

ΕΘΝΙΚΟ ΜΕΤΣΟΒΙΟ ΠΟΛΥΤΕΧΝΕΙΟ
ΣΧΟΛΗ ΗΛΕΚΤΡΟΛΟΓΩΝ ΜΗΧΑΝΙΚΩΝ ΚΑΙ ΜΗΧΑΝΙΚΩΝ
ΥΠΟΛΟΓΙΣΤΩΝ



ΟΡΑΣΗ ΥΠΟΛΟΓΙΣΤΩΝ

(2020-2021)

1^ο Σύνολο Αναλυτικών Ασκήσεων

Ονοματεπώνυμο:

- Χρήστος Τσούφης

Αριθμός Μητρώου:

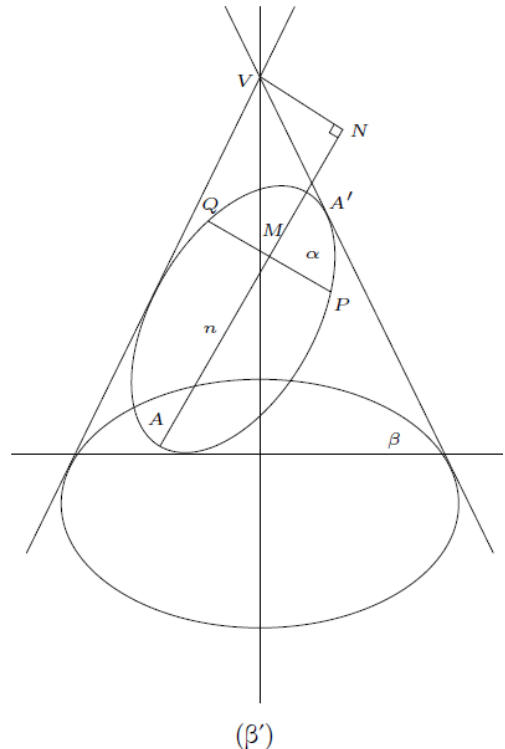
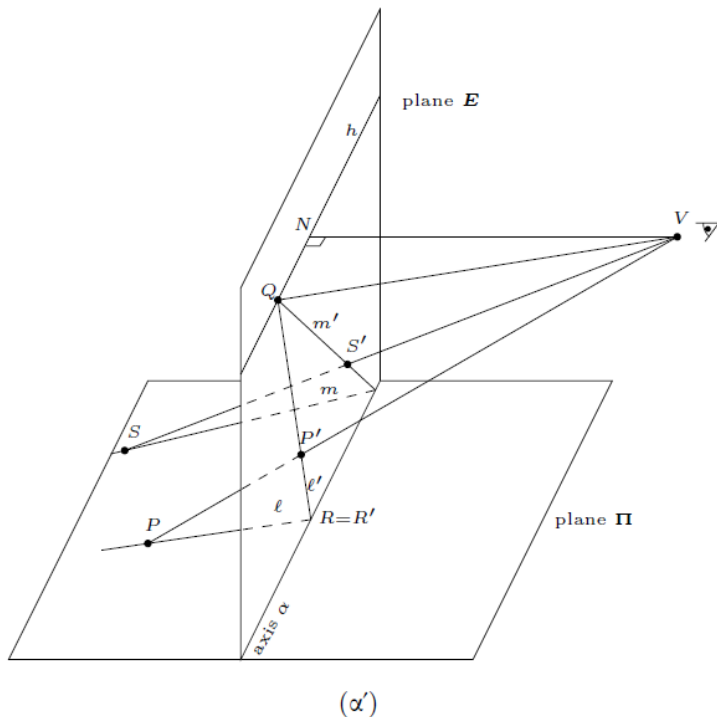
- 03117176

Στοιχεία Επικοινωνίας:

- el17176@mail.ntua.gr

Άσκηση 1.1 (Σχηματισμός Εικόνων, Προοπτική Γεωμετρία)

(α) Να θεωρηθεί στο Σχήμα 1(α) η προοπτική προβολή σημείων και ευθειών ενός επιπέδου Π του κόσμου στο επίπεδο εικόνας E . Η τομή των δύο επιπέδων είναι ο άξονας α . (Τα δύο επίπεδα δεν είναι απαραίτητα κάθετα). Από το προοπτικό κέντρο V διέρχεται ένα επίπεδο παράλληλο προς το Π που τέμνει το E στην ευθεία h . Σε αυτό το επίπεδο, το ευθύγραμμο τμήμα VN είναι κάθετο στην h στο σημείο N .



(a1) Έστω δύο ευθείες ℓ και m του Π που προβάλλονται στις ευθείες ℓ' και m' του E . Αν το σημείο Q της τομής των δύο ευθειών προβολής κείται επί της h , τι ισχύει για τις ευθείες ℓ και m ;

(a2) Υπάρχουν κάποιες κατευθύνσεις των ευθειών ℓ και m προς τον άξονα a τέτοιες ώστε να μπορεί να υπολογισθεί η απόσταση του κέντρου V από το σημείο B με βάση τις θέσεις γνωστών σημείων στο E ;

(b) Να θεωρηθεί στο Σχήμα 1 (β) ο κυκλικός κώνος που σχηματίζεται ενώνοντας το κέντρο προβολής V με τα σημεία στην επιφάνεια μιας σφαίρας καθώς και ένα επίπεδο α που τέμνει την επιφάνεια του κώνου σε μια έλλειψη. Αυτή η έλλειψη είναι το περίγραμμα της προβολής της σφαίρας στο επίπεδο α που το θεωρούμε ως επίπεδο προβολής (εικόνας). Έστω N το πόδι της καθέτου από το κέντρο V στο επίπεδο α και έστω β το επίπεδο που σχηματίζεται από την ευθεία VN και το κέντρο της σφαίρας. Το επίπεδο β τέμνει την έλλειψη στα σημεία A και A' . Να αποδειχθεί ότι η ευθεία n (δηλ. η ευθεία AA') είναι άξονας συμμετρίας της έλλειψης.

Λύση:

(a) Δίνεται ένα επίπεδο του κόσμου Π και ένα κέντρο προβολής V . Εν συνεχεία, υπάρχει ένα επίπεδο E πάνω στο οποίο σχηματίζεται η εικόνα. Υπάρχουν δυο ευθείες πάνω στο Π , οι m και ℓ και αυτές σε συνδυασμό με το σημείο V προβάλλονται σε δυο αντίστοιχες ευθείες m' και ℓ' οι οποίες πάνω στο επίπεδο της εικόνας τέμνονται στο σημείο Q . Επίσης, υπάρχει η ευθεία h η οποία σχηματίστηκε ως εξής: Από το V , παίρνοντας ένα επίπεδο παράλληλο προς τον κόσμο, τέμνει την εικόνα και σχηματίζεται η ευθεία.

Έστω μια δέσμη από παράλληλες 3Δ ευθείες που δεν είναι παράλληλες προς το επίπεδο εικόνας. Οι προβολές όλων αυτών των ευθειών είναι 2Δ ευθείες που διέρχονται όλες από το ίδιο σημείο στο επίπεδο εικόνας. Το κοινό αυτό σημείο ονομάζεται σημείο φυγής. Συγκεκριμένα, έστω μια 3Δ ευθεία που διέρχεται από το σημείο (X_0, Y_0, Z_0) και είναι παράλληλη προς το μοναδιαίο διάνυσμα (a, b, c) . Παράλληλες ευθείες είναι ευθείες που έχουν το ίδιο διάνυσμα (a, b, c) κατεύθυνσης. Σημεία της 3Δ ευθείας που κείνται άπειρα μακριά από το προοπτικό κέντρο προβάλλονται στο σημείο με συντεταγμένες:

$$x_{\infty} = \lim_{r \rightarrow \pm\infty} f \frac{X_0 + ra}{Z_0 + rc} = f \frac{a}{c}, \quad y_{\infty} = \lim_{r \rightarrow \pm\infty} f \frac{Y_0 + rb}{Z_0 + rc} = f \frac{b}{c}$$

Αυτό το σημείο, που ονομάζεται σημείο φυγής, είναι ανεξάρτητο από το (X_0, Y_0, Z_0) , και επομένως είναι το σημείο τομής στο επίπεδο των προοπτικών προβολών όλων των παράλληλων ευθειών που έχουν το ίδιο διάνυσμα κατεύθυνσης (a, b, c) .

Η γνώση του σημείου φυγής είναι σημαντική γιατί οδηγεί στην εύρεση του διανύσματος κατεύθυνσης των 3Δ παράλληλων ευθειών των οποίων οι προβολές τέμνονται στο σημείο φυγής.

$$\begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix} = \frac{1}{\sqrt{(x_{\infty})^2 + (y_{\infty})^2 + f^2}} \begin{bmatrix} x_{\infty} \\ y_{\infty} \\ f \end{bmatrix}$$

Χρησιμοποιώντας τις ανωτέρω ιδέες αποδεικνύεται ότι, αν χρησιμοποιηθούν δέσμες 3Δ παράλληλων ευθειών που όλες είναι παράλληλες με το ίδιο επίπεδο του 3Δ χώρου και προβάλλονται προοπτικά στο επίπεδο εικόνας, τότε τα αντίστοιχα σημεία φυγής των προβολών κάθε δέσμης κείνται όλα σε μία ευθεία του επιπέδου εικόνας, που ονομάζεται η γραμμή του ορίζοντα.

(a1) Θα πρέπει οι δύο ευθείες να είναι παράλληλες στον κόσμο γιατί αποδεικνύεται στο κεφάλαιο 2 ότι οι προβολές τους θα τέμνονται στο σημείο φυγής. Ακόμα και αν θεωρηθούν και άλλες δέσμες από παράλληλες ευθείες πάλι οι προβολές τους θα τέμνονται σε κάποιο άλλο σημείο φυγής. Τελικά, όλες αυτές οι δέσμες ευθειών που είτε είναι παράλληλες είτε κείνται προς το ίδιο επίπεδο του κόσμου θα έχει ένα αντίστοιχο σημείο φυγής. Όλα αυτά τα σημεία φυγής θα βρίσκονται πάνω στην ευθεία h που είναι η ευθεία του ορίζοντα.

(a2) Θαδειχθεί ότι αν υπάρχει κάποια κατεύθυνση των παραλλήλων ευθειών m και ℓ ως προς τον άξονα A (όπου A είναι η τομή του επιπέδου της εικόνας με το επίπεδο του κόσμου) που έχει την ιδιότητα όλα τα σημεία του να προβάλλονται στον εαυτό τους ως προς το κέντρο προβολής V , τότε μπορεί να γίνει η επιλογή της κατεύθυνσης έτσι ώστε να μπορεί να υπολογιστεί η απόσταση του κέντρου προβολής V από το επίπεδο εικόνας (δηλ. το μήκος της καθέτου VN).

Αυτό αποδεικνύεται με την εξήγηση ότι ορθογώνιο τρίγωνο VNQ το οποίο έχει οξείες γωνίες 45° η καθεμία τότε η απόσταση VN θα ισούται με την απόσταση QN η οποία είναι μετρήσιμη (μπορούν να μετρηθούν αποστάσεις μόνο πάνω στο E). Για να είναι οι γωνίες 45° θα πρέπει οι ευθείες m και ℓ να σχηματίζουν γωνία 45° με τον άξονα A . Η γωνία NQV περιέχει την ευθεία του ορίζοντα ως μια της πλευρά, η οποία σχηματίζεται από ένα επίπεδο παράλληλο προς το επίπεδο του κόσμου που διέρχεται από το V , και έτσι, από ένα θεώρημα της στερεομετρίας, η γωνία αυτή θα είναι ίδια με την γωνία που σχηματίζεται η ευθεία ℓ με τον άξονα A .

(b) Έστω N το πόδι της καθέτου από το κέντρο V στο επίπεδο α , εννοούμε ότι η ευθεία VN είναι κάθετος στο επίπεδο α και η τομή τους είναι το σημείο N .

Έστω μια σφαίρα και ο άξονας συμμετρίας της διέρχεται από το σημείο θέασης V . Έστω, επίσης, ένας κυκλικός κώνος ο οποίος έχει σαν κορυφή το V και εφάπτεται στην σφαίρα. Ακόμη, έστω ένα επίπεδο A το οποίο τέμνει την επιφάνεια του κώνου σχηματίζοντας μια έλλειψη. Μάλιστα, αν θεωρηθεί ένας μέγιστος κύκλος πάνω στην σφαίρα, τότε η προβολή αυτού μέσω του V πάνω στο επίπεδο A (όπου A είναι η εικόνα) τότε αυτό θα είναι μια έλλειψη. Γενικότερα, στην Όραση Υπολογιστών, κυκλικά αντικείμενα προβάλλονται σε ελλειψοειδή σχήματα πάνω στην εικόνα. Έπειτα, το σημείο προβολής V προβάλλεται πάνω στο επίπεδο της εικόνας A και αυτό το “πόδι της καθέτου” θα είναι το σημείο N . Το ευθύγραμμο τμήμα VN μαζί με τον άξονα συμμετρίας μαζί με τον άξονα συμμετρίας ορίζουν ένα επίπεδο, το B , το οποίο τέμνει με τη σειρά του το A στα σημεία A και A' οπότε τα σημεία A , A' και N βρίσκονται πάνω στην ίδια ευθεία. Αυτό που ζητείται τώρα είναι ναδειχθεί ότι η ευθεία αυτή είναι άξονας συμμετρίας της έλλειψης. Έτσι, επιλέγεται ένα σημείο P πάνω στην έλλειψη και επειδή η έλλειψη αποτελείται από σημεία του κώνου, φέρνοντας την κάθετη ευθεία πάνω στον άξονα N και στην συνέχεια επεκτείνοντάς την έτσι ώστε η απόσταση του σημείου P από τον άξονα N να είναι ίση με την απόσταση του σημείου Q από τον άξονα N , μένει ναδειχθεί ότι το σημείο Q βρίσκεται και αυτό πάνω στην έλλειψη. Συνεπώς, επειδή το σημείο P είναι αυθαίρετο, τότε πραγματικά ο άξονας N είναι άξονας συμμετρίας της έλλειψης.

Άσκηση 1.2 (Χρώμα)

Να λυθούν οι ακόλουθες ασκήσεις από το Κεφ. 5 (έκδοση 6/2013):

(α) Άσκηση 5.8: Να αποδειχθεί ότι η περιοχή χρωμάτων του gamut of human vision (GHV) στο χρωματικό διάγραμμα CIE-xy που προκύπτει από τον χώρο XYZ είναι (α) υποσύνολο του τριγώνου με κορυφές τα σημεία (0, 0), (1, 0), (0, 1) στο χρωματικό επίπεδο (x, y) και (β) κυρτή.

(b) Άσκηση 5.14: (α) Στον χρωματικό χώρο HSI η φωτεινότητα ορίζεται ως $L_{HSI}(c) = (R+G+B)/3$. Να βρεθεί το σχήμα των χρωματικών επιπεδοσυνόλων σταθερής φωτεινότητας, δηλ. των συνόλων $\{(H, C): L_{HSI} = \text{const}\}$, όπου H και C είναι το hue και το chroma πριν γίνει απεικόνιση του χρωματικού εξαγώνου σε κύκλο. (β) Να επαναληφθεί το (α) για τον χρωματικό χώρο IHSL (5.28) όπου η φωτεινότητα ορίζεται ως $L_{IHSL}(c) = Y = 0.30R + 0.59G + 0.11B$.

Λύση:

(a) (α) Το γεγονός ότι η περιοχή χρωμάτων του gamut of human vision (GHV) στο χρωματικό διάγραμμα CIE-xy που προκύπτει από τον χώρο XYZ είναι υποσύνολο του τριγώνου με κορυφές τα σημεία (0, 0), (1, 0), (0, 1) στο χρωματικό επίπεδο (x, y) προκύπτει εάν υποτεθεί ότι τα x, y είναι μη αρνητικά, διότι είναι ολοκληρώματα και επίσης είναι μικρότερα του 1 από τον τύπο $x = X/X+Y+Z$ και $y = Y/X+Y+Z$ εξ ορισμού. (β) Σχετικά με την κυρτότητα, αρκεί να αποδειχθεί ότι ισχύει $a(x_1, y_1) + b(x_2, y_2) = (x_3, y_3)$ με $a + b = 1$. Με αντικατάσταση των x, y με τον ορισμό τους παραπάνω και με πράξεις προκύπτει μια τέτοια σχέση με νέα α και β.

(b) Αρχικά, θα πρέπει να περιστραφεί ο μοναδιαίος κύβος RGB ώστε η γκρίζα διαγώνιος να γίνει ο αχρωματικός άξονας για τον οποίο ισχύει ότι $R = G = B$ και κατά μήκος του οποίου ορίζεται η φωτεινότητα ως μια συνάρτηση $L(c)$ του αρχικού διανύσματος $c = (R, G, B)$ για χώρο με πολικές συντεταγμένες. Το οριζόντιο επίπεδο που είναι κάθετο στον άξονα αυτό είναι το χρωματικό επίπεδο. Η προβολή του c πάνω στο επίπεδο αυτό και στον αχρωματικό άξονα δημιουργεί μια αναπαράσταση της αρχικής πληροφορίας η οποία συμβολίζεται ως $c = c_d + c_{pr}$, όπου η συνιστώσα c_{pr} στο επίπεδο περιέχει την καθαρά χρωματική πληροφορία. Τα επιπεδοσύνολα που ορίζει η συνάρτηση της φωτεινότητας θα είναι $\{c: L(c) \geq \ell\}$ και το σχήμα τους εξαρτάται από την επιλογή της $L(c)$. Επίσης, έστω ότι διάνυσμα στον παραπάνω χρωματικό άξονα HSI το οποίο αποτελεί την προβολή του c και τα σημεία προβολής c_{pr} έχουν συντεταγμένες τα H (hue) και C (chroma) προτού γίνει η απεικόνιση του χρωματικού εξαγώνου σε κύκλο καθώς, μετά την απεικόνιση αυτές οι χρωματικές συντεταγμένες αντιστοιχούν στη γωνία και στο μέτρο του c_{pr} . (α) Δεδομένου ότι το $L_{HSI}(c) = I = \frac{R+G+B}{3}$, ο χώρος (H, C, I) θα είναι μια διπλή εξαγωνική πυραμίδα τα τμήματα της οποίας όμως θα έχουν διαφορετικά ύψη. Επιπλέον, ισχύει ότι οι άξονες συμμετρίας αυτών των τμημάτων συμπίπτουν με τον γκρίζο άξονα και ότι το επίπεδο των πρωταρχικών χρωμάτων θα περνάει από τη γκρίζα στάθμη $L = \frac{1}{3}$. Συνεπώς, προκύπτει ότι όλα τα επιπεδοσύνολα της $L(c)$ θα είναι κανονικά εξάγωνα. Έτσι, στον χώρο (H, S, I) τα επιπεδοσύνολα θα είναι κύκλοι οι οποίοι, συγκριτικά με τον γκρίζο άξονα, θα είναι κάθετοι. (β) Δεδομένου ότι το $L_{IHSL}(c) = Y = 0.30R + 0.59G + 0.11B$, ο χώρος (H, C, Y) θα είναι μια διπλή εξαγωνική πυραμίδα. Επιπλέον, ισχύει ότι οι άξονες συμμετρίας θα έχουν διαφορετική κλίση σχετικά με τον γκρίζο άξονα και ότι το επίπεδο των πρωταρχικών χρωμάτων δεν θα είναι κάθετο στον γκρίζο άξονα αλλά θα διέρχεται από τρία σημεία του χώρου με διαφορετική όμως φωτεινότητα Y. Συνεπώς, προκύπτει ότι όλα τα επιπεδοσύνολα της $L(c)$ θα είναι τομές αυτών των πυραμίδων με επίπεδα σταθερού Y. Έτσι, στον χώρο IHSL τα επιπεδοσύνολα θα είναι ελλείψεις.

Άσκηση 1.3 (2Δ Gabor και Αρχή Αβεβαιότητας)

(a) Να αποδειχθεί η 2Δ Αρχή Αβεβαιότητας για Fourier ανάλυση 2Δ σημάτων. Δηλαδή, αν θεωρήσουμε τις μέσες χωρικές διάρκειες (Δx , Δy) της εικόνας $f(x, y)$ γύρω από την μέση θέση του (x_c , y_c) στον χώρο:

$$(\Delta x)^2 = \frac{\int \int (x - x_c)^2 |f(x, y)|^2 dx dy}{\int \int |f(x, y)|^2 dx dy}, \quad (\Delta y)^2 = \frac{\int \int (y - y_c)^2 |f(x, y)|^2 dx dy}{\int \int |f(x, y)|^2 dx dy}$$

καθώς και τα μέσα εύρη ζώνης ($\Delta \omega_1$, $\Delta \omega_2$) του φάσματος $F(\omega_1, \omega_2)$ γύρω από την μέση θέση του (u , v) στο πεδίο συχνοτήτων:

$$(\Delta \omega_1)^2 = \frac{\int \int (\omega_1 - u)^2 |F(\omega_1, \omega_2)|^2 d\omega_1 d\omega_2}{\int \int |F(\omega_1, \omega_2)|^2 d\omega_1 d\omega_2}, \quad (\Delta \omega_2)^2 = \frac{\int \int (\omega_2 - v)^2 |F(\omega_1, \omega_2)|^2 d\omega_1 d\omega_2}{\int \int |F(\omega_1, \omega_2)|^2 d\omega_1 d\omega_2}$$

να αποδειχθεί ότι:

$$A = (\Delta x)(\Delta y)(\Delta \omega_1)(\Delta \omega_2) \geq \frac{1}{4}.$$

Στην απόδειξη μπορεί να θεωρηθεί ότι $(x_c, y_c) = (u, v) = 0$.

(b) Να επιβεβαιωθεί ότι το 2Δ μιγαδικό Gabor σήμα

$$h(x, y) = \exp \left[-\frac{(x - x_c)^2}{2\sigma_1^2} - \frac{(y - y_c)^2}{2\sigma_2^2} \right] \exp[ju(x - x_c) + jv(y - y_c)]$$

έχει 2Δ μετ/σμό:

$$H(\omega_1, \omega_2) = 2\pi\sigma_1\sigma_2 \exp \left[-\frac{(\omega_1 - u)^2\sigma_1^2}{2} - \frac{(\omega_2 - v)^2\sigma_2^2}{2} \right] \exp(-j\omega_1 x_c - j\omega_2 y_c)$$

(c) Να αποδειχθεί ότι το $h(x, y)$ ελαχιστοποιεί την 2Δ Αρχή Αβεβαιότητας, υπολογίζοντας αναλυτικά την αβεβαιότητά του και δείχνοντας ότι $A = 1/4$.

Λύση:

(a) 1^η Λύση:

Ισχύει από τον Fourier Transform ότι, $f(x, y) \Leftrightarrow F(\omega_1, \omega_2)$

Επίσης, ροπές στον χώρο: $\overline{x^m y^n} = \frac{\iint x^m y^n |f|^2 dx dy}{E_s}$, όπου $E_s = \iint |f|^2 dx dy$

Ροπές στην συχνότητα: $\overline{\omega_1^m \omega_2^n} = \frac{\iint \omega_1^m \omega_2^n |F|^2 d\omega_1 d\omega_2}{E_f}$, όπου $E_f = \iint |F|^2 d\omega_1 d\omega_2$

Κεντρικές Ροπές 2^{ης} τάξης / RMS τιμές:

$$\Delta x = \sqrt{(\overline{x - \bar{x}})^2}, \Delta y = \sqrt{(\overline{y - \bar{y}})^2}, \Delta \omega_1 = \sqrt{(\overline{\omega_1 - \bar{\omega}_1})^2}, \Delta \omega_2 = \sqrt{(\overline{\omega_2 - \bar{\omega}_2})^2}$$

Έστω ότι $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} |f|\sqrt{|x|} = \lim_{y \rightarrow \pm\infty} |f|\sqrt{|y|} = 0$ και επίσης ότι τα αρχικά σήματα $f(x, y)$ είναι κεντραρισμένα στον χώρο και στην συχνότητα, οπότε θα ισχύει ότι: $\bar{x} = \bar{y} = \bar{\omega}_1 = \bar{\omega}_2 = 0$.

Εάν για τις συναρτήσεις $g = xf$ και $h = \frac{\partial f^*}{\partial x}$ εφαρμοστεί η ανισότητα των Cauchy-Schwarz, τότε:

$$\begin{aligned} \left| \int x f \frac{\partial f^*}{\partial x} \right|^2 &\leq \left(\int x^2 |f|^2 \right) \cdot \left(\int \left| \frac{\partial f^*}{\partial x} \right|^2 \right) \xrightarrow{\text{ολοκλήρωση κατά μέρη}} \\ \left[\frac{x}{2} |f|^2 \right]_{-\infty}^{+\infty} - \frac{1}{2} \int |f|^2 &\leq [(\Delta x)^2 \cdot E_s] \cdot \left[\frac{\int \omega_1^2 |F|^2}{4\pi^2} \right] \Rightarrow \\ -\frac{1}{2} \int |f|^2 &\leq [(\Delta x)^2 \cdot E_s] \cdot \left[\frac{(\Delta \omega_1^2) E_f}{4\pi^2} \right] \xrightarrow{\text{Θεώρημα Parseval: } E_f = 4\pi^2 E_s} \\ \left(\frac{E_s^2}{2} \right) &\leq (\Delta x)^2 \cdot E_s \cdot (\Delta \omega_1^2) \cdot E_s \Rightarrow \\ \frac{1}{2} &\leq (\Delta x) \cdot (\Delta \omega_1) \end{aligned}$$

Όμοια, αποδεικνύεται ότι $\frac{1}{2} \leq (\Delta y) \cdot (\Delta \omega_2)$ (2)

Επομένως, από (1), (2) προκύπτει ότι $(\Delta x) \cdot (\Delta y) \cdot (\Delta \omega_1) \cdot (\Delta \omega_2) \geq \frac{1}{4}$

2^η Λύση:

Η απόδειξη βασίζεται στην ανισότητα Cauchy-Schwarz για δύο συναρτήσεις ψ και φ οι οποίες εν γένει μπορεί να είναι μιγαδικές. Έτσι, το εσωτερικό τους γινόμενο προκύπτει ως εξής:

$$\left| \int \psi(t) \varphi^*(t) dt \right|^2 \leq \left(\int |\psi(t)|^2 dt \right) \cdot \left(\int |\varphi(t)|^2 dt \right)$$

Όπου όλα τα ολοκληρώματα έχουν όριο από $-\infty$ έως $+\infty$.

Επιλέγοντας $\psi(t) = tf(t)$ και $\varphi(t) = \frac{\partial f^*}{\partial t}(t)$ (με z^* συμβολίζεται ο μιγαδικός συζυγής του z), προκύπτει:

$$\left| \int tf(t) \frac{\partial f}{\partial t} dt \right|^2 \leq \left(\int t^2 |f(t)|^2 dt \right) \cdot \left(\int \left| \frac{\partial f}{\partial t} \right|^2 dt \right)$$

Στην συνέχεια, με ολοκλήρωση κατά μέρη, προκύπτει για το αριστερό μέλος:

$$\int tf(t) \frac{\partial f}{\partial t} dt = \left[\frac{t}{2} |f(t)|^2 \right]_{-\infty}^{+\infty} - \frac{1}{2} \int |f(t)|^2 dt$$

Επειδή ο πρώτος όρος μηδενίζεται λόγω του ορίου $\lim_{t \rightarrow \pm\infty} |f(t)|\sqrt{|t|} = 0$, προκύπτει:

$$\frac{1}{4} \left(\int |f(t)|^2 dt \right)^2 \leq \left(\int t^2 |f(t)|^2 dt \right) \cdot \left(\int \left| \frac{\partial f}{\partial t} \right|^2 dt \right)$$

1^η Περίπτωση: Αν υποθεθεί ότι $\bar{x} = \bar{\omega} = 0$, τότε η απόδειξη, χρησιμοποιώντας το θεώρημα του Parseval, θα είναι:

$$2\pi \int |f(t)|^2 dt = \int |F(\omega)|^2 d\omega \text{ και } 2\pi \int \left| \frac{\partial f}{\partial t} \right|^2 dt = \int \omega^2 |F(\omega)|^2 d\omega$$

$$(\Delta t)^2 \int |f(t)|^2 dt = \int t^2 |f(t)|^2 dt \text{ και } (\Delta \omega)^2 \int |F(\omega)|^2 d\omega = \int \omega^2 |F(\omega)|^2 d\omega$$

2^η Περίπτωση: Αν υποτεθεί ότι $\bar{t}_f \neq 0$, $\bar{\omega}_f \neq 0$, τότε η απόδειξη συνεχίζεται ως εξής:

Ορίζεται ένα νέο σήμα $g(t)$ που προκύπτει από το shifting του $f(t)$ στο χρόνο και τη συχνότητα:

$$g(t) = -\exp(-j\overline{\omega}_f t) f(t + \bar{t}_f) \Leftrightarrow G(\omega) = \exp[j(\omega + \bar{\omega}_f) \bar{t}_f] F(\omega + \bar{\omega}_f)$$

Και εφόσον $|g(t)| = |g(-t)|$, προκύπτει ότι $\bar{t}_g = 0$. Παρομοίως, $|G(\omega)|$ είναι άρτιο και έτσι, $\bar{\omega}_g = 0$. Έτσι, από την 1^η Περίπτωση, $(\Delta t)_g (\Delta \omega)_g \geq 1/2$. Επιπλέον, η σχέση μεταξύ g και f υπονοεί ότι $\bar{t}_g^2 = \bar{t}_f^2$ και $\bar{\omega}_g^2 = \bar{\omega}_f^2$. Έτσι, $(\Delta t)_g = (\Delta t)_f$ και $(\Delta \omega)_g = (\Delta \omega)_f$ άρα αποδείχθηκε το ζητούμενο.

(b) Ισχύει για την 1Δ Gaussian ότι: $\exp(-x^2/2\sigma_1^2) \Leftrightarrow \sigma_1 \sqrt{2\pi} \exp(-\omega_1^2 \sigma_1^2/2)$

Οπότε,

$$\begin{array}{lll} \exp(-x^2/2\sigma_1^2) & \Leftrightarrow & \sigma_1 \sqrt{2\pi} \exp(-\omega_1^2 \sigma_1^2/2) & \xrightarrow{\text{χωρική διαμόρφωση με μιγαδικό ημίτονο}} \\ f_1(x) = \exp(-x^2/2\sigma_1^2) \exp(jux) & \Leftrightarrow & F_1(x) = \sigma_1 \sqrt{2\pi} \exp[-(\omega_1 - u)^2 \sigma_1^2/2] & \xrightarrow{\text{μετατόπιση στο χώρο}} \\ g_1(x) = f_1(x - x_c) = & & G_1(\omega_1) = F_1(\omega_1) \exp(-j\omega_1 x_c) = \\ \exp[-(x-x_c)^2/2\sigma_1^2] \exp[ju(x-x_c)] & \Leftrightarrow & \sigma_1 \sqrt{2\pi} \exp[-(\omega_1 - u)^2 \sigma_1^2/2] \exp(-j\omega_1 x_c) \Rightarrow \end{array}$$

Όμοια, αποδεικνύεται ότι $g_2(y) = \exp[-(y-y_c)^2/2\sigma_2^2] \exp[jv(y-y_c)]$

Επιπλέον, από το θεώρημα 2Δ Fourier μετ/σμού για 2Δ διαχωρίσιμες συναρτήσεις ισχύει ότι:

Σε γραμμικούς τελεστές, αν υπάρχει ένα γραμμικό και χρονικά αναλλοίωτο σύστημα, τότε εάν η κρουστική του απόκριση είναι διαχωρίσιμη, δηλ. μπορεί να γραφτεί σαν γινόμενο από δυο μονοδιάστατες συναρτήσεις δηλ. $h(x, y) = g_1(x) \cdot g_2(y)$, τότε και ο δισδιάστατος Fourier αποδεικνύεται ότι είναι γινόμενο από δύο μονοδιάστατους Fourier $H(\omega_1, \omega_2) = G_1(\omega_1) \cdot G_2(\omega_2)$ που ο καθένας αντιστοιχεί στο Fourier της αντίστοιχης μονοδιάστατης συνάρτησης.

(c) Η $h(x, y)$ είναι διαχωρίσιμη συνάρτηση. Επιπροσθέτως, αν U_f συμβολίζει την αβεβαιότητα ($\Delta x \cdot \Delta \omega$) της συνάρτησης f , τότε ισχύει ότι:

$$U_{g_1} = \Delta x \cdot \Delta \omega_1 \text{ και } U_{g_2} = \Delta y \cdot \Delta \omega_2$$

Έτσι, $h(x, y) = g_1(x) g_2(y) \Rightarrow U_h = U_{g_1} U_{g_2} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{4}$

Άσκηση 1.4 (Ιδιότητες Μορφολογικών Φίλτρων για Σχήματα και Εικόνες)

(a) Για σύνολα-σχήματα X να αποδειχθούν τα εξής:

$$(a1) X \circ B = (X^c \bullet B^s)^c.$$

$$(a2) 0 \in B \Rightarrow X \ominus B \subseteq X \circ B \subseteq X \subseteq X \bullet B \subseteq X \oplus B.$$

(b) Για γκριζες εικόνες f να αποδειχθούν τα εξής:

$$(b1) (f \ominus A) \ominus B = f \ominus (A \oplus B).$$

$$(b2) f = f \circ g \text{ εάν και μόνο εάν υπάρχει κάποιο } h \text{ ώστε } f = h \oplus g.$$

(c) Έστω ότι δημιουργούνται δύο γκριζα επίπεδα φίλτρα φ_1, φ_2 με την υπέρθεση κατωφλίου χρησιμοποιώντας ως δυαδικές γεννήτριες δύο αύξοντες τελεστές συνόλων Φ_1, Φ_2 αντίστοιχα:

$$\varphi_i(f)(x) = \sup\{v \in \mathbb{R} : x \in \Phi_i[X_v(f)]\}, i = 1, 2, \dots$$

όπου $X_v(f) = \{x \in \mathbb{R}^2 : f(x) \geq v\}$ είναι τα επιπεδοσύνολα της εικόνας f . Να αποδειχθεί ότι,

(c1) Το γκριζο φίλτρο που σχηματίζεται με υπέρθεση κατωφλίου από την γεννήτρια $\Phi_1 \cup \Phi_2$ ισούται με $(\varphi_1 \vee \varphi_2)(x) = \max[\varphi_1(x), \varphi_2(x)]$.

(c2) Το γκριζο φίλτρο που σχηματίζεται με υπέρθεση κατωφλίου από την γεννήτρια:

$$\Phi_2 \Phi_1(X) = \Phi_2(\Phi_1(X)) \text{ ισούται με } \varphi_2 \varphi_1(f) = \varphi_2(\varphi_1(f)).$$

(d) Έστω φ ένα 2Δ γκριζο επίπεδο φίλτρο για ψηφιακές εικόνες $f(x, y)$ που σχηματίζεται με υπέρθεση κατωφλίου χρησιμοποιώντας ως δυαδική γεννήτρια τον τελεστή συνόλων (opening) $\Phi(X) = X \circ B$, όπου $B = \{(0, 0), (0, 1), (1, 0)\}$ ένα 3-pixel τρίγωνο. Να εκφρασθεί ο Φ ως μια Boolean συνάρτηση $\beta(v_1, \dots, v_n)$ και να βρεθεί η αλγεβρική έκφραση (με \max/\min πράξεις) για το ισοδύναμο γκριζο φίλτρο $\varphi(f)(x, y)$.

Λύση:

(a) (a1) Ισχύουν τα εξής:

$$X \ominus B = (X^c \oplus B^s)^c, X \oplus B = (X^c \ominus B^s)^c, X \circ B = (X \ominus B) \oplus B, X \bullet B = (X \oplus B) \ominus B$$

$$\text{Οπότε, } X \circ B = (X \ominus B) \oplus B = (X^c \oplus B^s)^c \oplus B = (((X^c \oplus B^s)^c)^c \ominus B^s)^c = ((X^c \oplus B^s) \ominus B^s)^c = (X^c \bullet B^s)^c$$

(a2) Ισχύουν τα εξής:

$$X \oplus B = \bigcup_{b \in B} X_{+b} \xrightarrow{0 \in B} X \oplus B \supseteq X \quad (1)$$

$$X \ominus B = \bigcap_{b \in B} X_{-b} \xrightarrow{0 \in B} X \ominus B \subseteq X \quad (2)$$

$$X \circ B \triangleq (X \ominus B) \oplus B \xrightarrow{(1)} X \circ B \supseteq X \ominus B \quad (3)$$

$$X \bullet B \triangleq (X \oplus B) \ominus B \xrightarrow{(2)} X \bullet B \subseteq X \oplus B \quad (4)$$

Οπότε, από (1), (2), (3), (4): $X \ominus B \subseteq X \circ B \subseteq X \subseteq X \bullet B \subseteq X \oplus B$, αν $0 \in B$.

(b) (b1) Ισχύουν τα εξής:

$$\text{Duality:} \quad f \oplus A = -[(-f) \ominus A^s] \quad (1), \quad f \ominus A = -[(-f) \oplus A^s] \quad (2)$$

$$\text{Composition Serial Flow:} \quad (f \oplus A) \oplus B = f \oplus (A \oplus B) \quad (3)$$

$$\begin{aligned} \text{Οπότε, } (f \ominus A) \ominus B &= -\{[-(f \ominus A)] \oplus B^s\} = -\{[-(-[-(-f) \oplus A^s])] \oplus B^s\} = -\{[(-f) \oplus A^s] \oplus B^s\} = \\ &= -\{(-f) \oplus [A^s \oplus B^s]\} = f \ominus [A^s \oplus B^s]^s = f \ominus [A \oplus B] \end{aligned}$$

(b2) Ευθύ: Έστω $f = f \circ g$. Τότε, $f = (f \ominus g) \oplus g$. Θέτοντας $h = f \ominus g$, προκύπτει: $f = h \oplus g$.

$$\begin{aligned} \text{Αντίστροφο: Έστω } f = h \oplus g. \text{ Τότε, } f \circ g &= (h \oplus g) \circ g \Leftrightarrow f \circ g = (((h \oplus g) \ominus g) \oplus g) \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow f \circ g = (h \bullet g) \oplus g \geq h \oplus g = f \Leftrightarrow f \circ g \geq f \end{aligned}$$

Όμως, $f \circ g \leq f$. Οπότε, $f \circ g = f$.

(c) (c1) Για το γκρίζο φίλτρο θα ισχύει: $\varphi(x) = \sup\{v \in \mathbb{R}: x \in (\varphi_1 \cup \varphi_2)[X_v(f)]\}$

$$\varphi(x) = \sup\{v \in \mathbb{R}: x \in (\varphi_1[X_v(f)] \cup \varphi_2[X_v(f)])\}$$

$$\varphi(x) = \sup\{v \in \mathbb{R}: \varphi_1(f)(x) \geq v \text{ or } \varphi_2(f)(x) \geq v\}$$

$$\varphi(x) = \sup\{v \in \mathbb{R}: (\varphi_1 \vee \varphi_2)(f)(x) \geq v\}$$

$$\varphi(x) = (\varphi_1 \vee \varphi_2)(x) = \max\{\varphi_1(x), \varphi_2(x)\}$$

(c2) Για το γκρίζο φίλτρο θα ισχύει: $\varphi(x) = \sup\{v \in \mathbb{R}: x \in \varphi_2(\varphi_1[X_v(f)])\}$

$$\varphi(x) = \sup\{v \in \mathbb{R}: x \in \varphi_2[\sup\{v \in \mathbb{R}: x \in \varphi_1[X_v(f)]\}]\}$$

$$\varphi(x) = \varphi_2(\varphi_1(f)(x))$$

$$\Delta\eta\lambda. \varphi = \varphi_2 \varphi_1(f) = \varphi_2(\varphi_1(f))$$

(d) Για τον τελεστή συνόλων ισχύει ότι:

$$\begin{aligned} \varphi(x) &= X \circ B = (X \ominus B) \oplus B = \bigcup_{z \in B} (\bigcap_{y \in B} X_{y-z}) = \bigcup_{z \in B} (X_{(0,0)-z} \cap X_{(0,1)-z} \cap X_{(1,0)-z}) = \\ &= (X_{(0,0)} \cap X_{(0,1)} \cap X_{(1,0)}) \cup (X_{(-1,0)} \cap X_{(-1,1)} \cap X_{(0,0)}) \cup (X_{(0,-1)} \cap X_{(0,0)} \cap X_{(1,-1)}) \end{aligned}$$

Οπότε, η boolean συνάρτηση θα είναι: $b(u_1, \dots, u_n) = u_{0,0}u_{0,1}u_{1,0} + u_{-1,0}u_{-1,1}u_{0,0} + u_{0,-1}u_{0,0}u_{1,-1}$

Και το ισοδύναμο γκρίζο φίλτρο θα είναι:

$$\begin{aligned} \varphi(f)(x, y) = \max\{ &\min[f(x, y), f(x, y+1), f(x+1, y)], \\ &\min[f(x, y-1), f(x, y), f(x+1, y-1)], \\ &\min[f(x-1, y), f(x-1, y+1), f(x, y)]\} \end{aligned}$$

Άσκηση 1.5 (Radon Transform and Reconstruction from Projections)

(a) Consider a uniform unit disk as the image object

$$f(x, y) = \begin{cases} 1, & x^2 + y^2 \leq 1 \\ 0, & \text{else} \end{cases}$$

Find analytically its Radon transform $Rf(t, \theta)$ and its unfiltered back-projection $\tilde{f}(x, y)$.

(b) Consider a separable image $f(x, y) = f_1(x)f_2(y)$. Find its Radon transform. In addition, show that can be reconstructed exactly from only two projections and find their corresponding projection angles.

(c) Show, qualitatively or analytically, that a 2D image object that is a point of mass in space, e.g. $f(x, y) = (x - x_0, y - y_0)$, corresponds via Radon transform to a sine in the plane (t, θ) . Then, find its unfiltered back-projection $\tilde{f}(x, y)$.

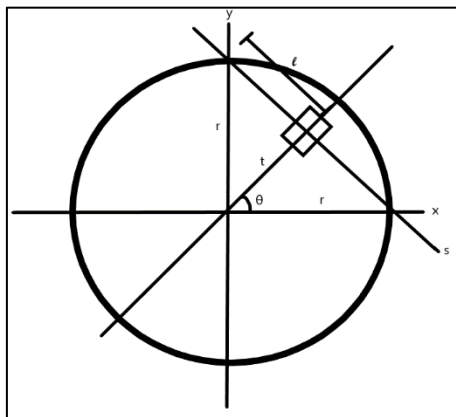
Hint: the following lemma may help: For a 1D function $f(\theta)$ with zeros at $\theta = \theta_1, \dots, \theta_k, \dots$

$$\delta(f(\theta)) = \sum_k \left(\frac{1}{|f'(\theta_k)|} \right) \delta(\theta - \theta_k)$$

Λύση:

- $L_{t, \theta} = \{(x, y): x \cos \theta + y \sin \theta = t\}$
- $\begin{cases} t = x \cos \theta + y \sin \theta \\ s = -x \sin \theta + y \cos \theta \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = t \cos \theta - s \sin \theta = r \cos \varphi \\ y = t \sin \theta + s \cos \theta = r \sin \varphi \end{cases}$
- $P_\theta(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t \cos \theta - s \sin \theta, t \sin \theta + s \cos \theta) ds = R_f(t, \theta) \Leftrightarrow P_\theta(\omega) = F(\omega \cos \theta, \omega \sin \theta)$
- $q_\theta(t) = p_\theta(t) * h(t) \Leftrightarrow Q_\theta(\omega) = P_\theta(\omega) \cdot |\omega|$

(a) $f(x, y) = \begin{cases} 1, & x^2 + y^2 \leq 1 \\ 0, & \text{else} \end{cases}$



Όπου $r = 1$, η ακτίνα του κύκλου και $t \in \mathbb{R}$ και $0 \leq \theta \leq \pi$.

Όμως, για t εκτός κύκλου, $P_\theta(t) = 0$ και αφού $R_f(t, \theta) \triangleq P_\theta(t)$ τότε $R_f(t, \theta) = 0$.

$$\begin{aligned}
P_{\theta}(t) &= \int_{\text{ray } L_{t,\theta}} f(x, y) ds = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} f(x, y) \delta(x \cos \theta + y \sin \theta - t) dx dy = \\
&= \int_{-\infty}^{+\infty} f(t \cos \theta - s \sin \theta, t \sin \theta + s \cos \theta) ds \xrightarrow{\theta=0 (*)} \\
P_{\theta}(t) &= \int_{-\infty}^{+\infty} f(t, s) ds = \int_0^{\sqrt{1-t^2}} 2 ds = 2\sqrt{1-t^2}
\end{aligned}$$

(*) Ισχύει ότι $\theta = 0$ αφού η f είναι σταθερή και συμμετρική.

Εναλλακτικά, το αποτέλεσμα μπορεί να προκύψει ως το (μήκος της χορδής του κύκλου) $\times 2$.

(b) $f(x, y) = f_1(x) \cdot f_2(y)$

$$\begin{aligned}
R_f(t, \theta) &\triangleq P_{\theta}(t) = \int_{\text{ray } L_{t,\theta}} f(x, y) ds = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} f(x, y) \delta(x \cos \theta + y \sin \theta - t) dx dy = \\
&= \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} f_1(x) f_2(y) \delta(x \cos \theta + y \sin \theta - t) dx dy
\end{aligned}$$

(c) $f(x, y) = \delta(x - x_0, y - y_0)$

Για τον Radon Transform:

$$\begin{aligned}
P_{\theta}(t) &= \int_{\text{ray } L_{t,\theta}} f(x, y) ds = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} f(x, y) \delta(x \cos \theta + y \sin \theta - t) dx dy = \\
&= \int_{-\infty}^{+\infty} f(t \cos \theta - s \sin \theta, t \sin \theta + s \cos \theta) ds = \\
&= \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \delta(x - x_0, y - y_0) \delta(x \cos \theta + y \sin \theta - t) dx dy \xrightarrow{(*)} \\
P_{\theta}(t) &= \delta(x_0 \cos \theta + y_0 \sin \theta - t)
\end{aligned}$$

(*) Όπου x , τίθεται x_0 και επειδή είναι δ-συναρτήσεις, φεύγουν τα ολοκληρώματα και το αποτέλεσμα είναι ένα σημείο ημιτόνου στο επίπεδο.

Για την ανακατασκευή:

$$\hat{f}(x, y) = f(x, y) * \left(\frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2}} \right) = \delta(x - x_0, y - y_0) * \left(\frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2}} \right) = \frac{1}{\sqrt{x_0^2 + y_0^2}}$$

Resources:

1. *Maragos_CV_Book2018_chapter**
2. *Διαλέξεις μαθήματος με επεξηγήσεις για τις ασκήσεις*