ΛΥΣΕΙΣ ΦΥΛΛΑΔΙΟΥ 1
ΣΧΟΛΗ ΗΛΕΚΤΡΟΛΟΓΩΝ /2017-18
Γραμμική Άλγεβρα

Διανυσματικά γινόμενα - Ορίζουσες

1. Να αποδείξετε ότι για τα διανύσματα $\mathbf{a},\mathbf{b},\mathbf{c}$ ισχύουν :

(i) $\mathbf{a}\neq\mathbf{0}, \mathbf{a}\cdot\mathbf{b}=\mathbf{a}\cdot\mathbf{c}$ και $\mathbf{a}\times\mathbf{b}=\mathbf{a}\times\mathbf{c}\Rightarrow\mathbf{b}=\mathbf{c}$.

(ii) $\mathbf{a}+\mathbf{b}+\mathbf{c}=\mathbf{0}\Rightarrow\mathbf{a}\times\mathbf{b}=\mathbf{b}\times\mathbf{c}=\mathbf{c}\times\mathbf{a}$. Ισχύει η αντίστροφη συνεπαγωγή;

(iii) $(\mathbf{a}\times\mathbf{b})\times(\mathbf{a}\times\mathbf{c})=(\mathbf{a},\mathbf{b},\mathbf{c})\mathbf{a}$.

(iv) $(\mathbf{a}\times\mathbf{b},\mathbf{b}\times\mathbf{c},\mathbf{c}\times\mathbf{a})=(\mathbf{a},\mathbf{b},\mathbf{c})^2$.

Λύση

(i) $\mathbf{a}\times\mathbf{b}=\mathbf{a}\times\mathbf{c}\Rightarrow\mathbf{a}\times(\mathbf{b}-\mathbf{c})=\mathbf{0}\Rightarrow\mathbf{b}-\mathbf{c}=\lambda\mathbf{a},\lambda\in\mathbb{R}$.

Άρα έχουμε: $\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}=\mathbf{a}\cdot\mathbf{c}\Rightarrow\mathbf{a}\cdot(\mathbf{b}-\mathbf{c})=0\Rightarrow\mathbf{a}\cdot\lambda\mathbf{a}=0\Rightarrow\lambda\mathbf{a}^2=0\Rightarrow\lambda=0$,

οπότε θα έχουμε: $\mathbf{b}-\mathbf{c}=\mathbf{0}\Rightarrow\mathbf{b}=\mathbf{c}$.

(ii) $\mathbf{a}+\mathbf{b}+\mathbf{c}=\mathbf{0}\Rightarrow\mathbf{b}+\mathbf{c}=-\mathbf{a}\Rightarrow\mathbf{a}\times(\mathbf{b}+\mathbf{c})=-\mathbf{a}\times\mathbf{a}\Rightarrow\mathbf{a}\times\mathbf{b}+\mathbf{a}\times\mathbf{c}=\mathbf{0}\Rightarrow\mathbf{a}\times\mathbf{b}=\mathbf{c}\times\mathbf{a}$.

Ομοίως αποδεικνύομε και ότι: $\mathbf{b}\times\mathbf{c}=\mathbf{c}\times\mathbf{a}$.

Το αντίστροφο δεν ισχύει. Αυτό προκύπτει εύκολα, αν θεωρήσουμε τα διανύσματα $\mathbf{a},\mathbf{b},\mathbf{c}$ *να είναι συγγραμμικά.*

(iii) $(\mathbf{a}\times\mathbf{b})\times(\mathbf{a}\times\mathbf{c})=\{(\mathbf{a}\times\mathbf{b})\cdot\mathbf{c}\}\mathbf{a}-\{(\mathbf{a}\times\mathbf{b})\cdot\mathbf{a}\}\mathbf{c}=(\mathbf{a},\mathbf{b},\mathbf{c})\mathbf{a}$, αφού $(\mathbf{a}\times\mathbf{b})\cdot\mathbf{a}=0$.

(iv) $(\mathbf{a}\times\mathbf{b},\mathbf{b}\times\mathbf{c},\mathbf{c}\times\mathbf{a})=\{(\mathbf{a}\times\mathbf{b})\times(\mathbf{b}\times\mathbf{c})\}\cdot(\mathbf{c}\times\mathbf{a})=-\{(\mathbf{b}\times\mathbf{a})\times(\mathbf{b}\times\mathbf{c})\}\cdot(\mathbf{c}\times\mathbf{a})$

$=-(\mathbf{b},\mathbf{a},\mathbf{c})\mathbf{b}\cdot(\mathbf{c}\times\mathbf{a})=(\mathbf{a},\mathbf{b},\mathbf{c})(\mathbf{b},\mathbf{c},\mathbf{a})=(\mathbf{a},\mathbf{b},\mathbf{c})^2$.

Αντίστροφα, αν τα διανύσματα $\mathbf{a},\mathbf{b},\mathbf{c}$ είναι μη συνεπίπεδα, τότε $(\mathbf{a},\mathbf{b},\mathbf{c})\neq0$.

Λόγω της 1(iv)θα έχουμε και ότι $(\mathbf{a}\times\mathbf{b},\mathbf{b}\times\mathbf{c},\mathbf{c}\times\mathbf{a})=(\mathbf{a},\mathbf{b},\mathbf{c})^2\neq0$, οπότε και τα $\mathbf{a}\times\mathbf{b},\mathbf{b}\times\mathbf{c},\mathbf{c}\times\mathbf{a}$ θα είναι μη συνεπίπεδα.

2. Δίνονται τα διανύσματα $\mathbf{a}=\mathbf{i}-2\mathbf{j}+3\lambda\mathbf{k}$, $\mathbf{b}=\mathbf{j}+\lambda\mathbf{k}$, $\mathbf{c}=\lambda\mathbf{j}+\mathbf{k}$, $\lambda\in\mathbb{R}$.

Να προσδιορίσετε τις τιμές του λ για τις οποίες τα παραπάνω διανύσματα είναι συνεπίπεδα.

Λύση

Από τη θεωρία γνωρίζουμε ότι:

$$\mathbf{a},\mathbf{b},\mathbf{c}\ \text{συνεπίπεδα}\Leftrightarrow(\mathbf{a},\mathbf{b},\mathbf{c})=0\Leftrightarrow\begin{vmatrix}1&-2&3\lambda\\0&1&\lambda\\0&\lambda&1\end{vmatrix}=0\Leftrightarrow-\lambda^2+1=0\Leftrightarrow\lambda=\pm1.$$

3. Να αποδείξετε ότι για οποιαδήποτε διανύσματα $\mathbf{a},\mathbf{b},\mathbf{c},\mathbf{d}$ ισχύει η ισότητα:

(α) $(\mathbf{a}\times\mathbf{b})\cdot(\mathbf{c}\times\mathbf{d})=(\mathbf{a}\cdot\mathbf{c})(\mathbf{b}\cdot\mathbf{d})-(\mathbf{a}\cdot\mathbf{d})(\mathbf{b}\cdot\mathbf{c})$.

(β) $(\mathbf{a}\times\mathbf{b})\times(\mathbf{c}\times\mathbf{d})=(\mathbf{a},\mathbf{c},\mathbf{d})\mathbf{b}-(\mathbf{b},\mathbf{c},\mathbf{d})\mathbf{a}=(\mathbf{a},\mathbf{b},\mathbf{d})\mathbf{c}-(\mathbf{a},\mathbf{b},\mathbf{c})\mathbf{d}$.

Λύση

(α) $(\mathbf{a}\times\mathbf{b})\cdot(\mathbf{c}\times\mathbf{d})=\{(\mathbf{a}\times\mathbf{b})\times\mathbf{c}\}\cdot\mathbf{d}=\{(\mathbf{a}\cdot\mathbf{c})\mathbf{b}-(\mathbf{b}\cdot\mathbf{c})\mathbf{a}\}\cdot\mathbf{d}=(\mathbf{a}\cdot\mathbf{c})(\mathbf{b}\cdot\mathbf{d})-(\mathbf{a}\cdot\mathbf{d})(\mathbf{b}\cdot\mathbf{c})$.

(β) Σύμφωνα με τον κανόνα υπολογισμού του δις εξωτερικού γινομένου, έχουμε

$(\mathbf{a}\times\mathbf{b})\times(\mathbf{c}\times\mathbf{d})=\{\mathbf{a}\cdot(\mathbf{c}\times\mathbf{d})\}\mathbf{b}-\{\mathbf{b}\cdot(\mathbf{c}\times\mathbf{d})\}\mathbf{a}=(\mathbf{a},\mathbf{c},\mathbf{d})\mathbf{b}-(\mathbf{b},\mathbf{c},\mathbf{d})\mathbf{a}$.

Επίσης έχουμε

$$(\mathbf{a}\times\mathbf{b})\times(\mathbf{c}\times\mathbf{d})=\{(\mathbf{a}\times\mathbf{b})\cdot\mathbf{d}\}\mathbf{c}-\{(\mathbf{a}\times\mathbf{b})\cdot\mathbf{c}\}\mathbf{d}=(\mathbf{a},\mathbf{b},\mathbf{d})\mathbf{c}-(\mathbf{a},\mathbf{b},\mathbf{c})\mathbf{d}.$$

4. Έχουμε ότι: $\mathrm{A},\mathrm{B},\Gamma,\Delta$ συνεπίπεδα $\Leftrightarrow$ $\mathbf{AB},\mathbf{A\Gamma},\mathbf{A\Delta}$ συνεπίπεδα

$\Leftrightarrow \mathbf{b}-\mathbf{a},\mathbf{c}-\mathbf{a},\mathbf{d}-\mathbf{a}$ συνεπίπεδα $\Leftrightarrow (\mathbf{b}-\mathbf{a},\mathbf{c}-\mathbf{a},\mathbf{d}-\mathbf{a})=0$

$\Leftrightarrow (\mathbf{b},\mathbf{c},\mathbf{d})-(\mathbf{b},\mathbf{c},\mathbf{a})-(\mathbf{a},\mathbf{b},\mathbf{d})-(\mathbf{a},\mathbf{c},\mathbf{d})=0$ [αφού, όταν σε ένα μικτό γινόμενο δύο τουλάχιστον διανύσματα ταυτίζονται ή είναι συγγραμμικά, τότε το μικτό γινόμενο ισούται με μηδέν]

$\Leftrightarrow (\mathbf{b},\mathbf{c},\mathbf{d})-(\mathbf{b},\mathbf{c},\mathbf{a})-(\mathbf{a},\mathbf{b},\mathbf{d})-(\mathbf{a},\mathbf{c},\mathbf{d})=0$

$\Leftrightarrow (\mathbf{a},\mathbf{b},\mathbf{c})-(\mathbf{b},\mathbf{c},\mathbf{d})+(\mathbf{d},\mathbf{a},\mathbf{b})-(\mathbf{c},\mathbf{d},\mathbf{a})=0.$

5. Τα σημεία Α, Β και Γ έχουν διανύσματα θέσης ως προς το καρτεσιανό σύστημα αναφοράς $Oxyz$, $\mathbf{a},\mathbf{b},$ και $\mathbf{c}$, αντίστοιχα.
Να αποδείξετε ότι το εμβαδόν του τριγώνου ΑΒΓ είναι:

$$\mathrm{E}(\mathrm{AB\Gamma})=\frac{1}{2}\left|(\mathbf{a}\times\mathbf{b})+(\mathbf{b}\times\mathbf{c})+(\mathbf{c}\times\mathbf{a})\right|.$$

Λύση

Αν ΑΒΔΓ είναι το παραλληλόγραμμο που σχηματίζεται με δύο διαδοχικές πλευρές ΑΒ και ΑΓ, τότε έχουμε :

$$\mathrm{E}(\mathrm{AB\Gamma})=\frac{1}{2}\mathrm{E}(\mathrm{AB\Gamma\Delta})=\frac{1}{2}\left|\mathbf{AB}\times\mathbf{A\Gamma}\right|=\frac{1}{2}\left|(\mathbf{b}-\mathbf{a})\times(\mathbf{c}-\mathbf{a})\right|$$

$$=\frac{1}{2}\left|\mathbf{b}\times\mathbf{c}-\mathbf{c}\times\mathbf{a}-\mathbf{b}\times\mathbf{a}\right|=\frac{1}{2}\left|\mathbf{b}\times\mathbf{c}+\mathbf{a}\times\mathbf{c}+\mathbf{a}\times\mathbf{b}\right|.$$

6. Αν $\vec{a},\vec{b}$ είναι δύο μη συγγραμμικά μοναδιαία διανύσματα, να προσδιορίσετε το διάνυσμα $\vec{u}$ που ικανοποιεί την εξίσωση

$$(\mathbf{a}\cdot\mathbf{u})\mathbf{b}+4\mathbf{a}=2\mathbf{u}.$$

Λύση

Θεωρούμε το εσωτερικό γινόμενο των δύο μελών της εξίσωσης με το $\mathbf{a}$, οπότε

$$\mathbf{a}\cdot\{(\mathbf{a}\cdot\mathbf{u})\mathbf{b}+4\mathbf{a}\}=2\mathbf{a}\cdot\mathbf{u}\Leftrightarrow(\mathbf{a}\cdot\mathbf{u})(\mathbf{a}\cdot\mathbf{b})+4\mathbf{a}^2=2(\mathbf{a}\cdot\mathbf{u})\Leftrightarrow\mathbf{a}\cdot\mathbf{u}=\frac{4\mathbf{a}^2}{2-(\mathbf{a}\cdot\mathbf{b})}\Leftrightarrow$$

$\mathbf{a}\cdot\mathbf{u}=\dfrac{4}{2-(\mathbf{a}\cdot\mathbf{b})}$, αφού τα $\mathbf{a},\mathbf{b}$ είναι μοναδιαία. Άρα είναι $\mathbf{u}=2\mathbf{a}+\left(\dfrac{2}{2-(\mathbf{a}\cdot\mathbf{b})}\right)\mathbf{b}$.

7. Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $\mathbf{x}+\mathbf{x}\times\mathbf{a}=\mathbf{b}$, όπου $\mathbf{a},\mathbf{b}$ είναι γνωστά διανύσματα, έχει μοναδική λύση ως προς $\mathbf{x}$, η οποία και να βρεθεί.

Λύση

(α) Μοναδικότητα

Αν υποθέσουμε ότι υπάρχουν δύο λύσεις $\mathbf{x}_1,\mathbf{x}_2$ της εξίσωσης με $\mathbf{x}_1\neq\mathbf{x}_2$, τότε

$$\mathbf{x}_1+\mathbf{x}_1\times\mathbf{a}=\mathbf{x}_2+\mathbf{x}_2\times\mathbf{a}=\mathbf{b}\Rightarrow\mathbf{x}_1-\mathbf{x}_2+(\mathbf{x}_1-\mathbf{x}_2)\times\mathbf{a}=\mathbf{0}\Rightarrow$$

$$(\mathbf{x}_1-\mathbf{x}_2)\cdot\{\mathbf{x}_1-\mathbf{x}_2+(\mathbf{x}_1-\mathbf{x}_2)\times\mathbf{a}\}=0\Rightarrow(\mathbf{x}_1-\mathbf{x}_2)^2=0\Rightarrow\mathbf{x}_1-\mathbf{x}_2=\mathbf{0}\Rightarrow\mathbf{x}_1=\mathbf{x}_2,$$

που είναι άτοπο. Άρα, αν υπάρχει λύση, αυτή θα είναι μοναδική.

(β) Ύπαρξη
Κατ' αρχή από τη δοθείσα εξίσωση λαμβάνουμε:

$$\mathbf{x}+\mathbf{x}\times\mathbf{a}=\mathbf{b}\Rightarrow\begin{cases}\mathbf{x}\cdot\mathbf{a}=\mathbf{b}\cdot\mathbf{a} & (1)\\ \mathbf{x}\times\mathbf{a}=\mathbf{b}-\mathbf{x} & (2)\end{cases}$$

Θεωρούμε το εξωτερικό γινόμενο των δύο μελών της εξίσωσης από αριστερά με το $\mathbf{a}$, οπότε, λόγω των (1) και (2), λαμβάνουμε:

$$(\mathbf{x}+\mathbf{x}\times\mathbf{a})\times\mathbf{a}=\mathbf{b}\times\mathbf{a}\Rightarrow\mathbf{x}\times\mathbf{a}+(\mathbf{x}\times\mathbf{a})\times\mathbf{a}=\mathbf{b}\times\mathbf{a}\Rightarrow\mathbf{b}-\mathbf{x}+\left\{(\mathbf{x}\cdot\mathbf{a})\mathbf{a}-|\mathbf{a}|^2\mathbf{x}\right\}=\mathbf{b}\times\mathbf{a}$$

$$\left(1+|\mathbf{a}|^2\right)\mathbf{x}=\mathbf{b}+(\mathbf{a}\cdot\mathbf{b})\mathbf{a}+\mathbf{a}\times\mathbf{b}\Rightarrow\mathbf{x}=\frac{1}{1+|\mathbf{a}|^2}\left\{\mathbf{b}+(\mathbf{a}\cdot\mathbf{b})\mathbf{a}+\mathbf{a}\times\mathbf{b}\right\}.$$

8. Αν το διάνυσμα $\mathbf{w}$ ικανοποιεί την εξίσωση

$$\mathbf{a}\times(\mathbf{w}\times\mathbf{a})+\mathbf{w}=\mathbf{b},$$

όπου $\mathbf{a},\mathbf{b}$ είναι γνωστά διανύσματα, τότε:

(i) να αποδείξετε ότι $\mathbf{a}\cdot\mathbf{w}=\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}$ και $\mathbf{w}\times\mathbf{a}=\left(\dfrac{1}{1+|\mathbf{a}|^2}\right)(\mathbf{b}\times\mathbf{a})$,

(ii) να προσδιορίσετε τη λύση της εξίσωσης.

Λύση
(i) Θεωρώντας το εσωτερικό γινόμενο των δύο μελών της δεδομένης εξίσωσης με το $\mathbf{a}$, λαμβάνουμε

$$\mathbf{a}\cdot\left[\mathbf{a}\times(\mathbf{w}\times\mathbf{a})+\mathbf{w}\right]=\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}\Leftrightarrow(\mathbf{a},\mathbf{a},\mathbf{w}\times\mathbf{a})+\mathbf{a}\cdot\mathbf{w}=\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}\Leftrightarrow\mathbf{a}\cdot\mathbf{w}=\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}.$$

Θεωρώντας το εξωτερικό γινόμενο των δύο μελών της δεδομένης εξίσωσης με το $\mathbf{a}$, λαμβάνουμε

$$\mathbf{a}\times\left[\mathbf{a}\times(\mathbf{w}\times\mathbf{a})+\mathbf{w}\right]=\mathbf{a}\times\mathbf{b}\Leftrightarrow\left[\mathbf{a}\cdot(\mathbf{w}\times\mathbf{a})\right]\mathbf{a}-|\mathbf{a}|^2(\mathbf{w}\times\mathbf{a})+\mathbf{a}\times\mathbf{w}=\mathbf{a}\times\mathbf{b}$$

$$\Leftrightarrow\left[1+|\mathbf{a}|^2\right](\mathbf{w}\times\mathbf{a})=\mathbf{b}\times\mathbf{a}\Leftrightarrow\mathbf{w}\times\mathbf{a}=\left(\frac{1}{1+|\mathbf{a}|^2}\right)(\mathbf{b}\times\mathbf{a}).$$

(ii) Σύμφωνα με το (i) η δεδομένη εξίσωση είναι ισοδύναμη με την

$$\mathbf{w}=\mathbf{b}-\mathbf{a}\times(\mathbf{w}\times\mathbf{a})\Leftrightarrow\mathbf{w}=\mathbf{b}-\left(\frac{1}{1+|\mathbf{a}|^2}\right)\left\{\mathbf{a}\times(\mathbf{b}\times\mathbf{a})\right\}$$

$$\Leftrightarrow\mathbf{w}=\left(1-\frac{|\mathbf{a}|^2}{1+|\mathbf{a}|^2}\right)\mathbf{b}+\left(\frac{\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}}{1+|\mathbf{a}|^2}\right)\mathbf{a}=\frac{1}{1+|\mathbf{a}|^2}\left\{(\mathbf{a}\cdot\mathbf{b})\mathbf{a}+\mathbf{b}\right\}.$$

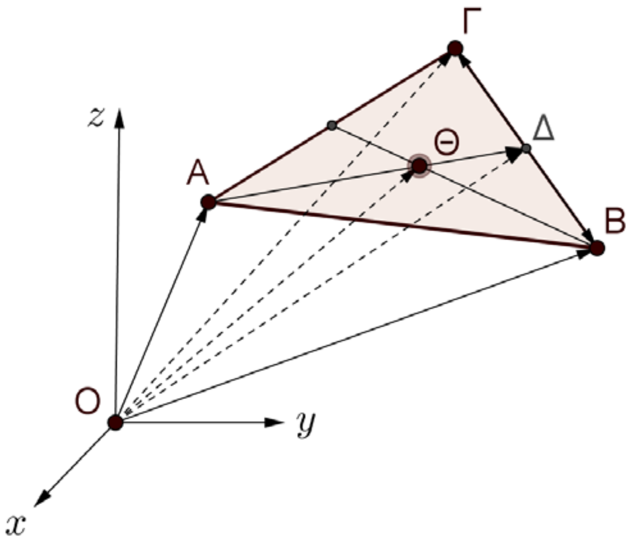
9. (Βασική άσκηση)
Θεωρούμε τρίγωνο ΑΒΓ με βαρύκεντρο (σημείο τομής διαμέσων) το σημείο Θ. Αν Δ είναι το μέσο της πλευράς ΒΓ και $Oxyz$ είναι Καρτεσιανό σύστημα αναφοράς, να αποδείξετε ότι:

(α) $\mathbf{OB}+\mathbf{O\Gamma}=2\cdot\mathbf{O\Delta}$

(β) $\mathbf{OA}+\mathbf{OB}+\mathbf{O\Gamma}=3\cdot\mathbf{O\Theta}$

(γ) $\mathbf{\Theta A}+\mathbf{\Theta B}+\mathbf{\Theta\Gamma}=\mathbf{0}\Leftrightarrow\Theta$ βαρύκεντρο του τριγώνου ΑΒΓ

Λύση



(α) $\mathbf{OB}+\mathbf{O\Gamma}=\mathbf{O\Delta}+\mathbf{\Delta B}+\mathbf{O\Delta}+\mathbf{\Delta\Gamma}=\mathbf{O\Delta}+\mathbf{\Delta B}+\mathbf{O\Delta}-\mathbf{\Delta B}=2\cdot\mathbf{O\Delta}$.

(β) Έχουμε

$$\mathbf{OA}+\mathbf{OB}+\mathbf{O\Gamma}=\mathbf{OA}+2\cdot\mathbf{O\Delta} \qquad (1)$$

Επίσης επειδή είναι $\mathbf{A\Theta}=2\cdot\mathbf{\Theta\Delta}$, έπεται ότι:

$$\mathbf{O\Theta}=\frac{1}{3}\left(\mathbf{OA}+\mathbf{2O\Delta}\right) \qquad (2)$$

Από τις (1) και (2) έπεται το ζητούμενο.

(γ) Ευθύ

$$\mathbf{\Theta A}+\mathbf{\Theta B}+\mathbf{\Theta\Gamma}=\mathbf{0}\Rightarrow\mathbf{\Theta A}+2\cdot\mathbf{\Theta\Delta}=\mathbf{0}\Rightarrow\mathbf{A\Theta}=2\cdot\mathbf{\Theta\Delta}$$

$\Rightarrow$ Θ βαρύκεντρο του τριγώνου ΑΒΓ.

Αντίστροφα, έστω Θ βαρύκεντρο του τριγώνου ΑΒΓ. Τότε, από το ερώτημα (β), αν θεωρήσουμε ως Ο τη σημείο Θ, έχουμε $\mathbf{\Theta A}+\mathbf{\Theta B}+\mathbf{\Theta\Gamma}=3\cdot\mathbf{\Theta\Theta}=\mathbf{0}$.

Υπολογισμός οριζουσών

10. $|A|=\begin{vmatrix}1+a & 1 & 1 & 1\\ 1 & 1-a & 1 & 1\\ 1 & 1 & 1+b & 1\\ 1 & 1 & 1 & 1-b\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}a & 0 & 0 & 1\\ a & -a & 0 & 1\\ 0 & -b & b & 1\\ 0 & 0 & b & 1-b\end{vmatrix}$ (αφαιρέσαμε τη δεύτερη στήλη από την πρώτη, την τρίτη από τη δεύτερη και την τέταρτη από την τρίτη)

$=ab\begin{vmatrix}1 & 0 & 0 & 1\\ 1 & -a & 0 & 1\\ 0 & -b & 1 & 1\\ 0 & 0 & 1 & 1-b\end{vmatrix}=ab\begin{vmatrix}1 & 0 & 0 & 1\\ 0 & -a & 0 & 0\\ 0 & -b & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1 & 1-b\end{vmatrix}$ (αφαίρεση της $1^{ης}$ από τη $2^{η}$ γραμμή)

$=ab\begin{vmatrix}-a & 0 & 0\\ -b & 1 & 1\\ 0 & 1 & 1-b\end{vmatrix}=ab(-a)\begin{vmatrix}1 & 1\\ 1 & 1-b\end{vmatrix}=ab(-a)(-b)=a^2b^2$.

11. $\begin{vmatrix} x & a & b & c \\ a & x & b & c \\ a & b & x & c \\ a & b & c & x \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow \begin{vmatrix} x+a+b+c & a & b & c \\ x+a+b+c & x & b & c \\ x+a+b+c & b & x & c \\ x+a+b+c & b & c & x \end{vmatrix} = 0$ (προσθέσαμε τις τρεις τελευταίες στήλες στην πρώτη)

$$\Leftrightarrow (x+a+b+c)\begin{vmatrix} 1 & a & b & c \\ 1 & x & b & c \\ 1 & b & x & c \\ 1 & b & c & x \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow (x+a+b+c)\begin{vmatrix} 1 & a & b & c \\ 0 & x-a & 0 & 0 \\ 0 & b-a & x-b & 0 \\ 0 & c-a & c-b & x-c \end{vmatrix} = 0$$

(αφαιρέσαμε την πρώτη γραμμή από καθεμιά από τις άλλες τρεις)

$$\Leftrightarrow (x+a+b+c)\begin{vmatrix} x-a & 0 & 0 \\ b-a & x-b & 0 \\ b-a & c-a & x-c \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow (x+a+b+c)(x-a)(x-b)(x-c) = 0$$

$\Leftrightarrow x = -(a+b+c)$ ή $x = a$ ή $x = b$ ή $x = c$.

12. Προσθέτουμε διαδοχικά κάθε στήλη στην προηγούμενή της, αρχίζοντας από την τελευταία, οπότε καταλήγουμε στην ορίζουσα

$$|A| = \begin{vmatrix} \sum_{i=1}^{n} a_i & \sum_{i=2}^{n} a_i & . & . & . & \sum_{i=n-1}^{n} a_i & a_n \\ 0 & x & . & . & . & 0 & 0 \\ 0 & 0 & . & . & . & 0 & 0 \\ . & . & . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . & . & . \\ 0 & 0 & . & . & . & x & 0 \\ 0 & 0 & . & . & . & 0 & x \end{vmatrix} = \left(\sum_{i=1}^{n} a_i\right)x^{n-1}.$$

13. Να υπολογίσετε την ορίζουσα του $n \times n$ πίνακα $\mathrm{A} = (\alpha_{ij})$, αν είναι

(α) $\alpha_{ij} = \begin{cases} i, & \text{αν } i = j \\ n, & \text{αν } i \neq j \end{cases}$, **(β)** $\alpha_{ij} = \min(i, j)$, **(γ)** $\alpha_{ij} = \max(i, j)$, **(δ)** $\alpha_{ij} = \begin{cases} 0, & \text{αν } i = j \\ 1, & \text{αν } i \neq j \end{cases}$

(Απάντηση: (α) $(-1)^{n-1} n!$ **, (β)** 1**, (γ)** $(-1)^{n-1} n$ **, (δ)** $(-1)^{n-1}(n-1)$ **)**

Λύση

(α) Έχουμε ότι

$$|A|=\begin{vmatrix}1 & n & . & . & . & n & n\\ n & 2 & . & . & . & n & n\\ n & n & . & . & . & n & n\\ . & . & . & . & . & . & .\\ . & . & . & . & . & . & .\\ n & n & . & . & . & n-1 & n\\ n & n & . & . & . & n & n\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}1-n & 0 & . & . & . & 0 & n\\ 0 & 2-n & . & . & . & 0 & n\\ 0 & 0 & . & . & . & 0 & n\\ . & . & . & . & . & . & .\\ . & . & . & . & . & . & .\\ 0 & 0 & . & . & . & -1 & n\\ 0 & 0 & . & . & . & 0 & n\end{vmatrix}=(-1)^{n-1}n!$$

(Αφαιρέσαμε την τελευταία στήλη από καθεμία από τις προηγούμενες)

(β) Έχουμε ότι

$$|A|=\begin{vmatrix}1 & 1 & 1. & . & . & 1 & 1\\ 1 & 2 & 2. & . & . & 2 & 2\\ 1 & 2 & 3. & . & . & 3 & 3\\ . & . & .. & . & . & . & .\\ . & . & .. & . & . & . & .\\ 1 & 2 & 3. & . & . & n-1 & n-1\\ 1 & 2 & 3. & . & . & n-1 & n\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}1 & 1 & . & . & . & 1 & 1\\ 0 & 1 & 1. & . & . & 1 & 1\\ 0 & 0 & 1. & . & . & 1 & 1\\ . & . & .. & . & . & . & .\\ . & . & .. & . & . & . & .\\ 0 & 0 & 0. & . & . & 1 & 1\\ 0 & 0 & 0. & . & . & 0 & 1\end{vmatrix}=1$$

(Αφαιρέσαμε κάθε γραμμή από την επόμενη της αρχίζοντας από την προτελευταία.
Μόνο η πρώτη γραμμή μένει αμετάβλητη)

(γ) Έχουμε ότι

$$|A|=\begin{vmatrix}1 & 2 & 3. & . & . & n-1 & n\\ 2 & 2 & 3. & . & . & n-1 & n\\ 3 & 3 & 3. & . & . & n-1 & n\\ . & . & .. & . & . & . & .\\ . & . & .. & . & . & . & .\\ n-1 & n-1 & n-1. & . & . & n-1 & n\\ n & n & n. & . & . & n & n\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}-1 & 0 & 0. & . & . & 0 & 0\\ -1 & -1 & 0. & . & . & 0 & 0\\ -1 & -1 & -1. & . & . & 0 & 0\\ . & . & .. & . & . & . & .\\ . & . & .. & . & . & . & .\\ -1 & -1 & -1. & . & . & -1 & 0\\ n & n & n. & . & . & n & n\end{vmatrix}=(-1)^{n-1}n$$

(Αφαιρέσαμε από κάθε γραμμή από την επόμενη της αρχίζοντας από την πρώτη..
Μόνο η τελευταία γραμμή μένει αμετάβλητη)

(δ) Έχουμε ότι

$$|A| = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 1. & . & . & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1. & . & . & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0. & . & . & 1 & 1 \\ . & . & .. & . & . & . & . \\ . & . & .. & . & . & . & . \\ 1 & 1 & 1. & . & . & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1. & . & . & 1 & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} n-1 & 1 & 1. & . & . & 1 & 1 \\ n-1 & 0 & 1. & . & . & 1 & 1 \\ n-1 & 1 & 1. & . & . & 1 & 1 \\ . & . & .. & . & . & . & . \\ . & . & .. & . & . & . & . \\ n-1 & 1 & 1. & . & . & 0 & 1 \\ n-1 & 1 & 1. & . & . & 1 & 0 \end{vmatrix} =$$

$$(n-1)\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1. & . & . & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1. & . & . & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1. & . & . & 1 & 1 \\ . & . & .. & . & . & . & . \\ . & . & .. & . & . & . & . \\ 1 & 1 & 1. & . & . & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1. & . & . & 1 & 0 \end{vmatrix} = (n-1)\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0. & . & . & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0. & . & . & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -1. & . & . & 0 & 0 \\ . & . & .. & . & . & . & . \\ . & . & .. & . & . & . & . \\ 1 & 0 & 0. & . & . & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0. & . & . & 0 & -1 \end{vmatrix} = (n-1)(-1)^{n-1}$$

(Προσθέσαμε όλες τις άλλες στήλες στην πρώτη, βγάλαμε τον $n-1$κοινό παράγοντα και στη συνέχεια αφαιρέσαμε την πρώτη στήλη από καθεμία από τις επόμενες)