ΕΘΝΙΚΌ ΜΕΤΣΌΒΙΟ ΠΟΛΥΤΕΧΝΕΊΟ

ΣΧΟΛΉ ΗΛΕΚΤΡΟΛΌΓΩΝ ΜΗΧΑΝΙΚΏΝ ΚΑΙ ΜΗΧΑΝΙΚΏΝ ΥΠΟΛΟΓΙΣΤΏΝ

ΣΥΣΤΉΜΑΤΑ ΑΝΑΜΟΝΉΣ

(2019-2020)

$2^{η}$ ΕΡΓΑΣΤΗΡΙΑΚΉ ΑΝΑΦΟΡΆ

Ονοματεπώνυμο: Χρήστος Τσούφης - 03117176

Εκτέλεση Εργαστηρίου: 06/04/2020

$2^η$ Ομάδα Ασκήσεων

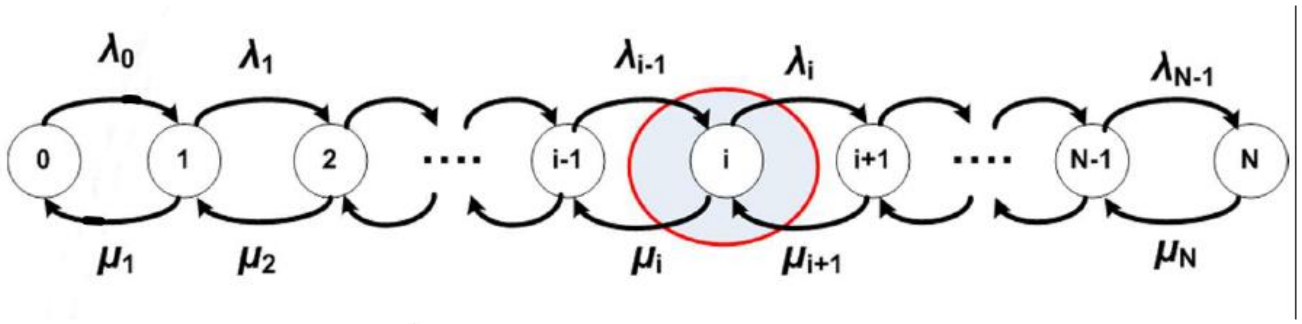
Θεωρητική μελέτη της ουράς M/M/1

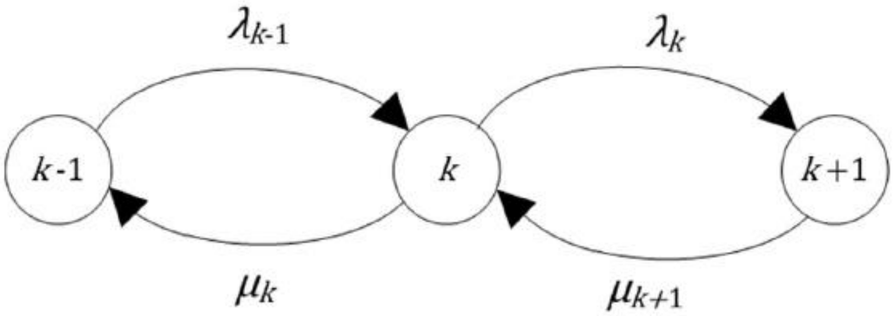
Οι αφίξεις στην ουρά ακολουθούν κατανομή Poisson με παράμετρο λ πελάτες/sec και οι εξυπηρετήσεις ακολουθούν εκθετική κατανομή με παράμετρο μ πελάτες/sec. Θεωρείται ότι το σύστημα είναι αρχικά άδειο.

<u>*Ερωτήσεις:*</u>

a) *Ποια είναι η απαραίτητη συνθήκη ώστε η ουρά M/M/1 να είναι εργοδική; Να σχεδιάσετε το διάγραμμα ρυθμού μεταβάσεων της ουράς M/M/1 και να υπολογίσετε με τη βοήθεια των εξισώσεων ισορροπίας τις εργοδικές πιθανότητες των καταστάσεων του συστήματος.*

Η συνθήκη που πρέπει να ικανοποιεί η ουρά M/M/1 ώστε να είναι εργοδική είναι το γεγονός ότι πρέπει να ισχύει $\rho = \frac{\lambda}{\mu} < 1 \rightarrow \mu > \lambda$. Με άλλα λόγια, θα πρέπει ο μέσος ρυθμός εξυπηρέτησης μ να είναι μεγαλύτερος από το μέσο ρυθμό αφίξεων λ ώστε το σύστημα να εμφανίζει ίδια συμπεριφορά σε βάθος χρόνου.
Παρακάτω φαίνεται το διάγραμμα ρυθμού μεταβάσεων της ουράς M/M/1 :





Οι εργοδικές πιθανότητες των καταστάσεων του συστήματος με χρήση των εξισώσεων ισορροπίας:

- $\lambda * P_0 = \mu * P_1 \rightarrow P_1 = \frac{\lambda}{\mu} * P_0 = \rho * P_0$
- $(\lambda + \mu) * P_1 = \lambda * P_0 + \mu * P_2 \rightarrow P_2 = \rho^2 * P_0$ και επομένως, $P_\kappa = \rho^\kappa * P_0$, $\kappa > 0$
- $P_0 + P_1 + \ldots + P_\kappa + \ldots = 1 = P_0 * (1 + \rho + \rho^2 + \rho^3 + \ldots) = P_0 (\frac{1}{1-\rho})$

είναι οι εξής:

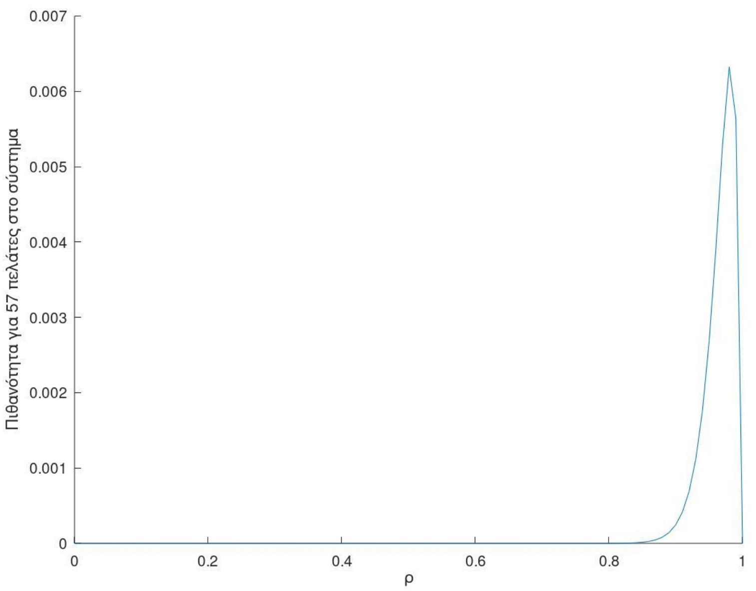
$P_0 = (1 - \rho)$, $P_\kappa = (1 - \rho) * \rho^\kappa$, $\kappa > 0$ και $P\{n(t) > 0\} = 1 - P_0 = \rho$

b) *Για τις ουρές M/M/1 ισχύει η ακόλουθη ισότητα:*
$E[n(t)] = \sum_{k=1}^{\infty} kP_k = \frac{\rho}{1-\rho}$ *όπου* $\rho = \frac{\lambda}{\mu}$
Να υπολογίσετε το μέσο χρόνο καθυστέρησης ενός πελάτη στο σύστημα, όταν η ουρά αναμονής βρίσκεται σε κατάσταση ισορροπίας.

Ο υπολογισμός γίνεται αντικαθιστώντας τον τύπο για τη μέση κατάσταση του M/M/1 στον τύπο Little:
$E(T) = \frac{E[n(t)]}{\gamma} = \frac{E[n(t)]}{\lambda} = \frac{\frac{1}{\mu}}{1-\rho} = \frac{1}{\mu-\lambda}$ και αφορά τον χρόνο αναμονής ενός πελάτη στην ουρά και τον χρόνο εξυπηρέτησής του.

c) *Θα υπάρξει χρονική στιγμή που θα βρεθεί το σύστημά σας με 57 πελάτες; Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.*

Η απάντηση δίνεται από τον υπολογισμό της πιθανότητας $P_{57} = (1 - \rho) * \rho^{57}$. Παρακάτω φαίνεται η γραφική παράσταση για $0 < \rho < 1$:



<u>Παρατήρηση</u>: Η πιθανότητα να βρεθεί το σύστημα σε τέτοια κατάσταση είναι αρκετά μικρή.

d) *Θα άλλαζε κάτι στα παραπάνω αποτελέσματα εάν στο σύστημα υπήρχαν αρχικά 5 πελάτες;*

Εφόσον το σύστημα εξαρτάται μόνο από την παρούσα κατάσταση και καμία αλλαγή στις αρχικές συνθήκες δεν θα μετέβαλε την κατάσταση ισορροπίας, δεν θα άλλαζε κάτι στο παραπάνω αποτέλεσμα εάν στο σύστημα υπήρχαν αρχικά 5 πελάτες.

<u>Ανάλυση ουράς M/M/1 με Octave</u>

Έστω ότι έχετε στη διάθεσή σας μία ουρά M/M/1. Οι αφίξεις στην ουρά ακολουθούν την κατανομή Poisson με μέσο ρυθμό λ = 5 πελάτες/min. Έχετε τη δυνατότητα να επιλέξετε εξυπηρετητή με εκθετικό χρόνο εξυπηρέτησης μέσου ρυθμού μ από 0 έως 10 πελάτες/min.

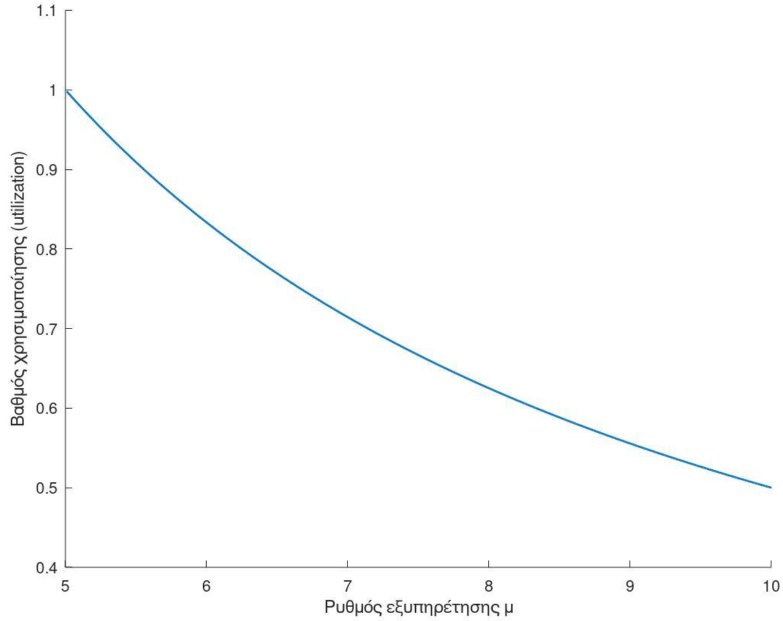
<u>*Ερωτήσεις*</u>:

a) *Ποιοι ρυθμοί εξυπηρέτησης είναι αποδεκτοί για το σύστημά σας, ώστε να είναι εργοδικό;*

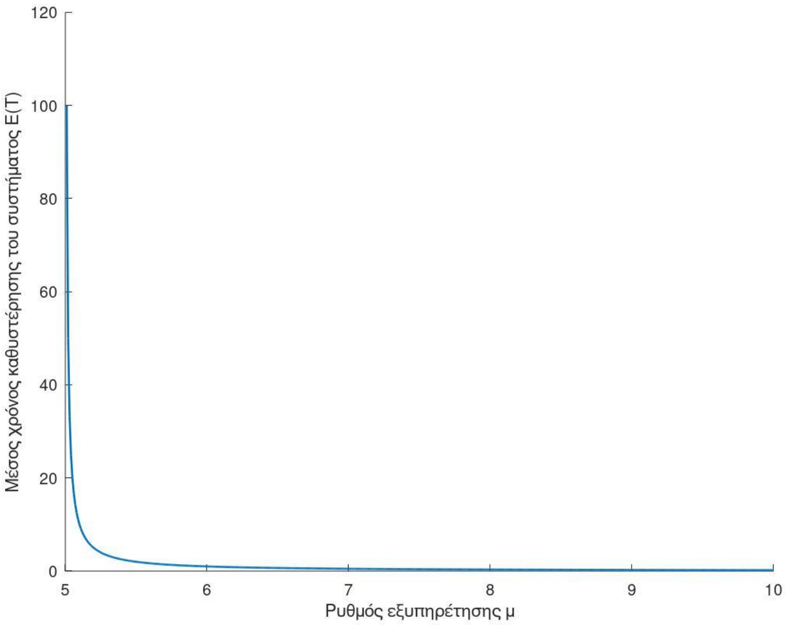
Θα πρέπει να ισχύει μ > λ ώστε το σύστημα να είναι εργοδικό οπότε οι αποδεκτοί ρυθμοί εξυπηρέτησης είναι για μ > λ = 5 πελάτες/min.

b) *Για τους επιτρεπτούς ρυθμούς εξυπηρέτησης, να κάνετε τα παρακάτω 4 διαγράμματα:*

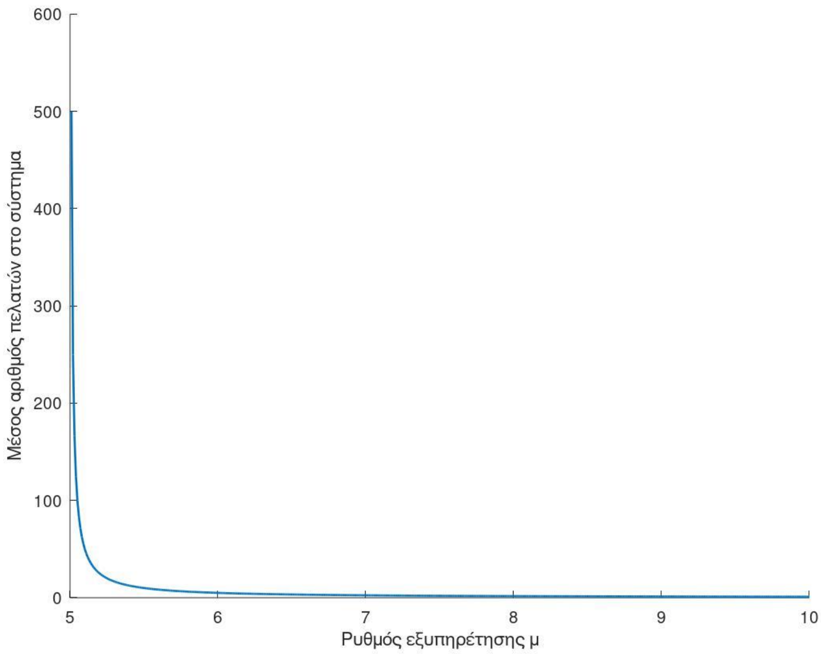
- *Βαθμός χρησιμοποίησης (utilization) ως προς το ρυθμό εξυπηρέτησης.*



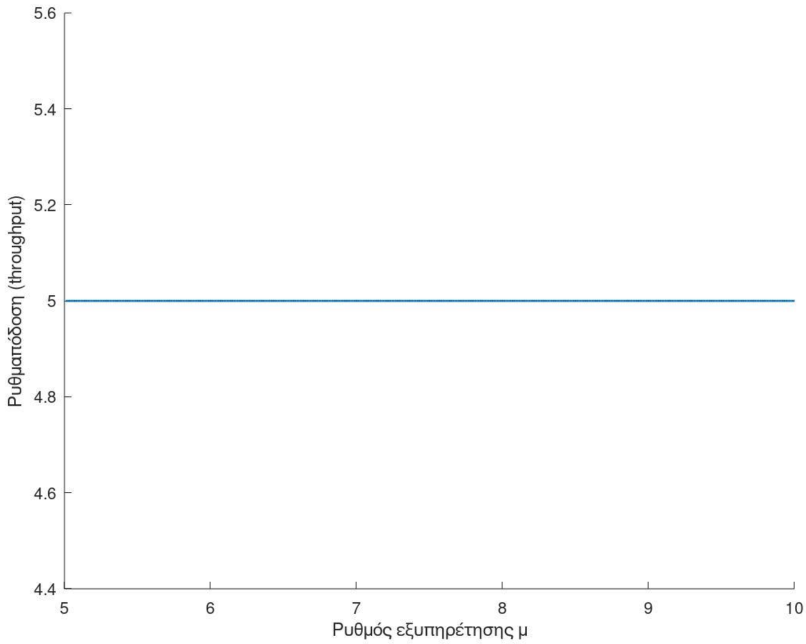
- *Μέσος χρόνος καθυστέρησης του συστήματος E(T) ως προς το ρυθμό εξυπηρέτησης.*



- *Μέσος αριθμός πελατών στο σύστημα ως προς το ρυθμό εξυπηρέτησης.*



- *Ρυθμαπόδοση (throughput) πελατών ως προς το ρυθμό εξυπηρέτησης.*



Παρατήρηση: Με την αύξηση του ρυθμού εξυπηρέτησης, μειώνεται ο βαθμός χρησιμοποίησης, ο μέσος χρόνος καθυστέρησης πελατών και ο μέσος χρόνος καθυστέρησης εξυπηρέτησης του συστήματος. Τέλος, η ρυθμαπόδοση παραμένει σταθερή καθώς το σύστημα είναι εργοδικό.

c) *Ποιο μέσο ρυθμό εξυπηρέτησης θα επιλέγατε με βάση το διάγραμμα του μέσου χρόνου καθυστέρησης και γιατί;*

Με βάση το διάγραμμα του μέσου χρόνου καθυστέρησης είναι προτιμότερη η επιλογή του μέσου ρυθμού εξυπηρέτησης μεταξύ (5, 10) και ιδανικά του μ = 7 πελάτες/min , ώστε να γίνεται χρήση του συστήματος στο 70%, ενώ παράλληλα ο μέσος χρόνος καθυστέρησης στο σύστημα και ο μέσος αριθμός τω πελατών να διατηρούνται σε χαμηλά επίπεδα. Στην περίπτωση που γίνει επιλογή μεγαλύτερη του 7, δεν θα ήταν ορατές σημαντικές διαφορές στην χρησιμοποίηση του συστήματος αλλά ούτε και στον μέσο ρυθμό εξυπηρέτησης και επιπλέον θα παρατηρούνταν αύξηση του κόστους. Στην αντίθετη περίπτωση που γίνει επιλογή χαμηλότερη του 7, το σύστημα θα έχει υψηλό βαθμό χρησιμοποίησης που θα οδηγούσε πιθανόν στην αύξηση της πιθανότητας βλάβης στο σύστημα αλλά και τον μέσο χρόνο καθυστέρησης.

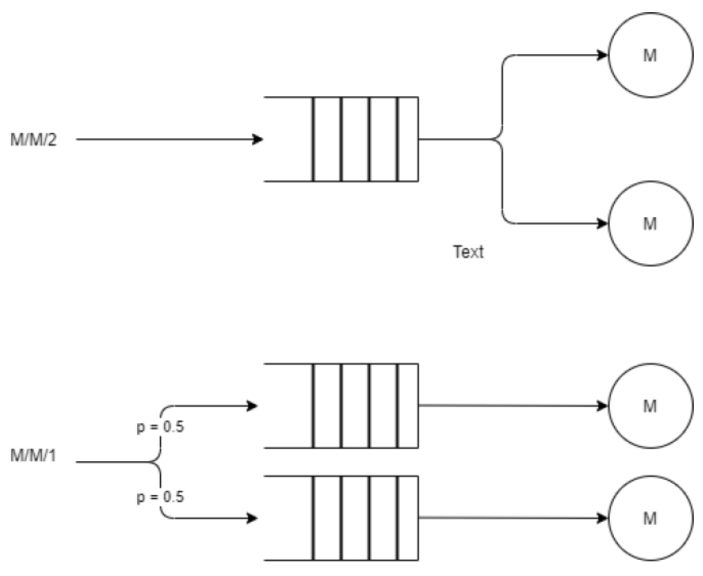
d) *Τι παρατηρείτε για το throughput πελατών σε μια ουρά M/M/1;*

Επειδή η ουρά είναι εργοδική, το throughput διατηρείται σταθερό και ίσο με τον ρυθμό άφιξης των πελατών λ = 5 πελάτες/min. Αυτό σημαίνει ότι δεν χάνει πελάτες και έτσι το throughput διατηρεί την τιμή λ.

<u>Σύγκριση συστημάτων με δύο εξυπηρετητές</u>

Έστω ότι σας δίνεται σύστημα αναμονής στο οποίο οι αφίξεις ακολουθούν κατανομή Poisson με μέσο ρυθμό λ=10 πελάτες/min. Έχετε τη δυνατότητα να επιλέξετε ανάμεσα σε (α) μία ουρά M/M/2 με εκθετικούς εξυπηρετητές μέσου ρυθμού μ=10 πελάτες/min ανά εξυπηρετητή και σε (β) δύο παράλληλες ουρές M/M/1 με εκθετικό χρόνο εξυπηρέτησης μέσου ρυθμού μ=10 πελάτες/min η καθεμία. Να συγκρίνετε τα δύο συστήματα με κριτήριο το χρόνο καθυστέρησης ενός πελάτη στο σύστημα. Ποιο σύστημα θα επιλέγατε και γιατί; Για τη δεύτερη περίπτωση, να θεωρήσετε ότι η διάσπαση των αφίξεων Poisson είναι τυχαία και ισοπίθανη.

Παρακάτω φαίνονται οι δύο ουρές σχηματικά:



Μετά από την σύγκριση των δύο εξυπηρετητών προκύπτει ότι:

```
Μέσος χρόνος καθυστέρης πελάτη (α): 0.133333
Μέσος χρόνος καθυστέρης πελάτη (β): 0.2
>>
```

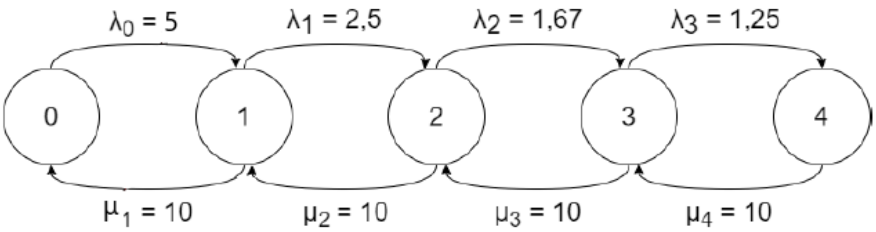
Επομένως, είναι προτιμότερη η (α) περίπτωση αφού σε αυτήν ο χρόνος εξυπηρέτησης είναι μικρότερος. Αυτό επιβεβαιώνεται από το γεγονός ότι στην (α) περίπτωση οι πελάτες έχουν δικαίωμα να εξυπηρετηθούν μέχρι την τελευταία στιγμή, ενώ στην (β) περίπτωση εισέρχονται σε κάποια ουρά M/M/1, με πιθανότητα 50%, και δεν μπορούν να αλλάξουν εξυπηρετητή ακόμα κι αν είναι κάποιος διαθέσιμος.

Διαδικασία γεννήσεων θανάτων (birth-death process): εφαρμογή σε σύστημα M/M/1/K

Σας δίνεται σύστημα αναμονής M/M/1/4, δηλαδή σύστημα με 1 εξυπηρετητή και μέγιστη χωρητικότητα 4 πελάτες. Οι αφίξεις στο σύστημα ακολουθούν κατανομή Poisson με μέσο ρυθμό $\lambda_i=\lambda/(i+1)$, δηλαδή οι αφίξεις πελατών εξαρτώνται από την κατάσταση στην οποία βρίσκεται το σύστημα (μειώνονται ανάλογα με τον παρόντα αριθμό πελατών στο σύστημα) και ο χρόνος εξυπηρέτησης του εξυπηρετητή είναι εκθετικός με μέσο ρυθμό $\mu_i=\mu$, ανεξάρτητος από τον αριθμό πελατών στο σύστημα. Να θεωρήσετε ότι $\lambda=5$ πελάτες/sec και $\mu=10$ πελάτες/sec. Επίσης, να θεωρήσετε ότι αρχικά (στο χρόνο 0) στο σύστημα δεν υπάρχει κανένας πελάτης. Να απαντήσετε στα ακόλουθα ερωτήματα:

a) *Να μοντελοποιήσετε το σύστημα αυτό ως μία διαδικασία γεννήσεων-θανάτων, δηλαδή να σχεδιάσετε το διάγραμμα ρυθμού μεταβάσεων και να υπολογίσετε, χρησιμοποιώντας τις εξισώσεις ισορροπίας, τις εργοδικές πιθανότητες των καταστάσεων του συστήματος και την πιθανότητα απώλειας πελάτη (μη χρησιμοποιήσετε τα υπολογιστικά εργαλεία του Octave).*

Παρακάτω φαίνεται το διάγραμμα ρυθμού μεταβάσεων:



Με χρήση των εξισώσεων ισορροπίας, υπολογίζονται:
Οι εργοδικές πιθανότητες των καταστάσεων του συστήματος:
$P_0 = 2 * P_1$
$P_1 = 4 * P_2 \rightarrow P_0 = 8 * P_2$
$P_2 = 6 * P_3 \rightarrow P_0 = 48 * P_3$
$P_3 = 8 * P_4 \rightarrow P_0 = 384 * P_4$
$P_0 + P_1 + P_2 + P_3 + P_4 = 1 \rightarrow P_0 * (1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{8} + \frac{1}{48} + \frac{1}{384}) = 1 \rightarrow P_0 = 0{,}606$
Οπότε, $P_1 = 0{,}303$, $P_2 = 0{,}07575$, $P_3 = 0{,}01263$, $P_4 = 0{,}00157$
Η πιθανότητα απώλειας πελάτη:
$P_{blocking} = P_4 = 0{,}00157$

b) *Με τη βοήθεια της εντολής ctmcbd του πακέτου queueing του Octave να μοντελοποιήσετε το παραπάνω σύστημα ως μία διαδικασία γεννήσεων-θανάτων συνεχούς χρόνου. Ζητούνται:*

i. *Η μήτρα ρυθμού μεταβάσεων, δηλαδή ο πίνακας που περιγράφει τους ρυθμούς μετάβασης ανάμεσα στις καταστάσεις του συστήματος.*

```
Η μήτρα ρυθμού μεταβάσεων είναι η εξής
transition_matrix =

   -5.00000    5.00000    0.00000    0.00000    0.00000
   10.00000  -12.50000    2.50000    0.00000    0.00000
    0.00000   10.00000  -11.66667    1.66667    0.00000
    0.00000    0.00000   10.00000  -11.25000    1.25000
    0.00000    0.00000    0.00000   10.00000  -10.00000

>>
```

ii. *Με την εντολή ctmc του πακέτου queueing του Octave να βρείτε τις εργοδικές πιθανότητες των καταστάσεων του συστήματος. Να επιβεβαιώσετε ότι είναι εκείνες που υπολογίσατε στο ερώτημα (α).*

```
Οι εργοδικές πιθανότητες των καταστασεων του συστήματος είναι οι εξής:
P0 = 0.606635
P1 = 0.303318
P2 = 0.0758294
P3 = 0.0126382
P4 = 0.00157978
>> |
```

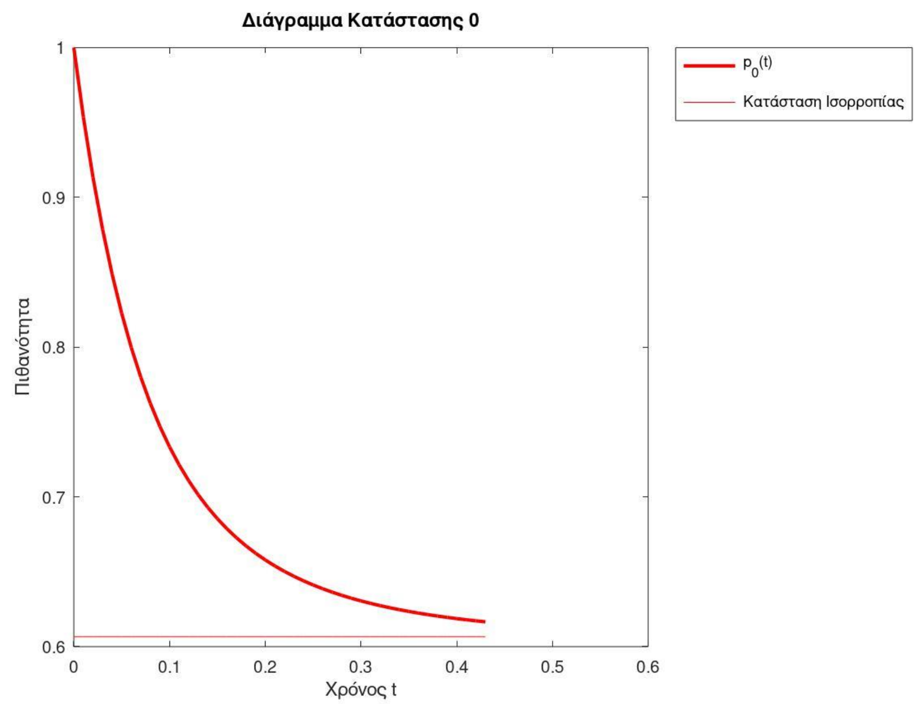
iii. *Ο μέσος αριθμός πελατών στο σύστημα, όταν εκείνο βρίσκεται σε κατάσταση ισορροπίας.*

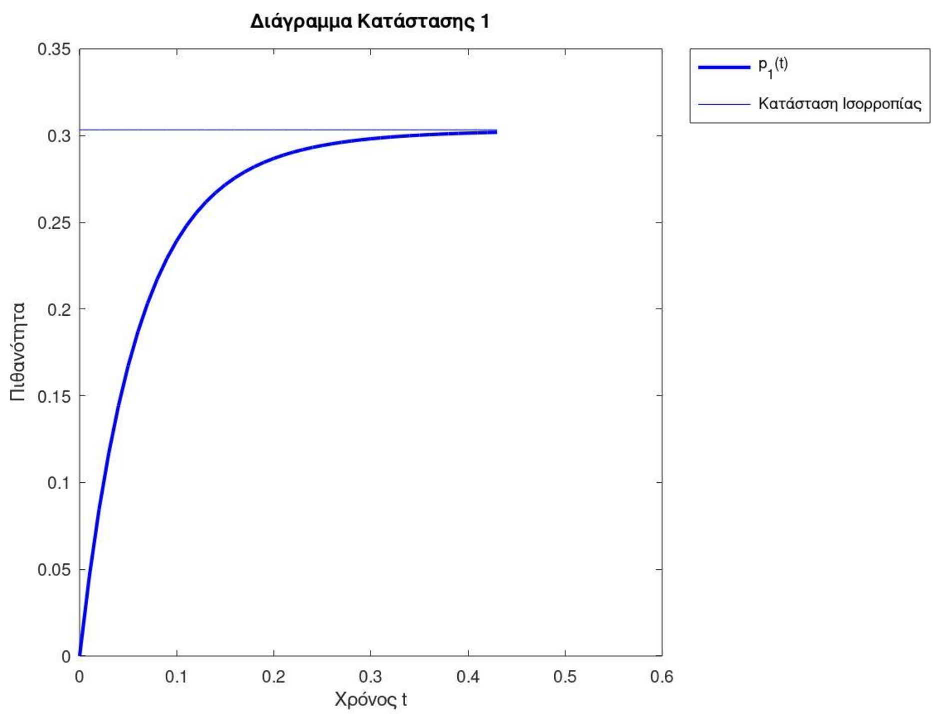
```
E = 0
E =  0.30332
E =  0.45498
E =  0.49289
E =  0.49921
Ο μέσος αριθμός πελατών στο σύστημα είναι E[n(t)] = 0.49921 πελάτες
>> |
```

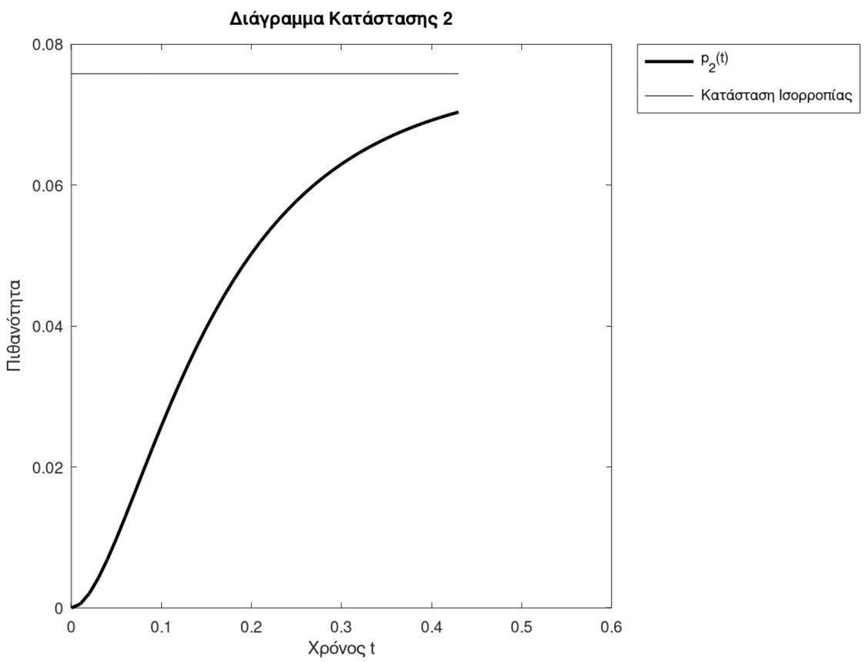
iv. *Η πιθανότητα απόρριψης πελάτη (blocking probability) από το σύστημα, όταν εκείνο βρίσκεται σε κατάσταση ισορροπίας.*

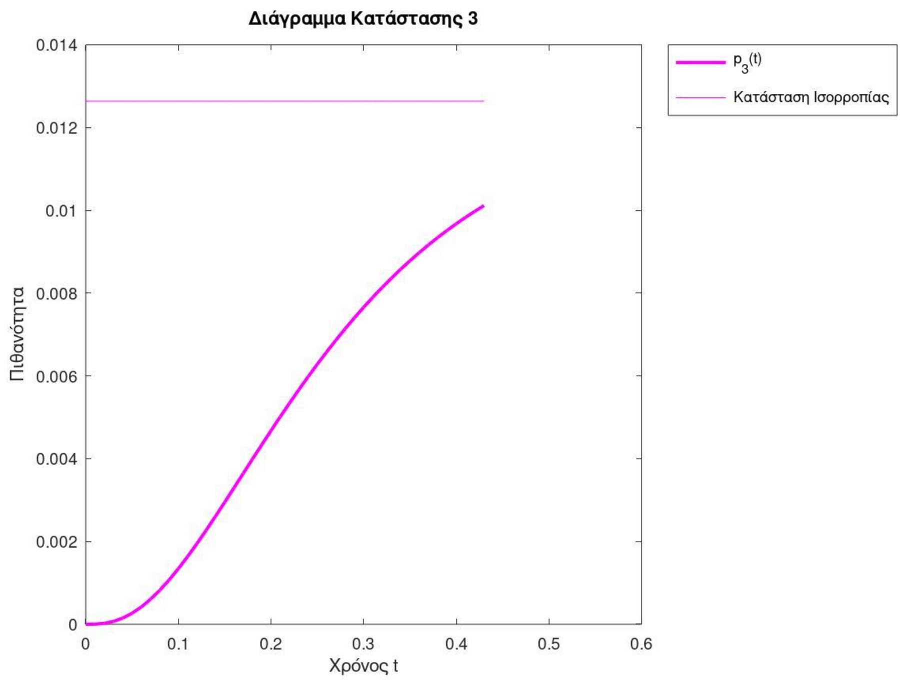
```
Η πιθανότητα απόρριψης πελάτη είναι 0.00157978
>> |
```

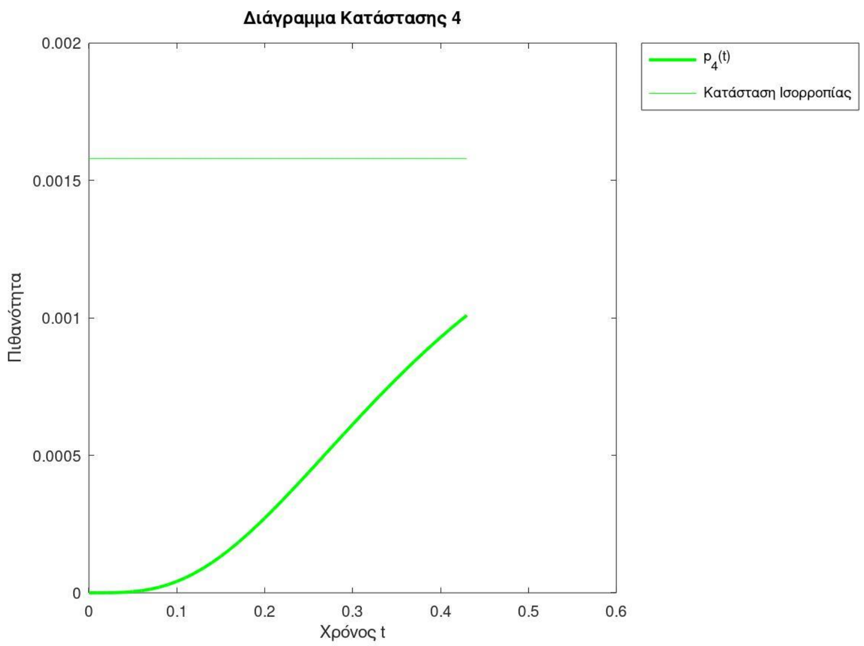
v. *Για κάθε μία από τις καταστάσεις του συστήματος να σχεδιάσετε τα διαγράμματα των πιθανοτήτων των καταστάσεων του συστήματος σαν συναρτήσεις του χρόνου από την αρχική κατάσταση μέχρι οι πιθανότητες να έχουν απόσταση μικρότερη του 1% από τις εργοδικές πιθανότητες του ερωτήματος (2).*


Διάγραμμα Κατάστασης 0
p_0(t)
Κατάσταση Ισορροπίας
Πιθανότητα
Χρόνος t
1
0.9
0.8
0.7
0.6
0
0.1
0.2
0.3
0.4
0.5
0.6


Διάγραμμα Κατάστασης 1
p_1(t)
Κατάσταση Ισορροπίας
Πιθανότητα
Χρόνος t
0.35
0.3
0.25
0.2
0.15
0.1
0.05
0
0
0.1
0.2
0.3
0.4
0.5
0.6

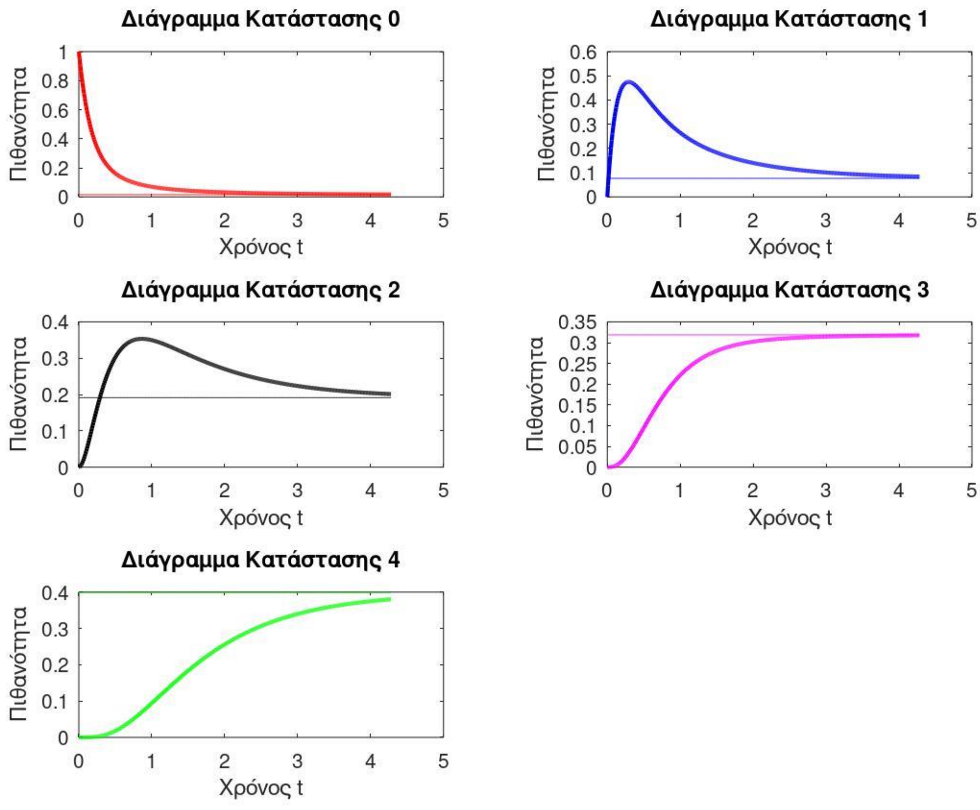

Διάγραμμα Κατάστασης 2
0.08
0.06
0.04
0.02
0
Πιθανότητα
0
0.1
0.2
0.3
0.4
0.5
0.6
Χρόνος t
$p_2(t)$
Κατάσταση Ισορροπίας


Διάγραμμα Κατάστασης 3
0.014
0.012
0.01
0.008
0.006
0.004
0.002
0
Πιθανότητα
0
0.1
0.2
0.3
0.4
0.5
0.6
Χρόνος t
$p_3(t)$
Κατάσταση Ισορροπίας

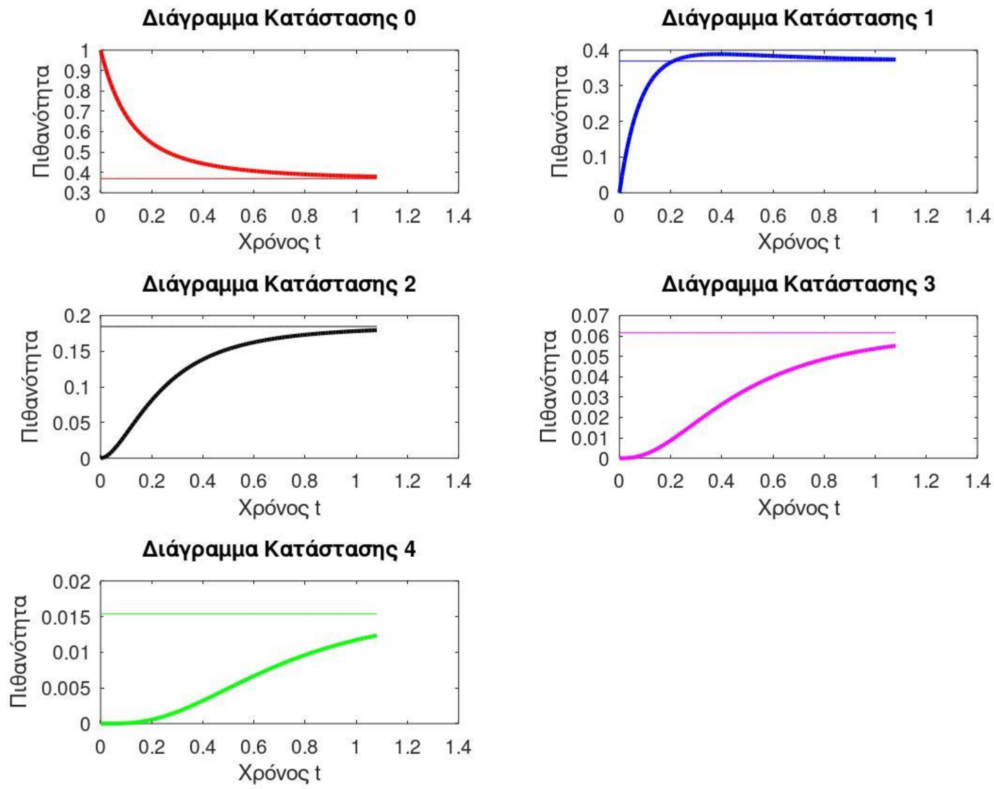


vi. *Να επαναλάβετε το ερώτημα (v) για τιμές (i) λ=5, μ=1, (ii) λ=5, μ=5, (iii) λ=5, μ=20. Να σχολιάσετε ποιοτικά πώς αλλάζουν οι πιθανότητες και η ταχύτητα σύγκλισης στην εργοδική κατάσταση.*

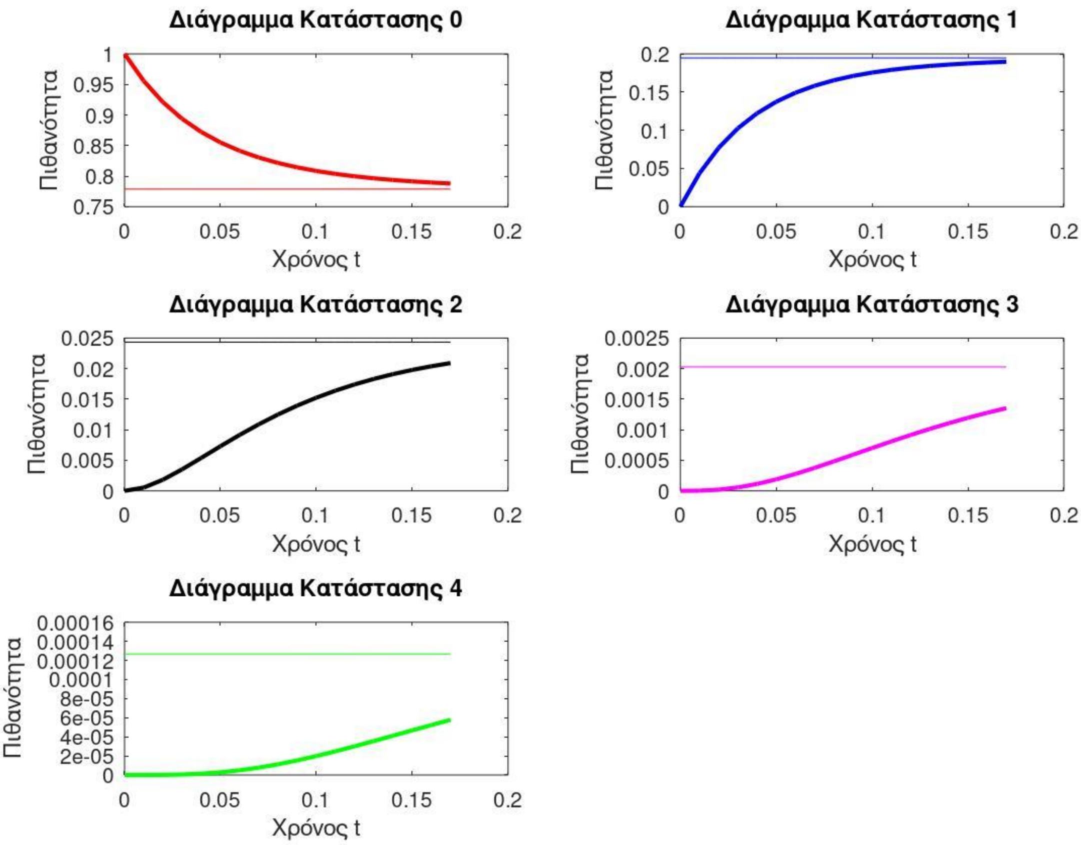
Για λ =5, μ = 1:



Για λ = 5, μ = 5:



Για λ = 5, μ = 20:



Παρατήρηση: Με την αύξηση του μ, οι πιθανότητες να βρεθεί το σύστημα σε όλο και μεγαλύτερη κατάσταση μειώνονται, ενώ παράλληλα αυξάνεται η ταχύτητα σύγκλισης στην εργοδική κατάσταση. Αυτό συμβαίνει διότι, καθώς το ρ μειώνεται το σύστημα γίνεται όλο και πιο ελαφρύ, ενώ όσο έχουμε μεγάλο ρ το σύστημα είναι υπερφορτωμένο. Αναλυτικότερα:

Στην $1^η$ περίπτωση, δεν υπάρχει εργοδικότητα στο σύστημα αφού $ρ > 1$, κι έτσι η μεγαλύτερη πιθανότητα προκύπτει στην κατάσταση 4 οπότε γίνεται αντιληπτό ότι το σύστημα θα είναι απασχολημένο και θα απορρίπτει πελάτες.

Στην $2^η$ περίπτωση, ισχύει $ρ = 1$, δηλαδή ο μέσος ρυθμός αφίξεων ισούται με τον μέσο ρυθμό εξυπηρέτησης.

Στην $3^η$ περίπτωση, η εργοδικότητα είναι μεγάλη αφού $ρ < 1$, κι έτσι ο μέσος ρυθμός εξυπηρέτησης είναι αυξημένος οπότε το σύστημα εξυπηρετεί πολύ γρήγορα του πελάτες σε σχέση με τα προηγούμενα συστήματα για αυτό τον λόγο η πιθανότητα να έχει μηδέν πελάτες είναι πολύ υψηλότερη από τις υπόλοιπες.

Ο αντίστοιχος κώδικας επισυνάπτεται σε ξεχωριστό αρχείο.