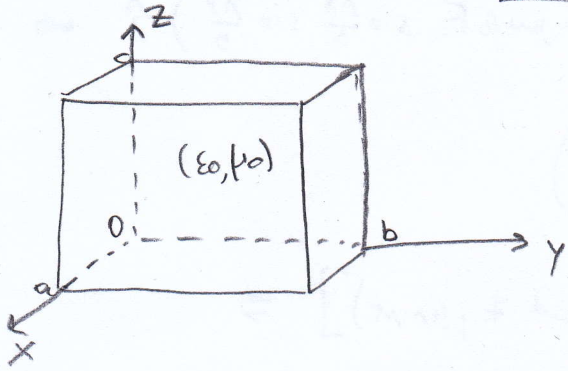
Ηλ. Πεδία Α

Χρήστος Τσούφης
03117176

5η Σειρά Ασκήσεων

Άσκηση 1η (5.12)

Απαιτείται η επίλυση της 4.8.



Είναι $\dot{E} = \hat{z} E_0 \sin\frac{\pi x}{a} \sin\frac{\pi y}{b} \cos(\omega t)$

Με παραστατικό μιγ. διαν.:

$\dot{\dot{E}} = \hat{z} E_0 \sin\frac{\pi x}{a} \sin\frac{\pi y}{b} e^{j0} \Rightarrow$

$\Rightarrow \dot{\dot{E}} = \hat{z} E_0 \sin\frac{\pi x}{a} \sin\frac{\pi y}{b}$

Εργαζόμαστε στην ΗΜΚ:

Από Νόμο Maxwell-Faraday στο πεδίο συχνότητας, θα είναι:

$$\bar{\nabla} \times \dot{E} = -j\omega\mu_0 \dot{H} \xrightleftharpoons[\text{συντ/νες}]{\text{καρτεσ.}}$$

$$\Leftrightarrow \left(\frac{\partial \dot{E}_z}{\partial y} - \cancel{\frac{\partial \dot{E}_y}{\partial z}}\right)\hat{x} + \left(\cancel{\frac{\partial \dot{E}_x}{\partial z}} - \frac{\partial \dot{E}_z}{\partial x}\right)\hat{y} + \left(\cancel{\frac{\partial \dot{E}_y}{\partial x}} - \cancel{\frac{\partial \dot{E}_x}{\partial y}}\right)\hat{z} = -j\omega\mu_0 \dot{H} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \frac{\partial \dot{E}_z}{\partial y} = -j\omega\mu_0 \dot{H}_x \quad (1) \quad \Rightarrow \quad \dot{H}_x = \frac{j\pi E_0}{\omega\mu_0 b} \cdot \sin\left(\frac{\pi x}{a}\right) \cos\left(\frac{\pi x}{b}\right) \\ \frac{\partial \dot{E}_z}{\partial x} = +j\omega\mu_0 \dot{H}_y \quad (2) \quad \Rightarrow \quad \dot{H}_y = -\frac{j\pi E_0}{\omega\mu_0 a} \cos\left(\frac{\pi x}{a}\right) \cdot \sin\left(\frac{\pi y}{b}\right) \\ 0 = -j\omega\mu_0 \dot{H}_z \Leftrightarrow \dot{H}_z = 0 \end{cases}$$

Οπότε, $\dot{H} = \hat{x}\left(\frac{j\pi E_0}{\omega\mu_0 b} \sin\frac{\pi x}{a} \cos\frac{\pi y}{b}\right) + \hat{y}\left(-\frac{j\pi E_0}{\omega\mu_0 a} \cos\frac{\pi x}{a} \cdot \sin\frac{\pi x}{b}\right)$, άρα θα έχουμε ότι

$$\bar{H}(x,y,t) = \mathrm{Re}\left[\dot{H} e^{j\omega t}\right] = \mathrm{Re}\left[\left(\hat{x}\frac{j\pi E_0}{\omega\mu_0 b} \sin\frac{\pi x}{a} \cos\frac{\pi y}{b} - \hat{y}\frac{j\pi E_0}{\omega\mu_0 a} \cos\frac{\pi x}{a} \sin\frac{\pi y}{b}\right)(\cos\omega t + j\sin\omega t)\right]$$

$$= -\hat{x}\frac{\pi E_0}{\omega\mu_0 b} \sin\frac{\pi x}{a} \cos\frac{\pi y}{b} \sin\omega t + \hat{y}\frac{\pi E_0}{\omega\mu_0 a} \cos\frac{\pi x}{a} \sin\frac{\pi x}{b} \sin\omega t$$

Τώρα, από νόμο Gauss για το ηλ. πεδίο, θα είναι:

$$\dot{\rho} = \bar{\nabla} \cdot \dot{D} = \varepsilon_0 \bar{\nabla} \cdot \dot{E} = \varepsilon_0 \left(\frac{\partial \dot{E}_x}{\partial x} + \frac{\partial \dot{E}_y}{\partial y} + \frac{\partial \dot{E}_z}{\partial z}\right) = 0 \Rightarrow \rho = 0.$$

Από τον νόμο Maxwell-Ampere:

$$\dot{\bar{J}} = \nabla \times \dot{H} - j\omega\varepsilon_0 \dot{E} = \left(\frac{\partial \dot{H}_z}{\partial y} - \frac{\partial \dot{H}_y}{\partial z}\right)\hat{x} + \left(\frac{\partial \dot{H}_x}{\partial z} - \frac{\partial \dot{H}_z}{\partial x}\right)\hat{y} + \left(\frac{\partial \dot{H}_y}{\partial x} - \frac{\partial \dot{H}_x}{\partial y}\right)\hat{z} +$$

$$- j\omega\varepsilon_0 E_0 \sin\frac{\pi x}{a} \sin\frac{\pi y}{b}\hat{z} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \dot{\bar{J}} = \left(\frac{j\pi^2}{\omega\mu_0 a^2}\sin\frac{\pi x}{a}\sin\frac{\pi y}{b} + \frac{j\pi^2}{\omega\mu_0 b^2}\sin\frac{\pi x}{a}\sin\frac{\pi y}{b} - j\omega\varepsilon_0 E_0 \sin\frac{\pi x}{a}\sin\frac{\pi y}{b}\right)\hat{z} \Leftrightarrow$$

$$\Rightarrow \dot{\bar{J}} = \hat{z}\cdot\sin\frac{\pi x}{a}\sin\frac{\pi y}{b}\left(\frac{j\pi^2}{\omega\mu_0 a^2} + \frac{j\pi^2}{\omega\mu_0 b^2} - j\omega\varepsilon_0 E_0\right)$$

Και επειδή, $\bar{J}(x,y,t) = \mathrm{Re}\left[\dot{\bar{J}} e^{j\omega t}\right] = \mathrm{Re}\left[\dot{\bar{J}}\cdot(\cos\omega t + j\sin\omega t)\right] \Rightarrow$

$$\Rightarrow \bar{J}(x,y,t) = \hat{z}\cdot\sin\frac{\pi x}{a}\sin\frac{\pi y}{b}\left(\omega\varepsilon_0 E_0 - \frac{\pi^2}{\omega\mu_0 a^2} - \frac{\pi^2}{\omega\mu_0 b^2}\right)\sin\omega t$$

Από την συνοριακή συνθ.: $\hat{n}\cdot(\dot{\bar{D}}_2 - \dot{\bar{D}}_1) = \dot{\sigma} \Rightarrow \hat{n}\varepsilon_0(\dot{\bar{E}}_2 - \dot{\bar{E}}_1) = \dot{\sigma}$, και επειδή το $\dot{\bar{E}}$ έχει μόνο $\hat{z}$ - συνιστώσα, προκύπτει ότι η επιφανειακή πυκνότητα φορτίου υπάρχει μόνο για $z=0$, $z=c$. Άρα, $\sigma(x=0) = \sigma(x=a) = \sigma(y=0) = \sigma(y=b) = 0$.

Ενώ $\dot{\sigma}(z=0) = \varepsilon_0 \dot{E}_z(z=0^+) - 0 = \varepsilon_0 E_0 \sin\frac{\pi x}{a}\sin\frac{\pi y}{b} \Rightarrow$

$$\Rightarrow \sigma(z=0) = \mathrm{Re}\left[\dot{\sigma}(z=0) e^{j\omega t}\right] \Rightarrow \sigma(z=0) = \varepsilon_0 E_0 \sin\frac{\pi x}{a}\sin\frac{\pi y}{b}\cos\omega t$$

και $\dot{\sigma}(z=c) = 0 - \varepsilon_0 \dot{E}_z(z=c^-) = -\varepsilon_0 E_0 \sin\frac{\pi x}{a}\sin\frac{\pi y}{b} \Rightarrow$

$$\Rightarrow \sigma(z=c) = \mathrm{Re}\left[\dot{\sigma}(z=c) e^{j\omega t}\right] \Rightarrow \sigma(z=c) = -\varepsilon_0 E_0 \sin\frac{\pi x}{a}\sin\frac{\pi y}{b}\cos\omega t$$

Για τις επιφανειακές πυκνότητες ρεύματος έχουμε:

$$\dot{\bar{K}}(x=0) = \hat{x}\times\left(\dot{\bar{H}}(x=0^+) - 0\right) = \hat{x}\times\hat{y}\left(-\frac{j\pi}{\omega\mu_0 a}\sin\frac{\pi y}{b}\right) = -\hat{z}\frac{j\pi}{\omega\mu_0 a}\sin\frac{\pi y}{b}$$

$$\bar{K}(x=0) = \mathrm{Re}\left[\dot{\bar{K}}(x=0) e^{j\omega t}\right] \Rightarrow \bar{K}(x=0) = \hat{z}\frac{\pi}{\omega\mu_0 a}\sin\frac{\pi y}{b}\sin\omega t$$

$$\dot{\bar{K}}(x=a) = \hat{x}\times\left(0 - \dot{\bar{H}}(x=a^-)\right) = -\hat{x}\times\hat{y}\left(+\frac{j\pi}{\omega\mu_0 a}\sin\frac{\pi y}{b}\right) = -\hat{z}\frac{j\pi}{\omega\mu_0 a}\sin\frac{\pi y}{b}$$

$$\bar{K}(x=a) = \mathrm{Re}\left[\dot{\bar{K}}(x=a) e^{j\omega t}\right] \Rightarrow \bar{K}(x=a) = \hat{z}\frac{\pi}{\omega\mu_0 a}\sin\frac{\pi y}{b}\sin\omega t$$

• $\dot{K}(y=0) = \hat{y} \times (\dot{H}(y=0^+) - 0) = \hat{y} \times \hat{x} \left(\frac{jn}{\omega \mu_0 b} \sin \frac{nx}{a} \right) = -\hat{z} \frac{jn}{\omega \mu_0 b} \sin \frac{nx}{a}$

$\bar{K}(y=0) = \mathrm{Re}[\dot{K}(y=0) e^{j\omega t}] \Rightarrow \bar{K}(y=0) = \hat{z} \frac{n}{\omega \mu_0 b} \sin \frac{nx}{a} \sin \omega t$

• $\dot{K}(y=b) = \hat{y} \times (0 - \dot{H}(y=b^-)) = -\hat{y} \times \hat{x} \left(-\frac{jn}{\omega \mu_0 b} \sin \frac{nx}{a} \right) = -\hat{z} \frac{jn}{\omega \mu_0 b} \sin \frac{nx}{a}$

$\bar{K}(y=b) = \mathrm{Re}[\dot{K}(y=b) e^{j\omega t}] \Rightarrow \bar{K}(y=b) = \hat{z} \frac{n}{\omega \mu_0 b} \sin \frac{nx}{a} \sin \omega t$

• $\dot{K}(z=0) = \hat{z} \times (\dot{H}(z=0^+) - 0) = \hat{z} \times \hat{x} \left(\frac{jn}{\omega \mu_0 b} \sin \frac{nx}{a} \cos \frac{ny}{b} \right) + \hat{z} \times \hat{y} \left(-\frac{jn}{\omega \mu_0 a} \cos \frac{nx}{a} \sin \frac{ny}{b} \right)$

$= \hat{y} \left(\frac{jn}{\omega \mu_0 b} \sin \frac{nx}{a} \cos \frac{ny}{b} \right) + \hat{x} \left(\frac{jn}{\omega \mu_0 a} \cos \frac{nx}{a} \sin \frac{ny}{b} \right)$

$\bar{K}(z=0) = \mathrm{Re}[\dot{K}(z=0) e^{j\omega t}] \Rightarrow \bar{K}(z=0) = -\hat{y} \frac{n}{\omega \mu_0 b} \sin \frac{nx}{a} \cos \frac{ny}{b} \sin \omega t +$

$- \hat{x} \frac{n}{\omega \mu_0 a} \cos \frac{nx}{a} \sin \frac{ny}{b} \sin \omega t$

• $\dot{K}(z=c) = \hat{z} \times (0 - \dot{H}(z=c^-)) = -\hat{z} \times \hat{x} \left(\frac{jn}{\omega \mu_0 b} \sin \frac{nx}{a} \cos \frac{ny}{b} \right) +$

$- \hat{z} \times \hat{y} \left(-\frac{jn}{\omega \mu_0 a} \cos \frac{nx}{a} \sin \frac{ny}{b} \right) \Rightarrow$

$\Rightarrow \dot{K}(z=c) = -\hat{y} \left(\frac{jn}{\omega \mu_0 b} \sin \frac{nx}{a} \cos \frac{ny}{b} \right) + \hat{x} \left(-\frac{jn}{\omega \mu_0 a} \cos \frac{nx}{a} \sin \frac{ny}{b} \right)$

$\bar{K}(z=c) = \mathrm{Re}[\dot{K}(z=c) e^{j\omega t}] \Rightarrow \bar{K}(z=c) = \hat{y} \frac{n}{\omega \mu_0 b} \sin \frac{nx}{a} \cos \frac{ny}{b} \sin \omega t$

$+ \hat{x} \frac{n}{\omega \mu_0 a} \cos \frac{nx}{a} \sin \frac{ny}{b} \sin \omega t$

όπου $\omega = \sqrt{\frac{(\frac{n}{a})^2 + (\frac{n}{b})^2}{\varepsilon_0 \mu_0}}$ η κυκλ. συχν. και E_0 γνωστή σταθερά.

Από την Άσκηση 4.8 λοιπόν, είναι γνωστό ότι:

$\dot{E} = \hat{z} \left(E_0 \sin\left(\frac{nx}{a}\right) \sin\left(\frac{ny}{b}\right) \right) = \hat{z} E_z$

$\dot{H} = \hat{x} \left(j \frac{E_0 n}{\omega \mu_0 b} \sin\left(\frac{nx}{a}\right) \cos\left(\frac{ny}{b}\right) \right) + \hat{y} \left(-j \frac{E_0 n}{\omega \mu_0 a} \cos\left(\frac{nx}{a}\right) \sin\left(\frac{ny}{b}\right) \right) = \hat{x} H_x + \hat{y} H_y$

Από την Θεωρία είναι γνωστό ότι:

Ο χρονικός μέσος όρος του διανύσματος Poynting είναι: $\langle \bar{N} \rangle = \frac{1}{2} Re[\dot{\bar{E}} \times \dot{\bar{H}}^*]$

όπου $\dot{\bar{H}}^*$: ο συζυγής μιγαδικός του $\dot{\bar{H}}$. Δηλ.

$$\dot{\bar{H}}^* = \hat{x}\left(-j \frac{E_0 \pi}{\omega \mu_0 b} \sin\left(\frac{\pi x}{a}\right) \cos\left(\frac{\pi y}{b}\right)\right) + \hat{y}\left(j \frac{E_0 \pi}{\omega \mu_0 a} \cos\left(\frac{\pi x}{a}\right) \sin\left(\frac{\pi y}{b}\right)\right) = \hat{x} H_x^* + \hat{y} H_y^*$$

Οπότε:

$$\dot{\bar{E}} \times \dot{\bar{H}}^* = \begin{vmatrix} \hat{x} & \hat{y} & \hat{z} \\ 0 & 0 & E_z \\ H_x^* & H_y^* & 0 \end{vmatrix} = \hat{x} \begin{vmatrix} 0 & E_z \\ H_y^* & 0 \end{vmatrix} - \hat{y} \begin{vmatrix} 0 & E_z \\ H_x^* & 0 \end{vmatrix} + \hat{z} \begin{vmatrix} 0 & 0 \\ H_x^* & H_y^* \end{vmatrix} =$$

$$= \hat{x}(-E_z H_y^*) + \hat{y}(E_z H_x^*) + \hat{z} \cdot (0) =$$

$$= -\hat{x}\left(j E_0 \sin\left(\frac{\pi x}{a}\right) \sin\left(\frac{\pi y}{b}\right) \frac{E_0 \pi}{\omega \mu_0 a} \cos\left(\frac{\pi x}{a}\right) \sin\left(\frac{\pi y}{b}\right)\right) +$$

$$- \hat{y}\left(j E_0 \sin\left(\frac{\pi x}{a}\right) \sin\left(\frac{\pi y}{b}\right) \frac{E_0 \pi}{\omega \mu_0 b} \sin\left(\frac{\pi x}{a}\right) \cos\left(\frac{\pi y}{b}\right)\right)$$

Αλλά, από ότι βλέπουμε, και οι δύο συνιστώσες του είναι φανταστικοί αριθμοί καθαροί, οπότε $Re[\dot{\bar{E}} \times \dot{\bar{H}}^*] = 0$

Επομένως, $\langle \bar{N} \rangle = 0$

Όσον αφορά τον χρονικό μέσο όρο της συνολικής αποθηκευμένης ηλ. ενέργ. έχουμε ότι δίνεται από τους εξής τύπους:

$\langle W_e \rangle = \frac{1}{4} Re[\dot{\bar{E}} \cdot \dot{\bar{D}}^*]$, όπου $\dot{\bar{D}} = \varepsilon_0 \dot{\bar{E}}$, $\dot{\bar{D}}^* = \varepsilon_0 \dot{\bar{E}}^*$

Όμως, το $\bar{E}$ είναι καθαρά πραγματικό, επομένως $\dot{\bar{E}}^* = \dot{\bar{E}}$.

Άρα, $\dot{\bar{D}} = \hat{z}\left(E_0 \varepsilon_0 \sin\left(\frac{\pi x}{a}\right) \sin\left(\frac{\pi y}{b}\right)\right)$

Τώρα, θα υπολογίσουμε το: $\dot{\bar{E}} \cdot \dot{\bar{D}}^*$:

$$\dot{\bar{E}} \cdot \dot{\bar{D}}^* = \left(\hat{z} \cdot E_0 \sin\left(\frac{\pi x}{a}\right) \sin\left(\frac{\pi y}{b}\right)\right) \cdot \left(\hat{z} \cdot \varepsilon_0 E_0 \sin\left(\frac{\pi x}{a}\right) \sin\left(\frac{\pi y}{b}\right)\right) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \dot{\bar{E}} \cdot \dot{\bar{D}}^* = E_0^2 \cdot \varepsilon_0 \sin^2\left(\frac{\pi x}{a}\right) \sin^2\left(\frac{\pi y}{b}\right) \in \mathbb{R}$$

Επομένως, $Re[\dot{\bar{E}} \cdot \dot{\bar{D}}^*] = E_0^2 \varepsilon_0 \sin^2\left(\frac{\pi x}{a}\right) \sin^2\left(\frac{\pi y}{b}\right)$. Άρα $\langle W_e \rangle = \frac{1}{4} \varepsilon_0 E_0^2 \sin^2 \frac{\pi x}{a} \sin^2 \frac{\pi y}{b}$

• Όσον αφορά το χρον. μέσο της συνολ. αποθηκευμένης μαγν. ενέργειας έχουμε ότι είναι από τον εξής τύπο:

$$< W_m > = \frac{1}{4} \mathrm{Re}[\, \dot{\bar{H}} \cdot \dot{\bar{B}}^*] \quad , \text{όπου} \quad \dot{\bar{B}}^* = \mu_0 \bar{H}^*$$

Επομένως:

$$\dot{\bar{B}}^* = \hat{x}\left(-j \frac{E_0 \mu_0 \pi}{\omega \mu_0 b} \sin\left(\frac{\pi x}{a}\right)\cos\left(\frac{\pi y}{b}\right)\right) + \hat{y}\left(j \frac{E_0 \mu_0 \pi}{\omega \mu_0 a} \cos\left(\frac{\pi x}{a}\right)\sin\left(\frac{\pi y}{b}\right)\right) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \dot{\bar{B}}^* = \hat{x}\left(-j \frac{E_0 \pi}{\omega b} \sin\frac{\pi x}{a} \cos\frac{\pi y}{b}\right) + \hat{y}\left(j \frac{E_0 \pi}{\omega a} \cos\frac{\pi x}{a} \sin\frac{\pi y}{b}\right)$$

Οπότε:

$$\dot{\bar{H}} \cdot \dot{\bar{B}}^* = (\hat{x} H_x + \hat{y} H_y) \cdot (\hat{x} B_x^* + \hat{y} B_y^*) = H_x \cdot B_x^* + H_y \cdot B_y^* \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \dot{\bar{H}} \cdot \dot{\bar{B}}^* = \left[\left(j \frac{E_0 \pi}{\omega \mu_0 b} \sin\left(\frac{\pi x}{a}\right)\cos\left(\frac{\pi y}{b}\right)\right)\left(-j \frac{E_0 \pi}{\omega b} \sin\left(\frac{\pi x}{a}\right)\cos\left(\frac{\pi y}{b}\right)\right) + \right.$$

$$\left. + \left(-j \frac{E_0 \pi}{\omega \mu_0 a} \cos\left(\frac{\pi x}{a}\right)\sin\left(\frac{\pi y}{b}\right)\right) \cdot \left(j \frac{E_0 \pi}{\omega a} \cos\left(\frac{\pi x}{a}\right)\sin\left(\frac{\pi y}{b}\right)\right)\right] \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \dot{\bar{H}} \cdot \dot{\bar{B}}^* = \frac{(E_0 \pi)^2}{(\omega b)^2 \mu_0} \sin^2\left(\frac{\pi x}{a}\right)\cos^2\left(\frac{\pi y}{b}\right) + \frac{(E_0 \pi)^2}{(\omega a)^2 \mu_0} \cos^2\left(\frac{\pi x}{a}\right)\sin^2\left(\frac{\pi y}{b}\right)$$

Άρα, $\mathrm{Re}[\dot{\bar{H}} \cdot \dot{\bar{B}}^*] = \dot{\bar{H}} \cdot \dot{\bar{B}}^*$, αφού $\dot{\bar{H}}, \dot{\bar{B}}^*$ καθαρά πραγματικά.

Άρα,
$$< W_m > = \frac{(E_0 \pi)^2}{4\mu_0 (\omega b)^2} \sin^2\left(\frac{\pi x}{a}\right)\cos^2\left(\frac{\pi y}{b}\right) + \frac{(E_0 \pi)^2}{4\mu_0 (\omega a)^2} \cos^2\left(\frac{\pi x}{a}\right)\sin^2\left(\frac{\pi y}{b}\right)$$

Τέλος:

$$< w > = < w_e > + < w_m > = \frac{1}{4} \varepsilon E^2 + \frac{1}{4} \mu_0 H^2 =$$

$$= \frac{1}{4} \varepsilon_0 E_0^2 \sin^2\left(\frac{\pi x}{a}\right)\sin^2\left(\frac{\pi y}{b}\right)\cos^2 \omega t + \frac{E_0^2 \pi^2}{\omega^2 \mu_0 b^2} \sin^2\left(\frac{\pi x}{a}\right)\cos^2\left(\frac{\pi y}{b}\right)\sin^2(\omega t) +$$

$$+ \frac{E_0^2 \pi^2}{\omega^2 \mu_0 a^2} \cos^2\left(\frac{\pi x}{a}\right)\sin^2\left(\frac{\pi y}{b}\right)\sin^2(\omega t)$$

Άσκηση 2η (5.15)

Από (3.4):

$$E_r^{(1)}(r) = \frac{q}{4\pi r^2 \varepsilon_0 (1+\frac{r}{a})} + \frac{\rho_0 \cdot r^3}{5a^2 \varepsilon_0 (1+\frac{r}{a})} \quad , \quad 0<r<a$$

$$E_r^{(2)}(r) = \frac{q}{4\pi r^2 \varepsilon_2} + \frac{\rho_0 a^3}{5 r^2 \varepsilon_2} \quad , \quad a<r<b$$

$$E_r^{(3)}(r) = 0 \quad , \quad b<r<c$$

$$E_r^{(4)}(r) = \frac{q}{4\pi r^2 \varepsilon_0} + \frac{\rho_0 a^3}{5 r^2 \varepsilon_0} \quad , \quad r>c$$

Για $q=0$:

$$E_r(r) = \begin{cases} \dfrac{\rho_0 \cdot r^3}{5a^3 \varepsilon_0 (1+\frac{r}{a})} & , \quad 0<r<a \\ \dfrac{\rho_0 a^3}{5 r^2 \varepsilon_2} & , \quad a<r<b \\ 0 & , \quad b<r<c \\ \dfrac{\rho_0 a^3}{5 r^2 \varepsilon_0} & , \quad r>c \end{cases}$$

Ισχύει ότι: $\frac{1}{4} \; E^2 \Rightarrow$

$$\Rightarrow \langle W_c \rangle = \begin{cases} \dfrac{\rho_0^2 \cdot r^6}{100 a^6 \varepsilon_0 (1+\frac{r}{a})} & , \quad 0<r<a \\ \dfrac{\rho_0^2 a^6}{100 r^4 \varepsilon_2} & , \quad a<r<b \\ 0 & , \quad b<r<c \\ \dfrac{\rho_0^2 a^6}{100 r^4 \varepsilon_0} & , \quad r>c \end{cases}$$

Για την χωρική πυκνότητα w_e της αποθηκευμένης ηλ. ενέργειας, έχουμε για το εσωτερικό:

$$w_{e,\varepsilon\sigma}(r) = \frac{1}{2}\varepsilon E_r^2(r) = \begin{cases} \frac{1}{2}\varepsilon \frac{1}{\varepsilon_0^2(1+\frac{r}{a})^2}\cdot\left(\frac{\rho_0 r^3}{5a^2}\right)^2, & 0<r<a \\ \frac{1}{2}\varepsilon\cdot\frac{1}{\varepsilon_2^2}\cdot\left(\frac{\rho_0 a^3}{5r^2}\right)^2, & a<r<b \\ 0, & b<r<c \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow w_{e,\varepsilon\sigma}(r) = \frac{1}{2}\varepsilon E_r^2(r) = \begin{cases} \frac{1}{2\varepsilon_0(1+\frac{r}{a})^2}\left(\frac{\rho_0 r^3}{5r^2}\right)^2, & 0<r<a \\ \frac{1}{2\varepsilon_2}\cdot\left(\frac{\rho_0 a^3}{5r^2}\right)^2, & a<r<b \\ 0, & b<r<c \end{cases}$$

Και η συνολ. αποθηκ. ενέργ. είναι:

$$W_{e,\varepsilon\sigma} = \int_V w_{e,\varepsilon\sigma}(r)\,dV = \int_0^a \frac{1}{2\varepsilon_0(1+\frac{r}{a})}\cdot\left(\frac{\rho_0 r^3}{5a^2}\right)^2 4\pi r^2 dr +$$

$$+\int_a^b \frac{1}{2\varepsilon_2}\left(\frac{\rho_0 a^3}{5r^2}\right)^2 4\pi r^2 dr + \int_b^c 0\cdot 4\pi r^2 dr =$$

$$= \frac{1}{2\varepsilon_0(5a^2)^2}\int_0^a \frac{(\rho_0 r^3)^2 4\pi r^2}{1+\frac{r}{a}}dr + \frac{(\rho_0 a^3)^2 4\pi}{2\varepsilon_2}\int_a^b \frac{r^2}{(5r^2)^2}dr =$$

$$= \frac{1}{2\varepsilon_0}\cdot\frac{\pi a^5(840\ln(2a) - 840\ln(a) - 533)\rho^2}{5250} + \frac{1}{2\varepsilon_2}\cdot\frac{4\pi a^2(b-a)\rho^2}{25b} =$$

$$= \frac{1}{2\varepsilon_0}\cdot\frac{\pi a^5(840\ln a - 533)\rho_0^2}{5250} + \frac{1}{2\varepsilon_2}\frac{4\pi a^5(b-a)\rho_0^2}{25b}$$

Η χωρική πυκνότητα της αποθ. ηλ. ενεργ. για $r > c$ είναι:

$$w_{e,\varepsilon\xi}(r) = \frac{1}{2}\varepsilon_0 E_r^2(r) = \frac{1}{2}\varepsilon_0 \frac{1}{\varepsilon_0^2}\left(\frac{\rho_0 a^3}{5r^2}\right)^2 = \frac{1}{2\varepsilon_0}\left(\frac{\rho_0 a^3}{5r^2}\right)^2$$

Και η συνολ. αποθ. ενεργ. είναι:

$$W_{e,\varepsilon\xi} = \int_V w_{e,\varepsilon\xi}(r)\,dV = \int_c^{\infty} w_{e,\varepsilon\xi}(r)\,4\pi r^2\,dr = \frac{1}{2\varepsilon_0}\int_c^{\infty}\left(\frac{\rho_0 a^3}{5r^2}\right)^2 4\pi r^2\,dr =$$

$$= \frac{1}{2\varepsilon_0}\int_c^{\infty}\frac{(\rho_0 a^3)^2\,4\pi}{25r^2}\,dr \xrightarrow{\int \frac{1}{r^2} = -\frac{1}{r}} \frac{1}{2\varepsilon_0}\left[-\frac{4\pi a^6\rho_0^2}{25r}\right]_c^{\infty} = \frac{1}{2\varepsilon_0}\,\frac{4\pi a^6\rho_0^2}{25c}$$

Άρα, αποθηκευμ. ηλ. ενεργ. σε όλο το χώρο είναι:

$$W_e = W_{e,\varepsilon\sigma} + W_{e,\varepsilon\xi} =$$

$$= \frac{1}{2\varepsilon_0}\,\frac{\pi a^5(840\ln a - 533)\rho_0^2}{5250} + \frac{1}{2\varepsilon_2}\,\frac{4\pi a^5(b-a)\rho_0^2}{25b} + \frac{1}{2\varepsilon_0}\,\frac{4\pi a^6\rho_0^2}{25c}$$