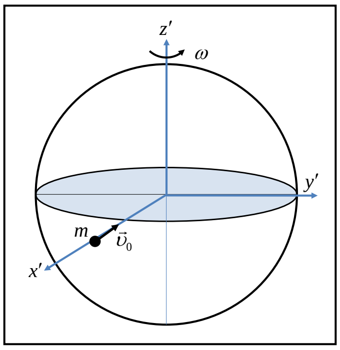
ΕΜΠ – ΣΧΟΛΗ ΕΜΦΕ – ΤΟΜΕΑΣ ΦΥΣΙΚΗΣ – ΑΚΑΔΗΜΑΪΚΟ ΕΤΟΣ 2017-18
ΜΑΘΗΜΑ: ΦΥΣΙΚΗ-Ι, 1^{ΟΥ} ΕΞΑΜΗΝΟΥ ΣΧΟΛΗΣ ΗΛΕΚΤΡΟΛΟΓΩΝ ΜΜΥ
Διδάσκοντες: Η. Ζουμπούλης, Ι. Ράπτης

Γ΄ ΣΕΙΡΑ ΑΣΚΗΣΕΩΝ 4 Δεκεμβρίου 2017

Να επιστραφούν λυμένες μέχρι 21/12/17, οι 1, 2, 3, 4, 5 [ΠΡΟΣΟΧΗ: Οι λύσεις να είναι χειρόγραφες και, είτε να παραδοθούν στο μάθημα, είτε να αναρτηθούν ως PDF στις «Εργασίες» του mycourses]

1. (α) Αεροπλάνο συνολικής μάζας *m* διέρχεται από τον Ισημερινό με ταχύτητα μέτρου *V*. Υπολογίστε το πηλίκο των μέτρων της φυγόκεντρης δύναμης προς την δύναμη Coriolis, αν δεχτούμε ότι το αεροπλάνο πετά σε μικρό ύψος από την επιφάνεια της Γης (σε σχέση με την ακτίνα R της Γης) και, κατά τη στιγμή που βρίσκεται στον Ισημερινό, πετάει παράλληλα στην επιφάνεια της Γης, με κατεύθυνση (α) Βόρεια, (β) Ανατολικά, (γ) Νοτιο-Δυτικά.
(β) Αν εκτελέσουμε μία οριζόντια βολή κατά μήκος ενός μεσημβρινού στο βόρειο ημισφαίριο, με κατεύθυνση από τον νότο προς το βορά, το τελικό σημείο της βολής επί του εδάφους θα κείται επί του μεσημβρινού ή θα αποκλίνει; Αν υπάρξει απόκλιση, το βλήμα θα φτάσει στο έδαφος ανατολικότερα ή δυτικότερα από το αναμενόμενο σημείο τερματισμού της βολής επί του μεσημβρινού;



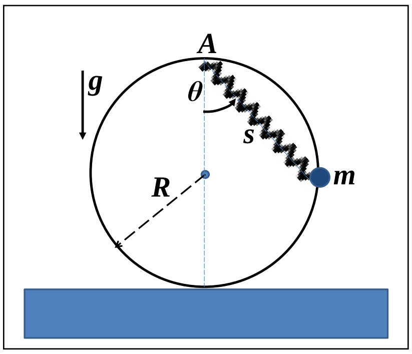
(γ) Επί του Ισημερικού και σε ύψος *h* από την επιφάνειας της Γης εκτοξεύουμε σημειακή μάζα m προς το κέντρο της Γης με αρχική ταχύτητα μέτρου υ_0. Γνωρίζοντας ότι η Γη περιστρέφεται αριστερόστροφα με σταθερή γωνιακή ταχύτητα ω, περί τον άξονα που διέρχεται από τους πόλους της, υπολογίστε τη στιγμιαία δύναμη Coriolis και επομένως τη στιγμιαία επιτάχυνση Coriolis (για έναν παρατηρητή επί της Γης). Ερευνήστε αν αυτή η επιτάχυνση σημαίνει εκτροπή της μάζας (για τον παρατηρητή της Γης) προς τα Ανατολικά ή προς τα Δυτικά και συγκρίνετε με την «διαισθητικά» αναμενόμενη εκτροπή (λόγω της περιστροφής της Γης από Δυτικά προς Ανατολικά). Ποιά είναι η αιτία της φαινομενικής ασυμφωνίας (ισοδύναμα: πώς το εξηγεί ένας αδρανειακός παρατηρητής, για τον οποίο δεν υπάρχει δύναμη Coriolis ;)

2. (α) Από τον νόμο της παγκόσμιας έλξης, να βρείτε την έκφραση για την δυναμική ενέργεια $g(m,r)$ [συναρτήσει των G, M_e, m και r] μάζας m σε απόσταση r από το κέντρο της Γης (M_e, R_e), όπου $r > R_e$, και να παραστήσετε γραφικά την συνάρτηση $g(m,r)$, ως συνάρτηση του r. [Δεχθείτε ότι η σφαιρική Γη φαίνεται ως σημειακή μάζα για $r \geq R_e$, και ότι $g(m,\infty) \equiv 0$].
(β) Θεωρήστε μάζα m που εκτελεί, εκτός πεδίου βαρύτητας, κυκλική τροχιά με ταχύτητα υ_0 και ακτίνα r_0, περί σταθερό σημείο. Αν θεωρήσουμε ότι σε μία διαδικασία μετακίνησης ($r_0 \rightarrow r$) διατηρείται η στροφορμή (δηλ., ασκείται μηδενική ροπή ως προς το κέντρο), να βρείτε την κινητική ενέργεια $f(m,r)$ της μάζας m [συναρτήσει των m, r_0, υ_0, r] και να παραστήσετε γραφικά την συνάρτηση $f(m,r)$, ως συνάρτηση του r. [Η συνάρτηση $f(m,r)$ ονομάζεται συχνά "φυγόκεντρη δυναμική ενέργεια" .]
(γ) Για δύο μάζες $m_1 > m_2$, και δύο ακτίνες $r_1 > r_2$, να υπολογίσετε τα εξής αθροίσματα: $U_g = g(m_1,r_1) + g(m_2,r_2)$, το οποίο αντιστοιχεί σε διάταξη $\left[m_1(r_1), m_2(r_2)\right]$, και $U'_g = g(m_2,r_1) + g(m_1,r_2)$, το οποίο αντιστοιχεί σε διάταξη $\left[m_1(r_2), m_2(r_1)\right]$, και να τα

συγκρίνετε. Ισχύει $U_g > U'_g$ ή $U'_g > U_g$; Ποιό από τα δύο αθροίσματα πληροί την αρχή της "ελάχιστης ενέργειας";

(δ) Επαναλάβετε για τα: $U_f = f(m_1, r_1) + f(m_2, r_2)$ και $U'_f = f(m_2, r_1) + f(m_1, r_2)$

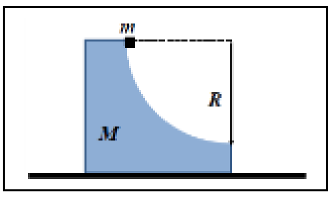
(ε) Συγκρίνοντας τα αποτελέσματα των (γ)-(δ), εξηγήστε γιατί στο γήινο βαρυτικό πεδίο τα βαρύτερα ατμοσφαιρικά στρώματα είναι κοντά στην επιφάνεια της Γης (δηλ. εγγύτερα προς το κέντρο της) ενώ σε μία φυγοκεντρική μηχανή τα βαρύτερα σώματα κατευθύνονται "αντίστροφα" περιφερειακά (δηλ. μακριά από το κέντρο της περιστροφικής κίνησης). Υπό ποιές συνθήκες, η συμπεριφορά στο γήινο βαρυτικό πεδίο θα ήταν ίδια με εκείνη στην φυγοκεντρική μηχανή ;



3**.** Διάτρητο σφαιρίδιο μάζας ***m*** είναι περασμένο στην λεία περιφέρεια κατακόρυφης κυκλικής στεφάνης, ακτίνας ***R*****.** Επίσης συνδέεται με το ένα άκρο ελατηρίου, με σταθερά *s* και φυσικό μήκος L_0, το άλλο άκρο του οποίου είναι στερεωμένο στο ανώτατο σημείο *A* της στεφάνης. Η στεφάνη διατηρείται ακλόνητη στο κατακόρυφο επίπεδο και βρίσκεται μέσα σε ομογενές βαρυτικό πεδίο επιτάχυνσης *g*.
(α) Να γράψετε τη δυναμική ενέργεια του συστήματος μάζα-ελατήριο συναρτήσει των παραμέτρων m, g, R, s και L_0 του προβλήματος, χρησιμοποιώντας ως μεταβλητή τη γωνία θ που σχηματίζει το ελατήριο με την κατακόρυφο που διέρχεται από το σημείο ανάρτησης *A*.
(β) Να ευρεθούν οι γενικές σχέσεις για τις θέσεις ισορροπίας του συστήματος ως προς τη μεταβλητή θ, συναρτήσει των υπολοίπων παραμέτρων.
(γ) Αν $L_0 = R$ και $3mg = Rs\left(3-\sqrt{3}\right)$, να προσδιοριθούν ακριβώς τα σημεία και το είδος ισορροπίας.

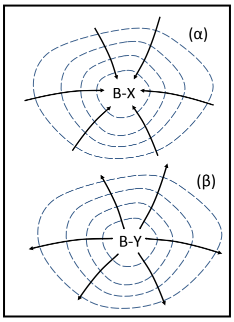
4. Σώμα μάζας *m* κινείται στον θετικό ημιάξονα των *x* και μέσα σε πεδίο δυνάμεων που περιγράφεται από την συνάρτηση δυναμικής ενέργειας $U(x) = Ax(ax-1)e^{-ax}$, όπου *A* και *a* είναι θετικές σταθερές με κατάλληλες φυσικές διαστάσεις.
(α) Βρείτε την δύναμη που ασκείται στο σώμα, τα σημεία ισορροπίας του σώματος και το είδος ισορροπίας για καθένα από αυτά.
(β) Σχεδιάστε προσεγγιστικά την συνάρτηση $U(x)$ στον θετικό ημιάξονα των *x*. Απαντήστε σε ποιες περιοχές η δύναμη είναι απωστική σε σχέση με το σημείο $x_0 = 0$.
(γ) Ποια είναι η ελάχιστη κινητική ενέργεια που πρέπει να έχει το σώμα στην θέση $x_0 = 0$ για να μπορέσει να διαφύγει στο $x \to \infty$; Πόση είναι σε αυτήν την περίπτωση η κινητική ενέργεια για $x \to \infty$;

5. Η δύναμη που ασκείται πάνω σε ένα σώμα είναι (σε N όταν τα μήκη είναι σε m) $\vec{\mathbf{F}}(x,y,z) = (y^2 + 2xz)\hat{\mathbf{x}} + (2xy + z^2)\hat{\mathbf{y}} + (2yz + x^2)\hat{\mathbf{z}}$. (α) Δείξτε ότι η δύναμη είναι διατηρητική. (β) Υπολογίστε τη συνάρτηση δυναμικής ενέργειας $U = U(x,y,z)$ αν $U(0,0,0) = 0$.



6. Σημειακή μάζα m αφήνεται στο ανώτατο σημείο μίας άλλης μάζας M η οποία φέρει μία κοίλη κυλινδρική επιφάνεια (τεταρτοκύκλιο ακτίνας R, όπως στο σχήμα) και μπορεί να κινείται χωρίς τριβή σε οριζόντιο επίπεδο, ενώ και μεταξύ των μαζών m και M δεν υπάρχει τριβή. Το σύστημα βρίσκεται σε σταθερό κατακόρυφο βαρυτικό πεδίο με επιτάχυνση βαρύτητας g.

Να υπολογιστεί η ταχύτητα με την οποία φτάνει η μάζα m στο κατώτατο σημείο του τεταρτοκυκλίου και να μελετηθούν οι οριακές περιπτώσεις, $M \to \infty$, $M \to 0$, $M = m$.

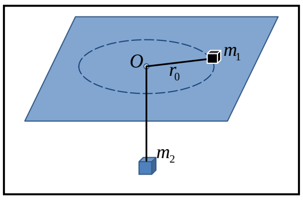


7. (α) Θεωρήστε μία περιοχή βαρομετρικού χαμηλού (Β-Χ) στο βόρειο ημισφαίριο της Γης (π.χ., σε γεωγραφικό πλάτος θ=45^o), όπως στο σχήμα-α. Οι διακεκομένες γραμμές παριστάνουν τις ισοβαρείς καμπύλες (καμπύλες ίσης πίεσης), άρα οι αέριες μάζες τείνουν να κινηθούν λόγω διαφοράς πίεσης όπως τα βέλη του ίδιου σχήματος. (i) Δείξτε ότι, σε αυτή την περίπτωση, οι αέριες μάζες του βαρομετρικού χαμηλού τίθενται σε ταυτόχρονη αριστερόστροφη κίνηση, ενώ στην περίπτωση ενός βαρομετρικού υψηλού (Β-Υ, σχήμα-β) συμβαίνει το αντίστροφο. (ii) Δείξτε ότι στο νότιο ημισφαίριο παρατηρείται το αντίστροφο φαινόμενο.
(β) Τα συνήθη βαρομετρικά χαμηλά που διέρχονται από τον Ελληνικό χώρο γίνονται αισθητά πρώτα στις δυτικές περιοχές, ενώ οι ανατολικές περιοχές τα αντιλαμβάνονται αργότερα (δηλ., έχουν κατεύθυνση Δύση-Ανατολή). Εξηγήστε γιατί σε κάποια τοποθεσία επικρατούν πρώτα νότιοι άνεμοι και αργότερα βόρειοι άνεμοι κατά τη διέλευση ενός βαρομετρικού χαμηλού από την τοποθεσία αυτή. Επίσης, εξηγήστε γιατί στα βαρομετρικά χαμηλά που ακολουθούν την αντίθετη πορεία, (δηλ., Ανατολή-Δύση, όπως συμβαίνει σπανιότερα και κυρίως κατά τη χειμερινή περίοδο) η αλληλουχία των ανέμων είναι αντίστροφη (δηλ., προηγούνται οι βόρειοι άνεμοι και ακολουθούν οι νότιοι)

8. Σωματίδιο μάζας m κινείται κατά μήκος του x-άξονα σε χώρο όπου η συνάρτηση δυναμικής ενέργειας είναι: $U_1 = a/x^2 + bx$, όπου a,b, θετικές σταθερές. (α) Υπολογίστε την δύναμη που ασκείται στο σωματίδιο. (β) Δείξτε ότι υπάρχει απόσταση ευσταθούς ισορροίας x_0 και υπολογίστε την τιμή της. (γ) Υπολογίστε την συχνότητα ταλάντωσης για μικρές μετατοπίσεις $\Delta x = x - x_0$ γύρω από τη θέση ισορροπίας. (δ) Για ποιες σταθερές $a' \neq a$ και $b' \neq b$ μπορούμε να διπλασιάσουμε τη συχνότητα ταλάντωσης, γύρω από την ίδια θέση ευσταθούς ισορροπίας;

9. Η δυναμική ενέργεια ενός διατομικού μορίου είναι ίση με $U(r) = -U_0 + U_0\left(1 - e^{-a(r-r_0)}\right)^2$, όπου r είναι η απόσταση μεταξύ των δύο ατόμων και U_0 και a είναι θετικές σταθερές. Έστω ότι το ένα άτομο παραμένει ακίνητο στη θέση $r = 0$. **(α)** Σχεδιάστε τη συνάρτηση $U(r)$. **(β)** Βρείτε τη δύναμη που ασκείται στο ελεύθερο άτομο. Εξηγήστε για ποια r είναι η δύναμη ελκτική, μηδενική, απωστική. **(γ)** Το ελεύθερο άτομο βρίσκεται αρχικά στη θέση $r = 3r_0/2$ και αφήνεται να κινηθεί, με μηδενική ταχύτητα. Βρείτε τη μέγιστη ταχύτητα που θα αποκτήσει. Περιγράψετε την κίνηση που θα επακολουθήσει. **(δ)** Αν μπορούσαμε να συμπιέσουμε τα δύο άτομα, έτσι ώστε να πλησιάσουν σε απόσταση μικρότερη από την απόσταση ευσταθούς ισορροπίας τους, πόση πρέπει να γίνει η μεταξύ τους απόσταση ώστε, όταν αφεθούν ελεύθερα, να απομακρυνθούν με τρόπο ώστε να διασπασθεί το μόριο; $a > \ln 2 / r_0$.

10. Σημειακή μάζα m_1 είναι δεμένη στο άκρο ιδανικού (μη-εκτατού, αμελητέας μάζας) νήματος, που περνάει μέσα από μία μικρή τρύπα O ενός οριζόντιου επίπεδου τραπεζιού, η επιφάνεια του οποίου παρουσιάζει αμελητέα τριβή με την m_1. Στην άλλη άκρη (του κατακόρυφου τμήματος) του νήματος είναι αναρτημένη



σημειακή μάζα m_2 $(m_2 = m_1 = m)$ και το σύστημα συγκρατείται σε στατική ισορροπία μέσα σε ομογενές πεδίο βαρύτητας με επιτάχυνση g.

(α) Αν προσδώσουμε στη μάζα m_1 ταχύτητα υ_0 κάθετα στο οριζόντιο τεντωμένο τμήμα του νήματος, να υπολογιστεί το μήκος r_0 αυτού του τμήματος, προκειμένου η m_1 να εκτελεί ομαλή κυκλική κίνηση και η m_2 να παραμένει ακίνητη. Βρείτε τη στροφορμή L_0 της m_1 ως προς το O.

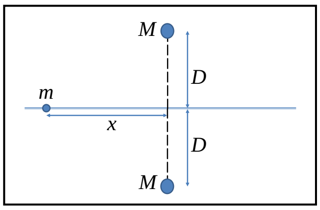
(β) Ενώ το σύστημα βρίσκεται στην κατάσταση του ερωτήματος (α), εξασκούμε στη μάζα m_2 κατακόρυφη δύναμη F προς τα κάτω έτσι ώστε το οριζόντιο τμήμα του νήματος να αποκτήσει μήκος $r < r_0$. Υποθέτουμε ότι η δύναμη $F = F(r)$ ασκείται έτσι ώστε η μεταβολή μήκους να προκύπτει ως μία ακολουθία πολύ μικρών μεταβολών, σε κάθε μία από τις οποίες (δηλαδή για κάθε r) η m_1 εκτελεί ομαλή κυκλική κίνηση και η m_2 «ισορροπεί». Υπολογίστε την τιμή της δύναμης και εκφράστε το αποτέλεσμα συναρτήσει της αρχικής στροφορμής L_0 του συστήματος ως προς το σημείο O.

(γ) Υπολογίστε το έργο $W(r)$ που παράγει η δύναμη $F = F(r)$, ενώ η μάζα m_2 χάνει ύψος $r_0 - r$ και δείξτε ότι ισχύει $E_{\Delta,o\lambda}(r_0) + E_{K,o\lambda}(r_0) + W(r) = E_{\Delta,o\lambda}(r) + E_{K,o\lambda}(r)$ για το σύστημα των δύο μαζών.

11. Σημειακή μάζα m αφήνεται με μηδενική ταχύτητα σε απόσταση 2R από το κέντρο σφαιρικής μάζας Μ (Μ>>m) με ακτίνα R. Αν τα δύο σώματα αισθάνονται μόνο τη μεταξύ τους βαρυτική αλληλεπίδραση, (α) να υπολογιστεί η ταχύτητα με την οποία προσκρούει η m στην επιφάνεια της Μ, (β) το χρονικό διάστημα που διαρκεί η κίνησή της, και (γ) η ταχύτητα με την οποία πρέπει να εκτοξευθεί η m από την επιφάνεια της Μ προκειμένου να μην επανέλθει.

Δίδεται: $\int \frac{\sqrt{x}dx}{\sqrt{a-x}} = a \arctan\left(\frac{\sqrt{x}}{\sqrt{a-x}}\right) - \sqrt{x}\sqrt{a-x}$

12. Να υπολογισθεί το έργο σταθερής δύναμης $\vec{F} = F_0 \hat{n}$ όταν το σημείο εφαρμογής της μετακινείται κατά μήκος καμπύλης C με γνωστά άκρα τα οποία βρίσκονται στις διανυσματικές θέσεις $\vec{r}_1$ και $\vec{r}_2$.



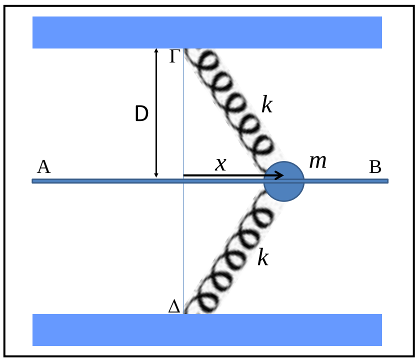
13. Μάζα m είναι περιορισμένη να κινείται χωρίς τριβές πάνω σε ράβδο που συμπίπτει με τον άξονα-x. Δύο ίσες σημειακές μάζες M βρίσκονται στα σημεία $(x = 0, y = \pm D)$ και κρατούνται ακλόνητες. Οι τρείς μάζες αλληλεπιδρούν βαρυτικά, και το σύστημα βρίσκεται μακριά από την επίδραση άλλων μαζών.

(α) Αν η μάζα m αφεθεί σε απόσταση $x_0 = D\sqrt{3}$ από το μέσο των των δύο μαζών M, με αρχική ταχύτητα μέτρου $\upsilon_0 = \sqrt{\dfrac{4GM}{6D}}$, να δείξετε ότι θα εκτελέσει περιοδική κίνηση, να υπολογίσετε το εύρος $2x_{\max}$ αυτής της κίνησης, την ταχύτητα $\upsilon = \upsilon(x)$, ως συνάρτηση της θέσης, και το ολοκλήρωμα από το οποίο μπορεί να υπολογιστεί η περίοδος αυτής της κίνησης.

(β) Δείξτε ότι το μέσον μεταξύ των δύο ακλόνητων μαζών M είναι σημείο ευσταθούς ισορροπίας για τη μάζα m και, για μικρές απομακρύνσεις από αυτό το σημείο, η μάζα m εκτελεί, με καλή προσέγγιση, αρμονική ταλάντωση της οποίας να υπολογισθεί η συχνότητα.

(γ) Αν αποσυρθεί η ράβδος, και οι τρείς μάζες αφεθούν ταυτόχρονα, με μηδενικές αρχικές ταχύτητες, από τις θέσεις $\left(x_0 = D\sqrt{3}, y_0 = 0\right)$ η m, και $(x = 0, y = \pm D)$ οι δύο M, και γνωρίζουμε ότι συμπεριφέρονται απολύτως πλαστικά στις ενδεχόμενες μεταξύ τους κρούσεις, να προσδιορισθεί η τελική κατάσταση του συστήματος (θέσεις, ταχύτητες) και να σχεδιασθούν ποιοτικά οι τροχιές των τριών μαζών, υποθέτοντας M=m.

(δ) Να υπολογισθεί η ταχύτητα διαφυγής της m από το σύστημα των δύο M.



14. Στην διάταξη του σχήματος, ένα σφαιρίδιο μάζας m είναι περασμένο σε μία ράβδο ΑΒ, κατά μήκος της οποίας μπορεί να κινείται χωρίς τριβές. Στο σφαιρίδιο είναι συνδεδεμένα δύο ιδανικά ελατήρια, με την ίδια σταθερά ελατηρίου k και με το ίδιο φυσικό μήκος L_0. Τα άλλα άκρα των ελατηρίων είναι συνδεδεμένα στα ακλόνητα σημεία Γ και Δ, που βρίσκονται στην ίδια κάθετο, ως προς την τροχιά ΑΒ και απέχουν, το καθένα, απόσταση D από αυτήν. Η θέση του σφαιριδίου μετράται με αφετηρία το σημείο τομής των ΑΒ και ΓΔ, (που βρίσκονται στο οριζόντιο επίπεδο).

(α) Αν $D > L_0$, (να γράψετε τη δυναμική ενέργεια του συστήματος, συναρτήσει του x,) να δείξετε ότι το σφαιρίδιο έχει μία θέση ευσταθούς ισορροπίας, να δώσετε ένα ποιοτικό σχεδιάγραμα της συνάρτησης δυναμικής ενέργειας $U = U(x)$, και να υπολογίσετε την περίοδο ταλάντωσης για μικρές απομακρύνσεις από την θεση ευσταθούς ισορροπίας.

15. Σώμα μάζας m κινείται στο επίπεδο xy με τέτοιο τρόπο ώστε το διάνυσμα θέσης του να είναι $\vec{r}(t) = (\alpha \cos\omega t)\,\hat{x} + (\beta \sin\omega t)\,\hat{y}$ όπου α, β και ω είναι θετικές σταθερές και t ο χρόνος.

(α) Βρείτε την εξίσωση της τροχιάς του σώματος σε καρτεσιανές συντεταγμένες.

(β) Βρείτε τη δύναμη $\vec{F}$ που ασκείται στο σώμα. Δείξετε ότι η δύναμη είναι διατηρητική.

(γ) Βρείτε τη δυναμική και την κινητική ενέργεια του σώματος. Θεωρήστε ότι $U(r = 0) = 0$.

(δ) Ποια είναι η ολική ενέργεια του σώματος; Δείξετε ότι αυτή διατηρείται σταθερή.

(ε) Βρείτε το έργο που παράγει η δύναμη $\vec{F}$ καθώς το σώμα κινείται από τη θέση Α(α, 0), στη θέση Β(0, β). Απ.: $W_{\delta\upsilon\nu} = \frac{1}{2}m\omega^2(\alpha^2 - \beta^2)$

(στ) Υπολογίστε το έργο που παράγει η δύναμη $\vec{F}$ και ως συνάρτηση του χρόνου. Επαληθεύσετε το αποτέλεσμα (ε). Απ.: $W_{\delta\upsilon\nu} = \frac{1}{2}m\omega^2(\alpha^2 - \beta^2)\sin^2 \omega t$