ΦΥΛΛΑΔΙΟ 1
ΣΧΟΛΗ ΣΗΜΜΥ
Γραμμική Άλγεβρα - 1ο Εξάμηνο 2017-18
Διανυσματικά γινόμενα - Ορίζουσες

1. Να αποδείξετε ότι για τα διανύσματα $\mathbf{a},\mathbf{b},\mathbf{c}\in\Delta^3$ ισχύουν:

(i) $\mathbf{a}\neq\mathbf{0}, \mathbf{a}\cdot\mathbf{b}=\mathbf{a}\cdot\mathbf{c}$ και $\mathbf{a}\times\mathbf{b}=\mathbf{a}\times\mathbf{c}\Rightarrow\mathbf{b}=\mathbf{c}$

(ii) $\mathbf{a}+\mathbf{b}+\mathbf{c}=\mathbf{0}\Rightarrow\mathbf{a}\times\mathbf{b}=\mathbf{b}\times\mathbf{c}=\mathbf{c}\times\mathbf{a}$.

Ισχύει η αντίστροφη συνεπαγωγή;

(iii) $(\mathbf{a}\times\mathbf{b})\times(\mathbf{a}\times\mathbf{c})=(\mathbf{a},\mathbf{b},\mathbf{c})\mathbf{a}$

(iv) $(\mathbf{a}\times\mathbf{b},\mathbf{b}\times\mathbf{c},\mathbf{c}\times\mathbf{a})=(\mathbf{a},\mathbf{b},\mathbf{c})^2$

(v) $\mathbf{a},\mathbf{b},\mathbf{c}$ είναι μη συνεπίπεδα $\Leftrightarrow$ $\mathbf{a}\times\mathbf{b},\mathbf{b}\times\mathbf{c},\mathbf{c}\times\mathbf{a}$ είναι μη συνεπίπεδα

2. Δίνονται τα διανύσματα $\mathbf{a}=\mathbf{i}-2\mathbf{j}+3\lambda\mathbf{k},\ \mathbf{b}=\mathbf{j}+\lambda\mathbf{k},\ \mathbf{c}=\lambda\mathbf{j}+\mathbf{k},\ \lambda\in\mathbb{R}$.
Να προσδιορίσετε τις τιμές του λ για τις οποίες τα παραπάνω διανύσματα είναι συνεπίπεδα.

3. Να αποδείξετε ότι για οποιαδήποτε διανύσματα $\mathbf{a},\mathbf{b},\mathbf{c},\mathbf{d}$ ισχύει η ισότητα:

(α) $(\mathbf{a}\times\mathbf{b})\cdot(\mathbf{c}\times\mathbf{d})=(\mathbf{a}\cdot\mathbf{c})(\mathbf{b}\cdot\mathbf{d})-(\mathbf{a}\cdot\mathbf{d})(\mathbf{b}\cdot\mathbf{c})$.

(β) $(\mathbf{a}\times\mathbf{b})\times(\mathbf{c}\times\mathbf{d})=(\mathbf{a},\mathbf{c},\mathbf{d})\mathbf{b}-(\mathbf{b},\mathbf{c},\mathbf{d})\mathbf{a}=(\mathbf{a},\mathbf{b},\mathbf{d})\mathbf{c}-(\mathbf{a},\mathbf{b},\mathbf{c})\mathbf{d}$.

4. Τα σημεία Α, Β, Γ και Δ έχουν διανύσματα θέσης ως προς το καρτεσιανό σύστημα αναφοράς $Oxyz$, $\mathbf{a},\mathbf{b},\mathbf{c}$ και $\mathbf{d}$, αντίστοιχα. Να αποδείξετε ότι:

$$\mathrm{A},\mathrm{B},\Gamma,\Delta \text{ συνεπίπεδα } \Leftrightarrow (\mathbf{a},\mathbf{b},\mathbf{c})-(\mathbf{b},\mathbf{c},\mathbf{d})+(\mathbf{c},\mathbf{d},\mathbf{a})-(\mathbf{d},\mathbf{a},\mathbf{b})=0.$$

5. Τα σημεία Α, Β και Γ έχουν διανύσματα θέσης ως προς το καρτεσιανό σύστημα αναφοράς $Oxyz$, $\mathbf{a},\mathbf{b},$ και $\mathbf{c}$, αντίστοιχα.
Να αποδείξετε ότι το εμβαδόν του τριγώνου ΑΒΓ είναι:

$$\mathrm{E}(\mathrm{AB}\Gamma)=\frac{1}{2}\left|(\mathbf{a}\times\mathbf{b})+(\mathbf{b}\times\mathbf{c})+(\mathbf{c}\times\mathbf{a})\right|.$$

6. Αν $\mathbf{a},\mathbf{b}$ είναι δύο μη συγγραμμικά μοναδιαία διανύσματα, να προσδιορίσετε το διάνυσμα $\mathbf{u}$ που ικανοποιεί την εξίσωση

$$(\mathbf{a}\cdot\mathbf{u})\mathbf{b}+4\mathbf{a}=2\mathbf{u}.$$

7. Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $\mathbf{x}+\mathbf{x}\times\mathbf{a}=\mathbf{b}$, όπου $\mathbf{a},\mathbf{b}$ είναι γνωστά διανύσματα, έχει μοναδική λύση ως προς $\mathbf{x}$, η οποία και να βρεθεί.

8. Αν το διάνυσμα $\mathbf{w}$ ικανοποιεί την εξίσωση $\mathbf{a}\times(\mathbf{w}\times\mathbf{a})+\mathbf{w}=\mathbf{b}$,

όπου $\mathbf{a},\mathbf{b}$ είναι γνωστά διανύσματα, τότε:

(i) Να αποδείξετε ότι: $\mathbf{a}\cdot\mathbf{w}=\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}$ και $\mathbf{w}\times\mathbf{a}=\left(\dfrac{1}{1+|\mathbf{a}|^2}\right)(\mathbf{b}\times\mathbf{a})$.

(ii) Να προσδιορίσετε τη λύση της εξίσωσης.

9. (Βασική άσκηση)

Θεωρούμε τρίγωνο ΑΒΓ με βαρύκεντρο (σημείο τομής διαμέσων) το σημείο Θ . Αν Δ είναι το μέσο της πλευράς ΒΓ και $Oxyz$ είναι Καρτεσιανό σύστημα αναφοράς, να αποδείξετε ότι:

(α) $\mathbf{OB}+\mathbf{O\Gamma}=2\cdot\mathbf{O\Delta}$

(β) $\mathbf{OA}+\mathbf{OB}+\mathbf{O\Gamma}=3\cdot\mathbf{O\Theta}$

(γ) $\mathbf{\Theta A}+\mathbf{\Theta B}+\mathbf{\Theta\Gamma}=\mathbf{0}\Leftrightarrow$ Θ βαρύκεντρο του τριγώνου ΑΒΓ

Υπολογισμός οριζουσών (Με χρήση ιδιοτήτων των οριζουσών)

10. Να υπολογιστεί η ορίζουσα του πίνακα $A=\begin{bmatrix}1+a & 1 & 1 & 1\\ 1 & 1-a & 1 & 1\\ 1 & 1 & 1+b & 1\\ 1 & 1 & 1 & 1-b\end{bmatrix}$.

11. Να λύσετε την εξίσωση: $\begin{vmatrix}x & a & b & c\\ a & x & b & c\\ a & b & x & c\\ a & b & c & x\end{vmatrix}=0$.

12. Να υπολογίσετε την ορίζουσα του $n\times n$ πίνακα:

$$A=\begin{bmatrix}a_1 & a_2 & a_3 & \cdot & \cdot & \cdot & a_{n-1} & a_n\\ -x & x & 0 & \cdot & \cdot & \cdot & 0 & 0\\ 0 & -x & x & \cdot & \cdot & \cdot & 0 & 0\\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot\\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot\\ 0 & 0 & 0 & \cdot & \cdot & \cdot & x & 0\\ 0 & 0 & 0 & \cdot & \cdot & \cdot & -x & x\end{bmatrix},$$

όπου $a_1,a_2,...,a_n.x\in\mathbb{R}$. **(Απάντηση:** $|\mathrm{A}|=(a_1+a_2+...+a_n)x^{n-1}$ **)**

13. Να υπολογίσετε την ορίζουσα του $n\times n$ πίνακα $\mathrm{A}=\left(\alpha_{ij}\right)$, αν είναι

(α) $\alpha_{ij}=\begin{cases} i, & \text{αν } i=j \\ n, & \text{αν } i\neq j \end{cases}$, **(β)** $\alpha_{ij}=\min\left(i,j\right)$, **(γ)** $\alpha_{ij}=\max\left(i,j\right)$, **(δ)** $\alpha_{ij}=\begin{cases} 0, & \text{αν } i=j \\ 1, & \text{αν } i\neq j \end{cases}$

(Απάντηση: (α) $\left(-1\right)^{n-1}n!$ **, (β)** 1**, (γ)** $\left(-1\right)^{n-1}n$ **, (δ)** $\left(-1\right)^{n-1}\left(n-1\right)$ **)**

Παράδοση φυλλαδίου 1: Μέχρι 6 Νοεμβρίου 2017