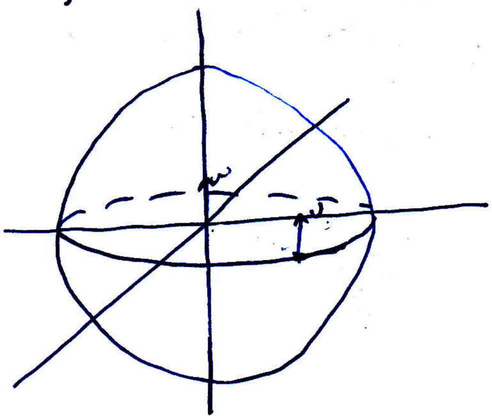
Χρήστος Τσούφης
ΣΗΜΜΥ, 1ο Εξάμηνο

Γ' ΣΕΙΡΑ ΑΣΚΗΣΕΩΝ

Άσκ 1

α) m, V

$$m\ddot{\vec{r}}' = m\ddot{\vec{r}} - \overbrace{m\vec{\omega}\times(\vec{\omega}\times\vec{r}')}^{\text{φυγόκεντρος}} - \overbrace{2m\vec{\omega}\times\vec{\upsilon}}^{\text{coriolis}} - m\dot{\vec{\omega}}\times\vec{r}'$$



α)
$$\frac{|\cancel{m}\vec{\omega}\times(\vec{\omega}\times\vec{r}')|}{|2\cancel{m}\vec{\omega}\times\vec{\upsilon}|} = \frac{|(\vec{\omega}\times\vec{r}')\times\vec{\omega}|}{2|\vec{\omega}\times\vec{\upsilon}|} = \frac{|(\vec{\omega}\cdot\vec{\omega})\vec{r}' - (\cancel{\vec{\omega}\cdot\vec{r}'}^{\,0})\cdot\vec{\omega}|}{2|\vec{\omega}\times\vec{\upsilon}|} =$$

$$= \frac{||\vec{\omega}|^2\vec{r}' - 0|}{2|\vec{\omega}|\cdot|\vec{\upsilon}|\cdot\sin(\vec{\omega},\vec{\upsilon})} = \frac{|\vec{\omega}|^2\vec{r}'}{2|\vec{\omega}|\cdot|\vec{\upsilon}|\sin 0}$$

Άρα, όταν το αεροπλάνο πετάει βόρεια κινείται παράλληλα στον άξονα περιστροφής της Γης. Επομένως, η δύναμη Coriolis δεν ορίζεται.

β) Αφού το αεροπλάνο πετάει σε αμελητέο ύψος σε σχέση με την επιφάνεια της Γης:

- η φυγόκεντρος θα είναι: $F_{φυγ} = -m\vec{\omega}\times(\omega\times\vec{R})$ όπου $\vec{R}$ η ακτίνα της Γης.
- η $F_{coriolis} = -2m\vec{\omega}\times\vec{V}$

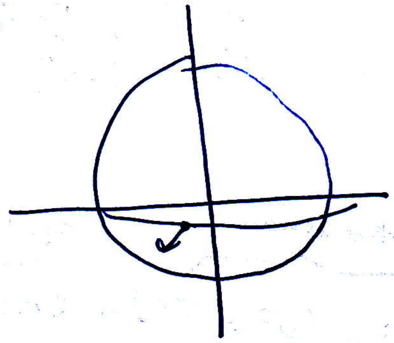
Έχουμε $\hat{z} = \hat{z}'$ οπότε

$$\frac{F_{φυγ}}{F_{coriol}} = \frac{\cancel{-}\cancel{m}\,\vec{\omega}\times(\vec{\omega}\times\vec{R})}{\cancel{-}2\cancel{m}\,\vec{\omega}\times\vec{V}} = \frac{\vec{\omega}\times(\vec{\omega}\times\vec{R})}{2\vec{\omega}\times\vec{V}} =$$

$$= \frac{(\omega\hat{z})\times[(\omega\hat{z})\times(R\hat{x}')]}{2(\omega\hat{z})\times(V\hat{y})} = \frac{(\omega\hat{z})\times(\omega R\hat{y})}{2\omega V\hat{x}} =$$

$$= \frac{\omega^{\cancel{2}}R\cancel{\hat{x}}}{2\cancel{\omega}V\cancel{\hat{x}}} = \frac{\omega R}{2V}$$

α)



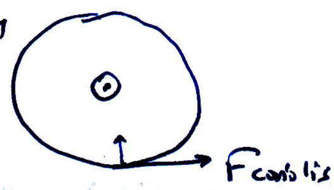
$z = \hat{z}'$

$$\frac{F_{φυγ}}{F_{cor}} = \frac{\cancel{+}\cancel{m}[\vec{ω} \times (\vec{ω} \times \vec{R})]}{\cancel{+}2\cancel{m}(\vec{v} \times \vec{ω})} = \frac{(ω\hat{z}) \times \left((ω\hat{z}) \times (R\hat{x}')\right)}{2(v\hat{x}) \times (ω\hat{z})} =$$

$$= \frac{(ω\hat{z}) \times (ω\hat{y}')}{2vω\hat{y}'} = \frac{ω^2 \hat{x}'}{2v\cancel{ω}\hat{y}'} = \frac{ω\hat{x}'}{2v\hat{y}'}$$

β) Το βλήμα θα παρεκκλίνει ανατολικότερα επειδή η δύναμη Coriolis ασκείται προς την ανατολή.

κάτοψη γης:

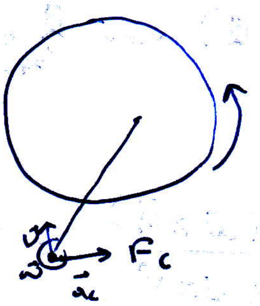


γ) $\vec{F}_{cor} = -2m\vec{ω} \times \vec{v}$

$\vec{F} = m\vec{a}$

$\vec{a}_{cor} = -2\vec{ω} \times \vec{v}$

κάτοψη



⇒ Εκτροπή της μάζας προς τα ανατολικά παρόλο που η γη γυρίζει αριστερόστροφα.

Αυτό συμβαίνει διότι, το σώμα υπακούει πριν την εκτόξευση στον τύπο $v_{αφ.} = ω_{γης}(R+h)$ .. Κατά την εκτόξευση $v_{αφ.} > v_{γης}$

⇒ το σώμα έχει ταχύτητα μεγαλύτερη από τη γη

⇒ η μάζα εκτρέπεται προς τα ανατολικά.

Ασκ2

α) $F = -G\frac{M\cdot m}{r^2}\cdot\hat{r}$

Η F που ασκεί το βαρυτικό πεδίο σε σώματα εντός του είναι κεντρική οπότε $\int \vec{F}(\vec{r})d\vec{r} = \int f(r)dr$

$$U(r) - \cancel{U(\infty)}^{0} = -\int_{+\infty}^{r} f(r)dr$$

$$U(r) = -\int_{+\infty}^{r} -G\frac{Mm}{r^2}dr \Leftrightarrow U(r) = GMm\int_{+\infty}^{r}\frac{1}{r^2}dr \Leftrightarrow$$

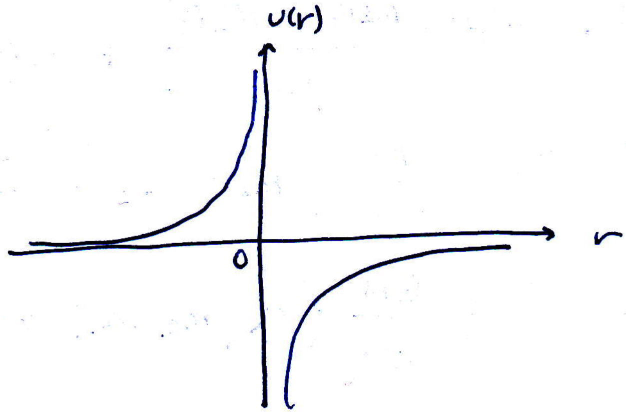
$$\Leftrightarrow U(r) = GMm\left[-\frac{1}{r}\right]_{+\infty}^{r} \Leftrightarrow U(r) = -G\frac{Mm}{r}$$

Δηλ. $U = g(m,r) = -G\frac{M\cdot m}{r}$

$g'(m,\hat{r}) = -F = G\frac{Mm}{r^2} > 0$ άρα $g \nearrow$

$g''(m,\vec{r}) = -F' = GMm\left(-\frac{2r}{r^4}\right)$

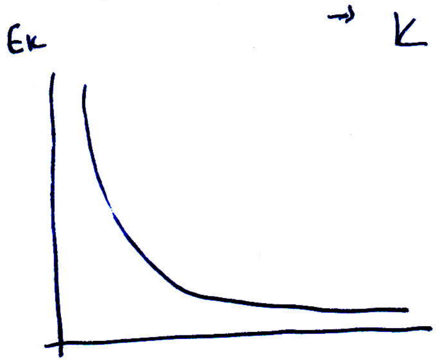
r	$-\infty$	0	$+\infty$
$g''(r)$	$+$	‖	$-$
g	∪	‖	∩



β) $I_0\omega_0 = I\omega \Rightarrow \cancel{m}r_0^{\cancel{2}}\cdot\frac{v_0}{\cancel{r_0}} = \cancel{m}r^{\cancel{2}}\frac{v}{\cancel{r}} \Rightarrow v_0 r_0 = vr$

$K_0 = \frac{L_0^2}{2I_0}$, $K = \frac{L^2}{2I} = \frac{L_0^2}{2mr^2} = \frac{I_0^2\omega_0^2}{2mr^2} = \frac{m^{\cancel{2}}r_0^4\omega_0^2}{2\cancel{m}r^2} = \frac{mr_0^4\left(\frac{v_0^2}{r_0^2}\right)}{2r^2} \Rightarrow$

$\Rightarrow K = \frac{mr_0^2v_0^2}{2r^2}$



$K' < 0$, $K \downarrow$

$K'' > 0$, η K κυρτή.

d) $m_1 > m_2$

$r_1 > r_2$

• $U_g = g(m_1, r_1) + g(m_2, r_2)$ $\qquad g(m, r) = -G\frac{Mm}{r}$

$$= -G\frac{Mm_1}{r_1} + \left(-G\frac{Mm_2}{r_2}\right) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow U_g = -GM\left(\frac{m_1}{r_1} + \frac{m_2}{r_2}\right) = -GM\left(\frac{m_1r_2 + m_2r_1}{r_1 \cdot r_2}\right)$$

• $U_{g}' = g(m_2, r_1) + g(m_1, r_2) = -G\frac{Mm_2}{r_1} + \left(-G\frac{Mm_1}{r_2}\right) \Rightarrow$

$$\Rightarrow U_{g}' = -GM\left(\frac{m_2}{r_1} + \frac{m_1}{r_2}\right) = -GM\left(\frac{m_2r_2 + m_1r_1}{r_1r_2}\right)$$

• $U_g - U_{g}' = -GM\left(\frac{m_1r_2 + m_2r_1}{r_1r_2}\right) + GM\left(\frac{m_2r_2 - m_1r_1}{r_1r_2}\right) \Rightarrow$

$$\Rightarrow U_g - U_{g}' = \frac{GM}{r_1r_2}\left(m_2r_2 + m_1r_1 - m_1r_2 - m_2r_1\right) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow U_g - U_{g}' = \frac{GM}{r_1r_2}\left(r_2(m_2 - m_1) + r_1(m_1 - m_2)\right) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow U_g - U_{g}' = \frac{GM}{r_1r_2}(r_2 - r_1)(m_2 - m_1) > 0$$

$$\Rightarrow U_g - U_{g}' > 0 \Leftrightarrow U_g > U_{g}'$$

δ) • $U_f = f(m_1, r_1) + f(m_2, r_2)$

$$\Rightarrow U_f = \frac{m_1 r_0^2 U_0^2}{2r_1^2} + \frac{m_2 r_0^2 U_0^2}{2r_2^2} = \frac{r_0^2 U_0^2}{2}\left(\frac{m_1}{r_1^2} + \frac{m_2}{r_2^2}\right) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow U_f = \frac{r_0^2 U_0^2}{2}\left(\frac{m_1 r_2^2 + m_2 r_1^2}{r_1^2 r_2^2}\right)$$

• $U_f' = f(m_2, r_1) + f(m_1, r_2)$

$$\Rightarrow U_f' = \frac{m_2 r_0^2 U_0^2}{2r_1^2} + \frac{m_1 r_0^2 U_0^2}{2r_2^2} = \frac{r_0^2 U_0^2}{2}\left(\frac{m_2}{r_1^2} + \frac{m_1}{r_2^2}\right) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow U_f' = \frac{r_0^2 U_0^2}{2}\left(\frac{m_2 r_2^2 + m_1 r_1^2}{r_1^2 r_2^2}\right)$$

$$\cdot U_f - U_f' = \frac{r_0^2 U_0^2}{2}\left(\frac{m_1 r_2^2 + m_2 r_1^2}{r_1^2 r_2^2}\right) - \frac{r_0^2 U_0^2}{2}\left(\frac{m_2 r_2^2 + m_1 r_1^2}{r_1^2 r_2^2}\right)$$

$$= \underline{r_0^2 U_0^2}\left(m_1 r_2^2 + m_2 r_1^2 - m_2 r_2^2 - m_1 r_1^2\right)$$

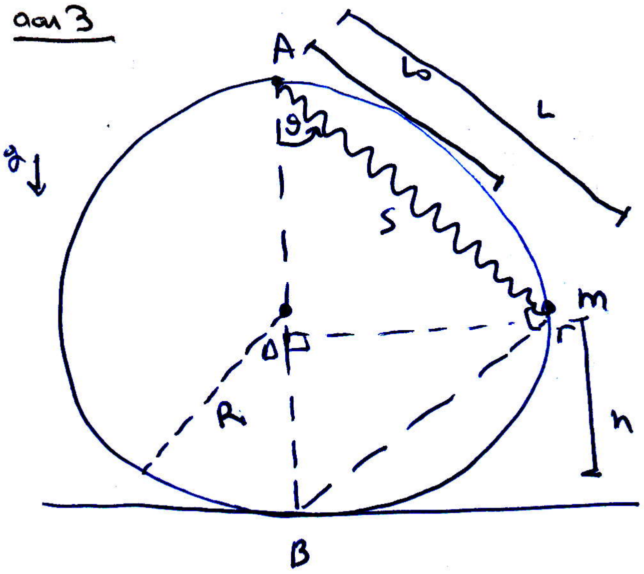
$$= \frac{r_0^2 U_0^2}{2 r_1^2 r_2^2}\left(r_2^2 (m_1 - m_2) + r_1^2 (m_2 - m_1)\right)$$

$$= \frac{r_0^2 U_0^2}{2 r_1^2 r_2^2}(r_2^2 - r_1^2)(m_1 - m_2) < 0$$

$$\Rightarrow \quad U_f - U_f' < 0 \quad \Leftrightarrow \quad U_f < U_f'$$

ε) ?

ασκ 3



α) Παίρνουμε το m σε μια τυχαία γωνία θ όπου το ελατήριο έχει παραμορφωθεί κατά $L-L_o$. Τότε ισχύουν οι σχέσεις:

- $\overset{\Delta}{AB\Gamma}$: ορθογώνιο σε $\hat{\Gamma}=90^\circ \Rightarrow L=2R\cos\theta$
- $h = 2R - A\Delta = 2R - L\cos\theta = 2R - (2R\cos\theta)\cos\theta = 2R\,(1-\cos^2\theta) =$
  $= 2R\sin^2\theta$

Συνεπώς, το σύστημα μάζα – ελατήριο έχει δυναμική ενέργεια:

$V(\theta) = U_{ελ}(\theta) + U_{βαρ}(\theta) = \frac{1}{2}s\,(L-L_o)^2 + mgh \Rightarrow$

$\Rightarrow V(\theta) = \frac{1}{2}s\,(2R\cos\theta - L_o)^2 + mg\,2R\sin^2\theta.$

β) Τα σημεία ισορροπίας του συστήματος είναι εκείνα για τα οποία μηδενίζεται η παράγωγος της δυναμικής ενέργειας.

$V'(\theta) = \frac{1}{\cancel{2}}s\,\cancel{2}(2R\cos\theta - L_o)(-2R\sin\theta) + 2mgR\cdot 2\sin\theta\cdot\cos\theta$

$= \sin\theta\,[-2Rs\,(2R\cos\theta - L_o) + 4mgR\cos\theta]$

$= \sin\theta\,[(4mgR - 4sR^2)\cos\theta + 2sRL_o]$

$V'(\theta)=0 \Leftrightarrow \sin\theta=0$ ή $\cos\theta = -\frac{\cancel{2}s\cancel{R}L_o}{\cancel{4}_2 mg\cancel{R} - \cancel{4}_2 sR^{\cancel{2}}}$

$\Leftrightarrow \theta=0$ ή $\theta = \pm\arccos\left(-\frac{sL_o}{2mg-2s}\right)$

αφού $\theta\in(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2})$

δ) $L_0 = R$

$3mg = Rs(3-\sqrt{3})$

Έχουμε $V'(\theta) = 0$

$\Leftrightarrow \sin\theta = 0$ ή $\cos\theta = -\dfrac{sR}{2Rs(1-\frac{\sqrt{3}}{3}) - 2sR}$

$\Leftrightarrow \theta = 0$ ή $\cos\theta = -\dfrac{1}{-2\frac{\sqrt{3}}{3}}$

$\Leftrightarrow \theta = 0$ ή $\cos\theta = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$

$\Leftrightarrow \theta = 0$ ή $\theta = \frac{\pi}{6}$ ή $\theta = -\frac{\pi}{6}$, αφού $\theta \in (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$

Συνεπώς, τα σημεία ισορροπίας της παραπάνω θέσης.

Επιπλέον:

$$V'(\theta) = \sin\theta\left[\left(4Rs(1-\tfrac{\sqrt{3}}{3})R - 4sR^2\right)\cos\theta + 2sR^2\right]$$

$$= 2sR^2\sin\theta\left[\left(2-\tfrac{2\sqrt{3}}{3}-2\right)\cos\theta + 1\right]$$

$$= 2sR^2\sin\theta\left(1-\tfrac{2\sqrt{3}}{3}\cos\theta\right)$$

$$V''(\theta) = 2sR^2\left[\cos\theta\left(1-\tfrac{2\sqrt{3}}{3}\cos\theta\right) + \sin\theta\,\tfrac{2\sqrt{3}}{3}\sin\theta\right]$$

$$= 2sR^2\left(\cos\theta + \tfrac{2\sqrt{3}}{3}\sin^2\theta - \tfrac{2\sqrt{3}}{3}\cos^2\theta\right)$$

Συνεπώς:

$$V''(0) = 2sR^2\left(1+0-\tfrac{2\sqrt{3}}{3}\right) = 2sR^2\,\frac{3-2\sqrt{3}}{3} < 0$$

$$V''(\tfrac{\pi}{6}) = 2sR^2\left(\tfrac{\sqrt{3}}{2} + \tfrac{2\sqrt{3}}{3}(\tfrac{1}{2})^2 - \tfrac{2\sqrt{3}}{3}(\tfrac{\sqrt{3}}{2})^2\right)$$

$$= 2sR^2\left(\tfrac{\sqrt{3}}{2} + \tfrac{\sqrt{3}}{6} - \tfrac{\sqrt{3}}{2}\right)$$

$$= 2sR^2\,\tfrac{\sqrt{3}}{6} > 0$$

$$V''(-\tfrac{\pi}{6}) = 2sR^2\left(\tfrac{\sqrt{3}}{2} + \tfrac{2\sqrt{3}}{2}(-\tfrac{1}{2})^2 - \tfrac{2\sqrt{3}}{3}(\tfrac{\sqrt{3}}{2})^2\right) =$$

$$= 2sR^2\left(\tfrac{\sqrt{3}}{2} + \tfrac{\sqrt{3}}{6} - \tfrac{2\sqrt{3}\cdot\cancel{3}}{\cancel{3}\cdot 4}\right) = 2sR^2\,\tfrac{\sqrt{3}}{6} > 0$$

Συνεπώς, στο $\theta=0$ η $U(\theta)$ παρουσιάζει τοπικό μέγιστο και έχουμε ασταθή ισορροπία, ενώ για $\theta=\frac{\pi}{6}$ και $\theta=-\frac{\pi}{6}$ έχουμε ευσταθή ισορροπία.

Άσκ 4

$m,\ x>0$, $a, A>0$

$U(x) = Ax(ax-1)e^{-ax}$

α) Επειδή η δυναμική ενέργεια δεν έχει y και z συνιστώσες, ισχύει $\frac{\partial U}{\partial y} = \frac{\partial U}{\partial z} = 0$. Άρα:

$$\vec{F} = -\vec{\nabla} U = -\frac{\partial U}{\partial x}\hat{x} \Rightarrow \hat{F} = -\left(Ax(ax-1)e^{-ax}\right)' \Rightarrow$$

$$\Rightarrow F = -A\left[(ax-1)e^{-ax} + xae^{-ax} + x(ax-1)(-a)e^{-ax}\right] \Rightarrow$$

$$\Rightarrow F = -A(ax - 1 + ax - a^2x^2 + ax)\, e^{-ax} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow F = A(a^2x^2 - 3ax + 1)e^{-ax}$$

$F=0$ αν $a^2x^2 - 3ax + 1 = 0$

$$\Delta = 9a^2 - 4a^2 = 5a^2 \quad , \quad x_{1,2} = \frac{3a \pm \sqrt{5}a}{2a^2} = \frac{3 \pm \sqrt{5}}{2a}$$

Συνεπώς, τα σημεία ισορροπίας του σωματίου είναι τα

$$x_1 = \frac{3-\sqrt{5}}{2a} \quad , \quad x_2 = \frac{3+\sqrt{5}}{2a}$$

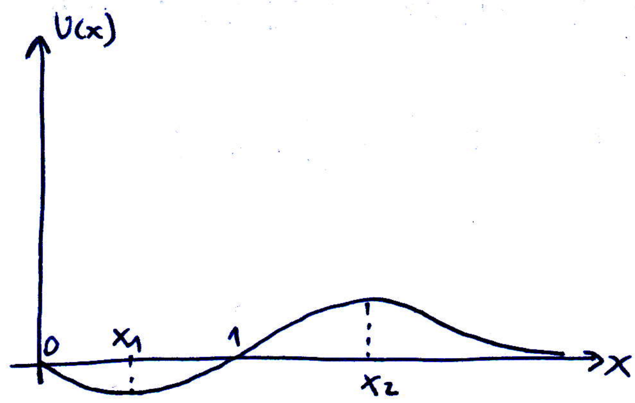
	0		x_1		x_2	
F		+	0	−	0	+
$a^2x^2-3ax+1$		+		−		+

Από τον πίνακα προσήμων της F (αφού γνωρίζουμε το πρόσημο του τριωνύμου μέσω των ριζών του και ότι $A>0$, $e^{-\alpha x}>0$, $\forall x>0$)

Συμπεραίνουμε ότι αν το σώμα απομακρυνθεί από τη θέση ισορροπίας x_1, τότε δημιουργείται δύναμη που το επαναφέρει, ενώ αν απομακρυνθεί από τη θέση x_2, δημιουργείται δύναμη που το απομακρύνει οριστικά από εκεί.

Συνεπώς, στο σημείο x_1 έχουμε ευσταθή ισορροπία ενώ στο x_2 έχουμε ασταθή ισορροπία.

β)



F απωστική

$\Rightarrow F>0 \Rightarrow \frac{\partial U}{\partial x}<0 \Rightarrow$

$\Rightarrow$ διαστήματα όπου $U(x)\downarrow \Rightarrow$

$\Rightarrow x\in[0,x_1)\cup(x_2,+\infty)$

γ) Από την αρχή διατήρησης της ενέργειας και επειδή δεν έχουμε απώλειες μηχανικής ενέργειας είναι $E_{MHX}=$ σταθ.

Παρατηρούμε ότι προκειμένου το m να φτάσει στο άπειρο να έχει αρκετή ενέργεια ώστε να ξεπεράσει το x_2, όπου μεγιστοποιείται η δυναμική ενέργεια. Αυτό επιτυγχάνεται όταν $K(x=x_2)>0$.

Επειδή ενδιαφερόμαστε για την οριακή κατάσταση, θα πάρουμε $K(x=x_2)=0$.

Τελικά:

$$E_{MHX}(x=0)=E_{MHX}(x=x_2)$$

$$\Rightarrow K(x=0)+\cancelto{0}{U(x=0)}=\cancelto{0}{K(x=x_2)}+U(x=x_2)$$

$$\Rightarrow K(x=0)=U(x=x_2)=Ax_2(\alpha x_2-1)e^{-\alpha x_2},\ \text{όπου}\ x_2=\frac{3+\sqrt{5}}{2\alpha}$$

Άσκ 5

α) Αρκεί $\vec{\nabla}\times\vec{F} = \vec{0}$

Πράγματι:

$$\vec{\nabla}\times\vec{F} = \begin{vmatrix} \hat{x} & \hat{y} & \hat{z} \\ \partial/\partial x & \partial/\partial y & \partial/\partial z \\ y^2+2xz & 2xy+z^2 & 2yz+x^2 \end{vmatrix} =$$

$$= \hat{x}\left[\frac{\partial}{\partial y}(2yz+x^2) - \frac{\partial}{\partial z}(2xy+z^2)\right] - \hat{y}\left[\frac{\partial}{\partial x}(2yz+x^2) - \frac{\partial}{\partial z}(y^2+2xz)\right]$$

$$+ \hat{z}\left[\frac{\partial}{\partial x}(2xy+z^2) - \frac{\partial}{\partial y}(y^2+2xz)\right] =$$

$$= \hat{x}(2z-2z) - \hat{y}(2x-2x) + \hat{z}(2y-2y) \ldots$$

$$= 0$$

Άρα η f διατηρητική.

β) $\vec{F} = -\frac{dU}{d\vec{r}}$ ή $F = -\vec{\nabla}U$

ή $dU = -\vec{F}\cdot d\vec{r}$

ή $\displaystyle\int_{(000)}^{(xyz)} dU = -\int_{(000)}^{(xyz)} \vec{F}\cdot d\vec{r}$

ή $\displaystyle U(x,y,z) - U(0,0,0) = -\int_{(000)}^{(x,y,z)} (F_x dx + F_y dy + F_z dz)$ ή

ή $\displaystyle U(x,y,z) = -\int_{(000)}^{(xyz)} (y^2+2xz)\,dx - \int_{(000)}^{(xyz)} (2xy+z^2)\,dy - \int_{(000)}^{(xyz)} (2yz+x^2)\,dx$

Για να υπολογίσουμε τον κάθε όρο της παράστασης επιλέγουμε μία από τις πιθανές διαδρομές μεταξύ $(0,0,0)$ και (x,y,z). Επειδή η δύναμη είναι διατηρητική το αποτέλεσμα είναι ανεξάρτητο της διαδρομής που επιλέγουμε.

Εδώ επιλέγουμε την ακόλουθη κίνηση ανάμεσα στα σημεία:

$$(0,0,0) \to (x,0,0) \to (x,y,0) \to (x,y,z)\,. \quad \text{Έτσι:}$$

- $$\int_{(0,0,0)}^{(x,y,z)} (y^2+2xz)\,dx = \int_{(0,0,0)}^{(x,0,0)} (\cancelto{0}{y^2}+2x\cancelto{0}{z})\,dx + \int_{(x,0,0)}^{(x,y,0)} \cancelto{0}{(y^2+2xz)\,dx} + \int_{(x,y,0)}^{(x,y,z)} \cancelto{0}{(y^2+2xz)\,dx}$$
$$= 0$$

- $$\int_{(0,0,0)}^{(x,y,z)} (2xy+z^2)\,dy = \int_{(0,0,0)}^{(x,0,0)} \cancelto{0}{(2xy+z^2)\,dy} + \int_{(x,0,0)}^{(x,y,0)} (2xy+\cancelto{0}{z^2})\,dy + \int_{(x,y,0)}^{(x,y,z)} \cancelto{0}{(2xy+z^2)\,dy}$$
$$= xy^2$$

- $$\int_{(0,0,0)}^{(x,y,z)} (2yz+x^2)\,dz = \int_{(0,0,0)}^{(x,0,0)} \cancelto{0}{(2yz+x^2)\,dz} + \int_{(x,0,0)}^{(x,y,0)} \cancelto{0}{(2yz+x^2)\,dz} + \int_{(x,y,0)}^{(x,y,z)} (2yz+x^2)\,dz$$
$$= yz^2+x^2z$$

Τελικά,

$$U(x,y,z) = -0 - xy^2 - (yz^2+x^2z) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow U(x,y,z) = -(xy^2+yz^2+x^2z)$$