UNIVERSITAS INDONESIA
Veritas, Probitas, Iustitia

FAKULTAS ILMU KOMPUTER

Logika Proposisi (1)

Proposisi

Proposisi

- Kalimat deklaratif atau pernyataan yang bernilai benar (*true*) atau salah (*false*), tetapi tidak keduanya.
- Contoh:

Kalimat	Proposisi?	Nilai kebenaran?
1 + 0 = 1	✓	True
0 + 0 = 2		
x + 1 = 2	✗	
x + y = z		
Bulan terbuat dari keju.	✓	false
Kota Jakarta berada di Pulau Jawa.		
Sit down!	✗	
What time is it?		

Logika Proposisi

- Bidang ilmu *logic* yang menggunakan proposisi.
- Variabel proposisi: $p, q, r, s, \ldots, p_1, p_2, \ldots$
- Konstanta proposisi:
  - **true** atau **T**, untuk proposisi yang selalu **true**.
  - **false** atau **F**, untuk proposisi yang selalu **false**.
- Proposisi majemuk (*compound proposition*) dibentuk dari 1 atau lebih proposisi (*atomic proposition*) menggunakan operator logika.
- Operator Logika (*Logical Connectives*)
  - $\neg$ (dibaca: negasi)
  - $\wedge$ (dibaca: konjungsi)
  - $\vee$ (dibaca: disjungsi)
  - $\oplus$ (dibaca: disjungsi eksklusif atau "*exclusive or*")
  - $\rightarrow$ (dibaca: implikasi)
  - $\leftrightarrow$ (dibaca: biimplikasi)

Apa yang sudah kita pelajari…

Logika Proposisi

- Proposisi

Topik selanjutnya: Operator Logika

UNIVERSITAS INDONESIA
Veritas, Probitas, Iustitia

FAKULTAS ILMU KOMPUTER

Logika Proposisi (1)

Operator Logika (bagian 1)

Operator Logika: Negasi

p	$\neg p$
T	F
F	T

Tabel Kebenaran (*truth table*)

- Contoh 1:
  - p = "Bumi itu bulat."
  - $\neg p$ = "Bumi itu tidak bulat."
  - $\neg p$ = "Tidak benar bahwa bumi itu bulat."
- Contoh 2:
  - q = "Pulpen ini tidak berwarna merah."
  - $\neg q$ = "Pulpen ini berwarna merah."

Operator Logika: Konjungsi

p	q	$p \wedge q$
T	T	T
T	F	F
F	T	F
F	F	F

- $p \wedge q$ akan bernilai true saat keduanya (p dan q) bernilai true.
- Contoh: "Saya di rumah." dinyatakan dengan p dan "Saat ini hujan." dinyatakan dengan q.
  - $p \wedge q$ = "Saya di rumah dan saat ini hujan"
  - $p \wedge q$ = "Saya di rumah tapi saat ini hujan"
  - Bagaimana kalimat logika proposisi untuk $\neg p \wedge q$?
  - Dan apa nilai dari $\neg p \wedge q$ jika p **true** dan q **true**?

Operator Logika: Disjungsi (inklusif)

p	q	$p \vee q$
T	T	T
T	F	T
F	T	T
F	F	F

- $p \vee q$ akan bernilai false saat keduanya (p dan q) bernilai false.
- Contoh: "Saya di rumah." dinyatakan dengan p dan "Adi di rumah." dinyatakan dengan q.
  - $p \vee q$ = "Saya di rumah atau Adi di rumah"
  - Bagaimana kalimat logika proposisi untuk $p \vee \neg q$?
  - Dan apa nilai $p \vee \neg q$ jika p **true** dan q **true**?

Operator Logika: Disjungsi Eksklusif

p	q	$p \oplus q$
T	T	F
T	F	T
F	T	T
F	F	F

- $p \oplus q$ akan bernilai true saat hanya salah satu yang bernilai true atau false(tidak keduanya). ~ p dan q berbeda nilai
- Contoh: "Saya juara I." dinyatakan dengan *p* dan "Adi juara I." dinyatakan dengan *q*.
  - $p \oplus q$ = "Saya juara I atau Adi juara I"
  - Apa nilai dari $p \oplus q$, dengan *p* **true** dan *q* **true**?
  - Bagaimana kalimat logika proposisi untuk $p \oplus \neg q$?
  - Dan apa nilai $p \oplus \neg q$ jika *p* **true** dan *q* **true**?

Apa yang sudah kita pelajari…

Logika Proposisi

- Proposisi
- Operator Logika
  - Negasi
  - Konjungsi
  - Disjungsi
  - Disjungsi Eksklusif

Topik selanjutnya: Operator untuk Implikasi dan Bi-implikasi

UNIVERSITAS INDONESIA
Veritas, Probitas, Iustitia

FAKULTAS ILMU KOMPUTER

Logika Proposisi (1)

Operator Logika (bagian 2)

Operator Logika: Implikasi

p	q	$p \rightarrow q$
T	T	T
T	F	F
F	T	T
F	F	T

- $p \rightarrow q$ akan bernilai false saat *p* bernilai true tapi *q* bernilai false. *p* sebagai premis/hipotesis/*antecedent* dan *q* sebagai konklusi/*consequent*.
- Contoh: "Saya di rumah." dinyatakan dengan *p* dan "Adi di rumah." dinyatakan dengan *q*.
  - $p \rightarrow q$ = "Jika saya di rumah, Adi di rumah"
  - = "Saya di rumah adalah syarat cukup untuk Adi di rumah"
  - = "Adi di rumah jika saya di rumah"
  - = "Adi di rumah adalah syarat perlu untuk saya di rumah"
  - Apa nilai dari $p \rightarrow q$, dengan *p* **true** dan *q* **true**?
  - Bagaimana kalimat logika proposisi untuk $p \rightarrow \neg q$?
  - Dan apa nilai $p \rightarrow \neg q$ jika *p* **true** dan *q* **true**?

Cara Lain menyatakan Implikasi

Dengan premis *p*, konklusi *q*:

- **jika** p, **maka** q
- **jika** p, q
- p **hanya jika** q
- p **mengakibatkan** (implies) q
- p **syarat cukup untuk** (is sufficient for) q
- **syarat perlu untuk** p **adalah** q
- q **jika** p
- q **kecuali** $\neg p$
- q **bilamana** (whenever) p
- q **ketika** p
- **syarat cukup untuk** q **adalah** p
- q **syarat perlu untuk** (is necessary for) p

Konversi, Inversi, dan Kontrapositif

- $q \rightarrow p$ adalah **konversi** dari $p \rightarrow q$
- $\neg q \rightarrow \neg p$ adalah **kontrapositif** dari $p \rightarrow q$
- $\neg p \rightarrow \neg q$ adalah **inversi** dari $p \rightarrow q$
- Contoh: "Saat ini hujan." dinyatakan dengan *p* dan "Saya di rumah." dinyatakan dengan *q*.
  - $p \rightarrow q$ "Saya di rumah jika saat ini hujan."
  - Konversi dari $p \rightarrow q$?
  - Inversi dari $p \rightarrow q$?
  - Kontrapositif dari $p \rightarrow q$?

Operator Logika: Bi-implikasi (*Biconditional*)

p	q	$p \leftrightarrow q$
T	T	T
T	F	F
F	T	F
F	F	T

- $p \leftrightarrow q$ akan bernilai true saat keduanya (p dan q) bernilai sama.
- Contoh: "Saya di rumah." dinyatakan dengan p dan "Adi di rumah." dinyatakan dengan q.
  - $p \leftrightarrow q$ = "Saya di rumah jika dan hanya jika Adi di rumah"
  - = "Saya di rumah adalah syarat perlu dan cukup untuk Adi di rumah"
  - Apa nilai dari $p \leftrightarrow q$, dengan p **true** dan q **true**?
  - Bagaimana kalimat logika proposisi untuk $p \leftrightarrow \neg q$?
  - Dan apa nilai $p \leftrightarrow \neg q$ jika p **true** dan q **true**?

Cara Lain menyatakan Bi-implikasi

- *p* **adalah syarat perlu dan syarat cukup untuk** *q*
- **jika** *p* **maka** *q* **, dan sebaliknya**
- *p* **jika dan hanya jika** *q*

Apa yang sudah kita pelajari…

Logika Proposisi

- Proposisi
- Operator Logika
  - Negasi
  - Konjungsi
  - Disjungsi
  - Disjungsi Eksklusif
  - Implikasi
  - Biimplikasi

Topik selanjutnya: Tabel Kebenaran, Formula Logika Proposisi

UNIVERSITAS INDONESIA

FAKULTAS ILMU KOMPUTER

Logika Proposisi (1)

Tabel Kebenaran

Formula Logika Proposisi

Presedensi Operator Logika

Tabel Kebenaran (*Truth Table*)

- Baris sejumlah setiap kombinasi nilai yang memungkinkan untuk setiap proposisi.
  - 2 nilai yaitu: T dan F
  - Maka, banyaknya kombinasi dari *n* proposisi adalah 2^n
  - Jika ada 3 proposisi (*p, q, r*), maka ada berapa baris?
- Kolom sejumlah ekspresi yang muncul dari proposisi majemuk, termasuk proposisi atomiknya.

- Contoh: $p \vee q \rightarrow \neg r$

p	q	r	$p \vee q$	$\neg r$	$p \vee q \rightarrow \neg r$
T	T	T			
T	T	F			
T	F	T			
T	F	F			
F	T	T			
F	T	F			
F	F	T			
F	F	F			

Memeriksa Ekuivalensi dengan Truth Table

- Dua proposisi adalah ekuivalen jika memiliki nilai kebenaran yang sama.
- Contoh: kontrapositif dari implikasi

p	q	$\neg p$	$\neg q$	$p \rightarrow q$	$\neg q \rightarrow \neg p$
T	T	F	F		
T	F	F	T		
F	T	T	F		
F	F	T	T		

  - Jadi, apakah $p \rightarrow q$ ekuivalen dengan $\neg q \rightarrow \neg p$?

Latihan: Ekuivalensi

- apakah $p \rightarrow q$ ekuivalen dengan $q \rightarrow p$?

p	q	$p \rightarrow q$	$q \rightarrow p$
T	T		
T	F		
F	T		
F	F		

- Lalu, apakah $p \rightarrow q$ ekuivalen dengan $\neg p \rightarrow \neg q$?

p	q	$\neg p$	$\neg q$	$p \rightarrow q$	$\neg p \rightarrow \neg q$
T	T	F	F		
T	F	F	T		
F	T	T	F		
F	F	T	T		

Interpretasi

- Suatu interpretasi (*interpretation*) *I* adalah suatu pemberian nilai T atau F pada setiap proposisi yang terpakai.
- Contoh: $(p \wedge q) \rightarrow (\neg p \vee q)$ memiliki 4 interpretasi.
  - I_1: p bernilai T, q bernilai T
  - I_2: p bernilai T, q bernilai F
  - I_3: p bernilai F, q bernilai T
  - I_4: p bernilai F, q bernilai F

Kalimat (Formula) Logika Proposisi

- FLP dibentuk dari konstanta proposisi atau variabel proposisi, menggunakan operator logika, dan mengikuti aturan:
  - Setiap proposisi merupakan sebuah FLP
  - Jika p dan q merupakan sebuah FLP maka $\neg p$, $\neg q$, $p \wedge q$, $p \vee q$, $p \oplus q$, $p \rightarrow q$, $p \leftrightarrow q$ masing-masing juga merupakan sebuah FLP.

- Jika FLP p dan q membentuk FLP r yang lebih kompleks, maka p dan q disebut anak kalimat dari r.

- FLP r juga merupakan anak kalimat dari r.
  - Anak kalimat dari r yang bukan r disebut anak kalimat sejati dari r.

Anak Kalimat FLP

Contoh: F dan G membentuk H, maka F dan G adalah anak kalimat sejati dari H.

- F: p
- G: $q \vee \neg r$
- H: $p \wedge (q \vee \neg r)$
- Maka dari pernyataan berikut yang benar?
  - H adalah anak kalimat dari H
  - F dan G adalah anak kalimat sejati dari H
  - H adalah anak kalimat sejati dari H
  - G memiliki anak kalimat q dan G_1: $\neg r$ dan G sendiri
  - G_1 memiliki anak kalimat r dan G_1 sendiri

Presedensi Operator Logika

- Bagaimana memeriksa kebenaran FLP berikut?

  $p \wedge q \rightarrow \neg r \vee s$

- Jika tidak menggunakan tanda kurung, operasi FLP akan diproses dengan urutan ini:

Operator	Urutan
$\neg$	1
$\wedge$	2
$\vee$	3
$\rightarrow$	4
$\leftrightarrow$	5

$p \wedge q \rightarrow \neg r \vee s$

Latihan: Presedensi

Manakah FLP di bawah ini yang ekuivalen dengan $p \wedge q \rightarrow \neg r \vee s$?

A. $p \wedge ((q \rightarrow \neg r) \vee s)$

B. $(p \wedge q) \rightarrow \neg (r \vee s)$

C. $(p \wedge q) \rightarrow (\neg r \vee s)$

D. $(p \wedge (q \rightarrow \neg r)) \vee s$

Apa yang sudah kita pelajari…

Logika Proposisi

- Proposisi
- Operator Logika
- Tabel Kebenaran
- FLP

Topik selanjutnya: Aplikasi dari Logika Proposisi

FAKULTAS ILMU KOMPUTER

Logika Proposisi (2)

Aplikasi dari Logika Proposisi

Aplikasi: Operasi Bit

- **bit** (*binary digit*) adalah symbol dengan dua kemungkinan nilai (0 dan 1)
- 0 merepresentasikan *false*, 1 merepresentasikan *true*.
- Operasi bit: $\wedge$, $\vee$, dan $\oplus$ (AND, OR, dan XOR)
- Contoh:

p	q	$p \wedge q$
1	1	1
1	0	0
0	1	0
0	0	0

```
01 1011 0110
11 0001 1101
------------
11 1011 1111   bitwise OR
01 0001 0100   bitwise AND
10 1010 1011   bitwise XOR
```

- **bit string** adalah deretan bit.
  - Contoh: 01 1011 0110, dengan panjang string adalah 10 bit.
- **bitwise** OR dari 2 bit string dengan panjang sama adalah bit string yang terdiri dari bit hasil operasi OR (per bit atau *bitwise*). Demikian juga dengan bitwise AND dan bitwise XOR.

Aplikasi: Translasi Bahasa Manusia ke Logika Proposisi

- Dari kalimat logika proposisi, dapat dihasilkan kesimpulan (melakukan inferensi).
- Langkah-langkah:
  - identifikasi proposisi,
  - representasikan dalam variabel,
  - gunakan operator logika yang sesuai.
- Contoh: “Jika saya pergi ke taman atau ke lapangan kasti, saya tidak bisa tidur.”
  - p: saya pergi ke taman
  - q: saya pergi ke lapangan kasti
  - r: saya bisa tidur
  - $p \vee q \rightarrow \neg r$

Aplikasi: Translasi Bahasa Manusia (contoh)

"You can access the Internet from campus only if you are a computer science major or you are not a freshman." (Rosen, page 17)

- a : "You can access the internet from campus"
- c : "You are a computer science major"
- f : "You are a freshman."
- $a \rightarrow (c \vee \neg f)$

Aplikasi: Spesifikasi Sistem

- System and Software engineers mendapatkan requirement yang dapat dinyatakan dalam kalimat logika proposisi.
- Proposisi *p* konsisten dengan *q* jika dan hanya jika **ada sebuah** interpretasi ***I*** yang menyebabkan proposisi $p \wedge q$ bernilai **true.**
- Contoh: Apakah requirement seperti ini saling konsisten?
  - "Pesan error disimpan dalam *buffer* atau ditransmisi."
  - "Pesan error tidak disimpan dalam *buffer*."
  - "Jika pesan error disimpan dalam buffer, maka pesan itu ditransmisi."

- Jika ditambahkan kebutuhan: "Pesan error tidak ditransmisi", apakah konsisten?

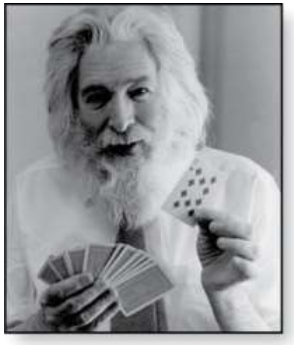
Aplikasi: SQL

Contoh:

- Tabel MAHASISWA terdiri dari atribut `npm, nama, kota_alamat, tgl_lahir`. Perintah SQL untuk men-query daftar mahasiswa dengan alamat di kota "Depok" dan lahir di tahun 1990:

```
select npm, nama
from MAHASISWA
where kota_alamat = "Depok" AND
year(tgl_lahir) = 1990;
```

Aplikasi: Logic Puzzle



Raymond Smullyan (Born 1919)

- Suatu pulau terdiri atas dua jenis penduduk, ksatria (*knight*) yang selalu jujur, dan penjahat (*knave*) yang selalu berbohong.
- Anda pergi ke pulau itu dan bertemu dengan A dan B.
  - A mengatakan "B adalah ksatria."
  - B mengatakan "Kami berdua adalah penduduk yang berbeda tipe."
- Apa tipe dari A dan tipe dari B?

Apa yang sudah kita pelajari…

Logika Proposisi

- Proposisi
- Operator Logika
- Tabel Kebenaran
- FLP
- Aplikasi dari Logika Proposisi

Topik selanjutnya: Tautologi, Kontradiksi, Kontingensi
Ekuivalensi

UNIVERSITAS INDONESIA

FAKULTAS ILMU KOMPUTER

Logika Proposisi (2)

Tautologi, Kontradiksi, Kontingensi, *Satisfiability*

Tautologi, Kontradiksi, and Kontingensi

p	$\neg p$	$p \vee \neg p$	$p \wedge \neg p$
T	F	T	F
F	T	T	F

- ***tautology*** – proposisi yang bernilai true untuk setiap interpretasinya. (***valid***/absah).
  - Contoh: $p \vee \neg p$
  - Proposisi yang tidak valid, disebut juga ***falsifiable***, yaitu ketika ada interpretasi sehingga proposisi bernilai false.
- ***contradiction*** – proposisi yang bernilai false untuk setiap interpretasinya. (***unsatisfiable***)
  - Contoh: $p \wedge \neg p$
- ***contingency*** – proposisi yang bukan tautologi juga bukan kontradiksi.
  - Contoh: $\neg p$

Satisfiability

- Proposisi *x* disebut ***satisfiable*** jika ada interpretasi *I* sehingga *x* bernilai true.

p	$\neg p$	$p \vee \neg p$	$p \wedge \neg p$
T	F	T	F
F	T	T	F

- Latihan:

  Apakah proposisi berikut masing-masing *satisfiable*?

  1. $(p \vee \neg q) \wedge (q \vee \neg r) \wedge (r \vee \neg p)$

  2. $(p \vee q \vee r) \wedge (\neg p \vee \neg q \vee \neg r)$

<table>
<tr><th>TRUE untuk setiap interpretasi</th><th>Sebagian interpretasi menghasilkan TRUE, sebagian lainnya menghasilkan FALSE</th><th>FALSE untuk setiap interpretasi</th></tr>
<tr><td>Tautologi</td><td>Contingency</td><td>Kontradiksi</td></tr>
<tr><td>valid</td><td colspan="2">invalid</td></tr>
<tr><td>unfalsifiable</td><td colspan="2">falsifiable</td></tr>
<tr><td colspan="2">satisfiable</td><td>unsatisfiable</td></tr>
</table>

Latihan

Apakah $(p \wedge q) \rightarrow (p \vee q)$ adalah tautologi, kontradiksi, atau satisfiable dengan menggunakan *truth table*!

Latihan

Apakah proposisi berikut ini tautologi, kontradiksi, ataukah bersifat *satisfiable*? Gunakanlah *truth table*!

- $(p \vee q) \wedge (\neg p \wedge \neg q)$
- $(p \oplus q) \vee (p \oplus \neg q)$
- $(p \rightarrow q) \wedge (p \wedge \neg q)$
- $(p \vee q) \wedge \neg r$
- $(p \vee \neg q) \wedge (q \vee \neg r) \wedge (r \vee \neg p) \wedge (p \vee q \vee r) \wedge (\neg p \vee \neg q \vee \neg r)$

Apa yang sudah kita pelajari…

Logika Proposisi

- Proposisi
- Operator Logika
- Tabel Kebenaran
- FLP
- Aplikasi dari Logika Proposisi
- Tautologi, Kontradiksi, Kontingensi, *Satisfiability*

Topik selanjutnya: Ekuivalensi

FAKULTAS ILMU KOMPUTER

Logika Proposisi (2)

Ekuivalensi Logikal

Ekuivalensi Logikal

- Notasi: proposisi *a* dan *b* adalah **ekuivalen**

$$a \equiv b$$

$$a \Leftrightarrow b$$

- *a* dan *b* adalah ekuivalen iff $a \leftrightarrow b$ adalah tautologi.
- Dengan ekuivalensi logikal, pengecekan operasi logika dapat terbantu dibanding membuat tabel kebenaran.
  - Contoh: Anda harus memeriksa proposisi majemuk yang terbuat dari 10 proposisi atomik. Maka ada berapa interpretasi (kombinasi nilai) yang harus diperiksa? 2^{10}

Ekuivalensi Logikal (1)

Equivalence	*Name*
$p \wedge \mathbf{T} \equiv p$ $p \vee \mathbf{F} \equiv p$	Identity laws
$p \vee \mathbf{T} \equiv \mathbf{T}$ $p \wedge \mathbf{F} \equiv \mathbf{F}$	Domination laws
$p \vee p \equiv p$ $p \wedge p \equiv p$	Idempotent laws
$\neg(\neg p) \equiv p$	Double negation law
$p \vee \neg p \equiv \mathbf{T}$ $p \wedge \neg p \equiv \mathbf{F}$	Negation laws

Equivalence	*Name*
$p \vee q \equiv q \vee p$ $p \wedge q \equiv q \wedge p$	Commutative laws
$(p \vee q) \vee r \equiv p \vee (q \vee r)$ $(p \wedge q) \wedge r \equiv p \wedge (q \wedge r)$	Associative laws
$p \vee (q \wedge r) \equiv (p \vee q) \wedge (p \vee r)$ $p \wedge (q \vee r) \equiv (p \wedge q) \vee (p \wedge r)$	Distributive laws
$\neg(p \wedge q) \equiv \neg p \vee \neg q$ $\neg(p \vee q) \equiv \neg p \wedge \neg q$	De Morgan's laws
$p \vee (p \wedge q) \equiv p$ $p \wedge (p \vee q) \equiv p$	Absorption laws

Ekuivalensi Logikal (3)

TABLE 7 Logical Equivalences Involving Conditional Statements.

$p \to q \equiv \neg p \vee q$
$p \to q \equiv \neg q \to \neg p$
$p \vee q \equiv \neg p \to q$
$p \wedge q \equiv \neg(p \to \neg q)$
$\neg(p \to q) \equiv p \wedge \neg q$
$(p \to q) \wedge (p \to r) \equiv p \to (q \wedge r)$
$(p \to r) \wedge (q \to r) \equiv (p \vee q) \to r$
$(p \to q) \vee (p \to r) \equiv p \to (q \vee r)$
$(p \to r) \vee (q \to r) \equiv (p \wedge q) \to r$

kontrapositif

Disebut juga Definisi Implikasi

TABLE 8 Logical Equivalences Involving Biconditional Statements.

$p \leftrightarrow q \equiv (p \to q) \wedge (q \to p)$
$p \leftrightarrow q \equiv \neg p \leftrightarrow \neg q$
$p \leftrightarrow q \equiv (p \wedge q) \vee (\neg p \wedge \neg q)$
$\neg(p \leftrightarrow q) \equiv p \leftrightarrow \neg q$

kontrapositif

Disebut juga Definisi Bi-implikasi

- Exclusive Middle: $p \vee \neg p \equiv \mathbf{T}$
- Golden Rule: $p \wedge q \leftrightarrow p \equiv q \leftrightarrow p \vee q$

Latihan

Apakah proposisi berikut ini ekivalen?

- $\neg(p \rightarrow q)$ dengan $p \wedge \neg q$

Contoh Penerapan Ekuivalensi

Tunjukkan bahwa $\neg(p \vee (\neg p \wedge q))$ ekuivalen logical dengan $\neg p \wedge \neg q$.

Solusi:

$$
\begin{aligned}
\neg(p \vee (\neg p \wedge q)) &\equiv \neg p \wedge \neg(\neg p \wedge q) && \text{by the second De Morgan law} \\
&\equiv \neg p \wedge [\neg(\neg p) \vee \neg q] && \text{by the first De Morgan law} \\
&\equiv \neg p \wedge (p \vee \neg q) && \text{by the double negation law} \\
&\equiv (\neg p \wedge p) \vee (\neg p \wedge \neg q) && \text{by the second distributive law} \\
&\equiv \mathbf{F} \vee (\neg p \wedge \neg q) && \text{because } \neg p \wedge p \equiv \mathbf{F} \\
&\equiv (\neg p \wedge \neg q) \vee \mathbf{F} && \text{by the commutative law for disjunction} \\
&\equiv \neg p \wedge \neg q && \text{by the identity law for } \mathbf{F}
\end{aligned}
$$

$\neg(p \wedge q) \equiv \neg p \vee \neg q$	(first)	De Morgan's laws
$\neg(p \vee q) \equiv \neg p \wedge \neg q$	(second)	

Contoh Penerapan Ekuivalensi

Tunjukkan bahwa $(p \wedge q) \rightarrow (p \vee q)$ adalah tautologi.

Solusi:

$$(p \wedge q) \rightarrow (p \vee q) \equiv \neg(p \wedge q) \vee (p \vee q)$$ Ekuivalensi implikasi

$$\equiv (\neg p \vee \neg q) \vee (p \vee q)$$ _____

$$\equiv (\neg p \vee p) \vee (\neg q \vee q)$$ _____

$$\equiv \mathbf{T} \vee \mathbf{T}$$ _____

$$\equiv \mathbf{T}$$ _____

Contoh Penerapan Ekuivalensi

Terapkan aturan De Morgan untuk menyatakan negasi dari kalimat berikut:

a. "Miguel punya *handphone* dan *laptop*."
b. "Heather akan pergi ke konser atau Steve akan pergi ke konser."

Solusi untuk (a):
p: "Miguel punya *handphone*"
q: "Miguel punya *laptop*"
FLP dari (a) adalah $p \wedge q$.
Dengan aturan De Morgan: $\neg(p \wedge q)$ ekuivalen dengan $(\neg p \vee \neg q)$:
<u>"Miguel tidak punya *handphone* atau Miguel tidak punya laptop."</u>

Solusi untuk (b): …?

Latihan

Apakah proposisi berikut ini tautologi, kontradiksi, ataukah bersifat *satisfiable*?

Gunakanlah ekuivalensi logikal!

- $(p \vee q) \wedge (\neg p \wedge \neg q)$
- $(p \oplus q) \vee (p \oplus \neg q)$
- $(p \rightarrow q) \wedge (p \wedge \neg q)$
- $(p \vee q) \wedge \neg r$
- $(p \vee \neg q) \wedge (q \vee \neg r) \wedge (r \vee \neg p) \wedge (p \vee q \vee r) \wedge (\neg p \vee \neg q \vee \neg r)$

Latihan

- $p \vee \neg(p \vee q) \equiv p \vee \neg q$?

- $\neg p \rightarrow (q \rightarrow r) \equiv q \rightarrow (\neg p \rightarrow r)$?

Apa yang sudah kita pelajari…

Logika Proposisi

- Proposisi
- Operator Logika
- Tabel Kebenaran
- FLP
- Aplikasi dari Logika Proposisi
- Tautologi, Kontradiksi, Kontingensi, *Satisfiability*
- Ekuivalensi Logikal

Topik selanjutnya: Logika Predikat

UNIVERSITAS INDONESIA

FAKULTAS ILMU KOMPUTER

Logika Predikat

Pengenalan Predikat

Contoh 1

Ada lima orang: Ani, Budi, Cici, Dodi, Eki

Bagaimana menyatakan dalam notasi/formula logika proposisi bahwa mereka **semua** suka makan bakso?

- p_1: Ani suka makan bakso
- p_2: Budi suka makan bakso
- p_3: Cici suka makan bakso
- p_4: Dodi suka makan bakso
- p_5: Eki suka makan bakso

$$p_1 \wedge p_2 \wedge p_3 \wedge p_4 \wedge p_5$$

Bagaimana jika ada 100 orang dan mereka semua suka makan bakso?

Pengenalan Predikat

- Dalam logika predikat, kita perlu memperhatikan **variabel/subyek** dan **predikat** dalam kalimat/pernyataan.
  - Contoh: Budi suka makan bakso

Variabel/Subyek Predikat

- Sebuah predikat dimodelkan sebagai sebuah fungsi $P(x)$ dengan x menyatakan variabel yang nilainya dapat kita tentukan.
  - Contoh:
    - $P(x)$: x suka makan bakso
    - Maka “Budi suka makan bakso” dapat dinyatakan dalam sebuah formula logika predikat $P(Budi)$

Pengenalan Predikat

- $P(x)$ dikatakan sebagai nilai dari **fungsi proposisi** P terhadap variabel x.
  - $P(x)$ akan memiliki nilai kebenaran saat nilai x ditentukan.

- Contoh:
  - Misalkan $P(x)$: "$x > 3$". Tentukan nilai kebenaran dari $P(4)$ dan $P(2)$.

Predikat n-ary

- Secara umum sebuah pernyataan yang melibatkan n buah variabel $x_1, x_2, \dots x_n$ dapat dinyatakan dalam bentuk $P(x_1, x_2, \dots x_n)$.

- $P(x_1, x_2, \dots x_n)$ adalah nilai dari fungsi proposisi P terhadap variabel-variabel $x_1, x_2, \dots x_n$.

- P disebut juga sebagai **predikat n-ary.**

Predikat n-ary

- Contoh:
  - Misalkan $Q(x, y)$: "$x = y + 3$“. Tentukan nilai kebenaran dari $Q(1,2)$ dan $Q(3,0)$.
  - Misalkan $R(x, y, z)$: "$x + y = z$“. Tentukan nilai kebenaran dari $R(1,2,3)$ dan $R(0,0,1)$.

Kembali ke Contoh 1

Ada lima orang: Ani, Budi, Cici, Dodi, Eki

Bagaimana menyatakan bahwa mereka **semua** suka makan bakso?

Definisikan $P(x)$:"x suka makan bakso".

Nilai x dapat diganti dengan Ani, Budi, Cici, Dodi, atau Eki.

$$P(Ani) \wedge P(Budi) \wedge P(Cici) \wedge P(Dodi) \wedge P(Eki)$$

Bagaimana ada 100 orang yang suka makan bakso?

Apa yang sudah dipelajari…

- Definisi logika predikat
- **Nilai kebenaran** logika predikat
- Bentuk predikat dengan n variabel
  $P(x_1, x_2, \dots, x_n)$

Materi selanjutnya: Pengenalan Kuantor (Bagian 1)

UNIVERSITAS INDONESIA

FAKULTAS ILMU KOMPUTER

Logika Predikat

Pengenalan Kuantor (Bagian 1)

Pengenalan Kuantor

- Fungsi proposisi $P(x)$ akan memiliki nilai kebenaran ketika x disubstitusi dengan suatu nilai.
  - Cara lain: dengan menggunakan **kuantor atau kuantifikasi** yang menunjukkan bahwa sebuah fungsi proposisi bernilai benar untuk sekelompok elemen dalam **domain**.

- **Kuantor/Kuantifikasi**
  - Kuantor Universal (*Universal Quantification*)
  - Kuantor Eksistensial (*Existential Quantification*)

- ***Universe of Discourse* (Domain)**
  - Menentukan nilai-nilai yang mungkin untuk variabel x dalam $P(x)$

Kuantor Universal

- Kuantor universal pada fungsi $P(x)$ menyatakan bahwa

"$P(x)$ bernilai **benar** untuk **semua** x dalam domain"

- Notasi:

$$\forall \boldsymbol{x} \boldsymbol{P}(\boldsymbol{x})$$

- Dibaca:

Untuk **semua** $\boldsymbol{x}$ dalam domain, berlaku $\boldsymbol{P}(\boldsymbol{x})$

Kuantor Universal

- Contoh 1:

  $P(x)$ adalah pernyataan "$x + 1 > x$".

  Tentukan nilai kebenaran dari formula $\forall x P(x)$ jika domain x adalah bilangan riil.

  Jawab:

  Karena untuk semua bilangan riil berlaku $x + 1 > x$, maka $\forall x P(x)$ bernilai benar.

- Contoh 2:

  Jika $P(x)$ adalah pernyataan "$x < 2$", tentukan nilai kebenaran $\forall x P(x)$ jika domain x berupa bilangan riil.

  Jawab:

Kuantor Universal

- Jika terdapat n elemen berhingga di domain, yaitu $x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n$, maka berlaku:

$$\forall \boldsymbol{x} \boldsymbol{P}(\boldsymbol{x}) \equiv \boldsymbol{P}(\boldsymbol{x_1}) \wedge \boldsymbol{P}(\boldsymbol{x_2}) \wedge \boldsymbol{P}(\boldsymbol{x_3}) \wedge \cdots \wedge \boldsymbol{P}(\boldsymbol{x_n})$$

- Konjungsi ini bernilai benar jika dan hanya jika **semua** $P(x_i)$ bernilai benar.
  - Kapan $\forall x P(x)$ bernilai salah?
    - Beri sebuah **contoh penyangkal *(counterexample)*** untuk menunjukkan bahwa $\forall x P(x)$ bernilai salah.

Kuantor Eksistensial

- Kuantor eksistensial pada fungsi $P(x)$ menyatakan bahwa

"**Ada** nilai x di domain sehingga $P(x)$ bernilai **benar**"

- Notasi:

$$\exists x P(x)$$

- Dibaca:

Terdapat **sebuah** x dalam domain sehingga berlaku $P(x)$

Kuantor Eksistensial

- Contoh:

Tentukan nilai kebenaran dari $\exists x\ P(x)$ jika domain adalah bilangan riil.

– $P(x)$: "$x = x + 1$"

Jawab:

Karena untuk setiap x bilangan riil berlaku $x \neq x + 1$, maka $\exists x\ P(x)$ bernilai **salah**

– $P(x)$: "$x > 3$"

Jawab:

Kuantor Eksistensial

- Jika terdapat n elemen berhingga di domain, yaitu $x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n$, maka berlaku:

$$\exists \boldsymbol{x} \boldsymbol{P}(\boldsymbol{x}) \equiv \boldsymbol{P}(\boldsymbol{x_1}) \vee \boldsymbol{P}(\boldsymbol{x_2}) \vee \boldsymbol{P}(\boldsymbol{x_3}) \vee \cdots \vee \boldsymbol{P}(\boldsymbol{x_n})$$

- Disjungsi ini bernilai benar jika dan hanya jika **ada** x_i sehingga $P(x_i)$ bernilai benar.
  - Kapan $\exists x P(x)$ bernilai salah?

Kuantor Universal & Eksistensial

Pernyataan	Kapan bernilai BENAR?	Kapan bernilai SALAH?
$\forall x P(x)$	Jika $P(x)$ bernilai **BENAR** untuk **setiap** $\boldsymbol{x}$ dalam domain	Jika **ada** $\boldsymbol{x}$ dalam domain sehingga $P(x)$ bernilai **SALAH**
$\exists x P(x)$	Jika **ada** $\boldsymbol{x}$ dalam domain sehingga $P(x)$ bernilai **BENAR**	Jika $P(x)$ bernilai **SALAH** untuk **setiap** $\boldsymbol{x}$ dalam domain

Apa yang sudah dipelajari…

- Kuantor (Universal & Eksistensial)
  - Digunakan untuk membatasi/mengikat nilai x sehingga $P(x)$ memiliki nilai kebenaran untuk nilai x tertentu sesuai dengan kuantor yang digunakan.
  - Kapan kuantor universal maupun eksistensial bernilai BENAR dan kapan bernilai SALAH.

Materi selanjutnya: Pengenalan Kuantor (Bagian 2)

UNIVERSITAS INDONESIA
Veritas, Probitas, Iustitia

FAKULTAS ILMU KOMPUTER

Logika Predikat

Pengenalan Kuantor (Bagian 2)

Kuantor dengan Domain Terbatas

- Contoh:

  Diberikan formula logika predikat $\forall x(x^2 > 0)$ untuk x bilangan riil negatif

  Formula tersebut dapat dinyatakan sebagai $\forall x < 0(x^2 > 0)$ dengan $x \in \mathbb{R}$
  yang sama artinya dengan $\forall x(x < 0 \rightarrow x^2 > 0)$ dengan $x \in \mathbb{R}$

  Domain bilangan riil untuk variabel x dibatasi oleh kondisi $x < 0$.

  Contoh lain: Apa maksud dari formula berikut jika domain x adalah bilangan riil?

  - $\forall y \neq 0(y^3 \neq 0)$

  - $\exists z > 0(z^2 = 2)$

Penggunaan Kuantor dalam Logika Predikat

- Presedensi Kuantor
  - Kuantor universal maupun eksistensial memiliki presedensi tertinggi dibandingkan dengan operator logika yang lain. Hati-hati dalam penulisannya.
  - Contoh:
    - $\forall x P(x) \rightarrow Q(x)$ menunjukkan bahwa kuantor $\forall$ hanya membatasi predikat $P(x)$
    - Jika yang dimaksud adalah kuantor $\forall$ membatasi predikat $P(x)$ dan $Q(x)$, maka perlu digunakan tanda kurung, menjadi $\forall x\big(P(x) \rightarrow Q(x)\big)$

- Perhatikan bahwa setiap variabel yang digunakan pada predikat bersifat **terikat/*binding variable.***
  - Contoh:
    - $\forall x(x + y > 2)$ tidak tepat karena formula ini tidak memiliki nilai kebenaran, variabel y tidak terikat/dibatasi oleh nilai tertentu maupun kuantor *(free variable)*.

Kesetaraan Logika yang Melibatkan Kuantor

Contoh:

Tunjukkan bahwa $\forall x\big(P(x) \wedge Q(x)\big) \equiv \forall x P(x) \wedge \forall x\, Q(x)$ setara.

– Sesuai dengan definisi kesetaraan logika, kita perlu menunjukkan bahwa berntuk $\forall x\big(P(x) \wedge Q(x)\big) \leftrightarrow \forall x P(x) \wedge \forall x\, Q(x)$ merupakan tautology (valid).

– Kita tunjukkan bahwa berlaku implikasi dua arah, yaitu:

$$\forall x\big(P(x) \wedge Q(x)\big) \rightarrow \forall x P(x) \wedge \forall x\, Q(x)$$

$$\forall x P(x) \wedge \forall x\, Q(x) \rightarrow \forall x\big(P(x) \wedge Q(x)\big)$$

Kesetaraan Logika yang Melibatkan Kuantor

Langkah 1: Menunjukkan bahwa jika $\forall x\big(P(x) \wedge Q(x)\big)$ berlaku, maka $\forall x P(x) \wedge \forall x\, Q(x)$ juga berlaku.

– Misalkan pernyataan $\forall x\big(P(x) \wedge Q(x)\big)$ benar.

– Jika a berada dalam domain maka pernyataan $P(a) \wedge Q(a)$ benar. Berdasarkan sifat konjungsi, maka $P(a)$ benar dan $Q(a)$ juga benar.

– Karena $P(a)$ benar untuk **setiap nilai $\boldsymbol{a}$ dalam domain** seperti halnya $Q(a)$, maka $\forall x P(x)$ benar, demikian juga dengan $\forall x Q(x)$.

– Sehingga dapat disimpulkan bahwa $\forall x P(x) \wedge \forall x Q(x)$ juga benar.

Kesetaraan Logika yang Melibatkan Kuantor

Langkah 2: Menunjukkan bahwa jika $\forall x P(x) \wedge \forall x\, Q(x)$ berlaku, maka $\forall x\big(P(x) \wedge Q(x)\big)$ juga berlaku.

– Misalkan pernyataan $\forall x P(x) \wedge \forall x\, Q(x)$ benar, maka berlaku $\forall x P(x)$ benar dan juga $\forall x Q(x)$ benar.

– Jika a berada dalam domain, maka $P(a)$ benar dan $Q(a)$ juga benar. Sehingga $P(a) \wedge Q(a)$ benar **untuk setiap a dalam domain**.

– Dengan demikian dapat disimpulkan bahwa $\forall x\big(P(x) \wedge Q(x)\big)$ juga benar.

Apa yang sudah dipelajari…

- Kuantor (Universal & Eksistensial)
  - Penggunaan kuantor dengan domain terbatas.
  - Aturan penggunaan kuantor untuk mengkuantifikasi variabel pada predikat.
  - Kesetaraan logika pada logika predikat.

Materi selanjutnya: Negasi pada formula predikat

UNIVERSITAS INDONESIA
Veritas, Probitas, Iustitia

FAKULTAS ILMU KOMPUTER

Logika Predikat

Negasi pada Formula Logika Predikat

Negasi Kuantor Universal

- Contoh:

  "**Setiap** mahasiswa Fasilkom **telah** mengambil kuliah Basis Data"

Formula logika predikatnya adalah $\forall \boldsymbol{x} \boldsymbol{P}(\boldsymbol{x})$**,** dengan ketentuan:

- Domain x adalah "mahasiswa Fasilkom"
- $P(x)$ menyatakan "x telah mengambil kuliah Basis Data"

Negasinya :

"**Tidak semua** mahasiswa Fasilkom **telah** mengambil kuliah Basis Data"

atau

"**Ada** mahasiswa Fasilkom yang **belum** mengambil kuliah Basis Data"

Formula logika predikatnya adalah $\exists \boldsymbol{x} \neg \boldsymbol{P}(\boldsymbol{x})$.

Negasi Kuantor Universal

- Bentuk kesetaraan logika pada negasi kuantor universal:

$$\neg\forall \boldsymbol{x}\boldsymbol{P}(\boldsymbol{x}) \equiv \exists \boldsymbol{x}\neg\boldsymbol{P}(\boldsymbol{x})$$

Definisi kuantor universal: Misalkan terdapat n elemen pada domain x,
$\forall x P(x) \equiv P(x_1) \wedge P(x_2) \wedge \cdots \wedge P(x_n)$

$$\begin{aligned}\neg\forall x P(x) &\equiv \neg\big(P(x_1) \wedge P(x_2) \wedge \cdots \wedge P(x_n)\big)\\ &\equiv \big(\neg P(x_1) \vee \neg P(x_2) \vee \cdots \vee \neg P(x_n)\big)\\ &\equiv \exists x \neg P(x)\end{aligned}$$

Kapan bernilai BENAR?
Kapan bernilai SALAH?

Negasi Kuantor Universal

- Contoh:

  "**Ada** mahasiswa Fasilkom yang **belum** mengambil kuliah Basis Data"

  Kapan pernyataan ini bernilai BENAR?

  Kapan pernyataan ini bernilai SALAH?

Negasi Kuantor Eksistensial

- Perhatikan pernyataan berikut:

  "**Ada** mahasiswa Fasilkom yang **suka** melukis"

Formula logika predikatnya adalah $\exists \boldsymbol{x} \boldsymbol{P}(\boldsymbol{x})$, dengan ketentuan:

- Domain x adalah "mahasiswa Fasilkom"
- $P(x)$ menyatakan "x suka melukis"

Negasinya :

"**Tidak ada** mahasiswa Fasilkom yang **suka** melukis"

atau

"**Semua** mahasiswa Fasilkom **tidak suka** melukis"

Formula logika predikatnya adalah $\forall \boldsymbol{x} \neg \boldsymbol{P}(\boldsymbol{x})$.

Negasi Kuantor Eksistensial

- Bentuk kesetaraan logika pada negasi kuantor universal:

$$\neg\exists \boldsymbol{x}\boldsymbol{P}(\boldsymbol{x}) \equiv \forall \boldsymbol{x}\neg\boldsymbol{P}(\boldsymbol{x})$$

Definisi kuantor eksistensial: Misalkan terdapat n elemen pada domain x,
$\exists x P(x) \equiv P(x_1) \vee P(x_2) \vee \cdots \vee P(x_n)$

$$\begin{aligned}\neg\exists x P(x) &\equiv \neg\big(P(x_1) \vee P(x_2) \vee \cdots \vee P(x_n)\big)\\ &\equiv \big(\neg P(x_1) \wedge \neg P(x_2) \wedge \cdots \wedge \neg P(x_n)\big)\\ &\equiv \forall x \neg P(x)\end{aligned}$$

Kapan bernilai BENAR?
Kapan bernilai SALAH?

Negasi Kuantor Eksistensial

- Contoh:

  "**Semua** mahasiswa Fasilkom **tidak suka** melukis"

  Kapan pernyataan ini bernilai BENAR?

  Kapan pernyataan ini bernilai SALAH?

Nilai Kebenaran Negasi Kuantor Universal & Eksistensial

Aturan De Morgan	Kapan bernilai BENAR?	Kapan bernilai SALAH?
$\neg\forall x P(x) \equiv \exists x \neg P(x)$	Jika **ada x** dalam domain sehingga $P(x)$ bernilai **SALAH**	Jika $P(x)$ bernilai **BENAR** untuk **setiap x** dalam domain
$\neg\exists x P(x) \equiv \forall x \neg P(x)$	Jika $P(x)$ bernilai **SALAH** untuk **setiap x** dalam domain	Jika **ada x** dalam domain sehingga $P(x)$ bernilai **BENAR**

Latihan

- Ubahlah pernyataan $\neg\exists x\big(P(x) \rightarrow \neg Q(x)\big)$ sehingga tidak ada operator negasi yang berada di depan kuantor.

- Tunjukkan bahwa $\neg\forall x\big(P(x) \rightarrow Q(x)\big) \equiv \exists x\big(P(x) \wedge \neg Q(x)\big)$

Apa yang sudah dipelajari?

- Negasi kuantor Universal

$$\neg\forall x P(x) \equiv \exists x \neg P(x)$$

- Negasi kuantor Eksistensial

$$\neg\exists x P(x) \equiv \forall x \neg P(x)$$

- Menentukan nilai kebenarannya.

Materi selanjutnya: Translasi Formula Predikat

UNIVERSITAS INDONESIA
Veritas, Probitas, Iustitia

FAKULTAS ILMU KOMPUTER

Logika Predikat

Translasi Formula Logika Predikat

Contoh 1

- Translasikan pernyataan berikut ke dalam formula logika predikat.

  "Setiap mahasiswa di kelas ini pernah belajar Matematika"

Cara 1

Pernyataan tersebut diubah menjadi

"Untuk setiap **mahasiswa** $\boldsymbol{x}$ di kelas ini, $\boldsymbol{x}$ **pernah belajar Matematika**"

Tentukan:

Domain x : "Mahasiswa di kelas ini"

Predikat $P(x)$: "x pernah belajar Matematika"

Formula logika predikat: $\forall \boldsymbol{x} \boldsymbol{P}(\boldsymbol{x})$

Contoh 1 (lanjutan)

- Translasikan pernyataan berikut ke dalam formula logika predikat.

  "Setiap mahasiswa di kelas ini pernah belajar Matematika"

Cara 2

Pernyataan tersebut diubah menjadi: "Untuk setiap **mahasiswa x, jika x merupakan mahasiswa di kelas ini**, maka x **pernah belajar Matematika**"

Tentukan:

Domain x : "Mahasiswa"

Predikat $P(x)$: "x merupakan mahasiswa di kelas ini" dan $Q(x)$: "x pernah belajar Matematika"

Formula logika predikat: $\forall \boldsymbol{x}\big(\boldsymbol{P}(\boldsymbol{x}) \rightarrow \boldsymbol{Q}(\boldsymbol{x})\big)$

Contoh 1 (lanjutan)

- **Perhatian!**

  "Setiap mahasiswa di kelas ini pernah belajar Matematika" ditranslasikan menjadi:

$$\forall \boldsymbol{x}\big(\boldsymbol{P}(\boldsymbol{x}) \rightarrow \boldsymbol{Q}(\boldsymbol{x})\big)$$

  Tidak dapat menggunakan operator "$\wedge$" karena pernyataannya akan menjadi:

  "Semua mahasiswa merupakan mahasiswa di kelas ini **dan** pernah belajar Matematika"

  Pernyataan ini tidak sesuai dengan maksud pernyataan awal.

Contoh 1 (lanjutan)

- Translasikan pernyataan berikut ke dalam formula logika predikat.

  "Setiap mahasiswa di kelas ini pernah belajar Matematika"

Cara 3 menggunakan predikat n-ary dengan $n = 2$

Tentukan:

Predikat $P(x, y)$: "x pernah belajar y"

Domain x adalah mahasiswa di kelas ini dan domain y adalah pelajaran/mata kuliah.

Formula logika predikat: $\forall \boldsymbol{x} \boldsymbol{P}(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{Matematika})$

Contoh 2

- Translasikan pernyataan berikut ke dalam formula logika predikat.

  "Beberapa mahasiswa di kelas ini dapat memainkan gitar"

Cara 1

Pernyataan tersebut diubah menjadi

"Untuk beberapa **mahasiswa** $\boldsymbol{x}$ di kelas ini, $\boldsymbol{x}$ **dapat memainkan gitar**"

Tentukan:

Domain x : "Mahasiswa di kelas ini"

Predikat $P(x)$: "x dapat memainkan gitar"

Formula logika predikat: $\exists \boldsymbol{x} \boldsymbol{P}(\boldsymbol{x})$

Contoh 2 (lanjutan)

- Translasikan pernyataan berikut ke dalam formula logika predikat.

  "Beberapa mahasiswa di kelas ini dapat memainkan gitar"

Cara 2

Pernyataan tersebut diubah menjadi "Untuk **beberapa mahasiswa** $\boldsymbol{x}$, **berlaku** $\boldsymbol{x}$ **mahasiswa di kelas ini** dan $\boldsymbol{x}$ **dapat memainkan gitar**"

Tentukan:

Domain x : "Mahasiswa"

Predikat $P(x)$: "x mahasiswa di kelas ini" dan $Q(x)$: "x dapat memainkan gitar"

Formula logika predikat: $\exists \boldsymbol{x}\big(\boldsymbol{P}(\boldsymbol{x}) \wedge \boldsymbol{Q}(\boldsymbol{x})\big)$

Contoh 2 (lanjutan)

- **Perhatian!**

  "Beberapa mahasiswa di kelas ini dapat memainkan gitar" ditranslasikan menjadi:

$$\exists \boldsymbol{x}\big(\boldsymbol{P}(\boldsymbol{x}) \wedge \boldsymbol{Q}(\boldsymbol{x})\big)$$

Tidak dapat menggunakan operator "$\rightarrow$" karena pernyataannya dapat bernilai benar meskipun x bukan mahasiswa di kelas ini. (Ingat $F \longrightarrow T \equiv F \longrightarrow F \equiv T$)

Contoh 2 (lanjutan)

- Translasikan pernyataan berikut ke dalam formula logika predikat.

  "Beberapa mahasiswa di kelas ini dapat memainkan gitar"

Cara 3 menggunakan predikat n-ary dengan $n = 2$

Tentukan:

Predikat $P(x, y)$: "x dapat memainkan y"

Domain x adalah mahasiswa di kelas ini dan domain y adalah alat musik.

Formula logika predikat: $\exists \boldsymbol{x} \boldsymbol{P}(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{gitar})$

Apa yang sudah dipelajari?

- Translasi ke dalam formula logika predikat:
  - (opsional) Ubah ke dalam pernyataan bervariabel
  - Tentukan predikat yang diperlukan dan domain untuk setiap variabel pada predikat
  - Susun formula predikatnya
  - (opsional) Baca lagi formula yang telah terbentuk.

Materi selanjutnya: Kuantor bersarang

UNIVERSITAS INDONESIA

FAKULTAS ILMU KOMPUTER

Logika Predikat

Kuantor bersarang *(Nested Quantifier)*

Contoh

Misalkan diberikan sebuah formula logika predikat dengan x, y bilangan riil.

$$\forall x \exists y (x + y = 0)$$

Formula di atas menggunakan **kuantor bersarang / *nested quantifiers***, dan dibaca "Untuk setiap bilangan riil x, terdapat suatu bilangan riil y sehingga berlaku $x + y = 0$".

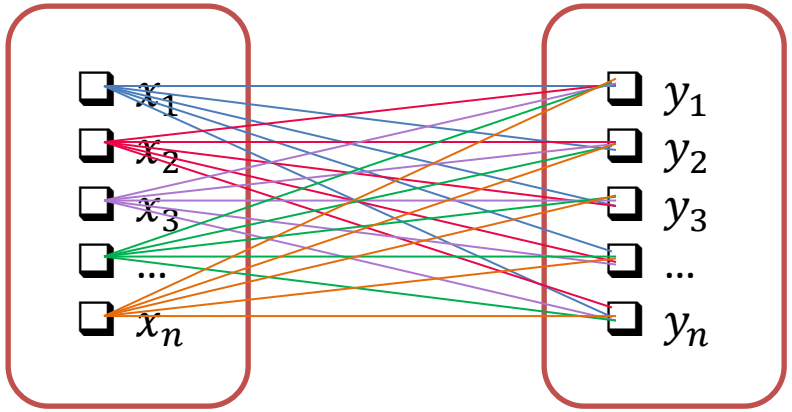
Formula di atas dapat dianggap sebagai bentuk $\forall x \big(\boldsymbol{Q(x)} \big)$

dengan $\mathbf{Q}(\boldsymbol{x})$: $\exists y \big(\boldsymbol{P(x, y)} \big)$

dan $\boldsymbol{P(x, y)}$: "$x + y = 0$"

Kuantor bersarang sebagai *Loop*

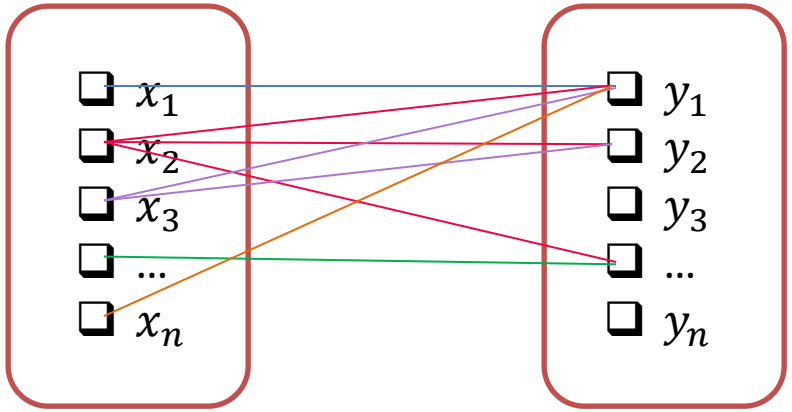
- $\forall x \forall y P(x, y)$
  - Untuk setiap x, untuk setiap y berlaku P(x,y)



  - Contoh: Semua mahasiswa menyukai semua makanan
    - Kapan bernilai BENAR?
    - Kapan bernilai SALAH?

Kuantor bersarang sebagai *Loop*

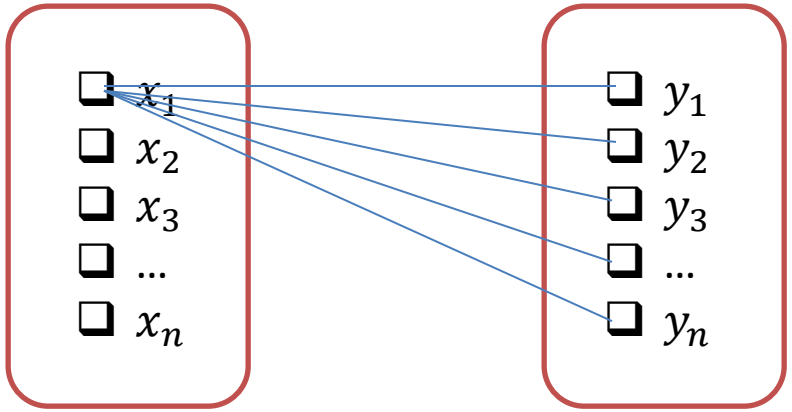
- $\forall x \exists y P(x, y)$
  - Untuk setiap x, ada y sehingga berlaku P(x,y)



  - Contoh: Semua mahasiswa menyukai suatu makanan
    - Kapan bernilai BENAR?
    - Kapan bernilai SALAH?

Kuantor bersarang sebagai *Loop*

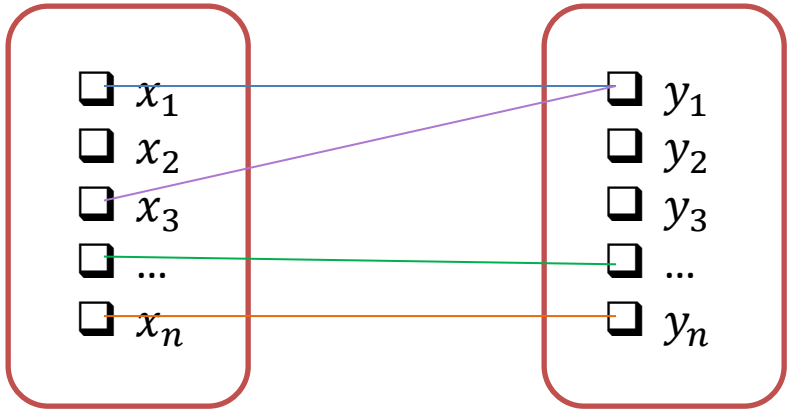
- $\exists x \forall y P(x, y)$
  - Ada x untuk setiap y sehingga berlaku P(x,y)



  - Contoh: Ada mahasiswa yang menyukai semua makanan
    - Kapan bernilai BENAR?
    - Kapan bernilai SALAH?

Kuantor bersarang sebagai *Loop*

- $\exists x \exists y P(x, y)$
  - Ada x ada y sehingga berlaku P(x,y)



  - Contoh: Ada mahasiswa yang menyukai suatu makanan
    - Kapan bernilai BENAR?
    - Kapan bernilai SALAH?

Catatan pada Kuantor Bersarang

- Perhatikan **urutan kuantor**, perhatikan pula **“letak” variabel** yang diikat oleh kuantor yang bersesuaian.
  - Kuantor dengan jenis yang sama dapat *dibolak-balik* urutannya, sementara kuantor dengan jenis berbeda perlu hati-hati. ☺

$$\forall x \forall y P(x, y) \equiv \forall y \forall x P(x, y)$$

$$\exists x \exists y P(x, y) \equiv \exists y \exists x P(x, y)$$

Catatan pada Kuantor Bersarang

- Kuantor mengikat variabel pada domain tertentu
  - Contoh: Diberikan predikat $P(x, y)$: "mahasiswa x menyukai makanan y"

    $\exists y \forall x P(x, y)$ merepresentasikan pernyataan "Ada makanan yang **disukai** oleh semua mahasiswa"

    $\exists y \forall x P(y, x)$ merepresentasikan pernyataan "Ada mahasiswa yang **menyukai** semua makanan" (sama dengan formula $\exists x \forall y P(x, y)$)

Contoh

- Misalkan $P(x, y, z)$: "$x + y = z$" dengan domain untuk x, y, z adalah bilangan riil. Tentukan nilai kebenaran dari formula-formula berikut.

1. $\forall x \forall y \exists z P(x, y, z)$
   - Formula ini dibaca …
   - Nilai kebenarannya …

2. $\exists z \forall x \forall y P(x, y, z)$
   - Formula ini dibaca …
   - Nilai kebenarannya …

3. $\forall z \exists x \exists y P(x, y, z)$
   - Formula ini dibaca …
   - Nilai kebenarannya …

Nilai Kebenaran Kuantor Bersarang

Statement	*When True?*	*When False?*
$\forall x \forall y P(x, y)$ $\forall y \forall x P(x, y)$	$P(x, y)$ is true for every pair x, y.	There is a pair x, y for which $P(x, y)$ is false.
$\forall x \exists y P(x, y)$	For every x there is a y for which $P(x, y)$ is true.	There is an x such that $P(x, y)$ is false for every y.
$\exists x \forall y P(x, y)$	There is an x for which $P(x, y)$ is true for every y.	For every x there is a y for which $P(x, y)$ is false.
$\exists x \exists y P(x, y)$ $\exists y \exists x P(x, y)$	There is a pair x, y for which $P(x, y)$ is true.	$P(x, y)$ is false for every pair x, y.

Latihan

- Translasikan formula predikat berikut ke dalam bahasa natural kemudian tentukan nilai kebenarannya. Diberikan domain berupa bilangan riil.

1. $\forall x \exists y (x^2 = y)$

2. $\forall x \forall y \big((x \geq 0) \wedge (y < 0) \rightarrow (x - y > 0)\big)$

3. $\forall x \forall y \exists z (z = (x + y)/2)$

4. $\exists x \exists y (x + y \neq y + x)$

Apa yang sudah dipelajari?

- Penggunaan kuantor bersarang
- Variasi kuantor bersarang dengan dua variable
- Menentukan nilai kebenaran kuantor bersarang

Materi selanjutnya: Translasi lanjutan

UNIVERSITAS INDONESIA
Veritas, Probitas, Iustitia

FAKULTAS ILMU KOMPUTER

Logika Predikat

Translasi Formula Logika Predikat (Lanjutan – Bagian 1)

Translasi ke Bahasa Natural

Diberikan $F(x, y)$: "$x\ berteman\ dengan\ y$"dengan x dan y mahasiswa. Nyatakan $\exists x \forall y F(x, y)$ ke dalam Bahasa natural.

- Langkah-langkah (opsional):
  - Nyatakan sesuai formula yang diberikan, dengan menyebutkan variable dan operator yang digunakan.

    "Ada mahasiswa x untuk semua mahasiswa y berlaku x berteman dengan y"

  - Perbaiki ke dalam kalimat atau pernyataan yang lebih dekat dengan Bahasa natural namun tetap setara dengan .

    "Ada mahasiswa yang berteman dengan semua mahasiswa"

Translasi ke Bahasa Natural

Contoh 1

Nyatakan formula berikut ke dalam Bahasa natural. Domain x, y, z adalah mahasiswa, dengan $C(x)$: "$x\ memiliki\ komputer$" dan $F(x, y)$: "$x\ berteman\ dengan\ y$".

- $\forall x \left(C(x) \vee \exists y \left(C(y) \wedge F(x, y) \right) \right)$

  "Semua mahasiswa x memiliki komputer atau ada mahasiswa y yang memiliki komputer dan berteman dengan x"

  Atau

  "Semua mahasiswa memeiliki komputer atau berteman dengan mahasiswa yang memiliki komputer"

Translasi ke Bahasa Natural

Contoh 2

Nyatakan formula berikut ke dalam Bahasa natural. Domain x, y adalah mahasiswa, dengan $K(x, y)$: "$x\ mengenal\ y$".

- $\exists x \forall y \forall z \left(\left(K(x, y) \wedge K(x, z) \wedge (y \neq z) \right) \rightarrow \neg K(y, z) \right)$

  "Ada mahasiswa x, jika x mengenal semua mahasiswa y dan z yang berbeda, maka y dan z tidak saling mengenal"

  Atau

  "Ada mahasiswa yang semua kenalannya tidak saling mengenal"

Translasi ke Ekspresi Logika

- Diberikan predikat $B(x, y)$ adalah “x pernah berkunjung ke y”, $F(x)$ menyatakan “x menyukai fotografi”, dan $T(x)$ menyatakan “x menyukai travelling”. Domain x adalah orang dan y adalah kota di Indonesia. Nyatakan pernyataan-pernyataan berikut ke dalam formula logika predikat.

1. Setiap orang menyukai travelling tapi ada orang yang tidak menyukai fotografi

2. Setiap orang yang tidak menyukai fotografi pernah berkunjung ke suatu kota di Indonesia.

Latihan

- Diberikan predikat $B(x, y)$ adalah “x pernah berkunjung ke y”, $F(x)$ menyatakan “x menyukai fotografi”, dan $T(x)$ menyatakan “x menyukai travelling”. Domain x adalah orang dan y adalah kota di Indonesia.

- Nyatakan formula-formula berikut ke dalam Bahasa natural.
  - $\exists x\big(T(x) \wedge \exists y \neg B(x, y)\big)$
  - $\forall x\big(\exists y B(x, y) \rightarrow F(x)\big)$
  - $\forall x\big(T(x) \rightarrow \forall y \neg B(x, y)\big)$

- Nyatakan pernyataan berikut ke dalam formula logika predikat.
  - Ada orang yang pernah berkunjung ke suatu kota di Indonesia dan tidak menyukai fotografi.
  - Ada kota yang pernah dikunjungi oleh semua orang yang menyukai travelling.

Apa yang sudah dipelajari

- Translasi lanjutan yang melibatkan lebih dari satu kuantor.
  - Translasi ke Bahasa natural
  - Translasi dari Bahasa natural

Materi selanjutnya: Translasi Lanjutan (bagian 2)

UNIVERSITAS INDONESIA
Veritas, Probitas, Iustitia

FAKULTAS ILMU KOMPUTER

Logika Predikat

Translasi Formula Logika Predikat (Lanjutan – Bagian 2)

Translasi ke Ekspresi Logika

Menyatakan “minimal”

- Diberikan predikat $F(x)$ menyatakan “x menyukai fotografi”, dan $T(x)$ menyatakan “x menyukai travelling”. Domain x adalah orang. Nyatakan pernyataan-pernyataan berikut ke dalam formula logika predikat.

1. Ada setidaknya satu orang yang tidak menyukai fotografi

2. Ada setidaknya dua orang yang menyukai travelling

Translasi ke Ekspresi Logika

Menyatakan “tepat satu/tepat dua/dst”

- Diberikan predikat $F(x)$ menyatakan “x menyukai fotografi”, dan $T(x)$ menyatakan “x menyukai travelling”. Domain x adalah orang. Nyatakan pernyataan-pernyataan berikut ke dalam formula logika predikat.

1. Ada tepat satu orang yang menyukai fotografi

2. Ada tepat dua orang yang menyukai travelling

Translasi ke Ekspresi Logika

Menyatakan “maksimal”

- Diberikan predikat $F(x)$ menyatakan “x menyukai fotografi”, dan $T(x)$ menyatakan “x menyukai travelling”. Domain x adalah orang. Nyatakan pernyataan-pernyataan berikut ke dalam formula logika predikat.

1. Ada maksimal satu orang yang menyukai fotografi

2. Ada maksimal dua orang yang menyukai travelling

Catatan

- Untuk mempermudah "membaca", kuantor dapat dituliskan berdekatan dengan variabel yang masuk ke dalam *scope* dari kuantor tersebut. Tapi hati-hati, tetap perhatikan urutan kuantor.
  - Contoh:
    - $\exists x \exists y \big(P(x) \wedge Q(x,y)\big)$ dapat juga dinyatakan dalam bentuk $\exists x \big(P(x) \wedge \exists \boldsymbol{y} \boldsymbol{Q}(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})\big)$
    - $\forall \boldsymbol{y} \exists \boldsymbol{x} \big(P(x) \wedge Q(x,y)\big)$ tidak dapat dinyatakan dalam bentuk $\exists \boldsymbol{x} \big(P(x) \wedge \forall \boldsymbol{y} Q(x,y)\big)$

- Sebaiknya tidak menggunakan negasi untuk kuantor (negasi diletakkan tepat sebelum predikat).
  - Contoh:
    - Formula $\neg \exists x \forall y \big(P(x,y)\big)$ ditulis dalam $\forall x \exists y \neg \big(P(x,y)\big)$ (ingat aturan De Morgan)
    - "Tidak semua orang menyukai fotografi", dinyatakan dalam "Ada orang yang tidak menyukai fotografi", sehingga misalnya dinyatakan dalam $\exists x Fotografi(x)$.

Latihan

- Diberikan predikat $B(x, y)$ adalah “x pernah berkunjung ke y”, $F(x)$ menyatakan “x menyukai fotografi”, dan $T(x)$ menyatakan “x menyukai travelling”. Domain x adalah orang dan y adalah kota di Indonesia. Nyatakan kalimat-kalimat berikut ke dalam formula logika predikat.

1. Setiap orang pernah berkunjung ke tepat satu kota
2. Ada orang yang pernah berkunjung setidaknya satu kota
3. Semua orang yang menyukai travelling pernah mengunjungi setidaknya dua kota
4. Semua orang yang menyukai travelling pernah mengunjungi tepat satu kota
5. Ada orang yang menyukai fotografi dan pernah mengunjungi maksimal dua kota

Apa yang sudah dipelajari?

- Translasi dari/ke dalam formula logika predikat dengan beberapa variabel, predikat, dan kuantor.
- Catatan/tips dalam translasi.

UNIVERSITAS INDONESIA

FAKULTAS ILMU KOMPUTER

Aturan Inferensi

Contoh: Socrates

- Kita memiliki 2 premis:
  - “Semua manusia adalah makhluk hidup.”
  - “Socrates adalah seorang manusia.”
- Kesimpulan:
  - “Socrates adalah makhluk hidup.”
- Pertanyaannya: Bagaimana kita mendapatkan kesimpulan dari premis?

Inferensi pada Logika Proposisi

Argumen pada Logika Proposisi

- **Argumen** di logika proposisi adalah sekumpulan proposisi.

- Argumen terdiri atas dua bagian:
  - **Premis/Hipotesis** : sekumpulan proposisi, selain yang terakhir
  - **Kesimpulan/Konklusi** : proposisi yang terakhir yang di-*support* oleh premis.

- Contoh:
  - Premis:
    - "Semua manusia adalah makhluk hidup."
    - "Socrates adalah seorang manusia."
  - Kesimpulan:
    - "Socrates adalah makhluk hidup."

Argumen

Argumen Valid

- Argumen valid jika premis-premis mengimplikasikan kesimpulan
- Misal kita representasikan premis-premis dengan sekumpulan variabel p_1, p_2, p_3, …, p_n dan sebuah kesimpulan dengan variabel q,

$$p_1 \wedge p_2 \wedge p_3 \wedge \ldots \wedge p_n \rightarrow q$$

adalah sebuah **tautologi** ☺

Argument form

- Diberikan sebuah argumen, sebelum melakukan proses lebih lanjut, kita ubah terlebih dahulu argumen tersebut menjadi sebuah ***argument form***.

- **Argument form** : kita gantikan setiap proposisi dengan **variabel**.

- Contoh:
  - Premis:
    - Jika Anda mempunyai password, Anda dapat mengakses komputer (p q)
    - Anda mempunyai password
  - Kesimpulan:
    - Anda dapat mengakses komputer
      - Disimbolkan dengan $\therefore$ (“karena itu”, “dapat disimpulkan bahwa”, “therefore”)

Argument form

$$\begin{array}{l} p \rightarrow q \\ p \\ \hline \therefore q \end{array}$$

Aturan Inferensi

- Untuk menentukan apakah sebuah argumen **valid**, kita dapat menggunakan **tabel kebenaran**.

- Kita juga dapat menggunakan beberapa **argumen sederhana** yang sudah terbukti valid, yaitu **aturan inferensi/rules of inference**.

- Kita dapat menggunakan **aturan inferensi** ini untuk membuktikan validitas dari **argumen lain yang lebih kompleks (misal, terdiri dari banyak premis)**.

1. Modus Ponens

$$\begin{array}{l} p \rightarrow q \\ p \\ \hline \therefore q \end{array}$$

Corresponding Tautology:

$$((p \rightarrow q) \wedge p) \rightarrow q$$

- Contoh:

  Misalkan *p* adalah “Ani rajin belajar.”
  Misalkan *q* adalah “Ani menjadi pintar.”

  “Jika Ani rajin belajar, maka Ani menjadi pintar.”
  “Ani rajin belajar.”

  ∴ “Ani menjadi pintar.”

2. Modus Tollens

$$\begin{array}{l} p \rightarrow q \\ \neg q \\ \hline \therefore \neg p \end{array}$$

Corresponding Tautology:

$$((p \rightarrow q) \wedge \neg q) \rightarrow \neg p$$

- Contoh:

  Misalkan *p* adalah “Ani rajin belajar.”
  Misalkan *q* adalah “Ani menjadi pintar.”

  “Jika Ani rajin belajar, maka Ani menjadi pintar.”
  “Ani tidak menjadi pintar.”

  ∴ “Ani tidak rajin belajar.”

3. Silogisme Hipotetik (Hyphothetical Syllogism)

$$\begin{array}{l} p \rightarrow q \\ q \rightarrow r \\ \hline \therefore p \rightarrow r \end{array}$$

Corresponding Tautology:

$((p \rightarrow q) \wedge (q \rightarrow r)) \rightarrow (p \rightarrow r)$

- Contoh:

  Misalkan *p* adalah “Ani rajin belajar.”
  Misalkan *q* adalah “Ani menjadi pintar.”
  Misalkan *r* adalah “Ani menjadi kaya.”

  “Jika Ani rajin belajar, maka Ani menjadi pintar.”
  “Jika Ani pintar, maka Ani menjadi kaya.”

  ∴ “Jika Ani rajin belajar, maka Ani menjadi kaya.”

4. Silogisme Disjungtif (Disjunctive Syllogism)

$$\begin{array}{l} p \vee q \\ \neg p \\ \hline \therefore q \end{array}$$

Corresponding Tautology:

$(\neg p \wedge (p \vee q)) \rightarrow q$

- Contoh:

  Misalkan *p* “Ani meminum teh.”

  Misalkan *q* “Ani meminum kopi.”

  “Ani meminum teh atau Ani meminum kopi.”

  “Ani tidak meminum teh.”

  ∴ “Ani meminum kopi.”

5. Penambahan (Addition)

$$\frac{p}{\therefore p \vee q}$$

Corresponding Tautology:

$p \rightarrow (p \vee q)$

- Contoh:

  Misalkan *p* “Ani meminum teh.”

  Misalkan *q* “Ani meminum kopi.”

  “Ani meminum teh.”

  _____

  ∴ “Ani meminum teh atau Ani meminum kopi.”

6. Simplifikasi (Simplification)

$$\frac{p \wedge q}{\therefore p}$$

Corresponding Tautology:

$$(p \wedge q) \rightarrow p$$
$$(p \wedge q) \rightarrow q$$

- Contoh:

  Misalkan *p* “Ani belajar di Fasilkom.”

  Misalkan *q* “Ani meminum kopi.”

  “Ani belajar di Fasilkom dan meminum kopi.”

  ∴ “Ani belajar di Fasilkom.”

7. Konjungsi (Conjunction)

$$\begin{array}{l} p \\ q \\ \hline \therefore p \wedge q \end{array}$$

Corresponding Tautology:

$((p) \wedge (q)) \rightarrow (p \wedge q)$

- Contoh:

  Misalkan *p* “Ani belajar di Fasilkom.”

  Misalkan *q* “Ani meminum kopi.”

  “Ani belajar di Fasilkom”

  “Ani meminum kopi.”

  ∴ “Ani belajar di Fasilkom dan meminum kopi.”

8. Resolusi (Resolution)

$$\begin{array}{c} p \vee q \\ \neg p \vee r \\ \hline \therefore q \vee r \end{array}$$

Corresponding Tautology:

$((p \vee q) \wedge (\neg p \vee r)) \rightarrow (q \vee r)$

- Contoh:

Misalkan *p* “Ani meminum teh.”

Misalkan *q* “Ani meminum kopi.”

Misalkan *r* “Ani meminum susu.”

“Ani meminum teh atau Ani meminum kopi.”

“Ani tidak meminum teh atau Ani meminum susu.”

∴ Ani meminum kopi atau Ani meminum susu.

Latihan #1

- Diberikan pernyataan-pernyataan berikut:

  "Hari ini tidak cerah dan lebih dingin dari kemarin"

  "Kita akan pergi ke pantai hanya bila hari sedang cerah"

  "Jika kita tidak pergi ke pantai, maka kita akan pergi ke gunung"

  "Jika kita pergi ke gunung, maka kita akan tiba di rumah pada malam hari."

- Periksa apakah dari pernyataan-pernyataan di atas dapat disimpulkan bahwa "Kita akan tiba di rumah pada malam hari."

Latihan #1 (cont)

- Langkah 1: Mengubah kumpulan premis ke argument form

p : “hari ini cerah”

q : “hari ini lebih dingin dari kemarin”

r : “kita akan pergi ke pantai”

s : “kita akan pergi ke gunung”

t : “kita akan tiba di rumah pada malam hari”

“Hari ini tidak cerah dan lebih dingin dari kemarin”	$\neg p \wedge q$
“Kita akan pergi ke pantai hanya bila hari sedang cerah”	$r \rightarrow p$
“Jika kita tidak pergi ke pantai, maka kita akan pergi ke gunung”	$\neg r \rightarrow s$
“Jika kita pergi ke gunung, maka kita akan tiba di rumah pada malam hari.”	$s \rightarrow t$

Latihan #1 (cont)

Buktikan bahwa premis di slides sebelumnya dapat mengimplikasikan kesimpulan ***t***

1.	$\neg p \wedge q$	premis
2.	$\neg p$	simplifikasi dari 1
3.	$r \rightarrow p$	premis
4.	$\neg r$	Modus Tollens dari 2 dan 3
5.	$\neg r \rightarrow s$	premis
6.	s	Modus Ponens dari 4 dan 5
7.	$s \rightarrow t$	premis
8.	t	Modus Ponens dari 6 dan 7

"Kita akan tiba di rumah pada malam hari."

Latihan #1 (cont)

- Langkah 1: Mengubah kumpulan premis ke argument form

p : “hari ini cerah”

q : “hari ini lebih dingin dari kemarin”

r : “kita akan pergi ke pantai”

s : “kita akan pergi ke gunung”

t : “kita akan tiba di rumah pada malam hari”

“Hari ini tidak cerah dan lebih dingin dari kemarin”

“Kita akan pergi ke pantai hanya bila hari sedang cerah”

“Jika kita tidak pergi ke pantai, maka kita akan pergi ke gunung”

“Jika kita pergi ke gunung, maka kita akan tiba di rumah pada malam hari.”

Kekeliruan (Fallacy)

Periksa apakah argumen berikut valid atau tidak.

Jika Anda rajin belajar, maka Anda mendapat nilai A.

Anda tidak rajin belajar.

Kesimpulan: Anda tidak mendapat nilai A.

Misal **p** : Anda rajin belajar, **q** : Anda mendapat nilai A.

- $((p \rightarrow q) \wedge \neg p) \rightarrow \neg q$ bukan merupakan Tautologi.
- Oleh karena itu, argumen di atas tidak valid.

- Kekeliruan seperti ini dinamakan **kekeliruan dalam menyangkal hipotesis** (***fallacy of denying the hypothesis***).

Kekeliruan (Fallacy)

Periksa apakah argumen berikut valid ?

Jika Anda rajin belajar, maka Anda mendapat nilai A.

Anda mendapat nilai A.

Kesimpulan: Anda rajin belajar.

Misal **p** : Anda rajin belajar, **q** : Anda mendapat nilai A.

- $((p \rightarrow q) \wedge q) \rightarrow p$ bukan merupakan Tautologi.
- Argumen di atas tidak valid.

- Kekeliruan seperti ini dinamakan **kekeliruan dalam pembenaran akibat** (***fallacy of affirming the conclusion***).

Aturan Inferensi pada Logika Predikat

1. Instansiasi Universal / Universal Instantiation

- Misal **c** adalah elemen/anggota tertentu dari domain.

$$\frac{\forall x P(x)}{\therefore P(c)}$$

- **Contoh**:
  - Domain terdiri atas semua mahasiswa Fasilkom
  - Nana adalah mahasiswa Fasilkom
  - “Semua mahasiswa Fasilkom adalah mahasiswa yang rajin.”
  - “Oleh karena itu, Nana adalah mahasiswa yang rajin”

2. Generalisasi Universal / Universal Generalization

- Misal, **c** adalah **elemen/anggota sembarang** dari domain dan **bukan spesifik**.

***P*(c)** untuk **sembarang c** di domain
∴ ∀x ***P*(x)**

- **Sembarang** artinya **tidak boleh ada asumsi apapun** terhadap **c** selain bahwa **c** adalah nilai sembarang dari domain.

3. Instansiasi Eksistensial / Existential Instantiation

- Misal, **c** adalah elemen/anggota **tertentu** dari domain.

$$\exists x\, P(x)$$

$$\therefore P(c),$$ untuk suatu c di domain

- Jika $\exists x\, P(x)$ benar, maka terdapat suatu elemen **c** di domain sehingga $P(c)$ bernilai benar.
- **Contoh:**
  - "Ada seseorang yang mendapatkan nilai A di kelas MD1."
  - "Misalkan dia adalah *a*, kita dapat mengatakan bahwa *a* mendapatkan nilai A"

- Contoh lain:
- Misal, ***P*(x)** menyatakan "$x^2 = 3x$" dan domain x adalah seluruh bilangan bulat.

- Diberikan premis **∃x *P*(x)**.

- Kita simpulkan ***P*(0)** bernilai benar karena $\mathbf{0^2 = 3 \,.\, 0}$ (dalam hal ini, kita ambil nilai **c** = 0).

- Kita juga dapat simpulkan ***P*(3)** bernilai benar karena $\mathbf{3^2 = 3 \,.\, 3}$ (dalam hal ini, kita ambil nilai **c** = 3).

4. Generalisasi Eksistensial / Existential Generalization

- Misal, **c** adalah **suatu elemen tertentu** di domain.

***P*(c)** untuk **suatu c** di domain
$\therefore \exists x\, P(x)$

- Jika ada suatu elemen **c** di domain sehingga ***P*(c)** bernilai benar, maka dapat kita simpulkan $\exists x\, P(x)$ juga benar.
- Contoh:
  - "Nana mendapatkan nilai A di kelas MD1."
  - "Oleh karena itu, ada seseorang yang mendapatkan nilai A di kelas MD1."

- Contoh lain
- Misal, ***P*(x)** menyatakan "$\mathbf{x^2 > 5}$", dan **x** berasal dari domain bilangan bulat.

- Kita temukan sebuah nilai **c**, yaitu **8** sehingga "$\mathbf{8^2 > 5}$".

- Kita dapat simpulkan bahwa $\exists x\, P(x)$ bernilai benar.

5. Modus Ponens Universal

- Modus Ponens Universal mengombinasikan antara **universal instantiation and Modus Ponens** dalam sebuah aturan.

- P(x) dan Q(x) adalah dua buah predikat.
- **a** adalah sebuah elemen tertentu di domain.

$$\forall x\,(P(x) \rightarrow Q(x))$$

P(a), a adalah elemen tertentu di domain

$$\therefore Q(a)$$

6. Modus Tollens Universal

- P(x) dan Q(x) adalah dua buah predikat.
- **a** adalah sebuah elemen tertentu di domain.

$\forall x\ (P(x) \rightarrow Q(x))$
$\neg Q(a)$, **a adalah elemen tertentu di domain**

$\therefore \neg P(a)$

Latihan #2

- Diberikan premis "Mahasiswa yang lulus adalah mahasiswa yang mengerjakan PR atau menghadiri kuliah," "Ani tidak menghadiri kuliah," dan "Ani lulus."
- Tunjukkan bahwa "Ada mahasiswa yang mengerjakan PR."
- Domain adalah seluruh mahasiswa.

- **L(x)** : "x lulus"
- **H(x)** : "x mengerjakan PR"
- **K(x)** : "x menghadiri kuliah"

Latihan #2 (cont)

Kesimpulan: $\exists x\ H(x)$

1	$\forall x\ (L(x) \rightarrow H(x) \vee K(x))$	premis
2	$\neg K(Ani)$	premis
3	$L(Ani)$	premis
4	$L(Ani) \rightarrow H(Ani) \vee K(Ani)$	Instansiasi Universal 1
5	$H(Ani) \vee K(Ani)$	modus ponens 3 & 4
6	$H(Ani)$	silogisme disjungtif
7	$\exists x\ H(x)$	Generalisasi eksistensial 6

UNIVERSITAS INDONESIA

FAKULTAS ILMU KOMPUTER

Metode Pembuktian: Pengenalan

Diadaptasi dari:

Slides Discrete Mathematics and Its Applications (Rosen)

Pembuktian Matematis

- Pembuktian menghasilkan sebuah argumentasi valid (disebut bukti/*proof*) yang menunjukkan kebenaran dari sebuah pernyataan.

- Dalam matematika, ilmu komputer, dan disiplin ilmu terkait, pembuktian biasanya dilakukan secara “informal” (vs. “formal” seperti yang dilakukan pada inferensi sebelumnya):
  - Menerapkan lebih dari satu aturan inferensi dalam satu langkah (beberapa aturan inferensi dapat diabaikan/diterapkan secara implisit)

(+) Lebih mudah dipahami dan untuk dijelaskan ke pembaca

(-) Tapi … juga lebih rentan terhadap kesalahan

Aplikasi Pembuktian Matematis

- Verifikasi bahwa algoritma/program yang dibuat benar
- Verifikasi bahwa sistem operasi aman
- Pengembangan sistem cerdas berbasis pengetahuan

Teorema

- Teorema adalah pernyataan yang dapat ditunjukkan kebenarannya melalui pembuktian menggunakan:
  - definisi
  - teorema lainnya (yang sudah dibuktikan)
  - aksioma (pernyataan yang tidak perlu dibuktikan)
  - aturan inferensi

- Contoh: “Unique Factorization Theorem”

  Every integer greater than 1 either is a prime number itself or can be represented as the product of prime numbers and that, moreover, this representation is unique, up to (except for) the order of the factors.

Lemma

- Lemma adalah ‘teorema pembantu’ yang dibuktikan dan digunakan untuk membuktikan teorema.
  - Bukan hal utama yang ingin dibuktikan, tapi hanya memudahkan proses pembuktian teorema yang menjadi target.

- Contoh:
  - Untuk membuktikan “Unique Factorization Theorem” sebelumnya, dibuktikan lemma yang dikenal dengan nama “Euclid’s Lemma”:

    If a prime p divides the product ab of two integers a and b, then p must divide at least one of those integers a and b.

  - Euclid’s lemma (yang sudah dibuktikan) digunakan dalam dalam proses pembuktian “Unique Factorization Theorem” (memudahkan proses pembuktian teorema ini).

Corollary

- Corollary adalah pernyataan yang dapat diturunkan secara langsung atau merupakan bentuk khusus dari teorema.

- Contoh:
  - Teorema:

    "Jika perkalian dua bilangan bulat n dan m merupakan bilangan genap, maka n atau m adalah bilangan genap"
  - Corrolary:

    "Diberikan bilangan bulat n. Jika n^2 merupakan bilangan genap, maka n adalah bilangan genap"

- Corollary di atas diperoleh dengan mengambil nilai n=m.

Conjecture

- *Conjecture* adalah pernyataan yang dianggap benar namun masih perlu dibuktikan.

- Jika bukti dari conjecture ditemukan, maka menjadi teorema.
  - Ada kemungkinan conjecture terbukti salah.

- Contoh: Fermat's Last Theorem (diajukan tahun 1637)

"No three positive integers a, b, and c satisfy the equation $a^n + b^n = c^n$ for any integer value of n greater than 2"

- Baru terbukti pada tahun 1994 oleh Sir Andrew John Wiles!

Apa yang sudah dipelajari?

- Pembuktian matematis
- Aplikasi pembuktian matematis
- Terminologi dalam pembuktian
  - Lemma, Teorema, Corollary, Conjecture

Topik selanjutnya: Trivial, Vacuous, Direct Proof

UNIVERSITAS INDONESIA

FAKULTAS ILMU KOMPUTER

Metode Pembuktian: Trivial Proof, Vacuous Proof, Direct Proof

Diadaptasi dari:

Slides Discrete Mathematics and Its Applications (Rosen)

Bentuk Teorema

- Teorema umumnya menyatakan suatu sifat yang dipenuhi oleh setiap elemen dari suatu domain: bilangan bulat, bilangan riil, atau struktur diskret lainnya.

- Kuantor universal (yang diperlukan pada teorema) biasanya implisit.

Contoh:

"Jika $x > y$, di mana x dan y bilangan riil positif, maka $x^2 > y^2$ "

pada dasarnya yang dimaksud adalah:

"Untuk setiap bilangan riil positif x dan y, jika $x > y$, maka $x^2 > y^2$."

Membuktikan Teorema

- Teorema umumnya dapat dinyatakan dalam bentuk:

$$\forall x(P(x) \rightarrow Q(x))$$

- Untuk membuktikan, kita tunjukkan untuk sembarang elemen *c* dari domain:

$$P(c) \rightarrow Q(c)$$

  – Artinya, kita membuktikan pernyaataan berkondisi (formula berbentuk implikasi):

$$p \rightarrow q$$

- Dengan aturan inferensi “universal generalization”, dapat disimpulkan bahwa teorema yang diberikan $\forall x(P(x) \rightarrow Q(x))$ berlaku.

Membuktikan Pernyataan Berkondisi: $p \rightarrow q$ (Trivial Proof dan Vacuous Proof)

- *Trivial Proof* : Jika diketahui *q* benar, maka

  $p \rightarrow q$ bernilai benar.

  "Jika hari ini hujan maka $1=1$."

- *Vacuous Proof* : Jika diketahui *p* salah, maka

  $p \rightarrow q$ bernilai benar.

  "Jika saya miskin dan kaya maka $2 + 2 = 4$."

- Trivial and vacuous proofs sering bermanfaat pada pembuktian induksi matematis yang akan kita pelajari.

Membuktikan Pernyataan Berkondisi: $p \rightarrow q$ (Direct Proof)

Buktikan:

"Jika n bilangan bulat ganjil, maka n^2 juga adalah bilangan bulat ganjil."

- *Direct Proof* : Asumsikan p bernilai benar. Gunakan definisi, aksioma, aturan inferensi, dan ekivalensi untuk menunjukkan q benar.

Contoh 1: Direct Proof

Buktikan:

"Jika n bilangan bulat ganjil, maka n^2 juga adalah bilangan bulat ganjil."

Untuk membuktikan, kita manfaatkan definisi bilangan bulat ganjil & genap:

Bilangan bulat n genap jika terdapat bilangan bulat k sedemikian hingga $n = 2k$, sedangkan n adalah bilangan ganjil jika terdapat bilangan bulat k, sedemikian hingga $n = 2k + 1$. Setiap bilangan bulat adalah bilangan genap atau ganjil, namun tidak kedua-duanya.

Bukti:

Asumsikan n bilangan bulat ganjil.

Berdasarkan definisi bilangan bulat ganjil, $n = 2k + 1$ untuk suatu bilangan bulat k.

Mengambil kuadrat pada kedua sisi dari persamaan tersebut diperoleh:

$$n^2 = (2k + 1)^2 = 4k^2 + 4k + 1 = 2(2k^2 + 2k) + 1 = 2r + 1,$$

Karena n^2 bisa dinyatakan sebagai $n^2 = 2r + 1$ di mana $r = 2k^2 + 2k$, dan r adalah bilangan bulat, maka n^2 adalah bilangan bulat ganjil.

Terbukti bahwa, jika n bilangan bulat ganjil, maka n^2 juga adalah bilangan bulat ganjil. **QED**

Contoh 2: Direct Proof

Buktikan bahwa penjumlahan dua bilangan rasional adalah juga bilangan rasional.

Untuk membuktikan, kita manfaatkan definisi bilangan rasional:

Bilangan riil *r* adalah bilangan rasional jika terdapat bilangan bulat *p* dan *q* di mana $q \neq 0$, sedemikian hingga $r = p/q$.

Pernyataan: "Jika *r* dan *s* adalah bilangan rasional, maka *r*+*s* juga bilangan rasional"

Bukti:

Asumsikan *r* dan *s* bilangan rasional.

Berdasarkan definisi bilangan rasional, terdapat bilangan bulat *p, q* dan juga *t, u*, sehingga:

$$r = p/q, \quad s = t/u, \quad u \neq 0, \; q \neq 0$$

$$r + s = \frac{p}{q} + \frac{t}{u} = \frac{pu+qt}{qu} = \frac{v}{w}$$

Karena *r*+*s* bisa dinyatakan dalam $r + s = \frac{v}{w}$ di mana $v = pu + qt$ *dan* $w = \mathrm{qu} \neq 0$ maka *r*+*s* adalah bilangan rasional.

Terbukti bahwa, penjumlahan dua bilangan rasional adalah juga bilangan rasional.

QED

Apa yang sudah dipelajari?

Pembuktian Pernyataan Berkondisi $p \rightarrow q$

- Trivial Proof
- Vacuous Proof
- Direct Proof

Topik selanjutnya: Indirect Proof

UNIVERSITAS INDONESIA

FAKULTAS ILMU KOMPUTER

Metode Pembuktian:
Proof by Contraposition, Proof by Contradiction

Diadaptasi dari:

Slides Discrete Mathematics and Its Applications (Rosen)

Membuktikan Pernyataan Berkondisi: $p \rightarrow q$ (Indirect Proof: Proof by Contraposition)

Buktikan:

"Jika $3n + 2$ *bilangan bulat ganjil, maka n adalah bilangan bulat ganjil."*

- *Proof by Contraposition :* Asumsikan $\neg q$ bernilai benar dan tunjukkan $\neg p$ benar dengan menggunakan direct proof.
- Dengan kata lain, kita buktikan dengan direct proof: $\neg q \rightarrow \neg p$
- Jika kita berhasil membuktikan $\neg q \rightarrow \neg p$ dengan direct proof, maka $p \rightarrow \mathrm{q}$ juga terbukti.

Contoh: Proof by Contraposition

Buktikan:

"Jika $3n + 2$ bilangan bulat ganjil, maka n adalah bilangan bulat ganjil."

Bukti:

Untuk membuktikan pernyataan di atas, secara tidak langsung dibuktikan:

"Jika n adalah bilangan bulat genap, maka $3n + 2$ adalah bilangan bulat genap"

Asumsikan n bilangan bulat genap.

Berdasarkan definisi bilangan bulat genap, $n = 2k$ untuk suatu bilangan bulat k.

Dengan demikian:

$$3n + 2 = 3(2k) + 2 = 6k + 2 = 2(3k + 1) = 2j \text{ , di mana } j = 3k + 1$$

Karena $3n + 2$ bisa dinyatakan sebagai $3n + 2 = 2j$, di mana $j = 3k + 1$, dan $j = 3k + 1$ adalah bilangan bulat, maka $3n + 2$ adalah bilangan bulat genap.

Kita berhasil membuktikan: "Jika n adalah bilangan bulat genap, maka $3n + 2$ adalah bilangan bulat genap"

Dengan demikian, secara tidak langsung dengan proof by contraposition, telah terbukti bahwa jika $3n + 2$ bilangan bulat ganjil, maka n adalah bilangan bulat ganjil.

QED

Latihan: Proof by Contraposition

Buktikan:

"Jika n^2 bilangan bulat ganjil, maka n adalah bilangan bulat ganjil."

Indirect Proof: Proof by Contradiction

Buktikan bahwa $\sqrt{2}$ adalah bilangan irrational.

- *Proof by Contradiction (reductio ad absurdum)*.

  Untuk membuktikan *p*, asumsikan $\neg p$ dan tunjukkan kontradiksi melalui $r \wedge \neg r$ (bernilai F)

  Karena terjadi kontradiksi pada proses pembuktian ini, maka kita telah menunjukkan bahwa $\neg p \rightarrow \mathbf{F}$ berlaku/bernilai benar.

  Artinya, $\neg p$ bernilai salah, atau dengan kata lain *p* bernilai benar (kita telah berhasil membuktikan *p*).

Contoh: Proof by Contradiction

Buktikan bahwa $\sqrt{2}$ adalah bilangan irrational.

Bukti:

Asumsikan $\sqrt{2}$ adalah bilangan rasional.

Berdasarkan definisi bilangan rasional, terdapat bilangan bulat a dan b sehingga $\sqrt{2} = a/b$, di mana $b \neq 0$ dan khususnya a and b tidak memiliki faktor yang sama.

Mengambil kuadrat pada kedua sisi dari persamaan tersebut diperoleh

$$2 = \frac{a^2}{b^2} \qquad 2b^2 = a^2 \qquad (1)$$

Berdasarkan definisi bilangan bulat genap, a^2 adalah bilangan bulat genap.

Jika a^2 adalah bilangan bulat genap maka a adalah bilangan bulat genap (2)

Sebagai latihan, buktikan teorema (2) ini!

Dengan modus ponens diperoleh a adalah bilangan bulat genap dan menggunakan definisi bilangan bulat genap, $a = 2c$ untuk suatu bilangan bulat c.

Berdasarkan hal ini dan persamaan (1) sebelunya, diperoleh:

$$2b^2 = 4c^2 \qquad b^2 = 2c^2$$

Dengan demikian, b^2 adalah bilangan bulat genap (berdasarkan definisi bilangan bulat genap).

Menggunakan teorema (2) dan modus ponens, dapat disimpulkan b adalah bilangan bulat genap.

Karena a adalah bilangan bulat genap dan b adalah bilangan bulat genap, maka maka a dan b pasti memiliki faktor yang sama, yaitu 2 (kedua bilangan tersebut habis dibagi 2).

Terjadi kontradiksi dengan pernyataan bahwa a dan b tidak memiliki faktor yang sama.

Artinya, asumsi awal $\sqrt{2}$ adalah bilangan rasional salah dan oleh karena itu, $\sqrt{2}$ adalah bilangan irrational.

QED

Latihan: Proof by Contradiction

Buktikan dengan proof by contradiction:

"*Jika* $3n + 2$ *bilangan bulat ganjil, maka n adalah bilangan bulat ganjil*."

Apa yang sudah dipelajari?

Pembuktian Tidak Langsung (Indirect Proof)

- Proof by Contraposition
  - Pernyataan berkondisi $p \rightarrow q$
- Proof by Contradiction
  - Lebih umum, namun bisa dinyatakan sebagai pernyataan berkondisi

Topik selanjutnya:
Pembuktian Bikondisional, Proof by Cases, Counterexample

UNIVERSITAS INDONESIA

FAKULTAS ILMU KOMPUTER

Metode Pembuktian: Pembuktian Bikondisional, Proof by Cases, Counterexample

Diadaptasi dari slides:

- Slides Discrete Mathematics and Its Applications (Rosen)
- Diktat Matematika Diskret (Prof. Belawati Widjaja)

Membuktikan Pernyataan Bikondisional: $p \leftrightarrow q$

Untuk membuktikan teorema dalam bentuk pernyataan bikondisional $p \leftrightarrow q$, kita perlu buktikan $p \rightarrow q$ dan juga $q \rightarrow p$.

Buktikan:

n bilangan bulat ganjil jika dan hanya jika n^2 juga adalah bilangan bulat ganjil

Bukti:

Perlu dibuktikan dua hal:

(1) Jika n adalah bilangan bulat ganjil maka n^2 juga adalah bilangan bulat ganjil

(2) Jika n^2 bilangan bulat ganjil, maka n adalah bilangan bulat ganjil.

Untuk (1) sudah kita buktikan pada Contoh 1 Direct Proof.

Untuk (2) dibuktikan sebagai Latihan pada Proof by Contraposition.

Dengan membuktikan (1) dan (2), maka terbuktilah bahwa:

n bilangan bulat ganjil jika dan hanya jika n^2 juga adalah bilangan bulat ganjil

QED

Proof by Cases

Buktikan $n^2 \geq n$ untuk setiap bilangan bulat n.

- Pernyataan yang ingin dibuktikan:

  "Jika n adalah bilangan bulat, maka $n^2 \geq n$.

Proof by Cases

- Untuk membuktikan pernyataan kondisional dalam bentuk:

$$(p_1 \vee p_2 \vee \ldots \vee p_n) \rightarrow q$$

- Gunakan ekivalensi:

$$[(p_1 \vee p_2 \vee \ldots \vee p_n) \rightarrow q] \equiv [(p_1 \rightarrow q) \wedge (p_2 \rightarrow q) \wedge \ldots \wedge (p_n \rightarrow q)]$$

- Setiap implikasi $p_i \rightarrow q$ adalah kasus (*case*) yang harus dibuktikan.

Contoh: Proof by Cases (1)

Buktikan: $n^2 \geq n$ untuk setiap bilangan bulat n.

Bukti:

Ambil $p :=$ n adalah sebuah bilangan bulat,

dan $q := n^2 \geq n$.

Sedangkan p setara dengan $p_1 \vee p_2 \vee p_3$ dengan

$p_1 :=$ n adalah sebuah bilangan bulat dengan $n \leq -1$

$p_2 := n = 0$

dan $p_3 :=$ n adalah sebuah bilangan bulat dengan $n \geq 1$.

Jadi yang ingin dibuktikan adalah $(p_1 \vee p_2 \vee p_3) \rightarrow q$.

Untuk membuktikannya dipakai ***proof by cases***, yaitu dengan membuktikan

Contoh: Proof by Cases (1)

(i) $p_1 \rightarrow q$ atau

Jika n adalah sebuah bilangan bulat dengan $n \leq -1$ maka $n^2 \geq n$.

Ternyata, benar.

(ii) $p_2 \rightarrow q$ atau Jika $n = 0$ maka $n^2 \geq n$. Ternyata benar.

(iii) $p_3 \rightarrow q$ atau Jika n adalah sebuah bilangan bulat dengan $n \geq 1$ maka $n^2 \geq n$.

Ternyata, benar.

Maka $(p_1 \vee p_2 \vee p_3) \rightarrow q$ terbukti.

Counterexamples

- Ingat kembali:

$$\exists x \neg P(x) \equiv \neg \forall x P(x)$$

- Untuk menunjukkan pernyataan $\forall x P(x)$ tidak berlaku/salah (atau $\neg \forall x P(x)$ berlaku/benar), cukup temukan sebuah nilai *c* dari domain sehingga: *P*(*c*) bernilai salah (atau $\neg$*P*(*c*) bernilai benar).

- Dalam hal ini, *c* disebut *counterexample* untuk pernyataan $\forall x P(x)$

Contoh: "Setiap bilangan bulat positif dapat dinyatakan sebagai hasil penjumlahan kuadrat dari tiga bilangan bulat.

Pernyataan ini tidak benar dengan mengambil bilangan 7 sebagai counterexample, karena bilangan 7 tidak dapat dinyatakan sebagai jumlahan kuadrat dari tiga bilangan bulat.

Apa yang sudah dipelajari?

- Pembuktian pernyataan bikondisional

$$p \leftrightarrow q$$

- Proof by cases
  - Kondisi sebagai disjungsi kasus

- Counterexample

Topik selanjutnya: Himpunan & Fungsi