ΦΥΛΛΑΔΙΟ 2
Αναλυτική Γεωμετρία (Ευθεία -επίπεδο)
ΣΗΜΜΥ 2017-18
Παράδοση μόνον των ασκήσεων 1 έως 7 και 10

1. Να βρεθεί η εξίσωση του επιπέδου Π που ορίζεται από:

(α) τα σημεία Α(1, 2, 3), Β(0, 0, 1), Γ(2, 0, 0).

(β) το σημείο Α(1,0,2) και είναι παράλληλο προς το επίπεδο Q: $x - y + 3z = 6$.

(γ) το σημείο Α(3,-1,2) και είναι κάθετο προς την ευθεία ε με εξισώσεις

$$x - y + z = 3, \quad 3x - z = 0.$$

2. Να βρεθεί η εξίσωση του επιπέδου Π το οποίο :

(α) περιέχει τις ευθείες $\varepsilon_1: \mathbf{r} = \mathbf{a} + \lambda\mathbf{b}$ και $\varepsilon_2: \mathbf{r} = \mathbf{c} + \mu\mathbf{b}$, όπου $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}$ είναι γνωστά διανύσματα και $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$,

(β) περιέχει την ευθεία $\mathbf{r} = \lambda\mathbf{a},\ \lambda \in \mathbb{R}$ και είναι κάθετο προς το επίπεδο που ορίζεται από τις ευθείες με εξισώσεις: $\mathbf{r} = \lambda\mathbf{a},\ \lambda \in \mathbb{R}$ και $\mathbf{r} = \mu\mathbf{b}, \mu \in \mathbb{R},\ \mathbf{a} \times \mathbf{b} \neq \mathbf{0}$.

3. Δίνεται η ευθεία : $\varepsilon: (\mathbf{r} - \mathbf{a}) \times \mathbf{n} = 0$.

(α) Ποια είναι η γεωμετρική ερμηνεία των $\mathbf{a}$ και $\mathbf{n}$;

(β) Αν η ευθεία ε είναι τομή των επιπέδων

$$\Pi_1: x + y + z - 1 = 0,\ \Pi_2: 4x - 3y - z + 1 = 0,$$

να βρείτε τα $\mathbf{a}$ και $\mathbf{n}$ και να εξηγήσετε γιατί δεν είναι μονοσήμαντα.

4. Να αποδείξετε ότι οι ευθείες

$$\varepsilon_1: x - 3 = 0, y + 2z = 10 \text{ και } \varepsilon_2: \frac{x+2}{3} = \frac{y+1}{2} = \frac{z+1}{2}.$$

είναι ασύμβατες και να βρείτε τα ίχνη και το μήκος της κοινής κάθετης.

5. Τα διανύσματα θέσης των σημείων Α, Β και Γ ως προς το καρτεσιανό σύστημα αναφοράς Oxyz είναι $\mathbf{OA} = \mathbf{a}, \mathbf{OB} = \mathbf{b}$ και $\mathbf{O\Gamma} = \mathbf{c}$, αντιστοίχως.

(α) Να αποδείξετε ότι το εμβαδόν του τριγώνου ΑΒΓ είναι

$$\mathrm{E}(\mathrm{AB\Gamma}) = \frac{1}{2}\left|(\mathbf{b} \times \mathbf{c}) + (\mathbf{c} \times \mathbf{a}) + (\mathbf{a} \times \mathbf{b})\right|.$$

(β) Αν το επίπεδο $\Pi: 6x - 3y - 2z - 6a = 0$ τέμνει τους άξονες $x'x,\ y'y,\ z'z$ στα σημεία Α, Β, Γ, αντιστοίχως, να υπολογίσετε το εμβαδόν του τριγώνου ΑΒΓ.

6. Δίνεται το σημείο $\mathrm{P}(1,0,3)$, η ευθεία $\varepsilon: x = -y = -z$ και το επίπεδο με εξίσωση Π: $x - y - z - 12 = 0$ Να βρεθούν:

(α) το συμμετρικό του σημείου P ως προς την ευθεία ε.

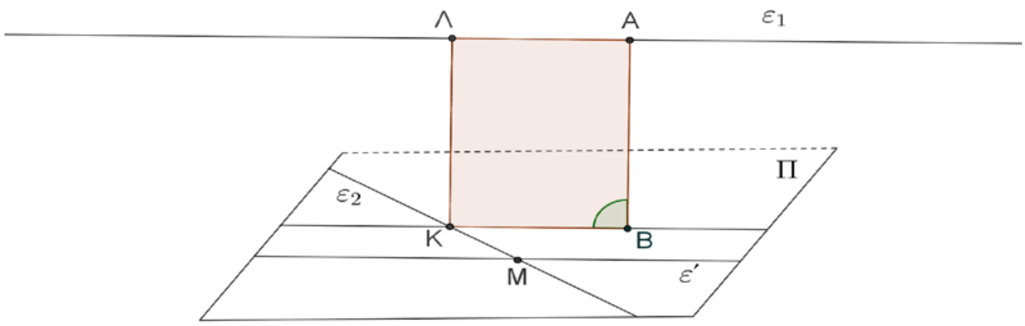
(β) το συμμετρικό του σημείου P ως προς το επίπεδο Π.

7. Να αποδείξετε ότι το εμβαδόν Ε της ορθογώνιας προβολής του παραλληλογράμμου ΑΒΓΔ με $\mathbf{AB} = \mathbf{u},\ \mathbf{A\Delta} = \mathbf{v}$ πάνω σε ένα επίπεδο με κάθετο διάνυσμα $\mathbf{n},\ |\mathbf{n}| = 1$, δίνεται από την ισότητα

$$\mathrm{E} = \left|(\mathbf{u} \times \mathbf{v}) \cdot \mathbf{n}\right|.$$

8. Η γεωμετρική κατασκευή της κοινής καθέτου δύο ασυμβάτων ευθειών $\varepsilon_1, \varepsilon_2$ είναι η ακόλουθη: Από τυχόν σημείο Μ της ε_2 φέρουμε ευθεία ε_3 παράλληλη προς την ε_1. Έστω Π το επίπεδο που ορίζεται από τις ε_2 και ε_3. Από τυχόν σημείο Α της ε_1 φέρουμε ευθεία ε_4 κάθετη στο Π. Από το ίχνος της Β φέρουμε ευθεία ΒΚ παράλληλη προς την ε_3, η οποία τέμνει την ε_2 στο Κ. Η παράλληλη ευθεία από το Κ προς την ε_4 τέμνει την ε_1 στο Λ. **Η ΚΛ είναι η κοινή κάθετη**.
Με οδηγό την παραπάνω κατασκευή να προσδιορίσετε τις εξισώσεις και τις συντεταγμένες όλων των γεωμετρικών στοιχείων που θα χρησιμοποιήσετε (ευθείες, επίπεδα, σημεία) για την κατασκευή της κοινής καθέτου των ασύμβατων ευθειών

$$\varepsilon_1 : x + y = 10, z = 3 \quad \text{και } \varepsilon_2 : x - 3y = 2, z = 0.$$



9. Δίνονται οι ευθείες $\varepsilon_1 : \mathbf{r} = \mathbf{r_1} + t\mathbf{a}, t \in R \;\; \textit{και} \;\; \varepsilon_2 : \mathbf{r} = \mathbf{r_2} + s\mathbf{b}, s \in R.$

(α) Να αποδείξετε ότι : $\varepsilon_1, \varepsilon_2$ συνεπίπεδες $\Leftrightarrow (\mathbf{r_1} - \mathbf{r_2}, \mathbf{a}, \mathbf{b}) = 0$.

(β) Αν οι $\varepsilon_1, \varepsilon_2$ είναι ασύμβατες, να αποδείξετε ότι η ελάχιστη απόστασή τους

είναι $$d = \frac{|(\mathbf{r_1} - \mathbf{r_2}, \mathbf{a}, \mathbf{b})|}{|\mathbf{a} \times \mathbf{b}|}.$$

(γ) Αν $\mathbf{a} = \mathbf{b}$, να αποδείξετε ότι η απόσταση των $\varepsilon_1, \varepsilon_2$ είναι:

$$d = \frac{|(\mathbf{r_1} - \mathbf{r_2}) \times \mathbf{a}|}{|\mathbf{a}|}.$$

10. Δίνεται η ευθεία $\varepsilon : \mathbf{r} = \mathbf{a} + t\mathbf{u},\ t \in \mathbb{R}$ και σημείο Μ εκτός της ευθείας με διανυσματική ακτίνα $\mathbf{r_M}$. Να αποδείξετε ότι η απόσταση του σημείου Μ από την ευθεία ε είναι

$$d(M, \varepsilon) = \frac{|(\mathbf{r_M} - \mathbf{a}) \times \mathbf{u}|}{|\mathbf{u}|}.$$

Εφαρμογή: Μ(1,2,-1) και ε η ευθεία που περνάει από τα σημεία Α(2,1,-1),Β(3,1,6)
.

Παράδοση: 29-11-2017 ***Α. Φελλούρης***