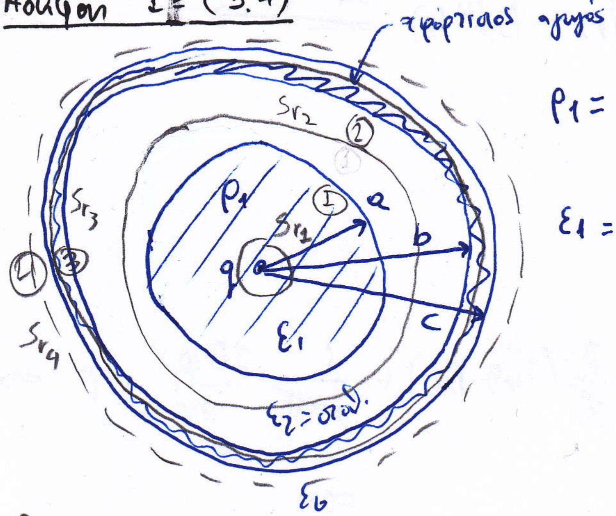
Ηλ. Πεδία Α

3η Σειρά Ασκήσεων

Χρήστος Τσάφης
03117176

Άσκηση 1η (3.4)



$\rho_1 = \rho_0 \dfrac{r^2}{a^2}$

$\varepsilon_1 = \varepsilon_0 \left(1 + \dfrac{r}{a}\right)$

▷ Ολοκληρωτικές Σχέσεις

Γνωρίζουμε ότι θα ισχύει, ότι: $\bar{D} = \hat{r}\, D_r(r)$, λόγω κυλινδρικής συμμετρίας.

• Από Gauss: $\oint_{S_{r_1}} \bar{D}\cdot d\bar{s} = [Q]_V \Leftrightarrow \oint_{S_{r_1}} D_r^{(1)}(r)\, ds = q + \int_0^r \rho(r')\, 4\pi r'^2 dr' \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow D_r^{(1)}(r)\, 4\pi r^2 = q + 4\pi \int_0^r \rho_0 \cdot \dfrac{r'^2}{a^2} r'^2 dr' \Leftrightarrow D_r^{(1)}(r) = \dfrac{q}{4\pi r^2} + \dfrac{1}{r^2} \cdot \dfrac{\rho_0}{a^2} \cdot \dfrac{r^5}{5} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow D_r^{(1)}(r) = \dfrac{q}{4\pi r^2} + \dfrac{\rho_0 \cdot r^3}{5a^2} \xrightarrow{\bar{D}_1 = \varepsilon \bar{E}_1} E_r^{(1)}(r) = \dfrac{q}{4\pi r^2 \varepsilon_1} + \dfrac{\rho_0 r^3}{5a^2 \varepsilon_1} \Rightarrow$

$\Leftrightarrow E_r^{(1)}(r) = \dfrac{q}{4\pi r^2 \varepsilon_0 \left(1 + \frac{r}{a}\right)} + \dfrac{\rho_0 \cdot r^3}{5a^2 \varepsilon_0 \left(1 + \frac{r}{a}\right)}, \quad 0 < r < a$

• Από Gauss, $\oint_{S_{r_2}} \bar{D} d\bar{s} = [Q]_V \Leftrightarrow \oint_{S_{r_2}} D_r^{(2)}(r)\, ds = q + \int_0^a \rho(r')\, 4\pi r'^2 dr' \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow D_r^{(2)}(r) \cdot 4\pi r^2 = q + 4\pi \int_0^a \rho_0 \dfrac{r'^2}{a^2} r'^2 dr' \Leftrightarrow D_r^{(2)}(r) = \dfrac{q}{4\pi r^2} + \dfrac{1}{r^2} \cdot \dfrac{\rho_0}{a^2} \cdot \dfrac{a^5}{5} = \dfrac{q}{4\pi r^2} + \dfrac{\rho_0 a^3}{5r^2} \Rightarrow$

$\xRightarrow{D_2 = \varepsilon_2 E_2} E_r^{(2)}(r) = \dfrac{q}{4\pi r^2 \varepsilon_2} + \dfrac{\rho_0 a^3}{5r^2 \varepsilon_2}, \quad a < r < b$

• Γνωρίζουμε για την περιοχή του Αγωγού (αφόρτιστος αγωγός στην περιοχή (3)) του ηλεκτροστατικού πεδίου, θα ισχύει $D_r^{(3)}(r) = 0$ και άρα, $E_r^{(3)}(r) = 0$, $b < r < c$.

• Πάλι, από Gauss: $\oint_{S_{r4}} \bar{D}d\bar{S} = [Q]_V \Rightarrow \oint_{S_{r4}} D_r^{(4)}(r)\,ds = q + \int_0^a \rho(r')\,4\pi r'^2 dr' + \cancel{Q_{o\gamma}}^{0} \Rightarrow$

$$\Rightarrow D_r^{(4)}(r)\cdot 4\pi r^2 = q + \int_0^a \rho(r')\,4\pi r' dr' \Rightarrow D_r^{(4)}(r) = D_r^{(2)}(r) \xrightarrow{\bar{D}_4 = \varepsilon_0 \bar{E}_4}$$

$$\Rightarrow E_r^{(4)}(r) = \frac{q}{4\pi r^2 \varepsilon_0} + \frac{\rho_0 a^3}{5 r^2 \varepsilon_0}, \quad r > c$$

▷ <u>Σημειακές Σχέσεις</u>

Από Νόμο Gauss: $\bar{\nabla}\bar{D} = \rho \Rightarrow \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}(r^2 D_r) + \frac{1}{r\sin\theta}\cancel{\frac{\partial}{\partial\theta}(\sin\theta\cdot D\theta)} + \cancel{\frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial D\varphi}{\partial\varphi}} = \rho \Rightarrow$

$$\Rightarrow \frac{1}{r^2}\cdot\frac{\partial}{\partial r}(r^2 D_r) = \rho \quad (1)$$

Για την <u>περιοχή 1</u>: $(1) \Rightarrow \frac{\partial}{\partial r}(r^2 D_r^{(1)}) = \rho(r)\cdot r^2 \Rightarrow r^2 D_r^{(1)}(r) = \overbrace{\int_0^r r'^2 \rho(r')dr'}^{F(r)} + C = F(r) + F(0) \underbrace{- F_0 + C}_{C_1} \Rightarrow$

$$\Rightarrow r^2 D_r^{(1)}(r) = \int_0^r r'^2 \rho(r')dr' + C_1 \Rightarrow D_r^{(1)}(r) = \frac{1}{r^2}\int_0^r r'^2 \rho(r')dr' + \frac{C_1}{r^2} \quad (2)$$

Για την <u>περιοχή 2</u>: $(1) \Rightarrow \frac{\partial}{\partial r}(r^2 D_r^{(2)}) = \cancel{\rho(r)}\, r^2 = 0 \Rightarrow r^2 D_r^{(2)}(r) = C_2 \Rightarrow D_r^{(2)}(r) = \frac{C_2}{r^2} \quad (3)$

Για την <u>περιοχή 3</u>: του αγωγού (αφόρτιστος αγωγός) του ηλεκτροστατικού πεδίου είναι γνωστό ότι θα ισχύει: $D_r^{(3)}(r) = 0 \quad (4)$

Για την <u>περιοχή 4</u>: $(1) \Rightarrow \frac{\partial}{\partial r}(r^2 D_r^{(4)}) = 0 \Rightarrow r^2 D_r^{(4)}(r) = C_4 \Rightarrow D_r^{(4)}(r) = \frac{C_4}{r^2} \quad (5)$

Η ορ. συνθ. για $r=a$: $\hat{r}(\bar{D}^{(2)}(a^+) - \bar{D}^{(1)}(a^-)) = \sigma \Rightarrow D_r^{(2)}(a^+) - D_r^{(1)}(a^-) = \sigma \quad (6)$

Η ορ. συνθ. για $r=b$: $\hat{r}(\cancel{\bar{D}^{(3)}(b^+)}^{0} - \bar{D}^{(2)}(b^-)) = \sigma_b \Rightarrow -D_r^{(2)}(b^-) = \sigma_b \quad (7)$

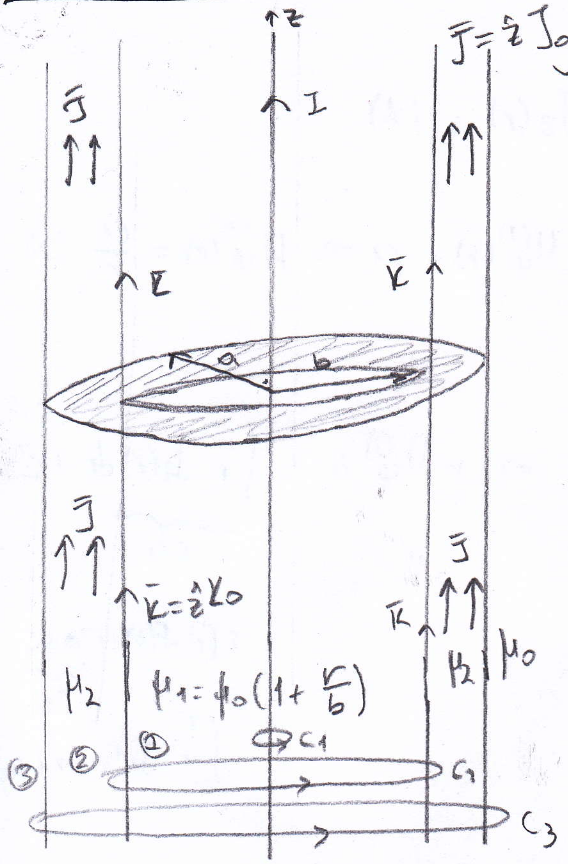
Η ορ. συνθ. για $r=c$, $\hat{r}(\bar{D}^{(4)}(c^+) - \cancel{\bar{D}^{(3)}(c^-)}^{0}) = \sigma_c \Rightarrow \bar{D}_r^{(4)}(c^+) = \sigma_c \quad (8)$

Επιπλέον, $\oint_{S_r(r\to 0)} D_r^{(1)} ds = \int_{V_r(r\to 0)} \rho\, dV \xrightarrow{\text{Θ.Μ.Τ.}} \tilde{\rho}\,\frac{4}{3}\pi r^3 \Rightarrow D_r^{(1)} 4\pi r^2 = \tilde{\rho}\,\frac{4}{3}\pi r^3$

Άρα, $\lim_{r\to 0}(D_r^{(1)} 4\pi r^2) = \lim_{r\to 0}(\tilde{\rho}\,\frac{4}{3}\pi r^3) = 0 \Rightarrow \lim_{r\to 0}(D_r^{(1)} 4\pi r^2) = 0 \quad (9)$

Από σχέσεις $\underbrace{(2)\text{ έως }(9)}_{\text{συστ. εξισ.}}$ προκύπτει το ζητούμενο ηλ. πεδίο $(E = \frac{D}{\varepsilon})$ σε όλες τις περιοχές.

Άσκηση 2η (3.9.α)



▷ Ολοκληρωτικές σχέσεις

Η διάταξη & οι πηγές παρουσιάζουν κυλινδρική συμμετρία. Επομένως, το πεδίο θα είναι συνάρτηση μόνο της ακτινικής συντεταγμένης r του σημείου παρατηρήσεως $\bar r(r,\varphi,z)$. Γνωρίζουμε ότι θα είναι: $\bar H = \hat\varphi H_\varphi(r)$.

Από τον Νόμο Ampere: $\oint_{C_1} \bar H d\bar l = I_c \Rightarrow$, $d\bar l = \hat\varphi dl = \hat\varphi r d\varphi$

$$\Rightarrow \int_0^{2\pi} H_\varphi^{(1)}(r)\, r\, d\varphi = I_c \Rightarrow 2\pi r H_\varphi^{(1)}(r) = I \Rightarrow$$

$$\Rightarrow H_\varphi^{(1)}(r) = \frac{I}{2\pi r}, \quad r<b$$

Από Νόμο Ampere: $\oint_{C_2} \bar H \cdot d\bar l = I_c$, $d\bar l = \hat\varphi dl = \hat\varphi r d\varphi$

$$\Rightarrow \int_0^{2\pi} H_\varphi^{(2)}(r)\, r\, d\varphi = I_c \Rightarrow 2\pi r H_\varphi^{(1)}(r) = I + K_0 2\pi b + \int_S \bar J d\bar S \Rightarrow$$

$d\bar S = \hat z dS = \hat z 2\pi r dr$

$$\Rightarrow 2\pi r H_\varphi^{(2)}(r) = I + K_0 \cdot 2\pi b + \int_b^r J_0 \frac{r'}{a} 2\pi r' dr' = I + K_0 2\pi b + \frac{2\pi J_0}{a}\left[\frac{r'^3}{3}\right]_b^r \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 2\pi r H_\varphi^{(2)}(r) = I + K_0 2\pi b + \frac{2\pi J_0}{3a}(r^3 - b^3) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow H_\varphi^{(1)}(r) = \frac{I}{2\pi r} + \frac{K_0 b}{r} + \frac{J_0}{3ar}(r^3 - b^3), \quad b<r<a.$$

Από Νόμο Ampere: $\oint_{C_3} \bar H \cdot d\bar l = I_c \Rightarrow \int_0^{2\pi} H_\varphi^{(3)}(r)\, r\, d\varphi = I_c \Rightarrow$

$$\Rightarrow 2\pi r H_\varphi^{(3)}(r) = I + K_0 2\pi b + \int_S \bar J \cdot d\bar S = I + K_0 \cdot 2\pi b + \int_a^b J_0 \frac{r'}{a} 2\pi r' dr' =$$

$$= I + K_0 2\pi b + \frac{2\pi J_0}{a}\left[\frac{r'^3}{3}\right]_b^a = I + K_0 2\pi b + \frac{2\pi J_0}{3a}(a^3 - b^3) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow H_\varphi^{(3)}(r) = \frac{I}{2\pi r} + \frac{K_0 b}{r} + \frac{J_0}{3ar}(a^3 - b^3), \quad r>a.$$

▷ Σημειακές Σχέσεις

Από την σχέση $\bar{\nabla}\times\bar{H}=\bar{J}$ ισχύει ότι, $\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}(rH_\varphi)=J_z(r)$ (1)

Για την περιοχή 1 : $(1) \Rightarrow \frac{\partial}{\partial r}\left(rH_\varphi^{(1)}\right)=0 \Rightarrow rH_\varphi^{(1)}(r)=C_1 \Rightarrow H_\varphi^{(1)}(r)=\frac{C_1}{r}$ (2)

Για την περιοχή 2 : $(1) \Rightarrow \frac{\partial}{\partial r}\left(rH_\varphi^{(2)}\right)=J_z(r)\cdot r \Rightarrow rH_\varphi^{(2)}(r)=\underbrace{\int r\,J_z(r)\,dr}_{F(r)}+C=$

$$=F(r)-F(0)+\underbrace{F(0)+C}_{C_2}$$

$$=\int_0^r r'\,J_z(r')\,dr'+C_2$$

$$\Rightarrow H_\varphi^{(2)}(r)=\frac{1}{r}\int_0^r r'J_z(r')\,dr'+\frac{C_2}{r} \quad (3)$$

Για την περιοχή 3 : $\frac{\partial}{\partial r}\left(rH_\varphi^{(3)}\right)=0 \Rightarrow rH_\varphi^{(3)}(r)=C_3 \Rightarrow H_\varphi^{(3)}(r)=\frac{C_3}{r}$ (4)

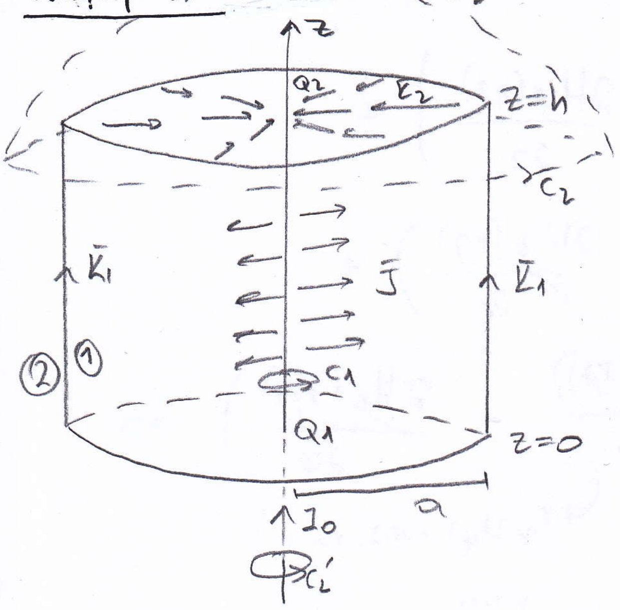
Η ορ. συνθ. για $r=b$: $\hat{r}\times\left(\bar{H}^{(2)}(b^+)-\bar{H}^{(1)}(b^-)\right)=\bar{K} \Rightarrow H_\varphi^{(2)}(b^+)-H_\varphi^{(1)}(b^-)=K_0$ (5)

Η ορ. συνθ. για $r=a$: $\hat{r}\times\left(\bar{H}^{(3)}(a^+)-\bar{H}^{(3)}(a^-)\right)=0 \Rightarrow H_\varphi^{(3)}(a^+)=H_\varphi^{(2)}(a^-)$ (6)

Επιπλέον, $\oint_{C_r(r\to 0)}\bar{H}\,d\bar{\ell}=I_{c\,(r\to 0)} \Rightarrow \lim_{r\to 0}\left(2\pi r\,H_\varphi^{(1)}(r)\right)=I$ (7)

Από τις σχέσεις $\underbrace{(2)\text{ ως }(7)}_{\text{σύστ. εξισ.}}$ προκύπτει το ζητούμενο μαγνητικό πεδίο σε όλες τις περιοχές.

'Άσκηση 3



α) Η διάταξη και οι πηγές παρουσιάζουν κυλινδρική συμμετρία και όρα, το διεγειρόμενο μαγνητοστατικό πεδίο είναι συνάρτηση μόνο των δύο συντεταγμένων r και z. Γνωρίζουμε ότι θα είναι:

$$\bar{H} = \hat{\varphi}\, H_\varphi(r,z)$$

$\hat{\varphi}\, d\ell = \hat{\varphi}\, r\, d\varphi$

Από τον Νόμο Ampere: $\oint_{C_1} \bar{H}\, d\bar{\ell} = I_c \Rightarrow$

$$\Rightarrow \int_0^{2\pi} H_\varphi^{(1)}(r)\, r\, d\varphi = I_0 e^{-z/h} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 2\pi r H_\varphi^{(1)}(r) = I_0 e^{-z/h} \Leftrightarrow H_\varphi^{(1)}(r) = \frac{I_0 e^{-z/h}}{2\pi r}$$

με $r<a$, $0<z<h$.

Από τον Νόμο Ampere στην C_2': $\oint_{C_2'} \bar{H}\, d\bar{\ell} = I_c \Rightarrow 2\pi r H_\varphi^{\alpha\acute{\epsilon}\rho\alpha}(r) = I_0 \Rightarrow H_\varphi^{\alpha\acute{\epsilon}\rho\alpha}(r) = \frac{I_0}{2\pi r}$

Ομοίως, με Νόμο Ampere στην κυκλική καμπύλη C_2, η οποία αποτελεί όριο της επιφάνειας S_2 (η S_2 "τρυπιέται" από αέρα $I_c = I_0$) θα έχουμε:

$$\oint_{C_2} \bar{H}\, d\bar{\ell} = I_c \Rightarrow 2\pi r H_\varphi^{(2)}(r) = I_0 \Rightarrow H_\varphi^{(2)}(r) = \frac{I_0}{2\pi r} = H_\varphi^{\alpha\acute{\epsilon}\rho\alpha}(r).$$

Επομένως, σε κάθε σημείο εκτός της διάταξης θα είναι $H_\varphi^{(1)}(r) = \frac{I_0}{2\pi r}$, $r>a$, $z\in\mathbb{R}$

β) Η οριακή συνθήκη στη διαχωριστική επιφάνεια με $r=a$, $0<z<h$ είναι:

$$\hat{r}\times\left[\bar{H}^{(2)}(r=a^+,z) - \bar{H}^{(1)}(r=a^-,z)\right] = \bar{K}_1 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \hat{r}\times\left[\hat{\varphi}\, H_\varphi^{(2)}(r=a^+,z) - \hat{\varphi}\, H_\varphi^{(1)}(r=a^-,z)\right] = \bar{K}_1 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \bar{K}_1 = \hat{z}\left(\frac{I_0}{2\pi a} - \frac{I_0 e^{-z/h}}{2\pi a}\right) \Leftrightarrow \bar{K}_1 = \hat{z}\frac{I_0}{2\pi a}\left(1-e^{-z/h}\right),\ 0<z<h.$$

γ) Από το Νόμο Maxwell-Ampere για χρονοσταθερό πεδίο, έχουμε:

$$\bar{\nabla} \times \bar{H} = \bar{J} \xrightarrow[\text{συντεγ.}]{\text{κυλινδρ.}} \bar{J} = \hat{r}\left(\cancel{\frac{\partial H_z(r,z)}{r\partial\varphi}} - \frac{\partial H_\varphi(r,z)}{\partial z} \right) +$$

$$+ \hat{\varphi}\left(\cancel{\frac{\partial H_r(r,z)}{\partial z}} - \cancel{\frac{\partial H_z(r,z)}{\partial r}} \right) +$$

$$+ \frac{1}{r}\cdot\hat{z}\left(\cancel{\frac{\partial (r H_\varphi(r,z))}{\partial r}} - \cancel{\frac{\partial H_r(r,z)}{\partial \varphi}} \right) \Rightarrow$$

$(r\cdot H_\varphi)$ σταθ. ως r)

$$\xrightarrow{\bar{H} = \hat{\varphi} H_\varphi(r,z)} \bar{J} = \hat{r}\left(- \frac{\partial H_\varphi(r,z)}{\partial z} \right) = \begin{cases} 0 & , r > a \\ -\frac{I_0}{2\pi r}\left(-\frac{1}{h}\right) e^{-z/h} & , r < a, 0 < z < h \end{cases}$$

$$\Rightarrow \bar{J} = \hat{r} \begin{cases} \frac{I_0 e^{-z/h}}{2\pi r h} & , r < a \ \& \ 0 < z < h \\ 0 & , r > a \end{cases}$$