Prednášky z Matematiky (4) – Logiky pre informatikov

Ján Kľuka, Jozef Šiška

Katedra aplikovanej informatiky
FMFI UK Bratislava

Letný semester 2017/2018

1. prednáška

O logike a tomto kurze
Syntax výrokovej logiky

19. februára 2018

Obsah 1. prednášky

1 Úvod
- O logike
- O tomto kurze

2 Výroková logika
- Opakovanie: Výroková logika v prirodzenom jazyku
- Syntax výrokovej logiky

1.1 O logike

Čo je logika

- Logika je vedná disciplína, ktorá študuje formy usudzovania
  - filozofická, matematická, informatická, výpočtová
- Tri dôležité predmety záujmu:

Jazyk zápis pozorovaní, definície pojmov, formulovanie teórií

Syntax pravidlá zápisu tvrdení
Sémantika význam tvrdení

Usudzovanie (inferencia) odvodenie nových dôsledkov z doterajších poznatkov

Dôkaz presvedčenie ostatných o správnosti záverov usudzovania

Poznatky a teórie

- V logike slúži **jazyk** na zápis tvrdení, ktoré vyjadrujú informácie — poznatky o svete
- Súbor poznatkov, ktoré považujeme za pravdivé, tvorí **teóriu**

Príklad 1.1 (Party time!)

Máme troch nových známych — Kim, Jima a Sarah.
Organizujeme párty a chceme na ňu pozvať niektorých z nich.
Od spoločných kamarátov sme sa ale dozvedeli o ich požiadavkách:

- P1 Sarah nepôjde na párty, ak pôjde Kim.
- P2 Jim pôjde na párty, len ak pôjde Kim.
- P3 Sarah nepôjde bez Jima.

Možné svety a logické dôsledky

- Tvrdenie rozdeľuje množinu **možných stavov sveta** na tie stavy, v ktorých je pravdivé (**modely**), a tie stavy, v ktorých je nepravdivé
- Teória môže mať viacero modelov (ale aj žiaden)

Príklad 1.2

Vymenujme možné stavy prítomnosti Kim, Jima a Sarah na párty a zistime, v ktorých sú pravdivé jednotlivé tvrdenia našej teórie a celá teória.

- **Logickými dôsledkami** teórie sú tvrdenia, ktoré sú pravdivé vo *všetkých* modeloch teórie (svetoch, v ktorých je pravdivá)

Príklad 1.3

Logickým dôsledkom teórie (P1), (P2), (P3) je napríklad:
Sarah nepôjde na párty.

Logické usudzovanie

- Vymenovanie všetkých svetov je často nepraktické až nemožné
- Logické dôsledky môžeme *odvodzovať* **usudzovaním** (*inferovať*)
- Pri odvodení vychádzame z **premís** (*predpokladov*) a postupnosťou **úsudkov** dospievame k **záverom**

Príklad 1.4

Vieme, že ak na párty pôjde Kim, tak nepôjde Sarah (P1),
a že ak pôjde Jim, tak pôjde Kim (P2).
Predpokladajme, že na párty pôjde Jim.
Potom podľa (P2) pôjde aj Kim.
Potom podľa (P1) nepôjde Sarah.
Teda: Ak na párty pôjde Jim, nepôjde Sarah.

- Ak sú všetky úsudky v odvodení správne, záver je logickým dôsledkom premís a odvodenie je jeho **dôkazom** z premís

Usudzovacie pravidlá, korektnosť, dedukcia

- Už Aristoteles zistil, že správne úsudky sa dajú rozpoznať podľa ich *formy*, bez ohľadu na obsah

Ak pôjde Jim, tak pôjde Kim.	Ak je dilítium dekryštalizované, tak antihmota neprúdi.
Pôjde Jim.	Dilítium je dekryštalizované.
Pôjde Kim.	Antihmota neprúdi.

- **Usudzovacie (inferenčné) pravidlo** je *vzor* úsudkov daný formou tvrdení, s ktorými pracuje

$$\begin{array}{ll} \text{Ak } A\text{, tak } B. & \left.\right\} \text{vzory premís} \\ A. & \\ \hline B. & \text{vzor záveru} \end{array}$$

- **Korektné** pravidlo odvodí z pravdivých premís pravdivý záver
- **Dôkaz** je teda **postupnosť použití korektných usudzovacích pravidiel** (najlepšie *samozrejmých* pre čitateľa dôkazu)
- **Dedukcia** — usudzovanie iba pomocou korektných pravidiel

Nededuktívne pravidlá

Niektoré **nie korektné** usudzovacie pravidlá sú prakticky užitočné:

Indukcia — zovšeobecnenie:

Videl som tisíc havranov.
Žiaden nebol inej farby ako čiernej.

Všetky havrany sú čierne.

Platí aj pre červené Fabie?

Abdukcia — odvodzovanie možných príčin z následkov:

Ak je batéria vybitá, auto nenaštartuje.
Ak je nádrž prázdna, auto nenaštartuje.
Nádrž nie je prázdna.
Auto nenaštartovalo.

Batéria je vybitá.

Čo ak nám kuna prehrýzla káble?

Usudzovanie na základe analógie (podobnosti)

Venuša má atmosféru, podobne ako Zem.
Na Zemi sa prejavuje skleníkový efekt.

Na Venuši sa prejavuje skleníkový efekt.

A čo: Atmosféra Zeme je dýchateľná?

Nededuktívne pravidlá

- **Závery nededuktívnych pravidiel** treba považovať za **hypotézy** — plauzibilné, ale **neoverené** tvrdenia
- Hypotézy je **nutné preverovať!**
- Niektoré špeciálne prípady sú správne,
  napríklad *matematická indukcia*
- Usudzovanie s nededuktívnymi pravidlami je teda *hypotetické*
- Hypotetické usudzovanie je dôležité pre umelú inteligenciu
  - Reprezentácia znalostí a inferencia (magisterský predmet)
- **V tomto kurze sa budeme zaoberať iba dedukciou**

Formálny jazyk

- **Prirodzený jazyk** je problematický — tvrdenia môžu byť viacznačné, ťažko zrozumiteľné, používať obraty a ustálené výrazy so špeciálnym významom
  - Mišo *je* myš.
  - Videl som dievča v sále *s ďalekohľadom*.
  - Vlastníci bytov a nebytových priestorov v dome prijímajú rozhodnutia na schôdzi vlastníkov dvojtretinovou väčšinou hlasov všetkých vlastníkov bytov a nebytových priestorov v dome, ak hlasujú o zmluve o úvere a o každom dodatku k nej, o zmluve o zabezpečení úveru a o každom dodatku k nej, o zmluve o nájme a kúpe veci, ktorú vlastníci bytov a nebytových priestorov v dome užívajú s právom jej kúpy po uplynutí dojednaného času užívania a o každom dodatku k nej, o zmluve o vstavbe alebo nadstavbe a o každom dodatku k nim, o zmene účelu užívania spoločných častí domu a spoločných zariadení domu a o zmene formy výkonu správy; ak sa rozhoduje o nadstavbe alebo o vstavbe v podkroví alebo povale, vyžaduje sa zároveň súhlas všetkých vlastníkov bytov a nebytových priestorov v dome na najvyššom poschodí. — *Zákon č. 182/1993 Z. z. SR v znení neskorších predpisov*
  - Nikto nie je dokonalý.
- Tieto ťažkosti sa obchádzajú použitím **formálneho** jazyka
  - Presne definovaná, zjednodušená syntax (pravidlá zápisu tvrdení) a sémantika (význam) — podobne ako programovací jazyk
- Problémy z reálneho sveta opísané v prirodzenom jazyku musíme najprv **formalizovať**, a potom naň môžeme použiť logický aparát

Formalizácia poznatkov

- S formalizáciou ste sa už stretli pri riešení slovných úloh

Karol je trikrát starší ako Mária.
Súčet Karolovho a Máriinho veku je 12 rokov.
Koľko rokov majú Karol a Mária?

$\rightsquigarrow$

$$k = 3 \cdot m$$
$$k + m = 12$$

- Stretli ste sa už aj s formálnym jazykom výrokovej logiky

Príklad 1.5

Sformalizujme náš párty príklad:

- P0 Niekto z trojice Kim, Jim, Sarah pôjde na párty.
- P1 Sarah nepôjde na párty, ak pôjde Kim.
- P2 Jim pôjde na párty, len ak pôjde Kim.
- P3 Sarah nepôjde bez Jima.

Kalkuly — formalizácia usudzovania

- Pre mnohé logiky sú známe **kalkuly** —
  množiny usudzovacích pravidiel, ktoré sú

  korektné — odvodzujú iba logické dôsledky
  úplné — umožňujú odvodiť všetky logické dôsledky
- Kalkuly existujú aj v iných častiach matematiky
  - na počítanie s číslami, zlomkami (aritmetický kalkul),
  - riešenie lineárnych rovníc (kalkul lineárnej algebry),
  - derivovanie, integrovanie, riešenie diferenciálnych rovníc (kalkul matematickej analýzy)

  …

  Nie vždy sú úplné

Výpočtová logika — automatizácia usudzovania

- Základná idea **výpočtovej logiky**:
  - Napíšeme program,
    ktorý systematicky aplikuje pravidlá logického kalkulu,
    kým neodvodí želaný dôsledok,
    alebo nevyčerpá všetky možnosti (nie vždy je ich konečne veľa!)
- Skutočnosť je komplikovanejšia, ale existuje množstvo automatických usudzovacích systémov
- *Jeden* z prienikov informatiky a logiky

Výpočtová logika — aplikácie

- Overovanie, dopĺňanie, hľadanie dôkazov matematických viet
- Špecifikácia a verifikácia hardvérových obvodov, programov, komunikačných protokolov
  - Špecifikácia a verifikácia programov (3. ročník)
  - Formálne metódy tvorby softvéru (magisterský)
- Logické programovanie
  - Programovacie paradigmy (3. ročník)
  - Výpočtová logika (magisterský)
  - Logické programovanie ASP (magisterský)
- Databázy — pohľady, integritné obmedzenia, optimalizácia dopytov
  - Deduktívne databázy (3. ročník)
- Sémantický web a integrácia dát z rôznych zdrojov
  - Reprezentácia znalostí a inferencia (magisterský)
  - Ontológie a znalostné inžinierstvo (magisterský)
- Analýza zákonov, regulácií, zmlúv

Spomeňte si I.1

Tvrdenie, ktoré je pravdivé vo všetkých svetoch, v ktorých je pravdivá teória, je jej

- A premisou,
- B logickým dôsledkom,
- C záverom,
- D implikáciou.

Spomeňte si I.2

Účelom dôkazu je presvedčiť ostatných o správnosti nášho úsudku. Preto musí pozostávať z ....

Spomeňte si I.3

Usudzovanie, pri ktorom používame iba také pravidlá, ktoré z pravdivých premís vždy odvodia pravdivé závery, sa nazýva:

- A abdukcia,
- B interpretácia,
- C formalizácia,
- D dedukcia,
- E indukcia,
- F inferencia.

1.2 O tomto kurze

Čím sa budeme zaoberať v tomto kurze

Teoreticky

- Jazykmi výrokovej a predikátovej logiky, ich syntaxou a sémantikou
- Korektnosťou usudzovacích pravidiel
- Korektnosťou a úplnosťou logických kalkulov
- Automatizovateľnými kalkulmi

Prakticky

- Vyjadrovaním problémov v jazyku logiky
- Automatizovaním riešenia problémov použitím SAT-solverov
- Manipuláciou symbolických stromových štruktúr (výrazov — formúl a termov)
- Programovaním vlastných jednoduchých automatických dokazovačov

Filozoficky

- Zamýšľanými a nezamýšľanými okolnosťami platnosti tvrdení
- Obmedzeniami vyjadrovania a usudzovania

Organizácia kurzu — rozvrh, kontakty, pravidlá

https://dai.fmph.uniba.sk/w/Course:Mathematics_4

2.1 Opakovanie: Výroková logika v prirodzenom jazyku

Opakovanie: Výroková logika v prirodzenom jazyku

Výroky a pravdivostné hodnoty

Výrok – veta, o pravdivosti ktorej má zmysel uvažovať (zväčša oznamovacia).

Príklady 2.1

- Miro je v posluchárni F1.
- Slnečná sústava má deviatu planétu.
- Mama upiekla koláč, ale Editka dostala z matematiky štvorku.
- Niekto zhasol.

Negatívne príklady

- Toto je čudné.
- Píšte všetci modrým perom!
- Prečo je obloha modrá?

Opakovanie: Výroková logika v prirodzenom jazyku

Operácie s výrokmi

Operácie s výrokmi – *logické spojky*

- Vytvárajú nové výroky, zložené (súvetia).
- Majú povahu *funkcií* na pravdivostných hodnotách spájaných výrokov (*boolovských* funkcií), teda pravdivostná hodnota zloženého výroku závisí *iba* od pravdivostných hodnôt podvýrokov.

Príklad 2.2

Negácia, konjunkcia, disjunkcia, implikácia, ekvivalencia, …

Negatívny príklad

Spojku „pretože" nepovažujeme za *logickú* spojku.
Pravdivostná hodnota výroku „Emka ochorela, pretože zjedla babôčku" sa nedá určiť funkciou na pravdivostných hodnotách spájaných výrokov.

(Meta) matematika výrokovej logiky

- Stredoškolský prístup príliš **neoddeľuje** samotný *jazyk* výrokovej logiky od jeho *významu* a vlastne ani jednu stránku nedefinuje jasne
- V tomto kurze sa budeme snažiť byť **presní**
  - *Zdanlivo* budeme o jednoduchých veciach hovoriť zložito
- Pojmy z výrokovej logiky budeme **definovať matematicky**
  - ako množiny, postupnosti, funkcie, atď. ←-- Matematika (1), (3)
- Na praktických cvičeniach veľa pojmov **zadefinujete programátorsky**
  - ako reťazce, slovníky, triedy a ich metódy ←-- Programovanie (1), (2)
- Budeme sa pokúšať **dokazovať** ich vlastnosti
- Budeme teda hovoriť *o formálnej logike* pomocou matematiky, ktorá je ale sama postavená na *logike v prirodzenom jazyku*
- Matematickej logike sa preto hovorí aj *meta* matematika, matematika **o** logike (a v konečnom dôsledku aj o matematike)

2.2

Syntax výrokovej logiky

Syntax výrokovej logiky

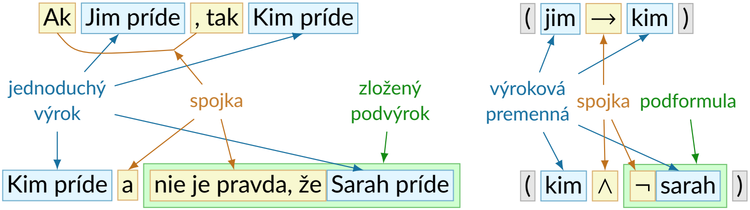
- Syntax sú pravidlá budovania viet v jazyku
- Pri formálnych jazykoch sú popísané matematicky
- Nedajte sa tým odradiť, nie je to oveľa iné ako programovanie
- Viac sa budete formálnymi jazykmi zaoberať na Úvode do teoretickej informatiky
- Naše definície vychádzajú prevažne z kníh [Smullyan, 1979] a [Švejdar, 2002]

Syntax výrokovej logiky

Aké tvrdenia chceme zapisovať vo výrokovej logike?

- Jednoduché výroky, ktorých štruktúra nás nebude zaujímať
  - „Miro sa nachádza v F1“, „Kim príde“

  Ich formálnu verziu nazveme **výrokové premenné**
- Zložené výroky, tvorené podvýrokmi a spojkou:



  Ich formálnu verziu nazveme **formuly**
- Čo sú *základné* stavebné kamene týchto výrokov?
  - …

  Tieto základné prvky nazveme **symboly**

Symboly jazyka výrokovej logiky

Definícia 2.3

Symbolmi jazyka výrokovej logiky sú:

- *výrokové premenné* z nejakej spočítateľnej množiny $\mathcal{V} = \{p_1, p_2, \ldots, p_n, \ldots\}$, ktorej prvkami nie sú symboly ¬, ∧, ∨, →, (a), ani jej prvky tieto symboly neobsahujú;
- *logické* symboly (*logické spojky*): ¬, ∧, ∨, →
  (nazývané, v uvedenom poradí, *symbol negácie*, *symbol konjunkcie*, *symbol disjunkcie*, *symbol implikácie* a čítané *„nie“*, *„a“*, *„alebo“*, *„ak …, tak …“*);
- *pomocné* symboly: (a) (*ľavá zátvorka* a *pravá zátvorka*).

Spojka ¬ je *unárna* (má jeden argument).
Spojky ∧, ∨, → sú *binárne* (majú dva argumenty).

Poznámka 2.4

Definícia je **záväzná** dohoda o význame pojmov.

Symboly, výrokové premenné

Symbol je základný pojem, ktorý matematicky nedefinujeme (netvrdíme, že je to množina alebo podobne).
Je o čosi všeobecnejší ako pojem znak.

Príklad 2.5

Ako množinu výrokových premenných $\mathcal{V}$ môžeme zobrať všetky slová (teda konečné postupnosti) nad slovenskou abecedou a číslicami. Výrokovými premennými potom sú aj Jim, Kim, Sarah.

Dohoda

Výrokové premenné budeme *označovať* písmenami p, q, …, podľa potreby aj s dolnými indexmi.

Výrokové premenné formalizujú jednoduché výroky.

Výrokové formuly

- Povedzme, že máme množinu výrokových premenných $\mathcal{V} = \{\text{kim}, \text{jim}, \text{sarah}\}$
- Ako môžu vyzerať formuly vybudované nad touto množinou?
  - Samotné premenné, napr. sarah.
  - Negácie premenných, napr. $\neg$sarah.
  - Premenné alebo aj ich negácie spojené spojkou, napr. $(\neg\text{kim} \lor \text{sarah})$.
  - Ale negovať a spájať spojkami môžeme aj zložitejšie formuly, napr. $(\neg(\text{kim} \land \text{sarah}) \rightarrow (\neg\text{kim} \lor \neg\text{sarah}))$.
- Ako presne popíšeme, čo je formula?
  Induktívnou definíciou:
  1. Povieme, čo sú základné formuly, ktoré sa nedajú rozdeliť na menšie formuly.
  2. Opíšeme, ako sa z jednoduchších formúl skladajú zložitejšie.

Výrokové formuly

Definícia 2.6

Množina $\mathcal{E}$ všetkých *výrokových formúl* nad množinou výrokových premenných $\mathcal{V}$ je najmenšia množina postupností symbolov, pre ktorú platí:

(i) každá výroková premenná $p \in \mathcal{V}$ je výrokovou formulou z $\mathcal{E}$ (hovoríme jej *atomická formula* alebo iba *atóm*);

(ii) ak A je výroková formula z $\mathcal{E}$, tak aj postupnosť symbolov $\neg A$ je výrokovou formulou z $\mathcal{E}$ (*negácia* formuly A);

(iii) ak A a B sú výrokové formuly z $\mathcal{E}$, tak aj $(A \land B)$, $(A \lor B)$ a $(A \to B)$ sú výrokovými formulami z $\mathcal{E}$ (*konjunkcia*, *disjunkcia*, *implikácia* formúl A a B).

Dohoda

Výrokové formuly skrátene nazývame iba *formuly* a označujeme ich veľkými písmenami A, B, C, X, Y, Z, podľa potreby aj s dolnými indexmi.

Výrokové formuly

Príklad 2.7

Nech $\mathcal{V} = \{\text{kim}, \text{jim}, \text{sarah}\}$.
Ako vyzerá množina $\mathcal{E}$ všetkých výrokových formúl nad $\mathcal{V}$?

$$
\begin{aligned}
\mathcal{E} = \{&\text{kim}, \text{jim}, \text{sarah}, && \text{podľa (i)}\\
&\neg\text{kim}, \neg\text{jim}, \neg\text{sarah}, && \text{podľa (ii)}\\
&(\text{kim} \land \text{kim}), (\text{kim} \land \text{jim}), (\text{kim} \land \text{sarah}), && \text{podľa (iii) pre } \land\\
&(\text{kim} \land \neg\text{kim}), (\text{kim} \land \neg\text{jim}), (\text{kim} \land \neg\text{sarah}),\\
&(\text{jim} \land \text{kim}), (\text{jim} \land \text{jim}), (\text{jim} \land \text{sarah}),\\
&(\text{jim} \land \neg\text{kim}), (\text{jim} \land \neg\text{jim}), (\text{jim} \land \neg\text{sarah}),\\
&(\neg\text{kim} \land \text{kim}), (\neg\text{kim} \land \text{jim}), (\neg\text{kim} \land \text{sarah}), \dots,\\
&(\neg\text{jim} \land \neg\text{sarah}), \dots, && \text{podľa (iii) pre } \rightarrow\\
&(\text{sarah} \lor (\text{kim} \rightarrow \text{jim})), \dots, && \text{a potom pre } \lor\\
&(\neg(\text{kim} \land \text{sarah}) \lor (\neg\text{jim} \rightarrow \neg\text{sarah})), \dots\} && \text{podľa (iii) pre } \land, \rightarrow, \lor
\end{aligned}
$$

Vytvárajúca postupnosť

Definícia 2.8

Vytvárajúcou postupnosťou nad množinou výrokových premenných $\mathcal{V}$ je ľubovoľná konečná postupnosť postupností symbolov, ktorej každý člen je výroková premenná z $\mathcal{V}$, alebo má tvar $\neg A$, pričom A je nejaký predchádzajúci člen postupnosti, alebo má jeden z tvarov $(A \wedge B)$, $(A \vee B)$, $(A \rightarrow B)$, kde A a B sú nejaké predchádzajúce členy postupnosti.
Vytvárajúcou postupnosťou pre X je ľubovoľná vytvárajúca postupnosť, ktorej posledným prvkom je X.

Tvrdenie 2.9

Postupnosť symbolov A je formulou vtedy a len vtedy, keď existuje vytvárajúca postupnosť pre A.

Vytvárajúca postupnosť

Príklad 2.10

Nájdime vytvárajúcu postupnosť pre formulu $(\neg \mathrm{kim} \rightarrow (\mathrm{jim} \vee \mathrm{sarah}))$.

Literatúra

Raymond M. Smullyan. *Logika prvého rádu*. Alfa, 1979. Z angl. orig. *First-Order Logic*, Berlin-Heidelberg: Springer-Verlag, 1968 preložil Svätoslav Mathé.

Vítězslav Švejdar. *Logika: neúplnost, složitost, nutnost*. Academia, 2002. Prístupné aj na http://www1.cuni.cz/~svejdar/book/LogikaSve2002.pdf.