ΨΕΣ

1ο Σύνολο Αναλυτ. Ασκήσεων

Χρήστος Τσούφης
03117176
chris99ts@gmail.com

Άσκηση 1.1

$x[n] = 3\delta[n] - \delta[n-1] + 2\delta[n-2] - 3\delta[n-4] + \delta[n-5] - 2\delta[n-6] + 4\delta[n-8] - \delta[n-9]$

$h[n] = \delta[n] - 2\delta[n-1] + \delta[n-2] - \delta[n-3] + \delta[n-4]$

α) Ισχύει $Y[k] = X[k] \cdot H[k]$, $k = 0, 1, \dots, 9$ και $y[n] \xleftrightarrow{DFT} Y[k]$

Άρα, $y_c[n] = x[n] \circledast_{10} h[n]$ (κυκλική συνέλιξη περιόδου 10)

ή $y_\ell[n] = x[n] * h[n]$ (κυκλική αναδίπλωση με $N=10$ της γραμμ. συνέλιξης με $10+5-1=14$ σημεία)

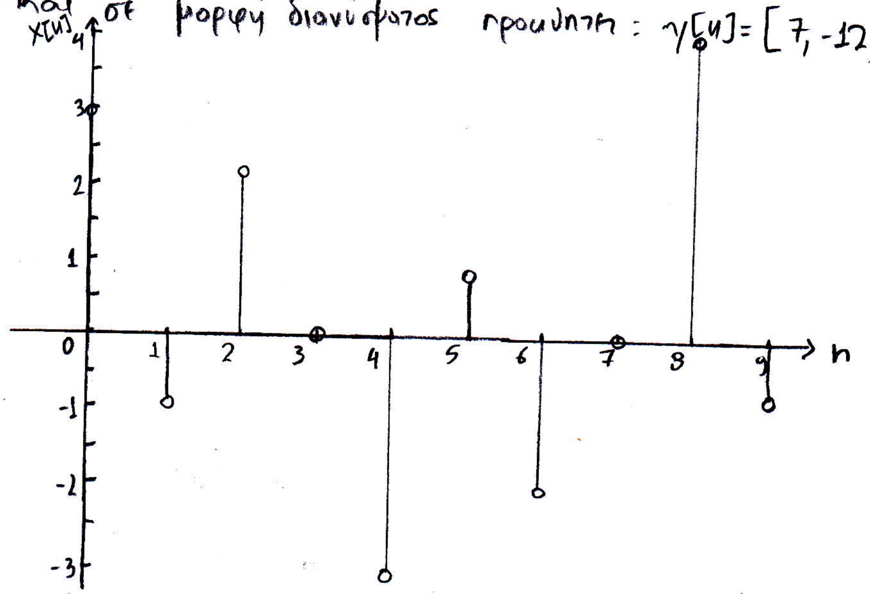
▷ Με αντίστροφο DFT στην $Y[k] = X[k] \cdot H[k]$ προκύπτει $y[n] = x[n] \circledast_{10} (h[n]_{10})$ όπου $h[n]_{10}$ είναι η περιοδική επέκταση της h. Άρα:

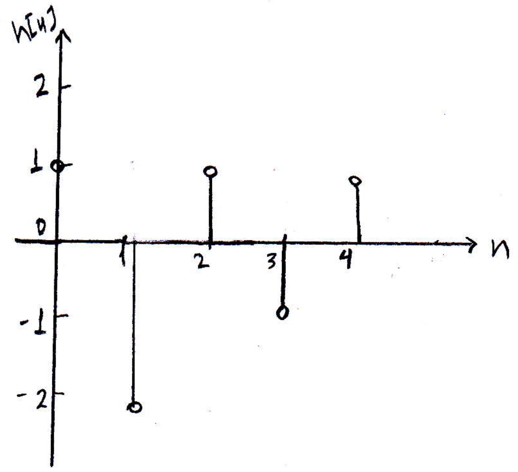
$$y[n] = \sum_{m=0}^{9} x[n] \cdot h[n-m]_{10} =$$

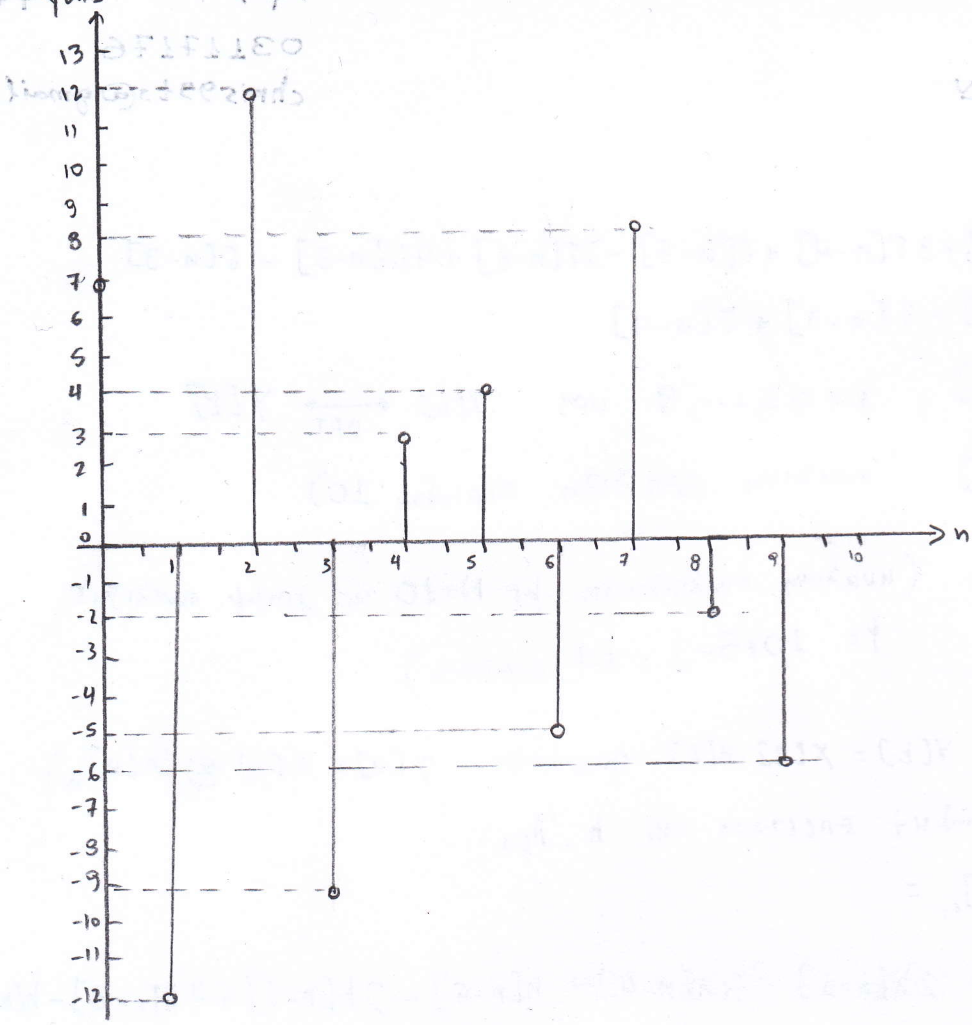
$$= 3h[n] - h[n-1] + 2h[n-2] - 3h[n-4] + h[n-5] - 2h[n-6] + 4h[n-8] - h[n-9]$$

Και σε μορφή διανύσματος προκύπτει: $y[n] = [7, -12, 12, -9, 3, 4, -5, 8, -2, -6]$

β)







• Ισχύει: $x[n] * h[n] = \left[3\delta[n] - \delta[n-1] + 2\delta[n-2] - 3\delta[n-4] + \delta[n-5] - 2\delta[n-6] + 4\delta[n-8] - \delta[n-9]\right] *$

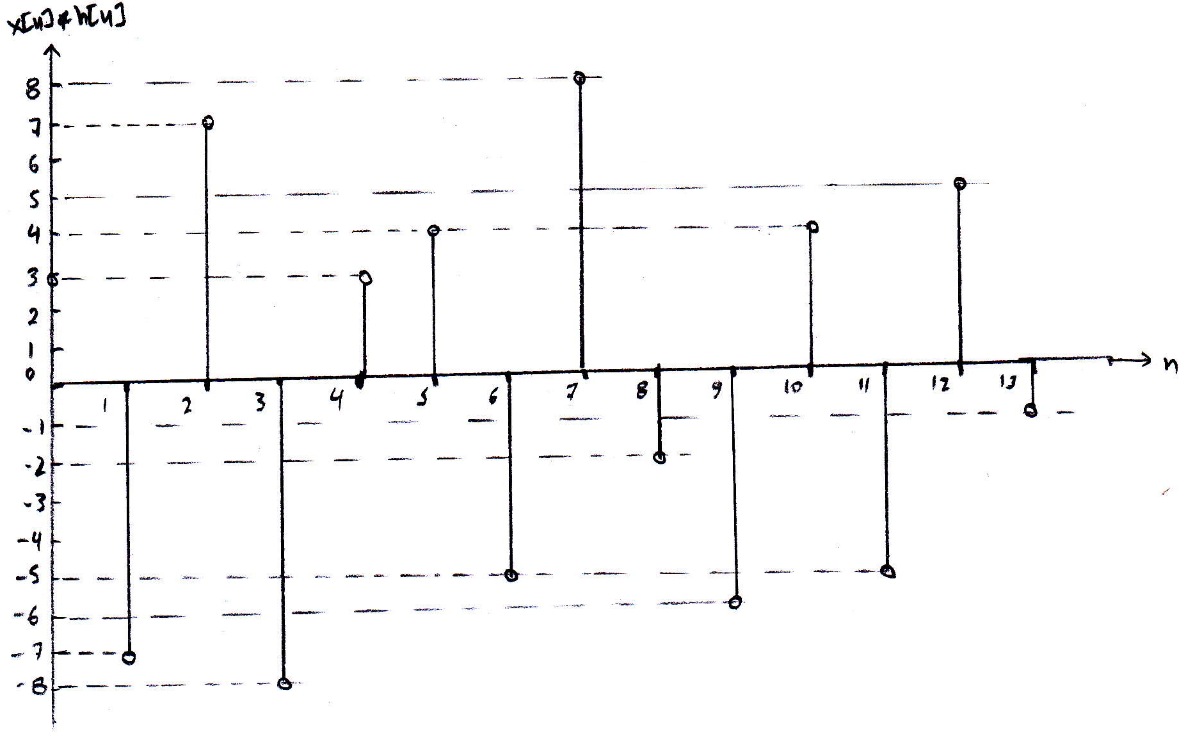
$* \left[\delta[n] - 2\delta[n-1] + \delta[n-2] - \delta[n-3] + \delta[n-4]\right] = \ldots =$

$= [3, -7, 7, -8, 3, 4, -5, 8, -2, -6, 4, -5, 5, -1]$

• Αντίστοιχα, το $y[n]$ υπολογίζεται από μια περιοδική συνέλιξη N σημείων:

$y[n] = x[n] \circledast_N (h[n])_N$

▷ Όταν το N θα ισούται με το άθροισμα των "μηκών" των δύο σημάτων μείον 1, ($N = 10+5-1 = 14$), η περιοδική επέκταση της h θα έχει μόνο μηδενικά στις αρνητικές θέσεις που θα υπολογιστούν, άρα η περιοδική συνέλιξη θα ισούται με την συνέλιξη. Δηλαδή, $N \geq 14$.

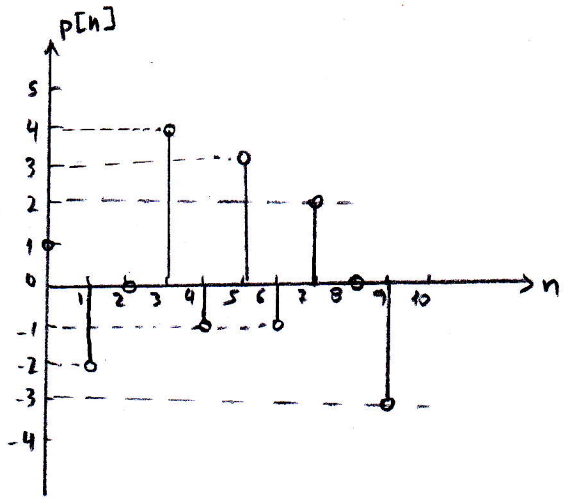


δ) $P[k] = (-1)^k X[k]$, $k = 0, \dots, 9$

$Q[k] = |X[2k]|^2$, $k = 0, 1, 2, 3, 4$ $\Big\}$ DFT των $p[n]$, $q[n]$

δ.1) Από ιδιότητες: $(-1)^k = e^{-j\pi k}$

$$p[k] = \frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1} X[k] \cdot e^{-j\pi k} \cdot e^{j\frac{2\pi k n}{N}} \overset{N=10}{=\!=\!=} \frac{1}{10}\sum_{k=0}^{9} X[k] \cdot e^{j2\pi k\left(\frac{n-5}{10}\right)} = x[n-5]_{10}$$



δ.2) $Q[k] = |X[2k]|^2 \Leftrightarrow Q[k] = X[2k] \cdot X^*[2k]$ όπου $x_2[n] \xleftrightarrow[\text{DFT}]{} X[2k]$

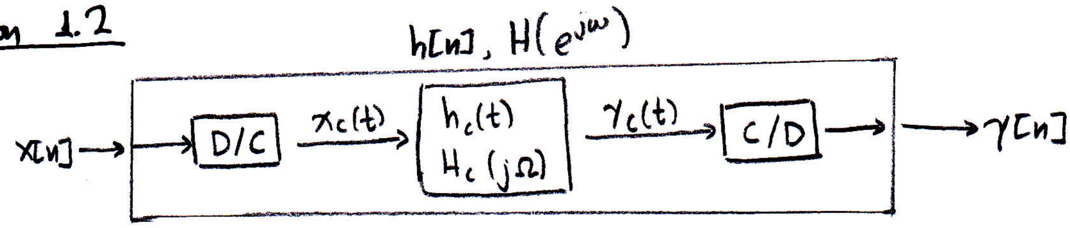
Όμως, $x^*[(-n)_N] \xleftrightarrow[\text{DFT}]{} X^*[k]$ και $x[n]$ πραγματικό σήμα.

Οπότε, $q[n] = x_2[n] \circledast_4 x_2[(-n)_5]$

Όπου, $x_2[n]$ προκύπτει με περιοδική αναδίπλωση του $x[n]$ (με περίοδο $N=5$):

$$x_2[n] = \sum_{r=-\infty}^{+\infty} x[n-5r]$$

Άσκηση 1.2



$$\frac{d^2 y_c(t)}{dt^2} + 4\frac{d y_c(t)}{dt} + 3y_c(t) = x_c(t) \quad , \quad T = 0{,}1s$$

- $$\frac{d^2 y_c(t)}{dt^2} + 4\frac{d y_c(t)}{dt} + 3y_c(t) = x_c(t) \xRightarrow{\text{Fourier}} (j\Omega)^2 \cdot Y_c(j\Omega) + 4(j\Omega)\cdot Y_c(j\Omega) + 3Y_c(j\Omega) = X_c(j\Omega)$$

$$\Rightarrow Y_c(j\Omega)\left[(j\Omega)^2 + 4(j\Omega) + 3\right] = X_c(j\Omega) \Rightarrow \frac{Y_c(j\Omega)}{X_c(j\Omega)} = \frac{1}{(j\Omega)^2 + 4(j\Omega) + 3} = H_c(j\Omega)$$

- Για το σύστημα (διακριτό → συνεχές σήμα (D/C), φίλτρο συνεχούς χρόνου ($H_c(j\Omega)$), συνεχές → διακριτό σήμα (C/D)) ισχύει ότι ισοδυναμεί με διακριτού χρόνου σύστημα με απόκριση συχνότητας $H(e^{j\omega})$

- Ισχύει $H(e^{j\omega}) = H_c\left(j\frac{\omega}{T}\right)$

- Οπότε, για $T = 0{,}1s$, $H(e^{j\omega}) = H_c\left(j\frac{\omega}{T}\right) \Rightarrow H(e^{j\omega}) = \dfrac{1}{100(j\omega)^2 + 40j\omega + 3} \Rightarrow$

$$\Rightarrow H(e^{j\omega}) = \frac{1}{-100\omega^2 + 40j\omega + 3}$$, για $|\omega| \leq \pi$, και περίοδο 2π.

- $H_c(j\omega) = \dfrac{1}{(j\omega)^2 + 4(j\omega) + 3}$ για $j\omega = s$: $H_c(s) = \dfrac{1}{s^2 + 4s + 3} = \dfrac{1/2}{s+1} - \dfrac{1/2}{s+3}$

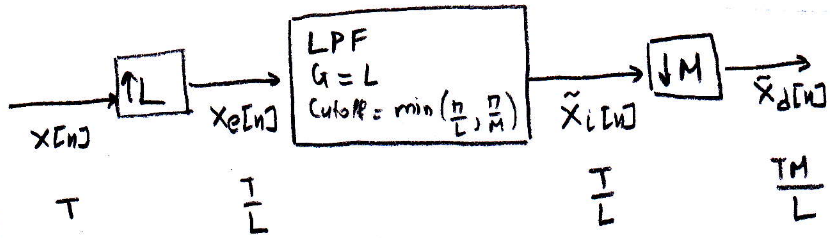
δηλ. $H_c(j\omega) = \dfrac{1/2}{j\omega + 1} - \dfrac{1/2}{j\omega + 3}$ οπότε $h_c(t) = \frac{1}{2}\left(e^{-t} - e^{-3t}\right)u(t)$

Από ιδιότητες: $h[n] = T \cdot h_c(nT)$ οπότε $h[n] = \frac{1}{20}\left(e^{-0,1n} - e^{-0,3n}\right)u[0{,}1n]$

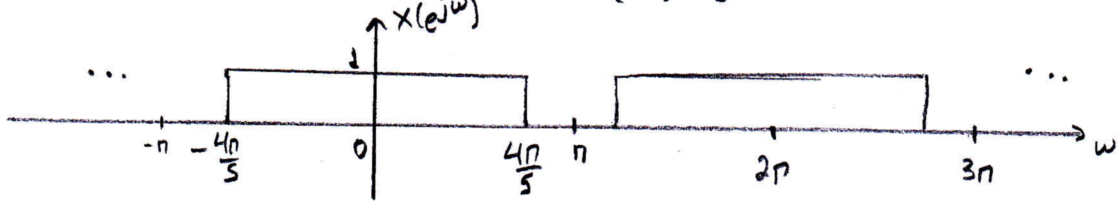
(2ος Τρόπος, με χρήση της ιδιότητας: $x(at) \leftrightarrow \frac{1}{|a|}\cdot X\left(\frac{j\omega}{a}\right)$ και $H(e^{j\omega}) = H_c\left(\frac{j\omega}{T}\right)$

Άσκηση 1.3

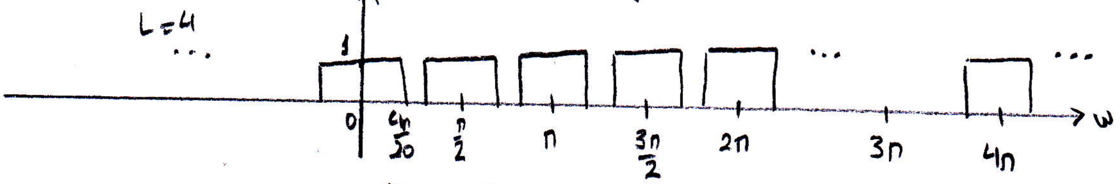
$$x[n] = \frac{\sin\left(\frac{4\pi n}{5}\right)}{\pi n}, \quad L = 4, \quad M = 3$$



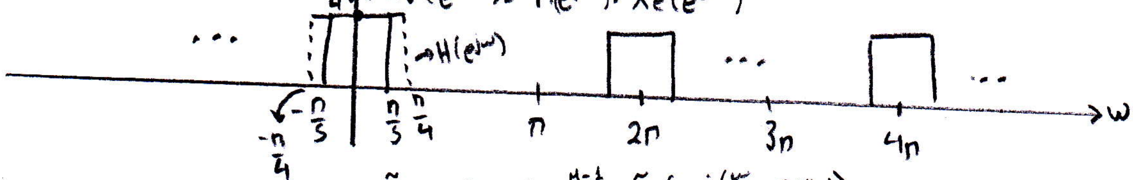
α) i) $x[n] = \frac{\sin\left(\frac{4\pi n}{5}\right)}{\pi n} \xleftrightarrow{DFT} X(e^{j\omega}) = \begin{cases} 1, & |\omega| \leq \frac{4\pi}{5} \\ 0, & \frac{4\pi}{5} < |\omega| \leq \pi \end{cases}$ περίοδος : 2π



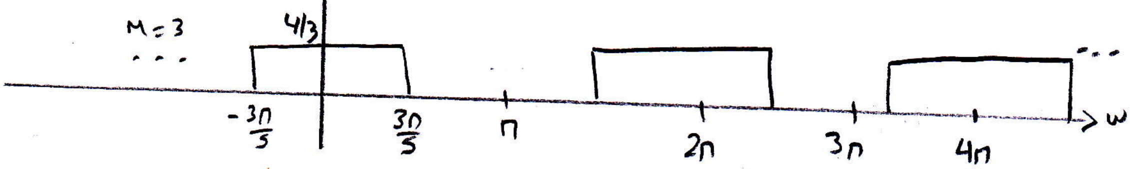
ii) $X_e(e^{j\omega}) = X(e^{j\omega L})$



iii) $\tilde{X}_i(e^{j\omega}) = H(e^{j\omega}) \cdot X_e(e^{j\omega})$



iv) $\tilde{X}_d(e^{j\omega}) = \frac{1}{M} \sum_{k=0}^{M-1} \tilde{X}_i\left(e^{j\left(\frac{\omega}{M} - 2\pi\frac{k}{M}\right)}\right)$



β) Με την εφαρμογή του ίδιου επιχειρήματος με το x[n], προκύπτει:

$$x_d[n] = \frac{4}{3} \cdot \frac{\sin\left(\frac{3\pi n}{5}\right)}{\pi n}$$

Άσκηση 1.4

$$f[n] = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} T(x[k]) \cdot w[n-k]$$

α) $w[n] = \begin{cases} \frac{1}{N}, & n=0,\dots,N-1 \\ 0, & \text{αλλού} \end{cases}$

Ισχύει: DTFT: $W(e^{j\omega}) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} w[n] e^{-j\omega n} = \sum_{n=0}^{N-1} \frac{1}{N} e^{-j\omega n} = \frac{1}{N} \cdot \frac{1-e^{-j\omega N}}{1-e^{-j\omega}}$

Για $|W(e^{j\omega})| = 0 \Rightarrow 1-e^{-j\omega N} = 0 \Rightarrow e^{-j\omega N} = 1 \Rightarrow \cos(\omega N) = 1$ και $\sin(\omega N) = 0$

$\Downarrow \omega = \frac{2k\pi}{N}$ $\qquad \Downarrow \omega = \frac{k\pi}{N}$

δηλ. $\omega = \frac{2k\pi}{N}$, $k = \pm 1, \pm 2, \dots$

Ο 1ος μηδενισμός γίνεται στο $k=1$ οπότε bandwidth $B = \frac{2\pi}{N}$ rad και $B_{Hz} = \frac{1}{N}$

β) $x[n]$: $\begin{cases} f_s = 16\ kHz \\ N = 320 \end{cases}$

- Με την εφαρμογή υποδειγματοληψίας, η νέα συχνότητα δειγματοληψίας θα είναι $\frac{f_s}{M}$.
- Το bandwidth του $T(x[n])$ είναι περίπου ίσο με το bandwidth του $x[n]$ οπότε $\frac{2\pi}{N}$
- Από Κρ. Nyquist: $\frac{2\pi}{M} \geq 2 \cdot \frac{2\pi}{N} \Rightarrow M \leq \frac{N}{2} = 160$

Οπότε, η ελάχιστη συχνότητα είναι $f_s' = \frac{16 \cdot 10^3}{160} = 100\ Hz$

Άσκηση 1.5

α) $X[2k] = \sum_{n=0}^{\frac{N}{2}-1} \left(x[n] + x[n+\frac{N}{2}] \right) W_N^{2kn} \quad , k = 0, 1, \dots, \frac{N}{2}-1$

$$\sum_{n=0}^{\frac{N}{2}-1} \left(x[n] + x[n+\tfrac{N}{2}] \right) W_N^{2kn} = \sum_{n=0}^{\frac{N}{2}-1} x[n] \cdot W_N^{2kn} + \sum_{n=\frac{N}{2}}^{N-1} x[n] \cdot W_N^{2k(n-\frac{N}{2})} =$$

$$\underline{\underline{W_N^{2k(n-\frac{N}{2})} = W_N^{2kn}}} \quad \sum_{n=0}^{\frac{N}{2}-1} x[n] \cdot W_N^{2kn} + \sum_{n=\frac{N}{2}}^{N-1} x[n] \cdot W_N^{2kn} =$$

$$= \sum_{n=0}^{N-1} x[n] \cdot W_N^{2kn} = X[2k]$$

εξ ορισμού, οπότε ισχύει $\left(W_N^{2kn} = W_{\frac{N}{2}}^{kn} \right)$

ότι συμπίπτει το $X[2k]$ στον DFT $N/2$ σημείων της ακολουθίας $x[n] + x[n+\frac{N}{2}]$

β) i) $X[4k+1] = \sum_{n=0}^{\frac{N}{4}-1} \left\{ \left(x[n] - x[n+\frac{N}{2}] \right) - j \left(x[n+\frac{N}{4}] - x[n+3\frac{N}{4}] \right) \right\} \cdot W_N^{n} \cdot W_N^{4kn} \quad , k = 0, \dots, \frac{N}{4}-1$

$$\sum_{n=0}^{\frac{N}{4}-1} \left\{ \left(x[n] - x[n+\tfrac{N}{2}] \right) - j \left(x[n+\tfrac{N}{4}] - x[n+3\tfrac{N}{4}] \right) \right\} W_N^{n} \cdot W_N^{4kn} =$$

$$= \sum_{n=0}^{\frac{N}{4}-1} x[n] \cdot W_N^{n} \cdot W_N^{4kn} - \sum_{n=\frac{N}{2}}^{3\frac{N}{4}-1} x[n] \cdot W_N^{n-\frac{N}{2}} \cdot W_N^{4k(n-\frac{N}{2})} - j \left(\sum_{n=\frac{N}{4}}^{\frac{N}{2}-1} x[n] \cdot W_N^{n-\frac{N}{4}} \cdot W_N^{4k(n-\frac{N}{4})} - \sum_{n=\frac{3N}{4}}^{N-1} x[n] \, W_N^{n-\frac{3N}{4}} \cdot W_N^{4k(n-\frac{3N}{4})} \right) \quad (*)$$

Ισχύει:

$$W_N^{(n-\frac{N}{2})} \cdot W_N^{4k(n-\frac{N}{2})} = -W_N^{(4k+1)n}$$
$$W_N^{(n-\frac{N}{4})} \cdot W_N^{4k(n-\frac{N}{4})} = j\, W_N^{(4k+1)n}$$
$$W_N^{(n-\frac{3N}{4})} \cdot W_N^{4k(n-\frac{3N}{4})} = -j\, W_N^{(4k+1)n}$$

$$(*) \Rightarrow \sum_{n=0}^{\frac{N}{4}-1} x[n] \cdot W_N^{(4k+1)n} + \sum_{n=\frac{N}{2}}^{3\frac{N}{4}-1} x[n] \cdot W_N^{(4k+1)n} + \sum_{n=\frac{N}{4}}^{\frac{N}{2}-1} x[n] \cdot W_N^{(4k+1)n} + \sum_{n=\frac{3N}{4}}^{N-1} x[n] \cdot W_N^{(4k+1)n} =$$

$$= \sum_{n=0}^{N-1} x[n] \cdot W_N^{n} \cdot W_N^{4kn} = X[4k+1]$$

, εξ ορισμού, οπότε ισχύει

ii) $$\sum_{n=0}^{\frac{N}{4}-1} \left\{ \left(x[n] - x[n+\tfrac{N}{2}] \right) + j \left(x[n+\tfrac{N}{4}] - x[n+\tfrac{3N}{4}] \right) \right\} W_N^{3n} \cdot W_N^{4kn} =$$

$$= \sum_{n=0}^{\frac{N}{4}-1} x[n] \cdot W_N^{3n} \cdot W_N^{4kn} - \sum_{n=\frac{N}{2}}^{3\frac{N}{4}-1} x[n] \cdot W_N^{3(n-\frac{N}{2})} \, W_N^{4k(n-\frac{N}{2})} + j \left(\sum_{n=\frac{N}{4}}^{\frac{N}{2}-1} x[n] \cdot W_N^{3(n-\frac{N}{4})} \cdot W_N^{4k(n-\frac{N}{4})} - \sum_{n=\frac{3N}{4}}^{N-1} x[n] \, W_N^{3(n-\frac{3N}{4})} \, W_N^{4k(n-\frac{3N}{4})} \right) \quad (*)(*)$$

Ισχύει: $\cdot\ W_N^{3(n-\frac{N}{2})} \cdot W_N^{4k(n-\frac{N}{2})} = -W_N^{3n} W_N^{4kn}$

$$\cdot\ W_N^{3(n-\frac{N}{4})} \cdot W_N^{4k(n-\frac{N}{4})} = -j\, W_N^{3n} \cdot W_N^{4kn}$$

$$\cdot\ W_N^{3(n-\frac{3N}{4})} \cdot W_N^{4k(n-\frac{3N}{4})} = j\, W_N^{3n} \cdot W_N^{4kn}$$

$$(*) \Rightarrow \ldots = \sum_{n=0}^{N-1} x[n] \cdot W_N^{3n} W_N^{4kn} = \sum_{n=0}^{N-1} x[n] \cdot W_N^{(4k+3)n} = X[4k+3]$$, όπως ζητείται.

γ) Με τον ορισμό των παραπάνω σχέσεων και την υπόθεση $N=16$, προκύπτει το διάγραμμα.

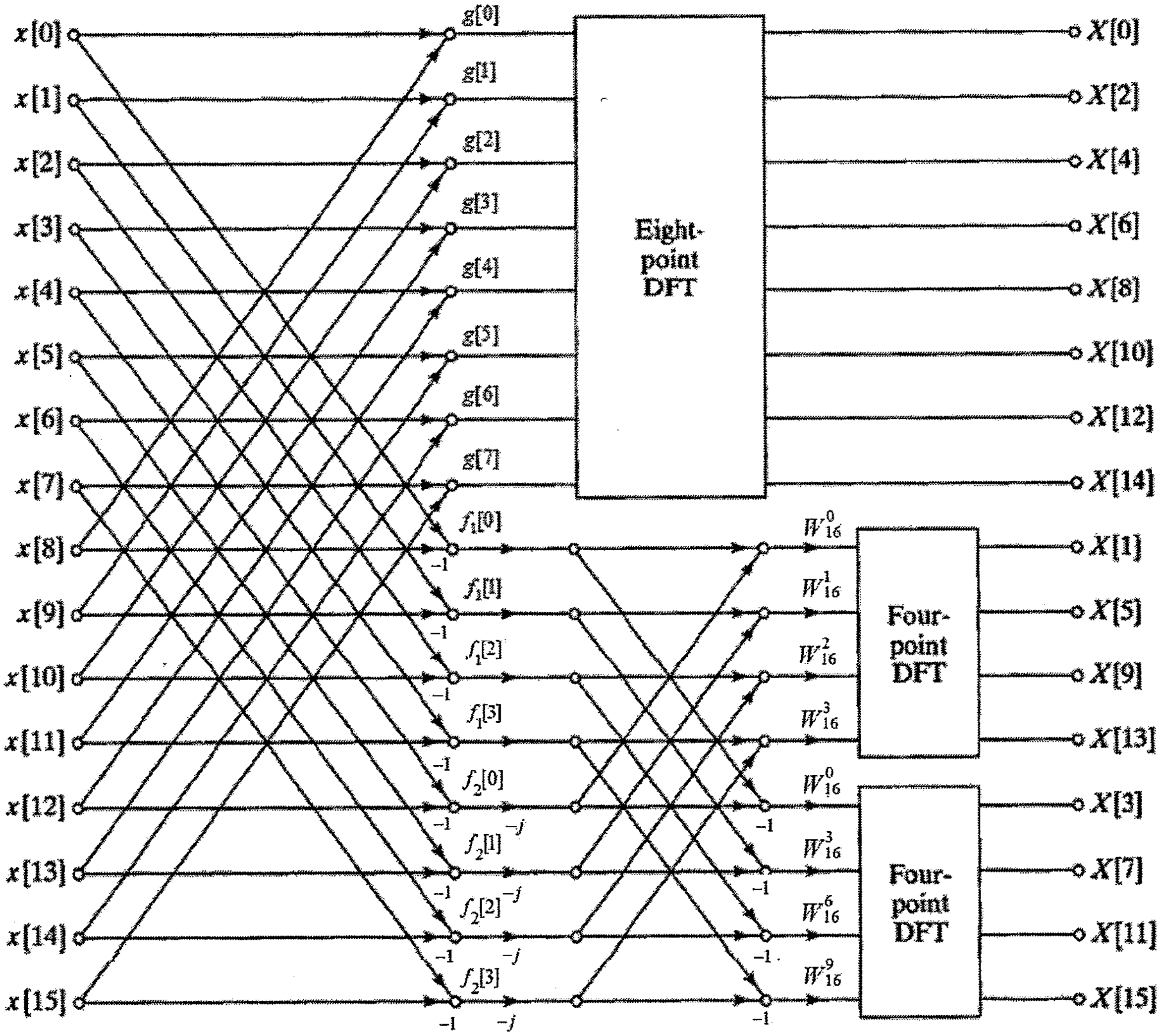
$g[n] = x[n] + x[n+\frac{N}{2}]$, $n=0,\ldots,\frac{N}{2}-1$

$f_1[n] = x[n] - x[n+\frac{N}{2}]$, $n=0,\ldots,\frac{N}{4}-1$

$f_2[n] = x[n+\frac{N}{4}] - x[n+\frac{3N}{4}]$, $n=0,\ldots,\frac{N}{4}-1$

δ). Παρατηρούμε συνολικά 17 μιγαδικοί πολλαπλασιασμοί, με την αγνόηση των πολλαπλασιασμών με το ευθέως W_N^0. Πολλαπλασιασμός μεταξύ μιγαδικών περιέχει 4 πραγματικούς πολλαπλασιασμούς ενώ με το $-j$ απαιτεί 0 πραγματικούς πολλαπλασιασμούς. Από τους απαιτούμενους 17 πολλαπλασιασμούς, οι 9 είναι με το $-j$, οπότε συνολικά θα είναι: $8 \cdot 4 = 32$ πραγμ. πολλαπλασιασμούς.

- Όσον αφορά τον κλασσικό radix-2 FFT με $N=16$, παρατηρούμε 17 μιγαδικούς πολλαπλασιασμούς, από τους οποίους οι 7 με το $-j$, οπότε συνολικά θα είναι: $10 * 4 = 40$ πραγμ. πολλαπλασιασμοί


x[0]
x[1]
x[2]
x[3]
x[4]
x[5]
x[6]
x[7]
x[8]
x[9]
x[10]
x[11]
x[12]
x[13]
x[14]
x[15]
g[0]
g[1]
g[2]
g[3]
g[4]
g[5]
g[6]
g[7]
f1[0]
f1[1]
f1[2]
f1[3]
f2[0]
f2[1]
f2[2]
f2[3]
−1
−j
Eight-point DFT
Four-point DFT
Four-point DFT
W16^0
W16^1
W16^2
W16^3
W16^0
W16^3
W16^6
W16^9
X[0]
X[2]
X[4]
X[6]
X[8]
X[10]
X[12]
X[14]
X[1]
X[5]
X[9]
X[13]
X[3]
X[7]
X[11]
X[15]