Ε.Μ.Π. Σχολή Η.Μ.&Μ.Υ. Σήματα και Συστήματα Ακαδ. έτος: 2018-2019

Ημερομηνία 22-12-2018 ***<u>1η Σειρά Ασκήσεων</u>*** Παραδοτέα: 16-01-2019

Οι λύσεις της πρώτης σειράς ασκήσεων θα παραδίδονται **<u>ηλεκτρονικά</u>** και **<u>θα υποβάλλονται στην ιστοσελίδα του μαθήματος στο mycourses.ntua.gr</u>** (**<u>μέχρι και τις 16-01-2019</u>**). Αρκεί η χειρόγραφη επίλυση των ασκήσεων και η ηλεκτρονική υποβολή **<u>ενός μοναδικού αρχείου .pdf</u>** με σκαναρισμένα αντίγραφα όλων των σελίδων των χειρόγραφων λύσεων.

Επισημαίνεται ότι οι εργασίες είναι **<u>ατομικές</u>**.

<u>Παρατήρηση</u>: Σε όλες τις ασκήσεις ισχύει: $a = AM \bmod 10 + 1$, όπου AM ο αριθμός μητρώου σας.

<u>Άσκηση 1.1.</u>

Δίδεται το σήμα συνεχούς χρόνου $x(t) = \begin{cases} t+5a, & -5a \le t < -3a \\ 2a, & -3a \le t < 0 \\ -4t+2a, & 0 \le t < 2a \\ 5t-16a, & 2a \le t < 4a \\ -3t+16a, & 4a \le t < 7a \\ 0, & \text{αλλού} \end{cases}$. Ζητείται να σχεδιαστεί το $x(t)$ και ακολούθως να σχεδιαστούν τα παρακάτω σήματα:

(α) $x_1(t) = x(t+a)$

(β) $x_2(t) = x(2t-a)$

(γ) $x_3(t) = -ax\left(\frac{t}{3}\right) + 3a$

(δ) $x_4(t) = x(t-a) - x(a-at)$

Ζητείται να γίνουν αναλυτικά οι επιμέρους στοιχειώδεις μετατροπές του σήματος $x(t)$, ώστε να προκύψουν τα σήματα $x_i(t),\ i = 1,2,3,4$.

<u>Άσκηση 1.2.</u>

Δίδονται τα ακόλουθα σήματα:

(α) $x_1(t) = \left[\cos\left(\frac{\pi}{5}t\right)\right]^{a \bmod 3} + \left[\sin\left(\frac{\pi}{4a}t\right)\right]^{3-a \bmod 3} + \cos\left(\frac{\pi}{8}t\right)\sin\left(\frac{\pi}{3a}t\right)$

(β) $x_2(t)=\exp\left[j\left(at+\frac{\pi}{3a}\right)\cdot rect\left(\frac{t}{2a}\right)\right]+a$

(γ) $x_3(t)=\sin\left(\frac{\pi}{18a}t\right)-\sum_{k=-\infty}^{+\infty}\delta\left(\frac{t+6ak}{3a}\right)$

(δ) $x_4[n]=\exp\left(j\left(\frac{\pi}{6a}n^2+\frac{\pi}{9a}n^3\right)\right)$

(ε) $x_4[n]=\sum_{k=-\infty}^{+\infty}[\delta(n-k(a\bmod 4+1))-\delta(n-k(a\bmod 6+1))+\delta(n-k(a\bmod 9+1))]+\cos\left(\frac{\pi}{3a}n\right)$

(στ) $x_6[n]=(j)^n+\cos^3\left(\frac{\pi}{3}n\right)+4\sin\left(\frac{\pi}{a}n\right)\cdot\cos\left(\frac{\pi}{6}n\right)+\sin^3\left(\frac{\pi}{8}n\right)$

Ζητείται να αποφανθείτε σχετικά με την περιοδικότητα ή όχι των σημάτων αυτών αιτιολογώντας επαρκώς τις απαντήσεις σας και για τις περιπτώσεις περιοδικών σημάτων, να υπολογιστεί η θεμελιώδης περίοδός τους.

<u>Άσκηση 1.3.</u>

Δίδονται οι αποκρίσεις $y(t)$ (ή $y[n]$) συστημάτων συνεχούς (ή διακριτού) χρόνου σε εισόδους $x(t)$ (ή $x[n]$), οι οποίες έχουν ως ακολούθως:

(α) $y(t)=\exp(jat)\cdot x([a\bmod 4+1]t-a)$

(β) $y(t)=\cos\left(3\pi t+\frac{\pi}{8}\right)+\frac{dx(t-a)}{dt}$

(γ) $y[n]=\sin\left(\frac{a\pi}{2}x[n]\right)$

(δ) $y[n]=\frac{1}{2n+1}x[-2n]+1$

Ζητείται να αποφανθείτε σχετικά με τη γραμμικότητα, το χρονικά αναλλοίωτο, τη μνήμη, την αιτιατότητα, την ευστάθεια (κατά την έννοια BIBO) και την αντιστρεψιμότητα ή όχι των συστημάτων αυτών αιτιολογώντας επαρκώς τις απαντήσεις σας.

<u>Άσκηση 1.4.</u>

Δίδονται τα παρακάτω σήματα:

$x[n]=n[u[n+a]-u[n-10+a]]$

$h_1[n]=(n^a+1)\cdot u[-n]$

$h_2[n] = \exp\left(j\frac{a\pi}{3}n\right)\cdot u[n]$

$h_3[n] = 2u[n+a+1] - 4u[n] + 2u[n+a-5]$

$h_4[n] = \sin\left(\frac{\pi}{4}n\right)\cdot \sum_{k=n-3}^{n+3}\delta[k]$

$h_5[n] = h_3[n] * h_4[n]$

Αφού σχεδιαστούν τα δεδομένα σήματα $x[n]$ και $h_i[n]$, ζητείται να υπολογιστούν και να σχεδιαστούν τα σήματα $y_i[n] = x[n] * h_i[n]$, $i = 1,2,3$, καθώς και το σήμα $h_5[n]$ χρησιμοποιώντας διαφορετική μέθοδο υπολογισμού για κάθε απαιτούμενη συνέλιξη.

<u>Άσκηση 1.5.</u>

Δίδεται Γραμμικό και Χρονικά Αναλλοίωτο σύστημα S_1, το οποίο συνδέεται σε σειρά με όμοιο σύστημα S_2. Τα δύο συστήματα παρουσιάζουν κρουστική απόκριση $h(t) = u(t+a) - u(t-a) + a\cdot\delta(t)$. Στην είσοδο του συστήματος S_1 εφαρμόζεται διέγερση $x(t) = u(t+2a) - 2u(t) + u(t-2a)$. Ζητείται να υπολογιστούν και να σχεδιαστούν τα σήματα εξόδου $y_1(t)$ και $y_2(t)$ των συστημάτων S_1 και S_2 αντιστοίχως. Επαναλάβατε τους υπολογισμούς όταν στην είσοδο του συστήματος S_1 εφαρμόζεται διέγερση $x'(t) = e^{-2at}u(t-a)$.

<u>Άσκηση 1.6.</u>

(α) Θεωρήστε το περιοδικό σήμα $x(t)$, το οποίο έχει θεμελιώδη περίοδο $T = 2a$ και για το οποίο ισχύει: $x(t) = at - \delta\left(t+\frac{T}{4}\right) + \delta\left(t-\frac{T}{4}\right), |t| \le \frac{T}{2}$. Αφού σχεδιαστεί το σήμα στο πεδίο του χρόνου, να υπολογιστούν οι συντελεστές c_m του αναπτύγματος του σήματος αυτού σε μιγαδική σειρά Fourier και να σχεδιαστεί το φάσμα πλάτους $|c_m|$.

(β) Έστω περιοδικό σήμα $x(t)$ με θεμελιώδη περίοδο T, το οποίο έχει συντελεστές της μιγαδικής σειράς Fourier ίσους με c_m. Να αποδειχθεί το ακόλουθο:

$$\frac{1}{T}\int_T |x(t)|^2\,dt = \sum_{m=-\infty}^{+\infty}|c_m|^2$$

(γ) Θεωρήστε πραγματικό περιοδικό σήμα $x(t)$, το οποίο αναπτύσσεται σε μιγαδική σειρά Fourier με συντελεστές c_m^x: $c_1^x = \exp\left(j\frac{\pi}{3}\right)$, $c_2^x = 2\exp\left(j\frac{\pi}{4}\right)$, $c_3^x = 3\exp\left(j\frac{\pi}{16}\right)$ και $c_4^x = 2\exp\left(j\frac{\pi}{8}\right)$ για συχνότητες 100, 200, 300 και 400 Hz αντιστοίχως.. Θεωρήστε δεύτερο πραγματικό περιοδικό σήμα $y(t)$, το οποίο αναπτύσσεται σε μιγαδική σειρά Fourier με συντελεστές c_m^y: $c_1^y = 3\exp(j\pi)$, $c_2^y = 2\exp\left(j\dfrac{\pi}{3}\right)$, $c_3^y = \exp\left(j\dfrac{\pi}{16}\right)$ και $c_4^y = \exp\left(j\dfrac{\pi}{4}\right)$ για συχνότητες 50, 100, 150 και 200 Hz αντιστοίχως. Εάν δεν υπάρχουν άλλες αρμονικές στα δύο σήματα, ζητείται να υπολογιστούν τα ακόλουθα:

$$\frac{1}{T_x}\int_{T_x}|x(t)|^2\,dt\,,\ \frac{1}{T_y}\int_{T_y}|y(t)|^2\,dt \text{ και } \frac{1}{T_y}\int_{T_y}x(t)\cdot y(t)dt$$

όπου T_x και T_y οι περίοδοι των σημάτων $x(t)$ και $y(t)$ αντιστοίχως.

<u>Άσκηση 1.7.</u>

Υπολογίστε το μετασχηματισμό Fourier των παρακάτω σημάτων συνεχούς χρόνου καθώς και τη μέση τιμή τους:

(α) $x_1(t) = \dfrac{1}{\pi t}$

(β) $x_2(t) = \begin{cases} -t, & -a-2 \le t < -a \\ a\sin(2\pi t), & -a \le t < 0 \\ t^2, & 0 \le t < a+2 \\ 0, & \alpha\lambda\lambda o\acute{\upsilon} \end{cases}$

(γ) $x_3(t) = \exp(-at)u\left(\dfrac{t-a}{a}\right)$

Ακολούθως, υπολογίστε τα σήματα συνεχούς χρόνου, τα οποία αντιστοιχούν στους παρακάτω μετασχηματισμούς Fourier:

(δ) $X_4(\omega) = \left[\dfrac{\sin(a\omega)}{\omega - a}\right]^2$

(ε) $X_5(\omega) = \operatorname{sgn}(\omega - a)\cdot\cos(a\omega)$

(στ) $X_6(\omega) = \begin{cases} \omega^2, & -a \le \omega \le a \\ e^{-a\omega}, & \omega > a \\ 0, & \alpha\lambda\lambda o\acute{\upsilon} \end{cases}$

<u>Άσκηση 1.8.</u>

Υπολογίστε το μετασχηματισμό Fourier (DTFT) των παρακάτω σημάτων διακριτού χρόνου:

(α) $x_1[n] = 3^{an}\cdot u[-n-a]$

(β) $x_2[n]=\cos\left(\dfrac{3an}{a+1}\right)+\sin(2an)\cdot\{u[n]-u[n-3a]\}$

Ακολούθως, υπολογίστε τα σήματα διακριτού χρόνου, τα οποία αντιστοιχούν στους παρακάτω μετασχηματισμούς Fourier (DTFT):

(γ) $X_3(\Omega)=\cos^2\left(\Omega+\dfrac{a}{10}\right)$

(δ) $X_4(\Omega)=\dfrac{1-e^{j\Omega a}}{1-(-1/a)e^{-j\Omega}}$

(ε) Τέλος, υπολογίστε την έξοδο $y_3[n]$ ενός Γραμμικού και Χρονικά Αναλλοίωτου (ΓΧΑ) Συστήματος με απόκριση μοναδιαίου παλμού $h[n]=\left(\dfrac{a}{a+1}\right)^n\cdot\cos\left(\dfrac{\pi n}{2}\right)\cdot u[n]$, όταν στην είσοδό του διαβιβαστεί σήμα διακριτού χρόνου $x[n]=\cos\left(\dfrac{\pi n}{2}\right)+\delta[n-a]$.

<u>Άσκηση 1.9.</u>

Δίδεται Γραμμικό και Χρονικά Αναλλοίωτο σύστημα συνεχούς χρόνου, με είσοδο $x(t)$ και έξοδο $y(t)$, το οποίο παρουσιάζει απόκριση συχνότητας: $H(\omega)=\dfrac{3+3j\omega+(j\omega)^2}{4+8j\omega+5(j\omega)^2+(j\omega)^3}$

Ζητείται να εκτελεστούν τα ακόλουθα:

(α) Υπολογισμός της διαφορικής εξίσωσης που περιγράφει το δεδομένο σύστημα και της κρουστικής απόκρισης $h(t)$ αυτού. Σας δίδεται ότι ένας πόλος του συστήματος έχει μέτρο ίσο με τη μονάδα.

(β) Αποφανθείτε σχετικά με την αιτιατότητα, τη μνήμη και την ευστάθεια (κατά την έννοια BIBO) ή όχι του συστήματος αυτού αιτιολογώντας επαρκώς τις απαντήσεις σας.

(γ) Υπολογισμός του σήματος $x(t)$ που πρέπει να εφαρμοστεί στην είσοδο του συστήματος, ώστε να έχουμε απόκριση $y(t)=e^{-2at}u(t+a)$.

<u>Άσκηση 1.10.</u>

(α) Δίδονται σήματα συνεχούς χρόνου $x_1(t)$ και $x_2(t)$ τα οποία έχουν τους ακόλουθους μετασχηματισμούς Fourier: $X_1(\omega)=\exp(-at)\cdot[2u(\omega+4a)-u(a\omega)-u(3\omega-15a)]$ και $X_2(\omega)=rect\left(\dfrac{\omega}{6a}\right)$. Να υπολογιστεί η μέγιστη περίοδος δειγματοληψίας για κάθε ένα από τα παρακάτω σήματα, ώστε να είναι δυνατή η ανακατασκευή αυτών βάσει των δειγμάτων τους: (i) $x_1(t+a)+x_2(t-2a)$, (ii) $[x_1(t)]^3$, (iii) $[x_1(t)]^3 \cdot x_2(t)$ και (iv) $x_1(t) * [x_2(t)]^3$.

(β) Δίδεται αιτιατό Γραμμικό και Χρονικά Αναλλοίωτο (Γ.Χ.Α.) σύστημα συνεχούς χρόνου S_1, στο οποίο εφαρμόζεται είσοδος $x_c(t)=[\cos(2\pi a t)]^2$ και το οποίο ικανοποιεί την ακόλουθη διαφορική εξίσωση: $\frac{dy_c(t)}{dt}+a \cdot y_c(t)=x_c(t)$. Το S_1 ακολουθείται από σύστημα δειγματοληψίας με κρουστικούς παλμούς, το οποίο παράγει έξοδο $s(t)=\sum_{n=-\infty}^{+\infty}\delta(t-nT_s)$. Το δειγματοληπτημένο σήμα εφαρμόζεται στην είσοδο μετατροπέα A/D, οπότε παράγεται στην έξοδό του σήμα διακριτού χρόνου $y[n]=y_c(nT)$. Το $y[n]$ εφαρμόζεται στην είσοδο Γ.Χ.Α. συστήματος διακριτού χρόνου S_2, οπότε παράγεται στην έξοδό του σήμα $z[n]$.

Ζητείται να υπολογιστούν τα ακόλουθα: (i) το σήμα εξόδου $y_c(t)$ του συστήματος συνεχούς χρόνου, (ii) η μέγιστη περίοδος δειγματοληψίας T_s, η οποία θα επέτρεπε την ανακατασκευή του $y_c(t)$ από τα δείγματά του, (iii) το σήμα εξόδου $y[n]$ του συστήματος δειγματοληψίας, για T_s ίση με τη μέγιστη δυνατή που υπολογίσατε στο προηγούμενο ερώτημα, (iv) η έξοδος $z[n]$ του S_2, αν ισχύει $h_2[n]=\dfrac{\sin\left(\frac{\pi}{a}n-\pi\right)}{n-a}$.

Σε όλα τα παραπάνω ερωτήματα να γίνουν αναλυτικά οι υπολογισμοί και να αιτιολογηθεί η εργασία και τα αποτελέσματά σας.