ΦΥΛ. 1

Γραμμική Άλγεβρα

Χρήστος Τσαλφης

1ο εξάμηνο, ΣΗΜΜΥ.

1)

i) $\vec{a} \neq \vec{0}$, $\vec{a}\cdot\vec{b} = \vec{a}\cdot\vec{c}$, $\vec{a}\times\vec{b} = \vec{a}\times\vec{c}$

• $\vec{a}\times\vec{b} = \vec{a}\times\vec{c} \Rightarrow \vec{a}\times(\vec{b}-\vec{c}) = \vec{0} \Rightarrow \vec{b}-\vec{c} \parallel \vec{a} \Rightarrow \vec{b}-\vec{c} = \lambda\vec{a}, \lambda\in\mathbb{R}$ (1)

• $\vec{a}\cdot\vec{b} = \vec{a}\cdot\vec{c} \Rightarrow \vec{a}\cdot(\vec{b}-\vec{c}) \overset{(1)}{\Rightarrow} \vec{a}\cdot\lambda\vec{a} = 0 \Rightarrow \lambda|\vec{a}|^2 = 0 \overset{\vec{a}\neq\vec{0}}{\Longrightarrow} \lambda = 0$

Άρα (1) $\Rightarrow \vec{b}-\vec{c} = \vec{0} \Rightarrow \vec{b} = \vec{c}$

ii) $\vec{a}+\vec{b}+\vec{c} = \vec{0}$

Άρα $\vec{a} = -\vec{b}-\vec{c}$, $\vec{b} = -\vec{a}-\vec{c}$, $\vec{c} = -\vec{a}-\vec{b}$

• $\vec{a}\times\vec{b} = \vec{a}\times(-\vec{a}-\vec{c}) = -\cancel{\vec{a}\times\vec{a}}^{0} - \vec{a}\times\vec{c} = -(-\vec{c}\times\vec{a}) = \vec{c}\times\vec{a}$

• $\vec{b}\times\vec{c} = \vec{b}\times(-\vec{a}-\vec{b}) = -\vec{b}\times\vec{a} - \cancel{\vec{b}\times\vec{b}}^{0} = -(-\vec{a}\times\vec{b}) = \vec{a}\times\vec{b}$

Άρα, $\vec{a}\times\vec{b} = \vec{b}\times\vec{c} = \vec{c}\times\vec{a}$

▷ $\vec{a}\times\vec{b} = \vec{b}\times\vec{c} \Leftrightarrow \vec{a}\times\vec{b} - \vec{b}\times\vec{c} = \vec{0} \Leftrightarrow \vec{a}\times\vec{b} + \vec{c}\times\vec{b} = \vec{0} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow (\vec{a}+\vec{c})\times\vec{b} = \vec{0} \Leftrightarrow \vec{b} = \lambda(\vec{a}+\vec{c})$ (2)

$\vec{a}\times\vec{b} = \vec{c}\times\vec{a} \overset{(2)}{\Leftrightarrow} \vec{a}\times[\lambda(\vec{a}+\vec{c})] = \vec{c}\times\vec{a} \Leftrightarrow \lambda[\vec{a}\times(\vec{a}+\vec{c})] = \vec{c}\times\vec{a} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \lambda\,\cancel{\vec{a}\times\vec{a}}^{0} + \lambda\,\vec{a}\times\vec{c} = \vec{c}\times\vec{a} \Leftrightarrow \lambda(\vec{a}\times\vec{c}) - \vec{c}\times\vec{a} = \vec{0} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow (\lambda+1)(\vec{c}\times\vec{a}) = \vec{0} \Leftrightarrow \lambda = -1$ ή $\vec{c}\times\vec{a} = \vec{0}$

• Αν $\lambda = -1$, τότε προφανώς $\vec{a}+\vec{b}+\vec{c} = \vec{0}$

• Αν $\vec{c}\times\vec{a} = \vec{0}$, τότε $\vec{c} = k\vec{a}$, άρα $\vec{b} = \lambda(k+1)\vec{a}$

Τότε,

$\vec{a}+\vec{b}+\vec{c} = [1+\lambda(k+1)+k]\vec{a} = (\lambda+1)(k+1)\vec{a}$

Διαλέγοντας $\lambda\neq-1$, $k\neq-1$, κατασκευάζω (ξεκινώντας από αυθαίρετο $\vec{a}$) διανύσματα $\vec{b}, \vec{c}$ που ικανοποιούν $\vec{a}\times\vec{b} = \vec{b}\times\vec{c} = \vec{c}\times\vec{a}$ αλλά όχι $\vec{a}+\vec{b}+\vec{c} = \vec{0}$

iii) $(\vec{a}\times\vec{b})\times(\vec{a}\times\vec{c}) = ((\vec{a}\times\vec{c})\cdot\vec{a})\cdot\vec{b} - ((\vec{a}\times\vec{c})\cdot\vec{b})\cdot\vec{a}$

$= \vec{0} - ((\vec{a},\vec{c},\vec{b})\cdot\vec{a})$

$= -(-(\vec{a},\vec{b},\vec{c})\cdot\vec{a})$

$= (\vec{a},\vec{b},\vec{c})\cdot\vec{a}$

iv) $(\vec{a}\times\vec{b}, \vec{b}\times\vec{c}, \vec{c}\times\vec{a}) = [(\vec{a}\times\vec{b})\times(\vec{b}\times\vec{c})]\cdot(\vec{c}\times\vec{a}) =$

$= [((\vec{b}\times\vec{c})\cdot\vec{a})\cdot\vec{b} - ((\vec{b}\times\vec{c})\cdot\vec{b})\cdot\vec{a}]\cdot(\vec{c}\times\vec{a}) =$

$= [(\vec{b},\vec{c},\vec{a})\cdot\vec{b} - 0]\cdot(\vec{c}\times\vec{a}) =$

$= [(\vec{a},\vec{b},\vec{c})\cdot\vec{b}]\cdot(\vec{c}\times\vec{a})$

$= (\vec{a},\vec{b},\vec{c})\cdot\vec{b}\cdot(\vec{c}\times\vec{a})$

$= (\vec{a},\vec{b},\vec{c})\cdot(\vec{c}\times\vec{a})\cdot\vec{b} =$

$= (\vec{a},\vec{b},\vec{c})\cdot(\vec{c},\vec{a},\vec{b}) =$

$= (\vec{a},\vec{b},\vec{c})\cdot(\vec{a},\vec{b},\vec{c}) = (\vec{a},\vec{b},\vec{c})^2$

v) $\vec{a},\vec{b},\vec{c}$ μη συνεπίπεδα $\Rightarrow \vec{a}\times\vec{b}, \vec{b}\times\vec{c}, \vec{c}\times\vec{a}$ μη συνεπίπεδα

Αν $(\vec{a},\vec{b},\vec{c}) \neq 0 \Rightarrow (\vec{a}\times\vec{b}, \vec{b}\times\vec{c}, \vec{c}\times\vec{a}) \neq 0$

Προκύπτει από το (iv) ότι $(\vec{a}\times\vec{b}, \vec{b}\times\vec{c}, \vec{c}\times\vec{a}) = (\vec{a},\vec{b},\vec{c})^2$ και επειδή $(\vec{a},\vec{b},\vec{c}) \neq 0$ θα είναι και $(\vec{a}\times\vec{b}, \vec{b}\times\vec{c}, \vec{c}\times\vec{a}) \neq 0$.

2| $\vec{a} = i - 2j + 3\lambda k$
$\vec{b} = j + \lambda k \qquad \lambda \in \mathbb{R}$
$\vec{c} = \lambda j + k$

$$\left.\begin{array}{l}\vec{a} = i - 2j + 3\lambda k \\ \vec{b} = j + \lambda k \\ \vec{c} = \lambda j + k\end{array} \quad \lambda\in\mathbb{R} \right\} \quad \begin{array}{l}\vec{a} = (1,-2,3\lambda) \\ \vec{b} = (0,1,\lambda) \\ \vec{c} = (0,\lambda,1)\end{array}$$

Αρκεί νδο $(\vec{a},\vec{b},\vec{c})=0$.

$$(\vec{a},\vec{b},\vec{c})=0 \Leftrightarrow (\vec{a}\times\vec{b})\cdot\vec{c}=0 \Leftrightarrow \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ \beta_1 & \beta_2 & \beta_3 \\ \gamma_1 & \gamma_2 & \gamma_3 \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{vmatrix} 1 & -2 & 3\lambda \\ 0 & 1 & \lambda \\ 0 & \lambda & 1 \end{vmatrix}\begin{matrix} 1 & -2 \\ 0 & 1 \\ 0 & \lambda \end{matrix} = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 1\cdot1\cdot1 - 2\cdot\lambda\cdot0 + 3\lambda\cdot0\cdot\lambda - 3\lambda\cdot1\cdot0 - 1\cdot\lambda\cdot\lambda - (-2)\cdot0\cdot1 = 0$$

$$\Leftrightarrow 1 - 0 + 0 - 0 - \lambda^2 - 0 = 0 \Leftrightarrow 1-\lambda^2=0 \Leftrightarrow \lambda=1 \text{ ή } \lambda=-1.$$

3| a) • $(\vec{a}\times\vec{b}) = (a_2b_3 - a_3b_2)\vec{i} + (a_3b_1 - a_1b_3)\vec{j} + (a_1b_2 - a_2b_1)\vec{k}$

$(\vec{c}\times\vec{d}) = (c_2d_3 - c_3d_2)\vec{i} + (c_3d_1 - c_1d_3)\vec{j} + (c_1d_2 - c_2d_1)\vec{k}$

$(\vec{a}\times\vec{b})\cdot(\vec{c}\times\vec{d}) = (a_2b_3 - a_3b_2)(c_2d_3 - c_3d_2) + (a_3b_1 - a_1b_3)(c_3d_1 - c_1d_3)$
$+ (a_1b_2 - a_2b_1)(c_1d_2 - c_2d_1) =$

$= a_2b_3c_2d_3 - a_2b_3c_3d_2 - a_3b_2c_2d_3 + a_3b_2c_3d_2 + a_3b_1c_3d_1 - a_3b_1c_1d_3 - a_1b_3c_3d_1 +$
$+ a_1b_3c_1d_3 + a_1b_2c_1d_2 - a_1b_2c_2d_1 - a_2b_1c_1d_2 + a_2b_1c_2d_1$

• $\vec{a}\cdot\vec{c} = a_1c_1 + a_2c_2 + a_3c_3$ • $\vec{a}\cdot\vec{d} = a_1d_1 + a_2d_2 + a_3d_3$
$\vec{b}\cdot\vec{d} = b_1d_1 + b_2d_2 + b_3d_3$ $\vec{b}\cdot\vec{c} = b_1c_1 + b_2c_2 + b_3c_3$

$(\vec{a}\cdot\vec{c})(\vec{b}\cdot\vec{d}) = a_1b_1c_1d_1 + a_1b_2c_1d_2 + a_1b_3c_1d_3 + a_2b_1c_2d_1 + a_2c_2b_2d_2 + a_2b_3c_2d_3$
$+ a_3b_1c_3d_1 + a_3b_2c_3d_2 + a_3b_3c_3d_3.$

$(\vec{a}\cdot\vec{d})\cdot(\vec{b}\cdot\vec{c}) = a_1b_1c_1d_1 + a_1b_2c_2d_1 + a_1b_3c_3d_1 + a_2b_1c_1d_2 + a_2b_2c_2d_2 + a_2b_3c_3d_2$
$+ a_3b_1c_1d_3 + a_3b_2c_2d_3 + a_3b_3c_3d_3.$

$(\vec{a}\cdot\vec{c})(\vec{b}\cdot\vec{d}) - (\vec{a}\cdot\vec{d})\cdot(\vec{b}\cdot\vec{c}) = a_1b_2c_1d_2 + a_1b_3c_1d_3 + a_2b_1c_2d_1 + a_2b_3c_2d_3 + a_3b_1c_3d_1$
$+ a_3b_2c_3d_2 - a_1b_2c_2d_1 - a_1b_3c_3d_1 - a_2b_1c_1d_2 - a_2b_3c_3d_2$
$- a_3b_1c_1d_3 - a_3b_2c_2d_3. = (\vec{a}\times\vec{b})\cdot(\vec{c}\times\vec{d}).$

β) $(\vec{a}\times\vec{b})\times(\vec{c}\times\vec{d}) = [(\vec{c}\times\vec{d})\cdot\vec{a}]\cdot\vec{b} - [(\vec{c}\times\vec{d})\cdot\vec{b}]\cdot\vec{a}$

$$= (\vec{c},\vec{d},\vec{a})\cdot\vec{b} - (\vec{c},\vec{d},\vec{b})\cdot\vec{a}$$

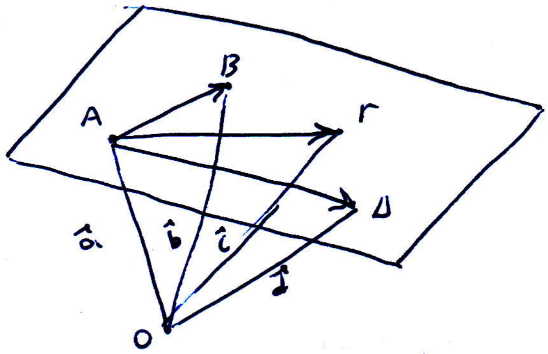
$$= (\vec{a},\vec{c},\vec{d})\cdot\vec{b} - (\vec{b},\vec{c},\vec{d})\cdot\vec{a}$$

$$(\vec{a}\times\vec{b})\times(\vec{c}\times\vec{d}) = -(\vec{c}\times\vec{d})\times(\vec{a}\times\vec{b}) = -\left\{[(\vec{a}\times\vec{b})\cdot\vec{c}]\cdot\vec{d} - [(\vec{a}\times\vec{b})\cdot\vec{d}]\cdot\vec{c}\right\} =$$

$$= [(\vec{a},\vec{b},\vec{d})\cdot\vec{c}] - [(\vec{a},\vec{b},\vec{c})\cdot\vec{d}]$$

$$= (\vec{a},\vec{b},\vec{d})\cdot\vec{c} - (\vec{a},\vec{b}\cdot\vec{c})\vec{d}$$

4]



A, B, Γ, Δ συνεπίπεδα $\Leftrightarrow$ $\vec{AB}, \vec{AΓ}, \vec{AΔ}$ συνεπίπεδα

$\vec{AB} = \vec{OB} - \vec{OA} = \vec{b} - \vec{a}$

$\vec{AΓ} = \vec{OΓ} - \vec{OA} = \vec{c} - \vec{a}$

$\vec{AΔ} = \vec{OΔ} - \vec{OA} = \vec{d} - \vec{a}$

$(\vec{AB}\times\vec{AΓ})\cdot\vec{AΔ} = 0 \Rightarrow (\vec{AB}, \vec{AΓ}, \vec{AΔ}) = 0 \Rightarrow (\vec{b}-\vec{a}, \vec{c}-\vec{a}, \vec{d}-\vec{a}) = 0 \Rightarrow$

$$\Rightarrow \begin{vmatrix} b_1-a_1 & b_2-a_2 & b_3-a_3 \\ c_1-a_1 & c_2-a_2 & c_3-a_3 \\ d_1-a_1 & d_2-a_2 & d_3-a_3 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{vmatrix} b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1-a_1 & c_2-a_2 & c_3-a_3 \\ d_1-a_1 & d_2-a_2 & d_3-a_3 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ c_1-a_1 & c_2-a_2 & c_3-a_3 \\ d_1-a_1 & d_2-a_2 & d_3-a_3 \end{vmatrix} = 0$$

$$\Rightarrow \begin{vmatrix} b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \\ d_1-a_1 & d_2-a_2 & d_3-a_3 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ c_1-a_1 & c_2-a_2 & c_3-a_3 \\ d_1-a_1 & d_2-a_2 & d_3-a_3 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} b_1 & b_2 & b_3 \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ d_1-a_1 & d_2-a_2 & d_3-a_3 \end{vmatrix} = 0$$

ΣΥΝΕΧΕΙΑ ΣΤΗΝ $\Longrightarrow$ ΑΛΛΗ ΚΟΛΛΑ.

$$\Rightarrow \begin{vmatrix} b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \\ d_1 & d_2 & d_3 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \\ a_1 & a_2 & a_3 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \\ d_1-a_1 & d_2-a_2 & d_3-a_3 \end{vmatrix} + \cancelto{0}{\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ d_1-a_1 & d_2-a_2 & d_3-a_3 \end{vmatrix}}$$

$$- \begin{vmatrix} b_1 & b_2 & b_3 \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ d_1-a_1 & d_2-a_2 & d_3-a_3 \end{vmatrix} = 0$$

$$\Rightarrow \begin{vmatrix} b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \\ d_1 & d_2 & d_3 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \\ a_1 & a_2 & a_3 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \\ d_1 & d_2 & d_3 \end{vmatrix} + \cancelto{0}{\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \\ a_1 & a_2 & a_3 \end{vmatrix}} + 0 - \begin{vmatrix} b_1 & b_2 & b_3 \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ d_1 & d_2 & d_3 \end{vmatrix}$$

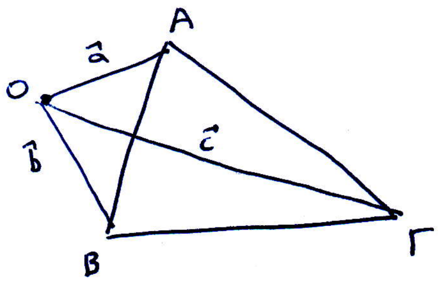
$$+ \cancelto{0}{\begin{vmatrix} b_1 & b_2 & b_3 \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ a_1 & a_2 & a_3 \end{vmatrix}} = 0$$

$$\Rightarrow (\vec{b}, \vec{c}, \vec{d}) - (\vec{b}, \vec{c}, \vec{a}) - (\vec{a}, \vec{c}, \vec{d}) - (\vec{b}, \vec{a}, \vec{d}) = 0$$

$$\Rightarrow (\vec{b}, \vec{c}, \vec{d}) - (\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}) - (\vec{c}, \vec{d}, \vec{a}) + (\vec{d}, \vec{a}, \vec{b}) = 0$$

$$\Rightarrow (\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}) - (\vec{b}, \vec{c}, \vec{d}) + (\vec{c}, \vec{d}, \vec{a}) - (\vec{d}, \vec{a}, \vec{b}) = 0$$

5)



$$\vec{AB} = \vec{OB} - \vec{OA} = \vec{b} - \vec{a}$$

$$\vec{A\Gamma} = \vec{O\Gamma} - \vec{OA} = \vec{c} - \vec{a}$$

$$E_{(AB\Gamma)} = \frac{1}{2} |\vec{AB} \times \vec{A\Gamma}| = \frac{1}{2} |(\vec{b} - \vec{a}) \times (\vec{c} - \vec{a})| =$$

$$= \frac{1}{2} |\vec{b} \times \vec{c} - \vec{b} \times \vec{a} - \vec{a} \times \vec{c} + \cancelto{0}{\vec{a} \times \vec{a}}| =$$

$$= \frac{1}{2} |\vec{b} \times \vec{c} + \vec{a} \times \vec{b} + \vec{c} \times \vec{a}|$$

6| $\vec a, \vec b$, $|\vec a| = |\vec b| = 1$, μη συγγραμμικά

$$(\vec a \cdot \vec u)\cdot \vec b + 4\vec a = 2\vec u \quad (1).$$

Από τη μορφή της εξίσωσης έχουμε ότι: $\vec u = \lambda \vec a + \mu \vec b$

Πολ/ζω εσωτ. με $\vec a, \vec b$:
$$\begin{cases} \vec a\cdot\vec u = \lambda|\vec a|^2 + \mu \vec a\cdot\vec b \\ \vec b\cdot\vec u = \lambda \vec a\cdot\vec b + \mu|\vec b|^2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \lambda + (\vec a\cdot\vec b)\cdot\mu = \vec a\cdot\vec u \\ (\vec a\cdot\vec b)\cdot\lambda + \mu = \vec b\cdot\vec u \end{cases}$$

Προκύπτει έτσι ένα 2x2 γραμμικό σύστημα με αγνώστους λ, μ.

$$D = \begin{vmatrix} 1 & \vec a\cdot\vec b \\ \vec a\cdot\vec b & 1 \end{vmatrix} = 1 - (\vec a\cdot\vec b)^2 = 1 - \cos^2(\widehat{\vec a, \vec b}) = \sin^2(\vec a, \vec b)$$

$$(\vec a\cdot\vec b) = |\vec a|\cdot|\vec b|\cdot\cos(\vec a, \vec b) = \cos(\widehat{\vec a, \vec b})$$

Επειδή $(\vec a, \vec b) \neq 0, \pi$, ισχύει $D \neq 0$.

Άρα το σύστημα έχει μοναδική λύση.

Το σύστημα στη μορφή που είναι δεν μπορεί να λυθεί διότι περιέχει το άγνωστο διάνυσμα $\vec u$.

Πολ/ζω εσωτ. την (1) με $\vec a, \vec b$:

- $(\vec a\cdot\vec u)(\vec a\cdot\vec b) + 4|\vec a|^2 = 2\vec u\cdot\vec a$

  $(\vec a\cdot\vec u)(\vec a\cdot\vec b) + 4 - 2\vec u\cdot\vec a = 0$

  $(\vec a\cdot\vec u)\left[(\vec a\cdot\vec b) - 2\right] = -4$

  πρέπει $\vec a\cdot\vec b - 2 \neq 0 \Leftrightarrow \vec a\cdot\vec b \neq 2 \Leftrightarrow \cos(\vec a, \vec b) \neq 2$, ισχύει.

  $$\vec a\cdot\vec u = \frac{4}{2 - \cos(\vec a, \vec b)} \quad (*)$$

- $(\vec a\cdot\vec u)\cdot|\vec b|^2 + 4\vec a\cdot\vec b = 2\vec u\cdot\vec b$

  $$\vec b\vec u = 2\vec a\cdot\vec b + \frac{\vec a\cdot\vec u}{2} \overset{(*)}{=} 2\cos(\vec a, \vec b) + \frac{2}{2 - \cos(\vec a, \vec b)}$$

Βρίσκω D_x, D_y και βρίσκω λύση του συστήματος, δηλ. τα λ, μ.

Οπότε, έπειτα μπορώ να εκφράσω το $\vec u$ ως γραμμικό συνδυασμό των $\vec a, \vec b$

7 $\vec{x} + \vec{x} \times \vec{\alpha} = \vec{b}$ (1)

Πολ/ζω εξωτ. από δεξιά την (1) με $\vec{\alpha}$:

$$\vec{x}\times\vec{\alpha} + (\vec{x}\times\vec{\alpha})\times\vec{\alpha} = \vec{b}\times\vec{\alpha} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \vec{x}\times\vec{\alpha} + (\vec{x}\cdot\vec{\alpha})\cdot\vec{\alpha} - (\vec{\alpha}\cdot\vec{\alpha})\vec{x} = \vec{b}\times\vec{\alpha}$$

$$\Rightarrow \vec{x}\times\vec{\alpha} + (\vec{\alpha}\cdot\vec{x})\cdot\vec{\alpha} - |\vec{\alpha}|^2\cdot\vec{x} = \vec{b}\times\vec{\alpha}$$

$$\overset{(1)}{\Rightarrow} \vec{b}-\vec{x} + (\vec{\alpha}\cdot\vec{x})\cdot\vec{\alpha} - |\vec{\alpha}|^2 x = \vec{b}\times\vec{\alpha}$$

$$\Rightarrow (|\vec{\alpha}|^2+1)\vec{x} = \vec{b} + (\vec{\alpha}\cdot\vec{x})\cdot\vec{\alpha} - \vec{b}\times\vec{\alpha}$$

$$\Rightarrow \vec{x} = \frac{\vec{b} + (\vec{\alpha}\cdot\vec{x})\cdot\vec{\alpha} + \vec{\alpha}\times\vec{b}}{|\vec{\alpha}|^2+1} \quad (*)$$

Πολ/ζω εσωτ. την (1) με $\vec{\alpha}$:

$$\vec{x}\cdot\vec{\alpha} + \cancel{(\vec{x}\times\vec{\alpha})\cdot\vec{\alpha}}^{\,0} = \vec{b}\cdot\vec{\alpha} \Rightarrow \vec{\alpha}\cdot\vec{x} = \vec{\alpha}\cdot\vec{b} \quad (2)$$

$$(*) \overset{(2)}{\Longrightarrow} \vec{x} = \frac{\vec{b} + (\vec{\alpha}\cdot\vec{b})\cdot\vec{\alpha} + \vec{\alpha}\times\vec{b}}{|\vec{\alpha}|^2+1}$$

8 $\vec{\alpha}\times(\vec{w}\times\vec{\alpha}) + \vec{w} = \vec{b}$ (1)

i) Πολ/ζω εσωτ. την (1) με $\vec{\alpha}$:

$$\cancel{\vec{\alpha}\times(\vec{w}\times\vec{\alpha})\cdot\vec{\alpha}}^{\,0} + \vec{w}\cdot\vec{\alpha} = \vec{b}\cdot\vec{\alpha} \Rightarrow \vec{w}\cdot\vec{\alpha} = \vec{b}\cdot\vec{\alpha} \quad (*)$$

Πολ/ζω εξωτ. από δεξιά την (1) με $\vec{\alpha}$:

$$[\vec{\alpha}\times(\vec{w}\times\vec{\alpha})]\times\vec{\alpha} + \vec{w}\times\vec{\alpha} = \vec{b}\times\vec{\alpha} \Rightarrow [-(\vec{w}\times\vec{\alpha})\times\vec{\alpha}]\times\vec{\alpha} + \vec{w}\times\vec{\alpha} = \vec{b}\times\vec{\alpha} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow [|\vec{\alpha}|^2\cdot w - (\vec{w}\cdot\vec{\alpha})\cdot\vec{\alpha}]\times\vec{\alpha} + \vec{w}\times\vec{\alpha} = \vec{b}\times\vec{\alpha} \Rightarrow (|\vec{\alpha}|^2\cdot\vec{w})\times\vec{\alpha} - [(\vec{w}\cdot\vec{\alpha})\cdot\vec{\alpha}]\times\vec{\alpha} + \vec{w}\times\vec{\alpha} = \vec{b}\times\vec{\alpha}$$

$$\overset{(*)}{\Rightarrow} |\vec{\alpha}|^2\cdot(\vec{w}\times\vec{\alpha}) - [(\vec{b}\cdot\vec{\alpha})\cdot\vec{\alpha}]\times\vec{\alpha} + \vec{w}\times\vec{\alpha} = \vec{b}\times\vec{\alpha} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow |\vec{\alpha}|^2(\vec{w}\times\vec{\alpha}) - 0 + \vec{w}\times\vec{\alpha} = \vec{b}\times\vec{\alpha} \Rightarrow (|\vec{\alpha}|^2+1)(\vec{w}\times\vec{\alpha}) = \vec{b}\times\vec{\alpha} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \vec{w}\times\vec{\alpha} = (\vec{b}\times\vec{\alpha})\cdot\left(\frac{1}{|\vec{\alpha}|^2+1}\right) \quad (2)$$

ii) Άρα, έχουμε: $\begin{cases} \vec{a}\cdot\vec{w} = \vec{a}\cdot\vec{b} \\ \vec{w}\times\vec{a} = \left(\dfrac{1}{1+|\vec{a}|^2}\right)\cdot(\vec{b}\times\vec{a}) \end{cases}$

Πολ/ζω την (2) εξίσ. από αριστερά με $\vec{a}$

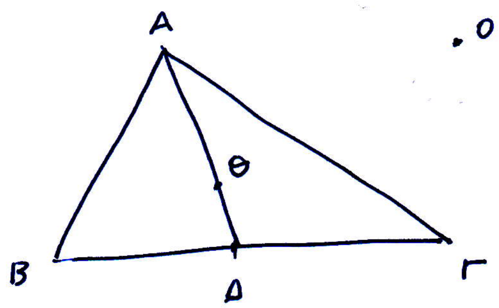
$$(2) \Rightarrow \vec{a}\times(\vec{w}\times\vec{a}) = \left(\frac{1}{1+|\vec{a}|^2}\right)\cdot\left[\vec{a}\times(\vec{b}\times\vec{a})\right]$$

$$\overset{(1)}{\Rightarrow} \vec{b} - \vec{w} = \left(\frac{1}{1+|\vec{a}|^2}\right)\cdot\left[\vec{a}\times(\vec{b}\times\vec{a})\right]$$

$$\Rightarrow -\vec{w} = \left(\frac{1}{1+|\vec{a}|^2}\right)\cdot\left[-(\vec{b}\times\vec{a})\times\vec{a}\right] - \vec{b}$$

$$\Rightarrow \vec{w} = \left(\frac{1}{1+|\vec{a}|^2}\right)\cdot\left[(\vec{b}\times\vec{a})\times\vec{a}\right] + \vec{b}$$

9]



α) $\vec{OB} + \vec{O\Gamma} = 2\vec{O\Delta}$

Ισχύει $\vec{B\Gamma} = 2\vec{B\Delta}$

$\vec{O\Gamma} - \vec{OB} = 2(\vec{O\Delta} - \vec{OB})$

$\vec{O\Gamma} - \vec{OB} = 2\vec{O\Delta} - 2\vec{OB}$

$\vec{OB} + \vec{O\Gamma} = 2\vec{O\Delta}$.

β) $\vec{OA} + \vec{OB} + \vec{O\Gamma} = 3\vec{O\Theta}$

$\vec{A\Theta} = \frac{2}{3}\vec{A\Delta} \Rightarrow \vec{O\Theta} - \vec{OA} = \frac{2}{3}(\vec{O\Delta} - \vec{OA}) \Rightarrow \vec{O\Theta} - \vec{OA} = \frac{2}{3}\vec{O\Delta} - \frac{2}{3}\vec{OA} \Rightarrow$

$\Rightarrow 3\vec{O\Theta} - 3\vec{OA} = 2\vec{O\Delta} - 2\vec{OA} \Rightarrow 3\vec{O\Theta} = \vec{OA} + 2\vec{O\Delta} \overset{(\alpha)}{\Rightarrow} \vec{OA} + \vec{OB} + \vec{O\Gamma} = 3\vec{O\Theta}$

γ) $(\Rightarrow)$: $\vec{\Theta A} + \vec{\Theta B} + \vec{\Theta\Gamma} = \vec{0} \Leftrightarrow \vec{OA} - \vec{O\Theta} + \vec{OB} - \vec{O\Theta} + \vec{O\Gamma} - \vec{O\Theta} = \vec{0} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \vec{OA} + \vec{OB} + \vec{O\Gamma} = 3\vec{O\Theta}$

Αν Θ βαρύκεντρο, τότε ισχύει η αποδεικτέα.

$(\Leftarrow)$: $\vec{OA} + \vec{OB} + \vec{O\Gamma} = 3\vec{O\Theta} \Rightarrow \vec{OA} + 2\vec{O\Delta} = 3\vec{O\Theta} \Leftrightarrow \vec{OA} - \vec{O\Theta} = 2(\vec{O\Theta} - \vec{O\Delta})$

$\Leftrightarrow \vec{\Theta A} = 2\vec{\Delta\Theta}$.

Άρα Θ βαρύκεντρο

10)

$$A=\begin{vmatrix} 1+a & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1-a & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1+b & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1-b \end{vmatrix} \overset{(-1)}{=} \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1-a & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1+b & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1-b \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1-a & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1+b & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1-b \end{vmatrix} =$$

$$= \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & -a & 0 & 0 \\ 0 & 0 & b & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -b \end{vmatrix} + a \left|\begin{array}{ccc|cc} 1-a & 1 & 1 & 1-a & 1 \\ 1 & 1+b & 1 & 1 & 1+b \\ 1 & 1 & 1-b & 1 & 1 \end{array}\right. =$$

$$= a\cdot b^2 + a\left[(1-a)(1+b)(1-b)+1+1-(1+b)-(1-a)-(1-b)\right] = \dots$$

11)

$$\begin{vmatrix} x & a & b & c \\ a & x & b & c \\ a & b & x & c \\ a & b & c & x \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow \begin{vmatrix} x+a+b+c & a & b & c \\ x+a+b+c & x & b & c \\ x+a+b+c & b & x & c \\ x+a+b+c & b & c & x \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow (x+a+b+c)\overset{(-1)}{\cdot}\begin{vmatrix} 1 & a & b & c \\ 1 & x & b & c \\ 1 & b & x & c \\ 1 & b & c & x \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow (x+a+b+c)\begin{vmatrix} 1 & a & b & c \\ 0 & x-a & 0 & 0 \\ 0 & b-a & x-b & 0 \\ 0 & b-a & c-b & x-c \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow (x+a+b+c)\cdot 1\cdot \begin{vmatrix} x-a & 0 & 0 \\ b-a & x-b & 0 \\ b-a & c-b & x-c \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow$$

$\Rightarrow (x+a+b+c)(x-a)(x-b)(x-c)=0 \Rightarrow x=a$ și $x=b$ și $x=c$ și $x=-(a+b+c)$

12

$$A = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 & \cdots & a_{n-1} & a_n \\ -x & x & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & -x & x & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & x & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & -x & x \end{vmatrix} =$$

$$= \begin{vmatrix} a_1+a_2+\dots+a_n & a_2 & a_3 & \cdots & a_{n-1} & a_n \\ 0 & x & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & -x & x & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & & \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & x & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & -x & x \end{vmatrix} =$$

$$= (a_1+a_2+\dots+a_n) \cdot \begin{vmatrix} x & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ -x & x & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & x & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & -x & x \end{vmatrix} = (a_1+a_2+\dots+a_n) \cdot x^{n-1}$$

13

a) Για 3×3:
$$A=\begin{bmatrix}1 & 3 & 3\\ 3 & 2 & 3\\ 3 & 3 & 3\end{bmatrix}_{3\times3}$$

Άρα
$$A=\begin{vmatrix}1 & \nu & \nu & \dots & \nu & \nu\\ \nu & 2 & \nu & \dots & \nu & \nu\\ \nu & \nu & 3 & \dots & \nu & \nu\\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots\\ \nu & \nu & \nu & \dots & \nu-1 & \nu\\ \nu & \nu & \nu & \dots & \nu & \nu\end{vmatrix}(-1) =$$

$$=\begin{vmatrix}1-\nu & 0 & 0 & \dots & 0 & 0\\ 0 & 2-\nu & 0 & \dots & 0 & 0\\ 0 & 0 & 3-\nu & \dots & 0 & 0\\ \vdots & \vdots & \vdots & \dots & \vdots & \vdots\\ 0 & 0 & 0 & \dots & -1 & 0\\ \nu & \nu & \nu & \dots & \nu & \nu\end{vmatrix} =$$

$$= (1-\nu)(2-\nu)(3-\nu)\cdot\ldots\cdot(-1)\cdot\nu =$$

$$= [-(\nu-1)]\cdot[-(\nu-2)]\cdot\ldots\cdot(-1)\cdot\nu =$$

$$= (-1)^{\nu-1}\left[1\cdot\ldots\cdot(\nu-2)\cdot(\nu-1)\cdot\nu\right] = (-1)^{\nu-1}\cdot\nu!$$

β) Για 3×3: $A = \begin{array}{c} \quad a_{11} \\ \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \end{bmatrix}_{3\times3} \end{array}$

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 2 & \cdots & 2 & 2 \\ 1 & 2 & 3 & \cdots & 3 & 3 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots & \vdots \\ 1 & 2 & 3 & \cdots & v-1 & v-1 \\ 1 & 2 & 3 & \cdots & v-1 & v \end{vmatrix}^{(-1)} =$$

$$= \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & \cdots & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & \cdots & 2 & 2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 1 & 2 & \cdots & v-2 & v-2 \\ 0 & 1 & 2 & \cdots & v-2 & v-1 \end{vmatrix} =$$

$$= 1 \begin{vmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 & 1 \\ 1 & 2 & \cdots & 2 & 2 \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots & \vdots \\ 1 & 2 & \cdots & v-2 & v-2 \\ 1 & 2 & \cdots & v-2 & v-1 \end{vmatrix} = |A_{v-1}| = |A_{v-2}| = \cdots = |A_2| = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 2-1 = 1$$

γ) Για 3x3: $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 2 & 3 \\ 3 & 3 & 3 \end{bmatrix}_{3\times3}$

Βγάζω ν κοινό παράγοντα

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & \cdots & \nu-1 & \nu \\ 2 & 2 & 3 & \cdots & \nu-1 & \nu \\ 3 & 3 & 3 & \cdots & \nu-1 & \nu \\ \vdots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots & \vdots \\ \nu-1 & \nu-1 & \nu-1 & \cdots & \nu-1 & \nu \\ \nu & \nu & \nu & \cdots & \nu & \nu \end{vmatrix} = \nu \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & \cdots & \nu-1 & 1 \\ 2 & 2 & 3 & \cdots & \nu-1 & 1 \\ 3 & 3 & 3 & \cdots & \nu-1 & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots & \vdots \\ \nu-1 & \nu-1 & \nu-1 & \cdots & \nu-1 & 1 \\ \nu & \nu & \nu & \cdots & \nu & 1 \end{vmatrix} \overset{(1)}{=}$$

$$= \nu \cdot \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & \cdots & \nu-1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots & \vdots \\ \nu-2 & \nu-3 & \nu-4 & \cdots & 0 & 0 \\ \nu-1 & \nu-2 & \nu-3 & \cdots & 1 & 0 \end{vmatrix}$$

(Αναπτύσσω την ορίζουσα ως προς την τελευταία στήλη. Το πρόσημο του 1 είναι + αν ν περιττός και −1 αν ν άρτιος)

$$= (-1)^{\nu-1} \cdot \nu \cdot \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots & \vdots \\ \nu-2 & \nu-3 & \nu-4 & \cdots & 1 & 0 \\ \nu-1 & \nu-2 & \nu-3 & \cdots & 2 & 1 \end{vmatrix} =$$

(Ορίζουσα κάτω τριγωνικού πίνακα με διαγώνια στοιχεία μονάδες)

$$= (-1)^{\nu-1} \cdot \nu \cdot 1 = (-1)^{\nu-1} \cdot \nu$$

δ) Για 3×3 : $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}_{3\times3}$

$$A = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & \dots & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & \dots & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & \dots & 1 & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \dots & \vdots & \vdots \\ 1 & 1 & 1 & \dots & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & \dots & 1 & 0 \end{vmatrix} =$$

(προσθέτω όλες τις στήλες στη 1η)

$$= \begin{vmatrix} \nu-1 & 1 & 1 & \dots & 1 & 1 \\ \nu-1 & 0 & 1 & \dots & 1 & 1 \\ \nu-1 & 1 & 0 & \dots & 1 & 1 \\ \vdots & \vdots & & \dots & \vdots & \vdots \\ \nu-1 & 1 & 1 & \dots & 0 & 1 \\ \nu-1 & 1 & 1 & \dots & 1 & 0 \end{vmatrix} =$$

(βγάζω το $\nu-1$ ως κοιν/πο από την 1η στήλη)

$$= (\nu-1) \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \dots & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & \dots & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & \dots & 1 & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \dots & \vdots & \vdots \\ 1 & 1 & 1 & \dots & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & \dots & 1 & 0 \end{vmatrix} (-1)$$

(πολ/ζω επί -1 την 1η γραμμή και προσθέτω σε όλες τις υπόλοιπες)

$$= (\nu-1) \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \dots & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \dots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & -1 \end{vmatrix} = (\nu-1) \begin{vmatrix} -1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & -1 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & -1 & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & -1 \end{vmatrix} =$$

αναπτύσσω ως προς την 1η στήλη

διαγώνιος πίνακας τάξης $\nu-1$ με διαγώνια στοιχεία ίσα με -1.

$$= (\nu-1)\cdot(-1)^{\nu-1}$$