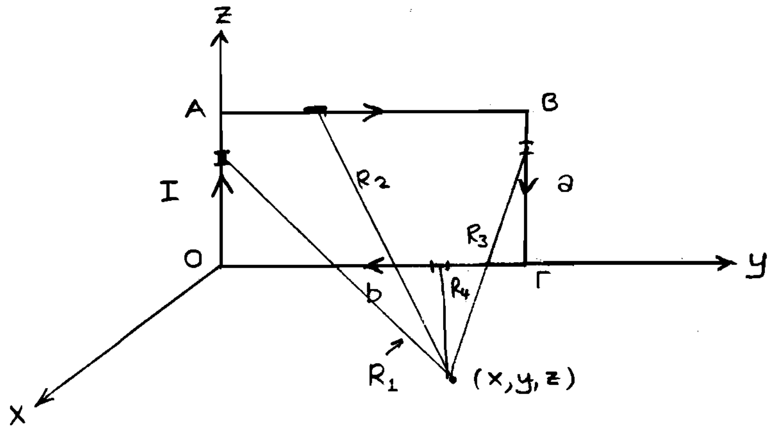
ΑΣΚΗΣΗ 1:



(α) $\vec{A} = \dfrac{\mu_0}{4\pi} \displaystyle\int \dfrac{I\, d\vec{\ell}'}{R}$ και χρήση επαλληλίας

Τμήμα ΟΑ:

$$\vec{A}_1 = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_0^a \frac{I\, \hat{\imath}_z\, dz'}{\underbrace{[x^2 + y^2 + (z-z')^2]^{1/2}}_{R_1}} =$$

$$= \hat{\imath}_z \frac{I\mu_0}{4\pi} \Big[-\ell n \big[(z-z') + [x^2+y^2+(z-z')^2]^{1/2} \big] \Big]_0^a$$

$$= \hat{\imath}_z \frac{I\mu_0}{4\pi}\, \ell n \left[\frac{z + [x^2+y^2+z^2]^{1/2}}{(z-a) + [x^2+y^2+(z-a)^2]^{1/2}} \right]$$

Τμήμα ΒΓ:

$$\vec{A}_3 = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_0^a \frac{I(-\hat{\imath}_z)\, dz'}{\underbrace{[x^2 + (y-b)^2 + (z-z')^2]^{1/2}}_{R_3}} =$$

$$= -\frac{I\mu_0}{4\pi}\, \hat{\imath}_z \Big\{ -\ell n \big[(z-z') + [x^2+(y-b)^2+(z-z')^2]^{1/2} \big] \Big\}_0^a$$

$$= -\hat{\imath}_z \frac{I\mu_0}{4\pi}\, \ell n \left[\frac{z + [x^2+(y-b)^2+z^2]^{1/2}}{(z-a) + [x^2+(y-b)^2+(z-a)^2]^{1/2}} \right]$$

Τμήμα ΑΒ:

$$\vec{A}_2 = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_0^b \frac{I\, \hat{\imath}_y\, dz'}{\underbrace{[x^2 + (y-y')^2 + (z-a)^2]^{1/2}}_{R_2}} =$$

$$= \hat{\imath}_y \frac{I\mu_0}{4\pi} \Big[-\ell n \big[(y-y') + [x^2+(y-y')^2+(z-a)^2]^{1/2} \big] \Big]_0^b =$$

$$= \hat{\imath}_y \frac{I\mu_0}{4\pi}\, \ell n \left[\frac{y + [x^2+y^2+(z-a)^2]^{1/2}}{(y-b) + [x^2+(y-b)^2+(z-a)^2]^{1/2}} \right]$$

Τμήμα ΓΟ: $$\vec{A}_4 = \frac{\mu_0}{4\pi}\int_0^b \frac{I(-\hat{\imath}_y)\,dy'}{[x^2+(y-y')^2+z^2]^{1/2}} =$$

$$= -\hat{\imath}_y \frac{I\mu_0}{4\pi}\left[-\ln\left[(y-y')+[x^2+(y-y')^2+z^2]^{1/2}\right]\right]_0^b =$$

$$= -\hat{\imath}_y \frac{I\mu_0}{4\pi}\ln\left[\frac{y+[x^2+y^2+z^2]^{1/2}}{(y-b)+[x^2+(y-b)^2+z^2]^{1/2}}\right]$$

Επομένως $\vec{A} = A_y\hat{\imath}_y + A_z\hat{\imath}_z$ όπου

$$A_y = \frac{I\mu_0}{4\pi}\ln\left[\frac{y+[x^2+y^2+(z-a)^2]^{1/2}}{(y-b)+[x^2+(y-b)^2+(z-a)^2]^{1/2}}\;\frac{(y-b)+[x^2+(y-b)^2+z^2]^{1/2}}{y+[x^2+y^2+z^2]^{1/2}}\right]$$

$$A_z = \frac{I\mu_0}{4\pi}\ln\left[\frac{z+[x^2+y^2+z^2]^{1/2}}{(z-a)+[x^2+y^2+(z-a)^2]^{1/2}}\;\frac{(z-a)+[x^2+(y-b)^2+(z-a)^2]^{1/2}}{z+[x^2+(y-b)^2+z^2]^{1/2}}\right]$$

(β) $$\vec{B} = \vec{\nabla}\times\vec{A} = \begin{vmatrix} \hat{\imath}_x & \hat{\imath}_y & \hat{\imath}_z \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ 0 & A_y & A_z \end{vmatrix} = \hat{\imath}_x\left[\frac{\partial A_z}{\partial y} - \frac{\partial A_y}{\partial z}\right] - \hat{\imath}_y\left[\frac{\partial A_z}{\partial x}\right] \hat{\imath}_z\left[\frac{\partial A_y}{\partial x}\right]$$

$$A_y = \frac{I\mu_0}{4\pi}\ln\frac{N_y}{D_y} \sim \frac{\partial A_y}{\partial x} = \frac{I\mu_0}{4\pi}\frac{D_y}{N_y}\frac{(\partial N_y/\partial x)D_y - (\partial D_y/\partial x)N_y}{D_y^2} \Rightarrow$$

$$\frac{\partial A_y}{\partial x} = \frac{I\mu_0}{4\pi}\frac{D_y}{N_y}\left[\frac{\partial N_y/\partial x}{D_y} - \frac{N_y}{D_y^2}\frac{\partial D_y}{\partial x}\right]$$ όπου

$$N_y(x,y,z) = \left[y+(x^2+y^2+(z-a)^2)^{1/2}\right]\left[(y-b)+(x^2+(y-b)^2+z^2]^{1/2}\right]$$

$$D_y(x,y,z) = \left[(y-b)+(x^2+(y-b)^2+(z-a)^2)^{1/2}\right]\left[y+(x^2+y^2+z^2]^{1/2}\right]$$

$$\frac{\partial A_y}{\partial z} = \frac{I\mu_0}{4\pi}\frac{D_y}{N_y}\left[\frac{\partial N_y/\partial z}{D_y} - \frac{N_y}{D_y^2}\frac{\partial D_y}{\partial z}\right]$$

$$A_z = \frac{I\mu_0}{4\pi}\ln\left(\frac{N_z}{D_z}\right) \sim \frac{\partial A_z}{\partial x} = \frac{I\mu_0}{4\pi}\frac{D_z}{N_z}\left[\frac{1}{D_z}\frac{\partial N_z}{\partial x} - \frac{N_z}{D_z^2}\frac{\partial D_z}{\partial x}\right]$$

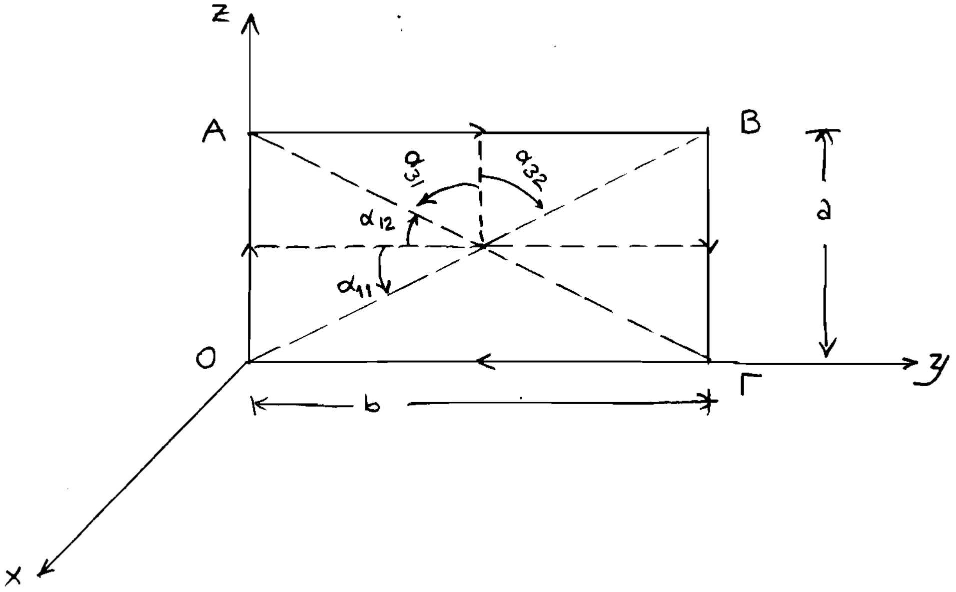
$$\frac{\partial A_z}{\partial y} = \frac{I\mu_0}{4\pi}\frac{D_z}{N_z}\left[\frac{1}{D_z^2}\frac{\partial N_z}{\partial y} - \frac{N_z}{D_z^2}\frac{\partial D_z}{\partial z}\right]$$

όπου

$$N_z(x,y,z) = \left[z+(x^2+y^2+z^2)^{1/2}\right]\left[(z-a)+[x^2+(y-b)^2+(z-a)^2]^{1/2}\right]$$

$$D_z(x,y,z) = \left[(z-a)+[x^2+y^2+(z-a)^2]^{1/2}\right]\left[z+[x^2+(y-b)^2+z^2]^{1/2}\right]$$

(γ)



Τμήμα ΟΑ:
$$\vec{B}_1 = -\hat{i}_x \frac{\mu_0 I}{4\pi}\left(\frac{1}{b/2}\right)\left[\sin\alpha_{11} - \sin\alpha_{12}\right] =$$
$$= -\hat{i}_x \frac{\mu_0 I}{4\pi}\frac{2}{b}\left[2\sin\alpha_{11}\right] =$$
$$= -\hat{i}_x \frac{\mu_0 I}{\pi}\frac{1}{b}\cdot\frac{a/2}{\left[\left(\frac{a}{2}\right)^2+\left(\frac{b^2}{2}\right)\right]^{1/2}} = -\hat{i}_x \frac{\mu_0 I}{\pi}\left(\frac{a}{b}\right)\frac{1}{\sqrt{a^2+b^2}}$$

Τμήμα ΒΓ
$$\vec{B}_3 = -\hat{i}_x \frac{\mu_0 I}{\pi}\left(\frac{a}{b}\right)\frac{1}{\sqrt{a^2+b^2}}$$

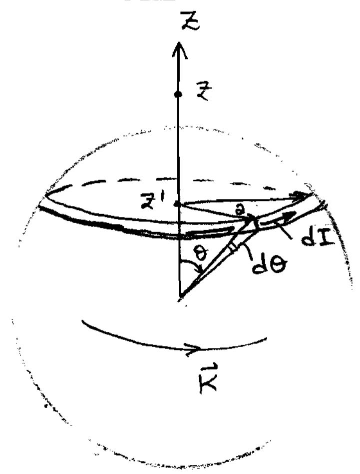
Τμήμα ΑΒ
$$\vec{B}_2 = -\hat{i}_x \frac{\mu_0 I}{4\pi}\frac{1}{a/2}\cdot\left[\sin\alpha_{31} - \sin\alpha_{32}\right] =$$
$$= -\hat{i}_x \frac{\mu_0 I}{2\pi}\frac{1}{a}\, 2\sin\alpha_{31} =$$
$$= -\hat{i}_x \frac{\mu_0 I}{\pi}\frac{1}{a}\cdot\frac{b/2}{\left[(a/2)^2+(b/2)^2\right]^{1/2}} = -\hat{i}_x \frac{\mu_0 I}{\pi}\frac{b}{a}\cdot\frac{1}{\sqrt{a^2+b^2}}$$

Τμήμα ΓΟ:
$$\vec{B}_4 = -\hat{i}_x \frac{\mu_0 I}{\pi}\frac{b}{a}\frac{1}{\sqrt{a^2+b^2}}$$

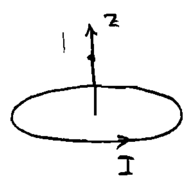
Επομένως στο κέντρο $\vec{B} = -\hat{i}_x \frac{\mu_0 I}{\pi}\, 2\, \frac{1}{\sqrt{a^2+b^2}}\left[\frac{a}{b}+\frac{b}{a}\right] =$

$$\vec{B} = -\hat{i}_x \frac{\mu_0 I}{\pi}\, 2 \cdot \frac{\sqrt{a^2+b^2}}{ab}$$

ΑΣΚΗΣΗ 2:



(α) Θα χρησιμοποιήσουμε το αποτέλεσμα για κυκλικό βρόχο. Το μαγνητικό πεδίο στα σημεία του άξονα z από κυκλικό βρόχο ακτίνας a δίδεται από την σχέση:



$$\vec{H} = \hat{i}_z \frac{I}{2} \frac{a^2}{[z^2+a^2]^{3/2}}$$

Εφαρμόζοντας το αποτέλεσμα του κυκλικού βρόχου για τον βρόχο ακτίνας a της σφαίρας έχουμε.

$$d\vec{H} = \frac{dI}{2} \frac{a^2}{[(z-z')^2 + a^2]^{3/2}} \hat{i}_z \qquad a = R\sin\theta \;, \; dI = K_0 R d\theta$$

Επομένως αθροίζοντας για όλους τους βρόχους στους οποίους μπορεί να αναλυθεί το επιφανειακό ρεύμα της σφαίρας έχουμε:

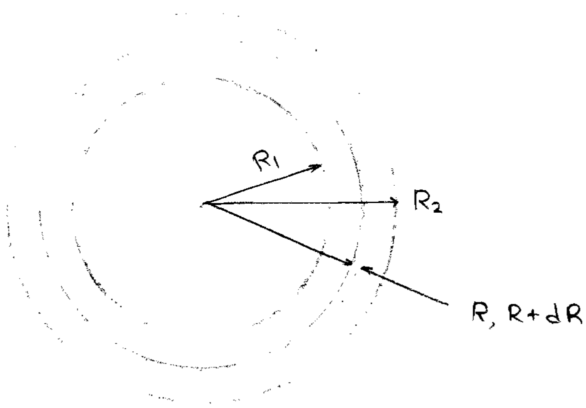
$$\vec{H}(z) = \int_{\theta=0}^{\pi} d\vec{H} = \hat{i}_z \int_{\theta=0}^{\pi} \frac{K_0 R d\theta}{2} \cdot \frac{R^2 \sin^2\theta}{[[z - R\cos\theta]^2 + R^2\sin^2\theta]^{3/2}} \Rightarrow$$

$$\vec{H}(z) = \hat{i}_z \frac{K_0 R^3}{2} \int_{\theta=0}^{\pi} \frac{\sin^2\theta}{[z^2 + R^2 - 2Rz\cos\theta]^{3/2}} d\theta$$

(β) Για το κέντρο της σφαίρας $z=0 \rightarrow$

$$\vec{H}(z=0) = \hat{i}_z \frac{K_0 R^3}{2} \int_0^{\pi} \frac{\sin^2\theta}{R^3} d\theta = \frac{K_0 \pi}{4} \hat{i}_z$$

(γ) Στην περίπτωση του σφαιρικού κελύφους μπορούμε να εφαρμόσουμε το προηγούμενο αποτέλεσμα.



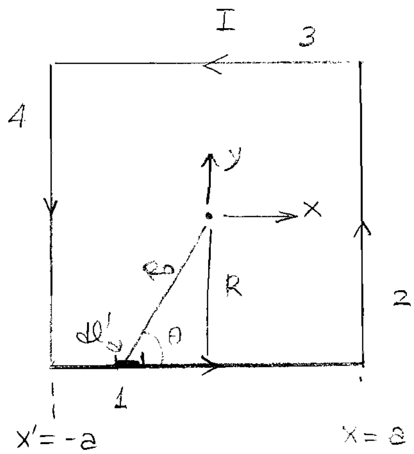
Το αντίστοιχο επιφανειακό ρεύμα στο στοιχειώδες πάχους κέλυφος από R, R+dR

είναι $\vec{K} = \vec{J}\,dR = J_o dR\,\hat{i}_\varphi$ και το πεδίο $d\vec{H} = \hat{i}_z \dfrac{J_o dR\,\pi}{4}$

Επομένως το πεδίο στο κέντρο του κελύφους είναι:

$$\vec{H}(z=0) = \int_{R=R_1}^{R_2} \frac{J_o dR\,\pi}{4}\hat{i}_z = \hat{i}_z\,\frac{J_o\pi}{4}\,(R_2-R_1)$$

ΑΣΚΗΣΗ 3:



(α) Το μαγνητικό πεδίο του τμήματος 1 δίδεται από τον νόμο του Biot-Savart: (έστω $2a$ η πλευρά του τετρ.)

$$\vec{B}_1 = \frac{\mu_0}{4\pi}\int_{x'=-a}^{x'=a} I\,\frac{d\vec{\ell}\,' \times \hat{i}_R}{R_0^2}$$

$$d\vec{\ell}\,' = \hat{i}_x\,dx' \;, \quad R_0^2 = R^2 + x'^2$$

$$\hat{i}_R = \frac{\vec{R}_0}{R_0} = \hat{i}_x\cos\theta + \hat{i}_y\sin\theta \;, \quad R = a$$

$$\hat{i}_x \times \hat{i}_R = \hat{i}_z\sin\theta \;, \quad \sin\theta = R/R_0 = R/(R^2+x'^2)^{1/2}$$

$$\vec{B}_1 = \frac{\mu_0 I}{4\pi}\int_{-a}^{a}\hat{i}_z\cdot\frac{R\,dx'}{(R^2+x'^2)^{3/2}} = \hat{i}_z\frac{\mu_0 I}{4\pi}\int_{-a}^{a}\frac{R\,dx'}{(R^2+x'^2)^{3/2}} =$$

$$= \hat{i}_z\frac{\mu_0 I}{4\pi}R\left[\frac{x'}{R^2[x'^2+R^2]^{1/2}}\right]_{-a}^{a} = \hat{i}_z\frac{\mu_0 I}{4\pi}\frac{1}{R}\left[\frac{a}{(a^2+R^2)^{1/2}}+\frac{a}{(a^2+R^2)^{1/2}}\right]$$

$$= \hat{i}_z\frac{\mu_0 I}{4\pi}\frac{1}{R}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{2}}\right) = \hat{i}_z\frac{\mu_0 I}{4\pi}\frac{1}{R}\sqrt{2}$$

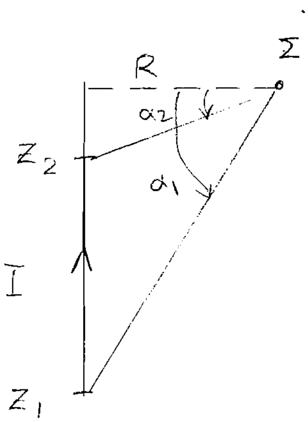
Επομένως η συμβολή των τεσσάρων πλευρών είναι:

$$\vec{B}_{tot} = \vec{B}_1+\vec{B}_2+\vec{B}_3+\vec{B}_4 = \hat{i}_z\frac{\mu_0 I}{4\pi}\frac{1}{R}\sqrt{2}\;4 \Rightarrow$$

$$\vec{B}_{tot} = \hat{i}_z\frac{\mu_0 I}{R}\sqrt{2} \quad \text{και} \quad \vec{H}_{tot} = \hat{i}_z\frac{I\sqrt{2}}{R}$$ στο

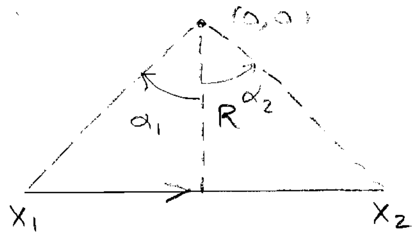
κέντρο του τετραγώνου.

Μπορούμε να φθάσουμε στο ίδιο αποτέλεσμα χρησιμοποιώντας τον τύπο πεπερασμένου ευθυγράμμου τμήματος διαρρεόμενου από ρεύμα I.



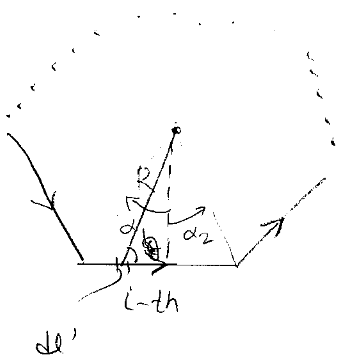
$$\vec{B}(\Sigma) = \frac{\mu_0 I}{4\pi}\frac{1}{R}\left[\sin\alpha_1 - \sin\alpha_2\right]\hat{i}_\varphi$$

Για το τμήμα 1 του τετραγώνου:



$$\vec{B}_1 = \hat{i}_z \frac{\mu_0 I}{4\pi}\frac{1}{R}\left(\sin 45^\circ - \sin(-45^\circ)\right) = \hat{i}_z \frac{\mu_0 I}{4\pi}\frac{1}{R}\cancel{2}\frac{\sqrt{2}}{\cancel{2}} =$$
$$= \hat{i}_z \frac{\mu_0 I}{4\pi}\frac{1}{R}\sqrt{2}$$ όπως και προηγουμένως.

(β) Κανονικό πολύγωνο:

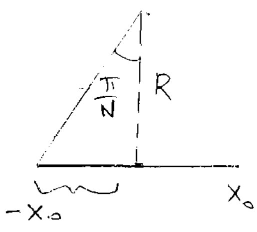


$$\alpha_1 = -\alpha_2$$
$$\alpha_1 = \frac{2\pi}{N}\frac{1}{2} = \frac{\pi}{N}$$

Για το τυχαίο τμήμα "i".

$$\vec{B}_i = \frac{\mu_0 I}{4\pi}\hat{i}_z \int_{-x_0}^{x_0} \frac{R\,dx'}{(x'^2+R^2)^{3/2}} \Rightarrow$$

$$\vec{B}_1 = \frac{\mu_0 I}{4\pi}\hat{i}_z\left[\frac{x'}{R\left[x'^2+R^2\right]^{1/2}}\right]_{-x_0}^{x_0} \Rightarrow$$



$x_0 = R\tan(\pi/N)$

$$\vec{B}_1 = \frac{\mu_0 I}{4\pi}\hat{i}_z \frac{1}{R}\left[\frac{2\cancel{R}\tan(\pi/N)}{\cancel{R}\left[1+\tan^2(\pi/N)\right]^{1/2}}\right]$$

$$\rightarrow \vec{B}_1 = \frac{\mu_0 I}{4\pi}\hat{i}_z \frac{1}{R}2\sin(\pi/N) = \hat{i}_z\frac{\mu_0 I}{2\pi}\frac{1}{R}\sin(\pi/N)$$

Το ολικό πεδίο είναι N φορές του $\vec{B}_1$. Επομένως,

$$\vec{B}_{tot} = \hat{i}_z\frac{\mu_0 I}{2\pi}\frac{1}{R}N\sin(\pi/N) \rightarrow \vec{H}_{tot} = \hat{i}_z\frac{I}{2\pi R}N\sin(\pi/N)$$

Στο όριο όταν $N \to \infty$ τότε

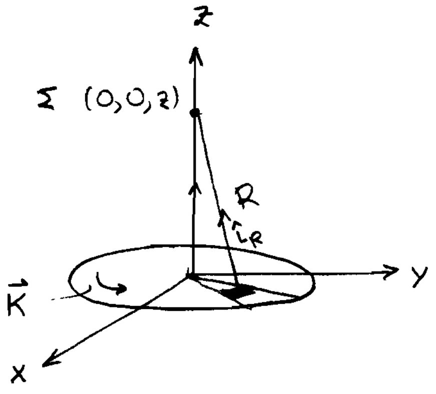
$$\vec{B}_{tot} = \hat{i}_z \frac{\mu_0 I}{2\pi} \frac{1}{R} \lim_{N\to\infty} \left(N \sin(\pi/N) \right) =$$

$$= \hat{i}_z \frac{\mu_0 I}{2\pi} \frac{1}{R} \pi \lim_{N\to\infty} \left(\frac{\sin(\pi/N)}{\pi/N} \right) = \hat{i}_z \frac{\mu_0 I}{2\cancel{\pi}} \frac{1}{R} \cancel{\pi} \underbrace{\left(\lim_{x\to 0} \frac{\sin(x)}{x} \right)}_{1}$$

$$= \hat{i}_z \frac{\mu_0 I}{2R} \sim \vec{H}_{tot} = \hat{i}_z \frac{I}{2R}$$

που αντιστοιχεί στο μαγνητικό πεδίο στο κέντρο ενός κυκλικού βρόχου.

ΑΣΚΗΣΗ 4:



(α) $\vec{K} = K_o r_T \hat{\imath}_\varphi$

Έστω σημείο Σ (0, 0, z)

Εφαρμογη Biot-Savart:

$$\vec{B} = \frac{\mu_o}{4\pi} \int_{S'} \frac{\vec{K} \times \hat{\imath}_R}{R^2} dS'$$

$$\vec{R} = \vec{r} - \vec{r}' , \quad \vec{r} = z \hat{\imath}_z , \quad \vec{r}' = r_T' \cos\phi' \hat{\imath}_x + r_T' \sin\phi' \hat{\imath}_y$$

$$R = |\vec{R}| = [(r_T' \cos\phi')^2 + (r_T' \sin\phi')^2 + z^2]^{1/2} = (r_T'^2 + z^2)^{1/2}$$

$$\hat{\imath}_R = \frac{\vec{R}}{R} = \frac{-r_T' \cos\phi' \hat{\imath}_x - r_T' \sin\phi' \hat{\imath}_y + z \hat{\imath}_z}{(r_T'^2 + z^2)^{1/2}} , \quad dS' = r_T' d\varphi' dr_T'$$

$$\vec{K} = K_o r_T' \hat{\imath}_\varphi = K_o r_T' [-\sin\phi' \hat{\imath}_x + \cos\phi' \hat{\imath}_y]$$

$$\vec{K} \times \hat{\imath}_R = \begin{vmatrix} \hat{\imath}_x & \hat{\imath}_y & \hat{\imath}_z \\ -K_o r_T' \sin\varphi' & K_o r_T' \cos\varphi' & 0 \\ -\frac{r_T' \cos\phi'}{R} & -\frac{r_T' \sin\phi'}{R} & \frac{z}{R} \end{vmatrix} =$$

$$= \hat{\imath}_x \left[K_o r_T' \cos\phi' \frac{z}{R} \right] - \hat{\imath}_y \left[-K_o r_T' \sin\phi' \frac{z}{R} \right] + \hat{\imath}_z \left[\frac{K_o r_T'^2 \sin^2\varphi'}{R} + \frac{K_o r_T'^2 \cos^2\varphi}{R} \right]$$

Επομένως,

$$\vec{B} = \frac{\mu_o}{4\pi} \int_{r_T'=0}^{a} \int_{\phi'=0}^{2\pi} \left\{ \left(\cancelto{0}{K_o r_T' \cos\phi' \frac{z}{R^3}} \right) \hat{\imath}_x + \left(\cancelto{0}{K_o r_T' \sin\phi' \frac{z}{R^3}} \right) \hat{\imath}_y + \left(\frac{K_o r_T'^2}{R^3} \right) \hat{\imath}_z \right\} r_T' d\phi' dr_T'$$

$$= \frac{\mu_o}{4\pi} \hat{\imath}_z \int_{r_T'=0}^{a} K_o \frac{r_T'^2}{(r_T'^2 + z^2)^{3/2}} r_T' dr_T' d\phi = \hat{\imath}_z \frac{\mu_o}{2} K_o \int_0^a \frac{r_T'^3}{[r_T'^2 + z^2]^{3/2}} dr_T'$$

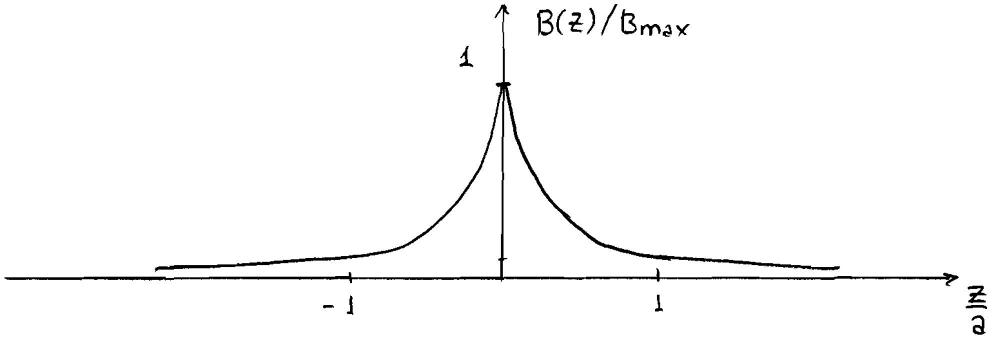
$$= \hat{\imath}_z \frac{\mu_o K_o}{2} \left[\frac{r_T'^2 + 2z^2}{(r_T'^2 + z^2)^{1/2}} \right]_0^a = \hat{\imath}_z \frac{\mu_o K_o}{2} \left[\frac{a^2 + 2z^2}{[a^2 + z^2]^{1/2}} - 2|z| \right]$$

(β) Μέγιστη τιμή στο $z=0$ ~

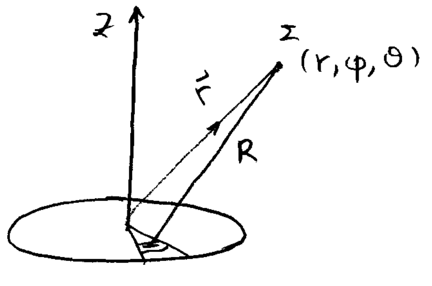
$$\vec{B}_{max} = \hat{i}_z \frac{\mu_o K_o}{2}\left[\frac{a^2}{a}\right] = \hat{i}_z\left(\frac{\mu_o K_o a}{2}\right)$$

$$\frac{B(z)}{B_{max}} = \frac{\cancel{\frac{\mu_o K_o}{2}}\left[\frac{a^2+2z^2}{(a^2+z^2)^{1/2}} - 2|z|\right]}{\cancel{\frac{\mu_o K_o}{2}}\, a} = \left[\frac{a^2+2z^2}{a^2\left[1+(z/a)^2\right]^{1/2}} - 2\left|\frac{z}{a}\right|\right]$$

$$= \frac{1+2(z/a)^2}{\left[1+(z/a)^2\right]^{1/2}} - 2\left|\frac{z}{a}\right|$$



(γ)



$$\vec{A} = \frac{\mu_o}{4\pi}\int \frac{\vec{K}\, ds'}{R}$$

$$R = \left[r^2 + r'^2 - 2rr'(\cos\theta\cos\theta' + \sin\theta\sin\theta'\cos(\phi-\phi'))\right]^{1/2}$$

$\theta' = \pi/2 \qquad r' = r_T'$

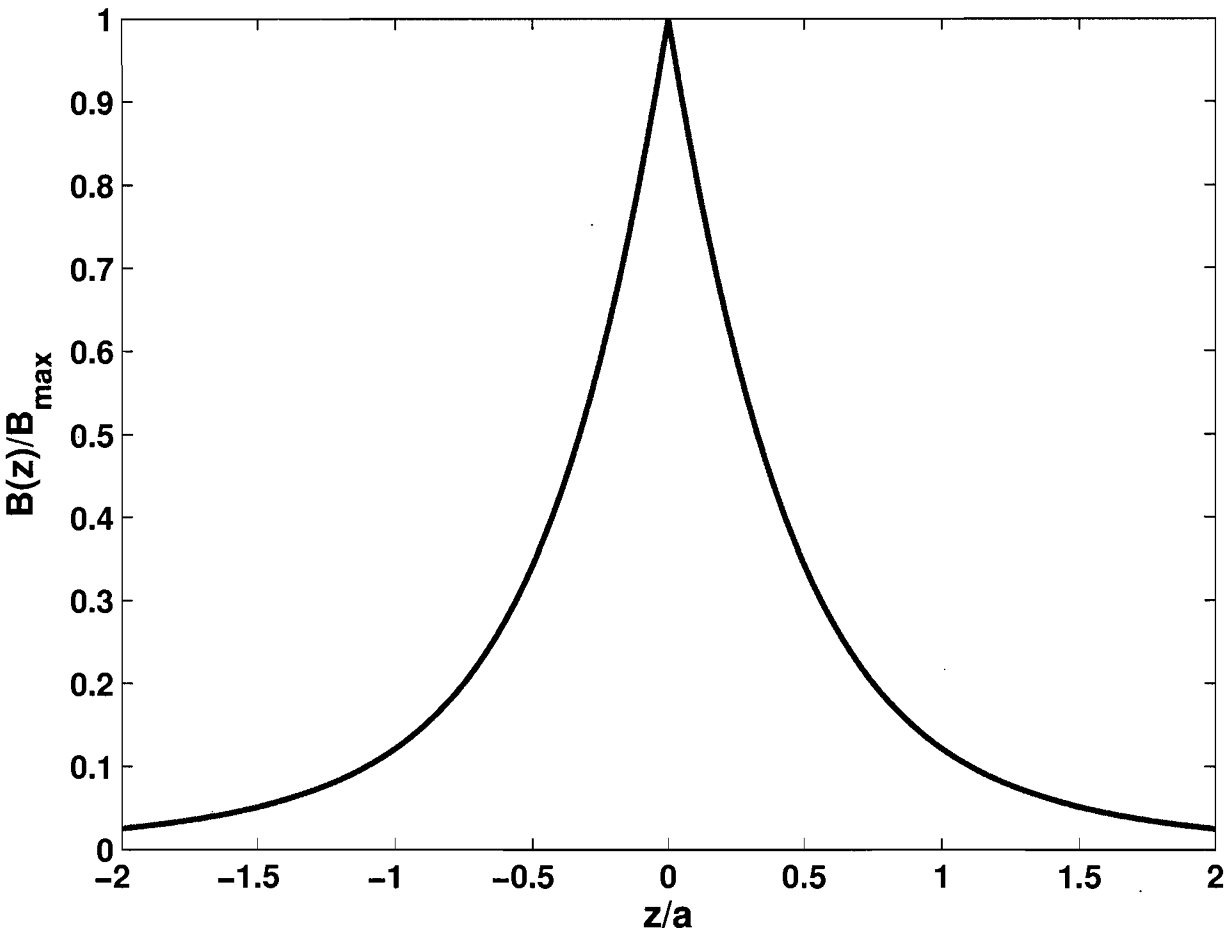
$$R = \left[r^2 + r_T'^2 - 2rr_T'(\sin\theta\cos(\phi-\phi'))\right]^{1/2}$$

$$\vec{A} = \frac{\mu_o}{4\pi}\int_{r_T'=0}^{a}\int_{\phi'=0}^{2\pi} \frac{K_o r_T'\left[-\sin\phi'\,\hat{i}_x + \cos\phi'\,\hat{i}_y\right] r_T'\, dr_T'\, d\phi'}{\left[r^2 + r_T'^2 - 2rr_T'\sin\theta\cos(\phi-\phi')\right]^{1/2}}$$

(δ) Πάνω στον άξονα των z.

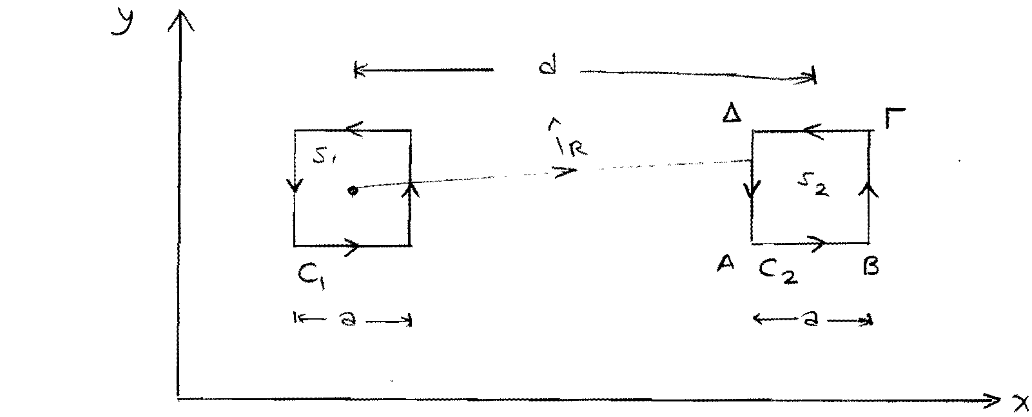
$\theta = 0$ ή π ~ $\sin\theta = 0$ ~ $$\vec{A} = \frac{\mu_o}{4\pi}\iint \frac{K_o r_T'^2 dr_T'(-\sin\phi'\,\hat{i}_x + \cos\phi'\,\hat{i}_y)d\phi'}{(r^2+r_T'^2)^{1/2}}$$

$$= 0$$



1
0.9
0.8
0.7
0.6
0.5
0.4
0.3
0.2
0.1
0
B(z)/B_max
–2
–1.5
–1
–0.5
0
0.5
1
1.5
2
z/a

ΑΣΚΗΣΗ 5:

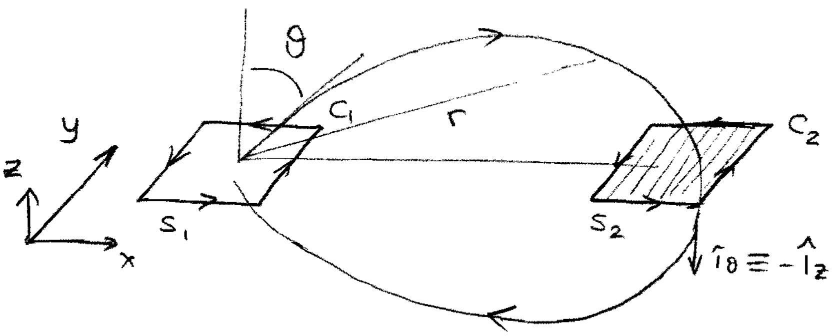


$$L_{21} = \frac{\Psi_{21}}{I_1} = L_{12} = \frac{\Psi_{12}}{I_2}$$

$$\Psi_{21} = \int_{S_2} \vec{B}_1 \cdot d\vec{S}_2 = \oint_{C_2} \vec{A}_1 \cdot d\vec{\ell}_2$$

$$\vec{A}_1 = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{\vec{m}_1 \times \hat{i}_R}{R^2} \qquad \vec{m}_1 = I_1 a^2 \, \hat{i}_z$$

$$\vec{B}_1 = \frac{\mu_0 m_1}{4\pi r^3} \left(2\cos\theta \, \hat{i}_r + \sin\theta \, \hat{i}_\theta \right)$$



Για τον βρόχο C_2 ~ $\theta = \pi/2$ και επομένως

$$\vec{B}_1 = \frac{\mu_0 m_1}{4\pi r^3} \left(\sin\frac{\pi}{2} \, \hat{i}_\theta (\theta = \pi/2) \right) = \frac{\mu_0 m_1}{4\pi r^3} (-\hat{i}_z)$$

Εφόσον $r >> a$

$$\Psi_{21} = \iint \frac{\mu_0 m_1}{4\pi r^3} (-\hat{i}_z) \cdot dy\, dx\, (+\hat{i}_z) = (-1) \frac{\mu_0 m_1}{4\pi} \int dy \int_{d-a/2}^{d+a/2} \frac{1}{x^3} dx$$

$$= (-1) \frac{\mu_0 m_1}{4\pi} a \left(+ \frac{x^{-2}}{-2} \right) \Bigg|_{d-a/2}^{d+a/2} = - \frac{\mu_0 I_1 a^2 a}{4\pi} \left[\left(-\frac{1}{2} \right) \left(\left(d + \frac{a}{2} \right)^{-2} - \left(d - \frac{a}{2} \right)^{-2} \right) \right]$$

$$= - \frac{\mu_0 I_1 a^3}{8\pi} \left[\frac{1}{(d - a/2)^2} - \frac{1}{(d + a/2)^2} \right]$$

Επομένως $L_{21} = L_{12} = - \frac{\mu_0 a^3}{8\pi}\left[\frac{1}{(d-a/2)^2} - \frac{1}{(d+a/2)^2}\right]$

Χρησιμοποιώντας το διανυσματικό δυναμικό:

$\vec{A}_1 = \frac{\mu_0}{4\pi} m_1 \frac{\hat{i}_z \times \hat{i}_R}{R^2}$. Όμως $\hat{i}_R \simeq \hat{i}_x$ $\quad \frac{1}{R^2} \sim \frac{1}{x^2}$ οπότε

$\vec{A}_1 \simeq \frac{\mu_0 m_1}{4\pi}\frac{1}{x^2}\hat{i}_y$

$$\oint_{C_2} \vec{A}_1 \cdot d\vec{l} = \int_A^B + \int_B^\Gamma + \int_\Gamma^\Delta + \int_\Delta^A$$

$$\int_A^B (\quad)\,\hat{i}_y \cdot \hat{i}_x\, dx = \int_\Gamma^\Delta (\quad)\,\hat{i}_y \cdot (-\hat{i}_x)\, dx = 0$$

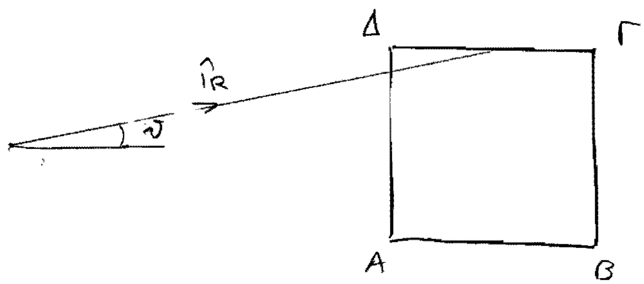
Άρα $\oint_{C_2} \vec{A}_1 \cdot d\vec{l} = \int_B^\Gamma \vec{A}_1 \cdot d\vec{l} + \int_\Delta^A \vec{A}_1 \cdot d\vec{l} =$

$$= \int_B^\Gamma \frac{\mu_0 m_1}{4\pi}\frac{1}{x^2}\,\hat{i}_y \cdot \hat{i}_y\, dy \Big|_{x=d+a/2} + \int_\Delta^A \frac{\mu_0 m_1}{4\pi}\frac{1}{x^2}\,\hat{i}_y \cdot (-\hat{i}_y)\, dy \Big|_{x=d-a/2}$$

$$= \frac{\mu_0 m_1}{4\pi}\frac{1}{(d+a/2)^2}\,a - \frac{\mu_0 m_1}{4\pi}\frac{1}{(d-a/2)^2}\,a =$$

$$= -\frac{\mu_0 I_1 a^3}{4\pi}\left[\frac{1}{(d-a/2)^2} - \frac{1}{(d+a/2)^2}\right]$$

Παρατηρούμε ότι το αποτέλεσμα διαφέρει 100% από την προηγούμενη προσέγγιση με το πεδίο. Θα προσπαθήσουμε να προσεγγίσουμε τα τμήματα ΑΒ και ΒΓ



$\sin\theta \simeq \tan\theta = \frac{a/2}{x}$

$\hat{i}_R = \hat{i}_x \cos\theta + \hat{i}_y \sin\theta \quad \sim \quad \hat{i}_z \times \hat{i}_R = \hat{i}_y \cos\theta - \hat{i}_x \sin\theta$

$$\int_\Gamma^\Delta \frac{\mu_0 m_1}{4\pi}\frac{1}{x^2}(-\hat{i}_x \sin\theta)\cdot(-\hat{i}_x)\,dx = \frac{\mu_0 m_1}{8\pi}\,a\left(-\frac{1}{2x^2}\right)\Big|_{d-a/2}^{d+a/2}$$

$$= +\frac{\mu_0 I_1 a^3}{16}\left(\frac{1}{(d-a/2)^2} - \frac{1}{(d+a/2)^2}\right)$$

$$\int_A^B \vec{A}_1 \cdot d\vec{l} = \int_A^B \frac{\mu_o m_I}{4\pi} \frac{1}{x^2} (-\hat{i}_x \sin\vartheta) \cdot \hat{i}_x \, dx$$

$$\sin\vartheta \simeq \frac{-a/2}{x}$$

$$\int_A^B \vec{A}_1 \cdot d\vec{l} = \frac{\mu_o m_I}{4\pi} (a/2) \left[\frac{1}{-2x^3} \right]_{d-a/2}^{d+a/2} = + \frac{\mu_o I_1 a^3}{16\pi} \left[\frac{1}{(d-a/2)^2} - \frac{1}{(d+a/2)^2} \right]$$

Επομένως

$$\oint_{C_2} \vec{A} \cdot d\vec{l} = - \frac{\mu_o I_1 a^3}{8\pi} \left[\frac{1}{(d-a/2)^2} - \frac{1}{(d+a/2)^2} \right]$$

όμοια με την περίπτωση της $\int_{S_2} \vec{B}_1 \cdot d\vec{S}$.

Άρα $$L_{12} = L_{21} \simeq - \frac{\mu_o a^3}{8\pi} \left[\frac{1}{(d-a/2)^2} - \frac{1}{(d+a/2)^2} \right]$$

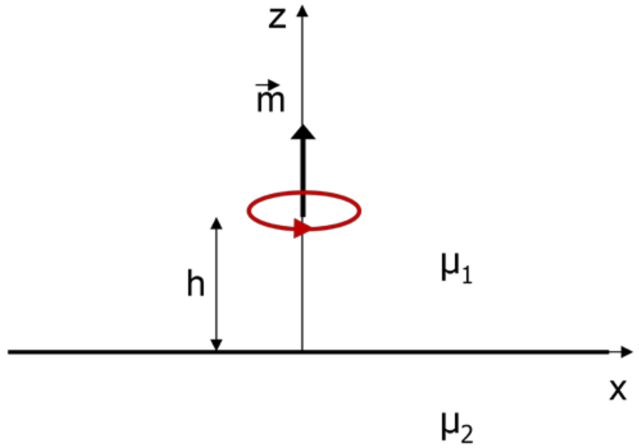
ΑΣΚΗΣΗ 6:

Ένα μαγνητικό δίπολο (κυκλικός βρόχος με ακτίνα a και ρεύμα I) με μαγνητική ροπή $\vec{m} = m\,\hat{\imath}_z$, βρίσκεται σε απόσταση h από την διαχωριστική επιφάνεια δύο μαγνητικών υλικών με διαπερατότητες μ_1 και μ_2 αντίστοιχα όπως φαίνεται στο σχήμα. Η απόσταση h είναι πολύ μεγαλύτερη από τις διαστάσεις του μαγνητικού δίπολου έτσι ώστε να ισχύει η προσέγγιση του διπολικού πεδίου.

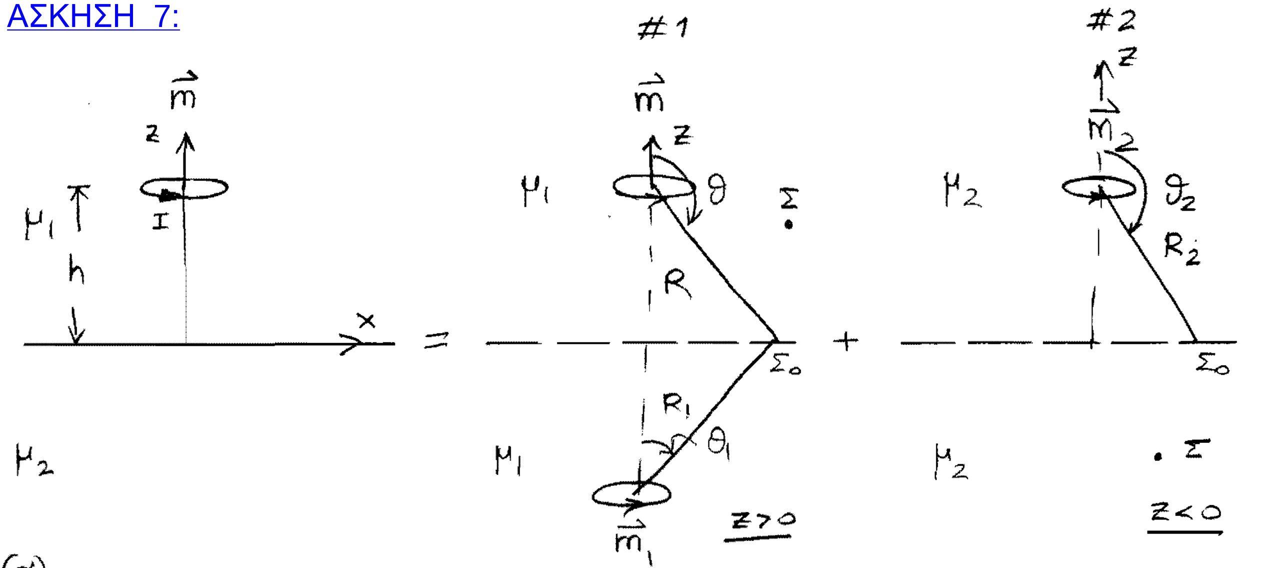
(α) **[5%]** Να <u>αποδείξετε</u> ότι μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε κατοπτρισμό με κατάλληλα επιλεγμένα μαγνητικά δίπολα.

(β) **[10%]** Να βρεθεί το διανυσματικό δυναμικό στο τυχαίο σημείο του χώρου (x, y, z) (θεωρώντας ότι για το τυχαίο σημείο ισχύει η προσέγγιση του πεδίου του δίπολου). Να εκφραστεί το διανυσματικό δυναμικό στο καρτεσιανό σύστημα συντεταγμένων.

(γ) **[15%]** Να γίνει γραφική παράσταση των ισοδυναμικών γραμμών του διανυσματικού δυναμικού στο επίπεδο xz για a = 1m, h = 1m, $\mu_1 = 1\mu_0$, $\mu_2 = 100\mu_0$ έστω και αν για αυτά τα αριθμητικά δεδομένα η προσέγγιση του δίπολου να μην είναι απολύτως δικαιολογημένη. Επαναλάβετε αυτό το ερώτημα με την <u>ακριβή λύση</u> για το διανυσματικό δυναμικό.



ΑΣΚΗΣΗ 7:



(α)

Εφαρμογή κατοπτρισμού. Για το τυχαίο σημείο πάνω στην διαχωριστική επιφάνεια: $\vec{A}_1 = \vec{A}_2$ και $B_{1z} = B_{2z}$

$$\vec{A}_1 = \frac{\mu_1}{4\pi}\frac{\vec{m}\times\hat{i}_R}{R^2} + \frac{\mu_1}{4\pi}\frac{\vec{m}_1\times\hat{i}_{R_1}}{R_1}$$

$R = R_1 = R_2$ πάνω στην διαχωριστική επιφάνεια.

$\vec{m} = m\hat{i}_z$, $\vec{m}_1 = m_1\hat{i}_z$, $\vec{m}_2 = m_2\hat{i}_z$ (υπόθεση).

$$\hat{i}_R = \frac{x\hat{i}_x + y\hat{i}_y - h\hat{i}_z}{R} \qquad R = (x^2+y^2+h^2)^{1/2}$$

$$\hat{i}_{R_1} = \frac{x\hat{i}_x + y\hat{i}_y + h\hat{i}_z}{R_1} \qquad R_1 = (x^2+y^2+h^2)^{1/2}$$

$\hat{i}_{R_2} = \hat{i}_R$

$$\vec{A}_1 = \frac{\mu_1}{4\pi}\frac{m\hat{i}_z\times(x\hat{i}_x+y\hat{i}_y-h\hat{i}_z)}{R^3} + \frac{\mu_1}{4\pi}\frac{m_1\hat{i}_z\times(x\hat{i}_x+y\hat{i}_y+h\hat{i}_z)}{R^3}$$

$$= \frac{\mu_1}{4\pi}\left(m(x\hat{i}_y - y\hat{i}_x)\frac{1}{R^3}\right) + \frac{\mu_1}{4\pi}m_1(x\hat{i}_y - y\hat{i}_x)\frac{1}{R^3}$$

$$\vec{A}_2 = \frac{\mu_2}{4\pi}m_2(x\hat{i}_y - y\hat{i}_x)\frac{1}{R^3} \quad \alpha\ \vec{A}_1 = \vec{A}_2 \sim \mu_1(m+m_1) = \mu_2 m_2 \quad (1)$$

$$\vec{H}_1 = \left(\frac{3(\vec{m}\cdot\hat{i}_R)\hat{i}_R - \vec{m}}{4\pi R^3} + \frac{3(\vec{m}_1\cdot\hat{i}_{R_1})\hat{i}_{R_1} - \vec{m}_1}{4\pi R_1^3}\right) =$$

$$\vec{H}_1\Big|_{\Sigma_0} = \frac{1}{4\pi R^3}\left[\left\{3m\left(\frac{-h}{R}\right)\frac{x\hat{i}_x+y\hat{i}_y-h\hat{i}_z}{R} - m\hat{i}_z\right\} + 3m_1\left(\frac{h}{R}\right)\frac{x\hat{i}_x+y\hat{i}_y+h\hat{i}_z}{R} - m_1\hat{i}_z\right]$$

$$\vec{m}\cdot\hat{i}_R = m\frac{-h}{R} \qquad \vec{m}_1\cdot\hat{i}_{R_1} = m_1\frac{h}{R}$$

$$\vec{H}_2\Big|_{\Sigma_0} = \frac{1}{4\pi R^3}\left[3m_2\left(-\frac{h}{R}\right)\frac{x\hat{i}_x+y\hat{i}_y-h\hat{i}_z}{R} - m_2\hat{i}_z\right]$$

$$\vec{H}_{t_1} = \vec{H}_{t_2} \Rightarrow \cancel{3} m \left(-\frac{h}{\cancel{R}}\right) \cancel{\frac{x\hat{i}_x + y\hat{i}_y}{R}} + \cancel{3} m_1 \left(\frac{h}{\cancel{R}}\right) \cancel{\frac{x\hat{i}_x + y\hat{i}_y}{R}} =$$

$$= \cancel{3} m_2 \left(-\frac{h}{\cancel{R}}\right) \cancel{\frac{x\hat{i}_x + y\hat{i}_y}{R}}$$

$$-m + m_1 = -m_2 \qquad (2)$$

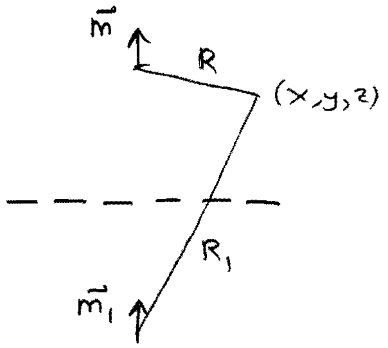
$$\left.\begin{aligned} \mu_1 (m + m_1) &= \mu_2 m_2 \\ -m + m_1 &= -m_2 \end{aligned}\right\} \Rightarrow \begin{aligned} m_1 &= \frac{\mu_2 - \mu_1}{\mu_2 + \mu_1} m \\ m_2 &= \frac{2\mu_1}{\mu_2 + \mu_1} m \end{aligned}$$

Επομένως μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε κατοπτρισμό με

$$\vec{m}_1 = \left(\frac{\mu_2 - \mu_1}{\mu_2 + \mu_1}\right) \vec{m} \quad , \quad \vec{m}_2 = \frac{2\mu_1}{\mu_2 + \mu_1} \vec{m}$$

Το διανυσματικό δυναμικό στο τυχαίο σημείο Σ $(x, y, z>0)$:

$$(\beta) \quad \vec{A} = \frac{\mu_1}{4\pi} \left\{ \frac{\vec{m} \times \hat{i}_R}{R^2} + \frac{\vec{m}_1 \times \hat{i}_{R_1}}{R_1^2} \right\}$$



$$R = [x^2 + y^2 + (z-h)^2]^{1/2}$$

$$R_1 = [x^2 + y^2 + (z+h)^2]^{1/2}$$

$$\hat{i}_R = \frac{x\hat{i}_x + y\hat{i}_y + (z-h)\hat{i}_z}{R}$$

$$\hat{i}_{R_1} = \frac{x\hat{i}_x + y\hat{i}_y + (z+h)\hat{i}_z}{R_1}$$

$$m\hat{i}_z \times \hat{i}_R = m\hat{i}_z \times \frac{x\hat{i}_x + y\hat{i}_y + (z-h)\hat{i}_z}{R} =$$

$$= m \frac{\hat{i}_y x - \hat{i}_x y}{R}$$

$$m_1 \hat{i}_z \times \hat{i}_{R_1} = m_1 \frac{\hat{i}_y x - \hat{i}_x y}{R_1}$$

$$\vec{A} = \frac{\mu_1}{4\pi} \frac{m(-y\hat{i}_x + x\hat{i}_y)}{[x^2 + y^2 + (z-h)^2]^{3/2}} + \frac{\mu_1}{4\pi} \left(\frac{\mu_2 - \mu_1}{\mu_2 + \mu_1}\right) \frac{m[-y\hat{i}_x + x\hat{i}_y]}{[x^2 + y^2 + (z+h)^2]^{3/2}}$$

$$(z>0)$$

$z<0$:

$$\vec{A} = \frac{\mu_2}{4\pi} \frac{\vec{m}_2 \times \hat{i}_{R2}}{R_2^2} = \frac{\mu_2}{4\pi} m_2 \frac{-\hat{i}_x y + x \hat{i}_y}{[x^2+y^2+(z-h)^2]^{3/2}}$$

$$m_2 = \frac{2\mu_1}{\mu_2+\mu_1} m$$

(γ) Για την γραφική παράσταση έχουμε το δυναμικό στο επίπεδο xz $(y=0)$.

$$A_{\varphi 1} = \frac{\mu_1}{4\pi}\frac{m\times\hat{i}_y}{R} + \frac{\mu_1}{4\pi}\frac{m_1\times\hat{i}_y}{R_1}$$

$$R = [x^2+(z-h)^2]^{1/2}, \qquad R_1 = [x^2+(z+h)^2]^{1/2}$$

$$m_1 = \frac{\mu_2-\mu_1}{\mu_2+\mu_1}\, m \quad , \quad m = I\,(\pi a^2) \qquad x\,\hat{i}_y = |x|\,\hat{i}_\varphi$$

$$A_{\varphi 1} = \frac{\mu_1}{4\pi} m|x|\,\hat{i}_\varphi \left\{ \frac{1}{R} + \left(\frac{\mu_2-\mu_1}{\mu_2+\mu_1}\right)\frac{1}{R_1} \right\} \qquad (z \geq 0)$$

Όμοια

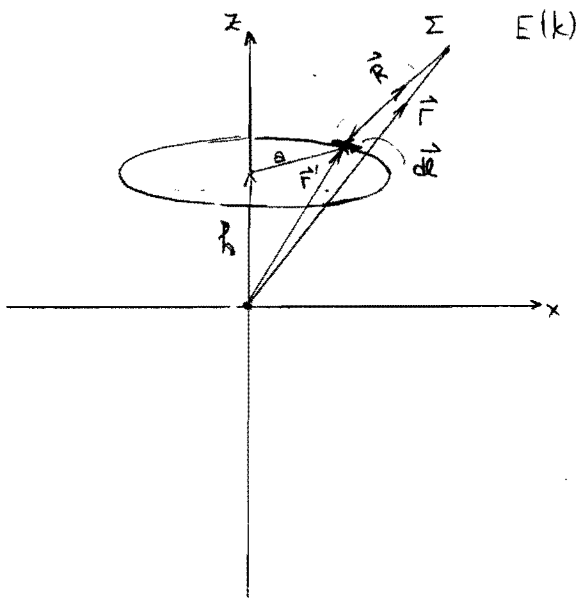
$$A_{\varphi 2} = \frac{\mu_2}{4\pi} m\,|x|\,\hat{i}_\varphi \,\frac{2\mu_1}{\mu_2+\mu_1}\,\frac{1}{R} \qquad (z\leq 0)$$

Για την ακριβή λύση θα χρειαστούμε να εφαρμόσουμε τον γενικό τύπο:

$$A_\varphi = \frac{\mu_0 I a}{\pi}\,\frac{1}{[r^2+a^2+2ar\sin\theta]^{1/2}}\left\{ \frac{2-k^2}{k^2}K(k) - \frac{2}{k^2}E(k) \right\}$$

$$k^2 = \frac{4ar\sin\theta}{[r^2+a^2+2ar\sin\theta]} \qquad K(k) = \int_0^{\pi/2}\frac{1}{\sqrt{1-k^2\sin^2 w}}\,dw$$

$$E(k) = \int_0^{\pi/2}\sqrt{1-k^2\sin^2 w}\,dw$$



$$\vec{R} = \vec{r}-\vec{r}'$$

$$d\vec{A} = \hat{i}_\varphi\left(\frac{\mu_0 I}{4\pi}\right)\frac{1}{R}\; a\,d\varphi'\cos\varphi'$$

$$\underset{(x,z\ \text{plane})}{\vec{r}} = r\sin\theta\,\hat{i}_x + r\cos\theta\,\hat{i}_z$$

$$\vec{r}' = a\cos\varphi'\,\hat{i}_x + a\sin\varphi'\,\hat{i}_y + h\,\hat{i}_z$$

$$\vec{R} = (r\sin\theta - a\cos\varphi')\,\hat{i}_x - a\sin\varphi'\,\hat{i}_y + (r\cos\theta - h)\,\hat{i}_z \Rightarrow$$

$$R = \left(r^2\sin^2\theta + a^2\cos^2\varphi' - 2ra\sin\theta\cos\varphi' + a^2\sin^2\varphi' + r^2\cos^2\theta + h^2 - 2rh\cos\theta\right)^{1/2}$$

$\sim \quad R = (r^2 + a^2 + h^2 - 2rh\cos\theta - 2ra\sin\theta\cos\varphi')^{1/2}$

Επομένως

$$A_\varphi = \frac{\mu_0 I a}{\pi} \frac{1}{[r^2+a^2+h^2-2rh\cos\theta+2ra\sin\theta]^{1/2}} \left\{ \frac{2-k^2}{k^2} K(k) - \frac{2}{k^2} E(k) \right\}$$

$$k^2 = \frac{4ra\sin\theta}{[r^2+a^2+h^2-2rh\cos\theta+2ra\sin\theta]}$$

$$\frac{\mu_0 I a}{\pi} = \frac{\mu_0 (I \pi a^2)}{\pi^2 a} = \frac{\mu_0 m}{\pi^2 a}$$

Εφαρμόζοντας τον κατοπτρισμό για τον βρόχο και το είδωλό του έχουμε:

$$A_{\varphi 1} = \frac{\mu_1 m}{\pi a^2} \frac{1}{[r^2+a^2+h^2-2rh\cos\theta+2ra\sin\theta]^{1/2}} \left\{ \frac{2-k^2}{k^2} K(k) - \frac{2}{k^2} E(k) \right\}$$

$$+ \frac{\mu_1 m_1}{\pi a^2} \frac{1}{[r^2+a^2+h^2+2rh\cos\theta+2ra\sin\theta]^{1/2}} \left\{ \frac{2-k_1^2}{k_1^2} K(k_1) - \frac{2}{k_1^2} E(k_1) \right\}$$

$$k_1^2 = \frac{4ra\sin\theta}{[r^2+a^2+h^2+2rh\cos\theta+2ra\sin\theta]} \qquad (z \geq 0)$$

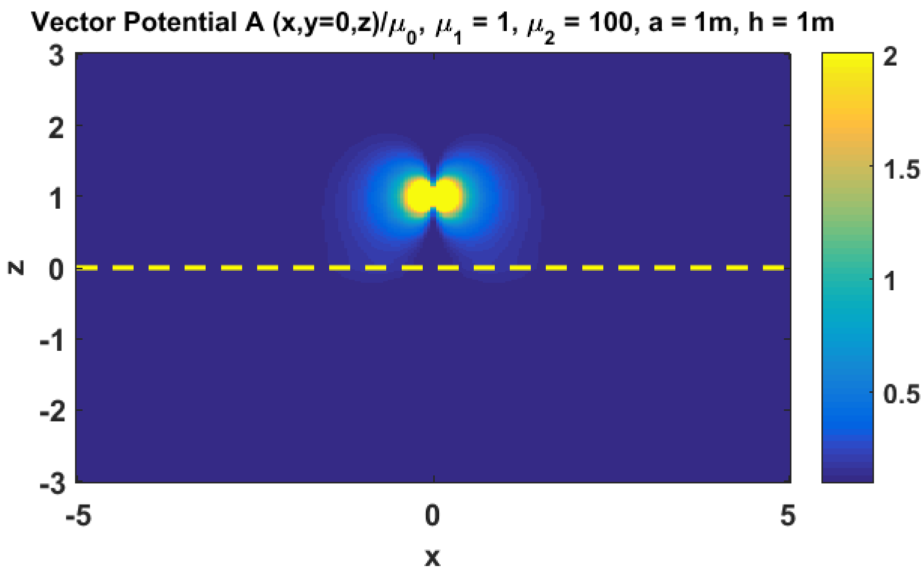
$$A_{\varphi 2} = \frac{\mu_2 m_2}{\pi a^2} \frac{1}{[r^2+a^2+h^2-2rh\cos\theta+2ra\sin\theta]^{1/2}} \left\{ \frac{2-k^2}{k^2} K(k) - \frac{2}{k^2} E(k) \right\}$$

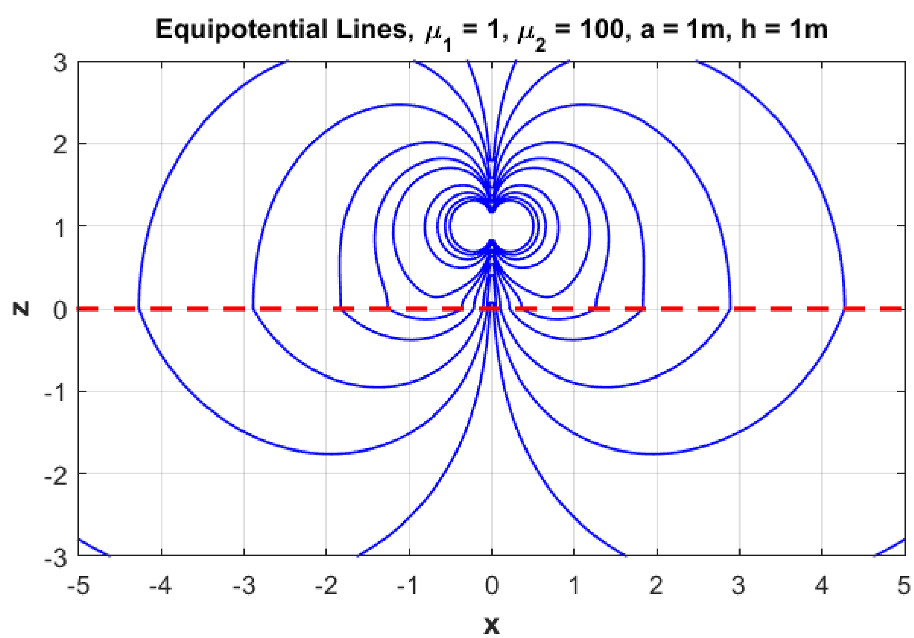
$z \leq 0$

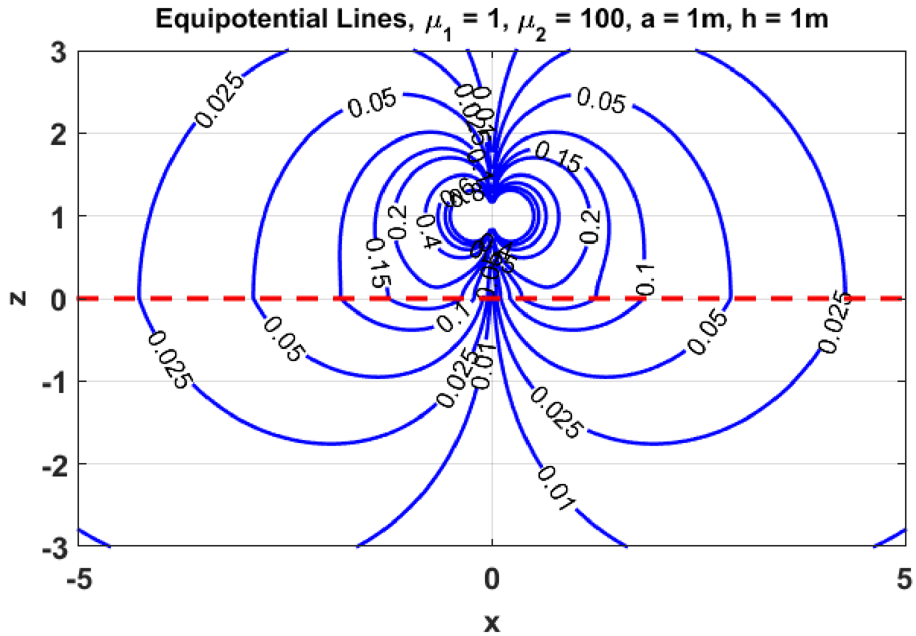
$$r = \sqrt{x^2+z^2}, \quad \sin\theta = \frac{|x|}{r}, \quad \cos\theta = \frac{z}{r}$$

ΑΣΚΗΣΗ 7: (γ)

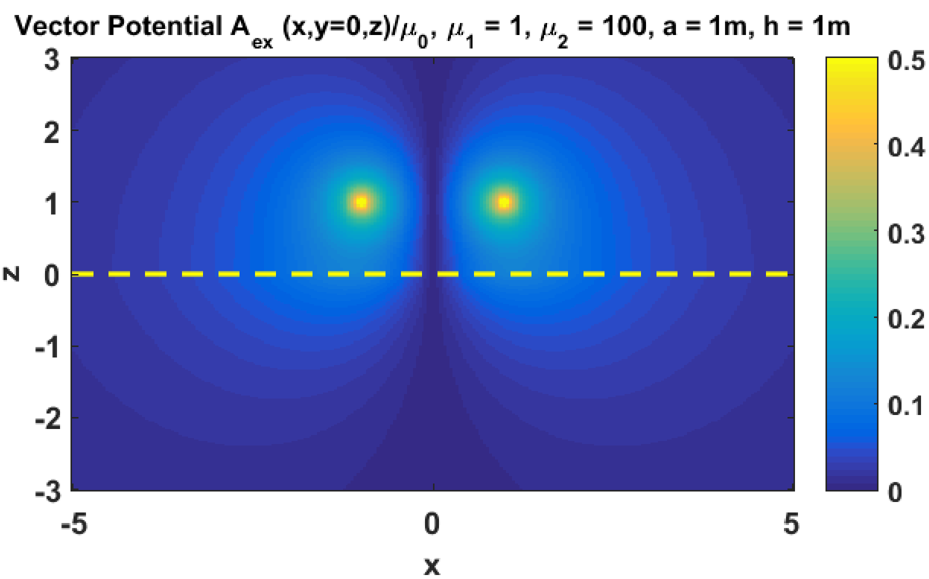
Προσέγγιση Μαγνητικού Δίπολου

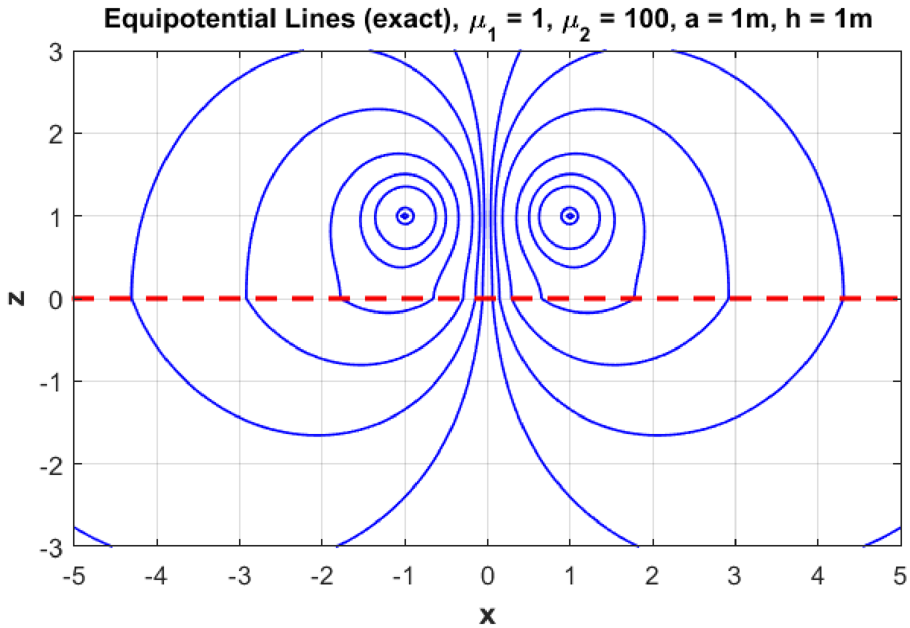


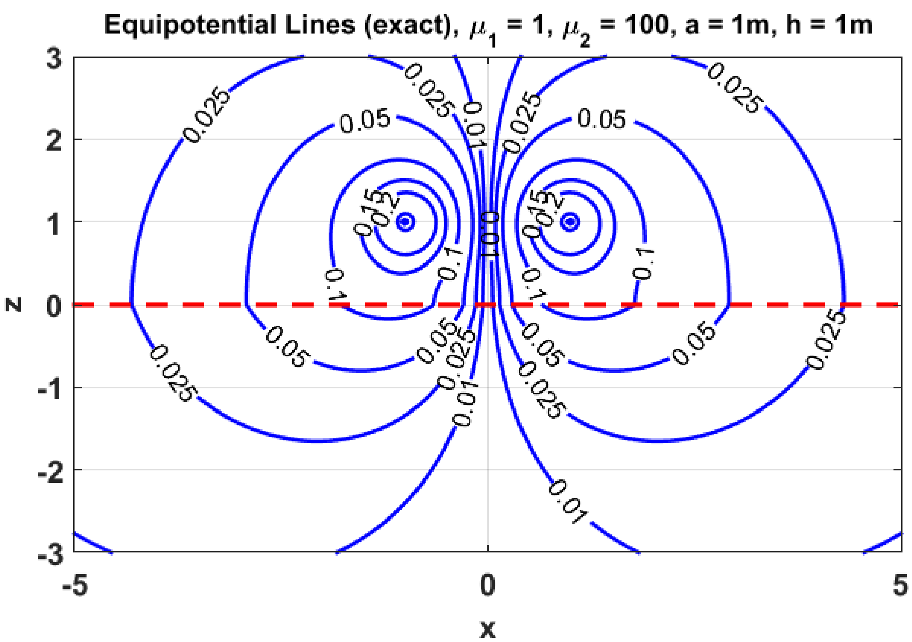




Ακριβής Λύση




Equipotential Lines (exact), μ_1 = 1, μ_2 = 100, a = 1m, h = 1m
z
x


Equipotential Lines (exact), μ_1 = 1, μ_2 = 100, a = 1m, h = 1m
0.025
0.05
0.01
0.15
0.2
0.1
z
x

Άσκηση 7:

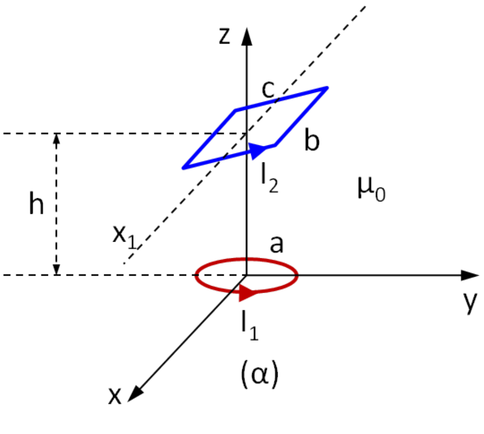
Κυκλικός βρόχος ακτίνας a διαρρέεται από σταθερό ρεύμα I_1. Σε κατακόρυφη απόσταση $h \gg a$ υπάρχει ένας δεύτερος ορθογώνιος βρόχος πλευρών b, c που διαρρέεται από σταθερό ρεύμα I_2. Ο ορθογώνιος βρόχος έχει το κέντρο του πάνω στον άξονα z και μπορεί να περιστραφεί γύρω από τον άξονα x_1 (που είναι παράλληλος του x όπως φαίνεται και στο σχήμα). Για κάποια δεδομένη κατάσταση ο ορθογώνιος βρόχος σχηματίζει γωνία Θ με τον άξονα y όπως φαίνεται στο σχήμα (β). Υποθέσετε ότι ο βρόχος ακτίνας a πληροί τις προσεγγίσεις του μαγνητικού δίπολου για όλους τους υπολογισμούς που ζητούνται. Ο χώρος έχει παντού διαπερατότητα μ_0.

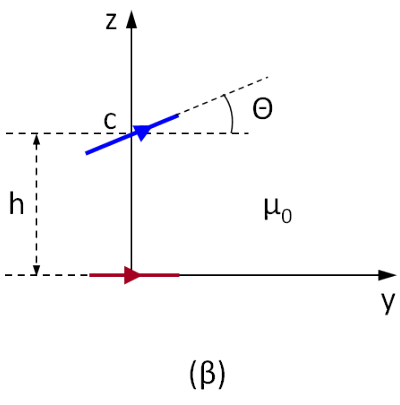
(α) Να υπολογιστεί ο συντελεστής αμοιβαίας επαγωγής $L_{12}(\Theta)$ μεταξύ των δύο βρόχων.

<u>Τα υπόλοιπα ερωτήματα θα πρέπει να απαντηθούν **αριθμητικά.** Υποθέσετε ότι οι διαστάσεις του προβλήματος είναι a = 0.025m, b = 0.25m, c = 0.12m, και h = 0.10m.</u>

(β) Να γίνει η γραφική παράσταση του συντελεστού αμοιβαίας επαγωγής $L_{12}(\Theta)$ σαν συνάρτηση της γωνίας Θ για $0 \le \Theta \le 720$deg. Επίσης να υπολογιστεί η παράγωγος $dL_{12}(\Theta)/d\Theta$ και να γίνει η γραφική της παράσταση σαν συνάρτηση της γωνίας Θ για το ίδιο διάστημα τιμών. Συνίσταται η αριθμητική εύρεση της παραγώγου.

(γ) Υποθέσετε ότι το ρεύμα που διαρρέει τον κυκλικό βρόχο είναι I_1 = 20A, και ότι ο ορθογώνιος βρόχος αποτελείται από N = 100 σπείρες (μονωμένες, από λεπτό αγωγό ώστε να μην αλλάζει η γεωμετρία του σχήματος). Επιπλέον ο ορθογώνιος βρόχος περιστρέφεται μα σταθερή γωνιακή ταχύτητα με συχνότητα f = 30Hz. Να υπολογιστεί η αναπτυσσόμενη ηλεκτρεγερτική δύναμη (emf), *e(t)*, στον ορθογώνιο βρόχο σαν συνάρτηση του χρόνου *t* και να γίνει η γραφική της παράσταση σε διάστημα 5 χρονικών περιόδων. Να βρεθεί (συνίσταται η χρήση *FFT* της MatLab) ο μετασχηματισμός Fourier *E(f)* της *e(t)* και να γίνει η γραφική παράσταση του $|E(f)|^2$ σαν συνάρτηση της συχνότητας *f*. Τι παρατηρείται; Να βρεθεί προσεγγιστικά η σειρά Fourier που προσεγγίζει την επαγόμενη *e(t)* (εδώ προτείνετε η χρήση της συνάρτησης *fit* της MatLab αν και ίσως βρείτε καλύτερους τρόπους). Να επαναληφθούν τα (β) και (γ) όταν μεταβληθεί το ύψος h σε h = 0.20m.

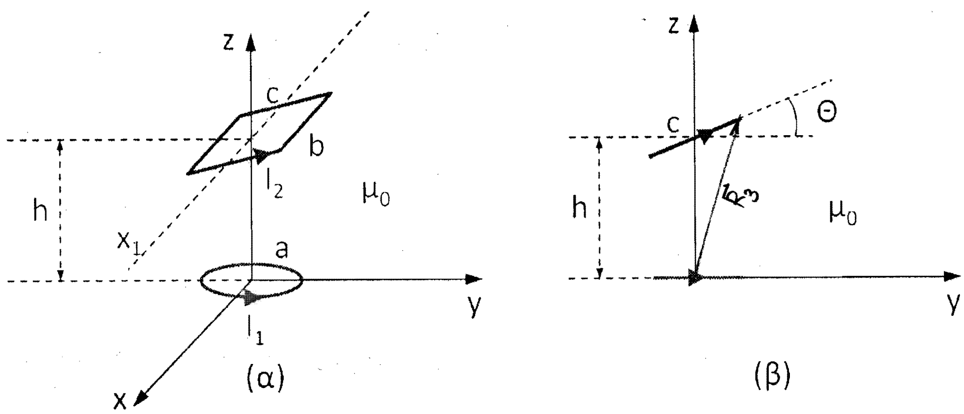


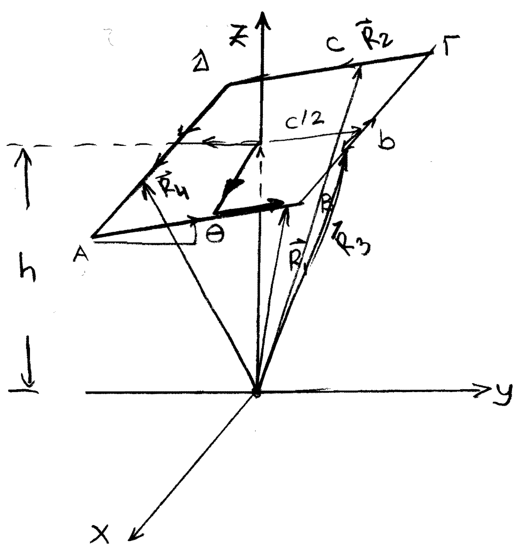


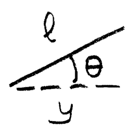
$$\int \frac{dx}{[x^2+(A+Bx)^2+C^2]^{3/2}} = \frac{AB+x+B^2x}{[A^2+C^2+B^2C^2][A^2+C^2+2ABx+x^2+B^2x^2]^{1/2}},$$

$$\int \frac{dx}{(x^2+A^2)^{3/2}} = \frac{x}{A^2(x^2+A^2)^{1/2}}$$

ΑΣΚΗΣΗ 7:







$y = \ell\cos\Theta$

$\ell = y/\cos\Theta$

$$\Psi_{21} = \oint_C \vec{A}_1 \cdot d\vec{\ell}_2 = \left(\int_A^B + \int_B^\Gamma + \int_\Gamma^\Delta + \int_\Delta^A \vec{A}_1 \cdot d\vec{\ell}_2 \right)$$

$$\vec{A}_1 = \frac{\mu_0 \vec{m}_1 \times \hat{i}_R}{4\pi R^2} \qquad \vec{m}_1 = m_1 \hat{i}_z \qquad m_1 = \pi a^2 I_1$$

$$\int_A^B \vec{A}_1 \cdot d\vec{\ell}_2 = ?$$

$$\vec{R}_1 = h\hat{i}_z + \frac{b}{2}\hat{i}_x + \ell(y)\left[\hat{i}_y \cos\Theta + \hat{i}_z \sin\Theta\right]$$

$$= h\hat{i}_z + \frac{b}{2}\hat{i}_x + y\left[\hat{i}_y + \tan\Theta\, \hat{i}_z\right]$$

$$= (h + y\tan\Theta)\hat{i}_z + \frac{b}{2}\hat{i}_x + y\hat{i}_y$$

$$d\vec{\ell}_2 = d\ell\left[\cos\Theta\, \hat{i}_y + \sin\Theta\, \hat{i}_z\right] = dy\left[\hat{i}_y + \tan\Theta\, \hat{i}_z\right]$$

$$\hat{i}_{R_1} = \frac{\vec{R}_1}{R_1}, \quad R_1 = \left[\left(\frac{b}{2}\right)^2 + y^2 + (h + y\tan\Theta)^2\right]^{1/2}$$

$$\hat{i}_z \times \hat{i}_{R_1} = \hat{i}_z \times \left[(h + y\tan\Theta)\hat{i}_z + \frac{b}{2}\hat{i}_x + \hat{i}_y y\right]\frac{1}{R_1} = \left(\hat{i}_y \frac{b}{2} - \hat{i}_x y\right)\frac{1}{R_1}$$

Επομένως,

$$\int_A^B \vec{A}_1 \cdot d\vec{l}_2 = \frac{\mu_0}{4\pi} m_1 \int_{-\frac{c}{2}\cos\Theta}^{\frac{c}{2}\cos\Theta} \frac{1}{R_1^3}\left[\hat{i}_y \frac{b}{2} - \hat{i}_x y\right] \cdot dy\left[\hat{i}_y + \tan\Theta\, \hat{i}_z\right] =$$

$$= \frac{\mu_0 m_1}{4\pi}\frac{b}{2}\int_{-\frac{c}{2}\cos\Theta}^{\frac{c}{2}\cos\Theta} \frac{dy}{\left[y^2 + (h + y\tan\Theta)^2 + (b/2)^2\right]^{3/2}}$$

$$= \frac{\mu_0 m_1}{4\pi}\frac{b}{2}\left[\frac{h\tan\Theta + y(1+\tan^2\Theta)}{\left[h^2 + (\frac{b}{2})^2 + \tan^2\Theta(\frac{b}{2})^2\right]\left[h^2 + (\frac{b}{2})^2 + 2h\tan\Theta\, y + (1+\tan^2\Theta)y^2\right]^{1/2}}\right]$$

$$= \frac{\mu_0 \pi a^2 I_1}{4\pi}\frac{b}{2}\left\{\frac{1}{\left[h^2 + (\frac{b}{2})^2(1+\tan^2\Theta)\right]}\right\}\left\{\frac{h\tan\Theta + \frac{c}{2}\cos\Theta(1+\tan^2\Theta)}{\left[h^2 + (\frac{b}{2})^2 + (1+\tan^2\Theta)(\frac{c}{2})^2\cos^2\Theta + 2h\sin\Theta\frac{c}{2}\right]^{1/2}}\right.$$

$$\left. - \frac{h\tan\Theta - \frac{c}{2}\cos\Theta(1+\tan^2\Theta)}{\left[h^2 + (\frac{b}{2})^2 + (\frac{c}{2})^2 - hc\sin\Theta\right]^{1/2}}\right\}$$

$$\int_A^B = \frac{\mu_0 \pi a^2 I_1}{4\pi}\frac{b}{2}\frac{1}{h^2 + (\frac{b}{2})^2(1+\tan^2\Theta)}\left\{\frac{h\tan\Theta + \frac{c}{2}\cos\Theta(1+\tan^2\Theta)}{\left[h^2 + (\frac{b}{2})^2 + (\frac{c}{2})^2 + hc\sin\Theta\right]^{1/2}}\right.$$

$$\left. - \frac{h\tan\Theta - \frac{c}{2}\cos\Theta(1+\tan^2\Theta)}{\left[h^2 + (\frac{b}{2})^2 + (\frac{c}{2})^2 - hc\sin\Theta\right]^{1/2}}\right\}$$

$$\int_\Gamma^\Delta \vec{A}_1 \cdot d\vec{l}_2 = \frac{\mu_0}{4\pi} m_1 \int_{\frac{c}{2}\cos\Theta}^{-\frac{c}{2}\cos\Theta} \frac{\hat{i}_z \times \hat{i}_{R2}}{R_2^2} \cdot dy\left[\hat{i}_y + \tan\Theta\, \hat{i}_z\right]$$

$$\vec{R}_2 = h\hat{i}_z - \frac{b}{2}\hat{i}_x + y(\hat{i}_y + \tan\Theta\, \hat{i}_z)$$

και επομένως καταλήγουμε στο ίδιο αποτέλεσμα με την

$$\int_A^B \vec{A}_1 \cdot d\vec{l}_2 = \int_\Gamma^\Delta \vec{A}_1 \cdot d\vec{l}_2$$

$$\int_B^\Gamma \vec{A}_1 \cdot \vec{dl}_2 = \frac{\mu_0}{4\pi} m_1 \int \frac{\hat{i}_z \times \hat{i}_{R3}}{R_3^2} \cdot (dx\, \hat{i}_x)$$

$$\vec{R}_3 = h\hat{i}_z + \frac{c}{2}(\hat{i}_y \cos\theta + \hat{i}_z \sin\theta) + x\hat{i}_x$$

$$\hat{i}_{R_3} = \left[(h + \frac{c}{2}\sin\theta)\hat{i}_z + \frac{c}{2}\cos\theta\, \hat{i}_y + x\,\hat{i}_x\right]\frac{1}{R_3}$$

$$R_3 = [(h + \frac{c}{2}\sin\theta)^2 + (\frac{c}{2})^2 \sin^2\theta + x^2]^{1/2} = [x^2 + (\frac{c}{2})^2 + h^2 + hc\sin\theta]^{1/2}$$

$$\hat{i}_z \times \hat{i}_{R3} = (-\frac{c}{2}\cos\theta\, \hat{i}_x + x\,\hat{i}_y)$$

$$\int_B^\Gamma \vec{A}_1 \cdot \vec{dl}_2 = \frac{\mu_0 m_1}{4\pi} \int_{+\frac{b}{2}}^{-b/2} (-\frac{c}{2})\, dx \frac{\cos\theta}{[x^2 + h^2 + (\frac{c}{2})^2 + hc\sin\theta]^{3/2}}$$

$$= \cos\theta \frac{\mu_0 m_1}{4\pi}(-\frac{c}{2})\left[\frac{x}{[h^2 + (\frac{c}{2})^2 + hc\sin\theta]\sqrt{x^2 + h^2 + (\frac{c}{2})^2 + hc\sin\theta}}\right]_{-b/2}^{b/2}$$

$$= \cos\theta \frac{\mu_0 m_1}{4\pi} \frac{c}{2}\, 2\, \frac{b}{2} \frac{1}{h^2 + (\frac{c}{2})^2 + hc\sin\theta} \frac{1}{[(\frac{b}{2})^2 + h^2 + (\frac{c}{2})^2 + hc\sin\theta]^{1/2}}$$

'Ομοια $\int_\Delta^A \vec{A}_1 \cdot \vec{dl}_2 =$

$L_{12} = L_{21} = \frac{\Psi_{21}}{I_1} \geq 0 \qquad L_{12}(\theta = 0) > 0, \quad L_{12}(\theta = 90°) = 0.$

Όμοια για το $\int_{\Delta}^{A} \vec{A}_1 \cdot \vec{dl}_2$

$$\vec{R}_4 = h\hat{i}_z + \frac{c}{2}\left[-\hat{i}_y \cos\theta - \hat{i}_z \sin\theta\right] + x\hat{i}_x$$

$$= x\hat{i}_x - \frac{c}{2}\cos\theta\,\hat{i}_y + (h - \frac{c}{2}\sin\theta)\hat{i}_z$$

$$R_4 = |\vec{R}_4| = \left[x^2 + \left(\frac{c}{2}\cos\theta\right)^2 + \left(h - \frac{c}{2}\sin\theta\right)^2\right]^{1/2} = \left[x^2 + h^2 + \left(\frac{c}{2}\right)^2 - hc\sin\theta\right]^{1/2}$$

$$\hat{i}_{R4} = \frac{\vec{R}_4}{R_4}$$

$$\hat{i}_z \times \hat{i}_{R4} = x\hat{i}_y + \frac{c}{2}\cos\theta\,\hat{i}_x$$

$$\int_{\Delta}^{A} \vec{A}_1 \cdot \vec{dl}_2 = \frac{\mu_o m_1}{4\pi} \int_{-b/2}^{b/2} \frac{c}{2}\cos\theta\, dx \,\frac{1}{\left[x^2 + h^2 + \left(\frac{c}{2}\right)^2 - hc\sin\theta\right]^{3/2}}$$

$$= \frac{\mu_o m_1}{4\pi}\,\frac{c}{2}\cos\theta \left[\frac{x}{\left[h^2 + \left(\frac{c}{2}\right)^2 - hc\sin\theta\right]\left[x^2 + h^2 + \left(\frac{c}{2}\right)^2 - hc\sin\theta\right]^{1/2}}\right]_{-b/2}^{b/2}$$

$$= \cos\theta\,\frac{\mu_o m_1}{4\pi}\,\frac{c}{2}\,2\,\frac{b}{2}\,\frac{1}{\left[h^2 + \left(\frac{c}{2}\right)^2 - hc\sin\theta\right]\left[h^2 + \left(\frac{b}{2}\right)^2 + \left(\frac{c}{2}\right)^2 - hc\sin\theta\right]^{1/2}}$$

Άρα

$$\Psi_{21} = \frac{\mu_o \pi a^2 I_1}{4\pi} \left\{ \frac{b}{h^2 + (b/2)^2\left[1 + \tan^2\theta\right]} \frac{h\tan\theta + \frac{c}{2}\cos\theta(1 + \tan^2\theta)}{\left[h^2 + \left(\frac{b}{2}\right)^2 + \left(\frac{c}{2}\right)^2 + hc\sin\theta\right]^{1/2}} \right.$$

$$- \frac{h\tan\theta - \frac{c}{2}\cos\theta(1 + \tan^2\theta)}{\left[h^2 + \left(\frac{b}{2}\right)^2 + \left(\frac{c}{2}\right)^2 - hc\sin\theta\right]^{1/2}} +$$

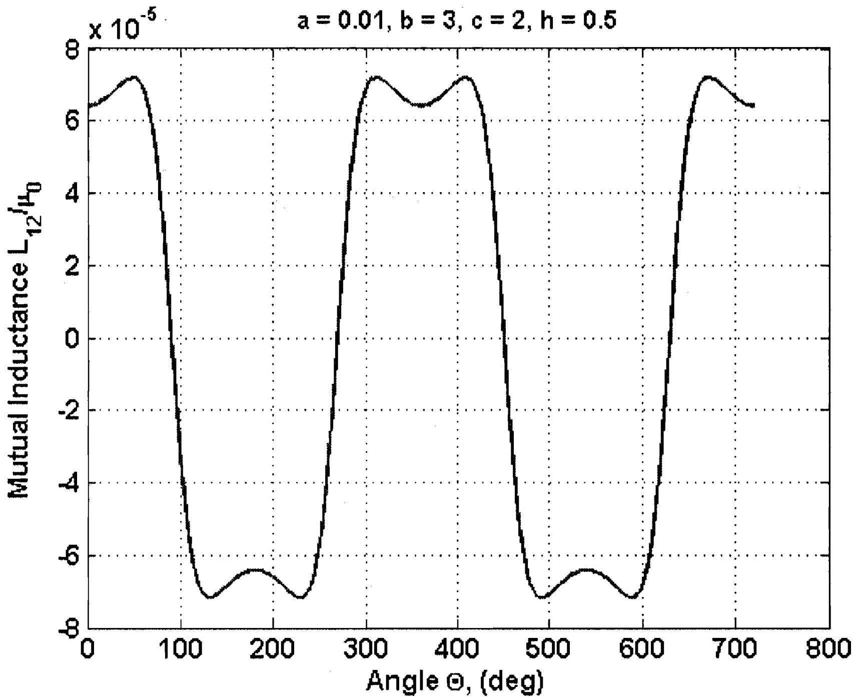
$$\frac{cb}{2}\,\frac{\cos\theta}{\left[h^2 + \left(\frac{c}{2}\right)^2 + hc\sin\theta\right]\left[h^2 + (b/2)^2 + (c/2)^2 + hc\sin\theta\right]^{1/2}} +$$

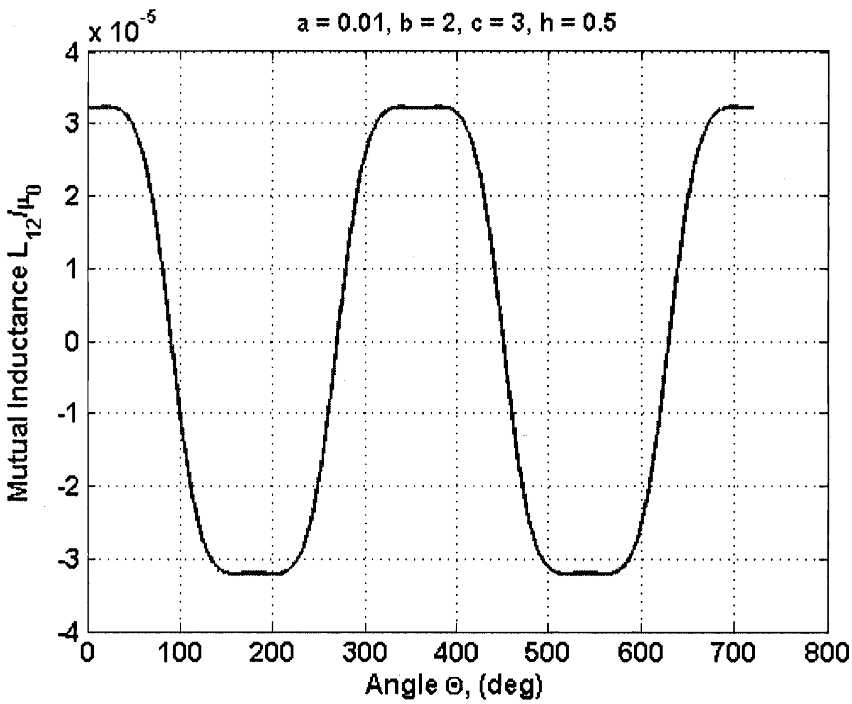
$$\left. \frac{cb}{2}\,\frac{\cos\theta}{\left[h^2 + \left(\frac{c}{2}\right)^2 - hc\sin\theta\right]\left[h^2 + \left(\frac{b}{2}\right)^2 + \left(\frac{c}{2}\right)^2 - hc\sin\theta\right]^{1/2}} \right\}$$

$$L_{12} = L_{21} = \frac{\mu_0 a^2}{4} \left\{ \frac{b\cos\theta}{h^2\cos^2\theta + (b/2)^2} \left[\frac{h\sin\theta + c/2}{\left[h^2 + (\frac{b}{2})^2 + (\frac{c}{2})^2 + hc\sin\theta\right]^{1/2}} - \frac{h\sin\theta - c/2}{\left[h^2 + (\frac{b}{2})^2 + (\frac{c}{2})^2 - hc\sin\theta\right]^{1/2}} \right] \right.$$

$$+ \frac{cb}{2}\cos\theta \left[\frac{1}{h^2 + (\frac{c}{2})^2 + hc\sin\theta} \, \frac{1}{\left[h^2 + (\frac{b}{2})^2 + (\frac{c}{2})^2 + hc\sin\theta\right]^{1/2}} + \right.$$

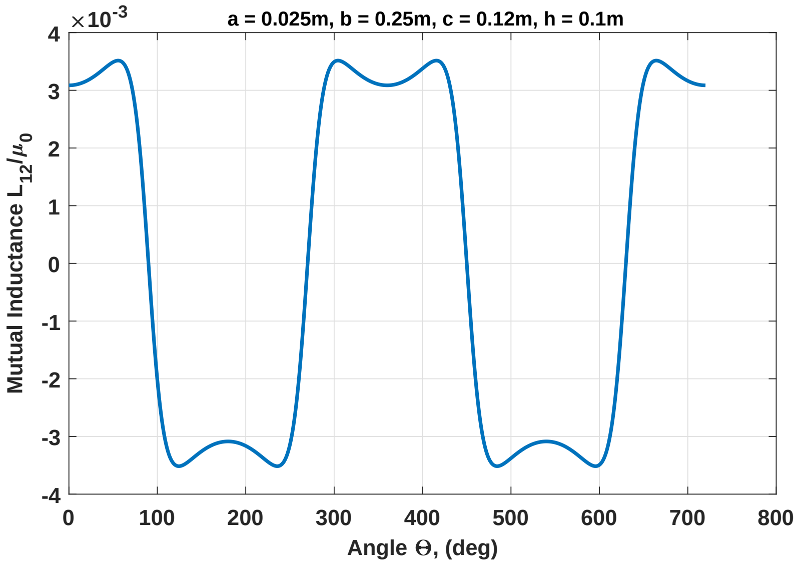
$$\left. \left. \frac{1}{\left[h^2 + (\frac{c}{2})^2 - hc\sin\theta\right]\left[h^2 + (\frac{b}{2})^2 + (\frac{c}{2})^2 - hc\sin\theta\right]^{1/2}} \right] \right\}$$



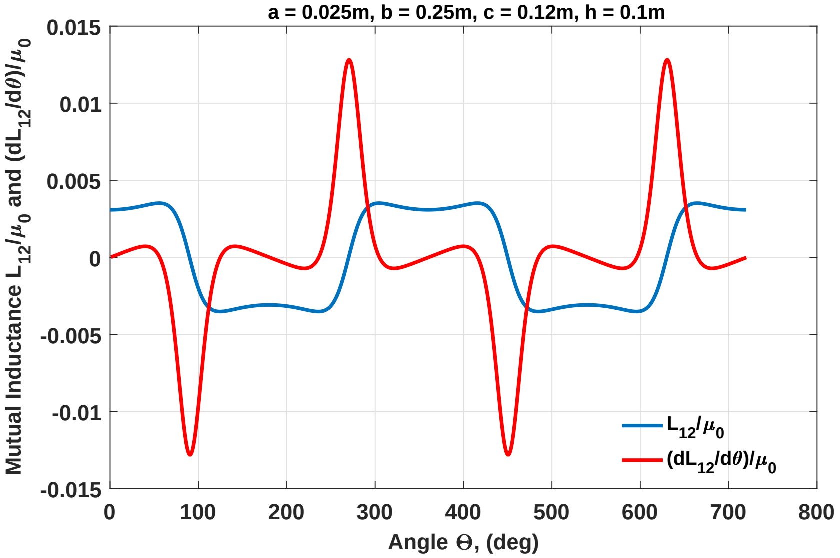


Αμοιβαία Επαγωγή των Δύο Βρόχων - Άσκηση 6(β)

$a = 0.025\,\mathrm{m},\ b = 0.25\,\mathrm{m},\ c = 0.12\,\mathrm{m},\ h = 0.10\,\mathrm{m}$



(α)

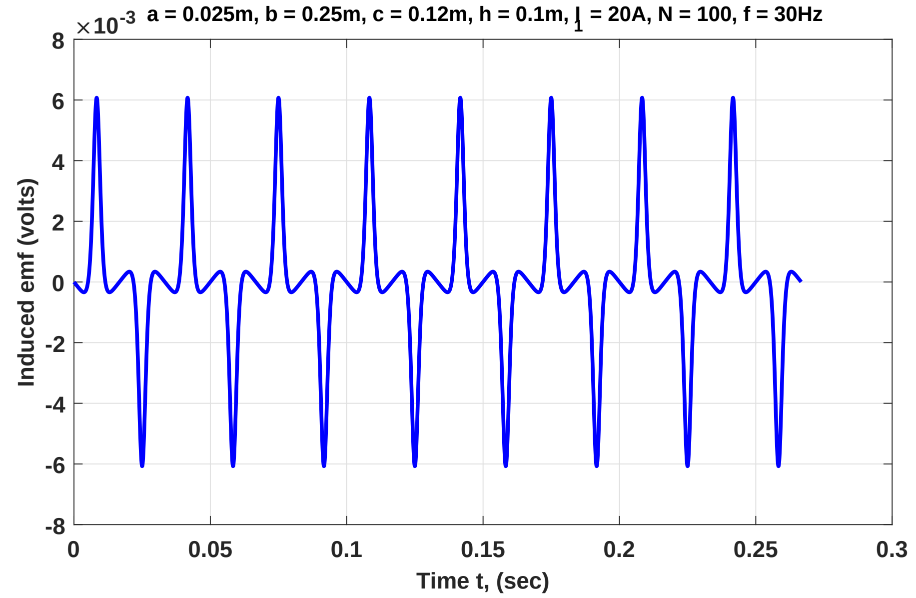


(β)

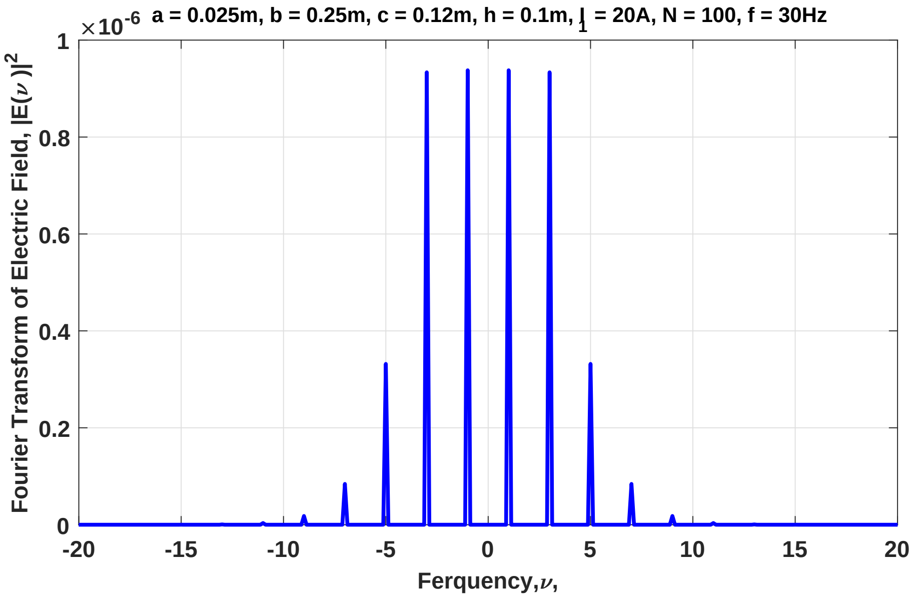
Σχήμα 1: (α) Συντελεστής αμοιβαίας επαγωγής κανονικοποιημένος με το μ_0, $L_{12}(\Theta)/\mu_0$. (β) Παράγωγος ως προς Θ του συντελεστή αμοιβαίας επαγωγής $[dL_{12}(\Theta)/d\Theta]/\mu_0$. ($a = 0.025\,\mathrm{m}$, $b = 0.25\,\mathrm{m}$, $c = 0.12\,\mathrm{m}$, $h = 0.10\,\mathrm{m}$)

Επαγόμενη Ηλεκτρεγερτική Δύναμη - Άσκηση 6(γ)

$a = 0.025\,\mu$, $b = 0.25\,\mu$, $c = 0.12\,\mu$, $h = 0.10\,\mu$



(α)



(β)

Σχήμα 2: (α) Επαγόμενη ηλεκτρεγερτική δύναμη, $e(t)$ σαν συνάρτηση του χρόνου για 5 χρονικές περιόδους. (β) Μετασχηματισμός $Fourier$ της $e(t)$. Το $|E(f)|^2$ παρουσιάζεται σαν συνάρτηση της συχνότητας. Παρατηρούμε μόνο τις περιττές αρμονικές όπως και αναμένεται από την περιττή συμμετρία του $e(t)$ που φαίνεται στο (α) ($a = 0.025\,\mathrm{m}$, $b = 0.25\,\mathrm{m}$, $c = 0.12\,\mathrm{m}$, $h = 0.10\,\mathrm{m}$)

Η επαγόμενη ηλεκτρεγερτική δύναμη, $emf = e(t)$ δίνεται από τον νόμο του Lenz

$$\begin{aligned} emf = e(t) = &= -\frac{d\Lambda_{12}}{dt} = -N\frac{d\Psi_{12}}{dt} = -NI_1\frac{dL_{12}}{dt} \\ &= -NI_1\frac{dL_{12}}{d\theta}\frac{d\theta}{dt} = -NI_1 2\pi f\frac{dL_{12}}{d\theta}. \end{aligned}$$

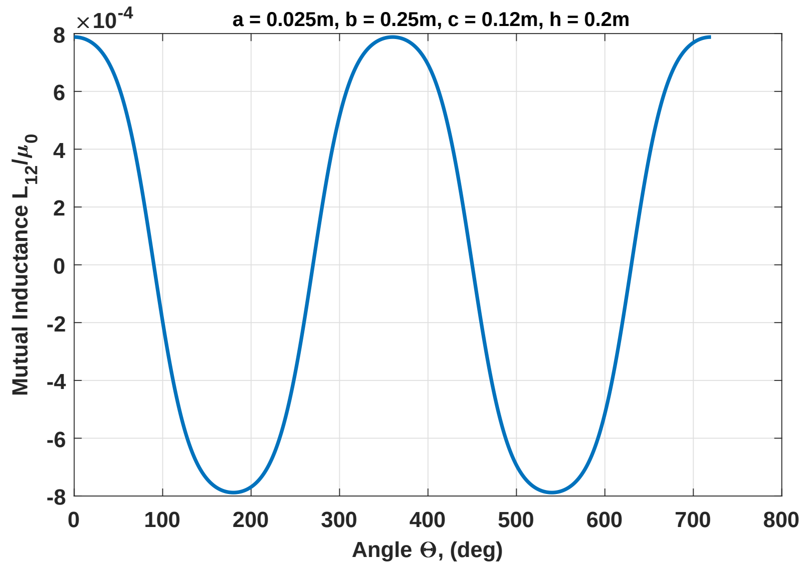
Από το Σχήμα 2α φαίνεται ότι η επαγόμενη emf είναι μικρή (σε mV) και είναι περιττή περιοδική συνάρτηση. Επομένως ο μετασχηματισμός Fourier $E(f)$ αναμένεται να έχει μόνο περιττές αρμονικές όπως και είναι εμφανές στο Σχήμα 2β. Οι αρμονικές αυτές θα τείνουν σε διακριτές συναρτήσεις $\delta(f)$ όσο το χρονικό παράθυρο μεγαλώνει. Εδώ χρησιμοποιήθηκαν 5 χρονικές περίοδοι $t_{total} = 5T = 5/f$. Η αντίστοιχη σειρά Fourier δίδεται κατωτέρω και ευρέθηκε με την χρήση της συνάρτησης fit της MatLab.

Συντελεστές FOURIER

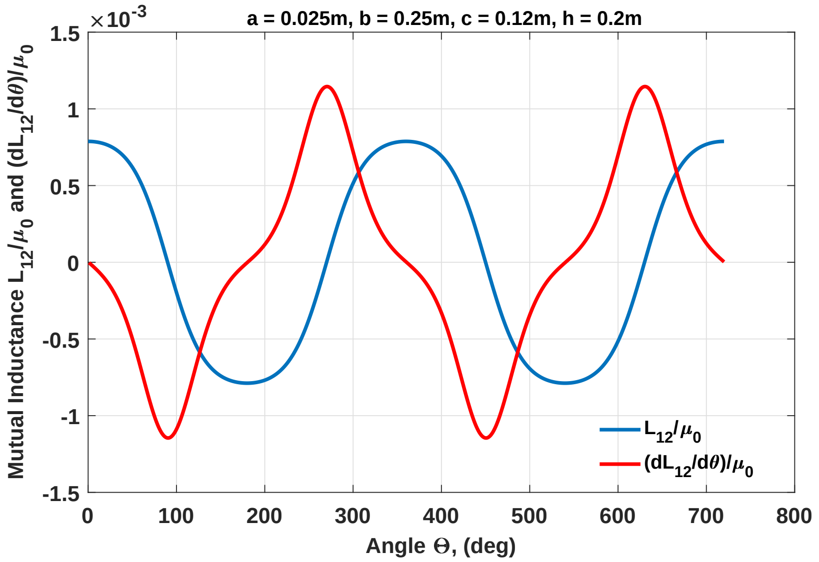
$$\begin{aligned} e(t) &\simeq 0.001937\sin(\omega_0 t) - 0.001932\sin(3\omega_0 t) + \\ &\quad 0.001152\sin(5\omega_0 t) - 0.0005802\sin(7\omega_0 t), \end{aligned}$$

όπου $e(t)$ ($Volts$), και $\omega_0 = 2\pi f$ με $f = 30\,Hz$, $N = 100$ σπείρες, $I_1 = 20\,A$, και $a = 0.025\,\mathrm{m}$, $b = 0.25\,\mathrm{m}$, $c = 0.12\,\mathrm{m}$, $h = 0.10\,\mathrm{m}$.

$$a = 0.025\,\mathrm{m},\ b = 0.25\,\mathrm{m},\ c = 0.12\,\mathrm{m},\ h = 0.20\,\mathrm{m}$$



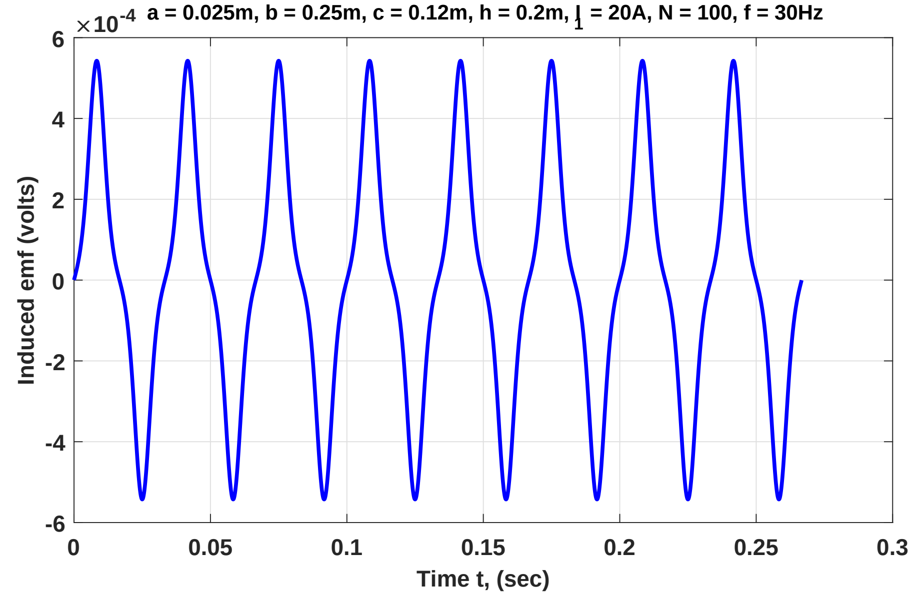
(α)



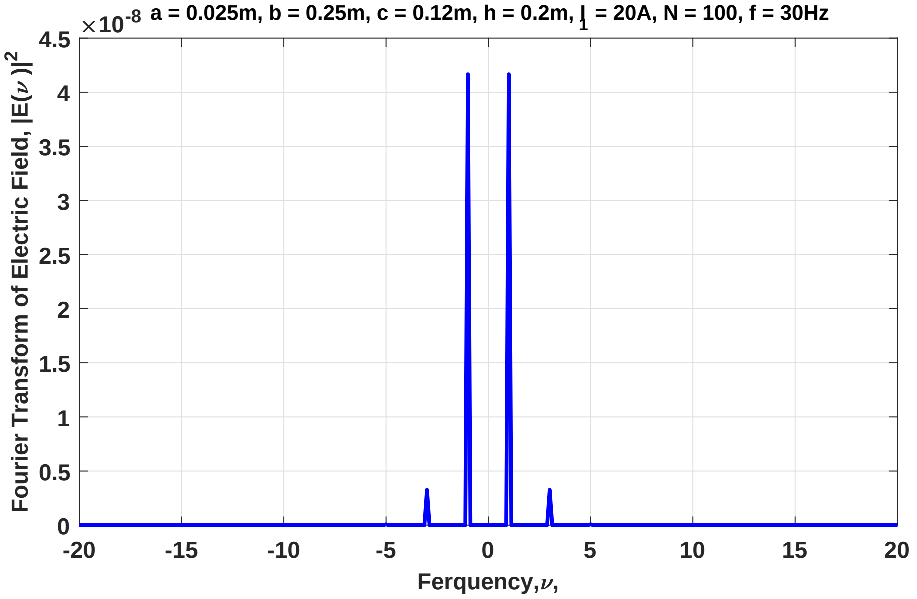
(β)

Σχήμα 3: (α) Συντελεστής αμοιβαίας επαγωγής κανονικοποιημένος με το μ_0, $L_{12}(\Theta)/\mu_0$. (β) Παράγωγος ως προς Θ του συντελεστή αμοιβαίας επαγωγής $[dL_{12}(\Theta)/d\Theta]/\mu_0$. ($a = 0.025\,\mathrm{m}$, $b = 0.25\,\mathrm{m}$, $c = 0.12\,\mathrm{m}$, $h = 0.20\,\mathrm{m}$)

$a = 0.025\,\mathrm{m},\ b = 0.25\,\mathrm{m},\ c = 0.12\,\mathrm{m},\ h = 0.20\,\mathrm{m}$



(α)



(β)

Σχήμα 4: (α) Επαγόμενη ηλεκτρεγερτική δύναμη, $e(t)$ σαν συνάρτηση του χρόνου για 5 χρονικές περιόδους. (β) Μετασχηματισμός $Fourier$ της $e(t)$. Το $|E(f)|^2$ παρουσιάζεται σαν συνάρτηση της συχνότητας. Παρατηρούμε μόνο τις περιττές αρμονικές όπως και αναμένεται από την περιττή συμμετρία του $e(t)$ που φαίνεται στο (α) ($a = 0.025\,\mathrm{m}$, $b = 0.25\,\mathrm{m}$, $c = 0.12\,\mathrm{m}$, $h = 0.20\,\mathrm{m}$)

Συντελεστές FOURIER

$$
\begin{aligned}
e(t) \quad \simeq \quad & 0.0004082\sin(\omega_0 t) - 0.0001143\sin(3\omega_0 t) + \\
& 1.759\times 10^{-5}\sin(5\omega_0 t) - 2.241\times 10^{-6}\sin(7\omega_0 t),
\end{aligned}
$$

όπου $e(t)$ ($Volts$), και $\omega_0 = 2\pi f$ με $f = 30\,Hz$, $N = 100$ σπείρες, $I_1 = 20\,A$, και $a = 0.025\,\mathrm{m}$, $b = 0.25\,\mathrm{m}$, $c = 0.12\,\mathrm{m}$, $h = 0.20\,\mathrm{m}$.