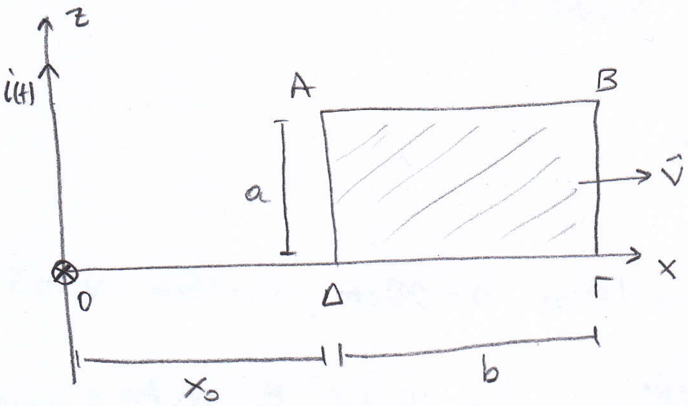
Ηλ. Πεδία Α

Χρήστος Τσούφης

4η Σειρά Ασκήσεων

03117176

Άσκηση 1η (4.6)



$i(t) = I_{max} \cdot \sin(\omega t)$

- Για $t \geq 0$: Το σημείο Δ βρίσκεται στη θέση $x_0 + V_0 \cdot t$ του xx'
- Έστω θετική φορά διαγραφής του βρόχου την ΑΒΓΔ, επομένως το στοιχειώδες διάνυσμα επιφάνειας που σχηματίζει ο βρόχος είναι το $d\bar{S} = dS_y \cdot \hat{y} = dx\,dz\,\hat{y}$ όπου $x \in [x_0 + V_0 t,\ x_0 + V_0 t + b]$, $z \in [0, a]$
- Επίσης, σύμφωνα ότι η διάταξη βρίσκεται στον κενό χώρο με διαπερατότητα μ_0,

$$\Psi_m(t) = \iint_S \bar{B}(t) \cdot d\bar{S}$$

a) Η προσέγγιση χαμηλών συχνοτήτων οδηγεί στο γεγονός ότι το μαγνητικό πεδίο του αγωγού είναι προσεγγιστικά ίσο με το πεδίο του αγωγού που διαρρέεται από σταθερό ρεύμα $I_0 = I_{max}$

- Ο αγωγός αυτός δημιουργεί μαγνητικό πεδίο έντασης $\bar{H}(r) = \frac{I_0}{2\pi r}\hat{\varphi}$, όπου r η απόσταση από τον άξονα zz'.

- Στο επίπεδο xz, $x > 0$: $r = x$, $\hat{\varphi} = \hat{y}$, οπότε:

$$\Psi_m(t) = \iint_S \bar{B}(r,t)\, d\bar{S} = \mu_0 \iint_S \bar{H}(r,t)\, d\bar{S} = \mu_0 \int_0^a \int_{x_0+V_0t}^{x_0+V_0t+b} \bar{H}(x)\, dx\, dz\, \hat{y} =$$

$$= \mu_0 \left(\int_0^a dz \right) \cdot \left(\int_{x_0+V_0t}^{x_0+V_0t+b} \frac{I_0}{2\pi x} dx \right) = \frac{\mu_0 I_0 a}{2\pi} \left[\ln x \right]_{x = x_0+V_0t}^{x = x_0+V_0t+b} =$$

$$= \frac{\mu_0 I_0 a}{2\pi} \ln\left(\frac{x_0+V_0t+b}{x_0+V_0t} \right) = \mu_0 \frac{I_0 a}{2\pi} \ln\left(1 + \frac{b}{x_0+V_0t} \right),\ t \geq 0$$

- Η ΗΕΔ που επάγεται στο βρόχο ισούται με:

$$E_{HE\Delta}(t) = -\frac{d\Psi_m(t)}{dt} = -\frac{d}{dt}\left(\mu_0 \frac{I_0 a}{2\pi} \ln\left(1+\frac{b}{x_0+V_0 t}\right)\right) =$$

$$= -\frac{\mu_0 I_0 a}{2\pi} \cdot \frac{1}{1+\frac{b}{x_0+V_0 t}} \cdot \frac{d}{dt}\left(1+\frac{b}{x_0+V_0 t}\right) =$$

$$= \frac{\mu_0 I_0 a b V_0}{2\pi} \cdot \frac{1}{(x_0+V_0 t)^2 \cdot (x_0+V_0 t+b)}$$

- Για $I_{max} = 100A$, $\omega = 100\pi\ r/s$, $t = 10s$, $a = 10cm$, $b = 20cm$, $x_0 = 15cm$, $v = 0{,}5\ m/s$

- $\Psi_m(10) = \mu_0 \cdot \frac{100A \cdot 10cm}{2\pi} \ln\left(1+\frac{20cm}{15cm + 0{,}5\frac{m}{s}\cdot 10s}\right) \simeq 4\pi \cdot 10^{-7}\frac{H}{m} \cdot \frac{10\ Am}{2\pi} \ln(1{,}04) \Leftrightarrow$

$\Rightarrow \Psi_m(10) \simeq 0{,}78 \cdot 10^{-7}$ Weber

- $E_{HE\Delta}(10) = 4\pi \cdot 10^{-7}\frac{H}{m} \cdot \frac{100A \cdot 10cm \cdot 20cm}{2\pi} \cdot 0{,}5\frac{m}{s} \cdot \frac{1}{(15cm + 0{,}5\frac{m}{s}\cdot 10s)^2} \cdot \frac{1}{(15cm + 0{,}5\frac{m}{s}\cdot 10s + 20cm)} =$

$$= 10^{-7}\frac{H}{m} \cdot 2Am^3 \cdot \frac{1}{(5{,}15m)^2} \cdot \frac{1}{5{,}35m} = 1{,}41 \cdot 10^{-9}\ V$$

β) · Εδώ $\bar{B} = B_0 \cdot \hat{y}$, επομένως:

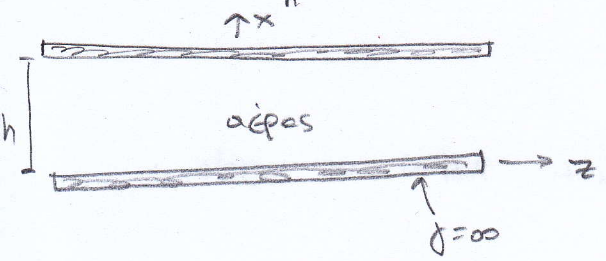
$$\Psi_m(t) = \iint_S \bar{B} \cdot d\bar{s} = \iint_S B_0 \cdot \hat{y}\, dS_y \cdot \hat{y} = B_0 \iint_S dS = B_0 \cdot a \cdot b$$

· $E_{HE\Delta}(t) = -\frac{d\Psi_m(t)}{dt} = 0\ V$

· Εδώ, αντίθετα με το (α), το μαγνητικό πεδίο δεν μεταβάλλεται καθώς κινείται ο βρόχος. Έτσι, το Ψ_m είναι σταθερό και συνεπώς, δεν εμφανίζεται ΗΕΔ στο βρόχο.

Άσκηση 2η (4.12)

$$\bar{H} = \hat{y} H_0 \cos\frac{\pi x}{h} \cos(\omega t - \beta z)$$



Φασιθέτης έντασης μαγν. πεδίου:

$$\bar{H}(x,z,t) = \hat{y}\, H_0 \cos\left(\frac{\pi x}{h}\right)\cos(\omega t - \beta z) = Re\left\{\hat{y}\, H_0 \cos\left(\frac{\pi x}{h}\right) e^{-\beta z}\, e^{j\omega t}\right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \dot{\bar{H}} = \hat{y}\, H_0 \cos\left(\frac{\pi x}{h}\right) e^{-\beta z}$$

Φασιθέτης έντασης ηλεκτρ. πεδίου:

$$\nabla \times \dot{\bar{H}} = j\omega\varepsilon_0 \bar{E} \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} \dfrac{\partial \dot{H}_z}{\partial y} - \dfrac{\partial \dot{H}_y}{\partial z} = j\omega\varepsilon_0 \dot{E}_x \\ \dfrac{\partial \dot{H}_x}{\partial z} - \dfrac{\partial \dot{H}_z}{\partial x} = j\omega\varepsilon_0 \dot{E}_y \\ \dfrac{\partial \dot{H}_y}{\partial x} - \dfrac{\partial \dot{H}_x}{\partial y} = j\omega\varepsilon_0 \dot{E}_z \end{array} \right.$$

$(\bar{J}=0)$

Είναι $\dot{H}_x = \dot{H}_z = 0$, από υπόθεση, οπότε προκύπτουν:

$$\left\{ \begin{array}{l} \dot{E}_x = j\cdot\dfrac{1}{\omega\varepsilon_0}\dfrac{\partial \dot{H}_y}{\partial z} = j\dfrac{1}{\omega\varepsilon_0}(-j\beta)\, H_0 \cos\left(\dfrac{\pi x}{h}\right) e^{-j\beta z} \\ \dot{E}_y = 0 \\ \dot{E}_z = -j\dfrac{1}{\omega\varepsilon_0}\dfrac{\partial \dot{H}_y}{\partial x} = j\dfrac{1}{\omega\varepsilon_0}\dfrac{\pi}{h} H_0 \sin\left(\dfrac{\pi x}{h}\right) e^{-j\beta z} \end{array} \right\} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} \dot{E}_x = \left(\dfrac{\beta}{\omega\varepsilon_0}\right)\cdot H_0 \cdot \cos\left(\dfrac{\pi x}{h}\right) e^{-\beta z} \\ \dot{E}_y = 0 \\ \dot{E}_z = \dfrac{j\pi}{\omega\varepsilon_0 \cdot h} H_0 \sin\left(\dfrac{\pi x}{h}\right) e^{-\beta z} \end{array} \right.$$

Άρα, $\bar{E}(x,z,t) = Re\{\dot{E}_x e^{j\omega t}\}\hat{x} + Re\{\dot{E}_y e^{j\omega t}\}\hat{y} + Re\{\dot{E}_z e^{j\omega t}\}\hat{z} =$

$$= \hat{x}\frac{\beta}{\omega\varepsilon_0} H_0 \cos\left(\frac{\pi x}{h}\right)\cos(\omega t - \beta z) - \hat{z}\frac{\pi}{\omega\varepsilon_0 h} H_0 \sin\left(\frac{\pi x}{h}\right)\sin(\omega t - \beta z)$$

- Μπορούμε να βρούμε την σταθερά διάδοσης β γράφοντας την εξ. Helmholtz για το $\dot{E}$.

Το E θα πρέπει να ικανοποιεί την κυματική εξ., κάθε συνιστώσα του φασιθέτη $\dot{E}$ θα πρέπει να ικανοποιεί την $\nabla \cdot \dot{E} + k^2 \bar{E} = 0$.

Για την $\dot{E}_x = \frac{\beta}{\omega \varepsilon_0} H_0 \cos\left(\frac{\pi x}{h}\right) \cos(\omega t - \beta z)$ θα πρέπει λοιπόν να ισχύει:

$$\frac{\partial^2 \dot{E}_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \dot{E}_x}{\partial z^2} + k^2 \dot{E}_x = 0$$

Οπότε προκύπτει: $\frac{\partial^2}{\partial x^2} \dot{E}_x = -\frac{\pi^2}{h^2} \dot{E}_x$, $\frac{\partial^2}{\partial z^2} \dot{E}_z = -\beta^2 \dot{E}_x$

Και από εξ. Helmholtz: $\left(-\frac{\pi^2}{h^2} - \beta^2 + k^2\right) \dot{E}_x = 0 \Leftrightarrow \beta = \sqrt{k^2 - \frac{\pi^2}{h^2}} = \underbrace{\sqrt{\omega^2 \varepsilon_0 \mu_0 - \frac{\pi^2}{h^2}}}_{\text{σταθερά διάδοσης των μη αποσβεννύμενων ρυθμών}}$

- Επαλήθευση Gauss:

$$\nabla \cdot \hat{D} = \nabla(\varepsilon_0 \dot{E}) = \varepsilon_0 (\nabla \cdot \dot{E}) = \varepsilon_0 \left(\frac{\partial \dot{E}_x}{\partial x} + \frac{\partial \dot{E}_y}{\partial y} + \frac{\partial \dot{E}_z}{\partial z} \right) =$$

$$= \varepsilon_0 \left(-\frac{\beta}{\omega \varepsilon_0} H_0 \cdot \frac{\pi}{h} \cdot \sin\left(\frac{\pi x}{h}\right) \cos(\omega t - \beta z) + 0 + \right.$$

$$\left. + H_0 \cdot \frac{\pi}{\omega \varepsilon_0 h} \sin\left(\frac{\pi x}{h}\right) \cos(\omega t - \beta z) \cdot \beta \right) = 0 = \rho, \text{ επαληθεύεται}$$

β) Για την επαλήθευση των οριακών συνθηκών για τις εφαπτομενικές συνιστώσες του E, παρατηρούμε ότι λόγω της άπειρης αγωγιμότητας των πλακών, το Η/Μ πεδίο είναι περιορισμένο μεταξύ $x=0$ και $x=h$. Επιπλέον, ελλείψει άλλων πηγών / φορτίων, το πεδίο εκτός των πλακών είναι μηδενικό. Λόγω της συνέχειας των εφαπτομενικών συνιστωσών του $\bar{E}$, είναι αναμενόμενο σύμφωνα με το παραπάνω να είναι $E_z(x=0)=0$ και $E_z(x=h)=0$ (ισχύει $E_y(x=h) = E_y(x=0) = 0$).

Πράγματι, $E_z(x=0, z, t) = \frac{\pi}{\omega \varepsilon_0 h} H_0 \sin\left(\frac{\pi \cdot 0}{h}\right) \sin(\omega t - \beta z) = 0$

$$E_z(x=h, z, t) = \frac{\pi}{\omega \varepsilon_0 h} H_0 \sin\left(\frac{\pi h}{h}\right) \sin(\omega t - \beta z) = 0$$

Για τις επιφανειακές πυκνότητες φορτίου ισχύει ότι θα πρέπει να ικανοποιούν τις οριακές συνθήκες του $\bar{D}$:

$$\sigma(x=0) = D_x(x=0^+) - D_x(x=0^-) = \varepsilon_0\left(E_x(x=0^+) - E_x(x=0^-)\right) =$$

$$= \varepsilon_0\left(\frac{\beta}{\omega\varepsilon_0} H_0 \cos\left(\frac{\pi \cdot 0}{h}\right)\cdot\cos(\omega t - \beta z) - 0\right) = \frac{\beta}{\omega} H_0 \cos(\omega t - \beta z)$$

$$\sigma(x=h) = D_x(x=h^+) - D_x(x=h^-) = \varepsilon_0\left(E_x(x=h^+) - E_x(x=h^-)\right) =$$

$$= \varepsilon_0\left(0 - \frac{\beta}{\omega\varepsilon_0} H_0 \cos\left(\frac{\pi h}{h}\right)\cos(\omega t - \beta z)\right) = \frac{\beta}{\omega} H_0 \cos(\omega t - \beta z)$$

Αντίστοιχα, για τις επιφ. πυκνότητες ρεύματος:

$$\bar{K}(x=0) = \hat{x} \times \left(\bar{H}(x=0^+) - \bar{H}(x=0^-)\right) = \hat{x} \times \left(H(x=0^+) - 0\right) =$$

$$= \hat{x} \times \left(\hat{y} H_0 \cos\left(\frac{\pi \cdot 0}{h}\right)\cos(\omega t - \beta z)\right) = \hat{z} H_0 \cos(\omega t - \beta z)$$

$$\bar{K}(x=h) = \hat{x} \times \left(\bar{H}(x=h^+) - \bar{H}(x=h^-)\right) = \hat{x} \times \left(0 - \bar{H}(x=h^-)\right) =$$

$$= \hat{x} \times \left(-\hat{y} H_0 \cos\left(\frac{\pi h}{h}\right)\cos(\omega t - \beta z)\right) = \hat{z} H_0 \cos(\omega t - \beta z)$$

Ο Νόμος Διατήρησης Φορτίου οπότε να ισχύει στις πλάκες η ορ. συνθήκη:

$$\hat{n}\cdot(\bar{J}_2 - \bar{J}_1) = -\nabla\bar{K} - \frac{\partial}{\partial t}\sigma$$

Είναι $\bar{J} = \bar{0}$ μεταξύ των πλακών, όπως προκύπτει από το σχήμα της εκφώνησης. Επιπλέον, εκτός των πλακών πρέπει $\bar{J} = \bar{0}$, αφού δεν υπάρχει Η/Μ πεδίο εκεί. Άρα $\bar{J} = \bar{0}$ παντού οπότε αρκεί $\nabla\cdot\bar{K} = -\frac{\partial}{\partial t}\sigma \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow \frac{\partial K_x}{\partial x} + \frac{\partial K_y}{\partial y} + \frac{\partial K_z}{\partial z} = -\frac{\partial}{\partial t}\sigma$$

Οι εκφράσεις των K, σ είναι ταυτόσημες οπότε αρκεί η επιβεβαίωση μόνο για την πλάκα $x=0$.

$$\frac{\partial K_x(x=0)}{\partial x} + \frac{\partial K_y(x=0)}{\partial y} + \frac{\partial K_z(x=0)}{\partial z} = -\frac{\partial}{\partial t}\sigma(x=0) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 0 + 0 + H_0\left(-\sin(\omega t - \beta z)\right)(-\beta) = -\frac{\beta}{\omega} H_0\left(\left(-\sin(\omega t - \beta z)\right)\cdot\omega\right) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \beta \cdot H_0 \cdot \sin(\omega t - \beta z) = \beta \cdot H_0 \sin(\omega t - \beta z)$$, ισχύει