Οι αναλυτικές σειρές ασκήσεων είναι ατομικές, και οι λύσεις που θα δώσετε πρέπει να αντιπροσωπεύουν μόνο την προσωπική σας εργασία. Αν χρησιμοποιήσετε κάποια άλλη πηγή εκτός των σημειώσεων για την λύση σας, πρέπει να το αναφέρετε. Η παράδοση των λύσεων των αναλυτικών ασκήσεων της σειράς αυτής θα γίνει ηλεκτρονικά στο mycourses.ntua.gr και θα πρέπει να την υποβάλετε ως ένα ενιαίο αρχείο PDF με το εξής filename format χρησιμοποιώντας μόνο λατινικούς χαρακτήρες: `dsp20_hwk2_AM_FirstnameLastname.pdf`, όπου AM ειναι ο 8-ψήφιος αριθμός μητρώου σας. Σκαναριμένες χειρόγραφες λύσεις επιτρέπονται αρκεί να είναι καθαρογραμμένες και ευανάγνωστες. Επίσης στην 1η σελίδα των λύσεων θα αναγράφετε το ονοματεπώνυμο, AM, και email address σας.

Ασκηση 2.1: (Γραμμική Πρόβλεψη, Αλγόριθμος Levinson) [ανεξάρτητα μέρη τα (α),(β)]
(α) Για το σχεδιασμό ενός βέλτιστου γραμμικού προβλέπτη τάξης $p = 3$ με τη μέθοδο της Αυτοσυσχέτισης, σας δίνονται οι τιμές της αυτοσυσχέτισης του (παραθυρωμένου) σήματος : $r_x[0] = 1.05, r_x[1] = 0.7, r_x[2] = 0.5, r_x[3] = 0.4$.
(α.1) Επαληθεύσετε ότι ο πίνακας αυτοσυσχέτισης

$$\mathbf{R}_x = \begin{bmatrix} r_x[0] & r_x[1] & r_x[2] & r_x[3] \\ r_x[1] & r_x[0] & r_x[1] & r_x[2] \\ r_x[2] & r_x[1] & r_x[0] & r_x[1] \\ r_x[3] & r_x[2] & r_x[1] & r_x[0] \end{bmatrix}$$

που σχηματίζεται από τις ανωτέρω αριθμητικές τιμές των $r_x[k]$ είναι θετικά ορισμένος. (Υπόδειξη: Ελέγξτε τα πρόσημα των κύριων υπο-οριζουσών του ή τα πρόσημα των ιδιοτιμών του.)
(α.2) Χρησιμοποιώντας τον αλγόριθμο Levinson-Durbin, βρείτε τους βέλτιστους LPC συντελεστές $\{\alpha_i\}$, και τους αντίστοιχους βέλτιστους συντελεστές ανάκλασης $\{k_i\}$.
(β) Για ένα γραμμικό προβλέπτη τάξης $p = 4$, εάν οι βέλτιστοι LPC συντελεστές $\{\alpha_i\}$ είναι οι

$$\alpha_1 = 0.93, \quad \alpha_2 = 0.338, \quad \alpha_3 = -1.065, \quad \alpha_4 = 0.5,$$

χρησιμοποιείστε τον αλγόριθμο Levinson-Durbin για να βρείτε του αντίστοιχους συντελεστές ανάκλασης $\{k_i\}$.
Σημείωση: Ο αλγόριθμος Levinson-Durbin με τον ορθό συμβολισμό περιγράφεται στις συνοπτικές σημειώσεις (διαφάνειες) του μαθήματος.

Ασκηση 2.2: (Γραμμική Πρόβλεψη για εύρεση συχνοτήτων και σύγκριση με DTFT)
Σας δίνεται το διακριτό σήμα $s[n] = 10\cos(0.24\pi n + 0.2\pi) + 12\sin(0.26\pi n - 0.8\pi)$, από το οποίο θα αναλύσετε ένα πεπερασμένο τμήμα του $x[n] = s[n]$ για $n = 0, 1, ..., 100$.
(α) Υπολογίστε τον DFT $X[k]$ του $x[n]$ μήκους $N \gg 100$ σημείων (χρησιμοποιώντας zero-padding στο σήμα $x[n]$) ώστε να επιτύχετε μια καλή προσέγγιση του DTFT $X(e^{j\omega})$. Σχεδιάστε το |DFT| φάσμα σε λογαριθμική κλίμακα dB, δηλ. $20\log_{10}|X[k]|$. Αναφέρετε την τιμή του N που επιλέξατε.
(β) Εφαρμόστε γραμμική πρόβλεψη στο τμήμα του αρχικού σήματος $s[n]$ για το διάστημα $n = 0, 1, ..., 100$, με την μέθοδο Covariance και τάξη προβλέπτη $p = 4$. Ως αποτέλεσμα να

βρεθεί το πολυώνυμο $A_{cov}(z)$ της συνάρτησης μεταφοράς του συστήματος λάθους πρόβλεψης που με είσοδο το $s[n]$ δίνει ως έξοδο το σήμα $s[n]-\sum_{k=1}^{4}\alpha_k s[n-k]$. Δηλ. να βρεθούν οι LPC $\{\alpha_k\}$, το πολυώνυμο $A_{cov}(z)$, και επίσης να γίνει η παραγοντοποίηση του $A_{cov}(z)$ σε γινόμενο πρωτοβάθμιων όρων. Εξηγήστε.

(γ) Επαναλάβετε το μέρος (β) αλλά με την μέθοδο Autocorrelation ($p = 4$) χρησιμοποιώντας το ίδιο τμήμα του αρχικού σήματος 101 σημείων παραθυρωμένο με παράθυρο Hamming $w[n]$, $n = 0, 1, ..., 100$. Ως αποτέλεσμα να βρεθούν οι αντίστοιχοι LPC $\{\alpha_k\}$, το πολυώνυμο $A_{aut}(z)$ της συνάρτησης μεταφοράς του συστήματος λάθους πρόβλεψης, και η παραγοντοποίηση του $A_{aut}(z)$ σε γινόμενο πρωτοβάθμιων όρων. Εξηγήστε. Επίσης σχεδιάστε το παραθυρωμένο σήμα $w[n]s[n]$.

(δ) Να σχεδιασθούν οι δύο προσεγγίσεις του φάσματος του σήματος $s[n]$ με τις δύο μεθόδους γραμμικής πρόβλεψης μέσω των αποκρίσεων πλάτους $1/|A(e^{j\omega})|$ των συστημάτων που προκύπτουν από τις δύο μεθόδους. Αυτά τα δύο φάσματα να σχεδιασθούν με υπέρθεση πάνω στο σχήμα DFT φάσματος του μέρους (α), χρησιμοποιώντας τον ίδιο αριθμό ισοκατανεμημένων δειγμάτων συχνότητας όπως και το μήκος N του DFT του (α). (Και τα τρία φάσματα σε λογαριθμική κλίμακα dB.)

(ε) Συγκρίνετε και σχολιάστε τα τρία φάσματα του (δ) ως προς την αποτελεσματικότητα τους να εκτιμήσουν τις δύο αληθινές συχνότητες που υπάρχουν στο αρχικό σήμα $s[n]$.

Σημείωση: οι υπολογισμοί και σχεδιασμοί των φασμάτων στα (α)-(δ), καθώς και η λύση των εξισώσεων της γραμμικής πρόβλεψης, μπορούν να γίνουν με την βοήθεια κάποιου πακέτου λογισμικού (π.χ. Matlab ή Python).

Ασκηση 2.3: (Ελάχιστη φάση, Γραμμική Φάση):

Ένα αιτιατό ΓΧΑ σύστημα έχει συνάρτηση μεταφοράς

$$H(z) = \frac{(1-0.8z^{-1})(1+6.25z^{-2})}{(1-0.49z^{-2})}.$$

(α) Βρείτε εκφράσεις για ένα σύστημα ελάχιστης φάσης $H_{1,min}(z)$ και ένα all-pass σύστημα $H_{ap}(z)$ έτσι ώστε

$$H(z) = H_{1,min}(z)H_{ap}(z).$$

(β) Να σχεδιάσετε το διάγραμμα πόλων και μηδενικών για το minimum-phase σύστημα $H_{1,min}(z)$ και για το all-pass σύστημα $H_{ap}(z)$, και να βρείτε τις περιοχές σύγκλισης των Z μετ/σμών.

(γ) Βρείτε εκφράσεις για ένα διαφορετικό σύστημα ελάχιστης φάσης $H_{2,min}(z)$ και ένα FIR σύστημα γενικευμένης γραμμικής φάσης $H_{\text{lin}}(z)$ έτσι ώστε

$$H(z) = H_{2,min}(z)H_{\text{lin}}(z).$$

Ασκηση 2.4: (Cepstrum) [ανεξάρτητα μέρη τα (α),(β)]

(α) Να βρείτε αναλυτικά το complex cepstrum $\hat{h}[n]$ του σήματος που έχει τον Z-μετασχηματισμό $H(z)$ της Ασκησης 2.3, και εν συνεχεία το απλό cepstrum $c[n]$.

(β) Δίνεται η ακολουθία

$$x[n] = \delta[n] + 0.8\delta[n-N_p], \quad N_p = 100$$

(β.1) Βρείτε αναλυτικά το “μιγαδικό" cepstrum $\hat{x}[n]$ του $x[n]$ και σχεδιάστε το αποτέλεσμα.

(β.2) Βρείτε το απλό cepstrum $c[n]$ του $x[n]$ και σχεδιάστε το αποτέλεσμα.

(β.3) Σχεδιάστε και σχολιάστε την προσέγγιση $\hat{x}_p[n]$ με DFT $N = 500$ σημείων του "μιγαδικού" cepstrum:

$$\hat{x}_p[n] = \frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1} \log(X[k]) \exp(j2\pi kn/N), \quad n = 0, ..., N-1,$$

Τι θα αλλάξει αν $N = 550$?

(β.4) Επαναλάβετε το (β.3) για την DFT-προσέγγιση, $c_p[n]$, του απλού cepstrum

$$c_p[n] = \frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1} \log|X[k]| \exp(j2\pi kn/N), \quad n = 0, ..., N-1$$

(β.5) Αν στην προσέγγιση $c_p[n]$ του απλού cepstrum χρησιμοποιηθεί η κρουστική $\delta[\cdot]$ με το υψηλότερο πλάτος για εκτίμηση του $N_p = 100$, πόσο μεγάλο πρέπει να είναι το μήκος N του DFT για να αποφευχθεί σύγχυση λόγω aliasing? Εξηγήστε.

Σημείωση: Σε όσα ανωτέρω ερωτήματα ζητείται σχεδιασμός ακολουθιών cepstrum, αυτό μπορεί να γίνει με το χέρι προσεγγιστικά σημειώνοντας κρίσιμες τιμές στους άξονες και σχεδιάζοντας μερικές χαρακτηριστικες τιμές του σήματος.

Ασκηση 2.5: (Σχεδιασμός Ψηφιακού Φίλτρου)

Θεωρήστε ένα αναλογικό κύκλωμα που απεικονίζεται στο ακόλουθο Σχήμα και αποτελείται από την εν σειρά σύνδεση μιας αντίστασης R, ενός πηνίου επαγωγής L και ενός πυκνωτή χωρητικότητας C. Αυτή η σειριακή σύνδεση τροφοδοτείται από ένα σήμα τάσης $x(t)$, που το θεωρούμε ως σήμα εισόδου, και ως σήμα εξόδου $y(t)$ θεωρούμε την τάση του πυκνωτή.

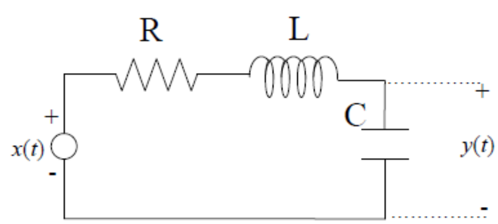

Figure 1: Αναλογικό Φίλτρο.

(α) Να βρεθεί αναλυτικά η διαφορική εξίσωση που συνδέει την είσοδο $x(t)$ με την έξοδο $y(t)$. Στην συνέχεια της άσκησης θέτουμε ως αριθμητικές τιμές $R/L = 2$ και $LC = 0.2$. Να βρεθεί αναλυτικά η συνάρτηση μεταφοράς $H_a(s)$ του ΓΧΑ συστήματος που παριστάνεται από αυτό το κύκλωμα καθώς και η κρουστική του απόκριση $h_a(t)$.

(β) Με βάση το ανωτέρω αναλογικό φίλτρο θα σχεδιάσουμε ένα ψηφιακό φίλτρο με την μέθοδο impulse invariance που θα έχει κρουστική απόκριση $h[n] = h_a(nT)$. Να βρεθεί αναλυτικά το διακριτό σήμα $h[n]$ για $T = 1$.

(γ) Να βρεθεί αναλυτικά η συνάρτηση μεταφοράς $H(z)$ του ψηφιακού φίλτρου και η εξίσωση διαφορών που συνδέει την διακριτή είσοδο $x[n]$ με την διακριτή έξοδο $y[n]$.

(δ) Να σχεδιασθεί η απόκριση πλάτους του αναλογικού και του ψηφιακού φίλτρου, δηλ. οι συναρτήσεις $|H_a(j\Omega)|$ και $|H(e^{j\omega})|$.

Ασκηση 2.6: (Τυχαία Σήματα Διακριτού Χρόνου)

Σε κάθε μια από τις ακόλουθες περιπτώσεις δίνεται μια διαφορετική στοχαστική ανέλιξη $x[n]$

διακριτού χρόνου. Για κάθε περίπτωση, να βρεθεί η συνάρτηση αυτοσυσχέτισης $r_x[k,\ell]$ της $x[n]$, και εάν η ανέλιξη είναι στάσιμη υπό την ευρεία έννοια (WSS - Wide Sense Stationary). Αν είναι WSS, να εκφρασθεί η αυτοσυσχέτιση ως συνάρτηση $r_x[k]$ και να βρεθεί αναλυτικά το φάσμα ισχύος $P_x(e^{j\omega})$ της $x[n]$.

(α) Η ανέλιξη $x[n]$ είναι ένα τυχαίο ημίτονο $A\cos(n\omega_o+\phi)$ συν λευκό θόρυβο $w[n]$ μεταβλητότητας σ_w^2 και ασυσχέτιστο με τις τυχαίες παραμέτρους του ημιτόνου:

$$x[n] = A\cos(n\omega_o+\phi) + w[n]$$

(α.1) *Αρμονική* ανέλιξη: Το ημίτονο έχει σταθερό πλάτος A, σταθερή συχνότητα ω_o, και φάση ϕ που είναι τυχαία μεταβλητή ομοιόμορφα κατανεμημένη στο διάστημα $[-\pi,\pi]$.

(α.2) Ημιτονοειδής ανέλιξη όπως και στο (α.1), αλλά με σταθερό πλάτος A, σταθερή φάση ϕ, και συχνότητα ω_o που είναι τυχαία μεταβλητή ομοιόμορφα κατανεμημένη στο διάστημα $[\omega_o-\Delta,\omega_o+\Delta]$.

(β) *Bernoulli* ανέλιξη: $x[n]$ είναι μια ακολουθία από independent identically-distributed (i.i.d.) τυχαίες μεταβλητές Bernoulli (με τιμές 0,1) που για κάθε n ισχύει $\Pr(x[n]=1)=p$ και $\Pr(x[n]=0)=1-p$, $0<p<1$.

(γ) *Τυχαίος Περίπατος*: για κάθε $n\geq 1$ η ανέλιξη είναι άθροισμα από n i.i.d.τυχαία βήματα $x_i=\pm s$:

$$x[n] = x_1 + x_2 + \cdots + x_n, \quad E[x_i]=0,\ E[x_i^2]=s^2$$