Ε.Μ.Π., Σχολή Η.Μ.& Μ.Υ. **ΟΡΑΣΗ ΥΠΟΛΟΓΙΣΤΩΝ** Ακαδ.Ετος 2020 - **2021**
Ημερ/νια: 28-04-2021 **2ο Σύνολο Αναλυτ. Ασκήσεων** Παραδοτέο: 11-05-2021

Οι αναλυτικές σειρές ασκήσεων είναι ατομικές, και οι λύσεις που θα δώσετε πρέπει να αντιπροσωπεύουν μόνο την προσωπική σας εργασία. Εξηγείστε επαρκώς την εργασία σας. Αν χρησιμοποιήσετε κάποια άλλη πηγή εκτός των σημειώσεων για την λύση σας, πρέπει να το αναφέρετε. Η παράδοση των λύσεων των αναλυτικών ασκήσεων της σειράς αυτής θα γίνει ηλεκτρονικά στην Moodle ιστοσελίδα του μαθήματος `https://courses.pclab.ece.ntua.gr/course/view.php?id=17` και θα πρέπει να την υποβάλετε ως ένα ενιαίο αρχείο PDF με το εξής filename format χρησιμοποιώντας μόνο λατινικούς χαρακτήρες: `cv21_hwk2_AM_FirstnameLastname.pdf`, όπου AM ειναι ο 8-ψήφιος αριθμός μητρώου σας. Σκαναρισμένες χειρόγραφες λύσεις επιτρέπονται αρκεί να είναι καθαρογραμμένες και ευανάγνωστες. Επίσης στην 1η σελίδα των λύσεων θα αναγράφετε το ονοματεπώνυμο, AM, και email address σας.

Ασκηση 2.1: (Ανίχνευση Ακμών)
(a) Λύσετε την άσκηση 10.17(α) από Κεφ.10 (έκδοση 6/2018).
(b) Λύσετε την άσκηση 10.19 από Κεφ.10 (έκδοση 6/2018).

Ασκηση 2.2: (Γενικευμένα Φίλτρα Εικόνων σε Πλέγματα)
(a) Να αποδειχθεί ότι το ακτινικό (radial) opening

$$\alpha_{rad}(X) = \bigcup_{0\leq\theta<\pi} X \circ L_\theta, \quad X \subseteq \mathbb{R}^2,$$

όπου είναι L_θ ένα ευθύγραμμο τμήμα σταθερού μήκους σε κατεύθυνση θ ως προς την οριζόντια, είναι ένα lattice opening, δηλ. αυξάνον, μη-επεκτατικό και ταυτοδύναμο.
(b) Να αποδειχθεί ότι το area opening $\alpha_n(X)$ ψηφιακών σχημάτων $X \subseteq \mathbb{Z}^2$ με κατώφλι εμβαδού $n \geq 2$ μπορεί να υπολογισθεί και ως ένωση απλών openings

$$\alpha_n(X) = \bigcup_{\text{card}(A)=n} X \circ A$$

με όλα τα συνεκτικά υποσύνολα A ενός $n \times n$ τετραγώνου που αποτελούνται από n σημεία και δεν είναι μετατοπίσεις το ένα του άλλου.

Ασκηση 2.3: (Scale Spaces Μορφολογικών Φίλτρων και Μετ/σμός Κλίσης)
Εστω μια 2Δ πραγματική εικόνα $f(x, y)$. Θεωρείστε την συνάρτηση που δημιουργείται από πολυ-κλιμακωτές σταθμισμένες dilations, δηλ. max-plus συνελίξεις της αρχικής εικόνας $f(x, y)$ με μια πολυκλιμακωτή παραβολή $k_t(x, y)$, $t \geq 0$:

$$\delta(x, y, t) = f(x, y) \oplus k_t(x, y), \quad k_t(x, y) \triangleq -\frac{x^2 + y^2}{2t}$$

(a) Να αποδείξετε ότι η πολυκλιμακωτή παραβολή ικανοποιεί τον ακόλουθο νόμο άθροισης κλιμάκων:

$$k_t \oplus k_s = k_{t+s}, \quad t, s \geq 0$$

Υπόδειξη: χρησιμοποιήστε μετ/σμό κλίσης.
(b) Να αποδείξετε ότι η scale-space συνάρτηση $\delta(x, y, t)$ ικανοποιεί την ακόλουθη μερική διαφορική εξίσωση

$$\frac{\partial \delta}{\partial t}(x, y, t) = \frac{1}{2}\|\nabla \delta\|^2$$

με αρχική συνθήκη $\delta(x, y, 0) = f(x, y)$, χρησιμοποιώντας τις εξής δύο μεθόδους και βρίσκοντας ότι οδηγούν στο ίδιο αποτέλεσμα:

(b1) Τις Εξισώσεις (11.18) και (11.24) του Κεφ. 11 (ΟΥ 2005), αφού τις επεκτείνετε για 2Δ εικόνες, χρησιμοποιώντας την ιδιότητα additive semigroup των πολυκλιμακωτών dilations με κοίλες συναρτήσεις από το μέρος (a) και ανάπτυξη σε σειρά Taylor της διαφοράς μεταξύ των dilations σε κλίμακες t και $t+dt$ με χωρικές παραγώγους.
(b2) Μετ/σμό Κλίσης: Εξ. (11.42).

Ασκηση 2.4: (Γενικευμένοι Γραμμικοί Χώροι Κλίμακας)
The Gaussian scale-space is in some sense overdetermined (in terms of axiomatic principles). By selecting linearity and a few other basic principles, it can be shown that the Gaussian scale-space becomes a special case of a more general class of linear scale-spaces that are convolutions of the image $f(x)$ with kernels $k_t(x)$. The following axioms summarize the theory for 1D images:
A0. Linearity and Shift-Invariance: This implies that the filtering will be linear convolutions with multiscale kernels $k_t(x)$.
A1. Mass-preserving: All filters preserve constant signals. Equivalently,

$$\int k_t(x)dx = 1 \tag{1}$$

A2. Even symmetry: All kernels are even real functions.
A3. Each kernel is absolutely integrable. Hence, the filters are stable, and the Fourier transform of each kernel exists

$$\tilde{k}_t(\omega) = \mathcal{F}[k_t(x)] \triangleq \int_{\infty}^{\infty} k_t(x)\exp(-j\omega x)dx \tag{2}$$

A4. Semigroup (Recursivity): for all scales $s, t \geq 0$

$$k_s * k_t = k_{s+t} \tag{3}$$

A5. Continuity: The function $k_t(x)$ is continuous in x and t [separately, but not necessarily as function of (x,t)].
A6. Scale-Invariance: There exists a fixed 'parent kernel' $\phi(x)$ and a scaling function $\psi(t)$ such that

$$k_t(x) = \frac{1}{\psi(t)}\phi\left(\frac{x}{\psi(t)}\right) \tag{4}$$

Proposition: Let $\{k_t(x) : t \geq 0\}$ be a kernel family that creates a linear scale space. If it satisfies axioms A0-A6, then the Fourier transform of each kernel function equals

$$\tilde{k}_t(\omega) = \exp(-\alpha|\omega|^p t), \tag{5}$$

where $a, p > 0$ are free parameters. This family is a rescaling of a fixed kernel ϕ as in (4) whose Fourier transform is

$$\tilde{\phi}(\omega) = \exp(-\alpha|\omega|^p) \tag{6}$$

and the scaling function is $\psi(t) = t^{1/p}$.

Exercise: Find $\phi(x)$ and then the multiscale kernels $k_t(x)$ in closed analytic form for the cases:
(a) $p = 1$,
(b) $p = 2$,
(c) $p = \infty$. (Hint: For the third case, consider the limit of $\tilde{\phi}(\omega)$ as $p \to \infty$.)
(d) Discuss the importance of the two free parameters α and p in the general case.

Ασκηση 2.5: (Ανάλυση Σχήματος με Καμπυλότητα)
(a) Αν μετασχηματίσομε μια ομαλή καμπύλη $\vec{C}(p)$ σε μια νέα καμπύλη $\vec{C}^*(p)$ μέσω μετ/σμού ομοιόμορφης κλιμάκωσης, δηλ.

$$\vec{C}(p) \mapsto \vec{C}^*(p) = \lambda \vec{C}(p), \quad \lambda > 0$$

να αποδειχθεί ότι το μήκος τόξου s και η καμπυλότητα κ θα υποστούν τις εξής αλλαγές:

$$s \mapsto s^* = \lambda s, \quad \kappa(s) \mapsto \kappa^*(s^*) = \kappa(s)/\lambda$$

(b) Θεωρούμε μια επίπεδη ομαλή καμπύλη με παραμετρική παράσταση $\vec{C}(p) = (x(p), y(p)) \in \mathbb{R}^2$, $p \in [0, 1]$, όπου $(x(p), y(p))$ είναι οι καρτεσιανές συντεταγμένες των σημείων της. Εστω $s = s(p)$ το μήκος τόξου, και έστω $(r(p), \phi(p))$ οι πολικές συντεταγμένες των σημείων της.
(b1) Να αποδειχθεί ότι, σε πολικές συντεταγμένες η καμπυλότητα της καμπύλης ισούται με

$$\kappa(p) = \frac{2(r')^2\phi' + r^2(\phi')^3 + rr'\phi'' - rr''\phi'}{[(r')^2 + r^2(\phi')^2]^{3/2}}$$

(b2) Εφαρμόστε το αποτέλεσμα (b1) στην καμπύλη $r(p) = a \cdot \phi(p)$, $a = \text{constant} > 0$, $0 \leq \phi < \infty$, $\phi' > 0$, που είναι γνωστή ως `σπιράλ του Αρχιμήδη΄. Να βρεθεί η καμπυλότητα της (με όσο το δυνατόν απλούστερη έκφραση). Επίσης να σχεδιασθεί προσεγγιστικά η καμπύλη για την περίπτωση $a = 1/\pi$, $\phi(p) = 3\pi p$, $0 \leq p \leq 1$.
