ΕΘΝΙΚΟ ΜΕΤΣΟΒΙΟ ΠΟΛΥΤΕΧΝΕΙΟ
Σχολή Ηλεκτρολόγων Μηχανικών και Μηχανικών Υπολογιστών
Τομέας Σημάτων, Ελέγχου και Ρομποτικής
Σήματα και Συστήματα

2η Σειρά Ασκήσεων (2018-19)

Οι λύσεις υποβάλλονται **ηλεκτρονικά** μέσω της ιστοσελίδας του μαθήματος στο mycourses.ntua.gr.
Πρέπει να υποβληθεί **ένα και μόνο** αρχείο σε μορφή **pdf**.
Επισημαίνεται ότι οι εργασίες είναι **ατομικές**.
Προσθεμία υποβολής: **31-01-2019**.

Άσκηση 1

Ερώτημα 1(α)

Υπολογίστε τον μετασχηματισμό $\mathcal{Z}$ για τα ακόλουθα τρία σήματα. Βρείτε την περιοχή σύγκλισης και δείξτε αν υπάρχει ο αντίστοιχος μετασχηματισμός Fourier διακριτού χρόνου.

1. $x_1[n] = 2^n u[-n] + (\frac{1}{3})^n u[n-1]$
2. $x_2[n] = n a^{n-1} u[n]$
3. $x_3[n] = 3^n cos[\frac{2\pi}{6} n + \frac{\pi}{4}] u[-n-1]$

Ερώτημα 1(β)

Υπολογίστε τον μετασχηματισμό $\mathcal{Z}$, το διάγραμμα πόλων-μηδενικών, τη ROC και την αντίστοιχη περιοχή σύγλισης για τα ακόλουθα σήματα:

1. $x[n] = cos(an)u[n]$
2. $x[n] = n(u[n] - u[n-6])$

Αποφανθείτε για την ύπαρξη του μετασχηματισμού Fourier για τα παραπάνω σήματα.

Άσκηση 2

Ερώτημα 2(α)

Υπολογίστε τον αντίστροφο μετασχηματισμό $\mathcal{Z}$ για κάθεναν από τους ακόλουθους μετασχηματισμούς $\mathcal{Z}$ και τις αντίστοιχες περιοχές σύγκλισης:

1. $X(z) = \frac{1-z^{-1}}{1-\frac{1}{4}z^{-2}}, \quad |z|> \frac{1}{2}$
2. $X(z) = \frac{z(2z^2-11z+12)}{(z-1)(z-2)^3}, \quad |z|> 2$
3. $X(z) = e^{1/z}, \quad |z|>|0|$ και $x[n] = 0, n < 0$
4. $X(z) = \frac{z-4}{z^2-5z+6}, \quad |z|> 3$
5. $X(z) = \frac{2z(3z+17)}{(z-1)(z^2-6z+25)}, \quad |z|> 5$
6. $X(z) = ln(\frac{1}{1-a^{-1}z}), \quad |z|<|a|$

Άσκηση 3

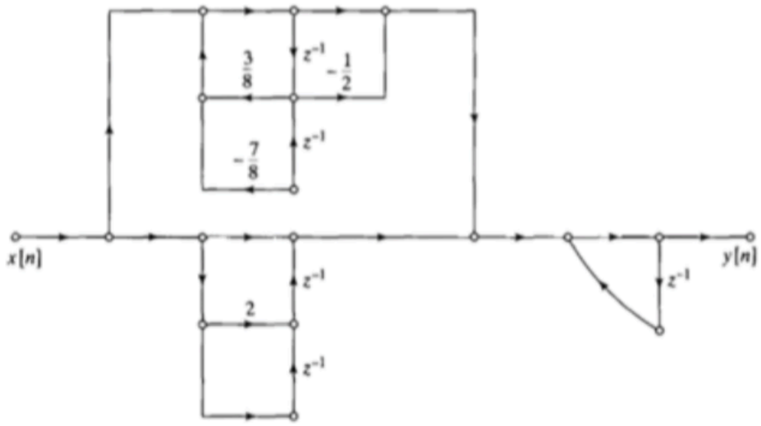
Ερώτημα 3(α)

θεωρείστε το παρακάτω σύστημα και βρείτε την εξίσωση μεταφοράς του:
$y(n) - (a + b)y(n - 1) + aby(n - 2) = x(n)$.
Σχεδιάστε επίσης τη διαγραμματική παράσταση του συστήματος σε:

1. Κατευθείαν μορφή Ι (direct form I)
2. Κατευθείαν μορφή ΙΙ (direct form II).

Ερώτημα 3(β)

Θεωρείστε την παρακάτω διαγραμματική παράσταση ενός συστήματος.



1. Βρείτε τη συνάρτηση που συσχετίζει το μετασχηματισμό $\mathcal{Z}$ της εισόδου $x[n]$ και της εξόδου $y[n]$.
2. Γράψτε την εξίσωση διαφορών του συστήματος.
3. Σχεδιάστε μία διαγραμματική παράσταση η οποία έχει την ίδια σχέση εισόδου-εξόδου με την παραπάνω δοθείσα παράσταση, χρησιμοποιώντας το μικρότερο δυνατό αριθμό z^{-1} στοιχείων.

Άσκηση 4

Ερώτημα 4(α)

Έστω ότι το σήμα $x[n]$ έχει μη μηδενικές τιμές μόνο στο διάστημα $0 \leq n \leq N-1$, για N άρτιο. Έστω επίσης ότι τα σήματα $f[n] = x[2n]$ και $g[n] = x[2n+1]$ περιέχουν τα άρτια και περιττά δείγματα του $x[n]$, αντίστοιχα. Αν

$$X[k] = \sum_{n=0}^{N-1} x[n] w_N^{nk} \tag{1}$$

για $k = 0, ..., N-1$, είναι ο διακριτός μετασχηματισμός Fourier (DFT) N σημείων του $x[n]$, όπου $w_N = e^{-j2\pi/N}$ και $F[k], G[k]$ είναι οι DFT $N/2$ σημείων των $f[n], g[n]$ αντίστοιχα, δείξτε ότι:

1. τα $f[n]$ και $g[n]$ μηδενίζονται εκτός του διαστήματος $0 \leq n \leq N/2-1$.
2. $F[k+N/2] = F[k]$ και $G[k+N/2] = G[k]$ για κάθε k.

3. $X[k] = \frac{1}{2}(F[k] + w_N^k G[k])$ για $k = 0, ..., N-1$.

Αν $N = 2^L$, πώς θα μπορούσαν τα παραπάνω να χρησιμοποιηθούν για ταχύ υπολογισμό του $X[k]$ για $k = 0, ..., N-1$·

Ερώτημα 4(β)

Για τα σήματα διακριτού χρόνου $x[n]$ υπολογίστε τον Διακριτού-Χρόνου Fourier Μετ/σμό τους:

(α) $x[n] = \left(\frac{1}{4}\right)^n u[n+2]$

(β) $x[n] = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \left(\frac{1}{4}\right)^n \delta[n-3k] \cdot u[n]$

(ς) $x[n] = n\left(\frac{1}{2}\right)^{|n|}$

Αντίστοιχα, υπολογίστε τα σήματα $x[n]$ από τους αντίστοιχους Διακριτού-Χρόνου Μετ/σμούς Fourier (DTFT) τους $X(\Omega)$:

(δ) $X(\Omega) = \begin{cases} 1, & 0 < \Omega_o - B < \Omega < \Omega_o + B < \pi \\ 1, & -\pi < -\Omega_o - B < \Omega < -\Omega_o + B < 0 \\ 0, & \text{αλλού εντός του διαστήματος } [-\pi, \pi] \end{cases}$

(ε) $X(\Omega) = \cos^2 \Omega$

(φ) $X(\Omega) = \frac{1}{(1 - ae^{-j\Omega})^r}$

Άσκηση 5

Ερώτημα 5(α)

Θεωρείστε ένα Γ.Χ.Α. σύστημα διακριτού χρόνου που περιγράφεται από την εξίσωση διαφορών:

$$y[n] - y[n-1] + y[n-2] = \frac{1}{2}(x[n] + x[n-1]) \tag{2}$$

1. Υπολογίστε τη συνάρτηση μεταφοράς και την απόκριση του συστήματος.

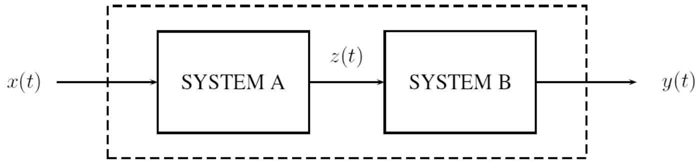
2. Βρείτε την απόκριση του συστήματος στο σήμα εισόδου $x[n] = (\frac{1}{2})^n u[n]$ με αρχικές συνθήκες $y[-1] = \frac{3}{4}$ και $y[-2] = \frac{1}{4}$.

Ερώτημα 5(β)

Δίνεται η σύνδεση σε σειρά δύο γραμμικών και χρονικά-αναλλοίωτων (ΓΧΑ) συστημάτων συνεχούς χρόνου Α και Β όπως φαίνεται στο Σχήμα 1. Η σχέση εισόδου-εξόδου για το Σύστημα Α χαρακτηρίζεται από την ακόλουθη διαφορική εξίσωση

$$\frac{dz(t)}{dt} + 6z(t) = \frac{dx(t)}{dt} + 5x(t)$$

ενώ η κρουστική απόκριση $h_b(t)$ για το Σύστημα Β είναι $h_b(t) = e^{-10t}u(t)$. Για το συνολικό σύστημα, να βρείτε αναλυτικά (με όσο το δυνατόν απλούστερη έκφραση):



Σχήμα 1: Συνολικό σύστημα κρουστικής απόκρισης $h(t)$ και απόκρισης συχνότητας $H(\omega)$

(a) Την απόκριση συχνότητας $H(\omega)$.

(b) Την κρουστική απόκριση $h(t)$.

(c) Τη διαφορική εξίσωση που συνδέει τα $x(t)$ και $y(t)$, δηλαδή τη σχέση εισόδου-εξόδου.

(d) Την έξοδο $y(t)$ σε είσοδο $x(t) = e^{-5t+5}u(t-1)$.