

Οι αναλυτικές σειρές ασκήσεων είναι ατομικές, και οι λύσεις που θα δώσετε πρέπει να αντιπροσωπεύουν μόνο την προσωπική σας εργασία. Αν χρησιμοποιήσετε κάποια άλλη πηγή εκτός των σημειώσεων για την λύση σας, πρέπει να το αναφέρετε. Η παράδοση των λύσεων των αναλυτικών ασκήσεων της σειράς αυτής θα γίνει ηλεκτρονικά στο mycourses.ntua.gr και θα πρέπει να την υποβάλετε ως ένα ενιαίο αρχείο PDF με το εξής filename format χρησιμοποιώντας μόνο λατινικούς χαρακτήρες: `dsp20_hwk1_AM_FirstnameLastname.pdf`, όπου AM είναι ο 8-ψήφιος αριθμός μητρώου σας. Σκαναρισμένες χειρόγραφες λύσεις επιτρέπονται αρκεί να είναι καθαρογραμμένες και ευανάγνωστες. Επίσης στην 1η σελίδα των λύσεων θα αναγράφετε το ονοματεπώνυμο, AM, και email address σας.

Ασκηση 1.1: Εστω τα πεπερασμένα σήματα διακριτού χρόνου

$$\begin{aligned}x[n] &= 3\delta[n] - \delta[n-1] + 2\delta[n-2] - 3\delta[n-4] + \delta[n-5] - 2\delta[n-6] + 4\delta[n-8] - \delta[n-9], \\h[n] &= \delta[n] - 2\delta[n-1] + \delta[n-2] - \delta[n-3] + \delta[n-4].\end{aligned}$$

(α) Αν $X[k]$, $H[k]$ είναι οι 10-σημείων DFT των σημάτων $x[n]$, $h[n]$ και $Y[k] = X[k]H[k]$, να βρείτε τις τιμές του σήματος $y[n]$ που προκύπτει με ένα 10-σημείων αντίστροφο DFT του $Y[k]$. Εξηγήστε.

(β) Να σχεδιάσετε τα σήματα $x[n]$, $h[n]$ και $y[n]$.

(γ) Αν επαναλάβετε το (α) με DFT N σημείων, να βρείτε την τιμή του N ώστε $y[n] = x[n] * h[n]$ για $n = 0, 1, \dots, N-1$. Εξηγήστε. Επίσης, να σχεδιάσετε το σήμα συνέλιξης $y[n]$.

(δ) Με βάση τον μετασχηματισμό $X[k]$, ορίζουμε τις ακολουθίες

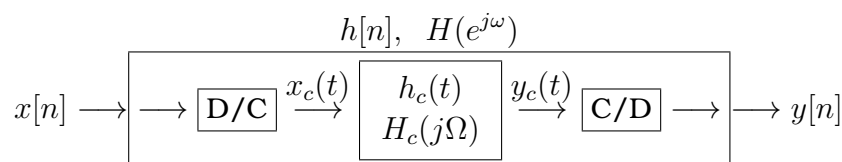
$$\begin{aligned}P[k] &= (-1)^k X[k], \quad k = 0, \dots, 9. \\Q[k] &= |X[2k]|^2, \quad k = 0, 1, 2, 3, 4.\end{aligned}$$

ως τους DFT των σημάτων $p[n]$ και $q[n]$, αντίστοιχα. Χωρίς να υπολογίσετε τους ευθείς και αντιστροφούς DFT των σχετικών ακολουθιών, αλλά χρησιμοποιώντας μόνο ιδιότητες του DFT:

(δ.1) Να βρείτε αναλυτικά και να σχεδιάσετε το σήμα $p[n]$. Εξηγήστε.

(δ.2) Να βρείτε αναλυτικά και να σχεδιάσετε το σήμα $q[n]$. Εξηγήστε.

Ασκηση 1.2: Θεωρήστε το σύστημα στο ακόλουθο Σχήμα



όπου στα ιδανικά συστήματα D/C και C/D η περίοδος δειγματοληψίας είναι T , και το συνεχούς - χρόνου αιτιατό ΓΧΑ σύστημα χαρακτηρίζεται από την ακόλουθη διαφορική εξίσωση

$$\frac{d^2 y_c(t)}{dt^2} + 4 \frac{dy_c(t)}{dt} + 3 y_c(t) = x_c(t)$$

Το συνολικό σύστημα (D/C, ΣΧ-ΓΧΑ, C/D) είναι ισοδύναμο με ένα αιτιατό διακριτού-χρόνου ΓΧΑ σύστημα. Να βρείτε την απόκριση συχνότητας $H(e^{j\omega})$ και την κρουστική απόκριση $h[n]$

αυτού του ισοδύναμου διακριτού συστήματος όταν $T = 0.1\text{s}$. Εξηγήστε.

Άσκηση 1.3: Για το ακόλουθο σύστημα αλλαγής του ρυθμού δειγματοληψίας, σας δίνεται το σήμα εισόδου $x[n]$ και οι παράγοντες υπερδειγματοληψίας (interpolation) L και υποδειγματοληψίας (decimation) M , όπως φαίνεται στο Σχήμα 1:

$$x[n] = \sin(4\pi n/5)/(\pi n), \quad L = 4, \quad M = 3$$

(α) Να σχεδιάσετε τα φάσματα (DTFT) των σημάτων $x_e[n]$, $\tilde{x}_i[n]$ και $\tilde{x}_d[n]$, σημειώνοντας κρίσιμες τιμές στους άξονες.

(β) Να βρείτε το σήμα εξόδου $\tilde{x}_d[n]$. Εξηγήστε.

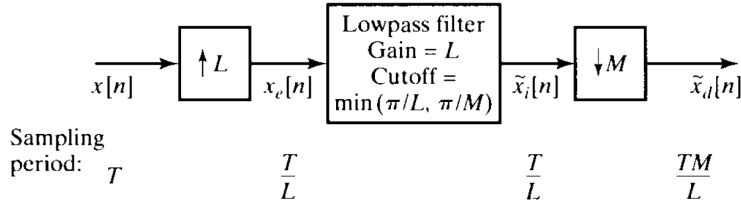


Figure 1: Παρεμβολή και Αποδεκατισμός σε διακριτό χρόνο.

Άσκηση 1.4: Στην ανάλυση βραχέος-χρόνου ενός διακριτού σήματος $x[n]$ με κινούμενο παράθυρο $w[n]$ υπολογίζουμε μια ακολουθία $f[n]$ από μετρήσεις στο πεδίο του χρόνου

$$f[n] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} T(x[k])w[n-k]$$

όπου $T(x[k])$ είναι ένας μετασχηματισμός του σήματος χωρίς μνήμη, π.χ. $T(x) = |x|$, ή $T(x) = x^2$.

(α) Αν $w[n]$ είναι το ορθογώνιο παράθυρο, δηλ. $w[n] = 1/N$ για $n = 0, \dots, N-1$ και 0 αλλού, να βρεθεί αναλυτικά ο DTFT $W(e^{j\omega})$ και το bandwidth του παραθύρου ως συνάρτηση του N θεωρώντας ότι αυτό ισούται πρακτικά με την συχνότητα του πρώτου μηδενικού (δηλ. το μισό πλάτος του κυρίου λοβού) του $|W(e^{j\omega})|$.

(β) Για το μέρος (α), αν το σήμα $x[n]$ έχει προέλθει από δειγματοληψία σήματος φωνής στα 16 kHz και $N = 320$, να βρεθεί ποια είναι η ελάχιστη συχνότητα (σε Hz) και επομένως η μέγιστη μετατόπιση M (σε αριθμό δειγμάτων) του κινούμενου παραθύρου w ώστε το σήμα μετρήσεων f (αντί να υπολογισθεί στον ρυθμό δειγματοληψίας του σήματος $x[n]$) να μπορεί να υποδειγματοληπτηθεί ως $f[Mn]$ χωρίς να υποστεί αναδίπλωση (aliasing) φάσματος. (Υποθέστε ότι το bandwidth του $T(x[n])$ είναι περίπου ίσο με το bandwidth του $x[n]$.) Εξηγήστε.

Άσκηση 1.5: Ο αλγόριθμος split-radix FFT (SRFFT) είναι μια τροποποίηση του FFT. Ο γράφος του αλγορίθμου split-radix είναι παρόμοιος με τον γράφο του αλγορίθμου radix-2, με τη διαφορά ότι απαιτεί λιγότερους πολλαπλασιασμούς. Σε αυτήν την άσκηση εξετάζουμε τον αλγόριθμο SRFFT για τον υπολογισμό του DFT $X[k]$ μιας ακολουθίας $x[n]$ μήκους N .

(α) Δείξτε ότι οι όροι του $X[k]$ με άρτιους δείκτες k υπολογίζονται ως ο μετασχηματισμός DFT $N/2$ σημείων

$$X[2k] = \sum_{n=0}^{(N/2)-1} (x[n] + x[n + N/2])W_N^{2kn}$$

για $k = 0, 1, \dots, (N/2) - 1$.

(β) Δείξτε ότι οι τιμές του $X[k]$ για περιττά k υπολογίζονται ως οι μετασχηματισμοί DFT $N/4$ σημείων

$$X[4k + 1] = \sum_{n=0}^{(N/4)-1} \{(x[n] - x[n + N/2]) - j(x[n + N/4] - x[n + 3N/4])\}W_N^n W_N^{4kn}$$

για $k = 0, 1, \dots, (N/4) - 1$, και

$$X[4k + 3] = \sum_{n=0}^{(N/4)-1} \{(x[n] - x[n + N/2]) + j(x[n + N/4] - x[n + 3N/4])\}W_N^{3n} W_N^{4kn}$$

για $k = 0, 1, \dots, (N/4) - 1$.

(γ) Το διάγραμμα του Σχ. 2 δείχνει την παραπάνω ανάλυση του DFT για $N = 16$ σημεία. Ξανασχεδιάστε το διάγραμμα ονοματίζοντας τους κόμβους του με τους απαραίτητους πολλαπλασιαστικούς παράγοντες.

(δ) Υπολογίστε τον αριθμό των πραγματικών πολλαπλασιασμών που απαιτούνται για τον υπολογισμό ενός μετασχηματισμού DFT $N = 16$ σημείων, όταν εφαρμόζεται ο αλγόριθμος SRFFT για τον υπολογισμό των εσωτερικών DFT του Σχ. 2. Συγκρίνετε με τον αριθμό των πραγματικών πολλαπλασιασμών που απαιτούνται από τον αλγόριθμο 16 σημείων radix-2 decimation-in-frequency. Και στις δύο περιπτώσεις θεωρείστε ότι αγνοούνται οι πολλαπλασιασμοί με το εκθετικό W_N^0 .

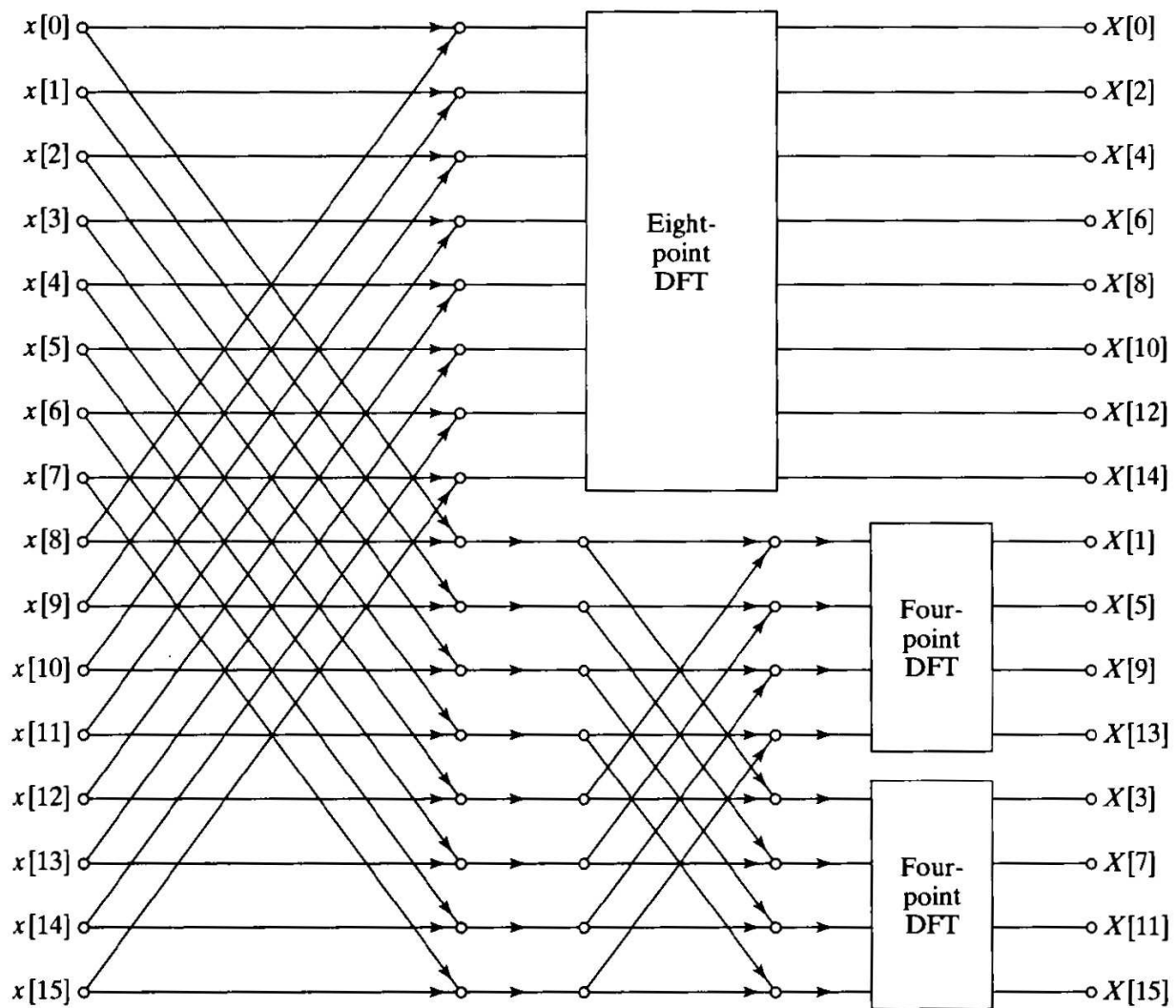


Figure 2: Υπολογισμός του μετασχηματισμού SRFFT.

Άσκηση 1.6(*)¹**(α)** STFT και Continuous Wavelet Transform [3, Κεφ.4]**(α.1)** Εστω το σήμα $f(t) = A \exp(j\omega_0 t)$ και ένα Gaussian παράθυρο μοναδιαίας ενέργειας

$$g(t) = \frac{1}{(\pi\sigma^2)^{1/4}} \exp\left(-\frac{t^2}{2\sigma^2}\right)$$

Να βρείτε αναλυτικά τον STFT (Short-time Fourier Transform), δηλ. τον Gabor μετ/σμό

$$\mathcal{G}f(\tau, \omega) = \int f(t)g(t - \tau) \exp(-j\omega t) dt$$

και το φασματογράφημα $|\mathcal{G}f(\tau, \omega)|^2$.**(α.2)** Για το σήμα του (α.1) να βρείτε αναλυτικά τον Wavelet μετ/σμό

$$\mathcal{W}f(\tau, s) = \langle f, \psi^{s,\tau}(t) \rangle, \quad \psi^{s,\tau}(t) = \frac{1}{\sqrt{s}} \psi\left(\frac{t - \tau}{s}\right)$$

όπου το μητρικό κυματίδιο είναι η μιγαδική συνάρτηση $\psi(t) = g(t) \exp(j\xi t)$, η οποία ονομάζεται Gabor κυματίδιο, και υποθέτουμε ότι $\sigma^2 \xi^2 \gg 1$ ώστε η $\psi(t)$ να είναι αναλυτική, δηλ. ο Fourier μετ/σμός $\hat{\psi}(\omega)$ της να είναι ≈ 0 για $\omega < 0$. Επίσης να βρείτε το scaleogram $\mathcal{W}f(\tau, s)$.

(β) Multiresolution Analysis: Θεωρούμε την scaling function ϕ του Haar κυματιδίου:

$$\phi(t) = \begin{cases} 1, & 0 \leq t \leq 1 \\ 0, & \text{else} \end{cases}$$

(β.1) Να αποδειχθεί ότι ο ορισμός στο άρθρο [2]=[Mallat, 1989]

$$h[n] = \langle \phi_{2^{-1}}(t), \phi(t - n) \rangle$$

όπου $\langle f(t), g(t) \rangle = \int f(t) \overline{g(t)} dt$ και $f_s(t) = f(t/s)/s$, καταλήγει στο βαθυπερατό φίλτρο με κρουστική απόκριση

$$h[n] = (\delta[n] + \delta[n - 1])/2$$

(β.2) Να αποδειχθεί ότι ο ορισμός της Εξ.(19) στο άρθρο [2]

$$\hat{\psi}(\omega) = G(\omega/2) \hat{\phi}(\omega/2), \quad G(\omega) = e^{-j\omega} \overline{H(\omega - \pi)},$$

όπου $\hat{\psi}(\omega) = \int \psi(t) e^{-j\omega t} dt$, $H(\omega) = \sum_n h[n] e^{-j\omega n}$, και $\overline{(\cdot)}$ συμβολίζει μιγαδικό συζυγή, καταλήγει στο mother wavelet ψ

$$\psi(t) = \begin{cases} -1, & 0 \leq t < 1/2 \\ +1, & 1/2 \leq t < 1 \\ 0, & \text{else} \end{cases}$$

Σημ.: Οι Fourier μετ/σμοί $\hat{\phi}(\omega), \hat{\psi}(\omega)$ συνεχούς χρόνου εμφανίζονται ως συναρτήσεις της 'ψηφιακής' συχνότητας ω γιατί υποθέτουμε περίοδο δειγματοληψίας $T = 1$.

(β.3) Να αποδειχθεί ότι ο ορισμός της Εξ.(27) στο άρθρο [2]

$$g[n] = \langle \psi_{2^{-1}}(t), \phi(t - n) \rangle$$

¹(*) Η άσκηση αυτή είναι προαιρετική. Η λύση της σας δίνει bonus 20% επί της 1ης σειράς αναλυτικών ασκήσεων.

καταλήγει στο υπερπαρατό φίλτρο με κρουστική απόκριση

$$g[n] = (-\delta[n] + \delta[n - 1])/2$$

Το ίδιο αποτέλεσμα μπορεί να βρεθεί και μέσω της Εξ.(29) στο άρθρο [2].

(β.4) Στο διακριτό σήμα $x[n]$ πεπερασμένης διάρκειας με τις ακόλουθες τιμές:

n	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
$x[n]$	12	8	4	-4	13	9	5	1	-4	0	4	8	-1	9	4	2

να εφαρμόσετε τον Haar Discrete Wavelet Transform για Multiresolution Decomposition ώστε να αναλυθεί το αρχικό σήμα $A_0 = x[n]$ σε ένα δέντρο από διαδοχικά σήματα Προσέγγισης (Approximation) A_j και Λεπτομέρειας (Detail) D_j σε resolutions 2^{-j} , $j = 1, 2, \dots, J$, όπως στο Σχήμα 5 του άρθρου [2], όπου αν N είναι ο αριθμός δειγμάτων του αρχικού σήματος $A_0 = x[n]$, με τον όρο resolution 2^{-j} εννοούμε ότι ο αντίστοιχος αριθμός δειγμάτων είναι $N2^{-j}$. Δηλ. να βρεθούν αριθμητικά τα σήματα $A_1, D_1, A_2, D_2, \dots, A_J, D_J$ όπου καθώς αυξάνει το j υποδιπλασιάζεται το resolution σε κάθε επόμενο επίπεδο, και τα τελικά σήματα προσέγγισης A_J, D_J αποτελούνται το καθένα μόνο από ένα δείγμα. Εξηγήστε.

(β.5) Να δείξετε αριθμητικά (με όλα τα ενδιάμεσα βήματα) την διαδικασία σύνθεσης, όπως στο Σχήμα 7 του άρθρου [2], δηλ. πως από τα σήματα $A_1, D_1, A_2, D_2, \dots, A_J, D_J$ του (β.4) μπορεί να ανακατασκευασθεί το αρχικό σήμα $x[n]$. Εξηγήστε.

Wavelet References:

- [1] I. Daubechies, "The Wavelet Transform, Time-Frequency Localization and Signal Analysis", IEEE Trans. Information Theory, Sep. 1990.
 - [2] S. Mallat, "A Theory for Multiresolution Signal Decomposition: The Wavelet Representation", IEEE Trans. PAMI, July 1989.
 - [3] S. Mallat, *A Wavelet Tour of Signal Processing*, Acad.Press, 1999, Κεφ.4.
 - [4] Διαφάνειες Διαλέξεων.
-