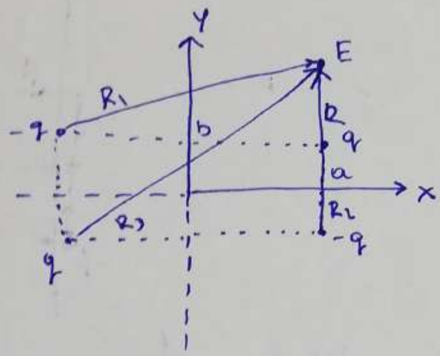
4η Σειρά Ασκήσεων

ΧΡΗΣΤΟΣ ΤΣΟΥΦΗΣ
03117176

Άσκηση 1 (8.11 βιβλ.)

α) Λύση με είδωλα:



$R = \sqrt{(x-a)^2+(y-b)^2+z^2}$

$R_1 = \sqrt{(x+a)^2+(y-b)^2+z^2}$

$R_2 = \sqrt{(x-a)^2+(y+b)^2+z^2}$

$R_3 = \sqrt{(x+a)^2+(y+b)^2+z^2}$

$$\Phi(x,y,z) = \frac{q}{4\pi\varepsilon}\left(\frac{1}{R} - \frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2} - \frac{1}{R_3}\right)$$ (αναφορά στο ∞)

β) $$\sigma(y=0) = -\left.\frac{\partial\Phi}{\partial y}\right|_{y=0}\cdot\varepsilon = -\frac{q}{4\pi\varepsilon}\left(\frac{2b}{((x-a)^2+b^2+z^2)^{3/2}} - \frac{2b}{((x+a)^2+b^2+z^2)^{3/2}}\right)\cdot\varepsilon =$$

$$= \frac{q\cdot b}{2\pi}\left(\frac{1}{((x-a)^2+b^2+z^2)^{3/2}} - \frac{1}{((x+a)^2+b^2+z^2)^{3/2}}\right)$$

$$\sigma(x=0) = -\left.\frac{\partial\Phi}{\partial x}\right|_{x=0}\cdot\varepsilon = -\frac{q}{4\pi\varepsilon}\left(\frac{2a}{(a^2+(y-b)^2+z^2)^{3/2}} - \frac{2a}{(a^2+(y+b)^2+z^2)^{3/2}}\right)\cdot\varepsilon =$$

$$= \frac{q\cdot a}{2\pi}\left(\frac{2a}{(a^2+(y+b)^2+z^2)^{3/2}} - \frac{2a}{(a^2+(y-b)^2+z^2)^{3/2}}\right)$$

γ) $\vec{F} = q\vec{E}'(x=a, y$ όπου $\vec{E}'$ το προερχόμενο από τα είδωλα πεδίο.

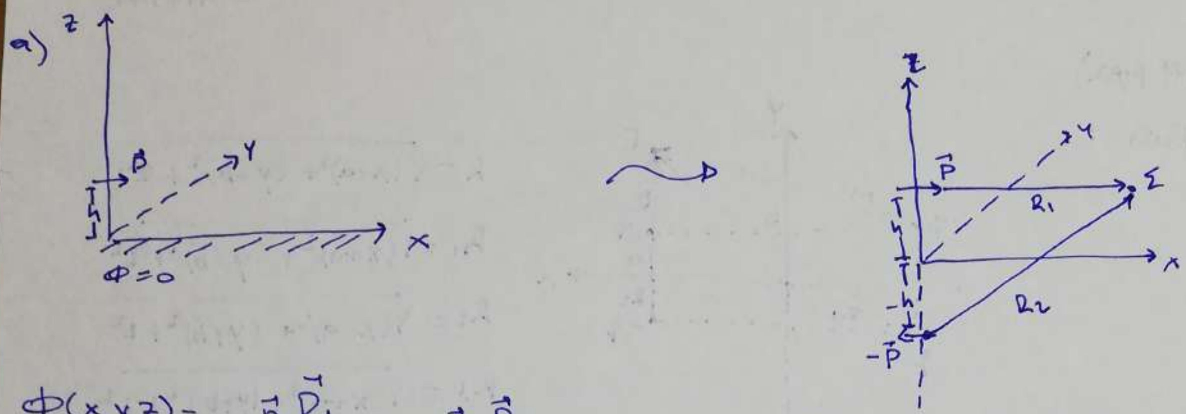
$$\vec{E}' = -\nabla\Phi' = \frac{q}{4\pi\varepsilon}\left(-\frac{(x+a)\hat{x}+(y-b)\hat{y}+z\cdot\hat{z}}{((x+a)^2+(y-b)^2+z^2)^{3/2}} + \frac{(x-a)\hat{x}+(y+b)\hat{y}+z\hat{z}}{((x-a)^2+(y+b)^2+z^2)^{3/2}} + \frac{(x+a)\hat{x}+(y+b)\hat{y}+z\hat{z}}{((x+a)^2+(y+b)^2+z^2)^{3/2}}\right.$$

Άρα, $$\vec{F} = \frac{q^2}{4\pi\varepsilon}\left(\frac{-2a\hat{x}+0\cdot\hat{z}+0\cdot\hat{y}}{(4a^2)^{3/2}} + \frac{-2b\hat{y}}{(4b^2)^{3/2}} + \frac{2a\hat{x}+2b\hat{y}}{(4a^2+4b^2)^{3/2}}\right) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \vec{F} = \frac{q^2}{4\pi\varepsilon}\left(\frac{2a}{(4a^2+4b^2)^{3/2}} - \frac{2a}{(4a^2)^{3/2}}\right)\hat{x} + \left(\frac{2b}{(4a^2+4b^2)^{3/2}} - \frac{2b}{(4b^2)^{3/2}}\right)\hat{y}$$

Άσκηση 2

α)

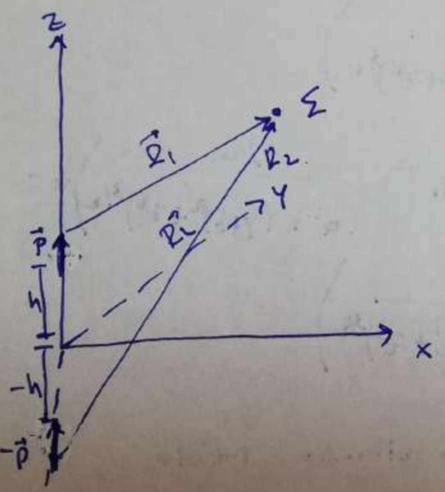


$$\Phi(x,y,z)= \frac{\vec{p}\cdot\vec{R}_1}{4\pi\varepsilon_0 R_1^2} - \frac{\vec{p}\cdot\vec{R}_2}{4\pi\varepsilon_0 R_2^2} = \frac{p\cdot x}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{1}{(x^2+y^2+(z-h)^2)} - \frac{1}{(x^2+y^2+(z+h)^2)}\right)$$

$z=0$: $\Phi(x,y,z)=0$, όπως στην περίπτωση του αγωγού.
$r\to\infty, z>0$: $\Phi(\vec{r})=0$

} Ίδιες λύσεις

β)



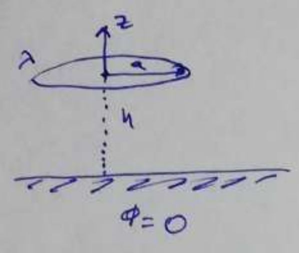
$$\Phi(x,y,z) = \frac{\hat{p}\cdot\vec{R}_1}{4\pi\varepsilon_0 R_1^2} + \frac{\hat{p}\cdot\vec{R}_2}{4\pi\varepsilon_0 R_2^2} \Rightarrow$$

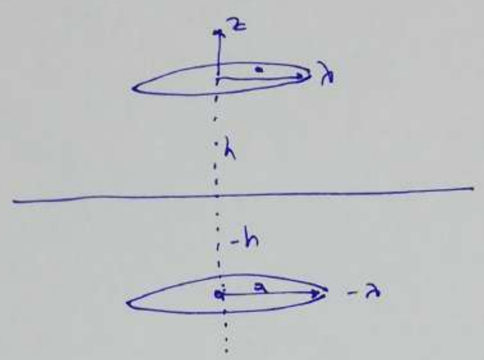
$$\Rightarrow \Phi(x,y,z) = \frac{p}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{z-h}{x^2+y^2+(z-h)^2} + \frac{z+h}{x^2+y^2+(z+h)^2}\right)$$

$z=0$: $\Phi(x,y,z)=0$, όπως στην περίπτωση του αγωγού.
$r\to\infty, z>0$: $\Phi(\vec{r})=0$

} Ίδιες λύσεις

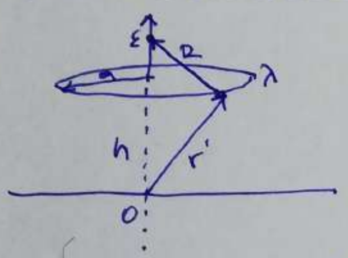
Άσκηση 3





Η λύση με τα είδωλα γίνεται με χρήση υπέρθεσης.

Δυναμικό στο z από κυκλ. γεωμ. φορτίο λ



$$\vec{R}=\vec{r}-\vec{r}'=(0,0,z)-(x',y',h)=(-x',-y',z-h)$$

$$\Phi(0,0,z)\overset{\text{επαλληλία}}{=\!=}\frac{1}{4\pi\varepsilon}\int_c\frac{\lambda}{R}\,dl=\frac{\lambda}{4\pi\varepsilon}\int_c\frac{1}{R}\,dl=\frac{\lambda}{4\pi\varepsilon}\int_c\frac{1}{x'^2+y'^2+(z-h)^2}\,dl_\varphi\overset{x'^2+y'^2=a^2}{=\!=}$$

$$=\frac{\lambda}{4\pi\varepsilon}\int_{\varphi=0}^{2\pi}\frac{1}{a^2+(z-h)^2}\cdot a\,d\varphi\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\Phi(0,0,z)=\frac{\lambda a}{2\varepsilon\left(a^2+(z-h)^2\right)}$$

Οπότε, για το είδωλο ισχύει: $\Phi(0,0,z)=\dfrac{\lambda a}{2\varepsilon(a^2+(z-h)^2)}-\dfrac{\lambda a}{2\varepsilon(a^2+(z+h)^2)}$

$$\left.\begin{aligned}&z=0:\ \Phi=0\\&r\to\infty,\ z>0:\ \Phi=0\end{aligned}\right\}\ \text{Ίδιες λύσεις.}$$