<u>ΕΘΝΙΚΌ ΜΕΤΣΌΒΙΟ ΠΟΛΥΤΕΧΝΕΊΟ</u>

<u>ΣΧΟΛΉ ΗΛΕΚΤΡΟΛΌΓΩΝ ΜΗΧΑΝΙΚΏΝ ΚΑΙ ΜΗΧΑΝΙΚΏΝ ΥΠΟΛΟΓΙΣΤΏΝ</u>

<u>ΣΥΣΤΉΜΑΤΑ ΑΝΑΜΟΝΉΣ</u>

(2019-2020)

1^{η} ΕΡΓΑΣΤΗΡΙΑΚΉ ΑΝΑΦΟΡΆ

<u>Ονοματεπώνυμο</u>: Χρήστος Τσούφης - 03117176

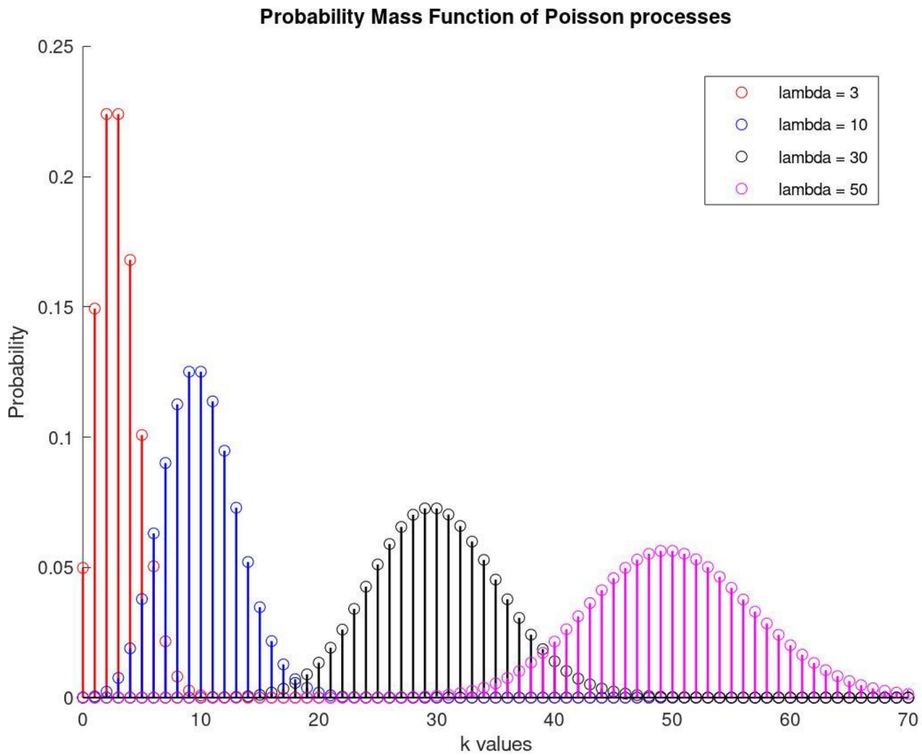
<u>Εκτέλεση Εργαστηρίου</u>: 30/03/2020

1η Ομάδα Ασκήσεων

Κατανομή Poisson

A. *Συνάρτηση μάζας πιθανότητας (Probability Mass Function) της κατανομής Poisson: Να σχεδιάσετε τη συνάρτηση μάζας πιθανότητας των κατανομών Poisson με παραμέτρους λ={3, 10, 30, 50}. Οι κατανομές να σχεδιαστούν σε κοινό διάγραμμα και στον οριζόντιο άξονα να επιλεγούν τιμές από 0 μέχρι και 70. Πώς αλλάζει η μορφή τους, καθώς μεγαλώνει η τιμή της παραμέτρου λ;*

Παρατίθεται η Συνάρτηση Μάζας Πιθανότητας των κατανομών Poisson με παραμέτρους λ = {3, 10, 30, 50}.



<u>Παρατήρηση</u>: Όσο το λ μεγαλώνει, αυξάνεται το εύρος αλλά μειώνεται το ύψος της κατανομής. Αυτό συμβαίνει διότι από τις γνώσεις της Θεωρίας Πιθανοτήτων, όλες οι πιθανότητες πρέπει να αθροίζουν στην μονάδα. Επιπλέον, δεν παρουσιάζει απαραίτητα μέγιστο στο λ της αλλά μπορεί να έχει και δύο μέγιστα (πχ για λ = 10).

B. *Μέση τιμή και διακύμανση κατανομής Poisson: Να επιλέξετε την κατανομή Poisson με παράμετρο λ=30. Να υπολογίσετε τη μέση τιμή της και τη διακύμανσή της. Τι παρατηρείτε για τις τιμές που υπολογίσατε;*

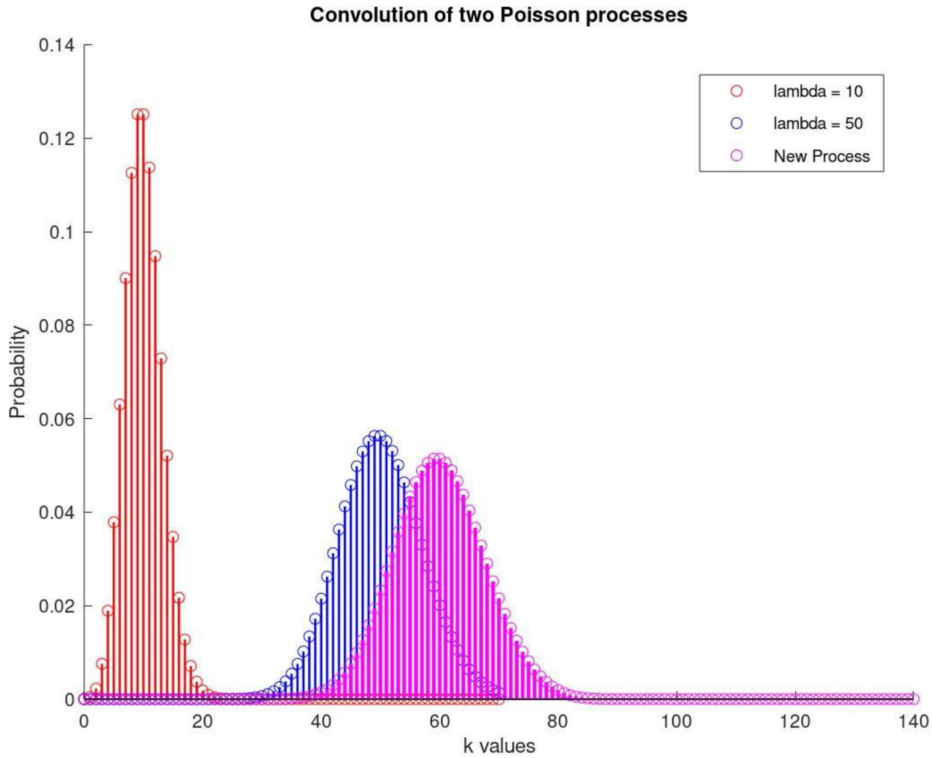
Ο υπολογισμός της Μέσης Τιμής και της Διακύμανσης προκύπτει από τον θεωρητικό τύπο:
E[N(t)] = $\sigma^2_{N(t)}$ = λ*t (δηλ.)
Για λ = 30 προκύπτει:

```
mean value of Poisson with lambda 30 is
mean_value =  30.000
Variance of Poisson with lambda 30 is
variance =  30.000
```

<u>Παρατήρηση</u>: Η Μέση Τιμή είναι ίση με την Διακύμανση και ίση με λ.

C. *Υπέρθεση κατανομών Poisson: Να επιλέξετε τις κατανομές Poisson με παραμέτρους λ=10 και λ=50. Να υπολογίσετε την κατανομή που προκύπτει από τη συνέλιξη των δύο αυτών κατανομών και, στη συνέχεια, να σχεδιάσετε τις τρεις αυτές κατανομές σε κοινό διάγραμμα. Τι είδους κατανομή προέκυψε; Τι παρατηρείτε για τη σχέση της κατανομής που υπολογίσατε με τις δύο επιμέρους κατανομές; Ποια είναι η απαραίτητη προϋπόθεση για να συμβαίνει αυτό;*

Υπέρθεση δύο ανεξάρτητων ανελίξεων Poisson $N_1(t)$, $N_2(t)$ με ρυθμούς λ_1, λ_2 σημαίνει συνέλιξη των δύο ανεξάρτητων κατανομών και δίνει ανέλιξη Poisson $N(t)$ με ρυθμό $\lambda = \lambda_1 + \lambda_2$. Οπότε, εδώ $\lambda = 60$.



<u>Παρατήρηση</u>: Προκύπτει μια κατανομή Poisson με $\lambda = 60$ η οποία έχει εύρος ίσο με το άθροισμα των επιμέρους κατανομών, δηλ. έως 140 τιμές. Επίσης, με απαραίτητη προϋπόθεση την ανεξαρτησία των κατανομών ισχύει:

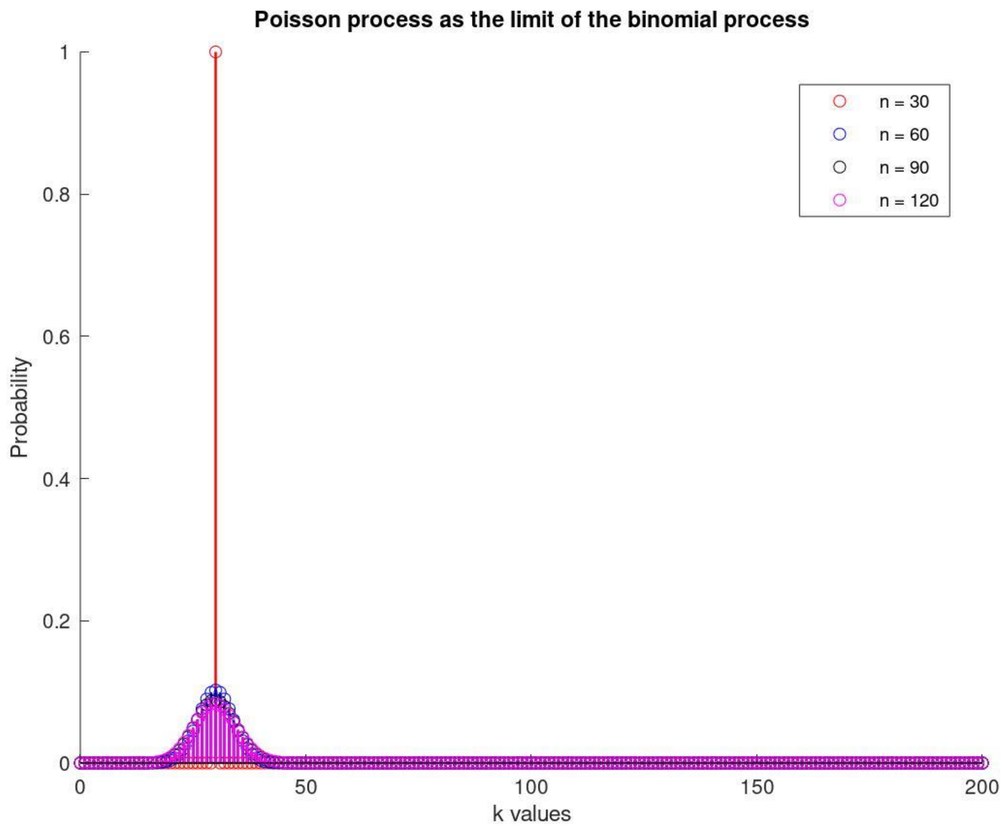
This only holds if X and Y are independent, so we suppose this from now on. We have for $k \geq 0$:

$$
\begin{aligned}
P(X+Y=k) &= \sum_{i=0}^{k} P(X+Y=k, X=i) \\
&= \sum_{i=0}^{k} P(Y=k-i, X=i) \\
&= \sum_{i=0}^{k} P(Y=k-i)P(X=i) \\
&= \sum_{i=0}^{k} e^{-\mu}\frac{\mu^{k-i}}{(k-i)!} e^{-\lambda}\frac{\lambda^i}{i!} \\
&= e^{-(\mu+\lambda)}\frac{1}{k!}\sum_{i=0}^{k} \frac{k!}{i!(k-i)!}\mu^{k-i}\lambda^i \\
&= e^{-(\mu+\lambda)}\frac{1}{k!}\sum_{i=0}^{k} \binom{k}{i}\mu^{k-i}\lambda^i \\
&= \frac{(\mu+\lambda)^k}{k!} \cdot e^{-(\mu+\lambda)}
\end{aligned}
$$

Hence, $X+Y \sim \mathcal{P}(\mu+\lambda)$.

D. *Κατανομή Poisson ως το όριο μιας διωνυμικής κατανομής: Πώς μπορεί να ληφθεί μία κατανομή Poisson παραμέτρου λ ως το όριο μιας διωνυμικής (binomial) κατανομής παραμέτρων n και p; Να κατασκευάσετε, με αυτόν τον τρόπο, μία κατανομή Poisson παραμέτρου λ=30 σημεία/sec. Πιο συγκεκριμένα, να σχεδιάσετε, σε κοινό διάγραμμα, την εξέλιξη μιας διωνυμικής κατανομής, καθώς τείνει στην επιθυμητή κατανομή Poisson (τέσσερα διαγράμματα αρκούν για n = 30, 60, 90, 120).*

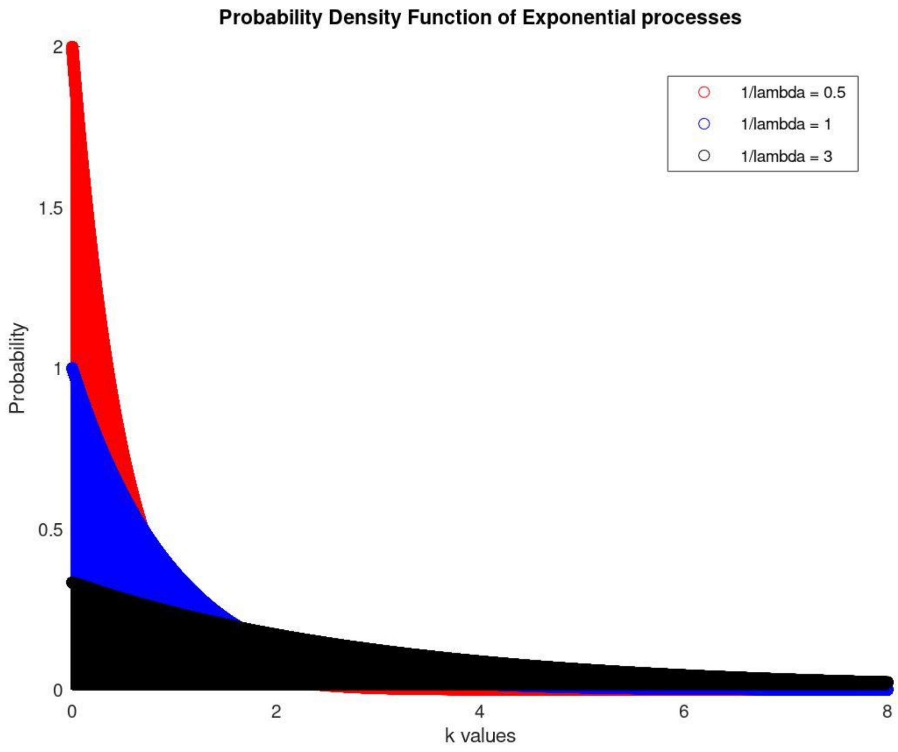
Το n είναι το πόσες φορές επαναλαμβάνεται ένα πείραμα τύχης και το είναι η πιθανότητα εμφάνισης των αποτελεσμάτων του πειράματος. Για $n \to \infty$ και $p \to 0$ και ταυτόχρονα το γινόμενό τους ισούται με το λ της κατανομής Poisson.



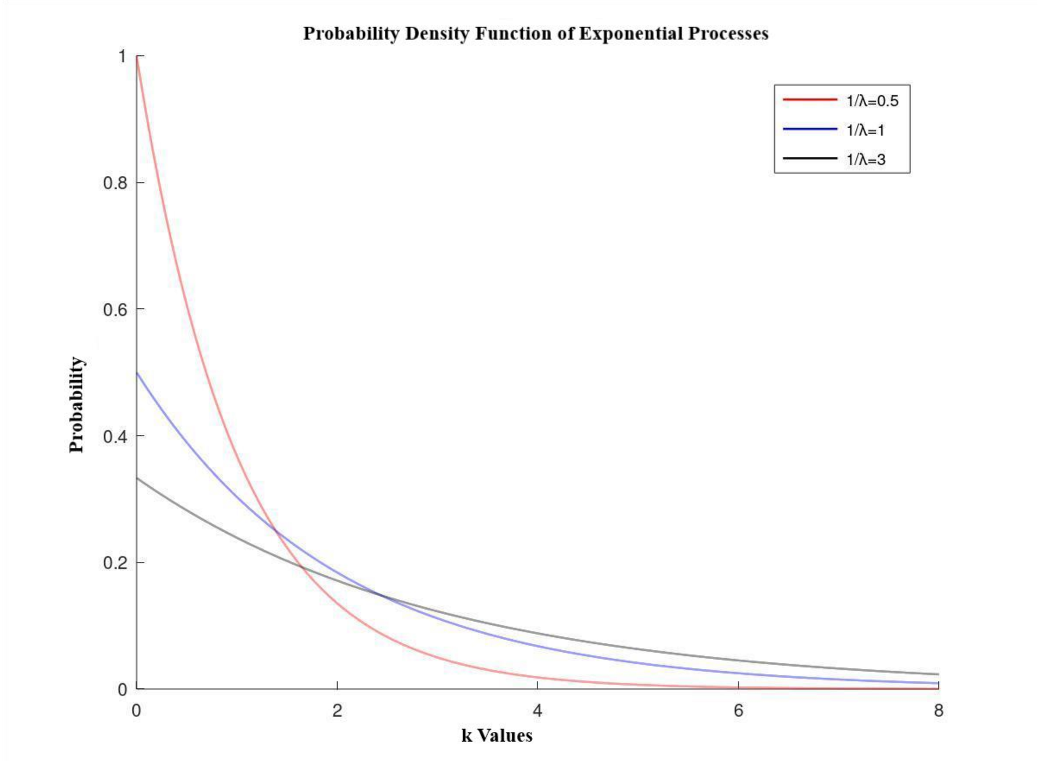
Εκθετική κατανομή

A. *Συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας (PDF, Probability Density Function) της εκθετικής κατανομής: Να σχεδιάσετε τη συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας των εκθετικών κατανομών με μέσους όρους 1/λ={0.5,1,3}. Οι κατανομές να σχεδιαστούν σε κοινό διάγραμμα και στον οριζόντιο άξονα να επιλεγούν τιμές από 0 μέχρι 8. (Υπόδειξη: να χρησιμοποιήσετε την εντολή k = 0:0.00001:8. Έτσι, μπορείτε να προσεγγίσετε τη συνεχή εκθετική κατανομή ως μία διακριτή με πολύ μικρό σφάλμα).*

Παρατίθεται η Συνάρτηση Πυκνότητας Πιθανότητας των Εκθετικών κατανομών με παραμέτρους 1/λ = {0.5, 1, 3}.



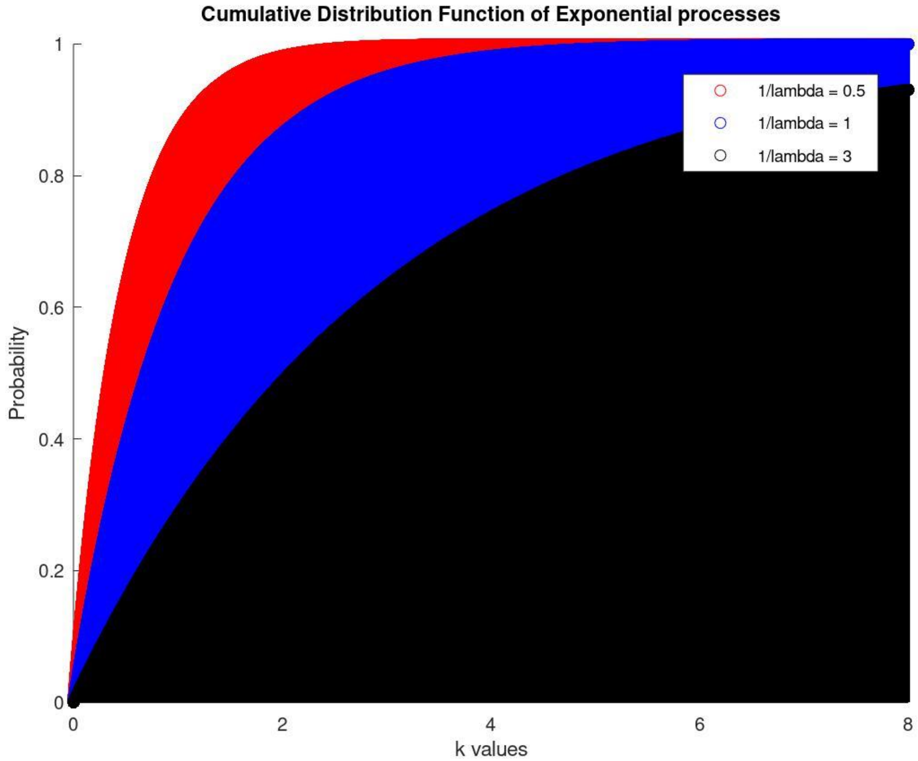
Ή



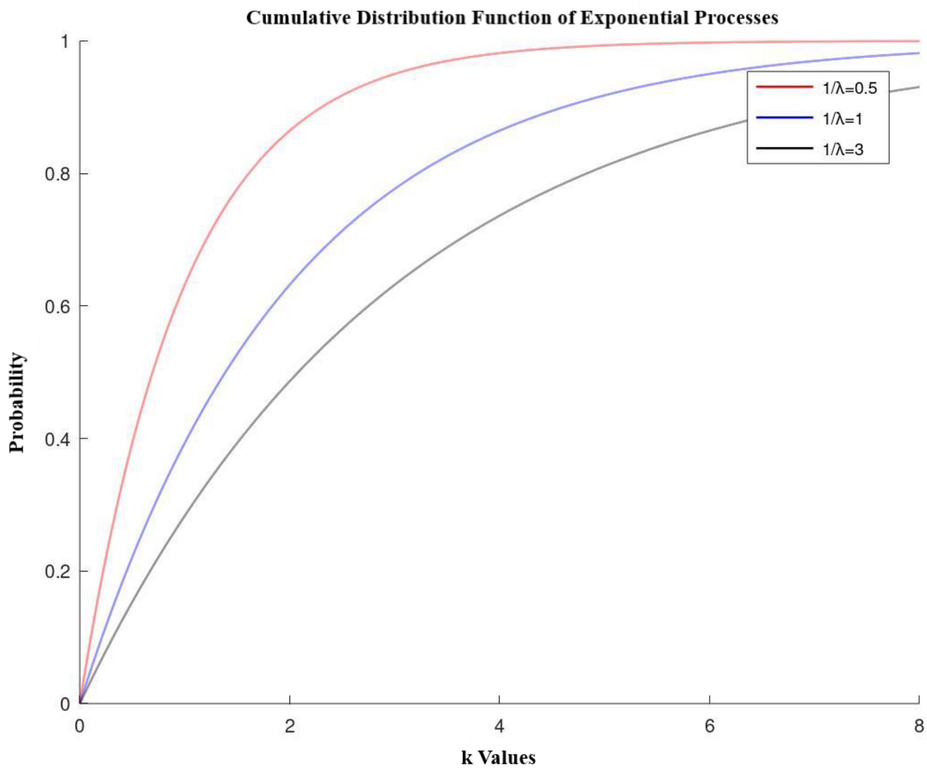
Παρατήρηση: Όσο το 1/λ μεγαλώνει, αυξάνεται το εύρος αλλά μειώνεται το ύψος της κατανομής. Αυτό συμβαίνει διότι από τις γνώσεις της Θεωρίας Πιθανοτήτων, όλες οι πιθανότητες πρέπει να αθροίζουν στην μονάδα.

B. *Συνάρτηση κατανομής πιθανότητας της εκθετικής κατανομής: Να σχεδιάσετε την αθροιστική συνάρτηση κατανομής (Cumulative Distribution Function) των εκθετικών κατανομών του προηγούμενου ερωτήματος σε κοινό διάγραμμα.*

Παρατίθεται η Αθροιστική Συνάρτηση Κατανομής των Εκθετικών κατανομών.



Ή



C. *Απώλεια μνήμης της εκθετικής κατανομής: Χρησιμοποιώντας τη συνάρτηση κατανομής πιθανότητας της εκθετικής κατανομής για 1/λ = 2.5 sec, να υπολογίσετε τις πιθανότητες P(X>30000) και Pr(X>50000|X>20000). Τι παρατηρείτε για τις δύο πιθανότητες; Γιατί συμβαίνει αυτό; Πώς ερμηνεύεται η παρατήρησή σας; (Επεξήγηση: οι τιμές 30000, 50000 και 20000 δηλώνουν τη θέση του σημείου στο διάνυσμα k = 0:0.00001:8 που χρησιμοποιήθηκε στο προηγούμενο ερώτημα).*

Από τις διαφάνειες του μαθήματος προκύπτει ότι η Εκθετική Κατανομή έχει την ιδιότητα της έλλειψης μνήμης και είναι η μόνη κατανομή συνεχούς μεταβλητής με αυτή την ιδιότητα. Ισχύει δηλαδή ότι:

$P[X > t + s \mid X > s] = \frac{P[X>t+s,\ X>s]}{P[X>s]} = \frac{P[X>t+s]}{P[X>s]} = e^{-\lambda t} = P[X > t] = 1 - P[X \le t] = F_X(t)$

Όπου, CDF: $F_X(t) = \begin{cases} 1 - e^{-\lambda t}, & t \ge 0 \\ 0, & t \le 0 \end{cases}$

Επομένως για s = 20.000 και t = 30.000 και 1/λ = 2,5 sec προκύπτει:

P [X > (30.000 + 20.000) | X > 20.000] = P [X > 50.000 | X > 20.000] = P [X > 30.000].

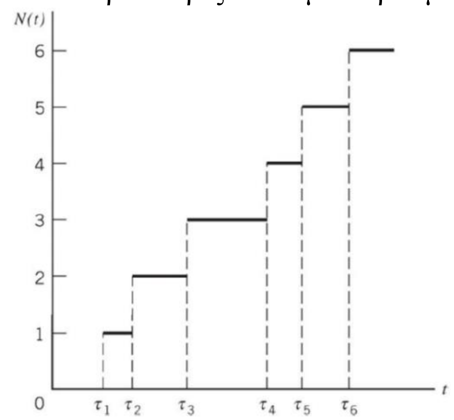
```
P(X>3000) = 0.886924
P(X>5000|X>2000) = 0.88692
```

<u>Παρατήρηση</u>: Προκύπτουν ίδιες τιμές για τις δύο πιθανότητες.

<u>Διαδικασία Καταμέτρησης Poisson</u>

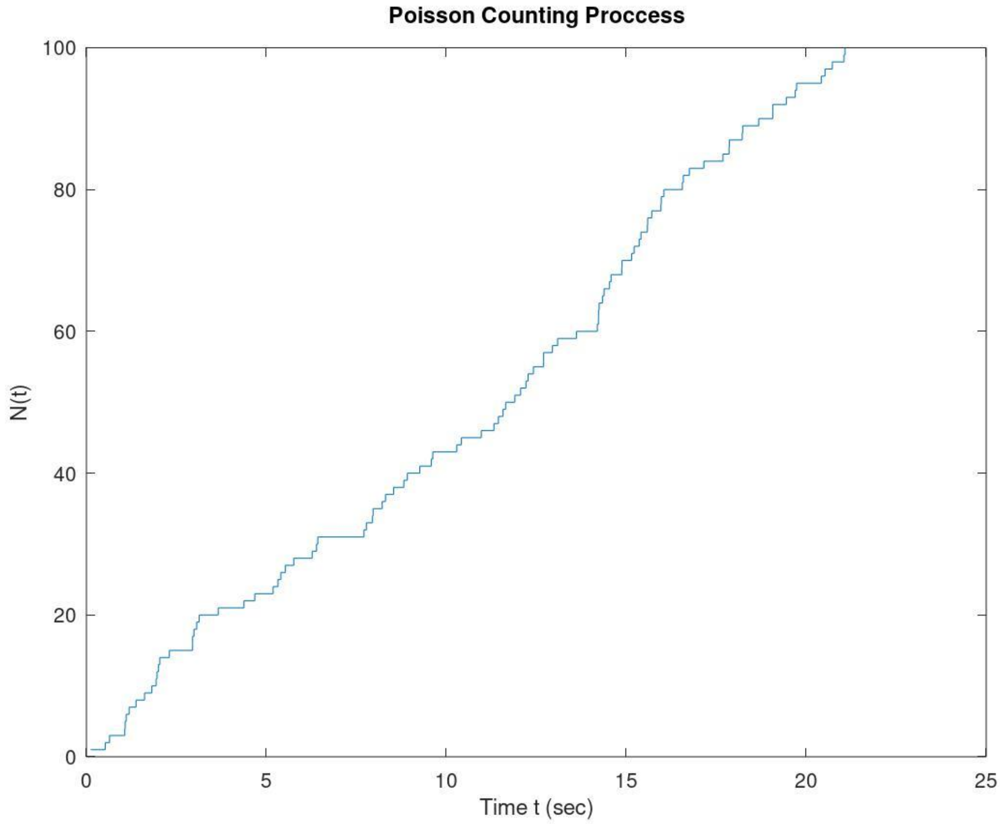
A. *Διαδικασία καταμέτρησης Poisson N(t): Τι κατανομή γνωρίζετε ότι ακολουθούν οι χρόνοι που μεσολαβούν ανάμεσα στην εμφάνιση δύο διαδοχικών γεγονότων Poisson; Να δημιουργήσετε με την εντολή exprnd( ) 100 διαδοχικά τυχαία γεγονότα και να σχεδιάσετε (συνάρτηση stairs) μία διαδικασία καταμέτρησης Poisson. Θεωρήστε λ = 5 γεγονότα/sec.*

Η τυχαία εμφάνιση παλμών χαρακτηρίζεται ως μια Στοχαστική Ανέλιξη Καταμέτρησης N(t) που καταμετρά τυχαία γεγονότα στο διάστημα (0, t). Ο αριθμός εμφανίσεων στο διάστημα (t, t + T) είναι μια διακριτή τυχαία μεταβλητή ν = N(t + T) – N(t). Υπό συνθήκες απρόβλεπτης εξέλιξης της ανέλιξης, καθώς τα γεγονότα εμφανίζονται ανεξάρτητα από το παρελθόν και χωρίς να επηρεάζουν το μέλλον, η ν ακολουθεί την Κατανομή Poisson με μέσο αριθμό εμφανίσεων ανάλογο του διαστήματος T : $E_T[\nu]$ = λ*T. Η σταθερά λ ορίζει τον μέσο ρυθμό εμφανίσεων.



Κάθε φορά που συμβαίνει ένα γεγονός, αυξάνεται ο αριθμός των γεγονότων κατά 1, 2, 3, …

Οι χρόνοι που μεσολαβούν ανάμεσα στην εμφάνιση δύο διαδοχικών γεγονότων Poisson ακολουθούν Εκθετική κατανομή με μέση τιμή 1/λ = 0,2.



B. *Μέσος αριθμός γεγονότων: Τι κατανομή γνωρίζετε ότι ακολουθεί ο αριθμός γεγονότων σε ένα χρονικό παράθυρο ΔT = t1 - t2; Να βρείτε το μέσο αριθμό γεγονότων στη μονάδα του χρόνου. Να επαναλάβετε για (i) 200, (ii) 300, (iii) 500, (iv) 1000, (v) 10000 διαδοχικά τυχαία γεγονότα. Τι παρατηρείτε;*

Ο αριθμός των γεγονότων σε ένα χρονικό παράθυρο $\Delta T = t_1 - t_2$ ακολουθεί Poisson κατανομή με μέσο ρυθμό εμφανίσεων λ.

Ο μέσος αριθμός γεγονότων στη μονάδα του χρόνου είναι ο ακόλουθος:

```
Average number of events (100 events): 5.3605
Average number of events (200 events): 4.7721
Average number of events (300 events): 5.46412
Average number of events (500 events): 5.31727
Average number of events (1000 events): 4.96434
Average number of events (10000 events): 4.98991
```

Για το λ παρατηρείται ότι όσο αυξάνεται ο αριθμός των τυχαίων γεγονότων, ο μέσος αριθμός γεγονότων στη μονάδα του χρόνου πλησιάζει την παράμετρο λ = 5 γεγονότα/sec.

Ο αντίστοιχος κώδικας επισυνάπτεται σε ξεχωριστό αρχείο.