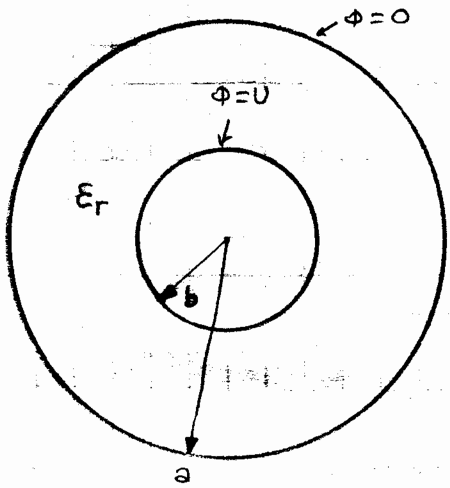
ΑΣΚΗΣΗ 1:



(1) ε_r = σταθερά

Ας επιλύσουμε την εξίσωση Laplace στην περιοχή μεταξύ των 2 σφαιρών.

$$\vec{\nabla}\cdot\vec{D}=0 \Rightarrow$$

$$\vec{\nabla}\cdot\left(-\epsilon_0\varepsilon_r(-\vec{\nabla}\Phi)\right)=0 \Rightarrow$$

$$\nabla^2\Phi=0 \Rightarrow$$

$$\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial\Phi}{\partial r}\right)=0$$

Λόγω της σφαιρικής συμμετρίας $\Phi=\Phi(r)$,

$$\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial\Phi}{\partial r}\right)=0 \Rightarrow r^2\frac{\partial\Phi}{\partial r}=A \Rightarrow \frac{\partial\Phi}{\partial r}=\frac{A}{r^2} \Rightarrow \Phi(r)=-\frac{A}{r}+B$$

Ας υποθέσουμε ότι $\Phi(r=b)=U$ και $\Phi(r=a)=0$. οπότε

$$\Phi(r=a)=0=-\frac{A}{a}+B \Rightarrow B=A/a \Rightarrow B=-\frac{Ub}{a-b}$$

$$\Phi(r=b)=U=-\frac{A}{b}+B=-\frac{A}{b}+\frac{A}{a} \Rightarrow A=-U\left(\frac{ab}{a-b}\right)$$

Άρα $\quad \Phi=U\dfrac{ab}{a-b}\dfrac{1}{r}-U\dfrac{b}{a-b} \quad (b\le r\le a)$

Το ηλεκτρικό πεδίο δίδεται από την σχέση $\vec{E}=-\vec{\nabla}\Phi=-\dfrac{\partial\Phi}{\partial r}\hat{i}_r$

$$\vec{E}=U\frac{ab}{a-b}\frac{1}{r^2}\hat{i}_r \qquad b\le r\le a$$

Το διάνυσμα διηλεκτρικής μετατόπισης είναι $\vec{D}=\epsilon_0\varepsilon_r\vec{E} \Rightarrow$

$$\vec{D}=U\frac{ab}{a-b}\epsilon_0\varepsilon_r\frac{1}{r^2}\hat{i}_r \qquad b\le r\le a$$

Η πόλωση $\vec{P}$ μπορεί να βρεθεί από την σχέση:

$$\vec{D}=\epsilon_0\vec{E}+\vec{P} \Rightarrow \vec{P}=\vec{D}-\epsilon_0\vec{E}=\epsilon_0(\varepsilon_r-1)\vec{E} \Rightarrow$$

$$\vec{P}=\epsilon_0(\varepsilon_r-1)U\frac{ab}{a-b}\frac{1}{r^2} \qquad b\le r\le a$$

Τα ελεύθερα επιφανειακά φορτία μπορούν να βρεθούν από τις συνοριακές συνθήκες:

$$\sigma(r=b)=\hat{i}_r\cdot\left(\vec{D}(r=b)-0\right)=U\frac{ab}{a-b}\epsilon_0\varepsilon_r\frac{1}{b^2}=U\epsilon_0\varepsilon_r\frac{1}{a-b}\left(\frac{a}{b}\right)$$

$$\sigma(r=a)=(-\hat{i}_r)\cdot\left(\vec{D}(r=a)-0\right)=-U\frac{ab}{a-b}\epsilon_0\varepsilon_r\frac{1}{a^2}=-U\epsilon_0\varepsilon_r\frac{1}{a-b}\left(\frac{b}{a}\right)$$

Τα συνολικά ελεύθερα επιφανειακά φορτία δίδονται από τις σχέσεις:

$$Q(r=b) = 4\pi b^2 \sigma(r=b) = 4\pi \epsilon_0 \varepsilon_r\left(\frac{ab}{a-b}\right)U$$

$$Q(r=a) = 4\pi a^2 \sigma(r=a) = -4\pi \epsilon_0 \varepsilon_r\left(\frac{ab}{a-b}\right)U$$

Η χωρητικότητα του πυκνωτού δίδεται από την σχέση:

$$C = \frac{Q}{U} = \frac{4\pi\epsilon_0\varepsilon_r\left(\frac{ab}{a-b}\right)U}{U} = 4\pi\epsilon_0\varepsilon_r\left(\frac{ab}{a-b}\right)$$

Τα δέσμια φορτία πόλωσης μπορούν να βρεθούν από τις σχέσεις:

$$\rho_b = -\vec{\nabla}\cdot\vec{P} = -\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2 P_r\right) = -\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(\cancel{r^2}\,\epsilon_0(\varepsilon_r-1)U\frac{ab}{a-b}\frac{1}{\cancel{r^2}}\right)=0$$

Τα δέσμια επιφανειακά φορτία δίδονται από την σχέση

$$\sigma_b(r=b) = \hat{i}_n\cdot\vec{P}(r=b) = (-\hat{i}_r)\cdot\left(\varepsilon_0(\varepsilon_r-1)U\frac{ab}{a-b}\frac{1}{b^2}\hat{i}_r\right)$$

$$= -\epsilon_0(\varepsilon_r-1)U\frac{1}{a-b}\left(\frac{a}{b}\right)$$

$$\sigma_b(r=a) = \hat{i}_n\cdot\vec{P}(r=a) = \hat{i}_r\cdot\left(\epsilon_0(\varepsilon_r-1)U\frac{ab}{a-b}\frac{1}{a^2}\hat{i}_r\right) =$$

$$= +\epsilon_0(\varepsilon_r-1)U\frac{1}{a-b}\left(\frac{b}{a}\right)$$

Το συνολικό δέσμιο φορτίο είναι

$$\sigma_b(r=b)\,4\pi b^2 + \sigma_b(r=a)\,4\pi a^2 = 0$$

(b) $\varepsilon_r = k\dfrac{a^2}{r^2}$ όπου k σταθερά

Πάλι θα επιλύσουμε την εξίσωση του Laplace.

$$\vec{\nabla}\cdot\vec{D}=0 \Rightarrow \vec{\nabla}\cdot(\epsilon_0\varepsilon_r(r)\vec{E})=0 \Rightarrow \vec{\nabla}\cdot(\epsilon_0\varepsilon_r(r)(-\vec{\nabla}\Phi))=0$$

$$\Rightarrow \vec{\nabla}\cdot\left[\varepsilon_r(r)\frac{\partial\Phi}{\partial r}\hat{i}_r\right]=0 \Rightarrow \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\varepsilon_r(r)\frac{\partial\Phi}{\partial r}\right)=0 \Rightarrow$$

$$\frac{\partial}{\partial r}\left(\cancel{r^2}\,k\frac{a^2}{\cancel{r^2}}\frac{\partial\Phi}{\partial r}\right)=0 \Rightarrow ka^2\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{\partial\Phi}{\partial r}\right)=0 \Rightarrow$$

$$\frac{\partial^2\Phi}{\partial r^2}=0 \Rightarrow \Phi(r) = Ar+B$$

Ας υποθέσουμε και πάλι ότι $\Phi(r=b)=U$, $\Phi(r=a)=0 \Rightarrow$

$$\left.\begin{aligned} 0 &= Aa+B \\ U &= Ab+B \end{aligned}\right\} \Rightarrow \quad A = -\frac{U}{a-b}, \quad B = \frac{Ua}{a-b}$$

Επομένως $\quad \Phi(r) = -\dfrac{U}{a-b}(r-a) \qquad b \le r \le a$

Το ηλεκτρικό πεδίο δίδεται από την σχέση: $\vec{E} = -\vec{\nabla}\Phi = -\dfrac{\partial \Phi}{\partial r}\hat{i}_r$

ή $\quad \vec{E} = \dfrac{U}{a-b}\hat{i}_r$

και το διάνυσμα διηλεκτρικής μετατόπισης:

$$\vec{D} = \epsilon_0 \epsilon_r(r)\vec{E} = \epsilon_0\left(k\frac{a^2}{r^2}\right)\left(\frac{U}{a-b}\right)\hat{i}_r \qquad b \le r \le a$$

Η πόλωση $\vec{P}$ δίδεται από την σχέση:

$$\vec{P} = \vec{D} - \epsilon_0\vec{E} = \epsilon_0\left(k\frac{a^2}{r^2} - 1\right)\frac{U}{a-b}\hat{i}_r \qquad b \le r \le a$$

Τα ελεύθερα επιφανειακά φορτία είναι:

$$\sigma(r=b) = \hat{i}_r \cdot (\vec{D}(r=b) - 0) = \epsilon_0 k\left(\frac{a}{b}\right)^2\frac{U}{a-b}$$

$$\sigma(r=a) = (-\hat{i}_r)\cdot(\vec{D}(r=a) - 0) = -\epsilon_0 k\frac{U}{a-b}$$

Τα συνολικά ελεύθερα επιφανειακά φορτία είναι:

$$Q_b = 4\pi b^2\sigma(r=b) = 4\pi\epsilon_0 k a^2\frac{U}{a-b}$$

$$Q_a = 4\pi a^2\sigma(r=a) = -4\pi\epsilon_0 k a^2\frac{U}{a-b}$$

Η χωρητικότητα του πυκνωτού δίδεται από την σχέση:

$$C = \frac{Q_b}{U} = 4\pi\epsilon_0 k a^2\left(\frac{1}{a-b}\right)$$

Τα δέσμια φορτία πόλωσης (χωρικά) είναι:

$$\rho_b = -\vec{\nabla}\cdot\vec{P} = -\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\epsilon_0\left(k\frac{a^2}{r^2} - 1\right)\frac{U}{a-b}\right) =$$

$$= \frac{2}{r}\epsilon_0\frac{U}{a-b}$$

Τα επιφανειακά δέσμια φορτία δίδονται από τις σχέσεις:

$$\sigma_b(r=b) = (-\hat{i}_r)\cdot\vec{P}(r=b) = -\epsilon_0\left(k\frac{a^2}{b^2} - 1\right)\frac{U}{a-b}$$

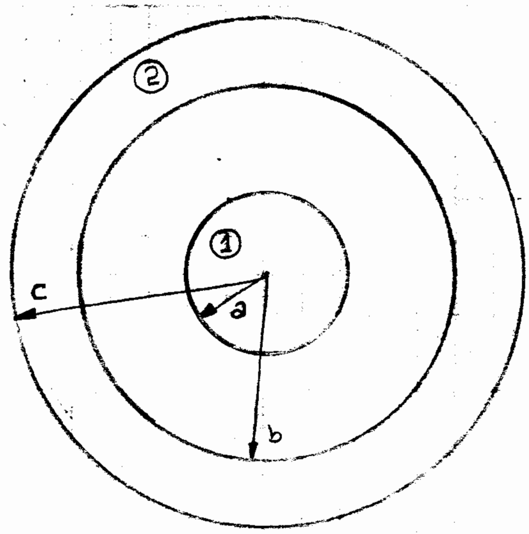
$$\sigma_b(r=a) = (+\hat{i}_r)\cdot\vec{P}(r=a) = \epsilon_0(k-1)\frac{U}{a-b}$$

Το συνολικό δεσμευμένο φορτίο είναι:

$$\int_V \rho_b\, dV + \sigma_b(r=b)4\pi b^2 + \sigma_b(r=a)4\pi a^2 =$$

$$= \frac{U}{a-b}\epsilon_0\int_0^{2\pi}d\phi\int_0^{\pi}\sin\theta\, d\theta\int_b^a\frac{2}{r}r^2 dr - 4\pi\epsilon_0 U(a+b) = \frac{U}{a-b}\epsilon_0 4\pi(a^2-b^2) - 4\pi\epsilon_0 U(a+b) = 0$$

ΑΣΚΗΣΗ 2:



Οι συντελεστές δυναμικού ορίζονται από τις σχέσεις:

$$\Phi_1 = p_{11} Q_1 + p_{12} Q_2$$

$$\Phi_2 = p_{21} Q_1 + p_{22} Q_2$$

όπου 1 αντιστοιχεί στόν αγωγό ακτίνας a και 2 στόν αγωγό εσωτερικής ακτίνας b και εξωτερικής c.

Ας υποθέσουμε ότι $Q_1 = 0$ και $Q_2 \neq 0$. Τότε

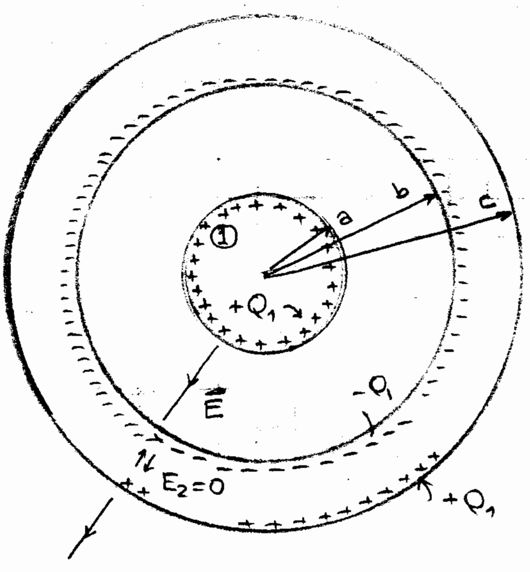
$\Phi_2 = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q_2}{c}$ διότι το φορτίο Q_2 θα κατανεμηθεί ομοιόμορφα στην εξωτερική επιφάνεια του αγωγού 2. Επομένως

$$p_{22} = \left.\frac{\Phi_2}{Q_2}\right|_{Q_1=0} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0 c}$$

$$\Phi_1 = \Phi_2 = \frac{1}{4\pi\epsilon_0 c} Q_2 = p_{12} Q_2 \Rightarrow p_{12} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0 c}$$

διότι το εσωτερικό του αγωγού 2 δεν είναι φορτισμένο και επομένως είναι ισοδυναμική επιφάνεια.

Τώρα ας υποθέσουμε ότι $Q_1 \neq 0$ και $Q_2 = 0$. Το φορτίο Q_1 επάγει φορτίο $-Q_1$ στην εσωτερική επιφάνεια του αγωγού 2 και $+Q_1$ στην εξωτερική επιφάνεια του αγωγού 2. Τα φορτία κατανέμονται ομοιόμορφα λόγω της σφαιρικής συμμετρίας.



Τα φορτία $+Q_1$ και $-Q_1$ πάνω στις επιφάνειες του αγωγού 2 προκαλούν μηδενικό ηλεκτρικό πεδίο μέσα στον αγωγό 2. Επομένως το δυναμικό στον αγωγό 1 μπορεί να βρεθεί με χρήση της επαλληλίας:

$$\Phi_1 = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Q_1}{a} + \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{-Q_1}{b} + \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{+Q_1}{c} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{1}{a}-\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right)Q_1$$

$$\rightarrow p_{11} = \left.\frac{\Phi_1}{Q_1}\right|_{Q_2=0} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{1}{a}-\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right)$$

Το $p_{12} = p_{21} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{1}{c}$ λόγω της συμμετρίας των συντελεστών δυναμικού. Αυτό μπορεί να επαληθευτεί και ανεξάρτητα της συμμετρικής ιδιότητας ως εξής:

$$\Phi_1 - \Phi_2 = -\int_b^a \vec{E}\cdot d\vec{r} = -\int_b^a \frac{Q_1}{4\pi\varepsilon_0 r^2}\,\hat{i}_r\cdot\hat{i}_r\,dr = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}Q_1\left(\frac{1}{a}-\frac{1}{b}\right)$$

$$\Rightarrow \Phi_2 = \Phi_1 - \frac{Q_1}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{1}{a}-\frac{1}{b}\right) = Q_1\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{1}{a}-\frac{1}{b}+\frac{1}{c}-\frac{1}{a}+\frac{1}{b}\right) =$$

$$= \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Q_1}{c} \Longrightarrow p_{21} = \left.\frac{\Phi_2}{Q_1}\right|_{Q_2=0} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{1}{c} = p_{12}$$

Ανακεφαλαιώνοντας έχουμε:

$$p_{11} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{1}{a}-\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right) \qquad p_{12} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{1}{c}$$

$$p_{21} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{1}{c} \qquad p_{22} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{1}{c}$$

Η χωρητικότητα τώρα του πυκνωτή είναι εύκολο να υπολογισθεί.

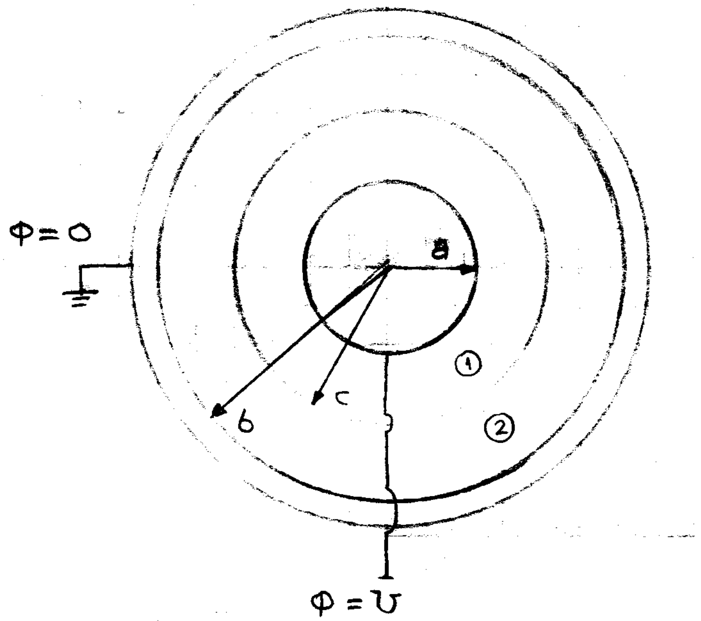
Αν $Q_1 = Q$ και $Q_2 = -Q$ τότε

$$\left.\begin{aligned} \Phi_1 &= p_{11} Q - p_{12} Q \\ \Phi_2 &= p_{21} Q - p_{22} Q \end{aligned}\right\} \Rightarrow \Phi_1 - \Phi_2 = (p_{11} - 2p_{12} + p_{22}) Q \Rightarrow$$

$$C = \frac{Q}{\Phi_1 - \Phi_2} = \frac{1}{p_{11} - 2p_{12} + p_{22}} = \frac{1}{\frac{1}{4\pi\epsilon_0}\left(\frac{1}{a} - \frac{1}{b} + \cancel{\frac{1}{c}} - \cancel{\frac{2}{c}} + \cancel{\frac{1}{c}}\right)} =$$

$$= 4\pi\epsilon_0 \frac{1}{\frac{1}{a} - \frac{1}{b}} = 4\pi\epsilon_0 \frac{ab}{b-a}$$

ΑΣΚΗΣΗ 3:



(a) Ας επιλύσουμε την εξίσωση του Laplace ανά περιοχή. $\vec{\nabla}\cdot\vec{J}=0 \Rightarrow$

$$\vec{\nabla}\cdot(\sigma\vec{E})=0 \Rightarrow \quad \vec{\nabla}\cdot\vec{E}=0 \Rightarrow \quad \vec{\nabla}\cdot(-\vec{\nabla}\Phi)=0 \Rightarrow \quad \nabla^2\Phi=0$$

Ομοίως $\vec{\nabla}\cdot\vec{D}=0 \Rightarrow \quad \vec{\nabla}\cdot(\epsilon(-\vec{\nabla}\Phi))=0 \Rightarrow \quad \nabla^2\Phi=0$

Λόγω της συμμετρίας Φ εξαρτάται μόνο από r_T, $\nabla^2\Phi=0 \Rightarrow$

$$\frac{1}{r_T}\frac{\partial}{\partial r_T}\left(r_T\frac{\partial\Phi}{\partial r_T}\right)=0 \quad\Rightarrow\quad r_T\frac{\partial\Phi}{\partial r_T}=A \Rightarrow \quad \Phi(r_T)=A\ln(r_T)+B$$

Για την περιοχή ① $a\le r_T\le c$:

$$\Phi_1(r_T)=A_1\ln r_T+B_1 \quad\sim\quad \vec{E}_1=-\frac{\partial\Phi_1}{\partial r}\hat{i}_r=-\frac{A_1}{r_T}\hat{i}_T$$

Για την περιοχή ② $c\le r_T\le b$:

$$\Phi_2(r_T)=A_2\ln r_T+B_2 \quad\sim\quad \vec{E}_2=-\frac{\partial\Phi_2}{\partial r}\hat{i}_T=-\frac{A_2}{r_T}\hat{i}_T$$

Συνοριακές Συνθήκες:

$$\Phi_1(r_T=a)=U \quad\Rightarrow\quad A_1\ln a+B_1=U \qquad (1)$$

$$\Phi_2(r_T=b)=0 \quad\Rightarrow\quad A_2\ln b+B_2=0 \qquad (2)$$

$$\Phi_1(r_T=c)=\Phi_2(r_T=c) \Rightarrow A_1\ln c+B_1=A_2\ln c+B_2 \qquad (3)$$

$$J_{1r}\big|_c=J_{2r}\big|_c \quad\Rightarrow\quad \sigma_1\frac{A_1}{c}=\sigma_2\frac{A_2}{\sigma} \qquad (4)$$

Η επίλυση των εξισώσεων (1)—(4) δίδει :

$$A_1 = \frac{-U}{\ln\left(\frac{c}{a}\right) - \frac{\sigma_1}{\sigma_2}\ln\left(\frac{c}{b}\right)} \qquad A_2 = \frac{\sigma_1}{\sigma_2}\,\frac{-U}{\ln\left(\frac{c}{a}\right) - \frac{\sigma_1}{\sigma_2}\ln\left(\frac{c}{b}\right)}$$

$$B_1 = U - A_1 \ln a \qquad B_2 = -A_2 \ln b$$

Επομένως το δυναμικό και το ηλεκτρικό πεδίο δίδονται από: $(A_1 < 0)$

$$\Phi_1 = \frac{-U}{\ln\left(\frac{c}{a}\right) - \frac{\sigma_1}{\sigma_2}\ln\left(\frac{c}{b}\right)} \ln\left(\frac{r_T}{a}\right) + U \qquad a \le r_T \le c$$

$$\vec{E}_1 = -\frac{A_1}{r_T}\hat{i}_T \;,\; \vec{J}_1 = -\sigma_1 \frac{A_1}{r_T}\hat{i}_T \qquad a \le r_T \le c$$

$$\Phi_2 = \frac{\sigma_1}{\sigma_2}\,\frac{-U}{\ln\left(\frac{c}{a}\right) - \frac{\sigma_1}{\sigma_2}\ln\left(\frac{c}{b}\right)} \ln\left(\frac{r_T}{b}\right) \qquad c \le r_T \le b$$

$$\vec{E}_2 = -\frac{\sigma_1}{\sigma_2}\frac{A_1}{r_T}\hat{i}_T \;,\; \vec{J}_2 = \sigma_2\left(-\frac{\sigma_1}{\sigma_2}\right)\frac{A_1}{r_T}\hat{i}_T = -\sigma_1\frac{A_1}{r_T}\hat{i}_T \qquad c \le r_T \le b$$

$$\vec{D}_1 = \epsilon_1 \vec{E}_1 = -\epsilon_1 \frac{A_1}{r_T}\hat{i}_T \qquad a \le r_T < c$$

$$\vec{D}_2 = \epsilon_2 \vec{E}_2 = -\epsilon_2 \frac{\sigma_1}{\sigma_2}\frac{A_1}{r_T}\hat{i}_T \qquad c \le r_T \le b$$

Χωρικές πυκνότητες φορτίων:

$$\rho_1 = \vec{\nabla}\cdot\vec{D}_1 = \frac{1}{r_T}\frac{\partial}{\partial r_T}\left(\cancel{r_T}(-\epsilon_1)\frac{A_1}{\cancel{r_T}}\right) = 0 \qquad a < r_T < c$$

$$\rho_2 = \vec{\nabla}\cdot\vec{D}_2 = \frac{1}{r_T}\frac{\partial}{\partial r_T}\left(\cancel{r_T}(-\epsilon_2)\frac{\sigma_1}{\sigma_2}\frac{A_1}{\cancel{r_T}}\right) = 0 \qquad c < r_T < b$$

Επιφανειακές πυκνότητες φορτίων:

$$\hat{i}_n \cdot (\vec{D}_1 - \emptyset)\Big|_{r_T = a} = \sigma(r_T = a) \Rightarrow \sigma(r_T = a) = -\epsilon_1 \frac{A_1}{a} > 0$$

$$\underset{\underset{-\hat{i}_T}{\parallel}}{-\hat{i}_n} \cdot (D_2 - \emptyset)\Big|_{r_T = b} = \sigma(r_T = b) \Rightarrow \sigma(r_T = b) = +\epsilon_2 \frac{\sigma_1}{\sigma_2}\frac{A_1}{b} < 0$$

$$\hat{i}_n \cdot (\vec{D}_2 - \vec{D}_1)\Big|_{r_T = c} = \sigma(r_T = c) \Rightarrow \sigma(r_T = c) = -\frac{A_1}{c}\left(\epsilon_2\frac{\sigma_1}{\sigma_2} - \epsilon_1\right)$$

Το συνολικό επιφανειακό φορτίο ανά μονάδα μήκους είναι $\sigma(r_T = a)2\pi a +$

$$\sigma(r_T=c)\,2\pi c + \sigma(r_T=b)\,2\pi b =$$

$$= -2\pi \cancel{a}\,\epsilon_1 \frac{A_1}{\cancel{a}} - 2\pi \cancel{c}\,\frac{A_1}{\cancel{c}}\left(\epsilon_2\frac{\sigma_1}{\sigma_2}-\epsilon_1\right) + 2\pi \cancel{b}\,\epsilon_2 \frac{\sigma_1}{\sigma_2}\frac{A_1}{\cancel{b}} = 0$$

Επομένως υπάρχει συνδιασμός δυο πυκνωτών σε σειρά.

$$C_1 = \frac{Q_1}{U-\Phi_1(c)} = \frac{\left(-\epsilon_1 \frac{A_1}{a}\right) 2\pi a}{U - A_1 \ln\left(\frac{c}{a}\right) - U} = 2\pi\epsilon_1 \frac{1}{\ln(c/a)}$$

όπου C_1 είναι η χωρητικότητα ανά μονάδα μήκους του συστήματος.

Στην δεύτερη περιοχή σχηματίζεται η χωρητικότητα (ανά μονάδα μήκους)

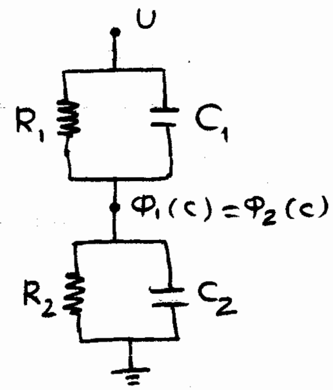
$$C_2 = \frac{Q_2}{\underbrace{\Phi_2(c)}_{=\Phi_1(c)}} = \frac{-2\pi c \frac{A_1}{c}\epsilon_2 \frac{\sigma_1}{\sigma_2}}{\underbrace{A_2}_{=\sigma_1 A_1/\sigma_2} \ln\left(\frac{c}{b}\right)} = \frac{-2\pi\epsilon_2}{\ln(c/b)} = \frac{2\pi\epsilon_2}{\ln(b/c)}$$

Τέλος η αντίσταση μπορεί να βρεθεί σαν άθροισμα δύο όρων:

$$R_1 = \frac{U-\Phi_1(c)}{I} = \frac{-A_1 \ln(c/a)}{-\sigma_1 \frac{A_1}{r_T} 2\pi r_T} = \frac{\ln(c/a)}{2\pi\sigma_1}$$

$$R_2 = \frac{\Phi_2(c)-0}{I} = \frac{A_2 \ln(c/b)}{-\sigma_1 \frac{A_1}{r_T} 2\pi r_T} = \frac{-\sigma_1 A_1 \ln(b/c)/\sigma_2}{-\sigma_1 A_1 2\pi} = \frac{\ln(b/c)}{2\pi\sigma_2}$$

Επομένως ανά μονάδα μήκους το σύστημα φαίνεται σαν:



R, C, I είναι ανά μονάδα μήκους

(2) $\epsilon = \epsilon_0 (r_T / a)$, $\sigma = \sigma_0 (r_T / a)^2$

Πάλι θέλουμε να επιλύσουμε την εξίσωση του Laplace:

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{J} = 0 \Rightarrow \vec{\nabla} \cdot \left(\sigma_0 \frac{r_T^2}{a^2} (-\vec{\nabla} \Phi) \right) = 0 \Rightarrow$$

Λόγω της κυλινδρικής συμμετρίας $\Phi = \Phi(r_T)$ και επομένως η παραπάνω εξίσωση γράφεται:

$$\frac{1}{r_T} \frac{\partial}{\partial r_T} \left(r_T \sigma_0 \frac{r_T^2}{a^2} \left(- \frac{\partial \Phi}{\partial r_T} \right) \right) = 0 \Rightarrow \frac{\partial}{\partial r_T} \left(r_T^3 \frac{\partial \Phi}{\partial r_T} \right) = 0 \Rightarrow$$

$$\frac{\partial \Phi}{\partial r_T} r_T^3 = A \Rightarrow \frac{\partial \Phi}{\partial r_T} = \frac{A}{r_T^3} \Rightarrow \Phi(r_T) = -\frac{1}{2} \frac{A}{r_T^2} + B$$

Συνοριακές συνθήκες:

$$\left.\begin{array}{l} \Phi(r_T = a) = U \Rightarrow -\frac{1}{2} \frac{A}{a^2} + B = U \\ \Phi(r_T = b) = 0 \Rightarrow -\frac{1}{2} \frac{A}{b^2} + B = 0 \end{array}\right\} \Rightarrow \begin{array}{l} A = -2U / \left(\frac{1}{a^2} - \frac{1}{b^2} \right) \\ B = -U (1/b^2) / \left(\frac{1}{a^2} - \frac{1}{b^2} \right) \end{array}$$

Επομένως,

$$\Phi(r_T) = \frac{U}{\frac{1}{a^2} - \frac{1}{b^2}} \frac{1}{r_T^2} - U \frac{1/b^2}{\frac{1}{a^2} - \frac{1}{b^2}} = \frac{U}{\frac{1}{a^2} - \frac{1}{b^2}} \left(\frac{1}{r_T^2} - \frac{1}{b^2} \right)$$

Το ηλεκτρικό πεδίο $\vec{E} = -\vec{\nabla} \Phi = -\frac{\partial \Phi}{\partial r_T} \hat{i}_{r_T} \Rightarrow$

$$\vec{E} = \frac{2U}{\frac{1}{a^2} - \frac{1}{b^2}} \frac{1}{r_T^3} \hat{i}_{r_T} \qquad a < r_T < b$$

$$\vec{D} = \epsilon \vec{E} = \epsilon_0 \frac{\cancel{r_T}}{a} \frac{2U}{\frac{1}{a^2} - \frac{1}{b^2}} \frac{1}{r_T^{\cancel{3}2}} \hat{i}_{r_T} \Rightarrow \vec{D} = \epsilon_0 \frac{1}{a} \frac{2U}{\frac{1}{a^2} - \frac{1}{b^2}} \frac{1}{r_T^2} \hat{i}_{r_T}$$

χωρική πυκνότητα φορτίου:

$$\rho = \vec{\nabla} \cdot \vec{D} = \frac{1}{r_T} \frac{\partial}{\partial r_T} \left(r_T \epsilon_0 \frac{1}{a} \frac{2U}{\frac{1}{a^2} - \frac{1}{b^2}} \frac{1}{r_T^2} \right) = -\frac{1}{r_T^3} \epsilon_0 \frac{1}{a} \frac{2U}{\frac{1}{a^2} - \frac{1}{b^2}}$$

Επιφανειακά φορτία:

$$\underset{\hat{i}_{r_T}}{\overset{\parallel}{\hat{i}_n}} \cdot (\vec{D} - 0) \Big|_{r_T = a} = \sigma(r_T = a) \Rightarrow \sigma(r_T = a) = \epsilon_0 \frac{1}{a^3} \frac{2U}{\frac{1}{a^2} - \frac{1}{b^2}}$$

$$\underset{-\hat{i}_{r_T}}{\overset{\parallel}{\hat{i}_n}} \cdot (\vec{D} - 0) \Big|_{r_T = b} = \sigma(r_T = b) \Rightarrow \sigma(r_T = b) = -\epsilon_0 \frac{1}{a} \frac{2U}{1/a^2 - 1/b^2} \frac{1}{b^2}$$

Λόγω της ύπαρξης του χωρικού φορτίου το συνολικό επιφανειακό φορτίο ανά μονάδα μήκους του ομοαξονικού καλωδίου δεν είναι μηδενικό.

Συγκεκριμένα το συνολικό επιφανειακό φορτίο ανά μονάδα μήκους είναι

$$\sigma(r_T=a)\,2\pi a + \sigma(r_T=b)\,2\pi b = 4\pi\epsilon_0 U\left(\frac{1/a}{1/a+1/b}\right) = \Sigma$$

Το συνολικό χωρικό φορτίο ανά μονάδα μήκους είναι

$$Q = \int_{\phi=0}^{2\pi}\int_{a}^{b} \rho\, r_T\, d\phi\, dr_T = -4\pi\epsilon_0 U\left(\frac{1/a}{1/a+1/b}\right)$$

Οπότε παρατηρούμε ότι ανά μονάδα μήκους το συνολικό χωρικό και επιφανειακό φορτίο είναι $Q+\Sigma=0$.

Για να βρούμε την αντίσταση πρέπει να βρούμε το συνολικό ρεύμα I. ανά μονάδα μήκους.

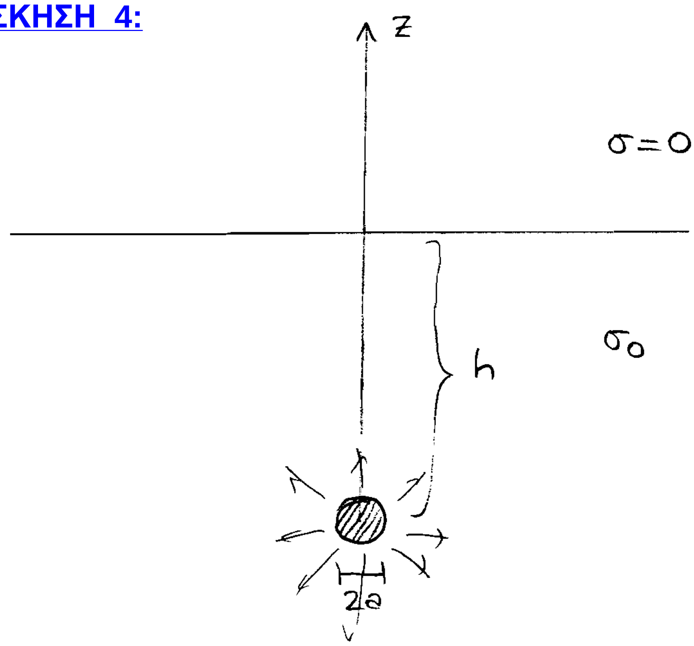
$$I = \int \vec{J}\cdot d\vec{S} = \int_0^{2\pi} \sigma\left(-\frac{\partial \Phi}{\partial r_T}\right)\hat{i}_{r_T}\cdot\hat{i}_{r_T}\, r_T\, d\phi\, dz \Rightarrow$$

$$I = 2\pi\sigma_0\frac{r_T^2}{a^2}\left(-\frac{A}{r_T^3}\right)r_T = 2\pi\sigma_0\frac{1}{a^2}\frac{2U}{1/a^2-1/b^2}$$

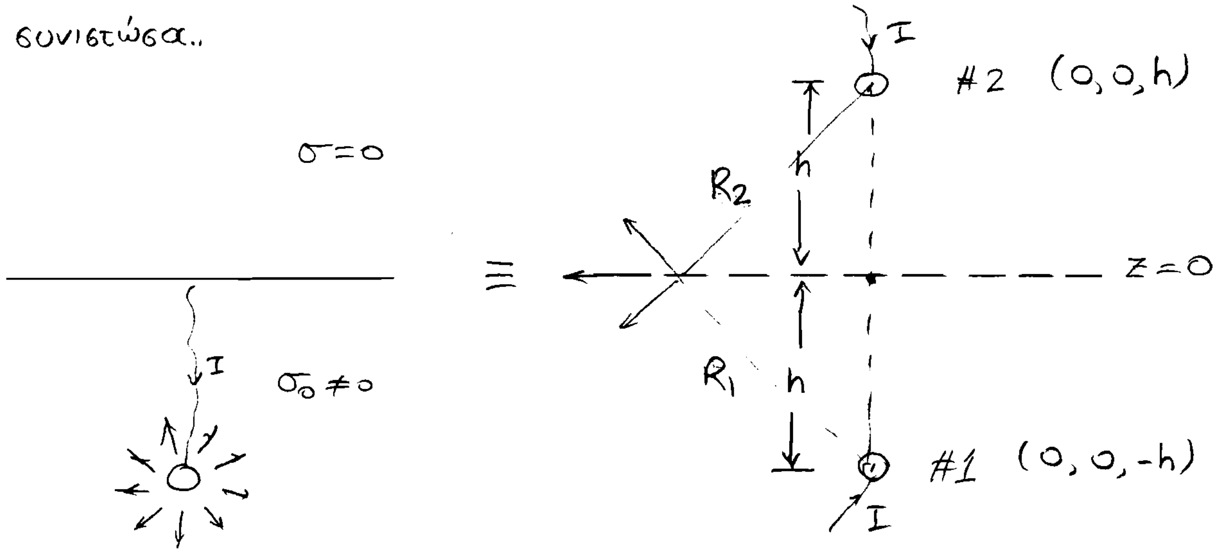
Επομένως η αντίσταση ανά μονάδα μήκους είναι:

$$R = \frac{U}{I} = \frac{\cancel{U}}{4\pi\sigma_0\frac{1}{a^2}\frac{\cancel{U}}{\frac{1}{a^2}-\frac{1}{b^2}}} = \frac{1}{4\pi\sigma_0}\left(\frac{1/a^2-1/b^2}{1/a^2}\right) = \frac{1}{4\pi\sigma_0}\left(1-\frac{a^2}{b^2}\right)$$

ΑΣΚΗΣΗ 4:



(α) Η πυκνότητα ρεύματος στο επίπεδο $z=0$ δεν πρέπει να έχει z συνιστώσα..



$$\vec{J}_1 = \frac{I}{4\pi R_1^2}\hat{i}_{r_1} \qquad \vec{J}_2 = \frac{I}{4\pi R_2^2}\hat{i}_{r_2}$$

$\vec{J} = \vec{J}_1 + \vec{J}_2$ και στο $z=0$ $\quad \vec{J} = \dfrac{I}{4\pi R^2}\left(\hat{i}_{r_1} + \hat{i}_{r_2}\right)$

$$\hat{i}_{r_1} = \frac{\vec{r}-\vec{r}_1}{|\vec{r}-\vec{r}_1|} = \frac{x\hat{i}_x + y\hat{i}_y + (z-h)\hat{i}_z}{[x^2+y^2+(z-h)^2]^{1/2}}$$

$$\hat{i}_{r_2} = \frac{\vec{r}-\vec{r}_2}{|\vec{r}-\vec{r}_2|} = \frac{x\hat{i}_x + y\hat{i}_y + (z+h)\hat{i}_z}{[x^2+y^2+(z+h)^2]^{1/2}}$$

$z=0 \quad R_1 = R_2 = \sqrt{x^2+y^2+h^2} = R, \quad \hat{i}_{r_1} = \frac{1}{R}\left[x\hat{i}_x + y\hat{i}_y - h\hat{i}_z\right]$

$\hat{i}_{r_2} = \frac{1}{r}\left[x\hat{i}_x + y\hat{i}_y + h\hat{i}_z \right]$. Επομένως $\hat{i}_{r_1} + \hat{i}_{r_2} = 2\frac{x\hat{i}_x + y\hat{i}_y}{r}$

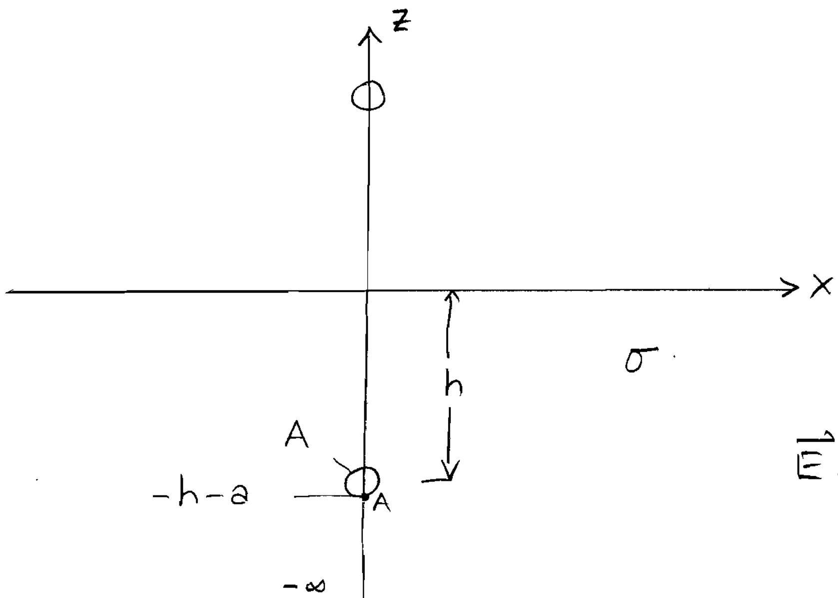
Επομένως για $z<0$:

$$\vec{J} = \frac{I}{4\pi}\left(\frac{1}{R_1^2}\hat{i}_{r_1} + \frac{1}{R_2^2}\hat{i}_{r_2} \right) =$$

$$= \frac{I}{4\pi}\left[\frac{x\hat{i}_x + y\hat{i}_y + (z-h)\hat{i}_z}{[x^2+y^2+(z-h)^2]^{3/2}} + \frac{x\hat{i}_x + y\hat{i}_y + (z+h)\hat{i}_z}{[x^2+y^2+(z+h)^2]^{3/2}} \right]$$

Για $z>0$, $J=0$.

(β)



$\vec{E} = \frac{\vec{J}}{\sigma}$

$$\underset{\substack{\| \\ 0}}{V_A - V_{-\infty}} = -\int_A^{-\infty} \vec{E}\cdot d\vec{r}$$

(οποιοδήποτε διαδρομή λόγω του αστροβίλου είναι αποδεκτή).

Διαλέγουμε την διαδρομή $A \longrightarrow -\infty$.

$$V_A - 0 = -\int_{z=-h-a}^{-\infty} \vec{E}\cdot\hat{i}_z\, dz = -\int_{-h-a}^{-\infty} E_z(z)\, dz$$

$$E_z(z) = \frac{I}{4\pi\sigma}\left[\frac{1}{(z-h)^2} + \frac{1}{(z+h)^2} \right]$$

$$V_A = -\frac{I}{4\pi\sigma}\int_{-(h+a)}^{-\infty}\left(\frac{1}{(z-h)^2}+\frac{1}{(z+h)^2}\right)dz =$$

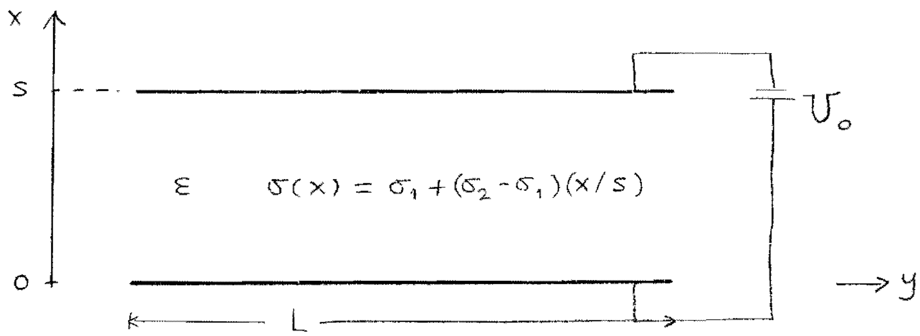
$$= \frac{I}{4\pi\sigma}\int_{-\infty}^{-(h+a)}\left[\frac{1}{(z-h)^2}+\frac{1}{(z+h)^2}\right]dz =$$

$$= \frac{I}{4\pi\sigma}\left[\left(-\frac{1}{z-h}\right)_{-\infty}^{-(h+a)}+\left(-\frac{1}{z+h}\right)_{-\infty}^{-(h+a)}\right]$$

$$= \frac{I}{4\pi\sigma}\left[\frac{1}{2h+a}+\frac{1}{a}\right]$$

$$R = \frac{V_A}{I} = \frac{1}{4\pi\sigma}\left[\frac{1}{2h+a}+\frac{1}{a}\right]$$

ΑΣΚΗΣΗ 5:



(α) $\vec{\nabla}\cdot\vec{J} = 0 \Rightarrow \vec{\nabla}\circ(\sigma(x)\vec{E}) = 0$, $\vec{E} = -\vec{\nabla}\Phi$ $\Big\}$ $\vec{\nabla}\circ(\sigma(x)(-\vec{\nabla}\Phi)) = 0$

$$-\vec{\nabla}\circ\left[\sigma(x)\frac{d\Phi}{dx}\hat{i}_x\right] = 0 \Rightarrow \frac{d}{dx}\left[\sigma(x)\frac{d\Phi}{dx}\right] = 0$$

$$\sigma(x)\frac{d\Phi}{dx} = A \Rightarrow \frac{d\Phi}{dx} = \frac{A}{\sigma(x)} = \frac{A}{\sigma_1 + (\sigma_2-\sigma_1)\frac{x}{s}} \Rightarrow$$

$$\Phi(x) = \frac{s}{\sigma_2-\sigma_1}A\,\ln\left[\sigma_1 + (\sigma_2-\sigma_1)\frac{x}{s}\right] + B$$

$$\Phi(0) - \Phi(s) = U = \frac{s}{\sigma_2-\sigma_1}A\,\ln[\sigma_1] + \cancel{B} - \frac{s}{\sigma_2-\sigma_1}A\,\ln(\sigma_2) - \cancel{B}$$

$$A\frac{s}{\sigma_2-\sigma_1}\ln(\sigma_1/\sigma_2) = U \Rightarrow A = \frac{\sigma_2-\sigma_1}{s}\,\frac{U}{\ln(\sigma_1/\sigma_2)}$$

Επομένως $\Phi(x) = \dfrac{\sigma_2-\sigma_1}{s}\,\dfrac{s}{\sigma_2-\sigma_1}\,\dfrac{U}{\ln(\sigma_1/\sigma_2)}\cdot\ln\left[\sigma_1 + (\sigma_2-\sigma_1)\dfrac{x}{s}\right] + B$

$\rightarrow \Phi(x) = -\dfrac{U}{\ln(\sigma_2/\sigma_1)}\ln\left[\sigma_1 + (\sigma_2-\sigma_1)\dfrac{x}{s}\right] + B$, Αλλά $\Phi(s) = 0 \rightarrow$

$B = \dfrac{U}{\ln(\sigma_2/\sigma_1)}\ln\sigma_2 \;\sim\; \Phi(x) = -\dfrac{U}{\ln(\sigma_2/\sigma_1)}\ln\left[\dfrac{\sigma_1}{\sigma_2} + \left(1-\dfrac{\sigma_1}{\sigma_2}\right)\left(\dfrac{x}{s}\right)\right]$

(β) $\vec{E} = -\vec{\nabla}\Phi = -\dfrac{d\Phi}{dx}\hat{i}_x = \dfrac{U}{\ln(\sigma_2/\sigma_1)}\cdot\dfrac{1}{\frac{\sigma_1}{\sigma_2} + \left(1-\frac{\sigma_1}{\sigma_2}\right)\frac{x}{s}}\left(1-\dfrac{\sigma_1}{\sigma_2}\right)\dfrac{1}{s}\hat{i}_x =$

$$= \hat{i}_x\frac{U}{\ln(\sigma_2/\sigma_1)}\,\frac{1}{\sigma_1 + (\sigma_2-\sigma_1)(x/s)}\,\frac{\sigma_2-\sigma_1}{s}$$

(γ) $\vec{J} = \sigma(x)\vec{E} = \hat{i}_x\dfrac{U}{\ln(\sigma_2/\sigma_1)}\cdot\left(\dfrac{\sigma_2-\sigma_1}{s}\right)$

(δ) $R = \dfrac{U}{I}$ $\quad I = \int\vec{J}\cdot d\vec{S} = \iint \hat{i}_x J_o\cdot\hat{i}_x\,dy\,dz =$

$= J_o L d$

Επομένως $R = \dfrac{\cancel{U}}{\dfrac{\cancel{U}}{\ln(\sigma_2/\sigma_1)}\left(\dfrac{\sigma_2-\sigma_1}{s}\right) L d} = \dfrac{s \ln(\sigma_2/\sigma_1)}{(\sigma_2-\sigma_1) L d}$

(ε) $\rho = \vec{\nabla}\cdot\vec{D} = \epsilon \dfrac{dE}{dx} = \epsilon \dfrac{U}{\ln(\sigma_2/\sigma_1)} \dfrac{\sigma_2-\sigma_1}{s} \cdot \dfrac{-1}{\left(\sigma_1+(\sigma_2-\sigma_1)\frac{x}{s}\right)^2}\left(\dfrac{\sigma_2-\sigma_1}{s}\right)$

$$\rightarrow \rho(x) = -\left(\frac{\sigma_2-\sigma_1}{s}\right)^2 \frac{\epsilon U}{\ln(\sigma_2/\sigma_1)} \cdot \frac{1}{\left[\sigma_1+(\sigma_2-\sigma_1)\frac{x}{s}\right]^2} = \frac{-\rho_0}{\left(\sigma_1+(\sigma_2-\sigma_1)\frac{x}{s}\right)^2}$$

$$q = \int \rho(x)\, dV = \iiint \rho(x)\, dx\, dy\, dz =$$

$$= Ld\int_0^s \rho(x)\, dx = Ld\int_0^s \frac{-\rho_0}{\left(\sigma_1+(\sigma_2-\sigma_1)\frac{x}{s}\right)^2}\, dx$$

$$= -\rho_0 L d \frac{s}{\sigma_2-\sigma_1}\left[-\frac{1}{\left(\sigma_1+(\sigma_2-\sigma_1)\frac{x}{s}\right)}\right]_0^s =$$

$$= \rho_0 L d \frac{s}{\sigma_2-\sigma_1}\left[\frac{1}{\sigma_2}-\frac{1}{\sigma_1}\right] = \left(\frac{\sigma_2-\sigma_1}{s}\right)\frac{U\epsilon}{\ln(\sigma_2/\sigma_1)} L d \left(\frac{1}{\sigma_2}-\frac{1}{\sigma_1}\right)$$

$$\sigma(x=0) = \hat{i}_x \cdot (\vec{D}-0) = \hat{i}_x \cdot \epsilon \hat{i}_x E(0) =$$

$$= \epsilon \frac{U}{\ln(\sigma_2/\sigma_1)} \frac{1}{\sigma_1} \frac{\sigma_2-\sigma_1}{s} = \frac{\epsilon}{\sigma_1}\frac{U(\sigma_2-\sigma_1)}{s \ln(\sigma_2/\sigma_1)}$$

$$\sigma(x=s) = -\hat{i}_x \cdot (\vec{D}-0) = -\hat{i}_x \cdot \epsilon \hat{i}_x E(s) =$$

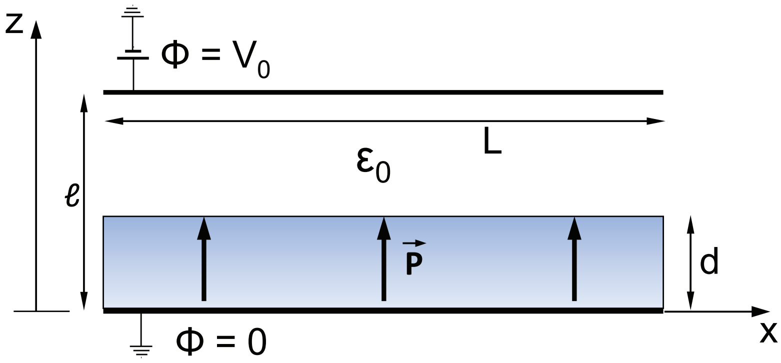
$$= -\epsilon \frac{U}{\ln(\sigma_2/\sigma_1)} \cdot \frac{1}{\sigma_2} \frac{\sigma_2-\sigma_1}{s} = -\frac{\epsilon}{\sigma_2}\frac{U(\sigma_2-\sigma_1)}{s \ln(\sigma_2/\sigma_1)}$$

Ολικό επιφανειακό φορτίο:

$$\sigma_{o\lambda} = [\sigma(x=0) + \sigma(x=s)]\, L d =$$

$$= \frac{U(\sigma_2-\sigma_1)}{s \ln(\sigma_2/\sigma_1)} \epsilon \left[\frac{1}{\sigma_1}-\frac{1}{\sigma_2}\right] L d = -q$$

ΑΣΚΗΣΗ 6:



Σχήμα 1: Πυκνωτής παραλλήλων πλακών με στρώμα ηλεκτρίτη μεταβλητής πόλωσης.

(α) Εφόσον δεν υπάρχουν ελεύθερα χωρικά φορτία στην πλάκα του ηλεκτρίτη ισχύουν τα ακόλουθα:

$$\begin{aligned}
\vec{\nabla}\cdot\vec{D} &= 0 \Longrightarrow \vec{\nabla}\cdot\left(\epsilon_0\vec{E}+\vec{P}\right) \Longrightarrow \\
\vec{\nabla}\cdot\vec{E} &= -\frac{\vec{\nabla}\cdot\vec{P}}{\epsilon_0} \Longrightarrow \\
\nabla^2\Phi_1 &= \frac{\vec{\nabla}\cdot\vec{P}}{\epsilon_0} = \frac{1}{\epsilon_0}\frac{2P_0 z}{d^2} \Longrightarrow \\
\Phi_1(z) &= \frac{P_0}{\epsilon_0 d^2}\frac{z^3}{3} + C_1 z + C_2,
\end{aligned}$$

όπου $\Phi_1(z)$ είναι το δυναμικό στην περιοχή του ηλεκτρίτου ($0 \leq z \leq d$). Το δυναμικό στον αέρα, $\Phi_2(z)$, ($d \leq z \leq \ell$) δίδεται από την εξίσωση:

$$\Phi_2(z) = C_3 z + C_4.$$

Για να βρεθούν οι άγνωστοι συντελεστές πρέπει να ικανοποιούνται όλες οι οριακές συνθήκες. Αυτές είναι οι ακόλουθες:

$$\Phi_1(z=0) = 0 \Longrightarrow C_2 = 0,$$

$$
\begin{aligned}
\Phi_2(z=\ell) &= V_0 \Longrightarrow C_3\ell + C_4 = V_0,\\
\Phi_1(z=d) &= \Phi_2(z=d) \Longrightarrow \frac{P_0}{\epsilon_0}\frac{d^2}{3} + C_1 d = C_3 d + C_4,\\
D_{2z} - D_{1z} &= 0 \Longrightarrow \epsilon_0(-C_3) - [\epsilon_0(-\frac{P_0}{\epsilon_0} - C_1) + P_0].
\end{aligned}
$$

Επιλύοντας το σύστημα των ανωτέρω εξισώσεων βρίσουμε τις ακόλουθες τιμές των αγνώστων συντελεστών:

$$
\begin{aligned}
C_1 &= \frac{1}{\ell}\left(V_0 - \frac{P_0}{\epsilon_0}\frac{d}{3}\right),\\
C_2 &= 0,\\
C_3 &= \frac{1}{\ell}\left(V_0 - \frac{P_0}{\epsilon_0}\frac{d}{3}\right),\\
C_4 &= \frac{P_0}{\epsilon_0}\frac{d}{3}.
\end{aligned}
$$

Συνοψίζοντας το ηλεκτρικό δυναμικό δίδεται από τις ακόλουθες εξισώσεις:

$$
\begin{aligned}
\Phi_1(z) &= \frac{P_0}{\epsilon_0}\frac{z^3}{3d^2} + \frac{1}{\ell}\left(V_0 - \frac{P_0}{\epsilon_0}\frac{d}{3}\right)z,\\
\Phi_2(z) &= \frac{1}{\ell}\left(V_0 - \frac{P_0}{\epsilon_0}\frac{d}{3}\right)z + \frac{P_0}{\epsilon_0}\frac{d}{3}.
\end{aligned}
$$

(β) Το ηλεκτρικό πεδίο είναι της μορφής $\vec{E} = -(d\Phi/dz)\hat{\imath}_z$ και επομένως στις περιοχές 1 (ηλεκτρίτης) και 2 (αέρας) δίδεται από τις ακόλουθες σχέσεις:

$$
\begin{aligned}
\vec{E}_1(z) &= -\left[\frac{P_0}{\epsilon_0}\frac{z^2}{d^2} + \frac{1}{\ell}\left(V_0 - \frac{P_0}{\epsilon_0}\frac{d}{3}\right)\right]\hat{\imath}_z,\\
\vec{E}_2(z) &= -\left[\frac{1}{\ell}\left(V_0 - \frac{P_0}{\epsilon_0}\frac{d}{3}\right)\right]\hat{\imath}_z.
\end{aligned}
$$

(γ) Τα δέσμια φορτία δίδονται από τις ακόλουθες σχέσεις:

$$
\begin{aligned}
\rho_b(z) &= -\vec{\nabla}\cdot\vec{P} = -P_0\frac{2z}{d^2},\\
\sigma_b(z=0^+) &= (-\vec{\imath}_z)\cdot\vec{P}(z=0^+) = 0,\\
\sigma_b(z=d^-) &= (+\vec{\imath}_z)\cdot\vec{P}(z=d^-) = P_0.
\end{aligned}
$$

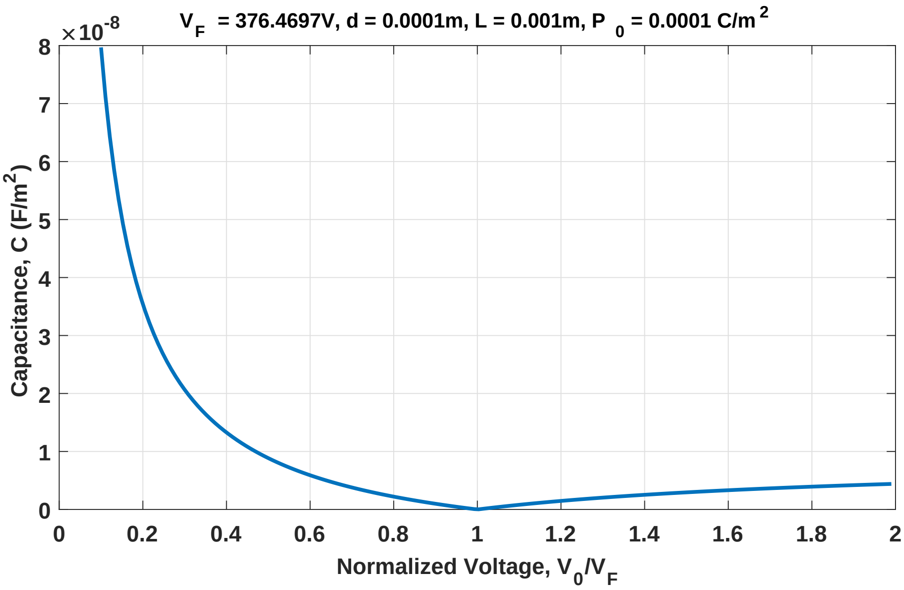
Τα ελεύθερα φορτία δίδονται από τις ακόλουθες σχέσεις:

$$\begin{aligned}\sigma(z=0) &= (+\vec{i}_z)\cdot\vec{D}_1(z=0) = -\epsilon_0\frac{1}{\ell}\left(V_0 - \frac{P_0}{\epsilon_0}\frac{d}{3}\right),\\ \sigma(z=\ell) &= (-\vec{i}_z)\cdot\vec{D}_2(z=\ell) = \epsilon_0\frac{1}{\ell}\left(V_0 - \frac{P_0}{\epsilon_0}\frac{d}{3}\right).\end{aligned}$$

(δ) Η χωρητικότητα C (ανά μονάδα επιφάνειας) δίδεται από την ακόλουθη σχέση:

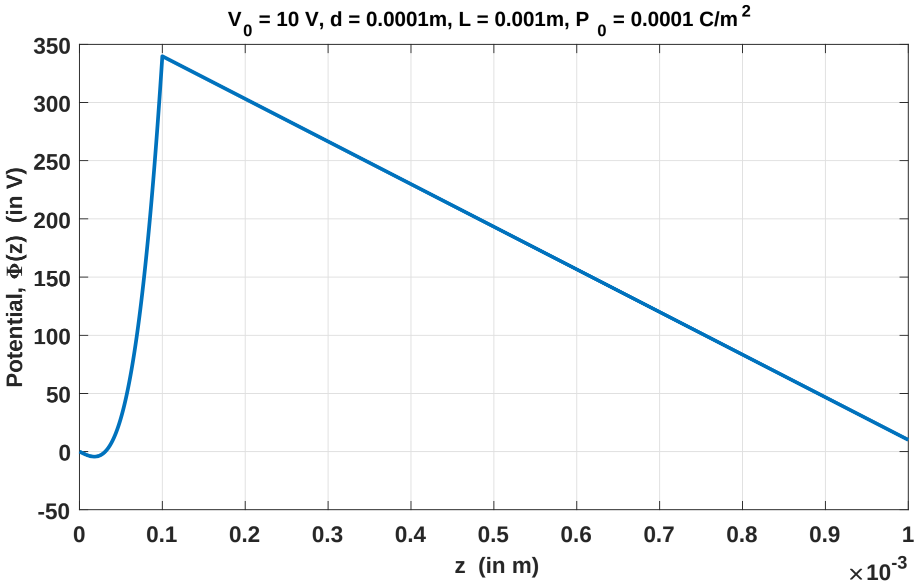
$$C = \frac{|\sigma(z=\ell)|LW}{V_0} = \epsilon_0\frac{LW}{\ell}\left|1 - \frac{P_0 d}{\epsilon_0 3}\frac{1}{V_0}\right|.$$

Παρατηρούμε ότι η χωρητικότητα είναι μη γραμμική και μηδενίζεται για $V_0 = V_F = P_0 d/3\epsilon_0$.

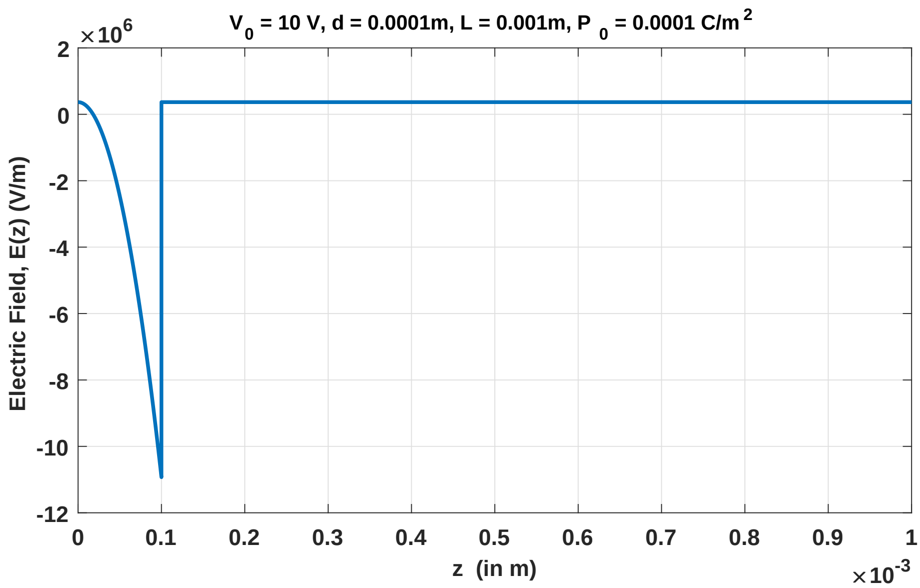


Σχήμα 2: Η χωρητικότητα C (ανά μονάδα επιφάνειας) του πυκνωτή παραλλήλων πλακών με στρώμα ηλεκτρίτη (μεταβλητής πόλωσης) σαν συνάρτηση της κανονικοποιημένης διαφοράς δυναμικού V_0/V_F. Οι παράμετροι που χρησιμοποιήθηκαν είναι $P_0 = 10^{-4}\,C/m^2$, $d = 100\,\mu m$, και $\ell = 1\,mm$.

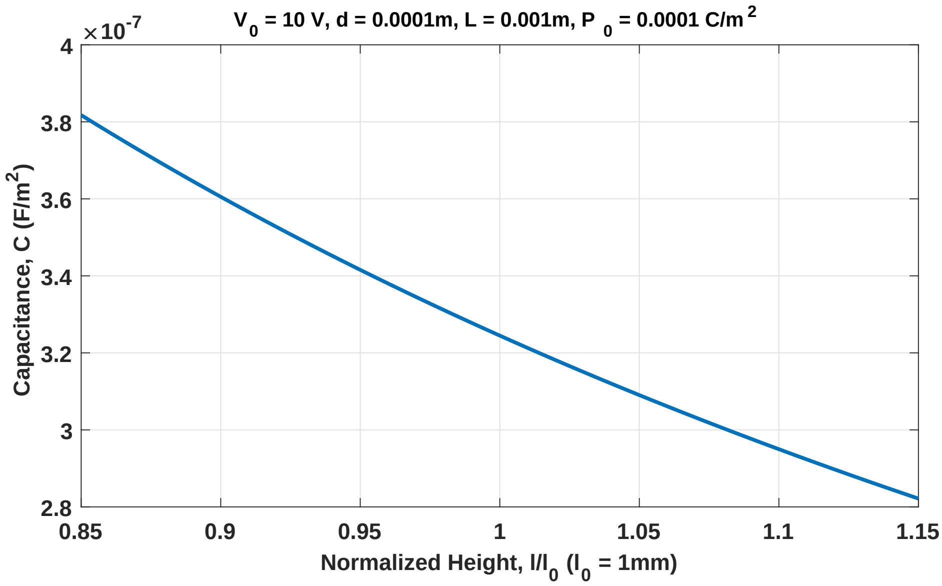
(ε) Οι παράμετροι που χρησιμοποιήθηκαν σε αυτό το ερώτημα είναι $P_0 = 10^{-4}\,C/m^2$, $d = 100\,\mu m$, $\ell = 1\,mm$, και $V_0 = 10\,V$.



Σχήμα 3: Το ηλεκτροστατικό δυναμικό $\Phi(z)$ του πυκνωτή παραλλήλων πλακών με στρώμα ηλεκτρίτη (μεταβλητής πόλωσης) σαν συνάρτηση της απόστασης z. Οι παράμετροι που χρησιμοποιήθηκαν είναι $P_0 = 10^{-4}\,C/m^2$, $d = 100\,\mu m$, $\ell = 1\,mm$, και $V_0 = 10\,V$..



Σχήμα 4: Το ηλεκτρικό πεδίο $\vec{E}(z)$ του πυκνωτή παραλλήλων πλακών με στρώμα ηλεκτρίτη (μεταβλητής πόλωσης) σαν συνάρτηση της απόστασης z. Οι παράμετροι που χρησιμοποιήθηκαν είναι $P_0 = 10^{-4}\,C/m^2$, $d = 100\,\mu m$, $\ell = 1\,mm$, και $V_0 = 10\,V$..



Σχήμα 5: Η χωρητικότητα C (ανά μονάδα επιφάνειας) του πυκνωτή παραλλήλων πλακών με στρώμα ηλεκτρίτη (μεταβλητής πόλωσης) σαν συνάρτηση της κανονικοποιημένης απόστασης ℓ/ℓ_0. Οι παράμετροι που χρησιμοποιήθηκαν είναι $P_0 = 10^{-4}\,C/m^2$, $d = 100\,\mu m$, $\ell_0 = 1\,mm$, και $V_0 = 10\,V$..