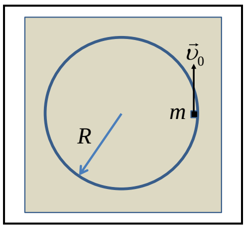
ΕΜΠ – ΣΧΟΛΗ ΕΜΦΕ – ΤΟΜΕΑΣ ΦΥΣΙΚΗΣ – ΑΚΑΔΗΜΑΪΚΟ ΕΤΟΣ 2017-18
ΜΑΘΗΜΑ: ΦΥΣΙΚΗ-Ι, 1ΟΥ ΕΞΑΜΗΝΟΥ ΣΧΟΛΗΣ ΗΛΕΚΤΡΟΛΟΓΩΝ ΜΜΥ
Διδάσκοντες: Η. Ζουμπούλης, Ι. Ράπτης

Β΄ ΣΕΙΡΑ ΑΣΚΗΣΕΩΝ 3 Νοεμβρίου 2017

Να επιστραφούν λυμένες μέχρι 20/11/17, οι 1, 4, 6, 9, 13α-β. [ΠΡΟΣΟΧΗ: Οι λύσεις να είναι χειρόγραφες και, είτε να παραδοθούν στο μάθημα, είτε να αναρτηθούν ως PDF στις «Εργασίες» του mycourses]

Για τις Ασκ. 5α-β, 6, 7: Θεωρήστε γνωστό ότι ένα σωματίδιο με φορτίο q και ταχύτητα $\vec{\upsilon}$, παρουσία Ηλεκτρικού πεδίου $\vec{E}$ και Μαγνητικού πεδίου $\vec{B}$, δέχεται δύναμη $\vec{F} = q\left(\vec{E} + \vec{\upsilon} \times \vec{B}\right)$.



1. Οριζόντιο μεταλλικό δακτυλίδι ακτίνας R είναι στερεωμένο ακλόνητα πάνω σε οριζόντιο λείο τραπέζι. Στο εσωτερικό του δακτυλιδιού υπάρχει σημειακή μάζα m, ο συντελεστής τριβής της οποίας με το δακτυλίδι είναι μ. Η μάζα εκτοξεύεται με οριζόντια αρχική ταχύτητα υ_0, εφαπτομενικά στην εσωτερική επιφάνεια του δακτυλιδιού. (α) Υπολογίστε την ταχύτητα της μάζας ως συνάρτηση του χρόνου. (β) Υπολογίστε τη γωνιακή απόσταση της μάζας, από το σημείο εκτόξευσης, συναρτήσει του χρόνου. (γ) Επαναλάβετε τα ίδια ερωτήματα αν το εσωτερικό του δακτυλιδιού είναι λείο και ο συντελεστής τριβής της μάζας με το οριζόντιο τραπέζι είναι μ.

ΑΠΑΝΤΗΣΗ

Η αντίδραση του δακτυλιδού αποτελεί την κεντρομόλο δύναμη: $A = m\dfrac{\upsilon^2}{R}$.

(α) Για την επιτρόχια επιτάχυνση ισχύει:

$$m\frac{d\upsilon}{dt} = -T = -\mu A = -\mu m\frac{\upsilon^2}{R} \quad\Rightarrow\quad \frac{d\upsilon}{dt} = -\mu\frac{\upsilon^2}{R} \quad\Rightarrow\quad \frac{d\upsilon}{\upsilon^2} = -\frac{\mu}{R}dt \quad\Rightarrow$$

Ολοκληρώνοντας, με βάση τις αρχικές συνθήκες:

$$\int_{\upsilon_o}^{\upsilon}\frac{d\upsilon}{\upsilon^2} = -\frac{\mu}{R}\int_0^t dt \quad\Rightarrow\quad \frac{1}{\upsilon_0} - \frac{1}{\upsilon} = -\frac{\mu t}{R} \quad\Rightarrow\quad \upsilon = \frac{\upsilon_0}{1+\left(\upsilon_0\mu t/R\right)}:$$

άρα η κίνηση διαρκεί επ' άπειρον !

$$\int_{\upsilon_o}^{\upsilon}\frac{d\upsilon}{\upsilon^2} = -\frac{\mu}{R}\int_0^t dt \quad\Rightarrow\quad \frac{1}{\upsilon_0} - \frac{1}{\upsilon} = -\frac{\mu t}{R} \quad\Rightarrow\quad \boxed{\upsilon = \frac{\upsilon_0}{1+\left(\upsilon_0\mu t/R\right)}}$$

(β) Από την τελευταία σχέση, όσον αφορά τη γωνιακή μεταβλητή, έχουμε:

$$\frac{d\left(\varphi R\right)}{dt} = \frac{\upsilon_0}{1+\left(\upsilon_0\mu t/R\right)} \quad\Rightarrow\quad d\varphi = \frac{\left(\upsilon_0/R\right)dt}{1+\left(\upsilon_0\mu t/R\right)} \quad\Rightarrow\quad \mu d\varphi = \frac{d\left(\upsilon_0\mu t/R\right)}{1+\left(\upsilon_0\mu t/R\right)} \Rightarrow$$

$$\mu d\varphi = \frac{d\left(1+\left(\upsilon_0\mu t/R\right)\right)}{1+\left(\upsilon_0\mu t/R\right)} \Rightarrow \quad \mu\int_0^{\varphi} d\varphi = \int_0^t \frac{d\left(1+\left(\upsilon_0\mu t/R\right)\right)}{1+\left(\upsilon_0\mu t/R\right)} \Rightarrow \boxed{\varphi = \frac{1}{\mu}\ln\left(1+\left(\upsilon_0\mu t/R\right)\right)}$$

Σχόλια: (1) Η ταχύτητα δεν μηδενίζεται ποτέ (φθίνοντας, για μεγάλους χρόνους, αντιστρόφως ανάλογα με το χρόνο), με την γωνία να αυξάνει λογαριθμικά με το χρόνο. (2) Αν το σώμα ξεκινούσε με την ίδια αρχική ταχύτητα για ευθύγραμμη πορεία πάνω σε δάπεδο, με τον ίδιο συντελεστή τριβής, θα εκτελούσε ομαλά επιβραδυνόμενη κίνηση με πεπερασμένο μήκος και μηδενική τελική ταχύτητα.

2. Πλοιάριο μάζας m ξεκινάει με αρχική ταχύτητα $\vec{\upsilon}_0 = \upsilon_0 \hat{x}$ στην επιφάνεια λίμνης. Το πλοιάριο υφίσταται αντίσταση ανάλογη της ταχύτητας, $\vec{F}_{\alpha\nu\tau} = -c\vec{\upsilon}$, όπου ο συντελεστής c, λόγω μεταβλητής σύστασης του υγρού κατά μήκος της πορείας του πλοιαρίου, εξαρτάται από τη θέση x με τη μορφή $c(x) = \dfrac{c_0}{(1+ax)^2}$. Τα c_0 και a είναι θετικές σταθερές, ενώ το $x = 0$ αντιστοιχεί στο σημείο εκκίνησης του πλοιαρίου.

(α) Γράψτε τη διαφορική εξίσωση κίνησης του πλοιαρίου και επιλύστε την προκειμένου να υπολογίσετε την εξάρτηση της ταχύτητας από τη θέση, $\upsilon = \upsilon(x)$.

(β) Με βάση το αποτέλεσμα του ερωτήματος (α), διερευνήστε υπό ποια προϋπόθεση (για τα m, υ_0, c_0, a) η ταχύτητα του πλοιαρίου μηδενίζεται σε πεπερασμένη απόσταση από την αφετηρία και βρείτε πόση είναι αυτή η απόσταση.

(γ) Αν τα m, υ_0, c_0, a είναι τέτοια ώστε η ταχύτητα να μην μηδενίζεται ποτέ, να υπολογίσετε την οριακή τιμή της ταχύτητας για πολύ μεγάλες αποστάσεις από το αρχικό σημείο.

ΑΠΑΝΤΗΣΗ

(α) $$m\frac{d\upsilon}{dt} = -c\upsilon = -\frac{c_0\,\upsilon}{(1+ax)^2} \;\Rightarrow\; m\frac{d\upsilon}{dx}\frac{dx}{dt} = -\frac{c_0\,\upsilon}{(1+ax)^2} \;\Rightarrow\; m\frac{d\upsilon}{dx}\upsilon = -\frac{c_0\,\upsilon}{(1+ax)^2}$$

$$m\frac{d\upsilon}{dx} = -\frac{c_0}{(1+ax)^2} \;\Rightarrow\; d\upsilon = -\frac{(c_0/m)dx}{(1+ax)^2} \;\Rightarrow\; \int_{\upsilon_0}^{\upsilon} d\upsilon = -\frac{c_0}{am}\int_0^x \frac{d(ax)}{(1+ax)^2}$$

$$\upsilon - \upsilon_0 = -\frac{c_0}{am}\int_{x=0}^{x=x}\frac{d(1+ax)}{(1+ax)^2} \;\Rightarrow\; \upsilon = \upsilon_0 - \frac{c_0}{am}\int_{x=0}^{x=x}\frac{d(1+ax)}{(1+ax)^2} \;\Rightarrow\; \upsilon = \upsilon_0 - \frac{c_0}{am}\left.\frac{(1+ax)^{-2+1}}{-2+1}\right|_{x=0}^{x}$$

$$\upsilon = \upsilon_0 + \frac{c_0}{am}\left(\frac{1}{1+ax} - 1\right) \;\Rightarrow\; \boxed{\upsilon(x) = \upsilon_0 - \frac{c_0 x}{m(1+ax)}}$$

(β) Για να μηδενιστεί η ταχύτητα σε κάποια θέση της διαδρομής, θα πρέπει να ισχύει:

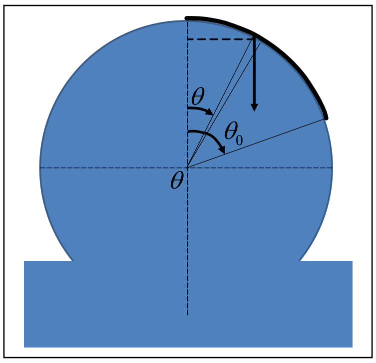
$$\upsilon(x_0) = \upsilon_0 - \frac{c_0 x_0}{m_0(1+ax_0)} = 0 \;\Rightarrow\; x_0 = \frac{1/a}{c_0/(\upsilon_0 ma) - 1}$$

Άρα, η απαίτηση $x_0 > 0 \;\Rightarrow\; \boxed{c_0 > \upsilon_0 ma} \;\Rightarrow\; \boxed{x_0 = \dfrac{1/a}{c_0/(\upsilon_0 ma) - 1} = \dfrac{\upsilon_0 m}{c_0 - \upsilon_0 ma}}$

(γ) Στην περίπτωση που δεν ισχύει η παραπάνω προϋπόθεση

$$\upsilon(x) = \upsilon_0 - \frac{c_0}{m(a + (1/x))} \;\Rightarrow\; \boxed{\upsilon(x\to\infty) = \upsilon_0 - \frac{c_0}{ma}}$$

(ε) $$\upsilon(x) = \upsilon_0 - \frac{c_0 x}{m_0(1+ax)} \;\Rightarrow\; \frac{dx}{dt} = \frac{\upsilon_0 m_0(1+ax) - c_0 x}{m_0(1+ax)} \Rightarrow \boxed{\int_0^t dt = \int_0^x \frac{m_0(1+ax)dx}{\upsilon_0 m_0 + (\upsilon_0 m_0 a - c_0)x}}$$



3. (α) Ομοιογενής αλυσίδα, μήκους L και μάζας m, συγκρατείται με το ένα άκρο της στο ανώτατο σημείο λείας κυλινδρικής επιφάνειας ακτίνας R και εκτείνεται κατά μήκος τόξου κύκλου. Να υπολογισθεί η επιτάχυνση της αλυσίδας τη στιγμή που απελευθερώνεται το άνω άκρο της, αν $L < R\pi/2$.
(β).Αν το άνω άκρο της αλυσίδας απελευθερωθεί από το ανώτατο σημείο, με μηδενική ταχύτητα, να υπολογισθεί η γωνιακή ταχύτητα και η γωνιακή επιτάχυνση της αλυσίδας, όταν το άνω άκρο βρίσκεται σε γωνία θ_0, ως προς την κατακόρυφο, (με την προϋπόθεση ότι και τα δύο άκρα βρίσκονται στο άνω-δεξιά τεταρτοκύκλιο της κυλινδρικής επιφάνειας),

ΑΠΑΝΤΗΣΗ
(α) Μέσω της γωνιακής επιτάχυνσης

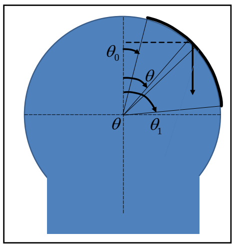
$$I_O\ddot{\theta} = N_{o\lambda,O} \Rightarrow \left(mR^2\right)\left(a/R\right) = \int dN_O = \int_{\theta=0}^{\theta_0} \left(gdm\right) R\sin\theta$$

$$\rho LRa = g\int_{\theta=0}^{\theta_0}\left(\rho Rd\theta\right)R\sin\theta \Rightarrow a = g\frac{R}{L}\left(1-\cos\theta_0\right) \Rightarrow \boxed{a = g\frac{R}{L}\left(1-\cos\frac{L}{R}\right)}$$

(β) Αφού η εφαπτομενική επιτάχυνση είναι ενιαία για όλη την αλυσίδα, μπορεί να υπολογιστεί από τη συνολική εφαπτομενική δύναμη και τη συνολική μάζα

$a = \dfrac{F_{\kappa\lambda,t}}{m}$, όπου : $m = \rho L$, και :

$$F_{o\lambda,t} = \int dF_t = \int\left(dmg\right)\sin\theta = g\int_{\theta=0}^{\theta_0}\left(\rho Rd\theta\right)\sin\theta = g\rho R\left(1-\cos\theta_0\right) \text{ Και}$$



τελικά : $\boxed{a = g\frac{R}{L}\left(1-\cos\frac{L}{R}\right)}$

(γ) Κατά τη διάρκεια της κίνησης (και με την προϋπόθεση ότι και τα δύο άκρα βρίσκονται στο άνω-δεξιά τεταρτοκύκλιο της κυλινδρικής επιφάνειας)

$$I_O\ddot{\theta}_0 = \int_{\theta_0}^{\theta_1}\left(gdm\right)R\sin\theta \Rightarrow \left(\rho LR^2\right)\ddot{\theta}_0 = g\rho R^2\int_{\theta_0}^{\theta_1}\sin\theta d\theta$$

$$\ddot{\theta}_0 = \frac{g\rho R^2}{\rho LR^2}\int_{\theta_0}^{\theta_1}\sin\theta d\theta = \frac{g}{L}\left(\cos\theta_0 - \cos\theta_1\right)$$

Τελικά: $\Rightarrow \boxed{\ddot{\theta}_0 = \frac{g}{L}\left(\cos\theta_0 - \cos\left(\theta_0 + \frac{L}{R}\right)\right)}$, και (με χωριζόμενες μεταβλητές)

$$\frac{d\omega}{dt} = \frac{g}{L}\left(\cos\theta_0 - \cos\left(\theta_0 + \frac{L}{R}\right)\right) \Rightarrow \frac{d\omega}{d\theta_0}\frac{d\theta_0}{dt} = \frac{g}{L}\left(\cos\theta_0 - \cos\left(\theta_0 + \frac{L}{R}\right)\right)$$

$$\omega d\omega = \frac{g}{L}\left(\cos\theta_0 - \cos\left(\theta_0 + \frac{L}{R}\right)\right)d\theta_0 \Rightarrow \frac{\omega^2}{2} = \frac{g}{L}\int_{\theta_0=0}^{\theta}\left(\cos\theta_0 - \cos\left(\theta_0 + \frac{L}{R}\right)\right)d\theta_0$$

Ολοκληρώνοντας : $\boxed{\dot{\theta}_0 = \sqrt{\frac{2g}{L}\left(\sin\left(\frac{L}{R}\right) + \sin\theta_0 - \sin\left(\theta_0 + \frac{L}{R}\right)\right)}}$

Το τελευταίο αποτέλεσμα θα μπορούσε να προκύψει και από τη διατήρηση της μηχανικής ενέργειας.

(γ) Για τον υπολογισμό μέσω διατήρησης της μηχανικής ενέργειας, πρέπει να υπολογισθεί η θέση του κέντρου μάζας

$$\vec{R}_{CM} = \frac{1}{m}\int \vec{r}dm = \frac{1}{m}\left[\hat{x}\int xdm + \hat{y}\int ydm\right] = \frac{1}{m}\left[\hat{x}\int(R\sin\theta)\left(\frac{m}{L}Rd\theta\right) + \hat{y}\int(R\cos\theta)\left(\frac{m}{L}Rd\theta\right)\right]$$

$$\vec{R}_{CM} = \frac{R^2}{L}\left[\hat{x}\int_{\theta_0}^{\theta_0+L/R}\sin\theta d\theta + \hat{y}\int_{\theta_0}^{\theta_0+L/R}\cos\theta d\theta\right] =$$

$$\frac{R^2}{L}\left[\hat{x}\left(\cos(\theta_0) - \cos\left(\theta_0+\frac{L}{R}\right)\right) + \hat{y}\left(\sin\left(\theta_0+\frac{L}{R}\right) - \cos(\theta_0)\right)\right]$$

Επειδή η μεταφορική ταχύτητα υ όλων των στοιχειωδών μαζών της αλυσίδας είναι ίδια, και όλα διαγράφουν κυκλική κίνηση, θα έχουν και κοινή γωνιακή ταχύτητα $\dot{\theta} \equiv \omega = \upsilon / R$, επομένως

$$E_{o\lambda}(\theta_0 = 0) = E_{o\lambda}(\theta_0 \neq 0) \Rightarrow (mg)\left(y_{CM}(\theta_0 = 0)\right) = \frac{1}{2}m\upsilon^2 + (mg)\left(y_{CM}(\theta_0 \neq 0)\right)$$

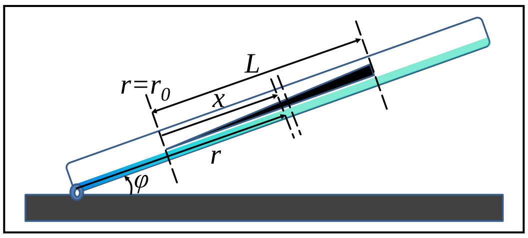
$$(mg)\frac{R^2}{L}\sin\frac{L}{R} = \frac{1}{2}m(\omega R)^2 + (mg)\frac{R^2}{L}\left[\sin\left(\frac{L}{R}\right) - \sin\left(\theta_0+\frac{L}{R}\right) + \sin(\theta_0)\right] \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \boxed{\omega = \sqrt{\frac{2g}{L}\left(\sin\left(\frac{L}{R}\right) + \sin\theta_0 - \sin\left(\theta_0+\frac{L}{R}\right)\right)}}$$

Παρατήρηση: Στην περίπτωση που η διατήρηση ενέργειας γραφόταν με τη μορφή

$$E_{o\lambda}(0) = E_{o\lambda}(\theta_0) \Rightarrow (mg)\left(y_{CM}(\theta_0 = 0)\right) = \frac{1}{2}m\upsilon_{CM}^2 + \frac{1}{2}I_{CM}\omega^2 + (mg)\left(y_{CM}(\theta_0 \neq 0)\right),$$

θα έπρεπε να χρησιμοποιηθούν τα μεγέθη $\upsilon_{CM} = \omega R_{CM}$ και $I_{CM} = I_0 - mR_{CM}^2$



4. Ράβδος συνολικής μάζας m_0 και μήκους L έχει γραμμική πυκνότητα της μορφής $\lambda \equiv (dm/dx) = 2A(L+x)/(3L^2)$, $0 \le x \le L$. Η ράβδος βρίσκεται στο εσωτερικό ενός σωλήνα, ο οποίος έχει άρθρωση στο κάτω μέρος του $(r=0)$, έτσι ώστε να μπορεί να περιστραφεί περί οριζόντιο άξονα (κάθετο στο σωλήνα) μεταβάλλοντας ελεγχόμενα την κλίση του (γωνία φ) ως προς το οριζόντιο επίπεδο. Η τραχύτητα της ράβδου είναι ίδια σε όλο της το μήκος, αλλά η τραχύτητα του σωλήνα μεταβάλλεται, έτσι ώστε ο τοπικός συντελεστής τριβής να είναι συνάρτηση της απόστασης r από την άρθρωση, της μορφής $\mu(r) = L/2(L+r)$, $0 \le r < \infty$.

(α) Να υπολογιστεί η τιμή της σταθεράς A, συναρτήσει της μάζας m_0.

(β) Αν η αρχή της ράβδου, $(x=0)$ βρίσκεται στο σημείο $r=r_0$ του σωλήνα, όπως στο σχήμα, να υπολογίσετε την εφαπτομένη της μέγιστης κλίσης, $\tan\varphi_{\max}$, ***<u>πέραν της οποίας η</u>***

ράβδος αρχίζει να ολισθαίνει στο εσωτερικό του σωλήνα, συναρτήσει των μεγεθών L και r_0, $\tan\varphi = f\left(L, r_0\right)$.

(γ) Υπολογίστε την οριακή τιμή της $\tan\varphi_{\max}$ όταν $r_0 \to \infty$.

ΑΠΑΝΤΗΣΗ

(α) $m_0 = \int_{x=0}^{x=L} \lambda(x)\,dx = \frac{2A}{3L^2}\int_{x=0}^{x=L}(L+x)\,dx = \frac{2A}{3L^2}\left(L^2+\frac{L^2}{2}\right) = A \Rightarrow \boxed{A = m_0}$

(β) Συνθήκη μέγιστης κλίσης, πριν την ολίσθηση: $m_0 g \sin\varphi \le F_{\tau\rho,o\lambda}$, όπου η ολική τριβή είναι

$$F_{\tau\rho,o\lambda} = \int_{x=0}^{x=L} \mu(r)\,dm(x)\,g\cos\varphi, \text{ όπου } r = r_0 + x, \text{ οπότε:}$$

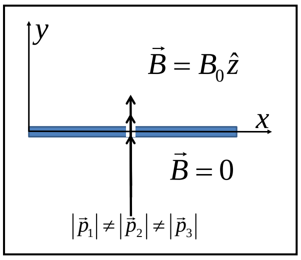
$$F_{\tau\rho,o\lambda} = \int_{x=0}^{x=L} \mu(r)\,dm(x)\,g\cos\varphi = \int_{x=0}^{x=L} \frac{L}{2\left(L+r_0+x\right)}\frac{2m_0}{3L^2}\left(L+x\right)g\cos\varphi\,dx$$

$$F_{\tau\rho,o\lambda} = \frac{m_0 g\cos\varphi}{3L}\int_{x=0}^{x=L}\frac{\left(L+r_0+x-r_0\right)}{\left(L+r_0+x\right)}dx = \frac{m_0 g\cos\varphi}{3L}\left[\int_{x=0}^{x=L}dx - r_0\int_{x=0}^{x=L}\frac{dx}{\left(L+r_0+x\right)}\right]$$

$$F_{\tau\rho,o\lambda} = \frac{m_0 g\cos\varphi}{3L}\left[L - r_0\int_{x=0}^{x=L}\frac{d\left(L+r_0+x\right)}{\left(L+r_0+x\right)}\right] = \frac{m_0 g\cos\varphi}{3L}\left[L - r_0\ln\left(\frac{2L+r_0}{L+r_0}\right)\right]$$

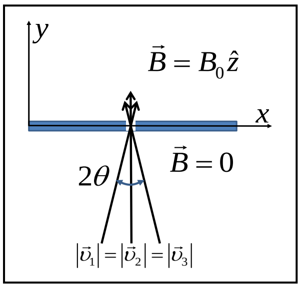
$$m_0 g\sin\varphi \le F_{\tau\rho,o\lambda} = \frac{m_0 g\cos\varphi}{3L}\left[L - r_0\ln\left(\frac{2L+r_0}{L+r_0}\right)\right] \Rightarrow \boxed{\tan\varphi_{\max} = \frac{1}{3L}\left[L - r_0\ln\left(1+\frac{L}{L+r_0}\right)\right]}$$

(γ) $r_0 \to \infty \Rightarrow \ln\left(1+\frac{L}{L+r_0}\right) \approx \frac{L}{L+r_0} \Rightarrow \tan\varphi_{\max} \approx \frac{1}{3L}\left[L - \frac{r_0 L}{L+r_0}\right] = \frac{1}{3}\left[1-\frac{r_0}{L+r_0}\right] \xrightarrow{r_0\to\infty} 0$



5α. ***Επιλογέας ορμών για φορτισμένα σωματίδια*** Υποθέστε ότι διαθέτουμε μία διάταξη παραγωγής φορτισμένων σωματιδίων με διαφορετικές μάζες και ταχύτητες, που όμως επιταχύνονται σε μία ορισμένη κατεύθυνση, π.χ., κατά μήκος του άξονα y. Υποδείξτε πως θα μπορούσαμε με ένα κατάλληλο μαγνητικό πεδίο $\vec{B}$ σε μία περιοχή του χώρου και με ένα διάφραγμα που διαθέτει δύο οπές, να κατασκευάσουμε έναν ***επιλογέα ορμών*** για αυτά τα σωματίδια.

5β. ***Επιλογέας ταχυτήτων για φορτισμένα σωματίδια***. Υποθέστε ότι διαθέτουμε μία διάταξη παραγωγής φορτισμένων σωματιδίων με διαφορετικές μάζες και ταχύτητες, αλλά και με διαφορετικό προσανατολισμό κίνησης. Υποδείξτε πως θα μπορούσαμε με ένα κατάλληλο συνδυασμό ενός ομοιογενούς Ηλεκτρικού πεδίου $\vec{E}$ και ενός ομοιογενούς Μαγνητικού πεδίου $\vec{B}$ να επιτύχουμε την επιλογή σωματιδίων που κινούνται σε ορισμένη κατεύθυνση με ορισμένο μέτρο ταχύτητας



6. ***<u>Μαγνητική Εστίαση 180^o</u>***. Υποθέστε ότι διαθέτουμε μία διάταξη παραγωγής φορτισμένων σωματιδίων με ίδια μάζα και μέτρο ταχύτητας, αλλά με λίγο διαφορετικό προσανατολισμό κίνησης πουπροσδιορίζεται από τη γωνία απόκλισης θ, όπως στο σχήμα. Υποδείξτε πως θα μπορούσαμε με ένα κατάλληλο μαγνητικό πεδίο $\vec{B}$ σε μία περιοχή του χώρου και με ένα διάφραγμα που διαθέτει δύο οπές, να εστιάσουμε τα σωματίδια επιτυγχάνοντας τη διέλευσή τους από μία περιοχή μικρών διαστάσων.

7. Σωματίδιο μάζας m και φορτίου q εκτοξεύεται με, αρχική ταχύτητα $\vec{\upsilon}_0 = \left(\upsilon_{0x}, \upsilon_{0y}, \upsilon_{0z}\right)$, σε περιοχή του χώρου όπου συνυπάρχουν ένα ηλεκτρικό πεδίο $\vec{E} = \hat{z}E_0$ και ένα μαγνητικό πεδίο $\vec{B} = \hat{z}B_0$, ομοιογενή και σταθερά. Να μελετήσετε την κίνηση που θα εκτελέσει το φορτισμένο σωματίδιο.

8. Σώμα μάζας m εκτοξεύεται κατακόρυφα προς τα πάνω με αρχική ταχύτητα $V\hat{y}$ κατά μήκος του άξονα των *y*, η θετική κατεύθυνση του οποίου είναι προς τα πάνω. Η αρχική θέση του σώματος είναι *y* = 0. Πάνω στο σώμα δρα, εκτός του βάρους του, δύναμη τριβής από τον αέρα ίση με $-mk\vec{\upsilon}$, όπου $\vec{\upsilon}$ η ταχύτητα του σώματος και k μια θετική σταθερά.
(α) Να διατυπωθεί η διαφορική εξίσωση κίνησης του σώματος.
(β) Δείξτε ότι τα υ και y ικανοποιούν τη σχέση $y = \dfrac{V-\upsilon}{k} - \dfrac{g}{k^2}\ln\left(\dfrac{1+kV/g}{1+k\upsilon/g}\right)$.
(γ) Δείξτε ότι το μέγιστο ύψος H στο οποίο θα φθάσει το σώμα είναι $H = \dfrac{V}{k} - \dfrac{g}{k^2}\ln\left(1+\dfrac{kV}{g}\right)$.

ΑΠΑΝΤΗΣΗ

(α) $m\ddot{y} = -mg - mk\upsilon_y \Rightarrow \dot{\upsilon}_y = -g - k\upsilon_y \Rightarrow \dfrac{d\upsilon_y}{dy}\dfrac{dy}{dt} = -g - k\upsilon_y \Rightarrow \dfrac{\upsilon_y d\upsilon_y}{g + k\upsilon_y} = -dy$

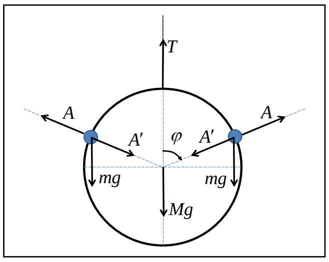
(β) $\dfrac{\upsilon_y d\upsilon_y}{g+k\upsilon_y} = -dy \Rightarrow \dfrac{\left(g + k\upsilon_y - g\right)d\upsilon_y}{g+k\upsilon_y} = -kdy \Rightarrow d\upsilon_y - \dfrac{g}{k}\dfrac{d\left(g+k\upsilon_y\right)}{g+k\upsilon_y} = -kdy \Rightarrow$

$$\int_V^\upsilon d\upsilon_y - \frac{g}{k}\int_V^\upsilon \frac{d\left(g+k\upsilon_y\right)}{g+k\upsilon_y} = -k\int_o^y dy \Rightarrow \boxed{y = \frac{V-\upsilon}{k} - \frac{g}{k^2}\ln\left(\frac{g+kV}{g+k\upsilon}\right)}$$

(γ) $y = H \Rightarrow \upsilon = 0$, άρα: $H = \dfrac{V}{k} - \dfrac{g}{k^2}\ln\left(\dfrac{g+kV}{g}\right)$

9. Στεφάνη μάζας Μ και ακτίνας R, κρέμεται με αβαρές νήμα από ακλόνητο σημείο, μέσα σε ομογενές πεδίο βαρύτητας g. Στη στεφάνη είναι περασμένα δύο τρύπια σφαιρίδια, μάζας m το καθένα, που μπορούν να ολισθαίνουν ως προς τη στεφάνη χωρίς τριβή. Δείξτε ότι, αν αφεθούν τα δύο σφαιρίδα, με μηδενική ταχύτητα, από την κορυφή της στεφάνης, έτσι ώστε να ολισθήσουν σε αντίθετες κατευθύνσεις, τότε η τάση στο νήμα ανάρτησης θα μπορούσε να μηδενιστεί, όταν τα σφαιρίδια βρίσκονται σε κατάλληλη γωνία, υπό την προϋπόθεση ότι το πηλίκο των μαζών, M/m, ικανοποιεί μία ορισμένη σχέση.

ΑΠΑΝΤΗΣΗ



(α) Αν τα σφαιρίδια δεν ήταν περασμένα στη στεφάνη αλλά ολίσθαιναν ελεύθερα στην επιφάνειά της, τότε, σε κάθε γωνία φ από την κατακόρυφο θα ίσχυε:

$$mg\left(R-R\cos\varphi\right)=\frac{1}{2}m\upsilon^2 \quad \Rightarrow \quad \upsilon^2=2gR\left(1-\cos\varphi\right)$$

Τα σφαιρίδια εκτελούν κυκλική επιταχυνόμενη κίνηση, με κεντρομόλο δύναμη την ακτινική προβολή του βάρους και την αντίστοιχη αντίδραση της στεφάνης (Α=Α΄). Η επαφή με την επιφάνεια παύει όταν μηδενίζεται η αντίδραση, δηλ., όταν λειτουργεί ως κεντρομόλος μόνο η ακτινική συνιστώσα του βάρους, δηλ.,

$$mg\cos\varphi=m\frac{\upsilon^2}{R} \quad \Rightarrow \quad gR\cos\varphi=2gR\left(1-\cos\varphi\right)\Rightarrow \boxed{\cos\varphi_{o\rho}=2/3}$$

(β) Πάνω από την οριακή γωνία, $0<\cos\varphi<2/3$, τα ελεύθερα σφαιρίδα θα είχαν την τάση να αποκολληθούν από την επιφάνεια. Όταν, όμως αυτά είναι υποχρεωμένα να ακολουθήσουν τη στεφάνη (η οποία διέρχεται από μέσα τους), τότε υφίστανται μία δύναμη Α΄, από τη στεφάνη, οπότε ασκούν στη στεφάνη ίση και αντίθετη δύναμη Α.
Η στεφάνη υφίσταται τις δυνάμεις : του βάρους της Mg, την τάση Τ του νήματος, και τις δυνάμεις Α από τα σφαιρίδια. Όταν οι δύο κατακόρυφες συνιστώσες των Α, εξισορροπούν το βάρος της, τότε μηδενίζεται η τάση Τ του νήματος (Άρα, και η στεφάνη εισέρχεται σε φάση αναπήδησης ?!).

Κεντρομόλος δύναμη: $A+mg\cos\theta=m\dfrac{\upsilon^2}{R} \quad \Rightarrow \quad A=mg\theta\left(2-3\cos\theta\right)$ (1)

Μηδενισμός της τάσης Τ: $2A\cos\theta=Mg \overset{(1)}{\Rightarrow} 2mg\left(2-3\cos\theta\right)\cos\theta=Mg \Rightarrow$

$$2\cos^2\theta-2\cos\theta+\frac{M}{2m}=0 \quad \Rightarrow \quad \cos\theta\equiv\frac{2\pm\sqrt{4-\left(6M/m\right)}}{6}$$

Για πραγματικές γωνίες: $4>6\dfrac{M}{m} \quad \Rightarrow \quad \boxed{\dfrac{M}{m}\leq\dfrac{2}{3}}$

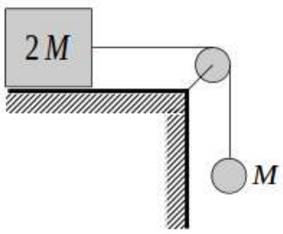
Διερεύνηση:

(i) Όταν $M\to 0$, έχουμε $\cos\theta=\dfrac{2\pm2}{6}=\begin{cases}2/3\\0\end{cases}$, το $\cos\theta=0$ απορρίπτεται διότι οι αντιδράσεις Α ειναι οριζόντιες, (το γεγονός ότι, για $\cos\theta=2/3$, η αντίδραση $A\to 0$ είναι σε συμφωνία με το γεγονός ότι $M\to 0$ και επομένως η τάση στο νήμα ανάρτησης μηδενίζεται διότι ο μεν δακτύλιος είναι αβαρής, αλλά και οι αντιδράσεις των σφαιριδίων στο δακτύλιο μηδενίζονται.

(ii) Όταν $M\to 2/3$, έχουμε $\cos\theta\to\dfrac{1}{3}$

(iii) Όταν $M=\dfrac{2}{3}-\varepsilon$, έχουμε $\cos\theta=\dfrac{1}{3}\pm\sqrt{\dfrac{\varepsilon}{6}}$, (περιοχή γωνιών μηδενισμού της τάσης στο νήμα ανάρτησης)

10. Κύβος μάζας 2M βρίσκεται πάνω σε λείο οριζόντιο τραπέζι και είναι δεμένος μέσω αβαρούς τροχαλίας και μη εκτατού (και αβαρούς) νήματος με κούφια σφαίρα. Αρχικά η σφαίρα είναι γεμάτη από άμμο μάζας M (το ίδιο το σφαιρικό κέλυφος έχει αμελητέα μάζα). Την



χρονική στιγμή $t_0 = 0$ αφήνουμε το σύστημα από τη θέση του σχήματος και οι κόκκοι άμμου αρχίζουν να εκτοξεύονται προς τα κάτω από μικρή οπή στο κατώτερο σημείο της σφαίρας με σταθερό ρυθμό $\lambda = |dm/dt| > 0$ και σταθερή σχετική ταχύτητα $\upsilon_{\sigma\chi}$ ως προς την σφαίρα. Το σύστημα βρίσκεται μέσα στο ομογενές βαρυτικό πεδίο της Γης επιτάχυνσης g. Υποθέτουμε ότι η απόσταση μεταξύ του κύβου και της τροχαλίας είναι αρκετά μεγάλη ούτως ώστε ο κύβος να παραμένει συνεχώς πάνω στο τραπέζι για τα παρακάτω ερωτήματα.

(α) Βρείτε την επιτάχυνση του συστήματος σε χρονική στιγμή $t > t_0$ υποθέτοντας ότι οι συνθήκες του προβλήματος είναι τέτοιες ώστε η σφαίρα να αρχίσει την στιγμή t_0 να κινείται προς τα κάτω και ότι την στιγμή t υπάρχει ακόμη άμμος στην σφαίρα.

(β) Βρείτε ποια σχέση πρέπει να ικανοποιεί η $\upsilon_{\sigma\chi}$ (συναρτήσει των M, g, λ) για να αρχίσει η σφαίρα να κινείται προς τα κάτω την στιγμή t_0.

(γ) Έστω ότι η σφαίρα αρχίζει να κινείται τη στιγμή t_0. Βρείτε την ταχύτητα $\upsilon(t_1)$ τη χρονική στιγμή t_1 κατά την οποία μηδενίζεται η επιτάχυνση του συστήματος .

ΑΠΑΝΤΗΣΗ

(α) Κύβος: $2Ma = T$ (1)

Σφαίρα :

$$P(t+dt) - P(t) = F_{o\lambda}dt \;\Rightarrow\; (m-dm)(\upsilon+d\upsilon) + dm(\upsilon+d\upsilon+\upsilon_\sigma) - m\upsilon = (mg-T)dt$$

$$m\upsilon + md\upsilon - dm\upsilon - dmd\upsilon + dm\upsilon + dmd\upsilon + dm\upsilon_\sigma - m\upsilon = (mg-T)dt \Rightarrow$$

$$md\upsilon + dm\upsilon_\sigma = (mg-T)dt \;\Rightarrow\; m\frac{d\upsilon}{dt} + \upsilon_\sigma\frac{dm}{dt} = mg - T \;\Rightarrow\; ma + \lambda\upsilon_\sigma = mg - T$$

Και αντικαθιστώντας $m(t) = M - \lambda t$ και $2Ma = T$ από την (1), παίρνουμε

$$\Rightarrow (M-\lambda t)a + \upsilon_{\sigma\chi}\lambda = (M-\lambda t)g - 2Ma$$

$$\Rightarrow (3M-\lambda t)a = (M-\lambda t)g - \upsilon_{\sigma\chi}\lambda \Rightarrow \boxed{a = \frac{(M-\lambda t)g - \upsilon_{\sigma\chi}\lambda}{3M-\lambda t}}$$

(β) $$a(t) = \frac{M-\lambda t}{3M-\lambda t}g - \frac{\upsilon_{\sigma\chi}\lambda}{3M-\lambda t} \;\Rightarrow\; a(t_0=0) > 0 \;\Rightarrow\; \frac{Mg}{3M} - \frac{\upsilon_{\sigma\chi}\lambda}{3M} > 0$$

Άρα $$\frac{Mg}{3M} - \frac{\upsilon_{\sigma\chi}\lambda}{3M} > 0 \;\Rightarrow\; \boxed{\upsilon_{\sigma\chi} < \frac{Mg}{\lambda}}$$

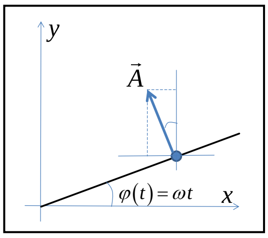
(γ) Η χρονική στιγμή t_1 κατά την οποία μηδενίζεται η επιτάχυνση προσδιορίζεται από την

$$a = \frac{M-\lambda t_1}{3M-\lambda t_1}g - \frac{\upsilon_{\sigma\chi}\lambda}{3M-\lambda t_1} = 0 \;\Rightarrow (M-\lambda t_1)g = \upsilon_{\sigma\chi}\lambda \Rightarrow \boxed{t_1 = \frac{M}{\lambda} - \frac{\upsilon_{\sigma\chi}}{g} > 0}$$

[Μάλιστα, η εκροή της άμμου ολοκληρώνεται κατά την $t_2 = \frac{M}{\lambda} > \frac{M}{\lambda} - \frac{\upsilon_{\sigma\chi}}{g} = t_1$]

$$\frac{d\upsilon}{dt} = a = \frac{M-\lambda t_1}{3M-\lambda t_1}g - \frac{\upsilon_{\sigma\chi}\lambda}{3M-\lambda t_1} \Rightarrow \upsilon(t_1) = g\int_o^{t_1}\frac{M-\lambda t_1}{3M-\lambda t_1}dt - \upsilon_{\sigma\chi}\lambda\int_0^{t_1}\frac{dt}{3M-\lambda t_1}$$

$$\boxed{\upsilon(t_1) = \frac{Mg}{\lambda} - \upsilon_{\sigma\chi} + \left(\frac{2Mg+\upsilon_{\sigma\chi}}{\lambda}\right)\ln\left(\frac{2M+\upsilon_{\sigma\chi}\lambda/g}{3M}\right)}$$



11. Λεία ράβδος μήκους περιστρέφεται με σταθερή γωνιακή ταχύτητα ω, σε οριζόντιο επίπεδο, περί κατακόρυφο άξονα που διέρχεται από το ένα άκρο της. Κατά μήκος της ράβδου μπορεί να γλιστράει, χωρίς τριβή, διάτρητο σφαιρίδιο μάζας m. (α) Δείξτε ότι η θέση του σφαιριδίου, κατά μήκος της ράβδου, μεταβάλλεται συναρτήσει του χρόνου με τη μορφή: $\rho(t)=ae^{\omega t}+be^{-\omega t}$. (β) Αν, τη χρονική στιγμή t=0, (και ενώ η ράβδος περιστρέφεται) το σφαιρίδιο αφεθεί στη θέση ρ_0 της ράβδου (ως προς το σταθερό άκρο) και με ταχύτητα υ_0 (κατά μήκος της ράβδου), να υπολογίσετε τις τιμές των σταθερών (a,b) του ερωτήματος-*α*. (γ) Δείξτε ότι για έναν συγκεκριμένο συνδυασμό των παραμέτρων $(\rho_0,\upsilon_o,\omega)$ μπορεί να επιτευχθεί ασυμπτωτική κίνηση του σφαιριδίου προς το σταθερό άκρο της ράβδου, με ταχύτητα που τείνει ασυμπωτικά στο μηδέν (για $t\to\infty$).

ΑΠΑΝΤΗΣΗ

(α) Επειδή η μοναδική δύναμη που ασκείται στο επίπεδο της κίνησης είναι η αντίδραση A της ράβδου πάνω στο σφαιρίδιο και η οποία, απουσία τριβής, είναι κάθετη στη ράβδο, άρα έχει κατεύθυνση παράλληλη στο $\hat{\varphi}$, ενώ παράλληλα στο $\hat{\rho}$ υπάρχει μηδενική δύναμη, φαίνεται ότι αποτελεί πλεονέκτημα να εκφράσουμε τις διαφορικές εξισώσεις κίνησης σε επίπεδες πολικές συντεταγμένες.
Χρησιμοποιώντας την έκφραση για την επιτάχυνση, όπως υπολογίστηκε σε επίπεδες πολικές συντεταγμένες, $\vec{a}=\left(\ddot{\rho}-\rho\dot{\varphi}^2\right)\hat{\rho}+\left(2\dot{\rho}\dot{\varphi}+\rho\ddot{\varphi}\right)\hat{\varphi}$,
η διαφορική εξίσωση κίνησης γράφεται

$$m\left(\ddot{\rho}-\rho\dot{\varphi}^2\right)\hat{\rho}+m\left(2\dot{\rho}\dot{\varphi}+\rho\ddot{\varphi}\right)\hat{\varphi}=A\hat{\varphi} \qquad (1)$$

Αν ληφθεί υπόψη ότι $\dot{\varphi}=\omega=\sigma\tau\alpha\theta. \;\Rightarrow\; \ddot{\varphi}=0$, τότε η γωνιακή και η ακτινική συνιστώσα της εξίσωσης (1) γράφονται

$$\left\{\begin{matrix} m\left(\ddot{\rho}-\rho\dot{\varphi}^2\right)\hat{\rho}=0 \\ m\left(2\dot{\rho}\dot{\varphi}+\rho\cancel{\ddot{\varphi}}\right)\hat{\varphi}=A\hat{\varphi} \end{matrix}\right\} \Rightarrow \left\{\begin{matrix} \ddot{\rho}=\rho\omega^2 \\ A=2m\dot{\rho}\omega \end{matrix}\right\}$$

Ενας τρόπος λύσης : $\ddot{\rho}=\rho\omega^2 \Rightarrow \ddot{\rho}-\omega^2\rho=0$, ομογενής διαφορική εξίσωση 2ης τάξης με σταθερούς συντελεστές, αναζητούμε λύσεις της μορφής $\rho(t)=Ae^{\delta t}$.

Αντικαθιστώντας την $\rho(t)=Ae^{\delta t}$ και την $\ddot{\rho}(t)=\delta^2Ae^{\delta t}$ στη διαφορική, διαπιστώνουμε ότι η διαφορική ικανοποιείται, υπό την προϋπόθεση ότι $\delta=\pm\omega$, επομένως παίρνουμε ως γενική λύση το γραμμικό συνδυασμό των δύο λύσεων $\rho(t)=A_1e^{\omega t}+A_2e^{-\omega t}$

(β) $$\rho(t)=ae^{\omega t}+be^{-\omega t} \quad\Rightarrow\quad \dot{\rho}(t)=\omega ae^{\omega t}-\omega be^{-\omega t}$$

Εφαρμογή αρχικών συνθηκών : $\rho(t=0)=\rho_0 \quad\Rightarrow\quad a+b=\rho_0 \qquad (1)$

$$\dot{\rho}(t=0)=\upsilon_0 \quad\Rightarrow\quad a-b=\upsilon_0/\omega \qquad (2)$$

Συνδυάζοντας τις (1) και (2) : $a=\left(\rho_0+\upsilon_0/\omega\right)/2$, $b=\left(\rho_0-\upsilon_0/\omega\right)/2$

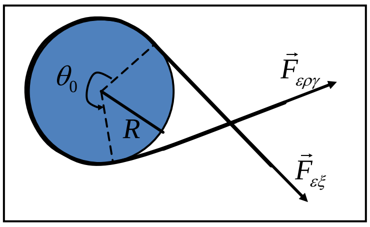
Προκειμένου τόσο η ακτίνα όσο και η ταχύτητα να τείνουν ασυμπτωτικά στο μηδέν, ώστε να μην έχουμε ανάκρουση του σφαιριδίου στο σταθερό άκρο της ράβδου, πρέπει να μηδενιστεί ο συντελεστής του θετικού εκθετικού όρου στην έκφραση της ακτίνας και τις ταχύτητας, άρα :

$$\boxed{\upsilon_0 = -\rho_0 \omega}$$

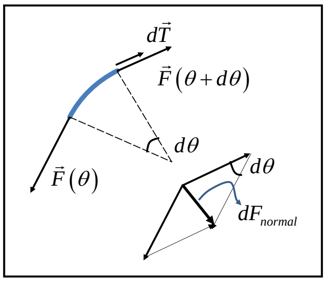
Δηλαδή, η αρχική ταχύτητα πρέπει να είναι αρνητική και να έχει μία συγκεκριμένη τιμή που εξαρτάται και από τη θέση που «αφήνεται» το σφαιρίδιο και από τη συχνότητα περιστροφής της ράβδου.

Για τιμές $\upsilon_0 < -\rho_0 \omega$, το σφαιρίδιο κτυπάει στη αφετηρία (ακίνητο σημείο της περιστρεφόμενης ράβδου) και, ανάλογα με το χαρακτήρα της κρούσης, π.χ., ελαστική, μπορεί να ανακλαστεί, οπότε δεν επιστρέφει (γιατί;)

Για τιμές $-\rho_0 \omega < \upsilon_0 < 0$, το σφαιρίδιο κατευθύνεται αρχικά προς την αφετηρία με μειούμενο μέτρο ταχύτητας, που μηδενίζεται τη χρονική στιγμή $t_o = \dfrac{1}{2\omega} \ln \dfrac{\omega \rho_0 - \upsilon_0}{\omega \rho_0 + \upsilon_0}$ (γιατί;), και στη συνέχεια το σφαιρίδιο αποκτά θετικές ταχύτητες και δεν επιστρέφει.



12. (α) Ο ακλόνητος κύλινδρος του σχήματος (εργατοκύλινδρος) χρησιμοποιείται για την εξισορρόπηση ισχυρής εξωτερικής δύναμης $\vec{F}_{\varepsilon\xi}$ με τη μικρότερη δύναμη ενός εργάτη $\vec{F}_{\varepsilon\rho\gamma}$, μέσω εκμετάλευσης της τριβής μεταξύ της επιφάνειας του κυλίνδρου και σχοινιού. Αν ο συντελεστής στατικής τριβής μεταξύ του σχοινιού και της επιφάνειας του κυλίνδρου είναι μ, και η συνολική γωνία τυλίγματος του σχοινιού περί τον κύλινδρο είναι θ_0, να δείξετε ότι, για στατική ισορροπία, το πηλίκο μείωσης της δύναμης είναι $\vec{F}_{\varepsilon\rho\gamma} / \vec{F}_{\varepsilon\xi} = e^{-\mu\theta_0}$. [Υπόδειξη: Υπολογίστε τη διαφορική τριβή dT που ασκείται σε διαφορικό τμήμα του σχοινιού, που αντιστοιχεί σε γωνία $d\theta$, και ολοκληρώστε]



(α) Αν η $\theta = 0$ αντιστοιχεί στην $\vec{F}_{\varepsilon\xi}$, και $\theta = \theta_0$ αντιστοιχεί στην $\vec{F}_{\varepsilon\rho\gamma}$, τότε η συνθήκη ισορροπίας ενός διαφορικού τόξου με γωνιακό εύρος $d\theta$ είναι :

$$F(\theta) = F(\theta + d\theta) + dT \quad \Rightarrow$$

$$dT = F(\theta) - F(\theta + d\theta) = F(\theta) - F(\theta) - \frac{dF}{d\theta} d\theta$$

Τελικά $dT = -\dfrac{dF}{d\theta} d\theta = -dF \quad \Rightarrow dF = -dT = -\mu \, dF_{normal} = -\mu F \, d\theta$

$$dF = -\mu F \, d\theta \quad \Rightarrow \frac{dF}{F} = -\mu d\theta \quad \Rightarrow \int_{F_{\max}}^{F_{\min}} \frac{dF}{F} = -\mu \int_0^{\theta_0} d\theta \quad \Rightarrow \boxed{F_{\min} = F_{\max} e^{-\mu\theta_0}}$$

(β) Σε έναν διαφορετικό τρόπο λειτουργίας, ο κύλινδρος μπορεί να περιστρέφεται, όταν ένα σχοινί, που είναι τυλιγμένο γύρο του, έλκεται. Σε αυτή την περίπτωση, οι αντιστάσεις του μηχανισμού περιστροφής αντιστοιχούν σε μία δύναμη αντίστασης της μορφής $\vec{F}_{\tau\rho} = F_0 e^{a\omega R}$, όπου a: θετική σταθερά, ω: η γωνιακή ταχύτητα περιστροφής και R: η ακτίνα του κυλίνδρου. Σωματίδιο μάζας m που είναι προσδεδεμένο στην άκρη του σχοινού εκτοξεύεται εφαπτομενικά με αρχική ταχύτητα υ_0 και εξακολουθεί να κινείται στην ίδια ευθεία. Να υπολογίσετε την ταχύτητα συναρτήσει του χρόνου, και τη συνολική διάρκεια κίνησης αν $\upsilon_0 = (\ln 2)/a$.

$$m\frac{d\upsilon}{dt} = -F_{\tau\rho} = -F_0 e^{a\omega R} = -F_0 e^{a\upsilon} \quad \Rightarrow \quad e^{-a\upsilon} d\upsilon = -\frac{F_0}{m} dt$$

$$\int_{\upsilon_0}^{\upsilon} e^{-a\upsilon} d\upsilon = -\frac{F_0}{m}\int_0^t dt \quad \Rightarrow \quad \upsilon(t) = -\frac{1}{a}\ln\left(e^{-a\upsilon_0} + \frac{F_0 at}{m}\right) \Rightarrow \boxed{\upsilon(t) = \frac{1}{a}\ln\left(\frac{m}{me^{-a\upsilon_0} + F_0 at}\right)}$$

Συνολική διάρκεια κίνησης, t_0 : $\upsilon(t_0) = \frac{1}{a}\ln\left(\frac{m}{me^{-a\upsilon_0} + F_0 at_0}\right) = 0 \quad \Rightarrow \frac{m}{me^{-a\upsilon_0} + F_0 at_0} = 1$

$$F_0 at_0 = m\left(1 - e^{-a\upsilon_0}\right) \quad \Rightarrow \quad \boxed{t_0 = \frac{m\left(1 - e^{-a\upsilon_0}\right)}{F_0 a} = \frac{m}{2F_0 a}}$$

(γ) Να υπολογίσετε τη σχέση που συνδέει το συνολικό διανυόμενο διάστημα με τις παραμέτρους του συστήματος.

$$\frac{dx}{dt} = -\frac{1}{a}\ln\left(e^{-a\upsilon_0} + \frac{F_0 at}{m}\right) \quad \Rightarrow dx = -\frac{1}{a}\ln\left(e^{-a\upsilon_0} + \frac{F_0 at}{m}\right)dt$$

$$\int_0^{x_{\max}} dx = -\frac{1}{a}\int_0^{t_0}\ln\left(e^{-a\upsilon_0} + \frac{F_0 at}{m}\right)dt \quad \Rightarrow \quad \boxed{x_{\max} = -\frac{1}{a}\int_0^{t_0}\ln\left(e^{-a\upsilon_0} + \frac{F_0 at}{m}\right)dt}$$

$$\int \ln(a + cx)\,dx = \frac{(a + cx)\ln(a + cx) - cx}{c}$$

13. Ηλεκτροκίνητο ρομποτικό όχημα μπορεί να κινηθεί σε ευθύγραμμη τροχιά έχοντας τη δυνατότητα να αναπτύξει μέγιστη επιτάχυνση μέτρου a_1 και μέγιστη επιβράδυνση μέτρου a_2.

(α) Να υπολογίστε τον ελάχιστο χρόνο με τον οποίο μπορεί να διανύσει μία ευθύγραμμη απόσταση μήκους *L*, ***<u>ξεκινώντας και τερματίζοντας με μηδενική ταχύτητα</u>***.

(β) Αν η μάζα του οχήματος είναι *m*, να υπολογίσετε το ρυθμό παροχής ενέργειας $P_{\varepsilon\pi\iota\tau}(t)$ (ισχύς) από τον κινητήρα στο όχημα, κατά τη φάση της επιτάχυνσης και τη μέγιστη κινητική ενέργειά του, αν η τριβή θεωρηθεί αμελητέα.

(γ) Να υπολογίσετε το ρυθμό απώλειας ενέργειας $P_{\varepsilon\pi\iota\beta\rho}(t)$, από τον μηχανισμό πέδησης, κατά τη φάση της επιβράδυνσης.

[Όλα τα ζητούμενα μεγέθη να υπολογιστούν συναρτήσει των a_1, a_2, L, m]

ΑΠΑΝΤΗΣΗ

(α) Ο ελάχιστος χρόνος αντιστοιχεί στον συνδυασμό συνεχούς ομαλά επιταχυνόμενης κίνησης με τη μέγιστη επιτάχυνση a_1, για χρόνο και μήκος (t_1, L_1), και μέγιστη ταχύτητα υ_1, που ακολουθείται άμεσα από ομαλά επιβραδυνόμενη κίνηση με μέγιστη επιβράδυνση a_2, για χρόνο και μήκος (t_2, L_2), έτσι ώστε η εκκίνηση και ο τερματισμός να γίνουν με μηδενική ταχύτητα.

Με βάση τα παραπάνω, θα έχουμε: $\qquad L = L_1 + L_2, \qquad t = t_1 + t_1 \qquad$ (1α,β)

$$L_1 = \frac{1}{2}a_1 t_1^2 \quad \Rightarrow \quad t_1 = \sqrt{\frac{2L_1}{a_1}} \quad \Rightarrow \quad \upsilon_1 = a_1 t_1 = \sqrt{2a_1 L_1}$$

$$L_2 = \upsilon_1 t_1 - \frac{1}{2}a_2 t_2^2 \quad , \quad \upsilon_2 = \upsilon_1 - a_2 t_2 = 0 \Rightarrow a_1 t_1 = a_2 t_2 \Rightarrow t_2 = \frac{a_1}{a_2} t_1$$

Άρα μπορούμε να εκφράσουμε όλα τα μεγέθη συναρτήσει του t_1,

Από (1α):

$$L = L_1 + L_2 = \left(\frac{1}{2}a_1 t_1^2\right) + \left(\upsilon_1 t_2 - \frac{1}{2}a_2 t_2^2\right) = t_1^2\left(\frac{a_1}{2} + \frac{2a_1^2}{2a_2} - \frac{a_1^2}{2a_2}\right) \Rightarrow t_1 = \left(\frac{2a_2 L}{a_1\left(a_1 + a_2\right)}\right)^{1/2}$$

και
$$t_2 = \frac{a_1}{a_2} t_1 = \frac{a_1}{a_2}\left(\frac{2a_2 L}{a_1\left(a_1 + a_2\right)}\right)^{1/2} \Rightarrow t_2 = \left(\frac{2a_1 L}{a_2\left(a_1 + a_2\right)}\right)^{1/2}$$

Αθροίζοντας : $t = t_1 + t_2 \Rightarrow \boxed{t = \left(\frac{2a_2 L}{a_1\left(a_1 + a_2\right)}\right)^{1/2} + \left(\frac{2a_1 L}{a_2\left(a_1 + a_2\right)}\right)^{1/2} = \sqrt{2L\frac{a_1 + a_2}{a_1 a_2}}}$

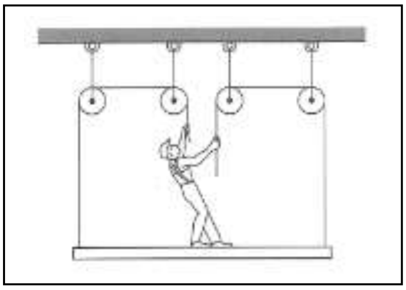
(β) Αν η μάζα του οχήματος είναι m, ο ρυθμός παροχής ενέργειας (ισχύς) από τον κινητήρα στο όχημα, κατά τη φάση της επιτάχυνσης, είναι $P_{\varepsilon\pi\iota\tau} = F\upsilon = \left(ma_1\right)\left(a_1 t\right) \Rightarrow \boxed{P_{\varepsilon\pi\iota\tau} = ma_1^2 t}$

Η συνολικά παρεχόμενη ενέργεια είναι ίση με τη μέγιστη κινητική ενέργεια

$$E_{\kappa\iota\nu,\max} = \frac{1}{2}m\upsilon_1^2 = \frac{1}{2}ma_1^2 t_1^2 = \frac{1}{2}ma_1^2\left(\frac{2a_2 L}{a_1\left(a_1 + a_2\right)}\right) \Rightarrow \boxed{E_{\kappa\iota\nu,\max} = m\frac{a_1 a_2 L}{a_1 + a_2}}$$

(γ) Ο ρυθμό απώλειας ενέργειας, από τον μηχανισμό πέδησης, κατά τη φάση της επιβράδυνσης, είναι:

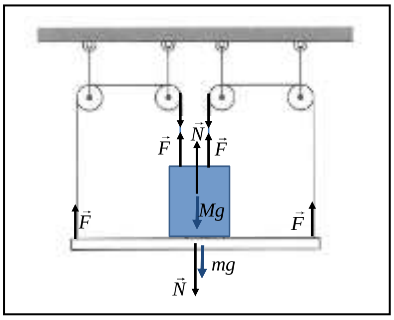
$$P_{\varepsilon\pi\iota\beta} = F\upsilon = \left(ma_2\right)\left(\upsilon_1 - a_2 t\right) = \left(ma_2\right)\left(a_1 t_1 - a_2 t\right) = \left(ma_2\right)\left(\sqrt{\frac{2a_1 a_2 L}{\left(a_1 + a_2\right)}} - a_2 t\right)$$



14. Ένας ελαιοχρωματιστής μάζας M στέκεται σε μια σκαλωσιά μάζας m και μετακινείται κατακόρυφα προς τα πάνω τραβώντας δύο σχοινιά που κρέμονται από τροχαλίες, όπως φαίνεται στο σχήμα.

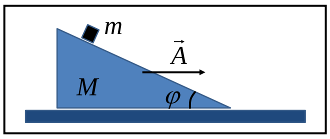
Ο ελαιοχρωματιστής τραβάει κάθε σχοινί με δύναμη F και επιταχύνει προς τα πάνω με σταθερή επιτάχυνση a. Να βρείτε την τιμή της a, αγνοώντας το γεγονός ότι κανείς δεν θα μπορούσε να κάνει αυτή τη λειτουργία για πολλή ώρα.

ΑΠΑΝΤΗΣΗ



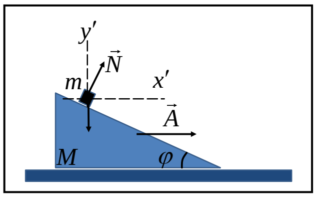
Αν υποθέσουμε ότι όλο το σύστημα ανερχεται με σταθερή επιτάχυνση α, τότε:

$$\left.\begin{cases} 2F - N - mg = ma \\ 2F + N - Mg = Ma \end{cases}\right\} \Rightarrow a = \frac{4F}{m+M} - g$$



15. Μία ορθογώνια σφήνα με γωνία βάσης φ κινείται σε οριζόντιο επίπεδο έτσι ώστε να έχει σταθερή οριζόντια επιτάχυνση ίση με Α. Στην επικλινή πλευρά της σφήνας υπάρχει σημειακή μάζα m που μπορεί να γλυστράει χωρίς τριβή. (α) Να υπολογιστεί η τιμή της επιτάχυνσης A_0, έτσι ώστε η m να ακινητεί ως προς τη σφήνα. (β) Για τιμές της επιτάχυνσης $A<A_0$, να υπολογιστεί η επιτάχυνση της μάζας m, ως προς τη σφήνα και ως προς το δάπεδο.

ΑΠΑΝΤΗΣΗ



(α) Όταν η σημειακή μάζα να ακινητεί ως προς τη σφήνα, τότε κινείται με οριζόντια επιτάχυνση μέτρου Α ως προς το (αδρανειακό) δάπεδο, και ακινητεί οριζόντια.

Αν $\vec{N}$: η αντίδραση της σφήνας, κάθετα στην επικλινή επιφάνεια, τότε οι εξισώσεις κίνησης (οριζόντια) και ακινησίας (κατακόρυφα) για την m γράφονται $\{N\sin\varphi = mA_0,\quad N\cos\varphi = mg\} \Rightarrow \boxed{A_0 = g\tan\varphi}$

(β) Όταν: $A_0 < g\tan\varphi$ θα έχουμε ολίσθηση της m καθώς κινείται η σφήνα.

Θα μελετήσουμε την κίνηση της m ως προς το μη-αδρανειακό σύστημα (x', y') το οποίο κινείται μαζί με τη σφήνα. Ως προς αυτό το μη-αδρανειακό σύστημα η μάζα m υφίσταται και τη τη μη-αδρανειακή ψευδοδύναμη $\vec{F}_{non-inert} = -m\vec{A} = -\hat{x}'mA$.

Αν συμβολίσουμε με $\vec{a}_{m,\Sigma} = \hat{x}'a_{m,\Sigma,x'} + \hat{y}'a_{m,\Sigma,y'}$ την επιτάχυνση της m ως προς τη σφήνα (Σ), τότε οι αντίστοιχες εξισώσεις κίνησης ως προς το μη-αδρανειακό σύστημα (x', y') γράφονται

$$ma_{m,\Sigma,x'} = N\sin\varphi - mA$$
$$ma_{m,\Sigma,y'} = N\cos\varphi - mg$$

Το μέτρο της κάθετης επιφανειακής δύναμης Ν μπορεί να υπολογιστεί από την κλίση της κίνησης ως προς το μη-αδρανειακό σύστημα (x', y')

$$\frac{mg - N\cos\varphi}{N\sin\varphi - mA} = \tan\varphi \quad \Rightarrow \quad N = m(A\sin\varphi + g\cos\varphi)$$

Το μέτρο της κατακόρυφης επιτάχυνσης προκύπτει από την εξίσωση κίνησης :

$$ma_{m,\Sigma,y'} = mg - N\cos\varphi = mg - m(A\sin\varphi + g\cos\varphi)\cos\varphi \Rightarrow \boxed{a_{m,\Sigma,y'} = (g\sin\varphi - A\cos\varphi)\sin\varphi}$$

Το μέτρο της οριζόντιας επιτάχυνσης προκύπτει από την εξίσωση κίνησης :

$$ma_{m,\Sigma,x'} = N\sin\varphi - mA = m(A\sin\varphi + g\cos\varphi)\sin\varphi - mA \Rightarrow \boxed{a_{m,\Sigma,x'} = (g\sin\varphi - A\cos\varphi)\cos\varphi}$$

Ως προς το αδρανειακό σύστημα (x, y) του Δαπέδου οι αντίστοιχες επιταχύνσεις είναι:

$$\begin{Bmatrix} ma_{m,\Delta,x} = N\sin\varphi \\ ma_{m,\Delta,y} = mg - N\cos\varphi \end{Bmatrix} \Rightarrow \frac{a_{m,\Delta,y}}{a_{m,\Delta,x}} = \frac{mg - N\cos\varphi}{N\sin\varphi} = \frac{mg}{N\sin\varphi} - \frac{1}{\tan\varphi} =$$

$$= \frac{mg}{m(A\sin\varphi + g\cos\varphi)\sin\varphi} - \frac{1}{\tan\varphi} = \frac{g}{(A\sin\varphi + g\cos\varphi)\sin\varphi} - \frac{\cos\varphi}{\sin\varphi}$$

Η γωνία της τροχιάς της m ως προς το Δάπεδο

$$\boxed{\tan\theta \equiv \frac{a_{m,\Delta,y}}{a_{m,\Delta,x}} = \frac{g\tan\varphi - A}{g + A\tan\varphi}}$$

Όταν $A_0 > g\tan\varphi$ τότε η μάζα m κινείται προς τα πάνω, στην επικλινή πλευρά, και γίνεται αντίστοιχη ανάλυση με αλλαγή προσήμου της a_y