组合数学

浙江大学 宋逸群

目录

- 排列组合
- 鸽巢原理
- 二项式系数
- 容斥原理
- 生成函数
- 特殊计数序列

计数原理

- 设集合 S 的一系列子集 $S_1,S_2,\ldots,S_m$ 满足 $S=S_1\cup S_2\cup\cdots\cup S_m=\bigcup_{i=1}^{m}S_i$，且对于不相等的 $i,j\in[1,m]$，有 $S_i\cap S_j=\varnothing$，那么我们称 $S_1,S_2,\ldots,S_m$ 是 S 的一个划分

- 根据这个定义，一个划分中可以存在空集，所以理论上划分可以包含无限多的子集，但是空集是没有意义的，所以我们通常不予考虑

计数原理

- 加法原理：若集合S的一个划分为 $S_1, S_2, \ldots, S_m$ ，则 S 中对象的数目

$$|S| = S_1 + S_2 + \cdots + S_m = \sum_{i=1}^{m} S_i$$

- 乘法原理：若集合 $S = \{(a,b) \mid a \in A, b \in B\}$，$A, B$ 是集合，则 S 中对象的数目

$$|S| = |A| \cdot |B|$$

- 减法原理：若集合 S 被划分为了两部分$A, \overline{A}$，则 A 中对象的数目

$$|A| = |S| - |\overline{A}|$$

排列组合

- 排列：从 n 个元素中选出 m 个排成一列的方案数，记作P_n^m或 A_n^m ，由乘法原理

$$A_n^m = n \times (n-1) \times \cdots \times (n-m+1) = \frac{n!}{(n-m)!}$$

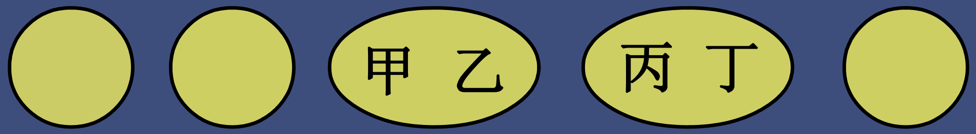
- 组合：从 n 个元素中选出 m 个的方案数，记作 C_n^m 或 $\binom{n}{m}$，由乘法原理

$$A_n^m = m!\binom{n}{m} \Rightarrow \binom{n}{m} = \frac{n!}{m!(n-m)!}$$

相邻元素捆绑法

- 现有 7 人站成一排，其中甲乙相邻且丙丁相邻，共有多少种不同的排法？

- 将甲乙两元素捆绑成整体并看成一个复合元素，同时丙丁也看成一个复合元素，再与其它元素进行排列



- 因此方案数为 $A_5^5 A_2^2 A_2^2 = 480$

不相邻问题插空法

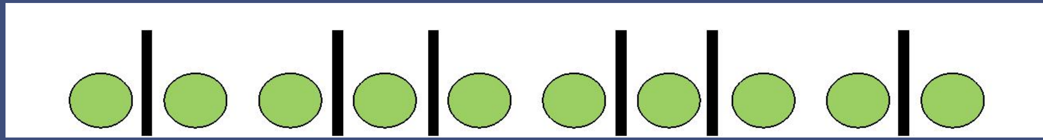
- 现有 4 个 A 球, 2 个 B 球, 3个 C 球，把它们排成一排，所有 A 球不能相邻，且所有的球都是可分辨的，求有多少种排法？

- 先把 B, C 球排好，此时出现了 6 个间隙，把 A 球插入这些间隙就行了
- 方案数为 $A_5^5 A_6^4 = 43200$

元素相同问题隔板法

- 把10个完全相同的球放入7个盒子中，每个盒子至少放一个，求方案数

- 我们发现10 个球中间有9 个间隙，在这些间隙中插入6 个隔板就能把这些球分割为7 个部分，每一部分对应一个盒子



- 因此方案数为 $\binom{9}{6} = 84$

不定方程的解数——LEVEL 1

- 求不定方程 $x_1+x_2+\cdots+x_k=n$ 的正整数解个数
- 这个问题等价于把 n 个完全相同的球放入 k 个盒子每个盒子至少放一个球

的方案数，即 $\binom{n-1}{k-1}$

不定方程的解数——LEVEL 2

- 求不定方程 $x_1 + x_2 + \cdots + x_k = n$ 的非负整数解个数

- 这个问题等价于把 $n+k$ 个完全相同的球放入 k 个盒子每个盒子至少放一个

球的方案数，即 $\binom{n+k-1}{k-1}$

不定方程的解数——LEVEL 3

- 求不定方程 $x_1 + x_2 + \cdots + x_k = n$ 的整数解个数，其中 $x_1 \ge a_1, x_2 \ge a_2, \cdots, x_k \ge a_k$

- 这个问题等价于 $x_1 + x_2 + \cdots + x_k = n - a_1 - a_2 - \cdots - a_k$ 的非负整数解个数，因此

方案数为 $\binom{n+k-1-\sum_{i=1}^{k} a_i}{k-1}$

循环排列

- 刚才我们接触的排列都是把对象排成一条线，即线性排列
- 然然而如果排成圆圈的话，对应的排列数量将会变少

- 循环排列：从 n 个元素中选出 m 个排成圆圈的方案数，相当于线性排列时

固定第一个数的方案数，即 $\frac{A_n^m}{m}$

多重集合

- 我们把含有相同元素的集合称为多重集合
- 设多重集合 S 中有 k 种不同的元素，每一种元素都有无限多个，那么从 S 中选出 m 个元素排成一列的方案数为 k^m
- 设多重集合 S 中有 k 种不同的元素，每一种元素都有有限多个，分别为 $n_1, n_2, \ldots, n_k$

设 S 的大小为 n，那么把 S 中的元素排成一列的方案数为 $\dfrac{n!}{n_1!n_2!\cdots n_k!}$

多重集合

- 设多重集合S中有k种不同的元素，每一种元素都有无限多个，那么从 S 中选出 m 个元素排成一列的方案数为 $\binom{m+k-1}{m}$
- 设每一种元素选取个数为 $x_1,x_2,\ldots,x_k$，那么它们需要满足

$$x_1+x_2+\cdots+x_k=m$$

由隔板法得出解的个数为 $\binom{m+k-1}{m}$

鸽巢原理

- 鸽巢原理：把 $n+1$ 个物品放入 n 个盒子中，那么至少有一个盒子包含两个或两个以上的物品
- 可以用反证法证明，如果所有盒子中的物品都至多有一个物品，那么物品数至多为 n，导出矛盾

鸽巢原理

- 应用一：在13个人中存在两个人，他们的生日在同一个月份里
- 应用二：给定序列$a_1, a_2, \ldots, a_m$，存在$1 \le k \le l \le m$使得$m \mid (a_k + a_{k+1} + \cdots + a_l)$
- 设$S_n = \sum_{i=1}^{n} a_i (S_0 = 0)$，那么$S$序列中有$m+1$个数，因此存在$1 \le k \le l \le m$使得

$$S_{k-1} \equiv S_l (\bmod m)$$

- 即 $m \mid (S_l - S_{k-1}) \Rightarrow m \mid (a_k + a_{k+1} + \cdots + a_l)$

鸽巢原理

- 应用三：九頭竜八一老师有 11 周的时间准备即将到来的龙王战，他决定每天至少下一盘将棋来保持手感，但是为了不使自己过度疲劳，他还决定每周不能下超过 12 盘将棋

- 证明：存在连续的若干天，期间八一老师恰好下了21盘将棋

鸽巢原理

- 设 S_i 表示前 i 天的盘数之和，那么显然 S_i 严格单调递增 $S_1 < S_2 < \cdots < S_{77}$
- 由于每周不能超过12盘，$S_{77} \le 11 \times 12 = 132$，因此

$$1 \le S_1 < S_2 < \cdots < S_{77} \le 132$$

$$22 \le S_1 + 21 < S_2 + 21 < \cdots < S_{77} + 21 \le 153$$

- 于是，这154个数 $S_1, S_2, \cdots, S_{77}, S_1 + 21, S_2 + 21, \cdots, S_{77} + 21$ 中必定存在两个是相等的
- 而 $S_1, S_2, \cdots, S_{77}$ 中没有相等的数，$S_1 + 21, S_2 + 21, \cdots, S_{77} + 21$ 中也没有相等的数
- 因此必然存在 $1 \le k < l \le 77$ 使得 $S_k + 21 = S_l$，即 $k+1, k+2, \cdots, l$ 天中下了恰好21盘

鸽巢原理加强版

- 鸽巢原理加强版：设 $q_1,q_2,\ldots,q_n$ 是正整数，如果将 $q_1+q_2+\cdots+q_n-n+1$ 个物品放入 n 个盒子中，记每个盒子中的物品数为 $a_1,a_2,\ldots,a_n$ ，则

$$(a_1 \geq q_1) \vee (a_2 \geq q_2) \vee \cdots \vee (a_n \geq q_n)$$

- 同样使用反证法证明，另所有的 $q=2$ 就得到了之前的较为简单的鸽巢原理

二项式系数

- 我们知道组合数$\binom{n}{k}$表示表示从 n 个物品中选出 k个的方案数

$$\binom{n}{k}=\frac{n!}{k!(n-k)!}=\frac{n(n-1)\cdots(n-k+1)}{k!}$$

- 我们称 n 为上指标，k 为下指标，由定义知道，上下指标均为整数且 $k\le n$

二项式系数

- 定义下降阶乘幂 $n^{\underline{k}} = n(n-1)\cdots(n-k+1)$，其中$n$ 为任意实数（甚至复数），则

$$\binom{n}{k} = \frac{n(n-1)\cdots(n-k+1)}{k!} = \frac{n^{\underline{k}}}{k!}$$

- 我们成功把上指标扩展到了任意实数，但是下指标依然必须是整数
- 上指标扩域之后的$\binom{r}{k}$称为二项式系数，当$k<0$时$\binom{r}{k}=0$
- 当上指标为整数时记为n，实数时记为r，以示区分

组合恒等式

- 对称恒等式：$\binom{n}{k}=\binom{n}{n-k}$

- 证明：$\binom{n}{k}=\frac{n!}{(n-k)!k!}=\frac{n!}{(n-k)!(n-(n-k))!}\binom{n}{n-k}$

- 注意：由于下指标必须是整数，因此这里 n,k 必须都是整数

组合恒等式

- 吸收恒等式：$\binom{r}{k}=\frac{r}{k}\binom{r-1}{k-1}$

- 证明：$\binom{r}{k}=\frac{r^{\underline{k}}}{k!}=\frac{r}{k}\cdot\frac{(r-1)^{\underline{k}}}{(k-1)!}=\frac{r}{k}\binom{r-1}{k-1}$

- 注意：由于分母上有 k，因此这里 $k\neq 0$

组合恒等式

- 吸收恒等式有一个保持下指标不变的相伴恒等式：$(r-k)\binom{r}{k}=r\binom{r-1}{k}$
- 证明：若 r 为正整数，则

$$(r-k)\binom{r}{k}=(r-k)\binom{r}{r-k}=r\frac{(r-1)^{\underline{r-k-1}}}{(r-k-1)!}=r\binom{r-1}{r-k-1}=r\binom{r-1}{k}$$

- 我们发现等式两边是 r 的 $k+1$ 次多项式，最多有 $k+1$ 个零点
- 现在我们证明了在整数范围内成立，即整数范围内有无穷多个零点
- 因此该多项式在实数范围内恒为零，即等式恒成立
- 这种借助多项式由整数推广到实数范围的方法我们称为多项式推理法

组合恒等式

- 加法公式：$\binom{r}{k}=\binom{r-1}{k}+\binom{r-1}{k-1}$
- 证明一：（组合推理）

设有$\boldsymbol{n}$个鸡蛋，其中有一个是坏的，那么从中选出$\boldsymbol{k}$个的方案数是$\binom{n}{k}$

选出的鸡蛋中不包含坏鸡蛋的方案数为$\binom{n-1}{k}$，包含坏鸡蛋的方案数为$\binom{n-1}{k-1}$

这两种计数方法所得答案相等，即$\binom{n}{k}=\binom{n-1}{k}+\binom{n-1}{k-1}$

使用多项式推理法推广到任意实数即为$\binom{r}{k}=\binom{r-1}{k}+\binom{r-1}{k-1}$

组合恒等式

- 证明二：（构造）

我们把吸收恒等式$k\binom{r}{k}=r\binom{r-1}{k-1}$，与其相伴恒等式$(r-k)\binom{r}{k}=r\binom{r-1}{k}$两边相加得到：

$$r\binom{r}{k}=r\binom{r-1}{k-1}+r\binom{r-1}{k}$$

两边约掉r即证

组合恒等式

- 证明三：（暴力）

$$
\begin{aligned}
\binom{r-1}{k}+\binom{r-1}{k-1} &= \frac{(r-1)^{\underline{k}}}{k!}+\frac{(r-1)^{\underline{k-1}}}{(k-1)!} \\
&= \frac{(r-k)(r-1)^{\underline{k-1}}}{k!}+\frac{k(r-1)^{\underline{k-1}}}{k!} \\
&= \frac{r^{\underline{k}}}{k!}=\binom{r}{k}
\end{aligned}
$$

组合恒等式

- 上指标求和：$\sum_{k=0}^{n}\binom{k}{m}=\binom{n+1}{m+1}$
- 证明：设有 $n+1$ 个物品，标号为 $0\sim n$，现在从中选取 $m+1$ 个物品，当选取的最大号码为 k 时，方案数为 $\binom{k}{m}$，那么枚举 k 累加方案数就得到了 $\sum_{k=0}^{n}\binom{k}{m}=\binom{n+1}{m+1}$

组合恒等式

- 平行恒等式：$\sum_{k=0}^{n}\binom{m+k}{k}=\binom{m+n+1}{n}$

- 证明：$\sum_{k=0}^{n}\binom{m+k}{k}=\sum_{k=0}^{n}\binom{m+k}{m}=\sum_{k=m}^{n+m}\binom{k}{m}=\binom{m+n+1}{m+1}-\binom{m}{m+1}=\binom{m+n+1}{n}$

组合恒等式

- 上指标反转：$\binom{r}{k}=(-1)^k\binom{k-r-1}{k}$

- 证明：$\binom{r}{k}=\dfrac{r^{\underline{k}}}{k!}=\dfrac{r(r-1)\cdots(r-k+1)}{k!}=\dfrac{(-1)^k(k-r-1)(k-r-2)\cdots(-r)}{k!}$

$$=\frac{(-1)^k(k-r-1)^{\underline{k}}}{k!}=(-1)^k\binom{k-r-1}{k}$$

组合恒等式

- 三项式系数恒等式：$\binom{r}{m}\binom{m}{k}=\binom{r-k}{m-k}\binom{r}{k}$
- 证明：$\binom{r}{m}\binom{m}{k}=\dfrac{r!}{k!(m-k)!(r-m)!}=\binom{r-k}{m-k}\binom{r}{k}$
- 我们知道二项式系数可以写成 $\binom{a+b}{a,b}=\dfrac{(a+b)!}{a!b!}$
- 类似的可以定义三项式系数 $\binom{a+b+c}{a,b,c}=\dfrac{(a+b+c)!}{a!b!c!}$
- 而 $\dfrac{r!}{k!(m-k)!(r-m)!}$ 符合这个形式，所以恒等式两边实质上都是三项式系数

组合恒等式

- 范德蒙德卷积：$\sum_{k=0}^{n}\binom{r}{k}\binom{s}{n-k}=\binom{r+s}{n}$

- 证明：右边表示从 r 个男生和 s 个女生中选出 n 个人的方案数
- 左边表示从 r 个男生中选 k 个人，从 s 个女生中选出 $n-k$ 个人的方案数

- 左边从 $k=0\sim n$ 累加起来就是右边的方案数

练习：一个比值的和式

- 求 $\sum_{k=0}^{m}\binom{m}{k}\Big/\binom{n}{k}$，其中 $n\geq m\geq 0$

我们把三项式系数恒等式 $\binom{r}{m}\binom{m}{k}=\binom{r-k}{m-k}\binom{r}{k}$ 写成

$$\frac{\binom{m}{k}}{\binom{r}{k}}=\frac{\binom{r-k}{m-k}}{\binom{r}{m}}$$

这样子的话，我们发现出现了下指标不变的商的形式，因此

$$\sum_{k=0}^{m}\frac{\binom{m}{k}}{\binom{n}{k}}=\sum_{k=0}^{m}\frac{\binom{n-k}{m-k}}{\binom{n}{m}}=\frac{\sum_{k=0}^{m}\binom{n-k}{n-m}}{\binom{n}{m}}=\frac{\sum_{k=n-m}^{n}\binom{k}{n-m}}{\binom{n}{m}}=\frac{\binom{n+1}{m}}{\binom{n}{m}}=\frac{n+1}{n-m+1}$$

二项式定理

- 二项式定理：$(x+y)^n=\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}x^k y^{n-k}$，其中 n 是正整数
- 广义二项式定理：$(x+y)^n=\sum_{k=0}^{+\infty}\binom{n}{k}x^k y^{n-k}$，其中 n 是任意实数
- 广义二项式定理的展开式是一个无穷级数，需要考虑收敛性问题
- 例如：$(x+1)^{\frac{1}{2}}=\sum_{k=0}^{+\infty}\binom{\frac{1}{2}}{k}x^k=1+\frac{x}{2}-\frac{x^2}{8}+\frac{x^3}{16}-\frac{5x^4}{128}+\cdots$，与泰勒展开的结果一致

二项式系数的数论性质

- 若 p 是素数，那么 $\binom{p}{1},\binom{p}{2},\ldots,\binom{p}{p-1}$ 都能被 p 整除
- 证明：对于$1\le n\le p-1$，有 $\binom{p}{n}=p\dfrac{(p-1)(p-2)\cdots(p-n+1)}{n!}$
- 因为 $n!\mid p(p-1)(p-2)\cdots(p-n+1)$ 且 $(n,p)=1$，所以 $n!\mid(p-1)(p-2)\cdots(p-n+1)\Rightarrow p\mid\binom{p}{n}$

卢卡斯定理

- 卢卡斯定理：若 p 是素数，则 $\binom{n}{k} \equiv \binom{\lfloor n/p \rfloor}{\lfloor k/p \rfloor}\binom{n\%p}{k\%p} (\bmod p)$
- 证明：由二项式定理可得 $(1+x)^p \equiv \sum_{i=0}^{p}\binom{p}{i}x^i \equiv 1+x^p (\bmod p)$
- 因此 $(1+x)^n \equiv (1+x)^{\lfloor n/p \rfloor \cdot p}(1+x)^{n\%p} \equiv (1+x^p)^{\lfloor n/p \rfloor}(1+x)^{n\%p} (\bmod p)$
- 二项式定理展开两边得到：$\sum_{i=0}^{n}\binom{n}{i}x^i \equiv (\sum_{i=0}^{\lfloor n/p \rfloor}\binom{\lfloor n/p \rfloor}{i}x^{pi})(\sum_{i=0}^{n\%p}\binom{n\%p}{i}x^i)(\bmod p)$
- 由 x^k 项系数相等可以得到：$\binom{n}{k} \equiv \binom{\lfloor n/p \rfloor}{\lfloor k/p \rfloor}\binom{n\%p}{k\%p} (\bmod p)$

多项式定理

- 定义多项式系数 $\binom{n_1+n_2+\cdots+n_t}{n_1,n_2,\ldots,n_t}=\frac{(n_1+n_2+\cdots+n_t)!}{n_1!n_2!\cdots n_t!}$

- 多项式定理：$(x_1+x_2+\cdots+x_t)^n=\sum_{k_1+k_2+\cdots+k_t=n}\binom{n}{k_1,k_2,\ldots,k_t}x_1^{k_1}x_2^{k_2}\cdots x_t^{k_t}$

两类阶乘幂

- 我们知道下降阶乘幂定义为 $x^{\underline{n}} = x(x-1)(x-2)\cdots(x-n+1) = \dfrac{x!}{(x-n)!}$
- 同理可定义上升阶乘幂 $x^{\overline{n}} = x(x+1)(x+2)\cdots(x+n-1) = \dfrac{(x+n-1)!}{(x-1)!}$
- 我们还可以倒过来写 $x^{\underline{n}} = (-1)^n (x-n+1)^{\underline{n}}$，$x^{\overline{n}} = (-1)^n (1-x-n)^{\overline{n}}$
- 两类阶乘幂有类似二项式定理的性质：$\begin{cases} (a+b)^{\underline{n}} = \sum\limits_{k=0}^{n} \dbinom{n}{k} a^{\underline{k}} b^{\underline{n-k}} \\ (a+b)^{\overline{n}} = \sum\limits_{k=0}^{n} \dbinom{n}{k} a^{\overline{k}} b^{\overline{n-k}} \end{cases}$

容斥原理

- 用于计算集合 S 中不具备性质 $P_1, P_2, \ldots, P_m$ 的元素个数
- 设性质 $P_1, P_2, \ldots, P_m$ 对应的集合是 $A_1, A_2, \ldots, A_m$

$$\left|\bigcap_{i=1}^{m} \overline{A_i}\right| = |S| + \sum_{T \subseteq \{1,2\ldots m\}, T \neq \varnothing} (-1)^{|T|} \left|\bigcap_{i \in T} A_i\right|$$

- 其中 $\overline{A_i}$ 表示不具备性质 A_i 的集合

例题：8的倍数

- 给出 n 个数，以及区间 $[x, y]$
- 问在区间内有多少数是 8 的倍数且不能被这 n 个数整除

- 数据范围：$n \le 15$

例题：8的倍数

- 问题符合区间减法，即 $[1,y]$ 的答案减去 $[1,x-1]$ 的答案
- 我们枚举这 n 个数的子集，用最小公倍数统计答案就行了
- 核心代码：

```
ll solve(ll x){
    ll Ans=0;
    for(int S=0;S<(1<<n);++S){
        ll cnt=0,ret=8;
        for(int i=1;i<=n;++i)if(S&(1<<(i-1)))ret=lcm(ret,a[i]),++cnt;
        Ans+=1LL*((cnt&1)?-1:1)*(x/ret);
    }
    return Ans;
}
```

推导错排公式

- 错排问题：把 n 个数排成一行，使得第 i 个位置上的数不等于 i，求方案数
- 我们应用容斥原理，枚举有多少个位置不满足条件
- 那么 $D_n = \sum_{i=0}^{n} (-1)^i \binom{n}{i} (n-i)! = n! \sum_{i=0}^{n} (-1)^i \frac{1}{i!}$
- 这就是错排公式

不定方程的解数——LEVEL 4

- 求不定方程 $x_1+x_2+\cdots+x_k=n$ 的整数解个数，其中 $a_i\le x_i\le b_i$
- 首先把方程等价为 $x_1+x_2+\cdots+x_k=n-\sum_{i=1}^{k}a_i$，其中 $0\le x_i\le b_i-a_i$
- 接下来使用容斥原理，那么不满足条件的情况就是 $x_i\ge b_i-a_i+1$
- 求出对应的方案数即可

BZOJ4710 分特产

- 杨崇烨AK了NOI回来，带了 m 种土特产分给机房的 n 位同学
- 每种土特产的数量都是已知的，为 $a_1, a_2, \ldots, a_m$
- 且每位同学都至少分到一个土特产，求分配方案数

- 所有输入数据都在1000范围内

BZOJ4710 分特产

- 每一种特产对应了一个不定方程
- 我们只需要枚举多少个同学没有分到特产即可进行容斥
- 若有 k 个同学没有分到特产，则不定方程为 $x_1 + x_2 + \cdots + x_{n-k} = a_i$
- 因此，答案 $Ans = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \binom{n}{k} \prod_{i=1}^{m} \binom{a_i + n - k - 1}{n - k - 1}$

51nod1806 王队长的树

- 有 n 个结点编号是 $1 \sim n$，王队长想在它们之间连 $n-1$ 条边形成一棵树
- 王队长给出了 m 个限制条件，其中第 i 个条件限制了结点 u_i 的度数不能为 d_i
- 求连边的方案总数，答案对 10^9+7 取模

- 数据范围：$n \le 10^6, m \le 17$

51nod1806 王队长的树

- 我们看到 $m \leq 17$ ，考虑容斥原理
- 对于每个节点，我们选择一个限制条件或不选择
- 如果选择了限制条件 i ，那么强制该节点度数为 d_i
- 根据选择的限制条件个数的奇偶性来决定当前树的计数对答案贡献的正负
- 选择的限制条件个数为奇数，对答案贡献为负
- 选择的限制条件个数为偶数，对答案贡献为正
- 下面考虑树的计数

51nod1806 王队长的树

- 定理：Purfer Sequence和树是一一对应的关系
- 结点的度数 = 该结点编号在Purfer Sequence中出现的次数+1
- 那么如果共有cnt个点被强制设定了度数，其中第i个点的度数为d_i
- 此时符合条件的树的个数为 $\binom{n-2}{d_1-1}\binom{n-2-(d_1-1)}{d_2-1}\cdots(n-cnt)^{n-2-\sum(d_i-1)}$
- 化简得到：$\dfrac{(n-cnt)^{n-2-\sum(d_i-1)}(n-2)!}{(n-2-\sum d_i-1)\prod_{i=1}^{m}(d_i-1)!}$

广义容斥原理

- 设性质 $P_1, P_2, \ldots, P_m$，对应的集合为 $A_1, A_2, \ldots, A_m$
- 容斥原理计算的是 $\left|\overline{A_1} \cap \overline{A_2} \cap \cdots \cap \overline{A_m}\right|$，即具有 0 个性质的元素个数
- 而广义容斥原理计算的是恰好满足 k 个性质的元素个数

广义容斥原理

- 设 $\alpha(0)=|S|$

$$\alpha(1)=|A_1|+|A_2|+\cdots+|A_m|$$

$$\alpha(2)=|A_1\cap A_2|+\cdots+|A_{m-1}\cap A_m|$$

$$\cdots$$

$$\alpha(m)=|A_1\cap A_2\cap\cdots\cap A_m|$$

- 则 $\alpha(n)$ 将具有 $n+k$ 个性质的元素计算了 $\binom{n+k}{k}$ 次

广义容斥原理

- 设 $\beta(k)$ 表示恰好具有 k 个性质的元素个数，则有如下递推关系：

$$\beta(k)=\alpha(k)-\sum_{n=k+1}^{m}\binom{n}{k}\beta(n)$$

- 因为 $\alpha(k)$ 将具有 $n(n\geq k)$ 个性质的元素计算了 $\binom{n}{k}$ 次
- 具有 n 个性质的元素有 $\beta(n)$ 个，减去这些多算的就行了

广义容斥原理

- 定理：$\beta(k)=\sum_{n=k}^{m}(-1)^{n-k}\binom{n}{k}\alpha(n)$
- 证明：我们考虑具有 t 个性质的元素被计算的次数
- 若 $t<k$，那么显然该元素没有被计算过
- 若 $t=k$，那么显然该元素只被计算过一次
- 现在重点来看 $t>k$ 的情况

广义容斥原理

- 若 $t > k$， 那么该元素被计算了 $cnt = \sum_{n=k}^{t} (-1)^{n-k} \binom{n}{k} \binom{t}{n}$ 次
- 利用三项式系数恒等式得到 $cnt = \sum_{n=k}^{t} (-1)^{n-k} \binom{t}{k} \binom{t-k}{n-k} = \binom{t}{k} \sum_{n=0}^{t-k} (-1)^{n} \binom{t-k}{n}$
- 构造 $(1-x)^{t-k} = \sum_{n=0}^{t-k} \binom{t-k}{n} (-x)^n$，令 $x=1$ 得到 $cnt = 0$
- 也就是说除了恰好具有 k 个性质的元素被计算了一次，其他元素都没有被计算
- 所以可以证明定理成立

BZOJ3622　已经没有什么好害怕的了

- 有糖果和药片各 n 个
- 糖果 i 有能量 $A_i(A_i \le 10^9)$，药片 i 有能量 $B_i(B_i \le 10^9)$
- 你需要将药片和糖果两两配对
- 求有多少种方案满足糖果比药片能量大的组数恰好有 $k(k \le n)$ 组
- 保证所有的能量两两不同，答案对 10^9+9 取模

- 数据范围：$n \le 2000$

BZOJ3622　已经没有什么好害怕的了

- 本题是求恰好具有 k 个性质的元素个数
- 我们只需求出 $\alpha(1) \sim \alpha(n)$　便可求出 $\beta(k)$
- 我们先将糖果和药片按照能量分别从小到大排序
- 用单调性求出 $cnt[i]$，表示有多少个药片的能量小于糖果 i 的能量
- 设 $f[i][j]$ 为考虑前 i 个糖果，满足至少有 j 组糖果比药片能量大的方案数
- 剩下的 $i-j$ 组如何匹配不予考虑

BZOJ3622 已经没有什么好害怕的了

- 很容易写出递推式：
$$f[i][j]=f[i-1][j]+f[i-1][j-1](cnt[i]-j+1)$$
- 按照 $\alpha(k)$ 的定义，任意的 k 组都需要计算贡献
- 而我们没有考虑剩下 $n-k$ 组的匹配情况
- 所以 $\alpha(k)=f[n][k](n-k)!$
- 然后使用定理计算 $\beta(k)$ 即可
- 时间复杂度 $O(n^2)$

生成函数

- 在数学中，某个数列 $\{a_n\}$ 的生成函数是一种形式幂级数
- 其每一项的系数可以提供关于这个序列的信息

$$\text{生成函数}\begin{cases}\text{普通型生成函数}\\\text{指数型生成函数}\\\text{狄利克雷级数}\end{cases}$$

- 其中狄利克雷级数主要用于数论函数
- 对每个数列都可以写出以上每个类型的一个母函数

普通型生成函数

- 对于一类无标号的组合对象 A
- 它的普通型生成函数定义为形式幂级数：$A(x)=\sum_{n=0}^{+\infty} A_n x^n$
- 对于两类无标号对象 A,B，它们的拼接就是做卷积：$D(x)=A(x)B(x)$
- 例如：求 m 个相同的骰子掷出 n 点的方案数
- 显然答案是$(x+x^2+x^3+x^4+x^5+x^6)^m$ 的 x^n项系数

BZOJ3028 食物

- Cydiater要去买吃的，每种食物的限制如下：
  - 承德汉堡： 偶数个
  - 可乐： 0个或1个
  - 鸡腿： 0个，1个或2个
  - 蜜桃多： 奇数个
  - 鸡块： 4的倍数个
  - 包子： 0个，1个，2个或3个
  - 土豆炒肉片：不超过1个
  - 面包： 3的倍数个
- 求买 n 个物品的方案数，$n \le 10^{500}$

BZOJ3028　食物

- 首先写出各个物品的生成函数

汉堡：$x^0+x^2+x^4+\ldots=\dfrac{1}{1-x^2}$

蜜桃：$x^1+x^3+x^5+\ldots=\dfrac{x}{1-x^2}$

面包：$x^0+x^3+x^6+\ldots=\dfrac{1}{1-x^3}$

鸡块：$x^0+x^4+x^8+\ldots=\dfrac{1}{1-x^4}$

土豆：$x^0+x^1=\dfrac{1-x^2}{1-x}$

可乐：$x^0+x^1=\dfrac{1-x^2}{1-x}$

鸡腿：$x^0+x^1+x^2=\dfrac{1-x^3}{1-x}$

包子：$x^0+x^1+x^2+x^3=\dfrac{1-x^4}{1-x}$

- 乘起来就是 $f(x)=\dfrac{x}{(1-x)^4}$，展开后 x^n 项系数就是答案

BZOJ3028 食物

- 怎么展开呢？我做这道题时的方法如下（现在想想太蠢了）
- 根据麦克劳林公式：$f(x)=f(0)+f'(0)x+\frac{f''(0)}{2!}x^2+\frac{f'''(0)}{3!}x^3+\ldots+\frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n$
- 那么我们要求的答案就是 $\frac{f^{(n)}(0)}{n!}$
- 现在问题的关键就是求 $f^{(n)}(x)$

BZOJ3028 食物

- 根据莱布尼茨公式：$(u\cdot v)^{(n)}=\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}u^{(n-k)}v^{(k)}$

$$f^{(n)}(x)=[x(1-x)^{-4}]^{(n)}=\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}x^{(n-k)}[(1-x)^{-4}]^{(k)}$$

$$=n[(1-x)^{-4}]^{(n-1)}+x[(1-x)^{-4}]^{(n)}$$

- 令 $x=0$，代入得：$f^{(n)}(0)=\frac{n(n+2)!}{3!}$
- 所以 $ans=\frac{n(n+1)(n+2)}{6}$

BZOJ3028 食物

- 事实上可以直接用广义二项式定理进行展开：

$$f(x)=x(1-x)^{-4}=\sum_{k=0}^{+\infty}\binom{-4}{k}(-1)^{-4-k}x^{k+1}$$

- 取 $k=n-1$ 得到 x^n 项系数就是答案：

$$Ans=(-1)^{-4-(n-1)}\frac{(-4)^{\underline{(n-1)}}}{(n-1)!}=(-1)^{-n-3}\frac{(-1)^{n-1}(n+2)^{\underline{(n-1)}}}{(n-1)!}=\frac{n(n+1)(n+2)}{6}$$

指数型生成函数

- 对于一类有标号的组合对象A
- 它的指数型生成函数定义为形式幂级数：$A(x)=\sum_{i=0}^{+\infty}\frac{A_n}{n!}x^n$

- 现在考虑有标号对象A,B的拼接：假设它们分别带有$1\sim n$和$1\sim m$的标号，将A,B拼接成C时，需要给C分配$1\sim(n+m)$的标号，且要保留原有标号的相对顺序，这样的话C有$\binom{n+m}{n}=\frac{(n+m)!}{n!m!}$种方案

- 而把$A(x),B(x)$做卷积也能得到相同的效果，所以它们的拼接也是做卷积

HDU2065 红色病毒问题

- 现在有一长度为 n 的字符串，满足以下条件:
- （1）字符串仅由 A,B,C,D 四种字母组成
- （2）A 出现偶数次（也可以不出现）
- （3）C 出现偶数次（也可以不出现）

- 计算满足条件的字符串个数，$n \le 2^{64}$

HDU2065 红色病毒问题

- 构造指数型生成函数：

$$f(A)=f(C)=1+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}+\frac{x^6}{6!}+\cdots=\frac{e^x+e^{-x}}{2}$$

$$f(B)=f(D)=1+\frac{x}{1!}+\frac{x^2}{2!}+\cdots=e^x$$

- 拼接在一起就是 $e^{4x}+2e^{2x}+1$
- 泰勒展开后得到 n 次项系数：$4^{n-1}+2^{n-1}$

卡特兰序列

- 满足递推关系$C_n = \sum_{i=0}^{n-1} C_i C_{n-i-1} (C_0 = 1)$ 的数列为卡特兰序列

- 下面我们来求解它的通项：
- 设数列的普通型生成函数为 $C(x)$，则 $C(x) = xC^2(x) + 1 \Rightarrow C(x) = \frac{1-\sqrt{1-4x}}{2x}$

- 为什么不取正号呢？因为当 $x = 0$ 时，$C(0)$ 是常数项，表示序列的第一项

- 如果取正号，则 $C(0) = \lim_{x \to 0} \frac{1+\sqrt{1-4x}}{2x} = +\infty$

卡特兰序列

- 利用广义二项式定理展开 $\sqrt{1-4x}$ 得到：$\sqrt{1-4x}=(1-4x)^{\frac{1}{2}}=\sum_{i=0}^{+\infty}\binom{\frac{1}{2}}{i}(-4x)^i$
- 我们考虑其 x^n 项系数：

$$[x^n]\sqrt{1-4x}=(-4)^n\binom{\frac{1}{2}}{n}=(-4)^n\frac{\frac{1}{2}(\frac{1}{2}-1)(\frac{1}{2}-2)\cdots(\frac{1}{2}-n+1)}{n!}$$

$$=(-2)^n\frac{1(1-2)(1-4)\cdots(1-2n+2)}{n!}=(-2)^n\frac{(-1)^{n-1}1\times 3\times\cdots(2n-3)}{n!}$$

$$=-\frac{1\times 3\times\cdots(2n-3)}{n!}\times\frac{2\times 4\times\cdots(2n)}{1\times 2\times\cdots\times n}=-\frac{(2n)!}{(2n-1)(n!)^2}=-\frac{1}{2n-1}\binom{2n}{n}$$

卡特兰序列

- 代回得到：

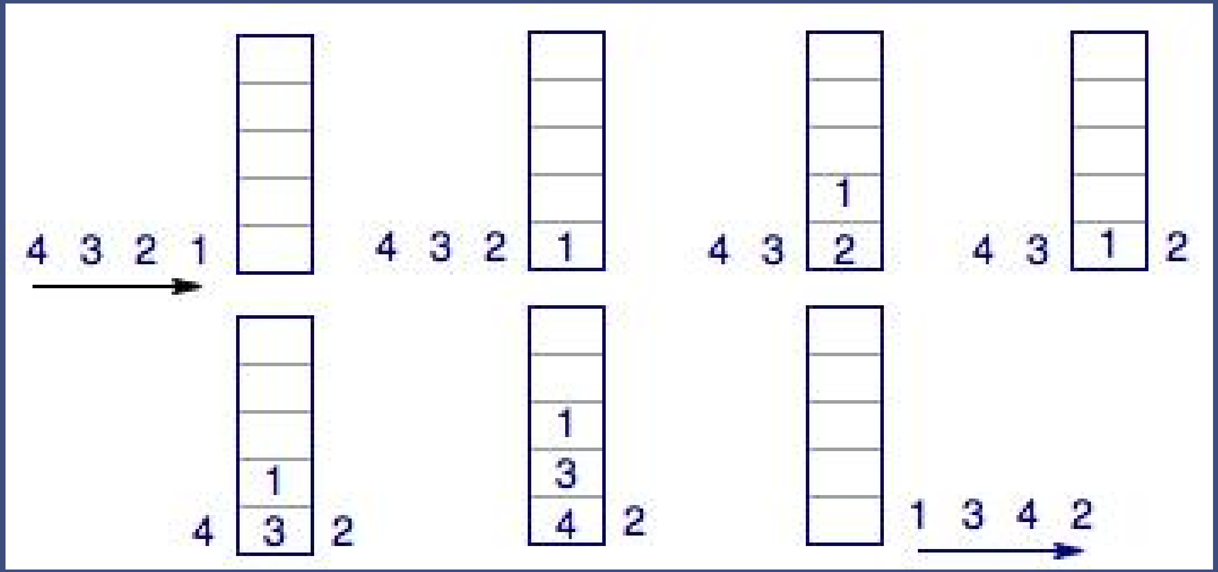
$$C(x)=\frac{1-\sqrt{1-4x}}{2x}=\frac{1+\sum_{i=0}^{+\infty}\frac{1}{2i-1}\binom{2i}{i}x^{i}}{2x}=\frac{\sum_{i=1}^{+\infty}\frac{1}{2i-1}\binom{2i}{i}x^{i-1}}{2}$$

$$=\sum_{i=0}^{+\infty}\frac{1}{2(2i+1)}\binom{2i+2}{i+1}x^{i}=\sum_{i=0}^{+\infty}\frac{(2i+2)}{2(i+1)^{2}}\binom{2i}{i}x^{i}=\sum_{i=0}^{+\infty}\frac{1}{(i+1)}\binom{2i}{i}x^{i}$$

- 所以卡特兰序列通项公式为 $C_n=\frac{1}{n+1}\binom{2n}{n}$

进出栈问题

- 栈是一种先进后出的数据结构
- 求一个足够大的栈的进栈序列为 $1,2,\ldots,n$ 时有多少个不同的出栈序列



进出栈问题

- 假设 k 是最后一个出栈的数，$f(n)$ 表示答案
- 比 k 早进栈且早出栈的有 $k-1$ 个数，一共有 $f(k-1)$ 种方案
- 比 k 晚进栈且早出栈的有 $n-k$ 个数，一共有 $f(n-k)$ 种方案

- 因此 $f(n)=\sum_{k=1}^{n} f(k-1)f(n-k)=\sum_{k=0}^{n-1} f(k)f(n-k-1)=C_n$

进出栈问题

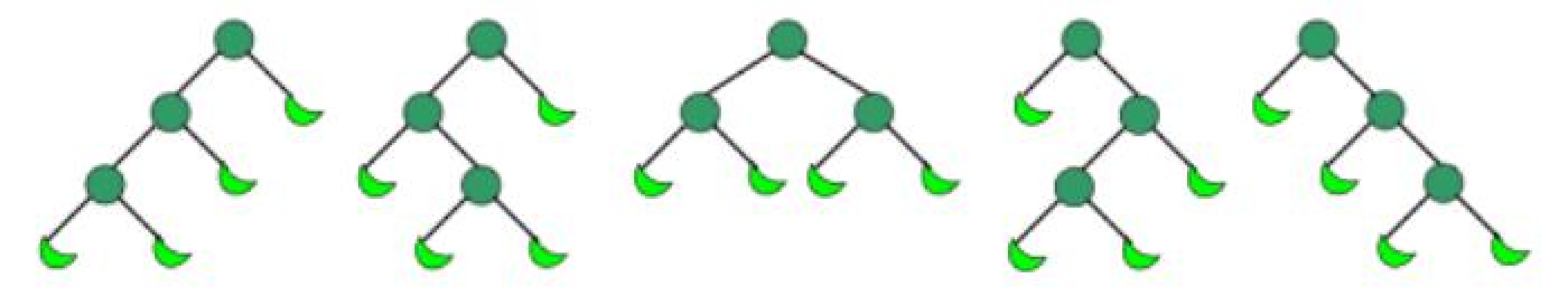
- 进出栈问题本质上是括号匹配问题，将进栈记为 $+1$，出栈记为 -1

$$+1,+1,-1,+1,+1,-1,-1,-1$$

- 需要保证序列的前缀和不小于 0，很多问题都是这个模板

二叉树问题

- 求 $n+1$ 个叶子的满二叉树的个数



二叉树问题

- 将先序遍历中向左记为 $+1$，向右记为 -1，如第一个图记为

$$+1,+1,+1,-1,-1,-1$$

- 由卡特兰数的含义可得满二叉树的个数为 C_n

伯努利序列

- 满足递推关系 $B_n = -\frac{1}{n+1}\sum_{i=0}^{n-1}\binom{n+1}{i}B_i (B_0 = 1)$ 的数列称为伯努利序列
- 递推式也可以写成

$$\sum_{i=0}^{n}\binom{n+1}{i}B_i = 0 \Leftrightarrow \sum_{i=0}^{n}\binom{n}{i}B_i = B_n \Leftrightarrow \sum_{i=0}^{n}\frac{1}{i!(n-i)!}B_i = \frac{B_n}{n!} (n > 1)$$

- 设数列的指数型生成函数为 $B(x)$，则 $B(x)e^x = B(x) + x$
- 从而得到伯努利序列的指数型生成函数为 $B(x) = \frac{x}{e^x - 1} = B_0 + \frac{B_1}{1!}x + \frac{B_2}{2!}x^2 + \cdots$

伯努利序列

- 伯努利序列可以解决幂求和问题，事实上

$$1^k+2^k+\cdots+n^k=\sum_{r=0}^{k}\frac{1}{k+1-r}\binom{k}{r}(n+1)^{k+1-r}B_r$$

- 证明：左边的式子是 $k!x(1+e^x+e^{2x}+\cdots+e^{nx})$ 的 x^{k+1} 项系数，而

$$k!x(1+e^x+e^{2x}+\cdots+e^{nx})=k!x\frac{1-e^{(n+1)x}}{1-e^x}=k!\frac{x}{e^x-1}(e^{(n+1)x}-1)$$

$$=k!(1+\frac{B_1}{1!}x+\frac{B_2}{2!}x^2+\cdots)[(n+1)x+\frac{(n+1)^2x^2}{2!}+\cdots]$$

伯努利序列

- 这个式子的 x^{k+1} 系数为 $\sum_{r=0}^{k} k!\frac{B_r}{r!}\frac{(n+1)^{k+1-r}}{(k+1-r)!} = \sum_{r=0}^{k}\frac{1}{k+1-r}\binom{k}{r}(n+1)^{k+1-r}B_r$

- 即 $1^k + 2^k + \cdots + n^k = \sum_{r=0}^{k}\frac{1}{k+1-r}\binom{k}{r}(n+1)^{k+1-r}B_r$

- 使用多项式快速算法预处理伯努利数可以 $O(n\log n)$ 解决问题

第二类斯特林数

- 第二类斯特林数 $\left\{ \begin{matrix} n \\ k \end{matrix} \right\}$ 定义为将一个 n 个物品的集合划分为 k 个非空子集的方案数
- 例如：将有 4 个元素的集合划分为 2 部分的方案如下

  $\{1,2,3\} \cup \{4\}$，$\{1,2,4\} \cup \{3\}$，$\{1,3,4\} \cup \{2\}$，$\{2,3,4\} \cup \{1\}$

  $\{1,2\} \cup \{3,4\}$，$\{1,3\} \cup \{2,4\}$，$\{1,4\} \cup \{2,3\}$；

- 故 $\left\{ \begin{matrix} 4 \\ 2 \end{matrix} \right\} = 7$，特殊的，$\left\{ \begin{matrix} n \\ 0 \end{matrix} \right\} = \begin{cases} 1, n = 0 \\ 0, n > 0 \end{cases}$，$\left\{ \begin{matrix} n \\ 2 \end{matrix} \right\} = 2^{n-1} - 1$

第二类斯特林数

- 第二类斯特林数有递推式：$\left\{ \begin{matrix} n \\ k \end{matrix} \right\} = k\left\{ \begin{matrix} n-1 \\ k \end{matrix} \right\} + \left\{ \begin{matrix} n-1 \\ k-1 \end{matrix} \right\}$
- 证明：考虑将 n 个元素的集合划分为 k 个部分
- （1）将最后一个元素单独划分为一个部分，方案数为 $\left\{ \begin{matrix} n-1 \\ k-1 \end{matrix} \right\}$
- （2）将最后一个元素放入已经划分好的 k 个非空子集，方案数为 $k\left\{ \begin{matrix} n-1 \\ k \end{matrix} \right\}$
- 加起来即可完成证明

第二类斯特林数

- 第二类斯特林数有通项公式：$\left\{ {n \atop k} \right\} = \frac{1}{k!}\sum_{i=0}^{k}(-1)^i\binom{k}{i}(k-i)^n$
- 考虑容斥原理，枚举空子集的数量 i ，然后把 n 个元素放入剩下的 $k-i$ 个子集中，套上容斥系数，即可得证
- 这个式子可以化为 $\left\{ {n \atop k} \right\} = \sum_{i=0}^{k}\frac{(-1)^i}{i!}\cdot\frac{(k-i)^n}{(k-i)!}$
- 这是一个卷积式，可以 FFT 实现 $O(n\log n)$ 预处理 $\left\{ {n \atop k} \right\}(0 \le k \le n)$

第一类斯特林数

- 第一类斯特林数 $\begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix}$ 定义为将 n 个元素划分为 k 个非空循环排列的方案数

- 例如：将 4 个元素划分为 2 个循环排列的方案如下

$$
\begin{array}{llll}
[1,2,3][4], & [1,2,4][3], & [1,3,4][2], & [2,3,4][1] \\
[1,3,2][4], & [1,4,2][3], & [1,4,3][2], & [2,4,3][1] \\
[1,2][3,4], & [1,3][2,4], & [1,4][2,3]; &
\end{array}
$$

- 故 $\begin{bmatrix} 4 \\ 2 \end{bmatrix} = 11$，特殊的，$\begin{bmatrix} n \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{cases} 1, n = 0 \\ 0, n > 0 \end{cases}$，$\begin{bmatrix} n \\ 1 \end{bmatrix} = (n-1)!$

第一类斯特林数

- 第一类斯特林数有递推式：$\left[\begin{matrix}n\\k\end{matrix}\right]=(n-1)\left[\begin{matrix}n-1\\k\end{matrix}\right]+\left[\begin{matrix}n-1\\k-1\end{matrix}\right]$
- 证明：考虑将 n 个元素划分为 k 个循环排列
- （1）将最后一个元素单独划分为一个循环排列，方案数为 $\left[\begin{matrix}n-1\\k-1\end{matrix}\right]$
- （2）前 $n-1$ 个元素已经划分为了 k 个循环排列，最后一个元素可以插入到

任意元素的后面，方案数为 $(n-1)\left[\begin{matrix}n-1\\k\end{matrix}\right]$

第二类斯特林数与下降阶乘幂

- 第二类斯特林数与下降阶乘幂有很强的关联：$x^n = \sum_{k=0}^{n} \left\{ {n \atop k} \right\} x^{\underline{k}}$
- 证明：我们知道 $x^{\underline{k+1}} = x^{\underline{k}}(x-k) \Rightarrow x \cdot x^{\underline{k}} = x^{\underline{k+1}} + kx^{\underline{k}}$，故使用数学归纳法

$$x^n = x \cdot x^{n-1} = x\sum_{k=0}^{n-1} \left\{ {n-1 \atop k} \right\} x^{\underline{k}} = \sum_{k=0}^{n-1} \left\{ {n-1 \atop k} \right\} x^{\underline{k+1}} + \sum_{k=0}^{n-1} \left\{ {n-1 \atop k} \right\} kx^{\underline{k}}$$

$$= \sum_{k=1}^{n} \left\{ {n-1 \atop k-1} \right\} x^{\underline{k}} + \sum_{k=1}^{n} \left\{ {n-1 \atop k} \right\} kx^{\underline{k}} = \sum_{k=1}^{n} \left(\left\{ {n-1 \atop k-1} \right\} + k\left\{ {n-1 \atop k} \right\} \right) x^{\underline{k}} = \sum_{k=0}^{n} \left\{ {n \atop k} \right\} x^{\underline{k}}$$

第一类斯特林数与上升阶乘幂

- 第一类斯特林数与上升阶乘幂有很强的关联：$x^{\overline{n}}=\sum_{k=0}^{n}\begin{bmatrix}n\\k\end{bmatrix}x^k$
- 证明：沿用之前的思路，使用数学归纳法

$$x^{\overline{n}}=(x+n-1)x^{\overline{n-1}}=(x+n-1)\sum_{k=0}^{n-1}\begin{bmatrix}n-1\\k\end{bmatrix}x^k=\sum_{k=0}^{n-1}\begin{bmatrix}n-1\\k\end{bmatrix}x^{k+1}+(n-1)\sum_{k=0}^{n-1}\begin{bmatrix}n-1\\k\end{bmatrix}x^k$$

$$=\sum_{k=1}^{n}\begin{bmatrix}n-1\\k-1\end{bmatrix}x^k+(n-1)\sum_{k=1}^{n}\begin{bmatrix}n-1\\k\end{bmatrix}x^k=\sum_{k=1}^{n}\left(\begin{bmatrix}n-1\\k-1\end{bmatrix}+(n-1)\begin{bmatrix}n-1\\k\end{bmatrix}\right)x^k=\sum_{k=0}^{n}\left(\begin{bmatrix}n\\k\end{bmatrix}\right)x^k$$

斯特林数与阶乘幂

- 应用 $x^{\underline{n}} = (-1)^n (-x)^{\overline{n}}$ 可以得到更一般的公式：

$$x^n = \sum_{k=0}^{n} \left\{ {n \atop k} \right\} x^{\underline{k}} = \sum_{k=0}^{n} \left\{ {n \atop k} \right\} (-1)^{n-k} x^{\overline{k}}$$

$$x^{\overline{n}} = \sum_{k=0}^{n} \left[{n \atop k} \right] x^k$$

$$x^{\underline{n}} = \sum_{k=0}^{n} \left[{n \atop k} \right] (-1)^{n-k} x^k$$

反转公式

- 首先我们根据斯特林数与阶乘幂的关系得到：

$$x^{n}=\sum_{k=0}^{n}\sum_{m=0}^{k}\begin{Bmatrix}n\\k\end{Bmatrix}\begin{bmatrix}k\\m\end{bmatrix}(-1)^{n-k}x^{m}=\sum_{k=0}^{n}\sum_{m=0}^{k}\begin{Bmatrix}n\\k\end{Bmatrix}\begin{bmatrix}k\\m\end{bmatrix}(-1)^{k-m}x^{m}$$

$$x^{\overline{n}}=\sum_{k=0}^{n}\sum_{m=0}^{k}\begin{bmatrix}n\\k\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}k\\m\end{Bmatrix}(-1)^{n-k}x^{\overline{m}}=\sum_{k=0}^{n}\sum_{m=0}^{k}\begin{bmatrix}n\\k\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}k\\m\end{Bmatrix}(-1)^{k-m}x^{\overline{m}}$$

- 根据对应关系化简得到反转公式：

$$\sum_{k=m}^{n}\begin{Bmatrix}n\\k\end{Bmatrix}\begin{bmatrix}k\\m\end{bmatrix}(-1)^{n-k}=\sum_{k=m}^{n}\begin{Bmatrix}n\\k\end{Bmatrix}\begin{bmatrix}k\\m\end{bmatrix}(-1)^{k-m}=[m=n]$$

$$\sum_{k=m}^{n}\begin{bmatrix}n\\k\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}k\\m\end{Bmatrix}(-1)^{n-k}=\sum_{k=m}^{n}\begin{bmatrix}n\\k\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}k\\m\end{Bmatrix}(-1)^{k-m}=[m=n]$$

斯特林反演

- 根据反转公式我们可以推导斯特林反演式：

$$f(n)=\sum_{k=0}^{n}\begin{Bmatrix}n\\k\end{Bmatrix}g(k)\Leftrightarrow g(n)=\sum_{k=0}^{n}(-1)^{n-k}\begin{bmatrix}n\\k\end{bmatrix}f(k)$$

$$f(n)=\sum_{k=0}^{n}\begin{bmatrix}n\\k\end{bmatrix}g(k)\Leftrightarrow g(n)=\sum_{k=0}^{n}(-1)^{n-k}\begin{Bmatrix}n\\k\end{Bmatrix}f(k)$$

斯特林反演

- 证明第一个式子（充分性）：若 $f(n)=\sum_{k=0}^{n}\begin{Bmatrix}n\\k\end{Bmatrix}g(k)$，则

$$g(n)=\sum_{m=0}^{n}[m=n]g(m)=\sum_{m=0}^{n}\sum_{k=0}^{n}\begin{bmatrix}n\\k\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}k\\m\end{Bmatrix}(-1)^{n-k}g(m)$$

$$=\sum_{k=0}^{n}(-1)^{n-k}\begin{bmatrix}n\\k\end{bmatrix}\sum_{m=0}^{k}\begin{Bmatrix}k\\m\end{Bmatrix}g(m)=\sum_{k=0}^{n}(-1)^{n-k}\begin{bmatrix}n\\k\end{bmatrix}f(k)$$

斯特林反演

- 证明第一个式子（必要性）：若 $g(n)=\sum_{k=0}^{n}(-1)^{n-k}\begin{bmatrix}n\\k\end{bmatrix}f(k)$，则

$$f(n)=\sum_{m=0}^{n}[m=n]f(m)=\sum_{m=0}^{n}\sum_{k=0}^{n}\begin{Bmatrix}n\\k\end{Bmatrix}\begin{bmatrix}k\\m\end{bmatrix}(-1)^{k-m}f(m)$$

$$=\sum_{k=0}^{n}\begin{Bmatrix}n\\k\end{Bmatrix}\sum_{m=0}^{k}(-1)^{k-m}\begin{bmatrix}k\\m\end{bmatrix}f(m)=\sum_{k=0}^{n}\begin{Bmatrix}n\\k\end{Bmatrix}g(k)$$

- 第二个式子的证明是一模一样的

第三类斯特林数

- 第三类斯特林数$L(n,k)$ 又叫拉赫数
- 定义为将 n 个元素的集合划分为 k 个非空有序子集的方案数

- 例如：将 3 个元素划分为 2 个非空有序集合的方案如下

$$\{1\}\{2,3\},\quad \{2\}\{1,3\},\quad \{3\}\{1,2\}$$
$$\{1\}\{3,2\},\quad \{2\}\{3,1\},\quad \{3\}\{2,1\}$$

- 因此 $L(3,2)=6$，特殊的，$L(n,0)=\begin{cases}1, n=0\\0, n>0\end{cases}$

第三类斯特林数

- 第三类斯特林数有通项公式：$L(n,k)=\binom{n-1}{k-1}\frac{n!}{k!}$
- 即将 n 个元素排成一列，然后插入 $k-1$ 个挡板，由于集合无序除掉 $k!$
- 由通项公式很容易得到一个类似于组合数的递推式：

$$L(n,k)=(n+k-1)L(n-1,k)+L(n-1,k-1)$$

第三类斯特林数与阶乘幂

- 第三类斯特林数与阶乘幂之间的关系为：$x^{\overline{n}} = \sum_{k=0}^{n} L(n,k)x^{\underline{k}}$
- 证明：沿用之前的 $x^{\underline{k+1}} = x^{\underline{k}}(x-k) \Rightarrow x \cdot x^{\underline{k}} = x^{\underline{k+1}} + kx^{\underline{k}}$ ，使用数学归纳法

$$
\begin{aligned}
x^{\overline{n}} &= (x+n-1)x^{\overline{n-1}} = (x+n-1)\sum_{k=0}^{n-1} L(n-1,k)x^{\underline{k}} \\
&= \sum_{k=0}^{n-1} L(n-1,k)x^{\underline{k+1}} + \sum_{k=0}^{n-1} L(n-1,k)kx^{\underline{k}} + \sum_{k=0}^{n-1} L(n-1,k)(n-1)x^{\underline{k}} \\
&= \sum_{k=1}^{n} L(n-1,k-1)x^{\underline{k}} + \sum_{k=1}^{n} L(n-1,k)(k+n-1)x^{\underline{k}} \\
&= \sum_{k=1}^{n} \big(L(n-1,k-1)+(k+n-1)L(n-1)k\big)x^{\underline{k}} = \sum_{k=1}^{n} L(n,k)x^{\underline{k}}
\end{aligned}
$$

第三类斯特林数与前两类斯特林数

- 第三类斯特林数与前两类斯特林数之间存在关系：$L(n,m)=\sum_{k=0}^{n}\begin{bmatrix}n\\k\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}k\\m\end{Bmatrix}$
- 证明类似于反转公式：

$$\begin{cases} x^{\overline{n}}=\sum_{k=0}^{n}L(n,k)x^{\underline{k}} \\ x^{\overline{n}}=\sum_{k=0}^{n}\begin{bmatrix}n\\k\end{bmatrix}x^{k}=\sum_{k=0}^{n}\sum_{m=0}^{k}\begin{bmatrix}n\\k\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}k\\m\end{Bmatrix}x^{\underline{m}} \end{cases} \Rightarrow \sum_{k=0}^{n}L(n,k)x^{\underline{k}}=\sum_{k=0}^{n}\sum_{m=0}^{k}\begin{bmatrix}n\\k\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}k\\m\end{Bmatrix}x^{\underline{m}}$$

- 等式两边$x^{\underline{k}}$系数相等得到：$L(n,m)=\sum_{k=0}^{n}\begin{bmatrix}n\\k\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}k\\m\end{Bmatrix}$

BZOJ4555　求和

- 求 $f(n)=\sum_{i=0}^{n}\sum_{j=0}^{i}2^{j}\times j!\begin{Bmatrix} i \\ j \end{Bmatrix}$
- 答案对 998244353 取模
- 数据范围：$n\leq 10^{5}$

BZOJ4555　求和

- 将第二类斯特林数通项公式带入得到

$$f(n)=\sum_{i=0}^{n}\sum_{j=0}^{i}2^{j}\times j!\begin{Bmatrix} i \\ j \end{Bmatrix}=\sum_{i=0}^{n}\sum_{j=0}^{n}2^{j}\times j!\times\frac{1}{j!}\sum_{k=0}^{j}(-1)^{k}\binom{j}{k}(j-k)^{i}$$

$$=\sum_{j=0}^{n}2^{j}\sum_{k=0}^{j}(-1)^{k}\binom{j}{k}\sum_{i=0}^{n}(j-k)^{i}=\sum_{j=0}^{n}2^{j}\cdot j!\sum_{k=0}^{j}\frac{(-1)^{k}}{k!}\cdot\frac{(j-k)^{n+1}-1}{(j-k)!(j-k-1)}$$

- 得到一个卷积式，FFT 预处理，复杂度 $O(n\log n)$

言射言射