ΨΕΣ

3ο Σύνολο Αναλ. Ασκήσεων

Χρήστος Τσούτης
03117176
chris99ts@gmail.com

Άσκηση 3.1

AR (1) στοχ. ανέλιξ.

$x[n] = \frac{1}{2} x[n-1] + v[n]$

$v[n]$: λευκός θόρυβος , $\sigma_v^2 = 1$

a) $x[n] = \frac{1}{2} x[n-1] + v[n]$

$$v[n] \longrightarrow \boxed{H(z)} \longrightarrow x[n]$$

$z \updownarrow$

$$X[z] = \frac{1}{2} z^{-1} \cdot X[z] + V[z]$$

$$1 = \frac{1}{2} z^{-1} + \frac{V[z]}{X[z]}$$

$$1 - 0{,}5 z^{-1} = \frac{V[z]}{X[z]}$$

$$H[z] = \frac{1}{1-0{,}5z^{-1}} \xleftrightarrow{z^{-1}} h[n] = \begin{cases} \left(\frac{1}{2}\right)^n u[n], & |z| > 0{,}5 \\ -\left(\frac{1}{2}\right)^n u[-n-1], & |z| < 0{,}5 \end{cases}$$

$$P_x(z) = \sigma_v^2 H(z) \cdot H^*\left(\frac{1}{z^*}\right) \overset{h[n] \in \mathbb{R}, \forall n}{=\!=\!=} H(z) \cdot H(z^{-1}) =$$

$$= \frac{1}{1-0{,}5z^{-1}} \cdot \frac{1}{1-0{,}5\left(\frac{1}{z}\right)^{-1}} = \frac{1}{1-0{,}5z^{-1}} \cdot \frac{1}{1-0{,}5z} =$$

$$= \frac{-2z}{z^2-2{,}5z+1} = \frac{-8/3}{z-2} + \frac{2/3}{z-1/2}$$

β) $$r_x[k] = Z^{-1}\{P_x(z)\} = Z^{-1}\left\{ \frac{1}{1-0{,}5z^{-1}} \cdot \frac{1}{1-0{,}5z} \right\} =$$

$$= \frac{1}{1-\frac{1}{4}} \left(\frac{1}{2}\right)^{|k|} \Rightarrow r_x[k] = \frac{4}{3}\left(\frac{1}{2}\right)^{|k|}$$

γ) $H(z) = \dfrac{B_q(z)}{A_q(z)} = \dfrac{b(0)}{1+\sum_{k=1}^{p} a_p(k)\cdot z^{-k}}$

$P_x(z) = \sigma_v^2 H(z)\cdot H^*\left(\frac{1}{z^*}\right) = \sigma_v^2 \dfrac{|b(0)|^2}{A_p(z)\cdot A_p^*(1/z^*)}$

$r_x(k) + \sum_{\ell=1}^{p} a_p(\ell)\, r_x(k-\ell) = \sigma_v^2 |b(0)|^2 \delta(k) \quad , \; k \geq 0$

Γενικά

Εδώ, $H(z) = \dfrac{1}{1-0{,}5z^{-1}} = \dfrac{b(0)}{1-a(1)z^{-1}}$, δηλ. $b(0)=1$, $a(1)=-0{,}5$

Τότε, $P_x(z) = \dfrac{b^2(0)}{[1-a(1)z^{-1}][1-a(1)z]} = \dfrac{b^2(0)}{1+a^2(1)-a(1)[z+z^{-1}]} = \dfrac{1^2}{1+0{,}5^2+0{,}5[z+z^{-1}]} \Rightarrow$

$\Rightarrow P_x(z) = \dfrac{1}{1+0{,}25+0{,}5[z+z^{-1}]}$

Yule-Walker εξ. σε μορφή πίνακα: $\begin{bmatrix} 1 & a(1) \\ a(1) & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} r_x(0) \\ r_x(1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b^2(0) \\ 0 \end{bmatrix}$

οπότε $r_x(0) = \dfrac{b^2(0)}{1-a^2(1)} = \dfrac{1^2}{1-0{,}5^2} = \dfrac{1}{1-0{,}25} = \dfrac{1}{0{,}75} = \dfrac{4}{3}$

$r_x(1) = -a(1)\cdot r_x(0) = +\frac{1}{2}\cdot\frac{4}{3} = +\frac{2}{3}$

$\forall k>0$, $r_x(k) = -a(1)\; r_x(k-1) = +0{,}5\, r_x(k-1)$

δηλ. $r_x(k) = \dfrac{b^2(0)}{1-a^2(1)}(-a(1))^k = \dfrac{1^2}{1-0{,}5^2}(+0{,}5)^k = \dfrac{4}{3}(+0{,}5)^k, \; k\geq 0$

Τελικά, $r_x(k) = \dfrac{b^2(0)}{1-a^2(1)}[-a(1)]^{|k|} \Rightarrow r_x(k) = \frac{4}{3}[0{,}5]^{|k|}$

Άσκηση 3.2

στοχ. ανελ. $x[n]$

$E[x[n]] = 0$

$r_x[k] = 26\left(\frac{1}{4}\right)^{|k|} + 5\left(\frac{1}{4}\right)^{|k-1|} + 5\left(\frac{1}{4}\right)^{|k+1|}$

α) Το φάσμα Ισχύος $P_x(z)$ ως συνάρτηση της μιγαδ. συχν. z υπολογίζεται ως εξής:

Από Z-Μετασχηματισμό, ισχύει ότι: $a^{|n|} \overset{z}{\longleftrightarrow} \dfrac{1-a^2}{(1-az^{-1})(1-az)}$, $|a| < |z| < \frac{1}{|a|}$

Με εφαρμογή αυτής της ιδιότητος στην ακολουθία αυτοσυσχέτισης, προκύπτει ότι:

$$P_x(z) = 26\,\frac{1-\left(\frac{1}{4}\right)^2}{(1-\frac{1}{4}z^{-1})(1-\frac{1}{4}z)} + 5\,\frac{1-\left(\frac{1}{4}\right)^2}{(1-\frac{1}{4}z^{-1})(1-\frac{1}{4}z)}\cdot z^{-1} + 5\,\frac{1-\left(\frac{1}{4}\right)^2}{(1-\frac{1}{4}z^{-1})(1-\frac{1}{4}z)}\, z \Rightarrow$$

$$\Rightarrow P_x(z) = \frac{\left[1-\left(\frac{1}{4}\right)^2\right]\cdot\left[26 + 5z^{-1} + 5z\right]}{(1-\frac{1}{4}z^{-1})(1-\frac{1}{4}z)} = \frac{15}{16}\cdot\frac{26+5z^{-1}+5z}{(1-\frac{1}{4}z^{-1})(1-\frac{1}{4}z)} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow P_x(z) = \frac{15}{16}\cdot\frac{(1+5z)(1+5z^{-1})}{(1-\frac{1}{4}z)(1-\frac{1}{4}z^{-1})} = \frac{15}{16}\cdot\frac{26+5z+5z^{-1}}{\frac{17}{16}-\frac{1}{4}z-\frac{1}{4}z^{-1}} = 15\,\frac{26+5z+5z^{-1}}{17-4z-4z^{-1}}$$

$$\left(\tfrac{1}{4} < |z| < 4\right)$$

β) Το φάσμα Ισχύος $P_x(e^{j\omega})$ ως πραγμ. συναρτ. της συχν. ω υπολογίζεται ως εξής:

Από DTFT Μετασχηματισμό: (πάνω στον μοναδιαίο κύκλο, θέτοντας $z = e^{j\omega}$)

$$P_x(e^{j\omega}) = 15\,\frac{26+5(e^{j\omega}+e^{-j\omega})}{17-4(e^{j\omega}+e^{-j\omega})} = 15\,\frac{26+10\cos\omega}{17-8\cos\omega}$$

γ) Με φασματική παραγοντοποίηση του $P_x(z)$ να βρεθεί υπόλοιπο φίλτρο:

$$P_x(z) = \sigma_0^2\,\frac{B(z)\cdot B(z^{-1})}{A(z)\cdot A(z^{-1})} = \sigma_0^2\, Q(z)\cdot Q^*\left(\frac{1}{z^*}\right)$$

Εδώ, $\sigma_0^2 = \frac{15}{16}$, $A(z) = 1-\left(\frac{1}{4}\right)z^{-1}$, $B(z) = 1+5z$

$$P_x(z) = H(z)\cdot H(z^{-1})$$

$$H(z) = \sigma_0 \frac{B(z)}{A(z)} = \frac{\sqrt{15}}{4}\cdot\frac{1+5z}{1-\frac{1}{4}z^{-1}} = z\cdot\frac{5\sqrt{15}}{4}\cdot\frac{1+\frac{1}{5}z^{-1}}{1-\frac{1}{4}z^{-1}} = z\cdot G(z)$$

- Το ΓΧΑ σύστημα που έχει συνάρτηση μεταφοράς $G(z)$ είναι αιτιατό και ευσταθές.
- Επομένως, για είσοδο λευκό θόρυβο $v[n]$ μηδενικής μέσης τιμής & μοναδιαίας μεταβλητότητας, η έξοδος θα είναι μια στοχαστική ανέλιξη με αυτή την αυτοσυσχέτιση $r_x[k]$.
- Παρατήρηση: Το σύστημα με συνάρτηση μεταφοράς $G(z)$ σε σχέση με την $H(z)$ εισάγει μια καθυστέρηση. Αυτό το γεγονός όμως δεν επηρεάζει το φάσμα ισχύος της εξόδου.

Άσκηση 3.3

- Στοχ. Ανελ. $d[n]$ τύπου AR(1) που προκύπτει από εξ. διαφ.:

$$d[n] = 0{,}7\, d[n-1] + w[n]$$

όπου $w[n]$: λευκός θόρυβος, $\sigma_w^2 = 1$

$$x[n] = d[n] + v[n]$$

όπου $v[n]$: λευκός θόρυβος, $\sigma_v^2 = 1$, ασυσχέτιστος με το $d[n]$.

α) Μετασχηματίζοντας την εξ. διαφ., προκύπτει:

$$d[n] = 0{,}7\, d[n-1] + w[n]$$

$$\Updownarrow$$

$$D(z) = 0{,}7\cdot z^{-1} D(z) + W(z) \Leftrightarrow D(z)\cdot(1-0{,}7z^{-1}) = W(z) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{D(z)}{W(z)} = \frac{1}{1-0{,}7z^{-1}}$$

$$\xrightarrow{W(z)} \boxed{H(z)} \xrightarrow{D(z)}$$

Οπότε, $H(z) = \dfrac{D(z)}{W(z)} = \dfrac{1}{1-0{,}7z^{-1}} \xleftrightarrow{z^{-1}} h[n] = 0{,}7^n u[n]$

Ακόμη, ισχύει $r_d[k] = d[k] * d[-k]$

Όμως, επειδή $D(z) = H(z)\cdot W(z)$ προκύπτει ότι: $d[k] = h[k] * w[k]$

Επομένως, $r_d[k] = \big(h[k] * w[k]\big) * \big(h[-k] * w[-k]\big) =$

$$= \big(h[k] * h[-k]\big) * \big(w[k] * w[-k]\big) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow r_d[k] = r_h[k] * r_w[k]$$

Όπου, $r_h[k] = h[k] * h[-k] = 0,7^{k} u[k] * 0,7^{-k}\cdot u[-k] =$

$$= \sum_{n=-\infty}^{+\infty} 0,7^{-n} u[-n] \cdot 0,7^{k-n} u[k-n] = \dots$$

$$= \frac{1}{1-0,7^2} \cdot 0,7^{|k|} = \frac{0,7^{|k|}}{0,51}$$

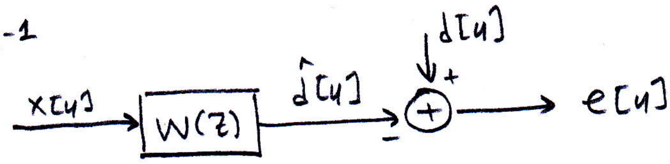
Όπου, $r_w[k] = \sigma_w^2\,\delta[k] = \delta[k]$

Άρα, $r_d[k] = \frac{0,7^{|k|}}{0,51} * \delta[k] \Leftrightarrow r_d[k] = \frac{0,7^{|k|}}{0,51}$

β) FIR-2 φίλτρο Wiener

με συν. μεταφ.: $W(z) = w[0] + w[1] z^{-1}$

Η διάταξη αποθορυβοποίησης είναι:



όπου $e[n] = d[n] - x[n] * w[n]$

Ουσιαστικά, ζητείται η ελαχιστοποίηση του τετραγωνικού λάθους $\|d[n] - \hat{d}[n]\|^2$.

Από την εξ. Wiener-Hopf, προκύπτουν οι συντελεστές $w[0], w[1]$ για $p=2$.

Οπότε $\sum_{n=0}^{1} r_x[k-n]\cdot w[n] = r_{dx}[k]$, $k = 0, 1$

Οπότε, προκύπτει το ακόλουθο σύστ. εξισ.:

$$\begin{cases} r_x[0]\cdot w[0] + r_x[-1] w[1] = r_{dx}[0] \\ r_x[1]\cdot w[0] + r_x[0] w[1] = r_{dx}[1] \end{cases} \overset{r_x[\alpha]=r_x[-\alpha]}{\Longleftrightarrow}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} r_x[0] w[0] + r_x[1]\cdot w[1] = r_{dx}[0] \\ r_x[1] w[0] + r_x[0] w[1] = r_{dx}[1] \end{cases}$$

Επίσης, ισχύει ότι: $x[n] = d[n] + w[n]$

Οπότε, $r_x[k] = r_d[k] + r_w[k]$

Αφού $w[n]$ λευκός θόρυβος, τότε $r_w[k] = \sigma_w^2 \, \delta[k] = \delta[k]$

Άρα, $r_x[k] = \dfrac{0{,}7^{|k|}}{0{,}51} + \delta[k]$

Επιπλέον, αφού x, d ασυσχέτιστα, προκύπτει ότι:

$$r_{dx}[k] = r_d[k] \Rightarrow r_{dx}[k] = \frac{0{,}7^{|k|}}{0{,}51}$$

Επομένως, το σύστημα θα έχει την εξής νέα μορφή:

$$\begin{cases} \left(\frac{1}{0{,}51} + 1\right) w[0] + \left(\frac{0{,}7}{0{,}51}\right) w[1] = \frac{1}{0{,}51} \\ \frac{0{,}7}{0{,}51} w[0] + \left(\frac{1}{0{,}51} + 1\right) w[1] = \frac{0{,}7}{0{,}51} \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 1{,}51\, w[0] + 0{,}7\, w[1] = 1 \\ 0{,}7\, w[0] + 1{,}51\, w[1] = 0{,}7 \end{cases} \overset{\text{mathematica}}{\Longleftrightarrow}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} w[0] = -\frac{0{,}7}{1{,}51} w[1] + \frac{1}{1{,}51} \\ w[0] = -\frac{1{,}51}{0{,}7} w[1] + 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{array}{l} w[0] = \frac{200}{351} \simeq 0{,}5698 \\ w[1] = \frac{70}{351} \simeq 0{,}1994 \end{array}$$

Άρα $W[z] = w[0] + w[1] z^{-1} \Rightarrow$

$\Rightarrow W[z] = 0{,}5698 + 0{,}1994\, z^{-1} \Rightarrow$

$\Rightarrow w[n] = 0{,}5698\, \delta[n] + 0{,}1994\, \delta[n-1]$

Συνεπώς, το προσδοκητέο τετραγωνικό λάθος θα είναι:

$$\xi_{fir2} = E\{|e[n]|^2\} = r_d[0] - \sum_{k=0}^{1} r_{dx}[k]\, w[k] =$$

$$= r_d[0] - r_{dx}[0] w[0] - r_{dx}[1] w[1] \xrightarrow{r_{dx}=r_d}$$

$$\Rightarrow \xi_{fir2} = r_d[0]\,(1 - w[0]) - r_d[1]\cdot w[1] =$$

$$= \frac{1}{0{,}51}(1 - 0{,}5698) - \frac{0{,}7}{0{,}51}\cdot 0{,}1994 =$$

$$= 1{,}9607(1 - 0{,}5698) - 1{,}3725 \cdot 0{,}1994 = 0{,}8434 - 0{,}2736 =$$
$$= 0{,}5698$$

γ) FIR-3 Wiener φίλτρο με συν. μετ. $W(z) = w[0] + w[1] z^{-1} + w[2] z^{-2}$

$$\begin{cases} r_x[k] = r_d[k] + r_v[k] \\ r_{dx}[k] = r_d[k] \end{cases}$$

Από τις εξ. Wiener-Hopf προκύπτει:

$$\sum_{n=0}^{2} r_x[k-n]\, w[n] = r_{dx}[k], \quad k = 0, 1, 2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} r_x[0] w[0] + r_x[1] w[1] + r_x[2] w[2] = r_d[0] \\ r_x[1] w[0] + r_x[0] w[1] + r_x[1] w[2] = r_d[1] \\ r_x[2] w[0] + r_x[1] w[1] + r_x[0] w[2] = r_d[2] \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \left(\frac{1}{0{,}51} + 1\right) w[0] + \left(\frac{0{,}7}{0{,}51}\right) w[1] + \left(\frac{0{,}49}{0{,}51}\right) w[2] = \frac{1}{0{,}51} \\ \left(\frac{0{,}7}{0{,}51}\right) w[0] + \left(\frac{1}{0{,}51} + 1\right) w[1] + \left(\frac{0{,}7}{0{,}51}\right) w[2] = \frac{0{,}7}{0{,}51} \\ \left(\frac{0{,}49}{0{,}51}\right) w[0] + \left(\frac{0{,}7}{0{,}51}\right) w[1] + \left(\frac{1}{0{,}51} + 1\right) w[2] = \frac{0{,}49}{0{,}51} \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 1{,}51\, w[0] + 0{,}7\, w[1] + 0{,}49\, w[2] = 1 \\ 0{,}7\, w[0] + 1{,}51\, w[1] + 0{,}7\, w[2] = 0{,}7 \\ 0{,}49\, w[0] + 0{,}7\, w[1] + 1{,}51\, w[2] = 0{,}49 \end{cases} \xrightarrow{\text{mathematica}}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} w[0] \simeq 0{,}56125 \\ w[1] \simeq 0{,}175 \\ w[2] \simeq 0{,}06125 \end{cases}$$

Οπότε $W(z) = 0{,}56125 + 0{,}175\, z^{-1} + 0{,}06125\, z^{-2}$

$$z^{-1} \updownarrow$$

$$w[n] = 0{,}56125\, \delta[n] + 0{,}175\, \delta[n-1] + 0{,}06125\, \delta[n-2]$$

Συνεπώς, το προσδοκητό τετραγωνικό λάθος προκύπτει από τη σχέση:

$$\xi_{fir3} = E\{|e[n]|^2\} = r_d[0] - \sum_{k=0}^{2} r_{dx}[k]\, w[k] \xrightarrow{r_{dx} = r_d}$$

$$= r_d[0] - r_d[0]\, w[0] - r_d[1]\, w[1] - r_d[2]\, w[2] =$$

$$= \frac{1}{0{,}51} - \frac{1}{0{,}51} \cdot 0{,}56125 - \frac{0{,}7}{0{,}51} \cdot 0{,}175 - \frac{0{,}49}{0{,}51} \cdot 0{,}06125$$

$$= 1{,}9607 - 1{,}1004 - 0{,}2402 - 0{,}0588 = 0{,}5613$$

δ) Σχεδιασμός βέλτιστου μη-αιτιατού IIR Wiener φίλτρου.

$$H_{nc}(z) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} h_{cn}[n]\, z^{-n}$$

Από εξ. Wiener-Hopf προκύπτει:

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} h_{cn}[n] \cdot r_x[k-n] = r_{dx}[k], \quad -\infty < k < +\infty \quad \Leftrightarrow \quad h_{cn}[k] * r_x[k] = r_{dx}[k] \xleftrightarrow{Z}$$

$$\xleftrightarrow{Z} H_{nc}(z) \cdot P_x(z) = P_{dx}(z)$$

Όμως, $r_{dx}[k] = r_d[k] \xrightarrow{z} P_{dx}(z) = P_d(z)$

οπότε, $H_{nc}(z) \cdot P_x(z) = P_d(z) \quad (1)$

Επίσης, $r_x[k] = \dfrac{0{,}7^{|k|}}{0{,}51} + \delta[k] \xrightarrow{z} P_x(z) = \dfrac{1}{(1-0{,}7z^{-1})(1-0{,}7z)} + 1$

Όμοια, $r_d[k] = \dfrac{0{,}7^{|k|}}{0{,}51} \xrightarrow{z} P_d(z) = \dfrac{1}{(1-0{,}7z^{-1})(1-0{,}7z)} \quad 0{,}7<|z|<\dfrac{1}{0{,}7}$

Άρα, από την (1):

$$H_{nc}(z) = \frac{P_d(z)}{P_x(z)} = \frac{\dfrac{1}{(1-0{,}7z^{-1})(1-0{,}7z)}}{\dfrac{1}{(1-0{,}7z^{-1})(1-0{,}7z)}+1} = \frac{1}{2{,}49+(1-0{,}7z^{-1})(1-0{,}7z)} =$$

$$= \frac{1}{2{,}49-0{,}7(z+z^{-1})} = \frac{1}{2{,}167(1-0{,}323z^{-1})(1-0{,}323z)}$$

Εφαρμόζοντας αντίστροφο Μετ. Ζ προκύπτει η κρουστική απόκριση

$$h_{nc}[n] = 0{,}5152 \cdot (0{,}323)^{|n|}$$

Σε αυτή την περίπτωση, το προσδοκητέο τετραγωνικό λάθος προκύπτει ως εξής:

$$\xi_{IIR,nc} = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} P_v(e^{j\omega}) H_{nc}(e^{j\omega})\, d\omega =$$

$$= \frac{\sigma_v^2}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} H_{nc}(e^{j\omega})\, d\omega =$$

$$= \sigma_v^2 \cdot h_{nc}[0] =$$

$$= 0{,}5152$$

Παρατήρηση:

$$\xi_{IIR,nc} < \xi_{FIR-3} < \xi_{FIR-2}$$

Δηλ., όσο περισσότερες τιμές του σήματος $x[n]$ λαμβάνονται υπόψιν από το φίλτρο Wiener, τόσο πιο ακριβές γίνεται και τόσο μειώνεται το προσδοκητέο λάθος.

Άσκηση 3.4

Επισυνάπτεται στο τέλος.

Άσκηση 3.5

Από ακολουθία διανυσμάτων, να βρεθεί κατεύθυνση (μον. διάνυσμα) e που θα αντιπροσωπεύει την ακολουθία. Επίσης να βρεθούν οι συντελεστές a_n που ελαχιστοποιούν το μέσο τετραγωνικό σφάλμα των διανυσμάτων της ακολουθίας από το αντιπροσωπευτικό διάνυσμα.
Για το βέλτιστο διάνυσμα e, προσδιορίζονται οι συντελεστές a_n ώστε να ελαχιστοποιούν το

$$J(a_1,\dots,a_n,e) = \frac{1}{N}\sum_{n=1}^{N}\|x_n - a_n e\|^2$$

α-β) Υποθέτοντας διανύσματα με τυχαία δεδομένα $x \in \mathbb{C}^d$, αναζητείται ένας unitary γραμμικός μετασχ./σμός A ώστε τα $y = A^H x$, $A^{-1} = A^H$ να έχουν ορθογ. ή ασυσχ. συνιστώσες και να καταλήγουν σε ένα ελάχιστο μέσο τετρ. σφάλμα (MSE) (για $p<d$).

- Υποθέτοντας ότι είναι γνωστά τα διανύσματα $\{e_1,\dots,e_d\}$ τα οποία σχηματίζουν τις στήλες του A, αν ληφθούν υπόψιν ως ορθοκανονική βάση που καλύπτει όλο το χώρο τότε, μπορεί να εκφραστεί το διάνυσμα εισόδου x μέσω της προβολής του σε αυτά τα διανύσματα βάσης:

$$x = \sum_{i=1}^{d} y_i e_i \quad ,\text{όπου} \quad y_i = \langle x, e_i\rangle = e_i^H \cdot x$$

- Από το θεώρημα προβολής, εάν το διάνυσμα αυτό προβληθεί πάνω στον υποχώρο που σχηματίζεται από την μικρότερη βάση $\{e_1,\dots,e_p\}$, τότε η καλύτερη προσέγγιση του $\hat{x}$ είναι $\hat{x} = \sum_{k=1}^{p} y_k \cdot e_k$. Οπότε το MSE θα είναι:

$$J = E\{\|x-\hat{x}\|^2\} = E\{\|x\|^2\} - \sum_{k=1}^{p} E\{|y_k|^2\} =$$

$$= \sum_{i=p+1}^{d} E\{|y_i|^2\} = \sum_{i=p+1}^{d} e_i^H \cdot R_x \cdot e_i \quad ,\text{όπου} \quad R_x = E\{x\cdot x^H\}$$

- Επίσης, $J(a_1,\dots,a_n,e) = \frac{1}{N}\sum_{n=1}^{N}(x_n - a_n e)^T(x_n - a_n e) =$

$$= \frac{1}{N}\sum_{n=1}^{N}\left(x_n^T x_n - x_n^T a_n e - a_n e^T x_n + a_n e^T a_n e\right) =$$

$$= \frac{1}{N}\sum_{n=1}^{N}\left(\|x_n\|^2 - 2a_n e^T x_n + a_n^2\right)$$

και για $\partial J/\partial a_n = 0 \Rightarrow -2e^T x_n + 2a_n = 0 \Rightarrow a_n = e^T x_n = e x_n^T \Rightarrow a_n = \langle x_n, e\rangle$

- Στην συνέχεια, απαιτείται η εύρεση των βέλτιστων διανυσμ. βάσης $\{e_1, \dots, e_d\}$, δηλ. το βέλτιστο A, και η επιλογή των p πρωτεύουσων κατευθύνσεων μεταξύ εκείνων που ελαχιστοποιούν το MSE J.

- Από τον περιορισμό $e_i^H \cdot e_i = 1$, ελαχιστοποιείται το J, οπότε προκύπτει η καλύτερη ορθοκανονική βάση $\{e_1, \dots, e_d\}$ η οποία αποτελείται από τα ιδιοδιανύσματα του R_x: $\quad R_x \cdot e_i = \lambda_i \cdot e_i \;, \quad i = 1, 2, \dots, d$

- Επομένως, $e_i^H \cdot R_x \cdot e_i = \lambda_i$.

- Έτσι, για την ελαχιστοποίηση του J θα πρέπει να γίνει διάταξη των ιδιοτιμών ως $\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \dots \geq \lambda_d$ και να επιλεγούν ως πρωτεύουσες κατευθύνσεις $\{e_1, \dots, e_p\}$ εκείνες που αντιστοιχούν στις p μεγαλύτερες ιδιοτιμές. Επίσης, οι αντίστοιχες μετασχηματισμένες τιμές $\{y_k : k = 1, \dots, p\}$ καλούνται πρωτεύουσες συνιστώσες. Στην περίπτωση αυτή, το ελάχιστο σφάλμα ισούται με το άθροισμα των $d-p$ μικρότερων ιδιοτιμών: $J_{min} = \sum_{i=p+1}^{d} \lambda_i$

- Αυτές οι επιλογές διαγωνοποιούν τον πίνακα συσχέτισης του μετ./μένου διανύσματος:
$$R_y = E\{y \cdot y^H\} = A^H \cdot R_x \cdot A = \mathrm{diag}[\lambda_1, \dots, \lambda_d]$$
Οι μετ/μένες συνιστώσες διανύσματος $\{y_i\}$ είναι ορθογώνιες και οι μεταβλητότητές τους είναι ίσες με τις ιδιοτιμές του R_x, δηλ. $E\{y_i \cdot y_j\} = \lambda_i \cdot \delta_{ij}$

▷ Εναλλακτικά, στην περίπτωση που $m = E\{x\} \neq 0$, πρώτα αφαιρείται η μέση τιμή και έπειτα ακολουθείται η παραπάνω διαδικασία για τα μη-πολωμένα δεδομένα $x' = x - m$, τα οποία θα μετασχηματιστούν σε $y' = A^H x'$. Εδώ, ο πίνακας A αποτελείται από τα ιδιοδιανύσματα $\{u_i\}$ του πίνακα συμμεταβλητότητας $C_x = E\{(x-m) \cdot (x-m)^H\}$ και η προσέγγιση ελάχιστου MSE είναι: $\hat{x} = m + \sum_{k=1}^{p} y_k' \cdot u_k = \sum_{i=1}^{p} y_i u_i + \sum_{i=p+1}^{d} E\{y_i\} \cdot u_i$
Οι νέες πρωτεύουσες συνιστώσες $\{y_k' : k = 1, \dots, p\}$ είναι ασυσχέτιστες και οι μεταβλητότητές τους ίσες με τις ιδιοτιμές του C_x.

• Τέλος, συμφωνούμε ότι υπάρχει και η ντετερμινιστική μορφή του PCA όπου τα δεδομένα αποτελούνται από N διανύσματα x_n, $n=1,\dots,N$ και η στατιστική μέση τιμή E παριστάνεται/αντικαθίσταται από το $\frac{1}{N}\sum_{n=1}^{N}$. Έτσι το ελάχιστο MSE:

$$J = \frac{1}{N}\sum_{n=1}^{N} \left\| x_n - \left(\sum_{k=1}^{p} y_{kn}\cdot e_k\right)\right\|^2 \quad \text{όπου} \quad y_{kn} = \langle x_n, e_k \rangle$$

Οι πρωτεύουσες διευθύνσεις $\{e_i\}$ είναι οι ορθοκανονικές ιδιοτιμές της συσχέτισης ή διασποράς του πίνακα.

(*) κάτω μέρος σελίδας:

γ-δ). • Το βέλτιστο διάνυσμα e είναι το ιδιοδιάνυσμα που αντιστοιχεί στη μέγιστη ιδιοτιμή του πίνακα $R_x = \frac{1}{N}\sum_{n=1}^{N} x_n x_n^T$, σύμφωνα με τη PCA θεωρία.

• Οι συντελεστές a_n προκύπτουν προβάλλοντας κάθε διάνυσμα της ακολουθίας πάνω στο βέλτιστο διάνυσμα κατεύθυνσης, δηλ. $a_n = \langle x_n, e \rangle = x_n^T \cdot e$

• Ορίζουμε τους πίνακες που αντιστοιχούν στα διανύσματα της ακολουθίας:

$$x_i = \begin{bmatrix} a_{i1} \\ \vdots \\ a_{id} \end{bmatrix} \quad \text{και} \quad X = \begin{bmatrix} x_1^T \\ \vdots \\ x_N^T \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} & \dots & a_{1d} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{N1} & \dots & a_{Nd} \end{bmatrix}$$

Θα δειχθεί η σχέση PCA με SVD:

- Για θετικά ημιορισμένο κανονικό πίνακα X, για τον οποίο ορίζεται η αποσύνθεση SVD, παραγοντοποιείται ως εξής:

$$X_{(N\times d)} = U_{(N\times N)} \cdot \Sigma_{(N\times d)} \cdot V^*_{(d\times d)}$$

όπου $U^*\cdot U = I$, $V^*\cdot V = I$, Σ: διαγώνιος πίνακας.

- Ο Σ έχει στην διαγώνιο του τις τιμές της ιδιοτιμής του πίνακα $\Lambda = X^T\cdot X$.

- Όμως $\Lambda = X^T\cdot X = \begin{bmatrix} a_{11} & \dots & a_{N1} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{1d} & \dots & a_{Nd} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} a_{11} & \dots & a_{1d} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{N1} & \dots & a_{Nd} \end{bmatrix} \Leftrightarrow$

$$\Rightarrow \Lambda = \sum_{n=1}^{N} x_n \cdot x_n^T = N \cdot R_x$$

(*) $J_1(e) = \frac{1}{N}\sum_{n=1}^{N}\left(\|x_n\|^2 - 2e^T x_n e^T x_n + e^T x_n e^T x_n\right) = \frac{1}{N}\sum_{n=1}^{N}\left(\|x_n\|^2 - e^T x_n e^T x_n\right) =$

$= \frac{1}{N}\sum_{n=1}^{N}\|x_n\|^2 - \frac{1}{N}\sum_{n=1}^{N} e^T x_n x_n^T e \Rightarrow J_1(e) = -e^T R_x e + \frac{1}{N}\sum_{n=1}^{N}\|x_n\|^2$

Άρα, η θεωρήσεις SVD, PCA σχετίζονται με την έννοια ότι οι ιδιοτιμές του πίνακα R_x μπορούν να προκύψουν από τις ιδιοτιμές του πίνακα Λ της SVD διαιρώντας κατά N ή αλλιώς: $\lambda_{R,i} = \frac{\lambda_{\Lambda,i}}{N}$, όπου λ_Λ οι ιδιοτιμές του πίνακα Λ που ορίσαμε ως $\Lambda = X^T \cdot X$

Τέλος, σε σύνδεση με τα στοιχεία σ_i του πίνακα Σ, προκύπτει: $\lambda_{R,i} = \frac{\sigma_i^2}{N}$

• Με άλλα λόγια, για $p=1$ σε PCA ισχύει:

✓ $R_x = \frac{1}{N} X^T \cdot X = V \Lambda V^T$, $\Lambda = \text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_d)$

V: ορθογώνιος πίνακας με στήλες τα ιδιοδιανύσματα v_k, $k=1,\dots,d$, με ιδιοτιμές λ_k.

✓ Από SVD, $X = U \Sigma V^T$ και $R_x = V \cdot \frac{\Sigma^2}{N} V^T$, $\Sigma = \text{diag}(\sigma_1, \dots, \sigma_r)$ και $\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \dots \geq \sigma_r$.

✓ Οπότε, οι ιδιοκατευθύνσεις είναι τα ιδιοδιανύσματα v_k, και οι ιδιοτιμές $\lambda_k = \frac{\sigma_k^2}{N}$.

▷ Η k στήλη του XV είναι το k-οστό πρωτεύον στοιχείο (PC), δηλ. τα διάνυσμα προβολών $x_n^T \cdot v_k$ των δεδομένων στην k ιδιοκατεύθυνση.

▷ Επειδή μειώνεται η διάσταση των δεδομένων σε $p=1$ κύρια συνιστώσα, θα αντιστοιχεί στην επιλογή $e = u_1$ και επομένως $[a_1, a_2, \dots, a_N]^T = X \cdot v_1$.

στ) $N=4$, $d=3$, $x_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -0,1 \\ 0,2 \end{pmatrix}$, $x_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -0,3 \\ 0,5 \end{pmatrix}$, $x_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0,1 \\ 0,3 \end{pmatrix}$, $x_4 = \begin{pmatrix} 5 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$

<u>1ος Τρόπος</u> – Μέθοδος SVD:

Ορίζουμε τον $X = \begin{bmatrix} 1 & -0,1 & 0,2 \\ 1 & -0,3 & 0,5 \\ 0 & 0,1 & 0,3 \\ 5 & -1 & 1 \end{bmatrix}$

Με παραγοντοποίηση προκύπτει $X = U \cdot \Sigma \cdot V^*$

2ος Τρόπος - Αναλ. Υπολ. ιδιοτιμών του Rx

$$R_x = \frac{1}{N}\sum_{n=1}^{N} x_n \cdot x_n^T = \frac{1}{4} X^T \cdot X \Leftrightarrow R_x = \frac{1}{4}\begin{bmatrix} 27 & -5,4 & 5,7 \\ -5,4 & 1,11 & -1,14 \\ 5,7 & -1,14 & 1,38 \end{bmatrix} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow R_x = \begin{bmatrix} 6,75 & -1,35 & 1,425 \\ -1,35 & 0,2775 & -0,285 \\ 1,425 & -0,285 & 0,345 \end{bmatrix}$$

Οι ιδιοτιμές του πίνακα αυτού είναι:

$\lambda_1 \simeq 0,007$, $\lambda_2 \simeq 0,042$, $\lambda_3 \simeq 7,323$

Σύμφωνα με την θεωρία PCA, από τις ιδιοτιμές αυτές επιλέγεται η μεγαλύτερη, δηλ. $\lambda_{max} = 7,323$

Έπειτα, από την σχέση $R_x \cdot v = \lambda_{max} \cdot v$, προκύπτει το ιδιοδιάνυσμα

$$v = \begin{bmatrix} \cdots \end{bmatrix}$$

Σύμφωνα με τη θεωρία PCA, το διάνυσμα αυτό αποτελεί και το βέλτιστο διάνυσμα e

Άρα $e = \begin{bmatrix} \cdots \end{bmatrix}$

Οι συντελεστές προκύπτουν από την σχέση: $a_n = x_n^T \cdot e$

Έτσι, $a = \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \\ a_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cdots \end{bmatrix}$

In [67]:

```
# Exercise 3.4
```

In [68]:

```
import numpy as np
import matplotlib.pyplot as plt
import scipy.signal
from scipy.stats import uniform
```

In [69]:

```
# Question a, b

# Code that creates x[n] and the different assessments of Power Spectrum with
# both methods and lengths.

# initialization
N1 = 128

# phi11, phi12 random variables uniform distributed in [0, 2π]
phi11 = np.random.uniform(0, 2*np.pi, N1)
phi12 = np.random.uniform(0, 2*np.pi, N1)

# w1 = 0.2π, w2 = 0.3π
w1 = 0.2*np.pi
w2 = 0.3*np.pi

# white noise
noise1 = np.random.normal(0, 1, N1)

wr1 = scipy.signal.boxcar(N1)
wm1 = scipy.signal.hamming(N1)

EnergyN1 = sum(abs(wm1)**2)/N1

Ppekt1 = 0
Pmekt1 = 0

for i in range(50):
    n1 = np.linspace(0, 2*np.pi/N1, N1)
    # signal
    x1 = 0.1*np.sin(w1*n1+phi11)+np.sin(w2*n1+phi12)+noise1

    # Simple Periodogram
    simple_fft = np.fft.fft(wr1*x1, N1)
    Pper1 = 1/N1 * ((abs(simple_fft))**2)
    Ppekt1 += Pper1

    # Modified Periodogram
    modified_fft = np.fft.fft(wm1*x1, N1)
    Pperm1 = 1/(N1*EnergyN1) * ((abs(modified_fft))**2)
    Pmekt1 += Pperm1

Ppekt1 /= 50
Pmekt1 /= 50
```

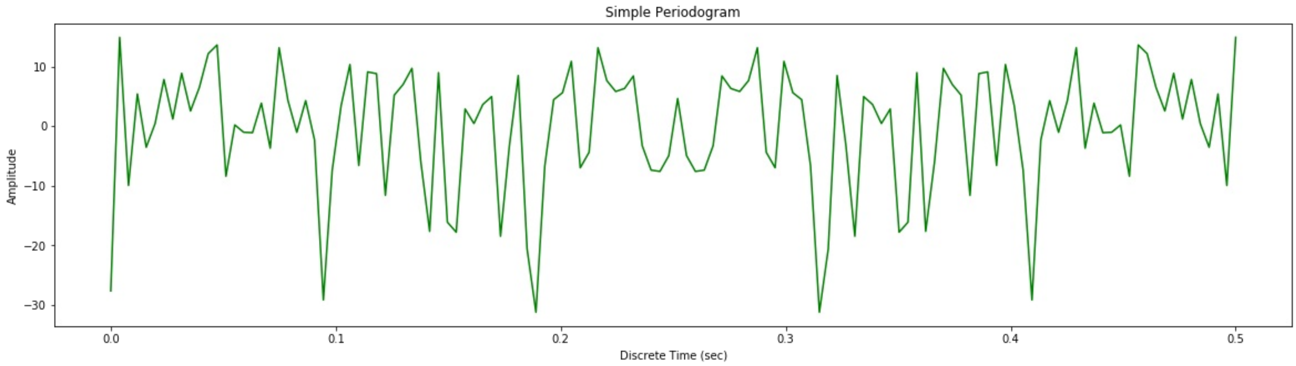
In [70]:

```
f1 = np.linspace(0, 1/2, N1)

plt.figure(figsize = (20,5))
plt.plot(f1, (20*np.log10(abs(Ppekt1))), color = 'g')
plt.title('Simple Periodogram')
plt.xlabel('Discrete Time (sec)')
plt.ylabel('Amplitude')
```

Out[70]:

```
Text(0, 0.5, 'Amplitude')
```

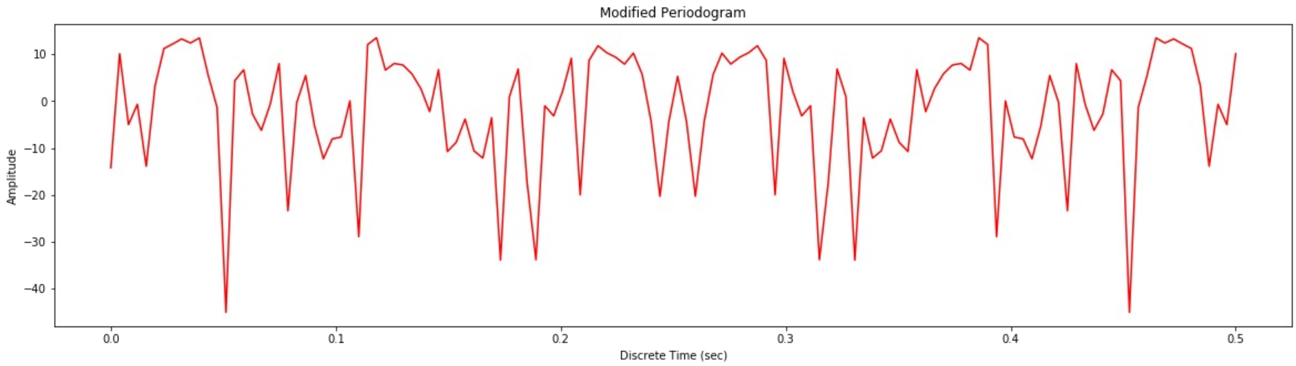


In [71]:

```
plt.figure(figsize = (20,5))
plt.plot(f1, (20*np.log10(abs(Pmekt1))), color = 'r')
plt.title('Modified Periodogram')
plt.xlabel('Discrete Time (sec)')
plt.ylabel('Amplitude')
```

Out[71]:

```
Text(0, 0.5, 'Amplitude')
```

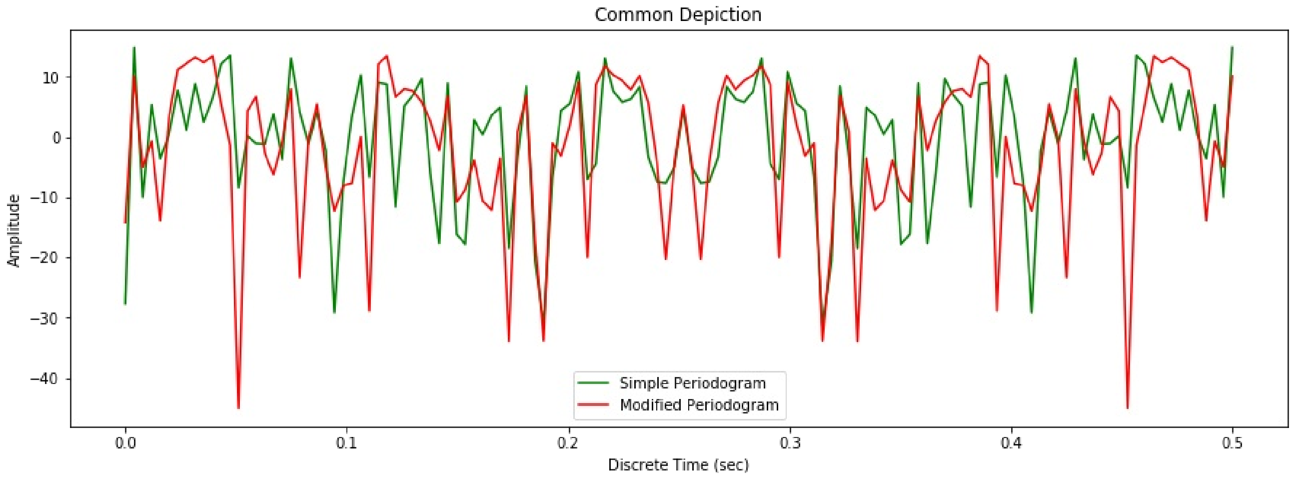


In [72]:

```
plt.figure(figsize = (15,5))
plt.plot(f1, (20*np.log10(abs(Ppekt1))), color = 'g')
plt.plot(f1, (20*np.log10(abs(Pmekt1))), color = 'r')
plt.title('Common Depiction')
plt.xlabel('Discrete Time (sec)')
plt.ylabel('Amplitude')
plt.legend(["Simple Periodogram", "Modified Periodogram"])
```

Out[72]:

```
<matplotlib.legend.Legend at 0x28765050788>
```



In [73]:

```
# Now, for N2 = 64

# initialization
N2 = 64

# phi21, phi22 random variables uniform distributed in [0, 2π]
phi21 = np.random.uniform(0, 2*np.pi, N2)
phi22 = np.random.uniform(0, 2*np.pi, N2)

# w1 = 0.2π, w2 = 0.3π
w1 = 0.2*np.pi
w2 = 0.3*np.pi

# white noise
noise2 = np.random.normal(0, 1, N2)

wr2 = scipy.signal.boxcar(N2)
wm2 = scipy.signal.hamming(N2)

EnergyN2 = sum(abs(wm2)**2)/N2

Ppekt2 = 0
Pmekt2 = 0

for i in range(50):
    n2 = np.linspace(0, 2*np.pi/N2, N2)
    # signal
    x2 = 0.1*np.sin(w1*n2+phi21)+np.sin(w2*n2+phi22)+noise2

    # Simple Periodogram
    simple_fft = np.fft.fft(wr2*x2, N2)
    Pper2 = 1/N2 * ((abs(simple_fft))**2)
    Ppekt2 += Pper2

    # Modified Periodogram
    modified_fft = np.fft.fft(wm2*x2, N2)
    Pperm2 = 1/(N2*EnergyN2) * ((abs(modified_fft))**2)
    Pmekt2 += Pperm2

Ppekt2 /= 50
Pmekt2 /= 50
```

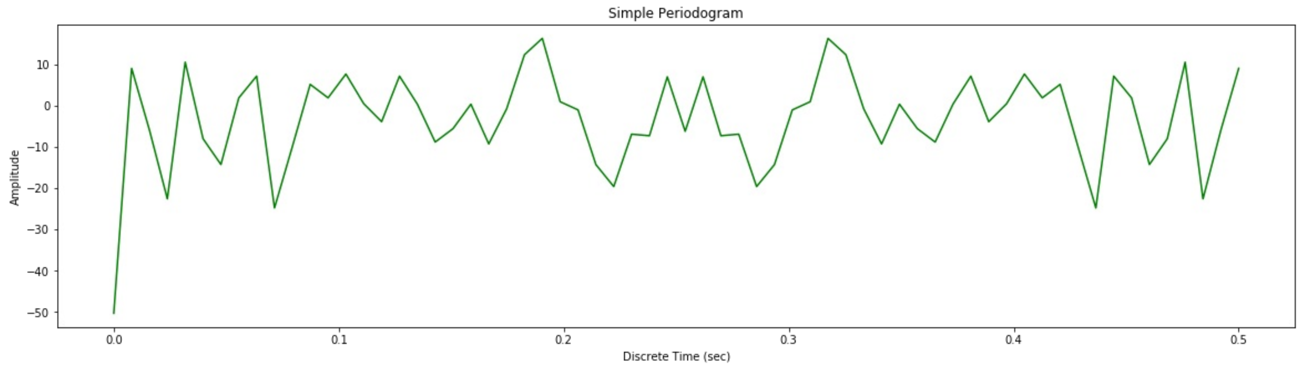
In [74]:

```
f2 = np.linspace(0, 1/2, N2)

plt.figure(figsize = (20,5))
plt.plot(f2, (20*np.log10(abs(Ppekt2))), color = 'g')
plt.title('Simple Periodogram')
plt.xlabel('Discrete Time (sec)')
plt.ylabel('Amplitude')
```

Out[74]:

Text(0, 0.5, 'Amplitude')

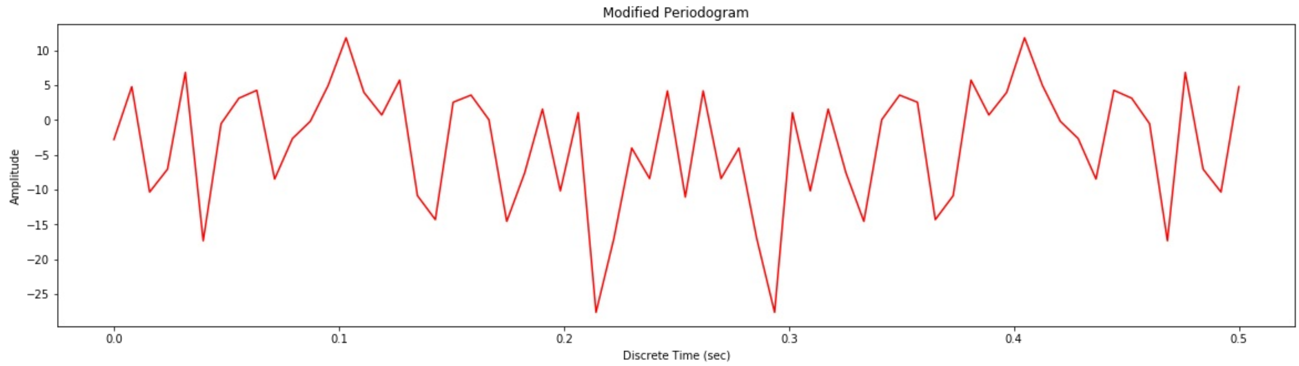


In [75]:

```
plt.figure(figsize = (20,5))
plt.plot(f2, (20*np.log10(abs(Pmekt2))), color = 'r')
plt.title('Modified Periodogram')
plt.xlabel('Discrete Time (sec)')
plt.ylabel('Amplitude')
```

Out[75]:

Text(0, 0.5, 'Amplitude')

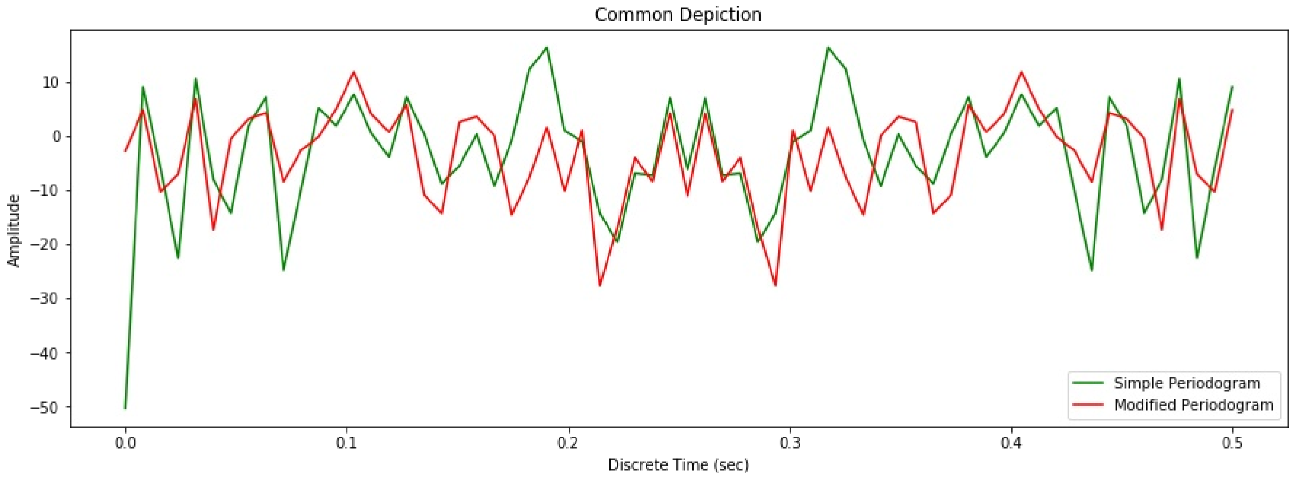


In [76]:

```
plt.figure(figsize = (15,5))
plt.plot(f2, (20*np.log10(abs(Ppekt2))), color = 'g')
plt.plot(f2, (20*np.log10(abs(Pmekt2))), color = 'r')
plt.title('Common Depiction')
plt.xlabel('Discrete Time (sec)')
plt.ylabel('Amplitude')
plt.legend(["Simple Periodogram", "Modified Periodogram"])
```

Out[76]:

```
<matplotlib.legend.Legend at 0x2876544da48>
```



In [77]:

```
# Question c

# Both Methods achieve to identify the central frequencies of 0.2pi, 0.3pi
# that exist in the sine factors of x[n]. Specifically, the resolution in
# the Simple Periodogram is worse than the one in the Modified Periodogram.
# Taking variance into account, the Modified Periodogram gives less variance
# than the Simple Periodogram. Finally, as far as the noise is concerned, the
# procedure of windowing leads to its reduction, so the Modified Periodogram
# will have less noise than the Simple Periodogram.
```