3η Σειρά Ασκήσεων

ΧΡΗΣΤΟΣ ΤΣΟΥΦΗΣ
03117176

Άσκηση 1

• Για $Q_1=0$, $Q_2\neq 0$; $\Phi_1 = \frac{Q_2}{4\pi\varepsilon_0 c}$, $\Phi_2 = \frac{Q_2}{4\pi\varepsilon_0 c}$

οπότε, $P_{12} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0 c}$, $P_{22} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0 c}$

• Για $Q_2=0$, $\Phi_1 = \frac{Q_1}{8\pi\varepsilon_0 a} - \frac{Q_1 a}{8\pi\varepsilon_0 b^2} + \frac{Q_1}{4\pi\varepsilon_0 c}$, $\Phi_2 = \frac{Q_1}{4\pi\varepsilon_0 c}$

οπότε, $P_{11} = \frac{1}{8\pi\varepsilon_0 a} - \frac{a}{8\pi\varepsilon_0 b^2} + \frac{1}{4\pi\varepsilon_0 c}$

$$\tilde{P} = \begin{pmatrix} \frac{1}{8\pi\varepsilon_0 a} - \frac{a}{8\pi\varepsilon_0 b^2} + \frac{1}{4\pi\varepsilon_0 c} & \frac{1}{4\pi\varepsilon_0 c} \\ \frac{1}{4\pi\varepsilon_0 c} & \frac{1}{4\pi\varepsilon_0 c} \end{pmatrix} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0 c}\begin{pmatrix} \frac{1}{2a} - \frac{a}{2b^2} + \frac{1}{c} & \frac{1}{c} \\ \frac{1}{c} & \frac{1}{c} \end{pmatrix}$$

$$\tilde{C} = \tilde{P}^{-1} = \frac{2\pi\varepsilon_0 a}{b^2-a^2}\begin{pmatrix} 4b^2 & -4b^2 \\ -4b^2 & \frac{2cb^2}{a} - 2ac + 4b^2 \end{pmatrix}$$

Άρα, $C_{11} = \frac{8\pi\varepsilon_0 a b^2}{b^2-a^2}$, $C_{12} = C_{21} = \frac{8\pi\varepsilon_0 a b^2}{a^2-b^2}$

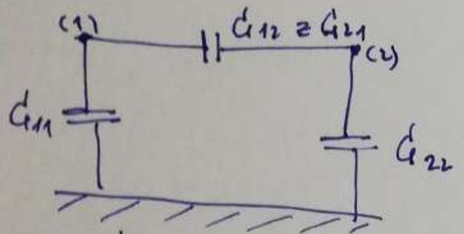
$$C_{22} = \frac{2\pi\varepsilon_0 \cancel{a}}{b^2-a^2}\left(\frac{2cb^2 - 2a^2c + 4ab^2}{\cancel{a}}\right)$$

$G_{11} = C_{11} + C_{12} = 0$, $G_{12} = -C_{12} = \frac{8\pi\varepsilon_0 a b^2}{b^2-a^2}$

$G_{21} = -C_{21} = \frac{8\pi\varepsilon_0 a b^2}{b^2-a^2}$, $G_{22} = \frac{4\pi\varepsilon_0}{(b^2-a^2)}(cb^2 - a^2c) = 4\pi\varepsilon_0 c$

Ισοδύναμο κύκλωμα:

$C_{12} = C_{21}$



$\phi = 0 \ (r \to \infty)$

$$C_{11} = C_{12} + \frac{C_{11} \cancel{C_{22}}^{\to 0}}{C_{11} + C_{22}} = \frac{8\pi\varepsilon_0 b^2 a}{b^2 - a^2}$$

Οπότε, τα C_{11}, C_{22} δεν συνεισφέρουν στην χωρητικότητα καθώς ο αγωγός 1-σφαίρα είναι βραχυκυκλωμένος, οπότε: $C_{11} = 0$ $\left(C \cdot V = q \Rightarrow C\frac{dV}{dt} = I \text{ άρα } I = 0\right)$

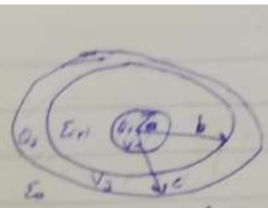
Αν η σφαίρα έχει κοιλότητα τότε:

- για $Q_1 = 0$, δεν επάγεται φορτίο από τον φλοιό στην σφαίρα διότι $E = 0$.
- για $Q_2 = 0$, αντίστοιχα το Q_1 βρίσκεται στην επιφάνεια της σφαίρας (ηλ. θωράκ.)

Επομένως, δεν αλλάζει το αποτέλεσμα αφού οι σφ. αυτά δεν συμμετέχουν. (Θεωρ. μοναδ.).

Άσκηση 1

$\varepsilon(r) = \frac{\varepsilon_0}{a} r \quad , a<r<b$



α) Για $a<r<b$: $\oiint \varepsilon(r) E_{r_1} r^2 \sin\theta \, d\theta \, d\varphi = Q_1 \Rightarrow \frac{4\pi\varepsilon_0}{a} \cdot r^3 E_{r_1} = Q_1 \Rightarrow$ $\boxed{E_{r_1} = \frac{aQ_1}{4\pi\varepsilon_0} \cdot \frac{1}{r^3}}$

· Για $r>c$: $\boxed{E_{r_2} = \frac{Q_1+Q_2}{4\pi\varepsilon_0} \cdot \frac{1}{r^2}}$

Θεωρώντας αναφορά στο $r \to +\infty$

$$\cdot\ \phi_2(r) = \int_r^{+\infty} E_{2r}\, dr = \frac{Q_1+Q_2}{4\pi\varepsilon_0 r} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0 r} Q_1 + \frac{1}{4\pi\varepsilon_0 r} Q_2$$

$$\cdot\ \phi_1(r) = \int_r^{b} E_{1r}\, dr + \int_c^{+\infty} E_{2r}\, dr = \frac{aQ_1}{4\pi\varepsilon_0}\Big[-\frac{1}{2r^2}\Big]_r^b + \frac{Q_1+Q_2}{4\pi\varepsilon_0 c} =$$

$$= \frac{aQ_1}{8\pi\varepsilon_0 r^2} - \frac{aQ_1}{8\pi\varepsilon_0 b^2} + \frac{Q_1+Q_2}{4\pi\varepsilon_0 c} =$$

$$= \Big(\frac{a}{8\pi\varepsilon_0 r^2} + \frac{1}{4\pi\varepsilon_0 c} - \frac{a}{8\pi\varepsilon_0 b^2}\Big) Q_1 + \frac{1}{4\pi\varepsilon_0 c} Q_2$$

Άρα $V_1 = \phi_1(a) = \Big[\frac{a}{8\pi\varepsilon_0 a^2} + \frac{1}{4\pi\varepsilon_0 c} - \frac{a}{8\pi\varepsilon_0 b^2}\Big] Q_1 + \Big(\frac{1}{4\pi\varepsilon_0 c}\Big) \cdot Q_2$

$$V_2 = \phi_2(c) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0 c} Q_1 + \frac{1}{4\pi\varepsilon_0 c} Q_2$$

Άρα ο πίνακας $\boxed{\bar{P} = \begin{bmatrix} \frac{a}{8\pi\varepsilon_0}\Big(\frac{1}{a^2} - \frac{1}{b^2}\Big) + \frac{1}{4\pi\varepsilon_0 c} & \frac{1}{4\pi\varepsilon_0 c} \\ \frac{1}{4\pi\varepsilon_0 c} & \frac{1}{4\pi\varepsilon_0 c} \end{bmatrix}}$

β) $\bar{C} = \bar{P}^{-1} = \frac{1}{\det(\bar{P})} \begin{bmatrix} \frac{1}{4\pi\varepsilon_0 c} & -\frac{1}{4\pi\varepsilon_0 c} \\ -\frac{1}{4\pi\varepsilon_0 c} & \frac{a}{8\pi\varepsilon_0}\Big(\frac{1}{a^2} - \frac{1}{b^2}\Big) + \frac{1}{4\pi\varepsilon_0 c} \end{bmatrix} =$

$$= \frac{(4\pi\varepsilon_0)^2}{\frac{a}{2c}\Big(\frac{1}{a^2} - \frac{1}{b^2}\Big) + \cancel{\frac{1}{c^2}} - \cancel{\frac{1}{c^2}}} \begin{bmatrix} \frac{1}{4\pi\varepsilon_0 c} & -\frac{1}{4\pi\varepsilon_0 c} \\ -\frac{1}{4\pi\varepsilon_0 c} & \frac{a}{8\pi\varepsilon_0}\Big(\frac{1}{a^2} - \frac{1}{b^2}\Big) + \frac{1}{4\pi\varepsilon_0 c} \end{bmatrix}$$

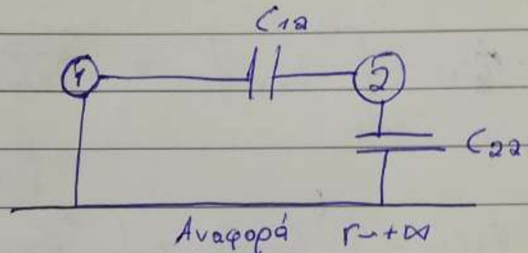
Άρα
$$\boxed{C = \begin{bmatrix} \frac{8\pi\varepsilon_0}{a\left(\frac{1}{a^2}-\frac{1}{b^2}\right)} & -\frac{8\pi\varepsilon_0}{a\left(\frac{1}{a^2}-\frac{1}{b^2}\right)} \\ -\frac{8\pi\varepsilon_0}{a\left(\frac{1}{a^2}-\frac{1}{b^2}\right)} & 4\pi\varepsilon_0 c + \frac{8\pi\varepsilon_0}{a\left(\frac{1}{a^2}-\frac{1}{b^2}\right)} \end{bmatrix}}$$

γ) $C_{12} = C_{21} = \frac{8\pi\varepsilon_0}{a\left(\frac{1}{a^2}-\frac{1}{b^2}\right)}$

$C_{11} = \sum_{j=1}^{2} c_{1j} = 0$

$C_{22} = \sum_{j=1}^{2} c_{2j} = 4\pi\varepsilon_0 c$

<u>Ισοδύναμο Κύκλωμα</u>



δ) Εφαρμόζοντας νόμο Gauss στην περιοχή $a<r<b$

$E_{r1}' = \frac{qQ_1}{4\pi\varepsilon_0} \cdot \frac{1}{r^3}$

Ίδιο με πριν,
άρα δεν αλλάζει κάτι
Επίσης, για $r<d$ προκύπτει $E_r = 0$
ίδιο με πριν αφού σε εκείνο το χώρο
είχαμε αγωγό