Σήματα & Συστήματα
2η Σειρά Ασκήσεων
2020-2021

Το Nyquist rate της συνέλιξης δύο ορθογώνιων rect() παλμών που έχουν φιλτραριστεί με (ιδεατά) βαθυπερατά φίλτρα με συχνότητες αποκοπής f_1 και f_2 αντίστοιχα είναι ίσο με δύο φορές επί το

- a. $f_1 - f_2$
- b. $f_1 + f_2$
- c. τίποτα από τα παραπάνω
- d. $\min(f_1, f_2)$
- e. $\max(f_1, f_2)$

Υπολογίστε τον Μετασχηματισμό Fourier $X(\omega)$ για τα σήματα συνεχούς χρόνου $x(t)$ στις παρακάτω περιπτώσεις:

a) $x(t) = \left[te^{-3t}\sin 8t\right] u(t)$

b) ενός σήματος $x(t)$ που αποτελείται από κρουστικούς παλμούς δ με πλάτος 3 στις χρονικές στιγμές $t = 3\kappa\pi$, πλάτος 2 στις θέσεις $3\kappa\pi + \pi$, πλάτος 1 στις θέσεις $3\kappa\pi + 2\pi$ και 0 αλλού, $\kappa \in \mathbb{Z}$.

Αντίστοιχα, υπολογίστε τα σήματα $x(t)$ από τους αντίστοιχους Fourier Μετ/σμούς τους $X(\omega)$:

c) $X(\omega) = \begin{cases} -2|\omega|, & |\omega| \leq 0.5\pi \\ 0, & |\omega| > 0.5\pi \end{cases}$

d) $X(\omega) = \pi j\left[\delta(\omega + \pi/3) - \delta(\omega - \pi/3)\right] + 6\pi/\left(\pi^2 - 9\omega^2\right)$

Επιπλέον, για κάθε ένα από τα παραπάνω ερωτήματα, σχεδιάστε τα σήματα $x(t)$ και τα φάσματα $X(\omega)$ αντίστοιχα.

Σε όλες τις περιπτώσεις δηλώστε τις κρίσιμες τιμές στους δύο άξονες.

Ανεβάστε ένα pdf με τη λύση σας.

Δίδεται ως είσοδο σε ένα ΓΧΑ σύστημα το γινόμενο από δύο ημίτονα με συχνότητες f_1, f_2. Η απόκριση συχνότητας του συστήματος $\mathbf{H}(\omega)$ έχει μη μηδενικό πλάτος για κάθε ω. Η έξοδος του συστήματος θα αποτελείται από

- a. άθροισμα από ημίτονα με συχνότητες $f_1 + f_2, f_1 - f_2$
- b. άθροισμα από ημίτονα με συχνότητες f_1, f_2
- c. δεν μπορούμε να πούμε κάτι για την έξοδο του συστήματος γιατί δεν γνωρίζουμε την κρουστική απόκριση
- d. ημίτονο με συχνότητα $\max(f_1, f_2)$
- e. θα έχει μετασχηματισμό Fourier με μη μηδενικό πλάτος σε όλες τις συχνότητες

Δειγματοληψία στο πεδίο του χρόνου και στο πεδίο του μετασχηματισμού Fourier αντιστοιχεί

- a. σε περιοδικότητα στο πεδίο του χρόνου και της συχνότητας
- b. απεριοδικό σήμα στο πεδίο του χρόνου και περιοδικό σήμα στο πεδίο της συχνότητας
- c. σε περιοδικότητα στο πεδίο του χρόνου αλλά όχι απαραίτητα και στο πεδίο της συχνότητας
- d. σε περιοδικότητα στο πεδίο της συχνότητας αλλά όχι απαραίτητα και στο πεδίο του χρόνου
- e. απεριοδικό σήμα στο πεδίο της συχνότητας και περιοδικό σήμα στο πεδίο του χρόνου

Ο μετασχηματισμός Fourier της παράγωγου ενός σήματος έχει σε σχέση με τον μετασχηματισμό Fourier του σήματος

- a. Περισσότερη ενέργεια στις ψηλές συχνότητες
- b. Ο λόγος των μετασχηματισμών Fourier είναι 1
- c. Είναι η συνέλιξη του μετασχηματισμού Fourier του σήματος με την κρουστική απόκριση ενός ταλαντωτή δευτερης τάξης
- d. Λιγότερη ενέργεια στις ψηλές συχνότητες
- e. Δεν μπορούμε να πούμε κάτι για αυτή την σχέση από την θεωρία του μετασχηματισμού Fourier

Δίδεται Γραμμικό και Χρονικά Αναλλοίωτο σύστημα συνεχούς χρόνου, με είσοδο $x(t)$ και έξοδο $y(t)$, το οποίο περιγράφεται από την ακόλουθη διαφορική εξίσωση:

$$6y(t)+5\frac{d}{dt}y(t)+\frac{d^2}{dt^2}y(t)=2x(t)-\frac{d}{dt}x(t)$$

Ζητείται να εκτελεστούν τα ακόλουθα:

1. Υπολογισμός της απόκρισης συχνότητας $H(\omega)$ του συστήματος. Υπόδειξη: μπορείτε να υπολογίσετε τον μετασχηματισμό Fourier του αριστερού και δεξιού μέρους της διαφορικής εξίσωσης να τα εξισώσετε και να εκφράσετε την $H(\omega)$ ως το πηλίκο της $\Upsilon(\omega)$ με την $\mathrm{X}(\omega)$
2. Υπολογισμός της κρουστικής απόκρισης $h(t)$ του συστήματος.
3. Υπολογισμός της εξόδου του συστήματος για είσοδο $x(t)=e^{-2t}u(t-1)$
4. Υπολογισμός του σήματος $x(t)$ που πρέπει να εφαρμοστεί στην είσοδο του συστήματος, ώστε να έχουμε σήμα εξόδου $y(t)=[1.5(e^{-2t}+e^{-4t})+2te^{-2t}]u(t)$.

   Υπόδειξη: Για να βρείτε αναλυτικά την απόκριση συχνότητας από τη διαφορική εξίσωση του συστήματος, μπορείτε να χρησιμοποιήσετε την εξής ιδιότητα του Fourier μετασχηματισμού: $\dfrac{d^q x(t)}{dt^q}\longleftrightarrow (j\omega)^q X(\omega)$.

Το Nyquist rate ενός αθροίσματος από δύο ημίτονα συχνότητας f_1 και f_2 είναι ίσο με δύο φορές επί το

- ○ a. $f_1 + f_2$
- ○ b. $f_1 - f_2$
- ○ c. τίποτα από τα παραπάνω
- ○ d. $\min(f_1, f_2)$
- ○ e. $\max(f_1, f_2)$

Δίνονται τα σήματα $x_1(t) = \sin(20a\pi t)\cos(30a\pi t)$ και $x_2(t) = a\delta(t) + \mathrm{sinc}^2(40at)$.

1. Προσδιορίστε τη συχνότητα Nyquist - δηλαδή, την ελάχιστη συχνότητα για την οποία είναι δυνατή η πλήρης ανακατασκευή - εφόσον αυτή υπάρχει, για τα παραπάνω σήματα, αιτιολογώντας την απάντησή σας. Επιπλέον, να σχεδιαστεί το φάσμα του $x_1(t)$, καθώς και του δειγματοληπτημένου σήματος που προκύπτει από δειγματοληψία του $x_1(t)$ σε συχνότητα διπλάσια της αντίστοιχης Nyquist.
2. Έστω $x_3(t)$ το σήμα που λαμβάνουμε, εάν το σήμα $x_2(t)$ διέλθει από ιδανικό βαθυπερατό φίλτρο με συχνότητα αποκοπής 100 Hz. Να προσδιοριστεί η συχνότητα Nyquist των σημάτων:
   a) $y(t) = x_1(t) * x_3(t)$
   b) $z(t) = x_1^2(t) + (x_2^3(t) * x_3(t))$
   αιτιολογώντας και πάλι την απάντησή σας.

Για τα σήματα διακριτού χρόνου $x[n]$ υπολογίστε τον Διακριτού-Χρόνου μετασχηματισμό Fourier (DTFT).

a) $x[n] = \delta[n - \mathrm{a}] + 3\delta[n] + \delta[n + \mathrm{a}]$

b) $x[n] = \mathrm{a}^n \sin(\pi n/4) u[-n - 1]$

Ακολούθως, υπολογίστε τα σήματα $x[n]$, τα οποία αντιστοιχούν στους παρακάτω Διακριτού-Χρόνου μετασχηματισμούς Fourier (DTFT):

c) $X(\Omega) = \begin{cases} 1, & 0 < \Omega_o - B < |\Omega| < \Omega_o + B < \pi \\ 0, & \alpha\lambda\lambda o\acute{\upsilon}\, \varepsilon\nu\tau\acute{o}\varsigma\, \tau o\upsilon\, \delta\iota\alpha\sigma\tau\acute{\eta}\mu\alpha\tau o\varsigma\, [-\pi, \pi] \end{cases}$

d) $X(\Omega) = \cos^2(\Omega) + \sin^2(\mathrm{a}\Omega)$

Επιπλέον, για κάθε ένα από τα παραπάνω ερωτήματα, σχεδιάστε τα σήματα $x[n]$ και τα φάσματα $X(\Omega)$ αντίστοιχα.

Σε όλες τις περιπτώσεις δηλώστε τις κρίσιμες τιμές στους δύο άξονες.

Στα παραπάνω ερωτήματα ισχύει a = (AM mod 10) + 2, όπου AM ο αριθμός μητρώου σας.

Ανεβάστε ένα pdf με τις λύσεις σας.

Θεωρήστε το σήμα $x(t)$, με περίοδο $T = 2$, για το οποίο και ισχύει:

$$x(t) = \begin{cases} cos(2\pi t), & |t| \le 0.25 \\ 0, & 0.25 \le |t| \le 1 \end{cases}$$

1. Να βρεθούν οι συντελεστές a_n, b_n του αναπτύγματος του σήματος $x(t)$ σε τριγωνομετρική σειρά Fourier. Να σχεδιάσετε το αρχικό σήμα, $x(t)$, για $t \in [-4, 4]$, καθώς και τους συντελεστές a_n, b_n για $n \in [-5, 5]$.
2. Να υπολογιστεί και να σχεδιαστεί ο συνεχής μετασχηματισμός Fourier, $X(\omega)$ του σήματος $x(t)$.
3. Υποθέτουμε ότι το σήμα $x(t)$ διέρχεται από βαθυπερατό φίλτρο με απόκριση συχνότητας:
   $$\mathrm{H}(\omega) = \begin{cases} -0.25|\omega|, & |\omega| \le 1.5\pi \\ 0, & |\omega| > 1.5\pi \end{cases}.$$
   Να υπολογιστεί και να σχεδιαστεί το σήμα $y(t)$ το οποίο λαμβάνουμε στην έξοδο του φίλτρου, καθώς και το φάσμα του, $Y(\omega)$. Είναι το $y(t)$ περιοδικό; Αιτιολογήστε την απάντησή σας. Αν το $y(t)$ είναι περιοδικό, να υπολογίσετε την περίοδο του και να βρείτε τους συντελεστές του τριγωνομετρικού αναπτύγματος Fourier του.
4. Έστω περιοδικά σήματα $x(t)$, $y(t)$ με θεμελιώδη περίοδο T, και a_m, b_m οι συντελεστές της μιγαδικής σειράς Fourier που αντιστοιχεί στα $x(t)$, $y(t)$, αντίστοιχα. Να αποδειχθεί ότι για το σήμα $z(t) = \int_T x(\tau)y(t-\tau)d\tau$, οι συντελεστές της μιγαδικής σειράς Fourier δίνονται από τον τύπο:

$$c_m = Ta_m b_m$$

Ανεβάστε ένα pdf με τη λύση σας.