

ΕΘΝΙΚΟ ΜΕΤΣΟΒΙΟ ΠΟΛΥΤΕΧΝΕΙΟ
ΣΧΟΛΗ ΗΛΕΚΤΡΟΛΟΓΩΝ ΜΗΧΑΝΙΚΩΝ ΚΑΙ ΜΗΧΑΝΙΚΩΝ
ΥΠΟΛΟΓΙΣΤΩΝ



ΟΡΑΣΗ ΥΠΟΛΟΓΙΣΤΩΝ

(2020-2021)

3^ο Σύνολο Αναλυτικών Ασκήσεων

Ονοματεπώνυμο:

- Χρήστος Τσούφης

Αριθμός Μητρώου:

- 03117176

Στοιχεία Επικοινωνίας:

- el17176@mail.ntua.gr

Άσκηση 3.1 (Ανάλυση Σχήματος με Μετ/σμό Απόστασης και Σκελετό)

Έστω μια διακριτή δυαδική εικόνα (σύνολο) X , που εγγράφεται σε ένα ορθογώνιο παραλληλόγραμμο 6×9 pixels, και ένα συμμετρικό κυρτό δομικό στοιχείο B (που προσεγγίζει τον δίσκο με βάση τον οποίο γίνεται η σκελετοποίηση του σχήματος).

(a) Να υπολογισθεί ο εσωτερικός μετασχηματισμός απόστασης $DT(X)$ του συνόλου X με τον two-pass forward-backward αλγόριθμο chamfer χρησιμοποιώντας την απόσταση cityblock. Να βρεθούν οι τιμές των εικόνων u_0 (0/∞ indicator function of X), u_1 (ενδιάμεσο στάδιο απόστασης), και $u_2 = DT(X)$ (τελική απόσταση).

(b) Να υπολογισθεί ο μορφολογικός σκελετός $SK(X) = \bigcup_{n \geq 0} S_n(X)$, ως ένωση των σκελετικών υποσυνόλων $S_n(X) = (X \ominus nB) \setminus [X \ominus nB] \circ B$, όπου B είναι ο 5-pixel ρόμβος. Επίσης, να βρεθούν τα σημεία των: erosions $X \ominus nB$, skeleton subsets $S_n(X)$, partial unions of skeleton subsets $\bigcup_{k \geq n} S_k(X)$, openings $X \circ nB$, $n = 0, 1, 2, \dots$

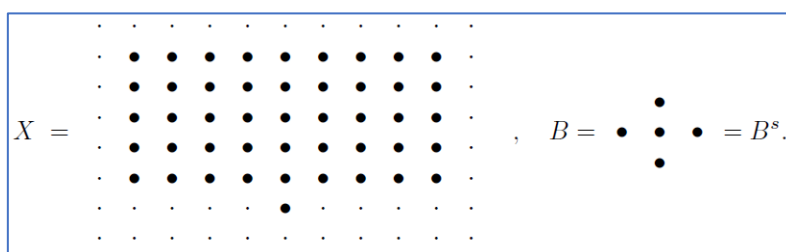
(Σημεία ενός συνόλου συμβολίζονται με ‘•’, ενώ σημεία του συμπληρώματός του συμβολίζονται με ‘.’)

(c) Να επαληθευτεί υπολογιστικά το ανωτέρω παράδειγμα ότι τα σημεία του σκελετού στο μέρος (b) είναι ακριβώς τα σημεία του τοπικού μεγίστου του μετ/σμού απόστασης στο μέρος (a), όπου τα τοπικά μέγιστα υπολογίζονται με βάση την γειτονιά B.

Η λύση φαίνεται στην επισυναπτόμενη σελίδα με τον πίνακα σχημάτων.

Λύση:

Αρχικά, δίνεται ότι:



(a) Υπολογισμός του εσωτερικού μετασχηματισμού απόστασης $DT(x)$ του συνόλου X με τον two-pass forward-backward αλγόριθμο Chamfer χρησιμοποιώντας την Chamfer Distance $(a, b) = (1, +\infty)$:

$$u_0 (+ = +\infty):$$
[illegible]

u_1 :

$$u_1[i, j] = \min(u_1[i, j-1] + 1, u_1[i-1, j] + 1, u_0[i, j])$$

0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0	1	1	1	1	1	1	1	1	1	0
0	1	2	2	2	2	2	2	2	2	0
0	1	2	3	3	3	3	3	3	3	0
0	1	2	3	4	4	4	4	4	4	0
0	1	2	3	4	5	5	5	5	5	0
0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0

u_2 :

$$u_2[i, j] = \min(u_2[i, j+1] + 1, u_2[i+1, j] + 1, u_1[i, j])$$

0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0	1	1	1	1	1	1	1	1	1	0
0	1	2	2	2	2	2	2	2	1	0
0	1	2	3	3	3	3	3	2	1	0
0	1	2	2	2	3	2	2	2	1	0
0	1	1	1	1	2	1	1	1	1	0
0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0

(b) Skeleton για την 2^n Λύση:

Προκύπτει από τον τύπο: $SK(X) = \bigcup_{n \geq 0} S_n(X)$ ως ένωση των σκελετικών υποσυνόλων:

$S_n(X) = (X \ominus nB) \setminus [(X \ominus nB) \circ B]$, όπου B ο 5-pixel ρόμβος.

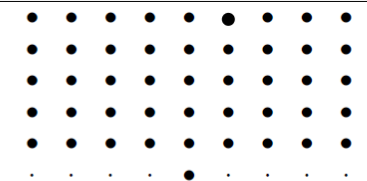
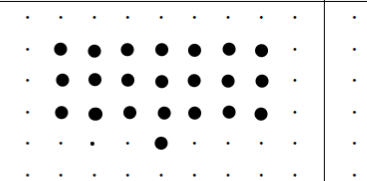
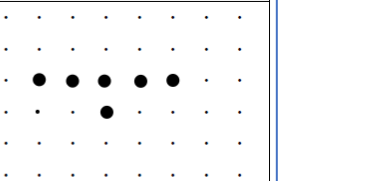
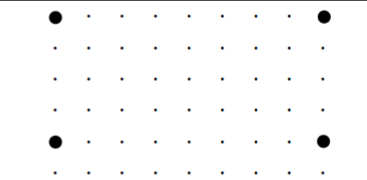
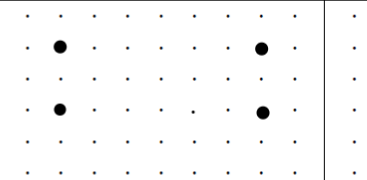
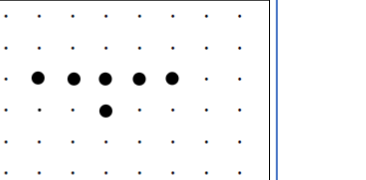
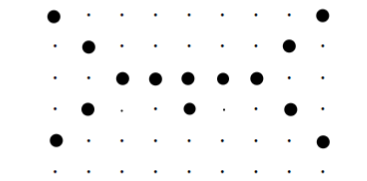
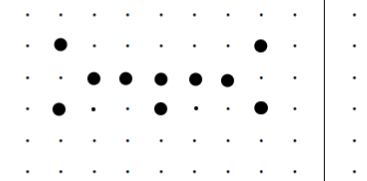
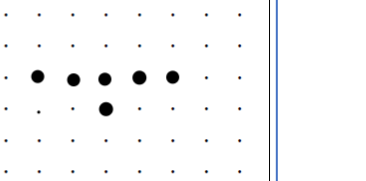
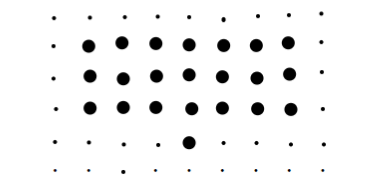
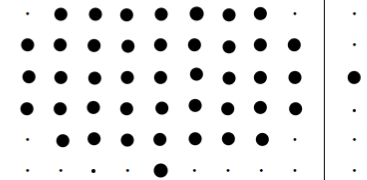
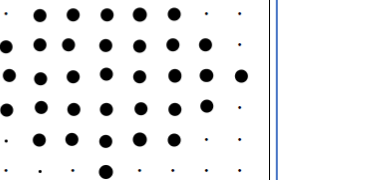
Για τον υπολογισμό των σημείων χρησιμοποιήθηκαν οι παρακάτω σχέσεις:

$$\text{Τα σημεία των Erosions: } X \ominus nB = \begin{cases} X, & n = 0 \\ X \ominus B, & n = 1 \\ X \ominus (B \oplus B) = (X \ominus B) \ominus B, & n = 2 \end{cases}$$

Τα σημείων των Skeleton Subsets: $S_n(X) = (X \ominus nB) \setminus [(X \ominus nB) \circ B]$, $n = 0, 1, 2$

Τα σημεία των Partial Unions of Skeleton Subsets: $\bigcup_{n \geq 0} S_n(X)$

$$\text{Τα σημεία των openings: } X \circ nB = \begin{cases} X, & n = 0 \\ X \circ B, & n = 1 \\ X \circ (B \oplus B), & n = 2 \end{cases}$$

	$n = 0$	$n = 1$	$n = 2$
$X \ominus nB$			
$S_n(X)$			
$\bigcup_{k \geq n} S_k$			
$X \circ nB$			

(c) Τοπικά μέγιστα u_1 , ως προς τη γειτονιά B , του μετ/σμού απόστασης και οι τιμές είναι:

1	·	·	·	·	·	·	·	1
·	2	·	·	·	·	·	2	·
·	·	3	3	3	3	3	·	·
·	2	·	·	3	·	·	2	·
1	·	·	·	·	·	·	·	1

Οπότε, ταυτίζεται με τα σημεία του σκελετού.

Άσκηση 3.2 (Ανάλυση 3Δ Κίνησης)

Έστω οι εξισώσεις κίνησης και οι ορισμοί μεταβλητών της Ενότητας 15.4.1 του Κεφ. 15 (ΟΥ, 2018). Επίσης, έστω ένα κινούμενο 3Δ αντικείμενο που εκτελεί μια γενική Ευκλείδεια κίνηση (μεταφορά και περιστροφή) και του οποίου η επιφάνεια μπορεί τοπικά να περιγραφεί από μια εξίσωση 2^{ου} βαθμού:

$$Z = Z_0 + pX + qY + \frac{1}{2} C_{xx}X^2 + \frac{1}{2} C_{yy}Y^2 + C_{xy}XY$$

Όπου (X, Y, Z) είναι οι συντεταγμένες σημείων του 3Δ κόσμου.

(a) Χρησιμοποιώντας τις εξισώσεις προοπτικής προβολής και την 2^η τάξης ανάπτυξη Taylor της συνάρτησης $Z = Z(x, y)$, όπου (x, y) είναι οι συντεταγμένες της 2Δ εικόνας, να αποδειχθεί ότι:

$$Z^{-1} = Z_0^{-1} [1 - px - qy - \frac{1}{2} k_{xx}x^2 - \frac{1}{2} k_{yy}y^2 + O(x^3)], (k_{xx}, k_{yy}, k_{xy}) = Z_0(C_{xx}, C_{yy}, C_{xy})$$

Όπου (k_{xx}, k_{yy}, k_{xy}) παριστάνουν κανονικοποιημένες καμπυλότητες.

(b) Να αντικατασταθεί η ανωτέρω σχέση (αγνοώντας το λάθος $O(x^3)$) στις Εξ. (15.55) και (15.56) του Κεφ. 15 και να βρεθεί αναλυτικά η 2Δ κίνηση (u, v) ως συνάρτηση των 6 παραμέτρων της κίνησης, των παραμέτρων της ανωτέρω επιφάνειας, και των συντεταγμένων (x, y) των σημείων της εικόνας. Τι βαθμού είναι αυτές οι συντεταγμένες;

Λύση:

(a) Αναπτύσσοντας κατά Taylor την Z , προκύπτει:

$$\begin{aligned} Z \approx & Z_0 + (X - X_0) \frac{\partial Z}{\partial X}(X_0, Y_0) + (Y - Y_0) \frac{\partial Z}{\partial Y}(X_0, Y_0) + \frac{1}{2} (X - X_0)^2 \frac{\partial^2 Z}{\partial X^2}(X_0, Y_0) + \\ & + \frac{1}{2} (Y - Y_0)^2 \frac{\partial^2 Z}{\partial Y^2}(X_0, Y_0) + (X - X_0)(Y - Y_0) \frac{\partial^2 Z}{\partial X \partial Y}(X_0, Y_0) + O(x^3) \end{aligned}$$

Από την εκφώνηση θα ισχύει ότι:

$$\begin{aligned} Z &= Z_0 + pX + qY + \frac{1}{2} C_{xx}X^2 + \frac{1}{2} C_{yy}Y^2 + C_{xy}XY \xrightarrow{X=Zx, Y=Zy} \\ Z - pZx - qZy - \frac{1}{2} C_{xx}Z^2x^2 - \frac{1}{2} C_{yy}Z^2y^2 - C_{xy}Z^2xy &= Z_0 \xrightarrow{\text{Taylor}} \\ Z_0^{-1}(1 - px - qy - \frac{1}{2} k_{xx}x^2 - \frac{1}{2} k_{yy}y^2 + O(x^3)) &= Z^{-1} \end{aligned}$$

Όπου $O(x^3)$ είναι το σφάλμα προσέγγισης με ανάπτυξη κατά Taylor.

(b) Έστω ότι τίθεται $f(x, y) = 1 - px - qy - \frac{1}{2} k_{xx}x^2 - \frac{1}{2} k_{yy}y^2 + O(x^3)$

Τότε, θα ισχύει ότι $Z_0^{-1} \cdot f(x, y) = Z^{-1}$.

Οι σχέσεις που συνδέουν την 3Δ κίνηση με την οπτική ροή είναι:

$$U = U_t + U_r \text{ \& } V = V_t + V_r$$

$$\text{Άρα, } U = \frac{xW-U}{Z} + Axy - B(x^2 + 1) + Cy = \frac{(xW-U)f(x,y)}{Z_0} + Axy - B(x^2 + 1) + Cy$$

$$V = \frac{yW-V}{Z} + A(y^2 + 1) - Bxy - Cx = \frac{(yW-V)f(x,y)}{Z_0} + A(y^2 + 1) - Bxy - Cx$$

Δηλαδή, προέκυψαν 2 εξισώσεις των x, y 3^{ου} βαθμού.

Άσκηση 3.3 (Ανάλυση Υφής με ενεργειακά μοντέλα)

(a) Στην ανάλυση υφής, συχνά χρησιμοποιούνται τοπικά μοντέλα διαμόρφωσης που παριστάνουν μια συνιστώσα υφής ως $g(x, y) = a(x, y)\exp(j\phi(x, y))$, όπου $a(x, y)$ είναι το στιγμιαίο πλάτος, $\phi(x, y)$ η στιγμιαία φάση και $\nabla\phi(x, y)$ το διάνυσμα στιγμιαίων χωρικών συχνοτήτων. Για εξαγωγή αυτής της πληροφορίας από μια γκρίζα εικόνα $f(x, y)$, συχνά χρησιμοποιούνται συστοιχίες από quadrature ζεύγη φίλτρων με κρουστικές αποκρίσεις

$$h_1(x, y) = G_\sigma(x, y)\cos(ux + vy), \quad h_2(x, y) = G_\sigma(x, y)\sin(ux + vy)$$

όπου G_σ είναι μια Gaussian συνάρτηση (πιθανώς ανισοτροπική) και (u, v) είναι η κεντρική συχνότητα της συνιστώσας υφής. Εάν είναι γνωστά τα σήματα εξόδου $g_1 = f * h_1$ και $g_2 = f * h_2$ από τα δύο φίλτρα του quadrature ζεύγους και θεωρηθεί ότι αυτά τα σήματα προσεγγίζουν καλά το πραγματικό και φανταστικό μέρος αντίστοιχα της συνιστώσας υφής της g , να περιγραφεί ένα υπολογιστικό σύστημα που θα εξάγει το πλάτος και στιγμιαίες συχνότητες της g από αυτά τα δεδομένα.

(b) Έστω ο 2D ενεργειακός τελεστής $\Phi(f)(x, y) = \|\nabla f(x, y)\|^2 - f(x, y)\nabla^2 f(x, y)$. Να αποδειχθεί ότι η εφαρμογή του σε μια ημιτονοειδή υφή $f(x, y)$ δίνει ένα τετραγωνικό γινόμενο πλάτους και συχνότητας:

$$f(x, y) = A\cos(\omega_1 x + \omega_2 y + \phi_0) \Rightarrow \Phi[f(x, y)] = A^2(\omega_1^2 + \omega_2^2)$$

Στο Κεφ. 13 (Ενότητα 13.3 του βιβλίου).Y. 2005) περιγράφεται ένας αλγόριθμος που υπολογίζει ακριβώς τις τιμές των απόλυτων παραμέτρων $|A|$, $|\omega_1|$, $|\omega_2|$ συνδυάζοντας το ανωτέρω αποτέλεσμα και τις ενέργειες $\Phi(f_x)$, $\Phi(f_y)$ των μερικών παραγώγων της υφής.

Με βάση τις ανωτέρω ιδέες, να βρεθεί ένας παρόμοιος αλγόριθμος που να υπολογίζει τις τιμές των συχνοτήτων ω_1 και ω_2 με τα ορθά πρόσημα, χρησιμοποιώντας και την μεικτή παράγωγο f_{xy} .

Λύση:

(a) Από τα δεδομένα, ισχύει για μια συνιστώσα υφής $g(x, y) = a(x, y)e^{j\phi(x, y)}$ με σήματα εισόδου:

$$g_1 = f * h_1 = \text{Re}\{g(x, y)\}$$

$$g_2 = f * h_2 = \text{Im}\{g(x, y)\}$$

Όπου,

$$h_1(x, y) = \text{Re}\{G_\sigma(x, y)e^{j(ux + vy)}\} = G_\sigma(x, y)\cos(ux + vy)$$

$$h_2(x, y) = \text{Im}\{G_\sigma(x, y)e^{j(ux + vy)}\} = G_\sigma(x, y)\sin(ux + vy)$$

Όπου G_σ είναι Gaussian συνάρτηση κλίμακας σ και (u, v) η κεντρική συχνότητα της συνιστώσας υφής.

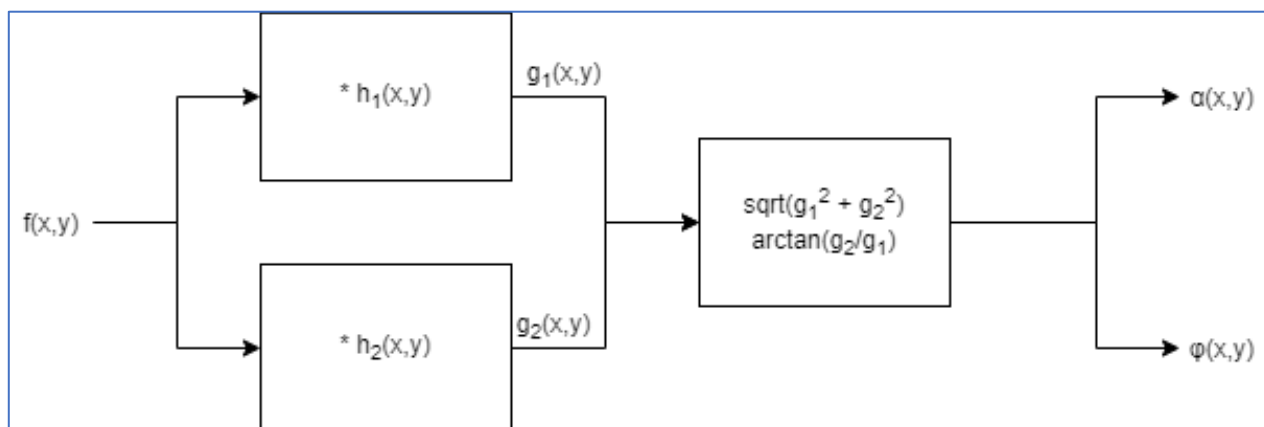
Και, εφόσον είναι γνωστό το πραγματικό και το φανταστικό μέρος, θα ισχύει ότι:

$$a(x, y) = \sqrt{\text{Re}\{g(x, y)\}^2 + \text{Im}\{g(x, y)\}^2} = \sqrt{g_1^2(x, y) + g_2^2(x, y)}$$

$$\phi(x, y) = \arctan \frac{\text{Im}\{g(x, y)\}}{\text{Re}\{g(x, y)\}} = \arctan \frac{g_2(x, y)}{g_1(x, y)}$$

Οπότε, η στιγμιαία συχνότητα είναι το $\nabla\phi(x, y)$ (οριζόντια, κάθετη).

Η μορφή του ζητούμενου υπολογιστικού συστήματος είναι η παρακάτω:



(b) Δίνεται $\Phi(f)(x, y) = \|\nabla f(x, y)\|^2 - f(x, y)\nabla^2 f(x, y)$ και $f(x, y) = A\cos(\omega_1 x + \omega_2 y + \varphi_0)$.

Τότε,

- $\|\nabla f(x, y)\|^2 = \left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2 = A^2\omega_1^2\sin^2(\omega_1 x + \omega_2 y + \varphi_0) + A^2\omega_2^2\sin^2(\omega_1 x + \omega_2 y + \varphi_0)$
- $\nabla^2 f(x, y) = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right) = -A\omega_1^2\cos(\omega_1 x + \omega_2 y + \varphi_0) - A\omega_2^2\cos(\omega_1 x + \omega_2 y + \varphi_0)$
- $f(x, y)\nabla^2 f(x, y) = -A^2\omega_1^2\cos^2(\omega_1 x + \omega_2 y + \varphi_0) - A^2\omega_2^2\cos^2(\omega_1 x + \omega_2 y + \varphi_0)$

Οπότε, προκύπτει, για $\varphi(x, y) = \omega_1 x + \omega_2 y + \varphi_0$ ότι:

$$\Phi(f) \triangleq f_x^2 + f_y^2 - f(f_{xx} + f_{yy}) = A^2(\omega_1^2 + \omega_2^2)$$

Ο υπολογισμός των $|A|$, $|\omega_1|$, $|\omega_2|$ γίνεται με χρήση των $\Phi(f)$, $\Phi(f_x)$, $\Phi(f_y)$, όπου:

$$f_x = -A\omega_1\sin(\varphi)$$

$$f_y = -A\omega_2\sin(\varphi)$$

$$f_{xy} = -A\omega_1\omega_2\cos(\varphi)$$

Έτσι, ορίζεται ένας νέος μεικτός ως προς x, y ενεργειακός τελεστής: $\Psi_{12}(f) \triangleq f_x f_y - f f_{xy}$.

Τότε,

$$\Psi_{12}(f) = A^2\omega_1\omega_2\sin^2\varphi + A^2\omega_1\omega_2\cos^2\varphi = A^2\omega_1\omega_2$$

Αναλυτικότερα, χρησιμοποιούνται οι σχέσεις:

$$|\omega_1(x, y)| = \sqrt{\frac{\Phi(\frac{\partial f}{\partial x})}{\Phi(f)}}$$

$$|\omega_2(x, y)| = \sqrt{\frac{\Phi(\frac{\partial f}{\partial y})}{\Phi(f)}}$$

$$|A| = \frac{\Phi(f)}{\sqrt{\Phi(\frac{\partial f}{\partial x}) + \Phi(\frac{\partial f}{\partial y})}}$$

Οπότε, ο υπολογισμός των $\Phi\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)$, $\Phi\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)$, $\Phi\left(\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)\right)$ γίνεται ως εξής:

- $\|\nabla \frac{\partial f(x,y)}{\partial x}\|^2 = \left[\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)\right]^2 + \left[\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)\right]^2 = A^2\omega_1^4\cos(\omega_1x + \omega_2y + \varphi_0) + A^2\omega_1^2\omega_2^2\cos(\omega_1x + \omega_2y + \varphi_0)$
- $\nabla^2 f(x, y) = \frac{\partial}{\partial x}\left[\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)\right] + \frac{\partial}{\partial y}\left[\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)\right] = A\omega_1^3\sin(\omega_1x + \omega_2y + \varphi_0) + A\omega_1\omega_2^2\sin(\omega_1x + \omega_2y + \varphi_0)$
- $-\frac{\partial f}{\partial x}\nabla^2 f(x, y) = A^2\omega_1^4\sin^2(\omega_1x + \omega_2y + \varphi_0) + A^2\omega_1^2\omega_2^2\sin^2(\omega_1x + \omega_2y + \varphi_0)$

Τελικά, προκύπτει:

$$\Phi\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right) = A^2\omega_1^4 + A^2\omega_1^2\omega_2^2 = A^2\omega_1^2(\omega_1^2 + \omega_2^2)$$

$$\Phi\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right) = A^2\omega_2^2(\omega_1^2 + \omega_2^2)$$

$$\Phi\left(\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)\right) = \Phi(f_{xy}) = A^2\omega_1^2\omega_2^2(\omega_1^2 + \omega_2^2) \Rightarrow \omega_1^2\omega_2^2 = \frac{\Phi(f_{xy})}{A^2(\omega_1^2 + \omega_2^2)}$$

Παραπάνω αποδείχθηκε επίσης, ότι $\Phi(f) = A^2(\omega_1^2 + \omega_2^2)$

Συνεπώς, θα ισχύει ότι:

$$|\omega_1\omega_2| = \sqrt{\frac{\Phi(f_{xy})}{\Phi(f_x)}}$$

Με γνωστά τα ω_1 , ω_2 υπολογίζεται το πρόσημο του ω_2 αν το πρόσημο του ω_1 θεωρηθεί γνωστό.

Άσκηση 3.4 (Ενεργές καμπύλες και Επιπεδοσύνολα)

Έστω η παραμετροποίηση $\vec{C}(p, t) = [x(p, t), y(p, t)]$, $p \in [0, 1]$, μιας κλειστής ομαλής επίπεδης καμπύλης που εξελίσσεται βάσει μιας διαφορικής εξίσωσης κίνησης:

$$\frac{\partial \vec{C}(p, t)}{\partial t} = V \vec{N}_0(p, t)$$

με αρχική συνθήκη $\Gamma(0) = \{\vec{C}(p, 0): p \in [0, 1]\}$, όπου $\vec{N}_0(p, t)$ είναι το μοναδιαίο εξωτερικό κάθετο διάνυσμα στα σημεία της καμπύλης, και V είναι η (βαθμωτή) εξωτερική κάθετη ταχύτητα. Η εξελισσόμενη καμπύλη εμβυθίζεται ως ισοϋψής καμπύλη σε ύψος 0 μιας εξελισσόμενης χωρο-χρονικής συνάρτησης $\Phi(x, y, t)$:

$$\Gamma(t) = \{(x, y): \Phi(x, y, t) = 0\}$$

όπου $\Gamma(t)$ παριστάνει το σύνολο σημείων της καμπύλης, με αρχική συνθήκη

$$\Phi(x, y, 0) = \Phi_0(x, y), \Gamma(0) = \{(x, y): \Phi_0(x, y, t) = 0\}$$

όπου $\Phi_0(x, y)$ είναι η προσημασμένη συνάρτηση Ευκλείδειας απόστασης από την καμπύλη $\Gamma(0)$:

$$\Phi_0(x, y) = \begin{cases} 0, & (x, y) \in \Gamma(0) \\ + \bigwedge_{(v, w) \in \Gamma(0)} \|(x - v, y - w)\|, & (x, y) \in \text{interior}(\Gamma(0)) \\ - \bigwedge_{(v, w) \in \Gamma(0)} \|(x - v, y - w)\|, & (x, y) \in \text{exterior}(\Gamma(0)) \end{cases}$$

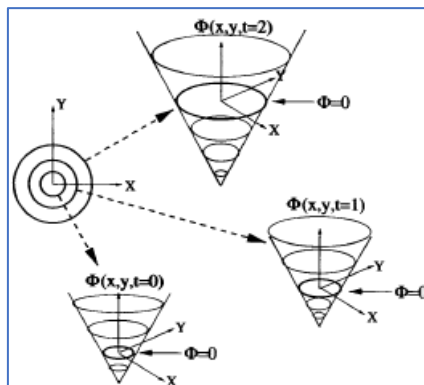
Να αποδειχθεί αναλυτικά ότι η κίνηση της καμπύλης δημιουργεί μια αντίστοιχη κίνηση της επιφάνειας της χωρο-χρονικής συνάρτησης $\Phi(x, y, t)$ που διέπεται από την MΔΕ

$$\begin{cases} \partial \Phi / \partial t = V \|\nabla \Phi\| \\ \Phi(x, y, 0) = \Phi_0(x, y) \end{cases}$$

Υπόδειξη: Τροποποιήστε την σχετική απόδειξη στο Εδάφιο 17.3.2 του βιβλίου O.Y. 2005 όπου η συνάρτηση $\Phi_0(x, y)$ ορίζεται με αντίθετο πρόσημο.

Λύση:

Μια κλειστή ομαλή επίπεδη καμπύλη εξελίσσεται σύμφωνα με την ακόλουθη οπτικοποίηση.



Το \vec{N}_0 παίζει καθοριστικό ρόλο ως προς τη φορά στροφής της καμπύλης.

Τα πρόσημα \pm στα δεξιά μέλη των παραπάνω εξισώσεων βασίζονται στο αν το Φ_0 είναι θετικό ή αρνητικό στο εσωτερικό της αρχικής καμπύλης οπότε επηρεάζουν και το πρόσημο \vec{N}_0 άρα και στην περιστροφή της καμπύλης. Έτσι,

- “+” εξωτερικά ή “-” εσωτερικά $\rightarrow \vec{N}_0 > 0 \rightarrow$ δεξιόστροφη φορά περιστροφής
- “+” εσωτερικά ή “-” εξωτερικά $\rightarrow \vec{N}_0 < 0 \rightarrow$ αριστερόστροφη φορά περιστροφής

Οπότε, αφού από την εκφώνηση δίνεται ότι “+” στο interior ή “-” στο exterior τότε $\vec{N}_0 < 0$. Άρα,

$$\vec{N}_0 = -\frac{\nabla\Phi}{\|\nabla\Phi\|}$$

Επιπροσθέτως, η καμπυλότητα μιας κλειστής καμπύλης ισούται με την απόκλιση του \vec{N}_0 . Οπότε,

$$\Phi_t + \langle \nabla\Phi, \vec{C}_t \rangle = 0 \xrightarrow{\text{αλλαγή spin}} \Phi_t - \langle \nabla\Phi, \vec{C}_t \rangle = 0$$

Αυτό ισχύει διότι:

$$K = \nabla \vec{N}_0 = \text{div}\left(-\frac{\nabla\Phi}{\|\nabla\Phi\|}\right)$$

Επομένως, προκύπτει ότι:

$$\Phi_t - \langle \vec{C}_t, \vec{N}_0 \rangle \|\nabla\Phi\| = 0$$

Οπότε, η κίνηση της καμπύλης δημιουργεί μια αντίστοιχη κίνηση της επιφάνειας της $\Phi(x, y, t)$ που υπολογίζεται από την σχέση PDE:

$$\frac{\partial\Phi}{\partial t} = V\|\nabla\Phi\|$$

$$\Phi(x, y, 0) = \Phi_0(x, y)$$

Επισημαίνεται εδώ ότι το πρόσημο εξαρτάται από την Φ_0 στο interior της καμπύλης C .

Αν το $V = 1$ ή -1 , από την εξίσωση της κλίμακας με τον χρόνο, η παραπάνω σχέση γίνεται ίδια με την PDE που παράγει πολυκλιμακωτά επίπεδα erosions ή dilations από δίσκους. Έτσι, μπορεί να δει κανείς αυτά τα συγκεκριμένα μορφολογικά PDEs σαν ειδικές περιπτώσεις την γενική συνάρτησης εξέλιξης PDE που φαίνεται παραπάνω, όπου όλα τα επίπεδα σύνολα επεκτείνονται ή συρρικνώνονται με unit normal ταχύτητα.

Άσκηση 3.5 (Προβολική Γεωμετρία)

(α) **Αφινικοί μετασχηματισμοί.** Να αποδείξετε ότι για την περίπτωση των αφινικών μετασχηματισμών στο προβολικό επίπεδο, είναι δυνατό να σχηματιστεί ένας κύκλος σε μία έλλειψη, ενώ είναι αδύνατο να μετασχηματιστεί μία έλλειψη σε υπερβολή ή παραβολή.

(β) **Υπολογισμός σημείου φυγής.** Θεωρήστε τον μονοδιάστατο προβολικό μετασχηματισμό $y = H_{2 \times 2}x$ μεταξύ σημείων πάνω σε μια ευθεία του πραγματικού κόσμου και σημείων πάνω στην ευθεία της εικόνας, όπου τα σημεία x και y βρίσκονται παραμετροποιημένα και σε ομογενείς συντεταγμένες της μορφής (a, b) . Με βάση την πληροφορία που μας δίνει ο πίνακας της ομογραφίας $H_{2 \times 2}$, να βρεθεί ποιο είναι το σημείο φυγής για την ευθεία που αναπαρίσταται από την εν λόγω ομογραφία.

(γ) **Ιδιότητες προβολικής κάμερας.** Θεωρήστε τον 3×4 προβολικό πίνακα κάμερας (camera projection matrix) $P = [M \mid p_4]$ (όπου με M συμβολίζεται ο αριστερός 3×3 υποπίνακας του P και με p_4 η τέταρτη στήλη του). Να αποδείξετε ότι το κέντρο C της κάμερας αποτελεί τον μονοδιάστατο δεξιό μηδενοχώρο του P , δηλαδή $PC = 0$. Επίσης, να βρείτε και να αποδείξετε σε ποια μορφή θα είναι τα κέντρα των καμερών C στην περίπτωση των πεπερασμένων καμερών και καμερών στο άπειρο. Τέλος, η κάμερα

περιγράφεται από τον πίνακα $P = \begin{bmatrix} 4 & 1 & 2 & 5 \\ 7 & 4 & 6 & -1 \\ 10 & -2 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ είναι μια πεπερασμένη κάμερα ή μια κάμερα στο άπειρο και γιατί; Ποιο είναι το κέντρο της;

(δ) **Θεμελιώδης πίνακας F .** Να αποδείξετε ότι τα δύο επιπολικά σημεία e και e' (σε ομογενείς συντεταγμένες) των εικόνων από τις οποίες έχει εξαχθεί ένα θεμελιώδης πίνακας F δημιουργούν τον δεξιό και αριστερό μηδενοχώρο του, δηλαδή $Fe = 0$ και $e'^T F = 0$.

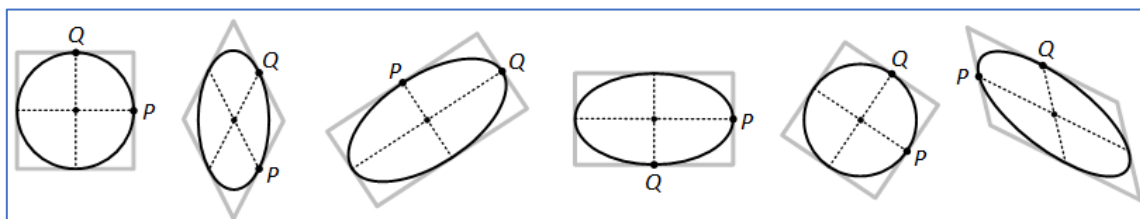
(ε) **Θεμελιώδης πίνακας F .** Θεωρήστε ότι δύο κάμερες “στοχεύουν” σε κάποιο σημείο του χώρου, με τέτοιο τρόπο ώστε οι δύο κύριοι άξονες (principal axis) των καμερών να τέμνονται σε αυτό το σημείο. Εάν οι συντεταγμένες της εικόνας είναι κανονικοποιημένες ούτως ώστε η αρχή των αξόνων του $(0, 0)$ να συμπίπτει με το κύριο σημείο (principal point) του επιπέδου της εικόνας, τότε το στοιχείο F_{33} του θεμελιώδους πίνακα F είναι ίσο με μηδέν. Σημείωση: Το κύριο σημείο του επιπέδου της εικόνας ορίζεται ως το σημείο τομής του κύριου άξονα της κάμερας με το επίπεδο της εικόνας.

Λύση:

(α) 1^{ος} Τρόπος:

Πρόταση: Είναι δυνατό να σχηματιστεί ένας κύκλος σε μία έλλειψη στο προβολικό επίπεδο.

Απόδειξη: Μια έλλειψη εκφυλίζεται σε κύκλο, αν για τις παραμέτρους της (a, b, c) ισχύει $a = c, b = 0$.



Οπότε, ο πίνακας παραμέτρων του κύκλου περιγράφεται από τη σχέση:
$$C = \begin{bmatrix} \alpha & 0 & d/2 \\ 0 & a & e/2 \\ d/2 & e/2 & f \end{bmatrix}$$

Ενώ, ο αφινικός μετασχηματισμός δίνεται από την ακόλουθη μήτρα:
$$H = \begin{bmatrix} A & t \\ 0^T & 1 \end{bmatrix}$$

Οπότε, ο κύκλος μετασχηματίζεται με τη σχέση: $C' = H^T C H^{-1}$

Για τον προσδιορισμό του προσήμου της ορίζουσας του πάνω αριστερά 2×2 πίνακα στο C' . Αυτό γίνεται ως εξής:

Έστω ότι Λ , ο πάνω αριστερά πίνακας του C και Λ' ο πάνω αριστερά πίνακας του C' . Τότε,

$$C' = \begin{bmatrix} A^{-T} & 0 \\ -t^T A^{-T} & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Lambda & d/2 \\ d/2 & e/2 & f \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A^{-1} & -A^{-1}t \\ 0^T & 1 \end{bmatrix} \Rightarrow C' = \begin{bmatrix} A^{-T} \Lambda A^{-1} & \dots \\ \dots & \dots \end{bmatrix}$$

Επομένως, προκύπτει πως αρκεί ο πίνακας $A^{-T} \Lambda A^{-1}$ να έχει θετική ορίζουσα. Δηλαδή,

$$\det(A^{-T} \Lambda A^{-1}) = \det(A^{-T}) \det(\Lambda) \det(A^{-1}) \Rightarrow \frac{1}{\det(A)^2} \det(\Lambda) > 0, \text{ αφού } \det(\Lambda) > 0$$

Άρα ο κύκλος γίνεται έλλειψη με M/Σ affine.

Πρόταση: Μια έλλειψη είναι αδύνατο να μετασχηματιστεί σε υπερβολή ή παραβολή.

Απόδειξη: Ακολουθώντας την ίδια διαδικασία με παραπάνω, αναμένεται να προκύψει ότι:

$$\det(\Lambda') = \frac{1}{\det(A)^2} \det(\Lambda) > 0$$

Όμως, αυτό δεν ισχύει σε υπερβολή ή σε παραβολή καθώς θα έπρεπε να ισχύει ότι $\det(\Lambda) = 0$ (για παραβολή) & $\det(\Lambda) < 0$ (για υπερβολή) που είναι άτοπο.

2ος Τρόπος:

Έστω κωνική τομή με εξίσωση $x^T C_1 x = 0$ (1)

Έστω, επίσης, ο αφινικός μετασχηματισμός της $x' = H_A \cdot x \rightarrow x = H_A^{-1} x'$ (2)

Από (1), (2) προκύπτει ότι: $(H_A^{-1} x')^T C_1 (H_A^{-1} x) = 0 \rightarrow x'^T H_A^{-T} C_1 H_A^{-1} x = 0$ (3)

Ακόμη, ισχύει ότι:

$$H_A = \begin{bmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & t_x \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & t_y \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \& \quad H_A^{-1} = \begin{bmatrix} \alpha_{22} & -\alpha_{12} & \alpha_{12} t_y - \alpha_{22} t_x \\ -\alpha_{21} & \alpha_{11} & -\alpha_{11} t_y + \alpha_{21} t_x \\ 0 & 0 & \alpha_{11} \alpha_{22} - \alpha_{12} \alpha_{21} \end{bmatrix} \cdot \frac{1}{|H_A|}$$

$$\text{Θέτοντας, } H_A^{-1} = \begin{bmatrix} A & \tilde{t} \\ \tilde{0}^T & 1 \end{bmatrix} \quad \& \quad C_1 = \begin{bmatrix} Q & \tilde{b} \\ b^T & f \end{bmatrix}$$

$$\text{Τότε, } C_2 = H_A^{-T} C_1 H_A^{-1} = \begin{bmatrix} A & \tilde{0}^T \\ \tilde{t} & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} Q & \tilde{b} \\ b^T & f \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A & \tilde{t} \\ \tilde{0}^T & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A^T Q A & A^T (Q \tilde{t} + \tilde{b}) \\ (Q \tilde{t} + \tilde{b})^T A & \dots \end{bmatrix}$$

Οπότε, η τιμή του $C_2[0:2][0:2]$ θα είναι A^TQA

$$\text{Άρα, } \begin{bmatrix} \alpha_{22} & -\alpha_{21} \\ -\alpha_{12} & \alpha_{11} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha & b/2 \\ b/2 & c \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha_{22} & -\alpha_{12} \\ -\alpha_{21} & \alpha_{11} \end{bmatrix} =$$

$$\begin{bmatrix} a_{22}^2a - a_{22}a_{21}b + a_{21}^2c & -\alpha_{12}a_{22}a + \frac{1}{2}(a_{21}a_{12} + a_{11}a_{22})b - a_{11}a_{21}c \\ -\alpha_{12}a_{22}a + \frac{1}{2}(a_{21}a_{12} + a_{11}a_{22})b - a_{11}a_{21}c & a_{12}^2a - a_{12}a_{11}b + a_{11}^2c \end{bmatrix}$$

Συνεπώς, προκύπτει ότι ο πίνακας C_2 είναι συμμετρικός.

Ο C_1 θα είναι κύκλος όταν $b^2 - 4ac < 0$, $a = c$, $b = 0$. Δηλαδή, για $a = c \neq 0$ & $b = 0$.

Τότε, για τον C_2 θα ισχύει ότι,

$$A^TQA = \begin{bmatrix} \alpha(a_{22}^2 + a_{21}^2) & -\alpha(\alpha_{12}a_{22} + a_{11}a_{21}) \\ -\alpha(\alpha_{12}a_{22} + a_{11}a_{21}) & \alpha(a_{12}^2 + a_{11}^2) \end{bmatrix}$$

Και για να αποτελέσει έλλειψη, θα πρέπει:

$$[-2\alpha(\alpha_{12}a_{22} + a_{11}a_{21})]^2 - 4\alpha^2(a_{22}^2 + a_{21}^2)(a_{12}^2 + a_{11}^2) < 0 \Leftrightarrow$$

$$(\alpha_{12}a_{22} + a_{11}a_{21})^2 < (a_{22}^2 + a_{21}^2)(a_{12}^2 + a_{11}^2) \Leftrightarrow$$

$$(\alpha_{22}a_{11} - a_{21}a_{12})^2 > 0 \Leftrightarrow \det(H_A) \neq 0$$

Επομένως, ο H_A είναι non-singular οπότε είναι εφικτό κύκλος με αφινικό μετασχηματισμό να γίνει έλλειψη.

Ο C_1 θα είναι έλλειψη όταν $b^2 - 4ac < 0$.

Επιπλέον, ο C_2 θα είναι υπερβολή ή παραβολή όταν:

$$[-2\alpha_{12}a_{22}a + (a_{11}a_{22} + a_{12}a_{21})b - 2a_{11}a_{21}c]^2 - 4(a_{22}^2a - a_{22}a_{21}b + a_{21}^2c)(a_{12}^2a - a_{12}a_{11}b + a_{11}^2c) \geq 0$$

$$(a_{11}a_{22} + a_{12}a_{21})^2b^2 + 8a_{11}a_{12}a_{21}a_{22}ac - 4a_{11}^2a_{22}^2ac - 4a_{11}a_{22}a_{21}a_{12}b^2 - 4a_{21}^2a_{12}^2ac \geq 0$$

$$(a_{11}a_{22} + a_{12}a_{21})^2b^2 - 4(a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12})^2ac \geq 0$$

$$[\det(H_A)]^2(b^2 - 4ac) \geq 0$$

$b^2 - 4ac \geq 0$, κάτι το οποίο είναι άτοπο αφού το C_1 από υπόθεση είναι έλλειψη.

Επομένως, η έλλειψη δεν είναι εφικτό με αφινικό μετασχηματισμό να γίνει υπερβολή ή παραβολή.

(β) Έστω, ένα σημείο ευθείας $X = \begin{bmatrix} x_1 \\ 0 \end{bmatrix}$ (σε ομογενείς συντ/νες) κάπου στο άπειρο.

Το X αντιστοιχίζεται σε σημείο φυγής της ευθείας με χρήση του Προβολικού Μετασχηματισμού ως εξής: $Y = H_{2 \times 2} X = \begin{bmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} \\ \alpha_{21} & 1 \end{bmatrix} X = \begin{bmatrix} \alpha_{11} \\ \alpha_{21} \end{bmatrix}$

Το οποίο, σε ομογενείς συντ/νες, γράφεται ως: $X = [\alpha_{11} \ \alpha_{21}]^T$ και σε ευκλείδειες συντ/νες: $X = \alpha_{11}/\alpha_{21}$

Συνεπώς, το σημείο φυγής μπορεί να βρίσκεται κάπου στο άπειρο, όπου $\alpha_{21} = 0$ και $H_{2 \times 2} = \begin{bmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$

(γ) Έστω, ο 3×4 προβολικός πίνακας κάμερας (camera projection matrix) $P = [M \mid p_4]$.

Επειδή ο P είναι αντιστοίχιση από 3Δ σε 4Δ , θα έχει και έναν 1Δ μηδενοχώρο, δηλ. $\exists \vec{C} \in \mathbb{R}^4: P\vec{C} = 0$.

Έστω, επίσης, μια ευθεία ℓ που ορίζεται από το \vec{C} και ένα σημείο \vec{R} . Τότε, θα ισχύει για το σημείο αυτό ότι: $x = \vec{C} + \lambda \vec{R}$, $\lambda \in \mathbb{R}$, όπου x οποιοδήποτε σημείο της ευθείας ℓ .

Η απεικόνιση του x της ℓ χρησιμοποιώντας τον P για τα σημεία y , θα είναι:

$$y = Px = P(\vec{C} + \lambda \vec{R}) = P\vec{C} + \lambda P\vec{R} = 0 + \lambda P\vec{R} = \lambda P\vec{R}$$

Συνεπώς, κάθε σημείο της ευθείας ℓ απεικονίζεται μέσω του P σε ένα μοναδικό σημείο του επιπέδου της εικόνας κάτι που συμβαίνει είτε όταν η κάμερα βρίσκεται στο σημείο \vec{C} .

- Για πεπερασμένη κάμερα, $\det(M) \neq 0 \rightarrow \exists M^{-1}$. Οπότε,

$$P\vec{C} = 0 \rightarrow [M_{3 \times 3} \mid P_{3 \times 1}] \begin{bmatrix} C_{3 \times 1} \\ 1 \end{bmatrix} = 0 \rightarrow M_{3 \times 3} \cdot C_{3 \times 1} + P_{3 \times 1} = 0 \rightarrow C_{3 \times 1} = -M_{3 \times 3}^{-1} P_{3 \times 1} \rightarrow \vec{C} = \begin{bmatrix} -M^{-1} P_4 \\ 1 \end{bmatrix}$$

- Για κάμερα στο άπειρο, $\det(M) = 0$. Οπότε, $\vec{C} = \begin{bmatrix} C_{3 \times 1} \\ 0 \end{bmatrix}$ και τότε,

$$P\vec{C} = 0 \rightarrow [M \mid p_4] \begin{bmatrix} C_{3 \times 1} \\ 0 \end{bmatrix} = M \cdot C_{3 \times 1} = 0$$

Όμως, επειδή $\det(M) = 0$, θα έχει τουλάχιστον έναν 1Δ μηδενοχώρο. Επίσης, $\exists C_{3 \times 1} : M \cdot C_{3 \times 1} = 0$

$$\text{Οπότε, } \det(M) = 2 \begin{vmatrix} 7 & 4 \\ 10 & -2 \end{vmatrix} - 6 \begin{vmatrix} 4 & 1 \\ 10 & -2 \end{vmatrix} = 0$$

$$\text{Έτσι, } M \cdot C_{3 \times 1} = 0 \rightarrow \begin{bmatrix} 4 & 1 & 2 \\ 7 & 4 & 6 \\ 10 & -2 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{bmatrix} = 0 \rightarrow c_1 = k(-2/9), c_2 = k(-10/9), c_3 = k$$

$$\text{Δηλαδή, } \vec{C} = [2 \ 10 \ -9 \ 1]^T.$$

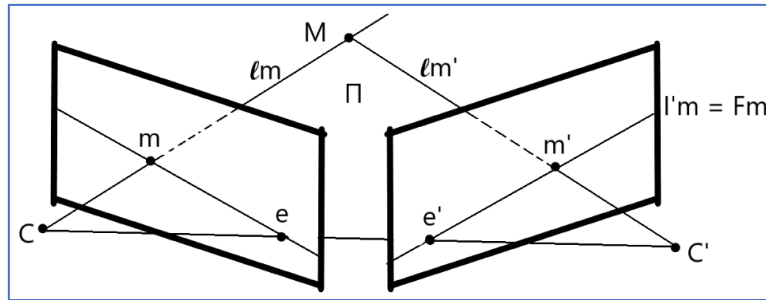
(δ) 1^{ος} Τρόπος:

Έστω, τα σημεία m και m' που είναι προβολές του M . Τα σημεία αυτά κείνται στο ίδιο επιπολικό επίπεδο Π (το οποίο ορίζεται από τα σημεία M, C, C').

Συνεπώς, η σχέση μεταξύ m και m' θα είναι μια 2Δ ομογραφία H_π : $\widetilde{m}' = H_\pi \widetilde{m}$.

Επιπλέον η ευθεία ℓ'_m μπορεί να εκφρασθεί ως $\widetilde{\ell}' = \widetilde{e}' \times \widetilde{m}' \rightarrow \widetilde{\ell}' = [\widetilde{e}']_x \widetilde{m}' = [\widetilde{e}']_x H_\pi \widetilde{m} = F \widetilde{m}$.

Όπου, $F = [\widetilde{e}']_x H_\pi$ και $[V]_x \triangleq \begin{bmatrix} 0 & -V_3 & V_2 \\ V_3 & 0 & -V_1 \\ -V_2 & V_1 & 0 \end{bmatrix}$ και $V = [V_1, V_2, V_3]^T$



Αφού το σημείο m' κείται επί της ευθείας ℓ'_m , $\widetilde{m}'^T \widetilde{\ell}'_m = 0 \Rightarrow \widetilde{m}'^T F \widetilde{m} = 0$.

2^{ος} Τρόπος:

Ισχύει ότι η επιπολική ευθεία $\ell' = Fx$ θα περιέχει τον επίπολο e' , $\forall x \neq e$.

Επομένως, $e'^T \ell' = 0 \rightarrow e'^T Fx = 0 \rightarrow (e'^T F)x = 0, \forall x$

Οπότε, για τον αριστερό μηδενοχώρο θα ισχύει: $e'^T F = 0$

Και για τον δεξιό, θα ισχύει: $(e^T F^T)x' = 0 \rightarrow e^T F^T = 0 \rightarrow (Fe)^T = 0 \rightarrow Fe = 0$

(ε) Έστω, δυο κάμερες που στοχεύουν σε κάποιο σημείο του χώρου ώστε οι δυο κύριοι άξονες να τέμνονται σε αυτό το σημείο.

Τότε, για τα principal points x_1, x_2 των δυο επιπέδων των εικόνων ισχύει ότι: $x_2^T Fx_1 = 0$

Όμως, $x_1 = x_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$. Οπότε, $[0 \ 0 \ 1] \begin{bmatrix} F_{11} & F_{12} & F_{13} \\ F_{21} & F_{22} & F_{23} \\ F_{31} & F_{32} & F_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = 0 \rightarrow [F_{31} \ F_{32} \ F_{33}] \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = 0 \rightarrow F_{33} = 0$

Resources:

1. *Maragos_CV_Book2018_chapter**
2. [“A Fast Parametric Ellipse Algorithm”, Jerry R. Van Anken](#)