ΦΥΛΛΟ ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΩΝ 3

ΔΙΑΦΟΡΙΚΕΣ ΕΞΙΣΩΣΕΙΣ

ΧΡΗΣΤΟΣ ΤΣΟΥΦΗΣ
ΣΗΜΜΥ
2ο Εξάμηνο

Κεφ 10

10.4

σελ 26/590

$x^2y'' + 3xy' + \lambda y = 0 \quad , \quad 1 < x < e, \quad y(1) = 0, \; y(e) = 0$

↳ μορφή Euler

Αναζητούμε λύσεις της μορφής $y(x) = x^\rho$

$y'(x) = \rho x^{\rho-1}$

$y''(x) = \rho(\rho-1)x^{\rho-2}$

$\rho(\rho-1)x^{\rho-2}x^2 + 3x\rho x^{\rho-1} + \lambda x^\rho = 0$

$\rho(\rho-1)x^\rho + 3x^\rho\rho + \lambda x^\rho = 0$

$[\rho(\rho-1) + 3\rho + \lambda]x^\rho = 0$

$(\rho^2 - \rho + 3\rho + \lambda)x^\rho = 0$

$(\rho^2 + 2\rho + \lambda)x^\rho = 0$

$\rho^2 + 2\rho + \lambda = 0$

$\Delta = 2^2 - 4\lambda = 4(1-\lambda)$

• $\Delta > 0 \Rightarrow \rho = \dfrac{-2 \pm 2\sqrt{1-\lambda}}{2} = -1 \pm \sqrt{1-\lambda}, \quad \lambda < 1$

παίρνουμε έτσι, τις γραμμ. ανεξ. λύσεις

$y_1(x) = x^{-1+\sqrt{1-\lambda}} \quad , \quad y_2(x) = x^{-1-\sqrt{1-\lambda}}$

Άρα, η γεν. λύση της ΔΕ είναι $y(x) = c_1 y_1(x) + c_2 y_2(x)$

και με εφαρμογή Σ.Σ. έχουμε

$y(1) = 0 \Rightarrow c_1 + c_2 = 0$

$y(e) = 0 \Rightarrow c_1 e^{-1+\sqrt{1-\lambda}} + c_2 e^{-1-\sqrt{1-\lambda}} = 0$

Προκύπτει ένα ομογενές 2x2 γραμμ. συστ. ως προς c_1, c_2.

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ e^{-1+\sqrt{1-\lambda}} & e^{-1-\sqrt{1-\lambda}} \end{vmatrix} = e^{-1-\sqrt{1-\lambda}} - e^{-1+\sqrt{1-\lambda}} \neq 0$$

Άρα $c_1 = c_2 = 0$ και προκύπτει μόνο η τετριμμένη λύση.

- $\Delta = 0 \Rightarrow 4(1-\lambda) = 0 \Leftrightarrow \lambda = 1$

$$\rho = -\frac{2}{2} = -1$$

$$y_1(x) = x^{-1} = \frac{1}{x}$$

Η 2η γρ. ανεξ. λύση καθίσταται η $\ln x$

$$y(x) = c_1 \cdot \frac{1}{x} \ln x + c_2 \frac{1}{x}$$

ΣΣ: $y(1) = 0 \Rightarrow c_2 = 0$

$y(e) = 0 \Rightarrow c_1 \cdot \frac{1}{e} + c_2 \cdot \frac{1}{e} = 0 \Rightarrow c_1 = 0$

- $\Delta < 0 \Rightarrow \rho = \dfrac{-2 \pm 2i\sqrt{\lambda-1}}{2} = -1 \pm i\sqrt{\lambda-1}$

Γεν. λύση: $y(x) = c_1 x^{-1} \cos(\sqrt{\lambda-1}\ln x) + c_2 x^{-1} \sin(\sqrt{\lambda-1}\ln x)$

ΣΣ: $y(1) = e \Rightarrow c_1 = 0$

$y(e) = 0 \Rightarrow c_1 e^{-1} \cancel{\cos(\sqrt{\lambda-1})}^{\,0} + c_2 e^{-1} \sin(\sqrt{\lambda-1}) = 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow c_2 \sin(\sqrt{\lambda-1}) = 0$

Για να προκύψει μη τετριμμένη λύση (δηλ. να μπορούμε να πάρουμε $c_2 \neq 0$) θα πρέπει να πάρουμε $\sin(\sqrt{\lambda-1}) = 0$ δηλ. $\sqrt{\lambda-1} = k\pi$, $k \in \mathbb{N}^*$.

Προκύπτουν έτσι οι ιδιοτιμές $\lambda_k = k^2\pi^2 + 1$, $k = 1, 2, \ldots$

Οι αντίστοιχες ιδιοσυναρτήσεις είναι: $y_k(x) = \frac{1}{x} \sin(k\pi \ln x)$

<u>ασκ 28/590</u>

δίσκα

ασκ 33/590

$y'' + \lambda y = 0, \quad 0 < x < 2\pi \quad , \quad y(0) = y(2\pi), \quad y'(0) = y'(2\pi)$

i) $\lambda_0 = 0, \quad y'' = 0 \Rightarrow$ γεν. λύση $y(x) = c_1 x + c_2 \quad , \quad y'(x) = c_1$

$y(0) = y(2\pi) \qquad\qquad c_1 = c_2 = 0$

$\cancel{c_2} = c_1 \cdot 2\pi + \cancel{c_2}$

$c_1 = 0$

Άρα $\lambda_0 = 0$ όχι ιδιοτιμή

ii) $\lambda = -\mu^2 < 0 \quad , \mu > 0$

$m^2 - \mu^2 = 0 \Rightarrow m^2 = \mu^2 \Rightarrow \quad m_{1,2} = \pm \mu$

$y(x) = c_1 e^{\mu x} + c_2 e^{-\mu x}$

$y'(x) = c_1 \mu e^{\mu x} - c_2 \mu e^{-\mu x}$

$y(0) = y(2\pi) \Rightarrow \quad c_1 e^0 + c_2 e^0 = c_1 e^{\mu 2\pi} + c_2 e^{-\mu 2\pi}$

$\Rightarrow \quad c_1 + c_2 = c_1 e^{2\mu\pi} + c_2 e^{-2\mu\pi}$

$y'(0) = y'(2\pi) \Rightarrow \quad c_1 \mu - c_2 \mu = c_1 \mu e^{\mu 2\pi} - c_2 \mu e^{-\mu 2\pi}$

$$\begin{cases} c_1(1 - e^{2\mu\pi}) + c_2(1 - e^{-2\mu\pi}) = 0 \\ c_1(\cancel{\mu} - \cancel{\mu} e^{2\mu\pi}) - c_2(\cancel{\mu} - \cancel{\mu} e^{-2\mu\pi}) = 0 \end{cases}$$

$$\begin{vmatrix} 1 - e^{2\mu\pi} & 1 - e^{-2\mu\pi} \\ 1 - e^{2\mu\pi} & -1 + e^{-2\mu\pi} \end{vmatrix} = (1 - e^{2\mu\pi})(-1 + e^{-2\mu\pi}) - (1 - e^{-2\mu\pi}) \cdot (1 - e^{2\mu\pi}) =$$

$= -1 + e^{-2\mu\pi} + e^{2\mu\pi} - e^0 - [1 - e^{2\mu\pi} - e^{-2\mu\pi} + e^0] =$

$= -1 + e^{-2\mu\pi} + e^{2\mu\pi} - 1 - 1 + e^{2\mu\pi} + e^{-2\mu\pi} + 1 =$

$= 2(e^{2\mu\pi} + e^{-2\mu\pi} - 2) > 0$

iii) $\lambda = +\mu^2 > 0$

$$m^2 + \mu^2 = 0 \Rightarrow m^2 = -\mu^2 \Rightarrow m_{1,2} = \pm i\mu$$

$$y(x) = c_1 \cos(\mu x) + c_2 \sin(\mu x)$$
$$y'(x) = -c_1 \mu \sin(\mu x) + c_2 \mu \cos(\mu x)$$

$$y(0) = y(2\pi) \Rightarrow c_1 \cos 0 + \cancel{c_2 \sin 0}^{\,0} = c_1 \cos(2\pi\mu) + c_2 \cancel{\sin(2\pi\mu)}^{\,0}$$

$$\Rightarrow c_1 = c_1 \cos\mu \Rightarrow c_1(1 - \cos\mu) = 0$$

$$y'(0) = y'(2\pi) \Rightarrow -c_1 \mu \cancel{\sin 0}^{\,0} + c_2 \mu \cos 0 = -c_1 \mu \cancel{\sin(2\pi\mu)}^{\,0} + c_2 \mu \cos(2\pi\mu)$$

$$\Rightarrow c_2 \mu = c_2 \mu \cos\mu \Rightarrow c_2(1 - \cos\mu) = 0$$

δηλ. $1 - \cos\mu = 0 \Rightarrow \cos\mu = 1 \Rightarrow \mu = 2n\pi$

οπότε $\lambda_n = 4n^2\pi^2$ ιδιοτιμές $\leftrightarrow$ $\varphi_n(x) = c_1 \sin(2n\pi x)$

κι $\psi_n(x) = c_2 \cos(2n\pi x)$ $\quad n = 0, 1, 2, \ldots$

$$((1-x^2)y')' + \lambda y = 0, \qquad 0<x<1, \quad y(0)=0$$

y, y' φραγμ. $x \to 1^-$

$$-2xy' + (1-x^2)y'' + \lambda y = 0$$

$$(1-x^2)y'' - 2xy' + \lambda y = 0$$

$$(1-x^2)\frac{d^2y}{dx^2} - 2x\frac{dy}{dx} + \lambda y = 0$$

$$x = \cos\theta \overset{\theta\in(0,\frac{\pi}{2})}{\Longleftrightarrow} \theta = \arccos x \to \frac{d\theta}{dx} = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} = -\frac{1}{|\sin\theta|} = -\frac{1}{\sin\theta}$$

$$1-x^2 = \sin^2\theta$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{d\theta}\cdot\frac{d\theta}{dx} = -\frac{1}{\sin\theta}\cdot\frac{dy}{d\theta}$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{d}{dx}\left(-\frac{1}{\sin\theta}\cdot\frac{dy}{d\theta}\right) = -\frac{d}{dx}\left(\frac{1}{\sin\theta}\right)\frac{dy}{d\theta} - \frac{1}{\sin\theta}\cdot\frac{d}{dx}\left(\frac{dy}{d\theta}\right) =$$

$$= \frac{\cos\theta}{\sin^2\theta}\frac{d\theta}{dx}\frac{dy}{d\theta} - \frac{1}{\sin\theta}\cdot\frac{d^2y}{d\theta^2}\cdot\frac{d\theta}{dx} =$$

$$= -\frac{\cos\theta}{\sin^3\theta}\frac{dy}{d\theta} + \frac{1}{\sin^2\theta}\cdot\frac{d^2y}{d\theta^2}$$

Αντικαθιστώντας βρίσκω

$$\cancel{\sin^2\theta}\left(-\frac{\cos\theta}{\sin^{\cancel{3}}\theta}\frac{dy}{d\theta} + \frac{1}{\cancel{\sin^2\theta}}\frac{d^2y}{d\theta^2}\right) + 2\frac{\cos\theta}{\sin\theta}\frac{dy}{d\theta} + \lambda y = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{d^2y}{d\theta^2} + \tan\theta\frac{dy}{d\theta} + \lambda y = 0 \qquad \text{Legendre}$$

Λύνεται με Δυναμοσειρές

10.6

ασκ 11/602

$x^2y'' - 3xy' + 3y = 2x^2, \quad 1<x<2, \quad y(1)=1, \quad y(2)=-1$

Θεωρώ τον διαφ. τελεστή $L[y] = 2x^2$ όπου

$L[y] = x^2y'' - 3xy' + 3y$

και $y(x) = W(x) + u(x)$

W πολυωνυμική $W(1)=1, W(2)=-1$. Επιλέγω

$W(x) = cx + d$

$$\begin{cases} W(1)=1 \\ W(2)=-1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} c+d=1 \\ 2c+d=-1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} c=-2 \\ d=3 \end{cases}$$

Οπότε $W(x) = -2x+3$

Η u πολυωνυμική

$L[u] = 2x^2 - L[W], \quad u(1)=u(2)=0 \quad (*)$

Βρίσκω ιδιοτιμές - ιδιοσυναρτήσεις του

$$\begin{cases} L[u] = \lambda u \\ u(1) = u(2) = 0 \end{cases}$$

δηλ. $\begin{cases} x^2u'' - 3xu' + 3u = \lambda u \\ u(1)=u(2)=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x^2u'' - 3xu' + (3-\lambda)u = 0 \\ u(1)=u(2)=0 \end{cases}$

Θεωρώ $u(x) = x^\rho$

$u'(x) = \rho x^{\rho-1}$

$u''(x) = \rho(\rho-1)x^{\rho-2}$

και $\rho(\rho-1)x^\rho - 3\rho x^\rho + (3-\lambda)x^\rho = 0$

$(\rho^2 - \rho - 3\rho + 3 - \lambda)x^\rho = 0$

$(\rho^2 - 4\rho + 3 - \lambda)x^\rho = 0$

$\Delta = 16 - 4(3-\lambda) = 16 - 12 + 4\lambda = 4(1+\lambda)$

· $\Delta > 0$: $p = \dfrac{4 \pm 2\sqrt{1+\lambda}}{2} = 2 \pm \sqrt{1+\lambda}$, $\lambda > -1$

Παίρνουμε τις αριθμ. συντελεστές

$u_1(x) = x^{2+\sqrt{1+\lambda}}$, $u_2(x) = x^{2-\sqrt{1+\lambda}}$

Άρα η γεν. λύση της ΔΕ είναι $u(x) = c_1 u_1(x) + c_2 u_2(x)$

και με τις συνθήκες Σ.Δ. έχουμε:

$u(1) = 0 \Rightarrow c_1 u_1(\ ) + c_2 u_2(\ ) = 0 \Rightarrow c_1 + c_2 = 0$

$u(2) = 0 \Rightarrow c_1 u_1(2) + c_2 u_2(2) = 0 \Rightarrow c_1 \cdot 2^{2+\sqrt{1+\lambda}} + c_2 \cdot 2^{2-\sqrt{1+\lambda}} = 0$

[...] πρακτικάρω η πτώχεια.

· $\Delta = 0$: ομοίως

· $\Delta < 0$: $p = \dfrac{4 \pm 2i\sqrt{1-\lambda}}{2} = 2 \pm i\sqrt{-\lambda-1}$, $\lambda < -1$

Γεν. λύση $(x) = c_1 x^2 \cos(\sqrt{-\lambda-1}\ln x) + c_2 x^2 \sin(\sqrt{-\lambda-1}\ln x)$

Σ.Σ.: $u(1) = 0 \Rightarrow c_1 \cos 0 + c_2 \sin 0 = 0 \Rightarrow c_1 = 0$

$u(2) = 0 \Rightarrow c_2 \cdot 4 \cdot \sin(\sqrt{-\lambda-1}\ln 2) = 0$

οπότε $\sin(\sqrt{-\lambda-1}\ln 2) = 0$

$\sqrt{-\lambda-1}\ln 2 = k\pi$

$1-\lambda = \left(\dfrac{k\pi}{\ln 2}\right)^2$

$\lambda = 1 - \left(\dfrac{k\pi}{\ln 2}\right)^2$

οπότε $\psi_k(x) = x^2 \sin\left(\dfrac{k\pi}{\ln 2} \cdot \ln x\right)$

Και αναζητούμε λύση του προβλήματος (*) με τη μορφή

$u(x) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \psi_n(x)$

όπου a_n προσδιοριστέοι σταθερές.

Βλ. 3,16 (σελ. 602-603)

Κεφ 11

11.1

ασκ 1/636

c) πλήρως για γραμμ. 1ης τάξης

d) γραμμική ομογενής 4ης τάξης

ασκ 2/636

b) $u(x,t) = \sin(kx) \cdot e^{-k^2 t}$

$u_{xx}(x,t) - u_t(x,t) = 0$

$u_t = \sin(kx) \cdot e^{-k^2 t} \cdot (-k^2)$

$u_x = \cos(kx) \cdot k \cdot e^{-k^2 t}$

$u_{xx} = -\sin(kx) \cdot k^2 e^{-k^2 t}$

οπότε, $-\sin(kx) \cdot k^2 e^{-k^2 t} + \sin(kx)\, e^{-k^2 t} (-k^2) = 0$

11.3

ασκ 1/642

b) $u_{xx}(x,y) + x u_{yy}(x,y) = 0 \qquad (x,y) \in \mathbb{R}^2$

$b^2(x,y) - 4a(x,y) \cdot c(x,y) = 0 - 4 \cdot 1 \cdot x = -4x$

i) αν $-4x < 0 \Rightarrow x > 0$ είναι ελλειπτικού τύπου

ii) αν $-4x = 0 \Rightarrow x = 0$ είναι παραβολικού τύπου

iii) αν $-4x > 0 \Rightarrow x < 0$ είναι υπερβολικού τύπου

ασκ 2/642

α) $u_{xx} + 2u_{yz} + (\cos x)\cdot u_z - e^{y^2}u = \cosh z \qquad (x,y,z)\in\mathbb{R}^3$

$$A(x) = \begin{bmatrix} u_{xx} & u_{xy} & u_{xz} \\ u_{yx} & u_{yy} & u_{yz} \\ u_{zx} & u_{zy} & u_{zz} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 0 \end{bmatrix}$$

$$|A-\lambda I| = 0 \Rightarrow \begin{vmatrix} 1-\lambda & 0 & 0 \\ 0 & -\lambda & 2 \\ 0 & 2 & -\lambda \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow (1-\lambda)\begin{vmatrix} -\lambda & 2 \\ 2 & -\lambda \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow (1-\lambda)(\lambda^2-4) = 0 \rightarrow \lambda = 1 \text{ ή } \lambda = 2 \text{ ή } \lambda = -2$$

Άρα υπερβολικού τύπου

β) $u_{xx} + 2u_{xy} + u_{yy} + 2u_{zz} - (1+xy)u = 0, \quad (x,y,z)\in\mathbb{R}^3$

$$A(x) = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

$$|A-\lambda I| = 0 \rightarrow \begin{vmatrix} 1-\lambda^{+} & 2^{-} & 0^{+} \\ 2^{-} & 1-\lambda^{+} & 0^{-} \\ 0^{+} & 0^{-} & 2-\lambda^{+} \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow (2-\lambda)\begin{vmatrix} 1-\lambda & 2 \\ 2 & 1-\lambda \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow (2-\lambda)\left((1-\lambda)^2-4\right) = 0 \Rightarrow (2-\lambda)(1-\lambda-2)(1-\lambda+2) = 0$$

$$\Rightarrow (2-\lambda)(-\lambda-1)(-\lambda+3) = 0 \rightarrow \lambda = 2 \text{ ή } \lambda = -1 \text{ ή } \lambda = 3$$

Άρα υπερβολικού τύπου

11.4.3

σελ 1/646

b) $4u_{xx}(x,y) + 5u_{xy}(x,y) + u_{yy}(x,y) + u_x(x,y) + u_y(x,y) = 2 \quad , (x,y) \in \mathbb{R}^2$

- $b^2(x,y) - 4a(x,y) \cdot c(x,y) = 5^2 - 4 \cdot 4 \cdot 1 = 25 - 16 = 9 > 0$

Άρα υπερβολικό τύπου στο $\mathbb{R}^2$.

- $B^2 - 4AC = 5^2 - 4 \cdot 4 \cdot 1 = 9 > 0$

δηλ. $4m^2 + 5m + 1 = 0$ με ρίζες $m_{1,2} = \frac{-5 \pm 3}{8} \begin{cases} -1 = c \\ -\frac{1}{4} = a \end{cases}$

και η γενικά λύση είναι

$$u(x,y) = F(ax+y) + G(cx+y)$$
$$= F\left(-\tfrac{1}{4}x + y\right) + G(-x+y)$$

d) $u_{xx}(x,y) - 4u_{xy}(x,y) + 4u_{yy}(x,y) = e^y \quad , (x,y) \in \mathbb{R}^2$

- $b^2(x,y) - 4a(x,y) \cdot c(x,y) = (-4)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 4 = 0$

Άρα παραβολικό τύπου στο $\mathbb{R}^2$

- $B^2 - 4AC = 0$

δηλ. $m^2 - 4m + 4 = 0$ με ρίζα (διπλή) $m = 2$

και η γενικά λύση είναι

$$u(x,y) = F(mx+y) + x\,G(mx+y)$$
$$= F(2x+y) + x\,G(2x+y)$$

Nr 2/6+B

b) $4u_{xx}(x,y) + 5u_{xy}(x,y) + u_{yy}(x,y) + u_x(x,y) + u_y(x,y) = 2 \qquad (x,y) \in \mathbb{R}^2 \quad (1)$

hint: $\xi = y - x \quad , \quad \eta = y - \frac{x}{4}$

- $\xi = y - x \quad \rightarrow \quad \xi_x = -1 \quad , \quad \xi_y = 1$

  $\eta = y - \frac{x}{4} \quad \rightarrow \quad \eta_x = -\frac{1}{4} \quad , \quad \eta_y = 1$

$u_x = u_\xi \cdot \xi_x + u_\eta \cdot \eta_x = u_\xi \cdot (-1) + u_\eta \cdot \left(-\frac{1}{4}\right) = -u_\xi - \frac{1}{4} u_\eta$

$u_y = u_\xi \cdot \xi_y + u_\eta \cdot \eta_y = u_\xi \cdot 1 + u_\eta \cdot 1 = u_\xi + u_\eta$

$u_{xx} = \xi_x^2 \cdot u_{\xi\xi} + 2\xi_x \cdot \eta_x \cdot u_{\xi\eta} + \eta_x^2 u_{\eta\eta} + \xi_{xx} \cdot u_\xi + \eta_{xx} \cdot u_\eta =$

$= u_{\xi\xi} + 2(-1) \cdot \left(-\frac{1}{4}\right) u_{\xi\eta} + \frac{1}{16} \cdot u_{\eta\eta} + 0 + 0 =$

$= u_{\xi\xi} + \frac{1}{2} u_{\xi\eta} + \frac{1}{16} u_{\eta\eta}$

$u_{xy} = \ldots = \left(-u_{\xi\xi} - \frac{1}{4} u_{\xi\eta}\right) \cdot 1 + \left(-u_{\eta\xi} - \frac{1}{4} u_{\eta\eta}\right) \cdot 1 =$

$= -u_{\xi\xi} - \frac{1}{4} u_{\xi\eta} - u_{\eta\xi} - \frac{1}{4} u_{\eta\eta} =$

$= -u_{\xi\xi} - \frac{5}{4} u_{\xi\eta} - \frac{1}{4} u_{\eta\eta}$

$u_{yy} = \xi_y^2 u_{\xi\xi} + 2\xi_y \eta_y u_{\xi\eta} + \eta_y^2 u_{\eta\eta} + \xi_{yy} u_\xi + \eta_{yy} u_\eta =$

$= u_{\xi\xi} + 2 \cdot 1 \cdot 1 \cdot u_{\xi\eta} + u_{\eta\eta} + 0 + 0 =$

$= u_{\xi\xi} + 2u_{\xi\eta} + u_{\eta\eta}$

Aproximarea pvv (1) este:

$4\left[u_{\xi\xi} + \frac{1}{2} u_{\xi\eta} + \frac{1}{16} u_{\eta\eta}\right] + 5\left[-u_{\xi\xi} - \frac{5}{4} u_{\xi\eta} - \frac{1}{4} u_{\eta\eta}\right] + \left[u_{\xi\xi} + 2u_{\xi\eta} + u_{\eta\eta}\right] +$

$+ \left[-u_\xi - \frac{1}{4} u_\eta\right] + \left[u_\xi + u_\eta\right] = 2 \Rightarrow$

$\Rightarrow \left[4 \cancel{-5} + 1\right] u_{\xi\xi} + \left[\cancel{\frac{4}{16} - \frac{5}{4} + 1}\right] u_{\eta\eta} + \left[\frac{4}{2} - \frac{25}{4} + 2\right] u_{\xi\eta} +$

$+ \left[\cancel{-1+1}\right] u_\xi + \left[-\frac{1}{4} + 1\right] u_\eta - 2 = 0$

$\Rightarrow 0 u_{\xi\xi} + 0 u_{\eta\eta} - \frac{9}{4} u_{\xi\eta} + 0 u_\xi + \frac{3}{4} u_\eta - 2 = 0$

$\Rightarrow -\frac{9}{4} u_{\xi\eta} + \frac{3}{4} u_\eta - 2 = 0$

Θέτω $\varphi(z) = u_n(z, n)$ (θεωρώντας το n ως παράμετρο)

Τότε

$$-\frac{9}{4}\varphi'(z) + \frac{3}{4}\varphi(z) - 2 = 0$$

$$-9\varphi'(z) + 3\varphi(z) - 8 = 0$$

$$\varphi'(z) - \frac{1}{3}\varphi(z) = -\frac{8}{9}$$

$$e^{-\frac{z}{3}}\varphi'(z) - \frac{1}{3}e^{-\frac{z}{3}}\varphi(z) = -\frac{8}{9}e^{-\frac{z}{3}}$$

$$\left(\varphi(z)e^{-\frac{z}{3}}\right)' = \frac{8}{3}\left(e^{-\frac{z}{3}}\right)'$$

$$\varphi(z)e^{-\frac{z}{3}} = \frac{8}{3}e^{-\frac{z}{3}} + c(n)$$

[...]

Κεφ 12

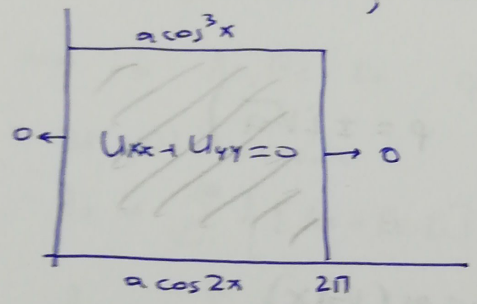
12.3

σελ 2/656

$u_{xx}(x,y) + u_{yy}(x,y) = 0$, $0<x<2\pi$, $0<y<4\pi$

$u_x(0,y) = 0$, $u_x(2\pi,y) = 0$, $0<y<4\pi$

$u_x(x,0) = a\cos 2x$, $u(x,4\pi) = a\cos^3 x$, $0<x<2\pi$



Αναζητούμε λύση με τη μέθοδο ΧΜ δηλ. λύση της μορφής $u(x,y) = X(x)\cdot\Psi(y)$. Τότε:

$u_x(x,y) = X'(x)\cdot\Psi(y)$

$u_{xx}(x,y) = X''(x)\cdot\Psi(y)$

$u_{yy}(x,y) = X(x)\cdot\Psi''(y)$

Άρα η εξ. γίνεται:

$X''(x)\cdot\Psi(y) + X(x)\cdot\Psi''(y) = 0$

$$\Rightarrow \frac{X''(x)}{X(x)} = -\frac{\Psi''(y)}{\Psi(y)} = \lambda$$

Για να ισχύει η ισότητα θα πρέπει οι δύο ποσότητες να είναι σταθερές.

Προκύπτουν έτσι οι δύο εξ:

$X''(x) - \lambda X(x) = 0$ $\quad 0<x<2\pi$

$\Psi''(y) + \lambda\Psi(y) = 0$ $\quad 0<y<4\pi$

Από τις συνοριακές ΙΙ Neumann προκύπτει

$$\begin{cases} u_x(0,y) = 0 \\ u_x(2\pi,y) = 0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} X'(0)\cdot\Psi(y) = 0 \\ X'(2\pi)\cdot\Psi(y) = 0 \end{cases} \quad 0<y<4\pi$$

$\rightarrow X'(0) = X'(2\pi) = 0$

Πρακτικά έτσι το πρόβλ. S-L:

$$\begin{cases} \chi''(x) - \lambda\chi(x) = 0 \\ \chi'(0) = \chi'(2\pi) = 0 \end{cases}$$

Το πρόβλημα αυτό μπορεί να έχει ιδιοτιμές μόνο για $\lambda \leq 0$ και πάλι:

· για $\lambda = 0$, η ΣΔΕ είναι $\chi''(x) = 0 \Rightarrow \chi(x) = Ax + B$

άρα $\lambda_0 = 0$ είναι ιδιοτιμή με αντίστοιχη ιδιοσυνάρτηση με $\chi_0(x) = 1$.

· για $\lambda < 0$: η γεν. λύση είναι $(\rho^2 = \lambda \Rightarrow \rho = \pm i\sqrt{-\lambda})$

$$\chi(x) = c_1 \cos(\sqrt{-\lambda}x) + c_2 \sin(\sqrt{-\lambda}x)$$

$$\chi'(x) = -c_1 \sin(\sqrt{-\lambda}x)\cdot(\sqrt{-\lambda}) + c_2\sqrt{-\lambda}\cdot\cos(\sqrt{-\lambda}x)$$

$\chi'(0) = 0 \Rightarrow c_2 = 0$

$\chi'(2\pi) = 0 \Rightarrow -c_1\sqrt{-\lambda}\sin(\sqrt{-\lambda}2\pi) + \cancelto{0}{c_2\sqrt{-\lambda}\cos(\sqrt{-\lambda}2\pi)} = 0$

$\Rightarrow -c_1\sqrt{-\lambda}\sin(\sqrt{-\lambda}\cdot 2\pi) = 0$

Για να ικανοποιείται η τελευταία λύση $\sin(\sqrt{-\lambda}\cdot 2\pi) = 0$

$\Rightarrow \sqrt{-\lambda}\cdot 2\cancel{\pi} = k\cancel{\pi}$

$\Rightarrow \lambda_k = -\frac{k^2}{4}, \quad k = 1, 2, \ldots$

$$\chi_k(x) = \cos\left(\tfrac{k}{2}x\right)$$

Οι αντίστοιχες εξισώσεις για το $\psi(y)$ είναι

$$\psi''(y) + \lambda_k\psi(y) = 0$$

· $k = 0 \rightarrow \psi''(y) = 0 \rightarrow \psi_0(y) = A_0 + B_0 y$

· $k = 1, 2, \ldots \rightarrow \psi''(y) - \frac{k^2}{4}\psi(y) = 0$

παίρνω χαρακτ. πολυων. $\longrightarrow \rho = \pm\frac{k}{2}$

η γεν. λύση $\psi_k(y) = A_k\cosh\left(\frac{k}{2}y\right) + B_k\sinh\left(\frac{k}{2}y\right)$

όπου A_k, B_k αυθαιρ. σταθ.

Προκύπτουν έτσι οι λύσεις

$$U_k(x,y) = X_k(x) \cdot Y_k(y)$$

που από κατασκευής ικανοποιούν τη ΕΔΕ και τις ΣΣ Neumann αλλά γενικά όχι τις Dirichlet.

Για να μπορούμε να τις εξαναγκάσουμε, θεωρούμε την υπέρθεση

$$U(x,y) = \sum_{k=0}^{\infty} U_k(x,y) = A_0 + B_0 y + \sum_{k=1}^{\infty} \left\{ \left[A_k \cosh\left(\tfrac{k}{2}y\right) + B_k \sinh\left(\tfrac{k}{2}y\right) \right] \cdot \cos\left(\tfrac{k}{2}x\right) \right\}$$

όπου τα A_k, B_k θα προσδιορίσουν από ΣΣ Dirichlet

- $u(x,0) = a\cos 2x$

$$A_0 + \sum_{k=1}^{\infty} \left\{ [A_k + B_k \cdot 0] \cdot \cos\left(\tfrac{k}{2}x\right) \right\} = a\cos 2x$$

$$A_0 + \sum_{k=1}^{\infty} A_k \cos\left(\tfrac{k}{2}x\right) = a\cos 2x$$

Από το παραπάνω προκύπτει ότι $A_k = 0$, για όλα τα $k \in \mathbb{N} - \{4\}$ και $A_4 = a$.

- $u(x,4\pi) = a\cos^3 x$

$$A_0 + B_0 \cdot 4\pi + \sum_{k=1}^{\infty} \left\{ \left[A_k \cosh\left(\tfrac{k}{2}4\pi\right) + B_k \sinh\left(\tfrac{k}{2}4\pi\right) \right] \cdot \cos\left(\tfrac{k}{2}x\right) \right\} = a\cos^3 x$$

$$\cancel{A_0}^{\,0} + \left[4\pi B_0 + a\cosh(8\pi) \right] + \sum_{k=1}^{\infty} B_k \sinh(2k\pi) \cdot \cos\left(\tfrac{k}{2}x\right) =$$

$$= \frac{3}{4} a\cos x + \frac{1}{4} a\cos(3x)$$

Από το παραπάνω προκύπτει ότι

$$4\pi B_0 + a\cosh(8\pi) = 0 \Rightarrow B_0 = -\frac{a\cosh(8\pi)}{4\pi}$$

$$B_2 = \frac{3a}{4}, \quad B_6 = \frac{a}{4}$$

$B_k = 0$, για όλα τα υπόλοιπα k.

Άρα η λύση του προβλήματος είναι

$$u(x,y) = -\frac{a\cosh(8\pi)}{4\pi} y + a\cosh(2y)\cos(2x) + \frac{3a}{4}\sinh(y)\cos x + \frac{a}{4}\sinh(3y)\cos(3x)$$

Κεφ 13

13.2.3

σελ 2/683

$u_t(x,t) = m^2 u_{xx}(x,t) \quad 0<x<a, \; t>0 \quad (1)$

$u(a,t)=0, \; u_x(a,t)=0, \; t>0 \quad (2)$

$u(x,0) = 3\sin\frac{\pi x}{2a} + 5\sin\frac{3\pi x}{2a}, \quad 0<x<a, \; t>0 \quad (3)$

Λύση

Αναζητούμε λύση της (1) με τη μέθοδο χωρισμού των μεταβλητών, δηλ. με τη μορφή $u(x,t) = X(x)\cdot T(t)$

Αντικαθιστώντας στην (1) βρίσκουμε:

$$X(x)\cdot T'(t) = m^2 X''(x)\cdot T(t) \Leftrightarrow \frac{X''(x)}{X(x)} = \frac{T'(t)}{m^2 T(t)} = \lambda$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} X''(x) - \lambda X(x) = 0 & (4\alpha) \\ T'(t) - \lambda m^2 T(t) = 0 & (4\beta) \end{cases}$$

Οι ΣΣ (2) δίνουν: $X(0)=0, \; X'(a)=0$

Από το χαρακτ. πολυων. προκύπτει ότι $\rho^2 - \lambda = 0 \Rightarrow \rho^2 = \lambda$

• $\lambda > 0$, $\rho = \pm\sqrt{\lambda}$ και η γεν. λύση είναι:

$$X(x) = c_1 e^{\sqrt{\lambda}x} + c_2 e^{-\sqrt{\lambda}x}$$

$$X'(x) = \sqrt{\lambda}\, c_1 e^{\sqrt{\lambda}x} - \sqrt{\lambda}\cdot c_2 e^{-\sqrt{\lambda}x}$$

$$\begin{cases} c_1 + c_2 = 0 \\ \sqrt{\lambda}\, c_1 e^{\sqrt{\lambda}a} - \sqrt{\lambda}\, c_2 e^{-\sqrt{\lambda}a} = 0 \end{cases}$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ e^{\sqrt{\lambda}a} & -e^{-\sqrt{\lambda}a} \end{vmatrix} = -\left(e^{-\sqrt{\lambda}a} + e^{\sqrt{\lambda}a}\right) \neq 0$$

Άρα μηδενική λύση η τετριμμ.

$\cdot\ \lambda = 0, \quad p = 0 \quad$ (δικλίς)

$$X(x) = C_1 + C_2 x$$
$$X'(x) = C_2 \quad \longrightarrow \quad \begin{cases} C_1 = 0 \\ C_2 = 0 \end{cases}$$

Δρ. φασ. λύση η τετριμμ.

$\cdot\ \lambda < 0, \quad p = \pm i\sqrt{-\lambda}$

$$X(x) = C_1 \cos(\sqrt{-\lambda}\, x) + C_2 \sin(\sqrt{-\lambda}\, x)$$
$$X'(x) = -C_1 \sqrt{-\lambda} \sin(\sqrt{-\lambda}\, x) + C_2 \sqrt{-\lambda} \cos(\sqrt{-\lambda}\, x)$$

$$\begin{cases} C_1 = 0 \\ \sqrt{-\lambda}\, C_2 \cos(\sqrt{-\lambda}\, a) = 0 \end{cases}$$

$$\cos(\sqrt{-\lambda}\, a) = 0$$
$$\sqrt{-\lambda}\, a = (2k-1)\frac{\pi}{2}$$
$$-\lambda a^2 = (2k-1)^2 \frac{\pi^2}{4}$$
$$\lambda_k = -\frac{(2k-1)^2 \pi^2}{4a^2}, \quad k = 1, 2, \ldots$$

$$X_k(x) = \sin\left(\frac{(2k-1)\pi}{2a} x\right) \quad k = 1, 2, \ldots$$

$$T'(t) - \lambda m^2 T(t) = 0$$

$$T'(t) + \frac{(2k-1)^2 \pi^2}{4a^2} m^2 T(t) = 0$$

$$\frac{dT}{dt} = -\frac{(2k-1)^2 \pi^2 m^2}{4a^2} T$$

$$\frac{dT}{T} = -\frac{(2k-1)^2 \pi^2 m^2}{4a^2} dt$$

$$\ln|T(t)| = -\frac{(2k-1)^2 \pi^2 m^2}{4a^2} t + c$$

$$|T(t)| = e^c \cdot e^{-\frac{(2k-1)^2 \pi^2 m^2}{4a^2} t}$$

$$T(t) = \pm e^{c} \cdot e^{-\frac{(2k-1)^2 \pi^2 m^2}{4a^2} t}$$

$$T_k(t) = A_k \cdot e^{-\frac{(2k-1)^2 \pi^2 m^2}{4a^2} t}$$

Προκύπτουν έτσι οι λύσεις:

$u_k(x,t) = X_k(x) \cdot T_k(t)$ οι οποίες ικανοποιούν τις (1), (2) αλλά γενικά όχι την (3). Για να το πετύχουμε αυτό θεωρούμε την υπέρθεση:

$$u(x,t) = \sum_{k=1}^{\infty} u_k(x,t) = \sum_{k=1}^{\infty} \left\{ A_k \sin\left(\frac{(2k-1)\pi}{2a} x\right) \cdot e^{-\frac{(2k-1)^2 \pi^2 m^2}{4a^2} t} \right\}$$

Η (3) δίνει:

$$\sum_{k=1}^{\infty} A_k \cdot \sin\left(\frac{(2k-1)\pi}{2a} x\right) = 3 \sin\frac{\pi x}{2a} + 5 \sin\frac{3\pi x}{2a}$$

$A_1 = 3$

$A_2 = 5$

και $A_k = 0, \ \forall k \geq 3$

Οπότε,

$$u(x,t) = 3 \sin\left(\frac{\pi x}{2a}\right) e^{-\frac{\pi^2 m^2}{4a^2} t} + 5 \sin\left(\frac{3\pi x}{2a}\right) \cdot e^{-\frac{9\pi^2 m^2}{4a^2} t}$$

ασκ 5/σελ 683

$u_t(x,t) = k^2 u_{xx}(x,t)$ (1)

$u_x(0,t)=0, \quad u_x(a,t) + h[u(a,t)-b]=0, \quad t>0$ (2)

$u(x,0)=c, \quad 0<x<a$ (3)

Λύση

[...]

$$\begin{cases} X''(x) - \lambda X(x) = 0 & (4\alpha) \\ T'(t) - \lambda k^2 T(t) = 0 & (4\beta) \end{cases}$$

- $X'(0)=0$
- $X'(a)\cdot T(t) + hX(a)\cdot T(t) - hb = 0$

$T(t)\cdot[X'(a) + hX(a)] = hb$

Λύνοντε αρχικά για $b=0 \Rightarrow X'(a) + hX(a) = 0$

$\rho^2 = \lambda$

- $\lambda > 0, \ \rho = \pm\sqrt{\lambda}$

$X(x) = c_1 \cosh(\sqrt{\lambda}x) + c_2 \sinh(\sqrt{\lambda}x)$

$X'(x) = \sqrt{\lambda}\, c_1 \sinh(\sqrt{\lambda}x) + c_2\sqrt{\lambda}\cosh(\sqrt{\lambda}x)$

$X'(0)=0 \Rightarrow c_2\sqrt{\lambda}=0 \Rightarrow c_2=0$

$X'(a) + hX(a) = 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow \sqrt{\lambda}\, c_1 \sinh(\sqrt{\lambda}a) + h\, c_1 \cosh(\sqrt{\lambda}a) = 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow c_1 \underbrace{[\sqrt{\lambda}\sinh(\sqrt{\lambda}a) + h\cosh(\sqrt{\lambda}a)]}_{>0} = 0 \Rightarrow c_1 = 0$

Μοναδ. λύση η τριβιαλ.

- $\lambda = 0; \ \rho = 0$

$X(x) = c_1 + c_2 x \longrightarrow \begin{cases} c_2 = 0 \\ c_1 = 0 \end{cases}$

Μοναδ. λύση η τριβιαλ.

$\rho = \pm i\sqrt{-\lambda}$

$$X(x) = c_1 \cos(\sqrt{-\lambda}x) + c_2 \sin(\sqrt{-\lambda}x)$$

$$X'(x) = -\sqrt{-\lambda}\, c_1 \sin(\sqrt{-\lambda}x) + \sqrt{-\lambda}\, c_2 \cos(\sqrt{-\lambda}x)$$

$$X'(0) = 0 \Rightarrow c_2 = 0$$

$$X'(a) + hX(a) = 0 \Rightarrow$$

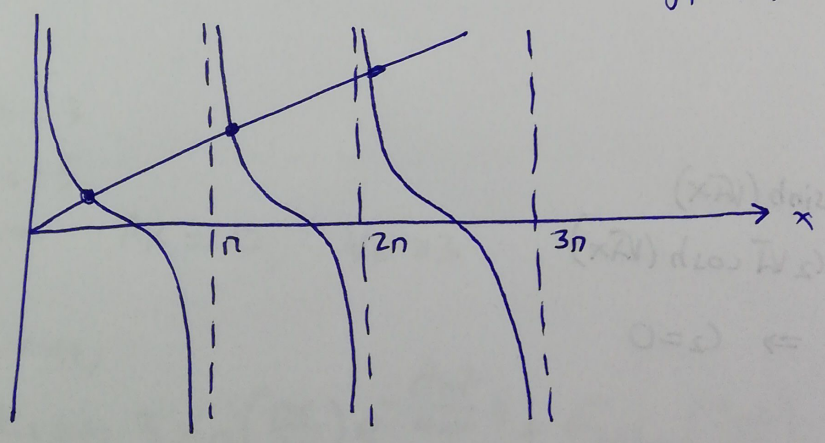
$$\Rightarrow -\sqrt{-\lambda}\, c_1 \cdot \sin(\sqrt{-\lambda}\, a) + h c_1 \cos(\sqrt{-\lambda}a) = 0$$

$$\Rightarrow c_1 \left[-\sqrt{-\lambda} \sin(\sqrt{-\lambda}\, a) + h \cos(\sqrt{-\lambda}a) \right] = 0$$

Για να προκύψει μη τετριμμ. λύση θα πρέπει

$$-\sqrt{-\lambda} \sin(-\sqrt{-\lambda}a) + h \cos(\sqrt{-\lambda}a) = 0 \Leftrightarrow \sqrt{-\lambda} = h \cot(\sqrt{-\lambda} \cdot a)$$

Η εξ. $x = h \cot(ax)$ έχει άπειρες θετικές λύσεις όπως φαίνεται στο ακόλουθο γράφημα.



Έστω λοιπόν, (ρ_n) η ακολουθία των θετικών ριζών της εξίσωσης αυτής.

Θα πρέπει $\sqrt{-\lambda} = \rho_n$ απ' όπου προκύπτουν οι ιδιοτιμές

$$\lambda_n = -\rho_n^2, \quad n = 1, 2, \ldots$$

Οι αντίστ. ιδιοσυναρτ. είναι:

$$X_n(x) = \cos(\rho_n x), \quad n = 1, 2, \ldots$$

Προκύπτει ακόμη $T_n(t) = A_n e^{-\rho_n^2 k^2 t}$

Βρίσκουμε έτσι τις λύσεις:

$$u_n(x,t) = X_n(x) \cdot T_n(t)$$

[...] οπότε $u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} u_n(x,t) =$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} A_n \cos(\rho_n x) \cdot e^{-\rho_n^2 k^2 t}$$

$$(3) \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} A_n \cos(\rho_n x) = c$$

Τα A_n προσδιορίζονται κατά τρόπο ώστε να ισχύει το παραπάνω (*)

Για το γενικό b αναζητούμε λύση της μορφής

$$u(x,t) = v(x,t) + b$$

όπου η v επιλύει το αντίστοιχο πρόβλημα με μηδενικό b.

Το κόλπο που εφαρμόζεται στην παραπάνω διαδικασία είναι η αρχ. συνθήκη $u(x,0) = c$ δίδει ότι $u(x,0) = v(x,0) + b$ και άρα $v(x,0) = c - b$

Δηλαδή, η $v(x,t)$ επιλύει το πρόβλημα

$$v_t(x,t) = k^2 v_{xx}(x,t)$$

$$v_x(0,t) = 0, \quad v_x(a,t) + h v(a,t) = 0$$

$$v(x,0) = c - b$$

(*)

$$\sum_{n=1}^{\infty} A_n \cos(\rho_n x) = c$$

$$\left(\sum_{n=1}^{\infty} A_n \cos(\rho_n x)\right) \cdot \cos(\rho_m x) = c \cdot \cos(\rho_m x) \Leftrightarrow$$

$$\sum_{\substack{n=1 \\ n \neq m}}^{\infty} A_n \cos(\rho_n x) \cdot \cos(\rho_m x) + A_m \cos^2(\rho_m x) = c \cdot \cos(\rho_m x) \Rightarrow$$

$$\sum_{\substack{n=1 \\ n \neq m}}^{\infty} A_n \int_0^a \cos(\rho_n x) \cos(\rho_m x)\, dx + A_m \int_0^a \cos^2(\rho_m x)\, dx = c \int_0^a \cos(\rho_m x)\, dx$$

Είναι όμως $\int_0^a \cos(\rho_n x) \cos(\rho_m x)\, dx =$

$$= \frac{1}{2} \int_0^a \cos[(\rho_n - \rho_m) x]\, dx + \frac{1}{2} \int_0^a \cos[(\rho_n + \rho_m) x]\, dx = 0 \text{?}$$ (δεν γράφεται)

ασκ 7/σελ 41

$u_t(x,t) = k^2 u_{xx}(x,t)$, $-\pi < x < \pi$, $t > 0$, $k > 0$ (1)

$u(-\pi,t) = u(\pi,t)$, $u_x(-\pi,t) = u_x(\pi,t)$, $t > 0$ (2)

$u(x,0) = |x|$, $-\pi < x < \pi$, $t > 0$ (3)

Λύση

$$\begin{cases} X''(x) - \lambda X(x) = 0 & (4\alpha) \\ T'(t) - \lambda k^2 T(t) = 0 & (4\beta) \end{cases}$$

$X(-\pi)T(t) = X(\pi)\cdot T(t) \Rightarrow X(-\pi) = X(\pi)$

$X'(-\pi)\cdot T(t) = X'(\pi)T(t) \Rightarrow X'(-\pi) = X'(\pi)$

- $\lambda > 0$, $X(x) = c_1 e^{\sqrt{\lambda}x} + c_2 e^{-\sqrt{\lambda}x}$

  $X'(x) = c_1\sqrt{\lambda}\, e^{\sqrt{\lambda}x} - c_2\sqrt{\lambda}\, e^{-\sqrt{\lambda}x}$

- $\lambda = 0$, $X(x) = c_1 + c_2 x$

  $X'(x) = c_2$

- $\lambda < 0$, $X(x) = c_1\cos(\sqrt{-\lambda}x) + c_2\sin(\sqrt{-\lambda}x)$

  $X'(x) = -c_1\sqrt{-\lambda}\sin(\sqrt{-\lambda}x) + \sqrt{-\lambda}\, c_2\cos(\sqrt{-\lambda}x)$

- $X(-\pi) = X(\pi)$

$c_1 e^{\sqrt{\lambda}(-\pi)} + c_2 e^{-\sqrt{\lambda}(-\pi)} = c_1 e^{\sqrt{\lambda}\pi} + c_2 e^{-\sqrt{\lambda}\pi}$

$c_1 e^{-\sqrt{\lambda}\pi} + c_2 e^{\sqrt{\lambda}\pi} = c_1 e^{\sqrt{\lambda}\pi} + c_2 e^{-\sqrt{\lambda}\pi}$

$(c_1 - c_2)e^{-\sqrt{\lambda}\pi} = (c_1 - c_2)e^{\sqrt{\lambda}\pi}$

$(c_1 - c_2)(e^{-\sqrt{\lambda}\pi} - e^{\sqrt{\lambda}\pi}) = 0 \Rightarrow c_1 = c_2$

- $X'(-\pi) = X'(\pi)$

$c_1\sqrt{\lambda}\, e^{\sqrt{\lambda}(-\pi)} - c_2\sqrt{\lambda}\, e^{-\sqrt{\lambda}(-\pi)} = c_1\sqrt{\lambda}\, e^{\sqrt{\lambda}\pi} - c_2\sqrt{\lambda}\, e^{-\sqrt{\lambda}\pi}$

$(c_1 + c_2)\sqrt{\lambda}\, e^{-\sqrt{\lambda}\pi} = (c_1 + c_2)\sqrt{\lambda}\, e^{\sqrt{\lambda}\pi}$

$(c_1 + c_2)(e^{-\sqrt{\lambda}\pi} - e^{\sqrt{\lambda}\pi})\sqrt{\lambda} = 0 \rightarrow c_1 = -c_2$

Άρα $c_1 = c_2 = 0$ τετρ. πιθ. λύσ.

• $X(-\pi) = X(\pi)$

$\cancel{c_1} - c_2\pi = \cancel{c_1} + c_2\pi$

$2c_2\pi = 0 \Rightarrow c_2 = 0$

$X'(-\pi) = X'(\pi)$

$c_2 = c_2 = 0$

Άρα $c_1 \in \mathbb{R}$ και $c_2 = 0$

οπότε $\lambda_0 = 0$ είναι ιδιοτιμή με αντίστοιχη ιδιοσυνάρτηση

$X_0(x) = \frac{A_0}{2}$

• $X(-\pi) = X(\pi)$

$\cancel{c_1 \cos(\sqrt{-\lambda}(-\pi))} + c_2 \sin(\sqrt{-\lambda}(-\pi)) = \cancel{c_1 \cos(\sqrt{-\lambda}\pi)} + c_2 \sin(\sqrt{-\lambda}\pi)$

$2c_2 \sin(\sqrt{-\lambda}\pi) = 0$

$\sin(\sqrt{-\lambda}\pi) = 0$

$\sqrt{-\lambda}\cancel{\pi} = n\cancel{\pi}$

$\lambda_n = -n^2, \; n = 1, 2, \dots$

• $X'(-\pi) = X'(\pi)$

$-c_1\cancel{\sqrt{-\lambda}} \sin(\sqrt{-\lambda}(-\pi)) + \cancel{\sqrt{-\lambda}}\, c_2 \cos(\sqrt{-\lambda}(-\pi)) =$

$= -c_1\cancel{\sqrt{-\lambda}} \sin(\sqrt{-\lambda}\pi) + \cancel{\sqrt{-\lambda}}\, c_2 \cos(\sqrt{-\lambda}\pi) \Rightarrow$

$\Rightarrow 2c_1\sqrt{-\lambda} \sin(\sqrt{-\lambda}\pi) = 0 \Rightarrow \sin(\sqrt{-\lambda}\pi) = 0 \rightarrow \dots \rightarrow \lambda_n = -n^2, \; n = 1, 2 \dots$

Τώρα βλέπουμε ότι αυτούς τους ιδιοσ. c_1, c_2 μπορούν να επιλεγούν ανεξάρτητα όρα οι ιδιοσυναρτήσεις είναι της μορφής:

$X_n(x) = A_n \cos(nx) + B_n \sin(nx)$

Για $n = 1, 2, \dots$ η λύση της (4β) είναι:

$T_n(t) = e^{-n^2 k^2 t}$

Για $n = 0$, η (4β) γράφεται $T'(t) = 0 \Rightarrow T_0(t) = 1$

[...]

$u(x,t) = \frac{A_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(A_n \cos(nx) + B_n \sin(nx) \right) e^{-n^2 k^2 t}$

(3) $\Rightarrow$ $u(x,0)=|x|$

$$\frac{A_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}\left(A_n\cos(nx)+B_n\sin(nx)\right)=|x|$$

Άρα, τα A_n, B_n είναι οι συντελεστές του αναπτ. F της $|x|$.
Επειδή η συνάρτηση είναι άρτια θα έχουμε ότι $B_n=0$
και $A_n=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}|x|\cos(nx)dx$

<u>ασκ 3/692</u>

$u_t(x,t)=4u_{xx}(x,t)+xt,\quad 0<x<1,\ t>0$ (1)

$u(0,t)=t,\quad u(1,t)=t^2,\quad t>0$ (2)

$u(x,0)=\sin\pi x,\quad 0<x<1$ (3)

<u>Λύση</u>

Μετασχηματίζω σε ένα ισοδύναμο πρόβλημα με ομογενείς ΣΙ.
Προς τούτο, αναζητώ λύση της μορφής:

$u(x,t)=k(x,t)+V(x,t)$

η οποία ικανοποιεί:

$V(0,t)=V(1,t)=0$

η $k(x,t)$ είναι κατάλληλη συνάρτηση ώστε να ισχύει:

$k(0,t)=t,\quad k(1,t)=t^2$

Η απλούστερη επιλογή για την k είναι

$$k(x,t)=\alpha(t)+\frac{\beta(t)-\alpha(t)}{p}x$$

δηλ. $k(x,t)=t+(t^2-t)x$

Άρα, η λύση είναι της μορφής:

$u(x,t)=V(x,t)+t+t^2x-tx$

$u_t(x,t)=V_t(x,t)+1+2tx-x$

$u_{xx}(x,t)=V_{xx}(x,t)$

Αντικατ. στο (1) προκύπτει:

$$V_t(x,t) + 1 + 2tx - x = 4V_{xx}(x,t) + xt$$

$$V_t(x,t) + 1 + xt - x = 4V_{xx}(x,t)$$

$$V_t(x,t) = 4V_{xx}(x,t) + x - xt - 1 \qquad (1')$$

Εξ ορισμού ισοδυναμία της οριακ. συνθ. Dirichlet

$$V(0,t) = V(1,t) = 0 \qquad (2')$$

Αυτόν, η οριακ. συνθ. (3)

$$V(x,0) = u(x,0) = \sin \pi x \qquad (3')$$

Η αντίστοιχη ομογ. εξ. της (1') είναι

$$V_t(x,t) = 4V_{xx}(x,t)$$

$$V(x,t) = X(x) \cdot T(t)$$

$$V_t(x,t) = X(x) \cdot T'(t)$$

$$V_{xx}(x,t) = X''(x) \cdot T(t)$$

$$X(x) \cdot T'(t) = 4X''(x) \cdot T(t)$$

$$\frac{X''(x)}{X(x)} = \frac{T'(t)}{4T(t)} = \lambda$$

$$\begin{cases} X''(x) - \lambda X(x) = 0 \\ T'(t) - 4\lambda T(t) = 0 \end{cases} \longrightarrow \text{δν έχει οριακές.}$$

$$X(0) = X(1) = 0$$

Γνωρίζουμε ότι οι ιδιοτιμές του προβλ. αυτού είναι

$$\lambda_n = -\pi^2 n^2, \quad n = 1, 2, \ldots$$

και οι αντίστοιχ. ιδιοσυναρτήσεις

$$X_n(x) = \sin(n\pi x)$$

Αναζητούμε λύση της (1')

$$V(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n(t) \sin(n\pi x)$$

(3) $\Rightarrow$ $u(x,0) = |x|$

$$V_t(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n'(t) \sin(n\pi x)$$

$$V_x(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n(t) \cos(n\pi x)\, n\pi$$

$$V_{xx}(x,t) = -\sum_{n=1}^{\infty} a_n(t) \sin(n\pi x)\, n^2\pi^2$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n'(t) \sin(n\pi x) = -4\sum_{n=1}^{\infty} a_n(t) \sin(n\pi x)\, n^2\pi^2$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left[a_n'(t) \sin(n\pi x) + 4 a_n(t) \sin(n\pi x)\, n^2\pi^2\right] = 0$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left[\sin(n\pi x)\left(a_n'(t) + 4a_n(t)\, n^2\pi^2\right)\right] = 0$$

Então, $a_n'(t) + 4a_n(t)\, n^2\pi^2 = 0$

$$\frac{da_n(t)}{dt} + 4a_n(t)\, n^2\pi^2 = 0$$

$$\frac{da_n(t)}{dt} = -4a_n(t)\, n^2\pi^2$$

$$\frac{da_n(t)}{a_n(t)} = -4n^2\pi^2 dt$$

$$\ln|a_n(t)| = -4n^2\pi^2 dt + c$$

$$a_n(t) = \pm e^{-4n^2\pi^2 t} \cdot e^{c}$$

$$a_n(t) = C_n e^{-4n^2\pi^2 t}$$

$\hookrightarrow$ sud. nod.

Aqs $V(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} C_n \cdot e^{-4n^2\pi^2 t} \sin(n\pi x)$

(2): $V(x,0) = \sin \pi x$

$V(x,0) = \sin \pi x \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} c_n e^0 \sin(n\pi x) = \sin$

$\Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} c_n \sin(n\pi x) = \sin \pi x$

$c_1 = 1$ ו- $c_n = 0, \quad n = 2, \ldots$

אם $V(x,t) = e^{-4\pi^2 t} \sin \pi x$

אם, ה פתרון של המקורי הפרבולי הוא:

$$u(x,t) = t + (t^2 - t)x + e^{-4\pi^2 t} \sin \pi x$$

מס' 4/693

מצא, אם $k(x,t)$;

$\Rightarrow k(0,t) = 1, \quad k_x(1,t) = \frac{5\pi}{2}$

$$k(x,t) = 1 + x + \left(\frac{5\pi}{2} - 1\right)\frac{x^2}{2}$$

Κεφ 14

14.2.2

σελ 1 – 4 / 713–714 (γενικ. λύση)

$$u_{tt} = c^2 u_{xx} \quad , \quad 0<x<L, \quad t>0 \qquad (1)$$

$$u(0,t) = u(L,t) = 0 \qquad (2)$$

$$u(x,0) = f(x) \qquad (3)$$

$$u_t(x,0) = g(x) \qquad (4)$$

Λύση

$$u(x,t) = X(x)T(t)$$

$$u_{tt}(x,t) = X(x) \cdot T''(t)$$

$$u_{xx}(x,t) = X''(x)T(t)$$

$$X(x)T''(t) = c^2 X''(x) T(t)$$

$$\frac{X''(x)}{X(x)} = \frac{T''(t)}{T(t)} = \lambda$$

$$\begin{cases} X''(x) - \lambda X(x) = 0 & (5) \\ T''(t) - \lambda c^2 T(t) = 0 & (6) \end{cases}$$

$$X(0) = X(L) = 0 \qquad (7)$$

Το προβλ. S-L (5), (7) έχει ιδιοτιμές

$$\lambda_n = -\frac{n^2\pi^2}{L^2}, \quad n = 1, 2, \ldots$$

και αντιστοιχ. ιδιοσυναρτήσεις:

$$X_n(x) = \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right)$$

$$(6) \Rightarrow T''(t) + \frac{n^2\pi^2}{L^2} c^2 T(t) = 0$$

Το χαρ. πολυων.: $\rho^2 + \frac{n^2\pi^2 c^2}{L^2} = 0 \Rightarrow \rho = \pm i \frac{n\pi c}{L}$

$$T_n(t) = A_n \cos\left(\frac{n\pi c}{L} t\right) + B_n \sin\left(\frac{n\pi c}{L} t\right)$$

Πρακτικα έτσι οι λύσεις:

$$U_n(x,t) = X_n(x) \cdot T_n(t) =$$

$$= \left[A_n \cos\left(\frac{n\pi c}{L} t\right) + B_n \sin\left(\frac{n\pi c}{L} t\right)\right] \cdot \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right)$$

$$U(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} \left[A_n \cos\left(\frac{n\pi c}{L} t\right) + B_n \sin\left(\frac{n\pi c}{L} t\right)\right] \cdot \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right)$$

$$(3) \Rightarrow U(x,0) = f(x)$$

$$\Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} \left[A_n \cos 0 + B_n \cancel{\sin 0}^{\,0}\right] \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right) = f(x)$$

$$\Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} A_n \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right) = f(x)$$

Άρα τα A_n είναι οι συντελ. του ημιτονικού αναπτ. F. της f, δηλ.

$$A_n = \frac{2}{L} \int_0^L f(x) \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right) dx$$

$$U_t(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} \left[-A_n \frac{n\pi c}{L} \sin\left(\frac{n\pi c}{L} t\right) + B_n \frac{n\pi c}{L} \cos\left(\frac{n\pi c}{L} t\right)\right] \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right)$$

$$(4) \Rightarrow U_t(x,0) = g(x)$$

$$\Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} \left[-A_n \cdot \cancel{\frac{n\pi c}{L} \sin 0}^{\,0} + B_n \frac{n\pi c}{L} \cos 0\right] \cdot \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right) = g(x)$$

$$\Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} B_n \cdot \frac{n\pi c}{L} \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right) = g(x)$$

Άρα, $B_n \cdot \frac{n\pi c}{L}$ είναι οι συντ. του ημιτόν. αν. F. της g.

Άρα $B_n \cdot \frac{n\pi c}{L} = \frac{2}{L}\int_0^L g(x)\sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right)dx$

$$\Rightarrow B_n = \frac{2}{n\pi c}\int_0^L g(x)\sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right)dx$$

Κεφ 15

15.2.3

001 4/732 (θέσεις 1, 3)

$u_{xx}(x,y,t) + u_{yy}(x,y,t) = u_t(x,y,t)$, $0<x<1$, $0<y<1$, $t>0$ (1)

$u_x(0,y,t)=0$, $u_x(1,y,t)=0$, $0<x<1$, $t>0$ (2)

$u(x,0,t)=0$, $u(x,1,t)=0$, $0<y<1$ (3)

$u(x,y,0) = 2\sin^2(2\pi x)\sin 3\pi y$, $0<x<1$, $0<y<1$ (4)

Λύση

Αναζητώ λύση της (1) στην μορφή:

$u(x,y,t) = X(x)\cdot\Psi(y)\cdot T(t)$

$u_{xx}(x,y,t) = X''(x)\,T(t)\,\Psi(y)$

$u_{yy}(x,y,t) = X(x)\,\Psi''(y)\,T(t)$

$u_t(x,y,t) = X(x)\,\Psi(y)\,T'(t)$

$$X''(x)\Psi(y)T(t) + X(x)\Psi''(y)T(t) = X(x)\Psi(y)T'(t)$$

$$\frac{X''(x)\Psi(y) + X(x)\Psi''(y)}{X(x)\Psi(y)} = \frac{T'(t)}{T(t)} = \lambda$$

$$\begin{cases} T'(t) - \lambda T(t) = 0 & (5) \\ X''(x)\Psi(y) + X(x)\Psi''(y) - \lambda X(x)\Psi(y) = 0 \end{cases}$$

$$X(x)\left[\psi''(y) - \lambda\psi(y)\right] = -X''(x)\psi(y)$$

$$-\frac{X''(x)}{X(x)} = \frac{\psi''(y) - \lambda\psi(y)}{\psi(y)} = \mu$$

$$\begin{cases} X''(x) + \mu X(x) = 0 & (6) \\ \psi''(y) - (\lambda+\mu)\psi(y) = 0 & (7) \end{cases}$$

$$X'(0) = X'(1) = 0 \qquad (8)$$

$$\psi(0) = \psi(1) = 0 \qquad (9)$$

Το S-L (6), (8) έχει:

$\mu_n = n^2\pi^2, \quad n = 0, 1, 2, \dots$

και $X_n(x) = \cos(n\pi x)$

Το S-L (7), (9) έχει:

$$\psi''(y) - (\lambda + n^2\pi^2)\psi(y) = 0$$

$\lambda + n^2\pi^2 = -m^2\pi^2$ όπου $m = 1, 2, \dots$

$\Rightarrow \lambda_{mn} = -(m^2+n^2)\pi^2$

και $\psi_m(y) = \sin(m\pi y)$

(5): $T'(t) + (m^2+n^2)\pi^2 T(t) = 0$

$$\Rightarrow \frac{dT(t)}{dt} = -(m^2+n^2)\pi^2 T(t)$$

$$\ln|T(t)| = -(m^2+n^2)\pi^2 T(t) + c$$

$$T_{mn}(t) = C_{mn} e^{-(m^2+n^2)\pi^2 t}$$

$$U_{mn}(x,y,t) = \cos(n\pi x)\sin(m\pi x)\, c_{mn}\, e^{-(m^2+n^2)\pi^2 t}$$

$$U(x,y,t) = \sum_{n=0}^{\infty}\sum_{m=1}^{\infty} c_{mn}\cos(n\pi x)\sin(m\pi y)\, e^{-(m^2+n^2)\pi^2 t}$$

Γράφαμε:

$$u(x,y,0) = 2\sin^2(2\pi x)\sin\pi y = \left(1-\cos(4\pi x)\right)\sin\pi y$$
$$= \sin\pi y - \cos(4\pi x)\sin\pi y$$

$$\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{m=1}^{\infty} c_{mn}\cdot\cos(n\pi x)\sin(m\pi y) = \sin\pi y - \cos(4\pi x)\sin\pi y$$

Άρα $c_{1,0} = 1$, $c_{1,4} = -1$

και όλα τα υπόλοιπα $c_{nm} = 0$

$$u(x,y,t) = \cos(0\pi x)\sin(\pi y)\, e^{-(1+0)\pi^2 t} - \cos(4\pi x)\sin(\pi y)\, e^{-(1+16)\pi^2 t}$$

$$\Rightarrow u(x,y,t) = \sin(\pi y)\cdot\left[e^{-\pi^2 t} - \cos(4\pi x)\, e^{-17\pi^2 t}\right]$$

Κεφ. 16

16.2.5

σελ 5/760

$u_{xx}(x,t) = c^{-2} u_{tt}(x,t)$, $-\infty < x < \infty$, $t > 0$

$u(x,t)$, $u_x(x,t)$ φραγμ.

$u(x,0) = e^{-|x|}$ (ΑΣ$_1$)

$u_t(x,0) = 0$, $-\infty < x < \infty$, (ΑΣ$_2$)

Λύση

Παίρνω μετασχηματισμό F. της u ως προς x

$$U(\xi;t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} u(x,t)\, e^{i\xi x} dx = \mathcal{F}[u(\cdot,t)](\xi)$$

Τότε

$$\mathcal{F}[u_{xx}(\cdot,t)](\xi) = (-i\xi)^2 U(\xi;t) = -\xi^2 U(\xi;t)$$

Εφαρμόζω τον μετασχηματισμό F στις εξ. του προβλ.

Η νέα εξίσωση:

$$\mathcal{F}[u_{xx}(\cdot,t)](\xi) = c^{-2} \mathcal{F}[u_{tt}(\cdot,t)](\xi)$$

$$= -\xi^2 U(\xi;t) = c^{-2} \frac{d^2}{dt^2} U(\xi;t)$$

Καταλήγουμε στη σδε $\frac{d^2}{dt^2} U(\xi;t) + c^2 \xi^2 U(\xi;t) = 0$ (1)

Παίρνω μετασχ. F στη ΑΣ$_1$:

$$\mathcal{F}[u(\cdot,0)](\xi) = \mathcal{F}[e^{-|\cdot|}](\xi)$$

$$U(\xi;0) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \cdot \frac{1}{1+\xi^2} \quad (2)$$

Παίρνω μετασχ. F στην ΑΣ2:

$$\tilde{\mathcal{F}}[u_t(\cdot,0)](\xi) = 0 \Leftrightarrow \frac{d}{dt} U(\xi;0) = 0 \quad (3)$$

ΙΤΑΤ (1),(2),(3):

$$\rho^2 + c^2\xi^2 = 0 \Rightarrow \rho^2 = -c^2\xi^2 \Rightarrow \rho = \pm i c|\xi|$$

$$U(\xi;t) = c_1 \cos(c|\xi|t) + c_2 \sin(c|\xi|t)$$

$$t=0 \Rightarrow U(\xi;0) = c_1 \cos 0 + \cancel{c_2 \sin 0}^{\,0} \Rightarrow c_1 = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \cdot \frac{1}{1+\xi^2}$$

$$\frac{d}{dt} U(\xi;t) = -c_1 \sin(c|\xi|t) \cdot c|\xi| + c_2 \cos(c|\xi|t) \cdot c|\xi|$$

$$t=0 \Rightarrow \frac{d}{dt} U(\xi;0) = -\cancel{c_1 \sin 0}^{\,0} + c_2 \cos 0$$

$$\Rightarrow 0 = c_2 \Rightarrow c_2 = 0$$

Άρα $U(\xi;t) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \cdot \frac{1}{1+\xi^2} \cos(c|\xi|t)$

Για να αναστρέψουμε την $u(x,t)$ θα πρέπει να συνιστήσουμε τον μετασχ. F. Θα είναι λοιπόν:

$$\cos(c|\xi|t) = \frac{e^{ic|\xi|t} + e^{-ic|\xi|t}}{2}$$

$$U(\xi;t) = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{2}{\pi}} \cdot \frac{1}{1+\xi^2} e^{ic|\xi|t} + \frac{1}{2}\sqrt{\frac{2}{\pi}} \cdot \frac{1}{1+\xi^2} \cdot e^{-ic|\xi|t} \quad \xi > 0$$

$$U(\xi;t) = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{2}{\pi}} \cdot \frac{1}{1+\xi^2} \cdot e^{ic\xi t} + \frac{1}{2}\sqrt{\frac{2}{\pi}} \cdot \frac{1}{1+\xi^2} \cdot e^{-ic\xi t}$$

$$u(x,t) = \tilde{\mathcal{F}}^{-1}\left[v(\cdot;t)\right](x) =$$

$$= \frac{1}{2}\tilde{\mathcal{F}}^{-1}\left[\sqrt{\frac{2}{\pi}}\cdot\frac{1}{1+\cdot^2}\, e^{ic\cdot t}\right](x) +$$

$$+ \frac{1}{2}\tilde{\mathcal{F}}^{-1}\left[\sqrt{\frac{2}{\pi}}\cdot\frac{1}{1+\cdot^2}\cdot e^{-ic\cdot t}\right](x)$$

Όμως,

$$\tilde{\mathcal{F}}^{-1}\left[\sqrt{\frac{2}{\pi}}\cdot\frac{1}{1+\cdot^2}\right](x) = e^{-|x|}$$

Άρα, $\tilde{\mathcal{F}}^{-1}\left[\sqrt{\frac{2}{\pi}}\cdot\frac{1}{1+\cdot^2}\cdot e^{ic\cdot t}\right] = e^{-|x-ct|}$

και παρόμοιως

$$\tilde{\mathcal{F}}^{-1}\left[\sqrt{\frac{2}{\pi}}\,\frac{1}{1+\cdot^2}\cdot e^{-ic\cdot t}\right] = e^{-|x+ct|}$$

Επομένως,

$$u(x,t) = \frac{1}{2}e^{-|x-ct|} + \frac{1}{2}e^{-|x+ct|}$$

σελ 4/760

τέλος

16.3.5

σελ 3/766 (ομοιο με 4/766)

$u_{xx}(x,t) = k^{-2} u_t(x,t)$, $0<x<\infty$, $t>0$

$u(0,t) = c_1$ (ΣΣ1) , $u(x,t) \to c_0$ ομοιόμ. ως προς $t>0$, $x \to +\infty$ (ΣΣ2)

$u(x,0) = c_0$, $0<x<\infty$

Λύση

Παίρνω του μετασχ. Laplace ως προς t

$$U(s;x) = \int_0^\infty u(x,t)\, e^{-st} dt = \mathcal{L}[u(x,\cdot)](s)$$

Εφαρμόζω τον $\mathcal{L}$ στη μδε

$$\mathcal{L}[u_{xx}(x,\cdot)](s) = k^{-2} \mathcal{L}[u_t(x,\cdot)](s)$$

$$\frac{d^2}{dx^2} U(s;x) = k^{-2}\left[s\, U(s;x) - u(x,0)\right]$$

$$\frac{d^2}{dx^2} U(s;x) - s k^{-2} U(s;x) = -k^{-2} c_0 \quad (1)$$

Παίρνω μετασχ. Laplace στη ΣΣ1:

$$\mathcal{L}[u(0;\cdot)](s) = c_1 \mathcal{L}[1](s) \Leftrightarrow U(s;0) = \frac{c_1}{s} \quad (2)$$

Στη ΣΣ2:

$$\lim_{x\to\infty} U(s;x) = \lim_{x\to\infty} \int_0^{+\infty} u(x,t)\, e^{-st} dt = \int_0^{+\infty} c_0\, e^{-st} dt = \frac{c_0}{s} \quad (3)$$

[...]

- Βρίσκω λύση στο πεδίο -τιμών
- Προσδιορίζω τις σταθ. λύσης
- Εφαρμόζω ΣΣ
- Κάνω αντίστροφο Laplace.

16.4.6

σελ 2,5/774 όλα

Κεφ 17

17.3.5

σελ 5/797 ?