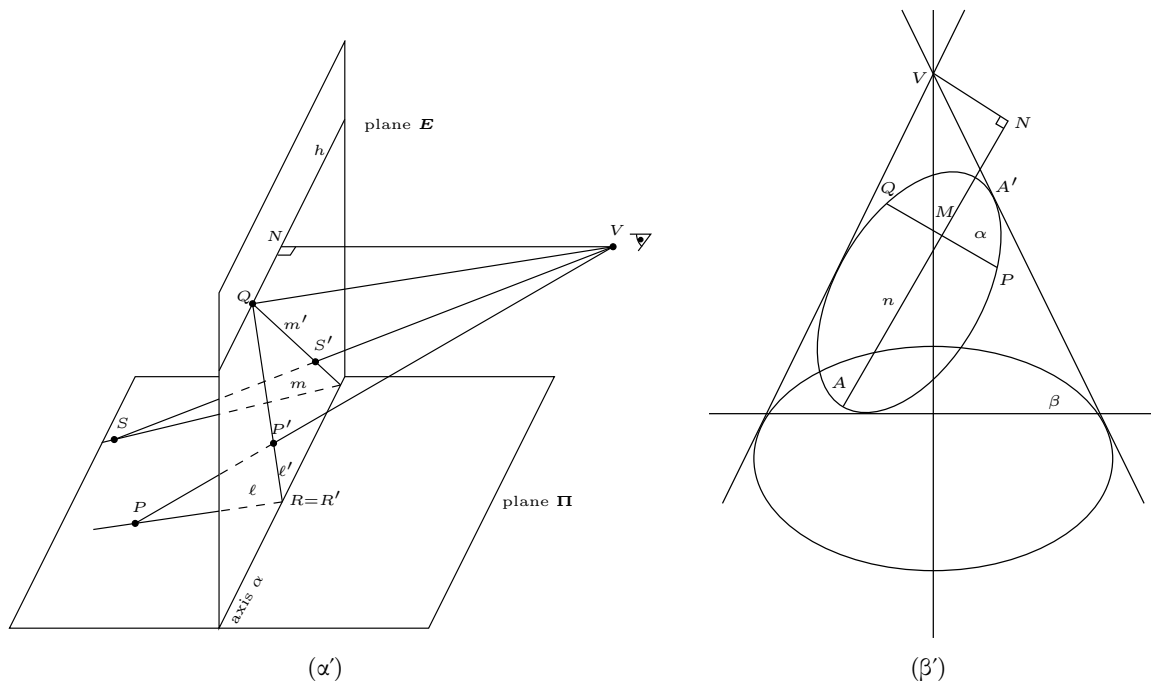


Οι αναλυτικές σειρές ασκήσεων είναι ατομικές, και οι λύσεις που θα δώσετε πρέπει να αντιπροσωπεύουν μόνο την προσωπική σας εργασία. Εξηγείστε επαρκώς την εργασία σας. Αν χρησιμοποιήσετε κάποια άλλη πηγή εκτός των σημειώσεων για την λύση σας, πρέπει να το αναφέρετε. Η παράδοση των λύσεων των αναλυτικών ασκήσεων της σειράς αυτής θα γίνει ηλεκτρονικά στην Moodle ιστοσελίδα του μαθήματος <https://courses.pclab.ece.ntua.gr/course/view.php?id=17> και θα πρέπει να την υποβάλετε ως ένα ενιαίο αρχείο PDF με το εξής filename format χρησιμοποιώντας μόνο λατινικούς χαρακτήρες: cv21_hwk1_AM_FirstnameLastname.pdf, όπου AM είναι ο 8-ψήφιος αριθμός μητρώου σας. Σκαναρισμένες χειρόγραφες λύσεις επιτρέπονται αρκεί να είναι καθαρογραμμένες και ευανάγνωστες. Επίσης στην 1η σελίδα των λύσεων θα αναγράφετε το ονοματεπώνυμο, AM, και email address σας.

Ασκηση 1.1: (Σχηματισμός Εικόνων, Προοπτική Γεωμετρία)

(a) Θεωρήστε στο Σχήμα 1(α) την προοπτική προβολή σημείων και ευθειών ενός επιπέδου Π του κόσμου στο επίπεδο εικόνας E . Η τομή των δύο επιπέδων είναι ο άξονας α . (Τα δύο επίπεδα δεν είναι απαραίτητα κάθετα.) Από το προοπτικό κέντρο V διέρχεται ένα επίπεδο παράλληλο προς το Π που τέμνει το E στην ευθεία h . Σ' αυτό το επίπεδο, το ευθύγραμμο τμήμα VN είναι κάθετο στην h στο σημείο N .



Σχήμα 1:

- (a1) Εστω δύο ευθείες ℓ και m του Π που προβάλλονται στις ευθείες ℓ' και m' του E . Αν το σημείο Q της τομής των δύο ευθειών προβολής κείται επί της h , τι ισχύει για τις ευθείες ℓ και m ;
- (a2) Υπάρχουν κάποιες κατευθύνσεις των ευθειών ℓ και m ως προς τον άξονα α τέτοιες ώστε να μπορεί να υπολογισθεί η απόσταση του κέντρου V από το σημείο N με βάση τις θέσεις γνωστων σημείων στο E ;
- (b) Θεωρήστε στο Σχήμα 1(β) τον κυκλικό κώνο που σχηματίζεται ενώνοντας το κέντρο προβολής V με τα σημεία στην επιφάνεια μιας σφαίρας καθώς και ένα επίπεδο α που τέμνει την επιφάνεια του κώνου σε μια έλλειψη. Αυτή η έλλειψη είναι το περίγραμμα της προβολής της σφαίρας στο επίπεδο α που το θεωρούμε ως επίπεδο προβολής (εικόνας). Εστω N το πόδι της καθέτου από το κέντρο V στο επίπεδο α και έστω β το επίπεδο που σχηματίζεται από την ευθεία VN και το κέντρο της σφαίρας. Το επίπεδο β τέμνει την έλλειψη στα σημεία A και A' . Να αποδειχθεί ότι η ευθεία n (δηλ. η ευθεία AA') είναι

άξονας συμμετρίας της έλλειψης.

Υπόδειξη: Θεωρήστε ένα σημείο P στην έλλειψη, φέρετε την κάθετο PM στην ευθεία n και προεκτείνετε την ώστε $PM = MQ$.

Ασκηση 1.2: (Χρώμα) Λύσετε τις ακόλουθες ασκήσεις από το Κεφ.5 (έκδοση 6/2013):

(a) 5.8. (b) 5.14.

Ασκηση 1.3: (2Δ Gabor και Αρχή Αβεβαιότητας)

(α) Να αποδειχθεί η 2Δ Αρχή Αβεβαιότητας για Fourier ανάλυση 2Δ σημάτων. Δηλ. αν θεωρήσουμε τις μέσες χωρικές διάρκειες $(\Delta x, \Delta y)$ της εικόνας $f(x, y)$ γύρω από την μέση θέση¹ του (x_c, y_c) στον χώρο, όπου

$$(\Delta x)^2 = \frac{\int \int (x - x_c)^2 |f(x, y)|^2 dx dy}{\int \int |f(x, y)|^2 dx dy}, \quad (\Delta y)^2 = \frac{\int \int (y - y_c)^2 |f(x, y)|^2 dx dy}{\int \int |f(x, y)|^2 dx dy}$$

και τα μέσα εύρη ζώνης $(\Delta \omega_1, \Delta \omega_2)$ του φάσματος $F(\omega_1, \omega_2)$ γύρω από την μέση θέση του (u, v) στο πεδίο συχνοτήτων:

$$(\Delta \omega_1)^2 = \frac{\int \int (\omega_1 - u)^2 |F(\omega_1, \omega_2)|^2 d\omega_1 d\omega_2}{\int \int |F(\omega_1, \omega_2)|^2 d\omega_1 d\omega_2}, \quad (\Delta \omega_2)^2 = \frac{\int \int (\omega_2 - v)^2 |F(\omega_1, \omega_2)|^2 d\omega_1 d\omega_2}{\int \int |F(\omega_1, \omega_2)|^2 d\omega_1 d\omega_2}$$

να αποδειχθεί ότι

$$A = (\Delta x)(\Delta y)(\Delta \omega_1)(\Delta \omega_2) \geq \frac{1}{4}$$

Στην απόδειξη μπορείτε να θεωρήσετε ότι $(x_c, y_c) = (u, v) = 0$.

Υπόδειξη: Επεκτείνετε την απόδειξη της 1Δ περίπτωσης στον 2Δ χώρο.

(β) Να επιβεβαιωθεί ότι το 2Δ μιγαδικό Gabor σήμα

$$h(x, y) = \exp \left[-\frac{(x - x_c)^2}{2\sigma_1^2} - \frac{(y - y_c)^2}{2\sigma_2^2} \right] \exp[ju(x - x_c) + jv(y - y_c)]$$

έχει 2Δ μετ/σμό

$$H(\omega_1, \omega_2) = 2\pi\sigma_1\sigma_2 \exp \left[-\frac{(\omega_1 - u)^2\sigma_1^2}{2} - \frac{(\omega_2 - v)^2\sigma_2^2}{2} \right] \exp(-j\omega_1 x_c - j\omega_2 y_c)$$

(γ) Να αποδειχθεί ότι το $h(x, y)$ ελαχιστοποιεί την 2Δ Αρχή Αβεβαιότητας, υπολογίζοντας αναλυτικά την αβεβαιότητα του και δείχνοντας ότι $A = 1/4$.

Ασκηση 1.4: (Ιδιότητες Μορφολογικών Φίλτρων για Σχήματα και Εικόνες)

(a) Για σύνολα-σχήματα X να αποδειχθούν τα εξής:

(a1) $X \circ B = (X^c \bullet B^s)^c$.

(a2) $\mathbf{0} \in B \implies X \ominus B \subseteq X \circ B \subseteq X \subseteq X \bullet B \subseteq X \oplus B$.

(b) Για γκριζες εικόνες f να αποδειχθούν τα εξής:

(b1) $(f \ominus A) \ominus B = f \ominus (A \oplus B)$.

(b2) $f = f \circ g$ εάν και μόνον εάν υπάρχει κάποιο h ώστε $f = h \oplus g$.

(c) Δημιουργούμε δύο γκριζα επίπεδα φίλτρα ϕ_1, ϕ_2 με την υπέρθεση κατωφλίου χρησιμοποιώντας ως δυαδικές γεννήτριες δύο αυξάνοντες τελεστές συνόλων Φ_1, Φ_2 αντίστοιχα:

$$\phi_i(f)(x) = \sup\{v \in \mathbb{R} : x \in \Phi_i[X_v(f)]\}, \quad i = 1, 2,$$

¹Η μέση θέση (κέντρο) προκύπτει από ροπές 1ης - τάξης:

Στον χώρο: $x_c = \int \int x |f|^2 dx dy / E_s$, $y_c = \int \int y |f|^2 dx dy / E_s$, $E_s = \int \int |f|^2 dx dy$

Στην συχνότητα: $u = \int \int \omega_1 |F|^2 d\omega_1 d\omega_2 / E_f$, $v = \int \int \omega_2 |F|^2 d\omega_1 d\omega_2 / E_f$, $E_f = \int \int |F|^2 d\omega_1 d\omega_2$.

όπου $X_v(f) = \{x \in \mathbb{R}^2 : f(x) \geq v\}$ είναι τα επιπεδοσύνολα της εικόνας f . Να αποδείξετε ότι,
(c1) Το γκριζο φίλτρο που σχηματίζεται με υπέρθεση κατωφλίου από την γεννήτρια $\Phi_1 \cup \Phi_2$ ισούται με $(\phi_1 \vee \phi_2)(x) = \max[\phi_1(x), \phi_2(x)]$.
(c2) Το γκριζο φίλτρο που σχηματίζεται με υπέρθεση κατωφλίου από την γεννήτρια $\Phi_2 \Phi_1(X) = \Phi_2(\Phi_1(X))$ ισούται με $\phi_2 \phi_1(f) = \phi_2(\phi_1(f))$.
(d) Εστω ϕ ένα 2Δ γκριζο επίπεδο φίλτρο για ψηφιακές εικόνες $f(x, y)$ που σχηματίζεται με υπέρθεση κατωφλίου χρησιμοποιώντας ως δυαδική γεννήτρια τον τελεστή συνόλων (opening) $\Phi(X) = X \circ B$, όπου $B = \{(0, 0), (0, 1), (1, 0)\}$ ένα 3-pixel τρίγωνο. Να εκφραστεί ο Φ ως μια Boolean συνάρτηση $\beta(v_1, \dots, v_n)$ και να βρεθεί η αλγεβρική έκφραση (με max/min πράξεις) για το ισοδύναμο γκριζο φίλτρο $\phi(f)(x, y)$.

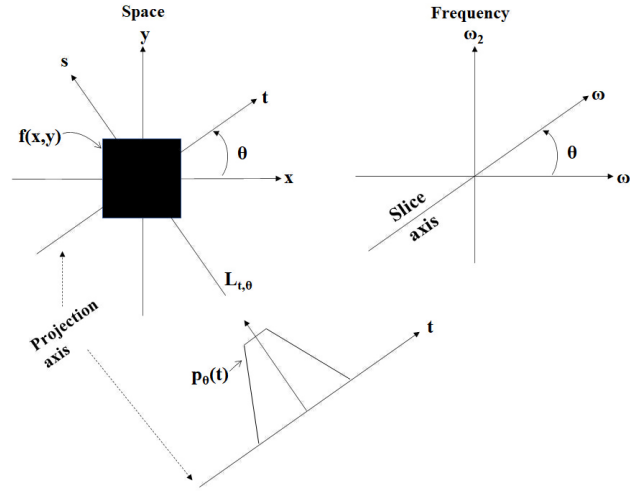
Ασκηση 1.5: (Radon Transform and Reconstruction from Projections)

Let the function $f(x, y)$ represent a 2D image object or a 2D material density and consider its projections onto axes that form angles θ with the horizontal x -axis. The geometry of such projections is shown in Fig. 2. Imagine a line

$$L_{t,\theta} = \{(x, y) : x \cos \theta + y \sin \theta = t\} \quad (1)$$

running through $f(x, y)$ and indexed by its intersection point t on the projection axis and the angle θ . This line is called a *ray*. The new coordinates (t, θ) are related to the original coordinates, expressed in cartesian form (x, y) or polar form (r, ϕ) , as follows:

$$\begin{aligned} t &= x \cos \theta + y \sin \theta \\ s &= -x \sin \theta + y \cos \theta \end{aligned} \iff \begin{aligned} x &= t \cos \theta - s \sin \theta = r \cos \phi \\ y &= t \sin \theta + s \cos \theta = r \sin \phi \end{aligned} \quad (2)$$



Σχήμα 2: Space projection of a 2D object and Fourier slice.

The line integral of $f(x, y)$ along a ray $L_{t,\theta}$ is called a *ray integral*:

$$\begin{aligned} p_\theta(t) &= \int_{\text{ray } L_{t,\theta}} f(x, y) ds = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} f(x, y) \delta(x \cos \theta + y \sin \theta - t) dx dy \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} f(t \cos \theta - s \sin \theta, t \sin \theta + s \cos \theta) ds \end{aligned} \quad (3)$$

By varying t , we obtain a set of ray integrals which forms a *projection*, parameterized by θ . For a fixed orientation θ , the corresponding projection yields a 1D function $p_\theta(t)$. If we now also vary θ , we obtain a 2D function

$$\mathcal{R}f(t, \theta) \triangleq p_\theta(t) \quad -\infty < t < +\infty, 0 \leq \theta, \pi \quad (4)$$

called the *Radon transform* of $f(x, y)$, where \mathcal{R} denotes the Radon operator. Note that $\mathcal{R}f(t, \theta + \pi) = \mathcal{R}f(-t, \theta)$.

To fully reconstruct $f(x, y)$ from its projections we need to exploit the relationship of the above ideas with 2D Fourier transform. A very useful theoretical result here is the **Projection-Slice Theorem** which relates the 1D Fourier transform $P_\theta(\omega)$ of the projection $p_\theta(t)$ with the 2D Fourier transform $F(\omega_1, \omega_2)$ of the 2D signal $f(x, y)$. Specifically,

$$\begin{aligned} P_\theta(\omega) &= \int_{-\infty}^{+\infty} p_\theta(t) \exp(-j\omega t) dt \\ &= \int \int f(t \cos \theta - s \sin \theta, t \sin \theta + s \cos \theta) \exp(-j\omega t) dt ds \\ &= \int \int f(x, y) \exp[-j\omega(x \cos \theta + y \sin \theta)] dx dy \end{aligned}$$

Thus, the spectrum of each 1D projection signal is a slice of the 2D object spectrum along a frequency line whose angle equals the projection angle (see Fig. 2):

$$P_\theta(\omega) = F(\omega \cos \theta, \omega \sin \theta) \quad (5)$$

If we have measured all projections over the continuum of all possible angles $0 \leq \theta \leq \pi$, then in principle we can fully reconstruct the original 2D object signal $f(x, y)$ since we know all the slices of its 2D Fourier transform. This reconstruction leads to the inverse Radon transform. Specifically, let us reconstruct $f(x, y)$ from its spectrum $F(\omega_1, \omega_2)$ represented in signed polar coordinates (ω, θ) where

$$\theta = \arctan(\omega_2/\omega_1) \in [0, \pi), \quad |\omega| = \sqrt{\omega_1^2 + \omega_2^2}, \quad \text{sgn}(\omega) = \min[\text{sgn}(\omega_1), \text{sgn}(\omega_2)]$$

Using 2D Fourier transform yields

$$\begin{aligned} f(x, y) &= \frac{1}{4\pi^2} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} F(\omega_1, \omega_2) \exp(j\omega_1 x + j\omega_2 y) dx dy \\ &= \frac{1}{4\pi^2} \int_0^\pi \int_{-\infty}^{+\infty} F(\omega \cos \theta, \omega \sin \theta) |\omega| \exp[j\omega(x \cos \theta + y \sin \theta)] d\omega d\theta \\ &= \frac{1}{4\pi^2} \int_0^\pi d\theta \int_{-\infty}^{+\infty} P_\theta(\omega) |\omega| \exp[j\omega(x \cos \theta + y \sin \theta)] d\omega \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_0^\pi d\theta \left(\int_{-\infty}^{+\infty} Q_\theta(\omega) \exp(j\omega t) \frac{d\omega}{2\pi} \right) \end{aligned} \quad (6)$$

where, as defined before, $t = x \cos \theta + y \sin \theta$. The inner integral is the inverse 1D Fourier transform of $Q_\theta(\omega) = P_\theta(\omega) \cdot |\omega|$. The term $|\omega|$ is the frequency response of the derivative of the Hilbert transformer, since the frequency response of a 1D Hilbert transformer equals $-j \text{sgn}(\omega)$. Thus, the inverse Fourier transform of $H(\omega) = |\omega|$ equals

$$h(t) = \frac{d}{dt} \left(\frac{1}{\pi t} \right) = \frac{-1}{\pi t^2} \quad (7)$$

and is called the *Radon kernel*. Therefore, the **inverse Radon transform**, i.e. the reconstruction from all projections, takes the form

$$\begin{aligned} f(x, y) &= \frac{1}{2\pi} \int_0^\pi q_\theta(x \cos \theta + y \sin \theta) d\theta \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_0^\pi (\mathcal{R}f(\cdot, \theta) * h)(t)|_{t=x \cos \theta + y \sin \theta} d\theta \end{aligned} \quad (8)$$

where $q_\theta(t)$ is the 1D convolution of the corresponding projection signal with the Radon kernel:

$$q_\theta(t) = p_\theta(t) * h(t) \quad (9)$$

The inversion (8) is also called *filtered back-projection*.

If we naively attempt to reconstruct $f(x, y)$ by simply averaging the projections over all θ we obtain the (*unfiltered*) *back-projection*

$$\tilde{f}(x, y) = \int_0^\pi p_\theta(t) d\theta = \int_0^\pi \mathcal{R}f(t, \theta)|_{t=x \cos \theta + y \sin \theta} d\theta \quad (10)$$

which however does not generally yield the original $f(x, y)$ but a *blurred* version of f :

$$\tilde{f}(x, y) = f(x, y) * \left(\frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2}} \right) \quad (11)$$

Thus, if we view the mapping $f \mapsto \tilde{f} = \mathcal{R}^* \mathcal{R}f$ as the result of an operator \mathcal{R}^* acting on $\mathcal{R}f$, then this new operator \mathcal{R}^* is not the inverse of \mathcal{R} but its *adjoint operator*, i.e.

$$\langle \mathcal{R}f, g \rangle = \langle f, \mathcal{R}^*g \rangle \quad (12)$$

where f, g any square integrable functions and

$$\langle \mathcal{R}f, g \rangle = \int_0^\pi \int_{\mathbb{R}} \mathcal{R}f(t, \theta) \overline{g(t, \theta)} dt d\theta$$

If the image object $f(x, y)$ and all its projections $p_\theta(t)$ are discretized, mapped into vectors \mathbf{f} and \mathbf{p} , and related via a matrix transformation $\mathbf{R}\mathbf{f} = \mathbf{p}$, then the adjoint operator \mathcal{R}^* would correspond to the matrix transpose \mathbf{R}^T but not its inverse \mathbf{R}^{-1} .

Exercises:

(a) Consider a uniform unit disk as the image object

$$f(x, y) = \begin{cases} 1, & x^2 + y^2 \leq 1 \\ 0, & \text{else} \end{cases}$$

Find analytically its Radon transform $\mathcal{R}f(t, \theta)$ and its unfiltered back-projection $\tilde{f}(x, y)$.

(b) Consider a separable image $f(x, y) = f_1(x)f_2(y)$. Find its Radon transform. In addition, show that can be reconstructed exactly from only two projections and find their corresponding projection angles.

(c) Show, qualitatively or analytically, that a 2D image object that is a point of mass in space, e.g. $f(x, y) = \delta(x - x_0, y - y_0)$, corresponds via Radon transform to a sine in the plane (t, θ) . Then, find its unfiltered back-projection $\tilde{f}(x, y)$.

Hint: the following lemma may help: For a 1D function $f(\theta)$ with zeros at $\theta = \theta_1, \dots, \theta_k, \dots$

$$\delta(f(\theta)) = \sum_k \left(\frac{1}{|f'(\theta_k)|} \right) \delta(\theta - \theta_k)$$