Skript Analysis 1 Vorlesung 2

Alle Angaben ohne Gewähr

26. Oktober 2023

---

0 Fortsetzng

sein $k \in \mathbb{N}$, dann ist $\sqrt{k} \in \mathbb{N}$ oder $\sqrt{k} \in \mathbb{R}$

Beweis durch Widerspruch

$$A := \{n \in \mathbb{N} | \exists m \in \mathbb{Z}, \sqrt{k} = \frac{m}{n}\}$$

1. $\sqrt{k} > 1$, D.h. es gibt ein $l \in mathbbN$ mit $l < \sqrt{k} < l + 1$
2. A het ein kleinstes lement n_*

Man müsste eigentlich beweisen, dass für $\forall M \subseteq \mathbb{N}$ *ein kleinstes Element existiert*

$$\sqrt{k} = \frac{m}{n_*}$$

$$\underbrace{m - ln_*}_{\in \mathbb{Z}} = \sqrt{k}n_* - ln_* = \underbrace{(\sqrt{k} - l)}_{>0} n_* > 0$$

$$(m - ln_*) \in \mathbb{N}$$

$$m - ln_* = \underbrace{(\sqrt{k} - l)}_{>0} n_* < 1n_* = n_*$$

Also gilt:

$$\begin{aligned} \sqrt{k} = \frac{m}{n} &= \frac{m(m - ln_*)}{m - ln_*} \\ &= \frac{m^2 - lmn_*}{n_*(m - ln_*)} \\ &= \frac{kn_*^2 - lmn_*}{n_*(m - ln_*)} \\ &= \frac{\overbrace{kn_* - lm}^{\in \mathbb{Z}}}{\underbrace{m - ln_*}_{\in \mathbb{N}}} \end{aligned}$$

$$\implies m - ln_* \in A \text{ Wiederspruch, da} m - ln_* < n_*$$

$\square$

1 Aussagenlogik

Eine Aussage ist eine Behauptung, welche sprachlich, oder durch eine Formel formuliert ist. Diese kann entweder wahr (w), oder falsch sein. (Prinzip vom ausgeschlossenen dritten)

Hinweis: Ein Beispiel beweist niemals etwas. Ein Gegenbeispiel hingegen, beweist, dass die Aussage falsch ist!

Beispiele:

- Bielefeld existiert (w)
- 2+2=5 (f)
- es gibt unendlich viele Primzahlen (w)

Seien p,q Aussagen:

- Konjunktion $p \wedge q$ (p und q) ünd"
- Disjunktion $p \vee q$ (p oder q) öder"
- Implikation $p \implies q$ (p impliziert q) "wenn...dann"
- Äquivalenz $p \iff q$ (p und q sind äquivalent) "genau dann, wenn..."
- ëntweder oder"$(p \vee q) \wedge (\neg p \vee \neg q)$

Aussagenform H(.)

Wenn wir eine Aussage H(x) für die Variable X haben:
Bspw.:
$H_1(x) := (x^2 - 3x + 2 = 0)$
$H_2(x) := (x = 1 \vee x = 2$
$H_1(x) \iff H_2(x)$

Beweisstruktur

$p \implies q$ mit p: Voraussetzung, q: Behauptung
q ist die notwendige Bedingung für p und p ist die hinreichende Bedingung für q

Beweis: $p \implies r_1 \implies r_2 \implies r_3 \implies r_4 \implies ...r_n \implies q$
$r_1, ...r_n$ sind bereits bekannte wahre Aussagen oder Axiome

Regeln der Aussagenlogik

1. $A \implies A$
2. $(A \implies B) \wedge (B \implies C) \implies (A \implies C)$ Transitivität
3. $(A \wedge B) \wedge C \iff A \wedge B \wedge C$ und $(A \vee B) \vee C \iff A \vee B \vee C$ Assoziativität
4. $A \wedge B \iff B \wedge A$ und $A \vee B \iff B \vee A$ Kommutativität
5. $A \wedge (B \vee C) \iff (A \wedge B) \vee (A \wedge C)$ Distributivität (genauso Andersherum)
6. $(B \implies C) \implies ((A \wedge B) \implies (A \wedge C))$ Monotonie
7. $\neg(A \wedge B) \iff \neg A \vee \neg B$ Morgansche Regeln gilt genauso andersherum
8. $\neg(\neg A) \iff A$ Doppelte Negatiion

2 Mengen

Nach Cantor ist eine Menge M eine Zusammenfassung bestimmter, wohlunterschiedener Objekte unserer Anschauung oder unseres Denkens (welche die Elemente von M genannt werden) zu einem Ganzen.
Diese Objekte heißen Elemente:

$$\begin{aligned} BSP\ \ A := &\{M, A, T, H, E, M, A, T, I, K\} \\ = &\{M, A, H, T, E, A, I, K\} \\ = &\{T, H, E, M, T, A, I, K\} \end{aligned}$$

Man schreibt $x \in A$, wenn A eine Menge ist und x ein Element von A ist.
Ist x kein Element von A, so schriebt man $x \notin A$

ist $H(.)$ eine Aussagem die von einer Variable x abhängt, dann gibt es eine Menge

$$A := \{x | H(x)\}$$

D.h. $x \in A \iff H(x)$ ist wahr

$H(x) := \{x^2 - 3x + 2 = 0\}$
$B := \{x | H(x)\} = \{1, 2\}$

Definitionen

1. 2 Mengen A und B sind gleich, wenn sie die seleben Elemente enthalten
2. die leere Menge ($\emptyset$) ist die eindeutige Menge, welche kein Elemnt enthält
3. Teilmengen: Wenn alle Elemente von A auch Elemente von B sind, dann ist A Teilmenge von B.
   $A \subseteq B$ bzw. $A \supseteq B$ für alle $x \in A$ folgt $x \in B$
   Bemerkung: $A = B \iff A \subseteq B \wedge B \subseteq A$
4. Ist $A \subseteq B$ und$A \neq B$, dann nennt man A echte Teilmenge von B

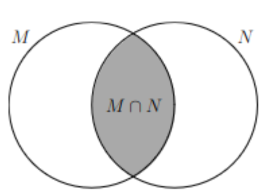
$$A \subsetneq B$$

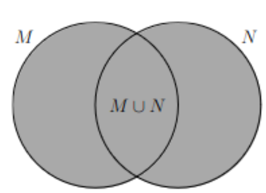
5. Zwei Mengen sind disjunkt, falls $x \in A \wedge x \notin B$

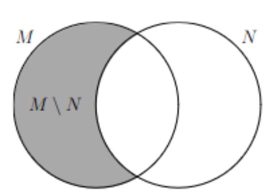
2.1 Operationen mit Mengen

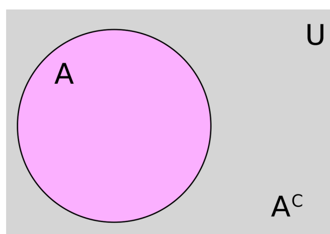
Seien A, B Mengen

- Durchschnitt $A \cap B := \{x | (x \in A) \wedge (x \in B)\}$
- Vereinigung $A \cup B := \{x | (x \in A) \vee (x \in B)\}$
- Differenz/Komplement $A \setminus B := \{(x \in A) \wedge (x \notin B)\}$
  Ist $A \subseteq M : A^C = A^C_M = M \setminus A$








U
A
A^C