Διακριτά Μαθηματικά

Χρήστος Τσούφης

3η Γραπτή Εργασία

03117176

Θέμα 1

100 επιβάτες, 12 σταθμοί

1. Στην πρώτη στάση αποβιβάζονται x_1 επιβάτες, στη δεύτερη x_2 κ.ο.κ.
Ισχύει $x_1 + x_2 + \dots + x_{12} = 100$
οπότε: $C(12+100-1, 100) = C(111,100) = \frac{111!}{100! \cdot 11!}$

2. Κάθε επιβάτης μπορεί να κατέβει σε μία από τις 12 στάσεις
Ισχύει: $n^k = 12^{100}$

3. Ο 1ος επιβάτης έχει 12 επιλογές. Ο 2ος έχει 11 επιλογές (όσες είναι οι στάσεις που δεν κατέβηκε ο 1ος) και αν κατέβει στην ίδια με τον 1ο έχει 2 επιλογές (εξαρτάται αν θα κατέβει πριν ή μετά) δηλαδή συνολικά 13 επιλογές. Όμοια ο 3ος έχει 14 κ.ο.κ. Ο 100ος έχει 111 επιλογές.
Οπότε: $12 \cdot 13 \cdot \ldots \cdot 111 = \frac{111!}{11!} = \frac{(n+k-1)!}{(n-1)!}$

4. 45 άνδρες, 55 γυναίκες
Για τους άνδρες: $x_1 + x_2 + \dots + x_{12} = 45$, οπότε $C(12+45-1, 45) = C(56,45) = \frac{56!}{45! \cdot 11!}$
Και για κάθε τέτοιο τρόπο αποβίβασης για τους άνδρες υπάρχουν αντίστοιχα $C(12+55-1, 55) = C(66,55) = \frac{66!}{55! \cdot 11!}$ τρόποι αποβίβασης για τις γυναίκες. Συνεπώς συνολικά: $\frac{56!}{46! \cdot 11!} \cdot \frac{66!}{55! \cdot 11!}$

5. Όπως στο (4.) για τους άνδρες $\frac{56!}{45! \cdot 11!}$ και για τις γυναίκες ισχύει $57 \cdot 58 \cdot \ldots \cdot 111 = \frac{111!}{56!}$
και διαιρώ έπειτα με το 55! γιατί δεν είναι διακεκριμένες οπότε $\frac{111!}{55! \cdot 56!}$ για τις γυναίκες.
Συνολικά: $\frac{\cancel{56!}}{45! \cdot 11!} \cdot \frac{111!}{55! \cdot \cancel{56!}} = \frac{111!}{45! \cdot 11! \cdot 55!}$

6. Για το (2) : $x_1 + x_2 + \ldots + x_{12} = 100$

$x_i \geq 1$, για $i = 1, 2, \ldots, 12$

τότε $C(12 + (100-12) - 1, (100-12)) = C(99, 88) = \dfrac{99!}{88! \cdot 11!}$

Για το (3) : Επειδή είναι διακεκριμένος : $100! \cdot C(99, 88) = \dfrac{100! \cdot 99!}{11! \cdot 88!}$

Θέμα 2

α) 40 παιδιά, 4 τραπέζια των 10 θέσεων το καθένα.

Τα 40 μη διακεκριμένα παιδιά χωρίζονται σε ομάδες των 10 : $\dfrac{40!}{(10!)^4}$ τρόποι.

Τα τραπέζια μη διακεκριμένα : $\dfrac{40!}{(10!)^4} \cdot \dfrac{1}{4!}$

Τα παιδιά κάθονται με σειρά στο κάθε τραπέζι με 9! τρόπους.

Σύνολο : $\dfrac{40!}{(10!)^4} \cdot \dfrac{1}{4!} \cdot 9!$

β) Με την επιλογή ενός βιβλίου δεσμεύεται και το διπλανό του αφού δεν μπορεί να επιλεχθεί (εκτός του τελευταίου): πλήθος $2k-1$.

· Απομένουν : $n-(2k-1)$.

· Τα k βιβλία ορίζουν $k+1$ περιοχές στο ράφι. (αριστερά του πρώτου από τα k, ανάμεσα και δεξιά του τελευταίου).

· Σε αυτές τις θέσεις διανέμονται τα $n-(2k-1)$ που απομένουν.

· Λύνω το ισοδύναμο πρόβλημα της τοποθέτησης $n-(2k-1)$ βιβλίων στις $k+1$ περιοχές.

Αρκεί να μετρηθεί το πλήθος των βιβλίων κάθε περιοχή

· Διανομή $n-(2k-1)$ ίδιων αντικ. σε $k+1$ θέσεις:

$C(k+1+n-(2k-1)-1, n-(2k-1)) = C(n-k+1, n-2k+1) = C(n-k+1, k)$.

γ) i) Οι προτ. μεταβλ. είναι n και καθεμία μπορεί να είναι ψευδής ή αληθής οπότε προκύπτουν 2^n διαφορ. αποτιμήσεις.

Κάθε αποτίμηση μπορεί να δώσει στον προτασιακό τύπο ψευδή ή αληθή τιμή.

Άρα, 2^{2^n} πλήθος τύπων.

ii) Ο ψ είναι αληθής όταν (A,A,A,A,A), (Ψ,Ψ,A,A,A), (Ψ,A,A,A,A) όπου το αριστερό μέρος της συνεπαγωγής είναι αληθές.

Άρα, $3\cdot 2^{n-5}$ αποτιμήσεις

Επομένως, $2^n-3\cdot 2^{n-5}$ αποτιμήσεις στις όπου το ψ είναι "ελεύθερο".

Οι συνδυασμοί είναι $2^{2^n-3\cdot 2^{n-5}}$.

Θέμα 3

α) 1. $\frac{x^{50}}{50!}+\frac{x^{51}}{51!}+\dots+\frac{x^{200}}{200!}$

$$A(x)=\left(\frac{x^{50}}{50!}+\frac{x^{51}}{51!}+\dots+\frac{x^{200}}{200!}\right)^4$$

Ο ζητούμενος συντελεστής είναι του $x^{500}/500!$

2. Είναι πρόβλημα διατάξεων (διακεκρ. αντικ. σε διακεκρ. υποδ.) οπότε χρησιμοποιείται η εκθετική γεν. συνάρτ.

Έχει σημασία η σειρά οπότε οι απαριθμητές έχουν μορφή: $\frac{k!\cdot x^k}{k!}$

Οπότε: $$\left(50!\cdot\frac{x^{50}}{50!}+\dots+200!\cdot\frac{x^{200}}{200!}\right)^4=\left(x^{50}+\dots+x^{200}\right)^4$$

Ο ζητούμενος συντελεστής είναι του $x^{500}/500!$

β) Εκθετ. απαριθμητής για κάθε ψηφίο:

0: $\frac{x^1}{1!}+\frac{x^2}{2!}+\dots=e^x-1$

1: $1+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}+\dots=\frac{e^x-e^{-x}}{2}$

2: $\frac{x^1}{1!}+\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}+\dots=\frac{e^x-e^{-x}}{2}$

3: $1+\frac{x^1}{1!}+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^3}{3!}+\dots=e^x$

ΓΣ: $(e^x-1)\cdot\left(\frac{e^x-e^{-x}}{2}\right)\cdot\left(\frac{e^x-e^{-x}}{2}\right)\cdot e^x=$

$=\frac{1}{4}\left(e^{4x}-e^{3x}-e^{-x}-1\right)$

Ο ζητούμενος συντελεστής του $\frac{x^n}{n!}$ είναι $\frac{4^n-3^n+(-1)^n}{4}$

Θέμα 4

α) 1. Οι φοιτητές είναι διακεκριμένοι και έχουμε δύο ομάδες απαντήσεων.

Το πλήθος είναι $\binom{1000}{300,700} = \dfrac{1000!}{300!\cdot 700!}$

2. Αρχή εγκλεισμού - αποκλεισμού.

Από το πλήθος των τρόπων να μοιραστούν 300 αντικ. σε 5 υποδοχές αφαιρούμε το πλήθος των τρόπων στους οποίους μια υποδοχή έχει πάνω από 200 αντικ.

$$\binom{300+5-1}{5-1} - 5\cdot\binom{99+5-1}{5-1} = \binom{304}{4} - 5\cdot\binom{103}{4}$$

Με Γ.Σ.: $x_1+x_2+x_3+x_4+x_5 = 300$, $0 \le x_i \le 200$, $i=1,\dots,5$

$(1+x+x^2+\dots+x^{200})^5$

Ο ζητούμενος συντελεστής είναι του x^{300}.

β) 1. Τρόποι μοιράσματος κόκκινων μπαλονιών:

Οι φοιτητές δεν είναι διακεκριμένοι.

Σε κάθε έτος αντιστοιχεί ο απαριθμητής: $x^2+x^4+\dots+x^{198}$

οπότε Γ.Σ.: $(x^2+x^4+\dots+x^{198})^5$

Ο ζητούμενος συντελεστής είναι του x^{300}

2. Αν σε κάθε έτος δοθούν k κόκκινα μπαλόνια και $200-k$ πράσινα, οι τρόποι αυτά να ξαναδιαταχθούν είναι:

Το πλήθος διατάξεων k κόκκινων και $200-k$ πράσινων: $\binom{200}{k}$

Γ.Σ.: $B(x) = \left(\binom{200}{2}x^2+\binom{200}{4}x^4+\dots+\binom{200}{198}x^{198}\right)^5$

Ο ζητούμενος συντελεστής είναι του x^{300}.

γ) Μοίρασμα 1000 μπαλονιών (400 πράσ., 600 κοκκ.) σε 5 διαφ. υποδοχές. (κάθε υποδοχή να έχει 200 μπαλόνια και να δέχεται άρτιο αριθμό από μπαλόνια):

Οι διαφ. τρόποι μοιράσματος κόκκινων και πράσινων είναι

Γ.Σ.: $x_1+x_2+x_3+x_4+x_5 = 400$, $0 \le x_i \le 200$, $i=1,\dots,5$

$(1+x+x^2+\dots+x^{200})^5$

Ο ζητούμενος συντελεστής είναι του x^{400} ή του x^{600} (ισοδύν.)

• x^{400}: $x^{400} = x^{z_1}\cdot x^{z_2}\cdot x^{z_3}\cdot x^{z_4}\cdot x^{z_5}$, $z_1+\dots+z_5=400$ $\Big\}$ • $x^{600} = x^{200-z_1}\cdot x^{200-z_2}\cdot x^{200-z_3}\cdot x^{200-z_4}\cdot x^{200-z_5}$, $z_1+\dots+z_5=400$

Θέμα 5

▷ Έστω a_n ο αριθμός των ακολουθιών που σχηματίζονται από 6 γράμματα στις οποίες δεν εμφανίζεται το a μετά από τα b, c ή d:

▷ Αν στην 1η θέση μπει κάποιο από b, c, d, στις n-1 θέσεις δεν μπορεί να μπει το a
άρα $3 \cdot 5^{n-1}$ ακολουθίες.

▷ Αν στην 1η θέση μπει κάποιο από τα υπόλοιπα (a, e, f) τότε προκύπτουν:
$3a_{n-1}$ ακολουθίες.

▷ Συνεπώς, $a_n = 3 \cdot 5^{n-1} + 3a_{n-1}$, $\forall n \geq 1$, $a_0 = 1$

Γ.Σ.: $A(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$

Για $n \geq 1$: $\sum_{n=1}^{\infty} a_n x^n = \dfrac{3x}{1-5x} + 3x \cdot A(x) \Leftrightarrow A(x) - a_0 = \dfrac{3x}{1-5x} + 3x \cdot A(x) \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow A(x) = \frac{1-2x}{(1-5x)(1-3x)} = \frac{3}{2} \cdot \frac{1}{1-5x} - \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{1-3x}$$

Άρα, οι διαφορετικές ακολουθίες είναι: $a_n = \frac{3}{2} \cdot 5^n - \frac{1}{2} \cdot 3^n$