ΕΘΝΙΚΟ ΜΕΤΣΟΒΙΟ ΠΟΛΥΤΕΧΝΕΙΟ

ΣΧΟΛΗ ΗΛΕΚΤΡΟΛΟΓΩΝ ΜΗΧΑΝΙΚΩΝ ΚΑΙ ΜΗΧΑΝΙΚΩΝ ΥΠΟΛΟΓΙΣΤΩΝ

Δομή και Ηλεκτρικές Ιδιότητες των Υλικών

2η Εργαστηριακή Άσκηση

Μεταβατικά φαινόμενα – Φίλτρα

RC, RL, RLC

Ευάγγελος Χριστοφόρου

Καθηγητής Ε.Μ.Π.

Αθήνα

2018

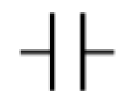
1. Εισαγωγή

Σκοπός της εργαστηριακής άσκησης είναι η εξοικείωση με τα μεταβατικά φαινόμενα σε απλά κυκλώματα RC, RL, RLC που περιλαμβάνουν τα απλά ηλεκτρικά στοιχεία R (αντίσταση), C (πυκνωτής), L (πηνίο). Στο προηγούμενο εργαστήριο εξοικειωθήκαμε με τα όργανα μέτρησης και τις αντιστάσεις, σε αυτό αφού αναλύσουμε τα άλλα 2 στοιχεία, θα εξετάσουμε τα κυκλώματα και τα χαρακτηριστικά τους.

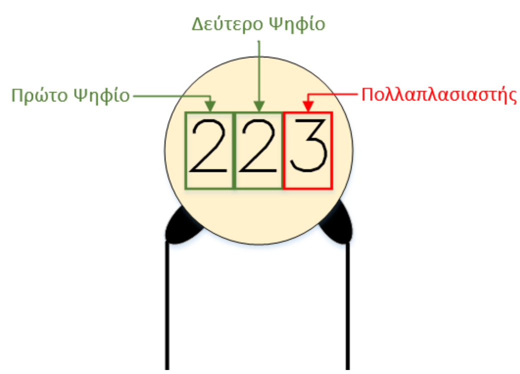
2. Πυκνωτής

Οι πυκνωτές είναι ηλεκτρικά στοιχεία που αποθηκεύουν ηλεκτρικό φορτίο, με χαρακτηριστικό μέγεθος την χωρητικότητα τους (C [F]). Χωρητικότητα 1 F έχει ο πυκνωτής που όταν φορτιστεί με 1 C ηλεκτρικό φορτίο, έχει τάση στις πλάκες του 1 V. Οι πυκνωτές χωρίζονται σε 2 βασικές κατηγορίες, τους ηλεκτρολυτικούς (polarized) και μη-ηλεκτρολυτικούς.

2.1. Μη – Ηλεκτρολυτικοί Πυκνωτές



Οι μη-ηλεκτρολυτικοί πυκνωτές, ή πυκνωτές κεραμικής πλάκας (ή τύπου «φακής»), μπορούν να τοποθετηθούν σε ένα κύκλωμα εύκολα με οποιαδήποτε φορά. Συνήθως είναι πυκνωτές μικρής χωρητικότητας, η οποία περιγράφεται στο σώμα του πυκνωτή με το σύστημα των 3 ψηφίων. Το πρώτο ψηφίο είναι ο πρώτος σημαντικός αριθμός, το δεύτερο ο δεύτερος και το τρίτο ψηφίο είναι ο πολλαπλασιαστής, δηλαδή η δύναμη του 10.

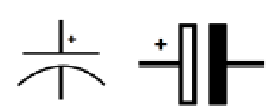


Σχήμα 1 Μη ηλεκτρολυτικός πυκνωτής 3 ψηφίων.

Στο σύστημα αυτό, μονάδα βάσης είναι τα pF, οπότε ο πυκνωτής της εικόνας 1 είναι χωρητικότητας 22×10^3 pF = 22000 pF = 22 nF. Σε μερικούς πυκνωτές αναγράφεται και η ακρίβεια με την προσθήκη λατινικού γράμματος ως εξής:

	Letter	B	C	D	F	G	J	K	M	Z
Tolerance	C <10pF ±pF	0.1	0.25	0.5	1	2				
	C >10pF ±%			0.5	1	2	5	10	20	+80-20

2.2. Ηλεκτρολυτικοί Πυκνωτές

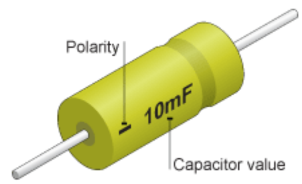


Οι ηλεκτρολυτικοί (polarized) πυκνωτές, απαιτούν συγκεκριμένη συνδεσμολογία στο κύκλωμα, γιατί είναι πολωμένοι. Τα άκρα τους είναι σημειωμένα με την ένδειξη '+' και '-', με το '+' να πρέπει να συνδεθεί στο υψηλότερο δυναμικό.

Συνήθως οι ηλεκτρολυτικοί πυκνωτές έχουν κυλινδρικό σώμα και οι ακροδέκτες βρίσκονται στην ίδια πλευρά, με τον κοντύτερο ακροδέκτη να είναι το '-'. Επιπρόσθετα, μια λωρίδα (συνήθως ασημένια) βρίσκεται στην αρνητική πλευρά, σε περίπτωση που είναι αδύνατο να εντοπιστεί το κοντύτερο άκρο.

Σχήμα 2 Ηλεκτρολυτικός πυκνωτής με κοντύτερο άκρο (-).

Υπάρχουν περιπτώσεις που οι ηλεκτρολυτικοί πυκνωτές έχουν αντιδιαμετρικά τους ακροδέκτες, οπότε η πολικότητα υποδεικνύεται με την ανάλογη σήμανση.



Σχήμα 3 Ηλεκτρολυτικός πυκνωτής με αντιδιαμετρικούς ακροδέκτες.

3. Πηνίο

Το πηνίο είναι από τα βασικότερα ηλεκτρικά στοιχεία των ηλεκτρικών κυκλωμάτων, πρόκειται για σύρμα (ιδεατά μηδενικής αντίστασης R) τυλιγμένο σε N σπείρες, επιφάνειας S, με παράλληλα επίπεδα πάνω στον ίδιο άξονα, συνολικού μήκους ℓ. Όταν το πηνίο διαρρέεται από ρεύμα I, δημιουργείται στο εσωτερικό του ομογενές μαγνητικό πεδίο B,

$$\boldsymbol{B} = \boldsymbol{\mu_0 \mu_r} \frac{\boldsymbol{N}}{\boldsymbol{\ell}} \, I \, [T],$$

(μ_0 μαγνητική διαπερατότητα του κενού, μ_r μαγνητική διαπερατότητα υλικού πυρήνα).

Χαρακτηριστικό μέγεθος του πηνίου είναι ο συντελεστής αυτεπαγωγής (L [H]). Αυτεπαγωγή ονομάζεται το φαινόμενο της δημιουργίας ηλεκτρεγερτικής δύναμης εξαιτίας της μεταβολής του ηλεκτρικού ρεύματος και είναι άμεσο επακόλουθο της ηλεκτρομαγνητικής επαγωγής και του κανόνα του Lentz.

$$\boldsymbol{V_{ind}} = -\boldsymbol{L} \frac{\boldsymbol{dI}}{\boldsymbol{dt}} \, [V]$$

Ουσιαστικά ο συντελεστής αυτεπαγωγής L, εκφράζει την «αδράνεια» του πηνίου ως προς τις μεταβολές ρεύματος και είναι συνάρτηση των φυσικών χαρακτηριστικών του πηνίου.

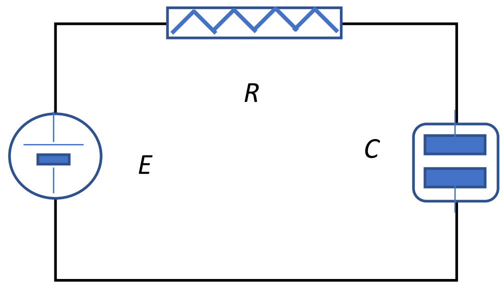
Το πηνίο εξαιτίας της ιδιότητας του να μετατρέπει την ηλεκτρική ενέργεια σε μαγνητική και αντίστροφα, χρησιμοποιείται σε πολλές εφαρμογές όπως σε ηλεκτροκινητήρες, σε ηλεκτρικές γεννήτριες, σε μετασχηματιστές, σε ρελέ, σε φίλτρα, σε ταλαντωτές κ.α.

4. Κύκλωμα RC

Στο κομμάτι αυτό θα αναλύσουμε ένα απλό κύκλωμα με μια αντίσταση και έναν πυκνωτή συνδεδεμένους σε σειρά. Αρχικά θα μελετήσουμε την συμπεριφορά του κυκλώματος σε συνεχή τάση (DC Τάση) και εν συνεχεία σε εναλλασσόμενη τάση (AC Τάση). Όπως είπαμε και στην εισαγωγή, οι πυκνωτές είναι στοιχεία που αποθηκεύουν φορτίο, οπότε έχουν ευρεία χρήση στα ηλεκτρικά κυκλώματα και στις εφαρμογές τους.

4.1. Απόκριση σε DC Τάση

Εξετάζουμε το κύκλωμα του σχήματος 4:



Σχήμα 4 Κύκλωμα DC RC

Στο κύκλωμα αυτό έχουμε μια πηγή συνεχούς τάσης, που είναι η διέγερση του κυκλώματος, εν σειρά με μια αντίσταση *R* και έναν πυκνωτή *C*.

Την χρονική στιγμή t = 0, κλείνουμε το κύκλωμα με έναν διακόπτη και διαρρέεται από ρεύμα $I(t)$, το οποίο υπολογίζεται με χρήση του 2^{ου} Νόμου του Kirchhoff, σύμφωνα με τον οποίο σε έναν κλειστό βρόχο, το άθροισμα των πηγών τάσης ισούται με το άθροισμα των πτώσεων τάσης:

$$\sum E = \sum V$$

Το ρεύμα αυτό $I(t)$ είναι η απόκριση του κυκλώματος. Από τον νόμο του Ohm είναι γνωστό ότι η πτώση τάσης στα άκρα της αντίστασης και του πυκνωτή δίνονται από τους τύπους:

$$V_R(t) = RI(t)$$

$$V_C(t) = \frac{1}{C}\int I(t)dt$$

Οπότε η εξίσωση του Kirchhoff γίνεται:

$$E = RI(t) + \frac{1}{C}\int I(t)dt$$

Για να επιλύσουμε την εξίσωση, διαφορίζουμε κατά μέλη ως προς τον χρόνο, οπότε η εξίσωση μετασχηματίζεται από ολοκληρωτική σε διαφορική:

$$\frac{dI(t)}{dt} + \frac{1}{RC}I(t) = 0$$

Αυτή η εξίσωση, ονομάζεται εξίσωση κατάστασης του κυκλώματος. Κάθε ηλεκτρικό κύκλωμα έχει την δική του εξίσωση κατάστασης. Η εξίσωση είναι ομογενής και η λύση της είναι

$$I_o(t) = ke^{-\frac{1}{RC}t}$$

Ο συντελεστής k συσχετίζεται με τις αρχικές συνθήκες της διαφορικής εξίσωσης και πρέπει να προσδιορισθεί από αυτές. Η αρχική συνθήκη στο κύκλωμα είναι η τάση στα άκρα του πυκνωτή πριν το κλείσιμο του διακόπτη, το οποίο ήταν $V_c(0_-) = V_c(0_+)$ για την αρνητική και θετική πλάκα αντίστοιχα. Την χρονική στιγμή 0, το ρεύμα ισούται με:

$$I(t) = I_o(0) = ke^{\frac{1}{RC}0} = k = \frac{E - V_c(0_-)}{R}$$

Έτσι, το ρεύμα $I(t)$ δίνεται από τον τύπο:

$$I(t) = \frac{E - V_c(0)}{R} e^{-\frac{1}{RC}t}$$

Αν $V_c(0) = 0$, τότε

$$I(t) = \frac{E}{R} e^{-\frac{1}{RC}t}$$

Η δε πτώση τάσης στα άκρα της αντίστασης:

$$V_R(t) = Ee^{-\frac{1}{RC}t}$$

Ενώ του πυκνωτή, δίνεται από τον τύπο:

$$V_C(t) = E - V_R(t) = E(1 - e^{-\frac{1}{RC}t})$$

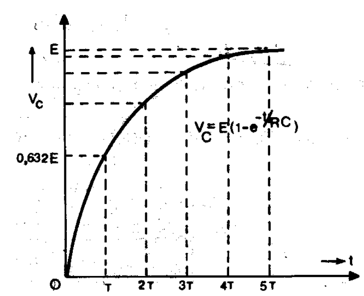
4.2. Φόρτιση πυκνωτή

Ο χρόνος για τον οποίο ο εκθέτης γίνεται -1 είναι $\tau = RC$ και λέγεται σταθερά χρόνου ή χρόνος απόκρισης.

Η τάση στα άκρα του πυκνωτή για 3 χρονικές στιγμές από την εξίσωση V_c είναι:

t	V_c
0	0
τ	0.632 E
∞	E

Και προκύπτει η αντίστοιχη γραφική παράσταση:



Οπότε η σταθερά χρόνου του κυκλώματος είναι και ο χρόνος που χρειάζεται ώστε η τάση στα άκρα του πυκνωτή να είναι στο 63,2% της μέγιστης δυνατής τάσης. Η συνεχής τάση (διέγερση) δεν μειώνεται συναρτήσει του χρόνου, οπότε

$$V_R(t) + V_C(t) = E = σταθερό$$

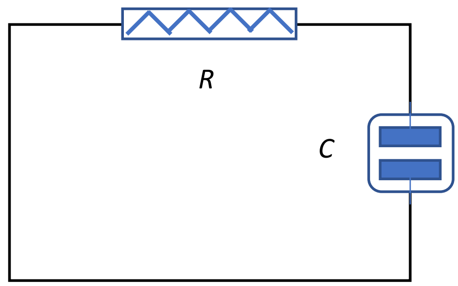
Το ρεύμα $I(t)$, που είναι η απόκριση του κυκλώματος τείνει στο 0. Αυτό το ρεύμα θεωρητικά, δεν μηδενίζεται ποτέ. Κατά συνέπεια ούτε η τάση $V_R(t)$ μηδενίζεται ποτέ, όπως επίσης ποτέ δεν γίνεται το $V_C(t) = E$. Αυτό ισχύει θεωρητικά. Πρακτικά, πειραματικά, η τάση αυτή μετράται και απεικονίζεται στον ανθρώπινο νου και στα ηλεκτρικά-ηλεκτρονικά όργανα αναπαράστασης της πραγματικότητας, με μια δοσμένη ακρίβεια η οποία δεν είναι άπειρη αλλά πεπερασμένη. Αν η ακρίβεια ανάγνωσης του οργάνου (ηλεκτρικό ή ηλεκτρονικό), που επιτηρεί την λειτουργία του κυκλώματος του σχήματος 4, είναι δV, τότε για τιμή μεγαλύτερη της ακρίβειας, το όργανο μέτρησης θα έχει ένδειξη $n\delta V$, όπου n ακέραιος φυσικός αριθμός. Για τιμή μικρότερη της δV, το όργανο μέτρησης θα έχει ένδειξη ίση με το μηδέν. Έτσι, δεδομένου ότι το πείραμα παρακολουθείται από το ηλεκτρικό ή ηλεκτρονικό όργανο μέτρησης, το ρεύμα $I(t)$ και η τάση $V_R(t)$ θα μηδενισθούν για $V_R(t) < \delta V$. Ο χρόνος που θα γίνει αυτός ο μηδενισμός τάσης, t_c, μπορεί να βρεθεί από την παρακάτω ανισότητα:

$$V_R(t_c) < \delta V => Ve^{-\frac{1}{RC}t_c} < \delta V => t_c > \left(\ln\left(\frac{V}{\delta V}\right)\right)RC$$

Έτσι, για έναν Μηχανικό, που επιτηρεί πειραματικά τα γεγονότα, ο χρόνος μηδενισμού του ρεύματος $I(t)$ και της τάσης $V_R(t)$ καθώς επίσης και η επίτευξη $V_C(t) = V$, δεν είναι άπειρος αλλά είναι μεγαλύτερος και ίσος από $\left(\ln\left(\frac{V}{\delta V}\right)\right) RC$, όπου V η τάση τροφοδοσίας και δV η ευαισθησία του ηλεκτρικού ή ηλεκτρονικού οργάνου μέτρησης.

4.3. Εκφόρτιση Πυκνωτή

Έστω ότι βρισκόμαστε σε συνθήκες ισορροπίας στο προηγούμενο κύκλωμα, με τον πυκνωτή να έχει φορτιστεί πλήρως. Αν αφαιρέσουμε την πηγή, την χρονική στιγμή t=0, τότε έχουμε τα εξής:



Σχήμα 5 Εκφόρτιση πυκνωτή

Η διέγερση είναι $\mathrm{E} = 0$ (πηγή) και $V_C(0) = -E$ (μέγεθος τάσης πυκνωτή), και η απόκριση είναι:

$$I(t) = \frac{E - V_C(0)}{R} = \frac{-E}{R} e^{-\frac{1}{RC}t}$$

Τότε η πτώση τάσης στα άκρα της αντίστασης R, θα είναι:

$$V_R(t) = -Ee^{-\frac{1}{RC}t}$$

Και η πτώση τάσης στα άκρα του πυκνωτή:

$$V_C(t) = Ee^{-\frac{1}{RC}t}$$

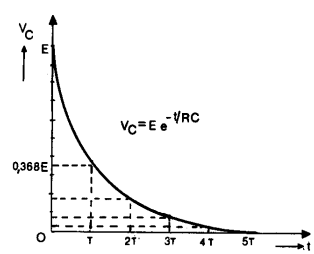
Ισχύει και πάλι ότι

$$V_R(t) + V_C(t) = E = 0 = \sigma\tau\alpha\theta\varepsilon\rho\acute{o}$$

Οπότε για 3 χρονικές στιγμές, η τάση στα άκρα του πυκνωτή έχει τις τιμές:

t	V_c
0	E
τ	0.368 E
∞	0

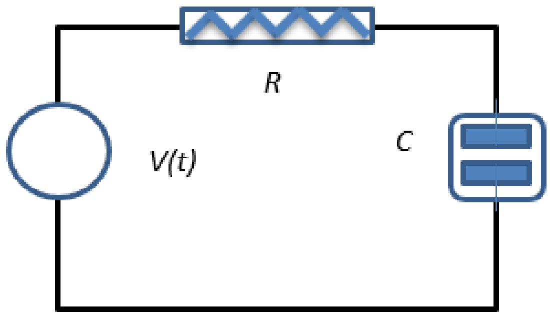
Και προκύπτει η αντίστοιχη γραφική παράσταση:



Σε αντίθεση με την φόρτιση του πυκνωτή, για την χρονική στιγμή ίση με την σταθερά χρόνου του κυκλώματος τ, η τάση στα άκρα του πυκνωτή είναι στο 36,8% της μέγιστης τάσης του πυκνωτή.

4.4. Απόκριση σε AC Τάση

Το κύκλωμα του σχήματος 6 αποτελείται από μια πηγή εναλλασσόμενης τάσης $V(t) = V_o sin\omega t$, εν σειρά με μια αντίσταση R και έναν πυκνωτή C.



Σχήμα 6 Κύκλωμα AC RC

Η συσχέτιση της πτώσης τάσης στα άκρα της αντίστασης και του πυκνωτή, για απόκριση $I(t)$ είναι:

$$V_R(t) = RI(t)$$

$$V_C(t) = \frac{1}{C}\int I(t)dt$$

Οπότε με εφαρμογή του νόμου του Kirchhoff, προκύπτει η εξίσωση:

$$V(t) = RI(t) + \frac{1}{C}\int I(t)dt$$

Η επίλυση αυτής της εξίσωσης επιτυγχάνεται με την διαφόριση του δεξιού και του αριστερού μέλους της ως προς τον χρόνο. Αν προσπαθήσουμε να λύσουμε με $V(t) = V_o sin\omega t$, τότε η μερική λύση αυτής της νέας διαφορικής εξίσωσης δεν θα είναι πια μηδέν και το ολοκλήρωμα που δίνει αυτή τη μερική λύση θα είναι γινόμενο ημιτονοειδούς συνάρτησης με εκθετικό, που σημαίνει σχετικά δύσκολη επίλυση. Για τον λόγο αυτό, κάνουμε χρήση του μαθηματικού μετασχηματισμού:

$$V_o e^{i\omega t} = V_o(cos\omega t + isin\omega t) = V_o cos\omega t + iV_o sin\omega t$$

Για να λυθεί αυτή η εξίσωση, πρέπει να διαφορίσουμε το δεξιό και το αριστερό μέλος ως προς τον χρόνο:

$$\frac{dI(t)}{dt} + \frac{1}{RC}I(t) = V_o i\omega e^{i\omega t}$$

(Θυμίζουμε ότι $\int e^{\alpha t}\,dt = \frac{e^{\alpha t}}{\alpha t}$ και $\frac{d(e^{\alpha t})}{dt} = ae^{\alpha t}$)

Η λύση αυτής της διαφορικής δίνεται από τον τύπο:

$$I(t) = I_o(t) + I_\mu(t) = ke^{-\frac{1}{RC}t} + e^{-\frac{1}{RC}t}\int e^{\frac{1}{RC}t}\,V_o i\omega e^{i\omega t}dt = ke^{-\frac{1}{RC}t} + e^{-\frac{1}{RC}t}V_o i\omega \int e^{(\frac{1}{RC}+i\omega)t}$$

$$= ke^{-\frac{1}{RC}t} + e^{-\frac{1}{RC}t}V_o i\omega\frac{e^{(\frac{1}{RC}+i\omega)t}}{\frac{1}{RC}+i\omega} = ke^{-\frac{1}{RC}t} + e^{-\frac{1}{RC}t}e^{\frac{1}{RC}t}V_o\frac{e^{i\omega t}}{\frac{\frac{1}{RC}+i\omega}{i\omega}} = ke^{-\frac{1}{RC}t} + \frac{V_o e^{i\omega t}}{R - i\frac{1}{\omega C}}$$

Όπου $I_o(t)$ η λύση της ομογενούς και $I_\mu(t)$, η λύση της μερικής.

Οπότε, ο υπολογισμός του ολοκληρώματος με την χρήση του εκθετικού ολοκληρώματος με την χρήση εκθετικού στην διέγερση. Για $t \gg RC$, το $ke^{-\frac{1}{RC}t}$ τείνει στο μηδέν και το $I(t)$ γίνεται:

$$I(t) = \frac{V_o e^{i\omega t}}{R - i\frac{1}{\omega C}} = \frac{V(t)}{R + Z_C}$$

Βλέπουμε δηλαδή, ότι στην μόνιμη ημιτονοειδή κατάσταση ο νόμος του Ohm συνεχίζει και ισχύει, δίνοντας μια τιμή αντίστασης στον πυκνωτή, ο οποίος πλέον δεν λειτουργεί σαν διακόπτης. Η αντίσταση αυτή δεν έχει πραγματική τιμή αλλά φανταστική (με αρνητική τιμή) και την ονομάζουμε εμπέδηση. Η φυσική έννοια της φανταστικής αντίστασης είναι η ικανότητά της να αποθηκεύει ενέργεια αντί να την καταναλώνει.

Η συνολική αντίσταση του κυκλώματος πλέον είναι ίση με:

$$Z = R + i(-\frac{1}{\omega C})$$

Το σήμα εξόδου V_{out} λαμβάνεται από τους ακροδέκτες του πυκνωτή. Η τάση εισόδου στο σύστημα V_{in} δίνεται από την γεννήτρια.

Η ενεργός τιμή που θα διαρρεύσει το κύκλωμα ισούται με:

$$\mathrm{I}_{\varepsilon\nu} = \frac{V_{in}}{\sqrt{R^2 + \left(\frac{1}{C\omega}\right)^2}}$$

Οπότε η διαφορά δυναμικού στα άκρα του πυκνωτή, που είναι και το σήμα εξόδου V_{out},

$$V_{out} = I_{\varepsilon\nu} X_c = V_{in} \frac{\frac{1}{C\omega}}{\sqrt{R^2 + \left(\frac{1}{C\omega}\right)^2}}$$

Επομένως, προκύπτει ο λόγος εξόδου ως προς την είσοδο και είναι ίσος με:

$$\frac{V_{out}}{V_{in}} = \frac{\frac{1}{C\omega}}{\sqrt{R^2 + \left(\frac{1}{C\omega}\right)^2}}$$

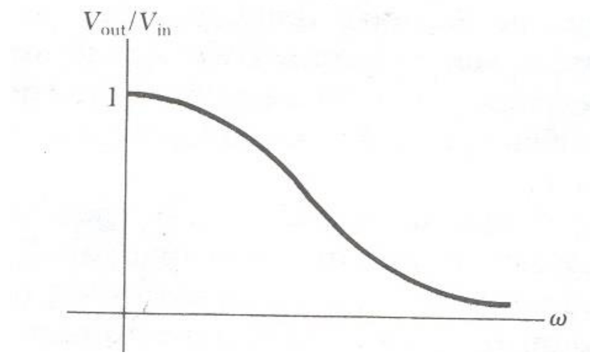
Οπότε η τιμή του λόγου και κατ’ επέκταση η συμπεριφορά του κυκλώματος εξαρτάται από την συχνότητα.

Επομένως:

Όταν $\omega \to 0$, τότε ο λόγος $\frac{V_{out}}{V_{in}} \to 1$

Ενώ για $\omega \to \infty$, ο λόγος γίνεται $\frac{V_{out}}{V_{in}} \to 0$

Το παραπάνω φίλτρο συνεπώς επιτρέπει την διέλευση σήματος χαμηλών συχνοτήτων, ενώ εμποδίζει τα σήματα υψηλών συχνοτήτων. Η συνδεσμολογία αυτή ονομάζεται γι’ αυτόν τον λόγο και **βαθυπερατό φίλτρο** ή **φίλτρο διέλευσης χαμηλών συχνοτήτων.**



Σχήμα 7 Γραφική απεικόνιση του λόγου τάσης προς την συχνότητα.

Αν **αλλάξουμε θέσεις** στα ηλεκτρικά στοιχεία, στο νέο κύκλωμα θα προηγείται ο πυκνωτής της αντίστασης και το σήμα εξόδου θα λαμβάνεται από τους ακροδέκτες της αντίστασης.

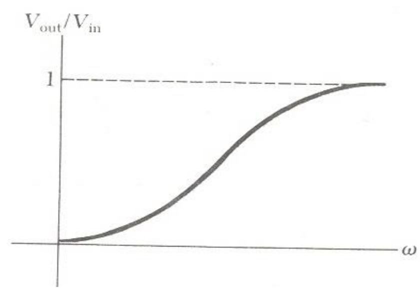
Ο λόγος τάσης εξόδου ως προς την είσοδο, σε αυτή την συνδεσμολογία είναι:

$$\frac{V_{out}}{V_{in}} = \frac{R}{\sqrt{R^2 + \left(\frac{1}{C\omega}\right)^2}}$$

Σε αυτή την περίπτωση:

Όταν $\omega \to 0$, τότε ο λόγος $\frac{V_{out}}{V_{in}} \to 0$

Ενώ για $\omega \to \infty$, ο λόγος γίνεται $\frac{V_{out}}{V_{in}} \to 1$



Σχήμα 8 Γραφική απεικόνιση του λόγου τάσης προς την συχνότητα.

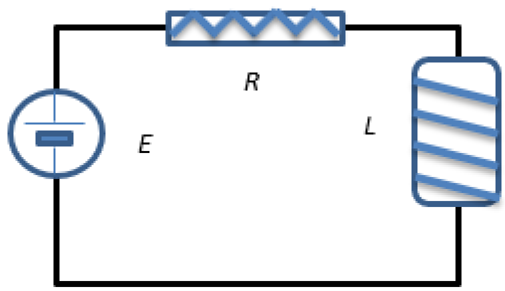
Στην περίπτωση αυτή το κύκλωμα επιτρέπει την διέλευση υψηλών συχνοτήτων και αποτρέπει την διέλευση των χαμηλών συχνοτήτων. Με αυτή την συνδεσμολογία έχουμε ένα **υψιπερατό φίλτρο** ή **φίλτρο διέλευσης υψηλών συχνοτήτων.**

5. Κύκλωμα RL

Σε αυτή την ενότητα θα εξετάσουμε την συμπεριφορά ενός κυκλώματος που περιέχει μια αντίσταση και ένα πηνίο συνδεδεμένα σε σειρά, τόσο για DC τάση, όσο και για AC.

5.1. Απόκριση σε DC Τάση

Έστω την χρονική στιγμή t=0, ο διακόπτης S κλείνει και το κύκλωμα διαρρέεται από ρεύμα I_0:



Σχήμα 9 Το κύκλωμα DC RL

Το ρεύμα αυτό $I(t)$ είναι η απόκριση του κυκλώματος. Από τον νόμο του Ohm, είναι γνωστό ότι η πτώση τάσης στα άκρα της αντίστασης και του πηνίου δίνονται από τους τύπους:

$$V_R(t) = RI(t)$$

$$V_L(t) = L\frac{I(t)}{dt}$$

Κατά συνέπεια η εξίσωση του Kirchhoff γίνεται:

$$V = RI(t) + L\frac{I(t)}{dt}$$

ή:

$$\frac{dI(t)}{dt} + \frac{R}{L}I(t) = \frac{V}{L} = F$$

Από τις διαφορικές εξισώσεις βλέπουμε ότι η εν λόγω διαφορική εξίσωση είναι μη ομογενής γραμμική διαφορική εξίσωση Α τάξης, η δε λύση της δίνεται από τον τύπο:

$$I(t) = I_o(t) + I_\mu(t)$$

Όπου $I_o(t)$ η λύση της ομογενούς:

$$I_o(t) = ke^{-\frac{R}{L}t}$$

και $I_\mu(t)$, η λύση της μερικής που με βάση τον γενικό της τύπο μας δίνει:

$$I_\mu(t) = \frac{I_o(t)}{k}\int\frac{I_o^*(t)}{k}Fdt = \frac{I_o(t)}{k}\int\frac{I_o^*(t)}{k}\frac{V}{L}dt = e^{-\frac{R}{L}t}\int e^{\frac{R}{L}t}\frac{V}{L}dt = e^{-\frac{R}{L}t}\frac{V}{L}\frac{e^{\frac{R}{L}t}}{\frac{R}{L}} = \frac{V}{R}$$

Στην περίπτωση αυτή, η μερική λύση είναι $I_\mu(t) = \frac{V}{R}$ και ο συντελεστής k συσχετίζεται με τις αρχικές συνθήκες της διαφορικής εξίσωσης και πρέπει να προσδιορισθεί από αυτές. Η μοναδική αρχική συνθήκη στο κύκλωμα του Σχήματος

9 μπορεί να είναι το ενγενές ρεύμα στο πηνίο την χρονική στιγμή 0. Έτσι, αν το ρεύμα αυτό πριν το κλείσιμο του διακόπτη είναι $I_L(0_-)$, όπου $I_L(0_-) = I_L(0_+)$, τότε το ρεύμα την χρονική στιγμή 0 είναι:

$$I(0) = ke^{-\frac{R}{L}0} + \frac{V}{R} = k + \frac{V}{R}$$

Αν $I(0) = 0$, τότε $k = -\frac{V}{R}$, και το ρεύμα $I(t)$ δίνεται από τον τύπο:

$$I(t) = \frac{V}{R}(1 - e^{-\frac{R}{L}t})$$

Τότε η πτώση τάσης στα άκρα της αντίστασης R δίνεται από τον τύπο:

$$V_R(t) = V(1 - e^{-\frac{R}{L}t})$$

Και η πτώση τάσης στα άκρα του πηνίου δίνεται από τον τύπο:

$$V_L(t) = V - V_R(t) = Ve^{-\frac{R}{L}t}$$

Και πάλι πρέπει:

$$V_R(t) + V_L(t) = V = σταθερό$$

Αντικαθιστώντας όπου $V = E$, την τιμή της πηγής τάσης, προκύπτει για την ένταση του κυκλώματος:

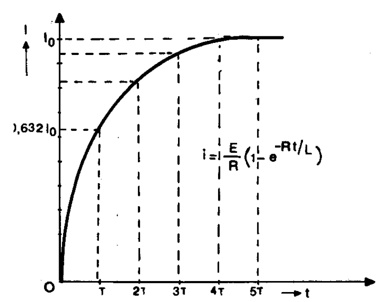
$$I = \frac{E}{R}\left(1 - e^{-\frac{R}{L}t}\right)$$

Η χρονική στιγμή όπου ο εκθέτης του e γίνεται -1 αντιστοιχεί στην τιμή $\tau = \frac{L}{R}$, ονομάζεται σταθερά χρόνου του κυκλώματος και εκφράζει την αδράνεια του κυκλώματος στην αποκατάσταση του ρεύματος.

Οπότε αντίστοιχα οι χαρακτηριστικές τιμές της έντασης, θα είναι:

t	I
0	0
τ	0.682 I_0
∞	$\frac{E}{R} = I_0$

Και η γραφική απεικόνιση της εξίσωσης:



Αν τώρα το κύκλωμα είναι σε συνθήκη ισορροπίας, δηλαδή $I = I_0$ και ανοίξουμε τον διακόπτη S, προκύπτει :

$$L\frac{\Delta I}{\Delta t} + IR = 0$$

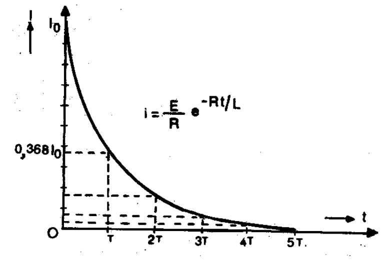
Όπου η λύση της διαφορικής δίνει:

$$I = \frac{E}{R}e^{-\frac{R}{L}t}$$

Και με τα αντίστοιχα σημεία οι τιμές της έντασης είναι:

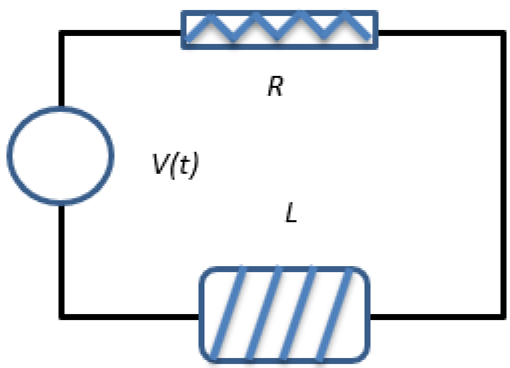
t	I
0	$\frac{E}{R} = I_0$
τ	0.368 I_0
∞	*0*

Και η γραφική απεικόνιση της εξίσωσης:



5.2. Απόκριση σε AC Τάση

Το κύκλωμα RL μπορεί να λειτουργήσει σαν υψιπερατό φίλτρο (διέλευση σημάτων υψηλών συχνοτήτων). Θεωρούμε το παρακάτω κύκλωμα:



Σχήμα 10 Υψιπερατό Φίλτρο RL

Από τα προηγούμενα, είναι γνωστό ότι η πτώση τάσης στα άκρα της αντίστασης και του πηνίου δίνονται από τους τύπους:

$$V_R(t) = RI(t)$$

$$V_L(t) = L\frac{dI(t)}{dt}$$

Κατά συνέπεια η εξίσωση του Kirchhoff γίνεται:

$$V(t) = RI(t) + L\frac{dI(t)}{dt}$$

Όπως και πριν, κάνουμε χρήση του μαθηματικού μετασχηματισμού:

$$V_o e^{i\omega t} = V_o(cos\omega t + isin\omega t) = V_o cos\omega t + iV_o sin\omega t$$

Έτσι, θεωρώντας ότι η διέγερση του κυκλώματος είναι:

$$V(t) = V_o e^{i\omega t}$$

η εξίσωση κατάστασης μετασχηματίζεται στην:

$$V(t) = V_o e^{i\omega t} = RI(t) + L\frac{dI(t)}{dt}$$

Το Το ρεύμα $I(t)$ θα είναι η λύση της γραμμικής μη ομογενούς διαφορικής εξίσωσης:

$$\frac{dI(t)}{dt} + \frac{R}{L} I(t) = \frac{V_o}{L} e^{i\omega t}$$

Η λύση αυτής της διαφορικής δίνεται από τον τύπο:

$$I(t) = I_o(t) + I_\mu(t) = ke^{-\frac{R}{L}t} + e^{-\frac{R}{L}t} \int e^{\frac{R}{L}t} \frac{V_o}{L} e^{i\omega t} dt = ke^{-\frac{R}{L}t} + e^{-\frac{R}{L}t} \frac{V_o}{L} \int e^{(\frac{R}{L}+i\omega)t}\, dt = ke^{-\frac{R}{L}t} + e^{-\frac{R}{L}t} \frac{V_o}{L} \frac{e^{(\frac{R}{L}+i\omega)t}}{\frac{R}{L}+i\omega}$$
$$= ke^{-\frac{R}{L}t} + \frac{V_o e^{i\omega t}}{R + i\omega L}$$

Όπου $I_o(t)$ η λύση της ομογενούς και $I_\mu(t)$, η λύση της μερικής. Για $t \gg \frac{L}{R}$, το $ke^{-\frac{R}{L}t}$ τείνει στο μηδέν και το $I(t)$ αποκτά την τιμή της μερικής λύσης:

$$I(t) = \frac{V_o e^{i\omega t}}{R + i\omega L} = \frac{V(t)}{R + Z_L}$$

Το σήμα εξόδου λαμβάνεται στους ακροδέκτες του πηνίου, οπότε αντίστοιχα με το κύκλωμα RC, η ενεργός τιμή του ρεύματος που διαρρέει το κύκλωμα θα είναι:

$$\mathrm{I}_{\varepsilon\nu} = \frac{V_{in}}{\sqrt{R^2 + (L\omega)^2}}$$

Με δεδομένο ότι η σύνθετη αντίσταση του πηνίου είναι $X_L = \omega L$, οπότε και το σήμα στην έξοδο θα είναι:

$$V_{out} = I_{\varepsilon\nu} X_L = V_{in} \frac{L\omega}{\sqrt{R^2 + (L\omega)^2}}$$

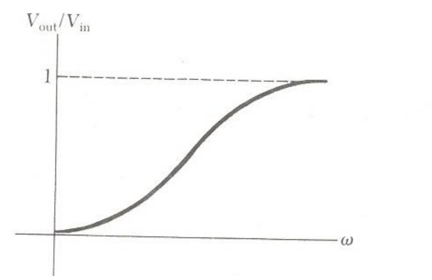
Επομένως ο λόγος της τάσης εξόδου προς την τάση εισόδου θα είναι:

$$\frac{V_{out}}{V_{in}} = \frac{L\omega}{\sqrt{R^2 + (L\omega)^2}}$$

Με αποτέλεσμα:

Όταν $\omega \to 0$, τότε ο λόγος $\frac{V_{out}}{V_{in}} \to 0$

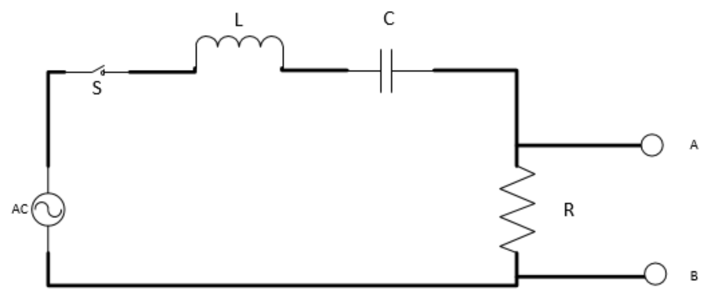
Ενώ για $\omega \to \infty$, ο λόγος γίνεται $\frac{V_{out}}{V_{in}} \to 1$



Σχήμα 11 Ο λόγος τάσεων εξόδου/εισόδου ως προς την συχνότητα

6. Κύκλωμα RLC

Στην συνδεσμολογία εν σειρά ενός πηνίου, ενός πυκνωτή και μιας αντίστασης, έχουμε πλέον δυο στοιχεία αποθήκευσης ενέργειας.



Σχήμα 12 Το κύκλωμα LCR

Η σύνθετη αντίσταση του κυκλώματος ισούται με:

$$Z_{in}(\omega) = R + X_C + X_L = R + i\left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)$$

Είναι εύκολα αντιληπτό ότι η σύνθετη συνάρτηση του κυκλώματος είναι συνάρτηση της συχνότητας, δηλαδή $\omega = 2\pi f$, όπου f η συχνότητα διέγερσης. Το δε μέτρο της σύνθετης αντίστασης, όπως και όλων των μιγαδικών αριθμών είναι η ρίζα του αθροίσματος του τετραγώνου του πραγματικού και του φανταστικού μέρους:

$$|Z_{in}(\omega)| = \sqrt{R^2 + \left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)^2}$$

Η συχνότητα για την οποία το φανταστικό μέρος μηδενίζεται και η σύνθετη αντίσταση $Z_{in}(\omega)$ είναι πραγματικός αριθμός, δηλαδή το μέτρο της σύνθετης αντίστασης είναι ελάχιστο και ίσο με την τιμή της αντίστασης R:

$$\omega L - \frac{1}{\omega C} = 0 \Leftrightarrow \omega = \omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}$$

Η συχνότητα ω_0 λέγεται συχνότητα συντονισμού.

Για συχνότητες χαμηλότερες της συχνότητας συντονισμού, ισχύει:

$$\omega L < \frac{1}{\omega C}$$

Οπότε, υπερισχύει η χωρητική αντίσταση X_C, ενώ αντίθετα για συχνότητες υψηλότερες της συχνότητας συντονισμού, υπερισχύει η επαγωγική αντίσταση X_L:

$$\omega L > \frac{1}{\omega C}$$

Το ρεύμα I που διαρρέει το κύκλωμα, είναι επίσης συνάρτηση της συχνότητας και ίσο με:

$$I(\omega) = \frac{V_s(\omega)}{Z_{in}(\omega)}$$

Κατά τον συντονισμό το ρεύμα I μεγιστοποιείται, καθότι η Z_{in} ελαχιστοποιείται, δηλαδή:

$$I(\omega_0) = I_0 = \frac{V_s}{R}$$

Ο λόγος του ρεύματος $I(\omega)$ ως προς το ρεύμα I_0 δίνεται από την ακόλουθη σχέση :

$$\frac{I(\omega)}{I_0} = \frac{R}{Z_{in}(\omega)} = \frac{1}{\sqrt{1+\left(\frac{X_0}{R}\right)^2+\left(\frac{\omega}{\omega_0}-\frac{\omega_0}{\omega}\right)^2}},$$

$$X_0 = \omega L = -\frac{1}{\omega C}$$

Ένα σημαντικό μέγεθος των κυκλωμάτων συντονισμού, είναι ο συντελεστής ποιότητας Q_0, ο οποίος δίνεται από την σχέση:

$$Q_0 = \frac{X_0}{R} = \frac{\omega_0 L}{R} = \frac{1}{\omega_0 RC},$$

Επίσης οι τιμές ω_1 και ω_2 για τις οποίες ισχύει $\frac{I}{I_0} = \frac{\sqrt{2}}{2} = 0{,}707$, δίνονται από την σχέση:

$$\omega_1 = -\frac{R}{2L} + \sqrt{\left(\frac{R}{2L}\right)^2 + \frac{1}{LC}} = \omega_0\left(\sqrt{1+\frac{1}{4Q_0^2}} - \frac{1}{2Q_0}\right)$$

$$\omega_2 = \frac{R}{2L} + \sqrt{\left(\frac{R}{2L}\right)^2 + \frac{1}{LC}} = \omega_0\left(\sqrt{1+\frac{1}{4Q_0^2}} + \frac{1}{2Q_0}\right)$$

Η δε διαφορά φάσης $\beta = \omega_1 - \omega_2$, ονομάζεται **εύρος συντονισμού** (bandwidth)**:**

$$\beta = \omega_2 - \omega_1 = \frac{R}{L} = \frac{\omega_0}{Q_0}$$

Ο συντελεστής ποιότητας Q_0 είναι αντιστρόφως ανάλογος ως προς το εύρος συντονισμού, επομένως όσο μεγαλύτερος είναι, τόσο μικρότερο εύρος συντονισμού έχουμε.