ΕΜΠ – ΣΧΟΛΗ ΕΜΦΕ – ΤΟΜΕΑΣ ΦΥΣΙΚΗΣ – ΑΚΑΔΗΜΑΪΚΟ ΕΤΟΣ 2017-18
ΜΑΘΗΜΑ: ΦΥΣΙΚΗ-Ι, 1^{ΟΥ} ΕΞΑΜΗΝΟΥ ΣΧΟΛΗΣ ΗΛΕΚΤΡΟΛΟΓΩΝ ΜΜΥ
Διδάσκοντες: Η. Ζουμπούλης, Ι. Ράπτης

Δ΄ ΣΕΙΡΑ ΑΣΚΗΣΕΩΝ 24 Δεκεμβρίου 2017

Να επιστραφούν λυμένες μέχρι 18/01/18, οι 1, 2, 3, 4, 5 [ΠΡΟΣΟΧΗ: Οι λύσεις να είναι χειρόγραφες και, είτε να παραδοθούν στο μάθημα, είτε να αναρτηθούν ως PDF στις «Εργασίες» του mycourses]

1. Ένα μηχανικό σύστημα μάζας (m) – ελατηρίου (s) υφίσταται την επίδραση δύναμης τριβής $\left(\vec{F}_{\tau\rho} = -r\vec{\upsilon}\right)$ και τα μεγέθη (*m, s, r*) είναι τέτοια ώστε το σύστημα να βρίσκεται σε κατάσταση κρίσιμης απόσβεσης. Αν, για $t=0$, είναι: $\left(x(0)=0, \upsilon(0)=\upsilon_0 \neq 0\right)$, (α) δείξτε ότι η μετατόπιση, ως συνάρτηση του χρόνου, περιγράφεται από μία σχέση της μορφής $x(t) = Ate^{-Bt}$ και προσδιορίστε τα *A* και *B*, (β) υπολογίστε τη χρονική στιγμή που συμβαίνει η μέγιστη μετατόπιση και βρείτε πόση είναι η μέγιστη μετατόπιση. (γ) Αν $x(t=0)=x_0 \neq 0$ και $\upsilon(0) = -2\gamma x_0$, δείξτε ότι το σύστημα διέρχεται μία φορά από τη θέση ισορροπίας, με μη-μηδενική ταχύτητα, και προσδιορίστε την αντίστοιχη χρονική στιγμή και την ταχύτητα.

ΑΠΑΝΤΗΣΗ

(α) $$\left\{\begin{array}{l} x(t) = (C_1 + C_2 t)e^{-\gamma t} \\ x(0) = 0 \end{array}\right\} \Rightarrow C_1 = 0 \Rightarrow x(t) = C_2 te^{-\gamma t} \Rightarrow \dot{x}(t) = C_2 e^{-\gamma t} - \gamma C_2 te^{-\gamma t}$$

$$\left\{\dot{x}(t) = C_2 e^{-\gamma t} - \gamma C_2 te^{-\gamma t}, \quad \dot{x}(0) = \upsilon_0\right\} \Rightarrow C_2 = \upsilon_0 \Rightarrow \boxed{x(t) = \upsilon_0 te^{-\gamma t}}$$

(β) Μέγιστη μετατόπιση: υ=0, $\upsilon(t) = \dot{x}(t) = \upsilon_0(1-\gamma t)e^{-\gamma t}$, $\upsilon = 0 \Rightarrow \boxed{t_1 = 1/\gamma}$

Τιμή της μέγιστης μετατόπισης: $x(t_1) = \upsilon_0 t_1 e^{-\gamma t_1} = (\upsilon_0/\gamma)e^{-1}$

(γ) Στην περίπτωση κρίσιμης απόσβεσης και γενικών αρχικών συνθηκών ισχύει (βλ. Παράδειγμα 5.5) $x(t) = \left[x_0 + (\upsilon_0 + \gamma x_0)t\right]e^{-\gamma t}$

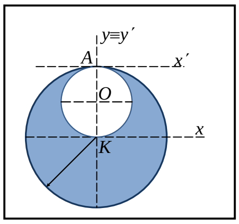
Οπότε, για τις συγκεκριμένες αρχικές συνθήκες, $x(0) = x_0 \neq 0$ και $\upsilon(0) = -2\gamma x_0$, έχουμε

$$x(t) = \left[x_0 + (-2\gamma x_0 + \gamma x_0)t\right]e^{-\gamma t} = \left[x_0 - \gamma x_0 t\right]e^{-\gamma t}$$

Άρα: $x(t) = 0 \Rightarrow \left[x_0 - \gamma x_0 t\right] = 0 \Rightarrow \boxed{t_2 = 1/\gamma}$

Και η ταχύτητα: $x(t) = \left[x_0 - \gamma x_0 t\right]e^{-\gamma t} \Rightarrow \upsilon(t) = x_o\gamma\left[\gamma t - 2\right]e^{-\gamma t}$

$$\upsilon(t_2) = x_o\gamma\left[1-2\right]e^{-1} \Rightarrow \boxed{\upsilon(t_2) = -2x_o\gamma e^{-1} = \upsilon_o e^{-1}}$$



2. Κυκλικός δίσκος αμελητέου πάχους και ακτίνας R, φέρει κυκλική οπή ακτίνας R/2, της οποίας το κέντρο βρίσκεται σε απόσταση R/2 από το κέντρο του κυκλικού δίσκου. (α) Αν η μάζα του τρύπιου δίσκου είναι M, να υπολογιστεί η θέση του κέντρου μάζας του δίσκου και και η ροπή αδράνειας ως προς άξονα κάθετο στο δίσκο που διέρχεται από το κέντρο μάζας του. (β) Αν ο δίσκος αναρτηθεί από το σημείο A και μπορεί να περιστρέφεται χωρίς τριβές περί άξονα κάθετο στο επίπεδο του δίσκου που διέρχεται από το A, να υπολογιστεί η κυκλική συχνότητα των ταλαντώσεων μικρού πλάτους, μέσα σε ομοιογενές πεδίο βαρύτητας (g).

ΑΠΑΝΤΗΣΗ

Επιφανειακή πυκνότητα μάζας του δίσκου: $\sigma = M/\left[\pi R^2 - \pi\left(R/2\right)^2\right] = 4M/\left(3\pi R^2\right)$

(α) Ο πλήρης δίσκος θα είχε ΚΜ στο Κ και συνολική μάζα $M' = \sigma\pi R^2 = 4M/3$

Ο μικρός δίσκος θα είχε κέντρο μάζας στο Ο και μάζα $M_O = \sigma\pi\left(R/2\right)^2 = M/3$

Η y-συνεταγμένη του ΚΜ του πλήρους δίσκου είναι 0 και πρέπει να προκύπτει από:

$$0 = M_{\tau\rho.\delta} y_{KM,\tau\rho.\delta} + M_O y_{KM,O} \Rightarrow y_{KM,\tau\rho.\delta} = -\left(M_O/M_{\tau\rho.\delta}\right) y_{KM,O} \Rightarrow \boxed{y_{KM,\tau\rho.\delta} = -R/3}$$

Η x_{KM} πλήρους δίσκου – μικρού δίσκου – άρα και τρύπιου δίσκου = 0 (λόγω συμμετρίας)

Ροπή αδράνειας πλήρους δίσκου, ως προς Κ: $I'_{o\lambda/K} = (1/2)M'R^2 = (1/2)(4M/3)R^2 = 2MR^2/3$

Αλλά, $I'_{o\lambda/K} = I_{\tau\rho.\delta/K} + I_{\mu\iota\kappa.\delta/K} \Rightarrow I_{\tau\rho.\delta/K} = I'_{o\lambda/K} - I_{\mu\iota\kappa.\delta/K}$, όπου $I_{\mu\iota\kappa.\delta/K} = I_{\mu\iota\kappa.\delta/O} + M_O\left(OK\right)^2$

$$I_{\tau\rho.\delta/K} = I'_{o\lambda/K} - I_{\mu\iota\kappa.\delta/K} = \left(2MR^2/3\right) - \left(MR^2/8 + (M/3)(R/2)^2\right) \Rightarrow \boxed{I_{\tau\rho.\delta/K} = MR^2/12}$$

(β) Για τη στροφική ταλάντωση περί το Α,

$$I_{\tau\rho.\delta/A} = I_{\tau\rho.\delta/K} + MD^2 = MR^2/12 + M(R+R/3)^2 \Rightarrow I_{\tau\rho.\delta/A} = (67/48)MR^2$$

$$I_{\tau\rho.\delta/A}\ddot{\theta} = -Mgx = -Mg(4R/3)\theta \Rightarrow \ddot{\theta} + (4MgR/3I_{\tau\rho.\delta/A})\theta = 0$$

$$\omega_0^2 = \left[4MgR\right]/\left[3(67/48)MR^2\right] \Rightarrow \boxed{\omega_0^2 = \left(64/67\right)\left(g/R\right)}$$

3. Κυκλική οριζόντια πλατφόρμα μάζας M και ακτίνας R, μπορεί να περιστρέφεται χωρίς τριβές περί τον κατακόρυφο άξονα συμμετρίας της. Στην περιφέρεια της πλατφόρμας, που ακινητεί, στέκεται άνθρωπος μάζας m ο οποίος, τη χρονική στιγμή $t = 0$, εκτοξεύει μάζα m_0 εφαπτομενικά προς την περιφέρεια, με ταχύτητα υ_0, ως προς τον ίδιο. (α) Δείξτε ότι η πλατφόρμα θα αρχίσει να περιστρέφεται, και υπολογίστε τη γωνιακή ταχύτητα περιστροφής ω_0. (β) Μόλις η πλατφόρμα συμπληρώσει ένα τέταρτο του κύκλου, ο άνθρωπος αρχίζει να περπατά προς το κέντρο της πλατφόρμας (κατά μήκος μίας ακτίνας) με ταχύτητα υ και σταματά σε απόσταση R/2 από το κέντρο. Γράψτε την εξίσωση κίνησης του συστήματος Πλατφόρμα-Άνθρωπος για το χρονικό διάστημα που ο άνθρωπος μετακινείται. (γ) Υπολογίστε τη γωνιακή ταχύτητα περιστροφής, από τη στιγμή που ο άνθρωπος σταματά και έπειτα.

ΑΠΑΝΤΗΣΗ

(α) Εφαρμόζουμε την αρχή διατήρησης της στροφορμής του συνολικού συστήματος, $\left(M, m, m_0\right)$, πριν και μετά την εκτόξευση της πέτρας

$$L_{tot,init}=0 \quad \Rightarrow \quad L_{tot,final}=0$$

$$L_{tot,final}=L_{M+m}+L_{m_0}=I_{M+m}\omega+m_0R\left(\omega R-\upsilon_0\right)$$

$$\left(\frac{1}{2}MR^2+mR^2\right)\omega+m_0R^2\omega-m_0R\upsilon_0=0$$

$$\left(\frac{1}{2}MR^2+mR^2\right)\omega+m_0R^2\omega=m_0R\upsilon_0 \Rightarrow \boxed{\omega=\frac{2m_0\upsilon_0}{\left(M+2m+2m_0\right)R}}$$

(β) Εφαρμόζουμε την αρχή διατήρησης της στροφορμής του συστήματος, (M,m), κατά τη διάρκεια της μετακίνησης του ανθρώπου, από την περιφέρεια προς το κέντρο.

$$\frac{dL_M}{dt}+\frac{dL_m}{dt}=0 \Rightarrow \frac{1}{2}MR^2\frac{d\omega}{dt}+m\frac{d}{dt}\left(\omega r^2\right)=0$$

$$MR^2\frac{d\omega}{dt}+2m\left(2\omega r\frac{dr}{dt}+r^2\frac{d\omega}{dt}\right)=0$$

Αλλά $r=R-\upsilon t \Rightarrow \dfrac{dr}{dt}=-\upsilon$

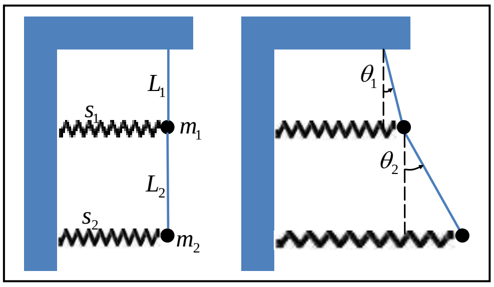
$$MR^2\frac{d\omega}{dt}+4m\omega\left(R-\upsilon t\right)\left(-\upsilon\right)+2m\left(R-\upsilon t\right)^2\frac{d\omega}{dt}=0$$

$$\left(MR^2+2m\left(R-\upsilon t\right)^2\right)\frac{d\omega}{dt}=4\upsilon m\omega\left(R-\upsilon t\right) \Rightarrow$$

$$\frac{d\omega}{\omega}=\frac{4\upsilon m\left(R-\upsilon t\right)dt}{\left(MR^2+2m\left(R-\upsilon t\right)^2\right)}=-\frac{4m\left(R-\upsilon t\right)d\left(R-\upsilon t\right)}{\left(MR^2+2m\left(R-\upsilon t\right)^2\right)}$$

$$\frac{d\omega}{\omega}=-4m\frac{rdr}{\left(MR^2+2mr^2\right)}=-\frac{d\left(MR^2+2mr^2\right)}{\left(MR^2+2mr^2\right)} \Rightarrow \int_{\omega_0}^{\omega}\frac{d\omega}{\omega}=-\int_{R}^{r}\frac{d\left(MR^2+2mr^2\right)}{\left(MR^2+2mr^2\right)}$$

$$\Rightarrow \ln\left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)=-\ln\left(MR^2+2mr^2\right)\Big|_R^r \Rightarrow \omega=\omega_0\frac{MR^2+2mR^2}{MR^2+2mr^2} \Rightarrow \boxed{\omega_{fimal}=\omega_0\frac{2M+4m}{2M+m}}$$



4. Δύο ιδανικά εκκρεμή με μάζες m_1, m_2, και αβαρείς ράβδους μηκών L_1, L_2 αναρτώνται το ένα κάτω από το άλλο, και συνδέονται με ακλόνητο τοίχωμα μέσω ελατηρίων με σταθερές s_1, s_2, όπως στο Σχήμα **. Σε** κατάσταση ισορροπίας, οι ράβδοι είναι κατακόρυφοι και τα ελατήρια έχουν το φυσικό τους μήκος, ενώ το σύστημα βρίσκεται μέσα σε ομογενές κατακόρυφο πεδίο βαρύτητας, με επιτάχυνση g.

Διαταράσσουμε το σύστημα, έτσι ώστε να έχουμε μικρές γωνιακές αποκλίσεις του κάθε εκκρεμούς από την κατακόρυφο, (τέτοιες ώστε $\sin\theta_{1,2}\approx\tan\theta_{1,2}\approx\theta_{1,2}$), και όλο το σύστημα να βρίσκετα πάντα στο ίδιο κατακόρυφο επίπεδο.

(α) Να γραφούν οι διαφορικές εξισώσεις κίνησης για τις απομακρύνσεις των μαζών από την κατάσταση ισορροπίας τους σύμφωνα με τις παραπάνω προσεγγίσεις μικρών γωνιών.

(β) Υποθέτοντας κανονικούς τρόπους ταλάντωσης (ΚΤΤ), να υπολογιστούν οι συχνότητες των ΚΤΤ, συναρτήσει του ω_0, όταν $s_1=s_2=s$, $L_1=L_2=L$, $m_1=m_2=m$, και $\left(s/m\right)=\left(g/L\right)=\omega_0^2$.

ΑΠΑΝΤΗΣΗ

(α) Κατά τον οριζόντιο άξονα, εξισώσεις κίνησης:

$$m_1\ddot{x}_1 = -s_1x_1 - T_{1x} + T_{2x} \qquad (1a)$$

$$m_2\ddot{x}_2 = -s_2x_2 - T_{2x} \qquad (1b)$$

Κατά τον κατακόρυφο άξονα (στην προσέγγιση μικρών γωνιών), εξισώσεις ισορροπίας:

$$\begin{aligned} &T_2\cos\theta_2 = m_2 g \\ &T_1\cos\theta_1 = m_1 g + T_2\cos\theta_2 = (m_1+m_2)g \end{aligned} \qquad (2)$$

$$m_1\ddot{x}_1 = -s_1x_1 - T_{1x} + T_{2x} = -s_1x_1 - (m_1+m_2)g\tan\theta_1 + m_2 g\tan\theta_2$$

$$m_2\ddot{x}_2 = -s_2x_2 - T_{2x} = -s_2x_2 - m_2 g\tan\theta_2$$

Όπου (στην προσέγγιση μικρών γωνιών), $\tan\theta_1 \approx x_1/L_1$ $\quad$ $\tan\theta_2 \approx (x_2-x_1)/L_2$

$$m_1\ddot{x}_1 = -s_1x_1 - (m_1+m_2)g\,x_1/L_1 + m_2 g\,(x_2-x_1)/L_2$$

$$m_2\ddot{x}_2 = -s_2x_2 - m_2 g\,(x_2-x_1)/L_2$$

$$m_1\ddot{x}_1 + s_1x_1 + (m_1+m_2)g\,x_1/L_1 - m_2 g\,(x_2-x_1)/L_2 = 0$$

$$m_2\ddot{x}_2 + s_2x_2 + m_2 g\,(x_2-x_1)/L_2 = 0$$

$$\ddot{x}_1 + (s_1/m_1)x_1 + (1+m_2/m_1)g\,x_1/L_1 - (m_2/m_1)g\,(x_2-x_1)/L_2 = 0$$

$$\ddot{x}_2 + (s_2/m_2)x_2 + g\,(x_2-x_1)/L_2 = 0$$

$$\ddot{x}_1 + \left[\left(\frac{s_1}{m_1}\right) + \left(1+\frac{m_2}{m_1}\right)\frac{g}{L_1} + \frac{m_2}{m_1}\frac{g}{L_2}\right]x_1 - \frac{m_2}{m_1}\frac{g}{L_2}x_2 = 0$$

$$\ddot{x}_2 + \left[\left(\frac{s_2}{m_2}\right) + \frac{g}{L_2}\right]x_2 - \frac{g}{L_2}x_1 = 0$$

(β) Υποθέτοντας κανονικούς τρόπους ταλάντωσης (ΚΤΤ), να υπολογιστούν οι συχνότητες των ΚΤΤ, συναρτήσει του ω_0,

Όταν $s_1 = s_2 = s$, $L_1 = L_2 = L$, $m_1 = m_2 = m$, και $(s/m) = (g/L) = \omega_0^2$, παίρνουμε"

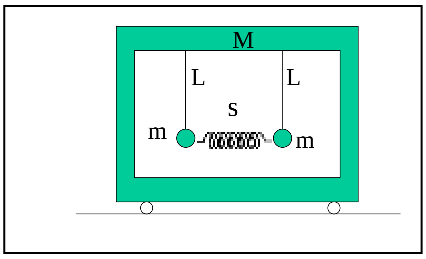
$$\ddot{x}_1 + 4\omega_0^2 x_1 - \omega_0^2 x_2 = 0$$

$$\ddot{x}_2 + 2\omega_0^2 x_2 - \omega_0^2 x_1 = 0$$

Αναζητώντας ΚΤΤ, $x_1 = A\cos(\omega t + \varphi)$ και $x_2 = B\cos(\omega t + \varphi)$, παίρνουμε:

$$\left.\begin{cases} (4\omega_0^2 - \omega^2)A \;-\; \omega_0^2 B = 0 \\ -\omega_0^2 A + \ddot{x}_2\,(2\omega_0^2 - \omega^2)B = 0 \end{cases}\right\} \Rightarrow \begin{vmatrix} (4\omega_0^2-\omega^2) & -\omega_0^2 \\ -\omega_0^2 & (2\omega_0^2-\omega^2) \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow \omega^4 - 6\omega_0^2\omega^2 + 7\omega_0^4 = 0,$$

με ρίζες $\omega_{1,2}^2 = \left(3 \pm \sqrt{2}\right)\omega_0^2$



5. Δύο ιδανικά εκκρεμή μάζας *m* και μήκους *L*, το καθένα, κρέμονται από δύο διαφορετικά σημεία της οροφής μικρού οχήματος μάζας *M*, το οποίο μπορεί να κινείται ελεύθερα, χωρίς τριβές, πάνω σε οριζόντιο επίπεδο. Το σύστημα βρίσκεται μέσα σε κατακόρυφο πεδίο βαρύτητας *g*, και τα δύο εκκρεμή συνδέονται με ελατήριο σταθεράς s. Τα δύο εκκρεμή εκτρέπονται κατά μικρές γωνίες από την κατακόρυφο, έτσι ώστε να κάνουν μικρές ταλαντώσεις, μένοντας στο κατακόρυφο επίπεδο που περνάει από τα σημεία ανάρτησης. (α) Γράψτε τις εξισώσεις κίνησης για κάθε ένα από τα τρία σώματα (m, m, M). (β) Υποθέστε ότι το σύστημα εκτελεί κίνηση σε κανονικό τρόπο ταλάντωσης (ΚΤΤ: κοινή συχνότητα και φάση, διαφορετικά πλάτη) και διατυπώστε τη συνθήκη υπολογισμού των συχνοτήτων των κανονικών τρόπων ταλάντωσης. (γ) Επιλύστε τη χαρακτηριστική εξίσωση, για την περίπτωση m=M, $\left(g/L\right)=\left(s/m\right)=\omega_0^2$, και προσδιορίστε τις συχνότητες των ΚΤΤ, συναρτήσει του ω_0.

ΑΠΑΝΤΗΣΗ

Έστω ότι $x_1,\ x_2,\ x_3$, οι μετατοπίσεις των $m_1,\ m_2,\ M$, από τις θέσεις ισορροπίας, και $\theta_1,\ \theta_2$, οι γωνίες των αντίστοιχων νημάτων με την κατακόρυφο.

$$\left\{\begin{array}{l} m_1\ddot{x}_1=-T_1\sin\theta_1-s\left(x_1-x_2\right)=-m_1g\,\dfrac{(x_1-x_3)}{L}-s\left(x_1-x_2\right) \\ m_2\ddot{x}_2=-T_2\sin\theta_2-s\left(x_2-x_1\right)=-m_2g\,\dfrac{(x_2-x_3)}{L}-s\left(x_2-x_1\right) \\ m_3\ddot{x}_3=T_1\sin\theta_1+T_2\sin\theta_2=m_1g\,\dfrac{(x_1-x_3)}{L}+m_2g\,\dfrac{(x_2-x_3)}{L} \end{array}\right\}$$

$$\left\{\begin{array}{l} m_1\ddot{x}_1+m_1g\,\dfrac{(x_1-x_3)}{L}+s\left(x_1-x_2\right)=0\Rightarrow \ddot{x}_1+\left(\dfrac{g}{L}+\dfrac{s}{m_1}\right)x_1-\dfrac{s}{m_1}x_2-\dfrac{g}{L}x_3=0 \\ m_2\ddot{x}_2+m_2g\,\dfrac{(x_2-x_3)}{L}+s\left(x_2-x_1\right)=0\Rightarrow -\dfrac{s}{m_2}x_1+\ddot{x}_2+\left(\dfrac{g}{L}+\dfrac{s}{m_2}\right)x_2-\dfrac{g}{L}x_3=0 \\ m_3\ddot{x}_3-m_1g\,\dfrac{(x_1-x_3)}{L}-m_2g\,\dfrac{(x_2-x_3)}{L}=0\Rightarrow -\dfrac{m_1}{m_3}\dfrac{g}{L}x_1-\dfrac{m_2}{m_3}\dfrac{g}{L}x_2+\ddot{x}_3+\dfrac{m_1+m_2}{m_3}\dfrac{g}{L}x_3=0 \end{array}\right\}$$

Υποθέτουμε: $x_1=A\cos(\omega t+\varphi)$, $x_2=B\cos(\omega t+\varphi)$, $x_3=C\cos(\omega t+\varphi)$, οπότε:

$$\left.\begin{array}{l} -\omega^2A+\left(\dfrac{g}{L}+\dfrac{s}{m_1}\right)A-\dfrac{s}{m_1}B-\dfrac{g}{L}C=0 \\ -\dfrac{s}{m_2}A+-\omega^2B+\left(\dfrac{g}{L}+\dfrac{s}{m_2}\right)B-\dfrac{g}{L}C=0 \\ -\dfrac{m_1}{m_3}\dfrac{g}{L}A-\dfrac{m_2}{m_3}\dfrac{g}{L}B+-\omega^2C+\dfrac{m_1+m_2}{m_3}\dfrac{g}{L}C=0 \end{array}\right\}\Rightarrow \begin{vmatrix} \left(\dfrac{g}{L}+\dfrac{s}{m_1}\right)-\omega^2 & -\dfrac{s}{m_1} & -\dfrac{g}{L} \\ -\dfrac{s}{m_2} & \left(\dfrac{g}{L}+\dfrac{s}{m_2}\right)-\omega^2 & -\dfrac{g}{L} \\ -\dfrac{m_1}{m_3}\dfrac{g}{L} & -\dfrac{m_2}{m_3}\dfrac{g}{L} & \dfrac{m_1+m_2}{m_3}\dfrac{g}{L}-\omega^2 \end{vmatrix}=0$$

$$\begin{vmatrix} 2\omega_0^2-\omega^2 & -\omega_0^2 & -\omega_0^2 \\ -\omega_0^2 & 2\omega_0^2-\omega^2 & -\omega_0^2 \\ -\omega_0^2 & -\omega_0^2 & 2\omega_0^2-\omega^2 \end{vmatrix}=0\Rightarrow \begin{vmatrix} \left(\omega^2-2\omega_0^2\right) & \omega_0^2 & \omega_0^2 \\ \omega_0^2 & \left(\omega^2-2\omega_0^2\right) & \omega_0^2 \\ \omega_0^2 & \omega_0^2 & \left(\omega^2-2\omega_0^2\right) \end{vmatrix}=0\Rightarrow$$

$$\left(\omega^2-2\omega_0^2\right)\left[\left(\omega^2-2\omega_0^2\right)^2-\omega_0^4\right]-\omega_0^2\left[\omega_0^2\left(\omega^2-2\omega_0^2\right)-\omega_0^4\right]+\omega_0^2\left[\omega_0^4-\omega_0^2\left(\omega^2-2\omega_0^2\right)\right]=0$$

$$\left(\omega^2-2\omega_0^2\right)\left[\left(\omega^2-2\omega_0^2\right)^2-\omega_0^4\right]-2\omega_0^2\left[\omega_0^2\left(\omega^2-2\omega_0^2\right)-\omega_0^4\right]=0$$

$$\left(\omega^2-2\omega_0^2\right)\left[\left(\omega^2-2\omega_0^2\right)-\omega_0^2\right]\left[\left(\omega^2-2\omega_0^2\right)+\omega_0^2\right]-2\omega_0^4\left[\left(\omega^2-2\omega_0^2\right)-\omega_0^2\right]=0$$

$$\left(\omega^2-2\omega_0^2\right)\left(\omega^2-3\omega_0^2\right)\left(\omega^2-\omega_0^2\right)-2\omega_0^4\left(\omega^2-3\omega_0^2\right)=0 \quad \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \quad \left(\omega^2-3\omega_0^2\right)\left[\left(\omega^2-2\omega_0^2\right)\left(\omega^2-\omega_0^2\right)-2\omega_0^4\right]=0$$

$$\Rightarrow\left(\omega^2-3\omega_0^2\right)\left[\omega^4+2\omega_0^4-3\omega_0^2\omega^2-2\omega_0^4\right]=0\Rightarrow\left(\omega^2-3\omega_0^2\right)\left[\omega^4-3\omega_0^2\omega^2\right]=0,\ \text{άρα:}$$

$$\Rightarrow \omega^2\left(\omega^2-3\omega_0^2\right)\left[\omega^2-3\omega_0^2\right]=0 \quad \Rightarrow \boxed{\left\{\omega_1=0,\quad \omega_2=\omega_3=\omega_0\sqrt{3}\right\}}$$

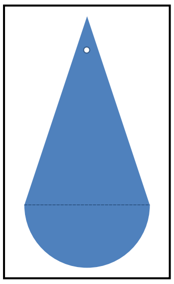
Ο μηδενισμός της μίας ιδιοσυχνότητας δηλώνει την ισοταχή κίνηση (ή, ακινησία) του Κέντρου Μάζας του συστήματος (επειδή το σύστημα είναι ελεύθερο, συνολικά)

Όσον αφορά την σύμπτωση των άλλων δύο ιδιοσυχνοτήτων, εδώ έχουμε την περίπτωση «εκφυλισμού» δύο Κανονικών Τρόπων Ταλάντωσης, δηλαδή την σύμπτωση των ιδιοσυχνοτήτων τους, λόγω της ύπαρξης συμμετρίας (όχι μόνο γεωμετρικής, αλλά και ενός είδους «δυναμικής» συμμετρίας)

$$\left\{\begin{matrix}\left(\omega^2-2\omega_0^2\right)A+\omega_0^2B+\omega_0^2C=0\\ \omega_0^2A+\left(\omega^2-2\omega_0^2\right)B+\omega_0^2C=0\\ \omega_0^2A+\omega_0^2B+2\left(\omega^2-2\omega_0^2\right)C=0\end{matrix}\right\} \qquad \kappa\alpha\iota \qquad \left\{\begin{matrix}\omega_1^2=0\\ \omega_2^2=3\omega_0^2\\ \omega_3^2=3\omega_0^2\end{matrix}\right\}\Rightarrow$$

$$\omega_1^2=0 \qquad \Rightarrow 2A=B+C \qquad \acute{\eta} \qquad 2B=A+C \qquad \acute{\eta} \qquad A+B=2C$$

$$\omega_{2,3}^2=3\omega_0^2 \qquad \Rightarrow A+B+C=0$$

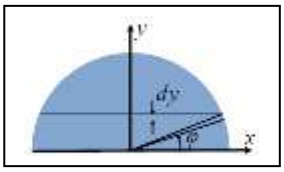


6. Μεγάλο ρολόι του τοίχου (τύπου εκκρεμούς, π.χ., Αίθουσα του Χρόνου στο Εθνικό Αστεροσκοπείο) διαθέτει φυσικό εκκρεμές το οποίο αποτελείται από πλάκα σχήματος τριγώνου με βάση μήκους 2R και ύψος 3R, στη βάση του οποίου είναι προσαρτημένη ημικυκλική πλάκα ακτίνας R (βλ. σχήμα). Το συνολικό εκκρεμές έχει μάζα M και διαθέτει μικρή τρύπα (αμελητέων διαστάσεων), που βρίσκεται πάνω στον άξονα συμμετρίας του σχήματος και απέχει απόσταση R/2 από την κορυφή του τριγώνου. (α) Να υπολογιστεί το κέντρο μάζας του φυσικού εκκρεμούς. (β) Να υπολογιστεί η ροπή αδράνειας του φυσικού εκκρεμούς, ως προς άξονα κάθετο στο επίπεδο του φυσικού εκκρεμούς, που διέρχεται από το κέντρο μάζας του. (γ) Να υπολογιστεί η κυκλική συχνότητα ταλάντωσης του φυσικού εκκρεμούς, περί άξονα που διέρχεται από την τρύπα, κάθετα προς αυτό.

ΑΠΑΝΤΗΣΗ

Επιφανειακή πυκνότητα μάζας της πλάκας:

$$\sigma=M/\left[\pi R^2/2+(1/2)(2R)(3R)\right]\Rightarrow\boxed{\sigma=2M/\left[R^2\left(\pi+6\right)\right]}$$



$$(\alpha)\ \ x=R\cos\varphi,\quad y=R\sin\varphi\Rightarrow dy=R\cos\varphi d\varphi$$

$$y_{KM,\eta\mu\sigma\varphi}=\frac{1}{M_{\eta\mu\sigma\varphi}}\int_0^R y\sigma 2xdy=\frac{2\sigma}{M_{\eta\mu\sigma\varphi}}\int_0^R xydy=\frac{2\sigma}{M_{\eta\mu\sigma\varphi}}R^3\int_0^{\pi/2}\cos^2\varphi d\left(-\cos\varphi\right)$$

$$y_{KM,\eta\mu\sigma\varphi} = \frac{2\sigma R^3}{M_{\eta\mu\sigma\varphi}} \int_{\pi/2}^{0} \cos^2\varphi\, d\left(\cos\varphi\right) = \frac{2\sigma R^3}{3M_{\eta\mu\sigma\varphi}} = \frac{2\sigma R^3}{3\sigma\left(\pi R^2/2\right)} \Rightarrow \boxed{y_{KM,\eta\mu\sigma\varphi} = \frac{4}{3}\frac{R}{\pi}}$$

Αν η αρχή των y είναι στη διάμετρο του ημισφαιρίου: $y_{KM,\eta\mu\sigma\varphi} = -\frac{4R}{3\pi}$ και $y_{KM,\tau\rho} = R$

$$M\ y_{KM} = M_{\tau\rho} y_{KM,\tau\rho} + M_{\eta\mu\sigma\varphi} y_{KM,\eta\mu\sigma\varphi} = \sigma\left[\left(3R^2\right)\left(R\right) + \left(\pi R^2/2\right)\left(-\frac{4R}{3\pi}\right)\right]$$

$$M\ y_{KM} = \sigma\left[\left(3R^2\right)\left(R\right) + \left(\pi R^2/2\right)\left(-\frac{4R}{3\pi}\right)\right] = \sigma\left[3R^3 - 2R^3/3\right] = 7\sigma R^3/3$$

$$\sigma = 2M/\left[R^2\left(\pi+6\right)\right] \quad \Rightarrow \quad y_{KM} = \frac{14R}{3\left(\pi+6\right)}$$

7 . Κυκλική οριζόντια πλατφόρμα μάζας M και ακτίνας R, μπορεί να περιστρέφεται χωρίς τριβές περί τον κατακόρυφο άξονα συμμετρίας της. Άνθρωπος μάζας m, βρίσκεται πάνω στην πλατφόρμα σε απόσταση $r_0\left(<R\right)$. (α) Κάποια στιγμή ο άνθρωπος αρχίζει να κινείται διαγράφοντας κύκλο ομόκεντρο με την πλατφόρμα, με ακτίνα $r_0(<R)$. Δείξτε ότι η πλατφόρμα θα περιστρέφεται, προσδιορίστε την φορά περιστροφής, σε σχέση με τη φορά κίνησης του ανθρώπου, και υπολογίστε την κυκλική συχνότητα περιστροφής ω της πλατφόρμας, αν το μέτρο της γραμμικής ταχύτητας του ανθρώπου, ως προς την πλατφόρμα, είναι υ_R. (β) Ως προς το, μη-αδρανειακό, σύστημα αναφοράς της πλατφόρμας, υπολογίστε τις ψευδοδυνάμεις που αισθάνεται ο άνθρωπος, παράλληλα προς την επιφάνεια της πλατφόρμας,. (γ) Διατυπώστε την εξίσωση κίνησης, ως προς το μη-αδρανειακό σύστημα της πλατφόρμας, και ως προς το αδρανειακό σύστημα του δαπέδου. (ε) Αν ο συντελεστής τριβής πλατφόρμας-κινητού είναι μ, υπολογίστε την μέγιστη ταχύτητα υ, που μπορεί να αναπτύξει ο άνθρωπος, χωρίς να αρχίσει να γλιστράει πάνω στην πλατφόρμα.

ΑΠΑΝΤΗΣΗ

(α) Διατήρηση στροφορμής

$$I\omega + mr\left(\omega r_0 - \upsilon\right) = 0 \Rightarrow \omega = \frac{\upsilon}{r_0 + \left(I/mr_0\right)}$$

(β) Υπολογισμός Ψευδοδυνάμεων

$$\vec{F}_{\varphi\upsilon\gamma} = -m\vec{\omega}\times\left(\vec{\omega}\times\vec{r}_R\right) = -m\vec{\omega}\times\left[\left(-\omega\hat{z}'\right)\times\left(r_0\hat{r}_R\right)\right] = m\vec{\omega}\times\left[\left(\omega\hat{z}'\right)\times\left(r_0\hat{r}_R\right)\right] =$$

$$m\left(-\omega\hat{z}'\right)\times\left(\omega r_0\hat{\upsilon}_R\right) = -m\omega^2 r_0\left(\hat{z}'\right)\times\left(\hat{\upsilon}_R\right) = -m\omega^2 r_0\left(-\hat{r}_R\right) = m\omega^2 r_0\left(\hat{r}_R\right)$$

$$\vec{F}_{Cor} = -2m\vec{\omega}\times\vec{\upsilon}_R = -2m\left(-\omega\hat{z}'\right)\times\left(\upsilon_R\hat{\upsilon}_R\right) = -2m\omega\upsilon_R\hat{r}_R$$

(γ) Εξισώσεις κίνησης

Ως προς αδρανειακό σύστημα (το έδαφος)

$$m\vec{a} = \vec{F}_{\tau\rho} \quad \Rightarrow \quad \vec{F}_{\tau\rho} = \vec{F}_{\kappa\varepsilon\nu\tau\rho\mu\lambda} = m\frac{\upsilon_{Fixed}^2}{r_0} = m\frac{\left(\omega r_0 - \upsilon_R\right)^2}{r_0}$$

$$\Rightarrow \quad \boxed{F_{\tau\rho} = m\frac{\upsilon_R^2}{r_0} - 2m\omega\upsilon_R + m\omega^2 r_0}$$

Ως προς περιστρεφόμενο σύστημα (την πλατφόρμα)

$$m\vec{a}_R = \vec{F}_{\tau\rho} - 2m\vec{\omega}\times\vec{\upsilon}_R - m\vec{\omega}\times\left(\vec{\omega}\times\vec{r}_R\right) \;\Rightarrow\; m\frac{\upsilon_R^2}{r_0}\left(-\hat{r}_R\right) = \vec{F}_{\tau\rho} - 2m\omega\upsilon_R\hat{r}_R + m\omega^2 r_0\left(\hat{r}_R\right) \;\Rightarrow$$

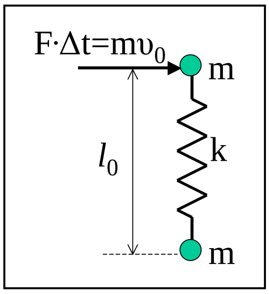
$$m\frac{\upsilon_R^2}{r_0}\left(-\hat{r}_R\right) + 2m\omega\upsilon_R\hat{r}_R - m\omega^2 r_0\left(\hat{r}_R\right) = \vec{F}_{\tau\rho} = F_{\tau\rho}\left(-\hat{r}_R\right) \;\Rightarrow$$

$$-m\frac{\upsilon_R^2}{r_0}\left(\hat{r}_R\right) + 2m\omega\upsilon_R\left(\hat{r}_R\right) - m\omega^2 r_0\left(\hat{r}_R\right) = -F_{\tau\rho}\left(\hat{r}_R\right) \;\Rightarrow\; \boxed{m\frac{\upsilon_R^2}{r_0} - 2m\omega\upsilon_R + m\omega^2 r_0 = F_{\tau\rho}}$$

Παρατηρούμε ότι οι εξισώσεις κίνησης έχουν την ίδια αναλυτική μορφή, αλλά οι διάφοροι όροι έχουν διαφορετική φυσική ερμηνεία

(δ)
$$\left.\begin{cases} \vec{F}_{\tau\rho} \le \mu mg \\ \vec{F}_{\tau\rho} = \vec{F}_{\kappa\varepsilon\nu\tau\rho\mu\lambda} = m\dfrac{\upsilon_{Fixed}^2}{r_0} = m\dfrac{\left(\omega r_0 - \upsilon_R\right)^2}{r_0} \end{cases}\right\} \Rightarrow m\frac{\left(\omega r_0 - \upsilon_R\right)^2}{r_0} \le \mu mg$$

$$\left.\begin{cases} \left(\omega r_0 - \upsilon_R\right)^2 \le \mu g r_0 \\ \omega = \dfrac{\upsilon_R}{r_0 + \left(I/mr_0\right)} \end{cases}\right\} \Rightarrow \left(\frac{\upsilon}{r_0 + \left(I/mr_0\right)} r_0 - \upsilon_R\right)^2 \le \mu g r_0 \Rightarrow \boxed{\upsilon_R^2 \le \frac{mr_0^2 + I}{I}\mu g r}$$



8. Δύο ίδιες μικρές μάζες m συνδεδεμένες με ελατήριο σταθεράς k και φυσικού μήκους l_0, βρίσκονται πάνω σε λείο οριζόντιο δάπεδο. Κάποια στιγμή προσδίδουμε στην μία μάζα οριζόντια ταχύτητα υ_0, κάθετα στο ελατήριο, με αποτέλεσμα το σύστημα να αρχίσει να εκτελεί, πάνω στο οριζόντιο επίπεδο, μία σύνθετη κίνηση (μετατόπιση + περιστροφή + ταλάντωση). α) Προσδιορίστε την θέση και την ταχύτητα του κέντρου μάζας, κατά την στιγμή έναρξης της κίνησης. β) Εκφράστε την ενέργεια και την στροφορμή του συστήματος, ως προς σύστημα κέντρου μάζας, κατά την έναρξη της κίνησης. γ) Υπολογίστε τα ίδια μεγέθη κατά την στιγμή της μέγιστης επιμήκυνσης του ελατηρίου. δ) Εφαρμόζοντας κατάλληλους νόμους διατήρησης υπολογίστε την μέγιστη επιμήκυνση $\Delta l/l_0$ με την προϋπόθεση ότι $\Delta l << l_0$, και $m\upsilon_0^2 << kl_0^2$. [Εργαστείτε στο σύστημα κέντρου μάζας και θεωρήστε ότι $l-l_0=\Delta l$ και $l+l_0\approx 2l$].

ΑΠΑΝΤΗΣΗ

(α) Το κέντρο μάζας, για λόγους συμμετρίας, συμπίπτει με το κέντρο του ελατηρίου, η δε ταχύτητά του, ως προς το εργαστήριο, είναι ίση με $V_{CM} = \dfrac{m\vec{\upsilon}_0 + m0}{2m} = \dfrac{\vec{\upsilon}_0}{2}$

(β) Ως προς το Κέντρο Μάζας, οι ταχύτητες των δύο σωμάτων είναι $\upsilon'_{1,2} = \pm\dfrac{\vec{\upsilon}_0}{2}$.

Άρα, ως προς το κέντρο μάζας, η αρχική ενέργεια είναι ίση με

$$E'_{\alpha\rho\chi} = E'_{\kappa\iota\nu} = 2\frac{1}{2}m\left(\frac{\upsilon_0}{2}\right)^2 = \frac{m\upsilon_o^2}{4}$$

και η αρχική στροφορμή είναι $L'_{\alpha\rho\chi} = 2\dfrac{l_0}{2}m\dfrac{\upsilon_0}{2} = \dfrac{l_0 m\upsilon_0}{2}$

(γ) Κατά την μέγιστη επιμήκυνση του ελατηρίου

$$E'_{final} = E'_{\kappa\iota\nu} + E'_{\delta\upsilon\nu} = 2\frac{1}{2}m\upsilon^2 + k\Delta l^2 = m\upsilon^2 + k\Delta l^2$$

$$L'_{fin} = 2\frac{(l_0+\Delta l)m\upsilon}{2} = (l_0+\Delta l)m\upsilon$$

(δ) Διατήρηση ενέργειας $\quad m\upsilon^2 + k\Delta l^2 = m\frac{\upsilon_0^2}{4} \quad (1)$

Διατήρηση στροφορμής $\quad (l_0+\Delta l)m\upsilon_{fin} = \frac{l_0 m\upsilon_0}{2} \quad (2)$

$$(2) \Rightarrow \left(1+\frac{\Delta l}{l_0}\right)m\upsilon = \frac{m\upsilon_0}{2} \Rightarrow \left(1+\frac{\Delta l}{l_0}\right)^2 m^2\upsilon^2 = \frac{m^2\upsilon_0^2}{4} \Rightarrow \left(1+2\frac{\Delta l}{l_0}\right)m^2\upsilon^2 \approx \frac{m^2\upsilon_0^2}{4} \quad (3)$$

$$(1),(3): \quad m\upsilon^2 + k\Delta l^2 = \left(1+2\frac{\Delta l}{l_0}\right)m^2\upsilon^2 \Rightarrow k\Delta l^2 = 2\frac{\Delta l}{l_0}m^2\upsilon^2 \Rightarrow m^2\upsilon^2 = \frac{k}{2}l_0\Delta k \quad (4)$$

$$(1), \quad (4): \quad \frac{k}{2}l_0\Delta l + k\Delta l^2 = \frac{1}{4}m\upsilon_0^2 \Rightarrow \Delta l^2 + \frac{l_0}{2}\Delta l - \frac{m\upsilon_0^2}{4k} = 0 \Rightarrow \boxed{\Delta l = \frac{1}{2}\left(-\frac{l_0}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{l_0}{2}\right)^2 + \frac{m\upsilon_0^2}{k}}\right)}$$

Επειδή: $\quad m\upsilon_0^2 << kl_0^2 \Rightarrow \boxed{\Delta l \approx m\upsilon_0^2 / 2kl_0}$

9. Μία κατακόρυφη χοάνη φόρτωσης μεταλλεύματος τροφοδοτεί, με παροχή υλικού $dm/dt = \mu$, μία οριζόντια ταινία μεταφοράς που βρίσκεται κάτω από τη χοάνη, και κυλίεται, με σταθερή ταχύτητα υ, σε ένα σύστημα κυλίνδρων χωρίς τριβή, με τη βοήθεια εξωτερικής δύναμης $F_{\varepsilon\xi\omega\tau}$, που ασκείται στην ταινία από έναν κινητήρα. (α) Υπολογίστε τη δύναμη τριβής που ασκεί ο ιμάντας στο υλικό που επικάθεται πάνω του, (β) Υπολογίστε τη δύναμη $F_{\varepsilon\xi\omega\tau}$ που ασκεί ο κινητήρας στον ιμάντα. (γ) Υπολογίστε την ισχύ που πρέπει να προσφέρει ο κινητήρας στον ιμάντα. (δ) Υπολογίστε το ρυθμό μεταβολής της κινητικής ενέργειας του υλικού που εναποτίθεται πάνω στον ιμάντα, λόγω της οριζόντιας κίνησής του. (ε) Συγκρίνεται τις απαντήσεις των ερωτημάτων (γ) και (δ) και σχολιάστε.

ΑΠΑΝΤΗΣΗ

(α)

$$P(t+dt) - P(t) = F_{\tau\rho}dt \quad \Rightarrow \quad (m+dm)\upsilon - m\upsilon = F_{\tau\rho}dt$$

$$\Rightarrow \quad dm\upsilon = F_{\tau\rho}dt \quad \Rightarrow \quad F_{\tau\rho} = \frac{dm}{dt}\upsilon = \mu\upsilon$$

(β) $\quad F_{\varepsilon\xi} = F_{\tau\rho} = \mu\upsilon$

(γ) $\quad \mathrm{P} = F\upsilon = \mu\upsilon^2$

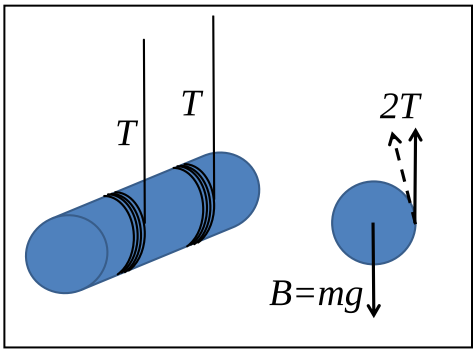
(δ) $$\frac{dE_K}{dt} = \frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2}m\upsilon^2\right) = \frac{1}{2}\frac{dm}{dt}\upsilon^2 \quad \Rightarrow \quad \frac{dE_K}{dt} = \frac{1}{2}\mu\upsilon^2$$

(ε) $$\frac{dE_K}{dt} = \frac{1}{2}\mu\upsilon^2 = \frac{1}{2}\mathrm{P}$$

Η μισή από την προσφερόμενη ισχύ μετατρέπεται σε κινητική ενέργεια, ή άλλη μισή δαπανάται σε ένα είδος μη-ελαστικής κρούσης (???)

10 . Συμπαγής ομοιογενής κύλινδρος μάζας Μ και ακτίνας R είναι τυλιγμένος με δύο νήματα συμμετρικά ως προς το μέσον του, τα οποία είναι στερεωμένα σε ακλόνητα σημεία, στο άλλο άκρο τους. Ο κύλινδρος αφήνεται, κατά τη χρονική στιγμή $t=0$, να πέσει καθώς ξετυλίγεται από τα νήματα, έτσι ώστε ο άξονάς του να είναι οριζόντιος και τα νήματα κατακόρυφα. (α) Δείξτε ότι κατά την πτώση-ξετύλιγμα του κυλίνδρου, τα νήματα ανάρτησης παραμένουν κατακόρυφα, και γράψτε τις κατάλληλες εξισώσεις κίνησης. (β) Υπολογίστε την επιτάχυνση του κέντρου μάζας του κυλίνδρου, την γωνιακή του επιτάχυνση, και την τάση του κάθε νήματος. (γ) Υπολογίστε την συνολική κινητική ενέργεια του κυλίνδρου, ως συνάρτηση του χρόνου. (δ) Υπολογίστε την ισχύ την οποία παρέχει η δύναμη του βάρους στο σύστημα και συγκρίνετε με την απάντηση του ερωτήματος (γ), σχολιάζοντας και το τι συμβαίνει, από την άποψη του ενεργειακού ισοζυγίου, με τις τάσεις των δύο νημάτων

ΑΠΑΝΤΗΣΗ



(α) Εφ' όσον, αρχικά, η τάση από τα νήματα είναι κατακόρυφη προς τα πάνω και η δύναμη του βάρους είναι κατακόρυφη προς τα κάτω, δεν υπάρχει οριζόντια συνιστώσα της δύναμης ώστε να μετακινήσει οριζόντια τον κύλινδρο. Αν το νήμα δεν ήταν κατακόρυφο (βλ. διακεκομμένη γραμμή) τότε θα υπήρχε οριζόντια συνιστώσα της δύναμης η οποία θα έτεινε να επαναφέρει τον κύλινδρο εφαπτομενικά σε κατακόρυφο νήμα.

(β) Αφού ο κύλινδρος κατέρχεται, με την περιφέρειά του να ξεδιπλώνεται εφαπτομενικά ως προς το νήμα, θα έχουμε

$$a=\frac{d\upsilon}{dt}=\frac{d}{dt}(\omega R)=R\dot{\omega}$$

Οι εξισώσεις κίνησης γράφονται

$$\left.\begin{cases} F=Ma \quad \Rightarrow \quad Mg-2T=Ma \\ N=I\dot{\omega} \Rightarrow 2TR=\dfrac{1}{2}MR^2\dfrac{a}{R} \Rightarrow T=Ma/4 \end{cases}\right\} \Rightarrow \left\{\begin{matrix} a=2g/3 \\ \dot{\omega}=2g/3R \end{matrix}\right\} \Rightarrow T=Mg/6$$

(γ) Η κινητική ενέργεια αποτελείται από τον μεταφορικό και τον περιστροφικό όρο

$$E_K(t)=\frac{1}{2}M\upsilon^2(t)+\frac{1}{2}I\omega^2(t)=\frac{1}{2}M\frac{4}{9}g^2t^2+\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}MR^2\right)\left(\frac{4}{9}\frac{g^2}{R^2}t^2\right)=\frac{1}{3}Mg^2t^2$$

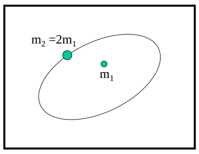
Ο ρυθμός μεταβολής της κινητικής ενέργειας είναι $\dfrac{dE_K}{dt}=\dfrac{2}{3}Mg^2t$

(δ) Η ισχύς που προσφέρει η δύναμη του βάρους είναι

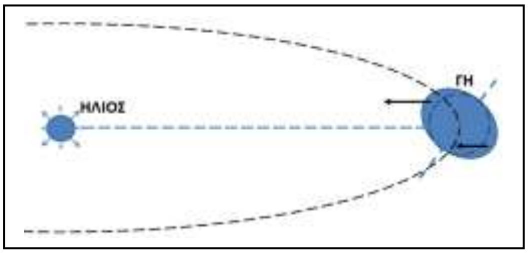
$$P=B\upsilon=(Mg)(at)=Mg\frac{2}{3}gt=\frac{2}{3}Mg^2t,$$

άρα, ίση με το ρυθμό μεταβολής της συνολικής κινητικής ενέργειας του κυλίνδρου. Οι τάσεις των δύο νημάτων δεν απορροφούν καθόλου ισχύ διότι δεν «μετατοπίζουν» το σημείο εφαρμογής τους αλλά εφαρμόζονται σε ένα διαρκώς διαφορετικό σημείο, που είναι το εκάστοτε σημείο επαφής του κυλίνδρου με τα νήματα, (το οποίο είναι, πραγματικά, διαφορετικό σημείο του νήματος, κάθε χρονική στιγμή).

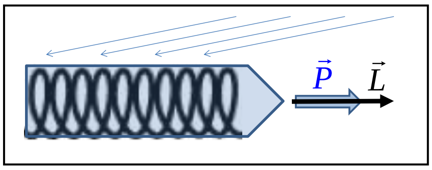
11 . α) Το κέντρο μάζας Κ ενός συστήματος σωματιδίων, m_i, i,1,2,…,N, κινείται με σταθερή ταχύτητα $\vec{V}$ ως προς κάποιο αδρανειακό σύστημα αναφοράς Oxyz. Αν E_O είναι η συνολική κινητική ενέργεια του συστήματος των σωματιδίων m_i, i,1,2,…,N, ως προς το σύστημα Oxyz, να υπολογιστεί συνολική κινητική τους ενέργεια E_K, ως προς το σύστημα κέντρου μάζας



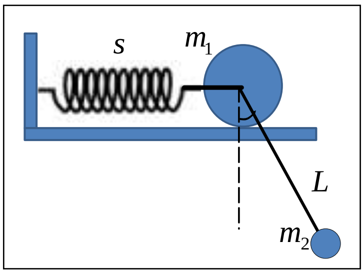
β) Δύο σωματίδια m_1, $m_2=2m_1$ αλληλεπιδρούν με κεντρικές δυνάμεις, αποτελώντας κλειστό σύστημα. Αν η εικονιζόμενη καμπύλη είναι η τροχιά που διαγράφει το σωματίδιο m_2, ως προς το σύστημα κέντρου μάζας, και το σχήμα αποτελεί ένα στιγμιότυπο της κίνησης, να περιγραφεί ο τρόπος και να σχεδιαστεί, στο ίδιο σχήμα, η τροχιά που διαγράφει το σωματίδιο m_1.



14. Μελετήστε την ροπή που δέχεται η Γη από την ελκτική δύναμη του Ήλιου, λαμβάνοντας υπόψη σας ότι: (α) το σχήμα της Γης είναι πεπλατυσμένο στον Ισημερινό (~25km μέγιστη απόκλιση από τη σφαιρικότητα), (β) ο άξονας Βοράς-Νότος (άξονας ιδιο-περιστροφής της Γης) δεν είναι κάθετος στο επίπεδο της τροχιάς της Γης περί τον Ήλιο. Μελετώντας τη ροπή κατά τη φάση που φαίνεται στο σχήμα, καθώς και κατά την αντιδιαμετρική φάση (δηλ., μετά από ένα εξάμηνο), διαπιστώστε ότι, παρά την εναλλαγή της φοράς και της σχετικής έντασης των δύο δυνάμεων που έχουν σχεδιαστεί στο σχήμα, η συνολική ροπή διατηρεί το πρόσημό της. Από το πρόσημο της ροπής, βγάλτε τα συμπεράσματά σας σχετικά με τη μεταβολή της ιδιοστροφορμής της Γης. [Από τα αριθμητικά δεδομένα για το μέτρο της ροπής, προκύπτει ότι ο άξονας της Γης υφίσταται μετάπτωση με περιοδικότητα 26000 χρόνια. Δηλ., μετά από 13000 χρόνια, ο άξονας θα δείχνει 47^o απόκλιση από τον «Πολικό» Αστέρα, τη θέση του οποίου «θα έχουν πάρει» ο Ωρίων και ο Σείριος, ενώ το χειμερινό ηλιοστάσιο θα συμβαίνει τον Ιούνιο].



15. Βλήμα κυλινδρικού σχήματος έχει ελικοειδή αύλακα στον κορμό του (όπως στο σχήμα) και μπορεί να εκτοξευτεί (α) είτε από κάνη όπλου η οποία είναι εσωτερικά απολύτως λεία, (β) είτε από κάνη όπλου η οποία έχει εσωτερική αυλάκωση συμπληρωματική του βλήματος. Στην α-περίπτωση το βλήμα εξέρχεται έχοντας μόνο ορμή, ενώ στην περίπτωση-β το βλήμα εξέρχεται έχοντας και στροφορμή. Αν υποτεθεί ότι το βλήμα διαταράσσεται, κατά την εξωτερική του πορεία, από ασθενές πλάγιο ρεύμα αέρα (όπως στο σχήμα) μελετήστε ποια είναι η επίπτωση της διαταραχής στην πορεία του βλήματος, στις δύο περιπτώσεις.



12. Ομογενής κύλινδρος μάζας m_1 και ακτίνας R είναι συνδεδεμένος από τον άξονά του με ακλόνητο σημείο, μέσω ελατηρίου σταθεράς s και μπορεί να <u>κυλίεται χωρίς ολίσθηση</u> σε οριζόντιο επίπεδο. Από τον άξονά του είναι αναρτημένο εκκρεμές (m_2, L). Όλες οι συνδέσεις στον άξονα είναι χωρίς τριβές.

(α) Να γραφούν οι διαφορικές εξισώσεις κίνησης που ικανοποιούν οι απομακρύνσεις (x_1, x_2) των μαζών (m_1, m_2)από τη θέση ισορροπίας τους, αντίστοιχα (προσέγγιση μικρών γωνιών).

(β) Να αναζητηθούν λύσεις με τη μορφή κανονικών τρόπων ταλάντωσης $x_1 = A\cos(\omega t + \varphi)$ και $x_2 = B\cos(\omega t + \varphi)$, και να γραφούν οι γενικές εκφράσεις για τις συχνότητες των ΚΤΤ συναρτήσει των μεγεθών $\left(\omega_{02}^2 \equiv s/m_1, \quad \omega_{02}^2 \equiv g/L, \quad m_2/m_1 = \lambda\right)$, και να δειχθεί ότι και οι δύο συχνότητες είναι πραγματικές $\left(\omega_1^2 > 0, \quad = \omega_2^2 > 0\right)$

(γ) Να υπολογισθούν οι συχνότητες των ΚΤΤ, αν $\omega_{02}^2 = \omega_{02}^2 \equiv \omega_0^2, \quad \lambda = 1/2$

[Ροπή αδράνειας ομογενούς κυλίνδρου, (m, R) ως προς τον άξονά του: $I = mR^2/2$]

ΑΠΑΝΤΗΣΗ

(α) Κύλινδρος: $\left\{ m_1\ddot{x}_1 = -sx_1 + F_{\tau\rho} + T_x, \quad I\ddot{\varphi}_1 = -F_{\tau\rho}R \Rightarrow \quad I\dfrac{\ddot{x}_1}{R} = -F_{\tau\rho}R \right\} \Rightarrow \quad F_{\tau\rho} = -\dfrac{I}{R^2}\ddot{x}_1$

Απαλείφουμε τη δύναμη της τριβής: $m_1\ddot{x}_1 = -sx_1 - \dfrac{I}{R^2}\ddot{x}_1 + T_x \Rightarrow \left(m_1 + \dfrac{I}{R^2}\right)\ddot{x}_1 = -sx_1 + T_x$

$$\left\{ T_x = m_2 g\sin\theta = m_2 g\frac{x_2 - x_1}{L}, \quad I = mR^2/2 \right\} \Rightarrow \boxed{\frac{3}{2}\ddot{x}_1 + \frac{s}{m_1}x_1 + \frac{m_2}{m_1}\frac{g}{L}x_1 - \frac{m_2}{m_1}\frac{g}{L}x_2 = 0} \quad (1)$$

Στο εκκρεμές:

$$\left\{ m_2\ddot{x}_2 = -T_x \quad \Rightarrow \quad T_x = m_2 g\sin\theta = m_2 g\frac{x_2 - x_1}{L} \right\} \quad \Rightarrow \boxed{\ddot{x}_2 + \frac{g}{L}x_2 - \frac{g}{L}x_1 = 0} \quad (2)$$

(β) $\boxed{\dfrac{3}{2}\ddot{x}_1 + \left(\dfrac{s}{m_1} + \dfrac{m_2}{m_1}\dfrac{g}{L}\right)x_1 - \dfrac{m_2}{m_1}\dfrac{g}{L}x_2 = 0}$, $\boxed{-\dfrac{g}{L}x_1 + \ddot{x}_2 + \dfrac{g}{L}x_2 = 0}$

Υποθέτοντας : $x_1 = A\cos(\omega t + \varphi)$ και $x_2 = B\cos(\omega t + \varphi)$

$$\left\{ \begin{aligned} \left[-\frac{3}{2}\omega^2 + \left(\frac{s}{m_1} + \frac{m_2}{m_1}\frac{g}{L}\right)\right]A - \frac{m_2}{m_1}\frac{g}{L}B = 0 \\ \left(-\frac{g}{L}\right)A + \left(-\omega^2 + \frac{g}{L}\right)B = 0 \end{aligned} \right\} \Rightarrow \begin{vmatrix} \left[-\dfrac{3}{2}\omega^2 + \left(\dfrac{s}{m_1} + \dfrac{m_2}{m_1}\dfrac{g}{L}\right)\right] & -\dfrac{m_2}{m_1}\dfrac{g}{L} \\ -\dfrac{g}{L} & \left(-\omega^2 + \dfrac{g}{L}\right) \end{vmatrix} = 0$$

$$\boxed{\omega^4 - \left[\frac{2}{3}\frac{s}{m_1} + \left(1 + \frac{2}{3}\frac{m_2}{m_1}\right)\frac{g}{L}\right]\omega^2 + \frac{2}{3}\frac{s}{m_1}\frac{g}{L} = 0}.$$

Συμβολίζοντας: $\left(\omega_{02}^2 \equiv s/m_1, \quad \omega_{02}^2 \equiv g/L, \quad m_2/m_1 = \lambda\right)$, παίρνουμε

$$\omega^4-\left[\frac{2}{3}\omega_{01}^2+\left(1+\frac{2}{3}\lambda\right)\omega_{02}^2\right]\omega^2+\frac{2}{3}\omega_{01}^2\omega_{02}^2=0 \quad\Rightarrow\quad \alpha\,\omega^4+\beta\,\omega^2+\gamma=0$$

Όπου: $\alpha=1,\quad \beta=-\left[\frac{2}{3}\omega_{01}^2+\left(1+\frac{2}{3}\lambda\right)\omega_{02}^2\right],\quad \gamma=\frac{2}{3}\omega_{01}^2\omega_{02}^2,$

$$\omega_{1,2}^2=\frac{-\beta\pm\sqrt{\Delta}}{2\alpha},\quad \Delta=\beta^2-4\alpha\gamma=\left[\frac{2}{3}\omega_{01}^2+\left(1+\frac{2}{3}\lambda\right)\omega_{02}^2\right]^2-4\frac{2}{3}\omega_{01}^2\omega_{02}^2$$

Έλεγχος προσήμου και απόλυτης τιμής της Δ: προφανώς $\left|\sqrt{\Delta}\right|<-\beta>0$

Και στη δυσμενέστερη περίπτωση για το πρόσημο του Δ $(\lambda\to 0)$, έχουμε

$$\Delta=\beta^2-4\alpha\gamma=\left[\frac{2}{3}\omega_{01}^2+\omega_{02}^2\right]^2-4\frac{2}{3}\omega_{01}^2\omega_{02}^2=\left[\frac{2}{3}\omega_{01}^2-\omega_{02}^2\right]^2>0$$

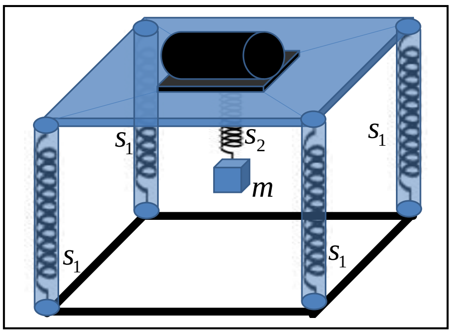
Άρα τα τετράγωνα των δύο ιδιοσυχνοτήτων έχουν πάντα πραγματικές θετικές τιμές, όπως πρέπει: $\omega_{1,2}^2=\frac{1}{2}\left(\left[\frac{2}{3}\omega_{01}^2+\left(1+\frac{2}{3}\lambda\right)\omega_{02}^2\right]\pm\sqrt{\left[\frac{2}{3}\omega_{01}^2+\left(1+\frac{2}{3}\lambda\right)\omega_{02}^2\right]^2-4\frac{2}{3}\omega_{01}^2\omega_{02}^2}\right)$

(γ) Ειδική περίπτωση: $\omega_{02}^2=\omega_{02}^2\equiv\omega_0^2,\quad \lambda=1/2,$

$$\left\{\begin{matrix}\ddot{x}_1+\omega_0^2x_1-\frac{1}{3}\omega_0^2x_2=0\\ \ddot{x}_2+\omega_0^2x_2-\omega_0^2x_1=0\end{matrix}\right\}\Rightarrow\left\{\begin{matrix}\left(\omega_0^2-\omega^2\right)A-\frac{1}{3}\omega_0^2B=0\\ -\omega_0^2A+\left(\omega_0^2-\omega^2\right)B=0\end{matrix}\right\}\Rightarrow\begin{vmatrix}\left(\omega_0^2-\omega^2\right) & -\frac{1}{3}\omega_0^2\\ -\omega_0^2 & \left(\omega_0^2-\omega^2\right)\end{vmatrix}=0$$

$$\left(\omega_0^2-\omega^2\right)^2-\frac{1}{3}\omega_0^4=0\Rightarrow\left(\omega_0^2-\omega^2\right)^2=\frac{1}{3}\omega_0^4\Rightarrow\omega_0^2-\omega^2=\pm\frac{\omega_0^2}{\sqrt{3}}$$

$$\omega_0^2\mp\frac{\omega_0^2}{\sqrt{3}}=\omega_{1,2}^2=\omega_0^2\mp\frac{\omega_0^2}{\sqrt{3}}\Rightarrow\boxed{\omega_{1,2}=\frac{\omega_0}{\sqrt{3}}\left(\sqrt{3}\mp 1\right)}$$



13. Ομοιογενής τετραγωνική τράπεζα στηρίζεται στα τέσσερα άκρα της με όμοια κατακόρυφα στηρίγματα, καθένα από τα οποία μπορεί να προσομοιωθεί με ένα ελατήριο με σταθερά ελατηρίου s_1. Πάνω στην τράπεζα είναι προσαρμοσμένος ηλεκτρικός κινητήρας, έτσι ώστε τα κέντρα μάζας της τράπεζας και του κινητήρα να βρίσκονται στην ίδια κατακόρυφο, το δε σύστημα Τράπεζα-Κινητήρας να έχει συνολική μάζα *M*. Από το κέντρο μάζας της τράπεζας είναι αναρτημένη, μέσω ελατηρίου σταθεράς s_2, μάζα *m*. Όταν ο κινητήρας βρίσκεται σε λειτουργία, με μία συχνότητα περιστροφής ω, τότε το σύστημα υφίσταται περιοδική διέγερση που ισοδυναμεί με την εφαρμογή κατακόρυφης περιοδικής «εξωτερικής» δύναμης $F(t)=F_0\cos(\omega t)$ στο κέντρο μάζας του συστήματος Τράπεζα-Κινητήρας.

(α) Γράψτε τις εξισώσεις κίνησης των μαζών *M* (μετατόπιση: x_1) και *m* (μετατόπιση: x_2), δεχόμενοι ότι τα ελατήρια είναι ιδανικά και ότι οι τριβές είναι αμελητέες.

(β) Δεχθείτε ότι, στη μόνιμη κατάσταση κίνησης του συστήματος, οι δύο μάζες *M* και *m* κινούνται με τη συχνότητα ω, της «εξωτερικής» διέγερσης και με διαφορετικά πλάτη, έτσι ώστε οι απομακρύνσεις τους από τις θέσεις ισορροπίας να είναι $x_1(t) = A\cos(\omega t)$ και $x_2(t) = B\cos(\omega t)$, αντίστοιχα, και υπολογίστε τα πλάτη $A = A(\omega)$ και $B = B(\omega)$, συναρτήσει της εξωτερικής συχνότητας ω, και των υπολοίπων χαρακτηριστικών του συστήματος, με τη μορφή πηλίκου οριζουσών.

(γ) Με βάση τα αποτελέσματα του ερωτήματος (β), εξηγήστε, για ποιά συχνότητα $\omega = \omega_{\kappa\rho} = ?$ του κινητήρα, ελαχιστοποιούνται οι κραδασμοί της τράπεζας M, λόγω της λειτουργίας του κινητήρα, και σχολιάστε («αντι-συντονισμός»).

(δ) Αν $s_1 = as_2$ και $M = bm$, υπολογίστε, (συναρτήσει του $\omega_0^2 = s_2/m$, και των *a, b*), τις τιμές της συχνότητας ω του κινητήρα για τις οποίες το πλάτος ταλάντωσης και των δύο μαζών *M* και *m* του συστήματος τείνει στο άπειρο και σχολιάστε.

ΑΠΑΝΤΗΣΗ

(α) Εξισώσεις κίνησης (τα παράλληλα ελατήρια αθροίζονται, οι μετατοπίσεις κάθε μάζας υπολογίζονται από τις θέσεις ισορροπίας)

$$\begin{Bmatrix} M\,\ddot{x}_1 = -4s_1x_1 - s_2(x_1 - x_2) + F_0\cos(\omega t) \\ m\,\ddot{x}_2 = -s_2(x_2 - x_1) \end{Bmatrix} \Rightarrow \begin{Bmatrix} M\,\ddot{x}_1 + (4s_1 + s_2)x_1 - s_2x_2 = F_0\cos(\omega t) \\ m\,\ddot{x}_2 + s_2x_2 - s_2x_1 = 0 \end{Bmatrix}$$

(β) Αντικαθιστώντας τα $x_1(t) = A\cos(\omega t)$ και $x_2(t) = B\cos(\omega t)$, και τις παραγώγους των, στις εξισώσεις κίνησης, έχουμε:

$$\begin{Bmatrix} -\omega^2 M\,A + (4s_1 + s_2)A - s_2B = F_0 \\ -s_2A - \omega^2 m\,B + s_2B = 0 \end{Bmatrix} \Rightarrow \begin{Bmatrix} \left[-\omega^2 M + (4s_1 + s_2)\right]A - s_2B = F_0 \\ -s_2A + \left[-\omega^2 m + s_2\right]B = 0 \end{Bmatrix}$$

Τα πλάτη Α και Β υπολογίζονται με τη μέθοδο των οριζουσών

$$A = \begin{vmatrix} F_0 & -s_2 \\ 0 & \left[-\omega^2 m + s_2\right] \end{vmatrix} \Big/ \Delta, \quad B = \begin{vmatrix} \left[-\omega^2 M + (4s_1 + s_2)\right] & F_0 \\ -s_2 & 0 \end{vmatrix} \Big/ \Delta,$$

όπου $\Delta = \begin{vmatrix} \left[-\omega^2 M + (4s_1 + s_2)\right] & -s_2 \\ -s_2 & \left[-\omega^2 m + s_2\right] \end{vmatrix}$

(γ) Αναπτύσσοντας τις ορίζουσες των αριθμητών: $A = \dfrac{F_0(s_2 - \omega^2 m)}{\Delta}$, $B = \dfrac{F_0 s_2}{\Delta}$, από

όπου βλέπουμε ότι για τη συχνότητα $\omega = \omega_0 = s_2/m$ έχουμε: $A = 0,$ $B = \dfrac{F_0 s_2}{\Delta(\omega_0)} \neq 0$

(δ) Τα πλάτη ταλάντωσης τείνουν στο άπειρο όταν ο κοινός παρονομαστής στους Δ=0, και, με βάση τις δεδομένες τιμές των s_1 και *M*, έχουμε

$$\Delta = \begin{vmatrix} \left[-\omega^2 M + (4s_1 + s_2)\right] & -s_2 \\ -s_2 & \left[-\omega^2 m + s_2\right] \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \left[-\omega^2 bm + (4a + 1)s_2\right] & -s_2 \\ -s_2 & \left[-\omega^2 m + s_2\right] \end{vmatrix} = 0$$

$$\begin{vmatrix} \left[-\omega^2 bm + (4a + 1)s_2\right] & -s_2 \\ -s_2 & \left[-\omega^2 m + s_2\right] \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow bm^2\omega^4 - bms_2\omega^2 - (4a + 1)ms_2\omega^2 + (4a + 1)s_2^2 - s_2^2 = 0$$

$$bm^2\omega^4 - (4a + 1 + b)ms_2\omega^2 + 4as_2^2 = 0 \Rightarrow b\omega^4 - (4a + 1 + b)\omega_0^2\omega^2 + 4a\omega_0^4 = 0$$

$$b\omega^4 - (4a + 1 + b)\omega_0^2\omega^2 + 4a\omega_0^4 = 0 \Rightarrow \omega_{1.2}^2 = \omega_0^2\,\frac{(4a + 1 + b) \pm \sqrt{(4a + 1 + b)^2 - 16ab}}{2b}$$