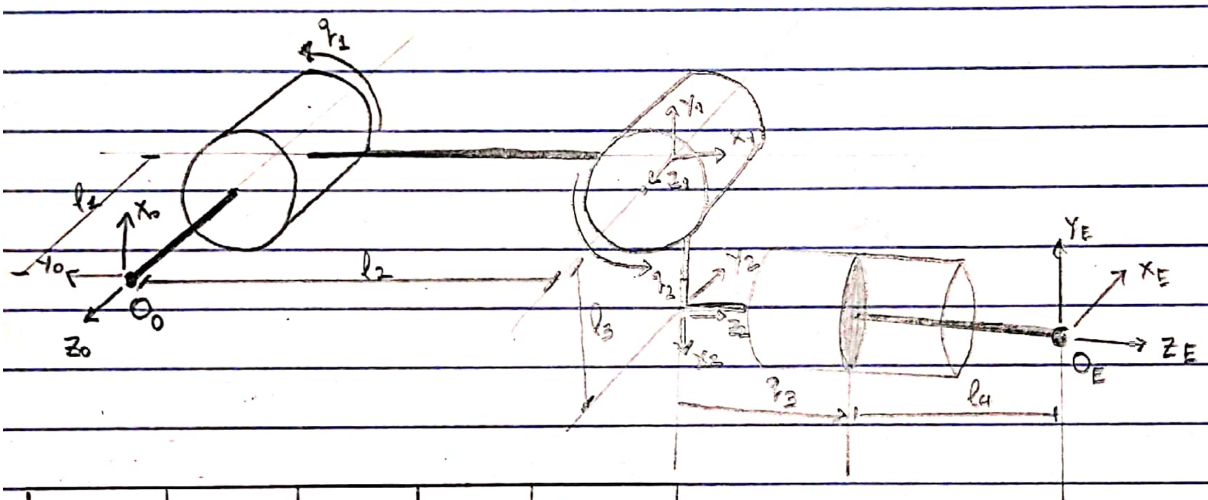
Ρομποτική Ι: Ανάλυση - Έλεγχος - Εργαστήριο | Χρήστος Τσούφης
1η Σειρά Γραπτών Ασκήσεων | 03117176
Ακαδ. Έτος 2021-2022

Άσκηση 1.1 (Παράμετροι D-H, ευθεία κινηματική ανάλυση)

Ρομποτικός βραχίονας 3 βαθμών ελευθερίας (2R - 1P)

Βάση στήριξης στο σημείο O_0, άκρο τελικού εργαλείου δράσης στο O_E

a) Μέθοδος Denavit-Hartenberg (D-H):



i	λ_i	a_i	d_i	θ_i
1	l_2	0	$-l_1$	$q_1 - 90^\circ$
2	l_3	-90°	0	$q_2 - 90^\circ$
E	0	0	$q_3 + l_4$	90°

Όπου,
- ο άξονας x_1 βρίσκεται επάνω στην κοινή κάθετο των z_0 & z_1
- ο άξονας z_1 ορίζεται από την q_2 ώστε να έχει δεξιόστροφη φορά
- ο άξονας y_1 ορίζεται από τους x_1, z_1

- ο άξονας x_2 βρίσκεται επάνω στην κοινή κάθετο των z_1 & z_2
- ο άξονας z_2 ορίζεται από την q_3 ώστε να έχει δεξιόστροφη φορά
- ο άξονας y_2 ορίζεται από τους x_2, z_2

β) Μήτρα Denavit-Hartenberg:

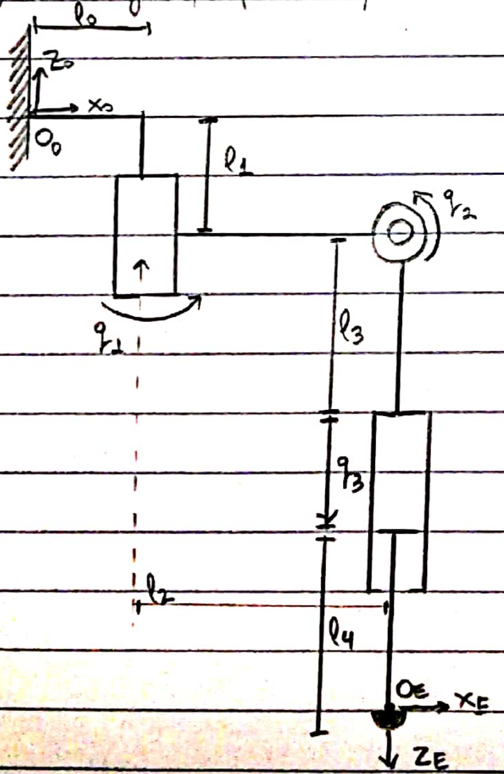
$$A_2^1(q_2) = \begin{bmatrix} s_2 & c_2 & 0 & 0 \\ -c_2 & s_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & l_3 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} s_2 & 0 & c_2 & l_3 s_2 \\ -c_2 & 0 & s_2 & -l_3 \cdot c_2 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Άσκηση 1.2 (ευθύ και αντίστροφο γεωμετρικό μοντέλο)

Ρομποτικός μηχανισμός με 3 αρθρώσεις (2 στροφικές, 1 πρισματική)

α) ευθύ γεωμετρικό μοντέλο



Πολλαπλασιασμός των κατάλληλων πινάκων στροφής και μετατόπισης:

$$A_1^0 = Tra(x, l_0) \cdot Tra(z, -l_1) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & l_0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -l_1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \Rightarrow$$

$$A_1^0 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & l_0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -l_1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$A_2^1 = Rot(z, q_1) \cdot Tra(x, l_2) = \begin{bmatrix} c_1 & -s_1 & 0 & 0 \\ s_1 & c_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & l_2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \Rightarrow$$

$$A_2^1 = \begin{bmatrix} c_1 & -s_1 & 0 & l_2 c_1 \\ s_1 & c_1 & 0 & l_2 s_1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$A_E^2 = Rot(y, -q_2) \cdot Tra(z, -q_3 - l_3 - l_4) \cdot Rot(x, 180) =$$

$$= \begin{bmatrix} c_2 & 0 & -s_2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ s_2 & 0 & c_2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -q_3-l_3-l_4 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} c_2 & 0 & -s_2 & s_2(q_3+l_3+l_4) \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ s_2 & 0 & c_2 & -c_2(q_3+l_3+l_4) \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c_2 & 0 & s_2 & s_2(q_3+l_3+l_4) \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ s_2 & 0 & -c_2 & -c_2(q_3+l_3+l_4) \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Άρα, $A^0_E = A^0_1 \cdot A^1_2 \cdot A^2_E \Rightarrow$

$$A^0_E = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & l_0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -l_1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_1 & -s_1 & 0 & l_2 c_1 \\ s_1 & c_1 & 0 & l_2 s_1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_2 & 0 & s_2 & s_2(q_3+l_3+l_4) \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ s_2 & 0 & -c_2 & -c_2(q_3+l_3+l_4) \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} c_1 & -s_1 & 0 & l_2 c_1 + l_0 \\ s_1 & c_1 & 0 & l_2 s_1 \\ 0 & 0 & 1 & -l_1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_2 & 0 & s_2 & s_2(q_3+l_3+l_4) \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ s_2 & 0 & -c_2 & -c_2(q_3+l_3+l_4) \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} =$$

$$= \left[\begin{array}{ccc|c} c_1 c_2 & s_1 & c_1 s_2 & c_1 s_2(q_3+l_3+l_4) + l_2 c_1 + l_0 \\ c_2 s_1 & -c_1 & s_1 s_2 & s_1 s_2(q_3+l_3+l_4) + l_2 s_1 \\ s_2 & 0 & -c_2 & -c_2(q_3+l_3+l_4) - l_1 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

Άρα, $$P^0_E = \begin{bmatrix} c_1 s_2(q_3+l_3+l_4) + l_2 c_1 + l_0 \\ s_1 s_2(q_3+l_3+l_4) + l_2 s_1 \\ -c_2(q_3+l_3+l_4) - l_1 \end{bmatrix}$$

και $$R^0_E = \begin{bmatrix} c_1 c_2 & s_1 & c_1 s_2 \\ c_2 s_1 & -c_1 & s_1 s_2 \\ s_2 & 0 & -c_2 \end{bmatrix}$$

όπου, $c_{i\ldots j} = \cos(q_i + \ldots + q_j)$, $s_{i\ldots j} = \sin(q_i + \ldots + q_j)$

και $\cos(q_i + 90^\circ) = -\sin(q_i)$, $\sin(q_i + 90^\circ) = \cos(q_i)$

β) αντίστροφο γεωμετρικό μοντέλο

$$\left.\begin{aligned} p_{Ex} &= c_1 s_2 (q_{r3} + l_3 + l_4) + l_2 c_1 + l_0 = c_1[s_2(q_{r3}+l_3+l_4)+l_2]+l_0 \\ p_{Ey} &= s_1 s_2 (q_{r3}+l_3+l_4) + l_2 s_1 = s_1[s_2(q_{r3}+l_3+l_4)+l_2] \end{aligned}\right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow p_{Ex} = c_1 \cdot \frac{p_{Ey}}{s_1} + l_0 \Rightarrow p_{Ex} = \frac{1}{t_1} p_{Ey} + l_0 \Rightarrow t_1 = \frac{p_{Ey}}{p_{Ex}-l_0} \quad (1) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow q_{r1} = t^{-1}\left(\frac{p_{Ey}}{p_{Ex}-l_0}\right) \Rightarrow \boxed{q_{r1} = at2\left(p_{Ey}, p_{Ex}-l_0\right) \text{ ή } q_{r1} = at2\left(-p_{Ey}, -(p_{Ex}-l_0)\right)}$$

$$\left.\begin{aligned} p_{Ex} &= c_1 s_2(q_{r3}+l_3+l_4)+l_2c_1+l_0 \Rightarrow s_2(q_{r3}+l_3+l_4) = \frac{p_{Ex}-l_0}{c_1} - l_2 \\ p_{Ez} &= -c_2(q_{r3}+l_3+l_4) - l_1 \Rightarrow c_2(q_{r3}+l_3+l_4) = -p_{Ez} - l_1 \end{aligned}\right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{s_2}{c_2} = \frac{\frac{p_{Ex}-l_0}{c_1}-l_2}{-p_{Ez}-l_1} \Rightarrow t_2 = \frac{\frac{p_{Ex}-l_0}{c_1}-l_2}{-p_{Ez}-l_1} \quad (2)$$

▷ Ισχύει ότι $\cos^2(q_{r1}) = \frac{1}{1+\tan^2(q_{r1})} \Leftrightarrow c_1 = \frac{\pm 1}{\sqrt{1+t_1^2}} \overset{(1)}{\Leftrightarrow} c_1 = \pm\frac{1}{\sqrt{1+\left(p_{Ey}/(p_{Ex}-l_0)\right)^2}} \quad (3)$

Άρα $(2) \overset{(3)}{\Rightarrow} t_2 = \frac{\pm(p_{Ex}-l_0)\cdot\sqrt{1+\left(p_{Ey}/(p_{Ex}-l_0)\right)^2} - l_2}{-p_{Ez}-l_1} \Rightarrow$

$$\Rightarrow t_2 = \frac{\mp(p_{Ex}-l_0)\left[\frac{(p_{Ex}-l_0)^2+p_{Ey}^2}{(p_{Ex}-l_0)^2}\right]^{1/2} + l_2}{p_{Ez}+l_1} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow t_2 = \frac{\mp(p_{Ex}-l_0)\cdot\sqrt{(p_{Ex}-l_0)^2+p_{Ey}^2}\cdot\frac{1}{p_{Ex}-l_0}+l_2}{p_{Ez}+l_1} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow t_2 = \frac{\mp\sqrt{(p_{Ex}-l_0)^2+p_{Ey}^2}+l_2}{p_{Ez}+l_1} \Rightarrow q_{r2} = t^{-1}\left(\frac{\mp\sqrt{(p_{Ex}-l_0)^2+p_{Ey}^2}+l_2}{p_{Ez}+l_1}\right) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \boxed{q_{r2} = at2\left(\mp\sqrt{(p_{Ex}-l_0)^2+p_{Ey}^2}, p_{Ez}+l_1\right) \text{ ή } q_{r2} = at2\left(\pm\sqrt{(p_{Ex}-l_0)^2+p_{Ey}^2}-l_2, -(p_{Ez}+l_1)\right)}$$

▷ Τέλος, από το (α) ισχύει ότι:

$$\begin{bmatrix} p_{Ex} \\ p_{Ey} \\ p_{Ez} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c_1 s_2 (q_{r3} + l_3 + l_4) + l_2 c_1 + l_0 \\ s_1 s_2 (q_{r3} + l_3 + l_4) + l_2 s_1 \\ -c_2 (q_{r3} + l_3 + l_4) - l_1 \end{bmatrix} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} p_{Ex} = c_1 s_2 (q_{r3} + l_3 + l_4) + l_2 c_1 + l_0 \\ p_{Ey} = s_1 s_2 (q_{r3} + l_3 + l_4) + l_2 s_1 \\ p_{Ez} = -c_2 (q_{r3} + l_3 + l_4) - l_1 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} p_{Ex} - l_2 c_1 - l_0 = c_1 s_2 (q_{r3} + l_3 + l_4) \\ p_{Ey} - l_2 s_1 = s_1 s_2 (q_{r3} + l_3 + l_4) \\ p_{Ez} + l_1 = -c_2 (q_{r3} + l_3 + l_4) \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} (p_{Ex} - l_2 c_1 - l_0)^2 = c_1^2 s_2^2 (q_{r3} + l_3 + l_4)^2 \\ (p_{Ey} - l_2 s_1)^2 = s_1^2 s_2^2 (q_{r3} + l_3 + l_4)^2 \\ (p_{Ez} + l_1)^2 = c_2^2 (q_{r3} + l_3 + l_4)^2 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} (p_{Ex} - l_0)^2 - 2\cdot(p_{Ex} - l_0)\cdot l_2 \cdot c_1 + l_2^2 c_1^2 = c_1^2 s_2^2 (q_{r3} + l_3 + l_4)^2 \\ p_{Ey}^2 - 2\cdot p_{Ey} \cdot l_2 \cdot s_1 + l_2^2 \cdot s_1^2 = s_1^2 s_2^2 (q_{r3} + l_3 + l_4)^2 \\ p_{Ez}^2 + 2\cdot p_{Ez} \cdot l_1 + l_1^2 = c_2^2 (q_{r3} + l_3 + l_4)^2 \end{cases} \quad (+)$$

$$\Rightarrow (p_{Ex} - l_0)^2 - 2(p_{Ex} - l_0) l_2 c_1 + l_2^2 c_1^2 + p_{Ey}^2 - 2 p_{Ey} \cdot l_2 s_1 + l_2^2 s_1^2 + p_{Ez}^2 + 2 p_{Ez} l_1 + l_1^2 =$$
$$= (c_1^2 s_2^2 + s_1^2 s_2^2 + c_2^2)(q_{r3} + l_3 + l_4)^2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow (p_{Ex} - l_0)^2 - 2\cdot\left[(p_{Ex} - l_0) l_2 c_1 + p_{Ey} \cdot l_2 \cdot s_1 + p_{Ez} \cdot l_1\right] + l_2^2 c_1^2 + p_{Ey}^2 + l_2^2 s_1^2 + p_{Ez}^2 + l_1^2 =$$
$$= \left[\cancel{(c_1^2 + s_1^2)}^{1} \cdot s_2^2 + c_2^2\right](q_{r3} + l_3 + l_4)^2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow (p_{Ex} - l_0)^2 + p_{Ey}^2 + p_{Ez}^2 + l_2^2 (c_1^2 + s_1^2) + l_1^2 - 2\cdot\left[(p_{Ex} - l_0) l_2 c_1 + p_{Ey} l_2 s_1 + p_{Ez} l_1\right] =$$
$$= (s_2^2 + c_2^2)(q_{r3} + l_3 + l_4)^2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow (p_{Ex} - l_0)^2 + p_{Ey}^2 + p_{Ez}^2 + l_1^2 + l_2^2 - 2\left[(p_{Ex} - l_0) l_2 c_1 + p_{Ey} l_2 s_1 + p_{Ez} \cdot l_1\right] = (q_{r3} + l_3 + l_4)^2$$

$$\Rightarrow (p_{Ex}-l_0)^2 + p_{Ey}^2 + p_{Ez}^2 + l_1^2 + l_2^2 - 2\Big[l_2\big[(p_{Ex}-l_0)c_1 + p_{Ey}\,s_1\big] + p_{Ez}\cdot l_1\Big] = (q_{r3} + l_3 + l_4)^2$$

$$\overset{(1)}{\Rightarrow} (p_{Ex}-l_0)^2 + p_{Ey}^2 + p_{Ez}^2 + l_1^2 + l_2^2 - 2\Big[l_2\big[(p_{Ex}-l_0)c_1 + (p_{Ex}-l_0)\cdot t_1\cdot s_1\big] + p_{Ez}\cdot l_1\Big] = (q_{r3} + l_3 + l_4)^2$$

$$\Rightarrow (p_{Ex}-l_0)^2 + p_{Ey}^2 + p_{Ez}^2 + l_1^2 + l_2^2 - 2\Big[l_2\big[(p_{Ex}-l_0)c_1 + (p_{Ex}-l_0)\cdot \frac{s_1^2}{c_1}\big] + p_{Ez}\cdot l_1\Big] = (q_{r3} + l_3 + l_4)^2$$

$$\Rightarrow (p_{Ex}-l_0)^2 + p_{Ey}^2 + p_{Ez}^2 + l_1^2 + l_2^2 - 2\Big[l_2\cdot(p_{Ex}-l_0)\cdot\Big(c_1 + \frac{1-c_1^2}{c_1}\Big) + p_{Ez}\cdot l_1\Big] = (q_{r3} + l_3 + l_4)^2$$

$$\Rightarrow (p_{Ex}-l_0)^2 + p_{Ey}^2 + p_{Ez}^2 + l_1^2 + l_2^2 - 2\Big[l_2\,(p_{Ex}-l_0)\cdot\frac{1}{c_1} + p_{Ez}\cdot l_1\Big] = (q_{r3} + l_3 + l_4)^2$$

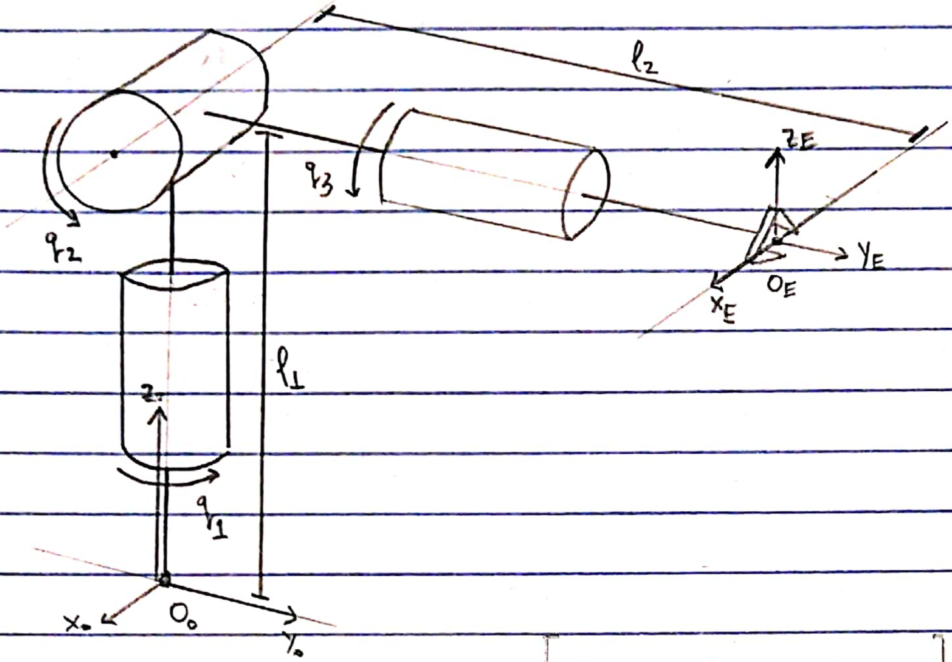
$$\overset{(2)}{\Rightarrow} (p_{Ex}-l_0)^2 + p_{Ey}^2 + p_{Ez}^2 + l_1^2 + l_2^2 - 2\Bigg[l_2\cdot\cancel{(p_{Ex}-l_0)}\Bigg(\pm\frac{\sqrt{(p_{Ex}-l_0)^2 + p_{Ey}^2}}{\cancel{p_{Ex}-l_0}}\Bigg) + p_{Ez}\cdot l_1\Bigg] = (q_{r3} + l_3 + l_4)^2$$

$$\Rightarrow (p_{Ex}-l_0)^2 + p_{Ey}^2 + p_{Ez}^2 + l_1^2 + l_2^2 - 2\Big[\pm l_2\sqrt{(p_{Ex}-l_0)^2 + p_{Ey}^2} + p_{Ez}\cdot l_1\Big] = (q_{r3} + l_3 + l_4)^2$$

$$\Rightarrow \boxed{q_{r3} = -l_3 - l_4 \pm \Big[(p_{Ex}-l_0)^2 + p_{Ey}^2 + p_{Ez}^2 + l_1^2 + l_2^2 - 2\Big[\pm l_2\sqrt{(p_{Ex}-l_0)^2 + p_{Ey}^2} + p_{Ez}\cdot l_1\Big]\Big]^{1/2}}$$

Άσκηση 1.3

Ρομποτικός μηχανισμός με 3 στροφικές αρθρώσεις



$$A_1^0 = Rot(z, q_1) \cdot Tra(z, l_1) = \begin{bmatrix} c_1 & -s_1 & 0 & 0 \\ s_1 & c_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & l_1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} c_1 & -s_1 & 0 & 0 \\ s_1 & c_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & l_1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

$$A_E^1 = Rot(x, q_2) \cdot Rot(y, q_3) \cdot Tra(y, l_2) =$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & c_2 & -s_2 & 0 \\ 0 & s_2 & c_2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_3 & 0 & s_3 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -s_3 & 0 & c_3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & l_2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & c_2 & -s_2 & 0 \\ 0 & s_2 & c_2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_3 & 0 & s_3 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & l_2 \\ -s_3 & 0 & c_3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c_3 & 0 & s_3 & 0 \\ s_2 s_3 & c_2 & -s_2 c_3 & l_2 c_2 \\ -c_2 s_3 & s_2 & c_2 c_3 & l_2 s_2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Οπότε, $A_E^0 = A_1^0 \cdot A_E^1 = \begin{bmatrix} c_1 & -s_1 & 0 & 0 \\ s_1 & c_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & l_1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_3 & 0 & s_3 & 0 \\ s_2 s_3 & c_2 & -s_2 c_3 & l_2 c_2 \\ -c_2 s_3 & s_2 & c_2 c_3 & l_2 s_2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} =$

$$= \left[\begin{array}{ccc|c} c_1 c_3 - s_1 s_2 s_3 & -s_1 c_2 & c_1 s_3 + s_1 s_2 c_3 & -s_1 l_2 c_2 \\ s_1 c_3 + c_1 s_2 s_3 & c_1 c_2 & s_1 s_3 - c_1 s_2 c_3 & c_1 l_2 c_2 \\ -c_2 s_3 & s_2 & c_2 c_3 & l_2 s_2 + l_1 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

Άρα, $P_E^0 = \begin{pmatrix} p_{Ex} \\ p_{Ey} \\ p_{Ez} \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} -s_1 l_2 c_2 \\ c_1 l_2 c_2 \\ l_2 s_2 + l_1 \end{bmatrix}$

▷ $\begin{cases} p_{Ex} = -s_1 l_2 c_2 \\ p_{Ey} = c_1 l_2 c_2 \\ p_{Ez} = l_2 s_2 + l_1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} p_{Ex} = -s_1 l_2 c_2 \\ p_{Ey} = c_1 l_2 c_2 \\ p_{Ez} - l_1 = l_2 s_2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} p_{Ex}^2 = s_1^2 l_2^2 c_2^2 \\ p_{Ey}^2 = c_1^2 l_2^2 c_2^2 \\ (p_{Ez} - l_1)^2 = l_2^2 s_2^2 \end{cases} (+)$

$$p_{Ex}^2 + p_{Ey}^2 + (p_{Ez} - l_1)^2 = s_1^2 l_2^2 c_2^2 + c_1^2 l_2^2 c_2^2 + l_2^2 s_2^2$$
$$p_{Ex}^2 + p_{Ey}^2 + (p_{Ez} - l_1)^2 = l_2^2 \left[\cancel{(s_1^2 + c_1^2)} c_2^2 + s_2^2 \right]$$
$$p_{Ex}^2 + p_{Ey}^2 + (p_{Ez} - l_1^2) = l_2^2$$
$$l_2 = \pm \left[p_{Ex}^2 + p_{Ey}^2 + (p_{Ez} - l_1)^2 \right]^{1/2}$$

▷ Επίσης, είναι γνωστό ότι

$$\begin{bmatrix} n_x & o_x & a_x & p_x \\ n_y & o_y & a_y & p_y \\ n_z & o_z & a_z & p_z \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c_1 c_3 - s_1 s_2 s_3 & -s_1 c_2 & c_1 s_3 + s_1 s_2 c_3 & -s_1 l_2 c_2 \\ s_1 c_3 + c_1 s_2 s_3 & c_1 c_2 & s_1 s_3 - c_1 s_2 c_3 & c_1 l_2 c_2 \\ -c_2 s_3 & s_2 & c_2 c_3 & l_2 s_2 + l_1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Έπειτα, πολλαπλασιάζοντας με τον αντίστροφο του πίνακα (που έχει μέσα τα $c_1, -s_1$) προκύπτουν απλούστερες εξισώσεις. Δηλαδή:

$$\begin{bmatrix} c_1 & -s_1 & 0 & 0 \\ s_1 & c_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & l_1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}^{-1} \cdot \begin{bmatrix} n_x & o_x & a_x & p_x \\ n_y & o_y & a_y & p_y \\ n_z & o_z & a_z & p_z \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c_3 & 0 & s_3 & 0 \\ s_2 s_3 & c_2 & -s_2 c_3 & l_2 c_2 \\ -c_2 s_3 & s_2 & c_2 c_3 & l_2 s_2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{bmatrix} c_1 \cdot n_x + s_1 \cdot n_y & c_1 \cdot o_x + s_1 \cdot o_y & c_1 \cdot a_x + s_1 \cdot a_y \\ -s_1 \cdot n_x + c_1 \cdot n_y & -s_1 \cdot o_x + c_1 \cdot o_y & -s_1 a_x + c_1 \cdot a_y \\ n_z & o_z & a_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c_3 & 0 & s_3 \\ s_2 s_3 & c_2 & -s_2 c_3 \\ -c_2 s_3 & s_2 & c_2 c_3 \end{bmatrix}$$

Οπότε,

- $c_1 \cdot o_x + s_1 \cdot o_y = 0 \Rightarrow s_1 \cdot o_y = -c_1 \cdot o_x \Rightarrow t_1 = -\dfrac{o_x}{o_y}$

- $\left.\begin{aligned} c_1 \cdot n_x + s_1 \cdot n_y &= c_3 \\ c_1 \cdot a_x + s_1 \cdot a_y &= s_3 \end{aligned}\right\} \overset{(:)}{\Rightarrow} \dfrac{c_1 n_x + s_1 n_y}{c_1 a_x + s_1 a_y} = \dfrac{c_3}{s_3} \Rightarrow$

  $\Rightarrow \dfrac{n_x + t_1 \cdot n_y}{a_x + t_1 \cdot a_y} = \dfrac{1}{t_3} \Rightarrow t_3 = \dfrac{a_x + t_1 \cdot a_y}{n_x + t_1 \cdot n_y}$

- $\left.\begin{aligned} -s_1 \cdot o_x + c_1 \cdot o_y &= c_2 \\ o_z &= s_2 \end{aligned}\right\} \overset{(:)}{\Rightarrow} \dfrac{-s_1 \cdot o_x + c_1 \cdot o_y}{o_z} = \dfrac{c_2}{s_2} \Rightarrow$

  $\Rightarrow \dfrac{-t_1 \cdot o_x + o_y}{c_1 \cdot o_z} = \dfrac{1}{t_2} \Rightarrow t_2 = \dfrac{c_1 \cdot o_z}{-t_1 \cdot o_x + o_y}$

Και τέλος, με atan2 ή με arctan $(= t^{-1})$ προκύπτουν οι γωνίες.