ΕΘΝΙΚΟ ΜΕΤΣΟΒΙΟ ΠΟΛΥΤΕΧΝΕΙΟ

ΣΧΟΛΗ ΗΛΕΚΤΡΟΛΟΓΩΝ ΜΗΧΑΝΙΚΩΝ ΚΑΙ ΜΗΧΑΝΙΚΩΝ ΥΠΟΛΟΓΙΣΤΩΝ

ΡΟΜΠΟΤΙΚΗ Ι: ΑΝΑΛΥΣΗ - ΕΛΕΓΧΟΣ - ΕΡΓΑΣΤΗΡΙΟ

(2021 – 2022)

Εξαμηνιαία Εργασία:

Ρομποτικός Μηχανισμός 3 στροφικών βαθμών ελευθερίας

(Robotic Leg Mechanism with 3 rotational DoF)

Διδάσκων Μαθήματος:

- Κ. Τζαφέστας

Ονοματεπώνυμο:

- Χρήστος Τσούφης

Αριθμός Μητρώου:

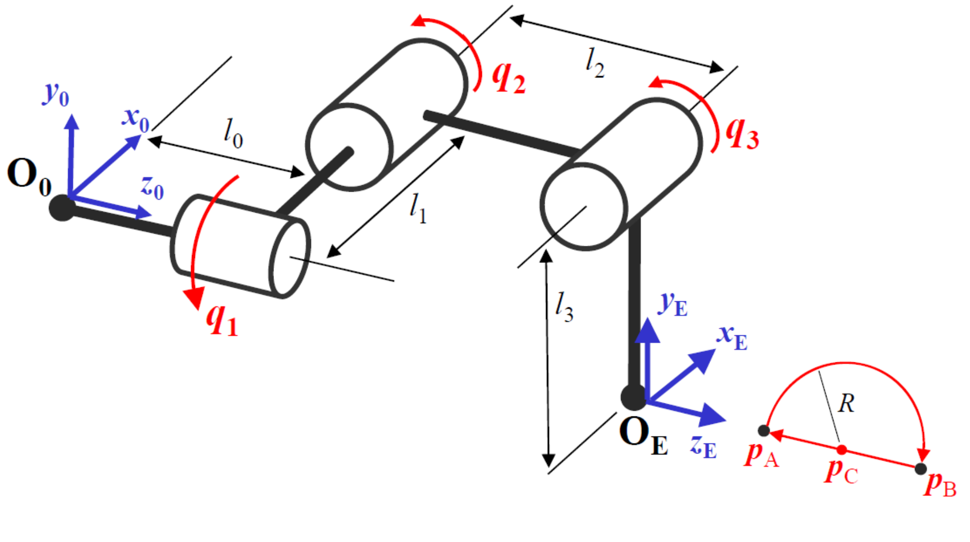
- 031 17 176

Στοιχεία Επικοινωνίας:

- el17176@mail.ntua.gr
- chris99ts@gmail.com

Μέρος Α: Θεωρητική Ανάλυση

Στο Σχήμα 1 εικονίζεται η κινηματική δομή ενός ρομποτικού μηχανισμού τριών στροφικών βαθμών ελευθερίας $\{q_1, q_2, q_3\}$. Ο μηχανισμός αυτός έχει σχεδιασθεί να λειτουργεί ως ένα από τα πόδια ενός βαδίζοντος ρομπότ (walking robot). Τα μήκη των συνδέσμων $\{l_0, l_1, l_2, l_3\}$ θεωρούνται γνωστά και σταθερά. Η κινηματική διάταξη αρχικοποίησης (όπου $q_i = 0$, για κάθε i = 1, 2, 3) είναι αυτή που εικονίζεται στο Σχήμα 1.



Σχήμα 1: Κινηματική δομή ρομποτικού μηχανισμού 3 στροφικών β.ε.

1. *Εφαρμόζοντας τη μέθοδο **Denavit-Hartenberg (D-H)** να τοποθετηθούν τα πλαίσια αναφοράς των συνδέσμων του μηχανισμού και να προσδιοριστεί ο πίνακας των παραμέτρων της μεθόδου.*

2. *Να προσδιορισθεί η ευθεία **κινηματική εξίσωση** του ρομπότ.*

3. *Να προσδιορισθεί η **Ιακωβιανή μήτρα** που περιγράφει το ευθύ διαφορικό κινηματικό μοντέλο για δοθείσα διάταξη του ρομπότ.*

4. *Να μελετηθεί το **αντίστροφο διαφορικό κινηματικό μοντέλο** του ρομπότ <u>ως προς τη γραμμική ταχύτητα</u> του τελικού εργαλείου δράσης, και να προσδιορισθούν οι ιδιόμορφες κινηματικές διατάξεις του συστήματος (singular configurations).*

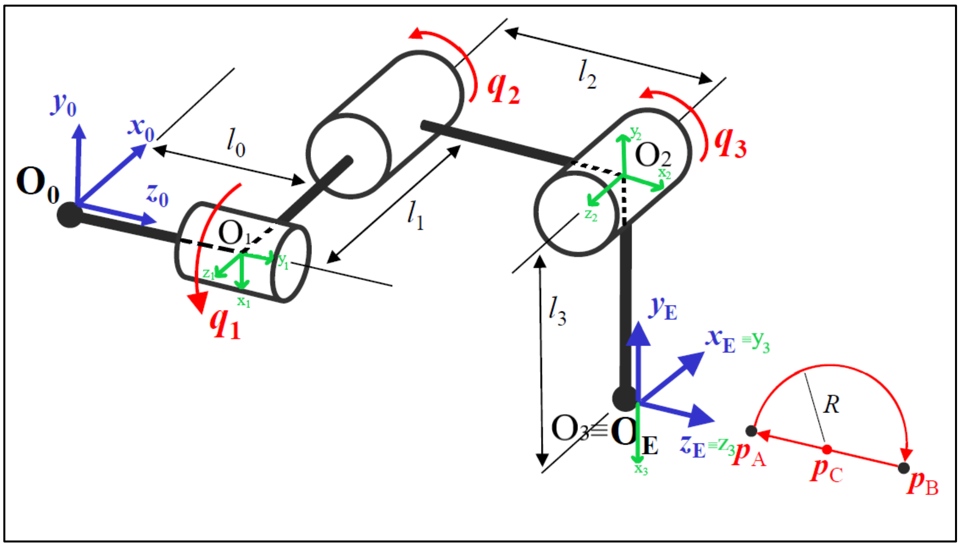
5. *Να προσδιορισθεί το αντίστροφο γεωμετρικό μοντέλο του ρομποτικού μηχανισμού <u>για δεδομένη θέση</u> p_E του τελικού άκρου του.*

1. Μέθοδος DH – Τοποθέτηση Πλαισίων – Πίνακας Παραμέτρων

Στην παρακάτω εικόνα παρουσιάζεται η κινηματική δομή ενός ρομποτικού μηχανισμού τριών στροφικών βαθμών ελευθερίας q_1, q_2, q_3 σε διάταξη αρχικοποίησης (όπου $q_i = 0, \forall i = 1,2,3$). Τα μήκη των συνδέσμων l_0, …, l_3 θεωρούνται γνωστά και σταθερά. Τα νέα πλαίσια θα είναι σε πλήθος ίσα με #αρθρώσεων + 1 (δηλαδή, ένα για κάθε άρθρωση και ακόμα ένα για τον end-effector).

- Ο z_i άξονας βρίσκεται στην κατεύθυνση του άξονα της άρθρωσης.
- Ο x_i άξονας είναι κάθετος στους z_i, z_{i-1}. Αν δεν υπάρχει μοναδική κάθετος ο x_i βρίσκεται στην κατεύθυνση από τον z_{i-1} προς τον z_i αφού θα πρέπει να τέμνει τον z_{i-1} αλλιώς θα πρέπει το πλαίσιο να μετατοπιστεί, χωρίς περιστροφή, ώστε να πληροί τις συμβάσεις.
- Ο y_i άξονας τοποθετείται έτσι ώστε οι άξονες να αποτελούν δεξιόστροφο σύστημα.
- Το πλαίσιο του end-effector έχει τοποθετηθεί αυθαίρετα.

Στο παρακάτω σχήμα φαίνονται αυτά τα πλαίσια.



Αναλυτικά, οι παράμετροι της μεθόδου DH θα είναι:

i	d_i	θ_i	$\mathrm{a_i}$	α_i
1	l_0	$q_1 - \frac{\pi}{2}$	0	$\frac{\pi}{2}$
2	$-l_1$	$q_2 + \frac{\pi}{2}$	l_2	0
3	0	$q_3 - \frac{\pi}{2}$	l_3	$-\frac{\pi}{2}$
E	0	$\frac{\pi}{2}$	0	0

Για πληρότητα, εξηγούνται εν συντομία τα σύμβολα του πίνακα:

$\mathbf{a_i}$: απόσταση των κέντρων των πλαισίων i – 1 και i στην κατεύθυνση του x_i

$\boldsymbol{\alpha}_\mathbf{i}$: περιστροφή του i – 1 πλαισίου γύρω από τον x_i για να συμπέσει ο $\mathrm{z_{i-1}}$ με τον $\mathrm{z_i}$

$\mathbf{d_i}$: απόσταση των κέντρων των πλαισίων i – 1 και i στην κατεύθυνση του $\mathrm{z_{i-1}}$

$\boldsymbol{\theta}_\mathbf{i}$: περιστροφή του i – 1 πλαισίου γύρω από τον $\mathrm{z_{i-1}}$ για να συμπέσει ο x_{i-1} με τον x_i

2. Ευθεία Κινηματική Εξίσωση – Ευθύ Γεωμετρικό Μοντέλο

Για τον προσδιορισμό της ευθείας κινηματικής εξίσωσης θα πρέπει να υπολογιστούν πρώτα οι επιμέρους μήτρες ομογενών μετασχηματισμών. Ο γενικός τύπος που δίνει την κάθε μήτρα συναρτήσει των παραμέτρων DH, είναι:

$$\boldsymbol{A_i^{i-1}} = \begin{bmatrix} cos\,\theta_i & -sin\,\theta_i \cdot cos\,a_i & sin\,\theta_i \cdot sin\,a_i & a_i \cdot cos\,\theta_i \\ sin\,\theta_i & cos\,\theta_i \cdot cos\,a_i & -cos\,\theta_i \cdot sin\,a_i & a_i \cdot sin\,\theta_i \\ 0 & sin\,a_i & cos\,a_i & d_i \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Για διευκόλυνση και συντομία, έχουν χρησιμοποιηθεί τα εξής σύμβολα:

- $s_i = \sin(q_i)$
- $c_i = \cos(q_i)$
- $c_{i\ldots j} = cos(q_i + \cdots + q_j)$
- $s_{i\ldots j} = sin(q_i + \cdots + q_j)$

Για *i = 1*:

$$\boldsymbol{A_1^0} = \begin{bmatrix} cos\left(q_1 - \frac{\pi}{2}\right) & -sin\left(q_1 - \frac{\pi}{2}\right) \cdot cos\left(\frac{\pi}{2}\right) & sin\left(q_1 - \frac{\pi}{2}\right) \cdot sin\left(\frac{\pi}{2}\right) & 0 \cdot cos\left(q_1 - \frac{\pi}{2}\right) \\ sin\left(q_1 - \frac{\pi}{2}\right) & cos\left(q_1 - \frac{\pi}{2}\right) \cdot cos\left(\frac{\pi}{2}\right) & -cos\left(q_1 - \frac{\pi}{2}\right) \cdot sin\left(\frac{\pi}{2}\right) & 0 \cdot sin\left(q_1 - \frac{\pi}{2}\right) \\ 0 & sin\left(\frac{\pi}{2}\right) & cos\left(\frac{\pi}{2}\right) & l_0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \boldsymbol{A_1^0} = \begin{bmatrix} sin(q_1) & 0 & -cos(q_1) & 0 \\ -cos(q_1) & 0 & -sin(q_1) & 0 \\ 0 & 1 & 0 & l_0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \Rightarrow \boldsymbol{A_1^0} = \begin{bmatrix} s_1 & 0 & -c_1 & 0 \\ -c_1 & 0 & -s_1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & l_0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Για *i = 2*:

$$\boldsymbol{A_2^1} = \begin{bmatrix} cos\left(q_2 + \frac{\pi}{2}\right) & -sin\left(q_2 + \frac{\pi}{2}\right) \cdot cos(0) & sin\left(q_2 + \frac{\pi}{2}\right) \cdot sin(0) & l_2 \cdot cos\left(q_2 + \frac{\pi}{2}\right) \\ sin\left(q_2 + \frac{\pi}{2}\right) & cos\left(q_2 + \frac{\pi}{2}\right) \cdot cos(0) & -cos\left(q_2 + \frac{\pi}{2}\right) \cdot sin(0) & l_2 \cdot sin\left(q_2 + \frac{\pi}{2}\right) \\ 0 & sin(0) & cos(0) & -l_1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \boldsymbol{A_2^1} = \begin{bmatrix} -sin(q_2) & -cos(q_2) & 0 & -l_2 \cdot sin(q_2) \\ cos(q_2) & -sin(q_2) & 0 & l_2 \cdot cos(q_2) \\ 0 & 0 & 1 & -l_1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \Rightarrow \boldsymbol{A_2^1} = \begin{bmatrix} -s_2 & -c_2 & 0 & -l_2 s_2 \\ c_2 & -s_2 & 0 & l_2 c_2 \\ 0 & 0 & 1 & -l_1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Για *i = 3*:

$$\boldsymbol{A_3^2} = \begin{bmatrix} cos\left(q_3 - \frac{\pi}{2}\right) & -sin\left(q_3 - \frac{\pi}{2}\right) \cdot cos\left(-\frac{\pi}{2}\right) & sin\left(q_3 - \frac{\pi}{2}\right) \cdot sin\left(-\frac{\pi}{2}\right) & l_3 \cdot cos\left(q_3 - \frac{\pi}{2}\right) \\ sin\left(q_3 - \frac{\pi}{2}\right) & cos\left(q_3 - \frac{\pi}{2}\right) \cdot cos\left(-\frac{\pi}{2}\right) & -cos\left(q_3 - \frac{\pi}{2}\right) \cdot sin\left(-\frac{\pi}{2}\right) & l_3 \cdot sin\left(q_3 - \frac{\pi}{2}\right) \\ 0 & sin\left(-\frac{\pi}{2}\right) & cos\left(-\frac{\pi}{2}\right) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \boldsymbol{A_3^2} = \begin{bmatrix} sin(q_3) & 0 & cos(q_3) & l_3 \cdot sin(q_3) \\ -cos(q_3) & 0 & sin(q_3) & -l_3 \cdot cos(q_3) \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \Rightarrow \boldsymbol{A_3^2} = \begin{bmatrix} s_3 & 0 & c_3 & l_3 s_3 \\ -c_3 & 0 & s_3 & -l_3 c_3 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Για *i = E*:

$$\boldsymbol{A_E^3} = \begin{bmatrix} cos\left(\frac{\pi}{2}\right) & -sin\left(\frac{\pi}{2}\right) \cdot cos(0) & sin\left(\frac{\pi}{2}\right) \cdot sin(0) & 0 \cdot cos\left(\frac{\pi}{2}\right) \\ sin\left(\frac{\pi}{2}\right) & cos\left(\frac{\pi}{2}\right) \cdot cos(0) & -cos\left(\frac{\pi}{2}\right) \cdot sin(0) & 0 \cdot sin\left(\frac{\pi}{2}\right) \\ 0 & sin(0) & cos(0) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \boldsymbol{A_E^3} = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Σημειώνεται ότι χρησιμοποιήθηκαν και οι εξής τριγωνομετρικές ιδιότητες:

$$cos\left(q_i \pm \frac{\pi}{2}\right) = \mp sin(q_i)$$

$$sin\left(q_i \pm \frac{\pi}{2}\right) = \pm cos(q_i),$$

$$sin(a \pm b) = sin\, a\, cos\, b \pm cos\, a\, sin\, b$$

$$cos(a \pm b) = cos\, a\, cos\, b \mp sin\, a\, sin\, b$$

Συνεπώς,

$$\boldsymbol{A_2^0} = \boldsymbol{A_1^0} \cdot \boldsymbol{A_2^1} = \begin{bmatrix} s_1 & 0 & -c_1 & 0 \\ -c_1 & 0 & -s_1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & l_0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -s_2 & -c_2 & 0 & -l_2 s_2 \\ c_2 & -s_2 & 0 & l_2 c_2 \\ 0 & 0 & 1 & -l_1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \boldsymbol{A_2^0} = \begin{bmatrix} -s_1 s_2 & -c_2 s_1 & -c_1 & c_1 l_1 - l_2 s_1 s_2 \\ c_1 s_2 & c_1 c_2 & -s_1 & c_1 l_2 s_2 + l_1 s_1 \\ c_2 & -s_2 & 0 & c_2 l_2 + l_0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\boldsymbol{A_3^0} = \boldsymbol{A_2^0} \cdot \boldsymbol{A_3^2} = \begin{bmatrix} -s_1 s_2 & -c_2 s_1 & -c_1 & c_1 l_1 - l_2 s_1 s_2 \\ c_1 s_2 & c_1 c_2 & -s_1 & c_1 l_2 s_2 + l_1 s_1 \\ c_2 & -s_2 & 0 & c_2 l_2 + l_0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} s_3 & 0 & c_3 & l_3 s_3 \\ -c_3 & 0 & s_3 & -l_3 c_3 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \boldsymbol{A_3^0} = \begin{bmatrix} c_2 c_3 s_1 - s_1 s_2 s_3 & c_1 & -c_2 s_1 s_3 - c_3 s_1 s_2 & c_1 l_1 + c_2 c_3 l_3 s_1 - l_2 s_1 s_2 - l_3 s_1 s_2 s_3 \\ -c_1 c_2 c_3 + c_1 s_2 s_3 & s_1 & c_1 c_2 s_3 + c_1 c_3 s_2 & -c_1 c_2 c_3 l_3 + c_1 l_2 s_2 + c_1 l_3 s_2 s_3 + l_1 s_1 \\ c_2 s_3 + c_3 s_2 & 0 & c_2 c_3 - s_2 s_3 & c_2 l_2 + c_2 l_3 s_3 + c_3 l_3 s_2 + l_0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \boldsymbol{A_3^0} = \begin{bmatrix} c_{23} s_1 & c_1 & -s_1 s_{23} & c_1 l_1 - l_2 s_1 s_2 - l_3 s_1 c_{23} \\ -c_1 c_{23} & s_1 & c_1 s_{23} & l_1 s_1 + c_1 l_2 s_2 - l_3 c_2 c_{23} \\ s_{23} & 0 & c_{23} & l_0 + c_2 l_2 + l_3 s_{23} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\boldsymbol{A_E^0} = \boldsymbol{A_3^0} \cdot \boldsymbol{A_E^3} = \begin{bmatrix} c_{23} s_1 & c_1 & -s_1 s_{23} & c_1 l_1 - l_2 s_1 s_2 - l_3 s_1 c_{23} \\ -c_1 c_{23} & s_1 & c_1 s_{23} & l_1 s_1 + c_1 l_2 s_2 - l_3 c_2 c_{23} \\ s_{23} & 0 & c_{23} & l_0 + c_2 l_2 + l_3 s_{23} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \boldsymbol{A_E^0} = \begin{bmatrix} c_1 & -c_{23} s_1 & -s_1 s_{23} & c_1 l_1 - c_{23} l_3 s_1 - l_2 s_1 s_2 - l_3 s_1 s_{23} \\ s_1 & c_1 c_{23} & c_1 s_{23} & c_1 l_2 s_2 + c_1 l_3 s_{23} - c_2 c_{23} l_3 + l_1 s_1 \\ 0 & -s_{23} & c_{23} & c_2 l_2 + c_{23} l_3 + l_0 + l_3 s_{23} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \boldsymbol{A_E^0} = \begin{bmatrix} c_1 & -c_{23} s_1 & -s_1 s_{23} & c_1 l_1 - l_2 s_1 s_2 + l_3 s_1 c_{23} \\ s_1 & c_1 c_{23} & c_1 s_{23} & l_1 s_1 + l_2 c_1 s_2 - l_3 c_1 c_{23} \\ 0 & -s_{23} & c_{23} & l_0 + l_2 c_2 + l_3 s_{23} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Από την ανάλυση D-H προκύπτει ότι ο προσανατολισμός και η θέση του τελικού στοιχείου δράσης, αντίστοιχα, ως προς το σύστημα συντεταγμένων του μηχανισμού:

$$\boldsymbol{A_E^0} = \begin{bmatrix} c_1 & -c_{23}s_1 & -s_1s_{23} & c_1l_1 - l_2s_1s_2 + l_3s_1c_{23} \\ s_1 & c_1c_{23} & c_1s_{23} & l_1s_1 + l_2c_1s_2 - l_3c_1c_{23} \\ 0 & -s_{23} & c_{23} & l_0 + l_2c_2 + l_3s_{23} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \boldsymbol{R_E^0} = \begin{bmatrix} c_1 & -c_{23}s_1 & -s_1s_{23} \\ s_1 & c_1c_{23} & c_1s_{23} \\ 0 & -s_{23} & c_{23} \end{bmatrix} \ \& \ \boldsymbol{p_E^0} = \begin{bmatrix} c_1l_1 - l_2s_1s_2 + l_3s_1c_{23} \\ l_1s_1 + l_2c_1s_2 - l_3c_1c_{23} \\ l_0 + l_2c_2 + l_3s_{23} \end{bmatrix}$$

$$\boldsymbol{A_3^0} = \begin{bmatrix} c_{23}s_1 & c_1 & -s_1s_{23} & c_1l_1 - l_2s_1s_2 - l_3s_1c_{23} \\ -c_1c_{23} & s_1 & c_1s_{23} & l_1s_1 + c_1l_2s_2 - l_3c_2c_{23} \\ s_{23} & 0 & c_{23} & l_0 + c_2l_2 + l_3s_{23} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \boldsymbol{R_3^0} = \begin{bmatrix} c_{23}s_1 & c_1 & -s_1s_{23} \\ -c_1c_{23} & s_1 & c_1s_{23} \\ s_{23} & 0 & c_{23} \end{bmatrix} \ \& \ \boldsymbol{p_3^0} = \begin{bmatrix} c_1l_1 - l_2s_1s_2 - l_3s_1c_{23} \\ l_1s_1 + c_1l_2s_2 - l_3c_2c_{23} \\ l_0 + c_2l_2 + l_3s_{23} \end{bmatrix}$$

$$\boldsymbol{A_2^0} = \begin{bmatrix} -s_1s_2 & -c_2s_1 & -c_1 & c_1l_1 - l_2s_1s_2 \\ c_1s_2 & c_1c_2 & -s_1 & c_1l_2s_2 + l_1s_1 \\ c_2 & -s_2 & 0 & c_2l_2 + l_0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \boldsymbol{R_2^0} = \begin{bmatrix} -s_1s_2 & -c_2s_1 & -c_1 \\ c_1s_2 & c_1c_2 & -s_1 \\ c_2 & -s_2 & 0 \end{bmatrix} \ \& \ \boldsymbol{p_2^0} = \begin{bmatrix} c_1l_1 - l_2s_1s_2 \\ c_1l_2s_2 + l_1s_1 \\ c_2l_2 + l_0 \end{bmatrix}$$

$$\boldsymbol{A_1^0} = \begin{bmatrix} s_1 & 0 & -c_1 & 0 \\ -c_1 & 0 & -s_1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & l_0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \boldsymbol{R_1^0} = \begin{bmatrix} s_1 & 0 & -c_1 \\ -c_1 & 0 & -s_1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \ \& \ \boldsymbol{p_1^0} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ l_0 \end{bmatrix}$$

3. Ιακωβιανή Μήτρα – Ευθύ Διαφορικό Κινηματικό Μοντέλο

Το ευθύ διαφορικό κινηματικό μοντέλο είναι:

$$\dot{p} = J \cdot \dot{q}$$

Όπου, το (n × 1) διάνυσμα των ταχυτήτων των αρθρώσεων θα είναι:

$$\dot{q} = [\dot{q_1}, \dot{q_2}, \dots, \dot{q_n}]^T$$

Ακόμη, ο γενικός τύπος της Ιακωβιανής Μήτρας (6 × n) J θα είναι:

$$\boldsymbol{J}(\vec{\boldsymbol{q}}) = \begin{bmatrix} J_{L_1} J_{L_2} J_{L_3} & \dots & J_{L_n} \\ J_{A_1} J_{A_2} J_{A_3} & & J_{A_n} \end{bmatrix}$$

Κάθε στήλη i της μήτρας αφορά την άρθρωση i. Ειδικότερα, τα J_{L_i} και J_{A_i} είναι διανύσματα διάστασης (3 × 1) και αντιπροσωπεύουν την "συμμετοχή" του $\dot{q_i}$ στην ταχύτητα του τελικού στοιχείου δράσης.

Εν προκειμένω, χρησιμοποιούνται οι τύποι για στροφικές αρθρώσεις και το διάνυσμα $\vec{b} = [0\ 0\ 1]^T$, αφού ακολουθείται η μεθοδολογία Denavit-Hartenberg.

$$J_{L_i} = \widehat{b_{i-1}} \times \widehat{r_{i-1,E}}$$

$$J_{A_i} = \widehat{b_{i-1}}$$

$$\widehat{b_{i-1}} = R_{i-1}^0 \cdot \vec{b}$$

$$\begin{bmatrix} \overrightarrow{r_{i-1,E}} \\ 0 \end{bmatrix} = A_n^0 \cdot \vec{r} - A_{i-1}^0 \cdot \vec{r}$$

$$\vec{r} = [0\ 0\ 0\ 1]^T$$

$$\vec{b} = [0\ 0\ 1]^T$$

Για $i = 1$:

$$b = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$\widehat{b_0} = R_0^0 b = I_3 \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} \overrightarrow{r_{0,E}} \\ 0 \end{bmatrix} = A_E^0 \cdot \vec{r} - A_0^0 \cdot \vec{r} \Rightarrow \widehat{r_{0,E}} = p_E^0 = \begin{bmatrix} c_1 l_1 - l_2 s_1 s_2 + l_3 s_1 c_{23} \\ l_1 s_1 + l_2 c_1 s_2 - l_3 c_1 c_{23} \\ l_0 + l_2 c_2 + l_3 s_{23} \end{bmatrix}$$

$$J_{A_1} = \widehat{b_0} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$J_{L_1} = \widehat{b_0} \times \widehat{r_{0,E}} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} c_1 l_1 - l_2 s_1 s_2 + l_3 s_1 c_{23} \\ l_1 s_1 + l_2 c_1 s_2 - l_3 c_1 c_{23} \\ l_0 + l_2 c_2 + l_3 s_{23} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c_1 c_{23} l_3 - c_1 l_2 s_2 - l_1 s_1 \\ c_1 l_1 + c_{23} l_3 s_1 - l_2 s_1 s_2 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Για *i = 2*:

$$\widehat{b_1} = R_1^0 b = \begin{bmatrix} s_1 & 0 & -c_1 \\ -c_1 & 0 & -s_1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -c_1 \\ -s_1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} \overrightarrow{r_{1,E}} \\ 0 \end{bmatrix} = A_E^0 \cdot \vec{r} - A_1^0 \cdot \vec{r} \Rightarrow \widehat{r_{1,E}} = p_E^0 - p_1^0 = \begin{bmatrix} c_1 l_1 - l_2 s_1 s_2 + l_3 s_1 c_{23} \\ l_1 s_1 + l_2 c_1 s_2 - l_3 c_1 c_{23} \\ l_0 + l_2 c_2 + l_3 s_{23} \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ l_0 \end{bmatrix} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \widehat{r_{1,E}} = \begin{bmatrix} c_1 l_1 + c_2 c_3 l_3 s_1 - l_2 s_1 s_2 - l_3 s_1 s_2 s_3 \\ -c_1 c_2 c_3 l_3 + c_1 l_2 s_2 + c_1 l_3 s_2 s_3 + l_1 s_1 \\ c_2 l_2 + c_2 l_3 s_3 + c_3 l_3 s_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c_1 l_1 - l_2 s_1 s_2 + l_3 s_1 c_{23} \\ l_1 s_1 + c_1 l_2 s_2 - l_3 c_1 c_{23} \\ c_2 l_2 + l_3 s_{23} \end{bmatrix}$$

$$J_{A_2} = \widehat{b_1} = \begin{bmatrix} -c_1 \\ -s_1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$J_{L_2} = \widehat{b_1} \times \widehat{r_{1,E}} = \begin{bmatrix} -c_1 \\ -s_1 \\ 0 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} c_1 l_1 - l_2 s_1 s_2 + l_3 s_1 c_{23} \\ l_1 s_1 + c_1 l_2 s_2 - l_3 c_1 c_{23} \\ c_2 l_2 + l_3 s_{23} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -s_1 c_2 l_2 - s_1 l_3 s_{23} \\ c_1 c_2 l_2 + c_1 l_3 s_{23} \\ c_{23} l_3 - l_2 s_2 \end{bmatrix}$$

Για i = 3 :

$$\widehat{b_2} = R_2^0 b = \begin{bmatrix} -s_1 s_2 & -c_2 s_1 & -c_1 \\ c_1 s_2 & c_1 c_2 & -s_1 \\ c_2 & -s_2 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -c_1 \\ -s_1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} \overrightarrow{r_{2,E}} \\ 0 \end{bmatrix} = A_E^0 \cdot \vec{r} - A_2^0 \cdot \vec{r} \Rightarrow \widehat{r_{2,E}} = p_E^0 - p_2^0 = \begin{bmatrix} c_1 l_1 - l_2 s_1 s_2 + l_3 s_1 c_{23} \\ l_1 s_1 + l_2 c_1 s_2 - l_3 c_1 c_{23} \\ l_0 + l_2 c_2 + l_3 s_{23} \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} c_1 l_1 - l_2 s_1 s_2 \\ c_1 l_2 s_2 + l_1 s_1 \\ c_2 l_2 + l_0 \end{bmatrix} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \widehat{r_{2,E}} = \begin{bmatrix} l_3 s_1 c_{23} \\ -l_3 c_1 c_{23} \\ l_3 s_{23} \end{bmatrix}$$

$$J_{A_3} = \widehat{b_2} = \begin{bmatrix} -c_1 \\ -s_1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$J_{L_3} = \widehat{b_2} \times \widehat{r_{2,E}} = \begin{bmatrix} -c_1 \\ -s_1 \\ 0 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} l_3 s_1 c_{23} \\ -l_3 c_1 c_{23} \\ l_3 s_{23} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -l_3 s_1 s_{23} \\ c_1 l_3 s_{23} \\ l_3 c_{23} \end{bmatrix}$$

Επομένως,

$$J = \begin{bmatrix} J_{L_1} J_{L_2} J_{L_3} \\ J_{A_1} J_{A_2} J_{A_3} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c_1 c_{23} l_3 - c_1 l_2 s_2 - l_1 s_1 & -s_1 c_2 l_2 - s_1 l_3 s_{23} & -l_3 s_1 s_{23} \\ c_1 l_1 + c_{23} l_3 s_1 - l_2 s_1 s_2 & c_1 c_2 l_2 + c_1 l_3 s_{23} & c_1 l_3 s_{23} \\ 0 & c_{23} l_3 - l_2 s_2 & l_3 c_{23} \\ 0 & -c_1 & -c_1 \\ 0 & -s_1 & -s_1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

4. Αντίστροφο Διαφορικό Κινηματικό Μοντέλο

Η αντίστροφη διαφορική κινηματική ανάλυση γίνεται λαμβάνοντας υπόψιν για δοσμένη διάταξη q ότι είναι γνωστό το διάνυσμα της γραμμικής ταχύτητας $v_E = \left[\dot{p}_{E_x}\ \dot{p}_{E_y}\ \dot{p}_{E_z}\right]^T$ του end-effector ως προς το πλαίσιο αναφοράς της βάσης.

Έτσι, αν η $J_L = J([1:3][1:3])$, δηλαδή το κομμάτι της Ιακωβιανής που αφορά τις γραμμικές ταχύτητες, αντιστρέφεται η εξίσωση του ευθέως διαφορικού κινηματικού μοντέλου $\dot{p} = J\dot{q}$. Έτσι, μπορεί να πάρει την μορφή $\dot{q} = J_L^{-1}\dot{v}_E$ που δίνει το αντίστροφο διαφορικό κινηματικό μοντέλο ως προς τη γραμμική ταχύτητα του Τ.Ε.Δ..

Για να εξεταστεί η ύπαρξη του ζητούμενου αντίστροφου πίνακα, θα πρέπει πρώτα να μελετηθεί η ορίζουσά του. Έτσι,

$$|J_L| = \begin{vmatrix} c_1c_{23}l_3 - c_1l_2s_2 - l_1s_1 & -s_1c_2l_2 - s_1l_3s_{23} & -l_3s_1s_{23} \\ c_1l_1 + c_{23}l_3s_1 - l_2s_1s_2 & c_1c_2l_2 + c_1l_3s_{23} & c_1l_3s_{23} \\ 0 & c_{23}l_3 - l_2s_2 & l_3c_{23} \end{vmatrix} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow |J_L| = c_1^2c_2c_{23}^2l_2l_3^2 - c_1c_2c_{23}l_2^2l_3s_2 + c_1^2c_{23}l_2l_3^2s_2s_{23} - c_1l_2^2l_3s_2^2s_{23} + c_2c_{23}^2l_2l_3^2s_1^2$$
$$-c_2c_{23}l_2^2l_3s_1^2s_2 + c_{23}l_2l_3^2s_1^2s_2s_{23} - l_2^2l_3s_1s_2^2s_{23} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow |J_L| = c_1^2c_2c_{23}^2l_2l_3^2 + c_2c_{23}^2l_2l_3^2s_1^2 - c_1c_2c_{23}l_2^2l_3s_2 - c_2c_{23}l_2^2l_3s_1^2s_2$$
$$+c_1^2c_{23}l_2l_3^2s_2s_{23} + c_{23}l_2l_3^2s_1^2s_2s_{23} - c_1l_2^2l_3s_2^2s_{23} - l_2^2l_3s_1s_2^2s_{23} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow |J_L| = c_2l_2l_3^2c_{23}^2 - c_2s_2c_{23}l_2^2l_3 + c_{23}l_2l_3^2s_2s_{23} - l_2^2l_3s_2^2s_{23} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow |J_L| = l_2l_3[c_2c_{23}(l_3c_{23} - s_2l_2) + s_2s_{23}(l_3c_{23} - s_2l_2)] \Rightarrow$$

$$\Rightarrow |J_L| = l_2l_3(c_2c_{23} + s_2s_{23})(l_3c_{23} - s_2l_2)$$

$$\Rightarrow |J_L| = l_2l_3c_3(l_3c_{23} - s_2l_2)$$

Οπότε, η ορίζουσα θα μηδενίζεται για τις εξής τιμές:

$$|J_L| = 0 \Rightarrow l_2l_3c_3(l_3c_{23} - s_2l_2) = 0 \Rightarrow$$
$$\Rightarrow l_2 = 0 \text{ ή } l_3 = 0 \text{ ή } c_3 = 0 \text{ ή } l_3c_{23} - s_2l_2 = 0$$

Αναλυτικότερα,

- Εάν $l_2 = 0$, τότε ο μηχανισμός εμφανίζει ιδιόμορφες διατάξεις ως προς τη γραμμική ταχύτητα για κάθε συνδυασμό θέσεων των (q_1, q_2, q_3). Μάλιστα, η $2^η$ και η $3^η$ στήλη του πίνακα $J([1:3][1:3])$ θα είναι ίδιες. Γεωμετρικά, αυτό θα σημαίνει ότι η $2^η$ και η $3^η$ άρθρωση θα βρίσκονται στον ίδιο άξονα και έτσι, θα ελέγχουν τη γραμμική ταχύτητα του τελικού στοιχείου με τον ίδιο τρόπο με αποτέλεσμα να χάνεται ένας βαθμός ελευθερίας.

- Εάν $l_3 = 0$, τότε ο μηχανισμός εμφανίζει ιδιόμορφες διατάξεις ως προς τη γραμμική ταχύτητα για κάθε συνδυασμό θέσεων των (q_1, q_2, q_3). Μάλιστα, η $3^η$ στήλη του πίνακα $J([1:3][1:3])$ θα μηδενίζεται. Γεωμετρικά, αυτό θα σημαίνει ότι η q_3 δεν θα ελέγχει τη γραμμική ταχύτητα του τελικού στοιχείου αφού αυτό βρίσκεται πάνω στον άξονά της.

- Εάν $l_2 \neq 0,\ l_3 \neq 0$, τότε ο μηχανισμός εμφανίζει ιδιόμορφες διατάξεις ως προς τη γραμμική ταχύτητα για $c_3 = 0 \Leftrightarrow q_3 = k\pi + \frac{\pi}{2}, k \in \mathbb{Z}$. Μάλιστα, η $2^η$ και η $3^η$ στήλη του πίνακα $J([1:3][1:3])$ θα είναι η μια πολλαπλάσια της άλλης. Γεωμετρικά, αυτό θα σημαίνει ότι ο σύνδεσμός l_3 θα έχει την ίδια διεύθυνση με τον l_2 στις θέσεις αυτές και έτσι, θα ελέγχουν τη γραμμική ταχύτητα του τελικού στοιχείου με τον ίδιο τρόπο (κάθετα στην διεύθυνση των συνδέσμων) με αποτέλεσμα να χάνεται ένας βαθμός ελευθερίας. Πρόκειται δηλαδή, για workspace singularity διότι για αυτή τη γωνία ο βραχίονας βρίσκεται σε οριακό σημείο του workspace και ο end-effector δεν μπορεί να κινηθεί σε όλες τις κατευθύνσεις.

- Εάν $l_3c_{23} - s_2l_2 = 0$, τότε οι στήλες του πίνακα $J([1:3][1:3])$ είναι γραμμικά εξαρτημένες. Γεωμετρικά, αυτό θα σημαίνει ότι η κίνηση των αρθρώσεων θα ελέγχει την γραμμική ταχύτητα σε δυο από τις τρεις ανεξάρτητες διευθύνσεις με αποτέλεσμα να χάνεται ένας βαθμός ελευθερίας. Πρόκειται δηλαδή, για internal singularity κι έτσι το σύστημα $\dot{q} = J_L^{-1}\dot{v}_E$ που είναι επιθυμητό να λυθεί δεν μπορεί να δώσει μοναδική λύση υπό αυτή τη συνθήκη, αλλά άπειρες, εξού και ο μηδενισμός της ορίζουσας.

Στην συνέχεια, υπολογίζεται ο αντίστροφος πίνακας $J_L^{-1} = \frac{1}{|J_L|} \cdot adj(J_L)$, με την $|J_L|$ να έχει υπολογιστεί λίγο παραπάνω. Έτσι, ο $adj(J_L)$ θα υπολογιστεί παρακάτω. Γενικά,

$$adj(A) = \begin{bmatrix} +\begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} & +\begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix} \\ -\begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} & +\begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix} \\ +\begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{22} & a_{23} \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{21} & a_{23} \end{vmatrix} & +\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} \end{bmatrix}^T$$

Για τον πίνακα $adj(J_L)$, θα ισχύει:

- $a_{11} = c_1c_{23}l_3 - c_1l_2s_2 - l_1s_1$
- $a_{12} = -s_1c_2l_2 - s_1l_3s_{23}$
- $a_{13} = -l_3s_1s_{23}$
- $a_{21} = c_1l_1 + c_{23}l_3s_1 - l_2s_1s_2$
- $a_{22} = c_1c_2l_2 + c_1l_3s_{23}$
- $a_{23} = c_1l_3s_{23}$
- $a_{31} = 0$
- $a_{32} = c_{23}l_3 - l_2s_2$
- $a_{33} = l_3c_{23}$
- $A_{11} = +\begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} c_1c_2l_2 + c_1l_3s_{23} & c_1l_3s_{23} \\ c_{23}l_3 - l_2s_2 & l_3c_{23} \end{vmatrix} =$
  $= c_1c_2c_{23}l_2l_3 + c_1l_2l_3s_2s_{23} = l_2l_3c_1(c_2c_{23} + s_2s_{23}) = l_2l_3c_1c_3$
- $A_{12} = -\begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} c_1l_1 + c_{23}l_3s_1 - l_2s_1s_2 & c_1l_3s_{23} \\ 0 & l_3c_{23} \end{vmatrix} =$
  $= -c_1c_{23}l_1l_3 - c_{23}^2l_3^2s_1 + c_{23}l_2l_3s_1s_2 = -l_3c_{23}(l_1c_1 - l_2s_1s_2 + l_3c_{23}s_1)$
- $A_{13} = +\begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} c_1l_1 + c_{23}l_3s_1 - l_2s_1s_2 & c_1c_2l_2 + c_1l_3s_{23} \\ 0 & c_{23}l_3 - l_2s_2 \end{vmatrix} =$
  $= c_1c_{23}l_1l_3 - c_1l_1l_2s_2 + c_{23}^2l_3^2s_1 - 2c_{23}l_2l_3s_1s_2 + l_2^2s_1s_2^2 =$
  $= (-l_2s_2 + l_3c_{23})(l_1c_1 - l_2s_1s_2 + l_3s_1c_{23})$
- $A_{21} = -\begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} -s_1c_2l_2 - s_1l_3s_{23} & -l_3s_1s_{23} \\ c_{23}l_3 - l_2s_2 & l_3c_{23} \end{vmatrix} =$
  $= c_2c_{23}l_2l_3s_1 + l_2l_3s_1s_2s_{23} = l_2l_3s_1c_3$
- $A_{22} = +\begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} c_1c_{23}l_3 - c_1l_2s_2 - l_1s_1 & -l_3s_1s_{23} \\ 0 & l_3c_{23} \end{vmatrix} =$
  $= c_1c_{23}^2l_3^2 - c_1c_{23}l_2l_3s_2 - c_{23}l_1l_3s_1 = l_3c_{23}(-l_1s_1 - l_2c_1s_2 + l_3c_1c_{23})$
- $A_{23} = -\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} c_1c_{23}l_3 - c_1l_2s_2 - l_1s_1 & -s_1c_2l_2 - s_1l_3s_{23} \\ 0 & c_{23}l_3 - l_2s_2 \end{vmatrix} =$
  $= -(c_1c_{23}^2l_3^2 - 2c_1c_{23}l_2l_3s_2 + c_1l_2^2s_2^2 - c_{23}l_1l_3s_1 + l_1l_2s_1s_2) =$
  $= -(l_3c_{23} - l_2s_2)(-l_1s_1 - c_1s_2l_2 + c_1c_{23}l_3)$
- $A_{31} = +\begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{22} & a_{23} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -s_1c_2l_2 - s_1l_3s_{23} & -l_3s_1s_{23} \\ c_1c_2l_2 + c_1l_3s_{23} & c_1l_3s_{23} \end{vmatrix} = 0$
- $A_{32} = -\begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{21} & a_{23} \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} c_1c_{23}l_3 - c_1l_2s_2 - l_1s_1 & -l_3s_1s_{23} \\ c_1l_1 + c_{23}l_3s_1 - l_2s_1s_2 & c_1l_3s_{23} \end{vmatrix} =$
  $= -(c_1^2c_{23}l_3^2s_{23} - c_1^2l_2l_3s_2s_{23} + c_{23}l_3^2s_1^2s_{23} - l_2l_3s_1^2s_2s_{23}) =$
  $= -l_3s_{23}(l_3c_{23} - l_2s_2)$
- $A_{33} = +\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} c_1c_{23}l_3 - c_1l_2s_2 - l_1s_1 & -s_1c_2l_2 - s_1l_3s_{23} \\ c_1l_1 + c_{23}l_3s_1 - l_2s_1s_2 & c_1c_2l_2 + c_1l_3s_{23} \end{vmatrix} =$
  $= c_1^2c_2c_{23}l_2l_3 - c_1^2c_2l_2s_2 + c_1^2c_{23}l_3^2s_{23} - c_1^2l_2l_3s_2s_{23}$
  $+ c_2c_{23}l_2l_3s_1^2 - c_2l_2^2s_1^2s_2 + c_{23}l_3^2s_1s_{23} - l_2l_3s_1^2s_2s_{23} =$
  $= (l_3c_{23} - l_2s_2)(l_2c_2 + l_3s_{23})$

Τελικά,

$$\boldsymbol{J_L^{-1}} = \frac{1}{|J_L|} \cdot adj(J_L) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \boldsymbol{J_L^{-1}} = \frac{1}{l_2 l_3 c_3 (l_3 c_{23} - s_2 l_2)} \cdot$$

$$\begin{bmatrix} l_2 l_3 c_1 c_3 & -l_3 c_{23}(l_1 c_1 - l_2 s_1 s_2 + l_3 c_{23} s_1) & (-l_2 s_2 + l_3 c_{23})(l_1 c_1 - l_2 s_1 s_2 + l_3 s_1 c_{23}) \\ l_2 l_3 s_1 c_3 & l_3 c_{23}(-l_1 s_1 - l_2 c_1 s_2 + l_3 c_1 c_{23}) & -(l_3 c_{23} - l_2 s_2)(-l_1 s_1 - c_1 s_2 l_2 + c_1 c_{23} l_3) \\ 0 & -l_3 s_{23}(l_3 c_{23} - l_2 s_2) & (l_3 c_{23} - l_2 s_2)(l_2 c_2 + l_3 s_{23}) \end{bmatrix}^T \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \boldsymbol{J_L^{-1}} = \frac{1}{l_2 l_3 c_3 (l_3 c_{23} - s_2 l_2)} \cdot$$

$$\begin{bmatrix} l_2 l_3 c_1 c_3 & l_2 l_3 s_1 c_3 & 0 \\ -l_3 c_{23}(l_1 c_1 - l_2 s_1 s_2 + l_3 c_{23} s_1) & l_3 c_{23}(-l_1 s_1 - l_2 c_1 s_2 + l_3 c_1 c_{23}) & -l_3 s_{23}(l_3 c_{23} - l_2 s_2) \\ (-l_2 s_2 + l_3 c_{23})(l_1 c_1 - l_2 s_1 s_2 + l_3 s_1 c_{23}) & -(l_3 c_{23} - l_2 s_2)(-l_1 s_1 - c_1 s_2 l_2 + c_1 c_{23} l_3) & (l_3 c_{23} - l_2 s_2)(l_2 c_2 + l_3 s_{23}) \end{bmatrix}$$

5. <u>Αντίστροφο Γεωμετρικό Μοντέλο</u>

1η Προσέγγιση:

Σε αυτό το βήμα της θεωρητικής ανάλυσης ζητείται ο προσδιορισμός του αντίστροφου γεωμετρικού μοντέλου του ρομποτικού βραχίονα για δεδομένη θέση p_E του Τ.Ε.Δ.. Με άλλα λόγια, για γνωστό διάνυσμα:

$$\overrightarrow{p_E} = \begin{bmatrix} p_{E_x} \\ p_{E_y} \\ p_{E_z} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c_1 l_1 - l_2 s_1 s_2 + l_3 s_1 c_{23} \\ l_1 s_1 + l_2 c_1 s_2 - l_3 c_1 c_{23} \\ l_0 + l_2 c_2 + l_3 s_{23} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_E \\ y_E \\ z_E \end{bmatrix} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{bmatrix} x'_E \\ y'_E \\ z'_E \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_E \\ y_E \\ z_E - l_0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c_1 l_1 - l_2 s_1 s_2 + l_3 s_1 c_{23} \\ l_1 s_1 + l_2 c_1 s_2 - l_3 c_1 c_{23} \\ l_2 c_2 + l_3 s_{23} \end{bmatrix}$$

αναζητούνται οι γωνίες q_1, q_2 και q_3. Επομένως, πρόκειται για ένα μη γραμμικό σύστημα με 3 εξισώσεις και 3 αγνώστους.

$$x'_E = c_1 l_1 - l_2 s_1 s_2 + l_3 s_1 c_{23}$$

$$y'_E = l_1 s_1 + l_2 c_1 s_2 - l_3 c_1 c_{23}$$

$$z'_E = l_2 c_2 + l_3 s_{23}$$

Αρχικά, υψώνονται τα μέλη των παραπάνω εξισώσεων στο τετράγωνο:

$$x'^2_E = c_1^2 l_1^2 + l_2^2 s_1^2 s_2^2 + l_3^2 s_1^2 c_{23}^2 + 2 l_1 l_3 c_1 s_1 c_{23} - 2 l_1 l_2 c_1 s_1 s_2 - 2 l_2 l_3 s_1^2 s_2 c_{23}$$

$$y'^2_E = l_1^2 s_1^2 + l_2^2 c_1^2 s_2^2 + l_3^2 c_1^2 c_{23}^2 + 2 l_1 l_3 c_1 s_1 c_{23} - 2 l_1 l_2 c_1 s_1 s_2 - 2 l_2 l_3 c_1^2 s_2 c_{23}$$

$$z'^2_E = l_2^2 c_2^2 + 2 l_2 c_2 l_3 s_{23} + l_3^2 s_{23}^2$$

Έπειτα, προστίθενται οι πρώτες δύο εξισώσεις και κάποιοι όροι απλοποιούνται:

$$x'^2_E + y'^2_E = c_1^2 s_2^2 l_2^2 - 2 c_1^2 s_2 c_{23} l_2 l_3 + c_1^2 c_{23}^2 l_3^2 + c_1^2 l_1^2 + 2 l_1 l_2 c_1 s_1 s_2 - 2 l_1 l_2 c_1 s_1 s_2$$

$$+ c_{23}^2 l_3^2 s_1^2 - 2 c_{23} l_2 l_3 s_1^2 s_2 + l_1^2 s_1^2 + l_2^2 s_1^2 s_2^2 =$$

$$= l_2^2 c_2^2 - 2 c_{23} l_2 l_3 s_2 + l_3^2 c_{23}^2 + l_1^2$$

$$x'^2_E + y'^2_E = l_1^2 + l_2^2 s_2^2 + l_3^2 c_{23}^2 - 2 c_{23} l_2 l_3 s_2$$

Οπότε, εάν στην σχέση αυτή προστεθεί και η 3η εξίσωση, τότε παραμένει μόνο ένας άγνωστος:

$$x'^2_E + y'^2_E + z'^2_E = l_1^2 + l_2^2 s_2^2 + + l_2^2 c_2^2 + l_3^2 c_{23}^2 + l_3^2 s_{23}^2 - 2 c_{23} l_2 l_3 s_2 + 2 l_2 c_2 l_3 s_{23} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x'^2_E + y'^2_E + z'^2_E = l_1^2 + l_2^2 + l_3^2 + 2 l_2 l_3 (c_2 s_{23} - s_2 c_{23}) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x'^2_E + y'^2_E + z'^2_E = l_1^2 + l_2^2 + l_3^2 + 2 l_2 l_3 s_3$$

Οπότε, βρέθηκε η σχέση που δίνει το q_3.

$$s_3 = \frac{x_E'^2 + y_E'^2 + z_E'^2 - l_1^2 - l_2^2 - l_3^2}{2l_2 l_3} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow q_3 = \pm arc \sin\left(\frac{x_E'^2 + y_E'^2 + z_E'^2 - l_1^2 - l_2^2 - l_3^2}{2l_2 l_3}\right) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow q_3 == \pm arc \sin\left(\frac{x_E^2 + y_E^2 + (z_E - l_0)^2 - l_1^2 - l_2^2 - l_3^2}{2l_2 l_3}\right)$$

Φυσικά, η λύση αυτή θα είναι έγκυρη μόνο εάν η ποσότητα εντός του τόξου του συνημίτονου έχει τιμή στο διάστημα (-1, 1).

Ύστερα, η σχέση $z_E' = l_2 c_2 + l_3 s_{23}$ εμπλέκει μόνο τους αγνώστους q_2 και q_3. Έτσι, έχοντας την q_3 θα υπολογιστεί και η q_2.

$$z_E' = l_2 c_2 + l_3 s_{23} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow z_E' = l_2 c_2 + l_3 (s_2 c_3 + c_2 s_3) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow z_E' = l_2 c_2 + l_3 s_2 c_3 + l_3 c_2 s_3$$

Παρατηρείται ότι ο κύριος άγνωστος q_2 υπάρχει εντός ημιτόνου και συνημίτονου, οπότε θα χρειαστεί να γίνει μετατροπή ενός εκ των δύο, υψώνοντας κάποιον όρο στο τετράγωνο. Έτσι,

$$z_E' - l_3 s_2 c_3 = l_2 c_2 + l_3 c_2 s_3 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow z_E' - l_3 s_2 c_3 = (l_2 + l_3 s_3) c_2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow (z_E' - l_3 s_2 c_3)^2 = [(l_2 + l_3 s_3) c_2]^2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow (z_E')^2 - 2z_E' l_3 s_2 c_3 + (l_3 s_2 c_3)^2 = (l_2 + l_3 s_3)^2 c_2^2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow (z_E')^2 - 2z_E' l_3 s_2 c_3 + (l_3 s_2 c_3)^2 - (l_2 + l_3 s_3)^2 (1 - s_2^2) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow (z_E')^2 - 2z_E' l_3 s_2 c_3 + (l_3 c_3)^2 s_2^2 - (l_2 + l_3 s_3)^2 + (l_2 + l_3 s_3)^2 s_2^2 = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow [(l_3 c_3)^2 + (l_2 + l_3 s_3)^2] s_2^2 + (-2z_E' l_3 c_3) s_2 + [(z_E')^2 - (l_2 + l_3 s_3)^2] = 0$$

Τελικά, προκύπτει μια εξίσωση 2^ου^ βαθμού με άγνωστο το s_2. Κρίνεται απαραίτητο να ελεγχθεί αν το τριώνυμο του πρώτου μέλους υφίσταται, δηλαδή αν ο συντελεστής του δευτεροβάθμιου όρου είναι διάφορος του μηδενός.

$$[(l_3 c_3)^2 + (l_2 + l_3 s_3)^2] = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} l_3 c_3 = 0 \\ l_2 + l_3 s_3 = 0 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} c_3 = 0 \\ s_3 = -\dfrac{l_2}{l_3} \end{cases}$$

Όμως, τα l_2, l_3 είναι μήκη οπότε το s_3 θα πρέπει να είναι αρνητικό. Επιπλέον, θα πρέπει οι γωνίες να είναι εντός ενός κύκλου. Άρα,

$$\begin{cases} q_3 = \dfrac{3\pi}{2} \\ l_2 = l_3 \end{cases}$$

Παρατηρείται ότι όταν ισχύουν οι τελευταίες συνθήκες, ο end-effector δεν επηρεάζεται. Επομένως, αυτό σημαίνει ότι δεν προκύπτει μοναδική λύση q_2 στο αρχικό μας σύστημα. Αυτό επιβεβαιώνεται και από το εξής:

$$z'_E = l_2 \cos(q_2) + l_3 \sin\left(\frac{3\pi}{2} + q_2\right) \Rightarrow z'_E = l_2 \cos(q_2) - l_2 \cos(q_2) \Rightarrow z'_E = z_E - l_0 = 0$$

Για την γενική περίπτωση, υπολογίζεται η διακρίνουσα της εξίσωσης αυτής.

$$\Delta = (-2 z'_E l_3 c_3)^2 - 4[(l_3 c_3)^2 + (l_2 + l_3 s_3)^2][(z'_E)^2 - (l_2 + l_3 s_3)^2]$$

Αν προκύψει αρνητική τιμή, τότε η ζητούμενη θέση είναι ανέφικτη. Τελικά, θεωρώντας θετική λύση, προκύπτει το q_2.

$$s_2 = \frac{z'_E l_3 c_3 \pm (l_2 + l_3 s_3)\sqrt{(l_2 + l_3 s_3)^2 + (l_3 c_3)^2 - (z'_E)^2}}{(l_3 c_3)^2 + (l_2 + l_3 s_3)^2} \Rightarrow$$

$$q_2 \Rightarrow \pm arc \sin\left(\frac{z'_E l_3 c_3 \pm (l_2 + l_3 s_3)\sqrt{(l_2 + l_3 s_3)^2 + (l_3 c_3)^2 - (z'_E)^2}}{(l_3 c_3)^2 + (l_2 + l_3 s_3)^2}\right)$$

Τέλος, από την σχέση $y'_E = l_1 s_1 + l_2 c_1 s_2 - l_3 c_1 c_{23}$ μπορεί να προκύψει και η q_1.

$$y'_E = l_1 s_1 + l_2 c_1 s_2 - l_3 c_1 c_{23} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow y'_E - l_1 s_1 = (l_2 s_2 - l_3 c_{23}) c_1 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow [y'_E - l_1 s_1]^2 = [(l_2 s_2 - l_3 c_{23}) c_1]^2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow (y'_E)^2 - 2y'_E l_1 s_1 + (l_1 s_1)^2 = (l_2 s_2 - l_3 c_{23})^2 (1 - s_1^2) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow (y'_E)^2 - 2y'_E l_1 s_1 + (l_1 s_1)^2 - (l_2 s_2 - l_3 c_{23})^2 + (l_2 s_2 - l_3 c_{23})^2 s_1^2 = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow [l_1^2 + (l_2 s_2 - l_3 c_{23})^2] s_1^2 + (-2y'_E l_1) s_1 + [(y'_E)^2 - (l_2 s_2 - l_3 c_{23})^2] = 0$$

Στην περίπτωση που ο συντελεστής του δευτεροβάθμιου όρου μηδενίζεται, η ανάλυση θα είναι παρόμοια με παραπάνω.

Συνεχίζοντας λοιπόν, υπολογίζεται η διακρίνουσα και τελικά προκύπτει και η q_1.

$$\Delta = (-2y'_E l_1)^2 - 4[(l_1)^2 + (l_2 s_2 - l_3 c_{23})^2][(y'_E)^2 - (l_2 s_2 - l_3 c_{23})^2]$$

Αν προκύψει αρνητική τιμή, τότε η ζητούμενη θέση είναι ανέφικτη. Τελικά, θεωρώντας θετική λύση, προκύπτει το q_1.

$$s_1 = \frac{2y'_E l_1 \pm \sqrt{\Delta}}{2(l_1)^2 + 2(l_2 s_2 - l_3 c_{23})^2} \Rightarrow$$

$$q_1 \Rightarrow \pm arc \sin\left(\frac{2y'_E l_1 \pm \sqrt{\Delta}}{2(l_1)^2 + 2(l_2 s_2 - l_3 c_{23})^2}\right)$$

2η Προσέγγιση:

Ισχύει ότι

$$\boldsymbol{A_1^0} = \begin{bmatrix} s_1 & 0 & -c_1 & 0 \\ -c_1 & 0 & -s_1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & l_0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \Rightarrow \left[\boldsymbol{A_1^0}\right]^{-1} = \begin{bmatrix} s_1 & -c_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -l_0 \\ -c_1 & -s_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Επίσης, είναι γνωστό ότι

$$\begin{bmatrix} n_x & o_x & a_x & p_x \\ n_y & o_y & a_y & p_y \\ n_z & o_z & a_z & p_z \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c_1 & -c_{23}s_1 & -s_1s_{23} & c_1l_1 - l_2s_1s_2 + l_3s_1c_{23} \\ s_1 & c_1c_{23} & c_1s_{23} & l_1s_1 + l_2c_1s_2 - l_3c_1c_{23} \\ 0 & -s_{23} & c_{23} & l_0 + l_2c_2 + l_3s_{23} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Οπότε, πολλαπλασιάζοντας με τον αντίστροφο του πίνακα προκύπτουν απλούστερες εξισώσεις. Δηλαδή,

$$\left[\boldsymbol{A_1^0}\right]^{-1} \begin{bmatrix} n_x & o_x & a_x & p_x \\ n_y & o_y & a_y & p_y \\ n_z & o_z & a_z & p_z \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \left[\boldsymbol{A_1^0}\right]^{-1} \begin{bmatrix} c_1 & -c_{23}s_1 & -s_1s_{23} & c_1l_1 - l_2s_1s_2 + l_3s_1c_{23} \\ s_1 & c_1c_{23} & c_1s_{23} & l_1s_1 + l_2c_1s_2 - l_3c_1c_{23} \\ 0 & -s_{23} & c_{23} & l_0 + l_2c_2 + l_3s_{23} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{bmatrix} -c_1n_yn_xs_1 & -c_1o_y + o_xs_1 & a_xs_1 - a_yc_1 & -c_1p_y + p_xs_1 \\ n_z & o_z & a_z & -l_0 + p_z \\ -c_1n_x - n_ys_1 & -c_1o_x - o_ys_1 & -a_xc_1 - a_ys_1 & -c_1p_x - p_ys_1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -c_{23} & -s_{23} & l_3c_{23} - l_2s_2 \\ 0 & -s_{23} & c_{23} & l_3s_{23} + l_2c_2 \\ -1 & 0 & 0 & -l_1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Συνεπώς, από την 4η στήλη κάθε πίνακα προκύπτει τελικά ότι:

$$\begin{cases} -c_1p_y + p_xs_1 = l_3c_{23} - l_2s_2 \ \ (1) \\ -l_0 + p_z = l_3s_{23} + l_2c_2 \ \ (2) \\ -c_1p_x - p_ys_1 = -l_1 \ \ (3) \end{cases}$$

Σημείωση:

- Η (3) λύνεται για την q_1 όπως στις διαφάνειες "*Εισαγωγή και Κινηματική Ανάλυση - Μέρος Γ*" σελ. 86 & 87.
- Η (1) & (2) αποτελούν ένα 2R planar μηχανισμό και με την q_1 γνωστή, λύνονται όπως στις διαφάνειες "*Εισαγωγή και Κινηματική Ανάλυση - Μέρος Γ*" σελ. 79 & 80.

Resources

[1] Υλικό & Σημειώσεις Μαθήματος

[2] John J. Craig, Introduction to robotics: Mechanics & Control (2009)