

Prednášky z Matematiky (4) – Logiky pre informatikov

Ján Kľuka, Jozef Šiška

Letný semester 2017/2018

Obsah

I. O logike a tomto kurze	
Syntax výrokovej logiky	2
1. Úvod	2
1.1. O logike	2
1.2. O kurze	8
2. Výroková logika	9
2.1. Opakovanie: Výroková logika v prirodzenom jazyku	9
2.2. Syntax	11

I. prednáška

O logike a tomto kurze Syntax výrokovkej logiky

19. februára 2018

1. Úvod

1.1. O logike

I.1 Čo je logika

- Logika je vedná disciplína, ktorá študuje formy usudzovania
 - filozofická, matematická, informatická, výpočtová

- Tri dôležité predmety záujmu:

Jazyk zápis pozorovaní, definície pojmov, formulovanie teórií

Syntax pravidlá zápisu tvrdení

Sémantika význam tvrdení

Usudzovanie (inferencia) odvodenie nových dôsledkov z doterajších poznatkov

Dôkaz presvedčenie ostatných o správnosti záverov usudzovania

I.2 Poznatky a teórie

- V logike slúži **jazyk** na zápis tvrdení, ktoré vyjadrujú informácie — poznatky o svete
- Súbor poznatkov, ktoré považujeme za pravdivé, tvorí **teóriu**

Príklad 1.1 (Party time!). Máme troch nových známych — Kim, Jima a Sarah. Organizujeme párty a chceme na ňu pozvať niektorých z nich.

Od spoločných kamarátov sme sa ale dozvedeli o ich požiadavkách:

- P1 Sarah nepôjde na párty, ak pôjde Kim.
- P2 Jim pôjde na párty, len ak pôjde Kim.
- P3 Sarah nepôjde bez Jima.

I.3 Možné svety a logické dôsledky

- Tvrdenie rozdeľuje množinu **možných stavov sveta** na tie stavy, v ktorých je pravdivé (**modely**), a tie stavy, v ktorých je nepravdivé

- Teória môže mať viacero modelov (ale aj žiaden)

Príklad 1.2. Vymenujme možné stavy prítomnosti Kim, Jima a Sarah na párty a zistíme, v ktorých sú pravdivé jednotlivé tvrdenia našej teórie a celá teória.

- **Logickými dôsledkami** teórie sú tvrdenia, ktoré sú pravdivé vo *všetkých* modeloch teórie (svetoch, v ktorých je pravdivá)

Príklad 1.3. Logickým dôsledkom teórie (P1), (P2), (P3) je napríklad: Sarah nepôjde na párty.

I.4 Logické usudzovanie

- Vymenovanie všetkých svetov je často nepraktické až nemožné
- Logické dôsledky môžeme *odvodzovať* **usudzovaním** (*inferovať*)
- Pri odvodení vychádzame z **premís** (*predpokladov*) a postupnosťou **úsudkov** dospievame k **záverom**

Príklad 1.4. Vieme, že ak na párty pôjde Kim, tak nepôjde Sarah (P1), a že ak pôjde Jim, tak pôjde Kim (P2).

Predpokladajme, že na párty pôjde Jim.

Potom podľa (P2) pôjde aj Kim.

Potom podľa (P1) nepôjde Sarah.

Teda: Ak na párty pôjde Jim, nepôjde Sarah.

- Ak sú všetky úsudky v odvodení správne, záver je logickým dôsledkom premís a odvodenie je jeho **dôkazom** z premís

- Už Aristoteles zistil, že správne úsudky sa dajú rozpoznať podľa ich *formy*, bez ohľadu na obsah

Ak pôjde Jim, tak pôjde Kim.

Ak je diltium dekryštalizované,
tak antihmota neprúdi.

Pôjde Jim.

Diltium je dekryštalizované.

Pôjde Kim.

Antihmota neprúdi.

- Usudzovacie (inferenčné) pravidlo** je *vzor* úsudkov daný formou tvrdení, s ktorými pracuje

Ak A, tak B. <u>A.</u> B.	}	vzory premís vzor záveru
---------------------------------	---	---------------------------------

- Korektné** pravidlo odvodí z pravdivých premís pravdivý záver
- Dôkaz** je teda **postupnosť použitia korektných usudzovacích pravidiel** (najlepšie *samozrejmych* pre čitateľa dôkazu)
- Dedukcia** — usudzovanie iba pomocou korektných pravidiel

Niektoré **nie korektné** usudzovacie pravidlá sú prakticky užitočné:

Indukcia — zovšeobecnenie:

Videl som tisíc havranov.

Žiaden nebol inej farby ako čiernej.

Platí aj pre červené Fabie?

Všetky havrany sú čierne.

Abdukcia — odvodzovanie možných príčin z následkov:

Ak je batéria vybitá, auto nenašartuje.

Ak je nádrž prázdna, auto nenašartuje.

Nádrž nie je prázdna.

Auto nenašartovalo.

Čo ak nám kuna
prehrýzla káble?

Batéria je vybitá.

Usudzovanie na základe analógie (podobnosti)

Venuša má atmosféru, podobne ako Zem.

Na Zemi sa prejavuje skleníkový efekt.

Na Venuši sa prejavuje skleníkový efekt.

A čo: Atmosféra

Zeme je dýchatelná?

I.7 Nededuktívne pravidlá

- **Závery nededuktívnych pravidiel** treba považovať za **hypotézy** — plauzibilné, ale **neoverené** tvrdenia
- Hypotézy je **nutné preverovať!**
- Niektoré špeciálne prípady sú správne, napríklad *matematická indukcia*
- Usudzovanie s nededuktívnymi pravidlami je teda *hypotetické*
- Hypotetické usudzovanie je dôležité pre umelú inteligenciu
 - Reprezentácia znalostí a inferencia (magisterský predmet)
- **V tomto kurze sa budeme zaoberať iba dedukciou**

I.8 Formálny jazyk

- **Prirodzený jazyk** je problematický — tvrdenia môžu byť viacznačné, ťažko zrozumiteľné, používať obraty a ustálené výrazy so špeciálnym významom
 - Mišo je myš.
 - Videl som dievča v sále s *ďalekohľadom*.
 - Vlastníci bytov a nebytových priestorov v dome prijímajú rozhodnutia na schôdzi vlastníkov dvojtrietinovou väčšinou hlasov všetkých vlastníkov bytov a nebytových priestorov v dome, ak hlasujú o zmluve o úvere a o každom dodatku k nej, o zmluve o zabezpečení úveru a o každom dodatku k nej, o zmluve o nájme a kúpe vecí, ktorú vlastníci bytov a nebytových priestorov v dome užívajú s právom jej kúpy po uplynutí dojednaného času užívania a o každom dodatku k nej, o zmluve o vstavbe alebo nadstavbe a o každom dodatku k nim, o zmene účelu užívania spoločných častí domu a spoločných zariadení domu a o zmene formy výkonu správy; ak sa rozhoduje o nadstavbe alebo o vstavbe v podkroví alebo povale, vyžaduje sa zároveň súhlas všetkých vlastníkov bytov a nebytových priestorov v dome na najvyššom poschodí. — Zákon č. 182/1993 Z. z. SR v znení neskorších predpisov

- Nikto nie je dokonalý.
- Tieto ťažkosti sa obchádzajú použitím **formálneho** jazyka
 - Presne definovaná, zjednodušená syntax (pravidlá zápisu tvrdení) a sémantika (význam) — podobne ako programovací jazyk
- Problémy z reálneho sveta opísané v prirodzenom jazyku musíme najprv **formalizovať**, a potom naň môžeme použiť logický aparát

I.9 Formalizácia poznatkov

- S formalizáciou ste sa už stretli pri riešení slovných úloh

Karol je trikrát starší ako Mária.
 Súčet Karolovho a Máriinho veku je 12 rokov. \rightsquigarrow $k = 3 \cdot m$
 Koľko rokov majú Karol a Mária? $k + m = 12$

- Stretli ste sa už aj s formálnym jazykom výrokovej logiky

Príklad 1.5. Sformalizujme náš pártý príklad:

- P0 Nieкто z trojice Kim, Jim, Sarah pôjde na párty.
 P1 Sarah nepôjde na párty, ak pôjde Kim.
 P2 Jim pôjde na párty, len ak pôjde Kim.
 P3 Sarah nepôjde bez Jima.

I.10 Kalkuly — formalizácia usudzovania

- Pre mnohé logiky sú známe **kalkuly** — množiny usudzovacích pravidiel, ktoré sú **korektné** — odvodzujú iba logické dôsledky **úplné** — umožňujú odvodiť všetky logické dôsledky
- Kalkuly existujú aj v iných častiach matematiky
 - na počítanie s číslami, zlomkami (aritmetický kalkul),

- riešenie lineárnych rovníc (kalkul lineárnej algebry),
- derivovanie, integrovanie, riešenie diferenciálnych rovníc (kalkul matematickej analýzy)

...

Nie vždy sú úplné

I.11 Výpočtová logika — automatizácia usudzovania

- Základná idea **výpočtovej logiky**:
 - Napíšeme program,
ktorý systematicky aplikuje pravidlá logického kalkulu,
kým neodvodí želaný dôsledok,
alebo nevyčerpá všetky možnosti (nie vždy je ich konečne veľa!)
- Skutočnosť je komplikovanejšia, ale existuje množstvo automatických usudzovacích systémov
- *Jeden z prienikov informatiky a logiky*

I.12 Výpočtová logika — aplikácie

- Overovanie, dopĺňanie, hľadanie dôkazov matematických viet
- Špecifikácia a verifikácia hardvérových obvodov, programov, komunikačných protokolov
 - Špecifikácia a verifikácia programov (3. ročník)
 - Formálne metódy tvorby softvéru (magisterský)
- Logické programovanie
 - Programovacie paradigmy (3. ročník)
 - Výpočtová logika (magisterský)
 - Logické programovanie ASP (magisterský)
- Databázy — pohľady, integritné obmedzenia, optimalizácia dopytov

- Deduktívne databázy (3. ročník)
- Sémantický web a integrácia dát z rôznych zdrojov
 - Reprezentácia znalostí a inferencia (magisterský)
 - Ontológie a znalostné inžinierstvo (magisterský)
- Analýza zákonov, regulácií, zmlúv

I.13

Spomeňte si I.1

Tvrdenie, ktoré je pravdivé vo všetkých svetoch, v ktorých je pravdivá teória, je jej

- | | |
|-----------------------|----------------|
| A premisou, | C záverom, |
| B logickým dôsledkom, | D implikáciou. |

Spomeňte si I.2

Účelom dôkazu je presvedčiť ostatných o správnosti nášho úsudku. Preto musí pozostávať z

Spomeňte si I.3

Usudzovanie, pri ktorom používame iba také pravidlá, ktoré z pravdivých premís vždy odvodí pravdivé závery, sa nazýva:

- | | | |
|------------------|-----------------|---------------|
| A abdukcia, | C formalizácia, | E indukcia, |
| B interpretácia, | D dedukcia, | F inferencia. |

1.2. O tomto kurze

I.14 Čím sa budeme zaoberať v tomto kurze

- Teoreticky**
- Jazykmi výrokovej a predikátovej logiky, ich syntaxou a sémantikou
 - Korektnosťou usudzovacích pravidiel

- Korektnosťou a úplnosťou logických kalkulo
- Automatizovateľnými kalkulmi

- Prakticky**
- Vyjadrovaním problémov v jazyku logiky
 - Automatizovaním riešenia problémov použitím SAT-solverov
 - Manipuláciou symbolických stromových štruktúr (výrazov – formúl a termov)
 - Programovaním vlastných jednoduchých automatických dokazovačov
- Filozoficky**
- Zamýšľanými a nezamýšľanými okolnosťami platnosti tvrdení
 - Obmedzeniami vyjadrovania a usudzovania

I.15 Organizácia kurzu — rozvrh, kontakty, pravidlá

https://dai.fmph.uniba.sk/w/Course:Mathematics_4

2. Výroková logika

2.1. Opakovanie: Výroková logika v prirodzenom jazyku

I.16 Opakovanie: Výroková logika v prirodzenom jazyku

Výrok – veta, o pravdivosti ktorej má zmysel uvažovať (zväčša oznamovacia).

Príklady 2.1.

- Miro je v posluchárni F1.
- Slnčná sústava má deviatu planétu.
- Mama upiekla koláč, ale Editka dostala z matematiky štvorku.
- Nieкто zhasol.

Negatívne príklady

- Toto je čudné.
- Píšte všetci modrým perom!

- Prečo je obloha modrá?

Výrokom priradujeme *pravdivostné hodnoty*

I.17 Opakovanie: Výroková logika v prirodzenom jazyku

Operácie s výrokmi – *logické spojky*

- Vytvárajú nové výroky, zložené (súvetia).
- Majú povahu *funkcií* na pravdivostných hodnotách spájaných výrokov (*boolovských funkcií*), teda pravdivostná hodnota zloženého výroku závisí *iba* od pravdivostných hodnôt podvýrokov.

Príklad 2.2. Negácia, konjunkcia, disjunkcia, implikácia, ekvivalencia, ...

Negatívny príklad

Spojku „pretože“ nepovažujeme za *logickú* spojku.

Pravdivostná hodnota výroku „Emka ochorela, pretože zjedla babôčku“ sa nedá určiť funkciou na pravdivostných hodnotách spájaných výrokov.

I.18 (Meta) matematika výrokovej logiky

- Stredoškolský prístup príliš **neoddeľuje** samotný *jazyk* výrokovej logiky od jeho *významu* a vlastne ani jednu stránku *nedefinuje jasne*
- V tomto kurze sa budeme snažiť byť **presní**
 - ▶ *Zdanlivo* budeme o jednoduchých veciach hovoriť zložito
- Pojmy z výrokovej logiky budeme **definovať matematicky**
 - ▶ ako množiny, postupnosti, funkcie, atď. ← Matematika (1), (3)
- Na praktických cvičeniach veľa pojmov **zadefinujete programátorsky**
 - ▶ ako reťazce, slovníky, triedy a ich metódy ← Programovanie (1), (2)
- Budeme sa pokúšať **dokazovať** ich vlastnosti

- Budeme teda hovoriť o *formálnej logike* pomocou matematiky, ktorá je ale sama postavená na *logike v prirodzenom jazyku*
- Matematickej logike sa preto hovorí aj *meta* matematika, matematika o logike (a v konečnom dôsledku aj o matematike)

2.2. Syntax výrokovej logiky

I.19 Syntax výrokovej logiky

- Syntax sú pravidlá budovania viet v jazyku
- Pri formálnych jazykoch sú popísané matematicky
- Nedajte sa tým odradiť, nie je to oveľa iné ako programovanie
- Viac sa budete formálnymi jazykmi zaoberať na Úvode do teoretickej informatiky
- Naše definície vychádzajú prevažne z kníh [Smullyan, 1979] a [Švejdar, 2002]

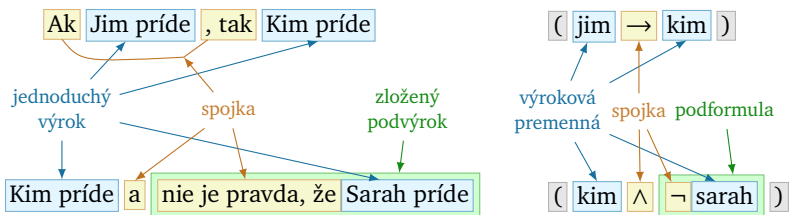
I.20 Syntax výrokovej logiky

Aké tvrdenia chceme zapisovať vo výrokovej logike?

- Jednoduché výroky, ktorých štruktúra nás nebude zaujímať
 - ▶ „Miro sa nachádza v F1“, „Kim príde“

Ich formálnu verziu nazveme **výrokové premenné**

- Zložené výroky, tvorené podvýrokmi a spojkou:



Ich formálnu verziu nazveme **formuly**

- Čo sú *základné* stavebné kamene týchto výrokov?
 - jednoduché výroky a spojky

Tieto základné prvky nazveme **symbols**

I.21 Symbols jazyka výrokovej logiky

Definícia 2.3. *Symbolmi jazyka výrokovej logiky sú:*

- *výrokové premenné* z nejakej spočítateľnej množiny $\mathcal{V} = \{p_1, p_2, \dots, p_n, \dots\}$, ktorej prvkami nie sú symbols $\neg, \wedge, \vee, \rightarrow, (,)$, ani jej prvky tieto symbols neobsahujú;
- *logické symbols (logické spojky)*: $\neg, \wedge, \vee, \rightarrow$
(nazývané, v uvedenom poradí, *symbol negácie, symbol konjunkcie, symbol disjunkcie, symbol implikácie* a čítané „nie“, „a“, „alebo“, „ak ..., tak ...“);
- *pomocné symbols*: $(,)$ (ľavá zátvorka a pravá zátvorka).

Spojka \neg je *unárna* (má jeden argument).

Spojky $\wedge, \vee, \rightarrow$ sú *binárne* (majú dva argumenty).

Poznámka 2.4. Definícia je **záväzná** dohoda o význame pojmov.

I.22 Symbols, výrokové premenné

Symbol je základný pojem, ktorý matematicky nedefinujeme (netvrdíme, že je to množina alebo podobne).

Je o čosi všeobecnejší ako pojem znak.

Príklad 2.5. Ako množinu výrokových premenných \mathcal{V} môžeme zobrať všetky slová (teda konečné postupnosti) nad slovenskou abecedou a číslicami. Výrokovými premennými potom sú aj Jim, Kim, Sarah.

Dohoda

Výrokové premenné budeme *označovať* písmenami p, q, \dots , podľa potreby aj s dolnými indexmi.

Výrokové premenné formalizujú jednoduché výroky.

- Povedzme, že máme množinu výrokových premenných $\mathcal{V} = \{\text{kim, jim, sarah}\}$
- Ako môžu vyzeráť formuly vybudované nad touto množinou?
 - Samotné premenné, napr. sarah.
 - Negácie premenných, napr. $\neg\text{sarah}$.
 - Premenné alebo aj ich negácie spojené spojkou, napr. $(\neg\text{kim} \vee \text{sarah})$.
 - Ale negovať a spájať spojkami môžeme aj zložitejšie formuly, napr. $(\neg(\text{kim} \wedge \text{sarah}) \rightarrow (\neg\text{kim} \vee \neg\text{sarah}))$.
- Ako presne popíšeme, čo je formula?

Induktívnou definíciou:

1. Povieme, čo sú základné formuly, ktoré sa nedajú rozdeliť na menšie formuly.
2. Opíšeme, ako sa z jednoduchších formúl skladajú zložitejšie.

Definícia 2.6. Množina \mathcal{E} všetkých *výrokových formúl* nad množinou výrokových premenných \mathcal{V} je najmenšia množina postupností symbolov, pre ktorú platí:

- i každá výroková premenná $p \in \mathcal{V}$ je výrokovou formulou z \mathcal{E} (hovoríme jej *atomická formula* alebo iba *atóm*);
- ii ak A je výroková formula z \mathcal{E} , tak aj postupnosť symbolov $\neg A$ je výrokovou formulou z \mathcal{E} (*negácia* formuly A);
- iii ak A a B sú výrokové formuly z \mathcal{E} , tak aj $(A \wedge B)$, $(A \vee B)$ a $(A \rightarrow B)$ sú výrokovými formulami z \mathcal{E} (*konjunkcia*, *disjunkcia*, *implikácia* formúl A a B).

Dohoda

Výrokové formuly skrátene nazývame iba *formuly* a označujeme ich veľkými písmenami A, B, C, X, Y, Z , podľa potreby aj s dolnými indexmi.

Príklad 2.7. Nech $\mathcal{V} = \{\text{kim}, \text{jim}, \text{sarah}\}$.

Ako vyzerá množina \mathcal{E} všetkých výrokových formlí nad \mathcal{V} ?

$\mathcal{E} = \{\text{kim}, \text{jim}, \text{sarah},$	podľa (i)
$\neg\text{kim}, \neg\text{jim}, \neg\text{sarah},$	podľa (ii)
$(\text{kim} \wedge \text{kim}), (\text{kim} \wedge \text{jim}), (\text{kim} \wedge \text{sarah}),$	podľa (iii) pre \wedge
$(\text{kim} \wedge \neg\text{kim}), (\text{kim} \wedge \neg\text{jim}), (\text{kim} \wedge \neg\text{sarah}),$	
$(\text{jim} \wedge \text{kim}), (\text{jim} \wedge \text{jim}), (\text{jim} \wedge \text{sarah}),$	
$(\text{jim} \wedge \neg\text{kim}), (\text{jim} \wedge \neg\text{jim}), (\text{jim} \wedge \neg\text{sarah}),$	
$(\neg\text{kim} \wedge \text{kim}), (\neg\text{kim} \wedge \text{jim}), (\neg\text{kim} \wedge \text{sarah}), \dots,$	
$(\neg\text{jim} \wedge \neg\text{sarah}), \dots,$	podľa (iii) pre \rightarrow
$(\text{sarah} \vee (\text{kim} \rightarrow \text{jim})), \dots,$	a potom pre \vee
$(\neg(\text{kim} \wedge \text{sarah}) \vee (\neg\text{jim} \rightarrow \neg\text{sarah})), \dots\}$	podľa (iii) pre $\wedge,$ \rightarrow, \vee

Definícia 2.8. *Vytvárajúcou postupnosťou* nad množinou výrokových premenných \mathcal{V} je ľubovoľná konečná postupnosť postupností symbolov, ktorej každý člen je výroková premenná z \mathcal{V} , alebo má tvar $\neg A$, pričom A je nejaký predchádzajúci člen postupnosti, alebo má jeden z tvarov $(A \wedge B)$, $(A \vee B)$, $(A \rightarrow B)$, kde A a B sú nejaké predchádzajúce členy postupnosti.

Vytvárajúcou postupnosťou pre X je ľubovoľná vytvárajúca postupnosť, ktorej posledným prvkom je X .

Tvrdenie 2.9. *Postupnosť symbolov A je formulou vtedy a len vtedy, keď existuje vytvárajúca postupnosť pre A .*

Príklad 2.10. Nájdime vytvárajúcu postupnosť pre formulu $(\neg\text{kim} \rightarrow (\text{jim} \vee \text{sarah}))$.

Literatúra

Raymond M. Smullyan. *Logika prvého rádu*. Alfa, 1979. Z angl. orig. *First-Order Logic*, Berlin-Heidelberg: Springer-Verlag, 1968 preložil Svätoslav Mathé.

Vítězslav Švejdar. *Logika: neúplnosť, složitost, nutnosť*. Academia, 2002. Prístupné aj na <http://www1.cuni.cz/~svejdar/book/LogikaSve2002.pdf>.