

ΣΤΟΧΑΣΤΙΚΑ ΣΥΣΤΗΜΑΤΑ & ΕΠΙΚΟΙΝΩΝΙΕΣ
(4^ο Εξάμηνο, Εαρινό 2020)

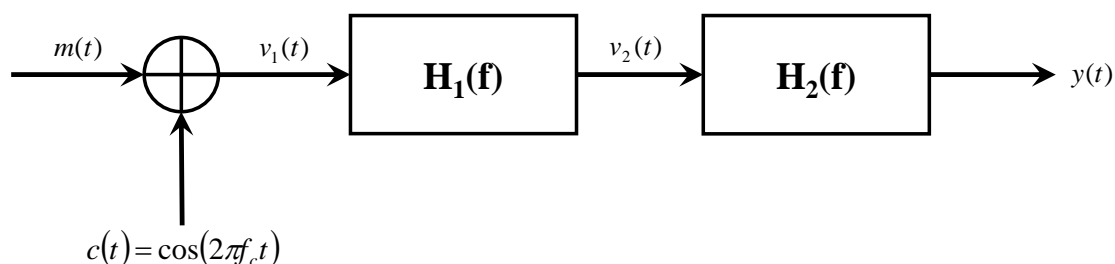
Άσκηση 1.

Θεωρείστε τη διάταξη του παρακάτω σχήματος, στην είσοδο της οποίας εφαρμόζεται σήμα βασικής ζώνης $m(t)$ εύρους ζώνης W που έχει μέγιστο πλάτος $A_m = \max\{|m(t)|\}$. Η διάταξη αποτελείται από έναν αθροιστή, ένα μη γραμμικό σύστημα χωρίς μνήμη με απόκριση συχνότητας $H_1(f)$ και ένα ιδανικό φίλτρο με απόκριση συχνότητας $H_2(f)$. Εάν το $H_1(f)$ είναι τέτοιο ώστε: $v_2(t) = a \cdot v_1(t) + b \cdot [v_1(t)]^2$, ζητούνται τα ακόλουθα:

(α) Να εκφραστεί η $v_2(t)$ συναρτήσει του $m(t)$ και του φέροντος $c(t)$. Αν το φάσμα του $m(t)$ είναι άρτιος μοναδιαίος βαθυπερατός τριγωνικός παλμός εύρους ζώνης $W \ll f_c$, υπολογίστε και σχεδιάστε τα φάσματα $V_1(f)$ και $V_2(f)$.

(β) Να καθοριστούν τα κατάλληλα χαρακτηριστικά του φίλτρου $H_2(f)$ ώστε στην έξοδο της διάταξης να λαμβάνεται σήμα $y(t)$, το οποίο να αποτελεί διαμορφωμένο AM του σήματος εισόδου $m(t)$.

(γ) Να υπολογιστεί ο συντελεστής διαμόρφωσης για την παραπάνω περίπτωση, καθώς και η ισχύς, ενέργεια των σημάτων $m(t)$ και $y(t)$.



Άσκηση 2.

Θεωρείστε περιοδικό σήμα $m(t)$ με περίοδο $T=0,1$ και τιμή $m(t) = 40t$ για $|t| \leq 0,05$. Το σήμα $m(t)$ διέρχεται από διαμορφωτή AM με φέρον συχνότητας $f_c = 1 \text{ kHz}$. Η έξοδος του διαμορφωτή είναι σήμα $s(t) = [a + m(t)] \cdot \cos(2\pi f_c t)$.

(α) Σχεδιάστε το σήμα $m(t)$ και υπολογίστε την τιμή της μέσης ισχύος του.

(β) Εάν $a = 2$, υπολογίστε το συντελεστή διαμόρφωσης για το σήμα $s(t)$, τη μέση ισχύ του διαμορφωμένου σήματος και το λόγο της συνολικής ισχύος άνω και κάτω πλευρικής ζώνης προς την ισχύ του διαμορφωμένου σήματος.

(γ) Σχεδιάστε το σήμα $s(t)$ στο πεδίο του χρόνου, επισημαίνοντας στο διάγραμμά σας χαρακτηριστικές τιμές τόσο για το πλάτος, όσο και για την περίοδο του σήματος.

Άσκηση 3.

Θεωρείστε στοχαστική ανέλιξη $X(t)$ σταθερού πλάτους $A=1$ για κάθε χρονική στιγμή t μεταξύ $t_1 = T$ και $t_2 = T + 4$, και μηδενικού πλάτους για κάθε άλλη χρονική στιγμή t εκτός του διαστήματος $[t_1, t_2]$. Το T που καθορίζει τη στιγμή έναρξης του παλμού είναι τυχαία μεταβλητή ομοιόμορφα κατανομημένη στο διάστημα $[0, 4]$. Ζητούνται τα ακόλουθα:

(α) Να υπολογιστεί αναλυτικά η συνάρτηση κατανομής πιθανότητας $P[X(t) \leq x]$.

(β) Να υπολογιστεί αναλυτικά η μέση τιμή της $X(t)$.

(γ) Να διερευνηθεί η στατικότητα της $X(t)$.

Άσκηση 4.

Σήμα πληροφορίας $m(t) = \cos(600\pi t) + 200\text{sinc}(400\pi t)$ υφίσταται διαμόρφωση κατά πλάτος διπλής πλευρικής ζώνης με καταπιεσμένο φέρον (DSBSC) με φέρον $c(t) = A \cdot \cos(2\pi f_c t)$. Ακολουθώντας, το διαμορφωμένο σήμα $s(t) = m(t) \cdot c(t)$ διέρχεται από μη γραμμική διάταξη, στην έξοδο της οποίας λαμβάνεται σήμα $y(t) = [s(t)]^2$. Εάν η συχνότητα φέροντος είναι πολύ μεγαλύτερη του εύρους ζώνης του σήματος πληροφορίας, ζητείται να εκτελέσετε τα ακόλουθα:

(α) Να υπολογιστούν αναλυτικά τα σήματα $s(t)$ και $y(t)$.

(β) Να υπολογιστούν αναλυτικά και να σχεδιαστούν γραφικά οι μετασχηματισμοί Fourier $M(f)$, $S(f)$ και $Y(f)$ των σημάτων $m(t)$, $s(t)$ και $y(t)$.

(γ) Να υπολογιστεί η ισχύς των σημάτων $m(t)$, $s(t)$ και $y(t)$.

(δ) Να υπολογιστεί η ελάχιστη τιμή f_c^{\min} της συχνότητας φέροντος f_c , η οποία επιτρέπει την ανακατασκευή τυχαίου σήματος πληροφορίας $m(t)$ εύρους ζώνης W από την έξοδο $y(t)$ της μελετώμενης διάταξης.

(ε) Εάν $f_c > f_c^{\min}$, σχεδιάστε διάταξη ανακατασκευής τυχαίου σήματος πληροφορίας $m(t)$ εύρους ζώνης W από την έξοδο $y(t)$.

(στ) Ποιες είναι οι προϋποθέσεις που πρέπει να ισχύουν, ώστε από την έξοδο $y(t)$ να μπορούμε να παράγουμε με απλά στοιχεία διαμορφωμένα σήματα DSBFC ($s_1(t)$), DSBSC ($s_2(t)$) και SSB με διέλευση κάτω πλευρικής ζώνης ($s_3(t)$) τυχαίου σήματος πληροφορίας $m(t)$ εύρους ζώνης W για συχνότητα φέροντος f_c ; Να σχεδιαστούν παραδείγματα τέτοιων διατάξεων.

Άσκηση 5.

Θεωρείστε 16 εισόδους φωνής, οι οποίες πολυπλέκονται σε μια βασική ομάδα που σχηματίζεται με διαμόρφωση της n -οστής εισόδου με φέρον συχνότητας $f_c = 60 + 4n$ kHz, όπου $n = 1, 2, \dots, 16$. Η διαμόρφωση που ακολουθείται είναι SSB, όπου επιλέγονται οι άνω πλευρικές ζώνες μέσω ζωνοπερατού φιλτραρίσματος και συνδυάζονται για να σχηματίσουν ομάδα από 16 άνω πλευρικές ζώνες, μία για κάθε είσοδο φωνής. Ακολούθως, συνδυάζονται 8 βασικές ομάδες σε μία υπερ-ομάδα που σχηματίζεται με διαμόρφωση της n -οστής ομάδας με φέρον συχνότητας $f_c = 500 + 64n$ kHz, όπου $n = 1, 2, \dots, 8$. Και πάλι ακολουθείται διαμόρφωση SSB, όπου επιλέγονται οι άνω πλευρικές ζώνες. Τέλος, συνδυάζονται 4 υπερ-ομάδες σε μία κύρια ομάδα που σχηματίζεται με διαμόρφωση της n -οστής υπερ-ομάδας με φέρον συχνότητας $f_c = 2000 + 512n$ kHz, όπου $n = 1, 2, 3, 4$. Και πάλι ακολουθείται διαμόρφωση SSB, όπου επιλέγονται οι άνω πλευρικές ζώνες.

Να υπολογιστούν τα ακόλουθα:

- (α) η ζώνη συχνοτήτων που θα καταλαμβάνει η πρώτη βασική ομάδα,
- (β) η ζώνη συχνοτήτων που θα καταλαμβάνει η πρώτη υπερ-ομάδα και
- (γ) η ζώνη συχνοτήτων που θα καταλαμβάνει η κύρια ομάδα.

Υπόδειξη: Σχεδιάστε το φάσμα ενδεικτικών αρχικών, διαμορφωμένων και πολυπλεγμένων σημάτων σε κάθε βήμα πολυπλεξίας.

Άσκηση 6.

Θεωρούμε την εργοδική στοχαστική διαδικασία $X(t) = A \cos(2\pi Ft + \Theta)$, όπου A είναι μια σταθερά. Η στιγμιαία συχνότητα αντιπροσωπεύεται από την τυχαία μεταβλητή F και η στιγμιαία φάση από την τυχαία μεταβλητή Θ . Η F είναι ομοιόμορφα κατανομημένη στο διάστημα $[F_l, F_h]$ και η Θ ομοιόμορφα κατανομημένη στο διάστημα $[0, 2\pi]$. Οι τυχαίες μεταβλητές F και Θ υποτίθενται ανεξάρτητες.

- (α) Για την συνάρτηση αυτοσυσχέτισης $R_x(t + \tau, t)$ της $X(t)$, να αποδειχθεί ότι :

$$R_x(t + \tau, t) = \frac{A^2}{2} E[\cos 2\pi F(2t + \tau)] E[\cos 2\Theta] - \frac{A^2}{2} E[\sin 2\pi F(2t + \tau)] E[\sin 2\Theta] + \frac{A^2}{2} E[\cos 2\pi F\tau]$$

(β) Επίσης να αποδειχθεί ότι: $R_x(t + \tau, t) = R_x(\tau) = \frac{A^2}{2} E[\cos 2\pi F\tau]$

(γ) Ακολούθως να αποδειχθεί ότι : $R_x(\tau) = \frac{A^2}{4} \int_{-F_h}^{-F_l} \frac{1}{F_h - F_l} e^{j2\pi f\tau} df + \frac{A^2}{4} \int_{F_l}^{F_h} \frac{1}{F_h - F_l} e^{j2\pi f\tau} df$

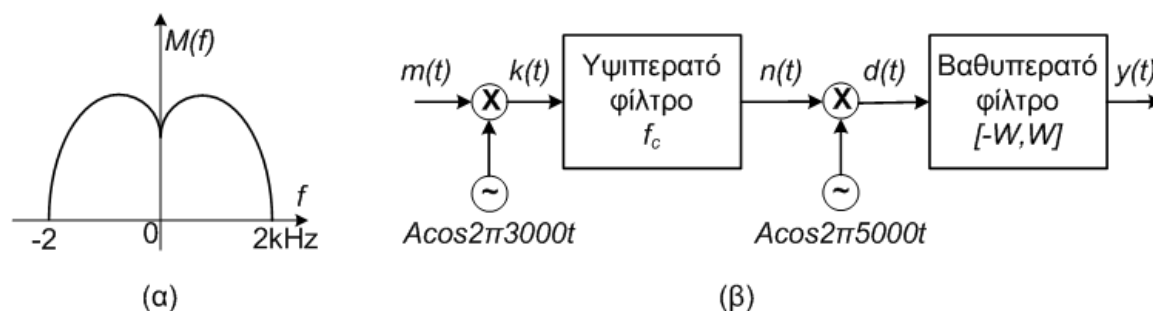
- (δ) Τέλος, να υπολογιστεί η φασματική πυκνότητα $S_x(f)$ της στοχαστικής διαδικασίας $X(t)$

Άσκηση 7

Το σήμα $m(t)$ έχει μετασχηματισμό Fourier, όπως δίνεται στο ακόλουθο σχήμα 1 (α). Το σήμα αυτό εφαρμόζεται ως είσοδος στο σύστημα του σχήματος 1 (β), ώστε τελικά να παραχθεί το σήμα $y(t)$. Η συχνότητα αποκοπής του υψιπερατού φίλτρου είναι $f_c = 3\text{kHz}$ και το εύρος ζώνης του βαθυπερατού φίλτρου είναι: $W=2\text{kHz}$.

(α) Να σχεδιάσετε εποπτικά το μετασχηματισμό Fourier $K(f)$, $N(f)$, $D(f)$ και $Y(f)$ των σημάτων $k(t)$, $n(t)$, $d(t)$ και $y(t)$ αντίστοιχα.

(β) Δείξτε και εξηγήστε ότι αν μεταδοθεί το σήμα $y(t)$, ο δέκτης μπορεί να το τροφοδοτήσει σε ένα αντίγραφο του συστήματος του σχήματος 1 (β) για να ξαναπάρει το αρχικό σήμα $m(t)$.



Σχήμα 1

Άσκηση 8.

Μια στατική στοχαστική διαδικασία $X(t)$ μηδενικής μέσης τιμής, εφαρμόζεται σε ένα γραμμικό φίλτρο του οποίου η κρουστική απόκριση δίνεται από την παρακάτω περιορισμένη εκθετική συνάρτηση:

$$h(t) = \begin{cases} \frac{1}{2} e^{-0.5t}, & 0 \leq t \leq T \\ 0, & \text{αλλιώς} \end{cases}$$

Βρείτε την πυκνότητα φάσματος ισχύος $S_Y(f)$ της εξόδου $Y(t)$ του φίλτρου, συναρτήσει της πυκνότητας φάσματος ισχύος $S_X(f)$ της εισόδου $X(t)$ του φίλτρου.

Οδηγίες για την επίλυση και την παράδοση των ασκήσεων:

- Οι ασκήσεις επιλύονται χειρόγραφες, σκανάρονται και υποβάλλονται στην ιστοσελίδα του μαθήματος. Προσοχή το σύστημα επιτρέπει μοναδική υποβολή σε κάθε εργασία.
- Η προθεσμία παράδοσης είναι η παραμονή της γραπτής εξέτασης του μαθήματος.
- Το σύνολο των ασκήσεων μετράει προσθετικά έως 10% στον τελικό βαθμό.