লাল - সবুজে দাগানো

TEXT BOOK

পদার্থ বিজ্ঞান

১ম পত্র

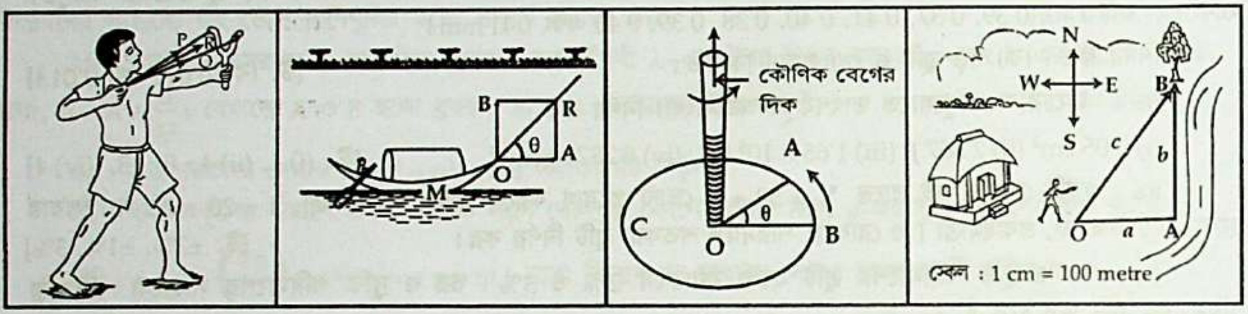
New Edition

উন্মেষ

মেডিকেল এন্ড ডেন্টাল এডমিশন কেয়ার

২
ভেক্টর
VECTOR

প্রধান শব্দ (Key Words) : ভেক্টর রাশি, স্কেলার রাশি, একক ভেক্টর, লব্ধি ও অংশক বা উপাংশ, অবস্থান ভেক্টর, নাল বা শূন্য ভেক্টর, আয়ত একক ভেক্টর, ভেক্টর রাশির বিভাজন ও উপাংশ, ত্রিভুজ সূত্র, সামান্তরিক সূত্র, স্কেলার গুণন বা ডট গুণন, ভেক্টর বা ক্রস গুণন, অপারেটর, গ্রেডিয়েন্ট, ডাইভারজেন্স, কার্ল।



সূচনা
Introduction

বিজ্ঞানের বিভিন্ন বিষয় সুনির্দিষ্টভাবে জানতে হলে কোনো না কোনো ধরনের পরিমাপের প্রয়োজন হয়। পদার্থের যে সব ভৌত বৈশিষ্ট্য পরিমাপ করা যায় তাদের প্রত্যেককে রাশি (quantity) বলে। যেমন দৈর্ঘ্য, ভর, সময়, আয়তন, বেগ, কাজ ইত্যাদি প্রত্যেকে এক একটি রাশি। **পদার্থবিজ্ঞানের অন্তর্গত যে কোনো রাশিকে ভৌত রাশি (physical quantity) বলে।** কিছু কিছু ভৌত রাশিকে শুধুমাত্র মান দ্বারা সম্পূর্ণরূপে প্রকাশ করা যায়। আবার অনেক ভৌত রাশি রয়েছে যাদেরকে সম্পূর্ণরূপে প্রকাশ করার জন্য মান ও দিক উভয়ই প্রয়োজন হয়। তাই ধর্ম বা বৈশিষ্ট্য অনুসারে ভৌত রাশিগুলোকে আমরা দুই ভাগে বিভক্ত করতে পারি; যথা—

(ক) স্কেলার রাশি বা অদিক রাশি (Scalar quantity)।

(খ) ভেক্টর রাশি বা দিক রাশি বা সদিক রাশি (Vector quantity)।

যে সব ভৌত রাশির শুধু মান আছে, কিন্তু দিক নেই, তাদেরকে স্কেলার রাশি বা অদিক রাশি বলে। যেমন দৈর্ঘ্য, ভর, সময়, জনসংখ্যা, তাপমাত্রা, তাপ, বৈদ্যুতিক বিভব, দ্রুতি, কাজ ইত্যাদি স্কেলার বা অদিক রাশি।

যে সব ভৌত রাশির মান এবং দিক দুই-ই আছে, তাদেরকে ভেক্টর রাশি বা দিক রাশি বলে। যেমন সরণ, বেগ, ত্বরণ, মন্দন, বল, ওজন ইত্যাদি ভেক্টর বা দিক রাশি।

MAT: 09-10

এ অধ্যায় পাঠ শেষে শিক্ষার্থীরা—

- ভেক্টরের ধর্ম ব্যাখ্যা করতে পারবে।
- পদার্থবিজ্ঞানের বিভিন্ন ভৌত রাশি ভেক্টররূপে প্রকাশ ও ব্যাখ্যা করতে পারবে।
- কতিপয় বিশেষ ভেক্টর ব্যাখ্যা করতে পারবে।
- ভেক্টর রাশির জ্যামিতিক যোজন নিয়ম ব্যাখ্যা করতে পারবে।
- লম্বাংশের সাহায্যে ভেক্টর রাশির যোজন ও বিয়োজন বিশ্লেষণ করতে পারবে।
- একটি ভেক্টরকে ত্রিমাত্রিক আয়তাকার বিস্তারের ক্ষেত্রে লম্বাংশে বিভাজন করতে পারবে।
- দুটি ভেক্টর রাশির স্কেলার ও ভেক্টর গুণের সংজ্ঞার্থ ও এদের ব্যবহার করতে পারবে।
- পদার্থবিজ্ঞানে ক্যালকুলাসের ব্যবহার ও গুরুত্ব ব্যাখ্যা করতে পারবে।
- ভেক্টর ক্যালকুলাসের ধারণা ব্যাখ্যা করতে পারবে।
- ভেক্টর অপারেটর ব্যবহার করতে পারবে।

২.১ ভেক্টর (ধর্ম ও চিহ্ন)
Vector (Properties and symbols)

কোনো কোনো ভৌত রাশিকে বর্ণনার জন্য মানের সাথে দিক নির্দেশের প্রয়োজন হয়। এই সকল ভৌত রাশিই ভেক্টর রাশি। যেমন— বেগ, বল, ত্বরণ, সরণ, ওজন ইত্যাদি। বস্তুজগতের এ ধরনের রাশি মান ও দিক দ্বারা প্রকাশিত না হলে তা ওই রাশির বর্ণনায় অসম্পূর্ণ থেকে যায়। ভেক্টর রাশি কতগুলো নিয়ম মেনে চলে। যথা—

১। ভেক্টর রাশির মান ও অভিমুখ আছে।

২। দুই বা ততোধিক সমজাতীয় ভেক্টরকে যোগ করা যায়। ভিন্ন প্রকৃতির ভেক্টরকে যোগ করা যায় না।

৩। দুই বা ততোধিক ভেক্টর যোগ করলে যে ভেক্টর পাওয়া যায় তা প্রথমোক্ত ভেক্টর দুটির সম্মিলিত ক্রিয়ার ফলাফলের সমান হয়।

৪। দুটি ভেক্টরের ভেক্টর গুণফল একটি ভেক্টর রাশি হয়।

৫। দুটি ভেক্টরের স্কেলার গুণফল একটি স্কেলার রাশি।

৬। কোনো ভেক্টর রাশি ও তার মানের অনুপাত দ্বারা ভেক্টরটির দিক নির্দেশিত হয়।

৭। ভেক্টর রাশি যোগ সংযোজন ও বণ্টন সূত্র (rules of addition and distribution) মেনে চলে।

৮। ভেক্টর রাশিকে উপাংশে বিভক্ত করা যায়।

কোনো একটি ভেক্টর রাশিকে চিহ্ন দ্বারা দুভাবে প্রকাশ করা হয়ে থাকে; যথা—**অক্ষর দ্বারা** এবং **সরলরেখা দ্বারা।** **অক্ষর দ্বারা** কোনো একটি ভেক্টর রাশিকে **চারভাবে** প্রকাশ করা হয়, যথা—

ক. কোনো অক্ষরের ওপর তীর চিহ্ন দ্বারা রাশিটির ভেক্টর রূপ এবং এর দুই পাশের দুটি খাড়া রেখা দ্বারা এর মান নির্দেশ করা হয়। সাধারণভাবে শুধু অক্ষর দ্বারাও রাশিটির মান নির্দেশ করা হয়।

$\therefore$ A অক্ষরের ভেক্টর রূপ $\vec{A}$ এবং মান রূপ $|\vec{A}|$ বা A

খ. কোনো অক্ষরের উপর রেখা চিহ্ন দ্বারা রাশিটির ভেক্টর রূপ এবং এর দুই পাশের দুটি খাড়া রেখা দ্বারা এর মান নির্দেশ করা হয়।

$\therefore$ A অক্ষরের ভেক্টর রূপ $\bar{A}$ এবং মান রূপ $|\bar{A}|$

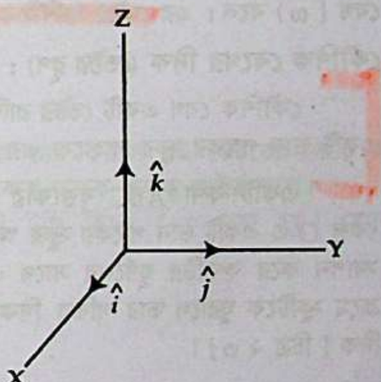
গ. কোনো অক্ষরের নিচে রেখা চিহ্ন দ্বারা রাশিটির ভেক্টর রূপ এবং এর দুই পাশের দুটি খাড়া রেখা দ্বারা এর মান নির্দেশ করা হয়।

$\therefore$ A অক্ষরের ভেক্টর রূপ $\underline{A}$ এবং মান রূপ $|\underline{A}|$

ঘ. মোটা হরফের অক্ষর দিয়ে ভেক্টর রাশি প্রকাশ করা হয়। যেমন A অক্ষরের ভেক্টর রূপ **A** এবং এর মান A।

ভেক্টর রাশি নির্দেশের ক্ষেত্রে ক-এ ব্যবহৃত চিহ্নই শ্রেয়। তাই এই বইতে আমরা এই পদ্ধতিই ব্যবহার করব।

ত্রিমাত্রিক স্থানাঙ্ক ব্যবস্থায় ধনাত্মক X, Y এবং Z অক্ষের দিকে ব্যবহৃত যথাক্রমে $\hat{i}$, $\hat{j}$ এবং $\hat{k}$ চিহ্ন দ্বারা আয়ত একক ভেক্টর দেখানো হয়েছে [চিত্র ২·১]।



চিত্র ২·১

কাজ : মান ও অভিমুখ আছে এমন সকল রাশিই কী ভেক্টর রাশি ? ব্যাখ্যা কর।

মান ও অভিমুখ যুক্ত সকল রাশিই ভেক্টর রাশি নয়। যেমন তড়িৎ প্রবাহ রাশিটির মান ও অভিমুখ থাকলেও দুটি নির্দিষ্ট তড়িৎ প্রবাহ ভেক্টর যোগের বিনিময় সূত্র মেনে চলে না। তাই এই রাশিটির মান ও অভিমুখ থাকলেও এটি ভেক্টর রাশি নয়।

২·২ ভেক্টর প্রকাশ
Vector representation

বিভিন্ন ভেক্টর রাশিকে ভেক্টররূপে গাণিতিকভাবে প্রকাশ করা যায়। ফলে রাশিটির মান ও দিক স্পষ্ট হয়। নিম্নে কয়েকটি ভৌত রাশির ভেক্টর প্রকাশ দেখানো হলো।

বল
Force

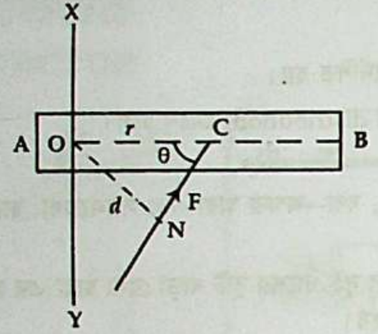
যে বাহ্যিক কারণ বস্তুর গতি বা স্থিতি অবস্থার পরিবর্তন ঘটায় বা ঘটাতে চায় তাকে বল বলে।

বল একটি ভেক্টর রাশি। এর মান ও দিক আছে। কোনো একটি গতিশীল বস্তুর ভর 'm', ত্বরণ $\vec{a}$ এবং বস্তুর ওপর ক্রিয়াশীল বল $\vec{F}$ হলে, এর ভেক্টর প্রকাশ হলো,

$$\vec{F} = m\vec{a}$$

ঘূর্ণন বল বা টর্ক
Rotational force or torque

ঘূর্ণন বল বলতে টর্ককে বুঝানো হয়। ঘূর্ণনশীল বস্তুর ক্ষেত্রে বলের সমতুল্য রাশি হলো টর্ক।



চিত্র ২.২

কোনো অক্ষের সাপেক্ষে ঘূর্ণনরত বস্তুর ওপর যে বিন্দুতে বল ক্রিয়াশীল ওই বিন্দুর অবস্থান ভেক্টর ও প্রযুক্ত বলের গুণফলকে ঘূর্ণন বল বা টর্ক বলে।

অবস্থান ভেক্টর $\vec{r}$ এবং প্রযুক্ত বল $\vec{F}$ হলে,

টর্ক, $\vec{\tau} = \vec{r} \times \vec{F}$ [চিত্র ২.২]

টর্ক একটি ভেক্টর রাশি। $\vec{r}$ এবং $\vec{F}$ যে তলে অবস্থিত τ ওই তলের অভিলম্ব বরাবর। টর্কের একক N-m।

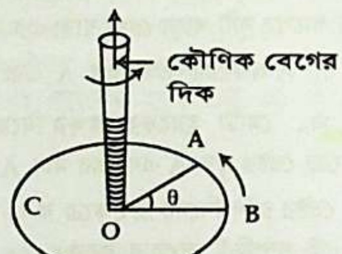
কৌণিক বেগ
Angular velocity

সময় ব্যবধান শূন্যের কাছাকাছি হলে কৌণিক সরণের পরিবর্তনের হারকে তাৎক্ষণিক কৌণিক বেগ বা কৌণিক বেগ ($\vec{\omega}$) বলে। এর ভেক্টর গাণিতিক প্রকাশ হলো $\vec{v} = \vec{\omega} \times \vec{r}$

কৌণিক বেগের দিক (ভেক্টর রূপ) :

কৌণিক বেগ একটি ভেক্টর রাশি। এর মান ও দিক দুই-ই আছে। একটি ডান পাকের স্ক্রু সাহায্যে এর দিক নির্দেশ করা যায়।

একটি কণা ABC বৃত্তাকার পথে ঘুরতে থাকলে ওই বৃত্তের কেন্দ্র O-এ একটি ডান পাকের স্ক্রু অগ্রভাগ বৃত্ত-তলের অভিলম্বভাবে স্থাপন করে কণাটির ঘূর্ণনের সাথে এবং কণাটি যে ক্রমে ঘুরছে সেই ক্রমে স্ক্রুটিকে ঘুরালে তার গতির দিকই হবে কণাটির কৌণিক বেগের দিক [চিত্র ২.৩]।

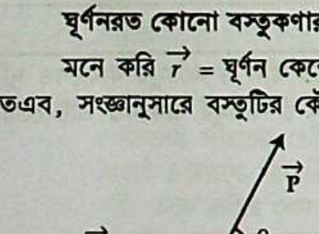


চিত্র ২.৩

কৌণিক ভরবেগ
Angular momentum

ঘূর্ণনরত কোনো বস্তুকণার ব্যাসার্ধ ভেক্টর ও রৈখিক ভরবেগের ভেক্টর গুণফলকে কৌণিক ভরবেগ বলে।

মনে করি $\vec{r}$ = ঘূর্ণন কেন্দ্রের সাপেক্ষে কোনো বস্তুকণার ব্যাসার্ধ ভেক্টর এবং $\vec{P}$ = বস্তুর রৈখিক ভরবেগ। অতএব, সংজ্ঞানুসারে বস্তুটির কৌণিক ভরবেগ,



চিত্র ২.৪

$$\vec{L} = \vec{r} \times \vec{P}$$

এটি একটি ভেক্টর রাশি। এর একক kgm^2s^{-1}

মান ও দিক : কৌণিক ভরবেগের মান

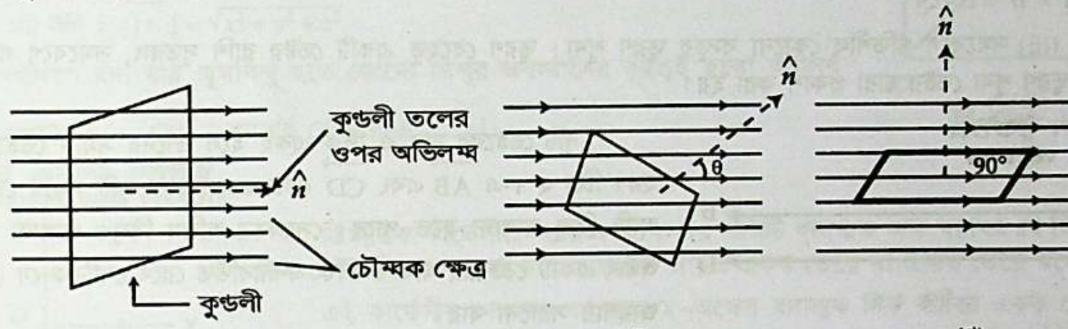
$$L = rP \sin\theta$$

এখানে θ হচ্ছে $\vec{r}$ ও $\vec{P}$-এর মধ্যবর্তী কোণ [চিত্র ২.৪]। ঘূর্ণন কেন্দ্র হতে ভরবেগের ক্রিয়ারেখার লম্ব দূরত্ব হচ্ছে $r \sin\theta$। অতএব, কোনো বস্তুকণার ভরবেগ ও ঘূর্ণন কেন্দ্র হতে ভরবেগের ক্রিয়া রেখার লম্ব দূরত্বের গুণফল কৌণিক ভরবেগের মান নির্দেশ করে।

$\vec{r}$ ও $\vec{P}$ যে তলে অবস্থিত $\vec{L}$ এর দিক হবে ঐ তলের লম্ব বরাবর। ক্রস গুণনের নিয়ম দ্বারা $\vec{L}$-এর দিক নির্ধারিত হবে।

তল
Surface

কোনো একটি পৃষ্ঠের বা সমতলের ওপর অভিলম্ব অঙ্কন করলে যে দিক নির্দেশিত হয় তা ওই তলের ভেক্টর। এক্ষেত্রে পৃষ্ঠটিই হবে তল। তবে কোনো বস্তুর তল বা পৃষ্ঠ একটি স্কেলার রাশি। যে কোনো সমতলের উপর অঙ্কিত অভিলম্বকে ওই তলের তল ভেক্টর বলে। নিচের চিত্রে ড্যাস লাইন যুক্ত তীর চিহ্ন দ্বারা তল ভেক্টর ($\hat{n}$) দেখানো হলো। চিত্রের কুণ্ডলীটি হলো তল।



চিত্র ২.৫

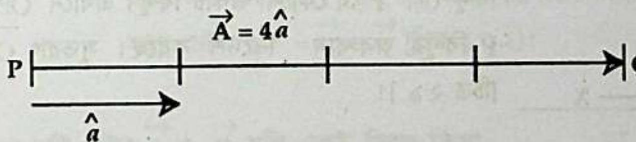
২.৩ বিশেষ ভেক্টর
Special Vectors

একক ভেক্টর
Unit vector

যে সকল ভেক্টরের মান শূন্য নয় এরূপ একটি ভেক্টরকে এর মান দ্বারা ভাগ করলে ওই ভেক্টরের দিকে বা সমান্তরালে একটি একক ভেক্টর পাওয়া যাবে। অর্থাৎ যে ভেক্টর রাশির মান এক একক তাকে একক ভেক্টর বলে। একক ভেক্টরকে প্রকাশ করতে সাধারণত ছোট অক্ষরের ওপর একটি টুপি চিহ্ন (^) দেয়া হয়। যেমন $\hat{i}, \hat{a}, \hat{n}$ ইত্যাদি দ্বারা একক ভেক্টর প্রকাশ করা হয়।

ধরি, $\vec{A}$ একটি ভেক্টর যার মান, $A \neq 0$

$\therefore \frac{\vec{A}}{A} = \vec{A}$-এর দিকে একক ভেক্টর $= \hat{a}$ (ধরি)।



চিত্র ২.৬

কাজেই কোনো একটি ভেক্টর $\vec{A}$-এর মান, $A = 4$ একক এবং $\vec{A}$-এর দিকে একক ভেক্টর $\hat{a}$ হলে, $\vec{A} = 4\hat{a}$ [চিত্র ২.৬]। অর্থাৎ কোনো ভেক্টরের মানকে ওই ভেক্টরের একক ভেক্টর দ্বারা গুণ করলে ভেক্টরটি পাওয়া যায়।

সঠিক ভেক্টর
Proper vector

যে সকল ভেক্টরের মান শূন্য হয় তাদেরকে সঠিক ভেক্টর বলে।

MAT:17-18

নাল বা শূন্য ভেক্টর
Null or zero vector

MAT:17-18

মনে কর, একটি রশির দুই প্রান্তে দুইজন লোক একসাথে একই পরিমাণ বলে টানছে। তাহলে এই টানের লব্ধি একটি শূন্য ভেক্টর হবে। অন্যভাবে বলা যায়, যে ভেক্টর রাশির মান শূন্য এবং যার কোনো নির্দিষ্ট দিক থাকে না, তাকে নাল বা শূন্য ভেক্টর বলে। শূন্য ভেক্টরের পাদবিন্দু এবং শীর্ষবিন্দু একই। একে $\vec{0}$ দ্বারা সূচিত করা হয়। একটি ভেক্টরের সাথে তার বিপরীত ভেক্টর যোগ করে বা দুটি সমান ভেক্টর বিয়োগ করে নাল ভেক্টর পাওয়া যায়। এর কোনো নির্দিষ্ট দিক নেই। দুটি সমান ও বিপরীত ভেক্টর কোনো বিন্দুতে একই সাথে ক্রিয়া করলে তাদের লব্ধি একটি নাল ভেক্টর হয়।

শূন্য বা নাল ভেক্টরের গুরুত্ব
Importance of zero or null vector

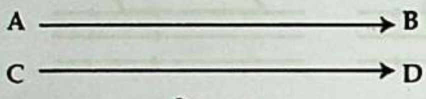
পদার্থবিজ্ঞানে শূন্য ভেক্টরের নিম্নোক্ত তাৎপর্য রয়েছে :

(i) দুটি সমান ভেক্টরের বিয়োগফল বোঝাতে শূন্য ভেক্টর প্রয়োজন।

(ii) দুটি সমান্তরাল ভেক্টরের ভেক্টর গুণফল প্রকাশ করার জন্য শূন্য ভেক্টর প্রয়োজন। $\vec{A}$ ও $\vec{B}$ ভেক্টরদ্বয় সমান্তরাল হলে $\vec{A} \times \vec{B} = 0$ হবে।

(iii) সমবেগে গতিশীল কোনো বস্তুর ত্বরণ শূন্য। ত্বরণ যেহেতু একটি ভেক্টর রাশি সুতরাং, সমবেগে গতিশীল বস্তুর ত্বরণ শূন্য ভেক্টর দ্বারা প্রকাশ করা হয়।

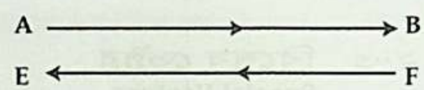
সমান ভেক্টর
Equal vectors



চিত্র ২.৭

দুটি ভেক্টরের মান ও দিক একই হলে তাদের সমান ভেক্টর বলা হয়। চিত্র ২.৭-এ $\overrightarrow{AB}$ এবং $\overrightarrow{CD}$ ভেক্টরদ্বয় সমান। দুটি সমান ভেক্টরের আদি বিন্দু আলাদা হতে পারে। সেক্ষেত্রে অন্তিম বিন্দুও আলাদা হবে। অর্থাৎ একটি ভেক্টরের মান ও দিক অপরিবর্তিত রেখে সেটিকে যে কোনো জায়গায় সরানো যায়।

বিপরীত ভেক্টর
Opposite vectors

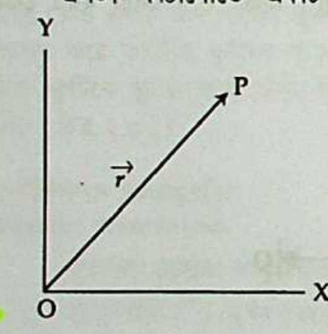


চিত্র ২.৮

দুটি ভেক্টরের পরম মান সমান কিন্তু অভিমুখ বিপরীত হলে তাদেরকে বিপরীত ভেক্টর বলা হয়। চিত্র ২৮-এ $\overrightarrow{AB}$ এবং $\overrightarrow{EF}$ বিপরীত ভেক্টর।

অবস্থান ভেক্টর
Position vector

প্রসঙ্গ কাঠামোতে একটি বিন্দুর অবস্থান জানার জন্য একটি ভেক্টর রাশির প্রয়োজন হয়। এর মান ও দিকের সাহায্যে বস্তুটির অবস্থান নির্ণয় করা যায়। অর্থাৎ প্রসঙ্গ কাঠামোর মূল বিন্দুর সাপেক্ষে কোনো বিন্দুর অবস্থান যে ভেক্টরের সাহায্যে নির্ণয় বা নির্দেশ করা হয় তাকে অবস্থান ভেক্টর বলে।



চিত্র ২.৯

মনে করি পরস্পর সমকোণে অবস্থিত X ও Y দুটি অক্ষ, এদের মূল বিন্দু O। P যে কোনো একটি বিন্দু। এখানে $\overrightarrow{OP}$ ভেক্টরটি O বিন্দু সাপেক্ষে P বিন্দুর অবস্থান নির্দেশ করছে। সুতরাং $\overrightarrow{OP}$ একটি অবস্থান ভেক্টর [চিত্র ২.৯]।

গাণিতিক উদাহরণ ২.১

১। P এবং Q বিন্দুর স্থানাঙ্ক (−3, 4, 5) এবং (3, −2, 4) হলে স্থানাঙ্কের সাহায্যে $\overrightarrow{PQ}$ ভেক্টরকে প্রকাশ কর। এর মান কত ?

এখানে, P বিন্দুর অবস্থান ভেক্টর, $\vec{r}_1 = -3\hat{i} + 4\hat{j} + 5\hat{k}$

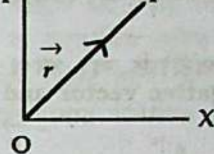
এবং Q বিন্দুর অবস্থান ভেক্টর, $\vec{r}_2 = 3\hat{i} - 2\hat{j} + 4\hat{k}$

$$\therefore \overrightarrow{PQ} = \vec{r}_2 - \vec{r}_1 = (3\hat{i} - 2\hat{j} + 4\hat{k}) - (-3\hat{i} + 4\hat{j} + 5\hat{k})$$
$$= 6\hat{i} - 6\hat{j} - \hat{k}$$

অতএব, $\overrightarrow{PQ}$ এর মান $= |\overrightarrow{PQ}| = \sqrt{6^2 + 6^2 + 1^2} = \sqrt{73}$

ব্যাসার্ধ ভেক্টর
Radius vector

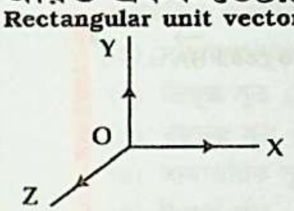
স্থানাঙ্ক ব্যবস্থায় যে ভেক্টরের সাহায্যে মূল বিন্দুর সাপেক্ষে কোনো বিন্দুর অবস্থান নির্ণয় করা যায় তাকে অবস্থান ভেক্টর বলে। অবস্থান ভেক্টরকে অনেক সময় ব্যাসার্ধ ভেক্টর (radius vector) বলে এবং $\vec{r}$ দিয়ে প্রকাশ করা হয়। কোনো বিন্দু P এর স্থানাঙ্ক (x, y, z) হলে, ব্যাসার্ধ ভেক্টর $\vec{r} = \text{OP} = \hat{i}x + \hat{j}y + \hat{k}z$ এবং এর মান $r = |\vec{r}\,| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$



চিত্র ২·১০

সংক্ষেপে বলা যায় মূলবিন্দু হতে কোনো বিন্দুর অবস্থানের দূরত্বই হলো ব্যাসার্ধ ভেক্টর। এখানে $\vec{r} = \overrightarrow{\text{OP}}$ = ব্যাসার্ধ ভেক্টর [চিত্র ২·১০]।

আয়ত একক ভেক্টর
Rectangular unit vectors



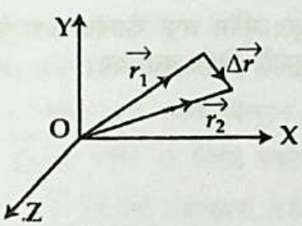
চিত্র ২·১০(ক)

ত্রিমাত্রিক কার্তেসীয় স্থানাঙ্ক ব্যবস্থায় তিনটি ধনাত্মক অক্ষ বরাবর যে তিনটি একক ভেক্টর বিবেচনা করা হয় তাদেরকে আয়ত একক ভেক্টর বা আয়ত ভেক্টর বলে।

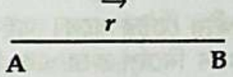
এই কার্তেসীয় স্থানাঙ্ক ব্যবস্থায় X–অক্ষের ধনাত্মক দিক বরাবর একক ভেক্টর $\hat{i}$, Y-অক্ষ বরাবর একক ভেক্টর $\hat{j}$ এবং Z অক্ষ বরাবর একক ভেক্টর $\hat{k}$ ধরা হয় [চিত্র ২·১০(ক)]।

সরণ ভেক্টর
Displacement vector

রৈখিক বা সরল পথে বা নির্দিষ্ট দিকে কোনো বিন্দুর অতিক্রান্ত দূরত্বকে সরণ ভেক্টর বলে। অন্য কথায় কোনো বস্তুর অবস্থান ভেক্টরের পরিবর্তনকে সরণ ভেক্টর বলে। একে $\vec{r}$ দ্বারা সূচিত করা হয়।



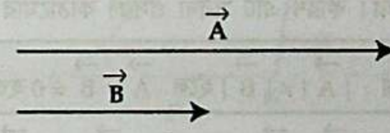
চিত্র ২·১২



চিত্র ২·১১

ব্যাখ্যা : ধরি, সরল পথে কোনো বিন্দুর অতিক্রান্ত দূরত্ব $AB = r$। অতএব $\vec{r}$ হলো সরণ ভেক্টর [চিত্র ২·১১]। অন্যভাবে বলা যায় একটি বস্তুর আদি অবস্থান $\vec{r_1}\ (x_1, y_1, z_1)$ এবং পরিবর্তিত অবস্থান $\vec{r_2}\ (x_2, y_2, z_2)$ হলে সরণ ভেক্টর $\Delta\vec{r} = \vec{r_2} - \vec{r_1}$ [চিত্র ২·১২]।

সদৃশ ভেক্টর
Like vectors

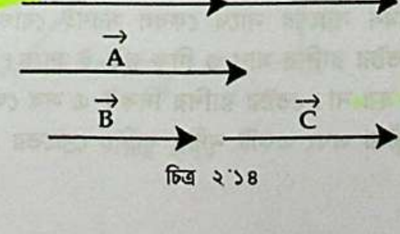


চিত্র ২·১৩

সমজাতীয় অসম মানের দুটি ভেক্টর $\vec{A}$ ও $\vec{B}$ যদি একই দিকে ক্রিয়া করে তবে তাদেরকে সদৃশ ভেক্টর বলে [চিত্র ২·১৩]। উদাহরণ, $\vec{A} = 2\vec{B}$, এক্ষেত্রে $\vec{A}$ ও $\vec{B}$ সদৃশ ভেক্টর।

বিপ্রতীপ ভেক্টর
Reciprocal vectors

দুটি সমান্তরাল ভেক্টরের একটির মান অপরটির বিপ্রতীপ হলে তাদেরকে বিপ্রতীপ ভেক্টর বলে। উদাহরণ, $\vec{A} = 5\,\hat{i}$ ও $\vec{B} = \frac{1}{5}\,\hat{i}$ । এখানে $\vec{A}$ ও $\vec{B}$ বিপ্রতীপ ভেক্টর।



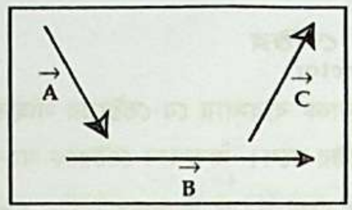
চিত্র ২·১৪

সমরেখ ভেক্টর
Collinear vectors

দুই বা ততোধিক ভেক্টর যদি এমন হয় যে তারা একই রেখায় বা সমান্তরালে ক্রিয়া করে, তাদেরকে সমরেখ ভেক্টর বলে। $\vec{A}, \vec{B}$ বা $\vec{A}, \vec{B}, \vec{C}$ সমরেখ ভেক্টর [চিত্র ২·১৪]।

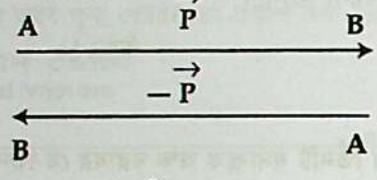
সমতলীয় ভেক্টর
Coplanar vectors

দুই বা ততোধিক ভেক্টর একই তলে অবস্থান করলে তাদেরকে সমতলীয় ভেক্টর বলে। চিত্রে $\vec{A}$, $\vec{B}$, $\vec{C}$ তিনটি সমতলীয় ভেক্টর [২.১৫]।



চিত্র ২.১৫

বিপরীত বা ঋণ ভেক্টর এবং সমভেক্টর
Negative vector and Equal vector



চিত্র ২.১৬

বিপরীত দিকে ক্রিয়ারত দুটি সমজাতীয় ভেক্টরের মান সমান হলে তাদেরকে একে অপরের বিপরীত বা ঋণ ভেক্টর বলে।

আর দুটি সমজাতীয় ভেক্টরের মান সমান ও দিক একই দিকে হলে তাদেরকে সমভেক্টর বলে।

২.১৬ চিত্রে $\vec{AB} = \vec{P}$ এর বিপরীত ভেক্টর $\vec{BA} = -\vec{P}$

এখানে $\vec{AB} = \vec{BA}$

পোলার ভেক্টর
Polar vector

বস্তুর ঘূর্ণনের সঙ্গে যুক্ত নয় এমন ভেক্টরকে তীর চিহ্নযুক্ত সরলরেখা দ্বারা প্রকাশ করা হয়। এই রেখার দৈর্ঘ্য ভেক্টরের মান এবং তীর চিহ্ন দিক নির্দেশ করে। এদের পোলার ভেক্টর বলে।

উদাহরণ : বল, ভরবেগ, সরণ, গতিবেগ প্রভৃতি।

অক্ষীয় ভেক্টর
Axial vector

বস্তুর ঘূর্ণনের সঙ্গে যুক্ত ভেক্টরকে অক্ষীয় ভেক্টর বলে। এই ভেক্টরগুলিকে বস্তুর ঘূর্ণন অক্ষ বরাবর রেখা দ্বারা প্রকাশ করা হয়। রেখা ভেক্টরটির দৈর্ঘ্য রাশির মান নির্দেশ করে এবং দিক স্ক্রু নিয়ম অনুযায়ী নির্ণয় করা হয়।

উদাহরণ : কৌণিক বেগ, কৌণিক ত্বরণ, কৌণিক ভরবেগ প্রভৃতি।

সীমাবদ্ধ ভেক্টর
Localized vector

কোনো ভেক্টরের পাদবিন্দু যদি নির্দিষ্ট থাকে তবে তাকে সীমাবদ্ধ ভেক্টর বলে। কোনো নির্দিষ্ট বিন্দুতে বা নির্দিষ্ট বিন্দু হতে ক্রিয়াশীল ভেক্টর একটি সীমাবদ্ধ ভেক্টর। উদাহরণস্বরূপ বলা যায় অবস্থান ভেক্টর একটি সীমাবদ্ধ ভেক্টর। কারণ এটি সর্বদা প্রসঙ্গ কাঠামোর মূল বিন্দু থেকে নিতে হয়।

কাজ : $|\vec{A}| \neq |\vec{B}|$ হলে $\vec{A} + \vec{B} = 0$ হওয়া সম্ভব কিনা ব্যাখ্যা কর।

$\vec{A} + \vec{B} = 0$ হলে $\vec{A} = -\vec{B}$ হবে। অর্থাৎ $\vec{A}$ ও $\vec{B}$ হবে সমমানের ও বিপরীতমুখি। কিন্তু এখানে $|\vec{A}| \neq |\vec{B}|$; অর্থাৎ এদের মান সমান নয়। অতএব, $\vec{A} + \vec{B} = 0$ হতে পারে না।

২.৪ ভেক্টর রাশির জ্যামিতিক যোজন নিয়ম
Rules of geometrical addition of vectors

জ্যামিতিক পদ্ধতি
Geometrical method

একই জাতীয় দুটি ভেক্টর রাশিকে যোগ বা বিয়োগ করা যায়। যেমন সরণের সাথে কেবল সরণই যোগ বা বিয়োগ করা চলে। সরণের সাথে বেগের যোগ বা বিয়োগের প্রশ্নই ওঠে না। ভেক্টর রাশির মান ও দিক দুই-ই আছে। এই কারণে ভেক্টর রাশির যোগ-বিয়োগ সাধারণ বীজগণিতের নিয়মানুযায়ী করা হয় না। ভেক্টর রাশির দিকই এ সব ক্ষেত্রে বিঘ্ন ঘটায়। যেমন ধরা যাক, একটি নৌকায় দাঁড়ের বেগ ঘণ্টায় 4 কিলোমিটার এবং একটি নদীর পানির স্রোতের বেগ

ঘণ্টায় 6 কিলোমিটার। নৌকাটিকে ওই নদীর এক পাড় হতে সোজা অপর পাড়ের দিকে চালালে, নৌকাটির উপর যে দুটি বেগ ক্রিয়া করবে এদের বীজগাণিতিক যোগফল (8 + 6) = 14 কিলোমিটার/ঘণ্টা দ্বারা নৌকাটির প্রকৃত বেগ পাওয়া যাবে না—প্রকৃত বেগ সম্পূর্ণ আলাদা হবে। আবার নৌকাটির গতিমুখ ওই দুই বেগের মাঝামাঝি কোনো একদিকে হবে। এই কারণে ভেক্টর রাশির যোগ-বিয়োগ জ্যামিতিক পদ্ধতি অনুসারে করতে হয়।

একই অভিমুখি দুটি ভেক্টর রাশি যোগ করতে হলে রাশি দুটিকে একই দিকে নির্দেশ করতে হয়, আর বিয়োগ করতে হলে একটি ভেক্টর রাশিকে অপরটির বিপরীত দিকে নির্দেশ করতে হয়। কিন্তু দুই বা ততোধিক ভেক্টর রাশি একটি বিন্দুতে ক্রিয়া করলে এদের যোগফল হবে আর একটি নতুন ভেক্টর রাশি। দুই বা ততোধিক ভেক্টর রাশি যোগে যে একটি নতুন ভেক্টর রাশি হয় তাকে এদের **লব্ধি** (Resultant) বলে। অর্থাৎ লব্ধি হলো ভেক্টর রাশিগুলোর সম্মিলিত ফল।

জ্যামিতিক পদ্ধতিতে ভেক্টর রাশির যোগের সূত্র
Laws of addition of vectors in geometrical method

জ্যামিতিক পদ্ধতিতে ভেক্টর রাশির যোগ নিম্নলিখিত **পাঁচটি** সূত্রের সাহায্যে করা যায়; যথা—

(১) **সাধারণ সূত্র** (General law)
(২) **ত্রিভুজ সূত্র** (Law of triangle)
(৩) **বহুভুজ সূত্র** (Law of polygon)
(৪) **সামান্তরিক সূত্র** (Law of parallelogram) এবং
(৫) **উপাংশ সূত্র** (Law of components)।

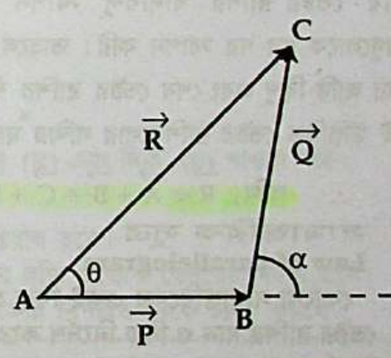
এই অনুচ্ছেদে আমরা প্রথম চারটি সূত্র আলোচনা করবো।

১. সাধারণ সূত্র
General law

সমজাতীয় দুটি ভেক্টরের প্রথমটির শীর্ষ বা শেষ বিন্দু এবং দ্বিতীয়টির আদি বিন্দু একই বিন্দুতে স্থাপন করে প্রথম ভেক্টরের আদি বিন্দু ও দ্বিতীয় ভেক্টরের শীর্ষবিন্দুর মধ্যে সংযোগকারী সরলরেখার দিকে লব্ধি ভেক্টরের দিক নির্দেশ করবে এবং ওই সরলরেখার দৈর্ঘ্য ভেক্টর দুটির লব্ধির মান নির্দেশ করবে।

ধরা যাক একই বিন্দুতে একই সময়ে ক্রিয়াশীল দুটি ভেক্টর রাশি $\vec{P}$ ও $\vec{Q}$-এর লব্ধি $\vec{R}$ নির্ণয় করতে হবে।

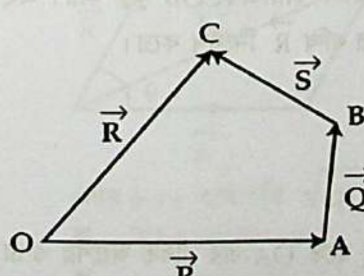
$\vec{P}$ নির্দেশী সরলরেখা AB-এর শীর্ষবিন্দু B-তে $\vec{Q}$ নির্দেশী সরলরেখার আদি বিন্দু থাকে। এরূপে BC রেখা দ্বারা $\vec{Q}$ নির্দেশ করে $\vec{P}$-এর আদিবিন্দু A এবং $\vec{Q}$-এর শীর্ষবিন্দু C যুক্ত করি এবং রেখাটিকে A হতে C অভিমুখে তীর চিহ্নিত করি [চিত্র ২.১৭]। তা হলে তীর চিহ্নিত AC রেখাই লব্ধি $\vec{R}$ নির্দেশ করবে। এখানে রাশি দুটির যোগফল নিম্ন উপায়ে লেখা হয়—



চিত্র ২.১৭

$$\vec{R} = \vec{P} + \vec{Q} \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad (2.1)$$

অনুরূপে দুই বা ততোধিক ভেক্টর রাশি যোগ করা যায়।



চিত্র ২.১৮

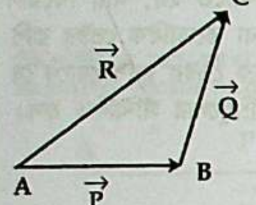
২.১৮ চিত্রে তিনটি ভেক্টর রাশি $\vec{P}$, $\vec{Q}$ ও $\vec{S}$ যথাক্রমে তীর চিহ্নিত OA, AB ও BC সরলরেখায় নির্দেশ করে OC সরলরেখা দ্বারা এদের লব্ধি $\vec{R}$ সূচিত হয়েছে।

এখানে লব্ধি, $\vec{R} = \vec{P} + \vec{Q} + \vec{S}$

আবার $\vec{P}, \vec{Q}, \vec{R}$ একই ত্রিভুজের তিনটি বাহু বরাবর ক্রিয়াশীল হলে $\vec{P} + \vec{Q} + \vec{R} = 0$ হয়।

২. ত্রিভুজ সূত্র
Law of triangle

কোনো ত্রিভুজের দুটি সন্নিহিত বাহু বরাবর একইক্রমে দুটি ভেক্টর ক্রিয়াশীল হলে ত্রিভুজের তৃতীয় বাহুটি বিপরীতক্রমে ভেক্টর দুটির লব্ধি নির্দেশ করবে।



চিত্র ২.১৯

মনে করি, ABC ত্রিভুজের দুটি সন্নিহিত বাহু AB ও BC বরাবর $\vec{P}$ ও $\vec{Q}$ একই দিকে ক্রিয়াশীল, তাহলে ত্রিভুজটির তৃতীয় বাহু AC বরাবর $\vec{P}$ ও $\vec{Q}$ এর লব্ধি $\vec{R}$ নির্দেশিত হবে [চিত্র ২.১৯]।

অর্থাৎ, $\vec{AB} + \vec{BC} = \vec{AC}$ বা, $\vec{P} + \vec{Q} = \vec{R}$ ... ... (2.2)

পুনঃ, $\vec{AB} + \vec{BC} = \vec{AC} = -\vec{CA}$ $[\because \vec{AC} = -\vec{CA}]$

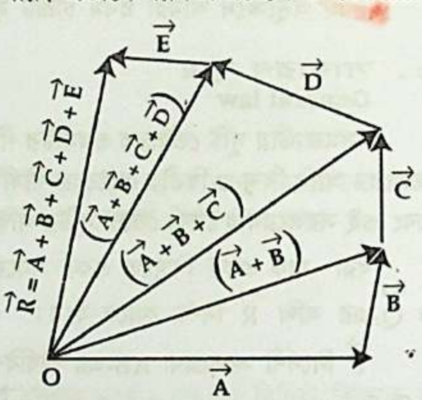
বা, $\vec{AB} + \vec{BC} + \vec{CA} = 0$ ... ... (2.3)

সিদ্ধান্ত : একই বিন্দুতে একই সময়ে ক্রিয়ারত তিনটি সমজাতীয় সমতলীয় ভেক্টর রাশিকে কোনো ত্রিভুজের তিনটি বাহু দ্বারা একই ক্রমে নির্দেশ করলে এদের লব্ধি শূন্য হবে।

৩. বহুভুজ সূত্র
Law of polygon

দুই বা ততোধিক ভেক্টর রাশির ক্ষেত্রে ভেক্টর রাশিগুলোকে একই ক্রমে সাজিয়ে প্রথম ভেক্টরের পাদবিন্দু এবং দ্বিতীয় ভেক্টরের শীর্ষবিন্দু যোগ করলে বিপরীতক্রমে ভেক্টরদ্বয় লব্ধি পাওয়া যায়। এভাবে পরবর্তী প্রত্যেকটি ভেক্টরের পাদবিন্দু ও শীর্ষবিন্দু যোগ করতে করতে সর্বশেষ যে ভেক্টরটি পাওয়া যায় সেই বাহুটিই ভেক্টর রাশিগুলোর লব্ধির মান ও দিক নির্দেশ করে।

ব্যাখ্যা : মনে করি, $\vec{A}, \vec{B}, \vec{C}, \vec{D}, \vec{E}$ পাঁচটি ভেক্টর রাশি [চিত্র ২.২০]; এদের লব্ধি নির্ণয় করতে হবে। এখন প্রথম ভেক্টর রাশির শীর্ষবিন্দুর ওপর দ্বিতীয় ভেক্টর রাশির পাদবিন্দু, দ্বিতীয় ভেক্টর রাশির শীর্ষবিন্দুর ওপর তৃতীয় ভেক্টর রাশির পাদবিন্দু স্থাপন করি এবং এমনিভাবে ভেক্টর রাশিগুলোকে পর পর স্থাপন করি। তাহলে বহুভুজ সূত্রানুসারে প্রথম ভেক্টর রাশির আদি বিন্দু এবং শেষ ভেক্টর রাশির শীর্ষবিন্দুর সংযোজক ভেক্টর রাশি $\vec{R}$-ই উল্লিখিত ভেক্টর রাশিগুলোর লব্ধির মান ও দিক নির্দেশ করবে।



চিত্র ২.২০

∴ লব্ধি, $\vec{R} = \vec{A} + \vec{B} + \vec{C} + \vec{D} + \vec{E}$

৪. সামান্তরিক সূত্র
Law of parallelogram

কোনো সামান্তরিকের একই বিন্দু হতে অঙ্কিত দুটি সন্নিহিত বাহু যদি কোনো কণার ওপর একই সময়ে ক্রিয়ারত দুটি ভেক্টর রাশির মান ও দিক নির্দেশ করে, তা হলে ওই বিন্দু হতে অঙ্কিত সামান্তরিকের কর্ণই এদের লব্ধির মান ও দিক নির্দেশ করে।

মনে করি O বিন্দুতে একটি কণার উপর $\vec{OA} = \vec{P}$ ও $\vec{OC} = \vec{Q}$ দুটি ভেক্টর রাশি একই সময়ে α কোণে ক্রিয়া করছে [চিত্র ২.২১]। OA ও OC-কে সন্নিহিত বাহু ধরে OABC সামান্তরিকটি অঙ্কন করি এবং OB যুক্ত করি। এই সূত্রানুসারে উভয় ভেক্টরের ক্রিয়াবিন্দু O থেকে অঙ্কিত কর্ণ $\vec{OB}$-ই ভেক্টর $\vec{P}$ ও $\vec{Q}$-এর লব্ধি $\vec{R}$ নির্দেশ করে।

অর্থাৎ, $\vec{OA} + \vec{OC} = \vec{OB}$

বা, $\vec{P} + \vec{Q} = \vec{R}$

লব্ধির মান নির্ণয়
Determination of magnitude of the resultant

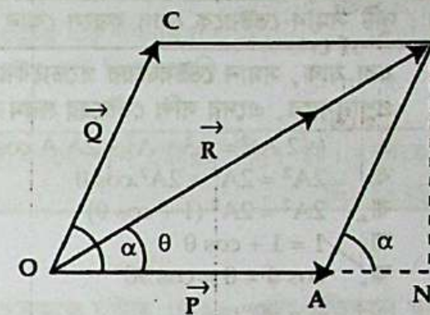
মনে করি লব্ধির মান R এবং $\angle AOC = \alpha$ কোণটি সূক্ষ্মকোণ। এখন B বিন্দু হতে OA-এর বর্ধিত অংশের ওপর BN লম্ব টানি যা বর্ধিত OA বাহুকে N বিন্দুতে ছেদ করল।

এখানে, AB ও OC সমান্তরাল।

$\therefore \angle AOC = \angle BAN = \alpha$

আবার OBN ত্রিভুজের, $\angle ONB$ = এক সমকোণ = 90°

$$\therefore\ OB^2 = ON^2 + BN^2 = (OA + AN)^2 + BN^2$$
$$= OA^2 + 2OA.AN + AN^2 + BN^2$$



চিত্র ২.২১

চিত্র ২.২১ থেকে ΔABN-এ $\sin\alpha = \frac{BN}{AB}$

$\therefore\ BN = AB\sin\alpha = Q\sin\alpha$

এবং $\cos\alpha = \frac{AN}{AB}$ $\therefore\ AN = AB\cos\alpha = Q\cos\alpha$

ΔOBN থেকে পাই,

$$OB^2 = ON^2 + BN^2 = (OA + AN)^2 + BN^2$$
$$= OA^2 + 2OA.AN + AN^2 + BN^2$$
$$OB^2 = OA^2 + 2OA.Q\cos\alpha + Q^2\cos^2\alpha + Q^2\sin^2\alpha$$
$$= P^2 + 2PQ\cos\alpha + Q^2(\sin^2\alpha + \cos^2\alpha)$$

বা, $R^2 = P^2 + Q^2 + 2PQ\cos\alpha$

$$\therefore\ R = \sqrt{P^2 + Q^2 + 2PQ\cos\alpha} \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad (2.4)$$

লব্ধির দিক নির্ণয়
Determination of direction of the resultant

মনে করি P-এর সাথে θ কোণ উৎপন্ন করে লব্ধি R ক্রিয়া করছে, অর্থাৎ $\angle AOB = \theta$।

সুতরাং OBN সমকোণী ত্রিভুজে,

BAN সমকোণী ত্রিভুজে, $\sin\alpha = \frac{BN}{AB}$

$\therefore\ BN = AB\sin\alpha$

$$\tan\theta = \frac{BN}{ON} = \frac{BN}{(OA + AN)}$$
$$= \frac{AB\sin\alpha}{(OA + AB\cos\alpha)}$$
$$= \frac{Q\sin\alpha}{(P + Q\cos\alpha)}$$
$$\therefore\ \theta = \tan^{-1}\left(\frac{Q\sin\alpha}{P + Q\cos\alpha}\right) \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad (2.5)$$

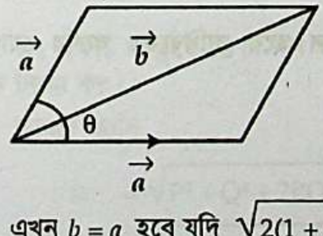
অতএব সমীকরণ (2.4) এবং সমীকরণ (2.5) হতে যথাক্রমে লব্ধির মান (R) এবং দিক (θ) পাওয়া যায়।

জেনে রাখ :

I. দুটি ভেক্টরের মধ্যবর্তী কোণ, α = 0° হলে, ভেক্টরদ্বয় সমান্তরাল হবে।
II. দুটি ভেক্টরের মধ্যবর্তী কোণ, α = 120° হলে, দুটি ভেক্টরের লব্ধি প্রত্যেক ভেক্টরের সমান হবে।
III. দুটি ভেক্টরের মধ্যবর্তী কোণ, α = 180° হলে, ভেক্টরদ্বয় পরস্পর বিপরীত দিকে ক্রিয়া করবে।

অনুসন্ধান : দুটি সমান মানের ভেক্টরের লব্ধির মান কোন অবস্থায় ওদের প্রত্যেকের মানের সমান হতে পারে ?

ধরা যাক, প্রত্যেকটি ভেক্টরের মান a, ভেক্টরদ্বয়ের মধ্যবর্তী কোণ θ এবং ভেক্টর দুটির লব্ধির মান b।



$\therefore\ b^2 = a^2 + a^2 + 2a.a\cos\theta$

বা, $b^2 = 2a^2 + 2a^2\cos\theta$

বা, $b^2 = 2a^2(1 + \cos\theta)$

$\therefore\ b = a\sqrt{2(1 + \cos\theta)}$

এখন $b = a$ হবে যদি $\sqrt{2(1 + \cos\theta)} = 1$ হয়

বা, $2(1 + \cos\theta) = 1$

বা, $\cos\theta = \frac{1}{2} - 1 = -\frac{1}{2} = \cos 120°$

বা, θ = 120° হয়।

অতএব, মূল ভেক্টর দুটির মধ্যবর্তী কোণ 120° হলে লব্ধির মান ওদের প্রত্যেকের মানের সমান হয়।

কাজ : দুটি সমান ভেক্টরকে যোগ করলে কোন অবস্থায় ওদের লব্ধি একটি ভেক্টরের মানের $\sqrt{2}$ গুণ হবে ?

ধরা যাক, সমান ভেক্টরদ্বয়ের প্রত্যেকের মান A এবং এদের অন্তর্ভুক্ত কোণ θ।

প্রশ্নানুসারে, এদের লব্ধি ভেক্টরের পরম মান $= \sqrt{2}\,A$

$\therefore \quad (\sqrt{2}\,A)^2 = A^2 + A^2 + 2A.A.\cos\theta$

বা, $\quad 2A^2 = 2A^2 + 2A^2.\cos\theta$

বা, $\quad 2A^2 = 2A^2(1 + \cos\theta)$

বা, $\quad 1 = 1 + \cos\theta$

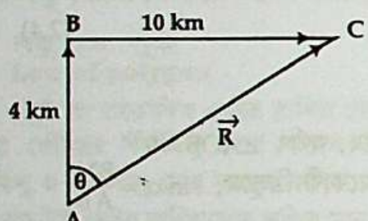
বা, $\quad \cos\theta = 0 = \cos 90°$

$\therefore \quad \theta = 90°$

সুতরাং, ভেক্টরদ্বয়ের অন্তর্ভুক্ত কোণ 90° হলে তাদের লব্ধি একটি ভেক্টরের মানের $\sqrt{2}$ গুণ হবে।

হিসাব কর : একটি কণার উত্তর ও পূর্ব দিকে যথাক্রমে 4 km এবং 10 km সরণ হলে, লব্ধি সরণ নির্ণয় কর।

$\overrightarrow{AB}$ এবং $\overrightarrow{BC}$ ভেক্টর যথাক্রমে উত্তর ও পূর্ব দিকে 4 km এবং 10 km সরণ সূচিত করে। ত্রিভুজের সূত্র অনুযায়ী লব্ধি $\overrightarrow{AC}$ সরণ ভেক্টর আঁকা হলো। $\overrightarrow{AB}$ এবং $\overrightarrow{AC}$-এর অন্তর্বর্তী কোণ θ এবং লব্ধি ভেক্টরের মান R হলে,



$$R = \sqrt{10^2 + 4^2} = \sqrt{116} = 10{\cdot}78 \text{ km}$$

$$\text{এবং } \tan\theta = \frac{10}{4} = 2{\cdot}5$$

$$\therefore \theta = 68{\cdot}2°$$

কয়েকটি বিশেষ ক্ষেত্র (Some special cases)

(i) $\alpha = 0$ হলে অর্থাৎ ভেক্টরদ্বয় একই দিকে ক্রিয়াশীল হলে বা ভেক্টরদ্বয় পরস্পর সমান্তরাল হলে,

$$R^2 = P^2 + Q^2 + 2PQ\cos 0° = P^2 + Q^2 + 2PQ = (P + Q)^2 \quad [\because \cos 0° = 1]$$

$\therefore \quad R = P + Q$

এবং $\tan\theta = \dfrac{Q\sin 0°}{P + Q\cos 0°} = \dfrac{0}{P + Q} = 0 \quad [\because \sin 0° = 0]$

$\therefore \quad \theta = \tan^{-1} 0 = 0°$

$\therefore \quad \theta = 0°$

সুতরাং দুটি ভেক্টর একই দিকে ক্রিয়াশীল হলে এদের লব্ধির মান হবে ভেক্টরদ্বয়ের যোগফল এবং দিক হবে ভেক্টরদ্বয় যেদিকে ক্রিয়া করে সেই দিকে।

(ii) $\alpha = 90°$ হলে, অর্থাৎ ভেক্টরদ্বয় পরস্পর লম্ব হলে, $R^2 = P^2 + Q^2 + 2PQ\cos 90°$ বা, $R^2 = P^2 + Q^2$

$R = \sqrt{P^2 + Q^2}$ এবং $\tan\theta = \dfrac{Q\sin 90°}{P + Q\cos 90°}$

$\tan\theta = \dfrac{Q}{P}$ বা, $\theta = \tan^{-1}\left(\dfrac{Q}{P}\right)$

অর্থাৎ দুটি ভেক্টর পরস্পর সমকোণে ক্রিয়াশীল হলে এদের লব্ধির মান হবে রাশিদ্বয়ের বর্গের যোগফলের বর্গমূলের সমান।

(iii) $\alpha = 180°$ হলে অর্থাৎ ভেক্টর দুটি পরস্পর বিপরীতমুখি হলে,

$$R^2 = P^2 + Q^2 + 2PQ\cos 180° = P^2 + Q^2 - 2PQ$$

বা, $\quad R^2 = (P \sim Q)^2 \quad \therefore \quad R = P \sim Q$

এবং $\quad \tan\theta = \dfrac{Q\sin 180°}{P + Q\cos 180°} = \dfrac{0}{P - Q} = 0$

$\therefore \quad \theta = \tan^{-1} 0 = 180°$ বা, $0°$

অর্থাৎ ভেক্টর দুটি পরস্পর বিপরীতমুখি হলে তাদের লব্ধির মান হবে ভেক্টর দুটির বিয়োগফল এবং দিক হবে বৃহত্তর ভেক্টরটির দিকে। ভেক্টর দুটি সমান ও বিপরীতমুখি হলে, লব্ধি হবে শূন্য।

সিদ্ধান্ত : উপরোক্ত ক্ষেত্রসমূহ বিবেচনা করে নিম্নের ফলাফল পাওয়া যায়। যখন a ও b দুটি ভেক্টরের মান এবং c উহাদের লব্ধির মান প্রকাশ করে।

(i) দুটি ভেক্টরের লব্ধির সর্বোচ্চ মান হলো $c = a + b$, যখন মূল ভেক্টর দুটি সমমুখি।

(ii) দুটি ভেক্টরের লব্ধির সর্বনিম্ন মান হলো $c = a \sim b$ যখন মূল ভেক্টর দুটি বিপরীতমুখি।

(iii) মূল ভেক্টর দুটি সমান ও বিপরীতমুখি হলে তাদের লব্ধির মান শূন্য হয়।

ক্রিয়াকর্ম : 3F এবং 3F ভেক্টরদ্বয়ের লব্ধি ভেক্টর R। প্রথম ভেক্টরকে দ্বিগুণ করলে লব্ধি ভেক্টরও দ্বিগুণ হয়। ভেক্টরদ্বয়ের অন্তর্বর্তী কোণ নির্ণয় কর। [উ. 163·73°]

গাণিতিক উদাহরণ ২.২

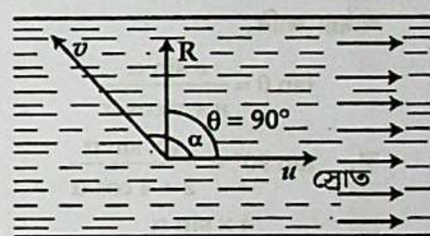
১। কোনো একটি নদীতে একটি দাঁড়ের নৌকার বেগ স্রোতের অনুকূলে ঘণ্টায় 18 km এবং প্রতিকূলে ঘণ্টায় 6 km। নৌকাটিকে কোন দিকে চালনা করলে তা সোজা অপর পাড়ে পৌঁছবে এবং নৌকাটি কত বেগে চলবে?

ধরা যাক স্রোতের বেগ $= u$ এবং দাঁড়ের বেগ $= v$। তা হলে,

$u + v = 18$ এবং $v - u = 6$.

∴ সমীকরণ দুটির যোজন ও বিয়োজনে পাওয়া যায়,

$v = 12 \text{ km h}^{-1}$ এবং $u = 6 \text{ km h}^{-1}$



ধরা যাক স্রোতের সাথে α কোণ করে নৌকাটিকে চালনা করলে তা R বেগে চলে সোজা অপর পাড়ে পৌঁছবে। তা হলে স্রোতের গতি বরাবর R-এর অংশ, $R\cos 90° = 0 = u\cos 0° + v\cos\alpha$

$$\therefore \quad \cos\alpha = -\frac{u}{v} = -\frac{6}{12} = -\frac{1}{2} = \cos 120°$$

বা, $\alpha = 120°$

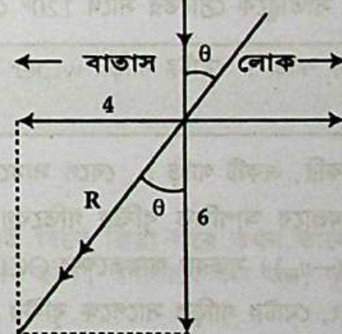
আবার, স্রোতের গতিমুখের লম্ব দিক বরাবর R-এর অংশ,

$R\sin 90° = R = u \sin 0° + v\sin\alpha$

$$\therefore \quad R = v\sin\alpha = v\sqrt{1-\cos^2\alpha} = 12\sqrt{1-\left(-\frac{1}{2}\right)^2} = 6\sqrt{3} = 10{\cdot}39 \text{ km h}^{-1}$$

২। 4 ms^{-1} বেগে দৌড়ে যাবার সময় একজন লোক 6 ms^{-1} বেগে লম্বভাবে পতিত বৃষ্টির সম্মুখীন হলো। বৃষ্টি হতে রক্ষা পেতে হলে তাকে কত কোণে ছাতা ধরতে হবে ?

মনে করি বৃষ্টির লব্ধি বেগ উল্লম্ব দিকের সাথে θ কোণ উৎপন্ন করে।



$$\therefore \quad \tan\theta = \frac{4 \text{ ms}^{-1}}{6 \text{ ms}^{-1}} = 0{\cdot}666$$

বা, $\tan\theta = \tan 33{\cdot}7°$

∴ $\theta = 33{\cdot}7°$

সুতরাং লোকটিকে উল্লম্ব দিকের সাথে 33·7° কোণে ছাতা ধরতে হবে।

৩। একটি বস্তুকে 50 N বল দ্বারা পশ্চিম দিকে এবং 20 N বল দ্বারা উত্তর দিকে টানা হচ্ছে। লব্ধি বলের মান ও দিক নির্ণয় কর।

আমরা জানি

$$R = \sqrt{P^2 + Q^2 + 2PQ\cos\alpha}$$

$$= \sqrt{(50)^2 + (20)^2 + 2 \times 50 \times 20 \cos 90°}$$

$$= \sqrt{(50)^2 + (20)^2} = \sqrt{2500 + 400}$$

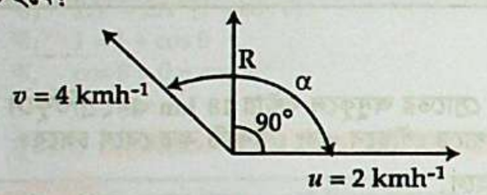
$$= \sqrt{2900} \text{ N} = 53{\cdot}85 \text{ N}$$

এখানে,
$P = 50$ N
$Q = 20$ N
$\alpha = 90°$
$R = ?$
$\theta = ?$

আবার $\tan\theta = \dfrac{Q\sin\alpha}{P+Q\cos\alpha} = \dfrac{20\sin 90°}{50+20\cos 90°} = \dfrac{20}{50} = \dfrac{2}{5}$

$\therefore \quad \theta = \tan^{-1}\dfrac{2}{5} = 21{\cdot}80°$

৪। স্রোত না থাকলে একজন সাঁতারু $4\ \text{kmh}^{-1}$ বেগে সাঁতার কাটতে পারেন। $2\ \text{kmh}^{-1}$ বেগে সরলরেখা বরাবর প্রবাহিত একটি নদীর এপার থেকে ওপারের ঠিক বিপরীত বিন্দুতে যেতে হলে সাঁতারুকে কোন দিকে সাঁতার কাটতে হবে?



মনে করি, স্রোতের বেগ u এবং সাঁতারুর বেগ v এবং বেগদ্বয়ের মধ্যবর্তী কোণ α। নদীটিকে সোজাসুজি অতিক্রম করতে সাঁতারুর লব্ধি বেগ R স্রোতের বেগ u এর সাথে $\theta = 90°$ কোণ তৈরি করে সাঁতার কাটতে হবে।

আমরা জানি,

$$\tan\theta = \frac{v\sin\alpha}{u+v\cos\alpha}$$

বা, $\tan 90° = \dfrac{4\times\sin\alpha}{2+4\cos\alpha}$

বা, $\infty = \dfrac{4\times\sin\alpha}{2+4\cos\alpha}$

বা, $\dfrac{1}{0} = \dfrac{4\times\sin\alpha}{2+4\cos\alpha}$

বা, $2+4\cos\alpha = 0$

বা, $4\cos\alpha = -2$

বা, $\cos\alpha = -\dfrac{1}{2}$

$\therefore \quad \alpha = 120°$

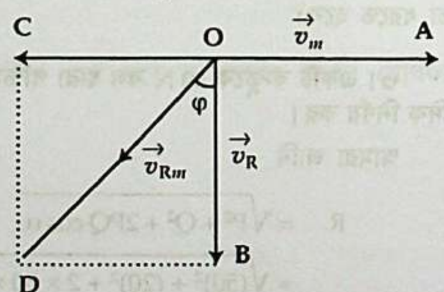
এখানে,
$u = 2\ \text{kmh}^{-1}$
$v = 4\ \text{kmh}^{-1}$
$\theta = 90°$
$\alpha = ?$

অর্থাৎ সাঁতারুকে স্রোতের সাথে 120° কোণে সাঁতার কাটতে হবে।

অনুধাবনমূলক কাজ : মোটর গাড়ির wiper দণ্ডগুলি সব ক্ষেত্রেই গাড়ির সামনের কাচে লাগানো থাকে কেন ? ব্যাখ্যা কর।

মনে করি, একটি গাড়ি v_m বেগে সামনের দিকে গতিশীল [চিত্র দ্রষ্টব্য]। চিত্রে $\overrightarrow{OA}$ মোটর গাড়ির বেগ নির্দেশ করছে। উল্লম্বভাবে আপতিত বৃষ্টির গতিবেগ $\overrightarrow{OB}$ রেখা দ্বারা নির্দেশ করা হয়েছে। $\overrightarrow{OC}$ রেখা গাড়ির ঋণাত্মক বেগ নির্দেশ করে $(-v_m)$। সুতরাং আয়তক্ষেত্র OCDB-এর কর্ণ $\overrightarrow{OD}$ মোটর গাড়ির সাপেক্ষে বৃষ্টির গতিবেগ নির্দেশ করে।

সুতরাং, মোটর গাড়ির সাপেক্ষে বৃষ্টির আপেক্ষিক গতিবেগ,



$$\vec{v}_{Rm} = \vec{v}_R - \vec{v}_m$$

এখন, চিত্র থেকে পাই,

$$v_{Rm} = \sqrt{v_R^{\,2} + v_m^{\,2} + 2v_R.v_m\cos 90°} = \sqrt{v_R^{\,2} + v_m^{\,2}}$$

সুতরাং, মোটর গাড়ির সাপেক্ষে বৃষ্টির আপেক্ষিক গতিবেগের মান হবে,

$$v_{Rm} = \sqrt{v_R^{\,2} + v_m^{\,2}}$$

এই আপেক্ষিক বেগ উল্লম্বের সাথে φ কোণ উৎপন্ন করলে আমরা পাই,

$$\tan\varphi = \frac{v_m}{v_R}$$

যেহেতু v_{Rm}-এর অভিমুখ উল্লম্বের সাথে আনতভাবে হয় তাই বৃষ্টির মধ্য দিয়ে অনুভূমিকভাবে গতিশীল গাড়ির নিকট বৃষ্টি তির্যকভাবে পড়ছে বলে মনে হবে। ফলে বৃষ্টির মধ্য দিয়ে চলমান গাড়ির সামনের কাচ পিছনের কাচ অপেক্ষা বেশি ভেজে। এই কারণেই গাড়ির wiper দণ্ডগুলি গাড়ির সামনের কাচে লাগানো হয়।

হিসাব কর : এক ব্যক্তি অনুভূমিক রাস্তায় ঘণ্টায় 4km বেগে হাঁটছে। মনে হচ্ছে বৃষ্টি উল্লম্বভাবে 3 km বেগে পড়ছে। বৃষ্টির প্রকৃত বেগ বের কর।

ধরা যাক, বৃষ্টির প্রকৃত বেগ v_R। অনুভূমিক রাস্তায় ব্যক্তির বেগ $\vec{v}_m$ এবং ওই ব্যক্তি সাপেক্ষে বৃষ্টির বেগ $\vec{v}_{Rm}$। সুতরাং চিত্রানুযায়ী,

$$\vec{v}_{Rm} = \vec{v}_R - \vec{v}_m$$

বা, $\vec{v}_R = \vec{v}_{Rm} + \vec{v}_m$

আবার, $v_R = \sqrt{v_{Rm}^2 + v_m^2}$

$\therefore \quad v_R = \sqrt{3^2+4^2} = \sqrt{9+16} = 5\ \text{kmhr}^{-1}$

$\therefore$ বৃষ্টির প্রকৃত বেগের মান 5 kmhr^{-1}।

লব্ধির সর্বোচ্চ এবং সর্বনিম্ন মান
Maximum and minimum values of the resultant

মনে করি দুটি ভেক্টর রাশি $\vec{P}$ এবং $\vec{Q}$ একই সময়ে কোনো বিন্দুতে α কোণে ক্রিয়া করছে। ভেক্টর যোগের সামান্তরিক সূত্রানুসারে এদের লব্ধির মান, $R = \sqrt{P^2+Q^2+2PQ\cos\alpha}$

(ক) উপরোক্ত সমীকরণ হতে বলা যায় লব্ধি $\vec{R}$-এর মান $\vec{P}$ এবং $\vec{Q}$-এর মধ্যবর্তী কোণের ওপর নির্ভর করে। $\vec{R}$-এর মান সর্বাধিক হবে যখন $\cos\alpha$-এর মান সর্বাধিক (1) হবে অর্থাৎ $\cos\alpha = 1 = \cos 0°$

বা, $\alpha = 0°$ হবে

$\therefore$ **লব্ধির সর্বোচ্চ মান**

$$R_{max} = \sqrt{P^2+Q^2+2PQ\cos 0°}$$
$$= \sqrt{(P+Q)^2} = (P+Q) \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad (2.6)$$

$\therefore R_{max} = P+Q$

অতএব, দুটি ভেক্টর যখন একই সরলরেখা বরাবর পরস্পর একই দিকে ক্রিয়া করে তখন তাদের লব্ধির মান সর্বোচ্চ হবে এবং এই সর্বোচ্চ মান ভেক্টর রাশি দুটির যোগফলের সমান হবে। অন্যভাবে বলা যায়, দুটি ভেক্টর রাশির লব্ধির মান এদের যোগফল অপেক্ষা বড় হতে পারে না।

(খ) লব্ধি R-এর সর্বনিম্ন মান হবে যখন $\cos\alpha$-এর মান সর্বনিম্ন (−1) হবে অর্থাৎ $\cos\alpha = -1 = \cos 180°$ বা, $\alpha = 180°$ হবে।

$\therefore$ **লব্ধির সর্বনিম্ন মান,**

$$R_{min} = \sqrt{P^2+Q^2-2PQ} = \sqrt{(P\sim Q)^2} = P\sim Q \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad (2.7)$$

অতএব, দুটি ভেক্টর রাশি যখন একই সরলরেখা বরাবর পরস্পর বিপরীত দিকে ক্রিয়া করে তখন তাদের লব্ধির মান সর্বনিম্ন হবে এবং লব্ধির সর্বনিম্ন মান ভেক্টর রাশি দুটির বিয়োগফলের সমান হবে।

কাজ : একটি রশির দুই প্রান্তে দুই জন ধরে সমান বলে টান দাও। দুই জনের অবস্থানের কোনো পরিবর্তন হবে কী?

দুটি সমান ও বিপরীতমুখি বল একটি সরলরেখার দুই প্রান্তে ক্রিয়াশীল হলে লব্ধি শূন্য হয়, তাই দুইজনের অবস্থানের কোনো পরিবর্তন হবে না।

অনুধাবনমূলক কাজ : দুটি সমমান সমজাতীয় ভেক্টরের লব্ধি শূন্য হতে পারে কিনা ব্যাখ্যা কর।

গাণিতিক উদাহরণ ২.৩

১। দুটি বলের বৃহত্তম লব্ধি 10 N এবং ক্ষুদ্রতম লব্ধি 4 N; বল দুটি পরস্পরের সাথে 90° কোণে একটি কণার উপর ক্রিয়া করলে লব্ধির মান কত হবে?

আমরা জানি

$R_{max} = P + Q$

বা, $10 = P + Q \quad \dots \quad \dots \quad (i)$

আবার $R_{min} = P - Q$

বা, $4 = P - Q \quad \dots \quad \dots \quad (ii)$

এখানে

$R_{max} = 10\text{ N}$

$R_{min} = 4\text{ N}$

$\alpha = 90°$

$R = ?$

সমীকরণ (i) ও (ii) যোগ করে পাই,

$2P = 14\text{ N} \quad \therefore \; P = 7\text{ N}$

আবার সমীকরণ (i) হতে (ii) বিয়োগ করে পাই

$2Q = 6\text{ N} \quad \therefore \; Q = 3\text{ N}$

আবার $R^2 = P^2 + Q^2 + 2PQ\cos 90° \quad [\because \cos 90° = 0]$

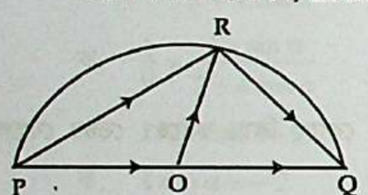
$= P^2 + Q^2 + 0 = (7)^2 + (3)^2 = 49 + 9 = 58$

$\therefore \quad R = \sqrt{58}\text{ N}$

২। ভেক্টরের সাহায্যে প্রমাণ কর যে, অর্ধবৃত্তস্থ কোণ সমকোণ।

ধরা যাক, PQR একটি অর্ধবৃত্তস্থ ত্রিভুজ [চিত্র দ্রষ্টব্য]। $\angle PRQ$ হলো অর্ধবৃত্তস্থ কোণ।

প্রমাণ করতে হবে যে, $\angle PRQ = 1$ সমকোণ।



এখন, $\angle PRQ$ সমকোণ হলে PQ এবং RQ পরস্পরের ওপর লম্ব হবে।

ধরি, বৃত্তের ব্যাসার্ধ $= r \;\; \therefore \; PO = OQ = r$ এবং $OR = s$ (ধরি)

$\therefore \quad |\vec{r}\,| = |\vec{s}\,| = r =$ বৃত্তের ব্যাসার্ধ

এখন, ΔPOR-এর ক্ষেত্রে লেখা যায়, $\vec{PR} = \vec{PO} + \vec{OR} = \vec{r} + \vec{s}$

আবার, ΔQRO-এর জন্য লেখা যায়, $\vec{OR} + \vec{RQ} = \vec{OQ}$

বা, $\vec{RQ} = \vec{OQ} - \vec{OR} = \vec{r} - \vec{s}$

$\therefore \quad \vec{PR}\,.\,\vec{RQ} = (\vec{r} + \vec{s}\,).(\vec{r} - \vec{s}\,) = \vec{r}.\vec{r} - \vec{r}.\vec{s} + \vec{s}.\vec{r} - \vec{s}.\vec{s}$

$= r^2 - s^2 = r^2 - r^2 = 0$

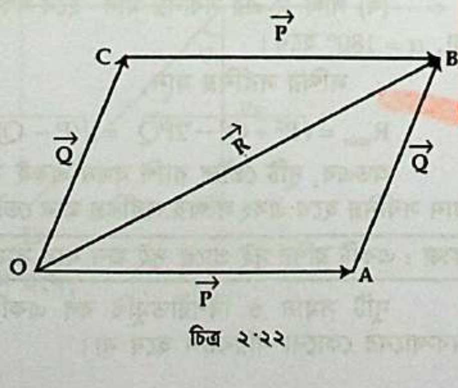
$\therefore \quad PR \perp RQ$

অতএব, অর্ধবৃত্তস্থ কোণ $\angle PRQ = 1$ সমকোণ। (প্রমাণিত)

২.৫ ভেক্টর যোগের কয়েকটি সূত্র
Some laws of vector addition

ক. বিনিময় সূত্র (Commutative law) : $\vec{P} + \vec{Q} = \vec{Q} + \vec{P}$

প্রমাণ : মনে করি, $\vec{P}$ ও $\vec{Q}$ দুটি ভেক্টর রাশি এবং $\vec{R}$ রাশি দুটির লব্ধি [চিত্র ২.২২]।



চিত্র ২.২২

ত্রিভুজ সূত্র অনুসারে, OAB ত্রিভুজে,

$\vec{R} = \vec{P} + \vec{Q}$

অর্থাৎ $\vec{OB} = \vec{OA} + \vec{AB}$

এখন OABC সামান্তরিক অঙ্কন করি এবং OC ও CB-কে যথাক্রমে AB ও OA-এর ন্যায় তীর চিহ্নিত করি। OCB ত্রিভুজে,

$\overrightarrow{OB} = \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{CB}$ (ত্রিভুজ সূত্র অনুসারে)

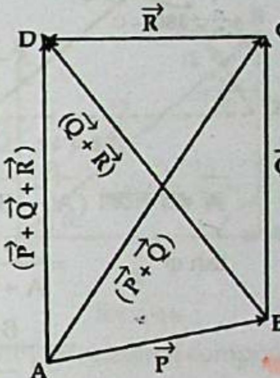
$\therefore \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{CB}$

অর্থাৎ $\overrightarrow{P} + \overrightarrow{Q} = \overrightarrow{Q} + \overrightarrow{P}$ → MAT: 18-19 ... ... (2.8)

এটিই হলো বিনিময় সূত্র। অর্থাৎ ভেক্টর রাশির যোগ বিনিময় সূত্র মেনে চলে। তেমনি স্কেলার রাশিও বিনিময় সূত্র মেনে চলে।

খ. সংযোজন সূত্র (Associative law) : $(\overrightarrow{P} + \overrightarrow{Q}) + \overrightarrow{R} = \overrightarrow{P} + (\overrightarrow{Q} + \overrightarrow{R})$

মনে করি $\overrightarrow{P}, \overrightarrow{Q}$ এবং $\overrightarrow{R}$ তিনটি ভেক্টর রাশি [চিত্র ২.২৩]। এদেরকে যথাক্রমে $\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{BC}$ এবং $\overrightarrow{CD}$ রেখা দ্বারা সূচিত করা হয়েছে। এখন AC, BD এবং AD যোগ করি। অতএব ত্রিভুজের সূত্র হতে পাই,



চিত্র ২.২৩

ABC ত্রিভুজে, $\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{P} + \overrightarrow{Q}$

ACD ত্রিভুজে, $\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CD}$

$= \left(\overrightarrow{P} + \overrightarrow{Q}\right) + \overrightarrow{R}$ ... ... (2.9)

আবার, BCD ত্রিভুজে,

$\overrightarrow{BD} = \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CD} = \overrightarrow{Q} + \overrightarrow{R}$

এবং ABD ত্রিভুজে, $\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BD} = \overrightarrow{P} + \left(\overrightarrow{Q} + \overrightarrow{R}\right)$ ... ... (2.10)

$\therefore$ সমীকরণ (2.9) এবং সমীকরণ (2.10) হতে পাই,

$$\left(\overrightarrow{P} + \overrightarrow{Q}\right) + \overrightarrow{R} = \overrightarrow{P} + \left(\overrightarrow{Q} + \overrightarrow{R}\right)$$

এটিই হলো ভেক্টর রাশির যোগের সংযোজন সূত্র অর্থাৎ ভেক্টর রাশির যোগ সংযোজন সূত্র মেনে চলে।

গ. বন্টন সূত্র (Distributive law) : $m(\overrightarrow{P} + \overrightarrow{Q}) = m\overrightarrow{P} + m\overrightarrow{Q}$

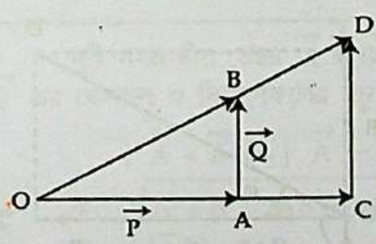
মনে করি, $\overrightarrow{OA} = \overrightarrow{P}$ এবং $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{Q}$ [চিত্র ২.২৪]। OB যোগ করি। এখন ত্রিভুজ সূত্রানুসারে,

$\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{OB} = \overrightarrow{P} + \overrightarrow{Q}$

মনে করি, OA ও OB-এর বর্ধিতাংশের উপর C ও D দুটি বিন্দু নেয়া হলো যাতে $\overrightarrow{OC} = m\overrightarrow{OA} = m\overrightarrow{P}$

এবং $\overrightarrow{CD} = m\overrightarrow{AB} = m\overrightarrow{Q}$

এখন, OAB এবং OCD সদৃশকোণী ত্রিভুজ বলে,



চিত্র ২.২৪

$$\frac{\overrightarrow{OC}}{\overrightarrow{OA}} = \frac{\overrightarrow{OD}}{\overrightarrow{OB}} = \frac{\overrightarrow{CD}}{\overrightarrow{AB}} = \frac{m\overrightarrow{Q}}{\overrightarrow{Q}} = m$$

$\therefore \overrightarrow{OD} = m\overrightarrow{OB} = m(\overrightarrow{P} + \overrightarrow{Q})$ ... ... (2.11)

আবার, ত্রিভুজ সূত্রানুসারে,

$\overrightarrow{OD} = \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{CD} = m\overrightarrow{P} + m\overrightarrow{Q}$

$\therefore m(\overrightarrow{P} + \overrightarrow{Q}) = m\overrightarrow{P} + m\overrightarrow{Q}$ ... ... (2.12)

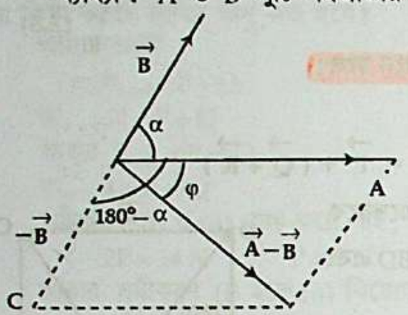
এটিই হলো ভেক্টর যোগের বণ্টন সূত্র। অর্থাৎ ভেক্টর রাশির যোগ বণ্টন সূত্র মেনে চলে।

ভেক্টরের বিয়োগ
Subtraction of vectors

দুটি সমজাতীয় ভেক্টরের বিয়োগফল বলতে একটি ভেক্টরের সাথে অপরটির বিপরীত ভেক্টরের যোগফল বোঝায়।

ব্যাখ্যা : $\vec{A}$ ও $\vec{B}$ দুটি সমজাতীয় ভেক্টরের বিয়োগ $\vec{A}-\vec{B}$ হলো $\vec{A}+(-\vec{B})$ এর সমান।

$$\therefore \vec{A}-\vec{B}=\vec{A}+(-\vec{B})$$



চিত্র ২.২৫

ধরা যাক, $\vec{A}$ এবং $\vec{B}$ ভেক্টর দুটির অন্তর্ভুক্ত কোণ α হলে $\vec{A}$ এবং $(-\vec{B})$ এর অন্তর্ভুক্ত কোণ হবে $(180°-\alpha)$ [চিত্র ২.২৫ দ্রষ্টব্য]।

সুতরাং, $\vec{A}$ এবং $(-\vec{B})$ এর লব্ধির মান হবে,

$$|\vec{A}-\vec{B}|=\sqrt{A^2+B^2+2AB\cos(180°-\alpha)}$$

$$=\sqrt{A^2+B^2-2AB\cos\alpha} \quad \ldots \quad \text{(i)}$$

$\vec{A}$ এর সঙ্গে $(\vec{A}-\vec{B})$-এর সৃষ্ট কোণ φ হলে,

$$\tan\varphi=\frac{B\sin(180°-\alpha)}{A+B\cos(180°-\alpha)}$$

$$=\frac{B\sin\alpha}{A-B\cos\alpha} \quad \ldots \quad \ldots \quad \text{(ii)}$$

বিশেষ ক্ষেত্রসমূহ :

(i) $\vec{A}$ ও $\vec{B}$ ভেক্টরদ্বয়ের অন্তর্ভুক্ত কোণ $\alpha = 90°$ হলে লব্ধি ভেক্টরের মান হবে, $R=\sqrt{A^2+B^2}$ [সামান্তরিকের সূত্রানুসারে] এবং ভেক্টরদ্বয়ের বিয়োগফলের মান হবে, $S=\sqrt{A^2+B^2}$ [সমীকরণ (ii) ব্যবহার করে]। অতএব, $R=S=\sqrt{A^2+B^2}$ । এক্ষেত্রে লব্ধি এবং বিয়োগফলের মান সমান।

(ii) $\vec{A}$ এবং $\vec{B}$ ভেক্টরদ্বয়ের মান সমান হলে এবং অন্তর্ভুক্ত কোণ $\alpha = 90°$ হলে,

$$R=S=\sqrt{A^2+B^2}=\sqrt{2A^2}=\sqrt{2}\,A$$

গাণিতিক উদাহরণ ২.৪

১। দুটি ভেক্টর $\vec{A}$ ও $\vec{B}$ যথাক্রমে পূর্ব ও দক্ষিণ দিকে ক্রিয়াশীল। এদের মান হলো যথাক্রমে $4a$ ও $3a$। $(\vec{A}-\vec{B})$-এর মান ও অভিমুখ নির্ণয় কর।

প্রশ্নানুসারে, $A = 4a$ এবং $B = 3a$ এবং $\alpha = 90°$

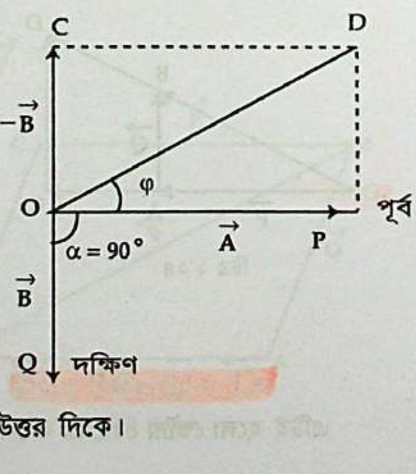
চিত্রে $\vec{OP}=\vec{A}$ এবং $\vec{OQ}=\vec{B}$

$\therefore \vec{OC}=\vec{Q}$

$$\therefore |\vec{A}-\vec{B}|=OD=\sqrt{A^2+B^2-2AB\cos\alpha}$$

$$=[(4a)^2+(3a)^2-2.4a.3a\cos 90°]^{\frac{1}{2}}$$

$$=(16a^2+9a^2)^{\frac{1}{2}}=(25a^2)^{\frac{1}{2}}=5a$$



ধরা যাক, $(\vec{A}-\vec{B})$ ভেক্টরটি পূর্ব দিকের সাথে φ কোণে আনত।

$$\therefore \tan\varphi=\frac{B}{A}=\frac{3a}{4a}=\frac{3}{4}$$

$$\therefore \varphi=\tan^{-1}\frac{3}{4}=36.9°$$

সুতরাং, $(\vec{A}-\vec{B})$-এর অভিমুখ হবে পূর্ব দিকের সাথে 36.9° কোণে উত্তর দিকে।

২·৬ লম্বাংশের সাহায্যে ভেক্টর রাশির যোজন ও বিয়োজন
Vector addition and subtraction in terms of normal components

একটি ভেক্টর রাশিকে সামান্তরিক সূত্রের দ্বারা বহুভাবে দুটি ভেক্টর রাশিতে বিভক্ত করা যায়। **একটি ভেক্টর রাশিকে দুই বা ততোধিক ভেক্টর রাশিতে বিভক্ত করার প্রক্রিয়াই হলো ভেক্টর রাশির বিভাজন বা বিশ্লেষণ।** একটি ভেক্টর রাশি $\vec{R}$ কে লম্ব উপাংশে বিভাজন করা যায় এবং এর সাহায্যে ভেক্টর রাশির যোজন ও বিয়োজন করা যায়। এই বিভাজিত ভেক্টর রাশিগুলোর প্রত্যেকটিকে মূল ভেক্টর রাশির এক একটি অংশক বা উপাংশ (Component) বলে।

মনে করি, OB রেখা $\vec{R}$ এর মান নির্দেশ করে। যদি $\vec{R}$ সমকোণে বিভাজিত করা হয় অর্থাৎ, P এবং Q উপাংশ দুটি পরস্পর সমকোণী হয় [চিত্র ২·২৬], তবে $(\alpha + \beta) = 90°$। এক্ষেত্রে OB এর সাথে উপাংশ দুটি যথাক্রমে উৎপন্ন কোণ α, β। এখন OABC সামান্তরিকটি অঙ্কন করা হলো।

$\therefore \sin(\alpha + \beta) = \sin 90° = 1$ এবং

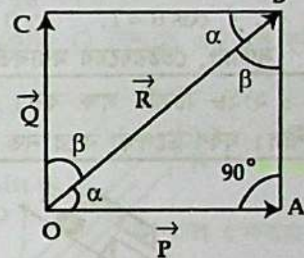
$\sin\beta = \sin(90° - \alpha) = \cos\alpha$

ত্রিকোণমিতির ত্রিভুজ সূত্র অনুযায়ী OAB ত্রিভুজ থেকে আমরা পাই,

$$\frac{OA}{\sin\beta} = \frac{AB}{\sin\alpha} = \frac{OB}{\sin 90°}$$

$$\therefore \frac{P}{\cos\alpha} = \frac{Q}{\sin\alpha} = \frac{R}{\sin 90°}$$

$$\therefore P = R\cos\alpha \text{ এবং } Q = R\sin\alpha \quad \ldots \quad \ldots \quad (2.13)$$



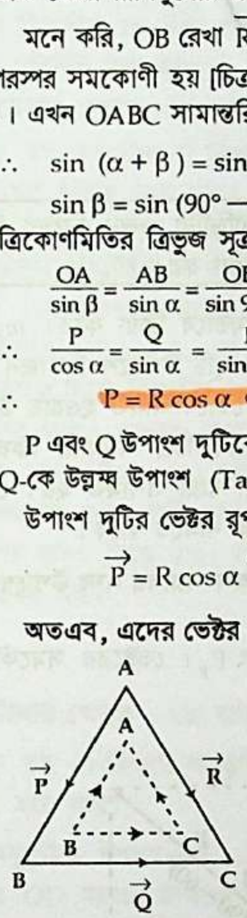
চিত্র ২·২৬

P এবং Q উপাংশ দুটিকে মূল ভেক্টর রাশি R-এর লম্বাংশ বলে। P-কে অনুভূমিক উপাংশ (Horizontal component) এবং Q-কে উল্লম্ব উপাংশ (Tangential component) বলা হয়।

উপাংশ দুটির ভেক্টর রূপ হলো—

$$\vec{P} = R\cos\alpha\,\hat{i} \text{ এবং } \vec{Q} = R\sin\alpha\,\hat{j}$$

অতএব, এদের ভেক্টর যোজন $\vec{R} = \vec{P} + \vec{Q} = R\cos\alpha\hat{i} + R\sin\alpha\hat{j} \quad \ldots \quad \ldots \quad (2.14)$



চিত্র ২·২৭

ত্রিভুজের তিনটি বাহুর সাহায্যে যোজন ও বিয়োজন ব্যাখ্যা করা যায়। মনে করি একটি ত্রিভুজের AB বাহু বরাবর $\vec{P}$ এবং BC বাহু বরাবর $\vec{Q}$ ক্রিয়াশীল [চিত্র ২·২৭ সলিড রেখাচিত্র]। তাহলে এদের ভেক্টর যোজন $\vec{R} = \vec{P} + \vec{Q}$ কে ত্রিভুজের তৃতীয় বাহু AC দ্বারা প্রকাশ করা যায়।

আবার $\vec{P}$ ও $\vec{Q}$ দুটি BA এবং BC বরাবর ক্রিয়াশীল হলে ভেক্টর রাশির বিয়োজন $\vec{R} = \vec{P} - \vec{Q}$ কে ত্রিভুজের তৃতীয় বাহু CA দ্বারা প্রকাশ করা যায় [চিত্র ২·২৭ ড্যাশ রেখাচিত্র]।

অনুধাবনমূলক কাজ : দুটি ভেক্টর রাশির যোগফল ও বিয়োগফলের মান সর্বদা সমান—ব্যাখ্যা কর। [রা. বো. ২০১৯]

দুটি সমজাতীয় ভেক্টর $\vec{A}$ ও $\vec{B}$ এর মধ্যবর্তী কোণ θ হলে $\vec{A}$ ও $-\vec{B}$ এর মধ্যবর্তী কোণ $\pi - \theta$ হবে। $\vec{A}$ ও $\vec{B}$ এর যোগফল ও বিয়োগফলের মান সমান হলে, অর্থাৎ

$$|\vec{A} + \vec{B}| = |\vec{A} - \vec{B}|$$

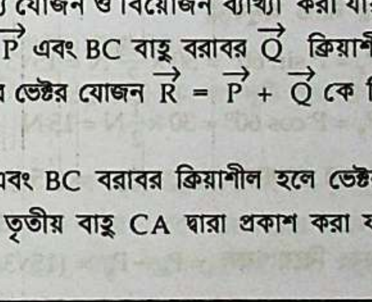
বা, $\sqrt{A^2 + B^2 + 2AB\cos\theta} = \sqrt{A^2 + B^2 + 2AB\cos(\pi - \theta)}$

বা, $A^2 + B^2 + 2AB\cos\theta = A^2 + B^2 + 2AB\cos(\pi - \theta)$

বা, $\cos\theta = \cos(\pi - \theta)$

বা, $\theta = \pi - \theta$

$\therefore \theta = \frac{\pi}{2}$



অর্থাৎ দুটি ভেক্টরের মধ্যবর্তী কোণ $\frac{\pi}{2}$ হলে ভেক্টর দুটির যোগফল ও বিয়োগফলের মান সমান হবে।

গাণিতিক উদাহরণ ২.৫

১। যদি $\vec{A}+\vec{B}=\vec{C}$ এবং $A+B=C$ হয় তাহলে $\vec{A}$ ও $\vec{B}$ ভেক্টরদ্বয়ের মধ্যবর্তী কোণ নির্ণয় কর।

ধরা যাক, $\vec{A}$ ও $\vec{B}$ এর মধ্যবর্তী কোণ θ.

অতএব, $|\vec{A}+\vec{B}|=\sqrt{A^2+B^2+2AB\cos\theta}=|\vec{C}|=C$

$\therefore\ C=\sqrt{A^2+B^2+2AB\cos\theta}$

বা, $(A+B)^2=A^2+B^2+2AB\cos\theta \qquad [\because A+B=C]$

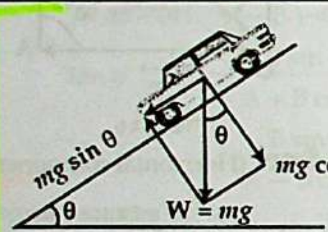
বা, $A^2+B^2+2AB=A^2+B^2+2AB\cos\theta$

বা, $2AB(\cos\theta-1)=0$

$\therefore\ \cos\theta=1, \quad \therefore \theta=0^\circ$

সুতরাং, ভেক্টরদ্বয়ের মধ্যবর্তী কোণ $=0^\circ$

কাজ : ২·২৮ চিত্রটি লক্ষ কর। গাড়িটি ইঞ্জিন বন্ধ করে নিচে নামছে। কেবলমাত্র গাড়িটির ওজন নিচের দিকে ক্রিয়াশীল। ঘর্ষণ উপেক্ষা করে নত তল বরাবর এবং নত তলের লম্ব দিকে দুটি উপাংশ ব্যাখ্যা কর।



চিত্র ২·২৮

বস্তুর ওজন mg নিচের দিকে উল্লম্বভাবে ক্রিয়া করে। mg কে নত তল বরাবর এবং নত তলের লম্ব দিকে দুটি উপাংশে বিভাজন করা যায়। নত তলটি অনুভূমিক তলের সাথে θ কোণে আনত হওয়ায় উপাংশ দুটির মান যথাক্রমে $mg\sin\theta$ এবং $mg\cos\theta$ চিত্র অনুযায়ী ক্রিয়াশীল হয়। $mg\cos\theta$ নত তলের লম্ব প্রতিক্রিয়া দ্বারা প্রশমিত হয়। কেবল $mg\sin\theta$ বলের প্রভাবে গাড়িটি নিচের দিকে নামতে থাকে।

উদাহরণ : 30 N একটি বল Y-অক্ষের সঙ্গে 60° কোণে আনত। বলটির X ও Y অক্ষ বরাবর লম্ব উপাংশ দুটি নির্ণয় কর এবং উহাদের যোগফল ও বিয়োগফল নির্ণয় কর।

মনে করি, P= 30 N বলের X- এবং Y-অক্ষ বরাবর উপাংশ যথাক্রমে P_x এবং P_y। ভেক্টরের সমকৌণিক বিশ্লেষণের নীতি অনুযায়ী

$P_x=P\sin 60^\circ=30\times\frac{\sqrt3}{2}\,N=15\sqrt3\,N$

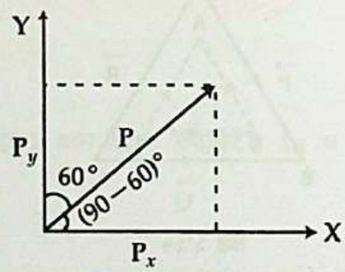
$P_y=P\cos 60^\circ=30\times\frac{1}{2}\,N=15\,N$

এদের যোগফল $=P_x+P_y=(15\sqrt3+15)\,N$

$=15(\sqrt3+1)\,N$

এবং বিয়োগফল $=P_x-P_y=(15\sqrt3-15)\,N$

$=15(\sqrt3-1)\,N$



চিত্র ২·২৯

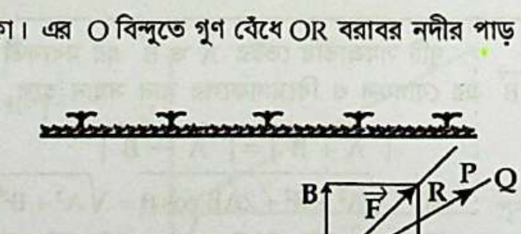
ভেক্টর উপাংশের মাধ্যমে ব্যাখ্যা

১। নৌকার গুণ টানা : মনে করি M একটি নৌকা। এর O বিন্দুতে গুণ বেঁধে OR বরাবর নদীর পাড় দিয়ে $\vec{F}$ বলে টেনে নেওয়া হচ্ছে। বিভাজন পদ্ধতি দ্বারা O বিন্দুতে F-কে দুটি উপাংশে বিভাজিত করা যায়; যথা— অনুভূমিক উপাংশ ও উল্লম্ব উপাংশ।

অনুভূমিক উপাংশ = $F\cos\theta$, এর দিক OA বরাবর।

উল্লম্ব উপাংশ = $F\sin\theta$, এর দিক OB বরাবর।

বলের অনুভূমিক উপাংশ $F\cos\theta$ নৌকাকে সামনের দিকে এগিয়ে নিয়ে যায় এবং উল্লম্ব উপাংশ $F\sin\theta$ নৌকাটিকে পাড়ের দিকে টানে। কিন্তু নৌকার হাল দ্বারা উল্লম্ব উপাংশ $F\sin\theta$ প্রতিহত করা হয়। গুণ যত লম্বা হবে, θ-এর মান তত কম হবে; ফলে $F\sin\theta$-এর মান কম হবে এবং $F\cos\theta$-এর মান বেশি হবে।



চিত্র ২·৩০

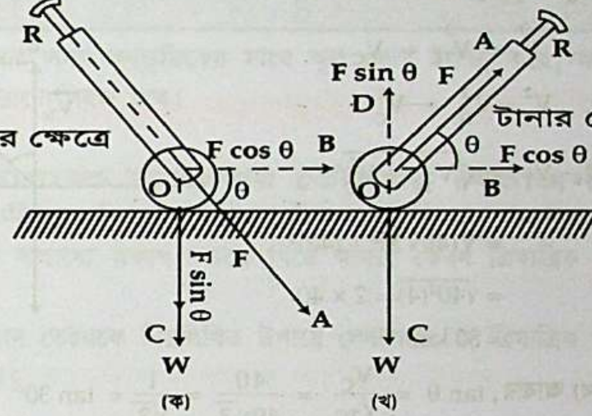
ফলে নৌকা দ্রুত সামনের দিকে এগিয়ে যাবে। অর্থাৎ গুণের রশি বেশি লম্বা হলে নৌকা বেশি দ্রুত চলবে। আবার O বিন্দুতে রশি বেঁধে স্রোতের বিপরীতে অনুভূমিকের সাথে θ কোণে নৌকাটিকে $\vec{F}$ বলে সামনের দিকে টানলে এবং রশির দৈর্ঘ্য OP হলে—(i) নৌকা অপেক্ষাকৃত দ্রুত চলবে; (ii) F sin θ এর মান কম হলে নৌকা সামনের দিকে বেশি গতিশীল হবে; (iii) OP রশি দ্বারা টানলে নৌকার গতি OQ রশি দ্বারা টানার চেয়ে কম হবে। কারণ OQ রশি লম্বা এবং $\theta' > \theta$।

২। লন-রোলার চালনা : তলের ওপর দিয়ে কোনো বস্তুকে ঠেলা বা টানা হলে তল ও বস্তুর মধ্যে ঘর্ষণ বল ক্রিয়াশীল হয় এবং বস্তুর গতিকে বাধা দেয়। বস্তুর ওজন বেশি হলে ঘর্ষণ বলও বেশি হয়। রোলারকে ঠেলে বা টেনে গতিশীল করা হয়।

ঠেলার ক্ষেত্রে : ধরা যাক, রোলারের ওজন = $\vec{W}$ এবং রোলারের হাতলের ওপর প্রযুক্ত বল = $\vec{F}$

F বল রোলারের O বিন্দুতে অনুভূমিকের সাথে θ কোণে ক্রিয়াশীল [চিত্র ২·৩১ (ক)]। O বিন্দুতে এই বল দুটি লম্ব উপাংশে বিভক্ত হয়ে যায়।

বলের অনুভূমিক উপাংশ = F cos θ, এর দিক OB বরাবর সামনের দিকে এবং উল্লম্ব উপাংশ = F sin θ, এর দিক OC বরাবর নিচের দিকে ক্রিয়াশীল যা রোলারের ওজন বৃদ্ধি করে। সুতরাং রোলারের মোট ওজন হয় (W + R sin θ)। ফলে রোলার প্রকৃত ওজনের চেয়ে ভারী হয়ে যায় বলে ঘর্ষণ বলের মানও বেড়ে যায়। তাই রোলার ঠেলা কষ্টকর হয়।



চিত্র ২·৩১

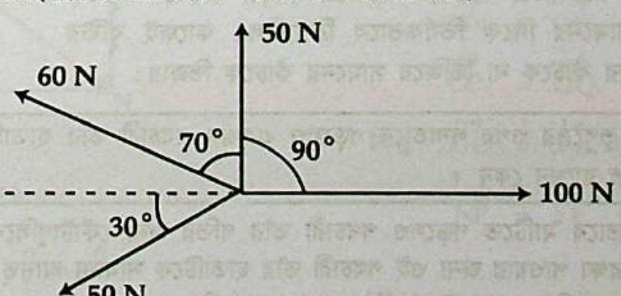
টানার ক্ষেত্রে : ধরা যাক, রোলারের ওজন = $\vec{W}$ এবং রোলারের হাতলের ওপর প্রযুক্ত বল = $\vec{F}$

F বল O বিন্দুতে অনুভূমিক রেখা OB-এর সাথে θ কোণে ক্রিয়াশীল [চিত্র ২·৩১ (খ)]। F বল দুটি লম্ব উপাংশে বিভাজিত হয়ে যায়।

অনুভূমিক উপাংশ = F cos θ; এর ক্রিয়ায় রোলারটি সামনের দিকে এগিয়ে যাবে এবং উল্লম্ব উপাংশ = F sin θ; এর ক্রিয়া OD বরাবর উপরের দিকে হওয়ায় রোলারের মোট ওজন W-কে প্রশমিত করে। ফলে রোলারের ওজন হয় (W − F sin θ)। ফলে টানার ক্ষেত্রে রোলার হাল্কা অনুভূত হয় এবং ঘর্ষণ বলও হ্রাস পায়। ফলে রোলার টানা সহজতর হয়। তাই বলা যায়, লন-রোলার ঠেলা অপেক্ষা টানা সহজতর।

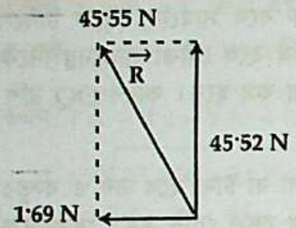
গাণিতিক উদাহরণ ২.৬

১। নিচের চিত্রের 50 N এবং 100 N এর দিকে বলের লব্ধি নির্ণয় কর।



50 N বলের লম্ব দিকে মোট বল = 50 sin 90° + 60 sin (90° + 70°) + 50 sin (180° + 30°) = 45·52 N

100 N বলের অনুভূমিক দিকে মোট বল $= 100\cos 0° + 60\cos(90° + 70°) + 50\cos(180° + 30°) = 1·69$ N



এদের লব্ধি ($\vec{R}$) চিত্রে দেখানো হলো

$$R^2 = \{(45·52)^2 + (1·69)^2\}\ N = 2074·92\ N$$

$$\therefore \quad R = 45·55\ N$$

২। ঘণ্টায় 40 km বেগে পূর্বদিকে চলমান একটি গাড়ির চালক ঘণ্টায় $40\sqrt{3}$ km বেগে একটি ট্রাককে উত্তর দিকে চলতে দেখল। (ক) ট্রাকটির প্রকৃত বেগ কত এবং (খ) ট্রাকটি কোন দিকে চলছে ?

[রা. বো. ২০১১; চ. বো. ২০০২]

(ক) মনে করি ট্রাকটি উত্তর দিকের সাথে θ কোণে পূর্বদিকে চলছে।

ত্রিভুজ সূত্রানুসারে আমরা পাই,

$$\vec{V}_T = \vec{V}_{TC} + \vec{V}_C$$

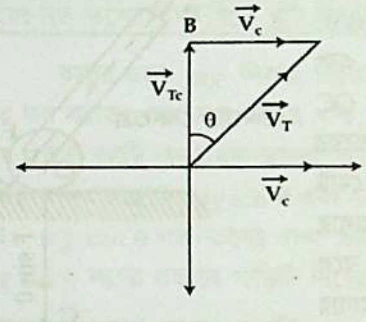
$$\therefore \quad V_T^2 = V_{TC}^2 + V_C^2$$

$$\text{বা,} \quad V_T = \sqrt{V_{TC}^2 + V_C^2}$$

$$= \sqrt{(40\sqrt{3})^2 + (40)^2}$$

$$= \sqrt{40^2(4)} = 2 \times 40$$

$$= 80\ kmh^{-1}$$



এখানে,

গাড়ির প্রকৃত বেগ,

$V_C = 40\ kmh^{-1}$

গাড়ির সাপেক্ষে ট্রাকের বেগ,

$V_{TC} = 40\sqrt{3}\ kmh^{-1}$

ট্রাকের প্রকৃত বেগ,

$V_T = ?$

(খ) আবার, $\tan\theta = \dfrac{V_C}{V_{TC}} = \dfrac{40}{40\sqrt{3}} = \dfrac{1}{\sqrt{3}} = \tan 30°$

$\therefore \quad \theta = 30°$

উত্তর : (ক) 80 kmh^{-1}, (খ) 30° কোণে পূর্বদিকে

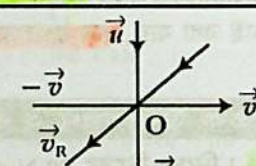
কাজ I : পাখি উড়ার সময় পাখার সাহায্যে দুই পাশের বাতাসকে আঘাত করে কিন্তু পাখি সামনের দিকে উড়ে কী করে?

পাখি উড়ার সময় পাখার সাহায্যে বাতাসকে আঘাত করে। ফলে দুটি পাখার লব্ধি বলের বিপরীত দিকে বাতাস একটি প্রতিক্রিয়া বলের সৃষ্টি করে। এজন্য পাখি সামনের দিকে উড়ে যায়।

কাজ II : বৃষ্টির ফোঁটা চলন্ত গাড়ির সামনের কাঁচকে ভিজিয়ে দেয়, পেছনের কাঁচকে ভিজায় না কেন?

মনে করি গাড়ির বেগ $\vec{v}$ এবং বৃষ্টির বেগ $\vec{u}$

$\therefore$ লব্ধি বেগ $\vec{v}_R = \vec{u} + (-\vec{v})$, OP বরাবর ক্রিয়াশীল হয় অর্থাৎ গাড়ির গতির দিকে ক্রিয়া করে [চিত্র ২·৩২]। এক্ষেত্রে গাড়ির সাপেক্ষে বৃষ্টির আপেক্ষিক বেগের দিক সামনের দিকে তির্যকভাবে ক্রিয়াশীল। কাজেই বৃষ্টির ফোঁটা চলন্ত গাড়ির পিছনের কাঁচকে না ভিজিয়ে সামনের কাঁচকে ভিজায়।



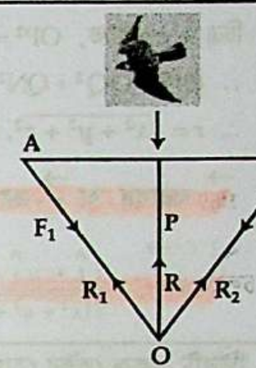
চিত্র ২·৩২

কাজ III : বৃষ্টির ফোঁটা ভূপৃষ্ঠের ওপর লম্বভাবে পড়লেও একজন পথচারী তার ছাতাটিকে বৃষ্টির ফোঁটার অভিমুখের সাথে সামান্য কোণে আনত রাখেন কেন ?

বৃষ্টির ফোঁটা লম্বভাবে মাটিতে পড়লেও পথচারী তাঁর গতির জন্য ফোঁটাগুলিকে সামান্য আনত কোণে পড়তে দেখেন। তাই বৃষ্টি থেকে রক্ষা পাওয়ার জন্য ওই পথচারী তাঁর ছাতাটিকে সামান্য আনত কোণে মেলে ধরেন। পথচারীর বেগ বেড়ে গেলে বৃষ্টির আপেক্ষিক বেগ উল্লম্বের সাথে তত বেশি কোণ উৎপন্ন করবে। ফলে ছাতাকে বেশি কোণে হেলাতে হবে।

অনুসন্ধান I : পাখির আকাশে ওড়ার নীতিটি উল্লেখ কর এবং তা ভেক্টরের কোন সূত্র মেনে চলে ?

পাখি ওড়ার সময় ভেক্টরের সামান্তরিক সূত্র মেনে চলে। যদি A ও B বিন্দু দুটি পাখির ডানার প্রান্ত নির্দেশ করে, তবে ডানা দুটি দিয়ে পাখিটি যথাক্রমে F_1 ও F_2 বল প্রয়োগ করে। বল দুটির বিপরীত প্রতিক্রিয়া বল R_1 ও R_2, এর লব্ধি R-এর অভিমুখে ক্রিয়া করে যা পাখিটিকে আকাশে উড়তে সাহায্য করে। ডানা দিয়ে পাখিটি F_1 ও F_2 বল প্রয়োগ করে এবং বল দুটির ক্রিয়ারেখা (line of action) O বিন্দুতে মিলিত হয়। নিউটনের তৃতীয় সূত্র অনুসারে বায়ু সমান বিপরীত প্রতিক্রিয়া বল R_1 ও R_2এর লব্ধি R পাখিটিকে বায়ুতে ভেসে থাকতে সাহায্য করে।



অনুসন্ধান II : ট্রলি ব্যাগের হাতল লম্বা হয় কেন ?

ট্রলি ব্যাগের হাতল লম্বা হলে সেটি টানার সময় অনুভূমিকের সাথে ক্ষুদ্র কোণ উৎপন্ন করে, ফলে টানের অনুভূমিক উপাংশ বেশি হবে এবং ট্রলি ব্যাগকে সরানো সহজ হবে।

২.৭ ত্রিমাত্রিক আয়তাকার স্থানাঙ্ক ব্যবস্থায় ভেক্টরের বিভাজন
Resolution of vector in three dimensional rectangular co-ordinate system

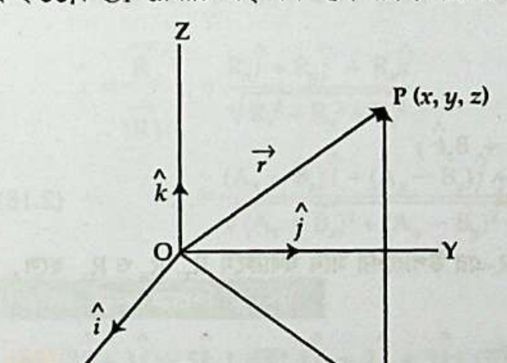
একটি ভেক্টর রাশিকে একক ভেক্টর রাশির সাহায্যে প্রকাশ করতে গিয়ে আমরা কেবল ত্রিমাত্রিক আয়তাকার বিস্তারের ভেক্টরের বিভাজন বিবেচনা করব।

ত্রিমাত্রিক স্থানাঙ্ক ব্যবস্থায় কোনো অবস্থান ভেক্টরকে নিম্নলিখিত উপায়ে লেখা যায় যা ত্রিমাত্রিক আয়তাকার বিস্তারের ভেক্টরের বিভাজন হিসেবে বিবেচিত হয়।

$$\vec{r} = \hat{i}\,x + \hat{j}\,y + \hat{k}\,z$$

এখানে P-এর অবস্থানাঙ্ক (x, y, z)

ধরা যাক, পরস্পর সমকোণে অবস্থিত OX, OY ও OZ সরলরেখা তিনটি যথাক্রমে X, Y ও Z অক্ষ নির্দেশ করছে [চিত্র ২.৩৩]। OP রেখাটি এই অক্ষ ব্যবস্থায় r মানের একটি ভেক্টর রাশি $\vec{r}$ নির্দেশ করছে।



চিত্র ২.৩৩

আরও মনে করি $\overrightarrow{OP}$ ভেক্টরের শীর্ষবিন্দু P-এর স্থানাঙ্ক (x, y, z) এবং ধনাত্মক X, Y ও Z অক্ষে একক ভেক্টর রাশি যথাক্রমে $\hat{i}$, $\hat{j}$ ও $\hat{k}$। PN রেখাটি হলো XY সমতলের ওপর এবং NQ রেখাটি হলো OX-এর উপর লম্ব।

চিত্র হতে ভেক্টর যোগের নিয়ম অনুসারে পাই,

$$\overrightarrow{OP} = \overrightarrow{ON} + \overrightarrow{NP} \text{ এবং}$$

$$\overrightarrow{ON} = \overrightarrow{OQ} + \overrightarrow{QN}$$

$$\therefore \quad \overrightarrow{OP} = \overrightarrow{OQ} + \overrightarrow{QN} + \overrightarrow{NP}$$

$$\text{কিন্তু} \quad \overrightarrow{OQ} = x\hat{i},\ \overrightarrow{QN} = y\hat{j},$$

$$\overrightarrow{NP} = z\hat{k} \text{ ও } \overrightarrow{OP} = \vec{r}$$

$$\therefore \quad \vec{r} = x\hat{i} + y\hat{j} + z\hat{k} \qquad \ldots \qquad \ldots \qquad \ldots \qquad (2.15)$$

এখানে x, y ও z হলো যথাক্রমে X, Y ও Z অক্ষ বরাবর $\vec{r}$ ভেক্টরের উপাংশের মান এবং $\vec{r}$ হলো ত্রিমাত্রিক স্থানাঙ্ক ব্যবস্থার অবস্থান ভেক্টর। সমীকরণ (2.15) হলো নির্ণেয় অবস্থান ভেক্টর।

$\vec{r}$ ভেক্টরের মান

চিত্র ২.৩৩ হতে, $OP^2 = ON^2 + NP^2$ এবং $ON^2 = OQ^2 + QN^2$

$\therefore\ OP^2 = OQ^2 + QN^2 + NP^2$ বা, $r^2 = x^2 + y^2 + z^2$

$\therefore\ r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$, নির্ণেয় অবস্থান ভেক্টরের মান ... ... (2.16)

$\vec{r}$ বরাবর বা $\vec{r}$-এর সমান্তরাল একক ভেক্টর রাশি

$$\hat{r} = \frac{\vec{r}}{r} = \frac{x\hat{i} + y\hat{j} + z\hat{k}}{\sqrt{(x^2 + y^2 + z^2)}} \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad (2.17)$$

কাজ : তিনটি একক ভেক্টর যোগ করলে একটি একক ভেক্টর পাওয়া যায় কী ? ব্যাখ্যা কর।

তিনটি একক ভেক্টরের মধ্যে যদি দুটি সমান ও বিপরীতমুখি হয় তবে ওই দুটি ভেক্টরের যোগফল শূন্য হবে। তৃতীয় একক ভেক্টরটি ওই দুটির সঙ্গে যোগ করলে যোগফল হিসেবে তৃতীয় ভেক্টরটি পাওয়া যাবে। অর্থাৎ $\hat{i}, (-\hat{i})$ ও $\hat{j}$ এই তিনটি একক ভেক্টরের যোগফল হলো, $\hat{i} + (-\hat{i}) + \hat{j} = \hat{j}$ = একক ভেক্টর।

লম্ব উপাংশে বিভাজিত ভেক্টরের যোগ ও বিয়োগ
Vector addition and subtraction of resolved normal components

দুই বা ততোধিক ভেক্টর যদি লম্ব উপাংশে বিভাজিত থাকে, তবে তাদের যোগফল বা বিয়োগফলকে লম্ব উপাংশের সাহায্যে নিম্নোক্তভাবে প্রকাশ করা যায়।

ক. যোগফল নির্ণয়

ধরি, $\vec{A}$ ও $\vec{B}$ দুইটি ভেক্টর রাশি যাদেরকে লম্ব উপাংশের সাহায্যে নিম্নোক্তভাবে প্রকাশ করা যায় :

$$\vec{A} = A_x\hat{i} + A_y\hat{j} + A_z\hat{k}$$

এবং $$\vec{B} = B_x\hat{i} + B_y\hat{j} + B_z\hat{k}$$

এখানে A_x, A_y, A_z এবং B_x, B_y, B_z, X, Y ও Z-অক্ষ বরাবর যথাক্রমে $\vec{A}$ ও $\vec{B}$ ভেক্টর দুটির উপাংশের মান নির্দেশ করে।

এখন $\vec{A}$ ও $\vec{B}$ যোগ করে পাই,

$$\vec{A} + \vec{B} = (A_x\hat{i} + A_y\hat{j} + A_z\hat{k}) + (B_x\hat{i} + B_y\hat{j} + B_z\hat{k})$$

$$= (A_x + B_x)\hat{i} + (A_y + B_y)\hat{j} + (A_z + B_z)\hat{k} \quad \ldots \quad \ldots \quad (2.18)$$

এখন $\vec{A} + \vec{B} = \vec{R}$ হলে এবং X, Y ও Z-অক্ষ বরাবর R-এর উপাংশের মান যথাক্রমে R_x, R_y ও R_z হলে,

$$\vec{R} = R_x\hat{i} + R_y\hat{j} + R_z\hat{k}$$

$$\therefore\ \vec{A} + \vec{B} = \vec{R} = (A_x + B_x)\hat{i} + (A_y + B_y)\hat{j} + (A_z + B_z)\hat{k}$$

$$= R_x\hat{i} + R_y\hat{j} + R_z\hat{k} \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad (2.19)$$

লব্ধির মান : সমীকরণ (2.18) ও (2.19) থেকে পাই,

$R_x = A_x + B_x,\ R_y = A_y + B_y,\ R_z = A_z + B_z$

$$\therefore\ |\vec{R}| = |\vec{A} + \vec{B}| = \sqrt{R_x^2 + R_y^2 + R_z^2}$$

$$= \sqrt{(A_x + B_x)^2 + (A_y + B_y)^2 + (A_z + B_z)^2}$$

$\vec{R}$ বরাবর $\vec{R}$-এর সমান্তরাল একক ভেক্টর $\hat{r}$ হলে,

$$\hat{r} = \frac{\vec{R}}{|\vec{R}|} = \frac{R_x\hat{i} + R_y\hat{j} + R_z\hat{k}}{\sqrt{R_x^2 + R_y^2 + R_z^2}}$$

$$= \frac{(A_x + B_x)\hat{i} + (A_y + B_y)\hat{j} + (A_z + B_z)\hat{k}}{\sqrt{(A_x + B_x)^2 + (A_y + B_y)^2 + (A_z + B_z)^2}}$$

খ. বিয়োগফল নির্ণয়

$\vec{A}$ ও $\vec{B}$ ভেক্টরদ্বয়ের বিয়োগফল নিম্নোক্তভাবে নির্ণয় করা যায় :

$$\vec{A} - \vec{B} = (A_x\hat{i} + A_y\hat{j} + A_z\hat{k}) - (B_x\hat{i} + B_y\hat{j} + B_z\hat{k})$$

$$= (A_x - B_x)\hat{i} + (A_y - B_y)\hat{j} + (A_z - B_z)\hat{k} \quad \ldots \quad \ldots \quad (2.20)$$

এখন বিয়োগফল $\vec{R}$ হলে,

$$\vec{R} = R_x\hat{i} + R_y\hat{j} + R_z\hat{k}$$

এখানে R_x, R_y ও R_z হলো X, Y ও Z-অক্ষ বরাবর R-এর উপাংশের মান

$$\therefore \vec{A} - \vec{B} = \vec{R} = (A_x - B_x)\hat{i} + (A_y - B_y)\hat{j} + (A_z - B_z)\hat{k}$$

$$= R_x\hat{i} + R_y\hat{j} + R_z\hat{k} \quad \ldots \quad \ldots \quad (2.21)$$

লব্ধির মান : সমীকরণ (2.20) ও (2.21) থেকে পাই,

$$R_x = A_x - B_x,\ R_y = A_y - B_y,\ R_z = A_z - B_z$$

$$\therefore |\vec{R}| = |\vec{A} - \vec{B}| = \sqrt{(A_x - B_x)^2 + (A_y - B_y)^2 + (A_z - B_z)^2}$$

$$= \sqrt{R_x^2 + R_y^2 + R_z^2}$$

$\vec{R}$ বরাবর $\vec{R}$-এর সমান্তরাল একক ভেক্টর $\hat{r}$ হলে,

$$\hat{r} = \frac{\vec{R}}{|\vec{R}|} = \frac{R_x\hat{i} + R_y\hat{j} + R_z\hat{k}}{\sqrt{R_x^2 + R_y^2 + R_z^2}}$$

$$= \frac{(A_x - B_x)\hat{i} + (A_y - B_y)\hat{j} + (A_z - B_z)\hat{k}}{\sqrt{(A_x - B_x)^2 + (A_y - B_y)^2 + (A_z - B_z)^2}}$$

গাণিতিক উদাহরণ ২.৭

১। $(2\hat{i} + 3\hat{j} - 5\hat{k})$ এবং $(\hat{i} - 2\hat{j} + 3\hat{k})$ ভেক্টরদ্বয়ের সাথে কী ভেক্টর যোগ করলে লব্ধি হিসেবে $\hat{j}$ পাওয়া যাবে ?

ধরা যাক, প্রদত্ত ভেক্টরদ্বয়ের সাথে $\vec{A}$ ভেক্টর যোগ করতে হবে।

প্রশ্নানুসারে,

$$\vec{A} + (2\hat{i} + 3\hat{j} - 5\hat{k}) + (\hat{i} - 2\hat{j} + 3\hat{k}) = \hat{j}$$

বা, $\vec{A} + 3\hat{i} + \hat{j} - 2\hat{k} = \hat{j}$

বা, $\vec{A} = -3\hat{i} + 2\hat{k}$

২। একটি কণার অবস্থান ভেক্টর, $\vec{r} = (t^2 - 1)\hat{i} + 2t\hat{j}$। দেখাও যে, XY তলে কণাটির সঞ্চারপথ একটি অধিবৃত্ত।

এখানে, $\vec{r} = (t^2-1)\hat{i} + 2t\hat{j}$ ... ... (i)

আমরা জানি, XY তলে কণার অবস্থান ভেক্টর,

$\vec{r} = x\hat{i} + y\hat{j}$ ... ... (ii)

সমীকরণ (i) ও (ii) তুলনা করে পাই,

$x = t^2 - 1$ এবং $y = 2t$ বা, $t = \frac{y}{2}$

বা, $x = \left(\frac{y}{2}\right)^2 - 1 = \frac{y^2}{4} - 1$

বা, $y^2 = 4(x+1)$ ... ... (iii)

সমীকরণ (iii) একটি অধিবৃত্তের সমীকরণ।

অতএব, কণাটির সঞ্চারপথ একটি অধিবৃত্ত। (প্রমাণিত)

২.৮ দুটি দিক রাশি বা ভেক্টর রাশির গুণফল
Multiplications of two vector quantities

দুটি দিক রাশি বা ভেক্টর রাশির গুণফল সাধারণত দুই প্রকার, যথা—

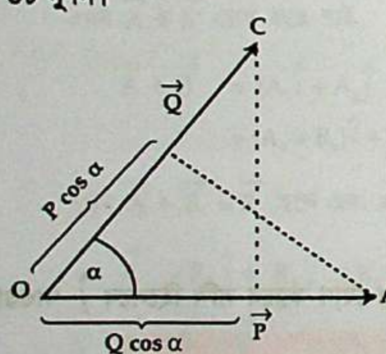
(১) স্কেলার গুণন বা ডট গুণন (Scalar product or Dot product)

(২) ভেক্টর গুণন বা ক্রস গুণন (Vector product or Cross product)

এই দুটি গুণন বা গুণফল নিম্নে পৃথক পৃথকভাবে আলোচনা করা হলো।

২.৮.১ স্কেলার গুণন বা ডট গুণন
Scalar product or Dot product

দুটি ভেক্টর রাশির গুণনে গুণফল একটি স্কেলার রাশি হলে এই গুণনকে স্কেলার গুণন বলে। এই গুণনে গুণফলের মান ভেক্টর দুটির মানের গুণফল এবং তাদের মধ্যবর্তী কোণের কোসাইনের (cosine) গুণফলের সমান হয়। দুটি ভেক্টরকে স্কেলার গুণন করতে হলে উহাদের মাঝে একটি ডট (·) চিহ্ন দিতে হয়। এই জন্য এ গুণনের অপর নাম ডট গুণন।



চিত্র ২.৩৪

ব্যাখ্যা : মনে করি OA এবং OC রেখা বরাবর $\vec{P}$ এবং $\vec{Q}$ ক্রিয়াশীল [চিত্র ২.৩৪]। এরা পরস্পরের সাথে α কোণে আনত। তাদের স্কেলার বা ডট গুণফল = $\vec{P}.\vec{Q}$ দ্বারা নির্দেশ করা হয় এবং পড়তে হয় $\vec{P}$ ডট $\vec{Q}$। কাজেই সংজ্ঞা অনুসারে পাই,

$\vec{P}.\vec{Q} = |\vec{P}||\vec{Q}|\cos\alpha, \quad \pi \geq \alpha \geq 0$

বা, $\vec{P}.\vec{Q} = PQ\cos\alpha = QP\cos\alpha$ ... (2.22)

এখানে $0 \leq \alpha \leq \pi$

$Q\cos\alpha$ হচ্ছে $\vec{P}$ এর দিকে $\vec{Q}$ এর উপাংশ বা $\vec{P}$ এর ওপর $\vec{Q}$ এর লম্ব অভিক্ষেপ এবং $P\cos\alpha$ হচ্ছে $\vec{Q}$ এর দিকে $\vec{P}$ এর উপাংশ [চিত্র ২.৩৪]।

আবার, (2.22) নং সমীকরণ থেকে পাই,

$\vec{P}.\vec{Q} = PQ\cos\alpha = Q(P\cos\alpha)$ ... [2.22(a)]

এখানে $P\cos\alpha$ হচ্ছে $\vec{Q}$ এর দিকে $\vec{P}$ এর উপাংশ বা $\vec{Q}$ এর ওপর $\vec{P}$ এর লম্ব অভিক্ষেপ।

সুতরাং যে কোনো দুটি ভেক্টরের স্কেলার গুণফল বলতে যে কোনো একটি ভেক্টরের মান এবং সেই ভেক্টরের দিকে অপর ভেক্টরের উপাংশের বা সেই ভেক্টরের ওপর অপর ভেক্টরের লম্ব অভিক্ষেপের গুণফলকে বুঝায়।

বিশেষ ক্ষেত্র :

(ক) যদি $\alpha = 0°$ হয়, তবে $\vec{P}.\vec{Q} = PQ\cos 0° = PQ$। এক্ষেত্রে ভেক্টর দুটি পরস্পরের সমান্তরাল হবে।

(খ) যদি $\alpha = 90°$ হয়, তবে $\vec{P}.\vec{Q} = PQ\cos 90° = 0$। এক্ষেত্রে ভেক্টর দুটি পরস্পর লম্ব হবে।

(গ) যদি $\alpha = 180°$ হয়, তবে $\vec{P}.\vec{Q} = PQ\cos 180° = -PQ$। এক্ষেত্রে ভেক্টর দুটি পরস্পরের সমান্তরাল এবং বিপরীতমুখি হবে।

[উল্লেখ্য : $\vec{P}.\vec{Q} = PQ\cos\alpha = P \times Q\cos\alpha = Q \times P\cos\alpha$; এখানে, $Q\cos\alpha = \vec{P}$ বরাবর Q-এর লম্ব অভিক্ষেপ এবং $P\cos\alpha = \vec{Q}$ বরাবর $\vec{P}$-এর লম্ব অভিক্ষেপ।]

স্কেলার গুণনের উদাহরণ : বল $\vec{F}$ এবং সরণ $\vec{s}$ উভয়েই ভেক্টর রাশি। কিন্তু এদের স্কেলার গুণফল কাজ (W) একটি স্কেলার রাশি, অর্থাৎ

$$W = \vec{F}.\vec{s} = Fs\cos\alpha \qquad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \qquad (2.23)$$

স্থিতিশক্তি, বৈদ্যুতিক বিভব ইত্যাদিও ভেক্টর রাশির স্কেলার গুণফলের উদাহরণ।

স্কেলার গুণনের নিয়মানুসারে,

(i) $\vec{P}.\vec{Q} = \vec{Q}.\vec{P}$ (বিনিময় সূত্র)

(ii) $\hat{i}.\hat{i} = \hat{j}.\hat{j} = \hat{k}.\hat{k} = 1$

(iii) $\hat{i}.\hat{j} = \hat{j}.\hat{k} = \hat{k}.\hat{i} = \hat{i}.\hat{k} = \hat{j}.\hat{k} = \hat{k}.\hat{j} = 0$

অনুধাবনমূলক কাজ : $\hat{i}.\hat{i} = 1$ কিন্তু $\hat{i}.\hat{j} = 0$ হয় কেন ?

স্কেলার গুণফলের কয়েকটি ধর্ম (Some properties of scalar product)

(i) $\vec{A}.\vec{A} = A^2$, অর্থাৎ একই ভেক্টরকে দুবার নিয়ে স্কেলার গুণ করলে ভেক্টরটির মানের বর্গ পাওয়া যায়।

(ii) $\vec{A}.\vec{B} = \vec{B}.\vec{A}$ অর্থাৎ স্কেলার গুণফল বিনিময় নিয়ম মেনে চলে।

(iii) পরস্পর লম্ব দুটি ভেক্টরের স্কেলার গুণফল শূন্য হয়। অর্থাৎ $\vec{A}.\vec{B} = 0$

আবার যদি দুটি ভেক্টরের কোনোটির মানই শূন্য না হয় ($A \neq 0, B \neq 0$), তবে $\vec{A}.\vec{B} = 0$ হলে $\vec{A} \perp \vec{B}$

(iv) দুটি ভেক্টরের মধ্যবর্তী কোণ, $\theta = \cos^{-1}\left(\dfrac{\vec{A}.\vec{B}}{AB}\right)$

(v) সমকৌণিক একক ভেক্টরসমূহের স্কেলার গুণফল $\hat{i}.\hat{i} = \hat{j}.\hat{j} = \hat{k}.\hat{k} = 1$

$\hat{i}.\hat{j} = \hat{j}.\hat{i} = \hat{j}.\hat{k} = \hat{k}.\hat{j} = \hat{k}.\hat{i} = \hat{i}.\hat{k} = 0$

(vi) উপাংশের মাধ্যমে দুটি ভেক্টরের স্কেলার গুণফল $\vec{A}.\vec{B} = A_xB_x + A_yB_y + A_zB_z$

কাজ : $\vec{F} = (5\hat{i} + 3\hat{j} + 2\hat{k})$ N বল একটি বস্তুর উপর ক্রিয়া করে $\vec{r} = (3\hat{i} + 5\hat{j} - \hat{k})$ m সরণ সৃষ্টি করল।
Hints : কাজ $W = \vec{F}.\vec{r}$ নির্ণয় করতে হবে।

গাণিতিক উদাহরণ ২.৮

১। $\vec{A} = 9\hat{i} + \hat{j} - 6\hat{k}$ ও $\vec{B} = 4\hat{i} - 6\hat{j} + 5\hat{k}$ ভেক্টর দুটির স্কেলার গুণফল নির্ণয় কর এবং দেখাও যে ভেক্টরদ্বয় পরস্পরের উপর লম্ব। [য. বো. ২০১১; ব. বো. ২০০৯; ঢা. বো. ২০০৪; রা. বো. ২০০১]

আমরা জানি, $\vec{A} . \vec{B} = 0$ হলে ভেক্টর রাশি দুটি পরস্পরের উপর লম্ব হবে।

প্রশ্নানুযায়ী, $\vec{A} . \vec{B} = AB\cos\theta = 0$ হতে হবে।

$\vec{A} . \vec{B} = A_x B_x + A_y B_y + A_z B_z$

$\therefore \vec{A} . \vec{B} = (9\hat{i} + \hat{j} - 6\hat{k}).(4\hat{i} - 6\hat{j} + 5\hat{k})$

$= 9 \times 4 + (1 \times -6) + (-6 \times 5) = 36 - 6 - 30 = 0$

যেহেতু $\vec{A} . \vec{B} = 0$, কিন্তু $A \neq 0$ ও $B \neq 0$; $\therefore \cos\theta = 0 = \cos 90^\circ$

অতএব ভেক্টর দুটি পরস্পরের উপর লম্ব।

২। ভেক্টর $\vec{P} = 2\hat{i} - 3\hat{j} + \hat{k}$-এর ওপর $\vec{Q} = 4\hat{j} + 5\hat{k}$-এর লম্ব অভিক্ষেপের মান নির্ণয় কর।

$\vec{P}$ ও $\vec{Q}$-এর মধ্যবর্তী কোণ θ হলে $\vec{P}$-এর ওপর $\vec{Q}$-এর লম্ব অভিক্ষেপ $= Q\cos\theta$

আমরা জানি, $\vec{P}.\vec{Q} = PQ\cos\theta$

$\therefore Q\cos\theta = \frac{\vec{P}.\vec{Q}}{P} = \frac{\vec{P}.\vec{Q}}{|\vec{P}|}$

এখানে, $\vec{P}.\vec{Q} = (2\hat{i} - 3\hat{j} + \hat{k}).(4\hat{j} + 5\hat{k})$

$= 2 \times 0 + (-3) \times (4) + (1) \times (5)$

$= -12 + 5 = -7$

এবং $|\vec{P}| = \sqrt{P_x^2 + P_y^2 + P_z^2} = \sqrt{(2)^2 + (-3)^2 + (1)^2}$

$= \sqrt{4 + 9 + 1} = \sqrt{14}$

$\therefore Q\cos\theta = \frac{-7}{\sqrt{14}}$

৩। m এর মান কত হলে $\vec{A} = 2\hat{i} + 2\hat{j} - 2\hat{k}$ এবং $\vec{B} = m\hat{i} + 3\hat{j} + 4\hat{k}$ পরস্পর লম্ব হবে ?

আমরা জানি দুটি ভেক্টর পরস্পর লম্ব হলে,

$\vec{A}.\vec{B} = AB\cos 90^\circ = 0$ হবে।

$\therefore \vec{A}.\vec{B} = (2\hat{i} + 2\hat{j} - 2\hat{k}).(m\hat{i} + 3\hat{j} + 4\hat{k}) = 0$

বা, $2m + 6 - 8 = 0$

বা, $2m - 2 = 0$

$\therefore m = 1$

৪। $\vec{A} = 9\hat{i} + \hat{j} - 6\hat{k}$ এবং $\vec{B} = 4\hat{i} - 6\hat{j} + 5\hat{k}$ হলে ভেক্টরদ্বয়ের মধ্যবর্তী কোণ নির্ণয় কর।

আমরা জানি,

$\vec{A} . \vec{B} = AB\cos\theta$

$\therefore \cos\theta = \frac{\vec{A} . \vec{B}}{AB}$

বা, $\cos\theta = \frac{0}{\sqrt{118} \times \sqrt{77}} = 0$

$\therefore \theta = \cos^{-1}(0) = 90^\circ$

এখানে,

$\vec{A} . \vec{B} = 9 \times 4 + 1 \times (-6) + (-6) \times 5 = 0$

$A = |\vec{A}| = \sqrt{(9)^2 + (1)^2 + (-6)^2} = \sqrt{118}$

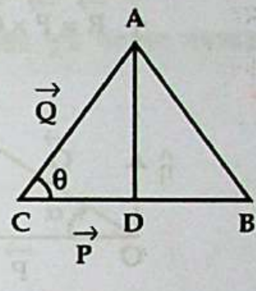
$B = |\vec{B}| = \sqrt{(4)^2 + (-6)^2 + (5)^2} = \sqrt{77}$

৫। কোনো ত্রিভুজের দুটি বাহুকে $\vec{P}$ ও $\vec{Q}$ দ্বারা সূচিত করা হলে দেখাও যে, ত্রিভুজটির ক্ষেত্রফল $= \frac{1}{2}|\vec{P} \times \vec{Q}|$

ABC ত্রিভুজে, $\vec{CB} = \vec{P}$

$\vec{CA} = \vec{Q}$

এবং এদের মধ্যবর্তী কোণ θ [চিত্র দ্রষ্টব্য]।



ত্রিভুজটির উচ্চতা, AD $= AC\cos\theta = Q\sin\theta$

$\therefore$ ত্রিভুজের ক্ষেত্রফল $= \frac{1}{2} \times$ ভূমি $\times$ উচ্চতা $= \frac{1}{2}(BC)(AD)$

$$= \frac{1}{2} PQ\sin\theta = \frac{1}{2}|\vec{P} \times \vec{Q}|$$

৬। একটি কণার ওপর $\vec{F} = (3\hat{i} - 4\hat{j} + 6\hat{k})$ N বল প্রয়োগ করায় কণাটি Z-অক্ষ বরাবর 8 m সরে গেল। কণার ওপর কৃত কাজ নির্ণয় কর।

আমরা জানি,

কৃত কাজ, $W = \vec{F} \cdot \vec{s}$ [এখানে, $\vec{F} = (3\hat{i} - 4\hat{j} + 6\hat{k})$ N এবং $\vec{s} = (8\hat{k})$m]

$\therefore$ $W = \vec{F} \cdot \vec{s} = (3\hat{i} - 4\hat{j} + 6\hat{k}) \cdot (8\hat{k}) = 0 \times 3 + 0 \times (-4) + 48\hat{j}$

$= 48$ J

৭। $\vec{A} = 2\hat{i} + 4\hat{j} - 5\hat{k}$ এবং $\vec{B} = \hat{i} + \hat{j} + \hat{k}$ হলে ভেক্টরদ্বয়ের সমান্তরালে বা লব্ধির দিকে একক ভেক্টর নির্ণয় কর।

আমরা জানি, লব্ধির সমান্তরালে একক ভেক্টর,

$$\hat{\eta} = \frac{\vec{R}}{|\vec{R}|}$$

$$\therefore \hat{\eta} = \frac{3\hat{i} + 5\hat{j} - 4\hat{k}}{\sqrt{50}}$$

$$= \frac{3}{\sqrt{50}}\hat{i} + \frac{5}{\sqrt{50}}\hat{j} - \frac{4}{\sqrt{50}}\hat{k}$$

এখানে,

লব্ধি $\vec{R} = \vec{A} + \vec{B}$

$= 2\hat{i} + 4\hat{j} - 5\hat{k} + \hat{i} + \hat{j} + \hat{k}$

$= 3\hat{i} + 5\hat{j} - 4\hat{k}$

এবং $|\vec{R}| = R = \sqrt{(3)^2 + (5)^2 + (-4)^2} = \sqrt{50}$

২.৮.২ ভেক্টর গুণন বা ক্রস গুণন
Vector product or Cross product

দুটি ভেক্টর রাশির গুণফল যদি একটি ভেক্টর রাশি হয়, তবে ওই গুণনকে ভেক্টর গুণন বা ক্রস গুণন বলে। এই ভেক্টর গুণফলের মান ভেক্টর রাশি দুটির মান এবং তাদের মধ্যবর্তী কোণের সাইন (sine) এর গুণফলের সমান। দুটি ভেক্টরকে ভেক্টর গুণন করতে হলে উহাদের মাঝে একটি ক্রস (×) চিহ্ন দিতে হয় এজন্য এই গুণনের অপর নাম ক্রস গুণন। ভেক্টর গুণফলের দিক উভয় ভেক্টরের ওপর লম্ব বরাবর ক্রিয়াশীল। এই দিক ডানহাতি স্ক্রু নিয়মে নির্ণয় করা হয়।

ব্যাখ্যা : মনে করি $\vec{P}$ ও $\vec{Q}$ দুটি ভেক্টর রাশি। এরা পরস্পরের সাথে α কোণে O বিন্দুতে ক্রিয়া করে। অতএব এদের ভেক্টর গুণফল বা ক্রস গুণফল—

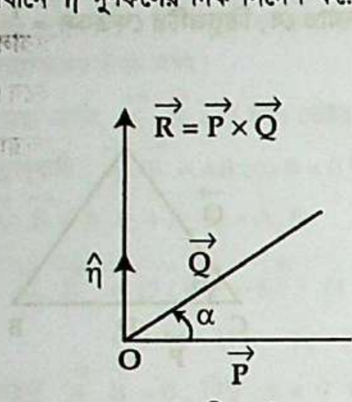
$$\vec{R} = \vec{P} \times \vec{Q} = \hat{\eta}\,|\vec{P}|\,|\vec{Q}|\sin\alpha, \quad 0 \le \alpha \le \pi \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad [2.24(a)]$$

এখানে $\hat{\eta}$ গুণফলের দিক নির্দেশ করে [চিত্র ২.৩৫]

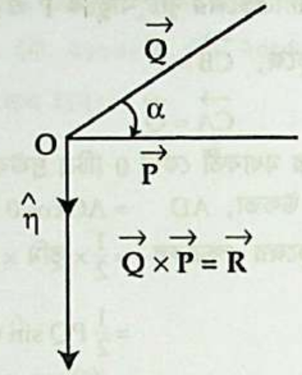
বা, $\vec{R} = \vec{Q} \times \vec{P}$

$$= \hat{\eta}\, QP\sin\alpha, \; 0 \le \alpha \le \pi \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad [2.24(b)]$$

এখানে $\hat{\eta}$ গুণফলের দিক নির্দেশ করে [চিত্র ২.৩৫]



চিত্র ২.৩৫



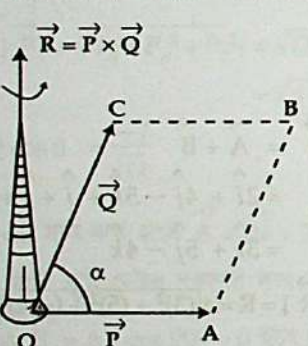
চিত্র ২.৩৬

দুটি ভেক্টরের গুণফলের দিক ডান হাতি কর্ক স্ক্রু সূত্রের সাহায্যে নির্ণয় করা যায়।

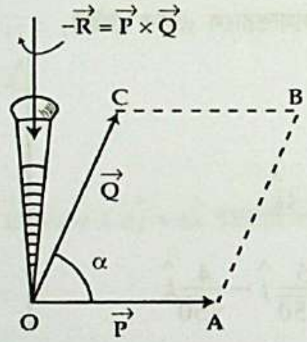
ডান হাতি স্ক্রু নিয়ম

ভেক্টর দুটি যে সমতলে অবস্থিত সেই সমতলের ওপর লম্বভাবে একটি ডান হাতি স্ক্রুকে রেখে প্রথম ভেক্টর হতে দ্বিতীয় ভেক্টরের দিকে ক্ষুদ্রতম কোণে ঘুরালে স্ক্রুটি যেদিকে অগ্রসর হয় সেই দিকই হবে $\vec{R}$ তথা $\hat{\eta}$ এর দিক।

উপরোক্ত নিয়ম অনুসারে $\vec{P} \times \vec{Q}$ এর অভিমুখ হবে ওপরের দিকে [চিত্র ২.৩৭] এবং $\vec{Q} \times \vec{P}$ এর অভিমুখ হবে নিচের দিকে [চিত্র ২.৩৮] অর্থাৎ প্রথম ক্ষেত্রে ডান হাতি স্ক্রুর দিক হবে ঘড়ির কাঁটার বিপরীতমুখি (Anticlockwise)

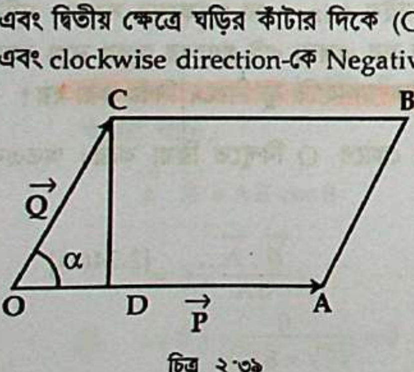


চিত্র ২.৩৭



চিত্র ২.৩৮

এবং দ্বিতীয় ক্ষেত্রে ঘড়ির কাঁটার দিকে (Clockwise)। Anti-clockwise direction-কে positive (ধনাত্মক) ধরা হয় এবং clockwise direction-কে Negative (ঋণাত্মক) ধরা হয়।



চিত্র ২.৩৯

ভেক্টর গুণনের উদাহরণ : মনে করি দুটি ভেক্টর $\vec{P}$ ও $\vec{Q}$ পরস্পরের সাথে α কোণ উৎপন্ন করেছে। OABC সামান্তরিকের $\vec{OA} = \vec{P}$ এবং $\vec{OC} = \vec{Q}$ এখন C হতে OA এর উপর CD লম্ব টানি [চিত্র ২.৩৯]।

∴ সামান্তরিকের ক্ষেত্রফল $= OA \times CD = OA \times OC \sin\alpha = PQ\sin\alpha = |\vec{P} \times \vec{Q}|$

সিদ্ধান্ত : ওপরের ফলাফল থেকে এই সিদ্ধান্তে আসা যায় সে, সামান্তরিকের ক্ষেত্রফল দুটি ভেক্টরের ক্রস গুণফলের মানের সমান।

বিশেষ ক্ষেত্র :

ক. যদি $\alpha = 0°$ হয়, তবে $\vec{R} = \vec{P} \times \vec{Q} = \hat{\eta}\, PQ \sin 0° = 0$ এক্ষেত্রে ভেক্টর দুটি পরস্পরের সমান্তরাল হবে।

খ. যদি $\alpha = 90°$, তবে $\vec{R} = \vec{P} \times \vec{Q} = \hat{\eta}\, PQ \sin 90° = PQ$ এক্ষেত্রে ভেক্টর দুটি পরস্পর লম্ব হবে।

গ. যদি $\alpha = 180°$, তবে $\vec{R} = \vec{P} \times \vec{Q} = \hat{\eta}\, PQ \sin 180° = 0$ এক্ষেত্রে ভেক্টর দুটি পরস্পর সমান্তরাল এবং বিপরীতমুখী হবে।

ভেক্টর গুণনের নিয়মানুসারে,

(i) $\vec{P} \times \vec{Q} = -\vec{Q} \times \vec{P}$

(ii) $\hat{i} \times \hat{i} = \hat{j} \times \hat{j} = \hat{k} \times \hat{k} = 0$

(iii) $\hat{i} \times \hat{j} = \hat{k} = -(\hat{j} \times \hat{i})$

(iv) $\hat{j} \times \hat{k} = \hat{i} = -(\hat{k} \times \hat{j})$

(v) $\hat{k} \times \hat{i} = \hat{j} = -(\hat{i} \times \hat{k})$

হিসাব : একটি সামান্তরিকের দুটি সন্নিহিত বাহু বরাবর দুটি ভেক্টর $\vec{A} = 2\hat{i} + 3\hat{j} + \hat{k}$ এবং $\vec{B} = 5\hat{i} + \hat{j} + 3\hat{k}$ ক্রিয়াশীল হলে সামান্তরিকটির ক্ষেত্রফল নির্ণয় কর। [উ. 7·64 একক]

Hints : $\vec{A} \times \vec{B}$ নির্ণয় করে $|\vec{A} \times \vec{B}|$ এর মান বের করতে হবে।

ভেক্টর গুণফলের কয়েকটি ধর্ম (Some properties of vector product)

(i) $\vec{A} \times \vec{A} = 0$, অর্থাৎ একই ভেক্টরকে দুবার নিলে তাদের ভেক্টর গুণফল শূন্য হয়।

(ii) $\vec{A} \times \vec{B} = -\vec{B} \times \vec{A}$ অর্থাৎ ভেক্টর গুণফল বিনিময় নিয়ম মেনে চলে না।

(iii) $\vec{A} \perp \vec{B}$ হলে $\vec{A} \times \vec{B}$ এর মান $= |\vec{A} \times \vec{B}| = AB \sin 90° = AB$.

$\vec{A}$, $\vec{B}$ এবং $\vec{A} \times \vec{B}$ এই তিনটি ভেক্টরই পরস্পরের ওপর লম্ব।

(iv) সমকৌণিক একক ভেক্টরসমূহের ভেক্টর গুণফল

$\hat{i} \times \hat{j} = \hat{k},\ \hat{j} \times \hat{k} = \hat{i},\ \hat{k} \times \hat{i} = \hat{j}$

$\hat{j} \times \hat{i} = -\hat{k},\ \hat{k} \times \hat{j} = -\hat{i},\ \hat{i} \times \hat{k} = -\hat{j}$

(v) স্থানাঙ্কের মাধ্যমে দুটি ভেক্টরের ভেক্টর গুণফল

$$\vec{A} \times \vec{B} = \hat{i}\,(A_yB_z - A_zB_y) + \hat{j}\,(A_zB_x - A_xB_z) + \hat{k}\,(A_xB_y - A_yB_x)$$

(vi) $\vec{A}, \vec{B}, \vec{C}$ সমতলীয় হবার শর্ত হলো $\vec{A} \cdot (\vec{B} \times \vec{C}) = 0$

কাজ : কোন ক্ষেত্রে স্কেলার ও ভেক্টর যোগফলের মান সমান হয় ?

স্কেলারের শুধু মান থাকে। তাই স্কেলার যোগফল বলতে শুধুমাত্র মানের যোগফল বোঝায়। তেমনি একাধিক ভেক্টরের অভিমুখ যদি একই দিকে হয়, তবে শুধুমাত্র মানগুলি যোগ করে ভেক্টরগুলির যোগফল পাওয়া যায়। অর্থাৎ এই যোগফল হবে স্কেলার যোগফলের সমান।

অনুসন্ধান : দুটি অসমান ভেক্টরের লব্ধি কী শূন্য হতে পারে ?

ধরি $\vec{P}$ ও $\vec{Q}$ দুটি ভেক্টর এবং এদের মধ্যবর্তী কোণ $= \theta$

এদের লব্ধির মান, $R = \sqrt{P^2 + Q^2 + 2PQ\cos\theta}$

যখন $\theta = 180°$, তখন R ন্যূনতম হয়। অর্থাৎ, $R_{min} = P - Q$

এখন দেখা যাচ্ছে, P এবং Q সমান হলে R শূন্য হয়। কিন্তু P ও Q অসমান হলে R–এর ন্যূনতম মান শূন্য হতে পারে না। সুতরাং, দুটি অসমান ভেক্টরের লব্ধি কখনও শূন্য হতে পারে না।

নিজে কর : $\vec{A}$ ও $\vec{B}$ এর মধ্যবর্তী কোণ 45° হলে দেখাও যে, $\vec{A} \cdot \vec{B} = |\vec{A} \times \vec{B}|$

গাণিতিক উদাহরণ ২.৯

১। $\vec{A} = \hat{i} - 3\hat{j} + 5\hat{k}$ এবং $\vec{B} = m\hat{i} + 6\hat{j} - 10\hat{k}$। m-এর মান কত হলে ভেক্টরদ্বয় পরস্পর সমান্তরাল হবে?

যদি $\vec{A} \times \vec{B} = 0$ হয়, তবে $\vec{A}$ ও $\vec{B}$ পরস্পর সমান্তরাল হবে।

এখানে, $\vec{A} \times \vec{B} = (\hat{i} - 3\hat{j} + 5\hat{k}) \times (m\hat{i} + 6\hat{j} - 10\hat{k})$

$$= \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ 1 & -3 & 5 \\ m & 6 & -10 \end{vmatrix} = \hat{i}(30-30) - \hat{j}(-10-5m) + \hat{k}(6+3m) = \hat{j}(10+5m) + \hat{k}(6+3m)$$

$\therefore$ শর্ত অনুসারে,

$\vec{A} \times \vec{B} = \hat{i}(10+5m) + \hat{k}(6+3m) = 0$

উভয় পাশে, $\hat{i}, \hat{j}, \hat{k}$ এর সহগ তুলনা করে পাই,

$10 + 5m = 0$ এবং $6 + 3m = 0$

বা, $5m = -10$ বা, $3m = -6$

$\therefore\ m = -\frac{10}{5} = -2$ $\therefore\ m = -\frac{6}{3} = -2$

সুতরাং, $m = -2$ হলে ভেক্টরদ্বয় পরস্পর সমান্তরাল হবে।

২। প্রমাণ কর যে, $(\vec{A} \cdot \vec{B})^2 + (\vec{A} \times \vec{B})^2 = A^2B^2$

আমরা জানি,

$\vec{A} \cdot \vec{B} = AB\cos\theta$ [এখানে, θ হলো ভেক্টরদ্বয়ের অন্তর্ভুক্ত কোণ] $\hat{\eta}$

এবং $\vec{A} \times \vec{B} = AB\sin\theta\,\hat{\eta}$

$$\therefore (\vec{A} \cdot \vec{B})^2 + (\vec{A} \times \vec{B})^2 = (AB\cos\theta)^2 + (AB\sin\theta\,\hat{\eta})^2$$
$$= A^2B^2\cos^2\theta + A^2B^2\sin^2\theta \qquad [\because \hat{\eta}^2 = 1]$$
$$= A^2B^2(\cos^2\theta + \sin^2\theta) = A^2B^2 \text{ (প্রমাণিত)}$$

৩। $\vec{P} = 2\hat{i} + 3\hat{j} - 4\hat{k}$ এবং $\vec{Q} = -2\hat{j} + \hat{i} + 3\hat{k}$ ভেক্টরদ্বয় যে তলে অবস্থান করে তার উল্লম্ব দিকে একটি একক ভেক্টর নির্ণয় কর। [য. বো. ২০০৯, ২০০৬, ২০০৪; কু. বো. ২০০৮; চ. বো. ২০০৮]

$\vec{P} \times \vec{Q}$ একটি ভেক্টর যা $\vec{P}$ এবং $\vec{Q}$-এর তলে লম্ব।

$$\therefore \vec{P} \times \vec{Q} = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ 2 & 3 & -4 \\ 1 & -2 & 3 \end{vmatrix}$$

$$= \hat{i}(9-8) + \hat{j}(-4-6) + \hat{k}(-4-3) = \hat{i} - 10\hat{j} - 7\hat{k}$$

মনে করি, $\vec{P}$ ও $\vec{Q}$ যে তলে অবস্থিত তার লম্ব অভিমুখে একক ভেক্টর রাশি = $\hat{\eta}$

$$\therefore \hat{\eta} = \frac{\vec{P} \times \vec{Q}}{|\vec{P} \times \vec{Q}|} = \frac{\hat{i} - 10\hat{j} - 7\hat{k}}{\sqrt{(1)^2 + (-10)^2 + (-7)^2}} = \frac{\hat{i} - 10\hat{j} - 7\hat{k}}{\sqrt{1 + 100 + 49}} = \frac{\hat{i} - 10\hat{j} - 7\hat{k}}{\sqrt{150}}$$

৪। $|\vec{A}+\vec{B}| = |\vec{A}-\vec{B}|$ হলে $\vec{A}$ ও $\vec{B}$ এর মধ্যবর্তী কোণ নির্ণয় করে দেখাও যে, ভেক্টরদ্বয় পরস্পর লম্ব।

মনে করি, $\vec{A}$ ও $\vec{B}$ এর মধ্যবর্তী কোণ θ

$\therefore \quad |\vec{A}+\vec{B}| = |\vec{A}-\vec{B}|$

বা, $|\vec{A}+\vec{B}|^2 = |\vec{A}-\vec{B}|^2$

বা, $(\vec{A}+\vec{B}).(\vec{A}+\vec{B}) = (\vec{A}-\vec{B}).(\vec{A}-\vec{B})$

বা, $\vec{A}.\vec{A}+\vec{B}.\vec{A}+\vec{A}.\vec{B}+\vec{B}.\vec{B} = \vec{A}.\vec{A}-\vec{B}.\vec{A}-\vec{A}.\vec{B}+\vec{B}.\vec{B}$

বা, $2(\vec{A}.\vec{B}) = -2(\vec{A}.\vec{B}), \quad (\because \vec{A}.\vec{B} = \vec{B}.\vec{A})$

বা, $4(\vec{A}.\vec{B}) = 0$ বা, $\vec{A}.\vec{B} = 0, (A \neq 0, B \neq 0)$

বা, $AB\cos\theta = 0 \quad \therefore \cos\theta = 0$ বা, $\theta = 90° \; (A \neq 0, B \neq 0)$

$\therefore$ ভেক্টরদ্বয়ের মধ্যবর্তী কোণ 90°; কাজেই ভেক্টর দুটি পরস্পর লম্ব।

৫। $\vec{P}+\vec{Q}+\vec{R} = 0$ হলে প্রমাণ কর যে $\vec{P}\times\vec{Q} = \vec{Q}\times\vec{R} = \vec{R}\times\vec{P}$.

$\vec{P}+\vec{Q}+\vec{R} = 0$

$\therefore \quad \vec{P} = -(\vec{Q}+\vec{R})$

$\therefore \quad \vec{P}\times\vec{Q} = -(\vec{Q}+\vec{R})\times\vec{Q} = -\vec{R}+\vec{Q} = \vec{Q}+\vec{R} \quad \ldots \quad \ldots \quad \text{(i)}$

আবার, $\vec{R}\times\vec{P} = -\vec{R}\times(\vec{Q}+\vec{R}) = -\vec{R}\times\vec{Q} = \vec{Q}\times\vec{R} \quad \ldots \quad \ldots \quad \text{(ii)}$

$\therefore$ (i) এবং (ii) থেকে পাই,

$\vec{P}\times\vec{Q} = \vec{Q}\times\vec{R} = \vec{R}\times\vec{P}$ (প্রমাণিত)

৬। 3 kg ভরের একটি গতিশীল কণার গতিবেগ $\vec{v} = 2\hat{i}+2\hat{j}-\hat{k}$। কণার অবস্থান ভেক্টর $\vec{r} = \hat{i}+\hat{j}$ হলে মূলবিন্দু সাপেক্ষে এর কৌণিক ভরবেগ নির্ণয় কর।

এখানে,
$m = 3\text{ kg}$
$\vec{v} = 2\hat{i}+2\hat{j}-\hat{k}$
$\vec{r} = \hat{i}+\hat{j}$

আমরা জানি,

রৈখিক ভরবেগ, $\vec{P} = m\vec{v}$

$\therefore \quad \vec{P} = 3(2\hat{i}+2\hat{j}-\hat{k})$

$= 6\hat{i}+6\hat{j}-3\hat{k}$

আবার, কৌণিক ভরবেগ, $\vec{L} = \vec{r}\times\vec{P}$

$\therefore \quad \vec{L} = (\hat{i}+\hat{j})\times(6\hat{i}+6\hat{j}-3\hat{k})$

$$= \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ 1 & 1 & 0 \\ 6 & 6 & -3 \end{vmatrix} = \hat{i}(-3-6\times0)+\hat{j}\{6\times0-1\times(-3)\}+\hat{k}(6-6) = -3\hat{i}+3\hat{j}$$

$= -3\hat{i}+3\hat{j}$

৭। একটি ঘূর্ণনরত কণার ব্যাসার্ধ ভেক্টর $\vec{r} = (2\hat{i} + 2\hat{j} - \hat{k})$m এবং প্রযুক্ত বল $\vec{F} = (6\hat{i} + 3\hat{j} - 3\hat{k})$N হলে টর্কের মান ও দিক নির্ণয় কর। [সি. বো. ২০১৫]

এখানে,

ব্যাসার্ধ ভেক্টর, $\vec{r} = (2\hat{i} + 2\hat{j} - \hat{k}$m

বল, $\vec{F} = (6\hat{i} + 3\hat{j} - 3\hat{k}$ N

টর্ক, $\vec{\tau} = ?$

টর্কের মান, $\tau = ?$

আমরা জানি, $\vec{\tau} = \vec{r} \times \vec{F}$

$$= \begin{vmatrix} i & j & k \\ 2 & 2 & -1 \\ 6 & 3 & -3 \end{vmatrix}$$

$$= \hat{i}(-6+3) - \hat{j}(-6+6) + \hat{k}(6-12)$$

$$= -3\hat{i} - 6\hat{k}$$

$$\therefore \quad \vec{\tau} = -(3\hat{i} + 6\hat{k})\text{N-m}$$

τ-এর মান $= \sqrt{(-3)^2 + (-6)^2} = \sqrt{9+36} = \sqrt{45}$

উত্তর : $-(3\hat{i} + 6\hat{k})$N-m, $\sqrt{45}$

৮। $\vec{P}$ ও $\vec{Q}$ ভেক্টর দুটির মধ্যবর্তী কোণ α হলে প্রমাণ কর—

$$\tan\alpha = \frac{|\vec{P} \times \vec{Q}|}{\vec{P} \cdot \vec{Q}}.$$

আমরা জানি,

$|\vec{P} \times \vec{Q}| = PQ\sin\alpha$ এবং $\vec{P} \cdot \vec{Q} = PQ\cos\alpha$

$$\therefore \quad \frac{|\vec{P} \times \vec{Q}|}{\vec{P} \cdot \vec{Q}} = \frac{PQ\sin\alpha}{PQ\cos\alpha} = \tan\alpha$$ (প্রমাণিত)

৯। একটি সামান্তরিকের ক্ষেত্রফল নির্ণয় কর যার কর্ণ দুইটি যথাক্রমে $\vec{A} = 3\hat{i} + \hat{j} - 2\hat{k}$ এবং $\vec{B} = \hat{i} - 3\hat{j} + 4\hat{k}$।

অথবা, $\vec{A} = 3\hat{i} + \hat{j} - 2\hat{k}$ এবং $\vec{B} = \hat{i} - 3\hat{j} + 4\hat{k}$ দ্বারা একটি সামান্তরিকের দুটি সন্নিহিত বাহু নির্দেশিত হলে সামান্তরিকের ক্ষেত্রফল নির্ণয় কর। [রা. বো. ২০১২]

আমরা জানি,

সামান্তরিকের ক্ষেত্রফল $= \frac{1}{2} \times |\vec{A} \times \vec{B}|$

$$\vec{A} \times \vec{B} = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ 3 & 1 & -2 \\ 1 & -3 & 4 \end{vmatrix} = \hat{i}(4-6) - \hat{j}(12+2) + \hat{k}(-9-1) = -2\hat{i} - 14\hat{j} - 10\hat{k}$$

$$\therefore \quad \frac{1}{2} \times |\vec{A} \times \vec{B}| = \frac{1}{2}(\sqrt{(-2)^2 + (-14)^2 + (-10)^2}$$

$$= \frac{1}{2} \times \sqrt{300} = 8.66$$

১০। $\vec{P} = 4\hat{i} + 3\hat{j} + \hat{k}$ এবং $\vec{Q} = 2\hat{i} + \hat{j} + 5\hat{k}$; $\vec{P}$ ও $\vec{Q}$ ভেক্টরদ্বয় একটি ত্রিভুজের সন্নিহিত বাহু নির্দেশ করলে ত্রিভুজটির ক্ষেত্রফল কত ?

আমরা জানি,

ত্রিভুজের ক্ষেত্রফল $= \frac{1}{2} \times |\vec{P} \times \vec{Q}|$

$$\vec{P} \times \vec{Q} = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ 4 & 3 & 1 \\ 2 & 1 & 5 \end{vmatrix} = \hat{i}\,(15-1) - \hat{j}\,(20-2) + \hat{k}\,(4-6) = 14\hat{i} - 18\hat{j} - 2\hat{k}$$

$\therefore \quad |\vec{P} \times \vec{Q}| = \sqrt{(14)^2 + (-18)^2 + (-2)^2} = 22{\cdot}90$

$\therefore \quad$ ত্রিভুজের ক্ষেত্রফল $= \frac{1}{2} \times 22{\cdot}90 = 11{\cdot}45$ একক।

হিসাব কর : $\vec{A} = 3\hat{i} + \hat{j} - 2\hat{k}$, $\vec{B} = \hat{i} - 3\hat{j} + 4\hat{k}$ এবং $\vec{C} = 2\hat{i} + 3\hat{j} - \hat{k}$ হলে ভেক্টর তিনটি সমতলীয় কিনা প্রমাণ কর।

Hints : আমরা জানি,

$\vec{A} \cdot (\vec{B} \times \vec{C}) = 0$ হলে ভেক্টর তিনটি সমতলীয় হবে।

২·৯ পদার্থবিজ্ঞানে ক্যালকুলাস
Calculus in physics

ক্যালকুলাস হলো পরিবর্তনের গাণিতিক অধ্যয়ন। এর দুটি প্রধান শাখা রয়েছে—ডিফারেনসিয়াল ক্যালকুলাস (Differential calculus) ও ইন্টিগ্রাল ক্যালকুলাস (Integral calculus)। বিজ্ঞানী নিউটন সর্বপ্রথম তাত্ত্বিক পদার্থ-বিজ্ঞানে ডিফারেনসিয়াল ক্যালকুলাস প্রয়োগ করেন।

গুরুত্ব : পদার্থবিজ্ঞানে ক্যালকুলাস-এর গুরুত্ব অপরিহার্য। অনেক বাস্তব প্রক্রিয়া ডেরিভেটিভস যুক্ত সমীকরণ দ্বারা ব্যাখ্যা করা হয়। সেই সমীকরণগুলোকে ব্যবকলনীয় (ডিফারেনসিয়াল) সমীকরণ বলে। পদার্থবিজ্ঞান সময়ের সাথে রাশির পরিবর্তন ও বিকাশের পদ্ধতির সাথে সম্পর্কিত। কতিপয় গুরুত্বপূর্ণ ধারণার সম্যক জ্ঞানের জন্য time derivative-এর ধারণা থাকা আবশ্যক। বিশেষত নিউটনীয় পদার্থবিদ্যায় একটি বস্তুর অবস্থানের time derivative গুরুত্বপূর্ণ।

বেগ বস্তুর সরণের time derivative

ত্বরণ বস্তুর বেগের time derivative

ব্যবহার :

I. বেগ, ত্বরণ, বক্ররেখার ঢাল ইত্যাদি হিসাবের জন্য ডিফারেনসিয়াল ক্যালকুলাস প্রয়োগ করা হয়।

II. ক্ষেত্রফল, আয়তন, ভরকেন্দ্র, কাজ এবং চাপ ইত্যাদি হিসাবের জন্য ইন্টিগ্রাল ক্যালকুলাস ব্যবহার করা হয়। স্থান, কাল এবং গতির প্রকৃতি সম্বন্ধে সম্যক জ্ঞান অর্জনের জন্যও ক্যালকুলাস ব্যবহার করা হয়।

উদাহরণ :

দেয়া আছে, একটি সরলরেখার উপর বস্তুর অবস্থান

$$x(t) = -16t^2 + 16t + 32$$

তাহলে বস্তুর বেগ, $v = \frac{dx(t)}{dt} = \dot{x}(t) = -32t + 16$

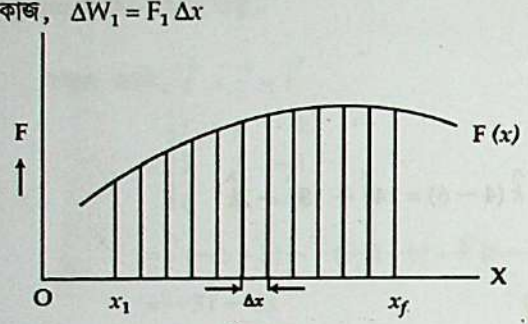
এবং ত্বরণ, $a = \frac{dv}{dt} = \ddot{x}(t) = -32$

নিউটনের গতির দ্বিতীয় সূত্র সাধারণ ব্যবকলনীয় (ডিফারেনসিয়াল) সমীকরণের মাধ্যমে নিম্নোক্তভাবে প্রকাশ করা যায়

$$F(t) = m\frac{d^2x}{dt^2}$$

ইন্টিগ্রাল ক্যালকুলাস-এর সাহায্যে পরিবর্তী বল দ্বারা কাজ নির্ণয় : ধরি, একটি বস্তুর ওপর একটি পরিবর্তনশীল বল x-অক্ষ বরাবর ক্রিয়াশীল। বলটির মান বস্তুটির অতিক্রান্ত দূরত্ব x-এর ওপর নির্ভর করে অর্থাৎ F হলো দূরত্ব x-এর একটি অপেক্ষক। চিত্র ২·৪০-এ x-এর বিভিন্ন মানের জন্য $F(x)$-এর আনুষঙ্গিক মান নিয়ে লেখ দেখানো হয়েছে।

মোট সরণ Δx প্রস্থের ক্ষুদ্র ক্ষুদ্র n সংখ্যক সমান অংশে বিভক্ত, যেখানে x_i থেকে $x_i + \Delta x$ পর্যন্ত ক্ষুদ্র সরণ হচ্ছে Δx। এই ক্ষুদ্র সরণকালে বলের মান প্রায় ধ্রুব থাকে এবং এই ধ্রুব মান F_1। সুতরাং এই অংশে এই বল দ্বারা সম্পন্ন ক্ষুদ্র কাজ, $\Delta W_1 = F_1 \Delta x$



চিত্র ২.৪০

অনুরূপভাবে দ্বিতীয় অংশে $x_i + \Delta x$ থেকে $x_i + 2\Delta x$ পর্যন্ত ক্ষুদ্র সরণ Δx। এই ক্ষুদ্র সরণকালে ধ্রুব বল F_2। সুতরাং দ্বিতীয় অংশে বল দ্বারা কৃত কাজ, $\Delta W_2 = F_2 \Delta x$। বস্তুটিকে x_i থেকে x_f পর্যন্ত সরাতে $F(x)$ বল দ্বারা কৃত মোট কাজ,

$$W = \Delta W_1 + \Delta W_2 + \Delta W_3 + \ldots + \Delta W_N$$
$$= F_1\Delta x + F_2\Delta x + F_3\Delta x + \ldots + F_N\Delta x$$
$$= \sum_{K=1}^{N} F_K \Delta x \quad \ldots \quad \ldots \qquad (2.25)$$

Δx-কে যত ক্ষুদ্র থেকে ক্ষুদ্রতর তথা N-এর মান যত বেশি হবে হিসাবকৃত কাজের মান তত সঠিক হবে। আমরা বল $F(x)$ দ্বারা কৃত কাজের সঠিক মান পেতে পারি যদি পরিমাপের সীমার মধ্যে Δx শূন্য থাকে এবং N অসীম হয়। তাহলে সঠিক ফল হবে,

$$W = \lim_{\Delta x \to 0} \sum_{K=1}^{N} F_K \Delta x \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \qquad (2.26)$$

কিন্তু ক্যালকুলাসের ভাষায় $\lim_{\Delta x \to 0} \sum_{K=1}^{N} F_K \Delta x$ রাশিটি হচ্ছে

$\int_{x_i}^{x_f} F(x)\, dx$ যা x_i থেকে x_f পর্যন্ত x-এর সমাকলন (Integration) নির্দেশ করে।

সুতরাং সমীকরণ (2.26) দাঁড়ায়,

$$W = \int_{x_i}^{x_f} F(x)\, dx \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \qquad (2.27)$$

সংখ্যাগতভাবে এই রাশিটি হচ্ছে বল বক্ররেখা এবং x_i ও x_f সীমার মধ্যে অবস্থিত x-অক্ষের অন্তর্গত ক্ষেত্রের ক্ষেত্রফল। সুতরাং সমাকলনের সাহায্যে কাজ এবং ক্ষেত্রফল নির্ণয় করা যায়।

২.১০ ভেক্টর ক্যালকুলাস
Vector calculus

২.১০.১ ভেক্টর অন্তরীকরণ বা অবকলন বা ভেক্টর ডেরিভেটিভ
Vector differentiation or vector derivatives

ভেক্টর অন্তরীকরণ বা অবকলন বা ভেক্টর ডেরিভেটিভ আলোচনার পূর্বে কয়েকটি প্রয়োজনীয় বিষয় জানা দরকার।

(ক) ক্যালকুলাস (Calculus) : বিজ্ঞানের ভাষায় ক্যালকুলাস হলো অবিরত পরিবর্তনশীল ক্ষুদ্রাতিক্ষুদ্র অংশ গণনার একটি শাস্ত্র। আধুনিক গণিতে এটি একটি গুরুত্বপূর্ণ শাখা।

ক্যালকুলাস দুভাগে বিভক্ত—

(১) অন্তরীকরণ বা অবকলন ক্যালকুলাস (Differential calculus),

(২) যোগজীকরণ বা সমাকলন ক্যালকুলাস (Integral calculus)

(খ) অপারেটর (Operator) : অপারেটর একটি ইংরেজি শব্দ। এর অভিধানগত অর্থ হলো **'চলক'** বা **'সংঘটক'** বা **'কার্যকারক'**। কিন্তু বিজ্ঞানের ভাষায় অপারেটর এক ধরনের **প্রতীক** বা **সংকেত**। এর নিজস্ব কোনো মান নেই। যেমন বর্গ (^{2}), ঘন (^{3}), বর্গমূল ($\sqrt{\ }$), sine, log ইত্যাদি। তবে এরা যখন অন্য কোনো রাশির সাথে যুক্ত হয় তখন একটি নির্দিষ্ট মান বহন করে। উদাহরণস্বরূপ বলা যায় $3^2 = 9$, $3^3 = 27$, $\sqrt{25} = 5$, $\sin 30° = 0{\cdot}5$ ইত্যাদি। আরও সোজা কথায় বলা যেতে পারে $(10\,\times)$ চিহ্নটির কোনো মান হয় না। কিন্তু (10×5) চিহ্নটির মান $= 50$। এর অর্থ 10-কে 5 দ্বারা গুণ করা। এখন যদি $(10\,\times)$ চিহ্নকে C দ্বারা সূচিত করা হয়, তবে $10 \times 5 = C5$ হয়। অতএব C একটি অপারেটর। যোগজীকরণও একটি অপারেটর। এর চিহ্ন $\int$ অথবা Σ।

সংজ্ঞা : যে গাণিতিক প্রকাশ বা চিহ্নের দ্বারা একটি রাশিকে অন্য একটি রাশিতে রূপান্তর করা যায় বা কোনো পরিবর্তনশীল রাশির ব্যাখ্যা দেয়া যায় তাকে অপারেটর বলে।

(গ) ভেক্টর ডিফারেনশিয়াল অপারেটর ∇ : ভেক্টর ডিফারেনশিয়াল অপারেটরটি স্যার হ্যামিলটন প্রথম আবিষ্কার করেন। গিব্‌স এাকে 'ডেল' নামকরণ করেন। এর অন্য নাম ন্যাবলা। ভেক্টর ডিফারেনশিয়াল অপারেটর নিম্নোক্তভাবে প্রকাশ করা হয় :

$$\text{ডেল, } \vec{\nabla} = \frac{\partial}{\partial x}\hat{i} + \frac{\partial}{\partial y}\hat{j} + \frac{\partial}{\partial z}\hat{k}$$

সাধারণ ভেক্টরের মতো ভেক্টর ডিফারেনশিয়াল অপারেটররেও ভেক্টর ধর্ম রয়েছে। ইহা কোনো একটি রাশির ওপর ক্রিয়া করে নতুন একটি রাশির সৃষ্টি করে। যেহেতু ভেক্টর ও স্কেলার উভয় রাশিকে অন্তরীকরণ করা যায়, তাই অন্তরীকরণ অপারেটর ভেক্টর ও স্কেলার উভয় ক্ষেত্রে প্রযোজ্য।

$$\text{তবে, } \vec{\nabla}.\vec{\nabla} = \nabla^2 = \left(\frac{\partial}{\partial x}\hat{i} + \frac{\partial}{\partial y}\hat{j} + \frac{\partial}{\partial z}\hat{k}\right)\cdot\left(\frac{\partial}{\partial x}\hat{i} + \frac{\partial}{\partial y}\hat{j} + \frac{\partial}{\partial z}\hat{k}\right)$$

$$= \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$$, একটি স্কেলার রাশি। এখানে $\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z}$ আংশিক অন্তরীকরণ বুঝায়।

স্কেলার ফাংশনের গ্রেডিয়েন্ট, ভেক্টর ফাংশনের ডাইভারজেন্স বা ভেক্টর ফাংশনের কার্ল সংজ্ঞায়িত করার জন্য এই অপারেটরটি ব্যবহার করা হয়।

২·১০·২ ভেক্টর অন্তরক অপারেটরকে উপাংশের সাহায্যে প্রকাশ

Representation of vector differential operator in terms of components

বিভিন্ন উপাংশের সাহায্যে ভেক্টর অন্তরক অপারেটরকে লেখা যায়—

$\frac{d}{dx}, \frac{d}{dy}$ এবং $\frac{d}{dz}$ আকারে। এখানে $\frac{d}{dx}, \frac{d}{dy}, \frac{d}{dz}$ এর কোনো অর্থ নেই। কিন্তু যখন ইহা x, y, z এর ওপর ক্রিয়া করে তখন $\frac{dx}{dx}, \frac{dy}{dy}$ এবং $\frac{dz}{dz}$ আকারে লেখা হয় এবং ইহা অর্থপূর্ণ হয়। এখন y যদি একটি রাশি হয় যার মান x এর উপর নির্ভরশীল অর্থাৎ y x এর অপেক্ষক $y(x)$, তাহলে x এর সাপেক্ষে y কে অন্তরীকরণ করা যাবে এবং পাওয়া যাবে $\frac{dy}{dx}$। এখানে $\frac{dy}{dx}$ হচ্ছে x এর ক্ষুদ্রাতিক্ষুদ্র পরিবর্তনের জন্য x এর সাপেক্ষে y এর পরিবর্তনের হার। একে x এর সাপেক্ষে y এর অন্তরকও বলে। আবার Δt এর মান শূন্যের কাছাকাছি হলে x এর ক্ষুদ্রাতিক্ষুদ্র পরিবর্তনের জন্য t এর সাপেক্ষে x এর পরিবর্তনের হারকে x এর সাপেক্ষে t এর অন্তরক $\frac{dx}{dt}$ বলে। অর্থাৎ

$$\lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta \vec{x}}{\Delta t} = \frac{d\vec{x}}{dt}$$

এখন x-কে উপাংশে প্রকাশ করলে লেখা যায়,

$\vec{x} = \hat{i}x_1 + \hat{j}y_1 + \hat{k}z_1$; এখানে x_1, y_1, z_1 হলো যথাক্রমে X, Y ও Z অক্ষের দিকে $\vec{x}$ ভেক্টরের উপাংশের মান। x_1, y_1, z_1 উপাংশগুলো সময় t-এর অপেক্ষক কিন্তু $\hat{i}, \hat{j}, \hat{k}$ ধ্রুবক এবং সময়ের সাপেক্ষে এদের কোনো পরিবর্তন নাই; অর্থাৎ এদের পরিবর্তনের হার শূন্য। অতএব $\vec{x}$-কে উপাংশে প্রকাশ করলে এর ব্যবকলন হবে,

$$\frac{d\vec{x}}{dt} = \hat{i}\frac{dx_1}{dt} + \hat{j}\frac{dy_1}{dt} + \hat{k}\frac{dz_1}{dt} \quad \ldots \quad \ldots \quad (2.28)$$

২·১০·৩ অবস্থান ভেক্টর হতে বেগ ও ত্বরণ প্রতিপাদন

Derivation of velocity and acceleration from position vector

ধরা যাক, $\vec{r}$ একটি অবস্থান ভেক্টর। $\vec{r} = \hat{i}x + \hat{j}y + \hat{k}z$

অতি ক্ষুদ্র সময়ে $\vec{r}$-এর পরিবর্তনের হারকে বেগ $\vec{v}$ বলা হয়।

$$\text{সুতরাং, } \vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt} = \hat{i}\frac{dx}{dt} + \hat{j}\frac{dy}{dt} + \hat{k}\frac{dz}{dt} \quad \ldots \quad \ldots \quad (2.29)$$

আবার, অতি ক্ষুদ্র সময়ে বেগ $\vec{v}$-এর পরিবর্তনের হার হলো ত্বরণ,

$$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{d}{dt}\left(\frac{dx}{dt}\right)\hat{i} + \frac{d}{dt}\left(\frac{dy}{dt}\right)\hat{j} + \frac{d}{dt}\left(\frac{dz}{dt}\right)\hat{k}$$

$$\therefore \vec{a} = \frac{d^2x}{dt^2}\hat{i} + \frac{d^2y}{dt^2}\hat{j} + \frac{d^2z}{dt^2}\hat{k} \quad \dots \quad \dots \quad (2.30)$$

কোনো স্কেলার রাশিকে অন্তরীকরণ করার সাধারণ নিয়ম নিম্নরূপ :

(ক) প্রথমে চল রাশিটির সহগ সংখ্যাকে ঘাত দ্বারা গুণ করতে হবে।

(খ) পরে চল রাশির ঘাতের মান হতে '1' বিয়োগ করতে হবে।

উদাহরণ : মনে করি, দূরত্ব $s = 16t^2$। এখানে সহগ 16, t চল রাশি এবং 2 হলো ঘাত। ওপরের নিয়ম অনুসারে প্রথমে সহগ 16-কে ঘাত 2 দ্বারা গুণন করে পাওয়া যাবে 32 এবং চল রাশির ঘাত 2 হতে 1 বিয়োগ করলে পাওয়া যাবে 1।

$$\therefore \frac{ds}{dt} = v = 32t$$

গাণিতিক উদাহরণ ২.১০

১। দুটি ভেক্টর $\vec{A} = \hat{i}t^2 - \hat{j}t + (2t+1)\hat{k}$ ও $\vec{B} = 5\hat{i}t + \hat{j}t - \hat{k}t^3$ হলে $\frac{d}{dt}(\vec{A}\cdot\vec{B})$ ও $\frac{d}{dt}(\vec{A}\times\vec{B})$ নির্ণয় কর।

প্রশ্নানুযায়ী, $(\vec{A}\cdot\vec{B}) = \{\hat{i}t^2 - \hat{j}t + (2t+1)\hat{k}\}\cdot(5\hat{i}t + \hat{j}t - \hat{k}t^3)$

$$= 5t^3 - t^2 - (2t+1)t^3$$
$$= 5t^3 - t^2 - 2t^4 - t^3$$
$$= 4t^3 - 2t^4 - t^2$$

$$\therefore \frac{d}{dt}(\vec{A}\cdot\vec{B}) = \frac{d}{dt}(4t^3 - 2t^4 - t^2)$$
$$= 12t^2 - 8t^3 - 2t$$

পুনরায়, $(\vec{A}\times\vec{B}) = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ t^2 & -t & (2t+1) \\ 5t & t & -t^3 \end{vmatrix}$

$$= \hat{i}\begin{vmatrix} -t & (2t+1) \\ t & -t^3 \end{vmatrix} - \hat{j}\begin{vmatrix} t^2 & (2t+1) \\ 5t & -t^3 \end{vmatrix} + \hat{k}\begin{vmatrix} t^2 & -t \\ 5t & t \end{vmatrix}$$

$$= \hat{i}(t^4 - 2t^2 - t) - \hat{j}(-t^5 - 10t^2 - 5t) + \hat{k}(t^3 + 5t^2)$$
$$= \hat{i}(t^4 - 2t^2 - t) + \hat{j}(t^5 + 10t^2 + 5t) + \hat{k}(t^3 + 5t^2)$$

$$\therefore \frac{d}{dt}(\vec{A}\times\vec{B}) = \hat{i}(4t^3 - 4t - 1) + \hat{j}(5t^4 + 20t + 5) + \hat{k}(3t^2 + 10t)$$

২। $\vec{A}$ একটি ধ্রুবক মানের ভেক্টর হলে দেখাও যে $\frac{d\vec{A}}{dt}$, $\vec{A}$-এর সঙ্গে লম্বভাবে আছে।

$|\vec{A}|$ = ধ্রুবক $\quad \therefore \vec{A}\cdot\vec{A} = A^2$ = ধ্রুবক

$$\therefore \frac{d}{dt}(\vec{A}\cdot\vec{A}) = 0$$

বা, $\vec{A}\cdot\frac{d\vec{A}}{dt} + \frac{d\vec{A}}{dt}\cdot\vec{A} = 0$

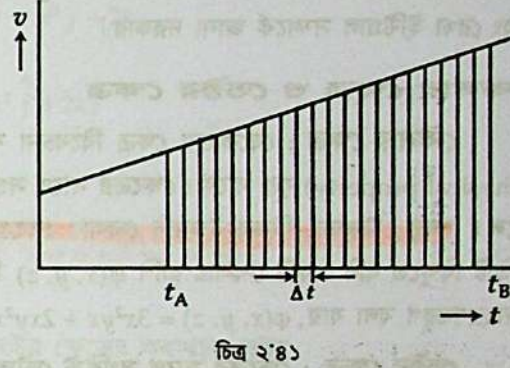
বা, $2\vec{A}\cdot\frac{d\vec{A}}{dt} = 0$ বা $\frac{d\vec{A}}{dt}\cdot(\vec{A} + \vec{A}) = 0$

সুতরাং, $\frac{d\vec{A}}{dt}$ ভেক্টরটি $\vec{A}$ ভেক্টরের সঙ্গে লম্বভাবে আছে।

যোগজীকরণ বা সমাকলন
Integration

মনে করি, একটি বস্তু নির্দিষ্ট দিকে গতিশীল অর্থাৎ এটি সরলরেখা বরাবর চলছে। বেগের দিক নির্দিষ্ট হলেও এর মান ভিন্ন। ধরা যাক, বেগের মান v সময় t-এর ওপর নির্ভরশীল। অর্থাৎ v সময় t-এর অপেক্ষক (function)। একে $v(t)$ হিসেবে প্রকাশ করা হয়।

ধরা যাক, আদি সময় t_A এবং শেষ সময় t_B। এই সময় ব্যবধানে বস্তুটির অতিক্রান্ত দূরত্ব নির্ণয় করব। এখন আমরা সময় ব্যবধান $t_B - t_A$ কে N সংখ্যক অতি ক্ষুদ্র ক্ষুদ্র সমান অংশ Δt এ বিভক্ত করি। ধরি আদি সময় t_A হতে প্রথম ক্ষুদ্রাংশ $t_A + \Delta t$ এর মধ্যে সময় ব্যবধান Δt। এই সময় ব্যবধান এত ক্ষুদ্র যে এই অংশে $v(t)$ এর পরিবর্তন অতি নগণ্য; সুতরাং এই ক্ষুদ্র সময় ব্যবধানকালে $v(t)$ এর মান প্রায় ধ্রুব থাকে। ধরা যাক $v(t)$-এর এই ধ্রুব মান v_1। Δt সময় ব্যবধানে অতিক্রান্ত দূরত্ব Δs_1 হলে আমরা পাই,



চিত্র ২.৪১

$$\Delta s_1 = v_1 \Delta t$$

অনুরূপভাবে দ্বিতীয় অংশ, তৃতীয় অংশের জন্য সময় ব্যবধান হবে Δt এবং অতিক্রান্ত দূরত্ব হবে যথাক্রমে $\Delta s_2 = v_2\Delta t$, $\Delta s_3 = v_3\Delta t$। N সংখ্যক অংশের জন্য অতিক্রান্ত দূরত্ব হবে $\Delta s_N = v_N\Delta t$। এখন t_A হতে t_B সময় ব্যবধানে বস্তুটির অতিক্রান্ত দূরত্ব s হবে, $\Delta s_1, \Delta s_2, \Delta s_3$ .... Δs_N পদগুলোর সমষ্টি।

সুতরাং, $s = \Delta s_1 + \Delta s_2 + \Delta s_3 + \ldots + \Delta s_N$

বা, $s = v_1\Delta t + v_2\Delta t + v_3\Delta t + \ldots + v_N\Delta t$

বা, $$s = \sum_{n=1}^{N} v_n \Delta t \qquad \ldots \qquad \ldots \qquad \ldots \quad (2.31)$$

এখানে লক্ষণীয় যে আমরা ক্ষুদ্র সময় ব্যবধান Δt এর জন্য বেগের মান ধরেছি প্রায় ধ্রুব। এই Δt সময়ে বেগের মান যদি পুরোপুরি ধ্রুব থাকত তবে সমীকরণ (2.31) হতে আমরা সঠিক দূরত্ব নির্ণয় করতে পারতাম। এখন সময় ব্যবধান Δt যত ক্ষুদ্রতর হবে v-এর মান ততই ধ্রুব মানের খুবই কাছাকাছি হবে। অতিক্রান্ত দূরত্বের মান সঠিক পেতে পারি যদি পরিমাপের সীমার মধ্যে Δt-কে শূন্য এবং ক্ষুদ্র অংশগুলোর সংখ্যা N অসীম হয়। সেক্ষেত্রে আমরা লিখতে পারি,

$$s = \lim_{\Delta t \to 0} \sum_{n=1}^{N} v_n \Delta t$$

ক্যালকুলাসে $\lim\limits_{\Delta t \to 0} \sum\limits_{n=1}^{N} v_n \Delta t$ রাশিকে লেখা হয় $\int_{t_A}^{t_B} v(t)dt$

$\int_{t_A}^{t_B} v(t)dt$ রাশিটি t_A হতে t_B পর্যন্ত t-এর সাপেক্ষে $v(t)$ এর সমাকলন নির্দেশ করে। সমাকলন এক ধরনের যোগজীকরণ Σ বা $\int$ চিহ্ন সমষ্টিকরণ বা যোগজীকরণ বুঝায়।

অতএব, $$s = \int_{t_A}^{t_B} v(t)dt \qquad \ldots \qquad \ldots \qquad \ldots \quad (2.32)$$

$v(t)$ কে যোজ্য রাশি (Integrand) বলা হয়। $v(t)$ এর পরে dt দ্বারা বুঝানো হয়েছে যে, যোগজীকরণটি করতে হবে t-এর সাপেক্ষে।

অন্তরীকরণ বা অবকলন ও যোগজীকরণ পরস্পর বিপরীত ক্রিয়া। যেমন—

$$\frac{d}{dx}(\sin x) = \cos x$$

আবার, $\int \cos x \, dx = \sin x$

অর্থাৎ $\sin x$-কে অন্তরীকরণ করলে $\cos x$ পাওয়া যায়, আবার $\cos x$-কে যোগজীকরণ করলে $\sin x$ পাওয়া যায়।

২·১১ ভেক্টর অপারেটরের ব্যবহার
Uses of vector operators

গ্রেডিয়েন্ট (Gradient)

গ্রেডিয়েন্টের সংজ্ঞা এবং ব্যাখ্যা দেয়ার পূর্বে ভেক্টর ডিফারেনশিয়াল অপারেটর ডেল ($\vec{\nabla}$), স্কেলার ও ভেক্টর ক্ষেত্র এবং রেখা ইন্টিগ্রাল সম্পর্কে জানা দরকার।

স্কেলার ক্ষেত্র ও ভেক্টর ক্ষেত্র

স্কেলার ক্ষেত্র : যেকোনো ক্ষেত্র বিবেচনা করা হোক না কেন, ক্ষেত্রের প্রতিটি বিন্দুর সাথে একটি ভৌত গুণ (physical property) যুক্ত থাকে। **ক্ষেত্রের সাথে সংশ্লিষ্ট ভৌত গুণ যদি স্কেলার হয়, তবে ওই ক্ষেত্রকে স্কেলার ক্ষেত্র বলে।** ঘনত্ব, উষ্ণতা, বিভব ইত্যাদি স্কেলার ক্ষেত্রের উদাহরণ। অন্যভাবে বলা যায় কোনো স্থানের কোনো অঞ্চলের প্রতিটি বিন্দুতে যদি একটি স্কেলার রাশি $\varphi(x, y, z)$ বিদ্যমান থাকে, তবে ওই অঞ্চলকে ওই রাশির স্কেলার ক্ষেত্র বলে। উদাহরণস্বরূপ বলা যায়, $\varphi(x, y, z) = 3x^2yx + 2xy^2x + 5zy^2)$ স্কেলার ক্ষেত্র নির্দেশ করে।

ভেক্টর ক্ষেত্র : ক্ষেত্রের সাথে সংশ্লিষ্ট ভৌত গুণ যদি ভেক্টর হয়, তবে ওই ক্ষেত্রকে ভেক্টর ক্ষেত্র বলে। বেগ, তড়িৎ প্রাবল্য, মহাকর্ষ প্রাবল্য ইত্যাদি ভেক্টর ক্ষেত্রের উদাহরণ। অন্যভাবে কোনো স্থানের কোনো অঞ্চলের প্রতিটি বিন্দুতে যদি একটি ভেক্টর রাশি $\vec{F}(x, y, z)$ বিদ্যমান থাকে, তবে ওই অঞ্চলকে ভেক্টর ক্ষেত্র বলে।

উদাহরণ : $\vec{F}(x, y, z) = ax^2y\,\hat{i} + bx^2yz^2\,\hat{j} + 4zx^2\,\hat{k}$ ভেক্টর ক্ষেত্র নির্দেশ করে।

রেখা ইন্টিগ্রাল : $\vec{V}(x, y, z)$ একটি ভেক্টর ক্ষেত্র হলে কোনো আবদ্ধ পথে ভেক্টরের রেখাজনিত ইন্টিগ্রাল $\oint \vec{V} \cdot d\vec{l}$; এখানে $d\vec{l}$ আবদ্ধ পথের একটি অংশ যার পরিমাণ dl এবং অভিমুখ ওই অংশের স্পর্শক বরাবর।

স্কেলার ক্ষেত্রের গ্রেডিয়েন্ট

ধরা যাক, $\varphi(x, y, z)$ একটি ব্যবকলনযোগ্য স্কেলার ক্ষেত্র নির্দেশ করে। তাহলে φ-এর গ্রেডিয়েন্টকে $\vec{\nabla}\varphi$ দ্বারা প্রকাশ করা হয়।

$$\text{অর্থাৎ, } \operatorname{grad}\varphi = \vec{\nabla}\varphi = \left(\hat{i}\frac{\partial}{\partial x} + \hat{j}\frac{\partial}{\partial y} + \hat{k}\frac{\partial}{\partial z}\right)\varphi$$

$$= \frac{\hat{i}\,\partial\varphi}{\partial x} + \frac{\hat{j}\,\partial\varphi}{\partial y} + \frac{\hat{k}\,\partial\varphi}{\partial z}$$

ইহা একটি ভেক্টর রাশি। এর মান অবস্থানের সাপেক্ষে ওই স্কেলার রাশির সর্বোচ্চ বৃদ্ধি হার নির্দেশ করে। এই বৃদ্ধি হারের দিকই হবে রাশিটির গ্রেডিয়েন্টের দিক। বিভিন্ন অক্ষের সাপেক্ষে কোনো স্কেলার ফাংশনের ঢালই হলো গ্রেডিয়েন্ট।

সংজ্ঞা : গ্রেডিয়েন্ট হলো একটি ভেক্টর ক্ষেত্র যা অদিক রাশির সর্বাধিক বৃদ্ধির হার প্রকাশ করে। একে স্কেলার অপেক্ষকও বলে।

গ্রেডিয়েন্টের ভৌত তাৎপর্য (Physical significances of gradient)

(i) স্কেলার রাশির গ্রেডিয়েন্ট একটি ভেক্টর ক্ষেত্র অর্থাৎ একটি ভেক্টর রাশি।

(ii) উক্ত ভেক্টর রাশির মান ওই স্কেলার রাশির সর্বাধিক বৃদ্ধির হারের সমান।

(iii) স্কেলার রাশির পরিবর্তন শুধু বিন্দুর স্থানাঙ্কের ওপরই নির্ভর করে না, যেদিকে এর পরিবর্তন দেখানো হয় সেদিকের ওপরও নির্ভর করে।

গাণিতিক উদাহরণ ২.১১

১। যদি $\vec{A} = 2x^2\hat{i} + 3yz\hat{j} - xz^2\hat{k}$ এবং $\varphi = 2z - x^3y$ হয়, তাহলে $(1, 1, -1)$ বিন্দুতে $\vec{A}.\nabla\varphi$ নির্ণয় কর।

আমরা পাই,

$$\vec{\nabla}\varphi = \left(\frac{\partial}{\partial x}\hat{i} + \frac{\partial}{\partial y}\hat{j} + \frac{\partial}{\partial z}\hat{k}\right)(2z - x^3y) = -3x^2y\,\hat{i} - x^3\,\hat{j} + 2\hat{k}$$

এখন, $\vec{A}\,.\,\vec{\nabla}\varphi = (2x^2\hat{i} + 3yz\hat{j} - xz^2\hat{k}).(-3x^2y\,\hat{i} - x^3\hat{j} + 2\hat{k})$

$$= -6x^4y - 3x^3yz - 2xz^2$$

$(1, 1, -1)$ বিন্দুতে

$$\vec{A}\,.\,\vec{\nabla}\varphi = -6(1)^4(1) - 3(1)^3(1)(-1) - 2(1)(-1)^2 = -6 + 3 - 2 = -5.$$

ডাইভারজেন্স (Divergence)

মনে করি, ত্রিমাত্রিক ব্যবস্থায় কোনো অঞ্চলে কোনো একটি ভেক্টর ক্ষেত্রের অবস্থান ভেক্টর $\vec{V}(x, y, z) = v_1(x, y, z)\,\hat{i} + v_2(x, y, z)\,\hat{j} + v_3(x, y, z)\,\hat{k}$, তাহলে ডেল ($\nabla$) অপারেটরের সাথে $\vec{V}$ এর স্কেলার গুণফলকে ওই ভেক্টর ক্ষেত্রের ডাইভারজেন্স বলে। ডাইভারজেন্সকে $\vec{\nabla}\,.\,\vec{V}$ বা div. $\vec{V}$ লিখে প্রকাশ করা হয়। এটি একটি স্কেলার রাশি। ডাইভারজেন্সের মাধ্যমে একটি ভেক্টর ক্ষেত্রকে স্কেলার ক্ষেত্রে রূপান্তর করা যায়। গাণিতিকভাবে লেখা যায়,

$$\vec{\nabla}\,.\,\vec{V} = \left(\hat{i}\frac{\partial}{\partial x} + \hat{j}\frac{\partial}{\partial y} + \hat{k}\frac{\partial}{\partial z}\right)\cdot(v_1\hat{i} + v_2\hat{j} + v_3\hat{k})$$

$$= \frac{\partial v_1}{\partial x} + \frac{\partial v_2}{\partial y} + \frac{\partial v_3}{\partial z} \text{ এটি স্কেলার রাশি।}$$

সংজ্ঞা : ভেক্টর ফাংশন বা ক্ষেত্রের ডাইভারজেন্সগুলো একটি স্কেলার ফাংশন বা ক্ষেত্র যা দ্বারা ভেক্টর ক্ষেত্রের কোনো বিন্দুতে ফ্লাক্সের প্রকৃতি (বহি/অন্ত) জানা যায়।

ডাইভারজেন্সের ভৌত ধর্ম (Physical properties of divergence)

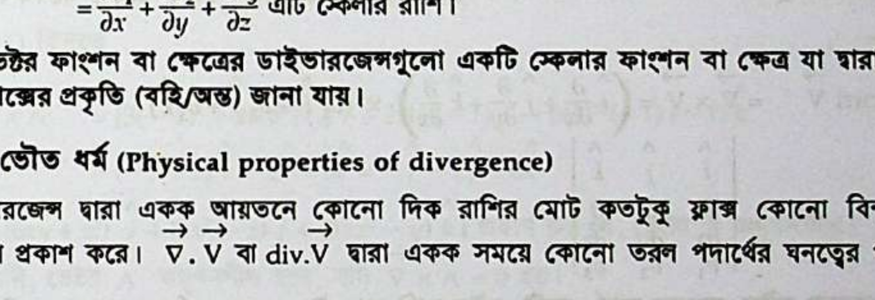
(i) ডাইভারজেন্স দ্বারা একক আয়তনে কোনো দিক রাশির মোট কতটুকু ফ্লাক্স কোনো বিন্দু অভিমুখি বা অপসারিত হচ্ছে তা প্রকাশ করে। $\vec{\nabla}.\vec{V}$ বা div.$\vec{V}$ দ্বারা একক সময়ে কোনো তরল পদার্থের ঘনত্বের পরিবর্তনের হার বুঝায়।

(ii) মান ধনাত্মক হলে, তরল পদার্থের আয়তন বৃদ্ধি পায়; ঘনত্বের হ্রাস ঘটে। অর্থাৎ $\vec{\nabla}.\vec{V}$ = '+' ve [চিত্র ২·৪২(ক)]।

(iii) মান ঋণাত্মক হলে, আয়তনের সংকোচন ঘটে; ঘনত্ব বৃদ্ধি পায়। অর্থাৎ $\vec{\nabla}.\vec{V}$ = '–' ve [চিত্র ২·৪২(খ)]।

(iv) মান শূন্য হলে, আগত ও নির্গত ফ্লাক্স সমান হয়। অর্থাৎ $\vec{\nabla}.\vec{V} = 0$ [চিত্র ২·৪২(গ)]।

(v) কোনো ভেক্টর ক্ষেত্রের ডাইভারজেন্স শূন্য হলে অর্থাৎ $\vec{\nabla}.\vec{V} = 0$ হলে, ওই ভেক্টর ক্ষেত্রকে সলিনয়ডাল (solenoidal) বলে।



(ক) ধনাত্মক ডাইভারজেন্স (খ) ঋণাত্মক ডাইভারজেন্স (গ) শূন্য ডাইভারজেন্স

চিত্র ২·৪২

গাণিতিক উদাহরণ ২.১২

১। $(1, -1, 1)$ অবস্থানে $\vec{A} = 3xyz^3\hat{i} + 2xy^2\hat{j} - x^3y^2z\hat{k}$-এর ডাইভারজেন্স নির্ণয় কর।

আমরা পাই, $$\vec{\nabla}.\vec{A} = \left(\frac{\partial}{\partial x}\hat{i} + \frac{\partial}{\partial y}\hat{j} + \frac{\partial}{\partial z}\hat{k}\right)\cdot(3xyz^3\hat{i} + 2xy^2\hat{j} - x^3y^2z\hat{k})$$
$$= \frac{\partial}{\partial x}(3xyz^3) + \frac{\partial}{\partial y}(2xy^2) + \frac{\partial}{\partial z}(-x^3y^2z)$$
$$= 3yz^3 + 4xy - x^3y^2$$

$(1, -1, 1)$ অবস্থানে,
$$\vec{\nabla}.\vec{A} = 3(-1)(1)^3 + 4(1)(-1) - (1)^3(-1)^2 = -3 - 4 - 1 = -8$$

২। p এর মান কত হলে $\vec{r} = (x + 3y)\hat{i} + (py - z)\hat{j} + (x - 2z)\hat{k}$ সলিনয়েড হবে ?

আমরা জানি, $\vec{\nabla}.\vec{r} = 0$ হলে $\vec{r}$ সলিনয়েড হবে।
$$\vec{\nabla}.\vec{r} = \left(\frac{\partial}{\partial x}\hat{i} + \frac{\partial}{\partial y}\hat{j} + \frac{\partial}{\partial z}\hat{k}\right)\cdot[(x + 3y)\hat{i} + (py - z)\hat{j} + \hat{k}(x - 2z)]$$
$$= \frac{\partial}{\partial x}(x + 3y) + \frac{\partial}{\partial y}(py - z) + \frac{\partial}{\partial z}(x - 2z) = 1 + p - 2 = p - 1$$
$$\therefore \vec{\nabla}.\vec{r} = p - 1 = 0 \text{ বা, } p = 1$$

কার্ল (Curl)

ধরা যাক, কোনো ত্রিমাত্রিক স্থানে কোনো বিন্দুর যথার্থ ভেক্টর ফাংশন $\hat{V}(x, y, z) = v_1\hat{i} + v_2\hat{j} + v_3\hat{k}$।

তাহলে অপারেটর ∇ এবং $\vec{V}$ এর ক্রস বা ভেক্টর গুণন দ্বারা তাৎক্ষণিকভাবে ঘূর্ণন অক্ষের দিকে একটি ভেক্টর পাওয়া যায়। এ জাতীয় গুণনকে **কার্ল** বলে। অর্থাৎ $\vec{V}$ যদি একটি অন্তরীকরণ যোগ্য ভেক্টর অপেক্ষক হয়, তাহলে $\vec{V}$ এর কার্ল হবে—
$$\text{curl } \vec{V} = \vec{\nabla}\times\vec{V} = \left(\hat{i}\frac{\partial}{\partial x} + \hat{j}\frac{\partial}{\partial y} + \hat{k}\frac{\partial}{\partial z}\right)\times(v_1\hat{i} + v_2\hat{j} + v_3\hat{k})$$
$$= \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ v_1 & v_2 & v_3 \end{vmatrix}$$

সংজ্ঞা : কোনো ভেক্টর ক্ষেত্রের কার্ল একটি ভেক্টর রাশি যা ওই ক্ষেত্রের ঘূর্ণনের সাথে সম্পর্কিত। ভেক্টর ক্ষেত্রে অবস্থিত একটি বিন্দুর চারদিকে এর লাইন ইনটিগ্রালের মান প্রতি একক ক্ষেত্রফলে সর্বোচ্চ হলে তা উক্ত বিন্দুতে ভেক্টর ক্ষেত্রের কার্ল প্রকাশ করে।

কার্লের ভৌত তাৎপর্য (Physical significances of curl)

(i) কার্ল একটি ভেক্টর রাশি। এর মান ওই ভেক্টর ক্ষেত্রে একক ক্ষেত্রের জন্য সর্বাধিক রেখা ইন্টিগ্রালের সমান। (রেখা ইন্টিগ্রালের সংজ্ঞা ২.১১ অনুচ্ছেদে দেওয়া আছে)

(ii) ভেক্টরটির দিক ওই ক্ষেত্রের ওপর অঙ্কিত লম্ব বরাবর ক্রিয়া করে।

(iii) কার্ল এর মাধ্যমে প্রাপ্ত কোনো ভেক্টরের মান ঘূর্ণন অক্ষের সাপেক্ষে কৌণিক বেগের দ্বিগুণ হয় বা রৈখিক বেগ $\vec{V}$ এর কার্ল কৌণিক বেগ $\vec{\omega}$ এর দ্বিগুণ হয়। অর্থাৎ

$\vec{V} = \vec{\omega}\times\vec{r}$ হলে, $\vec{\nabla}\times\vec{V} = 2\vec{\omega}$ হবে। এখানে $\vec{\omega}$ একটি ধ্রুব ভেক্টর।

(iv) কোনো ভেক্টরে কার্ল ওই ভেক্টরের ঘূর্ণন নির্দেশ করে। কোনো বিন্দুর চারদিকে ভেক্টরটি কতবার ঘুরে কার্ল তা নির্দেশ করে।

(v) কোনো ভেক্টর ক্ষেত্রের কার্ল-এর নতিমাত্রা বা কার্লের ডাইভারজেন্স (gradient) শূন্য।

অর্থাৎ $\vec{\nabla}.(\vec{\nabla}\times\vec{V}) = 0.$

(vi) কোনো ভেক্টরের কার্ল শূন্য হলে ভেক্টরটি অঘূর্ণনশীল হয়। অর্থাৎ $\vec{\nabla} \times \vec{F} = 0$ হলে $\vec{F}$ অঘূর্ণনশীল এবং সংরক্ষণশীল হয়।

(vii) কোনো ভেক্টরের কার্ল শূন্য না হলে ভেক্টরটি ঘূর্ণনশীল এবং অসংরক্ষণশীল হয় অর্থাৎ $\vec{\nabla} \times \vec{F} \neq 0$ হলে $\vec{F}$ ঘূর্ণনশীল এবং অসংরক্ষণশীল হয়।

গাণিতিক উদাহরণ ২.১৩

১। (1, 1, − 1) বিন্দুতে $\vec{A} = xz^2\,\hat{i} - 2x^3yz\,\hat{j} + 3yz^3\,\hat{k}$ এর কার্ল নির্ণয় কর।

আমরা পাই,

$$\vec{\nabla} \times \vec{A} = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ xz^2 & -2x^3yz & 3yz^3 \end{vmatrix}$$

$$= \left[\frac{\partial}{\partial y}(3yz^3) + \frac{\partial}{\partial z}(2x^3yz)\right]\hat{i} + \left[\frac{\partial}{\partial z}(xz^2) - \frac{\partial}{\partial x}(3yz^3)\right]\hat{j} + \left[\frac{\partial}{\partial x}(-2x^3yz) - \frac{\partial}{\partial y}(xz^2)\right]\hat{k}$$

$$= (3z^3 + 2x^3y)\,\hat{i} + (2xz)\,\hat{j} + (-6x^2yz)\,\hat{k}$$

$$= (3z^3 + 2x^3y)\,\hat{i} + 2xz\,\hat{j} - 6x^2yz\,\hat{k}$$

(1, 1, − 1) বিন্দুতে

$$\vec{\nabla} \times \vec{A} = [3(-1)^3 + 2(1)^3(1)]\,\hat{i} + 2(1)(-1)\,\hat{j} - 6(1)^2(+1)(-1)\,\hat{k}$$

$$= (-3+2)\,\hat{i} - 2\hat{j} + 6\hat{k} = -\hat{i} - 2\hat{j} + 6\hat{k}$$

২। $\vec{A} = (6xy + z^3)\,\hat{i} + (3x^2 - z)\,\hat{j} + (3xz^2 - y)\,\hat{k}$। প্রমাণ কর যে, ভেক্টর $\vec{A}$ অঘূর্ণনশীল।

আমরা জানি, ভেক্টর $\vec{A}$ অঘূর্ণনশীল হবে, যদি $\vec{\nabla} \times \vec{A} = 0$ হয়।

এখন,

$$\vec{\nabla} \times \vec{A} = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ (6xy + z^3) & (3x^2 - z) & (3xz^2 - y) \end{vmatrix}$$

$$= \hat{i}\left\{\frac{\partial}{\partial y}(3xz^2 - y) - \frac{\partial}{\partial z}(3x^2 - z)\right\} - \hat{j}\left\{\frac{\partial}{\partial x}(3xz^2 - y) - \frac{\partial}{\partial z}(6xy + z^3)\right\} + \hat{k}\left\{\frac{\partial}{\partial x}(3x^2 - z) - \frac{\partial}{\partial y}(6xy + z^3)\right\}$$

$$= \hat{i}\,\{(0-1) - (0-1)\} - \hat{j}\,\{(3z^2 - 0) - (0 + 3z^2)\} + \hat{k}\,\{(6x - 0) - (6x + 0)\}$$

$$= \hat{i}\,(-1+1) - \hat{j}\,(3z^2 - 3z^2) + \hat{k}\,(6x - 6x) = 0$$

$$\therefore \vec{\nabla} \times \vec{A} = 0$$

যেহেতু $\vec{\nabla} \times \vec{A} = 0$, কাজেই $\vec{A}$ ভেক্টরটি অঘূর্ণনশীল।

প্রয়োজনীয় গাণিতিক সূত্রাবলি

$\hat{i}.\hat{i} = \hat{j}.\hat{j} = \hat{k}.\hat{k} = 1$ ... ... (1)

$\hat{i}.\hat{j} = \hat{i}.\hat{k} = \hat{j}.\hat{i} = \hat{j}.\hat{k} = \hat{k}.\hat{i} = \hat{k}.\hat{j} = 0$ ... ... (2)

$\hat{i} \times \hat{j} \times \hat{k} = 0$ ... ... (3)

$\hat{i} \times \hat{j} = \hat{k}, \hat{j} \times \hat{k} = \hat{i}$ ... ... (4)

$\hat{k} \times \hat{i} = \hat{j}$ ... ... (5)

$\hat{i} \times \hat{k} = -\hat{j}$ ... ... (6)

$\hat{j} \times \hat{i} = -\hat{k}$ ... ... (7)

$\hat{k} \times \hat{j} = -\hat{i}$ ... ... (8)

$R = \sqrt{P^2 + Q^2 + 2PQ\cos\alpha}$ ... ... (9)

$\tan\theta = \dfrac{Q\sin\alpha}{P + Q\cos\alpha}$ ... ... (10)

$R_{max} = P + Q$ ... ... (11)

$R_{min} = P \sim Q$ ... ... (12)

$\vec{A}.\vec{B} = 0$ (লম্বের শর্ত) ... ... (13)

$\vec{A} \times \vec{B} = 0$ (সমান্তরালের শর্ত) ... ... (14)

$\vec{A}.\vec{B} = AB\cos\theta$ ... ... (15)

$\vec{A} \times \vec{B} = \hat{n}AB\sin\theta$ ... ... (16)

$|\vec{A} \times \vec{B}| = AB\sin\theta$ ... ... (17)

একক ভেক্টর, $\hat{n} = \dfrac{\vec{A}}{|\vec{A}|}$ ... ... (18)

ভেক্টরের মান, $A = \sqrt{A_x^2 + A_y^2 + A_z^2}$ ... ... (19)

লম্ব একক ভেক্টর, $\hat{n} = \dfrac{|\vec{A} \times \vec{B}|}{|\vec{A} \times \vec{B}|}$ ... ... (20)

লম্ব অভিক্ষেপ A এর দিকে, $B\cos\theta = \dfrac{\vec{A}.\vec{B}}{|\vec{A}|}$ ... ... (21)

কাজ, $W = \vec{F}.\vec{s}$ ... ... (22)

টর্ক, $\vec{\tau} = \vec{P} \times \vec{r}$ ... ... (23)

সামান্তরিকের ক্ষেত্রফল = $|\vec{A} \times \vec{B}|$ ... ... (24)

ত্রিভুজের ক্ষেত্রফল = $\frac{1}{2} \times$ ভূমি $\times$ উচ্চতা ... ... (25)

$\vec{A}.(\vec{B} \times \vec{C}) = 0$ (তিনটি ভেক্টর সমতলীয় শর্ত) ... ... (26)

$\vec{F}$ এর উপাংশে বিভাজন, $F_x = F\cos\theta$ এবং $F_y = F\sin\theta$ ... ... (27)

$\vec{\nabla}.\vec{V} = 0$ (সলিনয়েডের শর্ত) ... ... (28)

$\vec{\nabla} \times \vec{V} = 0$ (অঘূর্ণনশীলের শর্ত) ... ... (29)

বিশ্লেষণাত্মক ও মূল্যায়নধর্মী গাণিতিক সমস্যাবলির সমাধান

১। তমাল সাইকেলে করে বাড়ি থেকে স্কুলে যাচ্ছিল। হঠাৎ করে বৃষ্টি নামল। বৃষ্টির ফোঁটা $6\ ms^{-1}$ বেগে তার গায়ে পড়া শুরু করল। বায়ুর প্রবাহ খুব বেশি ছিল না। তবুও বৃষ্টির ফোঁটা তার গায়ে $45°$ কোণে পড়ছে।

(ক) সাইকেলের বেগ নির্ণয় কর।

(খ) স্কুলে তাড়াতাড়ি পৌঁছানোর জন্য তমাল দ্বিগুণ বেগে সাইকেল চালালে বৃষ্টি থেকে রক্ষা পেতে তাকে কত কোণে ছাতা ধরতে হবে ?

(ক) আমরা জানি,

$$\tan\theta = \frac{Q\sin\alpha}{P + Q\cos\alpha}$$

বা, $$\tan\theta = \frac{Q\sin 90°}{P + Q\cos 90°}$$

বা, $$\tan 45° = \frac{6\sin 90°}{P + 6\cos 90°}$$

$\therefore$ $P = 6\ ms^{-1}$

$\therefore$ সাইকেলের বেগ $6\ ms^{-1}$

এখানে,
বৃষ্টির বেগ, $Q = 6\ ms^{-1}$
সাইকেলের বেগ, $P = ?$
$\theta = 45°$
$\alpha = 90°$

(খ) দ্বিগুণ বেগে সাইকেল চালালে পরিবর্তিত বেগ,

$$P' = (6 \times 2) = 12\ ms^{-1}$$

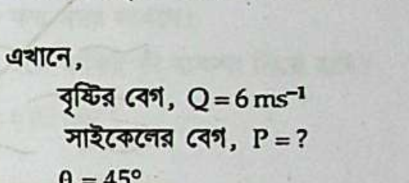
বা, $$\tan\theta = \frac{6\sin 90°}{12 + 6\cos 90°} = \frac{6}{12 + 0} = \frac{1}{2} = \tan^{-1}\left(\frac{1}{2}\right)$$

$\therefore$ $\theta = 26.57°$, অর্থাৎ তাকে $26.57°$ কোণে ছাতা ধরতে হবে।

২। সোজা অপর পাড়ে যাওয়ার জন্য স্বপন ফেরিতে করে $15\ kmh^{-1}$ বেগে নদী পার হওয়ার সময় দেখল, ফেরিটি সোজাসুজি রওনা না দিয়ে স্রোতের প্রতিকূলে তির্যকভাবে যাচ্ছে। [স্রোতের বেগ $=10\ kmh^{-1}$]

(ক) লব্ধির সর্বোচ্চ মান সর্বনিম্ন মানের কতগুণ নির্ণয় কর।

(খ) ফেরিটির দিক পরিবর্তনের কারণ বিশ্লেষণ কর।



(ক) আমরা জানি,

$$R_{max} = v + u = 15 + 10 = 25\ kmh^{-1}$$

আবার, $$R_{min} = v - u = 15 - 10 = 5\ kmh^{-1}$$

$\therefore$ $$\frac{R_{max}}{R_{min}} = \frac{25}{5}$$

বা, $R_{max} = 5R_{min}$

এখানে,
ফেরির বেগ, $v = 15\ kmh^{-1}$
স্রোতের বেগ, $u = 10\ kmh^{-1}$
$\frac{R_{max}}{R_{min}} = ?$

অর্থাৎ, লব্ধির সর্বোচ্চ মান, লব্ধির সর্বনিম্ন মানের 5 গুণ।

(খ) যেহেতু নদীতে স্রোত আছে সেহেতু সোজা অপর পাড়ে যাওয়ার জন্য ফেরিটিকে তির্যকভাবে রওনা দিতে হবে।

ধরি, ফেরিটিকে স্রোতের প্রতিকূলে α কোণে রওনা দিতে হবে। সেক্ষেত্রে, স্রোতের বেগ, $u = 10\ kmh^{-1}$, ফেরির বেগ, $v = 15\ kmh^{-1}$ এবং স্রোতের দিকের সাথে লব্ধিবেগের দিক, $\theta = 90°$ হবে।