Univerzita Komenského v Bratislave
Fakulta matematiky, fyziky a informatiky
Katedra aplikovanej informatiky

# Zbierka úloh z Logiky pre informatikov

Ján Kľuka, Júlia Pukancová, Martin Homola, Jozef Šiška

Letný semester 2017/18

Posledná aktualizácia: 26. februára 2018

# 1 Úvod do logiky

**Úloha 1.0.1.** Stav sveta, v ktorom sú pravdivé všetky tvrdenia teórie, je jej

a) formalizácia,
b) dôkaz,
c) model,
d) logický dôsledok,
e) redukcia,
f) interpretácia.

**Úloha 1.0.2.** Tvrdenie, ktoré je pravdivé vo všetkých stavoch sveta, v ktorých je pravdivá teória, je jej

a) premisou,
b) logickým dôsledkom,
c) záverom,
d) implikáciou,
e) kontradikciou,
f) tautológiou.

**Úloha 1.0.3.** Usudzovacie pravidlo je vzorom

a) premís,
b) úsudkov,
c) záverov,
d) tautológií,
e) dôkazov,
f) dedukcií.

**Úloha 1.0.4.** Usudzovacie pravidlá, ktoré z pravdivých premís vždy odvodia pravdivé závery, nazývame

a) induktívne,
b) konkrétne,
c) deduktívne,
d) tautologické,
e) korektné,
f) úplné.

**Úloha 1.0.5.** Usudzovanie, pri ktorom používame iba také pravidlá, ktoré z pravdivých premís vždy odvodia pravdivé závery, sa nazýva:

a) interpretácia,
b) abdukcia,
c) formalizácia,
d) indukcia,
e) dedukcia,
f) inferencia.

**Úloha 1.0.6.** Usudzovanie, pri ktorom odvodzujeme možné príčiny z ich následkov, sa nazýva:

a) dedukcia,
b) analógia,
c) abdukcia,
d) indukcia.

# 2 Výroková logika

## 2.1 Syntax výrokovej logiky

**Úloha 2.1.1.** Rozhodnite, či nasledovné reťazce sú výrokovými formulami nad množinou výrokových premenných $\mathcal{V} = \{p_1, p_2, \dots, p_n, \dots\}$ a svoje rozhodnutie neformálne zdôvodnite:

a) $p_1 \rightarrow p_2$

b) $(p_1) \land (p_2)$

c) $(p_1 \lor (\neg p_2))$

d) $(p_1 \lor (p_1 \land p_2))$

e) $(p_1 \land p_2 \land p_3)$

f) $(p_1 \land (u_2 \rightarrow p_3))$

g) $((p_1 \land (p_2 \rightarrow p_3)) \lor p_1)$

h) $((p_1 \rightarrow p_2) \leftrightarrow (p_2 \land p_1))$

i) $((p_1 \lor p_2) \rightarrow (p_2 \land p_1))$

j) $((p_1 \rightarrow p_2) \leftrightarrow (u_2 \land p_1))$

*Riešenie.* a) Postupnosť symbolov $p_1 \rightarrow p_2$ nie je formula nad $\mathcal{V}$, pretože to nie je ani výroková premenná z $\mathcal{V}$, ani nie je v tvare $\neg A$ pre nejakú formulu $A$ (lebo nezačína symbolom „$\neg$“), ani nie je v jednom z tvarov $(A \land B)$, $(A \lor B)$, $(A \rightarrow B)$ pre nejaké formuly $A$ a $B$ (lebo nezačína symbolom „(“).

d) Postupnosť symbolov $(p_1 \lor (p_1 \land p_2))$ je formula nad $\mathcal{V}$. Dokazuje to jej vytvárajúca postupnosť: $p_1, p_2, (p_1 \land p_2), (p_1 \lor (p_1 \land p_2))$. ♮

**Úloha 2.1.2.** Rozhodnite, či nasledovné postupnosti symbolov sú formulami nad nejakou množinou výrokových premenných $\mathcal{V}$. V prípade kladnej odpovede určte množinu $\mathcal{V}$ a nájdite vytvárajúcu postupnosť. Zápornú odpoveď stručne zdôvodnite.

a) $(a \land \neg a)$

b) $(\mathit{tweety\_is\_penguin} \rightarrow \neg \mathit{tweety\_flies})$

c) $(\mathit{happy}(\mathit{jack}) \land \mathit{loves}(\mathit{marry}, \mathit{jack}))$

d) $\neg\neg\neg$*koľko_je_hodín?*

e) $\neg\neg\neg p \rightarrow \neg\neg q$

f) $(\forall x \lor \neg \exists y)$

g) $(\neg(\neg \mathit{wow}))$

h) $(\neg\neg a \neg \rightarrow \neg\neg(b \lor c))$

i) $\forall x \big((\mathit{student}(x) \land \neg \mathit{studies}(x)) \rightarrow \mathit{fails\_exam}(x)\big)$

j) $(\mathit{edo} = \mathit{vrátnik} \lor \mathit{edo} = \mathit{otec}(\mathit{ivana}))$

*Riešenie.* b) Postupnosť symbolov $(\mathit{tweety\_is\_penguin} \rightarrow \neg \mathit{tweety\_flies})$ je formulou nad každou množinou $\mathcal{V}$, ktorá obsahuje výrokové premenné $\mathit{tweety\_is\_penguin}$, $\mathit{tweety\_flies}$. Jej vytvárajúcou postupnosťou je: $\mathit{tweety\_is\_penguin}$, $\mathit{tweety\_flies}$, $\neg \mathit{tweety\_flies}$, $(\mathit{tweety\_is\_penguin} \rightarrow \neg \mathit{tweety\_flies})$.

c) Postupnosť symbolov $(happy(jack) \land loves(marry, jack))$ nie je formulou. Má tvar $(A \land B)$, kde $A$ je postupnosť symbolov $happy(jack)$ a $B$ je $loves(marry, jack)$. Avšak $A$ nie je formula: Nezačína symbolom „¬“, takže nie je negáciou podľa bodu (ii) definície 2.6. Nezačína ani symbolom „(“, takže nie je ani formulou podľa bodu (iii). Musí teda byť výrokovou premennou. Ale výrokové premenné podľa definície 2.3 nemôžu obsahovať symboly zátvoriek ani logických spojok. ♮

**Úloha 2.1.3.** Napíšte po dve rôzne vytvárajúce postupnosti pre formuly:

a) $\neg(q \land p)$

b) $(\neg p \to q)$

c) $(((p \land q) \lor p) \to ((p \land q) \lor \neg p))$

d) $(((p \land p) \land (p \land q)) \land ((p \land p) \land (p \land p)))$

*Riešenie.* a) Dvoma rôznymi vytvárajúcimi postupnosťami pre formulu $\neg(q \land p)$ sú napríklad:

- $p, q, (q \land p), \neg(q \land p)$;
- $q, p, \neg q, \neg p, (q \land p), (q \lor p), \neg(q \land p)$. ♮

**Úloha 2.1.4.** Cieľom tejto úlohy je precvičiť si písanie induktívnych definícií, ktoré sme na prednáške použili na zadefinovanie výrokových formúl.

a) Zadefinujte výrokové formuly s binárnou *Shefferovou spojkou* (NAND, symbol $\uparrow$) nad množinou výrokových premenných $\mathcal{V}$. Vo formulách sa nebudú vyskytovať žiadne ďalšie spojky (ani negácia).

Napríklad postupnosti symbolov

$$\top \qquad kim \qquad (kim \uparrow sarah) \qquad ((jim \uparrow (kim \uparrow jim)) \uparrow (sarah \uparrow sarah))$$

by podľa vašej definície mali byť formulami nad množinou výrokových premenných $\mathcal{V} = \{jim, kim, sarah\}$.

b) Zadefinujte aritmetické výrazy s operátormi súčtu, súčinu a opačného čísla („unárne mínus“) nad množinou premenných $\mathcal{V}$.

Napríklad postupnosti symbolov

$$x \qquad -z \qquad (x + x) \qquad (x \times -y) \qquad -(x \times -(-(z \times y) + -(x + y)))$$

by podľa vašej definície mali byť aritmetickými výrazmi nad množinou premenných $\mathcal{V} = \{x, y, z\}$.

c) Zadefinujte aritmetické výrazy s operátormi *rozdielu*, súčinu a opačného čísla („unárne mínus“) nad množinou premenných $\mathcal{V}$. Zamyslite sa nad tým, či vaša definícia umožňuje výrazy jednoznačne rozložiť nad podvýrazy.

d) Zadefinujte výrokové formuly nad množinou výrokových premenných $\mathcal{V}$ s ternárnou spojkou $( \ldots \mathbf{?} \ldots \mathbf{:} \ldots )$ (*ak-tak-inak*) a dvoma nulárnymi spojkami (výrokovými konštantami) $\top$ a $\bot$. Iné spojky sa v týchto formulách nemajú vyskytovať.

Príklady formúl nad množinou výrokových premenných $\mathcal{V} = \{jim, kim, sarah, mokro, slnečno, polievacie\_auto, prší\}$:

$$\bot \quad prší \quad (kim \mathbin{?} jim : sarah) \quad (mokro \mathbin{?} (slnečno \mathbin{?} polievacie\_auto : prší) : \top)$$

*Riešenie.* a)

**Definícia.** *Symbolmi jazyka výrokovej logiky so Shefferovou spojkou* sú:

- *výrokové premenné* z nejakej spočítateľnej množiny $\mathcal{V}$, ktorej prvkami nie sú symboly $\uparrow$, ( a ), ani jej prvky tieto symboly neobsahujú;
- *logický* symbol: $\uparrow$ (*Shefferova spojka*);
- *pomocné* symboly: ( a ).

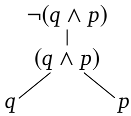
Spojka $\uparrow$ je binárna.

**Definícia.** Množina $\mathcal{E}$ *výrokových formúl so Shefferovou spojkou* nad množinou výrokových premenných $\mathcal{V}$ je najmenšia množina postupností symbolov, pre ktorú platí:

- Každá výroková premenná $p \in \mathcal{V}$ je formulou z $\mathcal{E}$.
- Ak $A$ a $B$ sú formulami z $\mathcal{E}$, tak aj postupnosť $(A \uparrow B)$ je formulou z $\mathcal{E}$. ♮

**Úloha 2.1.5.** Zakreslite vytvárajúce stromy pre formuly z úlohy 2.1.3.

*Riešenie.* a)




♮

**Úloha 2.1.6.** Určte stupeň formúl z úlohy 2.1.3.

*Riešenie.* Stupeň formuly $\neg(q \land p)$ je $\deg(\neg(q \land p)) = 1 + \deg((q \land p)) = 1 + (1 + \deg(q) + \deg(p)) = 1 + (1 + 0 + 0) = 2$. ♮

**Úloha 2.1.7.** Zadefinujte výrokové „formuly“ so spojkami $\neg$ a $\rightarrow$ tak, aby pre ne *neplatila* veta o jednoznačnosti rozkladu. Nájdite príslušný kontrapríklad, teda „formulu“ $X$, ktorá sa dá rozložiť na priame „podformuly“ viacerými spôsobmi.

**Úloha 2.1.8.** Vypíšte všetky a) priame podformuly a b) podformuly pre formuly z úlohy 2.1.3.

**Úloha 2.1.9.** Zadefinujte:

a) $\mathrm{vars}(A)$ – množinu všetkých výrokových premenných formuly $A$;

b) $\mathrm{vcount}(A, p)$ – počet výskytov výrokovej premennej $p$ vo formule $A$;

c) subfs($A$) – množinu všetkých podformúl formuly $A$;

d) pcount($A$) – počet výskytov zátvoriek vo formule $A$;

e) cons($A$) – množina všetkých logických spojok vo formule $A$;

f) ccount($A$) – počet výskytov logických spojok vo formule $A$.

*Riešenie.* e) Pre každú výrokovú premennú $p \in \mathcal{V}$ a pre všetky formuly $A$, $B$ nad $\mathcal{V}$ definujeme:

$$\begin{aligned}
\mathrm{cons}(p) &= \emptyset \\
\mathrm{cons}(\neg A) &= \{\neg\} \cup \mathrm{cons}(A) \\
\mathrm{cons}(A \land B) &= \{\land\} \cup \mathrm{cons}(A) \cup \mathrm{cons}(B) \\
\mathrm{cons}(A \lor B) &= \{\lor\} \cup \mathrm{cons}(A) \cup \mathrm{cons}(B) \\
\mathrm{cons}(A \to B) &= \{\to\} \cup \mathrm{cons}(A) \cup \mathrm{cons}(B)
\end{aligned}$$

♮

**Úloha 2.1.10.** Vybudujte teóriu syntaxe výrokovej logiky pre nasledujúce kombinácie spojok:

a) jediná binárna spojka $\uparrow$ (*Shefferova spojka*, NAND);

b) jediná binárna spojka $\downarrow$ (*Peircova spojka*, NOR);

c) unárna spojka $\neg$ a binárna spojka $\nrightarrow$ („a nie“);

d) binárne spojky $\nrightarrow$ („a nie“) a $\to$.

Teória syntaxe pre každú z týchto kombinácií pozostáva z definícií pojmov

(i) *symboly* jazyka výrokovej logiky,

(ii) *výroková formula* nad množinou výrokových premenných,

(iii) *vytvárajúca postupnosť* a *vytvárajúca postupnosť pre formulu*,

(iv) *vytvárajúci strom* pre formulu.

Formuly majú obsahovať *iba* spojky z príslušnej kombinácie.

*Riešenie.* a) Definície (i) a (ii) sme už uviedli v riešení úlohy 2.1.4 a). Pokračujeme teda bodmi (iii) a (iv):

**Definícia.** *Vytvárajúcou postupnosťou* je ľubovoľná konečná postupnosť postupností symbolov, ktorej každý člen je výroková premenná z $\mathcal{V}$, alebo má tvar $(A \uparrow B)$, pričom $A$ a $B$ sú nejaké predchádzajúce členy tejto postupnosti.

*Vytvárajúcou postupnosťou pre $X$* je ľubovoľná vytvárajúca postupnosť, ktorej posledným prvkom je $X$.

**Definícia.** *Vytvárajúcim stromom* pre formulu $X$ je binárny strom $T$ obsahujúci v každom vrchole formulu, pričom platí:

- v koreni $T$ je formula $X$;
- ak vrchol obsahuje formulu $(A \uparrow B)$, tak má dve deti, pričom ľavé dieťa obsahuje formulu $A$ a pravé formulu $B$;

- vrcholy obsahujúce výrokové premenné sú listami. ♮

**Úloha 2.1.11.** Rozhodnite: Podľa vety o jednoznačnosti rozkladu má každá formula práve jednu priamu podformulu.

**Úloha 2.1.12.** Výpis vytvárajúceho stromu formuly $X$ v poradí:

a) preorder,

b) inorder,

c) postorder,

d) žiadnom z uvedených

je vytvárajúcou postupnosťou pre formulu $X$.

**Úloha 2.1.13.** Dokážte alebo vyvráťte nájdením kontrapríkladu nasledujúce tvrdenia:

a) počet výskytov pravých zátvoriek v $A$ plus počet negácií v $A$ je menší alebo rovný stupňu $A$;

b) ak $A$ je podformulou $B$, tak sa nachádza v každej vytvárajúcej postupnosti pre $B$;

c) ak sa $A$ nachádza vo vytvárajúcej postupnosti pre $B$, tak $A$ je podformulou $B$;

d) ak sa $A$ nachádza pred $B$ vo vytvárajúcej postupnosti pre formulu $X$, tak $A$ je podformulou $B$;

e) všetky vytvárajúce postupnosti pre formulu $A$ majú rovnakú dĺžku;

f) ak $T$ je vytvárajúci strom pre $A$ a $P$ je vytvárajúca postupnosť pre $A$, potom počet vrcholov $T$ je rovnaký ako dĺžka $P$;

g) dĺžka vytvárajúcej postupnosti pre $A$ je rovná stupňu $A$;

h) počet vrcholov vytvárajúceho stromu pre $A$ je rovný stupňu $A$.

i) počet vnútorných vrcholov vytvárajúceho stromu pre $A$ je rovný stupňu $A$.

## 2.2 Formalizácia vo výrokovej logike

**Úloha 2.2.1.** Sformalizujte nasledujúce tvrdenia (podľa Smullyana [2]) pomocou výrokovej logiky.

V prípade lúpeže v klenotníctve predviedli na políciu troch podozrivých Adamovú, Bakalára a Drozda. Počas vyšetrovania sa zistilo:

a) Drozd je vinný, ak je Adamová vinná a Bakalár nevinný.

b) Drozd nikdy nepracuje sám.

c) Adamová nikdy nepracuje s Drozdom.

d) Do prípadu nie je zapletený nikto okrem Adamovej, Bakalára a Drozda a aspoň jeden z nich je vinný.

*Riešenie.* Majme množinu výrokových premenných $\mathcal{V} = \{a, b, d\}$, kde význam jednotlivých premenných je nasledujúci: $a$ — Adamová je vinná, $b$ — Bakalár je vinný, $d$ — Drozd je vinný.

*Všimnite si, že významom každej premennej je* výrok*, teda tvrdenie, o ktorého pravdivosti má zmysel uvažovať. Navyše sú to* jednoduché *výroky — neobsahujú žiadne prvky, ktoré sa dajú vyjadriť výrokovými spojkami.*

Zistenia z vyšetrovania potom sformalizujeme nasledovne:
a) $((a \land \neg b) \to d)$ b) $(d \to (a \lor b))$ c) $(a \to \neg d)$ d) $(a \lor (b \lor d))$ ♮

**Úloha 2.2.2.** Sformalizujte nasledujúce vety (podľa Ghidini a Serafiniho [1]) v jazyku výrokovej logiky. Zvoľte vhodnú spoločnú množinu výrokových premenných $\mathcal{V}$ a popíšte význam použitých premenných.

a) Aldo nie je Talian.
b) Aldo je Talian, ale Bob je Angličan.
c) Ak Aldo nie je Angličan, potom ani Bob nie je Angličan.
d) Aldo je Talian, alebo ak Aldo nie je Talian, tak Bob je Angličan.
e) Buď je Aldo Talian a Bob je Angličan, alebo ani Aldo nie je Talian, ani Bob nie je Angličan.

**Úloha 2.2.3.** Sformalizujte nasledujúce vety vo výrokovej logike nad vhodnou spoločnou množinou výrokových premenných $\mathcal{V}$ a popíšte význam použitých premenných:

a) Hanka príde na párty, ak Dávid nepríde, ale ak Dávid príde, potom Fero nepríde.
b) Môžeme si byť istí, že ak Eva príde na párty, tak ak Fero a Hanka neprídu, potom príde Dávid.
c) Ak ani Eva ani Fero neprídu na párty, potom Dávid príde, iba ak príde Hanka.

**Úloha 2.2.4.** Sformalizujte nasledujúci logický problém (podľa Voronkova [3]) v jazyku výrokovej logiky:

> Máme tri osoby, ktoré sa volajú Stirlitz, Müller a Eismann. Vieme, že práve jeden z nich je Rus, kým ostatní dvaja sú Nemci. Navyše každý Rus musí byť špión.
>
> Keď Stirlitz stretne Müllera na chodbe, zavtipkuje: „Vieš, Müller, ty si taký Nemec, ako som ja Rus.“ Je všeobecne známe, že Stirlitz vždy hovorí pravdu, keď vtipkuje.
>
> Máme rozhodnúť, že Eismann nie je ruský špión.

Zvoľte takú množinu výrokových premenných, aby ste tvrdenia sformalizovali verne, nezjednodušujte príliš (napríklad byť Rusom a byť špiónom nie je to isté). Popíšte význam použitých premenných.

Zároveň ale dajte pozor, aby formalizácia nepripúšťala nejaké nečakané možnosti (napríklad „Eismann nie je Rus ani Nemec“ či „Stirlitz je zároveň Rus aj Nemec“).

**Úloha 2.2.5.** Uvažujme nasledovné tvrdenia o problémoch so štartovaním auta. Navrhnite vhodné výrokové premenné a popíšte ich význam. Následne sformalizujte tvrdenia vo výrokovej logike:

a) Ak je batéria pokazená alebo ak je vybitá, je to príčinou toho, že nepočujeme zvuk štartéra.

b) To, že počujeme zvuk štartéra, ale auto nenaštartuje, môže byť (okrem iného) zapríčinené tým, že batéria je takmer vybitá, alebo tým, že je nádrž prázdna.

c) Ak sa minulo palivo alebo ak je nádrž deravá, tak je nádrž prázdna.

d) Auto nenaštartuje vtedy, keď je nádrž prázdna alebo keď je batéria takmer vybitá.

e) Rovnako platí, že ak sme nepočuli zvuk štartéra, auto nemôže naštartovať.

**Úloha 2.2.6.** V pobočke banky zmizli peniaze zo sejfu. Vo výrokovej logike sformalizujte zistené fakty týkajúce sa viny alebo neviny podozrivých:

a) V čase krádeže bola pobočka zavretá a prístup do nej mali len traja zamestnanci – Atem, Bersičová a Citrák.

b) Ak Atem má alibi, tak má aj Bersičová alibi.

c) Atem nemá kľúč od sejfu, takže sa doň dostal, len ak mu pomohol niekto z dvojice Bersičová a Citrák.

d) Atem bol v čase lúpeže na obede.

## 2.3 Sémantika výrokovej logiky

**Úloha 2.3.1.** Majme danú množinu výrokových premenných $\mathcal{V} = \{p, q, r\}$ a jej ohodnotenie $v = \{p \mapsto t, q \mapsto f, r \mapsto f\}$. Zistite, či ohodnotenie $v$ spĺňa nasledovné formuly:

a) $(p \land (\neg q \to r))$

b) $((r \land q) \to \neg p)$

c) $((\neg p \lor \neg q) \lor \neg r)$

d) $((\neg p \to q) \land \neg(\neg q \lor p))$

e) $\neg(q \to q)$

f) $(p \land p)$

g) $\neg\neg\neg p$

h) $(\neg(p \land p) \lor \neg q)$

i) $(\neg q \to \neg q)$

j) $\big(r \to ((p \lor \neg p) \land \neg(q \to r))\big)$

k) $\big((\neg p \to q) \land \big(\neg q \to (q \lor \neg(q \to r))\big)\big)$

*Riešenie.* a) *1. spôsob — zhora nadol:* Podľa definície spĺňania výrokových formúl:

$$\begin{aligned}
v \models (p \wedge (\neg q \to r)) \quad & \text{vtt} \quad v \models p \quad \text{a súčasne} \quad v \models (\neg q \to r) \\
& \text{vtt} \quad v(p) = t, \text{ čo platí,} \quad \text{a súčasne} \quad v \not\models \neg q \quad \text{alebo} \quad v \models r \\
& \text{vtt} \quad v \not\models \neg q \quad \text{alebo} \quad v \models r \\
& \text{vtt} \quad v \models q \quad \text{alebo} \quad v(r) = t \\
& \text{vtt} \quad v(q) = t \quad \text{alebo} \quad v(r) = t \\
& \text{vtt} \quad f = t, \text{ čo neplatí,} \quad \text{alebo} \quad f = t, \text{ čo neplatí.}
\end{aligned}$$

Konštatujeme teda, že $v \not\models (p \wedge (\neg q \to r))$.

a) *2. spôsob — zdola nahor:* Vyhodnotíme formulu postupne podľa jej vytvárajúcej postupnosti: $p, q, r, \neg q, (\neg q \to r), (p \wedge (\neg q \to r))$.

1. $v(p) = t$, teda $v \models p$.
2. $v(q) = f$, teda $v \not\models q$.
3. $v(r) = f$, teda $v \not\models r$.
4. $v \not\models q$, teda $v \models \neg q$.
5. neplatí ani $v \not\models \neg q$, ani $v \models r$, teda $v \not\models (\neg q \to r)$.
6. keďže neplatí $v \models (\neg q \to r)$, potom $v \not\models (p \wedge (\neg q \to r))$.

Tento postup sa dá stručnejšie zapísať do tabuľky, kde v záhlaví si zapíšeme jednotlivé podformuly, ktoré budeme k určeniu splnenosti našej formuly potrebovať, a do riadku $v$ poznačíme, či $v$ príslušnú podformulu spĺňa ($\models$) alebo nespĺňa ($\not\models$):

| | $p$ | $q$ | $r$ | $\neg q$ | $(\neg q \to r)$ | $(p \wedge (\neg q \to r))$ |
|---|---|---|---|---|---|---|
| $v$ | $\models$ | $\not\models$ | $\not\models$ | $\models$ | $\not\models$ | $\not\models$ |

$\natural$

**Úloha 2.3.2.** O každej z nasledujúcich formúl nad $\mathcal{V} = \{p, q, r\}$ rozhodnite, či je (i) tautológia, (ii) splniteľná, (iii) falzifikovateľná, alebo (iv) nesplniteľná:

a) $(\neg(p \wedge q) \to (\neg p \wedge \neg q))$

b) $((p \vee \neg p) \wedge \neg(q \vee \neg q))$

c) $(p \to (p \to (p \to p)))$

d) $(p \wedge (q \vee \neg(p \to r)))$

e) $(((p \to p) \to p) \to \neg p)$

f) $\neg(p \leftrightarrow \neg p)$

g) $((p \wedge \neg p) \vee (p \vee \neg p))$

h) $(p \wedge \neg p)$

i) $\neg\neg\neg(p \vee p)$

j) $((p \wedge q) \to (\neg p \wedge q))$

k) $\big(((q \vee \neg r) \wedge (p \to \neg r)) \to (\neg r \to (\neg p \wedge q))\big)$

l) $\big((p \to (\neg r \to q)) \wedge ((\neg p \vee \neg q) \wedge \neg(p \to r))\big)$

*Riešenie.* a) Aby sme rozhodli, akého druhu je formula $F = (\neg(p \land q) \rightarrow (\neg p \land \neg q))$, preskúmame všetky rôzne ohodnotenia výrokových premenných, ktoré sa vyskytujú v $F$. Keďže sú to dve pemenné, takéto ohdonotenia sú štyri. Podobne ako v predchádzajúcej úlohe, výsledok nášho skúmania, ako aj čiastkové výsledky, zapíšeme do tabuľky:

| | $v_i$ | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | $p$ | $q$ | $p$ | $q$ | $\neg p$ | $\neg q$ | $(p \land q)$ | $\neg(p \land q)$ | $(\neg p \land \neg q)$ | $(\neg(p \land q) \rightarrow (\neg p \land \neg q))$ |
| $v_1$ | $f$ | $f$ | $\not\models$ | $\not\models$ | $\models$ | $\models$ | $\not\models$ | $\models$ | $\models$ | $\models$ |
| $v_2$ | $t$ | $f$ | $\models$ | $\not\models$ | $\not\models$ | $\models$ | $\not\models$ | $\models$ | $\not\models$ | $\not\models$ |
| $v_3$ | $f$ | $t$ | $\not\models$ | $\models$ | $\models$ | $\not\models$ | $\not\models$ | $\models$ | $\not\models$ | $\not\models$ |
| $v_4$ | $t$ | $t$ | $\models$ | $\models$ | $\not\models$ | $\not\models$ | $\models$ | $\not\models$ | $\not\models$ | $\models$ |

Keďže sme mali rozhodnúť o vlastnostiach formuly $F$, nezabudneme vysloviť záver:

(i) Keďže $v_2 \not\models F$, teda *nie všetky* ohodnotenia spĺňajú $F$, tak $F$ *nie je* tautológiou.

(ii) Keďže $v_1 \models F$, teda *aspoň jedno* ohodnotenie spĺňa $F$, tak $F$ *je* splniteľná.

(iii) Keďže $v_2 \not\models F$, teda *aspoň jedno* ohodnotenie nespĺňa $F$, tak $F$ *je* aj falzifikovateľná.

(iv) Keďže $v_1 \models F$, teda *nie je pravda*, že *všetky* ohodnotenia *nespĺňajú* $F$, tak $F$ *nie je* nesplniteľná. ♮

**Úloha 2.3.3.** Zadefinujte vzťah *ohodnotenie $v$ spĺňa formulu $X$* ($v \models X$) pre výrokovú logiku s nasledujúcimi kombináciami spojok:

a) jediná binárna spojka $\uparrow$ (*Shefferova spojka*, NAND) s neformálnym významom: $(A \uparrow B)$ je pravdivé práve vtedy, keď nie je súčasne pravdivé $A$ aj $B$;

b) jediná binárna spojka $\downarrow$ (*Peircova spojka*, NOR) s neformálnym významom: $(A \downarrow B)$ je pravdivé práve vtedy, keď nie je pravda, že je pravdivé $A$ alebo je pravdivé $B$;

c) unárna spojka $\neg$ a binárna spojka $\nrightarrow$ („a nie“) s neformálnym významom: $(A \nrightarrow B)$ je pravdivé práve vtedy, keď je pravdivé $A$ a nie je pravdivé $B$;

d) binárne spojky $\rightarrow$ a $\nrightarrow$ („a nie“, viď predchádzajúci variant).

Definícia syntaxe pre tieto logiky bola predmetom úlohy 2.1.10.

*Riešenie.* a)
**Definícia.** Nech $\mathcal{V}$ je množina výrokových premenných. Nech $v$ je ohodnotenie množiny $\mathcal{V}$. Pre všetky výrokové premenné $p$ z $\mathcal{V}$ a všetky formuly $A$, $B$ nad $\mathcal{V}$ definujeme:

- $v \models p$ vtt $v(p) = t$;
- $v \models (A \uparrow B)$ vtt $v \not\models A$ alebo $v \not\models B$. ♮

# Literatúra

[1] Chiara Ghidini and Luciano Serafini. *Mathematical Logic Exercises*. University of Trento, 2014. http://disi.unitn.it/~ldkr/ml2014/ExercisesBooklet.pdf.

[2] Raymond M. Smullyan. *What Is the Name of This Book?—The Riddle of Dracula and Other Logical Puzzles*. Prentice-Hall, 1978.

[3] Andrei Voronkov. Logic and modeling 2014. [online]. http://www.voronkov.com/lics.cgi.