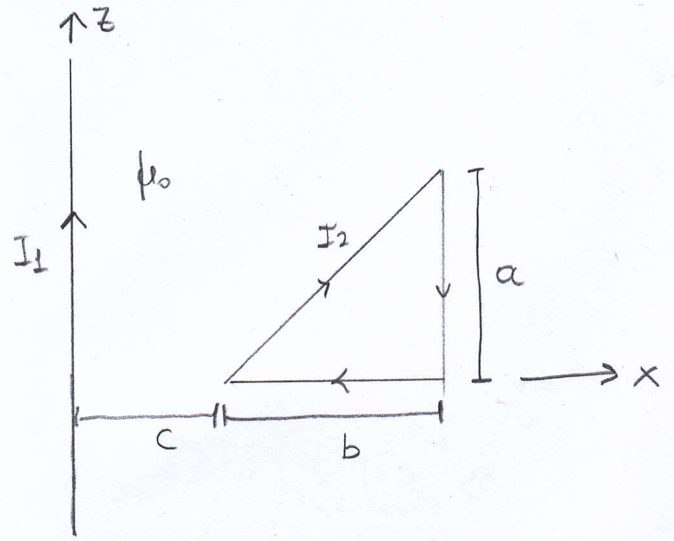
Ηλ. Πεδία Α

6η Σειρά Ασκήσεων

Χρήστος Τσούφης
03117176

Άσκηση 1η (6.6)

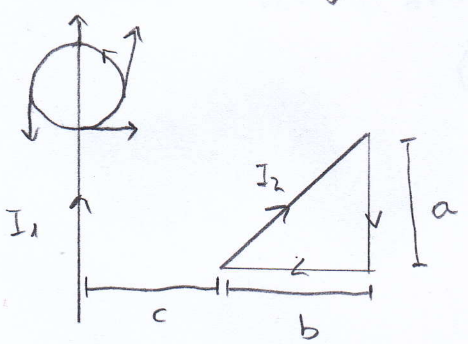


α) (Ενεργειακά)

Αρχικά, βρίσκεται ο συντελεστής αλληλεπαγωγής L_{12}.

Το πεδίο γύρω από τον ρευματοφόρο αγωγό άπειρου μήκους είναι γνωστό.

N. Ampere $\Rightarrow \oint \bar{H}\cdot d\bar{l} = I \Rightarrow 2\pi r H_\varphi(r) = I \Rightarrow \bar{H} = \hat{\varphi}\dfrac{I}{2\pi r} \Rightarrow \bar{B} = \hat{\varphi}\dfrac{\mu_0 I}{2\pi r}$



Οπότε, $L_{12} = \dfrac{\Psi_{21}}{I_1} = \dfrac{\int_S \bar{B}\, d\bar{s}}{I_1}$

· Ως φορά του $d\bar{s}$ επιλέγεται αυτή που προκύπτει με τον κανόνα του δεξιόστροφου κοχλία από το I_2, οπότε $d\bar{s} = \hat{\varphi}\, ds$

· Έπειτα, γίνεται ολοκλήρωση στην επιφάνεια του τριγωνικού βρόχου

· Στην επιφάνεια του I_2 είναι $\hat{\varphi} = \hat{\psi}$ και $\hat{r} = \hat{x}$.

Συνεπώς, $L_{12} = \dfrac{\int_{r=c}^{b+c} \frac{\mu_0 I_1}{2\pi r}\frac{a}{2}\,dr}{I_1} = \dfrac{\mu_0 a}{4\pi}\ln\left(\dfrac{c+b}{c}\right)$

Άρα, θα είναι $\bar F_m = I_1 I_2 (\nabla \overrightarrow{L_{12}}) = I_1 I_2 \hat c \frac{\partial L_{12}}{\partial c}$ όπου $\hat c$ το διάνυσμα κατά το οποίο πρέπει να κινηθεί ο βρόχος (2) ώστε να αυξηθεί το c, οπότε $\hat c = \hat x$

Άρα $\bar F_m = \hat x I_1 I_2 \cdot \left(\frac{\mu_0 a}{4\pi}\frac{d}{dx}\left(\ln\left(1+\frac{b}{x}\right)\right)\right)\Big|_{x=c} =$

$$= \frac{\mu_0 a}{4\pi} I_1 I_2 \left[\frac{x}{x+b}\left(-\frac{b}{x^2}\right)\right]_{x=c}\hat x =$$

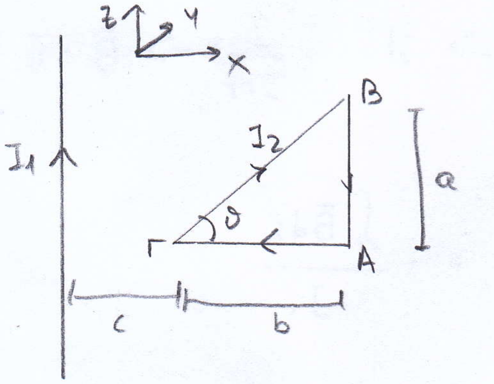
$$= -\frac{\mu_0}{4\pi} I_1 I_2 \frac{ab}{(c+b)c}\hat x$$

$$= -\frac{\mu_0}{4\pi}\cdot\frac{ab}{(c+b)c} I_1 I_2 \hat x$$

β) (Μέσω Δύναμης Lorentz)

· Το πεδίο είναι $\vec B_1(r) = \hat\varphi B_\varphi^{(1)}(r) = \hat\varphi \frac{\mu_0 I}{2\pi r}$ (όπως υπολογίσαμε & προηγουμένως)

· Για τις γραμμικές πυκνότητες δύναμης σε κάθε πλευρά ξεχωριστά:



(το $\hat\varphi$ ταυτίζεται με το $\hat\varphi$ στην επιφάνεια του βρόχου (2))

$\hat z \times \hat\varphi = -\hat x$

$\hat x \times \hat y = \hat z$

• $\frac{d\bar F_{AB}}{dl} = -(\hat z I_2)\times\left(\hat\varphi \frac{\mu_0 I_1}{2\pi(c+b)}\right) = +\hat x \frac{\mu_0 I_1 I_2}{2\pi(c+b)} \Rightarrow \bar F_{AB} = \hat x \frac{\mu_0 I_1 I_2 a}{2\pi(c+b)}$

• $\frac{d\bar F_{A\Gamma}}{dl} = (-\hat x I_2)\times\left(\hat\varphi \frac{\mu_0 I_1}{2\pi r}\right) = -\hat z \frac{\mu_0 I_1 I_2}{2\pi r} \Rightarrow \bar F_{A\Gamma} = -\hat z \frac{\mu_0 I_1 I_2}{2\pi}\ln\frac{b+c}{b}$

· $\frac{d\bar F_{\Gamma B}}{dl} = (\hat x I_2 \cos\theta + \hat z I_2 \sin\theta)\times\left(\hat\varphi \frac{\mu_0 I_1}{2\pi r}\right)$ (*) / όπου $\sin\theta = \frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}$

$\cos\theta = \frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}$

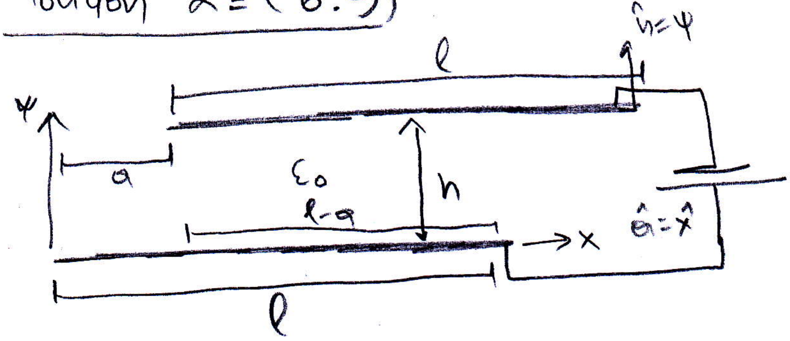
$$(\kappa) \Rightarrow \frac{dF_{\Gamma B}}{dl} = \hat{z}\frac{\mu_0 I_1 I_2}{2\pi r}\cos\theta + (-\hat{x})\frac{\mu_0 I_1 I_2}{2\pi r}\sin\theta \Rightarrow$$

$$\Rightarrow F_{\Gamma B} = \hat{z}\frac{\mu_0 I_1 I_2}{2\pi}\cos\theta\, \ln\left(\frac{b+c}{c}\right) - \hat{x}\frac{\mu_0 I_1 I_2}{2\pi}\sin\theta\, \ln\left(\frac{b+c}{c}\right)$$

Οπότε, συνολικά θα είναι:

$$\bar{F}_{M} = \bar{F}_{A\Gamma} + \bar{F}_{\Gamma B} + \bar{F}_{BA} = -\hat{z}\frac{\mu_0 I_1 I_2}{2\pi}\ln\left(\frac{b+c}{c}\right)[1-\cos\theta] +$$
$$-\hat{x}\frac{\mu_0 I_1 I_2}{2\pi}\ln\left(\frac{b+c}{c}\right)[a+\sin\theta]$$

Άσκηση 2η (6.9)



Ισχύει $W = \frac{1}{2}CV^2$ όπου $C = \varepsilon_0\frac{S}{h} = \varepsilon_0\frac{(l-a)d}{h}$

Άρα, $W_e(h,a) = \frac{1}{2}\varepsilon_0\frac{(l-a)d}{h}V^2$, όπου τα h, a μεταβλητά και $\hat{a}=\hat{x}$, $\hat{h}=\hat{y}$

Οπότε, η δύναμη που ασκείται στον πάνω οπλισμό είναι:

$$F_e = \nabla W_e\Big|_{V=\sigma\tau\alpha\theta} = \hat{a}\,\frac{1}{2}\cdot\frac{\varepsilon_0 d V^2}{h}(-1) + \hat{h}\,\frac{1}{2}\varepsilon_0(l-a)dV^2 =$$
$$= -\hat{x}\frac{1}{2}\frac{\varepsilon_0 d}{h}V^2 - \hat{\psi}\,\frac{1}{2}\varepsilon_0\frac{(l-a)d}{h^2}V^2$$