

Άσκηση 31

Θερμιονική εκπομπή ηλεκτρονίων

31.1 Σκοπός

Στην άσκηση αυτή μελετάται το φαινόμενο της θερμιονικής εκπομπής και ελέγχονται οι δύο βασικοί νόμοι του φαινομένου, ο νόμος του Langmuir ή νόμος “3/2” (τριών δευτέρων) και ο νόμος του Richardson. Προσδιορίζεται εξάλλου το έργο εξαγωγής των ηλεκτρονίων από το βολφράμιο με τη μέθοδο Richardson.

31.2 Θεωρία

31.3

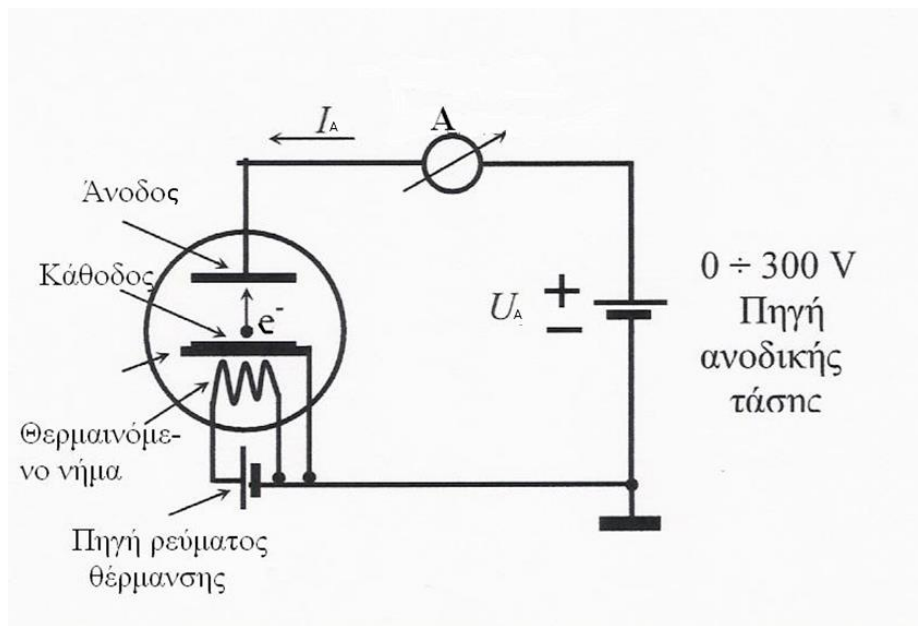
31.2.1 Το φαινόμενο της θερμιονικής εκπομπής

Όπως είναι γνωστό, στις υψηλές θερμοκρασίες τα μέταλλα εκπέμπουν ηλεκτρόνια. Αν τα ηλεκτρόνια αυτά δεν συλλέγονται από άλλον αγωγό, θα σχηματιστεί πάνω από τη θερμή επιφάνεια ένα νέφος ηλεκτρονίων, οι ροές των οποίων, από και προς την επιφάνεια, θα είναι ίσες. Αν όμως, κοντά στη θερμή επιφάνεια, τοποθετηθεί ένας αγωγός στον οποίο εφαρμόζεται θετικό δυναμικό σε σχέση με τη θερμή μεταλλική επιφάνεια, ένα μέρος των ηλεκτρονίων του νέφους θα οδηγηθεί προς τον αγωγό αυτό. Η θερμή επιφάνεια βρίσκεται συνήθως σε χώρο υψηλού κενού, ώστε να προστατεύεται από τις οξειδώσεις και να διευκολύνεται η κίνηση των ηλεκτρονίων. Στις ηλεκτρονικές διατάξεις, η θερμή επιφάνεια λειτουργεί ως πηγή ηλεκτρονίων και ονομάζεται **κάθοδος**. Ο δεύτερος αγωγός, συνήθως υπό μορφή μεταλλικού δίσκου ή κυλίνδρου, λειτουργεί ως συλλέκτης ηλεκτρονίων και ονομάζεται **άνοδος**. Τα δύο ηλεκτρόδια, άνοδος και κάθοδος, τοποθετημένα σε χώρο υψηλού κενού, συγκροτούν την ονομαζόμενη **δίοδο κενού** και αποτελούν τα βασικότερα στοιχεία των ηλεκτρονικών λυχνιών, καθοδικών σωλήνων των παλμογράφων, ραντάρ, τηλεοράσεων και οθονών υπολογιστών, κλειστρών, πηγών ακτίνων X, ηλεκτρονικών μικροσκοπίων κ.τ.λ.

31.2.2 Θέρμανση της καθόδου - Ανοδικό ρεύμα

Η θέρμανση της καθόδου, άμεση ή έμμεση (Σχ. 31.1), επιτυγχάνεται με έναν θερμαντήρα, ο οποίος τροφοδοτείται συνήθως από μια ξεχωριστή πηγή τάσης 6,3 V ac. Πηγή ηλεκτρονίων είναι ένα λεπτό στρώμα οξειδίου του βαρίου (BaO) που βρίσκεται πάνω σε φύλλο νικελίου. Στις θερμοκρασίες 1000 – 1100 °C, το BaO έχει τη μεγαλύτερη απόδοση εκπομπής, ίση με 100 mA/cm², και χρησιμοποιείται σχεδόν σε όλες τις ηλεκτρονικές διατάξεις που αναφέραμε πιο πάνω.

Όταν στην άνοδο εφαρμόζεται θετικό δυναμικό σε σχέση με την κάθοδο, η ροή των ηλεκτρονίων που καταφθάνουν στην άνοδο δημιουργεί ένα ρεύμα, το λεγόμενο ανοδικό ρεύμα I_A , το οποίο μπορεί να μετρηθεί, αρκεί η σύνδεση της ανόδου με τον θετικό πόλο της πηγής ανοδικής τάσης (Σχ.31.1) να γίνει μέσω ενός ευαίσθητου μετρητή ρεύματος.



Σχήμα 31.1 Κύκλωμα τροφοδότησης διόδου κενού με κάθοδο εμμέσου θερμάνσεως. Η κάθοδος θερμαίνεται με τη βοήθεια ενός θερμαινόμενου νήματος που τροφοδοτείται από μια πηγή ρεύματος θέρμανσης. Μεταξύ ανόδου και καθόδου εφαρμόζεται η ανοδική τάση (U_A) με τη βοήθεια μιας πηγής συνεχούς τάσης ($0 - 300 \text{ V}$). Τα ηλεκτρόνια (e^-) που μεταβαίνουν από την κάθοδο στην άνοδο δημιουργούν το ανοδικό ρεύμα (I_A), το οποίο μετράται με ένα αμπερόμετρο (A).

31.2.3 Ο ρόλος της ανοδικής τάσης - Νόμος του Langmuir ή νόμος των 3/2

Το ανοδικό ρεύμα είναι μια περίπλοκη συνάρτηση της ανοδικής τάσης, U_A , και της θερμοκρασίας της καθόδου T . Στο Σχ. 31.2 δίνεται η γραφική παράσταση του ανοδικού ρεύματος, I_A , συναρτήσει της ανοδικής τάσης, U_A , για μια δίοδο, η κάθοδος και η άνοδος της οποίας είναι κατασκευασμένες από το ίδιο υλικό και η θερμοκρασία της καθόδου διατηρείται σταθερή. Η γραφική παράσταση της συνάρτησης $I_A = I_A(U_A)$ μπορεί να χωριστεί σε τρεις περιοχές:

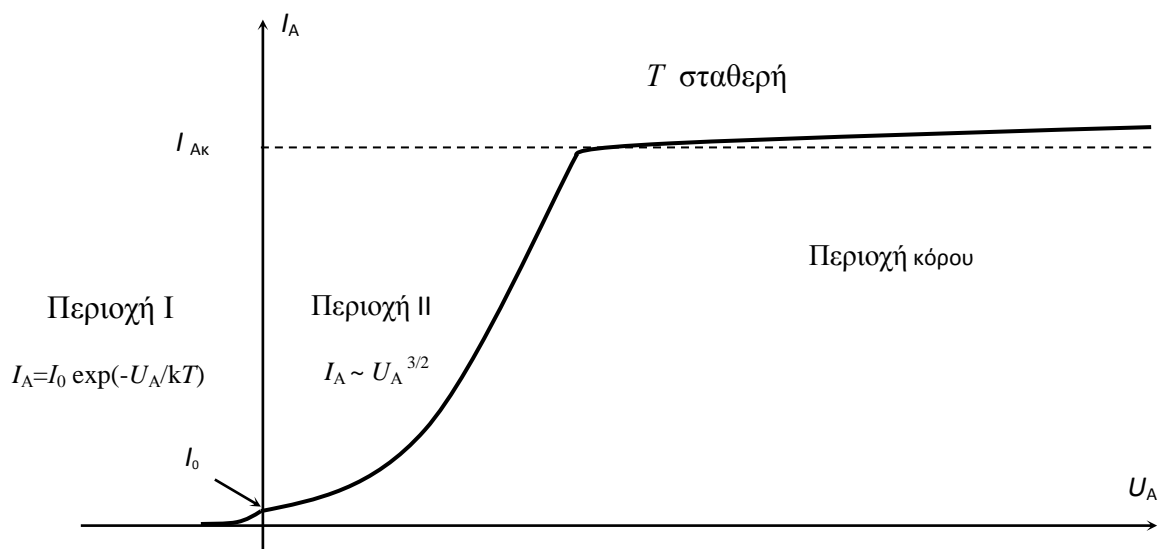
- Περιοχή επιβράδυνσης των ηλεκτρονίων ($U_A < 0$),
- Περιοχή φορτίων χώρου του νέφους ηλεκτρονίων ($0 < U_A < U_{\text{κορ}}$), όπου $U_{\text{κορ}}$ είναι η **τάση κορεσμού**
- Περιοχή κόρου ($U_A > U_{\text{κορ}}$).

Στη συνέχεια θα εξετάσουμε κάθε περιοχή χωριστά

- I. Στην πρώτη περιοχή το ανοδικό ρεύμα είναι εκθετική συνάρτηση της τάσης και είναι συγκριτικά πολύ μικρότερο από ό,τι στις άλλες δύο περιοχές. Οφείλεται σε ηλεκτρόνια που εγκαταλείπουν την κάθοδο με μεγάλες αρχικές ταχύτητες και, παρά το γεγονός ότι η άνοδος τα απωθεί, εκείνα που έχουν θερμική ενέργεια μεγαλύτερη από eU_A συγκρούονται με την άνοδο και δημιουργούν το ανοδικό ρεύμα. Το ανοδικό ρεύμα ακολουθεί τον νόμο $I_A = I_0 \exp(-U_A/kT)$.
- II. Στη δεύτερη περιοχή της καμπύλης το ανοδικό ρεύμα επηρεάζεται σε μεγάλο βαθμό από το ηλεκτρικό πεδίο του νέφους ηλεκτρονίων που δημιουργείται πάνω από την επιφάνεια της καθόδου και υπακούει στον νόμο:

$$I_A = I_0 + B \times U_A^{3/2} \approx B \times U_A^{3/2}, \text{ επειδή } I_0 \approx 0 \quad (31.1)$$

όπου B μια σταθερά. Η Εξ. (31.1) αποτελεί τον πρώτο σπουδαίο νόμο της θερμοϊονικής εκπομπής και ονομάζεται **νόμος του Langmuir** ή **νόμος των "3/2"** (νόμος των τριών δευτέρων). Ο Langmuir πρώτος εξήγαγε θεωρητικά τον νόμο αυτό, με την προσέγγιση ότι οι αρχικές ταχύτητες των ηλεκτρονίων είναι μηδέν. (βλ. Παράρτημα Π31, Παράγρ. Π31.3).



Σχήμα 31.2. Η καμπύλη ρεύματος-τάσης της διόδου όταν η θερμοκρασία, T , της καθόδου είναι σταθερή. Στην Περιοχή I η συμπεριφορά του ρεύματος είναι εκθετική, στην Περιοχή II ακολουθεί το νόμο του Langmuir, ενώ στην Περιοχή III, που είναι η περιοχή κόρου, το ρεύμα παραμένει σχεδόν σταθερό.

III. Στην τρίτη περιοχή, ή **περιοχή κόρου**, το ανοδικό ρεύμα (I_{AK}) παραμένει σχεδόν αμετάβλητο. Στην περιοχή αυτή οι μεγάλες ανοδικές τάσεις απορροφούν πλήρως το νέφος και επιβάλλουν σε όλα τα ηλεκτρόνια που εξέρχονται από την κάθοδο να κινηθούν προς την άνοδο. Η μικρή αύξηση του ανοδικού ρεύματος, που παρατηρείται καθώς αυξάνεται η ανοδική τάση, οφείλεται στη μείωση του έργου εξαγωγής που προκαλεί η ανοδική τάση και ονομάζεται **φαινόμενο Schottky** (βλ. Παράρτημα Π31, Παράγρ. Π31.4).

31.2.4 Ο ρόλος της θερμοκρασίας - Νόμος του Richardson

Το ρεύμα κορεσμού της ανόδου εξαρτάται πολύ έντονα από τη θερμοκρασία, T , αλλά εξίσου έντονα και από το **έργο εξόδου των ηλεκτρονίων**, ϕ , από το μέταλλο, το οποίο ορίζεται ως η ελάχιστη ενέργεια που απαιτείται για να απελευθερωθούν τα ηλεκτρόνια από την επιφάνεια του μετάλλου. Στο Παράρτημα Π31, δίνονται στον Πίνακα I οι τιμές του ϕ , για μερικά μέταλλα, όπως μετρήθηκαν πειραματικά.

Η θερμοκρασιακή εξάρτηση του ρεύματος κορεσμού, I_{AK} , μελετήθηκε πρώτα πειραματικά, και αποδείχθηκε αργότερα θεωρητικά, από τους Richardson και Dushman (ανεξάρτητα ο ένας από τον άλλον). Στη βιβλιογραφία ο νόμος αυτός αποκαλείται **νόμος Richardson-Dushman** ή **νόμος του Richardson**. Είναι ο δεύτερος σπουδαίος νόμος της θερμιοτικής εκπομπής και έχει τη μορφή:

$$I_{AK} = C \times T^2 \exp\left(-\frac{\phi}{kT}\right) \quad (31.2)$$

όπου T η θερμοκρασία της καθόδου σε βαθμούς Kelvin (K), ϕ το έργο εξόδου, k η σταθερά Boltzmann και C μια σταθερά, που εξαρτάται μόνο από το υλικό του μετάλλου [βλ. Παράρτημα Π31, Παράγρ. Π31.2, Εξ. (Π31.4)].

31.2.5 Μείωση του έργου εξόδου - Φαινόμενο Schottky

Για τη μείωση του έργου εξόδου $\Delta\phi$, στην περιοχή III του Σχ. 31.2, οι σχετικοί υπολογισμοί δίνουν (βλ. Παράρτημα Π31, Παράγρ. Π31.4, Εξ. Π31.33):

$$\Delta\phi = \sqrt{\frac{e^3 \mathcal{E}}{4\pi\epsilon_0}} \quad (31.3)$$

όπου \mathcal{E} είναι η ένταση του ηλεκτρικού πεδίου στην επιφάνεια της καθόδου και ϵ_0 η διηλεκτρική διαπερατότητα του κενού. Επειδή στον νόμο Richardson το έργο εξόδου βρίσκεται στον εκθέτη, ακόμα μια μικρή μεταβολή του (για $\mathcal{E} = 10^7$ V/m έχουμε $\Delta\phi = 0,12$ eV) επηρεάζει αισθητά το ρεύμα κόρου.

Στη δίοδο υψηλής τάσης, για παράδειγμα στις πηγές ακτίνων X, η ένταση του ηλεκτρικού πεδίου συχνά είναι της τάξης 10^7 V/m. Αν η κάθοδος της λυχνίας είναι κατασκευασμένη από πολυκρυσταλλικό βολφράμιο ($\phi = 4,5$ eV, $T = 2500$ K), τότε το μεγάλο ηλεκτρικό πεδίο θα επιφέρει αύξηση του ανοδικού ρεύματος κατά 80% και, επομένως, η μείωση του ϕ θα πρέπει οπωσδήποτε να λαμβάνεται υπόψη. Συνεπώς, τα μεγάλα ηλεκτρικά πεδία τροποποιούν τη σχέση Richardson στη μορφή:

$$I_{Ak} = C \times T^2 \exp\left(-\frac{\phi - \Delta\phi}{kT}\right) \quad (31.4)$$

31.3 Μέθοδος

Η μελέτη της θερμοϊονικής εκπομπής γίνεται με τη βοήθεια μιας διόδου υψηλού κενού, που απεικονίζεται στα Σχ. 31.1 και 31.3.

Ο πειραματικός προσδιορισμός του εκθέτη 3/2 στον Νόμο του Langmuir γίνεται με τον ακόλουθο τρόπο. Βλέπουμε ότι, αν λογαριθμήσουμε την Εξ. (31.1), βρίσκουμε τη σχέση:

$$\ln I_A = \ln B + (3/2) \ln U_A \quad (31.5)$$

Αν, επομένως, καταγράψουμε τη σχέση μεταξύ ανοδικού ρεύματος, I_A , και ανοδικής τάσης, U_A , και χαράξουμε τις τιμές του $\ln I_A$ ως συνάρτηση του $\ln U_A$, θα πρέπει να βρούμε μια ευθεία με κλίση ίση με 3/2. Για την καταγραφή αυτή θα πρέπει να εφαρμόσουμε στο νήμα της καθόδου ένα σταθερό ρεύμα θέρμανσης και, μεταβάλλοντας σταδιακά την ανοδική τάση, να μετράμε το ανοδικό ρεύμα.

Για τη μέτρηση του έργου εξαγωγής χρησιμοποιείται η σχέση του Richardson (Εξ. 31.2), που μας δίνει το ρεύμα κορεσμού της λυχνίας, ως συνάρτηση της θερμοκρασίας, T , και του έργου εξαγωγής, ϕ , του μετάλλου. Πράγματι, αν λογαριθμίσουμε τη σχέση αυτή, βρίσκουμε

$$\ln\left(\frac{I_A}{T^2}\right) = \ln C - \frac{\phi}{kT}. \quad (31.6)$$

Η Εξ. (31.6) δείχνει ότι η γραφική παράσταση του $y = \ln\left(\frac{I_A}{T^2}\right)$ ως συνάρτηση του $x = \frac{1}{T}$, είναι μια ευθεία που τέμνει τον άξονα των y στο σημείο $\ln C$, ενώ η κλίση της είναι $-\phi/k$. Η μέτρηση του ανοδικού ρεύματος κόρου σε διαφορετικές θερμοκρασίες της καθόδου μάς δίνει επομένως τη δυνατότητα να προσδιορίσουμε την κλίση $-\phi/k$ της ευθείας της Εξ. (31.6) και, από αυτήν, το έργο εξαγωγής, ϕ . Χρησιμοποιώντας για τη σταθερά του Boltzmann την τιμή

$$k = 8,617 \times 10^{-5} \frac{\text{eV}}{\text{K}}$$

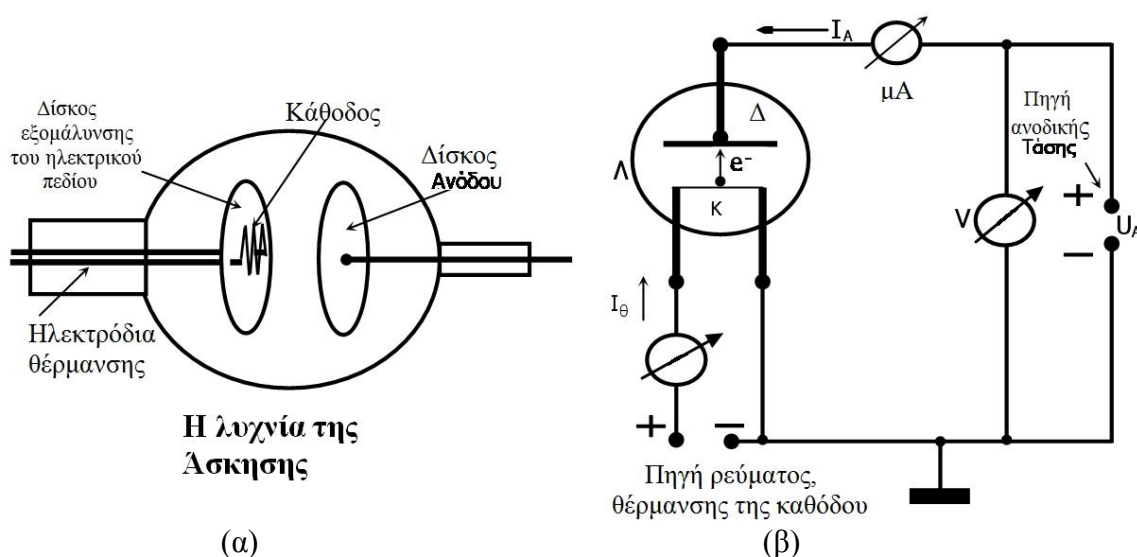
προσδιορίζουμε το έργο εξόδου σε μονάδες eV.

31.4 Πειραματική διάταξη

Η μελέτη της θερμονικής εκπομπής γίνεται με τη βοήθεια μιας διόδου υψηλού κενού, η κάθοδος της οποίας είναι κατασκευασμένη από πολυκρυσταλλικό βολφράμιο, υπό μορφή λεπτού σύρματος σε σχήμα “ζικ-ζακ” και είναι αμέσου θερμάνσεως (Σχ. 31.3α). Αριστερά και πίσω από την κάθοδο βρίσκεται ένας μεταλλικός δίσκος, προορισμός του οποίου είναι να εξομαλύνει και να ομογενοποιεί το πεδίο μεταξύ καθόδου και ανόδου. Η κάθοδος, το μήκος και η διάμετρος της οποίας είναι 70 mm και 0,16 mm αντιστοίχως, θερμαίνεται με ένα σχετικά μεγάλο ρεύμα θέρμανσης της τάξης των 2 – 2,5 A. Η θερμοκρασία της καθόδου προσδιορίζεται έμμεσα από την τιμή του ρεύματος θέρμανσης, I_θ , που τη διαρρέει, με τη βοήθεια του πίνακα που είναι αναρτημένος στη βάση της λυχνίας, (βλ. και Παράρτημα Π31, Πίνακα ΙΙΙ).

Η πειραματική διάταξη περιλαμβάνει ακόμα:

- το τροφοδοτικό, το οποίο παρέχει δύο ρυθμιζόμενες τάσεις, 0 – 50 V DC και 0 – 300 V, DC για την τροφοδότηση της διόδου με την ανοδική τάση, και μία ξεχωριστή πηγή ρυθμιζόμενου και καλά σταθεροποιημένου ρεύματος, I_θ , για τη θέρμανση της καθόδου. (Η πηγή τάσης των 50 V δεν χρησιμοποιείται στην Άσκηση αυτή)
- ένα βολτόμετρο (πολύμετρο, V), για τη μέτρηση της ανοδικής τάσης, U_A .
- Ένα ψηφιακό αμπερόμετρο μεγάλης ακρίβειας και διακριτικής ικανότητας (A), για τη μέτρηση του ρεύματος θέρμανσης, I_θ , της καθόδου
- ένα ευαίσθητο ψηφιακό μικροαμπερόμετρο (πολύμετρο μA), για τη μέτρηση του ανοδικού ρεύματος, I_A .
- ένα ψηφιακό αμπερόμετρο μεγάλης ακρίβειας και διακριτικής ικανότητας (A), για τη μέτρηση του ρεύματος θέρμανσης, I_θ , της καθόδου.



Σχήμα 31.3. (α) Σχηματική παράσταση της λυχνίας της Άσκησης. (β) Η συνδεσμολογία της λυχνίας (Λ) με την πηγή ανοδικής τάσης, μέσω ενός μικροαμπερομέτρου (μA) για τη μέτρηση του ανοδικού ρεύματος (I_A). Κ είναι η κάθοδος και Δ ο δίσκος ανόδου της λυχνίας. Η ανοδική τάση, U_A , μετράται με ένα βολτόμετρο (V), το ανοδικό ρεύμα, I_A , με ένα μικροαμπερόμετρο (μA) και το ρεύμα θέρμανσης (I_θ) με ένα αμπερόμετρο (A).

Βιβλιογραφία

1. F. Mandl, *Στατιστική Φυσική*, Κεφ. 11, Παράγρ. 11.4.1, Εκδόσεις Πνευματικού (Αθήνα)
2. A.C. Melissinos: *Experiments in Modern Physics*. σελ. 65-78, (Academic Press, 1966)
3. http://en.wikipedia.org/wiki/Thermionic_emission
4. A.J. Dekker: *Solid State Physics*. Κεφ. 9. (Macmillan 1964)

31.5 Εκτέλεση

ΠΡΟΣΟΧΗ Στην Άσκηση αυτή χρησιμοποιείται συνεχής τάση μέχρι 300 V, που είναι επικίνδυνη για τη ζωή. Επομένως, όταν συναρμολογούμε το ηλεκτρικό κύκλωμα της Άσκησης, θα πρέπει να έχουμε σβηστό το τροφοδοτικό και να έχουμε μηδενίσει όλες τις τάσεις του, στρέφοντας **τέρμα αριστερά** τα αντίστοιχα ποτενσιόμετρα που τις ρυθμίζουν. Το τροφοδοτικό τίθεται σε λειτουργία μόνο μετά τον έλεγχο του κυκλώματος από τον υπεύθυνο επιβλέποντα της Άσκησης.

31.5.1 Πειραματικός προσδιορισμός του εκθέτη στο “νόμο του Langmuir”

1. Βεβαιωθείτε ότι το τροφοδοτικό δεν βρίσκεται σε λειτουργία και ότι οι τάσεις των τριών πηγών του τροφοδοτικού είναι ρυθμισμένες στο μηδέν. Στη συνέχεια συναρμολογήστε το ηλεκτρικό κύκλωμα που δίνεται στο Σχ. 31.3(β).
2. Μετά τον έλεγχο του κυκλώματος από τον επιβλέποντα της Άσκησης, θέστε σε λειτουργία το τροφοδοτικό.
3. Αργά και με προσοχή εφαρμόστε στην κάθοδο το ρεύμα θέρμανσης, I_θ , που αντιστοιχεί στη θερμοκρασία των 2100 K, συμβουλευόμενοι τον πίνακα που είναι αναρτημένος στη βάση στήριξης της διόδου.
4. Συμπληρωματικά, μετρήστε και την τάση θέρμανσης της καθόδου, U_θ , δοθέντος ότι, στο πείραμα αυτό, θα πρέπει να λαμβάνεται υπόψη και η πτώση τάσης κατά μήκος της καθόδου κατά την επεξεργασία των δεδομένων (βλ. **ΣΗΜΕΙΩΣΗ** αμέσως πιο κάτω).
5. Καταγράψτε τις τιμές του ανοδικού ρεύματος, I_A , συναρτήσει της ανοδικής τάσης U_A , όταν αυτή μεταβάλλεται από 6 έως 20 V, με βήμα 2 V και καταγράψτε τις στον Πίνακα I.

Πίνακας I

$T = 2100 \text{ K}, \quad I_\theta = \dots\dots\dots \text{mA}, \quad U_\theta = \dots\dots\dots \text{V}$

U_A (V)	I_A (mA)	$U_A - (U_\theta/2)$ (V)	$\ln [U_A - (U_\theta/2)]$	$\ln I_A$
6				
8				
.....				

ΣΗΜΕΙΩΣΗ: Σημειώνουμε ότι στο πείραμα αυτό, η ανοδική τάση, U_A , που μετρήσατε πρέπει να μειωθεί κατά έναν παράγοντα $U_\theta/2$, δοθέντος η εκπομπή των ηλεκτρονίων γίνεται κυρίως από το κέντρο της καθόδου, όπου η θερμοκρασία της είναι λίγο υψηλότερη, ενώ το δυναμικό της είναι θετικότερο του μηδενός κατά $U_\theta/2$. Συνεπώς, η πραγματική διαφορά δυναμικού μεταξύ ανόδου και καθόδου δεν είναι U_A , που δείχνει το βολτόμετρο V, αλλά $U_A - U_\theta/2$. Επειδή $U_\theta \approx 5 \div 6 \text{ V}$, στο διάστημα 6 – 20 V, ο παράγοντας $U_\theta/2$ δεν είναι αμελητέος.

31.6 Επεξεργασία των μετρήσεων

31.6.1 Προσδιορισμός του εκθέτη στον Νόμο του Langmuir'

1. Από τις τιμές του Πίνακα I, προσδιορίστε τις τιμές των $\ln(I_A)$, $U_A - U_\theta$ και $\ln(U_A - U_\theta)$ και συμπληρώστε τον Πίνακα I.
2. Σε χαρτί μιλιμετρέ, χαράξτε τη γραφική παράσταση $\ln(I_A)$ ως συνάρτηση του $\ln(U_A - U_\theta)$ και προσδιορίστε την τιμή της κλίσης της ευθείας καθώς και το σφάλμα της, με τη μέθοδο που περιγράφεται στον πρώτο Τόμο του βιβλίου «Εργαστηριακές Ασκήσεις Φυσικής», Τόμος I, Παράγρ. Γ7.
3. Για να ισχύει ο νόμος του Langmuir, η κλίση αυτή θα πρέπει να είναι ίση με τον εκθέτη της Εξ. (31.1). Αν η τιμή που μετρήσατε διαφέρει από την τιμή 3/2, ποιο είναι, κατά τη γνώμη σας, το αίτιο που προκαλεί τη διαφορά αυτή;

31.6.2 Καταγραφή των καμπύλων $I_A = f(U_A)$ για τρεις θερμοκρασίες της καθόδου

1. Σε ένα χαρτί μιλιμετρέ χαράξτε τις γραφικές παραστάσεις I_A ως συνάρτηση του U_A , στο διάστημα 0 – 300 V, για τις τρεις θερμοκρασίες της καθόδου που μετρήσατε. (Εδώ ο παράγοντας $U_\theta/2$ μπορεί να αγνοηθεί).
2. Συγκρίνετε τις δικές σας καμπύλες με αυτή που δίνεται στο Σχ. 31.2. Σχολιάστε το αποτέλεσμα. Γιατί ο κορεσμός δεν είναι απότομος;

31.6.3 Έλεγχος του νόμου Richardson και μέτρηση του έργου εξόδου του βολφραμίου

1. Από τις τιμές του Πίνακα III προσδιορίστε τις αντίστοιχες τιμές των $1/T$, και $\ln(I_{AK}/T^2)$ και καταχωρήστε τις στον ίδιο Πίνακα.
2. Σε ένα χαρτί μιλιμετρέ σχεδιάστε τα πειραματικά σημεία $y = \ln(I_{AK}/T^2)$ ως συνάρτηση των $x = 1/T$. Σύμφωνα με την Εξ. (31.6), περιμένουμε ότι τα σημεία αυτά θα σχηματίζουν μια ευθεία, με κλίση ίση με $-\phi/k$.
3. Προσδιορίστε την τιμή της κλίσης της βέλτιστης ευθείας που μπορέσατε να χαράξετε, καθώς και το σφάλμα της (πάλι με τη μέθοδο που περιγράφεται στον Τόμο I, Παράγρ. Γ7). Από την τιμή της κλίσης αυτής, υπολογίστε το έργο εξόδου, ϕ , των ηλεκτρονίων από το βολφράμιο, καθώς και το σφάλμα του.
4. Η αποδεκτή τιμή για το έργο εξαγωγής του πολυκρυσταλλικού βολφραμίου είναι 4,5 eV. Αν η τιμή του ϕ που μετρήσατε διαφέρει σημαντικά από αυτήν, ποιο είναι, κατά τη γνώμη σας, το κυριότερο αίτιο που προκάλεσε αυτή τη διαφορά;

ΠΑΡΑΡΤΗΜΑ ΑΣΚΗΣΗΣ 31 (Π31)

Θερμιονική εκπομπή ηλεκτρονίων

Π31.1 Το μέσο εσωτερικό δυναμικό U , η ενέργεια Fermi, E_F , και το έργο εξόδου ϕ

Η κβαντική θεωρία των μετάλλων, στην απλούστερή της μορφή, θεωρεί ότι τα ηλεκτρόνια που προκαλούν την ηλεκτρική αγωγιμότητα είναι ελεύθερα να κινηθούν στο εσωτερικό του μετάλλου. Από την απαγορευτική αρχή του Pauli προκύπτει ότι, ακόμη και στη θερμοκρασία $T = 0$ K, αυτά τα ελεύθερα ηλεκτρόνια δεν “παγώνουν” ως προς την κίνησή τους. Πράγματι, τη χαμηλότερη ενεργειακή στάθμη μπορούν να καταλάβουν μόνο δύο ηλεκτρόνια, ενώ τα υπόλοιπα θα κατανεμηθούν σε ενεργειακές στάθμες κατά ζεύγη, σε μια περιοχή ενεργειακών σταθμών, που εκτείνεται από το μηδέν έως κάποια μέγιστη τιμή, που ονομάζεται ενέργεια Fermi και συμβολίζεται με E_F . Για την τιμή της ενέργειας Fermi E_F , οι σχετικοί υπολογισμοί δίνουν:

$$E_F = \frac{h^2 (3\pi^2 n)^{2/3}}{8m\pi^2} \quad (\text{Π31.1})$$

όπου h είναι η σταθερά του Planck, m είναι η μάζα του ηλεκτρονίου και n είναι ο αριθμός των ηλεκτρονίων ανά μονάδα όγκου του στερεού. Η πυκνότητα των ενεργειακών καταστάσεων ανά μονάδα ενέργειας και ανά μονάδα όγκου δίνεται από τη σχέση:

$$\rho(E) = \frac{dN}{dE} = \frac{8\pi}{h^3} (2m^3) \sqrt{E} \quad (\text{Π31.2})$$

Ο ζητούμενος αριθμός, dN , των ηλεκτρονίων που έχουν ενέργειες στο διάστημα μεταξύ E και $E + dE$ είναι ανάλογος της πυκνότητας των ενεργειακών καταστάσεων $\rho(E)$ αλλά και της πιθανότητας $f(E)$ να είναι κατειλημμένη η κατάσταση με ενέργεια E . Η τελευταία προκύπτει από τη στατιστική Fermi-Dirac και είναι ίση με

$$f(E) = \frac{1}{e^{(E-E_F)/kT} + 1} \quad (\text{Π31.3})$$

Επομένως, ο αριθμός dN είναι:

$$dN = \rho(E) f(E) dE = \frac{8\pi}{h^3} \sqrt{2m^3} \frac{\sqrt{E} dE}{e^{(E-E_F)/kT} + 1} \quad (\text{Π31.4})$$

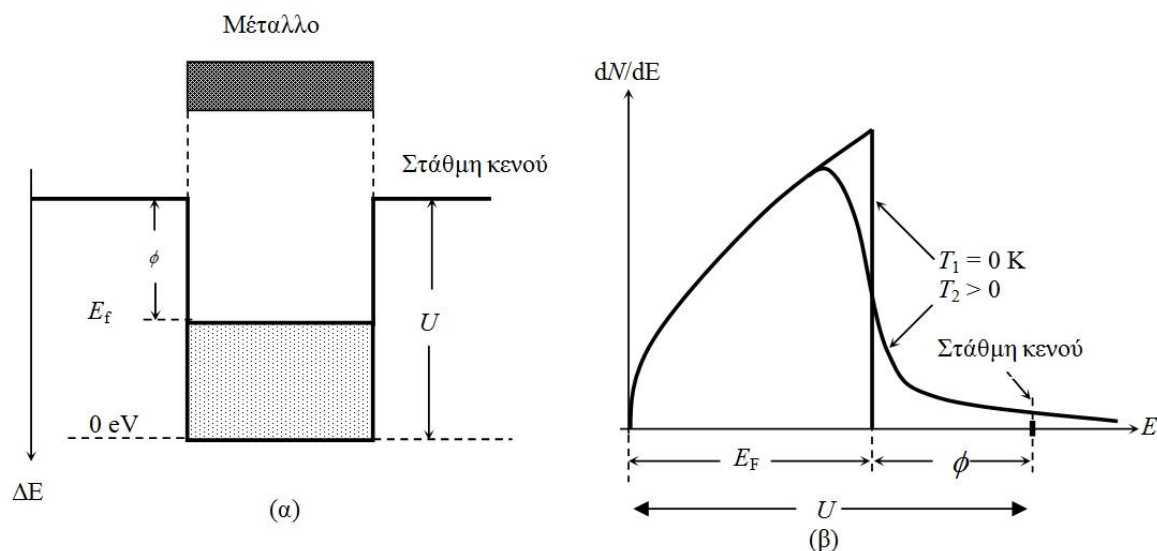
Κάτω από κανονικές συνθήκες, τα ηλεκτρόνια αγωγιμότητας είναι μεν ελεύθερα στο εσωτερικό του μετάλλου, βρίσκονται όμως εγκλωβισμένα μέσα στο μέταλλο, μέσα σε ένα πηγάδι δυναμικού βάθους U . Το U ονομάζεται **μέσο εσωτερικό δυναμικό** του μετάλλου (βλ. Σχ. Π31.1α). [Εδώ θεωρούμε μηδενική την ενέργειά των ηλεκτρονίων όταν αυτά έχουν απελευθερωθεί από την επιφάνεια του μετάλλου και είναι ακίνητα (στάθμη κενού)].

Σύμφωνα με όσα είπαμε πιο πάνω, για να εξέλθει στο κενό ένα ηλεκτρόνιο που έχει ενέργεια ίση με την ενέργεια Fermi, E_F , στους 0 K, θα πρέπει να προσλάβει μια ελάχιστη πρόσθετη ενέργεια, ϕ , που ονομάζεται **έργο εξόδου**, τέτοια ώστε να ισχύει η σχέση

$$U = E_F + \phi \quad (\text{Π31.5})$$

Για παράδειγμα, στο βολφράμιο, στο οποίο $U = 10,2$ eV, η E_F στους 0 K είναι 5,7 eV. Επομένως το έργο εξόδου του είναι $\phi = 10,2 - 5,7 = 4,5$ eV.

Στο Σχ. Π31.1α παριστάνεται γραφικά το πηγάδι δυναμικού στο εσωτερικό του μετάλλου, ενώ στο Σχ. Π31.1β δίνεται η γραφική παράσταση της Εξ. (Π31.4), που αποδίδει την ενεργειακή κατανομή των ηλεκτρονίων μέσα στα μέταλλα.



Σχήμα Π31.1. (α) Γραφική παράσταση του φρέατος δυναμικού στο εσωτερικό ενός μετάλλου στη θερμοκρασία $T = 0 \text{ K}$. (β) Η ενεργειακή κατανομή των ηλεκτρονίων μέσα σε ένα μέταλλο, στη θερμοκρασία $T_1 = 0 \text{ K}$ και σε μια θερμοκρασία $T_2 > 0$. Και στα δύο σχήματα: E_F , είναι η ενέργεια Fermi, ϕ το έργο εξόδου, και U το μέσο εσωτερικό δυναμικό του μετάλλου.

Βλέπουμε ότι, σε θερμοκρασίες $T > 0$, στην ενεργειακή κατανομή εμφανίζεται μία “εκθετική ουρά”, η οποία εκτείνεται έως το άπειρο. Προφανώς, στη θερμοϊονική εκπομπή συμμετέχουν τα ηλεκτρόνια της εκθετικής ουράς, που κινούνται προς την επιφάνεια του στερεού και οι κινητικές τους ενέργειες ξεπερνούν το άθροισμα $E_F + \phi$. Σχολαστικός υπολογισμός του συνολικού τους αριθμού (βλ. Παράγρ. Π31.2) οδηγεί τελικά στη σχέση Richardson:

$$J = \frac{I}{S} = \frac{(1-D)4\pi emk^2}{h^3} T^2 e^{-\frac{\phi}{kT}} \text{ (A/m}^2\text{)} \quad (\text{Π31.6})$$

όπου D είναι ο μέσος συντελεστής ανάκλασης των ηλεκτρονίων από το σκαλοπάτι δυναμικό της επιφάνειας, ενώ η σταθερά $4\pi emk^2/h^3$ είναι ίση με $120,4 \times 10^4 \text{ A/m}^2\text{K}^2$ (σε μερικά μέταλλα η τιμή αυτή βρίσκεται πολύ κοντά στις πειραματικές τιμές).

Στον Πίνακα Ι, δίνονται για μερικά μέταλλα, οι τιμές των μεγεθών U , E_F και ϕ , όπως μετρήθηκαν πειραματικά.

Πίνακας Ι

Μέταλλο	Li	Na	K	Cu	Ag	Au	Ca	W	Al
U (eV)	6,9	5,0	3,9	11,1	10,2	10,3	7,5	10,2	14,7
E_F (eV)	4,7	3,1	2,1	7,0	5,5	5,5	4,3	5,7	11,7
ϕ (eV)	2,2	1,9	1,8	4,1	4,7	4,8	3,2	4,5	3,0

Π31.2 Ο νόμος του Richardson

Έστω ότι η επιφάνεια της καθόδου είναι κάθετη στον άξονα x ενός συστήματος αναφοράς x, y, z . Έστω ακόμη ότι dN είναι ο αριθμός των ελεύθερων ηλεκτρονίων με συνιστώσες x των ταχυτήτων μεταξύ v_x και $v_x + dv_x$. Θεωρούμε ότι οι συνιστώσες των ταχυτήτων έχουν κατεύθυνση από το εσωτερικό του μετάλλου προς το εξωτερικό. Με την προϋπόθεση ότι η ενέργεια, E , των ηλεκτρονίων αυτών είναι μεγαλύτερες από το άθροισμα $E_F + \phi$, [Σχ. Π31.3(β)] και ότι τα ηλεκτρόνια δεν ανακλώνται στο δυναμικό σκαλοπάτι της επιφάνειας αλλά εξέρχονται όλα στο κενό, η συνεισφορά αυτών των ηλεκτρονίων στην πυκνότητα του θερμιαστικού ρεύματος dJ_x είναι:

$$dJ_x = e v_x dN \quad (\text{Π31.7})$$

όπου e είναι το φορτίο του ηλεκτρονίου.

Η ενέργεια του ηλεκτρονίου συνδέεται με την ορμή του p μέσω των σχέσεων:

$$E = \frac{p^2}{2m} = \frac{p_x^2 + p_y^2 + p_z^2}{2m} \quad (\text{Π31.8})$$

$$p = \sqrt{2mE} \quad (\text{Π31.9})$$

Έτσι, σύμφωνα με την κατανομή Fermi-Dirac, ο αριθμός dN_p των ηλεκτρονίων που έχουν συνιστώσες ορμής μεταξύ p_x, p_y, p_z και $p_x + dp_x, p_y + dp_y$ και $p_z + dp_z$ αντιστοίχως, είναι:

$$dN_p = \frac{2}{h^3} \frac{dp_x dp_y dp_z}{\exp\left[\frac{\frac{p_x^2 + p_y^2 + p_z^2}{2m} - E_F}{kT}\right] + 1} \quad (\text{Π31.10})$$

Ο αριθμός dN_{p_x} των ηλεκτρονίων που έχουν συνιστώσες x των ορμών τους μεταξύ p_x και $p_x + dp_x$, αλλά με οποιεσδήποτε τιμές των συνιστωσών p_y και p_z είναι

$$dN_{p_x} = \frac{2}{h^3} dp_x \int_{-\infty}^{\infty} dp_y \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dp_z}{\exp\left[\frac{\frac{p_x^2 + p_y^2 + p_z^2}{2m} - E_F}{kT}\right] + 1} \quad (\text{Π31.11})$$

Ολοκληρώνοντας και συμβολίζοντας το $\frac{p_x^2}{2m}$ με E_x , βρίσκουμε ότι:

$$dN_{p_x} = \frac{2\pi m}{h^3} \left(\frac{2m}{E_x}\right)^{1/2} kT \ln\left[1 + \exp\left(\frac{E_F - E_x}{kT}\right)\right] dE_x \quad (\text{Π31.12})$$

Ο αριθμός των ηλεκτρονίων που βομβαρδίζουν τη μονάδα της επιφάνειας στη μονάδα του χρόνου είναι

$$d\omega = v_x dN_{p_x} = \left(\frac{2E}{m}\right)^{1/2} dN_{p_x} \quad (\text{Π31.13})$$

ή

$$d\omega = \frac{4\pi m}{h^3} kT \ln\left[1 + \exp\left(\frac{E_F - E_x}{kT}\right)\right] dE_x \quad (\text{Π31.14})$$

Για όλα τα υλικά, και για την υψηλότερη θερμοκρασία που μπορεί να αντέξει το πιο πυρίμαχο υλικό, έχουμε:

$$\phi \gg kT, \quad \text{δηλαδή} \quad E_x - E_F \gg kT \quad (\Sigma\chi. 31.4).$$

Συνεπώς, το εκθετικό στην Εξ. (Π31.14) είναι πολύ μικρότερο της μονάδας. Η προσέγγιση $\ln(1+x) \approx x$ δίνει για την Εξ. (Π31.14)

$$d\omega = \frac{4\pi m}{h^3} kT \exp\left(-\frac{E_x - E_F}{kT}\right) dE_x \quad (\Pi 31.15)$$

Στη θερμοϊονική εκπομπή συμβάλλουν μόνον εκείνα τα ηλεκτρόνια για τα οποία είναι $E \geq U$ (βλ. Σχ. Π31.1β). Συνεπώς, η ολική πυκνότητα ρεύματος που διασχίζει την επιφάνεια της καθόδου είναι:

$$J_x = e \int_U^\infty d\omega = \int_U^\infty \frac{4\pi em}{h^3} kT \exp\left(-\frac{E_x - E_F}{kT}\right) dE_x. \quad (\Pi 31.16)$$

Ολοκληρώνοντας την παραπάνω σχέση, και επειδή $U - E_F = \phi$ (Σχ. Π31.1), έχουμε τελικά

$$J = \frac{4\pi em}{h^3} k^2 T^2 \exp\left(-\frac{\phi}{kT}\right) \quad (\Pi 31.17)$$

όπου, γενικεύοντας, συμβολίσαμε με J την ολική πυκνότητα ρεύματος. Η σταθερά $A_0 = 4\pi emk^2/h^3$ ονομάζεται **σταθερά του Sommerfeld** και είναι ίση με $120,4 \times 10^4 \text{ A/m}^2\text{K}^2$.

Είναι γνωστό από την κβαντομηχανική ότι ένα ποσοστό των ηλεκτρονίων θα ανακλαστεί από το σκαλοπάτι δυναμικού (Σχ. Π31.1α), έστω και αν αυτά έχουν αρκετή ενέργεια για να το υπερβούν. Ο συντελεστής ανάκλασης εξαρτάται από την ενέργεια των ηλεκτρονίων, όπως επίσης και από το σχήμα του σκαλοπατιού, το οποίο γενικά είναι άγνωστο. Αν D είναι ο μέσος συντελεστής ανάκλασης, τότε ο νόμος του Richardson μπορεί να γραφεί ως:

$$J = (1 - D) A_0 T^2 \exp\left(-\frac{\phi}{kT}\right) \quad (\Pi 31.18)$$

Σημειώνουμε ότι η πειραματική τιμή του D για το πολυκρυσταλλικό βολφράμιο είναι περίπου 0,15.

Π31.3 Ο νόμος του Langmuir ή των "3/2"

Έστω δίοδος κενού με επίπεδα και παράλληλα ηλεκτρόδια, που απέχουν μεταξύ τους απόσταση d , πολύ μικρότερη από τις διαστάσεις τους. Έστω ακόμη ότι η επίπεδη κάθοδος είναι θερμή και ότι η ανοδική τάση είναι πάντα μικρότερη της τάσης κορεσμού. Στο χώρο μεταξύ των δύο ηλεκτροδίων θα δημιουργείται επομένως ένα νέφος ηλεκτρονίων και, κατ' επέκταση, ένα φορτίο χώρου. Θεωρούμε ότι ο άξονας x είναι κάθετος στην επιφάνεια της καθόδου και ότι το σημείο $x = 0$ αντιστοιχεί στην επιφάνειά της. Αν τα ηλεκτρόνια εγκαταλείπουν την κάθοδο με μηδενικές αρχικές ταχύτητες τότε, στο χώρο μεταξύ των δύο ηλεκτροδίων και σε απόσταση x από την κάθοδο, το δυναμικό $U(x)$ θα ικανοποιεί τη γνωστή από τον ηλεκτρομαγνητισμό εξίσωση Poisson σε μία διάσταση:

$$\frac{d^2 U(x)}{dx^2} = -\frac{\rho(x)}{\epsilon_0} \quad (\Pi 31.19)$$

όπου ρ είναι η χωρική πυκνότητα φορτίου (φορτίο ανά μονάδα όγκου).

Η κίνηση φορτισμένων σωματιδίων που έχουν ταχύτητα v_x , φορτίο e και συγκέντρωση φορέων n , δημιουργεί μια πυκνότητα ρεύματος (ρεύμα ανά μονάδα επιφάνειας), J_x , ίση με

$$J_x = nev_x \quad (\Pi 31.20)$$

Η πυκνότητα φορτίου, ρ , και η συγκέντρωση φορέων, n , συνδέονται με τη σχέση

$$\rho = ne \quad (\Pi 31.21)$$

ενώ η ταχύτητα των ηλεκτρονίων στο σημείο x , όπου το δυναμικό είναι $U(x)$, είναι

$$v_x = \sqrt{2 \frac{e}{m} U(x)} \quad (\text{Π31.22})$$

Αντικαθιστώντας στην Εξ. (Π31.19) τις Εξ. (Π31.20 – Π31.22) βρίσκουμε

$$\frac{d^2 U(x)}{dx^2} = \frac{J_x}{\varepsilon_0} \sqrt{\frac{m}{2e}} \sqrt{U(x)} \quad (\text{Π31.23})$$

Πολλαπλασιάζοντας και τα δύο μέλη επί $2 \frac{dU(x)}{dx}$ και ολοκληρώνοντας παίρνουμε:

$$\left(\frac{dU}{dx} \right)^2 = 4 \frac{J_x}{\varepsilon_0} \sqrt{\frac{m}{2e}} U + \text{const.} \quad (\text{Π31.24})$$

Στην επιφάνεια της καθόδου ($x = 0$) έχουμε $U(x) = 0$ αλλά και $dU/dx = 0$, από όπου προκύπτει ότι η σταθερά στην Εξ. (Π31.24) είναι μηδέν. Ολοκληρώνοντας έχουμε

$$\frac{4}{9} U^{3/2} = J_x \frac{x}{\varepsilon_0} \sqrt{\frac{m}{2e}} \quad (\text{Π31.25})$$

Έστω ότι η άνοδος βρίσκεται σε απόσταση $x = d$ από την κάθοδο και έχει δυναμικό U_A . Αντικαθιστώντας τις τιμές αυτές στην Εξ. (Π31.25) βρίσκουμε την πυκνότητα ρεύματος στην άνοδο:

$$J_{x=d} = \frac{4\varepsilon_0}{9d^2} \sqrt{\frac{2e}{m}} U_A^{3/2} \quad (\text{Π31.26})$$

Όταν η άνοδος και η κάθοδος αποτελούν ένα σύστημα ομόκεντρων κυλίνδρων, το ρεύμα, ανά μονάδα μήκους της διόδου, δίνεται από τη σχέση:

$$J_{x=d} = \frac{8\varepsilon_0}{9r_A \beta^2} \sqrt{\frac{2e}{m}} U_A^{3/2} \quad (\text{Π31.27})$$

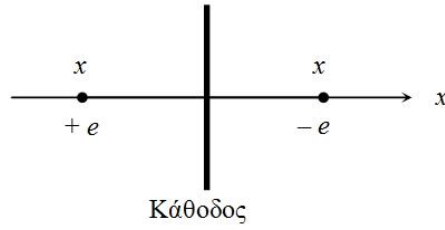
όπου r_A είναι η ακτίνα της ανόδου και β ένας αδιάστατος αριθμός, που εξαρτάται από το λόγο των ακτίνων ανόδου r_A και καθόδου r_K . Όταν $r_A > 10r_K$, $\beta \approx 1$. Η Εξ. (Π31.27) αποτελεί τον πρώτο σπουδαίο νόμο της θερμοϊονικής εκπομπής και ονομάζεται **νόμος του Langmuir**, από το όνομα εκείνου που τον εξήγαγε πρώτος θεωρητικά ή νόμος των "3/2".

Σημειώνουμε ότι, πριν εφευρεθεί το τρανζίστορ, όλες οι ηλεκτρονικές λυχνίες ενίσχυσης και επεξεργασίας του ηλεκτρικού σήματος λειτουργούσαν στην περιοχή των 3/2, με έμμεση θέρμανση της καθόδου σε θερμοκρασία 1100 K.

Π31.4 Το φαινόμενο Schottky

Όταν ένα ηλεκτρόνιο, με φορτίο $-e$, απομακρύνεται από την επιφάνεια της καθόδου (Σχ. Π31.2), το επαγόμενο σε αυτήν θετικό φορτίο έλκει το ηλεκτρόνιο με μια δύναμη ίση με εκείνη που θα ασκούσε πάνω του ένα θετικό φορτίο $+e$ σε θέση κατοπτρική του ηλεκτρονίου, δηλαδή:

$$F(x) = \frac{e^2}{4\pi\varepsilon_0 (2x)^2} \quad (\text{Π31.28})$$



Σχήμα Π31.2 Όταν ένα ηλεκτρόνιο, με φορτίο $-e$, απομακρύνεται από την επιφάνεια της καθόδου, το επαγόμενο σε αυτήν θετικό φορτίο έλκει το ηλεκτρόνιο προς τα πίσω.

Από την άλλη μεριά, το ηλεκτρικό πεδίο, \mathcal{E} , που δημιουργεί η ανοδική τάση, έλκει το ηλεκτρόνιο προς την αντίθετη κατεύθυνση και, σε κάποια απόσταση, x_0 , οι δύο αυτές δυνάμεις εξισώνονται, θα έχουμε δηλαδή

$$\frac{e^2}{4\pi\epsilon_0(2x_0)^2} = e\mathcal{E} \quad (\text{Π31.29})$$

Λύνοντας ως προς x_0 , βρίσκουμε

$$x_0 = \frac{1}{2} \left(\frac{e}{4\pi\epsilon_0\mathcal{E}} \right)^{1/2} \quad (\text{Π31.30})$$

Σε αποστάσεις συγκρίσιμες με τις ατομικές αποστάσεις του στερεού, η μαθηματική έκφραση της ελκτικής δύναμης $F(x)$ είναι πολύ πιο περίπλοκη από την Εξ. (Π31.28) και παραμένει ακόμα άγνωστη. Αν όμως ζητείται ο υπολογισμός της μεταβολής του έργου εξαγωγής και όχι της τιμής του, τότε η γνώση της απόλυτης τιμής της δεν είναι απαραίτητη.

Όταν το ηλεκτρικό πεδίο απουσιάζει, το έργο εξόδου ισούται εξ ορισμού με το έργο απομάκρυνσης του ηλεκτρονίου από την επιφάνεια στο άπειρο. Εάν όμως υπάρχει ηλεκτρικό πεδίο, \mathcal{E} , το έργο εξόδου θα ισούται με το έργο απομάκρυνσης του ηλεκτρονίου από την επιφάνεια έως το σημείο x_0 :

$$\phi(\mathcal{E}) = \int_0^{x_0} (F(x) - e\mathcal{E}) dx = \int_0^\infty F(x) dx - \int_{x_0}^\infty F(x) dx - e\mathcal{E}x_0. \quad (\text{Π31.31})$$

Το πρώτο ολοκλήρωμα στο δεξί μέρος της Εξ. (Π31.31) εκφράζει εξ ορισμού το έργο εξόδου απουσία ηλεκτρικού πεδίου και είναι ίσο με ϕ . Στο δεύτερο ολοκλήρωμα, για αποστάσεις $x > x_0$, η συνάρτηση $F(x)$ αποδίδεται αρκετά καλά από την Εξ. (Π31.28) (για $\mathcal{E} \leq 10^5 \text{ V/m}$, $x_0 \geq 60 \text{ nm}$) και συνεπώς:

$$\phi(\mathcal{E}) = \phi - \int_{x_0}^\infty \frac{e^2 dx}{4\pi\epsilon_0 4x^2} - e\mathcal{E}x_0 = \phi - e\mathcal{E}x_0 + \frac{e^2}{16\pi\epsilon_0 x_0} \quad (\text{Π31.32})$$

Αντικαθιστώντας το x_0 από την Εξ. (Π31.30), έχουμε τελικά

$$\phi(\mathcal{E}) = \phi - \left(\frac{e^3 \mathcal{E}}{4\pi\epsilon_0} \right)^{1/2} \quad \text{ή} \quad \phi - \phi(\mathcal{E}) = \Delta\phi = \left(\frac{e^3 \mathcal{E}}{4\pi\epsilon_0} \right)^{1/2} \quad (\text{Π31.33})$$

που μας δίνει τη μείωση του έργου εξόδου στην, ϕ , περιοχή κόρου (Σχ. 31.2) εξαιτίας του φαινομένου Schottky.

Π31.5 Η θερμοκρασία της καθόδου και η κατανομή της

Η θέρμανση της καθόδου της λυχνίας της Άσκησης γίνεται άμεσα, με τη διοχέτευση ρεύματος της τάξης 2 – 2,5 A. Σκοπός της ανάλυσης που ακολουθεί είναι να υπολογιστεί η τιμή και η κατανομή της θερμοκρασίας στην κάθοδο.

Έστω ότι η κάθοδος έχει τη μορφή ενός ευθύγραμμου λεπτού σύρματος, το μήκος και η διάμετρος τού οποίου είναι L και d αντίστοιχα. Έστω ακόμη το σύρμα αυτό διαρρέεται από ένα συνεχές ρεύμα θέρμανσης, I_θ . Αν εξετάσουμε ένα τμήμα της καθόδου που έχει μήκος dx και βρίσκεται "πολύ μακριά" από τα ψυχρά της άκρα, εξισώνοντας την παραγόμενη από το ρεύμα θερμική ισχύ με την ακτινοβολούμενη, βρίσκουμε

$$\frac{I_\theta^2 \rho(T) dx}{\frac{\pi}{4} d^2} = \pi d \sigma \varepsilon(T) T^4 dx, \quad (\text{Π31.34})$$

όπου $\rho(T)$ και $\varepsilon(T)$ είναι η ειδική αντίσταση και η αφετική ικανότητα [Βλ. Άσκηση 35, Εξ. (35.4)] του βολφραμίου αντίστοιχως, σε θερμοκρασία T , ενώ σ είναι η σταθερά των Stefan-Boltzmann. Η Εξ. (Π31.34) μπορεί να γραφτεί και ως

$$\frac{I_\theta}{d^{3/2}} = \frac{\pi}{2} T^2 \sqrt{\frac{\varepsilon(T)}{\rho(T)}}, \quad (\text{Π31.35})$$

όπου το δεξί μέλος της Εξ. (Π31.35) είναι συνάρτηση μόνο της θερμοκρασίας. Για την περίπτωση του βολφραμίου, η σχέση μεταξύ I_θ και T έχει μελετηθεί εκτενώς και δίνεται στον Πίνακα II (για κάθοδο με διάμετρο 1 cm και "άπειρο" μήκος), ενώ στον Πίνακα III δίνονται οι τιμές της θερμοκρασίας που δημιουργούνται σε σύρμα βολφραμίου με διάμετρο 0,16 mm και άπειρο μήκος.

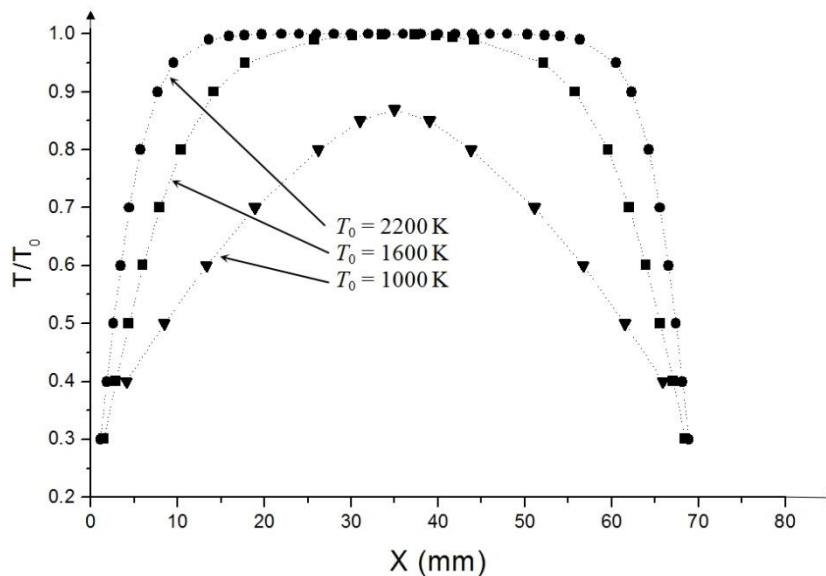
Επειδή, όμως, η κάθοδος της Άσκησής μας δεν έχει άπειρο μήκος, η παρουσία των ψυχρών άκρων της συντελεί στη διαμόρφωση μιας κατανομής θερμοκρασίας, με μέγιστο στο κέντρο, και η τιμή τού μεγίστου αυτού είναι εν γένει μικρότερη από τις τιμές του Πίνακα III. Η διαφορά αυτή είναι τόσο μικρότερη, όσο μεγαλύτερος είναι ο λόγος μήκους προς διάμετρο του σύρματος και όσο υψηλότερη είναι η θερμοκρασία.

Πίνακας II

$\frac{I_\theta}{d^{3/2}} \left(\frac{A}{cm^{3/2}} \right)$ ($d = 1 \text{ cm}$)	$T_0 \text{ (K)}$
580,6	1500
662,2	1600
747,3	1700
836,0	1800
927,4	1900
1022	2000
1119	2100
1217	2200
1310	2300
1422	2400
1526	2500
1632	2600

Πίνακας III

$I_\theta \text{ (A)}$ ($d = 0,16 \text{ mm}$)	$T_0 \text{ (K)}$
1,3402	1600
1,5124	1700
1,6022	1750
1,6919	1800
1,7844	1850
1,8769	1900
1,9726	1950
1,0684	2000
1,1666	2050
1,2674	2100
1,3639	2150
1,4630	2200



Σχήμα Π31.3 Η κατανομή της θερμοκρασίας, $T(x)$ κατά μήκος μιας καθόδου από βολφράμιο, μήκους 70 mm και διαμέτρου 0,160 mm, ως συνάρτηση της απόστασης, x , από τα άκρα της, για τρεις διαφορετικές θερμοκρασίες. Το T_0 αντιστοιχεί στην εκάστοτε τιμή της θερμοκρασίας που δημιουργείται σε σύρμα βολφραμίου, με την ίδια διάμετρο αλλά με άπειρο μήκος (βλ. Πίνακα ΙΙΙ). Παρατηρούμε ότι, όσο υψηλότερη είναι η θερμοκρασία, τόσο περισσότερο προσεγγίζεται η ιδανική κατανομή.

Στο Σχ. Π31.3 δίνεται η λύση της διαφορικής εξίσωσης (Π31.34) που υπολογίστηκε με αριθμητικές μεθόδους για τρεις θερμοκρασίες της καθόδου από βολφράμιο, το μήκος και η διάμετρος της οποίας είναι 70 και 0,160 mm αντίστοιχα, είναι δηλαδή όμοια με την κάθοδο που χρησιμοποιείται στη λυχνία της Άσκησης.

Σχολιάζοντας τις καμπύλες που δίνονται στο Σχ. Π31.3 μπορούμε να πούμε ότι:

- στην κεντρική περιοχή της καθόδου, όσο υψηλότερη είναι η θερμοκρασία, τόσο λιγότερο διαφέρει η κατανομή από εκείνην μιας καθόδου με άπειρο μήκος
- για μια κάθοδο από βολφράμιο με μήκος 70 mm και διάμετρο 0,160 mm, η θερμοκρασία της κεντρικής περιοχής της καθόδου ελάχιστα διαφέρει από τη θερμοκρασία T_0 , που θα είχε μια "άπειρη" σε μήκος κάθοδος, υπό την προϋπόθεση ότι $T_0 > 1600$ K.

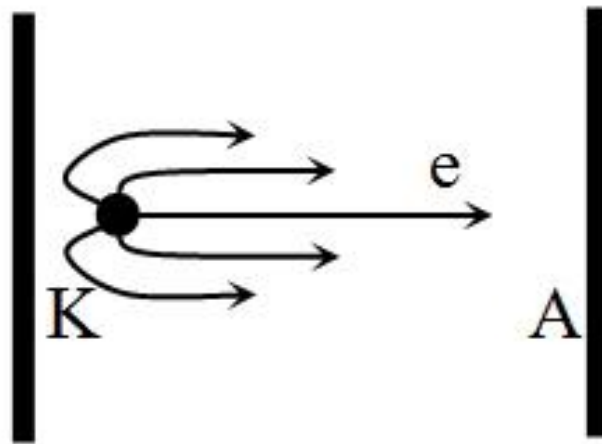
Τέλος, ας σημειωθεί ότι, αν η διάμετρος της καθόδου διαφέρει από την τιμή των 0,160 mm, οι πραγματικές θερμοκρασίες της καθόδου θα διαφέρουν από εκείνες που αναγράφονται στη βάση της λυχνίας.

Π31.6 Μερικές ατέλειες της διόδου κενού

Να επισημάνουμε μερικές κατασκευαστικές ατέλειες της λυχνίας της Άσκησης:

- Η κάθοδος είναι αμέσου θερμάνσεως, οπότε η επιφάνειά της δεν είναι ισοδυναμική, λόγω πτώσης τάσης κατά μήκος της καθόδου. Στις μικρές ανοδικές τάσεις αυτό εισάγει μια αοριστία στη διαφορά δυναμικού μεταξύ ανόδου και καθόδου.
- Το σχήμα της καθόδου δεν είναι ευθύγραμμο, αλλά είναι σε μορφή "ζικ-ζακ".
- Η άνοδος βρίσκεται σε μεγάλη απόσταση από την κάθοδο.
- Ο δίσκος που βρίσκεται πίσω από την κάθοδο κάπως εξομαλύνει το ηλεκτρικό πεδίο, αλλά όχι αρκετά, με αποτέλεσμα το ηλεκτρικό πεδίο μεταξύ ανόδου και καθόδου να μην είναι ομογενές και να απέχει πολύ από τα ηλεκτρικά πεδία των θεωρητικών μοντέλων. Έτσι, σε μικρές αποστάσεις από την κάθοδο, το ηλεκτρικό πεδίο είναι σχεδόν κυλινδρικό, ενώ σε μεγαλύτερες είναι σχεδόν επίπεδο κ.λ.π.

- Το ηλεκτρικό πεδίο της ανόδου δε δρα ομοιόμορφα σε όλη την επιφάνεια της καθόδου. Έντονα δρα στην επιφάνεια που είναι στραμμένη προς την άνοδο, αλλά σχεδόν καθόλου προς την πίσω επιφάνεια, που είναι στραμμένη προς τον δίσκο εξομάλυνσης. Επακόλουθο αυτού είναι ο μη απότομος κορεσμός του ρεύματος στη λυχνία. Πράγματι, καθώς η ανοδική τάση αυξάνεται, πρώτα κορεννυται το τμήμα του ρεύματος που οφείλεται σε ηλεκτρόνια εξέρχονται από την πλευρά της καθόδου που “βλέπει την άνοδο”, στη συνέχεια η περιοχή του κορεσμένου ρεύματος σιγά-σιγά αγκαλιάζει όλο και μεγαλύτερο μέρος της επιφάνειας έως ότου κορεστεί και το τμήμα που εξέρχεται από το πίσω μέρος της καθόδου (βλ. Σχ. Π31.4).
- Τέλος, οι γεωμετρικές ατέλειες της λυχνίας παίζουν σημαντικό ρόλο όταν μελετάται ο «νόμος των $3/2$ », αλλά δεν παίζουν ρόλο όταν μελετάται η σχέση Richardson, καθώς το ρεύμα κόρου εξαρτάται μόνο από τη θερμοκρασία, αρκεί η τιμή της ανοδικής τάσης να διασφαλίζει κορεσμό όλης της επιφάνειας της καθόδου, να απορροφά δηλαδή και το νέφος ηλεκτρονίων που υπάρχει στο “πίσω” μέρος της καθόδου.



Σχήμα Π31.4 Ο κορεσμός του ανοδικού ρεύματος επέρχεται βαθμιαία, καθώς αυξάνει η ανοδική τάση. Πρώτα κορεννυται το τμήμα που οφείλεται σε ηλεκτρόνια, e , που εξέρχονται από την εμπρός πλευρά της καθόδου, K , (προς την άνοδο, A) και τελευταίο εκείνο που εξέρχεται από την πίσω πλευρά της.