ΕΘΝΙΚΟ ΜΕΤΣΟΒΙΟ ΠΟΛΥΤΕΧΝΕΙΟ

ΣΧΟΛΗ ΗΛΕΚΤΡΟΛΟΓΩΝ ΜΗΧΑΝΙΚΩΝ ΚΑΙ ΜΗΧΑΝΙΚΩΝ ΥΠΟΛΟΓΙΣΤΩΝ

ΑΛΓΟΡΙΘΜΟΙ & ΠΟΛΥΠΛΟΚΟΤΗΤΑ

(2020-2021)

4η Σειρά Γραπτών Ασκήσεων

Ονοματεπώνυμο:

- Χρήστος Τσούφης

Αριθμός Μητρώου:

- 03117176

Στοιχεία Επικοινωνίας:

- el17176@mail.ntua.gr

$1^η$ Άσκηση – Ταξιδεύοντας με Ηλεκτρικό Αυτοκίνητο

Εκφώνηση & Επεξήγηση:

Έστω ένα κατευθυνόμενο γράφημα G(V, E, w), με n κορυφές (πόλεις), m ακμές και θετικά μήκη w: $E \rightarrow \mathbb{N}^+$ στις ακμές, το οποίο αποτελεί μοντέλο του οδικού δικτύου μιας χώρας. Στόχος είναι το ταξίδι από την πόλη s στην πόλη t με ηλεκτρικό αυτοκίνητο (που έχει αυτονομία α). Σε κάποιες πόλεις υπάρχουν σταθμοί φόρτισης, δηλαδή σε $C \subset V$. Επίσης, οι πόλεις s και t διαθέτουν σταθμούς φόρτισης.

a) Στην περίπτωση που η αυτονομία του αυτοκινήτου είναι αρκετά μεγάλη (δηλ. δεν απαιτείται ενδιάμεση φόρτιση για το ταξίδι από το s στην t) και στόχος είναι η επίσκεψη τουλάχιστον μιας ακόμη πόλης με σταθμό φόρτισης (ώστε να επιβεβαιωθεί ότι οι σταθμοί φόρτισης στις ενδιάμεσες πόλεις είναι συμβατοί) ζητείται ένας αλγόριθμος που να υπολογίζει το συντομότερο s-tμονοπάτι που διέρχεται από τουλάχιστον μια πόλη του C διαφορετική από τις s και t ($|C| \geq 3$).

   Ο Αλγόριθμος είναι εξής:
   Αρχικά, με τον αλγόριθμο του Dijkstra στο γράφημα G υπολογίζονται οι αποστάσεις $d(c_i)$ όλων των πόλεων $c_i \in C$ από την πόλη s, στις οποίες υπάρχουν σταθμοί φόρτισης. Έπειτα, δημιουργείται ένα νέο γράφημα G' το οποίο προκύπτει από το G αντιστρέφοντας την φορά όλων των ακμών και ως αρχή θεωρείται η πόλη t. Μετά, εφαρμόζοντας τον αλγόριθμο του Dijkstra στο G' υπολογίζονται οι νέες αποστάσεις $d'(c_i)$ όλων των πόλεων από την πόλη t, στις οποίες υπάρχουν σταθμοί φόρτισης. Τέλος, από τις τιμές που προκύπτουν για $d(c_i)$ και $d'(c_i)$ διατηρείται η ελάχιστη για κάθε πόλη.

   Πολυπλοκότητα:
   Η πολυπλοκότητα του αλγορίθμου θα είναι O(mlogn) ή O(m + nlogn). Αυτό προκύπτει από το γεγονός ότι

b) Στην περίπτωση που η αυτονομία του αυτοκινήτου είναι σχετικά μικρή και αναμένεται να λειτουργήσει περιοριστικά για τη διαδρομή που θα ακολουθηθεί, ζητείται να διατυπωθεί αλγόριθμος που υπολογίζει το συντομότερο s-t μονοπάτι υπό τον περιορισμό ότι η απόσταση μεταξύ δύο διαδοχικών πόλεων με σταθμό φόρτισης στη διαδρομή να μην ξεπερνά την αυτονομία α του αυτοκινήτου.

   Ο Αλγόριθμος είναι ο εξής:
   Αρχικά, υπολογίζονται τα συντομότερα μονοπάτια από τη πόλη s στην πόλη c_i, $\forall\, c_i \in C$ και από την ci στην πόλη t. Έπειτα, υπολογίζονται τα συντομότερα μονοπάτια από τη πόλη c_i, $\forall\, c_i \in C$ στη c_j, $\forall\, c_j \in C$. Ύστερα, υπολογίζεται το συντομότερο μονοπάτι από τη πόλη s στη t. Έτσι, δημιουργείται ένας νέος γράφος που έχει τις πόλεις που υπάρχουν σταθμοί φόρτισης ως κόμβους (s, t, c_i) και σε κάθε μια από αυτές τις ακμές προστίθενται τα συντομότερα μονοπάτια που υπολογίστηκαν προηγουμένως με την προϋπόθεση να μην ξεπερνά η διαδρομή την αυτονομία α του αυτοκινήτου. Τέλος, στον νέο αυτό γράφο με τον αλγόριθμο του Dijkstra υπολογίζεται το συντομότερο μονοπάτι από την πόλη s στη t.

   Πολυπλοκότητα:
   Η πολυπλοκότητα του αλγορίθμου θα είναι O(|C|mlogn) ή O(|C|(m+nlogn)).

$2^η$ Άσκηση – Στρίβοντας μόνο δεξιά!

Έστω ότι σε ένα αυτοκίνητο έχει κλειδώσει το τιμόνι και δεν επιτρέπει την στροφή αριστερά. Επίσης, έστω ότι δεν γίνονται αναστροφές. Στόχος είναι η άφιξη σε ένα συνεργείο για το ξεκλείδωμα της κλειδαριάς του τιμονιού. Είναι δεδομένο ότι η ταχύτητα στις ευθείες είναι μεγάλη οπότε ζητείται η διαδρομή από το σπίτι μέχρι το συνεργείο που ελαχιστοποιεί το πλήθος των δεξιών στροφών.

Επιπλέον, δίνεται ένας χάρτης της πόλης, ενημερωμένος με τις τρέχουσες κυκλοφοριακές συνθήκες στη μορφή ενός m×n πλέγματος. Όλα τα οδικά τμήματα είναι διπλής κατεύθυνσης και κάθε οδικό τμήμα μεταξύ δύο κορυφών/διασταυρώσεων μπορεί να είναι είτε ελεύθερο (οπότε η οδήγηση θα είναι γρηγορότερη) είτε μπλοκαρισμένο από την κυκλοφορία (οπότε δεν θα είναι διαθέσιμο για οδήγηση). Σε κάθε κορυφή/διασταύρωση υπάρχει η δυνατότητα για οδήγηση ευθεία ή για δεξιά στροφή.

a) Ζητείται η διατύπωση ενός αλγορίθμου που υπολογίζει μια διαδρομή από το σπίτι στο συνεργείο με το ελάχιστο πλήθος δεξιών στροφών (ή αποφαίνεται ότι δεν είναι δυνατόν να φτάσει στο συνεργείο στρίβοντας μόνο δεξιά). Μεταξύ δύο διαδρομών με το ίδιο πλήθος δεξιών στροφών, προτιμάται αυτή που ελαχιστοποιεί τη συνολική απόσταση (βλ. Manhattan distance).

   Ο <u>Αλγόριθμος</u> είναι ο εξής:
   -
   <u>Έλεγχος Ορθότητας</u>:
   -
   <u>Πολυπλοκότητα</u>:
   Η πολυπλοκότητα του αλγορίθμου θα είναι O(). Αυτό προκύπτει από το γεγονός ότι

b) Ζητείται η διατύπωση ενός αλγορίθμου που υπολογίζει μια διαδρομή από το σπίτι στο συνεργείο με το ελάχιστο πλήθος δεξιών στροφών με επιπλέον προϋπόθεση ότι σε κάθε δεξιά στροφή σε μια διασταύρωση θα γίνεται άλλη μια δεξιά στροφή στην αμέσως επόμενη διασταύρωση.

   Ο <u>Αλγόριθμος</u> είναι ο εξής:
   -
   <u>Έλεγχος Ορθότητας</u>:
   -
   <u>Πολυπλοκότητα</u>:
   Η πολυπλοκότητα του αλγορίθμου θα είναι O(). Αυτό προκύπτει από το γεγονός ότι

$3^η$ Άσκηση – Σχεδιασμός Videogame

Έστω ότι θα σχεδιαστεί ένα videogame με κεντρικό στοιχείο έναν Λαβύρινθο, τον οποίο οι παίκτες διασχίζουν περνώντας μέσα από πολλά δωμάτια. Κάθε δωμάτιο μπορεί να είναι άδειο, να κατοικείται από ένα τέρας, ή να περιέχει ένα μαγικό φίλτρο. Καθώς ο παίκτης περνάει μέσα από τα δωμάτια, αυξάνεται ή μειώνεται η δύναμή του P. Αν κάποια στιγμή το P πάψει να είναι θετικό, ι παίκτης χάνει τη “ ζωή” του και το παιχνίδι σταματάει εκεί.

Ο Λαβύρινθος αναπαρίσταται από ένα κατευθυνόμενο γράφημα G = (V, E, p), με βάρη p: V →ℤ στις κορυφές, όπου οι κορυφές αντιστοιχούν σε δωμάτια και οι ακμές σε διαδρόμους (μιας κατεύθυνσης) που οδηγούν από το ένα δωμάτιο στο άλλο. Ο Λαβύρινθος έχει συγκεκριμένη είσοδο s ∈ V και έξοδο t ∈ V. Η συνάρτηση βάρους κουφών p αναπαριστά τι συναντούν οι παίκτες σε κάθε δωμάτιο. Ειδικότερα, όταν το δωμάτιο είναι άδειο τότε p(v) = 0, όταν το δωμάτιο περιέχει ένα μαγικό φίλτρο τότε p(v) > 0 και όταν το δωμάτιο κατοικείται από ένα τέρας τότε p(v) < 0. Όταν ένας παίκτης με δύναμη P βρεθεί στο δωμάτιο u, η δύναμή του αλλάζει σε P + p(v). Μετά την αποχώρηση του παίκτη από το δωμάτιο v, το τέρας ή το μαγικό φίλτρο ανανεώνονται. Επιπλέον, λαμβάνεται ως προϋπόθεση ότι ο παίκτης ξεκινά στην είσοδο s με δύναμη P_0, ότι το δωμάτιο εισόδου είναι άδειο (δηλ. p(s) = 0) και ότι υπάρχει πάντα διαδρομή από την είσοδο s στην έξοδο t του Λαβυρίνθου.

Για την μεγιστοποίηση των εσόδων από το videogame, ζητείται η διατύπωση της ελάχιστης δύναμης P_0, με την οποία αν ξεκινήσει ένας παίκτης στην είσοδο s, μπορεί να φτάσει “ζωντανός” στην έξοδο t. Μια s-t διαδρομή π είναι r-ασφαλής, αν ο παίκτης, ξεκινώντας με δύναμη P_0 = r, φτάνει “ζωντανός” στην έξοδο, ακολουθώντας την π. Ένας Λαβύρινθος G(V, E, p) είναι r-ασφαλής, αν περιέχει r-ασφαλή s-t διαδρομή π.

1. Ζητείται η διατύπωση αλγορίθμου που με είσοδο Λαβύρινθο G(V, E, p), στον οποίο δεν υπάρχουν κύκλοι που ενισχύουν τη δύναμη του παίκτη, και δεδομένη τιμή r , αποφαίνεται αν ο Λαβύρινθος G είναι r-ασφαλής.

   Ο Αλγόριθμος είναι ο εξής:
   -
   Έλεγχος Ορθότητας:
   -
   Πολυπλοκότητα:
   Η πολυπλοκότητα του αλγορίθμου θα είναι O(). Αυτό προκύπτει από το γεγονός ότι

2. Ζητείται η διατύπωση αλγορίθμου που με είσοδο Λαβύρινθο G(V, E, p), στον οποίο μπορεί να υπάρχουν κύκλοι που ενισχύουν τη δύναμη του παίκτη, και δεδομένη τιμή r , αποφαίνεται αν ο Λαβύρινθος G είναι r-ασφαλής.

   Ο Αλγόριθμος είναι ο εξής:
   -
   Έλεγχος Ορθότητας:
   -
   Πολυπλοκότητα:
   Η πολυπλοκότητα του αλγορίθμου θα είναι O(). Αυτό προκύπτει από το γεγονός ότι

3. Ζητείται η διατύπωση αλγορίθμου που με είσοδο Λαβύρινθο G(V, E, p), υπολογίζει την ελάχιστη τιμή r για την οποία ο Λαβύρινθος G είναι r-ασφαλής.

   Ο Αλγόριθμος είναι ο εξής:

   Έλεγχος Ορθότητας:

   Πολυπλοκότητα:
   Η πολυπλοκότητα του αλγορίθμου θα είναι Ο(). Αυτό προκύπτει από το γεγονός ότι

4η Άσκηση – Επαναφορά της Ομαλότητας στη Χώρα των Αλγορίθμων

Έστω ότι υπάρχουν συγκρούσεις μεταξύ Στρατού και Εξτρεμιστών κατά μήκος της κεντρικής οδικής αρτηρίας της Χώρας των Αλγορίθμων.

Η κεντρική οδική αρτηρία έχει τη μορφή μιας απεριόριστης ευθείας, όπου οι θέσεις καθορίζονται με βάση την απόσταση (σε χλμ.) από την αρχή της (που αντιστοιχεί σε 0 χλμ.). Οι Εξτρεμιστές έχουν εγκαθιδρύσει βάσεις ανεφοδιασμού σε ορισμένα σημεία της οδικής αρτηρίας, τις οποίες χρησιμοποιούν για να υποστηρίζουν τις δυνάμεις τους. Η ύπαρξη βάσης σε απόσταση το πολύ d είναι αναγκαία για την ενεργή παρουσία δυνάμεων Εξτρεμιστών σε μια θέση. Αν κάποιες βάσεις καταστραφούν, όλες οι δυνάμεις Εξτρεμιστών που θα βρεθούν χωρίς υποστήριξη από βάση σε απόσταση το πολύ d παραδίδονται άμεσα.

Από την άλλη, υπάρχει ένας Στρατηγός που γνωρίζει με ακρίβεια τις θέσεις των δυνάμεων Στρατού, των δυνάμεων Εξτρεμιστών και των βάσεων Εξτρεμιστών στην κεντρική οδική αρτηρία. Στόχος του είναι να σχεδιάσει μια γενικευμένη επίθεση που θα κάμψει πλήρως την αντίσταση των Εξτρεμιστών και θα τερματίσει οριστικά τις συγκρούσεις. Δυνάμεις Στρατού σε μια θέση x μπορούν να αιχμαλωτίσουν δυνάμεις Εξτρεμιστών σε μια θέση y ή να καταστρέψουν μια βάση τους στη θέση y εξαπολύοντας επίθεση με συνολικό κόστος ανάλογο της απόστασης |x-y|. Μετά από μια τέτοια επίθεση, οι δυνάμεις του Στρατού μπορούν να εξαπολύσουν νέα επίθεση.

Ζητείται η διατύπωση αλγορίθμου που με είσοδο τις θέσεις των δυνάμεων Στρατού $\alpha_1, \ldots, \alpha_n \in \mathbb{Z}$, των δυνάμεων Εξτρεμιστών $e_1, \ldots, e_m \in \mathbb{Z}$, των βάσεων Εξτρεμιστών $b_1, \ldots, b_k \in \mathbb{Z}$ και τη μέγιστη απόσταση υποστήριξης από βάση Εξτρεμιστών $d \in \mathbb{N}$, υπολογίζει το ελάχιστο κόστος μιας γενικευμένης επίθεσης που θα κάμψει πλήρως την αντίσταση των Εξτρεμιστών. Η αντίσταση των Εξτρεμιστών θα έχει καμφθεί πλήρως όταν όλες οι δυνάμεις τους θα έχουν είτε αιχμαλωτιστεί είτε παραδοθεί.

Ο Αλγόριθμος είναι ο εξής:

-

Έλεγχος Ορθότητας:

-

Πολυπλοκότητα:

Η πολυπλοκότητα του αλγορίθμου θα είναι Ο(). Αυτό προκύπτει από το γεγονός ότι

$5^η$ Άσκηση – Λογιστικές Αλχημείες

Έστω ότι η κυβέρνηση της Χώρας των Αλγορίθμων έχει θεσπίσει έναν νέο φόρο μεγάλων συναλλαγών, σύμφωνα με το οποίο κάθε μεταφορά χρημάτων μεταξύ δύο εταιρειών που ξεπερνά ένα συγκεκριμένο όριο φορολογείται με ένα συγκεκριμένο ποσοστό. Το όριο αυτό δεν έχει ακόμη οριστικοποιηθεί και ο Σύλλογος Βιομηχάνων προσπαθεί να επηρεάσει την κυβέρνηση ως προς αυτό.

Μια ομάδα n εταιρειών αποφάσισε να λάβει κάποιες συμβουλές για το πως μπορεί να ρυθμιστεί αυτό το όριο, ώστε αφενός να μην είναι πολύ μικρό και αφετέρου να αποφύγουν τελείως αυτόν τον φόρο. Κάθε εταιρεία i έχει ένα υπόλοιπο $b_i \in \mathbb{Z}$ που πρέπει να λάβει από ($b_i > 0$) ή να πληρώσει στις ($b_i < 0$) υπόλοιπες εταιρείες συνολικά. Δεν υπάρχει κανένα χρέος ή απαίτηση από εταιρείες εκτός ομάδας, δηλ. $\sum_{i=1}^{n} b_i = 0$. Υπάρχει αμοιβαία εμπιστοσύνη, οπότε δεν ενδιαφέρει ποια εταιρεία οφείλει σε ποια, αλλά μόνο να υπολογιστεί ένα σύνολο συναλλαγών που ρυθμίζει το υπόλοιπο κάθε εταιρείας και ελαχιστοποιεί το μέγιστο χρηματικό ποσό που θα μεταφερθεί από την μια στην άλλη. Επισημαίνεται ότι μπορεί να γίνει το πολύ μια συναλλαγή μεταξύ κάθε ζεύγους εταιρειών και σε μια μόνο κατεύθυνση (δηλ. για ένα ζεύγος εταιρειών i & j μπορεί να γίνει μόνο μια συναλλαγή, όπου είτε η i πληρώνει τη j είτε το αντίστροφο). Από την άλλη είναι δυνατόν μια εταιρεία με υπόλοιπο 0 να βοηθήσει στην οργάνωση των συναλλαγών, λαμβάνοντας και πληρώνοντας χρήματα από/προς άλλες εταιρείες.

Ζητείται η διατύπωση αλγορίθμου που με είσοδο τα υπόλοιπα των n εταιρειών $b_1, \ldots b_n \in \mathbb{Z}$, να υπολογίζει το ελάχιστο ποσό T που απαιτείται ώστε να ρυθμιστεί το υπόλοιπο όλων των εταιρειών και επιτυγχάνει όλες οι συναλλαγές να αφορούν χρηματικά ποσά που δεν ξεπερνούν το T.

Ο Αλγόριθμος είναι ο εξής:

-

Έλεγχος Ορθότητας:

-

Πολυπλοκότητα:

Η πολυπλοκότητα του αλγορίθμου θα είναι O(). Αυτό προκύπτει από το γεγονός ότι

6η Άσκηση – Αναγωγές και NP-Πληρότητα

Ζητείται να δειχθεί ότι τα παρακάτω προβλήματα είναι NP-Πλήρη:

<u>Άθροισμα Υποσυνόλου κατά Προσέγγιση</u>

Είσοδος: Σύνολο $A = \{w_1, \ldots, w_n\}$ με n φυσικούς και φυσικοί B και x με $B > x \geq 1$.

Ερώτηση: Υπάρχει $S \subseteq A$ τέτοιο ώστε $B - x \leq w(S) \leq B$;

Το πρόβλημα αυτό ανήκει στο NP διότι η επαλήθευση της λύσης γίνεται σε γραμμικό χρόνο αν δοθεί το σύνολο. Συγκεκριμένα είναι NP-hard διότι υπάρχει πολυωνυμική αναγωγή από το Subset Sum.

Έστω σύνολο $A_1 = \{w_1, \ldots, w_n\}$ του γενικού στιγμιότυπου του Subset Sum και W η παράμετρός του.

Έστω επίσης, σύνολο $A = \{2w_1, \ldots, 2w_n\}$, $B = 2W$, $x = 1$.

Η εύρεση συνόλου $w(A_1) = W$ είναι ισοδύναμη με την εύρεση συνόλου $w(A') = 2W$ στο ειδικό στιγμιότυπο του προβλήματος. Όμως, δεν υπάρχει περίπτωση να βρεθεί $w(A') = 2W - 1$ γιατί το άθροισμα είναι πάντα άρτιο ενώ αυτό είναι περιττό.

<u>Τακτοποίηση Ορθογωνίων Παραλληλογράμμων</u>

Είσοδος: n ορθογώνια παραλληλόγραμμα $A_1, \ldots, A_n$, διαστάσεων $1\times x_1, \ldots, 1\times x_n$, αντίστοιχα, και ορθογώνιο παραλληλόγραμμο B συνολικού εμβαδού $x_1+\ldots+x_n$. Τα $x_1, \ldots, x_n$ είναι θετικοί ακέραιοι πολυωνυμικά μεγάλοι σε σχέση με το n.

Ερώτηση: Είναι δυνατόν να τοποθετηθούν τα ορθογώνια παραλληλόγραμμα $A_1, \ldots, A_n$ εντός του B χωρίς επικαλύψεις;

<u>Μέγιστη Τομή με Βάρη στις Κορυφές</u>

Είσοδος: Ακέραιος $B \geq 1$ και πλήρες γράφημα G(V, E) με n κορυφές, όπου κάθε κορυφή u έχει ακέραιο βάρος $w(u) \geq 1$ και κάθε ακμή $e = \{u, v\}$ έχει βάρος $w(e) = w(u)w(v)$.

Ερώτηση: Υπάρχει τομή (S, V\S) στο G τέτοια ώστε το συνολικό βάρος των ακμών που διασχίζουν την τομή να είναι τουλάχιστον B;

Κύκλος Hamilton κατά Προσέγγιση

Είσοδος: Μη κατευθυνόμενο γράφημα G(V, E).

Ερώτηση: Υπάρχει κυκλική διαδρομή στο G που διέρχεται από κάθε κορυφή τουλάχιστον μια και το πολύ δύο φορές;

Το πρόβλημα αυτό ανήκει στο NP διότι η επαλήθευση του γεγονότος ότι είναι κύκλος και ότι περιλαμβάνει τουλάχιστον μια και το πολύ δύο φορές κάθε κορυφή γίνεται σε γραμμικό χρόνο αν δοθεί ο κύκλος. Συγκεκριμένα είναι NP-hard διότι υπάρχει πολυωνυμική αναγωγή από το Hamilton Cycle.

Έστω G ένα γράφημα στο οποίο αναζητείται ο κύκλος Hamilton.

Σε πολυωνυμικό χρόνο κατασκευάζεται το G' που είναι αντίγραφο του G και επιπλέον για κάθε κορυφή u, προστίθεται η u' η οποία συνδέεται μόνο με τη u.

Εάν υπάρχει κύκλος Hamilton στο G', θα υπάρχει και στο G και το αντίστροφο.

Για το ευθύ: για το πέρασμα από όλες τις κορυφές όπως η u' τουλάχιστον μια φορά απαιτείται πέρασμα δύο φορές από τις κορυφές όπως η u. Όμως αφού δεν είναι εφικτό το πέρασμα παραπάνω από δύο φορές από καμιά κορυφή, σχηματίζεται κύκλος στο G, όπου αν δεν ληφθούν υπόψιν οι μεταβάσεις από τις κορυφές u στις u' και πίσω, κάνει πέρασμα από κάθε κορυφή του ακριβώς μια φορά, δηλαδή είναι κύκλος Hamilton.

Για το αντίστροφο: αν υπάρχει κύκλος Hamilton στο G, τότε αν προστεθούν ανάμεσα οι διαδρομές από το u στο u' και πίσω θα προκύψει και πάλι κύκλος Hamilton κατά προσέγγιση στο γράφημα G'.

Ικανοποιησιμότητα με Περιορισμούς

Είσοδος: Λογική πρόταση φ = $\bigwedge_{j=1}^{m}(l_{j1} \vee l_{j2} \vee l_{j3} \vee l_{j4})$ σε 4-Συζευκτική Κανονική Μορφή (4-CNF). Υπενθυμίζεται ότι στην αναπαράσταση της φ σε 4-CNF, κάθε literal l_{ji} είναι είτε μια λογική μεταβλητή είτε η άρνηση μιας λογικής μεταβλητής.

Ερώτηση: Υπάρχει ανάθεση τιμών αλήθειας στις λογικές μεταβλητές ώστε κάθε όρος $l_{j1} \vee l_{j2} \vee l_{j3} \vee l_{j4}$ να περιλαμβάνει τουλάχιστον ένα αληθές και τουλάχιστον ένα ψευδές literal;

Το πρόβλημα αυτό ανήκει στο NP διότι η επαλήθευση εγκυρότητας γίνεται σε γραμμικό χρόνο αν δοθεί η ανάθεση. Συγκεκριμένα είναι NP-hard διότι υπάρχει πολυωνυμική αναγωγή από το 3-SAT.

Έστω λογική πρόταση φ = $\bigwedge_{j=1}^{m}(l_{j1} \vee l_{j2} \vee l_{j3})$ σε 3-Συζευκτική Κανονική Μορφή (3-CNF) για την οποία θα ελεγχθεί αν υπάρχει ανάθεση αληθοτιμών που την ικανοποιεί.

Έστω επίσης, η λογική πρόταση φ' = $\bigwedge_{j=1}^{m}(l_{j1} \vee l_{j2} \vee l_{j3} \vee x)$ (με x συμβολίζεται η νέα μεταβλητή που δεν εμφανίζεται στην φ) η οποία κατασκευάζεται σε πολυωνυμικό χρόνο.

Τότε, αν υπάρχει ανάθεση που να ικανοποιεί τον περιορισμό της φ', η φ είναι ικανοποιήσιμη και το αντίστροφο.

Για το ευθύ: αν υπάρχει μια ανάθεση για το φ' που ικανοποιεί τον περιορισμό, τότε αν το z είναι ψευδές, η ίδια ανάθεση θα ικανοποιεί και την φ, αλλιώς θα την ικανοποιεί η αντίθετή της.

Για το αντίστροφο: αν η φ είναι ικανοποιήσιμη, τότε θα έχει τουλάχιστον ένα αληθές literal σε κάθε όρο οπότε θα είναι η ίδια ανάθεση. Ακόμη, θέτοντας το z ως ψευδές τότε, ικανοποιείται ο περιορισμός για την φ'.

Επιλογή Ανεξάρτητων Υποσυνόλων

Είσοδος: Συλλογή S = $\{S_1, \ldots, S_m\}$ υποσυνόλων ενός συνόλου U με n στοιχεία και φυσικός αριθμός k, $2 \leq k \leq m$.

Ερώτηση: Υπάρχουν k υποσύνολα στη συλλογή S που να είναι, ανά δύο, ξένα μεταξύ τους;

Το πρόβλημα αυτό ανήκει στο NP διότι ο έλεγχος των υποσυνόλων που πρέπει να ικανοποιούν το ζητούμενο γίνεται σε πολυωνυμικό χρόνο. Συγκεκριμένα είναι NP-hard διότι υπάρχει πολυωνυμική αναγωγή από το Max Independent Set.

Για κάθε κόμβο του γραφήματος G, δημιουργείται ένα σύνολο S με όλες τις ακμές που προσπίπτουν στο γράφημα από αυτό το κόμβο. Η σταθερά k του Set Packing ισούται με την αντίστοιχη του Max Independent Set. Το U είναι το σύνολο των ακμών E.

Για το ευθύ: έστω ότι υπάρχει ένα ανεξάρτητο σύνολο κορυφών με πληθάριθμο τουλάχιστον k. Κανένα ζευγάρι κορυφών αυτού του συνόλου δεν θα έχει κοινή ακμή οπότε τα ζεύγη των αντίστοιχων υποσυνόλων του Set Packing θα είναι ξένα μεταξύ τους και με πλήθος τουλάχιστον k.

Για το αντίστροφο: έστω ότι υπάρχουν τουλάχιστον k ξένα μεταξύ τους υποσύνολα του U. Στο G θα υπάρχει ανεξάρτητο σύνολο κορυφών με το ίδιο πλήθος χωρίς κοινές ακμές, αφού το κάθε υποσύνολο αντιστοιχεί σε κορυφή του αρχικού γραφήματος

Κύριες Πηγές:

- *Σχέδιο Λύσεων*
- *https://www.geeksforgeeks.org/*