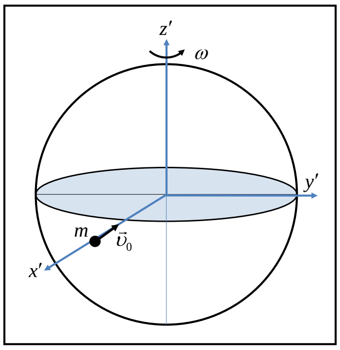
ΕΜΠ – ΣΧΟΛΗ ΕΜΦΕ – ΤΟΜΕΑΣ ΦΥΣΙΚΗΣ – ΑΚΑΔΗΜΑΪΚΟ ΕΤΟΣ 2017-18
ΜΑΘΗΜΑ: ΦΥΣΙΚΗ-Ι, 1ΟΥ ΕΞΑΜΗΝΟΥ ΣΧΟΛΗΣ ΗΛΕΚΤΡΟΛΟΓΩΝ ΜΜΥ
Διδάσκοντες: Η. Ζουμπούλης, Ι. Ράπτης

Γ΄ ΣΕΙΡΑ ΑΣΚΗΣΕΩΝ 3 Δεκεμβρίου 2017

Να επιστραφούν λυμένες μέχρι 21/12/17, οι 1, 2, 3, 4, 5 [ΠΡΟΣΟΧΗ: Οι λύσεις να είναι χειρόγραφες και, είτε να παραδοθούν στο μάθημα, είτε να αναρτηθούν ως PDF στις «Εργασίες» του mycourses]

1. (α) Αεροπλάνο συνολικής μάζας m διέρχεται από τον Ισημερινό με ταχύτητα μέτρου V. Υπολογίστε το πηλίκο των μέτρων της φυγόκεντρης δύναμης προς την δύναμη Coriolis, αν δεχτούμε ότι το αεροπλάνο πετά σε μικρό ύψος από την επιφάνεια της Γης (σε σχέση με την ακτίνα R της Γης) και, κατά τη στιγμή που βρίσκεται στον Ισημερινό, πετάει παράλληλα στην επιφάνεια της Γης, με κατεύθυνση (α) Βόρεια, (β) Ανατολικά, (γ) Νοτιο-Δυτικά.

(β) Αν εκτελέσουμε μία οριζόντια βολή κατά μήκος ενός μεσημβρινού στο βόρειο ημισφαίριο, με κατεύθυνση από τον νότο προς το βορά, το τελικό σημείο της βολής επί του εδάφους θα κείται επί του μεσημβρινού ή θα αποκλίνει; Αν υπάρξει απόκλιση, το βλήμα θα φτάσει στο έδαφος ανατολικότερα ή δυτικότερα από το αναμενόμενο σημείο τερματισμού της βολής επί του μεσημβρινού;



(γ) Επί του Ισημερικού και σε ύψος h από την επιφάνειας της Γης εκτοξεύουμε σημειακή μάζα m προς το κέντρο της Γης με αρχική ταχύτητα μέτρου υ_0. Γνωρίζοντας ότι η Γη περιστρέφεται αριστερόστροφα με σταθερή γωνιακή ταχύτητα ω, περί τον άξονα που διέρχεται από τους πόλους της, υπολογίστε τη στιγμιαία δύναμη Coriolis και επομένως τη στιγμιαία επιτάχυνση Coriolis (για έναν παρατηρητή επί της Γης). Ερευνήστε αν αυτή η επιτάχυνση σημαίνει εκτροπή της μάζας (για τον παρατηρητή της Γης) προς τα Ανατολικά ή προς τα Δυτικά και συγκρίνετε με την «διαισθητικά» αναμενόμενη εκτροπή (λόγω της περιστροφής της Γης από Δυτικά προς Ανατολικά). Ποιά είναι η αιτία της φαινομενικής ασυμφωνίας (ισοδύναμα: πώς το εξηγεί ένας αδρανειακός παρατηρητής, για τον οποίο δεν υπάρχει δύναμη Coriolis ;)

2. (α) Από τον νόμο της παγκόσμιας έλξης, να βρείτε την έκφραση για την δυναμική ενέργεια $g(m,r)$ [συναρτήσει των G, M_e, m και r] μάζας m σε απόσταση r από το κέντρο της Γης (M_e, R_e), όπου $r > R_e$, και να παραστήσετε γραφικά την συνάρτηση $g(m,r)$, ως συνάρτηση του r. [Δεχθείτε ότι η σφαιρική Γη φαίνεται ως σημειακή μάζα για $r \geq R_e$, και ότι $g(m,\infty) \equiv 0$].

(β) Θεωρήστε μάζα m που εκτελεί, εκτός πεδίου βαρύτητας, κυκλική τροχιά με ταχύτητα υ_0 και ακτίνα r_0, περί σταθερό σημείο. Αν θεωρήσουμε ότι σε μία διαδικασία μετακίνησης ($r_0 \to r$) διατηρείται η στροφορμή (δηλ., ασκείται μηδενική ροπή ως προς το κέντρο), να βρείτε την κινητική ενέργεια $f(m,r)$ της μάζας m [συναρτήσει των m, r_0, υ_0, r] και να παραστήσετε γραφικά την συνάρτηση $f(m,r)$, ως συνάρτηση του r. [Η συνάρτηση $f(m,r)$ ονομάζεται συχνά "φυγόκεντρη δυναμική ενέργεια" .]

(γ) Για δύο μάζες $m_1 > m_2$, και δύο ακτίνες $r_1 > r_2$, να υπολογίσετε τα εξής αθροίσματα: $U_g = g(m_1,r_1)+g(m_2,r_2)$, το οποίο αντιστοιχεί σε διάταξη $\left[m_1(r_1),m_2(r_2)\right]$, και $U'_g = g(m_2,r_1)+g(m_1,r_2)$, το οποίο αντιστοιχεί σε διάταξη $\left[m_1(r_2),m_2(r_1)\right]$, και να τα συγκρίνετε. Ισχύει $U_g > U'_g$ ή $U'_g > U_g$; Ποιό από τα δύο αθροίσματα πληροί την αρχή της “ελάχιστης ενέργειας”;

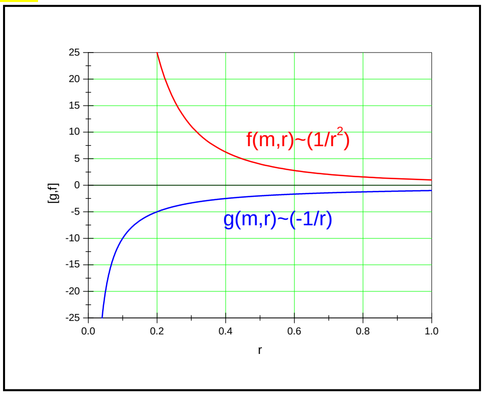
(δ) Επαναλάβετε για τα: $U_f = f(m_1,r_1) + f(m_2,r_2)$ και $U'_f = f(m_2,r_1) + f(m_1,r_2)$

(ε) Συγκρίνοντας τα αποτελέσματα των (γ)-(δ), εξηγήστε γιατί στο γήινο βαρυτικό πεδίο τα βαρύτερα ατμοσφαιρικά στρώματα είναι κοντά στην επιφάνεια της Γης (δηλ. εγγύτερα προς το κέντρο της) ενώ σε μία φυγοκεντρική μηχανή τα βαρύτερα σώματα κατευθύνονται “αντίστροφα” περιφερειακά (δηλ. μακριά από το κέντρο της περιστροφικής κίνησης). Υπό ποιές συνθήκες, η συμπεριφορά στο γήινο βαρυτικό πεδίο θα ήταν ίδια με εκείνη στην φυγοκεντρική μηχανή ;

ΑΠΑΝΤΗΣΗ

(α) $dg = -\vec{F}\cdot d\vec{r} \quad \Rightarrow \quad \int_r^\infty dg = -\int_r^\infty \vec{F}\cdot d\vec{r} \quad \Rightarrow \quad g = -G\dfrac{Mm}{r}$ **[5M]**

(β) $\left\{ \begin{array}{l} f(m,r) = \dfrac{1}{2}m\upsilon^2 \\ L = m\upsilon_0 r_0 = m\upsilon r \end{array} \right\} \Rightarrow f(m,r) = \dfrac{1}{2}m\upsilon_0^2\dfrac{r_0^2}{r^2}$ **[5M]**



(γ) $$U_g = g(m_1,r_1) + g(m_2,r_2) = -GM\left(\frac{m_1}{r_1} + \frac{m_2}{r_2}\right),$$

$$U'_g = g(m_2,r_1) + g(m_1,r_2) = -GM\left(\frac{m_2}{r_1} + \frac{m_1}{r_2}\right)$$

$$U_g - U'_g = GM\left[\left(\frac{m_1}{r_1} + \frac{m_2}{r_2}\right) - \left(\frac{m_2}{r_1} + \frac{m_1}{r_2}\right)\right] = \frac{GM}{r_1 r_2}\left[(m_1 - m_2)(r_1 - r_2)\right] > 0 \quad \textbf{[5M]}$$

Ποιό από τα δύο αθροίσματα πληροί την αρχή της “ελάχιστης ενέργειας”;

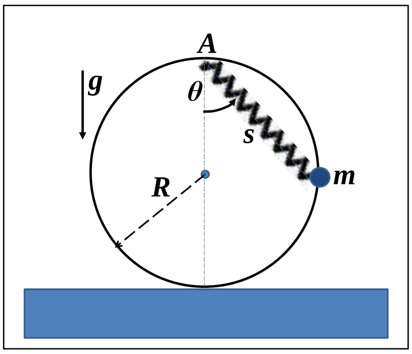
(δ) $$U_f = f(m_1,r_1) + f(m_2,r_2) = \frac{\upsilon_0^2 r_0^2}{2}\left(\frac{m_1}{r_1^2} + \frac{m_2}{r_2^2}\right)$$

$$U'_f = f(m_2,r_1) + f(m_1,r_2) = \frac{\upsilon_0^2 r_0^2}{2}\left(\frac{m_2}{r_1^2} + \frac{m_1}{r_2^2}\right)$$

$$U_f - U'_f = \frac{\upsilon_0^2 r_0^2}{2}\left[\left(\frac{m_1}{r_1^2} + \frac{m_2}{r_2^2}\right) - \left(\frac{m_2}{r_1^2} + \frac{m_1}{r_2^2}\right)\right] = \frac{\upsilon_0^2 r_0^2}{2r_1^2 r_2^2}\left[(m_1 - m_2)(r_2^2 - r_1^2)\right] < 0 \quad \textbf{[5M]}$$

(ε) Συγκρίνοντας τα αποτελέσματα των (γ)-(δ): στο γήινο βαρυτικό πεδίο τα βαρύτερα ατμοσφαιρικά στρώματα είναι κοντά στην επιφάνεια της Γης (δηλ. εγγύτερα προς το κέντρο της) ενώ σε μία φυγοκεντρική μηχανή τα βαρύτερα σώματα κατευθύνονται “αντίστροφα” περιφερειακά (δηλ. μακριά από το κέντρο της περιστροφικής κίνησης) <u>για λόγους ελαχιστοποίησης της ενέργειας</u>. **[3M]**

Η συμπεριφορά στο γήινο βαρυτικό πεδίο θα ήταν ίδια με εκείνη στην φυγοκεντρική μηχανή αν η Γη περιστρεφόταν με παρα πολύ μεγάλη γωνιακή ταχύτητα, ώστε ο φυγοκεντρικός όρος να υπερισχύει του βαρυτικού. **[2M]**



3. Διάτρητο σφαιρίδιο μάζας ***m*** είναι περασμένο στην λεία περιφέρεια κατακόρυφης κυκλικής στεφάνης, ακτίνας R. Επίσης συνδέεται με το ένα άκρο ελατηρίου, με σταθερά s και φυσικό μήκος L_0, το άλλο άκρο του οποίου είναι στερεωμένο στο ανώτατο σημείο A της στεφάνης. Η στεφάνη διατηρείται ακλόνητη στο κατακόρυφο επίπεδο και βρίσκεται μέσα σε ομογενές βαρυτικό πεδίο επιτάχυνσης g.
(α) Να γράψετε τη δυναμική ενέργεια του συστήματος μάζα-ελατήριο συναρτήσει των παραμέτρων m, g, R, s και L_0 του προβλήματος, χρησιμοποιώντας ως μεταβλητή τη γωνία θ που σχηματίζει το ελατήριο με την κατακόρυφο που διέρχεται από το σημείο ανάρτησης A.
(β) Να ευρεθούν οι γενικές σχέσεις για τις θέσεις ισορροπίας του συστήματος ως προς τη μεταβλητή θ, συναρτήσει των υπολοίπων παραμέτρων.
(γ) Αν $L_0 = R$ και $3mg = Rs\left(3-\sqrt{3}\right)$, να προσδιοριθούν ακριβώς τα σημεία και το είδος ισορροπίας.

ΑΠΑΝΤΗΣΗ
(α) Θεωρώντας ως επίπεδο αναφοράς της βαρυτικής ενέργειας το οριζόντιο επίπεδο από το A:

$$U = \frac{1}{2}s\left(L-L_0\right)^2 - mgz = \frac{1}{2}s\left(2R\cos\theta - L_0\right)^2 - mg\left(2R\cos\theta\right)\cos\theta = \frac{1}{2}s\left(2R\cos\theta - L_0\right)^2 - 2mgR\cos^2\theta$$

(β) Σημεία ισορροπίας $\left[\dfrac{dU}{d\theta}\right]_{\theta_{1,2}} = 0 \Rightarrow \left[2Rs\left(L_0 - 2R\cos\theta\right) + 4mgR\cos\theta\right]\sin\theta = 0$

Άρα το ένα σημείο ισορροπίας είναι το $\theta_1 = 0$

και το άλλο είναι τέτοιο ώστε: $\cos\theta_2 = \dfrac{L_0 s}{2\left[Rs - mg\right]}$

(γ) Αν $L_0 = R$ και $3mg = Rs\left(3-\sqrt{3}\right)$

$\theta_1 = 0$, και $\theta_2 = \arccos\left\{\dfrac{Rs}{2\left[Rs-mg\right]}\right\} = \arccos\left\{\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right\} \Rightarrow \theta_2 = \dfrac{\pi}{6}$

$$\left[\frac{d^2U}{d\theta^2}\right] = 2R^2 s\left[\cos\theta + \frac{4}{3}\left(2\cos^2\theta - 1\right)\right]$$

$$\left[\frac{d^2U}{d\theta^2}\right]_{\theta_1=0} = 2R^2 s\left[1+\frac{4}{3}(2-1)\right] = \frac{14}{3}R^2 s > 0: \text{ Ευσταθής Ισορροπία}$$

4. Σώμα μάζας *m* κινείται στον θετικό ημιάξονα των *x* και μέσα σε πεδίο δυνάμεων που περιγράφεται από την συνάρτηση δυναμικής ενέργειας $U(x)=Ax(ax-1)e^{-ax}$, όπου *A* και *a* είναι θετικές σταθερές με κατάλληλες φυσικές διαστάσεις.
(α) Βρείτε την δύναμη που ασκείται στο σώμα, τα σημεία ισορροπίας του σώματος και το είδος ισορροπίας για καθένα από αυτά.
(β) Σχεδιάστε προσεγγιστικά την συνάρτηση $U(x)$ στον θετικό ημιάξονα των x. Απαντήστε σε ποιες περιοχές η δύναμη είναι απωστική σε σχέση με το σημείο $x_0 = 0$.
(γ) Ποια είναι η ελάχιστη κινητική ενέργεια που πρέπει να έχει το σώμα στην θέση $x_0 = 0$ για να μπορέσει να διαφύγει στο $x \to \infty$; Πόση είναι σε αυτήν την περίπτωση η κινητική ενέργεια για $x \to \infty$;

ΑΠΑΝΤΗΣΗ

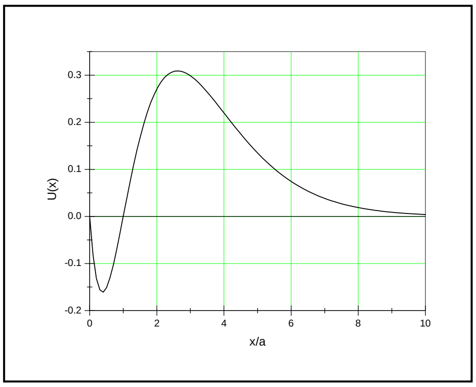
(α) $U(x) = Ax(ax-1)\mathrm{e}^{-ax} \Rightarrow \dfrac{dU}{dx} = -Ae^{-ax}\left[a^2x^2 - 3ax\_1\right]$

$$\frac{dU}{dx} = 0 \Rightarrow a^2x^2 - 3ax + 1 = 0 \quad \Rightarrow \quad x_{1,2} = \frac{3\mp\sqrt{5}}{2a}$$

$$\frac{d^2U}{dx^2} = Ae^{-ax}\left(a^3x^2 - 5a^2x + 3a + a\right) \Rightarrow \left(\frac{d^2U}{dx^2}\right)_{x_1} = Aa\sqrt{5}e^{-ax_1} \qquad \text{Ελάχιστο = Ευσταθής}$$

$$\frac{d^2U}{dx^2} = Ae^{-ax}\left(a^3x^2 - 5a^2x + 3a + a\right) \Rightarrow \left(\frac{d^2U}{dx^2}\right)_{x_2} = -Aa\sqrt{5}e^{-ax_2} \quad \text{Μέγιστο = Ασταθής}$$

(β)



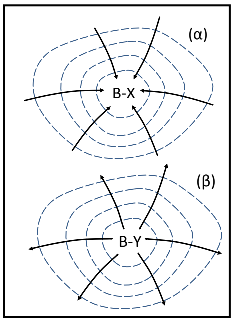
(γ)

$$E_K(x=0) + U(x=0) \geq U(x=x_2) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow E_{K,\min}(x=0) = \frac{A}{4a}\left(3+\sqrt{5}\right)\left(1+\sqrt{5}\right)e^{-ax_2}$$

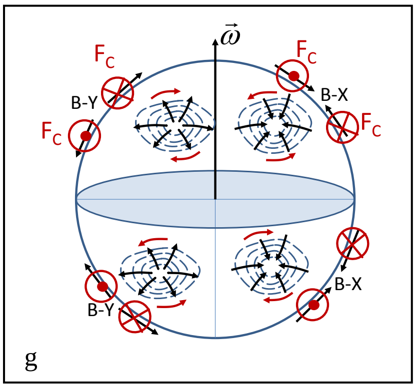
Και είναι ίδια με την κινητική ενέργεια στο $x \to \infty$ επειδή, και εκεί, η δυναμική ενέργεια είναι μηδενική.

5. Η δύναμη που ασκείται πάνω σε ένα σώμα είναι (σε N όταν τα μήκη είναι σε m) $\vec{\mathbf{F}}(x,y,z)=(y^2+2xz)\hat{\mathbf{x}}+(2xy+z^2)\hat{\mathbf{y}}+(2yz+x^2)\hat{\mathbf{z}}$. (α) Δείξτε ότι η δύναμη είναι διατηρητική. (β) Υπολογίστε τη συνάρτηση δυναμικής ενέργειας $U=U(x,y,z)$ αν $U(0,0,0)=0$.

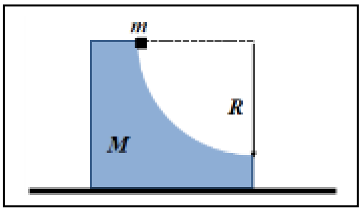


6. (α) Θεωρήστε μία περιοχή βαρομετρικού χαμηλού (B-X) στο βόρειο ημισφαίριο της Γης (π.χ., σε γεωγραφικό πλάτος θ=45$^{\mathrm{o}}$), όπως στο σχήμα-α. Οι διακεκομένες γραμμές παριστάνουν τις ισοβαρείς καμπύλες (καμπύλες ίσης πίεσης), άρα οι αέριες μάζες τείνουν να κινηθούν λόγω διαφοράς πίεσης όπως τα βέλη του ίδιου σχήματος. (i) Δείξτε ότι, σε αυτή την περίπτωση, οι αέριες μάζες του βαρομετρικού χαμηλού τίθενται σε ταυτόχρονη αριστερόστροφη κίνηση, ενώ στην περίπτωση ενός βαρομετρικού υψηλού (B-Y, σχήμα-β) συμβαίνει το αντίστροφο. (ii) Δείξτε ότι στο νότιο ημισφαίριο παρατηρείται το αντίστροφο φαινόμενο.
(β) Τα συνήθη βαρομετρικά χαμηλά που διέρχονται από τον Ελληνικό χώρο γίνονται αισθητά πρώτα στις δυτικές περιοχές, ενώ οι ανατολικές περιοχές τα αντιλαμβάνονται αργότερα (δηλ., έχουν κατεύθυνση Δύση-Ανατολή). Εξηγήστε γιατί σε κάποια τοποθεσία επικρατούν πρώτα νότιοι άνεμοι και αργότερα βόρειοι άνεμοι κατά τη διέλευση ενός βαρομετρικού χαμηλού από την τοποθεσία αυτή. Επίσης, εξηγήστε γιατί στα βαρομετρικά χαμηλά που ακολουθούν την αντίθετη πορεία, (δηλ., Ανατολή-Δύση, όπως συμβαίνει σπανιότερα και κυρίως κατά τη χειμερινή περίοδο) η αλληλουχία των ανέμων είναι αντίστροφη (δηλ., προηγούνται οι βόρειοι άνεμοι και ακολουθούν οι νότιοι)

ΑΠΑΝΤΗΣΗ



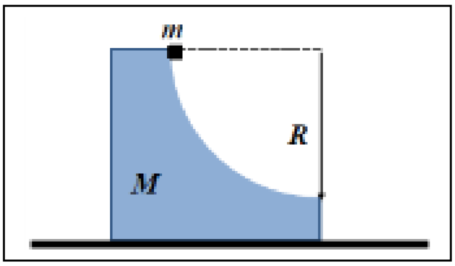
(i)-(ii) Υπεύθυνες για την αλλαγή της αρχικής πορείας των αέριων μαζών (δηλ., αυτής που επιβάλλεται λόγω βαρομετρικών διαφορών) είναι οι αντίστοιχες δυνάμεις Coriolis.
Προκειμένου να υπολογιστεί η κατεύθυνση της εκτροπής, κατά περίπτωση, πρέπει να υπολογιστεί η Coriolis ως
$\vec{F}_C=-2m\vec{\omega}\times\vec{\upsilon}_R$, όπου $\vec{\upsilon}_R$: η (αρχική) ταχύτητα των αέριων μαζών ως προς τη Γη (R: rotated system)
Στο διπλανό σχήμα, (υποθέτοντας ότι βλέπουμε την «προς εμάς» επιφάνεια της αδιαφανούς Γης) με μαύρα βέλη αποδίδονται οι (αρχικές) ταχύτητες και με κόκκινα βέλη οι (αρχικές) δυνάμεις Coriolis. Το αποτέλεσμα είναι μία ελικοειδής κίνηση <u>προς το κέντρο</u> του Βαρομετρικού Χαμηλού, και <u>από το κέντρο</u> του βαρομετρικού Υψηλού. Η «κυκλική» συνιστώσα αυτής της κίνησης δημιουργεί τη δική της Coriolis η οποία συνεισφέρει στην κεντρομόλο δύναμη της κίνησης των μαζών (όπως αυτή φαίνεται ως κυκλική στο Μη-Αδρανειακό σύστημα αναφοράς της Γης, βλ. συνέχεια στο (iii)).



7. Σημειακή μάζα m αφήνεται στο ανώτατο σημείο μίας άλλης μάζας M η οποία φέρει μία κοίλη κυλινδρική επιφάνεια (τεταρτοκύκλιο ακτίνας R, όπως στο σχήμα) και μπορεί να κινείται χωρίς τριβή σε οριζόντιο επίπεδο, ενώ και μεταξύ των μαζών m και M δεν υπάρχει τριβή. Το σύστημα βρίσκεται σε σταθερό κατακόρυφο βαρυτικό πεδίο με επιτάχυνση βαρύτητας g.

Να υπολογιστεί η ταχύτητα με την οποία φτάνει η μάζα m στο κατώτατο σημείο του τεταρτοκυκλίου και να μελετηθούν οι οριακές περιπτώσεις, $M \to \infty$, $M \to 0$, $M = m$.

ΑΠΑΝΤΗΣΗ



Καθώς το σώμα m γλυστράει προς τα «κάτω και δεξιά», μετακινείται και η μάζα Μ προς τα αριστερά.
Όταν το m φτάνει στο κατώτατο σημείο του τεταρτοκυκλίου (τελική κατάσταση), ας υποθέσουμε ότι
$\vec{V}$: η ταχύτητα του Μ ως προς το δάπεδο
$\vec{\upsilon}$: η ταχύτητα του m ως προς το Μ, οπότε:
$\vec{V}+\vec{\upsilon}$: η ταχύτητα του m ως προς το δάπεδο

Επειδή, κατά τον οριζόντιο άξονα δεν ασκούνται καθόλου εξωτερικές δυνάμεις στο σύστημα «Μ+m» και η αρχική ορμή του συστήματος είναι μηδενική, θα ισχύει και για την τελική κατάσταση: $\vec{P}_{M,\Delta}+\vec{P}_{m,\Delta}=0$, όπου ο δείκτης «Δ» σημαίνει, «ως προς το Δάπεδο», οπότε:

Διατήρηση της Ορμής:

$$\vec{P}_{M,\Delta}+\vec{P}_{m,\Delta}=0 \quad \Rightarrow \quad M\vec{V}+m\left(\vec{V}+\vec{\upsilon}\right)=0 \Rightarrow \quad (M+m)\vec{V}=-m\vec{\upsilon} \Rightarrow \quad \vec{V}=-\frac{m}{(M+m)}\vec{\upsilon}$$

$$\vec{\upsilon}_{m,\Delta}=\vec{V}+\vec{\upsilon}=-\frac{m}{(M+m)}\vec{\upsilon}+\vec{\upsilon}=\left(1-\frac{m}{(M+m)}\right)\vec{\upsilon} \quad \Rightarrow \vec{\upsilon}_{m,\Delta}=\frac{M}{(M+m)}\vec{\upsilon}$$

Διατήρηση της Ενέργειας (απουσία τριβών):

$$mgR=\frac{1}{2}MV^2+\frac{1}{2}m\upsilon_{m,\Delta}^2=\frac{1}{2}M\left(\frac{m}{m+M}\right)^2\upsilon^2+\frac{1}{2}m\left(\frac{M}{m+M}\right)^2\upsilon^2 \Rightarrow \boxed{\upsilon=\sqrt{2gR\left(\frac{M+m}{M}\right)}}$$

Και, αντικαθιστώντας στην προηγούμενη σχέση: $\vec{\upsilon}_{m,\Delta}=\frac{M}{(M+m)}\vec{\upsilon} \Rightarrow \boxed{\upsilon_{m,\Delta}=\sqrt{2gR\frac{M}{(M+m)}}}$

Η ταχύτητα της μάζας Μ: $V=\frac{m}{(M+m)}\upsilon \Rightarrow \boxed{V=\sqrt{2gR\frac{m^2}{M(M+m)}}}$

Στο κατώτερο σημείο της διαδρομής του m, μπορεί να υπολογιστεί η αντίδραση Α της μάζας Μ πάνω στην μάζα m, υπολογίζοντας την κεντρομόλο δύναμη που ασκείται στην m.
Η μάζα m εκτελεί κυκλική κίνηση στο Μη-αδρανειακό σύστημα αναφοράς που συμπίπτει με την μάζα Μ. Ως προς αυτό το σύστημα αναφοράς, η μάζα m δέχεται την αδρανειακή ψευδοδύναμη $\vec{F}_{x'}=-m\vec{a}$, όπου $\vec{a}$ η επιτάχυνση της μάζας Μ ως προς το δάπεδο. Αυτή η δύναμη, όντας οριζόντια, δεν συνεισφέρει στην κεντρομόλο δύναμη. Άρα η κεντρομόλος δύναμη θα υπολογιστεί ως προς το σύστημα της Μ, αλλά χωρίς να συνεισφέρει η αδρανειακή ψευδοδύναμη, ενώ ως ταχύτητα θα χρησιμοποιηθεί η ταχύτητα της m ως προς την Μ

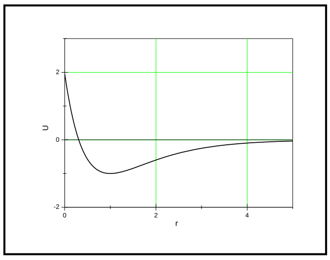
$$A-mg=F_K=m\frac{\upsilon^2}{R} \Rightarrow A=mg+m\frac{\upsilon^2}{R}=mg+2mg\left(\frac{M+m}{M}\right)$$

$$A=mg\left[1+2\left(\frac{M+m}{M}\right)\right] \quad \Rightarrow \quad \boxed{A=mg\left(3+2\frac{m}{N}\right)}$$

8. Σωματίδιο μάζας m κινείται κατά μήκος του *x*-άξονα σε χώρο όπου η συνάρτηση δυναμικής ενέργειας είναι: $U_1 = a/x^2 + bx$, όπου *a*,*b*, θετικές σταθερές. (α) Υπολογίστε την δύναμη που ασκείται στο σωματίδιο. (β) Δείξτε ότι υπάρχει απόσταση ευσταθούς ισορροίας x_0 και υπολογίστε την τιμή της. (γ) Υπολογίστε την συχνότητα ταλάντωσης για μικρές μετατοπίσεις $\Delta x = x - x_0$ γύρω από τη θέση ισορροπίας. (δ) Για ποιες σταθερές $a' \neq a$ και $b' \neq b$ μπορούμε να διπλασιάσουμε τη συχνότητα ταλάντωσης, γύρω από την ίδια θέση ευσταθούς ισορροπίας;

9. Η δυναμική ενέργεια ενός διατομικού μορίου είναι ίση με $U(r) = -U_0 + U_0\left(1 - e^{-a(r-r_0)}\right)^2$, όπου r είναι η απόσταση μεταξύ των δύο ατόμων και U_0 και a είναι θετικές σταθερές. Έστω ότι το ένα άτομο παραμένει ακίνητο στη θέση $r = 0$. **(α)** Σχεδιάστε τη συνάρτηση $U(r)$. **(β)** Βρείτε τη δύναμη που ασκείται στο ελεύθερο άτομο. Εξηγήστε για ποια *r* είναι η δύναμη ελκτική, μηδενική, απωστική. **(γ)** Το ελεύθερο άτομο βρίσκεται αρχικά στη θέση $r = 3r_0/2$ και αφήνεται να κινηθεί, με μηδενική ταχύτητα. Βρείτε τη μέγιστη ταχύτητα που θα αποκτήσει. Περιγράψετε την κίνηση που θα επακολουθήσει. **(δ)** Αν μπορούσαμε να συμπιέσουμε τα δύο άτομα, έτσι ώστε να πλησιάσουν σε απόσταση μικρότερη από την απόσταση ευσταθούς ισορροπίας τους, πόση πρέπει να γίνει η μεταξύ τους απόσταση ώστε, όταν αφεθούν ελεύθερα, να απομακρυνθούν με τρόπο ώστε να διασπασθεί το μόριο; $a > \ln 2 / r_0$.

ΑΠΑΝΤΗΣΗ



$$U(r) = -U_0 + U_0\left(1 - e^{-a(r-r_0)}\right)^2 \Rightarrow U(0) = -U_0 + U_0\left(1 - e^{ar_0}\right)^2$$

$$U(r_0) = -U_0, \qquad U(r \to \infty) = 0$$

$$\frac{dU}{dr} = 2aU_0 e^{-a(r-r_0)}\left[1 - e^{-a(r-r_0)}\right]$$

$$\frac{dU}{dr} = 0 \Rightarrow \left[1 - e^{-a(r-r_0)}\right] = 0 \Rightarrow 1 = e^{-a(r-r_0)} \Rightarrow (r - r_0) = 0 \Rightarrow r = r_0$$

$\left.\dfrac{d^2U}{dr^2}\right|_{r=r_0} > 0$, άρα, στο $r = r_0$ έχουμε ελάχιστο της δυναμικής ενέργειας

(β) Η δύναμη είναι

$$F = -\frac{dU}{dr} = -2aU_0 e^{-a(r-r_0)}\left[1 - e^{-a(r-r_0)}\right]$$

$F > 0 \Rightarrow r < r_0$ απωστική δύναμη

$F < 0 \Rightarrow r > r_0$ ελκτική δύναμη

(γ) Το ελεύθερο άτομο κρατείται στη θέση $r = 3r_0/2$ και αφήνεται να κινηθεί, με μηδενική αρχική ταχύτητα. Σε αυτή τη θέση έχει δυναμική ενέργεια $U\left(\frac{3}{2}r_0\right) = -U_0 + U_0\left[1 - e^{ar_0/2}\right]^2$.

Το άτομο υφίσταται ελκτική δύναμη και κινείται προς μικρότερα *r*. Θα αποκτήσει την μέγιστη ταχύτητα στο σημείο r_0, όπου έχει ελάχιστο η δυναμική του ενέργεια, οπότε που θα

$$U\left(\frac{3}{2}r_0\right) = -U_0 + U_0\left[1 - e^{ar_0/2}\right]^2 = U(r_0) + \frac{1}{2}m\upsilon_{\max}^2 = -U_0 + \frac{1}{2}m\upsilon_{\max}^2 \Rightarrow$$

$$U_0\left[1-e^{ar_0/2}\right]^2=\frac{1}{2}m\upsilon_{\max}^2\Rightarrow\upsilon_{\max}=\sqrt{\frac{2}{m}U_0\left[1-e^{ar_0/2}\right]^2}\Rightarrow\boxed{\upsilon_{\max}=\left[1-e^{ar_0/2}\right]\sqrt{\frac{2}{m}U_0}}$$

Στη συνέχεια θα κινηθεί, επιβραδυνόμενο προς μικρότερα r, μέχρις ότου μηδενιστεί η ταχύτητά του

(δ) Αν τα δύο άτομα συμπιεσθούν, υπάρχει μία απόσταση r_1 τέτοια ώστε η δυναμική τους ενέργεια να μηδενισθεί. Αν αφεθούν ελεύθερα από αυτή τη θέση θα αρχίσουν να απομακρύνονται λόγω απωστικής δύναμης. Όταν φθάσουν στην κατάσταση ευσταθούς ισορροπίας, θα συνεχίσουν να απομακρύνονται λόγω της ταχύτητας που έχουν αποκτήσει. Η κινητική τους ενέργεια, στη θέση ισορροπίας είναι ίση με την ενέργεια που χρειάζονται για να απομακρυνθούν στο άπειρο. Αλλά στο άπειρο θα έχουν μηδενική ενέργεια και, επειδή θα αισθάνονται ελκτική δύναμη, αυτή η κίνηση (r_1,∞) θα επαναλαμβάνεται επ' άπειρον. Η διάσπαση του μορίου επιτυγχάνεται για συσπείρωση σε αποστάσεις $r<r_1$. Τα σημεία μηδενισμού της U προσδιορίζονται ως εξής:

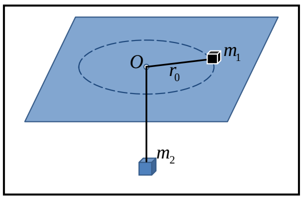
$$U(r)=0\Rightarrow -U_0+U_0\left(1-e^{-a(x-r_0)}\right)^2=0\Rightarrow\left(1-e^{-a(x-r_0)}\right)^2=1\Rightarrow 1-e^{-a(x-r_0)}=\pm 1$$

Το θετικό πρόσημο αντιστοιχεί σε $r\to\infty$ και το αρνητικό σε $r_1=r_0-(\ln 2)/a$.

Για θετική τιμή ακτίνας όπου μηδενίζεται το δυναμικό $r_1=r_0-(\ln 2)/a>0\Rightarrow\boxed{a>\ln 2/r_0}$

Άρα, προκειμένου να έχουμε διάσπαση του μορίου χρειάζεται συμπίεση σε: $r<r_0-(\ln 2)/a$.

10. Σημειακή μάζα m_1 είναι δεμένη στο άκρο ιδανικού (μη-εκτατού, αμελητέας μάζας) νήματος, που περνάει μέσα από μία μικρή τρύπα O ενός οριζόντιου επίπεδου τραπεζιού, η επιφάνεια του οποίου παρουσιάζει αμελητέα τριβή με την m_1. Στην άλλη άκρη (του κατακόρυφου τμήματος) του νήματος είναι αναρτημένη σημειακή μάζα m_2 $(m_2=m_1=m)$ και το σύστημα συγκρατείται σε στατική ισορροπία μέσα σε ομογενές πεδίο βαρύτητας με επιτάχυνση g.



(α) Αν προσδώσουμε στη μάζα m_1 ταχύτητα υ_0 κάθετα στο οριζόντιο τεντωμένο τμήμα του νήματος, να υπολογιστεί το μήκος r_0 αυτού του τμήματος, προκειμένου η m_1 να εκτελεί ομαλή κυκλική κίνηση και η m_2 να παραμένει ακίνητη. Βρείτε τη στροφορμή L_0 της m_1 ως προς το O.

(β) Ενώ το σύστημα βρίσκεται στην κατάσταση του ερωτήματος (α), εξασκούμε στη μάζα m_2 κατακόρυφη δύναμη F προς τα κάτω έτσι ώστε το οριζόντιο τμήμα του νήματος να αποκτήσει μήκος $r<r_0$. Υποθέτουμε ότι η δύναμη $F=F(r)$ ασκείται έτσι ώστε η μεταβολή μήκους να προκύπτει ως μία ακολουθία πολύ μικρών μεταβολών, σε κάθε μία από τις οποίες (δηλαδή για κάθε r) η m_1 εκτελεί ομαλή κυκλική κίνηση και η m_2 «ισορροπεί». Υπολογίστε την τιμή της δύναμης και εκφράστε το αποτέλεσμα συναρτήσει της αρχικής στροφορμής L_0 του συστήματος ως προς το σημείο O.

(γ) Υπολογίστε το έργο $W(r)$ που παράγει η δύναμη $F=F(r)$, ενώ η μάζα m_2 χάνει ύψος r_0-r και δείξτε ότι ισχύει $E_{\Delta,o\lambda}(r_0)+E_{K,o\lambda}(r_0)+W(r)=E_{\Delta,o\lambda}(r)+E_{K,o\lambda}(r)$ για το σύστημα των δύο μαζών.

ΑΠΑΝΤΗΣΗ

(α) Κεντρ/λος δύναμη ομαλής κυκλικής κίνησης: $m_1\dfrac{\upsilon_0^2}{r_0}=m_2 g\quad\Rightarrow\quad\boxed{r_0=\dfrac{m_1}{m_2}\dfrac{\upsilon_0^2}{g}=\dfrac{\upsilon_0^2}{g}}\quad(1)$

(β) Κεντρομόλος δύναμη στη νέα κατάσταση $m_1\dfrac{\upsilon^2}{r}=m_2g+F\left(r\right)$

(2)

Επειδή στην m_1 ασκείται «κεντρική» δύναμη, διατηρείται η στροφορμή

$$\boxed{L_0=m_1\upsilon_0 r_0=m\frac{\upsilon_0^3}{g}}=m_1\upsilon r \quad\Rightarrow\quad \upsilon=\frac{L_0}{m_1 r}=\upsilon_0\frac{r_0}{r} \qquad (3)$$

$$(2),\,(3):\qquad m_1\frac{\upsilon^2}{r}=m_2g+F\left(r\right)\Rightarrow\boxed{F\left(r\right)=\frac{L_0^2}{m_1r^3}-m_2g},$$

(γ) Και το έργο αυτής της δύναμης

$$W\left(r\right)=\int_{r_0}^{r}F\left(r\right)dr=\int_{r_0}^{r}\left(\frac{L_0^2}{m_1r^3}-m_2g\right)dr=\frac{L_0^2}{m_1}\int_{r_0}^{r}\frac{dr}{r^3}-m_2g\left(r-r_0\right)=\frac{L_0^2}{2m_1}\left(\frac{1}{r_0^2}-\frac{1}{r^2}\right)+m_2g\left(r_0-r\right)(4)$$

Αλλά: $E_{\Delta,o\lambda}\left(r_0\right)+E_{\mathrm{K},o\lambda}\left(r_0\right)=-m_2g\left(l-r_0\right)+\dfrac{1}{2}m_1\upsilon_0^1=-m_2g\left(l-r_0\right)+\dfrac{L_0^2}{2m_1r_0^2}$

$$E_{\Delta,o\lambda}\left(r\right)+E_{\mathrm{K},o\lambda}\left(r\right)=-m_2g\left(l-r\right)+\frac{1}{2}m_1\upsilon^2=-m_2g\left(l-r\right)+\frac{L_0^2}{2m_1r^2}$$

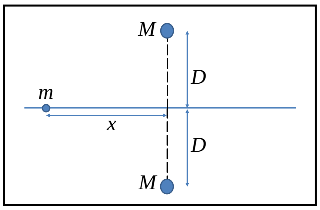
$$\left[E_{\Delta,o\lambda}\left(r_0\right)+E_{\mathrm{K},o\lambda}\left(r_0\right)\right]-\left[E_{\Delta,o\lambda}\left(r\right)+E_{\mathrm{K},o\lambda}\left(r\right)\right]=-m_2g\left(l-r_0\right)+\frac{L_0^2}{2m_1r_0^2}+m_2g\left(l-r\right)-\frac{L_0^2}{2m_1r^2}$$

$$\left[E_{\Delta,o\lambda}\left(r_0\right)+E_{\mathrm{K},o\lambda}\left(r_0\right)\right]-\left[E_{\Delta,o\lambda}\left(r\right)+E_{\mathrm{K},o\lambda}\left(r\right)\right]=m_2g\left(r_0-r\right)+\frac{L_0^2}{2m_1}\left(\frac{1}{r_0^2}-\frac{1}{r^2}\right)=W\left(r\right)$$

11. Σημειακή μάζα m αφήνεται με μηδενική ταχύτητα σε απόσταση 2R από το κέντρο σφαιρικής μάζας M (M>>m) με ακτίνα R. Αν τα δύο σώματα αισθάνονται μόνο τη μεταξύ τους βαρυτική αλληλεπίδραση, (α) να υπολογιστεί η ταχύτητα με την οποία προσκρούει η m στην επιφάνεια της M, (β) το χρονικό διάστημα που διαρκεί η κίνησή της, και (γ) η ταχύτητα με την οποία πρέπει να εκτοξευθεί η m από την επιφάνεια της M προκειμένου να μην επανέλθει.

Δίδεται: $\displaystyle\int\frac{\sqrt{x}dx}{\sqrt{a-x}}=a\arctan\left(\frac{\sqrt{x}}{\sqrt{a-x}}\right)-\sqrt{x}\sqrt{a-x}$

12. Να υπολογισθεί το έργο σταθερής δύναμης $\vec{F}=F_0\hat{n}$ όταν το σημείο εφαρμογής της μετακινείται κατά μήκος καμπύλης C με γνωστά άκρα τα οποία βρίσκονται στις διανυσματικές θέσεις $\vec{r}_1$ και $\vec{r}_2$.



13. Μάζα *m* είναι περιορισμένη να κινείται χωρίς τριβές πάνω σε ράβδο που συμπίπτει με τον άξονα-*x*. Δύο ίσες σημειακές μάζες *M* βρίσκονται στα σημεία $(x=0, y=\pm D)$ και κρατούνται ακλόνητες. Οι τρείς μάζες αλληλεπιδρούν βαρυτικά, και το σύστημα βρίσκεται μακριά από την επίδραση άλλων μαζών.

(α) Αν η μάζα *m* αφεθεί σε απόσταση $x_0 = D\sqrt{3}$ από το μέσο των των δύο μαζών *M*, με αρχική ταχύτητα μέτρου $\upsilon_0 = \sqrt{\dfrac{4GM}{6D}}$, να δείξετε ότι θα εκτελέσει περιοδική κίνηση, να υπολογίσετε το εύρος $2x_{\max}$ αυτής της κίνησης, την ταχύτητα $\upsilon = \upsilon(x)$, ως συνάρτηση της θέσης, και το ολοκλήρωμα από το οποίο μπορεί να υπολογιστεί η περίοδος αυτής της κίνησης.

(β) Δείξτε ότι το μέσον μεταξύ των δύο ακλόνητων μαζών *M* είναι σημείο ευσταθούς ισορροπίας για τη μάζα *m* και, για μικρές απομακρύνσεις από αυτό το σημείο, η μάζα *m* εκτελεί, με καλή προσέγγιση, αρμονική ταλάντωση της οποίας να υπολογισθεί η συχνότητα.

(γ) Αν αποσυρθεί η ράβδος, και οι τρείς μάζες αφεθούν ταυτόχρονα, με μηδενικές αρχικές ταχύτητες, από τις θέσεις $\left(x_0 = D\sqrt{3}, y_0 = 0\right)$ η *m*, και $(x=0, y=\pm D)$ οι δύο *M*, και γνωρίζουμε ότι συμπεριφέρονται απολύτως πλαστικά στις ενδεχόμενες μεταξύ τους κρούσεις, να προσδιορισθεί η τελική κατάσταση του συστήματος (θέσεις, ταχύτητες) και να σχεδιασθούν ποιοτικά οι τροχιές των τριών μαζών, υποθέτοντας *M*=*m*.

(δ) Να υπολογισθεί η ταχύτητα διαφυγής της m από το σύστημα των δύο M.

ΑΠΑΝΤΗΣΗ

1. (α) Αν υπάρχει κατάλληλο $x_{\max}$, θα ικανοποιεί την σχέση διατήρησης της μηχανικής ενέργειας: $$E_{o\lambda}(x_0) = \frac{1}{2}m\upsilon_0^2 - \frac{2GMm}{\sqrt{D^2+x_0^2}} = -\frac{2GMm}{\sqrt{D^2+x_{\max}^2}},$$

αντικαθιστώντας: $$\frac{4GM}{12D} - \frac{2GM}{\sqrt{D^2+3D^2}} = -\frac{2GM}{\sqrt{D^2+x_{\max}^2}} \Rightarrow \frac{GM}{3D} - \frac{GM}{D} = -\frac{2GM}{\sqrt{D^2+x_{\max}^2}}$$

$$-\frac{2GM}{3D} = -\frac{2GM}{\sqrt{D^2+x_{\max}^2}} \Rightarrow \frac{1}{3D} = \frac{1}{\sqrt{D^2+x_{\max}^2}} \Rightarrow 9D^2 = D^2 + x_{\max}^2 \Rightarrow \boxed{2x_{\max} = 2D\sqrt{8}} \quad \textbf{[5M]}$$

$$E_{o\lambda} = \frac{1}{2}m\upsilon_0^2 - \frac{2GMm}{\sqrt{D^2+x_0^2}} = \frac{1}{2}m\upsilon^2(x) - \frac{2GMm}{\sqrt{D^2+x^2}} \Rightarrow \boxed{\upsilon(x) = \sqrt{\frac{4GM}{3D}}\sqrt{\frac{3D-\sqrt{D^2+x^2}}{\sqrt{D^2+x^2}}}} \quad \textbf{[3M]}$$

$$\frac{dx}{dt} = \sqrt{\frac{4GM}{3D}}\sqrt{\frac{3D-\sqrt{D^2+x^2}}{\sqrt{D^2+x^2}}} \Rightarrow \sqrt{\frac{\sqrt{D^2+x^2}}{3D-\sqrt{D^2+x^2}}}dx = \sqrt{\frac{4GM}{3D}}dt$$

Και η περίοδος: $T = 2\int_0^{T/2} dt = \sqrt{\dfrac{3D}{GM}}\int_{-x_{\max}}^{+x_{\max}} \sqrt{\dfrac{\sqrt{D^2+x^2}}{3D-\sqrt{D^2+x^2}}}dx$ **[2M]**

(β) Το μέσον μεταξύ των δύο μαζών *M* αποτελεί σημείο ευσταθούς ισορροπίας

$$U(x) = -\frac{2GMm}{\sqrt{D^2+x^2}} \Rightarrow \frac{dU}{dx} = \frac{2xGMm}{\left(D^2+x^2\right)^{3/2}} \Rightarrow \left(\frac{dU}{dx}\right)_{x=0} = 0: \text{ μοναδικό ακρότατο}$$

$$\frac{d^2U}{dx^2} = \frac{2GMm}{\left(D^2+x^2\right)^{3/2}} - \frac{3}{2}\frac{4x^2GMm}{\left(D^2+x^2\right)^{5/2}} \Rightarrow \left(\frac{d^2U}{dx^2}\right)_{x=0} = \frac{2GMm}{D^3} > 0 : \text{ευσταθής ισορροπία}$$

Κυκλική συχνότητα: $\omega = \sqrt{s/m} = \sqrt{\left(\frac{d^2U}{dx^2}\right)_{x=0} \Big/ m} \Rightarrow \boxed{\omega = \sqrt{2GM/D^3}}$ **[10M]**

(γ) Θα συγκλίνουν στο κέντρο μάζας που θα βρίσκεται, για λόγους συμμετρίας, πάνω στον άξονα-x, στο σημείο $x_{CM} = \frac{m}{m+2M} D\sqrt{3}$.

[Πλαστική κρούση + $\vec{P}_{ολ,αρχ} = 0$] $\Rightarrow$ $\vec{P}_{ολ,τελ} = 0$: Ακίνητο συσσωμάτωμα **[5M]**

Ευθύγραμμη τροχιά έχει σίγουρα η μάζα *m*.

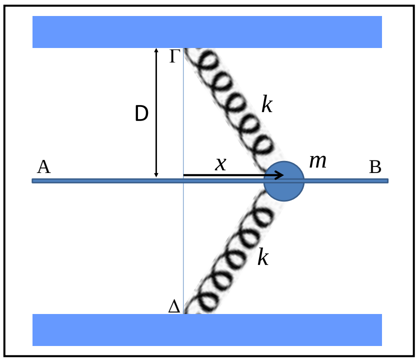
(δ-) Ταχύτητα διαφυγής της m, κατά μήκος του άξονα-x, από το σημείο $x_1 = D\sqrt{15}$.

Ταχύτητα διαφυγής: η μικρότερη ταχύτητα για να φύγει «στο άπειρο» με οριακά μηδενική ταχύητητα:

$$\frac{1}{2}m\upsilon_\delta^2(x_1) - \frac{2GMm}{\sqrt{D^2+x_1^2}} = 0 - \frac{2GMm}{\sqrt{D^2+\infty}} = 0 \Rightarrow \frac{1}{2}m\upsilon_\delta^2(x_1) = \frac{2GMm}{\sqrt{D^2+x_1^2}}$$

$$\upsilon_\delta^2(x_1) = \frac{4GM}{\sqrt{D^2+x_1^2}} = \frac{4GM}{\sqrt{D^2+15D^2}} \Rightarrow \boxed{\upsilon_\delta(x_1) = \sqrt{GM/D}}$$

Διαφεύγει προς την κατεύθυνση εκτόξευσης ανεξαρτήτως από την πλευρά στην οποία βρίσκεται



14. Στην διάταξη του σχήματος, ένα σφαιρίδιο μάζας m είναι περασμένο σε μία ράβδο AB, κατά μήκος της οποίας μπορεί να κινείται χωρίς τριβές. Στο σφαιρίδιο είναι συνδεδεμένα δύο ιδανικά ελατήρια, με την ίδια σταθερά ελατηρίου k και με το ίδιο φυσικό μήκος L_0. Τα άλλα άκρα των ελατηρίων είναι συνδεδεμένα στα ακλόνητα σημεία Γ και Δ, που βρίσκονται στην ίδια κάθετο, ως προς την τροχιά AB και απέχουν, το καθένα, απόσταση *D* από αυτήν. Η θέση του σφαιριδίου μετράται με αφετηρία το σημείο τομής των AB και ΓΔ, (που βρίσκονται στο οριζόντιο επίπεδο).

(α) Αν $D > L_0$, (να γράψετε τη δυναμική ενέργεια του συστήματος, συναρτήσει του x,) να δείξετε ότι το σφαιρίδιο έχει μία θέση ευσταθούς ισορροπίας, να δώσετε ένα ποιοτικό σχεδιάγραμα της συνάρτησης δυναμικής ενέργειας $U = U(x)$, και να υπολογίσετε την περίοδο ταλάντωσης για μικρές απομακρύνσεις από την θεση ευσταθούς ισορροπίας.

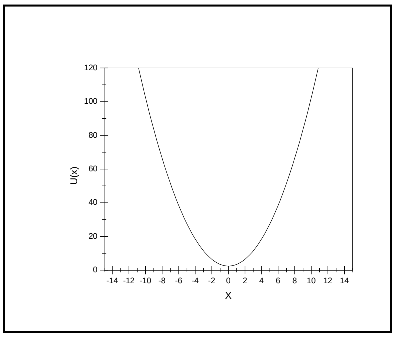
ΑΠΑΝΤΗΣΗ

$$U(x) = 2\left[\frac{1}{2}k\left(L-L_0\right)^2\right] = k\left(L^2+L_0^2-2LL_0\right) = k\left(D^2+x^2+L_0^2-2L_0\left(D^2+x^2\right)^{1/2}\right)$$

$$\frac{dU(x)}{dx} = k\left(2x - 2L_0\frac{1}{2}\left(D^2+x^2\right)^{-1/2}2x\right) = 2kx\left(1-\frac{L_0}{\sqrt{D^2+x^2}}\right)$$

$$\frac{dU}{dx} = 0 \Rightarrow \left\{\boxed{x=0},\quad \acute{\eta}\quad D^2+x^2 = L_0^2 \Rightarrow \boxed{x^2 = L_0^2 - D^2 < 0 : \alpha\delta\acute{\upsilon}\nu\alpha\tau o}\right\}$$

$$\frac{d^2U(x)}{dx^2}=2k\left(1-\frac{L_0}{\sqrt{D^2+x^2}}\right)+2kx\left(\frac{xL_0}{\left(\sqrt{D^2+x^2}\right)^3}\right)\Rightarrow\boxed{\left.\frac{d^2U(x)}{dx^2}\right|_{x=0}=2k\left(1-\frac{L_0}{D}\right)>0}$$



Επομένως, το σύστημα έχει μια θέση ευσταθούς ισορροπίας, στο x=0, όπου η ελάχιστη δυναμική ενέργεια είναι $U_{\min}=U(x=0)=k(D-L_0)^2$: ανάλογη του $(\Delta L)^2_{x=0}$ και, για μικρές απομακρύνσεις από αυτήν, το σύστημα θα εκτελεί αρμονική ταλάντωση, με συχνότητα

$$\omega=\sqrt{\left.\frac{d^2U(x)}{dx^2}\right|_{x=0}\Big/m}\Rightarrow\boxed{\omega=\sqrt{2\frac{k}{m}\left(1-\frac{L_0}{D}\right)}}$$

(β) Αν $D<L_0$, να δείξετε ότι το σφαιρίδιο έχει περισσότερες από μία θέσεις ισορροπίας, να προσδιορίσετε την τιμή του x και το είδος ισορροπίας σε κάθε μία από αυτές και να δώσετε ένα ποιοτικό σχεδιάγραμα της συνάρτησης δυναμκής ενέργειας $U=U(x)$.

ΑΠΑΝΤΗΣΗ

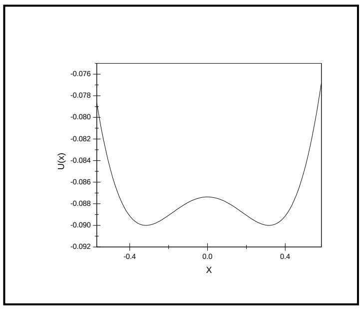
Όπως και στο (α),

$$\frac{dU(x)}{dx}=k\left(2x-2L_0\frac{1}{2}\left(D^2+x^2\right)^{-1/2}2x\right)=2kx\left(1-\frac{L_0}{\sqrt{D^2+x^2}}\right)$$

$$\frac{dU}{dx}=0\Rightarrow\left\{\boxed{x_1=0},\quad \dot{\eta}\quad D^2+x^2=L_0^2\Rightarrow\boxed{x_{2,3}=\pm\sqrt{L_0^2-D^2}}\right\}$$

$$\frac{d^2U(x)}{dx^2}=2k\left(1-\frac{L_0}{\sqrt{D^2+x^2}}\right)+2kx\left(\frac{xL_0}{\left(\sqrt{D^2+x^2}\right)^3}\right)\Rightarrow\boxed{\left.\frac{d^2U(x)}{dx^2}\right|_{x=x_1}=2k\left(1-\frac{L_0}{D}\right)<0}$$

$$\frac{d^2U(x)}{dx^2}=2k\left(1-\frac{L_0}{\sqrt{D^2+x^2}}\right)+2kx\left(\frac{xL_0}{\left(\sqrt{D^2+x^2}\right)^3}\right)=2k\left[1-\frac{L_0}{L_0}+\frac{x^2L_0}{(L_0)^3}\right]=2k\left(\frac{x}{L_0}\right)^2$$



$$\left.\frac{d^2U}{dx^2}\right|_{x=x_{2,3}}=2k\left(\frac{\pm\sqrt{L_0^2-D^2}}{L_0}\right)^2\Rightarrow\boxed{\left.\frac{d^2U}{dx^2}\right|_{x=x_{2,3}}=2k\left(\sqrt{1-\frac{D^2}{L_0^2}}\right)^2>0}$$

Επομένως, το σύστημα έχει μια θέση ασταθούς ισορροπίας, στο: $x_1=0$, και δύο θέσεις ευσταθούς ισορροπίας στα: $x_{2,3}=\pm\sqrt{L_0^2-D^2}$.

(γ) Αν $D<L_0$, να υπολογίσετε την περίοδο ταλάντωσης για μικρές απομακρύνσεις από κάθε μία θέση ευσταθούς ισορροπίας.

ΑΠΑΝΤΗΣΗ

Για μικρές απομακρύνσεις από κάθε μία από τις θέσεις ευσταθούς ισορροπίας, το σύστημα θα εκτελεί αρμονική ταλάντωση, με συχνότητα

$$\omega=\sqrt{\left.\frac{d^2U(x)}{dx^2}\right|_{x=x_{2,3}}\Big/m}\Rightarrow\boxed{\omega=\sqrt{\frac{2k}{m}\left(\sqrt{1-\frac{D^2}{L_0^2}}\right)^2}}$$

15. Σώμα μάζας m κινείται στο επίπεδο xy με τέτοιο τρόπο ώστε το διάνυσμα θέσης του να είναι $\vec{r}(t) = (\alpha\ \cos\omega t)\ \hat{x} + (\beta\ \sin\omega t)\ \hat{y}$ όπου $\alpha,\ \beta$ και ω είναι θετικές σταθερές και t ο χρόνος.

(α) Βρείτε την εξίσωση της τροχιάς του σώματος σε καρτεσιανές συντεταγμένες.

(β) Βρείτε τη δύναμη $\vec{F}$ που ασκείται στο σώμα. Δείξετε ότι η δύναμη είναι διατηρητική.

(γ) Βρείτε τη δυναμική και την κινητική ενέργεια του σώματος. Θεωρήστε ότι $U(r=0)=0$.

(δ) Ποια είναι η ολική ενέργεια του σώματος; Δείξετε ότι αυτή διατηρείται σταθερή.

(ε) Βρείτε το έργο που παράγει η δύναμη $\vec{F}$ καθώς το σώμα κινείται από τη θέση Α(α, 0), στη θέση Β(0, β). Απ.: $W_{\delta\upsilon\nu} = \frac{1}{2} m\omega^2(\alpha^2 - \beta^2)$

(στ) Υπολογίστε το έργο που παράγει η δύναμη $\vec{F}$ και ως συνάρτηση του χρόνου. Επαληθεύσετε το αποτέλεσμα (ε). Απ.: $W_{\delta\upsilon\nu} = \frac{1}{2} m\omega^2(\alpha^2 - \beta^2)\sin^2 \omega t$

10. Σώμα μάζας m κινείται σε μία διάσταση εντός περιοχής με συνάρτηση δυναμικής ενέργειας της μορφής:

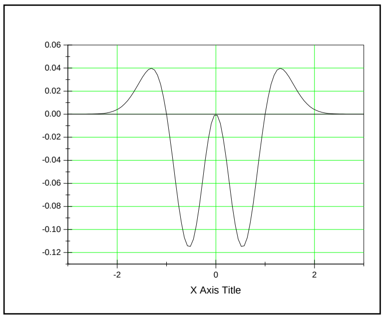
$$U(x) = -ax^2\left(x_0^2 - x^2\right)e^{-2(x/x_0)^2}.$$

(α) Υπολογίστε τα σημεία και το είδος ισορροπίας.

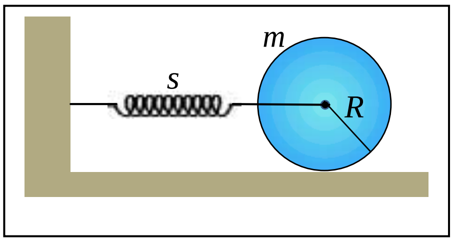
(β) Υπολογίστε τη συχνότητα ω των ταλαντώσεων μικρού πλάτους περί τα σημεία ευσταθούς ισορροπίας

(γ) Υπολογίστε την ελάχιστη κινητική ενέργεια που πρέπει να δοθεί στο σώμα, όταν βρίσκεται στη θέση ελάχιστης δυναμικής ενέργειας, πέραν της οποίας το σώμα κάνει μη φραγμένη κίνηση και, σε αυτή την περίπτωση, υπολογίστε το μέτρο της ταχύτητας του σώματος όταν απομακρύνεται στο $x \to \pm\infty$.

ΑΠΑΝΤΗΣΗ



8. Επίπεδος κυκλικός δισκοειδής τροχός ολικής μάζας m και ακτίνας R έχει επιφανειακή πυκνότητα μάζας $\sigma(r) = \sigma_0(1+(r/R))$, όπου r είναι η απόσταση από το κέντρο του δίσκου και σ_0 θετική σταθερά. Όπως φαίνεται στο σχήμα, ο τροχός ακουμπά σε οριζόντιο επίπεδο (επί του οποίου μπορεί να κυλάει χωρίς



ολίσθηση) και είναι συνδεδεμένος σε ακλόνητο κατακόρυφο τοίχο με αβαρές ελατήριο που έχει σταθερά *S*.

(α) Υπολογίστε την παράμετρο σ_0 (συναρτήσει του *R* και του *m*) και τη ροπή αδράνειας του τροχού ως προς τον άξονα που περνάει από το κέντρο του και είναι κάθετος σε αυτόν.
(β) Δείξτε ότι αν ο τροχός απομακρυνθεί λίγο από την κατάσταση ισορροπίας θα αρχίσει να ταλαντώνεται αρμονικά και βρείτε την περίοδο της ταλάντωσης.
(γ) Για μικρή αρχική απομάκρυνση *d* από την κατάσταση ισορροπίας, βρείτε την μέγιστη ταχύτητα του κέντρου του τροχού κατά την διάρκεια της ταλάντωσης.

ΑΠΑΝΤΗΣΗ

(α) $m = 2\sigma_0\pi\int_0^R \big(1+(r/R)\big) r dr \quad \Rightarrow \quad m = 2\sigma_0\pi\left[\frac{R^2}{2}+\frac{R^3}{3}\right] = \sigma_0\pi\frac{5R^2}{3} \Rightarrow \boxed{\sigma_0 = \frac{3m}{5\pi R^2}}$

Ροπή αδράνειας: $I = \int_0^R r^2 dm = \int_0^R r^2\sigma\left(R\right)dS = \int_0^R r^2\sigma_0\left(1+r/R\right)2\pi r dr$

$$I = 2\pi\sigma_0\left[\frac{R^4}{4}+\frac{R^4}{5}\right] = \frac{9}{10}\pi R^4\sigma_0 \quad \Rightarrow \quad \boxed{I = \frac{27}{50}mR^2}$$

β) Εστω ότι εκτείνουμε το ελατήριο κατά x. Λόγω της τάσης του κυλίνδρου να επανέλθει στην θέση x=0, υφίσταται, εκτός από την δύναμη επαναφοράς *F*=-*kx*, και μία δύναμη τριβής *T*, για την οποία ισχύει $T \le \mu F_K$, (και η οποία, όμως, μεταβάλλεται κατά τη διάρκεια της κίνησης, οπότε θα πρέπει να την απαλήψουμε)

Μεταφορική κίνηση: $M\ddot{x} = T - sx$ (1) Περιστροφική κίνηση: $I\ddot{\theta} = -RT$ (2)

Κύληση χωρίς ολίσθηση: $\ddot{\theta} = \frac{\ddot{x}}{R}$ (3)

(1),(2),(3) $\Rightarrow M\ddot{x} = -\frac{I}{R^2}\ddot{x} - sx \Rightarrow \ddot{x} + \frac{s}{M+\left(I/R^2\right)}x = 0$ (4)

Επομένως, το σύστημα εκτελεί αρμονική ταλάντωση με τετράγωνο της κυκλικής συχνότητας

$$\boxed{\omega^2 = \frac{s}{M+\left(I/R^2\right)} = \frac{50}{77}\frac{s}{M}}$$

(γ) $E_{\Delta,\max} = E_{K,\max} \Rightarrow \frac{1}{2}sd^2 = \frac{1}{2}m\upsilon^2 + \frac{1}{2}I\omega^2 = \frac{1}{2}\left(m\upsilon^2 + I\upsilon^2/R^2\right) \Rightarrow$

$$\Rightarrow sd^2 = \left(m\upsilon^2 + \frac{27}{50}mR^2\frac{\upsilon^2}{R^2}\right) \Rightarrow \boxed{\upsilon^2 = \frac{50}{77}\frac{s}{m}d^2 = \frac{50}{77}\omega^2 d^2}$$