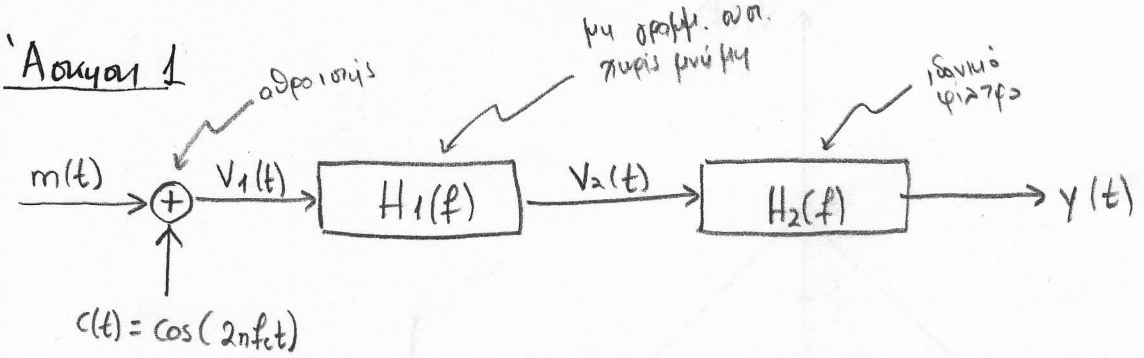
Στοχαστικά Συστήματα & Επικοινωνίες

Χρήστος Τσάφης
03117176

Άσκηση 1



όπου $m(t)$: σήμα βασ. ζώνης , E.Z. = W , μέγιστο πλάτους $A_m = \max\{|m(t)|\}$

$V_2(t) = a \cdot V_1(t) + b \cdot [V_1(t)]^2$

a) · $V_1(t) = m(t) + c(t)$

· $V_2(t) = [m(t) + c(t)] \cdot a + [m(t) + c(t)]^2 \cdot b \Rightarrow$

$\Rightarrow V_2(t) = a \cdot m(t) + a \cdot c(t) + b\left(m^2(t) + 2m(t) \cdot c(t) + c^2(t)\right) \Rightarrow$

$\Rightarrow V_2(t) = a \cdot m(t) + a \cdot c(t) + b \cdot m^2(t) + 2b\, m(t)\, c(t) + b \cdot c^2(t) \Rightarrow$

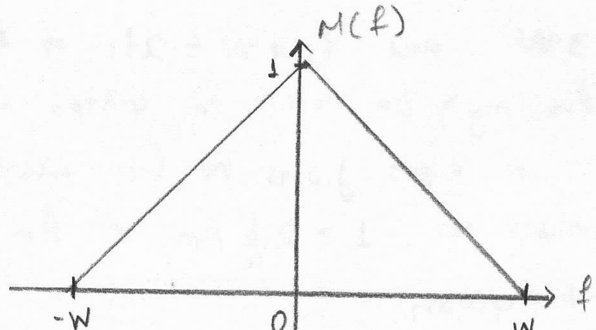
$\Rightarrow V_2(t) = a \cdot m(t) + a \cdot \cos(2\pi f_c t) + b\, m^2(t) + 2b\, m(t) \cdot \cos(2\pi f_c t) + b \cdot \cos^2(2\pi f_c t) \Rightarrow$

$\Rightarrow V_2(t) = a\, m(t) + a \cos(2\pi f_c t) + b\, m^2(t) + 2b\, m(t) \cos(2\pi f_c t) + b \cdot \frac{1 + \cos(2\pi (2f_c) t)}{2} \Rightarrow$

$\Rightarrow V_2(t) = a \cdot m(t) + a \cdot \cos(2\pi f_c t) + b \cdot m^2(t) + 2 \cdot b \cdot m(t) \cos(2\pi f_c t) + \frac{b}{2} + \frac{b}{2} \cos[2\pi (2f_c) t] \Rightarrow$

$\Rightarrow V_2(t) = \frac{b}{2} + a \cdot m(t) + \frac{b}{2} \cos[2\pi (2f_c) t] + a\left(1 + 2b\, m(t)\right) \cos(2\pi f_c t) + b\, m^2(t)$

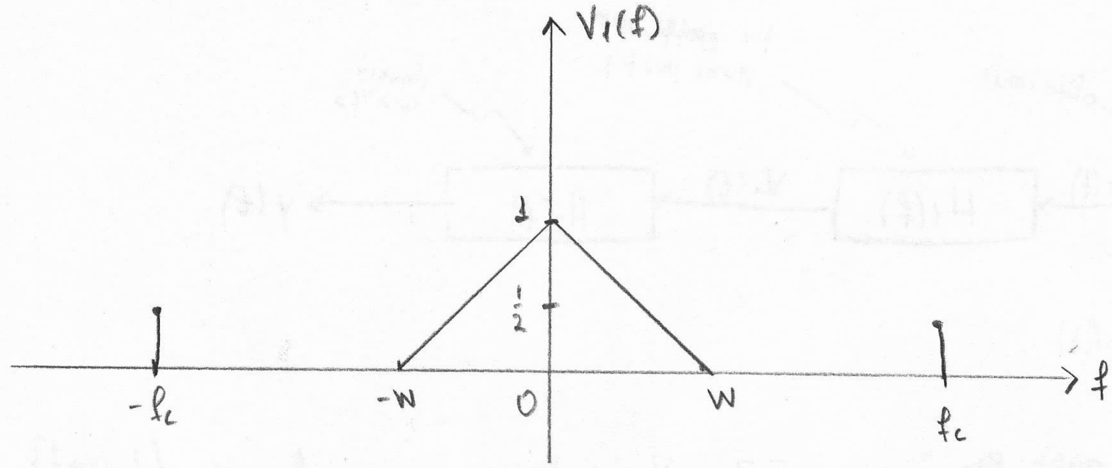
• Φάσμα του $m(t)$: άρτιος μοναδιαίος βαθυπ. τριγ. παλμός εύρους ζώνης $W \ll f_c$.



• Φάσμα του $c(t)$: $C(f) = \frac{1}{2}\left[\delta(f - f_c) + \delta(f + f_c)\right]$

Οπότε, $V_1(f) = M(f) + C(f) \Rightarrow V_1(f) = M(f) + \frac{1}{2}[\delta(f-f_c) + \delta(f+f_c)]$

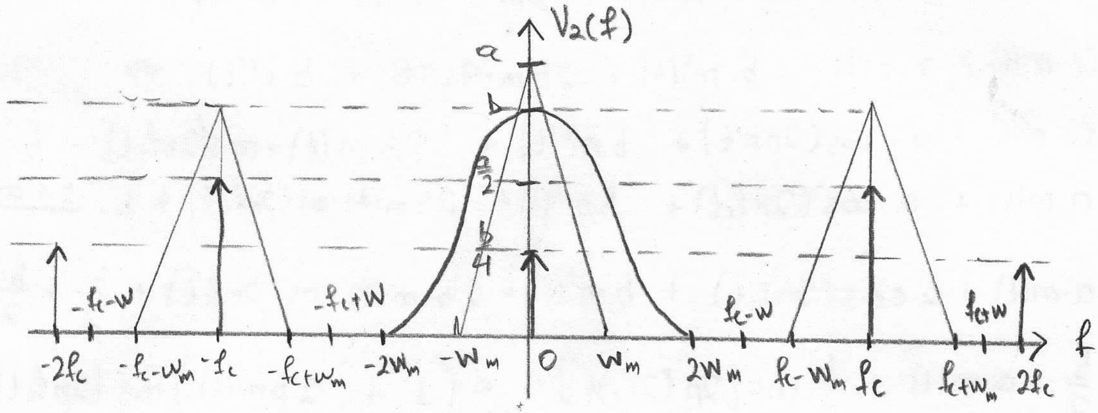
Έτσι,



Για το $V_2(t)$:

$$V_2(t) = a\cdot m(t) + a\cdot c(t) + b\,m^2(t) + 2b\cdot m(t)\cdot c(t) + b\cdot c^2(t) \Rightarrow$$

$$\stackrel{F}{\Rightarrow} V_2(f) = a\cdot M(f) + a\cdot\frac{1}{2}[\delta(f-f_c)+\delta(f+f_c)] + b\,\overbrace{M(f)*M(f)}^{\mathrm{sinc}^4(f)} + b[M(f-f_c)+M(f+f_c)] +$$
$$+ \frac{b}{2}\delta(f) + \frac{b}{4}[\delta(f-2f_c)+\delta(f+2f_c)]$$



β) Τα χαρακτηριστικά του φίλτρου είναι τα εξής:

▷ Το φάσμα του σήματος πληροφορίας, γύρω από τις συχνότητες $\pm f_c$ με κρουστικές στις ίδιες συχνότητες είναι αυτό που πρέπει να διατηρηθεί. Οπότε, με δεδομένο ότι

$f_c - W \geq 2W \Rightarrow f_c \geq 3W$ και $f_c + W \leq 2f_c \Rightarrow f_c \geq W \Longrightarrow f_c \geq 3W$

(για την αποφυγή του aliasing) θα πρέπει το φίλτρο να είναι ζωνοπερατό με κεντρική συχνότητα f_c και εύρος ζώνης W (ή ελάχιστα μεγαλύτερο)(*). Επίσης, πρέπει να ληφθεί υπόψιν ότι $1 > 2\frac{b}{a}A_m \Rightarrow A_m < \frac{a}{2b}$ ώστε να αποφευχθεί η υπερδιαμόρφωση.

(*) Με την προϋπόθεση: i) $W > W_m$

ii) $f_c - W_m > f_c - \frac{W}{2} > 2W_m$

b Επιπλέον, για να έχουμε στην έξοδο y(t) AM-διαμορφωμένο m(t), θα πρέπει να διατηρηθούν οι όροι $2bm(t)\cos(2\pi f_c t)$ και $a\cos(2\pi f_c t)$ ώστε:
$y(t) = a\left(1 + \frac{2b}{a} m(t)\right)\cos(2\pi f_c t)$ όπου $k = \frac{2b}{a}$. Για να επιτευχθεί αυτό, χρειάζεται ένα ζωνοπερατό φίλτρο που να κόβει όλες τις συχνότητες εκτός από $-f_c - W \le f \le f_c + W$ και $f_c - W \le f \le f_c + W$

γ) Για $k = \frac{2b}{a}$

Για το <u>m(t)</u>:

- $$P_{m(t)} = \frac{1}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} |m(t)|^2 dt \xrightarrow{\text{Parseval}} \frac{1}{2\pi T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} X^2(f) = \frac{1}{2\pi \cdot 2W}\int_{-W}^{W} X^2(f) =$$
$$= \frac{1}{4\pi W}\left(\int_{-W}^{0}\left(1+\frac{f}{W}\right)^2 df + \int_{0}^{W}\left(1-\frac{f}{W}\right)^2 df =\right.$$
$$= \frac{1}{4\pi W}\left(\int_{-W}^{0}\left(1+2\frac{f}{W}+\frac{f^2}{W^2}\right)df + \int_{0}^{W}\left(1-2\frac{f}{W}+\frac{f^2}{W^2}\right)df\right) = 0$$

- $$E = \int_{-\infty}^{+\infty} |m(t)|^2 = \int_{-\infty}^{+\infty} X^2(f) = 0$$

Για το <u>y(t)</u>:

- $$y(t) = a\cos(2\pi f_c t)\left(1 + \frac{2b}{a} m(t)\cos(2\pi f_c t)\right) \xrightarrow{\mathcal{F}} \frac{a}{2}\left[\delta(f-f_c)+\delta(f+f_c)\right]\left[1+\frac{2b}{a}\left[M(f-f_c)+M(f+f_c)\right]\right]$$

- $$P_{y(t)} = \frac{1}{2T}\int_{-T}^{T} a^2\cos^2(2\pi f_c t)\left(1+\frac{4b}{a}m(t)+\frac{4b^2}{a^2}m^2(t)\cos(2\pi f_c t)\right) =$$
$$= \frac{1}{2T}\int_{-T}^{T} a^2\cos^2 2\pi f_c t \xrightarrow{\substack{\text{όροι με}\\ \text{sinc} \to 0}} \frac{a^2}{2T}\int_{-T}^{T}\frac{1}{2}\cos(4\pi f_c t) =$$
$$= \int_{-T}^{T}\frac{1}{2}T + \left[\frac{\sin 4\pi f_c t}{4\pi f_c}\right]_{-T}^{T} = \frac{a^2}{2}$$

- $$E = \int_{-\infty}^{+\infty} |y(t)|^2 = \int_{-\infty}^{+\infty} x^2(f) = \frac{a}{2} + \frac{a}{2} = a$$

Άσκηση 2

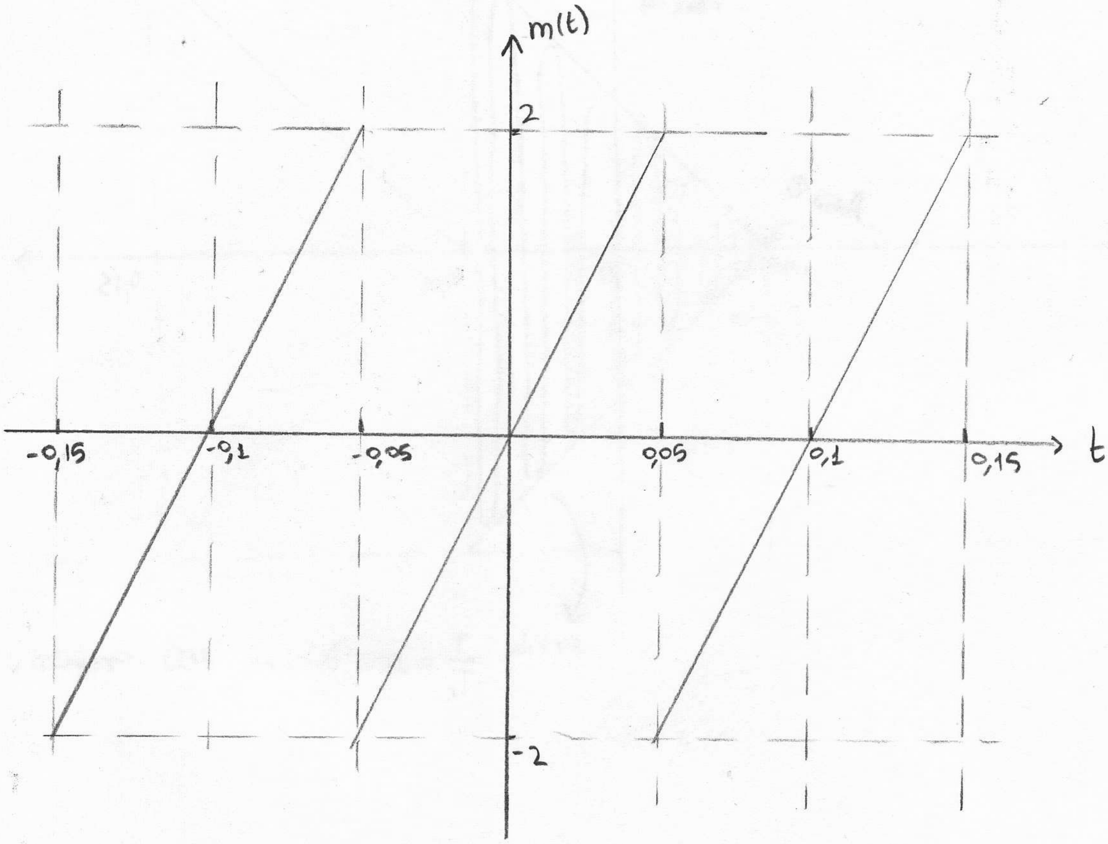
m(t): περιοδικό σήμα, $T = 0,1\,s$, $m(t) = 40t$, $|t| \le 0,05$

· διέρχεται από AM-διαμ, $f_c = 1kHz$

· η έξοδος είναι $s(t) = [a + m(t)]\cos(2\pi f_c t)$

a)

▷



▷ $P_{avg} = \frac{1}{T}\int_0^T |m(t)|^2 dt \Rightarrow P_{avg} = 10\int_{-0,05}^{0,05} 1.600t^2 dt \Rightarrow$

$\Rightarrow P_{avg} = 16.000\left[\frac{t^3}{3}\right]_{-0,05}^{0,05} \Rightarrow P_{avg} = \frac{2}{3} + \frac{2}{3} = \frac{4}{3}$

β) $a = 2 \Rightarrow s(t) = [2 + m(t)]\cos(2\pi f_c t) = 2\left[1 + \frac{1}{2}m(t)\right]\cos(2\pi f_c t)$

▷ Οπότε, $K_a = \frac{1}{2}$ και ο συντελεστής διαμόρφωσης είναι:

$\max\{K_a \cdot m(t)\} = K_a \cdot m_{max}(t) = \frac{1}{2}\cdot 2 = 1$

Συνεπώς, $\mu = 1$

▷ Για τη μέση ισχύ του διαμορφωμένου σήματος: $\rightarrow P_s = \frac{1}{T}\int_{-0,05}^{0,05} |[2+m(t)]\cos(2\pi f_c t)|^2 dt = \dots$

$P_{carrier} = \frac{1}{2}A_c^2 = 2$

$P_s = P_{carrier} + P_{usb} + P_{lsb}$, όμως $P_{usb} + P_{lsb}$ είναι ίσο με $\frac{A_c^2 \cdot k_a^2 \cdot P_{avg,m}}{2} = \frac{1}{2}\cdot 2^2\left(\frac{1}{2}\right)^2\cdot\frac{4}{3} = \frac{2}{3}$ και

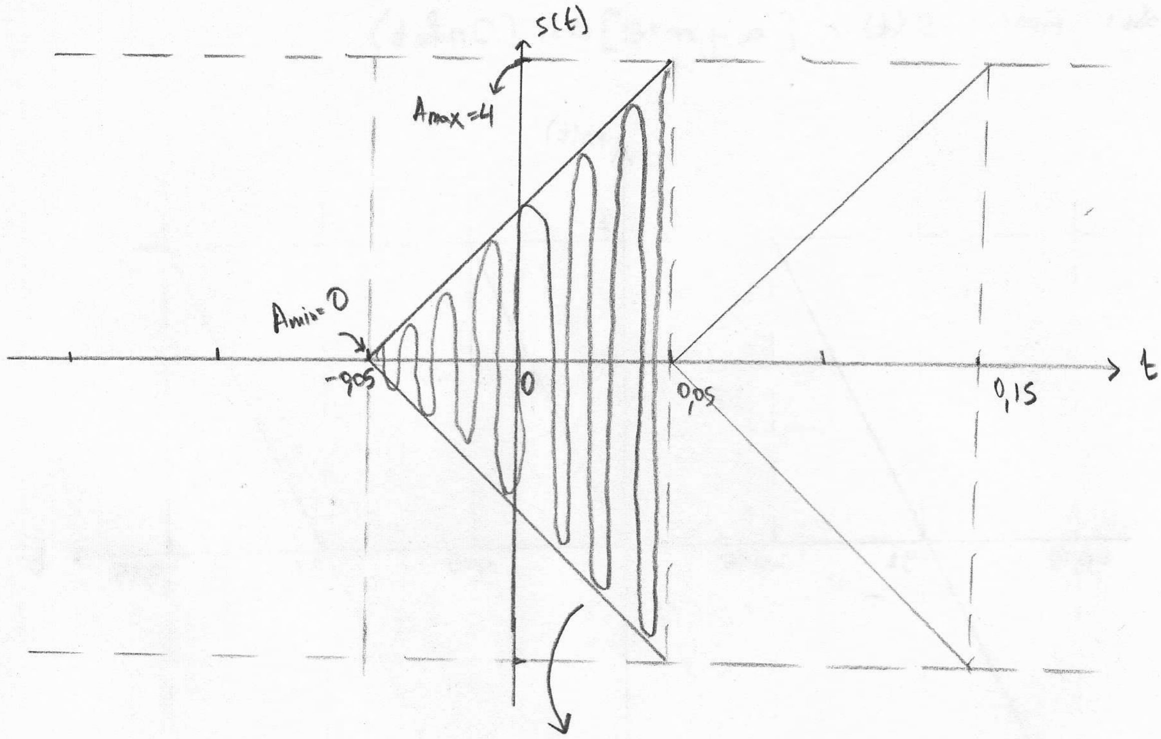
τελικά $P_{usb} + P_{lsb} = \frac{2}{3}$ και $P_s = \frac{8}{3}$

▷ Για τον λόγο ισχύων: $\Lambda = \frac{P_{usb} + P_{lsb}}{P_s} \Rightarrow \Lambda = 1/4$

γ) $s(t) = [2+m(t)]\cos(2\pi f_c t)$

▷ Η $m(t)$ είναι περιβάλλουσα της $s(t)$. $A_{max} = A_c(1+\mu) = 4$

▷ Ποιοτική (& ενδεικτική) σχεδίαση:



Επειδή $\frac{T}{T_c} = 100$ θα είναι 100 επαναλήψεις

Άσκηση 3

- στοχ. ανελ. $X(t)$
$A=1$ για τον $t_1=T$ ως $t_2=T+4$ $\Big\} \Rightarrow X(t)=\begin{cases}1, & [T,T+4]\\ 0, & \text{αλλού}\end{cases}$

- Το T είναι τ.μ. ομοιομ. στο $[0,4]$ $\Big\} \Rightarrow f_T(\tau)=\begin{cases}1/4, & \tau\in[0,4]\\ 0, & \text{αλλού}\end{cases}$

α) $P[X(t)\le x]=?$

$$X(t)=u(t-T)-u(t-(T+4))$$

$$f_{X(t)}(x)=P[X(t)\le x]=\begin{cases}f_1(x), & t\le T\\ f_2(x), & T\le t\le T+4\\ f_3(x), & t\ge T+4\end{cases}$$

▷ $f_1(x)=P[0\le x]=\begin{cases}1, & x\ge 0\\ 0, & x<0\end{cases}=u(x)$

▷ $f_2(x)=P[1\le x]=\begin{cases}1, & x\ge 1\\ 0, & x<1\end{cases}=u(x-1)$

▷ $f_3(x)=P[0\le x]=u(x)$

Οπότε $f_{X(t)}(x)=\begin{cases}u(x-1), & T\le t\le T+4\\ u(x), & \text{αλλού}\end{cases}$

β) $E[X(t)]=?$

$$E[X(t)]=E[u(t-T)-u(t-(T+4))]=\int_{-\infty}^{+\infty}[u(t-T)-u(t-T-4)]f_T(\tau)d\tau=$$

$$=\frac{1}{4}\int_0^4[u(t-\tau)-u(t-\tau-4)]d\tau=\underbrace{\frac{1}{4}\int_0^4 u(t-\tau)d\tau}_{J_1}-\underbrace{\frac{1}{4}\int_0^4 u(t-\tau-4)d\tau}_{J_2}$$

▷ $J_1=\frac{1}{4}\int_0^4 u(t-\tau)d\tau=-\frac{1}{4}\int_t^{t-4}u(\tau)d\tau=\frac{1}{4}\int_{t-4}^{t}u(\tau)d\tau=\begin{cases}1, & t-4\ge 0\\ 0, & t\le 0\\ \frac{1}{4}t, & t-4\le 0, t\ge 0\end{cases}$

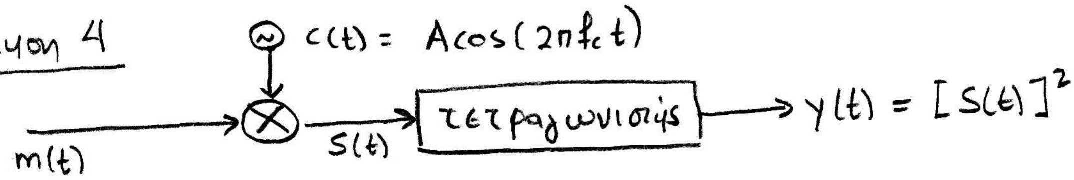
▷ $J_2=\frac{1}{4}\int_0^4 u(t-\tau-4)d\tau=-\frac{1}{4}\int_{t-4}^{t-8}u(\tau)d\tau=\frac{1}{4}\int_{t-8}^{t-4}u(\tau)d\tau=\begin{cases}1, & t-8\ge 0\\ 0, & t-4\le 0\\ t-1, & t-8\le 0, t-4\ge 0\end{cases}$

Οπότε, $E[X(t)] = I_1 - I_2 = \begin{cases} 0 & , t \le 0 \\ t & , 0 \le t \le 4 \\ 2-t & , 4 \le t \le 8 \\ 0 & , t \ge 8 \end{cases}$

γ) Στατικότητα;

Επειδή και η κατανομή και η μέση τιμή εξαρτώνται από τον χρόνο, δεν είναι κανένα είδος στατικότητας

Άσκηση 4



$m(t) = \cos(600\pi t) + 200\,\mathrm{sinc}(400\pi t)$

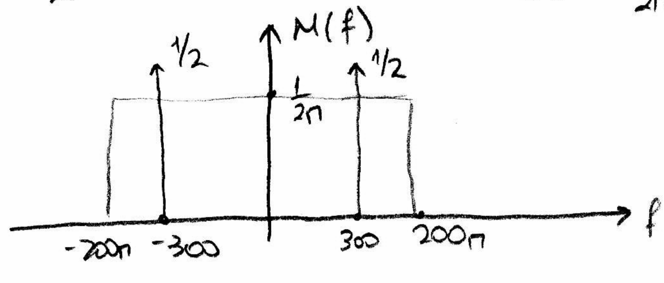
α) Από την διαμόρφωση διπλής πλευρικής ζώνης με κατεσταλμένο το φέρον (DSB-SC) ισχύει: $s(t) = m(t)\cdot c(t) \Rightarrow s(t) = A\cos(2\pi f_c t)\cdot[\cos(600\pi t) + 200\,\mathrm{sinc}(400\pi t)]$

και $y(t) = [s(t)]^2 \Rightarrow y(t) = A^2\cos^2(2\pi f_c t)\cdot[\cos(600\pi t) + 200\,\mathrm{sinc}(400\pi t)]^2$

β) Για $M(f)$: $\cos(2\pi f_c t) \overset{\mathcal{F}}{\rightleftharpoons} \frac{1}{2}[\delta(f-f_c) + \delta(f+f_c)]$

$\mathrm{sinc}(2wt) \overset{\mathcal{F}}{\rightleftharpoons} \frac{1}{2w}\mathrm{rect}\left(\frac{f}{2w}\right)$

οπότε, $M(f) = \frac{1}{2}[\delta(f-300) + \delta(f+300)] + \frac{1}{2\pi}\mathrm{rect}\left(\frac{f}{400\pi}\right)$



Για $S(f)$: $s(t) = A\cos(2\pi f_c t)\cdot m(t) \overset{\mathcal{F}}{\Rightarrow} S(f) = \frac{A}{2}[M(f-f_c) + M(f+f_c)] \Rightarrow$

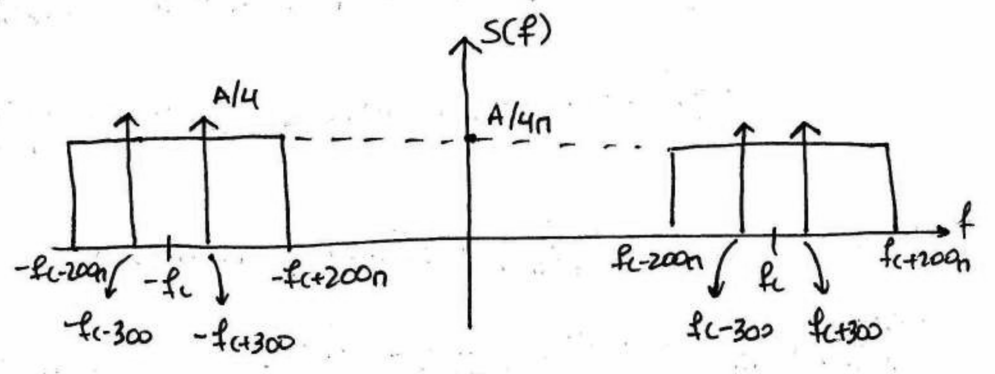
$$\Rightarrow S(f) = \frac{A}{2}\left\{\frac{1}{2}[\delta(f-f_c-300) + \delta(f-f_c+300)] + \frac{1}{2\pi}\mathrm{rect}\left(\frac{f-f_c}{400\pi}\right) + \right.$$

$$\left. + \frac{1}{2}[\delta(f+f_c-300) + \delta(f+f_c+300)] + \frac{1}{2\pi}\mathrm{rect}\left(\frac{f+f_c}{400\pi}\right)\right\}$$

$$\Rightarrow S(f) = \frac{A}{4}[\delta(f-f_c-300) + \delta(f-f_c+300) + \delta(f+f_c-300) + \delta(f+f_c+300)] +$$

$$+ \frac{A}{4\pi}\left[\mathrm{rect}\left(\frac{f-f_c}{400\pi}\right) + \mathrm{rect}\left(\frac{f+f_c}{400\pi}\right)\right]$$

Ισχύει $f_c \gg W$, όπου W το εύρος ζώνης του σήματος πληροφορίας.



Για $\underset{\sim}{Y(f)}$: $\quad Y(f) = S(f) * S(f) = \frac{A^2}{4}\left[M(f-f_c) + M(f+f_c)\right] * \left[M(f-f_c) + M(f+f_c)\right]$

Με χρήση: $X(f) * \delta(f-f_0) = X(f-f_0)$ και $A\,rect\left(\frac{f}{2W}\right) * A\,rect\left(\frac{f}{2W}\right) = A^2 \cdot 2W\, trig\left(\frac{f}{2W}\right)$.

- $M(f-f_c) * M(f-f_c) = \left\{\frac{1}{2}\left[\delta(f-f_c-300) + \delta(f-f_c+300)\right] + \frac{1}{2\pi} rect\left(\frac{f-f_c}{400\pi}\right)\right\} *$

$$\left\{\frac{1}{2}\left[\delta(f-f_c-300) + \delta(f-f_c+300)\right] + \frac{1}{2\pi} rect\left(\frac{f-f_c}{400\pi}\right)\right\} =$$

$$= \frac{1}{4}\delta(f-2f_c-600) + \frac{1}{4}\delta(f-2f_c) + \frac{1}{4\pi} rect\left(\frac{f-2f_c-300}{400\pi}\right) +$$

$$+ \frac{1}{4}\delta(f-2f_c) + \frac{1}{4}\delta(f-2f_c+600) + \frac{1}{4\pi} rect\left(\frac{f-2f_c+300}{400\pi}\right) +$$

$$+ \frac{1}{4\pi} rect\left(\frac{f-2f_c-300}{400\pi}\right) + \frac{1}{4\pi} rect\left(\frac{f-2f_c+300}{400\pi}\right) + \frac{1}{4\pi^2} 400\pi\, trig\left(\frac{f-2f_c}{400\pi}\right) =$$

$$= \frac{1}{4}\left[\delta(f-2f_c-600) + \delta(f-2f_c+600) + 2\delta(f-2f_c) + \frac{2}{\pi} rect\left(\frac{f-2f_c-300}{400\pi}\right)\right.$$

$$\left. + \frac{2}{\pi} rect\left(\frac{f-2f_c+300}{400\pi}\right) + \frac{100}{\pi} trig\left(\frac{f-2f_c}{400\pi}\right)\right]$$

- $M(f+f_c) * M(f+f_c) = \left\{\frac{1}{2}\left[\delta(f+f_c-300) + \delta(f+f_c+300)\right] + \frac{1}{2\pi} rect\left(\frac{f+f_c}{400\pi}\right)\right\} *$

$$\left\{\frac{1}{2}\left[\delta(f+f_c-300) + \delta(f+f_c+300)\right] + \frac{1}{2\pi} rect\left(\frac{f+f_c}{400\pi}\right)\right\} =$$

$$= \frac{1}{4}\delta(f+2f_c-600) + \frac{1}{4}\delta(f+2f_c) + \frac{1}{4\pi} rect\left(\frac{f+2f_c-300}{400\pi}\right) +$$

$$+ \frac{1}{4}\delta(f+2f_c) + \frac{1}{4}\delta(f+2f_c+600) + \frac{1}{4\pi} rect\left(\frac{f+2f_c+300}{400\pi}\right) +$$

$$+ \frac{1}{4\pi} rect\left(\frac{f+2f_c-300}{400\pi}\right) + \frac{1}{4\pi} rect\left(\frac{f+2f_c+300}{400\pi}\right) + \frac{1}{4\pi^2} 400\pi\, trig\left(\frac{f+2f_c}{400\pi}\right) =$$

$$= \frac{1}{4}\left[\delta(f+2f_c-600) + \delta(f+2f_c+600) + 2\delta(f+2f_c) +\right.$$

$$\left. + \frac{2}{2\pi} rect\left(\frac{f+2f_c-300}{400\pi}\right) + \frac{2}{\pi} rect\left(\frac{f+2f_c+300}{400\pi}\right) + \frac{100}{\pi} trig\left(\frac{f+2f_c}{400\pi}\right)\right]$$

$$\bullet\ M(f-f_c) * M(f+f_c) = M(f+f_c) * M(f-f_c) = \left\{\frac{1}{2}\left[\delta(f-f_c-300)+\delta(f-f_c+300)\right] + \frac{1}{2\pi}\mathrm{rect}\left(\frac{f-f_c}{400\pi}\right)\right\} *$$

$$\left\{\frac{1}{2}\left[\delta(f+f_c-300)+\delta(f+f_c+300)\right]+\frac{1}{2\pi}\mathrm{rect}\left(\frac{f+f_c}{400\pi}\right)\right\} =$$

$$= \frac{1}{4}\delta(f-600) + \frac{1}{4}\delta(f) + \frac{1}{4\pi}\mathrm{rect}\left(\frac{f-300}{400\pi}\right) + \frac{1}{4}\delta(f) + \frac{1}{4}\delta(f+600) +$$

$$+ \frac{1}{4\pi}\mathrm{rect}\left(\frac{f+300}{400\pi}\right) + \frac{1}{4\pi}\mathrm{rect}\left(\frac{f-300}{400\pi}\right) + \frac{1}{4\pi}\mathrm{rect}\left(\frac{f+300}{400\pi}\right) + \frac{1}{4\pi^2}400\pi\,\mathrm{trig}\left(\frac{f}{400\pi}\right) =$$

$$= \frac{1}{4}\left[\delta(f-600)+\delta(f+600)+2\delta(f) + \frac{2}{\pi}\mathrm{rect}\left(\frac{f-300}{400\pi}\right) + \right.$$

$$\left. + \frac{2}{\pi}\mathrm{rect}\left(\frac{f+300}{400\pi}\right) + \frac{100}{\pi}\mathrm{trig}\left(\frac{f}{400\pi}\right)\right].$$

Οπότε, $Y(f) = \frac{A^2}{4}\left[M(f-f_c) * M(f-f_c) + 2M(f-f_c) * M(f+f_c) + M(f+f_c) * M(f+f_c)\right] =$

$$= \frac{A^2}{16}\delta(f-2f_c-600) + \frac{A^2}{16}\delta(f-2f_c+600) + \frac{A^2}{8}\delta(f-2f_c) + \frac{A^2}{8\pi}\mathrm{rect}\left(\frac{f-2f_c-300}{400\pi}\right) +$$

$$+ \frac{A^2}{8\pi}\mathrm{rect}\left(\frac{f-2f_c+300}{400\pi}\right) + \frac{25A^2}{4\pi}\mathrm{trig}\left(\frac{f-2f_c}{400\pi}\right) + \frac{A^2}{8}\delta(f-600) + \frac{A^2}{8}\delta(f+600) +$$

$$+ \frac{A^2}{4}\delta(f) + \frac{A^2}{4\pi}\mathrm{rect}\left(\frac{f-300}{400\pi}\right) + \frac{A^2}{4\pi}\mathrm{rect}\left(\frac{f+300}{400\pi}\right) + \frac{25A^2}{2\pi}\mathrm{trig}\left(\frac{f}{400\pi}\right) +$$

$$+ \frac{A^2}{16}\delta(f+2f_c-600) + \frac{A^2}{16}\delta(f+2f_c+600) + \frac{A^2}{8}\delta(f+2f_c) + \frac{A^2}{8\pi}\mathrm{rect}\left(\frac{f+2f_c-300}{400\pi}\right) +$$

$$+ \frac{A^2}{8\pi}\mathrm{rect}\left(\frac{f+2f_c+300}{400\pi}\right) + \frac{25A^2}{4\pi}\mathrm{trig}\left(\frac{f+2f_c}{400\pi}\right) =$$

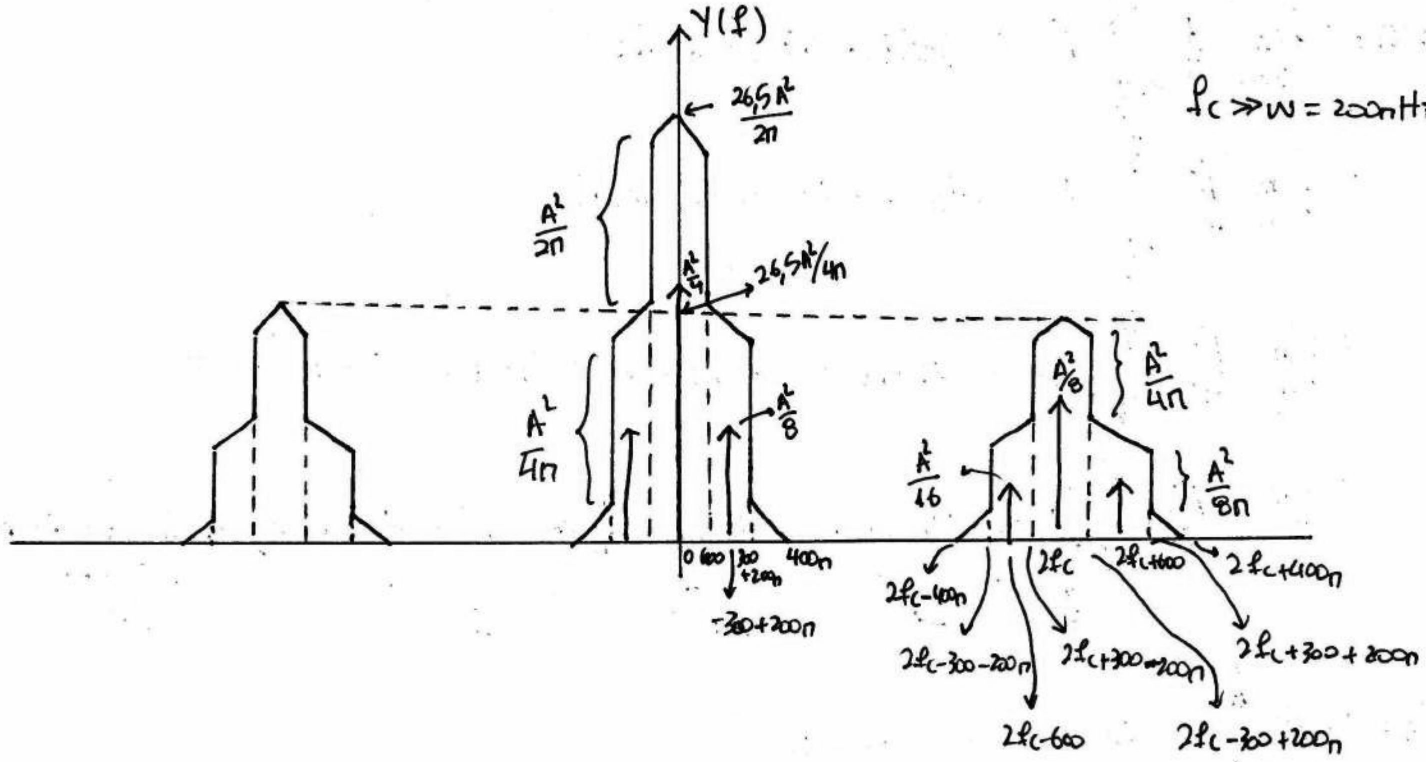
$$= \frac{A^2}{16}\left[\delta(f-2f_c-600) + \delta(f-2f_c+600) + \delta(f+2f_c-600) + \delta(f+2f_c+600)\right] +$$

$$+ \frac{A^2}{8}\left[\delta(f-2f_c) + \delta(f-600) + \delta(f+600) + \delta(f+2f_c)\right] + \frac{A^2}{4}\delta(f) +$$

$$+ \frac{A^2}{8\pi}\left[\mathrm{rect}\left(\frac{f-2f_c-300}{400\pi}\right) + \mathrm{rect}\left(\frac{f-2f_c+300}{400\pi}\right) + 2\mathrm{rect}\left(\frac{f-300}{400\pi}\right) + 2\mathrm{rect}\left(\frac{f+300}{400\pi}\right) + \right.$$

$$\left. + \mathrm{rect}\left(\frac{f+2f_c-300}{400\pi}\right) + \mathrm{rect}\left(\frac{f+2f_c+300}{400\pi}\right)\right] +$$

$$+ \frac{25}{A^2}\left[\mathrm{trig}\left(\frac{f-2f_c}{400\pi}\right) + 2\,\mathrm{trig}\left(\frac{f}{400\pi}\right) + \mathrm{trig}\left(\frac{f+2f_c}{400\pi}\right)\right]$$



$f_c \gg W = 200\pi Hz$

γ) • Για $m(t) = \cos(600\pi t) + 200\,\mathrm{sinc}(400\pi t)$:

$$P_{m(t)} = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} |m(t)|^2 dt = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} |\cos(600\pi t) + 200\,\mathrm{sinc}(400\pi t)|^2 dt =$$

$$= \lim_{T\to\infty} \frac{1}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} \Big[\underbrace{\cos^2(600\pi t)}_{P_1} + \underbrace{40.000 \cdot \mathrm{sinc}^2(400\pi t)}_{P_2} + \underbrace{400\cos(600\pi t)\cdot \mathrm{sinc}(400\pi t)}_{P_3}\Big] dt$$

• $P_1 = \frac{1}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} \cos^2(600\pi t)\,dt = 300 \cdot \int_{-\frac{1}{600}}^{\frac{1}{600}} \frac{1}{2}\cdot(1+\cos(1200\pi t))dt = 150[t]_{-\frac{1}{600}}^{1/600} + 150\,[\cancel{\sin(1200\pi t)}]_{-\frac{1}{600}}^{1/600} =$

$= 150\left(\frac{1}{600} + \frac{1}{600}\right) \Rightarrow P_1 = 0{,}5\ W$

• Το sinc είναι σήμα ενέργειας (όπως για sinc^2) συνεπώς έχουν μηδενική ισχύ.
Άρα $P_2 = P_3 = 0$

Επομένως $P_{m(t)} = P_1 + P_2 + P_3 = 0{,}5 + 0 + 0 = 0{,}5\ W$

• Για $s(t) = A\cos(2\pi f_c t)\,[\cos(600\pi t) + 200\,\mathrm{sinc}(400\pi t)]$:

$$P_{s(t)} = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} |s(t)|^2 dt = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} |A\cos(2\pi f_c t)\,[\cos(600\pi t) + 200\,\mathrm{sinc}(400\pi t)]|^2 dt =$$

$$= \lim_{T\to\infty} \frac{1}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} A^2\cos^2(2\pi f_c t)\cdot\left[\cos^2(600\pi t) + 400\cdot\cos(600\pi t)\sin(400\pi t) + 40.000\,\mathrm{sinc}^2(400\pi t)\right] dt$$

$$\Rightarrow P_{s(t)} = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} A^2\cos^2(2\pi f_c t)\cdot \cos^2(600\pi t)\,dt =$$

$$= \lim_{T\to\infty} \frac{A^2}{4T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} (1+\cos(4\pi f_c t))\cdot(1+\cos(1200\pi t))\,dt =$$

$$= \lim_{T\to\infty} \frac{A^2}{4T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} \left[1+\cos(1200\pi t)+\cos(4\pi f_c t)+\cos(4\pi f_c t)\cdot\cos(1200\pi t)\right]dt =$$

$$= \lim_{T\to\infty} \frac{A^2}{4T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} \Big[\underbrace{1}_{\frac{A^2}{4}}+\underbrace{\cos(1200\pi t)}_{I_1}+\underbrace{\cos(4\pi f_c t)}_{I_4}+\underbrace{\tfrac{1}{2}\cos(4\pi f_c t-1200\pi t)}_{I_3}+\underbrace{\tfrac{1}{2}\cos(4\pi f_c t+1200\pi t)}_{I_4}\Big]dt$$

- $I_1 = 150A^2\int_{-\frac{1}{1200}}^{\frac{1}{1200}} \cos(1200\pi t)\,dt = 0 \Rightarrow I_1 = 0$

- Όμοια, $I_2 = I_3 = I_4 = 0$

Επομένως, $P_{s(t)} = \frac{A^2}{4}$.

- Για $y(t) = A^2\cos^2(2\pi f_c t)\cdot[\cos(600\pi t)+200\,\mathrm{sinc}(400\pi t)]^2$:

$$P_{y(t)} = \lim_{T\to\infty}\frac{1}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} |y(t)|^2dt = \lim_{T\to\infty}\frac{1}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} \left|A^2\cos^2(2\pi f_c t)\cdot[\cos(600\pi t)+200\,\mathrm{sinc}(400\pi t)]^2\right|^2dt =$$

$$= \lim_{T\to\infty}\frac{1}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} A^4\cdot\cos^4(2\pi f_c t)\cdot\left[\cos^2(600\pi t)+400\cos(600\pi t)\,\mathrm{sinc}(400\pi t)+40000\,\mathrm{sinc}^2(400\pi t)\right]^2dt$$

$$= \lim_{T\to\infty}\frac{1}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} A^4\cos^4(2\pi f_c t)\cdot\Big[\cos^4(600\pi t)+400\cos^3(600\pi t)\cdot\mathrm{sinc}(400\pi t)+40000\cos^2(600\pi t)\cdot\mathrm{sinc}^2(400\pi t)+$$

$$+400\cos^3(600\pi t)\,\mathrm{sinc}(400\pi t)+160000\cos^2(600\pi t)\,\mathrm{sinc}^2(400\pi t)+$$

$$+16000000\cos(600\pi t)\,\mathrm{sinc}^3(400\pi t)+40000\cos^2(600\pi t)\,\mathrm{sinc}^2(400\pi t)+$$

$$+16.000000\cos(600\pi t)\,\mathrm{sinc}^3(400\pi t)+1.600000000\,\mathrm{sinc}^4(400\pi t)\Big]dt$$

Όπως προηγουμένως, προκύπτει:

$$P_{y(t)} = \lim_{T\to\infty}\frac{1}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} A^4\cos^4(2\pi f_c t)\cdot\cos^4(600\pi t)\,dt =$$

$$= \lim_{T\to\infty}\frac{A^4}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} \left(\frac{1+\cos(4\pi f_c t)}{2}\right)^2\cdot\left(\frac{1+\cos(1200\pi t)}{2}\right)^2dt =$$

$$= \lim_{T\to\infty}\frac{A^4}{16T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} \left(1+\cos^2(4\pi f_c t)+2\cos(4\pi f_c t)\right)\left(1+2\cos(1200\pi t)+\cos^2(1200\pi t)\right)dt$$

$$\Rightarrow P_{y(t)} = \lim_{T\to\infty} \frac{A^4}{16T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} \left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\cos(8\pi f_c t) + 2\cos(4\pi f_c t)\right)\cdot\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\cos^2(1200\pi t) + 2\cos(1200\pi t)\right)dt$$

$$\Rightarrow P_{y(t)} = \frac{9A^4}{64}$$

δ) Για τον υπολογισμό της ζητούμενης ελάχιστης τιμής f_c^{min} της συχνότητας του φέροντος f_c, ώστε να επιτρέπεται η ανακατασκευή τυχαίου σήματος πληροφορίας $m(t)$ εύρους ζώνης W από την έξοδο $y(t)$ της μελετώμενης διάταξης, αρχικά θα μελετηθεί το σχήμα του φάσματος του $y(t)$, δηλ. το $Y(f)$ που σχεδιάσθηκε.
Για να επιτρέπεται η ανακατασκευή του $m(t)$ πρέπει στο $Y(f)$ να μην υπάρχουν επικαλύψεις μεταξύ των λοβών που σχηματίζονται. Άρα, για διακριτή απομόνωση του κεντρικού λοβού μέσω φίλτρου (αποφυγή aliasing) θα πρέπει να είναι:
$400\pi \le 2f_c - 400\pi$, όπου 400π αντιστοιχεί σε $2W$ ($W = 200Hz$).
Άρα, για τη γενική περίπτωση τυχαίου $m(t)$ με εύρος ζώνης W η σχέση γίνεται:
$$2W \le 2f_c - 2W \Leftrightarrow 2f_c \geq 4W \Leftrightarrow f_c \geq 2W \Leftrightarrow f_c^{min} = 2W$$

ε) $y(t) = A^2\cos^2(2\pi f_c t)\cdot[\cos(600\pi t) + 200\text{sinc}(400\pi t)]^2 \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow y(t) = \frac{A^2}{2}[1+\cos(4\pi f_c t)]\cdot m^2(t) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow y(t) = \frac{A^2}{2}m^2(t) + \frac{A^2}{2}m^2(t)\cdot\cos(4\pi f_c t)$$

Παρατηρεί κανείς ότι ένα LPF μπορεί να απομονώσει τα κομμάτια του φάσματος που έχουν κέντρο το $\pm 2f_c$ (δηλ. οι δύο όροι $\frac{A^2}{2}\cos(4\pi f_c t)\cdot m^2(t)$) και ύστερα απαιτείται ένας αποτετραγωνιστής, ώστε από τον όρο $\frac{A^2}{2}m^2(t)$ να δώσει τελικά έξοδο $\frac{A\sqrt{2}}{2}m(t)$:

$$y(t) \longrightarrow \boxed{\text{LPF}} \xrightarrow{u(t)} \boxed{\text{Αποτετρ.}} \longrightarrow u_o(t)$$

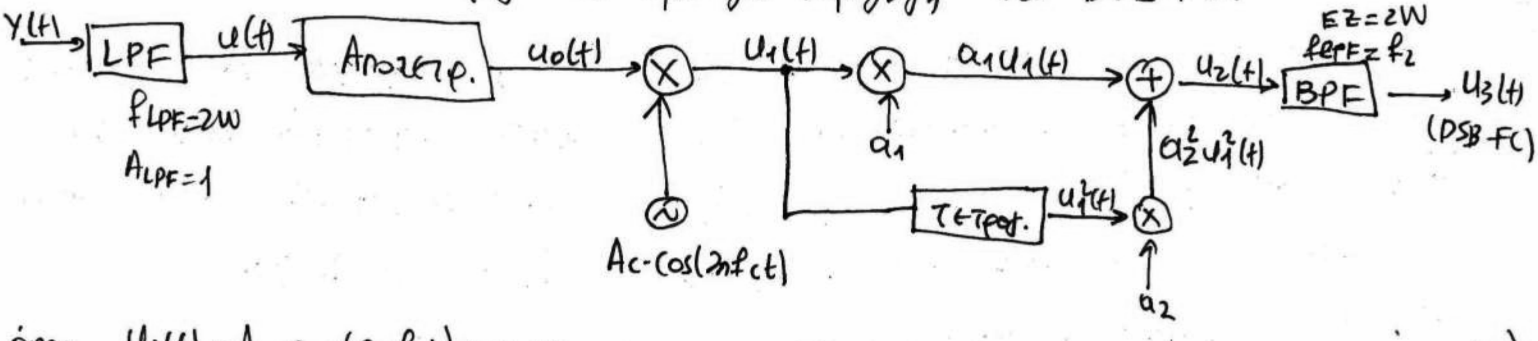
$A_{LPF} = 1$
$f_{LPF} = 2W$

όπου $u(t) = \frac{A^2}{2}m^2(t)$

$u_o(t) = \frac{A\sqrt{2}}{2}m(t) \sim m(t)$

ΟΖ) Εφόσον δεν υπάρχει περιορισμός ως είδος και πλήθος των διατάξεων, θα ισχύει:

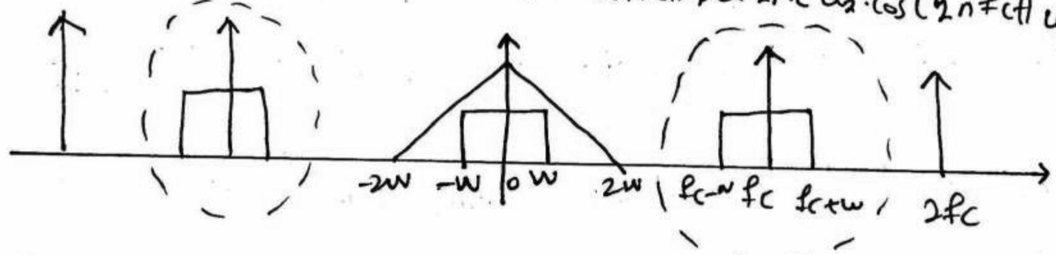
• Για παραγωγή διαμορφωμένου DSB-FC ($s_1(t)$) γίνεται χρήση της διάταξης του προηγούμενου ερωτ. για την ανάκτηση σήματος ανάλογου του $m(t)$ και συνδέεται σε σειρά με ένα διαμορφωτή τετραγωνικού νόμου για παραγωγή του DSB-FC:



όπου $u_1(t)=A_c\cdot\cos(2\pi f_ct)+u_0(t)$, $u_0(t)=\frac{A\sqrt{2}}{2}m(t)\sim m(t)$

$$u_2(t)=a_1u_1(t)+a_2u_1^2(t)=a_1A_c\cos(2\pi f_ct)+a_1u_0(t)+\overbrace{a_2A_c^2\cos^2(2\pi f_ct)}^{=\frac{a_2A_c^2}{2}(1+\cos(4\pi f_ct))}+a_2u_0^2(t)+2a_2A_c\cos(2\pi f_ct)u_0(t).$$

Θέλουμε να απομονώσουμε τους όρους $a_1A_c\cos(2\pi f_ct)$ και $2A_ca_2\cdot\cos(2\pi f_ct)\,u_0(t)$ γύρω από f_c.



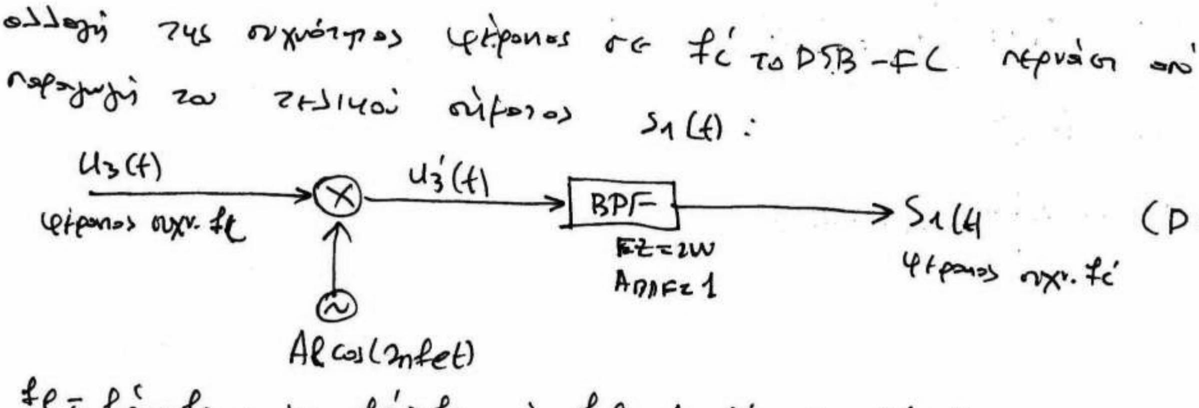
Για να είναι δυνατή η απομόνωση:
$$\left.\begin{array}{l} f_c+W\le 2f_c \\ f_c-W\ge 2W\end{array}\right\}\Rightarrow\left\{\begin{array}{l} f_c\ge W \\ f_c\ge 3W\end{array}\right\}\Rightarrow f_c\ge 3W$$

Τελικά προκύπτει ότι $2W\le f_c\le 3W$

Επίσης, $u_3(t)=a_1A_c\cdot\cos(2\pi f_ct)\cdot\left[1+\frac{2a_2}{a_1}u_0(t)\right]\Rightarrow$

$u_3(t)=a_1A_c\cdot\cos(2\pi f_ct)\cdot\left[1+\underbrace{\frac{a_2}{a_1}A\sqrt{2}}_{u_a}m(t)\right]$ (DSB-FC)

• Για αλλαγή της συχνότητας φέροντος σε f_c' το DSB-FC περνάει από ένα μείκτη, για παραγωγή του τελικού σήματος $s_1(t)$:



όπου $f_l=f_c'-f_c$, για $f_c'>f_c$ ή $f_l=f_c-f_c'$, για $f_c'<f_c$

Το BPF διατηρεί από το γινόμενο $U_3(t)\cdot A_l\cdot\cos(2\pi f_l t)$ τον όρο συχνότητας f_c' που θέλουμε. Δηλαδή, από το $U_3'(t) = U_3(t)\cdot A_l\cdot\cos(2\pi f_l t) = a_1 A_c\cos(2\pi f_c t)\cdot\overbrace{\left[1+\frac{a_2}{a_1}A\sqrt{2}m(t)\right]}^{m'(t)}\cdot A_l\cos(2\pi f_l t)$

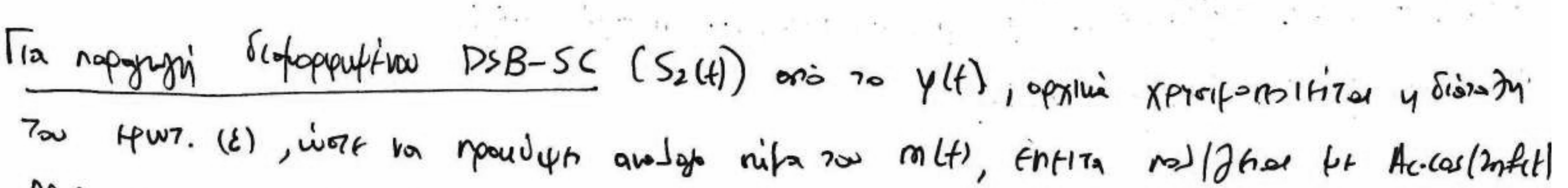
$$\Rightarrow U_3'(t) = a_1 A_c A_l\cdot m'(t)\cdot\cos(2\pi f_c t)\cos(2\pi f_l t) =$$
$$= \frac{1}{2}a_1 A_c A_l m'(t)\left[\cos(2\pi(f_c+f_l)t)+\cos(2\pi(f_c-f_c)t)\right] =$$
$$= \frac{1}{2}a_1 A_c A_l\left[1+\frac{a_2}{a_1}A\sqrt{2}m(t)\right]\cdot\left[\cos(2\pi(f_c+f_l)t)+\cos(2\pi(f_c-f_l)t)\right]$$

Άρα: $f_c'>f_c$: $f_c'=f_l-f_c$, και $f_{BPF}=f_c'=f_l-f_c$

$f_c'<f_c$: $f_c'=f_c-f_l$, και $f_{BPF}=f_c'=f_c-f_l$

διατηρώντας τον αντίστοιχο όρο από το $u_3'(t)$ για μετατοπισμένη συχνότητα φέροντος f

Για παραγωγή διαμορφωμένου DSB-SC ($S_2(t)$) από το $y(t)$, αρχικά χρησιμοποιείται η διάταξη του ερωτ. (ε), ώστε να προκύψει ανάλογο σήμα του $m(t)$, έπειτα πολ/σμός με $A_c\cos(2\pi f_c t)$ προς σχηματισμό ενός διαμορφωμένου DSB-SC και τελικά μετατόπιση από μείξη για μετατόπιση της συχνότητας σε f_c':



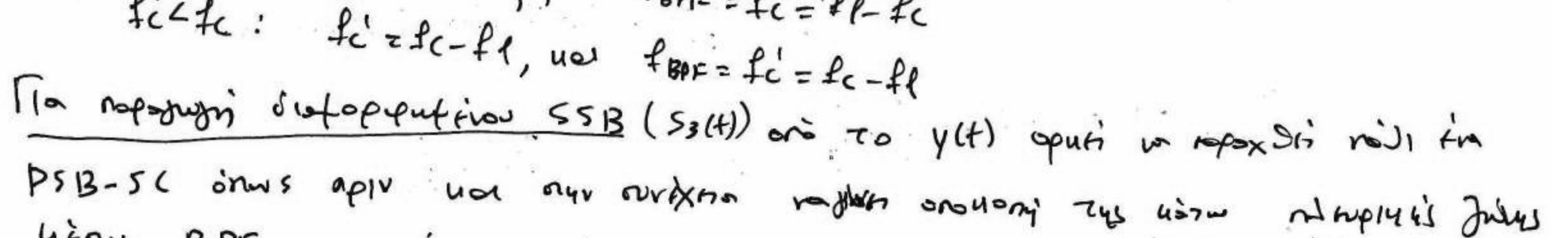
όπου, $u_1'(t) = \frac{1}{4}A\sqrt{2}A_c A_l m(t)\cdot\left[\cos(2\pi(f_c+f_l)t)+\cos(2\pi(f_c-f_c)t)\right]$

με το BPF να διατηρεί από το $u_1'(t)$ τον όρο συχν. f_c' που θέλουμε.

Άρα: $f_c'>f_c$: $f_c'=f_l-f_c$, και $f_{BPF}=f_c'=f_l-f_c$

$f_c'<f_c$: $f_c'=f_c-f_l$, και $f_{BPF}=f_c'=f_c-f_l$

Για παραγωγή διαμορφωμένου SSB ($S_3(t)$) από το $y(t)$ αρκεί να παραχθεί πάλι ένα DSB-SC όπως πριν και στην συνέχεια ταχθεί αποκοπή της κάτω πλευρικής ζώνης μέσω BPF και τέλος μετατόπιση από μείξη για συχν. f_c':

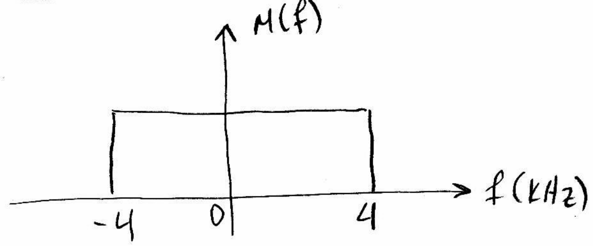


με $f_l=f_c'-f_c$, $f_c'>f_c$ ή $f_l=f_c-f_c'$, $f_c'<f_c$

Όμοια με πριν, το BPF διατηρεί αντίστοιχα από το $u_2'(t)$ τον όρο συχν. f_c' που θέλουμε.

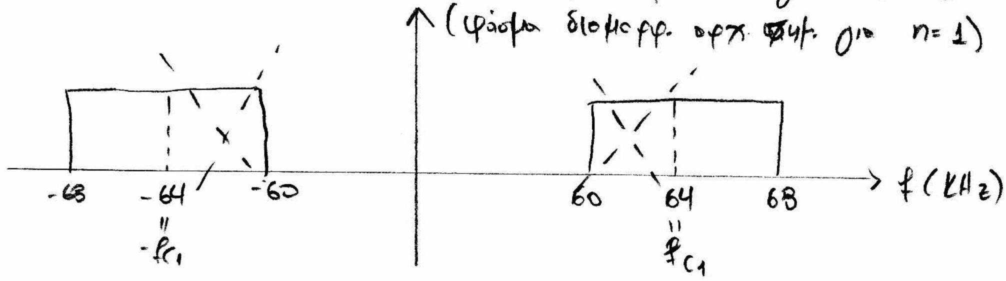
Άσκηση 5

α)

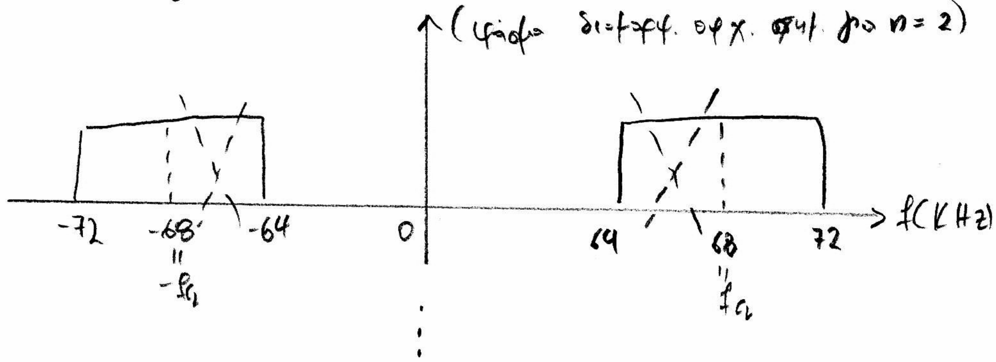


Έστω είσοδος φωνής ένα σχήμα παραλληλογράμμου φάσματος.
(Φάσμα ενδεικτικού αρχικού σήματος, με ΕΖ = 4kHz)

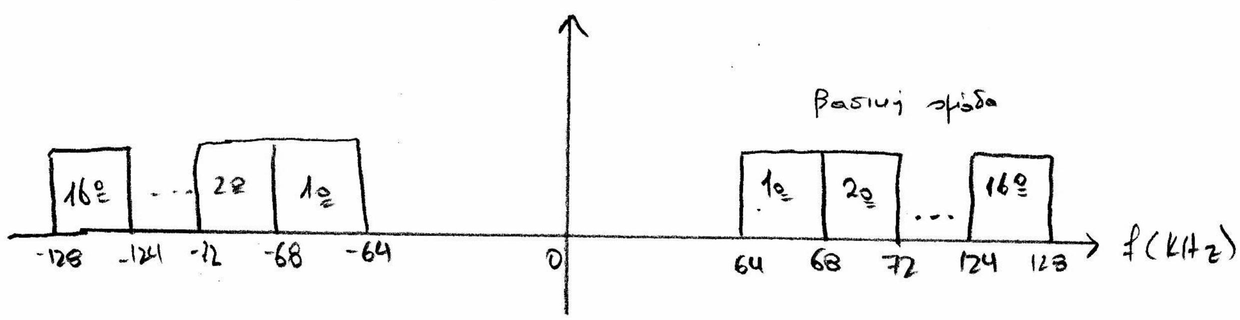
- Συνολικά 16 τέτοιες είσοδοι φωνής.
- Κάθε n-οστή από αυτές φωνή διαμορφώνεται κατά SSB με επιλογή της άνω πλευρικής ζώνης και αντίστοιχη συχνότητα φέροντος $f_c = 60 + 4n$ kHz, $n = 1, \ldots, 16$.
- Έτσι, μετά την SSB διαμόρφωση, το πρώτο σήμα φωνής (για $f_c = 64$ kHz) θα είναι:



- Το δεύτερο σήμα φωνής (για $f_c = 68$ kHz) θα είναι:

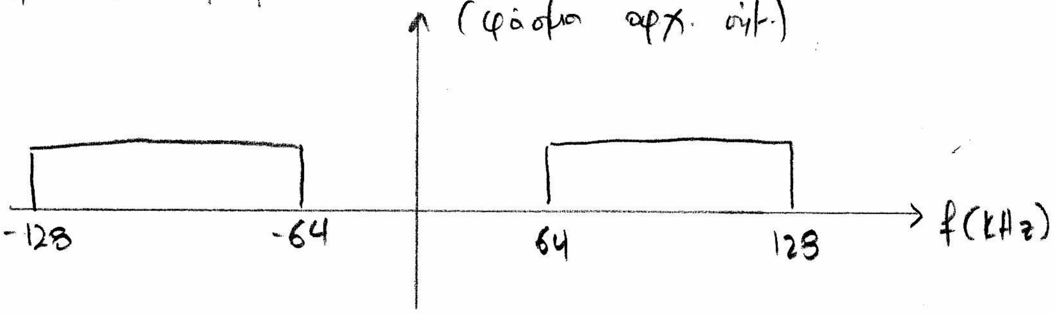


- Όμοια και για τα υπόλοιπα και θα προκύψει το 16ο σήμα φωνής (για $f_c = 124$ kHz) μετά την SSB-ΑΠΖ διαμόρφωση του θα ξεκινά στη συχνότητα $f_c = (60 + 16 \cdot 4)$ kHz $= 124$ kHz και θα φτάνει ως τα $f_c + 4 = 128$ kHz
- Συνδυάζοντας τα επιμέρους φάσματα των σημάτων φωνής μετά το πρώτο στάδιο FDM θα σχηματίσουν την βασική ομάδα ως εξής:

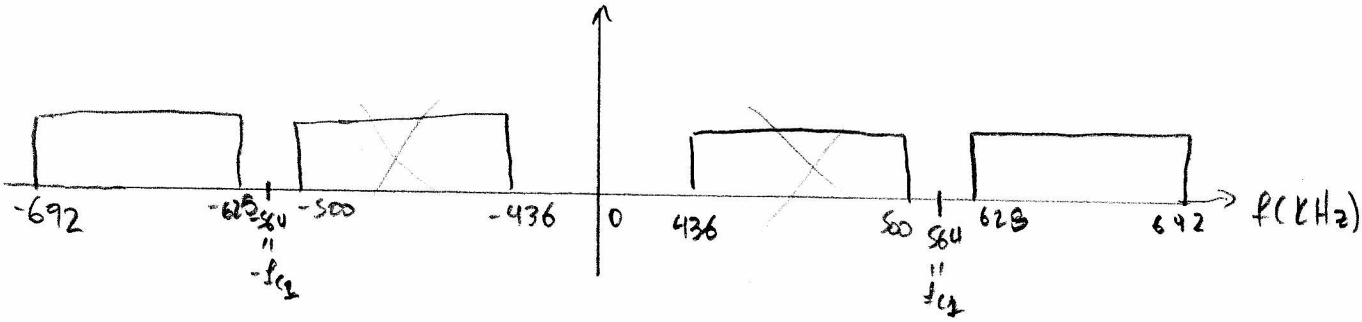


- Άρα, η ζώνη συχνοτήτων που θα καταλαμβάνει η πρώτη βασική ομάδα θα είναι από 64 kHz έως 128 kHz. Δηλ. με εύρος ίσο με $EZ_{βας.ομ} = (128 - 64)$ kHz $\Rightarrow EZ_{βας.ομ} = 64$ kHz β) Τώρα οι βασικές ομάδες είναι 8

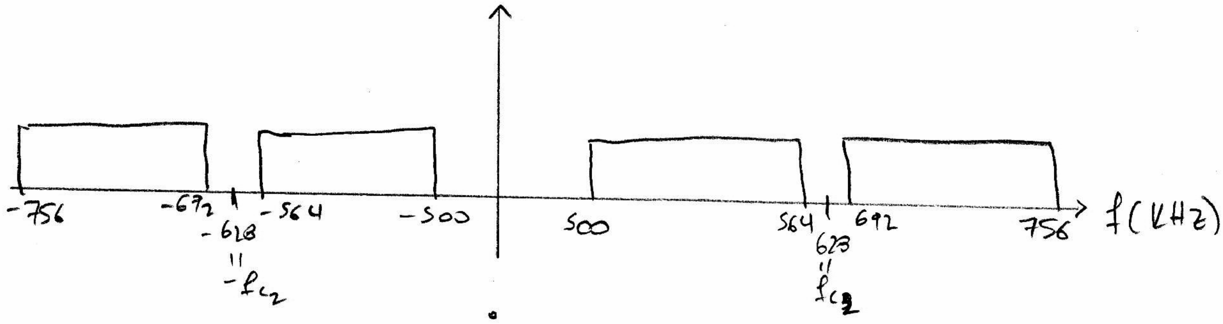
- Κάθε n-οστή από αυτές τις ομάδες διαμορφώνεται κατά SSB ζωνικά με επιλογή της άνω πλευρικής ζώνης και αντίστοιχη συχνότητα φέροντος $f_c = 500 + 64n$ kHz με $n = 1, \dots, 8$.
- Το αρχικό σήμα έχει φάσμα:



- Μετά την SSB διαμόρφωση, η πρώτη βασική ομάδα (για $f_c = 564$ kHz) θα είναι:

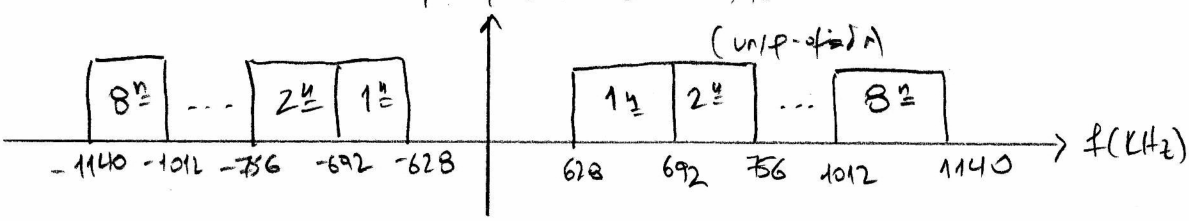


- Η δεύτερη βασική ομάδα (για $f_c = 628$ kHz) θα είναι:



⋮

- Όμοια και για τις υπόλοιπες, θα προκύψει ότι η όγδοη βασ. ομ. (για $f_c = 1012$ kHz). Μετά την SSB-ΑΠΖ διαμόρφωσή της θα ξεκινά στη συχνότητα $f_c = (500 + 64 \cdot 8)$ kHz $= 1012$ kHz και θα φτάνει ως το $f_c + 128 = 1140$ kHz.
- Συνδυάζοντας τα επιμέρους φάσματα των βασ. ομ. μετά το δεύτερο στάδιο FDM θα σχηματίσουν την υπερ-ομάδα ως εξής:

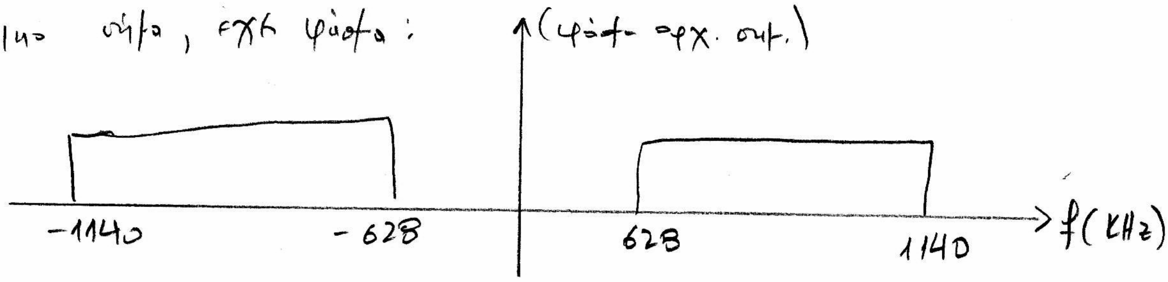


- Άρα η ζώνη συχνοτήτων που θα καταλαμβάνει η πρώτη υπερ-ομάδα θα είναι από 628 kHz έως 1140 kHz. Δηλαδή με εύρος ζώνης ίσο με

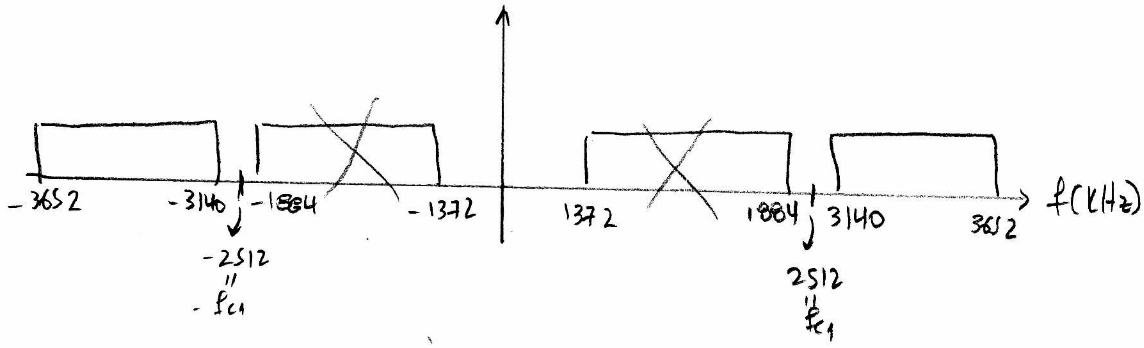
$EZ_{υπερ.ομ} = (1140 - 628)$ kHz $\Rightarrow EZ_{υπερ.ομ} = 512$ kHz γ) Τώρα είναι 4 οι υπερ-ομάδες

- Κάθε n-οστή από αυτές τις υπερ-ομάδες διαμορφώνεται κατά SSB με επιλογή της άνω πλευρικής ζώνης και αντίστοιχη συχνότητα φέροντος $f_c = 2000 + 512n$ kHz, με $n = 1, \dots, 4$.

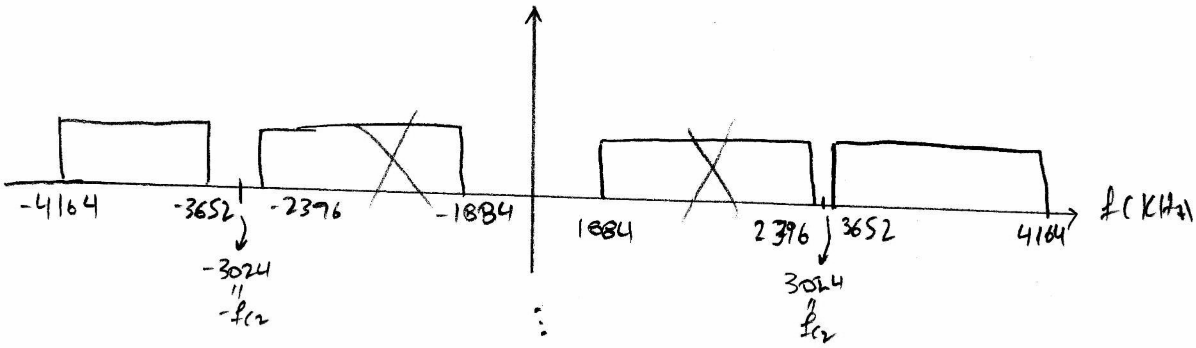
- Το αρχικό σήμα, έχει φάσμα:



- Έτσι, μετά την SSB διαμόρφωση, η πρώτη υπερ-ομάδα (για $f_c = 2512$ kHz) θα είναι:

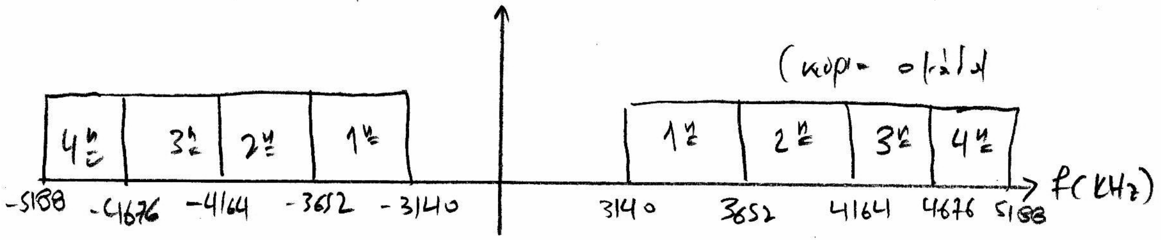


- Έτσι, η δεύτερη υπερ-ομάδα (για $f_c = 3024$) θα είναι:



- Όμοια και για τα υπόλοιπα, θα προκύψει ότι η τέταρτη υπερ-ομάδα (για $f_c = 4048$ kHz) μετά την SSB-ΑΠΖ διαμόρφωσή της θα ξεκινάει στη συχνότητα $f_c = (2000 + 512 \cdot 4)$ kHz $=$ $= 4048$ kHz και θα φτάνει ως το $f_c + 628 + 512 = 5188$ kHz

- Συνδυάζοντας τα επιμέρους φάσματα των υπερ-ομάδων μέσω του τρίτου πεδίου FDM θα σχηματίσουν την κύρια ομάδα ως εξής:



- Άρα, η ζώνη συχνοτήτων που θα καταλαμβάνει η κύρια ομάδα, θα είναι από 3140 kHz ως 5188 kHz. Δηλ. το εύρος ζώνης $EZ_{κυρ.ομ.} = (5188 - 3140)$ kHz $\Rightarrow$

$\Rightarrow EZ_{κυρ.ομ.} = 2048$ kHz.

Άσκηση 6

$X(t) = A\cos(2\pi F t + \Theta)$

όπου A : μια σταθερά

F : τ.μ. για συχν. συχν., ομοιομ. καταν. στο $[F_\ell, F_h]$

Θ : τ.μ. για συχ. φάση, ομοιομ. καταν. στο $[0, 2\pi]$

ανεξ.

$f_F(f) = \begin{cases} \frac{1}{F_h - F_\ell}, & f \in [F_\ell, F_h] \\ 0, & \text{αλλού} \end{cases}$

$f_\Theta(\theta) = \begin{cases} \frac{1}{2\pi}, & \theta \in [0, 2\pi] \\ 0, & \text{αλλού} \end{cases}$

a) $R_X(t+\tau, t) = \mathbb{E}[X(t+\tau)\cdot X(t)] = A^2\, \mathbb{E}[\cos[2\pi F(t+\tau) + \Theta]\cdot \cos(2\pi F t + \Theta)] \Rightarrow$

$\Rightarrow R_X(t+\tau, t) = \frac{A^2}{2}\mathbb{E}[\cos[2\pi F(2t+\tau) + 2\Theta] + \cos(2\pi F\tau)] \Rightarrow$

$\Rightarrow R_X(t+\tau, t) = \frac{A^2}{2}\mathbb{E}\Big[\cos[2\pi F(2t+\tau)]\cdot\cos(2\Theta) - \sin[2\pi F(2t+\tau)]\sin(2\Theta) + $

$+ \cos(2\pi F\tau)\Big] \Rightarrow$

$\Rightarrow R_X(t+\tau, t) = \frac{A^2}{2}\mathbb{E}[\cos[2\pi F(2t+\tau)]]\cdot \mathbb{E}[\cos(2\Theta)] +$

$- \frac{A^2}{2}\mathbb{E}[\sin[2\pi F(2t+\tau)]]\cdot\mathbb{E}[\sin(2\Theta)] + \frac{A^2}{2}\mathbb{E}[\cos(2\pi F\tau)]$

β) ΝΔΟ $R_X(t+\tau, t) = R_X(\tau) = \frac{A^2}{2} E[\cos 2\pi F\tau]$

- $E[\cos(2\Theta)] = \int_{-\infty}^{+\infty} f_\Theta(\theta)\cos(2\theta)\,d\theta = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\cos(2\theta)\,d\theta = \frac{1}{4\pi}[\sin(2\theta)]_0^{2\pi} = 0$ (1)
- $E[\sin(2\Theta)] = \int_{-\infty}^{+\infty} f_\Theta(\theta)\sin(2\theta)\,d\theta = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\sin(2\theta)\,d\theta = \frac{1}{4\pi}[-\cos(2\theta)]_0^{2\pi} = 0$ (2)

Οπότε $R_X(t+\tau, t) \overset{(1)}{\underset{(2)}{=}} 0 + 0 + \frac{A^2}{2}E[\cos(2\pi F\tau)] = \frac{A^2}{2}E[\cos(2\pi F\tau)] = R_X(\tau)$

γ) Ν.δο $R_X(\tau) = \frac{A^2}{4}\int_{-F_h}^{-F_l} \frac{1}{F_h-F_l} e^{j2\pi f\tau} df + \frac{A^2}{4}\int_{F_l}^{F_h} \frac{1}{F_h-F_l} e^{j2\pi f\tau} df$

Από (β): $R_X(\tau) = \frac{A^2}{2} E[\cos 2\pi F\tau] = \frac{A^2}{2}\int_{-\infty}^{+\infty} f_F(F)\cos(2\pi F\tau)\, dF =$

$$= \frac{A^2}{2}\int_{F_l}^{F_h} \frac{1}{F_h-F_l}\cos(2\pi F\tau)\, df \quad (*)$$

Ισχύει: $\cos(2\pi F\tau) = \frac{1}{2}\left[e^{j2\pi F\tau} + e^{-j2\pi F\tau}\right]$

$(*) \Rightarrow R_X(\tau) = \frac{A^2}{2}\int_{F_l}^{F_h} \frac{1}{F_h-F_l} e^{j2\pi F\tau} dF + \frac{A^2}{2}\int_{F_l}^{F_h} \frac{1}{F_h-F_l} e^{-j2\pi F\tau} dF \Rightarrow$

$\Rightarrow R_X(\tau) = \frac{A^2}{2}\int_{F_l}^{F_h} \frac{1}{F_h-F_l} e^{j2\pi f\tau} df + \frac{A^2}{2}\int_{-F_h}^{-F_l} \frac{1}{F_h-F_l} e^{j2\pi f\tau} df$

δ) Φασμ. πυκν. $S_X(f)$?

• $S_X(f) = \int_{-\infty}^{+\infty} R_X(\tau)\cdot e^{-j2\pi F\tau} d\tau = \frac{A^2}{2}\cdot\frac{1}{F_h-F_l}\cdot\int_{-\infty}^{+\infty}\left[\int_{-F_h}^{-F_l} 1\, df + \int_{F_l}^{F_h} 1\, df\right] d\tau =$

$= \frac{A^2}{2}\cdot\frac{1}{F_h-F_l}\int_{-\infty}^{+\infty}\left[-F_l + F_h + F_h - F_l\right] d\tau = A^2\int_{-\infty}^{+\infty} 1\, d\tau \Rightarrow$

$\Rightarrow S_X(f) \xlongequal{1 \rightleftharpoons \delta(f)} A^2\delta(0) \Rightarrow S_X(f) = A^2$

ή

• $R_X(\tau) = \int_{-\infty}^{+\infty} S_X(f)\exp(j2\pi F\tau)\, dF$

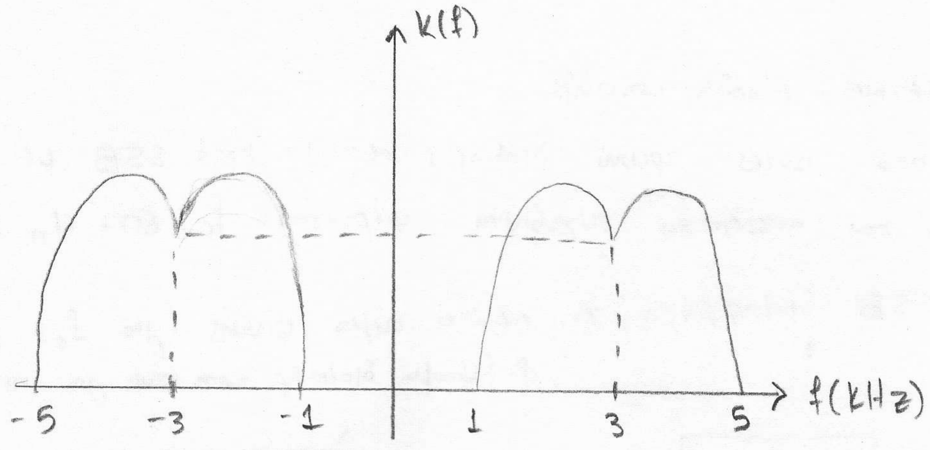
Οπότε

$$S_X(f) = \begin{cases} 0, & |F| \leq F_l \\ \frac{A^2}{4(F_h-F_l)}, & F_l < |F| < F_h \\ 0, & |F| \geq F_h \end{cases}$$

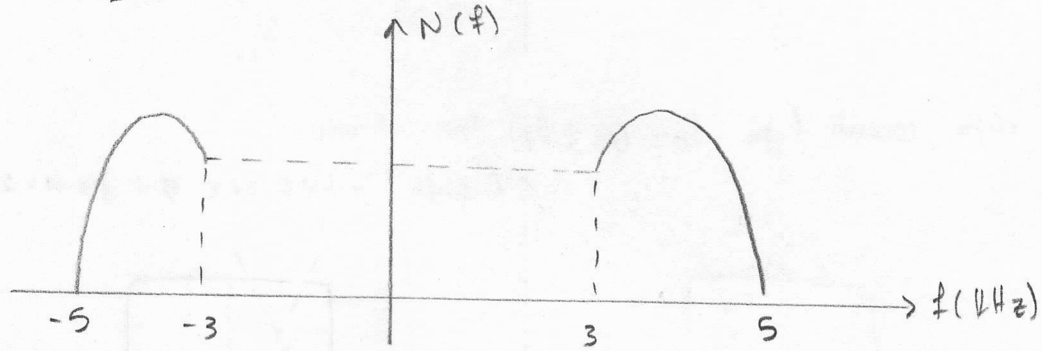
'Ασκηση 7

$f_c = 3\ kHz, \quad W = 2kHz$

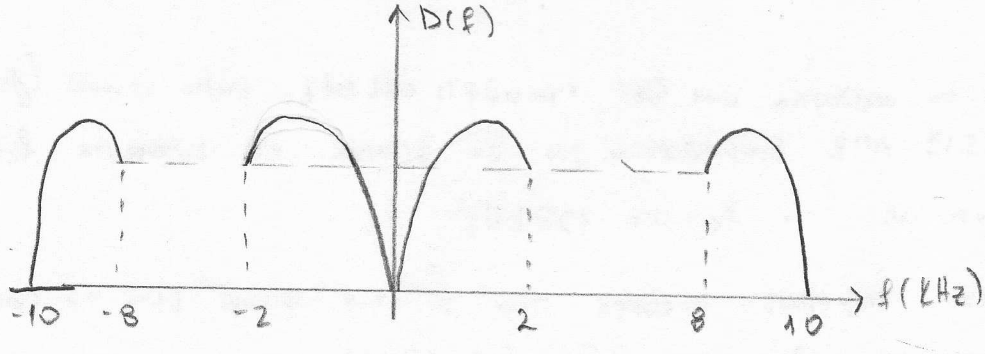
α) $K(t) = m(t) \cdot A \cdot \cos[2\pi \cdot 3000 t] \rightleftharpoons \frac{A}{2}\left[M(f-3000) + M(f+3000)\right] = K(f)$



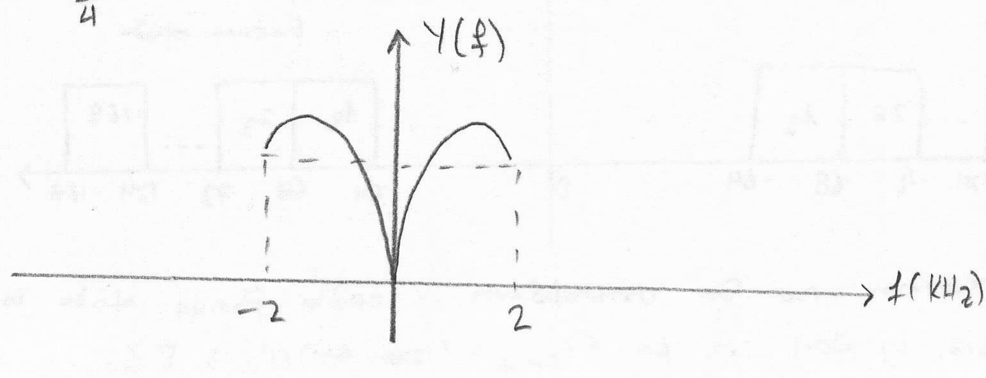
'Επειτα, $N(f) = \frac{A}{2}\left[M(f-3000)u(f-3000) + M(f+3000)u(-f+3000)\right]$



'Υστερα, $D(f) = \frac{A^2}{4}[M(f-8000)u(f-8000) + M(f-2000)u(-f-2000) + $
$+ M(f+2000)u(f+2000) + M(f+8000)u(-f+8000)]$

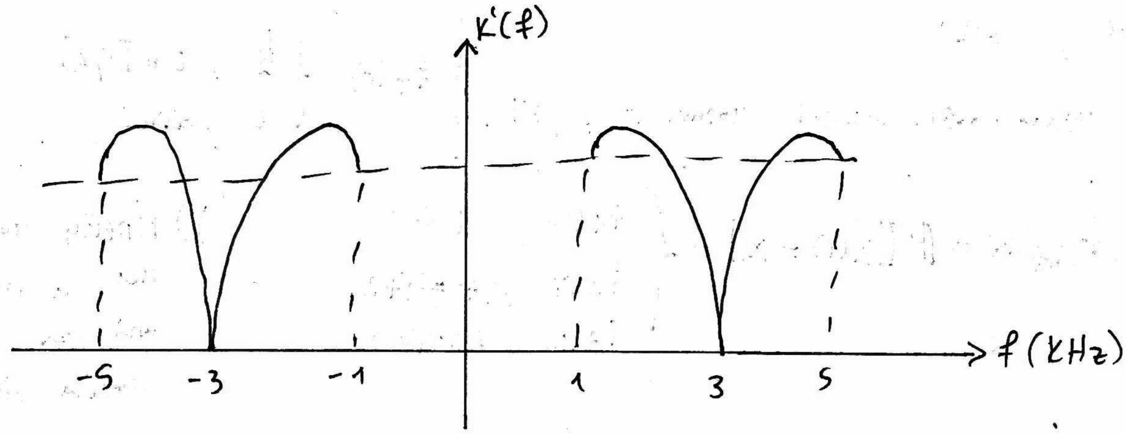


Τέλος, $Y(f) = \frac{A^2}{4}[M(f-2000)u(-f-2000) + M(f+2000)u(f+2000)]$



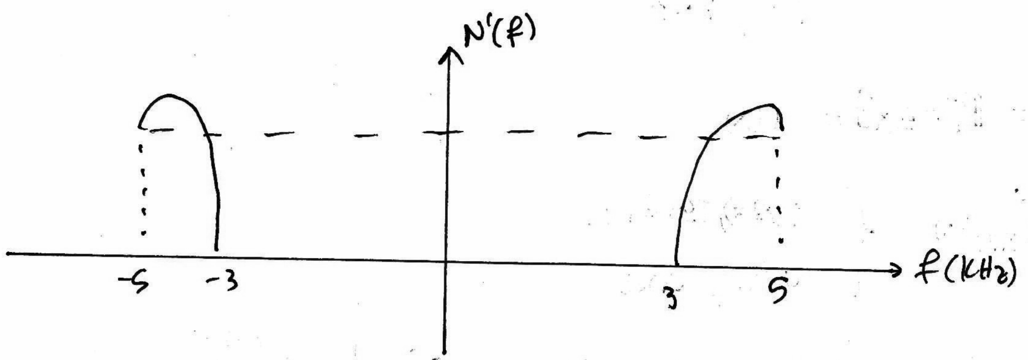
β) Μετά τον πολλαπλασιαστή με $A\cos 2\pi \cdot 3000t$ θα έχουμε στο δέκτη:

$$K'(f) = \frac{A^3}{8}\left[M(f-5000)u(-f-5000) + M(f+1000)u(-f+1000) + M(f+5000)u(f+5000) + M(f-1000)u(f-1000)\right]$$

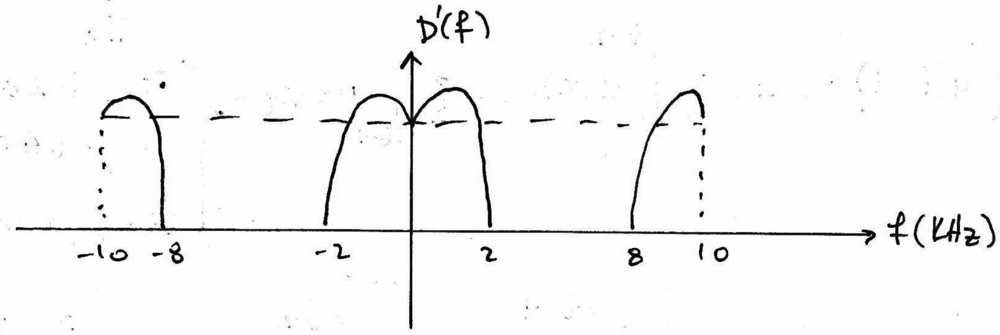


Μετά την διέλευση από το υψιπερατό φίλτρο:

$$N'(f) = \frac{A^3}{8}\left[M(f+5000 \cdot u(f+5000) + M(f-5000)u(-f-5000)\right]$$



Αυτό, $D'(f) = \left(\frac{A}{2}\right)^4 \left[M(f+10.000)u(f+10.000) + M(f) + M(f-10.000)u(-f-10.000)\right]$



Από το βαθυπερατό φίλτρο περνάει μόνο ο μεσαίος όρος, οπότε στην έξοδο του δέκτη θα είναι $y'(t) = \left(\frac{A}{2}\right)^4 m(t)$, το οποίο είναι ανάλογο του σήματος πληροφορίας.

Άσκηση 8

$$h(t) = \begin{cases} \frac{1}{2} e^{-0,5t} & , 0 < t \le T \\ 0 & , \text{αλλού} \end{cases}$$

Το σύστημα χαρακτηρίζεται γραμμικό και ευσταθές και $h(t) \in \mathbb{R}$. Επομένως, η πυκνότητα φάσματος ισχύος μεταξύ εισόδου και εξόδου είναι: $S_Y(f) = |H(f)|^2 \cdot S_X(f)$

Σε κλειστή μορφή, η $h(t)$ γράφεται: $h(t) = \frac{1}{2} e^{-\frac{1}{2}t} [u(t) - u(t-T)] \Rightarrow$

$$\Rightarrow h(t) = \frac{1}{2} e^{-\frac{1}{2}t} u(t) - \frac{1}{2} e^{-\frac{1}{2}t} u(t-T) \Rightarrow h(t) = \frac{1}{2} e^{-\frac{1}{2}t} \cdot u(t) - \frac{1}{2} e^{-\frac{1}{2}(t-T)} \cdot e^{-\frac{1}{2}T} \cdot u(t-T) \Rightarrow$$

$$\overset{\mathcal{F}}{\Rightarrow} H(f) = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{\frac{1}{2} + j2\pi f} - \frac{e^{-\frac{1}{2}T}}{2} \cdot e^{-j2\pi f T} \cdot \frac{1}{\frac{1}{2} + j2\pi f} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{\frac{1}{2} + j2\pi f} \left(1 - e^{-\frac{1}{2}T} e^{-j2\pi f T}\right) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow H(f) = \frac{1 - e^{-\frac{1}{2}T} e^{-j2\pi f T}}{1 + j4\pi f} = \frac{1 - e^{-\frac{1}{2}T} [\cos(2\pi f T) - j\sin(-2\pi f T)]}{1 + j4\pi f} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow H(f) = \frac{1 - e^{-\frac{1}{2}T} \cos(2\pi f T) + j e^{-\frac{1}{2}T} \sin(2\pi f T)}{1 + j4\pi f}$$

Άρα, $|H(f)|^2 = \dfrac{\left[1 - e^{-\frac{1}{2}T} \cos(2\pi f T)\right]^2 + \left[e^{-\frac{1}{2}T} \sin(2\pi f T)\right]^2}{1 + 16\pi^2 f^2} \Rightarrow$

$$\Rightarrow |H(f)|^2 = \frac{1 + e^{-T} \cos^2(2\pi f T) - 2e^{-\frac{1}{2}T} \cos(2\pi f T) + e^{-T} \sin^2(2\pi f T)}{1 + 16\pi^2 f^2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow |H(f)|^2 = \frac{1 + e^{-T} - 2e^{-\frac{1}{2}T} \cos(2\pi f T)}{1 + 16\pi^2 f^2}$$

Συνεπώς, $S_Y(f) = \dfrac{1 + e^{-T} - 2e^{-\frac{1}{2}T} \cos(2\pi f T)}{1 + 16\pi^2 f^2} \cdot S_X(f)$