ΑΣΚΗΣΕΙΣ

Χρήστος Τσούφης
1ο εξάμηνο, ΣΗΜΜΥ

ΝΔΟ $\frac{1}{15} < \frac{1}{2}\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{5}{6}\cdot\ldots\cdot\frac{99}{100} < \frac{1}{10}$

Λύση

• Θέτω $A = \frac{1}{2}\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{5}{6}\cdot\ldots\cdot\frac{99}{100}$

Τότε $A^2 = \left(\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{5}{6}\cdot\ldots\cdot\frac{99}{100}\right)\left(\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{5}{6}\cdot\ldots\cdot\frac{99}{100}\right)$

Όμως $A^2 < \left(\frac{1}{\cancel{2}}\cdot\frac{\cancel{3}}{\cancel{4}}\cdot\frac{\cancel{5}}{\cancel{6}}\cdot\ldots\cdot\frac{\cancel{99}}{\cancel{100}}\right)\left(\frac{\cancel{2}}{\cancel{3}}\cdot\frac{\cancel{4}}{\cancel{5}}\cdot\frac{\cancel{6}}{\cancel{7}}\cdot\ldots\cdot\frac{\cancel{100}}{101}\right) = \frac{1}{101}$

Άρα $A^2 < \frac{1}{101} < \frac{1}{100} \longrightarrow A < \frac{1}{10}$

* Ισχύει ότι για κάθε $\alpha,\beta \in \mathbb{N}$ με $\alpha < \beta$

$\frac{\alpha}{\beta} < \frac{\alpha+1}{\beta+1}$, αφού αν $\frac{\alpha}{\beta} \geq \frac{\alpha+1}{\beta+1} \Rightarrow \cancel{\alpha\beta} + \alpha \geq \cancel{\alpha\beta} + \beta \Rightarrow \alpha \geq \beta$, άτοπο

• $A = \frac{1}{2}\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{5}{6}\cdot\ldots\cdot\frac{99}{100}$

Τότε $A^2 = \left(\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{5}{6}\cdot\ldots\cdot\frac{99}{100}\right)\cdot\frac{1}{2}\left(\frac{3}{4}\cdot\frac{5}{6}\cdot\ldots\cdot\frac{99}{100}\right)$

Όμως $A^2 > \left(\frac{1}{\cancel{2}}\cdot\frac{\cancel{3}}{\cancel{4}}\cdot\frac{\cancel{5}}{\cancel{6}}\cdot\ldots\cdot\frac{\cancel{99}}{100}\right)\cdot\frac{1}{2}\left(\frac{\cancel{2}}{\cancel{3}}\cdot\frac{\cancel{4}}{\cancel{5}}\cdot\frac{\cancel{6}}{\cancel{7}}\cdot\ldots\cdot\frac{\cancel{98}}{\cancel{99}}\right) = \frac{1}{200}$

Άρα $A^2 > \frac{1}{200} > \frac{1}{225} = \left(\frac{1}{15}\right)^2 \longrightarrow A > \frac{1}{15}$

Άρα, $\frac{1}{15} < A < \frac{1}{10}$

* Ισχύει ότι για κάθε $\alpha,\beta \in \mathbb{N}$ με $\alpha < \beta$

$\frac{\alpha}{\beta} > \frac{\alpha-1}{\beta-1}$, αφού αν $\frac{\alpha}{\beta} \leq \frac{\alpha-1}{\beta-1} \Rightarrow \cancel{\alpha\beta} - \alpha \leq \cancel{\alpha\beta} - \beta \Rightarrow -\alpha \leq -\beta$
$\Rightarrow \alpha \geq \beta$, άτοπο

οπότε $\frac{3}{4}\cdot\frac{5}{6}\cdot\ldots\cdot\frac{99}{100} > \frac{2}{3}\cdot\frac{4}{5}\cdot\frac{6}{7}\cdot\ldots\cdot\frac{98}{99}$

ΑΣΚΗΣΕΙΣ (Ανισότητα Holder)

Χρήστος Τσούφης
1ο εξάμηνο, ΣΗΜΜΥ

Αν $a_1, a_2, \dots, a_\nu, \beta_1, \beta_2, \dots, \beta_\nu$ είναι θετικοί πραγματικοί αριθμοί και $p, q \in \mathbb{Q}^+$ με $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ νδο

$$a_1\beta_1 + a_2\beta_2 + \dots + a_\nu\beta_\nu \leq (a_1^p + a_2^p + \dots + a_\nu^p)^{\frac{1}{p}} \cdot (\beta_1^q + \beta_2^q + \dots + \beta_\nu^q)^{\frac{1}{q}} \quad (1)$$

Λύση

Θέτω $M = a_1^p + a_2^p + \dots + a_\nu^p$

$N = \beta_1^q + \beta_2^q + \dots + \beta_\nu^q$

οπότε $(1) \Rightarrow$

$$\frac{a_1\beta_1 + a_2\beta_2 + \dots + a_\nu\beta_\nu}{M^{\frac{1}{p}} \cdot N^{\frac{1}{q}}} \leq 1 \quad (2)$$

Όμως,

$$\left.\begin{aligned}
\frac{a_1\beta_1}{M^{\frac{1}{p}} \cdot N^{\frac{1}{q}}} &= \left(\frac{a_1^p}{M}\right)^{\frac{1}{p}} \left(\frac{\beta_1^q}{N}\right)^{\frac{1}{q}} \leq \frac{1}{p} \cdot \frac{a_1^p}{M} + \frac{1}{q} \cdot \frac{\beta_1^q}{N} \\
\frac{a_2\beta_2}{M^{\frac{1}{p}} \cdot N^{\frac{1}{q}}} &= \dots \leq \frac{1}{p} \cdot \frac{a_2^p}{M} + \frac{1}{q} \cdot \frac{\beta_2^q}{N} \\
&\vdots \\
\frac{a_\nu\beta_\nu}{M^{\frac{1}{p}} N^{\frac{1}{q}}} &= \dots \leq \frac{1}{p} \cdot \frac{a_\nu^p}{M} + \frac{1}{q} \cdot \frac{\beta_\nu^q}{N}
\end{aligned}\right\} \xrightarrow[\text{κατά μέλη έχουμε}]{\text{προσθέτοντας}}$$

$$\Rightarrow \frac{a_1\beta_1 + a_2\beta_2 + \dots + a_\nu\beta_\nu}{M^{\frac{1}{p}} \cdot N^{\frac{1}{q}}} \leq \frac{1}{p} \frac{a_1^p + a_2^p + \dots + a_\nu^p}{M} + \frac{1}{q} \cdot \frac{\beta_1^q + \beta_2^q + \dots + \beta_\nu^q}{N}$$

$$\Rightarrow \frac{a_1 \cdot \beta_1 + a_2\beta_2 + \dots + a_\nu\beta_\nu}{M^{\frac{1}{p}} \cdot N^{\frac{1}{q}}} \leq \frac{1}{p} \cdot 1 + \frac{1}{q} \cdot 1 = \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$$

Άρα η (2) αληθεύει και συνεπώς η (1) έχει αποδειχθεί.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

Χρήστος Τσούφης
1ο εξάμηνο, ΣΗΜΜΥ

Να υπολογιστεί η τιμή του αθροίσματος:

$$\binom{\nu}{0}^3+\binom{\nu}{1}^3+\dots+\binom{\nu}{\nu}^3=;$$

Λύση

Ισχύει ότι:

$$(x+1)^3=(x+1)^2(1+x)\Rightarrow$$

$$\Rightarrow (x+1)^{3\nu}=(x+1)^{2\nu}(1+x)^{\nu}$$

$$\Rightarrow \binom{3\nu}{0}x^{3\nu}+\binom{3\nu}{1}x^{3\nu-1}+\dots+\binom{3\nu}{\nu}x^{2\nu}+\dots+\binom{3\nu}{3\nu-1}x+\binom{3\nu}{3\nu}=$$

$$=\left[\binom{2\nu}{0}x^{2\nu}+\binom{2\nu}{1}x^{2\nu-1}+\dots+\binom{2\nu}{\nu}x^{\nu}+\dots+\binom{2\nu}{2\nu}\right]\left[\binom{\nu}{0}+\binom{\nu}{1}x+\binom{\nu}{2}x^2+\dots+\binom{\nu}{\nu}x^{\nu}\right]$$

Εξισώνοντας τους αντίστοιχους συντελεστές του όρου που έχει το $x^{2\nu}$ και στα δύο μέλη της ισότητας προκύπτει:

$$\binom{3\nu}{\nu}=\binom{2\nu}{0}\cdot\binom{\nu}{0}+\binom{2\nu}{1}\cdot\binom{\nu}{1}+\dots+\binom{2\nu}{\nu}\cdot\binom{\nu}{\nu}$$

Όμως, από την ιδιότητα: $\binom{\nu}{0}^2+\binom{\nu}{1}^2+\dots+\binom{\nu}{\nu}^2=\binom{2\nu}{\nu}$ προκύπτει ότι:

$$\binom{2\nu}{0}=\binom{\nu}{0}^2$$

$$\binom{2\nu}{1}=\binom{\nu}{0}^2+\binom{\nu}{1}^2$$

$$\vdots \qquad \vdots$$

$$\binom{2\nu}{\nu}=\binom{\nu}{0}^2+\binom{\nu}{1}^2+\dots+\binom{\nu}{\nu}^2$$

οπότε,

$$\binom{3\nu}{\nu}=\binom{\nu}{0}^3+\binom{\nu}{0}^2\binom{\nu}{1}+\binom{\nu}{1}^3+\dots+\binom{\nu}{0}^2\binom{\nu}{\nu}+\binom{\nu}{1}^2\binom{\nu}{\nu}+\dots+\binom{\nu}{\nu}^3\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\binom{3\nu}{\nu}=\binom{\nu}{0}^3+\binom{\nu}{1}^3+\dots+\binom{\nu}{\nu}^3+\binom{\nu}{0}^2\left[\binom{\nu}{1}+\binom{\nu}{2}+\dots+\binom{\nu}{\nu}\right]+\binom{\nu}{1}^2\left[\binom{\nu}{2}+\dots+\binom{\nu}{\nu}\right]$$

$$+\dots+\binom{\nu}{\nu-1}^2\binom{\nu}{\nu}$$

Χρήστος Τσούφης
1ο εξάμηνο, ΣΗΜΜΥ

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

Κάνοντας χρήση της ανισότητας $\log(\nu+1) > \frac{3}{10\nu} + \log\nu$, να κατασκευαστεί η ακόλουθη:

$$\log(\nu!) > \frac{3}{10}\nu\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\ldots+\frac{1}{\nu}-1\right)$$

Λύση

Ισχύει ότι $\log(\nu+1) > \frac{3}{10\nu} + \log\nu$

Για $\nu = 1, 2, \ldots, k-1$:

- $\log 2 > \frac{3}{10} + \log 1$
- $\log 3 > \frac{3}{10\cdot 2} + \log 2$

$\vdots$

- $\log k > \frac{3}{10(k-1)} + \log(k-1)$

$(+)$

$$\cancel{\log 2} + \cancel{\log 3} + \ldots + \log k > \frac{3}{10} + \frac{3}{10\cdot 2} + \ldots + \frac{3}{10(k-1)} + \cancel{\log 1}^{\,0} + \cancel{\log 2} + \ldots + \cancel{\log(k-1)}$$

$$\log k > \frac{3}{10}\left(1+\frac{1}{2}+\ldots+\frac{1}{k-1}\right) \qquad (1)$$

Στη σχέση (1), για $k = 2, 3, \ldots, \nu$:

- $\log 2 > \frac{3}{10}\cdot 1$
- $\log 3 > \frac{3}{10}\left(1+\frac{1}{2}\right)$

$\vdots$

- $\log\nu > \frac{3}{10}\left(1+\frac{1}{2}+\ldots+\frac{1}{\nu-1}\right)$

$(+)$

$$\log 2 + \log 3 + \ldots + \log\nu > \frac{3}{10}\cdot 1 + \frac{3}{10}\left(1+\frac{1}{2}\right) + \ldots + \frac{3}{10}\left(1+\frac{1}{2}+\ldots+\frac{1}{\nu-1}\right)$$

$$\log(2\cdot 3\cdot\ldots\cdot\nu) > \frac{3}{10}\left[\frac{\nu-1}{1} + \frac{\nu-2}{2} + \ldots + \frac{\nu-(\nu-1)}{\nu-1}\right]$$

$$\log\nu! > \frac{3}{10}\left[\left(\frac{\nu}{1}+\frac{\nu}{2}+\ldots+\frac{\nu}{\nu-1}\right)-(\nu-1)\right]$$

$$= \frac{3\nu}{10}\left(1+\frac{1}{2}+\ldots+\frac{1}{\nu-1}-\frac{\nu-1}{\nu}\right)$$

Άρα $\log\nu! > \frac{3\nu}{10}\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\ldots+\frac{1}{\nu-1}+\frac{1}{\nu}-1\right)$

Χρήστος Τσούδης
1ο εξάμηνο, ΣΗΜΜΥ

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

Ν.δ.ο. $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=|x|$, $\forall x\in\mathbb{R}$ δεν είναι πολυωνυμική συνάρτηση

Λύση (από βιβλίο)

Ας υποθέσουμε ότι η συνάρτηση με τύπο $f(x)=|x|$ είναι πολυωνυμική και μάλιστα $|x|=P(x)$, $\forall x\in\mathbb{R}$ όπου $P(x)$ πολυώνυμο της μεταβλητής x.

- Αν $x\geq 0$, συνεπάγεται $P(x)=x$ και συνεπώς $P(x)-x=0$ $\forall x\in\mathbb{R}^+$.

  Άρα, η πολυωνυμική εξίσωση $P(x)-x=0$ δέχεται άπειρο πλήθος ρίζες. Επομένως $P(x)-x$ είναι το μηδενικό πολυώνυμο.

- Αν $x\leq 0$, τότε, ομοίως, το $P(x)+x=0$ είναι το μηδενικό πολυώνυμο.

  Από $P(x)-x\equiv 0$ και $P(x)+x\equiv 0$, συνεπάγεται ότι $2x\equiv 0$.

  Αυτό όμως είναι άτοπο, αφού το πολυώνυμο $2x\equiv 2x+0$ δεν είναι το μηδενικό πολυώνυμο, αλλά πολυώνυμο πρώτου βαθμού.

Συνεπώς, η $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ που ορίζεται με $f(x)=|x|$ δεν είναι πολυωνυμική συνάρτηση στο σύνολο των πραγματικών αριθμών.