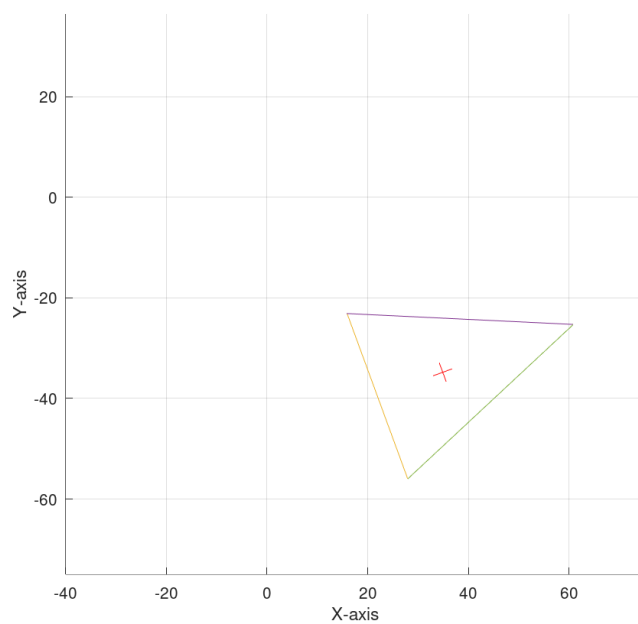


# Εργασία Υπολογιστικών Μαθηματικών 2019

Χρήστος Γεωργίου Μουσσές  
Α.Μ: 4206

Σωτηρία Δουλγεράκη  
Α.Μ: 3218

Πασχάλης Πιπίδης  
Α.Μ: 3064



## Περιεχόμενα

<b>1</b>	<b>Σύστημα Ρομποτικής Πλατφόρμας</b>	<b>3</b>
<b>2</b>	<b>Μέθοδοι Ολοκλήρωσης</b>	<b>3</b>
2.1	Μέθοδος Euler . . . . .	4
2.2	Τροποποιημένη Μέθοδος Euler . . . . .	4
2.3	Προσομοίωση . . . . .	5
2.4	Γραφικές Παραστάσεις . . . . .	7
2.4.1	Περίπτωση Μεταβολής μόνο της εισόδου $f_x$ (Εικόνες 1-4) .	7
2.4.2	Περίπτωση Μεταβολής μόνο της εισόδου $f_y$ (Εικόνες 5-8) .	7
2.4.3	Περίπτωση Μεταβολής μόνο της εισόδου $n_z$ (Εικόνες 9-12) .	7
<b>3</b>	<b>Σύστημα αυτομάτου ελέγχου κλειστού βρόγχου</b>	<b>14</b>
3.1	Προσομοίωση . . . . .	14
3.2	Γραφικές Παραστάσεις . . . . .	15
<b>4</b>	<b>Γραμμικό Σύστημα</b>	<b>22</b>
4.1	Συνάρτηση Μεταφοράς . . . . .	22
4.2	Γεωμετρικός Τόπος Ριζών . . . . .	22
4.3	Αναλυτική λύση . . . . .	25
4.4	Προσομοίωση . . . . .	26
4.5	Γραφικές Παραστάσεις . . . . .	27

## 1 Σύστημα Ρομποτικής Πλατφόρμας

Το σύστημά μας περιγράφεται από τις παρακάτω τρεις διαφορικές εξισώσεις δεύτερης τάξης:

$$(m + 3m_a)(\cos(\psi)\ddot{x} - \sin(\psi)\dot{\psi}\dot{x} + \cos(\psi)\dot{\psi}\dot{y}) = f_x - D_x|\dot{x}|\dot{x} \quad (1)$$

$$(m + 3m_a)(\cos(\psi)\ddot{y} - \cos(\psi)\dot{\psi}\dot{x} - \sin(\psi)\dot{\psi}\dot{y}) = f_y - D_y|\dot{y}|\dot{y} \quad (2)$$

$$m_z\ddot{\psi} = n_z - D_\psi|\dot{\psi}|\dot{\psi} \quad (3)$$

## 2 Μέθοδοι Ολοκλήρωσης

Για χρησιμοποιηθεί η μέθοδος Euler και η τροποποιημένη μέθοδος Euler χρειάζονται διαφορικές εξισώσεις πρώτης τάξης, οπότε χρησιμοποιούνται νέες μεταβλητές όπου:

$$x_1 = x$$

$$y_1 = y$$

$$\psi_1 = \psi$$

και

$$x_2 = \dot{x}_1 = \dot{x}$$

$$y_2 = \dot{y}_1 = \dot{y}$$

$$\psi_2 = \dot{\psi}_1 = \dot{\psi}$$

Με τις νέες μεταβλητές, η εξίσωση (1) μετατρέπεται στο παρακάτω σύστημα δύο διαφορικών εξισώσεων πρώτης τάξης:

$$\dot{x}_1 = x_2 \quad (4)$$

$$\dot{x}_2 = \tan(\psi_1)\psi_2x_2 - \psi_2y_2 + \frac{f_x - D_x|x_2|x_2}{(m + 3m_a)\cos(\psi_1)} \quad (5)$$

Αντίστοιχα η (2) και η (3) μετατρέπονται σε:

$$\dot{y}_1 = y_2 \quad (6)$$

$$\dot{y}_2 = \tan(\psi_1)\psi_2y_2 + \psi_2x_2 + \frac{f_y - D_y|y_2|y_2}{(m + 3m_a)\cos(\psi_1)} \quad (7)$$

και

$$\dot{\psi}_1 = \psi_2 \quad (8)$$

$$\dot{\psi}_2 = \frac{n_z - D_\psi |\psi_2| \psi_2}{m_z} \quad (9)$$

## 2.1 Μέθοδος Euler

Στη μέθοδο Euler, η λύση του συστήματος πρώτης τάξης  $\dot{y}(t) = f(t, y(t))$  με αρχική συνθήκη  $y(0)$ , στις χρονικές στιγμές  $t = kh, k = 0, 1, 2, \dots$  προσεγγίζεται από τη σχέση  $y(k+1) = y(k) + hf(kh, y(k))$  όπου  $y(k) = y(t = kh), k = 0, 1, 2, \dots$  και  $h$  το βήμα ολοκλήρωσης.

Για το σύστημα των εξισώσεων (4) έως (9), η εφαρμογή της παραπάνω σχέσης δίνει:

$$x_1(k+1) = x_1(k) + hx_2(k)$$

$$x_2(k+1) = x_2(k) + h[\tan(\psi_1(k))\psi_2(k)x_2(k) - \psi_2(k)y_2(k) + \frac{f_x - D_x|x_2(k)|x_2(k)}{(m + 3m_a)\cos(\psi_1(k))}]$$

$$y_1(k+1) = y_1(k) + hy_2(k)$$

$$y_2(k+1) = y_2(k) + h[\tan(\psi_1(k))\psi_2(k)y_2(k) + \psi_2(k)x_2(k) + \frac{f_y - D_y|y_2(k)|y_2(k)}{(m + 3m_a)\cos(\psi_1(k))}]$$

$$\psi_1(k+1) = \psi_1(k) + h\psi_2(k)$$

$$\psi_2(k+1) = \psi_2(k) + h[\frac{n_z - D_\psi|\psi_2(k)|\psi_2(k)}{m_z}]$$

όπου  $f_x, f_y, n_z$  είναι σταθερά.

## 2.2 Τροποποιημένη Μέθοδος Euler

Στην τροποποιημένη μέθοδο Euler, η λύση του συστήματος πρώτης τάξης  $\dot{y}(t) = f(t, y(t))$  με αρχική συνθήκη  $y(0)$ , στις χρονικές στιγμές  $t = kh, k = 0, 1, 2, \dots$  προσεγγίζεται από τη σχέση  $y(k+1) = y(k) + hf(kh + \frac{h}{2}, y(k) + \frac{h}{2}f(kh, y(k)))$  όπου  $y(k) = y(t = kh), k = 0, 1, 2, \dots$  και  $h$  το βήμα ολοκλήρωσης.

Για το σύστημα των εξισώσεων (4) έως (9), η εφαρμογή της παραπάνω σχέσης γίνεται σε δύο βήματα:

Πρώτα υπολογίζεται το τμήμα  $y(k) + \frac{h}{2}f(kh, y(k))$  από τις σχέσεις:

$$g_1(k) = x_1(k) + \frac{h}{2}x_2(k)$$

$$g_2(k) = x_2(k) + \frac{h}{2}[\tan(\psi_1(k))\psi_2(k)x_2(k) - \psi_2(k)y_2(k) + \frac{f_x - D_x|x_2(k)|x_2(k)}{(m + 3m_a)\cos(\psi_1(k))}]$$

$$g_3(k) = y_1(k) + \frac{h}{2}y_2(k)$$

$$g_4(k) = y_2(k) + \frac{h}{2}[\tan(\psi_1(k))\psi_2(k)y_2(k) + \psi_2(k)x_2(k) + \frac{f_y - D_y|y_2(k)|y_2(k)}{(m + 3m_a)\cos(\psi_1(k))}]$$

$$g_5(k) = \psi_1(k) + \frac{h}{2}\psi_2(k)$$

$$g_6(k) = \psi_2(k) + \frac{h}{2}[\frac{n_z - D_\psi|\psi_2(k)|\psi_2(k)}{m_z}]$$

και στη συνέχεια το  $y(k) + hf(kh + \frac{h}{2}, y(k) + \frac{h}{2}f(kh, y(k)))$  υπολογίζεται από τις σχέσεις:

$$x_1(k+1) = x_1(k) + hg_2(k)$$

$$x_2(k+1) = x_2(k) + h[\tan(g_5(k))g_6(k)g_2(k) - g_6(k)g_4(k) + \frac{f_x - D_x|g_2(k)|g_2(k)}{(m + 3m_a)\cos(g_5(k))}]$$

$$y_1(k+1) = y_1(k) + hg_4(k)$$

$$y_2(k+1) = y_2(k) + h[\tan(g_5(k))g_6(k)g_4(k) + g_6(k)g_2(k) + \frac{f_y - D_y|g_4(k)|g_4(k)}{(m + 3m_a)\cos(g_5(k))}]$$

$$\psi_1(k+1) = \psi_1(k) + hg_6(k)$$

$$\psi_2(k+1) = \psi_2(k) + h[\frac{n_z - D_\psi|g_6(k)|g_6(k)}{m_z}]$$

βάζοντας τα  $g_1(k), g_2(k), g_3(k), g_4(k), g_5(k), g_6(k)$  στη θέση των  $x_1(k), x_2(k), y_1(k), y_2(k), \psi_1(k), \psi_2(k)$ , αντίστοιχα.

## 2.3 Προσομοίωση

Προσομοιώθηκε το παραπάνω σύστημα εξισώσεων σε γλώσσα προγραμματισμού C και έγινε εξαγωγή των αποτελεσμάτων σε αρχεία ASCII τα οποία στη συνέχεια εισήχθησαν στο MATLAB για την απεικόνιση των γραφικών παραστάσεων.

Οι γραφικές παραστάσεις που παρατίθενται στη συνέχεια, αφορούν τις τρεις παρακάτω περιπτώσεις τιμών για τις εισόδους του συστήματος:

$$[f_x, f_y, n_z]^T = [3496, 0, 0]^T$$

$$[f_x, f_y, n_z]^T = [0, -3496, 0]^T$$

$$[f_x, f_y, n_z]^T = [0, 0, -3496]^T$$

Και στις τρεις περιπτώσεις οι αρχικές συνθήκες που χρησιμοποιήθηκαν είναι ίδιες:

$$x(0) = 0.3496$$

$$\dot{x}(0) = 0$$

$$y(0) = 0$$

$$\dot{y}(0) = 0$$

$$\psi(0) = 0$$

$$\dot{\psi}(0) = 0$$

Οι παράμετροι του συστήματος υπολογίστηκαν με  $A.M = 3496^1$  και δίνονται παρακάτω:

$$D_x = 11835$$

$$D_y = 8339$$

$$D_\psi = 15331$$

$$m = 425000$$

$$m_z = 357000000$$

$$m_\alpha = 113000$$

---

<sup>1</sup>

$$A.M = \frac{4206 + 3218 + 3064}{3} = 3496$$

## 2.4 Γραφικές Παραστάσεις

Σε καθεμία από τις περιπτώσεις παρουσιάζονται μόνο οι μη μηδενικές καταστάσεις του συστήματος ενώ οι υπόλοιπες παραμένουν μηδέν σε όλη τη διάρκεια της προσομοίωσης γιατί οι αντίστοιχες εισοδοί είναι μηδέν όπως και οι αρχικές συνθήκες.

Επειδή στα συγκριτικά γραφήματα Euler - Τροποποιημένη Euler που ακολουθούν, οι διαφορές είναι πολύ μικρές και επομένως μη ορατές, έχουν προστεθεί και μεγεθύνσεις στις οποίες φαίνονται οι διαφορές.

### 2.4.1 Περίπτωση Μεταβολής μόνο της εισόδου $f_x$ (Εικόνες 1-4)

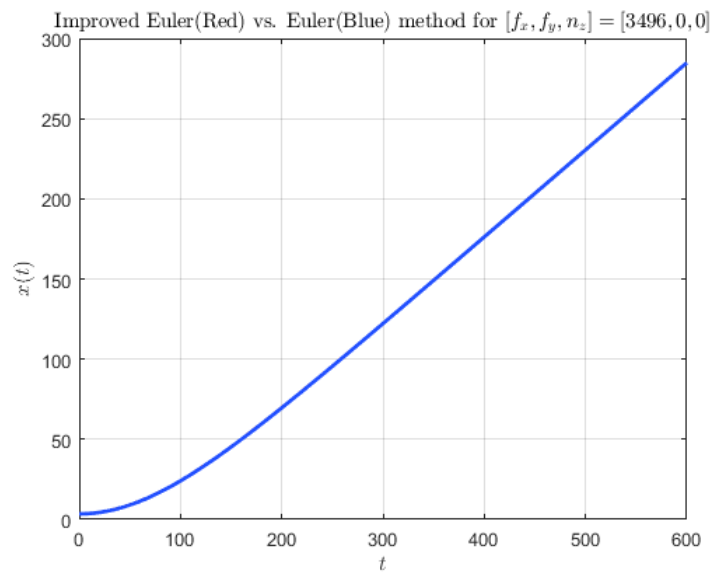
Παρουσιάζεται η μεταβολή των  $x_1(t)$  και  $x_2(t)$  με το χρόνο. Παρουσιάζεται στις εικόνες 2 και 4 μεγέθυνση σε μια περιοχή.

### 2.4.2 Περίπτωση Μεταβολής μόνο της εισόδου $f_y$ (Εικόνες 5-8)

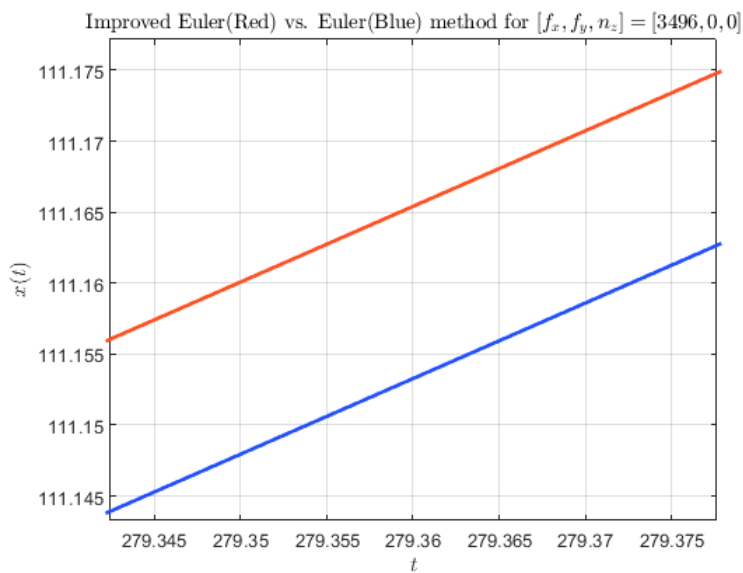
Παρουσιάζεται η μεταβολή των  $y_1(t)$  και  $y_2(t)$  με το χρόνο. Παρουσιάζεται στις εικόνες 6 και 8 μεγέθυνση σε μια περιοχή.

### 2.4.3 Περίπτωση Μεταβολής μόνο της εισόδου $n_z$ (Εικόνες 9-12)

Παρουσιάζεται η μεταβολή των  $\psi_1(t)$  και  $\psi_2(t)$  με το χρόνο. Παρουσιάζεται στις εικόνες 10 και 12 μεγέθυνση σε μια περιοχή.

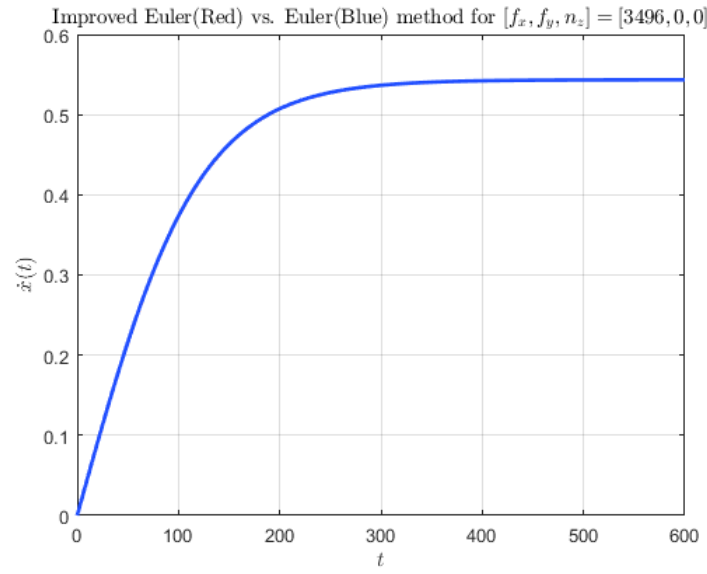


Εικόνα 1: Μεταβολή της  $x_1(t)$  για Euler και τροποποιημένη Euler (οι διαφορές είναι μικρές)

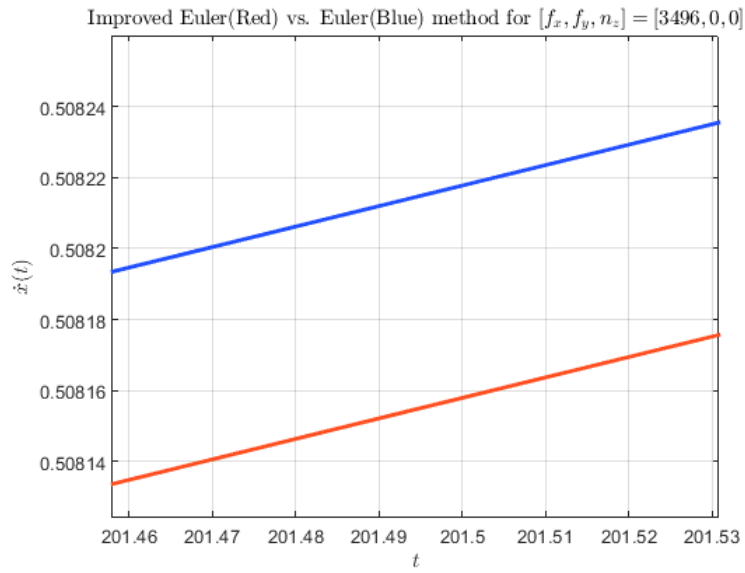


Εικόνα 2: Μεταβολή της  $x_1(t)$  για Euler και τροποποιημένη Euler (μεγέθυνση)

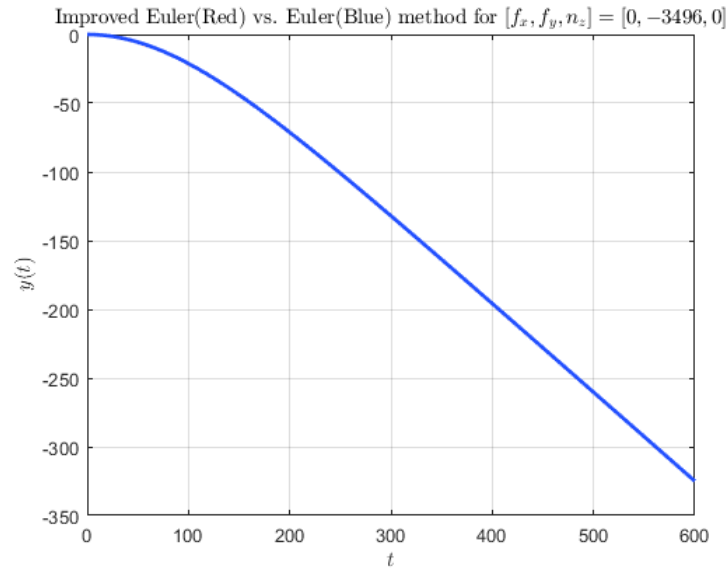




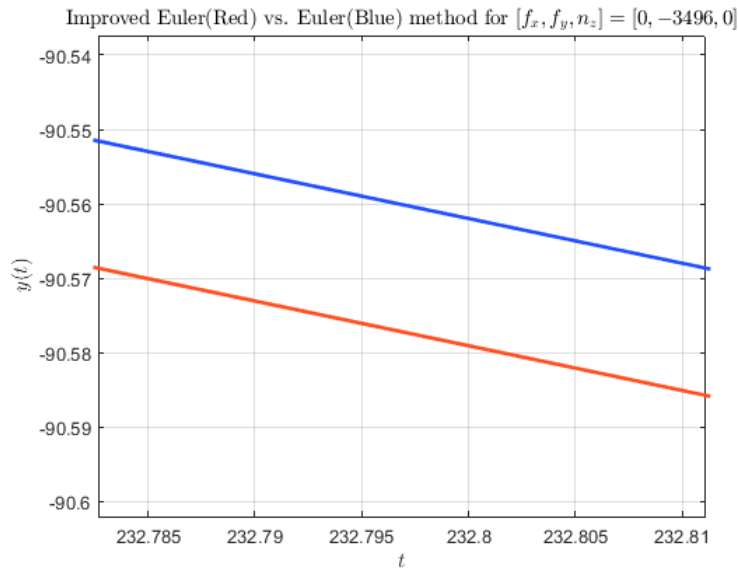
Εικόνα 3: Μεταβολή της  $x_2(t)$  για Euler και τροποποιημένη Euler (οι διαφορές είναι μικρές)



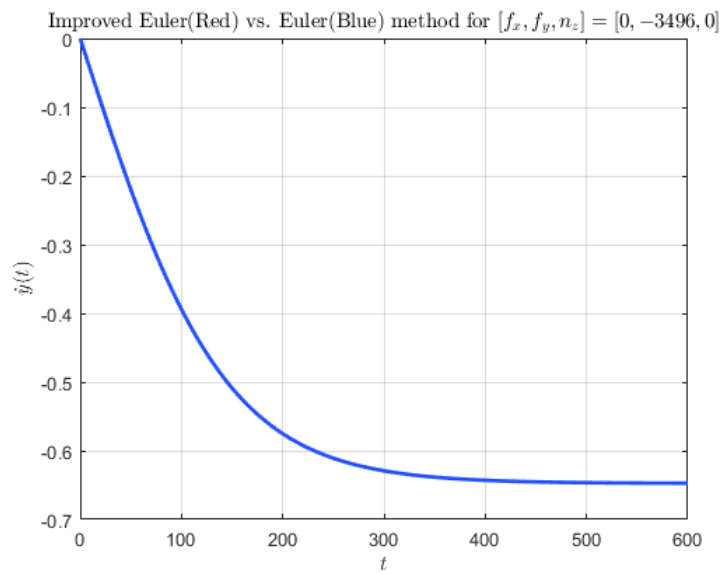
Εικόνα 4: Μεταβολή της  $x_2(t)$  για Euler και τροποποιημένη Euler (μεγέθυνση)



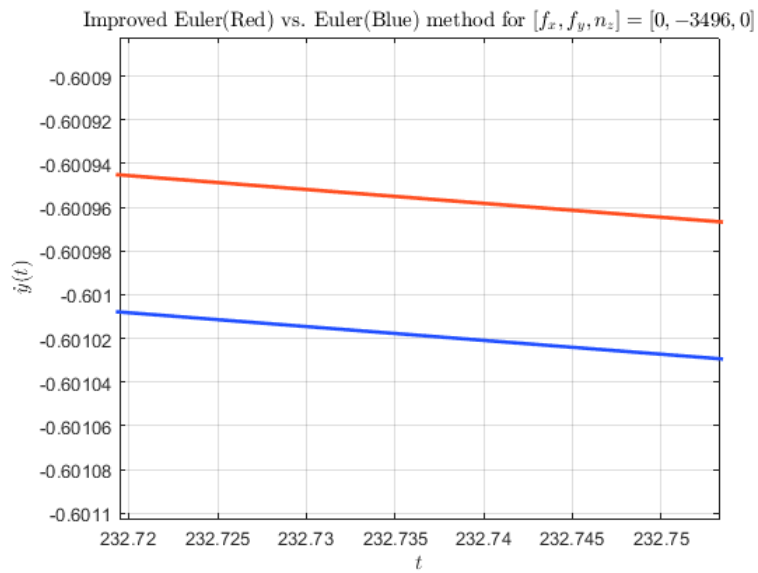
Εικόνα 5: Μεταβολή της  $y_1(t)$  για Euler και τροποποιημένη Euler (οι διαφορές είναι μικρές)



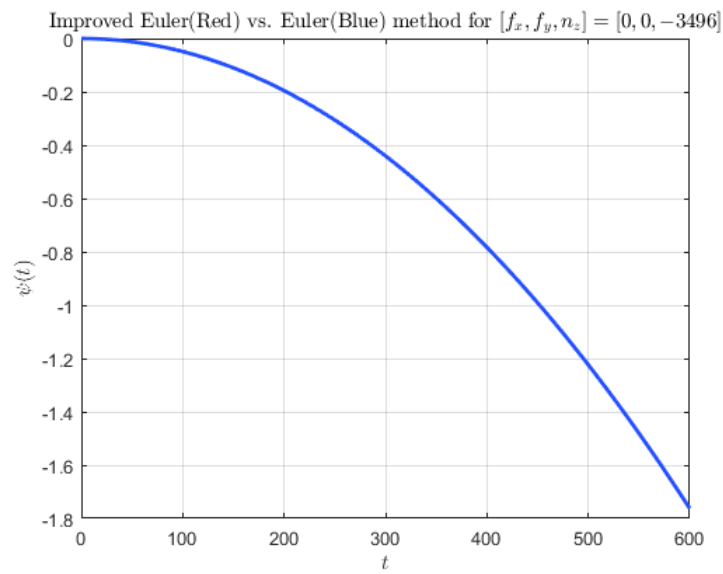
Εικόνα 6: Μεταβολή της  $y_1(t)$  για Euler και τροποποιημένη Euler (μεγέθυνση)



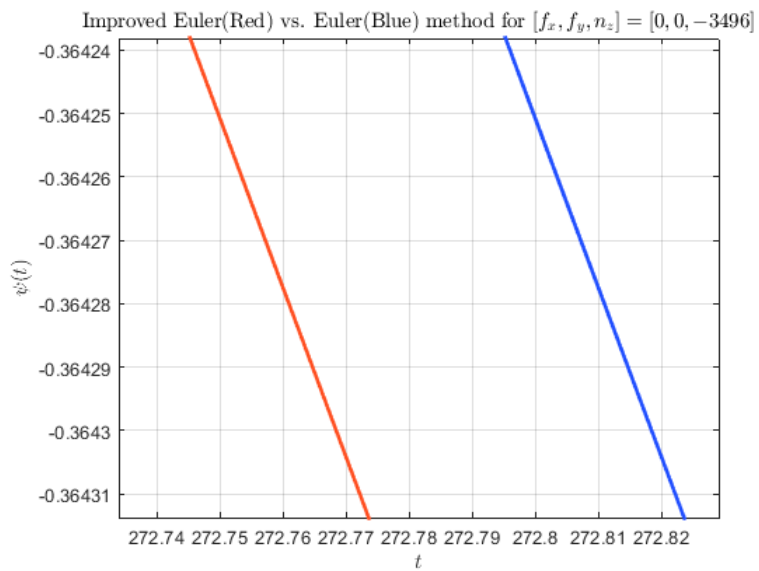
Εικόνα 7: Μεταβολή της  $y_2(t)$  για Euler και τροποποιημένη Euler (οι διαφορές είναι μικρές)



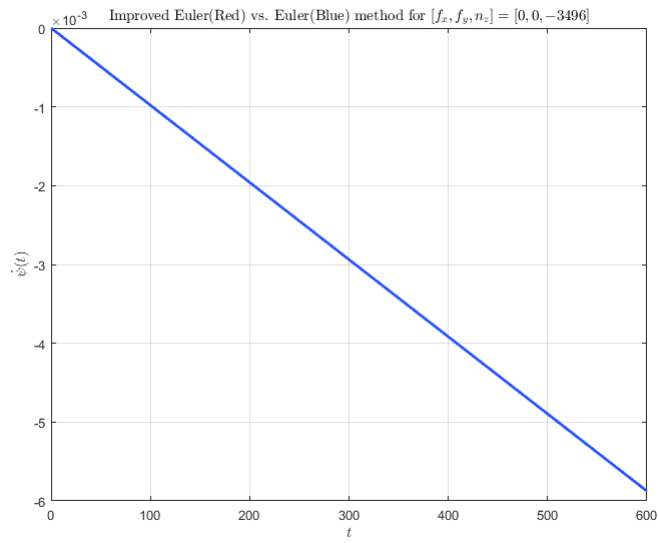
Εικόνα 8: Μεταβολή της  $y_2(t)$  για Euler και τροποποιημένη Euler (μεγέθυνση)



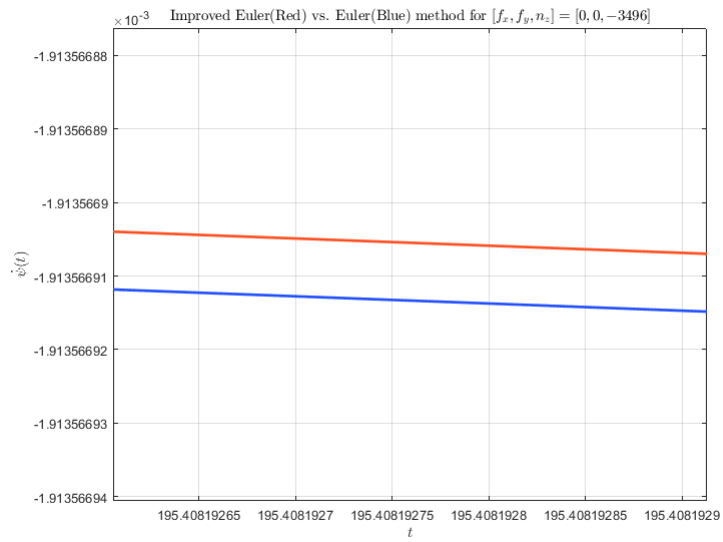
Εικόνα 9: Μεταβολή της  $\psi_1(t)$  για Euler και τροποποιημένη Euler (οι διαφορές είναι μικρές)



Εικόνα 10: Μεταβολή της  $\psi_1(t)$  για Euler και τροποποιημένη Euler (μεγέθυνση)



Εικόνα 11: Μεταβολή της  $\psi_2(t)$  για Euler και τροποποιημένη Euler (οι διαφορές είναι μικρές)



Εικόνα 12: Μεταβολή της  $\psi_2(t)$  για Euler και τροποποιημένη Euler (μεγέθυνση)

### 3 Σύστημα αυτομάτου ελέγχου κλειστού βρόγχου

Χρησιμοποιώντας για τις εισόδους τους παρακάτω ελεγχτές αναλογικού διαφορικού τύπου στις εξισώσεις (4)-(9) :

$$f_x = K_{px}(x_{des} - x) - K_{dx}\dot{x}$$

$$f_y = K_{py}(y_{des} - y) - K_{dy}\dot{y}$$

$$n_z = K_{p\psi}(\psi_{des} - \psi) - K_{d\psi}\dot{\psi}$$

και αναδιατυπώνοντας, χρησιμοποιώντας τις μεταβλητές  $x_1, x_2, y_1, y_2, \psi_1, \psi_2$  όπως και πριν, καταλήγουμε στο παρακάτω σύστημα κλειστού βρόγχου διαφορικών εξισώσεων πρώτης τάξης:

$$\dot{x}_1 = x_2 \quad (10)$$

$$\dot{x}_2 = \tan(\psi_1)\psi_2x_2 - \psi_2y_2 + \frac{K_{px}(x_{des} - x_1) - K_{dx}x_2 - D_x|x_2|x_2}{(m + 3m_a)\cos(\psi_1)} \quad (11)$$

$$\dot{y}_1 = y_2 \quad (12)$$

$$\dot{y}_2 = \tan(\psi_1)\psi_2y_2 + \psi_2x_2 + \frac{K_{py}(y_{des} - y_1) - K_{dy}y_2 - D_y|y_2|y_2}{(m + 3m_a)\cos(\psi_1)} \quad (13)$$

$$\dot{\psi}_1 = \psi_2 \quad (14)$$

$$\dot{\psi}_2 = \frac{K_{p\psi}(\psi_{des} - \psi_1) - K_{d\psi}\psi_2 - D_\psi|\psi_2|\psi_2}{m_z} \quad (15)$$

#### 3.1 Προσομοίωση

Όπως και πριν, χρησιμοποιώντας τον ίδιο κώδικα σε C, όπου ενσωματώθηκαν οι αλλαγές των εξισώσεων, προσομοιώθηκαν οι μέθοδοι Euler και τροποποιημένη Euler. Οι αρχικές συνθήκες που χρησιμοποιήθηκαν είναι:

$$x(0) = 0$$

$$\dot{x}(0) = 0$$

$$y(0) = -3,496$$

$$\dot{y}(0) = 0$$

$$\psi(0) = 0$$

$$\dot{\psi}(0) = 0$$

Οι παράμετροι του συστήματος και οι παράμετροι του ελεγκτή δίνονται παρακάτω:

$$D_x = 15331$$

$$D_y = 11835$$

$$D_\psi = 11835$$

$$m = 425000$$

$$m_z = 357000000$$

$$m_\alpha = 113000$$

$$K_{px} = 77480$$

$$K_{dx} = 5000000$$

$$K_{py} = 60000$$

$$K_{dy} = 4650400$$

$$K_{p\psi} = 50000$$

$$K_{d\psi} = 7000000$$

Οι επιθυμητές τελικές τιμές για τα  $x, y, \psi$  είναι αντίστοιχα:

$$x_{des} = 34.96$$

$$y_{des} = -34.96$$

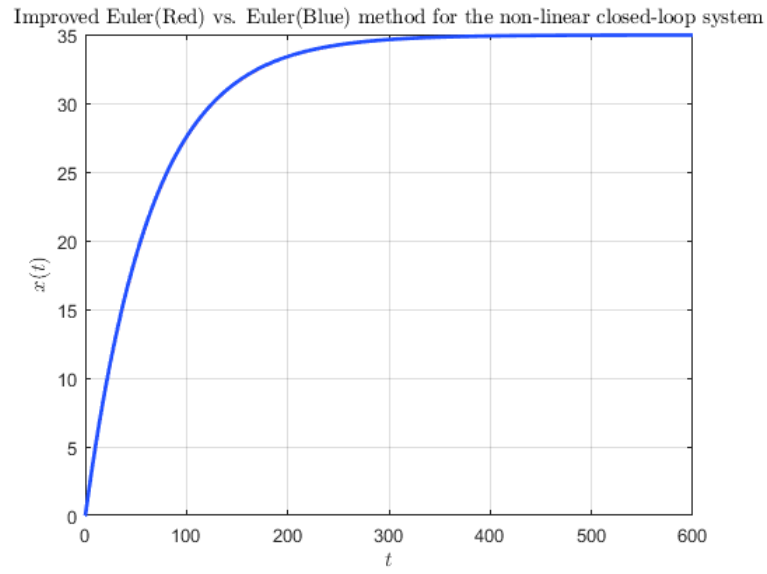
$$\psi_{des} = 0.3496$$

Έπειτα έγινε απεικόνιση των γραφικών παραστάσεων σε MATLAB.

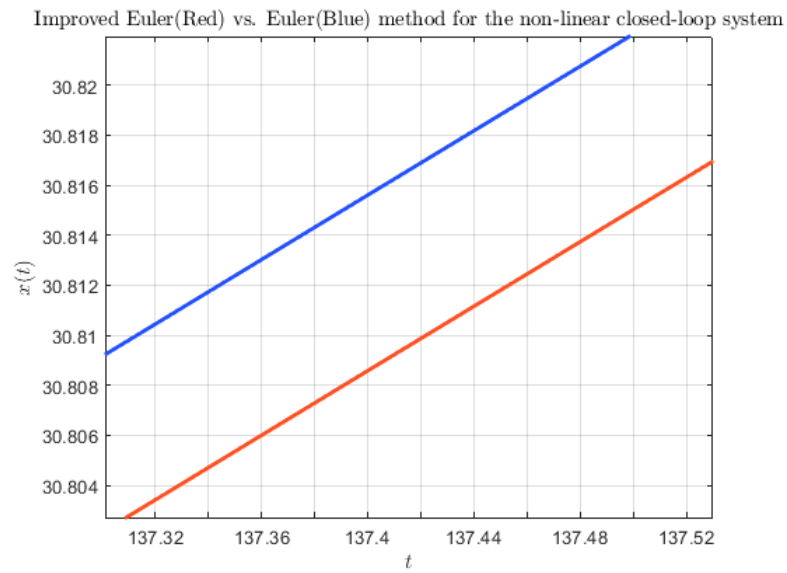
### 3.2 Γραφικές Παραστάσεις

Δίνονται στη συνέχεια, οι μεταβολές όλων των καταστάσεων απ' όπου βλέπουμε ότι πράγματι τα  $x, y, \psi$  τείνουν ασυμπτωτικά στις επιθυμητές τιμές και για τις δύο μεθόδους επίλυσης.

Επειδή στα συγκριτικά γραφήματα Euler - Τροποποιημένη Euler που ακολουθούν, οι διαφορές είναι πολύ μικρές και επομένως μη ορατές, έχουν προστεθεί και μεγεθύνσεις στις οποίες φαίνονται οι διαφορές.

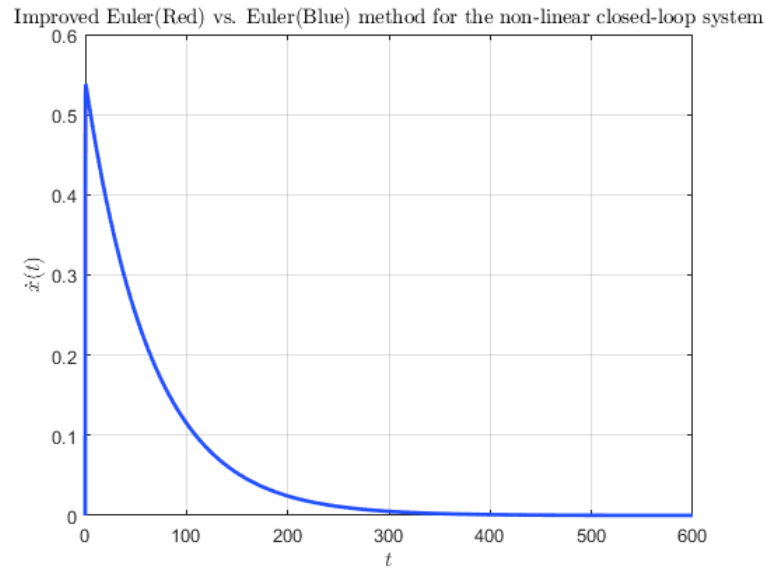


Εικόνα 13: Μεταβολή της  $x_1(t)$  για Euler και τροποποιημένη Euler

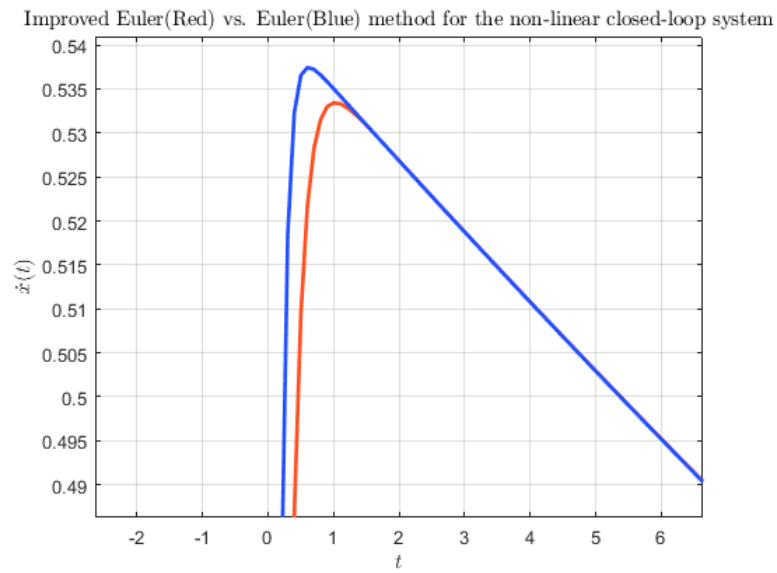


Εικόνα 14: Μεταβολή της  $x_1(t)$  για Euler και τροποποιημένη Euler (μεγέθυνση)

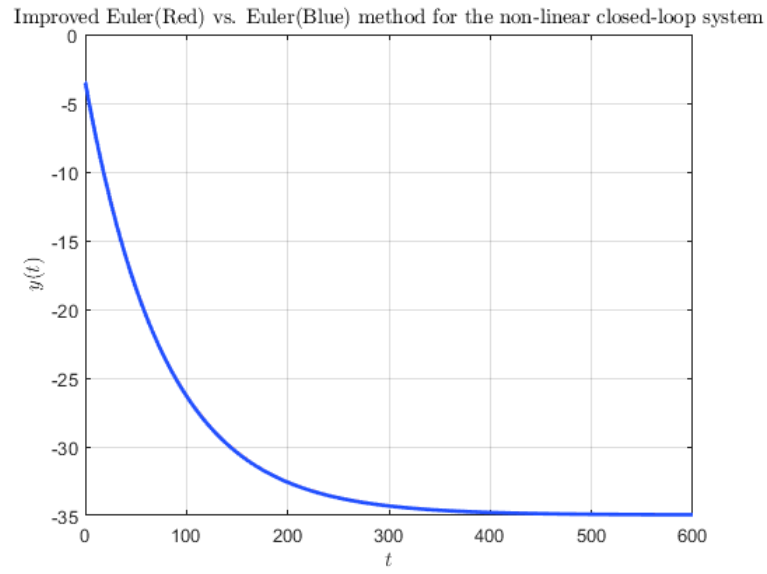




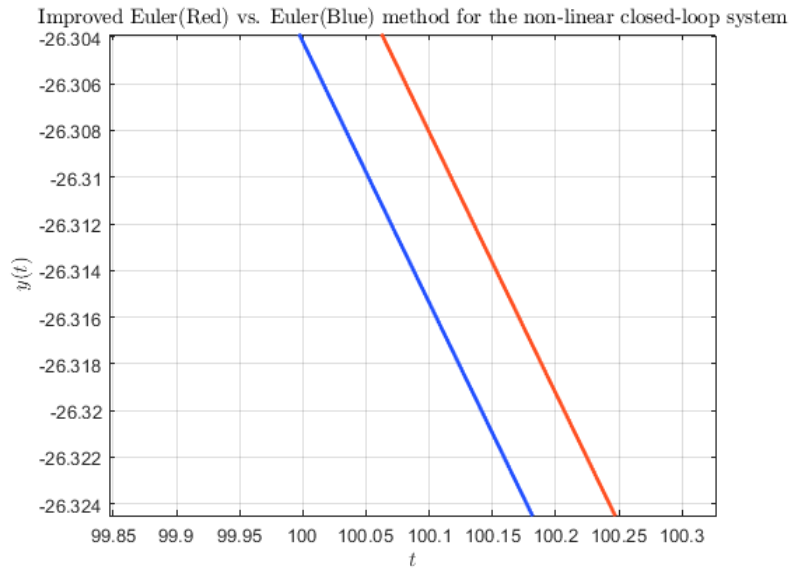
Εικόνα 15: Μεταβολή της  $x_2(t)$  για Euler και τροποποιημένη Euler



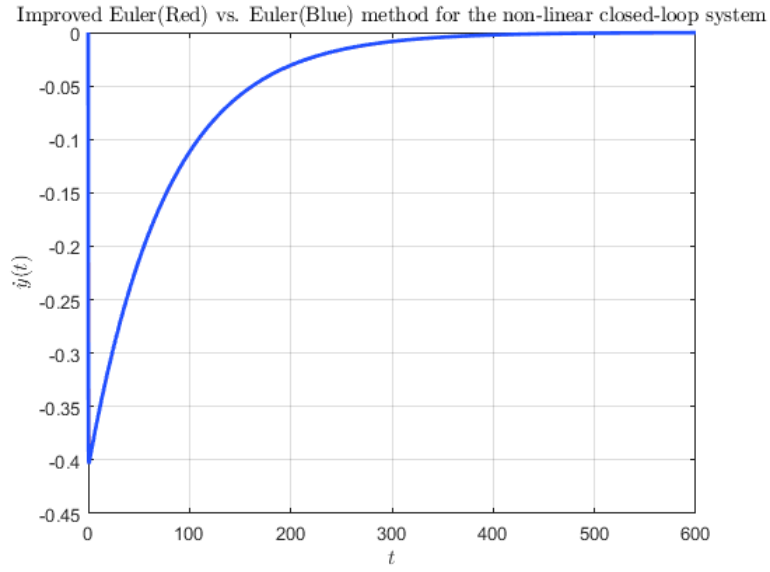
Εικόνα 16: Μεταβολή της  $x_2(t)$  για Euler και τροποποιημένη Euler (μεγέθυνση)



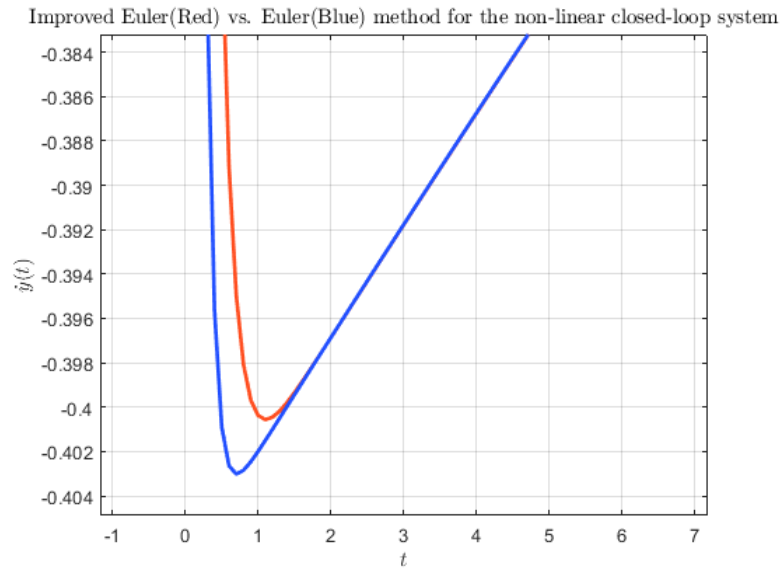
Εικόνα 17: Μεταβολή της  $y_1(t)$  για Euler και τροποποιημένη Euler



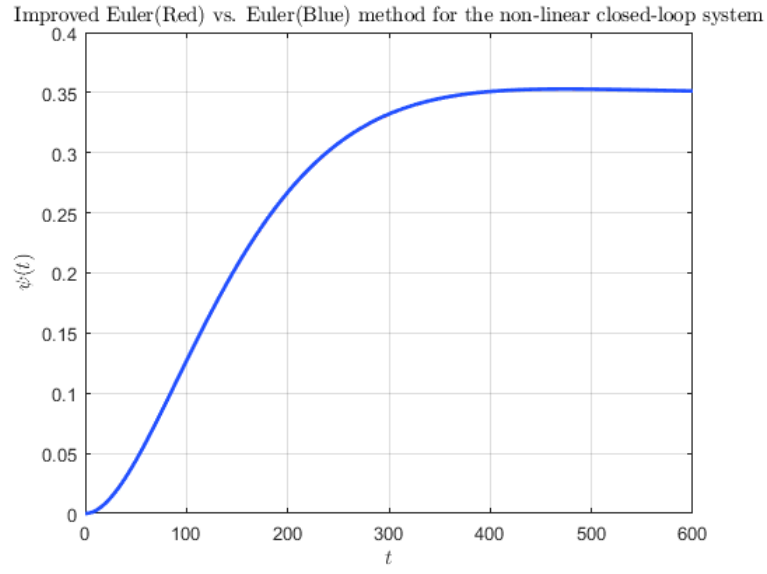
Εικόνα 18: Μεταβολή της  $y_1(t)$  για Euler και τροποποιημένη Euler (μεγέθυνση)



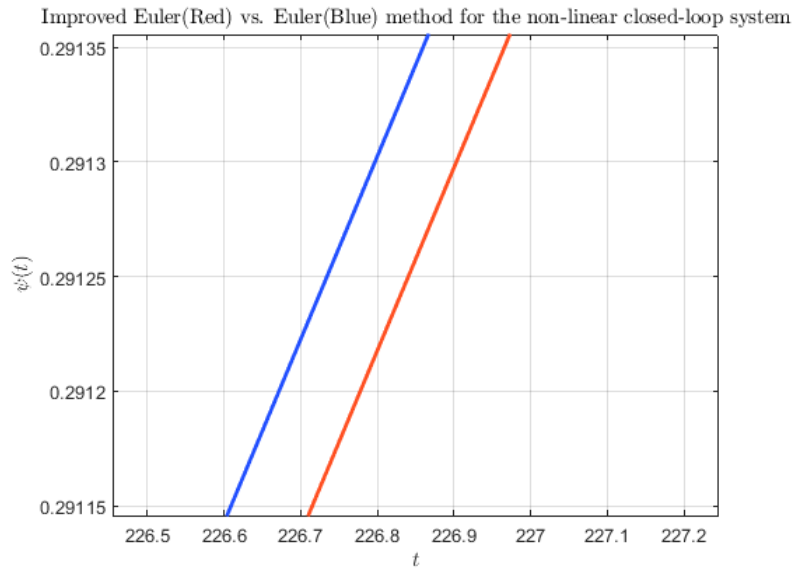
Εικόνα 19: Μεταβολή της  $y_2(t)$  για Euler και τροποποιημένη Euler



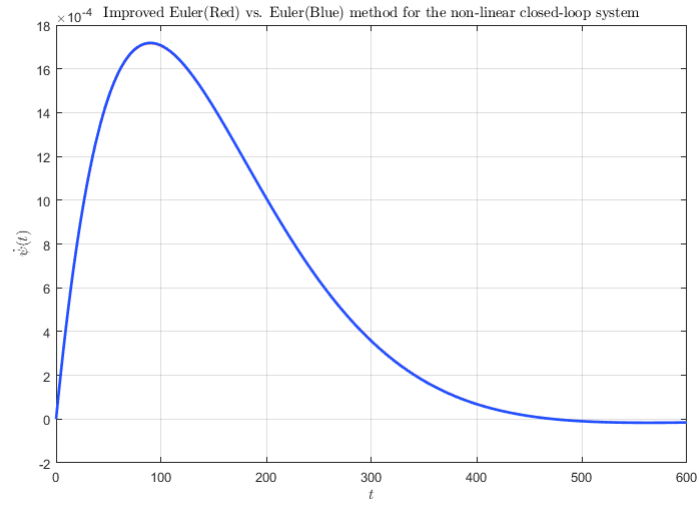
Εικόνα 20: Μεταβολή της  $y_2(t)$  για Euler και τροποποιημένη Euler (μεγέθυνση)



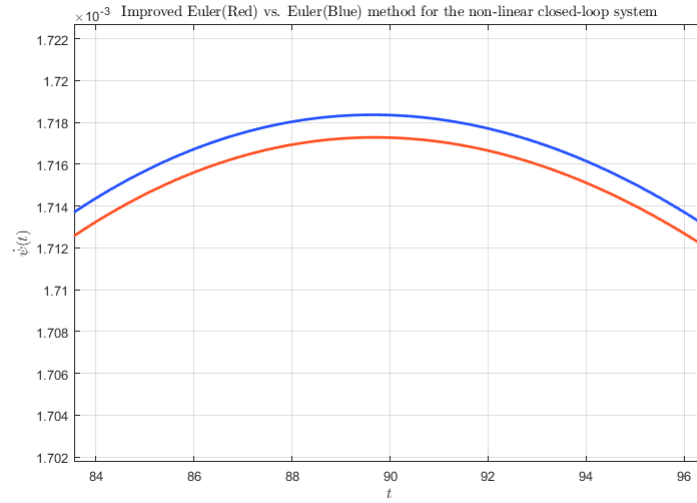
Εικόνα 21: Μεταβολή της  $\psi_1(t)$  για Euler και τροποποιημένη Euler



Εικόνα 22: Μεταβολή της  $\psi_1(t)$  για Euler και τροποποιημένη Euler (μεγέθυνση)



Εικόνα 23: Μεταβολή της  $\psi_2(t)$  για Euler και τροποποιημένη Euler



Εικόνα 24: Μεταβολή της  $\psi_2(t)$  για Euler και τροποποιημένη Euler (μεγέθυνση)

## 4 Γραμμικό Σύστημα

Προσεγγίζοντας την (3) με τη γραμμική διαφορική εξίσωση

$$m_z \ddot{\psi} = K_{p\psi}(\psi_{des} - \psi) - K_{d\psi} \dot{\psi} - D_\psi \dot{\psi} \quad (16)$$

απλοποιείται η μελέτη της περιστροφής του ρομπότ.

### 4.1 Συνάρτηση Μεταφοράς

Στη γραμμική εξίσωση (16) εφαρμόζουμε μετασχηματισμό Laplace και στα δύο μέρη, με μηδενικές αρχικές συνθήκες. Έχουμε:

$$\begin{aligned} m_z s^2 \Psi(s) &= K_{p\psi}(\Psi_{des}(s) - \Psi(s)) - K_{d\psi} s \Psi(s) - D_\psi s \Psi(s) \\ \Rightarrow m_z s^2 \Psi(s) + (K_{d\psi} + D_\psi) s \Psi(s) + K_{p\psi} \Psi(s) &= K_{p\psi} \Psi_{des}(s) \end{aligned}$$

οπότε η συνάρτηση μεταφοράς ανάμεσα στην επιθυμητή τιμή  $\Psi_{des}(s)$  και την έξοδο  $\Psi(s)$  είναι:

$$\begin{aligned} H(s) &= \frac{\Psi(s)}{\Psi_{des}(s)} = \frac{K_{p\psi}}{m_z s^2 + (K_{d\psi} + D_\psi) s + K_{p\psi}} \\ &= \frac{1}{\frac{m_z}{K_{p\psi}} s^2 + \frac{(K_{d\psi} + D_\psi)}{K_{p\psi}} s + 1} \end{aligned}$$

Η συνάρτηση έχει μόνο πόλους, τις ρίζες της

$$\frac{m_z}{K_{p\psi}} s^2 + \frac{(K_{d\psi} + D_\psi)}{K_{p\psi}} s + 1 = 0 \quad (17)$$

Με αντικατάσταση τιμών η εξίσωση γίνεται  $7140s^2 + 140.2367s + 1 = 0$  με δύο συζυγείς μιγαδικούς πόλους  $a \pm bj = -0.0098204972 \pm 0.0066040788j$ .

### 4.2 Γεωμετρικός Τόπος Ριζών

Για διάφορες τιμές των  $K_{p\psi}, K_{d\psi}$  υπολογίσαμε, μέσω του MATLAB, τις ρίζες της εξίσωσης (17), όπου  $m_z = 357000000$  και  $D_\psi = 11835$ , δηλαδή τους πόλους της συνάρτησης μεταφοράς του γραμμικού συστήματος. Χρησιμοποιήθηκαν οι τιμές:

$$10^{-15}, 10^{-5}, 0.001, 0.005, 0.01, 0.05, 0.1, 0.2, \\ 0.5, 1, 2, 5, 10, 20, 50, 100, 500, 1000, 10^5, 10^{15}$$

για το  $K_{p\psi}$ , ενώ για κάθε τιμή του  $K_{p\psi}$  δίνουμε στο  $K_{d\psi}$  200 διαφορετικές τιμές λογαριθμικά κατανεμημένες στο διάστημα  $[10^{-5}, 10^5]$ .

Προγραμματίζοντας στο MATLAB με χρήση της συνάρτησης `roots()` που βρίσκει τις ρίζες ενός πολυωνύμου, προέκυψε το γράφημα της εικόνας ταδε.

Σε καθένα από τα υπογραφήματα, για κάθε διαφορετική τιμή του  $K_{p\psi}$ , δίνεται η μεταβολή των δύο πόλων του συστήματος (με μπλε και κόκκινο χρώμα αντίστοιχα) όταν το  $K_{d\psi}$  πάρει τις 200 διαφορετικές τιμές.

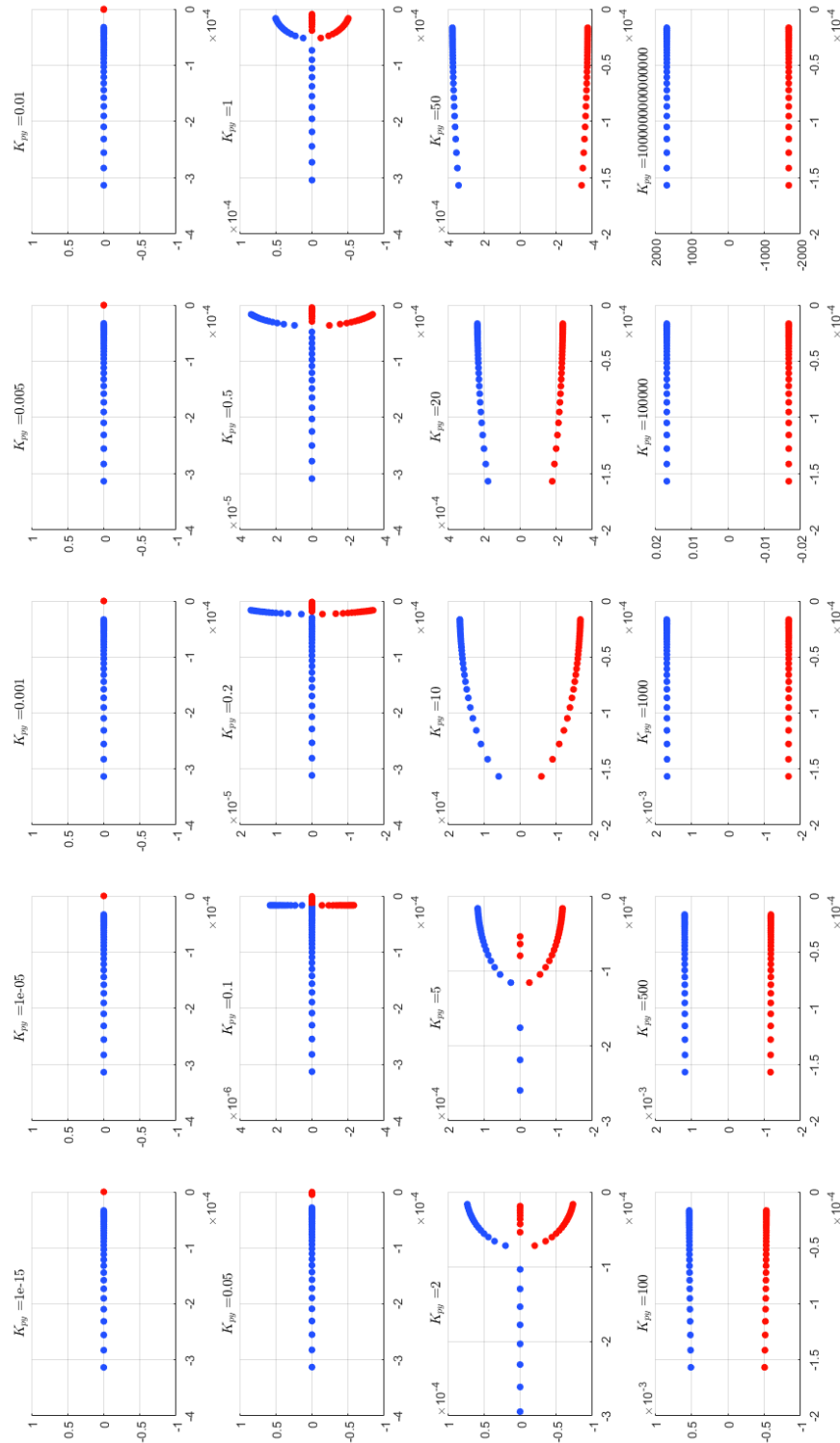
Για όλες τις μεταβολές των  $K_{p\psi}$ ,  $K_{d\psi}$ , οι πόλοι παραμένουν στο αριστερό μιγαδικό επίπεδο (με αρνητικό πραγματικό μέρος) κι επομένως βγάζουμε το συμπέρασμα ότι το σύστημα είναι πάντα ευσταθές.

Τυπική εικόνα μεταβολής των πόλων είναι αυτή του γραφήματος για  $K_{p\psi} = 0.5$ . Για μικρές τιμές του  $K_{d\psi}$ , έχουμε δύο συζυγείς μιγαδικούς πόλους με μικρό αρνητικό πραγματικό μέρος (οπότε το σύστημα έχει σημαντικές ταλαντώσεις που μειώνονται).

Όσο μεγαλώνει το  $K_{p\psi}$ , τόσο αυτοί οι πόλοι έχουν μεγαλύτερο φανταστικό μέρος για την ίδια τιμή του  $K_{d\psi}$ . Για σταθερό  $K_{p\psi}$ , καθώς αυξάνεται το  $K_{d\psi}$ , οι πόλοι κινούνται προς τον πραγματικό άξονα και για κάποια τιμή του  $K_{d\psi}$  έχουμε δύο ίδιους πραγματικούς πόλους, οπότε το σύστημα έχει στην απόκρισή του όρους  $e^{-at}$  και  $te^{-at}$  με  $a$  το διπλό πραγματικό πόλο.

Για ακόμα μεγαλύτερες τιμές του  $K_{d\psi}$  έχουμε δύο πραγματικούς, διαφορετικούς μεταξύ τους πόλους  $a_1$  και  $a_2$  από τους οποίους ο ένας τείνει στο  $-\infty$  και ο άλλος στο 0, οπότε η απόκριση του συστήματος έχει όρους της μορφής  $e^{-a_1 t}$  και  $e^{-a_2 t}$ .

Επειδή κρατάμε σταθερή την περιοχή τιμών για το  $K_{d\psi}$  (στο διάστημα  $[10^{-5}, 10^5]$ ) για κάθε διαφορετική τιμή του  $K_{p\psi}$ , για μικρότερες και μεγαλύτερες από το 0.5 τιμές του  $K_{p\psi}$ , βλέπουμε μόνο ένα τμήμα της παραπάνω καμπύλης.



Εικόνα 25: Μεταβολή των πόλων του γραμμικού συστήματος για διάφορες τιμές των  $K_{d\psi}$  και  $K_{\psi}$



### 4.3 Αναλυτική λύση

Η γραμμική διαφορική εξίσωση γράφεται:

$$\frac{m_z}{K_{p\psi}}\ddot{\psi}(t) + \frac{K_{d\psi} + D_\psi}{K_{p\psi}}\dot{\psi}(t) + \psi(t) = \psi_{des}$$

, με σταθερό επιθυμητό στόχο  $\psi_{des} = 0.3496$  και είναι μη ομογενής. Η αντίστοιχη ομογενής είναι:

$$\frac{m_z}{K_{p\psi}}\ddot{\psi}(t) + \frac{K_{d\psi} + D_\psi}{K_{p\psi}}\dot{\psi}(t) + \psi(t) = 0$$

έχει χαρακτηριστική εξίσωση τη (17) η οποία έχει δύο συζυγείς μιγαδικές ρίζες στο αριστερό μιγαδικό επίπεδο, τις  $a \pm bj$ , με  $a < 0$ .

Η γενική λύση της ομογενούς είναι επομένως

$$\psi_{om}(t) = c_1 e^{at} \sin(bt) + c_2 e^{at} \cos(bt)$$

με  $c_1, c_2$  σταθερές.

Επίσης είναι εύκολο να δούμε ότι η μη ομογενής διαφορική εξίσωση έχει ως μερική λύση τη σταθερά  $\psi_{\mu\epsilon\rho}(t) = \psi_{des} = 0.3496$  για την οποία  $\dot{\psi}_{des} = \ddot{\psi}_{des} = 0$ .

Έτσι τελικά η γενική λύση της μη ομογενούς γραμμικής διαφορικής εξίσωσης είναι η  $\psi(t) = \psi_{om}(t) + \psi_{\mu\epsilon\rho}(t) = \psi_{des} + c_1 e^{at} \sin(bt) + c_2 e^{at} \cos(bt)$

Η παράγωγός της εύκολα υπολογίζεται σε

$$\dot{\psi}(t) = e^{at}[(c_1 a - c_2 b) \sin(bt) + (c_1 b + c_2 a) \cos(bt)]$$

Θα βρούμε τα  $c_1, c_2$  από τις αρχικές συνθήκες  $\psi(0) = 0$  και  $\dot{\psi}(0) = 0$ .

Είναι

$$\psi(0) = 0 = a c_1 + b c_2$$

και

$$\dot{\psi}(0) = 0 = c_2 + \psi_{des}$$

απ' όπου προκύπτει

$$c_1 = \frac{b \psi_{des}}{a}$$

και

$$c_2 = -\psi_{des}$$

Τελικά η αναλυτική λύση είναι:

$$\psi(t) = \psi_{des} + \frac{b \psi_{des}}{a} e^{at} \sin(bt) - \psi_{des} e^{at} \cos(bt) \quad (18)$$

και

$$\dot{\psi}(t) = -\frac{(a^2 + b^2)}{a}\psi_{des}e^{at}\sin(bt) \quad (19)$$

Αντικαθιστώντας τιμές έχουμε:

$$\psi(t) = 0.3496 - 0.2351e^{-0.0098t}\sin(0.0066t) - 0.3496e^{-0.0098t}\cos(0.0066t)$$

$$\dot{\psi}(t) = 0.0049e^{-0.0098t}\sin(0.0066t)$$

Η λύση είναι ευσταθής, αφού το  $a = -0.0098 < 0$  και τα εκθετικά φθίνουν, με αποτέλεσμα όταν  $t \rightarrow \infty$ ,  $\psi(t) \rightarrow \psi_{des} = 0.3496$  και  $\dot{\psi}(t) \rightarrow 0$

#### 4.4 Προσομοίωση

Αναδιατυπώνοντας πάλι τη διαφορική εξίσωση δεύτερης τάξης (16) ως δύο διαφορικές εξισώσεις πρώτης τάξης με μεταβλητές  $\psi_1, \psi_2$  καταλήγουμε στο σύστημα:

$$\dot{\psi}_1 = \psi_2 \quad (20)$$

$$\dot{\psi}_2 = \frac{K_{p\psi}(\psi_{des} - \psi_1) - (K_{d\psi} + D_{\psi})\psi_2}{m_z} \quad (21)$$

Όπως και πριν, χρησιμοποιώντας τον ίδιο κώδικα σε C, τροποποιώντας τον κατάλληλα, προσομοιώθηκαν οι μέθοδοι Euler και τροποποιημένη Euler για να προσεγγιστεί η λύση της (16). Έπειτα γράφηκε κώδικας όπου υλοποιεί την αναλυτική της λύση.

Οι αρχικές συνθήκες που χρησιμοποιήθηκαν είναι:

$$\psi(0) = 0$$

$$\dot{\psi}(0) = 0$$

Οι παράμετροι του συστήματος δίνονται παρακάτω:

$$D_{\psi} = 11835$$

$$m_z = 357000000$$

$$K_{p\psi} = 50000$$

$$K_{d\psi} = 7000000$$

Οι επιθυμητή τελική τιμή για το  $\psi$  είναι αντίστοιχα:

$$\psi_{des} = 0.3496$$

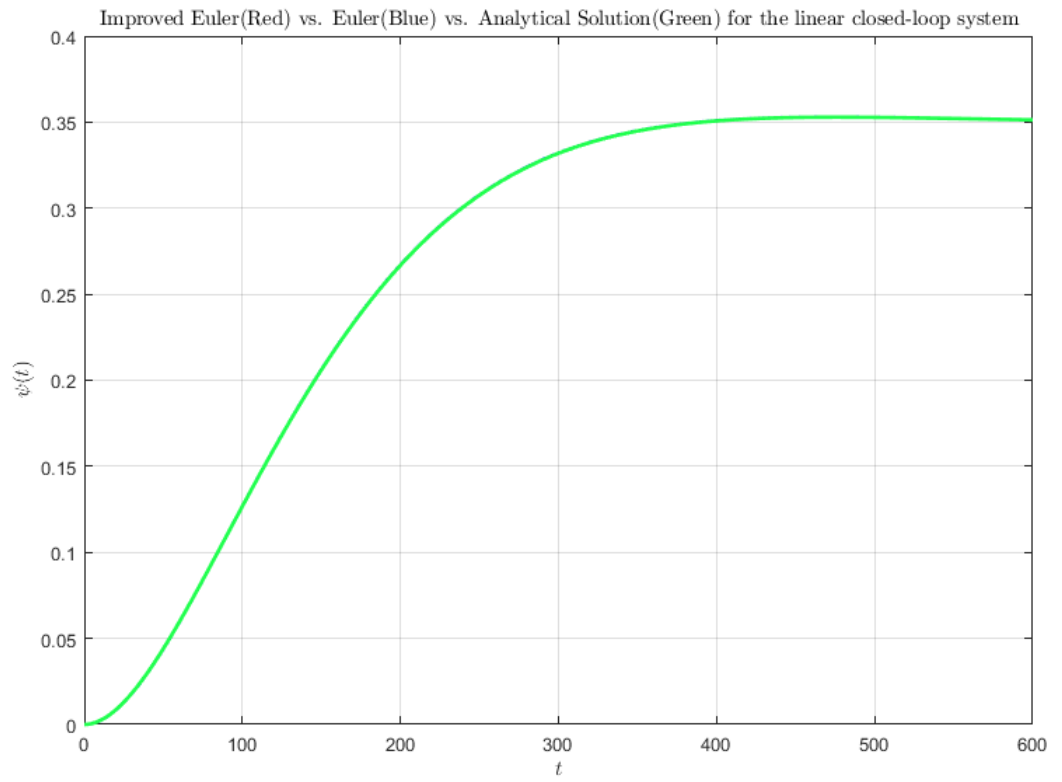
Έπειτα έγινε πάλι απεικόνιση των γραφικών παραστάσεων σε MATLAB.

## 4.5 Γραφικές Παραστάσεις

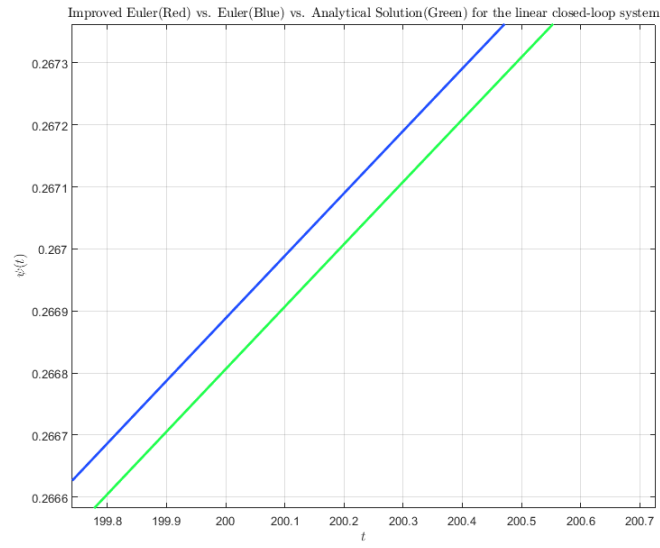
Δίνονται στη συνέχεια, οι μεταβολές όλων των καταστάσεων, απ' όπου βλέπουμε ότι πράγματι τα  $\psi$  και  $\dot{\psi}$  τείνει ασυμπτωτικά στην επιθυμητή τιμή και για τις δύο μεθόδους επίλυσης. Επίσης, απεικονίζεται και η αναλυτική λύση με την οποία γίνεται και η σύγκριση των μεθόδων Euler.

Όπως ήταν και αναμενόμενο και όπως φαίνεται και από τις μεγεθύνσεις που παρατίθενται, η τροποποιημένη μέθοδος Euler προσεγγίζει με μικρότερο σφάλμα την αναλυτική λύση από την απλή μέθοδο Euler.

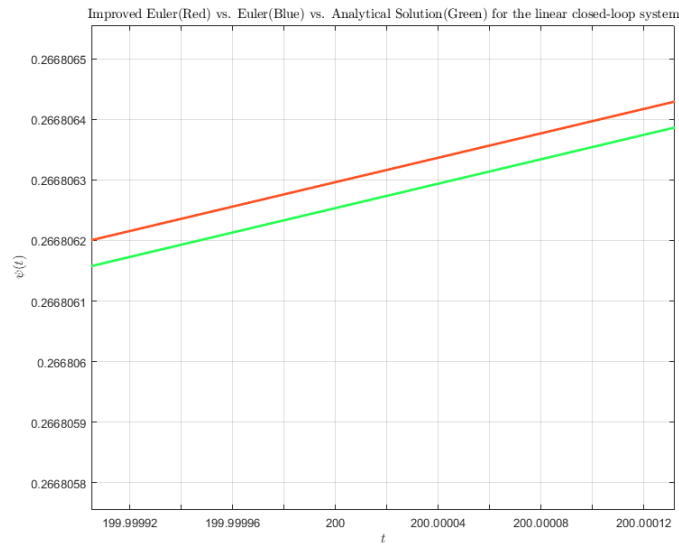
Επειδή στα συγκριτικά γραφήματα Euler - Τροποποιημένη Euler - Αναλυτική Λύση που ακολουθούν, οι διαφορές είναι πολύ μικρές και επομένως μη ορατές, έχουν προστεθεί και μεγεθύνσεις στις οποίες φαίνονται οι διαφορές.



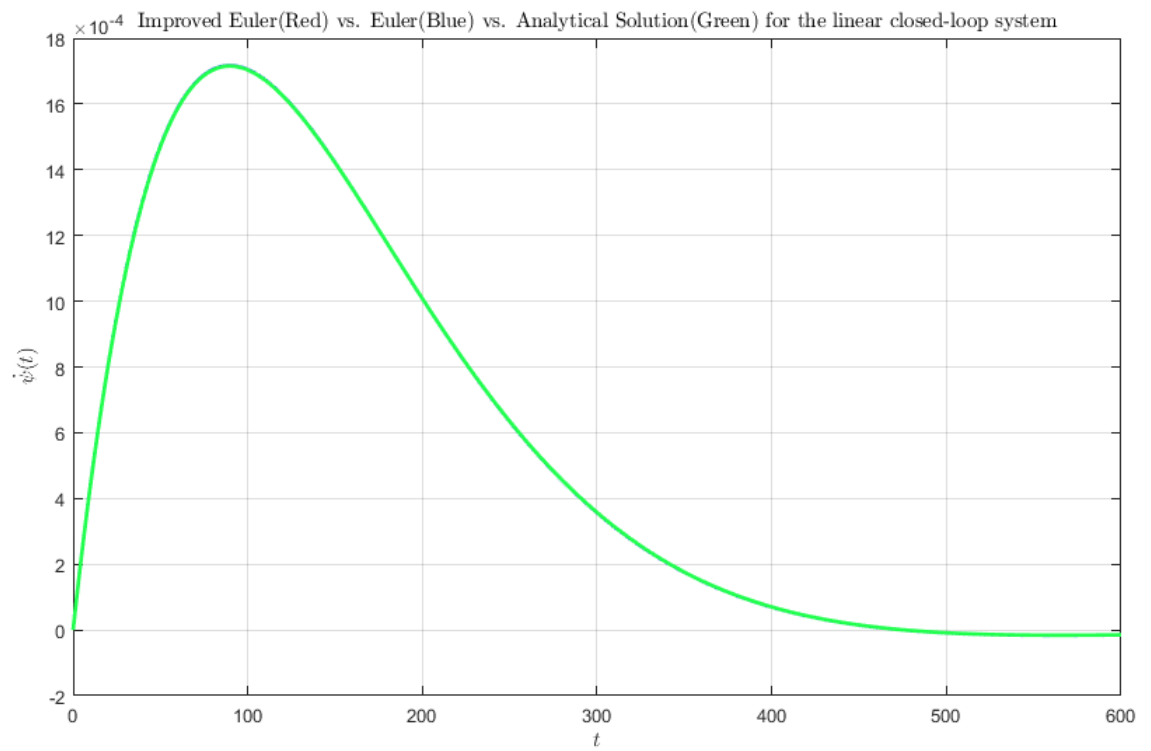
Εικόνα 26: Μεταβολή της  $\psi_1(t)$  για Euler, τροποποιημένη Euler και αναλυτική λύση (μικρές διαφορές)



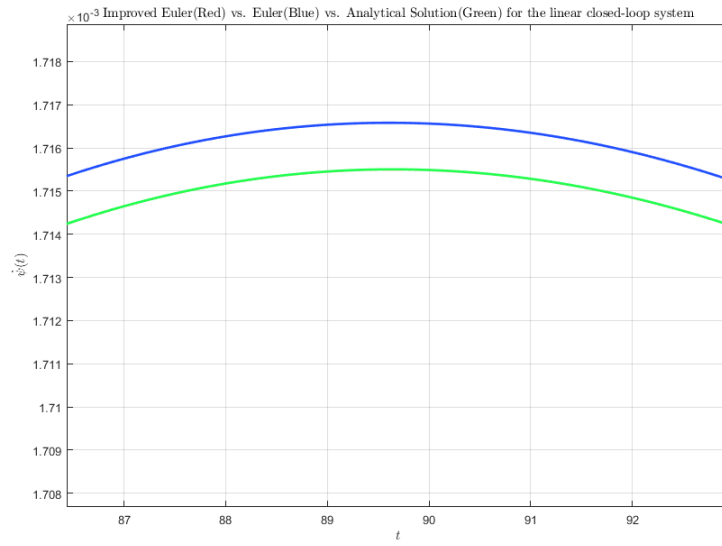
Εικόνα 27: Μεταβολή της  $\psi_1(t)$  για Euler και αναλυτική λύση (μεγέθυνση)



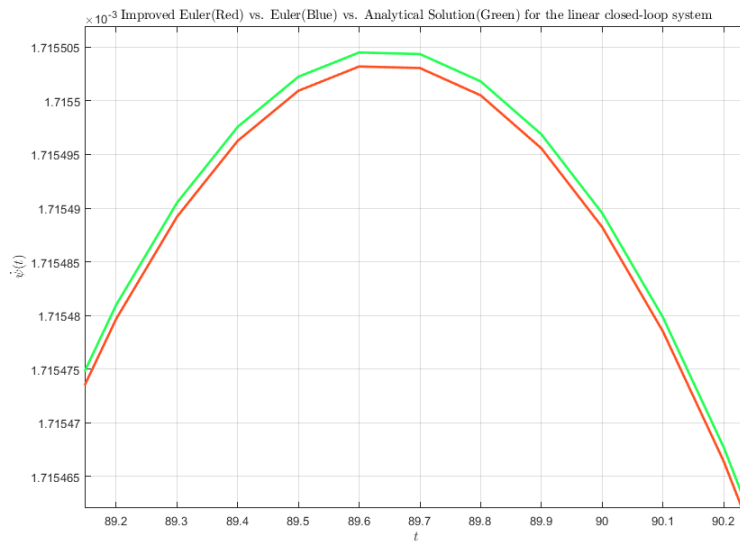
Εικόνα 28: Μεταβολή της  $\psi_1(t)$  για τροποποιημένη Euler και αναλυτική λύση (μεγέθυνση)



Εικόνα 29: Μεταβολή της  $\psi_2(t)$  για Euler, τροποποιημένη Euler και αναλυτική λύση (μικρές διαφορές)



Εικόνα 30: Μεταβολή της  $\psi_2(t)$  για Euler και αναλυτική λύση (μεγέθυνση)



Εικόνα 31: Μεταβολή της  $\psi_2(t)$  για τροποποιημένη Euler και αναλυτική λύση (μεγέθυνση)