ΦΥΛΛΑΔΙΟ 3: ΣΧΟΛΗ ΗΛΕΚΤΡΟΛΟΓΩΝ
Γραμμική Άλγεβρα - 1ο Εξάμηνο 2017-18
Επιφάνειες – Μιγαδικοί αριθμοί

Αφού εκτυπώσετε το φυλλάδιο απαντήστε στο κενό μεταξύ των ερωτήσεων, Σε επόμενη σελίδα να κάνετε μία πρόχειρη σχεδίαση των επιφανειών που ορίζονται από τις δεδομένες εξισώσεις.

1. Να αναγνωρίσετε τις επιφάνειες που ορίζουν οι παρακάτω εξισώσεις και να προσδιορίσετε όποια χαρακτηριστικά τους προκύπτουν άμεσα από τη δεδομένη εξίσωση.

(α) $x-z-2=0$

Απάντηση: Επίπεδο παράλληλο στον άξονα των y και με κάθετο διάνυσμα $\mathbf{n}=(1,0,-1)$.

(β) $2x+3y-6=0$

Απάντηση:

(γ) $x^2+y^2-9=0$

Απάντηση:

(δ) $x^2+y^2+z^2-4z=0$

Απάντηση:

(ε) $(x-2z)^2-y+3z=0$

Απάντηση:

(στ) $x^2+y^2-z^2-2y+4z+5=0$

Απάντηση:

(ζ) $x^2+y^2-2z=0$

Απάντηση:

(η) $x^2+4y^2+9z^2=36$

Απάντηση:

2. Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $x^3+y^3+z^3-3xyz-1=0$ ορίζει επιφάνεια εκ περιστροφής της οποίας να προσδιορίσετε την εξίσωση του άξονα περιστροφής.

Απάντηση:

3. Να προσδιορίσετε τις παραμετρικές εξισώσεις της καμπύλης

$$\gamma : z=x^2+y^2,\ z-2y=0\,.$$

Απάντηση:

4. Δίνεται η σφαίρα Σ με εξίσωση**:** $x^2+y^2+z^2=25$

(α) Βρείτε την εξίσωση του εφαπτόμενου επιπέδου της σφαίρας Σ στο σημείο της $P(0,3,4)$**.**

(β) Να αποδείξετε ότι το επίπεδο $\Pi : 3y+4z-20$ τέμνει τη σφαίρα Σ κατά κύκλο, του οποίου να προσδιορίστε το κέντρο και την ακτίνα.

Λύση:

5. Να βρείτε στο σύνολο $\mathbb{C}$ των μιγαδικών αριθμών τις ρίζες των εξισώσεων:

(α) $z^2+4z+13=0$ (β) $z^2+(1-i)z-i=0$

(Σημείωση: Η δεύτερη εξίσωση έχει μιγαδικούς συντελεστές. Να τη λύσετε με δύο τρόπους. Πρώτα με κατάλληλη παραγοντοποίηση και στη συνέχεια εφαρμόζοντας το γνωστό τύπο επίλυσης εξισώσεων δευτέρου βαθμού. Να δικαιολογήσετε γιατί μπορεί να γίνει χρήση αυτού του τύπου)

6. Δίνεται ότι η γεωμετρική εικόνα $\mathrm{M}(x, y)$ του μιγαδικού αριθμού $z = x + yi, x, y \in \mathbb{R}$, κινείται στον κύκλο με εξίσωση $x^2 + y^2 = 4$. Να βρείτε το γεωμετρικό τόπο της εικόνας $\mathrm{P}(u, v)$ του μιγαδικού αριθμού $w = u + vi = z + \frac{1}{z}$.

7. Να βρείτε την τριγωνομετρική μορφή των μιγαδικών αριθμών $z_1 = 1 + i,\ z_2 = 1 + i\sqrt{3}$ και στη συνέχεια να προσδιορίσετε την τριγωνομετρική και την κανονική μορφή του μιγαδικού αριθμού $(z_1 z_2)^{100}$.

8. (α) Να βρείτε στους μιγαδικούς αριθμούς τις ρίζες της εξίσωσης $z^6 = 1$ και να αποδείξετε ότι οι εικόνες τους στο μιγαδικό επίπεδο σχηματίζουν κανονικό εξάγωνο εγγεγραμμένο στο μοναδιαίο κύκλο.

(β) Να λύσετε στους μιγαδικούς την εξίσωση $z^6 = i$ (Υπόδειξη: Γράψτε την εξίσωση σε μορφή ισοδύναμη με αυτήν του ερωτήματος (α))

Παράδοση φυλλαδίου: 10-1-2018