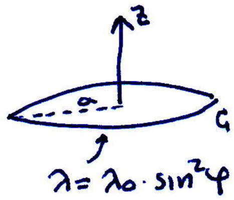
Ηλ. Πεδία Α

1η Σειρά Ασκήσεων

Χρήστος Τσούφης
03117176

Άσκηση 1η

α) Σχ. (α)



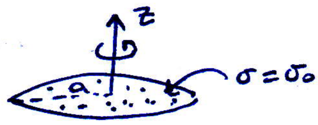
Το συνολικό φορτίο της διάταξης είναι: $Q_{ολ} = \int_C \lambda(\vec r,t)\,dl = \int_C \lambda_0 \cdot \sin^2\varphi\, dl =$

$= \lambda_0 \cdot \int_C \sin^2\varphi \cdot a \cdot d\varphi = \lambda_0 \cdot a \cdot \int_0^{2\pi} \frac{1}{2}(1-\cos 2\varphi)\,d\varphi = \frac{a\cdot\lambda_0}{2}\cdot\int_0^{2\pi} d\varphi - \frac{a\cdot\lambda_0}{2}\int_0^{2\pi}\cos 2\varphi\, d\varphi =$

$= \frac{a\cdot\lambda_0}{\cancel{2}}\cdot\cancel{2}\pi - \frac{a\cdot\lambda_0}{2}\int_0^{2\pi}\left(\frac{1}{2}\sin 2\varphi\right)' d\varphi = -\frac{a\cdot\pi\cdot\lambda_0}{4}\left[\sin 2\varphi\right]_0^{2\pi} + a\pi\lambda_0 =$

$= a\pi\lambda_0 - \frac{a\pi\lambda_0}{4}\left[\cancel{\sin 2\cdot 2\pi - \sin 0}\right]^{0} = a\pi\lambda_0$

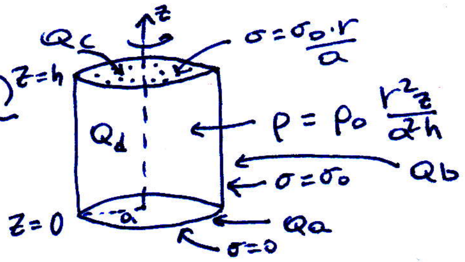
Σχ. (β)



Το συνολικό φορτίο της διάταξης είναι: $Q_{ολ} = \int_S \sigma(\vec r,t)\,dS = \int_S \sigma_0\, dS =$

$= \sigma_0 \int_S dS = \sigma_0 \cdot \pi a^2$

Σχ. (γ)



Το συνολικό φορτίο της διάταξης είναι: $Q_{ολ} = Q_a + Q_b + Q_c + Q_d$

- $Q_a = \int_{S_0} \sigma \cdot dS_0 = \int_{S_0} 0 \cdot dS_0 = 0$
- $Q_b = \int_{S_1} \sigma \cdot dS_1 = \int_{S_1} \sigma_0 \cdot dS_1 = \sigma_0 \int_{S_1} dS_1 = \sigma_0 \cdot 2\pi a h$
- $Q_c = \int_{S_2} \sigma \cdot dS_2 = \int_{S_2} \frac{\sigma_0 \cdot r}{a}\, dS_2 = \frac{\sigma_0}{a}\int_{S_2} r\, dS_2 = \frac{\sigma_0}{a}\int_{r=0}^{a}\int_{\varphi=0}^{2\pi} r \cdot r \cdot d\varphi\, dr =$

$= \frac{\sigma_0}{a}\cdot 2\pi \int_{r=0}^{a} r^2 dr = \frac{\sigma_0}{a}\cdot 2\pi \cdot \left[\frac{r^3}{3}\right]_0^a = \frac{\sigma_0}{a}\cdot 2\pi \cdot \frac{a^3}{3} = \frac{2\pi}{3}\sigma_0 \cdot a^2$

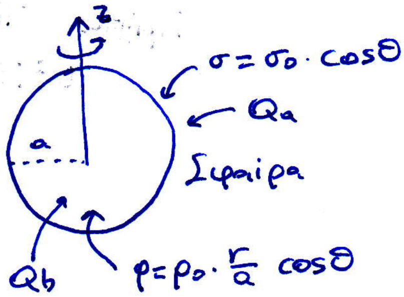
- $Q_d = \int_V \rho \cdot dV = \int_V \rho_0 \frac{r^2 z}{a^2 h}\cdot dV = \frac{\rho_0}{a^2 h}\int_V r^2 z\, dV = \frac{\rho_0}{a^2 h}\int_{\varphi=0}^{2\pi}\int_{r=0}^{a}\int_{z=0}^{h} r^2 z \cdot r\, dz\, dr\, d\varphi =$

$= \frac{\rho_0}{a^2 h} 2\pi \int_0^a r^3 dr \cdot \int_0^h z\, dz = \frac{\rho_0}{a^2 h} 2\pi \left[\frac{r^4}{4}\right]_0^a \cdot \left[\frac{z^2}{2}\right]_0^h = \frac{\rho_0}{\cancel{a^2 h}}\cancel{2}\pi \cdot \frac{a^{\cancel{4}\,2}}{4}\cdot\frac{h^{\cancel{2}}}{\cancel{2}} =$

$= \frac{\pi}{4}\cdot \rho_0 a^2 h$

Άρα $Q_{ολ} = 0 + \sigma_0 2\pi a h + \frac{2\pi}{3}\sigma_0 a^2 + \frac{\pi}{4}\rho_0 a^2 h = 2\pi\sigma_0 a h + \frac{2\pi}{3}\sigma_0 a^2 + \frac{\pi}{4}\rho_0 a^2 h$

$\Sigma\chi.(\delta)$



Το συνολικό φορτίο της διάταξης είναι: $Q_{o\lambda}=Q_a+Q_b$

· $Q_a=\int_S\sigma\cdot dS=\int_S\sigma_0\cdot\cos\theta\cdot dS=\sigma_0\int_S\cos\theta\cdot dS=\sigma_0\int_{\varphi=0}^{2\pi}\int_{\theta=0}^{\pi}\cos\theta\cdot a^2\sin\theta d\theta d\varphi=$

$=\sigma_0 a^2 2\pi\int_0^{\pi}\cos\theta\cdot\sin\theta d\theta=\sigma_0 a^2\cancel{2}\pi\int_0^{\pi}\frac{\sin 2\theta}{\cancel{2}}d\theta=\pi a^2\sigma_0\int_0^{\pi}\frac{1}{2}(-\cos2\theta)'d\theta=$

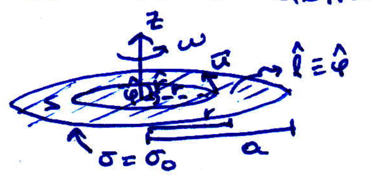
$=\frac{\pi a^2\sigma_0}{2}\cdot[-\cos2\theta]_0^{\pi}=-\frac{\pi a^2\sigma_0}{2}[\cos2\pi-\cos0]=0$

· $Q_b=\int_V\rho\ dV=\int_V\rho_0\cdot\frac{r}{a}\cdot\cos\theta dV=\frac{\rho_0}{a}\int_V r\cos\theta dV=\frac{\rho_0}{a}\int_{\theta=0}^{\pi}\int_{\varphi=0}^{2\pi}\int_{r=0}^{a}r\cos\theta r^2\sin\theta d\theta d\varphi dr$

$=\frac{\rho_0}{a}2\pi\underbrace{\int_0^{\pi}\cos\theta d\theta}_{0}\int_0^{a}r^3dr=0$

Άρα $Q_{o\lambda}=0+0\Rightarrow Q_{o\lambda}=0$

β) $\Sigma\chi.(\beta)$

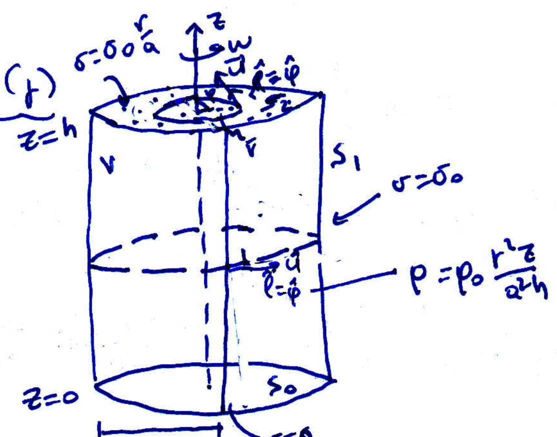


Εδώ έχουμε επιφανειακό ηλεκτρικό ρεύμα. Τα φορτία που απέχουν απόσταση r από το κέντρο του δίσκου (με $0\le r\le a$) έχουν ταχύτητα $\vec{u}=|\vec{u}|\cdot\hat{\ell}$, όπου $|\vec{u}|=\omega\cdot r$, $0\le r\le a$. λόγω της κυκλικής κίνησης που προκαλείται από την περιστροφή με γωνιακή ταχύτητα $\omega\cdot\hat{z}$. Η ταχύτητα $\vec{u}$ είναι εφαπτομενική στην τροχιά και κάθετη στην ακτινική διεύθυνση που ορίζει το $\hat{r}$.

Οπότε, πυκνότητα ρεύματος: $\vec{K}(\vec{r},t)=\sigma(\vec{r},t)\cdot\vec{u}(r,t)=\sigma_0\cdot|\vec{u}|\cdot\hat{\ell}=\sigma_0\cdot|\vec{u}|\cdot\hat{\varphi}=$

$=\sigma_0\cdot\omega\cdot r\cdot\hat{\varphi}$, $0\le r\le a$

$\Sigma\chi.(\gamma)$



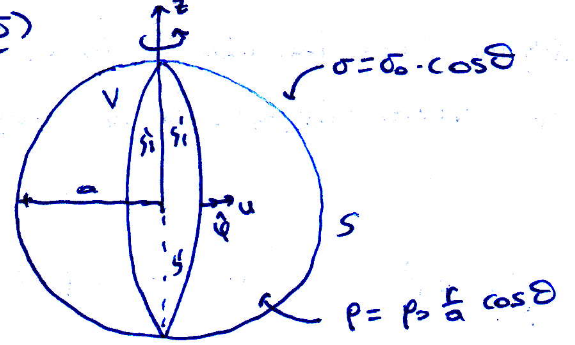
· Στην επιφάνεια S_0 έχουμε $\sigma=0$. Οπότε, πυκνότητα ρεύματος: $\vec{K}_0(\vec{r},t)=\sigma(\vec{r},t)\cdot\vec{u}(r,t)=0\cdot\vec{u}(r,t)=\vec{0}$

· Στην κυλινδρική επιφάνεια S_1 έχουμε $\sigma=\sigma_0$, με επιφανειακό ρεύμα. Η ταχύτητα των φορτίων της κυλινδρικής επιφάνειας θα είναι $\vec{u}=|\vec{u}|\cdot\hat{\ell}$, όπου $|\vec{u}|=\omega\cdot a$ λόγω της κυκλικής κίνησης που προκαλείται από την περιστροφή με γωνιακή ταχύτητα $\omega\cdot\hat{z}$. Η ταχύτητα $\vec{u}$ είναι εφαπτομενική στην τροχιά και κάθετη στην ακτινική διεύθυνση που ορίζει το $\hat{r}$. Οπότε πυκνότητα ρεύμ.: $\vec{K}_1(\vec{r},t)=\sigma(\vec{r},t)\cdot\vec{u}(\vec{r},t)=\sigma_0|\vec{u}|\cdot\hat{\ell}=\sigma_0|\vec{u}|\cdot\hat{\varphi}=\sigma_0\omega a\hat{\varphi}$

· Στην επιφάνεια S_2 έχουμε $\sigma=\sigma_0\frac{r}{a}$, με επιφ. ρεύμα. Όμοια με S_0, $\vec{u}=|\vec{u}|\cdot\hat{\ell}$. Άρα: $\vec{K}_2(\vec{r},t)=\sigma(\vec{r},t)\cdot\vec{u}(\vec{r},t)=\sigma_0\frac{r}{a}|\vec{u}|\cdot\hat{\ell}=\sigma_0\frac{r^2}{a}\omega\hat{\varphi}$

((ε) βλ. σελ. 4)

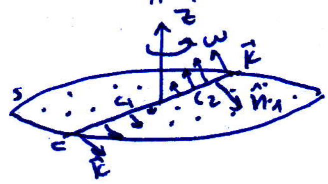
Σχ.(δ)



• Στον V έχουμε χωρικό ρεύμα. Επιλέγουμε S' αυτήν του σχήματος (κάθετη τομή σφαίρας). Τα φορτία του όγκου έχουν ταχύτητα ίση με $\vec{u}=\omega r\hat{\varphi}$, όπου r απόσταση από το κέντρο, λόγω περιστροφής, ομαλής κυκλικής κίνησης. Έχουμε πυκν. ρεύμ.:
$\vec{J}(\vec{r},t)=\rho(\vec{r},t)\cdot\vec{u}(\vec{r},t)=\rho_0\cdot\frac{r}{a}\cos\theta\cdot\omega r\hat{\varphi}$

• Στην S έχουμε επιφανειακό ρεύμα. Τα φορτία έχουν ταχύτητα ίση με $\vec{u}=\omega a\hat{\varphi}$ λόγω της ομαλής κυκλικής κίνησης που προκαλείται από την περιστροφή με γων. ταχ. ω. Οπότε έχουμε πυκν. ρεύματος: $\vec{K}(\vec{r},t)=\sigma(\vec{r},t)\cdot u(\vec{r},t)=\sigma_0\cdot\cos\theta\cdot\omega a\hat{\varphi}$

γ) Σχ.(β)

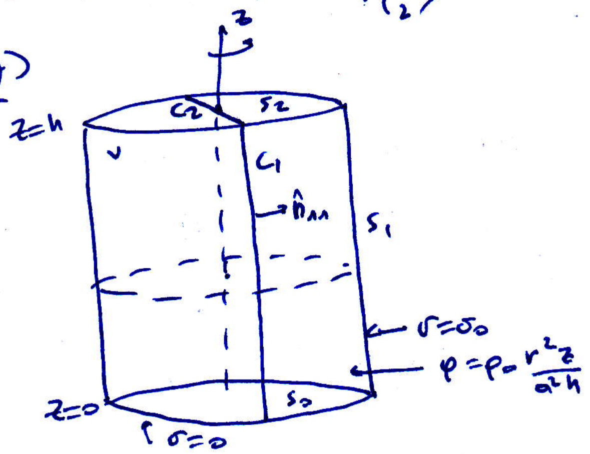


Επιλέγουμε ως καμπύλη C πάνω στην επιφάνεια S όπου ρέει το επιφανειακό ρεύμα μια διάμετρο του δίσκου. Χωρίζουμε τη C σε δύο τμήματα C_1, C_2 μήκους a το καθένα. Επιλέγουμε το μοναδιαίο διάνυσμα $\hat{n}_1$ κάθετο στην C και με φορά όπως στο σχήμα. Επισημαίνεται ότι η επιλογή του σημείου εφαρμογής του δεν επηρεάζει το τελικό αποτέλεσμα.

• Έτσι, έχουμε ένταση ρεύματος: $I=\int_C\vec{K}\cdot\hat{n}_1\,dl=\int_{C_1}\vec{K}\cdot\hat{n}_1\,dl+\int_{C_2}\vec{K}\cdot\hat{n}_1\,dl=$

$=\int_{C_1}K\cdot\cancel{(-\hat{n}_1)}\cdot\hat{n}_1\cdot dl+\int_{C_2}K\cdot\cancel{\hat{n}_1}\cdot\hat{n}_1\,dl=0\Rightarrow I=0.$

Σχ.(γ)



• Στην επιφάνεια S_0, θα έχουμε ένταση ρεύματος: $I_0=\int_\rho\vec{K}_0\cdot\hat{n}_1\,dl=0\Rightarrow I_0=0$

• Ως καμπύλη πάνω στην επιφάνεια S_1 επιλέγουμε την κάθετη γραμμή C_1. Επιλέγουμε το κάθετο στην C_1 μοναδιαίο διάνυσμα $\hat{n}_{11}$ όπως φαίνεται στο σχήμα. Έτσι, έχουμε ένταση ρεύματος: $I_1=\int_{C_1}\vec{K}_1\cdot\hat{n}_{11}\,dl=$

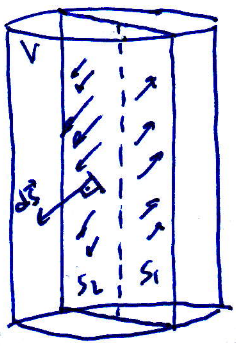
$=\int_{C_1}\sigma_0\omega a\hat{\varphi}\,\hat{n}_{11}\,dl\ \underset{\hat{\varphi}\cdot\hat{n}_{11}=1}{\overset{\hat{\varphi}\equiv\hat{n}_{11}}{=}}\ \int_{C_1}\sigma_0\,\omega a\,dl=\sigma_0\omega a\int_{C_1}dl=\sigma_0\omega a h\Rightarrow I_1=\sigma_0\omega a h$

• Ομοίως με την περίπτωση του δίσκου (Σχ.(β)), επιλέγουμε ως C_2 μια διάμετρο της S_2. Εφαρμόζοντας τα ίδια βήματα που ακολουθήσαμε και εκεί, θα έχουμε ένταση ρεύματος: $I_2=0$.

(*) Στον κυλινδρικό όγκο V έχουμε $\rho=\rho_0\frac{r^2 z}{a^2 h}$, με χωρικό ρεύμα. Και πάλι, θα έχουμε ταχύτητα φορτίων ίση με $\bar{u}=\omega r\hat{\varphi}$, $0\le r\le a$ λόγω της κυκλικής κίνησης. Για την χωρική πυκνότητα ρεύματος, $\bar{J}$, θα έχουμε:

$$\bar{J}(\bar{r},t)=\rho(\bar{r},t)\,\bar{u}(\bar{r},t)=\rho_0\frac{r^2 z}{a^2 h}\cdot\omega r\hat{\varphi}\Rightarrow \bar{J}=\rho_0\cdot\frac{r^3 z}{a^2 h}\,\omega\hat{\varphi}\qquad \text{(όπως στο ερώτ. (β))}$$

· Για τον υπολογισμό του ρεύματος που ρέει στον όγκο V επιλέγουμε ως επιφάνεια S μια κάθετη τομή του όγκου V, που περνά από το κέντρο. Χωρίζουμε την επιφάνεια σε S_1 και S_2. Επιλέγουμε $d\bar{S}=\hat{n}\,ds$ κάθετο στην S με φορά όπως στο σχήμα.

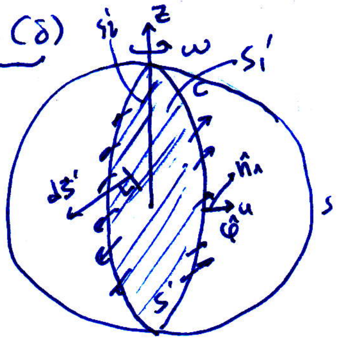


Η επιλογή της φοράς δεν επηρεάζει το τελικό αποτέλεσμα. Έτσι, έχουμε ένταση ρεύματος: $I=\int_S \bar{J}\cdot d\bar{S}=\int_S \rho_0\frac{r^3 z}{a^2 h}\,\omega\hat{\varphi}\,\hat{n}\,ds=$

$$=\int_{S_1}\rho_0\frac{r^3 z}{a^2 h}\,\omega\underbrace{\hat{\varphi}_1\hat{n}}_{=-1}ds+\int_{S_2}\rho_0\frac{r^3 z}{a^2 h}\,\omega\underbrace{\hat{\varphi}_2\hat{n}}_{=1}ds=\quad \begin{cases}\hat{\varphi}_1=-\hat{n}\\ \hat{\varphi}_2=\hat{n}\end{cases}$$

$$=\cancel{\int_{S_1}\rho_0\frac{r^3 z}{a^2 h}\,\omega(-1)\,ds}+\cancel{\int_{S_2}\rho_0\frac{r^3 z}{a^2 h}\,\omega\,ds}=0\Rightarrow I=0$$

Σχ. (δ)



· Το $\hat{n}_1$ είναι κάθετο στο $\hat{\varphi}$. Όπου $\hat{n}_1$ επιλέγουμε μοναδιαίο κάθετο στην C διάνυσμα. Έτσι έχουμε ένταση ρεύματος:

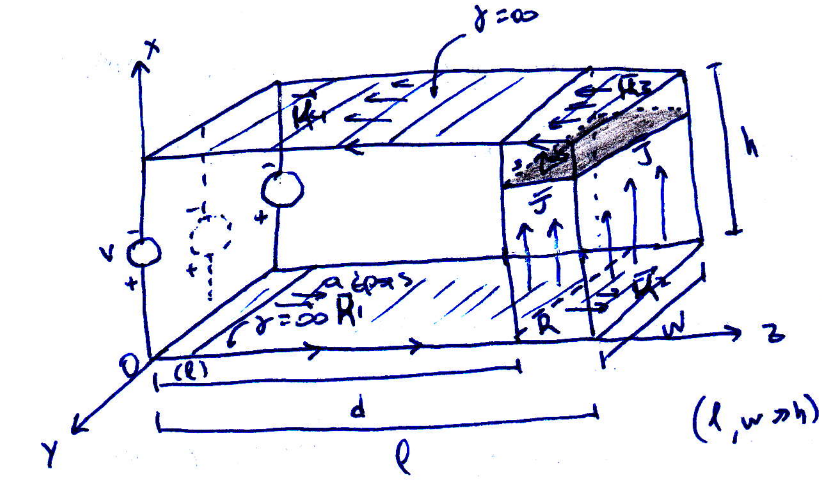
$$I=\int_C \bar{K}\cdot\hat{n}_1\,dl=\int_C \sigma_0\cos\theta\,\omega a\,\hat{\varphi}\,\hat{n}_1\,dl=0\Rightarrow I=0$$

· Παίρνουμε $d\bar{S}'=\hat{n}_1'\,dS'$ κάθετο στην S'. Χωρίζουμε την S' στην S_1' και S_2'. Έτσι, έχουμε ένταση ρεύματος: $I=\int_{S'}\bar{J}\cdot d\bar{S}'=\int_{S'}\rho_0\cdot\frac{r^2}{a}\cos\theta\,\omega\hat{\varphi}\,\hat{n}_1'\,dS'=$

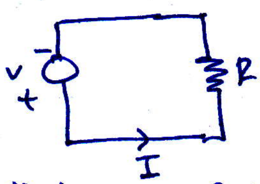
$$=\int_{S_1'}\rho_0\cdot\frac{r^2}{a}\cos\theta\,\omega\underbrace{\hat{\varphi}_1\hat{n}_1'}_{=-1}dS_1'+\int_{S_2'}\rho_0\cdot\frac{r^2}{a}\cos\theta\,\omega\underbrace{\hat{\varphi}_2\hat{n}_1'}_{=1}dS_2'\quad \text{όμως}\ \begin{cases}\hat{\varphi}_1=-\hat{n}_1'\\ \hat{\varphi}_2=\hat{n}_1'\end{cases}$$

$$=\int_{S_1'}\rho_0\cdot\frac{r^2}{a}\cancel{\cos\theta\,\omega(-1)}\,dS_1'+\int_{S_2'}\rho_0\frac{r^2}{a}\cancel{\cos\theta\,\omega}\,dS_2'=0\rightarrow I=0$$

Άσκηση 2η



α) Η διάταξη του σχήματος μπορεί να αναπαρασταθεί ως εξής:



αφού για $d<z<l$ έχουμε το γνωστό υλικό-αντιστάτη και οι παράλληλα συνδεδεμένες πηγές V ισοδυναμούν με μία πηγή V. Παίρνουμε επομένως για το συνολικό ρεύμα ότι $I=\frac{V}{R}$ (1) (γνωστό)

Η πυκνότητα $\bar K_2$ αποσβένει όσο αυξάνεται το z για $d<z<l$ και τελικά όλο το I ανεβαίνει προς τα πάνω (μέσα στον αντιστάτη) με χωρική πυκνότητα $\bar J$.

Στον αντιστάτη θεωρούμε την επιφάνεια S. Θα είναι:

$$I=\int_S \bar J\cdot d\bar S=\int_S J_0\cdot e^{-z/l}\cdot\hat x\cdot\underbrace{\hat x\, dS}_{d\bar S}=\int_S J_0\cdot e^{-z/l}dS=J_0\int_{y=w}^{0}\int_{z=d}^{l}e^{-z/l}\,dz\,dy=$$

$$=J_0\int_{-w}^{0}dy\cdot\int_d^l e^{-z/l}dz=J_0 w(-l)\cdot\left[e^{-z/l}\right]_d^l=-J_0 wl\left(e^{-1}-e^{-d/l}\right)=$$

$$=J_0 wl\left(e^{-d/l}-e^{-1}\right)\Rightarrow J_0=\frac{I}{wl\left(e^{-d/l}-e^{-1}\right)}\overset{(1)}{\Rightarrow}J_0=\frac{V}{wlR\left(e^{-d/l}-e^{-1}\right)}$$

Πράγματι, προκύπτει $J_0>0$ αφού $e^{-d/l}>e^{-1}\Leftrightarrow d/l<1\Leftrightarrow l>d$, ισχύει.

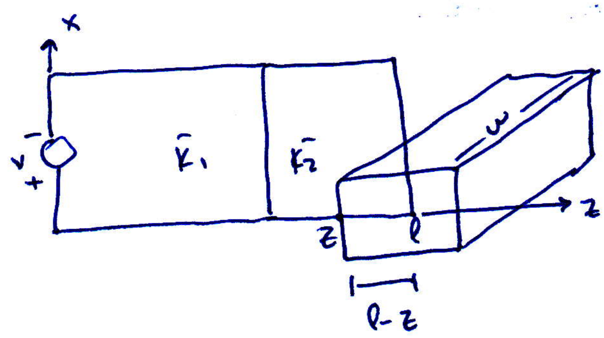
Άρα, προκύπτει όντως ορθά ότι το $\bar J$ έχει την διεύθυνση του $\hat x$.

β) Για τον υπολογισμό της $\bar K_1$ επιλέγουμε τη γραμμή (l) του σχήματος ως καμπύλη. Τότε, $I=K_1\cdot w\Rightarrow K_1=\frac{I}{w}$, άρα $\bar K_1=\hat z\cdot\frac{I}{w}$, με $0\le z\le d$.

Λόγω συμμετρίας του σχήματος θα έχουμε $\bar K_4=-\hat z\cdot\frac{I}{w}$, $0\le z\le d$.

Α τρόπος:

Γίνεται χρήση μιας τομής του σχεδίου:



Α' τρόπος (αυστηρά)

Εφαρμόζουμε στην περιοχή του $z=\ell$. Σύμφωνα με την αρχή Διατήρησης του Φορτίου (ΑΔΦ): $[I]_S = -\frac{dQ}{dt}$ (2). Όμως, πρόκειται για αγώγιμα συνεχούς ρεύματος άρα δεν έχουμε συσσωρευμένο φορτίο οπότε $\frac{dQ}{dt}=0$.

$$(2) \Rightarrow -K_2 \cdot w + \iint_{S_1} \bar J \cdot d\bar S_1 = 0 \quad (4) \Leftrightarrow -K_2 \cdot w + \iint_{S_1} \bar J \cdot \hat x \, dS_1 = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Rightarrow -K_2 \cdot w + \int_{y'=-w}^{0} \int_{z'=z}^{\ell} J_o e^{-z'/\ell} dy' dz' = 0 \Leftrightarrow J_o \cdot \int_{y'=-w}^{0} dy' \cdot \int_{z'=z}^{\ell} e^{-z'/\ell} dz' = K_2 \cdot w$$

$$\Rightarrow J_o \cdot [y]_{-w}^{0} (-\ell) \int_{z'=z}^{\ell} e^{-z'/\ell} \left(-\frac{1}{\ell}\right) dz' = K_2 \cdot w \Rightarrow$$

$$\Rightarrow J_o (0+w)(-\ell) \cdot \left[e^{-z'/\ell}\right]_{z'=z}^{\ell} = K_2 W \Leftrightarrow$$

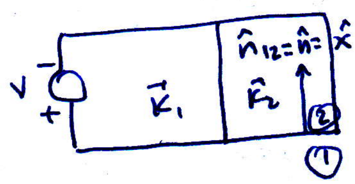
$$\Rightarrow -J_o \cancel{w} \ell \left(e^{-1} - e^{-z/\ell}\right) = K_2 \cdot \cancel{w} \Rightarrow J_o \cdot \ell \left(e^{-z/\ell} - e^{-1}\right) = K_2 \quad (3)$$

$$\Rightarrow K_2 = K_2(z) = \frac{\ell \cdot V}{Rw\ell(e^{-d/\ell} - e^{-1})} \cdot \left(e^{-z/\ell} - e^{-1}\right) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow K_2 = K_2(z) = \frac{V}{Rw(e^{-d/\ell} - e^{-1})}\left(e^{-z/\ell} - e^{-1}\right) \quad (5)$$

Β' Τρόπος

Επιλέγουμε περιοχή του αγώγιμου υλικού που οριακά ισχύει $x=0$:

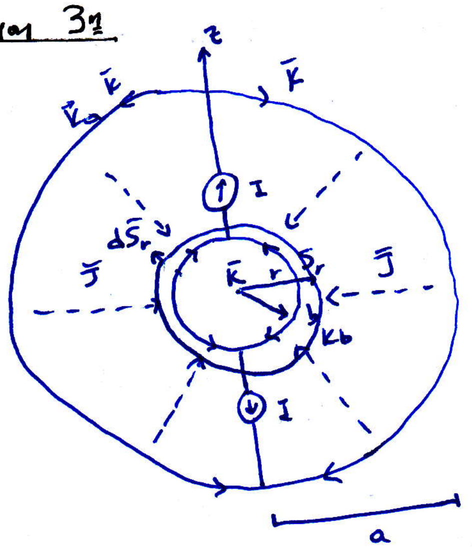


Επομένως, από την οριακή συνθήκη για $x=0$ παίρνουμε:

$$\hat n(\bar J_2 - \cancel{\bar J_1}) = -\bar\nabla \cdot \bar K_2 - \cancel{\frac{\partial \sigma}{\partial t}}^{0} \overset{\hat n = \hat x}{\Rightarrow} \hat x \cdot \bar J_2 \Big|_{x=0} = -\bar\nabla \cdot \bar K_2 \Rightarrow \hat x \cdot \bar J \Big|_{x=0} = -\bar\nabla \cdot \bar K_2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow -\frac{V \cdot e^{-z/\ell}}{w\ell R(e^{-d/\ell} - e^{-1})} = \frac{d}{dz} K_2(z) \Rightarrow K_2(z) = -\frac{V}{w\ell R(e^{-d/\ell} - e^{-1})} \int e^{-z/\ell} dz + c$$

Άσκηση 3η



Εδώ: $\bar J = -\hat r J_0(r)\sin\theta$.

α) Για τον υπολογισμό του $J_0(r)$ θεωρούμε σφαιρική επιφάνεια S_r, ακτίνας r, με $b<r<a$.
Από την αρχή Διατήρησης του Φορτίου θα έχουμε, με εφαρμογή της εξ. συνέχειας:

$[I]_{S_r} = -\cancel{\frac{dQ}{dt}}^{\,0}$ διότι $\frac{dQ}{dt}=0$ εφόσον τα υλικά είναι υλικά συνεχούς μορφής, άρα δεν έχουμε συσσώρευση φορτίου. Υποθέτουμε αρχικά πυκν. $\bar J$ χωρικά εξερχόμενο της S_r.

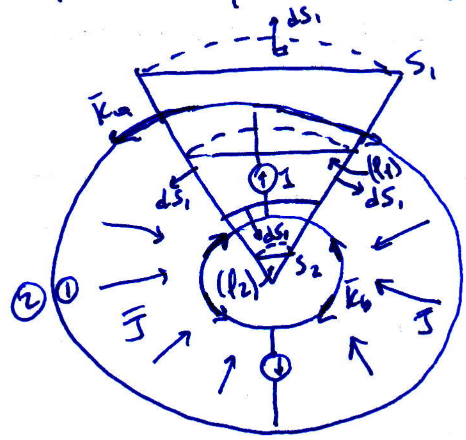
Άρα $2I + \oint_{S_r}\bar J\cdot d\bar S_r = 0 \Rightarrow 2I = -\oint_{S_r}\left[-J_0(r)\sin\theta\cdot\hat r\right]\hat r\, dS_r \Rightarrow$

$$\Rightarrow 2I = \oint_{S_r} J_0(r)\cdot\sin\theta\cdot\underbrace{r^2\sin\theta\, d\varphi\, d\theta}_{dS_r} \Rightarrow 2I = J_0(r)\int_{\theta=0}^{\pi}\int_{\varphi=0}^{2\pi}\sin\theta\cdot r^2\sin\theta\, d\varphi\, d\theta \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 2I = r^2 J_0(r)\int_0^{\pi}\sin^2\theta\, d\theta\cdot\int_0^{2\pi}d\varphi \Rightarrow 2I = r^2 J_0(r)\, 2\pi\cdot\int_0^{\pi}\frac{1-\cos 2\theta}{2}\, d\theta \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 2I = r^2 J_0(r)\cdot\pi\left[\theta - \tfrac{1}{2}\cancel{\sin 2\theta}\right]_0^{\pi} \Rightarrow J_0(r) = \frac{2I}{\pi^2 r^2}$$

Επομένως προκύπτει $\bar J = -J_0(r)\sin\theta\cdot\hat r = -\frac{2I}{\pi^2 r^2}\sin\theta\cdot\hat r$, δηλ. με φορά προς το κέντρο.



β) Για τον υπολογισμό της $\bar K_a$ θεωρούμε τη σφαιροκωνική επιφάνεια S_1 του σχήματος.

Α τρόπος

Πάλι από την Αρχή Διατήρησης Φορτίου θα έχουμε με εφαρμογή της εξίσωσης συνέχειας:

$$[I]_{S_1} = -\cancel{\frac{dQ}{dt}}^{\,0} \Rightarrow -I + \underset{\ell_1}{K_a(\theta)\cdot 2\pi a\sin\theta} + \oint_{S_1}\bar J\cdot d\bar S_1 = 0 \quad (1)$$

Στο τμήμα της επιφάνειας S_1 που βρίσκεται έξω από το αγώγιμο υλικό της σφαίρας έχουμε $\bar J = \bar 0$. Αυτόματα, στην κωνική επιφάνεια (στο παράπλευρο μέρος της) είναι $d\bar S_1 = \hat\theta\cdot dS_1$, οπότε εκεί έχουμε $d\bar S_1 \perp \bar J$. Στα προαναφερθέντα μέρη του σχήματος, ο όρος $\oint_{S_1}\bar J\cdot d\bar S_1$ θα είναι 0. Θα είναι μη μηδενικός μόνο στο κάτω μέρος της S_1, όπου $d\bar S_1 = -\hat r$.

Άρα,
$$\oint_{S_1}\bar J\cdot d\bar S_1 = \int_{\varphi=0}^{2\pi}\int_{\theta'=0}^{\theta} -\hat r J_0(r)\sin\theta'\cdot\underbrace{(-\hat r)\, r^2\sin\theta'\, d\theta'\, d\varphi}_{d\bar S_1} = r^2\, 2\pi J_0(r)\cdot\int_{\theta'=0}^{\theta}(\sin\theta')^2\, d\theta' =$$

$$= \cancel{r^2}\, 2\cancel{\pi}\cdot\frac{2I}{\cancel{\pi^2}\cancel{r^2}}\int_{\theta'=0}^{\theta}\frac{1-\cos 2\theta'}{2}\, d\theta' = \frac{2I}{\pi}\left[\theta' - \tfrac{1}{2}\sin 2\theta'\right]_0^{\theta} = \frac{2I}{\pi}\left(\theta - \frac{\sin 2\theta}{2}\right)$$

Άρα, (1) $\Rightarrow -I + K_a(\theta)\cdot 2\pi a\sin\theta + \frac{2I}{\pi}\left(\theta - \frac{\sin 2\theta}{2}\right) = 0 \Rightarrow$

$$\Rightarrow K_a(\theta)\cdot 2\pi a\sin\theta = I - \frac{2I}{\pi}\left(\theta - \frac{\sin 2\theta}{2}\right) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow K_a(\theta) = \frac{I}{2\pi a\sin\theta} - \frac{I}{\pi^2 a\sin\theta}\left(\theta - \frac{\sin 2\theta}{2}\right) = \frac{I}{2\pi^2 a\sin\theta}(\pi - 2\theta + \sin 2\theta) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \bar K_a(\theta) = \frac{I}{2\pi^2 a\sin\theta}(\pi - 2\theta + \sin 2\theta)\,\hat\theta$$

Β' Τρόπος

Με τη χρήση της οριακής συνθήκης, για $r=a$, στη σφαιρική επιφάνεια (όπου $\hat n = \hat r$) θα έχουμε:

$$\hat n(\bar J_2^{\,0} - \bar J_1) = -\bar\nabla\cdot\bar K_a - \cancel{\frac{\partial\sigma}{\partial t}}^{0} \xrightarrow{\hat n = \hat r} -\hat r\,\underbrace{\bar J_1}_{=\bar J} = -\bar\nabla\cdot\bar K_a \Leftrightarrow \hat r\,\bar J = \bar\nabla\bar K_a \quad (2)$$

Ισχύει σε σφαιρ. συν. ότι:

$$\nabla\bar K_a = \left(\frac{1}{r^2}\cdot\frac{\partial(r^2K_r)}{\partial r} + \frac{1}{r\sin\theta}\cdot\frac{\partial(K_\theta\cdot\sin\theta)}{\partial\theta} + \frac{1}{r\sin\theta}\cdot\frac{\partial K_\varphi}{\partial\varphi}\right)_{r=a} \quad (3)$$

όπως το $K_a = K_a(\theta)$ εξαρτάται μόνο από θ

Άρα (3) $\Rightarrow \bar\nabla\bar K_a = \frac{1}{a^2}\cdot\cancel{\frac{\partial(a^2K_r)}{\partial r}}^{0} + \frac{1}{a\sin\theta}\cdot\frac{\partial(K_\theta\cdot\sin\theta)}{\partial\theta} + \frac{1}{a\sin\theta}\cdot\cancel{\frac{\partial K_\varphi}{\partial\varphi}}^{0} \Rightarrow$

$$\Rightarrow \bar\nabla\bar K_a = \frac{1}{a\sin\theta}\cdot\frac{\partial(K_\theta\cdot\sin\theta)}{\partial\theta}$$

(2) $\Rightarrow \hat r\cdot\bar J = \frac{1}{a\sin\theta}\cdot\frac{\partial(K_\theta\cdot\sin\theta)}{\partial\theta} \Rightarrow \hat r\left(-\frac{2I}{\pi^2 r^2}\sin\theta\cdot\hat r\right)_{r=a} = \frac{1}{a\sin\theta}\cdot\frac{\partial(K_\theta\cdot\sin\theta)}{\partial\theta} \Rightarrow$

$$\Rightarrow -\frac{2I}{\pi^2 a^2}\sin\theta = \frac{1}{a\sin\theta}\cdot\frac{d(K_\theta\cdot\sin\theta)}{d\theta} \Rightarrow d(K_\theta\cdot\sin\theta) = -\frac{2I}{\pi^2 a}\sin^2\theta\,d\theta \Rightarrow$$

$$\Rightarrow K_\theta\cdot\sin\theta = -\frac{2I}{\pi^2 a}\int\sin^2\theta\,d\theta + c = -\frac{2I}{\pi^2 a}\int\frac{1-\cos 2\theta}{2}\,d\theta + c \Rightarrow$$

$$\Rightarrow K_\theta\cdot\sin\theta = -\frac{I}{\pi^2 a}\left(\theta - \frac{1}{2}\sin 2\theta\right) + c \xrightarrow{K_\theta = K_a(\theta)} K_a(\theta)\cdot\sin\theta = -\frac{I}{\pi^2 a}\left(\theta - \frac{1}{2}\sin 2\theta\right) + c \quad (4)$$

Ο παράλληλος κύκλος (l_1) με ακτίνα $a\cdot\sin\theta$, διαρρέεται από επιφανειακό ρεύμα με ένταση ίση με $K_a(\theta)\cdot l_1 = K_a(\theta)\cdot 2\pi a\sin\theta$. Όμως, για $\theta\to 0$ (συρρίκνωση του παράλληλου κύκλου στο βόρειο πόλο της σφαίρας) το ρεύμα που ρέει στο σημείο αυτό από την επιφάνεια είναι I (ρεύμα που προσάγει η πηγή). Άρα, $\lim_{\theta\to 0}[K_a(\theta)\cdot 2\pi a\sin\theta] = I \xrightarrow{(4)}$

$$\Rightarrow \lim_{\theta\to 0}\left[2\pi a\sin\theta\left(\frac{-1}{\pi^2 a\sin\theta}\left(\theta - \frac{1}{2}\sin 2\theta\right) + \frac{c}{\sin\theta}\right)\right] = I \Rightarrow 2\pi a c = I \Rightarrow c = \frac{I}{2\pi a}$$

(4) $\Rightarrow K_a(\theta) = -\frac{I}{\pi^2 a\sin\theta}\left(\theta - \frac{1}{2}\sin 2\theta\right) + \frac{I}{2\pi a\sin\theta} = \frac{I}{2\pi^2 a\sin\theta}(\pi - 2\theta + \sin 2\theta) \Rightarrow$

$$\Rightarrow \bar K_a(\theta) = \frac{I}{2\pi^2 a\sin\theta}(\pi - 2\theta + \sin 2\theta)\,\hat\theta$$

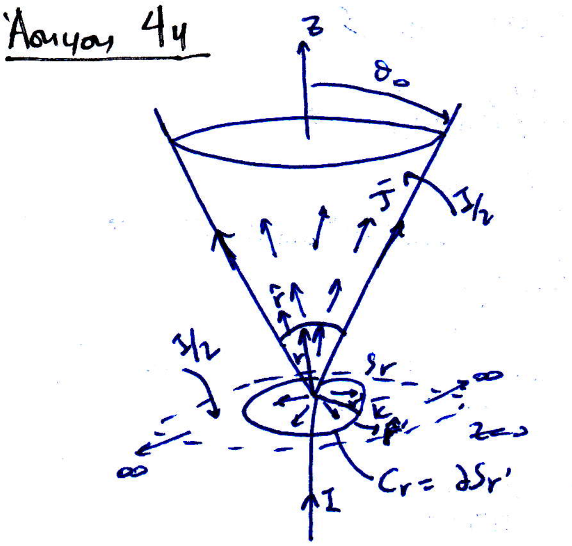
γ) Για τον υπολογισμό της $\bar{K}_b$ θεωρούμε την επιφάνεια $S=S_1+S_2$ (συνολική κωνική επιφάνεια του αγωγού). Πάλι, από την Αρχή Διατήρησης Φορτίου θα έχουμε, με εφαρμογή της στάσιμης συνθήκης:

$$[I]_S = -\cancel{\frac{dQ}{dt}}^{\to 0} \Rightarrow -K_b(\theta)\cdot 2\pi b\sin\theta + K_a(\theta)\cdot 2\pi a\sin\theta = 0 \Rightarrow K_b(\theta) = \frac{a}{b}K_a(\theta) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow K_b(\theta) = \frac{a}{b}\cdot\frac{I}{2\pi^2 a\sin\theta}(\pi-2\theta+\sin 2\theta) \Rightarrow K_b(\theta) = \frac{I}{2\pi^2 b\sin\theta}(\pi-2\theta+\sin 2\theta).$$

Όμως, $\bar{K}_b(\theta) = -\hat{\theta}\cdot K_b(\theta) \Leftrightarrow \bar{K}_b(\theta) = -\hat{\theta}\cdot\dfrac{I}{2\pi^2 b\sin\theta}(\pi-2\theta+\sin 2\theta)$

Άσκηση 4η



Για τον υπολογισμό του $\bar{K}$, θεωρούμε την κυκλική επιφάνεια, $S_{r'}$, στο επίπεδο $z=0$ με ακτίνα r'.
Εφαρμόζουμε την Αρχή Διατήρησης του Φορτίου για την επιφάνεια $S_{r'}$ και από την εξ. συνέχειας θα έχουμε:

$$[I]_{S_{r'}} = -\cancel{\frac{\partial Q}{\partial t}}^{\to 0} \Rightarrow -I + K(r')2\pi r' + \frac{I}{2} = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow K(r')\cdot 2\pi r' = \frac{I}{2} \Rightarrow K(r') = \frac{I}{4\pi r'}$$

Άρα, με $\hat{r}'$ το μοναδιαίο διάνυσμα, κάθετο σε κάθε σημείο του συνόρου C_r της S_r (ακτινικό) θα έχουμε: $\bar{K} = K(\bar{r}')\cdot\hat{r}' \Rightarrow \bar{K} = \dfrac{I}{4\pi r'}\cdot\hat{r}'$

Για τον υπολογισμό του $\bar{J}$, θεωρούμε το τμήμα σφαιρικής επιφάνειας, S_r, που τέμνει την επιφάνεια του συμπαγούς κωνικού αγωγού. Θα έχουμε ότι:

$$\frac{I}{2} = \int_{S_r}\bar{J}\cdot d\bar{S}_r = \int_{S_r}\hat{r}J(r)\cos\theta\cdot\hat{r}\,dS_r = \int_{S_r}J(r)\cdot\cos\theta\cdot dS_r \Rightarrow$$

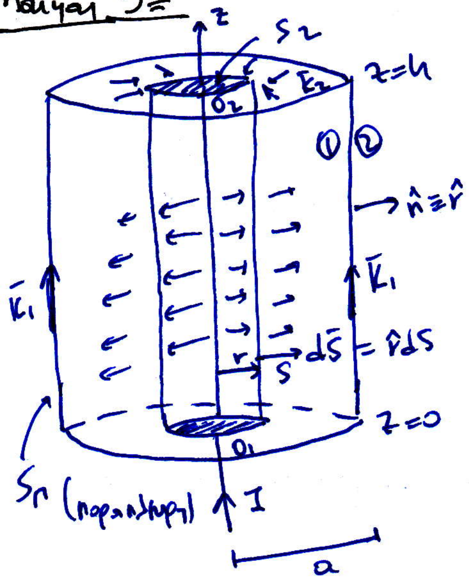
$$\Rightarrow \frac{I}{2} = \int_{\theta=0}^{\theta_0}\int_{\varphi=0}^{2\pi}J(r)\cdot\cos\theta\cdot\underbrace{r^2\sin\theta\,d\varphi\,d\theta}_{dS_r} \Rightarrow \frac{I}{2} = r^2J(r)\cdot 2\pi\int_0^{\theta_0}\cos\theta\cdot\sin\theta\,d\theta \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{I}{2} = r^2J(r)\cdot 2\pi\cdot\int_0^{\theta_0}\frac{\sin 2\theta}{2}\,d\theta \Rightarrow \frac{I}{2} = r^2J(r)\cdot\pi\left(-\frac{\cos 2\theta}{2}\right]_0^{\theta_0} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{I}{2} = r^2J(r)\cdot\pi\left[-\frac{\cos 2\theta_0}{2}+\frac{1}{2}\right] \Rightarrow I = r^2J(r)\cdot\pi(1-\cos 2\theta_0) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow J(r) = \frac{I}{r^2\pi(1-\cos 2\theta_0)}$$

Άσκηση 5η



α) Θεωρούμε την κυλινδρική επιφάνεια S του σχήματος, με ακτίνα r.

Για z=h η ένταση του γραμμικού ρεύματος I τελικά μηδενίζεται. Επομένως, όλο το γραμμικό I μετατρέπεται σε ρεύμα χωρικής πυκνότητας $\bar J$. Θα είναι:

$$I = \int_S \bar J \, d\bar S = \int_S \hat r \, \frac{c e^{-z/h}}{r} \, \hat r \, ds \Rightarrow$$

$$\Rightarrow I = -2\pi c h (e^{-1} - 1) \Rightarrow I = 2\pi c h \cdot (1 - e^{-1}) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow c = \frac{I}{2\pi h (1 - e^{-1})}$$

β) Το ρεύμα χωρικής πυκνότητας $\bar J$ καταλήγει στην παράπλευρη επιφάνεια S_π, ακτίνας r=a. Από την οριακή συνθήκη για την παράπλευρη επιφάνεια S_π (r=a) θα έχουμε:

$$\hat n \cdot (\cancel{\bar J_2}^{\,0} - \bar J_1) = -\cancel{\frac{\partial \sigma}{\partial t}}^{\,0} - \bar\nabla \bar K_1 \quad (1)$$

Επίσης, σε κυλινδρικές συν. έχουμε: $\bar\nabla \cdot K_1 = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r}(r K_{1r}) + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \varphi}(K_{1\varphi}) + \frac{\partial}{\partial z}(K_{1z})$ (2)

Το $\bar K_1$ θα εξαρτάται μόνο από τη μεταβλητή z, αφού βρίσκεται στη σταθερή κυλινδρ. επιφάνεια ακτίνας r=a και το ρεύμα διαδίδεται στην επιφάνεια ομοιόμορφα μέσω του άξονα.

$$(2) \Rightarrow \bar\nabla \bar K_1 = \frac{d}{dz}(K_{1z}) \quad (3)$$

$$(1) \overset{(3)}{\Rightarrow} -\hat n \bar J_1 = -\frac{d}{dz}(K_{1z}) \xrightarrow{\bar J_1 = \bar J} \hat n \bar J = \frac{d}{dz}(K_{1z}) \xrightarrow{\hat n = \hat r} \hat r \cdot \hat r \, \frac{I}{2\pi h (1 - e^{-1})} e^{-z/h} \cdot \frac{1}{r}\Big|_{r=a} = \frac{d}{dz}(K_{1z})$$

$$\Rightarrow \frac{I}{2\pi a h (1 - e^{-1})} e^{-z/h} = \frac{d K_1(z)}{dz} \Rightarrow K_1(z) = \frac{I}{2\pi a h (1 - e^{-1})} \int e^{-z/h} dz + c' \Rightarrow$$

$$\Rightarrow K_1(z) = \frac{I(-h) e^{-z/h}}{2\pi a h (1 - e^{-1})} + c' \Rightarrow K_1(z) = \frac{I e^{-z/h}}{2\pi a (e^{-1} - 1)} + c' \quad (4)$$

Για z=h το ρεύμα που ρέει στην παράπλευρη επιφάνεια (κυλινδρ.) του σχήματος θα ισούται με I (αφού τότε, όλο το ρεύμα θα έχει συγκεντρωθεί στο ανώτερο σημείο της παράπλευρης επιφάνειας, ώστε στη συνέχεια να διαδοθεί ακτινικά στην πάνω βάση του κυλίνδρου προς το κέντρο αυτής.

Επομένως, $\lim_{z\to h}\left[2\pi a K_1(z)\right] = I \Rightarrow 2\pi a \lim_{z\to h}\left[\frac{I e^{-z/h}}{2\pi a(e^{-1}-1)} + c'\right] = I \Rightarrow$

$$\Rightarrow 2\pi a \frac{I e^{-1}}{2\pi a (e^{-1}-1)} + c' \cdot 2\pi a = I \Rightarrow c' = \frac{1}{2\pi a}\left(1 - \frac{e^{-1}}{e^{-1}-1}\right).$$

Άρα $(4) \Rightarrow K_1(z) = \frac{I e^{-z/h}}{2\pi a(e^{-1}-1)} + \frac{I}{2\pi a}\left(1 - \frac{e^{-1}}{e^{-1}-1}\right) =$

$$= \frac{I}{2\pi a(e^{-1}-1)}\left(e^{-z/h} + e^{-1} - 1 - e^{-1}\right) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow K_1(z) = \frac{I(e^{-z/h}-1)}{2\pi a(e^{-1}-1)}$$

γ) Το γραμμικό ρεύμα $I_{γρ}(z)$ που παραμένει για $0<z<h$ πάνω στον άξονα του z, θα ισούται με το αρχικό, ολικό ρεύμα I μείον το ρεύμα που έχει εκπορευθεί, μέχρι αυτό το z, σε ρεύμα χωρικής πυκνότητας $\bar{J}$ και διορρέει στο εσωτερικό του κυλίνδρου. Συνεπώς,

$$I_{γρ}(z) = I - \int_{\varphi=0}^{2\pi}\int_{z'=0}^{z} \bar{J}\,d\bar{S} = I - \int_{\varphi=0}^{2\pi}\int_{z'=0}^{z} \hat{r}\,\frac{I}{2\pi h(1-e^{-1})}\cdot\frac{e^{-z'/h}}{r}\cdot\hat{r}\,dS =$$

$$= I - \int_{\varphi=0}^{2\pi}\int_{z'=0}^{z} \frac{I}{2\pi h(1-e^{-1})}\cdot\frac{e^{-z'/h}}{r}\cdot \underbrace{r\,dz'\,d\varphi}_{dS} =$$

$$= I - 2\pi\frac{I}{2\pi h(1-e^{-1})}\int_0^z e^{-z'/h}\,dz' =$$

$$= I - \frac{I}{h(1-e^{-1})}(-h)\left[e^{-z'/h}\right]_0^z =$$

$$= I + \frac{I}{1-e^{-1}}\left(e^{-z/h}-1\right) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow I_{γρ}(z) = I\left(1 - \frac{1-e^{-z/h}}{1-e^{-1}}\right).$$