# ΑΝΑΛΥΣΗ 2

ΧΡΗΣΤΟΣ
ΤΣΟΥΦΗΣ
2ο Εξάμηνο
ΣΗΜΜΥ.

## Ασκ 1

Νδο κάθε μία εκ των $N_1, N_2, N_3$ είναι νόρμα $\mathbb{R}^\nu$

$N_1(\vec{x}) = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + \ldots + x_\nu^2}$

$N_2(\vec{x}) = |x_1| + |x_2| + \ldots + |x_\nu|$

$N_3(\vec{x}) = \max\{|x_1|, |x_2|, \ldots, |x_\nu|\}$

## Λύση

• i) $N_1(\vec{x}) \geq 0$

και $N_1(\vec{x}) = 0 \Leftrightarrow \sqrt{x_1^2 + \ldots + x_\nu^2} = 0 \Leftrightarrow x_1^2 + \ldots + x_\nu^2 = 0 \Leftrightarrow x_1 = x_2 = \ldots = x_\nu = 0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \vec{x} = \vec{0}$

ii) $N_1(\kappa\vec{x}) = \sqrt{(\kappa x_1)^2 + \ldots + (\kappa x_\nu)^2} = \sqrt{\kappa^2 x_1^2 + \ldots + \kappa^2 x_\nu^2} = \sqrt{\kappa^2(x_1^2 + \ldots + x_\nu^2)} =$

$= |\kappa|\sqrt{(x_1^2 + \ldots + x_\nu^2)} = |\kappa| \cdot N_1(\vec{x})$

iii) $\|\vec{x} + \vec{y}\| \leq \|\vec{x}\| + \|\vec{y}\| \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \sqrt{(x_1 + y_1)^2 + \ldots + (x_\nu + y_\nu)^2} \leq \sqrt{x_1^2 + \ldots + x_\nu^2} + \sqrt{y_1^2 + \ldots + y_\nu^2}$

$\Leftrightarrow (x_1 + y_1)^2 + \ldots + (x_\nu + y_\nu)^2 \leq (x_1^2 + \ldots + x_\nu^2) + (y_1^2 + \ldots + y_\nu)^2 + 2\sqrt{x_1^2 + \ldots + x_\nu^2} \cdot \sqrt{y_1^2 + \ldots + y_\nu^2}$

$\Leftrightarrow \cancel{2}(x_1 y_1 + \ldots + x_\nu y_\nu) \leq \cancel{2}\sqrt{x_1^2 + \ldots + x_\nu^2} \cdot \sqrt{y_1^2 + \ldots + y_\nu^2}$ (CSB)

• i) $N_2(\vec{x}) \geq 0$

και $N_2(\vec{x}) = 0 \Leftrightarrow |x_1| + \ldots + |x_\nu| = 0 \Leftrightarrow x_1 = x_2 = \ldots = x_\nu = 0 \Leftrightarrow \vec{x} = \vec{0}$

ii) $N_2(\kappa\vec{x}) = |\kappa x_1| + |\kappa x_2| + \ldots + |\kappa x_\nu| = |\kappa||x_1| + |\kappa| \cdot |x_2| + \ldots + |\kappa| \cdot |x_\nu| =$

$= |\kappa| \cdot (|x_1| + \ldots + |x_\nu|) = |\kappa| \cdot N_2(\vec{x})$

iii) $\|\vec{x} + \vec{y}\| \leq \|\vec{x}\| + \|\vec{y}\|$

$|x_1 + y_1| + \ldots + |x_\nu + y_\nu| \leq |x_1| + \ldots + |x_\nu| + |y_1| + \ldots + |y_\nu|$

Ισχύει

$|x_1 + y_1| \leq |x_1| + |y_1|$

$|x_2 + y_2| \leq |x_2| + |y_2|$

$\vdots$

$|x_\nu + y_\nu| \leq |x_\nu| + |y_\nu|$ +

• i) $N_3(\vec{x}) \geq 0$

και έστω $N_3(\vec{x}) = 0$, επειδή $0 \leq |x_i| \leq N_3(\vec{x})$, $\forall i = 1, 2, \dots, \nu$

θα ισχύει $|x_i| = 0 \Leftrightarrow x_i = 0$, $\forall i = 1, 2, \dots, \nu$ και άρα $\vec{x} = \vec{0}$.

Επίσης ισχύει $N_3(\vec{0}) = \vec{0}$.

ii) $N_3(k\vec{x}) = \max\{|kx_1|, |kx_2|, \dots, |kx_\nu|\} = |k| \cdot \max|x_i|$

iii) $\forall i = 1, 2, \dots, \nu$ ισχύει ότι

$$|x_i + y_i| \leq |x_i| + |y_i| \leq N_3(\vec{x}) + N_3(\vec{y})$$

Άρα $\max\limits_{1 \leq i \leq \nu} |x_i + y_i| \leq N_3(\vec{x}) + N_3(\vec{y})$

$$N_3(\vec{x} + \vec{y}) \leq N_3(\vec{x}) + N_3(\vec{y})$$

## Ασκ 2

Οι νόρμες $N_1, N_2, N_3$ (συμβ. $\|\cdot\|_1, \|\cdot\|_2, \|\cdot\|_3$) ικανοποιούν την ιδιότητα:

$$N_3(\vec{x}) \leq N_1(\vec{x}) \leq N_2(\vec{x}) \leq \nu N_3(\vec{x}), \quad \forall \vec{x} \in \mathbb{R}^\nu$$

Λύση

· Για κάθε $i = 1, \dots, \nu$ ισχύει:

$$|x_i| = \sqrt{x_i^2} \leq \sqrt{x_1^2 + \dots + x_i^2 + \dots + x_\nu^2} = N_1(\vec{x})$$

· $N_1(\vec{x}) \leq N_2(\vec{x}) \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow \sqrt{x_1^2 + \dots + x_\nu^2} \leq |x_1| + \dots + |x_\nu| \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x_1^2 + \dots + x_\nu^2 \leq (|x_1| + \dots + |x_\nu|)^2 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \cancel{\sum_{i=1}^{\nu} x_i^2} \leq \cancel{\sum_{i=1}^{\nu} |x_i|^2} + 2 \sum_{\substack{i,j=1 \\ i \neq j}}^{\nu} |x_i| \cdot |y_j| \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \sum_{\substack{i,j=1 \\ i \neq j}}^{\nu} |x_i| \cdot |x_j| \geq 0, \text{ ισχύει.}$$

· $N_2(\vec{x}) = |x_1| + \dots + |x_\nu| \leq N_3(\vec{x}) + N_3(\vec{x}) + \dots + N_3(\vec{x}) = \nu N_3(\vec{x})$.

## Ασκ 3

Νδο οι νόρμες $N_1, N_2, N_3$, όπως ορίσαμε παραπάνω, πάνω στο χώρο $\mathbb{R}^\nu$ είναι ισοδύναμες νόρμες.

## Λύση

Ισχύει $N_3(\vec{x}) \leq N_1(\vec{x}) \leq \nu N_3(\vec{x})$

Άρα $N_1, N_3$ ισοδύναμες

και, $N_3(\vec{x}) \leq N_2(\vec{x}) \leq \nu N_3(\vec{x})$

Άρα $N_2, N_3$ ισοδύναμες

$$N_1(\vec{x}) \leq N_2(\vec{x}) \leq \nu N_3(\vec{x}) \leq \nu N_1(\vec{x})$$

## Ασκ 4

Ο D. Hilbert όρισε το χώρο : $\ell_2 = \{(x_1, x_2, \dots, x_\nu, \dots) \in \mathbb{R}^\infty \mid \sum_{i=1}^{+\infty} x_i^2 < +\infty\}$

Νδο το $\ell_2$ είναι δ.χ. πάνω στο $\mathbb{R}$.

## Λύση

$$\vec{x} = (x_1, x_2, \dots, x_\nu, \dots) \in \ell_2 \longrightarrow \sum_{i=1}^{+\infty} x_i^2$$

- $\lambda x = (\lambda x_1, \lambda x_2, \dots, \lambda x_\nu, \dots)$

$$\sum_{i=1}^{+\infty} (\lambda x_i)^2 = \sum_{i=1}^{+\infty} \lambda^2 x_i^2 = \lambda^2 \sum_{i=1}^{+\infty} x_i^2 < +\infty$$

$\lambda x \in \ell_2$

και,

- $\vec{x} = (x_1, x_2, \dots, x_\nu, \dots) \in \ell_2$
- $\vec{y} = (y_1, y_2, \dots, y_\nu, \dots) \in \ell_2$

$$x + y = (x_1 + y_1, x_2 + y_2, \dots, x_\nu + y_\nu, \dots)$$

$$(x_i + y_i)^2 = x_i^2 + y_i^2 + 2x_i y_i \leq 2x_i^2 + 2y_i^2 \quad (2\alpha\beta \leq \alpha^2 + \beta^2)$$

Άρα, από Κρ. Συγκλίσεως, η σειρά $\sum_{i=1}^{+\infty} (x_i + y_i)^2$ συγκλίνει και άρα $x + y \in \ell_2$

Άρα $\ell_2$ είναι δ.χ.