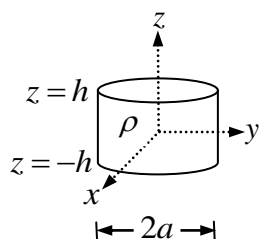
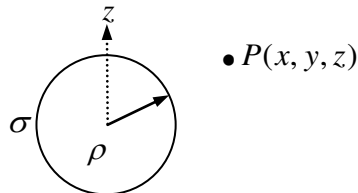


1η άσκηση

Σχ. (α)



Σχ. (β)

α) Ο κύλινδρος ακτίνας a και μήκους $2h$ του Σχ.(α) πληρούται με χωρικό φορτίο πυκνότητας

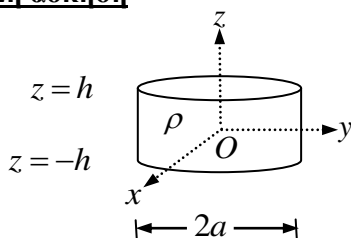
$$\rho = \rho_0 \frac{r}{a} \cos \varphi$$

($0 < r < a, 0 \leq \varphi < 2\pi, -h < z < h$) (r, φ, z είναι κυλινδρικές συντεταγμένες). Να βρεθεί το δυναμικό Φ σε τυχαίο σημείο (x, y, z) . Το αποτέλεσμα να δοθεί σε μορφή ολοκληρώματος (τριπλού) με σαφώς ορισμένη ολοκληρωτέα συνάρτηση και σαφώς ορισμένα όρια ολοκληρώσεως. Ο υπολογισμός του ολοκληρώματος δεν ζητείται. (Η διηλεκτρική σταθερά είναι ϵ παντού.)

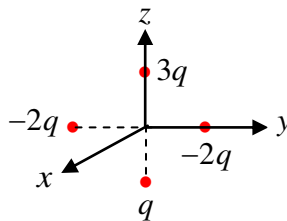
β) Η σφαίρα ακτίνας a του Σχ.(β) πληρούται με χωρικό φορτίο πυκνότητας

$$\rho = \rho_0 \frac{r}{a} \cos \theta \sin \varphi$$

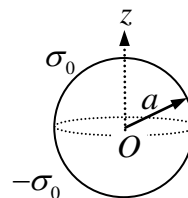
($0 < r < a, 0 \leq \varphi < 2\pi, 0 \leq \theta \leq \pi$) (r, θ, φ είναι σφαιρικές συντεταγμένες). Η επιφάνεια της σφαίρας φέρει επιφανειακό φορτίο πυκνότητας $\sigma = \sigma_0 \cos \theta$ ($0 \leq \theta \leq \pi$). Να βρεθεί το δυναμικό Φ σε τυχαίο σημείο (x, y, z) . Το αποτέλεσμα να δοθεί σε μορφή αθροίσματος δύο ολοκληρωμάτων που το καθένα να έχει σαφώς ορισμένη ολοκληρωτέα συνάρτηση και σαφώς ορισμένα όρια ολοκληρώσεως. Ο υπολογισμός των ολοκληρωμάτων δεν ζητείται. (Η διηλεκτρική σταθερά είναι ϵ παντού.)

2η άσκηση

Σχ. (α)



Σχ. (β)



Σχ.(γ)

α) Ο κύλινδρος ακτίνας a και μήκους $2h$ του Σχ.(α) πληρούται με χωρικό φορτίο πυκνότητας

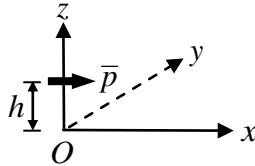
$$\rho = \rho_0 \frac{r_T}{a} \cos \varphi$$

($0 < r_T < a, 0 \leq \varphi < 2\pi, -h < z < h$) (r_T, φ, z είναι κυλινδρικές συντεταγμένες). Η διηλεκτρική σταθερά είναι ϵ παντού. 1) Να βρεθεί η ηλεκτρική διπολική ροπή \vec{p} . 2) Να βρεθεί η έκφραση του ηλεκτρικού δυναμικού $\Phi(r, \theta, \varphi)$ σε σφαιρικές συντεταγμένες για μεγάλα r .

β) Για τη διάταξη που δείχνει το Σχ.(β) να βρεθεί η συνολική διπολική ροπή ως προς την αρχή O . (Τα τέσσερα σημειακά φορτία βρίσκονται σε απόσταση a από την αρχή). Να βρεθεί επίσης η έκφραση του ηλεκτρικού δυναμικού $\Phi(r, \theta, \varphi)$ σε σφαιρικές συντεταγμένες για μεγάλα r ($r \gg a$).

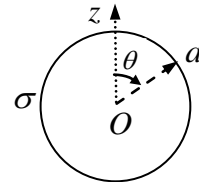
γ) Η σφαίρα ακτίνας a του Σχ.(γ) φέρει επιφανειακό φορτίο με πυκνότητα σ_0 στο άνω ημισφαίριο και επιφανειακό φορτίο με πυκνότητα $-\sigma_0$ στο κάτω ημισφαίριο. Να βρεθεί η συνολική διπολική ροπή ως προς την αρχή O . Να βρεθεί επίσης η έκφραση του ηλεκτρικού δυναμικού $\Phi(r, \theta, \varphi)$ σε σφαιρικές συντεταγμένες για μεγάλα r ($r \gg a$).

3η άσκηση: α) Ιδανικό ηλεκτρικό δίπολο $\vec{p} = \hat{x}p$ έχει το κέντρο του στη θέση $(0, 0, h)$. Να βρεθεί το δυναμικό στη θέση (x, y, z) . β) Να επαναληφθεί το προηγούμενο ερώτημα στην περίπτωση όπου $\vec{p} = \hat{z}p$.



4η άσκηση: Η σφαίρα ακτίνας a του σχήματος φέρει στην επιφανεία της επιφανειακό φορτίο με άγνωστη πυκνότητα σ . Η συνάρτηση του ηλεκτρικού δυναμικού σε σφαιρικές συντεταγμένες στις περιοχές 1 ($0 \leq r \leq a$) και 2 ($r \geq a$) είναι

$$\Phi_1 = V \frac{r}{a} \cos \theta = V \frac{z}{a}, \quad 0 \leq r \leq a \quad \text{και} \quad \Phi_2 = V \frac{a^2}{r^2} \cos \theta, \quad r \geq a$$



όπου V γνωστή σταθερά. Η διηλεκτρική σταθερά είναι ϵ_0 παντού. Να βρεθεί:

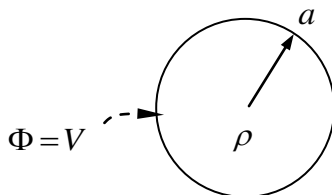
- Η επιφανειακή πυκνότητα σ και η ένταση του ηλεκτρικού πεδίου.
- Η συνολική ηλεκτρική ενέργεια της διάταξης με τουλάχιστον δύο από τους γνωστούς τρόπους.

5η άσκηση: Στη σφαιρική διάταξη του σχήματος, η σφαίρα ακτίνας a φέρει στο εσωτερικό της χωρικό ηλεκτρικό φορτίο πυκνότητας

$$\rho = \rho_0 \frac{r}{a} \quad (0 \leq r < a).$$

Η επιφάνεια της σφαίρας ($r = a$) έχει δυναμικό $\Phi = V$. Η διηλεκτρική σταθερά είναι ϵ_0 παντού. Να βρεθεί:

- Η συνάρτηση δυναμικού σε κάθε περιοχή του χώρου.
- Η επιφανειακή πυκνότητα ηλεκτρικού φορτίου στην επιφάνεια της σφαίρας.
- Η συνολική ηλεκτρική ενέργεια με τους διάφορους γνωστούς τρόπους.



6η άσκηση:

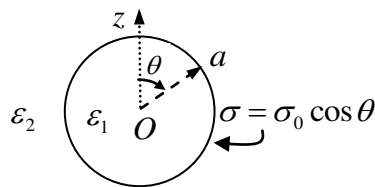
α) Ναδειχθεί ότι η συνάρτηση

$$\Phi(r, \theta) = \left(Ar + \frac{B}{r^2} \right) \cos \theta, \quad (1)$$

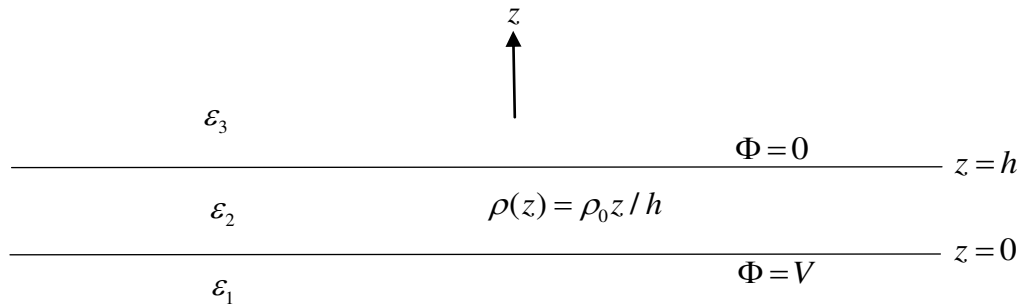
όπου A και B αυθαίρετες σταθερές, ικανοποιεί την εξίσωση Laplace σε σφαιρικές συντεταγμένες.

β) Χρησιμοποιώντας σχέσεις της μορφής (1), να βρεθούν οι συναρτήσεις δυναμικού $\Phi_1(r, \theta)$ και $\Phi_2(r, \theta)$ στις περιοχές 1 ($r \leq a$) και 2 ($r \geq a$) στη διάταξη του σχήματος. Διέγερση είναι το επιφανειακό φορτίο $\sigma = \sigma_0 \cos \theta$ στην επιφάνεια της σφαίρας ακτίνας a . Η διηλεκτρική σταθερά στις δύο περιοχές είναι ϵ_1 και ϵ_2 , αντίστοιχα.

γ) Να βρεθεί η ένταση του ηλεκτρικού πεδίου παντού και ναδειχθεί ότι το διάνυσμα της έντασης στην περιοχή 1 είναι σταθερό.



7η άσκηση:



Στην απέραντη ως προς x και y διάταξη, που δείχνει σε τομή το σχήμα, η περιοχή $0 < z < h$ έχει χωρικό ηλεκτρικό φορτίο με πυκνότητα $\rho = \rho_0 z / h$, όπου ρ_0 σταθερά. Οι επιτρεπτότητες ϵ_1 , ϵ_2 , ϵ_3 είναι σταθερές. Οι επίπεδες επιφάνειες $z = 0$ και $z = h$ έχουν δυναμικό $\Phi = V$ και $\Phi = 0$, αντίστοιχα. Αν $\vec{E}(z = 2h) = \hat{z}E_0$, όπου E_0 γνωστή σταθερά, να βρεθούν:

α) Η συνάρτηση δυναμικού παντού.

β) Η πυκνότητα του επιφανειακού φορτίου στις επιφάνειες $z = 0$ και $z = h$.

γ) Να επαναληφθεί το α) ερώτημα αν $\epsilon_2 = \epsilon_0 h / z$.