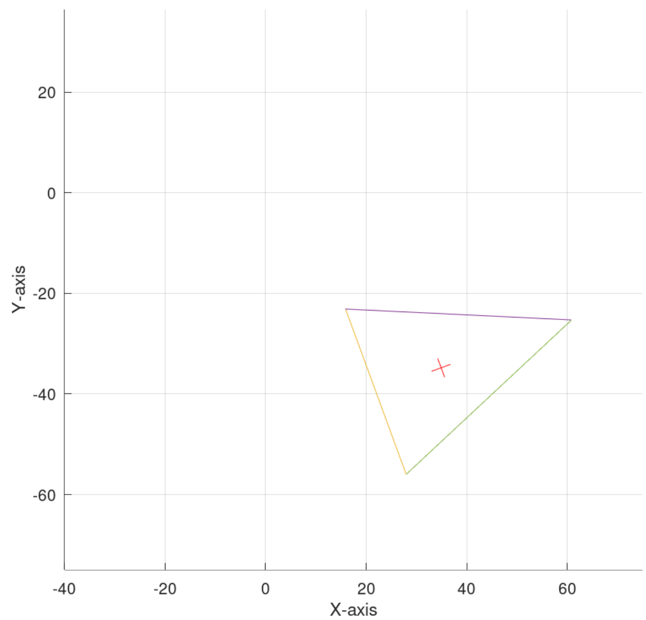
Εργασία Υπολογιστικών Μαθηματικών 2019

Πασχάλης Πιπίδης
Α.Μ: 3064

Σωτηρία Δουλγεράκη
Α.Μ: 3218

Χρήστος Γεωργίου Μουσσές
Α.Μ: 4206



Περιεχόμενα

1 Σύστημα Ρομποτικής Πλατφόρμας

Το σύστημά μας περιγράφεται από τις παρακάτω τρεις διαφορικές εξισώσεις δεύτερης τάξης:

$$(m+3m_a)(cos(\psi)\ddot{x}-sin(\psi)\dot{\psi}\dot{x}+cos(\psi)\dot{\psi}\dot{y})=f_x-D_x|\dot{x}|\dot{x} \tag{1}$$

$$(m+3m_a)(cos(\psi)\ddot{y}-cos(\psi)\dot{\psi}\dot{x}-sin(\psi)\dot{\psi}\dot{y})=f_y-D_y|\dot{y}|\dot{y} \tag{2}$$

$$m_z\ddot{\psi}=n_z-D_\psi|\dot{\psi}|\dot{\psi} \tag{3}$$

2 Μέθοδοι Ολοκλήρωσης

Για χρησιμοποιηθεί η μέθοδος Euler και η τροποποιημένη μέθοδος Euler χρειάζονται διαφορικές εξισώσεις πρώτης τάξης, οπότε χρησιμοποιούνται νέες μεταβλητές όπου:

$$\begin{aligned} x_1 &= x \\ y_1 &= y \\ \psi_1 &= \psi \end{aligned}$$

και

$$\begin{aligned} x_2 &= \dot{x_1} = \dot{x} \\ y_2 &= \dot{y_1} = \dot{y} \\ \psi_2 &= \dot{\psi_1} = \dot{\psi} \end{aligned}$$

Με τις νέες μεταβλητές, η εξίσωση (1) μετατρέπεται στο παρακάτω σύστημα δύο διαφορικών εξισώσεων πρώτης τάξης:

$$\dot{x_1}=x_2 \tag{4}$$

$$\dot{x_2}=tan(\psi_1)\psi_2x_2-\psi_2y_2+\frac{f_x-D_x|x_2|x_2}{(m+3m_a)cos(\psi_1)} \tag{5}$$

Αντίστοιχα η (2) και η (3) μετατρέπονται σε:

$$\dot{y_1}=y_2 \tag{6}$$

$$\dot{y_2}=tan(\psi_1)\psi_2y_2+\psi_2x_2+\frac{f_y-D_y|y_2|y_2}{(m+3m_a)cos(\psi_1)} \tag{7}$$

και

$$\dot{\psi}_1 = \psi_2 \tag{8}$$

$$\dot{\psi}_2 = \frac{n_z - D_\psi |\psi_2| \psi_2}{m_z} \tag{9}$$

2.1 Μέθοδος Euler

Στη μέθοδο Euler, η λύση του συστήματος πρώτης τάξης $\dot{y}(t) = f(t, y(t))$ με αρχική συνθήκη $y(0)$, στις χρονικές στιγμές $t = kh, k = 0, 1, 2...$ προσεγγίζεται από τη σχέση $y(k+1) = y(k) + hf(hk, y(k))$ όπου $y(k) = y(t = kh), k = 0, 1, 2...$ και h το βήμα ολοκλήρωσης.

Για το σύστημα των εξισώσεων (4) έως (9), η εφαρμογή της παραπάνω σχέσης δίνει:

$$x_1(k+1) = x_1(k) + hx_2(k)$$

$$x_2(k+1) = x_2(k) + h[tan(\psi_1(k))\psi_2(k)x_2(k) - \psi_2(k)y_2(k) + \frac{f_x - D_x|x_2(k)|x_2(k)}{(m + 3m_a)cos(\psi_1(k))}]$$

$$y_1(k+1) = y_1(k) + hy_2(k)$$

$$y_2(k+1) = y_2(k) + h[tan(\psi_1(k))\psi_2(k)y_2(k) + \psi_2(k)x_2(k) + \frac{f_y - D_y|y_2(k)|y_2(k)}{(m + 3m_a)cos(\psi_1(k))}]$$

$$\psi_1(k+1) = \psi_1(k) + h\psi_2(k)$$

$$\psi_2(k+1) = \psi_2(k) + h[\frac{n_z - D_\psi|\psi_2(k)|\psi_2(k)}{m_z}]$$

όπου f_x, f_y, n_z είναι σταθερά.

2.2 Τροποποιημένη Μέθοδος Euler

Στην τροποποιημένη μέθοδο Euler, η λύση του συστήματος πρώτης τάξης $\dot{y}(t) = f(t, y(t))$ με αρχική συνθήκη $y(0)$, στις χρονικές στιγμές $t = kh, k = 0, 1, 2...$ προσεγγίζεται από τη σχέση $y(k+1) = y(k) + hf(kh + \frac{h}{2}, y(k) + \frac{h}{2}f(kh, y(k)))$ όπου $y(k) = y(t = kh), k = 0, 1, 2...$ και h το βήμα ολοκλήρωσης.

Για το σύστημα των εξισώσεων (4) έως (9), η εφαρμογή της παραπάνω σχέσης γίνεται σε δύο βήματα:

Πρώτα υπολογίζεται το τμήμα $y(k) + \frac{h}{2}f(kh, y(k))$ από τις σχέσεις:

$$g_1(k) = x_1(k) + \frac{h}{2}x_2(k)$$

$$g_2(k) = x_2(k) + \frac{h}{2}[tan(\psi_1(k))\psi_2(k)x_2(k) - \psi_2(k)y_2(k) + \frac{f_x - D_x|x_2(k)|x_2(k)}{(m+3m_a)cos(\psi_1(k))}]$$

$$g_3(k) = y_1(k) + \frac{h}{2}y_2(k)$$

$$g_4(k) = y_2(k) + \frac{h}{2}[tan(\psi_1(k))\psi_2(k)y_2(k) + \psi_2(k)x_2(k) + \frac{f_y - D_y|y_2(k)|y_2(k)}{(m+3m_a)cos(\psi_1(k))}]$$

$$g_5(k) = \psi_1(k) + \frac{h}{2}\psi_2(k)$$

$$g_6(k) = \psi_2(k) + \frac{h}{2}[\frac{n_z - D_\psi|\psi_2(k)|\psi_2(k)}{m_z}]$$

και στη συνέχεια το $y(k) + hf(kh + \frac{h}{2}, y(k) + \frac{h}{2}f(kh, y(k)))$ υπολογίζεται από τις σχέσεις:

$$x_1(k+1) = x_1(k) + hg_2(k)$$

$$x_2(k+1) = x_2(k) + h[tan(g_5(k))g_6(k)g_2(k) - g_6(k)g_4(k) + \frac{f_x - D_x|g_2(k)|g_2(k)}{(m+3m_a)cos(g_5(k))}]$$

$$y_1(k+1) = y_1(k) + hg_4(k)$$

$$y_2(k+1) = y_2(k) + h[tan(g_5(k))g_6(k)g_4(k) + g_6(k)g_2(k) + \frac{f_y - D_y|g_4(k)|g_4(k)}{(m+3m_a)cos(g_5(k))}]$$

$$\psi_1(k+1) = \psi_1(k) + hg_6(k)$$

$$\psi_2(k+1) = \psi_2(k) + h[\frac{n_z - D_\psi|g_6(k)|g_6(k)}{m_z}]$$

βάζοντας τα $g_1(k), g_2(k), g_3(k), g_4(k), g_5(k), g_6(k)$ στη θέση των $x_1(k), x_2(k), y_1(k), y_2(k), \psi_1(k), \psi_2(k)$, αντίστοιχα.

2.3 Προσομοίωση

Προσομοιώθηκε το παραπάνω σύστημα εξισώσεων σε γλώσσα προγραμματισμού C και έγινε εξαγωγή των αποτελεσμάτων σε αρχεία ASCII τα οποία στη συνέχεια εισήχθησαν στο MATLAB για την απεικόνιση των γραφικών παραστάσεων.

Οι γραφικές παραστάσεις που παρατίθενται στη συνέχεια, αφορούν τις τρείς παρακάτω περιπτώσεις τιμών για τις εισόδους του συστήματος:

$$[f_x, f_y, n_z]^T = [3496, 0, 0]^T$$

$$[f_x, f_y, n_z]^T = [0, -3496, 0]^T$$

$$[f_x, f_y, n_z]^T = [0, 0, -3496]^T$$

Και στις τρείς περιπτώσεις οι αρχικές συνθήκες που χρησιμοποιήθηκαν είναι ίδιες:

$$x(0) = 0.3496$$

$$\dot{x}(0) = 0$$

$$y(0) = 0$$

$$\dot{y}(0) = 0$$

$$\psi(0) = 0$$

$$\dot{\psi}(0) = 0$$

Οι παράμετροι του συστήματος υπολογίστηκαν με $A.M = 3496$[1] και δίνονται παρακάτω:

$$D_x = 11835$$

$$D_y = 8339$$

$$D_\psi = 15331$$

$$m = 425000$$

$$m_z = 357000000$$

$$m_\alpha = 113000$$

[1]

$$A.M = \frac{4206 + 3218 + 3064}{3} = 3496$$

2.4 Γραφικές Παραστάσεις

Σε καθεμία από τις περιπτώσεις παρουσιάζονται μόνο οι μη μηδενικές καταστάσεις του συστήματος ενώ οι υπόλοιπες παραμένουν μηδέν σε όλη τη διάρκεια της προσομοίωσης γιατί οι αντίστοιχες είσοδοι είναι μηδέν όπως και οι αρχικές συνθήκες.

Επειδή στα συγκριτικά γραφήματα Euler - Τροποποιημένη Euler που ακολουθούν, οι διαφορές είναι πολύ μικρές και επομένως μη ορατές, έχουν προστεθεί και μεγεθύνσεις στις οποίες φαίνονται οι διαφορές.

2.4.1 Περίπτωση Μεταβολής μόνο της εισόδου f_x (Εικόνες 1-4)

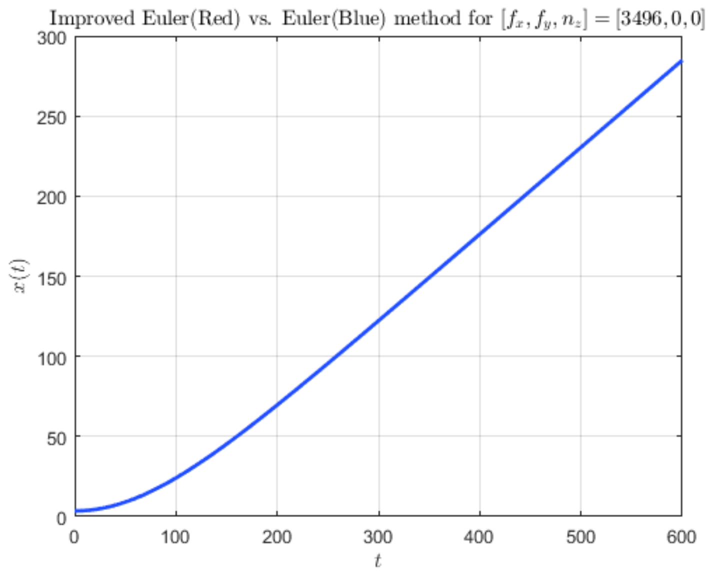
Παρουσιάζεται η μεταβολή των $x_1(t)$ και $x_2(t)$ με το χρόνο. Παρουσιάζεται στις εικόνες 2 και 4 μεγέθυνση σε μια περιοχή.

2.4.2 Περίπτωση Μεταβολής μόνο της εισόδου f_y (Εικόνες 5-8)

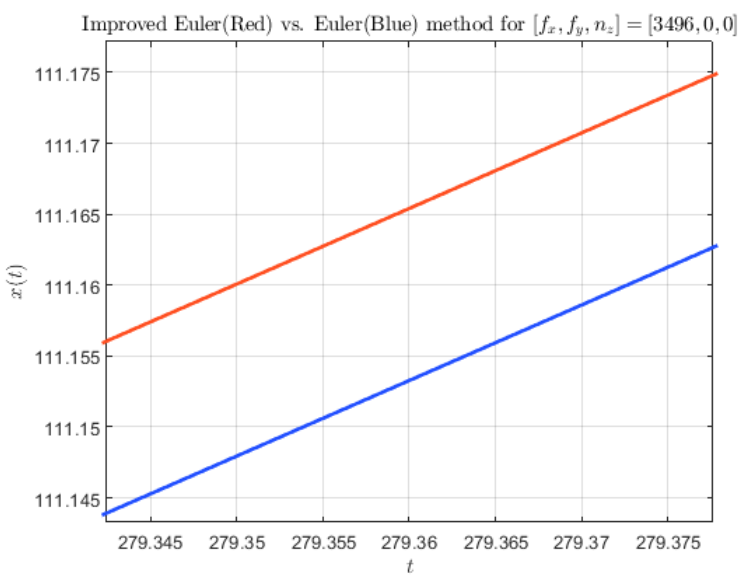
Παρουσιάζεται η μεταβολή των $y_1(t)$ και $y_2(t)$ με το χρόνο. Παρουσιάζεται στις εικόνες 6 και 8 μεγέθυνση σε μια περιοχή.

2.4.3 Περίπτωση Μεταβολής μόνο της εισόδου n_z (Εικόνες 9-12)

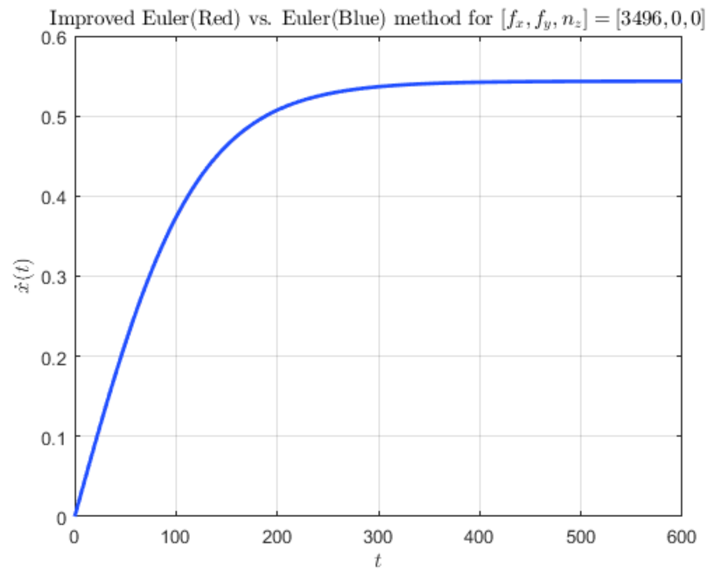
Παρουσιάζεται η μεταβολή των $\psi_1(t)$ και $\psi_2(t)$ με το χρόνο. Παρουσιάζεται στις εικόνες 10 και 12 μεγέθυνση σε μια περιοχή.



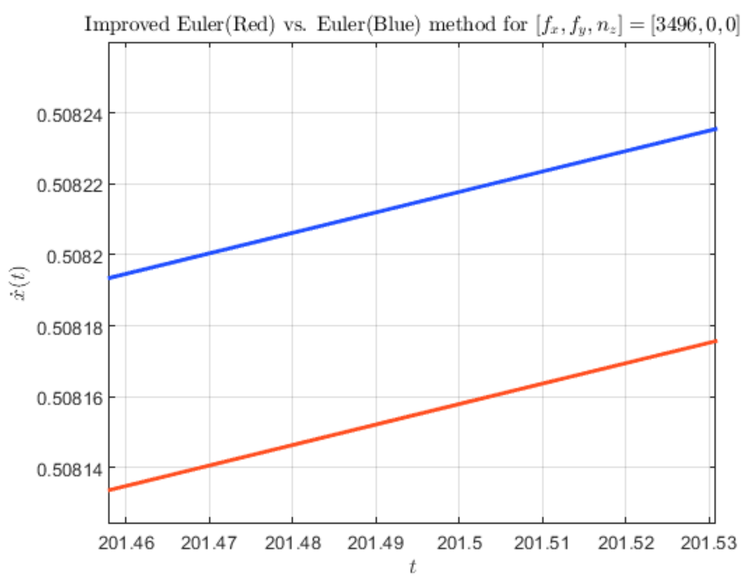
Εικόνα 1: Μεταβολή της $x_1(t)$ για Euler και τροποποιημένη Euler (οι διαφορές είναι μικρές)



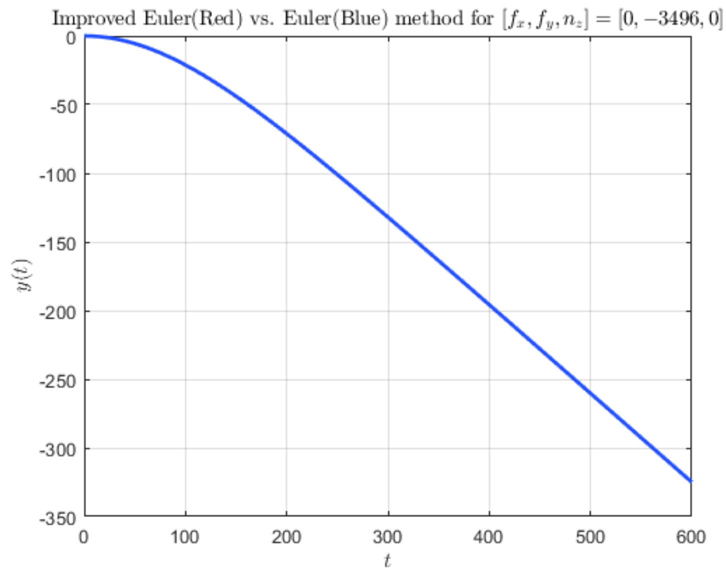
Εικόνα 2: Μεταβολή της $x_1(t)$ για Euler και τροποποιημένη Euler (μεγέθυνση)



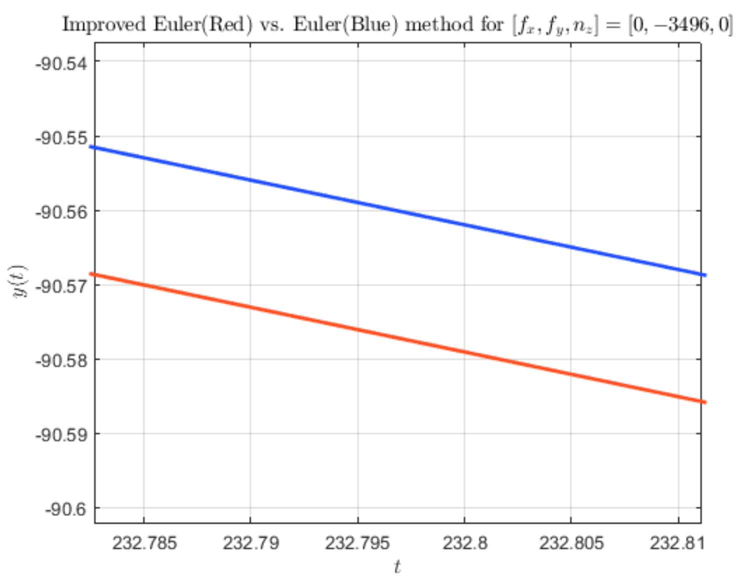
Εικόνα 3: Μεταβολή της $x_2(t)$ για Euler και τροποποιημένη Euler (οι διαφορές είναι μικρές)



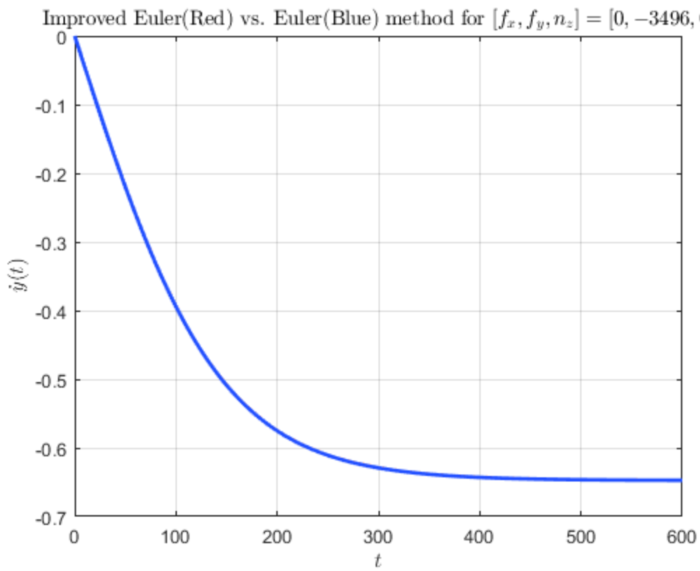
Εικόνα 4: Μεταβολή της $x_2(t)$ για Euler και τροποποιημένη Euler (μεγέθυνση)



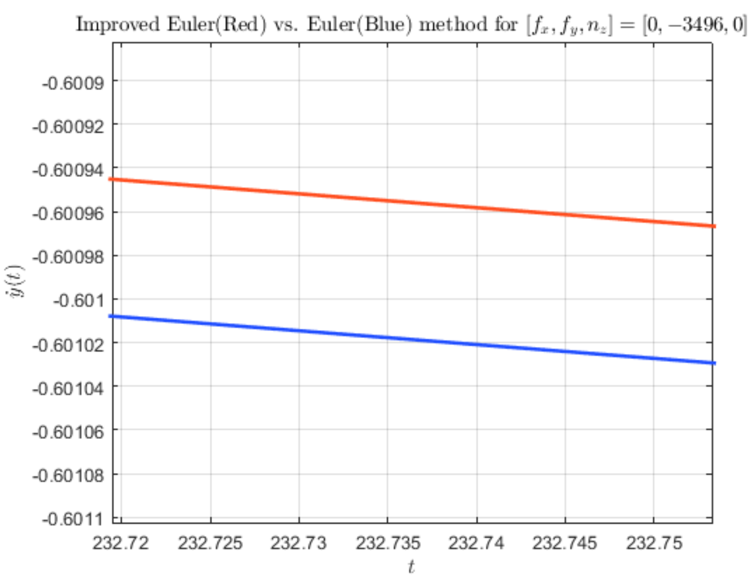
Εικόνα 5: Μεταβολή της $y_1(t)$ για Euler και τροποποιημένη Euler (οι διαφορές είναι μικρές)



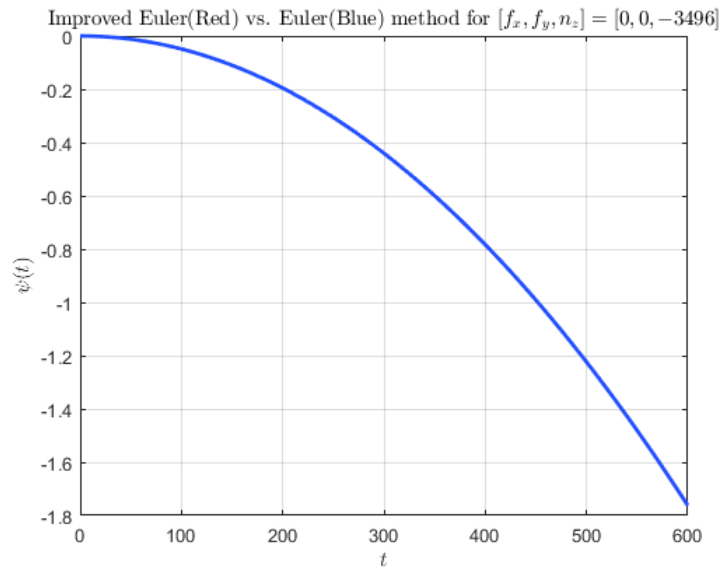
Εικόνα 6: Μεταβολή της $y_1(t)$ για Euler και τροποποιημένη Euler (μεγέθυνση)



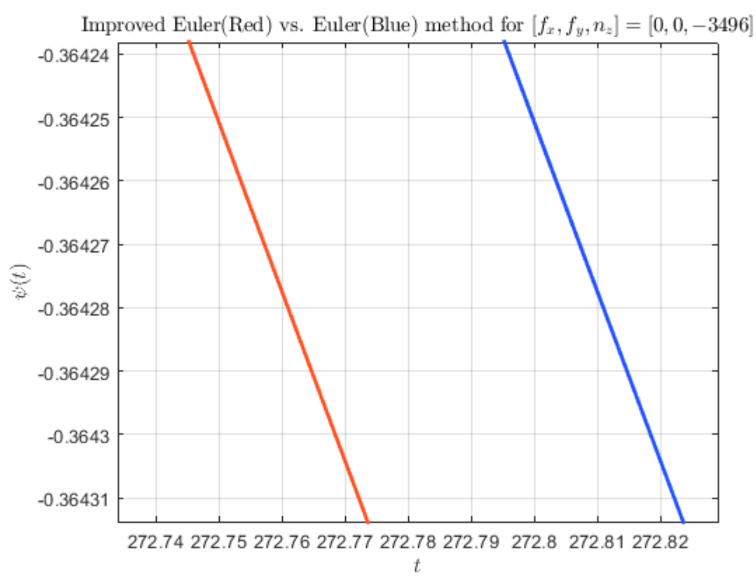
Εικόνα 7: Μεταβολή της $y_2(t)$ για Euler και τροποποιημένη Euler (οι διαφορές είναι μικρές)



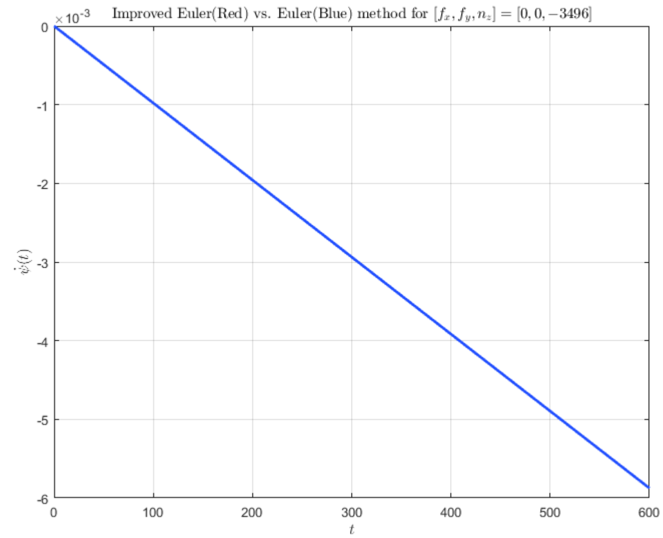
Εικόνα 8: Μεταβολή της $y_2(t)$ για Euler και τροποποιημένη Euler (μεγέθυνση)



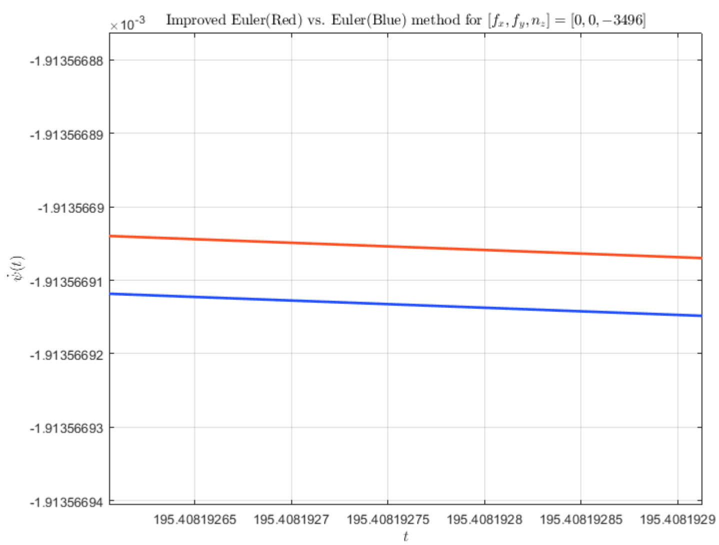
Εικόνα 9: Μεταβολή της $\psi_1(t)$ για Euler και τροποποιημένη Euler (οι διαφορές είναι μικρές)



Εικόνα 10: Μεταβολή της $\psi_1(t)$ για Euler και τροποποιημένη Euler (μεγέθυνση)



Εικόνα 11: Μεταβολή της $\psi_2(t)$ για Euler και τροποποιημένη Euler (οι διαφορές είναι μικρές)



Εικόνα 12: Μεταβολή της $\psi_2(t)$ για Euler και τροποποιημένη Euler (μεγέθυνση)

3 Σύστημα αυτομάτου ελέγχου κλειστού βρόγχου

Χρησιμοποιώντας για τις εισόδους τους παρακάτω ελεγκτές αναλογικού διαφορικού τύπου στις εξισώσεις (4)-(9) :

$$f_x = K_{px}(x_{des} - x) - K_{dx}\dot{x}$$
$$f_y = K_{py}(y_{des} - y) - K_{dy}\dot{y}$$
$$n_z = K_{p\psi}(\psi_{des} - \psi) - K_{d\psi}\dot{\psi}$$

και αναδιατυπώνοντας, χρησιμοποιώντας τις μεταβλητές $x_1, x_2, y_1, y_2, \psi_1, \psi_2$ όπως και πριν, καταλήγουμε στο παρακάτω σύστημα κλειστού βρόγχου διαφορικών εξισώσεων πρώτης τάξης:

$$\dot{x_1} = x_2 \tag{10}$$

$$\dot{x_2} = tan(\psi_1)\psi_2 x_2 - \psi_2 y_2 + \frac{K_{px}(x_{des} - x_1) - K_{dx}x_2 - D_x|x_2|x_2}{(m + 3m_a)cos(\psi_1)} \tag{11}$$

$$\dot{y_1} = y_2 \tag{12}$$

$$\dot{y_2} = tan(\psi_1)\psi_2 y_2 + \psi_2 x_2 + \frac{K_{py}(y_{des} - y_1) - K_{dy}y_2 - D_y|y_2|y_2}{(m + 3m_a)cos(\psi_1)} \tag{13}$$

$$\dot{\psi_1} = \psi_2 \tag{14}$$

$$\dot{\psi_2} = \frac{K_{p\psi}(\psi_{des} - \psi_1) - K_{d\psi}\psi_2 - D_\psi|\psi_2|\psi_2}{m_z} \tag{15}$$

3.1 Προσομοίωση

Όπως και πριν, χρησιμοποιώντας τον ίδιο κώδικα σε C, όπου ενσωματώθηκαν οι αλλαγές των εξισώσεων, προσομοιώθηκαν οι μέθοδοι Euler και τροποποιημένη Euler. Οι αρχικές συνθήκες που χρησιμοποιήθηκαν είναι:

$$x(0) = 0$$
$$\dot{x}(0) = 0$$
$$y(0) = -3,496$$
$$\dot{y}(0) = 0$$
$$\psi(0) = 0$$

$$\dot{\psi}(0) = 0$$

Οι παράμετροι του συστήματος και οι παράμετροι του ελεγκτή δίνονται παρακάτω:

$$D_x = 15331$$

$$D_y = 11835$$

$$D_\psi = 11835$$

$$m = 425000$$

$$m_z = 357000000$$

$$m_\alpha = 113000$$

$$K_{px} = 77480$$

$$K_{dx} = 5000000$$

$$K_{py} = 60000$$

$$K_{dy} = 4650400$$

$$K_{p\psi} = 50000$$

$$K_{d\psi} = 7000000$$

Οι επιθυμητές τελικές τιμές για τα x, y, ψ είναι αντίστοιχα:

$$x_{des} = 34.96$$

$$y_{des} = -34.96$$

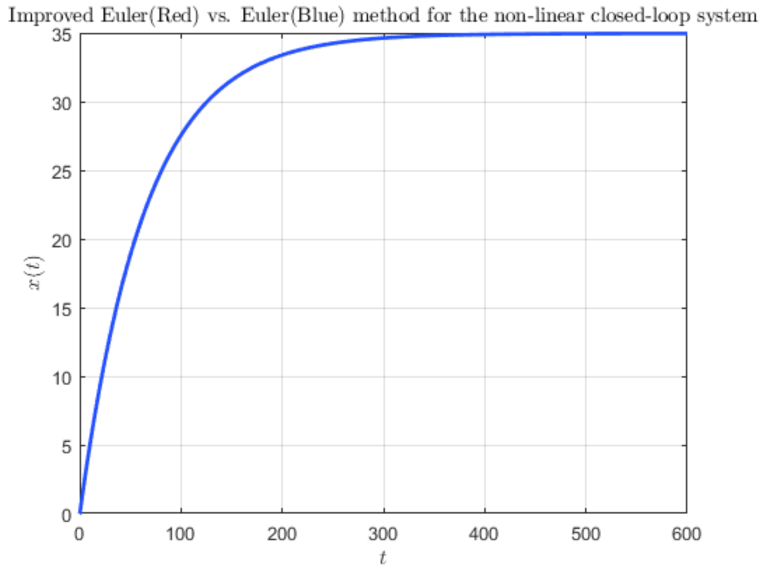
$$\psi_{des} = 0.3496$$

Έπειτα έγινε απεικόνιση των γραφικών παραστάσεων σε MATLAB.

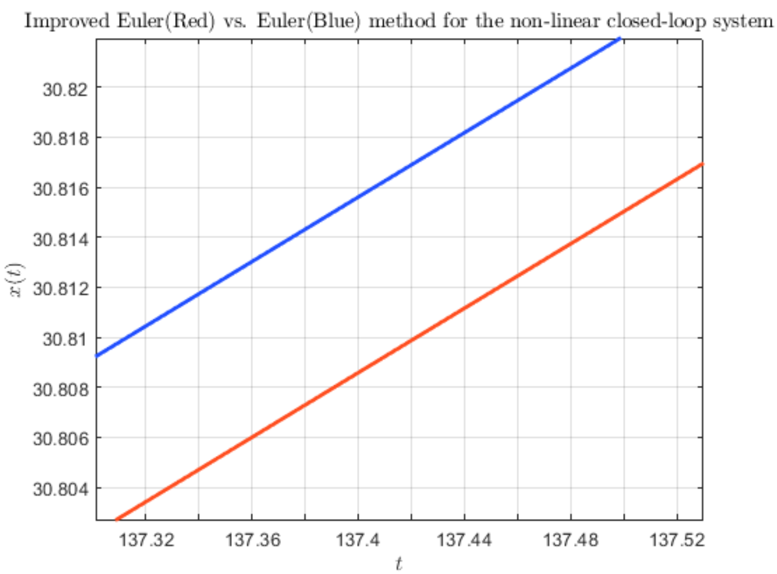
3.2 Γραφικές Παραστάσεις

Δίνονται στη συνέχεια, οι μεταβολές όλων των καταστάσεων απ' όπου βλέπουμε οτι πράγματι τα x, y, ψ τείνουν ασυμπτωτικά στις επιθυμητές τιμές και για τις δύο μεθόδους επίλυσης.

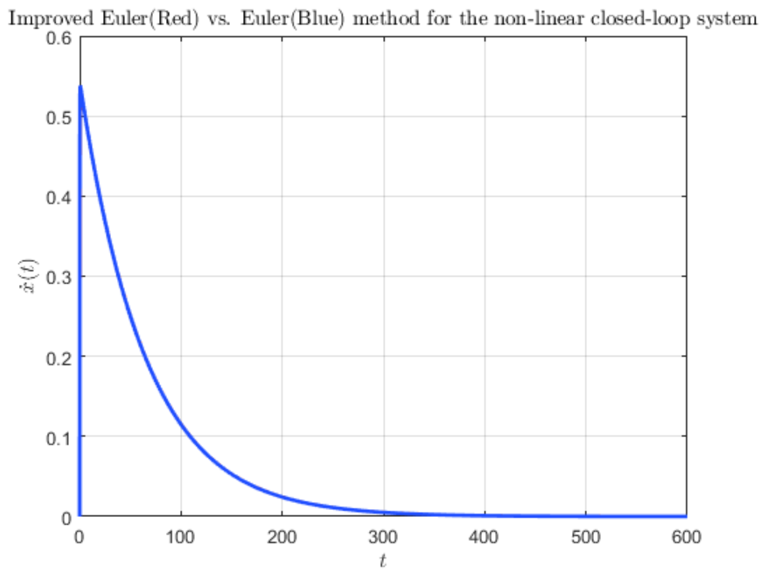
Επειδή στα συγκριτικά γραφήματα Euler - Τροποποιημένη Euler που ακολουθούν, οι διαφορές είναι πολύ μικρές και επομένως μη ορατές, έχουν προστεθεί και μεγεθύνσεις στις οποίες φαίνονται οι διαφορές.



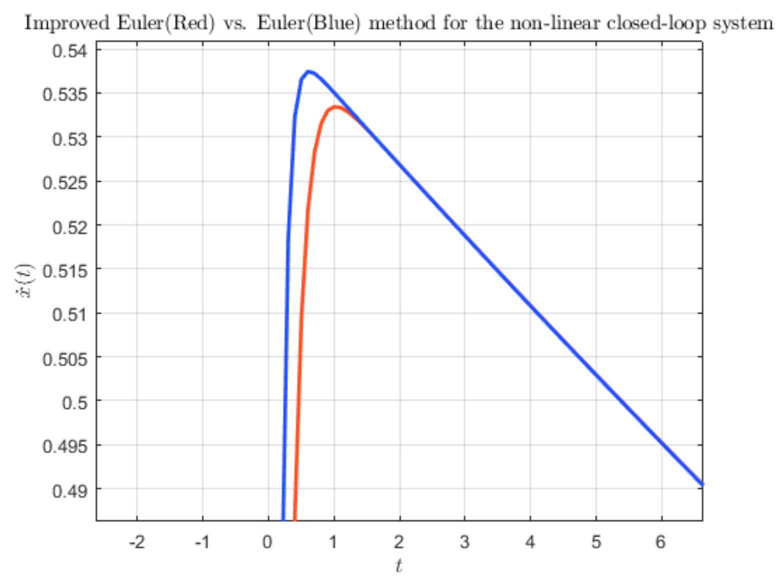
Εικόνα 13: Μεταβολή της $x_1(t)$ για Euler και τροποποιημένη Euler



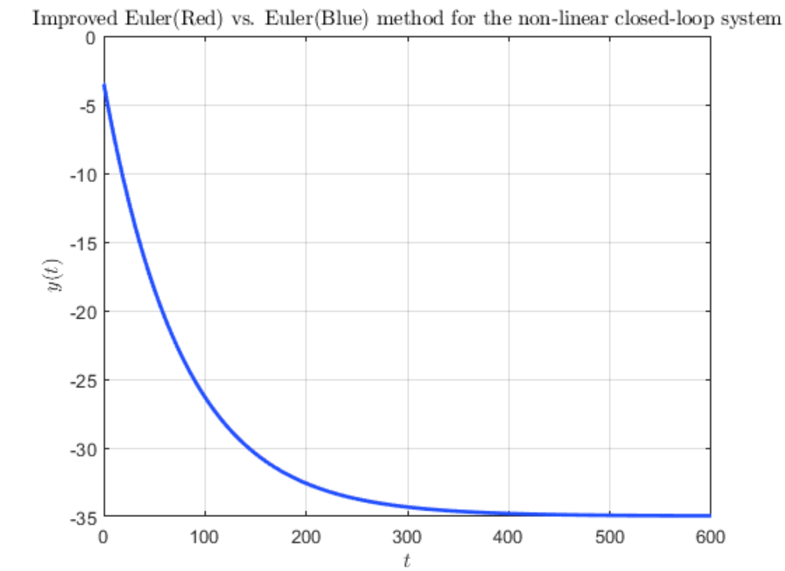
Εικόνα 14: Μεταβολή της $x_1(t)$ για Euler και τροποποιημένη Euler (μεγέθυνση)



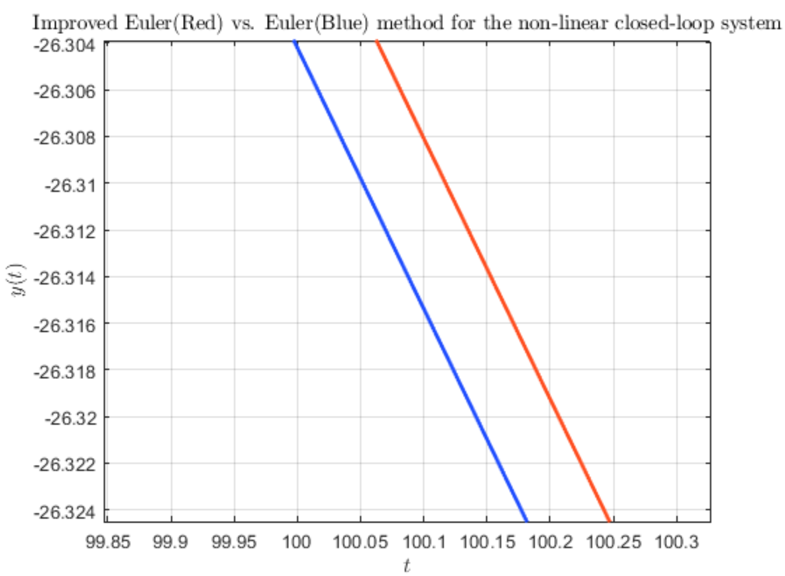
Εικόνα 15: Μεταβολή της $x_2(t)$ για Euler και τροποποιημένη Euler



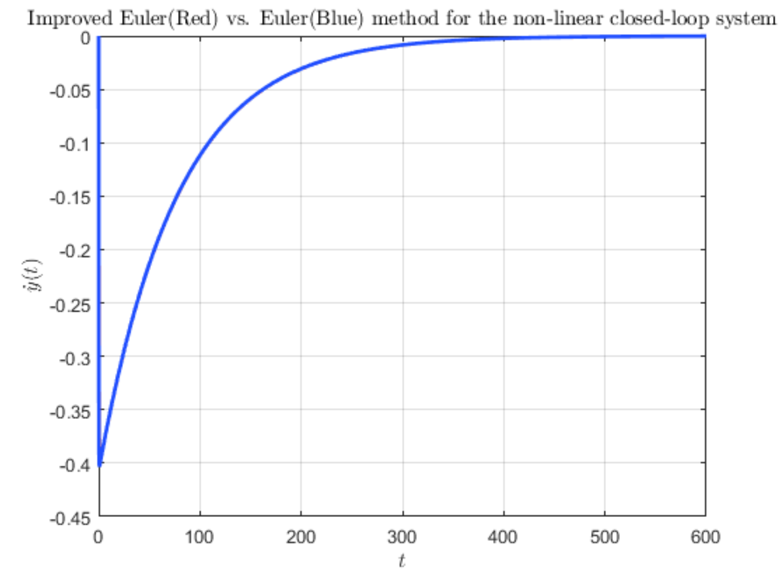
Εικόνα 16: Μεταβολή της $x_2(t)$ για Euler και τροποποιημένη Euler (μεγέθυνση)



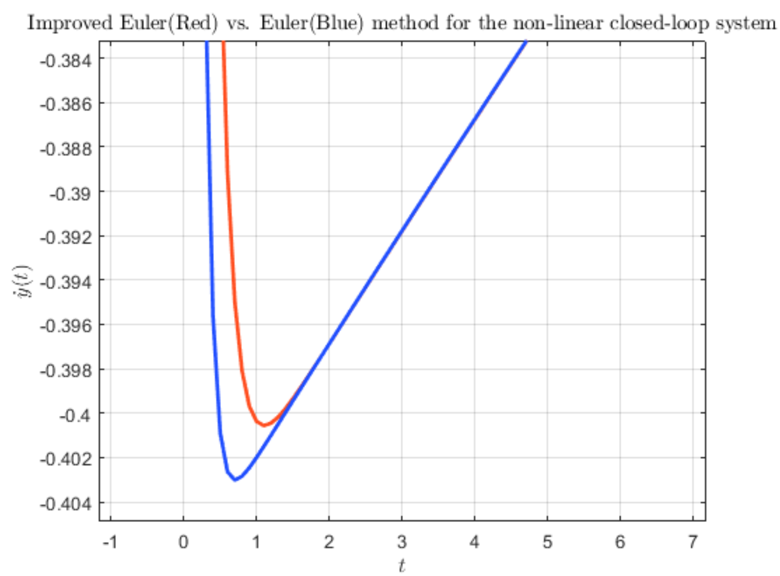
Εικόνα 17: Μεταβολή της $y_1(t)$ για Euler και τροποποιημένη Euler



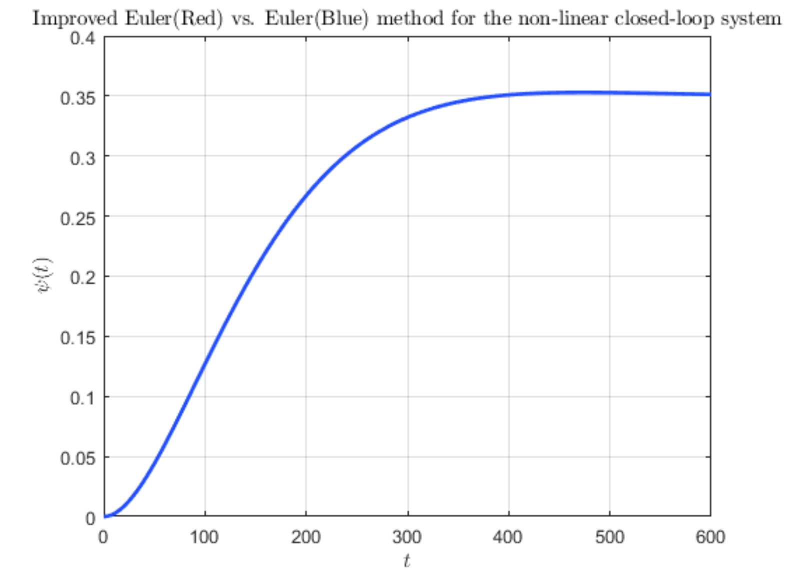
Εικόνα 18: Μεταβολή της $y_1(t)$ για Euler και τροποποιημένη Euler (μεγέθυνση)



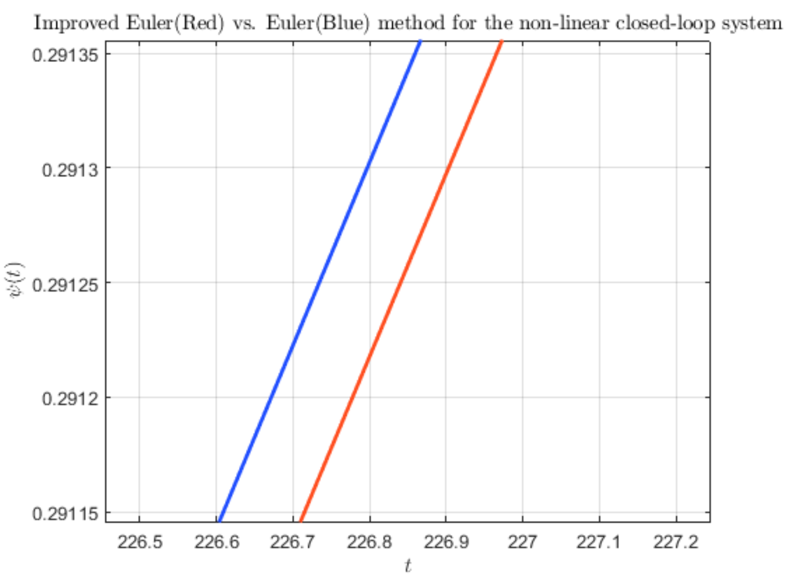
Εικόνα 19: Μεταβολή της $y_2(t)$ για Euler και τροποποιημένη Euler



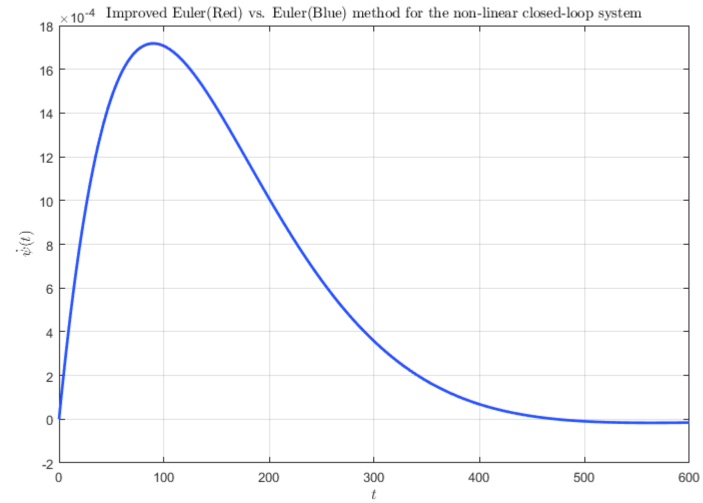
Εικόνα 20: Μεταβολή της $y_2(t)$ για Euler και τροποποιημένη Euler (μεγέθυνση)



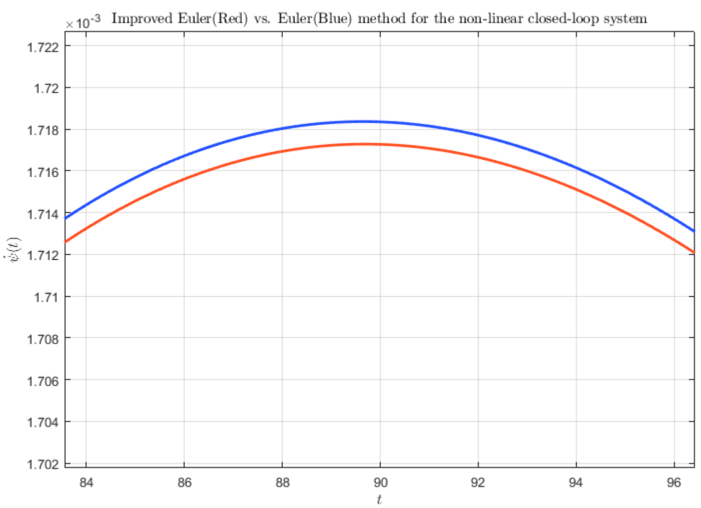
Εικόνα 21: Μεταβολή της $\psi_1(t)$ για Euler και τροποποιημένη Euler



Εικόνα 22: Μεταβολή της $\psi_1(t)$ για Euler και τροποποιημένη Euler (μεγέθυνση)



Εικόνα 23: Μεταβολή της $\psi_2(t)$ για Euler και τροποποιημένη Euler



Εικόνα 24: Μεταβολή της $\psi_2(t)$ για Euler και τροποποιημένη Euler (μεγέθυνση)

4 Απλοποίσηση

Προσεγγίζοντάς την (3) με τη γραμμική διαφορική εξίσωση

$$m_z\ddot{\psi} = K_{p\psi}(\psi_{des} - \psi) - K_{d\psi}\dot{\psi} - D_\psi\dot{\psi} \tag{16}$$

απλοποιείται η μελέτη της περιστροφής του ρομπότ.

4.1 Συνάρτηση Μεταφοράς

Στη γραμμική εξίσωση (16) εφαρμόζουμε μετασχηματισμό Laplace και στα δύο μέρη, με μηδενικές αρχικές συνθήκες. Έχουμε:

$$m_z s^2\Psi(s) = K_{p\psi}(\Psi_{des}(s) - \Psi(s)) - K_{d\psi}s\Psi(s) - D_\psi s\Psi(s)$$

$$\Rightarrow m_z s^2\Psi(s) + (K_{d\psi} + D_\psi)s\Psi(s) + K_{p\psi}\Psi(s) = K_{p\psi}\Psi_{des}(s)$$

οπότε η συνάρτηση μεταφοράς ανάμεσα στην επιθυμητή τιμή $\Psi_{des}(s)$ και την έξοδο $\Psi(s)$ είναι:

$$H(s) = \frac{\Psi(s)}{\Psi_{des}(s)} = \frac{K_{p\psi}}{m_z s^2 + K_{d\psi+D_\psi})s + K_{p\psi}}$$

$$= \frac{1}{\frac{m_z}{K_{p\psi}}s^2 + \frac{(K_{d\psi}+D\psi)}{K_{p\psi}}s + 1}$$

Η συνάρτηση έχει μόνο πόλους, τις ρίζες της $\frac{m_z}{K_{p\psi}}s^2 + \frac{(K_{d\psi}+D\psi)}{K_{p\psi}}s + 1 = 0$
Με αντικατάσταση τιμών η εξίσωση γίνεται $7140s^2 + 140.2367s + 1 = 0$ με δύο συζυγείς μιγαδικούς πόλους $a \pm bj = -0.0098204972 \pm 0.0066040788j$, λύσεις οι οποίες βρέθηκαν μέσω MATLAB

4.2 Γεωμετρικός Τόπος Ριζών

4.3 Αναλυτική λύση

4.4 Προσομοίωση

Αναδιατυπώνοντας πάλι τη διαφορική εξίσωση δεύτερης τάξης (16) ως δύο διαφορικές εξισώσεις πρώτης τάξης με μεταβλητές ψ_1, ψ_2 καταλήγουμε στο σύστημα:

$$\dot{\psi_1} = \psi_2 \tag{17}$$

$$\dot{\psi_2} = \frac{K_{p\psi}(\psi_{des} - \psi_1) - (K_{d\psi} + D_\psi)\psi_2}{m_z} \tag{18}$$

Όπως και πριν, χρησιμοποιώντας τον ίδιο κώδικα σε C, τροποποιόντας τον κατάλληλα, προσομοιώθηκαν οι μέθοδοι Euler και τροποποιημένη Euler για να προσεγγιστεί η λύση της (16). Έπειτα γράφηκε κώδικας όπου υλοποιεί την αναλυτική της λύση.

Οι αρχικές συνθήκες που χρησιμοποιήθηκαν είναι:

$$\psi(0) = 0$$

$$\dot{\psi}(0) = 0$$

Οι παράμετροι του συστήματος δίνονται παρακάτω:

$$D_\psi = 11835$$

$$m_z = 357000000$$

$$K_{p\psi} = 50000$$

$$K_{d\psi} = 7000000$$

Οι επιθυμητή τελική τιμή για το ψ είναι αντίστοιχα:

$$\psi_{des} = 0.3496$$

Έπειτα έγινε πάλι απεικόνιση των γραφικών παραστάσεων σε MATLAB.

4.5 Γραφικές Παραστάσεις

Δίνονται στη συνέχεια, οι μεταβολές όλων των καταστάσεων απ' όπου βλέπουμε οτι πράγματι το ψ τείνει ασυμπτωτικά στην επιθυμητή τιμή και για τις δύο μεθόδους επίλυσης. Επίσης, απεικονίζεται και η αναλυτική λύση με την οποία γίνεται και η σύγκριση των μεθόδων Euler.

Επειδή στα συγκριτικά γραφήματα Euler - Τροποποιημένη Euler - Αναλυτική Λύση που ακολουθούν, οι διαφορές είναι πολύ μικρές και επομένως μη ορατές, έχουν προστεθεί και μεγεθύνσεις στις οποίες φαίνονται οι διαφορές.