<u>ΕΘΝΙΚΟ ΜΕΤΣΟΒΙΟ ΠΟΛΥΤΕΧΝΕΙΟ</u>

<u>ΣΧΟΛΗ ΗΛΕΚΤΡΟΛΟΓΩΝ ΜΗΧΑΝΙΚΩΝ ΚΑΙ ΜΗΧΑΝΙΚΩΝ ΥΠΟΛΟΓΙΣΤΩΝ</u>

<u>ΤΕΧΝΗΤΗ ΝΟΗΜΟΣΥΝΗ</u>

(2020-2021)

2^{η} Σειρά Γραπτών Ασκήσεων

<u>Ονοματεπώνυμο</u>:

- Χρήστος Τσούφης

<u>Αριθμός Μητρώου</u>:

- 03117176

<u>Στοιχεία Επικοινωνίας</u>:

- el17176@mail.ntua.gr

$1^η$ Άσκηση

Μετατροπή σε κανονική συζευκτική μορφή:

1. $p \Rightarrow (\neg (q \Rightarrow (r \vee (s \Rightarrow (t_1 \wedge t_2)))))$
   $\neg p \vee (\neg (q \Rightarrow (r \vee (s \Rightarrow (t_1 \wedge t_2)))))$
   $\neg p \vee (\neg (\neg q \vee (r \vee (s \Rightarrow (t_1 \wedge t_2)))))$
   $\neg p \vee (\neg (\neg q \vee (r \vee (\neg s \vee (t_1 \wedge t_2)))))$
   $\neg p \vee (q \vee \neg (r \vee (\neg s \vee (t_1 \wedge t_2))))$
   $\neg p \vee (q \vee (\neg r \wedge (s \wedge \neg (t_1 \wedge t_2))))$
   $(\neg p \vee q) \wedge (\neg p \vee (\neg r \wedge (s \wedge \neg (t_1 \wedge t_2))))$
   $(\neg p \vee q) \wedge (\neg p \vee (\neg r \wedge (s \wedge (\neg t_1 \vee \neg t_2))))$
   $(\neg p \vee q) \wedge ((\neg p \vee \neg r) \wedge (\neg p \vee (s \wedge (\neg t_1 \vee \neg t_2))))$
   $(\neg p \vee q) \wedge (\neg p \vee \neg r) \wedge ((\neg p \vee s) \wedge (\neg p \vee (\neg t_1 \vee \neg t_2)))$
   $(\neg p \vee q) \wedge (\neg p \vee \neg r) \wedge (\neg p \vee s) \wedge (\neg p \vee \neg t_1 \vee \neg t_2)$
   $[\neg p, q], [\neg p, \neg r], [\neg p, s], [\neg p, \neg t_1, \neg t_2]$

2. $\exists x. \forall y. \forall z. (A(x, y, z) \wedge \neg B(z) \Rightarrow \neg (\forall w. (C(x, w, z) \vee \neg K(w))))$
   $\exists x. \forall y. \forall z. (\neg (A(x, y, z) \wedge \neg B(z)) \vee \neg (\forall w. (C(x, w, z) \vee \neg K(w))))$
   $\exists x. \forall y. \forall z. ((\neg A(x, y, z) \vee B(z)) \vee (\neg (\forall w. (C(x, w, z) \vee \neg K(w)))))$
   $\exists x. \forall y. \forall z. ((\neg A(x, y, z) \vee B(z)) \vee (\exists w. (\neg C(x, w, z) \wedge K(w))))$
   Θέτοντας, $x = c$ & $w = f(y, z)$
   $(\neg A(c, y, z) \vee B(z)) \vee (\neg C(c, f(y, z), z) \wedge K(f(y, z)))$
   $(\neg A(c, y, z) \vee B(z) \vee \neg C(c, f(y, z), z)) \wedge (\neg A(c, y, z) \vee B(z) \vee K(f(y, z)))$
   $[\neg A(c, y, z), B(z), \neg C(c, f(y, z), z)], [\neg A(c, y, z), B(z), K(f(y, z))]$

$2^η$ Άσκηση

Δίνονται οι εξής προτάσεις:

1. $\forall x. R(x, x)$ (ανακλαστική)
2. $\forall x. \forall y. (R(x, y) \Rightarrow R(y, x))$ (συμμετρική)
3. $\forall x. \forall y. \forall z. (R(x, y) \wedge R(y, z) \Rightarrow R(x, z))$ (μεταβατική)

Για κάθε ζεύγος προτάσεων, έχει βρεθεί, ένα μοντέλο που ικανοποιεί τις δύο αλλά δεν ικανοποιεί την τρίτη. Αναλυτικότερα,

<u>$1^η$ Περίπτωση: Μοντέλο που ικανοποιεί τις (2) & (3) όχι όμως την (1) (δίνονται **δύο** παραδείγματα)</u>

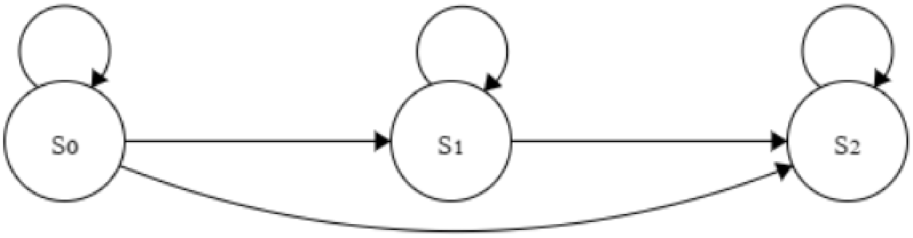
- Στο $\mathbb{N}$ ορίζεται η σχέση $R(x, y) = x \sim y \Leftrightarrow x*y \neq 0$.
  - Ισχύει η συμμετρική (λ.χ. $4*3 = 12 \neq 0$ & $3*4 = 12 \neq 0$).
  - Ισχύει η μεταβατική (λ.χ. $4*3 = 12 \neq 0$ & $3*2 = 6 \neq 0 \Rightarrow 4*2 = 8 \neq 0$).
  - Δεν ισχύει η ανακλαστική (λ.χ. $0*0 = 0$ ή $0 \nsim 0$).

- Έστω $P = \{x, y, z\}$ & $R = \{(x, y), (y, z), (x, z), (y, x), (z, y), (z, x)\}$.
  - Ισχύει η συμμετρική (λ.χ. $(x, y) \in R$ & $(y, x) \in R$).
  - Ισχύει η μεταβατική (λ.χ. $(x, y) \in R$ & $(y, z) \in R \Rightarrow (x, z) \in R$).
  - Δεν ισχύει η ανακλαστική (λ.χ. $(x, x) \notin R$).

<u>$2^η$ Περίπτωση: Μοντέλο που ικανοποιεί τις (1) & (3) όχι όμως την (2) (δίνονται **τρία** παραδείγματα)</u>

- Στο ℕ ορίζεται η σχέση $R(x, y) \Leftrightarrow x - y \geq 0$.
  - Ισχύει η ανακλαστική (λ.χ. $7 - 7 \geq 0$).
  - Ισχύει η μεταβατική (λ.χ. $8 - 5 = 3 > 0$ & $5 - 1 = 4 > 0 \Rightarrow 8 - 1 = 7 > 0$).
  - Δεν ισχύει η συμμετρική (λ.χ. $5 - 7 = -2 < 0$).

- Δίνεται λ.χ. το παρακάτω FSM:



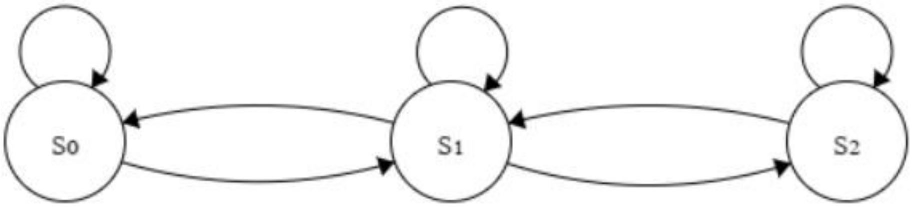
  - Ισχύει η ανακλαστική (αφού υπάρχουν οι σχέσεις (s_0, s_0), (s_1, s_1), (s_2, s_2)).
  - Ισχύει η μεταβατική (αφού υπάρχουν οι σχέσεις (s_0, s_1), (s_1, s_2), (s_0, s_2)).
  - Δεν ισχύει η συμμετρική (αφού δεν υπάρχουν οι (s_1, s_0), (s_2, s_1), (s_2, s_0)).

- Έστω $P = \{x, y, z\}$ & $R = \{(x, x), (y, y), (z, z), (x, y), (y, z), (x, z)\}$.
  - Ισχύει η ανακλαστική (λ.χ. $(x, x) \in R$).
  - Ισχύει η μεταβατική (λ.χ. $(x, y) \in R$ & $(y, z) \in R \Rightarrow (x, z) \in R$).
  - Δεν ισχύει η συμμετρική (λ.χ. $(x, y) \in R$ & $(y, x) \notin R$).

<u>$3^η$ Περίπτωση: Μοντέλο που ικανοποιεί τις (1) & (2) όχι όμως την (3) (δίνονται **δύο** παραδείγματα)</u>

- Στο $\mathbb{N} - \{0, 1\}$ ορίζεται η σχέση $R(x, y) \Leftrightarrow GCD(x, y) > 1$.
  - Ισχύει η ανακλαστική (λ.χ. $GCD(2, 2) = 2 > 1$).
  - Ισχύει η συμμετρική (λ.χ. $GCD(3, 6) = 3 > 1$ & $GCD(6, 3) = 3 > 1$).
  - Δεν ισχύει η μεταβατική (λ.χ. $GCD(4, 20) = 4 > 1$ & $GCD(20, 5) = 5 > 1 \Rightarrow GCD(4, 5) = 1$).

- Δίνεται λ.χ. το παρακάτω FSM:



  - Ισχύει η ανακλαστική (αφού υπάρχουν οι σχέσεις (s_0, s_0), (s_1, s_1), (s_2, s_2)).
  - Ισχύει η συμμετρική (αφού υπάρχουν οι σχέσεις (s_1, s_0), (s_2, s_1), (s_2, s_0)).
  - Δεν ισχύει η μεταβατική (αφού δεν υπάρχουν οι σχέσεις (s_0, s_1), (s_1, s_2), (s_0, s_2)).

Το <u>συμπέρασμα</u> που προκύπτει από τις παραπάνω προτάσεις είναι ότι καμία δεν αποτελεί λογική συνέπεια των άλλων προτάσεων.

<u>3η Άσκηση</u>

Χρησιμοποιώντας τον Αλγόριθμο της Ανάλυσης, ελέγχεται εάν:

a) *(1), (2), (3)* $\models$ *(4)*

<u>1ος Τρόπος</u>:
Αρχικά, μετατρέπονται οι προτάσεις σε CNF:

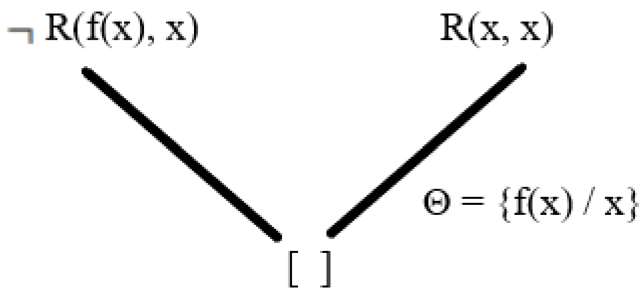
1. $\forall x. (R(x, x) \Rightarrow \forall y. R(x, y))$
   $\forall x. (\neg R(x, x) \vee \forall y. R(x, y))$
   $\neg R(x, x) \vee R(x, y)$
   $[\neg R(x, x), R(x, y)]$

2. $\forall x. \forall y. (R(x, y) \Rightarrow R(y, x))$
   $\forall x. \forall y. (\neg R(x, y) \vee R(y, x))$
   $\neg R(x, y) \vee R(y, x))$
   $[\neg R(x, y), R(y, x)]$

3. $\forall x. \exists y. \neg R(y, x)$
   $\forall x. \neg R(f(x), x)$
   $[\neg R(f(x), x)]$

Έπειτα, εισάγεται η άρνηση της προς απόδειξης πρότασης (4) στο σύνολο και εφαρμόζεται ο Αλγόριθμος της Ανάλυσης μέχρι το σύστημα να εξάγει κενή πρόταση.

4. $\neg \forall x. \neg R(x, x)$
   $[R(x, x)]$



Η κατάληξη είναι μια κενή πρόταση, άρα άτοπο. Αυτό σημαίνει ότι οι (1) $\wedge$ (2) $\wedge$ (3) $\neg$ (4) δεν ικανοποιείται οπότε (1), (2), (3) $\models$ (4).

■

<u>2ος Τρόπος</u>:
$K = \{[\neg R(x, x), R(x, y)], [\neg R(x, y), R(y, x)], [\neg R(f(x), x)]\}$
Και προσθέτοντας την άρνηση του (4): $[R(x, x)]$ προκύπτει:
(1), $[R(x, x)] \models R(x, y)$ (5)
(1), (2) $\models [\neg R(x, x), R(y, x)]$ (6)
(2), (5) $\models R(y, x)$ (7)
(3) $_{f(x)/y}$, (7) $\models [\ ]$
Άρα η (4) είναι αναλυθέν των (1), (2), (3).

b) *(1), (3), (4)* $\vDash$ *(2)*

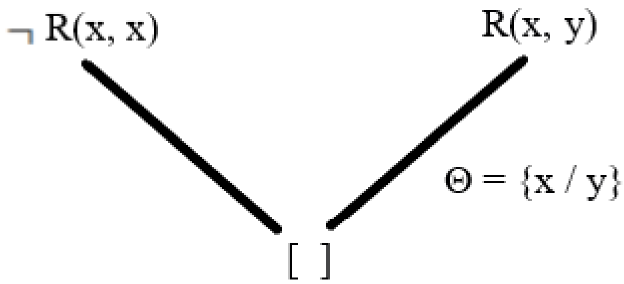
1^{ος} Τρόπος:
Αρχικά, μετατρέπονται οι προτάσεις σε CNF:
1. Από το (a): $[\neg R(x, x), R(x, y)]$

3. Από το (a): $[\neg R(f(x), x)]$

4. $\forall x.\ \neg R(x, x)$
   $[\neg R(x, x)]$

Έπειτα, εισάγεται η άρνηση της προς απόδειξης πρότασης (2) στο σύνολο και εφαρμόζεται ο Αλγόριθμος της Ανάλυσης μέχρι το σύστημα να εξάγει κενή πρόταση.

2. $\neg \forall x.\ \forall y.\ (R(x, y) \Rightarrow R(y, x))$
   $\neg \forall x.\ \forall y.\ (\neg R(x, y) \vee R(y, x))$
   $\forall x.\ \forall y.\ (R(x, y) \wedge \neg R(y, x))$
   $(R(x, y) \wedge \neg R(y, x))$
   $[(R(x, y)], [\neg R(y, x)]$



Η κατάληξη είναι μια κενή πρόταση, άρα άτοπο. Αυτό σημαίνει ότι οι $(1) \wedge (3) \wedge (4) \neg (2)$ δεν ικανοποιείται οπότε όχι (1), (3), (4) $\vDash$ (2).

■

2^{ος} Τρόπος:
$K = \{[\neg R(x, x), R(x, y)], [\neg R(f(x), x)], [\neg R(x, x)]\}$
Και προσθέτοντας την άρνηση του (2): $[(R(x, y)], [\neg R(y, x)]$ προκύπτει:
$\{[(R(p, q)], [\neg R(q, p)]\}\ \{(\neg 2p)(\neg 2q)\}$
$(1)_{x/p\ y/q}, (\neg 2q) \vDash \neg R(p, p)$ (5)

Άρα η (2) δεν είναι αναλυθέν των (1), (3), (4).

4^{η} Άσκηση

Δίνονται οι εξής προτάσεις οι οποίες παρακάτω διατυπώνονται σε λογική πρώτης τάξης:
1. Καμία χώρα δεν συνορεύει με τον εαυτό της.
2. Όλες οι χώρες συνορεύουν με τουλάχιστον μία άλλη χώρα.
3. Μερικές χώρες συνορεύουν με περισσότερες από τρεις άλλες χώρες.
4. Υπάρχουν τουλάχιστον δύο χώρες που συνορεύουν μόνο μεταξύ τους.
5. Μερικές χώρες συνορεύουν μόνο με χώρες που έχουν όλες μεγαλύτερη έκταση από αυτές.

Θεωρώντας ότι η γλώσσα διαθέτει τα κατηγορήματα (με τις προφανείς ερμηνείες):
Χώρα(x) συνορεύειΜε(x, y) ΜεγαλύτεροΑπό(x, y)
και τη συνάρτηση (με τις προφανείς ερμηνείες):
έκταση(x)
και τις σταθερές για τις χώρες και τις αριθμητικές τιμές των εκτάσεων, προκύπτουν τα παρακάτω:

1. 1^{η} Γραφή:
   ¬ (∃x.: Χώρα(x) ∧ συνορεύειΜε(x, x))
   2^{η} Γραφή:
   ∀x. (Χώρα(x) ⇒ ∀y. (Χώρα(y) ∧ συνορεύειΜε(x, y) ∧ (x ≠ y)))

2. 1^{η} Γραφή:
   ∀x. Χώρα(x) ∃y. Χώρα(y). συνορεύειΜε(x, y)
   2^{η} Γραφή:
   ∀x. (Χώρα(x) ⇒ ∃y. (Χώρα(y) ∧ συνορεύειΜε(x, y) ∧ (x ≠ y)))

3. 1^{η} γραφή:
   ∃x. (∃y. ∃z. ∃w. Χώρα(x) ∧ Χώρα(y) ∧ Χώρα(z) ∧
   (y ≠ z) ∧ (y ≠ w) ∧ (z ≠ w) ∧
   συνορεύειΜε(x, y) ∧ συνορεύειΜε(x, z) ∧ συνορεύειΜε(x, w))
   2^{η} Γραφή:
   ∃x. (Χώρα(x) ⇒ ∃y. ∃z. ∃w. ∃t. (Χώρα(y) ∧ Χώρα(z) ∧ Χώρα(w) ∧ Χώρα(t) ∧
   (y ≠ x) ∧ (y ≠ z) ∧ (t ≠ w) ∧ (z ≠ w) ∧
   συνορεύειΜε(x, y) ∧ συνορεύειΜε(x, z) ∧ συνορεύειΜε(x, w) ∧ συνορεύειΜε(x, t))

4. 1^{η} γραφή:
   ∃x. ∃y. (Χώρα(x) ∧ Χώρα(y) ∧ ∀z. (συνορεύειΜε(x, z) ⇒ z = y) ∧ (συνορεύειΜε(y, z) ⇒ z = x))
   2^{η} γραφή:
   ∃x. ∃y. (Χώρα(x) ∧ Χώρα(y) ⇒
   ∀z. (Χώρα(z) ∧ ((συνορεύειΜε(x, z) ∧ (z = y)) ∨ (συνορεύειΜε(y, z) ∧ (z = x)))))

5. 1^{η} γραφή:
   ∃x. (Χώρα(x) ⇒ ∀y. (Χώρα(y) ∧ (y ≠ x) ∧ συνορεύειΜε(x, y) ⇒
   ΜεγαλύτεροΑπό(έκταση(y), έκταση(x))))
   2^{η} γραφή:
   ∃x. ∀y. (Χώρα(x) ∧ Χώρα (y) ∧ y ≠ x ∧ συνορεύειΜε(x, y) ⇒
   ΜεγαλύτεροΑπό(έκταση(y), έκταση(x)))