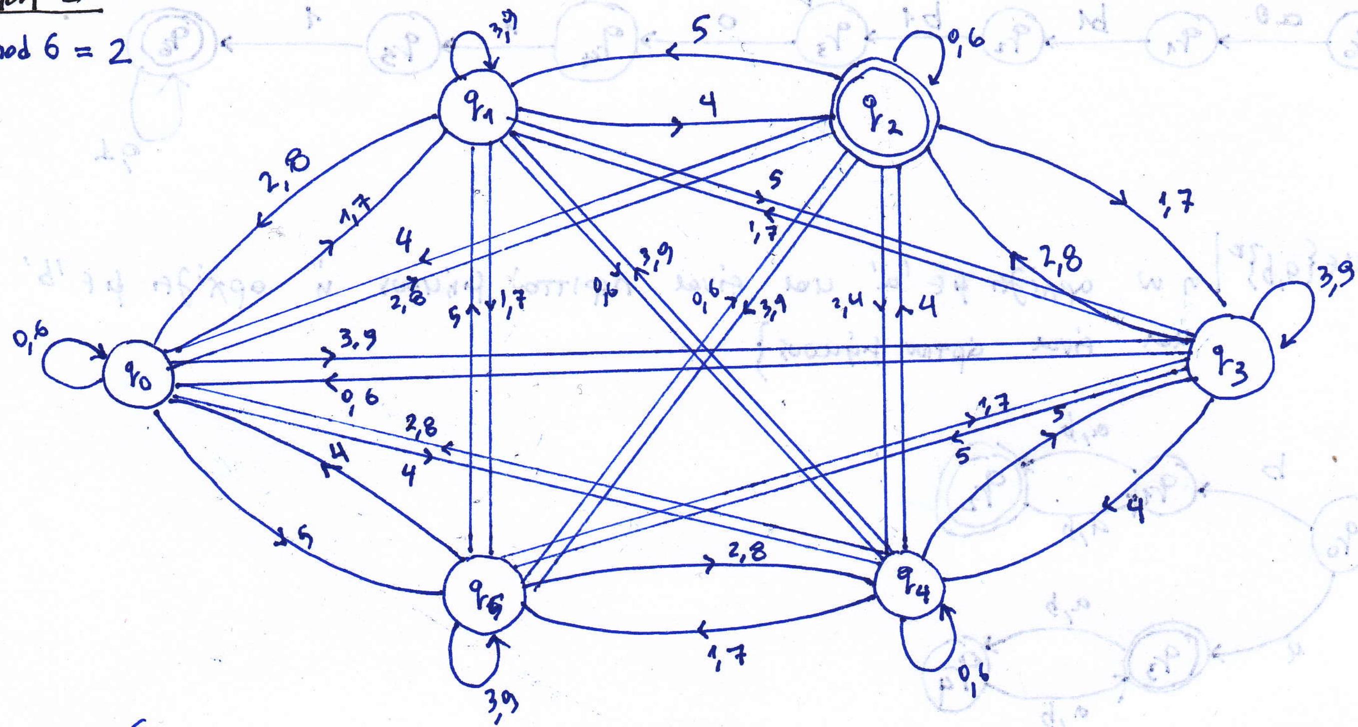
Θεμελιώδη Θέματα Επιστήμης Υπολογιστών

Χρηστος Τσουφης
03117176

1η Σειρά Ασκήσεων

Άσκηση 1

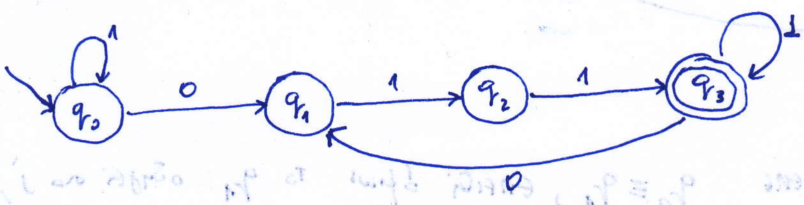
$n \bmod 6 = 2$



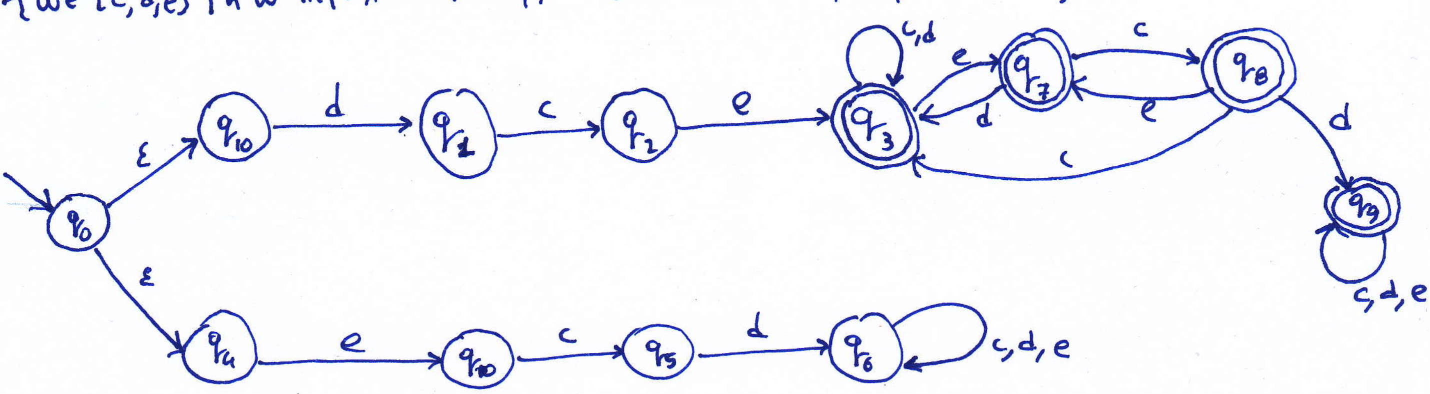
$n \bmod 6 = 2 \Leftrightarrow \begin{cases} (n_1 + n_2 + \ldots + n_k) \bmod 3 = 2 \\ n_k \bmod 2 = 0 \end{cases}$

Άσκηση 2

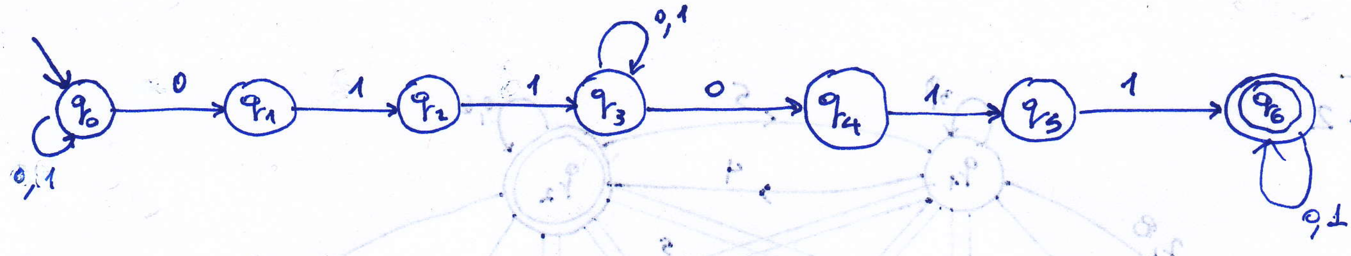
i) $L_1 = \{w \in \{0,1\}^* \mid$ κάθε '0' που εμφανίζεται στην w ακολουθείται από τουλάχιστον δύο '1' $\}$



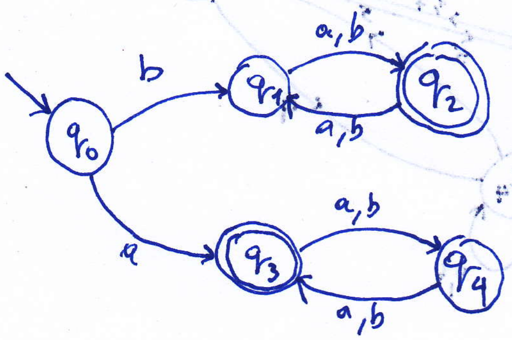
$L_2 = \{w \in \{c,d,e\}^* \mid$ η w περιέχει την συμβ. 'dee' και όχι τη συμβ. 'ecd' $\}$



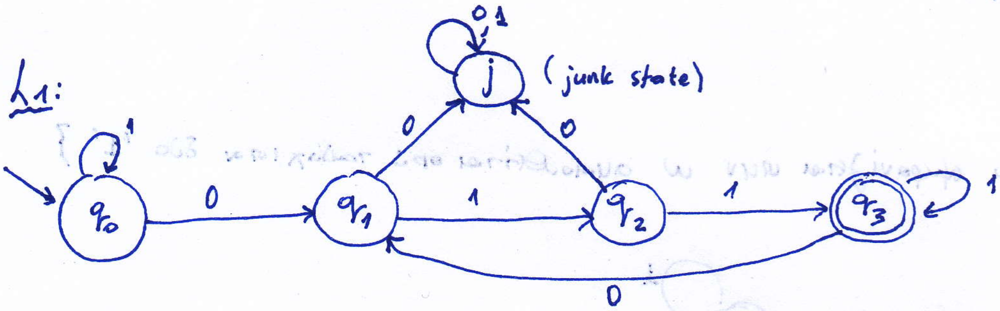
$L_3 = \{ \omega \in \{0,1\}^* \mid$ η ω περιέχει 2 τουλάχιστον εμφανίσεις της συμβολοσειράς '001' $\}$



$L_4 = \{ \omega \in \{a,b\}^* \mid$ η ω αρχίζει με 'a' και είναι περιττού μήκους ή αρχίζει με 'b' και είναι άρτιου μήκους $\}$



ii) L_1:

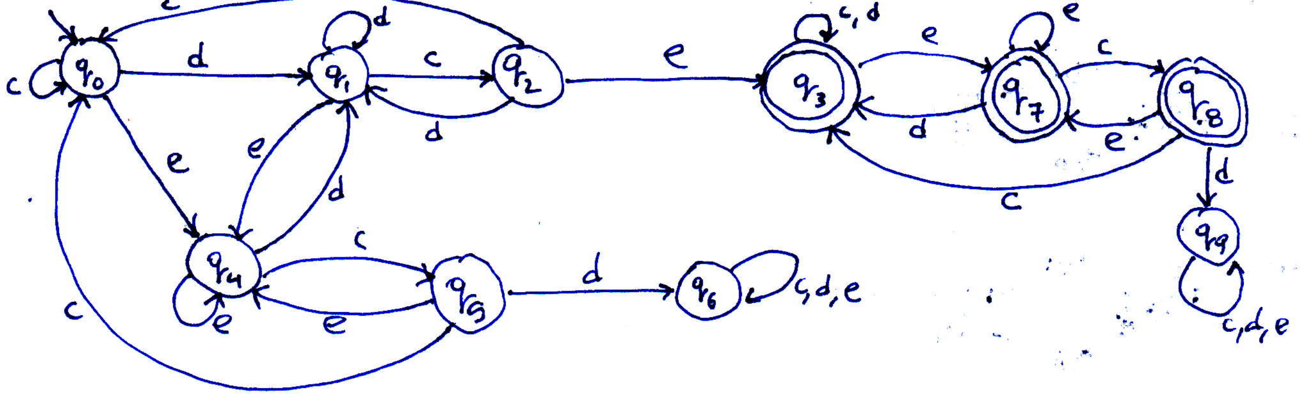


q_1			
q_2	X_1	X_1	
q_3	X_0	X_0	X_0
	q_0	q_1	q_2

Θα έπρεπε $q_0 \equiv q_1$, επειδή όμως το q_1 οδηγεί στο j, ενώ το q_0 όχι, δεν μπορούν να συγχωνευθούν.

Οπότε, το ελάχιστο DFA είναι αυτό που έχει ήδη σχεδιασθεί.

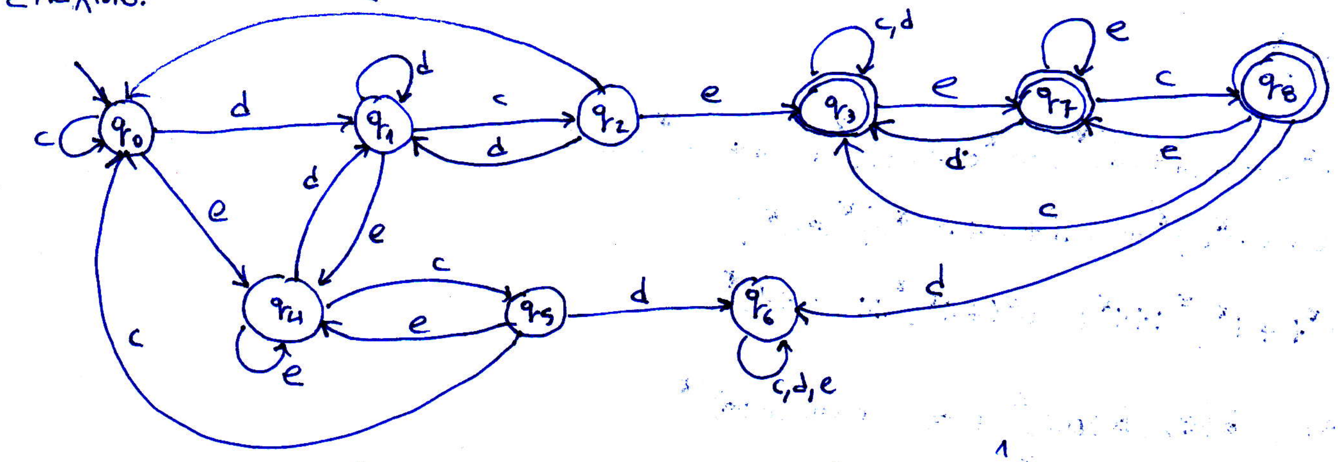
L_2:



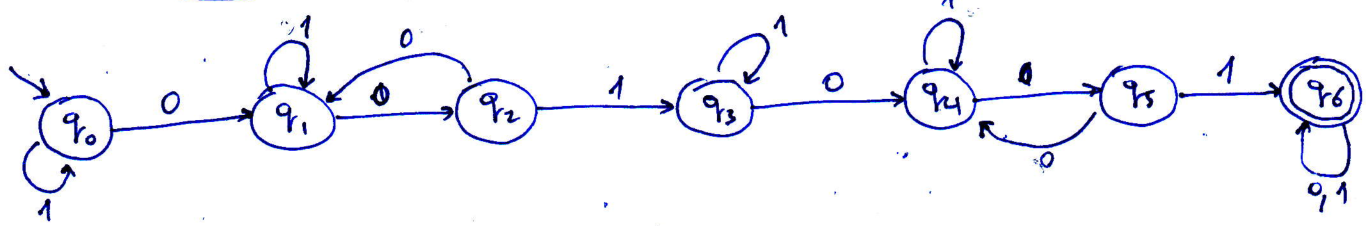
q_1	X_2								
q_2	X_1	X_1							
q_3	X_0	X_0	X_0						
q_4	X_4	X_2	X_1	X_0					
q_5	X_3	X_2	X_1	X_0	X_3				
q_6	X_3	X_2	X_1	X_0	X_3	X_4			
q_7	X_0	X_0	X_0	X_2	X_0	X_0	X_0		
q_8	X_0	X_0	X_0	X_1	X_0	X_0	X_0	X_1	
q_9	X_3	X_1	X_1	X_0	X_3	X_4		X_0	X_0
	q_0	q_1	q_2	q_3	q_4	q_5	q_6	q_7	q_8

Είναι ελάχιστο όταν συγχωνεύσουμε την κατάσταση $q_6 \equiv q_9$

Ελάχιστο:



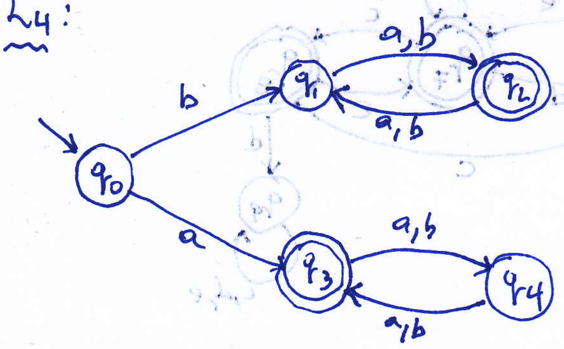
L_3:



q_1	X_5					
q_2	X_4	X_4				
q_3	X_3	X_3	X_3			
q_4	X_2	X_2	X_2	X_2		
q_5	X_1	X_1	X_1	X_1	X_1	
q_6	X_0	X_0	X_0	X_0	X_0	X_0
	q_0	q_1	q_2	q_3	q_4	q_5

Είναι το ελάχιστο DFA.

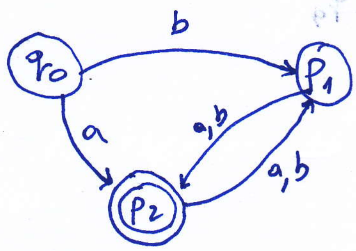
L_4:



q_1	x1			
q_2	x0	x0		
q_3	x0	x0		
q_4	x1		x0	x0
	q_0	q_1	q_2	q_3

Άρα $q_1 \equiv q_4 = p_1$, $q_2 \equiv q_3 = p_2$

Ελάχιστο:



iii)

$L_1: (1+011)^*$

$L_2: (c+ee^*c+d(d+cd)^*(ee^*c+cc))^*d(d+cd)^*ce(cd+c+ee^*c)^*+(d+c+ee^*c)^*ee^*)$

$L_3: 1^*0(0^*1+1^*)^*111^*0(0^*1+1^*)^*11(0+1)^*$

$L_4: b(a+b)((a+b)(a+b))^*+a((b+a)(b+a))^*$

Άσκηση 4

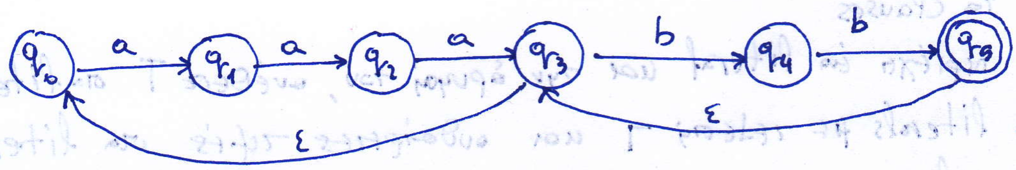
α) $G: S \to aS \mid aSbS \mid \varepsilon$

Οι κανόνες παραγωγής της γραμματικής G είναι οι εξής:

$S \to aS \lor aSbS \lor \varepsilon$. Ο κανόνας $S \to aS$ δημιουργεί προθέματα από a, ο κανόνας $S \to \varepsilon$ ολοκληρώνει την παραγωγή της συμβολοσειράς και ο κανόνας $S \to aSbS$ παράγει και a και b. Όμως, το συνολικό πλήθος των a της παραγόμενης λέξης ισούται με τον αριθμό των παραγωγών που υπακούουν στους κανόνες $S \to aS$ και $S \to aSbS$, ενώ το πλήθος των b ισούται με τον αριθμό των παραγωγών που ακολουθούν τον κανόνα $S \to aSbS$. Άρα, το συνολικό πλήθος των a είναι μεγαλύτερο ή ίσο του πλήθους των b. Τέλος, ο κανόνας $S \to aSbS$ αποτελεί βεβαίωση ότι τα b που παράγονται από αυτόν θα βρίσκονται δεξιότερα από τα a που παράγονται από αυτόν και συνεπώς, κάθε λέξη που παράγεται από αυτή την γραμματική ικανοποιεί την ιδιότητα $L(G) = \{x \mid$ κάθε πρόθεμα του x έχει τουλ. τόσα a όσα b$\}$ και άρα η γραμματική G παράγει την γλώσσα L.

β) $L = \{a^{3n}b^{2n}, n \geq 1\}$

$G:\quad V = \{S\},\ T = \{a, b\},\ P = \{S \to aaaSbb \lor aabb\}$



γ) $L = \{w \in \{0,1\}^* \mid$ το w έχει περιττό μήκος και (ακριβώς) στη μέση 111$\}$

$G:\quad V = \{S\},\ T = \{0,1\},\ P = \{S \to 0S0 \mid 0S1 \mid 1S0 \mid 1S1 \mid 111\}$

Άσκηση 5

Για την κλάση των γλωσσών χωρίς συμφραζόμενα ως προς την πράξη αναστροφή ισχύει ότι είναι κλειστή.

Απόδειξη:

Έστω η γραμματική $G = \{V_1, T_1, P_1^R, S_1\}$, όπου για κάθε παραγωγή $x \to w$, που ανήκει στο P_1^R και $v \in S_1$ και το w είναι συμβολοσειρά, περιέχει τόσο τερματικά από το V_1 όσο και μη τερματικά από το T_1. Ισχύει $L(G) = L(G)^R$ και άρα ισχύει η κλειστότητα ως προς την αναστροφή.

Άσκηση 7

- Ένα literal είναι μια ανεξάρτητη μεταβλητή. Ικανοποιείται με ανάθεση T αν δεν έχει τελεστή ¬, και με ανάθεση F, αν έχει τελεστή ¬.
- Ένα clause είναι μια σύζευξη literals. Ικανοποιείται αν δεν υπάρχει ένα literal και την άρνησή του.
- Μια DNF είναι μια διάζευξη clauses. Ικανοποιείται αν υπάρχει ένα ικανοποιήσιμο clause.

Ένα πρόγραμμα που αποφαίνεται για την ικανοποιησιμότητα μιας DNF:

→ Είσοδος: Μια DNF

→ Διάβασε ένα-ένα τα clauses

→ Αν ένα clause δεν περιέχει ένα literal και την άρνησή του, ανάθεσε T στα literals χωρίς τελεστή ¬, F στα literals με τελεστή ¬ και οποιεσδήποτε τιμές στα literals που δεν υπάρχουν στο clause, επέστρεψε "ΝΑΙ" και τις ανατεθειμένες τιμές και τερμάτισε το πρόγραμμα.

→ Αν τελειώσει η ανάγνωση της εισόδου πριν τερματίσει το πρόγραμμα επίστρεψε "όχι" και τερμάτισε το πρόγραμμα.

Άσκηση 3

α) $\{w \in \{0,1\}^* :$ το πλήθος των 0 στην w είναι διπλάσιο του πλήθους των 1$\}$

$L = 0^{2n} \cdot 1^n$

Με χρήση PL:

$z = xyw$

$z = 0^{l_1} 0^{l_2} 0^{2n-l_1-l_2} \cdot 1^n$

$xy^k w = 0^{l_1} 0^{k l_2} 0^{2n-l_1-l_2} \cdot 1^n = 0^{2n - l_2 - k l_2} \cdot 1^n$

Για $k=0$: $2n - l_2 < 2n$

Οπότε δεν είναι κανονική

β) $\{w \in \{0,1\}^* :$ η w είναι παλινδρομική$\}$

Εστω: $z = 0^m \cdot 1^n \cdot 0^{2m}$

$z = xyw = 0^{l_1} 0^{l_2} 0^{m-l_1-l_2} \cdot 1^n \cdot 0^{2m}$

$xy^k w = 0^{l_1} 0^{k l_2} 0^{m-l_1-l_2} \cdot 1^n \cdot 0^{2m} = 0^{m+(k-1)l_2} \cdot 1^n \cdot 0^{2m}$

Όμως $m + (k-1)l_2 = 2m \Leftrightarrow (k-1)l_2 = m \Leftrightarrow k = 1 + \frac{m}{l_2}$

Οπότε η L γίνεται παλίνδρομη άρα η L δεν είναι κανονική.

γ) $\{ww : w \in \{0,1\}^*$ το μήκος της w είναι $\leq 10^{100}\}$

Έστω $z = 000\ldots00$

$x = 0^{l_1}$, $y = 0^{l_2}$, $z = 0^{n-l_1-l_2}$

$z = xy^k w = 0^{l_1} 0^{k l_2} 0^{n-l_1-l_2}$

ΔΔΔ. $n + (k-1)l_2 > 10^{100} \Leftrightarrow k > \frac{10^{100} - n}{l_2} + 1$

Για $k = 10^{100} + 1$ η z προκύπτει $> 10^{100}$ άρα δεν είναι κανονική.

δ) $\{w \in \{0,1\}^* : 0^n 1^m$ όπου $n \neq m\}$

$z = \underbrace{00\ldots0}_{n}\underbrace{111\ldots11}_{m+n}$ $\quad m = m+n$

$x = 0^{l_1}$, $y = 0^{l_2}$, $z = 0^{n-l_1-l_2} \cdot 1^{m+n}$

$z = 0^{l_1} 0^{k l_2} 0^{n-l_1-l_2} \cdot 1^{m+n} = 0^{n+(k-1)l_2} \cdot 1^{m+n}$

ΔΔΣ. $n + (k-1)l_2 = m + n \Leftrightarrow k = 1 + \frac{m}{l_2}$

Οπότε ισχύει ότι $n = m$ άρα δεν είναι κανονική

Άσκηση 6

· Έστω μια απαρίθμηση προγραμμάτων $\Pi_0, \Pi_1, \dots$

· Έστω πρόγραμμα T, όπου $T(\Pi_j, k) =$ 'yes' αν $\Pi_j(r_i)$ σταματάει και 'no' αν δεν σταματάει.

· Έστω πρόγραμμα D όπου κάνει το αντίθετο από το $\Pi_j(r_i)$ και έστω ότι το D είναι το Π_n.

· Το $\Pi_n(n)$: Αν $T(\Pi_n, n) =$ 'yes' (δηλ. σταματάει) τότε $\Pi_n(n)$ τρέχει επ' άπειρον.

· Αν $T(\Pi_n, n) =$ 'no' (δηλ. τρέχει επ' άπειρον) τότε $\Pi_n(n)$ σταματάει.

Έτσι, έχουμε άτοπο για την ύπαρξη του T.

Άσκηση 8

i) Έστω $G(V,E)$. Για να αναχθεί ~~το~~ Independent Set (G,k) σε Clique θα μετατρέψουμε τον G ως εξής:

1) Κρατώντας σταθερό το V, μετατρέπουμε τον G σε πλήρη. Έπειτα $\forall (u,v) \in E$ αφαιρούμε τη συγκεκριμένη ακμή από τον G'.

2) Επιλύουμε το πρόβλημα Clique (G', k)

Απόδειξη:

Αν η έξοδος είναι θετική, τότε υπάρχουν τουλάχιστον k κόμβοι του G', που σχηματίζουν πλήρη υπογράφο. Άρα ανάμεσά τους δεν υπάρχει καμία ακμή στον G και αποτελούν Independent Set (G,k). Στην αντίθετη περίπτωση δεν υπάρχει Independent Set μεγέθους k άρα ούτε και μέγεθος $d \geq k$.

Αφού η αναγωγή είναι πολυωνυμικού χρόνου το πρόβλημα Clique είναι NP-πλήρες.

ii) Αναγωγή του Clique (G,k) σε Dense Subgraph.

Θα επιλύσουμε το πρόβλημα Dense Subgraph πάνω στον ίδιο γράφο, με $a=k$. Για να είναι οι k κόμβοι πλήρως συνδεδεμένοι αρκεί να έχουν ο καθένας μία ακμή προς τους υπόλοιπους άρα $k\frac{(k-1)}{2}$ ακμές μεταξύ τους δηλαδή $B = k\frac{(k-1)}{2}$.

Άρα επιλύουμε το Dense Subgraph $\left(G, k, k\frac{(k-1)}{2}\right)$

Η αναγωγή απαιτεί μόνο μια αριθμητική πράξη άρα και το Dense Subgraph είναι NP-πλήρες.