## ΑΣΚΗΣΕΙΣ

Χρήστος Τσολφής
ΣΗΜΜΥ, 1ο Εξάμηνο

### ασκ 1 / σελ. 41

Νδο $(a_1+a_2+\dots+a_\nu)\left(\frac{1}{a_1}+\frac{1}{a_2}+\dots+\frac{1}{a_\nu}\right)\geq \nu^2$

**Λύση**

Ισχύει ότι $\dfrac{a_1+a_2+\dots+a_\nu}{\nu} \geq \dfrac{\nu}{\frac{1}{a_1}+\frac{1}{a_2}+\dots+\frac{1}{a_\nu}}$

Άρα $(a_1+a_2+\dots+a_\nu)\left(\frac{1}{a_1}+\frac{1}{a_2}+\dots+\frac{1}{a_\nu}\right)\geq \nu^2$

### ασκ 3 / σελ. 41

$a_\nu = \sqrt[\nu]{\nu}$, $\nu \in \mathbb{N}-\{1\}$

Ναο $a_\nu < 1-\frac{2}{\nu}+\frac{2}{\sqrt{\nu}}$

**Λύση**

$$a_\nu = \sqrt[\nu]{\nu} = \sqrt[\nu]{\underbrace{1\cdot 1\cdot 1\cdot\ldots}_{\nu-2 \text{ παράγοντες}}\cdot\sqrt{\nu}\cdot\sqrt{\nu}}$$

Άρα $\sqrt[\nu]{1\cdot1\cdot1\cdot\ldots\cdot\sqrt{\nu}\cdot\sqrt{\nu}} \leq \dfrac{1+1+\dots+\sqrt{\nu}+\sqrt{\nu}}{\nu} = \dfrac{\nu-2+2\sqrt{\nu}}{\nu} = 1-\dfrac{2}{\nu}+\dfrac{2}{\sqrt{\nu}}$

ασκ4 / σελ. 41

$a_\nu = \left(1+\frac{1}{\nu}\right)^\nu$ Ναο:

i) $a_\nu < a_{\nu+1}$

ii) $2 < a_\nu < 4$

Λύση

i) Από την ανισότητα Cauchy ισχύει ότι: $\dfrac{\nu}{\frac{1}{x_1}+\frac{1}{x_2}+\dots+\frac{1}{x_\nu}} \leq \sqrt[\nu]{x_1\cdot x_2\cdot\ldots\cdot x_\nu} \leq \dfrac{x_1+x_2+\dots+x_\nu}{\nu}$

για $\nu=2,3,\dots$ , $x_1,x_2,\dots,x_\nu>0$. Η ισότητα ισχύει αν και μόνο αν $x_1=x_2=\dots=x_\nu$

↳ Εφαρμόζουμε το δεύτερο κομμάτι της ανισότητας για $x_1=x_2=\dots=x_\nu=1+\frac{1}{\nu}$, $x_{\nu+1}=1$

και παίρνουμε:

$$\sqrt[\nu+1]{\left(1+\frac{1}{\nu}\right)^\nu\cdot 1} < \frac{\nu\left(1+\frac{1}{\nu}\right)+1}{\nu+1} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \sqrt[\nu+1]{\left(1+\frac{1}{\nu}\right)^\nu} < \frac{\nu+1+1}{\nu+1} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \sqrt[\nu+1]{\left(1+\frac{1}{\nu}\right)^\nu} < 1+\frac{1}{\nu+1} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left(1+\frac{1}{\nu}\right)^\nu < \left(1+\frac{1}{\nu+1}\right)^{\nu+1} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow a_\nu < a_{\nu+1}$$

ii) Εφαρμόζουμε το δεύτερο κομμάτι για $x_1 = x_2 = \ldots = x_{\nu-1} = 1$, $x_\nu = 2$

$$\sqrt[\nu]{\underbrace{1\cdot 1\cdot \ldots \cdot 1}_{\nu-1}\cdot 2} < \frac{\overbrace{1+1+\ldots+1}^{\nu-1}+2}{\nu} \Leftrightarrow \sqrt[\nu]{2} < \frac{\nu-1+2}{\nu} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \sqrt[\nu]{2} < \frac{\nu+1}{\nu} \Leftrightarrow \sqrt[\nu]{2} < 1+\frac{1}{\nu} \Leftrightarrow 2 < \left(1+\frac{1}{\nu}\right)^\nu \Leftrightarrow a_\nu > 2$$

Στη συνέχεια εφαρμόζουμε το πρώτο κομμάτι για $x_1 = x_2 = \ldots = x_{\nu-2} = 1$, $x_{\nu-1} = x_\nu = 2$

$$\frac{\nu}{\underbrace{\frac{1}{1}+\frac{1}{1}+\ldots+\frac{1}{1}}_{\nu-2}+\frac{1}{2}+\frac{1}{2}} < \sqrt[\nu]{\underbrace{1\cdot 1\cdot\ldots}_{\nu-2}\cdot 2\cdot 2} \Leftrightarrow \frac{\nu}{\nu-2+1} < \sqrt[\nu]{4} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{\nu}{\nu-1} < \sqrt[\nu]{4} \Leftrightarrow \frac{\nu-1+1}{\nu-1} < \sqrt[\nu]{4} \Leftrightarrow 1+\frac{1}{\nu-1} < \sqrt[\nu]{4}$$

Ισχύει όμως ότι: $\frac{1}{\nu} < \frac{1}{\nu-1} \Leftrightarrow 1+\frac{1}{\nu} < 1+\frac{1}{\nu-1}$

και άρα $1+\frac{1}{\nu} < \sqrt[\nu]{4} \Leftrightarrow \left(1+\frac{1}{\nu}\right)^\nu < 4 \Leftrightarrow a_\nu < 4$

ασκ 8 / σελ. 42

Ναο $\quad a_1^8+a_2^8+a_3^8 \geq a_1^3a_2^3a_3^3\left(\frac{1}{a_1}+\frac{1}{a_2}+\frac{1}{a_3}\right) \qquad (1)$

Λύση

Θέτω $\quad P = a_1^8+a_2^8+a_3^8$

Τότε η (1) γράφεται $\quad \dfrac{a_1^3a_2^3a_3^3\left(\frac{1}{a_1}+\frac{1}{a_2}+\frac{1}{a_3}\right)}{P} \leq 1$

Αρκεί νδο $\quad \dfrac{a_1^2a_2^3a_3^3}{P}+\dfrac{a_1^3a_2^2a_3^3}{P}+\dfrac{a_1^3a_2^3a_3^2}{P} \leq 1$

Όμως
$$\frac{a_1^2a_2^3a_3^3}{P} = \left(\frac{a_1^8}{P}\right)^{\frac{2}{8}}\cdot\left(\frac{a_2^8}{P}\right)^{\frac{3}{8}}\cdot\left(\frac{a_3^8}{P}\right)^{\frac{3}{8}} \leq \frac{2}{8}\cdot\frac{a_1^8}{P}+\frac{3}{8}\cdot\frac{a_2^8}{P}+\frac{3}{8}\cdot\frac{a_3^8}{P}$$

Ομοίως,
$$\frac{a_1^3a_2^2a_3^3}{P} \leq \frac{3}{8}\cdot\frac{a_1^8}{P}+\frac{2}{8}\cdot\frac{a_2^8}{P}+\frac{3}{8}\cdot\frac{a_3^8}{P}$$
$$\frac{a_1^3a_2^3a_3^2}{P} \leq \frac{3}{8}\cdot\frac{a_1^8}{P}+\frac{3}{8}\cdot\frac{a_2^8}{P}+\frac{2}{8}\cdot\frac{a_3^8}{P}$$
$\xRightarrow{(+)}$

$$\Rightarrow \frac{a_1^2a_2^3a_3^3+a_1^3a_2^2a_3^3+a_1^3a_2^3a_3^2}{P} \leq$$
$$\leq \frac{2}{8}\left(\frac{a_1^8+a_2^8+a_3^8}{P}\right)+\frac{3}{8}\left(\frac{a_1^8+a_2^8+a_3^8}{P}\right)+\frac{3}{8}\left(\frac{a_1^8+a_2^8+a_3^8}{P}\right)$$
$$\leq \frac{2}{8}\cdot 1+\frac{3}{8}\cdot 1+\frac{3}{8}\cdot 1 = 1$$

Συνεπώς $\quad \dfrac{a_1^2a_2^3a_3^3}{P}+\dfrac{a_1^3a_2^2a_3^3}{P}+\dfrac{a_1^3a_2^3a_3^2}{P} \leq 1$

οπότε η (1) αληθεύει.

ασκ 1/σελ.44

$a_1+a_2=1$

Ναο $\left(a_1+\frac{1}{a_1}\right)^2+\left(a_2+\frac{1}{a_2}\right)^2 \geq \frac{25}{2}$

Λύση

Εφαρμόζουμε την ανισότητα για $x_1=a_1+\frac{1}{a_1}$, $x_2=a_2+\frac{1}{a_2}$, $y_1=y_2=1$

Θα είναι λοιπόν,

$$\left[\left(a_1+\frac{1}{a_1}\right)\cdot 1+\left(a_2+\frac{1}{a_2}\right)\cdot 1\right]^2 \leq \left[\left(a_1+\frac{1}{a_1}\right)^2+\left(a_2+\frac{1}{a_2}\right)^2\right]\cdot(1^2+1^2) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left(a_1+\frac{1}{a_1}+a_2+\frac{1}{a_2}\right)^2 \leq 2\left[\left(a_1+\frac{1}{a_1}\right)^2+\left(a_2+\frac{1}{a_2}\right)^2\right] \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left(1+\frac{a_1+a_2}{a_1a_2}\right)^2 \leq 2\left[\left(a_1+\frac{1}{a_1}\right)^2+\left(a_2+\frac{1}{a_2}\right)^2\right] \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left(1+\frac{1}{a_1a_2}\right)^2 \leq 2\left[\left(a_1+\frac{1}{a_1}\right)^2+\left(a_2+\frac{1}{a_2}\right)^2\right]$$

Ισχύει ότι,

$$\sqrt{a_1a_2} \leq \frac{a_1+a_2}{2}=\frac{1}{2} \Leftrightarrow a_1a_2 \leq \frac{1}{4} \Leftrightarrow \frac{1}{a_1a_2} \geq 4 \Leftrightarrow 1+\frac{1}{a_1a_2} \geq 5 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left(1+\frac{1}{a_1a_2}\right)^2 \geq 25$$

Ώστε θα είναι:

$$25 \leq 2\left[\left(a_1+\frac{1}{a_1}\right)^2+\left(a_2+\frac{1}{a_2}\right)^2\right]$$

$$\left(a_1+\frac{1}{a_1}\right)^2+\left(a_2+\frac{1}{a_2}\right)^2 \geq \frac{25}{2}$$

ασκ 2 / σελ 44

Ναο $\sqrt{\dfrac{2a_1}{a_1+a_2}} + \sqrt{\dfrac{2a_2}{a_2+a_3}} + \sqrt{\dfrac{2a_3}{a_3+a_1}} \leq 3$

Λύση

Έχουμε, $\sqrt{\dfrac{2a_1}{a_1+a_2}} + \sqrt{\dfrac{2a_2}{a_2+a_3}} + \sqrt{\dfrac{2a_3}{a_3+a_1}} \leq \sqrt{\left(\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{y}+\dfrac{1}{z}\right)\cdot\left(\dfrac{2a_1x}{a_1+a_2}+\dfrac{2a_2y}{a_2+a_3}+\dfrac{2a_3z}{a_3+a_1}\right)}$

για $x,y,z>0$.

Οπότε αρκεί νδο $\left(\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{y}+\dfrac{1}{z}\right)\left(\dfrac{2a_1x}{a_1+a_2}+\dfrac{2a_2y}{a_2+a_3}+\dfrac{2a_3z}{a_3+a_1}\right) \leq 9$

Επιλέγοντας $x=\dfrac{1}{a_1+a_3}$, $y=\dfrac{1}{a_2+a_1}$, $z=\dfrac{1}{a_3+a_2}$ η ανισότητα γίνεται,

$$(a_1+a_3+a_2+a_1+a_3+a_2)\cdot\left(\frac{2a_1}{(a_1+a_2)(a_1+a_3)}+\frac{2a_2}{(a_2+a_3)(a_2+a_1)}+\frac{2a_3}{(a_3+a_1)(a_3+a_2)}\right) \leq 9 \Leftrightarrow$$

$$2\cdot 2\cdot(a_1+a_2+a_3)\left(\frac{a_1}{(a_1+a_2)\cdot(a_1+a_3)}+\frac{a_2}{(a_2+a_3)(a_2+a_1)}+\frac{a_3}{(a_3+a_1)(a_3+a_2)}\right) \leq 9 \Leftrightarrow$$

$$\frac{a_1}{(a_1+a_2)\cdot(a_1+a_3)}+\frac{a_2}{(a_2+a_3)(a_2+a_1)}+\frac{a_3}{(a_3+a_1)(a_3+a_2)} \leq \frac{9}{4(a_1+a_2+a_3)} \Leftrightarrow$$

$$\frac{a_1(a_2+a_3)+a_2(a_1+a_3)+a_3(a_1+a_2)}{(a_1+a_2)(a_1+a_3)(a_2+a_3)} \leq \frac{9}{4(a_1+a_2+a_3)} \Leftrightarrow$$

$$\frac{a_1a_2+a_1a_3+a_1a_2+a_2a_3+a_1a_3+a_2a_3}{(a_1+a_2)(a_1+a_3)(a_2+a_3)} \leq \frac{9}{4(a_1+a_2+a_3)}$$

$$\frac{2(a_1a_2+a_1a_3+a_2a_3)}{(a_1+a_2)(a_1+a_3)(a_2+a_3)} \leq \frac{9}{4(a_1+a_2+a_3)} \Leftrightarrow \dots \Leftrightarrow$$

$$a_1^2(a_2+a_3)+a_2^2(a_1+a_3)+a_3^2(a_1+a_2) \geq 6a_1a_2a_3 \Leftrightarrow \dots \Leftrightarrow$$

$a_1(a_2-a_3)^2+a_2(a_3-a_1)^2+a_3(a_1-a_2)^2 \geq 0$, το οποίο ισχύει.

ασκ 1 / σελ 48

Ναδ $$\frac{a_1^2+a_2^2-a_3^2}{a_1a_2}+\frac{a_2^2+a_3^2-a_1^2}{a_2a_3}+\frac{a_1^2+a_3^2-a_2^2}{a_1a_3}\leq 3$$

Λύση

$$\frac{a_1^2+a_2^2-a_3^2}{a_1a_2}+\frac{a_2^2+a_3^2-a_1^2}{a_2a_3}+\frac{a_1^2+a_3^2-a_2^2}{a_1a_3}\leq 3 \overset{\times a_1a_2a_3}{\Longleftrightarrow}$$

$$a_3(a_1^2+a_2^2-a_3^2)+a_1(a_2^2+a_3^2-a_1^2)+a_2(a_1^2+a_3^2-a_2^2)\leq 3a_1a_2a_3$$

$$a_3a_1^2+a_3a_2^2-a_3^3+a_1a_2^2+a_1a_3^2-a_1^3+a_2a_1^2+a_2a_3^2-a_2^3\leq 3a_1a_2a_3$$

$$a_1^3+a_2^3+a_3^3+3a_1a_2a_3\geq a_1a_2^2+a_1a_3^2+a_2a_1^2+a_2a_3^2+a_3a_1^2+a_3a_2^2$$

Αυτή είναι όμως ακριβώς η ανισότητα Schur για

$a=a_1$, $\beta=a_2$, $\gamma=a_3$, $r=1$.

ασκ 15/σελ 82

$f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

i) $f(x) \leq x$ , $\forall x \in \mathbb{R}$ (1)

ii) $f(x+y) \leq f(x) + f(y)$ , $\forall x,y \in \mathbb{R}$ (2)

Λύση

Η (1) δίνει για $x=0$, $f(0) \leq 0$

Η (2) δίνει για $x=y=0$, $f(0) \leq f(0) + f(0) \Leftrightarrow f(0) \leq 2f(0) \Leftrightarrow f(0) \geq 0$

Άρα $f(0)=0$.

Στη (2) θέτουμε $y=-x$, οπότε $f(x-x) \leq f(x) + f(-x) \Leftrightarrow \cancel{f(0)}^{0} \leq f(x) + f(-x) \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 0 \leq f(x) + f(-x) \Leftrightarrow -f(x) \leq f(-x)$.

Στη (1) θέτουμε όπου $x$ το $-x$, $f(-x) \leq -x$

Οι δύο τελευταίες ανισότητες δίνουν:

$-f(x) \leq f(-x) \leq -x \Leftrightarrow -f(x) \leq -x \Leftrightarrow f(x) \geq x$

και επειδή από $(1) \Rightarrow f(x) \leq x$ , έχουμε $f(x) = x$, $\forall x \in \mathbb{R}$

Άσκηση

Να εξετάσετε αν η ακολουθία $a_\nu = \frac{\nu}{4} - [\frac{\nu}{4}]$ συγκλίνει στο $\mathbb{R}$

Λύση

$a_\nu = \frac{\nu}{4} - [\frac{\nu}{4}]$

Για $\nu = 4k$, $a_{4k} = k - [k] = k - k = 0$

Για $\nu = 4k+1$, $a_{4k+1} = \frac{4k+1}{4} - [\frac{4k+1}{4}] = k + \frac{1}{4} - k = \frac{1}{4}$

Για $\nu = 4k+2$, $a_{4k+2} = \frac{4k+2}{4} - [\frac{4k+2}{4}] = k + \frac{1}{2} - k = \frac{1}{2}$

Για $\nu = 4k+3$, $a_{4k+3} = \frac{4k+3}{4} - [\frac{4k+3}{4}] = k + \frac{3}{4} - k = \frac{3}{4}$

Άσκηση

Νδο αν μια ακολουθία συγκλίνει σε πραγματικό αριθμό τότε είναι φραγμένη.

Απόδειξη

Εστω $(a_\nu)$ με $a_\nu \to a$

Εφαρμόζοντας τον ορισμό για $\varepsilon = 1$, $\exists \nu_0 \in \mathbb{N} : |a_\nu - a| < \varepsilon = 1$

Από την αντίστροφη τριγωνική έχω ότι:

$$|a_\nu| - |a| \leq \big||a_\nu| - |a|\big| \leq |a_\nu - a| < 1 \quad , \forall \nu \geq \nu_0$$

$$|a_\nu| < 1 + |a| \quad , \forall \nu \geq \nu_0$$

(μέχρι τώρα έδειξα ότι η ακολουθία είναι τελικά φραγμένη.)

Θέτω $k = \max\{|a_1|, |a_2|, \dots, |a_{\nu_0 - 1}|, 1 + |a|\}$

Τότε προφανώς $|a_\nu| \leq k$, $\forall \nu \in \mathbb{N}$

Άσκηση

ΝΔΟ αν δύο υπακολουθίες μιας ακολουθίας συγκλίνουν σε διαφορετικό όριο τότε η ακολουθία δεν συγκλίνει.

Απόδειξη

ΘΔΟ $a_\nu \to a$ iff $a_{k_\nu} \to a$ $\forall$ υπακολουθία $(a_{k_\nu})$.

$(\Leftarrow)$

Αν έχω σύγκλιση για κάθε υπακολουθία τότε προφανώς έχω σύγκλιση και για την ίδια την υπακολουθία. Παίρνοντας $k_\nu = \nu$.

$(\Rightarrow)$

Υποθέτω ότι $a_\nu \to a$ και θεωρώ μια τυχαία υπακολουθία $(a_{k_\nu})$

$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \nu_0 \in \mathbb{N} : |a_\nu - a| < \varepsilon, \ \forall \nu \geq \nu_0 \quad (1)$

Έστω $\varepsilon > 0$, τότε $\exists \nu_0$ λόγω της (1)

Ισχυρίζομαι ότι για την υπακολουθία $(k_\nu)$ ισχύει $k_\nu \geq \nu$ (2) και αποδεικνύω με επαγωγή:

- Για $\nu = 1$, η (2) γράφεται $k_1 \geq 1$, ισχύει γιατί $k_1 \in \mathbb{N}$
- Έστω ότι ισχύει για $\nu = \mu$, δηλ. $k_\mu \geq \mu$ $(*)$
- ΘΔΟ η (2) ισχύει για $\nu = \mu + 1$, δηλ. $k_{\mu+1} \geq \mu + 1$.

Πράγματι, είναι $k_{\mu+1} > k_\mu^{\odot}$ και $(*) \Rightarrow k_\mu \geq \mu$ $\quad \odot$: από ορισμό ακολουθίας

Άρα $k_{\mu+1} > \mu$

Άρα και $k_{\mu+1} \geq \mu + 1$

Ώστε θα είναι $k_{\nu_0} \geq \nu_0$ και άρα για $\nu \geq \nu_0$ : $k_\nu \geq \nu_0$

Έτσι, η (1) δίνει $|a_{k_\nu} - a| < \varepsilon, \ \forall \nu \geq \nu_0$

Έπεται ότι αν βρούμε δύο υπακολουθίες της $(a_\nu)$ με διαφ. όρια, τότε η $(a_\nu)$ δεν μπορεί να είναι συγκλίνουσα.

## Ακολουθίες Cauchy

1) $a_\nu = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{\nu}$

Ισχύει για $\nu, p \in \mathbb{N}$ : $a_{\nu+p} - a_\nu = \underbrace{\frac{1}{\nu+1} + \frac{1}{\nu+2} + \dots + \frac{1}{\nu+p}}_{p \text{ όροι}} \geq \frac{p}{\nu+p} \overset{p=\nu}{=} \frac{\nu}{2\nu} = \frac{1}{2}$

Αυτό που αποδεικνύεται είναι το εξής: αν διαλέξω $0 < \varepsilon < \frac{1}{2}$ μπορώ πάντοτε να βρω μεγάλους δείκτες $\nu, \mu$ ώστε $|a_\nu - a_\mu| \geq \varepsilon$. Επομένως, αυτή η ακολουθία δεν μπορεί να είναι Cauchy.

2) $a_\nu = \frac{\cos 1!}{1\cdot 2} + \frac{\cos 2!}{2\cdot 3} + \dots + \frac{\cos \nu!}{\nu(\nu+1)}$

$$|a_{\nu+p} - a_\nu| = \left| \frac{\cos(\nu+1)!}{(\nu+1)(\nu+2)} + \frac{\cos(\nu+2)!}{(\nu+2)(\nu+3)} + \dots + \frac{\cos(\nu+p)!}{(\nu+p)(\nu+p+1)} \right| \leq$$

$$\leq \frac{|\cos(\nu+1)!|}{(\nu+1)(\nu+2)} + \frac{|\cos(\nu+2)!|}{(\nu+2)\cdot(\nu+3)} + \dots + \frac{|\cos(\nu+p)!|}{(\nu+p)(\nu+p+1)} \leq$$

$$\leq \frac{1}{(\nu+1)(\nu+2)} + \frac{1}{(\nu+2)(\nu+3)} + \dots + \frac{1}{(\nu+p)(\nu+p+1)} \quad (*)$$

Θεωρώ $f(x) = \frac{1}{x(x+1)} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x+1} = \frac{Ax + A + Bx}{x(x+1)} = \frac{(A+B)x + A}{x(x+1)}$

$$\begin{cases} A + B = 0 \\ A = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A = 1 \\ B = -1 \end{cases}$$

άρα $f(x) = \frac{1}{x} - \frac{1}{x+1}$

$$(*) \Rightarrow \left(\frac{1}{\nu+1} - \frac{1}{\nu+2}\right) + \left(\frac{1}{\nu+2} - \frac{1}{\nu+3}\right) + \left(\frac{1}{\nu+3} - \frac{1}{\nu+4}\right) + \dots +$$

$$+ \left(\frac{1}{\nu+p-1} - \frac{1}{\nu+p}\right) + \frac{1}{\nu+p} - \left(\frac{1}{\nu+p+1}\right) =$$

$$= \frac{1}{\nu+1} - \frac{1}{\nu+p+1} < \frac{1}{\nu+1} < \varepsilon$$

όταν $\nu \geq \nu_0$ για κατάλληλο $\nu_0 > \frac{1}{\varepsilon} - 1$

Άρα ακολουθία Cauchy.

3) Νδο $a_\nu = 1 + \frac{1}{\ln 2} + \frac{1}{\ln 3} + \dots + \frac{1}{\ln \nu}$ δεν είναι Cauchy.

$$a_{\nu+p} - a_\nu = \underbrace{\frac{1}{\ln(\nu+1)} + \frac{1}{\ln(\nu+2)} + \dots + \frac{1}{\ln(\nu+p)}}_{p \text{ όροι}} \geq \frac{p}{\ln(\nu+p)} \overset{p=\nu=2^m}{=\!=\!=} \frac{2^m}{\ln(2\cdot 2^m)} =$$

$$= \frac{2^m}{\ln(2^{m+1})} = \frac{2^m}{(m+1)\ln 2} \xrightarrow{m\to+\infty} +\infty$$

Άσκηση

Δίνονται οι ακολουθίες $(a_\nu), (\beta_\nu)$ με τις αναδρομικές σχέσεις $a_\nu = \frac{a_{\nu-1} + \beta_{\nu-1}}{2}$

και $\beta_\nu = \sqrt{a_{\nu-1} \cdot \beta_{\nu-1}}$, $\forall \nu \in \mathbb{N}$, όπου $a_0, \beta_0 \in \mathbb{R}^+$.

Νδο οι ακολουθίες είναι ισοσυγκλίνουσες.

Λύση

Από την ανισότητα Cauchy, έχουμε αμέσως ότι $\beta_\nu \le a_\nu$ $\forall \nu = 1, 2, \dots$

Επειδή $a_0, \beta_0 > 0$ έχουμε ότι $a_\nu, \beta_\nu > 0$. (αποδεικνύεται με επαγωγή)

Δείχνω ότι η $(a_\nu)$ είναι φθίνουσα

$a_\nu \ge a_{\nu+1} \Leftrightarrow a_\nu \ge \frac{a_\nu + \beta_\nu}{2} \Leftrightarrow 2a_\nu \ge a_\nu + \beta_\nu \Leftrightarrow a_\nu \ge \beta_\nu$, ισχύει.

Ομοίως, δείχνω ότι η $(\beta_\nu)$ είναι αύξουσα.

$\beta_{\nu+1} \ge \beta_\nu \Leftrightarrow \sqrt{a_\nu \beta_\nu} \ge \beta_\nu \Leftrightarrow a_\nu \cancel{\beta_\nu} \ge \beta_\nu^{\cancel{2}} \Leftrightarrow a_\nu \ge \beta_\nu$, ισχύει

Ώστε είναι:

$\beta_1 \le \beta_2 \le \dots \le \beta_\nu \le \beta_{\nu+1} \le \dots \le a_{\nu+1} \le a_\nu \le \dots \le a_2 \le a_1 \le \dots$

και άρα η $(a_\nu)$ είναι φθίνουσα και κάτω φραγμένη από το $\beta_1$,
και η $(\beta_\nu)$ είναι αύξουσα και άνω φραγμένη από το $a_1$

Άρα και οι δύο ακολουθίες είναι συγκλίνουσες και έστω

$\lim a_\nu = a$, $\lim \beta_\nu = \beta$

Παίρνοντας όρια στην αναδρομική σχέση $a_\nu = \frac{a_{\nu-1} + \beta_{\nu-1}}{2}$ βρίσκουμε:

$a = \frac{a + \beta}{2} \Leftrightarrow 2a = a + \beta \Leftrightarrow a = \beta$

Άσκηση

Αν $(a_\nu), (\beta_\nu), (\gamma_\nu)$ είναι ακολουθίες πραγμ. αριθμών τ.ω. $a_{\nu+1} = \dfrac{a_\nu+\beta_\nu+\gamma_\nu}{3}$,

$\beta_{\nu+1} = \sqrt[3]{a_\nu \cdot \beta_\nu \cdot \gamma_\nu}$, $\dfrac{3}{\gamma_{\nu+1}} = \dfrac{1}{a_\nu} + \dfrac{1}{\beta_\nu} + \dfrac{1}{\gamma_\nu}$, $\nu \in \mathbb{N}$ όπου

$a_1 = a > 0$, $\beta_1 = \beta > 0$, $\gamma_1 = \gamma > 0$, $a, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$.

Ν.δ.ο οι ακολουθίες είναι συγκλίνουσες.

Λύση

Επειδή $a_1, \beta_1, \gamma_1 > 0$ θα έχουμε ότι ισχύει $a_\nu, \beta_\nu, \gamma_\nu > 0$, $\forall \nu = 1, 2, \ldots$

Λόγω της ανισότητας Cauchy, θα ισχύει $\gamma_\nu \le \beta_\nu \le a_\nu$, $\forall \nu = 2, 3, \ldots$

Δείχνω ότι η $(a_\nu)$ είναι φθίνουσα:

$$a_{\nu+1} \le a_\nu \Leftrightarrow \frac{a_\nu+\beta_\nu+\gamma_\nu}{3} \le a_\nu \Leftrightarrow a_\nu+\beta_\nu+\gamma_\nu \le 3a_\nu \Leftrightarrow \beta_\nu+\gamma_\nu \le 2a_\nu \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow a_\nu \ge \frac{\beta_\nu+\gamma_\nu}{2}$$

Η τελευταία ισότητα ισχύει διότι $\gamma_\nu \le \beta_\nu \Leftrightarrow \beta_\nu+\gamma_\nu \le 2\beta_\nu \Leftrightarrow \dfrac{\beta_\nu+\gamma_\nu}{2} \le \beta_\nu \overset{\beta_\nu \le a_\nu}{\Longrightarrow}$

$$\Rightarrow \frac{\beta_\nu+\gamma_\nu}{2} \le a_\nu$$

Δείχνω ότι η $(\gamma_\nu)$ είναι αύξουσα:

$$\gamma_\nu \le \gamma_{\nu+1} \Leftrightarrow \gamma_\nu \le \frac{3}{\frac{1}{a_\nu}+\frac{1}{\beta_\nu}+\frac{1}{\gamma_\nu}} \Leftrightarrow \frac{\gamma_\nu}{a_\nu} + \frac{\gamma_\nu}{\beta_\nu} + 1 \le 3 \Leftrightarrow \frac{\gamma_\nu}{a_\nu} + \frac{\gamma_\nu}{\beta_\nu} \le 2$$

Η τελευταία ισότητα ισχύει διότι $\begin{cases} \gamma_\nu \le a_\nu \\ \gamma_\nu \le \beta_\nu \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \dfrac{\gamma_\nu}{a_\nu} \le 1 \\ \dfrac{\gamma_\nu}{\beta_\nu} \le 1 \end{cases} \overset{(+)}{\Longrightarrow} \dfrac{\gamma_\nu}{a_\nu} + \dfrac{\gamma_\nu}{\beta_\nu} \le 2$

Ώστε η $(a_\nu)$ είναι φθίνουσα και κάτω φραγμένη (από το $\beta_2$), ενώ η $(\gamma_\nu)$ είναι αύξουσα και άνω φραγμένη (επίσης από το $\beta_2$). Άρα αμφότερες είναι συγκλίνουσες και έστω $\lim a_\nu = \ell$, $\lim \gamma_\nu = m$ ($\ell \ge m > 0$)

Θα έχουμε ότι:

$3a_{\nu+1} = a_\nu+\beta_\nu+\gamma_\nu \Leftrightarrow \beta_\nu = 3a_{\nu+1} - a_\nu - \gamma_\nu$ άρα και η $(\beta_\nu)$ είναι συγκλίνουσα με $\lim \beta_\nu = 3\ell - \ell - m \Rightarrow \lim \beta_\nu = 2\ell - m$

Παίρνοντας όρια στην αναδρομική σχέση $\beta_{\nu+1}^3 = \alpha_\nu \beta_\nu \gamma_\nu$

βρίσκουμε $(2\ell - m)^{\cancel{3}\,2} = \ell\,(\cancel{2\ell - m})\cdot m \Leftrightarrow (2\ell - m)^2 = \ell \cdot m \Rightarrow 2\ell - m = \sqrt{\ell m}$

Τέλος, παίρνοντας όρια στην $\gamma_{\nu+1} = \dfrac{3}{\frac{1}{\alpha_\nu} + \frac{1}{\beta_\nu} + \frac{1}{\gamma_\nu}}$ έχουμε

$$m = \frac{3}{\frac{1}{\ell} + \frac{1}{\sqrt{\ell m}} + \frac{1}{m}} \Leftrightarrow \frac{m}{\ell} + \frac{m}{\sqrt{\ell m}} + 1 = 3 \Leftrightarrow \frac{m}{\ell} + \sqrt{\frac{m}{\ell}} - 2 = 0 \Leftrightarrow$$

$\Leftrightarrow \sqrt{\frac{m}{\ell}} = 1$ ή $\cancel{\sqrt{\frac{m}{\ell}} = -2}$

Επομένως, $\frac{\ell}{m} = 1 \Leftrightarrow \ell = m$

Άρα και $\lim \beta_\nu = \ell$.