B.1. Να υπολογίσετε αναλυτικά τις ποσότητες $E[Y(t)]$ και $E(Y(t+\tau), Y(t))$

Λύση:

Αρχικά θα υπολογίσουμε την μέση τιμή της $X(t)$

$$E[X(t)] = E\left[\sum_{n=-\infty}^{\infty} X_n \varphi(t-nT)\right] = \sum_{n=-\infty}^{\infty} E(X_n)\varphi(t-nT) \Leftrightarrow$$

$$E[X(t)] = 0$$

Έπειτα θα υπολογίσουμε τις τιμές

i) $E[Y(t)]$

ii) $R_{YY}(t+\tau, t) = E(Y(t+\tau)\,Y(t))$

i) Μας δίδεται ότι X_n ανεξάρτητη από την τυχαία μεταβλητή θ για κάθε n.

Η συνάρτηση $X(t)$ είναι συνάρτηση των X_n και η συνάρτηση $\cos(2\pi f_0 t + \theta)$ είναι συνάρτηση του θ.

Επομένως η $X(t)$ και η $\cos(2\pi f_0 t + \theta)$ είναι ανεξάρτητες.

Οπότε $E[Y(t)] = E(X(t)\cdot\cos(2\pi f_0 t + \theta)) =$

$E(X(t))\,E(\cos(2\pi f_0 t + \theta)) =$

$E(X(t))\int_0^{2\pi} \cos(2\pi f_0 t + \theta) f_\theta(\theta)\,d\theta =$

$$\frac{1}{2\pi}\underbrace{E(X(t))}_{\to 0}\underbrace{\int_0^{2\pi}\cos(2\pi f_0 t + \theta)\,d\theta}_{\to 0} = 0$$

καθώς το ολοκλήρωμα ημιτονοειδούς συνάρτησης σε μία περίοδο ισούται με 0.

Άρα $E[Y(t)] = 0$

ii) $E[Y(t+\tau)Y(t)] = E[X(t+\tau)\cos(2\pi f_0(t+\tau)+\Theta) X(t)\cos(2\pi f_0 t+\Theta)] = E[X(t+\tau)X(t)] \cdot E[\cos(2\pi f_0 t+\Theta) \cdot \cos(2\pi f_0(t+\tau)+\Theta)]$ λόγω ανεξαρτησίας

$E[Y(t+\tau)Y(t)] = R_{XX}(t+\tau,t)\, E(\cos(2\pi f_0 t+\Theta)\cdot\cos(2\pi f_0(t+\tau)+\Theta))$

Από την τριγωνομετρική ταυτότητα:
$\cos a \cdot \cos b = 1/2(\cos(a-b) + \cos(a+b))$
έχουμε:

$E[Y(t+\tau)Y(t)] = \frac{1}{2}R_{XX}(t+\tau,t)[E(\cos(2\pi f_0\tau) + \cos(4\pi f_0 t + 2\pi f_0\tau + 2\Theta))]$

B2 Να χαρακτηρίσετε την $Y(t)$ ως προς την (κυκλο)-στασιμότητα υπό την ευρεία έννοια.

Για να χαρακτηρίσουμε μια στοχαστική διαδικασία $X(t)$ ως κυκλοστάσιμη υπό την ευρεία έννοια με περίοδο T πρέπει:

i) $m_X(t+T) = m_X(t),\ \forall t \in \mathbb{R}$
ii) $R_{XX}(t+\tau,t) = R_{XX}(t+\tau+T, t+\tau),\ \forall \tau, t \in \mathbb{R}$

Οπότε για την $Y(t)$ έχουμε:

i) $E(Y(t)) = 0$ οπότε προφανώς η μέση τιμή είναι περιοδική με περίοδο T.

ii) Για να ελέγξουμε την περιοδικότητα της $R_{YY}(t+\tau,t)$ πρέπει πρώτα να ελέγξουμε την περιοδικότητα της $R_{XX}(t+\tau,t)$

$R_{xx}(t+\tau, t) = E(x(t+\tau)x(t)) =$
$E[\sum_n x_n \varphi(t+\tau-nT) \sum_n x_n \varphi(t-nT)] =$
$E(x_n^2) \sum \varphi(t+\tau-nT)\varphi(t-nT) = \sigma_x^2 \sum \varphi(t+\tau-nT)\varphi(t-nT)$

$R_{xx}(t+\tau+T, t+T) = E(x(t+\tau+T)x(t+T)) =$
$E[\sum_n x_n \varphi(t+\tau+T-nT) \sum_n x_n \varphi(t+T-nT)] =$
$\underbrace{E(x_n^2)}_{\sigma_x^2} \sum_n \varphi(t+\tau-T(-1+n))\varphi(t-(n-1)T)$

Αν θέσουμε $n-1=k$ τότε:

$R_{xx}(t+\tau+T, t+T) = \sigma_x^2 \sum \varphi(t+\tau-kT)\varphi(t-kT)$

Άρα $R_{xx}(t+\tau, t) = R_{xx}(t+\tau+T, t+T)$ οπότε η R_{xx} περιοδική συνάρτηση

Επομένως η $R_{yy}(t+\tau, t)$ είναι επίσης περιοδική

Άρα η $y(t)$ είναι κυκλοστατική υπό την ευρεία έννοια.

Θα εξετάσουμε την $y(t)$ ως προς τη στασιμότητα υπό την ευρεία έννοια

Προϋποθέσεις:

i) $m_y(t) = m_y \quad \forall t \in \mathbb{R}$
ii) $R_{yy}(t_1, t_2) = R_{yy}(t_1 - t_2) = R_{yy}(\tau)$

Η πρώτη προϋπόθεση τηρείται αλλά η δεύτερη όχι επομένως η $y(t)$ <u>δεν</u> είναι στάσιμη υπό την ευρεία έννοια.

B.3 Να υπολογίσετε τη φασματική πυκνότητα ισχύος της $y(t)$, $S_y(f)$ συναρτήσει της $S_x(f)$ και της συχνότητας διαμόρφωσης f_0.

Λύση:

Γνωρίζουμε ότι η στοχαστική διαδικασία $y(t)$ είναι κυκλοστάσιμη.

Επομένως για την φασματική πυκνότητα ισχύος της ισχύει:

$$S_y(f) = F\{\tilde{R}_y(\tau)\} \quad \text{όπου} \quad \tilde{R}_y(\tau) = \frac{1}{T}\int_T R_{yy}(t+\tau,t)\,dt$$

$$R_{yy}(t+\tau,t) = \frac{1}{2}R_{xx}(t+\tau,t)\left(\cos 2\pi f_0\tau + E\left(\cos(4\pi f_0 t + 2\pi f_0\tau + 2\Theta)\right)\right)$$

$\cos(-x) = \cos x$

$$= \frac{1}{2}R_{xx}(t+\tau,t)\left(\cos 2\pi f_0\tau + \int_0^{2\pi}\cos(4\pi f_0 t + 2\pi f_0\tau + 2\Theta)\frac{1}{2\pi}\,d\Theta\right)$$

καθώς είναι το ολοκλήρωμα ημιτονοειδούς συνάρτησης σε μία περίοδο.

Άρα $R_{yy}(t+\tau,t) = \frac{1}{2}R_{xx}(t+\tau,t)\cos 2\pi f_0\tau$

$$\tilde{R}_y(\tau) = \frac{1}{T}\int_T \frac{1}{2}R_{xx}(t+\tau,t)\cos 2\pi f_0\tau\,dt$$

$$\frac{1}{T}\cdot\frac{1}{2}\cos 2\pi f_0\tau\int_T R_{xx}(t+\tau,t)\,dt$$

$$\cancel{\frac{\cos 2\pi f_0\tau}{2T}\int_T \sigma_x^2\sum_n \varphi(t+\tau-nT)\varphi(t-nT) =}$$

$$\cancel{\frac{\cos 2\pi f_0\tau\cdot\sigma_x^2}{2T}\int_T\sum_n \varphi(t+\tau-nT)\varphi(t-nT)}$$

$$\tilde{R}_y(\tau) = \frac{1}{2}\cos 2\pi f_0 \tau \, \frac{1}{T}\int_T R_{xx}(t+\tau,t)\,dt \Leftrightarrow$$

$$\tilde{R}_y(\tau) = \frac{\cos 2\pi f_0 \tau}{2}\tilde{R}_x(\tau)$$

Άρα $S_y(F) = \mathcal{F}\{\tilde{R}_y(\tau)\} = \frac{1}{2}\mathcal{F}\{\cos 2\pi f_0\tau \, \tilde{R}_x(\tau)\}$

Για την στοχαστική διαδικασία $X(t)$ γνωρίζουμε ότι

$m_x(t) = 0$ και $R_{xx}(t+\tau,t) = \sigma_x^2 \sum \varphi(t+\tau-nT)\,\varphi(t-nT)$

οπότε είναι κυκλοστάσιμη με την ευρεία έννοια αλλά όχι στάσιμη.

Επομένως ισχύει

$S_x(F) = \mathcal{F}\{\tilde{R}_x(\tau)\}$ όπου $\tilde{R}_x(\tau) = \frac{1}{T}\int_T R_{xx}(t+\tau,t)\,dt$

Οπότε για την φασματική πυκνότητα ισχύος της $y(t)$:

$$S_y(F) = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}S_x(F+F_0) + \frac{1}{2}S_x(F-F_0)\right) \Rightarrow$$

$$S_y(F) = \frac{1}{4}\left(S_x(F+F_0) + S_x(F-F_0)\right)$$