Université d'Abomey-Calavi

Faculté des Sciences et Techniques

Rapport de stage

Thème :

Théorème de Hahn-Banach et Applications

Auteurs :
DOSSA N. Rosine
VIGAN Junior I.C.

Superviseur :
Dr.HOUÉDANOU K. Wilfrid

12 mars 2024

Table des matières

Introduction

En mathématique, et plus particulièrement en analyse et en géométrie, le **théorème de Hahn-Banach**, dû aux deux mathématiciens **Hans Hahn** [1] et **Stefan Banach** [2], garantit l'existence d'une forme linéaire vérifiant certaines conditions (valeurs imposées sur une partie de l'espace, mais limitées partout).
En permettant de prouver abstraitement l'**existence de nombreuses fonctions continues**, c'est un outil fondamental de l'analyse fonctionnelle.
Par son **interprétation géométrique** en termes d'hyperplans évitant un convexe fixé, il joue également un rôle primordial dans l'étude de la **géométrie des convexes**, et au-delà en **analyse convexe**.

1. 1879-1934, mathématicien autrichien.
2. 1892-1945, mathématicien polonais.

Chapitre 1

Forme linéaire

Dans toute la suite on considère le corps commutatif $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

1.1 Définition

Soit E un espace vectoriel sur un corps commutatif $\mathbb{K}$. Une **forme linéaire** sur E (ou **covecteur** de E) est une application ϕ de E dans $\mathbb{K}$ qui est **linéaire**, c'est-à-dire qui vérifie :
$\forall (x, y) \in E^2$, $\forall \lambda \in \mathbb{K}$, $\phi(\lambda x + y) = \lambda\phi(x) + \phi(y)$.
L'ensemble des formes linéaire sur E est noté $E^* = \mathcal{L}(E, \mathbb{K})$.

1.2 Continuité des applications linéaires

1.2.1 Propositions

Soient E et F deux espaces vectoriels normés sur un corps $\mathbb{K}$ et $f : E \to F$ une application linéaire. Les assertions suivantes sont équivalentes :

i) l'application f est continue en un point x_0 de E ;

ii) l'application f est continue (en tout point de E) ;

iii) il existe $M > 0$ tel que pour tout $x \in E$, $||f(x)||_F \leq M||x||_E$;

iv) l'application f est uniformément continue.

Preuve

$i) \implies ii)$ Supposons f continue en $x_0 \in E$. Pour tout $\epsilon > 0$, il existe $\eta > 0$ tel que pour tout $z \in E$, $||z - x_0||_E \leq \eta \implies ||f(z) - f(x_0)||_F \leq \epsilon$. Soit x un point arbitrairement choisi dans E. Pour tout y $\in$ E, on a en utilisant la linéarité de f,

$f(y)-f(x)=f(y-x)=f(y+x_0-x)-f(x_0)$, donc si $||y-x||_E = ||y+x_0-x-x_0||_E \leq \eta$ on a $||f(y)-f(x)||_F \leq \epsilon$. L'application f est donc continue (en x point arbitrairement pris dans E).

$ii) \implies iii)$ Supposons f continue, donc en particulier en 0_E. Il existe $\eta > 0$ tel que pour tout $z \in E$, la condition $||z||_E \leq \eta$ entraîne $||f(z)||_F \leq 1$. Pour tout $x \in E - \{0_E\}$ et en posant $z = \dfrac{\eta}{||x||_E}x$, on a $f(x) = \dfrac{||x||_E}{\eta}f(z)$, et donc
$||f(x)|| = \dfrac{||x||}{\eta}||f(z)|| \leq \dfrac{1}{\eta}||x||_E$ car $||f(z)||_F \leq 1$.
Cette dernière inégalité étant trivialement vérifiée pour $x = 0_E$, on a donc iii) avec $M = \dfrac{1}{\eta}$.

$iii) \implies iv)$ Supposons iii) et soit $x, y \in E$.Puisque f est linéaire, on a $||f(x)-f(y)||_F = ||f(x-y)||_F \leq ||x-y||_E$, mais ceci exprime que f est uniformément continue puisque lipschitzienne de rapport M.

$iv) \implies i)$ L'uniforme continuité de f implique qu'elle est continue en tout point et donc en un point $x_0 \in E$ et on a i).

Remarque

L'ensemble des applications linéaires continues de E dans F est noté $\mathcal{L}$(E,F). Posons pour $f \in \mathcal{L}(E,F)$,

$$||f(x)|| = \sup_{x\in E,\ ||x||_E \leq 1} ||f(x)||_F.$$

De façon équivalente, on a :

$$||f|| = \sup_{x\in E,\ x\neq 0} \frac{||f(x)||_F}{||x||_E} = \sup_{x\in E,\ ||x||_E=1} ||f(x)||_F = \inf\{M \geqslant 0,\ \forall E,\ ||f(x)||_F \leq M||x||_E\}$$

En particulier, pour tout $x \in E$,

$$||f(x)|| \leq ||f||.||x||.$$

Chapitre 2

Forme analytique et forme géométrique du théorème de Hahn-Banach

Les énoncés dénommés «**théorème de Hahn-Banach**» dans la littérature scientifique sont nombreux, différant les uns des autres parfois par de simples détails et nettement en deux classes : certains garantissent de pouvoir prolonger une forme linéaire, sous certaines exigences de majoration (les formes «**analytiques**» du théorème) ; d'autres assurent qu'on peut séparer deux ensembles convexes par un hyperplan affine (les formes «**géométriques**» du théorème).

2.1 Lemme de Zorn

2.1.1 Définitions

Soit P un ensemble **ordonné** muni d'une relation d'ordre($\leq$).
Soit $Q \subset P$
(1) On dit que Q est **totalement ordonné** si $\forall a, b \in Q, a \leq b$ ou $b \leq a$;
(2) On dit que $c \in P$ est un **majorant** de Q si pour tout $a \in Q$, $a \leq c$;
(3) On dit que m est un **élément maximal** de P si pour tout $a \in P$ tel que $m \leq a$, on a $m = a$;
(4) On dit que P est **inductif** si $\forall Q_i \subset P$ totalement ordonné Q_i possède une borne supérieure.

Lemme de Zorn

Tout ensemble inductif possède un élément maximal.

2.2 Forme analytique du théorème

Soit E un **espace vectoriel** sur $\mathbb{R}$. Soit $p : E \longrightarrow \mathbb{R}$ une **fonction convexe**[1] telle que

— $p(x+y) \leq p(x) + p(y)$ $\forall x, y \in E$;

— $p(\lambda x) = \lambda p(x)$, $\forall x \in E$,$\forall \lambda \in [0,1]$.

Soit G un sous-espace vectoriel de E. Soit $f : G \longrightarrow \mathbb{R}$ forme linéaire telle que $f(x) \leq p(x)$,$\forall x \in G$. Alors il existe g une **forme linéaire** définie sur E qui prolonge f, c'est-à-dire $f(x) = g(x)$ $\forall x \in G$ et $g(x) \leq p(x)$,$\forall x \in E$.

Preuve

Existence de g

Soit P=$\{h : D(h) \longrightarrow \mathbb{R}, G \subset D(h)\}$ avec $D(h) \subset E$ et h une forme linéaire telle que $h(x) \leq p(x)$, $\forall x \in D(h)$ et h prolonge f.
Munissons P d'une relation d'ordre "$\leq$" telle que :
$h_1 \leq h_2 \iff D(h_1) \subset D(h_2)$ et h_2 prolonge h_1.
$P \neq \phi$ car $f \in P$.
P est inductif. En effet
Soit $Q \subset P$ totalement ordonné tel que Q=$(h_i)_{i\in I}$ avec $D(h) = \bigcup_{i\in I} D(h_i)$ (I$\simeq \mathbb{N}$) et $h(x) = h_i(x)$ si $x \in D(h_i)$. D'après le lemme de Zorn P admet un élément maximal que nous notons $D(g)$ avec g la forme linéaire qui prolonge f.

Unicité de g

L'objectif ici est de montrer que $D(g) = E$. Pour cela nous allons raisonner par l'absurde en supposant que $D(g) \neq E$.
Alors il existe $x_0 \notin D(g)$ et $x_0 \in E$. Posons $D(h) = D(g) \oplus \mathbb{R}x_0$. Soit $x \in D(g)$, on pose $h(x + tx_0) = g(x) + t\alpha$, avec $t \in \mathbb{R}$ et α une constante. Par suite on a $g(x) + t\alpha \leq p(x + tx_0)$(par hypothèse).
En prenant $t = 1$, $g(x) + \alpha \leq p(x + x_0)$ et $t = -1$, $g(x) - \alpha \leq p(x - x_0)$, $\forall x \in D(g)$. Ainsi

$$\sup_{y\in D(g)} \{g(y) - p(y - x_0)\} \leq \alpha \leq \inf_{x\in D(g)} \{p(x + x_0) - g(x)\}$$

1. C'est-à-dire, $\forall (x,y) \in E^2$, $\lambda \in [0,1]$, $p(\lambda x + (1-\lambda)y) \leq \lambda p(x) + (1-\lambda)p(y)$

Par suite $g(y) - p(y - x_0) \leq p(x + x_0) - g(x)$, $\forall y \in D(g)$, $\forall x \in D(g)$. Ainsi $g(x) + g(y) \leq p(x + y) \leq p(x + x_0) + p(y - x_0)$(absurde), car g est l'élément maximal.

2.3 Forme géométrique du théorème

2.3.1 Définitions

Ensemble convexe

Un ensemble C est dit **convexe** lorsque, pour tout x et y de C, le segment $[x, y]$ est tout entier contenu dans C, c'est-à-dire :

$$\forall x, y \in C, \forall t \in [0, 1], tx + (1 - t)y \in C$$

Ensemble ouvert

Soit E un espace vectoriel normé. Un sous ensemble U de E est dit **ouvert** lorsque

$$\forall x \in U, \exists r > 0, B(x, r) \subset U$$

Hyperplan

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel et H_α ($\alpha \in \mathbb{K}$) un sous espace vectoriel de E.
H_α est un **hyperplan** de E si H_α est le noyau d'une forme linéaire f definie sur E, non nulle. C'est-à-dire :

$$\exists \alpha \in \mathbb{K}, H_\alpha = \{x \in E | f(x) = \alpha\}$$

2.3.2 Séparation au sens large - Séparation au sens strict

Soient A et B deux sous ensembles d'un $\mathbb{R}$-espace vectoriel E, $f \in E^*$ et H_α un hyperplan de E.

- A et B sont **séparés au sens large** $\Longleftrightarrow$ $f(x) \leq \alpha$ $\forall x \in A$ et $f(x) \geq \alpha$ $\forall x \in B$.
- A et B sont **séparés au sens strict** $\Longleftrightarrow$ $f(x) \leq \alpha - \epsilon$ $\forall x \in A$ et $f(x) \geq \alpha + \epsilon$ $\forall x \in B$ avec $\epsilon > 0$.

Lemme 1

Soit E un espace vectoriel normé et $A \subset E$ un convexe ouvert tel que $0 \in A$. Alors la jauge[2] p de A vérifie les propriétés suivantes :

(1) $A = \{x \in E / p(x) < 1\}$;

(2) $p(\lambda x) = \lambda p(x)$, $\forall x \in E$ et $\forall \lambda \geq 0$;

(3) $p(x+y) \leq p(x) + p(y)$, $\forall x \in E$, $\forall y \in E$;

(4) $\exists M > 0 / p(x) \leq M||x||$, $\forall x \in E$;

(5) p est continue.

Lemme 2

Soit C un **convexe ouvert** de E (E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel). Soit $x_0 \in E$ avec $x_0 \notin C$. Alors

$$\exists f \in E^*, f(x) < f(x_0).$$

2.3.3 1^{er} Théorème de Hahn-Banach-forme géométrique

Soit E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel. Soient A et B deux sous ensembles **non vides** de E **disjoints** et **convexes**. On suppose que A est **ouvert**.
Alors il existe un **hyperplan fermé** qui sépare au **sens large** A et B.

Preuve

On a A ouvert et B quelconque. Posons $C = A - B$. $C = \bigcup_{y \in B} (A - y)$.
Alors C est **ouvert**.
De plus C est **convexe**. En effet, soit $x, y \in C$ tels que $\begin{cases} x = x_A - x_B \\ y = y_A - y_B \end{cases}$, avec $(x_A, y_A) \in A^2$ et $(x_B, y_B) \in B^2$. Soit $t \in [0,1]$.

$$\begin{aligned} tx + (1-t)y &= t(x_A - x_B) + (1-t)(y_A - y_B) \\ &= tx_A + (1-t)y_A - (tx_B + (1-t)y_B) \in C \end{aligned}$$

car A et B sont convexes. Par ailleurs $0 \notin C$ puis que $A \cap B = \phi$. D'après le **lemme 2**,
$\exists f \in E^* /\ f(c) < f(0)$, $\forall c \in C$. En posant $c = a - b$, $a \in A$ et $b \in B$,
$f(a-b) < 0 \iff f(a) - f(b) < 0 \iff f(a) < f(b)$. Ainsi $\exists \alpha \in \mathbb{R}$ tel que

$$\sup_{a \in A} (f(a)) \leq \alpha \leq \inf_{b \in B} (f(b))$$

2. C'est l'unique sous norme telle que $A = \{x / p(x) < 1\}$

. D'où A et B sont séparés au sens large.

2.3.4 $2^{ème}$ Théorème de Hahn-Banach-forme géométrique

Soit E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel. Soient A et B deux sous ensembles de E **non vides**, **disjoints** et **convexes**. On suppose que A est **fermé** et B est **compact**.
Alors il existe un **hyperplan** qui sépare au **sens strict** A et B.

Preuve

A est fermé et B est compact. Posons $C = A - B$.
Soit $x \in \overline{A - B}$, alors $\exists (a_n) \in A, \exists (b_n) \in B$ telle que

$$\lim_{n \longrightarrow +\infty} a_n - b_n = x \iff ||a_n - b_n - x|| \xrightarrow[n \longrightarrow +\infty]{} 0$$

. B étant compact, $\exists (b_{\sigma(n)}) \xrightarrow[n \longrightarrow +\infty]{} b$ dans B. Alors $(a_{\sigma(n)} - b_{\sigma(n)}) \xrightarrow[n \longrightarrow +\infty]{} x$ et donc

$$\lim_{n \longrightarrow +\infty} (a_{\sigma(n)} - b_{\sigma(n)}) = x \iff \lim_{n \longrightarrow +\infty} a_{\sigma(n)} = x + \lim_{n \longrightarrow +\infty} b_{\sigma(n)} = x + b \in A.$$

Alors $x \in C = A - B$. Ainsi $A - B$ est fermé. On a $0 \notin C$ car $A \cap B = \phi$.
Comme $(A - B)^c$ est un ouvert, il existe $r > 0$ tel que $B(0, r) \subset (A - B)^c$.
Ainsi : $B(0, r) \cap (A - B) = \phi$. Alors il existe $f \in E^*$ telle que $f(x) \leq \alpha \leq f(a - b)$, $x \in B(0, r)$.
On a :$B(x, r) = x + rB(0, r)$.

$$\begin{aligned} f(a-b) \leq \alpha \leq f(x + rz), z \in B(0, r) &\implies f(a) - f(b) \leq \alpha \leq f(0) + rf(z) \\ &\implies f(a) \leq \alpha + f(b) \leq f(b) + r||f||. \end{aligned}$$

Quand r tend vers 0, on a $f(a) \leq \alpha \leq f(b)$, $\forall a \in A$ et $\forall b \in B$. A et B sont donc séparables au sens strict.

Chapitre 3

Applications

Exercice 1

Soit E un $\mathbb{R}-$espace vectoriel normé, G un sous-espace vectoriel de E, et $f \in \mathcal{L}(G, \mathbb{R})$ une forme linéaire **continue** de norme $||f||_G$ .Alors il existe une forme linéaire **continue** $g \in \mathcal{L}(E, \mathbb{R})$ qui prolonge f et telle que $||g||_E = ||f||_G$.

Corrigé

Puisque f est continue, on a :
$\forall x \in G, f(x) \leq |f(x)| \leq ||f||.||x|| = N(x)$.
Si on considère la semi-norme[1] $x \mapsto N(x)$,d'après le théorème précédent, il existe $g : E \longrightarrow \mathbb{R}$ une forme linéaire telle que $g/_G = f$ et $g(x) \leq N(x)$ $\forall x \in E$.
Par suite :$\forall x \in E, -g(x) = g(-x) \leq ||f||.|| - x|| = N(x)$
et donc $\forall x \in E, |g(x)| \leq N(x)$.D'où g est continue avec $||g|| \leq ||f||$.Or :

$$||f|| = \sup_{x \in G,\, x \neq 0} \frac{|f(x)|}{||x||} = \sup_{x \in G,\, x \neq 0} \frac{|g(x)|}{||x||} \leq \sup_{x \in E,\, x \neq 0} \frac{|g(x)|}{||x||} = ||g||.$$

Donc $||g|| = ||f||$.

1. C'est une application $N : E^2 \longrightarrow \mathbb{R}_+$ vérifiant :
$\forall (x, y) \in E^2$, $N(x + y) \leq N(x) + N(y)$
$\forall x \in E$, $\forall \lambda \in \mathbb{K}$, $N(\lambda x) = |\lambda| N(x)$

Exercice 2

Soit $F \subset E$ un sous espace vectoriel de E (E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel) tel que $\overline{F} \neq E$.
Alors, il existe $f \in E^*$ avec $f \neq 0$ tel que $f(x) = 0$, $\forall x \in F$.

Corrigé

Soient E un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$, F un sous espace vectoriel de E.
$\overline{F} \neq E \implies \exists x_0$ tel que $x_0 \in E$ et $x_0 \notin \overline{F}$
$\overline{F}$ est fermé et convexe car $tx + (1-t)y \in \overline{F}$.
$\{x_0\}$ est un convexe compact.On a donc $\overline{F} \cap \{x_0\} = \phi$. Alors $\exists f \in E^*$ telle que $f(y) \leq \alpha < f(x_0)$, $\forall y \in F$.
Montrons que si $\exists \alpha \in \mathbb{R}$ fixé tel que $f(x) \leq \alpha \ \forall x \in F$, alors $F \subseteq \ker(f)$ (i.e $f(x) = 0 \ \forall x \in E$)
F étant un sous espace vectoriel de E, on a $\forall x \in F$, $x + x \in F$. Par itération sur la somme on a $nx \in F$ ($n \in \mathbb{N}$). Ainsi,

$$
\begin{aligned}
f(nx) \leq \alpha &\implies nf(x) \leq \alpha \\
&\implies f(x) \leq \frac{\alpha}{n} \xrightarrow[n \longrightarrow +\infty]{} 0 \\
&\implies f(x) = 0 \\
&\implies F \subseteq \ker(f)
\end{aligned}
$$

Par suite $f(x) = 0$,$\forall x \in F$.

Bibliographie

(1) Internet ;

(2) **Cours de topologie générale** de **Dr.HOUENOU Franck** ;

(3) **Fonctions d'une variable** de **Dr.HOUEDANOU K.Wilfrid** ;

(4) Youtube ;