Οι αναλυτικές σειρές ασκήσεων είναι ατομικές, και οι λύσεις που θα δώσετε πρέπει να αντιπροσωπεύουν μόνο την προσωπική σας εργασία. Αν χρησιμοποιήσετε κάποια άλλη πηγή εκτός των σημειώσεων για την λύση σας, πρέπει να το αναφέρετε. Η παράδοση των λύσεων των αναλυτικών ασκήσεων της σειράς αυτής θα γίνει ηλεκτρονικά στο mycourses.ntua.gr και θα πρέπει να την υποβάλετε ως ένα ενιαίο αρχείο PDF με το εξής filename format χρησιμοποιώντας μόνο λατινικούς χαρακτήρες: `dsp20_hwk3_AM_FirstnameLastname.pdf`, όπου AM ειναι ο 8-ψήφιος αριθμός μητρώου σας. Σκαναριμένες χειρόγραφες λύσεις επιτρέπονται αρκεί να είναι καθαρογραμμένες και ευανάγνωστες. Επίσης στην 1η σελίδα των λύσεων θα αναγράφετε το ονοματεπώνυμο, AM, και email address σας.

Ασκηση 3.1: (Τυχαία διακριτά σήματα, Αυτοσυσχέτιση)
Έστω μια AR(1) στοχαστική ανέλιξη που δημιουργείται από την εξίσωση διαφορών

$$x[n] = \frac{1}{2}x[n-1] + v[n]$$

όπου $v[n]$ είναι λευκός θόρυβος με μεταβλητότητα $\sigma_v^2 = 1$.
(α) Να βρεθεί το (μιγαδικό) φάσμα ισχύος $P_x(z)$ του $x[n]$.
(β) Να βρεθεί η αυτοσυσχέτιση $r_x[k]$ του $x[n]$ από το φάσμα ισχύος $P_x(z)$.
(γ) Να βρεθεί η αυτοσυσχέτιση $r_x[k]$ του $x[n]$ λύνοντας τις εξισώσεις Yule-Walker (Ενότητα 3.6.2 του [1]). Συγκρίνετε τις μεθόδους (β) και (γ).

Ασκηση 3.2: (Τυχαία διακριτά σήματα, Φάσμα Ισχύος)
Έστω ότι μας δίνεται μια στοχαστική ανέλιξη $x[n]$ με μηδενική μέση τιμή και αυτοσυσχέτιση:

$$r_x[k] = 26\left(\frac{1}{4}\right)^{|k|} + 5\left(\frac{1}{4}\right)^{|k-1|} + 5\left(\frac{1}{4}\right)^{|k+1|}$$

(α) Να βρείτε το φάσμα ισχύος $P_x(z)$ ως συνάρτηση της μιγαδικής συχνότητας z.
(β) Να βρείτε το φάσμα ισχύος $P_x(e^{j\omega})$ ως πραγματική συνάρτηση της συχνότητας ω.
(γ) Με φασματική παραγοντοποίηση του $P_x(z)$, να βρείτε ένα αιτιατό και ευσταθές φίλτρο $H(z)$ το οποίο με είσοδο λευκό θόρυβο $v[n]$ μηδενικής μέσης τιμής και μοναδιαίας μεταβλητότητας θα δώσει μια στοχαστική ανέλιξη με τη δεδομένη αυτοσυσχέτιση.
Εξηγείστε την εργασία σας.

Ασκηση 3.3 (Σύγκριση FIR vs. IIR Wiener φίλτρων)
Εστω μια στοχαστική ανέλιξη $d[n]$ τύπου AR(1) που δημιουργείται από την εξίσωση διαφορών

$$d[n] = 0.7d[n-1] + w[n]$$

όπου $w[n]$ είναι λευκός θόρυβος μεταβλητότητας $\sigma_w^2 = 1$. Παρατηρούμε το σήμα

$$x[n] = d[n] + v[n]$$

όπου $v[n]$ είναι λευκός θόρυβος μεταβλητότητας $\sigma_v^2 = 1$ και ασυσχέτιστος με το σήμα $d[n]$.
(α) Να βρεθεί η αυτοσυσχέτιση $r_d[k]$. Εν συνεχεία, για αποθορυβοποίηση του σήματος $x[n]$

και προσεγγιστική εκτίμηση του $d[n]$ σχεδιάζομε τα εξής τρία διαφορετικά φίλτρα:
(β) Να σχεδιάσετε ένα βέλτιστο **FIR-2** φίλτρο Wiener με συνάρτηση μεταφοράς

$$W(z) = w[0] + w[1]z^{-1}$$

Να βρείτε την κρουστική απόκριση $w[n]$ του βέλτιστου φίλτρου και το αντίστοιχο προσδοκητέο τετραγωνικό λάθος $\xi_{fir2} = E\{|e[n]|^2\}$, όπου $e[n] = d[n] - x[n] * w[n]$.
(γ) Να σχεδιάσετε ένα βέλτιστο **FIR-3** φίλτρο Wiener με συνάρτηση μεταφοράς

$$W(z) = w[0] + w[1]z^{-1} + w[2]z^{-2}$$

Να βρείτε την κρουστική απόκριση $w[n]$ του βέλτιστου φίλτρου και το αντίστοιχο προσδοκητέο τετραγωνικό λάθος $\xi_{fir3} = E\{|e[n]|^2\}$.
(δ) Να σχεδιάσετε ένα βέλτιστο **μη-αιτιατό IIR** φίλτρο Wiener. Να βρείτε την συνάρτηση μεταφοράς $H_{nc}(z)$ του βέλτιστου φίλτρου, την κρουστική απόκριση $h_{nc}[n]$, και το αντίστοιχο προσδοκητέο τετραγωνικό λάθος $\xi_{iir,nc} = E\{|e[n]|^2\}$, όπου $e[n] = d[n] - x[n] * h_{nc}[n]$.
Συγκρίνετε τα λάθη των τριών ανωτέρω φίλτρων που σχεδιάσατε.
Εξηγείστε την εργασία σας.

Σημείωση: Η θεωρία των Wiener φίλτρων εξηγείται στο Κεφ. 7 του [1].

Ασκηση 3.4 Υπολογιστική Εκτίμηση Φάσματος Ισχύος τυχαίων σημάτων
Στόχος της άσκησης είναι η εκτίμηση του φάσματος ισχύος μιας τυχαίας διαδικασίας με δύο ελαφρώς διαφορετικές μη-παραμετρικές μεθόδους και η σύγκριση των αποτελεσμάτων σχετικά με την ικανότητα της κάθε μεθόδου να μην καλύπτει ασθενείς ημιτονοειδείς συνιστώσες που βρίσκονται κοντά σε ισχυρότερες. Οι δυο μέθοδοι που θα δοκιμαστούν είναι το περιόδογραμμα (periodogram) και το modified periodogram όπως στην Ενότητα 8.2.3 του [1].
Εστω ένα τυχαίο σήμα $x[n]$. Το *Περιοδόγραμμα* ενός τμήματος $x_N[n] = x[n]w_R[n]$ μήκους N δειγμάτων, όπου $w_R[n]$ ένα ορθογώνιο παράθυρο στο διάστημα $[0, ..., N-1]$, ισούται με:

$$\hat{P}_{per}(e^{j\omega}) = \frac{1}{N}\left|X_N(e^{j\omega})\right|^2 = \frac{1}{N}\left|\sum_{n=0}^{N-1} x[n]e^{-j\omega n}\right|^2, \tag{1}$$

Στην πράξη ο DTFT $X_N(e^{j\omega})$ του σήματος αντικαθίσταται από τον DFT $X_N[k]$, οπότε υπολογίζουμε το $\hat{P}_{per}(e^{j2\pi k/N})$.

Το *Τροποποιημένο Περιοδόγραμμα* (Modified Periodogram) χρησιμοποιεί ένα διαφορετικό (μη-ορθογώνιο) παράθυρο στο διάστημα $[0, ..., N-1]$ και ορίζεται ως

$$\hat{P}_M(e^{j\omega}) = \frac{1}{NU}\left|\sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n]w[n]e^{-j\omega n}\right|^2, \quad U = \frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-1}|w[n]|^2, \tag{2}$$

όπου U η ενέργεια του παραθύρου $w[n]$, το οποίο μπορεί να είναι ένα οποιοδήποτε μη-ορθογώνιο παράθυρο μήκους N, και στην περίπτωση μας θα χρησιμοποιηθεί το Hamming. Ως *εκτίμηση της στατιστικής μέσης τιμής του κάθε περιοδογράμματος* θα λάβετε τον αριθμητικό μέσο των περιοδογραμμάτων που θα προκύψουν επαναλαμβάνοντας 50 φορές το κάθε πείραμα (με διαφορετική πραγματοποίηση του θορύβου κάθε φορά). Το σήμα που θα χρησιμοποιηθεί θα είναι το άθροισμα δύο ημιτόνων με τυχαία φάση, με παρουσία προσθετικού λευκού θορύβου $v[n]$ μοναδιαίας μεταβλητότητας:

$$x[n] = 0.1\sin(\omega_1 n + \phi_1) + \sin(\omega_2 n + \phi_2) + v[n] \tag{3}$$

όπου ϕ_1 και ϕ_2 τυχαίες μεταβλητές ομοιόμορφα κατανεμημένες στο διάστημα $[0, 2\pi]$. Θεωρήστε $\omega_1 = 0.2\pi$, $\omega_2 = 0.3\pi$, και ως μήκος παραθύρου $N = 128$ και $N = 64$. Για υπολογισμούς και γραφήματα χρησιμοποιήστε ένα πακέτο λογισμικού, π.χ. Matlab ή Python.
Ζητούμενα:
(α) Κώδικας που να δημιουργεί το σήμα $x[n]$ και να παράγει τις διαφορετικές εκτιμήσεις του φάσματος ισχύος με τις δύο μεθόδους και τα δύο μήκη.
(β) Γραφήματα των εκτιμήσεων του φάσματος.
(γ) Σχολιασμός: Συγκρίνετε τα αποτελέσματα ως προς την φασματική ευκρίνεια (spectral resolution) και την φασματική επικάλυψη (spectral masking) του εκτιμώμενου φάσματος ισχύος. Συμφωνούν οι παρατηρήσεις σας με το θεωρητικά αναμενόμενο? Σε ποιά περίπτωση παρατηρείτε καλύτερη εκτίμηση?
Σημείωση: Η θεωρία των μη-παραμετρικών εκτιμητών φάσματος εξηγείται στο Κεφ. 8.2 [1].

Ασκηση 3.5: (PCA, SVD)
Μας δίνεται μια ακολουθία δεδομένων (τυχαία διανύσματα με μηδενικό μέσο) $\mathbf{x}_n \in \mathbb{R}^d$, $n = 1, ..., N$, και θέλουμε να βρούμε μια κατεύθυνση (μοναδιαίο διάνυσμα) $\mathbf{e} \in \mathbb{R}^d$ και σταθερές a_n έτσι ώστε, αν προσεγγίσουμε κάθε δεδομένο μας (διάνυσμα στήλης) $\mathbf{x}_n$ με ένα διάνυσμα $a_n\mathbf{e}$, το συνολικό μέσο τετραγωνικό λάθος J να είναι ελάχιστο:

$$J(a_1, ..., a_n, \mathbf{e}) = \frac{1}{N}\sum_{n=1}^{N} \|\mathbf{x}_n - a_n\mathbf{e}\|^2, \quad \|\cdot\| = \text{Euclidean norm}$$

(α) Θεωρήστε γνωστό το $\mathbf{e}$ και αποδείξετε ότι τα βέλτιστα a_n που ελαχιστοποιούν το J είναι

$$a_n = \langle \mathbf{x}_n, \mathbf{e}\rangle = \mathbf{x}_n^T\mathbf{e}$$

(β) Αντικαθιστώντας τα βέλτιστα a_n στο J, αποδείξετε ότι αποκτούμε ένα λάθος

$$J_1(\mathbf{e}) = -\mathbf{e}^T\mathbf{R}_x\mathbf{e} + (1/N)\sum_{n=1}^{N}\|\mathbf{x}_n\|^2, \quad \mathbf{R}_x = \frac{1}{N}\sum_{n=1}^{N}\mathbf{x}_n\mathbf{x}_n^T\ ,$$

όπου $\mathbf{R}_x$ είναι ο εμπειρικός πίνακας αυτοσυσχέτισης των δεδομένων.
(γ) Αποδείξετε ότι το βέλτιστο $\mathbf{e}$ που ελαχιστοποιεί το J_1 είναι το ιδιοδιάνυσμα του $\mathbf{R}_x$ που αντιστοιχεί στην μέγιστη ιδιοτιμή λ_1. (Υπόδειξη: ελαχιστοποιήστε το J_1 εκμεταλλευόμενοι τον περιορισμό $\|\mathbf{e}\| = 1$ με Lagrange πολλαπλασιαστή.)
(δ) Τι σχέση έχει η ανωτέρω λύση με PCA (Principal Component Analysis)?
(ε) Πως σχετίζεται η ανωτέρω λύση με την SVD (Singular Value Decomposition) του $N \times d$ πίνακα $\mathbf{X}$ που σχηματίζεται στιβάζοντας τα διανύσματα $\mathbf{x}_n$, $n = 1, ..., N$, ως γραμμές?
(στ) Βρείτε αριθμητικά τα βέλτιστα $a_n, \mathbf{e}$ για τα εξής δεδομένα ($N = 4, d = 3$):

$$\mathbf{x}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ -0.1 \\ 0.2 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{x}_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ -0.3 \\ 0.5 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{x}_3 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0.1 \\ 0.3 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{x}_4 = \begin{bmatrix} 5 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

---

[1] M. H. Hayes, *Statistical Digital Processing and Modeling*, Wiley, 1996.