



**Εθνικό Μετσόβιο Πολυτεχνείο**  
Σχολή Ηλεκτρολόγων Μηχανικών και Μηχανικών Υπολογιστών

**Θεμελιώδη Θέματα Επιστήμης Υπολογιστών, 2019-20**

**1η σειρά γραπτών ασκήσεων**

(αυτόματα – τυπικές γλώσσες – γραμματικές  
λογική – υπολογισιμότητα – πολυπλοκότητα)

**Άσκηση 1.**

Σχεδιάστε πεπερασμένο αυτόματο με αλφάβητο  $\{0, \dots, 9\}$  που να διαβάζει τα ψηφία ενός ακεραίου αριθμού  $n$  (τα περισσότερα σημαντικά πρώτα) και να αποδέχεται αν  $n \bmod 6 = 2$ .

**Άσκηση 2.**

(i) Κατασκευάστε NFA για τις παρακάτω γλώσσες:

$L_1 = \{w \in \{0, 1\}^* \mid \text{κάθε } '0' \text{ που εμφανίζεται στην } w \text{ ακολουθείται από τουλάχιστον δύο } '1'\}$

$L_2 = \{w \in \{c, d, e\}^* \mid \text{η } w \text{ περιέχει την συμβολοσειρά } 'dce' \text{ και όχι τη συμβολοσειρά } 'ecd'\}$ .

$L_3 = \{w \in \{0, 1\}^* \mid \text{η } w \text{ περιέχει δύο τουλάχιστον εμφανίσεις της συμβολοσειράς } '001'\}$

$L_4 = \{w \in \{a, b\}^* \mid \text{η } w \text{ αρχίζει με } 'a' \text{ και είναι περιττού μήκους ή αρχίζει με } 'b' \text{ και είναι άρτιου μήκους}\}$

Υπόδειξη: όπου βοηθάει, σχεδιάστε και συνδυάστε αυτόματα για απλούστερες γλώσσες.

(ii) Κατασκευάστε ισοδύναμο DFA. Είναι το ελάχιστο; Αποδείξτε. Αν όχι, βρείτε το.

(iii) Δώστε κανονική παράσταση για κάθε μια από τις παραπάνω γλώσσες.

**Άσκηση 3.**

Είναι κανονικές οι παρακάτω γλώσσες; Αν μια γλώσσα δεν είναι κανονική, να το αποδείξετε χρησιμοποιώντας είτε το Λήμμα Άντλησης είτε κάποια ιδιότητα κλειστότητας. Αν μια γλώσσα είναι κανονική, να το αιτιολογήσετε κατάλληλα.

α)  $\{w \in \{0, 1\}^* : \text{το πλήθος των } 0 \text{ στην } w \text{ είναι διπλάσιο από το πλήθος των } 1\}$ .

β)  $\{w \in \{0, 1\}^* : \text{η } w \text{ δεν είναι παλινδρομική}\}$ .

γ)  $\{w : w \in \{0, 1\}^* \text{ το μήκος της } w \text{ είναι } \leq 10^{100}\}$ .

δ)  $\{w \in \{0, 1\}^* : 0^n 1^m \text{ όπου } n \neq m\}$ .

**Άσκηση 4.**

(α) Έστω  $G : S \rightarrow aS \mid aSbS \mid \varepsilon$ . Περιγράψτε σε φυσική γλώσσα τη γλώσσα που παράγει η  $G$ .

(β) Δώστε γραμματική και αυτόματο για τη γλώσσα  $\{a^{3n}b^{2n} \mid n \geq 1\}$ .

(γ) Δώστε γραμματική για τη γλώσσα  $\{w \in \{0, 1\}^* \mid \text{το } w \text{ έχει περιττό μήκος και (ακριβώς) στη μέση } 111\}$ .

**Άσκηση 5.**

Εξετάστε αν η κλάση των γλωσσών χωρίς συμφραζόμενα είναι κλειστή ως προς την πράξη **αναστροφή**.

**Εξάσκηση σε αυτόματα**

Εξασκηθείτε στο σχεδιασμό και κατανόηση λειτουργίας των DFA, NFA και  $NFA_{\epsilon}$  χρησιμοποιώντας το εργαλείο που θα βρείτε στη σελίδα <http://automata.discrete.gr/> (Ευχαριστίες στους δημιουργούς, απόφοιτους της ΣΗΜΜΥ, Μανόλη Ζαμπετάκη και Διονύση Ζήνδρο).

Επαληθεύστε την ορθή λειτουργία των αυτομάτων που σχεδιάσατε στις προηγούμενες ασκήσεις (όπου γίνεται) με χρήση του εργαλείου αυτού.

*Προαιρετικά:* ελάτε σε επαφή με τους δημιουργούς της εφαρμογής για να συμβάλετε στην ανάπτυξη νέων λειτουργιών ή/και βελτίωση του *interface*.

#### Άσκηση 6.\* (Υπολογισιμότητα)

Αποδείξτε ότι το πρόβλημα του ελέγχου αν ένα πρόγραμμα τερματίζει για όλες τις εισόδους είναι μη επιλύσιμο.

*Υπόδειξη:* Δείξτε ότι αν υπάρχει πρόγραμμα  $\Pi$  που να παίρνει σαν είσοδο ένα οποιοδήποτε πρόγραμμα  $\Pi'$  και να αποφαινεται αν το  $\Pi'$  τερματίζει για όλες τις εισόδους, τότε θα μπορούσαμε να λύσουμε το Πρόβλημα Τερματισμού χρησιμοποιώντας το  $\Pi$  με κατάλληλη είσοδο.

#### Άσκηση 7. (Λογική και Αλγόριθμοι)

Διατυπώστε αποδοτικό αλγόριθμο που να δέχεται σαν είσοδο οποιονδήποτε τύπο της προτασιακής λογικής σε διαζευκτική κανονική μορφή (DNF) και να αποφαινεται αν είναι ικανοποιήσιμος. Σε περίπτωση που είναι θα πρέπει να επιστρέφει μία ανάθεση αληθοτιμών που ικανοποιεί τον τύπο.

Π.χ. με είσοδο  $(x_1 \wedge \neg x_2 \wedge x_3) \vee (\neg x_2 \wedge x_3) \vee (x_4 \wedge x_5 \wedge \neg x_6)$  θα πρέπει να επιστρέφει 'Ναι' και μία από τις αναθέσεις αληθοτιμών στις  $(x_1, \dots, x_6)$  που ικανοποιούν τον τύπο, π.χ. την ανάθεση (True, False, True, False, False, False) ενώ με είσοδο  $(x_1 \wedge \neg x_1 \wedge x_2) \vee (\neg x_3 \wedge x_3)$  θα πρέπει να επιστρέφει 'Όχι'.

Θεωρήστε ότι όλες οι μεταβλητές ενός τύπου δίνονται στη μορφή  $x_n$ , όπου  $n$  ένας φυσικός αριθμός.

#### Άσκηση 8. (Πολυπλοκότητα: αναγωγές προς απόδειξη δυσκολίας)

Έστω ένα μη κατευθυνόμενο γράφημα  $G = (V, E)$ . **Κλίκα** λέγεται ένα υπογράφημα του  $G$  το οποίο είναι πλήρες (δηλ. όλες οι κορυφές του ενώνονται με ακμή). Ένα σύνολο κορυφών του  $G$  λέγεται **ανεξάρτητο σύνολο** αν κάθε δύο κορυφές του δε συνδέονται με ακμή. Θεωρήστε τα προβλήματα απόφασης: (i) **Independent Set**, το οποίο δεδομένης εισόδου  $(G, k)$  έχει θετική απάντηση αν και μόνο αν το γράφημα  $G$  περιέχει κάποιο ανεξάρτητο σύνολο μεγέθους τουλάχιστον  $k$ , (ii) **Clique**, το οποίο δεδομένης εισόδου  $(G, k)$  έχει θετική απάντηση μεγέθους τουλάχιστον  $k$  και (iii) **Dense Subgraph**, το οποίο δεδομένου ενός γραφήματος  $G$  και δύο θετικών ακέραιων  $a, b$  έχει θετική απάντηση αν και μόνο αν το  $G$  περιέχει ένα σύνολο κορυφών μεγέθους  $a$  έτσι ώστε να υπάρχουν τουλάχιστον  $b$  ακμές μεταξύ τους.

(α) Δείξτε ότι αν είναι γνωστό ότι το πρόβλημα **Independent Set** είναι NP-πλήρες, τότε και το πρόβλημα **Clique** είναι NP-πλήρες.

(β)\* Δείξτε επίσης ότι το πρόβλημα **Dense Subgraph** είναι NP-πλήρες.

**Προθεσμία υποβολής και οδηγίες.** Οι απαντήσεις θα πρέπει να υποβληθούν έως τις 15/11/2019, στις 23:59, σε ηλεκτρονική μορφή, στο mycourses (φροντίστε το τελικό αρχείο να είναι μεγέθους <2MB συνολικά). Τα ερωτήματα με (\*) είναι προαιρετικά. Εφ'όσον τα επιλύσετε μπορούν να προσμετρηθούν στη θέση ερωτημάτων που δεν απαντήσατε.

Συνιστάται *θερμά* να αφιερώσετε ικανό χρόνο για να λύσετε τις ασκήσεις μόνοι σας προτού καταφύγετε σε οποιαδήποτε *θεμιτή* βοήθεια (διαδίκτυο, βιβλιογραφία, συζήτηση με συμφοιτητές). Σε κάθε περίπτωση, οι απαντήσεις θα πρέπει να είναι *αυστηρά* ατομικές.

Για να βαθμολογηθείτε θα πρέπει να παρουσιάσετε σύντομα τις λύσεις σας σε ημέρα και ώρα που θα ανακοινωθεί αργότερα.

Για απορίες / διευκρινίσεις: στείλτε μήνυμα στη διεύθυνση [focs@corelab.ntua.gr](mailto:focs@corelab.ntua.gr).