Ηλεκτρομαγνητικά πεδία Α

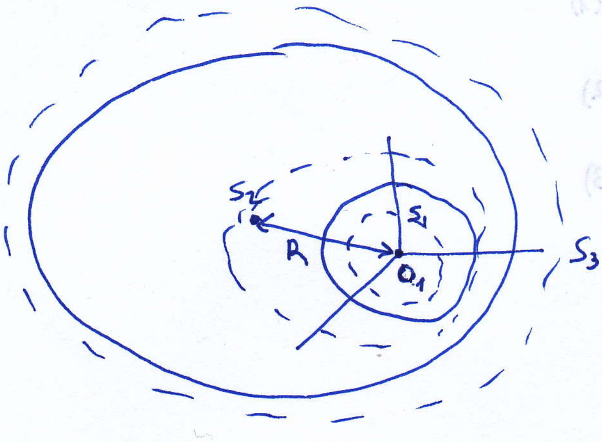
Χρήστος Τσώφιας

4ο Εξάμηνο

03117176

1η & 2η Σειρά Ασκήσεων

Άσκηση 3.7



Έστω σφαιρικές συντ/νες με κέντρο το O_1

- Για $0<r<b$: Λόγω συμμετρίας $E_\varphi = E_\theta = 0$ και εξαρτάται μόνο από το r.

  Νόμος Gauss στην σφαιρική επιφάνεια S_1 (με $r<b$):

$$\oint_S \vec{E}\cdot d\vec{s} = \frac{q}{\varepsilon_0} \Rightarrow \int_{\theta=0}^{\pi}\int_{\varphi=0}^{2\pi} E_r(r)\cdot r^2 \sin\theta \, d\theta d\varphi = \frac{q}{\varepsilon_0} \Rightarrow E_r(r) = \frac{q}{4\pi r^2 \varepsilon_0}$$

- Για $b<r<a-b$: Είναι γνωστό ότι το φορτίο της μεγάλης σφαίρας θα συσσωρευτεί στην επιφάνειά της καθώς και στην επιφάνεια γύρω από την κοιλότητα, δηλαδή θα χωριστεί σε δύο μέρη, Q_1, Q_2 αντίστοιχα: $Q = Q_1 + Q_2$

  Νόμος Gauss στην S_2 (σφαίρα κέντρου O_1 με $b<r<a-b$):

$$\oint_S \vec{E}\, d\vec{s} = \frac{Q_2+q}{\varepsilon} \xRightarrow[\text{λόγω του αγωγού}]{E=0} Q_2 = -q$$

  Άρα $\quad Q_1 = Q+q$

- Για τα εξωτερικά σημεία της σφαίρας μπορούμε να αλλάξουμε συντεταγμένες και να έχουμε σφαιρικές με κέντρο το κέντρο της αγώγιμης σφαίρας.

  Οπότε, για $r>a$: Από Νόμο Gauss σε σφαίρα με $r>a$:

$$\oint_S \vec{E} d\vec{s} = \frac{Q+q}{\varepsilon_0} \Rightarrow \int_{\theta=0}^{\pi}\int_{\varphi=0}^{2\pi} E_r(r) r^2 \sin\theta\, d\theta d\varphi = \frac{Q+q}{\varepsilon_0} \Rightarrow E_r(r) = \frac{Q+q}{4\pi r^2 \varepsilon_0}$$

Άσκηση 3.9

α) Με σημειακές εξισώσεις:

Επιλύουμε το σύστημα θεωρώντας κυλινδρικές συντ/νες, για τα $\vec{H}=\vec{H}(r)$, $\vec{B}=\vec{B}(r)$ (συμμετρία)

- $\vec{\nabla}\times\vec{H}=\vec{J}=\hat{z}\,J_0\frac{r}{a}$, $b<r<a$ (1)
- $\vec{\nabla}\times\vec{H}=\vec{0}$, $r<b$, $r>a$ (2)
- $\vec{\nabla}\cdot\vec{B}=0$, $\forall r>0$ (3)

• Με συνοριακές συνθήκες:

i) $\hat{r}\times\left(\vec{H}(b^+)-\vec{H}(b^-)\right)=\hat{z}K_0$

ii) $\hat{r}\times\left(\vec{H}(a^+)-\vec{H}(a^-)\right)=\vec{0}$

iii) $B_r(a^+)=B_r(a^-)$

iv) $B_r(b^+)=B_r(b^-)$

• Επιλύοντας με την (3): $\vec{\nabla}\cdot\vec{B}=\vec{0}\Rightarrow\frac{\partial}{\partial r}(rB_r)=0\Rightarrow B_r=\begin{cases}\frac{C_0}{r}, & r<b\\ \frac{C_1}{r}, & b<r<a\\ \frac{C_2}{r}, & r>a\end{cases}$

Από (iii), (iv) $\Rightarrow C_2=C_1=C_0$

Όμως πρέπει $\lim\limits_{r\to0}B_r$ πεπερασμένο οπότε $C_0=0$

Άρα $B_r(r)=0$, δηλ. $H_r(r)=0$, $\forall r$

• Για $r<b$: (2) $\Rightarrow\begin{cases}\frac{\partial H_z}{\partial r}=0\Rightarrow H_z(r)=a_0\\ \frac{\partial}{\partial r}(rH_\varphi)=0\Rightarrow H_\varphi=\frac{b_0}{r}\end{cases}$ σε συνδυασμό με την οριακή συνθήκη $\lim\limits_{r\to0}2\pi rH_\varphi(r)=I\Rightarrow b_0=\frac{I}{2\pi}$

• Για $b<r<a$: (1) $\Rightarrow\frac{\partial H_z}{\partial r}=0\Rightarrow H_z(r)=a_1$

$$\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}(rH_\varphi)=\frac{J_0}{a}r\Rightarrow rH_\varphi=\frac{J_0}{3a}r^3+b_1\Rightarrow$$

$$\Rightarrow H_\varphi(r)=\frac{J_0}{3a}r^2+\frac{b_1}{r}$$

• Για $r>a$: (2) $\Rightarrow\begin{cases}H_z(r)=a_2\\ H_\varphi(r)=\frac{b_2}{r}\end{cases}$

Όμως πρέπει $\lim\limits_{r\to\infty}H_z(r)=0$ οπότε $a_2=0$.

• Συνοριακές συνθήκες (i), (ii) $\Rightarrow \begin{cases} H_z(b^+) - H_z(b^-) = 0 \\ H_\varphi(b^+) - H_\varphi(b^-) = K_o \end{cases}$ και $\begin{cases} H_z(a^+) - H_z(a^-) = 0 \\ H_\varphi(a^+) - H_\varphi(a^-) = 0 \end{cases}$

Οπότε, $a_0 = a_1 = a_2 = 0 \Rightarrow H_z(r) = 0, \ \forall r$

και $\frac{J_o}{3a} b^2 + \frac{b_1}{b} - \frac{I}{2\pi b} = K_o \Rightarrow b_1 = K_o \cdot b - \frac{J_o}{3a} \cdot b^3 + \frac{I}{2\pi}$

και $\frac{b_2}{a} - \frac{J_o}{3a} a^2 - \frac{b_1}{a} = 0 \Rightarrow b_2 = K_o \cdot b + \frac{I}{2\pi} - \frac{J_o}{3a} b^3 + \frac{J_o}{3} a^2$

Τελικά, $$\vec{H}(r) = \begin{cases} \frac{I}{2\pi r} \hat{\varphi}, & r < b \\ \left(\frac{J_o}{3a}(r^3 - b^3) + \frac{K_o b}{r} + \frac{I}{2\pi r}\right)\hat{\varphi}, & b < r < a \\ \left(\frac{J_o}{3ar}(a^3 - b^3) + \frac{K_o b}{r} + \frac{I}{2\pi r}\right)\hat{\varphi}, & r > a \end{cases}$$

• Με ολοκληρωτικές εξισώσεις

▷ Σε οποιονδήποτε κύλινδρο κέντρου O που εκτείνεται κατά μήκος του z'z θα ισχύει:

$$\oint_S \vec{B}\, d\vec{S} = 0 \Rightarrow \int_{z=-\ell}^{\ell} \int_{\varphi=0}^{2\pi} B_r(r) \cdot r\, d\varphi dz = 0 \Rightarrow B_r(r) \cdot r \cdot 2\pi \cdot 2\ell = 0 \Rightarrow B_r(r) = 0 \Rightarrow H_r = 0.$$

▷ Σε κύκλο του επιπέδου $z=0$ ακτίνας $r<b$ ισχύει:

$$\oint_{C_1} \vec{H} \cdot d\vec{\ell} = I \Rightarrow \int_{\varphi=0}^{2\pi} H_\varphi(r) \cdot r\, d\varphi = I \Rightarrow H_\varphi(r) = \frac{I}{2\pi r}$$

▷ Σε κύκλο του $z=0$ ακτίνας $b<r<a$ ισχύει:

$$\oint_{C_2} \vec{H} \cdot d\vec{\ell} = I(r) = I + 2\pi b \cdot K_o + \int_{\varphi=0}^{2\pi} \int_{r=b}^{r} \frac{J_o}{a} r'^2 dr' d\varphi = I + 2\pi b \cdot K_o + 2\pi \frac{J_o}{3a}(r^3 - b^3) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \int_{\varphi=0}^{2\pi} H_\varphi(r) \cdot r\, d\varphi = I + 2\pi b K_o + 2\pi \frac{J_o}{3a}(r^3 - b^3) \Rightarrow H_\varphi(r) = \frac{I}{2\pi r} + \frac{K_o b}{r} + \frac{J_o}{3ar}(r^3 - b^3)$$

▷ Για $r>a$, χρησιμοποιώντας ως καμπύλη τον κύκλο $z=0$, $r>a$ ισχύει:

$$\oint_C \vec{H} \cdot d\vec{\ell} = I + 2\pi b K_o + \frac{2\pi J_o}{3a}(a^3 - b^3) \Rightarrow H_\varphi(r) = \frac{I}{2\pi r} + \frac{K_o b}{r} + \frac{J_o}{3ar}(a^3 - b^3).$$

• Για τη z-συνιστώσα επιλέγεται ως καμπύλη ο ορθογωνικός βρόχος μήκους ℓ, παράλληλος στον z'z.

$$\oint_c \vec{H}\,d\vec{\ell} = \int_0^r \cancel{H_r(r')dr'} + \cancel{\int_0^r H_r(r')dr'} + \int_{z=-\ell}^{0} H_z(r)\,dz + \int_{z=0}^{-\ell} H_z(0)\,dz = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \ell \cdot H_z(r) = \ell H_z(0) \Rightarrow H_z(r) = H_z(0),\ \forall r$$

Όμως, πρέπει $\lim_{r\to\infty} H_z(r) = 0 \Rightarrow H_z(0)=0$, Άρα $H_z(r)=0,\ \forall r$

β) Με ομοιόμορφες επιφάνειες

• $\vec{K} = -\hat{x}K_0$, $\vec{H}=\vec{H}(z)$ (συμμετρία)

• Για $z<-h$: $\vec{\nabla}\times\vec{H}=\vec{0} \Rightarrow \begin{cases} H_y(z)=a_0 \\ H_x(z)=b_0 \end{cases}$

• Για $-h<z<0$: $\vec{\nabla}\times\vec{H} = -\hat{x}\,J_0\frac{z}{h} \Rightarrow \begin{cases} \frac{\partial H_y}{\partial z} = \frac{J_0}{h}\cdot z \Rightarrow H_y(z) = \frac{J_0}{2h}\cdot z^2 + z_2 \\ H_x(z) = X_2 \end{cases}$

• Για $0<z<h$: $\vec{\nabla}\times\vec{H} = \hat{x}\,\frac{J_0 z}{h} \Rightarrow \begin{cases} \frac{\partial H_y}{\partial z} = -\frac{J_0 z}{h} \Rightarrow H_y(z) = -\frac{J_0}{2h}z^2 + z_1 \\ H_x(z) = X_1 \end{cases}$

• Για $z>h$: $\vec{\nabla}\times\vec{H} = \vec{0} \Rightarrow \begin{cases} H_y(z) = a_1 \\ H_x(z) = b_1 \end{cases}$

Συνοριακές Συνθήκες:

• $z=h$: $\hat{z}\times(\vec{H}(h^+)-\vec{H}(h^-)) = \vec{0} \Rightarrow \begin{cases} H_y(h^+) = H_y(h^-) \Rightarrow a_0 = -\frac{J_0}{2}h + z_1 \\ H_x(h^+) = H_x(h^-) \Rightarrow X_1 = b_0 \end{cases}$

• $z=-h$: $(-\hat{z})\times(\vec{H}(-h^-)-\vec{H}(-h^+)) = -\hat{x}K_0 \Rightarrow \begin{cases} H_x(-h^-) = H_x(-h^+) \Rightarrow X_2 = b_1 \\ H_y(-h^-) - H_y(-h^+) = -K_0 \Rightarrow a_1 = \frac{J_0}{2}h + z_2 - K_0 \end{cases}$

• $z=0$: $\hat{z}\times(\vec{H}(0^+)-\vec{H}(0^-)) = \vec{0} \Rightarrow \begin{cases} H_y(0^+) = H_y(0^-) \Rightarrow z_1 = z_2 \\ H_x(0^+) = H_x(0^-) \Rightarrow X_1 = X_2 \end{cases}$

• Επίσης, θα πρέπει $\lim_{z\to\infty} H_x(z) = 0 \Rightarrow X_1 = X_2 = b_0 = b_1 = 0 \Rightarrow H_x(z) = 0,\ \forall z$

• Λόγω του σχήματος θα πρέπει, $H_y(z) = H_y(-z) \Rightarrow a_0 = -a_1 \Rightarrow z_1 = -z_2 + K_0 \overset{z_1=z_2}{\Longrightarrow}$

$\Rightarrow z_1 = z_2 = \frac{K_0}{2}$, $z>h$

Για τη z-συνιστώσα:

$$\vec{\nabla}\cdot\vec{B}=0 \Rightarrow \frac{\partial B_z}{\partial z}=0 \Rightarrow B_z(z)=c \xrightarrow[z\to\infty]{\lim B_z(z)=0} 0 \quad \Rightarrow H_z(z)=0,\ \forall z$$

Τελικά:

$$\vec{H}(z)=\begin{cases} \left(\frac{J_0}{2}h-\frac{K_0}{2}\right)\hat{y}, & z<-h \\ \left(\frac{J_0}{2h}z^2+\frac{K_0}{2}\right)\hat{y}, & -h<z<0 \\ \left(-\frac{J_0}{2h}z^2+\frac{K_0}{2}\right)\hat{y}, & 0<z<h \\ \left(-\frac{J_0}{2}h+\frac{K_0}{2}\right)\hat{y}, & z>h \end{cases}$$

• Με <u>ολοκληρωτικές</u> εξισώσεις

▷ Το μαγνητικό πεδίο εξαρτάται μόνο από το z και έχει μόνο y-συνιστώσα $\vec{H}=\hat{y}H_y(z)$.

▷ Έστω ορθογωνικός βρόχος του επιπέδου yz πλάτους l_1, μήκους l ώστε να καταλαμβάνει ένα μέρος του ημιχώρου $z>h$ και ένα του $z<-h$ με κέντρο στο $z=0$ (αριστερόστροφος).

$$\oint_{C_1}\vec{H}\,d\vec{l}=I_{C_1}=-K_0 l_1+\int_0^h J_0\frac{z}{h}l_1\,dz+\int_{-h}^0 -J_0\frac{z}{h}l_1\,dz \Rightarrow$$

$$l_1 H_y(-z)-l_1 H_y(z)=-K_0 l_1+\frac{J_0 l_1}{2h}h^2-\frac{J_0 l_1}{2h}(-h^2) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow H_y(z)-H_y(z)=-K_0+\frac{J_0}{h}\cdot h^2=-K_0+J_0\cdot h$$

Όμως για $z>h$: $H_y(z)=-H_y(-z)$ οπότε: $H_y(z)=-\frac{J_0 h}{2}+\frac{K_0}{2},\ z>h$

και: $H_y(z)=+\frac{J_0 h}{2}-\frac{K_0}{2},\ z<-h$

▷ Έστω ορθογωνικός βρόχος του επιπέδου yz που καλύπτει μέρη των περιοχών $h>z>0$ και $z>h$, με μήκος l, πλάτος l_1, με την πάνω πλευρά του στο $z=k>h$

$$\oint_{C_2}\vec{H}\cdot d\vec{l}=I_{C_2}=\int_z^h \frac{J_0 z'}{h}l_1\,dz'=\frac{J_0 l_1}{2h}(h^2-z^2) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow l_1\cdot H_y(z)-l_1 H_y(k)=\frac{J_0 l_1}{2h}(h^2-z^2) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow H_y(z)+\cancel{\frac{J_0 h}{2}}-\frac{K_0}{2}=\cancel{\frac{J_0 h}{2}}-\frac{J_0}{2k}z^2 \Rightarrow H_y(z)=\frac{K_0}{2}-\frac{J_0}{2h}z^2,\quad 0<z<h$$

▷ Ομοίως, για βρόχο από $z=k<-h$ μέχρι $-h<z<0$ θα ισχύει:

$$H_y(z)=\frac{J_0}{2h}z^2+\frac{K_0}{2},\quad -h<z<0.$$

Άσκηση 3.13

- $\vec{K} = \hat{\varphi} K_\varphi + \hat{z} K_z$, $|\vec{K}| = K_0$, γωνία των $\vec{K}, \hat{\varphi}$ είναι ω

- $\vec{K} \cdot \hat{\varphi} = |\vec{K}| \cdot |\hat{\varphi}| \cdot \cos(\vec{K}, \hat{\varphi}) = K_0 \cos\omega \Rightarrow$

$\Rightarrow (\hat{\varphi} K_\varphi + \hat{z} K_z) \hat{\varphi} = K_0 \cos\omega \Rightarrow K_\varphi = K_0 \cos\omega$

- $|\vec{K}| = K_0 \Rightarrow \sqrt{K_\varphi^2 + K_z^2} = K_0 \Rightarrow K_z^2 = K_0^2 - K_0^2 \cos^2\omega = K_0^2 \sin^2\omega \Rightarrow$

$\Rightarrow |K_z| = |K_0 \sin\omega| \Rightarrow K_z = \pm K_0 \sin\omega$

Η άσκηση θα επιλυθεί στην περίπτωση $K_z = K_0 \sin\omega$

- Λόγω συμμετρίας κυλίνδρου: $\vec{B} = \vec{B}(r)$, $\vec{H} = \vec{H}(r)$

- $\vec{\nabla} \times \vec{H} = \vec{0} \Rightarrow \begin{cases} \dfrac{\partial H_z}{\partial r} = 0 \Rightarrow H_z = \begin{cases} a_0, & 0<r<a \\ a_1, & r>a \end{cases} \\ \dfrac{1}{r} \cdot \dfrac{\partial}{\partial r}(r H_\varphi) = 0 \Rightarrow H_\varphi = \begin{cases} \dfrac{b_0}{r}, & 0<r<a \\ \dfrac{b_1}{r}, & a<r \end{cases} \end{cases}$

- Οριακή συνθήκη στο $r = a$: $\hat{r} \times (\vec{H}(a^+) - \vec{H}(a^-)) = \vec{K} = \hat{\varphi} K_\varphi + \hat{z} K_z \Rightarrow$

$\Rightarrow -\hat{\varphi}(H_z(a^+) - H_z(a^-)) + \hat{z}(H_\varphi(a^+) - H_\varphi(a^-)) = \hat{\varphi} K_\varphi + \hat{z} K_z \Rightarrow$

$\Rightarrow \left.\begin{array}{l} H_z(a^+) - H_z(a^-) = -K_0 \cos\omega \\ H_\varphi(a^+) - H_\varphi(a^-) = K_0 \sin\omega \end{array}\right\} \Rightarrow \begin{array}{l} a_1 - a_0 = -K_0 \cos\omega \\ \dfrac{b_1 - b_0}{a} = K_0 \sin\omega \end{array}$

- Πρέπει H_φ πεπερασμένο στο $r = 0$, οπότε $b_0 = 0$, άρα $b_1 = K_0 \cdot a \cdot \sin\omega$

- Πρέπει $\lim\limits_{r\to\infty} H_z(r) = 0 \Rightarrow a_1 = 0 \Rightarrow a_0 = K_0 \cos\omega$

- $\vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0 \Rightarrow \dfrac{1}{r} \dfrac{\partial}{\partial r}(r B_r) = 0 \Rightarrow B_r = \begin{cases} \dfrac{c_0}{r}, & 0<r<a \\ \dfrac{c_1}{r}, & r>a \end{cases}$

- Πρέπει $B_r(a^+) = B_r(a^-) \Rightarrow c_0 = c_1$

και $c_0 = 0$ ώστε να είναι πεπερασμένο στο 0.

Άρα $B_r(r) = 0 \Rightarrow H_r(r) = 0$

Τελικά: $\vec{H}(r) = \begin{cases} K_0 \cos\omega \, \hat{z}, & 0<r<a \\ K_0 \cdot \sin\omega \, \hat{\varphi}, & r>a \end{cases}$