

Zbierka úloh z Logiky pre informatikov

Martin HOMOLA, Ján KEUKA, Júlia PUKANCOVÁ, Jozef ŠIŠKA

Letný semester 2017/18

Posledná aktualizácia: 20. februára 2018

1 Úvod do logiky

Úloha 1.0.1. Stav sveta, v ktorom sú pravdivé všetky tvrdenia teórie, je jej

- | | | |
|------------------|----------------------|-------------------|
| a) formalizácia, | c) model, | e) redukcia, |
| b) dôkaz, | d) logický dôsledok, | f) interpretácia. |

Úloha 1.0.2. Tvrdenie, ktoré je pravdivé vo všetkých stavoch sveta, v ktorých je pravdivá teória, je jej

- | | | |
|------------------------|-----------------|-------------------|
| a) premisou, | c) záverom, | e) kontradikciou, |
| b) logickým dôsledkom, | d) implikáciou, | f) tautológiou. |

Úloha 1.0.3. Usudzovacie pravidlo je vzorom

- | | | |
|-------------|----------------|--------------|
| a) premís, | c) záverov, | e) dôkazov, |
| b) úsudkov, | d) tautológií, | f) dedukcií. |

Úloha 1.0.4. Usudzovacie pravidlá, ktoré z pravdivých premís vždy odvodlia pravdivé závery, nazývame

- | | | |
|----------------|------------------|--------------|
| a) induktívne, | c) deduktívne, | e) korektné, |
| b) konkrétne, | d) tautologické, | f) úplné. |

Úloha 1.0.5. Usudzovanie, pri ktorom používame iba také pravidlá, ktoré z pravdivých premís vždy odvodlia pravdivé závery, sa nazýva:

- | | | |
|-------------------|------------------|----------------|
| a) interpretácia, | c) formalizácia, | e) dedukcia, |
| b) abdukcia, | d) indukcia, | f) inferencia. |

Úloha 1.0.6. Usudzovanie, pri ktorom odvodzujeme možné príčiny z ich následkov, sa nazýva:

- | | |
|--------------|--------------|
| a) dedukcia, | c) abdukcia, |
| b) analógia, | d) indukcia. |

2 Výroková logika

2.1 Syntax výrokovkej logiky

Úloha 2.1.1. Rozhodnite, či nasledovné reťazce sú výrokovými formulami nad množinou výrokových premenných $\mathcal{V} = \{p_1, p_2, \dots, p_n, \dots\}$ a svoje rozhodnutie neformálne zdôvodnite:

- | | |
|----------------------------------|---|
| a) $p_1 \rightarrow p_2$ | f) $(p_1 \wedge (u_2 \rightarrow p_3))$ |
| b) $(p_1) \wedge (p_2)$ | g) $((p_1 \wedge (p_2 \rightarrow p_3)) \vee p_1)$ |
| c) $(p_1 \vee (\neg p_2))$ | h) $((p_1 \rightarrow p_2) \leftrightarrow (p_2 \wedge p_1))$ |
| d) $(p_1 \vee (p_1 \wedge p_2))$ | i) $((p_1 \vee p_2) \rightarrow (p_2 \wedge p_1))$ |
| e) $(p_1 \wedge p_2 \wedge p_3)$ | j) $((p_1 \rightarrow p_2) \leftrightarrow (u_2 \wedge p_1))$ |

Riešenie. a) Postupnosť symbolov $p_1 \rightarrow p_2$ nie je formula nad \mathcal{V} , pretože to nie je ani výroková premenná z \mathcal{V} , ani nie je v tvare $\neg A$ pre nejakú formulu A (lebo nezačína symbolom „ \neg “), ani nie je v jednom z tvarov $(A \wedge B)$, $(A \vee B)$, $(A \rightarrow B)$ pre nejaké formuly A a B (lebo nezačína symbolom „ $($ “).

d) Postupnosť symbolov $(p_1 \vee (p_1 \wedge p_2))$ je formula nad \mathcal{V} . Dokazuje to jej vytvárajúca postupnosť: $p_1, p_2, (p_1 \wedge p_2), (p_1 \vee (p_1 \wedge p_2))$. □

Úloha 2.1.2. Rozhodnite, či nasledovné postupnosti symbolov sú formulami nad nejakou množinou výrokových premenných \mathcal{V} . V prípade kladnej odpovede určte množinu \mathcal{V} a nájdite vytvárajúcu postupnosť. Zápornú odpoveď stručne zdôvodnite.

- | | |
|---|---|
| a) $(a \wedge \neg a)$ | f) $(\forall x \vee \neg \exists y)$ |
| b) $(tweety_is_penguin \rightarrow \neg tweety_flies)$ | g) $(\neg(\neg wow))$ |
| c) $(happy(jack) \wedge loves(marry, jack))$ | h) $(\neg \neg a \neg \rightarrow \neg \neg(b \vee c))$ |
| d) $\neg \neg \neg koľko_je_hodín?$ | i) $\forall x ((student(x) \wedge \neg studies(x)) \rightarrow fails_exam(x))$ |
| e) $\neg \neg \neg p \rightarrow \neg \neg q$ | j) $(edo = vrátnik \vee edo = otec(ivana))$ |

Riešenie. b) Postupnosť symbolov $(tweety_is_penguin \rightarrow \neg tweety_flies)$ je formulou nad každou množinou \mathcal{V} , ktorá obsahuje výrokové premenné $tweety_is_penguin$, $tweety_flies$. Jej vytvárajúcou postupnosťou je: $tweety_is_penguin$, $tweety_flies$, $\neg tweety_flies$, $(tweety_is_penguin \rightarrow \neg tweety_flies)$.

c) Postupnosť symbolov ($happy(jack) \wedge loves(marry, jack)$) nie je formulou. Má tvar $(A \wedge B)$, kde A je postupnosť symbolov $happy(jack)$ a B je $loves(marry, jack)$. Avšak A nie je formula: Nezačína symbolom „ \neg “, takže nie je negáciou podľa bodu (ii) definície 2.6. Nezačína ani symbolom „(\wedge “, takže nie je ani formulou podľa bodu (iii). Musí teda byť výrokovou premennou. Ale výrokové premenné podľa definície 2.3 nemôžu obsahovať symboly zátvoriek ani logických spojok. \dashv

Úloha 2.1.3. Napíšte po dve rôzne vytvárajúce postupnosti pre formuly:

- $\neg(q \wedge p)$
- $(\neg p \rightarrow q)$
- $((p \wedge q) \vee p) \rightarrow ((p \wedge q) \vee \neg p)$
- $((p \wedge p) \wedge (p \wedge q)) \wedge ((p \wedge p) \wedge (p \wedge p))$

Riešenie. a) Dvoma rôznymi vytvárajúcimi postupnosťami pre formulu $\neg(q \wedge p)$ sú napríklad:

- $p, q, (q \wedge p), \neg(q \wedge p);$
- $q, p, \neg q, \neg p, (q \wedge p), (q \vee p), \neg(q \wedge p).$

\dashv

Úloha 2.1.4. Cieľom tejto úlohy je precvičiť si písanie indukčných definícií, ktoré sme na prednáške použili na zadefinovanie výrokových formúl.

- Zadefinujte výrokové formuly s binárnou *Shefferovou spojkou* (NAND, symbol \uparrow) nad množinou výrokových premenných \mathcal{V} . Vo formulách sa nebudú vyskytovať žiadne ďalšie spojky (ani negácia).

Napríklad postupnosti symbolov

$$\top \quad kim \quad (kim \uparrow sarah) \quad ((jim \uparrow (kim \uparrow jim)) \uparrow (sarah \uparrow sarah))$$

by podľa vašej definície mali byť formulami nad množinou výrokových premenných $\mathcal{V} = \{jim, kim, sarah\}$.

- Zadefinujte aritmetické výrazy s operátormi súčtu, súčinu a opačného čísla („unárne mínus“) nad množinou premenných \mathcal{V} .

Napríklad postupnosti symbolov

$$x \quad -z \quad (x + x) \quad (x \times -y) \quad -(x \times -(-(z \times y) + -(x + y)))$$

by podľa vašej definície mali byť aritmetickými výrazmi nad množinou premenných $\mathcal{V} = \{x, y, z\}$.

- Zadefinujte aritmetické výrazy s operátormi *rozdielu*, súčinu a opačného čísla („unárne mínus“) nad množinou premenných \mathcal{V} . Zamyslite sa nad tým, či vaša definícia umožňuje výrazy jednoznačne rozložiť nad podvýrazy.

- d) Zadefinujte výrokové formuly nad množinou výrokových premenných \mathcal{V} s ternárnou spojkou $(\dots ? \dots : \dots)$ (*ak-tak-inak*) a dvoma nulárnymi spojkami (výrokovými konštantami) \top a \perp . Iné spojky sa v týchto formulách nemajú vyskytovať.

Príklady formúl nad množinou výrokových premenných $\mathcal{V} = \{jim, kim, sarah, mokro, slnečno, polievacie_auto, prší\}$:

$$\perp \quad prší \quad (kim ? jim : sarah) \quad (mokro ? (slnečno ? polievacie_auto : prší) : \top)$$

Riešenie. a)

Definícia. Symbolmi jazyka výrokovej logiky so Shefferovou spojkou sú:

- výrokové premenné z nejakej spočítateľnej množiny \mathcal{V} , ktorej prvkami nie sú symboly \uparrow , $($ a $)$, ani jej prvky tieto symboly neobsahujú;
- logický symbol: \uparrow (Shefferova spojka);
- pomocné symboly: $($ a $)$.

Spojka \uparrow je binárna.

Definícia. Množina \mathcal{E} výrokových formúl so Shefferovou spojkou nad množinou výrokových premenných \mathcal{V} je najmenšia množina postupností symbolov, pre ktorú platí:

- Každá výroková premenná $p \in \mathcal{V}$ je formulou z \mathcal{E} .
- Ak A a B sú formulami z \mathcal{E} , tak aj postupnosť $(A \uparrow B)$ je formulou z \mathcal{E} . □

Úloha 2.1.5. Zakreslite vytvárajúce stromy pre formuly z úlohy 2.1.3.

Úloha 2.1.6. Určte stupeň formúl z úlohy 2.1.3.

Úloha 2.1.7. Zadefinujte výrokové formuly so spojkami \neg a \rightarrow tak, aby pre ne *neplatila* veta o jednoznačnosti rozkladu. Nájdite príslušný kontrapríklad.

Úloha 2.1.8. Vypíšte všetky a) priame podformuly a b) podformuly pre formuly z úlohy 2.1.3.

Úloha 2.1.9. Zadefinujte:

- $\text{vars}(A)$ – množinu všetkých výrokových premenných formuly A ;
- $\text{sub}(A)$ – množinu všetkých podformúl formuly A ;
- $\text{vcount}(A, p)$ – počet výskytov výrokovvej premennej p vo formule A ;
- $\text{ccount}(A)$ – počet logických spojok vo formule A ;
- $\text{pcount}(A)$ – počet výskytov zátvoriek vo formule A .

Úloha 2.1.10. Vybudujte teóriu syntaxe výrokovej logiky pre nasledujúce kombinácie spojok:

- a) jediná binárna spojka \uparrow (*Shefferova spojka*, NAND);
- b) jediná binárna spojka \downarrow (*Peircova spojka*, NOR);
- c) unárna spojka \neg a binárna spojka \leftrightarrow („a nie“);
- d) binárne spojky \leftrightarrow („a nie“) a \rightarrow .

Teória syntaxe pre každú z týchto kombinácií pozostáva z definícií pojmov

- (i) *symbols* jazyka výrokovej logiky,
- (ii) *výroková formula* nad množinou výrokových premenných,
- (iii) *vytvárajúca postupnosť* a *vytvárajúca postupnosť pre formulu*,
- (iv) *vytvárajúci strom* pre formulu.

Formuly majú obsahovať iba spojky z príslušnej kombinácie.

Riešenie. a) Definície (i) a (ii) sme už uviedli v riešení úlohy 2.1.4 a). Pokračujeme teda bodmi (iii) a (iv):

Definícia. *Vytvárajúcou postupnosťou* je ľubovoľná konečná postupnosť postupností symbolov, ktorej každý člen je výroková premenná z \mathcal{V} , alebo má tvar $(A \uparrow B)$, pričom A a B sú nejaké predchádzajúce členy tejto postupnosti.

Vytvárajúcou postupnosťou pre X je ľubovoľná vytvárajúca postupnosť, ktorej posledným prvkom je X .

Definícia. *Vytvárajúcim stromom* pre formulu X je binárny strom T obsahujúci v každom vrchole formulu, pričom platí:

- v koreni T je formula X ;
- ak vrchol obsahuje formulu $(A \uparrow B)$, tak má dve deti, pričom ľavé dieťa obsahuje formulu A a pravé formulu B ;
- vrcholy obsahujúce výrokové premenné sú listami.

□

Úloha 2.1.11. Dokážte alebo vyvráťte nájdením kontrapríkladu nasledujúce tvrdenia:

- a) počet výskytov pravých zátvoriek v A plus počet negácií v A je menší alebo rovný stupňu A ;
- b) ak A je podformulou B , tak sa nachádza v každej vytvárajúcej postupnosti pre B ;
- c) ak sa A nachádza vo vytvárajúcej postupnosti pre B , tak A je podformulou B ;
- d) ak sa A nachádza pred B vo vytvárajúcej postupnosti pre formulu X , tak A je podformulou B ;
- e) všetky vytvárajúce postupnosti pre formulu A majú rovnakú dĺžku;
- f) ak T je vytvárajúci strom pre A a P je vytvárajúca postupnosť pre A , potom počet vrcholov T je rovnaký ako dĺžka P ;

- g) dĺžka vytvárajúcej postupnosti pre A je rovná stupňu A ;
- h) počet vrcholov vytvárajúceho stromu pre A je rovný stupňu A .
- i) počet vnútorných vrcholov vytvárajúceho stromu pre A je rovný stupňu A .

2.2 Formalizácia vo výrokovej logike

Úloha 2.2.1. Sformalizujte nasledujúce tvrdenia (podľa Smullyana [2]) pomocou výrokovej logiky.

V prípade lúpeže v klenotníctve predviedli na políciu troch podozrivých Adamová, Bakalára a Droзда. Počas vyšetrovania sa zistilo:

- a) Drozd je vinný, ak je Adamová vinná a Bakalár nevinný.
- b) Drozd nikdy nepracuje sám.
- c) Adamová nikdy nepracuje s Drozdom.
- d) Do prípadu nie je zapletený nikto okrem Adamovej, Bakalára a Droзда a aspoň jeden z nich je vinný.

Riešenie. Majme množinu výrokových premenných $\mathcal{V} = \{a, b, d\}$, kde význam jednotlivých premenných je nasledujúci: a – Adamová je vinná, b – Bakalár je vinný, d – Drozd je vinný. Zistenia z vyšetrovania potom sformalizujeme nasledovne:

- a) $((a \wedge \neg b) \rightarrow d)$
- b) $(d \rightarrow (a \vee b))$
- c) $(a \rightarrow \neg d)$
- d) $(a \vee (b \vee d))$ \models

Úloha 2.2.2. Sformalizujte nasledujúce vety (podľa Ghidini a Serafiniho [1]) v jazyku výrokovej logiky. Zvoľte vhodnú spoločnú množinu výrokových premenných \mathcal{V} a popíšte význam použitých premenných.

- a) Aldo nie je Talian.
- b) Aldo je Talian, ale Bob je Angličan.
- c) Ak Aldo nie je Angličan, potom ani Bob nie je Angličan.
- d) Aldo je Talian, alebo ak Aldo nie je Talian, tak Bob je Angličan.
- e) Buď je Aldo Talian a Bob je Angličan, alebo ani Aldo nie je Talian, ani Bob nie je Angličan.

Úloha 2.2.3. Sformalizujte nasledujúce vety vo výrokovej logike nad vhodnou spoločnou množinou výrokových premenných \mathcal{V} a popíšte význam použitých premenných:

- a) Hanka príde na párty, ak Dávid nepríde, ale ak Dávid príde, potom Fero nepríde.
- b) Môžeme si byť istí, že ak Eva príde na párty, tak ak Fero a Hanka neprídu, potom príde Dávid.
- c) Ak ani Eva ani Fero neprídu na párty, potom Dávid príde, iba ak príde Hanka.

Úloha 2.2.4. Sformalizujte nasledujúci logický problém (podľa Voronkova [3]) v jazyku výrokovej logiky:

Máme tri osoby, ktoré sa volajú Stirlitz, Müller a Eismann. Vieme, že práve jeden z nich je Rus, kým ostatní dvaja sú Nemci. Navyše každý Rus musí byť špión.

Keď Stirlitz stretne Müllera na chodbe, zavtipkuje: „Vieš, Müller, ty si taký Nemec, ako som ja Rus.“ Je všeobecne známe, že Stirlitz vždy hovorí pravdu, keď vtípuje.

Máme rozhodnúť, že Eismann nie je ruský špión.

Zvoľte takú množinu výrokových premenných, aby ste tvrdenia sformalizovali verne, nezjednodušujte príliš (napríklad byť Rusom a byť špiónom nie je to isté). Popíšte význam použitých premenných.

Zároveň ale dajte pozor, aby formalizácia nepripúšťala nejaké nečakané možnosti (napríklad „Eismann nie je Rus ani Nemec“ či „Stirlitz je zároveň Rus aj Nemec“).

Úloha 2.2.5. Uvažujme nasledovné tvrdenia o problémoch so štartovaním auta. Navrhnite vhodné výrokové premenné a popíšte ich význam. Následne sformalizujte tvrdenia vo výrokovej logike:

- Ak je batéria pokazená alebo ak je vybitá, je to príčinou toho, že nepočujeme zvuk štartéra.
- To, že počujeme zvuk štartéra, ale auto nenašartuje, môže byť (okrem iného) zapríčinené tým, že batéria je takmer vybitá, alebo tým, že je nádrž prázdna.
- Ak sa minulo palivo alebo ak je nádrž deravá, tak je nádrž prázdna.
- Auto nenašartuje vtedy, keď je nádrž prázdna alebo keď je batéria takmer vybitá.
- Rovnako platí, že ak sme nepočuli zvuk štartéra, auto nemôže naštartovať.

Úloha 2.2.6. V pobočke banky zmizli peniaze zo sejfu. Vo výrokovej logike sformalizujte zistené fakty týkajúce sa viny alebo nevinu podozrivých:

- V čase krádeže bola pobočka zavretá a prístup do nej mali len traja zamestnanci – Atem, Bersičová a Citrák.
- Ak Atem má alibi, tak má aj Bersičová alibi.
- Atem nemá kľúč od sejfu, takže sa doň dostal, len ak mu pomohol niekto z dvojice Bersičová a Citrák.
- Atem bol v čase lúpeže na obede.

Literatúra

- [1] Chiara Ghidini and Luciano Serafini. *Mathematical Logic Exercises*. University of Trento, 2014. <http://disi.unitn.it/~ldkr/ml2014/ExercisesBooklet.pdf>.
- [2] Raymond M. Smullyan. *What Is the Name of This Book?—The Riddle of Dracula and Other Logical Puzzles*. Prentice-Hall, 1978.
- [3] Andrei Voronkov. Logic and modeling 2014. [online]. <http://www.voronkov.com/lics.cgi>.