

Εργασία Υπολογιστικών Μαθηματικών 2019

Χρήστος Γεωργίου Μουσσές
Σωτηρία Δουλγεράκη
Πασχάλης Πιπίδης

Περιεχόμενα

1	Εξισώσεις	3
2	Μέθοδοι Ολοκλήρωσης	3
2.1	Μέθοδος Euler	4
2.2	Τροποποιημένη Μέθοδος Euler	4
2.3	Προσομοίωση	5
2.4	Γραφικές Παραστάσεις	6
2.4.1	Περίπτωση Μεταβολής μόνο της εισόδου f_x	6
2.4.2	Περίπτωση Μεταβολής μόνο της εισόδου f_y	6
2.4.3	Περίπτωση Μεταβολής μόνο της εισόδου n_z	7
3	Σύστημα αυτομάτου ελέγχου κλειστού βρόχου	14
3.0.1	Προσομοίωση	14
3.0.2	Γραφικές Παραστάσεις	15

1 Εξισώσεις

Το σύστημά μας περιγράφεται από τις παρακάτω τρεις διαφορικές εξισώσεις δεύτερης τάξης:

$$(m + 3m_a)(\cos(\psi)\ddot{x} - \sin(\psi)\dot{\psi}\dot{x} + \cos(\psi)\dot{\psi}\dot{y}) = f_x - D_x|\dot{x}|\dot{x} \quad (1)$$

$$(m + 3m_a)(\cos(\psi)\ddot{y} - \cos(\psi)\dot{\psi}\dot{x} - \sin(\psi)\dot{\psi}\dot{y}) = f_y - D_y|\dot{y}|\dot{y} \quad (2)$$

$$m_z\ddot{\psi} = n_z - D_\psi|\dot{\psi}|\dot{\psi} \quad (3)$$

2 Μέθοδοι Ολοκλήρωσης

Για να χρησιμοποιήσουμε τη μέθοδο Euler και την τροποποιημένη μέθοδο Euler χρειαζόμαστε διαφορικές εξισώσεις πρώτης τάξης, οπότε χρησιμοποιούμε τις νέες μεταβλητές:

$$x_1 = x$$

$$y_1 = y$$

$$\psi_1 = \psi$$

και

$$x_2 = \dot{x}_1 = \dot{x}$$

$$y_2 = \dot{y}_1 = \dot{y}$$

$$\psi_2 = \dot{\psi}_1 = \dot{\psi}$$

Με τις νέες μεταβλητές, η εξίσωση (1) μετατρέπεται στο παρακάτω σύστημα δύο διαφορικών εξισώσεων πρώτης τάξης:

$$\dot{x}_1 = x_2 \quad (4)$$

$$\dot{x}_2 = \tan(\psi_1)\psi_2x_2 - \psi_2y_2 + \frac{f_x - D_x|x_2|x_2}{(m + 3m_a)\cos(\psi_1)} \quad (5)$$

Αντίστοιχα η (2) και η (3) μετατρέπονται σε:

$$\dot{y}_1 = y_2 \quad (6)$$

$$\dot{y}_2 = \tan(\psi_1)\psi_2 y_2 + \psi_2 x_2 + \frac{f_y - D_y |y_2| y_2}{(m + 3m_a)\cos(\psi_1)} \quad (7)$$

και

$$\dot{\psi}_1 = \psi_2 \quad (8)$$

$$\dot{\psi}_2 = \frac{n_z - D_\psi |\psi_2| \psi_2}{m_z} \quad (9)$$

2.1 Μέθοδος Euler

Στη μέθοδο Euler, η λύση του συστήματος πρώτης τάξης $\dot{y}(t) = f(t, y(t))$ με αρχική συνθήκη $y(0)$, στις χρονικές στιγμές $t = kh, k = 0, 1, 2, \dots$ προσεγγίζεται από τη σχέση $y(k+1) = y(k) + hf(kh, y(k))$ όπου $y(k) = y(t = kh), k = 0, 1, 2, \dots$ και h το βήμα ολοκλήρωσης.

Για το σύστημα των εξισώσεων (4) έως (9), η εφαρμογή της παραπάνω σχέσης δίνει:

$$x_1(k+1) = x_1(k) + hx_2(k)$$

$$x_2(k+1) = x_2(k) + h[\tan(\psi_1(k))\psi_2(k)x_2(k) - \psi_2(k)y_2(k) + \frac{f_x - D_x |x_2(k)|x_2(k)}{(m + 3m_a)\cos(\psi_1(k))}]$$

$$y_1(k+1) = y_1(k) + hy_2(k)$$

$$y_2(k+1) = y_2(k) + h[\tan(\psi_1(k))\psi_2(k)y_2(k) + \psi_2(k)x_2(k) + \frac{f_y - D_y |y_2(k)|y_2(k)}{(m + 3m_a)\cos(\psi_1(k))}]$$

$$\psi_1(k+1) = \psi_1(k) + h\psi_2(k)$$

$$\psi_2(k+1) = \psi_2(k) + h[\frac{n_z - D_\psi |\psi_2(k)|\psi_2(k)}{m_z}]$$

όπου f_x, f_y, n_z είναι σταθερά.

2.2 Τροποποιημένη Μέθοδος Euler

Στην τροποποιημένη μέθοδο Euler, η λύση του συστήματος πρώτης τάξης $\dot{y}(t) = f(t, y(t))$ με αρχική συνθήκη $y(0)$, στις χρονικές στιγμές $t = kh, k = 0, 1, 2, \dots$ προσεγγίζεται από τη σχέση $y(k+1) = y(k) + hf(kh + \frac{h}{2}, y(k) + \frac{h}{2}f(kh, y(k)))$ όπου $y(k) = y(t = kh), k = 0, 1, 2, \dots$ και h το βήμα ολοκλήρωσης.

Για το σύστημα των εξισώσεων (4) έως (9), η εφαρμογή της παραπάνω σχέσης γίνεται σε δύο βήματα:

Πρώτα υπολογίζεται το τμήμα $y(k) + \frac{h}{2}f(kh, y(k))$ από τις σχέσεις:

$$g_1(k) = x_1(k) + \frac{h}{2}x_2(k)$$

$$g_2(k) = x_2(k) + \frac{h}{2}[\tan(\psi_1(k))\psi_2(k)x_2(k) - \psi_2(k)y_2(k) + \frac{f_x - D_x|x_2(k)|x_2(k)}{(m + 3m_a)\cos(\psi_1(k))}]$$

$$g_3(k) = y_1(k) + \frac{h}{2}y_2(k)$$

$$g_4(k) = y_2(k) + \frac{h}{2}[\tan(\psi_1(k))\psi_2(k)y_2(k) + \psi_2(k)x_2(k) + \frac{f_y - D_y|y_2(k)|y_2(k)}{(m + 3m_a)\cos(\psi_1(k))}]$$

$$g_5(k) = \psi_1(k) + \frac{h}{2}\psi_2(k)$$

$$g_6(k) = \psi_2(k) + \frac{h}{2}[\frac{n_z - D_\psi|\psi_2(k)|\psi_2(k)}{m_z}]$$

και στη συνέχεια το $y(k) + hf(kh + \frac{h}{2}, y(k) + \frac{h}{2}f(kh, y(k)))$ υπολογίζεται από τις σχέσεις:

$$x_1(k+1) = x_1(k) + hg_2(k)$$

$$x_2(k+1) = x_2(k) + h[\tan(g_5(k))g_6(k)g_2(k) - g_6(k)g_4(k) + \frac{f_x - D_x|g_2(k)|g_2(k)}{(m + 3m_a)\cos(g_5(k))}]$$

$$y_1(k+1) = y_1(k) + hg_4(k)$$

$$y_2(k+1) = y_2(k) + h[\tan(g_5(k))g_6(k)g_4(k) + g_6(k)g_2(k) + \frac{f_y - D_y|g_4(k)|g_4(k)}{(m + 3m_a)\cos(g_5(k))}]$$

$$\psi_1(k+1) = \psi_1(k) + hg_6(k)$$

$$\psi_2(k+1) = \psi_2(k) + h[\frac{n_z - D_\psi|g_6(k)|g_6(k)}{m_z}]$$

βάζοντας τα $g_1(k), g_2(k), g_3(k), g_4(k), g_5(k), g_6(k)$ στη θέση των $x_1(k), x_2(k), y_1(k), y_2(k), \psi_1(k), \psi_2(k)$, αντίστοιχα.

2.3 Προσομοίωση

Προσομοιώθηκε το παραπάνω σύστημα εξισώσεων σε γλώσσα προγραμματισμού C και έγινε εξαγωγή των αποτελεσμάτων σε αρχεία ASCII τα οποία στη συνέχεια εισήχθησαν στο MATLAB για την απεικόνιση των γραφικών παραστάσεων.

Οι γραφικές παραστάσεις που παρατίθενται στη συνέχεια, αφορούν τις τρεις παρακάτω περιπτώσεις τιμών για τις εισόδους του συστήματος:

$$[f_x, f_y, n_z]^T = [3496, 0, 0]^T$$

$$[f_x, f_y, n_z]^T = [0, -3496, 0]^T$$

$$[f_x, f_y, n_z]^T = [0, 0, -3496]^T$$

Και στις τρεις περιπτώσεις οι αρχικές συνθήκες που χρησιμοποιήθηκαν είναι ίδιες:

$$x(0) = 0.3496$$

$$\dot{x}(0) = 0$$

$$y(0) = 0$$

$$\dot{y}(0) = 0$$

$$\psi(0) = 0$$

$$\dot{\psi}(0) = 0$$

Οι παράμετροι του συστήματος υπολογίστηκαν με $A.M = 3496^1$ και δίνονται παρακάτω:

$$D_x = 11835$$

$$D_y = 8339$$

$$D_\psi = 15331$$

$$m = 425000$$

$$m_z = 357000000$$

$$m_\alpha = 113000$$

Ο κώδικας των προγραμμάτων βρίσκεται στο παράρτημα.

2.4 Γραφικές Παραστάσεις

Σε καθεμία από τις περιπτώσεις παρουσιάζονται μόνο οι μη μηδενικές καταστάσεις του συστήματος ενώ οι υπόλοιπες παραμένουν μηδέν σε όλη τη διάρκεια της προσομοίωσης γιατί οι αντίστοιχες εισοδοί είναι μηδέν όπως και οι αρχικές συνθήκες.

2.4.1 Περίπτωση Μεταβολής μόνο της εισόδου f_x

Παρουσιάζεται η μεταβολή των $x_1(t)$ και $x_2(t)$ με το χρόνο. Για τις μεθόδους Euler και τροποποιημένη Euler, επειδή οι διαφορές είναι μικρές παρουσιάζεται στις εικόνες 2 και 4 μια μεγέθυνση σε μια περιοχή έτσι ώστε να είναι ορατές οι διαφορές τους.

2.4.2 Περίπτωση Μεταβολής μόνο της εισόδου f_y

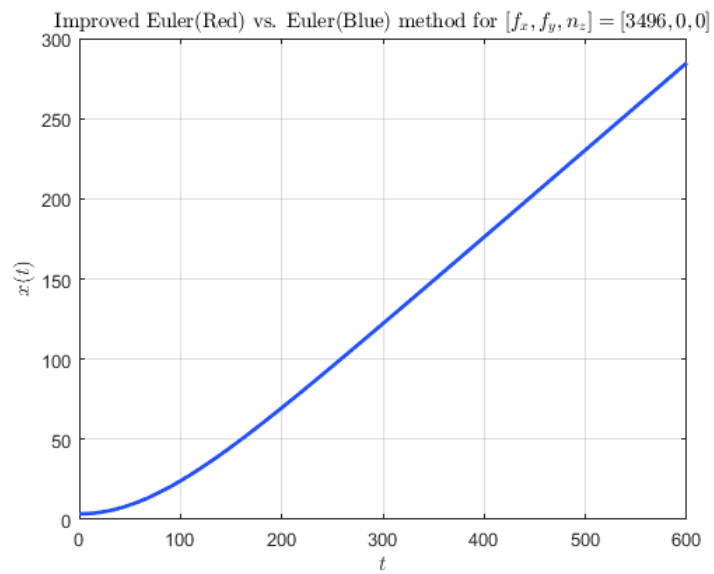
Παρουσιάζεται η μεταβολή των $y_1(t)$ και $y_2(t)$ με το χρόνο. Παρουσιάζεται στις εικόνες 6 και 8 μια μεγέθυνση σε μια περιοχή.

¹

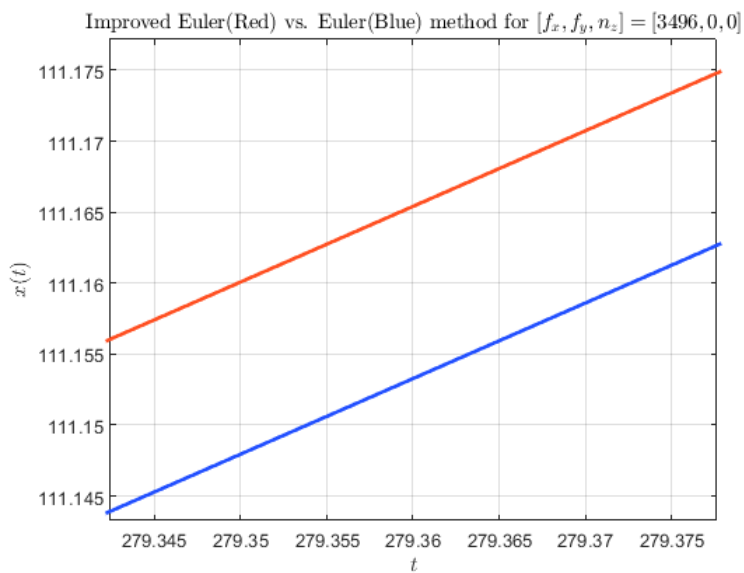
$$A.M = \frac{4206 + 3218 + 3064}{3} = 3496$$

2.4.3 Περίπτωση Μεταβολής μόνο της εισόδου n_z

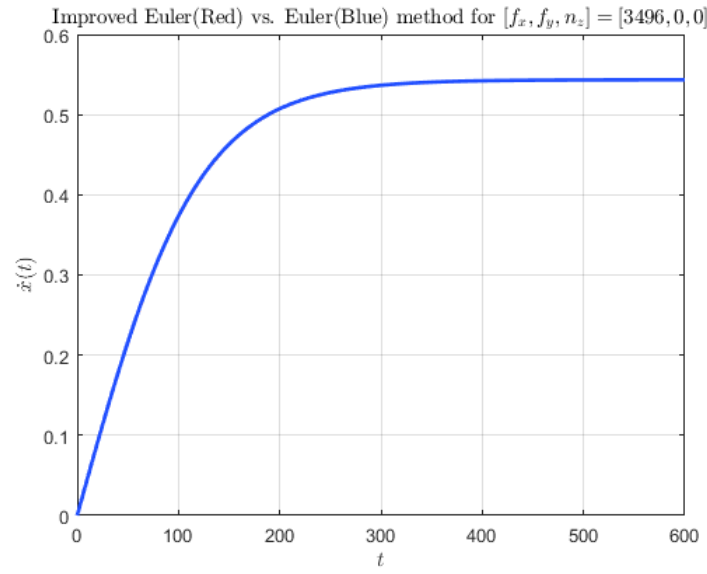
Παρουσιάζεται η μεταβολή των $\psi_1(t)$ και $\psi_2(t)$ με το χρόνο. Παρουσιάζεται στις εικόνες 10 και 12 μια μεγέθυνση σε μια περιοχή.



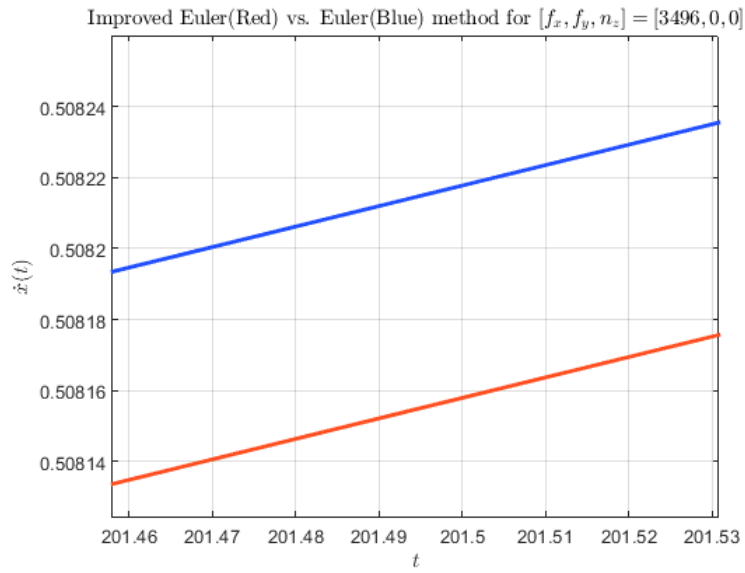
Εικόνα 1: Μεταβολή της $x_1(t)$ για Euler και τροποποιημένη Euler (οι διαφορές είναι μικρές)



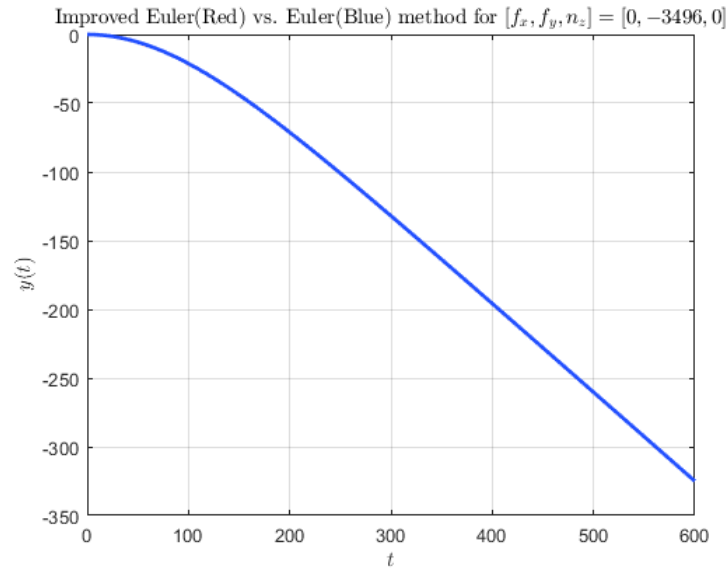
Εικόνα 2: Μεταβολή της $x_1(t)$ για Euler και τροποποιημένη Euler (μεγέθυνση)



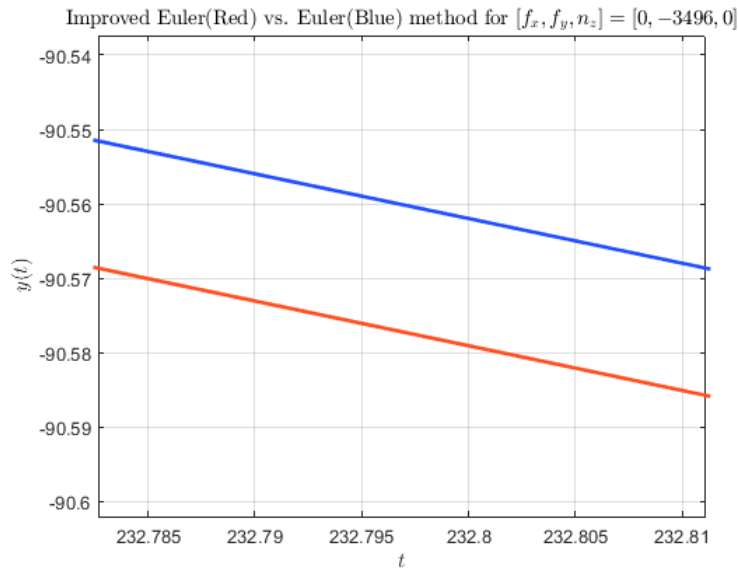
Εικόνα 3: Μεταβολή της $x_2(t)$ για Euler και τροποποιημένη Euler (οι διαφορές είναι μικρές)



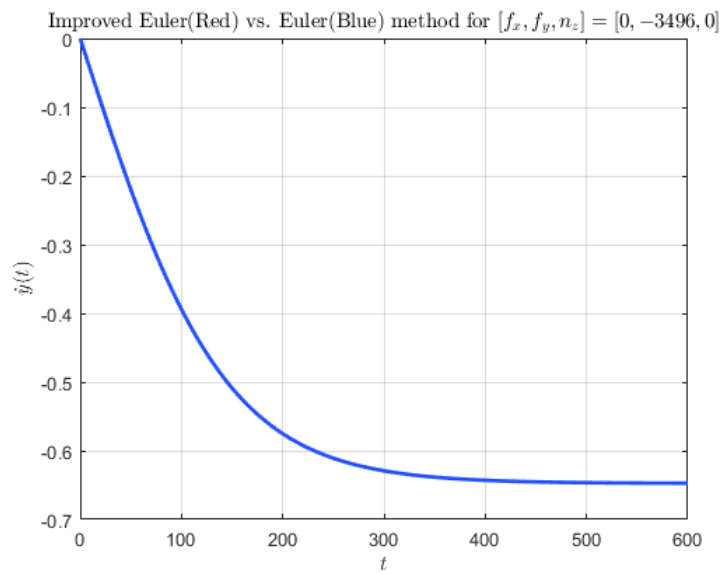
Εικόνα 4: Μεταβολή της $x_2(t)$ για Euler και τροποποιημένη Euler (μεγέθυνση)



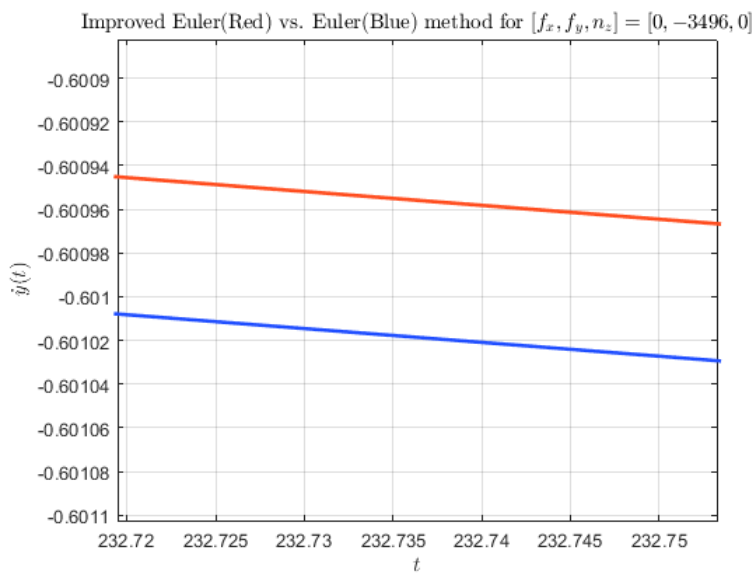
Εικόνα 5: Μεταβολή της $y_1(t)$ για Euler και τροποποιημένη Euler (οι διαφορές είναι μικρές)



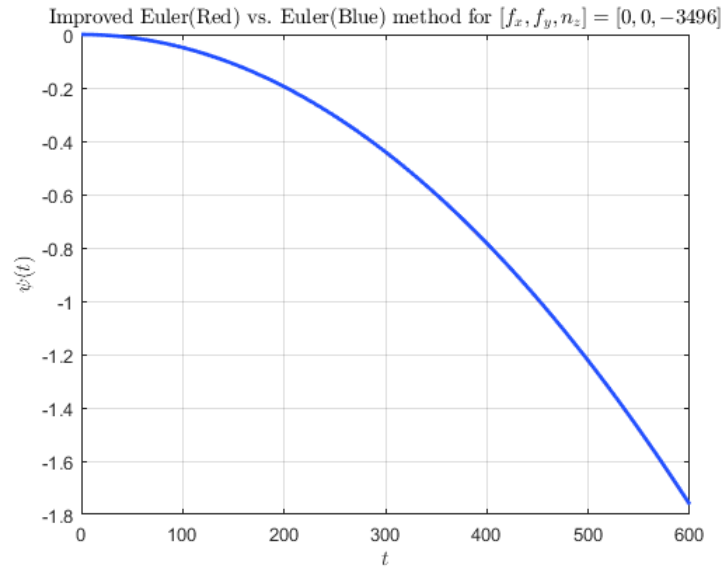
Εικόνα 6: Μεταβολή της $y_1(t)$ για Euler και τροποποιημένη Euler (μεγέθυνση)



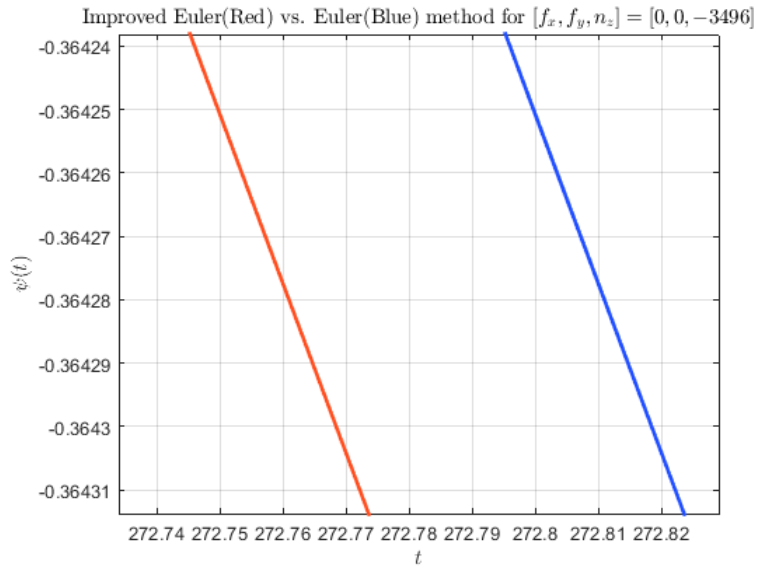
Εικόνα 7: Μεταβολή της $y_2(t)$ για Euler και τροποποιημένη Euler (οι διαφορές είναι μικρές)



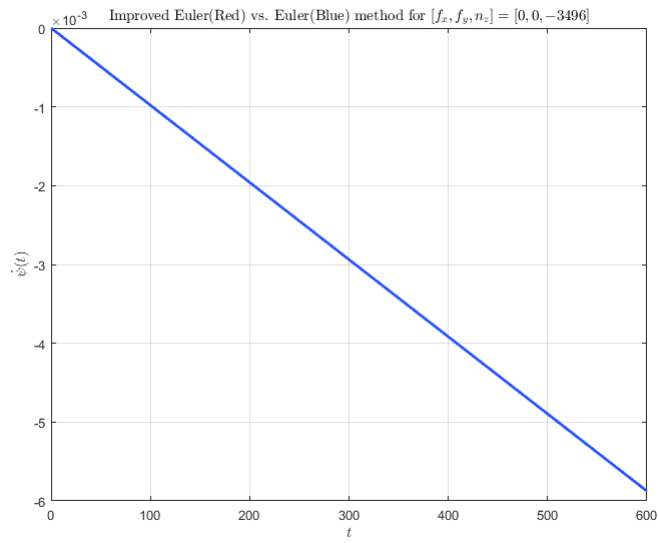
Εικόνα 8: Μεταβολή της $y_2(t)$ για Euler και τροποποιημένη Euler (μεγέθυνση)



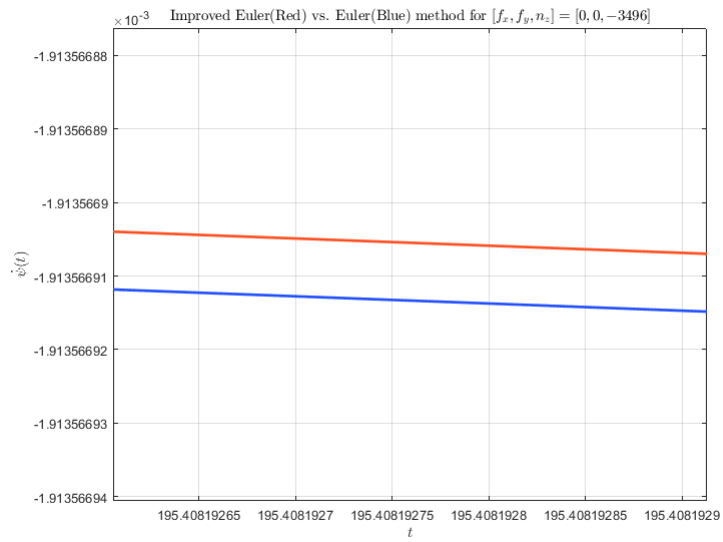
Εικόνα 9: Μεταβολή της $\psi_1(t)$ για Euler και τροποποιημένη Euler (οι διαφορές είναι μικρές)



Εικόνα 10: Μεταβολή της $\psi_1(t)$ για Euler και τροποποιημένη Euler (μεγέθυνση)



Εικόνα 11: Μεταβολή της $\psi_2(t)$ για Euler και τροποποιημένη Euler (οι διαφορές είναι μικρές)



Εικόνα 12: Μεταβολή της $\psi_2(t)$ για Euler και τροποποιημένη Euler (μεγέθυνση)

3 Σύστημα αυτομάτου ελέγχου κλειστού βρόχου

Χρησιμοποιώντας για τις εισόδους τους παρακάτω ελεγκτές αναλογικού διαφορικού τύπου στις εξισώσεις (4)-(9) :

$$f_x = K_{px}(x_{des} - x) - K_{dx}\dot{x}$$

$$f_y = K_{py}(y_{des} - y) - K_{dy}\dot{y}$$

$$n_z = K_{p\psi}(\psi_{des} - \psi) - K_{d\psi}\dot{\psi}$$

και αναδιατυπώνοντας, χρησιμοποιώντας τις νέες μεταβλητές $x_1, x_2, y_1, y_2, \psi_1, \psi_2$ όπως και πριν, καταλήγουμε στο παρακάτω σύστημα κλειστού βρόχου διαφορικών εξισώσεων πρώτης τάξης:

$$\dot{x}_1 = x_2 \quad (10)$$

$$\dot{x}_2 = \tan(\psi_1)\psi_2x_2 - \psi_2y_2 + \frac{K_{px}(x_{des} - x_1) - K_{dx}x_2 - D_x|x_2|x_2}{(m + 3m_a)\cos(\psi_1)} \quad (11)$$

$$\dot{y}_1 = y_2 \quad (12)$$

$$\dot{y}_2 = \tan(\psi_1)\psi_2y_2 + \psi_2x_2 + \frac{K_{py}(y_{des} - y_1) - K_{dy}y_2 - D_y|y_2|y_2}{(m + 3m_a)\cos(\psi_1)} \quad (13)$$

$$\dot{\psi}_1 = \psi_2 \quad (14)$$

$$\dot{\psi}_2 = \frac{K_{p\psi}(\psi_{des} - \psi_1) - K_{d\psi}\psi_2 - D_\psi|\psi_2|\psi_2}{m_z} \quad (15)$$

3.0.1 Προσομοίωση

Όπως και πριν, χρησιμοποιώντας τον ίδιο κώδικα σε C, όπου ενσωματώθηκαν οι αλλαγές των εξισώσεων, προσομοιώθηκαν οι μέθοδοι Euler και τροποποιημένη Euler. Οι αρχικές συνθήκες που χρησιμοποιήθηκαν είναι:

$$x(0) = 0$$

$$\dot{x}(0) = 0$$

$$y(0) = -3,496$$

$$\dot{y}(0) = 0$$

$$\psi(0) = 0$$

$$\dot{\psi}(0) = 0$$

Οι παράμετροι του συστήματος και οι παράμετροι του ελεγκτή δίνονται παρακάτω:

$$D_x = 15331$$

$$D_y = 11835$$

$$D_\psi = 11835$$

$$m = 425000$$

$$m_z = 357000000$$

$$m_\alpha = 113000$$

$$K_{px} = 77480$$

$$K_{dx} = 5000000$$

$$K_{py} = 60000$$

$$K_{dy} = 4650400$$

$$K_{p\psi} = 50000$$

$$K_{d\psi} = 7000000$$

Οι επιθυμητές τελικές τιμές για τα x, y, ψ είναι αντίστοιχα:

$$x_{des} = 34.96$$

$$y_{des} = -34.96$$

$$\psi_{des} = 0.3496$$

3.0.2 Γραφικές Παραστάσεις

Δίνονται στη συνέχεια, οι μεταβολές όλων των καταστάσεων απ' όπου βλέπουμε ότι πράγματι τα

$$x, y, \psi$$

τείνουν ασυμπτωτικά στις επιθυμητές τιμές και για τις δύο μεθόδους επίλυσης.