ΕΜΠ – ΣΧΟΛΗ ΕΜΦΕ – ΤΟΜΕΑΣ ΦΥΣΙΚΗΣ – ΑΚΑΔΗΜΑΪΚΟ ΕΤΟΣ 2017-18
ΜΑΘΗΜΑ: ΦΥΣΙΚΗ-Ι, 1^{ΟΥ} ΕΞΑΜΗΝΟΥ ΣΧΟΛΗΣ ΗΛΕΚΤΡΟΛΟΓΩΝ ΜΜΥ
Διδάσκοντες: Η. Ζουμπούλης, Ι. Ράπτης

Α΄ ΣΕΙΡΑ ΑΣΚΗΣΕΩΝ 18 Οκτωβρίου 2017

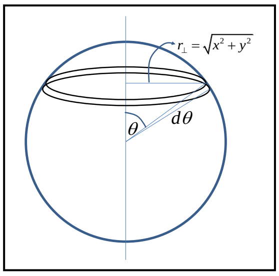
Να επιστραφούν λυμένες μέχρι 30/10/17, οι 1, 2, 3, 4, 5, [ΠΡΟΣΟΧΗ: Οι λύσεις να είναι χειρόγραφες και, είτε να παραδοθούν στο μάθημα, είτε να αναρτηθούν ως PDF στις «Εργασίες» του mycourses]

1. Δίνεται ότι: $\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + ...,\quad -1 < x \le 1$. Να υπολογιστεί η τιμή του $\ln(1+x)$ με ακρίβεια τριών δεκαδικών ψηφίων, για $x = \pm 0,3$. Μέχρι ποιον όρο του αναπτύγματος πρέπει να προχωρήσει κανείς, για κάθε πρόσημο του $x = \pm 0,3$ προκειμένου να έχει την ίδια ακρίβεια και για τα δύο πρόσημα ; Πόσο είναι το επί % σφάλμα, για κάθε πρόσημο, αν σταματήσει το ανάπτυγμα μέχρι και τον κυβικό όρο ;

2. Αν τα **A** και **B** είναι σταθερά διανύσματα και **r**(t) = e^{at}**A**+ e^{-at}**B** (όπου *a* σταθερά), να δείξετε ότι τα διανύσματα $\ddot{\boldsymbol{r}}(t)$ και $\boldsymbol{r}(t)$ έχουν την ίδια κατεύθυνση για κάθε *t*.

3. Η ροπή μιας δύναμης ως προς το σημείο Ο ορίζεται ως $\vec{N} = \vec{r} \times \vec{F}$, όπου $\vec{r}$ είναι το διάνυσμα από το Ο στο σημείο στο οποίο ασκείται η δύναμη $\vec{F}$. Να δειχθεί ότι η συνολική ροπή δύο ίσων και αντίθετων δυνάμεων $\vec{F}$ και $-\vec{F}$ που ασκούνται στα σημεία $\vec{r}_1$ και $\vec{r}_2$ αντίστοιχα (ζεύγος δυνάμεων), είναι ανεξάρτητη του σημείου ως προς το οποίο υπολογίζεται.

4. Βρείτε τις γωνίες που σχηματίζουν, ανά δύο, οι διαγώνιοι εδρών που άγονται από μία κορυφή προς τις παρακείμενες έδρες ενός ορθογωνίου παραλληλεπιπέδου, διαστάσεων $(2\times3\times5)$, καθώς και οι γωνίες που κάθε μία από αυτές τις διαγωνίους σχηματίζει με την «χωρο-διαγώνιο» που άγεται από την ίδια κορυφή προς την απέναντι κορυφή του παραλληλεπιπέδου.



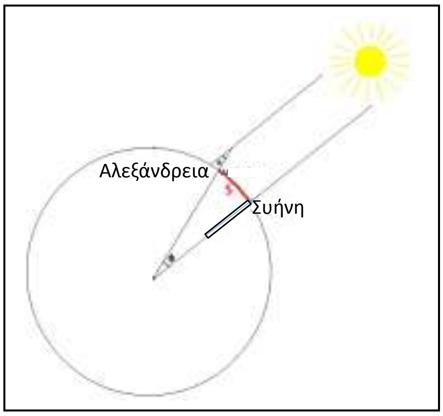
5. Γνωρίζοντας ότι η ροπή αδράνειας λεπτού δίσκου ακτίνας *r* και μάζας *m*, περί τον άξονα συμμετρίας του είναι $I = mr^2/2$, να υπολογίσετε τη ροπή αδράνειας μίας σφαίρας μάζας *M* και ακτίνας *R*, περί άξονα που διέρχεται από το κέντρο της, αντιμετωπίζοντάς την ως κατάλληλη επαλληλία διαφορικών δίσκων, με μεταβλητή ακτίνα και με σταθερή κατάλληλη πυκνότητα μάζας.

6. Δείξτε ότι αν το άθροισμα και η διαφορά δύο διανυσμάτων $\vec{A}, \vec{B}$ έχουν ίσα μέτρα $\left[\left|\vec{A}+\vec{B}\right| = \left|\vec{A}-\vec{B}\right|\right]$, τότε τα δύο διανύσματα, $\vec{A}, \vec{B}$ είναι κάθετα μεταξύ τους (διαγώνιοι ορθογώνιου παραλληλογράμμου). Επίσης, δείξτε ότι το άθροισμα και η διαφορά δύο διανυσμάτων $\vec{A}, \vec{B}$ που έχουν ίσα μέτρα, είναι διανύσματα κάθετα μεταξύ τους (διαγώνιοι ρόμβου).

7. Δείξτε ότι για κάθε διάνυσμα $\vec{A}$ και για κάθε μοναδιαίο $\hat{n}$ ισχύει $\vec{A} = (\hat{n}\cdot\vec{A})\cdot\hat{n} + (\hat{n}\times\vec{A})\times\hat{n}$

8. Βρείτε τη συνθήκη που πρέπει να ικανοποιούν οι αρχικές θέσεις $\vec{r}_{01}, \vec{r}_{02}$ και οι σταθερές ταχύτητες κίνησης $\vec{\upsilon}_{01}, \vec{\upsilon}_{02}$ δύο κινητών, προκειμένου να συναντηθούν, κάποια χρονική στιγμή. Σε περίπτωση που ικανοποιείται αυτή η συνθήκη, υπολογίστε τη χρονική στιγμή.

9. (α) Μέλισσα πλησιάζει στην κυψέλη της ακολουθώντας σπειροειδή τροχιά που περιγράφεται από τις εξισώσεις $r = b - ct$ και $\dot{\theta} = kt$. Υπολογίστε την ταχύτητά της ως συνάρτηση του χρόνου. (β) Όταν φεύγει από την κυψέλη ακολουθεί τροχιά που περιγράφεται από τις σχέσεις $r = be^{at}$, $\theta = \omega t$. Δείξτε ότι η γωνία ταχύτητας και επιτάχυνσης παραμένει σταθερή με το χρόνο.



10. Ο αρχαίος Έλληνας μαθηματικός Ερατοσθένης, που γεννήθηκε στη Κυρήνη (της σημερινής Λιβύης) και έζησε και εργάστηκε στην Αλεξάνδρεια (276-195 π.Χ), πληροφορήθηκε ότι κατά το μεσημέρι του θερινού ηλιοστασίου, στην πόλη Συήνη (σημερινό Ασουάν της Αιγύπτου) ο ήλιο «ρίχνει» τις ακτίνες του κατακόρυφα (φωτίζοντας μέχρι και τον πυθμένα ενός βαθειού πηγαδιού), ενώ αντίστοιχα στην Αλεξάνδρεια οι ακτίνες του Ήλιου «έπεφταν» υπό γωνία 7.2^o ως προς την τοπική κατακόρυφο. Γνωρίζοντας την απόσταση «Αλεξάνδρεια – Συήνη», υπολόγισε το μήκος της περιφέρειας της Γης. Βρείτε τα αντίστοιχα στοιχεία και επαναλάβετε τον υπολογισμό.

11. Αν $\vec{\upsilon}$ είναι το διάνυσμα της ταχύτητας και $\vec{a}$ το διάνυσμα της επιτάχυνσης ενός κινητού, δείξτε ότι $\vec{\upsilon}\cdot\vec{a} = \upsilon\dot{\upsilon}$, (όπου $\upsilon = |\vec{\upsilon}|$). Το χρήσιμο συμπέρασμα αυτού του αποτελέσματος είναι ότι, όταν ένα κινητό, που αλλάζει το διάνυσμα της ταχύτητάς του με το χρόνο, έχει σταθερό μέτρο ταχύτητας, τότε η επιτάχυνση είναι κάθετη στην ταχύτητα. [Υπόδειξη: Θυμηθείτε ότι $\vec{\upsilon}\cdot\vec{\upsilon} = \upsilon\upsilon$, ενώ $\dot{\upsilon} \neq |\vec{a}|$]

12. Δύο χάντρες *A* και *B* συνδέονται με μία συμπαγή ράβδο μήκους *L*. Τα δύο σώματα ολισθαίνουν κατά μήκος δύο κάθετων αξόνων *x* και *y* αντίστοιχα. Αν η χάντρα *A* ολισθαίνει προς τα αριστερά δηλαδή προς την αρχή *O* των δύο αξόνων με σταθερή ταχύτητα v_0, βρείτε την ταχύτητα της *B* όταν η ράβδος σχηματίζει γωνία $\theta=30^0$, 45^0 , 60^0 με τον άξονα των *x*.

13. Δύο σωματίδια με μάζες m και $2m$, κινούνται έτσι ώστε να έχουν διανύσματα θέσης

$$\vec{\mathbf{r}}_1 = (3t+2t^2)\hat{\mathbf{x}} + (4+4t^2)\hat{\mathbf{y}} + (5+2t)\hat{\mathbf{z}} \quad \text{και} \quad \vec{\mathbf{r}}_2 = (20-t-t^2)\hat{\mathbf{x}} + (10+9t-2t^2)\hat{\mathbf{y}} + (1+4t)\hat{\mathbf{z}}$$

αντίστοιχα, όπου t = χρόνος (οι αποστάσεις σε m και ο χρόνος σε s).

(α) Αποδείξετε ότι τα σωματίδια θα συγκρουσθούν και βρείτε πότε θα συμβεί αυτό. Απ.: $\tau = 2\,\text{s}$

(β) Ποια δύναμη ασκείται πάνω στο κάθε σωματίδιο; Ποια είναι η ολική εξωτερική δύναμη που ασκείται στο σύστημα; Απ.: $\vec{\mathbf{F}}_{o\lambda} = \mathbf{0}$

(γ) Διατηρείται η ορμή του συστήματος; Αν ναι, πόση είναι; Απ.: $\vec{\mathbf{P}}_{o\lambda} = m(\hat{\mathbf{x}} + 18\hat{\mathbf{y}} + 10\hat{\mathbf{z}})$

(δ) Αν μετά την κρούση τα σωματίδια ενώνονται σε ένα, να βρεθεί η θέση τους ως συνάρτηση του χρόνου. Απ.: $\vec{\mathbf{r}} = \frac{1}{3}(40\hat{\mathbf{x}} + 24\hat{\mathbf{y}} + 7\hat{\mathbf{z}}) + \frac{1}{3}t(\hat{\mathbf{x}} + 18\hat{\mathbf{y}} + 10\hat{\mathbf{z}})$

14. Αυτοκίνητο κινείται σε κυκλική διαδρομή ακτίνας *R* με ταχύτητα της οποίας το μέτρο μεταβάλλεται με το χρόνο ως $\upsilon = ct$, όπου *c*=σταθ.>0. Βρείτε τη χρονική στιγμή που τα διανύσματα ταχύτητας και επιτάχυνσης σχηματίζουν γωνία 45^o.

15. Σημειακό κινητό κινείται στην επιφάνεια σφαίρας και η θέση του, συναρτήσει του χρόνου, σε σφαιρικές συντεταγμένες δίνεται από τις σχέσεις: $r = R$, $\varphi = \omega t$, $\theta = (\pi/4)\left[1 + 0.25\sin(4\omega t)\right]$. Βρείτε το μέτρο της ταχύτητας του κινητού συναρτήσει του χρόνου και περιγράψτε την τροχιά που διαγράφει