RSA中公开的模数N 实验报告

学号：SA20225172 姓名：郭俊勇

实验目的

- 了解公钥加密方案的一般结构
- 深入理解RSA加密原语的密钥生成
- 编程实现对没有正确生成密钥的RSA的破解，提醒大家不要尝试自己随意实现加密原语

编程语言

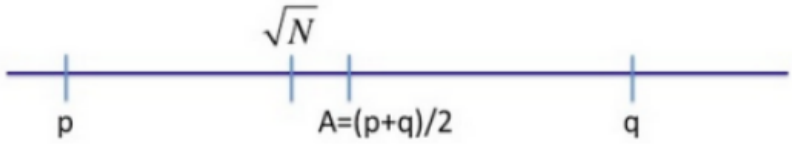
- Java

实验内容

- 本次实验是在公开的模数N没有被正确生成时破解RSA。这个实验是在提醒大家，千万不要自己轻易去实现一个加密原语。
- 通常，构成RSA模数N的素数p和q应该被独立地产生的。但是，假设一个开发者决定通过选择一个随机数R，并搜索其附近的两个素数作为p和q。那么，我们来证明这种方法得到的RSA的模数$N = pq$能被轻易的分解。（而RSA的安全基础就是假定模数不能被轻易分解！）假
- 设给定一个合数N并知道N是两个彼此很接近的素数p和q的乘积，即p和q满足：

$$|p - q| < 2N^{\frac{1}{4}} \qquad (*)$$

  你的任务是分解N。
- 令A是两个素数的算术平均值，即$A = \frac{p+q}{2}$。由于p和q都是奇数，所以A一定是一个整数。
- 为了分解N，首先需要观察，在条件(*)下$\sqrt{N}$是非常接近A的。具体来讲，有：$A - \sqrt{N} < 1$。由于A是一个整数，将$\sqrt{N}$凑成最接近的整数便能获取A的值。在代码中，形式大概是$A = ceil(sqrt(N))$，其中$ceil$是上取整函数。
- 更直观地，数字p、q、$\sqrt{N}$和A有如下关系：



- 由于A是p和q的中点，所以存在一个x使得$p = A - x$以及$q = A + x$。
- 又因为$N = pq = (A - x)(A + x) = A^2 - x^2$，因此$x = \sqrt{A^2 - N}$。
- 现在，根据x和A，你可以找到N的p和q，即分解出了N！
- 在接下来的任务中，需要使用上述的方法来分解给定的模数。本实验需要使用一个支持多精度算数平方根运算的环境。在Python中，可以使用$gmpy2$[1]模块；在C++中，可以使用GMP[2]。

任务一

- 模数N是两个素数p和q的乘积，满足$|p-q|<2N^{\frac{1}{4}}$。（模数N请见附件task.txt）

任务二

- 模数N是两个素数p和q的乘积，满足$|p-q|<2^{11}N^{\frac{1}{4}}$。（模数N请见附件task.txt）
- 提示：在$A-\sqrt{N}<2^{20}$的情况下，尝试从$\sqrt{N}$向上搜索A，直到成功分解N。

实验原理分析

- 任务一：

$$|p-q|<2N^{1/4} => (p-q)^2<4\sqrt{N}$$
$$=> (p+q)^2-4pq<4\sqrt{N}$$
$$=> (\frac{(p+q)}{2})^2-pq<\sqrt{N}$$
$$因为A=\frac{(p+q)}{2}N=pq带入上式$$
$$=> A^2-N<\sqrt{N} => A-\sqrt{N}<\frac{\sqrt{N}}{A+\sqrt{N}}$$
$$又因为A>\sqrt{N}$$
$$因此A-\sqrt{N}<\frac{1}{2}$$
$$可推出0<A-\sqrt{N}<1$$

- 任务二：

$$|p-q|<2^{11}\sqrt{N} => (p-q)^2<2^{22}\sqrt{N}$$
$$=> (p+q)^2-4pq<2^{22}\sqrt{N}$$
$$=> (\frac{(p+q)}{2})^2-pq<2^{20}\sqrt{N}$$
$$因为A=\frac{(p+q)}{2}N=pq带入上式$$
$$=> A^2-N<\sqrt{N} => A-\sqrt{N}<2^{20}\frac{\sqrt{N}}{A+\sqrt{N}}<2^{19}$$
$$因此\sqrt{N}<A<\sqrt{N}+2^{19}$$

Java代码实现（源码）

```
public class lab4 {
    public static void main(String[] args) {
        task_1();
        System.out.println();
        task_2();
    }

    private static void task_2() {
        String
s="648455842808071669662824265346772278726343720706976263060439070378797308618081116462714015276061417569195587321840254520655424906719892428844841839353281972988531310511738648965962582821502504990264452100885281673303711142296421027840289307657458645233683357077834689715838646088239640236866252211790085787877";
        BigInteger num=new BigInteger(s);
        BigInteger rem=new BigInteger("1");
```

```
        BigInteger a= Sqrt(num).add(rem);
        //num.sqrt();
        while(true){
            BigInteger ans=a.multiply(a);
            BigInteger ans2=ans.subtract(num);
            BigInteger x=Sqrt(ans2);
            BigInteger p=a.subtract(x);
            BigInteger q=a.add(x);
            if(p.multiply(q).equals(num)){
                System.out.println("task2 Success!!");
                System.out.println("task2-p:"+p);
                System.out.println("task2-q:"+q);
                break;
            }else {
                BigInteger temp=new BigInteger("72077");
                a=a.add(temp);
            }
        }

    }

    private static void task_1() {
        String
s="17976931348623159077293051907890247336179769789423065727343008115773267580550
5620686985379449212982959585501387537164015710139858647833778606925583497541085
1965916151280575759407526350074759352887108236499499407718956170543611494748650467110151015639406805275400715845608785776637430400863407428552785490925 81";
        BigInteger num =new BigInteger(s);
        BigInteger rem=new BigInteger("1");
        //开方
        BigInteger a = Sqrt(num).add(rem);
        //a*a
        BigInteger ans=a.multiply(a);
        //a*a-N
        BigInteger ans2=ans.subtract(num);
        //对a*a-N开方获取x
        BigInteger x=Sqrt(ans2);
        //p=a-x
        BigInteger p=a.subtract(x);
        //q=a+x
        BigInteger q=a.add(x);
        if(p.multiply(q).equals(num)){
            System.out.println("task1 Success!!!!");
            System.out.println("task1-p:"+p);
            System.out.println("task1-q:"+q);
        }else{
            System.out.println("Failed!");
        }
    }

    public static BigInteger Sqrt(BigInteger x){
        BigInteger l = new BigInteger("0"), r = new BigInteger(x.toString());
        BigInteger ans = new BigInteger("-1");
        while(l.compareTo(r) <= 0){
            BigInteger mid = r.add(l).divide(new BigInteger("2"));
            if(mid.multiply(mid).compareTo(x) <= 0){
                ans = mid;
                l = mid.add(new BigInteger("1"));
```

```
            }else{
                r = mid.subtract(new BigInteger("1"));
            }
        }
        return ans;
    }
}
```

运行结果