ΦΥΣΙΚΗ Ι

Α' Σειρά ασκήσεων

(1) Από το ανάπτυγμα $e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \dots$

μπορούμε να προσεγγίσουμε την ποσότητα

$e^{0,1} = 1 + 0,1 + \frac{0,01}{2} = e^{0,1} = 1,105$

Έστω τώρα πως $e^x = 1 + x + \sigma$

Τότε $\sigma = 1 + x - e^x$

Για $x = 0,1$ το σ: σφάλμα είναι

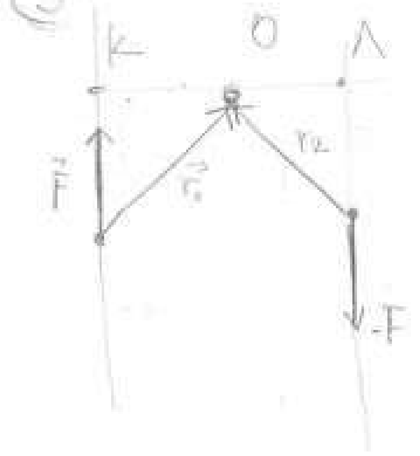
$$\sigma = \left(1 + 0,1 + \frac{0,01}{2} + \frac{0,001}{6} + \dots\right) - 1,1$$

$\sigma < 0,006$

αφού $e^x = 1 + 0,1 + 0,005 + 0,000166\dots +$

άρα $e^x < 1,10516\dots < 1,106$

(3)



$$2\vec{\tau} = \vec{F}\times\vec{r}_1 + (-\vec{F})\times\vec{r}_2$$

$$= \vec{n}\,|F||r_1|\sin(\vec{F},\vec{r}_1) + \hat{n}\,|F||r_2|\sin(-\vec{F},\vec{r}_2)$$

$$= \vec{n}\,|\vec{F}|\,\big(|r_1|\sin(\vec{F},r_1) - \sin(\vec{F},\vec{r}_2)|r_2|\big)$$

όπου $\sin(\vec{F},\vec{r}_1) = \dfrac{OK}{|r_1|}$

$\sin(-\vec{F},r_2) = \dfrac{OΛ}{|r_2|}$

άρα $2\vec{\tau} = \vec{n}|F|(OK + OΛ) \Rightarrow 2\vec{\tau} = \vec{n}|\vec{F}|\cdot KΛ$

Επομένως η συνολική ροπή αυτών των δυνάμεων στο επίπεδο εξαρτάται από το μέγεθος των αποστάσεων τους αλλά όχι το σημείο αναφοράς

(7) $\vec{A} = (\hat{n}\cdot\vec{A})\cdot\hat{n} + (\hat{n}\times\vec{A})\times\hat{n}$

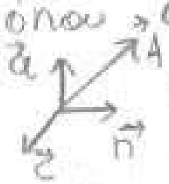
$\Rightarrow \vec{A} = |n||A|\cos(n,A)\,\hat{n} + |n|\cdot|A|\sin(n,A)\,\hat{c}\times\hat{n}$

όπου $\hat{c}$ το μοναδιαίο κάθετο στο επίπεδο των $\vec{A},\vec{n}$

και $|n| = 1$

άρα: $\vec{A} = |A|\cos(n,A)\,\hat{n} + |A|\sin(n,A)\,|c||n|\sin(c,n)\,\hat{\alpha}$

όπου $\hat{\alpha}$ το μοναδιαίο κάθετο στο επίπεδο των $\hat{c},\hat{n}$



άρα το $\vec{\alpha}$ ομοεπίπεδο με τα $\vec{a},\vec{n}$

και $|c| = |n| = 1$ και $\sin(c,n) = 1$ αφού $\vec{c}\perp\vec{n}$

άρα $\vec{A} = |A|\cos(n,A)\,\hat{n} + |A|\sin(n,A)\,\hat{\alpha}$

το οποίο ισχύει

③ Σπειροειδης τροχεια μελισσας: $\left\{ \begin{array}{l} r = b - ct \\ \dot\theta = kt \end{array} \right\}$

α)

Έχουμε πως $\vec{u} = \frac{d\vec{r}}{dt} = \frac{dr}{dt}\hat{r} = \dot r \hat r + r\dot{\hat r} = \dot r\hat r + r\dot\theta\hat\theta$

$\Rightarrow \vec u = -c\hat r + (b-ct)kt\hat\theta$

$\Rightarrow \boxed{\vec u = -c\hat r + bkt\hat\theta - ckt^2\theta}$

β) Καθως φευγει από την κυψελη: $\left\{ \begin{array}{l} r = be^{at} \\ \theta = \omega t \end{array} \right\}$

Τωρα η ταχυτητα ειναι $\vec V = \dot r\hat r + r\dot\theta\hat\theta = bae^{at}\hat r + be^{at}\cdot\omega\cdot\hat\theta$

$\Rightarrow \underline{\vec V = b(a\hat r + \omega\hat\theta)\cdot e^{at}}$

και η επιταχυνση ειναι $\vec a = \dot{\vec V} = (\ddot r - r\dot\theta^2)\hat r + (2\dot r\dot\theta + r\ddot\theta)\hat\theta$

$\Rightarrow \vec a = (ba^2e^{at} - be^{at}\omega^2)\hat r + (2bae^{at}\omega + \cancel{be^{at}}\cdot 0)\hat\theta$

$\Rightarrow \vec a = (be^{at}(a^2-\omega^2))\hat r + 2ba\omega\cdot e^{at}\cdot\hat\theta$

$\Rightarrow \underline{\vec a = b((a^2-\omega^2)\hat r + 2a\omega\hat\theta)\; e^{at}}$

Απο τον τυπο του εσωτερικου γινομενου εχω πως

$$\cos(\vec a, \vec V) = \frac{\vec V\cdot\vec a}{|V||a|} = \frac{\cancel{b^2e^{2at}}(a^3 - a\omega^2 + 2a\omega^2)}{\cancel{b^2e^{2at}}\sqrt{a^2+\omega^2}\sqrt{(a^2-\omega^2)^2+4a^2\omega^2}}$$

$$\boxed{\cos(\vec a, \vec V) = \frac{a^3+a\omega^2}{\sqrt{a^2+\omega^2}\,(a^2+\omega^2)}}$$ οπου a, ω = σταθερες

αρα η γωνια δε μεταβαλλεται με τον χρονο

β) συμπαγής σφαίρα: ακτίνα R

$$\rho = \rho_0 - \alpha r$$

β1) Χωρίζουμε την σφαίρα σε στοιχειώδεις φλοιούς πάχους dr

μάζα στοιχ. φλοιού $dm = \rho \cdot dV$

όγκος στοιχ. φλοιού $dV = 4\pi r^2 dr$

$$\left.\begin{array}{l} dm = \rho \cdot dV \\ dV = 4\pi r^2 dr \end{array}\right\} \Rightarrow dm = (\rho_0 - \alpha r) 4\pi r^2 dr$$

άρα $M_{\sigma\varphi} = \int_0^R dm_{\varphi\lambda} = \int_0^R \rho_0 4\pi r^2 dr - \int_0^R 4\pi \alpha r^3 dr = \dfrac{4\pi\rho_0 R^3}{3} - \dfrac{\cancel{4}\pi\alpha R^4}{\cancel{4}}$

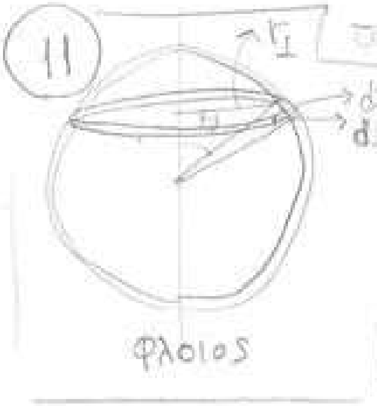
$$\boxed{M_{\sigma\varphi} = \frac{\pi}{3} R^3 (4\rho_0 - 3\alpha R)}$$

β2) $I_{\varphi\lambda} = \frac{2}{3} M_{\varphi\lambda} R_{\varphi\lambda}^2$ από α)

$$\left.\begin{array}{l} dI_{\varphi\lambda} = \frac{2}{3} dm\, r^2 \\ \text{όπου } dm = (\rho_0 - \alpha r) 4\pi r^2 dr \text{ από } \beta_1) \end{array}\right\} \Rightarrow dI_{\varphi\lambda} = \frac{2}{3}(\rho_0 - \alpha r) 4\pi r^4 dr$$

$$I_{\sigma\varphi} = \int_0^R dI_{\varphi\lambda} = \int_0^R (\rho_0 - \alpha r) \frac{8\pi r^4}{3} dr = \int_0^R \frac{8\pi\rho_0 r^4}{3} dr - \int_0^R \frac{8\pi\alpha r^5}{3} dr = \frac{8\pi\rho_0 R^5}{15} - \frac{8\pi\alpha R^6}{18}$$

$$\boxed{I_{\sigma\varphi} = \frac{8}{3}\pi R^5 \left(\frac{\rho_0}{5} - \frac{\alpha R}{4}\right)}$$



11 σφαιρικός φλοιός: ακτίνα R

μάζα m

$$I_z = \int r_\perp^2\, dm = \int (x^2+y^2)\, dm = \frac{2}{3} m R^2$$

$$r_\perp = \sqrt{x^2+y^2}$$

α) Χωρίζουμε τον φλοιό σε στοιχειώδεις δακτυλίους

Τότε $I_{φλ} = \int dI_σ$.

$dI_σ = r_\perp^2\, dm_σ$ ·

Αφού $\rho_s = \frac{m}{S} \Rightarrow dm_σ = \rho_s\, dS_σ$

όπου $d\ell = R\, d\theta$

περιφέρεια δακτ. $2\pi r_\perp$

$\Longrightarrow dm = \rho_s\, 2\pi r_\perp R\, d\theta$

Άρα $dI_σ = \rho_s\, 2\pi r_\perp^3 R\, d\theta$

όπου $r_\perp = R \sin\theta$

$\Longrightarrow dI_σ = \rho_s\, 2\pi R^4 (\sin\theta)^3\, d\theta$

Επομένως $I_{φλ} = \int_0^\pi dI_σ = 2\pi \rho_s R^4 \int_0^\pi (\sin\theta)^3\, d\theta$

$I_{φλ} = \dfrac{8\pi\rho_s R^4}{3}$

όπου $\rho_s = \dfrac{m}{4\pi R^2}$

$\Longrightarrow \boxed{I_{φλ} = \dfrac{2mR^2}{3}}$