3η Σειρά Γραπτών Ασκήσεων

Χρήστος Τσούφης
03117176

Question 1

ΓΧΑ Σύστημα Διακριτού Χρόνου

Εξ. Διαφ.: $y[n] + 0{,}25y[n-2] = x[n] - 1{,}6x[n-1] + 0{,}6x[n-2]$ (1)

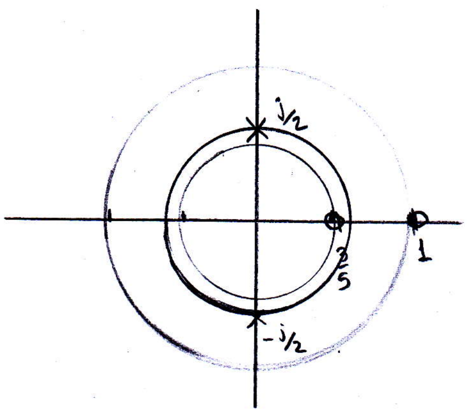
1. $Y(z) + 0{,}25z^{-2}Y(z) = X(z) - 1{,}6z^{-1}X(z) + 0{,}6z^{-2}X(z)$

$\Rightarrow Y(z)(1 + 0{,}25z^{-2}) = X(z)(1 - 1{,}6z^{-1} + 0{,}6z^{-2})$

$\Rightarrow \dfrac{Y(z)}{X(z)} = \dfrac{1 - 1{,}6z^{-1} + 0{,}6z^{-2}}{1 + 0{,}25z^{-2}} = H(z)$ (συνάρτηση μεταφοράς)

πόλοι: $1 + 0{,}25z^{-2} = 0 \Rightarrow z_{1,2} = \pm \frac{j}{2}$

μηδενικά: $1 - 1{,}6z^{-1} + 0{,}6z^{-2} = 0 \Rightarrow z = 1$ ή $z = \frac{3}{5}$



Για να είναι ευσταθές, πρέπει $|z_{1,2}| \leq 1$, δηλ. $\sqrt{\frac{j}{2} \cdot \left(-\frac{j}{2}\right)} \leq 1 \Rightarrow \sqrt{-\frac{j^2}{4}} \leq 1 \Rightarrow$
$\Rightarrow \sqrt{\frac{1}{4}} \leq 1 \Rightarrow \frac{1}{2} \leq 1$ που ισχύει, άρα είναι ευσταθές.

2. Το $H(\Omega)$ προκύπτει αν $z = e^{j\Omega}$.

Οπότε $H(\Omega) = \dfrac{1 - 1{,}6e^{-j\Omega} + 0{,}6e^{-2j\Omega}}{1 + 0{,}25e^{-2j\Omega}}$

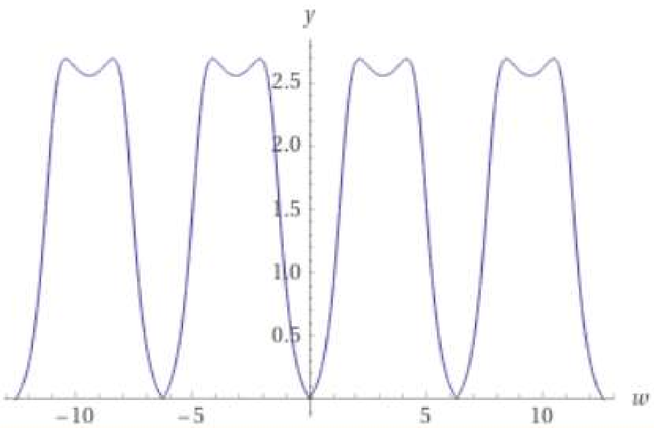
Με τη βοήθεια του Wolfram Alpha:

plot	$\left\lvert \dfrac{1 - 1.6\, e^{-i w} + 0.6\, e^{-2 i w}}{1 + 0.25\, e^{-2 i w}} \right\rvert$

$|z|$ is the absolute value of z

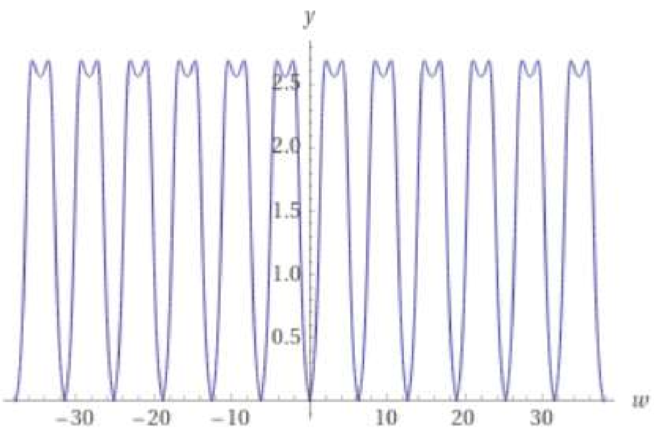
i is the imaginary unit

Plots:



(w from −12.6 to 12.6)

Enlarge | Customize



(w from −37.7 to 37.7)

3. Αν $x[n] = 0,6^n u[n] \longrightarrow X(z) = \dfrac{1}{1-0,6z^{-1}} \quad |z| > 0,6$

και $y[-1] = 2,\ y[-2] = 0$

Τότε :

$$Y(z) + 0,25\left(\cancel{Y(-2)} + Y[-1]z^{-1} + Y(z)z^{-2}\right) = X(z) - 1,6\left[\cancel{X(-1)} + z^{-1}X(z)\right] +$$

$$+0,6\left[\cancel{X(-2)} + \cancel{X(-1)}z^{-1} + z^{-2}X(z)\right]$$

$$Y(z) + 0,25\left(2z^{-1} + Y(z)z^{-2}\right) = X(z) - 1,6z^{-1}X(z) + 0,6z^{-2}X(z)$$

$$0,5z^{-1} + Y(z)\left[1 + 0,25z^{-2}\right] = X(z)\left[1 - 1,6z^{-1} + 0,6z^{-2}\right]$$

$$Y(z) = \frac{1 - 1,6z^{-1} + 0,6z^{-2}}{1 + 0,25z^{-2}}X(z) - \frac{0,5z^{-1}}{1+0,25z^{-2}}$$

$$= \frac{1 - 1,6z^{-1} + 0,6z^{-2}}{(1+0,25z^{-2})(1-0,6z^{-1})} - \frac{0,5z^{-1}}{1+0,25z^{-2}}$$

$$= \frac{(1-z^{-1})\cancel{(1-\frac{3}{5}z^{-1})}}{(1+0,25z^{-2})\cancel{(1-0,6z^{-1})}} - \frac{0,5z^{-1}}{1+0,25z^{-2}}$$

$$= \frac{1-z^{-1}}{1+0,25z^{-2}} - \frac{0,5z^{-1}}{1+0,25z^{-2}} = \frac{1}{1+0,25z^{-2}} + \frac{-z^{-1}}{1+0,25z^{-2}} + \frac{-0,5z^{-1}}{1+0,25z^{-2}}$$

Άρα $y(n) = \underbrace{\left(\tfrac{1}{2}\right)^n \cos\left(\tfrac{\pi}{2}n\right)u[n]}_{zs} - 3\underbrace{\left(\tfrac{1}{2}\right)^n \sin\left(\tfrac{\pi}{2}n\right)u[n]}_{zi}$

Question 2

$x[n] = u[n] - u[n-8]$

1. Το $x[n]$ γράφεται : $x[n] = \delta[n] + \delta[n-1] + \delta[n-2] + \delta[n-3] + \delta[n-4] + \delta[n-5] + \delta[n-6] + \delta[n-7]$.

Οπότε $X(\Omega) = 1 + e^{-j\Omega} + e^{-2j\Omega} + e^{-3j\Omega} + e^{-4j\Omega} + e^{-5j\Omega} + e^{-6j\Omega} + e^{-7j\Omega}$

Με την βοήθεια του Wolfram Alpha φαίνεται και η γραφ. παράσταση.

2. $$X[m] = \sum_{n=0}^{N-1} x[n]\, e^{-j2\pi mn/N} = \sum_{n=0}^{N-1} \left(u[n] - u[n-8]\right) e^{-j2\pi mn/N} =$$

$$= \sum_{n=0}^{7} 1 \cdot e^{-j2\pi mn/N} = \sum_{n=0}^{7} e^{-j2\pi mn/N} \overset{m=0}{=\!=} 8 \cdot \delta[m]$$

ενώ αν $m \neq 0$: $x[m] = \dfrac{e^{-j\frac{2\pi}{N}8m} - 1}{e^{-j\frac{2\pi m}{N}} - 1}$

Οπότε, $$X[m] = \begin{cases} 8, & m = 0 \\ \dfrac{e^{-j2\pi 8m/N} - 1}{e^{-j2\pi m/N} - 1}, & m \neq 0 \end{cases}$$

3. $$x_N[n] = \begin{cases} 1, & n < 8 \\ 0, & 8 < n < N \end{cases}$$

$$X[m] = \sum_{n=0}^{7} e^{-j2\pi mn/N} = \sum_{n=0}^{7} \left(e^{-j2\pi m/N}\right)^n$$

Για $N = 16$, $m \neq 0$: $x[m] = \dfrac{e^{-j\pi m} - 1}{e^{-j\pi m/8} - 1}$

οπότε $x[m] = 0 \Rightarrow e^{-j\pi m} - 1 = 0 \Rightarrow \cos(\pi m) - j\sin(\pi m) - 1 = 0 \Rightarrow m$ άρτιος

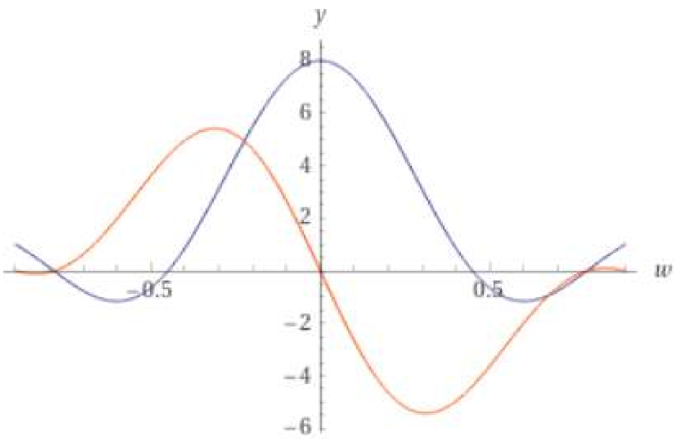
Στο διάστημα $(0,16)$ υπάρχουν 7 άρτιοι άρα θα μηδενίζεται 7 φορές.

Input interpretation:

plot	$1+e^{-iw}+e^{-2iw}+e^{-3iw}+e^{-4iw}+e^{-5iw}+e^{-6iw}+e^{-7iw}$

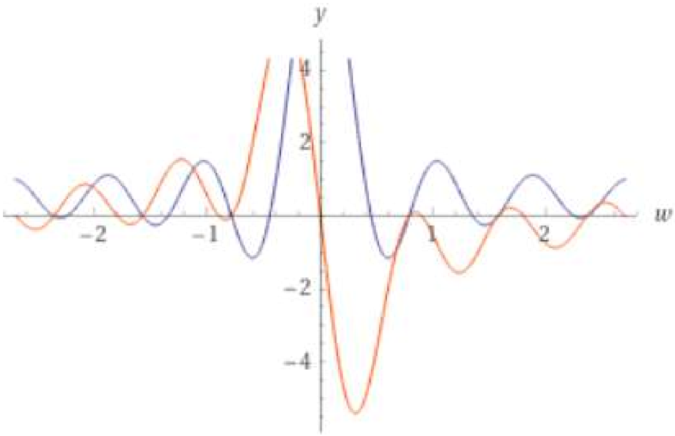
i is the imaginary unit

Plots:



(w from -0.9 to 0.9)

real part
imaginary part



(w from -2.7 to 2.7)

real part
imaginary part

4. $z[n] = 2 + \sin^2\left(\frac{2\pi n}{N}\right)$, $n = 0, 1, \dots, N-1$

$$X[m] = \sum_{n=0}^{N-1} x[n] e^{-j2\pi mn/N} = \sum_{n=0}^{N-1} \left(2 + \sin^2\left(\frac{2\pi n}{N}\right)\right) e^{-j2\pi mn/N} =$$

$$= \sum_{n=0}^{N-1} 2e^{-j2\pi mn/N} + \sum_{n=0}^{N-1} \sin^2\left(\frac{2\pi n}{N}\right) e^{-j2\pi mn/N} =$$

$$= 2\sum_{n=0}^{N-1} e^{-j2\pi mn/N} + \sum_{n=0}^{N-1} \frac{1 - \cos\left(\frac{4\pi n}{N}\right)}{2} e^{-j2\pi mn/N} =$$

$$= 2\sum_{n=0}^{N-1} e^{-j2\pi mn/N} + \frac{1}{2}\sum_{n=0}^{N-1} e^{-j2\pi mn/N} - \frac{1}{2}\sum_{n=0}^{N-1} \cos\left(\frac{4\pi n}{N}\right) e^{-j2\pi mn/N} =$$

$$= 2\sum_{n=0}^{N-1} e^{-j2\pi mn/N} + \frac{1}{2}\sum_{n=0}^{N-1} e^{-j2\pi mn/N} - \frac{1}{2}\sum_{n=0}^{N-1} e^{j4\pi n/N} e^{-j2\pi mn/N} - \frac{1}{2}\sum_{n=0}^{N-1} e^{-j4\pi n/N} \cdot e^{-j2\pi mn/N} =$$

$$= 2\sum_{n=0}^{N-1} e^{-j2\pi mn/N} + \frac{1}{2}\sum_{n=0}^{N-1} e^{-j2\pi mn/N} - \frac{1}{2}\sum_{n=0}^{N-1} e^{-j\frac{2\pi n}{N}(m-2)} - \frac{1}{2}\sum_{n=0}^{N-1} e^{-j\frac{2\pi n}{N}(m+2)} =$$

$$= \left(2\delta[m] + \frac{1}{2}\delta[m] - \frac{1}{2}\delta[m-2] - \frac{1}{2}\delta[m+2]\right)N =$$

$$= \frac{5}{2}N\delta[m] - \frac{N}{2}\delta[m-2] - \frac{N}{2}\delta[m+2]$$

Question 3

1. $X_1(z) = \dfrac{1 - 2z^{-1}}{(1 - z^{-1})(1 - z^{-2})}$, $|z| > 1$

$$\frac{1 - 2z^{-1}}{(1 - z^{-1})(1 - z^{-2})} = -\frac{3}{4(x+1)} - \frac{1}{4(x-1)} - \frac{1}{2(x-1)^2} + 1$$

$$x_1[n] = -\frac{3}{4} \cdot (-1)^{n-1} u[n-1] - \frac{1}{4} 1^{n-1} u[n-1] - \frac{1}{2}(n-1) 1^{n-1} u[n-1] + \delta[n]$$

2. $X_2(z) = \log\left(1 - \frac{1}{3}z^{-1}\right)$, $|z| > 1/3$

<u>1η προσέγγιση</u>

Ισχύει ότι $x[n] \xleftrightarrow{z} \log\left(1 - \frac{1}{3}z^{-1}\right)$

$x[n] \xleftrightarrow{z} \log\left(1 - 3^{-1}z^{-1}\right)$

και

$$n\,x[n] \xleftrightarrow{z} z^{-1} \cdot \frac{1 \cdot 3^{-1}}{1 - 3^{-1}z^{-1}} \cdot \frac{1}{\ln 10} = \frac{3^{-1}z^{-1}}{1 - 3^{-1}z^{-1}} \cdot \frac{1}{\ln 10} = \frac{1}{3\ln 10} \cdot z^{-1} \frac{1}{1 - 3^{-1}z^{-1}}$$

$$\updownarrow z^{-1}$$

$$\frac{1}{3\ln 10}\left(\delta[n-1] * \left(\frac{1}{3}\right)^n u[n]\right) = \frac{1}{3\ln 10}\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} u[n-1]$$

Άρα $x[n] = \dfrac{1}{\ln 10}\left(\dfrac{1}{3}\right)^n \dfrac{u[n-1]}{n}$

2η προσέγγιση

$$\log(1-\tfrac{1}{3}z^{-1}) = -\sum_{i=1}^{+\infty}\left(\frac{1}{3z}\right)^i \cdot \frac{1}{i} \quad , \text{με } \left|\frac{1}{3z}\right|<1 \Rightarrow |z|>1/3$$

$$= \sum_{i=1}^{\infty} -\left(\frac{1}{3z}\right)^i \frac{1}{i} = \sum_{i=1}^{+\infty} -\left(\frac{1}{3}\right)^i \cdot \frac{z^{-i}}{i} = \sum_{n=1}^{+\infty} -\left(\frac{1}{3}\right)^n \cdot \frac{1}{n} z^{-n} \, , \quad |z|>1/3$$

όποτε, $$x_2[n] = \begin{cases} -\frac{1}{n}\left(\frac{1}{3}\right)^n &, n\geq 1 \\ 0 &, n<1 \end{cases}$$

3. $$X_3(z) = \frac{z^3-10z^2-4z+4}{2z^2-2z-4} \, , \quad |z|<1$$

$$X_3(z) = \frac{z}{2} - \frac{6}{z-2} + \frac{1}{2(z+1)} - \frac{9}{2}$$

$$\Big\Updownarrow z$$

$$x_3[n] = \frac{1}{2}\delta[n+1] + 6\cdot 2^{n-1}u[-n] + \frac{1}{2}(-1)^{n-1}u[-n] - \frac{9}{2}\delta[n]$$

Question 5

1. $x_1[n] = 2^n u[-n] + \left(\frac{1}{4}\right)^n u[n-1]$

σχέση: $$a^n u[n] \overset{z}{\longleftrightarrow} \frac{1}{1-az^{-1}} \, , \text{με } |z|>|a|$$

Άρα $$X_1(z) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} x_1[k]z^{-k} = \sum_{k=-\infty}^{0}\left(\frac{2}{z}\right)^k + \sum_{k=1}^{+\infty}\left(\frac{1}{4z}\right)^k = \frac{1}{1-\frac{2}{z}} + \frac{\frac{1}{4z}}{1-\frac{1}{4z}} =$$

$$= \frac{z}{z-2} + \frac{1}{4z-1}$$

RoC: $\frac{1}{4}<|z|<2$

2. $x_2[n] = (4n-8)\left(\frac{1}{2}\right)^n u[n] = 4n\left(\frac{1}{2}\right)^n u[n] - 8\left(\frac{1}{2}\right)^n u[n]$

σχέση: $$n\,x[n] \longleftrightarrow -z\frac{dX(z)}{dz} \quad \text{και} \quad \left(\frac{1}{2}\right)^n u[n] \longleftrightarrow \frac{z}{z-\frac{1}{2}} \, , |z|>1/2$$

Άρα $$n\left(\frac{1}{2}\right)^n u[n] \longleftrightarrow -z\frac{d}{dz}\left(\frac{z}{z-\frac{1}{2}}\right) = \frac{\frac{1}{2}z}{(z-\frac{1}{2})^2} \, , \quad |z|>\frac{1}{2}$$

Όποτε, $$X_2(z) = \frac{2z}{(z-\frac{1}{2})^2} - 8\frac{z}{z-\frac{1}{2}} \, , \quad |z|>1/2$$

Question 4

A) • $\mathcal{L}\left[\sin(\omega_0 t)u(t)\right] = \dfrac{s}{s^2+\omega_0^2}$

• $\mathcal{L}\left(f'(t)\right) = \frac{1}{s}F(s) - \cancel{f(0)}^{0}$

Άρα $\mathcal{L}\left[\omega_0 \cos(\omega_0 t)u(t) + \cancel{\sin(\omega_0 t)}^{0}\,\delta(t)\right] = \dfrac{\omega_0}{s^2+\omega_0^2}$

B) Ο λόγος που δεν δουλεύει να πας από cos σε sin με παράγωγο είναι επειδή το $\cos(\omega_0 t)u(t)$ δεν είναι συνεχές στο μηδέν και στο βιβλίο αναφέρεται σαν προϋπόθεση την συνέχεια στον τύπο της παραγώγου

$$\mathcal{L}\left[\left(\cos(\omega_0 t)u(t)\right)'\right] = \mathcal{L}\left[-\omega_0\sin(\omega_0 t)u(t) + \cos(\omega_0 t)\delta(t)\right] =$$

$$= \mathcal{L}\left[-\omega_0\sin(\omega_0 t)u(t)\right] + \mathcal{L}\left[\cos(\omega_0 t)\delta(t)\right] = \ldots$$

μονόπλευρος Μ/Σ.

Question 6

✓

Question 7

$$\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{(s+1)^2(s+2)}\right\} = ? \quad , \quad -2 < s < -1$$

$$\frac{1}{(s+1)^2(s+2)} = -\frac{1}{s+1} + \frac{1}{(s+1)^2} + \frac{1}{s+2}$$

$$\downarrow \qquad \downarrow \qquad \downarrow$$

$$e^{-t}u(-t) - t\cdot e^{-t}u(-t) + e^{-2t}u(t)$$