

ΕΘΝΙΚΟ ΜΕΤΣΟΒΙΟ ΠΟΛΥΤΕΧΝΕΙΟ
ΣΧΟΛΗ ΗΛΕΚΤΡΟΛΟΓΩΝ ΜΗΧΑΝΙΚΩΝ ΚΑΙ ΜΗΧΑΝΙΚΩΝ
ΥΠΟΛΟΓΙΣΤΩΝ



ΡΟΜΠΟΤΙΚΗ Ι: ΑΝΑΛΥΣΗ - ΕΛΕΓΧΟΣ - ΕΡΓΑΣΤΗΡΙΟ

(2021 – 2022)

Εξαμηνιαία Εργασία:

Ρομποτικός Μηχανισμός 3 στροφικών βαθμών ελευθερίας

(Robotic Leg Mechanism with 3 rotational DoF)

Διδάσκων Μαθήματος:

- Κ. Τζαφέστας

Ονοματεπώνυμο:

- Χρήστος Τσούφης

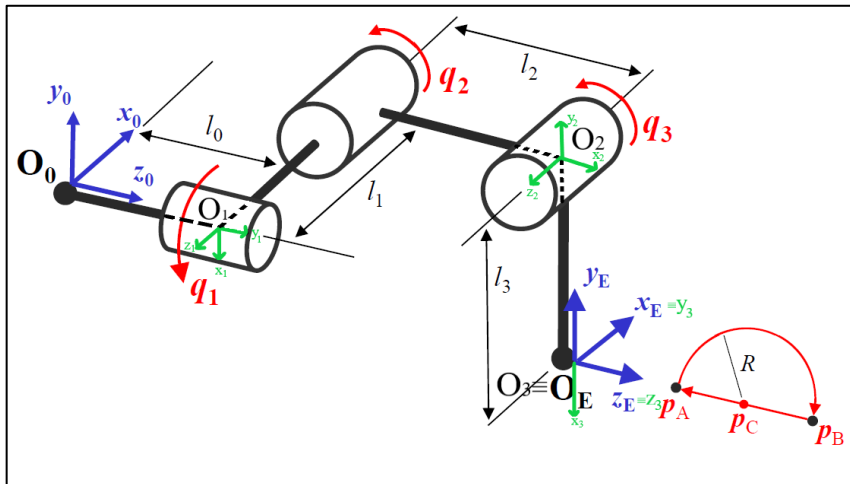
Αριθμός Μητρώου:

- 031 17 176

Στοιχεία Επικοινωνίας:

- el17176@mail.ntua.gr
- chris99ts@gmail.com

Μέρος Β: Κινηματική Προσομοίωση



Έστω ότι το κέντρο O_E του άκρου του ρομποτικού μηχανισμού καλείται, κατά την υλοποίηση ενός σχήματος βηματισμού του ρομπότ, να εκτελέσει περιοδική μετατόπιση μεταξύ δύο σημείων (στάσης) $P_A(x_A, y_A, z_A)$ και $P_B(x_B, y_B, z_B)$ επί του οριζοντίου επιπέδου βάδισης, η οποία αποτελείται από δύο τμήματα: (α) τμήμα ημικυκλικής τροχιάς (με κέντρο P_C και ακτίνα R) ξεκινώντας από το σημείο P_A μέχρι το σημείο P_B (η οποία θεωρούμε ότι κείται επί κατακόρυφου επιπέδου) και (β) τμήμα ευθύγραμμης τροχιάς από το σημείο P_B μέχρι την επιστροφή στο σημείο P_A .

Θεωρούμε ότι: (α) τη χρονική στιγμή $t = 0$ το τελικό άκρο του ρομπότ βρίσκεται ήδη (εν στάση) στη δεδομένη αρχική θέση P_A , (β) τα δύο τμήματα τροχιάς είναι ίσης χρονικής διάρκειας, και (γ) η συνολική χρονική περίοδος όλης της κίνησης είναι $T = 2 \text{ secs}$. Επιθυμητή, επίσης, είναι η ομαλότητα της εκτελούμενης τροχιάς (χρονική συνέχεια συνολικά της τροχιάς και ως προς την ταχύτητα).

6. Να περιγραφεί αναλυτικά ο **σχεδιασμός της επιθυμητής τροχιάς** στο χώρο εργασίας.

7. Να εκτελεστεί **κινηματική προσομοίωση** του ρομποτικού μηχανισμού και να δοθούν οι γραφικές παραστάσεις στο χρόνο (plots) των ακόλουθων μεγεθών, που επιτυγχάνουν την εκτέλεση της επιθυμητής ρομποτικής εργασίας:

(α) Το επιθυμητό προφίλ κίνησης του τελικού άκρου του ρομποτικού μηχανισμού, δηλαδή: (1) η επιθυμητή θέση (p_{Ex}, p_{Ey}, p_{Ez}) και (2) η γραμμική ταχύτητα του άκρου του ρομπότ σε κάθε χρονική στιγμή t .

(β) Οι γωνίες στροφής $\{q_1, q_2, q_3\}$ και οι γωνιακές ταχύτητες $\{\dot{q}_1, \dot{q}_2, \dot{q}_3\}$ των αρθρώσεων, σε κάθε χρονική στιγμή t , κατά την εκτέλεση της εργασίας.

(γ) Ένα, τουλάχιστον, διάγραμμα κίνησης που θα εικονίζει μια χρονική ακολουθία ενδιάμεσων διατάξεων της ρομποτικής κινηματικής αλυσίδας κατά την εκτέλεση της εργασίας (από το animation της κίνησης).

Παρατήρηση: Για το μέρος Β (κινηματική προσομοίωση) της εργασίας, υποθέτουμε τα εξής μεγέθη:

- $l_0 = 10 \text{ cm}$, $l_1 = 15 \text{ cm}$, $l_2 = l_3 = 30 \text{ cm}$
- $(x_A, y_A, z_A) = (15, -30, 40) \text{ cm}$ και $(x_B, y_B, z_B) = (15, -30, 50) \text{ cm}$ (ήτοι, $R = 5 \text{ cm}$)

Οι υπόλοιπες παράμετροι της επιθυμητής ρομποτικής εργασίας μπορεί να είναι της επιλογής σας για τις ανάγκες της κινηματικής προσομοίωσης.

5. Αντίστροφο Γεωμετρικό Μοντέλο

Επίλυση με βάση την 2^η Προσέγγιση του Α Μέρους:

Σε αυτό το βήμα της θεωρητικής ανάλυσης ζητήθηκε ο προσδιορισμός του αντίστροφου γεωμετρικού μοντέλου του ρομποτικού βραχίονα για δεδομένη θέση p_E του Τ.Ε.Δ..

Ισχύει ότι

$$A_1^0 = \begin{bmatrix} s_1 & 0 & -c_1 & 0 \\ -c_1 & 0 & -s_1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & l_0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \Rightarrow [A_1^0]^{-1} = \begin{bmatrix} s_1 & -c_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -l_0 \\ -c_1 & -s_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Επίσης, είναι γνωστό ότι

$$A_E^0 = \begin{bmatrix} n_x & o_x & a_x & p_x \\ n_y & o_y & a_y & p_y \\ n_z & o_z & a_z & p_z \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c_1 & -c_{23}s_1 & -s_1s_{23} & c_1l_1 - l_2s_1s_2 + l_3s_1c_{23} \\ s_1 & c_1c_{23} & c_1s_{23} & l_1s_1 + l_2c_1s_2 - l_3c_1c_{23} \\ 0 & -s_{23} & c_{23} & l_0 + l_2c_2 + l_3s_{23} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Οπότε, πολλαπλασιάζοντας με τον αντίστροφο του πίνακα προκύπτουν απλούστερες εξισώσεις. Δηλαδή,

$$\begin{aligned} [A_1^0]^{-1} \begin{bmatrix} n_x & o_x & a_x & p_x \\ n_y & o_y & a_y & p_y \\ n_z & o_z & a_z & p_z \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} &= [A_1^0]^{-1} \begin{bmatrix} c_1 & -c_{23}s_1 & -s_1s_{23} & c_1l_1 - l_2s_1s_2 + l_3s_1c_{23} \\ s_1 & c_1c_{23} & c_1s_{23} & l_1s_1 + l_2c_1s_2 - l_3c_1c_{23} \\ 0 & -s_{23} & c_{23} & l_0 + l_2c_2 + l_3s_{23} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \Rightarrow \\ \Rightarrow \begin{bmatrix} -c_1n_y + n_xs_1 & -c_1o_y + o_xs_1 & a_xs_1 - a_yc_1 & -c_1p_y + p_xs_1 \\ n_z & o_z & a_z & -l_0 + p_z \\ -c_1n_x - n_ys_1 & -c_1o_x - o_ys_1 & -a_xc_1 - a_ys_1 & -c_1p_x - p_ys_1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} 0 & -c_{23} & -s_{23} & l_3c_{23} - l_2s_2 \\ 0 & -s_{23} & c_{23} & l_3s_{23} + l_2c_2 \\ -1 & 0 & 0 & -l_1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Συνεπώς, από την 4^η στήλη κάθε πίνακα προκύπτει τελικά ότι:

$$\begin{cases} -c_1p_y + p_xs_1 = l_3c_{23} - l_2s_2 & (1) \\ -l_0 + p_z = l_3s_{23} + l_2c_2 & (2) \\ -c_1p_x - p_ys_1 = -l_1 & (3) \end{cases}$$

Η (3) λύνεται για την q_1 ως εξής: $a = \text{atan2}(p_x, p_y), d = \sqrt{p_x^2 + p_y^2}$

Οπότε, $p_x = d \cdot s_a, p_y = d \cdot c_a$

$$\begin{aligned} -ds_a c_1 - dc_a s_1 &= -l_1 \Rightarrow \sin(q_1 + a) = \frac{l_1}{d} \Rightarrow \cos(q_1 + a) = \pm \sqrt{1 - \frac{l_1^2}{d^2}} = \pm \frac{\sqrt{d^2 - l_1^2}}{d} \Rightarrow \\ \Rightarrow q_1 + a &= \text{atan2}\left(l_1, \pm \sqrt{d^2 - l_1^2}\right) \Rightarrow \mathbf{q_1 = atan2}\left(l_1, \pm \sqrt{p_x^2 + p_y^2 - l_1^2}\right) - \text{atan2}(p_x, p_y) \end{aligned}$$

Η (1) & (2) αποτελούν ένα 2R planar μηχανισμό και με την q_1 γνωστή, λύνονται ως εξής:

$$\begin{aligned} (-c_1 p_y + p_x s_1)^2 + (-l_0 + p_z)^2 &= (l_3 c_{23} - l_2 s_2)^2 + (l_3 s_{23} + l_2 c_2)^2 \Rightarrow \\ \Rightarrow (-c_1 p_y + p_x s_1)^2 + (-l_0 + p_z)^2 &= l_2^2 + l_3^2 + 2l_2 l_3 s_3 \Rightarrow \\ \Rightarrow s_3 &= \frac{(-c_1 p_y + p_x s_1)^2 + (-l_0 + p_z)^2 - l_2^2 - l_3^2}{2l_2 l_3} \Rightarrow \\ \Rightarrow c_3 &= \pm \frac{\sqrt{4l_2^2 l_3^2 - [(-c_1 p_y + p_x s_1)^2 + (-l_0 + p_z)^2 - l_2^2 - l_3^2]^2}}{2l_2 l_3} \Rightarrow \\ \mathbf{q_3 = atan2}\left((-c_1 p_y + p_x s_1)^2 + (-l_0 + p_z)^2 - l_2^2 - l_3^2, \pm \sqrt{4l_2^2 l_3^2 - [(-c_1 p_y + p_x s_1)^2 + (-l_0 + p_z)^2 - l_2^2 - l_3^2]^2}\right) \end{aligned}$$

Τέλος, για την q_2 :

$$(1) \Rightarrow -c_1 p_y + p_x s_1 = l_3 c_{23} - l_2 s_2 = l_3 (c_2 c_3 - s_2 s_3) - l_2 s_2 = -(l_2 + l_3 s_3) s_2 + (l_3 c_3) c_2$$

$$(2) \Rightarrow -l_0 + p_z = l_3 s_{23} + l_2 c_2 = l_3 (s_2 c_3 + s_3 c_2) + l_2 c_2 = l_3 c_3 s_2 + (l_2 + l_3 s_3) c_2$$

Και επειδή, $a' = \text{atan2}(l_2 + l_3 s_3, l_3 c_3), d' = \sqrt{(l_2 + l_3 s_3)^2 + (l_3 c_3)^2}$

Τότε, $l_2 + l_3 s_3 = d' \cdot s_{a'}, l_3 c_3 = d' \cdot c_{a'}$

$$(1) \Rightarrow -c_1 p_y + p_x s_1 = -d' s_{a'} s_2 + d' c_{a'} c_2 = d' \cos(q_2 + a')$$

$$(2) \Rightarrow -l_0 + p_z = d' c_{a'} s_2 + d' s_{a'} c_2 = d' \sin(q_2 + a')$$

$$\begin{aligned} q_2 + a' &= \text{atan2}(-l_0 + p_z, -c_1 p_y + p_x s_1) \Rightarrow \\ \Rightarrow \mathbf{q_2 = atan2}(-l_0 + p_z, -c_1 p_y + p_x s_1) - \text{atan2}(l_2 + l_3 s_3, l_3 c_3) \end{aligned}$$

Επομένως, προκύπτει ότι υπάρχουν 4 πιθανές λύσεις συνολικά (2 για την q_1 και 2 για την q_3 δεδομένου του q_1 και αντιστοιχούν σε “elbow up”, “elbow down” λύσεις των q_2, q_3). Δηλαδή, υπάρχουν οι λύσεις: $(q_{1+}, q_2, q_{3+}), (q_{1-}, q_2, q_{3+}), (q_{1+}, q_2, q_{3-}), (q_{1-}, q_2, q_{3-})$.

Το Β Μέρος της εργασίας εστιάζει στον σχεδιασμό επιθυμητής τροχιάς της κίνησης του end-effector.

- Ο end-effector πρόκειται να εκτελέσει περιοδική κίνηση μεταξύ δύο σημείων στάσης $P_A(x_A, y_A, z_A)$ και $P_B(x_B, y_B, z_B)$ επί του οριζοντίου επιπέδου βάδισης, η οποία αποτελείται από δύο τμήματα: (α) τμήμα ημικυκλικής τροχιάς (με κέντρο P_C και ακτίνα R) ξεκινώντας από το σημείο P_A μέχρι το σημείο P_B (η οποία θεωρείται ότι κείται επί κατακόρυφου επιπέδου) και (β) τμήμα ευθύγραμμης τροχιάς από το σημείο P_B μέχρι την επιστροφή στο σημείο P_A .
- Επίσης, (α) την χρονική στιγμή $t = 0$, το τελικό άκρο του ρομπότ βρίσκεται ήδη (εν στάση) στην δεδομένη αρχική θέση P_A , (β) τα δυο τμήματα τροχιάς είναι ίσης χρονικής διάρκειας, και (γ) η συνολική χρονική περίοδος της κίνησής του είναι $T = 2$ secs.
- Στόχος είναι η ομαλότητα της εκτελούμενης τροχιάς, δηλαδή η συνολική χρονική συνέχεια της τροχιάς και ως προς την ταχύτητα.
- Τα μήκη θα είναι $l_0 = 10$ cm, $l_1 = 15$ cm, $l_2 = l_3 = 30$ cm και $(x_A, y_A, z_A) = (15, -30, 40)$ cm και $(x_B, y_B, z_B) = (15, -30, 50)$ cm (ήτοι, $R = 5$ cm).

Αναλυτική περιγραφή Σχεδιασμού της επιθυμητής Τροχιάς (Trajectory Planning)

Ο σχεδιασμός τροχιάς συνίσταται στην κατασκευή μιας συνάρτησης της επιθυμητής εξέλιξης της θέσης του ρομπότ με το χρόνο, η οποία θα χρησιμοποιηθεί για την κίνηση του ρομπότ ώστε αυτό να ακολουθήσει την επιθυμητή καμπύλη (δρόμο) στο χώρο. Ο σχεδιασμός τροχιάς επιτυγχάνεται παρεμβάλλοντας ενδιάμεσες θέσεις μεταξύ του αρχικού και τελικού σημείου, για να δημιουργηθεί έτσι μια ομαλή καμπύλη. Μια απλή μέθοδος σχεδιασμού τροχιάς είναι η πολυωνυμική παρεμβολή, στην οποία χρησιμοποιείται πολυωνυμική συνάρτηση παρεμβολής, οι συντελεστές της οποίας επιλέγονται ώστε να ικανοποιούνται οι αρχικές και τελικές οριακές συνθήκες για την συνάρτηση και τις πρώτες παραγώγους της και έτσι να εξασφαλίζεται η συνέχεια και ομαλότητα της τροχιάς.

Εδώ, μελετάται ο σχεδιασμός δρόμου μεταξύ δύο σημείων A και B. Η μετάβαση θα πρέπει να γίνει ακολουθώντας τους νόμους της κινηματικής και δυνάμεις στις αρθρώσεις. Ο γεωμετρικός τόπος των σημείων που θα ακολουθήσει ο ρομποτικός χειριστής για την εκτέλεση μιας εργασίας σε προκαθορισμένο χρόνο ονομάζεται τροχιά. Έτσι, επιλέγεται μια σειρά από N σημεία τα οποία θα ακολουθήσει ο βραχίονας. Η τροχιά θα προκύψει ως ένα πολυώνυμο βαθμού $N - 1$. Ωστόσο, ο υπολογισμός του είναι πολύπλοκος και με μικρή ακρίβεια αφού κάθε συντελεστής εξαρτάται από πολλές συνθήκες και κάθε αλλαγή σημείου θα απαιτεί τον επαναπροσδιορισμό ολόκληρου του πολυωνύμου. Για αυτό τον λόγο επιλέγεται πολυώνυμο μικρότερου βαθμού αλλά και για να γίνει απαλοιφή των αρνητικών στοιχείων. Χωρίς βλάβη της γενικότητας, έστω ότι το ευθύγραμμο τμήμα AB δεν περιέχει κανένα εμπόδιο στο οποίο να μπορεί να πέσει το ρομπότ. Σε περίπτωση ύπαρξης εμποδίου E μπορεί να οριστεί ένας ενδιάμεσος στόχος M και να κινηθεί κατά της πολυγραμμικής διαδρομής $A \rightarrow M \rightarrow B$. Σκοπός είναι ο σχεδιασμός μιας περιοδικής κίνησης ανάμεσα στα A και B που ανήκουν στο κοινό επίπεδο με τελικό χρόνο ίσο με t_f .

Αρχικά, υποδιαιρείται ο στόχος σε ενδιάμεσα σημεία $A \equiv A_1, A_2, \dots, A_n \equiv B$ και για κάθε ενδιάμεση κίνηση $A_{i-1} \rightarrow A_i$ χρησιμοποιείται παρεμβολή με χρήση $K+1$ συναρτήσεων $\varphi_k(t)$ μοντελοποιώντας την προσδοκώμενη τροχιά ως:

$$r_i(t) = (x_i(t), y_i(t), z_i(t))^T = \sum_{k=0}^K a_{ik} \varphi_k(t)$$

Όπου, $a_{ik} = (a_{ikx}, a_{iky}, a_{ikz})^T \in \mathbb{R}^3$ οι συντελεστές της παρεμβολής.

Ως συναρτήσεις βάσης $\varphi_k(t)$ χρησιμοποιούνται τα πολυώνυμα $\varphi_k(t) = t^k$.

Αυτή η ανάλυση αποσκοπεί στην παραγωγή ορισμένων σημάτων αναφοράς (θέσεων $p(i)$ και ταχυτήτων $\dot{p}(i)$) στον καρτεσιανό χώρο εργασίας του ρομποτικού εργαλείου, που να ικανοποιούν ένα σύνολο περιορισμών. Αυτά τα σήματα αποτελούν το input των αλγορίθμων αντίστροφης κινηματικής ανάλυσης (αντίστροφο γεωμετρικό και διαφορικό μοντέλο) που στην έξοδό τους παράγουν τις επιθυμητές γωνίες και ταχύτητες $q_r(i)$ και $\dot{q}_r(i)$. Ομοίως, τα σήματα $q_r(i)$, $\dot{q}_r(i)$ αποτελούν τα σήματα αναφοράς των ελεγκτών που ελέγχουν την κίνηση του ρομπότ.

Συνεπώς, ο σχεδιασμός τροχιάς έγκειται στον προσδιορισμό χρονικών συναρτήσεων κίνησης του end-effector και ο σχεδιασμός τους έχει σκοπό να παρουσιάζει μια συνέχεια θέσης και ταχύτητας.

Εν προκειμένω, το τελικό άκρο του ρομποτικού βραχίονα στην διάταξη αρχικοποίησης βρίσκεται στην θέση $P_A = (15, -30, 40)$ cm. Η επιθυμητή κίνηση του άκρου είναι (α) ένα ημικύκλιο στο επίπεδο $y - z$ με κέντρο το σημείο $P_C = (15, -30, 45)$ cm και ακτίνα $R = 5$ cm και (β) μια ευθύγραμμη κίνηση από το άκρο του ημικύκλιου $P_B = (15, -30, 50)$ cm έως το άλλο άκρο $P_A = (15, -30, 40)$ cm. Τέλος, σημειώνεται ότι κάθε τμήμα της τροχιάς θα έχει περίοδο $T = 1$ sec ώστε συνολικά $T = 2$ secs.

Ημικυκλική κίνηση:

Έστω γωνία θ από το κέντρο R του ημικύκλιου όπου $\theta \in [0, \pi]$. Οι συντεταγμένες του τελικού άκρου του μηχανισμού είναι οι εξής:

$$p_x = p_{cx} = 15, p_y = p_{cy} + R \sin \theta = -30 + 5 \sin \theta, p_z = p_{cz} - R \cos \theta = 45 - 5 \cos \theta$$

Ευθύγραμμη κίνηση:

Αυτό το μέρος της κίνησης αποτελεί παράλληλο ευθύγραμμο τμήμα στον άξονα z. Οι συντεταγμένες του τελικού άκρου του μηχανισμού είναι οι εξής:

$$p_x = 15, p_y = -30, p_z(t), t \in [1, 2] \text{ sec}$$

Αρχικές Συνθήκες:

Ισχύει ότι η ταχύτητα στο P_A και στο P_B πρέπει να είναι μηδέν.

Σχεδιασμός $x(t)$:

Η κίνηση χωρίζεται σε τρεις φάσεις (επιτάχυνση, σταθερή ταχύτητα, επιβράδυνση) ως εξής:

Φάση επιτάχυνσης: διάρκεια: $0 \rightarrow 2\Delta$

Φάση σταθερής ταχύτητας: διάρκεια: $2\Delta \rightarrow T - 2\Delta$

Φάση επιβράδυνσης: διάρκεια: $T - 2\Delta \rightarrow T$

Επίσης, θα χρησιμοποιηθεί πολυωνμική συνάρτηση παρεμβολής 5^{ου} βαθμού.

Θα ισχύει ότι η αρχική και η τελική επιτάχυνση κάθε φάσης θα είναι: $\ddot{x}_0 = \ddot{x}_f = 0$

Επίσης, η μέση ταχύτητα σε κάθε φάση ισούται με: $\frac{x_f - x_0}{t_f} = \frac{\dot{x}_0 + \dot{x}_f}{2}$, όπου x_0 η αρχική θέση, x_f η τελική θέση, t_f ο τελικός χρόνος, Δ το χρονικό διάστημα και \dot{x} η σταθερή ταχύτητα.

Με αυτές τις παραδοχές, το πολυώνυμο θα είναι τελικά 4^{ου} βαθμού, το οποίο εν γένει είναι:

$$x(t) = \begin{cases} a_0 + a_1 t + a_2 t^2 + a_3 t^3 + a_4 t^4, & 0 \leq t \leq 2\Delta \\ b_0 + b_1 t, & 2\Delta \leq t \leq T - 2\Delta \\ c_0 + c_1 t + c_2 t^2 + c_3 t^3 + c_4 t^4, & T - 2\Delta \leq t \leq T \end{cases}$$

Φάση επιτάχυνσης:

$$x(t) = a_0 + a_1 t + a_2 t^2 + a_3 t^3 + a_4 t^4$$

$$x(0) = x_0 \Rightarrow a_0 = x_0$$

$$\dot{x}(0) = 0 \Rightarrow a_1 = 0$$

$$\ddot{x}(0) = 0 \Rightarrow a_2 = 0$$

$$\begin{aligned} x(2\Delta) = x_0 + \dot{x}\Delta &\Rightarrow a_0 + a_1(2\Delta) + a_2(2\Delta)^2 + a_3(2\Delta)^3 + a_4(2\Delta)^4 = x_0 + \dot{x}\Delta \Rightarrow \\ &\Rightarrow 8a_3\Delta^3 + 16a_4\Delta^4 = \dot{x}\Delta \quad (1) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \dot{x}(2\Delta) = \dot{x} &\Rightarrow a_1 + 2a_2(2\Delta) + 3a_3(2\Delta)^2 + 4a_4(2\Delta)^3 = \dot{x} \Rightarrow \\ &\Rightarrow 12a_3\Delta^2 + 32a_4\Delta^3 = \dot{x} \quad (2) \end{aligned}$$

$$(1), (2) \Rightarrow a_3 = \frac{\dot{x}}{4\Delta^2}, a_4 = -\frac{\dot{x}}{16\Delta^3}$$

Οπότε,

$$x(t) = x_0 + \frac{\dot{x}}{4\Delta^2} t^3 - \frac{\dot{x}}{16\Delta^3} t^4, t \in [0, 2\Delta]$$

Φάση σταθερής ταχύτητας:

$$\dot{x} = \frac{x_f - x_0}{t_f - 2\Delta}$$

$$x(t) = b_0 + b_1(t - 2\Delta)$$

$$x(2\Delta) = x_0 + \dot{x}\Delta \Rightarrow b_0 = x_0 + \dot{x}\Delta$$

$$\dot{x}(2\Delta) = \dot{x} \Rightarrow b_1 = \dot{x}$$

Οπότε,

$$x(t) = x_0 + \dot{x}\Delta + \dot{x}(t - 2\Delta) = x_0 + \dot{x}(t - \Delta), t \in [2\Delta, t_f - 2\Delta]$$

Φάση επιβράδυνσης:

$$x(t) = c_0 + c_1[t - (t_f - 2\Delta)] + c_2[t - (t_f - 2\Delta)]^2 + c_3[t - (t_f - 2\Delta)]^3 + c_4[t - (t_f - 2\Delta)]^4$$

$$x(t_f - 2\Delta) = x_f - \dot{x}\Delta \Rightarrow c_0 = x_f - \dot{x}\Delta$$

$$\dot{x}(t_f - 2\Delta) = \dot{x} \Rightarrow c_1 = \dot{x}$$

$$\ddot{x}(t_f - 2\Delta) = 0 \Rightarrow c_2 = 0$$

$$\begin{aligned} x(t_f) = x_f &\Rightarrow c_0 + c_1(2\Delta) + c_2(2\Delta)^2 + c_3(2\Delta)^3 + c_4(2\Delta)^4 = x_f \Rightarrow \\ &\Rightarrow 8c_3\Delta^3 + 16c_4\Delta^4 = -\dot{x}\Delta \quad (3) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \dot{x}(t_f) = 0 &\Rightarrow c_1 + 2c_2(2\Delta) + 3c_3(2\Delta)^2 + 4c_4(2\Delta)^3 = 0 \Rightarrow \\ &\Rightarrow 12c_3\Delta^2 + 32c_4\Delta^3 = -\dot{x} \quad (4) \end{aligned}$$

$$(3), (4) \Rightarrow c_4 = -\frac{\dot{x}}{4\Delta^2}, c_3 = \frac{\dot{x}}{16\Delta^3}$$

Οπότε,

$$x(t) = x_f - \dot{x}(t - \Delta) - \frac{\dot{x}}{4\Delta^2}[t - (t_f - 2\Delta)]^3 + \frac{\dot{x}}{16\Delta^3}[t - (t_f - 2\Delta)]^4, t \in [t_f - 2\Delta, t_f]$$

Συνεπώς, η συνάρτηση $x(t)$ θα χρησιμοποιηθεί για την υλοποίηση της $\theta(t)$ και της $p_z(t)$.

Θα πρέπει να ισχύει για το Δ ότι: $0 < 4\Delta < t_f \Leftrightarrow 0 < \Delta < \frac{t_f}{4}$

Συνάρτηση $\theta(t)$:

Οι σχετικές παράμετροι είναι:

$$t_f = 1 \text{ sec}$$

$$\theta(0) = \theta_0 = 0$$

$$\theta(t_f = 1 \text{ sec}) = \theta_f = \pi \text{ rad}$$

$$\Delta = \frac{1}{8} \text{ sec} \Rightarrow \dot{\theta} = \frac{\pi - 0}{1 - 2 * \frac{1}{8}} = \frac{4\pi \text{ rad}}{3 \text{ sec}}$$

$$\theta_0 + \dot{\theta}\Delta < \theta < \theta_f - \dot{\theta}\Delta \Leftrightarrow \frac{\pi}{6} < \theta < \frac{5\pi}{6}$$

Οπότε,

$$\theta(t) = \frac{64\pi}{3}t^3 - \frac{128\pi}{3}t^4, t \in \left[0, \frac{1}{4}\right]$$

$$\theta(t) = \frac{4\pi}{3}\left(t - \frac{1}{8}\right), t \in \left[\frac{1}{4}, \frac{3}{4}\right]$$

$$\theta(t) = \frac{4\pi}{3}\left(t - \frac{1}{8}\right) - \frac{64\pi}{3}\left(t - \frac{3}{4}\right)^3 + \frac{128\pi}{3}\left(t - \frac{3}{4}\right)^4, t \in \left[\frac{3}{4}, 1\right]$$

Συνάρτηση $p_z(t)$:

Οι σχετικές παράμετροι είναι:

$$t_f = 1 \text{ sec}$$

$$p_z(0) = p_{z_0} = 50 \text{ cm}$$

$$p_z(t_f = 1 \text{ sec}) = p_{z_f} = 40 \text{ cm}$$

$$\Delta = \frac{1}{10} \text{ sec} \Rightarrow \dot{p}_z = \frac{40 - 50}{1 - 2 * \frac{1}{10}} = -12.5 \frac{\text{cm}}{\text{sec}}$$

$$p_{z_f} - \dot{p}_z\Delta < p_z < p_{z_0} + \dot{p}_z\Delta \Leftrightarrow 41.25 < p_z < 48.75$$

Οπότε,

$$p_z(t) = 50 - 312.5(t - 1)^3 + 781.25(t - 1)^4, t \in [1, 1.2]$$

$$p_z(t) = 50 - 12.5(t - 1.1), t \in [1.2, 1.8]$$

$$p_z(t) = 50 - 12.5(t - 1.1) + 312.5(t - 1.8)^3 - 781.25(t - 1.8)^4, t \in [1.8, 2]$$

Τελικά, η τροχιά θα είναι:

$$p_x(t) = 15, t \in [0, 2]$$

$$p_y(t) = -30 + 5 \sin\left(\frac{64\pi}{3}t^3 - \frac{128\pi}{3}t^4\right), t \in \left[0, \frac{1}{4}\right]$$

$$p_y(t) = -30 + 5 \sin\left(\frac{4\pi}{3}\left(t - \frac{1}{8}\right)\right), t \in \left[\frac{1}{4}, \frac{3}{4}\right]$$

$$p_y(t) = -30 + 5 \sin\left(\frac{4\pi}{3}\left(t - \frac{1}{8}\right) - \frac{64\pi}{3}\left(t - \frac{3}{4}\right)^3 + \frac{128\pi}{3}\left(t - \frac{3}{4}\right)^4\right), t \in \left[\frac{3}{4}, 1\right]$$

$$p_y(t) = -30, t \in [1, 2]$$

$$p_z(t) = 45 - 5 \cos\left(\frac{64\pi}{3}t^3 - \frac{128\pi}{3}t^4\right), t \in \left[0, \frac{1}{4}\right]$$

$$p_z(t) = 45 - 5 \cos\left(\frac{4\pi}{3}\left(t - \frac{1}{8}\right)\right), t \in \left[\frac{1}{4}, \frac{3}{4}\right]$$

$$p_z(t) = 45 - 5 \cos\left(\frac{4\pi}{3}\left(t - \frac{1}{8}\right) - \frac{64\pi}{3}\left(t - \frac{3}{4}\right)^3 + \frac{128\pi}{3}\left(t - \frac{3}{4}\right)^4\right), t \in \left[\frac{3}{4}, 1\right]$$

$$p_z(t) = 50 - 312.5(t - 1)^3 + 781.25(t - 1)^4, t \in [1, 1.2]$$

$$p_z(t) = 50 - 12.5(t - 1.1), t \in [1.2, 1.8]$$

$$p_z(t) = 50 - 12.5(t - 1.1) + 312.5(t - 1.8)^3 - 781.25(t - 1.8)^4, t \in [1.8, 2]$$

Και η ταχύτητα θα είναι:

$$\dot{p}_x(t) = 0, t \in [0,2]$$

$$\dot{p}_y(t) = 5 \cos\left(\frac{64\pi}{3}t^3 - \frac{128\pi}{3}t^4\right)\left(64\pi t^2 - \frac{512\pi}{3}t^3\right), t \in \left[0, \frac{1}{4}\right]$$

$$\dot{p}_y(t) = 5 \cos\left(\frac{4\pi}{3}\left(t - \frac{1}{8}\right)\right)\frac{4\pi}{3}, t \in \left[\frac{1}{4}, \frac{3}{4}\right]$$

$$\dot{p}_y(t) = 5 \cos\left(\frac{4\pi}{3}\left(t - \frac{1}{8}\right) - \frac{64\pi}{3}\left(t - \frac{3}{4}\right)^3 + \frac{128\pi}{3}\left(t - \frac{3}{4}\right)^4\right)\left(\frac{4\pi}{3} - 64\pi\left(t - \frac{3}{4}\right)^2 + \frac{512\pi}{3}\left(t - \frac{3}{4}\right)^3\right), t \in \left[\frac{3}{4}, 1\right]$$

$$\dot{p}_y(t) = 0, t \in [1,2]$$

$$\dot{p}_z(t) = 5 \sin\left(\frac{64\pi}{3}t^3 - \frac{128\pi}{3}t^4\right)\left(64\pi t^2 - \frac{512\pi}{3}t^3\right), t \in \left[0, \frac{1}{4}\right]$$

$$\dot{p}_z(t) = 5 \sin\left(\frac{4\pi}{3}\left(t - \frac{1}{8}\right)\right)\frac{4\pi}{3}, t \in \left[\frac{1}{4}, \frac{3}{4}\right]$$

$$\dot{p}_z(t) = 5 \sin\left(\frac{4\pi}{3}\left(t - \frac{1}{8}\right) - \frac{64\pi}{3}\left(t - \frac{3}{4}\right)^3 + \frac{128\pi}{3}\left(t - \frac{3}{4}\right)^4\right)\left(\frac{4\pi}{3} - 64\pi\left(t - \frac{3}{4}\right)^2 + \frac{512\pi}{3}\left(t - \frac{3}{4}\right)^3\right), t \in \left[\frac{3}{4}, 1\right]$$

$$\dot{p}_z(t) = -937.5(t-1)^2 + 3125(t-1)^3, t \in [1,1.2]$$

$$\dot{p}_z(t) = -12.5, t \in [1.2, 1.8]$$

$$\dot{p}_z(t) = -12.5 + 937.5(t-1.8)^2 - 3125(t-1.8)^3, t \in [1.8, 2]$$

Σχολιασμός:

Η τροχιά θα επαναλαμβάνεται αυτούσια με περίοδο $T = 2$ secs.

Κατά την ημικυκλική κίνηση, οι τρεις φάσεις για την συνάρτηση $\theta(t)$ αποτελούν και τις τρεις φάσεις για την γραμμική ταχύτητα του end-effector, η οποία θα είναι εφαπτόμενη στο ημικύκλιο με μέτρο $|\dot{p}| = R\dot{\theta}$.

Η υλοποίηση γίνεται με αλγόριθμο παρεμβολής ώστε για κάθε επιθυμητή θέση να είναι δυνατή η επίλυση του αντίστροφου κινηματικού μοντέλου για τον προσδιορισμό των επιθυμητών θέσεων των αρθρώσεων στην επόμενη θέση και της κατάλληλης περιστροφή τους.

Η διόρθωση του σφάλματος θέσης υπολογίζεται μέσω βρόχου ελέγχου ως εξής: $\dot{p} = \frac{p(i+1) - p^*(i)}{T_s}$, όπου T_s η περίοδος δειγματοληψίας και $p^*(i)$ το οποίο έχει υπολογιστεί από το ευθύ κινηματικό μοντέλο.

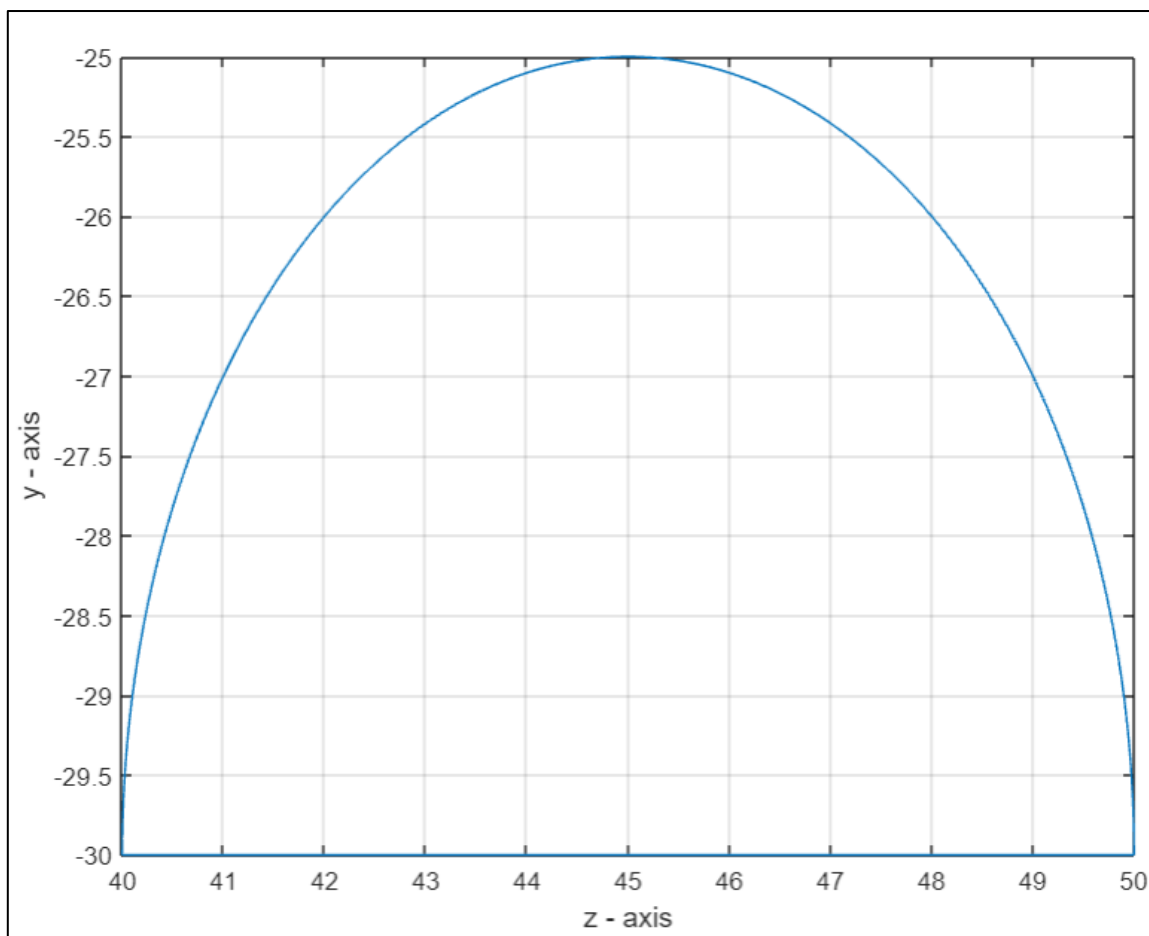
Κινηματική Προσομοίωση του Ρομποτικού Μηχανισμού

Ως δεδομένα της άσκησης επιλέγονται τα εξής:

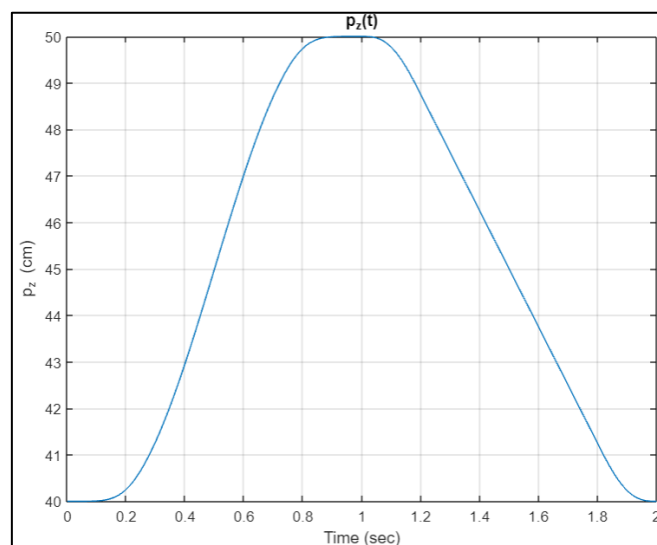
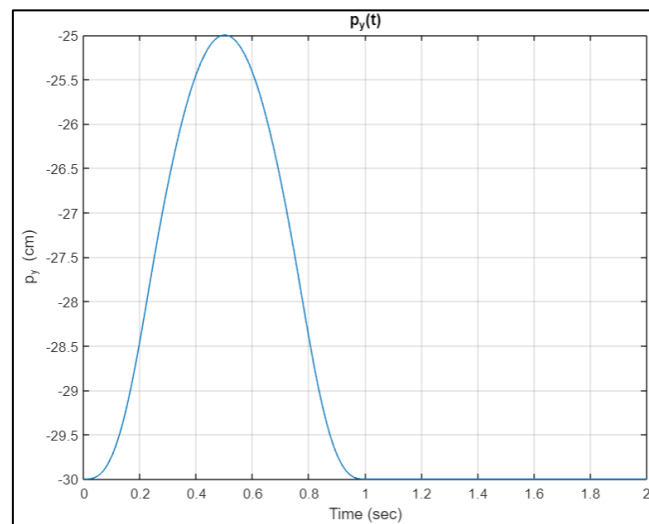
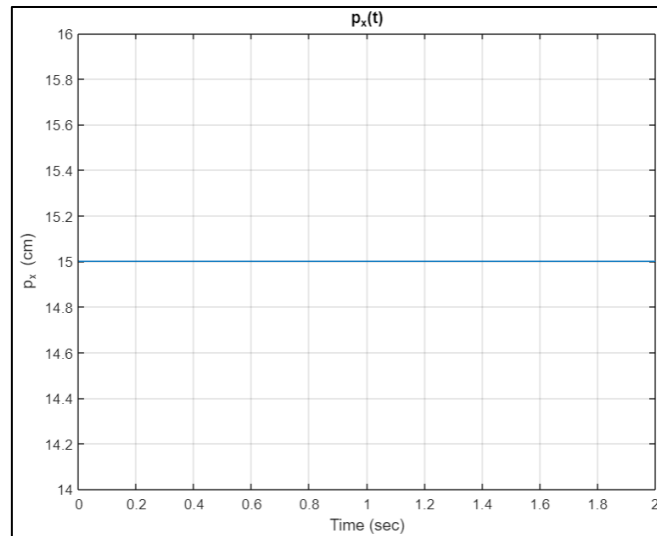
- $l_0 = 10\text{ cm}$, $l_1 = 15\text{ cm}$, $l_2 = l_3 = 30\text{ cm}$
- $(x_A, y_A, z_A) = (15, -30, 40)\text{ cm}$ και $(x_B, y_B, z_B) = (15, -30, 50)\text{ cm}$ (ήτοι, $R = 5\text{ cm}$)
- $T = 2\text{ secs}$

Το συνοδευόμενο αρχείο σε MATLAB περιέχει τον κώδικα για την υλοποίηση του ερωτήματος.

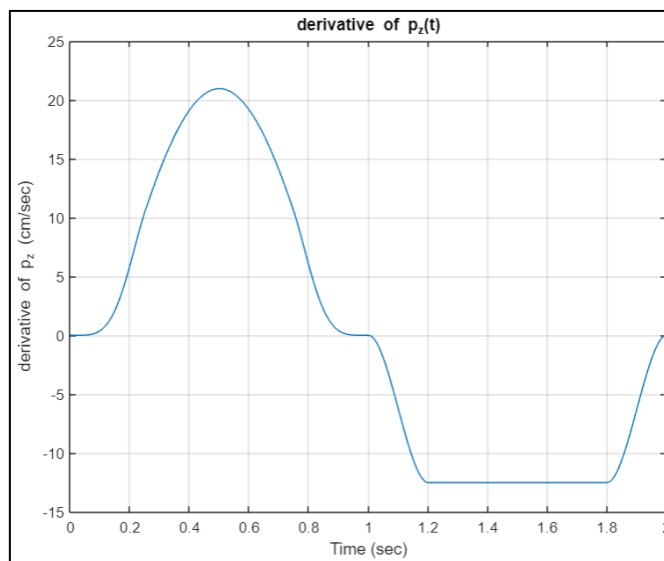
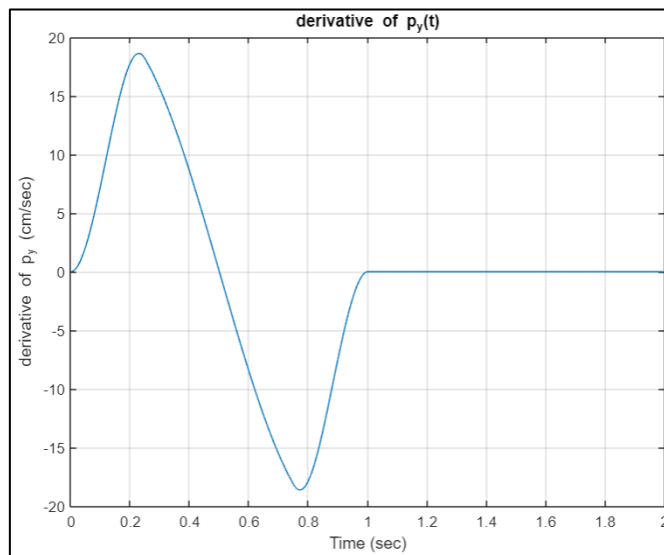
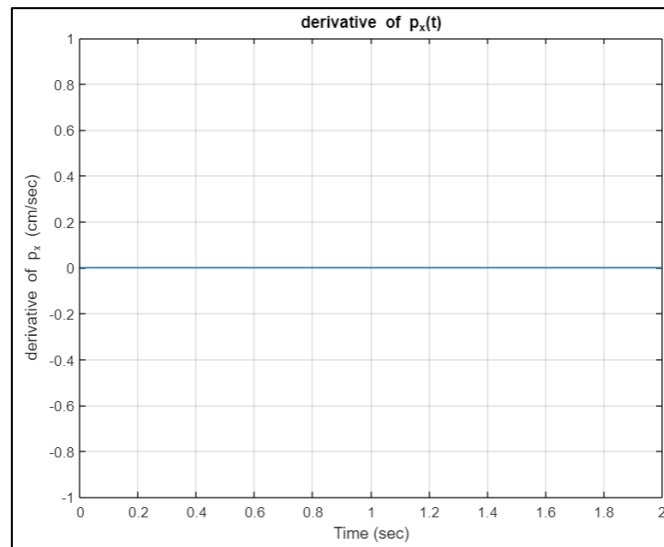
Αρχικά, δείχνεται γραφικά η σχέση μεταξύ $y(t) - z(t)$.



Το επιθυμητό προφίλ κίνησης του τελικού εργαλείου δράσης, δηλαδή το $P_E(t)$ και το $v_E(t)$ θα είναι:
Εξέλιξη των συντεταγμένων θέσης στο χρόνο:

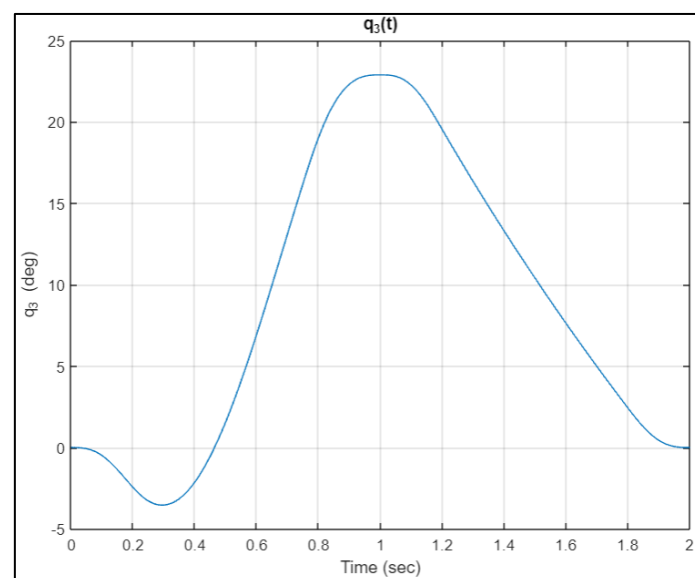
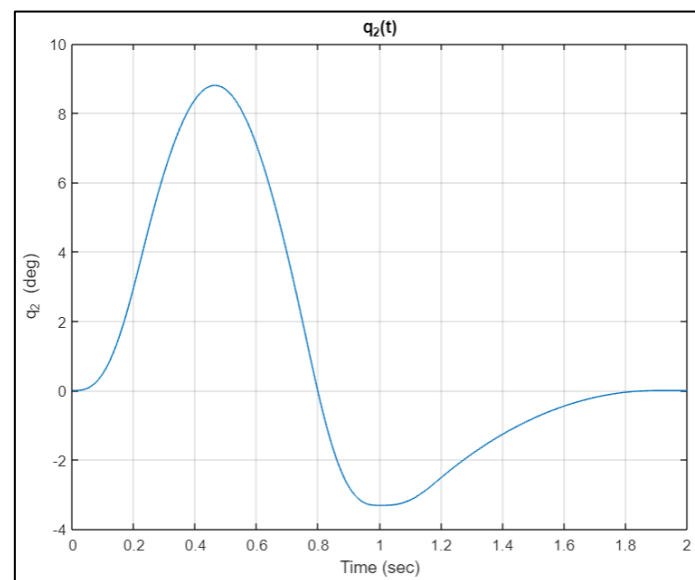
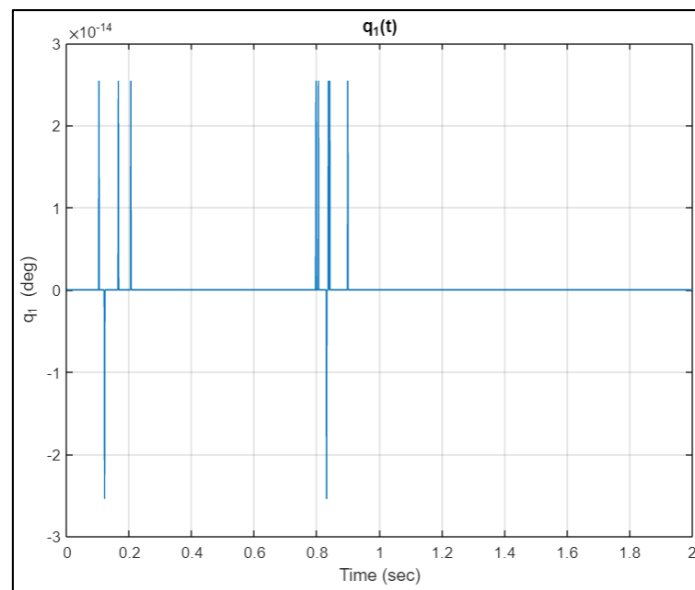


Εξέλιξη των συνιστωσών ταχύτητας στο χρόνο:

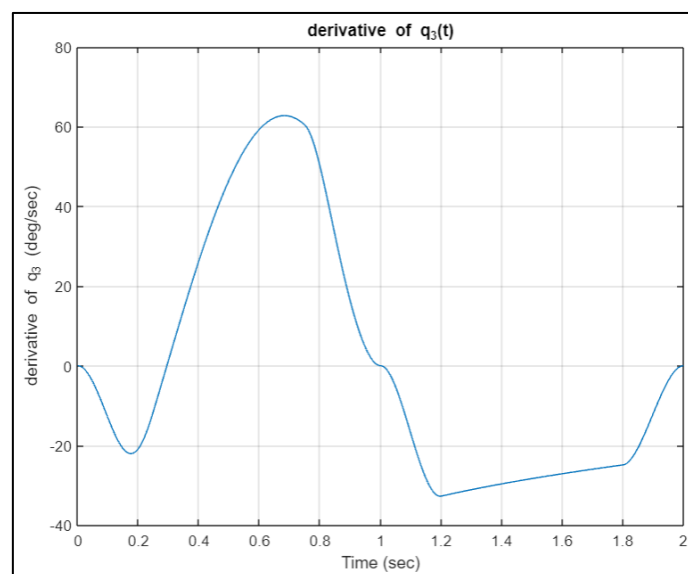
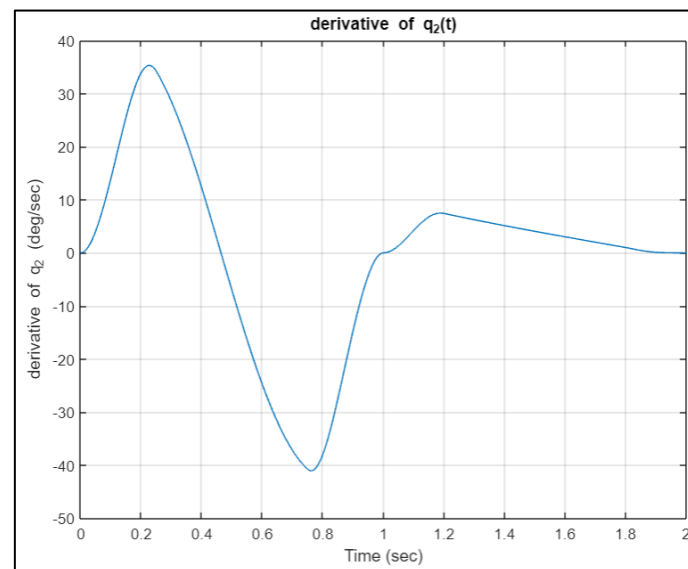
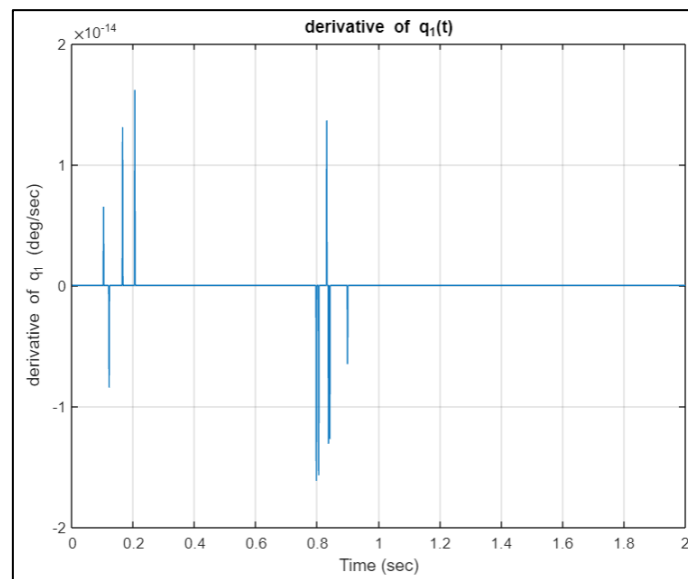


Έπειτα, υπολογίζονται τα διαγράμματα γωνιών των αρθρώσεων $q(t)$ και γωνιακών ταχυτήτων $\dot{q}(t)$.

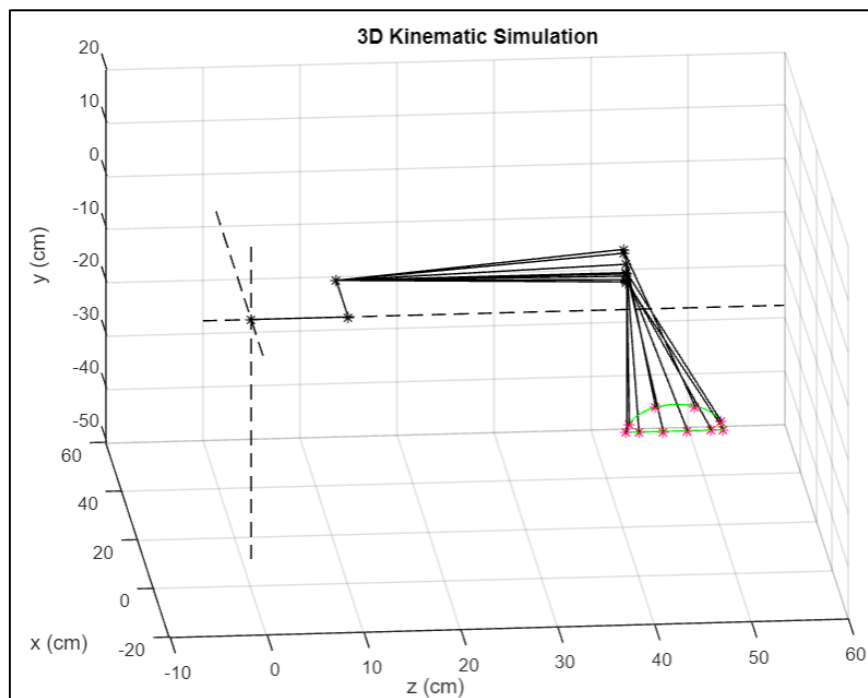
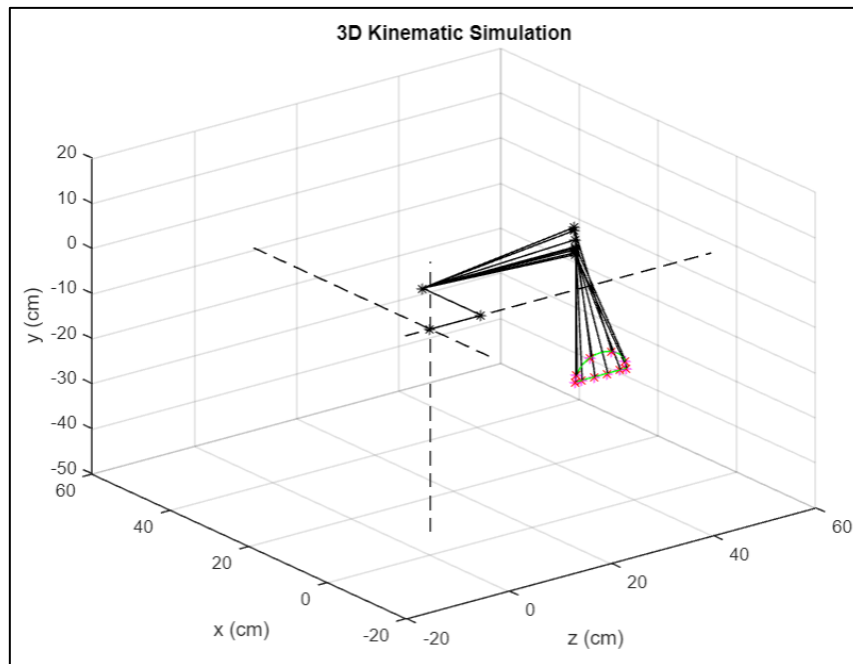
Εξέλιξη των γωνιών των αρθρώσεων στο χρόνο:



Εξέλιξη των γωνιακών ταχυτήτων στο χρόνο:



Τέλος, παρουσιάζεται το διάγραμμα κίνησης (animation) που απεικονίζει μια χρονική ακολουθία ενδιάμεσων διατάξεων της ρομποτικής αλυσίδας κατά την εκτέλεση της εργασίας.



Resources

[1] Υλικό & Σημειώσεις Μαθήματος

[2] John J. Craig, *Introduction to robotics: Mechanics & Control* (2009)

[3] <https://github.com/petercorke/robotics-toolbox-matlab/blob/master/jtraj.m>