ΣΤΟΧΑΣΤΙΚΑ ΣΥΣΤΗΜΑΤΑ & ΕΠΙΚΟΙΝΩΝΙΕΣ

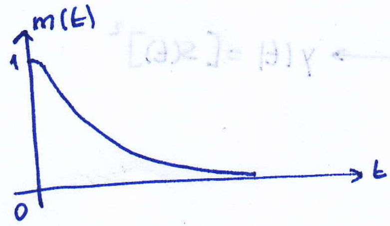
ΧΡΗΣΤΟΣ ΤΣΟΥΦΗΣ
03117176

4ο ΕΞΑΜΗΝΟ, ΣΗΜΜΥ

Σειρά Ασκήσεων

Άσκηση 1

$$m(t) = \frac{1}{1+t^2}$$



a) Για 45% διαμόρφωση, πρέπει: $|K_a \cdot m(t)|_{max} \cdot 100 = 45 \Leftrightarrow K_a \cdot m_{max}(t) = 0{,}45 \Leftrightarrow$

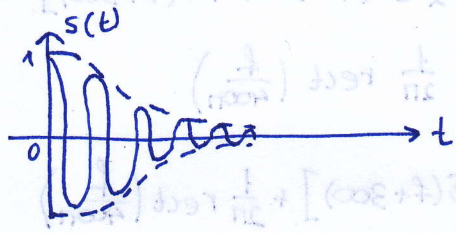
$\Leftrightarrow K_a \cdot 1 = 0{,}45 \Leftrightarrow K_a = 0{,}45 \frac{1}{V}$ (ευαισθ. πλάτους)

Για φέρον σήμα $c(t) = A_c \cdot \cos(2\pi f_c t)$, το διαμορφωμένο σήμα θα είναι:

$$s(t) = c(t) \cdot [1 + K_a m(t)] = A_c [1 + K_a \cdot m(t)] \cdot \cos(2\pi f_c t) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow s(t) = A_c \cdot \left(1 + \frac{0{,}45}{1+t^2}\right) \cdot \cos(2\pi f_c t)$$

Και η διαμορφωμένη κυματομορφή θα έχει την παρακάτω μορφή:



β) Για SSB διαμόρφωση με μεταδιδόμενη μόνο την άνω πλευρική ζώνη, προκύπτει ότι:

$$s(t) = \frac{A_c}{2} m(t) \cos(2\pi f_c t) - \frac{A_c}{2} \hat{m}(t) \sin(2\pi f_c t)$$

Επίσης, $\hat{m}(t) \triangleq \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{m(\tau)}{t-\tau} d\tau \Rightarrow \hat{m}(t) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\frac{1}{1+\tau^2}}{t-\tau} d\tau \Rightarrow$

$$\Rightarrow \hat{m}(t) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{(1+\tau^2)(t-\tau)} d\tau = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \left(\frac{\frac{1}{1+t^2}\tau + \frac{t}{1+t^2}}{1+\tau^2} + \frac{\frac{1}{1+t^2}}{t-\tau} \right) d\tau \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \hat{m}(t) = \frac{1}{\pi} \cdot \frac{1}{1+t^2} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\tau}{1+\tau^2} d\tau + \frac{1}{\pi} \cdot \frac{t}{1+t^2} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{1+\tau^2} d\tau + \frac{1}{\pi} \cdot \frac{1}{1+t^2} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{t-\tau} d\tau \Rightarrow$$

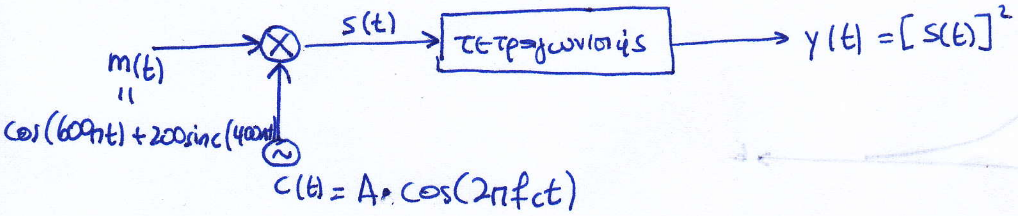
$$\Rightarrow \hat{m}(t) = \frac{1}{2\pi} \cdot \frac{1}{1+t^2} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{(1+\tau^2)'}{1+\tau^2} d\tau + \frac{1}{\pi} \cdot \frac{t}{1+t^2} \left[\overset{\frac{\pi}{2}}{\arctan(+\infty)} - \overset{-\frac{\pi}{2}}{\arctan(-\infty)} \right] +$$

$$+ \frac{1}{\pi} \cdot \frac{-1}{1+t^2} \left[\ln|t-\tau| \right]_{-\infty}^{+\infty} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \hat{m}(t) = \frac{1}{2\pi}\cdot \cancel{\frac{1}{1+t^2}\left[\ln(1+\tau^2)\right]_{-\infty}^{+\infty}} + \frac{1}{\pi}\cdot\frac{t}{1+t^2}\cdot\pi + 0 \Rightarrow \hat{m}(t) = \frac{t}{1+t^2}.$$

Οπότε, $s(t) = \frac{1}{2}A_c\left[\frac{1}{1+t^2}\cdot\cos(2\pi f_c t) - \frac{t}{1+t^2}\sin(2\pi f_c t)\right]$

Άσκηση 2



α) Από τη διαμόρφωση διπλής πλευρικής ζώνης με κατεσταλμένο το φέρον (DSB-SC) ισχύει:

$s(t) = m(t)\cdot c(t) \Rightarrow s(t) = A\cos(2\pi f_c t)\cdot\left[\cos(600\pi t) + 200\,\mathrm{sinc}(400\pi t)\right]$

Και επίσης, $y(t) = [s(t)]^2 \Rightarrow y(t) = A^2\cos^2(2\pi f_c t)\cdot\left[\cos(600\pi t) + 200\,\mathrm{sinc}(400\pi t)\right]^2$

β) Για $M(f)$:

$$\cos(2\pi f_c t) \overset{\mathcal{F}}{\rightleftharpoons} \frac{1}{2}\left[\delta(f-f_c) + \delta(f+f_c)\right]$$

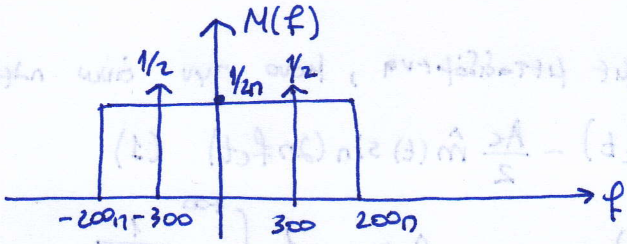
$$\mathrm{sinc}(2wt) \overset{\mathcal{F}}{\rightleftharpoons} \frac{1}{2w}\mathrm{rect}\left(\frac{f}{2w}\right)$$

οπότε:

$$\cos(600\pi t) \overset{\mathcal{F}}{\rightleftharpoons} \frac{1}{2}\left[\delta(f-300) + \delta(f+300)\right]$$

$$200\,\mathrm{sinc}(400\pi t) \overset{\mathcal{F}}{\rightleftharpoons} \frac{1}{2\pi}\mathrm{rect}\left(\frac{f}{400\pi}\right)$$

Επομένως, $M(f) = \frac{1}{2}\left[\delta(f-300) + \delta(f+300)\right] + \frac{1}{2\pi}\mathrm{rect}\left(\frac{f}{400\pi}\right)$



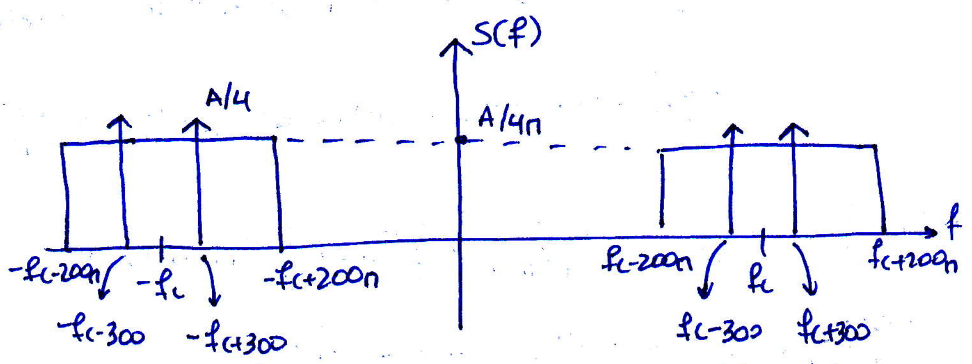
Για $S(f)$:

$$s(t) = A\cos(2\pi f_c t)\cdot m(t) \overset{\mathcal{F}}{\Rightarrow} S(f) = \frac{A}{2}\left[M(f-f_c) + M(f+f_c)\right] \Rightarrow$$

$$\Rightarrow S(f) = \frac{A}{2}\left\{\frac{1}{2}\left[\delta(f-f_c-300) + \delta(f-f_c+300)\right] + \frac{1}{2\pi}\mathrm{rect}\left(\frac{f-f_c}{400\pi}\right) + \frac{1}{2}\left[\delta(f+f_c-300) + \delta(f+f_c+300)\right] + \frac{1}{2\pi}\mathrm{rect}\left(\frac{f+f_c}{400\pi}\right)\right\}$$

$$\Rightarrow S(f) = \frac{A}{4}\left[\delta(f-f_c-300) + \delta(f-f_c+300) + \delta(f+f_c-300) + \delta(f+f_c+300)\right] + \frac{A}{4\pi}\left[\mathrm{rect}\left(\frac{f-f_c}{400\pi}\right) + \mathrm{rect}\left(\frac{f+f_c}{400\pi}\right)\right].$$

Ισχύει $f_c >> W$, όπου W το εύρος ζώνης του σήματος πληροφορίας.



Για $\underset{\sim}{Y(f)}$: $\quad Y(f) = S(f) * S(f) = \frac{A^2}{4}\left[M(f-f_c) + M(f+f_c)\right] * \left[M(f-f_c) + M(f+f_c)\right]$

Με χρήση: $X(f) * \delta(f-f_0) = X(f-f_0)$ και $A\,rect\left(\frac{f}{2W}\right) * A\,rect\left(\frac{f}{2W}\right) = A^2 \cdot 2W\, trig\left(\frac{f}{2W}\right)$.

- $M(f-f_c) * M(f-f_c) = \left\{\frac{1}{2}\left[\delta(f-f_c-300) + \delta(f-f_c+300)\right] + \frac{1}{2\pi} rect\left(\frac{f-f_c}{400\pi}\right)\right\} *$

$$\left\{\frac{1}{2}\left[\delta(f-f_c-300) + \delta(f-f_c+300)\right] + \frac{1}{2\pi} rect\left(\frac{f-f_c}{400\pi}\right)\right\} =$$

$$= \frac{1}{4}\delta(f-2f_c-600) + \frac{1}{4}\delta(f-2f_c) + \frac{1}{4\pi} rect\left(\frac{f-2f_c-300}{400\pi}\right) +$$

$$+ \frac{1}{4}\delta(f-2f_c) + \frac{1}{4}\delta(f-2f_c+600) + \frac{1}{4\pi} rect\left(\frac{f-2f_c+300}{400\pi}\right) +$$

$$+ \frac{1}{4\pi} rect\left(\frac{f-2f_c-300}{400\pi}\right) + \frac{1}{4\pi} rect\left(\frac{f-2f_c+300}{400\pi}\right) + \frac{1}{4\pi^2} 400\pi\, trig\left(\frac{f-2f_c}{400\pi}\right) =$$

$$= \frac{1}{4}\left[\delta(f-2f_c-600) + \delta(f-2f_c+600) + 2\delta(f-2f_c) + \frac{2}{\pi} rect\left(\frac{f-2f_c-300}{400\pi}\right)\right.$$

$$\left. + \frac{2}{\pi} rect\left(\frac{f-2f_c+300}{400\pi}\right) + \frac{100}{\pi} trig\left(\frac{f-2f_c}{400\pi}\right)\right]$$

- $M(f+f_c) * M(f+f_c) = \left\{\frac{1}{2}\left[\delta(f+f_c-300) + \delta(f+f_c+300)\right] + \frac{1}{2\pi} rect\left(\frac{f+f_c}{400\pi}\right)\right\} *$

$$\left\{\frac{1}{2}\left[\delta(f+f_c-300) + \delta(f+f_c+300)\right] + \frac{1}{2\pi} rect\left(\frac{f+f_c}{400\pi}\right)\right\} =$$

$$= \frac{1}{4}\delta(f+2f_c-600) + \frac{1}{4}\delta(f+2f_c) + \frac{1}{4\pi} rect\left(\frac{f+2f_c-300}{400\pi}\right) +$$

$$+ \frac{1}{4}\delta(f+2f_c) + \frac{1}{4}\delta(f+2f_c+600) + \frac{1}{4\pi} rect\left(\frac{f+2f_c+300}{400\pi}\right) +$$

$$+ \frac{1}{4\pi} rect\left(\frac{f+2f_c-300}{400\pi}\right) + \frac{1}{4\pi} rect\left(\frac{f+2f_c+300}{400\pi}\right) + \frac{1}{4\pi^2} 400\pi\, trig\left(\frac{f+2f_c}{400\pi}\right) =$$

$$= \frac{1}{4}\left[\delta(f+2f_c-600) + \delta(f+2f_c+600) + 2\delta(f+2f_c) +\right.$$

$$\left. + \frac{2}{2\pi} rect\left(\frac{f+2f_c-300}{400\pi}\right) + \frac{2}{\pi} rect\left(\frac{f+2f_c+300}{400\pi}\right) + \frac{100}{\pi} trig\left(\frac{f+2f_c}{400\pi}\right)\right]$$

$$\bullet\ M(f-f_c) * M(f+f_c) = M(f+f_c) * M(f-f_c) = \left\{\frac{1}{2}\left[\delta(f-f_c-300)+\delta(f-f_c+300)\right] + \frac{1}{2\pi}\mathrm{rect}\left(\frac{f-f_c}{400\pi}\right)\right\} *$$

$$\left\{\frac{1}{2}\left[\delta(f+f_c-300)+\delta(f+f_c+300)\right] + \frac{1}{2\pi}\mathrm{rect}\left(\frac{f+f_c}{400\pi}\right)\right\} =$$

$$= \frac{1}{4}\delta(f-600) + \frac{1}{4}\delta(f) + \frac{1}{4\pi}\mathrm{rect}\left(\frac{f-300}{400\pi}\right) + \frac{1}{4}\delta(f) + \frac{1}{4}\delta(f+600) +$$

$$+ \frac{1}{4\pi}\mathrm{rect}\left(\frac{f+300}{400\pi}\right) + \frac{1}{4\pi}\mathrm{rect}\left(\frac{f-300}{400\pi}\right) + \frac{1}{4\pi}\mathrm{rect}\left(\frac{f+300}{400\pi}\right) + \frac{1}{4\pi^2}400\pi\,\mathrm{trig}\left(\frac{f}{400\pi}\right) =$$

$$= \frac{1}{4}\Big[\delta(f-600)+\delta(f+600)+2\delta(f) + \frac{2}{\pi}\mathrm{rect}\left(\frac{f-300}{400\pi}\right) +$$

$$+ \frac{2}{\pi}\mathrm{rect}\left(\frac{f+300}{400\pi}\right) + \frac{100}{\pi}\mathrm{trig}\left(\frac{f}{400\pi}\right)\Big].$$

Οπότε, $Y(f) = \frac{A^2}{4}\left[M(f-f_c) * M(f-f_c) + 2M(f-f_c) * M(f+f_c) + M(f+f_c) * M(f+f_c)\right] =$

$$= \frac{A^2}{16}\delta(f-2f_c-600) + \frac{A^2}{16}\delta(f-2f_c+600) + \frac{A^2}{8}\delta(f-2f_c) + \frac{A^2}{8\pi}\mathrm{rect}\left(\frac{f-2f_c-300}{400\pi}\right) +$$

$$+ \frac{A^2}{8\pi}\mathrm{rect}\left(\frac{f-2f_c+300}{400\pi}\right) + \frac{25A^2}{4\pi}\mathrm{trig}\left(\frac{f-2f_c}{400\pi}\right) + \frac{A^2}{8}\delta(f-600) + \frac{A^2}{8}\delta(f+600) +$$

$$+ \frac{A^2}{4}\delta(f) + \frac{A^2}{4\pi}\mathrm{rect}\left(\frac{f-300}{400\pi}\right) + \frac{A^2}{4\pi}\mathrm{rect}\left(\frac{f+300}{400\pi}\right) + \frac{25A^2}{2\pi}\mathrm{trig}\left(\frac{f}{400\pi}\right) +$$

$$+ \frac{A^2}{16}\delta(f+2f_c-600) + \frac{A^2}{16}\delta(f+2f_c+600) + \frac{A^2}{8}\delta(f+2f_c) + \frac{A^2}{8\pi}\mathrm{rect}\left(\frac{f+2f_c-300}{400\pi}\right) +$$

$$+ \frac{A^2}{8\pi}\mathrm{rect}\left(\frac{f+2f_c+300}{400\pi}\right) + \frac{25A^2}{4\pi}\mathrm{trig}\left(\frac{f+2f_c}{400\pi}\right) =$$

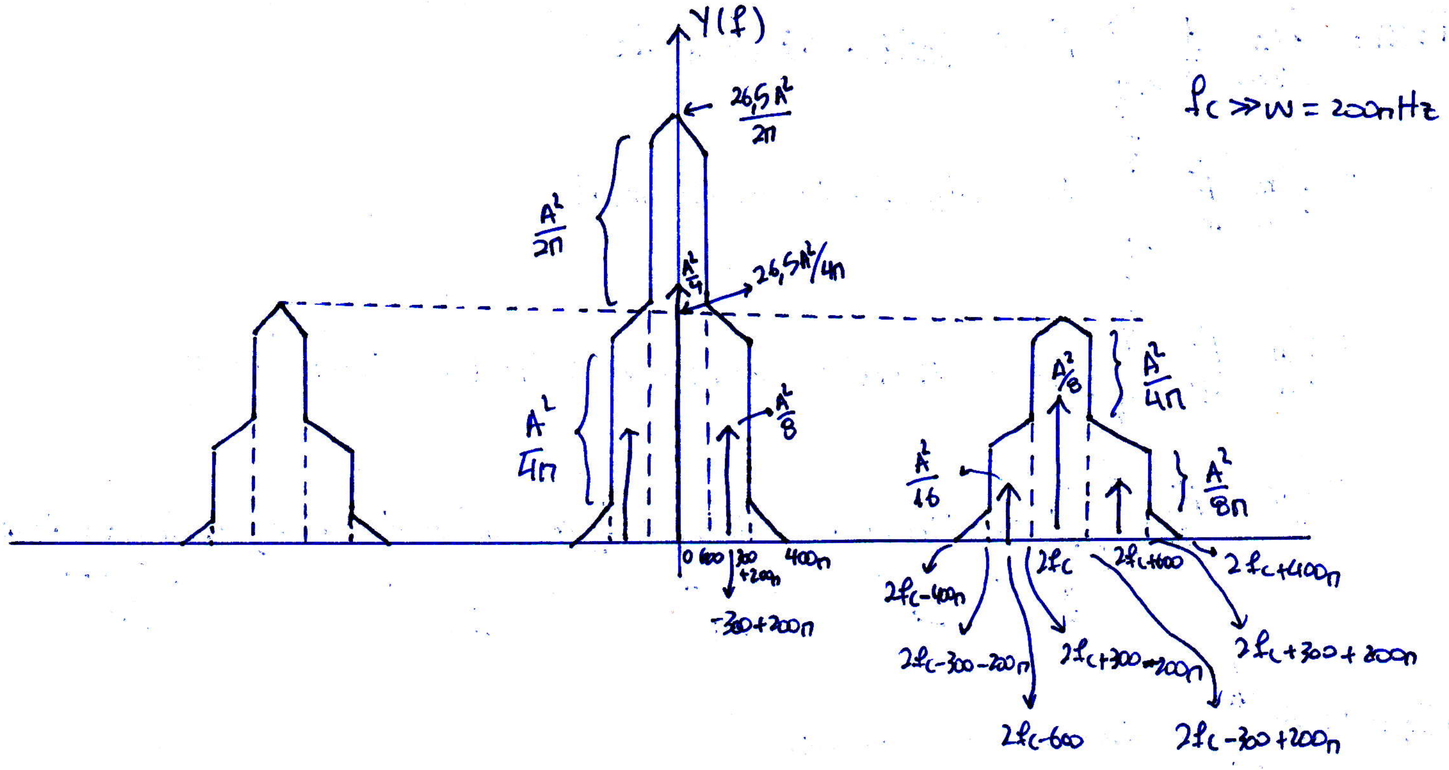
$$= \frac{A^2}{16}\left[\delta(f-2f_c-600)+\delta(f-2f_c+600)+\delta(f+2f_c-600)+\delta(f+2f_c+600)\right] +$$

$$+ \frac{A^2}{8}\left[\delta(f-2f_c)+\delta(f-600)+\delta(f+600)+\delta(f+2f_c)\right] + \frac{A^2}{4}\delta(f) +$$

$$+ \frac{A^2}{8\pi}\Big[\mathrm{rect}\left(\frac{f-2f_c-300}{400\pi}\right) + \mathrm{rect}\left(\frac{f-2f_c+300}{400\pi}\right) + 2\mathrm{rect}\left(\frac{f-300}{400\pi}\right) + 2\mathrm{rect}\left(\frac{f+300}{400\pi}\right) +$$

$$+ \mathrm{rect}\left(\frac{f+2f_c-300}{400\pi}\right) + \mathrm{rect}\left(\frac{f+2f_c+300}{400\pi}\right)\Big] +$$

$$+ \frac{25}{A^2}\left[\mathrm{trig}\left(\frac{f-2f_c}{400\pi}\right) + 2\,\mathrm{trig}\left(\frac{f}{400\pi}\right) + \mathrm{trig}\left(\frac{f+2f_c}{400\pi}\right)\right]$$



γ) • Για $m(t) = \cos(600\pi t) + 200\,\text{sinc}(400\pi t)$:

$$P_{m(t)} = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} |m(t)|^2 dt = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} |\cos(600\pi t) + 200\,\text{sinc}(400\pi t)|^2 dt =$$

$$= \lim_{T\to\infty} \frac{1}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} [\underbrace{\cos^2(600\pi t)}_{P_1} + \underbrace{40.000\cdot\text{sinc}^2(400\pi t)}_{P_2} + \underbrace{400\cos(600\pi t)\cdot\text{sinc}(400\pi t)}_{P_3}]dt$$

• $$P_1 = \frac{1}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} \cos^2(600\pi t)\,dt = 300\cdot\int_{-\frac{1}{600}}^{\frac{1}{600}} \frac{1}{2}\cdot(1+\cos(1200\pi t))dt = 150[t]_{-\frac{1}{600}}^{1/600} + 150\,[\cancelto{0}{\sin(1200\pi t)}]_{-\frac{1}{600}}^{1/600} =$$

$$= 150\left(\frac{1}{600}+\frac{1}{600}\right) \Rightarrow P_1 = 0{,}5 \text{ W}$$

• Το sinc είναι σήμα ενέργειας (όπως και sinc²) συνεπώς έχουν μηδενική ισχύ.
Άρα $P_2 = P_3 = 0$

Επομένως $P_{m(t)} = P_1+P_2+P_3 = 0{,}5+0+0 = 0{,}5$ W

• Για $s(t) = A\cos(2\pi f_c t)\,[\cos(600\pi t) + 200\,\text{sinc}(400\pi t)]$:

$$P_{s(t)} = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} |s(t)|^2 dt = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} |A\cos(2\pi f_c t)\,[\cos(600\pi t) + 200\,\text{sinc}(400\pi t)]|^2 dt =$$

$$= \lim_{T\to\infty} \frac{1}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} A^2\cos^2(2\pi f_c t)\cdot[\cos^2(600\pi t) + 400\cdot\cos(600\pi t)\sin(400\pi t) + 40.000\,\text{sinc}^2(400\pi t)]dt$$

$$\Rightarrow P_{s(t)} = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} A^2\cos^2(2\pi f_c t)\cdot \cos^2(600\pi t)\,dt =$$

$$= \lim_{T\to\infty} \frac{A^2}{4T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} (1+\cos(4\pi f_c t))\cdot(1+\cos(1200\pi t))dt =$$

$$= \lim_{T\to\infty} \frac{A^2}{4T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} \left[1+\cos(1200\pi t)+\cos(4\pi f_c t)+\cos(4\pi f_c t)\cdot\cos(1200\pi t)\right]dt =$$

$$= \lim_{T\to\infty} \frac{A^2}{4T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} \Big[\underbrace{1}_{\frac{A^2}{4}}+\underbrace{\cos(1200\pi t)}_{I_1}+\underbrace{\cos(4\pi f_c t)}_{I_4}+\frac{1}{2}\underbrace{\cos(4\pi f_c t-1200t)}_{I_3}+\frac{1}{2}\underbrace{\cos(4\pi f_c t+1200\pi t)}_{I_4}\Big]dt$$

- $I_1 = 150A^2\int_{-\frac{1}{1200}}^{\frac{1}{1200}} \cos(1200\pi t)\,dt = 0 \Rightarrow I_1 = 0$

- Όμοια, $I_2 = I_3 = I_4 = 0$

Επομένως, $P_{s(t)} = \frac{A^2}{4}$.

- Για $y(t) = A^2\cos^2(2\pi f_c t)\cdot[\cos(600\pi t)+200\operatorname{sinc}(400\pi t)]^2$:

$$P_{y(t)} = \lim_{T\to\infty}\frac{1}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} |y(t)|^2 dt = \lim_{T\to\infty}\frac{1}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} \left|A^2\cos^2(2\pi f_c t)\cdot[\cos(600\pi t)+200\operatorname{sinc}(400\pi t)]^2\right|^2 dt =$$

$$= \lim_{T\to\infty}\frac{1}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} A^4\cdot\cos^4(2\pi f_c t)\cdot\left[\cos^2(600\pi t)+400\cos(600\pi t)\operatorname{sinc}(400\pi t)+40000\operatorname{sinc}^2(400\pi t)\right]^2 dt$$

$$= \lim_{T\to\infty}\frac{1}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} A^4\cos^4(2\pi f_c t)\cdot\Big[\cos^4(600\pi t)+400\cos^3(600\pi t)\cdot\operatorname{sinc}(400\pi t)+40000\cos^2(600\pi t)\cdot\operatorname{sinc}^2(400\pi t)+$$

$$+400\cos^3(600\pi t)\operatorname{sinc}(400\pi t)+160000\cos^2(600\pi t)\operatorname{sinc}^2(400\pi t)+$$

$$+16000000\cos(600\pi t)\operatorname{sinc}^3(400\pi t)+40000\cos^2(600\pi t)\operatorname{sinc}^2(400\pi t)+$$

$$+16000000\cos(600\pi t)\operatorname{sinc}^3(400\pi t)+1600000000\operatorname{sinc}^4(400\pi t)\Big]dt$$

Όπως προηγουμένως, προκύπτει:

$$P_{y(t)} = \lim_{T\to\infty}\frac{1}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} A^4\cos^4(2\pi f_c t)\cdot\cos^4(600\pi t)\,dt =$$

$$= \lim_{T\to\infty}\frac{A^4}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} \left(\frac{1+\cos(4\pi f_c t)}{2}\right)^2\cdot\left(\frac{1+\cos(1200\pi t)}{2}\right)^2 dt =$$

$$= \lim_{T\to\infty}\frac{A^4}{16T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} \left(1+\cos^2(4\pi f_c t)+2\cos(4\pi f_c t)\right)\left(1+2\cos(1200\pi t)+\cos^2(1200\pi t)\right)dt$$

$$\Rightarrow P_{y(t)} = \lim_{T\to\infty} \frac{A^4}{16T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} \left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\cos(8\pi f_c t) + 2\cos(4\pi f_c t)\right)\cdot\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\cos^2(1200\pi t)+2\cos(1200\pi t)\right)dt$$

$$\Rightarrow P_{y(t)} = \frac{9A^4}{64}$$

δ) Για τον υπολογισμό της ζητούμενης ελάχιστης τιμής f_c^{min} της συχνότητας του φέροντος f_c, ώστε να επιτρέπεται η ανακατασκευή τυχαίου σήματος πληροφορίας $m(t)$ εύρους ζώνης W από την έξοδο $y(t)$ της μελετώμενης διάταξης, αρχικά θα μελετηθεί το σχήμα του φάσματος του $y(t)$, δηλ. το $Y(f)$ που σχεδιάσθηκε.
Για να επιτρέπεται η ανακατασκευή του $m(t)$ πρέπει στο $Y(f)$ να μην υπάρχουν επικαλύψεις μεταξύ των λοβών που σχηματίζονται. Άρα, για διακριτή απομόνωση του κεντρικού λοβού μέσω φίλτρου (αποφυγή aliasing) θα έπρεπε να είναι:
$400\pi \le 2f_c - 400\pi$, όπου 400π αντιστοιχεί σε $2W$ ($W=200Hz$).
Άρα, για τη γενική περίπτωση τυχαίου $m(t)$ με εύρος ζώνης W η σχέση γίνεται:
$$2W \le 2f_c - 2W \Leftrightarrow 2f_c \ge 4W \Leftrightarrow f_c \ge 2W \Leftrightarrow f_c^{min} = 2W$$

ε) $y(t) = A^2\cos^2(2\pi f_c t)\cdot[\cos(600\pi t) + 200\,\mathrm{sinc}(400\pi t)]^2 \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow y(t) = \frac{A^2}{2}\left[1+\cos(4\pi f_c t)\right]\cdot m^2(t) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow y(t) = \frac{A^2}{2}m^2(t) + \frac{A^2}{2}m^2(t)\cdot\cos(4\pi f_c t)$$

Παρατηρεί κανείς ότι ένα LPF μπορεί να απομονώσει τα κομμάτια του φάσματος που έχουν κέντρο στο $\pm 2f_c$ (δηλ. οι δύο όροι $\frac{A^2}{2}\cos(4\pi f_c t)\cdot m^2(t)$) και ύστερα απαιτείται ένας αποτετραγωνιστής, ώστε από τον όρο $\frac{A^2}{2}m^2(t)$ που μένει να δώσει τελικά έξοδο $\frac{A\sqrt{2}}{2}m(t)$:

$A_{LPF}=1$, $f_{LPF}=2W$

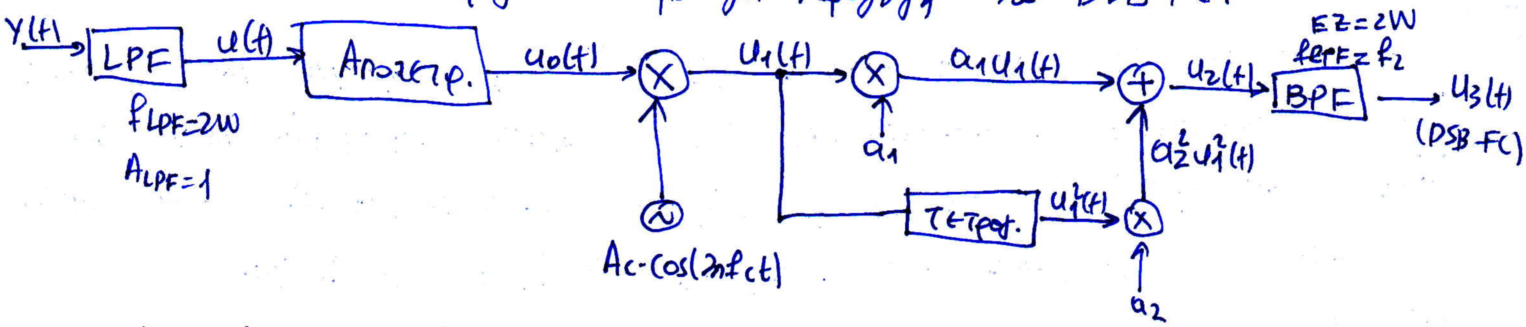
$$y(t) \longrightarrow \boxed{LPF} \xrightarrow{u(t)} \boxed{\text{Αποτετρ.}} \longrightarrow u_o(t)$$

όπου $u(t) = \frac{A^2}{2}m^2(t)$

$u_o(t) = \frac{A\sqrt{2}}{2}m(t) \sim m(t)$

στ) Εφόσον δεν υπάρχει περιορισμός σο είδος και πλήθος των διατάξεων, θα ισχύει:

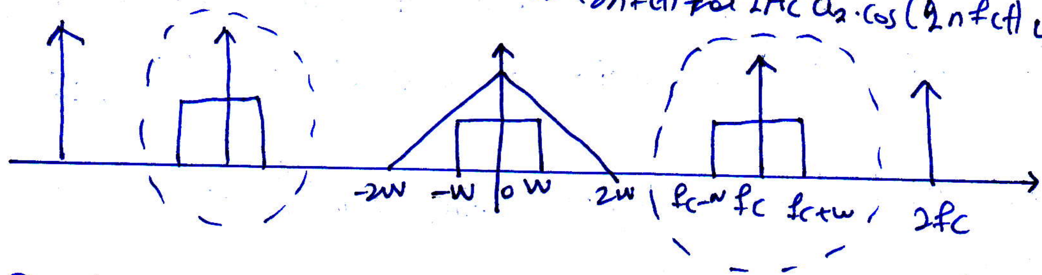
• Για παραγωγή διαμορφωμένου DSB-FC ($s_1(t)$) γίνεται χρήση της διάταξης του προηγούμενου ερωτ. για την ανάκτηση σήματος ανάλογου του $m(t)$ και συνδέεται σε σειρά με ένα διαμορφωτή τετραγωνικού νόμου για παραγωγή του DSB-FC:



όπου $u_1(t) = A_c\cdot\cos(2\pi f_c t) + u_0(t)$, $u_0(t) = \frac{A\sqrt{2}}{2} m(t) \sim m(t)$

$$u_2(t) = a_1u_1(t) + a_2u_1^2(t) = a_1A_c\cos(2\pi f_c t) + a_1u_0(t) + \underbrace{a_2A_c^2\cos^2(2\pi f_c t)}_{=\frac{a_2A_c^2}{2}(1+\cos(4\pi f_c t))} + a_2u_0^2(t) + 2a_2A_c\cos(2\pi f_c t)u_0(t).$$

Θέλουμε να αναδείξουμε τους όρους $a_1A_c\cos(2\pi f_c t)$ και $2A_c a_2\cdot\cos(2\pi f_c t)u_0(t)$ γύρω από f_c.



Για να είναι δυνατή η απομόνωση:

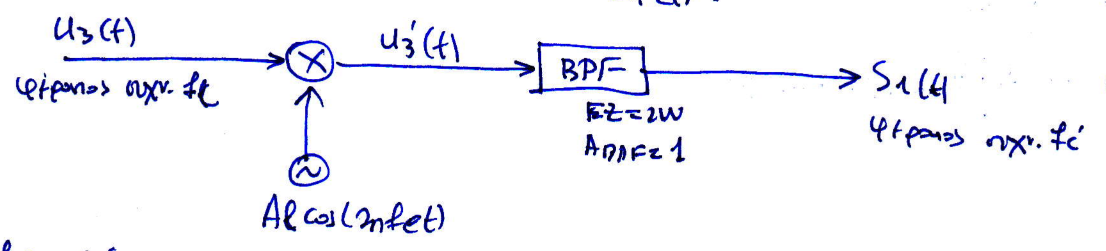
$$\left.\begin{array}{l} f_c + W \le 2f_c \\ f_c - W \ge 2W \end{array}\right\} \Rightarrow \left\{\begin{array}{l} f_c \ge W \\ f_c \ge 3W \end{array}\right\} \Rightarrow f_c \ge 3W$$

Τελικά προκύπτει ότι $2W \le f_c \le 3W$

Επίσης, $u_3(t) = a_1A_c\cdot\cos(2\pi f_c t)\cdot\left[1+\frac{2a_2}{a_1}u_0(t)\right] \Rightarrow$

$$u_3(t) = a_1A_c\cdot\cos(2\pi f_c t)\cdot\left[1+\underbrace{\frac{a_2}{a_1}A\sqrt{2}}_{\mu_a}m(t)\right] \quad (\text{DSB-FC})$$

• Για αλλαγή της συχνότητας φέροντος σε f_c' το DSB-FC περνάει από ένα μείκτη, για παραγωγή του τελικού σήματος $s_1(t)$:



όπου $f_\ell = f_c' - f_c$, για $f_c' > f_c$ ή $f_\ell = f_c - f_c'$, για $f_c' < f_c$

Το BPF διατηρεί από το γινόμενο $u_3(t)\cdot A_\ell \cos(2\pi f_\ell t)$ τον όρο συχνότητας f_c' που θέλουμε. Δηλαδή, από το $u_3'(t) = u_3(t)\cdot A_\ell\cos(2\pi f_\ell t) = a_1 A_c \cos(2\pi f_c t)\cdot\Big[1+\underbrace{\frac{a_2}{a_1}A\sqrt{2}\,m(t)}_{m'(t)}\Big]\cdot A_\ell\cos(2\pi f_\ell t)$.

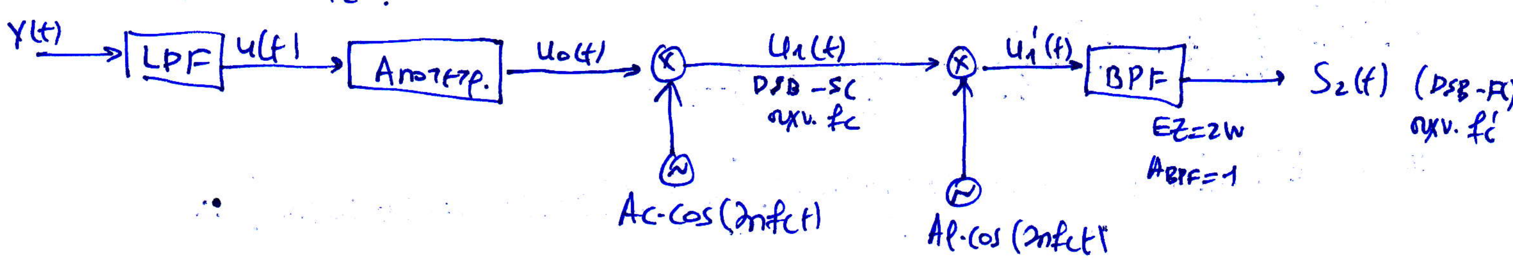
$$\Rightarrow u_3'(t) = a_1 A_c A_\ell \cdot m'(t)\cdot \cos(2\pi f_c t)\cos(2\pi f_\ell t) =$$
$$= \frac{1}{2} a_1 A_c A_\ell\, m'(t)\left[\cos(2\pi(f_c+f_\ell)t) + \cos(2\pi(f_c-f_\ell)t)\right] =$$
$$= \frac{1}{2} a_1 A_c A_\ell\left[1+\frac{a_2}{a_1}A\sqrt{2}\,m(t)\right]\cdot\left[\cos(2\pi(f_c+f_\ell)t) + \cos(2\pi(f_c-f_\ell)t)\right]$$

Άρα: $f_c' > f_c$: $f_c' = f_\ell - f_c$, και $f_{BPF} = f_c' = f_\ell - f_c$

$f_c' < f_c$: $f_c' = f_c - f_\ell$, και $f_{BPF} = f_c' = f_c - f_\ell$

διατηρώντας τον αντίστοιχο όρο από το $u_3'(t)$ με μετατοπισμένη συχνότητα φέροντος f

<u>Για παραγωγή διαμορφωμένου DSB-SC</u> $(S_2(t))$ από το $y(t)$, αρχικά χρησιμοποιείται η διάταξη του ερωτ. (ε), ώστε να προκύψει ανάλογο σήμα του $m(t)$, έπειτα πολ/σμός με $A_c\cdot\cos(2\pi f_c t)$ προς σχηματισμό ενός διαμορφωμένου DSB-SC και τελικώς περνάει από μείκτη για μετατόπιση της συχνότητας σε f_c':



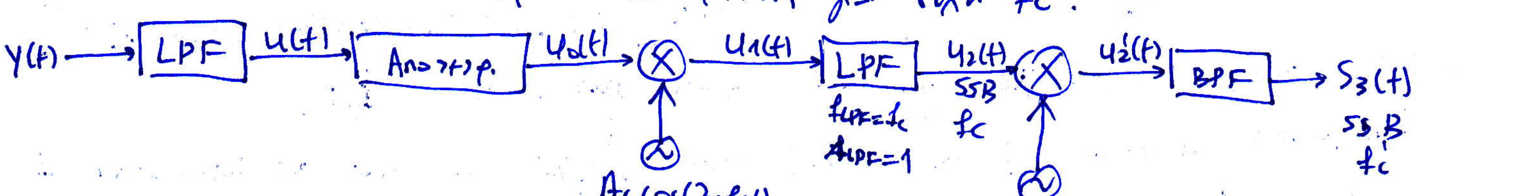
όπου, $u_1'(t) = \frac{1}{4}A\sqrt{2}A_c A_\ell\, m(t)\cdot\left[\cos(2\pi(f_c+f_\ell)t) + \cos(2\pi(f_c-f_\ell)t)\right]$

με το BPF να διατηρεί από το $u_1'(t)$ τον όρο συχν. f_c' που θέλουμε.

Άρα: $f_c' > f_c$: $f_c' = f_\ell - f_c$, και $f_{BPF} = f_c' = f_\ell - f_c$

$f_c' < f_c$: $f_c' = f_c - f_\ell$, και $f_{BPF} = f_c' = f_c - f_\ell$

<u>Για παραγωγή διαμορφωμένου SSB</u> $(S_3(t))$ από το $y(t)$ αρκεί να παραχθεί πάλι ένα DSB-SC όπως πριν και στην συνέχεια εφαρμογή αποκοπής της κάτω πλευρικής ζώνης μέσω BPF και τέλος περνάει από μείκτη για συχν. f_c':



με $f_\ell = f_c' - f_c$, $f_c' > f_c$ ή $f_\ell = f_c - f_c'$, $f_c' < f_c$

Όμοια με πριν, το BPF διατηρεί αντίστοιχα από το $u_2'(t)$ τον όρο συχν. f_c' που θέλουμε.

Άσκηση 6

$X(t) = X, \ \forall t$ και X παίρνει τυχαίες τιμές με ομοιόμορφη κατανομή μεταξύ $[-1,1]$

- $E[X(t)] = E[X] = \frac{1}{2}(-1+1) = 0 \Rightarrow E[X(t)] = 0$
- $\sigma^2_{X(t)} = \sigma_X^2 = \frac{1}{12}(1+1)^2 = \frac{1}{3} \Rightarrow \sigma^2_{X(t)} = \frac{1}{3}$
- $R_X(t_1,t_2) = E[X(t_1)\cdot X(t_2)] = E[X\cdot X] = E[X^2]$

$$\left.\begin{aligned} &R_X(t_1,t_2) = E[X^2] \\ &\sigma_X^2 = E[X^2] - (E[X])^2 \Leftrightarrow E[X^2] = \sigma_X^2 + (E[X])^2 = \frac{1}{3} + 0^2 = \frac{1}{3} \end{aligned}\right\} \Rightarrow R_X(t_1,t_2) = \frac{1}{3}$$

Άσκηση 5

ανεξ. τυχ. μετ. $X_1, X_2, X_3, \ldots$ με ομοιομ. κατανομή μεταξύ $(-1,1)$

α) $X = \dfrac{X_1+X_2+X_3+X_4+X_5+X_6}{6}$

$E[X_i] = \frac{1}{2}(-1+1) = 0, \quad i=1,\ldots,6$

$V[X_i] = \frac{1}{12}(1-(-1))^2 = \frac{1}{12}\cdot 4 = \frac{1}{3}, \quad i=1,\ldots,6$

Οπότε, $E[X] = E\left[\dfrac{X_1+X_2+X_3+X_4+X_5+X_6}{6}\right] = \frac{1}{6}E[X_1+X_2+X_3+X_4+X_5+X_6] =$

$= \frac{1}{6}\cdot 6\,E[X_i] = 0 \Rightarrow E[X] = 0$

και, $V(X) = V\left(\dfrac{X_1+X_2+X_3+X_4+X_5+X_6}{6}\right) = \frac{1}{36}V(X_1+X_2+X_3+X_4+X_5+X_6) =$

$= \frac{1}{36}\cdot 6\,V(X_i) = \frac{1}{6}\cdot\frac{1}{3} = \frac{1}{18} \Rightarrow V[X] = \frac{1}{18}$

β) $P[X<1] = P\left[\dfrac{X_1+X_2+X_3+X_4+X_5+X_6}{6} < 1\right] = P[X_1+X_2+X_3+X_4+X_5+X_6 < 6]$

Οι ανεξ. τυχ. μετ. X_i ακολουθούν ομοιομ. καταν. στο $(-1,1)$.

Επομένως, μέγιστη τιμή του αθροίσματος $\sum_{i=1}^{6} X_i$ θα είναι αν $X_1 = \ldots = X_6 = 1$, οπότε $\sum_{i=1}^{6} X_i = 6$. Άρα $X_{max} = \dfrac{\sum_{i=1}^{6} X_i}{6} = \dfrac{6}{6} = 1$.

Οπότε, $P\left[\sum_{i=1}^{6} X_i < 6\right] = 1 \Leftrightarrow P[X<1] = 1$

Άσκηση 8

$$h(t) = \begin{cases} \frac{1}{2} e^{-0,5t} &, 0 < t \leq T \\ 0 &, \text{αλλού} \end{cases}$$

Το σύστημα χαρακτηρίζεται γραμμικό και ευσταθές και $h(t) \in \mathbb{R}$. Επομένως, η πυκνότητα φάσματος ισχύος μεταξύ εισόδου και εξόδου είναι: $S_Y(f) = |H(f)|^2 \cdot S_X(f)$

Σε κλειστή μορφή, η $h(t)$ γράφεται: $h(t) = \frac{1}{2} e^{-\frac{1}{2}t}\left[u(t) - u(t-T)\right] \Rightarrow$

$$\Rightarrow h(t) = \frac{1}{2} e^{-\frac{1}{2}t} u(t) - \frac{1}{2} e^{-\frac{1}{2}t} u(t-T) \Rightarrow h(t) = \frac{1}{2} e^{-\frac{1}{2}t} \cdot u(t) - \frac{1}{2} e^{-\frac{1}{2}(t-T)} \cdot e^{-\frac{1}{2}T} \cdot u(t-T) \Rightarrow$$

$$\overset{\mathcal{F}}{\Rightarrow} H(f) = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{\frac{1}{2} + j2\pi f} - \frac{e^{-\frac{1}{2}T}}{2} \cdot e^{-j2\pi f T} \cdot \frac{1}{\frac{1}{2} + j2\pi f} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{\frac{1}{2} + j2\pi f} \left(1 - e^{-\frac{1}{2}T} e^{-j2\pi f T}\right) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow H(f) = \frac{1 - e^{-\frac{1}{2}T} e^{-j2\pi f T}}{1 + j4\pi f} = \frac{1 - e^{-\frac{1}{2}T}\left[\cos(2\pi f T) - j\sin(-2\pi f T)\right]}{1 + j4\pi f} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow H(f) = \frac{1 - e^{-\frac{1}{2}T} \cos(2\pi f T) + j e^{-\frac{1}{2}T} \sin(2\pi f T)}{1 + j4\pi f}$$

Άρα, $|H(f)|^2 = \dfrac{\left[1 - e^{-\frac{1}{2}T}\cos(2\pi f T)\right]^2 + \left[e^{-\frac{1}{2}T}\sin(2\pi f T)\right]^2}{1 + 16\pi^2 f^2} \Rightarrow$

$$\Rightarrow |H(f)|^2 = \frac{1 + e^{-T}\cos^2(2\pi f T) - 2e^{-\frac{1}{2}T}\cos(2\pi f T) + e^{-T}\sin^2(2\pi f T)}{1 + 16\pi^2 f^2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow |H(f)|^2 = \frac{1 + e^{-T} - 2e^{-\frac{1}{2}T}\cos(2\pi f T)}{1 + 16\pi^2 f^2}$$

Συνεπώς, $S_Y(f) = \dfrac{1 + e^{-T} - 2e^{-\frac{1}{2}T}\cos(2\pi f T)}{1 + 16\pi^2 f^2} \cdot S_X(f)$

Άσκηση 9

Θόρυβος Gauss : $n(t) = n_I(t)\cos(2\pi f_c t) - n_Q(t)\sin(2\pi f_c t)$

πυκν. φασμ. ισχύος: $S_N(f) = \begin{cases} \frac{N_0}{2} , & |f-f_c| \le B \\ 0 , & |f-f_c| > B \end{cases}$, $B < f_c$.

και $X(t) = \cos\theta \cdot n_I(t) + \sin\theta \cdot n_Q(t)$, $\theta =$ σταθ.

$R_X(t_1,t_2) = E[X(t_1)\cdot X(t_2)] = E\{[\cos\theta \cdot n_I(t_1) + \sin\theta \cdot n_Q(t_1)]\cdot[\cos\theta\, n_I(t_2) + \sin\theta \cdot n_Q(t_2)]\} =$

$= E[\cos^2\theta \cdot n_I(t_1)\cdot n_I(t_2) + \cos\theta\cdot\sin\theta\, n_I(t_1)\cdot n_Q(t_2) + \sin\theta\cdot\cos\theta\, n_I(t_2)\cdot n_Q(t_1) + \sin^2\theta\, n_Q(t_1)\cdot n_Q(t_2)] \overset{\theta=\text{σταθ.}}{=}$

$\cos^2\theta\, E[n_I(t_1)\cdot n_I(t_2)] + \cos\theta\sin\theta\big[\cancel{E[n_I(t_1)\cdot n_Q(t_2)]}^{0} + \cancel{E[n_I(t_2)\, n_Q(t_1)]}^{0}\big] + \sin^2\theta\, E[n_Q(t_1)\, n_Q(t_2)]$

$= \cos^2\theta\, E[n_I(t_1)\, n_I(t_2)] + \sin^2\theta\, E[n_Q(t_1)\, n_Q(t_2)]$

· Ισχύει $E[n_Q(t)] = E[n_I(t)] = 0$

· Αυτό μη, επειδή $n(t)$ είναι θόρυβος Gauss και $S_N(f)$ συμμετρική ως προς f_c ισχύει ότι $n_I(t)$, $n_Q(t)$ είναι ασυσχ. μεταξύ τους.

· $E[X(t)] = \cos\theta \cdot E[\cancel{n_I(t)}^{0}] + \sin\theta \cdot E[\cancel{n_Q(t)}^{0}] = 0$

Άρα, $R_X(\tau) = \cos^2\theta\, R_{N_I}(\tau) + \sin^2\theta \cdot R_{N_Q}(\tau)$

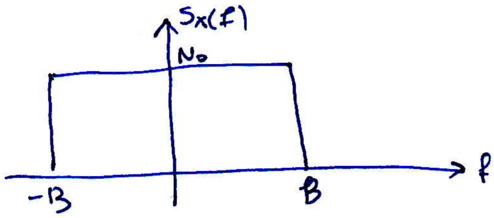
· Επίσης, ισχύει: $S_{N_I}(f) = S_{N_Q}(f) \Rightarrow R_{N_I}(\tau) = R_{N_Q}(\tau)$

Οπότε, $R_X(\tau) = (\cancel{\cos^2\theta + \sin^2\theta}^{1})\, R_{N_Q}(\tau) \Rightarrow R_X(\tau) = R_{N_Q}(\tau) = R_{N_I}(\tau) \Rightarrow$

$\Rightarrow S_X(f) = S_{N_I}(f) = S_{N_Q}(f)$

· Επιπλέον, $S_{N_I}(f) = \begin{cases} S_N(f-f_c) + S_N(f+f_c) , & |f| \le B \\ 0 , & \text{αλλού} \end{cases}$

Άρα, $S_X(f) = S_{N_I}(f) = \begin{cases} S_N(f-f_c) + S_N(f+f_c) , & |f| \le B \\ 0 , & \text{αλλού} \end{cases} = \begin{cases} N_0 , & |f| \le B \\ 0 , & \text{αλλού} \end{cases}$



Άσκηση 3

α) $g_1(t) = t\cdot \exp(j5\pi|t|) = t\exp(j5\pi t)u(t) - (-t)\exp(-j5\pi t)u(-t)$

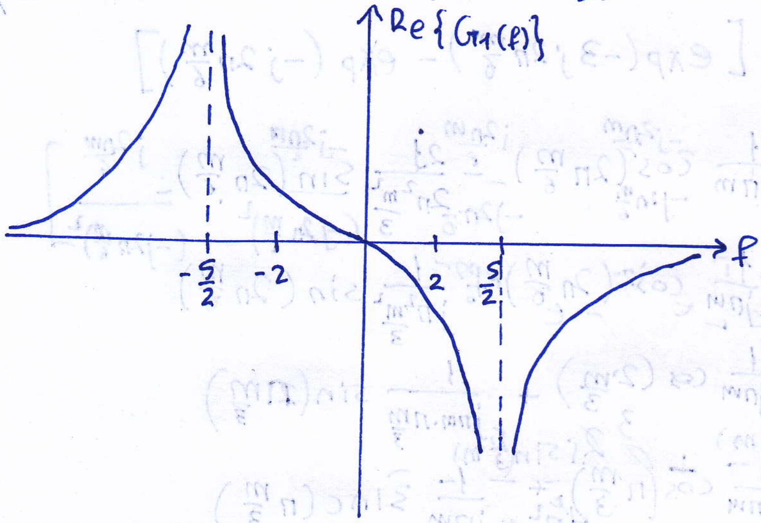
• $u(t) \rightleftharpoons \frac{1}{2}\delta(f) + \frac{1}{j2\pi f} \Rightarrow t\,u(t) \rightleftharpoons \frac{j}{2\pi}\cdot\frac{d}{df}\left(\frac{1}{2}\delta(f)+\frac{1}{j2\pi f}\right) = \frac{j}{2\pi}\left(\frac{1}{2}\delta'(f) - \frac{1}{j2\pi f^2}\right) =$

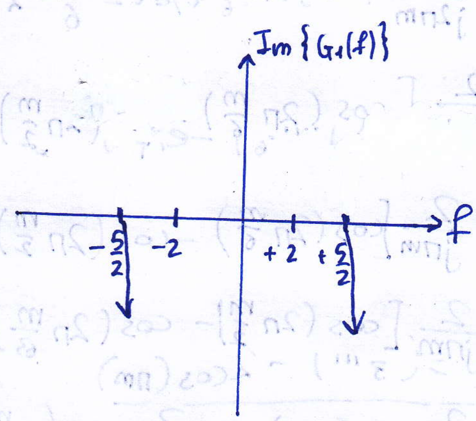
$$= -\frac{1}{(2\pi f)^2} + j\cdot\frac{1}{4\pi}\cdot\delta'(f) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow t\exp\left(j2\pi\cdot\frac{5}{2}t\right)u(t) \rightleftharpoons -\frac{1}{[2\pi(f-\frac{5}{2})]^2} + j\cdot\frac{1}{4\pi}\cdot\delta'\left(f-\frac{5}{2}\right)$$

$$\Rightarrow -t\cdot\exp\left(-j2\pi\cdot\frac{5}{2}\cdot t\right)u(-t) \rightleftharpoons -\frac{1}{[2\pi(f+\frac{5}{2})]^2} + j\cdot\frac{1}{4\pi}\cdot\delta'\left(f+\frac{5}{2}\right)$$

Άρα $G_1(f) = \frac{1}{(2\pi)^2}\left[\frac{1}{(f+\frac{5}{2})^2} - \frac{1}{(f-\frac{5}{2})^2}\right] + j\cdot\frac{1}{4\pi}\cdot\left[\delta'\left(f-\frac{5}{2}\right)+\delta'\left(f+\frac{5}{2}\right)\right]$

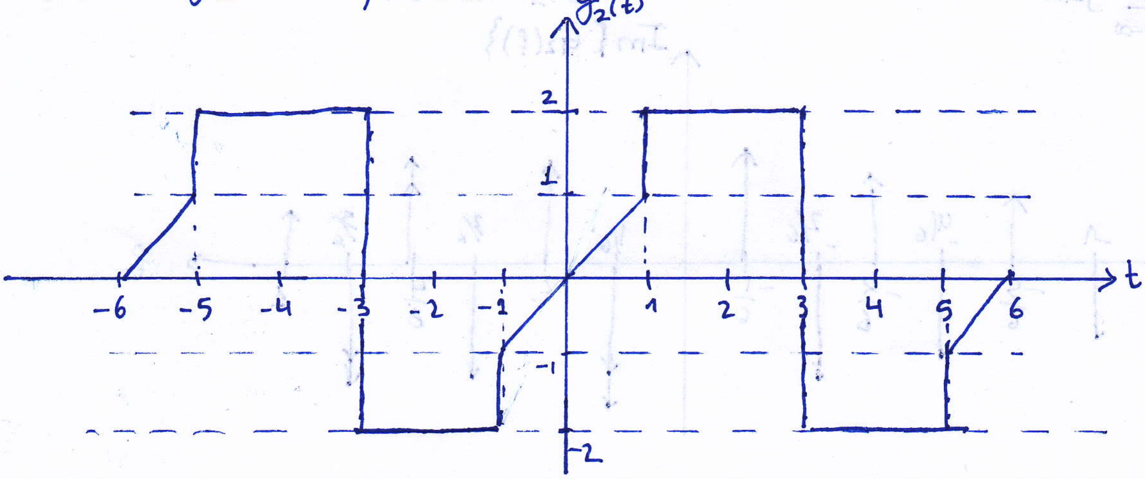




β) $g_2(t) = \begin{cases} -2, & -3\le t\le -1 \\ t, & -1\le t\le 1 \\ 2, & 1\le t\le 3 \end{cases}$, $|t|\le 3$ και $g_2(t) = g_2(t+6k)$, $\forall k\in\mathbb{Z}$

Είναι $g_2(t) = -2(u(t+3)-u(t+1)) + t\,\mathrm{rect}\left(\frac{t}{2}\right) + 2(u(t-1)-u(t-3))$, $|t|\le 3$

$g_2(t) = g_2(t+6k)$, $\forall k\in\mathbb{Z}$



Ανάπτυξη της g_2 σε μιγαδ. Σ.Fourier:

$$a_m = \frac{1}{6}\int_{-3}^{3} g_2(t)\cdot \exp\left(-j2\pi\cdot\frac{m}{6}t\right)dt \qquad a_0 = 0$$

$$\Rightarrow a_m = \underbrace{-\frac{1}{6}\cdot 2\int_{-3}^{-1}\exp\left(-j2\pi\cdot\frac{m}{6}t\right)dt}_{I_1} + \underbrace{\frac{1}{6}\int_{-1}^{1} t\cdot\exp\left(-j2\pi\cdot\frac{m}{6}t\right)dt}_{I_2} + \underbrace{\frac{1}{6}\cdot 2\int_{1}^{3}\exp\left(-j2\pi\cdot\frac{m}{6}t\right)dt}_{I_3}$$

$$I_1 = -\frac{1}{6}\cdot 2\int_{-3}^{-1}\exp\left(-j2\pi\frac{m}{6}t\right)dt = -\frac{1}{6}\cdot 2\cdot\frac{1}{-j2\pi\frac{m}{6}}\left[\exp\left(+j2\pi\frac{m}{6}\right) - \exp\left(3j2\pi\frac{m}{6}\right)\right]$$

$$I_2 = \frac{1}{6}\cdot\int_{-1}^{1} t\exp\left(-j2\pi\frac{m}{6}t\right)dt = \frac{1}{6}\left\{\frac{1}{-j2\pi\frac{m}{6}}\left[\exp\left(-j2\pi\frac{m}{6}\right) + \exp\left(j2\pi\frac{m}{6}\right)\right] - \frac{1}{\left(-j2\pi\frac{m}{6}\right)^2}\left[\exp\left(-j2\pi\frac{m}{6}\right) - \exp\left(j2\pi\frac{m}{6}\right)\right]\right\} =$$

$$I_3 = \frac{1}{6}\cdot 2\int\exp\left(-j2\pi\frac{m}{6}t\right)dt = \frac{1}{6}\cdot 2\cdot\frac{1}{-j2\pi\frac{m}{6}}\left[\exp\left(-3j2\pi\frac{m}{6}\right) - \exp\left(-j2\pi\frac{m}{6}\right)\right]$$

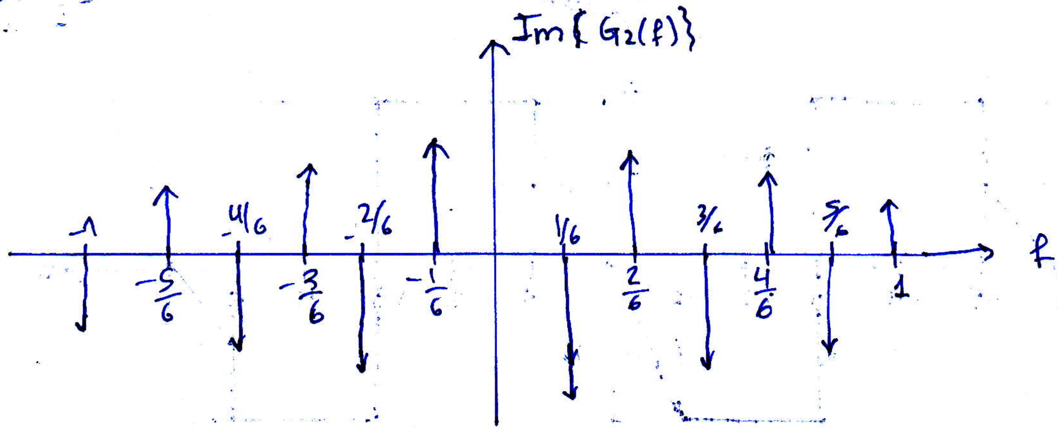
$$a_m = \frac{1}{j\pi m}\left[\exp\left(j2\pi\frac{m}{6}\right) - \exp\left(j2\pi\frac{m}{6}3\right)\right] + \frac{1}{6}\left[\frac{e^{-j\frac{2\pi m}{6}}}{-j2\pi\frac{m}{6}} + \frac{e^{j\frac{2\pi m}{6}}}{-j2\pi\frac{m}{6}} - \frac{e^{-j\frac{2\pi m}{6}}}{\left(-j2\pi\frac{m}{6}\right)^2} + \frac{e^{j\frac{2\pi m}{6}}}{\left(-j2\pi\frac{m}{6}\right)^2}\right]$$

$$+ \frac{1}{-j\pi m}\left[e^{-j\pi m} - e^{-j2\pi\frac{m}{6}}\right] =$$

$$= \frac{2\cos\left(\frac{\pi}{3}m\right) - 2\cos(\pi m)}{j\pi m} - \frac{\cancel{2}\cos\left(\frac{\pi}{3}m\right)}{\cancel{2}j\pi m} + \cancel{6}^{\,3}\,\frac{\cancel{2}j\sin\left(\frac{\pi}{3}m\right)}{-\cancel{4}\pi^2 m^2} =$$

$$= \frac{\cos\left(\frac{\pi}{3}m\right) - 2\cos(\pi m)}{j\pi m} + 3\,\frac{\sin\left(\frac{\pi}{3}m\right)}{j\pi^2 m^2}$$

Άρα $$G_2(f) = \sum_{m=-\infty}^{+\infty}\left[\frac{\cos\left(\frac{\pi}{3}m\right) - 2\cos(\pi m)}{j\pi m} + 3\,\frac{\sin\left(\frac{\pi}{3}m\right)}{j\pi^2 m^2}\right]\delta\left(f - \frac{m}{6}\right)$$



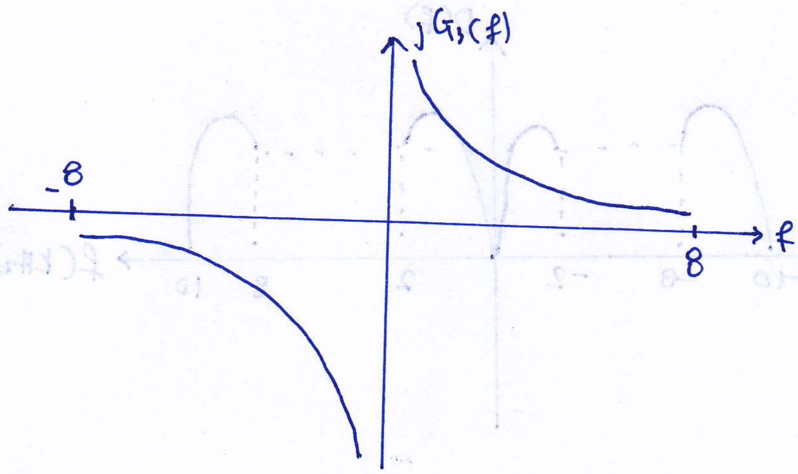
γ) $g_3(t) = \int_{-t}^{t} [\mathrm{sinc}(8\tau)]^2 d\tau = \int_{-\infty}^{t} \mathrm{sinc}^2(8\tau)d\tau - \int_{-\infty}^{-t} \mathrm{sinc}^2(8\tau)d\tau$

$\mathrm{sinc}^2(8t) \rightleftharpoons \left(\frac{1}{8} - \frac{|f|}{8^2}\right)\cdot \mathrm{rect}\left(\frac{f}{16}\right) = G(f)$

$\int_{-\infty}^{t} \mathrm{sinc}^2(8\tau)d\tau \rightleftharpoons \frac{1}{j2\pi f}\cdot G(f) + \frac{G(0)}{2}\delta(f)$

$\int_{-\infty}^{-t} \mathrm{sinc}^2(8\tau)d\tau \rightleftharpoons -\frac{1}{j2\pi f} G(-f) + \frac{G(0)}{2}\delta(f)$

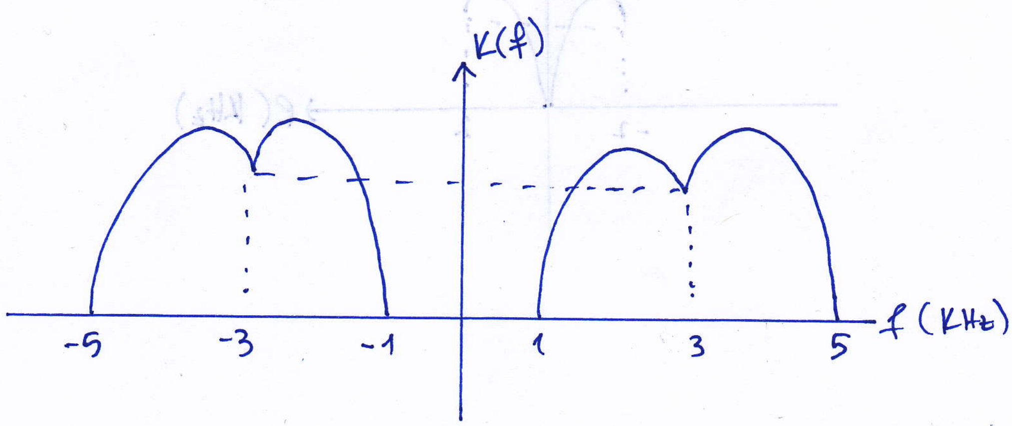
Επομένως, $G_3(f) = \frac{1}{j2\pi f}\left(G(f) + G(-f)\right) \xlongequal{G(f) = G(-f)} \frac{1}{j\pi f} G(f)$



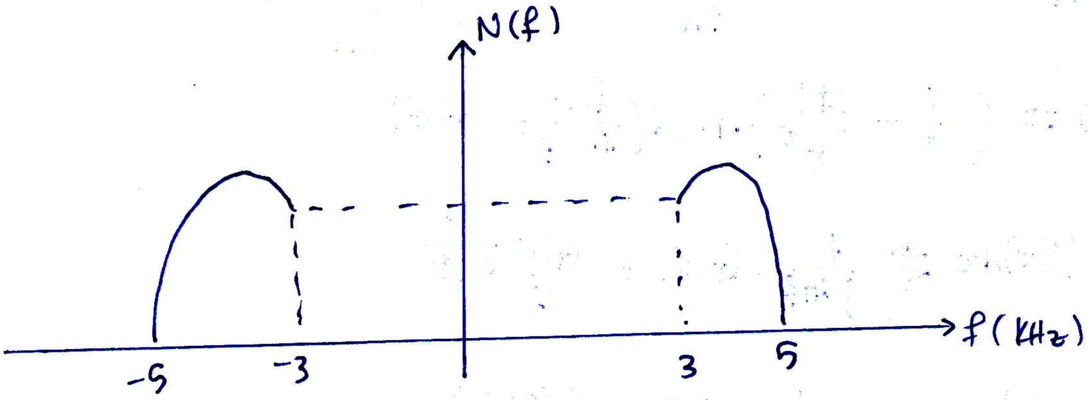
Άσκηση 4

$f_c = 3$ KHz, $W = 2$KHz

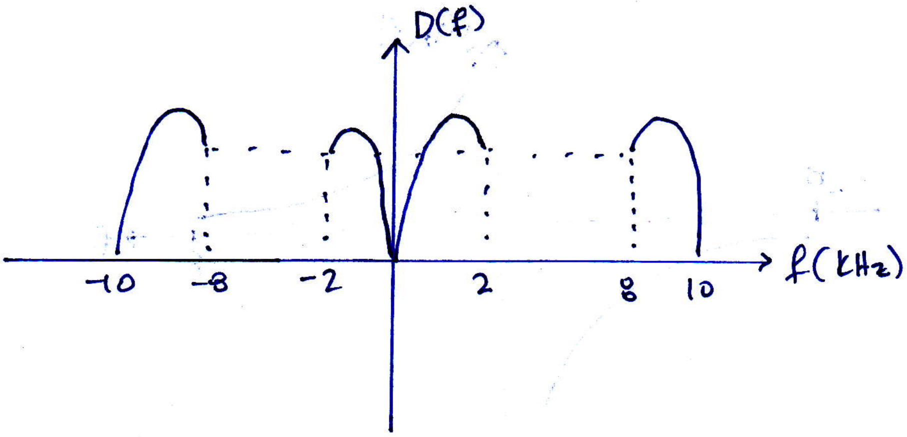
α) $k(t) = m(t)\cdot A\cdot \cos[2\pi\cdot 3000t] \rightleftharpoons \frac{A}{2}\left(M(f-3000) + M(f+3000)\right) = K(f)$



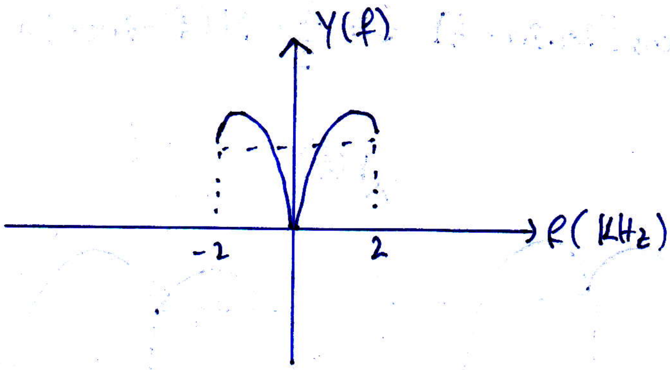
Έπειτα, για $N(f)$: $N(f) = \frac{A}{2}\left[M(f-3000)\,u(f-3000) + M(f+3000)\cdot u(-f+3000)\right]$



Ύστερα, για $D(f)$: $D(f) = \frac{A^2}{4}\left[M(f-8000)\,u(f-8000) + N(f-2000)\,u(-f-2000) + M(f+2000)\,u(f+2000) + M(f+8000\;u(-f+8000)\right]$

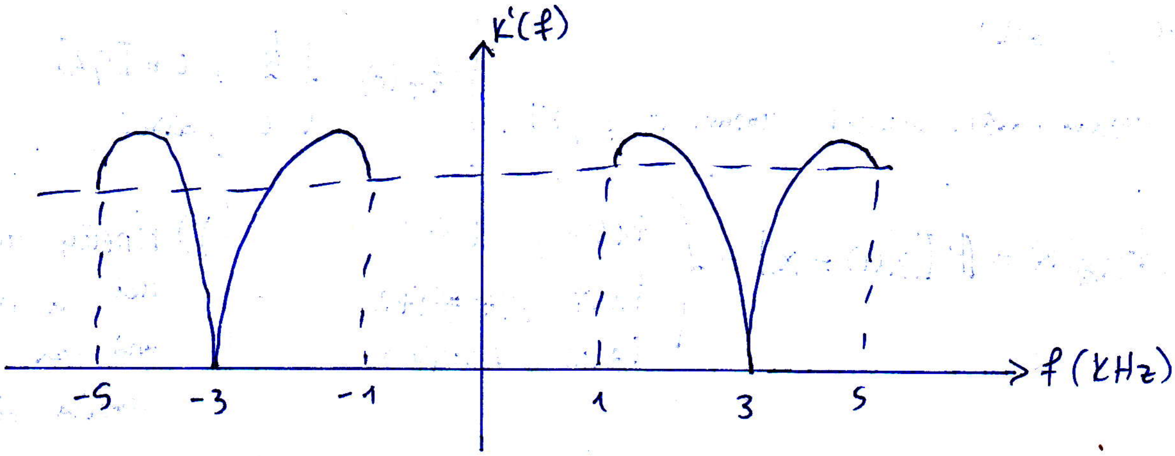


Τέλος, το $Y(f)$: $Y(f) = \frac{A^2}{4}\left[M(f-2000)\,u(-f-2000) + N(f+2000)\,u(f+2000)\right]$



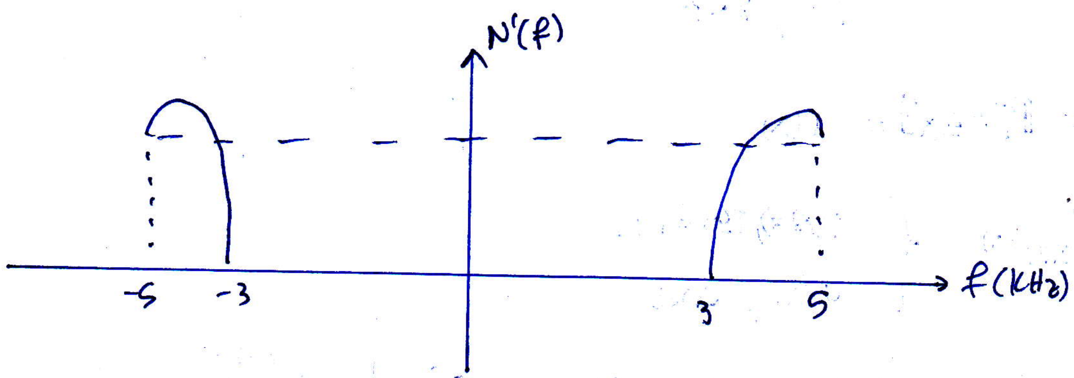
β) Μετά τον πολλαπλασιαστή με $A\cos 2\pi\cdot 3000t$ θα έχουμε στο δέκτη:

$$K'(f) = \frac{A^3}{8}\left[M(f-5000)u(-f-5000) + M(f+1000)u(-f+1000) + M(f+5000)u(f+5000) + M(f-1000)u(f-1000)\right]$$

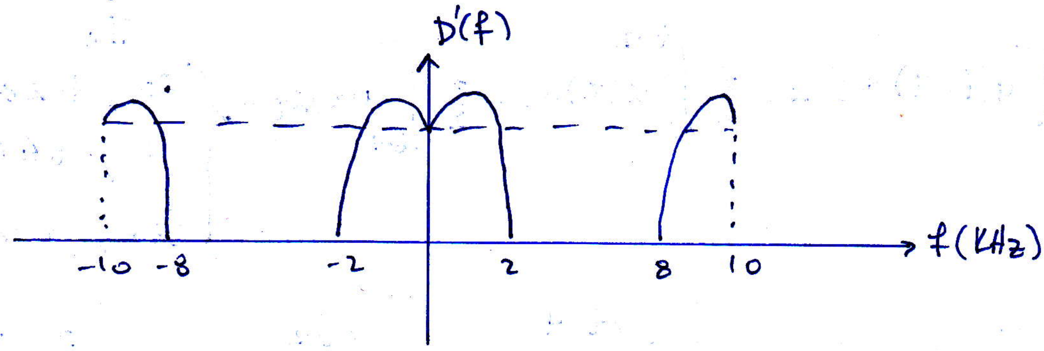


Μετά την διέλευση από το υψιπερατό φίλτρο:

$$N'(f) = \frac{A^3}{8}\left[M(f+5000\cdot u(f+5000) + M(f-5000)u(-f-5000)\right]$$



Ακόμα, $D'(f) = \left(\frac{A}{2}\right)^4\left[M(f+10.000)u(f+10.000) + M(f) + M(f-10.000)u(-f-10.000)\right]$



Από το βαθυπερατό φίλτρο περνάει μόνο ο μεσαίος λοβός, οπότε στην έξοδο του δέκτη θα είναι $y'(t) = \left(\frac{A}{2}\right)^4 m(t)$, το οποίο είναι ανάλογο του σήματος πληροφορίας.

ση 7

Σ.Α. X(t)

A=3 , $T \le t \le T+2$

A=0 , αλλού

T τυχαία (τ.μ.β). ομοιόμ. καταν. στο [0,2].

$$x(t) = \begin{cases} 3, & t \in [T, T+2] \\ 0, & \text{αλλού} \end{cases} = 3\left[u(t-T) - u(t-(T+2))\right]$$

$$f_T(\tau) = \begin{cases} \frac{1}{2}, & \tau \in [0,2] \\ 0, & \text{αλλού} \end{cases}$$

α)

$$f_{X(t)}(x) = \mathbb{P}[X(t) \le x] = \begin{cases} f_1(x), & t \le T \\ f_2(x), & T \le t \le T+2 \\ f_3(x), & t \ge T+2 \end{cases}$$

> $f_1(x) = \mathbb{P}[0 \le x] = \begin{cases} 1, & x \ge 0 \\ 0, & x < 0 \end{cases} = u(x)$

> $f_2(x) = P[3 \le x] = \begin{cases} 1, & x \ge 3 \\ 0, & x < 3 \end{cases} = u(x-3)$

> $f_3(x) = P[0 \le x] = u(x)$

Οπότε, $f_{X(t)}(x) = \begin{cases} u(x-3), & T \le t \le T+2 \\ u(x), & \text{αλλού} \end{cases}$

) $E[X(t)] = 3E[u(t-T) - u(t-(T+2))] = 3\int_{-\infty}^{+\infty} [u(t-\tau) - u(t-\tau-2)] f_T(\tau)\, d\tau =$

$$= \frac{3}{2}\int_0^2 [u(t-\tau) - u(t-\tau-2)]\, d\tau = \underbrace{\frac{3}{2}\int_0^2 u(t-T)\, d\tau}_{I_1} - \underbrace{\frac{3}{2}\int_0^2 u(t-\tau-2)\, d\tau}_{I_2}$$

$$I_1 = \frac{3}{2}\int_0^2 u(t-T)\, d\tau = -\frac{3}{2}\int_t^{t-2} u(\tau)\, d\tau = \frac{3}{2}\int_{t-2}^{t} u(\tau)\, d\tau = \begin{cases} 3, & t-2 \ge 0 \\ 0, & t \le 0 \\ \frac{3}{2}t, & t-2 \le 0,\ t \ge 0 \end{cases}$$

$$I_2 = \frac{3}{2}\int_0^2 u(t-\tau-2)\, d\tau = -\frac{3}{2}\int_{t-2}^{t-4} u(\tau)\, d\tau = \frac{3}{2}\int_{t-4}^{t-2} u(\tau)\, d\tau = \begin{cases} 3, & t-4 \ge 0 \\ 0, & t-2 \le 0 \\ \frac{3}{2}t-3, & t-4 \le 0,\ t-2 \ge 0 \end{cases}$$

Οπότε, $E[x(t)] = I_1 - I_2 = \begin{cases} 0, & t \le 0 \\ \frac{3}{2}t, & 0 < t \le 2 \\ 6 - \frac{3}{2}t, & 2 < t \le 4 \\ 0, & t \ge 4 \end{cases}$

γ) Επειδή και η κατανομή, και η μέση τιμή εξαρτώνται από τον χρόνο, δεν είναι κανένα είδος στατικότητας.