<u>ΕΘΝΙΚΟ ΜΕΤΣΟΒΙΟ ΠΟΛΥΤΕΧΝΕΙΟ</u>

<u>ΣΧΟΛΗ ΗΛΕΚΤΡΟΛΟΓΩΝ ΜΗΧΑΝΙΚΩΝ ΚΑΙ ΜΗΧΑΝΙΚΩΝ ΥΠΟΛΟΓΙΣΤΩΝ</u>

<u>ΣΗΜΑΤΑ & ΣΥΣΤΗΜΑΤΑ</u>

(2020-2021)

2η Σειρά Γραπτών Ασκήσεων

<u>Ονοματεπώνυμο, Α.Μ., στοιχεία επικοινωνίας</u>:

- Χρήστος Τσούφης
    - 03117176
    - el17176@mail.ntua.gr

2η Σειρά Γραπτών Ασκήσεων

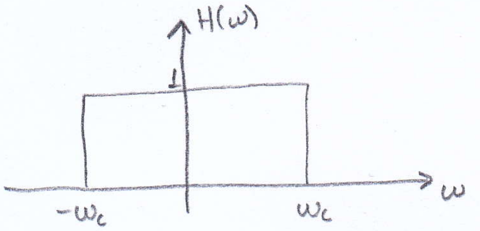
Χρήστος Τσούφης
03117176

1). συνέλιξη δύο ορθογώνιων rect() παλμών :

$$\mathrm{rect}(x) * \mathrm{rect}(x) = \mathrm{trig}(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{rect}(x-\tau)\cdot \mathrm{rect}(\tau)\,d\tau$$

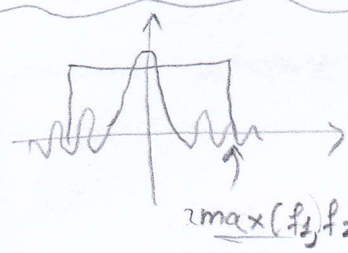
• $\mathcal{F}\{\mathrm{trig}(t)\} = \mathcal{F}\{\mathrm{rect}(t) * \mathrm{rect}(t)\} = \mathcal{F}\{\mathrm{rect}(t)\}\cdot \mathcal{F}\{\mathrm{rect}(t)\} = \mathcal{F}\{\mathrm{rect}(t)\}^2 = \mathrm{sinc}^2(f)$

• Ιδανικό Βαθυπερατό φίλτρο:



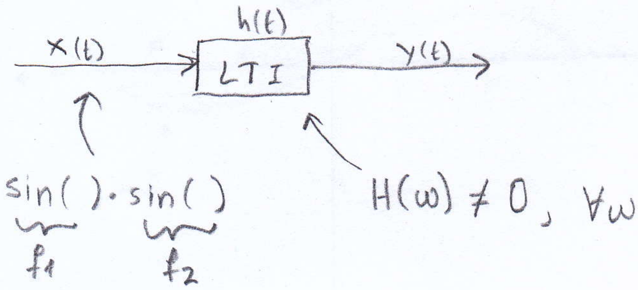
Σύμφωνα με το βιβλίο: Ασκ. 3.3 / σελ. 219:
για $y(t) = x_1(t) * x_2(t)$, με x_1, x_2 bandlimited, όπως και εδώ, τότε θα ισχύει:
$y(t) = x_1(t) * x_2(t) \Rightarrow Y(\omega) = X_1(\omega)\cdot X_2(\omega)$
$\omega_m = \min\{\omega_1, \omega_2\} = \omega$ (αφού είναι και τα δύο rect).

Οπότε, η εικόνα θα είναι κάπως έτσι



Άρα το (ε) $\max(f_1, f_2)$

3)



• $\mathcal{F}\{\sin(\omega_0 t)\} = \frac{\pi}{j}\left[\delta(\omega-\omega_0) - \delta(\omega+\omega_0)\right]$

• Επίσης πολ/σμός $\xleftrightarrow{\mathcal{F}}$ συνέλιξη

• Οπότε, το αποτέλεσμα θα είναι άθροισμα από ημίτονα με συχνότητες f_1+f_2, f_1-f_2

• $\sin(\omega_0 t) = \frac{1}{2}\left(e^{j\omega_0 t} - e^{-j\omega_0 t}\right)$

• $\sin(\omega_1 t)\cdot\sin(\omega_2 t) = \frac{1}{4}\left(e^{j\omega_1 t} - e^{-j\omega_1 t}\right)\left(e^{j\omega_2 t} - e^{-j\omega_2 t}\right) = \frac{1}{4}\left(e^{j(\omega_1+\omega_2)} - e^{j(\omega_1-\omega_2)t} - e^{-j(\omega_1-\omega_2)t} + e^{-j(\omega_1+\omega_2)t}\right)$

Άρα το (α)

2) Υπολογισμός Μ/Σ Fourier $X(\omega)$ για τα σήματα:

a) $x(t) = [t e^{-3t} \sin 8t] u(t)$

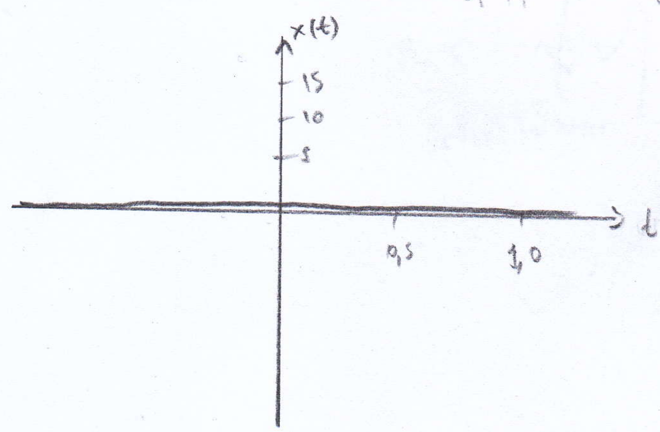
- $x(t) = \frac{1}{2j}\left(e^{j8t} - e^{-j8t}\right) t e^{-3t} u(t) = \frac{1}{2j} t e^{-3t} e^{j8t} u(t) - \frac{1}{2j} t e^{-3t} e^{-j8t} u(t)$

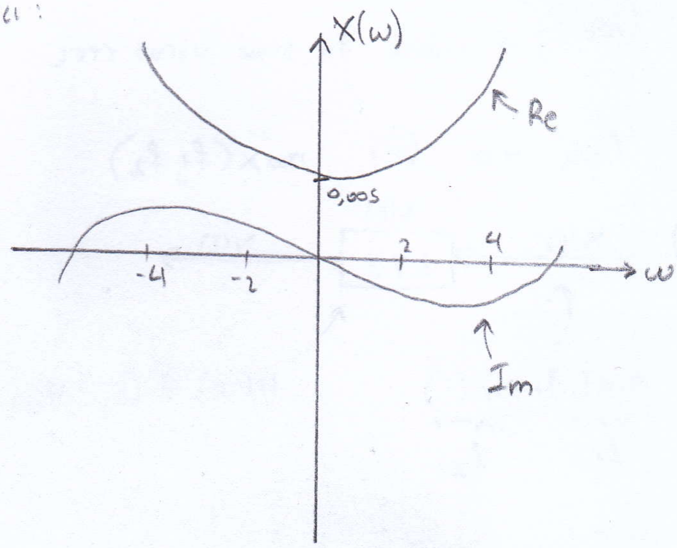
- $t e^{-at} u(t), \ Re\{a\} > 0 \xleftrightarrow{F} \frac{1}{(a + j\omega)^2}$

- $x(t) e^{j\omega_0 t} \xleftrightarrow{F} X(\omega - \omega_0)$

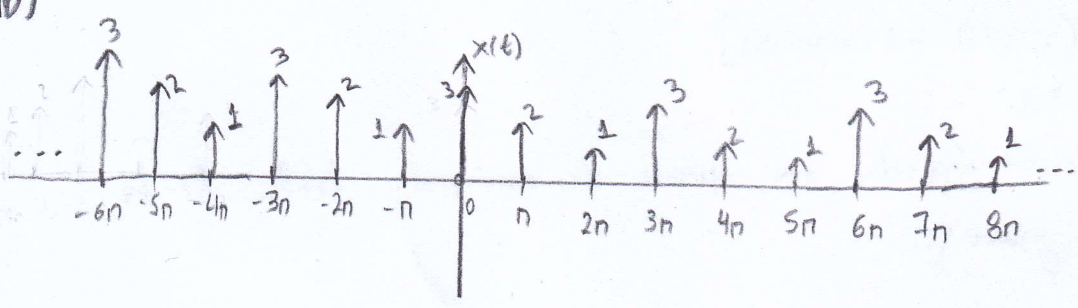
Άρα $$X(\omega) = \frac{1/2j}{(3 - j8 + j\omega)^2} - \frac{1/2j}{(3 + j8 + j\omega)^2}$$

Με χρήση υπολογιστικών προγραμμάτων προκύπτει ότι:





b)



Μπορεί να εκφραστεί ως άθροισμα περιοδικών παλμοσειρών:

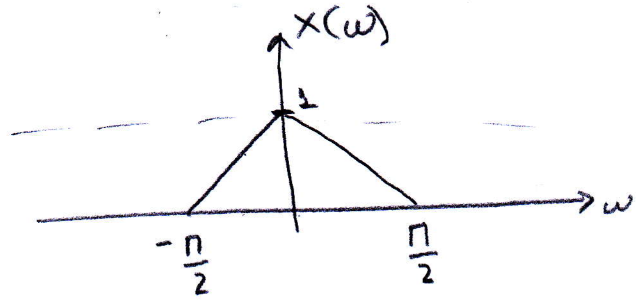
$$x(t) = 3\sum_{n=-\infty}^{+\infty} \delta(t - nT) - 2\sum_{n=-\infty}^{+\infty} \delta(t - nT - 1) - 1\sum_{n=-\infty}^{+\infty} \delta(t - nT - 2) \quad \text{με } T = 3$$

Άρα

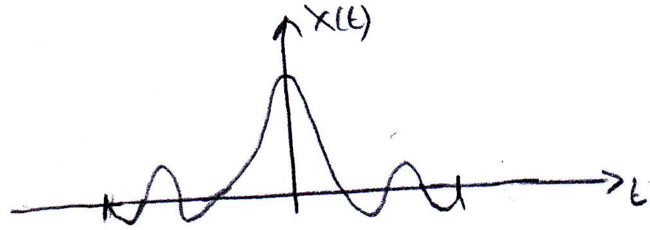
$$X(\omega) = 3 \cdot \frac{2\pi}{T} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \delta\left(\omega - \frac{2\pi k}{T}\right) - 2e^{-j\omega} \frac{2\pi}{T} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \delta\left(\omega - \frac{2\pi k}{T}\right) - 1e^{-j2\omega} \cdot \frac{2\pi}{T} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \delta\left(\omega - \frac{2\pi k}{T}\right) =$$

$$= \left[3 - 2e^{-j\omega} - 1e^{-j2\omega}\right] \cdot \frac{2\pi}{T} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \delta\left(\omega - \frac{2\pi k}{T}\right)$$ (φάσμα όμοιο με x(t))

c) $X(\omega) = \begin{cases} -2|\omega| & , |\omega| \leq 0{,}5\pi \\ 0 & , |\omega| > 0{,}5\pi \end{cases} \rightsquigarrow$



- trig $\leftrightarrow$ sinc^2
- $\mathcal{F}^{-1}[-2|\omega|] = \dfrac{2\sqrt{\frac{2}{\pi}}}{t^2}$ (wolfram)



d) $X(\omega) = \pi j\left[\delta(\omega + \frac{\pi}{3}) - \delta(\omega - \frac{\pi}{3})\right] + \dfrac{6\pi}{\pi^2 - 9\omega^2}$

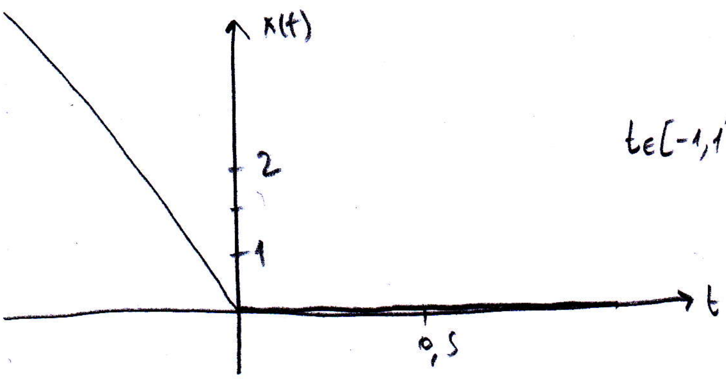
$= \frac{\pi}{j}\left[\delta(\omega - \frac{\pi}{3}) - \delta(\omega + \frac{\pi}{3})\right] + \dfrac{6\pi}{\pi^2 - 9\omega^2}$

$= \frac{\pi}{j}\left[\delta(\omega - \frac{\pi}{3}) - \delta(\omega + \frac{\pi}{3})\right] + \dfrac{1}{\frac{\pi}{3} - \omega} + \dfrac{1}{\frac{\pi}{3} + \omega}$

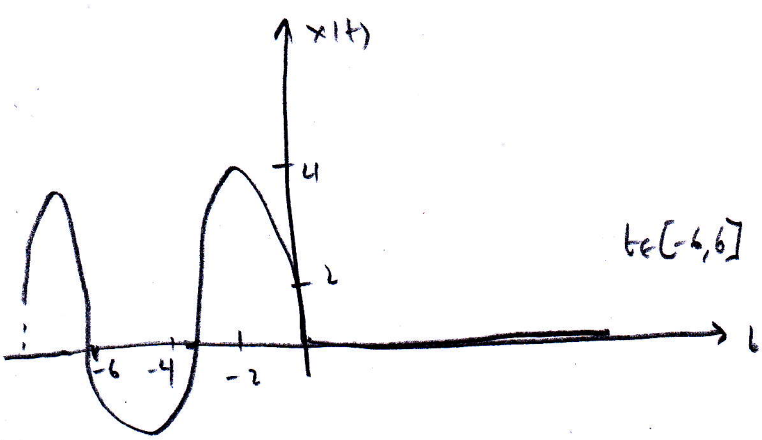
$\Downarrow$

$x(t) = \sin\left(\frac{\pi}{3}t\right) - j\sqrt{\frac{\pi}{2}}\, e^{j\frac{\pi}{3}t}\left(-1 + e^{j\frac{2\pi}{3}t}\right)\operatorname{sgn}(t)$

$= -j\sqrt{\frac{\pi}{2}}\, e^{-j\frac{\pi}{3}t}\left(-1 + e^{j\frac{2\pi}{3}t}\right)\left(\operatorname{sgn}(t) - 1\right)$



$t \in [-1, 1]$



$t \in [-6, 6]$

4) Δειγματοληψία στο χρόνο και στο πεδίο Fourier αντιστοιχεί σε ?

• Από θεώρημα Δειγματοληψίας του shannon : δειγματοληψία στον χρόνο οδηγεί σε περιοδικότητα στην συχνότητα.

• Από θεωρία Fourier συνεχούς χρόνου : περιοδικότητα στον χρόνο οδηγεί σε "δειγματοληψία" στην συχνότητα.

• Αν δειγματοληπτήσουμε τον χώρο της συχνότητας (ο οποίος είναι από τη φύση του περιοδικός) λογικά θα πρέπει να λάβουμε ένα περιοδικό σήμα στο χώρο του χρόνου.

Άρα το d (?)

5) Μ/Σ Fourier :
$$\frac{d}{dt}x(t) \xleftrightarrow{\mathcal{F}} j\omega X(\omega)$$
$$x(t) \xleftrightarrow{\mathcal{F}} X(\omega)$$

• $E = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} |x(t)|^2 dt$

• Επίσης, από σημειώσεις " Β. 2020 " (σελ. 1/20) :

$$\Gamma(x(t)) = \frac{dx(t)}{dt}$$
$$y(t) = h(t) * x(t) = \frac{dx(t)}{dt} = \frac{dx(t)}{dt} * \delta(t) = x(t) * \frac{d\delta(t)}{dt}$$
$$H(\omega) = \mathcal{F}\left(\frac{d\delta(t)}{dt}\right) = j\omega\,\mathcal{F}(\delta(t)) = j\omega$$

Άρα το c. (?)

6) ΓΧΑ Σύστημα Συνεχούς Χρόνου

Είσοδος: $x(t)$

Έξοδος: $y(t)$

Δ.Ε: $6y(t) + 5\frac{d}{dt}y(t) + \frac{d^2}{dt^2}y(t) = 2x(t) - \frac{d}{dt}x(t)$

1. Υπολογισμός της απόκρισης συχνότητας $H(\omega)$:

Με Μ/Σ Fourier: $6Y(\omega) + 5j\omega Y(\omega) + (j\omega)^2 Y(\omega) = 2X(\omega) - j\omega X(\omega) \Rightarrow$

$$\Rightarrow \left[6 + 5j\omega + (j\omega)^2\right]Y(\omega) = \left[2 - j\omega\right]X(\omega) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{Y(\omega)}{X(\omega)} = \frac{2-j\omega}{6+5j\omega+(j\omega)^2} \Rightarrow H(\omega) = \frac{2-j\omega}{(j\omega)^2+5(j\omega)+6}$$

2. Υπολογισμός της κρουστικής απόκρισης $h(t)$:

Έστω $s = j\omega$, άρα $H(s) = \frac{2-s}{s^2+5s+6} = \frac{2-s}{(s+2)(s+3)} = \frac{A}{s+2} + \frac{B}{s+3}$

$$\Rightarrow 2-s = A(s+3) + B(s+2)$$

$$\Rightarrow 2-s = (A+B)s + 3A + 2B$$

$$\Rightarrow \begin{cases} A+B = -1 \\ 3A+2B = 2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A = 4 \\ B = -5 \end{cases}$$

Όποτε, $H(s) = \frac{4}{s+2} - \frac{5}{s+3} \xRightarrow{s=j\omega} H(\omega) = \frac{4}{j\omega+2} - \frac{5}{j\omega+3}$

Και με $\mathcal{F}^{-1}$: $h(t) = \left(4e^{-2t} - 5e^{-3t}\right)u(t)$

3. Υπολογισμός της εξόδου για είσοδο: $x(t) = e^{-2t}u(t-1)$:

Ισχύει ότι: $x(t) * h(t) = y(t) \xleftrightarrow{\mathcal{F}} X(\omega)\cdot H(\omega) = Y(\omega)$

Όμως, $X(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-2t}u(t-1)e^{-j\omega t}dt = \int_{1}^{+\infty} e^{-2t}e^{-j\omega t}dt = \int_{1}^{+\infty} e^{-(2+j\omega)t}dt =$

$$= \left[\frac{e^{-(2+j\omega)t}}{-(2+j\omega)}\right]_1^{+\infty} = \frac{e^{-(2+j\omega)}}{2+j\omega}$$

Άρα, $Y(\omega) = X(\omega)\cdot H(\omega) = \dfrac{e^{-(2+j\omega)}}{2+j\omega} \cdot \dfrac{2-j\omega}{(j\omega)^2+5j\omega+6} = \dfrac{e^{-(2+j\omega)}}{2+j\omega} \cdot \dfrac{2-j\omega}{(j\omega+2)(j\omega+3)} \Rightarrow$

$$\Rightarrow Y(\omega) = \frac{e^{-(2+j\omega)}\cdot(2-j\omega)}{(2+j\omega)^2\cdot(3+j\omega)} \xrightarrow{s=j\omega} Y(s) = \frac{e^{-(2+s)}(2-s)}{(2+s)^2(s+3)} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow Y(s) = \underbrace{\frac{2e^{-(2+s)}}{(2+s)^2(s+3)}}_{Y_1(s)} - \underbrace{\frac{s\cdot e^{-(2+s)}}{(2+s)^2(s+3)}}_{Y_2(s)}$$

- $Y_1(s) = \dfrac{2\cdot e^{-(2+s)}}{(2+s)^2(s+3)} = 2\cdot e^{-(2+s)}\cdot\left[\dfrac{-1}{s+2} + \dfrac{1}{(s+2)^2} + \dfrac{1}{s+3}\right]$

$$= 2\cdot e^{-2}\cdot\left[-\frac{1}{s+2}e^{-s} + \frac{1}{(s+2)^2}e^{-s} + \frac{1}{s+3}e^{-s}\right]$$

$$= 2e^{-2}\left[-\frac{1}{2+j\omega}e^{-j\omega} + \frac{1}{(2+j\omega)^2}e^{-j\omega} + \frac{1}{3+j\omega}e^{-j\omega}\right]$$

$\Updownarrow$

$$y_1(t) = 2e^{-2}\left[-e^{-2(t+1)}u(t-1) + (t-1)e^{-2(t+1)}u(t-1) + e^{-3(t+1)}u(t-1)\right]$$

4. Υπολογισμός του σήματος $x(t)$ στην είσοδο, ώστε έξοδος: $y(t) = [1{,}5(e^{-2t}+e^{-4t}) + 2te^{-2t}]u(t)$

Ισχύει $Y(\omega) = X(\omega)\cdot H(\omega) \Rightarrow X(\omega) = \dfrac{Y(\omega)}{H(\omega)}$

όπου $Y(\omega) = \displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty}[1{,}5e^{-2t} + 1{,}5e^{-4t} + 2te^{-2t}]u(t)e^{-j\omega t}dt =$

$$= \int_0^{+\infty}[1{,}5e^{-2t} + 1{,}5e^{-4t} + 2te^{-2t}]e^{-j\omega t}dt =$$

$$= \int_0^{+\infty}[1{,}5e^{-(2+j\omega)t} + 1{,}5e^{-(4+j\omega)t} + 2te^{-(2+j\omega)t}]dt =$$

$$= 1{,}5\left[\frac{e^{-(2+j\omega)t}}{-(2+j\omega)}\right]_0^{+\infty} + 1{,}5\left[\frac{e^{-(4+j\omega)t}}{-(4+j\omega)}\right]_0^{+\infty} + 2\int_0^{+\infty}te^{-(2+j\omega)t}dt =$$

$$= -1{,}5\frac{1}{2+j\omega} - 1{,}5\frac{1}{4+j\omega} + 2\cdot\frac{1}{(2+j\omega)^2}$$

Άρα $X(\omega) = \dfrac{-1,5}{2+j\omega} + \dfrac{-1,5}{4+j\omega} + \dfrac{2}{(2+j\omega)^2}$

1r

$x(t) = -1,5 \cdot e^{-2t} u(t) - 1,5\, e^{-4t} u(t) + 2 \cdot t\, e^{-2t} u(t)$

7) Nyquist rate αθροίσματος από δύο sin με συχνότητες f_1, f_2 είναι:

- Θα έχει τη μορφή $m(t) = \sin(2\pi f_1 t) + \sin(2\pi f_2 t)$

Άρα $\omega_1 = 2\pi f_1$, $\omega_2 = 2\pi f_2$ και $\omega_m = \max(\omega_1, \omega_2)$

Οπότε $\omega s = 2\omega m$

Άρα το (e)

8) Δίνονται: $x_1(t) = \sin(20a\pi t)\cos(30a\pi t)$

$x_2(t) = a\,\delta(t) + \mathrm{sinc}^2(40at)$

Θεωρώντας, από τις διευκρινίσεις, $a = (AM \bmod 10) + 2 = 6 + 2 = 8$

$$\begin{cases} x_1(t) = \sin(160\pi t) \cdot \cos(240\pi t) \\ x_2(t) = 8\,\delta(t) + \mathrm{sinc}^2(320t) \end{cases}$$

1. Nyquist συχνότητα:

Για το $x_1(t) = \sin(160\pi t)\cdot\cos(240\pi t)$ με χρήση της $2\sin A\cos B = \sin(A+B) + \sin(A-B)$

γίνεται: $x_1(t) = \frac{1}{2}\sin(160\pi t + 240\pi t) + \frac{1}{2}\sin(160\pi t - 240\pi t) =$

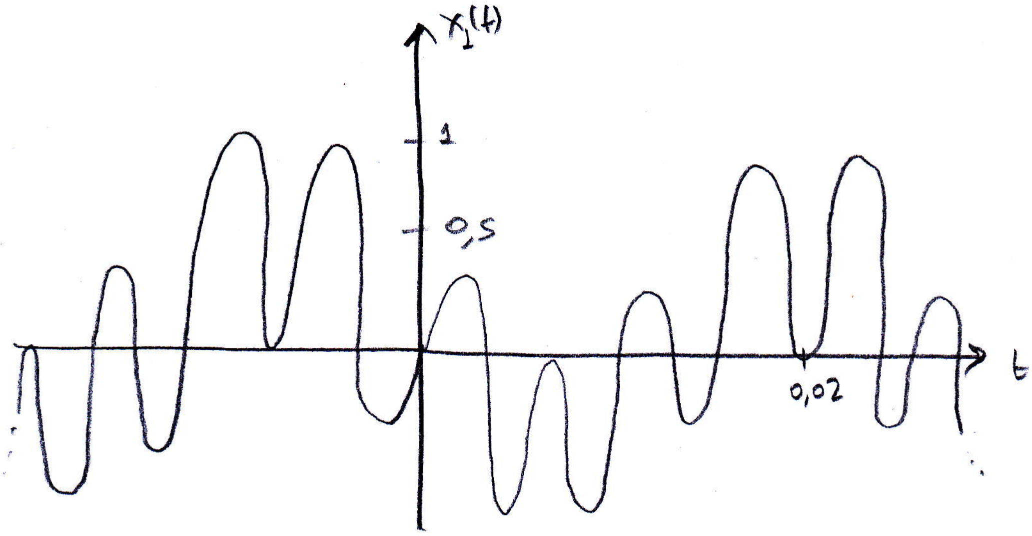
$= \frac{1}{2}\sin(400\pi t) + \frac{1}{2}\sin(-80\pi t) =$

$= \frac{1}{2}\sin(400\pi t) - \frac{1}{2}\sin(80\pi t)$

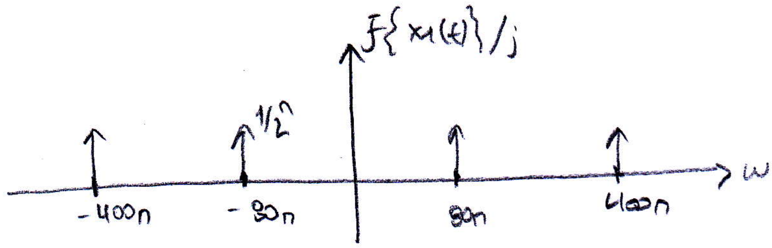
$\omega_1 = 400\pi$ r/s $\qquad \omega_2 = 80\pi$ r/s $\Rightarrow \omega_1 > \omega_2 \Rightarrow \omega_m = \omega_1 = 400\pi$ r/s

$\omega s = 2\omega m = 2 \cdot 400\pi = 800\pi$ r/s

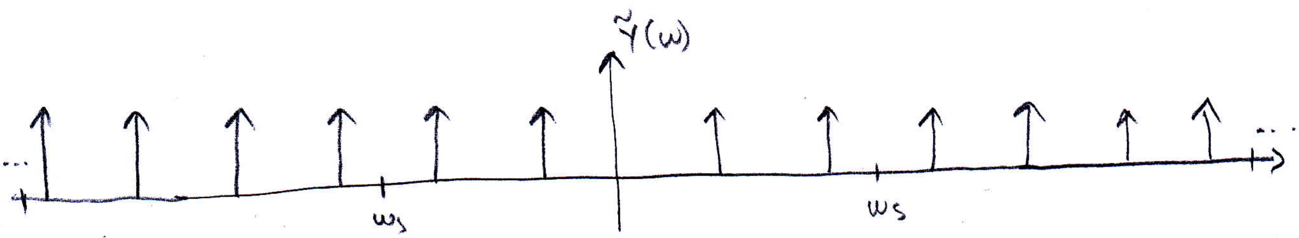
$f_s = \dfrac{\omega s}{2\pi} = \dfrac{800\pi}{2\pi} = 400$ Hz

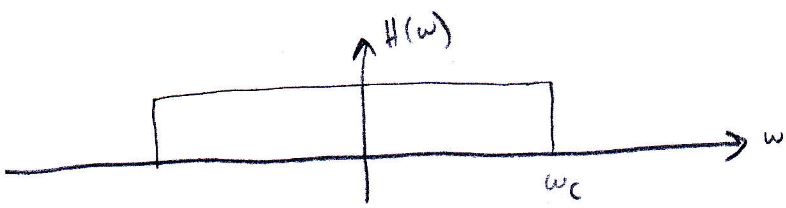


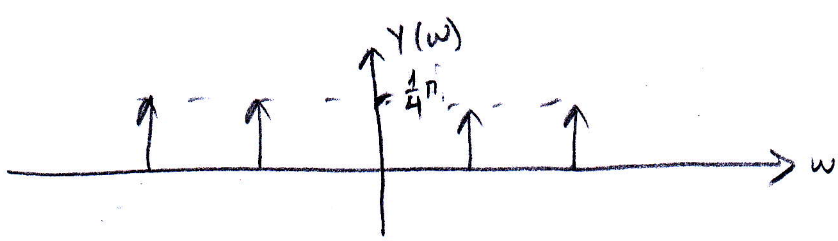
$$\mathcal{F}\{x_1(t)\} = \frac{1}{2}\frac{\pi}{j}\delta(\omega-400\pi) - \frac{1}{2}\frac{\pi}{j}\delta(\omega+400\pi) + \frac{1}{2}\frac{\pi}{j}\delta(\omega+80\pi) - \frac{1}{2}\frac{\pi}{j}\delta(\omega-80\pi)$$



Για την αποφυγή aliasing $f_c = 2f_s = 800\,Hz$







Σημείωση: στο διαδίκτυο βρέθηκε και η λύση: $\omega_{m_1} = 160\pi\, r/s$, $\omega_{m_2} = 240\pi\, r/s$
Με την υπόθεση ότι, πολλαπλασιασμός στο χρόνο αντιστοιχεί σε συνέλιξη στην συχνότητα, το φάσμα θα έχει την τιμή $\omega_m = \omega_{m_1} + \omega_{m_2} = 400\pi\, r/s \Rightarrow 2f_m = f_s = 400\,Hz$

Για το $x_2(t) = 8\delta(t) + \text{sinc}^2(320t)$:

• Ισχύει ότι : για $m_1(t)=\text{sinc}(320t)$

$$\omega_{m_1} = 320\pi \text{ r/s}$$
$$2\pi f_{m_1} = 320\pi$$
$$2f_{m_1} = 320$$
$$f_{s_1} = 320 \text{ Hz}$$

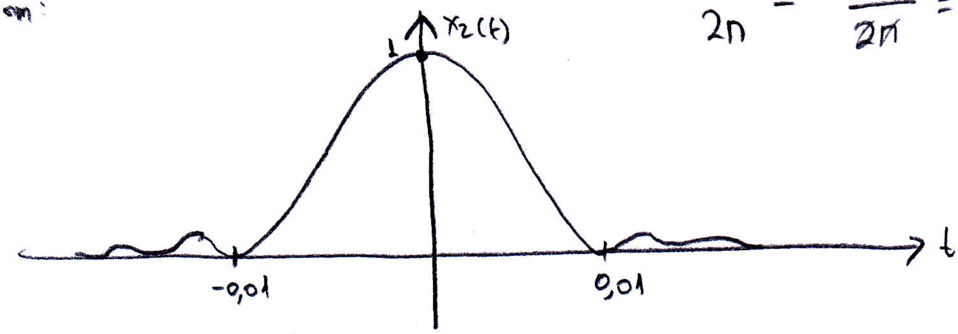
• Επίσης, για $m_2(t) = \text{sinc}^2(320t) = [m_1(t)]^2$

και για $m_1(t) \rightarrow \omega_{s_1} = 2\omega_{m_1} = 640\pi$ r/sec

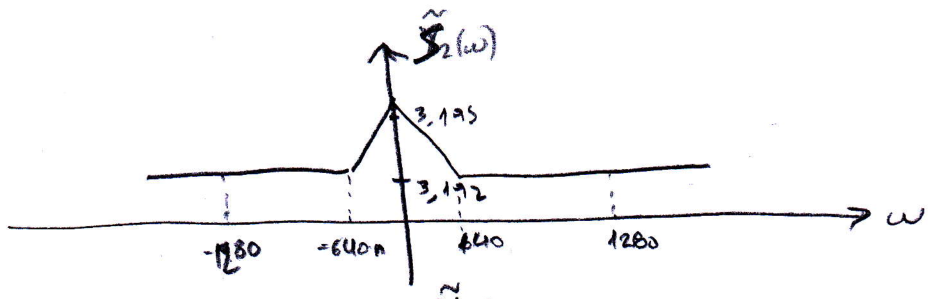
τότε για $m_2(t) = [m_1(t)]^2 \rightarrow \omega_{s_2} = 2 \times \omega_{s_1} = 1280\pi$ r/sec

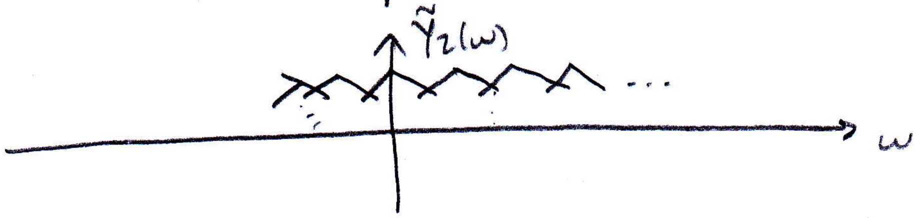
$$f_{s_2} = \frac{\omega_{s_2}}{2\pi} = \frac{1280\cancel{\pi}}{2\cancel{\pi}} = 640 \text{ Hz}$$

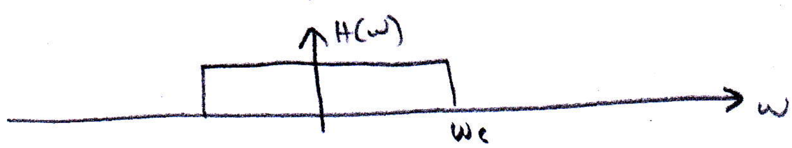
Με Wolfram:



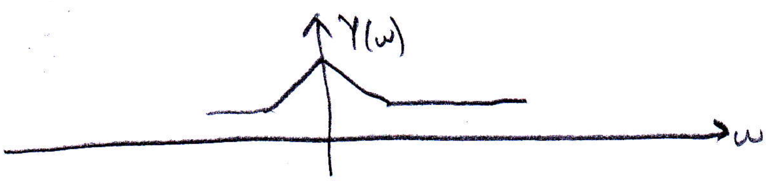
$$\mathcal{F}\{x_2(t)\} = 8 + \frac{1}{320}\,\text{trig}\left(\frac{\omega}{640}\right)$$







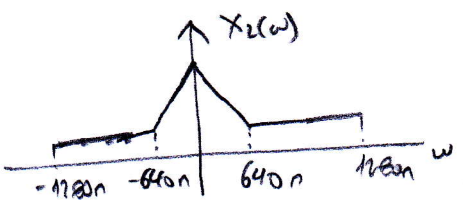
$f_c = 2f_s = 1280$ Hz

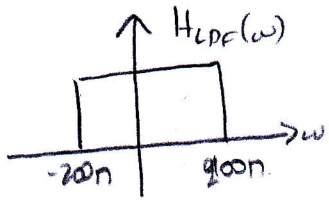


2. $X_2 \longrightarrow LPF \longrightarrow X_3$

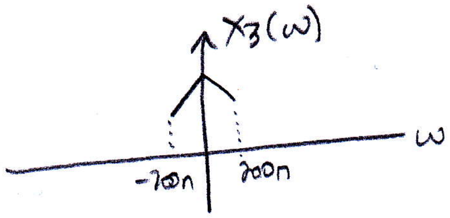
$f_{cut-off} = 100Hz \rightarrow \omega_c = 2\pi f = 200\pi \; r/s$

$X_2(\omega)$:





$X_3(\omega)$



a) $y(t) = x_1(t) * x_3(t)$

Με βάση την Άσκ. 3.3 / σελ. 219 του βιβλίου : $\omega_m = \min\{\omega_1, \omega_3\} =$

$= \min\{800\pi, 200\pi\} = 200\pi \; r/s$

Άρα $\omega_s = 2\omega_m = 400\pi \; r/s$

$f_s = \dfrac{\omega_s}{2\pi} = 200Hz$

b) $z(t) = x_1^2(t) + (x_2^3(t) * x_3(t))$

$x_1 : \omega_s = 800\pi \; r/s$

$\downarrow$

$x_1^2 : \omega_s' = 2 \times \omega_s$

$= 1600\pi \; r/s$

$x_3 : \omega_s = 200\pi \; r/s$

$x_2 : \omega_s = 1280\pi \; r/s \rightarrow x_2^3 : \omega_s' = 3 \times 1280\pi =$

$= 3.840\pi \; r/s$

$\downarrow$

$\omega_m = \min\{200\pi, 3840\pi\} = 200\pi \; r/s$

$\downarrow$

$\omega_s = 2\omega_m = 400\pi \; r/s$

$\omega_m = \max(1600\pi, 400\pi) = 1600\pi \; r/s$

$\downarrow$

$\omega_s = 2\omega_m = 3200\pi \; r/s$

$\downarrow$

$f_s = \omega_s / 2\pi = 1600 \; Hz$

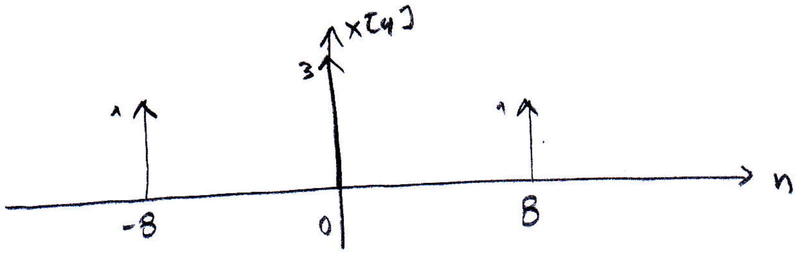
9) DTFT: $\qquad a = (AM \bmod 10) + 2 = 6 + 2 = \underline{8}$

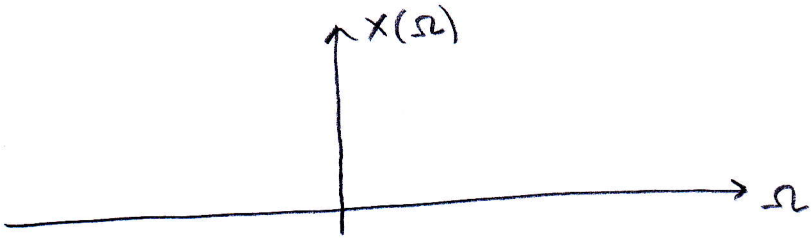
a) $x[n] = \delta[n-a] + 3\delta[n] + \delta[n+a]$

$x[n] = \delta[n-8] + 3\delta[n] + \delta[n+8]$

$\Updownarrow$

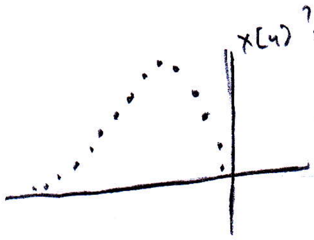
$$X(\Omega) = e^{-j8\Omega} + 3e^{-j\Omega} + e^{j8\Omega}$$





β) $x[n] = a^n \sin\left(\frac{\pi n}{4}\right) u[-n-1]$

$x[n] = 8^n \sin\left(\frac{\pi n}{4}\right) u[-n-1]$



$$\sum_{v=k}^{+\infty} \lambda^v = \frac{\lambda^k}{1-\lambda}$$

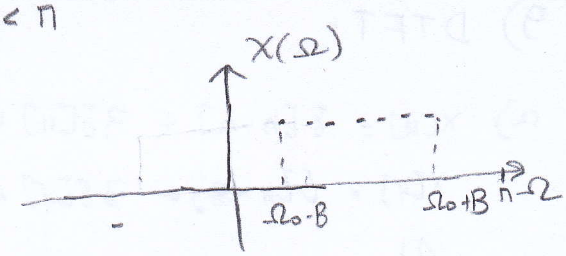
$$X(\Omega) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x[n] e^{-j\Omega n} = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} 8^n \sin\left(\frac{\pi n}{4}\right) u[-n-1] e^{-j\Omega n} = \sum_{-\infty}^{-1} 8^n \sin\left(\frac{\pi n}{4}\right) e^{-j\Omega n} =$$

$$= -\sum_{-1}^{+\infty} 8^{-n} \sin\left(\frac{\pi n}{4}\right) e^{j\Omega n} = -\frac{1}{2j} \sum_{n=-1}^{+\infty} 8^{-n} \cdot \left(e^{j\frac{\pi}{4}n} - e^{-j\frac{\pi}{4}n}\right) e^{j\Omega n} =$$

$$= -\frac{1}{2j} \sum_{n=-1}^{+\infty} \left[\left(\frac{e^{j(\Omega+\frac{\pi}{4})}}{8}\right)^n - \left(\frac{e^{j(\Omega-\frac{\pi}{4})}}{8}\right)^n \right] =$$

$$= -\frac{1}{2j} \left[\frac{\left[\frac{e^{j(\Omega+\frac{\pi}{4})}}{8}\right]^{-1}}{1 - \frac{e^{j(\Omega+\frac{\pi}{4})}}{8}} - \frac{\left[\frac{e^{j(\Omega-\frac{\pi}{4})}}{8}\right]^{-1}}{1 - \frac{e^{j(\Omega-\frac{\pi}{4})}}{8}} \right] = \dots$$

c) $X(\Omega) = \begin{cases} 1 , & 0 < \Omega_0 - B < |\Omega| < \Omega_0 + B < \pi \\ 0 , & \text{αλλού εκτός του } [-\pi,\pi] \end{cases}$



Έστω $G_1(\Omega) = \begin{cases} 1 , & 0 < |\Omega| < \Omega_0 - B \\ 0 , & \Omega_0 - B < |\Omega| < \pi \end{cases}$

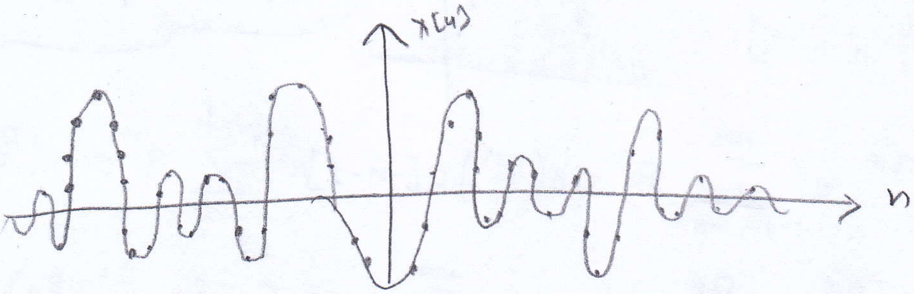
και $G_2(\Omega) = \begin{cases} 1 , & 0 < |\Omega| < \Omega_0 + B \\ 0 , & \Omega_0 + B < |\Omega| < \pi \end{cases}$

οπότε $X(\Omega) = G_2(\Omega) - G_1(\Omega)$

- $\dfrac{\sin(Wn)}{\pi n} \quad 0<W<\pi \xleftrightarrow{DTFT} u(\Omega + W) - u(\Omega - W) , \quad 0<W<\pi$

Άρα, $g_1[n] = \dfrac{\sin\left(\frac{n}{\Omega_0 - B}\right)}{\pi n}$ και $g_2[n] = \dfrac{\sin\left(\frac{n}{\Omega_0 + B}\right)}{\pi n}$

Επομένως, $x[n] = \dfrac{1}{\pi n}\left(\sin\left(\dfrac{n}{\Omega_0+B}\right) - \sin\left(\dfrac{n}{\Omega_0-B}\right)\right)$



d) $X(\Omega) = \cos^2(\Omega) + \sin^2(a\Omega)$

$X(\Omega) = \cos^2(\Omega) + \sin^2(8\Omega)$

$= \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\cos 2\Omega + \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\cos 16\Omega$

$= 1 + \frac{1}{2}\cos 2\Omega - \frac{1}{2}\cos 16\Omega$

$= 1 - \frac{1}{4}\left[e^{j2\Omega} + e^{-j2\Omega}\right] + \frac{1}{4}\left[e^{j16\Omega} + e^{-j16\Omega}\right] =$

$= 1 - \frac{1}{4}e^{j2\Omega} - \frac{1}{4}e^{-j2\Omega} + \frac{1}{4}e^{j16\Omega} + \frac{1}{4}e^{-j16\Omega}$

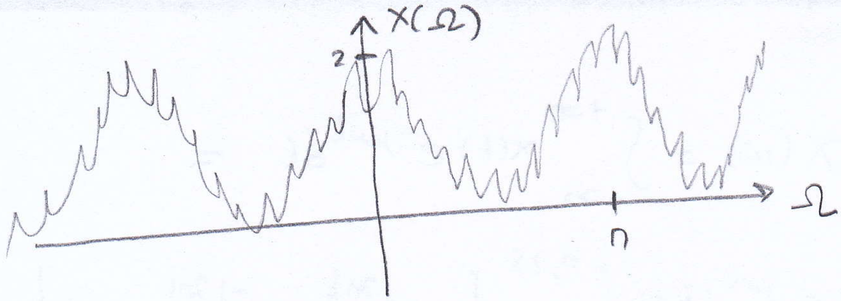
$\cos^2\theta = \dfrac{1+\cos 2\theta}{2}$

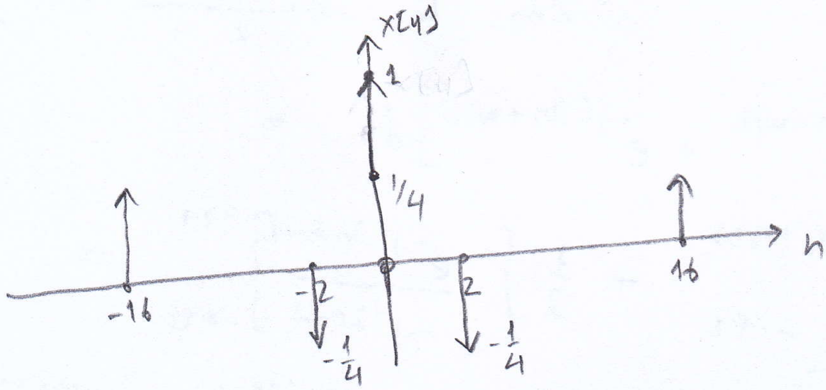
$\sin^2\theta = \dfrac{1-\cos 2\theta}{2}$

$\delta[n-n_0] \leftrightarrow e^{-j\Omega n_0}$

$x[n] = \delta[n] - \frac{1}{4}\delta[n-2] - \frac{1}{4}\delta[n+2] + \frac{1}{4}\delta[n-16] + \frac{1}{4}\delta[n+16]$

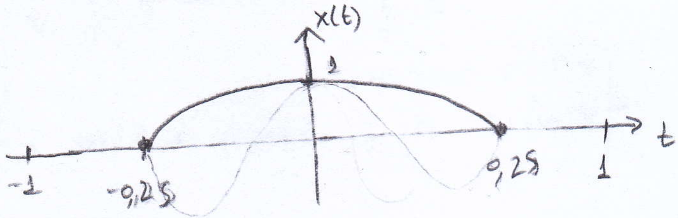
Όπου





10) $x(t)$, $T = 2s$

$$x(t) = \begin{cases} \cos(2\pi t), & |t| \leq 0{,}25 \\ 0, & 0{,}25 \leq |t| \leq 1 \end{cases}$$



1. $a_n = \frac{2}{T}\int_T x(t)\cos(m\omega_0 t)\,dt$, $b_m = \frac{2}{T}\int_T x(t)\sin(m\omega_0 t)\,dt$

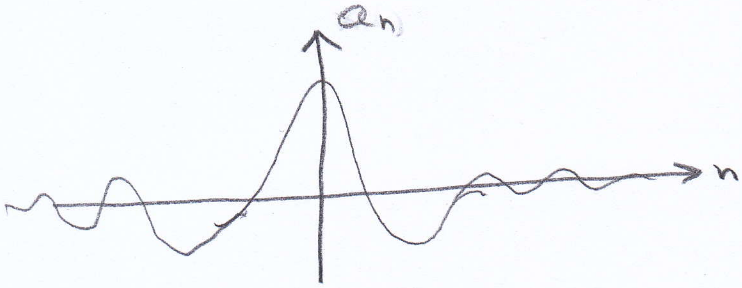
Όμως, επειδή το cos είναι άρτιο: $b_m = 0$, $a_n = \frac{4}{T}\int_0^{T/2} x(t)\cos(m\omega_0 t)\,dt$

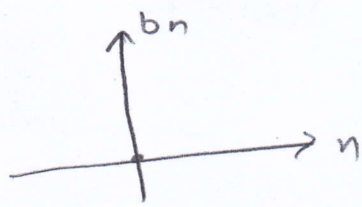
$$a_n = \frac{4}{2}\int_0^1 \cos(2\pi t)\cdot\cos(m\omega_0 t)\,dt$$

$\boxed{\cos A\cdot\cos B = \frac{1}{2}\left(\cos(A-B) + \cos(A+B)\right)}$

$$= \int_0^1 \left[\cos((2\pi - m\omega_0)t) + \cos((2\pi + m\omega_0)t)\right]dt =$$

$$= \ldots = \frac{n\omega_0 \sin(n\cdot\omega_0)}{n^2\omega_0^2 - 4\pi^2}$$ (wolfram)





2. $X(\omega) = ?$

Με ορισμό, $a_n = 2|C_n|$, $X(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t)\, e^{-j\omega t}\, dt =$

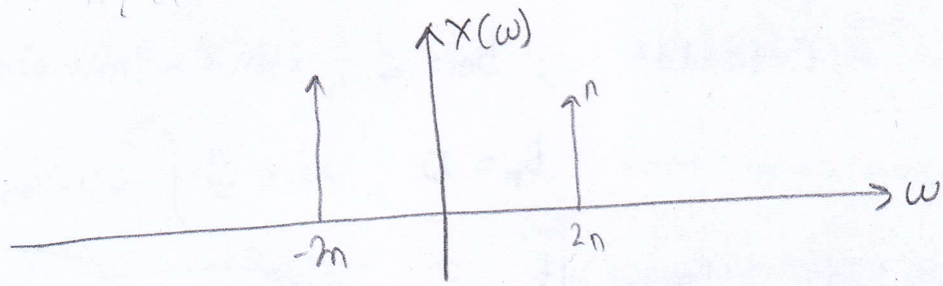
$$\Rightarrow X(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} \cos(2\pi t)\, e^{-j\omega t}\, dt = \int_{-0,25}^{0,25} \left[\frac{e^{j2\pi t} + e^{-j2\pi t}}{2} \cdot e^{-j\omega t} \right] dt =$$

$$= \frac{1}{2}\int_{-0,25}^{0,25} \left[e^{j(2\pi-\omega)t} + e^{-j(2\pi+\omega)t} \right] dt =$$

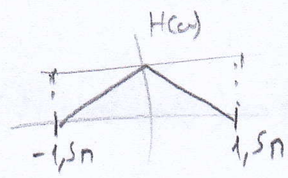
$$= \frac{1}{2}\left[\frac{e^{j(2\pi-\omega)t}}{j(2\pi-\omega)} \right]_{-0,25}^{0,25} + \frac{1}{2}\left[\frac{e^{-j(2\pi+\omega)t}}{-j(2\pi+\omega)} \right]_{-0,25}^{0,25} =$$

$$= \frac{1}{2}\left[\frac{e^{j(2\pi-\omega)0,25} - e^{-j(2\pi-\omega)0,25}}{j(2\pi-\omega)} + \frac{e^{-j(2\pi+\omega)0,25} - e^{+j(2\pi+\omega)0,25}}{j(2\pi+\omega)} \right] = \dots$$

$$\boxed{\begin{aligned} x(t) &= \cos(\omega_0 t) \\ X(\omega) &= \pi[\delta(\omega+\omega_0) + \delta(\omega-\omega_0)] \end{aligned}}$$

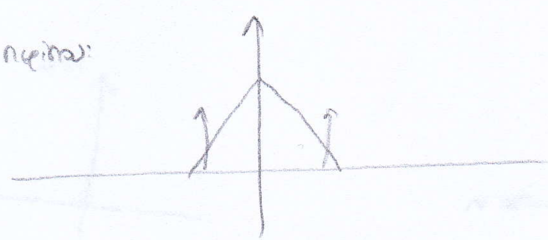


3. $\cdot\, H(\omega) = \begin{cases} -0,25|\omega|, & |\omega| \leq 1,5\pi \\ 0, & |\omega| > 1,5\pi \end{cases}$ $\longrightarrow$



$$y(t) = x(t) * h(t) \xleftrightarrow{\mathcal{F}} Y(\omega) = X(\omega)\cdot H(\omega)$$

Άρα $Y(\omega)$: περιέχει:



• Ναι είναι περιοδικό.

4. περιοδ. σήμα $x(t), y(t)$

περίοδος T, a_m, b_m συντελεστές.

$$z(t) = \int_T x(\tau)\cdot y(t-\tau)\,d\tau = x(t) * y(t) \overset{?}{\Longrightarrow} c_m = T\cdot a_m\cdot b_m$$

Απόδειξη

$$x(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} a_k \cdot e^{jk\omega_0 t}, \quad y(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} b_k e^{jk\omega_0 t}$$

Τότε $$f(t) = \int_0^{T_0} x(\tau)\cdot\left(\sum_{k=-\infty}^{+\infty} b_k e^{jk\omega_0(t-\tau)}\right)d\tau =$$

$$= \sum_{k=-\infty}^{+\infty} b_k e^{jk\omega_0 t}\int_0^{T_0} x(\tau)\, e^{-jk\omega_0\tau}\,d\tau$$

αφού $$a_k = \frac{1}{T_0}\int_0^{T_0} x(\tau)\, e^{-jk\omega_0\tau}\,d\tau$$

προκύπτει: $$f(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} T_0\, a_k\cdot b_k e^{jk\omega_0 t}$$

οπότε, $c_k = T_0\cdot a_k\cdot b_k$