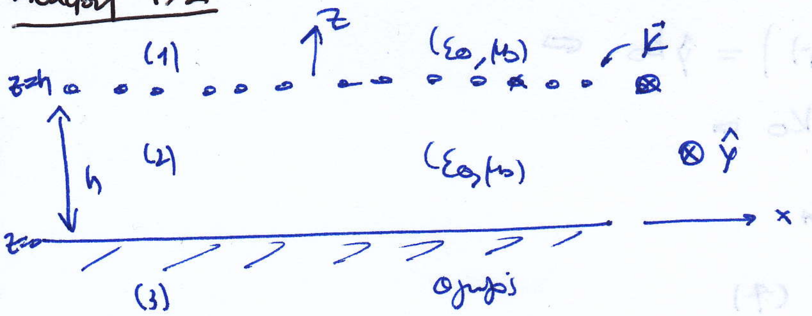
Άσκηση 4.2



Είναι $\vec{K} = \hat{y} K_0 \cos(\omega t)$ και $\dot{\vec{K}} = \hat{y} K_0$

Τα πεδία εξαρτώνται μόνο από τη μεταβλ. z και θα είναι (λόγω της φοράς του $\vec{K}$):
$\dot{\vec{E}} = \hat{y}\, \dot{E}_y(z)$ και $\dot{\vec{H}} = -\hat{x}\, \dot{H}_x(z)$

α) Το $\dot{H}_x$ ικανοποιεί την εξ. Helmholtz:

$$(\vec{\nabla}^2 + k^2)\dot{H}_x = -\cancel{\vec{\nabla}\times\dot{\vec{J}}}^{\,0} = 0 \Leftrightarrow \frac{\partial^2 \dot{H}_x}{\partial z^2} + k^2 \dot{H}_x = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \dot{H}_x^{(1)} = A_1 e^{-jkz} + \cancel{B_1}^{\,0} e^{jkz} & (1) \\ \dot{H}_x^{(2)} = A_2 \cos(kz) + B_2 \sin(kz) & (2) \end{cases}$$

· Από συνθήκη στο άπειρο προκύπτει $B_1 = 0$, γιατί ο όρος $B_1 e^{jkz}$ εκφράζει κύμα που διαδίδεται προς αρνητικό z, πράγμα αδύνατο δεδομένου ότι, πηγή βρίσκεται στη θέση z=h και άρα στην περιοχή (1) τα κύματα θα διαδίδονται ~~μόνο~~ προς τα άνω.

· Από Νόμο Maxwell – Ampère θα είναι:

$$\vec{\nabla}\times\dot{\vec{H}} = \cancel{\dot{\vec{J}}}^{\,0} + j\omega\varepsilon_0\dot{\vec{E}} \xleftrightarrow[\text{συντ/νες}]{\text{καρτεσ.}} \left(\cancel{\frac{\partial \dot{H}_z}{\partial y}} - \cancel{\frac{\partial \dot{H}_y}{\partial z}}\right)\hat{x} + \left(\frac{\partial \dot{H}_x}{\partial z} - \cancel{\frac{\partial \dot{H}_z}{\partial x}}\right)\hat{y} +$$

$$+ \left(\cancel{\frac{\partial \dot{H}_y}{\partial x}} - \cancel{\frac{\partial \dot{H}_x}{\partial y}}\right)\hat{z} = j\omega\varepsilon_0 \dot{E}_y\, \hat{y} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{\partial \dot{H}_x}{\partial z} = j\omega\varepsilon_0 \dot{E}_y \xrightarrow[(2)]{(1)} \begin{cases} \dot{E}_y^{(1)} = -\frac{1}{j\omega\varepsilon_0} A_1 k j\, e^{-jkz} \Leftrightarrow \dot{E}_y^{(1)} = -\frac{kA_1}{\omega\varepsilon_0}\cdot e^{-jkz} & (3) \\ \dot{E}_y^{(2)} = \frac{1}{j\omega\varepsilon_0}\left(-A_2 k \sin kz + B_2 k \cos kz\right) & (4) \end{cases}$$

· Στην περιοχή του τέλειου αγωγού το πεδίο είναι μηδενικό, λόγω του επιδερμικού φαινομένου, οπότε $\dot{E}_y^{(3)} = 0$ και $\dot{H}_x^{(3)} = 0$.

· Οριακή συνθήκη για z=0: $\hat{z}\times\left(\hat{y}\dot{E}_{2y}(z=0^+) - \hat{y}\cancel{\dot{E}_y}^{\,0}(z=0^-)\right) = 0 \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow \dot{E}_{2y}(z=0^+) = 0 \overset{(4)}{\Leftrightarrow} \frac{1}{j\omega\varepsilon_0} B_2 k = 0 \Leftrightarrow B_2 = 0 \quad (5)$$

· Οριακή συνθήκη για z=h: $\hat{z}\times\left(\hat{y}\dot{E}_{1y}(z=h^+) - \hat{y}\dot{E}_{2y}(z=h^-)\right) = 0 \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow -\hat{x}\dot{E}_{1y}(z=h^+) + \hat{x}\dot{E}_{2y}(z=h^-) = 0 \Leftrightarrow$$

$$\underset{(3),(4)}{\overset{(5)}{\Leftrightarrow}} \frac{\cancel{k}A_1}{\cancel{\omega\varepsilon_0}} e^{jkh} = \frac{A_2\cancel{k}}{j\cancel{\omega\varepsilon_0}}\sin(kh) \quad (6)$$

Πάλι, για $z=h$: $\hat{z}\times(\dot{\vec{H}}_1(z=h^+) - \dot{\vec{H}}_2(z=h^-)) = \vec{K} \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow \hat{z}\times(-\hat{x}\dot{H}_{1x}(z=h^+) + \hat{x}\dot{H}_{2x}(z=h^-)) = \hat{y}K_0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow -\hat{y}\dot{H}_{1x}(z=h^+) + \hat{y}\dot{H}_{2x}(z=h^-) = \hat{y}K_0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \dot{H}_{2x}(z=h^-) - \dot{H}_{1x}(z=h^+) = K_0 \overset{(5)}{\underset{(1),(2)}{\Leftrightarrow}} A_2\cos(kh) - A_1 e^{-jkh} = K_0 \quad (4)$$

Οι οριακές συνθήκες δίνουν τις σχέσεις (5), (6), (7) και μετά χρήση αυτών προκύπτει από τις (1)...(4) το πεδίο στο χώρο.

β) Ομοίως με πριν προκύπτουν οι ακόλουθες σχέσεις για τις περιοχές (1) και (2):

$$\dot{H}_x^{(1)} = A_1 e^{-jkx} \quad (1)$$

$$\dot{H}_x^{(2)} = A_2\cos(kz) + B_2\sin(kz) \quad (2)$$

$$\dot{E}_y^{(1)} = -\frac{hA_1}{\omega\varepsilon_0} e^{-jkz} \quad (3)$$

$$\dot{E}_y^{(2)} = \frac{1}{j\omega\varepsilon_0}(-A_2 k\sin kz + B_2 k\cos hz) \quad (4)$$

Ορ. Συνθ.: $\begin{cases} A_1 e^{-jkh} = \dfrac{A_2}{j}\sin(kh) & (6) \\ A_2\cos(kh) - A_1 e^{-jkh} = K_0 & (7) \end{cases}$

Πλέον, η ορ. συνθ. (5) δεν μπορεί να προκύψει δίοτι στο $z=0^-$ το πεδίο της περιοχής (3) δεν είναι τώρα μηδενικό.

Τώρα, στην περιοχή (3): $\dot{\vec{J}} = \dot{\vec{J}}_c = \sigma\dot{\vec{E}}^{(3)}$

Άρα, από το Νόμο Maxwell-Ampère θα έχουμε ότι:

$$\nabla\times\dot{\vec{H}}^{(3)} = \sigma\dot{\vec{E}}^{(3)} + j\omega\varepsilon\dot{\vec{E}}^{(3)} = (\sigma + j\omega\varepsilon)\dot{\vec{E}}^{(3)} = j\omega\varepsilon'\dot{\vec{E}}^{(3)} \quad (8), \quad \varepsilon' = \varepsilon + \frac{\sigma}{j\omega}$$

$$(8) \Rightarrow \vec{\nabla}\times\dot{\vec{H}}^{(3)} = j\omega\varepsilon'\dot{\vec{E}}^{(3)} \xrightarrow[\text{συνι/νες}]{\text{καρτ.}} \left(\cancel{\frac{\partial\dot{H}_z^{(3)}}{\partial y}} - \cancel{\frac{\partial\dot{H}_y^{(3)}}{\partial z}}\right)\hat{x} + \left(\frac{\partial\dot{H}_x^{(3)}}{\partial z} - \cancel{\frac{\partial\dot{H}_z^{(3)}}{\partial x}}\right)\hat{y} +$$

$$+ \left(\cancel{\frac{\partial\dot{H}_y^{(3)}}{\partial x}} - \cancel{\frac{\partial\dot{H}_x^{(3)}}{\partial y}}\right)\hat{z} = j\omega\varepsilon'\dot{E}_y^{(3)}\cdot\hat{y} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{\partial\dot{H}_x^{(3)}}{\partial z} = j\omega\varepsilon'\dot{E}_y^{(3)} \Leftrightarrow \dot{E}_y^{(3)} = \frac{1}{j\omega\varepsilon'}\cdot\frac{\partial\dot{H}_x^{(3)}}{\partial z} \quad (9)$$

Εδώ, θα είναι: $(\vec{\nabla}^2 + k'^2)\dot{\vec{H}}^{(3)} = 0 \Leftrightarrow \dfrac{d^2\dot{H}_x^{(3)}}{dz^2} + \underbrace{\omega^2\mu\varepsilon'}_{k'}\dot{H}_x^{(3)} = 0$, $\quad k' = \omega^2\mu\varepsilon'$

$$\Rightarrow \dot{H}_x^{(3)} = \cancel{A_3}^{\,0} e^{-jk'z} + B_3 e^{jk'z} \quad (10)$$

Προκύπτει $A_3=0$ στο ανάλογο στο άπειρο αφού το κύμα στην περιοχή (3) δεν μπορεί να κατευθύνεται προς τα άνω (προς την πηγή).

$$(9) \Rightarrow \dot{E}_y^{(3)} = \frac{1}{j\omega\varepsilon'} B_3 j k' e^{jk'z} \quad (11)$$

Τώρα, με την ορ. συν. $z=0$: $\hat{z}\times\left(\hat{y}\,\dot{E}_{2y}(z=0^+) - \hat{y}\,\dot{E}_{3y}(z=0^-)\right) = 0 \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow \dot{E}_{2y}(z=0^+) = \dot{E}_{3y}(z=0^-) \Leftrightarrow$$

$$\overset{(3)}{\underset{(4)}{\Leftrightarrow}} \frac{1}{j\omega\varepsilon_0} B_2 h = \frac{1}{\omega\varepsilon'} B_3 h' \quad (12)$$

Από το επιφανειακό ρεύμα στην επιφ. $z=0$ προκύπτει: $\hat{z}\times\left(\dot{\vec{H}}_2(z=0^+) - \dot{\vec{H}}_3(z=0^-)\right) = \vec{K}\big|_{z=0} \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow \hat{z}\times\left(-\hat{x}\,\dot{H}_{2x}(z=0^+) + \hat{x}\,\dot{H}_{3x}(z=0^-)\right) = \hat{y}\,K\big|_{z=0} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow -\hat{y}\,\dot{H}_{2x}(z=0^+) + \hat{y}\,\dot{H}_{3x}(z=0^-) = \hat{y}\,K\big|_{z=0} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \dot{H}_{3x}(z=0^-) - \dot{H}_{2x}(z=0^+) = K\big|_{z=0}^{(*)} \Leftrightarrow$$

$$\overset{(2)}{\underset{(10)}{\Leftrightarrow}} B_3 - A_2 = K\big|_{z=0} = 0 \Leftrightarrow B_3 = A_2 \quad (13)$$

(*) Όμως δεν εμφανίζεται το $\vec{K}$ όταν το κύμα αλλάζει μέσο, άρα $K|_{z=0}=0$.

Μέσω των ορ. συνθ. (6), (7), (12), (13) προκύπτουν από (1), (2), (3), (4), (9), (10) τα πεδία στο χώρο.

Άσκηση 4.8

Είναι $\vec{E} = \hat{z} E_0 \sin\frac{\pi x}{a}\sin\frac{\pi y}{b}\cos\omega t$ με $\dot{\vec{E}} = \hat{z} E_0 \sin\frac{\pi x}{a}\sin\frac{\pi y}{b} e^{j0} = \hat{z} E_0 \sin\frac{\pi x}{a}\sin\frac{\pi y}{b}$

ΗΜΚ :

Από Νόμο Maxwell - Faraday στο πεδίο της συχνότητας θα είναι:

$$\nabla\times\dot{\vec{E}} = -j\omega\mu_0\dot{\vec{H}} \xrightarrow[\text{συν/να}]{\text{καρτ.}} \left(\frac{\partial\dot{E}_z}{\partial y} - \cancel{\frac{\partial\dot{E}_y}{\partial z}}\right)\hat{x} + \left(\cancel{\frac{\partial\dot{E}_x}{\partial z}} - \frac{\partial\dot{E}_z}{\partial x}\right)\hat{y} + \left(\cancel{\frac{\partial\dot{E}_y}{\partial x}} - \cancel{\frac{\partial\dot{E}_x}{\partial y}}\right)\hat{z} = -j\omega\mu_0\dot{\vec{H}}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{\partial\dot{E}_z}{\partial y} = -j\omega\mu_0\dot{H}_x \quad (1) \\ \dfrac{\partial\dot{E}_z}{\partial x} = +j\omega\mu_0\dot{H}_y \quad (2) \\ 0 = -j\omega\mu_0\dot{H}_z \Leftrightarrow \dot{H}_z = 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} (1) \Rightarrow \dot{H}_x = \dfrac{j\pi}{\omega\mu_0 b}\sin\dfrac{\pi x}{a}\cos\dfrac{\pi y}{b} \\ (2) \Rightarrow \dot{H}_y = \dfrac{-j\pi}{\omega\mu_0 a}\cos\dfrac{\pi x}{a}\sin\dfrac{\pi y}{b} \end{cases}$$

Οπότε, $\dot{\vec{H}} = \hat{x}\left(\frac{jn}{\omega\mu_0 b}\sin\frac{nx}{a}\cos\frac{ny}{b}\right) + \hat{y}\left(-\frac{jn}{\omega\mu_0 a}\cos\frac{nx}{a}\sin\frac{ny}{b}\right)$, οπότε θα έχουμε ότι:

$$\vec{H}(x,y,t) = Re\{\dot{\vec{H}}e^{j\omega t}\} = Re\left[\left(\hat{x}\frac{jn}{\omega\mu_0 b}\sin\frac{nx}{a}\cos\frac{ny}{b} - \hat{y}\frac{jn}{\omega\mu_0 a}\cos\frac{nx}{a}\sin\frac{ny}{b}\right)(\cos\omega t + j\sin\omega t)\right] \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \vec{H}(x,y,t) = -\hat{x}\frac{n}{\omega\mu_0 b}\sin\frac{nx}{a}\cos\frac{ny}{b}\sin\omega t + \hat{y}\frac{n}{\omega\mu_0 a}\cos\frac{nx}{a}\sin\frac{ny}{b}\sin\omega t$$

Τώρα, από Νόμο Gauss:

$$\dot{\rho} = \vec{\nabla}\cdot\dot{\vec{D}} = \varepsilon_0\vec{\nabla}\dot{\vec{E}} = \varepsilon_0\left(\frac{\partial \cancel{\dot{E}_x}}{\partial x} + \frac{\partial \cancel{\dot{E}_y}}{\partial y} + \frac{\partial \cancel{\dot{E}_z}}{\partial z}\right) = 0 \Rightarrow \rho = 0$$

Από Νόμο Maxwell-Ampère:

$$\dot{\vec{J}} = \vec{\nabla}\times\dot{\vec{H}} - j\omega\varepsilon_0\dot{\vec{E}} = \left(\frac{\partial \dot{H}_z}{\partial y} - \frac{\partial \dot{H}_y}{\partial z}\right)\hat{x} + \left(\frac{\partial \dot{H}_x}{\partial z} - \frac{\partial \dot{H}_z}{\partial x}\right)\hat{y} + \left(\frac{\partial \dot{H}_y}{\partial x} - \frac{\partial \dot{H}_x}{\partial y}\right)\hat{z} -$$

$$- j\omega\varepsilon_0 E_0\sin\frac{nx}{a}\sin\frac{ny}{b}\hat{z} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \dot{\vec{J}} = \left(\frac{jn^2}{\omega\mu_0 a^2}\sin\frac{nx}{a}\sin\frac{ny}{b} + \frac{jn^2}{\omega\mu_0 b^2}\sin\frac{nx}{a}\sin\frac{ny}{b} - j\omega\varepsilon_0 E_0\sin\frac{nx}{a}\sin\frac{ny}{b}\right)\hat{z} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \dot{\vec{J}} = \hat{z}\sin\frac{nx}{a}\sin\frac{ny}{b}\left(\frac{jn^2}{\omega\mu_0 a^2} + \frac{jn^2}{\omega\mu_0 b^2} - j\omega\varepsilon_0 E_0\right)$$

και επίσης, $\vec{J}(x,y,t) = Re\{\dot{\vec{J}}e^{j\omega t}\} = Re\{\dot{\vec{J}}(\cos\omega t + j\sin\omega t)\} \Rightarrow$

$$\Rightarrow \vec{J}(x,y,t) = \hat{z}\cdot\sin\frac{nx}{a}\sin\frac{ny}{b}\left(\omega\varepsilon_0 E_0 - \frac{n^2}{\omega\mu_0 a^2} - \frac{n^2}{\omega\mu_0 b^2}\right)\sin\omega t$$

Από την οριακή συνθήκη: $\hat{n}\cdot(\dot{\vec{D}}_2 - \dot{\vec{D}}_1) = \dot{\sigma} \Leftrightarrow \hat{n}\varepsilon_0(\dot{\vec{E}}_2 - \dot{\vec{E}}_1) = \dot{\sigma}$ και επειδή το $\dot{E}$ έχει μόνο z-συνιστ. συμπεραίνουμε ότι επιφ. πυκν. φορτίου υπάρχει μόνο για $z=0$ και $z=c$. Άρα, $\sigma(x=0) = \sigma(x=a) = \sigma(y=0) = \sigma(y=b) = 0$,

ενώ $\dot{\sigma}(z=0) = \varepsilon_0\dot{E}_z(z=0^+) - 0 = \varepsilon_0 E_0\sin\frac{nx}{a}\sin\frac{ny}{b} \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow \sigma(z=0) = Re\{\dot{\sigma}(z=0)e^{j\omega t}\} \Rightarrow \sigma(z=0) = \varepsilon_0 E_0\sin\frac{nx}{a}\sin\frac{ny}{b}\cos\omega t$$

και $\dot{\sigma}(z=c) = 0 - \varepsilon_0\dot{E}_z(z=c^-) = -\varepsilon_0 E_0\sin\frac{nx}{a}\sin\frac{ny}{b} \Rightarrow$

$$\Rightarrow \sigma(z=c) = Re\{\dot{\sigma}(z=c)e^{j\omega t}\} \Rightarrow \sigma(z=c) = -\varepsilon_0 E_0\sin\frac{nx}{a}\sin\frac{ny}{b}\cos\omega t$$

Για τις επιφανειακές πυκνότητες ρεύματος:

- $\dot{\vec K}(x=0) = \hat x \times (\dot{\vec H}(x=0^+) - 0) = \hat x \times \hat y\left(-\frac{j\pi}{\omega\mu_0 a}\sin\frac{\pi y}{b}\right) = -\hat z \frac{j\pi}{\omega\mu_0 a}\sin\frac{\pi y}{b}$

  Ἄρα, $\vec K(x=0) = Re\{\dot{\vec K}(x=0)e^{j\omega t}\} \Rightarrow \vec K(x=0) = \hat z \frac{\pi}{\omega\mu_0 a}\sin\frac{\pi y}{b}\sin\omega t$

- $\dot{\vec K}(x=a) = \hat x\times(0-\dot{\vec H}(x=a^-)) = -\hat x\times\hat y\left(+\frac{j\pi}{\omega\mu_0 a}\sin\frac{\pi y}{b}\right) = -\hat z\frac{j\pi}{\omega\mu_0 a}\sin\frac{\pi y}{b}$

  Ἄρα, $\vec K(x=a) = Re\{\dot{\vec K}(x=a)e^{j\omega t}\} \Rightarrow \vec K(x=a) = \hat z\frac{\pi}{\omega\mu_0 a}\sin\frac{\pi y}{b}\sin\omega t$

- $\dot{\vec K}(y=0) = \hat y\times(\dot{\vec H}(y=0^+) - 0) = \hat y\times\hat x\left(\frac{j\pi}{\omega\mu_0 b}\sin\frac{\pi x}{a}\right) = -\hat z\frac{j\pi}{\omega\mu_0 b}\sin\frac{\pi x}{a}$

  Ἄρα, $\vec K(y=0) = Re\{\dot{\vec K}(y=0)e^{j\omega t}\} \Rightarrow \vec K(y=0) = \hat z\frac{\pi}{\omega\mu_0 b}\sin\frac{\pi x}{a}\sin\omega t$

- $\dot{\vec K}(y=b) = \hat y\times(0-\dot{\vec H}(y=b^-)) = -\hat y\times\hat x\left(-\frac{j\pi}{\omega\mu_0 b}\sin\frac{\pi x}{a}\right) = -\hat z\frac{j\pi}{\omega\mu_0 b}\sin\frac{\pi x}{a}$

  Ἄρα, $\vec K(y=b) = Re\{\dot{\vec K}(y=b)e^{j\omega t}\} \Rightarrow \vec K(y=b) = \hat z\frac{\pi}{\omega\mu_0 b}\sin\frac{\pi x}{a}\sin\omega t$

- $\dot{\vec K}(z=0) = \hat z\times(\dot{\vec H}(z=0^+)-0) = \hat z\times\hat x\left(\frac{j\pi}{\omega\mu_0 b}\sin\frac{\pi x}{a}\cos\frac{\pi y}{b}\right) + \hat z\times\hat y\left(-\frac{j\pi}{\omega\mu_0 a}\cos\frac{\pi x}{a}\sin\frac{\pi y}{b}\right) =$

  $= \hat y\left(\frac{j\pi}{\omega\mu_0 b}\sin\frac{\pi x}{a}\cos\frac{\pi y}{b}\right) + \hat x\left(\frac{j\pi}{\omega\mu_0 a}\cos\frac{\pi x}{a}\sin\frac{\pi y}{b}\right)$

  Ἄρα, $\vec K(z=0) = Re\{\dot{\vec K}(z=0)e^{j\omega t}\} \Rightarrow \vec K(z=0) = -\hat y\frac{\pi}{\omega\mu_0 b}\sin\frac{\pi x}{a}\cos\frac{\pi y}{b}\sin\omega t$

  $-\hat x\frac{\pi}{\omega\mu_0 a}\cos\frac{\pi x}{a}\sin\frac{\pi y}{b}\sin\omega t$

- $\dot{\vec K}(z=c) = \hat z(0-\dot{\vec H}(z=c^-)) = -\hat z\times\hat x\left(\frac{j\pi}{\omega\mu_0 b}\sin\frac{\pi x}{a}\cos\frac{\pi y}{b}\right) - \hat z\times\hat y\left(-\frac{j\pi}{\omega\mu_0 a}\cos\frac{\pi x}{a}\sin\frac{\pi y}{b}\right) =$

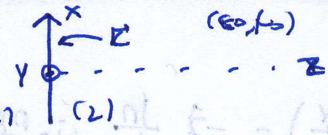
  $= -\hat y\left(\frac{j\pi}{\omega\mu_0 b}\sin\frac{\pi x}{a}\cos\frac{\pi y}{b}\right) + \hat x\left(-\frac{j\pi}{\omega\mu_0 a}\cos\frac{\pi x}{a}\sin\frac{\pi y}{b}\right)$

  Ἄρα, $\vec K(z=c) = Re\{\dot{\vec K}(z=c)e^{j\omega t}\} \Rightarrow \vec K(z=c) = \hat y\frac{\pi}{\omega\mu_0 b}\sin\frac{\pi x}{a}\cos\frac{\pi y}{b}\sin\omega t$

  $+\hat x\frac{\pi}{\omega\mu_0 a}\cos\frac{\pi x}{a}\sin\frac{\pi y}{b}\sin\omega t$

όπου $\omega = \sqrt{\frac{\left(\frac{\pi}{a}\right)^2+\left(\frac{\pi}{b}\right)^2}{\varepsilon_0\mu_0}}$ η κυκλική συχνότητα και E_0 γνωστή ποσότητα.

Άσκηση 4.9



Είναι, $\vec{E}_1 = -\hat{y}\,\frac{k_o\omega\mu_o}{2\beta}\sin\frac{\pi x}{l}\cos(\omega t+\beta z)$ και $\dot{\vec{E}}_1 = -\hat{y}\,\frac{k_o\omega\mu_o}{2\beta}\sin\frac{\pi x}{l}\,e^{j\beta z}$, $z<0$

και $\vec{H}_2 = \hat{x}\,\frac{k_o}{2}\sin\frac{\pi x}{l}\cos(\omega t-\beta z)+\hat{z}\,\frac{\pi k_o}{2\beta l}\cos\frac{\pi x}{l}\sin(\omega t-\beta z)$ και

$$\dot{\vec{H}}_2 = \hat{x}\,\frac{k_o}{2}\sin\frac{\pi x}{l}\,e^{-j\beta z}+\hat{z}\,\frac{-j\pi k_o}{2\beta l}\cos\frac{\pi x}{l}\,e^{-j\beta z},\ z>0.$$

α) ΗΜΚ:

Νόμος Maxwell-Faraday:

$$\nabla\times\dot{\vec{E}}_1 = -j\omega\mu_o\dot{\vec{H}}_1 \xrightarrow[\text{συν/νες}]{\text{καρτ.}} \left(\cancel{\frac{\partial \dot{E}_{1z}}{\partial y}}-\frac{\partial \dot{E}_{1y}}{\partial z}\right)\hat{x}+\cancel{\left(\frac{\partial \dot{E}_{1x}}{\partial z}-\frac{\partial \dot{E}_{1z}}{\partial x}\right)}\hat{y}+\left(\frac{\partial \dot{E}_{1y}}{\partial x}-\cancel{\frac{\partial \dot{E}_{1x}}{\partial y}}\right)\hat{z} = -j\omega\mu_o\dot{\vec{H}}_1 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \frac{\partial \dot{E}_{1y}}{\partial z} = j\omega\mu_o\dot{H}_{1x} & (1)\\ 0 = -j\omega\mu_o\dot{H}_{1y} \Rightarrow \dot{H}_{1y}=0 \\ \frac{\partial \dot{E}_{1y}}{\partial x} = -j\omega\mu_o\dot{H}_{1z} & (2)\end{cases}$$

$$(1)\Rightarrow \dot{H}_{1x} = \frac{1}{j\omega\mu_o}\left(-\frac{k_o\omega\mu_o}{2\beta}\sin\frac{\pi x}{l}\,j\beta\,e^{j\beta z}\right) \Leftrightarrow \dot{H}_{1x} = -\frac{k_o}{2}\sin\frac{\pi x}{l}\,e^{j\beta z}$$

$$(2)\Rightarrow \dot{H}_{1z} = -\frac{1}{j\omega\mu_o}\left(-\frac{\pi}{l}\cdot\frac{k_o\omega\mu_o}{2\beta}\cos\frac{\pi x}{l}\,e^{j\beta z}\right) \Leftrightarrow \dot{H}_{1z} = -\frac{j\pi k_o}{2\beta l}\cos\frac{\pi x}{l}\,e^{j\beta z}$$

Οπότε, $\dot{\vec{H}}_1 = -\hat{x}\,\frac{k_o}{2}\sin\frac{\pi x}{l}\,e^{j\beta z}-\hat{z}\,\frac{j\pi k_o}{2\beta l}\cos\frac{\pi x}{l}\,e^{j\beta z}$, $z<0$

Είναι $\vec{H}_1(x,y,t) = \mathrm{Re}\left\{\dot{\vec{H}}_1 e^{j\omega t}\right\} = \mathrm{Re}\left\{-\hat{x}\,\frac{k_o}{2}\sin\frac{\pi x}{l}\,e^{j(\beta z+\omega t)}-\hat{z}\,\frac{j\pi k_o}{2\beta l}\cos\frac{\pi x}{l}\,e^{j(\beta z+\omega t)}\right\}$

$$\Rightarrow \vec{H}_1(x,y,t) = -\hat{x}\,\frac{k_o}{2}\sin\frac{\pi x}{l}\cos(\omega t+\beta z)+\hat{z}\,\frac{\pi k_o}{2\beta l}\cos\frac{\pi x}{l}\sin(\omega t+\beta z),\ z<0.$$

Νόμος Maxwell-Ampere:

$$\nabla\times\dot{\vec{H}}_2 = \cancel{\vec{J}}^{\,0}+j\omega\varepsilon_o\dot{\vec{E}}_2 \xrightarrow[\text{συν/νες}]{\text{καρτ.}} \left(\cancel{\frac{\partial \dot{H}_{2z}}{\partial y}}-\cancel{\frac{\partial \dot{H}_{2y}}{\partial z}}\right)\hat{x}+\left(\frac{\partial \dot{H}_{2x}}{\partial z}-\frac{\partial \dot{H}_{2z}}{\partial x}\right)\hat{y}+\left(\cancel{\frac{\partial \dot{H}_{2y}}{\partial x}}-\cancel{\frac{\partial \dot{H}_{2x}}{\partial y}}\right)\hat{z} = j\omega\varepsilon_o\dot{\vec{E}}_2 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 0 = j\omega\varepsilon_o\dot{E}_{2x} \Rightarrow \dot{E}_{2x}=0 \\ \frac{\partial \dot{H}_{2x}}{\partial z}-\frac{\partial \dot{H}_{2z}}{\partial x} = j\omega\varepsilon_o\dot{E}_2 & (3)\\ 0 = j\omega\varepsilon_o\dot{E}_{2z} \Leftrightarrow \dot{E}_{2z}=0\end{cases}$$

(3) ⇒ $\dot E_{2y} = \frac{1}{j\omega\varepsilon_0}\left(\frac{K_0}{2}(-j\beta)\sin\frac{nx}{\ell}\, e^{-j\beta z} - \frac{jnK_0}{2\beta\ell}\cdot\frac{n}{\ell}\cdot\sin\frac{nx}{\ell}\, e^{-j\beta z}\right)$

Οπότε, $\vec{\dot E}_2 = -\hat y\left(\frac{K_0\beta}{2\omega\varepsilon_0}\sin\frac{nx}{\ell}\, e^{-j\beta z} + \frac{K_0 n^2}{2\omega\varepsilon_0\beta\ell^2}\sin\frac{nx}{\ell}\, e^{-\beta z}\right)$

Είναι, $\vec E_2(x,z,t) = Re\{\vec{\dot E}_2 e^{j\omega t}\} = Re\left\{-\hat y\left(\frac{K_0\beta}{2\omega\varepsilon_0}\sin\frac{nx}{\ell}\, e^{j(\beta x+\omega t)} + \frac{K_0 n^2}{2\omega\varepsilon_0\beta\ell^2}\cdot\sin\frac{nx}{\ell}\, e^{j(\omega t-\beta x)}\right)\right\}$

⇒ $\vec E_2(x,z,t) = -\hat y\left(\frac{K_0\beta}{2\omega\varepsilon_0}\sin\frac{nx}{\ell}\cos(\omega t-\beta z) + \frac{K_0 n^2}{2\omega\varepsilon_0\beta\ell^2}\sin\frac{nx}{\ell}\cos(\omega t-\beta z)\right)$, $z>0$

β) Έχω, $\vec{\dot K}(z=0) = \hat z\times\left(\vec{\dot H}_2(z=0^+) - \vec{\dot H}_1(z=0^-)\right) = \hat z\times\left(\hat x\frac{K_0}{2}\sin\frac{nx}{\ell} + \hat z\frac{-jnK_0}{2\beta\ell}\cos\frac{nx}{\ell} + \hat x\frac{K_0}{2}\sin\frac{nx}{\ell} + \hat z\frac{jnK_0}{2\beta\ell}\cos\frac{nx}{\ell}\right)$ ⇒

⇒ $\vec{\dot K}(z=0) = \hat y\frac{K_0}{2}\sin\frac{nx}{\ell} + \hat y\frac{K_0}{2}\sin\frac{nx}{\ell}$ ⇒ $\vec{\dot K}(z=0) = \hat y K_0\sin\frac{nx}{\ell}$

Άρα, $\vec K(z=0) = Re\{\vec{\dot K}(z=0)e^{j\omega t}\}$ ⇒ $\vec K(z=0) = \hat y K_0\sin\frac{nx}{\ell}\cos\omega t$

Ακόμη, $\dot\sigma(z=0) = \hat z\left(\vec{\dot D}_2(z=0^+) - \vec{\dot D}_1(z=0^-)\right) = \varepsilon_0\cancel{\dot E_{2z}(z=0^+)} - \varepsilon_0\cancel{\dot E_{1z}(z=0^-)} = 0$ ⇒

⇒ $\sigma(z=0) = 0$

Η οριακή συνθήκη της αρχής διατήρησης του φορτίου στην ΗΜΚ ~~[illegible]~~ είναι:

$\hat z\left(\cancel{\vec{\dot J}_2 - \vec{\dot J}_1}^{\,0}\right)\Big|_{z=0} = -\nabla\cdot\vec{\dot K} - j\omega\cancel{\dot\sigma}^{\,0}$ ⇔ $\nabla\vec{\dot K} = 0$ ⇔

⇔ $\frac{\partial \cancel{\dot K_x}}{\partial x} + \frac{\partial \cancel{\dot K_y}}{\cancel{\partial y}} + \frac{\partial \dot K_z}{\partial z} = 0$ ⇔ $0=0$, που ισχύει, άρα επαληθεύεται.