ΦΥΛΛΟ ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΩΝ 1-Β ΔΙΑΦΟΡΙΚΕΣ ΕΞΙΣΩΣΕΙΣ

ΧΡΗΣΤΟΣ ΤΣΟΥΦΗΣ ΣΗΜΜΥ 2ο Εξάμηνο

Κεφ 4

4.3

ασκ 6 / σελ 142

y_1, y_2 λύσεις της ΔΕ $y''-3y'+y=0$

$y_1(0)=1$, $y_1'(0)=2$

$y_2(0)=-1$, $y_2'(0)=3$

$W(y_1,y_2|x)$ για $x=1, x=-1, x=3$ (?)

Λύση

$$W(y_1,y_2|x)=\begin{vmatrix} y_1(x) & y_2(x) \\ y_1'(x) & y_2'(x) \end{vmatrix}$$

για $x=0$, $W(0)=\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 3 \end{vmatrix} = 3+2=5$

Από τον τύπο του Abel έχουμε ότι $W(x)=W(0)e^{-\frac{\beta}{\alpha}x}$ για τη ΔΕ: $\alpha y''+\beta y'+\gamma y=0$. Οπότε, $W(x)=5e^{3x}$

για $x=1$, $W(1)=5e^3$

για $x=-1$, $W(-1)=5e^{-3}$

για $x=3$, $W(3)=5e^9$

ασκ 7 / σελ 142

- $y_1=e^{-\frac{t^2}{2}}$, $y_2=e^{-\frac{t^2}{2}}\int_0^t e^{\frac{s^2}{2}}ds$

$y''+ty'+y=0$, $t\in\mathbb{R}$

- $y_1'=-te^{-\frac{t^2}{2}}=-ty_1$

$y_1''=-e^{-\frac{t^2}{2}}+t^2e^{-\frac{t^2}{2}}=(-1+t^2)e^{-\frac{t^2}{2}}=(t^2-1)y_1$

$y_2'=-te^{-\frac{t^2}{2}}\int_0^t e^{\frac{s^2}{2}}ds+e^{-\frac{t^2}{2}}\cdot e^{\frac{t^2}{2}}=-ty_2+1$

$y_2''=-y_2-ty_2'=-y_2-t(-ty_2+1)=-y_2+t^2y_2-t$

Άρα, $y'' + ty' + y = -y_2 + t^2 y_2 - t + t(-ty_2 + 1) + y_2 =$

$$= -\cancel{y_2} + \cancel{t^2 y_2} - \cancel{t} - \cancel{t^2 y_2} + \cancel{t} + \cancel{y_2} = 0$$

και $y'' + ty' + y = (t^2 - 1)y_1 + t(-ty_1) + y_1 =$

$$= \cancel{t^2 y_1} - \cancel{y_1} - \cancel{t^2 y_1} + \cancel{y_1} = 0$$

- $W = \begin{vmatrix} y_1 & y_2 \\ y_1' & y_2' \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} y_1 & y_2 \\ -ty_1 & -ty_2+1 \end{vmatrix} = -ty_1y_2 + y_1 + ty_1y_2 =$

$$= y_1 = e^{-t^2/2} > 0$$

Άρα γραμμ. ανεξ. λύσεις

- $y'' + ty' + y = 0, \; t \in \mathbb{R} \qquad y(0) = 0, \; y'(0) = 1$

Η γεν. λύση της ΔΕ είναι $y = c_1 y_1 + c_2 y_2$

$y' = c_1 y_1' + c_2 y_2'$

$y' = c_1(-ty_1) + c_2(-ty_2 + 1)$

Για $t = 0$, $\left\{\begin{array}{l} y(0) = 0 \\ y'(0) = 1 \end{array}\right\} \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} c_1 y_1(0) + c_2 y_2(0) = 0 \\ c_1 \cdot 0 + c_2(0+1) = 1 \end{array}\right\} \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow \left\{\begin{array}{c} c_1 \cdot 1 + c_2 \cdot 0 = 0 \\ c_2 = 1 \end{array}\right\} \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} c_1 = 0 \\ c_2 = 1 \end{array}\right.$$

$y'' + p(t)y' + q(t)y = 0 \qquad t \in (\alpha, \beta) \qquad p, q$ συνεχείς (α, β)

i) y_1, y_2 λύσεις της ΔΕ : $y_1(t_0) = y_2(t_0) = 0$

Αυτό σημαίνει ότι η Wronskian θα είναι μηδέν και άρα y_1, y_2 δεν μπορεί να είναι γραμμ. ανεξάρτητες.

ii) Από θ. Fermat $y_1'(t_0) = y_2'(t_0) = 0$ και πάλι $W = 0$.

iii) $y_1''(t_0) = y_2''(t_0) = 0$

$$\cancel{y_1''(t_0)}^{0} + p(t_0)\, y_1'(t_0) + q(t_0)\, y_1(t_0) = 0$$

$$\cancel{y_2''(t_0)}^{0} + p(t_0)\, y_2'(t_0) + q(t_0)\, y_2(t_0) = 0$$

Οι δύο τελευταίες εξισώσεις μπορούν να θεωρηθούν ως 2x2 γραμμ. συστ. με αγνώστους $p(t_0)$, $q(t_0)$ και

$$\det = \begin{vmatrix} y_1'(t_0) & y_1(t_0) \\ y_2'(t_0) & y_2(t_0) \end{vmatrix} = y_2(t_0)\, y_1'(t_0) - y_1(t_0)\, y_2'(t_0) = -W \neq 0$$

Άρα $p(t_0) = q(t_0) = 0$

iv) • Έστω $\alpha < \rho_1 < \rho_2 < \beta$, δύο διαδοχικές ρίζες της y_2

Προς απαγωγή σε άτοπο. Υποθέτω ότι y_1 δεν έχει ρίζα στο $[\rho_1, \rho_2]$.

Επομένως, η συνάρτηση $g(t) = \dfrac{y_2(t)}{y_1(t)}$ ορίζεται και είναι παρ/μη

στο $[\rho_1, \rho_2]$ με $g'(t) = \dfrac{y_2'(t) \cdot y_1(t) - y_2(t)\, y_1'(t)}{y_1^2(t)}$ και $g(\rho_1) = g(\rho_2) = 0$

Από θ. Rolle $\exists \xi \in (\rho_1, \rho_2)$: $g'(\xi) = 0$ δηλ. $W = 0$, άτοπο

Επομένως, η y_1 έχει ρίζα στο $[\rho_1, \rho_2]$

Αυτή η ρίζα δεν μπορεί να είναι το ρ_1 ή το ρ_2 λόγω του ερωτ. (i)

v) $W = \begin{vmatrix} y_1(t_0) & y_2(t_0) \\ y_1'(t_0) & y_2'(t_0) \end{vmatrix} = y_1(t_0)y_2'(t_0) - y_2(t_0)y_1'(t_0) = -y_2(t_0)y_1'(t_0)$

και επειδή $W=0 \Leftrightarrow y_2(t_0)\cdot y_1'(t_0)=0 \Leftrightarrow y_2(t_0)=0$ ή $y_1'(t_0)=0$

- Έστω $y_1'(t_0)=0$, δηλ. η y_1 ικανοποιεί το ΠΑΤ: $\begin{cases} y''+py'+qy=0 \\ y(t_0)=0 \\ y'(t_0)=0 \end{cases}$

το οποίο έχει μοναδ. λύση την μηδενική.
την $y_1 \equiv 0$

- Έστω $y_1(t)$ δεν είναι ταυτοτικά μηδέν. Τότε αναγκαστικά θα ισχύει, $y_1'(t_0) \neq 0$ και άρα $y_2(t_0)=0$.
δηλ. $y_1(t_0)=y_2(t_0)=0$ και άρα οι y_1, y_2 γραμμ. εξαρτ.
δηλ. $y_2(t)=\lambda y_1(t)$, $y_2'(t)=\lambda y_1'(t)$
και $y_2'(t_0)=\lambda y_1'(t_0) \Rightarrow \lambda = \dfrac{y_2'(t_0)}{y_1'(t_0)}$

οπότε $y_2(t) = \dfrac{y_2'(t_0)}{y_1'(t_0)} \cdot y_1(t)$

vi) - Έστω $\varphi_1(t)$ λύση με άπειρες λύσεις.
Έστω $\varphi_2(t)$ μια άλλη λύση.
Αν φ_1, φ_2 είναι γραμμ. εξαρτ., τότε $\varphi_2 = \lambda\varphi_1$ και άρα οι ρίζες της φ_1 είναι και ρίζες της φ_2.
Αν φ_1, φ_2 είναι γραμμ. ανεξ., τότε αποτελούν θεμελιώδες σύνολο λύσεων και από το Θεώρημα Διαχωρισμού του Sturm, ανάμεσα σε δύο διαδοχικές ρίζες της y_1, βρίσκεται ρίζα της φ_2. Άρα και η φ_2 θα έχει άπειρες ρίζες.

- Έστω $\varphi_1(t)$ λύση με n ρίζες.
Έστω $\varphi_2(t)$ μια άλλη λύση.
Αν φ_1, φ_2 είναι γραμμ. εξαρτ., τότε κάθε ρίζα της φ_1 είναι και ρίζα της φ_2.

Αν φ_1, φ_2 είναι γραμμ. ανεξ., τότε αποτελούν θεμελιώδες σύνολο λύσεων και είτε ανάμεσα σε διαδοχικές ρίζες της φ_1 υπάρχει ρίζα της φ_2 οπότε η φ_2 έχει σίγουρα $n-1$ ρίζες είτε ανάμεσα σε διαδοχικές ρίζες της φ_2 υπάρχει ρίζα της φ_1 οπότε η φ_2 έχει $n+1$ ρίζες.

ασκ 31/σ 145

$y'' - 4y' + 4y = 0 \quad , \quad y_1 = e^{2x}$

είναι $P(x) = -4$

για δεύτερη γραμμ. ανεξ. λύση της ΔΕ δίνεται από τη σχέση $y_2 = V y_1$

όπου $V(x) = \int^x (e^{2t})^{-2} e^{-\int^t -4ds} dt = \int^x e^{-4t} e^{\int^t 4ds} dt =$

$= \int^x e^{-4t} e^{4t} dt = \int^x e^0 dt = \int^x dt = x$

Άρα $y_2 = x \cdot y_1 = x e^{2x}$

Άρα η γεν. λύση είναι $y(x) = c_1 e^{2x} + c_2 x \cdot e^{2x}$

4.

ασκ 15/σ 151

$y'' - 4y' + 29y = 0 \quad , \quad y(0) = 0, \quad y'(0) = 5$

Η χαρακτ. εξ. είναι: $\lambda^2 - 4\lambda + 29 = 0$

$\Delta = (-4)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 29 = 16 - 116 = -100$

$\lambda_{1,2} = 2 \pm i5$

Η γεν. λύση της ΔΕ δίνεται από τη προηγ. συνάρτηση

$y(x) = e^{2x}(c_1 \cos 5x + c_2 \sin 5x)$

$y'(x) = 2e^{2x}(c_1 \cos 5x + c_2 \sin 5x) + e^{2x}(-5c_1 \sin 5x + 5c_2 \cos 5x)$

- $y(0) = 0, \quad e^{2 \cdot 0}(c_1 \cdot \cos 5 \cdot 0 + c_2 \sin 5 \cdot 0) = 0 \Leftrightarrow c_1 \cdot \cos 0 + c_2 \cdot \cos 0 = 0$
  $\Leftrightarrow c_1 \cdot 1 = 0 \Leftrightarrow c_1 = 0$

- $y'(0) = 5, \quad 2e^0(c_1 \cdot \cos 0 + c_2 \sin 0) + e^0(-5c_1 \sin 0 + 5c_2 \cos 0) = 5 \Leftrightarrow$
  $\Leftrightarrow 2c_1 + 1 \cdot 5 \cdot c_2 = 5 \Leftrightarrow 0 + 5c_2 = 5 \Leftrightarrow c_2 = 1$

Άρα $y(x) = e^{2x} \cdot \sin 5x$

ασκ 21 / σελ 151

$$y'' - 4y' + 20y = 0, \quad y\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0, \quad y'\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1$$

Η χαρακτ. εξ. είναι $\lambda^2 - 4\lambda + 20 = 0$

$$\Delta = (-4)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 20 = 16 - 80 = -64$$

$$\lambda_{1,2} = \frac{4 \pm \sqrt{-64}}{2 \cdot 1} = \frac{4 \pm i8}{2} = 2 \pm i4$$

Η γεν. λύση της Δ.Ε. είναι από την προηγ. συνάρτηση :

$$y(x) = e^{2x}\left(c_1 \cos 4x + c_2 \sin 4x\right)$$

$$y'(x) = 2e^{2x}\left(c_1 \cos 4x + c_2 \sin 4x\right) + e^{2x}\left(-4c_1 \sin 4x + 4c_2 \cos 4x\right)$$

- $y\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0$, $e^{2 \cdot \frac{\pi}{2}}\left(c_1 \cos 4\frac{\pi}{2} + c_2 \sin 4\frac{\pi}{2}\right) = 0 \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow e^{\pi}\left(c_1 \cos 2\pi + c_2 \sin 2\pi\right) = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow e^{\pi} \cdot c_1 = 0 \Leftrightarrow c_1 = 0$$

- $y'\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1$, $2e^{2\frac{\pi}{2}}\left(c_1 \cos 4\frac{\pi}{2} + c_2 \sin 4\frac{\pi}{2}\right) + e^{2 \cdot \frac{\pi}{2}}\left(-4c_1 \sin 4\frac{\pi}{2} + 4c_2 \cos 4\frac{\pi}{2}\right) = 1$

$$\cancel{2e^{\pi} \cdot c_1}^{0} + e^{\pi} \cdot 4c_2 = 1 \Leftrightarrow c_2 = \frac{1}{4e^{\pi}}$$

Άρα $y(x) = \dfrac{e^{2x}}{4e^{\pi}} \cdot \sin 4x = \dfrac{1}{4} e^{2x-\pi} \cdot \sin 4x$

ασκ 25/σελ 151

$y'' + ay' + by = 0$, $a, b \in \mathbb{R}$

$\exists M > 0 : |y(t)| \leq M$, $\forall t \geq 0 \Leftrightarrow a, b \geq 0$ κ' $a^2 + b^2 \neq 0$

Αποδ.

Η χαρακτ. εξ. είναι $\lambda^2 + a\lambda + b = 0$

$\Delta = a^2 - 4 \cdot 1 \cdot b = a^2 - 4b$

$\lambda_{1,2} = \dfrac{-a \pm \sqrt{a^2 - 4b}}{2}$

i) $\Delta > 0$: $y(t) = c_1 e^{\rho_1 t} + c_2 e^{\rho_2 t}$

ii) $\Delta = 0$: $y(t) = c_1 e^{\rho_0 t} + c_2 t e^{\rho_0 t}$

iii) $\Delta < 0$: $y(t) = e^{kt}\left(c_1 \cos(\mu t) + c_2 \sin(\mu t)\right)$

$\rho = k + \mu i$

i) Πρέπει $\rho_1, \rho_2 \leq 0$. Τότε

$\rho_1 + \rho_2 \leq 0 \Leftrightarrow -a \leq 0 \Leftrightarrow a \geq 0$

$\rho_1 \rho_2 \geq 0 \Leftrightarrow \beta \geq 0$

ii) Πρέπει $\rho_0 < 0$ και $\Delta = 0 \Leftrightarrow a^2 = 4\beta$

Επίσης $\rho_0 = -\dfrac{a}{2} \Leftrightarrow a > 0$

και $\beta = \dfrac{a^2}{4} > 0$

iii) Πρέπει $k \leq 0$ και $k = -\dfrac{a}{2} \Leftrightarrow a \geq 0$

$\Delta < 0 \Leftrightarrow a^2 - 4\beta < 0 \Leftrightarrow 4\beta > a^2 \geq 0 \Leftrightarrow \beta \geq 0$

4.5

ασκ 13 / σελ 164

$$y'' - 2y' + 4y = e^x \sin x \quad (1)$$

Η αντίστοιχη ομογενής έχει ιδιοτιμές : $\lambda^2 - 2\lambda + 4 = 0$

$\Delta = (-2)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 4 = 4 - 16 = -12$

$$\lambda_{1,2} = \frac{2 \pm \sqrt{-12}}{2} = \frac{2 \pm i2\sqrt{3}}{2} = 1 \pm i\sqrt{3}$$

και γενική λύση $\quad y_o(x) = e^x (c_1 \cos\sqrt{3}x + c_2 \sin\sqrt{3}x)$

Παρατηρούμε ότι η ιδιοτιμή $1 \pm i\sqrt{3}$ δεν συμπίπτει με τον εκθέτη του μη-ομογ. όρου. Επομένως, $\quad y_p(x) = e^x [A_o \cos x + B_o \sin x]$

$$y_p'(x) = e^x [A_o(\cos x - \sin x) + B_o(\sin x + \cos x)]$$

$$y_p''(x) = e^x [A_o(\cos x - 2\sin x - \cos x) + B_o(\sin x + 2\cos x - \sin x)]$$

Αντικαθιστώ στην (1):

$$\cancel{e^x}[A_o(\cancel{\cos x} - 2\sin x - \cancel{\cos x}) + B_o(\cancel{\sin x} + 2\cos x - \cancel{\sin x})]$$

$$-2\cancel{e^x}[A_o(\cos x - \sin x) + B_o(\sin x + \cos x)]$$

$$+4\cancel{e^x}[A_o \cos x + B_o \sin x] = \cancel{e^x}\sin x \iff$$

$$\iff A_o(-2\cancel{\sin x} - 2\cos x + 2\cancel{\sin x} + 4\cos x) +$$

$$+ B_o(2\cancel{\cos x} - 2\sin x - 2\cancel{\cos x} + 4\sin x) = \sin x \iff$$

$$\iff 2A_o \cos x + 2B_o \sin x = \sin x$$

Επομένως, $\begin{cases} 2B_o = 1 \\ 2A_o = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} B_o = 1/2 \\ A_o = 0 \end{cases}$

Έτσι, $y_p(x) = \frac{e^x}{2} \sin x$

Άρα η γεν. λύση είναι $y = y_o + y_p = e^x (c_1 \cos\sqrt{3}x + c_2 \sin\sqrt{3}x) + \frac{e^x}{2} \sin x$

σελ 17 / ασκ 164

$$y'' - 6y' + 9y = e^{3x} + \cos x, \quad y(0) = 1, \ y'(0) = 0 \quad (1)$$

Λόγω της υπέρθεσης, η ειδική λύση της θα είναι το άθροισμα των ειδικών λύσεων της ΔΕ:

$$y'' - 6y' + 9y = e^{3x} \quad (\alpha)$$

$$y'' - 6y' + 9y = \cos x \quad (\beta)$$

- $\lambda^2 - 6\lambda + 9 = 0 \Leftrightarrow (\lambda - 3)^2 = 0 \Leftrightarrow \lambda_1 = \lambda_2 = \lambda = 3$

οπότε $y_{o1}(x) = c_1 e^{3x} + c_2 x e^{3x}$

Αναζητούμε ειδική λύση της μορφής $y_{p_1}(x) = Ax^2 e^{3x}$

$$y_{p_1}'(x) = 2Axe^{3x} + 3Ax^2e^{3x}$$

$$y_{p_1}''(x) = 2Ae^{3x} + 6Axe^{3x} + 6Axe^{3x} + 9Ax^2e^{3x} = 2Ae^{3x} + 12Axe^{3x} + 9Ax^2e^{3x}$$

Αντικαθιστώντας, προκύπτει ότι:

$$2A\cancel{e^{3x}} + 12Ax\cancel{e^{3x}} + 9Ax^2\cancel{e^{3x}} - 6\left(2Ax\cancel{e^{3x}} + 3Ax^2\cancel{e^{3x}}\right) + 9Ax^2\cancel{e^{3x}} = \cancel{e^{3x}}$$

$$2A + \cancel{12Ax} + \cancel{9Ax^2} - \cancel{12Ax} - \cancel{18Ax^2} + \cancel{9Ax^2} = 1$$

$$A = \frac{1}{2}$$

δηλ. $y_{p_1}(x) = \frac{x^2}{2} e^{3x}$

Άρα η γεν. λύση είναι: $y_{\mu_1}(x) = c_1 e^{3x} + c_2 x e^{3x} + \frac{x^2}{2} e^{3x}$

- $y_{o_2}(x) = c_1 e^{3x} + c_2 x e^{3x}$

Αναζητούμε λύση της μορφής $y_{p_2}(x) = A_0 \cos x + B_0 \sin x$

$$y_{p_2}'(x) = -A_0 \sin x + B_0 \cos x$$

$$y_{p_2}''(x) = -A_0 \cos x - B_0 \sin x$$

Αντικαθιστούμε:

$$-A_0 \cos x - B_0 \sin x - 6(-A_0 \sin x + B_0 \cos x) + 9(A_0 \cos x + B_0 \sin x) = \cos x \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow -A_0 \cos x - B_0 \sin x + 6A_0 \sin x - 6B_0 \cos x + 9A_0 \cos x + 9B_0 \sin x = \cos x \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (8A_0 + 6B_0)\cos x + (6A_0 + 8B_0)\sin x = \cos x$$

$$\begin{cases} 8A_0 + 6B_0 = 1 \\ 6A_0 + 8B_0 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} A_0 = 4/14 \\ B_0 = -3/14 \end{cases}$$

δηλ. $y_{p_2}(x) = \frac{4}{14} \cos x - \frac{3}{14} \sin x$

Άρα η γεν. λύση είναι: $y_{\mu_2}(x) = c_1 e^{3x} + c_2 x e^{3x} + \frac{4}{14} \cos x - \frac{3}{14} \sin x$

Άρα η γεν. λύση της (1) είναι: $y_\mu(x) = c_1 e^{3x} + c_2 x e^{3x} + \frac{x^2}{2} e^{3x} + \frac{4}{14} \cos x - \frac{3}{14} \sin x$

και $c_1 = 10/14$, $c_2 = -27/14$

ασκ 24/σελ 164

$$y''-4y=t^2e^{2t}, \quad y(0)=1, \quad y'(0)=-1$$

Η αντίστοιχη εξίσωση: $\lambda^2-4=0 \Leftrightarrow \lambda_1=2, \ \lambda_2=-2$ και $y_0(x)=c_1e^{2x}+c_2e^{-2x}$

Μια ειδική λύση είναι της μορφής: $y_p(x)=x(A_0+A_1x+A_2x^2)e^{2x}$

$$y_p'(x)=(A_0+A_1x+A_2x^2)e^{2x}+x(A_1+2A_2x)e^{2x}+2x(A_0+A_1x+A_2x^2)e^{2x}$$

$$=e^{2x}\Big[A_0+(2A_1+2A_0)x+(\underbrace{A_2+2A_2}_{3A_2}+2A_1)x^2+2A_2x^3\Big]$$

$$y_p''(x)=e^{2x}\Big[2A_0+2(2A_1+2A_0)x+2(3A_2+2A_1)x^2+4A_2x^3+$$

$$+(2A_1+2A_0)+(3A_2+2A_1)x+2A_2x^2\Big]=$$

$$=e^{x}\Big[4A_0+2A_1+(6A_1+4A_0+3A_2)x+(4A_1+8A_2)x^2+4A_2x^3\Big]$$

Επομένως έχουμε

$$e^{2x}\Big[4A_0+2A_1+(6A_1+4A_0+3A_2)x+(4A_1+8A_2)x^2+4A_2x^3\Big]+$$

$$-4e^{2x}\Big[A_0x+A_1x^2+A_2x^3\Big]=x^2\cancel{e^{2x}} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 4A_0+2A_1+(6A_1+\cancel{4A_0}+3A_2-\cancel{4A_0})x+(\cancel{4A_1}+8A_2-\cancel{4A_1})x^2+(4A_2-4A_2)x^3=x^2 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 4A_0+2A_1+(6A_1+3A_2)x+8A_2x^2=x^2$$

δηλ. $\begin{cases}4A_0+2A_1=0\\6A_1+3A_2=0\\8A_2=1\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}A_1=-\frac{1}{16}\\A_2=\frac{1}{8}\\A_0=-\frac{1}{32}\end{cases}$

Οπότε, $y_p(x)=x\left(-\frac{1}{32}-\frac{1}{16}x+\frac{1}{8}x^2\right)e^{2x}$

Άρα $y(x)=c_1e^{2x}+c_2e^{-2x}+\left(-\frac{1}{32}x+\frac{1}{16}x^2+\frac{1}{8}x^3\right)e^{2x}$

και για $y(0)=1, \ y'(0)=-1 \Rightarrow c_1=\frac{33}{128}, \ c_2=\frac{95}{128}$

δηλ. $y(x)=\frac{33}{128}e^{2x}+\frac{95}{128}e^{-2x}-\left(\frac{1}{32}x+\frac{1}{16}x^2-\frac{1}{8}x^3\right)e^{2x}$

Κεφ. 7

7.3

ασκ 12/σελ 349

$f(t) = t\cosh at = t\,\dfrac{e^{at}+e^{-at}}{2} = \frac{1}{2}te^{at} + \frac{1}{2}te^{-at}$

Θέτω $g(t) = e^{at}$. Γνωρίζω ότι ο μετασχ. Laplace της g είναι

$G(s) = \mathcal{L}[g](s) = \dfrac{1}{s-a}$

Ισχύει τότε ότι, $\mathcal{L}[te^{at}](s) = \mathcal{L}[tg(t)](s) = (-1)\cdot G'(s) = \dfrac{1}{(s-a)^2}$

Θέτω $h(t) = e^{-at}$. Της h είναι $H(s) = \mathcal{L}[h](s) = \dfrac{1}{s+a}$

Ισχύει τότε ότι, $\mathcal{L}[te^{-at}](s) = \mathcal{L}[t\cdot h(t)](s) = (-1)\cdot H'(s) = \dfrac{1}{(s+a)^2}$

Τότε, $\mathcal{L}[f](s) = \frac{1}{2}\mathcal{L}[te^{at}](s) + \frac{1}{2}\mathcal{L}[te^{-at}](s) = \frac{1}{2}\cdot\dfrac{1}{(s-a)^2} + \frac{1}{2}\cdot\dfrac{1}{(s+a)^2}$

Εναλλακτικά

(*) $\mathcal{L}[t\cosh at](s) = \mathcal{L}[t\,f(t)](s) = -F'(s) = -\left(\dfrac{s}{s^2-a^2}\right)' = \dots = \dfrac{a^2+s^2}{(a^2-s^2)^2}$

ασκ 24/σελ 350 $f(t) = \cosh at$

$f(t) = 2t^2e^{-t} - \sin^2 t$

$\mathcal{L}[f](s) = 2\mathcal{L}[t^2e^{-t}](s) - \mathcal{L}[\sin^2 t](s)$ (*)

- $\mathcal{L}[t^2e^{-t}](s) = \dfrac{2!}{(s+1)^3} = \dfrac{2}{(s+1)^3}$

- $\mathcal{L}[\sin^2 t](s) = \mathcal{L}\left[\frac{1}{2} - \frac{1}{2}\cos 2t\right](s) = \frac{1}{2}\mathcal{L}[1](s) - \frac{1}{2}\mathcal{L}[\cos 2t](s) =$

$\boxed{\triangleright\ \sin^2 t = \dfrac{1-\cos 2t}{2}}$

$= \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{s} - \frac{1}{2}\cdot\dfrac{s}{s^2+4}$

Άρα, (*) $\Rightarrow \mathcal{L}[f](s) = \dfrac{4}{(s+1)^3} - \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{s} + \frac{1}{2}\cdot\dfrac{s}{s^2+4}$

ασκ 30 / σελ 350

$$f(t)=\begin{cases} 0, & t<0 \\ 2e^{3t}, & 2n<t<2n+1 \\ -2e^{-3t}, & 2n+1<t<2n+2,\ n\in\mathbb{N} \end{cases}$$

$T=2$

Άρα $\mathcal{L}[f](s)=\dfrac{\int_0^2 e^{-st}f(t)dt}{1-e^{-2s}}=\dfrac{\int_0^1 e^{-st}\cdot 2e^{3t}dt}{1-e^{-2s}}+\dfrac{\int_1^2 e^{-st}(-2e^{-3t})dt}{1-e^{-2s}}=\dots\Rightarrow$

$$\Rightarrow F(s)=\frac{2}{s-3}\cdot\frac{1-e^{-(s-3)}}{1+e^{-(s-3)}}$$

ασκ 31 / σελ 350

$$f(t)=\begin{cases} h, & 4n\le t\le 4n+4 \\ -h, & 4n+4\le t\le 4n+8 \end{cases},\ h>0,\ n\in\mathbb{N}$$

$T=8$

Άρα $\mathcal{L}[f](s)=\dfrac{\int_0^8 e^{-st}f(t)dt}{1-e^{-8s}}=\dfrac{\int_0^4 e^{-st}h\,dt}{1-e^{-8s}}+\dfrac{\int_4^8 e^{-st}h\,dt}{1-e^{-8s}}=\dots\Rightarrow$

$$\Rightarrow F(s)=\frac{h}{s}\left(\frac{1-e^{-4s}}{1+e^{-4s}}\right)$$

7.4

ασκ 2 / σελ 356

$$F(s) = \frac{1}{(s-3)(s+3)} - \frac{7s}{s^2+15}$$

$$F(s) = \frac{A}{s-3} + \frac{B}{s+3} + \frac{s}{s^2+15}$$

• $\dfrac{1}{(s-3)(s+3)} = \dfrac{A}{s-3} + \dfrac{B}{s+3}$

$$1 = A(s+3) + B(s-3)$$

• για $s=3$, $1 = 6A \Rightarrow A = \frac{1}{6}$

• για $s=-3$, $1 = -6B \Rightarrow B = -\frac{1}{6}$

Άρα $\dfrac{1}{(s-3)(s+3)} = \dfrac{1}{6}\cdot\dfrac{1}{s-3} - \dfrac{1}{6}\cdot\dfrac{1}{s+3}$

οπότε $F(s) = \dfrac{1}{6}\cdot\dfrac{1}{s-3} - \dfrac{1}{6}\cdot\dfrac{1}{s+3} - 7\cdot\dfrac{s}{s^2+\sqrt{15}^2}$

$$\mathcal{L}^{-1}[F(s)] = \frac{1}{6}\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s-3}\right\} - \frac{1}{6}\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s+3}\right\} - 7\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{s}{s^2+\sqrt{15}^2}\right\}$$

$$= \frac{1}{6}e^{3t} - \frac{1}{6}\cdot e^{-3t} - 7\cos\sqrt{15}t$$

ασκ 13 / σ 357

$$F(s) = \frac{s^2+1}{(s-1)(s^2+2)} = \frac{A}{s-1} + \frac{Bs+\Gamma}{s^2+2}$$

$$s^2+1 = A(s^2+2) + (Bs+\Gamma)(s-1)$$

$$s^2+1 = As^2 + 2A + Bs^2 - Bs + \Gamma s - \Gamma$$

$$s^2+1 = (A+B)s^2 + (\Gamma-B)s + 2A - \Gamma$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} A+B=1 \\ \Gamma-B=0 \\ 2A-\Gamma=1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} A+B=1 \\ B=\Gamma \\ 2A-B=1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{array}{r} A+B=1 \\ 2A-B=1\ + \\ \hline 3A=2 \rightarrow A=\frac{2}{3} \end{array}$$

$$\Gamma = B = 1-A = 1-\frac{2}{3} = \frac{1}{3}$$

δηλ. $F(s) = \dfrac{2}{3}\cdot\dfrac{1}{s-1} + \dfrac{1}{3}\cdot\dfrac{s+1}{s^2+2} = \dfrac{2}{3}\cdot\dfrac{1}{s-1} + \dfrac{1}{3}\cdot\dfrac{s}{s^2+2} + \dfrac{1}{3}\cdot\dfrac{1}{s^2+2}$

Άρα $\mathcal{L}^{-1}[F(s)] = \dfrac{2}{3}e^{t} + \dfrac{1}{3}\cos\sqrt{2}t + \dfrac{1}{3\sqrt{2}}\sin\sqrt{2}t$

ασκ 15/σελ 357

$$F(s)=\frac{2n\pi T}{T^2 s^2+(2n\pi)^2}=\frac{1}{T^2}\cdot\frac{\frac{2n\pi}{T}}{s^2+\left(\frac{2n\pi}{T}\right)^2}$$

$$\mathcal{L}^{-1}[F(s)]=\frac{1}{T^2}\cdot\sin\frac{2n\pi}{T}t$$

ασκ 18/σελ 357

$$F(s)=\frac{s^2}{(s^2+\omega^2)^2}=\left(\frac{s}{s^2+\omega^2}\right)^2$$

Θέτω $G(s)=\frac{s}{s^2+\omega^2}$, $g(t)=\mathcal{L}^{-1}\{G(s)\}=\cos(\omega t)$

και άρα $F(s)=G(s)\cdot G(s)$

$$F(t)=\mathcal{L}^{-1}\{F(s)\}=(g*g)(t)=\int_0^t g(t-u)g(u)\,du=$$

$$=\int_0^t \cos(\omega t-\omega u)\cdot\cos(\omega u)\,du$$

Εφαρμόζω την ταυτότητα $2\cos A\cos B=\cos(A-B)+\cos(A+B)$

$$=\frac{1}{2}\int_0^t\left[\cos(\omega t-\omega u-\omega u)+\cos(\omega t-\cancel{\omega u}+\cancel{\omega u})\right]du=$$

$$=\frac{1}{2}\int_0^t\left[\cos(\omega t-2\omega u)+\cos\omega t\right]du=$$

$$=\frac{1}{2}\int_0^t\cos(\omega t-2\omega u)\,du+\frac{1}{2}\int_0^t\cos\omega t\,du=$$

$$=\frac{1}{2}\cdot\left[\frac{\sin(\omega t-2\omega u)}{-2\omega}\right]_0^t+\frac{1}{2}t\cos\omega t=$$

$$=\frac{1}{2}\cdot\frac{\sin(\omega t-2\omega t)}{-2\omega}-\frac{1}{2}\frac{\sin(\omega t)}{-2\omega}+\frac{1}{2}t\cos\omega t=$$

$$=-\frac{1}{4}\cdot\frac{\sin(-\omega t)}{\omega}+\frac{1}{4}\cdot\frac{\sin(\omega t)}{\omega}+\frac{1}{2}t\cos\omega t=$$

$$=\frac{1}{2}\frac{\sin(\omega t)}{\omega}+\frac{1}{2}t\cos\omega t$$

ασκ 27 / σελ 357

Όλες έχουν τον ίδιο μετασχ. Laplace : $\frac{1}{s^2}$ και ο αντίστροφός τους είναι η $f_3(t) = t$.

Από τα αποτελέσματα ισχύει : $f(t) = g(t)$ σε κάποιο $[\alpha, \beta]$ εκτός από πεπερασμένου πλήθους σημεία τότε $\int_\alpha^\beta f(t)dt = \int_\alpha^\beta g(t)dt$

7.5

ασκ 7 / σελ 369

$$y'' + y = \sin t \quad , \quad y(0) = y'(0) = 0$$

Εφαρμόζω τον τελεστή $\mathcal{L}$ στη ΔΕ και λόγω γραμμικότητας έχουμε

(θέτω $Y(s) = \mathcal{L}[y](s)$)

$$\mathcal{L}[y''](s) + \mathcal{L}[y](s) = \mathcal{L}[\sin t](s) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow s^2 Y(s) - s\cancel{y(0)}^{0} - \cancel{y'(0)}^{0} + Y(s) = \frac{1}{s^2+1} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow Y(s)(s^2+1) = \frac{1}{s^2+1} \Leftrightarrow Y(s) = \frac{1}{(s^2+1)^2}$$

Ισχύει $\mathcal{L}[\cos t] = \frac{s}{s^2+1}$

και $\mathcal{L}[t\cos t] = -\left(\frac{s}{s^2+1}\right)' = -\frac{(s^2+1) - s\cdot 2s}{(s^2+1)^2} = -\frac{s^2+1-2s^2}{(s^2+1)^2} \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow \mathcal{L}[-t\cos t] = \frac{1-s^2}{(s^2+1)^2} \overset{\text{ανάλυση σε απλά κλάσματα}}{=} \frac{2}{(s^2+1)^2} - \frac{1}{s^2+1} = \frac{2}{(s^2+1)^2} - \mathcal{L}[\sin t] \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \mathcal{L}[\sin t - t\cos t] = \frac{2}{(s^2+1)^2} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{(s^2+1)^2} = \mathcal{L}\left[\frac{1}{2}\sin t - \frac{1}{2}t\cos t\right]$$

Άρα $y(t) = \mathcal{L}^{-1}[Y](t) = \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{(s^2+1)^2}\right] = \frac{1}{2}\sin t - \frac{1}{2}t\cos t$

ασκ 12/σελ 370

$y'' + 7y' + 10y = 4te^{-3t}$, $y(0) = 0$, $y'(0) = -1$

Εφαρμόζω τον τελεστή $\mathcal{L}$ (θέτω $Y(s) = \mathcal{L}[y](s)$)

$$\mathcal{L}[y''](s) + 7\mathcal{L}[y'](s) + 10\mathcal{L}[y](s) = 4\mathcal{L}[te^{-3t}](s) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow s^2Y(s) - s\cancel{Y(0)}^{0} - Y'(0) + 7(sY(s) - \cancel{Y(0)}) + 10Y(s) = 4\frac{1!}{(s+3)^2} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow s^2Y(s) + 1 + 7sY(s) + 10Y(s) = \frac{4}{(s+3)^2}$$

$$\Leftrightarrow Y(s)(s^2+17) = \frac{4}{(s+3)^2} - 1$$

$$\Leftrightarrow Y(s)(s^2+17) = \frac{4-(s+3)^2}{(s+3)^2} = \frac{4-s^2-6s-9}{(s+3)^2} = -\frac{s^2+6s+5}{(s+3)^2}$$

$$\Leftrightarrow Y(s) = -\frac{s^2+6s+5}{(s+3)^2(s^2+17)}$$

- $\dfrac{s^2+6s+5}{(s+3)^2(s^2+17)} = \dfrac{A}{s+3} + \dfrac{B}{(s+3)^2} + \dfrac{\Gamma x + \Delta}{s^2+17}$

$s^2+6s+5 = A(s^2+17)\cdot(s+3) + B(s^2+17) + (\Gamma x+\Delta)(s+3)^2$

- για $s=-3$, $9 + 18 + 5 = B(9+17) \Rightarrow B = -\frac{26}{4} = -\frac{13}{2}$

- για $s=0$, $5 = A\cdot 13\cdot 3 + B\cdot 17 + \Delta\cdot 9$

$5 = 39A + 17\cdot(-\frac{13}{2})\cdot B + 9\Delta$

- για $s=1$, [...]

Βρίσκω A, B, Γ, Δ.

Εφαρμόζω αντίστροφο Laplace και βρίσκω $y(t) = e^{-2t} - e^{-3t} - 2te^{-3t}$

σελ 16 / ασ 370

$$y_1'' = y_1 + 3y_2 \quad , y_1(0) = 2, \ y_1'(0) = 3$$

$$y_2'' = 4y_1 - 4e^t \quad , y_2(0) = 1, \ y_2'(0) = 2$$

Θέτουμε $Y_1(s) = \mathcal{L}[y_1](s)$, $Y_2(s) = \mathcal{L}[y_2](s)$

$$\left\{\begin{array}{l} \mathcal{L}[y_1''](s) = \mathcal{L}[y_1](s) + 3\mathcal{L}[y_2](s) \\ \mathcal{L}[y_2''](s) = 4\mathcal{L}[y_1](s) - 4\mathcal{L}[e^t](s) \end{array}\right\} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} s^2Y_1(s) - sY_1(0) - Y_1'(0) = Y_1(s) + 3Y_2(s) \\ s^2Y_2(s) - sY_2(0) - Y_2'(0) = 4Y_1(s) - \dfrac{4}{s-1} \end{array}\right\} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} s^2Y_1(s) - 2s - 3 = Y_1(s) + 3Y_2(s) \\ s^2Y_2(s) - s - 2 = 4Y_1(s) - \dfrac{4}{s-1} \end{array}\right.$$

[...]

Και οι λύσεις θα είναι $\left\{\begin{array}{l} y_1 = e^t + e^{2t} \\ y_2 = e^{2t} \end{array}\right.$

άσκ 24/σελ. 370

$$x'' - 2x' + 3y' + 2y = 4 \quad , \quad x(0) = x'(0) = 0$$
$$2y' - x' + 3y = 0 \quad , \quad y(0) = 0$$

Θέτουμε $\quad L\{x(t)\} = X(s), \quad L\{y(t)\} = Y(s)$

$$\begin{cases} s^2 X(s) - s\cancel{X(0)}^{0} - \cancel{X'(0)}^{0} - 2\left(sX(s) - \cancel{X(0)}^{0}\right) + 3\left(sY(s) - \cancel{Y(0)}^{0}\right) + 2Y(s) = \frac{4}{s} \\ 2\left(sY(s) - \cancel{Y(0)}^{0}\right) - \left(sX(s) - \cancel{X(0)}^{0}\right) + 3Y(s) = 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} s^2 X(s) - 2sX(s) + 3sY(s) + 2Y(s) = \frac{4}{s} \\ 2sY(s) - sX(s) + 3Y(s) = 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} (s^2 - 2s)X(s) + (3s+2)Y(s) = \frac{4}{s} \\ -sX(s) + (2s+3)Y(s) = 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow [\dots] \Rightarrow Y(s) = \frac{2}{s(s-1)(s+2)}$$

$$\Rightarrow y(t) = \mathcal{L}^{-1}\{Y(s)\} = -1 + \frac{2}{3}e^{t} + \frac{1}{3}e^{-2t}$$

και $\quad x(t) = \frac{10}{3}e^{t} + \frac{1}{6}e^{-2t} - 3t\,\frac{7}{2}$

ασκ 29/σελ 371

$$x' = \begin{pmatrix} 4 & 5 \\ -2 & -2 \end{pmatrix} x + \begin{pmatrix} 4e^t \cos t \\ 0 \end{pmatrix}, \quad x(0) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} x_1' = 4x_1 + 5x_2 + 4e^t \cos t \\ x_2' = -2x_1 - 2x_2 \end{cases}$$

Έστω $\mathcal{L}\{x_1(t)\} = X_1(s)$, $\mathcal{L}\{x_2(t)\} = X_2(s)$

$$\begin{cases} sX_1(s) = 4X_1(s) + 5X_2(s) + \dfrac{4(s-1)}{(s-1)^2+1} \\ sX_2(s) = -2X_1(s) - 2X_2(s) \end{cases}$$

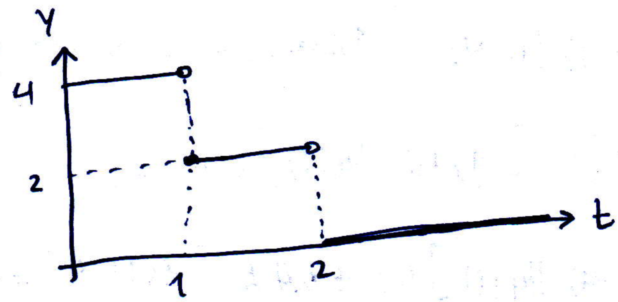
$\Rightarrow \dots \Rightarrow \quad x_2(t) = -4e^t \cdot t \cdot \sin t$

και $x_1(t) = 4te^t \sin t + 2e^t \sin t + 2te^t \sin t + 2te^t \cos t$

7.6

ασκ 7/σελ 380

$$f(t) = \begin{cases} 4, & 0 \le t < 1 \\ 2, & 1 \le t < 2 \\ 0, & 2 \le t \end{cases}$$



$f(t) = 4H_0(t) - 2H_1(t) - 2H_2(t)$

ασκ 12/σελ 381

$$f(t) = \begin{cases} 0, & t<4 \\ 2t^3, & 4 \le t \end{cases}$$

$$f(t) = 2t^3 H_4(t)$$

Θεωρώ τη συνάρτηση $g_n(t) = t^n,\ n=1,2,3$. Τότε $\mathcal{L}[g_n](s) = \dfrac{n!}{s^{n+1}}$

Θέλω να εκφράσω ~~το~~ t^3 ως συνάρτηση του $t-4$. Είναι:

$(t-4)^3 = t^3 - 12t^2 + 48t - 64$ και $(t-4)^2 = t^2 - 8t + 16$

$t^2 = (t-4)^2 + 8t - 16$

Άρα $t^3 = (t-4)^3 + 12(t-4)^2 - 48t + 64 =$

$= (t-4)^3 + 12(t-4)^2 + 96t + 192 - 48t + 64 =$

$= (t-4)^3 + 12(t-4)^2 + 48t + 256 =$

$= (t-4)^3 + 12(t-4)^2 + 48(t-4) + 448$

Άρα, $g_3(t) = g_3(t-4) + 12g_2(t-4) + 48g_1(t-4) + 448$

$\mathcal{L}[F](s) = 2\mathcal{L}[g_3(t) H_4(t)](s) =$

$= 2\mathcal{L}[g_3(t-4) H_4(t)](s) + 24\mathcal{L}[g_2(t-4) H_4(t)](s) +$

$+ 96\mathcal{L}[g_1(t-4) H_4(t)](s) + 896\mathcal{L}[H_4(t)](s) =$

$$= 2\left[e^{-4s}\cdot\frac{6}{s^4} + 12e^{-4s}\cdot\frac{2}{s^3} + 48e^{-4s}\cdot\frac{1}{s^2} + 448\frac{e^{-4s}}{s}\right]$$

Ασκ 26/σ 381

$$f(t) = 1 + \sum_{k=1}^{+\infty} (-1)^k H_k(t)$$

$$\mathcal{L}[F(t)](s) = \mathcal{L}[1](s) + \sum_{k=1}^{+\infty} (-1)^k \cdot \mathcal{L}[H_k(t)](s) =$$

$$= \frac{1}{s} + \sum_{k=1}^{+\infty} (-1)^k \cdot \frac{e^{-ks}}{s} =$$

$$= \frac{1}{s} + \frac{1}{s} \sum_{k=1}^{+\infty} (-e^{-s})^k =$$

$$= \frac{1}{s} \sum_{k=0}^{+\infty} (-e^{-s})^k =$$

$$= \frac{1}{s} \cdot \frac{1}{1+e^{-s}} \quad , \quad s>0$$

Ασκ 34/σ 382

$$F(s) = \frac{s^3}{(s+3)^2 \cdot (s+2)^2} = \frac{A}{s+3} + \frac{B}{(s+3)^2} + \frac{\Gamma}{s+2} + \frac{\Delta}{(s+2)^2}$$

$$s^3 = A(s+3)\cdot(s+2)^2 + B(s+2)^2 + \Gamma(s+2)(s+3)^2 + \Delta(s+3)^2$$

- για $s=-2$, $\quad -8 = \Delta(-2+3)^2 \Leftrightarrow \Delta = -8$
- για $s=-3$, $\quad -27 = B(-3+2)^2 \Leftrightarrow B = -27$
- για $s=0$, $\quad 0 = 12A + 4B + 18\Gamma + 9\Delta$

$$12A - 4\cdot 27 + 18\Gamma - 9\cdot 8 = 0$$
$$4A - 36 + 6\Gamma - 24 = 0$$
$$2A - 18 + 3\Gamma - 12 = 0$$
$$2A - 3\Gamma = 30$$

- για $s=-1$, $\quad -1 = 2A + B + 4\Gamma + 4\Delta$

$$2A - 27 + 4\Gamma - 4\cdot 8 = -1$$
$$2A + 4\Gamma = 27 + 32 - 1$$
$$2A + 4\Gamma = 58$$
$$A + 2\Gamma = 29$$

Συσ. $\begin{cases} 2A - 3\Gamma = 30 \\ A + 2\Gamma = 29 \end{cases} \rightarrow \begin{matrix} \Gamma = 4 \\ A = 21 \end{matrix}$

$$F(s) = \frac{21}{s+3} - \frac{27}{(s+3)^2} + \frac{4}{s+2} - \frac{8}{(s+2)^2}$$

Άρα $\mathcal{L}^{-1}\{F(s)\} = \mathcal{L}^{-1}\left\{ \frac{21}{s+3} - \frac{27}{(s+3)^2} + \frac{4}{s+2} - \frac{8}{(s+2)^2} \right\} =$

$$= 21\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s+3}\right\} - 27\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{(s+3)^2}\right\} + 4\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s+2}\right\} - 8\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{(s+2)^2}\right\}$$

$$= 21e^{-3t} - 27te^{-3t} + 4e^{-2t} - 8te^{-2t}$$

άσκ 37 / σελ 382

όμοια

άσκ 51 / σελ 383

$y'' + 2y' + y = 2(t-3)H_3(t), \quad t>0, \quad y(0)=2, \; y'(0)=1$

$\mathcal{L}\{y(t)\} = Y(s)$ θέτω και $f(t)=t$ για $\mathcal{L}\{f(t)\}(s) = \mathcal{L}\{t\}(s) = \frac{1}{s^2}$

$$\mathcal{L}\{y''\}(s) + 2\mathcal{L}\{y'\}(s) + \mathcal{L}\{y\}(s) = 2\mathcal{L}\{(t-3)H_3(t)\}$$

$$s^2Y(s) - sY(0) - Y'(0) + 2(sY(s) - Y(0)) + Y(s) = 2\cdot e^{-3s}\cdot\frac{1}{s^2}$$

$$s^2Y(s) - 2s - 1 + 2sY(s) - 4 + Y(s) = 2e^{-3s}\cdot\frac{1}{s^2}$$

$$(s^2+2s+1)Y(s) - 2s - 5 = 2e^{-3s}\cdot\frac{1}{s^2}$$

$$(s+1)^2Y(s) - 2s - 5 = 2e^{-3s}\cdot\frac{1}{s^2}$$

$$(s+1)^2Y(s) = 2s + 5 + \frac{2}{s^2}e^{-3s}$$

$$Y(s) = 2\frac{s}{(s+1)^2} + 5\cdot\frac{1}{(s+1)^2} + \frac{2e^{-3s}}{s^2(s+1)^2}$$

$$Y(s) = 2\frac{s}{(s+1)^2} + 5\cdot\frac{1}{(s+1)^2} + \left[-4\cdot\frac{1}{s} + 2\cdot\frac{1}{s^2} + 4\cdot\frac{1}{s+1} + 2\cdot\frac{1}{(s+1)^2}\right]e^{-3s}$$

Εφαρμόζουμε $\mathcal{L}^{-1}$

(ΣΥΝΕΧΕΙΑ)

(※) ΣΥΝΕΧΕΙΑ

$$Y(s) = 2\left[\frac{s-(-1)}{(s-(-1))^2-0^2} - \frac{1}{(s+1)^2}\right] + 5\cdot\frac{1}{(s+1)^2} + \left[-4\cdot\frac{1}{s}+2\cdot\frac{1}{s^2}+4\cdot\frac{1}{s+1}+2\cdot\frac{1}{(s+1)^2}\right]e^{-3s}$$

Άρα $$y(t) = 2\left[e^{-t} - te^{-t}\right] + 5te^{-t} + 2\left[-2\cdot\frac{1}{s} + \frac{1}{s^2} + 2\frac{1}{s+1} + \frac{1}{(s+1)^2}\right]e^{-3s}$$

$$= 2e^{-t} - 2te^{-t} + 5te^{-t} + 2\left[-2\cdot\frac{e^{-3s}}{s} + \frac{e^{-3s}}{s^2} + 2\frac{e^{-3s}}{s+1} + \frac{e^{-3s}}{(s+1)^2}\right]$$

$$= 2e^{-t} + 3te^{-t} + 2\left[-2H_3(t) \quad (t-3)H_3(t) + 2H_3(t)e^{-t+3} + H_3(t)te^{-t}\right]$$

άσκ 56/383

όμοια

άσκ 60/384

όμοια

7.7

ασκ 16/σελ 394

$y'' + y = \sin t + \delta(t-\pi) \qquad t>0 \quad , y(0)=y'(0)=0$

$\mathcal{L}\{y''\}(s) + \mathcal{L}\{y\}(s) = \mathcal{L}\{\sin t\}(s) + \mathcal{L}\{\delta(t-\pi)\}(s)$

$s^2 Y(s) - s\cancel{y(0)}^{0} - \cancel{y'(0)}^{0} + Y(s) = \frac{1}{s^2+1} + e^{-\pi s}$

$(s^2+1)\,Y(s) = \frac{1}{s^2+1} + e^{-\pi s}$

$Y(s) = \frac{1}{(s^2+1)^2} + \frac{e^{-\pi s}}{s^2+1}$

$\mathcal{L}^{-1}\{Y(s)\} = \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{(s^2+1)^2}\right\} + \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{e^{-\pi s}}{s^2+1}\right\}$

$Y(t) = \frac{1}{2}\left(\sin t - t\cos t\right) + \sin t\, H_\pi(t)$

ασκ 19/20/22

ομοια

7.8

ασκ 3/399

$$F(s) = \frac{s}{(s^2+a^2)(s^2-b^2)}$$

1η μέθοδος

όπου $\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{s}{s^2+a^2}\right\} = \cos at$

και $\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s^2-b^2}\right\} = \frac{1}{b}\sinh(bt)$

Άρα $f(t) = (\cos at) * \left(\frac{1}{b}\sinh(bt)\right) = \dots$ (συνέλιξη συναρτήσεων)

Βγαίνει $\frac{1}{a^2+b^2}\left[\cosh(bt) - \cos(at)\right]$

ασκ 6/σελ 399

φαίνε

ασκ 32/σελ 401

$$y''' - 3y'' + 6y' - 18y = f(t), \quad t>0, \quad y(0) = y'(0) = y''(0) = 0$$

$$s^3Y(s) - s^2\cancel{Y(0)}^{0} - s\cancel{Y'(0)}^{0} - \cancel{Y''(0)}^{0} - 3\left(s^2Y(s) - s\cancel{Y(0)}^{0} - \cancel{Y'(0)}^{0}\right) + 6\left(sY(s) - \cancel{Y(0)}^{0}\right) - 18Y(s) = \mathcal{L}\{f(t)\}$$

$$s^3Y(s) - 3s^2Y(s) + 6sY(s) - 18Y(s) = \mathcal{L}\{f(t)\}$$

$$\left(s^3 - 3s^2 + 6s - 18\right)Y(s) = \mathcal{L}\{f(t)\}$$

$$Y(s) = \frac{F(s)}{s^3-3s^2+6s-18} = \frac{F(s)}{s^2(s-3)+6(s-3)} = \frac{F(s)}{(s^2+6)(s-3)^2}$$

Θέτουμε $G(s) = F(s)$ και $H(s) = \frac{1}{(s^2+6)(s-3)^2}$ όπου $Y(s) = G(s)\cdot H(s)$.

$$y(t) = \mathcal{L}^{-1}\{Y(s)\} = \mathcal{L}^{-1}\{G(s)\cdot H(s)\} = (g * h)(t)$$

όπου
$$g = \mathcal{L}^{-1}\{G(s)\} = \mathcal{L}^{-1}\{F(s)\} = f(t)$$
$$h = \mathcal{L}^{-1}\{H(s)\} = \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{(s^2+6)(s-3)^2}\right\}$$ → εφαρμόζουμε ανάλυση σε απλά κλάσματα

τελ. βρίσκουμε: $y = \frac{1}{15}f(t) * e^{9t} - \frac{1}{10}f(t) * e^{-t} - \frac{1}{3}e^{9t} + \frac{1}{5}e^{-t}$

Ασκ 35, 40 / σ 401

Όμοια

7.9

Ασκ 9 / σ 412

$$y(t) - \int_0^t \sin(t-r)\,y(r)\,dr = \sin t$$

Εφαρμόζουμε μετασχ. Laplace σχέση :

$$\mathcal{L}\{y(t)\} - \mathcal{L}\left[\int_0^t \sin(t-r)\,y(r)\,dr\right] = \mathcal{L}\{\sin t\}$$

$$Y(s) - \mathcal{L}\{\sin * y\}(t) = \frac{1}{s^2+1}$$

$$Y(s) - \mathcal{L}\{\sin(t)\}\cdot\mathcal{L}\{y(t)\} = \frac{1}{s^2+1}$$

$$Y(s) - \frac{1}{s^2+1}\cdot Y(s) = \frac{1}{s^2+1}$$

$$Y(s)\left(1 - \frac{1}{s^2+1}\right) = \frac{1}{s^2+1}$$

$$Y(s)\left(\frac{s^2+\cancel{1}-\cancel{1}}{s^2+1}\right) = \frac{1}{s^2+1}$$

$$Y(s)\cdot\frac{s^2}{\cancel{s^2+1}} = \frac{1}{\cancel{s^2+1}}$$

$$Y(s) = \frac{1}{s^2}$$

$$y(t) = t$$

Ασκ 14, 15, 23 / σσ 412-413

όμοια

Ασκ 27, 30 / σ 413

αντίστοιχα

Ασκ 37 / σσ 413-414

(?) (υπό επεξεργασία)