

ΕΘΝΙΚΟ ΜΕΤΣΟΒΙΟ ΠΟΛΥΤΕΧΝΕΙΟ
ΣΧΟΛΗ ΗΛΕΚΤΡΟΛΟΓΩΝ ΜΗΧΑΝΙΚΩΝ ΚΑΙ ΜΗΧΑΝΙΚΩΝ
ΥΠΟΛΟΓΙΣΤΩΝ



ΣΥΣΤΗΜΑΤΑ ΑΝΑΜΟΝΗΣ

(2019-2020)

3^η ΕΡΓΑΣΤΗΡΙΑΚΗ ΑΝΑΦΟΡΑ

Ονοματεπώνυμο: Χρήστος Τσούφης - 03117176

Εκτέλεση Εργαστηρίου: 27/04/2020

3^η Ομάδα Ασκήσεων

Προσομοίωση συστήματος M/M/1/10

Με τη μέθοδο της προσομοίωσης, θα μελετήσετε ένα σύστημα M/M/1/10, δηλαδή σύστημα με έναν εξυπηρετητή και μέγιστη χωρητικότητα 10 πελάτες. Οι αφίξεις στην ουρά ακολουθούν την κατανομή Poisson με ομοιόμορφο μέσο ρυθμό λ πελάτες/min, ενώ οι εξυπηρετήσεις είναι εκθετικές με ομοιόμορφο μέσο ρυθμό εξυπηρέτησης $\mu = 5$ πελάτες/min. Χρησιμοποιώντας τη γλώσσα προγραμματισμού της προτίμησής σας και χωρίς να χρησιμοποιήσετε έτοιμες βιβλιοθήκες προσομοίωσης να γράψετε μία προσομοίωση που θα υπολογίζει:

- Τις πιθανότητες των καταστάσεων του συστήματος.
- Την πιθανότητα απόρριψης πελάτη από το σύστημα.
- Το μέσο αριθμό πελατών στο σύστημα.
- Το μέσο χρόνο καθυστέρησης ενός πελάτη στο σύστημα.

Κριτήριο σύγκλισης της προσομοίωσής σας θα αποτελεί η διαφορά ανάμεσα σε δύο τιμές του μέσου αριθμού πελατών στο σύστημα. Η σύγκριση θα πραγματοποιείται ανά 1000 μεταβάσεις. Η προσομοίωση θα τερματίζεται όταν η διαφορά αυτή είναι μικρότερη από 0.001% ή όταν ο αριθμός των συνολικών μεταβάσεων ξεπεράσει το 1.000.000.

Γενικές παρατηρήσεις:

- Τις πιθανότητες των καταστάσεων του συστήματος.
- Την πιθανότητα απόρριψης πελάτη από το σύστημα.
Η πιθανότητα απόρριψης πελάτη από το σύστημα είναι η τελευταία πιθανότητα, δηλαδή η πιθανότητα να είσαι στην κατάσταση 10. $P_{\text{blocking}} = P_N$
- Το μέσο αριθμό πελατών στο σύστημα.
Υπολογίζεται ως το άθροισμα $n \cdot P[n]$, δηλαδή του αριθμού των πελατών που βρίσκονται σε μια κατάσταση επί την πιθανότητα να βρίσκεται σε αυτή τη κατάσταση.
- Το μέσο χρόνο καθυστέρησης ενός πελάτη στο σύστημα.
Υπολογίζεται από τον τύπο του Little.

1^ο Κριτήριο: Γίνεται έλεγχος ανά 1.000 μεταβάσεις αν ικανοποιείται κάποιο κριτήριο, δηλ. αν η διαφορά ανάμεσα στον μέσο αριθμό πελατών στο σύστημα αλλάζει κατά λιγότερο από 0.001%.

2^ο Κριτήριο: Στην περίπτωση που η προσομοίωση αποκλίνει, για να βεβαιωθούμε ότι κάποια στιγμή θα τερματίσει αρκούν 1.000.000 μεταβάσεις.

Η M/M/1/10 είναι πάντα εργοδική και πάντα ευσταθής γιατί υπερβολικό φορτίο δεν προωθείται.

1. Για το *debugging* της προσομοίωσής σας θα πρέπει να παράξετε λεπτομερές *trace* των μεταβάσεων της κατάστασης του συστήματος για τις πρώτες 30 μεταβάσεις, δηλαδή θα πρέπει να καταγράψετε (α) την κατάσταση στην οποία βρίσκεται το σύστημα, (β) τι είδους μετάβαση είναι η επόμενη (άφιξη/αναχώρηση) και (γ) το συνολικό αριθμό αφίξεων στην παρούσα κατάσταση. Εάν τα αποτελέσματα είναι σωστά, να συνεχίσετε την προσομοίωσή σας απενεργοποιώντας τον κώδικα που αφορά το *debugging*.

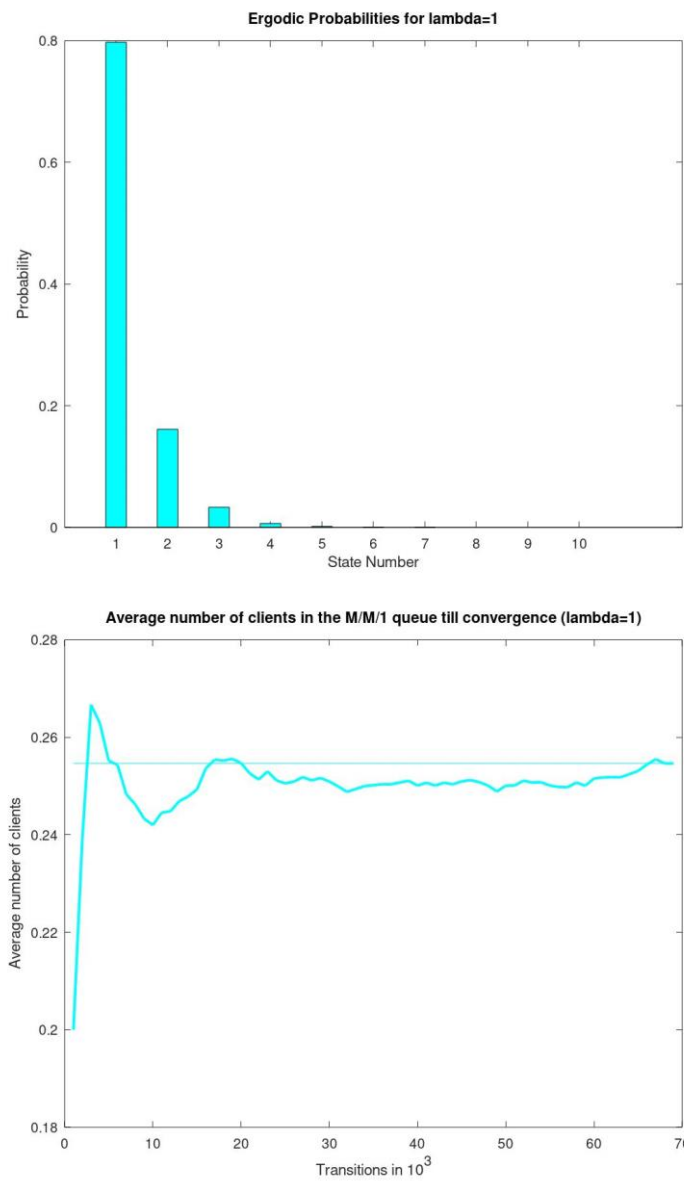
Για το *debugging* της προσομοίωσης παράχθηκε λεπτομερές *trace* των μεταβάσεων της κατάστασης του συστήματος για τις πρώτες 30 μεταβάσεις. Παρακάτω φαίνονται τα αποτελέσματα για $\lambda = [1, 5, 10]$ και $\mu = 5$.

State	Transition	Total	Arrivals	State	Transition	Total	Arrivals	State	Transition	Total	Arrivals
0		A		0		A		0		A	
1		D		1		D		1		D	
0		A		0		A		0		A	
1		A		1		A		1		A	
2		D		2		D		2		D	
1		D		1		D		1		D	
0		A		0		A		0		A	
1		A		1		A		1		A	
2		D		2		D		2		D	
1		A		1		A		1		A	
2		D		2		D		2		D	
1		D		1		A		1		A	
0		A		2		A		2		A	
1		D		3		A		3		A	
0		A		4		A		4		A	
1		D		5		A		5		A	
0		A		6		A		6		A	
1		D		7		A		7		A	
0		A		8		A		8		A	
1		D		9		D		9		D	
0		A		10		D		10		D	
1		A		11		A		11		A	
2		D		12		D		12		D	
1		D		13		A		13		A	
0		A		14		A		14		A	
1		D		15		A		15		A	
0		A		16		D		16		D	
1		A		17		A		17		A	
2		D		18		A		18		A	
1		D		19		D		19		D	
0		A		20		A		20		A	
1		A		21		A		21		A	
2		D		22		D		22		D	
1		D		23		A		23		A	
0		A		24		A		24		A	
1		D		25		A		25		A	
0		A		26		D		26		D	
1		A		27		A		27		A	
2		D		28		A		28		A	
1		D		29		A		29		A	
0		A		30		A		30		A	
1		A		31		A		31		A	
2		D		32		D		32		D	
1		D		33		A		33		A	
0		A		34		A		34		A	
1		D		35		A		35		A	
0		A		36		D		36		D	
1		A		37		A		37		A	
2		D		38		A		38		A	
1		D		39		A		39		A	
0		A		40		A		40		A	
1		A		41		A		41		A	
2		D		42		D		42		D	
1		D		43		A		43		A	
0		A		44		A		44		A	
1		D		45		A		45		A	
0		A		46		D		46		D	
1		A		47		A		47		A	
2		D		48		A		48		A	
1		D		49		A		49		A	
0		A		50		A		50		A	
1		A		51		A		51		A	
2		D		52		D		52		D	
1		D		53		A		53		A	
0		A		54		A		54		A	
1		D		55		A		55		A	
0		A		56		D		56		D	
1		A		57		A		57		A	
2		D		58		A		58		A	
1		D		59		A		59		A	
0		A		60		A		60		A	
1		A		61		A		61		A	
2		D		62		D		62		D	
1		D		63		A		63		A	
0		A		64		A		64		A	
1		D		65		A		65		A	
0		A		66		D		66		D	
1		A		67		A		67		A	
2		D		68		A		68		A	
1		D		69		A		69		A	
0		A		70		A		70		A	
1		A		71		A		71		A	
2		D		72		D		72		D	
1		D		73		A		73		A	
0		A		74		A		74		A	
1		D		75		A		75		A	
0		A		76		D		76		D	
1		A		77		A		77		A	
2		D		78		A		78		A	
1		D		79		A		79		A	
0		A		80		A		80		A	
1		A		81		A		81		A	
2		D		82		D		82		D	
1		D		83		A		83		A	
0		A		84		A		84		A	
1		D		85		A		85		A	
0		A		86		D		86		D	
1		A		87		A		87		A	
2		D		88		A		88		A	
1		D		89		A		89		A	
0		A		90		A		90		A	
1		A		91		A		91		A	
2		D		92		D		92		D	
1		D		93		A		93		A	
0		A		94		A		94		A	
1		D		95		A		95		A	
0		A		96		D		96		D	
1		A		97		A		97		A	
2		D		98		A		98		A	
1		D		99		A		99		A	
0		A		100		A		100		A	

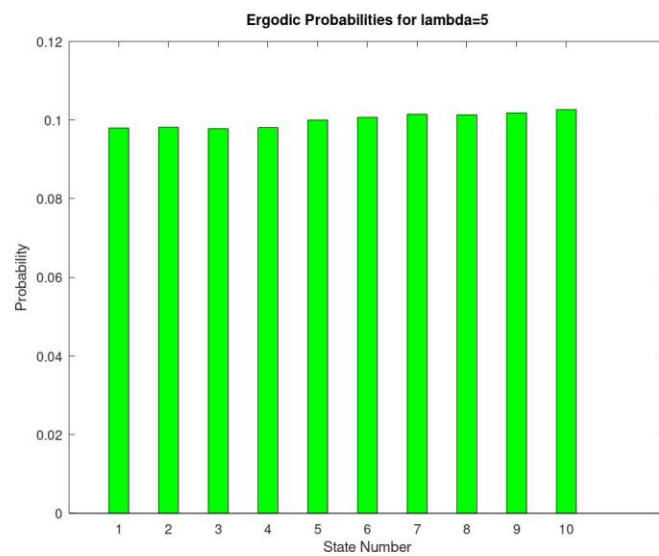
Όσον αφορά το *debugging*, ουσιαστικά τυπώνεται η έξοδος του προγράμματός για την επιβεβαίωση ότι δουλεύει σωστά.

2. Να εκτελέσετε την προσομοίωσή σας για τιμές του $\lambda = \{1, 5, 10\}$ και να παραστήσετε γραφικά (α) τις εργοδικές πιθανότητες που υπολογίζει τελικά η προσομοίωσή σας και (β) την εξέλιξη του μέσου αριθμού πελατών στο σύστημα για τις τιμές που υπολογίσατε.
Με την εκτέλεση της προσομοίωσης για τις τιμές του $\lambda = [1, 5, 10]$ παρουσιάζονται οι γραφικές παραστάσεις.

Για $\lambda = 1$:

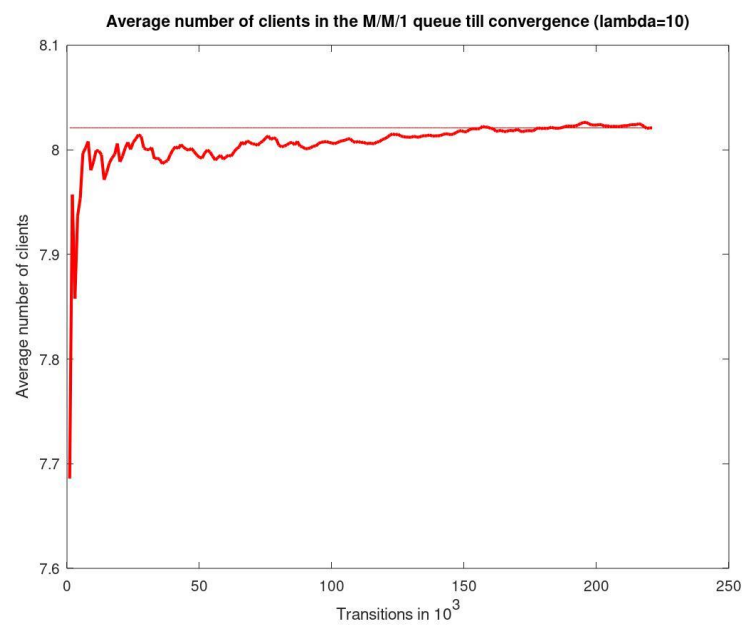
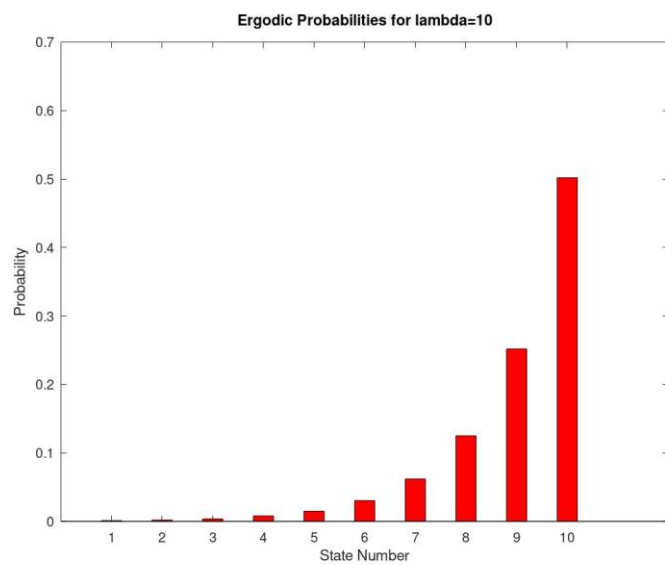


Για $\lambda = 5$:





Για $\lambda = 10$:



3. Να σχολιάσετε πώς αλλάζει (σε γενικές γραμμές) η ταχύτητα σύγκλισης της προσομοίωσης, δηλαδή ο απαιτούμενος αριθμός μεταβάσεων μέχρι να ικανοποιηθεί το κριτήριο σύγκλισης, καθώς μεγαλώνει η τιμή του λ . Πόσες αρχικές μεταβάσεις θα μπορούσατε με ασφάλεια να αγνοήσετε ώστε να επιταχυνθεί η σύγκλιση της προσομοίωσης; Για να μπορέσετε να συγκρίνετε σωστά τις επιμέρους προσομοιώσεις, θα πρέπει να φροντίσετε ώστε να παράγονται οι ίδιες ακολουθίες τυχαίων αριθμών σε κάθε προσομοίωση. Αυτό μπορείτε να το πετύχετε με την εντολή `rand("seed", 1)` στην αρχή του προγράμματος.

Όσο μεγαλύτερο ρ , τόσο πιο αργή είναι η σύνδεση. Αναλυτικότερα, όσο το λ απομακρύνεται από τον μέσο ρυθμό εξυπηρέτησης μ , η ταχύτητα σύγκλισης μειώνεται και το σύστημα φτάνει πιο γρήγορα σε σύγκλιση. Οι αρχικές μεταβάσεις που μπορούν με ασφάλεια να αγνοηθούν ώστε να επιταχυνθεί η σύγκλιση της προσομοίωσης είναι οι 20.000, 50.000, 100.000 μεταβάσεις που αφορούν το μεταβατικό φαινόμενο στην αρχή κάθε προσομοίωσης και οι οποίες δεν επηρεάζουν το σύστημα.

Σημείωση: Η εντολή `rand` καθορίζει ότι θα βγάζουμε τα ίδια αποτελέσματα.

4. Τι αλλαγές θα έπρεπε να κάνετε στην προσομοίωσή εάν το σύστημά σας είχε εκθετικές εξυπηρετήσεις με μεταβλητό μέσο ρυθμό εξυπηρέτησης $\mu_i = \mu * (i+1)$, όπου $\mu = 1$ πελάτης/sec, και $i = \{1, 2, \dots, 10\}$ η κατάσταση του συστήματος σας;

Σε κάθε προσομοίωση υπάρχουν διάφορα κατώφλια. Στο διάστημα $(0,1)$ και για σταθερό μ , επιλέγεται τυχαία ένα κατώφλι. Η πιθανότητα να βρεθεί αριστερά του κατωφλίου και άρα πιο κοντά στο μηδέν σημαίνει ότι θα υπάρξει άφιξη και υπολογίζεται ως εξής: (threshold) $th = \frac{\lambda}{\lambda + \mu}$ (όσο μεγαλύτερο είναι το λ , οπότε και το κλάσμα, τόσο πιθανότερο να υπάρξει άφιξη) και αντίστοιχα, αν βρεθεί δεξιά υπάρχει αναχώρηση. Αφού ο μέσος ρυθμός εξυπηρέτησης μ_i μεταβάλλεται, κατά $\mu_i = \mu * (i+1)$ και εξαρτάται από την κατάσταση του συστήματος, θα αλλάζει και το κατώφλι από το οποίο θα καθορίζεται αν η επόμενη μετάβαση θα είναι άφιξη ή αναχώρηση.