Ε.Μ.Π., Σχολή Η.Μ.&Μ.Υ. **ΟΡΑΣΗ ΥΠΟΛΟΓΙΣΤΩΝ** Ακαδ. Έτος 2020 - **2021**
Ημερ/νία: 30-05-2021 **3ο Σύνολο Αναλυτ. Ασκήσεων** Παραδοτέο: 16-06-2021

Οι αναλυτικές σειρές ασκήσεων είναι ατομικές, και οι λύσεις που θα δώσετε πρέπει να αντιπροσωπεύουν μόνο την προσωπική σας εργασία. Εξηγήστε επαρκώς την εργασία σας. Αν χρησιμοποιήσετε κάποια άλλη πηγή εκτός των σημειώσεων για τη λύση σας, πρέπει να το αναφέρετε. Η παράδοση των λύσεων των αναλυτικών ασκήσεων της σειράς αυτής θα γίνει ηλεκτρονικά στην Moodle ιστοσελίδα του μαθήματος `https://courses.pclab.ece.ntua.gr/course/view.php?id=17` και θα πρέπει να την υποβάλετε ως ένα ενιαίο αρχείο PDF με το εξής filename format χρησιμοποιώντας μόνο λατινικούς χαρακτήρες: `cv21_hwk3_AM_FirstnameLastname.pdf`, όπου AM είναι ο 8-ψήφιος αριθμός μητρώου σας. Σκαναρισμένες χειρόγραφες λύσεις επιτρέπονται αρκεί να είναι καθαρογραμμένες και ευανάγνωστες. Επίσης, στην 1η σελίδα των λύσεων θα αναγράφετε το ονοματεπώνυμο, AM, και e-mail address σας.

---

**Άσκηση 3.1**: (Ανάλυση Σχήματος με Μετ/σμό Απόστασης και Σκελετό)
Θεωρούμε μια διακριτή δυαδική εικόνα (σύνολο) $X$, που εγγράφεται σε ένα ορθογώνιο παραλληλόγραμμο $6 \times 9$ pixels (βλ. επισυναπτόμενο Σχήμα), και ένα συμμετρικό κυρτό δομικό στοιχείο $B$ (που προσεγγίζει τον δίσκο με βάση τον οποίο γίνεται η σκελετικοποίηση του σχήματος).
**(a)** Να υπολογισθεί ο εσωτερικός μετασχηματισμός απόστασης $DT(X)$ του συνόλου $X$ με τον two-pass forward-backward αλγόριθμο chamfer χρησιμοποιώντας την απόσταση cityblock. Να βρεθούν οι τιμές των εικόνων $u_0$ ($0/\infty$ indicator function του $X$), $u_1$ (ενδιάμεσο στάδιο απόστασης), και $u_2 = DT(X)$ (τελική απόσταση).
**(b)** Να υπολογισθεί ο μορφολογικός σκελετός $SK(X) = \bigcup_{n\geq 0} S_n(X)$, ως ένωση των σκελετικών υποσυνόλων $S_n(X) = (X \ominus nB) \setminus [(X \ominus nB) \circ B]$, όπου $B$ είναι ο 5-pixel ρόμβος. Επίσης, να βρεθούν τα σημεία των: erosions $X \ominus nB$, skeleton subsets $S_n(X)$, partial unions of skeleton subsets $U_{k\geq n} S_k(X)$, openings $X \circ nB$, για $n = 0, 1, 2, ....$
(Σημεία ενός συνόλου συμβολίζονται με '•', ενώ σημεία του συμπληρώματος του συμβολίζονται με '·')
**(c)** Να επαληθεύσετε υπολογιστικά για το ανωτέρω παράδειγμα ότι τα σημεία του σκελετού στο μέρος (b) είναι ακριβώς τα σημεία τοπικού μεγίστου του μετ/σμού απόστασης στο μέρος (a), όπου τα τοπικά μέγιστα υπολογίζονται με βάση την γειτονιά $B$.
Η λύση να επιστραφεί στην επισυναπτόμενη σελίδα με τον πίνακα σχημάτων.

---

**Άσκηση 3.2**: (Ανάλυση 3Δ Κίνησης)
Θεωρούμε τις εξισώσεις κίνησης και ορισμούς μεταβλητών της Ενότητας 15.4.1 του Κεφ.15 (ΟΥ, 2018). Εστω ένα κινούμενο 3Δ αντικείμενο που εκτελεί μια γενική Ευκλείδεια κίνηση (μεταφορά και περιστροφή) και του οποίου η επιφάνεια μπορεί τοπικά να περιγραφεί από μια εξίσωση 2ου βαθμού:

$$Z = Z_0 + pX + qY + \frac{1}{2}C_{xx}X^2 + \frac{1}{2}C_{yy}Y^2 + C_{xy}XY$$

όπου $(X, Y, Z)$ είναι οι συντεταγμένες σημείων του 3Δ κόσμου.
**(a)** Χρησιμοποιώντας τις εξισώσεις προοπτικής προβολής και την 2ης τάξης ανάπτυξη Taylor της συνάρτησης $Z = Z(x, y)$, όπου $(x, y)$ είναι οι συντεταγμένες της 2Δ εικόνας, να αποδείξετε ότι

$$Z^{-1} = Z_0^{-1}[1 - px - qy - \frac{1}{2}k_{xx}x^2 - \frac{1}{2}k_{yy}y^2 - k_{xy}xy + O(x^3)], \quad (k_{xx}, k_{yy}, k_{xy}) = Z_0(C_{xx}, C_{yy}, C_{xy})$$

όπου $(k_{xx}, k_{yy}, k_{xy})$ παριστάνουν κανονικοποιημένες καμπυλότητες.
**(b)** Να αντικαταστήσετε την ανωτέρω σχέση (αγνοώντας το λάθος $O(x^3)$) στις Εξ.(15.55) και (15.56) του Κεφ.15 και να βρείτε αναλυτικά την 2Δ κίνηση $(u, v)$ ως συνάρτηση των 6 παραμέτρων της κίνησης, των παραμέτρων της ανωτέρω επιφάνειας, και των συντεταγμένων $(x, y)$ των σημείων της εικόνας. Τι βαθμού είναι αυτές οι συναρτήσεις;

---

**Άσκηση 3.3**: (Ανάλυση Υφής με ενεργειακά μοντέλα) [τα μέρη (α),(β) είναι ανεξάρτητα]
**(α)** Στην ανάλυση υφής συχνά χρησιμοποιούνται τοπικά μοντέλα διαμόρφωσης που παριστάνουν μια συνιστώσα υφής ως $g(x, y) = a(x, y)\exp(j\phi(x, y))$, όπου $a(x, y)$ είναι το στιγμιαίο πλάτος, $\phi(x, y)$ η στιγμιαία

φάση και $\nabla\phi(x,y)$ το διάνυσμα στιγμιαίων χωρικών συχνοτήτων. Για εξαγωγή αυτής της πληροφορίας από μια γκρίζα εικόνα $f(x,y)$, συχνά χρησιμοποιούνται συστοιχίες από quadrature ζεύγη φίλτρων με κρουστικές αποκρίσεις

$$h_1(x,y) = G_\sigma(x,y)\cos(ux+vy), \quad h_2(x,y) = G_\sigma(x,y)\sin(ux+vy)$$

όπου $G_\sigma$ είναι μια Gaussian συνάρτηση (πιθανώς ανισοτροπική) και $(u,v)$ είναι η κεντρική συχνότητα της συνιστώσας υφής. Εάν γνωρίζετε τα σήματα εξόδου $g_1 = f * h_1$ και $g_2 = f * h_2$ από τα δύο φίλτρα του quadrature ζεύγους και θεωρήσετε ότι αυτά τα σήματα προσεγγίζουν καλά το πραγματικό και φανταστικό μέρος αντίστοιχα της συνιστώσας υφής $g$, περιγράψετε ένα υπολογιστικό σύστημα που θα εξάγει το πλάτος και στιγμιαίες συχνότητες της $g$ από αυτά τα δεδομένα.
**(β)** Εστω ο 2Δ ενεργειακός τελεστής $\Phi(f)(x,y) = \|\nabla f(x,y)\|^2 - f(x,y)\nabla^2 f(x,y)$. Να αποδείξετε ότι η εφαρμογή του σε μια ημιτονοειδή υφή $f(x,y)$ δίνει ένα τετραγωνικό γινόμενο πλάτους και συχνότητας:

$$f(x,y) = A\cos(\omega_1 x + \omega_2 y + \phi_0) \Longrightarrow \Phi[f(x,y)] = A^2(\omega_1^2 + \omega_2^2)$$

Στο Κεφ.13 (Ενότητα 13.3 του βιβλίου Ο.Υ. 2005) περιγράφεται ένας αλγόριθμος που υπολογίζει ακριβώς τις τιμές των απολύτων παραμέτρων $|A|$, $|\omega_1|$, $|\omega_2|$ συνδυάζοντας το ανωτέρω αποτέλεσμα και τις ενέργειες $\Phi(f_x), \Phi(f_y)$ των μερικών παραγώγων της υφής.
Βασιζόμενοι στις ανωτέρω ιδέες, να βρείτε ένα παρόμοιο αλγόριθμο που να υπολογίζει τις τιμές των συχνοτήτων $\omega_1$ και $\omega_2$ με τα ορθά πρόσημα, χρησιμοποιώντας και την μεικτή παράγωγο $f_{xy}$.

---

**Άσκηση 3.4**: (Ενεργές καμπύλες και Επιπεδοσύνολα)
Εστω η παραμετροποίηση $\vec{C}(p,t) = [x(p,t), y(p,t)]$, $p \in [0,1]$, μιας κλειστής ομαλής επίπεδης καμπύλης που εξελίσσεται βάσει μιας διαφορικής εξίσωσης κίνησης:

$$\frac{\partial \vec{C}(p,t)}{\partial t} = V\vec{N}_o(p,t)$$

με αρχική συνθήκη $\Gamma(0) = \{\vec{C}(p,0) : p \in [0,1]\}$, όπου $\vec{N}_o(p,t)$ είναι το μοναδιαίο εξωτερικό κάθετο διάνυσμα στα σημεία της καμπύλης, και $V$ είναι η (βαθμωτή) εξωτερική κάθετη ταχύτητα. Η εξελισσόμενη καμπύλη εμβυθίζεται ως ισοϋψής καμπύλη σε ύψος 0 μιας εξελισσόμενης χωρο-χρονικής συνάρτησης $\Phi(x,y,t)$:

$$\Gamma(t) = \{(x,y) : \Phi(x,y,t) = 0\}$$

όπου $\Gamma(t)$ παριστάνει το σύνολο σημείων της καμπύλης, με αρχική συνθήκη

$$\Phi(x,y,0) = \Phi_0(x,y), \quad \Gamma(0) = \{(x,y) : \Phi_0(x,y) = 0\}$$

όπου $\Phi_0(x,y)$ είναι η προσημασμένη συνάρτηση Ευκλείδειας απόστασης από την καμπύλη $\Gamma(0)$:

$$\Phi_0(x,y) = \begin{cases} 0, & (x,y) \in \Gamma(0) \\ +\bigwedge\limits_{(v,w)\in\Gamma(0)} \|(x-v, y-w)\|, & (x,y) \in \text{interior}(\Gamma(0)) \\ -\bigwedge\limits_{(v,w)\in\Gamma(0)} \|(x-v, y-w)\|, & (x,y) \in \text{exterior}(\Gamma(0)) \end{cases}$$

Να αποδειχθεί αναλυτικά ότι η κίνηση της καμπύλης δημιουργεί μια αντίστοιχη κίνηση της επιφάνειας της χωρο-χρονικής συνάρτησης $\Phi(x,y,t)$ που διέπεται από την ΜΔΕ

$$\begin{cases} \partial\Phi/\partial t &= V\|\nabla\Phi\| \\ \Phi(x,y,0) &= \Phi_0(x,y) \end{cases}$$

*Υπόδειξη:* Τροποποιείστε την σχετική απόδειξη στο Εδάφιο 17.3.2 του βιβλίου Ο.Υ. 2005 όπου η συνάρτηση $\Phi_0(x,y)$ ορίζεται με αντίθετο πρόσημο.

---

**Άσκηση 3.5**: (Προβολική Γεωμετρία)
**(α) Αφινικοί μετασχηματισμοί.** Να αποδείξετε ότι για την περίπτωση των αφινικών μετασχηματισμών στο προβολικό επίπεδο, είναι δυνατό να μετασχηματιστεί ένας κύκλος σε μία έλλειψη, ενώ είναι αδύνατο να μετασχηματιστεί μία έλλειψη σε υπερβολή ή παραβολή.
**(β) Υπολογισμός σημείου φυγής.** Θεωρήστε τον μονοδιάστατο προβολικό μετασχηματισμό $\mathbf{y} = H_{2\times2}\mathbf{x}$ μεταξύ σημείων πάνω σε μία ευθεία του πραγματικού κόσμου και σημείων πάνω στην ευθεία της εικόνας, όπου τα σημεία $\mathbf{x}$ και $\mathbf{y}$ βρίσκονται παραμετροποιημένα και σε ομογενείς συντεταγμένες της μορφής $(a, b)$. Με βάση την πληροφορία που μας δίνει ο πίνακας της ομογραφίας $H_{2\times2}$, να βρεθεί ποιο είναι το σημείο φυγής για την ευθεία που αναπαριστάται από την εν λόγω ομογραφία.
**(γ) Ιδιότητες προβολικής κάμερας.** Θεωρήστε τον $3 \times 4$ προβολικό πίνακα κάμερας (camera projection matrix) $P = [M \mid \mathbf{p}_4]$ (όπου με $M$ συμβολίζεται ο αριστερός $3 \times 3$ υποπίνακας του $P$ και με $\mathbf{p}_4$ η τέταρτη στήλη του). Να αποδείξετε ότι το κέντρο $\mathbf{C}$ της κάμερας αποτελεί τον μονοδιάστατο δεξιό μηδενοχώρο του $P$, δηλαδή $P\mathbf{C} = \mathbf{0}$. Επίσης, να βρείτε και να αποδείξετε σε ποια μορφή θα είναι τα κέντρα των καμερών $\mathbf{C}$ στην περίπτωση των πεπερασμένων καμερών και καμερών στο άπειρο. Τέλος, η κάμερα που περιγράφεται από τον πίνακα $P = \begin{bmatrix} 4 & 1 & 2 & 5 \\ 7 & 4 & 6 & -1 \\ 10 & -2 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ είναι μία πεπερασμένη κάμερα ή μία κάμερα στο άπειρο και γιατί; Ποιο είναι το κέντρο της;
**(δ) Θεμελιώδης πίνακας $F$.** Να αποδείξετε ότι τα δύο επιπολικά σημεία $\mathbf{e}$ και $\mathbf{e}'$ (σε ομογενείς συντεταγμένες) των εικόνων από τις οποίες έχει εξαχθεί ένας θεμελιώδης πίνακας $F$ δημιουργούν τον δεξιό και αριστερό μηδενοχώρο του, δηλαδή $F\mathbf{e} = \mathbf{0}$ και $\mathbf{e}'^T F = \mathbf{0}$.
**(ε) Θεμελιώδης πίνακας $F$.** Θεωρήστε ότι δύο κάμερες "στοχεύουν" σε κάποιο σημείο του χώρου, με τέτοιο τρόπο ώστε οι δύο κύριοι άξονες (principal axis) των καμερών να τέμνονται σε αυτό το σημείο. Εάν οι συντεταγμένες της εικόνας είναι κανονικοποιημένες ούτως ώστε η αρχή των αξόνων τους $(0, 0)$ να συμπίπτει με το κύριο σημείο (principal point) του επιπέδου της εικόνας, τότε το στοιχείο $F_{33}$ του θεμελιώδους πίνακα $F$ είναι ίσο με μηδέν. Σημείωση: Το κύριο σημείο του επιπέδου της εικόνας ορίζεται ως το σημείο τομής του κύριου άξονα της κάμερας με το επίπεδο της εικόνας.

---

**Άσκηση 3.6**:[1] **Μετρική ανόρθωση (Metric Rectification) ενός βήματος για την αφαίρεση προβολικής και αφινικής συνιστώσας παραμόρφωσης**
Σε αυτή την άσκηση σας ζητείται να αναπτύξετε υπολογιστικά (π.χ. σε Python ή MATLAB) την διαδικασία & αλγόριθμο **ενός** βήματος (περιγράφεται στη συνέχεια, καθώς και στο Παράδειγμα 2.27 των H-Z [1]) και να την εφαρμόσετε στην εικόνα "paintings.jpg" που σας δίνουμε, προκειμένου το τελικό αποτέλεσμα να είναι απαλλαγμένο από την προβολική και αφινική συνιστώσα παραμόρφωσης (modulo ενός μετασχηματισμού ομοιότητας).

- Αρχικά, ο σκοπός είναι ο υπολογισμός της μήτρας $C^*_\infty = \begin{bmatrix} a & b/2 & d/2 \\ b/2 & c & e/2 \\ d/2 & e/2 & f \end{bmatrix}$. Αυτό μπορεί να πραγματοποιηθεί μέσω της εύρεσης σχέσεων της μορφής $\mathbf{l}^\top C^*_\infty \mathbf{m} = 0$, οι οποίες προκύπτουν από ζευγάρια κάθετων ευθειών $\mathbf{l} = (l_1, l_2, l_3)$ και $\mathbf{m} = (m_1, m_2, m_3)$ της αρχικής (προβολικά παραμορφωμένης) εικόνας που σας δίνεται. Στη συνέχεια, μετατρέπουμε τις σχέσεις αυτές στην εξής μορφή:

$$\begin{pmatrix} l_1m_1 & \frac{1}{2}(l_1m_2 + l_2m_1) & l_2m_2 & \frac{1}{2}(l_1m_3 + l_3m_1) & \frac{1}{2}(l_2m_3 + l_3m_2) & l_3m_3 \end{pmatrix} \mathbf{c} = 0$$

  όπου $\mathbf{c} = \begin{pmatrix} a & b & c & d & e & f \end{pmatrix}^\top$, ούτως ώστε να αποκτήσουμε γραμμικές εξισώσεις περιορισμών ως προς το άγνωστο διάνυσμα $\mathbf{c}$. Τοποθετώντας πέντε εξισώσεις περιορισμών, τη μία κάτω από την άλλη, μπορούμε να υπολογίσουμε απ' ευθείας τις απαιτούμενες παραμέτρους (πέντε σε αυτή την περίπτωση, καθώς η $C^*_\infty$ υπολογίζεται up to scale ή, εναλλακτικά, να θεωρήσουμε ότι $f = 1$).
  Σημείωση: Προκειμένου να βρεθούν τα πέντε ζευγάρια κάθετων ευθειών, θα χρειαστεί να βρείτε χειροκίνητα τις συντεταγμένες σημείων και ευθύγραμμων τμημάτων πάνω στην εικόνα. Σημειώνεται ότι οι πίνακες ζωγραφικής που απεικονίζονται είναι ορθογώνιοι (και όχι τετράγωνοι) με άγνωστες

[1] Η άσκηση αυτή είναι προαιρετική. Η λύση της σας δίνει bonus 20% επί της 3ης σειράς αναλυτικών ασκήσεων και μπορεί να παραδοθεί ξεχωριστά μέχρι και 11/07/2021 μέσω e-mail στον ΥΔ Παναγιώτη Μέρμιγκα: p.mermigkas@gmail.com.

διαστάσεις (εάν χρειαστεί να κάνετε κάποιες παραδοχές ή προσεγγίσεις, εξηγήστε επαρκώς τη λογική που ακολουθήσατε).

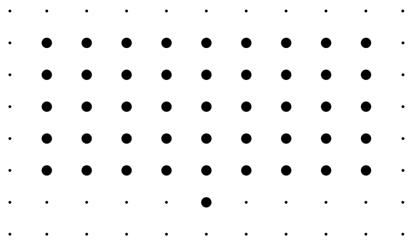
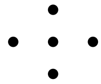
- Όταν υπολογιστούν οι πέντε αυτές παράμετροι $a, b, c, d, e$ της $C^*_\infty$, γίνεται αντιστοίχιση με τη μορφή της $C^{*\prime}_\infty = \begin{bmatrix} KK^\top & KK^\top\mathbf{v} \\ \mathbf{v}^\top KK^\top & \mathbf{v}^\top KK^\top\mathbf{v} \end{bmatrix}$ της Εξίσωσης (2.23) των H-Z [1]. Από τον πάνω αριστερά υποπίνακα $2 \times 2$ προκύπτει ο άνω τριγωνικός πίνακας $K$, ενώ το διάνυσμα $\mathbf{v}$ προκύπτει εύκολα από το πάνω δεξιά διάνυσμα $2 \times 1$. Ο πίνακας $K$ και το διάνυσμα $\mathbf{v}$ πρέπει να χρησιμοποιηθούν κατάλληλα, ώστε να προκύψει η ομογραφία $H$ που θα εφαρμοστεί στην αρχική εικόνα, ώστε να απαλλαχθεί ταυτόχρονα (σε ένα βήμα) από την προβολική και αφινική συνιστώσα παραμόρφωσης.

Η εργασία σας θα πρέπει να περιέχει τουλάχιστον τα εξής: α) τον κώδικα (με σχόλια), β) γραπτό κείμενο για να εξηγήσετε τα βήματα και τις εξισώσεις που έχετε χρησιμοποιήσει, γ) την αρχική εικόνα με επισημειωμένα τα σημεία και τα ευθύγραμμα τμήματα που χρησιμοποιήσατε, και δ) την τελική (χωρίς προβολικές και αφινικές παραμορφώσεις) εικόνα.

---

**ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ:**

[1] Hartley - Zisserman, *Multiple View Geometry in Computer Vision*, 2nd edition, Cambridge University Press, 2000.

$X =$  , $B =$  $= B^s$.

Chamfer Distance $(a,b) = (1,+\infty)$

$u_0$ $(+ = +\infty)$

| | | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| 0 | | | | | | | | | | 0 |
| 0 | | | | | | | | | | 0 |
| 0 | | | | | | | | | | 0 |
| 0 | | | | | | | | | | 0 |
| 0 | | | | | | | | | | 0 |
| 0 | | | | | | | | | | 0 |
| 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |

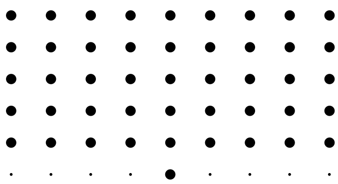
$u_1$

| | | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| 0 | | | | | | | | | | 0 |
| 0 | | | | | | | | | | 0 |
| 0 | | | | | | | | | | 0 |
| 0 | | | | | | | | | | 0 |
| 0 | | | | | | | | | | 0 |
| 0 | | | | | | | | | | 0 |
| 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |

$u_2$

| | | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| 0 | | | | | | | | | | 0 |
| 0 | | | | | | | | | | 0 |
| 0 | | | | | | | | | | 0 |
| 0 | | | | | | | | | | 0 |
| 0 | | | | | | | | | | 0 |
| 0 | | | | | | | | | | 0 |
| 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |

Skeleton

| | $n = 0$ | $n = 1$ | $n = 2$ |
|---|---|---|---|
| $X \ominus nB$ |  | | |
| $S_n(X)$ | | | |
| $\bigcup_{k \geq n} S_k$ | | | |
| $X \circ nB$ | | | |