Άρα $$\cancel{\rho_L} \cdot L \cdot \cancel{R^2} \cdot \ddot{\theta}_a = \int_{\theta_a}^{\theta_1} g \cancel{\rho_L} \cancel{R^2} \sin\theta d\theta \Rightarrow \ddot{\theta}_a = \frac{g}{L} \int_{\theta_a}^{\theta_1} \sin\theta d\theta = \frac{g}{L} \cdot [-\cos\theta]_{\theta_a}^{\theta_1} \qquad \theta_1 = \theta_a + \frac{L}{R}$$

$$\Rightarrow \ddot{\theta}_a = \frac{g}{L}\left[-\cos\left(\theta_a + \frac{L}{R}\right) + \cos\theta_a\right]$$

και $$\ddot{\theta} = \frac{d\omega}{dt} = \frac{d\omega}{d\theta} \cdot \frac{d\theta}{dt} = \frac{g}{L}\left[\cos\theta_a - \cos\left(\theta_a + \frac{L}{R}\right)\right] \Rightarrow \int d\omega \cdot \omega = \int \frac{g}{L} [\ldots] \cdot d\theta$$

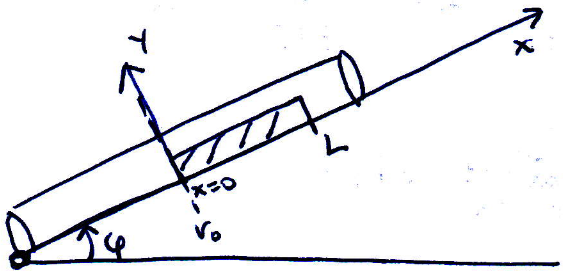
$$\Rightarrow \left[\frac{\omega^2}{2}\right]_0^{\omega} = \frac{g}{L} \int_{\theta_a}^{\theta_1} \left(\cos\theta - \cos\left(\theta + \frac{L}{R}\right)\right) d\theta \Rightarrow \ldots \Rightarrow$$

$$\Rightarrow |\omega| = \sqrt{\frac{2g}{L}\left(\sin\theta_a - \sin\left(\theta_a + \frac{L}{R}\right) + \sin\frac{L}{R}\right)}$$

ασκ4

m_0, L

$$\lambda(x) = \frac{dm}{dx} = 2A\,(L+x)\,/\,3L^2 \qquad 0 \leq x \leq L$$



α) $\mu(r) = \dfrac{L}{2(L+r)}$ $\qquad r \in [0, +\infty) \rightsquigarrow \underset{(r\to+\infty)}{0} < \mu \leq \frac{1}{2}\ (r=0)$

$$\frac{dm}{dx} = \frac{2A}{3L^2}\cdot(L+x) \qquad 0 \leq x \leq L$$

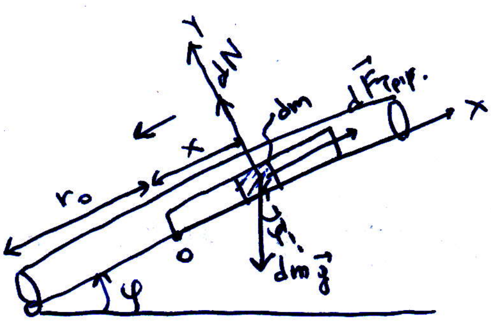
$$\int_{x=0}^{L} dm = \frac{2A}{3L^2}\int_{x=0}^{L}(L+x)\,dx \Rightarrow$$

$$m_0 = \frac{2A}{3L^2}\int_{x=0}^{L}(L+x)\,d(x+L) = \frac{2A}{3L^2}\left[\frac{(L+x)^2}{2}\right]_{x=0}^{L}$$

$$m_0 = \frac{\cancel{2}A}{3L^2}\cdot\frac{1}{\cancel{2}}\left[(L+L)^2 - L^2\right] \rightarrow m_0 = \frac{A}{3L^2}\cdot 3L^2 \Rightarrow \underline{A = m_0}$$

β) Θεωρούμε ένα στοιχειώδες τμήμα dm του σώματος (για τις εξισώσεις της dN, $dF_{τριβ.}$)

Το σώμα θα αρχίσει να ο ολισθαίνει όταν $\Sigma F_x = 0$.



$$dN = dm \cdot g \cdot \cos\varphi$$

$$dF_{τριβ.} = \mu(r)\cdot dN = \mu(r)\,(dm\cdot g\cdot \cos\varphi) \Rightarrow$$

$$\int_{x=0}^{L} dF_{τρ} = \int_{x=0}^{L} \mu(r_0+x)\, dm\, g\, (\cos\varphi) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \int dF_{τριβ.} = \int_0^L \mu(r_0+x)\cdot\lambda(x)\cdot dx\cdot g\cdot\cos\varphi =$$

$$= (g\cos\varphi)\int_0^L \frac{\cancel{L}}{\cancel{2}(L+r_0+x)}\cdot\cancel{2}m_0\,\frac{(L+x)}{3L^{\cancel{2}}}\,dx$$

$$\Rightarrow F_{τριβ.} = g\cos\varphi\,\frac{M_0}{3L}\cdot\int_{x=0}^{L}\frac{L+x}{L+r_0+x}\,dx =$$

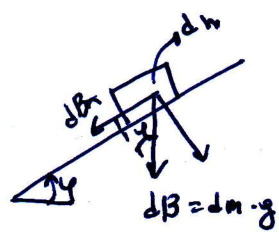
$$= g\cos\varphi\,\frac{M_0}{3L}\left[\int_0^L 1\,dx - r_0\int_0^L\frac{1}{L+r_0+x}\,d(L+r_0+x)\right.$$

$$= g\cos\varphi\,\frac{M_0}{3L}\left[L - r_0\left[\ln(L+r_0+x)\right]_0^L\right] =$$

$$= g\cos\varphi\,\frac{M_0}{3L}\left[L - r_0\,\ln\left(\frac{2L+r_0}{L+r_0}\right)\right] \Rightarrow$$

$$\Rightarrow F_{τριβ.} = g\cos\varphi\,\frac{M_0}{3L}\left[L - r_0\ln\left(1+\frac{L}{L+r_0}\right)\right]$$

Επίσης, $dB_x = -dB\cdot\sin\varphi$



$$dB_x = -dm\cdot g\cdot\sin\varphi = -\lambda(x)\,g\sin\varphi\cdot dx$$

Για τη συνολική ισορροπία της ράβδου παίρνουμε το ολοκλήρωμα :

$$B_x = -g\sin\varphi\int_{x=0}^{L} 2m_0\,\frac{L+x}{3L^2}\,dx$$

$$B_x = -g\sin\varphi\,\frac{2m_0}{3L^2}\int_{x=0}^{L}(L+x)\,d(x+L)$$

$$B_x = -g\sin\varphi\,\frac{2m_0}{3L^2}\left[\frac{(L+x)^2}{2}\right]_{x=0}^{L} = -g\sin\varphi\,\frac{\cancel{2}m_0}{\cancel{3L^2}}\cdot\frac{1}{\cancel{2}}\,\cancel{3L^2} = -m_0\,g\,\sin\varphi$$

Οπότε, $\cancel{m_0}\cancel{g}\sin\varphi = \cancel{g}\cos\varphi \frac{\cancel{m_0}}{3L}\left(L - r_0 \ln\left(1+\frac{L}{L+r_0}\right)\right)$

$$\tan\varphi = \frac{1}{3L}\left(L - r_0 \cdot \ln\left(1+\frac{L}{L+r_0}\right)\right)$$

γ) όταν $r_0 \to +\infty$ έχουμε απροσδιοριστία

* $\ln(1+x)$ $\quad -1<x<1$

$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3}$ $\qquad 0 < x = \frac{L}{L+r_0} < 1$

οπότε, $\ln\left(1+\frac{L}{L+r_0}\right) = \frac{L}{L+r_0} - \frac{1}{2}\left(\frac{L}{L+r_0}\right)^2$

άρα, $L - r_0 \cdot \ln\left(1+\frac{L}{L+r_0}\right) =$

$$= L - r_0 \cdot \frac{L}{L+r_0} - r_0 \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{L}{L+r_0}\right)^2$$

$$\lim_{r_0 \to +\infty}\left(r_0 \cdot \frac{L}{L+r_0}\right) \overset{\frac{\infty}{\infty}}{\underset{DLH}{=}} \lim_{r_0\to+\infty} \frac{(r_0 \cdot L)'}{(L+r_0)'} = \lim_{r_0\to+\infty} \frac{L}{1} = L$$

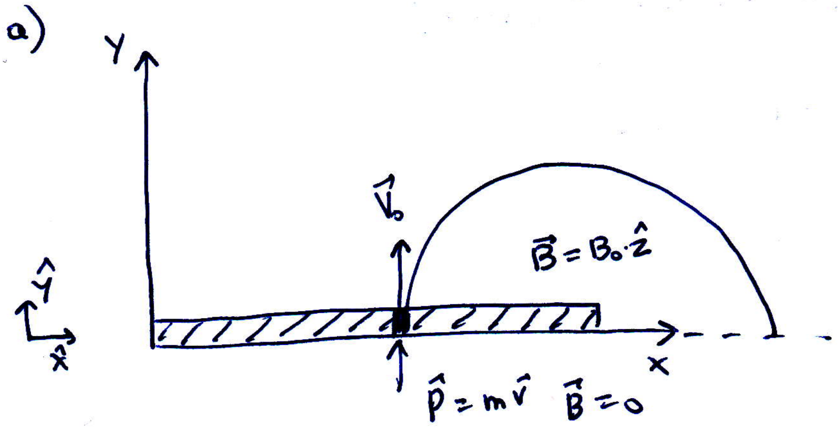
και $\frac{1}{2} r_0 \left(\frac{L}{L+r_0}\right)^2 = \frac{1}{2} \cdot \cancel{r_0} \cdot \frac{1}{r_0^{\cancel{2}}}\left(\frac{L}{\frac{L}{r_0}+1}\right)^2 \longrightarrow 0$

οπότε, $L - r_0 \frac{L}{L+r_0} \longrightarrow L - L \longrightarrow 0$

Άρα $\lim_{r_0\to+\infty} \tan\varphi = \frac{1}{3L} \cdot 0 = 0$

9αε5

a)



$$\Sigma \vec F = q\left(\vec E + \vec V \times \vec B\right) \qquad (\hat y \times \hat z = \hat x)$$

στο (a) $\vec E = \vec 0$ επίσης $\vec V_0 = V_{0y} \cdot \hat y$

$\vec B = B_0 \hat z$

$$\vec V \times \vec B = V_{0y} \cdot \hat y \times B_0 \cdot \hat z = V_{0y} \cdot B_0 \cdot \hat x$$

Στην είσοδο των φορτίων, η δύναμη θα είναι κάθετη στην $\vec V_0$

θα είναι: $m\vec a = m\dfrac{d\vec v}{dt} = q \cdot \vec V \times \vec B$

$$m\frac{d\vec v}{dt} = qB_0\left(\vec v \times \hat z\right) = qB_0\left(V_x \hat x + V_y \hat y\right) \times \hat z$$

$$\left.\begin{aligned} m\frac{dV_x}{dt} &= qB_0 V_y \\ m\frac{dV_y}{dt} &= -qB_0 V_x \end{aligned}\right\} \xrightarrow{\frac{d}{dt}} \quad \begin{aligned} \frac{d^2 V_x}{dt^2} &= \frac{qB_0}{m} \cdot \frac{dV_y}{dt} \\ \frac{d^2 V_y}{dt^2} &= -\frac{qB_0}{m} \frac{dV_x}{dt} \end{aligned}$$

Αυτές είναι οι εξισώσεις (2α, β) από σημειώσεις (παρ. 2.2.7)

$$\frac{d^2 V_x}{dt^2} = -\left(\frac{qB_0}{m}\right)^2 V_x$$

$$\frac{d^2 V_y}{dt^2} = -\left(\frac{qB_0}{m}\right)^2 V_y \qquad \text{με} \quad \omega_c = \frac{qB_0}{m}$$

$$\frac{d^2 V_x}{dt^2} = -\omega_c^2 V_x \quad , \quad \frac{d^2 V_y}{dt^2} = -\omega_c^2 V_y$$

Είναι οι Δ. Εξισώσεις του ορθογώνιου ταλαντωτή.

Έχουμε $V_y(t=0) = V_{oy}$ και $v_x(t=0) = 0$

$$\vec{V}_0(t=0) = V_{oy}\cdot\hat{y}$$

Έτσι, η λύση γίνεται.

$$v_x = -v_{oy}\cdot\sin(w_e\cdot t) \quad \text{και} \quad v_y = V_{oy}\cdot\cos(w_e\cdot t)$$

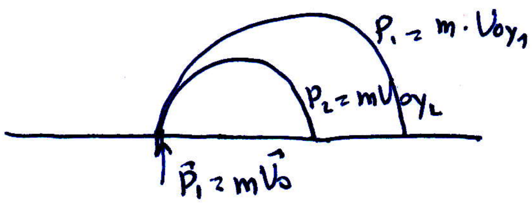
Με νέα ολοκλήρωση

$$x = -\frac{V_{oy}}{w_e}\cdot\sin(w_e t) + D_1 \quad \text{και} \quad y = -\frac{V_{oy}}{w_e}\cdot\sin(w_e t) + D_2$$

ώστε $(x-D_1)^2 + (y-D_2)^2 = \left(\frac{V_{oy}}{w_e}\right)^2$. δηλ. η τροχιά που θα ακολουθήσει θα είναι κύκλος, με κέντρο (D_1, D_2) όπου D_1, D_2 σταθερές, (λόγω αρχικών συνθηκών).
και ακτίνα κύκλου $\frac{V_{oy}}{w_e} = R$

$$R = \frac{V_{oy}}{w_e} \to R = \frac{V_{oy}\cdot m}{q\cdot B_0} \to R = \frac{P_{oy}}{q\cdot B_0}$$

Άρα, με έλεγχο των μαγνητικών πεδίων μπορούμε να επιλέξουμε εύκολα τα φορτία q, που έχουν συγκεκριμένη ορμή $P_{oy} = m\cdot V_{oy}$, και να τα έχουμε σε συγκεκριμένη ακτίνα R.

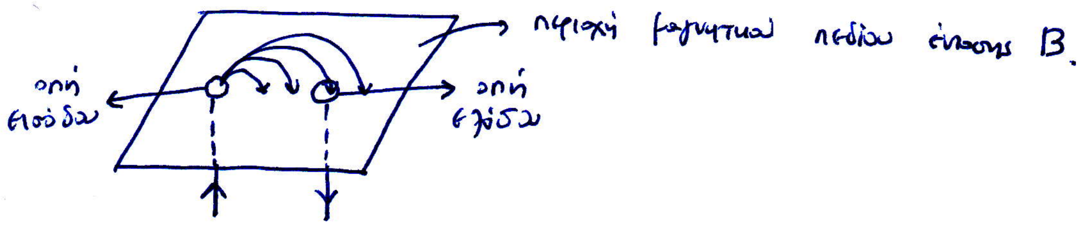


Δηλ. οι διαφορετικές ορμές θα "έρχονται" σε διαφορετικές ακτίνες R.

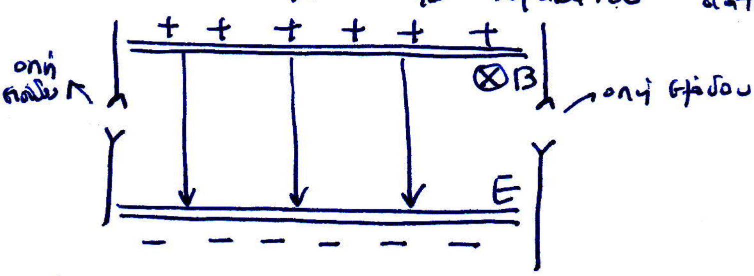
Άσκηση 5 (extra)

α) Προβάλλοντας τη δέσμη των φορτισμένων σωματιδίων στην μία οπή αυτά εισέρχονται σε μαγνητικό πεδίο έντασης B έσω με ταχύτητα υ. Κάθε σωματίδιο αποκλίνει από την αρχική του κατεύθυνση και η ακτίνα καμπυλότητας της τροχιάς ρ, δίνεται από τη σχέση: $B\rho = \frac{M\upsilon}{q}$ ή $B\rho = \frac{P}{q}$ $\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow$ $\rho = \frac{P}{Bq}$. Επιλέγοντας την ορμή που θέλαμε να πετύχαμε, υπολογίζουμε την ακτίνα καμπυλότητας και προσαρμόζουμε κατάλληλα τη δεύτερη οπή, η οποία θα λειτουργεί ως οπή εξόδου για τα σωματίδια που έχουν την ορμή που ζητάμε.



β) Δημιουργούμε χώρο ηλεκτρικού και μαγνητικού πεδίου που είναι κάθετα μεταξύ τους μέσω της παρακάτω διάταξης:



Τα φορτισμένα σωματίδια εισέρχονται στη διάταξη από την οπή εισόδου και δέχονται δύναμη της μορφής $\vec{F} = q(\vec{E} + \vec{V}\times\vec{B})$ όπου $q, \vec{V}$: το φορτίο κ' η ταχύτητα του σωματιδίου και $\vec{E}, \vec{B}$: οι εντάσεις του ηλεκτρικού κ' του μαγνητικού πεδίου. Κάθε φορά θέλαμε να εξέρχονται από την οπή εξόδου τα σωματίδια εκείνα που δεν εκτράπηκαν καθόλου από την αρχική διεύθυνση κίνησής τους, δηλαδή $\vec{F} = 0$ οπότε $\vec{E} = -\vec{V}\times\vec{B}$ $\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow$ $E = -|\vec{V}|\cdot|\vec{B}|\cdot\sin(\widehat{\vec{V},\vec{B}})$.

Έτσι προσαρμόζοντας κάθε φορά τις εντάσεις των πεδίων αλλά και την κλίση της διάταξης μπορούμε να επιλέξουμε τα επιθυμητά σωματίδια.