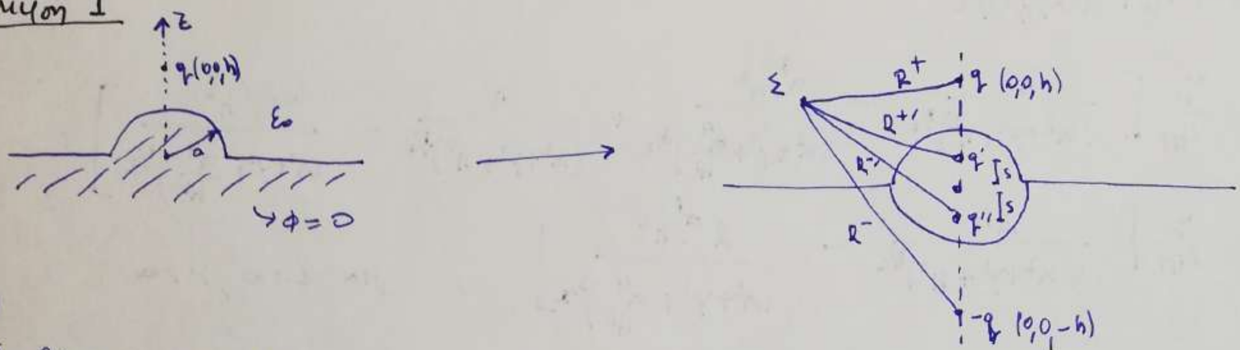
5η Σειρά Ασκήσεων

ΧΡΗΣΤΟΣ ΤΣΟΥΦΗΣ
03117176

Άσκηση 1



α)

Προσθέτουμε τρία είδωλα, το $-q$ για να απαλείψει τον όρο του q στο $z=0$, το q' για να απαλείψει τον όρο του q στο $r=a$ και το q'' για να απαλείψει τον όρο του $-q$ στο $r=a$. Τα q', q'' είναι συμμετρικά. Οπότε:

$$q' = -q\frac{a}{d}\ ,\ q'' = q\frac{a}{d}\ ,\ s = \frac{a^2}{h}$$

Ισχύει: $\Phi = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\left[\frac{q}{R^+} - \frac{q\frac{a}{h}}{R^{+'}} - \frac{q}{R^-} + \frac{q\frac{a}{h}}{R^{-'}}\right] \Rightarrow$

$$\Rightarrow \Phi = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\left[\frac{1}{\sqrt{\underbrace{x^2+y^2+(z-h)^2}_{A_1}}} - \frac{\frac{a}{h}}{\sqrt{\underbrace{x^2+y^2+(z-\frac{a^2}{h})^2}_{A_2}}} - \frac{1}{\sqrt{\underbrace{x^2+y^2+(z+h)^2}_{A_3}}} + \frac{\frac{a}{h}}{\sqrt{\underbrace{x^2+y^2+(z+\frac{a^2}{h})^2}_{A_4}}}\right]$$

- Για $z=0$: $\Phi = 0$
- Για $r=a$: $A_1 - A_2 = 0$, $A_3 - A_4 = 0 \Rightarrow \Phi = 0$
- Για $r\to\infty$: Αναφορά

$\Big\} \Rightarrow$ Ισχύει λύση.

β) $\vec{F} = q\cdot\vec{E}'(0,0,h)$

$$\vec{E}' = -\nabla\Phi' = -\frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\left[\frac{a}{h}\cdot\frac{x\hat{x}+y\hat{y}+(z-\frac{a^2}{h})\hat{z}}{(x^2+y^2+(z-\frac{a^2}{h})^2)^{3/2}} + \frac{x\hat{x}+y\hat{y}+(z+h)\hat{z}}{(x^2+y^2+(z+h)^2)^{3/2}} - \frac{a}{h}\cdot\frac{x\hat{x}+y\hat{y}+(z+\frac{a^2}{h})\hat{z}}{(x^2+y^2+(z+\frac{a^2}{h})^2)^{3/2}}\right]$$

Άρα $\vec{F} = -\frac{q^2}{4\pi\varepsilon_0}\left[\frac{a}{h}\cdot\frac{h-\frac{a^2}{h}}{(h-\frac{a^2}{h})^3} + \frac{2h}{(2h)^3} - \frac{a}{h}\cdot\frac{h+\frac{a^2}{h}}{(h+\frac{a^2}{h})^3}\right]\hat{z} \Rightarrow$

$$\Rightarrow \vec{F} = \hat{z}\,\frac{-q^2}{4\pi\varepsilon_0}\left[\frac{\frac{a}{h}}{(h-\frac{a^2}{h})^2} + \frac{1}{4h^2} - \frac{\frac{a}{h}}{(h+\frac{a^2}{h})^2}\right]$$

γ) $\sigma_{\varepsilon\varphi} = \hat{r}\cdot\varepsilon_0\vec{E}(r=a) = (\hat{x}\sin\theta\cos\varphi + \hat{y}\sin\theta\sin\varphi + \hat{z}\cos\theta)\cdot\varepsilon_0\vec{E}(x,y,z)$

$x^2+y^2+z^2=a^2$

δ)

• $\sigma_{\varepsilon\pi i\pi\varepsilon\delta o} = \hat{z} \cdot \varepsilon_0 \vec{E}(x,y,0) =$

$$= -\frac{q}{4\pi}\left[\frac{h}{(x^2+y^2+h^2)^{3/2}} - \frac{a^3/h^2}{(x^2+y^2+\frac{a^4}{h^2})^{3/2}} + \frac{h}{(x^2+y^2+h^2)^{3/2}} - \frac{a^3/h^2}{(x^2+y^2+\frac{a^4}{h^2})^{3/2}}\right] =$$

$$= -\frac{q}{4\pi}\left[\frac{2h}{(x^2+y^2+h^2)^{3/2}} - \frac{2\,a^3/h^2}{(x^2+y^2+\frac{a^4}{h^2})^{3/2}}\right] \quad , \quad \text{για } z=0,\ r>a$$

• $Q_{\varepsilon\pi i\pi\varepsilon\delta.} = \int_S \sigma_{\varepsilon\pi i\pi\varepsilon\delta.} \cdot ds = \int_S \sigma_{\varepsilon\pi i\pi\varepsilon\delta.} \cdot r\sin\theta\, dr\, d\varphi \overset{\theta=\frac{\pi}{2}}{=\!=} \int_{r=a}^{+\infty}\int_{\varphi=0}^{2\pi} \sigma_{\varepsilon\pi i\pi\varepsilon\delta.}\, r\, dr\, d\varphi =$

$$= -\frac{\cancel{4\pi} q}{\cancel{4\pi}} \int_{r=a}^{+\infty}\left(\frac{h\cdot r}{(r^2+h^2)^{3/2}} - \frac{(a^3/h^2)\cdot r}{(r^2+\frac{a^4}{h^2})^{3/2}}\right) dr =$$

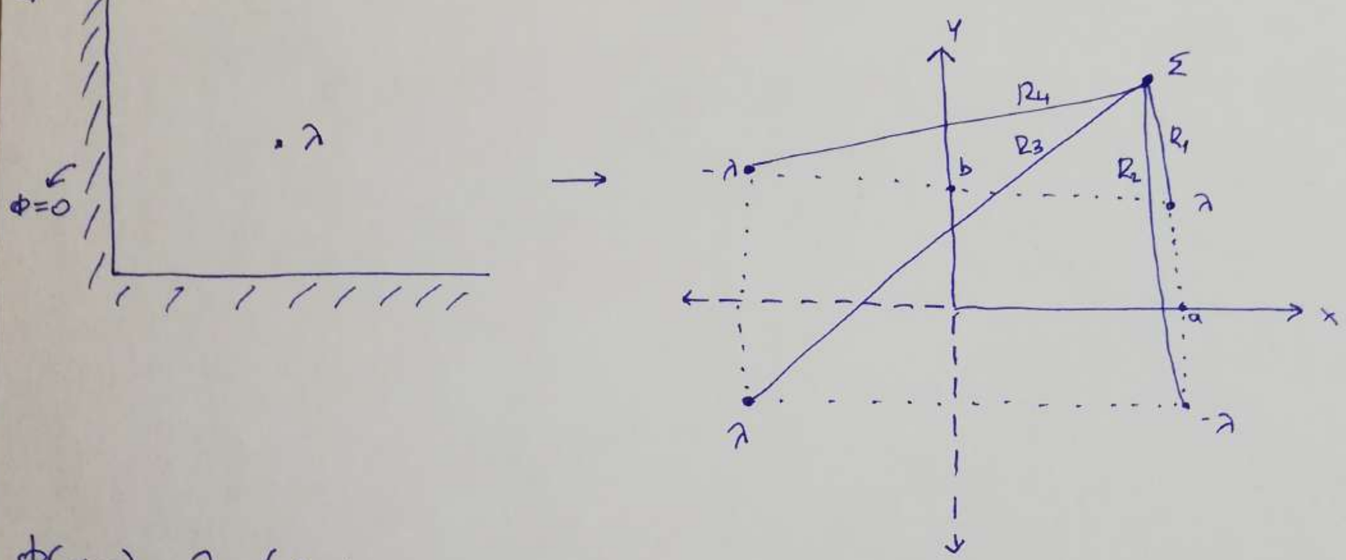
$$= -q \int_{r=a}^{+\infty}\left(-h \cdot \frac{-2r}{(r^2+h^2)^{3/2}} + \frac{a^3}{h^3} \cdot \frac{-r}{(r^2+\frac{a^4}{h^2})^{3/2}}\right) dr =$$

$$= q\left(-h\left[\frac{1}{\sqrt{r^2+h^2}}\right]_a^{+\infty} + \frac{a^3}{h^2}\left[\frac{1}{\sqrt{r^2+\frac{a^4}{h^2}}}\right]_a^{+\infty}\right) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow Q_{\varepsilon\pi i\pi\varepsilon\delta} = \frac{-qh}{\sqrt{a^2+h^2}} - \frac{-q\,a^3/h^2}{\sqrt{a^2+\frac{a^4}{h^2}}} = \frac{-q\left(h - \frac{a^2}{h}\right)}{\sqrt{a^2+h^2}}$$

Άσκηση 2

a)



$$\Phi(x,y)=\frac{\lambda}{2\pi\varepsilon}\left(\ln\frac{r_A}{R_1}-\ln\frac{r_A}{R_2}+\ln\frac{r_A}{R_3}-\ln\frac{r_A}{R_4}\right)=\frac{\lambda}{2\pi\varepsilon}\left(\ln\frac{R_2}{R_1}+\ln\frac{R_4}{R_3}\right)=$$

$$=\frac{\lambda}{2\pi\varepsilon}\left[\ln\left(\frac{\sqrt{(x-a)^2+(y+b)^2}\cdot\sqrt{(x+a)^2+(y-b)^2}}{\sqrt{(x-a)^2+(y-b)^2}\cdot\sqrt{(x+a)^2+(y+b)^2}}\right)\right]=$$

$$=\frac{\lambda}{2\pi\varepsilon}\left[\ln\frac{1}{\sqrt{(x-a)^2+(y-b)^2}}-\ln\frac{1}{\sqrt{(x-a)^2+(y+b)^2}}+\ln\frac{1}{\sqrt{(x+a)^2+(y+b)^2}}-\ln\frac{1}{\sqrt{(x+a)^2+(y-b)^2}}\right]$$

β)

$$\cdot\ \sigma(x=0)=-\varepsilon\left.\frac{\partial\Phi}{\partial x}\right|_{x=0}=\frac{+\lambda}{2\pi}\left[\frac{x-a}{(x-a)^2+(y-b)^2}-\frac{x-a}{(x-a)^2+(y+b)^2}+\frac{x+a}{(x+a)^2+(y+b)^2}-\frac{x+a}{(x+a)^2+(y-b)^2}\right]_{x=0}=$$

$$=\frac{\lambda}{2\pi}\left[\frac{2a}{a^2+(y+b)^2}-\frac{2a}{a^2+(y-b)^2}\right]=\frac{\lambda a}{\pi}\left[\frac{1}{a^2+(y+b)^2}-\frac{1}{a^2+(y-b)^2}\right]$$

$$\cdot\ \sigma(y=0)=-\varepsilon\left.\frac{\partial\Phi}{\partial y}\right|_{y=0}=$$

$$=\frac{\lambda}{2\pi}\left[\frac{y-b}{(x-a)^2+(y-b)^2}-\frac{y+b}{(x-a)^2+(y+b)^2}+\frac{y+b}{(x+a)^2+(y+b)^2}-\frac{y-b}{(x+a)^2+(y-b)^2}\right]_{y=0}=$$

$$=\frac{\lambda b}{\pi}\left[\frac{1}{(x+a)^2+b^2}-\frac{1}{(x-a)^2+b^2}\right]$$