ΦΥΛΛΑΔΙΟ 3: ΣΧΟΛΗ ΗΛΕΚΤΡΟΛΟΓΩΝ
Γραμμική Άλγεβρα - 1ο Εξάμηνο 2017-18
Επιφάνειες

Αφού εκτυπώσετε το φυλλάδιο απαντήστε στο κενό μεταξύ των ερωτήσεων, Σε επόμενη σελίδα να κάνετε μία πρόχειρη σχεδίαση των επιφανειών που ορίζονται από τις δεδομένες εξισώσεις.

1. Να αναγνωρίσετε τις επιφάνειες που ορίζουν οι παρακάτω εξισώσεις και να προσδιορίσετε όποια χαρακτηριστικά τους προκύπτουν άμεσα από τη δεδομένη εξίσωση.

(α) $x-z-2=0$
Απάντηση: Επίπεδο παράλληλο στον άξονα των y και με κάθετο διάνυσμα $\mathbf{n}=(1,0,-1)$.

(β) $2x+3y-6=0$
Απάντηση: Επίπεδο παράλληλο στον άξονα των z.

(γ) $x^2+y^2-9=0$
Απάντηση: Ορθός κυκλικός κύλινδρος με γενέτειρα παράλληλη στον άξονα των z και οδηγό τον κύκλο με εξισώσεις $x^2+y^2=9,\ z=0$

(δ) $x^2+y^2+z^2-4z=0 \Leftrightarrow x^2+y^2+(z-2)^2=4$
Απάντηση: Σφαίρα κέντρου $\mathrm{K}(0,0,2)$ και ακτίνας 2.

(ε) $(x-2z)^2-y+3z=0$
Απάντηση: Κυλινδρική επιφάνεια με γενέτειρα παράλληλη στην ευθεία ε της τομής των επιπέδων $x-z=0,\ y-3z=0$. Έχουμε $\varepsilon: x=\dfrac{y}{3}=z \Leftrightarrow \dfrac{x-0}{1}=\dfrac{y-0}{3}=\dfrac{z-0}{1}$

Οδηγός καμπύλη: $(x-2z)^2-y+3z=0,\ z=0 \Leftrightarrow x^2=y, z=0$**,** παραβολή στο επίπεδο $z=0$.

(στ) $x^2+y^2-z^2-2y+4z+5=0$
Απάντηση

$$x^2+y^2-z^2-2y+4z+5=0 \Leftrightarrow x^2+(y-1)^2-(z-2)^2=-8 \Leftrightarrow -X^2-Y^2+Z^2=8$$

$$\Leftrightarrow -\frac{X^2}{(\sqrt{8})^2}-\frac{Y^2}{(\sqrt{8})^2}+\frac{Z^2}{(\sqrt{8})^2}=1, \text{ με } X=x, Y=y-1, Z=z-2.$$

Δίχωνο υπερβολοειδές με άξονα συμμετρίας τον άξονα των Z, δηλαδή την ευθεία $x=0,\ y-1=0$

(ζ) $x^2+y^2-2z=0$

Απάντηση: $x^2+y^2-2z=0 \Leftrightarrow z=\frac{1}{2}\left(x^2+y^2\right)$

Ελλειπτικό παραβολοειδές (εκ περιστροφής)

(η) $x^2+4y^2+9z^2=36$

Απάντηση: $x^2+4y^2+9z^2=36 \Leftrightarrow \frac{x^2}{6^2}+\frac{y^2}{3^2}+\frac{z^2}{2^2}=1$**,** ελλειψοειδές με μήκη ημιαξόνων 6, 3 και 2.

2. Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $x^3+y^3+z^3-3xyz-1=0$ ορίζει επιφάνεια εκ περιστροφής της οποίας να προσδιορίσετε την εξίσωση του άξονα περιστροφής.

Απάντηση:

$$x^3+y^3+z^3-3xyz-1=0 \Leftrightarrow \left(x+y+z\right)\left(x^2+y^2+z^2-xy-yz-zx\right)-1=0$$

$$\Leftrightarrow \left(x+y+z\right)\left(x^2+y^2+z^2-\frac{1}{2}\left(\left(x+y+z\right)^2-\left(x^2+y^2+z^2\right)\right)\right)-1=0$$

$$\Leftrightarrow \left(x+y+z\right)\left(\frac{3}{2}\left(x^2+y^2+z^2\right)-\frac{1}{2}\left(x+y+z\right)^2\right)-1=0$$

$$\Leftrightarrow \left(x+y+z\right)\left(3\left(x^2+y^2+z^2\right)-\left(x+y+z\right)^2\right)-2=0$$

$$\Leftrightarrow \Phi\left(x^2+y^2+z^2, x+y+z\right)=0. \text{ όπου } \Phi\left(s,t\right)=t\left(3s-t^2\right)-2.$$

Είναι επιφάνεια εκ περιστροφής γύρω από τον άξονα $\varepsilon: \frac{x-0}{1}=\frac{y-0}{1}=\frac{z-0}{1}$**.**

3. Να προσδιορίσετε τις παραμετρικές εξισώσεις της καμπύλης

$$\gamma: z=x^2+y^2,\ z-2y=0.$$

Απάντηση

Με απαλοιφή του z παίρνουμε τον $xy-$προβάλλοντα κύλινδρο

$$x^2+y^2=2y \Leftrightarrow x^2+\left(y-1\right)^2=1$$

Επομένως η προβολή της καμπύλης στο επίπεδο $z=0$ είναι ο κύκλος με εξισώσεις

$$x^2+\left(y-1\right)^2=1,\ z=0.$$

Επομένως οι παραμετρικές εξισώσεις της καμπύλης είναι:

$$x=\cos t,\ y=1+\sin t, z=2y=2\left(1+\sin t\right), t\in\left[0,2\pi\right]$$

4. Δίνεται η σφαίρα Σ με εξίσωση**:** $x^2+y^2+z^2=25$

(α) Βρείτε την εξίσωση του εφαπτόμενου επιπέδου της σφαίρας Σ στο σημείο της $P(0,3,4)$**.**

(β) Να αποδείξετε ότι το επίπεδο $\Pi: 3y+4z-20=0$ τέμνει τη σφαίρα Σ κατά κύκλο, του οποίου να προσδιορίστε το κέντρο και την ακτίνα.

Λύση

(α) Το ζητούμενο επίπεδο περνάει από το σημείο $P(0,3,4)$ και έχει κάθετο διάνυσμα **το** $\mathbf{n}=\mathbf{OP}=(0,3,4)$**.** Άρα έχει εξίσωση

$$(\mathbf{r}-\mathbf{r_0})\cdot\mathbf{n}=0 \Leftrightarrow (x,y-3,z-4)\cdot(0,3,4)=0 \Leftrightarrow 3y+4z-25=0.$$

(β) Η απόσταση του κέντρου $O(0,0,0)$ της σφαίρας από το επίπεδο $\Pi: 3y+4z-20=0$ είναι: $d=\dfrac{|-20|}{\sqrt{0^2+3^2+4^2}}=4<5$**,** οπότε το επίπεδο τέμνει τη σφαίρα κατά κύκλο.

Η ακτίνα r του κύκλου της τομής είναι ίση με : $r=\sqrt{a^2-d^2}=\sqrt{5^2-4^2}=\sqrt{9}=3$.

Το κέντρο του κύκλου της τομής είναι το σημείο τομής του επιπέδου Π με την ευθεία ε που περνάει από το κέντρο της σφαίρας και είναι κάθετη προς το επίπεδο Π, δηλαδή της ευθείας με παράλληλο διάνυσμα το κάθετο διάνυσμα $\mathbf{n}=(0,3,4)$ του επιπέδου Π.

Η ευθεία αυτή έχει εξισώσεις: $x=0,\dfrac{y}{3}=\dfrac{z}{4}$, οπότε έχουμε να λύσουμε το σύστημα:

$$\left\{\begin{matrix} x=0,\dfrac{y}{3}=\dfrac{z}{4}=t \\ 3y+4z-20=0 \end{matrix}\right\} \Leftrightarrow \left\{\begin{matrix} x=0,y=3t,z=4t \\ 3y+4z=20 \end{matrix}\right\} \Leftrightarrow \left\{\begin{matrix} x=0,y=3t,z=4t \\ 25t=20 \end{matrix}\right\}$$

$$\Leftrightarrow \left\{\begin{matrix} x=0,y=3t,z=4t \\ t=\dfrac{4}{5} \end{matrix}\right\} \Leftrightarrow (x,y,z)=\left(0,\frac{12}{5},\frac{16}{5}\right).$$

5. Να βρείτε στο σύνολο $\mathbb{C}$ των μιγαδικών αριθμών τις ρίζες των εξισώσεων:

(α) $z^2+4z+13=0$ (β) $z^2+(1-i)z-i=0$

(Σημείωση: Η δεύτερη εξίσωση έχει μιγαδικούς συντελεστές. Να τη λύσετε με δύο τρόπους. Πρώτα με κατάλληλη παραγοντοποίηση και στη συνέχεια εφαρμόζοντας το γνωστό τύπο επίλυσης εξισώσεων δευτέρου βαθμού. Να δικαιολογήσετε γιατί μπορεί να γίνει χρήση αυτού του τύπου)

Λύση

(α) Έχουμε εξίσωση δευτέρου βαθμού με πραγματικούς συντελεστές με διακρίνουσα $\Delta = 16 - 52 = -36 < 0$, οπότε αυτή έχει δύο ρίζες μιγαδικές συζυγείς. Αυτές είναι οι

$$z = \frac{-4 \pm i\sqrt{|-36|}}{2} = \frac{-4 \pm 6i}{2} = -2 \pm 3i\ .$$

(β) 1^{ος} τρόπος (με παραγοντοποίηση)

$$z^2 + (1-i)z - i = 0 \Leftrightarrow z^2 + z - iz - i = 0 \Leftrightarrow z(z+1) - i(z+1) = 0$$

$$\Leftrightarrow (z+1)(z-i) = 0 \Leftrightarrow z = -1 \text{ ή } z = i.$$

2^{ος} τρόπος (με την εφαρμογή του γνωστού τύπου)

Η διακρίνουσα της εξίσωσης είναι $\Delta = (1-i)^2 + 4i = 1 - 2i + i^2 + 4i = 2i$, οπότε έχουμε τις ρίζες $z = \dfrac{-(1-i) \pm \sqrt{2i}}{2}$.

Έστω $\sqrt{2i} = x + yi.$ Τότε έχουμε

$$(x+yi)^2 = 2i \Leftrightarrow x^2 - y^2 + 2xyi = 2i \Leftrightarrow x^2 - y^2 = 0 \text{ και } 2xy = 2$$

$$\Leftrightarrow \{x = y,\ xy = 1\} \text{ ή } \{x = -y,\ xy = 1\} \text{(αδύνατο)} \Leftrightarrow x = y = \pm 1.$$

Βρήκαμε δηλαδή ότι στο σύνολο των μιγαδικών αριθμών οι τετραγωνικές ρίζες του αριθμού $2i$ είναι οι μιγαδικοί αριθμοί $\pm(1+i)$ **.** Επομένως οι ρίζες της εξίσωσης είναι

$$z = \frac{-(1-i) \pm \sqrt{2i}}{2} = \frac{-1 + i \pm (1+i)}{2} \Leftrightarrow z = -1 \text{ ή } z = i.$$

Η απόδειξη για το ότι μπορεί να χρησιμοποιηθεί αυτός ό τύπος εύρεσης των ριζών είναι όμοια με αυτήν που κάνουμε στην περίπτωση πραγματικών συντελεστών.

6. Δίνεται ότι η γεωμετρική εικόνα $\mathrm{M}(x,y)$ του μιγαδικού αριθμού $z = x + yi, x, y \in \mathbb{R}$, κινείται στον κύκλο με εξίσωση $x^2 + y^2 = 4$. Να βρείτε το γεωμετρικό τόπο της εικόνας $\mathrm{P}(u,v)$ του μιγαδικού αριθμού $w = u + vi = z + \dfrac{1}{z}.$

Λύση

Έχουμε

$$w = u + vi = z + \frac{1}{z} = x + yi + \frac{1}{x+yi} = x + yi + \frac{x - yi}{x^2 + y^2}$$

$$= \left(x + \frac{x}{x^2+y^2}\right) + \left(x - \frac{y}{x^2+y^2}\right)i,$$

οπότε είναι $u = x + \dfrac{x}{x^2+y^2}$, $v = y - \dfrac{y}{x^2+y^2}$.

Επειδή η γεωμετρική εικόνα $\mathrm{M}(x,y)$ του μιγαδικού αριθμού $z=x+yi, x,y\in\mathbb{R},$ κινείται στον κύκλο με εξίσωση $x^2+y^2=4$ λαμβάνουμε ότι:

$$u=x+\frac{x}{4}=\frac{5x}{4},\ v=y-\frac{y}{4}=\frac{3y}{4}\Rightarrow x=\frac{4u}{5},\ y=\frac{4v}{3},$$

οπότε με ύψωση στο τετράγωνο και πρόσθεση λαμβάνουμε την εξίσωση που ικανοποιούν τα δύο μέρη του w:

$$x^2+y^2=\frac{16u^2}{25}+\frac{16v^2}{9}\Rightarrow\frac{16u^2}{25}+\frac{16v^2}{9}=4\Rightarrow\frac{4u^2}{25}+\frac{4v^2}{9}=1\Rightarrow\frac{u^2}{\left(\frac{5}{2}\right)^2}+\frac{v^2}{\left(\frac{3}{2}\right)^2}=1.$$

Επομένως ο γεωμετρικός τόπος του σημείου $\mathrm{P}(u,v)$ είναι μία έλλειψη με μήκη ημιαξόνων $a=\frac{5}{2},\ b=\frac{3}{2}.$

7. Να βρείτε την τριγωνομετρική μορφή των μιγαδικών αριθμών $z_1=1+i,\ z_2=1+i\sqrt{3}$ και στη συνέχεια να προσδιορίσετε την τριγωνομετρική και την κανονική μορφή του μιγαδικού αριθμού $(z_1z_2)^{100}$.

Λύση

Είναι $|z_1|=\sqrt{2}$, οπότε από τις εξισώσεις $\cos\theta=\frac{1}{\sqrt{2}},\ \sin\theta=\frac{1}{\sqrt{2}},$ προκύπτουν τα ορίσματα $\theta=2k\pi+\frac{\pi}{4},\ k\in\mathbb{Z}$. Πρωτεύον όρισμα είναι η γωνία $\theta=\frac{\pi}{4}$ και έχουμε

$$z_1=\sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{4}+i\sin\frac{\pi}{4}\right)=\sqrt{2}e^{\frac{i\pi}{4}}.$$

Είναι $|z_2|=2$, οπότε από τις εξισώσεις $\cos\theta=\frac{1}{2},\ \sin\theta=\frac{\sqrt{3}}{2},$ προκύπτουν τα ορίσματα $\theta=2k\pi+\frac{\pi}{3},\ k\in\mathbb{Z}$. Πρωτεύον όρισμα είναι η γωνία $\theta=\frac{\pi}{3}$ και έχουμε

$$z_2=2\left(\cos\frac{\pi}{3}+i\sin\frac{\pi}{3}\right)=2e^{\frac{i\pi}{3}}.$$

Επομένως έχουμε

$$z_1z_2=\left(\sqrt{2}e^{\frac{i\pi}{4}}\right)\left(2e^{\frac{i\pi}{3}}\right)=2\sqrt{2}e^{i\left(\frac{\pi}{4}+\frac{\pi}{3}\right)}=2\sqrt{2}e^{\frac{7\pi i}{12}}=2\sqrt{2}\left(\cos\frac{7\pi}{12}+i\sin\frac{7\pi}{12}\right)$$

$$\Rightarrow\left(z_1z_2\right)^{100}=\left(2\sqrt{2}\right)^{100}e^{\frac{7\pi i}{12}\cdot 100}=\left(2\sqrt{2}\right)^{100}\left(\cos\frac{700\pi}{12}+i\sin\frac{700\pi}{12}\right).$$

$$=\left(2\sqrt{2}\right)^{100}\left(\cos\frac{700\pi}{12}+i\sin\frac{700\pi}{12}\right)=\left(2\sqrt{2}\right)^{100}\left(\cos\frac{\pi}{3}+i\sin\frac{\pi}{3}\right)$$

Άρα είναι:

$$z_1z_2=\left(2\sqrt{2}\right)^{100}\left(\cos\frac{\pi}{3}+i\sin\frac{\pi}{3}\right)=\left(2\sqrt{2}\right)^{100}\cos\frac{\pi}{3}+i\left(2\sqrt{2}\right)^{100}\sin\frac{\pi}{3}$$

$$=\left(2\sqrt{2}\right)^{100}\frac{1}{2}+i\left(2\sqrt{2}\right)^{100}\frac{\sqrt{3}}{2}=2^{149}+i2^{149}\sqrt{3}.$$

8. **(α)** Να βρείτε στους μιγαδικούς αριθμούς τις ρίζες της εξίσωσης $z^6=1$ και να αποδείξετε ότι οι εικόνες τους στο μιγαδικό επίπεδο σχηματίζουν κανονικό εξάγωνο εγγεγραμμένο στο μοναδιαίο κύκλο.
(β) Να λύσετε στους μιγαδικούς την εξίσωση $z^6=i$ (Υπόδειξη: Γράψτε την εξίσωση σε μορφή ισοδύναμη με αυτήν του ερωτήματος (α))

Λύση

(α) Επειδή η τριγωνομετρική μορφή του αριθμού 1 είναι $1=1\left(\cos 0^\circ+i\sin 0^\circ\right)$ οι ρίζες της εξίσωσης είναι οι

$$z=\sqrt[6]{1}\left(\cos\frac{0+2\kappa\pi}{6}+i\sin\frac{0+2\kappa\pi}{6}\right)=\cos\frac{\kappa\pi}{3}+i\sin\frac{\kappa\pi}{3},\kappa=0,1,2,3,4,5.$$

Όλες έχουν μέτρο 1, οπότε ανήκουν στο μοναδιαίο κύκλο $C\left(\left(0,0\right),1\right)$ και οι διαφορές των ορισμάτων, έστω θ_κ, των διαδοχικών ριζών είναι $\theta_\kappa-\theta_{\kappa-1}=\frac{\pi}{3}$, οπότε οι γεωμετρικές εικόνες των ριζών ορίζουν κανονικό εξάγωνο.

(β) Έχουμε $i=\cos\frac{\pi}{2}+i\sin\frac{\pi}{2}\Rightarrow i^6=\left(\cos\frac{\pi}{12}+i\sin\frac{\pi}{12}\right)^6$, οπότε η εξίσωση γίνεται:

$$z^6 = i \Leftrightarrow z^6 = a^6 \Leftrightarrow \left(\frac{z}{a}\right)^6 = 1,\ \textit{όπου}\ a = \cos\frac{\pi}{12} + i\sin\frac{\pi}{12}$$

$$\Leftrightarrow \frac{z}{a} = \cos\frac{\kappa\pi}{3} + i\sin\frac{\kappa\pi}{3},\ \kappa = 0,1,2,3,4,5.$$

$$\Leftrightarrow z = a\left(\cos\frac{\kappa\pi}{3} + i\sin\frac{\kappa\pi}{3}\right) = \cos\left(\frac{\kappa\pi}{3} + \frac{\pi}{12}\right) + i\sin\left(\frac{\kappa\pi}{3} + \frac{\pi}{12}\right),\ \kappa = 0,1,2,3,4,5$$

$$\Leftrightarrow z = \cos\left(\frac{2\kappa\pi + \frac{\pi}{2}}{6}\right) + i\sin\left(\frac{2\kappa\pi + \frac{\pi}{2}}{6}\right),\ \kappa = 0,1,2,3,4,5$$

Επομένως οι ρίζες της εξίσωσης είναι οι:

$$z_0 = \cos\frac{\pi}{12} + \mathrm{i}\sin\frac{\pi}{12},\ \ z_1 = \cos\frac{5\pi}{12} + \mathrm{i}\sin\frac{5\pi}{12},\ \ z_2 = \cos\frac{9\pi}{12} + \mathrm{i}\sin\frac{9\pi}{12},\ \ z_3 = \cos\frac{13\pi}{12} + \mathrm{i}\sin\frac{13\pi}{12},$$

$$z_4 = \cos\frac{17\pi}{12} + \mathrm{i}\sin\frac{17\pi}{12},\ \ z_1 = \cos\frac{22\pi}{12} + \mathrm{i}\sin\frac{22\pi}{12}.$$

Γενικά, αν $a = |a|\left(\cos\theta + i\sin\theta\right)$, έχουμε:

$$z^n = a = |a|\left(\cos\theta + i\sin\theta\right) \Leftrightarrow z = \sqrt[n]{|a|}\left(\cos\frac{2\kappa\pi + \theta}{\nu} + \sin\frac{2\kappa\pi + \theta}{\nu}\right), \kappa = 0,1,2,...,\nu - 1.$$