<u>ΕΘΝΙΚΌ ΜΕΤΣΌΒΙΟ ΠΟΛΥΤΕΧΝΕΊΟ</u>

<u>ΣΧΟΛΉ ΗΛΕΚΤΡΟΛΌΓΩΝ ΜΗΧΑΝΙΚΏΝ ΚΑΙ ΜΗΧΑΝΙΚΏΝ ΥΠΟΛΟΓΙΣΤΏΝ</u>

<u>ΣΥΣΤΉΜΑΤΑ ΑΝΑΜΟΝΉΣ</u>

(2019-2020)

4^{η} ΕΡΓΑΣΤΗΡΙΑΚΉ ΑΝΑΦΟΡΆ

<u>Ονοματεπώνυμο</u>: Χρήστος Τσούφης - 03117176

<u>Εκτέλεση Εργαστηρίου</u>: 04/05/2020

$4^η$ Ομάδα Ασκήσεων

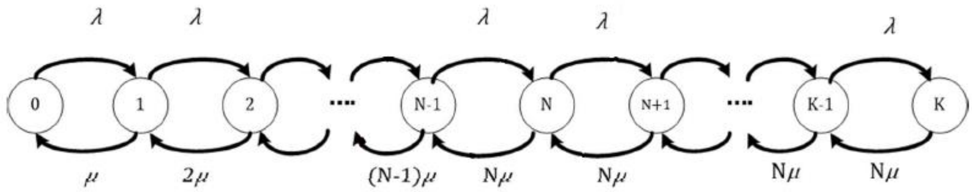
Σύστημα M/M/N/K (call center)

Σε αυτήν την άσκηση θα μελετάται ένα σύστημα M/M/5/8, δηλαδή ένα call center. Το σύστημα διαθέτει 5 εξυπηρετητές ίδιων δυνατοτήτων, ενώ η μέγιστη χωρητικότητα του συστήματος είναι 8 πελάτες, δηλαδή υπάρχει δυνατότητα αναμονής μέχρι και για 3 ακόμη πελάτες. Οι αφίξεις στο σύστημα ακολουθούν την κατανομή Poisson με μέσο ρυθμό αφίξεων λ πελάτες/min, ενώ οι εξυπηρετήσεις ακολουθούν την εκθετική κατανομή με μέση διάρκεια 4 min/πελάτη.

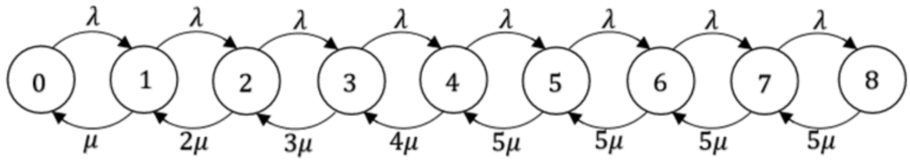
<u>Σημείωση</u>: Ένα σύστημα με πεπερασμένη χωρητικότητα είναι πάντα εργοδικό ακόμη κι αν λ >> μ. Εάν το σύστημα έχει άπειρη χωρητικότητα απαιτείται έλεγχος εργοδικότητας. Επίσης, εδώ εννοεί για τη μέση διάρκεια ότι μ=1/4.

1. *Να σχεδιάσετε το διάγραμμα ρυθμών μεταβάσεων του συστήματος μεταξύ εργοδικών καταστάσεων.*

   Το γενικό διάγραμμα είναι:



   Το οποίο για N = 5, K = 8 γίνεται:



2. *Με τη βοήθεια των συναρτήσεων ctmcbd και ctmc του πακέτου queueing του Octave, να υπολογίσετε τις εργοδικές πιθανότητες των καταστάσεων του συστήματος για (α) λ = 1/4 πελάτες/min και (β) λ = 1 πελάτες/min.*

   Οι εργοδικές πιθανότητας, εφόσον ξεπεραστεί το μεταβατικό φαινόμενο είναι:

```
Ergodic Probabilities for lambda=0.25
P0 = 0.367818
P1 = 0.367818
P2 = 0.183909
P3 = 0.0613031
P4 = 0.0153258
P5 = 0.00306515
P6 = 0.000613031
P7 = 0.000122606
P8 = 2.45212e-05

Ergodic Probabilities for lambda=1
P0 = 0.0168
P1 = 0.0672001
P2 = 0.1344
P3 = 0.1792
P4 = 0.1792
P5 = 0.14336
P6 = 0.114688
P7 = 0.0917505
P8 = 0.0734004
```

3. *Να υπολογίσετε την πιθανότητα ένας πελάτης να χρειαστεί να παραμείνει στην ουρά του συστήματος πριν εξυπηρετηθεί. Να τη συγκρίνετε με την έξοδο της συνάρτησης erlangc του πακέτου queueing του Octave. Τι παρατηρείτε σχετικά με τη δυνατότητα να χρησιμοποιηθεί κατά προσέγγιση ο τύπος Erlang-C για σύστημα με πεπερασμένη χωρητικότητα;*

   Η πιθανότητα αναμονής ενός πελάτη στην ουρά δίνεται από την συνάρτηση Erlang-C.
   Σε σύγκριση με το προηγούμενο ερώτημα παρατηρείται ότι με το λ=0.25 συμφωνεί ενώ με το λ=1 όχι. Δηλαδή ο τύπος Erlang-C, που αφορά συστήματα με άπειρη χωρητικότητα είναι δυνατόν να εφαρμοστεί σε συστήματα με πεπερασμένη χωρητικότητα υπό την προϋπόθεση ότι το λ θα είναι αρκετές φορές μικρότερο από το μ. Για αυτό το λόγο και στην περίπτωση του λ=0.25 το αποτέλεσμα της Pwait έχει μικρή απόκλιση οπότε μπορεί να χρησιμοποιηθεί η Erlang-C.

```
Pwait = 0.349799  for lambda=1

Pwait = 0.00380079  for lambda=0.25

Pwait = 0.554113  for lambda=1 with erlangc

Pwait = 0.00383142  for lambda=0.25 with erlangc
```

Ανάλυση & Σχεδιασμός τηλεφωνικού κέντρου

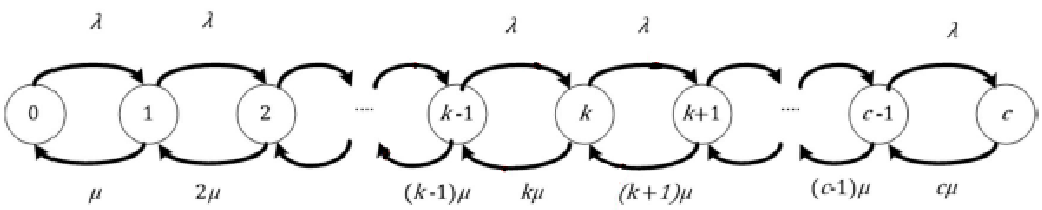
Στην άσκηση αυτή θα ασχοληθείτε με την ανάλυση και το σχεδιασμό ενός τηλεφωνικού κέντρου, που μοντελοποιείται ως μία ουρά M/M/c/c, δηλαδή ουρά που διαθέτει c εξυπηρετητές ίδιων δυνατοτήτων και μέγιστη χωρητικότητα c πελάτες. Οι αφίξεις στο σύστημα ακολουθούν την κατανομή Poisson με ομοιόμορφο μέσο ρυθμό λ και οι εξυπηρετήσεις ακολουθούν την εκθετική κατανομή με ομοιόμορφο μέσο ρυθμό μ.

Σημείωση: Και εδώ, το σύστημα έχει πεπερασμένη χωρητικότητα οπότε θα είναι πάντα εργοδικό ακόμη κι αν λ >> μ.

1. *Να σχεδιάσετε το διάγραμμα ρυθμού μεταβάσεων του συστήματος M/M/c/c και να αποδείξετε ότι η πιθανότητα απόρριψης (blocking probability) ενός πελάτη από το σύστημα δίνεται από τον ακόλουθο τύπο (τύπος Erlang-B):*

$$Pblocking = B(\rho,c) = \frac{\frac{\rho^c}{c!}}{\sum_{k=0}^{c}\frac{\rho^k}{k!}}, \text{ όπου } \rho = \frac{\lambda}{\mu}$$

   Ποιος είναι ο μέσος ρυθμός απωλειών πελατών από την ουρά; Στη συνέχεια, να υλοποιήσετε τη συνάρτηση erlangb_factorial, η οποία θα δέχεται ως ορίσματα την ένταση του φορτίου ρ και τον αριθμό των εξυπηρετητών c και θα υπολογίζει με τη βοήθεια του παραπάνω επαναληπτικού τύπου την πιθανότητα απόρριψης πελάτη από το σύστημα B(ρ,c). Μπορείτε να επιβεβαιώσετε την ορθότητα της συνάρτησής σας με τη συνάρτηση erlangb του πακέτου queueing του Octave.



Η απόδειξη του τύπου:

Ισχύει ότι $P_k = (\frac{\rho^k}{k!})\, P_0$, k = 1,2,…,c (1)

Επιπλέον, $\sum_{k=0}^{c} P_k = 1 \overset{(1)}{\Rightarrow} P_0 = \frac{1}{\sum_{k=1}^{c}\frac{\rho^k}{k!}}$

Οπότε, $P_{blocking} = P_c = \frac{\rho^c}{c!} P_0 \Rightarrow P_{blocking} = B(\rho, c) = \frac{\rho^c/_{c!}}{\sum_{k=0}^{c} \rho^k/_{k!}}$ όπου $\rho = \frac{\lambda}{\mu}$

Ο μέσος ρυθμός απωλειών πελατών από την ουρά είναι $\lambda - \gamma = \lambda - \lambda(1 - Pc) = \lambda * Pc = \lambda \frac{\rho^c/_{c!}}{\sum_{k=0}^{c} \rho^k/_{k!}}$

Η πιθανότητα απόρριψης ενός πελάτη από το σύστημα δίνεται από τον τύπο Erlang-B. Το αποτέλεσμα της συνάρτησης erlangb_factorial είναι το ίδο με την συνάρτηση erlangb του queuing package, όπως φαίνεται και παρακάτω:

```
Erlang-B factorial=3.21202e-05
Erlang-B          =3.21202e-05
```

2. *Για τον τύπο Erlang-B ισχύει ο ακόλουθος επαναληπτικός τύπος:*

$$B(\rho,0) = 1$$

$$B(\rho,n) = \frac{\rho B(\rho,n-1)}{\rho B(\rho,n-1) + n}, \; n = 1,2,\ldots,c$$

Να υλοποιήσετε με επαναληπτικό τρόπο τη συνάρτηση erlangb_iterative, η οποία θα δέχεται ως ορίσματα την ένταση του φορτίου ρ και τον αριθμό των εξυπηρετητών c και θα υπολογίζει με τη βοήθεια του παραπάνω επαναληπτικού τύπου την πιθανότητα απόρριψης πελάτη από το σύστημα B(ρ,c). Μπορείτε να επιβεβαιώσετε την ορθότητα της συνάρτησής σας με τη συνάρτηση erlangb του πακέτου queueing του Octave.

Υπολογίζεται η Erlang-B με τον επαναληπτικό τύπο (ισοδύναμος με τον προηγούμενο).

```
Erlang-B recursive=3.21202e-05
Erlang-B iterative=3.21202e-05
Erlang-B          =3.21202e-05
```

3. *Να συγκρίνετε τις εξόδους των συναρτήσεων erlangb_factorial(1024,1024) και erlangb_iterative(1024,1024). Τι παρατηρείτε; Γιατί συμβαίνει αυτό;*

Γίνεται σύγκριση των δύο εντολών:

```
Erlang-B factorial(1024,1024) = NaN
Erlang-B iterative(1024,1024) = 0.0245243
error: max_recursion_depth exceeded
error: called from
    erlangb_recursive at line 74 column 9
    lab4 at line 97 column 1
```

Παρατήρηση: Στην περίπτωση του παραγοντικού αλγορίθμου, δημιουργείται πρόβλημα στον υπολογισμό του αποτελέσματος καθώς δημιουργούνται ‘μεγάλα’ νούμερα (π.χ. 1024!). Στην περίπτωση του επαναληπτικού αλγορίθμου, το αποτέλεσμα που δημιουργείται είναι πιο λογικό.

Αυτό δικαιολογείται από το γεγονός ότι στην πρώτη περίπτωση απαιτείται υπολογισμός 'μεγάλων' αριθμών οι οποίοι τελικά εξουδετερώνονται λόγω της διαίρεσης. Τέλος, στην περίπτωση του αναδρομικού αλγορίθμου, δημιουργείται πάλι πρόβλημα γιατί γίνονται περισσότερες αναδρομές από το προκαθορισμένο όριο του Octave.

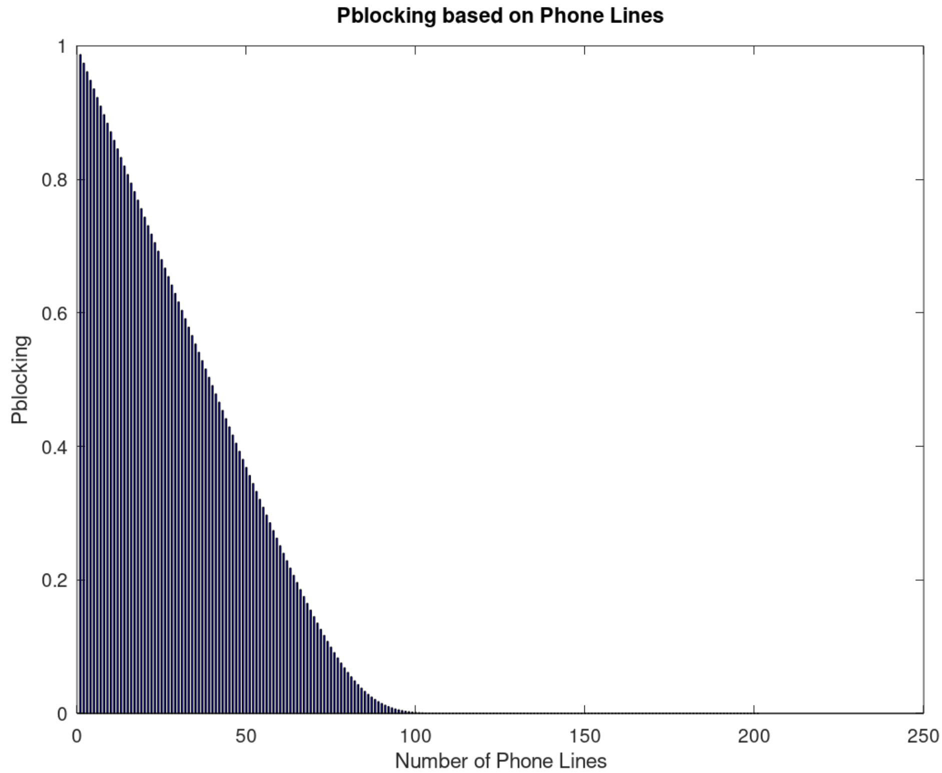
4. *Να υποθέσετε ότι καλείστε να σχεδιάσετε από την αρχή το τηλεφωνικό δίκτυο μίας εταιρείας στην οποία απασχολούνται 200 εργαζόμενοι. Κάθε εργαζόμενος διαθέτει και μία εξωτερική γραμμή, δηλαδή η εταιρεία πληρώνει για 200 γραμμές. Στην προσπάθειά σας να σχεδιάσετε ένα πιο οικονομικό δίκτυο, κάνετε μετρήσεις στην ώρα αιχμής και βρίσκετε ότι ο πιο απαιτητικός χρήστης χρησιμοποιεί συνολικά το τηλέφωνό του για εξωτερικές κλήσεις κατά μέσο όρο 23 λεπτά σε μία ώρα.*
Σημείωση: Με πολυπλεξίας είναι εφικτό να γίνει οικονομικότερο το δίκτυο. Αυτό μπορεί να συμβεί εάν στην ώρα αιχμής βρεθεί ο πιο απαιτητικός χρήστης ο οποίος, όπως αναφέρεται, χρησιμοποιεί το τηλέφωνο κατά μέσο όρο 23 min σε 1 hour (έτσι προκύπτει το ρ, το οποίο πρέπει να αναχθεί σε 200 εργαζόμενους).

a) *Χρησιμοποιώντας ως πρότυπο τον πιο απαιτητικό χρήστη, να προσδιορίσετε τη συνολική ένταση του φορτίου που καλείται να εξυπηρετήσει το τηλεφωνικό δίκτυο της εταιρείας.*

   Η ουρά είναι M/M/200/200 με $\rho = 200 * \frac{23\ min}{60\ min} = 76.67$ Erlangs (συνολική κυκλοφοριακή ένταση).

b) *Να κάνετε το διάγραμμα της πιθανότητας απόρριψης πελάτη από το σύστημα ως προς τον αριθμό των τηλεφωνικών γραμμών, επιλέγοντας από 1 έως 200 τηλεφωνικές γραμμές. Για τον υπολογισμό της πιθανότητας αυτής να χρησιμοποιήσετε τη συνάρτηση erlangb_iterative.*

   Γίνεται χρήση του επαναληπτικού τύπου Erlang-B οπότε προκύπτει μια πιθανότητα σε συνάρτηση με τις τηλεφωνικές γραμμές από 1 έως 200 (το n).



c) *Να προσδιορίσετε τον κατάλληλο αριθμό τηλεφωνικών γραμμών που θα χρησιμοποιήσετε ώστε η πιθανότητα απόρριψης τηλεφωνικής κλήσης να είναι μικρότερη από 1%.*

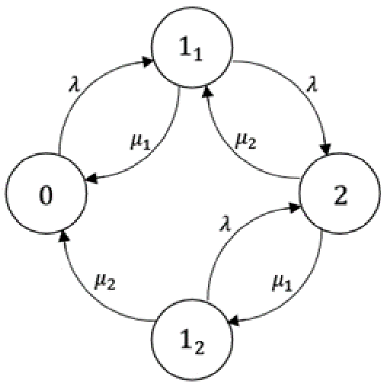
```
no_lines =  200
no_lines =  93

Minimum number of Phone Lines = 93
```

Παρατήρηση: Η πιθανότητα απόρριψης πελατών είναι μικρότερη από 1% για 93 τηλεφωνικές γραμμές ή περισσότερες. Για την ελαχιστοποίηση του κόστους, συνιστάται η χρήση 93 τηλεφωνικών γραμμών.

Συστήματα εξυπηρέτησης με δύο ανόμοιους εξυπηρετητές

Να θεωρήσετε ένα σύστημα εξυπηρέτησης που αποτελείται από δύο εξυπηρετητές 1 και 2 χωρίς δυνατότητα αναμονής πελατών. Όταν και οι δύο εξυπηρετητές είναι διαθέσιμοι, ένας πελάτης δρομολογείται πάντα στον εξυπηρετητή 1. Σε περίπτωση που ο εξυπηρετητής 1 δεν είναι διαθέσιμος, ένας νέος πελάτης δρομολογείται στον εξυπηρετητή 2. Σε περίπτωση που και οι δύο εξυπηρετητές δεν είναι διαθέσιμοι, ένας νέος πελάτης απορρίπτεται χωρίς επανάληψη προσπάθειας εξυπηρέτησης. Οι αφίξεις πελατών στο σύστημα ακολουθούν την κατανομή Poisson με μέσο ρυθμό $\lambda = 1$ πελάτες/sec. Οι εξυπηρετήσεις είναι εκθετικά κατανεμημένες με μέσους χρόνους εξυπηρέτησης $1/\mu_1=1.25$ sec και $1/\mu_2= 2.5$ sec αντίστοιχα, δηλαδή ο εξυπηρετητής 2 είναι χαμηλότερων δυνατοτήτων από τον εξυπηρετητή 1.

1. *Να σχεδιάσετε το διάγραμμα ρυθμών μεταβάσεων του συστήματος στην κατάσταση ισορροπίας και να βρείτε:*
   - *Τις εργοδικές πιθανότητες του συστήματος.*
   - *Την πιθανότητα απόρριψης πελάτη από το σύστημα.*
   - *Το μέσο αριθμό πελατών στο σύστημα*



Γενικά, ισχύει ότι πάει με πιθανότητα p στον 1ο Εξυπηρετητή και 1-p στον 2ο. Εδώ για p = 1, πάει με βεβαιότητα στο 1ο και με μηδενική πιθανότητα στον 2ο.

Οι Εργοδικές Πιθανότητες:

Από το διάγραμμα ρυθμών μεταβάσεων προκύπτουν οι εξής σχέσεις:

$\lambda P_0 = \mu_1 P_{11} + \mu_2 P_{12}$ (1)
$(\mu_1 + \lambda)P_{11} = \lambda P_0 + \mu_2 P_2$ (2)
$(\mu_2 + \lambda)P_{12} = \mu_1 P_2$ (3)
$(\mu_2 + \mu_1)P_2 = \lambda(P_{11} + P_{12})$ (4)

Λύνοντας τις σχέσεις (1),(2),(3),(4) ως προς P_0, P_{11}, P_{12}, P_2 και αντικαθιστώντας τα μ_1, μ_2, λ προκύπτουν οι εξής σχέσεις:

$$P_0 = \frac{4}{5}P_{11} + \frac{2}{5}P_{12} \qquad (5)$$
$$P_{11} = \frac{5}{9}P_0 + \frac{2}{9}P_2 \qquad (6)$$
$$P_{12} = \frac{4}{7}P_2 \qquad (7)$$
$$P_2 = \frac{5}{6}(P_{11} + P_{12}) \qquad (8)$$

Οι πάνω πιθανότητες ως προς P_0 :

$$(8) \xRightarrow{(6),(7)} P_2 = \frac{5}{6}\left(\frac{5}{9}P_0 + \frac{2}{9}P_2 + \frac{4}{7}P_2\right) \Rightarrow P_2 = \frac{178}{128}P_0 \qquad (9)$$

$$(7) \overset{(9)}{\Rightarrow} P_{12} = \frac{4}{7}\left(\frac{178}{128}P_0\right) \Rightarrow P_{12} = \frac{89}{112}P_0 \qquad (10)$$

$$(6) \overset{(9)}{\Rightarrow} P_{11} = \frac{5}{9}P_0 + \frac{2}{9}\frac{178}{128}P_0 \Rightarrow P_{11} = \frac{83}{96}P_0 \qquad (11)$$

Τέλος, από την συνθήκη της κανονικοποίησης:

$$P_0 + P_{11} + P_{12} + P_2 = 1 \Rightarrow P_0 = \frac{1344}{5443} \approx 0.24692$$

Και αντικαθιστώντας το P_0 στις σχέσεις (9),(10),(11) λαμβάνουμε τις εξής πιθανότητες:

$$P_0 \approx 0.24692, P_{11} \approx 0.21348, P_{12} \approx 0.19621, P_2 \approx 0.34337$$

<u>Η πιθανότητα απόρριψης πελάτη:</u>

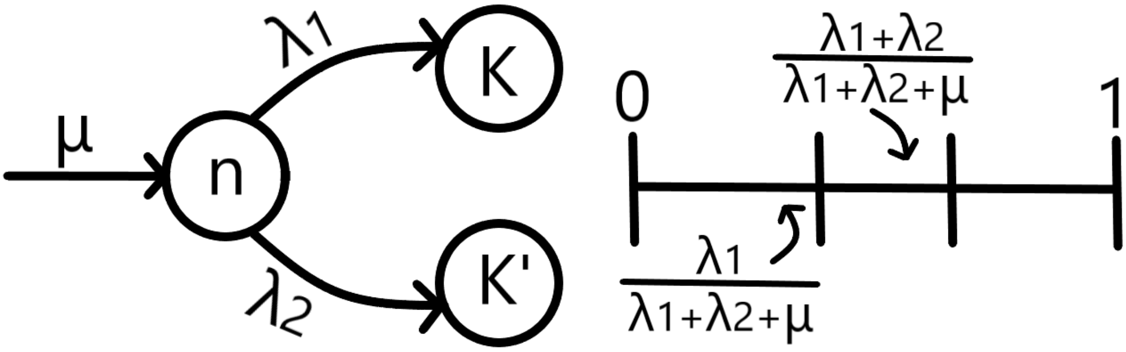
$$P_{blocking} = P_2 = 0.34337$$

<u>Ο μέσος αριθμός πελατών:</u>

$$E[n(t)] = \sum_{k=0}^{2} kP_k = 0 \cdot P_0 + 1 \cdot P_{11} + 1 \cdot P_{12} + 2 \cdot P_2 \approx 1.09643$$

2. *Να βρείτε τα ζητούμενα του προηγούμενου ερωτήματος με τη μέθοδο της προσομοίωσης συστημάτων αναμονής. Για το σκοπό αυτής της άσκησης, σας δίνεται το αρχείο demo4.m, δηλαδή ένα πρόγραμμα σε Octave, που δε χρησιμοποιεί έτοιμα πακέτα προσομοίωσης. Το αρχείο αυτό περιλαμβάνει κενά στα thresholds που αφορούν το πώς αποφασίζουμε να μεταβούμε από τη μία κατάσταση του συστήματος στην άλλη.*
   - *Να συμπληρώσετε τα κενά του προγράμματος.*
   - *Ποια είναι τα κριτήρια σύγκλισης της προσομοίωσής σας;*
   - *Να επιβεβαιώσετε ότι οι πιθανότητες που υπολογίζονται από το πρόγραμμα συμφωνούν με τις πιθανότητες που υπολογίσατε στο προηγούμενο ερώτημα, λαμβάνοντας υπόψη και το κριτήριο σύγκλισης της προσομοίωσης.*

Σημείωση από την παρουσίαση του εργαστηρίου:



Για αυτό το ερώτημα, γίνεται χρήση του βοηθητικού αρχείου demo4.m .

Τα κενά στο πρόγραμμα συμπληρώνονται ως εξής:

$threshold_0 = 1$

$threshold_{1a} = \frac{lambda}{lambda + m_1}$

$threshold_{1b} = \frac{lambda}{lambda + m_2}$

$threshold_{2\_first} = \frac{lambda}{lambda + m_1 + m_2}$

$threshold_{2\_second} = \frac{lambda + m_1}{lambda + m_1 + m_2}$

Το κριτήριο της προσομοίωσης αποτελεί η διαφορά ανάμεσα στην παρούσα και την προηγούμενη τιμή του μέσου αριθμού πελατών στο σύστημα. Οπότε, όταν γίνει μικρότερη από 0.00001, η προσομοίωση τελειώνει.

```
P0  = 0.252082
P11 = 0.214194
P12 = 0.193107
P2  = 0.340617
Pblocking = 0.340617
Avergae Clients in the System = 1.08854
```

Παρατήρηση: Με βάση τα αποτελέσματα της προσομοίωσης και το κριτήριο σύγκλισης, φαίνεται ότι οι πιθανότητες που υπολογίστηκαν θεωρητικά, με μικρές αποκλίσεις επιβεβαιώνουν την προσομοίωση.