



Εθνικό Μετσόβιο Πολυτεχνείο
Σχολή Ηλεκτρολόγων Μηχανικών και Μηχανικών Υπολογιστών

Θεμελιώδη Θέματα Επιστήμης Υπολογιστών, 2020-21

1η σειρά γραπτών ασκήσεων

(αυτόματα – τυπικές γλώσσες – γραμματικές
λογική – υπολογισιμότητα – πολυπλοκότητα)

Άσκηση 1.

Σχεδιάστε πεπερασμένο αυτόματο με αλφάβητο $\{0, \dots, 9\}$ που να διαβάζει τα ψηφία ενός ακεραίου αριθμού n (τα περισσότερα σημαντικά πρώτα) και να αποδέχεται αν $n \bmod 5 = 3$.

Άσκηση 2.

Δίνονται οι παρακάτω γλώσσες:

$L_1 = \{w \in \{a, b, c\}^* \mid \text{η } w \text{ περιέχει την συμβολοσειρά 'bac' και όχι τη συμβολοσειρά 'bacc'}\}$.

$L_2 = \{w \in \{0, 1\}^* \mid \text{η } w \text{ είναι δυαδική αναπαράσταση ακεραίου της μορφής } 4^k + 1, \text{ για } k \geq 1\}$

$L_3 = \{w \in \{a, b\}^* \mid \text{η } w \text{ έχει μήκος τουλάχιστον 4 και στην προ-προτελευταία θέση περιέχει 'b'}\}$

(i) Κατασκευάστε DFA με όσο το δυνατόν λιγότερες καταστάσεις για τις γλώσσες L_1 και L_2 :

Υπόδειξη: όπου βοηθάει, σχεδιάστε και συνδυάστε αυτόματα για απλούστερες γλώσσες.

(ii) Δώστε κανονική παράσταση για τις γλώσσες L_1 και L_2 .

(iii) Κατασκευάστε NFA για την γλώσσα L_3 και βρείτε το ισοδύναμο DFA. Είναι το ελάχιστο; Αποδείξτε. Αν όχι, βρείτε το.

Άσκηση 3.

Είναι κανονικές οι παρακάτω γλώσσες; Αν μια γλώσσα δεν είναι κανονική, να το αποδείξετε χρησιμοποιώντας είτε το Λήμμα Άντλησης είτε κάποια ιδιότητα κλειστότητας. Αν μια γλώσσα είναι κανονική, να το αιτιολογήσετε κατάλληλα.

α) $\{0^n 1^+ 0^m : n, m \geq 1, n \neq m\}$.

β) $\{0^n 1^+ 0^m : n, m \geq 1, n = m\}$.

γ) $\{0^+ 1^+ 0^+\}$.

δ) $\{ww : w \in \{0, 1\}^* \text{ το μήκος της } w \text{ είναι } \leq 2^{1000}\}$.

Σημείωση: 1^+ είναι η συμβολοσειρά 11^* , και 0^+ είναι η συμβολοσειρά 00^* .

Άσκηση 4.

(α) Έστω $G : S \rightarrow aaA, A \rightarrow aa \mid aaA \mid B, B \rightarrow b \mid bB$. Περιγράψτε σε φυσική γλώσσα τη γλώσσα που παράγει η G .

(β) Δώστε γραμματική για τη γλώσσα $\{w \in \{0, 1\}^* \mid \text{το } w \text{ δεν περιέχει δύο συνεχόμενα 0}\}$.

(γ) Δώστε γραμματική για τη γλώσσα $\{w \in \{0, 1\}^* \mid \text{το πλήθος των 1 στο } w \text{ είναι πολλαπλάσιο του 3}\}$.

Άσκηση 5.

Εξετάστε αν η κλάση των γλωσσών χωρίς συμφραζόμενα είναι κλειστή ως προς τις πράξεις **ένωση** και **παράθεση**.

Εξάσκηση σε αυτόματα

Εξασκηθείτε στο σχεδιασμό και κατανόηση λειτουργίας των DFA, NFA και NFA_{ϵ} χρησιμοποιώντας το εργαλείο που θα βρείτε στη σελίδα <http://automata.discrete.gr/> (Ευχαριστίες στους δημιουργούς, απόφοιτους της ΣΗΜΜΥ, Μανόλη Ζαμπετάκη και Διονύση Ζήνδρο).

Επαληθεύστε την ορθή λειτουργία των αυτομάτων που σχεδιάσατε στις προηγούμενες ασκήσεις (όπου γίνεται) με χρήση του εργαλείου αυτού.

Προαιρετικά: ελάτε σε επαφή με τους δημιουργούς της εφαρμογής για να συμβάλετε στην ανάπτυξη νέων λειτουργιών ή/και βελτίωση του interface.

Άσκηση 6. (Υπολογισιμότητα)

Αποδείξτε ότι το πρόβλημα του ελέγχου αν ένα πρόγραμμα τερματίζει με είσοδο την κενή συμβολοσειρά είναι μη επιλύσιμο.

Υπόδειξη: Δείξτε ότι αν υπάρχει πρόγραμμα Π που να παίρνει σαν είσοδο ένα οποιοδήποτε πρόγραμμα Π' και να αποφαίνεται αν το Π' τερματίζει με είσοδο την κενή συμβολοσειρά, τότε θα μπορούσαμε να λύσουμε το Πρόβλημα Τερματισμού τροφοδοτώντας το Π με κατάλληλη είσοδο Π' .

Άσκηση 7. (Λογική και Αλγόριθμοι)

Διατυπώστε αποδοτικό αλγόριθμο που να δέχεται σαν είσοδο οποιονδήποτε τύπο της προτασιακής λογικής σε μορφή Horn και να αποφαίνεται αν είναι ικανοποιήσιμος. Σε περίπτωση που είναι θα πρέπει να επιστρέφει μία ανάθεση αληθοτιμών που ικανοποιεί τον τύπο.

Π.χ. με είσοδο $(x_1 \vee \neg x_2 \vee \neg x_3) \wedge (\neg x_2 \vee x_3) \wedge (\neg x_4 \vee x_5 \vee \neg x_6) \wedge (x_6)$ θα πρέπει να επιστρέφει 'Ναι' και μία από τις αναθέσεις αληθοτιμών στις (x_1, \dots, x_6) που ικανοποιούν τον τύπο, π.χ. την ανάθεση (True, False, True, False, True, True) ενώ με είσοδο $(\neg x_1 \vee \neg x_2) \wedge (\neg x_1 \vee x_2) \wedge (x_1 \vee \neg x_2 \vee \neg x_3) \wedge (x_2)$ θα πρέπει να επιστρέφει 'Όχι'.

Θεωρήστε ότι όλες οι μεταβλητές ενός τύπου δίνονται στη μορφή x_n , όπου n ένας φυσικός αριθμός.

Άσκηση 8. (Πολυπλοκότητα: αναγωγές προς απόδειξη δυσκολίας)

Έστω ένα μη κατευθυνόμενο γράφημα $G = (V, E)$. **Κλίκα** λέγεται ένα υπογράφημα του G το οποίο είναι πλήρες (δηλ. όλες οι κορυφές του ενώνονται με ακμή). Ένα σύνολο κορυφών του G λέγεται **ανεξάρτητο σύνολο** αν κάθε δύο κορυφές του δε συνδέονται με ακμή. Θεωρήστε τα προβλήματα απόφασης: (i) **Independent Set**, το οποίο δεδομένης εισόδου (G, k) έχει θετική απάντηση αν και μόνο αν το γράφημα G περιέχει κάποιο ανεξάρτητο σύνολο μεγέθους τουλάχιστον k , (ii) **Clique**, το οποίο δεδομένης εισόδου (G, k) έχει θετική απάντηση μεγέθους τουλάχιστον k και (iii) **Dense Subgraph**, το οποίο δεδομένου ενός γραφήματος G και δύο θετικών ακέραιων a, b έχει θετική απάντηση αν και μόνο αν το G περιέχει ένα σύνολο κορυφών μεγέθους a έτσι ώστε να υπάρχουν τουλάχιστον b ακμές μεταξύ τους.

(α) Δείξτε ότι αν είναι γνωστό ότι το πρόβλημα **Clique** είναι NP-πλήρες, τότε και το πρόβλημα **Independent Set** είναι NP-πλήρες.

(β) Δείξτε επίσης ότι το πρόβλημα **Dense Subgraph** είναι NP-πλήρες.

Προθεσμία υποβολής και οδηγίες. Οι απαντήσεις θα πρέπει να υποβληθούν έως τις 12/11/2020, στις 22:00, σε ηλεκτρονική μορφή, στο mycourses (φροντίστε το τελικό αρχείο να είναι μεγέθους <2MB συνολικά). Συνιστάται *θερμά* να αφιερώσετε ικανό χρόνο για να λύσετε τις ασκήσεις μόνοι σας προτού καταφύγετε σε οποιαδήποτε *θεμιτή* βοήθεια (διαδίκτυο, βιβλιογραφία, συζήτηση με συμφοιτητές). Σε κάθε περίπτωση, οι απαντήσεις θα πρέπει να είναι *αυστηρά* ατομικές.

Για να βαθμολογηθείτε θα πρέπει να παρουσιάσετε σύντομα τις λύσεις σας (διαδικτυακά) σε ημέρα και ώρα που θα ανακοινωθεί αργότερα.

Για απορίες / διευκρινίσεις: στείλτε μήνυμα στη διεύθυνση focs@corelab.ntua.gr.