Χρήστος Τσάφμης
1ο Εξάμηνο
ΣΗΜΜΥ

ΦΥΛΛΑΔΙΟ 3

ΓΡΑΜΜΙΚΗ ΑΛΓΕΒΡΑ

ασκ 5

α) $z^2+4z+13=0$

$\Delta=4^2-4\cdot1\cdot13=16-52=-36<0$

$z=\dfrac{-4\pm\sqrt{-36}}{2\cdot1}=\dfrac{-4\pm6i}{2}=-2\pm3i$

β) $z^2+(1-i)z-i=0$

1ος Τρόπος

$z^2+(1-i)z-i=0 \Leftrightarrow z^2+z-iz-i=0 \Leftrightarrow z(z+1)-i(z+1)=0$

$\Leftrightarrow (z+1)(z-i)=0 \Leftrightarrow z=-1$ ή $z=i$

2ος τρόπος

$\Delta=(1-i)^2-4\cdot1\cdot(-i)=(1-i)(1-i)+4i=\cancel{1}-i-i+\cancel{i^2}+4i=2i$

Για τη γνωστή 2ο-βάθμια εξίσωση με μιγαδ. συντελεστές $az^2+\beta z+\gamma=0$, καταλήγουμε με συμπλήρωση τετραγώνων στην μορφή: $\left(z+\frac{\beta}{2a}\right)^2=\frac{\Delta}{4a^2}$

Στην περίπτωσή μας είναι $\left(z+\frac{1-i}{2}\right)^2=\frac{2i}{4}=\frac{i}{2}$

Έστω $z+\frac{1-i}{2}=\rho e^{i\theta}$. Ξέρω ότι $\frac{i}{2}=\frac{e^{i\frac{\pi}{2}}}{2}=\frac{e^{i(\frac{\pi}{2}+2k\pi)}}{2}$

και $\left(z+\frac{1-i}{2}\right)^2=\rho^2e^{i2\theta}$, δηλ. $\rho^2e^{i2\theta}=\frac{1}{2}e^{i(\frac{\pi}{2}+2k\pi)} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \begin{cases}\rho^2=\frac{1}{2}\\ 2\theta=\frac{\pi}{2}+2k\pi\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}\rho=\frac{\sqrt2}{2}\\ \theta=\frac{\pi}{4}+k\pi\end{cases}$

Για να έχω $\theta\in[0,2\pi)$ πρέπει $k=0$ ή $k=1$.

Άρα $\frac{1-i}{2}+z=\begin{cases} \xrightarrow{k=0} \frac{\sqrt2}{2}e^{i\frac{\pi}{4}}=\frac{\sqrt2}{2}\left(\frac{\sqrt2}{2}+i\frac{\sqrt2}{2}\right)=\frac{1+i}{2} \\ \xrightarrow{k=1} \frac{\sqrt2}{2}e^{i\frac{5\pi}{4}}=\frac{\sqrt2}{2}\left(-\frac{\sqrt2}{2}-i\frac{\sqrt2}{2}\right)=-\left(\frac{1+i}{2}\right)\end{cases} \Leftrightarrow z=\begin{cases} i \\ -1\end{cases}$

άσκ 6

$z = x + yi \longrightarrow M(x,y) \longrightarrow x^2+y^2=4 \quad (\Rightarrow |z|=2)$

$w = u + vi = z + \frac{1}{z} \longrightarrow P(u,v)$?

Είναι $w = u+vi = z + \frac{1}{z} = x+yi + \frac{1}{x+yi} = x+yi + \frac{x-yi}{x^2+y^2} \Rightarrow$

$\Rightarrow w = x+yi + \frac{x-yi}{4} = \frac{4x+4yi+x-yi}{4} = \frac{5x+3yi}{4} \Rightarrow$

$\Rightarrow w = u + vi = \frac{5}{4}x + \frac{3}{4}yi$

δηλ. $\left\{ \begin{array}{l} u = \frac{5}{4}x \\ v = \frac{3}{4}y \end{array} \right\} \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} x = \frac{4}{5}u \\ y = \frac{4}{3}v \end{array} \right\}$

και $x^2+y^2=4 \Leftrightarrow \left(\frac{4}{5}\right)^2 \cdot u^2 + \left(\frac{4}{3}\right)^2 \cdot v^2 = 4 \Leftrightarrow \frac{\cancel{16}^{4}}{25}u^2 + \frac{\cancel{16}^{4}}{9}v^2 = \cancel{4} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \frac{4}{25}u^2 + \frac{4}{9}v^2 = 1 \Leftrightarrow \frac{u^2}{\left(\frac{5}{2}\right)^2} + \frac{v^2}{\left(\frac{3}{2}\right)^2} = 1$

Άρα είναι έλλειψη με μεγάλο άξονα $\alpha = \frac{5}{2}$
και μικρό άξονα $\beta = \frac{3}{2}$

άσκ 7

- $z_1 = 1 + i$

$\rho = \sqrt{1^2 + 1^2} = \sqrt{2}$

$\left. \begin{array}{l} \cos\theta = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2} \\ \sin\theta = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2} \end{array} \right\} \theta = \frac{\pi}{4}$

Άρα $z_1 = \sqrt{2}\, e^{i\frac{\pi}{4}}$

- $z_2 = 1 + i\sqrt{3}$

$\rho = \sqrt{1^2 + \sqrt{3}^2} = \sqrt{4} = 2$

$\left. \begin{array}{l} \cos\theta = \frac{1}{2} \\ \sin\theta = \frac{\sqrt{3}}{2} \end{array} \right\} \theta = \frac{\pi}{3}$

Άρα $z_2 = 2e^{i\frac{\pi}{3}}$

- $z_1 z_2 = 2\sqrt{2}\, e^{i\left(\frac{\pi}{3} + \frac{\pi}{4}\right)} = 2\sqrt{2}\, e^{i\left(\frac{7\pi}{12}\right)} = 2^{\frac{3}{2}} e^{i\frac{7\pi}{12}}$

- $(z_1 \cdot z_2)^{100} = \left(2^{\frac{3}{2}}\right)^{100} \cdot \left(e^{i\frac{7\pi}{12}}\right)^{100} = 2^{150} e^{i\frac{175\pi}{3}} = 2^{150} e^{i\frac{(3\cdot 58+1)\pi}{3}} =$

$= 2^{150} e^{i\left(58\pi + \frac{\pi}{3}\right)} = 2^{150} e^{i\left(2\cdot 29\pi + \frac{\pi}{3}\right)} = 2^{150} e^{i\frac{\pi}{3}} =$

$= 2^{150}\left(\cos\frac{\pi}{3} + i\sin\frac{\pi}{3}\right) = 2^{150}\left(\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = 2^{149}(1 + i\sqrt{3}) \Rightarrow$

$\Rightarrow (z_1 \cdot z_2)^{100} = 2^{149} \cdot z_2$

ασκ 8

α) $z^6 = 1$

$$z = \rho e^{i\theta}$$

$$\left.\begin{array}{l} z^6 = \rho^6 e^{i6\theta} \\ 1 = e^{2k\pi} \end{array}\right\} \xRightarrow{z^6=1} \rho^6 e^{i6\theta} = e^{2k\pi} \Leftrightarrow \begin{cases} \rho^6 = 1 \\ 6\theta = 2k\pi \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \rho = 1 \\ \theta = k\frac{\pi}{3} \end{cases}$$

$k = 0, 1, 2, 3, 4, 5$, $z_k = e^{ik\frac{\pi}{3}} = \cos\left(k\frac{\pi}{3}\right) + i \sin\left(k\frac{\pi}{3}\right)$

$$z_0 = e^{i0} = e^0 = 1$$

$$z_1 = e^{i\frac{\pi}{3}} = \frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$z_2 = e^{i\frac{2\pi}{3}} = e^{i(\pi - \frac{\pi}{3})} = -\cos\frac{\pi}{3} + i\sin\frac{\pi}{3} = -\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$z_3 = e^{i\pi} = -1$$

$$z_4 = e^{i\frac{4\pi}{3}} = e^{i(\pi+\frac{\pi}{3})} = \cos\left(\pi + \frac{\pi}{3}\right) + i\sin\left(\pi+\frac{\pi}{3}\right) = -\cos\frac{\pi}{3} - i\sin\frac{\pi}{3} = -\left(\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$$

$$z_5 = e^{i\frac{5\pi}{3}} = e^{i(2\pi - \frac{\pi}{3})} = e^{i(-\frac{\pi}{3})} = \cos\left(-\frac{\pi}{3}\right) + i\sin\left(-\frac{\pi}{3}\right) = \cos\frac{\pi}{3} - i\sin\frac{\pi}{3} = \frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}$$

Προφανώς, τα z_k είναι στον μοναδιαίο κύκλο.

Για $k \neq \lambda$, η απόσταση των κορυφών z_k, z_λ είναι το μέτρο του

$$z_k - z_\lambda = \left[\cos\left(\frac{k\pi}{3}\right) - \cos\left(\frac{\lambda\pi}{3}\right)\right] + i\left[\sin\left(\frac{k\pi}{3}\right) - \sin\left(\frac{\lambda\pi}{3}\right)\right]$$

$$|z_k - z_\lambda|^2 = \left[\cos\left(\frac{k\pi}{3}\right) - \cos\left(\frac{\lambda\pi}{3}\right)\right]^2 + \left[\sin\left(\frac{k\pi}{3}\right) - \sin\left(\frac{\lambda\pi}{3}\right)\right]^2$$

$$= \cos^2\left(\frac{k\pi}{3}\right) + \cos^2\left(\frac{\lambda\pi}{3}\right) - 2\cos\left(\frac{k\pi}{3}\right)\cdot\cos\left(\frac{\lambda\pi}{3}\right) + \sin^2\left(\frac{k\pi}{3}\right) + \sin^2\left(\frac{\lambda\pi}{3}\right) - 2\sin\left(\frac{k\pi}{3}\right)\cdot\sin\left(\frac{\lambda\pi}{3}\right)$$

$$= 2 - 2\cos\left(\frac{k\pi}{3} - \frac{\lambda\pi}{3}\right) = 2 - 2\cos\left[(k-\lambda)\frac{\pi}{3}\right]$$

Διαδοχικές κορυφές έχουμε όταν $\lambda = k+1$, οπότε

$$|z_k - z_{k+1}|^2 = 2 - 2\cos\left[(k-k-1)\frac{\pi}{3}\right] = 2 - 2\cos\left(-\frac{\pi}{3}\right) = 2 - 2\cos\frac{\pi}{3} = 2 - 2\cdot\frac{1}{2} = 1$$

που είναι ανεξάρτητο του k, άρα έχουμε κανονικό εξάγωνο.

β) $z^6 = i$

Ψάχνω $w \in \mathbb{C}$ ώστε $w^6 = i = e^{i\frac{\pi}{2}}$

Άρα ψάχνω $w = e^{i\frac{\pi}{12}}$

$$z^6 = w^6 \Leftrightarrow \left(\frac{z}{w}\right)^6 = 1$$

$$\frac{z}{w} = \rho e^{i\theta}$$

$$\left.\begin{array}{l}\left(\frac{z}{w}\right)^6 = \rho^6 e^{i6\theta} \\ 1 = e^{2k\pi}\end{array}\right\} \xRightarrow{\left(\frac{z}{w}\right)^6 = 1} \rho^6 e^{i6\theta} = e^{2k\pi} \Leftrightarrow \begin{cases}\rho^6 = 1 \\ 6\theta = 2k\pi\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}\rho = 1 \\ \theta = \frac{k\pi}{3}\end{cases}$$

$k = 0, 1, 2, 3, 4, 5$, $\frac{z_k}{w} = e^{ik\frac{\pi}{3}} = \cos\left(k\frac{\pi}{3}\right) + i\sin\left(k\frac{\pi}{3}\right)$

$$\frac{z_0}{w} = e^0 = 1 \Leftrightarrow z_0 = 1 \cdot w = e^{i\frac{\pi}{12}} = \cos\left(\frac{\pi}{12}\right) + i\sin\frac{\pi}{12}$$

$$\frac{z_1}{w} = e^{i\frac{\pi}{3}} \Leftrightarrow z_1 = e^{i\left(\frac{\pi}{3} + \frac{\pi}{12}\right)} = e^{i\frac{5\pi}{12}} = \cos\left(\frac{5\pi}{12}\right) + i\sin\left(\frac{5\pi}{12}\right)$$

$$\frac{z_2}{w} = e^{i\frac{2\pi}{3}} \Leftrightarrow z_2 = e^{i\left(\frac{2\pi}{3} + \frac{\pi}{12}\right)} = e^{i\frac{3\pi}{4}} = \cos\left(\frac{3\pi}{4}\right) + i\sin\left(\frac{3\pi}{4}\right) =$$

$$= \cos\left(\pi - \frac{\pi}{4}\right) + i\sin\left(\pi - \frac{\pi}{4}\right) = -\cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4} = -\frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\frac{z_3}{w} = e^{i\pi} \Leftrightarrow z_3 = e^{i\left(\pi + \frac{\pi}{12}\right)} = e^{i\frac{13\pi}{12}} = \cos\left(\frac{13\pi}{12}\right) + i\sin\left(\frac{13\pi}{12}\right)$$

$$\frac{z_4}{w} = e^{i\frac{4\pi}{3}} \Leftrightarrow z_4 = e^{i\left(\frac{4\pi}{3} + \frac{\pi}{12}\right)} = e^{i\left(\frac{17\pi}{12}\right)} = \cos\left(\frac{17\pi}{12}\right) + i\sin\left(\frac{17\pi}{12}\right)$$

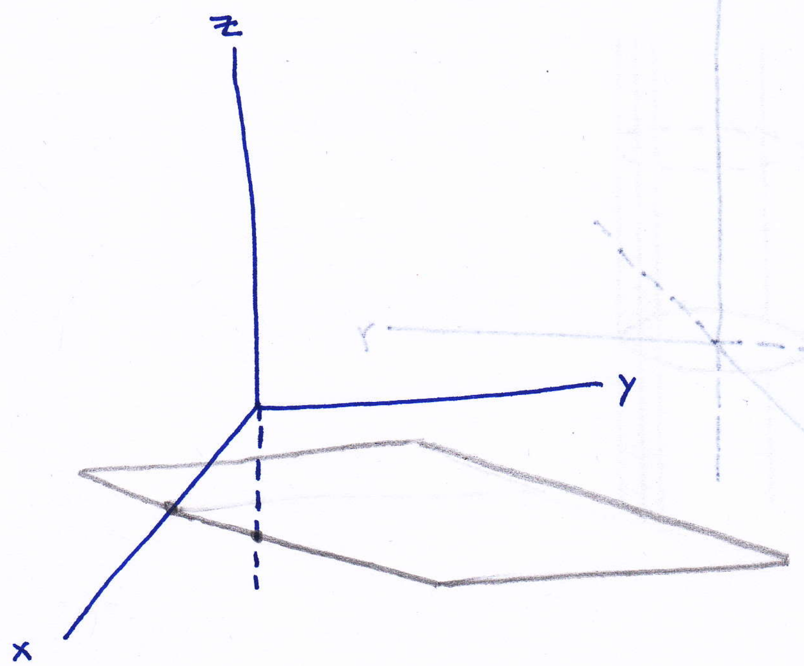
$$\frac{z_5}{w} = e^{i\frac{5\pi}{3}} \Leftrightarrow z_5 = e^{i\left(\frac{5\pi}{3} + \frac{\pi}{12}\right)} = e^{i\left(\frac{7\pi}{4}\right)} = e^{i\left(2\pi - \frac{\pi}{4}\right)} = e^{i\left(-\frac{\pi}{4}\right)} =$$

$$= \cos\left(-\frac{\pi}{4}\right) + i\sin\left(-\frac{\pi}{4}\right) = \cos\frac{\pi}{4} - i\sin\frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2} - i\frac{\sqrt{2}}{2}$$

ασκ 1

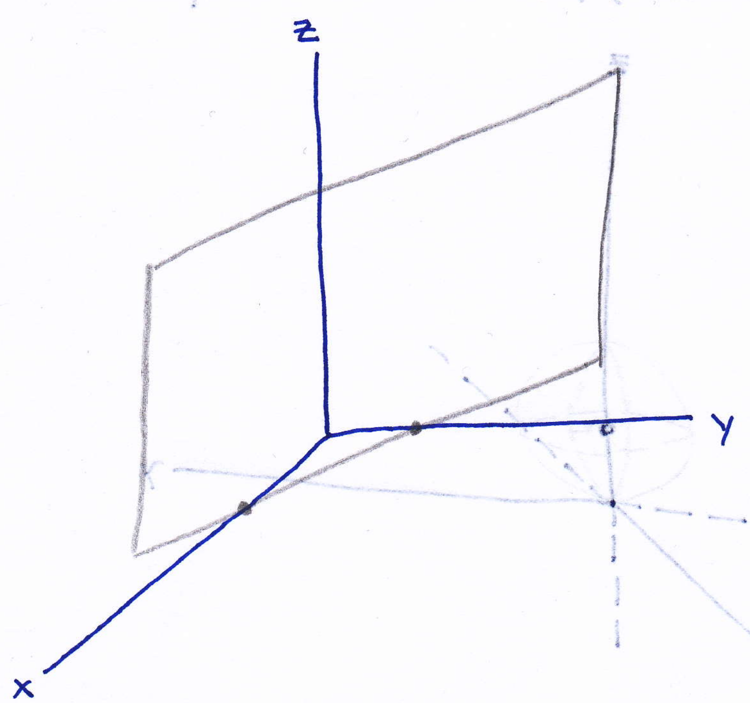
α) $x - z - 2 = 0$

↳ Επίπεδο με $\vec{n} = (1,0,-1)$ παράλληλο στον yy'



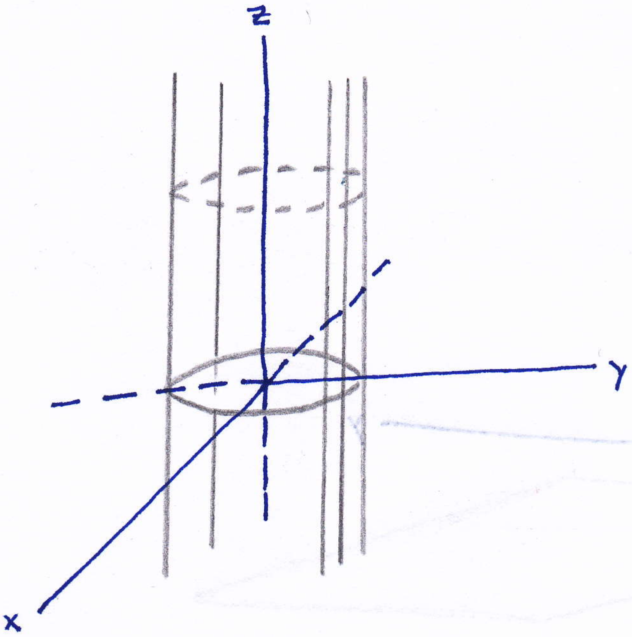
β) $2x + 3y - 6 = 0$

↳ Επίπεδο με $\vec{n} = (2,3,0)$ παράλληλο στον zz'



γ) $x^2+y^2-9=0$

↳ ορθός κυκλικός κύλινδρος, παράλληλος στον zz' και οδηγό τον κύκλο με εξίσωσης $x^2+y^2=9$, $z=0$

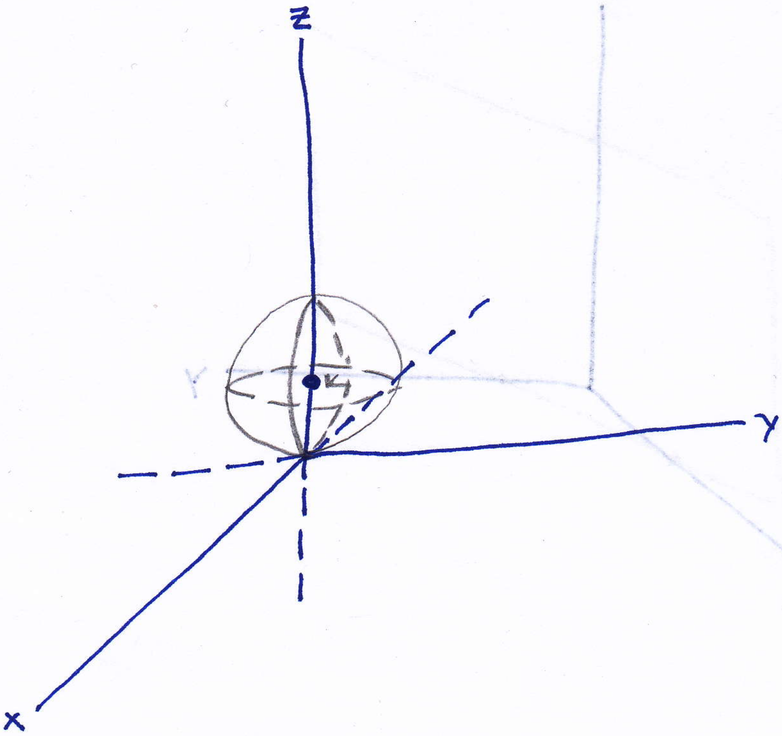


δ) $x^2+y^2+z^2-4z=0$

$x^2+y^2+z^2-4z+4=4$

$x^2+y^2+(z-2)^2=2^2$

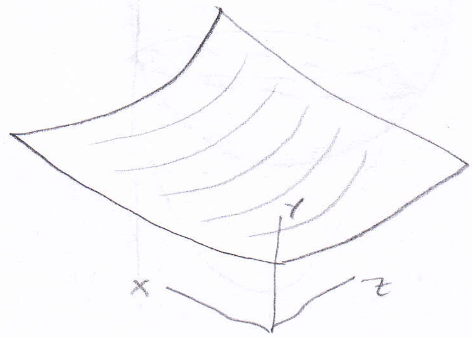
↳ Σφαίρα με κέντρο $K(0,0,2)$ και ακτίνα $\rho=2$



ε) $(x-2z)^2 - y + 3z = 0$

↳ Κυλινδρική επιφάνεια με γενέτειρα παράλληλη στην ευθεία ε της τομής των επιπέδων $x-2z=0$, $y-3z=0$. Έχουμε ε: $\frac{x-0}{2} = \frac{y-0}{3} = \frac{z-0}{1}$

Οδηγός καμπύλη: $(x-2z)^2 - y + 3z = 0$, $z=0 \Leftrightarrow x^2 - y = 0$, $z=0$, παραβολή στο επίπεδο όταν $z=0$.



στ) $x^2 + y^2 - z^2 - 2y + 4z + 5 = 0$

$$x^2 + y^2 - 2y + 1 = z^2 - 4z - 5 + 1$$

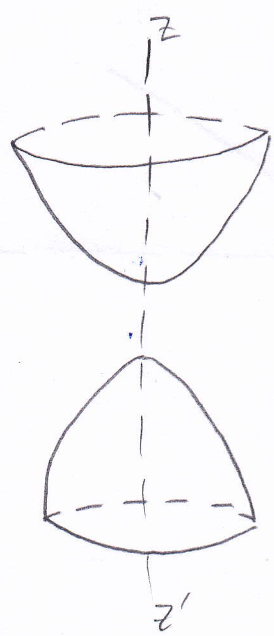
$$x^2 + (y-1)^2 = z^2 - 4z + 4 - 4 - 5 + 1$$

$$x^2 + (y-1)^2 = (z-2)^2 - 8$$

$$x^2 + (y-1)^2 - (z-2)^2 = -8$$

$$\frac{x^2}{\sqrt{8}^2} + \frac{(y-1)^2}{\sqrt{8}^2} - \frac{(z-2)^2}{\sqrt{8}^2} = -1$$

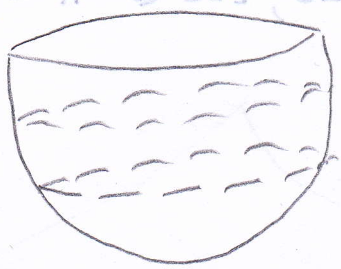
↳ Δίχωνο υπερβολοειδές με άξονα συμμετρίας τον άξονα z



δ) $x^2+y^2-2z=0$

$x^2+y^2=2z$

↳ Κυκλικό παραβολοειδές, επιφάνεια εκ περιστροφής



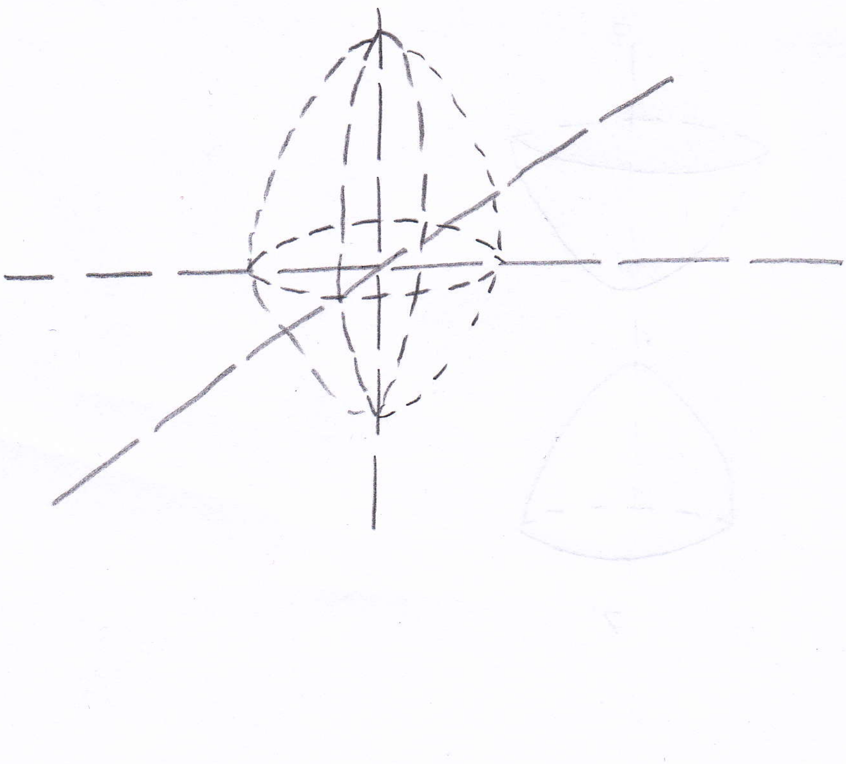
η) $x^2+4y^2+9z^2=36$

$$\frac{x^2}{6^2}+\frac{4y^2}{6^2}+\frac{9z^2}{6^2}=1$$

$$\frac{x^2}{6^2}+\frac{y^2}{(\frac{6}{2})^2}+\frac{z^2}{(\frac{6}{3})^2}=1$$

$$\frac{x^2}{6^2}+\frac{y^2}{3^2}+\frac{z^2}{2^2}=1$$

↳ ελλειψοειδές



ασκ 2

$$x^3+y^3+z^3-3xyz-1=0 \Leftrightarrow (x+y+z)(x^2+y^2+z^2-xy-yz-zx)-1=0$$

$$\Leftrightarrow (x+y+z)\left(x^2+y^2+z^2-\frac{1}{2}\left((x+y+z)^2-(x^2+y^2+z^2)\right)\right)-1=0$$

$$\Leftrightarrow (x+y+z)\left(\frac{3}{2}(x^2+y^2+z^2)-\frac{1}{2}(x+y+z)^2\right)-1=0$$

$$\Leftrightarrow (x+y+z)\left(3(x^2+y^2+z^2)-(x+y+z)^2\right)-2=0$$

$$\Leftrightarrow \Phi(x^2+y^2+z^2,\ x+y+z)=0$$

Είναι επιφάνεια εκ περιστροφής γύρω από άξονα $\varepsilon: \frac{x-0}{1}=\frac{y-0}{1}=\frac{z-0}{1}$

ασκ 3

$$\gamma: \begin{array}{l} z=x^2+y^2 \\ z-2y=0 \end{array}$$

$$\left\{\begin{array}{l} z=x^2+y^2 \\ z=2y \end{array}\right\} \Rightarrow \left\{\begin{array}{l} x^2+y^2=2y \\ z=2y \end{array}\right\} \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} x^2+(y-1)^2=1 \\ z=2y \end{array}\right\} \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} x=\cos t \\ y-1=\sin t \\ z=2y \end{array}\right\} \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} x=\cos t \\ y=1+\sin t \\ z=2(1+\sin t) \end{array}\right.$$

ασκ 4

$$\Sigma: x^2+y^2+z^2=25$$

α) Η επιφάνεια γράφεται ως $\Phi(x,y,z)=0$ με $\Phi(x,y,z)=x^2+y^2+z^2-25$

$$\frac{\partial\Phi}{\partial x}(x,y,z)=2x, \qquad \frac{\partial\Phi}{\partial y}(x,y,z)=2y, \qquad \frac{\partial\Phi}{\partial z}(x,y,z)=2z$$

Άρα, η εξίσωση του εφαπτόμενου επιπέδου στο $P(0,3,4)$ είναι:

$$\frac{\partial\Phi}{\partial x}\cancel{(0,3,4)}^{\,0}(x-0)+\frac{\partial\Phi}{\partial y}(0,3,4)(y-3)+\frac{\partial\Phi}{\partial z}(0,3,4)(z-4)=0$$

$$6(y-3)+8(z-4)=0$$

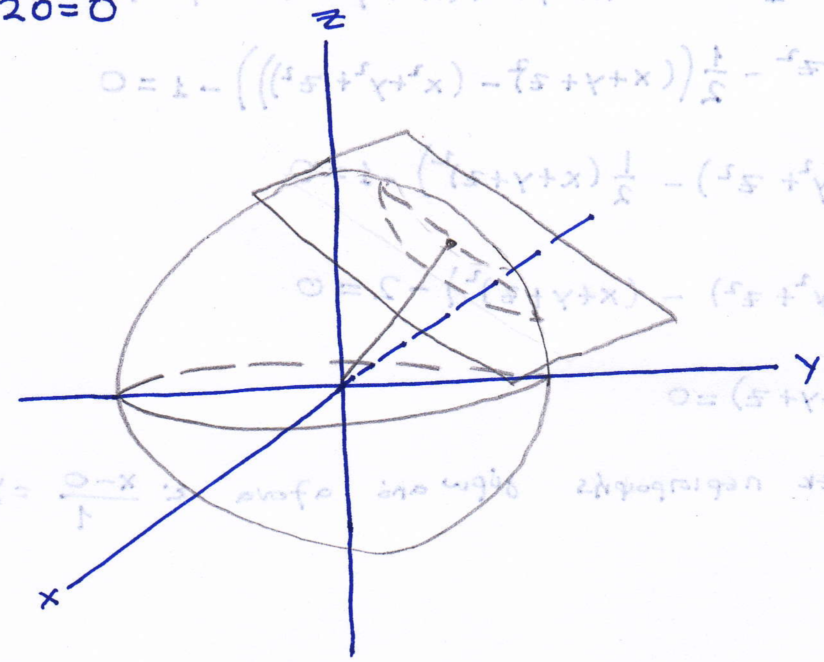
$$6y-18+8z-32=0$$

$$6y+8z-50=0$$

$$3y+4z-25=0$$

β) $\Sigma: x^2+y^2+z^2=25$

$\Pi: 3y+4z-20=0$



• Η απόσταση του κέντρου $O(0,0,0)$ από το επίπεδο Π είναι:

$$d(O,\Pi) = \frac{|3\cdot 0+4\cdot 0-20|}{\sqrt{{}^2+3^2+4^2}} = \frac{20}{5} = 4 < 5 = \rho$$

Άρα, το επίπεδο τέμνει τη σφαίρα κατά κύκλο.

• Το κέντρο του κύκλου προκύπτει ως η προβολή του O στο Π. Η ευθεία που διέρχεται από το O και είναι κάθετη στο Π έχει εξίσωση:

$$\frac{x-0}{0} = \frac{y-0}{3} = \frac{z-0}{3} \Rightarrow x=0,\ \frac{y}{3}=\frac{z}{4} \Rightarrow x=0,\ 4y-3z=0$$

$(\Sigma)\begin{cases} x=0 \\ 3y+4z=20 \\ 4y-3z=0 \end{cases}$ η λύση του συστήματος είναι η προβολή του O στο Π δηλ. το κέντρο του κύκλου.

• $4y=3z \Rightarrow y=\frac{3}{4}z$

• $3\left(\frac{3}{4}\right)z+4z=20 \Rightarrow \frac{9}{4}z+\frac{16}{4}z=20 \Rightarrow \frac{25}{4}z=20 \Rightarrow z=\frac{80}{25}=\frac{16}{5}$

Άρα $z=\frac{3}{\cancel{4}}\cdot\frac{\cancel{16}^{4}}{5}=\frac{12}{5}$

$(x,y,z)=\left(0,\frac{12}{5},\frac{16}{5}\right)$

και από Π.Θ.: $\rho^2=d^2+r^2 \Rightarrow r=\sqrt{\rho^2-d^2}=\sqrt{5^2-4^2}=\sqrt{25-16}=\sqrt{9}=3$