

1 Θεωρητικό Μέρος και Περιγραφή Πειραμάτων

1.1 Διαμήκη και Ηχητικά Κύματα

Διαμήκη κύματα ονομάζονται τα κύματα των οποίων η διεύθυνση ταλάντωσης των σωματιδίων είναι παράλληλη προς τη διεύθυνση διάδοσής του κύματος μέσα στο εκάστοτε μέσον. Τα διαμήκη κύματα διαδίδονται στα στερεά, τα υγρά και τα αέρια σώματα. Ένα παράδειγμα διαμηκών κυμάτων αποτελούν τα ηχητικά κύματα στα οποία μετρούμενο μέγεθος είναι η πίεση του αέρα $P(\vec{r}, t)$. Τα ιδανικά ηχητικά κύματα υπακούουν στην κλασική κυματική εξίσωση

$$\nabla^2 P - v^{-2} P_{tt} = 0 \quad (\text{Κυματική Εξίσωση})$$

Πράγματι, καθώς το σώμα ταλαντώνεται και η επιφάνειά του κινείται, το αέριο μέσα στη στήλη συμπιέζεται και έτσι δημιουργείται ένα πύκνωμα και αντίστοιχα ένα αραιώμα όταν το αέριο έχει πίεση μικρότερη από αυτή της μέσης. Η ταχύτητα διάδοσης του κύματος είναι η ταχύτητα του ήχου και στο κενό τα ηχητικά κύματα είναι είτε επίπεδα (όταν οι διαστάσεις της πηγής είναι μεγαλύτερες από το μήκος κύματος λ του ήχου) ή σφαιρικά (διαστάσεις πηγής μικρότερες του λ).

2.2 Μέτρηση ταχύτητας του ήχου με τη μέθοδο των στάσιμων κυμάτων και με τη μέθοδο radar

Σκοπός της παρούσας εργαστηριακής άσκησης αποτελεί η μελέτη των στάσιμων ακουστικών κυμάτων μέσα σε ηχητικό σωλήνα όταν το ένα άκρο του είναι κλειστό και ανοικτό αντίστοιχα. Η διάταξη αποτελείται από μεγάφωνο το οποίο συνδέεται με γεννήτρια AC κυματομορφών και το οποίο βρίσκεται στο αριστερό άκρο της διάταξης.

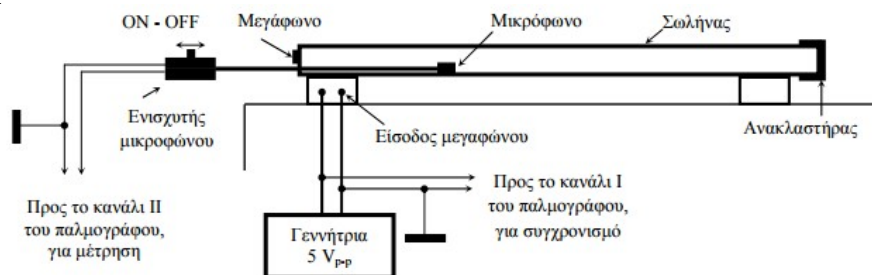
Αρμονικά Κύματα Το ακουστικό αρμονικό κύμα που παράγεται από το μεγάφωνο μέσω της γεννήτριας ανακλάται (πλήρως η μερικώς μέσα στα άκρα του σωλήνα) και στη σωλήνα δημιουργούνται στάσιμα κύματα της μορφής $P(x, t) = (A \sin(kx) + B \cos(kx)) \cos(\omega t + \varphi)$ τα οποία μπορούμε να μετρήσουμε με ένα μικρόφωνο και να απεικονίσουμε την ακουστική πίεση σαν σήμα AC τάσης στην είσοδο παλμογράφου. Το μικρόφωνο έχει επίσης τη δυνατότητα να μετατοπίζεται παράλληλα και εντός της στήλης (κυματοδηγού) προκειμένου να ληφθούν οι απαραίτητες μετρήσεις. Όταν το άκρο του σωλήνα είναι κλειστό και από τις δύο μεριές επιβάλλονται αρχικές συνθήκες της μορφής

$$P(0, t) = P(L, t) = 0, \quad \lambda_n = \frac{2L}{n}, \quad n \in \mathbb{N}^* \quad (\text{Συνθήκες για κλειστό άκρο})$$

ενώ όταν το δεξί άκρο του σωλήνα είναι ανοικτό το πρόβλημα διαμορφώνεται ως εξής

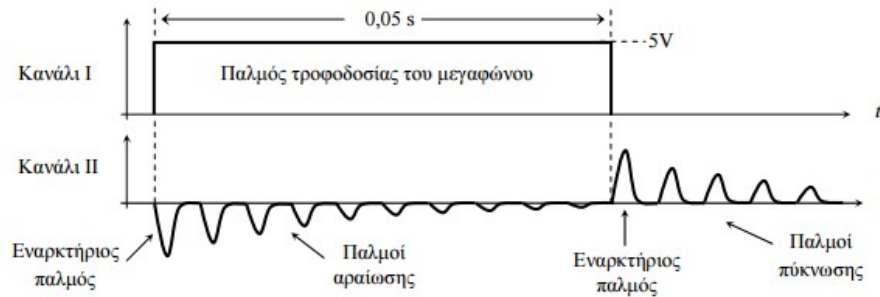
$$P(0, t) = \frac{\partial P}{\partial x} \Big|_{x=L_a} = 0, \quad \lambda_n = \frac{4L_a}{2n-1}, \quad n \in \mathbb{N}^* \quad (\text{Συνθήκες για ανοικτό άκρο})$$

Στο στάσιμο κύμα διακρίνουμε σημεία μηδενικής πίεσης (δεσμούς) και σημεία μέγιστης πίεσης (κοιλίες). Δύο διαδοχικοί δεσμοί/κοιλίες απέχουν μεταξύ τους το μισό ενός μήκους κύματος. Η μέτρηση διαδοχικών μεγίστων και ελαχίστων για τις συχνότητες συντονισμού του συστήματος θα μας χρησιμεύσει για τη μέτρηση της ταχύτητας του ήχου.



Μέθοδος radar Στη μέτρηση της ταχύτητας του ήχου με τη μέθοδο radar η γεννήτρια θα διεγείρει το

σύστημα με ορθογωνικούς παλμούς συχνότητας $f = 10\text{Hz}$ και κατόπιν οι διαδοχικές ανακλάσεις του αρχικού κρουστικού παλμού από τον ανακλαστήρα και τη μεμβράνη θα δημιουργήσουν στην έξοδο του μικροφώνου μια σειρά ηλεκτρικών παλμών, το ύψος των οποίων, λόγω απωλειών, μειώνεται εκθετικά. Η μέτρηση του χρονικού διαστήματος (συνολική διαδρομή του ήχου) που μεσολαβεί για το μηδενισμό της τάσης θα χρησιμοποιηθεί για τον προσδιορισμό της ταχύτητας του ήχου.



2 Επεξεργασία των Μετρήσεων και Παρουσίαση Αποτελεσμάτων

2.1 Στάσιμα κύματα μέσα σε ηχητικό σωλήνα

Έγιναν μετρήσεις, με κλειστό το δεξιό άκρο, των τεσσάρων πρώτων συχνοτήτων συντονισμού του συστήματος με σφάλμα συχνότητας $\delta f = 1\text{Hz}$ σε θερμοκρασία $\vartheta = 21.3^\circ\text{C}$ ($\delta\vartheta = 0.1^\circ\text{C}$). Οι συχνότητες που μετρήθηκαν παρουσιάζονται παρακάτω μαζί με την τιμή του πλάτους όπως μετρήθηκαν στον παλμογράφο με κλίμακα 50mV/div και σφάλμα $\delta\psi = 10\text{mV}$. Η **θεωρητική ταχύτητα** του ήχου υπολογίζεται να είναι ίση με

$$u_\vartheta = u_0 + 0.606\vartheta = 345.8 \pm 0.06\text{ms}^{-1} \quad (\text{Θεωρητική Ταχύτητα Ήχου})$$

Στην οποία έχουμε συνυπολογίσει το σφάλμα που εισέρχεται από τη μέτρηση του θερμομέτρου ($\delta u = 0,606\delta\vartheta$).

n	$\psi_i(\text{mV})$ $\delta\psi = 10\text{mV}$	$f_i(\text{Hz})$ ($\delta f = 1\text{Hz}$)	Θεωρητικές Τιμές KTT
1	125	191	192
2	125	387	384
3	120	581	576
4	115	772	768

Παρατηρούμε ότι οι τιμές των αρμονικών που προέκυψαν με τη θεωρητική ανάλυση των KTT (σε Hz) είναι πολύ κοντά στις πειραματικές τιμές που έχουμε υπολογίσει. Τυχόν αποκλίσεις οφείλονται σε συστηματικά σφάλματα οργάνων, αλληλεπιδράσεις με εξωτερικά πεδία, σφάλματα ανάγνωσης κ.ά. όπως αναφέρονται παρακάτω στην ενότητα “Αίτια Σφαλμάτων”. Κατόπιν πραγματοποιήθηκαν μετρήσεις του πλάτους των ηχητικών κυμάτων για τις δύο πρώτες συχνοτήτες συντονισμού (191Hz και 387Hz) με σταδιακή μετακίνηση του μικροφώνου στο διάστημα 5-90cm ανά 5 εκατοστά (με σφάλμα μέτρησης $\delta x = 0.1\text{cm}$) σχεδιάστηκαν σε μιλιμετρέ χαρτί και παρουσιάζονται παρακάτω (όπου το (-) δίπλα στις μετρήσεις υποδηλοί αλλαγή φάσης εκατέρωθεν του κάθε δεσμού):

$x(\text{cm})$	$\psi_1(\text{mV})$ $f_1 = 191\text{Hz}$	$\psi_1/\psi_{1,\text{max}}$	$\psi_2(\text{mV})$ $f_2 = 387\text{Hz}$	$\psi_2/\psi_{2,\text{max}}$
0	125	1,00	125	1,00
5	125	1,00	120	0,96
10	125	1,00	90	0,72
15	110	0,88	60	0,48
20	95	0,76	25	0,20
25	80	0,64	20	(-) 0,16

30	60	0,48	55	(-) 0,44
35	40	0,32	90	(-) 0,72
40	25	0,20	115	(-) 0,92
45	5	0,04	125	(-) 1,00
50	25	(-) 0,20	115	(-) 0,92
55	45	(-) 0,36	85	(-) 0,68
60	65	(-) 0,52	55	(-) 0,44
65	80	(-) 0,64	20	(-) 0,16
70	95	(-) 0,76	25	0,20
75	110	(-) 0,88	60	0,48
80	120	(-) 0,96	90	0,72
85	125	(-) 1,00	120	0,96
90	125	(-) 1,00	125	1,00

Μέτρηση Ταχύτητας με στάσιμα αρμονικά κύματα Προκειμένου να προσδιορίσουμε την ταχύτητα του ήχου, όπως αυτή προκύπτει από τις πειραματικές μας μετρήσεις. Παρατηρούμε ότι για την πρώτη συχνότητα οι δύο διαδοχικές κοιλίες απέχουν κατά $90 \pm 0.1\text{cm}$ ενώ στη δεύτερη συχνότητα οι δύο διαδοχικές κοιλίες απέχουν κατά $45 \pm 0.1\text{cm}$ και οι οποίες δίνουν μήκη κύματος $\lambda_1 = 1.8\text{m}$, $\lambda_2 = 0.9\text{m}$ και σφάλμα $\delta\lambda = 2\delta x = 0.2\text{cm}$.

Αν λάβουμε υπόψη μας την κάθε καμπύλη ξεχωριστά η κάθε μέτρηση θα έχει σφάλμα της μορφής

$$\delta u_i = \sqrt{\left(\frac{\partial u}{\partial f}\delta f\right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial \lambda}\delta \lambda\right)^2} = \sqrt{(f\delta \lambda)^2 + (\lambda\delta f)^2} \quad (\text{Έμμεσο Τετρ. Σφάλμα})$$

Έτσι για την πρώτη αρμονική θα έχουμε ένα σφάλμα της τάξης του $\delta u_1 = 1\text{m/s}$ και μια τιμή $u_1 = 344 \pm 1\text{m/s}$ (Σχετικό Σφάλμα 0.3%)

Για τη δεύτερη αρμονική με την ίδια διαδικασία λαμβάνουμε μια τιμή $u_2 = 348.3 \pm 0.9\text{ m/s}$ (Σχετικό Σφάλμα 0.2%)

Σχολιασμός Μέτρησης Παρατηρούμε ότι η πρώτη καμπύλη μας δίνει αποτελέσματα κοντινότερα στη θεωρητική τιμή που έχουμε υπολογίσει στην αρχή. Το σχετικά μεγαλύτερο σφάλμα δεν δημιουργεί προβλήματα αφού το διάστημα εμπιστοσύνης το δεξιό άκρο βρίσκεται κοντινότερα στη θεωρητική τιμή. Επίσης η μέση τιμή βρίσκεται και αυτή “κοντινότερα” στη θεωρητική. Ωστόσο, μπορούμε να κάνουμε ακόμα καλύτερη αξιοποίηση των μετρήσεων λαμβάνοντας υπόψη μας και τις δύο καμπύλες μέτρησης.

Αν λάβουμε υπόψη μας και τις δύο καμπύλες η μέση τιμή της ταχύτητας θα δοθεί ως ακολούθως

$$\bar{u} = \frac{\lambda_1 f_1 + \lambda_2 f_2}{2} = 346.05 \frac{\text{m}}{\text{s}} \quad (\text{Πειραματική μέση τιμή})$$

Ενώ το τυπικό σφάλμα της μέτρησης θα δοθεί ως η δειγματική τυπική απόκλιση

$$\delta u = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^2 (u_i - \bar{u})^2}{2}} = 2.25 \frac{\text{m}}{\text{s}} \quad (\text{Τυπικό σφάλμα μετρήσεων})$$

Επομένως ένα 63% διάστημα εμπιστοσύνης για την ταχύτητα του ήχου, το αποτέλεσμα των μετρήσεων προκύπτει τελικά να είναι

$$u = \bar{u} \pm \delta u = 346.05 \pm 2.25 \frac{\text{m}}{\text{s}} \quad (\text{Τελικό αποτέλεσμα για 2 μετρήσεις})$$

Παρατηρούμε ότι η πειραματική τιμή που προσδιορίσαμε για την ταχύτητα του ήχου **συμφωνεί με τις**

θεωρητικές παρατηρήσεις μας. Το σχετικό σφάλμα ανέρχεται στο 0.6%.

Αίτια Σφαλμάτων Τυχόν αποκλίσεις οφείλονται στα όργανα μέτρησης, σε μαγνητικά πεδία στο χώρο που επάγουν τάσεις, η (πολική) γωνία που ίσως έχει στραφεί το μικρόφωνο από την αρχική του θέση, η ευκρίνεια του μικροφώνου, οι γεωμετρικές ατέλειες στον κυματοδηγό – σωλήνα, τυχόν μετατοπίσεις στο μικρόφωνο κατά τη διάρκεια των μετρήσεων, ανωμαλίες στην επιφάνεια του ανακλαστήρα και τυχόν συστημικά σφάλματα και σφάλματα ανάγνωσης που επήλθαν κατά την ρύθμιση του offset (vertical position) στον παλμογράφο. Όλα τα σφάλματα των οργάνων που έχουν αναφερθεί παραπάνω προκύπτουν από τη μικρότερη υποδιαίρεση στη μέτρηση του κάθε οργάνου.

2.2 Μέτρηση ταχύτητας ήχου με τη μέθοδο radar

Ο χρόνος που χρειάστηκε ο ήχος για να κάνει 9 διαδρομές βρέθηκε ίσος με $t = 44 \pm 1 \text{ ms}$ (1 μέτρηση). Επομένως η ταχύτητα του ήχου θα έχει εξ'ορισμού του μεγέθους της ταχύτητας μια τιμή $\bar{u} = \frac{9 \cdot 2L}{t} = 368.18 \frac{\text{m}}{\text{s}}$. Το έμμεσο σφάλμα σε αυτή την περίπτωση θα είναι ίσο με $\delta u = 18\sqrt{(\delta x/t)^2 + (L\delta t/t^2)^2} = 0.9 \text{ m/s}$. Έτσι το τελικό αποτέλεσμα στη μέτρηση της απόστασης θα έχει τη μορφή

$$u = 368.2 \pm 0.9 \text{ m/s} \quad (\text{Τελικό αποτέλεσμα για 1 μέτρηση})$$

Και πάλι σε αυτή την περίπτωση αίτια σφαλμάτων είναι τα ίδια με αυτά που έχουν αναφερθεί προηγουμένως.

Επίσης στην περίπτωση που το άκρο του σωλήνα είναι ανοικτό παρατηρείται ένα φαινόμενο ανάκλασης και διάθλασης του κύματος. Εκτός του σωλήνα, τα επίπεδα κύματα αρχίζουν να καμπυλώνονται και σε μεγάλες αποστάσεις γίνονται σφαιρικά, και η ένταση του ήχου πολύ γρήγορα εξασθενεί, καθώς απομακρυνόμαστε από το ανοικτό άκρο. Επίσης στην ανακλώμενη συνιστώσα προστίθεται μια διαφορά φάσης π που καταγράφουμε και στον παλμογράφο αφού τα τοπικά ακρότατα της τάσης έχουν εναλλάξ διαφορετικό πρόσημο.

3 Συμπεράσματα

Η διενέργεια μετρήσεων, η αναλυτική καταγραφή τους, η χάραξη γραφικών παραστάσεων, η επεξεργασία και ο σχολιασμός τους μας οδηγεί στα εξής κύρια συμπεράσματα:

1. Η πρώτη αρμονική μας έδωσε καλύτερη ακρίβεια ως προς τη μέτρηση της ταχύτητας του ήχου σε σχέση με τη θεωρητική τιμή. Το αποτέλεσμα βελτιώνονταν ακόμα περισσότερο αν λαμβάναμε υπόψη και τις δύο μετρήσεις.
2. Η μέτρηση της ταχύτητας του ήχου με τη μέθοδο radar απέιχε αρκετά από τη θεωρητικά αναμενόμενη τιμή.
3. Τα σφάλματα οφείλονται σε διάφορους εξωγενείς και ενδογενείς παράγοντες όπως έχει αναφερθεί παραπάνω στην ενότητα “Αίτια Σφαλμάτων”
4. Μεγαλύτερη ακρίβεια θα επιτυγχάνονταν με τη λήψη περισσότερων μετρήσεων

Βιβλιογραφία

- [1] H.J. Pain, Φυσική των ταλαντώσεων και των κυμάτων, 3η έκδοση, Εκδόσεις “Συμμετρία” (Αθήνα 1990)
- [2] Εθνικό Μετσόβιο Πολυτεχνείο, Τομέας Φυσικής, Εργαστηριακές Ασκήσεις Φυσικής (Τόμοι I-II) (Αθήνα 2013)
- [3] Wikipedia Article: “Wave”, Accessed 27/4/2017
- [4] Wikipedia Article: “Waveguide”, Accessed 16/3/2017