UNIVERSITAS INDONESIA

Veritas, Probitas, Iustitia

FAKULTAS ILMU KOMPUTER

Himpunan

Definisi

- Himpunan (*set*): Kumpulan objek (unik) yang **tidak memperhatikan urutan anggota**.
- Elemen atau anggota: objek di dalam himpunan

- Notasi **a ∈ A** :
  - **a** adalah elemen dari himpunan **A**
- Notasi **a ∉ A**:
  - **a** bukan elemen dari himpunan **A**

Penyajian Himpunan

Metode *Roster* (dengan daftar)

- Himpunan semua huruf vokal

  V = {a, e, i, o, u}

- Himpunan bilangan ganjil positif kurang dari 10

  O = {1, 3, 5, 7, 9}

- Himpunan bilangan bulat kurang dari 50

  B = {1, 2, 3, …, 49}

  Tanda **elipsis “…”** digunakan jika pola dari elemen-elemen sudah jelas.

Penyajian Himpunan

Notasi *Set Builder*

- Menyatakan kriteria yang harus dipenuhi setiap anggota himpunan.
  - Contoh: O = {x | x adalah bilangan bulat ganjil positif kurang dari 10}

- Menggunakan predikat: **H = {x | P(x)}**
  - Contoh: $S = \{x \mid \text{Prime}(x)\}$

Some Important Sets

$\boldsymbol{N}$ = *natural numbers* = {0,1,2,3....}

$\boldsymbol{Z}$ = *integers* = {...,-3,-2,-1,0,1,2,3,...}

$\boldsymbol{Z}^+$ = *positive integers* = {1,2,3,.....}

$\boldsymbol{R}$ = *set of real numbers*

$\boldsymbol{R}^+$ = *set of positive real numbers*

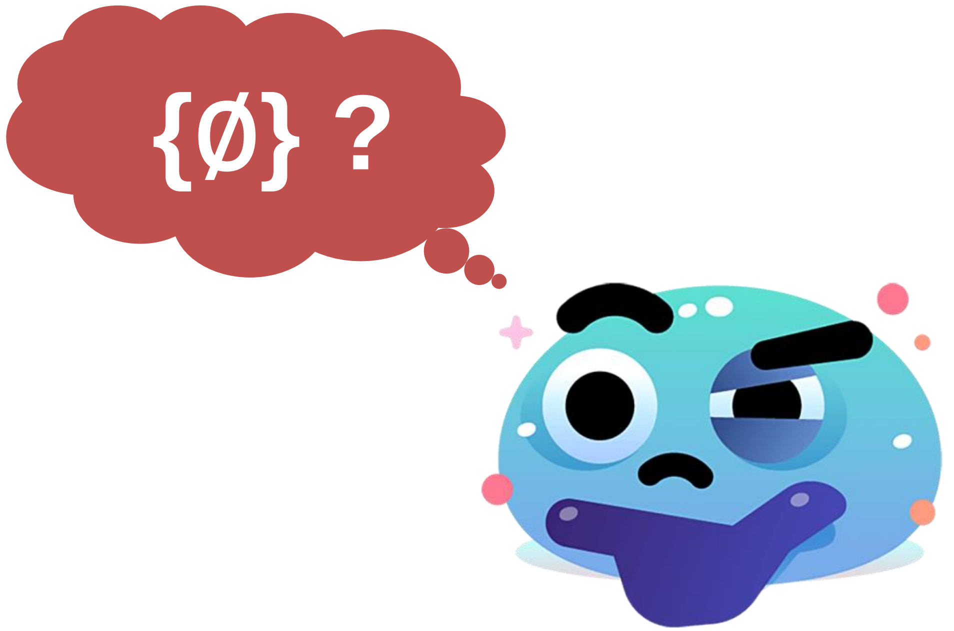
$\boldsymbol{C}$ = *set of complex numbers*

$\boldsymbol{Q}$ = *set of rational numbers*

Himpunan Kosong

- **Himpunan kosong (*empty set*)**: sebuah himpunan spesial yang tidak mempunyai elemen.

- Sebuah himpunan kosong dinyatakan dengan **∅** atau **{ }**.

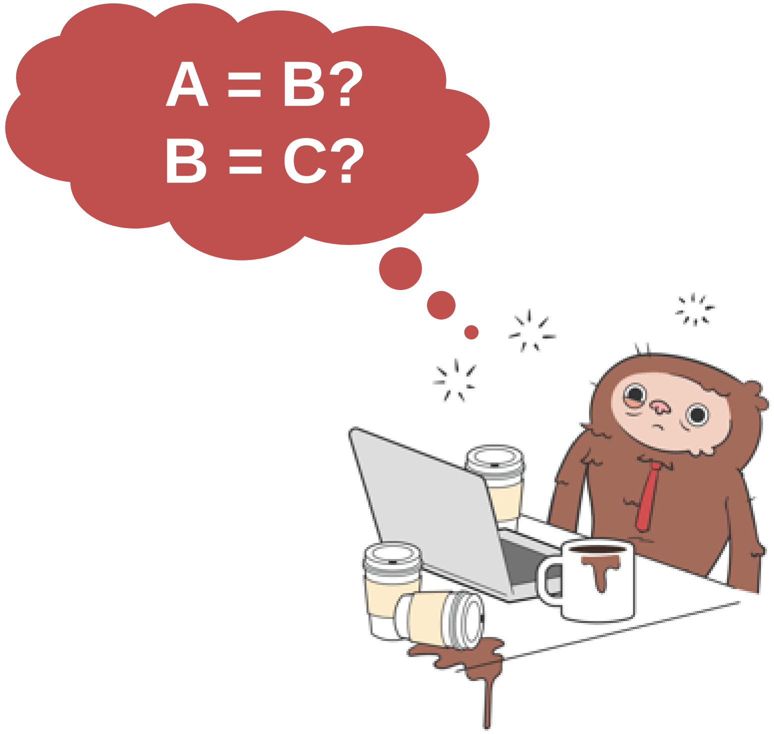


Kesamaan Himpunan

Himpunan A dan B sama (*equal*) jika dan hanya jika mereka mempunyai elemen-elemen yang sama.

$$A = B \textbf{ jika dan hanya jika } \forall x\, (x \in A \leftrightarrow x \in B)$$

- **Contoh:**
- A = {1, 3, 5}
- B = {3, 5, 1}
- C = {1, 3, 5, 7}



Himpunan Bagian

- Notasi: $A \subseteq B$
- Definisi:

$$A \subseteq B \text{ Jika dan hanya jika } \forall x\,(x \in A \rightarrow x \in B)$$

Contoh:

- **$\{1,2\} \subseteq \{1, 2, 3\}$**
- **S** $\subseteq$ **S** (sebuah himpunan **S** adalah himpunan bagian dari dirinya sendiri)
- $\emptyset \subseteq$ **S** (himpunan kosong adalah himpunan bagian dari himpunan **S**)
- Himpunan bilangan bulat ganjil positif $\subseteq$ himpunan bilangan bulat positif
- $\{1, 2, 3\} \nsubseteq \{1, 3, 4, 5\}$

Teorema

Untuk sembarang himpunan **A** berlaku hal-hal sebagai berikut:

(a) **A** adalah himpunan bagian dari **A** itu sendiri ($\mathbf{A} \subseteq \mathbf{A}$).

(b) Himpunan kosong merupakan himpunan bagian dari **A** ($\emptyset \subseteq \mathbf{A}$)

(c) Jika $\mathbf{A} \subseteq \mathbf{B}$ dan $\mathbf{B} \subseteq \mathbf{C}$, maka $\mathbf{A} \subseteq \mathbf{C}$

Himpunan Bagian Sejati (*Proper Subset*)

Notasi: $A \subset B$

Himpunan A merupakan himpunan bagian **sejati** dari B jika dan hanya jika A adalah himpunan bagian dari B, **tetapi $A \neq B$**.

$A \subset B$ **Jika dan hanya jika** $\forall x\, (x \in A \rightarrow x \in B) \wedge \exists x\, (x \in B \wedge x \notin A)$

"ada sebuah elemen x di B **yang bukan elemen** himpunan A"

Contoh:

- $\{1, 2\} \subseteq \{1, 2, 3\}$
- $\{1 ,2\} \subset \{1, 2, 3\}$
- $\{1, 2, 3\} \subseteq \{1, 2, 3\}$
- $\{1, 2, 3\} \not\subset \{1, 2, 3\}$

Kardinalitas Himpunan

Himpunan Berhingga (*Finite Set*)

- Misal **S** adalah sebuah himpunan:
  - Jika ada tepat **n** elemen berbeda di **S**, di mana **n** adalah bilangan bulat bukan negatif, maka himpunan **S berhingga (*finite set*)**. Selain itu, himpunan S tak berhingga (infinite set)
  - **n** adalah kardinalitas dari himpunan **S**, dinyatakan dengan **|S|**

A = {**m** ∈ **N** | **m** < 10 dan **m** ganjil}. **|A| = 5**

B = {**n** | **n** adalah semua alfabet inggris}. **|B| = 26**

|∅| = 0

|{∅}| = 1

|{{∅}}| = …

|{∅, {∅}, {{∅}}}| = …

Himpunan Kuasa (Power Set)

Power set dari himpunan **S**, $\mathcal{P}$**(S)**, merupakan himpunan yang anggotanya adalah semua himpunan bagian dari **S**.

Contoh:

$\mathcal{P}(\{0, 1, 2\})$: $\{\emptyset, \{0\}, \{1\}, \{2\}, \{0, 1\}, \{0, 2\}, \{1, 2\}, \{0, 1, 2\}\}$

$\mathcal{P}(\emptyset)$: $\{\emptyset\}$

$\mathcal{P}(\{\emptyset\})$: $\{\emptyset, \{\emptyset\}\}$

Teorema:

Jika himpunan **S** mempunyai **n** elemen, anggota $\mathcal{P}$**(S)** mempunyai sebanyak 2^n elemen,
atau $|\mathcal{P}(S)| = 2^n$.

Ordered n-tuples

- Terkadang, **urutan elemen di dalam sebuah kumpulan data bisa jadi sangat penting**. Oleh karena itu, **kita butuh struktur lain** (selain himpunan) yang mampu merepresentasikan hal ini.

Ordered n-tuple

$$(a_1, a_2, \ldots, a_n)$$

- **ordered n-tuple** $(a_1, a_2, \ldots, a_n)$ dan $(b_1, b_2, \ldots, b_n)$ dikatakan setara jika dan hanya jika $a_m = b_m$ untuk $m = 1, 2, \ldots, n$.
- **2-tuples** disebut sebagai ordered pairs (bentuk khusus ordered n-tuples dengan n = 2)

Cartesian Product

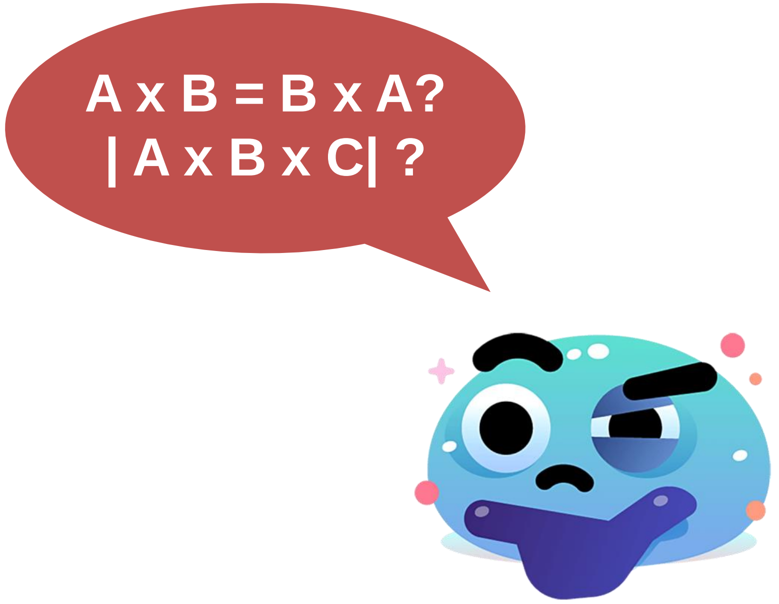
Misal, A dan B adalah himpunan. Cartesian Product dari A dan B, dinyatakan dengan A x B, adalah himpunan seluruh ordered pairs (a, b), di mana a ∈ A dan b ∈ B.

$$A \times B = \{(a, b) | a \in A \wedge b \in B\}$$

Contoh:

1. C = {1, 2, 3}, D = {y, z}
   a. C x D = {(1, y), (1, z), (2, y), (2, z), (3, y), (3, z)}
   b. D x C = …
2. $A = \{0,1\}$, $B = \{1,2\}$, $C = \{0,1,2\}$

   $A \times B \times$ C = …



Cartesian Product dari banyak himpunan

Produk kartesius dari himpunan $\mathbf{A_1, A_2, \ldots, A_n}$ adalah *ordered n-tuples* $\mathbf{(a_1, a_2, \ldots, a_n)}$ dengan aturan:

$$\mathbf{A_1 \times A_2 \times \ldots \times A_n = \{(a_1, a_2, \ldots, a_n) \mid a_i \in A_i \text{ untuk } i = 1, 2, \ldots, n\}}$$

Relasi

- Sebuah relasi **R** dari himpunan **A** ke himpunan **B**: himpunan bagian dari **A x B**, dengan kata lain **R ⊆ A x B**.

$$R \subseteq A \times B$$

Contoh:

- A = {1, 2, 3} dan B = {2, 3, 4, 5}
  R = {(1, 3), (1, 5), (2, 2), (2, 4), (3, 3), (3, 5)}

- Ordered pairs dari relasi R: “lebih kecil dari” dalam himpunan A = {0, 1, 2, 3} adalah:
  - R = {(0, 1), (0, 2), (0, 3), (1, 2), (1, 3), (2, 3)}.

Truth Sets of Quantifiers

- Diberikan predikat *P* dan domain *D*, truth set dari P adalah himpunan elemen di domain *D* yang membuat P(x) bernilai true.

$$\{x \in D | P(x)\}$$

Contoh:

- $P(x)$: "$|x| = 1$", domain x adalah bilangan bulat.

  Truth set dari P(x) adalah {-1, 1}

- Tentukan truth set dari $Q(x)$ and $R(x)$, di mana domain x adalah bilangan bulat dan $Q(x)$: "$x^2 = 2$," dan $R(x)$: "$|x| = x$"?

Gabungan (Union)

- **Definisi:**
  Gabungan dari himpunan **A** dan **B**, dinyatakan dengan **A ∪ B**, adalah sebuah himpunan yang elemennya merupakan anggota dari **A** atau **B**, atau keduanya.

$$A \cup B = \{x \mid x \in A \vee x \in B\}$$

- **Contoh**

{1, 2, 3} ∪ {3, 4, 5} = {1, 2, 3, 4, 5}

Irisan (Intersection)

- **Definisi**
  Irisan dari himpunan **A** dan **B**, dinyatakan dengan **A ∩ B**, adalah sebuah himpunan yang elemennya merupakan anggota dari **A** dan **B**.

$$\mathbf{A \cap B = \{x \mid x \in A \land x \in B\}}$$

- Dua buah himpunan **A** dan **B** dikatakan **saling lepas (*disjoint*)** jika irisannya adalah himpunan kosong, **A ∩ B = ∅**

- **Contoh:**

{1, 3, 5} ∩ {1, 2, 3} = {1, 3}

{1, 3} dan **{2, 4} disjoint** karena **{1, 3} ∩ {2, 4} = ∅**

Selisih (Difference)

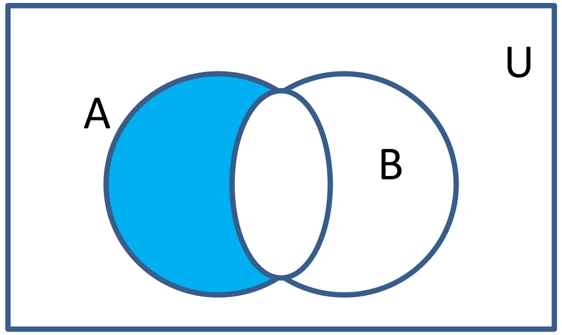
- **Definisi:**
  Selisih/difference dari himpunan **A** dan **B**, dinyatakan dengan **A – B**, adalah himpunan yang elemennya anggota dari **A**, tetapi bukan anggota **B**.

$$\mathbf{A - B = \{x \mid x \in A \wedge x \notin B\}}$$

Contoh:

$\{1, 3, 5\} - \{1, 2, 3\} =$

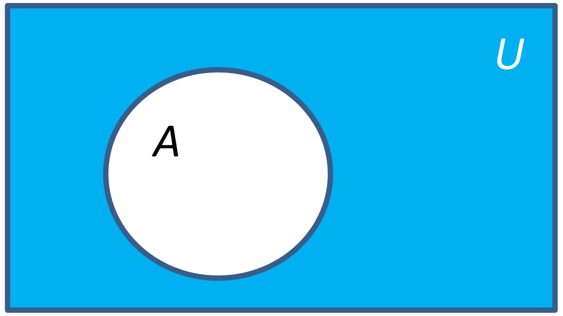
$\{1, 2, 3\} - \{1, 3, 5\} =$



Komplemen (Complement)

- **Definisi:**
  Komplemen dari A relatif terhadap U, dinyatakan dengan $\bar{A}$ atau A^C, adalah himpunan yang elemennya berasal himpunan universal, tetapi **bukan** anggota **A**.
  $\bar{A}$ **= U – A**

$$\bar{A} = \{x \in U \mid x \notin A\}$$



Contoh:

Misal U adalah himpunan bilangan bulat positif

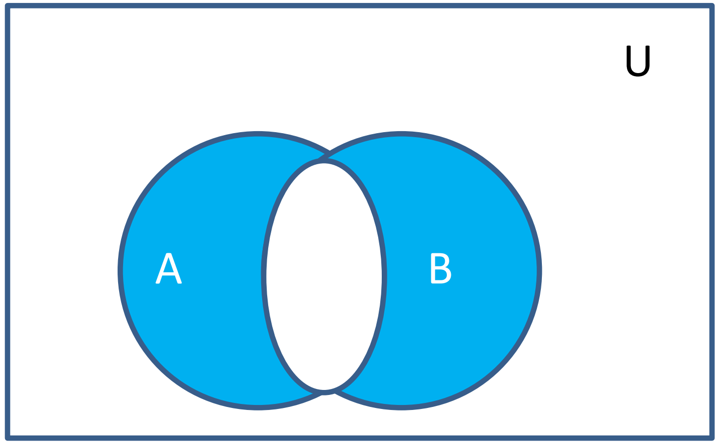
$A = \{x \in Z^+ \mid x > 10\}$

$\bar{A} = \{1, 2, 3, 4, ..., 10\}$

Symmetric Difference

- **Definisi**: S*ymmetric difference* dari himpunan **A** dan **B**, dinotasikan dengan **A ⊕ B** adalah **(A – B)** ∪ **(B – A)**

- **Contoh**:
  $U = \{0,1,2,3,4,5,6,7,8,9,10\}$
  $A = \{1,2,3,4,5\}$ $B = \{4,5,6,7,8\}$
  A ⊕ B = …



Generalized Unions and Intersections

- Misalnya A_1, A_2, …, A_n adalah himpunan
- Secara umum, **gabungan** dari himpunan $\mathbf{A_1}$, $\mathbf{A_2}$, ..., $\mathbf{A_n}$:

$$\bigcup_{i=1}^{n} A_i = A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_n$$

- Secara umum, **irisan** dari himpunan $\mathbf{A_1}$, $\mathbf{A_2}$, ..., $\mathbf{A_n}$**:**

$$\bigcap_{i=1}^{n} A_i = A_1 \cap A_2 \cap \ldots \cap A_n$$

Set Identities

Identity law	$A \cup \emptyset = A$, $A \cap U = A$
Domination laws	$A \cup U = U$, $A \cap \emptyset = \emptyset$
Idempotent laws	$A \cup A = A$, $A \cap A = A$
Complementation law	$(A^C)^C = A$
Complement laws	$A \cup A^C = U$, $A \cap A^C = \emptyset$
Commutative laws	$A \cup B = B \cup A$, $A \cap B = B \cap A$
Associative laws	$(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$ $(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$
Distributive laws	$A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$ $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$
De Morgan's laws	$(A \cup B)^C = A^C \cap B^C$ $(A \cap B)^C = A^C \cup B^C$
Absorption laws	$A \cup (A \cap B) = A$ $A \cap (A \cup B) = A$

Latihan 1

$U = \{a, b, c, d, e\}$, $A = \{a, b, c\}$, $B = \{b, c, d\}$, $C = \{b, c, e\}$.

- $A \cup B \cup C$
- $(A \cap B \cap C)^C$

- $(A - B) - C$
- $A - (B - C)$

Latihan 2

Untuk **k** = 1, 2, 3, ..., himpunan $\mathbf{A_k}$ didefinisikan sebagai **{k, k + 1, k + 2, k + 3, ...}**

Tentukan:

$$\bigcup_{k=1}^{10000} A_k$$

dan

$$\bigcap_{k=1}^{10000} A_k$$

Pembahasan $\bigcup_{k=1}^{10000} A_k$

$A_k = \{k, k + 1, k + 2, k + 3, ...\}$

$A_{k+1} = \{k + 1, k + 2, k + 3, k + 4, ...\}$

$A_{k+2} = \{k + 2, k + 3, k + 4, k + 5, ...\}$

…

$A_{10000} = \{10000, 10001, 10002, 10003, ...\}$

Kita dapatkan bahwa $A_{k+1} \subseteq A_k$, sehingga:

$A_k \cup A_{k+1} = A_k$, dan $A_{k+1} \cup A_{k+2} = A_{k+1}$, dst....

$A_k \cup A_{k+1} \cup A_{k+2} \cup A_{k+3} \cup ... = A_k$

$$\bigcup_{k=1}^{10000} A_k = A_1 \cup A_2 \cup A_3 \cup ... \cup A_{10000} = A_1$$

UNIVERSITAS INDONESIA
Veritas, Probitas, Iustitia

FAKULTAS
ILMU
KOMPUTER

Kardinalitas Himpunan

Kardinalitas Himpunan

Sebelumnya....

Himpunan **A** dikatakan berhingga (*finite*) apabila **A** memuat tepat **n** anggota, dengan $\mathbf{n} \in \mathbf{N_0}$.

Kardinalitas Himpunan

DEFINISI

Himpunan **A** dan **B** mempunyai kardinalitas sama (**|A| = |B|**) jika dan hanya jika **ada korespondensi satu-satu** dari **A** ke **B**.

Jika terdapat **fungsi injektif** dari himpunan **A** ke **B**, kardinalitas himpunan **A** dikatakan kurang dari atau sama dengan kardinalitas himpunan **B**, dinyatakan dengan **|A|≤|B|**.

Countability

DEFINISI

Sebuah himpunan **S** dikatakan **countable** apabila:

- Himpunan **berhingga (*finite*), atau**
- Himpunan mempunyai **kardinalitas yang sama** dengan **himpunan bilangan bulat positif** (Z^+).

Kardinalitas **S** yang merupakan himpunan *countably infinite* dinyatakan dengan $\boldsymbol{\aleph_0}$ (**aleph null**), $|S| = \aleph_0$.

Jika sebuah himpunan tak berhingga *S uncountable*, $|S| = c$ ("continuum")

Contoh: Infinite Countable Set

Tunjukkan bahwa himpunan bilangan bulat ganjil positif A = {1, 3, 5, 7, ...} bersifat **countable**

Karena himpunan **A** *infinite*, harus ditunjukkan fungsi korespondensi satu-satu dari himpunan bilangan bulat positif $\mathbf{Z^+}$ ke **A**. Dengan kata lain, tunjukkan $|A| = |Z^+| = \aleph_0$.

Kita ambil fungsi $f : Z^+ \rightarrow A$, dengan $\mathbf{f(n) = 2n - 1}$. Kemudian, tunjukkan bahwa f **bijektif**:

- Injektif: jika $\mathbf{f(n) = f(m)}$, maka $\mathbf{2n – 1 = 2m – 1}$. Kita dapatkan $\mathbf{n = m}$.
- Surjektif: misalnya t adalah bilangan bulat positif ganjil. Maka, t memiliki selisih 1 dengan sebuah bilangan bulat positif genap 2k, dengan k adalah bilangan natural. Sehingga $t = 2k - 1 = f(k)$.

Terbukti bahwa A *countable*. A *countably infinite* dan $|A| = \aleph_0$.

Summary: countability untuk infinite sets

Himpunan tak berhingga **S** dikatakan *countable* jika dan hanya jika mempunyai kardinalitas yang sama dengan himpunan $\mathbf{Z^+}$

$$|S| = |Z^+| = \aleph_0$$

Dengan kata lain…

S *countable* jika dan hanya jika **ada fungsi bijeksi (korespondensi satu-satu)** dari himpunan $\mathbf{Z^+}$ ke himpunan **S**.

Dengan kata lain…

S *countable* jika dan hanya jika kita dapat membentuk **barisan dari elemen-elemen** yang ada di **S**.

Teorema

Teorema 1

Misalkan A dan B adalah dua himpunan dengan $A \subseteq B$. Apabila B bersifat **countable**, maka A juga bersifat **countable**.

Teorema 2

Misalkan A dan B adalah dua himpunan dengan $A \subseteq B$. Apabila A bersifat **uncountable**, maka B juga bersifat **uncountable**.

Teorema 3

Misalkan A dan B adalah dua himpunan. Jika A dan B bersifat **countable**, maka $A \cup B$ juga bersifat **countable**.

Uncountable Sets

Tunjukkan bahwa himpunan bilangan **riil R** adalah ***uncountable*** !

Bukti Kontradiksi:

Kita asumsikan bahwa **R** bersifat ***countable***. Oleh karena itu, himpunan bagian bilangan riil antara **0** dan **1** juga bersifat ***countable***.

Jadi, kita dapat membuat **list/barisan** bilangan riil antara **0** dan **1**, yaitu $\mathbf{r_1, r_2, r_3, r_4}, \ldots$

Misal, representasi desimalnya adalah:

$\mathbf{r_1} = 0.d_{11}d_{12}d_{13}d_{14} \ldots$
$\mathbf{r_2} = 0.d_{21}d_{22}d_{23}d_{12} \ldots$
$\mathbf{r_3} = 0.d_{31}d_{32}d_{33}d_{34} \ldots$
$\mathbf{r_4} = 0.d_{41}d_{42}d_{43}d_{44} \ldots$
…

dengan, $\mathbf{d_{ij} \in \{0, 1, 2, \ldots, 9\}}$

Uncountable Sets

Kita bisa bangun bilangan riil baru $\mathbf{r = 0.d_1d_2d_3d_4\ldots}$, dengan aturan berikut:

- **d_i = 1, jika $d_{ii} \neq 1$**
- **d_i = 0, jika $d_{ii} = 1$**

Contoh: **apabila**:

$\mathbf{r_1}$ = 0.	**2**	0	1	4	8 …
$\mathbf{r_2}$ = 0.	1	**6**	8	4	7 …
$\mathbf{r_3}$ = 0.	0	3	**1**	5	3 …
$\mathbf{r_4}$ = 0.	0	0	0	**3**	9 …

…

Uncountable Sets

$\mathbf{d_1}$ = **1** karena $\mathbf{d_{11}}$ = 2 ≠ 1.
$\mathbf{d_2}$ = **1** karena $\mathbf{d_{11}}$ = 6 ≠ 1.
$\mathbf{d_3}$ = **0** karena $\mathbf{d_{11}}$ = 1 ≠ 1.
$\mathbf{d_4}$ = **1** karena $\mathbf{d_{11}}$ = 3 ≠ 1.
…

Kita dapatkan **r = 0.1101…**, yang kita ketahui bahwa **r berada di antara 0 dan 1**. Akan tetapi, semua $\mathbf{r_1}$, $\mathbf{r_2}$, $\mathbf{r_3}$,… tidak akan pernah sama dengan **r** karena digit ke-**n** pada **r** dan $\mathbf{r_n}$ selalu berbeda.

Artinya, **kita menemukan bilangan riil antara 0 dan 1**, tetapi **tidak ada di dalam daftar barisan tersebut**.

Akibatnya, asumsi bahwa bilangan riil antara **0** dan **1** dapat dibentuk list/barisan adalah **salah**.

Jadi, himpunan bilangan riil antara **0** dan **1** adalah *uncountable*. Setiap himpunan yang mempunyai subset *uncountable*, maka ia *uncountable*. Jadi, **R bersifat uncountable.**

Barisan

Barisan

Definisi

Fungsi yang memetakan **subset dari himpunan bilangan bulat** (biasanya $\{0, 1, 2, 3, 4, \ldots..\}$ atau $\{1, 2, 3, 4, \ldots.\}$) ke suatu himpunan $\boldsymbol{S}$.

Notasi:

- $\{a_\mathrm{n}\}$ merepresentasikan barisan
- a_n merepresentasikan elemen/suku ke-n dari barisan $\{a_\mathrm{n}\}$
- a_n merupakan hasil pemetaan bilangan bulat n

Contoh

Barisan $\{a_\text{n}\}$ dengan $a_n = \frac{1}{n}$

Barisan Aritmatika

- Bentuk barisan aritmatika:

$$a, a + d, a + 2d, \ldots, a + nd$$

- a menyatakan suku pertama pada barisan
- d menyatakan **beda (selisih)**.

Contoh:

- Barisan $\{t_n\}$, dengan $t_n = 7 - 3n$

Barisan Geometri

- Barisan geometri berbentuk:

$$a, ar, ar^2, ar^3, ar^4, \ldots, ar^n$$

- a adalah **suku pertama**
- **r** adalah **rasio**.

Contoh:

- Barisan **$\{a_n\}$**, dengan **$a_n = 3.2^n$**

Latihan

Dengan domain n = {0, 1, 2, ...}

- $\{a_n\}$ = 1, 1/2, 1/4, 1/8, ...
  - a_n = ?
- $\{b_n\}$ = 1, 3, 5, 7, ...
  - b_n = ?
- $\{c_n\}$ = 1, -1/4, 1/9, -1/16, ...
  - c_n = ?
- $\{d_n\}$ = 0, 1/2, 2/3, 3/4, ...
  - d_n = ?
- $\{e_n\}$ = 0, 1, 2, 3, 4, 0, 1, 2, 3, 4, ...
  - e_n = ?

Relasi Rekurensi

Relasi rekurensi untuk barisan **$\{a_n\}$** adalah suatu persamaan yang menyatakan hubungan suku **a_n** dengan satu atau lebih suku sebelumnya, yaitu **a_0**, **a_1**, **a_2**,...,**a_{n-1}**, untuk bilangan bulat n dengan $n \geq n_0$ dan **$n_0 \geq 1$**.

Contoh:

- Barisan **$\{a_n\}$** yang dinyatakan dengan **$a_n = a_{n-1} + 3$**, untuk **$n \geq 1$** dan **$a_0 = 2$**.

  2, 5, 8, 11, 14, ...

- Barisan Fibonacci **$\{f_n\}$** yang dinyatakan dengan **$f_n = f_{n-1} + f_{n-2}$**, untuk **$n \geq 2$** dan **$f_0 = 0$**, **$f_1 = 1$**.

  0, 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, ...

Beberapa Barisan Penting

TABLE 1 Some Useful Sequences.

nth Term	*First 10 Terms*
n^2	1, 4, 9, 16, 25, 36, 49, 64, 81, 100, ...
n^3	1, 8, 27, 64, 125, 216, 343, 512, 729, 1000, ...
n^4	1, 16, 81, 256, 625, 1296, 2401, 4096, 6561, 10000, ...
2^n	2, 4, 8, 16, 32, 64, 128, 256, 512, 1024, ...
3^n	3, 9, 27, 81, 243, 729, 2187, 6561, 19683, 59049, ...
$n!$	1, 2, 6, 24, 120, 720, 5040, 40320, 362880, 3628800, ...
f_n	1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 89, ...

Penjumlahan (*Summation*)

Misalkan ada suatu barisan **{a_n}** serta **m** dan **n** adalah dua bilangan bulat positif dengan **m ≤ n**. Penjumlahan didefinisikan sebagai berikut:

$$\sum_{i=m}^{n} a_i = am + a_{m+1} + a_{m+2} + \cdots + a_{n-1} + a_n$$

i : index dari penjumlahan

m: batas bawah dari pejumlahan

n: adalah batas atas dari penjumlahan.

Beberapa Sifat Penting

Pergeseran indeks, sebagai contoh:

$$\sum_{i=1}^{N} i^2 = \sum_{j=0}^{N-1} (j+1)^2 = \sum_{k=2}^{N+1} (k-1)^2$$

Penjumlahan ganda, sebagai contoh:

$$\sum_{i=1}^{4} \sum_{j=1}^{3} ij = \sum_{i=1}^{4} (i + 2i + 3i) = \sum_{i=1}^{4} 6i = 60$$

Beberapa Formula Summation

TABLE 2 Some Useful Summation Formulae.

Sum	*Closed Form*
$\sum_{k=0}^{n} ar^k \ (r \neq 0)$	$\frac{ar^{n+1} - a}{r - 1}, r \neq 1$
$\sum_{k=1}^{n} k$	$\frac{n(n+1)}{2}$
$\sum_{k=1}^{n} k^2$	$\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$
$\sum_{k=1}^{n} k^3$	$\frac{n^2(n+1)^2}{4}$
$\sum_{k=0}^{\infty} x^k, \lvert x\rvert < 1$	$\frac{1}{1-x}$
$\sum_{k=1}^{\infty} kx^{k-1}, \lvert x\rvert < 1$	$\frac{1}{(1-x)^2}$

UNIVERSITAS INDONESIA
Veritas, Probitas, Iustitia

FAKULTAS
ILMU
KOMPUTER

Fungsi

Definisi

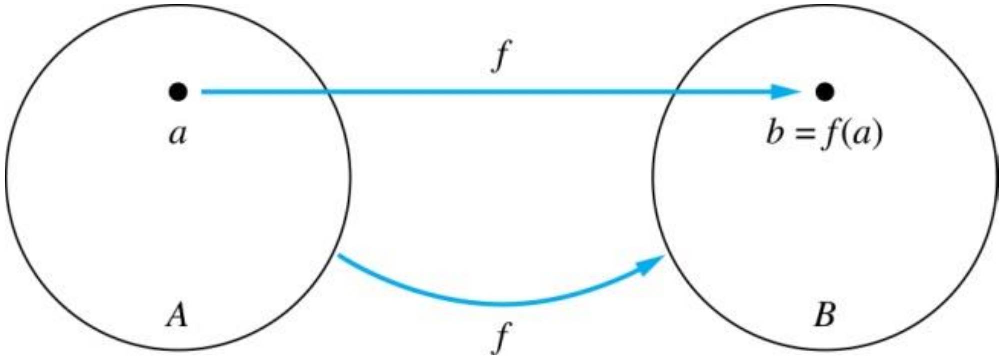
- Diberikan himpunan nonempty **A** dan **B.** Sebuah fungsi dari **A** ke **B** yang dinyatakan dengan $f : A \rightarrow B$ merupakan suatu **relasi** yang menghubungkan **setiap elemen** di **A** dengan **tepat satu elemen** di **B**.

- Fungsi juga dinamakan dengan **pemetaan (*mappings*)** atau **transformasi**.

Fungsi sebagai Relasi

- Fungsi adalah himpunan bagian dari himpunan **A x B,** yang mengandung satu-satunya **ordered pair (a, b)** untuk **setiap elemen a ∈ A**.
- Fungsi dinyatakan dengan ***f*(a) = b**, dengan **(a, b)** adalah **ordered pair unik** di relasi tersebut.

Terminologi



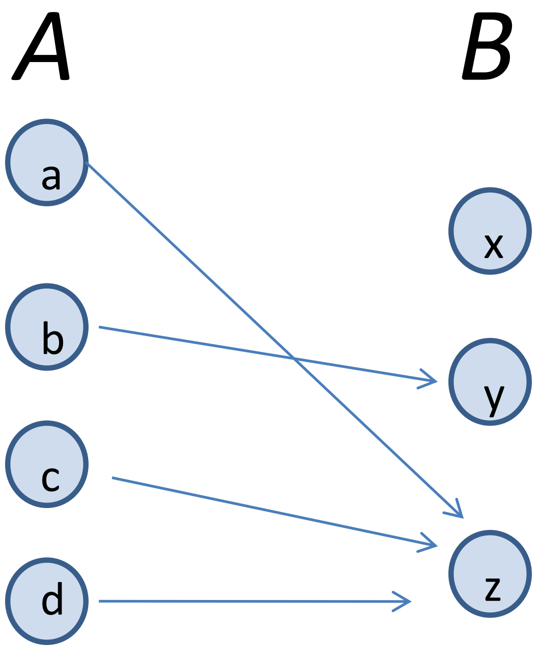
- Kita katakan *f* memetakan (*maps*) A ke B / *f* adalah mapping dari A ke B
- A adalah domain dari *f* dan B adalah codomain dari *f*.

Jika *f*(a) = b:

- *b* adalah peta (*image*) dari *a*
- *a* adalah prapeta (*preimage*) dari *b*
- Range dari *f* adalah himpunan semua peta dari elemen A.

Contoh

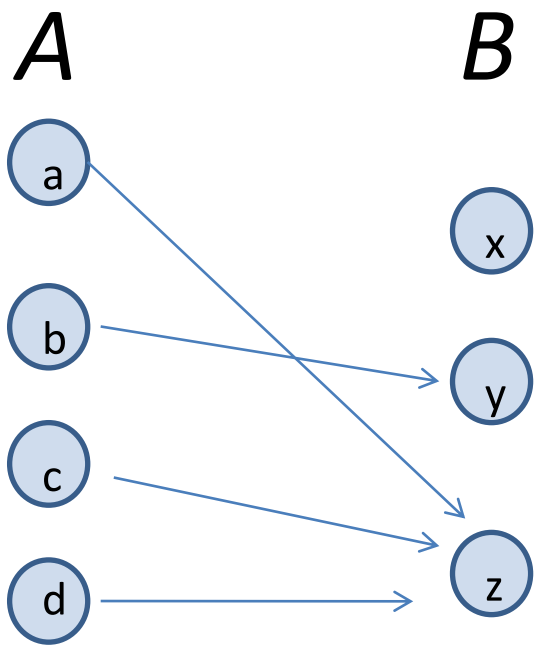
- *f*(*a*) =
- Peta/image dari *d* adalah...
- Domain *f* adalah ...
- Kodomain *f* adalah ...
- Prapeta/preimage dari *y* adalah ...
- Prapeta/Preimage(s) dari z adalah ...
- *f*(*A*)= ...



Fungsi dan Himpunan

- Diberikan $f : A \rightarrow B$ dan S yang merupakan subset dari A. Peta (*image*) dari S terkait fungsi *f* adalah subset dari *B* (yang anggotanya adalah peta dari anggota-anggota S).

$$f(S) = \{f(s) | s \in S\}$$



- Peta (image) dari subset $S = \{a,b,c\}$ adalah ...
- Peta (image) dari subset $S=\{c,d\}$ adalah ...

Latihan

- *Diketahui himpunan:*

  $A = \{a, b, c, d, e\}$

  $B = \{1, 2, 3, 4\}$

  dan $f(a) = 2$, $f(b) = 1$, $f(c) = 4$, $f(d) = 1$, and $f(e) = 1$.

  Diberikan $S = \{b, c, d\}$

  $f(S) = \ldots..$

Kategori Fungsi

- Fungsi injektif / satu-ke-satu / one-to-one
- Fungsi surjektif / onto
- Fungsi bijektif / korespondensi satu-satu

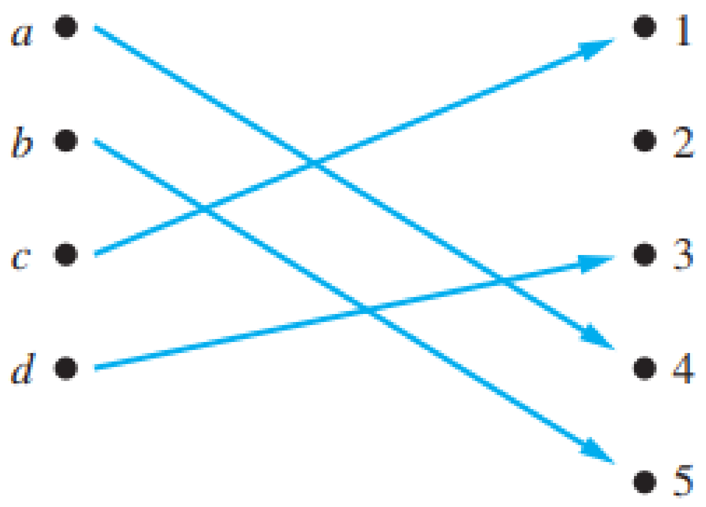
Fungsi Injektif (one-to-one)

Definisi:

Jika $f(\mathbf{a}) = f(\mathbf{b})$, maka $\mathbf{a} = \mathbf{b}$, dengan $\mathbf{a}, \mathbf{b} \in$ domain f

atau, Jika $\mathbf{a} \neq \mathbf{b}$, maka $f(\mathbf{a}) \neq f(\mathbf{b})$

Dengan kata lain, setiap elemen pada **domain dipetakan ke elemen yang berbeda** di **codomain**.



Latihan

Tentukan apakah fungsi berikut merupakan fungsi injektif:

- Fungsi $\boldsymbol{f} : \mathbf{Z} \rightarrow \mathbf{Z}$, dengan $\boldsymbol{f}\mathbf{(x) = x^2}$

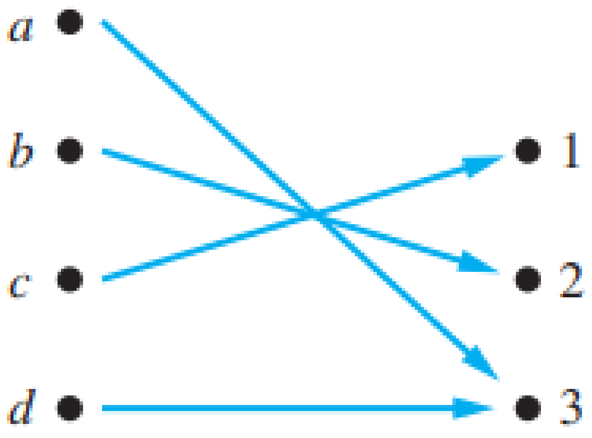
- Fungsi $\boldsymbol{g} : \mathbf{Z^+} \rightarrow \mathbf{Z}$, dengan $\boldsymbol{g}\mathbf{(x) = x^2}$

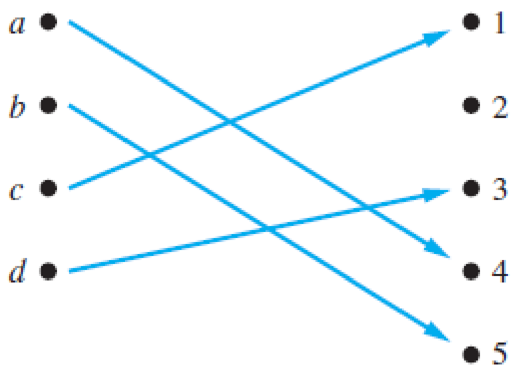
Fungsi Surjektif (onto)

Definisi

Untuk **setiap** elemen **b ∈ B**, **ada sebuah** elemen **a ∈ A** dengan ***f*(a) = b**

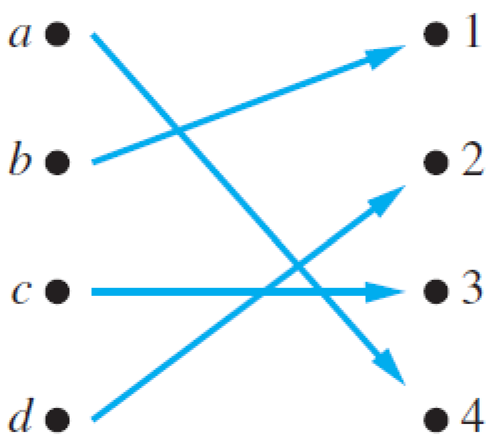
Manakah yang merupakan fungsi surjektif?





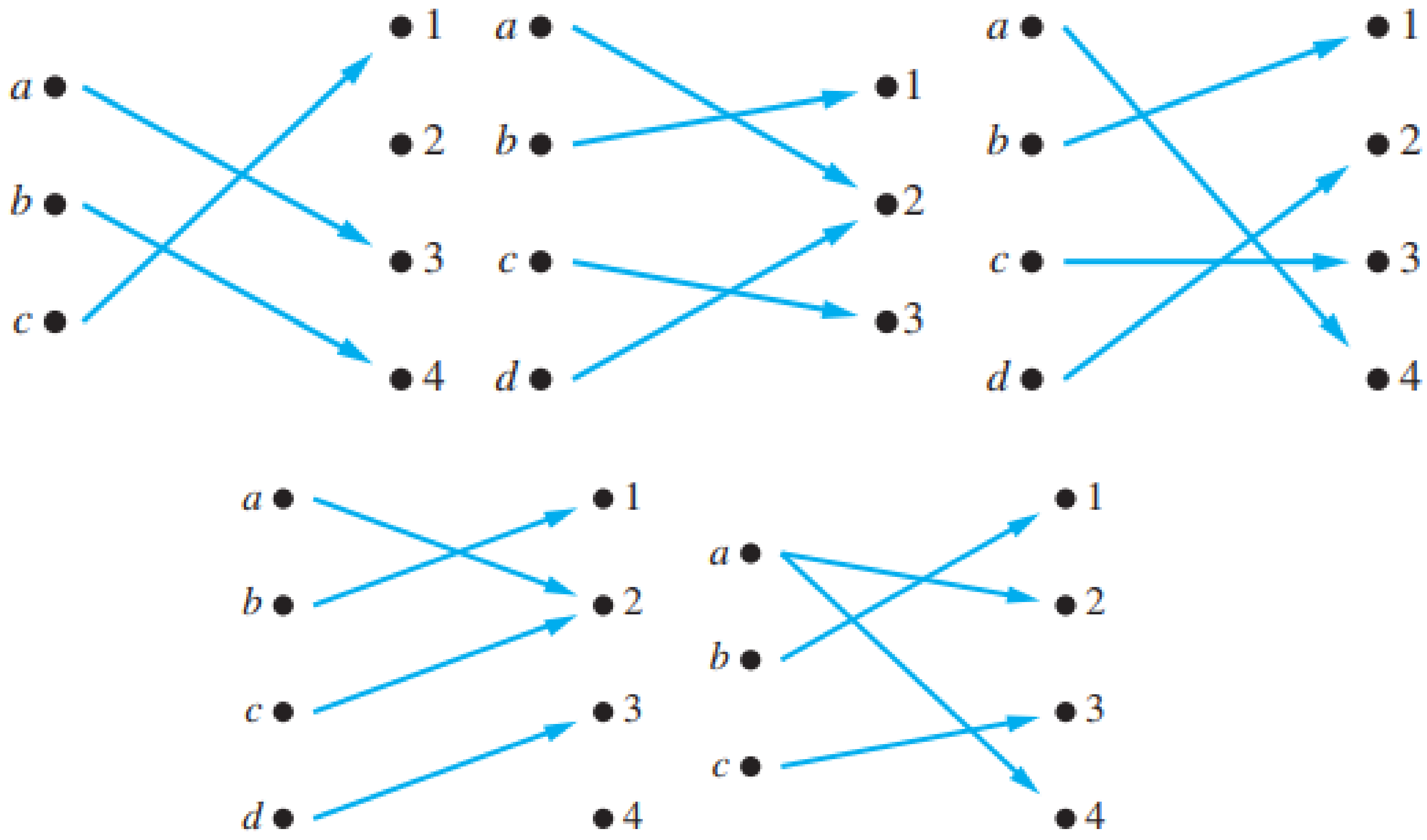
Fungsi Bijektif

- Definisi:
  Sebuah fungsi ***f*** dikatakan **bijektif** <u>jika dan hanya jika</u> ***f*** adalah **injektif** dan **surjektif**.



Latihan

- Identifikasi masing-masing fungsi berikut, apakah injektif, surjektif, atau bijektif?



Fungsi Naik dan Fungsi Turun

Untuk $\boldsymbol{f} : A \rightarrow B$ dengan $A \subseteq \mathbf{R}$ dan $B \subseteq \mathbf{R}$, dan ada **x ,y** ∊ A, maka untuk setiap kali $x < y$:

- *f* dikatakan *naik (increasing)* jika $f(x) \leq f(y)$,
- *f* dikatakan *naik sejati (strictly increasing)* jika $f(x) < f(y)$,
- *f* dikatakan *turun (decreasing)* jika $f(x) \geq f(y)$,
- *f* dikatakan *turun sejati (strictly decreasing)* jika $f(x) > f(y)$

Latihan

Buktikan fungsi naik sejati (strictly increasing function) ***f*** **:** R $\rightarrow$ R adalah fungsi injektif.

Definisi:

- *Naik sejati (strictly increasing):* *jika $x < y$, $f(x) < f(y)$*
- *Injektif (One-to-one):* *jika* $f(a) = f(b)$, maka $a = b$

Solusi

Asumsikan $f(a) = f(b)$.

Apabila $a < b$, dengan f strictly increasing, $f(a) < f(b)$. Oleh karena itu, tidak mungkin $a < b$ karena kita mengasumsikan $f(a) = f(b)$.

Apabila $a > b$, dengan f strictly increasing, $f(a) > f(b)$. Oleh karena itu, tidak mungkin $a > b$.

Dengan demikian a harus memiliki nilai sama dengan b

Dengan f strictly increasing, jika $f(a) = f(b)$, maka $a = b$.

Terbukti bahwa fungsi naik sejati merupakan fungsi injektif.

Operasi Dasar Fungsi

Misalnya diberikan dua buah fungsi f, g **:** A $\rightarrow$ **R**, maka

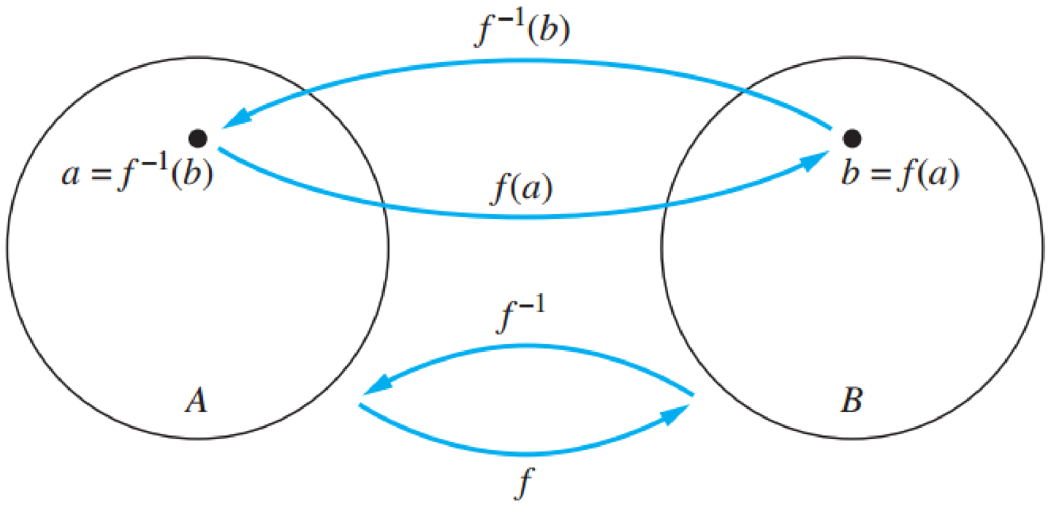
- $(f + g)(x) = f(x) + g(x)$
- $(f.g)(x) = f(x)\ .\ g(x)$

Contoh:

$f(x) = x^2$ and $g(x) = x - x^2$

- $(f+g)(x) =$
- $(f.g)(x) =$

Fungsi Inverse



Definisi

Misal, ***f*** **:** A → B adalah fungsi **bijektif**, fungsi invers dari ***f*** adalah fungsi yang memetakan b ∈ B ke elemen unik a ∈ A sehingga ***f*****(a) = b**.

f**(a) = b** ketika ***f*** **$^{-1}$(b) = a**

Bagaimana bila ***f*** **bukan** fungsi **bijektif**?

Contoh

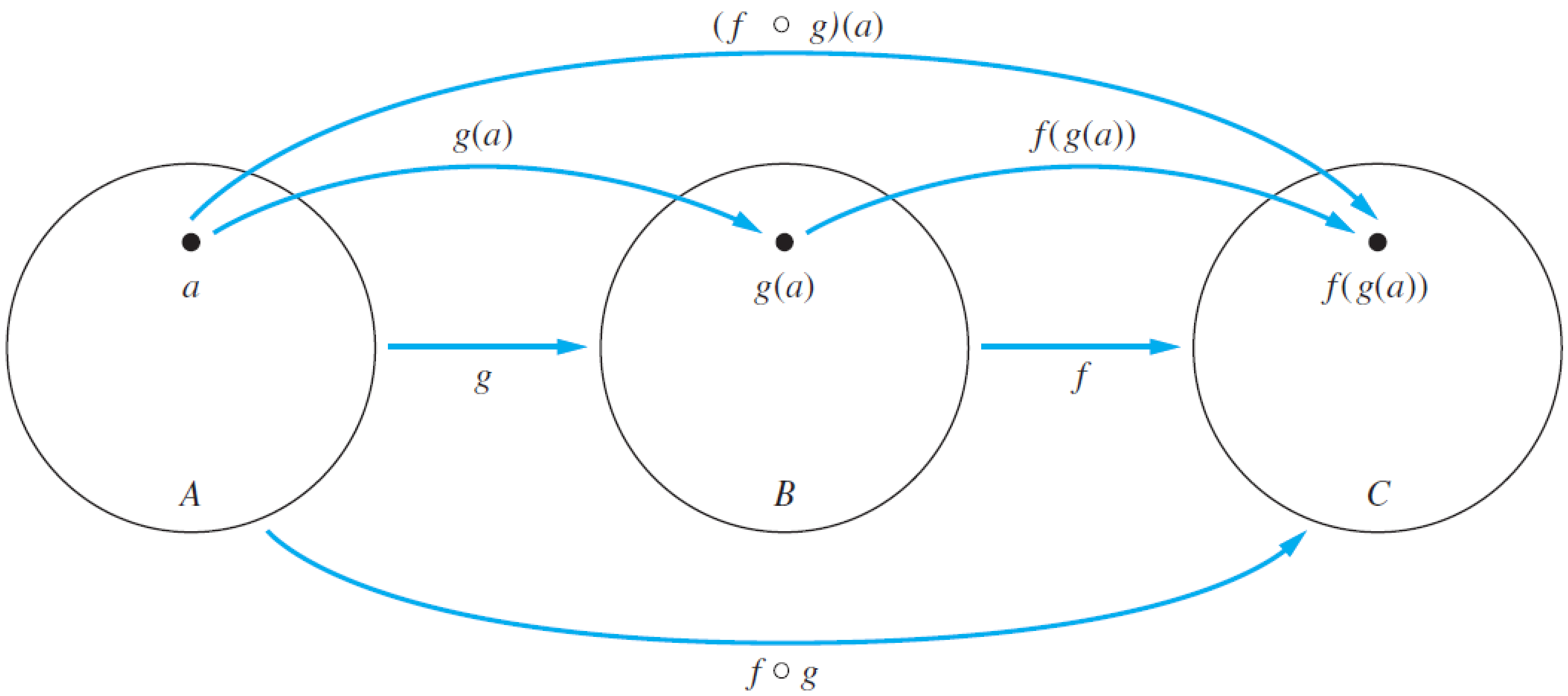
- Diberikan f: **Z** → **Z** yaitu $f(x) = x + 1$. Tentukan inversenya.

Komposisi Fungsi

Misalkan A, B, C adalah tiga himpunan, ***g*** : A → B dan ***f*** : B → C. Komposisi fungsi dari ***f*** dan ***g*** adalah fungsi dari A ke C yang dinyatakan dengan:

$$(f \circ g)(a) = f(g(a))$$

untuk setiap **a** ∈ A.



Latihan

Misal, f, g : **R** $\rightarrow$ **R**, dengan f(x) = 2x + 3 dan g(x) = 3x + 2.

Apakah (f o g)(x) = (g o f)(x)?

Komposisi Fungsi

- Komposisi fungsi dengan inversnya akan menghasilkan fungsi identitas
  - Fungsi identitas pada A, $\iota_A : A \rightarrow A$, adalah fungsi yang memenuhi $\iota_A(x) = x$ untuk setiap $x \in A$.

Kita tahu bahwa $\boldsymbol{f}^{-1}(b) = a$ jika dan hanya jika $\boldsymbol{f}(a) = b$.

- $(\boldsymbol{f}^{-1} \circ \boldsymbol{f})(a) = \boldsymbol{f}^{-1}(\boldsymbol{f}(a)) = \boldsymbol{f}^{-1}(b) = a$
- $(\boldsymbol{f} \circ \boldsymbol{f}^{-1})(b) = \boldsymbol{f}(\boldsymbol{f}^{-1}(b)) = \boldsymbol{f}(a) = b$

- Dengan demikian, $f^{-1} \circ f = \iota_A$ and $f \circ f^{-1} = \iota_B$

UNIVERSITAS INDONESIA
Veritas, Probitas, Iustitia

FAKULTAS ILMU KOMPUTER

Induksi Matematika (Bagian 1)

Pembuktian Deduktif

- Metode pembuktian yang kita kenal di kuliah sebelumnya meliputi *direct proof*, *indirect proof* (kontraposisi & kontradiksi), serta *proof by cases*.

- Metode pembuktian di atas bersifat **deduktif**.

- **Deduktif** artinya:
  – Pembuktian **dimulai** dari **fakta-fakta (aksioma atau teorema lain)** dan **sesuatu yang diasumsikan benar**.
  – Pembuktian **berakhir** dengan **menunjukkan kesimpulan** atau teorema yang ingin dibuktikan.

- Lawan dari deduktif adalah **induktif**: dari **sekumpulan kecil observasi di domain**, kita mencoba menarik **generalisasi yang berlaku untuk seluruh elemen**.

Contoh Soal

Buktikan bahwa $1 + 2 + 3 + \cdots + n = \frac{n(n+1)}{2}$ berlaku untuk semua n bilangan bulat positif

Soal ini sulit dibuktikan dengan menggunakan metode pembuktian yang sudah dipelajari sebelumnya.

Kita perlu mempelajari metode lain untuk membuktikan pernyataan-pernyataan seperti pada soal ini

Tangga Tidak Berujung (*Infinite Ladder*)

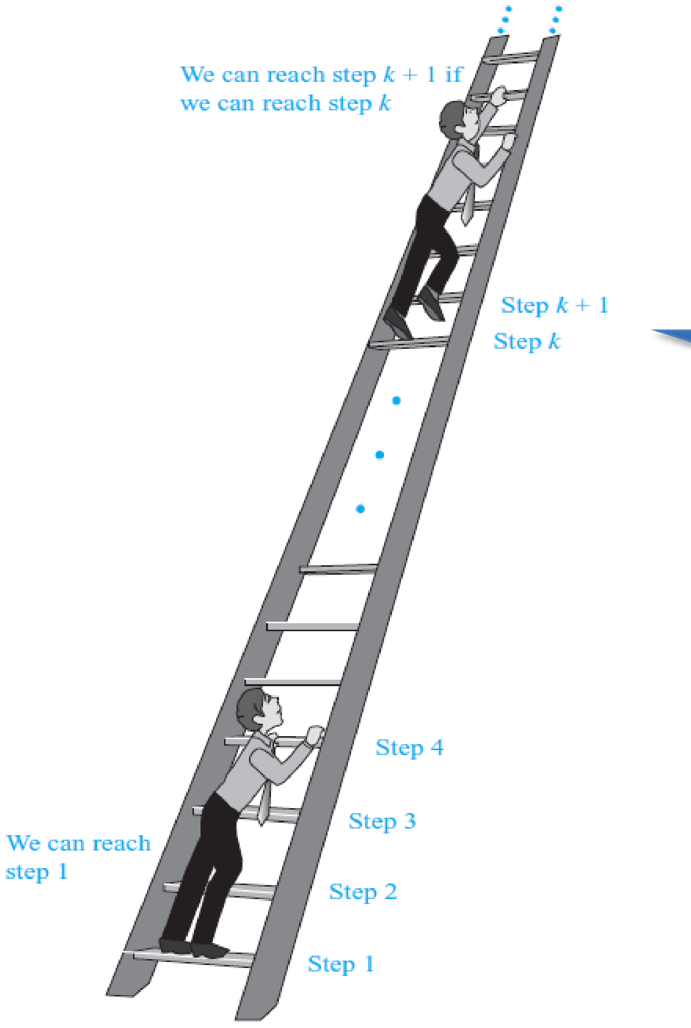


FIGURE 1 Climbing an Infinite Ladder.

Misalnya ada sebuah tangga yang tidak memiliki ujung dan seseorang bernama Diska ingin menaiki tangga tersebut.

Apakah dia dapat **menaiki setiap anak tangga** yang ada?

Bagaimana cara memastikan hal tersebut?

Tangga Tidak Berujung (*Infinite Ladder*)

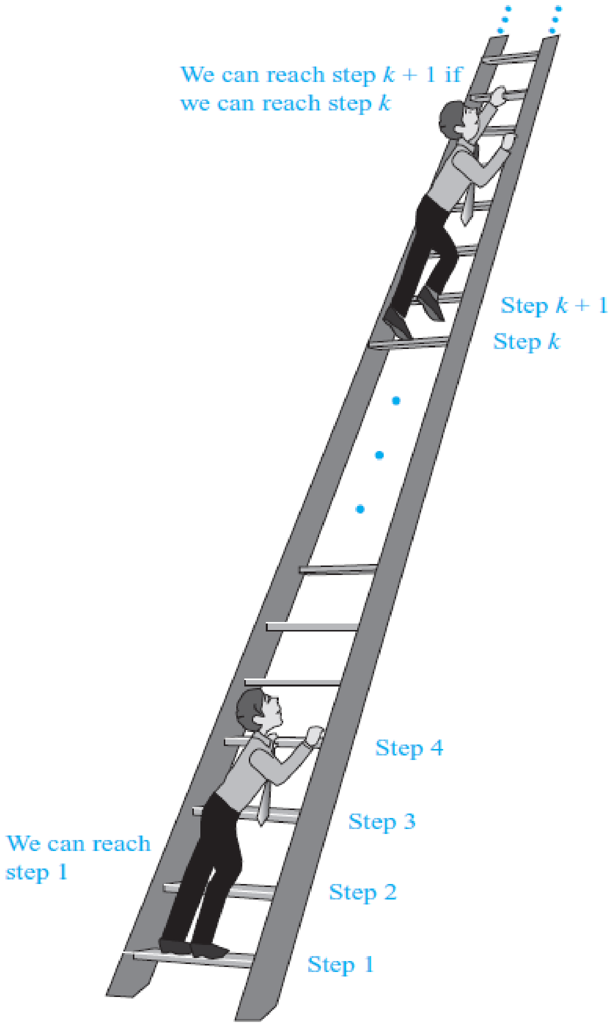


FIGURE 1 **Climbing an Infinite Ladder.**

Jika dapat ditunjukkan bahwa

(1) Diska dapat menaiki anak tangga pertama; dan

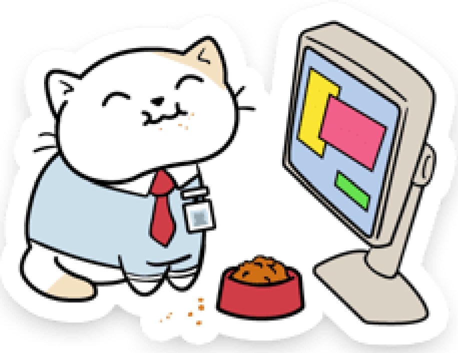
(2) Jika Diska berada pada anak tangga ke-k maka Diska dapat menaiki anak tangga ke-k+1

Maka kita bisa menyatakan bahwa **Diska dapat menaiki setiap anak tangga** pada tangga tidak berujung tersebut

Prinsip Induksi Matematika

Untuk membuktikan bahwa $P(n)$ bernilai BENAR untuk semua *n* bilangan bulat positif, dimana $P(n)$ adalah fungsi proposisi, maka lakukan dua tahapan berikut ini:

- **BASIS STEP**: Untuk membuktikan bahwa $P(1)$ bernilai BENAR
- **INDUCTIVE STEP**: Untuk membuktikan bahwa kondisi $P(k) \rightarrow P(k+1)$ bernilai BENAR untuk semua bilangan bulat positif *k*



Induksi Matematika pada Tangga Tidak Berujung

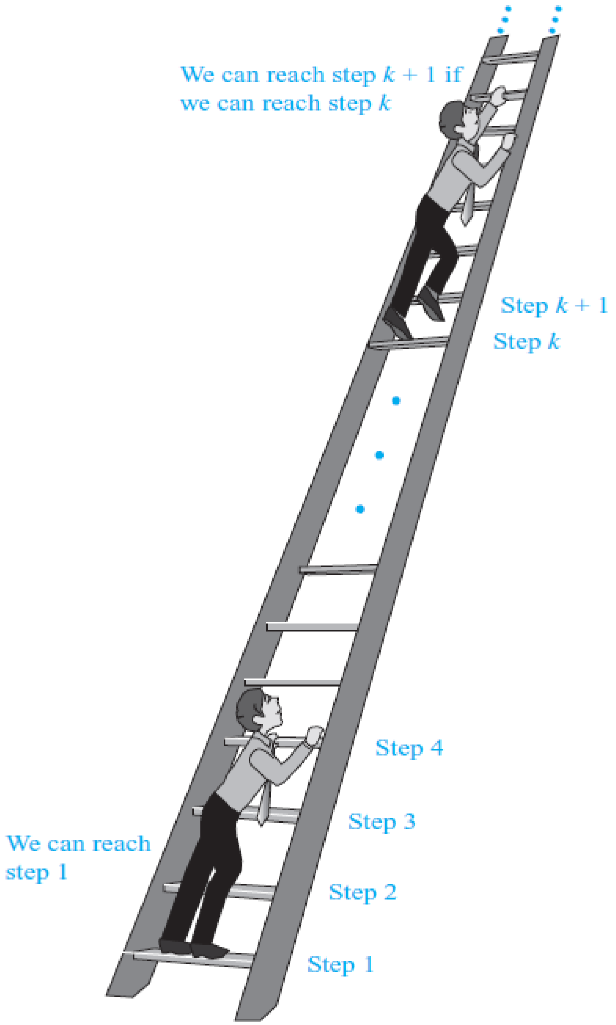


FIGURE 1 Climbing an Infinite Ladder.

Jika didefinisikan **P(n): "Diska dapat menaiki anak tangga ke-n"**. Maka,

BASIS STEP :

Diska dapat menaiki anak tangga pertama (P(1) bernilai benar)

INDUCTIVE STEP:

Jika Diska berada pada anak tangga ke-k maka Diska dapat menaiki anak tangga ke-k+1 ($P(k) \rightarrow P(k+1)$) berlaku untuk k bilangan bulat positif)

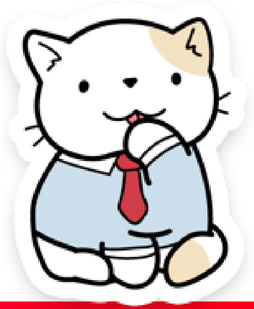
Kesimpulan:

Diska dapat menaiki setiap anak tangga pada tangga tidak berujung tersebut (**P(n) bernilai benar untuk setiap n bilangan bulat positif**)

Prinsip Induksi Matematika

- Dua langkah induksi (**BASIS STEP** dan **INDUCTIVE STEP**) cukup membuktikan bahwa pernyataan $\forall x\ P(x)$ bernilai BENAR untuk $x \in \mathbb{Z}^+$

- Pertama, kita menunjukkan bahwa $\boldsymbol{P(1)}$ bernilai benar
- Kemudian, kita tahu bahwa $\boldsymbol{P(2)}$ bernilai benar, karena $\boldsymbol{P(1) \rightarrow P(2)}$
- Kemudian, kita tahu bahwa $\boldsymbol{P(3)}$ bernilai benar, karena $\boldsymbol{P(2) \rightarrow P(3)}$
- Kemudian, kita tahu bahwa $\boldsymbol{P(4)}$ bernilai benar, karena $\boldsymbol{P(3) \rightarrow P(4)}$
- ….
- dan seterusnya sehingga kita simpulkan bahwa P(n) bernilai benar untuk $\boldsymbol{n \geq 1}$



FAKULTAS ILMU KOMPUTER

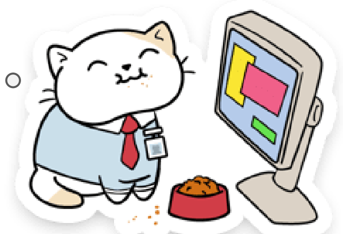
Mengapa Induksi Matematika Valid?

- *Well-ordering property*

Sebuah aksioma yang menyatakan bahwa setiap subset tidak kosong dari suatu himpunan bilangan bulat positif pasti **memiliki nilai minimum**.

- Dari langkah-langkah induksi kita tahu bahwa P(1) bernilai benar (**BASIS STEP**) dan proposisi $P(k) \rightarrow P(k+1)$ berlaku untuk setiap bilangan bulat positif k (**INDUCTIVE STEP**).
- Guna membuktikan bahwa ***P*(n) bernilai BENAR untuk semua bilangan bulat positif *n***, kita akan menggunakan *proof by contradiction.*
- Untuk itu, **asumsikan** bahwa **ada setidaknya satu bilangan bulat positif dimana *P*(n) bernilai salah**.

Ada metode pembuktian di dalam pembuktian suatu metode pembuktian sehingga kamu dapat menggunakan metode pembuktian saat membuktikan kevalidan sebuah metode pembuktian



Mengapa Induksi Matematika Valid?

- Didefinisikan suatu himpunan S yang berisi bilangan bulat positif *n* dimana *P*(n) bernilai salah. Dengan **asumsi** sebelumnya maka himpunan S menjadi himpunan tidak kosong.
- Dari *well-ordering property*, himpunan S pasti memiliki **nilai minimum**, misalnya *m,* dimana ***P*(m) bernilai salah**.
- Kita tahu bahwa *m* tidak mungkin 1 karena ***P*(1) benar**. Karena *m* > 1, maka *m* – 1 merupakan bilangan bulat positif juga.
- Berhubung $m - 1 < m$, maka *m* – 1 tidak ada dalam himpunan S sehingga P(*m – 1*) bernilai benar.
- Dari $P(k) \rightarrow P(k+1)$ **berlaku untuk setiap k bilangan bulat** kita tahu bahwa $P(m-1) \rightarrow P(m)$ bernilai benar. Ini bertentangan dengan pernyataan awal bahwa *P*(m) bernilai salah.
- Dari pembuktian tersebut tidak ada *m* yang membuat *P*(m) bernilai salah sehingga ***P*(n) bernilai benar untuk setiap bilangan bulat positif n**.

Apa yang sudah dipelajari?

- Prinsip Induksi Matematika
- Mengapa Pembuktian Induksi Matematika itu Valid

Sampai jumpa di Pembahasan Contoh Soal Induksi Matematika

Referensi

- Discrete Mathematics and Its Applications 7th Edition oleh Kenneth H. Rosen (2012)
- Slide Matematika Diskret 1 : Induksi Matematika oleh Bapak Alfan F. Wicaksono (2013)

UNIVERSITAS INDONESIA
Veritas, Probitas, Iustitia

FAKULTAS ILMU KOMPUTER

Induksi Matematika (2)

Soal 1

Soal 1

Buktikan bahwa $1 + 2 + 3 + \cdots + n = \frac{n(n+1)}{2}$ berlaku untuk semua n bilangan bulat positif

Contoh Solusi Soal 1

Buktikan bahwa $1 + 2 + 3 + \cdots + n = \frac{n(n+1)}{2}$ berlaku untuk semua n bilangan bulat positif

Jawab:

P(n): $1 + 2 + 3 + \cdots + n = \frac{n(n+1)}{2}$

- **Basis Step**: Menunjukkan bahwa P(1) benar

$$P(1):\ 1 = \frac{1(1+1)}{2}$$

$$1 = 1$$

TERBUKTI *P*(1) benar

Contoh Solusi Soal 1

Buktikan bahwa $1 + 2 + 3 + \cdots + n = \frac{n(n+1)}{2}$ berlaku untuk semua n bilangan bulat positif

Jawab:

P(n): $1 + 2 + 3 + \cdots + n = \frac{n(n+1)}{2}$

- **Basis Step**: Menunjukkan bahwa P(1) benar

$$P(1)\colon 1 = \frac{1(1+1)}{2}$$
$$1 = 1$$

TERBUKTI *P*(1) benar

Perhatikan bahwa kita ingin membawa bentuk $1 + 2 + 3 + \cdots + (k+1) = \frac{(k+1)((k+1)+1)}{2}$ seperti rumus yang ingin dibuktikan pada soal

- **Inductive Step:**

Asumsikan: P(k) benar sehingga berlaku $1 + 2 + 3 + \cdots + k = \frac{k(k+1)}{2}$

Maka P(k+1) :

$$1 + 2 + 3 + \cdots + k + (k+1) = \frac{k(k+1)}{2} + (k+1)$$
$$= \frac{k(k+1) + 2(k+1)}{2}$$
$$= \frac{(k+1)(k+2)}{2}$$

TERBUKTI $P(k) \rightarrow P(k+1)$ berlaku

Contoh Solusi Soal 1

Buktikan bahwa $1 + 2 + 3 + \cdots + n = \frac{n(n+1)}{2}$ berlaku untuk semua n bilangan bulat positif

Jawab:

P(n): $1 + 2 + 3 + \cdots + n = \frac{n(n+1)}{2}$

- **Basis Step**: Menunjukkan bahwa P(1) benar

$$P(1):\ 1 = \frac{1(1+1)}{2}$$
$$1 = 1$$

TERBUKTI *P*(1) benar

- **Inductive Step:**

Asumsikan: P(k) benar sehingga berlaku $1 + 2 + 3 + \cdots . + k = \frac{k(k+1)}{2}$

Maka P(k+1) :

$$1 + 2 + 3 + \cdots . + k + k + 1 = \frac{k(k+1)}{2} + k + 1$$
$$= \frac{k(k+1) + 2(k+1)}{2}$$
$$= \frac{(k+1)(k+2)}{2}$$

TERBUKTI $P(k) \rightarrow P(k+1)$ berlaku

Kesimpulan: Jadi, dari langkah-langkah induksi matematika terbukti bahwa P(n): $1 + 2 + 3 + \cdots + n = \frac{n(n+1)}{2}$ berlaku untuk setiap bilangan bulat positif n

Soal 2

Soal 2

Buktikan bahwa $1 + 3 + 5 + \cdots + (2n - 1) = n^2$ berlaku untuk semua n bilangan bulat positif

Contoh Solusi Soal 2

Buktikan bahwa $1 + 3 + 5 + \cdots + (2n - 1) = n^2$ berlaku untuk semua n bilangan bulat positif

Jawab:

P(n):$1 + 3 + 5 + \cdots + (2n - 1) = n^2$

- **Basis Step**: Menunjukkan bahwa P(1) benar

$$P(1):\ 1 = 1^2$$
$$1 = 1$$

TERBUKTI *P*(1) benar

Contoh Solusi Soal 2

Buktikan bahwa $1 + 3 + 5 + \cdots + (2n - 1) = n^2$ berlaku untuk semua n bilangan bulat positif

Jawab:

P(n):$1 + 3 + 5 + \cdots + (2n - 1) = n^2$

- **Basis Step**: Menunjukkan bahwa P(1) benar

$$P(1)\colon\ 1 = 1^2$$
$$1 = 1$$

Perhatikan bahwa kita ingin membawa bentuk $1 + 3 + 5 + \cdots + (2(k + 1) - 1) = (k + 1)^2$ seperti rumus yang ingin dibuktikan pada soal

TERBUKTI *P*(1) benar

- **Inductive Step:**

Asumsikan: P(k) benar sehingga berlaku $1 + 3 + 5 + \cdots . + (2k - 1) = k^2$

Maka P(k+1) :

$$1 + 3 + 5 + \cdots + (2k - 1) + (2(k + 1) - 1) = k^2 + (2k + 2 - 1)$$
$$= k^2 + 2k + 1$$
$$= (k + 1)^2$$

TERBUKTI $P(k) \rightarrow P(k + 1)$ berlaku

Contoh Solusi Soal 2

Buktikan bahwa $1 + 3 + 5 + \cdots + (2n - 1) = n^2$ berlaku untuk semua n bilangan bulat positif

Jawab:

P(n):$1 + 3 + 5 + \cdots + (2n - 1) = n^2$

- **Basis Step**: Menunjukkan bahwa P(1) benar

$$P(1):\ 1 = 1^2$$
$$1 = 1$$

TERBUKTI *P*(1) benar

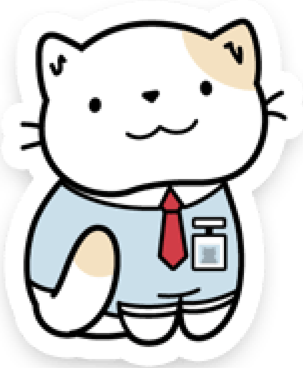
- **Inductive Step:**

Asumsikan: P(k) benar sehingga berlaku $1 + 3 + 5 + \cdots. + (2k - 1) = k^2$

Maka P(k+1) :

$$1 + 3 + 5 + \cdots + (2k - 1) + (2(k + 1) - 1) = k^2 + (2k + 2 - 1)$$
$$= k^2 + 2k + 1$$
$$= (k + 1)^2$$

TERBUKTI $\boldsymbol{P(k) \to P(k+1)}$ berlaku



Kesimpulan: Jadi, dari langkah-langkah induksi matematika terbukti bahwa P(n): $1 + 3 + 5 + \cdots + (2n - 1) = n^2$berlaku untuk setiap bilangan bulat positif n

Soal 3

Soal 3

Gunakan induksi matematika untuk membuktikan bahwa $n < 2^n$ berlaku untuk semua bilangan bulat positif n

Contoh Solusi Soal 3

Gunakan induksi matematika untuk membuktikan bahwa $\boxed{n < 2^n}$ berlaku untuk semua bilangan bulat positif n

Jawab:

P(n):$n < \ 2^n$

- **Basis Step**: Menunjukkan bahwa P(1) benar

$$P(1):\ 1 < 2^1$$
$$1 < 2$$

TERBUKTI *P*(1) benar

Contoh Solusi Soal 3

Gunakan induksi matematika untuk membuktikan bahwa $\mathrm{n} < 2^n$ berlaku untuk semua bilangan bulat positif n

Jawab:

P(n):$n < 2^n$

- **Basis Step**: Menunjukkan bahwa P(1) benar

$$P(1):\ 1 < 2^1$$
$$1 < 2$$

TERBUKTI *P*(1) benar

Perhatikan bahwa kita ingin membawa bentuk $\mathrm{k} + 1 < 2^{k+1}$ seperti rumus yang ingin dibuktikan pada soal

- **Inductive Step:**

Asumsikan: P(k) benar sehingga berlaku $\boldsymbol{k < 2^k}$ untuk k bilangan bulat positif

Maka P(k+1) :

$$\mathrm{k} + 1 < 2^k + 1$$
$$\mathrm{k} + 1 < \underline{2^k + 1} < \underline{2^k + 2^k} = \underline{2.2^k = 2^{k+1}}$$

Sehingga

$$\mathrm{k} + 1 < 2^{k+1}$$

TERBUKTI $\boldsymbol{P(k) \to P(k+1)}$ berlaku

Contoh Solusi Soal 3

Gunakan induksi matematika untuk membuktikan bahwa $n < 2^n$ berlaku untuk semua bilangan bulat positif n

Jawab:
P(n):$n < 2^n$
- **Basis Step**: Menunjukkan bahwa P(1) benar

$$P(1):\ 1 < 2^1$$
$$1 < 2$$

TERBUKTI *P*(1) benar
- **Inductive Step:**

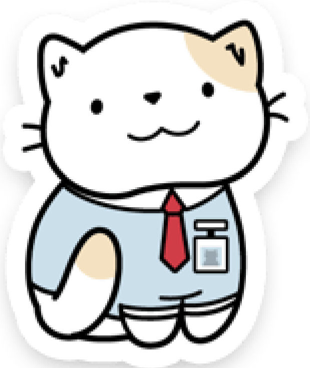
Asumsikan: P(k) benar sehingga berlaku $k < 2^k$ untuk k bilangan bulat positif
Maka P(k+1) :

$$\mathrm{k} + 1 < 2^k + 1 < 2^k + 2^k = 2.2^k = 2^{k+1}$$

Sehingga

$$\mathrm{k} + 1 < 2^{k+1}$$

TERBUKTI $\boldsymbol{P(k) \rightarrow P(k+1)}$ berlaku



Kesimpulan: Jadi, dari langkah-langkah induksi matematika terbukti bahwa P(n): $n < 2^n$ berlaku untuk setiap bilangan bulat positif n

Latihan

1. Buktikan menggunakan induksi matematika bahwa pernyataan $1^3 + 2^3 + 3^3 + \cdots + n^3 = (\frac{n(n+1)}{2})^2$ berlaku untuk semua bilangan bulat positif n.
2. Temukan formula untuk $\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \cdots + \frac{1}{2^n}$ dengan mencobanya pada beberapa n bernilai kecil. Buktikan formula yang kamu temukan dengan induksi matematika
3. Buktikan bahwa $4^{n+1} + 5^{2n-1}$ habis dibagi 21 untuk semua n bilangan bulat positif
4. Buktikan bahwa $n! < n^n$ untuk $n = \{n > 1, n \in \mathbb{Z}^+\}$

Apa yang sudah dipelajari?

- Contoh soal Induksi Matematika dan pembahasan

Topik Selanjutnya: Strong Induction

Referensi

- Discrete Mathematics and Its Applications 7th Edition oleh Kenneth H. Rosen (2012)

FAKULTAS ILMU KOMPUTER

UNIVERSITAS INDONESIA

Strong Induction

Meganingrum Arista Jiwanggi, M.Kom, M.Comp.Sci.

Prinsip Strong Induction

Prinsip Strong Induction

Untuk membuktikan bahwa $P(n)$ bernilai BENAR untuk semua *n* bilangan bulat positif, dimana $P(n)$ adalah fungsi proposisi, maka lakukan dua tahapan berikut ini:

- **BASIS STEP**: Buktikan bahwa $P(1)$ bernilai BENAR
- **INDUCTIVE STEP**: Buktikan bahwa kondisi $[P(1) \wedge P(2) \wedge \cdots \wedge P(k)] \rightarrow P(k+1)$ bernilai BENAR untuk semua bilangan bulat positif *k*

Semua persoalan yang dapat dibuktikan dengan induksi matematika biasa pasti bisa dibuktikan juga dengan strong induction

Prinsip Strong Induction

- Dengan menggunakan dua langkah induksi (**BASIS STEP** dan **INDUCTIVE STEP**) pada strong induction cukup membuktikan bahwa pernyataan $\forall x\, P(x)$ bernilai BENAR untuk $x \in \mathbb{Z}^+$

- Pertama, kita menunjukkan bahwa $\boldsymbol{P(1)}$ bernilai benar
- Kemudian, kita tahu bahwa $\boldsymbol{P(2)}$ bernilai benar, karena

$$\boldsymbol{P(1) \rightarrow P(2)}$$

- Kemudian, kita tahu bahwa $\boldsymbol{P(3)}$ bernilai benar, karena

$$\boldsymbol{[P(1) \wedge P(2)] \rightarrow P(3)}$$

- Kemudian, kita tahu bahwa $\boldsymbol{P(4)}$ bernilai benar, karena

$$\boldsymbol{[P(1) \wedge P(2) \wedge P(3)] \rightarrow P(4)}$$

- ….
- dan seterusnya sehingga kita simpulkan bahwa P(n) bernilai benar untuk $\boldsymbol{n \geq 1}$

Tangga Tidak Berujung dengan Strong Induction

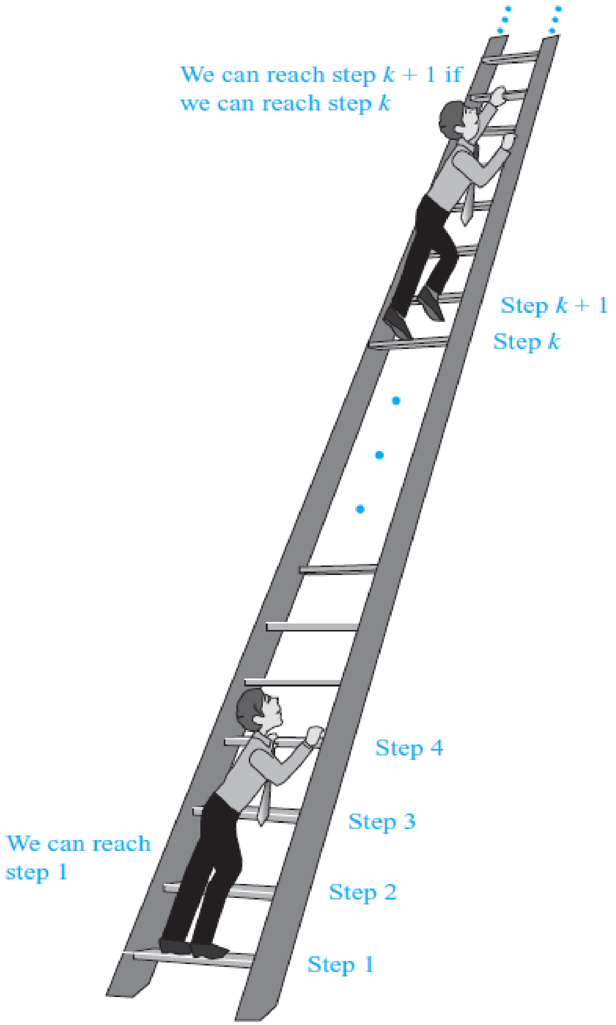


FIGURE 1 Climbing an Infinite Ladder.

Dengan prinsip strong induction, kita perlu menunjukkan bahwa

(1) Diska dapat menaiki anak tangga pertama; dan

(2) Jika Diska dapat menaiki SEMUA anak tangga dari yang pertama hingga anak tangga ke-k, maka Diska dapat menaiki anak tangga ke-k+1

Kemudian kita bisa menyatakan bahwa **Diska dapat menaiki setiap anak tangga** pada tangga tidak berujung tersebut.

Contoh Soal

FAKULTAS ILMU KOMPUTER

Soal 1

Tunjukkan jika n adalah bilangan bulat yang lebih besar dari 1, maka n dapat dituliskan dalam bentuk perkalian bilangan – bilangan prima

Untuk menyelesaikan soal ini, apakah cukup memakai induksi matematika biasa?

Basis Step: Membuktikan pernyataan untuk $n = 2$

Inductive Step:

Jika $n = k$ dapat dinyatakan sebagai perkalian bilangan prima, apakah $n = k + 1$ pasti bisa juga?

Contoh Solusi Soal 1

Tunjukkan jika n adalah bilangan bulat yang lebih besar dari 1, maka n dapat dituliskan dalam bentuk perkalian bilangan – bilangan prima

Jawab:

P(n): n dapat dinyatakan dalam perkalian bilangan – bilangan prima

- **Basis Step**: Menunjukkan bahwa P(2) benar

$P(2)$: 2 dapat dinyatakan sebagai perkalian suatu bilangan prima. Pernyataan ini benar karena 2 dapat dinyatakan sebagai perkalian 1 bilangan prima yaitu dirinya sendiri

$$2 = 2$$

TERBUKTI *P*(2) benar

Contoh Solusi Soal 1

Tunjukkan jika n adalah bilangan bulat yang lebih besar dari 1, maka n dapat dituliskan dalam bentuk perkalian bilangan – bilangan prima

Jawab:

P(n): n dapat dinyatakan dalam perkalian bilangan – bilangan prima

- **Basis Step**: Menunjukkan bahwa P(2) benar

$P(2)$: 2 dapat dinyatakan sebagai perkalian suatu bilangan prima. Pernyataan ini benar karena 2 dapat dinyatakan sebagai perkalian 1 bilangan prima yaitu dirinya sendiri

$$2 = 2$$

TERBUKTI *P*(2) benar

- **Inductive Step:**

Asumsikan: P(j) benar untuk semua $2 \leq j \leq k$ dimana j dapat dinyatakan sebagai perkalian 1 atau lebih bilangan prima.

Perhatikan bahwa kita ingin menunjukkan bahwa P(k+1) berlaku apabila diasumsikan P(j) benar seperti pada asumsi Inductive Step

Contoh Solusi Soal 1

Tunjukkan jika n adalah bilangan bulat yang lebih besar dari 1, maka n dapat dituliskan dalam bentuk perkalian bilangan – bilangan prima

Jawab:

Inductive Step:

Asumsikan: P(j) benar untuk semua $2 \leq j \leq k$ dimana j dapat dinyatakan sebagai perkalian 1 atau lebih bilangan prima.

Ada dua kasus yaitu jika k+1 bilangan prima atau k+1 bilangan komposit

- Jika k+1 adalah bilangan prima, maka **P(k+1) berlaku** dimana k+1 merupakan hasil perkalian 1 bilangan prima yaitu dirinya sendiri

- Jika k+1 adalah bilangan komposit, maka k+1 dapat dinyatakan sebagai perkalian dua bilangan a dan b dimana $2 \leq a \leq b < k + 1$. Perhatikan bahwa a dan b minimal bernilai 2 dan nilainya tidak lebih dari k.
- Dari asumsi di Inductive Step, kita tau bahwa bilangan-bilangan pada rentang tersebut dapat dinyatakan sebagai perkalian 1 atau lebih bilangan prima. Oleh karena k+1 dapat dinyatakan sebagai perkalian dua bilangan a dan b dimana a dan b masuk pada asumsi di Inductive Step, maka kita dapat simpulkan **bahwa k+1 juga dapat dinyatakan sebagai perkalian bilangan-bilangan prima**

Contoh Solusi Soal 1

Tunjukkan jika n adalah bilangan bulat yang lebih besar dari 1, maka n dapat dituliskan dalam bentuk perkalian bilangan – bilangan prima

Jawab:

Kesimpulan:

Dari pembuktian di Basis Step dan Inductive Step, untuk n bilangan bulat yang lebih besar dari 1, terbukti bahwa n dapat dituliskan dalam bentuk perkalian bilangan-bilangan prima.

Soal 2

- Buktikan bahwa setiap uang sebesar Rp 10.000,- ; Rp 11.000,- ; Rp 12.000,- atau yang lebih besar (dalam kelipatan Rp 1000,-) dapat dibuat dengan menggunakan uang pecahan Rp 2000-an dan Rp 5000-an saja.

Apa yang sudah dipelajari?

- Prinsip Strong Induction
- Contoh Soal Strong Induction dan Solusi

Sampai jumpa di Pembahasan Contoh Soal Strong Induction Berikutnya

Referensi

- Discrete Mathematics and Its Applications 7th Edition oleh Kenneth H. Rosen (2012)
- Slide Matematika Diskret 1 : Induksi Matematika oleh Bapak Alfan F. Wicaksono (2013)

UNIVERSITAS INDONESIA

Veritas, Probitas, Iustitia

FAKULTAS ILMU KOMPUTER

Strong Induction (2)

Meganingrum Arista Jiwanggi, M.Kom, M.Comp.Sci.

Soal 2

Soal 2

Buktikan bahwa setiap uang sebesar Rp 10.000,- ; Rp 11.000,- ; Rp 12.000,- atau yang lebih besar (dalam kelipatan Rp 1000,-) dapat dibuat dengan menggunakan uang pecahan Rp 2000-an dan Rp 5000-an saja.

Contoh Solusi Soal 2

Buktikan bahwa uang sejumlah Rp 10.000,- ; Rp 11.000,- ; Rp 12.000,- atau yang lebih besar (dalam kelipatan Rp 1000,-) dapat dibayarkan dengan menggunakan uang pecahan Rp 2000-an dan Rp 5000-an saja

Jawab:

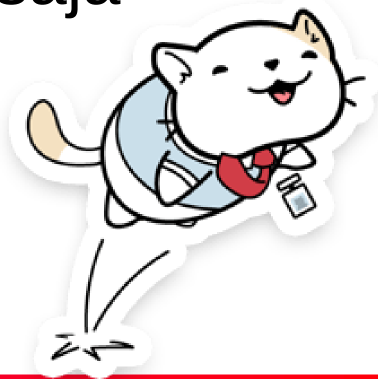
P(n): untuk $n \geq 10$, n ribu rupiah dapat dibayarkan dengan menggunakan uang pecahan 2 ribuan dan 5 ribuan saja.

- **BASIS STEP:**

Kita dapat membayar 10 ribu dan 11 ribu dari 2 ribuan dan 5 ribuan saja

P(10) : 2 x 5 ribu

P(11) : 1 x 5 ribu + 3 x 2 ribu



Contoh Solusi Soal 2

Buktikan bahwa uang sejumlah Rp 10.000,- ; Rp 11.000,- ; Rp 12.000,- atau yang lebih besar (dalam kelipatan Rp 1000,-) dapat dibayarkan dengan menggunakan uang pecahan Rp 2000-an dan Rp 5000-an saja

Jawab:

P(n): n ribu rupiah dapat dibayarkan dengan pecahan 2 ribuan dan 5 ribuan rupiah saja.

- **BASIS STEP:**

Kita dapat membentuk 10 ribu dan 11 ribu dari 2 ribuan dan 5 ribuan saja

P(10) : 2 x 5 ribu

P(11) : 1 x 5 ribu + 3 x 2 ribu

- **INDUCTIVE STEP**

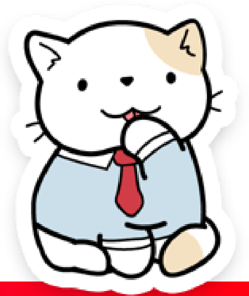
Kita asumsikan P(j) benar untuk semua j dimana 10 <= j <= k dan k >= 11 artinya kita bisa membentuk j ribu rupiah dengan 2 ribu dan 5 ribu rupiah saja

Kita perlu buktikan P(k+1):

Berdasarkan asumsi Induksi, P(k-1) benar karena $10 \leq k-1 \leq k$ sehingga k-1 ribu rupiah dapat kita bentuk dengan 2 ribuan dan 5 ribuan rupiah saja.

k - 1 = 2a + 5b, a dan b bilangan bulat non negatif ($a \geq 0$ dan b≥ 0)
k + 1 – 2 = 2a + 5b
k + 1 = 2(a+1) + 5b

$P(10) \wedge P(11) \wedge \cdots \wedge P(k) \rightarrow P(k+1)$ benar



Contoh Solusi Soal 2

Buktikan bahwa uang sejumlah Rp 10.000,- ; Rp 11.000,- ; Rp 12.000,- atau yang lebih besar (dalam kelipatan Rp 1000,-) dapat dibayarkan dengan menggunakan uang pecahan Rp 2000-an dan Rp 5000-an saja

Jawab:

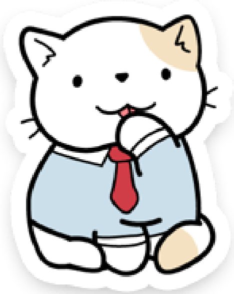
P(n): n ribu rupiah dapat dibayarkan dengan pecahan 2 ribuan dan 5 ribuan rupiah saja.

- **BASIS STEP:**

Kita dapat membentuk 10 ribu dan 11 ribu dari 2 ribuan dan 5 ribuan saja

P(10) : 2 x 5 ribu

P(11) : 1 x 5 ribu + 3 x 2 ribu



- **INDUCTIVE STEP**

Kita asumsikan P(j) benar untuk semua j dimana 10 <= j <= k dan k >= 11 artinya kita bisa membentuk j ribu rupiah dengan 2 ribu dan 5 ribu rupiah saja

Kita perlu buktikan P(k+1):

Berdasarkan asumsi Induksi, P(k-1) benar karena $10 \leq k - 1 \leq k$ sehingga k-1 ribu rupiah dapat kita bentuk dengan 2 ribuan dan 5 ribuan rupiah saja.

k - 1 = 2a + 5b, a dan b bilangan bulat non negatif ($a \geq 0$ dan b≥ 0)

k + 1 – 2 = 2a + 5b

k + 1 = 2(a+1) + 5b

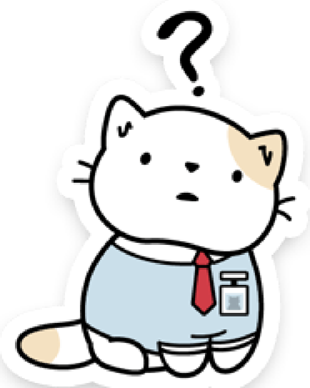
$P(10) \wedge P(11) \wedge \cdots \wedge P(k) \rightarrow P(k+1)$ benar

Kesimpulannya: P(n) benar *atau* berlaku pernyataan “uang sejumlah Rp 10.000,- ; Rp 11.000,- ; Rp 12.000,- atau yang lebih besar (dalam kelipatan Rp 1000,-) dapat dibayarkan dengan menggunakan uang pecahan Rp 2000-an dan Rp 5000-an saja”

Soal 3

Soal 3

Buktikan bahwa setiap perangko sebesar 12 rupiah atau lebih dapat dibuat dengan menggunakan perangko 4 rupiah dan 5 rupiah



Contoh Solusi Soal 3

Buktikan bahwa setiap perangko sebesar 12 rupiah atau lebih dapat dibuat dengan menggunakan perangko 4 rupiah dan 5 rupiah

Jawab:

P(n): untuk $n \geq 12$, perangko n rupiah dapat dibuat dengan perangko 4 rupiah dan 5 rupiah.

- **BASIS STEP:**

Kita dapat membuat perangko 12, 13, 14, dan 15 rupiah dengan 4 rupiah dan 5 rupiah

P(12) : 3 x 4 rupiah

P(13) : 2 x 4 rupiah + 1 x 5 rupiah

P(14) : 1 x 4 rupiah + 2 x 5 rupiah

P(15) : 3 x 5 rupiah

Contoh Solusi Soal 3

Buktikan bahwa setiap perangko sebesar 12 rupiah atau lebih dapat dibuat dengan menggunakan perangko 4 rupiah dan 5 rupiah

Jawab:

P(n): perangko n rupiah dapat dibuat dengan perangko 4 rupiah dan 5 rupiah.

- **BASIS STEP:**

Kita dapat membuat perangko 12, 13, 14, dan 15 rupiah dengan 4 rupiah dan 5 rupiah

P(12) : 3 x 4 rupiah

P(13) : 2 x 4 rupiah +

P(14) : 1 x 4 rupiah +

P(15) : 3 x 5 rupiah

Hipotesis Induksi:

$P(12) \wedge P(13) \wedge \cdots \wedge P(k)$ bernilai benar

- **INDUCTIVE STEP**

Kita asumsikan P(j) benar untuk semua $12 \leq j \leq k$ dan $k \geq 15$ artinya kita bisa membentuk perangko j rupiah dengan perangko 4 rupiah dan 5 rupiah

Kita perlu buktikan $P(k+1)$:

Berdasarkan asumsi Induksi, $P(k-3)$ benar karena $12 \leq k-3 \leq k$ sehingga perangko k -3 dapat kita bentuk dengan 4 dan 5 rupiah.

k - 3 = 4a + 5b, a dan b bilangan bulat non-negatif ($a \geq 0$ dan b≥ 0)

k + 1 – 4 = 4a + 5b

k + 1 = 4(a+1) + 5b

$P(12) \wedge P(13) \wedge \cdots \wedge P(k) \rightarrow P(k+1)$ benar

Contoh Solusi Soal 3

Buktikan bahwa setiap perangko sebesar 12 rupiah atau lebih dapat dibuat dengan menggunakan perangko 4 rupiah dan 5 rupiah
Jawab:
P(n): perangko n rupiah dapat dibuat dengan perangko 4 rupiah dan 5 rupiah.

- **BASIS STEP:**

Kita dapat membuat perangko 12, 13, 14, dan 15 rupiah dengan 4 rupiah dan 5 rupiah
P(12) : 3 x 4 rupiah
P(13) : 2 x 4 rupiah + 1 x 5 rupiah
P(14) : 1 x 4 rupiah + 2 x 5 rupiah
P(15) : 3 x 5 rupiah

- **INDUCTIVE STEP**

Kita asumsikan P(j) benar untuk semua $12 \leq j \leq k$ dan $k \geq 15$ artinya
kita bisa membentuk perangko j rupiah dengan perangko 4 rupiah dan 5 rupiah

Kita perlu buktikan $P(k+1)$:
Berdasarkan asumsi Induksi, $P(k-3)$ benar karena $12 \leq k-3 \leq k$ sehingga perangko k -3 dapat kita bentuk dengan 4 dan 5 rupiah.

k - 3 = 4a + 5b, a dan b bilangan bulat non-negatif ($a \geq 0$ dan b≥ 0)
k + 1 – 4 = 4a + 5b
k + 1 = 4(a+1) + 5b

$P(12) \wedge P(13) \wedge \cdots \wedge P(k) \rightarrow P(k+1)$ benar

Kesimpulannya: P(n) benar *atau* berlaku pernyataan “setiap perangko sebesar 12 rupiah atau lebih dapat dibuat dengan menggunakan perangko 4 rupiah dan 5 rupiah”

Dapatkah persoalan di Soal 3
diselesaikan dengan Induksi
Matematika Biasa?

Contoh Solusi Soal 3 – Induksi Matematika Biasa

Buktikan bahwa setiap perangko sebesar 12 rupiah atau lebih dapat dibuat dengan menggunakan perangko 4 rupiah dan 5 rupiah

Jawab:

P(n): perangko n rupiah dapat dibuat dengan perangko 4 rupiah dan 5 rupiah.

- **BASIS STEP:**

Kita dapat membuat perangko 12 rupiah dengan 4 rupiah dan 5 rupiah

P(12) : 3 x 4 rupiah

Contoh Solusi Soal 3 – Induksi Matematika Biasa

Buktikan bahwa setiap perangko sebesar 12 rupiah atau lebih dapat dibuat dengan menggunakan perangko 4 rupiah dan 5 rupiah

Jawab:

P(n): perangko n rupiah dapat dibuat dengan perangko 4 rupiah dan 5 rupiah.

- **BASIS STEP:**

Kita dapat membuat perangko 12 rupiah dengan perangko 4 rupiah dan 5 rupiah

P(12) : 3 x 4 rupiah

- **INDUCTIVE STEP**

Kita asumsikan P(k) benar sehingga kita bisa membentuk perangko k rupiah dengan perangko 4 dan 5 rupiah atau

$$k = 4a + 5b$$

Dengan a dan b bilangan bulat nonnegatif.

Jika P(k) benar, maka ada 2 kemungkinan yaitu:

- Perangko k dapat dbentuk dengan menggunakan minimal 1 perangko 4 rupiah
- Perangko k dapat dibentuk TANPA menggunakan perangko 4 rupiah (hanya 5 rupiah)

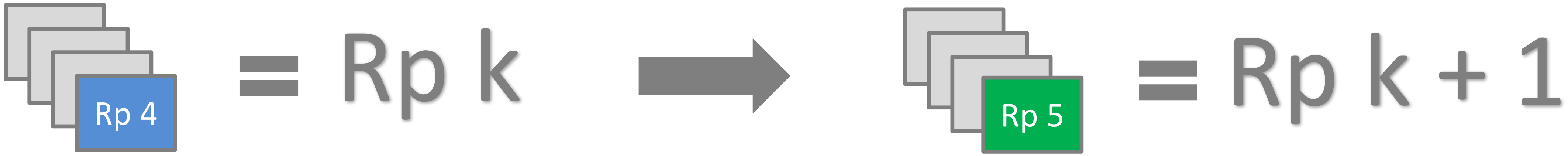
Contoh Solusi Soal 3 – Induksi Matematika Biasa

Buktikan bahwa setiap perangko sebesar 12 rupiah atau lebih dapat dibuat dengan menggunakan perangko 4 rupiah dan 5 rupiah

Jawab:

- **INDUCTIVE STEP**

Jika perangko k rupiah dapat dibentuk dengan menggunakan **minimal 1 perangko 4 rupiah**, maka perangko k+1 rupiah dapat dibentuk dengan mengganti 1 perangko 4 rupiah dengan 1 perangko 5 rupiah.



Contoh Solusi Soal 3 – Induksi Matematika Biasa

Buktikan bahwa setiap perangko sebesar 12 rupiah atau lebih dapat dibuat dengan menggunakan perangko 4 rupiah dan 5 rupiah

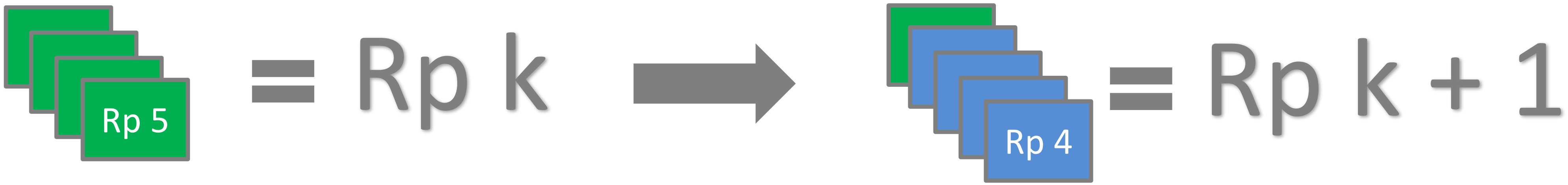
Jawab:

- **INDUCTIVE STEP**

Jika perangko k rupiah dapat dibentuk dengan menggunakan **minimal 1 perangko 4 rupiah**, maka perangko k+1 rupiah dapat dibentuk dengan mengganti 1 perangko 4 rupiah dengan 1 perangko 5 rupiah.

Jika Perangko k dapat dibentuk TANPA menggunakan perangko 4 rupiah (hanya 5 rupiah) :

- Berhubung kita tau bahwa $k \geq 12$, maka nilai k terkecil yang dibentuk dengan hanya 5 rupiah adalah 15 rupiah (dibentuk dari 3 x 5 rupiah)
- k+1 dapat dibuat dengan mengganti 3 perangko 5 rupiah dengan 4 perangko 4 rupiah.



Maka, pernyataan $P(k) \rightarrow P(k+1)$ BENAR

Contoh Solusi Soal 3 – Induksi Matematika Biasa

Buktikan bahwa setiap perangko sebesar 12 rupiah atau lebih dapat dibuat dengan menggunakan perangko 4 rupiah dan 5 rupiah

Jawab:

Kesimpulan: P(n) benar atau berlaku pernyataan “setiap perangko sebesar 12 rupiah atau lebih dapat dibuat dengan menggunakan perangko 4 rupiah dan 5 rupiah”

Semua persoalan yang dapat dibuktikan dengan induksi matematika biasa pasti bisa dibuktikan juga dengan strong induction

Latihan

1. Tentukan perangko dengan besar berapa saja yang dapat dibentuk hanya dengan menggunakan perangko 4 rupiah atau 11 rupiah. Buktikan jawabanmu menggunakan (a) Induksi Matematika biasa dan (b) Strong Induction
2. Gunakan strong induction untuk menunjukkan bahwa setiap n bilangan bulat positif dapat dituliskan sebagai penjumlahan bilangan-bilangan hasil pangkat 2 yang unik (2^0, 2^1, 2^2, 2^3,dst). [Petunjuk: Untuk inductive step, pertimbangkan untuk membagi ini ke dalam beberapa kasus yaitu saat k + 1 adalah bilangan genap dan saat k+1 ganjil. Saat k+1 adalah bilangan genap, maka (k + 1)/2 adalah suatu bilangan bulat.]

Apa yang sudah dipelajari?

- Contoh Soal Strong Induction dan Pembahasan

Topik Berikutnya: Aturan Berhitung

Referensi

- Discrete Mathematics and Its Applications 7th Edition oleh Kenneth H. Rosen (2012)
- Slide Matematika Diskret 1 : Induksi Matematika oleh Bapak Alfan F. Wicaksono (2013)

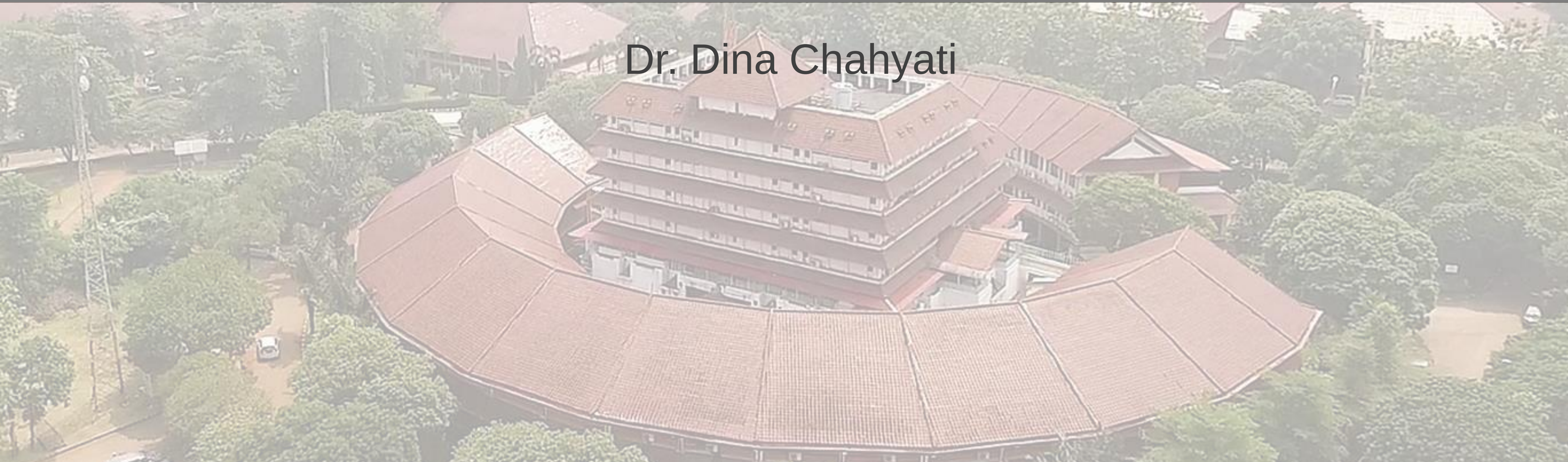
FAKULTAS ILMU KOMPUTER

UNIVERSITAS INDONESIA

Veritas, Probitas, Iustitia

Analisis Kombinatorik 1: Aturan Dasar Berhitung

Dr. Dina Chahyati



Topik

Berhitung (*counting*) merupakan proses menentukan jumlah objek yang memenuhi kriteria tertentu. Contoh:

- Menghitung jumlah hari dalam seminggu
- Menghitung jumlah cara memilih menu makanan dan minuman di warung
- Menghitung kompleksitas algoritma

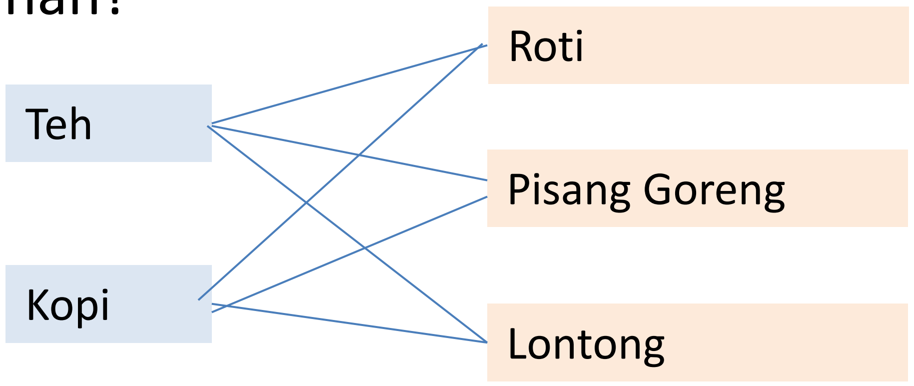
Aturan Dasar Berhitung:

1. Aturan Perkalian
2. Aturan Pembagian
3. Aturan Penjumlahan
4. Aturan Pengurangan
5. Diagram Pohon

1. Aturan Perkalian

Misalkan suatu prosedur T dapat dibagi menjadi dua buah pekerjaan (*task*) T_1 dan T_2 yang **berurutan**. Jika terdapat n_1 cara untuk melakukan T_1 dan n_2 cara untuk melakukan T_2, maka terdapat $n_1 n_2$ cara untuk mengerjakan prosedur tersebut.

- Contoh: sebuah warung makanan menjual 2 macam minuman (teh, kopi) dan 3 macam makanan (roti, pisang goreng, lontong). Ada berapa cara memilih satu minuman dan satu makanan?



Teh & Roti
Teh & Pisang Goreng
Teh & Lontong
Kopi & Roti
Kopi & Pisang Goreng
Kopi & Lontong

$\underline{\ n_1\ }$ $\underline{\ n_2\ }$
T_1 T_2

T_1 : Memilih satu minuman
n_1 = 2 cara (teh, kopi)

T_2 : Memilih satu makanan
n_2 = 3 cara (roti, pisang goreng, lontong)

T : Memilih satu minuman <u>dan</u> satu makanan
$n_1 n_2$ = 6 cara

1. Aturan Perkalian

Secara umum suatu prosedur T dapat dipecah menjadi T_1 , $T_{2,}$ ..... T_m pekerjaan sehingga jumlah cara mengerjakan keseluruhan prosedur T menjadi $n_1 n_2 \ldots . n_m$ dimana n_i adalah jumlah cara mengerjakan pekerjaan T_i

- Contoh: ada berapa cara membuat password yang terdiri dari 5 karakter dimana karakter 1-2 adalah alfabet dan karakter 3-5 adalah angka?

26	26	10	10	10	= 676.000 cara
T_1	T_2	T_3	T_4	T_5	

Aturan perkalian ini merupakan dasar dari **permutasi**

2. Aturan Pembagian

Misalkan suatu pekerjaan dapat dilakukan dalam n prosedur. Jika ternyata untuk setiap prosedur terdapat d **cara** penyelesaian yang identik, maka pekerjaan tersebut dapat diselesaikan dalam n/d **cara berbeda**.

- Contoh: ada berapa cara memilih 2 orang dari 4 mahasiswa: Ani, Beni, Cani, Deni, jika urutan tidak diperhatikan?

Cara memilih 2 orang jika urutan diperhatikan: $\underline{4}\ \ \underline{3} = 12$

Ani & Beni	Ani & Cani	Ani & Deni
Beni & Ani	Beni & Cani	Beni & Deni
Cani & Ani	Cani & Beni	Cani & Deni
Deni & Ani	Deni & Beni	Deni & Cani

Karena urutan tidak diperhatikan, maka pasangan Ani & Beni dianggap sama/identik dengan Beni & Ani. Karena ada 2 urutan cara memilih 2 orang yang berbeda, maka cara memilih tersebut (12) harus dibagi dengan 2 sehingga total cara memilih adalah 12/2 = 6 cara.

Aturan pembagian ini merupakan dasar dari **kombinasi**

3. Aturan Penjumlahan

Misalkan suatu pekerjaan dapat dilakukan dengan salah satu dari n_1 cara **atau** salah satu dari n_2 cara, dimana **tidak ada** dari “himpunan n_1 cara” dan “himpunan n_2 cara” yang sama, maka ada $n_1 + n_2$ cara untuk melakukan pekerjaan tersebut.

Contoh: Bit string adalah string yang hanya terdiri dari 0 dan 1. Ada berapa banyak cara membuat bit string panjang 2 atau 3?

Solusi untuk soal ini dapat diperoleh dengan menjumlahkan $n_1 + n_2$ dimana
n_1 = jumlah cara membuat bit string panjang 2
n_2 = jumlah cara membuat bit string panjang 3

Menggunakan aturan perkalian, didapatkan n_1 = 2.2 = 4 dan n_2 = 2.2.2 = 8
Kemudian dengan aturan penjumlahan didapatkan $n_1 + n_2$ = 4 + 8 = 12

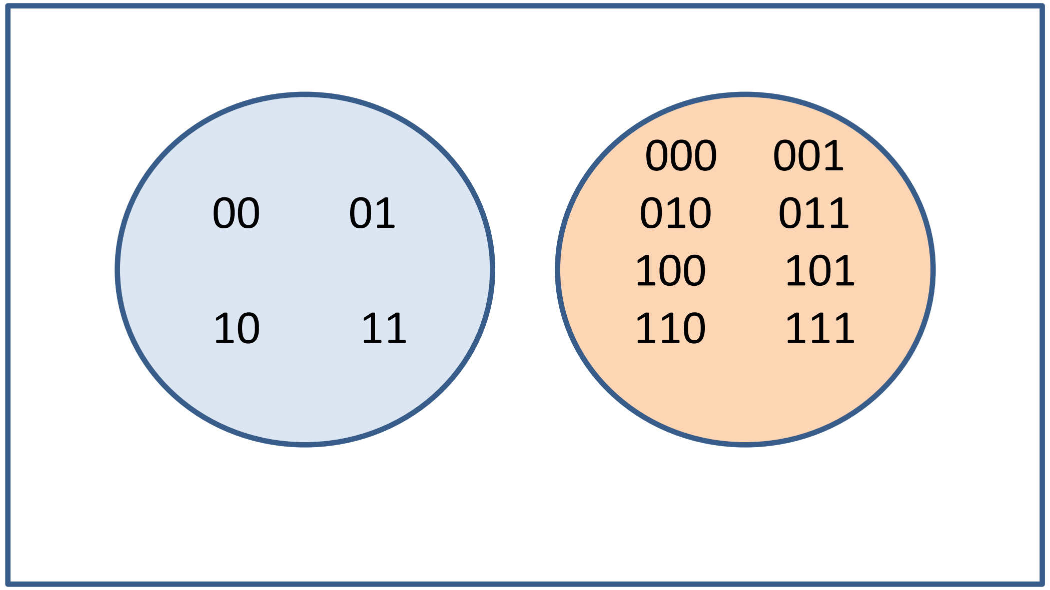
4. Aturan Pengurangan

Misalkan suatu pekerjaan dapat dilakukan dengan salah satu dari n_1 cara **atau** salah satu dari n_2 cara, dimana **ada** dari "himpunan n_1 cara" dan "himpunan n_2 cara" yang **sama** sebanyak m cara, maka ada $n_1 + n_2 - m$ cara untuk melakukan pekerjaan tersebut.

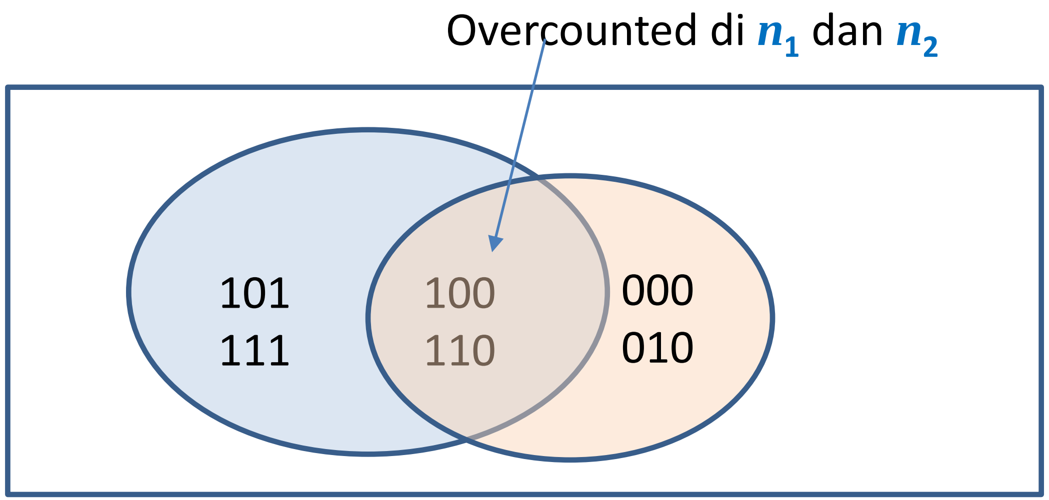
- Pengurangan ini perlu dilakukan agar tidak terjadi *overcounting* terhadap jumlah cara.
- Aturan pengurangan biasanya digunakan bersamaan dengan aturan penjumlahan

- Hint: Ketika menerapkan aturan penjumlahan, harap selalu cek apakah penjumlahan tersebut menyebabkan ada "cara/konfigurasi" yang dihitung lebih dari sekali (*overcount*)

Penjumlahan & Pengurangan



- Ada berapa banyak cara membuat bit string panjang 2 atau 3?
- Tidak ada irisan antara **himpunan bit string panjang 2** dan **himpunan bit string panjang 3** (saling lepas)
- Cukup dijumlahkan saja

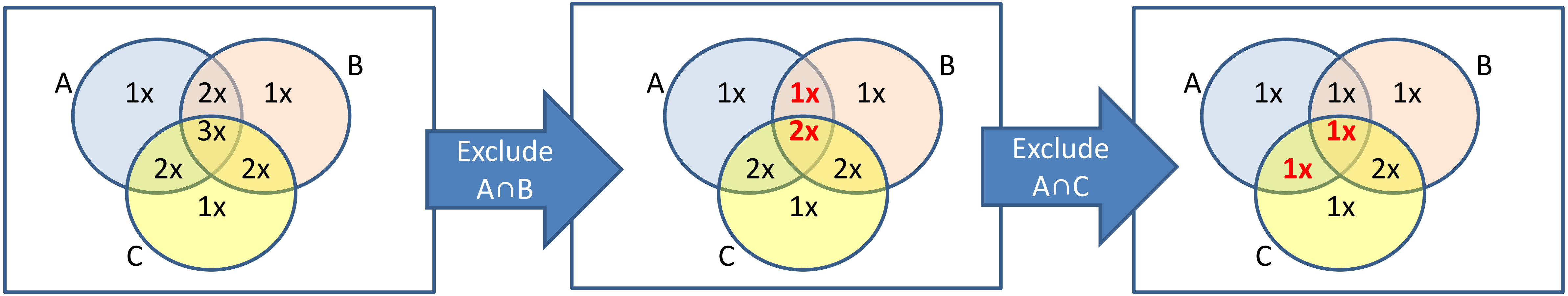


- Ada berapa banyak cara membuat bit string panjang 3 yang diawali 1 atau diakhiri 0?
- n_1 = jumlah cara membuat bit string panjang 3 yang diawali 1 = 1.2.2 = 4 cara (1_ _)
- n_2 = jumlah cara membuat bit string panjang 3 yang diakhiri 0 = 2.2.1 = 4 cara (_ _ 0)
- **Ada** elemen yang dihitung dua kali (overcount) di n_1 dan n_2 , yaitu 100 dan 110 (m = 2) → **perlu dilakukan pengurangan** (1 _ 0)
- Solusi akhir = $n_1 + n_2 - m$ = 4 + 4 – 2 = 6

Inklusi & Eksklusi

- Terkadang proses penjumlahan dan pengurangan perlu dilakukan berkali-kali
- Selalu cek apakah terjadi *overcount* atau *undercount*
- Jika terjadi *overcount* → kurangi / *exclude* / eksklusi
- Jika terjadi *undercount* → tambahkan / *include* / inklusi
- Pastikan semua “cara/konfigurasi” hanya dihitung **sekali saja.**

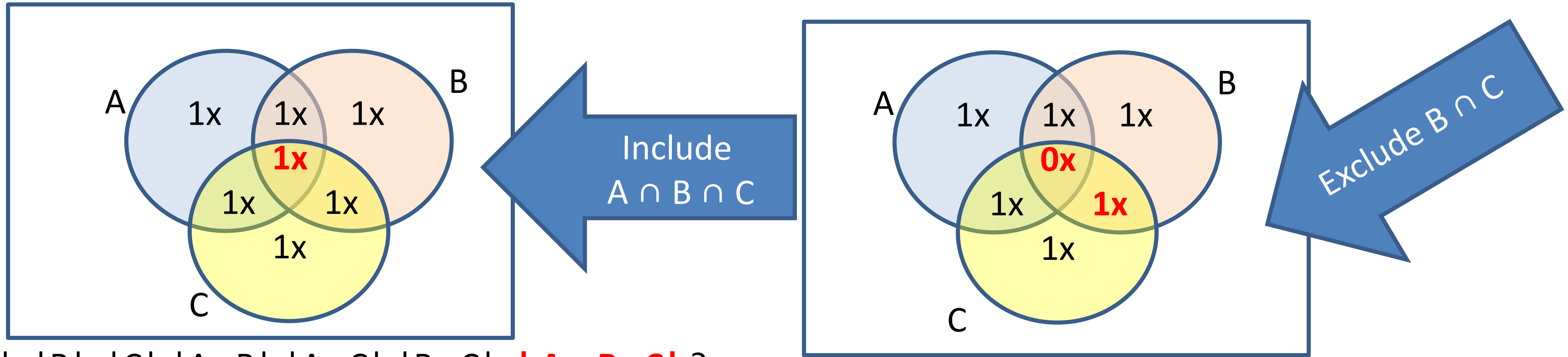
Inklusi dan Eksklusi



|A U B U C| = |A|+|B|+|C| ?
ada *overcount* → *exclude some!*

|A U B U C| = |A|+|B|+|C|-**|A∩B|**?
ada *overcount* → *exclude some!*

|A U B U C| = |A|+|B|+|C|-|A∩B|-**|A∩C|**?
ada *overcount* → *exclude some!*

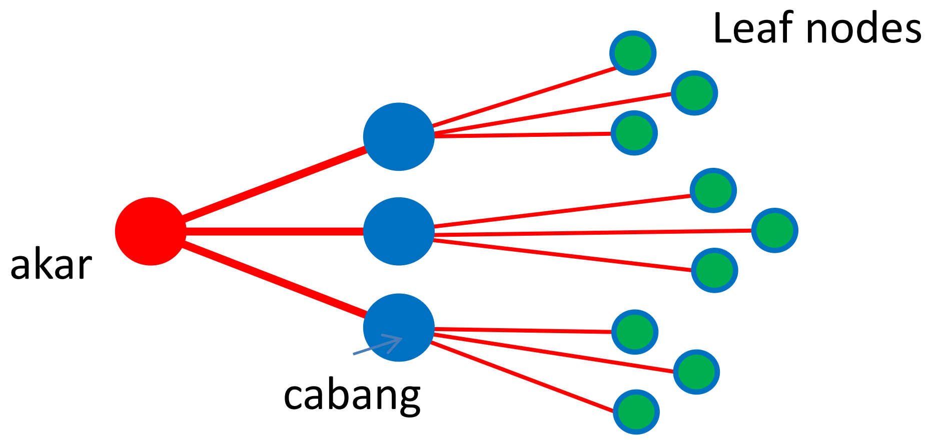


|A U B U C| = |A|+|B|+|C|-|A∩B|-|A∩C|-**|B∩C|** ?
ada *undercount* → *include some!*

|A U B U C| = |A|+|B|+|C|-|A∩B|-|A∩C|-|B∩C|**+| A∩ B∩C|** ?
OK, tidak ada *overcount* maupun *undercount*

5. Diagram Pohon

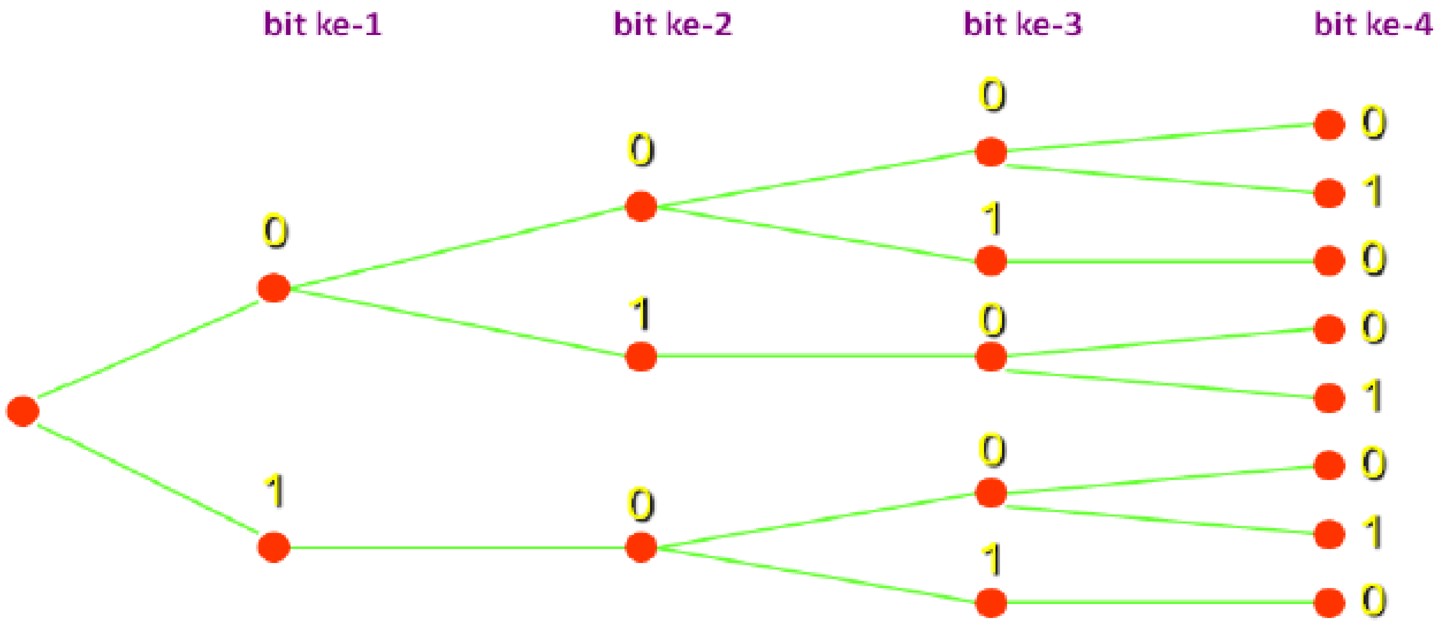
- Masalah berhitung (*counting problems*) dapat diselesaikan menggunakan diagram pohon.
- Sebuah **cabang pohon** merepresentasikan sebuah pilihan yang mungkin.
- Sebuah **jalur dari akar ke sebuah endpoint (leaf node)** adalah sebuah solusi/cara yang mungkin.



5. Diagram Pohon

Ada berapa banyak string biner dengan **panjang 4 yang tidak memuat dua digit 1 secara berurutan** ?

Jawaban: 8 string



Latihan Soal 1

- Ada berapa susunan huruf alfabet panjang 5 huruf yang mengandung **setidaknya satu huruf hidup** dan **huruf tidak boleh diulang**

Cara 1:

Jawaban = susunan tanpa pengulangan
– susunan tanpa pengulangan dan tanpa huruf hidup

Jawaban = 26.25.24.23.22 – 21.20.19.18.17 = 5 451 720

Cara 2:

Jawaban = susunan 1 vokal + 2 vokal + 3 vokal + 4 vokal + 5 vokal
= 5.(5.21.20.19.18) + 10.(5.4.21.20.19) + 10.(5.4.3.21.20)
+ 5.(5.4.3.2.21) + 1.(5.4.3.2.1)
= 3 591 000 + 1 596 000 + 252 000 + 12 600 + 120 = 5 451 720

Latihan Soal 2

Berapa banyak variasi string berbeda dengan panjang 9 huruf yang dapat dibentuk dari huruf-huruf pada kata ‘MAHASISWA’ jika string harus mengandung substring ‘HSW’ atau ‘MA’?

- n_1 = jumlah variasi string yang mengandung ‘HSW’
- n_2 = jumlah variasi string yang mengandung ‘MA’
- m = jumlah variasi string yang mengandung ‘HSW’ dan ‘MA’

Gunakan aturan penjumlahan dan pengurangan sehingga solusi yang diinginkan adalah $n_1 + n_2 - m$

Hitung n_1 :

- Anggap ada 7 slot yang dapat diisi oleh **‘HSW’, ‘M’,’I’, ‘S’, ‘A’, A’, ‘A’**
- Jika semua huruf dianggap berbeda, maka dengan aturan perkalian didapatkan 7.6.5.4.3.2.1 = 5040 variasi string
- Namun perhatikan bahwa string **HSWMISAAA** dan **HSWMISAAA** adalah identik (2 variasi identik)
- Demikian juga dengan variasi **HSWMISAAA**, **HSWMISAAA**, **HSWMISAAA**, **HSWMISAAA**, **HSWMISAAA**, **HSWMISAAA** (6 variasi identik)
- Dengan demikian kita perlu menerapkan aturan pembagian sehingga didapatkan $\frac{5040}{2.6} = 420$

Latihan Soal 2

Hitung n_2 : jumlah variasi string yang mengandung ‘MA’

- Dengan cara yang sama dengan sebelumnya, anggap ada 8 slot yang dapat diisi oleh **‘MA’, ‘W’, ’I’, ‘H’, ‘S’, ‘S’, A’, ‘A’**
- Jika semua huruf dianggap berbeda, maka dengan aturan perkalian didapatkan 8.7.6.5.4.3.2.1 = 40320 variasi string
- Setelah menghapus variasi-variasi identik didapatkan $\frac{40320}{2.6} = 3360$

Hitung m : jumlah variasi string yang mengandung ‘HSW’ dan ‘MA’

- Dengan cara yang sama dengan sebelumnya, anggap ada 6 slot yang dapat diisi oleh **‘HSW’, ‘MA’,’I’, ‘S’, A’, ‘A’**
- Jika semua huruf dianggap berbeda, maka dengan aturan perkalian didapatkan 6.5.4.3.2.1 = 720 variasi string
- Setelah menghapus variasi-variasi identik didapatkan $\frac{720}{2.6} = 60$

Hitung $n_1 + n_2 - m$

- Dapatkan solusi akhir yaitu 420 + 3360 – 60 = 3720 variasi string

FAKULTAS ILMU KOMPUTER
UNIVERSITAS INDONESIA

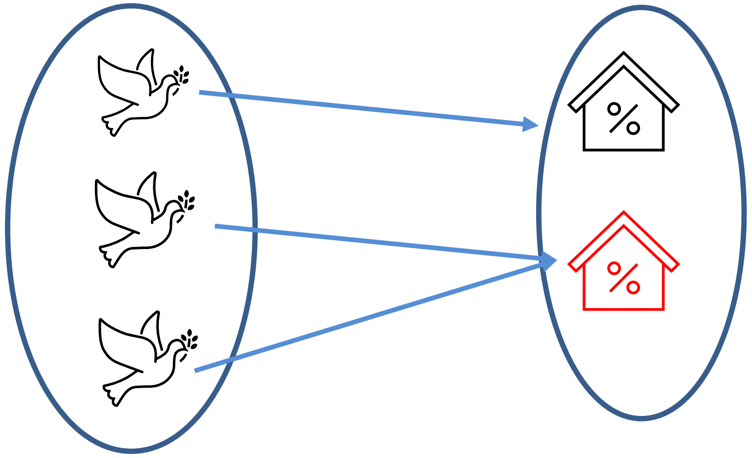
Berikutnya: Prinsip Sarang Merpati

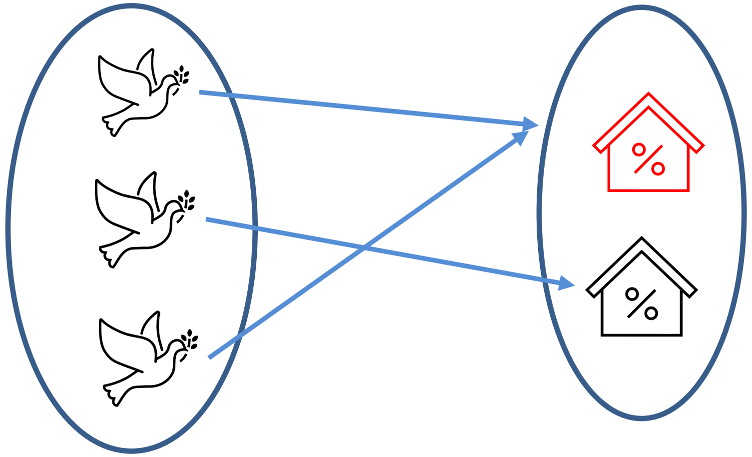
Analisis Kombinatorik 2: Prinsip Sarang Merpati

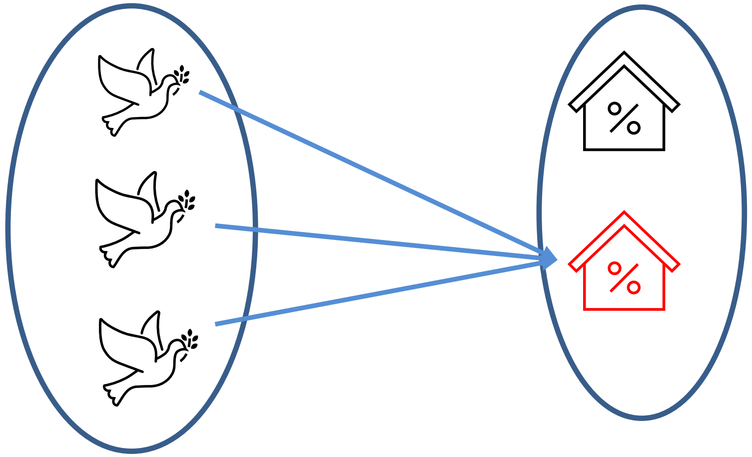
Dr. Dina Chahyati

Prinsip Sarang Merpati

- Jika terdapat ***k*+1** merpati dan ***k*** sarang, maka pasti terdapat setidaknya satu sarang yang diisi oleh lebih dari satu merpati.







Prinsip Sarang Merpati (*Pigeonhole Principle*) menyatakan:

Jika terdapat ***k*+1** atau lebih objek dan ***k*** kotak, maka **pasti** terdapat setidaknya satu kotak yang diisi oleh lebih dari satu objek.

Pembuktian

Jika terdapat ***k*+1 atau lebih** objek dan ***k*** kotak, maka pasti terdapat setidaknya satu kotak yang diisi oleh lebih dari satu objek $(p \rightarrow q)$

Bukti Kontradiksi: Asumsikan $\neg(p \rightarrow q) \equiv \neg(\neg p \vee q) \equiv p \wedge \neg q$ benar

p benar **:** terdapat ***k*+1** atau lebih objek

$\neg q$ benar : tidak ada satupun dari ***k*** kotak yang mengandung lebih dari satu objek.

Dari $\neg q$ artinya semua kotak hanya mengandung maksimal satu objek, sehingga maksimal hanya ada ***k*** objek.

Hal ini kontradiksi dengan p yang menyatakan terdapat ***k*+1** atau lebih objek !

Prinsip Sarang Merpati yang Diperumum

Recall: Prinsip Sarang Merpati (*Pigeonhole Principle*) menyatakan:
Jika terdapat ***k*+1** atau lebih objek dan ***k*** kotak, maka **pasti** terdapat setidaknya satu kotak yang diisi oleh lebih dari satu objek.

Prinsip Sarang Merpati **yang diperumum** menyatakan:
Jika terdapat ***N*** objek dan ***K*** kotak, maka **pasti** terdapat setidaknya satu kotak yang diisi oleh minimal $\lceil \boldsymbol{N}/\boldsymbol{K} \rceil$ objek.

Penerapan

- Prinsip Sarang Merpati sangat sederhana dan tidak sulit dipahami ☺

- Namun dalam penerapannya, kadang menjadi sulit karena tidak jelas apa analogi merpati dan sangkarnya.

Contoh 1 (mudah)

- Buktikan bahwa di antara sembarang 27 kata dalam Bahasa Indonesia, setidaknya pasti ada 2 kata yang diawali oleh huruf yang sama.

- Solusi: Ada 26 huruf dalam Bahasa Indonesia, sementara diberikan 27 kata. Jika **kata** dianggap sebagai **merpati,** dan **huruf awal** dianggap sebagai **sarang**, maka berdasarkan Prinsip Burung Merpati pasti terdapat minimal 2 kata yang diawali oleh huruf yang sama.

Contoh 2 (mudah)

- Berapa (paling sedikit) orang harus dikumpulkan dalam satu ruangan agar **dijamin** setidaknya terdapat 3 orang yang lahir di bulan yang sama?

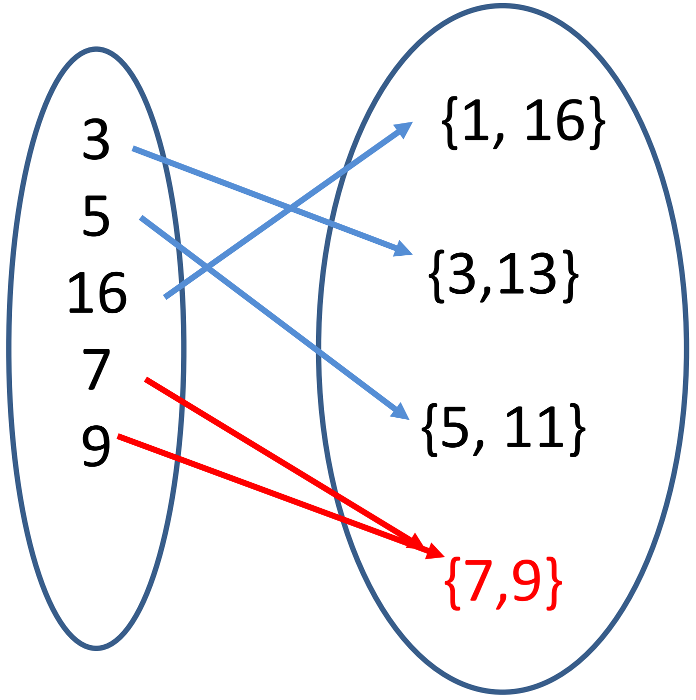
Solusi:

- Jumlah bulan dalam setahun adalah 12.
- Anggap **bulan** adalah **sarang** dan **orang** adalah **merpati**.
- Ingin dicari *N* sedemikian hingga $\lceil N/12 \rceil = 3$.
- *N* terkecil yang memenuhi adalah 25.
- Dengan demikian perlu dikumpulkan 25 orang agar setidaknya terdapat 3 orang yang lahir di bulan yang sama.

Contoh 3 (tidak mudah)

- Berapa minimal bilangan harus dipilih dari himpunan {1,3,5,7,9,11,13,15} agar **dijamin** ada sepasang bilangan yang jika dijumlahkan menjadi 16?
  - Apakah cukup diambil 3 bilangan saja?
- Apa analogi merpati dan sarangnya? ☺

- Merpati: bilangan yang diambil
- Sarang: pasangan bilangan yang jika dijumlahkan menjadi 16. Ada 4 pasang bilangan yaitu {1,16}, {3,13}, {5, 11}, {7,9}.
- Karena ada 4 kotak, maka perlu diambil minimal 5 angka agar dijamin ada sepasang angka yang jika dijumlahkan menjadi 16.



Contoh 4 (tidak mudah)

Buktikan bahwa untuk setiap bilangan bulat positif *n*, pasti ada kelipatan dari n yang representasi desimalnya hanya mengandung angka 0 dan 2 saja.

Contoh:

- Kelipatan 2 yang hanya mengandung angka 0 dan 2 saja: 20
- Kelipatan 3 yang hanya mengandung angka 0 dan 2 saja : 2220
- Kelipatan 8 yang hanya mengandung angka 0 dan 2 saja : 200

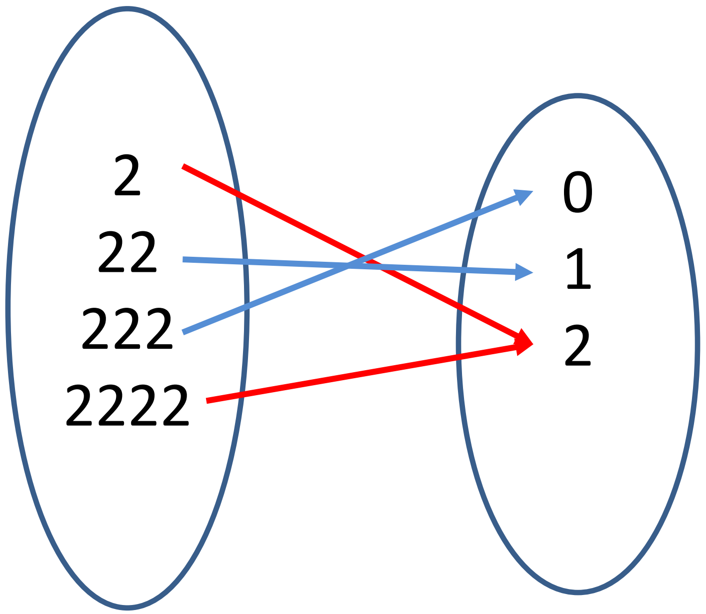
- Apa analogi merpati dan sarangnya?

Contoh 4 (solusi)

- Ambil n+1 buah bilangan yang hanya terdiri dari angka 2, misalnya 2, 22, 222, 2222, 2222, 22222, dan seterusnya
- Jika kita membagi suatu bilangan dengan n, kemungkinan sisanya adalah n bilangan, yaitu 0, 1, 2, … n-1. Misal kita membagi bilangan dengan 3, maka kemungkinan sisa pembagiannya hanya 0, 1, 2 saja (ada 3 bilangan)
- Dengan demikian, jika kita memiliki n+1 buah bilangan yang hanya terdiri dari angka 2, dan membaginya dengan n, pasti ada setidaknya dua bilangan yang memiliki sisa pembagian yang sama.
- Hasil pengurangan kedua bilangan ini pasti merupakan kelipatan n yang hanya terdiri dari angka 0 dan 2 saja.
- Merpati: n+1 bilangan yang hanya terdiri dari angka 2.
  Sarang: n bilangan dari 0 sampai n-1 (hasil bagi yang mungkin)

Contoh 4 (solusi)

- Ilustrasi: untuk menunjukkan ada bilangan kelipatan 3 yang hanya terdiri dari angka 0 atau 2 saja.
- Dari bilangan 2, 22, 222, 2222, ada dua bilangan yang jika dibagi 3 sisanya sama, yaitu 2 dan 2222.
- Hasil pengurangan kedua bilangan tersebut: 2222 – 2 = 2220
- Maka **2220** adalah kelipatan 3 yang hanya terdiri dari angka 0 dan 2 saja ☺



2 dibagi 3 = 0 sisa **2**
22 dibagi 3 = 7 sisa **1**
222 dibagi 3 = 74 sisa **0**
2222 dibagi 3 = 740 sisa **2**

Latihan

1. Buktikan bahwa untuk setiap bilangan bulat positif *n*, pasti ada kelipatan dari n yang representasi desimalnya hanya mengandung angka 0 dan 3 saja.

2. Diberikan sembarang 10 bilangan bulat positif ≤ 50. Akan dibentuk himpunan-himpunan beranggotakan lima bilangan dari kesepuluh bilangan tersebut. Buktikan bahwa ada setidaknya dua himpunan yang hasil penjumlahan kelima elemennya sama.

   Contoh: dari bilangan 1,3,6,11,15,20,23,35,37,45 ada dua himpunan beranggotakan lima bilangan yang hasil penjumlahan elemennya sama, yaitu {6,20,35,37,45} dan {3,23,35,37,45}. Perhatikan bahwa 6+20+35+37+45 = 3+23+35+37+45 = 143)

Berikutnya:
Permutasi, Kombinasi dan Variasinya

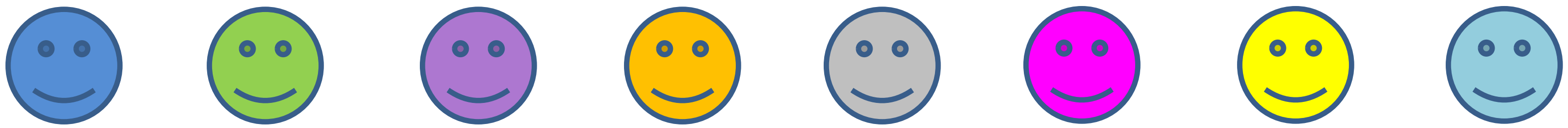
FAKULTAS ILMU KOMPUTER

Permutasi dan Kombinasi

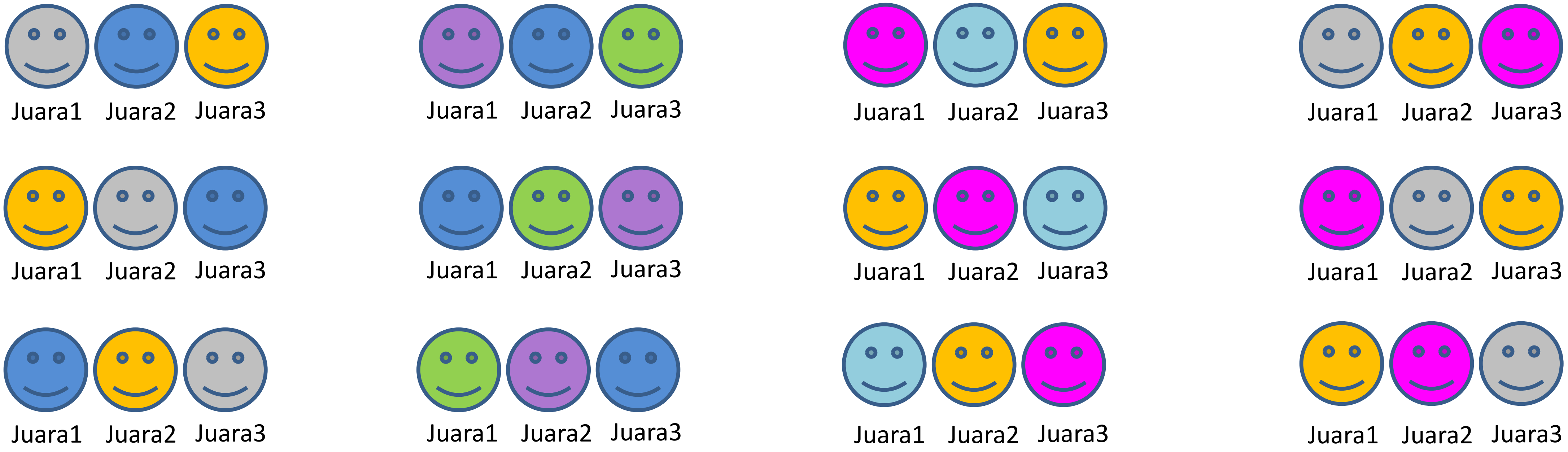
Rahmad Mahendra, M.Sc.

Permutasi

8 **orang** mengikuti **final lomba marathon**



<u>Kemungkinan juara 1, 2, dan 3</u>



...

(masih terdapat sejumlah kemungkinan lainnya)

Permutasi

Menghitung banyaknya cara pengaturan objek tertentu **dengan memperhatikan urutannya**.

Definisi: Sebuah **permutasi** semua unsur dari sebuah himpunan berukuran *n* adalah sebuah urutan linier dari *n* unsur tersebut, disebut pula dengan **permutasi dari *n* unsur**.

Definisi: **Permutasi *r* unsur** dipilih dari sebuah himpunan dengan *n* unsur disebut permutasi-*r* dari *n* unsur.

Permutasi

Misal, $S = \{a, b, c\}$

- Salah satu contoh **permutasi** dari S adalah (a, b, c).

  Perhatikan bahwa (a, b, c) berbeda dengan (c, b, a).

- **Kumpulan permutasi-2** dari S adalah **susunan terurut** (a, b), (b, a), (a, c), (c, a), (b, c), (c, b).

Banyaknya permutasi dari himpunan dengan **n elemen** dinyatakan dengan $\boldsymbol{P(n)}$

Banyaknya permutasi-r dari himpunan dengan **n elemen** dinyatakan dengan $\boldsymbol{P(n, r)}$

$$\boldsymbol{P(n) = P(n, n)}$$

Teorema dan Corrolary Terkait Permutasi

Teorema 1: Jika n dan r adalah bilangan bulat positif di mana $1 \leq r \leq n$, maka

$$P(n, r) = n(n-1)(n-2)\cdots(n-r+1)$$

Pembuktian: Menggunakan aturan perkalian. Elemen pertama dapat dipilih dengan n cara. Elemen kedua dalam $n-1$ cara, dan selanjutnya sampai $(n-(r-1))$ cara untuk memilih elemen terakhir.

Catatan: $P(n,0) = 1$, terdapat satu cara untuk memilih elemen kosong.

Corollary 1:

Jika n and r adalah bilangan bulat positif di mana $1 \leq r \leq n$, maka

$$P(n,r) = \frac{n!}{(n-r)!}$$

Latihan (1)

Ada berapa kemungkinan komposisi juara 1, 2, dan 3 final lomba marathon yang diikuti oleh 8 peserta?

Solusi:

$$P(5,3) = 8 \cdot 7 \cdot 6 = 336 \text{ cara}$$

Latihan (2)

Seorang pedagang keliling harus mengunjungi 8 kota. Dia harus mulai dari sebuah kota tertentu. Setelah itu, dia dapat mengunjungi 7 kota yang lain semaunya. Ada berapa banyak jalur yang dapat dibentuk ?

Solusi:

Kota pertama sudah pasti.

Perlu ditentukan urutan pengunjungan 7 kota lainnya.

Ada $\boldsymbol{P(7) = 7! = 5040}$ cara yang dapat dipilih oleh pedagang keliling.

Latihan (3)

Berapa banyak permutasi *ABCDEFGH* yang mengandung substring *ABC* ?

Solusi:

Permasalahan di atas dapat dikerjakan dengan permutasi 6 objek, *ABC*, *D*, *E*, *F*, *G*, and *H*.

$$6! = 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 720$$

Kombinasi

Terkadang, cara penyusunan objek tidak perlu memperhatikan **urutan**.

Definisi:

Kombinasi dari suatu himpunan objek adalah pengaturan objek-objek pada himpunan dengan **tidak memperhatikan urutan** objek-objek tersebut.

Kombinasi-*r* adalah pengaturan ***r*** buah objek dari suatu himpunan dengan **tidak memperhatikan urutan *r*** buah objek tersebut.

Kombinasi

Misal, S = {1, 2, 3, 4}

{1, 3, 4} adalah sebuah contoh **kombinasi-3** dari himpunan S. {1, 3, 4} dan {4, 3, 1} adalah contoh **kombinasi-3 yang sama**.

Kombinasi-*r* dari himpunan dengan **n elemen** dinotasikan dengan:

$$\mathbf{C(n, r)} \text{ atau } \binom{\boldsymbol{n}}{\boldsymbol{r}}$$

$\binom{n}{r}$ juga disebut sebagai **koefisien binomial** dan dibaca: **"n diambil dari r"**.

Teorema dan Corrolary Terkait Kombinasi

Teorema 2

Untuk $0 \le r \le n$, maka:

$$C(n, r) = \frac{P(n,r)}{P(r,r)} = \frac{n!}{(n-r)!\,r!}$$

Pembuktian:

Dengan memperhatikan urutannya, terdapat ***P*(n,r)** cara untuk memilih ***r* objek** dari ***n* objek**.

Seandainya syarat "memperhatikan urutan" dihapuskan, berdasarkan aturan pembagian, ada ***P*(n,r)/r! = *P*(n,r)/*P*(r,r)** cara untuk memilih **r objek** dari **n objek.**

Karena **setiap kombinasi-*r*** dari himpunan berkorespondensi dengan **P(r, r) permutasi-*r***.

Contoh: kombinasi {1,3} berkorespondensi dengan **permutasi-2**: {1,3} dan {3, 1}.

Teorema dan Corrolary Terkait Kombinasi

Corollary 2:

Jika n dan r adalah bilangan bulat non negatif di mana $r \leq n$, maka

$$C(n, r) = C(n, n - r).$$

Pembuktian:

Dari teorema 2, dapat dijabarkan

$$C(n,r) = \frac{n!}{(n-r)!r!}$$

dan

$$C(n,n-r) = \frac{n!}{(n-r)![n-(n-r)]!} = \frac{n!}{(n-r)!r!}\ .$$

maka, $C(n, r) = C(n, n - r)$.

Latihan (4)

Ada berapa cara untuk memilih 5 pemain dari 10 anggota tim bulutangkis RW 03 sebagai perwakilan di perlombaan bulutangkis tingkat desa?

Solusi:

$$C(10,5) = \frac{10!}{5!5!} = 252.$$

Latihan (5)

Misal, ada 6 staf akademik dari FMIPA dan 5 staf akademik dari FASILKOM. Ada berapa banyak cara untuk memilih sebuah komite untuk menyusun kurikulum kuliah matematika diskrit, jika komite terdiri dari 3 staf dari FMIPA dan 4 staf dari FASILKOM ?

Solusi:

Berdasarkan aturan perkalian, jawaban soal adalah perkalian **kombinasi-3 himpunan staf FMIPA** dan **kombinasi-4 himpunan staf FASILKOM**:

$$C(6, 3) \cdot C(5, 4) = \frac{6!}{3!3!} \cdot \frac{5!}{4!1!} = 100 \text{ cara}.$$

Apa yang sudah dipelajari

Permutasi

Kombinasi

Materi selanjutnya: Variasi Permutasi Kombinasi

Referensi

- Kenneth H. Rosen (2012) “Discrete Mathematics and Its Applications 7th Edition”
- Alfan Farizki Wicaksono (2013) “Slide MD1-12-permutasi-kombinasi”, Fasilkom UI

FAKULTAS ILMU KOMPUTER

UNIVERSITAS INDONESIA

Veritas, Probitas, Iustitia

Permutasi dan Kombinasi (Lanjutan)

Rahmad Mahendra, M.Sc.

Permutasi dengan Pengulangan

Teorema 1: Banyaknya **permutasi-*r*** dari sebuah himpunan dengan ***n* unsur** dengan **pengulangan** adalah n^r

Bukti: Terdapat *n* cara untuk memilih elemen dari himpunan untuk masing-masing posisi *r*. Menggunakan aturan perkalian, *n* x *n* x ... *n* (*n* dikali sebanyak *r* kali) = n^r permutasi-*r* dengan pengulangan.

Contoh:

Berapa banyak string berbeda dengan **panjang r** yang dapat dibentuk dari huruf kapital, dan masing-masing **huruf kapital dapat digunakan lebih dari sekali**?

Solusi:

Ada **26** huruf kapital.

Berdasarkan aturan perkalian, ada

$$\mathbf{26 \times 26 \times 26 \times \ldots X\ 26 = 26^r\ cara}$$

Permutasi dengan Unsur-Unsur Identik

Berapa banyak string berbeda yang dapat dibentuk dengan cara menyusun huruf-huruf dari kata **MISSISIPPI**?

Karena beberapa huruf pada kata **MISSISIPPI** muncul lebih dari satu, jadi solusinya **bukan** banyaknya **permutasi dari 10 huruf**.

Solusi:

4 huruf I dapat ditempatkan di **10 posisi** dalam **C(10, 4) cara**.

3 huruf S dapat ditempatkan di **6 posisi tersisa** dalam **C(6, 3) cara**.

2 huruf P dapat ditempatkan di **3 posisi tersisa** dalam **C(3, 2) cara**.

1 huruf M diletakkan di **1 posisi tersisa** = **C(1, 1) cara**.

C(10, 4) .C(6, 3).C(3, 2).C(1, 1) = $\frac{10!}{6!4!} \cdot \frac{6!}{3!3!} \cdot \frac{3!}{1!2!} \cdot \frac{1!}{1!} = \frac{10!}{4!3!2!1!}$

Permutasi dengan Unsur-Unsur Identik

Teorema 2:

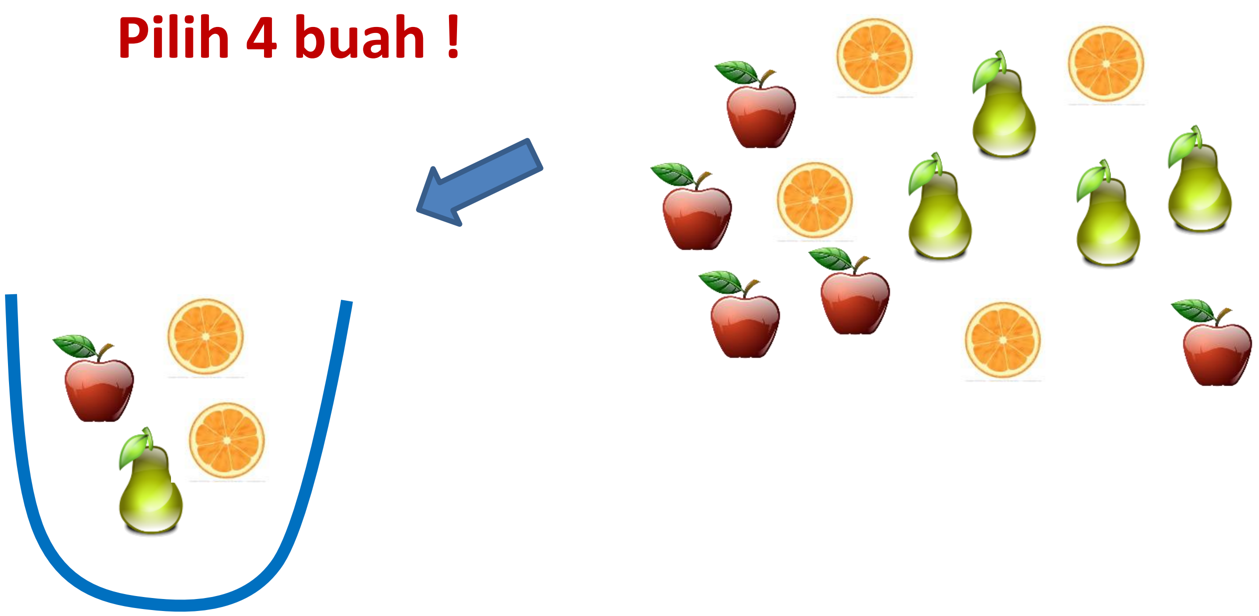
Banyaknya permutasi berbeda dari **n objek**, dimana ada **n_1 objek identik** untuk **jenis 1**, **n_2 objek identik** untuk **jenis 2**, ..., **n_k objek identik** untuk **jenis k**, adalah

$$\frac{n!}{n_1!\,n_2!\ldots n_k!}$$

di mana $n = n_1 + n_2 + \cdots + n_k$

Kombinasi dengan Pengulangan

Ada berapa cara untuk memilih **4 buah** dari sebuah toko buah yang menjual **3 jenis buah**, yaitu **apel**, **jeruk**, dan **pir** ?



Kombinasi dengan Pengulangan

- Cara 1: Enumerasi seluruh cara

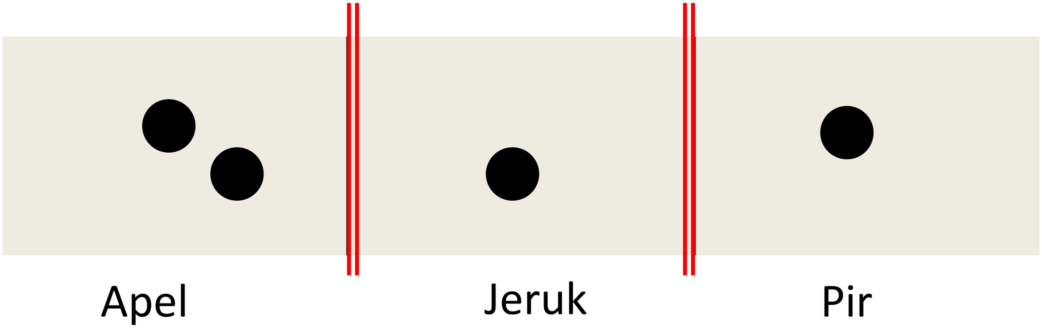
4 Apel	4 Jeruk	4 Pir
3 Apel, 1 Jeruk,	3 Apel, 1 Pir	3 Jeruk, 1 Apel
3 Jeruk, 1 Pir	3 Pir, 1 Apel	3 Pir, 1 Jeruk
2 Apel, 2 Jeruk	2 Apel, 2 Pir	2 Jeruk, 2 Pir
2 Apel, 1 Jeruk, 1 Pir	2 Jeruk, 1 Apel, 1 Pir	2 Pir, 1 Apel, 1 Jeruk

- 15 cara

Kombinasi dengan Pengulangan

Cara 2: Mendistribusikan Objek ke Dalam Kotak

Misal, ada **3 kotak**, di mana setiap kotak merepresentasikan **jenis buah**.

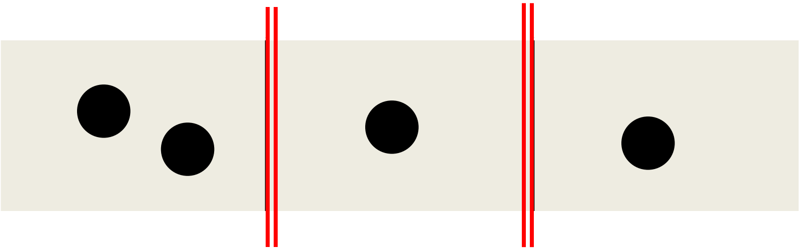


Ilustrasi di atas: memilih 2 apel, 1 jeruk, 1 pir

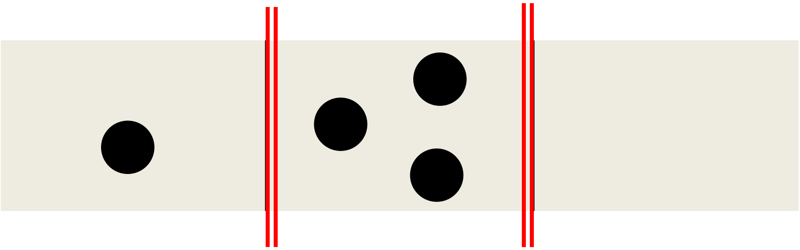
Kombinasi dengan Pengulangan

Banyaknya cara memilih 4 buah dari 3 jenis buah =

Banyaknya cara menyusun 2 garis tegak dan 4 B (objek) dari 6 posisi.



B B | B | B



B | B B B |

Permutasi barisan panjang 6 yang terdiri 2 garis dan 4 objek = $\frac{6!}{4!2!} = 15$ cara

Kombinasi dengan Pengulangan

Banyaknya cara memilih 4 buah dari 3 jenis buah =

Banyaknya cara mendistribusikan 4 objek ke dalam 3 kotak berbeda =

Permutasi barisan panjang 6 yang terdiri 2 garis dan 4 objek identik =

Kombinasi-4 dari himpunan yang terdiri 3 jenis unsur, **pengulangan** dibolehkan

Berdasarkan contoh kasus "pemilihan buah", dapat digeneralisasi

Teorema 3: Dari himpunan dengan **n jenis unsur**, ada

$$\boldsymbol{C(n + r - 1, r) = C(n + r - 1, n - 1)}$$

banyaknya **kombinasi-r** ketika **pengulangan dibolehkan**.

Apa yang sudah dipelajari

Permutasi dengan Pengulangan

Permutasi dengan Unsur-Unsur Identik

Kombinasi dengan Pengulangan

Materi selanjutnya: Koefisien Binomial

Referensi

- Kenneth H. Rosen (2012) “Discrete Mathematics and Its Applications 7th Edition”
- Alfan Farizki Wicaksono (2013) “Slide MD1-12-permutasi-kombinasi”, Fasilkom UI

UNIVERSITAS INDONESIA
Veritas, Probitas, Iustitia

FAKULTAS ILMU KOMPUTER

Latihan Permutasi dan Kombinasi

Rahmad Mahendra, M.Sc.

Latihan 1

Tujuh orang mahasiswa/i Fasilkom UI menghadiri sebuah seminar. Aldi, Mayang, dan Syukri dari program studi Ilmu Komputer, serta Fajri, Jessica, Michelle, dan Yusuf dari program studi Sistem Informasi.

Tersedia 7 buah kursi pada satu baris.

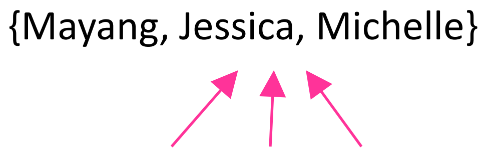
a) Ada berapa cara mereka menempati 7 kursi itu?
b) Jika mahasiswi ingin duduk berturutan, ada berapa cara ketujuh peserta seminar menempati kursi yang tersedia?
c) Jika mahasiswa Sistem Informasi ingin duduk berturutan dan demikian juga mahasiswa Ilmu Komputer, ada berapa cara mereka menempati kursi-kursi itu?
d) Jika ketujuh peserta seminar duduk selang seling berdasarkan program studi, ada berapa cara mereka menempati kursi-kursi itu?

Kerjakan soal a) dan c) sebagai latihan sendiri

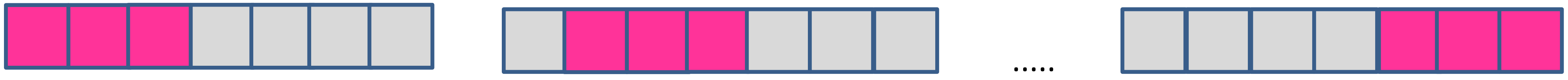
Latihan 1

Mahasiswa: Aldi, Syukri, Fajri, Yusuf   Mahasiswi: Mayang, Jessica, Michelle

b) Jika mahasiswi ingin duduk berturutan, ada berapa cara ketujuh peserta seminar menempati kursi yang tersedia?



Cara mengatur agar mahasiswi duduk berurutan



Cara mengatur tempat duduk mahasiswi = $P(3)$

Cara mengatur tempat duduk mahasiswa = $P(4)$

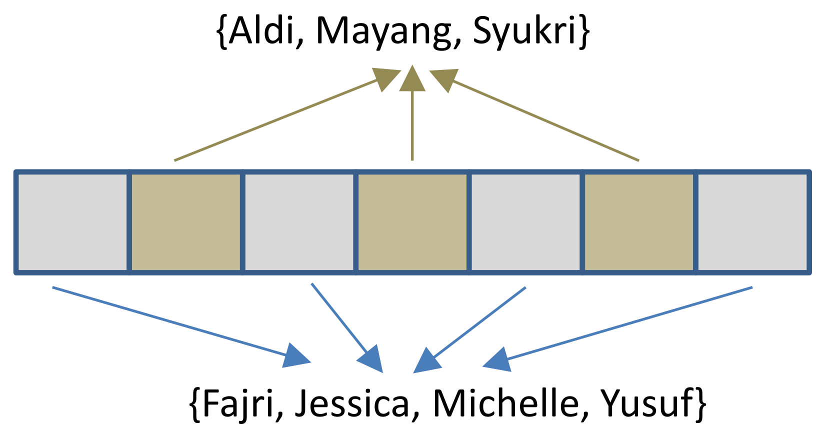
Jadi, terdapat 5 x $P(3)$ x $P(4)$ = 5 x 6 x 24 = **720 cara**

penyusunan tempat duduk yang memenuhi syarat mahasiswi duduk berurutan

Latihan 1

IK: Aldi, Mayang, dan Syukri SI: Fajri, Jessica, Michelle, dan Yusuf

d) Jika ketujuh peserta seminar duduk selang seling berdasarkan program studi, ada berapa cara mereka menempati kursi-kursi itu?



Hanya terdapat satu konfigurasi seperti ilustrasi agar mahasiswa IK dan SI bisa duduk selang-seling

Cara mengatur tempat duduk Aldi, Mayang, Syukri = $P(3)$

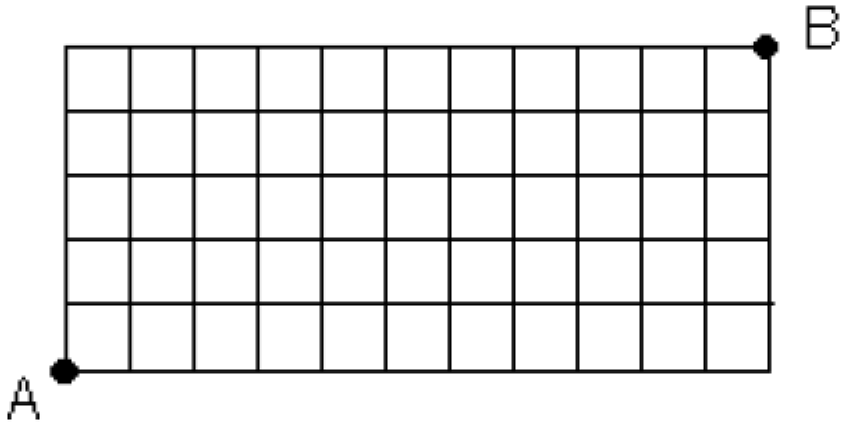
Cara mengatur tempat duduk Fajri, Jessica, Michelle, Yusuf = $P(4)$

Jadi, terdapat $P(3) \times P(4) = 6 \times 24 = 144$ cara

penyusunan tempat duduk agar peserta duduk selang-seling berdasarkan prodi

Latihan 2

Berapa banyaknya lintasan **terpendek** dari A ke B pada gambar berikut:



Solusi:

Lintasan terpendek dari A dan B panjang 16, terdiri dari 11 langkah horizontal ke kanan (**RIGHT**) dan 5 langkah vertikal ke atas (**UP**).

Salah satu variasi lintasan terpendek:

RIGHT RIGHT RIGHT RIGHT RIGHT RIGHT RIGHT RIGHT RIGHT RIGHT RIGHT UP UP UP UP UP

....

Hint: gunakan permutasi dengan unsur identik

Latihan 3a

Tentukan banyaknya solusi persamaan:

$$x_1 + x_2 + x_3 = 11,\ x_1 \geq 0,\ x_2 \geq 0,\ x_3 \geq 0$$

Contoh solusi persamaan

($x_1 = 0$, $x_2 = 5$ $x_3 = 6$)   ($x_1 = 1$, $x_2 = 3$ $x_3 = 8$)   ($x_1 = 11$, $x_2 = 0$ $x_3 = 0$)

Permasalahan menentukan jumlah solusi persamaan sama dengan permasalahan **"pemilihan buah"** pada slide sebelumnya.

Misal ada **3 kotak (yaitu x_1, x_2, dan x_3)** dan **11 objek** (yaitu angka 1) yang akan didistribusikan ke dalam **3 kotak** tersebut.

Ada berapa cara memasukkan 11 objek ke dalam 3 kotak ini?

$$C(3 + 11 - 1, 11) = C(13, 11) = C(13, 2) = \frac{13 \cdot 12}{1 \cdot 2} = 78$$

Latihan 3b

Tentukan banyaknya solusi persamaan:

$$x_1 + x_2 + x_3 \leq 11,\ x_1 \geq 1,\ x_2 \geq 2,\ x_3 \geq 3$$

Solusi persamaan tersebut bisa ditulis ulang menjadi operasi himpunan:

$$(x_1 + x_2 + x_3 = 6) \cup (x_1 + x_2 + x_3 = 7) \cup (x_1 + x_2 + x_3 = 8) \cup (x_1 + x_2 + x_3 = 9) \cup$$
$$(x_1 + x_2 + x_3 = 10) \cup (x_1 + x_2 + x_3 = 11)$$

Perhatikan syarat bahwa $x_1 \geq 1$, $x_2 \geq 2$, $x_3 \geq 3$ sehingga tidak mungkin $x_1 + x_2 + x_3 < 6$

Misal ada **3 kotak (yaitu x_1, x_2, dan x_3)** dan ***n* objek** (yaitu angka 1) yang akan didistribusikan ke dalam **3 kotak** tersebut.

Nilai *n* yang memenuhi adalah $6 \leq n \leq 11$

Kotak pertama berisi minimal 1 objek, kedua minimal 2 objek dan ketiga minimal 3 objek.

Kita hanya perlu menentukan cara mendistribusikan objek sisanya (**sisa 5 objek**).

Hal ini analog dengan solusi untuk:

$$0 \leq y_1 + y_2 + y_3 \leq 5,\ y_1 \geq 0,\ y_2 \geq 0,\ y_3 \geq 0$$

Latihan 3b

Tentukan banyaknya solusi persamaan:

$$x_1 + x_2 + x_3 \leq 11,\ x_1 \geq 1,\ x_2 \geq 2,\ x_3 \geq 3$$

Solusi persamaan $x_1 + x_2 + x_3 = 11,\ x_1 \geq 1,\ x_2 \geq 2,\ x_3 \geq 3$
sama dengan $\mathbf{y_1 + y_2 + y_3 = 5,\ x_1 \geq 0,\ x_2 \geq 0,\ x_3 \geq 0}$
$C(7, 5)$

Solusi persamaan $x_1 + x_2 + x_3 = 10,\ x_1 \geq 1,\ x_2 \geq 2,\ x_3 \geq 3$
sama dengan $\mathbf{y_1 + y_2 + y_3 = 4,\ x_1 \geq 0,\ x_2 \geq 0,\ x_3 \geq 0}$
$C(6, 4)$
...
Solusi persamaan $x_1 + x_2 + x_3 = 6,\ x_1 \geq 1,\ x_2 \geq 2,\ x_3 \geq 3$
1 cara = $C(2, 0)$

Jadi, banyaknya solusi persamaan $x_1 + x_2 + x_3 \leq 11,\ x_1 \geq 1,\ x_2 \geq 2,\ x_3 \geq 3$
$C(7, 5) + C(6, 4) + C(5, 3) + C(4, 2) + C(3, 1) + C(2, 0)$

FAKULTAS ILMU KOMPUTER

Koefisien Binomial

Rahmad Mahendra, M.Sc.

Ekspresi Binomial

Ekspresi binomial: penjumlahan dari dua buah **term**.

Contoh dari ekspresi binomial : **x + y**

$$(x + y)^3 = (x + y)(x + y)(x + y)$$
$$= 1.x^3 + 3.x^2y + 3.xy^2 + 1.y^3$$

$(x + y)^3$ merupakan **pangkat 3 dari ekspresi binomial x + y**.

Ekspansi (penjabaran) **$(x + y)^3$** menghasilkan **4 term** berbeda: **x^3**, **x^2y**, **xy^2**, dan **y^3**.

Koefisien dari term **x^3** adalah **1**, koefisien dari term **x^2y** adalah **3**, dst.

Koefisien Binomial

Tentukan ekspansi (penjabaran) dari **$(x + y)^4$**!

Jika **$(x + y)^4$** dijabarkan, maka akan muncul term **x^4**, **x^3y**, **x^2y^2**, **xy^3**, **y^4**.

Berapa koefisien dari masing-masing term ini?

Anggap **$(x + y)^4$** merupakan perkalian dari **4 buah term $(x + y)$** yang berasal dari **4 kotak berbeda**.

K1 K2 K3 K4

$$(x + y)^4 = \boxed{(x + y)}\ \boxed{(x + y)}\ \boxed{(x + y)}\ \boxed{(x + y)}$$

Term x^4:

Term **x^4** dapat dibentuk dengan cara mengambil **4 buah x** dari **4 kotak berbeda**. **Ada $\binom{4}{4}$ cara**. Jadi, koefisien dari term **x^4** adalah $\binom{4}{4} = 1$.

atau dengan cara mengambil **0 buah y** dari **4 kotak berbeda**. **Ada $\binom{4}{0} = 1$ cara**.

Koefisien Binomial

Term x^3y :

Term $\mathbf{x^3y}$ dapat dibentuk dengan cara mengambil **3 buah x** dari **4 kotak berbeda**. **Ada $\binom{4}{3}$ cara**, maka koefisien dari term $\mathbf{x^3y}$ adalah $\binom{4}{3}$ = **4**.

atau...

dapat dibentuk dengan cara mengambil **1 buah y** dari **4 kotak berbeda**. **Ada $\binom{4}{1}$ = 4 cara**.

Term x^2y^2 :

Term $\mathbf{x^2y}$ dapat dibentuk dengan cara mengambil **2 buah x** dari **4 kotak berbeda (atau 2 buah y dari 4 kotak)**. **Ada $\binom{4}{2}$ cara**, maka koefisien dari term $\mathbf{x^2y^2}$ adalah $\binom{4}{2}$ = **6**.

Koefisien Binomial

Term xy^3 :

Term $\mathbf{xy^3}$ dapat dibentuk dengan cara mengambil **1 buah x** dari **4 kotak berbeda (atau 3 buah y dari 4 kotak)**. **Ada $\binom{4}{1} = \binom{4}{3}$ cara**. Oleh karena itu, koefisien dari term $\mathbf{xy^3}$ adalah $\binom{4}{1}$ = **4**.

Term y^4 :

Term $\mathbf{y^4}$ dapat dibentuk dengan cara mengambil **0 buah x** dari **4 kotak berbeda (atau 4 buah y dari 4 kotak)**. **Ada $\binom{4}{0} = \binom{4}{4}$ cara**. Oleh karena itu, koefisien dari term $\mathbf{y^4}$ adalah $\binom{4}{0}$ = **1**.

Ekspresi Binomial

$(x + y)^4$ = xxxx + xxxy + xxyx + xxyy + xyxx + xyxy + xyyx + xyyy + yxxx + yxxy + yxyx + yxyy + yyxx + yyxy + yyyx + yyyy

$(x + y)^4 =$

$\binom{4}{0} x^4 + \binom{4}{1} x^3y + \binom{4}{2} x^2y^2 + \binom{4}{3} xy^3 + \binom{4}{4} y^4$

$\binom{4}{4} x^4 + \binom{4}{3} x^3y + \binom{4}{2} x^2y^2 + \binom{4}{1} xy^3 + \binom{4}{0} y^4$

$1.x^4 + 4.x^3y + 6.x^2y^2 + 4.xy^3 + 1.y^4$

Teorema Binomial

$$(x+y)^n = \sum_{j=0}^{n} \binom{n}{j} x^{n-j} y^j$$

$$= \binom{n}{0} x^n + \binom{n}{1} x^{n-1} y + \cdots + \binom{n}{n-1} x y^{n-1} + \binom{n}{n} y^n$$

Kita gunakan **bukti kombinatorial**. Term hasil penjabaran atau ekspansi berbentuk $\boldsymbol{x^{n-j}y^j}$ dengan **j = 0, 1, 2, ..., n**. Menghitung banyaknya term $\boldsymbol{x^{n-j}y^j}$ sama saja dengan menghitung banyaknya cara memilih **(n - j) buah x** dari **n "kotak" term (x + y)**.

Oleh karena itu, koefisien dari $\mathbf{x^{n-j}\,y^j}$ adalah $\binom{n}{n-j}$, yang juga sama dengan $\binom{n}{j}$. Teorema binomial terbukti. **Q.E.D**

Latihan (1)

Tentukan koefisien dari $\mathbf{x^{12}.y^{13}}$ dari ekspansi $\mathbf{(x + y)^{25}}$?

Solusi:

Berdasarkan Teorema Binomial, koefisien $\mathbf{x^{12}.y^{13}}$ adalah

$$\binom{25}{13} = \frac{25!}{13!\,12!}$$

Latihan (2)

Tentukan koefisien dari $\mathbf{x^{12}.y^{13}}$ dari ekspansi $\mathbf{(2x - 3y)^{25}}$?

Solusi:

Berdasarkan teorema binomial, kita dapat nyatakan:

$$((2x) + (-3y))^{25} = \sum_{j=0}^{25} \binom{25}{j} (2x)^{25-j}(-3y)^{j}$$

Jadi, koefisien dari $\mathbf{x^{12}.y^{13}}$ didapatkan ketika ***j* = 13**, yaitu:

$$\binom{25}{13} 2^{12}(-3)^{13} = -\frac{25!}{13!\,12!} 2^{12} 3^{13}$$

Latihan (3)

Tentukan koefisien dari **x^{18}** dari ekspansi **$(x + (1/x))^{30}$** ?

Solusi:

Berdasarkan teorema binomial, kita dapat nyatakan:

$$((x) + (x^{-1}))^{30} = \sum_{j=0}^{30} \binom{30}{j} (x)^{30-j} (x^{-1})^{j} = \sum_{j=0}^{30} \binom{30}{j} (x)^{30-2j}$$

Jadi, koefisien dari **x^{18}** didapatkan ketika ***j* = 6**, yaitu:

$$\binom{30}{6} = \frac{30!}{6!\,24!}$$

Corrolary

$$2^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}$$ ... Corrolary I

Bukti aljabar

Ganti **x = 1 & y = 1** pada teorema binomial.

Bukti kombinatorial

Kita tahu bahwa himpunan dengan **n elemen** mempunyai **2^n** subset yang berbeda.

Setiap subset ada yang terdiri dari **0 elemen** (ada $\binom{n}{0}$), **1 elemen** (ada $\binom{n}{1}$), **2 elemen** (ada $\binom{n}{2}$), ..., **k elemen** (ada ada $\binom{n}{k}$). Berarti total ada $\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}$ subset.

2 formula dihubungkan dengan operator '=' dan terbuktilah corrolary I

Corrolary

$$0 = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \binom{n}{k}$$ ... Corrolary II

<u>Bukti aljabar untuk corrolary II</u>

Ganti **x = 1 & y = -1** pada teorema binomial

Corrolary II ini mengakibatkan:

$$\binom{n}{0} + \binom{n}{2} + \binom{n}{4} + \cdots = \binom{n}{1} + \binom{n}{3} + \binom{n}{5} + \cdots$$

$$3^n = \sum_{k=0}^{n} (2)^k \binom{n}{k}$$ ... Corrolary III

<u>Bukti aljabar untuk corrolary III</u>

Ganti **x = 1 & y = 2** pada teorema binomial.

Identitas Pascal

$$\binom{n+1}{k} = \binom{n}{k-1} + \binom{n}{k}$$

Bukti kombinatorik

- Misal, himpunan **T** mengandung **(n + 1)** elemen, dan **a** merupakan sebuah elemen di **T**, **a ϵ T**.
- Misal, ada juga sebuah himpunan **S = T – {a}**. Artinya, **S** mengandung **n elemen**.
- Perhatikan bahwa ada $\binom{n+1}{k}$ **himpunan bagian T** yang mengandung **k elemen**.
- **Himpunan bagian T** yang mengandung **k elemen** dibagi menjadi 2 group:
  - Ada elemen **a** dan **(k - 1) elemen** di **S**
  - **Tidak** ada elemen **a** dan **k elemen** di **S**

Identitas Pascal

$$\binom{n+1}{k} = \binom{n}{k-1} + \binom{n}{k}$$

Bukti kombinatorik (lanjutan)

- Karena ada $\binom{n}{k-1}$ himpunan bagian dari **S** yang terdiri dari **(k - 1) elemen**, maka ada $\binom{n}{k-1}$ himpunan bagian dari **T** yang terdiri dari **k elemen** dan mengandung **a**.
- Karena ada $\binom{n}{k}$ himpunan bagian dari **S** yang terdiri dari **k elemen**, maka ada $\binom{n}{k}$ himpunan bagian dari **T** yang terdiri dari **k elemen** dan tidak mengandung **a**.
- Penggabungan menggunakan operator ‘=‘ membuktikan bahwa $\binom{n+1}{k} = \binom{n}{k-1} + \binom{n}{k}$

Segitiga Pascal

- Basisnya adalah **Identitas Pascal**: “Ketika 2 koefisien binomial yang bersebelahan dijumlahkan, hasilnya adalah koefisien binomial yang terletak pada **baris berikutnya & di antara 2 koefisien tersebut**.”

$$\binom{0}{0}$$
$$\binom{1}{0}\ \binom{1}{1}$$
$$\binom{2}{0}\ \binom{2}{1}\ \binom{2}{2}$$
$$\binom{3}{0}\ \binom{3}{1}\ \binom{3}{2}\ \binom{3}{3}$$
$$\binom{4}{0}\ \binom{4}{1}\ \binom{4}{2}\ \binom{4}{3}\ \binom{4}{4}$$
$$\binom{5}{0}\ \binom{5}{1}\ \binom{5}{2}\ \binom{5}{3}\ \binom{5}{4}\ \binom{5}{5}$$
$$\binom{6}{0}\ \binom{6}{1}\ \binom{6}{2}\ \binom{6}{3}\ \binom{6}{4}\ \binom{6}{5}\ \binom{6}{6}$$
$$\binom{7}{0}\ \binom{7}{1}\ \binom{7}{2}\ \binom{7}{3}\ \binom{7}{4}\ \binom{7}{5}\ \binom{7}{6}\ \binom{7}{7}$$
$$\binom{8}{0}\ \binom{8}{1}\ \binom{8}{2}\ \binom{8}{3}\ \binom{8}{4}\ \binom{8}{5}\ \binom{8}{6}\ \binom{8}{7}\ \binom{8}{8}$$

By Pascal's identity:

$$\binom{6}{4} + \binom{6}{5} = \binom{7}{5}$$

$$1$$
$$1 \quad 1$$
$$1 \quad 2 \quad 1$$
$$1 \quad 3 \quad 3 \quad 1$$
$$1 \quad 4 \quad 6 \quad 4 \quad 1$$
$$1 \quad 5 \quad 10 \quad 10 \quad 5 \quad 1$$
$$1 \quad 6 \quad 15 \quad 20 \quad 15 \quad 6 \quad 1$$
$$1 \quad 7 \quad 21 \quad 35 \quad 35 \quad 21 \quad 7 \quad 1$$
$$1 \quad 8 \quad 28 \quad 56 \quad 70 \quad 56 \quad 28 \quad 8 \quad 1$$

Apa yang sudah dipelajari

Koefisien Binomial

Identitas Pascal

Referensi

- Kenneth H. Rosen (2012) “Discrete Mathematics and Its Applications 7th Edition”
- Alfan Farizki Wicaksono (2013) “Slide MD1-13-koefisien-binomial”, Fasilkom UI