ΤΜΗΜΑ ΜΗΧΑΝΙΚΩΝ Η/Υ & ΠΛΗΡΟΦΟΡΙΚΗΣ
ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΙΩΑΝΝΙΝΩΝ

DEPARTMENT OF COMPUTER SCIENCE & ENGINEERING
UNIVERSITY OF IOANNINA

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟΥΠΟΛΗ ΙΩΑΝΝΙΝΩΝ
Τ.Θ. 1186, 45110 ΙΩΑΝΝΙΝΑ
T: 26510 08817 - F: 26510 08890

P.O. Box 1186
GR 45110 IOANNINA, GREECE
T: +30 26510 08817 - F: +30 26510 08890

Μάθημα: **ΜΥΥ504 - Υπολογιστικά Μαθηματικά**
Ακαδημαϊκό έτος: 2019-2020
Διδάσκων: Κ. Βλάχος
Ημερομηνία: 14 Δεκεμβρίου 2019
Παράδοση: 07 Ιανουαρίου 2020

Ομαδική εργασία - Α

Περιγραφή και δεδομένα

Μελετάμε την αυτόνομη ρομποτική πλατφόρμα ("ρομπότ") που απεικονίζεται στο Σχήμα 1. Είχε κατασκευαστεί με σκοπό να χρησιμοποιηθεί ως πλωτή βάση εξυπηρέτησης του υποθαλάσσιου τηλεσκοπίου νετρίνων "Νέστωρ" (το οποίο τελικά δεν υλοποιήθηκε). Το ρομπότ αποτελείται από μια κατασκευή σχήματος "Δ" πάνω σε τρεις διπλούς κυλίνδρους (ομοαξονικούς και διαφορετικής διαμέτρου). Τη δυνατότητα κίνησης τη δίνουν jet νερού στο κάτω μέρος των κυλίνδρων, τα οποία έχουν την δυνατότητα περιστροφής παρέχοντας κατευθυνόμενη πρόωση. Επομένως, ο προσανατολισμός του ρομπότ είναι ανεξάρτητος με την κατεύθυνση της κίνησής του. Όποιος ενδιαφέρεται για περισσότερες πληροφορίες, μπορεί να τις βρει στα [1] και [2].

Σχήμα 1: Αυτόνομη ρομποτική πλατφόρμα

Ένα *απλουστευμένο* μαθηματικό μοντέλο του ρομπότ περιγράφεται από τις παρακάτω διαφορικές εξισώσεις:

$$(m+3m_a)(\cos(\psi)x'' - \sin(\psi)\psi'x' + \cos(\psi)\psi'y') = f_x - D_x|x'|x' \tag{1}$$

$$(m+3m_a)(\cos(\psi)y'' - \cos(\psi)\psi'x' - \sin(\psi)\psi'y') = f_y - D_y|y'|y' \tag{2}$$

$$m_z\psi'' = n_z - D_\psi|\psi'|\psi' \tag{3}$$

$$x(0) = x_0, y(0) = y_0, \psi(0) = \psi_0 \tag{4}$$

$$x'(0) = y'(0) = \psi'(0) = 0 \tag{5}$$

ΤΜΗΜΑ ΜΗΧΑΝΙΚΩΝ Η/Υ & ΠΛΗΡΟΦΟΡΙΚΗΣ
ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΙΩΑΝΝΙΝΩΝ

DEPARTMENT OF COMPUTER SCIENCE & ENGINEERING
UNIVERSITY OF IOANNINA

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟΥΠΟΛΗ ΙΩΑΝΝΙΝΩΝ
Τ.Θ. 1186, 45110 ΙΩΑΝΝΙΝΑ
Τ: 26510 08817 - F: 26510 08890

P.O. Box 1186
GR 45110 IOANNINA, GREECE
T: +30 26510 08817 - F: +30 26510 08890

Πίνακας 1: Επεξήγηση συμβόλων στις εξισώσεις (1)-(5)

Σύμβολο	Επεξήγηση
x	θέση του ρομπότ στον X άξονα
y	θέση του ρομπότ στον Y άξονα
ψ	προσανατολισμός του ρομπότ ως προς τον Z άξονα
m	μάζα ρομπότ
m_z	ροπή αδράνειας ρομπότ
m_a	πρόσθετη μάζα
f_x	συνολική δύναμη από τα jet νερού στον X άξονα
f_y	συνολική δύναμη από τα jet νερού στον Y άξονα
n_z	συνολική ροπή από τα jet νερού ως προς τον Z άξονα
D_x	συντελεστής αντίστασης από το νερό στον X άξονα
D_y	συντελεστής αντίστασης από το νερό στον Y άξονα
D_ψ	συντελεστής αντίστασης από το νερό ως προς τον Z άξονα

Πίνακας 2: Αριθμητικές τιμές παραμέτρων στις εξισώσεις (1)-(5)

Παράμετρος	Τιμή
m	425000 kg
m_z	357000000 kg m^2
m_a	113000 kg

όπου τα σύμβολα εξηγούνται στον Πίνακα 1. Η είσοδος στο ρομποτικό σύστημα είναι οι δυνάμεις f_x και f_y στους X και Y άξονες αντίστοιχα, καθώς και η ροπή n_z γύρω από τον κατακόρυφο Z άξονα. Αυτές οι δυνάμεις και ροπή, οφείλονται στα jet νερού που έχουν τοποθετηθεί στις τρεις κορυφές του ρομπότ. Προφανώς, λόγω της κίνησης του ρομπότ στο νερό, αναπτύσσονται δυνάμεις και ροπή αντίστασης, οι οποίες γενικά είναι αντίθετες στην κίνηση και ανάλογες του τετραγώνου της ταχύτητας του ρομπότ και είναι επίσης είσοδος στο ρομποτικό σύστημα. Η έξοδος του ρομποτικού συστήματος είναι η θέση, (x, y), και ο προσανατολισμός του, ψ. Στον Πίνακα 2 δίνονται οι απαραίτητες αριθμητικές τιμές των παραμέτρων στις διαφορικές εξισώσεις (1)-(5).

Πρόβλημα 1

α') Να βρεθούν οι τύποι για την επίλυση του Π.Α.Τ. (1)-(5) με την Μέθοδο του Euler και την Τροποποιημένη Μέθοδο του Euler με τις παρακάτω αρχικές συνθήκες και εισόδους:

$$[f_x, f_y, n_z]^\mathsf{T} = [\text{A.M.}, 0, 0]^\mathsf{T}$$
$$[f_x, f_y, n_z]^\mathsf{T} = [0, -\text{A.M.}, 0]^\mathsf{T}$$
$$[f_x, f_y, n_z]^\mathsf{T} = [0, 0, -\text{A.M.}]^\mathsf{T}$$

$$x_0 = \text{A.M.}/1000$$
$$y_0 = 0$$
$$\psi_0 = 0$$

και

$$D_x = 11835$$
$$D_y = 11835 - \text{A.M.}$$
$$D_\psi = 11835 + \text{A.M.}$$

όπου "Α.Μ." είναι ο μέσος όρος των αριθμών μητρώου των μελών κάθε ομάδας.

β') Να γραφεί πρόγραμμα σε MATLAB ή GNU Octave ή C που υλοποιεί τους παραπάνω τύπους, για βήμα $h = 0.1$, στο διάστημα $t \in [0, 600]$.

γ') Αντικαταστήστε τις εισόδους f_x, f_y και n_z με τους παρακάτω τύπους και αναδιατυπώστε τις ίδιες μεθόδους για τις παρακάτω αρχικές συνθήκες και εισόδους.

$$f_x = K_{px}(x_{des} - x) - K_{dx}(x')$$
$$f_y = K_{py}(y_{des} - y) - K_{dy}(y')$$
$$n_z = K_{p\psi}(\psi_{des} - \psi) - K_{d\psi}(\psi')$$

με

$$K_{px} = 60000 + 5(\text{A.M.})$$
$$K_{dx} = 5000000$$
$$K_{py} = 60000$$
$$K_{dy} = 5000000 - 100(\text{A.M.})$$
$$K_{p\psi} = 50000$$
$$K_{d\psi} = 7000000$$
$$x_0 = 0$$
$$y_0 = -\text{A.M.}/1000$$
$$\psi_0 = 0$$
$$x_{des} = \text{A.M.}/100$$
$$y_{des} = -\text{A.M.}/100$$
$$\psi_{des} = \text{A.M.}/10000$$

και

$$D_x = 11835 + \text{A.M.}$$
$$D_y = 11835$$
$$D_\psi = 11835$$

ΤΜΗΜΑ ΜΗΧΑΝΙΚΩΝ Η/Υ & ΠΛΗΡΟΦΟΡΙΚΗΣ
ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΙΩΑΝΝΙΝΩΝ

DEPARTMENT OF COMPUTER SCIENCE & ENGINEERING
UNIVERSITY OF IOANNINA

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟΥΠΟΛΗ ΙΩΑΝΝΙΝΩΝ
Τ.Θ. 1186, 45110 ΙΩΑΝΝΙΝΑ
T: 26510 08817 - F: 26510 08890

P.O. Box 1186
GR 45110 IOANNINA, GREECE
T: +30 26510 08817 - F: +30 26510 08890

όπου "Α.Μ." είναι ο μέσος όρος των αριθμών μητρώου των μελών κάθε ομάδας. Σε αυτό το ερώτημα, τα x_{des}, y_{des}, και ψ_{des} περιγράφουν τον επιθυμητό στόχο (θέση και προσανατολισμός) του ρομπότ και είναι σταθερές. Οι είσοδοι από τα jet νερού (f_x, f_y, και n_ψ) είναι έτσι δομημένες (υλοποιούν έναν απλό αλγόριθμο αυτομάτου ελέγχου κλειστού βρόχου, αναλογικού-διαφορικού τύπου) ώστε να τοποθετούν αυτόματα το ρομπότ στον επιθυμητό στόχο.

δ΄) Να γραφεί πρόγραμμα σε MATLAB ή GNU Octave ή C που υλοποιεί τους τύπους του ερωτήματος 1γ, για βήμα $h = 0.1$, στο διάστημα $t \in [0, 600]$.

ε΄) Να γίνουν οι γραφικές παραστάσεις όλων των λύσεων.

Πρόβλημα 2

Για να απλοποιήσω τη μελέτη της περιστροφής του ρομπότ, προσεγγίζω την (3) με την γραμμική διαφορική εξίσωση

$$m_z\psi'' = K_{p\psi}(\psi_{des} - \psi) - K_{d\psi}(\psi') - D_\psi\psi' \tag{6}$$

α΄) Να βρεθεί η συνάρτηση μεταφοράς και να προσδιορισθούν οι πόλοι και τα μηδενικά της (6), υποθέτοντας μηδενικές αρχικές συνθήκες.

β΄) Μελετήστε και απεικονίστε σχηματικά, στο μιγαδικό επίπεδο, την αλλαγή των πόλων και των μηδενικών της (6), καθώς τα $K_{p\psi}$ και $K_{d\psi}$ μεταβάλλονται από σχεδόν μηδενικές τιμές σε πολύ μεγάλες τιμές. Τι συμπεράσματα βγάζετε σχετικά με την μορφή της απόκρισης και την ευστάθεια του συστήματος;

γ΄) Βρείτε την αναλυτική λύση της (6) με τις αρχικές συνθήκες του Προβλήματος 1γ.

δ΄) Να γραφεί πρόγραμμα σε MATLAB ή GNU Octave ή C, το οποίο να υλοποιεί την αναλυτική λύση της (6), και υπολογίστε, μόνο για την (6), ξανά το ερώτημα 1γ. Να γίνει σύγκριση των αποτελεσμάτων. Τι συμπεράσματα βγάζετε;

ε΄) Να γίνει η γραφική παράσταση της λύσης.

Αναφορές

[1] Kostas Vlachos and Evangelos Papadopoulos. *Modeling and control of a novel over-actuated marine floating platform*. Ocean Engineering, Volume 98, 1 April 2015, Pages 10-22.

[2] Kostas Vlachos and Evangelos Papadopoulos. *Control Design and Allocation of an Over-Actuated Triangular Floating Platform*. Proc. 2010 IEEE International Conference on Robotics and Automation (ICRA'10), Anchorage, Alaska, May 3-8, 2010, pp. 3739-3744.