



Εθνικό Μετσόβιο Πολυτεχνείο

Σχολή Ηλεκτρολόγων Μηχανικών και Μηχανικών Υπολογιστών

Τομέας Τεχνολογίας Πληροφορικής και Υπολογιστών

Αλγόριθμοι και Πολυπλοκότητα

Διδάσκοντες: Δημήτρης Φωτάκης, Δώρα Σούλιου, Θανάσης Λιανέας

2η Σειρά Προγραμματιστικών Ασκήσεων - Ημ/νία Παράδοσης 21/12/2020

Άσκηση 1: Χημικά Απόβλητα

Σε ένα χημικό εργαστήριο, υπάρχουν N διαφορετικές ουσίες που αποτελούν επικίνδυνα απόβλητα πειραμάτων και πρέπει να τοποθετηθούν σε K μεταλλικές φιάλες για να μεταφερθούν με ασφάλεια σε ειδικό χώρο εκτός του εργαστηρίου. Οι ουσίες είναι αριθμημένες από το 1 μέχρι το N και, για λόγους ασφαλείας, πρέπει να τοποθετηθούν στις φιάλες με αυτή τη σειρά και με τη συνολική ποσότητα κάθε ουσίας να βρίσκεται σε μία μόνο φιάλη. Οι φιάλες είναι αρκετά μεγάλες και η συνολική ποσότητα κάθε ουσίας αρκετά μικρή ώστε να μην υπάρχουν προβλήματα χωρητικότητας (δηλ. ακόμη και όλες οι ουσίες θα μπορούσαν να χωρέσουν στην ίδια φιάλη). Υπάρχει όμως ο κίνδυνος χημικής αντίδρασης μεταξύ των ουσιών στην ίδια φιάλη, οπότε και εκλύονται σημαντικά ποσά ενέργειας. Συγκεκριμένα, για κάθε ζευγάρι ουσιών i και j που βρίσκονται στην ίδια φιάλη, η χημική αντίδραση μεταξύ τους παράγει ενέργεια ίση με $A[i, j]$ μονάδες.

Με βάση τα παραπάνω, η διαδικασία που ακολουθούν οι υπεύθυνοι του εργαστηρίου για τη συσκευασία των ουσιών είναι η εξής: Οι πρώτες t_1 ουσίες στη σειρά τοποθετούνται στην πρώτη φιάλη, οι επόμενες t_2 ουσίες στη δεύτερη φιάλη, κ.ο.κ., μέχρι να τοποθετηθούν όλες οι ουσίες στις K φιάλες. Έτσι, η ενέργεια που μπορεί να παραχθεί από τη χημική αντίδραση των ουσιών στην πρώτη φιάλη είναι $\sum_{1 \leq i < j \leq t_1} A[i, j]$, για την δεύτερη φιάλη είναι $\sum_{t_1+1 \leq i < j \leq t_2} A[i, j]$, κ.ο.κ. Η συνολική ενέργεια που θα μπορούσε να παραχθεί από την χημική αντίδραση των ουσιών σε όλες τις K φιάλες είναι το άθροισμα των παραπάνω ποσοτήτων. Για λόγους ασφαλείας κατά τη μεταφορά των ουσιών, οι υπεύθυνοι του εργαστηρίου θέλουν να προσδιορίσουν τους δείκτες t_1, t_2, \dots, t_{K-1} των ουσιών όπου θα γίνεται αλλαγή φιάλης, ώστε η συνολική ενέργεια που μπορεί να εκλυθεί από όλες τις φιάλες να είναι η ελάχιστη δυνατή. Χρειάζεται να γράψετε ένα πρόγραμμα για αυτόν τον σκοπό.

Δεδομένα Εισόδου: Αρχικά, το πρόγραμμα θα διαβάζει από το standard input δύο θετικούς ακέραιους N και K που αντιπροσωπεύουν το πλήθος των ουσιών και το πλήθος των φιαλών. Στη συνέχεια, το πρόγραμμα θα διαβάζει $N-1$ γραμμές, η i -οστή από τις οποίες θα περιέχει $N-i$ ακεραίους χωρισμένους με κενά. Ο j -οστός ακέραιος της i -οστής γραμμής αντιστοιχεί στην ενέργεια $A[i, j+i]$ (ο πίνακας A είναι συμμετρικός ως προς τη διαγώνιο, δηλ. $A[i, j] = A[j, i]$ για κάθε $1 \leq i < j \leq N$, και η διαγώνιος έχει μηδενικά στοιχεία, δηλ. $A[i, i] = 0$ για κάθε $1 \leq i \leq N$).

Δεδομένα Εξόδου: Το πρόγραμμα πρέπει να τυπώνει στο standard output (στην πρώτη γραμμή) έναν ακέραιο που αντιστοιχεί στο ελάχιστο ποσό ενέργειας που μπορεί να εκλυθεί¹.

Περιορισμοί:

Παράδειγμα Εισόδου:

Παράδειγμα Εξόδου:

$$0 \leq A[i, j] \leq 99$$

$$3 \ 2$$

$$3$$

$$1 \leq K \leq 500$$

$$3 \ 2$$

$$K \leq N \leq 1500$$

$$4$$

Όριο χρόνου εκτέλεσης: 1 sec. Όριο μνήμης: 64 MB.

Bonus: Θα υπάρχουν αρχεία εισόδου με $1 \leq K \leq 700$ και $K \leq N \leq 2500$

¹ **Εξήγηση παραδείγματος:** Αν βάλουμε τις ουσίες 1 και 2 στην πρώτη φιάλη και την ουσία 3 στη δεύτερη φιάλη, τότε μπορεί να εκλυθεί ενέργεια ίση με $A[1, 2] = 3$. Από την άλλη, αν βάλουμε την ουσία 1 στην πρώτη φιάλη και τις ουσίες 2 και 3 στη δεύτερη φιάλη, τότε μπορεί να εκλυθεί ενέργεια ίση με $A[2, 3] = 4$. Συνεπώς η πρώτη είναι η καλύτερη επιλογή και η απάντηση είναι 3.

Άσκηση 2: Αγορές στο Φαράγγι

Την ερχόμενη εβδομάδα γίνεται το μεγάλο Χριστουγεννιάτικο παζάρι του φαραγγιού, και δεν θέλετε να χάσετε την ευκαιρία να αγοράσετε στρατιωτικό εξοπλισμό, ώστε να εμφανιστείτε απόλυτα έτοιμοι στην μάχη του Ιανουαρίου. Ο εξοπλισμός αποτελείται από μια πανοπλία, ένα ξίφος και μια ασπίδα. Συμβολίζουμε αυτά τα αντικείμενα με A για την πανοπλία, B για το ξίφος και C για την ασπίδα. Υπάρχουν 3 έμποροι που πουλάνε στρατιωτικό εξοπλισμό (τους οποίους, για ευκολία, συμβολίζουμε με 1, 2 και 3 αντίστοιχα). Κάθε έμπορος μπορεί να πουλάει ένα ή περισσότερα αντικείμενα οποιουδήποτε τύπου.

Για να είστε σίγουροι ότι θα μπορείτε να πολεμήσετε κάθε μέρα, έχετε υπολογίσει ότι χρειάζεστε τουλάχιστον N πλήρη σετ εξοπλισμού (δηλαδή τουλάχιστον N αντικείμενα από καθέναν από τους τύπους A , B και C). Όμως τα αντικείμενα που πωλούνται από διαφορετικούς έμπορους μπορεί να μην είναι συμβατά μεταξύ τους. Οπότε ως πλήρες σετ εξοπλισμού λογίζεται κάθε τριάδα αντικειμένων A , B και C που έχει αγοραστεί από τον ίδιο έμπορο (δηλ. δεν μπορείτε να συμπληρώσετε ένα σετ εξοπλισμού αγοράζοντας πανοπλία από τον έμπορο 1, και ξίφος και ασπίδα από τον έμπορο 2).

Κάθε έμπορος ανακοινώνει στην αρχή του παζαριού τις προσφορές του, δηλαδή πόσα αντικείμενα κάθε είδους πουλάει και σε ποια τιμή. Συνήθως ο ίδιος έμπορος πουλάει πολλά διαφορετικά (ξένα μεταξύ τους) σύνολα του ίδιου αντικειμένου σε διαφορετική τιμή (π.χ., μπορεί ο έμπορος 1 να πουλάει 3 πανοπλίες, βλ. αντικείμενα τύπου 1A, σε τιμή 100 και άλλες 4 πανοπλίες σε τιμή 800. Τα αντικείμενα στα οποία αναφέρονται οι προσφορές πωλούνται αναγκαστικά όλα μαζί, ως ενιαία σύνολα (δηλ. αν χρειάζεται να αγοράσετε μία ή περισσότερες πανοπλίες από τον έμπορο 1, πρέπει να αγοράσετε είτε και τις 3 πανοπλίες 1A στην τιμή 100, είτε και τις 4 πανοπλίες 1A στην τιμή 800, είτε και τις 7 πανοπλίες μαζί στην τιμή 900).

Θέλετε λοιπόν να υπολογίσετε το ελάχιστο ποσό που χρειάζεται να διαθέσετε για την αγορά πλήρων σετ στρατιωτικού εξοπλισμού.

Δεδομένα Εισόδου: Αρχικά, το πρόγραμμά σας θα διαβάζει από το standard input δύο θετικούς ακέραιους N και M που αντιπροσωπεύουν το πλήθος των πλήρων σετ στρατιωτικού εξοπλισμού που θέλετε να αγοράσετε και το πλήθος των προσφορών των εμπόρων, αντίστοιχα. Καθεμία από τις επόμενες M γραμμές θα περιέχει περιλαμβάνει μια έκφραση της μορφής: $xy A P$, όπου το $x \in \{1, 2, 3\}$ δηλώνει τον έμπορο που πουλάει το αντικείμενο $y \in \{A, B, C\}$, ενώ το A δηλώνει το πλήθος των αντικειμένων τύπου xy και το P τη συνολική τιμή των A αντικειμένων (που πωλούνται ως ενιαίο σύνολο).

Δεδομένα Εισόδου: Το πρόγραμμά σας πρέπει να τυπώνει στο standard output (στην πρώτη γραμμή) έναν ακέραιο που αντιστοιχεί στο ελάχιστο ποσό που χρειάζεται να διαθέσετε για την αγορά πλήρων σετ στρατιωτικού εξοπλισμού. Σε περίπτωση που η αγορά N πλήρων σετ εξοπλισμού δεν είναι εφικτή, η έξοδος πρέπει να είναι -1^2 .

Περιορισμοί:

$$0 \leq N \leq 5000$$

$$1 \leq M \leq 1500$$

$$1 \leq P \leq 10^6$$

$$1 \leq A \leq 10$$

Όριο χρόνου εκτέλεσης: 1 sec.

Όριο μνήμης: 64 MB.

Παράδειγμα Εισόδου:

10	8
1A	3 100
1A	4 800
1B	5 125
1C	7 375
2A	5 500
2B	6 900
2C	5 400
3C	7 60

Παράδειγμα Εξόδου:

3200

² **Εξήγηση 1ου παραδείγματος:** Αγοράζουμε 5 πλήρη σετ εξοπλισμού από τον έμπορο 1 με συνολικό κόστος $100 + 800 + 125 + 375 = 1400$ και άλλα 5 πλήρη σετ εξοπλισμού από τον έμπορο 2 με συνολικό κόστος $500 + 900 + 400 = 1800$.