Χρηστος Τσιφης
03117176

6η Σειρά Ασκήσεων

Άσκηση 2 (9.9)

a). $-\nabla \vec{P} = \rho_P$ και $\vec{p}\cdot\hat{n} = \sigma_P$ οπότε $\sigma_P = \vec{P}_{(r=a)}\cdot(-\hat{r}) = -P_0$

· $\nabla \vec{P} = \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{r^2 P_0 a^3}{r^3}\right) = -\frac{P_0 a^3}{r^4}$ οπότε $\rho_P = \frac{P_0 a^3}{r^4}$ και $\sigma_P = -P_0$

· $Q_{ολ} = \int \rho_P dV + \int \sigma_P dS = \int \frac{P_0 a^3}{r^2} \sin\theta \, dr \, d\varphi \, d\theta - P_0 4\pi a^2 \Rightarrow$

$\Rightarrow Q_{ολ} = \int \frac{P_0 a^3 4\pi}{r^2} dr - P_0 4\pi a^2 = P_0 a^3 4\pi \left[-\frac{1}{r}\right]_a^{\infty} - P_0 4\pi a^2 = 0$

β) Το P οφείλεται στα ελεύθερα φορτία άρα:

$\nabla\cdot D = 0$ και $\nabla\times D = \nabla\times P = 0$ οπότε έχει μοναδική λύση $D = 0$.

· $\vec{D} = \varepsilon_0 \vec{E} + \vec{P} \Rightarrow \vec{E} = -\frac{\vec{P}}{\varepsilon_0}$

για $0<r<a$: $\vec{E} = 0$, αφού έχουμε αέρα και $D = 0$

για $r>a$: $\vec{E} = -\frac{\vec{P}}{\varepsilon_0} = -\frac{P_0}{\varepsilon_0}\left(\frac{a}{r}\right)^3 \hat{r}$

• Για το δυναμικό ισχύει:

$E = -\nabla\Phi \Rightarrow$

$\frac{\partial\Phi}{\partial r} = \frac{P_0}{\varepsilon_0}\left(\frac{a}{r}\right)^3 \Rightarrow$

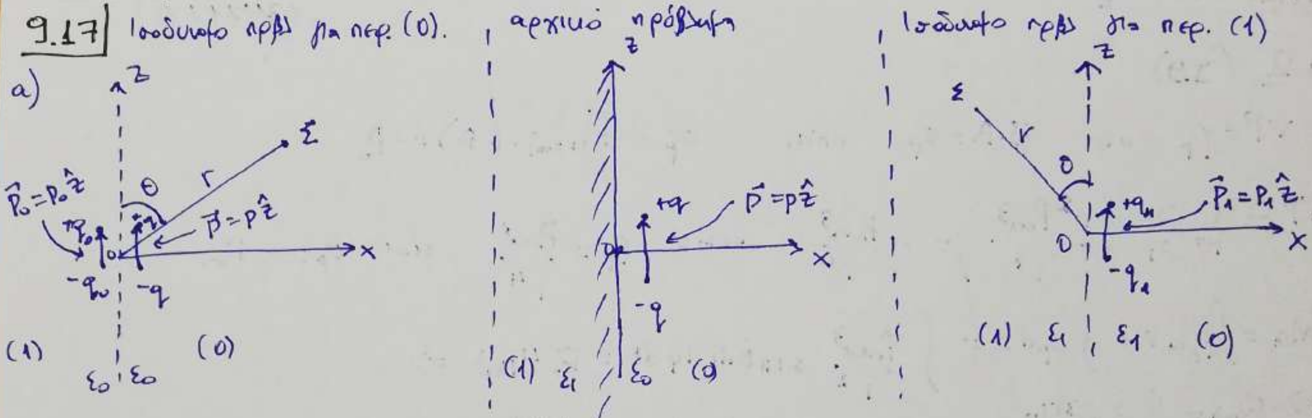
$\Phi(r) = -\frac{P_0 a^3}{2\varepsilon_0}\cdot\frac{1}{r^2} + C$

Για αναφορά στο $+\infty \rightarrow C = 0$

Άσκηση 1

$\boxed{9.17}$

a)



Θεωρούμε ότι το δίπολο $\vec{p}$ αποτελείται από τα αντίθετα φορτία $+q$ και $-q$, με $\vec{p} = q\vec{d}$. Επομένως, εφαρμόζοντας με τη μέθοδο των ειδώλων, βρίσκουμε από το παραπάνω σχήμα της θέσεις για τα $\pm q_0, \pm q_1$ έχοντας υπόθεση ότι το δίπολο βρίσκεται στη θέση $x=0^+$, θα είναι:

$$q_0 = \frac{\varepsilon_0-\varepsilon_1}{\varepsilon_0+\varepsilon_1}q, \quad -q_0 = \frac{\varepsilon_1-\varepsilon_0}{\varepsilon_0+\varepsilon_1}q, \quad q_1 = \frac{2\varepsilon_1}{\varepsilon_0+\varepsilon_1}q, \quad -q_1 = \frac{-2\varepsilon_1}{\varepsilon_0+\varepsilon_1}q$$

Άρα, $\vec{P}_0 = q_0\vec{d} = \frac{\varepsilon_0-\varepsilon_1}{\varepsilon_0+\varepsilon_1}q\vec{d} \Rightarrow \vec{P}_0 = \frac{\varepsilon_0-\varepsilon_1}{\varepsilon_0+\varepsilon_1}\vec{P}$

και $\vec{P}_1 = q_1\vec{d} = \frac{2\varepsilon_1}{\varepsilon_0+\varepsilon_1}q\vec{d} \Rightarrow \vec{P}_1 = \frac{2\varepsilon_1}{\varepsilon_0+\varepsilon_1}\vec{P}$

Οπότε,
$$\Phi_0 = \frac{P+P_0}{4\pi\varepsilon_0 r^2}\cos\theta = \frac{P + \frac{\varepsilon_0-\varepsilon_1}{\varepsilon_0+\varepsilon_1}P}{4\pi\varepsilon_0 r^2}\cos\theta \Rightarrow \Phi_0 = \frac{P\cos\theta}{4\pi\varepsilon_0 r^2}\left(1+\frac{\varepsilon_0-\varepsilon_1}{\varepsilon_0+\varepsilon_1}\right) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \Phi_0 = \frac{P\cos\theta}{4\pi\varepsilon_0 r^2}\cdot\frac{\varepsilon_0+\varepsilon_1+\varepsilon_0-\varepsilon_1}{\varepsilon_0+\varepsilon_1} \Rightarrow \Phi_0 = \frac{P\cos\theta}{2\pi r^2(\varepsilon_0+\varepsilon_1)}$$

και
$$\vec{E}_0 = \frac{P+P_0}{4\pi\varepsilon_0 r^3}(2\cos\theta\,\hat{r}+\sin\theta\,\hat{\theta}) = \frac{P+\frac{\varepsilon_0-\varepsilon_1}{\varepsilon_0+\varepsilon_1}P}{4\pi\varepsilon_0 r^3}(2\cos\theta\,\hat{r}+\sin\theta\,\hat{\theta}) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow E_0 = \frac{P\frac{2\varepsilon_0}{\varepsilon_0+\varepsilon_1}}{4\pi\varepsilon_0 r^3}(2\cos\theta\,\hat{r}+\sin\theta\,\hat{\theta}) \Rightarrow \vec{E}_0 = \frac{P}{2\pi r^3(\varepsilon_0+\varepsilon_1)}(2\cos\theta\,\hat{r}+\sin\theta\,\hat{\theta})$$

Επίσης,
$$\Phi_1 = \frac{P_1\cos\theta}{4\pi\varepsilon_1 r^2} = \frac{\frac{2\varepsilon_1}{\varepsilon_0+\varepsilon_1}P\cos\theta}{4\pi\varepsilon_1 r^2} \Rightarrow \Phi_1 = \frac{P\cos\theta}{2\pi r^2(\varepsilon_0+\varepsilon_1)}$$

και
$$\vec{E}_1 = \frac{P_1}{4\pi\varepsilon_1 r^3}(2\cos\theta\,\hat{r}+\sin\theta\,\hat{\theta}) = \frac{\frac{2\varepsilon_1}{\varepsilon_0+\varepsilon_1}P}{4\pi\varepsilon_1 r^3}(2\cos\theta\,\hat{r}+\sin\theta\,\hat{\theta}) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \vec{E}_1 = \frac{P}{2\pi r^3(\varepsilon_0+\varepsilon_1)}(2\cos\theta\,\hat{r}+\sin\theta\,\hat{\theta})$$

β) Στην περιοχή (0) : $\vec{P}_0 = \vec{0}$ (αέρας)

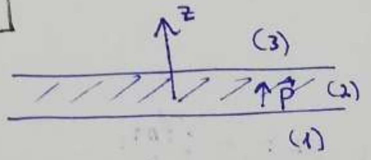
Στην περιοχή (1) : $\vec{P}_1 = (\varepsilon_1 - \varepsilon_0)\vec{E}_1 = (\varepsilon_1 - \varepsilon_0)\dfrac{p}{2\pi r^3(\varepsilon_0+\varepsilon_1)}(2\cos\theta\,\hat{r} + \sin\theta\,\hat{\theta})$

Οπότε, $\sigma_p = \hat{x}(\vec{P}_1 - \cancel{\vec{P}_0}^{\,0}) = \hat{x}\,(\varepsilon_1 - \varepsilon_0)\dfrac{p}{2\pi r^3(\varepsilon_0+\varepsilon_1)}(2\cos\theta\,\hat{r} + \sin\theta\,\hat{\theta}) =$

$$= \frac{2p\cos\theta(\varepsilon_1-\varepsilon_0)}{2\pi r^3(\varepsilon_0+\varepsilon_1)}\cancel{\hat{x}\cdot\hat{r}}^{\,0} + \frac{p\sin\theta(\varepsilon_1-\varepsilon_0)}{2\pi r^3(\varepsilon_0+\varepsilon_1)}\cancel{\hat{x}\cdot\hat{\theta}}^{\,0} \Rightarrow \sigma_p = 0.$$

9.1

a)



- $\rho_p = -\nabla P = -\dfrac{2P_0}{h^2}z$
- $\sigma_p(h) = P_0\dfrac{z^2}{h^2}\Big|_{z=h} = P_0$
- $\sigma_p(0) = -P_0\dfrac{z^2}{h^2}\Big|_{z=0} = 0$
- $Q_p = \int \rho_p\,dV + \int \sigma_p(h)\,dS =$

$$= \int_{x=-\infty}^{+\infty}\int_{y=-\infty}^{+\infty}\int_{z=0}^{h} -\frac{2P_0}{h^2}z\,dx\,dy\,dz + \int_{x=-\infty}^{+\infty}\int_{y=-\infty}^{+\infty} P_0\,dx\,dy\,dz =$$

$$= \int_{x=-\infty}^{+\infty}\int_{y=-\infty}^{+\infty} -P_0\,dx\,dy + \int_{x=-\infty}^{+\infty}\int_{y=-\infty}^{+\infty} P_0\,dx\,dy = \iint 0\,dx\,dy = 0$$

β) · Στις περιοχές 1, 3 το $\bar{D}$ ικανοποιεί την ομογενή-μηδενική ορ. συνθηκών εξ. οπότε $\bar{D}_{1,3} = \bar{0}$. Άρα $\bar{E}_{1,3} = \bar{0}$.

- $\nabla\cdot D_2 = 0 \Rightarrow \bar{D}_2 = \hat{z}\cdot c$
- Στο $z=0$: $-\hat{z}\cdot(-\hat{z}\cdot c) = 0 \Rightarrow c = 0$

Άρα $\bar{D}_2 = \bar{0} \Rightarrow \varepsilon_0\bar{E}_2 + \bar{P} = \bar{0} \Rightarrow \bar{E}_2 = -\dfrac{\bar{P}}{\varepsilon_0} = -P_0\dfrac{z^2}{h^2}\hat{z}$

γ) Όμοια και η $\bar{D}_2$ είναι μηδενική με τους ίδιους λόγους με την $\bar{D}_1$ και $\bar{D}_3$ (μοναδικότητα). Οπότε, το αποτέλεσμα $\bar{E}_2 = -\dfrac{\bar{P}}{\varepsilon_0}$ προκύπτει άμεσα.

9.13

▷ Λύνουμε το πρόβλημα για τον ενιαίο χώρο με ε_0 και θα δείξουμε ότι ταυτίζονται οι λύσεις.

α) $\nabla^2\Phi=0 \Rightarrow \frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial\Phi}{\partial r}\right)=0 \Rightarrow \Phi = C_1\ln r + C_2$

$$\left.\begin{aligned} r=a:\ \Phi(a)=0 &\Rightarrow C_1\ln a + C_2 = 0\\ r=b:\ \Phi(b)=V &\Rightarrow C_1\ln b + C_2 = V\end{aligned}\right\} \Rightarrow C_1=\frac{V}{\ln\frac{b}{a}},\quad C_2=-\frac{V\ln a}{\ln\frac{b}{a}}$$

Τελικά, $\Phi(r)=\frac{V}{\ln\frac{b}{a}}\left[\ln r-\ln a\right] \Rightarrow \Phi(r)=\frac{V}{\ln\frac{b}{a}}\cdot\ln\frac{r}{a}$ και λόγω μοναδικότητος ισχύει και στην αρχική περίπτωση.

β) $\bar{E}=-\nabla\Phi=-\frac{V}{\ln\frac{b}{a}}\cdot\frac{1}{r}\hat{r}$

i) Στο σύνορο ταυτίζονται οι δύο περιπτώσεις:

ii) $\nabla\times\bar{E}=\bar{0}$

iii) $\nabla\cdot\bar{D}_2=0$ άρα είναι το ίδιο πρόβλημα

iv) $\nabla\cdot\bar{D}_1=\nabla\varepsilon_1\bar{E}+\varepsilon_1\nabla\bar{E}=\frac{1}{r}\frac{\varepsilon_0}{\pi}\hat{\varphi}\hat{r}\,\frac{-V}{\ln\frac{b}{a}}\cdot\frac{1}{r}+\varepsilon_1\cdot 0=0$

Άρα, ικανοποιούνται όλες οι εξ. με $\bar{E}=-\frac{V}{\ln\frac{b}{a}}\cdot\frac{1}{r}\hat{r}$

· Για $0<\varphi<\pi$: $\hat{r}\left(\bar{D}_2(a)-\bar{0}\right)=\sigma_1 \Rightarrow \sigma_1=-\frac{\varepsilon_0 V}{a\ln\frac{b}{a}}$

· Για $\pi<\varphi<2\pi$: $\hat{r}\left(\bar{D}_1(a)-\bar{0}\right)=\sigma_2 \Rightarrow \sigma_2=-\frac{\varepsilon_0 V}{a\pi\ln\frac{b}{a}}\varphi=\frac{\sigma_1}{\pi}\varphi$

Άρα, $Q_p=\int_{\varphi=0}^{2\pi}\sigma\,dl_\varphi=\int_{\varphi=0}^{\pi}\sigma_1 a\,d\varphi+\int_{\varphi=\pi}^{2\pi}\sigma_2 a\,d\varphi=\sigma_1 a\pi+\frac{\sigma_1 a}{\pi}\left[\frac{\varphi^2}{2}\right]_{\pi}^{2\pi}=$

$$=\sigma_1 a\left(\pi+\frac{1}{\pi}\cdot\frac{3}{2}\pi^2\right)=\frac{5}{2}\sigma_1 a\pi=-\frac{5\pi}{2}\cdot\frac{\varepsilon_0 V}{\ln\frac{b}{a}}$$

$Q_p=C_p\cdot V \Rightarrow C_p=-\frac{5\pi}{2}\cdot\frac{\varepsilon_0}{\ln\frac{b}{a}}$ η χωρητικότητα ανά μονάδα μήκους.