



Εθνικό Μετσόβιο Πολυτεχνείο
Σχολή Ηλεκτρολόγων Μηχανικών και Μηχανικών Υπολογιστών

Θεμελιώδη Θέματα Επιστήμης Υπολογιστών, 2017-18

Επιμέλεια ασκήσεων: Ε. Ζάχος, Α. Παγουρτζής, Θ. Σούλιου

1η σειρά γραπτών ασκήσεων
(υπολογισμοί - αυτόματα - τυπικές γλώσσες)

Άσκηση 1.

Η αναπαράσταση του αριθμού 2^{29} στο δεκαδικό σύστημα αποτελείται από ακριβώς εννιά διαφορετικά ψηφία. Χωρίς να υπολογίσετε τον αριθμό, βρείτε το ψηφίο $\{0, \dots, 9\}$ που λείπει.

*Υπόδειξη: Για οποιουδήποτε $a, b \in \mathbb{Z}$, $n \in \mathbb{N}^+$, ισχύει $ab \bmod n = (a \bmod n)(b \bmod n) \bmod n$.
Θυμηθείτε και το κριτήριο διαιρετότητας αριθμού με το 9.*

Άσκηση 2.

Ένα κοινωνικό δίκτυο αποτελείται από n φίλους οι οποίοι μπορούν να επικοινωνήσουν ένας-προς-έναν, π.χ. μέσω τηλεφώνου. Στην αρχή ο καθένας έχει ένα μυστικό που θέλει να το μοιραστεί με τους υπόλοιπους. Πόσες ένας-προς-έναν κλήσεις πρέπει να γίνουν ώστε να ανταλλάξουν όλα τα μυστικά; Σχεδιάστε μία σειρά κλήσεων ώστε να ελαχιστοποιείται ο συνολικός αριθμός.

Μπορείτε να βρείτε λύση καλύτερη από $2n - 3$ κλήσεις; Μπορείτε να αποδείξετε ότι η λύση σας είναι η βέλτιστη;

Υπόδειξη: ξεκινήστε αποδεικνύοντας ότι για 5 φίλους αρκούν και χρειάζονται 6 κλήσεις.

Άσκηση 3.

(i) Σχεδιάστε πεπερασμένο αυτόματο με αλφάβητο $\{0, \dots, 9\}$ που να διαβάζει τα ψηφία ενός ακεραίου αριθμού n (από αριστερά προς τα δεξιά) και να αποδέχεται αν $n \bmod 2 = 0$.

(ii) Σχεδιάστε πεπερασμένο αυτόματο με αλφάβητο $\{0, \dots, 9\}$ που να διαβάζει τα ψηφία ενός ακεραίου αριθμού n (από αριστερά προς τα δεξιά) και να αποδέχεται αν $n \bmod 4 = 1$.

Άσκηση 4.

Κατασκευάστε DFA και κανονικές παραστάσεις για κάθε μία από τις γλώσσες:

α) Σύνολο συμβολοσειρών του $\{x, y\}$ των οποίων το πλήθος των $'x'$ είναι πολλαπλάσιο του 4.

β) Σύνολο συμβολοσειρών του $\{x, y\}$ που έχουν δύο συνεχόμενα $'yx'$.

γ) Σύνολο συμβολοσειρών του $\{x, y\}$ που έχουν περιττό πλήθος $'x'$ και τελειώνουν σε $'y'$.

Άσκηση 5.

(i) Κατασκευάστε NFA για τις παρακάτω γλώσσες:

$L_1 = \{w \in \{a, b\}^* \mid \text{η } w \text{ έχει περιττό αριθμό από } a \text{ ή περιέχει τη συμβολοσειρά } 'abba'\}$

$L_2 = \{w \in \{c, d, e\}^* \mid \text{η } w \text{ περιέχει την συμβολοσειρά } 'dce' \text{ και όχι τη συμβολοσειρά } 'ecd'\}$.

$L_3 = \{w \in \{a, b\}^* \mid \text{η } w \text{ περιέχει δύο τουλάχιστον εμφανίσεις της συμβολοσειράς } 'abb'\}$

$L_4 = \{w \in \{a, b\}^* \mid \text{η } w \text{ αρχίζει με } 'a' \text{ και είναι άρτιου μήκους ή αρχίζει με } 'b' \text{ και είναι περιττού μήκους}\}$

Υπόδειξη: όπου βοηθάει, σχεδιάστε και συνδυάστε αυτόματα για απλούστερες γλώσσες.

(ii) Κατασκευάστε ισοδύναμο DFA. Είναι το ελάχιστο; Αποδείξτε. Αν όχι, βρείτε το.

(iii) Δώστε κανονική παράσταση για κάθε μια από τις παραπάνω γλώσσες.

Άσκηση 6.

Γράψτε κανονικές παραστάσεις για τις παρακάτω γλώσσες. Δικαιολογήστε την ορθότητα των κανονικών σας παραστάσεων.

α) Το σύνολο των string από το αλφάβητο $\Sigma = \{0, 1\}$ που δεν περιέχουν το 100 ως substring.

β) Το σύνολο των string από το αλφάβητο $\Sigma = \{[,]\}$ με ίσο πλήθος εμφανίσεων «[» και «]», στα οποία δεν υπάρχει πρόθεμα που να περιέχει περισσότερα «]» από ότι «[». Επίσης, κανένα πρόθεμα δεν μπορεί να περιέχει τρία περισσότερα «[» από ότι «]». Τι εκφράζει η γλώσσα αυτή;

Υπόδειξη: θυμηθείτε ότι μπορείτε να σχεδιάσετε πρώτα αυτόματο και να φτιάξετε την κανονική παράσταση από αυτό.

Άσκηση 7.

Αποδείξτε ότι η γλώσσα που ορίζεται όπως στο (β) της προηγούμενης άσκησης, αλλά χωρίς τον δεύτερο περιορισμό (δηλ. στο πρόθεμα μπορούν να υπάρχουν οσαδήποτε περισσότερα «[» από ότι «]») δεν είναι κανονική. Περιγράψτε κατάλληλο αυτόματο και γραμματική για την γλώσσα αυτή.

Προθεσμία υποβολής και οδηγίες. Οι απαντήσεις θα πρέπει να υποβληθούν έως τις 30/10/2018, στις 23:59, σε ηλεκτρονική μορφή, στο mycourses (τα σχήματα μπορεί να είναι σκαναρισμένα – φροντίστε το τελικό αρχείο να είναι μεγέθους <2MB συνολικά).

Συνιστάται *θερμά* να αφιερώσετε ικανό χρόνο για να λύσετε τις ασκήσεις μόνοι σας προτού καταφύγετε σε οποιαδήποτε *θεμιτή* βοήθεια (διαδίκτυο, βιβλιογραφία, συζήτηση με συμφοιτητές). Σε κάθε περίπτωση, οι απαντήσεις θα πρέπει να είναι *αυστηρά* ατομικές (δηλαδή όχι ‘copy-paste’).

Για να βαθμολογηθείτε θα πρέπει να παρουσιάσετε σύντομα τις λύσεις σας σε ημέρα και ώρα που θα ανακοινωθεί αργότερα.

Για απορίες / διευκρινίσεις: στείλτε μήνυμα στη διεύθυνση dsouliou@mail.ntua.gr.