<u>ΕΘΝΙΚΌ ΜΕΤΣΌΒΙΟ ΠΟΛΥΤΕΧΝΕΊΟ</u>

<u>ΣΧΟΛΉ ΗΛΕΚΤΡΟΛΌΓΩΝ ΜΗΧΑΝΙΚΏΝ ΚΑΙ ΜΗΧΑΝΙΚΏΝ ΥΠΟΛΟΓΙΣΤΏΝ</u>

<u>ΣΗΜΑΤΑ & ΣΥΣΤΗΜΑΤΑ</u>

(2020-2021)

1^{η} Σειρά Γραπτών Ασκήσεων

<u>Ονοματεπώνυμο</u>:

- Χρήστος Τσούφης

<u>Αριθμός Μητρώου</u>:

- 03117176

Χρήστος Τσούφης
03117176

$\alpha = 6 + 1 = 7 \Rightarrow \boxed{a = 7}$

1) <u>Nyquist rate</u>:

$$x(t) = 1 + \cos \underbrace{2000\pi t}_{\omega_1 = 2000\pi \, r/s} + \sin \underbrace{4000\pi t}_{\omega_2 = 4000\pi \, r/s}$$

▷ $f_s = 2 f_m$

$$\underbrace{\qquad\qquad}_{\omega_2 > \omega_1}$$

$$\Downarrow$$

$$\omega_2 = \omega_m = 4000\pi \, r/s$$

$$\Downarrow$$

$$f_m = \frac{\omega_m}{2\pi} = \frac{\cancel{4000}^{2}\cancel{\pi}}{\cancel{2\pi}} = 2000 \text{ Hz}$$

Άρα $f_s = 2 f_m = 4000 \text{Hz}$

2) $y(t) = 2x^2(t-1) - 3x(t-3)$

▷ Ένα σήμα είναι <u>αιτιατό</u> εάν είναι μηδενικό για αρνητικές τιμές του n, δηλ. $x(n) = 0, \ \forall n < 0$.

Με άλλα λόγια, η έξοδος του συστήματος εξαρτάται μόνο από τωρινές ή παρελθοντικές εισόδους και όχι από μελλοντικές.

Επομένως, για $t = 0$:

$$y(0) = 2x^2(0-1) - 3x(0-3)$$
$$= 2x^2(-1) - 3x(-3)$$

για $t = 1$:

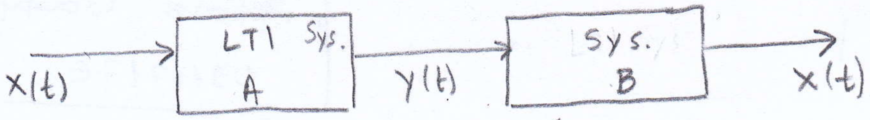
$$y(1) = 2x^2(1-1) - 3x(1-3)$$
$$= 2x^2(0) - 3x(-2)$$

Οπότε, φαίνεται ότι το $y(0)$ εξαρτάται από $x(-1)$, $x(-3)$ που είναι παρελθοντικές τιμές.

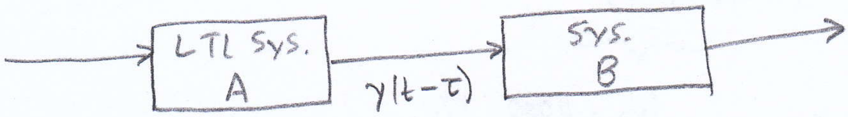
και το $y(1)$ -//- $x(0)$, $x(-2)$ -//-

Άρα, το σύστημα αιτιατό, οπότε True.

3)



↳ αντίστροφο του A



Αφού το A είναι LTI System, θα ισχύει: $S[x(t-\tau)] = y(t-\tau)$

Οπότε και η είσοδος στο A, θα είναι: $x(t-\tau)$

Για να παραμένει ταυτοτική πράξη, θα πρέπει και η έξοδος του B να είναι ίδια, δηλ. $x(t-\tau)$, οπότε το (a).

4). $h[n] = \gamma^n u[n] + \delta[n] + \delta[n-n_0]$, $n_0 = 4$

- $x_1[n] = a^n u[n] + b^n u[n]$, $a = 0{,}1$, $b = 0{,}2$, $\gamma = 0{,}9$
- $x_2[n] = u[n] - u[n-n_0]$

Δηλ. $y_1[n] = x_1[n] * h[n]$, $y_2[n] = x_2[n] * h[n]$

↳ $h[n] = 0{,}9^n u[n] + \delta[n] + \delta[n-4]$

↳ $x_1[n] = 0{,}1^n u[n] + 0{,}2^n u[n]$

↳ $x_2[n] = u[n] - u[n-4]$

▷ $y_1[n] = x_1[n] * h[n] = \left[0{,}1^n \cdot u[n] + 0{,}2^n u[n]\right] * \left[0{,}9^n u[n] + \delta[n] + \delta[n-4]\right] =$

▷ $y_2[n] = x_2[n] * h[n] = \left[u[n] - u[n-4]\right] * \left[0{,}9^n u[n] + \delta[n] + \delta[n-4]\right]$

$$y_1[n] = (0{,}1^n u[n]) * (0{,}9^n u[n]) + (0{,}1^n u[n]) * (\delta[n]) + (0{,}1^n \cdot u[n]) * (\delta[n-4]) +$$

$$+ (0{,}2^n u[n]) * (0{,}9^n u[n]) + (0{,}2^n u[n]) * (\delta[n]) + (0{,}2^n u[n]) * (\delta[n-4]) =$$

από σελ. 129
Ασκ. 2.6.a. βιβλίου

$$= \frac{0{,}2^{n+1} - 0{,}1^{n+1}}{0{,}2 - 0{,}1} \cdot u[n] + 0{,}1^n u[n] + 0{,}1^{n-4} \cdot u[n-4] +$$

$$+ \frac{0{,}9^{n+1} - 0{,}2^{n+1}}{0{,}9 - 0{,}2} u[n] + 0{,}2^n u[n] + 0{,}2^{n-4} \cdot u[n-4] =$$

$$= \left[\frac{0{,}2^{n+1}}{0{,}1} - \frac{0{,}1^{n+1}}{10} + 0{,}1^n + \frac{0{,}9^{n+1}}{0{,}7} - \frac{0{,}2^{n+1}}{0{,}7} + 0{,}2^n \right] \cdot u[n] +$$

$$+ \left[0{,}1^{n-4} + 0{,}2^{n-4} \right] \cdot u[n-4]$$

Με ορισμό, προκύπτει :

$$y_1[n] = x_1[n] * h[n] =$$

$$= \sum_0^k \left[0{,}1^{k-n} \cdot 0{,}9^n + 0{,}1^k \cdot u[k] + 0{,}1^{k-4} u[k-4] \right] +$$

$$+ \sum_0^k \left[0{,}2^{k-n} \cdot 0{,}9^n + 0{,}2^k \cdot u[k] + 0{,}2^{k-4} u[k-4] \right]$$

- $k=0$: $y_1[n] = 9^n + 18^n + 2u(0)$ και για $n=0$: $y_1[0] = 4$
- $k=1$: $y_1[n] = (10^{n-1} + 5^{n-1}) \cdot 0{,}9^n + 0{,}3$

Με δουλειές, $y_1[0] \simeq 4{,}9$

$y_1[4] \simeq 3$

$y_1[-1] \simeq 0$

Μοιάζει με το out7, με επιφυλάξεις.

4) $y_2[n] = [u[n] - u[n-4]] * [0{,}9^n u[n] + \delta[n] + \delta[n-4]]$

$= (u[n]) * (0{,}9^n u[n]) + (u[n]) * (\delta[n]) + (u[n]) * (\delta[n-4]) +$

$- (u[n-4]) * (0{,}9^n u[n]) - (u[n-4]) * (\delta[n]) - (u[n-4]) * (\delta[n-4]) =$

$*)$ $\sum_{k=-\infty}^{+\infty} u(k) \cdot 0{,}9^{n-k} \cdot u(n-k) = \left[\sum_{k=0}^{n} 0{,}9^{n-k}\right] \cdot u(n) = \left[0{,}9^n \sum_{k=0}^{n} \cdot 0{,}9^{-k}\right] \cdot u[n]$

$= \left[0{,}9^n \cdot \sum_{k=0}^{n} \left(\frac{10}{9}\right)^k\right] u[n]$

$\underline{\underline{\text{wolfram}}}$ $-0{,}9^n \cdot \left(\frac{10}{9}\right)^n \cdot (9^{n+1} \cdot 10^{-n} - 10) \cdot u[n]$

$= -\left(\frac{9}{10}\right)^n \left(\frac{10}{9}\right)^n \cdot (9^{n+1} \cdot 10^{-n} - 10) u[n] =$

$= -(9^{n+1} \cdot 10^{-n} - 10) u[n]$

$**)$ $\sum_{k=-\infty}^{+\infty} (0{,}9)^k \cdot u[k] \cdot u[n-k-4]$

$n - 4 < 0 \Rightarrow n < 4 \longrightarrow$ Βγάζει 0

$n - 4 \geq 0 \Rightarrow n \geq 4 \longrightarrow$ Βγάζει $\sum_{k=0}^{n-4} (0{,}9)^k = \dfrac{1 - 0{,}9^{n-3}}{1 - 0{,}9} = 10 - 10 \cdot 0{,}9^{n-3}$

Οπότε $y_2[n] = -(9^{n+1} \cdot 10^{-n} - 10) u[n] + u[n] + u[n-4] +$

$- 10 + 10 \cdot 0{,}9^{n-3} - u[n-4] - u[n-8]$

Και με δοκιμές, $y_2[0] \cong 5{,}71$

<u>Σημείωση</u>: Από τους θεωρητικούς υπολογισμούς προκύπτει ότι δεν υπάρχει κάποια αντιστοιχία με τις δοσμένες γραφικές παραστάσεις.

5) $R_n(k) = \sum_{m=-\infty}^{+\infty} x(m)\cdot w(n-m)\cdot x(m+k)\cdot w(n-k-m)$

1. Για να είναι άρτια ως προς k, θα πρέπει $R_n(-k) = R_n(k)$, οπότε

$$R_n(-k) = \sum_{m=-\infty}^{+\infty} x(m)\cdot w(n-m)\cdot x(m-k)\, w(n+k-m) \xlongequal{m-k=v}$$

$$\sum_{m=-\infty}^{+\infty} x(v+k)\cdot w(n-v-k)\cdot x(v)\cdot w(n-v) =$$

$$\sum_{m=-\infty}^{+\infty} x(v)\cdot w(n-v)\, x(v+k)\cdot w(n-k-u) \xlongequal{v=m}$$

$$\sum_{m=-\infty}^{+\infty} x(m)\, w(n-m)\ \ x(m+k)\, w(n-k-m) = R_n(k)$$, δηλ. άρτια.

2. $R_n(k) = \sum_{m=-\infty}^{+\infty} x(m)\cdot w(n-m)\, x(m+k)\, w(n-k-m) \Rightarrow$

$$\xlongequal[\text{άρτια}]{R_n} \sum_{m=-\infty}^{+\infty} x(m)\, x(m+k)\ \ w(n-m)\, w(n-k-m)$$

$$= \sum_{m=-\infty}^{+\infty} x(m)\, x(m-k)\ w(n-m)\, w(n+k-m)$$

και το $h_k(n) = w(n)\, w(n+k)$ γίνεται $h_k(n-m) = w(n-m)w(n+k-m)$

Οπότε τελικά, $R_n(k) = \sum_{m=-\infty}^{+\infty} x(m)\cdot x(m-k)\, h_k(n-m)$

6) $y = (k^2 - 3k - 4)\log(x) + \sin(x)$ $\quad k = ? \rightarrow$ ευσταθές

· Θα πρέπει $\forall\, |x(t)| < +\infty,\ \forall t \Rightarrow |y(t)| < +\infty,\ \forall t$

· Εδώ, $|\sin x| \leq 1$, ενώ το $\log x$ έχει πεδίο τιμών όλο το $\mathbb{R}$.

Οπότε, για να είναι το y ευσταθές, πρέπει $k^2 - 3k - 4 = 0 \Rightarrow \underset{\text{απορρ. (?)}}{\underline{k=4}}$ ή $\underset{\checkmark}{\underline{k=-1}}$

7) Φραγμένο θα είναι ένα σήμα όταν για κάθε ακέραιο αριθμό n, $|x(n)| < +\infty$.

8) Επιλέχθηκαν στο quiz.

9) <u>Χρονικά Αμετάβλητα:</u>

α) $y(t) = t \cdot x(t)$

$$x^* = x(t-t_0)$$

$$y^* = t \cdot x^*(t) = \underset{\sim}{t} \cdot x(t-t_0) \neq y(t-t_0)$$

β) $y(t) = x(t^2) \cdot \delta(t-1)$

$$x^* = x(t-t_0)$$

$$y^* = x^*(t^2) \cdot \delta(t-1) = x(t^2-t_0) \cdot \delta(\underset{\sim}{t}-1) \neq y(t-t_0)$$

γ) $y(t) = 1/t^3$

$$x^* = x(t-t_0)$$

$$y^* = \frac{1}{t^3} \neq y(t-t_0)$$

δ) $$y(t) = \frac{e^{-4t}}{\cos(4t+5) \cdot x(t)}$$

$$x^* = x(t-t_0)$$

$$y^* = \frac{e^{-4t}}{\cos(4t+5) \cdot x(t-t_0)} \neq y(t-t_0)$$

ε) $y(t) = \log(x(150t))$

$$x^* = x(t-t_0)$$

$$y^* = \log(x^*(150t)) = \log(x(150t-t_0)) \neq y(t-t_0)$$

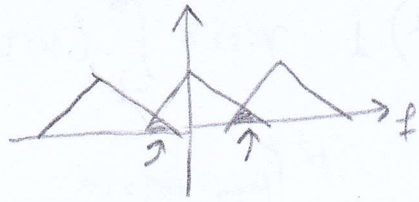
στ) $y(t) = t \cdot u(t) \cdot x(t)$

$$x^* = x(t-t_0)$$

$$y^* = t \cdot u(t) \cdot x^*(t) = t \cdot u(t) \cdot x(t-t_0) \neq y(t-t_0)$$

Άρα, δεν υπάρχουν Χ.Α. συστήματα

10) Aliasing είναι το φαινόμενο της επικάλυψης.



11) Αιτιατό ΓΧΑ σύστημα

Ε.Δ. : $2y[n] - y[n-1] + y[n-3] = x[n] - 5x[n-4]$ (1)

S_1 : $y[n] = x[n] - 5x[n-4]$ (2)

S_2 : $y[n] = \frac{1}{2} y[n-1] - \frac{1}{2} y[n-3] + x[n]$ (3)

▷ Στην σειριακή σύνδεση δύο συστημάτων S_1, S_2, το σήμα εισόδου $x[n]$ διεγείρει το πρώτο σύστημα (S_1 εσω), του οποίου η έξοδος $S_1[x[n]]$ διεγείρει το δεύτερο σύστημα (S_2 εσω). Η έξοδος του δεύτερου συστήματος είναι το τελικό σήμα εξόδου $y[n]$, το οποίο εκφράζεται και ως έξοδος της σύνδεσης (S_2S_1) των δύο συντελεστών - συστημάτων :

$$x[n] \rightarrow \boxed{S_1} \rightarrow \boxed{S_2} \rightarrow y[n]$$

$$y[n] = S_2[S_1[x[n]]] = (S_2S_1)[x[n]]$$

Οπότε, δεν γίνεται να προκύψει η Ε.Δ. από την σε σειρά σύνδεση των S_1, S_2 γιατί τότε θα ίσχυε ότι

$$y[n] = \frac{1}{2} y[n-1] - \frac{1}{2} y[n-3] + x[n] = \frac{1}{2}\left[x[n-1] - 5x[n-5]\right] - \frac{1}{2}\left[x[n-3] - 5x[n-7]\right] + x[n]$$

$$= \frac{1}{2} x[n-1] - \frac{5}{2} x[n-5] - \frac{1}{2} x[n-3] + \frac{5}{2} x[n-7] + x[n]$$

(*) Έξτρα: Κάνοντας χρήση όλης Μ/Σ-Ζ, προκύπτει ότι :

Με Ζ στην (1) : $H(z) = \dfrac{1 - 5z^{-4}}{2 - z^{-1} + z^{-3}}$

Με Ζ στην (2) : $H_1(z) = 1 - 5z^{-4}$

Με Ζ στην (3) : $H_2(z) = \dfrac{1}{1 - \frac{1}{2} z^{-1} + \frac{1}{2} z^{-3}} = \dfrac{2}{2 - z^{-1} + z^{-3}}$

Επομένως θα είναι σε σειρά τα S_1, S_2 : $H_\Sigma(z) = H_1(z) \cdot H_2(z) = 2 \dfrac{1 - 5z^{-4}}{2 - z^{-1} + z^{-3}} = 2H(z)$

12) 1. $y(t) = \int_{-t}^{t} (x(\tau)+1)\,d\tau$

▷ Γραμμικότητα

• για $x_1(t)$: $y_1(t) = \int_{-t}^{t} (x_1(\tau)+1)\,d\tau$

• για $x_2(t)$: $y_2(t) = \int_{-t}^{t} (x_2(\tau)+1)\,d\tau$

• για $x_3(t) = a x_1(t) + b x_2(t)$:

$$y_3(t) = \int_{-t}^{t} (x_3(\tau)+1)\,d\tau = \int_{-t}^{t} [a x_1(\tau) + b x_2(\tau)]\,d\tau =$$

$$= \int_{-t}^{t} [a x_1(\tau)]\,d\tau + \int_{-t}^{t} [b x_2(\tau)]\,d\tau =$$

$$= a y_1(t) + b y_2(t) \longrightarrow \text{γραμμικό}$$

▷ Χρον. Αναλλ.

• $x^* = x(t-t_0)$

• $y^* = \int_{-t}^{t} (x^*(\tau)+1)\,d\tau = \int_{-t}^{t} (x(\tau-t_0)+1)\,d\tau \overset{\tau - t_0 = k}{=}$

$$= \int_{-(t-t_0)}^{t-t_0} (x(k)+1)\,dk = \int_{-(t-t_0)}^{t-t_0} (x(\tau)+1)\,d\tau = y(t-t_0) \rightarrow \text{Χ.Α.}$$

▷ Μνήμη

Αφού η έξοδος εξαρτάται και από το $-t$, το σύστημα έχει μνήμη.

▷ Αιτιατό

Η έξοδος εξαρτάται μόνο από προηγούμενες εισόδους, οπότε το σύστημα είναι αιτιατό.

▷ Ευσταθές BIBO

Θα πρέπει για φραγμένη είσοδο να ισχύει:

Για: $|x(t)| \leq \lambda < +\infty$

Τότε: $|y(t)| = \left|\int_{-t}^{t} (x(\tau)+1)\,d\tau\right| \Rightarrow |y(t)| \leq \left|\int_{-t}^{t} (\lambda+1)\,d\tau\right| \Rightarrow$

$$\Rightarrow |y(t)| \leq \left|(\lambda+1)\int_{-t}^{t} d\tau\right| \Rightarrow |y(t)| \leq |(\lambda+1)\cdot 2t| \xrightarrow{t\to+\infty} +\infty$$

Άρα ασταθές

2. $y(t) = x(t+1) * u(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(\tau+1) \cdot u(t-\tau)\, d\tau$

▷ Γραμμικότητα

• για $x_1(t)$: $y_1(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} x_1(\tau+1) u(t-\tau)\, d\tau$

• για $x_2(t)$: $y_2(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} x_2(\tau+1) u(t-\tau)\, d\tau$

• για $x_3(t) = a x_1(t) + b x_2(t)$:

$$y_3(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} x_3(\tau+1) u(t-\tau)\, d\tau = \int_{-\infty}^{+\infty} [a x_1(\tau+1) u(t-\tau) + b\, x_2(\tau+1) u(t-\tau)]\, d\tau =$$

$$= a \int_{-\infty}^{+\infty} x_1(\tau+1) u(t-\tau)\, d\tau + b \int_{-\infty}^{+\infty} x_2(\tau+1) u(t-\tau)\, d\tau =$$

$$= a\, y_1(t) + b\, y_2(t) \longrightarrow \text{γραμμικό}$$

▷ Χρον. Αναλλ.

• $x^* = x(t-t_0)$

• $y^* = \int_{-\infty}^{+\infty} x^*(\tau+1) \cdot u(t-\tau)\, d\tau = \int_{-\infty}^{+\infty} x(\tau+1-t_0) u(t-\tau)\, d\tau =$

$$\overset{\tau - t_0 = k}{=} \int_{-\infty}^{+\infty} x(k+1) u(t-t_0-k)\, dk = \int_{-\infty}^{+\infty} x(\tau+1) u(t-t_0-\tau)\, d\tau = y(t-t_0)$$

Άρα είναι Χ.Α.

▷ Μνήμη

Αφού η έξοδος εξαρτάται και από μελλοντικές εισόδους $(x(t+1))$ τότε έχει μνήμη.

▷ Αιτιατό

Αφού η έξοδος εξαρτάται και από μελλοντικές εισόδους τότε δεν είναι αιτιατό.

▷ Ευσταθές BIBO

Θα πρέπει να ισχύει:

Για: $|x(t)| \le \lambda < +\infty$

Τότε: $|y(t)| = |x(t+1) * u(t)| = \left| \int_{-\infty}^{+\infty} x(\tau+1) u(t-\tau)\, d\tau \right| \le \left| \int_{-\infty}^{+\infty} \lambda \cdot u(t-\tau)\, d\tau \right| \Rightarrow$

$$\Rightarrow |y(t)| \le \left| \lambda \int_{-\infty}^{t} d\tau \right| \longrightarrow +\infty$$

Άρα ασταθές.

3. $y[n] = \sum_{k=n-1}^{n+1} (x[k])$

▷ <u>Γραμμικότητα</u>

• για $x_1[n]$: $y_1[n] = \sum_{k=n-1}^{n+1} x_1[k]$

• για $x_2[n]$: $y_2[n] = \sum_{k=n-1}^{n+1} x_2[k]$

• για $x_3[n] = a x_1[n] + b x_2[n]$ ⇒

$$y_3[n] = \sum_{k=n-1}^{n+1} x_3[k] = \sum_{k=n-1}^{n+1} \left[a x_1[n] + b x_2[n] \right] =$$

$$= a\sum_{k=n-1}^{n+1} x_1[n] + b\sum_{k=n-1}^{n+1} x_2[n] = a\, y_1[n] + b\, y_2[n] \longrightarrow \text{γραμμικό}$$

▷ <u>Χρον. Αναλλ.</u>

• $x^* = x(k-n_0)$

• $y^* = \sum_{k=n-1}^{n+1} x^*[k] = \sum_{k=n-1}^{n+1} x[k-n_0] \xlongequal{k-n_0=k'} \sum_{k=n-n_0-1}^{n-n_0+1} x[k] \neq y[k-n_0]$

Άρα <u>όχι Χ.Α.</u>

▷ <u>Μνήμη</u>

Αφού η έξοδος εξαρτάται από μελλοντικές & παρελθοντικές εισόδους, <u>έχει μνήμη</u>.

▷ <u>Αιτιατό</u>

Αφού η έξοδος εξαρτάται από μελλοντικές εισόδους, είναι <u>μη αιτιατό</u>.

▷ <u>Ευσταθές BIBO</u>

Θα πρέπει να ισχύει ότι:

Για $|x(n)| \le \lambda < +\infty$

Τότε $|y(n)| = \left|\sum_{k=n-1}^{n+1} x(k)\right| = \sum_{k=n-1}^{n+1} |x(k)| \le \sum_{k=n-1}^{n+1} \lambda = (2n+1)\lambda$

Η ποσότητα αυτή όμως δεν είναι πεπερασμένη για τυχαίο n.

π.χ. για $x(n) = u(n)$ (που είναι φραγμένο), $y(n) = \sum_{k=n-1}^{n+1} u(k) = \sum_{k=0}^{n} 1 = n+1 \xrightarrow[n\to\infty]{} \infty$

Άρα <u>όχι ευσταθές</u>

4. $y[n] = x(n-1)\cdot x(1-n)$

▷ Γραμμικότητα

• για $x_1(n)$: $y_1(n) = x_1(n-1)\cdot x_1(1-n)$

• για $x_2(n)$: $y_2(n) = x_2(n-1)\cdot x_2(1-n)$

• για $x_3(n) = a x_1(n) + b x_2(n)$:

$$y_3(n) = x_3(n-1)\cdot x_3(1-n) = [a\, x_1(n-1) + b x_2(n-1)]\cdot[a x_1(1-n) + b x_2(1-n)] =$$
$$= a^2 x_1(n-1)\, x_1(1-n) + ab\, x_1(n-1)\, x_2(1-n) + ab\, x_2(n-1) x_1(1-n) +$$
$$+ b^2 x_2(n-1)\, x_2(1-n) \neq a y_1(n) + b y_2(n) \longrightarrow \text{μη γραμμικό}$$

▷ Χρον. Αναλλ.

• $x^* = x(n-n_0)$

• $y^* = x^*(n-1)\cdot x^*(1-n) = x(n-n_0-1)\cdot x(1-n-n_0) \neq y(n-n_0)$

Άρα όχι Χ.Α

▷ Μνήμη

Αφού η έξοδος εξαρτάται ~~από~~ παρελθοντικές εισόδους οπότε, θα έχει μνήμη.

▷ Αιτιατό

Αφού η έξοδος εξαρτάται και από μελλοντικές εισόδους είναι μη αιτιατό.

▷ Ευσταθές BIBO

Θα πρέπει να ισχύει ότι:

• Για $|x(n)| \leq \lambda < +\infty$

• Τότε $|y(n)| = |x(n-1)\cdot x(1-n)| = |x(n-1)|\cdot|x(1-n)| \leq \lambda\cdot\lambda = \lambda^2 < +\infty$

Οπότε είναι ευσταθές BIBO.

3) Nyquist rate : $x(t) = \sin(2\pi t)$

$$\downarrow$$

$$\omega_m = 2\pi \text{ r/s}$$

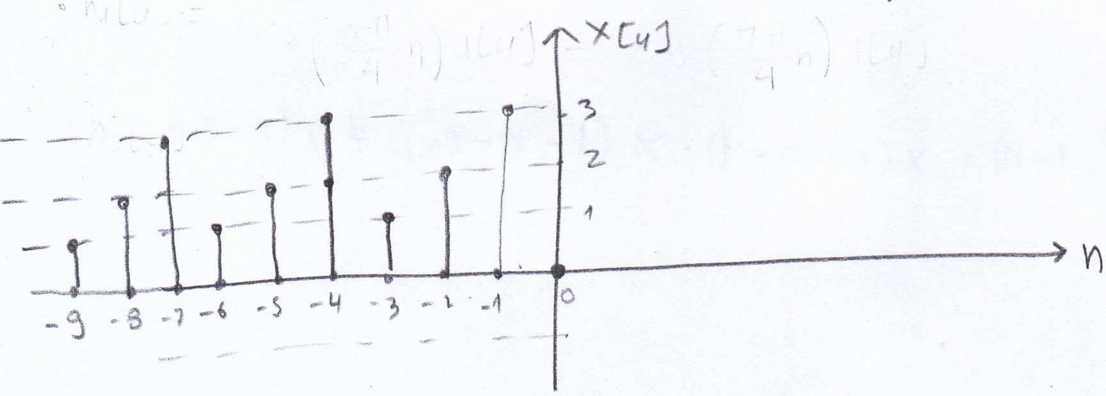
$$\downarrow$$

$$f_m = \frac{\omega_m}{2\pi} = \frac{2\pi}{2\pi} = 1\,Hz$$

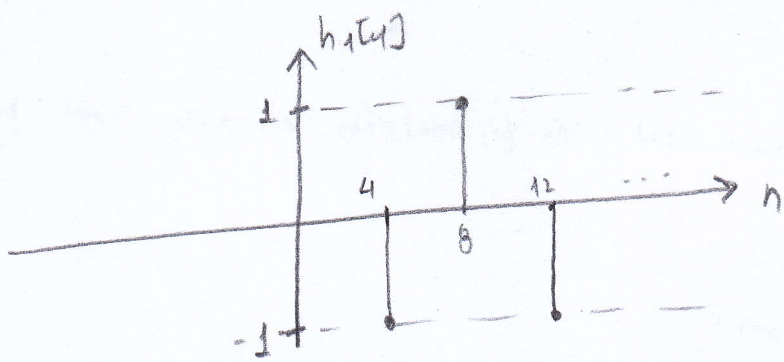
$$f_s = 2 f_m = \underline{\underline{2\,Hz}}$$

4) $\cdot\, x[n] = (n \bmod 3 + 1)\cdot[u[n+a+2] - u[n+a-7]]$

$$= (n \bmod 3 + 1)\cdot[u[n+9] - u[n]]$$



$\cdot\, h_1[n] = \cos\left(\frac{a\pi}{4} n\right)u[n] = \cos\left(\frac{7\pi}{4} n\right)u[n] = \begin{cases} \cos\left(\frac{7\pi}{4} n\right), & n \geq 0 \\ 0, & n < 0 \end{cases}$



• $h_2[n] = n\cdot u[n + a \bmod 4] - n\cdot u[n + a \bmod 4 - 7] + \delta[n-a]$

$= n\cdot u[n+3] - n\cdot u[n-4] + \delta[n-7]$

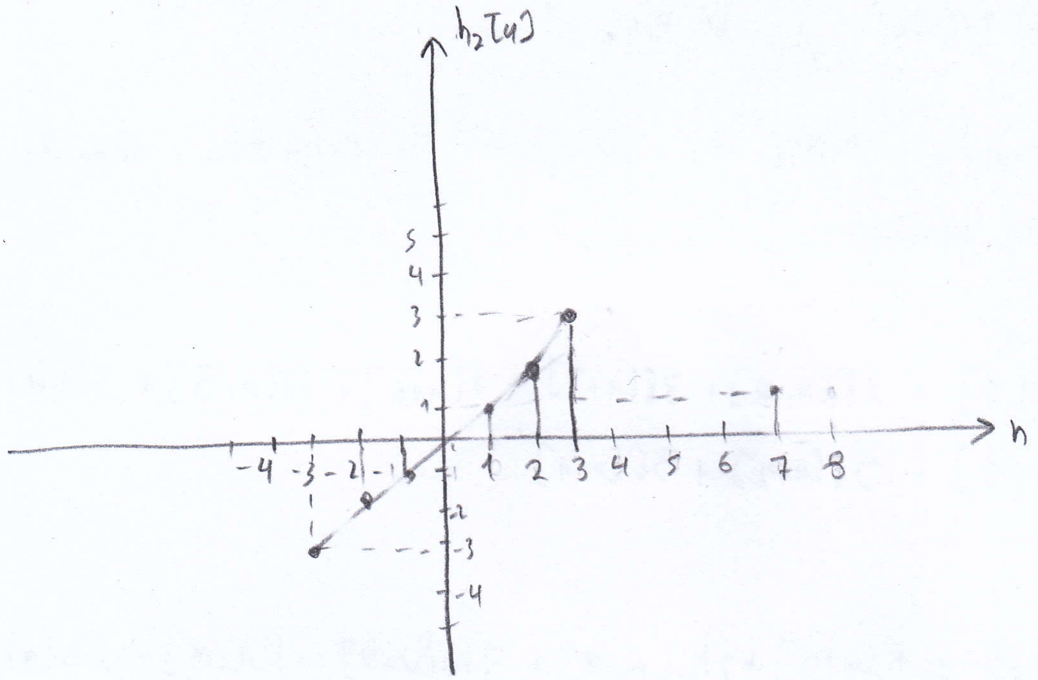
$= n\left(u[n+3] - u[n-4]\right) + \delta[n-7]$

- $u[n+3] = \begin{cases} 1, & n \geq -3 \\ 0, & n < -3 \end{cases}$

- $u[n-4] = \begin{cases} 1, & n \geq 4 \\ 0, & n < 4 \end{cases}$

- $\delta[n-7] = \begin{cases} 1, & n = 7 \\ 0, & n \neq 7 \end{cases}$

$h_2[n] = \begin{cases} 0, & n < -3 \\ n, & -3 \leq n < 4 \\ 0, & 4 \leq n < 7 \\ 1, & n = 7 \\ 0, & n > 7 \end{cases}$



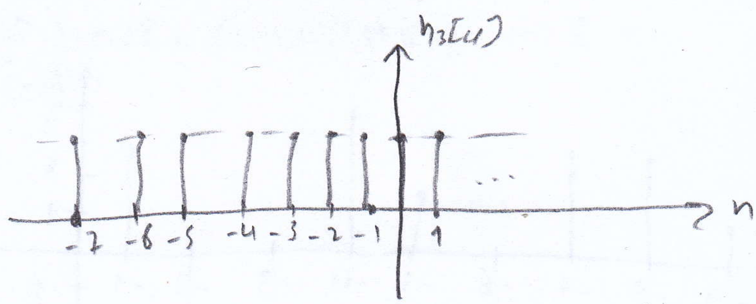
• $h_3[n] = \sum_{k=n-a}^{n+a} (-1)^{a+k} \cdot \delta[k] = \sum_{k=n-7}^{n+7} (-1)^{7+k}\, \delta[k]$

↳ $\delta[k] = \begin{cases} 1, & k = 0 \\ 0, & k \neq 0 \end{cases}$ οπότε $(-1)^{7+k}\,\delta[k] \neq 0 \Rightarrow k = 0$

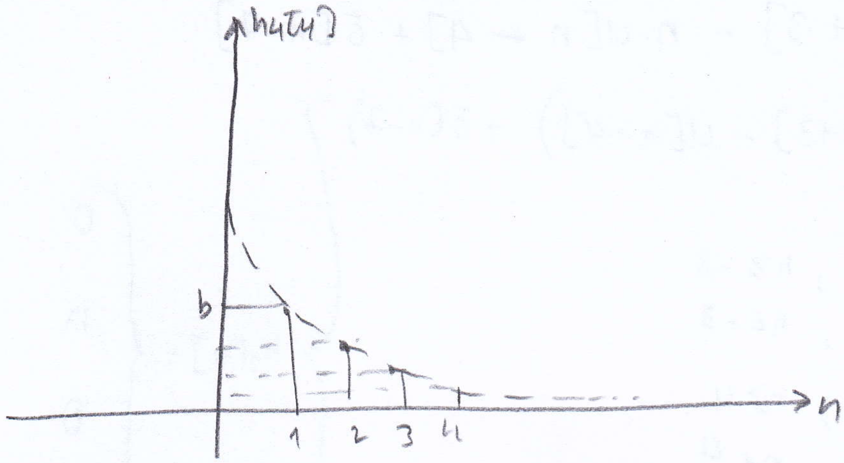
↳ Αν $k = 0$, τότε $h_3[n] = 1$

↳ Για $n < -7$, $h_3[n] = 0$, οπότε

$h_3[n] = \begin{cases} 0, & n < -7 \\ 1, & n \geq -7 \end{cases}$



$$h_4[n] = b^n\, u[n], \quad 0<b<1 \quad \Rightarrow \quad h_4[n] = \begin{cases} b^n, & n \geq 0 \\ 0, & n<0 \end{cases}$$



$$h_5[n] = h_3[n] * h_4[n] = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} h_3[k] \cdot h_4[n-k] = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} h_4[k] \cdot h_3[n-k] =$$

$$= \sum_{k=0}^{+\infty} h_4[k] \cdot h_3[n-k] = \sum_{k=0}^{n} b^k \cdot h_3[n-k].$$

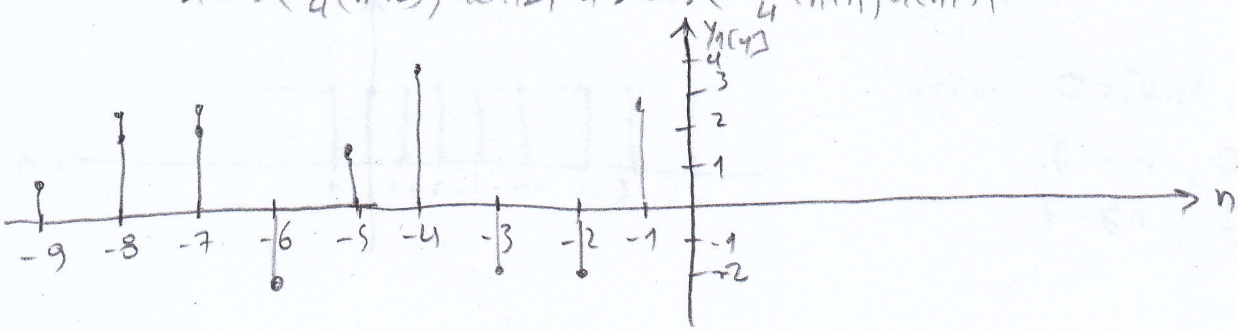
Με την μέθοδο πολυωνύμων μπορεί να υπολογιστεί το συνελικτικό άθροισμα και να γίνει η γραφ. παράσταση.

Το $x[n] = \delta[n+9] + 2\delta[n+8] + 3\delta[n+7] + \delta[n+6] + 2\delta[n+5] + 3\delta[n+4] +$
$+ \delta[n+3] + 2\delta[n+2] + 3\delta[n+1]$

Οπότε,

$$y_1[n] = x[n] * h_1[n] = h_1[n+9] + 2h_1[n+8] + 3h_1[n+7] + h_1[n+6] + 2h_1[n+5] +$$
$$+ 3h_1[n+4] + h_1[n+3] + 2h_1[n+2] + 3h_1[n+1] =$$

$$= \cos\left(\tfrac{7\pi}{4}(n+9)\right)u(n+9) + 2\cos\left(\tfrac{7\pi}{4}(n+8)\right)u(n+8) + 3\cos\left(\tfrac{7\pi}{4}(n+7)\right)(n+7) + \cos\left(\tfrac{7\pi}{4}(n+6)\right)u(n+6)$$
$$+ 2\cos\left(\tfrac{7\pi}{4}(n+5)\right)u(n+5) + 3\cos\left(\tfrac{7\pi}{4}(n+4)\right)u(n+4) + \cos\left(\tfrac{7\pi}{4}(n+3)\right)u(n+3) +$$
$$+ 2\cos\left(\tfrac{7\pi}{4}(n+2)\right)u(n+2) + 3\cos\left(\tfrac{7\pi}{4}(n+1)\right)u(n+1)$$



'Επειτα,

$y_2[n] = x[n] * h_2[n]$

όπου $x[n] = n \bmod 3 + 1$, $-9 \le n < 0$

$h_1[n] = \cos\left(\frac{7\pi}{4}n\right)$, $n \geq 0$

$$h_2[n] = \begin{cases} n, & -3 \le n < 4 \\ 0, & 4 \le n < 7 \\ 1, & n = 7 \end{cases}$$

$h_3[n] = 1$, $n \geq -7$

Οπότε, $y_2[n] = x[n] * h_2[n]$

- $x[k] = [\underset{\uparrow}{1}, 2, 3, 1, 2, 3, 1, 2, 3]^T$, $N = 9$
- $h_2[k] = [-3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 0, 0, 0, 1]^T$, $N = 11$

διάρκεια $N+M-1 = 19$

$y[0] = x(0)\,h(0) = -3$

$y(1) = x(0)\,h(1) + x(1)\,h(0) = -7$

$y(2) = -7$

$y(3) = -3$

$y(4) = -2$

$y(5) = 4$

$y(6) = 14$

$y(7) = 16$

$y(8) = 12$

$y(9) = 16$

$y(10) = 24$

$y(11) = 13$

$y(12) = 17$

$y(13) = 11$

$y(14) = 10$

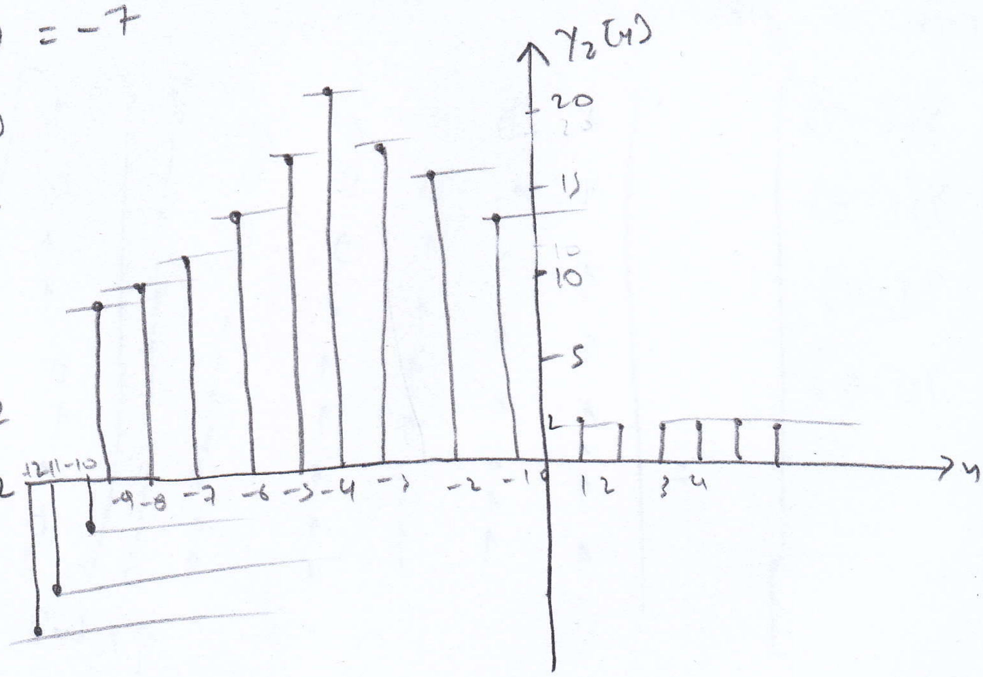
$y(15) = 2$

$y(16) = 2$

$y(17) = 2$

$y(18) = 2$

$y(19) = 2$



Υπόθεση,

$x[n] = n \bmod 3 + 1, \quad -9 \le n < 0$

$h_3[n] = 1, \quad n \ge -7$

$y_3[n] = x[n] * h_3[n].$

όπου $x[n] = [1, 2, 3, 1, 2, 3, 1, 2, 3]^T \quad N=9$

Με τη μέθοδο πολυωνύμων :

$X[z] = 1 + 2z^{-1} + 3z^{-2} + 1z^{-3} + 2z^{-4} + 3z^{-5} + 1z^{-6} + 2z^{-7} + 3z^{-8}$

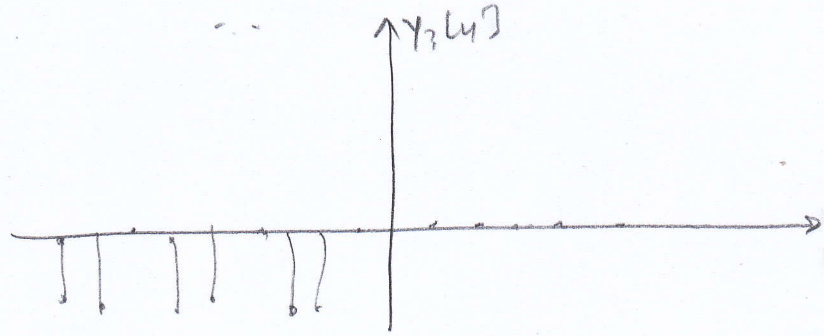
$h[z] = 1 + z^{-1} + z^{-2} + z^{-3} + z^{-4} + z^{-5} + \dots$

Άρα, $Y_3[z] = X[z] \cdot h_3[z] = \dots$

- Οι συντελεστές των ομοβάθμιων όρων του πολυωνύμου είναι οι τιμές της συνέλιξης.
- Η αντιστοίχιση σε αναλυτική σχέση είναι η εξής: $y_3[n] = \sum_k x[k] \cdot h_3[n-k]$.

Μπορεί να γίνει και με Γινόμενο Πίνακα επί διάνυσμα.

$$\begin{bmatrix} y_3[-9] \\ y_3[-8] \\ y_3[-7] \\ y_3[-6] \\ \vdots \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \Rightarrow \dots$$



$h_4[n] = [\,0, 0, 1, b, b^2\,]$ ...

$h_5[n] = h_3[n] * h_4[n]$

$M/\Sigma - Z$: $h_3[n] \longleftrightarrow H_3(z) = \cancel{z} + z^{-1} + z^{-2} + \dots$

$h_4[n] \longleftrightarrow H_4(z) = \dfrac{z}{z-b}$

Άρα $H_5(z) = H_3(z)\cdot H_4(z) = \dfrac{z}{z-b} + \dfrac{1}{z-b} + \dots + \dfrac{z^{-6}}{z-b}$

$\Updownarrow$

$h_5[n] = b^{n+7} u(n+7) + b^{n+6} u(n+6) + \dots$

Παρατηρούμε: $h_5(-7) = 1$, $h_5(-6) = b+1$, ...

όμως $h_5[n] = \sum_{k=0}^{n+7} b^k$

15) · Σύμβολα 64 επιπέδων σε binary code
· 1 channel μετάδοση 1 symbol / 5 msecs } bitrate = ; $\longrightarrow$ 1200 bps

16) Nyquist rate : $x(t) = \left(\dfrac{\sin(500\pi t)}{\pi t}\right)^2 = \dfrac{1-\cos 1000\pi t}{(\pi t)^2}$

▷ Nyquist rate : $\omega_m = 1000\pi\, r/s$

$f_s = 2f_m = 1000$ Hz

17)

- $x_1(t) = \left(\cos\left(\frac{\pi}{3}t\right)\right)^2 + \left(\sin\left(\frac{\pi}{30}t\right)\right)^2 + \cos\left(\frac{\pi}{6}t\right)\cdot\sin\left(\frac{\pi}{12}t\right)$

$$= 1 + \frac{1}{2}\cos\left(\frac{2\pi}{3}t\right) + 1 - \frac{1}{2}\cos\left(\frac{\pi}{15}t\right) + \frac{\sin\left(\frac{3\pi}{12}t\right) - \sin\left(\frac{\pi}{12}t\right)}{2}$$

$\omega_1 = \frac{2\pi}{3} \longrightarrow T_1 = 3$ $\qquad$ $\omega_3 = \frac{\pi}{12} \longrightarrow T_3 = 24$

$\omega_2 = \frac{\pi}{15} \longrightarrow T_2 = 30$ $\qquad$ $\omega_4 = \frac{3\pi}{12} \longrightarrow T_4 = 8$

$T = ΕΚΠ(T_1, T_2, T_3, T_4) = 120$ (Εδινε μονο ένα "120" γιατί δεν το [illegible])

- $x_2(t) = \cos\left(\frac{\pi}{3}t\right) + \left(\sin\left(\frac{\pi}{3}t\right)\right)^3 + \cos\left(\frac{\pi}{6}t\right)\sin\left(\frac{\pi}{2}t\right)$

$$= \cos\left(\frac{\pi}{3}t\right) + \frac{3\sin\left(\frac{\pi}{3}t\right) - \sin\left(3\frac{\pi}{3}t\right)}{4} + \frac{\sin\left(\left(\frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{6}\right)t\right) + \sin\left(\left(\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{6}\right)t\right)}{2}$$

$$= \cos\left(\frac{\pi}{3}t\right) + \frac{3}{4}\sin\left(\frac{\pi}{3}t\right) - \frac{1}{4}\sin(\pi t) + \frac{1}{2}\sin\left(\frac{2\pi}{3}t\right) + \frac{1}{2}\sin\left(\frac{\pi}{3}t\right)$$

$\omega_1 = \frac{\pi}{3} \rightarrow T = \frac{2\pi}{\frac{\pi}{3}} = 6$ $\qquad$ $\omega_4 = \frac{2\pi}{3} \rightarrow T = \frac{2\pi}{\frac{2\pi}{3}} = 3$

$\omega_2 = \frac{\pi}{3} \rightarrow T = 6$ $\qquad$ $\omega_5 = \frac{\pi}{3} \rightarrow T = 6$

$\omega_3 = \pi \rightarrow T = \frac{2\pi}{\pi} = 2$

$T = ΕΚΠ(2, 3, 6) = 6$

- $x_3(t) = \exp\left(\frac{j\pi t}{9}\right) - \exp(j9\pi t - 7) = e^{\frac{j\pi t}{9}} - e^{j9\pi t - 7}$

$\omega_1 = \frac{\pi}{9} \rightarrow T = \frac{2\pi}{\frac{\pi}{9}} = \frac{9}{2}$

$\omega_2 = 9\pi \rightarrow T = \frac{2\pi}{9\pi} = \frac{2}{9}$

$T = ΕΚΠ\left\{\frac{9}{2}, \frac{2}{9}\right\} = 18$

• $x_4(n) = \sum_{k=1}^{4} \exp\left(j \frac{\pi n}{(k \bmod 6)+1}\right)$

$\omega_1 = \frac{\pi}{2}$, $\omega_2 = \frac{\pi}{3}$, $\omega_3 = \frac{\pi}{4}$, $\omega_4 = \frac{\pi}{5}$

$\downarrow \quad \downarrow \quad \downarrow \quad \downarrow$

$T_1 = 4 \quad T_2 = 6 \quad T_3 = 8 \quad T_4 = 10$

$T = \text{ΕΚΠ}(T_1, T_2, T_3, T_4) = 120$

• $x_5(n) = \sin\left(3\pi + \frac{2}{5}\pi n^3\right)$

Από ορισμό περιοδικότητας:

$x[n+N] = x[n] \Rightarrow \sin\left(3\pi + \frac{2}{5}\pi n^3\right) = \sin\left(3\pi + \frac{2\pi}{5}(n+N)^3\right)$

$\Rightarrow 2k\pi + \cancel{\frac{2\pi}{5} n^3} + \cancel{3\pi} = \cancel{\frac{2\pi}{5}}(\cancel{n^3} + 3n^2N + 3nN^2 + N^3) + \cancel{3\pi}$

$\Rightarrow 2k = \frac{6n^2N}{5} + \frac{6}{5}nN^2 + \frac{2}{5}N^3$

$\frac{6n^2N}{5} = 2k$, $N_1 = \frac{5}{3}k$, $k=3$: $N_1 = 5$

$\frac{6}{5}nN^2 = 2k$, $N_2 = \frac{5}{3}k$, $N_2 = \sqrt{\frac{5}{3}}$

$\frac{2}{5}N^3 = 2k$, $N^3 = 5k$, $N_3 = \sqrt[3]{5}$

18) Nyquist rate : $x(t) = \sin(2\pi t)$

Υπολογίστηκε σε άλλο ερώτημα: $f_s = 2Hz$

19) V

20) Ευσταθής BIBO

- $y(t) = e^{x(t)}$

  για $|x(t)| \leq \lambda$

  τότε $|y(t)| = |e^{x(t)}| = e^{|x(t)|} \leq e^{\lambda}$ → ευσταθεί

- $y(t) = \log(x(t))$

  για $|x(t)| \leq \lambda$

  τότε $|y(t)| = |\log(x(t))| \to \infty$ → ασταθής

- $y(t) = \sin(x(t))$

  για $|x(t)| \leq \lambda$

  τότε $|y(t)| = |\sin(x(t))| \leq 1$ → ευσταθές (με όριο να συγκλίνουν λόγω ορίου)

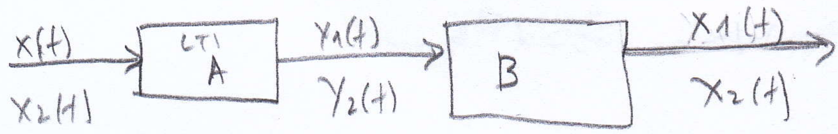
- $y(t) = t \cdot x(t) + 1$

  για $|x(t)| \leq \lambda$

  τότε $|y(t)| = |t \cdot x(t) + 1| \leq |t \cdot x(t)| + 1 = |t| \cdot |x(t)| + 1 \leq \lambda |t|$ → ασταθής

21) Θεωρία για Χ.Α. (βιβλίο σελ. 83)

22)



Για το B η είσοδος είναι $a y_1(t) + b y_2(t)$, συμπεραίνω ότι το A είχε είσοδο $a x_1(t) + b x_2(t)$ οπότε, για να προκύψει γραμμική πράξη, θα πρέπει η έξοδος του B να είναι $a x_1(t) + b x_2(t)$.

23) Θεωρία για ΒΙΒΟ (βιβλίο σελ. 85)

24) ίδιο με 22

25) 1. Αν περιττό σήμα $x(n) = -x(-n)$

τότε $\sum_{n=-\infty}^{+\infty} x(n) = 0$

Αν το σήμα είναι περιττό, τότε γράφεται ως $x_o(n) = \frac{x(n) - x(-n)}{2}$

$$\text{Άρα } \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x_o(n) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \frac{x(n) - x(-n)}{2} = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \frac{x(n)}{2} - \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \frac{x(-n)}{2}$$

$$= \frac{1}{2}\sum_{n=-\infty}^{+\infty} x(n) - \frac{1}{2}\sum_{n=-\infty}^{+\infty} x(-n) =$$

$$= \frac{1}{2}\sum_{n=-\infty}^{+\infty} x(n) - \frac{1}{2}\sum_{n=-\infty}^{+\infty} x(n) = 0$$

2. Αν $x_1(n)$ περιττό, $x_2(n)$ άρτιο τότε $x_1(n) \cdot x_2(n)$ περιττό

$$x_{1o} = \frac{x_1(n) - x_1(-n)}{2} \quad \} \; x_1(n) = -x_1(-n)$$

$$x_{2e} = \frac{x_2(n) + x_2(-n)}{2} \quad \} \; x_2(n) = x_2(-n)$$

$$\text{Άρα } x_1(-n) \cdot x_2(-n) = \left[-x_1(n)\right] \cdot \left[x_2(n)\right] = -\left(x_1(n) \cdot x_2(n)\right)$$

3. Αν $x_e[n]$ άρτιο, $x_o[n]$ περιττό μέρος του $x[n]$

Νδο $$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} x^2[n] = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x_e^2 + \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x_o^2[n]$$

Ισχύει ότι $x[n] = x_e[n] + x_o[n]$

Τότε $$x^2[n] = (x_e[n] + x_o[n])^2 = x_e^2[n] + x_o^2[n] + 2x_e[n]\cdot x_o[n] \quad (*)$$

Άρα $$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} x^2[n] = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x_e^2[n] + \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x_o^2[n] + 2\sum_{n=-\infty}^{+\infty} x_e[n]\cdot x_o[n]$$

- Όμως, από το (2), αν $x_1(n)$ περιττό, $x_2(n)$ άρτιο (εδώ είναι αντίστοιχα τα $x_o(n)$, $x_e(n)$) τότε $x_1(n)\cdot x_2(n)$ περιττό (εδώ $x_e(n)\cdot x_o(n)$ περιττό).
- Όμως, από το (1), αν $x(n)$ περιττό (εδώ $x_e(n)\cdot x_o(n)$ περιττό) τότε $\sum_{n=-\infty}^{+\infty} x(n) = 0$ (εδώ $\sum_{n=-\infty}^{+\infty} x_e(n)\cdot x_o(n) = 0$).

Άρα αποδείχθηκε.

4. Όμοια, για τον συνεχή χρόνο:

$$(*) \overset{\int}{\Rightarrow} \int_{-\infty}^{+\infty} x^2[n] = \int_{-\infty}^{+\infty} x_e^2(n) + \int_{-\infty}^{+\infty} x_o^2(n) + 2\int_{-\infty}^{+\infty} x_e(n)\cdot x_o(n).$$

- Όμως, από το 2, $x_e(n)\cdot x_o(n)$ περιττό.
- Ομοίως με την 1, $\int_{-\infty}^{+\infty} x(n) = 0$, αν $x(n)$ περιττό.

Άρα αποδείχθηκε.

26) Συζητήθηκε στο quiz.

↳ Μάλλον το $h_2(t)$ έπρεπε να έχει επιλογή 2 και 6 αντί για 3 και 7.