লাল - সবুজে দাগানো

TEXT BOOK

পদার্থ বিজ্ঞান

১ম পত্র

New Edition

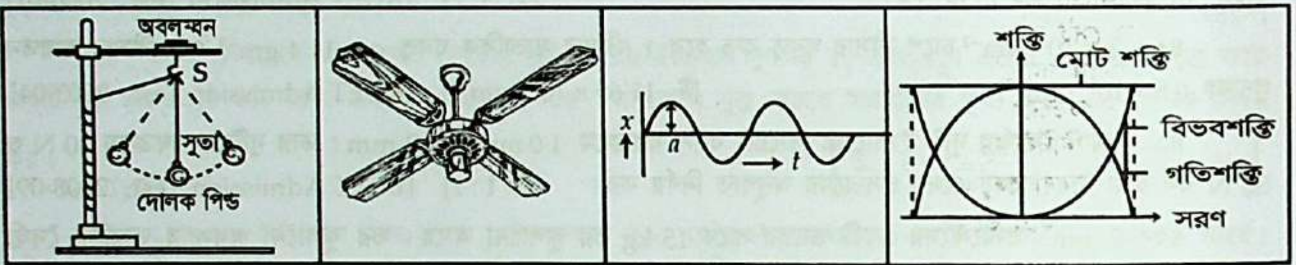
উন্মেষ

মেডিকেল এন্ড ডেন্টাল এডমিশন কেয়ার

৮

পর্যাবৃত্ত গতি
PERIODIC MOTION

প্রধান শব্দ (Key Words) : স্থানিক পর্যায়ক্রম, কালিক পর্যায়ক্রম, পর্যাবৃত্ত গতি, স্পন্দন গতি, সরল ছন্দিত স্পন্দন, সরল দোলক, পূর্ণ দোলন, দোলন বা পর্যায় কাল, কম্পাঙ্ক, বিস্তার, দশা, সেকেন্ড দোলক, কৌণিক কম্পাঙ্ক।



ভূমিকা
Introduction

পূর্বের অধ্যায়গুলোতে বস্তুর চলন গতি, প্রাসের গতি, বৃত্তাকার গতি আলোচনা করা হয়েছে। এখন আমরা নতুন এক ধরনের অতি পরিচিত গতি আলোচনা করব যা পর্যাবৃত্ত গতি নামে পরিচিত। স্প্রিং এর গতি, সুরশলাকার স্পন্দন, গ্রহ-উপগ্রহের গতি ইত্যাদি পর্যাবৃত্ত গতি। পর্যাবৃত্ত গতিরই বিশেষ রূপ হলো দোলন, কম্পন বা স্পন্দন। দোলন, কম্পন বা স্পন্দন সমার্থকবোধক শব্দ। পদার্থবিজ্ঞানের বিভিন্ন শাখায় সরল দোল গতি (Simple Harmonic Motion সংক্ষেপে S.H.M.) নামক এক বিশেষ ধরনের দোল গতির গুরুত্বপূর্ণ ব্যবহার রয়েছে। এ অধ্যায়ে আমরা পর্যাবৃত্ত গতি তথা সরল ছন্দিত গতির বিভিন্ন রূপ আলোচনা করব।

এ অধ্যায় পাঠ শেষে শিক্ষার্থীরা—

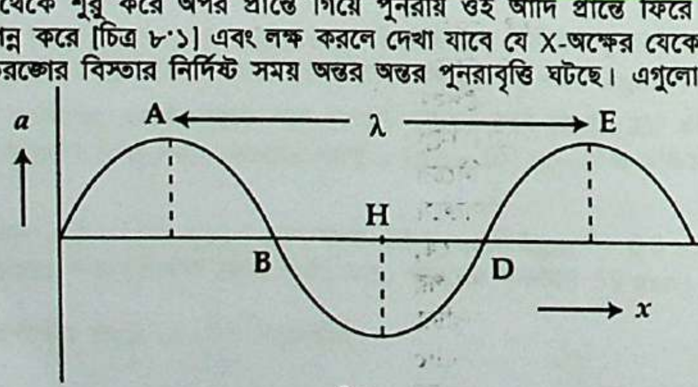
- পর্যাবৃত্ত গতি ও সরল ছন্দিত গতি ব্যাখ্যা করতে পারবে।
- সরল ছন্দিত গতির রাশিসমূহ ব্যাখ্যা করতে পারবে।
- দৈনন্দিন জীবনে সরল দোলন গতির ব্যবহার করতে পারবে।
- সরল দোলন গতিসম্পন্ন বস্তুর অন্তরক সমীকরণ প্রতিপাদন ও এর গাণিতিক বিশ্লেষণ করতে পারবে।
- লেখচিত্রের সাহায্যে সরল দোলন গতিসম্পন্ন বস্তুর মোট শক্তির সংরক্ষণশীলতা ব্যাখ্যা করতে পারবে।

ব্যবহারিক :

(ক) স্প্রিং ধ্রুবক নির্ণয়ের পরীক্ষা।
(খ) স্প্রিং-এর সাহায্যে ভরের তুলনা।

৮·১ পর্যাবৃত্তি
Periodicity

যদি কোনো একটি বস্তু নির্দিষ্ট সময় পর পর একই স্থানে ফিরে আসে অথবা একই স্থান দিয়ে নির্দিষ্ট সময় অন্তর অতিক্রম করে তবে তাকে পর্যাবৃত্তি বলে। যেমন পৃথিবী সূর্যের চারদিকে 365 দিনে একবার ঘুরে আসে, একটি সরল দোলক এক প্রান্ত থেকে শুরু করে অপর প্রান্তে গিয়ে পুনরায় ওই আদি প্রান্তে ফিরে আসে অথবা একটি স্পন্দক (oscillator) তরঙ্গ উৎপন্ন করে [চিত্র ৮·১] এবং লক্ষ করলে দেখা যাবে যে X-অক্ষের যেকোনো নির্দিষ্ট বিন্দুতে (যেমন A বা B বিন্দুতে), তরঙ্গের বিস্তার নির্দিষ্ট সময় অন্তর অন্তর পুনরাবৃত্তি ঘটছে। এগুলো সবই পর্যাবৃত্তির উদাহরণ।



চিত্র ৮·১

পৃথিবী সূর্যের চারদিকে 365 দিনে একবার ঘুরে আসে। এ সময়কে পর্যায়কাল বলে। সুতরাং সূর্যের চারদিকে পৃথিবীর ঘূর্ণনের পর্যায়কাল 365 দিন। অনুরূপভাবে, সরল দোলক এক বিন্দু থেকে যাত্রা শুরু করে পুনরায় ওই একই

বিন্দুতে ফিরে আসতে যে সময় লাগে সেটি ওই দোলকের পর্যায়কাল। ৮·১ চিত্রে একটি কণার A বিন্দু হতে E পর্যন্ত অতিক্রম করতে যে সময় লাগে, তাই সময়কাল বা পর্যায়কাল T।

পর্যায়কাল সময় সাপেক্ষে হতে পারে, আবার স্থান সাপেক্ষে হতে পারে।

৮·১·১ স্থানিক পর্যাবৃত্তি
Spatial periodicity

যখন কোনো কিছুর পুনরাবৃত্তি স্থানের সাপেক্ষে হয়, তখন তাকে স্থানিক পর্যাবৃত্তি বলে। অর্থাৎ স্থানিক পর্যায়কাল হলো সেই সকল ঘটনা যা একটি নির্দিষ্ট দূরত্ব পর পর পুনরাবৃত্তি ঘটে। যেমন সরল দোলকের গতি, ঘড়ির কাঁটার গতি, কঠিন পদার্থের কেলাসের মধ্যে অণু, ডোরাকাটা শার্টের ডোরাগুলোর অবস্থান, ধান ক্ষেতে বাতাস বইলে ধান ক্ষেতে সৃষ্ট ঢেউয়ের গতি, ইলেকট্রিক পোল ইত্যাদি। উপরের উদাহরণের অণুগুলো নির্দিষ্ট অবস্থান পর পর, শার্টের ডোরাগুলো নির্দিষ্ট দূরত্ব পর পর, ইলেকট্রিক পোলগুলো নির্দিষ্ট অবস্থান পর পর পুনরাবৃত্তি ঘটে।

সংজ্ঞা : কোনো বস্তুর গতি যদি এমনভাবে পুনরাবৃত্তি হয় যে নির্দিষ্ট সময় পরপর কোনো নির্দিষ্ট বিন্দুকে একই দিক থেকে অতিক্রম করে তবে তাকে স্থানিক পর্যাবৃত্তি বলে।

৮·১·২ কালিক পর্যাবৃত্তি
Temporal periodicity

পর্যাবৃত্তির পর্যায়কাল যদি একটি নির্দিষ্ট সময় সাপেক্ষ হয়, তবে তাকে কালিক পর্যাবৃত্তি বলে। অর্থাৎ কালিক পর্যাবৃত্তি হলো সেই সকল ঘটনা যা একটি নির্দিষ্ট সময় পর পর পুনরাবৃত্তি ঘটে। যেমন ঘড়ির সেকেন্ড বা মিনিটের কাঁটা যথাক্রমে 60 সেকেন্ড বা 60 মিনিট পর পর, ঘণ্টার কাঁটা 12 ঘণ্টা পর পর পুনরাবৃত্তি ঘটে এবং পৃথিবী সূর্যের চারদিকে 365 দিনে একবার ঘুরে আসে, পৃথিবী প্রদক্ষিণ করতে চাঁদের 30 দিন সময় লাগে ইত্যাদি।

সংজ্ঞা : কোনো রাশির মান বা ফাংশনের মান যদি এমন হয় যে নির্দিষ্ট সময় পরপর সেটি একই মান প্রাপ্ত হয় তবে তাকে কালিক পর্যাবৃত্তি বলে।

ধরা যাক, m ভরের একটি কৃত্রিম উপগ্রহ h উচ্চতায় পৃথিবীর চারদিকে v বেগে বৃত্তাকার কক্ষপথে আবর্তন করছে। উপগ্রহের পর্যায়কাল T, পৃথিবীর ভর M এবং পৃথিবীর ব্যাসার্ধ R হলে পর্যায়কালের সমীকরণ পাওয়া যায়,

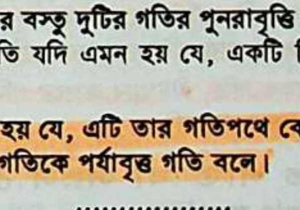
$$T = 2\pi\frac{\sqrt{(R+h)^3}}{GM}.$$

৮·২ পর্যাবৃত্ত গতি
Periodic motion

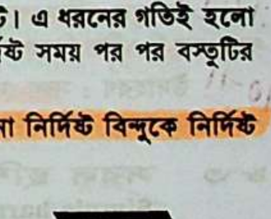
ঘড়ির পেন্ডুলাম বামে-ডানে দুলতে দেখি বা স্প্রিং-এর সংকোচন-প্রসারণজনিত গতিও আমরা লক্ষ করে থাকি [চিত্র ৮·২(ক)]। আমরা দেখতে পাই যে, **নির্দিষ্ট সময় পর পর বস্তু দুটির গতির পুনরাবৃত্তি ঘটে। এ ধরনের গতিই হলো পর্যাবৃত্ত গতি**। তাহলে আমরা বলতে পারি, কোনো বস্তুর গতি যদি এমন হয় যে, একটি নির্দিষ্ট সময় পর পর বস্তুটির গতির পুনরাবৃত্তি ঘটে তবে ওই গতিকে পর্যাবৃত্ত গতি বলে।

সংজ্ঞা : কোনো গতিশীল বস্তু কণার গতি যদি এমন হয় যে, এটি তার গতিপথে কোনো নির্দিষ্ট বিন্দুকে নির্দিষ্ট সময় পর পর একই দিক থেকে অতিক্রম করে, তাহলে সেই গতিকে পর্যাবৃত্ত গতি বলে।

পর্যাবৃত্তিক গতিতে চলমান গতিপথ নির্দিষ্ট এবং নির্দিষ্ট সময় পর পর বস্তুটি গতিপথের একই বিন্দুকে একই দিক থেকে অতিক্রম করে। এই গতিপথের কোনো নির্দিষ্ট জ্যামিতিক রূপ, যেমন সরলরেখা, বৃত্ত, উপবৃত্ত ইত্যাদি থাকতে পারে, আবার নাও থাকতে পারে। স্প্রিং থেকে ঝুলন্ত কোনো বস্তুকে [চিত্র ৮·২(খ)] নিচের দিকে সামান্য টেনে ছেড়ে দিলে সেটি পর্যায়ক্রমে ওপর-নিচ করতে থাকে। লক্ষ করলে দেখা যায় যে, বস্তুটি গতিপথের একই বিন্দু দিয়ে নির্দিষ্ট সময় পর পর ওপর থেকে নিচে বা নিচ থেকে ওপরে যাচ্ছে। বস্তুটির এই গতি সরলরৈখিক পর্যাবৃত্ত গতি (linear periodic motion)। এক খণ্ড পাথরে সুতা বেঁধে স্থির কৌণিক বেগে ঘুরাতে থাকলে পাথরটি বৃত্তীয় পর্যাবৃত্ত গতিতে (rotational periodic motion) আবর্তন করে। পৃথিবী সূর্যের চারদিকে উপবৃত্তাকার কক্ষপথে ঘোরে। এক বছর পর পর পৃথিবীর এই গতির পুনরাবৃত্তি হয়। এটি উপবৃত্তীয় পর্যায় গতির (elliptical periodic motion) একটি উদাহরণ।



চিত্র ৮·২(ক)



চিত্র ৮·২(খ)

আবার ধরা যাক, একটি সুতা এলোমেলোভাবে মেঝের ওপর রাখা আছে। একটি পিঁপড়া ওই সুতার ওপর দিয়ে সমদ্রুতিতে হাঁটতে থাকল। দেখা গেল যে পিঁপড়াটি সুতার যেকোনো স্থান একটি নির্দিষ্ট সময় পর পর পেরিয়ে যাচ্ছে। এখানে দড়িটির কোনো নির্দিষ্ট জ্যামিতিক রূপ নেই। তবুও পিঁপড়ার গতি পর্যাবৃত্ত গতি হবে।

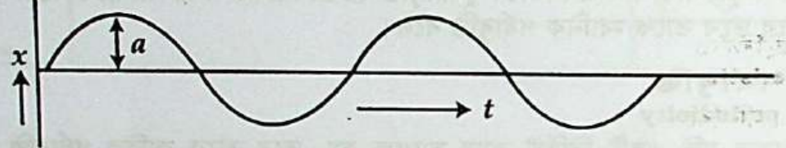
সুরযন্ত্রের তার বা বায়ুমণ্ডলের গতি, ঘড়ির কাঁটার গতি, বাষ্প বা পেট্রোল ইঞ্জিনের সিলিন্ডারের মধ্যে পিস্টনের গতি, কঠিন বস্তুতে পরমাণুর স্পন্দন ইত্যাদি হলো পর্যাবৃত্ত গতি।

পর্যাবৃত্ত গতিসম্পন্ন কণার স্পন্দন একটি sine তরঙ্গ সদৃশ যার একটি বিস্তার, একটি কৌণিক কম্পাঙ্ক এবং একটি সময়ের রাশি থাকে। X-অক্ষ অভিমুখে একটি পর্যাবৃত্ত কণার সমীকরণ হলো

$$x = a \sin \omega t \qquad \ldots \qquad \ldots \qquad (8.1)$$

এখানে a = বিস্তার, ω = কৌণিক কম্পাঙ্ক, t = সময়

নিচের [চিত্র ৮.২(গ)] লেখচিত্রের সাহায্যে সমীকরণটিকে দেখানো যায় :



চিত্র ৮.২ (গ)

পর্যায়কাল
Time period

পর্যাবৃত্ত গতিসম্পন্ন কোনো কণা যে নির্দিষ্ট সময় পর পর কোনো নির্দিষ্ট বিন্দুকে নির্দিষ্ট দিক দিয়ে অতিক্রম করে সেই সময়কে পর্যায়কাল বলে। পর্যাবৃত্তিক গতির গতিপথ বৃত্তাকার, উপবৃত্তাকার, সরলরৈখিক ও আরো জটিল হতে পারে।

পর্যাবৃত্ত গতির বৈশিষ্ট্য
Characteristics of periodic motion

১। পর্যাবৃত্ত গতি সরল, বক্র বা বন্ধ (rectilinear, curvilinear or closed) পথে হতে পারে।

২। পর্যাবৃত্ত গতির ক্ষেত্রে বস্তুর ওপর প্রযুক্ত বল সর্বদা একটি নির্দিষ্ট বিন্দু অভিমুখী হয় যা গতিপথের ওপরে থাকতে পারে বা নাও থাকতে পারে।

স্পন্দন গতি বা দোলন গতি
Oscillatory motion

MAT:12-13 পর্যাবৃত্ত গতিসম্পন্ন কণা যদি পর্যায়কালের অর্ধেক সময় কোনো নির্দিষ্ট দিকে এবং বাকি অর্ধেক সময় একই পথে তার বিপরীত দিকে চলে তবে তার গতিকে স্পন্দন গতি বা দোলন গতি বলে।

MAT:10-11 উদাহরণ : সরল দোলকের গতি, গীটারের তারের গতি, কম্পনশীল সুরশলাকার গতি, স্পন্দনরত তারের গতি, শব্দ সঞ্চালনের সময় বায়ুর কণার স্পন্দন ইত্যাদি।

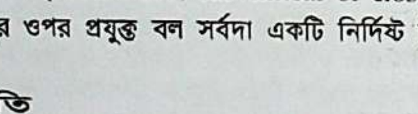
৮.৩ সরল ছন্দিত গতি বা সরল দোলন গতি বা সরল দোল গতি
Simple harmonic motion

ছন্দিত গতি একটি বিশেষ ধরনের দোলনগতি। মনে করি, C এবং D বিন্দুর মধ্যে সরলরেখা বরাবর দোলনরত একটি কণা N এর গতিপথ নির্দেশিত হবে [চিত্র ৮.৩]। O বিন্দু কণাটির সাম্যাবস্থান এবং যেকোনো মুহূর্তে সাম্যাবস্থান থেকে এর সরণ x। কণার গতি ছন্দিত গতি হলে ওই মুহূর্তে কণাটির ত্বরণ a-এর মান x-এর সমানুপাতিক এবং অভিমুখ O বিন্দুর দিকে হয় অর্থাৎ a সরণ x এর বিপরীতমুখি হয়। সেজন্য আমরা লেখতে পারি,

$$a \propto -x \text{ বা, } a = -kx$$

এখানে k = ধ্রুবক = ω^2; ω হলো কণাটির কৌণিক বেগ।

$$\therefore \quad a = -\omega^2 x \qquad \ldots \qquad \ldots \qquad \ldots \qquad (8.2)$$



চিত্র ৮.৩

আবার ত্বরণ কীভাবে সময়ের সাথে পরিবর্তিত হয় তা আমরা জানি। নিউটনের ২য় সূত্র অনুযায়ী বল কোনো বস্তুতে ক্রিয়াশীল হলে ত্বরণ সৃষ্টি হয়।

অর্থাৎ $F = ma$

$\therefore \quad F = -m\omega^2 x$ (8.2 সমীকরণ অনুযায়ী)

বা, $F = -(m\omega^2)\, x$

বা, $F = -Kx$, এখানে K = স্প্রিং ধ্রুবক বা বল ধ্রুবক $= \frac{F}{x}$

$$\therefore \quad F \propto -x \qquad \dots \qquad \dots \qquad \dots \qquad (8.3)$$

এখানে $-ve$ চিহ্নের অর্থ হলো সরণ বেশি হলে ত্বরণ ও বল বেশি হবে। কিন্তু দিক সর্বদা সরণের বিপরীত দিকে অর্থাৎ সাম্যাবস্থানের দিকে।

অর্থাৎ সরল ছন্দিত গতি বল বা প্রত্যায়নক বল সরণের সমানুপাতিক ও বিপরীতমুখি।

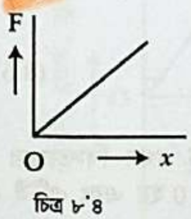
উপরোক্ত আলোচনা থেকে আমরা সহজেই ছন্দিত গতির বলের বৈশিষ্ট্য 2. ধ্রুবক 2·5 N/m বলতে কী বুঝ ?

এ দ্বারা বুঝায় সাম্যাবস্থান থেকে একটি স্প্রিং-কে 1 m প্রসারিত করতে 2·5 N বলের প্রয়োজন।

৮·৩·১ সরল ছন্দিত গতির ক্ষেত্রে বলের বৈশিষ্ট্য
Characteristics of force of simple harmonic motion

(i) এটি একটি বিশেষ ধরনের ছন্দিত বা দোলনগতিসম্পন্ন কণার ওপর সৃষ্ট বল।

(ii) এই গতির ক্ষেত্রে কণার ত্বরণ এবং এর ওপর ক্রিয়াশীল বল-এর মান কণার সরণের সমানুপাতিক।



চিত্র ৮·৪

(iii) ত্বরণের এবং কণার ওপর ক্রিয়াশীল বলের অভিমুখ সব সময় সাম্যাবস্থানের দিকে হয়, অর্থাৎ কণার সরণের বিপরীত দিকে হয়।

(iv) এই ধরনের গতির বলের গতিপথ সরলরৈখিক হয়।

প্রত্যায়নক বল ও সরণের লেখচিত্রটি (৮·৪) একটি মূলবিন্দুগামী সরলরেখা যার নতি বা ঢাল (slope) $= m\omega^2$

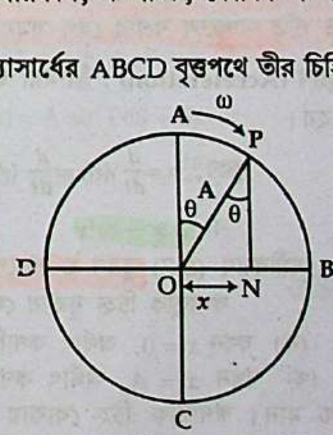
সংজ্ঞা : কোনো দোলনরত কণার ত্বরণ সাম্যাবস্থান থেকে এর দূরত্বের সমানুপাতিক ও সব সময় সাম্যাবস্থানের অভিমুখী হলে ওই কণার গতিকে সরল ছন্দিত গতি বলে।

স্পষ্টত সব পর্যাবৃত্ত গতির এই বৈশিষ্ট্যগুলি থাকে না। তাই সরল ছন্দিত গতি মাত্রই পর্যাবৃত্ত গতি হলেও সব পর্যাবৃত্ত গতি সরল ছন্দিত গতি বা সরল দোলগতি নয়।

৮·৪ সরল ছন্দিত গতি সম্পর্কিত কয়েকটি রাশি
Some terms related to simple harmonic motion

নির্দেশক বৃত্তের ধারণাকে কাজে লাগিয়ে সরল ছন্দিত গতি সংক্রান্ত বিভিন্ন রাশির বর্ণনা পাওয়া যায়। নির্দেশক বৃত্তের সাহায্যে সরল ছন্দিত গতি সংক্রান্ত সরণ, বেগ ও ত্বরণের রাশিমালা এবং পর্যায়কাল, কম্পাঙ্ক, কৌণিক কম্পাঙ্ক ও দশা নিম্নে প্রতিপাদন করা হলো—

১. সরণ (Displacement) : মনে করি একটি বস্তুকণা O বিন্দুকে কেন্দ্র করে A ব্যাসার্ধের ABCD বৃত্তপথে তীর চিহ্নিত দিকে ω কৌণিক বেগে ঘুরছে এবং t সময়ে A বিন্দু হতে P বিন্দুতে আসছে [চিত্র ৮·৫]। P বিন্দু হতে বৃত্তের ব্যাস DB-এর ওপর PN লম্ব টানি। এখানে লম্ব পাদ বিন্দুর সরণ, $x = ON$



চিত্র ৮·৫

চিত্র হতে $\angle AOP = \angle OPN = \theta$, এখানে θ = কৌণিক সরণ।

আমরা পাই, $\frac{ON}{OP} = \sin\theta$

বা, $ON = OP \times \sin\theta$

$\therefore \quad x = A\sin\theta$, এখানে x = মূলবিন্দু থেকে সরণ এবং

$OP = A$ = নির্দেশক বৃত্তের ব্যাসার্ধ।

$$\text{বা, } x = A\sin\omega t \qquad \dots \qquad \dots \qquad \dots \qquad (8.4)$$

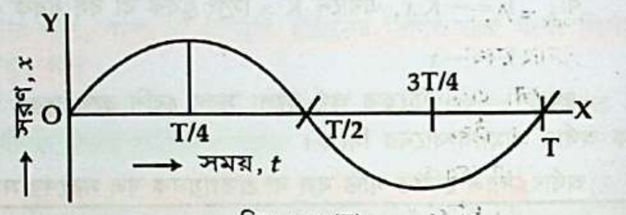
এখানে $\theta = \omega t$

আদি দশা (δ) বিবেচনা করলে $x = A\sin(\omega t + \delta)$ হয়।

ইহা সরল ছন্দিত স্পন্দনরত কণার সাধারণ সমীকরণ নির্দেশ করে। এই সমীকরণে A, কম্পনরত কণার বিস্তার নির্দেশ করে।

পাদবিন্দুর দোলনকাল T হলে, $\omega = \frac{2\pi}{T} = 2\pi n$; এখানে পাদবিন্দুর কম্পাঙ্ক, $n = \frac{1}{T}$। (8.4) সমীকরণ থেকে পাই, $x = A \sin 2\pi nt$ ... ... (8.5)

সমীকরণ (8.4) এবং (8.5) হলো সরল ছন্দিত স্পন্দনসম্পন্ন একটি কণার সরণের রাশিমালা। সরণ-সময় লেখচিত্র একটি সাইন সদৃশ লেখ হবে। ৮·৫(ক) চিত্রে ছন্দিত গতি-সম্পন্ন কণার সরণের সমীকরণ লেখচিত্রের মাধ্যমে দেখান হলো।



চিত্র ৮·৫ (ক)

২. বেগ (Velocity) : আমরা জানি সময় সাপেক্ষে সরণের পরিবর্তনের হারকে বেগ বলে। একে সাধারণত v দ্বারা প্রকাশ করা হয়।

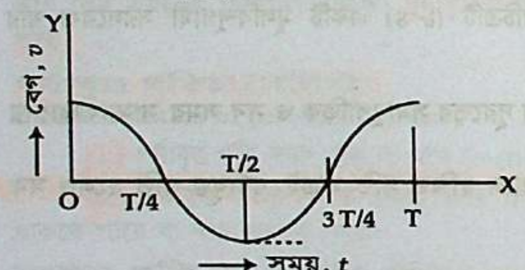
$\therefore$ বেগ, $v = \frac{d}{dt}(x) = \frac{d}{dt}(A \sin \omega t) = A\,\omega \cos \omega t$ এখানে, $x = A \sin \omega t$

$\therefore$ $\sin \omega t = \frac{x}{A}$ এবং $\cos \omega t = \sqrt{1 - \sin^2 \omega t}$

$\therefore$ বেগ, $v = A\omega\sqrt{1 - \sin^2 \omega t} = A\omega\sqrt{1 - x^2/A^2}$

বা, $v = \omega\sqrt{A^2 - x^2}$ ... ... (8.6)

সমীকরণ (8.6) বেগ ও সরণের মধ্যে সম্পর্ক নির্দেশ করে।



চিত্র ৮·৫ (খ)

(ক) যখন $x = A$, অর্থাৎ কণাটি যখন বিস্তারের প্রান্তে উপস্থিত হয়, তখন $v = \omega\sqrt{A^2 - A^2} = 0$ হয় এবং এটিই বেগের সর্বনিম্ন মান। অর্থাৎ $v_{min} = 0$।

(খ) যখন $x = 0$, অর্থাৎ কণাটি যখন সাম্যাবস্থান অতিক্রম করে, তখন $v = \omega\sqrt{A^2 - 0} = \omega A$ হয় এবং এটিই বেগের সর্বোচ্চ মান। অর্থাৎ $v_{max} = \omega A$।

অতএব সরল দোলন গতিসম্পন্ন কণার বেগ সাম্যাবস্থায় সর্বাধিক হয় এবং সরণ বৃদ্ধির সাথে সাথে বেগ হ্রাস পেতে থাকে এবং বিস্তারের প্রান্তে বেগ শূন্য হয়।

৮·৫ চিত্র অনুযায়ী N বিন্দুর গতিপথের মধ্য অবস্থানে তার বেগ সর্বাধিক এবং সরণ বৃদ্ধির সাথে সাথে বেগ কমতে থাকে এবং চরম অবস্থানে B বা D বিন্দুতে এর বেগ শূন্য হবে অর্থাৎ বিস্তারের প্রান্তে বেগ শূন্য হবে। সরল ছন্দিত গতি সম্বন্ধে কণার বেগ-সময় লেখচিত্র একটি cosine সদৃশ লেখচিত্র [চিত্র ৮·৫(খ)]।

৩. ত্বরণ (Acceleration) : আমরা জানি সময় সাপেক্ষে বেগের পরিবর্তনের হারকে ত্বরণ বলে। একে a দ্বারা নির্দেশ করা হয়।

ত্বরণ, $a = \frac{d}{dt}(v) = \frac{d}{dt}(A\omega \cos \omega t) = -A\omega^2 \sin \omega t$

বা, $a = -\omega^2 x$ ... ... (8.7) $[\because x = A \sin \omega t]$

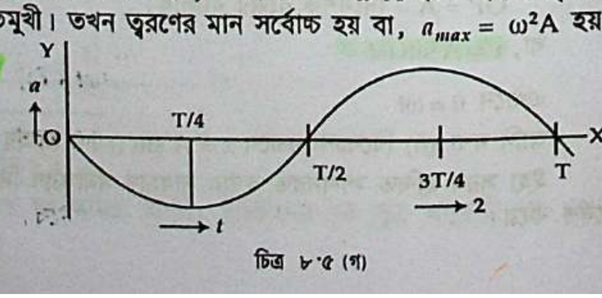
সমীকরণ (8.7) ত্বরণ ও সরণের মধ্যে সম্পর্ক নির্দেশ করে।

ঋণাত্মক চিহ্ন বুঝায় যে, ত্বরণ ও সরণ পরস্পর বিপরীতমুখি।

(ক) যখন $x = 0$, অর্থাৎ কণাটি যখন মধ্যবর্তী সাম্যাবস্থান অতিক্রম করে তখন ত্বরণ সর্বনিম্ন হয় বা $a_{min} = 0$ এবং (খ) যখন $x = A$, অর্থাৎ কণাটি যখন বিস্তারের প্রান্তে উপস্থিত হয়, তখন $a = -\omega^2 A$ হয়। ইহাই ত্বরণের সর্বোচ্চ মান। ঋণাত্মক চিহ্ন বোঝায় ত্বরণ সরণের বিপরীতমুখী। তখন ত্বরণের মান সর্বোচ্চ হয় বা, $a_{max} = \omega^2 A$ হয়।

৮·৫(গ) চিত্রে N বিন্দুর গতিপথের চরম অবস্থানে ত্বরণ সর্বাধিক এবং মধ্য অবস্থানে ত্বরণ শূন্য হবে।

ত্বরণ-সময় লেখচিত্র একটি ঋণাত্মক sine সদৃশ লেখ। ইহা সরল ছন্দিত গতিসম্পন্ন কণার ত্বরণের সমীকরণ নির্দেশ করে।



চিত্র ৮·৫ (গ)

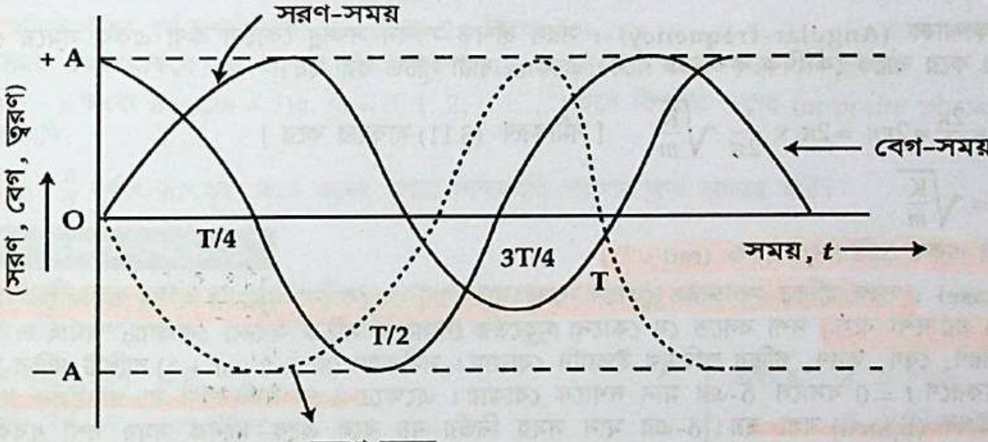
অনুধাবনমূলক কাজ : কখন সরল দোলন গতিসম্পন্ন কণার সরণ, বেগ ও ত্বরণ সর্বোচ্চ হয় ?

সরল দোলন গতিসম্পন্ন কণার সর্বোচ্চ সরণ, বেগ ও ত্বরণের সমীকরণ হলো :

$x_{max} = A$, $v_{max} = \omega A$ এবং $a_{max} = \omega^2 A$

সুতরাং দেখা যায় যে, সর্বোচ্চ সরণ A, সর্বোচ্চ বেগ ωA এবং সর্বোচ্চ ত্বরণ $\omega^2 A$। সরল দোলন গতিসম্পন্ন কণার যেকোনো একদিকে সরণের মান সর্বোচ্চ হলে তখন বেগের মান সর্বনিম্ন হয়। কারণ এই মুহূর্তে বেগের দিক পরিবর্তিত হয়। ঠিক এই সময় ত্বরণের মান সর্বোচ্চ হয় কিন্তু এর দিক হয় সরণের বিপরীত দিকে। আবার যখন সরণের মান শূন্য হয় তখন বেগ সর্বোচ্চ এবং ত্বরণ শূন্য হয়। কণাটি যখন সাম্যাবস্থানের দিকে এগুতে থাকে তখন তার বেগ বাড়তে থাকে অর্থাৎ কণাটি যখন সর্বোচ্চ সরণের দিকে যেতে থাকে তখন বেগ কমতে থাকে।

যাচাই কর : সরণের সমীকরণ, $x = A \sin \omega t$, বেগ, $v = A\omega \cos \omega t$ এবং ত্বরণ $a = -A\omega^2 \sin \omega t$ কে একটি লেখচিত্ররূপে প্রকাশ করলে কীরূপ দেখাবে ? পর্যায়কাল ও দশা বিবেচনা করে ব্যাখ্যা কর।



চিত্র ৮৬

৪. পর্যায়কাল (Time period) : সরল ছন্দিত স্পন্দনসম্পন্ন কোনো কণার একটি পূর্ণ স্পন্দন সম্পন্ন করতে যে সময় ব্যয় হয় তাকে তার **পর্যায়কাল** বলে। একে T দ্বারা প্রকাশ করা হয়। কম্পাঙ্ক n হলে $T = \frac{1}{n}$ হয়। সরল দোলন গতির সরণের সমীকরণ $x = A \sin (\omega t + \delta)$ ... ... (8.8)

সময় t কে $\frac{2\pi}{\omega}$ পরিমাণ বৃদ্ধি করা হলে সরণ হবে $x' = A \sin \left[\omega\left(t + \frac{2\pi}{\omega}\right) + \delta\right]$

$$= A \sin (\omega t + 2\pi + \delta) = A \sin (\omega t + \delta) = x$$

অর্থাৎ $\frac{2\pi}{\omega}$ সময় পরপর রাশিটির পুনরাবৃত্তি ঘটে। সুতরাং সরল ছন্দিত স্পন্দনের পর্যায়কাল $T = \frac{2\pi}{\omega}$।

সরল ছন্দিত স্পন্দন গতির ব্যবকলনীয় সমীকরণের সমাধান হচ্ছে,

$$x = A \sin (\omega t + \delta) \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad (8.8a)$$

সমীকরণ (8.8)-এ সময় t-এর মান $\frac{2\pi}{\omega}$ বৃদ্ধি করা হলে আমরা পাই,

$$x = A \sin \left[\omega\left(t + \frac{2\pi}{\omega}\right) + \delta\right]$$

$$= A \sin (\omega t + 2\pi + \delta) = A \sin [2\pi + (\omega t + \delta)] = A \sin (\omega t + \delta) \quad \ldots \quad (8.9)$$

সুতরাং, দেখা যাচ্ছে যে, $\frac{2\pi}{\omega}$ সময় অন্তর কণার সরণ একই হচ্ছে। কাজেই, $\frac{2\pi}{\omega}$ হচ্ছে সরল ছন্দিত স্পন্দনের পর্যায়কাল। এই $\frac{2\pi}{\omega}$ সময় পর পর রাশিটির পুনরাবৃত্তি ঘটবে।

আবার, $T = \frac{2\pi}{\omega} = \frac{2\pi}{\sqrt{\frac{K}{m}}}$ $\left[\because \frac{K}{m} = \omega^2\right]$

$$= 2\pi\sqrt{\frac{m}{K}} \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad (8.10)$$

সমীকরণ (8.10) হলো সরল ছন্দিত স্পন্দনের পর্যায়কালের সমীকরণ। এটি ভর, পর্যায়কাল ও বল ধ্রুবকের মধ্যে সম্পর্কজনিত সমীকরণও বটে। অর্থাৎ সরল দোলন গতিসম্পন্ন কণার পর্যায়কাল বল ধ্রুবকের বর্গমূলের ব্যস্তানুপাতিক। পর্যায়কালের একক sec, এর মাত্রা T।

৫. কম্পাঙ্ক (Frequency) : কোনো কম্পমান বস্তু বা স্পন্দক একক সময়ে যতগুলো পূর্ণ দোলন দেয় তাকে **কম্পাঙ্ক** বলে। একে n দ্বারা সূচিত করা হয়।

$$\therefore\ n = \frac{1}{T} = \frac{\omega}{2\pi} = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{K}{m}} \quad \ldots \quad \ldots \quad (8.11)$$

[সমীকরণ (8.10) ব্যবহার করে]

এটিই হলো সরল ছন্দিত স্পন্দনের কম্পাঙ্কের সমীকরণ।

৬. কৌণিক কম্পাঙ্ক (Angular frequency) : সরল ছন্দিত স্পন্দন সম্পন্ন কোনো কণা একক সময়ে যে কৌণিক দূরত্ব অতিক্রম করে তাকে **কৌণিক কম্পাঙ্ক** বলে। একে ω দ্বারা সূচিত করা হয়।

$$\omega = \frac{2\pi}{T} = 2\pi n = 2\pi \times \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{K}{m}}$$ [সমীকরণ (8.11) ব্যবহার করে]

$$\omega = \sqrt{\frac{K}{m}} \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad (8.12)$$

ω-এর একক রেডিয়ান/সেকেন্ড (rad s^{-1})।

৭. দশা (Phase) : সরল ছন্দিত স্পন্দনরত কোনো বস্তু বা কণার যে কোনো মুহূর্তের গতির অবস্থাকে (সরণ, বেগ, ত্বরণ ইত্যাদি) এর **দশা বলে।** দশা বলতে যে কোনো মুহূর্তের দোলনের সঠিক অবস্থা বোঝায়। অর্থাৎ এ সময়ে বস্তু বা কণাটির সরণ, বেগ, ত্বরণ, গতির অভিমুখ ইত্যাদি বোঝায়। সমীকরণ (8.9)-এ $(\omega t + \delta)$ রাশিটি গতির দশা নির্দেশ করছে। সমীকরণে $t = 0$ বসালে δ-এর মান দশাকে বোঝায়। এক্ষেত্রে δ-কে আদি দশা বা প্রারম্ভিক দশা (initial phase) বা ইপক (Epoch) বলা হয়। δ-এর মান সময় নির্ভর নয় বলে একে অনেক সময় দশা ধ্রুবকও (Phase constant) বলা হয়। ধ্রুবক δ গতির অবস্থা বোঝায়। যেমন—

$\delta = 0°$ হলে,

$x = A\sin(\omega t + \delta) = A\sin(\omega t + 0°) = A\sin\omega t$

কণা বা বস্তুটির গতি সাম্যাবস্থান হতে শুরু হয়েছে বুঝায়।

আবার, $\delta = \frac{\pi}{2}$ হলে,

$x = A\sin(\omega t + \delta) = A\sin(\omega t + \pi/2) = A\cos\omega t$

এক্ষেত্রে কণাটির গতি শুরু হয় সরণের সর্বোচ্চ অবস্থান থেকে। δ-এর বিভিন্ন মান ভিন্ন ভিন্ন আদি সরণ নির্দেশ করে।

সুতরাং $t = 0$ সময়ে $x = A$ অর্থাৎ সরণ x হচ্ছে সর্বাধিক। এক্ষেত্রে কণাটির গতি শুরু হয় এক প্রান্ত হতে। আবার কণাটির আদি অবস্থান এবং দ্রুতি দ্বারা সরল দোলন গতির বিস্তার এবং দশা পার্থক্য δ নির্ণীত হয়।

৮. পূর্ণ স্পন্দন (Complete vibration) : সরল দোলন গতির ক্ষেত্রে একটি সম্পূর্ণ অগ্র–পশ্চাৎ গতিকে পূর্ণ স্পন্দন বা দোলন বলে।

৯. পর্যায়কাল ও বল ধ্রুবকের সম্পর্ক : কৌণিক কম্পাঙ্ক ω, পর্যায়কাল T এবং বল ধ্রুবক K হলে $\omega^2 = \frac{K}{m}$ হয়। এখানে m = স্পন্দনশীল কণার ভর।

আবার পর্যায়কাল $T = \frac{2\pi}{\omega} = \frac{2\pi}{\sqrt{\frac{K}{m}}} = 2\pi\sqrt{\frac{m}{K}}$

$\therefore\ T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{K}}$, MAT: 18-19

বা, $T \propto \frac{1}{\sqrt{K}}$ অর্থাৎ পর্যায়কাল বল ধ্রুবকের বর্গমূলের ব্যস্তানুপাতিক।

সংজ্ঞা : কোনো স্প্রিং এর মুক্তপ্রান্তে একক সরণ ঘটালে স্প্রিংটি সরণের বিপরীত দিকে যে প্রত্যয়নক বল প্রয়োগ করে তাকে বল ধ্রুবক বলে।

৮.৫ দশা ও দশা পার্থক্য
Phase and phase difference

দশা

সরল ছন্দিত গতিসম্পন্ন একটি কণার গতির সমীকরণ $x = A \sin (\omega t + \delta)$ লক্ষ করলে দেখা যায় যে, সমীকরণটিতে দুটি অংশ রয়েছে। যথা–(১) সময় নিরপেক্ষ অংশ (time independent part), A। এটি বিস্তার অংশ এবং (২) সময় নির্ভর অংশ (time dependent part) $(\omega t + \delta)$ বা দশা অংশ। এই সময় নির্ভর অংশই একটি সরল ছন্দিত গতিসম্পন্ন কণার সরণ, বেগ, ত্বরণ ইত্যাদির মান বিভিন্ন সময়ে কত তা নির্ধারণ করে। যখন $t = 0$, ওই সময়ে দশা δ হয়। δ-কে আদি দশা বা প্রারম্ভিক দশা বা দশা ধ্রুবক বলে।

দশা পার্থক্য

দুটি সরল ছন্দিত গতি একই ছন্দে না চললে তাদের মধ্যে দশা পার্থক্য (Phase difference) আছে ধরা হয়। দশা পার্থক্য বলতে একটি কণা অন্য আরেকটি কণা থেকে কত দশা কোণে এগিয়ে (lead) বা পিছিয়ে (lag) তা বোঝানো হয়।

ব্যাখ্যা : ধরা যাক দুটি ছন্দিত গতি স্পন্দন $x_1 = A \sin \omega t$ এবং $x_2 = A \sin (\omega t + \delta)$। এদের মধ্যে দ্বিতীয়টি প্রথমটির সাপেক্ষে δ কোণে এগিয়ে রয়েছে। সুতরাং এদের মধ্যে দশা পার্থক্য δ। এখন যদি ওই

(i) ছন্দিত গতির শর্ত দশা পার্থক্য $\delta = 0$, বা 2π কিংবা $\delta = 2\pi n$ ($n = 0, 1, 2, \ldots\ldots$) হয়, তবে এদের গতির অবস্থা সবসময় একই থাকবে। এ ধরনের গতি সমদশায় (same phase) রয়েছে ধরা হয়। আবার

(ii) $\delta = \pi$ অথবা $\delta = (2n + 1)\pi$, ($n = 0, 1, 2, \ldots\ldots\ldots$) হলে বিপরীত দশায় (opposite phase) রয়েছে ধরা হয়। আবার যদি,

(iii) $\delta = \frac{\pi}{2}$ অর্থাৎ $90°$ হয়, তবে এদের কণার স্পন্দনগতি পরস্পর লম্ব বরাবর ঘটে।

গাণিতিক উদাহরণ ৮.১

১। একটি বস্তুকণা তার দোলন সীমার শেষ প্রান্ত হতে দোলন শুরু করে 0·1 m বিস্তার ও 1 Hz কম্পাঙ্কযুক্ত সরল ছন্দিত গতি সম্পন্ন করে। 4·5 s পর কণাটির সরণ কত হবে ?

মনে করি, সরণ $= x$

আমরা পাই, $x = A \sin\omega t$

$$= A \sin \frac{2\pi}{T} \times t \quad \ldots \quad \ldots \quad \text{(i)}$$

এখানে, $n = 1\ \text{Hz}$

$A = 0{\cdot}1\ \text{m}$

$T = \frac{1}{n} = \frac{1}{1\ \text{s}^{-1}} = 1\ \text{s}$

দোলন সীমার শেষ প্রান্ত হতে মধ্য অবস্থানে যেতে $\frac{1}{4}$ s = 0·25 s সময় লাগে হেতু 4·25 s-এ কণাটি 4টি পূর্ণ কম্পন দিয়ে মধ্য অবস্থানে আসবে। কাজেই মধ্য অবস্থান অতিক্রম করার 0·25 s পরের সরণই হবে নির্ণেয় 4·5 s পর কণাটির সরণ।

∴ সমীকরণ (i) হতে পাই,

$$x = 0{\cdot}1\ \text{m} \times \sin\frac{2\pi}{1} \times 0{\cdot}25 = 0{\cdot}1\ \text{m} \times \sin\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0{\cdot}1\ \text{m}$$

২। একটি সরল ছন্দিত গতিসম্পন্ন কণার সর্বোচ্চ বেগ 0·03 ms⁻¹। কণাটির বিস্তার 0·006 m হলে পর্যায়কাল কত হবে ?

আমরা জানি, $v_{max} = \omega A$

$$\therefore\ \omega = \frac{v_{max}}{A} = \frac{0{\cdot}03}{0{\cdot}006} = 5\ \text{rad s}^{-1}$$

এখানে, $v_{max} = 0{\cdot}03\ \text{ms}^{-1}$

$A = 0{\cdot}006\ \text{m}$

আবার, $T = \frac{2\pi}{\omega} = \frac{2 \times 3{\cdot}14}{0{\cdot}5} = 1{\cdot}256$ sec

৩। একটি সরল ছন্দিত গতির বস্তুকণার পর্যায়কাল 0·001 s এবং বিস্তার 0·005 m। কণাটির সর্বোচ্চ বেগ এবং গতিপথের মধ্য অবস্থান হতে 0·002 m দূরে ত্বরণ নির্ণয় কর।

মনে করি, ত্বরণ $= \vec{a}$

আমরা পাই,

$$|\vec{a}| = \omega^2 |x|$$

$$= \left(\frac{2\pi}{T}\right)^2 |x| \quad \ldots \quad \ldots \quad \text{(i)}$$

এখানে,

$T = 0{\cdot}001\ \text{s}$

$A = 0{\cdot}005\ \text{m}$

$|x| = 0{\cdot}002\ \text{m}$

$\pi^2 = 9{\cdot}87$

∴ সমীকরণ (i) হতে পাই,

$$|\vec{a}| = \frac{4\pi^2}{T^2}|x| = \frac{4 \times 9.87}{(0.001)^2} \times 0.002$$
$$= 7.9 \times 10^4 \text{ ms}^{-2}$$

পুনরায়, ধরি সর্বোচ্চ বেগ $= v_{max}$

$$\therefore v_{max} = \omega A = \frac{2\pi}{T} \times A$$

$$\therefore v_{max} = \frac{2 \times 3.14}{0.001} \times 0.005 = 31.4 \text{ ms}^{-1}$$

৪। একটি সরল ছন্দিত গতিতে চলমান বস্তুর বিস্তার 0.01 m ও কম্পাঙ্ক 12 Hz। বস্তুটির 0.005 m সরণে বেগ কত হবে ? বস্তুটির সর্বোচ্চ বেগ কত হবে ? [য. বো. ২০০৬ ; রা. বো. ২০০১]

মনে করি, বেগ $= v$

আমরা পাই, $v = \omega\sqrt{A^2 - x^2}$ ... ... (i)

সমীকরণ (i) হতে পাই,

$$v = 2 \times 3.14 \times 12 \text{ rad s}^{-1}\sqrt{(0.01 \text{ m})^2 - (0.005 \text{ m})^2}$$
$$= 0.653 \text{ ms}^{-1}$$

এখানে,
$\omega = 2\pi n = 2 \times 3.14 \times 12 \text{ rad s}^{-1}$
$A = 0.01$ m
$x = 0.005$ m
$n = 12$ Hz

পুনরায়, সর্বোচ্চ বেগ v_{max}-এর ক্ষেত্রে, $x = 0$

∴ সমীকরণ (i) অনুযায়ী,

$$v_{max} = \omega A$$
$$= 2 \times 3.14 \times 12 \text{ rad s}^{-1} \times 0.01 \text{ m} = 0.7536 \text{ ms}^{-1}$$

৫। সরল ছন্দিত গতিসম্পন্ন একটি কণার বিস্তার 0.05 m এবং পর্যায়কাল 12 sec। এর সর্বোচ্চ দ্রুতি ও ত্বরণ নির্ণয় কর।

কৌণিক কম্পাঙ্ক ω হলে,

$$\omega = \frac{2\pi}{T} = \frac{2\pi}{12}$$
$$= \frac{2 \times 3.14}{12} = 0.52 \text{ rad s}^{-1}$$

$$\therefore v_{max} = \omega A = 0.52 \times 0.05 = 0.026 \text{ ms}^{-1}$$

এবং সর্বোচ্চ ত্বরণ,

$$a_{max} = \omega^2 A = (0.52)^2 \times 0.05 = 0.0135 \text{ ms}^{-2}$$

এখানে,
পর্যায়কাল, T = 12 s
বিস্তার, A = 0.05 m
$v_{max} = ?$
$a_{max} = ?$

৬। প্রমাণ কর যে, একটি প্লাটফর্ম 4.9 m বিস্তারে কাঁপতে শুরু করলে এর ওপর একজন মানুষ দাঁড়িয়ে থাকলে, তার পা প্লাটফর্ম হতে আলাদা হবার জন্য প্লাটফর্মের কৌণিক কম্পাঙ্ক $\sqrt{2}$ হবে।

[BUET Admission Test, 2015-16]

যদি প্লাটফর্মের ত্বরণ g এর চেয়ে বেশি হয় তবে পা প্লাটফর্ম থেকে আলাদা হবে।

আমরা জানি,

$$a = \omega^2 A_{max}$$
$$\text{বা, } g = \omega^2 A$$
$$\text{বা, } 9.8 = \omega^2 \times 4.9$$
$$\therefore \omega^2 = 2$$
$$\therefore \omega = \sqrt{2}$$

৭। দুটি সরল ছন্দিত গতির সমীকরণ $x_1 = 0\cdot2 \sin\left(50\pi t + \frac{\pi}{3}\right)$ এবং $x_2 = 0\cdot2 \cos 50\pi t$। দ্বিতীয় কণাটির বেগের সাপেক্ষে প্রথম কণাটির দশা পার্থক্য নির্ণয় কর।

সরল স্পন্দিত গতির প্রথম কণাটির সমীকরণ $x_1 = 0\cdot2 \sin\left(50\pi t + \frac{\pi}{3}\right)$ এবং দ্বিতীয়টির সমীকরণ $x_2 = 0\cdot2 \cos 50\pi t$।

$\therefore$ প্রথমটির বেগ, $v_1 = \frac{dx_1}{dt} = 0\cdot2 \times 50\pi \cos\left(50\pi t + \frac{\pi}{3}\right)$

এবং দ্বিতীয়টির বেগ, $v_2 = \frac{dx_2}{dt} = -0\cdot2 \times 50\pi \sin 50\pi t = 0\cdot2 \times 50\pi \cos\left(50\pi t + \frac{\pi}{2}\right)$

অতএব, এদের দশা পার্থক্য $= \left(50\pi t + \frac{\pi}{3}\right) - \left(50\pi t + \frac{\pi}{2}\right)$

$$= \frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{2} = \frac{2\pi - 3\pi}{6} = -\frac{\pi}{6}$$

৮। 50 g ভরবিশিষ্ট একটি সরল দোলকের দোলনকাল 2 s এবং বিস্তার 10 cm। দোলনরত অবস্থায় যখন এর বব মধ্যস্থানে আসে তখন ববটি ভূমি হতে 45 cm ওপরে অবস্থান করে। (ক) দোলনরত ববের সর্বোচ্চ বেগ কত ? (খ) দোলনরত বব যখন মধ্যস্থানে আসে তখন সুতাটি ছিঁড়ে গেলে এর গতি প্রকৃতি বিশ্লেষণ থেকে কত দূরে ভূমিতে পতিত হবে গাণিতিকভাবে পরিমাপ কর। [কু. বো. ২০১৫]

(ক) আমরা জানি, ববের সর্বোচ্চ বেগ,

$$v_{max} = \omega A$$

আবার, $\omega = \frac{2\pi}{T}$

$$\therefore \quad v_{max} = \frac{2\pi}{T} A = \frac{2 \times 3\cdot14 \times 0\cdot1}{2} = 0\cdot314 \text{ ms}^{-1}$$

(খ) ববটি মধ্য অবস্থানে এসে যদি সুতাটি ছিড়ে যায় তাহলে ববটি অনুভূমিকভাবে নিক্ষিপ্ত বস্তুর ন্যায় পর্যায়বৃত্তাকার পথে ভূমিতে পতিত হবে।

আমরা জানি,

$$y = -\frac{1}{2} g \left(\frac{x}{v_0}\right)^2$$

বা, $-0\cdot45 = -\frac{1}{2} \times 9\cdot8 \times \frac{x^2}{(0\cdot314)^2}$

$$\therefore \quad x = \sqrt{\frac{2 \times 0\cdot45 \times (0\cdot314)^2}{9\cdot8}} = 0\cdot095 \text{ m} = 9\cdot5 \text{ cm}$$

এখানে,
$v_0 = 0\cdot314 \text{ ms}^{-1}$
$y = -45 \text{ cm} = -0\cdot45$ m (নিম্নমুখি)
$x = ?$

অর্থাৎ ববটি পর্যায়বৃত্তাকার পথে 9·5 cm দূরে ভূমিতে পতিত হবে।

কাজ : সাম্যাবস্থান থেকে একটি সরল দোল গতিসম্পন্ন কণার কী পরিমাণ সরণ হলে কণাটির বেগ সর্বোচ্চ বেগের অর্ধেক হবে?

ধরা যাক x সরণে কণাটির বেগ সর্বোচ্চ বেগের অর্ধেক হবে।

এখন x সরণে কণার বেগ,

$$v = \omega\sqrt{A^2 - x^2}$$

এবং সর্বোচ্চ বেগ, $v_{max} = \omega A$

প্রশ্নানুযায়ী, $\frac{1}{2}\omega A = \omega\sqrt{A^2 - x^2}$

বা, $\frac{A}{2} = \sqrt{A^2 - x^2}$ বা, $\frac{A^2}{4} = A^2 - x^2$

বা, $x^2 = A^2 - \frac{A^2}{4} = \frac{3A^2}{4}$

$$\therefore \quad x = \pm\frac{\sqrt{3}}{2} A$$

এটিই সরণের নির্ণেয় মান।

৮·৬ সরল দোলন গতিসম্পন্ন বস্তুর অন্তরকলন বা অবকলনীয় সমীকরণ
Differential equation of simple harmonic motion

মনে করি m ভরবিশিষ্ট একটি বস্তুকণা সরল দোলন গতিতে আছে। t সময়ে এর সরণ x হলে

বেগ, $v = \frac{dx}{dt}$ এবং ত্বরণ, $a = \frac{d^2x}{dt^2}$

$\therefore$ কণাটির ওপর ক্রিয়াশীল বলের মান,

$F =$ ভর $\times$ ত্বরণ $= ma = m\frac{d^2x}{dt^2}$

যেহেতু বল বা ত্বরণ সরণের সমানুপাতিক এবং বিপরীতমুখি, অতএব

$$m\frac{d^2x}{dt^2} \propto -x$$

বা, $m\frac{d^2x}{dt^2} = -Kx$ ... ... (8.13)

বা, $\frac{d^2x}{dt^2} = \frac{-K}{m}x$

এখানে K একটি ধ্রুব সংখ্যা। একে বল ধ্রুবক বলে। এই ধ্রুবকের মান স্প্রিং-এর দৈর্ঘ্য, জ্যামিতিক গঠন এবং পদার্থের স্থিতিস্থাপক ধর্মের ওপর নির্ভর করে। $K = \frac{F}{x}$ এর একক Nm^{-1} এবং মাত্রা MT^{-2}।

পুনঃ, কণাটির কৌণিক বেগ ω হলে, আমরা পাই

$\frac{d^2x}{dt^2} = a = -\omega^2x$ [সমীকরণ (8.12) হতে] ... ... (8.14)

এখন সমীকরণ (8.13) এবং (8.14) হতে পাই, $-\frac{K}{m}x = -\omega^2x$ বা, $\frac{K}{m} = \omega^2$

সমীকরণ (8.13)-এ $\frac{K}{m}$-এর মান বসিয়ে পাই,

$\boxed{\frac{d^2x}{dt^2} + \omega^2x = 0}$ ... ... (8.15)

সমীকরণ (8.15) হলো সরল ছন্দিত স্পন্দনরত কণার অবকলনীয় সমীকরণ।

৮·৬·১ অন্তরকলন বা অবকলনীয় সমীকরণের সমাধান

(8.15) নং সমীকরণকে $2\frac{dx}{dt}$ দিয়ে গুণ করে পাই,

$$2\frac{dx}{dt}\cdot\frac{d^2x}{dt^2} + \omega^2.2x\frac{dx}{dt} = 0$$

বা, $\frac{d}{dt}\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \omega^2\frac{d}{dt}(x^2) = 0$

t-এর সাপেক্ষে সমাকলন করে পাই,

$\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \omega^2x^2 = c =$ ধ্রুবক ... ... [8.15(a)]

কিন্তু যখন $x = \pm a$, অর্থাৎ বিস্তারের সর্বোচ্চ অবস্থানে, তখন

বেগ $\frac{dx}{dt} = 0 \therefore c = \omega^2x^2$

সমীকরণ [8.15(a)]-তে $c = \omega^2a^2$ বসিয়ে পাই

$$\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 = \omega^2(a^2 - x^2)$$

বা, $\frac{dx}{dt} = \omega\sqrt{a^2 - x^2}$

বা, $\frac{dx}{\sqrt{a^2 - x^2}} = \omega dt$

সমাকলন করে পাই,

$\sin^{-1}\frac{x}{a} = \omega t + \delta$ এখানে δ = সমাকলন ধ্রুবক।

বা, $\boxed{x = a\sin(\omega t + \delta)}$ ... ... (8.16)

এখানে,
x = ছন্দিত গতিসম্পন্ন কণার সরণ
a = বস্তুর সর্বোচ্চ সরণ
δ = আদি দশা
$\omega t + \delta$ = বস্তুর দশা

এই সমীকরণ সরল দোলন গতির অবকলন সমীকরণের সাধারণ সমাধান।

কাজ : $x = A \sin \omega t$ সমীকরণটি একটি সরল দোলগতির সমীকরণ। কীভাবে দেখাবে ? গাণিতিকভাবে ব্যাখ্যা কর।

এক্ষেত্রে বেগ, $v = \frac{dx}{dt} = A\omega \cos \omega t$; এবং ত্বরণ, $a = \frac{dv}{dt} = -A\omega^2 \sin \omega t = -\omega^2 x$

ত্বরণের সমীকরণ থেকে দেখা যায় ত্বরণ সরণের সমানুপাতিক ও বিপরীতমুখি। অতএব $x = A \sin \omega t$ সমীকরণটি একটি সরল দোলগতি নির্দেশ করে।

গাণিতিক উদাহরণ ৮.২

১। সরল ছন্দিত গতিসম্পন্ন একটি কণার গতির সমীকরণ $y = 10 \sin (\omega t + \delta)$, পর্যায়কাল 30s এবং আদি সরণ 0·05m হলে কণাটির (ক) কৌণিক কম্পাঙ্ক; (খ) আদি দশা নির্ণয় কর। [ঢা. বো. ২০০২]

এখানে,
পর্যায়কাল, T = 30s
কৌণিক কম্পাঙ্ক, $\omega = ?$
আদি সময়, $t = 0$
আদি সরণ, $y = 0·05$ m
আদি দশা, $\delta = ?$

(ক) আমরা জানি,

$$\omega = \frac{2\pi}{T}$$

$$\therefore \quad \omega = \frac{2 \times 3·14}{30} = 0·209 \text{ rads}^{-1}$$

(খ) আবার, $y = 10 \sin (\omega t + \delta)$

বা, $0·05 = 10 \sin (\omega t + \delta)$

$= 10 \sin (\omega \times 0 + \delta) = 10 \sin \delta$

$$\therefore \sin \delta = \frac{0·05}{10} = 0·005$$

$$\therefore \quad \delta = \sin^{-1} (0·005) = 0·286°$$

২। একটি বস্তুকণা সরল ছন্দিত স্পন্দনে দুলছে যার গতির সমীকরণ $x = 10 \cos (6\pi t + \pi/3)$ মিটার। $t = 3$ সেকেন্ড সময় পরে বস্তুটির সরণ, বেগ ও ত্বরণ কত হবে ? [KUET Admission Test, 2006-07 (মান ভিন্ন)]

এখানে,

সরণ, $x = 10 \cos (6\pi t + \pi/3)$

3 সেকেন্ড পরে, $x = 10 \cos (6\pi \times 3 + \pi/3) = 10 \cos (18\pi + \pi/3)$

$= 10 \cos \pi/3 = 10 \times \frac{1}{2} = 5$m

বেগ, $v = \frac{dx}{dt} = \frac{d}{dt} \{10 \cos (6\pi t + \pi/3) = -60 \pi \sin (6\pi t + \pi/3)$

3 সেকেন্ড পরে, $v = -60\pi \sin (6\pi \times 3 + \pi/3)$

$= -60\pi \sin (18\pi + \pi/3)$

$= -60\pi \sin \pi/3 = -60 \times 3·14 \times 0·866$

$= -163·15 \text{ ms}^{-1}$

ত্বরণ, $a = \frac{dv}{dt} = \frac{d}{dt} \{-60 \pi \sin (6\pi t + \pi/3) = -360 \pi^2 \cos (6\pi t + \pi/3)$

3 সেকেন্ড পরে, $a = -360 \pi^2 \cos (6\pi \times 3 + \pi/3)$

$= -360\pi^2 \cos (18\pi + \pi/3)$

$= -360\pi^2 \cos \pi/3 = -360 \times 9·87 \times \frac{1}{2}$

$= -1776·6 \text{ms}^{-2}$

৩। দেখাও যে, $x = A \sin \omega t$ সমীকরণটি একটি সরল দোলন গতি নির্দেশ করে।

$x = A \sin \omega t$

$\therefore$ বেগ, $v = \frac{dx}{dt} = A\omega \cos \omega t$

ত্বরণ, $a = \frac{dv}{dt} = -A\omega^2 \sin \omega t$

বা, $a = -\omega^2 x$

অতএব ত্বরণ সরণের সমানুপাতিক এবং বিপরীতমুখি। ইহা সরল দোলন গতির একটি বৈশিষ্ট্য। অতএব, $x = A \sin \omega t$ সমীকরণটি একটি সরল দোলন গতি নির্দেশ করে।

৪। কোনো স্প্রিং এর এক প্রান্তে 50 g ভরের একটি বস্তু সরল ছন্দিত স্পন্দনে স্পন্দিত হয়। বস্তুর গতিপথের বিস্তার 10 cm এবং পর্যায়কাল 1 s। কৌণিক কম্পাঙ্ক, কম্পাঙ্ক এবং স্প্রিং ধ্রুবক নির্ণয় কর।

আমরা জানি,

কৌণিক কম্পাঙ্ক,

$$\omega = \frac{2\pi}{T} = \frac{2 \times 3{\cdot}14}{1} = 6{\cdot}28 \text{ rad s}^{-1}$$

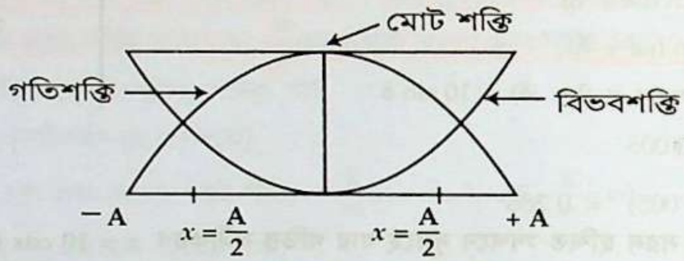
কম্পাঙ্ক, $n = \frac{1}{T} = \frac{1}{1} = 1 \text{ Hz}$

স্প্রিং ধ্রুবক, $k = \omega^2 m \quad \left(\because \omega = \sqrt{\frac{k}{m}}\right)$

$$= (6{\cdot}28)^2 \times 0{\cdot}05 = 1{\cdot}971 \text{ Nm}^{-1}$$

এখানে,
ভর, $m = 50 \text{ g} = 0{\cdot}05 \text{ kg}$
বিস্তার, $A = 10 \text{ cm} = 0{\cdot}10 \text{ m}$
পর্যায়কাল, $T = 1 \text{ s}$
কৌণিক কম্পাঙ্ক, $\omega = ?$
কম্পাঙ্ক, $n = ?$
স্প্রিং ধ্রুবক, $k = ?$

৫। চিত্রে সরল ছন্দিত গতিতে স্পন্দনরত 1 kg ভরের বস্তুর শক্তি বনাম সরণ লেখচিত্র দেখান হয়েছে। বস্তুর বিস্তার 0·01 m এবং কম্পাঙ্ক 12 Hz। $x = \frac{A}{2}$ অবস্থানে বস্তুর বেগ নির্ণয় কর।



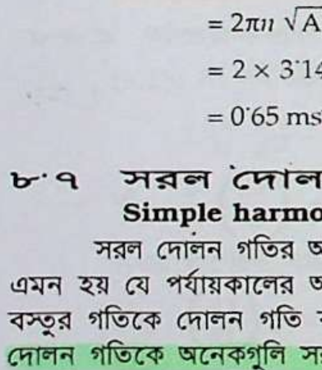
আমরা জানি, বস্তুর বেগ,

$$v = \omega\sqrt{A^2 - x^2}$$
$$= 2\pi n\sqrt{A^2 - x^2}$$
$$= 2 \times 3{\cdot}14 \times 12\sqrt{(0{\cdot}01)^2 - (0{\cdot}005)^2}$$
$$= 0{\cdot}65 \text{ ms}^{-1}$$

এখানে,
$A = 0{\cdot}01 \text{ m}$
$n = 12 \text{ Hz}$
$x = \frac{A}{2} = \frac{0{\cdot}01}{2} = 0{\cdot}005 \text{ m}$
$v = ?$

৮·৭ সরল দোলন গতি
Simple harmonic motion

সরল দোলন গতির আলোচনা পদার্থবিজ্ঞানে একটি গুরুত্বপূর্ণ বিষয়। পর্যাবৃত্ত গতিসম্পন্ন কোনো বস্তুর গতি যদি এমন হয় যে পর্যায়কালের অর্ধেক সময় কোনো নির্দিষ্ট দিকে এবং বাকি অর্ধেক সময় বিপরীত দিকে চলে তবে ওই বস্তুর গতিকে দোলন গতি বা স্পন্দন বলে। এই গতির একটি বিশেষ রূপ হলো সরল দোলন গতি। যেকোনো জটিল দোলন গতিকে অনেকগুলি সরল দোলন গতির সমষ্টিরূপে প্রকাশ করা যায়।



চিত্র ৮.৭

MAT: 20-21

তোমরা সরল দোলক দেখেছ, এটিকে দুলতে দিলে এদিক ওদিক দোলে [চিত্র ৮·৭]। লক্ষ করলে দেখবে যে, ববকে ধরে যেকোনো একদিকে টেনে ছেড়ে দিলে তা আবার বিপরীত দিকে অর্থাৎ স্থির অবস্থায় বা যে অবস্থানে ছিল সেই দিকে চলে আসে। এ ধরনের গতিসম্পন্ন দোলকের গতি সরল দোলন গতি। সরল দোলকের কৌণিক বিস্তার 4° এর মধ্যে রাখতে হয়। কৌণিক বিস্তার 4° এর বেশি হলে সরল দোলকের গতি সরলরৈখিক না হয়ে বৃত্তাকার হয়। ফলে সরল দোলক সরল দোলন গতির বৈশিষ্ট্য মেনে চলে না। সেক্ষেত্রে $T = 2\pi\sqrt{\frac{L}{g}}$ সমীকরণ প্রযোজ্য হয় না।

সংজ্ঞা : কোনো পর্যায়গতিসম্পন্ন বস্তুর ওপর কার্যরত ত্বরণ যদি তার গতিপথের একটি নির্দিষ্ট বিন্দু অভিমুখে এমনভাবে ক্রিয়া করে যে, তার মান ওই বিন্দু হতে বস্তুর সরণের মানের সমানুপাতিক হয়, তবে বস্তুর উক্ত গতিকে সরল দোলন গতি বলে।

উদাহরণ : খুব কম বিস্তারের সরল দোলকের গতি, সুর শলাকার বাহুর কম্পন, স্প্রিং এর উল্লম্ব কম্পন, গাড়ির ইঞ্জিনের পিস্টনের গতি ইত্যাদি।

৮·৭·১ সরল দোলকের সূত্রাবলি

প্রথম সূত্র (সমকাল সূত্র) : কোনো স্থানে নির্দিষ্ট দৈর্ঘ্যবিশিষ্ট একটি সরল দোলকের বিস্তার 4° এর মধ্যে থাকলে তার প্রতিটি দোলনের জন্য সমান সময় লাগবে।

দ্বিতীয় সূত্র (দৈর্ঘ্যের সূত্র) : বিস্তার 4° এর মধ্যে থাকলে কোনো নির্দিষ্ট স্থানে সরল দোলকের দোলন কাল তার কার্যকরী দৈর্ঘ্যের বর্গমূলের সমানুপাতিক অর্থাৎ $T \propto \sqrt{L}$ অর্থাৎ কার্যকরী দৈর্ঘ্য 4 গুণ বাড়ালে দোলন কাল 2 গুণ বাড়বে। MAT: 15-16

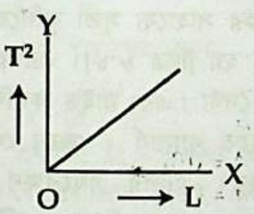
তৃতীয় সূত্র (ত্বরণের সূত্র) : বিস্তার 4° এর মধ্যে থাকলে নির্দিষ্ট দৈর্ঘ্যবিশিষ্ট কোনো একটি সরল দোলকের দোলনকাল ওই স্থানের অভিকর্ষীয় ত্বরণের বর্গমূলের ব্যস্তানুপাতিক। এই সূত্র অনুযায়ী $T \propto \frac{1}{\sqrt{g}}$ বা $T^2 \propto \frac{1}{g}$ বা $T^2 =$ ধ্রুবক $\times \frac{1}{g}$। এই সম্পর্ক g—T^2 লেখচিত্রে [চিত্র ৮·৭(খ) ও ৮·৭(গ)] দেখান হলো।

চতুর্থ সূত্র (ভরের সূত্র) : বিস্তার 4° এর মধ্যে এবং কার্যকরী দৈর্ঘ্য স্থির থাকলে কোনো স্থানে সরল দোলকের দোলনকাল দোলক পিণ্ডের ভর, আকৃতি, উপাদানের ওপর নির্ভর করে না।

সরল দোলকের সূত্রগুলোকে একত্রে $T \propto \frac{L}{\sqrt{g}}$ বা, $\boxed{T = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{L}{g}}}$ আকারে লেখা যায়। **ইহাই সরল দোলকের সূত্র।** MAT:12-13; MAT:09-10

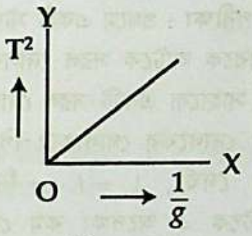
এই সূত্র অনুযায়ী $T \propto \sqrt{L}$ বা $T^2 \propto L$ বা $T^2 =$ ধ্রুবক $\times L$, L—T^2 লেখচিত্রটি দেখান হলো [চিত্র ৮·৭(ক)]।

$L - T^2$ লেখচিত্র



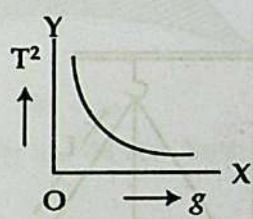
চিত্র ৮·৭(ক)

$g - T^2$ লেখচিত্র



চিত্র ৮·৭(খ)

$g - T^2$ লেখচিত্র



চিত্র ৮·৭(খ)

স্বল্প বিস্তারে দোলায়মান সরল দোলকের গতি সরল দোলন বা দোল গতি। এটি নিম্নলিখিত বৈশিষ্ট্যগুলো মেনে চলে।

৮·৭·২ সরল দোলন গতির বৈশিষ্ট্য
Characteristics of simple harmonic motion

(১) এটি একটি পর্যাবৃত্ত গতি।
(২) একটি নির্দিষ্ট সময় পরপর এই গতি বিপরীতমুখি হয়।
(৩) এর গতি সরলরেখায় ঘটে।
(৪) ত্বরণ সর্বদা সরণের সমানুপাতিক।
(৫) ত্বরণ সরণের বিপরীতমুখি।
(৬) ত্বরণ বস্তু কণাটির মধ্য বা সাম্য অবস্থান অভিমুখী।
(৭) সরল গতিসম্পন্ন কণা বা বস্তু যেই মুহূর্তে সাম্যাবস্থান অতিক্রম করে সেই মুহূর্তে গতিবেগ সর্বোচ্চ হয়। সরণের শেষ প্রান্তে বেগ মুহূর্তের জন্য শূন্য হয়।
(৮) সরল দোলনগতির পর্যায়কাল তার বিস্তারের ওপর নির্ভরশীল নয়।
(৯) গতিপথের মধ্য অবস্থানে বেগ সর্বাধিক, সরণ সর্বনিম্ন।

নিজে কর : দোলনরত দোলক কোনো শব্দ উৎপন্ন করে না কেন ? কী ধরনের তরঙ্গ তা উৎপন্ন করে?

কোনো শব্দ শ্রুতিগোচর হতে গেলে শব্দ তরঙ্গের কম্পাঙ্ক 20 থেকে 20,000/sec (Hz) হতে হয়। সাধারণত দোলকের কম্পাঙ্ক অনেক কম হয়। যেমন সেকেন্ড দোলকের কম্পাঙ্ক 0·5/sec যা শ্রুতিগোচর শব্দের কম্পাঙ্কের চেয়ে খুব সামান্য, যে কারণে দোলকের কম্পনের শব্দ শোনা যায় না।

হিসাব কর : কোনো একটি দৃঢ় স্থান হতে একটি স্প্রিং খাড়াভাবে দোলানো হচ্ছে। এর নিচের প্রান্তে 200 g ভরের একটি বস্তু আটকানো আছে। নিচের দিকে 50 g-wt বল প্রয়োগ করায় বস্তুটি 5 cm নিচে নেমে গেল। এবার ছেড়ে দিলে বস্তুটি ওপর-নিচে সরল দোলন গতি লাভ করবে। দোলনের পর্যায়কাল এবং স্প্রিং-এর বল ধ্রুবক নির্ণয় কর।

৮.৮ সরল দোলন গতির ব্যবহার
Application of simple harmonic motion

সরল দোলন গতি ব্যবহার করে সরল দোলকের সাহায্যে পর্যায়কাল এবং স্প্রিং স্পন্দনের পর্যায়কাল নির্ণয় করা যায়। এই পর্যায় কালের মান থেকে নিম্নলিখিত ক্ষেত্রে সরল দোলন গতি ব্যবহার করা যায়।

(১) অভিকর্ষজ ত্বরণ g-এর মান নির্ণয় করা যায়।
(২) পাহাড়ের উচ্চতা নির্ণয় করা যায়।
(৩) সময় নির্ণয় করা যায়।

১. সরল দোলকের সাহায্যে g-এর মান নির্ণয়

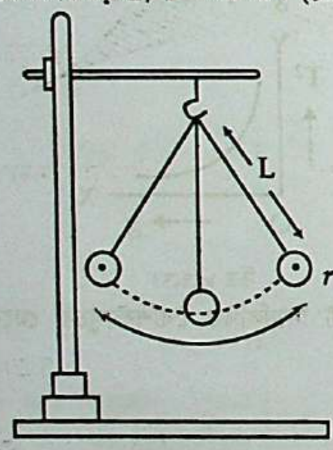
মূলতত্ত্ব (Theory) : সরল দোলকের সাহায্যে কোনো স্থানের অভিকর্ষজ ত্বরণ নির্ণয় করা যায়। এর জন্য ব্যবহৃত সমীকরণটি হলো, $T = 2\pi\sqrt{\frac{L}{g}}$

এখানে, T = দোলন কাল, L = কার্যকর দৈর্ঘ্য এবং g = অভিকর্ষজ ত্বরণ।

এখন ওপরের সমীকরণের উভয় পার্শ্বকে বর্গ করে পাই, $T^2 = 4\pi^2\frac{L}{g}$

বা, $g = 4\pi^2\frac{L}{T^2}$ ... ... (8.17)

π একটি ধ্রুব রাশি ও একটি নির্দিষ্ট স্থানে g ধ্রুব। কাজেই ওই স্থানে L/T^2-এর একটি নির্দিষ্ট মান পাওয়া যাবে এবং গড় L/T^2-এর মান (8.17) সমীকরণে বসিয়ে g-এর মান নির্ণয় করা যাবে।



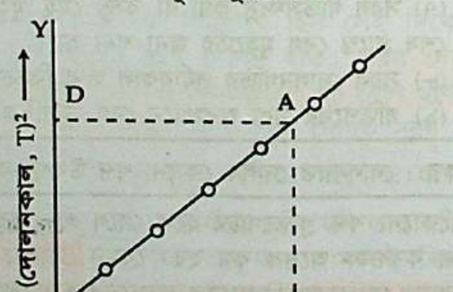
চিত্র ৮.৮

পরীক্ষা : প্রথমে একটি স্ট্যান্ড হতে হুকের সাহায্যে সুতা ঝুলিয়ে সুতার প্রান্তে ববকে আটকে সরল দোলক তৈরি করা হয় [চিত্র ৮.৮]। এরপর মিটার স্কেলের সাহায্যে একটি সরল দোলকের সুতার দৈর্ঘ্য l এবং স্লাইড ক্যালিপার্সের সাহায্যে দোলকের গোলাকার পিণ্ডের ব্যাস হতে ব্যাসার্ধ r জেনে দোলকের কার্যকর দৈর্ঘ্য, $L = l + r$ নির্ণয় করা হয়। এরপর পর্যবেক্ষণ স্থানে দোলকটিকে 4° অপেক্ষা কম কৌণিক বিস্তারে দুলতে দিয়ে একটি স্টপ-ওয়াচের সাহায্যে তার 20টি পূর্ণ দোলনের সময় কাল t নির্ণয় করে 20 দ্বারা ভাগ করে দোলন কাল, $T = \frac{t}{20}$ বের করা হয় এবং দোলনকালের বর্গ T^2 নির্ণয় করা হয়। সুতরাং দৈর্ঘ্য l পরিবর্তন করে অনুরূপভাবে বিভিন্ন কার্যকর দৈর্ঘ্যে দোলকের দোলনকাল নির্ণয় করা হয় এবং প্রত্যেক ক্ষেত্রে দোলনকালের বর্গ বের করা হয়।

হিসাব : প্রাপ্ত ফলাফল হতে প্রত্যেক ক্ষেত্রে $\frac{L}{T^2}$ নির্ণয় করে গড় $\frac{L}{T^2}$-এর মান ওপরের সমীকরণে বসিয়ে g-এর মান নির্ণয় করা যায়, কেননা $4\pi^2$ একটি ধ্রুব রাশি যার মান জানা আছে।

বিকল্প পদ্ধতি : একটি ছক কাগজের অনুভূমিক, X অক্ষে কার্যকর দৈর্ঘ্য L এবং উল্লম্ব, Y অক্ষে দোলন কালের বর্গ, T^2 নির্দেশ করে L—T^2 লেখচিত্র অঙ্কন করা হয়। অঙ্কনে L—T^2 লেখচিত্রটি মূলবিন্দু O-গামী একটি সরলরেখা হবে [চিত্র ৮.৯]। এই সরলরেখার যে কোনো বিন্দু A হতে X অক্ষের ওপর AB এবং Y অক্ষের ওপর AD লম্ব টেনে অঙ্কন অনুসারে AB ও AD-এর অর্থাৎ T^2 ও L-এর মান বের করা হয়। এখন L ও T^2-এর মান ওপরের সমীকরণে বসিয়ে g-এর মান নির্ণয় করা যায়।

$$\text{এখানে, } g = 4\pi^2\frac{AD}{AB}$$
$$= 4\pi^2\frac{OB}{AB}$$
$$= 4\pi^2 \cot\angle BOA$$



চিত্র ৮.৯

সতর্কতা :

(১) বিস্তার অবশ্যই 4°-এর মধ্যে হওয়া উচিত।

(২) পিন্ডের ব্যাস বেশ কয়েকবার নির্ধারণ করে তাদের গড় নেয়া উচিত।

(৩) T-এর মান নির্ভুল হওয়া উচিত এবং এর জন্য অধিক সংখ্যক পূর্ণ দোলনে ব্যয় হওয়া সময় নির্ণয় করা উচিত।

(৪) পিণ্ডটির উল্লম্ব তলে পাক খেতে না দিয়ে মুক্তভাবে দুলবার ব্যবস্থা করা উচিত।

২. পাহাড়ের উচ্চতা নির্ণয়

সরল দোলকের সাহায্যে কোনো পাহাড়ের উচ্চতা অর্থাৎ ভূ-পৃষ্ঠ হতে পাহাড়ের চূড়া বিন্দুর মধ্যবর্তী দূরত্ব নির্ণয় করা যায় [চিত্র ৮.১০]। প্রথমে পাহাড়ের পাদদেশে অর্থাৎ ভূ-পৃষ্ঠে সরল দোলকের সাহায্যে অভিকর্ষজ ত্বরণের মান পূর্বের নিয়মে নির্ণয় করা হয়। মনে করি এই মান g.

এরপর পাহাড়ের চূড়ায় অভিকর্ষজ ত্বরণের মান অনুরূপভাবে নির্ণয় করা যায়।

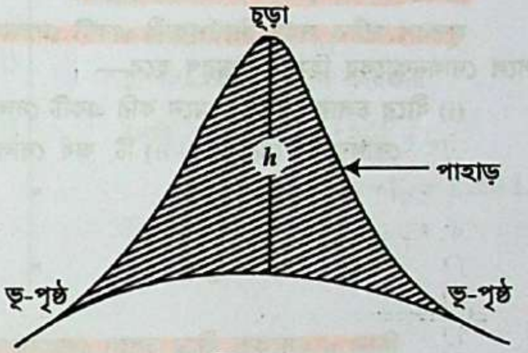
ধরি এই মান = g_1

হিসাব ও গণনা : নিউটনের মহাকর্ষ সূত্রানুসারে পাহাড়ের পাদদেশে,

$$g = \frac{GM}{R^2} \quad \ldots \quad \ldots \quad (8.18)$$

এবং পাহাড়ের চূড়ায়,

$$g_1 = \frac{GM}{(R+h)^2} \quad \ldots \quad \ldots \quad (8.19)$$



চিত্র ৮.১০

এখানে, M = পৃথিবীর ভর, G = মহাকর্ষীয় ধ্রুবক, R = পৃথিবীর ব্যাসার্ধ এবং h = পাহাড়ের উচ্চতা। সমীকরণ (8.18)-কে সমীকরণ (8.19) দ্বারা ভাগ করে আমরা পাই,

$$\frac{g}{g_1} = \frac{(R+h)^2}{R^2} = \left(1 + \frac{h}{R}\right)^2$$

বা, $$\sqrt{\frac{g}{g_1}} = 1 + \frac{h}{R} \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad (8.20)$$

আবার, $T = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}$ এবং $T_1 = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g_1}}$, এখানে T এবং T_1 হলো যথাক্রমে পাহাড়ের পাদদেশ এবং চূড়ায় সরল দোলকের পর্যায়কাল।

$$\therefore \quad \frac{T}{T_1} = \sqrt{\frac{g_1}{g}} \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad (8.21)$$

সমীকরণ (8.20) ও (8.21) থেকে পাই,

$$1 + \frac{h}{R} = \frac{T_1}{T}$$

বা, $$\frac{h}{R} = \frac{T_1}{T} - 1$$

বা, $$h = R\left(\frac{T_1}{T} - 1\right) \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad (8.22)$$

R এর মান জানা থাকলে T ও T_1 এর মান নির্ণয় করে সমীকরণ (8.22) থেকে h এর মান নির্ণয় করা যায়।

৩. সময় নির্ণয়

দোলক ঘড়িতে দোলকের সাহায্যে সময় মাপা হয়। এসব দোলক সাধারণত ধাতুর দ্বারা নির্মিত। শীতকালে তারের দৈর্ঘ্য কমে যায় এবং গ্রীষ্মকালে দৈর্ঘ্য বেড়ে যায়। সুতরাং শীতকালে ঘড়ির দোলন কাল কমে যায় এবং ঘড়ি দ্রুত চলে। গ্রীষ্মকালে ঘড়ির দোলন কাল বেড়ে যায় এবং ঘড়ি ধীরে চলে। সাধারণ দোলক ঘড়ির পিণ্ডের নিচের একটি

স্ক্রুকে প্রয়োজনমতো ঘুরিয়ে পিণ্ডকে উঠা-নামা করিয়ে দোলন কাল নিয়ন্ত্রণ করা হয়। আবার গ্রীষ্মকালে দোলক ঘড়ি ধীরে চলে এর কারণ হলো, গ্রীষ্মকালে দোলক ঘড়ির কার্যকর দৈর্ঘ্য বেড়ে যায় বলে দোলনকাল বৃদ্ধি পায় এবং দোলনকাল বৃদ্ধির কারণেই গ্রীষ্মকালে দোলন ঘড়ি ধীরে চলে। সরল দোলকের দোলনকালের সমীকরণ $T = 2\pi\sqrt{\frac{L}{g}}$ অনুসারে L এর মান বৃদ্ধি পেলে T এর মান বৃদ্ধি পায় কারণ কোনো নির্দিষ্ট স্থানে অভিকর্ষজ ত্বরণ (g) নির্দিষ্ট। তাই গ্রীষ্মকালে দোলনকাল বেড়ে যায় বলে দোলক ঘড়ি ধীরে চলে।

মাটির নিচে বা উঁচু পাহাড়ের ওপর g-এর মান কম। কাজেই উঁচু পাহাড়ে বা মাটির নিচে দোলকের দোলন কাল বেশি হয়। এর অর্থ ঘড়ি ধীরে চলে। বিষুব অঞ্চলে g-এর মান কম এবং মেরু অঞ্চলে g-এর মান বেশি। অতএব একটি দোলক ঘড়িকে বিষুব অঞ্চল হতে মেরু অঞ্চলে নিলে ঘড়িটি দ্রুত চলে।

DAT: 18-19
MAT: 17-18
DAT: 16-17

দোলনকালের হিসাব :

আমরা জানি, 1 দিন = 86400 সেকেন্ড

সুতরাং সঠিক সময় নির্দেশকারী একটি দোলক ঘড়ি দিনে 86400টি অর্ধ দোলন দেয়। দোলক ঘড়ি ধীরে বা দ্রুত চললে দোলনকালের হিসাব নিম্নরূপ হবে—

(i) ধীরে চলার ক্ষেত্রে : মনে করি একটি দোলক ঘড়ি দিনে n সেকেন্ড ধীরে চলে।

∴ দোলকটি $(86400 - n)$ টি অর্ধ দোলন দেয় $= 86400$ সেকেন্ডে

" 1 টি " " $= \frac{86400}{86400 - n}$ সেকেন্ডে

" 2 টি " " $= \frac{2 \times 86400}{86400 - n}$ সেকেন্ডে

∴ দিনে n সেকেন্ড ধীরে চললে দোলনকাল হবে $\frac{2 \times 86400}{86400 - n}$ সেকেন্ড।

(ii) দ্রুত চলার ক্ষেত্রে : দোলক ঘড়ি দিনে n সেকেন্ড দ্রুত চললে,

∴ দোলকটি $(86400 + n)$ টি অর্ধ দোলন দেয় $= 86400$ সেকেন্ডে

" 1 টি " " $= \frac{86400}{86400 + n}$ সেকেন্ডে

" 2 টি " " $= \frac{2 \times 86400}{86400 + n}$ সেকেন্ডে

∴ দিনে n সেকেন্ড দ্রুত চললে দোলনকাল হবে $\frac{2 \times 86400}{86400 + n}$ সেকেন্ড।

যাচাই কর : একটি সরল দোলকের ধাতব ফাঁপা পিণ্ডটি পানি দ্বারা পূর্ণ আছে। পিণ্ডের নিচে একটি ছোট ছিদ্র দিয়ে পানি ফোঁটায় ফোঁটায় পড়ে যায়। দেখা গেল দোলকের দোলনকাল প্রথমে বৃদ্ধি পাচ্ছে এবং পরে কমে যাচ্ছে।—ঘটনাটি ব্যাখ্যা কর।

গাণিতিক উদাহরণ ৮.৩

১। 1 মিটার কার্যকরী দৈর্ঘ্যবিশিষ্ট একটি সরল দোলক 4 সেকেন্ডে ৪টি দোলন সম্পন্ন করে। অভিকর্ষজ ত্বরণের মান নির্ণয় কর।

আমরা জানি,

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{L}{g}}$$

বা, $T^2 = 4\pi^2 \frac{L}{g}$

$$\therefore g = 4\pi^2 \frac{L}{T^2}$$

$$= 4 \times 9.87 \times \frac{1}{(0.5)^2}$$

$$= 157.92 \text{ ms}^{-2}$$

এখানে,

কার্যকরী দৈর্ঘ্য, $L = 1$ m

কম্পাঙ্ক, $n = \frac{8}{4} = 2 \text{ s}^{-1}$

দোলনকাল, $T = \frac{1}{n} = 0.5$ s

$g = ?$

২। 100 cm কার্যকরী দৈর্ঘ্যবিশিষ্ট একটি দোলক প্রতি মিনিটে 30টি দোলন সম্পন্ন করে। পরীক্ষণীয় স্থানে অভিকর্ষীয় ত্বরণ g-এর মান নির্ণয় কর।

আমরা জানি,

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{L}{g}}$$

বা, $T^2 = 4\pi^2 \frac{L}{g}$

$$\therefore g = \frac{4\pi^2 L}{T^2} = \frac{4 \times 9.87 \times 1}{(2)^2}$$

$$= 9.87\ ms^{-2}$$

এখানে,

কার্যকরী দৈর্ঘ্য, L = 100 cm = 1 m

30টি দোল দিতে সময় লাগে = 1 min = 60 sec

1টি " " " " $= \frac{60}{30} = 2$ sec

$\therefore T = 2$ sec

$g = ?$

৩। কোনো একটি সেকেন্ড দোলকের দৈর্ঘ্য 25.6% বাড়ালে এর দোলনকাল কত হবে বের কর।

আমরা জানি,

$$T_1 = 2\pi\sqrt{\frac{L_1}{g}} \quad \cdots \quad \cdots \quad (i)$$

এবং $$T_2 = 2\pi\sqrt{\frac{L_2}{g}} \quad \cdots \quad \cdots \quad (ii)$$

সমীকরণ (i) ও (ii) হতে পাই,

$$\frac{T_2}{T_1} = \sqrt{\frac{L_2}{L_1}}$$

বা, $$T_2 = T_1\sqrt{\frac{1.256\ L_1}{L_1}} = 2 \times \sqrt{1.256} = 2.24\ s$$

এখানে,

কার্যকরী দৈর্ঘ্য = L_1

25.6% বৃদ্ধি করলে কার্যকরী

দৈর্ঘ্য, $L_2 = L_1$এর $\frac{25.6}{100} + L_1$

$= 0.256\ L_1 + L_1 = 1.256\ L_1$

$T_1 = 2$ sec

$T_2 = ?$

৪। 1 m কার্যকরী দৈর্ঘ্যবিশিষ্ট একটি সরল দোলকের ববের ভর 300 g, দোলকটিকে সাম্যাবস্থা থেকে 60° কোণে নিয়ে গিয়ে ছেড়ে দেওয়া হলো। ববটির গতিশক্তি বের কর যখন এটি সাম্যাবস্থা দিয়ে অতিক্রম করে এবং যখন সুতা সাম্যাবস্থার সাথে 30° কোণ উৎপন্ন করে। [RUET Admission Test, 2015-16]

A অবস্থানে ববটির গতিশক্তি শূন্য

$\therefore$ A অবস্থানে ববটির মোট শক্তি = বিভব শক্তি = mgh

$$= 300 \times 10^{-3} \times 9.8 \times \frac{1}{2}$$

$$= 1.47\ J$$

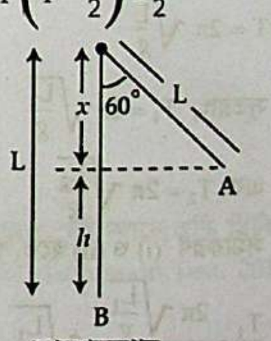
এখানে,

$m = 300\ g = 300 \times 10^{-3}$ kg

$x = L \cos 60°$

$h = L - x = L(1 - \cos 60°)$

$= 1\left(1 - \frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2}$



সাম্যাবস্থায়

B অবস্থানে ববের বিভবশক্তি শূন্য

$\therefore$ B অবস্থানে মোট শক্তি = A অবস্থানে মোট শক্তি

= 1.47 জুল

এখানে, $h' = L - x' = L - L \cos 30°$

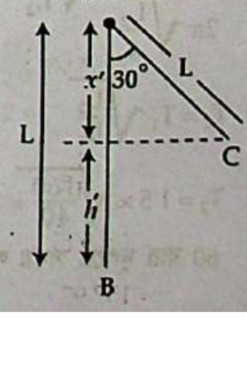
$= L(1 - \cos 30°) = 0.134$

$\therefore$ C অবস্থানে বিভবশক্তি $= mgh'$

$$= 300 \times 10^{-3} \times 9.8 \times 0.134$$

$$= 0.4\ J$$

$\therefore$ C অবস্থানে গতিশক্তি $E_k = 1.47 - 0.4 = 1.07$ J



৫। একটি সরল দোলকের দোলনকাল 50% বৃদ্ধি করতে এর কার্যকর দৈর্ঘ্য কত গুণ বাড়াতে হবে?

[কু. বো. ২০০৯; য. বো. ২০০৮; ঢা. বো. ২০০৩; চ. বো. ২০০৩; মাদরাসা বোর্ড, ২০১৫]

এখানে,
আদি দোলনকাল $= Ts$
শেষ দোলনকাল, $T_1 = \left(T + \frac{T\,50}{100}\right) s = \left(T + \frac{T}{2}\right) s$
আদি দৈর্ঘ্য $= L$
শেষ দৈর্ঘ্য $= L_1$

আমরা জানি,

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{L}{g}}$$

বা, $T^2 = 4\pi^2\frac{L}{g}$ ... ... (i)

আবার, $T_1 = 2\pi\sqrt{\frac{L_1}{g}}$

বা, $T_1^2 = 4\pi^2\frac{L_1}{g}$

বা, $\left(T + \frac{T}{2}\right)^2 = 4\pi^2\frac{L_1}{g}$

বা, $\left(\frac{3T}{2}\right)^2 = 4\pi^2\frac{L_1}{g}$

বা, $T^2 = 4\pi^2\frac{L_1}{g} \times \frac{4}{9}$ ... (ii)

সমীকরণ (i) ও (ii) হতে পাই,

$$\frac{4\pi^2 L}{g} = \frac{4\pi^2 L_1}{g} \times \frac{4}{9}$$

বা, $\frac{L}{L_1} = \frac{4}{9}$

বা, $L_1 = \frac{9}{4}L = 2{\cdot}25L$

$\therefore$ দৈর্ঘ্য বৃদ্ধি $= 2{\cdot}25L - L = 1{\cdot}25L$

$\therefore$ কার্যকর দৈর্ঘ্য 1·25 গুণ বাড়াতে হবে।

৬। 40 cm দীর্ঘ একটি সরল দোলক প্রতি মিনিটে 40 বার দোল দেয়। যদি এর দৈর্ঘ্য 160 cm করা হয় তবে 60 বার দুলতে কত সময় নেবে? [ঢা. বো. ২০০৮]

এখানে,
দৈর্ঘ্য, $L_1 = 40$ cm
দোলন সংখ্যা = 40
$\therefore$ দোলনকাল, $T_1 = \frac{60}{40} = 1{\cdot}5$ s
দৈর্ঘ্য, $L_2 = 160$ cm
দোলন সংখ্যা = 60
সময়, $T_2 = ?$

আমরা জানি,

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{L}{g}}$$

সুতরাং, $T_1 = 2\pi\sqrt{\frac{L_1}{g}}$ ... ... (i)

এবং $T_2 = 2\pi\sqrt{\frac{L_2}{g}}$ ... ... (ii)

সমীকরণ (i) ও (ii) হতে পাই,

$$\frac{T_1}{T_2} = \frac{2\pi\sqrt{\frac{L_1}{g}}}{2\pi\sqrt{\frac{L_2}{g}}} = \sqrt{\frac{L_1}{L_2}}$$

বা, $T_2 = T_1\sqrt{\frac{L_2}{L_1}}$

$\therefore T_2 = 1{\cdot}5 \times \sqrt{\frac{160}{40}} = 1{\cdot}5 \times 2 = 3$ s

$\therefore$ 60 বার দুলতে সময় লাগে $= T_2 \times 60 = 3 \times 60 = 180$ s $= 3$ min

৭। অভিকর্ষজ ত্বরণ, $g = 9.8\ ms^{-2}$ এর জন্য সেকেন্ড দোলকের দৈর্ঘ্য কত হবে? DAT: 17-18

আমরা জানি,

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{L}{g}}$$

$$\therefore L = \frac{T^2 g}{4\pi^2} = \frac{(2)^2 \times 9.8}{4 \times 9.87} = 99.29\ cm$$

এখানে,
$T = 2\ sec$
$g = 9.8\ ms^{-2}$

৮। একটি সেকেন্ড দোলকের দৈর্ঘ্য ঢাকায় 100 cm এবং কাঠমুন্ডতে 95 cm। কোনো বস্তুকে কাঠমুন্ড হতে ঢাকায় আনলে এর ওজনের কী পরিবর্তন হবে ? [CUET Admission Test, 2013-14]

আমরা জানি,

$$\frac{W_D}{W_K} = \frac{L_D}{L_K} = \frac{1}{0.95} = 1.05$$

$$\therefore W_D = 1.05\ W_K$$

ওজনের পরিবর্তন,

$$\Delta W = W_D - W_K = 1.05\ W_K - W_K = 0.05\ W_K = 0.05 \times 100\%\ W_K = 5\%\ W_K$$

অর্থাৎ ওজন 5% বাড়বে।

৯। একটি সরল দোলকের দৈর্ঘ্য অপরটির 4 গুণ। দ্বিতীয় সরল দোলকের দোলনকাল 4 sec হলে প্রথম দোলকটির দোলনকাল কত ?

আমরা জানি,
প্রথম দোলকের জন্য

$$T_1 = 2\pi\sqrt{\frac{L_1}{g}} \quad \dots \quad \dots \quad (i)$$

২য় দোলকের জন্য

$$T_2 = 2\pi\sqrt{\frac{L_2}{g}} \quad \dots \quad \dots \quad (ii)$$

সমীকরণ (i) ও (ii) হতে পাই,

$$\frac{T_1}{T_2} = \sqrt{\frac{L_1}{L_2}}$$

$$বা,\ T_1 = T_2\sqrt{\frac{L_1}{L_2}} = 4 \times \sqrt{\frac{4L_2}{L_2}} = 8\ sec$$

এখানে,
$L_1 = 4\ L_2$
$T_2 = 4\ sec$
$T_1 = ?$

১০। যদি কোনো স্থানে একটি সেকেন্ড দোলকের দৈর্ঘ্য 1 m হয়, তবে যে দোলক সেই স্থানে প্রতি মিনিটে 20 বার দোল দেয়, তার দৈর্ঘ্য বের কর। [RUET Admission Test, 2010-11]

আমরা জানি,

$$T_1 = 2\pi\sqrt{\frac{L_1}{g}}$$

$$এবং\ T_2 = 2\pi\sqrt{\frac{L_2}{g}}$$

$$\therefore \frac{T_2}{T_1} = \sqrt{\frac{L_2}{L_1}}$$

$$\therefore L_2 = L_1 \times \left(\frac{T_2}{T_1}\right)^2 = 1 \times \left(\frac{3}{2}\right)^2 = \frac{9}{4}m$$

এখানে,
$T_2 = \frac{60}{20} = 3\ s$
$T_1 = 2\ s$

১১। একটি উপগ্রহের ভর ও ব্যাসার্ধ পৃথিবীর ভর ও ব্যাসার্ধের দ্বিগুণ। পৃথিবীর একটি সেকেন্ড দোলকের ওই উপগ্রহে পর্যায়কাল কত হবে?

ধরা যাক, পৃথিবী পৃষ্ঠে এবং ওই উপগ্রহের পৃষ্ঠে অভিকর্ষজ ত্বরণের মান যথাক্রমে g এবং g'।

এখন, পৃথিবীর ভর M এবং ব্যাসার্ধ R হলে, আমরা পাই,

$$g = \frac{GM}{R^2} \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \text{(i)}$$

আবার, প্রশ্নানুযায়ী, উপগ্রহটির ভর $M' = 2M$ এবং ব্যাসার্ধ $R' = 2R$

$$\therefore \quad g' = G\frac{M'}{R'^2} = G\frac{2M}{(2R)^2} = \frac{GM}{2R^2} = \frac{g}{2}$$

সুতরাং, l দৈর্ঘ্যসম্পন্ন দোলকটির পৃথিবী পৃষ্ঠে এবং ওই উপগ্রহের পৃষ্ঠে দোলনকাল ধরি T এবং T'। সুতরাং,

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}} \text{ এবং } T' = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g'}}$$

$$\therefore \quad \frac{T'}{T} = \sqrt{\frac{g}{g'}} = \sqrt{\frac{g}{\frac{g}{2}}} = \sqrt{2}$$

সেকেন্ড দোলকের দোলনকাল, $T = 2s$

$$\therefore \quad T' = \sqrt{2} \times T = \sqrt{2} \times 2 = 2{\cdot}828 \text{ s}$$

১২। রাশেদ একদিন একটি সেকেন্ড দোলককে পাহাড়ের পাদদেশে নিয়ে গেলে সঠিক সময় পায়। কিন্তু পাহাড়ের চূড়ায় নিয়ে গিয়ে সে লক্ষ করল যে দোলকটি ঘণ্টায় 30 সেকেন্ড সময় হারায়। পাহাড়ের চূড়ায় সরল দোলকের দোলনকাল নির্ণয় কর। উক্ত পাহাড়ের উচ্চতা কত হবে ? [পৃথিবীর ব্যাসার্ধ R = 6400 km, অভিকর্ষজ ত্বরণ, $g = 9{\cdot}8 \text{ ms}^{-2}$]

মনে করি, পাহাড়ের চূড়ায় দোলনকাল = T_2

এখানে,

পাহাড়ের চূড়ায় প্রতি ঘণ্টায় অর্থাৎ 3600 সেকেন্ডে প্রাপ্ত অর্ধ দোলন সংখ্যা = 3600 – 30 = 3570

যেহেতু 3570টি অর্ধ-দোলন দেয় 3600 সেকেন্ডে

$\therefore$ 2টি অর্ধ-দোলন দেয় $\frac{3600 \times 2}{3570} = 2{\cdot}0168$ সেকেন্ডে

$\therefore$ দোলন কাল, $T_2 = 2{\cdot}0168$ sec

ভূপৃষ্ঠে ও পাহাড়ের চূড়ায় দোলনকাল যথাক্রমে T_1 ও T_2 হলে,

$$\frac{T_1}{T_2} = \sqrt{\frac{g_2}{g_1}} = \sqrt{\frac{R^2}{(R+h)^2}} = \frac{R}{R+h}$$

$$\therefore \quad \frac{T_2}{T_1} = \frac{R+h}{R} = 1 + \frac{h}{R}$$

$$\text{বা,} \quad \frac{T_2}{T_1} = 1 + \frac{h}{R}$$

$$\text{বা,} \quad \frac{2{\cdot}0168}{2} = 1 + \frac{h}{R}$$

$$\text{বা,} \quad \frac{h}{R} = \frac{2{\cdot}0168}{2} - 1$$

$$= \frac{0{\cdot}0168}{2} = 0{\cdot}0084$$

এখানে,

পৃথিবীর ব্যাসার্ধ, R = 6400 km

$= 6{\cdot}4 \times 10^6$ m

অভিকর্ষজ ত্বরণ, $g = 9{\cdot}8 \text{ ms}^{-2}$

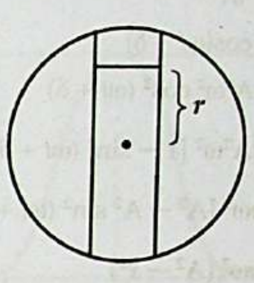
পাহাড়ের উচ্চতা, $h = ?$

$$\therefore \quad h = 0{\cdot}0084 \times R = 0{\cdot}0084 \times 6{\cdot}4 \times 10^6 = 53760 \text{ m} = 53{\cdot}76 \text{ km}$$

১৩। কল্পনা কর যে, পৃথিবীর ব্যাস বরাবর একটি সুড়ঙ্গ খনন করা হলো। একটি বস্তুকে সুড়ঙ্গের এক প্রান্ত থেকে ছেড়ে দেওয়া হলো এবং বস্তুটি সরল ছন্দিত স্পন্দনে স্পন্দিত হতে লাগলো। পৃথিবীকে একটি সুষম গোলক মনে করে এবং বাধাদানকারী সকল বল উপেক্ষা করে পৃথিবীর কেন্দ্র থেকে 5×10^5 m দূরত্বে বস্তুটির ত্বরণ ও দোলনের পর্যায়কাল নির্ণয় কর। $R = 6.4 \times 10^6$ m, $g = 9.8$ m/s² [BUET Admission Test, 2016-17]

আমরা জানি,

$$g = \frac{GM}{R^2}$$



r বিন্দুতে অভিকর্ষজ ত্বরণ $g_r = \frac{GM(r)}{r^2}$

$$M(r) = \frac{4}{3}\pi r^3 \rho \text{ কিন্তু } \rho = \frac{M}{\frac{4}{3}\pi R^3}$$

$$g_r = \frac{GMr^3}{r^2R^3} = \frac{g \cdot r}{R}$$

$$= 9.8 \times \frac{5 \times 10^5}{6.4 \times 10^6} = 0.766 \text{ ms}^{-2}$$

আবার, $F = -Kr = -m \times g\frac{r}{R}$ বা, $\frac{m}{K} = \frac{R}{g}$

এবং $\omega = \sqrt{\frac{K}{m}}$

এবং $T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{K}} = 2\pi\sqrt{\frac{R}{g}}$

$$= 2\pi\sqrt{\frac{6.4 \times 10^6}{9.8}}$$

$$= 5075 \text{ sec} = 84.58 \text{ min} = 1 \text{ hr } 24 \text{ min } 35 \text{ s}$$

১৪। একটি স্থির লিফ্‌টে কোনো সরল দোলকের দোলনকাল T, লিফ্‌টটি $\frac{g}{5}$ ত্বরণে নিচে নামলে দোলনকাল কত হবে ?

আমরা জানি,

$$T \propto \sqrt{\frac{L}{g}} \quad \dots \quad \dots \quad \dots \quad (i)$$

$$\text{এবং } T' \propto \sqrt{\frac{L}{g - \frac{g}{5}}} = \sqrt{\frac{5L}{4g}} \quad \dots \quad \dots \quad (ii)$$

$$\therefore \frac{T'}{T} = \sqrt{\frac{5L}{4g} \times \frac{g}{L}} = \sqrt{\frac{5}{4}}$$

$$\therefore T' = \frac{\sqrt{5}}{2} \times T = 1.118\,T$$

৮.৯ সরল দোলন গতির ক্ষেত্রে শক্তি
Energy in simple harmonic motion

গতিশক্তি, E_k

সরল দোলন গতিসম্পন্ন কোনো কণার বিস্তার A, কৌণিক কম্পাঙ্ক ω এবং দশা ধ্রুবক δ হলে এবং t সময়ে কণাটির সরণ x হলে সরল দোলন গতির সমীকরণ

$$x = A \sin(\omega t + \delta)$$

একটি সরল দোলক সরল দোলন গতিতে দোলায়মান থাকলে এরূপ গতির জন্য কিছু পরিমাণ গতিশক্তি লাভ করে। তাছাড়া সরল দোলকের ববের ওপর একটি প্রত্যায়নক বল সব সময় এর সরণের বিপরীতে ক্রিয়া করে। ফলে কণার সরণের সময় কাজ করা হয়। এজন্য কণাটির কিছু পরিমাণ স্থিতিশক্তিও থাকে। ঘর্ষণ বা অনুরূপ কোনো অপচয়ী বল ক্রিয়া না করলে সরল দোলকের মোট যান্ত্রিক শক্তি স্থির থাকে।

মনে করি, ববের ভর m এবং যেকোনো মুহূর্তে এর সরণ ও বেগ যথাক্রমে x ও v। সুতরাং ওই মুহূর্তে ববের তথা সরল দোলকের গতিশক্তি

$$E_k = \frac{1}{2}mv^2$$

যেহেতু $x = A \sin(\omega t + \delta)$

$$\therefore \quad v = \frac{dx}{dt} = \frac{d}{dt}\{A \sin(\omega t + \delta)\}$$

$$= A\omega \cos(\omega t + \delta)$$

$$\therefore \quad E_k = \frac{1}{2} mA^2\omega^2 \cos^2(\omega t + \delta)$$

$$= \frac{1}{2} mA^2\omega^2 [1 - \sin^2(\omega t + \delta)]$$

$$= \frac{1}{2} m\omega^2 [A^2 - A^2 \sin^2(\omega t + \delta)]$$

$$= \frac{1}{2} m\omega^2 (A^2 - x^2) \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad (8.23)$$

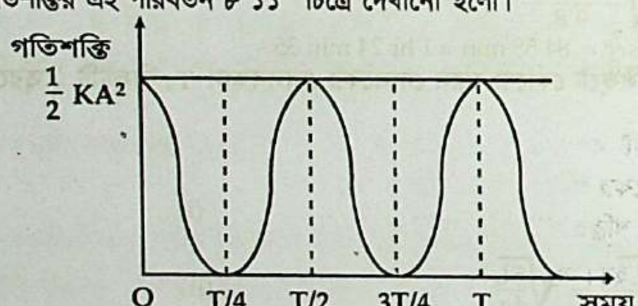
আবার $\omega^2 = \frac{K}{m}$

$$\therefore \quad E_k = \frac{1}{2} mA^2 \frac{K}{m} \cos^2(\omega t + \delta)$$

$$\therefore \quad \text{গতিশক্তি}, K_E = \frac{1}{2} KA^2 \cos^2(\omega t + \delta) \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad (8.24)$$

সমীকরণ (8.24) থেকে দেখা যায় যে, যেহেতু $\cos^2(\omega t + \delta)$ এর সর্বোচ্চ মান 1, কাজেই সর্বোচ্চ গতিশক্তি $\frac{1}{2}KA^2$। এখানে K = ধ্রুবক, কাজেই $E_k \propto A^2$। সুতরাং গতিশক্তি বিস্তারের বর্গের সমানুপাতিক। গতিকালে কণাটির গতিশক্তি শূন্য থেকে এই সর্বোচ্চ মানে পরিবর্তিত হতে পারে।

$\therefore$ $\delta = 0$ ধরে গতিশক্তির এই পরিবর্তন ৮.১১ চিত্রে দেখানো হলো।



চিত্র ৮.১১

বিভবশক্তি, E_p

সমাকলন পদ্ধতিতে এবার আমরা সরল দোলকের গতির জন্য স্থিতিশক্তি নির্ণয় করব। সরণ x হলে ববের ওপর ক্রিয়ারত বল $m\omega^2 x$। এখন কণার সরণ আরও dx পরিমাণ বাড়লে, এই অতি ক্ষুদ্র দূরত্ব dx এর মধ্যে ক্রিয়ারত বল স্থির থাকে বলে ধরা হয়। এই অতিরিক্ত সরণের জন্য ববের ওপর কৃত কাজ $m\omega^2 x dx$। সুতরাং x সরণের জন্য কৃত কাজ অর্থাৎ বিচ্যুত অবস্থানে স্থিতিশক্তি,

$$E_p = \int_0^x m\omega^2 x dx = m\omega^2 \int_0^x x dx$$

$$= \frac{m\omega^2}{2}[x^2]_0^x = \frac{m\omega^2}{2}(x^2 - 0)$$

$\because \; F = -Kx = -\omega^2 mx$
$\omega = Fdx = m\omega^2 xdx$
(—ve চিহ্ন পরিহার করে)

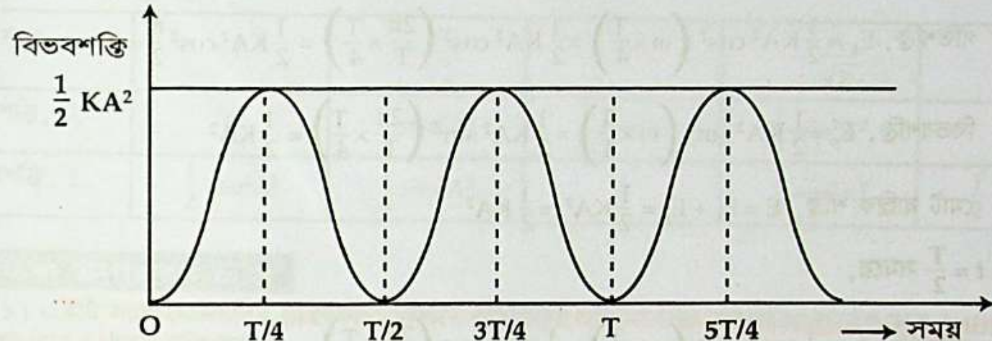
$$\therefore \quad E_p = \frac{1}{2} m\omega^2 x^2 \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad (8.25)$$

$$\therefore \quad E_p = \frac{1}{2} m \frac{K}{m} A^2 \sin^2(\omega t + \delta)$$

$$= \frac{1}{2} KA^2 \sin^2(\omega t + \delta) \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad (8.26)$$

এই সমীকরণ থেকে দেখা যায় যে, যেহেতু $\sin^2(\omega t + \delta)$ এর সর্বোচ্চ মান 1, সুতরাং বিভবশক্তির সর্বোচ্চ মান $\frac{1}{2}KA^2$। এখানে K = ধ্রুবক, কাজেই $E_k \propto A^2$। সুতরাং বিভবশক্তি বিস্তারের বর্গের সমানুপাতিক। গতিকালে কণাটির

বিভবশক্তি শূন্য থেকে এই সর্বোচ্চ মানের মধ্যে পরিবর্তিত হয়। কাজেই (8.26) সমীকরণে $\delta = 0$ ধরে বিভবশক্তির পরিবর্তন ৮·১২ চিত্রে দেখানো হলো।



চিত্র ৮·১২

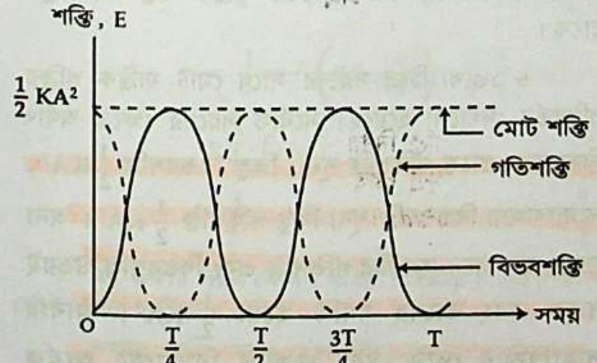
৮·১০ মোট যান্ত্রিক শক্তি, E এবং শক্তির সংরক্ষণশীলতা

এখন মোট যান্ত্রিক শক্তি, E নির্ণয় করতে হলে স্থিতিশক্তি ও গতিশক্তি যোগ করতে হয়। অর্থাৎ

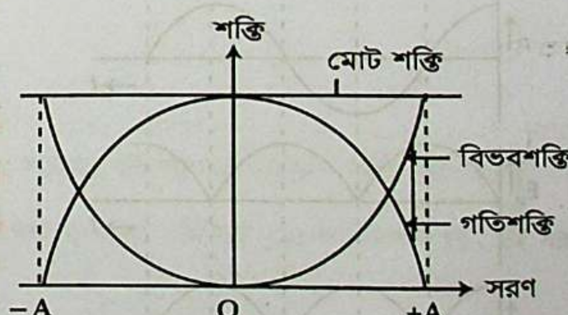
$$E = E_p + E_k$$
$$= \frac{1}{2} KA^2 \sin^2 (\omega t + \delta) + \frac{1}{2} KA^2 \cos^2 (\omega t + \delta)$$
$$= \frac{1}{2} KA^2 [\sin^2 (\omega t + \delta) + \cos^2 (\omega t + \delta)]$$
$$\therefore \quad E = \frac{1}{2} KA^2 = \frac{1}{2} m\omega^2 A^2 \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad (8.27)$$

এই সমীকরণে K একটি ধ্রুব রাশি। কাজেই যান্ত্রিক শক্তি $E \propto A^2$ হয়। অর্থাৎ যান্ত্রিক শক্তি বিস্তারের বর্গের সমানুপাতিক।

আবার, এই সমীকরণটি লক্ষ করলে দেখা যায় K এবং বিস্তার A ধ্রুব রাশি। কাজেই মোট যান্ত্রিক শক্তি একটি ধ্রুব রাশি। অর্থাৎ সরল দোলকের গতির ক্ষেত্রে যান্ত্রিক শক্তির নিত্যতা বা সংরক্ষণ নীতি প্রযোজ্য হয়। চিত্র ৮·১৩(ক) অনুযায়ী সময়ের সাথে মোট শক্তির পরিবর্তন দেখানো হয়েছে। এই লেখচিত্রে আদি দশা $\delta = 0$ ধরা হয়েছে। তাই গতিকাল সাম্যাবস্থা হতে শুরু হয়। ফলে গতিশক্তি $E_k = \frac{1}{2} KA^2 \cos^2 \omega t$ এবং বিভবশক্তি $E_p = \frac{1}{2} KA^2 \sin^2 \omega t$ হয়।



চিত্র ৮·১৩(ক)



চিত্র ৮·১৩(খ)

t এর বিভিন্ন মানের জন্য মোট যান্ত্রিক শক্তি বা যান্ত্রিক শক্তির নিত্যতা প্রমাণ করা যায়।

(ক) $t = 0$ সময়ে অর্থাৎ পর্যায়কালের শুরুতে,

গতিশক্তি, $E_k = \frac{1}{2} KA^2 \cos^2 (\omega \times 0) = \frac{1}{2} KA^2$

বিভবশক্তি, $E_p = \frac{1}{2} KA^2 \sin^2 (\omega \times 0) = 0$

$\therefore$ মোট যান্ত্রিক শক্তি $E = E_k + E_p = \frac{1}{2} KA^2 + 0 = \frac{1}{2} KA^2$

(খ) $t = \frac{T}{4}$ **সময়ে,**

গতিশক্তি, $E_k = \frac{1}{2} KA^2 \cos^2 \left(\omega \times \frac{T}{4}\right) = \frac{1}{2} KA^2 \cos^2 \left(\frac{2\pi}{T} \times \frac{T}{4}\right) = \frac{1}{2} KA^2 \cos^2 \frac{\pi}{2} = 0$

বিভবশক্তি, $E_p = \frac{1}{2} KA^2 \sin^2 \left(\omega \times \frac{T}{4}\right) = \frac{1}{2} KA^2 \sin^2 \left(\frac{2\pi}{T} \times \frac{T}{4}\right) = \frac{1}{2} KA^2$

$\therefore$ মোট যান্ত্রিক শক্তি, $E = E_k + E_p = \frac{1}{2} KA^2 = \frac{1}{2} KA^2$

(গ) $t = \frac{T}{2}$ **সময়ে,**

গতিশক্তি, $E_k = \frac{1}{2} KA^2 \cos^2 \left(\omega \times \frac{T}{2}\right) = \frac{1}{2} KA^2 \cos^2 \left(\frac{2\pi}{T} \times \frac{T}{2}\right) = \frac{1}{2} KA^2 \cos^2 \pi = \frac{1}{2} KA^2$

বিভবশক্তি, $E_p = \frac{1}{2} KA^2 \sin^2 \left(\omega \times \frac{T}{2}\right) = \frac{1}{2} KA^2 \sin^2 \left(\frac{2\pi}{T} \times \frac{T}{2}\right) = \frac{1}{2} KA^2 \sin^2 \pi = 0$

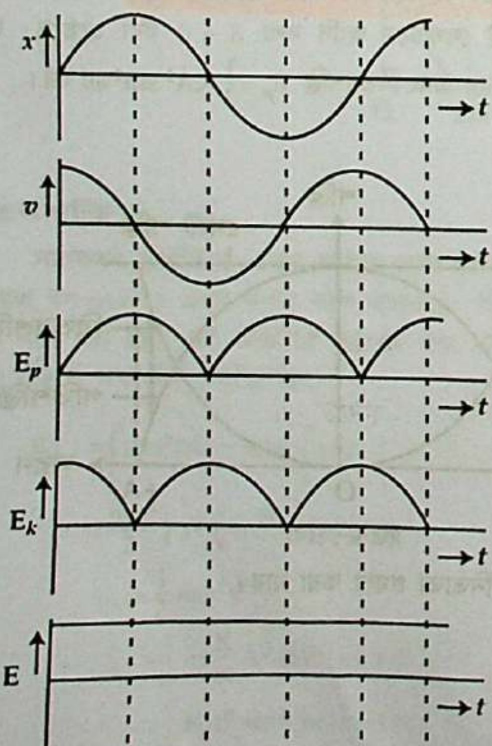
$\therefore$ মোট যান্ত্রিক শক্তি $E = E_k + E_p = \frac{1}{2} KA^2 + 0 = \frac{1}{2} KA^2$

(ঘ) $t = T$ **সময়ে,**

গতিশক্তি, $E_k = \frac{1}{2} KA^2 \cos^2 (\omega \times T) = \frac{1}{2} KA^2 \cos^2 \left(\frac{2\pi}{T} \times T\right) = \frac{1}{2} KA^2 \cos^2 (2\pi) = \frac{1}{2} KA^2$

আবার, বিভবশক্তি, $E_p = \frac{1}{2} KA^2 \sin^2 (\omega \times T) = \frac{1}{2} KA^2 \sin^2 \left(\frac{2\pi}{T} \times T\right) = \frac{1}{2} KA^2 \sin^2 (2\pi) = 0$

$\therefore$ মোট যান্ত্রিক শক্তি, $E = E_k + E_p = \frac{1}{2} KA^2 + 0 = \frac{1}{2} KA^2$



চিত্র ৮.১৪ : সময় বনাম সরল ছন্দিত স্পন্দনসম্পন্ন কণার সরণ, বেগ, স্থিতিশক্তি, গতিশক্তি এবং মোট শক্তির লেখচিত্র।

এভাবে, $t = \frac{3T}{4}$, t সময়ে গতিশক্তি ও স্থিতিশক্তি নির্ণয় করে দেখানো যায় যে, মোট যান্ত্রিক শক্তি সর্বদা ধ্রুব থাকে।

৮.১৩(খ) চিত্রে সরণের সাথে মোট যান্ত্রিক শক্তির পরিবর্তন দেখানো হয়েছে। সর্বোচ্চ সরণের ক্ষেত্রে অর্থাৎ **বিস্তারের প্রান্তে গতিশক্তি শূন্য, কিন্তু বিভবশক্তি $\frac{1}{2}$ KA²। সাম্যাবস্থায় বিভবশক্তি শূন্য কিন্তু গতিশক্তি $\frac{1}{2}$ KA²। অন্য সকল অবস্থানে কণাটির গতিশক্তি এবং বিভবশক্তি উভয়ই থাকে এবং তাদের সমষ্টি হলো $\frac{1}{2}$ KA²। আবার সাম্যাবস্থান থেকে সরণ যেখানে বিস্তারের অর্ধেক সেখানে গতিশক্তি ও বিভবশক্তি সমান।**

চিত্র ৮.১৪-এর লেখচিত্রগুলিতে সময়ের (t) সাথে সরল ছন্দিত গতিসম্পন্ন কণার সরণ (x), বেগ (v), স্থিতিশক্তি (E_p), গতিশক্তি (E_k) এবং মোট শক্তির (E) পরির্বতন দেখানো হয়েছে।

সরল দোলগতিসম্পন্ন কোনো বস্তুকণার সরণের সঙ্গে স্থিতিশক্তি ও গতিশক্তি কীভাবে পরিবর্তিত হয় তা নিচের সারণি দ্বারা প্রকাশ করা যায়।

সরণ	$+A$	$+\frac{A}{\sqrt{2}}$	0	$-\frac{A}{\sqrt{2}}$	$-A$
গতিশক্তি, E_k	0	$\frac{1}{4}m\omega^2A^2$	$\frac{1}{2}m\omega^2A^2$	$\frac{1}{4}m\omega^2A^2$	0
স্থিতিশক্তি, E_p	$\frac{1}{2}m\omega^2A^2$	$\frac{1}{4}m\omega^2A^2$	0	$\frac{1}{4}m\omega^2A^2$	$\frac{1}{2}m\omega^2A^2$

গাণিতিক উদাহরণ ৮.৪

১। একটি সরল দোলগতির (i) কোন অবস্থানে গতিশক্তির মান সর্বোচ্চ গতিশক্তির অর্ধেক হবে ? (ii) সরণ যখন বিস্তারের অর্ধেক তখন শক্তি কত ?

(i) আমরা জানি, একটি সরল দোলগতির গতিশক্তি, $E_k = \frac{1}{2}m\omega^2(A^2 - x^2)$ এবং সর্বোচ্চ গতিশক্তি $= \frac{1}{2}m\omega^2A^2$.

ধরি, সাম্যাবস্থান থেকে x দূরত্বে গতিশক্তি সর্বোচ্চ গতিশক্তির অর্ধেক।

এখন, প্রশ্নানুসারে,

$$\frac{\frac{1}{2}m\omega^2(A^2 - x^2)}{\frac{1}{2}m\omega^2A^2} = \frac{1}{2}$$

বা, $A^2 = 2A^2 - 2x^2$

বা, $2x^2 = A^2$

$\therefore \quad x = \pm\frac{A}{\sqrt{2}}$

(ii) আমরা জানি মোট শক্তি, $E = \frac{1}{2}m\omega^2A^2$

যখন $x = \frac{A}{2}$, তখন

$$E_k = \frac{1}{2}m\omega^2(A^2 - x^2) = \frac{1}{2}m\omega^2\left\{A^2 - \left(\frac{A}{2}\right)^2\right\}$$

$$= \frac{1}{2}m\omega^2\left(A^2 - \frac{A^2}{4}\right) = \frac{3}{4}\cdot\frac{1}{2}mA^2\omega^2$$

$$= \frac{3}{4}\cdot E_{k(max)}$$

$$= \frac{3}{4}E \qquad \left[\because \text{ সর্বোচ্চ গতিশক্তি } = \frac{1}{2}mA^2\omega^2 = \text{ মোট শক্তি } = E\right]$$

২। একটি সরল দোলন গতির বিস্তার 6 cm। আদি দশা 0° এবং 1 মিনিটে 150 বার কম্পন হয়। ওই সরল দোল গতির সমীকরণ লেখ।

আমরা জানি, সরল দোল গতির সাধারণ সমীকরণ,

$$x = A\sin(\omega t + \delta) \quad \ldots \quad \ldots \quad (i)$$

এখানে আদি দশা, $\delta = 0$, বিস্তার, $A = 6$ cm

$\therefore$ কম্পাঙ্ক, $n = \frac{1}{T} = \frac{150}{60} = \frac{5}{2}$ Hz

অতএব, $\omega = 2\pi n = 2\pi \times \frac{5}{2} = 5\pi$

সমীকরণ (i)-এ মানগুলি বসিয়ে পাই,

$$x = 6\sin(5\pi t + 0°) = 6\sin 5\pi t$$

উল্লেখ্য, সমীকরণটিকে $x = 6\cos 5\pi t$ রূপেও লেখা যায়।

৩। একটি গতিশীল কণার সরণের সমীকরণ $y = 4 \sin \omega t + 3 \cos \omega t$। দেখাও যে কণার গতি সরল দোলগতি।

$$y = 4 \sin \omega t + 3 \cos \omega t = 5 \sin (\omega t + \theta)$$

এখানে, $\sin \theta = \frac{3}{5}$, $\cos \theta = \frac{4}{5}$ এবং $\tan \theta = \frac{3}{4}$

$\therefore$ কণার বেগ, $v = \frac{dy}{dt} = 5\omega \cos (\omega t + \theta)$

এবং ত্বরণ, $a = \frac{dv}{dt} = \frac{d^2y}{dt}$

$$= -5\,\omega^2 \sin (\omega t + \theta) = -\,\omega^2 y$$

অতএব, কণার ত্বরণ সরণের সমানুপতিক এবং সাম্যাবস্থানের দিকে ক্রিয়া করে। সুতরাং কণার গতি সরল দোলগতি।

৪। একটি দোলক ঘড়ি প্রতিদিন 3 মিনিট স্লো (slow) যায়। সঠিক সময় পেতে হলে দোলকটির দৈর্ঘ্যের কী পরিবর্তন করতে হবে ? (ধরে নাও, দোলকটি একটি সরল দোলক, $g = 9{\cdot}80\ \text{ms}^{-2}$)

আমরা জানি, একটি সরল দোলকের দোলনকাল,

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{l}{g}}$$

$\therefore$ সরল দোলকের অর্ধ দোলনকাল, $t = \frac{T}{2} = \pi \sqrt{\frac{l}{g}}$

একটি ত্রুটিহীন সেকেন্ড দোলকের ক্ষেত্রে, $t = 1\,\text{s}$

$$\therefore \quad 1 = \pi \sqrt{\frac{l}{g}}$$

বা, $l = \frac{g}{\pi^2}$ ... ... (i)

আবার, 1 দিন (d) $= 1 \times 24 \times 60 \times 60\ \text{s} = 86400\ \text{s}$

দোলক ঘড়িটি দিনে 3 min অর্থাৎ $3 \times 60 = 180\ \text{s}$ স্লো যায়

1 d-এ ঘড়িটির অর্ধ দোলনের সংখ্যা $= 86400 - 180 = 86220$

$\therefore$ এর অর্ধ দোলনকাল, $t_1 = \frac{86400}{86220}\ \text{s}$

এই সরল দোলকটির দৈর্ঘ্য, l_1 হলে,

$$t_1 = \pi \sqrt{\frac{l_1}{g}}$$

বা, $l_1 = \frac{g t_1^2}{\pi^2}$ ... ... (ii)

সমীকরণ (ii) থেকে সমীকরণ (i) বিয়োগ করে পাই,

$$l_1 - l = \frac{g t_1^2}{\pi^2} - \frac{g}{\pi^2} = \frac{g}{\pi^2}(t_1^2 - 1)$$

$$= \frac{9{\cdot}80}{9{\cdot}87}\left[\left(\frac{86400}{86220}\right)^2 - 1\right]$$

$$= \frac{9{\cdot}80}{9{\cdot}87} \times 4{\cdot}1799 \times 10^{-3}$$

$$= 4{\cdot}15 \times 10^{-3}\ \text{m} = 4{\cdot}15\ \text{mm}$$

সুতরাং, সঠিক সময় পেতে হলে দোলকটির দৈর্ঘ্য $4{\cdot}15$ mm কমাতে হবে।

৫। একটি সরল গতিসম্পন্ন কণার কম্পাঙ্ক ω হলে প্রমাণ কর যে এর স্থিতিশক্তি পরিবর্তনের কম্পাঙ্ক 2ω।

আমরা জানি, দোলগতির সমীকরণ,

$x = A\cos\omega t$

এবং স্থিতিশক্তি, $E_p = \frac{1}{2}m\omega^2x^2$

$= \frac{1}{2}m\omega^2A^2\cos^2\omega t$

$= \frac{1}{2}m\omega^2A^2\frac{1+\cos 2\omega t}{2}$

$= \frac{1}{4}m\omega^2A^2(1+\cos 2\omega t)$

এখানে,
ω = কম্পাঙ্ক
A = বিস্তার

সুতরাং, স্থিতিশক্তি পরিবর্তনের কম্পাঙ্ক = 2ω (প্রমাণিত)

৬। সাম্যাবস্থান থেকে একটি সরল দোলগতিসম্পন্ন বস্তুকণার কী পরিমাণ সরণ হলে এর বেগ সর্বোচ্চ বেগের অর্ধেক হবে ?

আমরা জানি, বস্তুকণার সরণ x হলে কণার বেগ, $v = \omega\sqrt{A^2-x^2}$

এবং বস্তুকণার সর্বোচ্চ বেগ, $v = \omega A$

প্রশ্নানুসারে,

$\frac{1}{2}\omega A = \omega\sqrt{A^2-x^2}$

বা, $\frac{A}{2} = \sqrt{A^2-x^2}$

বা, $\frac{A^2}{4} = A^2 - x^2$

বা, $x^2 = A^2 - \frac{A^2}{4} = \frac{3}{4}A^2$

$\therefore \quad x = \pm\sqrt{\frac{3}{4}}A = \pm\frac{\sqrt{3}}{2}A$

এটিই নির্ণেয় সরণ।

দোলক ঘড়ি দ্রুত (Fast) বা ধীরে (slow) যাওয়া

দোলক ঘড়ি এক ধরনের সরল দোলক যার দোলনকাল 2 সেকেন্ড এবং অর্ধ দোলনকাল 1 সেকেন্ড। অর্থাৎ এটি একটি সেকেন্ড দালক।

একটি দোলক ঘড়ি এর দোলনকাল দ্বারা সময় নির্দেশ করে। দোলনকালের সমীকরণ, $T = 2\pi\sqrt{\frac{L}{g}}$। এখানে L দোলকের কার্যকর দৈর্ঘ্য এবং g অভিকর্ষজ ত্বরণ। ওই সমীকরণ থেকে দেখা যায় যে (ক) L-এর পরিবর্তন হলে বা (খ) g-এর মান পরিবর্তিত হলে সেকেন্ড দোলকের দোলনকাল, T = 2 s না হয়ে কম বা বেশি হয়। দোলনকাল বেশি হওয়ার অর্থ হলো যে দোলকটি ধীর গতিতে দোলে। অর্থাৎ ঘড়ি স্লো বা ধীরে যায়। আবার, দোলনকাল কমে গেলে ঘড়ি ফাস্ট বা দ্রুত হয়।

জানার বিষয় : একটি সরল দোলককে লিফটের মধ্যে ঝুলালে—

(ক) লিফট যদি 'a' ত্বরণসহ নিচের দিকে নামে তবে দোলনকাল হবে, $T = 2\pi\sqrt{\frac{L}{g-a}}$।

(খ) লিফট যদি 'a' ত্বরণসহ ওপরের দিকে ওঠে তাহলে দোলনকাল হবে, $T = 2\pi\sqrt{\frac{L}{g+a}}$।

(গ) লিফটটি সুষমবেগে ওপরে উঠে বা নিচে নামে তবে, $T = 2\pi\sqrt{\frac{L}{g}}$।

(ঘ) লিফট অবাধে পড়লে দোলনকাল, $T = 2\pi\sqrt{\frac{L}{g-g}} = \infty$; অর্থাৎ দোলকটির গতি অপর্যাবৃত্ত হবে।

গাণিতিক উদাহরণ ৮.৫

১। সরল দোলগতিসম্পন্ন একটি কণার মোটশক্তি 3×10^{-7} Joule। তার ওপর সর্বাধিক যে বল ক্রিয়া করে তার মান 1.5×10^{-5} N। দোলগতির পর্যায়কাল 2 s এবং আদি দশা 60° হলে ওই সরল গতির সমীকরণ বের কর।

আমরা জানি, দোলকের মোট শক্তি,

$$E = \frac{1}{2} m\omega^2 A^2 = 3 \times 10^{-7}\ J \quad \dots \quad \dots \quad (i)$$

এর ওপর ক্রিয়ারত সর্বোচ্চ বল,

$$F_{max} = m\omega^2 A = 1.5 \times 10^{-5}\ N \quad \dots \quad \dots \quad (ii)$$

সমীকরণ (i)-কে সমীকরণ (ii) দ্বারা ভাগ করে পাই,

$$A = 4 \times 10^{-2}\ m = 0.04\ m$$

এখানে,
$E = 3 \times 10^{-7}$ J
$F_{max} = 1.5 \times 10^{-5}$ N
$T = 2$ s
$\theta = 60° = \frac{\pi}{3}$

পর্যায়কাল, $T = 2$ s $\therefore$ কৌণিক কম্পাঙ্ক, $\omega = \frac{2\pi}{T} = \frac{2\pi}{2} = \pi$ rad s^{-1}

আদি দশা, $\theta = 60° = \frac{\pi}{3}$

$\therefore$ কণাটির সরল দোলগতির সমীকরণ $x = 0.04 \sin\left(\pi t + \frac{\pi}{3}\right)$ m

অনুসন্ধানমূলক কাজ : সাম্যাবস্থান হতে একটি সরল দোলগতিসম্পন্ন বস্তুর কী পরিমাণ সরণ হলে এর গতিশক্তি ও স্থিতিশক্তি সমান হবে?

আমরা জানি, সরল দোলগতিসম্পন্ন বস্তুর গতিশক্তি $= \frac{1}{2} m\omega^2 (A^2 - x^2)$

এবং স্থিতিশক্তি $= \frac{1}{2} m\omega^2 x^2$

প্রশ্নানুসারে, $\frac{1}{2} m\omega^2 (A^2 - x^2) = \frac{1}{2} m\omega^2 x^2$

বা, $\frac{1}{2} m\omega^2 A^2 = \frac{1}{2} m\omega^2 x^2 + \frac{1}{2} m\omega^2 x^2 = m\omega^2 x^2$

বা, $A^2 = 2x^2$ বা, $x^2 = \frac{A^2}{2}$

$\therefore$ $x = \pm \frac{A}{\sqrt{2}}$, এটিই নির্ণেয় সরণ।

জানার বিষয় :

I. সরল দোলন গতিসম্পন্ন বস্তুর বিভব শক্তি সাম্যাবস্থায় শূন্য এবং গতিশক্তি সর্বাধিক, $E_k = \frac{1}{2} KA^2$

II. সর্বাধিক উচ্চতায় গতিশক্তি শূন্য এবং বিভব শক্তি সর্বাধিক, $E_p = mgh$

গাণিতিক উদাহরণ ৮.৬

১। 10 g ভরের একটি বস্তুকণা সরলরেখা বরাবর সরল দোলন গতি অর্জন করে। এর দোলনকাল 2 sec এবং বিস্তার 10 cm হলে (i) সাম্যাবস্থান থেকে 2 cm দূরে এর গতিশক্তি কত ? (ii) সাম্যাবস্থান থেকে 5 cm দূরে গতিশক্তি নির্ণয় কর।

(i) মনে করি সরল দোলন গতির সমীকরণ,

$$x = A \sin \omega t$$

$\therefore$ বেগ, $v = \frac{dx}{dt} = A\omega \cos \omega t$

$\therefore$ গতিশক্তি, $E_k = \frac{1}{2} mv^2 = \frac{1}{2} mA^2 \omega^2 \cos^2 \omega t = \frac{1}{2} mA^2\omega^2 (1 - \sin^2 \omega t)$

$$= \frac{1}{2} mA^2\omega^2 \left[1 - \left(\frac{x}{A}\right)^2\right] = \frac{1}{2} m\omega^2 (A^2 - x^2)$$

যখন $x = 0.02$ m, $m = 0.01$ kg, $A = 10$ cm $= 0.1$ m, $T = 2$ sec এবং $\omega = \frac{2\pi}{T}$

তখন $E_k = \frac{1}{2} \times 0.01 \times \frac{4\pi^2}{4} \{(0.1)^2 - (0.02)^2\}$

$= 0.005\,\pi^2 \times 0.0096 = 4.737 \times 10^{-4}\,J$

(ii) যখন $x = 5$ cm, $E_k = 0.005\,\pi^2 \times 0.0075 = 3.701 \times 10^{-4}\,J$

২। একটি স্প্রিংয়ের অগ্রভাগে 0.03 kg ভর ঝুলানো হলে স্প্রিংটি 0.1 m লম্বা হয়। স্প্রিংটিকে এই সাম্যাবস্থা হতে আরো 8×10^{-2}m লম্বা করে ছেড়ে দেওয়া হলো। মোট শক্তি কত এবং বেগ কত হবে ?

আমরা জানি,

$F = kx$

বা, $k = \frac{F}{x} = \frac{mg}{x} = \frac{0.03\,kg \times 9.8\,ms^{-2}}{0.10\,m}$

$= 2.94\,Nm^{-1}$

এখানে,
$m = 0.03$ kg
$g = 9.8\,ms^{-2}$
$x = 0.10$ m
$A = 8 \times 10^{-2}m = 0.08$ m

মোট শক্তি, $E = \frac{1}{2}kA^2 = \frac{1}{2} \times 2.94\,Nm^{-1} \times (0.08\,m)^2$

$= 9.41 \times 10^{-3}\,J$

আবার, $v_{max} = A\sqrt{\frac{k}{m}} = 0.08\,m\sqrt{\frac{2.94\,Nm^{-1}}{0.03\,kg}} = 0.7920\,ms^{-1}$

৩। $t = 0$ সময়ে কোনো একটি সরল দোলগতিসম্পন্ন কণার সরণ সর্বোচ্চ হলে কণাটির সমীকরণ বের কর।

সরল দোলগতির সাধারণ সমীকরণ,

$x = A \sin(\omega t + \alpha)$

এখন সর্বোচ্চ সরণ অর্থ সরণের মান বিস্তার A-এর সমান।

সুতরাং, $A = A \sin(\omega \times 0 + \alpha) = A \sin\alpha$

বা, $\sin\alpha = 1 = \sin\frac{\pi}{2}$

$\therefore \alpha = \frac{\pi}{2}$

কাজেই, সরল দোলগতির সমীকরণ,

$x = A \sin(\omega t + \frac{\pi}{2}) = A \cos\omega t$

৪। একটি সরল দোলকের ববের ভর 100 g এবং কার্যকর দৈর্ঘ্য 1 মিটার। উল্লম্ব রেখা হতে ববটিকে 10 cm দূরে টেনে ছেড়ে দিলে গতিপথের সর্বনিম্ন বিন্দু অতিক্রমকালে ববের বেগ কত হবে ?

আমরা জানি,

$\frac{1}{2}mv^2 = mgh = mg(L - \sqrt{L - x^2})$

বা, $\frac{1}{2}v^2 = g(1 - \sqrt{1 - (0.1)^2})$

$\therefore v^2 = 2 \times 9.8\,(1 - \sqrt{1 - (0.1)^2}) = 0.098$

$\therefore v = 0.31\,ms^{-1}$

এখানে,
$m = 100\,g = 0.1$ kg
$L = 1$ m
$x = 10\,cm = 0.1$ m
$g = 9.8\,ms^{-2}$
$v = ?$

নিজে কর : ১। গতিপথের মধ্য অবস্থানে অর্থাৎ $x = 0$ অবস্থানে মোট শক্তি নির্ণয় করে শক্তির নিত্যতা যাচাই কর।
২। গতিপথের কোন অবস্থানে গতিশক্তি শূন্য হবে ?

১। $x = 0$ অবস্থানে স্থিতিশক্তি $= 0$

$\therefore$ মোট যান্ত্রিক শক্তি = স্থিতিশক্তি + গতিশক্তি

বা, $E = 0 + \frac{1}{2}m\omega^2A^2 \;\therefore\; E = \frac{1}{2}m\omega^2A^2 = $

২। আবার গতিপথের সর্বোচ্চ অবস্থানে অর্থাৎ $x = A$ অবস্থানে শক্তির নিত্যতা যাচাই কর। সর্বোচ্চ অবস্থানে অর্থাৎ $x = A$ অবস্থানে গতিশক্তি, $E_k = \frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{2}m\omega^2(A^2 - x^2) = \frac{1}{2}m\omega^2(A^2 - A^2) = 0$

$\therefore$ মোট যান্ত্রিক শক্তি,

E = স্থিতিশক্তি + গতিশক্তি

$= \frac{1}{2}m\omega^2A^2 + 0$

$\therefore \quad E = \frac{1}{2}m\omega^2A^2$

সুতরাং উপরোক্ত দুই অবস্থানে মোট শক্তি একই থাকে। অর্থাৎ মোট শক্তি তার সরণের ওপর নির্ভর করে না, গতিপথের সর্বত্র তার মান স্থির থাকে। এটা শক্তির নিত্যতার সূত্র বা মোট শক্তির সংরক্ষণশীলতার সূত্র।

৮·১১ সরল দোলন গতি এবং বৃত্তাকার গতির মধ্যে সম্পর্ক
Relation between simple harmonic motion and circular motion

বৃত্তাকার গতি এক ধরনের সরল দোলন গতি। অর্থাৎ বৃত্তাকার গতি সরল দোলন গতির বৈশিষ্ট্যগুলি মেনে চলে। এখন সরল দোলন গতি এবং বৃত্তাকার গতির মধ্যে সম্পর্ক স্থাপন করতে গিয়ে চিত্র ৮·১৫ লক্ষ কর।

মনে করি একটি বস্তুকণা A বিন্দু হতে যাত্রা শুরু করে ABCD বৃত্তাকার পথে ঘড়ির কাঁটার বিপরীত দিকে সমকৌণিক বেগ ω-এ ঘুরছে [চিত্র ৮·১৫(ক)]। ধরি O বৃত্তের কেন্দ্র এবং A বৃত্তের ব্যাসার্ধ। মনে করি t সময় পর বস্তুকণাটি P অবস্থানে আসল। এখন P বিন্দু হতে বৃত্তের BOD ব্যাসের ওপর PN লম্ব অঙ্কন করি। N হবে লম্বটির পাদবিন্দু।

মনে করি $ON = y$। চিত্রে OPN ত্রিভুজ থেকে পাওয়া যায়,

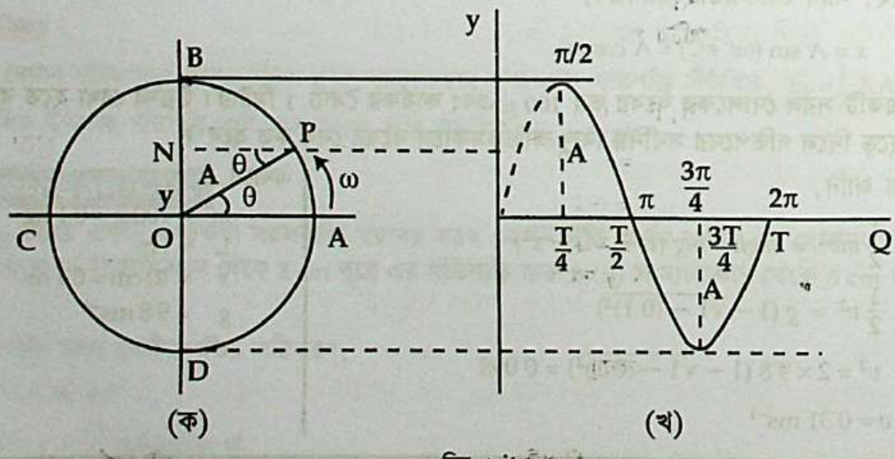
$y = OP \sin\theta = A \sin\theta$

যেহেতু কণাটি সমকৌণিক বেগে ঘুরছে, সুতরাং $\angle POA = \theta = \omega t$ ... ... (8.28)

θ-কে কণাটির দশা কোণ (phase angle) বা সংক্ষেপে দশা বলে।

এখন $y = A\sin\theta = A\sin\omega t$ ... ... (8.29)

P কণাটি যখন বৃত্তাকার পথে ঘুরতে থাকে তখন ব্যাস BOD-এর ওপর কণার পাদবিন্দু N ব্যাস BOD বরাবর স্পন্দিত হতে থাকে।



চিত্র ৮·১৫

সুতরাং কণাটির বেগ,

$$v = \frac{dy}{dt} = \frac{d}{dt}(A\sin\omega t) = A\,\omega\cos\omega t$$

এবং ত্বরণ, $a = \frac{dv}{dt} = \frac{d^2y}{dt^2} = -A\omega^2\sin\omega t$

$= -\omega^2 y$ ... ... (8.30)

অর্থাৎ কণাটির ত্বরণ এর সরণের সমানুপাতিক। সুতরাং N বিন্দুর গতি সরল ছন্দিত গতি। O হচ্ছে এই ছন্দিত গতির মধ্যবিন্দু বা সাম্যাবস্থান, B ও D ছন্দিত গতির প্রান্তীয় অবস্থান এবং P উৎপাদনকারী বিন্দু (generating point)। বৃত্তটির নাম নির্দেশক বৃত্ত (reference circle) এবং কণাটির নাম নির্দেশক কণা (reference particle) [চিত্র ৮·১৫(ক)]। লক্ষ করলে দেখা যাবে যে কণাটি বৃত্তাকার পথে যখন ABCDA পথে একবার ঘুরে আসে সেই সময় পাদবিন্দুটি OBODO ব্যাস বরাবর যাত্রা বিন্দু বা আদি বিন্দু থেকে শুরু করে একবার পথ অতিক্রম শেষ করে আদি বিন্দুতে ফিরে আসে। কণাটির বৃত্তাকার পথে একবার ঘুরতে যে সময় লাগে তাই দোলন বা পর্যায়কাল T। ওই সময় একই পাদবিন্দুও একবার পথ পরিক্রমা শেষ করে। সুতরাং

$$T = \frac{2\pi}{\omega} \qquad [\because \theta = \omega t \text{ এবং যখন } \theta = 2\pi, t = T \text{ সুতরাং } 2\pi = \omega T]$$

উপরের বর্ণনা থেকে দেখা যাচ্ছে যে পাদবিন্দু N-এর গতি—

(ক) পর্যাবৃত্ত গতি

(খ) সরল রৈখিক গতি

(গ) ত্বরণ সরণের সমানুপাতিক এবং বিপরীতমুখি।

সুতরাং পাদবিন্দুর গতি সরল দোলনগতি।

৮·১২ উল্লম্ব স্প্রিং-এর দোলন
Oscillation of a vertical spring

স্প্রিং-এর এক প্রান্ত দৃঢ় অবলম্বনে আটকিয়ে অপর প্রান্তে একটি ভর ঝুলিয়ে সামান্য টেনে ছেড়ে দিলে তা ওপর-নিচে সরল দোলন গতিতে স্পন্দিত হতে থাকে। ৮·১৬ (ক) চিত্রে ভর ঝুলানোর পূর্বে স্প্রিংটির অবস্থা দেখানো হয়েছে। এ অবস্থায় স্প্রিংটির মুক্ত প্রান্ত P অবস্থানে ছিল। স্প্রিংটির মুক্ত প্রান্তে m ভরের একটি বস্তু ঝুলানোর ফলে এর দৈর্ঘ্য l পরিমাণ প্রসারিত হয়ে Q বিন্দুতে এসে স্থির হয় চিত্র ৮·১৬(খ)। এমতাবস্থায় স্প্রিং দ্বারা উর্ধ্বমুখি বল F বস্তুর ওজনের সমান হয় এবং বস্তুর ওজন স্প্রিংএর প্রত্যায়নী বল F_0 দ্বারা প্রশমিত হয়।

সুতরাং $F_0 = -mg$

স্প্রিংটি স্থিতিস্থাপক সীমার মধ্যে টানা হলে

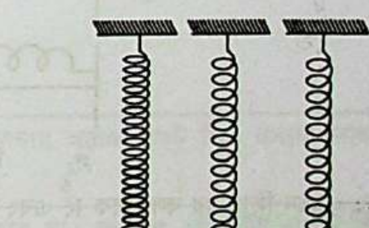
$$F_0 = -Kl$$

$$\therefore \quad mg = Kl$$

এখন m ভরটিকে টেনে ছেড়ে দিলে ভরটি Q-কে সাম্যাবস্থানে রেখে A বিস্তারে স্পন্দিত হতে থাকবে। ধরা যাক t সময়ে স্থির অবস্থান হতে x সরণ প্রাপ্ত হবে। এই অবস্থায় স্প্রিংটির প্রত্যায়নী বল, $F_1 = -K(x + l)$ [চিত্র ৮·১৬(গ)]।

সুতরাং, ভরটির ওপর নিট বল, $F = F_1 + mg$

$$= -Kx - Kl + mg$$
$$= -Kx - Kl + Kl$$
$$= -Kx$$



চিত্র ৮·১৬

এই বলের ক্রিয়ায় m ভরের বস্তুটি a ত্বরণ প্রাপ্ত হলে

$$ma = -Kx$$

বা, $a = \frac{-K}{m}x \qquad [\because K, m \text{ ধ্রুবক}]$

$$\therefore \quad a \propto -x$$

অর্থাৎ ত্বরণ সরণের সমানুপাতিক ও বিপরীতমুখি। এটি সরল ছন্দিত গতির একটি শর্ত। সুতরাং স্প্রিং-এর গতি সরল ছন্দিত গতি।

ঝুলন্ত ভর m এর গতির জন্য নিম্নলিখিত শর্ত সাপেক্ষে সরল দোলকের গতি সরল দোলন গতি হবে—

(১) স্প্রিং এর ভর উপেক্ষণীয় হতে হবে।

(২) স্প্রিংটিকে তার স্থিতিস্থাপক সীমার মধ্যে রেখে দোল দিতে হবে।

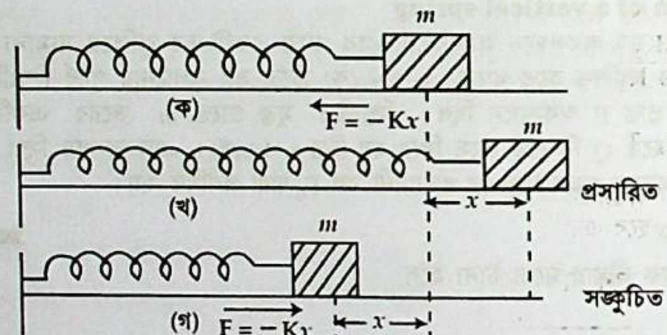
(৩) স্প্রিং এর বিস্তার x_0 কণাটির সাম্যাবস্থায় প্রসারণ e এর চেয়ে কম হতে হবে। অর্থাৎ $x_0 < e$ হতে হবে।

অনুসন্ধানমূলক কাজ : সকল সরল ছন্দিত গতিই পর্যাবৃত্ত গতি, কিন্তু সকল পর্যাবৃত্ত গতি সরল দোলন গতি নয়—ব্যাখ্যা কর।

সকল সরল ছন্দিত গতি পর্যাবৃত্ত গতির বিশেষ রূপ মাত্র। পর্যাবৃত্ত গতি (ক) যদি রৈখিক হয়, (খ) কণার ত্বরণ যদি সাম্যাবস্থান অভিমুখী ও (গ) সাম্যাবস্থান থেকে সরণের সমানুপাতিক হয় তাহলেই কেবল তাকে সরল ছন্দিত গতি বলা হয়। ঘড়ির কাঁটার গতি ও গ্রহ–উপগ্রহের গতি পর্যাবৃত্ত গতি, কিন্তু ওপরের শর্ত (ক) ও (খ) পূরণ না করায় ওই ধরনের গতি সরল ছন্দিত গতি নয়। সুতরাং, বলা যায় যে, সকল সরল ছন্দিত গতিই পর্যাবৃত্ত গতি, কিন্তু সকল পর্যাবৃত্ত গতি সরল দোলন গতি নয়।

৮·১৩ অনুভূমিক স্প্রিং-এর দোলন
Oscillation of a horizontal spring

ধরা যাক, নগণ্য ভরের একটি স্থিতিস্থাপক স্প্রিং-এর এক প্রান্ত দৃঢ় খাড়া অবলম্বনের সাথে যুক্ত এবং অপর প্রান্তে m ভরের একটি বস্তু যুক্ত করা হয়েছে [চিত্র ৮·১৭(ক)]। এটি একটি মসৃণ অনুভূমিক তলের ওপর রয়েছে। এবার বস্তুটিকে ডানদিকে সরালে স্প্রিংটি প্রসারিত হয় এবং বস্তুর ওপর বামদিকে প্রত্যায়নক বল $\vec{F}$ ক্রিয়াশীল হয় [চিত্র ৮·১৭(খ)] কিন্তু বস্তুটিকে বামদিকে সরালে স্প্রিংটি সংকুচিত হয় এবং বস্তুর ওপর ডানদিকে প্রত্যায়নক বল $\vec{F}$ কাজ করে [চিত্র ৮·১৭(গ)]।



চিত্র ৮·১৭ : অনুভূমিক স্প্রিং-এর সংশ্লিষ্ট দোলন।

এখন স্প্রিং-এর বল ধ্রুবক K এবং বস্তুর সরণ x হলে, $F = -Kx$

এবং বস্তুর ত্বরণ, $a = \frac{F}{m} = -\frac{Kx}{m} = -\omega^2 x$

অতএব, $a \propto x$ অর্থাৎ ত্বরণ সরণের সমানুপাতিক এবং বিপরীতমুখি যা সরল দোলকের শর্ত। সুতরাং স্প্রিং-এ যুক্ত বস্তুর গতি সরল দোলগতি। এই স্পন্দনের দোলনকাল,

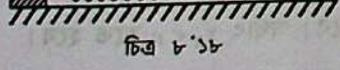
$$T = \frac{2\pi}{\omega} = \frac{2\pi}{\sqrt{\frac{K}{m}}} = 2\pi\sqrt{\frac{m}{K}} \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad (8.31)$$

[বি. দ্র. স্প্রিং-এর উল্লম্ব এবং অনুভূমিক স্পন্দনের দোলনকাল সমান হবে।]

আলোচনা : ওপরে বর্ণিত স্প্রিং-এর উল্লম্ব বা অনুভূমিকভাবে দোলনের ক্ষেত্রে স্প্রিং-এর ভর নগণ্য বিবেচনা করা হয়েছে।

(i) এখন যদি স্প্রিং-এর ভর M এবং স্প্রিং-এর প্রান্তে সংযুক্ত ভর m হয়, তবে স্প্রিং দোলকের দোলনকাল হবে, $T' = 2\pi\sqrt{m + (M/3)}$.

(ii) m_1 ও m_2 ভরের দুটি বস্তুকে K বল ধ্রুবক বা স্প্রিং ধ্রুবকবিশিষ্ট একটি স্প্রিং দ্বারা যুক্ত করে ওদেরকে অনুভূমিক মসৃণ তলে টেনে ছেড়ে দিলে যে দোলন সৃষ্টি হবে তার দোলনকাল হবে,



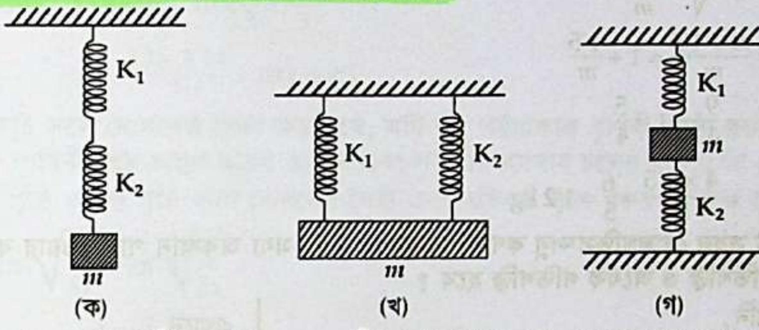
চিত্র ৮·১৮

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{\mu}{K_s}},$$

এখানে $\mu = \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2}$, μ হলো পরিমিত ভর (reduced mass)

৮.১৩.১ সমন্বিত স্প্রিং-এর দোলন
Oscillation of a composite spring

K_1 ও K_2 বল ধ্রুবকবিশিষ্ট দুটি স্প্রিং-কে দুইভাবে সমন্বয় করা যায়। যথা—(ক) শ্রেণি সমবায় (Series combination) এবং (খ) সমান্তরাল সমবায় (Parallel combination).



চিত্র ৮.১৯ : (ক) শ্রেণি সমবায়। চিত্র ৮.১৯(খ) ও (গ) : সমান্তরাল সমবায়।

(ক) স্প্রিং দুটি শ্রেণি সমবায়ে যুক্ত থাকলে এবং কার্যকর বল ধ্রুবকের মান K_s হলে,

$$\frac{1}{K_s} = \frac{1}{K_1} + \frac{1}{K_2}$$

বা, $$K_s = \frac{K_1 K_2}{K_1 + K_2}$$

দোলনকাল হবে, $$T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{K_s}} = 2\pi\sqrt{\frac{m(K_1 + K_2)}{K_1 K_2}}$$

(খ) স্প্রিং দুটি সমান্তরালে সমবায়ে যুক্ত থাকলে এবং কার্যকর বল ধ্রুবকের মান K_p হলে, (খ) ও (গ) উভয় ক্ষেত্রেই, $K_p = K_1 + K_2$ হবে এবং

এদের দোলনকাল হবে, $$T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{K_p}} = 2\pi\sqrt{\frac{m}{K_1 + K_2}}$$

অনুসন্ধানমূলক কাজ : একটি শিশু দোলনায় দুলছে। ওই অবস্থায় দোলনায় আরও একট শিশু বসলে দোলনার পর্যায়কালের পরিবর্তন হবে কী ? —ব্যাখ্যা কর।

সরল দোলগতিসম্পন্ন দোলনার পর্যায়কাল তার ওজনের ওপর নির্ভর করে না। অতএব, দোলনায় একটি শিশুর জায়গায় দুটি শিশু বসলেও দোলনার পর্যায়কালের কোনো পরিবর্তন হবে না। পর্যায়কাল একই থাকবে।

অনুসন্ধানমূলক কাজ : সরল দোলগতিযুক্ত কণার সরণ ও ত্বরণ পরস্পর বিপরীত দশায় থাকে। —ব্যাখ্যা কর।

ধরা যাক, সরল দোলগতিসম্পন্ন কণাটির সরণের রাশিমালা,

$$x = A\sin(\omega t + \alpha)$$

$\therefore$ বেগ, $$v = \frac{dx}{dt} = A\omega\cos(\omega t + \alpha)$$

এবং ত্বরণ, $$a = \frac{dv}{dt} = -A\omega^2\sin(\omega t + \alpha) = -\omega^2 x$$

ঋণাত্মক চিহ্ন দ্বারা বোঝা যায়, ত্বরণ সর্বদা সরণের বিপরীতমুখি অর্থাৎ এরা পরস্পর বিপরীত দশায় থাকে। $[\because x = A\sin(\omega t + \alpha)]$

গাণিতিক উদাহরণ ৮.৭

১। একটি স্প্রিং-এর সাথে যুক্ত m ভরের বস্তুর দোলনকাল 2 s। বস্তুর ভর 1.5 kg বাড়ালে দোলনকাল 1s বাড়ে। স্প্রিং-এর সাথে যুক্ত m ভরের মান বের কর। (ধরে নাও, হুকের সূত্র প্রযোজ্য)

আমরা জানি, K বল ধ্রুবকবিশিষ্ট স্প্রিং-এর সাথে m ভরের সরল দোলগতির দোলনকাল,

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{K}}$$

এখন, প্রথম ক্ষেত্রে, $2 = 2\pi\sqrt{\frac{m}{K}}$ ... ... (i)

এবং দ্বিতীয় ক্ষেত্রে, $2 + 1 = 2\pi\sqrt{\frac{m + 1.5}{K}}$ ... ... (ii)

সমীকরণ (ii) কে (i) দ্বারা ভাগ করে পাই,

$$\frac{3}{2} = \sqrt{\frac{m+1.5}{m}}$$

বা, $\frac{9}{4} = \frac{m+1.5}{m} = 1 + \frac{1.5}{m}$

বা, $\frac{1.5}{m} = \frac{9}{4} - 1 = \frac{5}{4}$

$\therefore \quad m = \frac{4 \times 1.5}{5} = \frac{6}{5} = 1.2 \text{ kg}$

২। একটি সরল দোলগতিসম্পন্ন কণার পর্যায়কাল 4 s। মধ্য অবস্থান পার হওয়ার কতক্ষণ পরে কণাটির মোট শক্তির অর্ধেক স্থিতিশক্তি ও অর্ধেক গতিশক্তি হবে ?

এখানে,
$T = 4$ s
$\therefore \omega = \frac{2\pi}{T} = \frac{2\pi}{4} = \frac{\pi}{2}$ rad s^{-1}

আমরা জানি,

স্থিতিশক্তি, $E_p = \frac{1}{2} m\omega^2 x^2$

এবং গতিশক্তি, $E_k = \frac{1}{2} m\omega^2 (A^2 - x^2)$

প্রশ্নানুসারে, $\frac{1}{2} m\omega^2 x^2 = \frac{1}{2} m\omega^2 (A^2 - x^2)$

বা, $x^2 = A^2 - x^2$

বা, $2x^2 = A^2$

$\therefore \quad x = \pm \frac{A}{\sqrt{2}}$

সরল গতির সমীকরণ, $x = A \sin \omega t$ থেকে পাই,

$\pm \frac{A}{\sqrt{2}} = A \sin \omega t$

বা, $\sin \omega t = \pm \frac{1}{\sqrt{2}}$

$\therefore \quad \omega t = \frac{\pi}{4}$

বা, $\pi + \frac{\pi}{4} = \frac{5\pi}{4}$

$\therefore \quad t = \frac{\pi}{4\omega} = \frac{\pi}{4 \times \frac{\pi}{2}} = \frac{1}{2}\text{ s} = 0.5 \text{ s}$

অথবা, $t = \frac{5\pi}{4\omega} = \frac{5\pi}{4 \times \frac{\pi}{2}} = \frac{5}{2}\text{ s} = 2.50 \text{ s}$

সুতরাং, 0.5 s বা 2.5 s পরে কণাটির মোট শক্তির অর্ধেক স্থিতিশক্তি এবং অর্ধেক গতিশক্তি হবে।

৩। সরল দোল গতিসম্পন্ন একটি কণার গতির সমীকরণ $x = 10 \sin\left(\frac{\pi}{3}t + \frac{\pi}{4}\right)$ m। ওই গতির পর্যায়কাল ও সর্বোচ্চ দ্রুতি নির্ণয় কর।

এখানে, $x = 10 \sin\left(\frac{\pi}{3}t + \frac{\pi}{4}\right)$ m ... ... (i)

আমরা জানি, সরল দোল গতির সাধারণ সমীকরণ,

$x = A \sin(\omega t + \delta)$ ... ... (ii)

সমীকরণ (i) ও (ii) তুলনা করে পাই,

বিস্তার, A = 10 m

কৌণিক কম্পাঙ্ক, $\omega = \frac{\pi}{3}$ rad s^{-1}

$\therefore$ পর্যায়কাল, $T = \frac{2\pi}{\omega} = \frac{2\pi}{\frac{\pi}{3}} = 6\text{ s}$

এবং সর্বোচ্চ দ্রুতি, $v_{max} = \omega A = 10 \times \frac{\pi}{3} = \frac{10\pi}{3}$

$= \frac{10 \times 3.14}{3} = 10.4\text{ ms}^{-1}$

৪। চন্দ্রপৃষ্ঠে একটি সরল দোলকের দৈর্ঘ্য কত হবে, যদি ওর পর্যায়কাল পৃথিবী পৃষ্ঠে একটি সরল দোলকের পর্যায়কালের সমান হয় ? (পৃথিবীর ভর চন্দ্রের ভরের 80 গুণ এবং পৃথিবীর ব্যাসার্ধ চন্দ্রের ব্যাসার্ধের 4 গুণ বেশি)।

ধরা যাক, পৃথিবী পৃষ্ঠে ও চন্দ্র পৃষ্ঠে সরল দোলকের দৈর্ঘ্য এবং অভিকর্ষ ত্বরণ যথাক্রমে l_1 ও l_2 এবং g_1 ও g_2

প্রশ্নানুসারে, $T = 2\pi\sqrt{\frac{l_1}{g_1}} = 2\pi\sqrt{\frac{l_2}{g_2}}$

$\therefore \frac{l_1}{g_1} = \frac{l_2}{g_2} \qquad \therefore \frac{l_2}{l_1} = \frac{g_2}{g_1}$

আবার, $g_1 = \frac{GM_1}{R_1^2}$ এবং $g_2 = \frac{GM_2}{R_2^2}$ । এখানে M_1 ও M_2 এবং R_1 ও R_2 যথাক্রমে পৃথিবী ও চন্দ্রের ভর ও ব্যাসার্ধ।

$\therefore \frac{g_2}{g_1} = \frac{R_1^2}{R_2^2} \cdot \frac{M_2}{M_1} = \frac{l_2}{l_1}$

$\therefore \frac{l_2}{l_1} = (4)^2 \times \frac{1}{80} = \frac{16}{80} = \frac{1}{5} \qquad \left[\because \frac{M_1}{M_2} = 80,\ \frac{R_1}{R_2} = 4\right]$

বা, $l_2 = \frac{l_1}{5}$

সুতরাং, চন্দ্রপৃষ্ঠে সরল দোলকের দৈর্ঘ্য পৃথিবী পৃষ্ঠে সরল দোলকের দৈর্ঘ্যের $\frac{1}{5}$ অংশ হতে হবে।

৫। যখন 70 kg ভরবিশিষ্ট এক ব্যক্তি একটি গাড়িতে ওঠে তখন গাড়ির ভারকেন্দ্র 0.4 cm নেমে যায়। গাড়ির ভর 1000 kg হলে শূন্য অবস্থায় গাড়ির স্পন্দনের কম্পাঙ্ক নির্ণয় কর।

আমরা জানি,

গাড়ির স্পন্দনের কম্পাঙ্ক,

$n = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{K}{M}}$ এখানে K স্প্রিং-এর বল ধ্রুবক

এখানে,
$m = 70\text{ kg}$
$g = 9.8\text{ ms}^{-2}$
$x = 0.4\text{ cm} = 0.4 \times 10^{-2}\text{ m}$
$M = 1000\text{ kg}$

গাড়ির স্প্রিং-এর বল ধ্রুবক, $K = \frac{F}{x} = \frac{mg}{x} = \frac{70 \times 9.8}{0.4 \times 10^{-2}} = 1.715 \times 10^5\text{ N/m}$

$\therefore n = \frac{1}{2 \times 3.14} \times \sqrt{\frac{1.715 \times 10^5}{1000}} = 2.085\ s^{-1}$

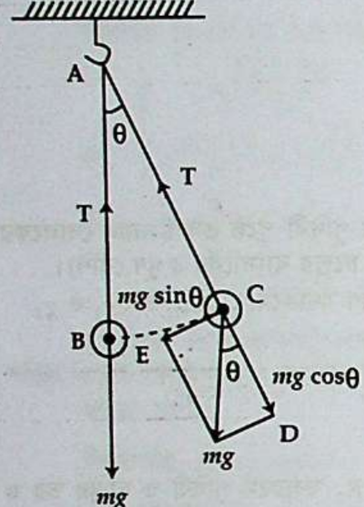
৮.১৪ সরল দোলকের গতি সরল দোলন গতি
Motion of a simple pendulum is simple harmonic motion

একটি দৃঢ় অবলম্বন থেকে ওজনহীন, নমনীয় ও অসম্প্রসারণীয় সুতা দিয়ে প্রায় আয়তনহীন একটি বস্তুকে ঝুলিয়ে দিয়ে বস্তুটিকে সরল ছন্দিত গতিতে দুলতে দিলে একটি সরল দোলক তৈরি হয়। এই দোলককে 4° এর মধ্যে রেখে দুলতে দিলে এর গতি সরল দোলন গতি হবে। এই ধরনের একটি সরল দোলক দেখানো হলো [চিত্র ৮.২০]।

মনে কর AB একটি সরল দোলক এবং এর ভারকেন্দ্র B এবং m এর ভর। দোলকটিকে দুলতে দিলে যেকোনো এক সময় সাম্যাবস্থান থেকে θ কোণে AC অবস্থানে আসে। এখন C বিন্দুর ওজন mg খাড়া নিচের দিকে ক্রিয়া করে। এই ওজনকে দুটি উপাংশে বিভাজন করা যায়। একটি উপাংশ সুতার দৈর্ঘ্য CD এর দিকে $mg\cos\theta$ এবং অপর উপাংশ সরণের বিপরীতে CE বরাবর $mg\sin\theta$। এক্ষেত্রে $mg\cos\theta$ উপাংশ সুতার টান T দ্বারা নিষ্ক্রিয় হয়। একমাত্র কার্যকরী বল F হলো $mg\sin\theta$ যার দিক সাম্যাবস্থানের দিকে।

$\therefore F = -mg\sin\theta \qquad \dots \qquad \dots \qquad \dots \qquad (8.32)$

এখানে g = অভিকর্ষজ ত্বরণ। যেহেতু বল সরণের বিপরীতমুখি তাই $-ve$ চিহ্ন ব্যবহৃত হয়েছে।



চিত্র ৮.২০

কার্যকরী বলের জন্য ত্বরণ a হলে $F = ma$

$\therefore \quad ma = -mg \sin\theta$

বা, $\quad a = -g \sin\theta \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad (8.33)$

θ এর মান ক্ষুদ্র (4° এর বেশি না) হলে $\sin\theta = \theta$ রেডিয়ান ধরা হয়। সেক্ষেত্রে সরল দোলকের গতিপথ সরলরৈখিক হয়।

সমীকরণ (8.32) থেকে পাই,

$$a = -g \times \frac{BC}{AC} = -g \times \frac{x}{L}$$

এখানে $\frac{g}{L}$ = ধ্রুবক = ω^2 ধরা হলে $a = -\omega^2 x$ বা, $a \propto -x$ হয়।

অর্থাৎ ত্বরণ সরণের সমানুপাতিক ও বিপরীতমুখি হয়, যা সরল দোলন গতির বৈশিষ্ট্যকে প্রকাশ করে।

দোলায়মান সরল দোলকের দোলনকাল উপরোক্ত সমীকরণ-এর সাহায্যে নির্ণয় করা যায়।

আমরা পাই,

$\omega^2 = \frac{g}{L}$ বা, $\omega = \sqrt{\frac{L}{g}}$ আমরা জানি, $\omega = 2\pi n$ এবং $T = \frac{1}{n}$

বা, $\quad 2\pi n = \sqrt{\frac{L}{g}}$

বা, $\quad 2\pi \times \frac{1}{T} = \sqrt{\frac{L}{g}}$

$\therefore \quad T = 2\pi \sqrt{\frac{L}{g}} \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad (8.34)$

এটি সরল দোলন গতির পর্যায়কালের সমীকরণ।

যদি কোনো সরল দোলকের দোলনকাল $T = 2$ sec হয় তাহলে ওই দোলককে আমরা সেকেন্ড দোলক বলে থাকি। সমীকরণ (8.34) থেকে পাই,

$g = 4\pi^2 \frac{L}{T^2} \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad (8.35)$

অর্থাৎ উপরোক্ত সমীকরণ থেকে বলা যায় অল্প বিস্তারে (4° এর কম) দোলায়মান সরল দোলকের গতি সরল দোলন গতি।

অনুধাবনমূলক কাজ : প্রত্যায়নক বল কী ? স্প্রিং-এর ক্ষেত্রে কী ধরনের বলের উদ্ভব ঘটে ?

বল প্রয়োগে কোনো বস্তুর বিকৃতি হলে স্থিতিস্থাপকতার কারণে পূর্বের অবস্থায় ফিরে যেতে বস্তুর মধ্যে যে বল উৎপন্ন হয় তাকে প্রত্যায়নক বল বলে। স্প্রিংকে বল প্রয়োগ করে প্রসারিত বা সংকুচিত করলে এটি পূর্বের অবস্থায় ফিরে যেতে প্রত্যায়নক বল সৃষ্টি হয়। এই প্রত্যায়নী বল মূলত স্থিতিস্থাপক বল।

৮.১৫ সেকেণ্ড দোলক

Second pendulum

যে সরল দোলকের দোলন কাল 2 সেকেন্ড তাকে সেকেন্ড দোলক বলে। অর্থাৎ সেকেন্ড দোলকের $T = 2$ সে.।

কোনো একটি সেকেন্ড দোলকের কার্যকর দৈর্ঘ্য L হলে, $T = 2 = 2\pi\sqrt{\frac{L}{g}} = \frac{1}{n}$.

অর্থাৎ $2 = 2\pi\sqrt{\frac{L}{g}}$, বা, $1 = \pi\sqrt{\frac{L}{g}}$.

বা, $1 = \pi^2 \frac{L}{g}$

$\therefore \quad L = \frac{g}{\pi^2} \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad (8.36)$

সুতরাং, দেখা যায়, সেকেন্ড দোলকের দৈর্ঘ্য অভিকর্ষজ ত্বরণের ওপর নির্ভর করে। সেকেন্ড দোলকের দৈর্ঘ্য অভিকর্ষজ ত্বরণের সমানুপাতিক। $\therefore L \propto g$.

যাচাই কর : একটি গ্রাফ কাগজে L—T^2 লেখচিত্রটি অঙ্কন করলে তা নিম্নরূপ হবে।
$T^2 = y$, $L = x$ এবং ধ্রুবক $= m$ ধরা হলে সরলরেখাটির সমীকরণ হয় $y = mx$

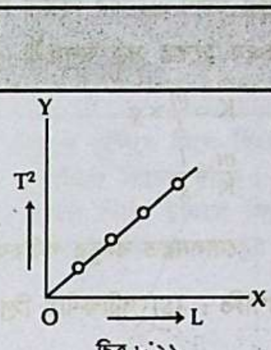
২।(ক) লেখচিত্র থেকে L ও T এর মধ্যে সম্পর্ক পর্যবেক্ষণ কর এবং g-এর ক্ষেত্রে তা প্রয়োগ কর। কার্যকরী দৈর্ঘ্য বেড়ে গেলে g এর মান কীরূপ হবে ?

(খ) $L - \frac{1}{T^2}$ লেখচিত্রটি কীরূপ হবে ? গ্রাফ কাগজে অঙ্কন কর।

(গ) পর্যায়কাল কমে গেলে g-এর মানের কী পরিবর্তন হবে ?

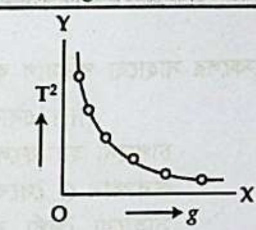
(ঘ) এই গ্রাফ থেকে g নির্ণয়ের পদ্ধতিটি লেখ।

(ঙ) পর্যায়কাল বৃদ্ধি পেলে g-এর মানের কী পরিবর্তন ঘটবে ?



চিত্র ৮.২১

যাচাই কর : নিচের চিত্রে $g - T^2$ লেখচিত্রে T^2 এবং g এর মধ্যে পারস্পরিক পরিবর্তনগুলি ব্যাখ্যা কর।



চিত্র ৮.২২

কাজ : একটি দোলক ঘড়ির দোলনকাল 2.5 s হলে এটি সঠিক সময় দেবে কি ?

দোলক ঘড়ির দোলনকাল 2.5 s হলে তা একটি অর্ধ দোলনে সময় নেয় $\frac{2.5}{2} = 1.25$ s; ফলে সেকেন্ড দোলকের ন্যায় এই দোলকের একটি অর্ধ দোলনকে এক সেকেন্ড ধরে সময় বিবেচনা করলে হিসাবকৃত সময় সঠিক হবে না। কিন্তু এই দোলকের একটি অর্ধ দোলনকে 1.25 s ধরে সময় বিবেচনা করলে সঠিক সময় পাওয়া যাবে।

৮.১৬ ব্যবহারিক
Experimental

পরীক্ষণের নাম :	(ক) স্প্রিং ধ্রুবক নির্ণয়ের পরীক্ষা
পিরিয়ড : ২	Experiment for the determination of spring constant

তত্ত্ব : উল্লম্বভাবে ঝুলন্ত একটি পেঁচানো স্প্রিং থেকে m ভরের কোনো বস্তুকে ঝুলিয়ে দিলে স্প্রিংটির দৈর্ঘ্য l পরিমাণ বৃদ্ধি পায়। এ অবস্থায় বস্তুটি সাম্যাবস্থায় আছে ধরা হয়। এবার বস্তুটিকে নিচের দিকে x দূরত্ব টেনে ছেড়ে দিলে সেটি সরল ছন্দিত স্পন্দনে স্পন্দিত হতে থাকবে [চিত্র ৮.২৩]। বস্তুটিকে নিচের দিকে টানলে স্প্রিংটি এর ওপর প্রাথমিক অবস্থান অভিমুখে একটি প্রত্যায়নক বল (restoring force) প্রয়োগ করে। হুকের সূত্র অনুসারে প্রত্যায়নক বল বস্তুর সরণ x-এর সমানুপাতিক এবং বিপরীতমুখি। সুতরাং

$$F = -Kx$$

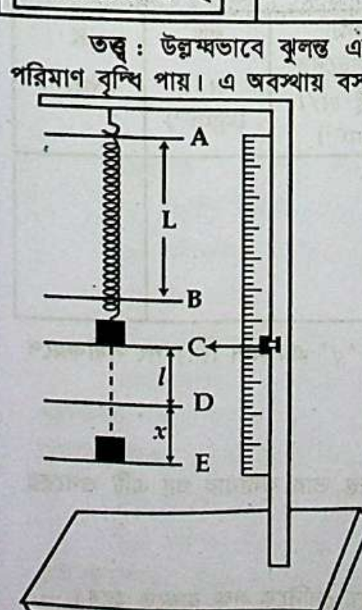
এখানে K স্প্রিংটির বল ধ্রুবক। বস্তুকে ছেড়ে দিলে F বলের দরুন সেটি a ত্বরণ নিয়ে চলে। বস্তুটির ভর m হলে এর ত্বরণ হবে,

$$a = \frac{F}{m} = -\frac{K'}{m}x$$

$$a = -Kx \qquad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \text{(i)}$$

যেহেতু $K = \frac{K'}{m}$ = ধ্রুবক = স্প্রিং ধ্রুবক। অতএব বস্তুর গতি সরল দোলন গতি হবে।

যেহেতু একক সরণে বস্তুর ত্বরণ $= \frac{K'}{m}$। সুতরাং দোলনরত বস্তুর পর্যায়কাল, $T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{K}} \qquad \ldots \quad \ldots \quad \text{(ii)}$



চিত্র ৮.২৩

বস্তুর ওজন mg-এর ক্রিয়ায় স্প্রিংটির দৈর্ঘ্য l পরিমাণ বেড়েছিল।

অতএব হুকের সূত্র অনুযায়ী $mg = Kl$

বা, $K = \frac{m}{l} \times g$ ... ... (iii)

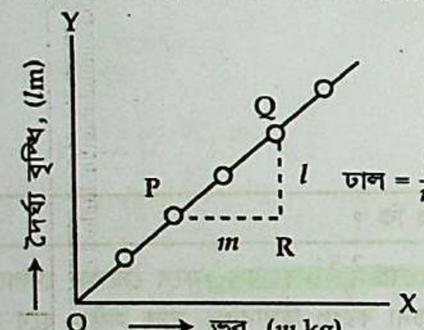
বা, $\frac{m}{K} = \frac{l}{g}$

∴ দোলনরত বস্তুর পর্যায়কাল $T = 2\pi \sqrt{\frac{l}{g}}$ ... ... (iv)

যন্ত্রপাতি : (১) পরীক্ষণীয় স্প্রিং। (২) সুবিধাজনক কয়েকটি ভার। (৩) স্প্রিংটি ঝুলাবার জন্য হুক। (৪) মিটার স্কেল।

কার্যপদ্ধতি : (i) পরীক্ষণীয় স্থানের টেবিলের প্রান্ত থেকে অথবা কোনো দৃঢ় অবলম্বন হতে একটি হুক হতে স্প্রিংটিকে ঝুলিয়ে দেয়া হয়।

(ii) এর পর স্প্রিংটির AB এর দৈর্ঘ্য (L), স্কেলের সাহায্যে পরিমাপ করা হয়।



চিত্র ৮·২৪

(iii) এবার স্প্রিং-এর নিচের প্রান্তের হুকে একটি ভার চাপানো হয় ফলে স্প্রিংটির দৈর্ঘ্য বৃদ্ধি পায় এবং ভার এর অবস্থান C থেকে D তে এসে পৌছায়। মিটার স্কেলের সাহায্যে দৈর্ঘ্য বৃদ্ধি (l) নির্ণয় করা হয়। D বিন্দু বরাবর একটি নির্দেশক চিহ্ন দিয়ে রাখতে হবে।

(iv) উপরোক্ত পদ্ধতিটি বিভিন্ন ভারের বস্তুর জন্য কয়েকবার করা হয় এবং বিভিন্ন ভারের জন্য দৈর্ঘ্য বৃদ্ধি পরিমাপ করা হয়।

(v) ভর হ্রাসের ক্ষেত্রে দৈর্ঘ্য সংকোচন পরিমাপ করা হয়।

লেখচিত্র অঙ্কন : গ্রাফ কাগজে X-অক্ষ বরাবর ভার এবং Y-অক্ষ বরাবর দৈর্ঘ্য বৃদ্ধি নিয়ে লেখচিত্র অঙ্কন করা হয়। লেখচিত্রটি একটি মূলবিন্দুগামী সরলরেখা হয় [চিত্র ৮·২৪]। এই সরলরেখার ঢাল $\frac{l}{m}$ নির্ণয় করা হয়।

ডাটা ছক-১

পর্যবেক্ষণ সংখ্যা	স্প্রিং এর আদি দৈর্ঘ্য, L(m)	প্রযুক্ত ভর m (kg)	স্প্রিং এর সম্প্রসারণ, l (m)	দৈর্ঘ্য প্রসারণের ক্ষেত্রে m/l (kgm^{-1})	দৈর্ঘ্য সংকোচনের ক্ষেত্রে m/l (kgm^{-1})	গড় m/l (kgm^{-1})	K (Nm^{-1})

হিসাব : পরীক্ষালব্ধ $\frac{l}{m}$ এর মান থেকে $\frac{m}{l}$ নির্ণয় করে এবং অভিকর্ষজ ত্বরণ 'g' এর মান (iii) নং সমীকরণে বসিয়ে স্প্রিং ধ্রুবক K নির্ণয় করা হয়।

ফলাফল : নির্ণেয় স্প্রিং ধ্রুবকের মান .... Nm^{-1}.

আলোচনা ও সতর্কতা : (১) স্প্রিংটিকে এমনভাবে ঝুলাতে হবে যাতে এর প্রান্তে ভার ঝুলাবার পর এটি ওপরের হুক থেকে খুলে না যায়।

(২) ভার ক্রমান্বয়ে বর্ধিত করে স্প্রিং-এর সম্প্রসারণ নির্ণয় করা হয়।

(৩) স্প্রিংটির প্রান্তে ভার ঝুলাবার পর দৈর্ঘ্য বৃদ্ধির সময় যাতে বাধা প্রাপ্ত না হয় সেদিকে লক্ষ রাখতে হবে।

(৪) দৈর্ঘ্য সম্প্রসারণ সঠিকভাবে পরিমাপ করতে হবে।

পরীক্ষণের নাম :	(খ) স্প্রিং এর সাহায্যে ভরের তুলনা
পিরিয়ড : ২	Comparing the masses with the help of a spring

তত্ত্ব : উল্লম্বভাবে ঝুলানো একটি পেঁচানো স্প্রিং থেকে m ভরের কোনো বস্তুকে ঝুলিয়ে দিলে স্প্রিংটির দৈর্ঘ্য l পরিমাণ বৃদ্ধি পায়। এ অবস্থায় বস্তুটি সাম্যাবস্থায় আছে ধরা হয়। এবার বস্তুটিকে নিচের দিকে x দূরত্ব টেনে ছেড়ে দিলে সেটি সরল ছন্দিত স্পন্দনে দুলতে থাকে [চিত্র ৮·২৫]। বস্তুটিকে নিচের দিকে টানলে স্প্রিং-এর ওপর প্রাথমিক অবস্থান অভিমুখে একটি প্রত্যায়নক বল প্রয়োগ করে। হুকের সূত্র অনুসারে প্রত্যয়নক বল বস্তুর সরণ x এর সমানুপাতিক এবং বিপরীতমুখি। সুতরাং $F = -K'x$

এখানে K' স্প্রিংটির বল ধ্রুবক।

বস্তুটিকে টেনে ছেড়ে দিলে F বলের দরুন সেটি a ত্বরণ নিয়ে চলে। বস্তুটির ভর m হলে এর ত্বরণ হবে

$$a = \frac{F}{m} \quad \therefore \ a = \frac{-K'}{m}x$$

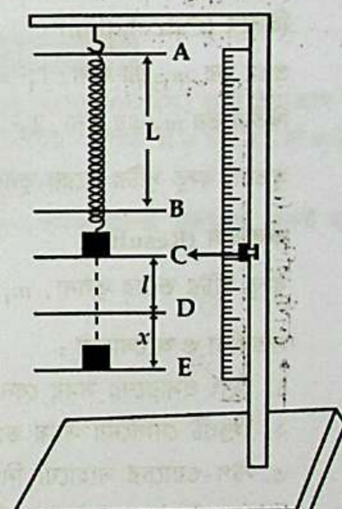
$\therefore \quad a = -Kx$, এখানে $K = \frac{K'}{m}$ = স্প্রিং ধ্রুবক

যেহেতু একক সরণে বস্তুর ত্বরণ $\frac{K'}{m}$, সুতরাং দোলনরত বস্তুর পর্যায়কাল,

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{K}} \quad \ldots \quad \ldots \quad (i)$$

$$T^2 = 4\pi^2\frac{m}{K}$$

$$\therefore \ m = \frac{T^2K}{4\pi^2} \quad \ldots \quad \ldots \quad (ii)$$



চিত্র ৮·২৫

দুটি বস্তুর ভর m_1 ও m_2 এবং এই দুই ভরের জন্য পর্যায়কাল T_1 ও T_2 হলে, সমীকরণ (ii) থেকে লেখা যায়,

$$m_1 = \frac{T_1^2K}{4\pi^2} \quad \ldots \quad \ldots \quad (iii)$$

এবং $$m_2 = \frac{T_2^2K}{4\pi^2} \quad \ldots \quad \ldots \quad (iv)$$

$$\therefore \ \frac{m_1}{m_2} = \frac{T_1^2K}{4\pi^2} \times \frac{4\pi^2}{T_2^2K} = \frac{T_1^2}{T_2^2} \quad \ldots \quad \ldots \quad (v)$$

$$m_1 : m_2 = T_1^2 : T_2^2 \quad \ldots \quad \ldots \quad (vi)$$

যন্ত্রপাতি : (১) জানা স্প্রিং ধ্রুবকবিশিষ্ট একটি স্প্রিং।

(২) স্প্রিংটি ঝুলাবার জন্য হুক।

(৩) পরীক্ষণীয় বিভিন্ন ভারের বস্তু।

(৪) স্টপ-ওয়াচ।

(৫) একটি কাঠের মিটার স্কেল।

কার্যপদ্ধতি : (১) স্প্রিংটিকে হুকের সাহায্যে কোনো দৃঢ় অবলম্বন থেকে ঝুলিয়ে দিতে হবে। স্প্রিং-এর প্রান্তে পরীক্ষণীয় প্রথম ভারের বস্তু (m_1) স্প্রিং এর নিচের প্রান্তে বেঁধে দিলে প্রথমে দৈর্ঘ্য বৃদ্ধি পাবে এবং একটি অবস্থানে স্থির থাকবে। এটাই সাম্য বিন্দু।

(২) সাম্যবিন্দু ঠিক রাখার জন্য পাশে একটি লম্বা স্কেলে বা দেওয়ালের গায়ে দাগ দিয়ে চিহ্নিত কর।

(৩) এরপর সাম্য বিন্দু হতে নিচের দিকে বস্তুটিকে অল্প টেনে ছেড়ে দিলে স্প্রিংটি উপরে-নিচে কম্পিত হবে। এই অবস্থায় 3 বার 20 দোলনের সময় নির্ণয় কর। প্রতিবারে সময়কে দোলন সংখ্যা দিয়ে ভাগ করে দোলনকাল (T_1) নির্ণয় কর। তিনটি পাঠের মান থেকে গড় T_1 নির্ণয় কর।

(৪) একইভাগে দ্বিতীয় ভারের বস্তু (m_2) এর জন্য (৩) নং পরীক্ষণ অনুযায়ী দোলনকাল T_2 নির্ণয় কর।

পর্যবেক্ষণ ছক-১

পর্যবেক্ষণ সংখ্যা	প্রথম ভর m_1				দ্বিতীয় ভর m_2			
	10টি দোলনের জন্য		দোলন কাল	T_1^2	10টি দোলনের জন্য		দোলন কাল	T_2^2
	সময় sec	গড় sec	T_1 sec	sec^2	সময় sec	গড় sec	T_2 sec	sec^2
1								
2								
3								
4								

হিসাব (Calculation) :

প্রথম ভর m_1-এর জন্য, $T_1^2 = ...\ sec^2$

দ্বিতীয় ভর m_2-এর জন্য, $T_2^2 = ...\ sec^2$

সুতরাং বস্তু দুটির ভরের তুলনা, $\frac{m_1}{m_2} = \frac{T_1^2}{T_2^2}$

ফলাফল (Result) :

বস্তু দুটির ভরের তুলনা, $m_1 : m_2 = ...$

সতর্কতা ও আলোচনা :

১. স্প্রিং প্রসারণের সময় যেন স্প্রিংটি খাড়াভাবে প্রসারিত হয় সেদিকে লক্ষ রাখতে হবে।

২. স্প্রিংটি দোলনের সময় ডানে বা বামে না দুলে যেন উল্লম্বভাবে দুলতে থাকে সেদিকে লক্ষ রাখা হয়।

৩. স্টপ-ওয়াচের সাহায্যে নিখুঁতভাবে সময় নির্ণয় করা হয়েছে।

৪। বস্তুর ভর এমনভাবে নির্ধারণ করতে হবে যাতে স্প্রি-এর প্রান্তে ঝুলিয়ে দিলে তা স্থিতিস্থাপক সীমা অতিক্রম না করে।

প্রয়োজনীয় গাণিতিক সূত্রাবলি

$$\omega = \frac{2\pi}{T} = \sqrt{\frac{K}{m}} \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad (1)$$

$$T = 2\pi n,\ T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{K}} \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad (2)$$

$$F = -Kx \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad (3)$$

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \omega^2 x = 0 \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad (4)$$

$$x = A\sin(\omega t + \delta) \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad (5)$$

$$v = \omega\sqrt{A^2 - x^2} \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad (6)$$

$$a = -\omega^2 x \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad (7)$$

$$v_{max} = \omega A \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad (8)$$

$$a_{max} = \omega^2 A \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad (9)$$

$$K = \frac{1}{2}K(A^2 - x^2) \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad (10)$$

$$U = \frac{1}{2}Kx^2 \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad (11)$$

$$T = \frac{1}{n},\ n = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{K}{m}} \quad \cdots \quad \cdots \quad \cdots \quad (12)$$

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{L}{g}} \quad \cdots \quad \cdots \quad \cdots \quad (13)$$

$$h = \left(\sqrt{\frac{g}{g_1}} - 1\right) \times R \quad \cdots \quad \cdots \quad \cdots \quad (14)$$

$$\frac{T_1}{T_2} = \sqrt{\frac{g_2}{g_1}} = \sqrt{\frac{R^2}{(R+h)^2}} = \frac{R}{R+h} \quad \cdots \quad \cdots \quad \cdots \quad (15)$$

$$\frac{T_2}{T_1} = \frac{R+h}{R} = 1 + \frac{h}{R} \quad \cdots \quad \cdots \quad \cdots \quad (16)$$

বিশ্লেষণাত্মক ও মূল্যায়নধর্মী গাণিতিক সমস্যাবলির সমাধান

১। পদার্থবিজ্ঞানের শিক্ষক তাঁর তিন ছাত্রকে একটি পাহাড়ের উচ্চতা নির্ণয় করতে বললেন। ছাত্র তিনজন ভিন্ন ভিন্ন দৈর্ঘ্যের তিনটি সরল দোলক নিল। তিনজন পাহাড়ের উচ্চতা একই পেল। [পৃথিবীর ব্যাসার্ধ $R = 6.4 \times 10^6$ m]

(ক) পাহাড়টির উচ্চতা 400 m হলে পাহাড়ের চূড়ায় অভিকর্ষজ ত্বরণের মান কত ?

(খ) সরল দোলকের সাহায্যে পাহাড়ের উচ্চতা মাপার পদ্ধতি ব্যাখ্যা কর। সবার প্রাপ্ত ফলাফল একই হবার কারণ কী ?

(ক) আমরা জানি, ভূপৃষ্ঠে $g = \frac{GM}{R^2}$ ... ... (i)

পাহাড়ের ওপর $g' = \frac{GM}{(R+h)^2}$ ... ... (ii)

সমীকরণ (ii)-কে (i) দ্বারা ভাগ করে পাই,

পাহাড়ের ওপরে $g' = \frac{g \times R^2}{(R+h)^2} = \frac{9.8 \times (6.4 \times 10^6)^2}{(6.4 \times 10^6 + 400)^2} = 9.799\ \text{ms}^{-2}$

(খ) সরল দোলককে পাহাড়ের উপর (h-উচ্চতায়) নিয়ে অভিকর্ষজ ত্বরণের মান (g') নির্ণয় করতে হবে। মনে করি, এই অভিকর্ষজ ত্বরণ

$$g' = \frac{GM}{(R+h)^2} \quad \cdots \quad \cdots \quad \cdots \quad (iii)$$

সমীকরণ (i) কে (iii) দ্বারা ভাগ করে পাই,

$\therefore \frac{g}{g'} = \frac{(R+h)^2}{R^2}$

বা, $\frac{g}{g'} = \left(1 + \frac{h}{R}\right)^2$

বা, $\left(1 + \frac{h}{R}\right) = \sqrt{\frac{g}{g'}}$

বা, $\frac{h}{R} = \sqrt{\frac{g}{g'}} - 1$

$$\therefore h = \left(\sqrt{\frac{g}{g'}} - 1\right) \times R \quad \cdots \quad \cdots \quad \cdots \quad (iv)$$

সমীকরণ (iii)-এ R, g, g' এর মান বসিয়ে h নির্ণয় করা হয়।

রাশিগুলোর তারতম্যের কারণে T এর মানের তারতম্য ঘটে। L বেড়ে গেলে T-ও বাড়ে আবার L কমে গেলে T কমে যায়। কিন্তু $\frac{L}{T^2}$ ধ্রুব রাশি হয়। অভিকর্ষজ ত্বরণের কোনো পরিবর্তন হয় না। এই কারণে তিনজন ছাত্র একই উচ্চতা পরিমাপ করে।

২। তৌফিক পদার্থবিজ্ঞান ল্যাবরেটরিতে 3.5 kg ভরের একটি গোল লোহার বলকে তারের প্রান্তে আংটায় ঝুলিয়ে দোল দিল। দেখল যে এটি প্রতি সেকেন্ডে 3 বার স্পন্দিত হচ্ছে। সর্বাধিক সরণ হচ্ছে 5 cm। [A = 10 cm]

(ক) উদ্দীপকে উল্লিখিত সরণকালে বস্তুটির বেগ কত ?

(খ) উল্লিখিত সরণের জন্য বস্তুটির ওপর ক্রিয়ারত বল বস্তুটির ওজনের কত গুণ হবে বিশ্লেষণ কর।

(ক) আমরা জানি,

$$v = \omega\sqrt{A^2 - x^2}$$
$$= 6\pi\sqrt{(0.1)^2 - (0.05)^2}$$
$$= 6 \times 3.14\sqrt{0.01 - 0.0025}$$
$$= 18.84\sqrt{0.0075}$$
$$= 18.84 \times 0.087 = 1.632\ \text{ms}^{-1}$$

এখানে,
$m = 3.5$ kg
$A = 10$ cm $= 0.1$ m
সরণ, $x = 5$ cm $= 0.05$ m
$T = \frac{1}{3}$ sec
$\therefore \omega = \frac{2\pi}{T} = \frac{2\pi}{1/3} = 2\pi \times 3 = 6\pi$

(খ) $a = -\omega^2 A = -(6\pi)^2 \times 0.1$
$= -36 \times 9.87 \times 0.1 = -35.532\ \text{ms}^{-2}$

$\therefore$ বল, $F = ma = 3.5 \times 35.532 = 124.36$ N

ওজন, $W = F' = mg = 3.5 \times 9.87 = 34.543$ N

$\therefore \frac{F}{F'} = \frac{124.36}{34.543} = 3.6$ $\therefore$ বল, ওজনের 3.6 গুণ।

৩। একটি সেকেন্ড দোলককে পাহাড়ের চূড়ায় নিয়ে গিয়ে দোলনকাল নির্ণয় করা হলো। অভিকর্ষজ ত্বরণের মান (g_h) পাওয়া গেল 9.7 ms^{-2}। ভূপৃষ্ঠে অভিকর্ষ ত্বরণের মান (g_e) পাওয়া গেল 9.8 ms^{-2}।

(ক) সেকেন্ড দোলকটির দৈর্ঘ্য 4 গুণ করলে দোলনকাল কত হবে ?

(খ) দোলকটিকে পাহাড়ের চূড়ায় নেবার পর কী ব্যবস্থা নিলে দোলনকাল একই থাকবে ?

(ক) আমরা জানি,

$$\frac{T_2}{T_1} = \sqrt{\frac{L_2}{L_1}} = \sqrt{\frac{4L_1}{L_1}}$$
$$= \sqrt{4} = 2\ \text{sec}$$

$\therefore T_2 = 2 \times T_1 = 2 \times 2 = 4$ sec

এখানে,
সরল দোলকের আদি দোলনকাল $T_1 = 2$ sec
কার্যকরী দৈর্ঘ্য, $L_2 = 4L_1$
পরিবর্তিত দোলনকাল, $T_2 = ?$

(খ) দোলকটিকে পাহাড়ের ওপর নেওয়ার পর কার্যকরী দৈর্ঘ্য কমালে এটি পুনরায় সেকেন্ড দোলক হিসেবে আচরণ করবে।

আমরা জানি,

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{L_1}{g}}$$

বা, $T^2 = 4\pi^2 \frac{L_1}{g}$

বা, $L_1 = \frac{T^2 g}{4\pi^2} = \frac{(2)^2 \times 9.8}{4 \times 9.87} = 0.993$ m

আবার,

$$2\pi\sqrt{\frac{L_1}{g_1}} = 2\pi\sqrt{\frac{L_2}{g_2}}$$

$\therefore \frac{L_1}{g_1} = \frac{L_2}{g_2}$

$\therefore L_2 = L_1 \times \frac{g_2}{g_1} = 0.993 \times \frac{9.7}{9.8} = 0.983$ m

এখানে,
$g_2 = 9.7\ \text{ms}^{-2}$
$L_2 = ?$
$T = 2$ sec

সুতরাং, দোলকটিকে পাহাড়ের ওপর নেওয়ার পর (0.993 − 0.983) m = 0.01 m দৈর্ঘ্য কমাতে হবে। তাহলে দোলনকাল একই থাকবে।

৪। তানজিনা 100 cm কার্যকর দৈর্ঘ্যের একটি সরল দোলক তৈরি করল। 4° কৌণিক বিস্তারে দোলকটি 2 sec দোলনকাল সহকারে দোল দেয়। তাকে দোলনকাল 50% বাড়াতে বলায় সে কার্যকরী দৈর্ঘ্য 150 cm নিয়ে দোলনকাল নির্ণয় করতে শুরু করল।

(ক) তানজিনার তৈরি সেকেন্ড দোলকের কৌণিক কম্পাঙ্ক কত?

(খ) 150 cm কার্যকর দৈর্ঘ্যের দোলকটি কী উদ্দীপকের শর্ত পূরণ করবে? গাণিতিক বিশ্লেষণ দাও।

(ক) আমরা জানি,

কৌণিক কম্পাঙ্ক,

$$\omega = \frac{2\pi}{T} = \frac{2\times 3{\cdot}14}{2}$$

$$= 3{\cdot}14\ \text{rads}^{-1}$$

এখানে,

দোলনকাল, $T = 2$ sec

(খ) প্রাথমিক অবস্থায় দোলকটির দোলনকাল $T_1 = 2$ sec

পরিবর্তিত দোলনকাল হবে $T_1 = 2 + 2\times 50\% = 3$ sec

প্রাথমিক কার্যকর দৈর্ঘ্য, $L_1 = 100$ cm

পরবর্তী কার্যকর দৈর্ঘ্য L_2 হলে,

$$\frac{T_1}{T_2} = \sqrt{\frac{L_1}{L_2}}$$

বা, $\frac{L_1}{L_2} = \frac{T_1^2}{T_2^2} = \frac{2^2}{3^2} = \frac{4}{9}$

বা, $L_2 = \frac{9}{4}L_1 = \frac{9}{4}\times 100\ \text{cm} = 225\ \text{cm}$

সুতরাং উদ্দীপকের শর্তানুসারে দোলকের কার্যকর দৈর্ঘ্য হতে হবে 225 cm। কিন্তু কার্যকর দৈর্ঘ্য করা হয়েছে 150 cm। সুতরাং 150 cm কার্যকর দৈর্ঘ্যের দোলকটি উদ্দীপকের শর্ত পূরণ করেনি।

৫। মতিন একদিন একটি সেকেন্ড দোলককে পাহাড়ের পাদদেশে নিয়ে গিয়ে দেখল দোলকটি সঠিক সময় দেয়। পাহাড়ের চূড়ায় নিয়ে গিয়ে দেখল দোলকটি ঘণ্টায় 30 সেকেন্ড সময় হারায়। পৃথিবীর ব্যাসার্ধ, R = 6400 km, অভিকর্ষজ ত্বরণ, $g = 9{\cdot}8\ \text{ms}^{-2}$। [য. বো. ২০১৫]

(ক) পাহাড়ের চূড়ায় সরল দোলকের দোলনকাল বের কর।

(খ) উদ্দীপকের ভিত্তিতে পাহাড়ের উচ্চতা নির্ণয় করা সম্ভব কি-না—গাণিতিকভাবে ব্যাখ্যা কর।

(ক) পাহাড়ের চূড়ায় প্রতি ঘণ্টায় প্রাপ্ত অর্ধ দোলন সংখ্যা = 3600 − 30 = 3570

যেহেতু 3570টি অর্ধ দোলন দেয় 3600 সেকেন্ডে

∴ 1টি অর্ধ দোলন দেয় $\frac{3600}{3570}$ সেকেন্ডে

2টি অর্ধ দোলন দেয় $\frac{3600\times 2}{3570} = 2{\cdot}0168$ সেকেন্ডে

∴ দোলনকাল, $T_2 = 2{\cdot}0168$ sec

(খ) আমরা জানি, পাহাড়ের উচ্চতা, $h = \sqrt{\left(\frac{g}{g'} - 1\right)}\ R \quad \ldots \quad \ldots \quad$ (i)

যেহেতু $\frac{T_2}{T_1} = \sqrt{\frac{g}{g'}}$

$$\therefore\ h = \left(\frac{T_2}{T_1} - 1\right)R$$

$$= \left(\frac{2{\cdot}0168}{2} - 1\right)\times 6400\times 10^3, \quad \text{এখানে } T_1 = 2\ \text{sec}$$

$$= 53760\ \text{m}$$

সুতরাং উক্ত দোলক দ্বারা পাহাড়ের উচ্চতা নির্ণয় করা সম্ভব।

৬। কোনো সুউচ্চ পাহাড়ে নিয়ে যাওয়ায় একটি সরল দোলক 10 ঘণ্টায় 11990টি পূর্ণ দোলন সম্পন্ন করল। কিন্তু ভূপৃষ্ঠে দোলকটি 3 sec-এ একটি পূর্ণ দোলন সম্পন্ন করে। পৃথিবীর গড় ব্যাসার্ধ 6400 km এবং সর্বোচ্চ শৃঙ্গ এভারেস্টের উচ্চতা 8.854 km। [ভূপৃষ্ঠে অভিকর্ষজ ত্বরণ $9.8\ ms^{-2}$]

(ক) সরল দোলকটির কার্যকর দৈর্ঘ্য নির্ণয় কর।

(খ) পাহাড়টি এভারেস্টের তুলনায় কত উঁচু বা নিচু ছিল তা গাণিতিক যুক্তিসহ ব্যাখ্যা কর। [ঢা. বো. ২০১৭]

(ক) আমরা জানি,

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{L}{g}}$$

বা, $$T^2 = 4\pi^2\frac{L}{g}$$

$$\therefore L = \frac{T^2 g}{4\pi^2} = \frac{3^2 \times 9.8}{4 \times (3.141)^2} = 2.23413 \text{ m}$$

এখানে,
দোলনকাল, $T = 3$ sec
অভিকর্ষজ ত্বরণ, $g = 9.8\ ms^{-2}$
কার্যকর দৈর্ঘ্য, $L = ?$

(খ) আমরা জানি,

পাহাড়ের উচ্চতা,

$$h = \left(\frac{T'}{T} - 1\right) \times R$$

$$= \left(\frac{3.0025}{3} - 1\right) \times 6.4 \times 10^6 \text{ m}$$

$$= 5333.33 \text{ m}$$

এভারেস্টের উচ্চতা, $h' = 8.854$ km $= 8854$ m

এখানে,
ভূপৃষ্ঠে দোলনকাল, $T' = 3$ sec
পাহাড়ের উপর দোলনকাল,
$$T' = \frac{10 \times 60 \times 60}{11990} = \frac{36000}{11990}$$
$= 3.0025$ sec
পৃথিবীর গড় ব্যাসার্ধ,
$R = 6400 \text{ km} = 6.4 \times 10^6$ m
পাহাড়ের উচ্চতা, $h = ?$

অতএব, পাহাড়টি এভারেস্টের তুলনায় $(8854 - 5333.33)$ m $= 3520.667$ m কম উচ্চতার।

৭। একদল শিক্ষার্থী পদার্থবিজ্ঞান ল্যাবরেটরিতে 500 g ভরের একটি বস্তুকে তারের প্রান্তে আংটায় ঝুলিয়ে দোল দিল। তারা দেখল যে, এটি প্রতি সেকেন্ডে 0.5 বার স্পন্দিত হচ্ছে। বস্তুটির সরণ 5 cm এবং বিস্তার 10 cm।

(ক) উদ্দীপকে উল্লিখিত সরণ কালে বস্তুটির বেগ কত হবে ?

(খ) উদ্দীপকে উল্লিখিত সরণের জন্য বস্তুটির ওপর ক্রিয়ারত বল বস্তুটির ওজনের 0.05 গুণ হবে—গাণিতিকভাবে বিশ্লেষণ করে মতামত দাও। [রা. বো. ২০১৭]

(ক) আমরা জানি,

$$v = \omega\sqrt{A^2 - x^2}$$

$$= 2\pi n\ \sqrt{A^2 - x^2}$$

$$= 2 \times 3.1416 \times 0.5 \times \sqrt{(0.1)^2 - (0.05)^2}$$

$$= 0.272\ ms^{-1}$$

এখানে,
কম্পাঙ্ক, $n = 0.5$ Hz
বিস্তার, $A = 10 \text{ cm} = 0.1$ m
বস্তুর সরণ, $x = 5 \text{ cm} = 0.05$ m
$\therefore$ $x = 0.05$ m সরণে বস্তুর বেগ, $v = ?$

(খ) আমরা জানি,

$$W = mg$$

$$\therefore \frac{F}{W} = \frac{m4\pi^2 n^2 x}{mg} = \frac{4\pi^2 n^2 x}{g}$$

$$= \frac{4 \times (3.1416)^2 \times (0.5)^2 \times 0.05}{9.8}$$

$$= 0.05$$

$$\therefore F = 0.05 \times W$$

এখানে,
ববের ভর, $m = 500 \text{ g} = 0.5$ kg
মনে করি, $x = 0.05$ m সরণে বস্তুটির ওপর ক্রিয়ারত বল $= F$
$$\therefore F = ma = m\omega^2 x = m\,(2\pi n)^2 x$$
$$= m \times 4\pi^2 n^2 x$$

অতএব, উল্লিখিত সরণের জন্য বস্তুটির ওপর প্রযুক্ত বল বস্তুটির ওজনের 0.05 গুণ হবে, উক্তিটি যথার্থ।

৮। একটি সরল দোলকের ববের ভর 1.2×10^{-2} kg। এটি 51 mm বিস্তারে দুলছে। এটি 25টি দোলন সম্পন্ন করতে 49.75 সে. সময় নেয়। পৃথিবীর ব্যাসার্ধ 6.4×10^6 m।

(ক) দোলকটির কার্যকরী দৈর্ঘ্য নির্ণয় কর।

(খ) দোলকটিকে পৃথিবীর পৃষ্ঠ হতে 53760 m উচ্চতায় নিয়ে গেলে ববের সর্বোচ্চ সরণে ববের ওপর প্রত্যায়নক বলের কীরূপ পরিবর্তন হবে যাচাই কর। [য. বো. ২০১৭]

(ক) আমরা জানি,

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{L}{g}}$$

বা, $T^2 = 4\pi^2 \frac{L}{g}$

$$\therefore \quad L = \frac{gT^2}{4\pi^2} = \frac{9.8 \times (1.99)^2}{4 \times 9.87} = \frac{9.8 \times 3.9601}{4 \times 9.87} = 0.983 \text{ m}$$

এখানে,

$N = 25$ টি দোলন

$t = 49.75$ sec

দোলনকাল, $T = \frac{49.75}{25}$ sec $= 1.99$ sec

কার্যকরী দৈর্ঘ্য, $L = ?$

(খ) আমরা জানি,

ভূপৃষ্ঠে সর্বোচ্চ সরণে ববের ওপর কার্যকর প্রত্যায়নক

বল, $F = \frac{mg}{L} A$

এবং h উচ্চতায় ববের ওপর ওই সরণে কার্যকরী প্রত্যায়নক

বল, $F_h = \frac{mg_h}{L} A$

এখানে,

পৃথিবীর ব্যাসার্ধ, $R = 6.4 \times 10^6$ m

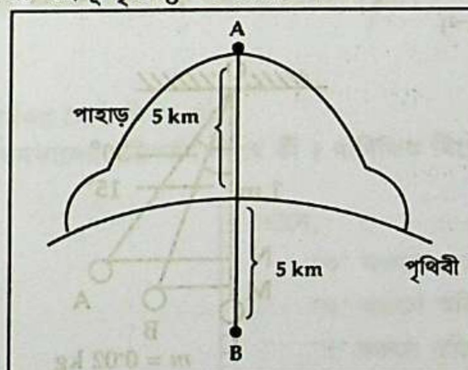
ভূপৃষ্ঠ থেকে উচ্চতা, $h = 53760$ m

$$\therefore \quad \frac{F_h}{F} = \frac{g_h}{g} = \left(\frac{R}{R+h}\right)^2 = \left(\frac{6.4 \times 10^6}{6.4 \times 10^6 + 53760}\right)^2 = 0.9834$$

বা, $\frac{F - F_h}{F} = \frac{1 - 0.9834}{1} = 0.0166 = 0.0166 \times 100\% = 1.66\%$

$\therefore$ দোলকটি উল্লিখিত উচ্চতায় নিয়ে গেলে ববের ওপর প্রত্যায়নক বল 1.66% কমে যাবে।

৯। পৃথিবীর ব্যাসার্ধ $R = 6.4 \times 10^6$ m; ভূ-পৃষ্ঠে $g = 9.8$ ms^{-2}।



(ক) পাহাড়ের চূড়ায় অভিকর্ষজ ত্বরণ নির্ণয় কর।

(খ) উদ্দীপকে A ও B স্থানের মধ্যে কোথায় একটি সরল দোলক ধীরে চলবে ? গাণিতিক বিশ্লেষণের মাধ্যমে তোমার মতামত দাও। [ঢা. বো. ২০১৬]

(ক) ধরি উদ্দীপকের A বিন্দুতে অর্থাৎ পাহাড়ের চূড়ায় অভিকর্ষজ ত্বরণ g_A

আমরা জানি,

$$g_A = \frac{R^2}{(R+h)^2}$$

$$= \frac{(6.4 \times 10^6)^2}{(6.4 \times 10^6 + 5 \times 10^3)^2} \times 9.8$$

$$\therefore \quad g_A = 9.78 \text{ ms}^{-2}$$

এখানে,

পৃথিবীর ব্যাসার্ধ, $R = 6.4 \times 10^6$ m

A বিন্দুর উচ্চতা, $h = 5$ km $= 5 \times 10^3$ m

ভূপৃষ্ঠে g-এর মান, $g = 9.8$ ms^{-2}

সুতরাং, পাহাড়ের চূড়ায় অভিকর্ষজ ত্বরণ $= 9.78$ ms^{-2}

(খ) মনে করি B বিন্দুতে অভিকর্ষজ ত্বরণ, g_h

আমরা জানি,

$$g_h = \left(1 - \frac{h}{R}\right)$$

$$= 9.8 \times \left(1 - \frac{5 \times 10^3}{6.4 \times 10^6}\right) = 9.79 \text{ ms}^{-2}$$

এখানে,

$R = 6.4 \times 10^6$ m

ভূপৃষ্ঠ হতে B বিন্দুর গভীরতা,

$h = 5$ km $= 5 \times 10^3$ m

ভূপৃষ্ঠে অভিকর্ষজ ত্বরণ, $g = 9.8$ ms^{-2}

এখন মনে করি A বিন্দুতে একটি সরল দোলকের দোলনকাল T_A এবং B বিন্দুতে ওই দোলকের দোলনকাল T_B।

আমরা জানি,

$$T_A = 2\pi\sqrt{\frac{L}{g_A}} \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \text{(i)}$$

এবং $$T_B = 2\pi\sqrt{\frac{L}{g_B}} \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \text{(ii)}$$

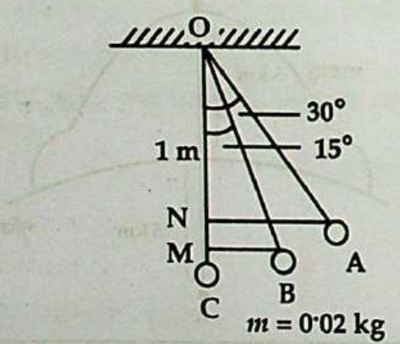
সমীকরণ (ii) কে সমীরণ (i) দিয়ে ভাগ করে পাই,

$$\frac{T_A}{T_B} = \sqrt{\frac{g_B}{g_A}} = \sqrt{\frac{9.79}{9.78}} = 1.0005$$

বা, $T_A = 1.0005 \times T_B$

$\therefore$ $T_A > T_B$, অর্থাৎ B স্থানের তুলনায় A স্থানে দোলকটির দোলনকাল বেশি। সুতরাং, A স্থানে সরল দোলকটি ধীরে চলবে।

১০। নিচের চিত্রে 0.02 kg ভরের একটি বস্তুকে O বিন্দু থেকে 1 m লম্বা সুতার সাহায্যে ঝুলানো হলো। A বিন্দু সর্বোচ্চ বিস্তার নির্দেশ করে যা O বিন্দুতে 30° কোণ উৎপন্ন করে। এটিকে A বিন্দু পর্যন্ত টেনে ছেড়ে দেওয়া হলে এটি দুলতে শুরু করে। ($g = 9.8$ ms^{-2})



(ক) উদ্দীপকের B বিন্দুতে দোলকটির গতিশক্তি বের কর।

(খ) উদ্দীপকে ব্যবহৃত দোলকটি যান্ত্রিক শক্তির নিত্যতা সূত্র মেনে চলে কি না—গাণিতিক বিশ্লেষণপূর্বক মতামত দাও। [রা. বো. ২০১৫]

(ক) চিত্রানুসারে,

$CN = 1 - \cos 30°$

$CM = 1 - \cos 15°$

এখানে,

ববের ভর, $m = 0.02$ kg

অভিকর্ষজ ত্বরণ, $g = 9.8$ ms^{-2}

এখন, B বিন্দুতে বেগ v হলে,

$$v^2 = v_0^2 + 2g\,(CN - CM)$$

বা, $v^2 = 2g\,(CN - CM)$ $[\because v_0 = 0]$

অতএব, B বিন্দুতে গতিশক্তি,

$$E_k = \frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{2}\times 0.02\times 2g\,(CN - CM)$$
$$= \frac{1}{2}\times 0.02\times 2\times 9.8\times\{(1-\cos 30°)-(1-\cos 15°)\}$$
$$= \frac{1}{2}\times 0.02\times 2\times 9.8\,(0.134 - 0.0341)$$
$$= 0.02\times 9.8\times 0.099 = 0.01958$$
$$= 1.958\times 10^{-2}\ J$$

(খ) এখানে, A বিন্দুটি C বিন্দু অপেক্ষা h উচ্চতায় অবস্থিত হলে C বিন্দুর সাপেক্ষে A অবস্থানে ববের বিভবশক্তি $= mgh$। A বিন্দুতে ববের বেগ শূন্য। অতএব A বিন্দুতে ববের গতিশক্তি $= 0$

$\therefore$ A বিন্দুতে ববের মোট শক্তি $= mgh + 0 = mgh$

আবার, C বিন্দুতে ববের বিভবশক্তি $= 0$

A হতে C তে আসতে ববের উল্লম্ব সরণ h হলে, C বিন্দুতে ববের বেগ,

$$v^2 = u^2 + 2gh = 0 + 2gh = 2gh$$

$\therefore$ C বিন্দুতে ববের গতিশক্তি $= \frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{2}m\times 2gh = mgh$

$\therefore$ C বিন্দুতে ববের মোট শক্তি $= 0 + mgh = mgh$

পুনঃ, A বিন্দু হতে ববটি B বিন্দুতে আসতে উল্লম্ব সরণ x হলে, B বিন্দুতে ববের বিভবশক্তি $= mg\,(h-x)$

আবার, B বিন্দুতে বেগ v_1 হলে, $v_1^2 = u^2 + 2gx = 0 + 2gx = 2gx$

$\therefore$ B বিন্দুতে গতিশক্তি $= \frac{1}{2}mv_1^2 = \frac{1}{2}m\times 2gx = mgx$

$\therefore$ B বিন্দুতে মোট শক্তি $= mg\,(h-x) + mgx = mgh$

অনুরূপভাবে প্রমাণ করা যায় যে ববের চলার পথের প্রতিটি বিন্দুতে মোট শক্তি $= mgh$

অতএব, দোলকটি যান্ত্রিক শক্তির নিত্যতা সূত্র মেনে চলে।

১১। একটি সেকেন্ড দোলক 'ক' অঞ্চল থেকে 'খ' অঞ্চলে নেওয়া হলো।

$g_{ক} = 9.78\ ms^{-2}$

$g_{খ} = 9.83\ ms^{-2}$

(ক) 'ক' অঞ্চলে দোলকটির কার্যকর দৈর্ঘ্য নির্ণয় কর।

(খ) 'খ' অঞ্চলে দোলকটির দোলনকালের পরিবর্তন ঘটবে কী ? গাণিতিক বিশ্লেষণসহ যুক্তি দাও।

[সি. বো. ২০১৬]

এখানে,
'ক' অঞ্চলে দোলকের দোলনকাল, $T = 2$ s
'ক' অঞ্চলে অভিকর্ষজ ত্বরণ, $g_{ক} = 9.78\ ms^{-2}$
'খ' অঞ্চলে অভিকর্ষজ ত্বরণ, $g_{খ} = 9.83\ ms^{-2}$
'ক' অঞ্চলে দোলকের কার্যকর দৈর্ঘ্য, $L_{ক} = ?$
'খ' অঞ্চলে দোলকের দোলনকাল, $T_{খ} = ?$
দোলনকালের পরিবর্তন, $\Delta T = T_{খ} \sim T_{ক}$

(ক) আমরা জানি,

$$T_{ক} = 2\pi\sqrt{\frac{L_{ক}}{g_{ক}}}$$

বা, $$L_{ক} = \frac{T_{ক}^2\times g_{ক}}{4\pi^2} = \frac{(2)^2\times 9.78}{4\times 9.87}$$
$$= 0.9909\ m = 99.09\ cm$$

(খ) $$T_{খ} = 2\pi\sqrt{\frac{L_{ক}}{g_{খ}}} = 2\times\pi\times\sqrt{\frac{0.9909}{9.83}}$$
$$= 2\times 3.14\times\sqrt{\frac{0.9909}{9.83}}$$
$$= 1.993\ s \simeq 1.99$$

$\therefore\ \Delta T = T_{ক} - T_{খ} = 2 - 1.99 = 0.01$ s

$\therefore\ T_{খ} < T_{ক}$

অর্থাৎ 'খ' অঞ্চলে দোলনকাল হ্রাস পায়।

১২। একটি সেকেন্ড দোলক ঘড়ি পাহাড়ের পাদদেশে ঠিক সময় দেয় কিন্তু পাহাড়ের চূড়ায় উঠালে 2 ঘণ্টায় 8 সেকেন্ড সময়ের পার্থক্য দেখায়। পৃথিবীর ব্যাস 12800 km হলে—

(ক) পাহাড়ের উচ্চতা নির্ণয় কর।

(খ) পাহাড়ের চূড়ায় সঠিকভাবে কাজ করতে হলে দোলকের দৈর্ঘ্য কত % পরিবর্তন করতে হবে ?

[BUET Admission Test, 2017-18]

(ক) আমরা জানি, $T' = \left(\frac{t}{t-8}\right) \times T$

$$\therefore \quad T' = \left(\frac{2 \times 60 \times 60}{2 \times 60 \times 60 - 8}\right) \times T$$

$$= \left(\frac{7200}{7200 - 8}\right) \times 2$$

এখানে,

$T = 2\,s$

$t' = t - 8 = 2 \times 60 \times 60 - 8$

$R = \frac{D}{2} = \frac{12800 \times 10^3}{2}\,m$

$= 6400 \times 10^3\,m = 6{\cdot}4 \times 10^6\,m$

পাহাড়ের চূড়ায় দোলন কাল $= T'$

আবার,

$$T' = T\sqrt{\frac{g}{g'}} = 2 \times \sqrt{\frac{(R+h)^2}{R^2}}$$

$$T' = 2 \times \frac{(R+h)}{R}$$

$$\therefore \quad 2 \times \frac{R+h}{R} = \frac{7200}{7200-8} \times 2$$

$$7192\,R + 7192\,h = 7200\,R$$

$$h = \frac{8R}{7192}$$

$$\therefore \quad h = \frac{8 \times 6{\cdot}4 \times 10^6}{7192} = 7119{\cdot}02\,m = 7{\cdot}119\,km$$

(খ) আমরা জানি, $T = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{L}{g}}$

$$\therefore \quad \frac{T'}{T} = \sqrt{\frac{L'}{L}}$$

বা, $\left(\frac{T'}{T}\right)^2 = \frac{L'}{L}$

বা, $L' = \left(\frac{\frac{7200 \times 2}{7200 - 8}}{2}\right)^2 \times L = 1{\cdot}0022\,L$

$\therefore \quad \Delta L = (L' - L) \times 100\% = (1{\cdot}0022 - 1)\,L \times 100\% = 0{\cdot}22\%\,L$

বা, $\frac{\Delta L}{L} = 0{\cdot}22\%$ কমাতে হবে।

১৩। একটি সেকেন্ড দোলক ভূপৃষ্ঠে সঠিক সময় দেয়। একে 9 km উচ্চতায় এভারেস্টের চূড়ায় নিয়ে গেলে প্রতি ঘণ্টায় 5 সেকেন্ড সময় হারায়। পৃথিবীর ব্যাসার্ধ 6400 km।

(ক) এভারেস্টের চূড়ায় দোলকের দোলনকাল নির্ণয় কর।

(খ) উদ্দীপকের তথ্যাবলি হতে এভারেস্টের উচ্চতা নির্ণয় করে তার সঠিকতা যাচাই কর। [রা. বো. ২০১৯]

(ক) দোলকটি এভারেস্টের চূড়ায় প্রতি ঘণ্টায় 5 সে. সময় হারায়

অর্থাৎ চূড়ায় ঘণ্টায় অর্ধদোলন সংখ্যা = 3600 − 5 = 3595

3595 সংখ্যক অর্ধদোলন দেয়, 3600 সে.

2টি " " " $\frac{3600 \times 2}{3595} = 2{\cdot}00278\,s \simeq 2{\cdot}0028\,s$

$\therefore$ এভারেস্টের চূড়ায় দোলনকাল, $T_2 = 2{\cdot}0028\,s$

এখানে,

$T_1 = 2\,s$

$h = 9\,km$

$R = 6400\,km = 6{\cdot}4 \times 10^6\,m$

(খ) আমরা জানি, পাহাড়ের উচ্চতা,

$$h = \left(\frac{T_2}{T_1} - 1\right) \times R = \left(\frac{2.0028}{2} - 1\right) \times R$$

$$= \left(\frac{2.0028 - 2}{2}\right) \times 6.4 \times 10^6$$

$$= 8.96 \times 10^3 \text{ m} = 8.96 \text{ km} \simeq 9 \text{ km}$$

সুতরাং প্রাপ্ত তথ্য থেকে নির্ণীত উচ্চতা এবং উদ্দীপকে প্রদত্ত উচ্চতা প্রায় একই, তাই সঠিক।

১৪। রতন কলেজের গ্রীষ্মের ছুটি কাটাতে দাদার বাড়িতে বেড়াতে গিয়ে ধাতব পেন্ডুলামযুক্ত একটি দেয়াল ঘড়ি দেখতে পেল যার পেন্ডুলামটি 1 s সময়ে বাম দিক হতে ডান দিকে যায়। ঘড়িটিকে পাহাড়ের চূড়ায় নিয়ে গেলে 120 s সময় হারাল। [পৃথিবীর ব্যাসার্ধ, R = 6450 km, $g = 9.8 \text{ ms}^{-2}$]

(ক) উদ্দীপকের আলোকে পাহাড়ের উচ্চতা কত?

(খ) ঘড়িটিকে পাহাড়ের চূড়ায় নিয়ে যাওয়ার পরও দোলনকাল অপরিবর্তিত রাখতে কী ব্যবস্থা নিতে হবে— গাণিতিকভাবে বিশ্লেষণ করে মতামত দাও। [ঢা. বো. ২০১৯]

(ক) পাহাড়ের চূড়ায় প্রতি ঘণ্টায় প্রাপ্ত অর্ধদোলন সংখ্যা = 3600 — 120 = 3480

যেহেতু 3480 সংখ্যক অর্ধদোলন দেয় 3600 সেকেন্ডে

$\therefore$ 1 " " " $\frac{3600}{3480}$ "

2 " " " $\frac{3600 \times 2}{3480} = 2.069$ s

$\therefore$ দোলনকাল, $T_2 = 2.069$ s

ঘড়িটির দোলনকাল, $T_1 = 2$ s

আমরা জানি, পাহাড়ের উচ্চতা, $h = \left(\sqrt{\frac{g}{g'}} - 1\right) R$

যেহেতু $\frac{T_2}{T_1} = \sqrt{\frac{g}{g'}}$

$$\therefore \quad h = \left(\frac{T_2}{T_1} - 1\right) R$$

$$= \left(\frac{2.069}{2} - 1\right) \times 6450 \times 10^3$$

$$= 222525 \text{ m} = 222.525 \text{ km}$$

(খ) পাহাড়ের চূড়ায় দোলনকাল অপরিবর্তিত রাখতে হলে পেন্ডুলামটির দৈর্ঘ্য পরিবর্তন করতে হবে।

ধরা যাক পাহাড়ের চূড়ায়, অভিকর্ষজ ত্বরণ = g'

আমরা জানি, $g' = g\left(1 - \frac{2h}{R}\right)$

$$\therefore \quad g' = 9.8\left(1 - \frac{2 \times 222525}{6450000}\right)$$

$$= 9.8\left(\frac{6450000 - 445050}{6450000}\right) = 9.124 \text{ ms}^{-2}$$

আমরা জানি,

$$T_1 = 2\pi\sqrt{\frac{L_1}{g_1}} \text{ এবং } T_2 = 2\pi\sqrt{\frac{L_2}{g_2}}$$

প্রশ্নানুসারে, $T_1 = T_2$

$$\therefore \quad 2\pi\sqrt{\frac{L_1}{g_1}} = 2\pi\sqrt{\frac{L_2}{g_2}}$$

বা, $\frac{L_1}{g_1} = \frac{L_2}{g_2} \quad \therefore \quad L_2 = L_1 \times \frac{g_2}{g_1}$

$\therefore \quad L_2 = 0.993 \times \frac{9.124}{9.8}$ [এখানে, $T_1 = 2$ s. এটি সেকেন্ড দোলক $\therefore L_1 = 0.993$ m]

$= 0.9245$ m

সুতরাং, পাহাড়ের ওপরে পেন্ডুলামটির দৈর্ঘ্য 0.9245 m করলে একই দোলনকাল পাওয়া যাবে। অতএব, পেন্ডুলামটির দৈর্ঘ্য $0.993 - 0.9245 = 0.0685$ m $= 6.85$ cm কমাতে হবে।

১৫। ভূপৃষ্ঠে একটি সরল দোলকের দোলনকাল 2 sec এবং অভিকর্ষজ ত্বরণ $9.81\ ms^{-2}$। 8.85 km উঁচু A পাহাড়ের নিকটবর্তী অপর একটি পাহাড় B-তে নিয়ে সরল দোলককে দোলালে তা এক ঘণ্টায় 1780টি পূর্ণ দোলন সম্পন্ন করে।

(ক) সরল দোলকটির কার্যকর দৈর্ঘ্য কত?

(খ) B পাহাড়টির উচ্চতা A পাহাড়ের তুলনায় বেশি উঁচু কি না—গাণিতিক ব্যাখ্যা দাও। [রা. বো. ২০১৯]

(ক) আমরা জানি,

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{L}{g}}$$

$$\therefore \quad T^2 = 4\pi^2 \frac{L}{g}$$

$$\therefore \quad L = \frac{T^2 g}{4\pi^2} = \frac{(2)^2 \times 9.81}{4\pi^2} = 0.993 \text{ m}$$

এখানে,
দোলনকাল, $T = 2$ s
$g = 9.8\ ms^{-2}$
$h_A = 8.85$ km
$L = ?$

(খ) B পাহাড়ের দোলনকাল $T' = \frac{3600}{1780} = 2.0224719$ s

প্রশ্নানুসারে,

$$\frac{T'}{T} = \frac{R + h_B}{R}$$

$$\therefore \quad \text{উচ্চতা, } h_B = \left(\frac{T'}{T} - 1\right) R = \left(\frac{2.0224719}{2} - 1\right) \times 6.4 \times 10^6$$

$$= 71910.11 \text{ m} = 71.91 \text{ km}$$

A পাহাড়ের উচ্চতা, $h_A = 8.85$ km

$\therefore \quad h_B > h_A$, অর্থাৎ B পাহাড়টি A পাহাড়ের তুলনায় $(71.91 - 8.85)$ km $= 63.06$ km বেশি উঁচু।

১৬। কোনো উৎসের সরল দোলগতির সমীকরণ $y = 10 \sin (100\pi t)$ m। উৎসের কম্পন থেকে সৃষ্ট তরঙ্গের বেগ $200\ ms^{-1}$।

(ক) উৎপন্ন চল তরঙ্গের সমীকরণ বের কর।

(খ) কম্পন শুরু হওয়ার $t = 3$ s সময়ের মুহূর্তে উৎস থেকে 2 m দূরের কোনো বিন্দুর সাম্যাবস্থান থেকে সরণ ও ত্বরণ শূন্য হবে কি? গাণিতিক বিশ্লেষণসহ মতামত দাও।

(ক) এখানে, দোলগতির সমীকরণ, $y = 10 \sin 100\pi t$ m

কৌণিক কম্পাঙ্ক, $\omega = 100\pi$ এবং বিস্তার $A = 10$ m

$\therefore$ কম্পাঙ্ক $n = \frac{\omega}{2\pi} = \frac{100\pi}{2\pi} = 50$ Hz

এবং বেগ, $v = 200\ ms^{-1}$

অতএব, তরঙ্গদৈর্ঘ্য, $\lambda = \frac{v}{n} = \frac{200}{50}$ m=4mm

সুতরাং উৎপন্ন চলতরঙ্গের সমীকরণ হবে,

$$y = A\sin\left(\omega t - \frac{2\pi}{\lambda}x\right)$$
$$= 10\sin\left(100\,\pi t - \frac{2\pi}{4}x\right)\text{ m}$$
$$= 10\sin(20\,\pi t - 0{\cdot}5\,\pi x)\text{ m}$$

(খ) $t = 3$ s সময়ে $x = 2$ m অবস্থানে সরণ,

$$y = 10\sin\left(100\,\pi t - \frac{2\pi}{\lambda}x\right)\text{mm}$$
$$\therefore\ y = 10\sin\left(100\,\pi\times 3 - \frac{2\pi}{400}\times 200\right)$$
$$= 10\sin(300\,\pi - \pi)$$
$$= 10\sin(299\,\pi) = 0$$

এবং ত্বরণ, $a = \frac{dv}{dt}$

আবার, $v = \frac{dy}{dt} = 100\,\pi\times 10\sin\left(100\,\pi t - \frac{2\pi}{\lambda}x\right)$

$$\therefore\ a = \frac{dv}{dt} = -(100\,\pi)^2\times 10\sin\left(100\,\pi t - \frac{2\pi}{\lambda}x\right)$$

$t = 3$ s সময়ে এবং $x = 2$ m অবস্থানে ত্বরণ,

$$a = -(100\,\pi)^2\times 10\sin\left(100\,\pi\times 3 - \frac{2\pi}{4}\times 2\right)$$
$$= -(100\,\pi)^2\times 10\sin(300\,\pi - \pi)$$
$$= -(100\,\pi)^2\times 10\sin(299\,\pi) = 0$$

সুতরাং, $t = 3$ sec সময়ে এবং $x = 2$ m দূরে সাম্যাবস্থান থেকে সরণ ও ত্বরণ শূন্য হবে।

১৭। একটি স্প্রিং–এ 80 gm ভর চাপালে 2 cm দৈর্ঘ্য প্রসারণ হয় এবং 600 gm ভর চাপালে 8 cm দৈর্ঘ্য প্রসারণ হয়। অরনী উক্ত স্প্রিং–এর সাম্যাবস্থান হতে 1 cm দৈর্ঘ্য প্রসারণ পর্যবেক্ষণ করলো।

(ক) স্প্রিং ধ্রুবকের মান বের কর।

(খ) অরনী উভয় ভরের ক্ষেত্রে স্প্রিংটির সঞ্চিত শক্তির কীরূপ পরিবর্তন পর্যবেক্ষণ করেছিল গাণিতিক বিশ্লেষণসহ মতামত দাও। [দি. বো. ২০১৯]

(ক) আমরা জানি,

$$F_1 = K_1x_1$$
বা, $m_1g = K_1x_1$
$$\therefore\ K_1 = \frac{m_1g}{x_1} = \frac{0{\cdot}08\times 9{\cdot}81}{0{\cdot}02}$$
$$= 39{\cdot}24\ \text{Nm}^{-1}$$

এখানে,
১ম ক্ষেত্রে,
স্প্রিং-এ চাপানো ভর, $m_1 = 80\text{ gm} = 0{\cdot}08\text{ kg}$
দৈর্ঘ্য প্রসারণ, $x_1 = 2\text{ cm} = 0{\cdot}02\text{ m}$
স্প্রিং ধ্রুবক, $K_1 = ?$
$g = 9{\cdot}81\text{ ms}^{-2}$

আবার, ২য় ক্ষেত্রে

$$F_2 = K_2x_2$$
বা, $m_2g = K_2x_2$
$$\therefore\ K_2 = \frac{m_2g}{x_2} = \frac{0{\cdot}6\times 9{\cdot}81}{0{\cdot}08}$$
$$= 73{\cdot}6\ \text{Nm}^{-1}$$

এখানে,
স্প্রিং এ চাপানো ভর, $m_2 = 600\text{ gm} = 0{\cdot}6\text{ kg}$
দৈর্ঘ্য প্রসারণ, $x_2 = 8\text{ cm} = 0{\cdot}08\text{ m}$
$g = 9{\cdot}81\text{ ms}^{-2}$
স্প্রিং ধ্রুবক, $K_2 = ?$

উল্লেখ্য প্রদত্ত তথ্যের আলোকে একই স্প্রিংয়ের স্প্রিং ধ্রুবক K-এর মান ভিন্ন ভিন্ন।

(খ) অরনীর পর্যবেক্ষণ থেকে পাই,

প্রথম ভরের ক্ষেত্রে সঞ্চিত শক্তি,

$$U_1 = \frac{1}{2} F_1 l_1 = \frac{1}{2} m_1 g l_1$$
$$= \frac{1}{2} \times 0.08 \times 9.81 \times 0.02$$
$$= 7.85 \times 10^{-3} \text{ J}$$

এখানে,
ভর, $m_1 = 80 \text{ gm} = 0.08 \text{ kg}$
$g = 9.81 \text{ ms}^{-2}$
দৈর্ঘ্য প্রসারণ, $l_1 = 2 \text{ cm} = 0.02 \text{ m}$

দ্বিতীয় ক্ষেত্রে, সঞ্চিত শক্তি,

$$U_2 = \frac{1}{2} F_2 l_2 = \frac{1}{2} m_2 g l_2$$
$$= \frac{1}{2} \times 0.6 \times 9.8 \times 0.08$$
$$= 0.235 \text{ J}$$

এখানে,
ভর, $m_2 = 600 \text{ gm} = 0.6 \text{ kg}$
$g = 9.81 \text{ ms}^{-2}$
দৈর্ঘ্য প্রসারণ, $l_2 = 8 \text{ cm} = 0.08 \text{ m}$

অতএব, অরনী উদ্দীপকের তথ্যের আলোকে প্রথম ভরের চেয়ে দ্বিতীয় ভরের ক্ষেত্রে বেশি সঞ্চিত শক্তি পর্যবেক্ষণ করে।

১৮। একটি সেকেন্ড দোলক ভূপৃষ্ঠে সঠিক সময় দেয়। একে পাহাড়ের ওপর নিয়ে গেলে তা প্রতিদিন 10 sec সময় হারায়। [পৃথিবীর ব্যাসার্ধ, R = 6400 km এবং ভূপৃষ্ঠের অভিকর্ষীয় ত্বরণ $g = 9.8 \text{ ms}^{-2}$]

(গ) উদ্দীপকের পাহাড়ের উচ্চতা কত?

(ঘ) কী যান্ত্রিক ব্যবস্থা গ্রহণ করলে পাহাড়ে দোলকটির দোলনকাল অপরিবর্তিত থাকবে? গাণিতিকভাবে বিশ্লেষণ কর। [সি. বো. ২০১৯]

(ক) পাহাড়ের চূড়ায় প্রতিদিন প্রাপ্ত অর্ধদোলন সংখ্যা $(24 \times 3600 - 10) = 86400 - 10 = 86390$

∴ 86390 টি অর্ধদোলন দেয় = 86400 s-এ

1 " " " $= \frac{86400}{86390}$ "

2 " " " $= \frac{86400 \times 2}{86390} = 2.000231508 \text{ s}$

∴ $T_2 = 2.000231508 \text{ s}$

আমরা জানি, পাহাড়ের উচ্চতা,

$$h = \left(\sqrt{\frac{g}{g'}} - 1\right) R$$

যেহেতু, $\frac{T_2}{T} = \sqrt{\frac{g}{g'}}$

$$\therefore h = \left(\frac{T_2}{T_1} - 1\right) R$$
$$= \left(\frac{2.000231508}{2} - 1\right) \times 6400000$$
$$= 740.80 \text{ m}$$

(খ) পাহাড়ের শীর্ষে পাদদেশের তুলনায় অভিকর্ষজ ত্বরণ যেহেতু কম, তাই কার্যকর দৈর্ঘ্যও সামান্য কমাতে হবে যাতে $\frac{L}{g}$ অনুপাতটি সমন্বয়ের মাধ্যমে পুনরায় T = 2 s হবে।

আমরা জানি,

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{L}{g}}$$

বা, $T^2 = 4\pi^2 \frac{L}{g}$

$$\therefore \quad L = \frac{T^2 g}{4\pi^2} = \frac{(2)^2 \times 9.8}{4 \times 9.87}$$
$$= 0.9929 \text{ m}$$

সেকেন্ড দোলক হিসেবে পাহাড়ের শীর্ষদেশে কার্যকর দৈর্ঘ্য L′ হলে,

$$\frac{L'}{L} = \frac{g'}{g} = \frac{R^2}{(R+h)^2}$$
$$\therefore \quad L' = \frac{R^2 L}{(R+h)^2}$$
$$= \left(\frac{6400 \times 10^3}{6400 \times 10^3 + 740.8}\right)^2 \times 0.9929$$
$$= 0.9927 \text{ m}$$

অর্থাৎ দোলকটির কার্যকর দৈর্ঘ্য সামান্য কমিয়ে 0.9927 m করা হলে দোলকটি পাহাড়ের শীর্ষে সঠিক সময় দিবে।

১৯। কোনো স্থানে একটি সরল দোলকের দোলনকাল 1.8 sec। উক্ত স্থানে অভিকর্ষজ ত্বরণ 9.8 ms^{-2} এবং পৃথিবীর ব্যাসার্ধ 6400 km। এরপর দোলকটিকে 712 km উচ্চতাবিশিষ্ট একটি পাহাড়ের চূড়ায় নেয়া হলো।

(ক) উদ্দীপকের দোলকটির কার্যকরী দৈর্ঘ্য 40% বৃদ্ধি করলে দোলনকাল কত হবে? নির্ণয় কর।

(খ) উদ্দীপকের পাহাড়ের চূড়ায় দোলকটি সেকেন্ড দোলক হবে কি? গাণিতিক মতামত দাও। [চ. বো. ২০১৯]

(ক) দেওয়া আছে ১ম ক্ষেত্রে দোলকটির দোলন কাল, $T_1 = 1.8$ sec

মনে করি, ১ম ক্ষেত্রে দোলকটির কার্যকরী দৈর্ঘ্য $= L_1$

$\therefore$ ২য় ক্ষেত্রে দোলকটির কার্যকরী দৈর্ঘ্য, $L_2 = L_1 + L_1 \times \frac{40}{100} = 1.4\,L_1$

ধরি, ২য় ক্ষেত্রে দোলকটির দোলনকাল, $T_2 = ?$

$$\therefore \quad \frac{T_2}{T_1} = \frac{2\pi\sqrt{\frac{L_2}{g}}}{2\pi\sqrt{\frac{L_1}{g}}} = \sqrt{\frac{L_2}{L_1}}$$

$$\therefore \quad T_2 = T_1 \times \sqrt{\frac{L_2}{L_1}} = 1.8 \times \sqrt{\frac{1.4\,L_1}{L_1}} = 2.13 \text{ s}$$

(খ) পাহাড়ের চূড়ায় এবং ভূ-পৃষ্ঠে অভিকর্ষজ ত্বরণ g_2 এবং g_1 হলে, আমরা জানি,

$$\frac{T_2}{T_1} = \sqrt{\frac{g_1}{g_2}}$$
$$\therefore \quad \frac{g_1}{g_2} = \frac{(R+h)^2}{R^2}$$
$$\text{বা,} \quad \sqrt{\frac{g_1}{g_2}} = \frac{R+h}{R} = 1 + \frac{h}{R}$$
$$\therefore \quad \frac{T_2}{T_1} = 1 + \frac{h}{R}$$
$$\text{বা,} \quad T_2 = T_1\left(1 + \frac{h}{R}\right)$$
$$= 1.8 \times \left(1 + \frac{7.12 \times 10^5}{6.4 \times 10^6}\right) = 2 \text{ sec}$$

যেহেতু পাহাড়ের চূড়ায় দোলকটির দোলনকাল 2 sec সুতরাং ওই স্থানে এটি একটি সেকেন্ড দোলক হবে।

সার-সংক্ষেপ

স্থানিক পর্যাবৃত্তি : পর্যায়বৃত্তির পর্যায়কাল যদি স্থান সাপেক্ষ হয়, তবে তাকে স্থানিক পর্যাবৃত্তি বলে।

কালিক পর্যাবৃত্তি : পর্যায়বৃত্তির পর্যায়কাল যদি একটি নির্দিষ্ট সময় সাপেক্ষ হয়। তবে তাকে কালিক পর্যাবৃত্তি বলে।

পর্যাবৃত্ত গতি : কোনো বস্তুর গতি যদি এমন হয় যে একটি নির্দিষ্ট সময় পরপর বস্তুটির গতির পুনরাবৃত্তি ঘটে তবে ওই গতিকে পর্যাবৃত্ত গতি বলে।

স্পন্দন গতি : পর্যাবৃত্ত গতিসম্পন্ন কোনো বস্তুর গতি যদি এমন হয় যে, পর্যায়কালের অর্ধেক সময় কোনো নির্দিষ্ট দিকে এবং বাকি অর্ধেক সময় বিপরীত দিকে চলে তবে বস্তুর ওই গতিকে স্পন্দন বলে।

সরল ছন্দিত স্পন্দন : কোনো পর্যায় গতিসম্পন্ন বস্তুর ওপর কার্যকর ত্বরণ যদি তার গতিপথের একটি নির্দিষ্ট বিন্দু অভিমুখে এমনভাবে ক্রিয়া করে যে তার মান ওই বিন্দু হতে বস্তুর সরণের মানের সমানুপাতিক হয়, তবে বস্তুর উক্ত গতিকে সরল ছন্দিত স্পন্দন বলে।

সরল দোলক : একটি ছোট ভারী বস্তু পিণ্ডকে একটি ওজনবিহীন, অপ্রসারণীয় এবং নমনীয় সুতার সাহায্যে একটি দৃঢ় অবলম্বনে ঝুলিয়ে দেওয়ায় তা যদি বিনা বাধায় এদিক-ওদিক দোলে, তবে সুতা সমেত পিণ্ডটিকে সরল দোলক বলে।

পূর্ণ দোলন (Complete oscillation) : কোনো একটি সরল দোলকের দোলক পিণ্ড তার গতিপথের যে কোনো বিন্দু হতে যাত্রা শুরু করে দুই প্রান্ত অবধি যেয়ে পুনরায় সেই বিন্দুতে ফিরে এলে একটি পূর্ণ দোলন হয়।

দোলন বা পর্যায় কাল (Time period) : কোনো একটি সরল দোলকের দোলক পিণ্ডের একটি পূর্ণ দোলন দিতে যে পরিমাণ সময় লাগে তাকে দোলন কাল বলে।

কম্পাঙ্ক (Frequency) : কোনো একটি সরল দোলকের দোলক পিণ্ড এক সেকেন্ডে যতবার পূর্ণ দোলন দেয়, তাকে কম্পাঙ্ক বা কম্পনি বলে।

বিস্তার (Amplitude) : দুলবার সময় কোনো একটি সরল দোলকের দোলক পিণ্ড সাম্যাবস্থা হতে সর্বাপেক্ষা যতটা বেশি দূরে যায় তাকে তার বিস্তার বলে।

দশা : কোনো একটি কম্পমান বস্তুর যে কোনো মূহূর্তের দোলনের অবস্থা অর্থাৎ বস্তুটির অবস্থান, বেগ, ত্বরণ এবং গতির অভিমুখ যা দ্বারা বুঝা যায় তাকে দশা বলে।

সেকেন্ড দোলক (Second pendulum) : যে সরল দোলকের দোলনকাল 2 সেকেন্ড, তাকে সেকেন্ড দোলক বলে।

কৌণিক কম্পাঙ্ক : সরল ছন্দিত স্পন্দনসম্পন্ন কোনো কণা একক সময়ে যে কৌণিক দূরত্ব অতিক্রম করে তাকে কৌণিক কম্পাঙ্ক বলে।

বহুনির্বাচনি প্রশ্নের উত্তরের জন্য প্রয়োজনীয় বিষয়াবলির সার-সংক্ষেপ

১। সরল দোল গতিসম্পন্ন কণার ক্ষেত্রে $\frac{1}{2}KA^2$ হচ্ছে—

(i) সর্বোচ্চ গতিশক্তি, (ii) সর্বোচ্চ স্থিতিশক্তি, (iii) মোট শক্তি।

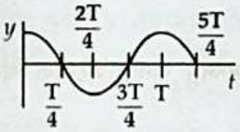
২। পর্যায়কাল 2 গুণ করা হলে দোলকের দৈর্ঘ্য 4 গুণ করতে হবে। পৃথিবীর কেন্দ্রে সরল দোলকের দোলনকাল অসীম হয়। $T \propto \sqrt{L}$

৩। সরল দোলন গতিসম্পন্ন কণার পর্যায়কাল, $T \propto \sqrt{\frac{K}{m}}$ অর্থাৎ বল ধ্রুবকের বর্গমূলের সমানুপাতিক।

৪। সরল দোলন গতিসম্পন্ন কোনো কণার অন্তরক সমীকরণ, $\frac{d^2x}{dt^2} + \omega^2 x = 0$।

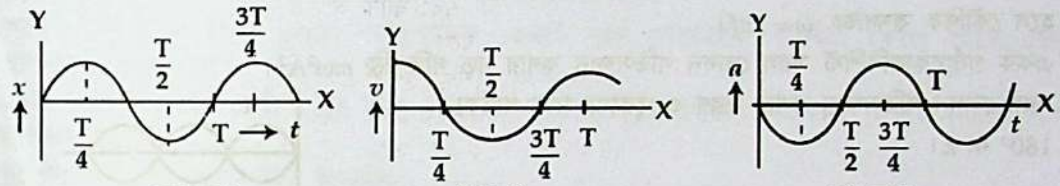
৫। সরল দোলন গতিসম্পন্ন কোনো কণার কম্পাঙ্ক $\frac{\omega}{2\pi}$ এবং পর্যায়কাল $\frac{2\pi}{\omega}$।

৬। সরল দোলন গতিসম্পন্ন কোনো কণা যখন সাম্যাবস্থা অতিক্রম করে তখন এর গতিশক্তি সর্বোচ্চ এবং বিভবশক্তি সর্বনিম্ন হয়। সরল দোলন গতির জন্য কৌণিক সরণ 4° এর চেয়ে বেশি হতে পারবে না।

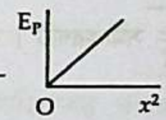
৭।  সরল ছন্দিত গতিতে গতিশীল একটি বস্তুর গতির সরণ–সময় লেখচিত্রের জন্য প্রযোজ্য

(i) যখন $t = \frac{3T}{4}$ তখন $E = 0$, (ii) যখন $t = \frac{T}{4}$ তখন $E_k = E_p$ প্রযোজ্য নয়। যখন $t = T$ হয় তখন সরণ সর্বনিম্ন হয়। সরল দোলকের ক্ষেত্রে পর্যায়কাল $T = 2 \times$ এক বার টিক শব্দের সময়।

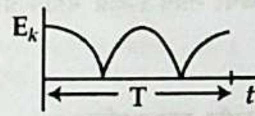
৮। সরল দোলন গতিসম্পন্ন কণার সরণ, বেগ ও ত্বরণের লেখচিত্র হলো—

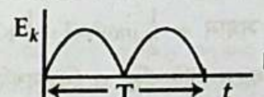


(ক) সরণ (খ) বেগ (গ) ত্বরণ

৯। সরল দোলন গতিসম্পন্ন কণার বিভবশক্তি বনাম সরণের বর্গের লেখচিত্র— 

১০। সরল দোলন গতিসম্পন্ন কণার দোলনকাল T, বিস্তার A-এর সর্বোচ্চ বেগ হলো, $v_{max} = \omega A + \frac{2\pi}{T} \times A$।

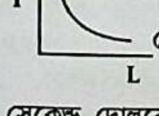
১১। একটি সরল ছন্দিত স্পন্দকের সাম্যাবস্থান থেকে সময় পরিমাপ শুরু করলে সেটির গতিশক্তি বনাম সময়ের লেখচিত্র হলো । সরল ছন্দিত স্পন্দনে স্পন্দিত কোনো কণার বার বার স্পন্দিত হওয়ার কারণ গতি জড়তা ও প্রত্যায়নক বল।

১২। একটি সরল ছন্দিত স্পন্দকের বিস্তার অবস্থান থেকে সময় পরিমাপ শুরু করলে সেটির গতিশক্তি বনাম এর পর্যায় কালের লেখচিত্র হলো । সরল ছন্দিত গতিসম্পন্ন কণার জন্য ত্বরণ সরণের সমানুপাতিক ও বিপরীতমুখি। অর্থাৎ $a \propto -x$

১৩। সরল ছন্দিত স্পন্দকের ক্ষেত্রে পর্যায়কাল এবং প্রত্যায়নক বলের মান অপরিবর্তিত থাকে।

১৪। ω এবং f এর মধ্যে একটিমাত্র ধ্রুবকের পার্থক্য তা হলো 2π.

১৫। সুষম বৃত্তাকার গতিকে সরল ছন্দিত স্পন্দন গতি হিসেবে বিবেচনা করা যায়। একটি দোলক ঘড়িকে পাহাড়ের চূড়ায় নিলে ধীরে চলবে। কারণ সেখানে g এর মান কম।

১৬।  লেখচিত্রটি সরল দোলকের তৃতীয় সূত্র সমর্থন করে।

১৭। সেকেন্ড দোলকের দৈর্ঘ্য অভিকর্ষজ ত্বরণ g-এর সমানুপাতিক। পৃথিবীর 45° অক্ষাংশে অভিকর্ষজ ত্বরণকে আদর্শ মান ধরা হয়।

১৮। ববের ভর বেশি হলে দোলনকাল অপরিবর্তিত থাকবে। সরল ছন্দিত স্পন্দনরত কণার বেগ (i) মধ্য বিন্দুতে সর্বোচ্চ (ii) সর্বোচ্চ সরণে শূন্য (iii) সাম্যাবস্থায় সর্বনিম্ন।

১৯। সরল দোলকের দৈর্ঘ্য L, ভর M, কম্পাঙ্ক f। এর কম্পাঙ্ক $2f$ করা হলে দৈর্ঘ্য হ্রাস করে $\frac{L}{4}$ করতে হবে।

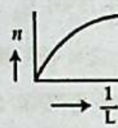
২০। $\frac{2d^2x}{dt^2} + 32x = 0$ হলে এর কৌণিক কম্পাঙ্ক হবে $4\ rads^{-1}$। একটি সেকেন্ড দোলকের কার্যকরী দৈর্ঘ্য 0.993 m।

২১। সরল দোলকের সাহায্যে নির্ণয় করা যায় পাহাড়ের উচ্চতা ও অভিকর্ষজ ত্বরণ।

২২। দোলনকালের অনুপাত 2 : 3 হলে কার্যকর দৈর্ঘ্যের অনুপাত হবে 4 : 9.

২৩। একক সেকেন্ড দোলকের পর্যায়কাল 2 sec এবং কম্পাঙ্ক 0·5 Hz.

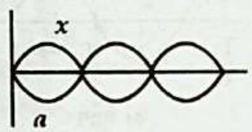
২৪। পর্যায়কাল ও বল ধ্রুবকের মধ্যে সম্পর্ক হলো $T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{K}}$। সরল ছন্দিত গতিসম্পন্ন কণার সর্বোচ্চ অবস্থান ও সাম্যাবস্থানের মধ্যে দশা পার্থক্য $\frac{\pi}{4}$।

২৫। কার্যকরী দৈর্ঘ্য বনাম কম্পাঙ্কের লেখচিত্র হলো 

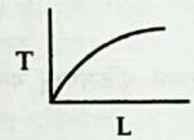
। একটি পূর্ণ কম্পনে T সময়ে দশার পরিবর্তন 2π হলে কৌণিক কম্পাঙ্ক $\omega = 2\pi f$।

২৬। একক পর্যায়কালবিশিষ্ট সরল দোলন গতিসম্পন্ন কণার গড় গতিশক্তি $m\omega^2A^2$।

২৭। সরল দোলন গতিসম্পন্ন কণার সরণ ও ত্বরণের দশা পার্থক্য $180°$ বা π।



২৮। $T = 2\pi\sqrt{\frac{L}{g}}$ সমীকরণটি T বনাম L লেখচিত্র একটি অধিবৃত্ত।



২৯। স্প্রিং সংযুক্ত একটি কণা সরল ছন্দিত স্পন্দনে স্পন্দিত হচ্ছে $x = \frac{A}{2}$ অবস্থানে বেগ $\frac{\sqrt{3}}{2}v_{max}$।

৩০। কোনো সরল ছন্দিত স্পন্দকের পর্যায়কাল 10 sec হলে ত্বরণ a এবং সরণ x-এর মধ্যকার সম্পর্ক হলো $a = -\left(\frac{\pi}{5}\right)^2 x$।

৩১। সরল ছন্দিত গতিসম্পন্ন কোনো কণার যান্ত্রিক শক্তি বিস্তারের বর্গের সমানুপাতিক।

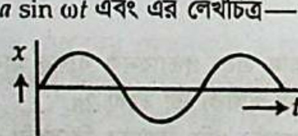
৩২। একটি স্প্রিং এর সঞ্চিত শক্তি বনাম প্রসারণের লেখচিত্র হবে প্যারাবোলা।

৩৩। $x = 0$ অবস্থানে মোট শক্তি $x = A$ অবস্থানে মোট শক্তি সমান।

৩৪। $x = 0$ অবস্থানে গতিশক্তি $x = A$ অবস্থানে স্থিতিশক্তির সমান $= \frac{1}{2}m\omega^2A^2 = \frac{1}{2}Kx^2$

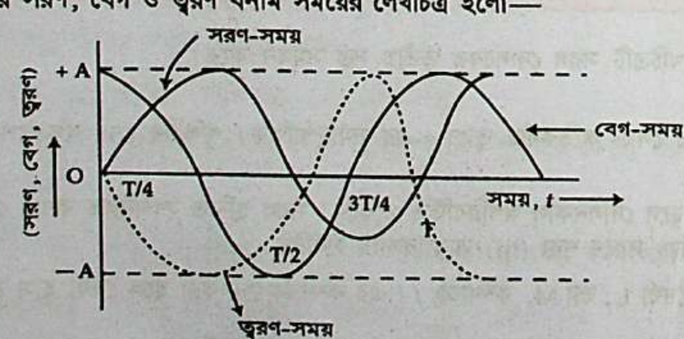
৩৫। সাম্যাবস্থান থেকে সরণ যেখানে বিস্তারের অর্ধেক সেখানে গতিশক্তি ও বিভবশক্তি সমান হবে।

৩৬। একটি পর্যাবৃত্ত কণার সমীকরণ, $x = a \sin \omega t$ এবং এর লেখচিত্র—



কম্পাঙ্কের একক হলো cycle/s বা Hertz।

৩৭। সরল ছন্দিত গতির সরণ, বেগ ও ত্বরণ বনাম সময়ের লেখচিত্র হলো—



৩৮। সরল ছন্দিত স্পন্দনের ভর, পর্যায়কাল ও বল ধ্রুবকের সম্পর্ক হলো : $T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{K}}$। কৌণিক কম্পাঙ্ক $\omega = \sqrt{\frac{K}{m}}$

৩৯। দশা, $\delta = 0$ হলে কণার গতি সাম্যাবস্থান হতে এবং $\delta = \frac{\pi}{2}$ হলে গতি সরণের সর্বোচ্চ অবস্থান হতে শুরু হয়।

৪০। স্প্রিং ধ্রুবক K এর মান স্প্রিং-এর দৈর্ঘ্য, জ্যামিতিক গঠন ও পদার্থের স্থিতিস্থাপক ধর্মের ওপর নির্ভর করে। এর একক Nm^{-1} এবং মাত্রা MT^{-2}।

৪১। $x = A \sin \omega t$ সমীকরণটি একটি সরল দোলনগতি নির্দেশ করে।

৪২। একটি সরল দোলকের দোলনকাল 50% বৃদ্ধি করতে এর কার্যকর দৈর্ঘ্য 1.25 গুণ বৃদ্ধি করতে হবে।

৪৩। একটি সরল গতিসম্পন্ন কণার কম্পাঙ্ক ω হলে এর স্থিতিশক্তি পরিবর্তনের কম্পাঙ্ক 2ω।

৪৪। সাম্যাবস্থান হতে সরণ $x = \pm \frac{A}{\sqrt{2}}$ অবস্থানে দোলনগতিসম্পন্ন বস্তুর গতিশক্তি ও স্থিতিশক্তি সমান হবে।

৪৫। দোলকের ববের ভর বেশি হলে দোলনকাল অপরিবর্তিত থাকবে।

৪৬। সেকেন্ড দোলকের দৈর্ঘ্য g-এর সমানুপাতিক, একটি সরল দোলককে পৃথিবীর কেন্দ্রে নিয়ে গেলে এর দোলনকাল অসীম হবে।

৪৭। একটি সরল দোলকের দৈর্ঘ্য 4 গুণ বৃদ্ধি করলে দোলনকাল দ্বিগুণ বাড়বে। মহাকাশে একটি সেকেন্ড দোলকের কম্পাঙ্ক 0Hz।

৪৮। সুর শলাকার গতি দোলনগতির উদাহরণ।

অনুশীলনী

(ক) বহুনির্বাচনি প্রশ্ন

১। সরল ছন্দিত স্পন্দনের বৈশিষ্ট্য— [রা. বো. ২০১৯; সি. বো. ২০১৭; সকল বোর্ড ২০১৮]
(i) বস্তুর গতি পর্যায় গতি
(ii) ত্বরণ বস্তুর সরণ অভিমুখী
(iii) ত্বরণ বস্তুর সরণের সমানুপাতিক
নিচের কোনটি সঠিক ?
ক i ও ii
খ i ও iii
গ ii ও iii
ঘ i, ii ও iii

২। একটি বস্তু 4 cm বিস্তারের সরল ছন্দিত স্পন্দন সম্পন্ন করছে। সাম্যাবস্থা থেকে কত দূরত্বে বস্তুটির গতিশক্তি ও স্থিতিশক্তি সমান হবে ? [BUET Admission Test, 2013-14]
ক $2\sqrt{2}$ cm
খ $\sqrt{2}$ cm
গ 2 cm
ঘ 1 cm

৩। সরল ছন্দিত গতির ত্বরণ বা প্রত্যায়নক বল সরণের—
ক সমানুপাতিক ও সমমুখী
খ ব্যস্তানুপাতিক ও বিপরীতমুখি
গ ব্যস্তানুপাতিক ও সমমুখী
ঘ সমানুপাতিক ও বিপরীতমুখি

৪। একটি সরল ছন্দিত গতিসম্পন্ন কণার সর্বোচ্চ বেগ $0.03\ ms^{-1}$। কণাটির বিস্তার 0.006m হলে কৌণিক কম্পাঙ্ক কত ?
ক $3\ rad\ s^{-1}$
খ $10\ rad\ s^{-1}$
গ $5\ rad\ s^{-1}$
ঘ $7\ rad\ s^{-1}$

৫। সরল ছন্দিত গতিসম্পন্ন কণার গতিপথের মধ্য-অবস্থানে— [ঢা. বো. ২০১৫]
ক বেগ সর্বনিম্ন, সরণ সর্বোচ্চ
খ বেগ সর্বনিম্ন, সরণ সর্বনিম্ন
গ বেগ সর্বাধিক, সরণ সর্বাধিক
ঘ বেগ সর্বাধিক, সরণ সর্বনিম্ন

৬। সরল ছন্দিত গতিসম্পন্ন কণার ক্ষেত্র—
(i) মধ্যবর্তী সাম্যাবস্থানে এর বেগ সর্বোচ্চ হয়
(ii) মধ্যাবস্থান হতে সরণ বৃদ্ধির সাথে এর বেগ হ্রাস পায়
(iii) বিস্তারের প্রান্ত দুই বিন্দুতে এর গতিবেগ শূন্য হয়
নিচের কোনটি সঠিক ?
ক i ও ii
খ i ও iii
গ ii ও iii
ঘ i, ii ও iii

৭। দুটি স্পন্দনরত কণার সরণ যথাক্রমে $x = A \sin \omega t$ এবং $x = A \cos \omega t$ হলে এদের মধ্যকার দশা পার্থক্য—
ক 2π
খ $\frac{\pi}{2}$
গ π
ঘ $\frac{\pi}{4}$

৮। সরল ছন্দিত স্পন্দনে স্পন্দিত কণার বিভবশক্তি সর্বোচ্চ হবে যখন সরণ— [MBSTU Admission Test, 2017-18]
ক A
খ $\frac{A}{2}$
গ $\frac{A}{\sqrt{2}}$
ঘ 0 হয়