Διακριτά Μαθηματικά

2η Γραπτή Εργασία

Χρήστος Τσούφης

03117176

Θέμα 1

α) Υποθέτοντας ότι a_i είναι ο αριθμός των ταξιδιών που έχει κάνει η αεροσυνοδός έως την i-οστή ημέρα, προκύπτει ότι:

$1 \le a_1 < a_2 < \ldots < a_{200} \le 300$.

Παρατήρηση: $a_1, a_2, \ldots$ μια αύξουσα υπακολουθία.

Όμως, $100 \le a_1 + 99 < a_2 + 99 < \ldots < a_{200} + 99 \le 399$ είναι και αυτή αύξουσα υπακολουθία και ισχύει ότι: $100 \le a_i + 99 \le 399 \ \forall i$

Θεωρώντας $b_i = a_i + 99, \ \forall i$, τότε προκύπτει ότι όλοι οι:

$a_1, a_2, \ldots, a_{200}, b_1, b_2, \ldots, b_{200} \le 399$

Λόγω της Αρχής του Περιστερώνα, 2 είναι ίσοι. Όμως, επειδή a_i διαφορετικοί μεταξύ τους και οι b_i διαφορετικοί μεταξύ τους θα πρέπει $\exists i,j: a_i + 99 = a_j \Rightarrow$

$\Rightarrow a_j - a_i = 99$

Το οποίο συνεπάγεται ότι από την $i+1$ έως την j ημέρα θα έχουν γίνει ακριβώς 99 ταξίδια.

β) Παρατήρηση: Αν αποδειχθεί το ζητούμενο για $N = 2^n$, τότε θα έχει αποδειχθεί και για κάθε $N \ge 2^n$, αφού σε κάθε ακολουθία πλήθους 2^n που ισχύει το ζητούμενο, θα συνεχίσει να ισχύει και μετά από την αύξηση της ακολουθίας.

Θεωρούμε τους αριθμούς της ακολουθίας a_n, πλήθους $2^n + 1$:

$1, a_1, a_1 a_2, a_1 a_2 a_3, \ldots, a_1 a_2 \ldots a_{2^n}$

Ισχύει ότι διαιρώντας αυτούς τους αριθμούς ανά δύο, τα πηλίκα τους δίνουν όλους τους δυνατούς συνδυασμούς διαδοχικών γινομένων της ακολουθίας. Επομένως, το πρόβλημα ανάγεται σε αυτούς τους αριθμούς.

Σημειώνεται ότι το 1 είναι απαραίτητο γιατί η διαίρεση με αυτό θα δίνει τις ίδιες ακολουθίες που εκφράζουν οι παραπάνω αριθμοί που κατασκευάστηκαν.

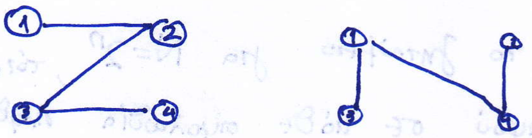
Παρατήρηση: Αν δύο από αυτούς τους αριθμούς έχουν περιττό πλήθος του ίδιου αριθμού, τότε το πηλίκο τους θα περιέχει άρτιο πλήθος αυτού, ή δεν θα τον περιέχει καθόλου.

Από το δοσμένο παράδειγμα προκύπτει ότι τόσο το $7 \cdot 5$ όσο και το $7 \cdot 5 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 5 \cdot 3 \cdot 7$ έχουν ίδιες εμφανίσεις των τριών διαφορετικών αριθμών ως προς την αρτιότητα του πλήθους τους.

Αυτό θα συμβαίνει πάντα, καθώς οι αριθμοί είναι 2^n+1 (περιστέρια) και οι πιθανοί διαφορετικοί συνδυασμοί των άρτιων και περιττών θα είναι, πάντα 2^n (φωλιές), όπου n το πλήθος των διαφορετικών αριθμών που εμφανίζονται στην αρχική ακολουθία.
Λόγω της Αρχής του Περιστερώνα, λοιπόν, θα υπάρχει πάντα ένα ζεύγος αριθμών που θα εμφανίζει κάθε διαφορετικό αριθμό με τον ίδιο, ως προς την αρτιότητα του πλήθους των φορών που εμφανίζεται, τρόπο.
Είναι φανερό ότι το πηλίκο των δύο αυτών αριθμών θα είναι ένα γινόμενο διαδοχικών όρων που θα περιέχει άρτιες φορές όλους τους n διαφορετικούς αριθμούς ή κάποιοι από τους n διαφ. αριθμούς δεν θα εμφανιστούν.
Έτσι, κάθε ένας από τους n διαφ. αριθμούς που παραμένει στο τελικό γινόμενο διαδοχικών όρων είναι υψωμένο σε κάποια άρτια δύναμη, δηλαδή είναι τέλειο τετράγωνο.
Στο παραπάνω παράδειγμα προκύπτει τελικά ότι το πηλίκο ισούται με: $3\cdot5\cdot7\cdot5\cdot3\cdot7=3^2\cdot5^2\cdot7^2$
Ακόμη, ισχύει ότι το τελικό γινόμενο θα έχει πάντα περισσότερους από δύο όρους, καθώς, αν είχε μόνο έναν, ο αριθμός από τον οποίο θα αποτελούνταν θα εμφανιζόταν περιττή στο πλήθος φορά, το οποίο είναι άτοπο.
Άρα, αποδείχθηκε το ζητούμενο για κάθε $N\geq 2^n$.

Θέμα 2

i) Βάση: $k=1$



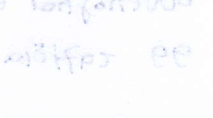
Οι 1,4 έχουν $2k-1=1$ ακμή και οι 2,3 $2k=2$ ακμές

Υπόθεση: Έστω το γράφημα με $k=n$, $4n$ κορυφές, το οποίο είναι αυτοσυμπληρωματικό και οι μισές κορυφές έχουν βαθμό $2n-1$ και οι άλλες $2n$.

Βήμα: Θ.δ.ο. και το γράφημα με $4(n+1)$ κορυφές είναι αυτοσυμπλ.

Εφόσον το $4n$ αυτοσυμπλ., τότε έχει $\frac{4n(4n-1)}{4}$ κορυφές και $\frac{4n(4n-1)}{4}\in\mathbb{Z}$

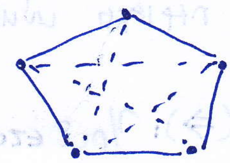
Φτιάχνουμε 4 νέες κορυφές της μορφής:



Ενώνουμε V_2, V_3 με όλες τις κορυφές του $k=n$ γραφήματος (οι άλλες έχουν βαθμό $2n-1$) και ενώνουμε τις V_1, V_4 με αυτές που έχουν βαθμό $2n$.
Έτσι, V_2, V_3 έχουν βαθμό $2n+2=2(n+1)$ και οι V_1, V_4 έχουν $2n+1=2(n+1)-1$, ενώ οι υπόλοιπες θα έχουν αυξήσει το βαθμό τους κατά 2 (ή $2n-1+2=2(n+1)-1$ ή $2n+2=2(n+1)$)

Άρα, δημιουργήθηκε αυτοσυμπλ. με $4(n+1)$ κορυφές με τις μισές βαθμό $2(n+1)-1$ και τις άλλες $2(n+1)$.

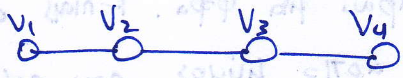
ii) Βάση: $k=1$: $4k+1=5$ κορυφές και να είναι 2-κανονικό:



Υπόθεση: Έστω $k=n$ και $\exists$ γραφ. $4n+1$ κορυφών που είναι αυτοσυμπλ. και $2n$-κανονικό

Βήμα: Θ.δ.ο. ισχύει για $k=n+1$.

Προσθέτω 4 κορυφές της μορφής:



Ενώνω τις v_2, v_3 με $2n$ κορυφές και v_1, v_4 με $2n+1$ κορυφές.

Έτσι, αυξήθηκε ο βαθμός των κορυφών του γραφ. με $4n+1$ κορυφές κατά 2 και έγινε $deg = 2n+2 = 2(n+1)$. Επίσης, οι v_2, v_3 έχουν $deg = 2n+2$ όπως και οι v_1, v_4 $(deg = 2n+1+1)$.

Άρα, δημιουργήθηκε ένα αυτοσυμπλ. γραφ. με $4(n+1)+1$ κορυφές που είναι και $2(n+1)$-κανονικό.

Θέμα 3

α) Έστω $X+Y$ και $X'+Y'$ οι διαμερίσεις του G. Έστω επίσης, $X \subseteq X'$ και $Y' \subseteq Y$.
Έστω ακόμη, τυχαία κορυφή $u' \in X'$ τ.ω. $u' \notin X$ και v' γείτονα της u' στο Y'.
Μετακινώντας την κορυφή u' στο Y, θα δημιουργηθεί κύκλος περιττού μήκους στο γράφο, το οποίο είναι άτοπο, αφού G διμερής. Επομένως, πρέπει $\forall u' : u' \in X' \Rightarrow u' \in X$. Άρα $X' \subseteq X \subseteq X' \Rightarrow X = X'$, $Y = Y'$. Άρα διαμέριση μοναδική σε δύο ανεξάρτητα σύνολα X, Y.

Για συνεκτικές συνιστώσες με $k \geq 1$, το γράφημα έχει "απλά" σύνολα διαμέρισης $X_1, Y_1, \dots, X_k, Y_k$ τ.ω. το G να αποτελείται από $X_1+Y_1, \dots, X_k+Y_k$ και έστω $g(k)$ το πλήθος των διαφ. διαμερίσεων.

Θδο $g(k) = 2^{k-1}$:

Βάση: $k=1$ τότε $g(1)=1$.

Υπόθεση: $k \geq 2$ τότε $g(k) = 2^{k-1}$

Βήμα: προσθέτοντας μία νέα συνεκτική συνιστώσα $X_{k+1} + Y_{k+1}$ ~~και~~ θέτοντας 0 αν η καθεμιά από τις νέες $g(k+1)$ διαμερίσεις περιέχει το (X_{k+1}, Y_{k+1}) και ~~με~~ 1 αν περιέχει το (Y_{k+1}, X_{k+1}) προκύπτει ότι για καθεμία από τις προηγούμενες διαμερίσεις θα υπάρχει μία με 0 και μία με 1. Έτσι, $g(k+1) = 2g(k) = 2^k$, $\forall k \geq 2$.

β) i) Η υποδιαίρεση κάθε ακμής διπλασιάζει το μήκος όλων των κύκλων στο γράφο $Y(G)$. Άρα, το μήκος όλων των κύκλων στο $Y(G)$ είναι πολ/σια του 2. Άρα το $Y(G)$ δεν περιέχει κύκλους περιττού μήκους. Δηλαδή, $Y(G)$ διμερής.

ii) (⇒): Υποθέτουμε ότι $Y(G)$ έχει κύκλο Hamilton και ότι $G \not\equiv C_n$. Τότε, υπάρχουν τουλ. 2 κόμβοι $u, v \in V$ τ.ω. να υπάρχουν τουλ. 2 διαδρομές από τον u στον v. Διαλέγουμε 2 διαδρομές και σχηματίζουμε κύκλο. Περνάμε από κάθε κορυφή του $Y(G)$ ακριβώς μία φορά. Επίσης ο $Y(G)$ είναι διμερής άρα πρέπει ο κύκλος να έχει άρτιο μήκος, που σημαίνει ότι (λόγω ΑΠ) ότι θα περάσουμε από κάθε κορυφή παραπάνω από μία φορά. Άτοπο. Άρα $G \equiv C_n$.

(⇐): Υποθέτουμε $G \equiv C_n$. Τότε $Y(G) \equiv C_{2n}$, το οποίο έχει κύκλο Hamilton το οποίο ταυτίζεται με τον οποιοδήποτε κύκλο σε γράφο.

Θέμα 4

α) Έστω ένα απλό συνεκτικό γράφημα G. Διακρίνεται στα εξής:

- Έστω ότι όλες οι κορυφές του G είναι άρτιου βαθμού. Τότε, το G θα έχει κύκλο Euler. Έτσι, προσανατολίζοντας όλες τις ακμές κατά την διαγραφή του κύκλου Euler, θα ισχύει για όλες τις κορυφές το ζητούμενο, δηλ. $\text{Βαθμ}_{εσ} = \text{Βαθμ}_{εξ}$.
- Έστω ότι υπάρχουν κορυφές του G με περιττό βαθμό. Αυτές θα έχουν άρτιο πλήθος. Έτσι, αν συνδέσουμε (οι κορυφές περιττού βαθμού) ανά δύο προκύπτει πάλι κύκλος Euler. και πάλι ισχύει ότι $\text{Βαθμ}_{εσ} = \text{Βαθμ}_{εξ}$ για κάθε κορυφή. Στην συνέχεια, αν διαγράψουμε οι επιπλέον ακμές που προστέθηκαν, τότε, ανά ζεύγος, στη μία κορυφή θα μειώνεται ο $\text{βαθμ}_{εξ}$ κατά 1, ενώ αντίστοιχα θα μειώνεται ο $\text{βαθμ}_{εσ}$ κατά 1. Υπόψη ότι επειδή κάθε ζεύγος κορυφών περιττού βαθμού είναι ανεξάρτητο, δεν θα υπάρχουν κορυφές που να ανήκουν σε πάνω από ένα ζεύγος, συνεπώς δεν θα τους συμβεί καμία άλλη μεταβολή πέρα από τις παραπάνω.

Επομένως, δ.ο. μπορούν πάντα να προσανατολιστούν όλες οι ακμές ενός μη κατευθ. συνεκτ. γραφ. G ώστε για κάθε κορυφή να ισχύει: $\text{Βαθμ}_{εξ} = \text{Βαθμ}_{εσ} \pm 1$

β) Θεωρούμε το επαγόμενο υπογράφημα H_{ij} για κάθε ζευγάρι κορυφών $i,j \in V$ που συνδέονται μεταξύ τους με κύκλους άρτιου βαθμού. Αυτό περιέχει όλες τις κορυφές της αντίστοιχης διαδρομής $u \to v$. Αυτό το γράφημα έχει δύο κορυφές με περιττό βαθμό και όλες τις άλλες με άρτιο. Έτσι, το H_{ij} έχει διαδρομή Euler J_{ij}, η οποία είναι μονοκονδυλιά αφού δεν υπάρχει επανάληψη ακμών. Έπειτα, αυτό το γράφημα αφαιρείται από το G και εφαρμόζεται η ίδια διαδικασία για το $G \setminus H_{ij}$ κτλ (επαναληπτικά) έως ότου να σχηματιστούν όλες οι διαδρομές. Εφόσον κάθε ζευγάρι χρησιμοποιείται μόνο μία φορά, το γράφημα θα διαμερίζεται σε $\left|\bigcup_{ij} J_{ij}\right| = \frac{k}{2}$ μονοκονδυλιές με $J_{ij} \cap J_{kl} = \emptyset$, $\forall i \neq k, j \neq l$. Η ορθότητα έγκειται στο γεγονός ότι μετά από κάθε επανάληψη οι i,j αποκτούν άρτιο βαθμό μετά το πέρας της αφού ο βαθμός τους μειώνεται κατά περιττό $deg'(i) = 2k+1-(2l+1) = 2(k-l)$, το οποίο αποδ. επαγωγικά.

Θέμα 5

(⇒): Αφού e απαραίτητη για G τότε $ΕΣΔ(G) < ΕΣΔ(G-e)$

Έστω ότι υπάρχει άλλη μία ακμή που ενώνει τα $(S, V/S)$ για την οποία ισχύει $W(e') < W(e)$. Αφαιρούμε την e από το ΕΣΔ και εισάγουμε την e' στην θέση της. Τότε $ΕΣΔ(G-e+e') < ΕΣΔ(G)$. Άτοπο, γιατί η e απαραίτητη. Επομένως, δεν υπάρχει άλλη ακμή πέραν της e.

(⇐): Έστω ότι υπάρχει ακμή $(S, V/S)$ τ.ω. $\forall e' = \{u,v\}$, $u \in S$, $v \in V/S$ και $e' \neq e$ τότε $w(e) < w(e')$

Θδο η e είναι η μοναδική ακμή με ελάχιστο βάρος που διασχίζει το S, V/S.

Έστω ότι κατά την κατασκευή του ΕΣΔ δεν διαλέγω την e αλλά την e' τ.ω. $w(e') > w(e)$. Όμως, αν διαλέξω την e' θα έχω $ΕΣΔ(G+e'-e) > ΕΣΔ(G)$. Άρα το ΕΣΔ που φτιάχνω δεν είναι το ελάχιστο δυνατό.

Άρα η ακμή e είναι απαραίτητη για το ΕΣΔ του G.

Θέμα 6

α) i) $\deg(u)=3$, $\forall u$

Άρα $\sum_{u\in V} \deg(u) = 2 \Rightarrow 3n=2m$

Επίσης, $n+$ όψεις $=m+2$

$n+$ όψεις $= \frac{3n}{2}+2 \Rightarrow$ όψεις $= \frac{n}{2}+2$

$\begin{cases} 5x+6y=2m \\ x+y = \text{όψεις} \end{cases}$ (x όψεις βαθ. 5 , y όψεις βαθ. 6)

$5(x+y)+y=2m$

5 όψεις $+y=2m$

$\frac{5n}{2}+10 = 2m = 3n \Rightarrow \frac{n}{2}=10 \Rightarrow n=20$, $m=30$, όψεις $=12$

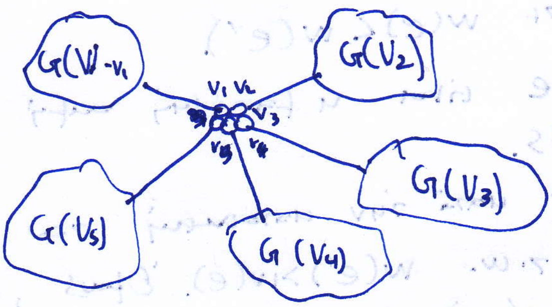
$60+y=60 \Rightarrow y=0$, Άρα $x=12$

Άρα 12 όψεις βαθμού 5.

ii) Αφού ο βαθμός κάθε κορυφής τουλ. 3, συμβαίνει ότι έχουμε τουλ. άλλη μία αυτή σε σχέση με το (i). Άρα, δημιουργείται μία επιπλέον όψη που μπορεί να είναι βαθμού 5 ή 6. $(\underset{+1}{n}+f=\underset{+1}{m}+2)$. Άρα τουλ. 12 όψεις βαθμού 5.

β) Έχουμε 5 συνεκτικά γραφήματα (μη κατευθ.) $G(V_1,E_1),\dots,G(V_5,E_5)$.

Επιλέγουμε μία κορυφή βαθ. ... κάθε γράφημα και δημιουργούμε μία υπερ-κορυφή $V_1-V_2-V_3-V_4-V_5$, δηλ.



Κάθε συνεκτικό γράφημα μπορούμε όμως να το χρωματίσουμε μόνο με δύο χρώματα.

Δίνουμε, λοιπόν, στην υπερκορυφή ένα χρώμα και την συνέχεια από ένα αυτό χρώμα στα $G(V_1)$, $G(V_2)$,…

Σύνολο χρωμάτων: 5

Επίσης, είναι γνωστό ότι σε κάθε επίπεδο γράφημα : $\chi(G)\leq 5$

Εάν προσθέσει κι άλλο ένα συνεκτ. γραφ. θα χρειαστεί 1 ακόμη χρώμα, αλλά ο παραπάνω κανόνας δεν θα ισχύει πλέον και το γράφημα δεν θα είναι επίπεδο.

Άρα, το πολύ 5 συνεκτ. γραφ.

Θέμα 7

α) Έστω δύο σύνολα V_1, V_2 για τα οποία ισχύει $X(G_1) \geq 1$, $X(G_2) \geq 1$
Έστω ότι το V_1 είναι το σύνολο των κορυφών που βάφονται με 1 χρώμα ($X(G_1) = 1$).

Τότε, για $V_2 = V / V_1$ ισχύει : $X(G_2) = X(G) - 1$

Όμως $X(G_1) = 1$

Άρα $X(G_1) + X(G_2) = X(G)$

β) Έστω το μέγιστο πλήρες υπογράφημα K_m, από το γράφημα και το σύνολο V_1'.
Ισχύει ότι $X(G) = X(G_1')$ (Το m είναι το ελάχιστο k για το οποίο G k-χρωματίσιμο)

Επειδή όμως το γράφημα μη πλήρες, για το V_2' θα ισχύει: $X(G_2') \geq 1$.

Άρα $X(G_2') + X(G_1') > X(G)$