Skript Analysis 1 Vorlesung 1

Alle Angaben ohne Gewähr

24. Oktober 2023

---

0 Beispiele

Die Natürlichen Zahlen $\mathbb{N}$ sind alle Zählzahlen $(1, 2, 3, 4, 5, ...)$

$$n \in \mathbb{N} \text{ ist gerade mit } n = 2k$$
$$n \in \mathbb{N} \text{ ist ungerade mit } n = 2k - 1$$

0.1 Behauptung 1

Für $n \in \mathbb{N}$ ist n gerade, folgt aus n^2 gerade

Direkter Beweis:

$$\begin{aligned} n &= 2k \\ \implies n^2 &= 4k^2 \\ &= 2 \cdot \underbrace{(2k^2)}_{\in \mathbb{N}} \\ &\implies n^2 \text{ ist gerade} \end{aligned}$$

0.2 Behauptung 2

aus n^2 gerade folgt n gerade. Diese Aussage zu treffen ist schwierig, da man mit Wurzeln hantieren muss. Was allerdings einfach zu beweisen ist, ist Behauptung 3

0.3 Behauptung 3

Aus n ungerade folgt n^2 ungerade

Beweis durch Kontraposition:
Annahme: $n = 2k - 1$ mit $k \in \mathbb{N}$

$$\begin{aligned} n^2 &= (2k-1)^2 \\ &= 4k^2 - 4k + 1 \\ &= 2(2k^2 - 2k) + 1 \\ &= 2(2k(k-1) + 1 \\ &= 2\underbrace{(2k(k-1)+1)}_{\in \mathbb{N}} - 1 \\ &\implies n^2 \text{ ist ungerade} \end{aligned}$$

Frage: Was hat Beh. 2 mit Beh. 3 zu tun?
p="n ist gerade", q="n^2 ist gerade"
Beh. 2: Aus q folgt p
Beh. 3 Aus nicht p folgt nicht q **(Kontraposition)**

$$A \implies B \Leftrightarrow \neg B \implies \neg A$$

0.4 Beispiel 2

Beweis durch Widerspruch: $\sqrt{2}$ ist irrational

Alternativ Beweis
Annahme: $\sqrt{2} \in \mathbb{Q}$

$$\text{D.h.}\sqrt{2} = \frac{m}{n}\text{mit } m \in \mathbb{Z}, n \in \mathbb{N}$$

$$\text{D.h. } A := \{n \in \mathbb{N} : \exists m \in \mathbb{Z} \text{ mit } \sqrt{2} = \frac{m}{n}\}$$

$\sqrt{2}$ ist rational genau dann, wenn A nicht leer ist.
A ist Teilmenge $\mathbb{N}$
ist A nicht leer, so hat A ein kleinstes Element (**Prinzip des kleinsten Diebes**)
D.h. es existiert $n_* \in A$ mit $n \geq n_*$ deshalb in A $\sqrt{2} = \frac{m}{n_*}$

$$m - n_* = \sqrt{2}n_* - n_* = (\sqrt{2} - 1)n_*$$

Es gilt: $1 < \sqrt{2} < 2 \to 0 < \sqrt{2} - 1 < 1$
Also folgt $m - n_*$ ist eine ganze Zahl
und $m - n_* = (\sqrt{2} - 1)n_* > 0$ also ist $m - n_* \in \mathbb{N} \geq 1$
und $m - n_* = (\sqrt{2} - 1)n_* < n_*$
Also ist

$$\begin{aligned}
\sqrt{2} = \frac{m}{n_*} = \frac{m(m - n_*)}{n_*(m - n_*)} &= \frac{m^2 - mn_*}{n_*(m - n_*)} \\
&= \frac{2n^2 - mn_*}{n_*(m - n_*)} \\
= \frac{n_*(2n_* - m)}{n_*(m - n_*)} = \frac{2n_* - m}{m - n_*} &= \frac{\tilde{m}}{m - n_*}
\end{aligned}$$

wobei $\tilde{m} \in \mathbb{Z}$
D.h. $m - n_* \in A$
Widerspruch zu n_* ist kleinstes Element von A, da $m - n_* < n_*$

0.5 Was ist mit $\sqrt{k}$ mit $k \in \mathbb{N}$

Beweis:
Angenommen $\sqrt{\mathbf{k}} \notin \mathbb{N}$
D.h. $\sqrt{k} = \frac{m}{n}$ mit $m \in \mathbb{Z}, n \in \mathbb{N}$

$$A := \{n \in \mathbb{N} : \exists m \in \sqrt{k} = \frac{m}{n}\}$$

n_x: kleinstes Element von A $\to \sqrt{k} = \frac{m}{n_x}$

Satz 2: Sei $k \in \mathbb{N}$, dann ist $\sqrt{k} \in \mathbb{N}$ oder $\sqrt{k} \in \mathbb{R}$!
Mit was solle man $\sqrt{k} = \frac{m}{n_*}$ erweitern, um wieder einen Widerspruch zu erzeugen?
Für $k \geq 5$ dann ist $\sqrt{k} > 2$
Funktioniert $m - ln_*$ für geeignetes l?