



第十一章 小波与多分辨率处理



小波分析是当前数学中一个迅速发展的新领域,它也是一种积分变换,是一个时间和频率的局域变换,因而能有效地从信号中提取信息,通过伸缩和平移等运算功能对函数或信号进行多尺度细化分析,解决了Fourier变换不能解决的许多困难问题



一、预备知识

从数学的角度讲，小波是构造函数空间正交基的基本单元，是在能量有限空间 $L^2(R)$ 上满足允许条件的函数，这样认识小波需要 $L^2(R)$ 空间的基础知识，特别是内积空间中空间分解、函数变换等的基础知识。

从信号处理的角度讲，小波(变换)是强有力的时频分析(处理)工具，是在克服傅立叶变换缺点的基础上发展而来的，所以从信号处理的角度认识小波，需要傅立叶变换、傅立叶级数、滤波器等的基础知识。



一个信号从数学的角度来看，它是一个自变量为时间 t 的函数 $f(t)$ 。因为信号是能量有限的，即

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |f(t)|^2 dt < \infty$$

满足条件的所有函数的集合就形成 $L^2(\mathbb{R})$

图像是二维信号，同样是能量有限的。实际上任何一幅数字图像都是从真实的场景中经过采样和量化处理后得到的。从数学上看，图像是定义在 $L^2(\mathbb{R}^2)$ 上的函数。



$L^2(R)$ 空间的正交分解和变换

对 $f(t) \in L^2(R)$ ，存在 $L^2(R)$ 的一组标准正交基 $g_i(t)$ ， $t \in R$ ， $i=1,2,\dots$ 使得

$$f(t) = \sum_{i=1}^{+\infty} c_i g_i(t)$$

其中

$$c_i = \langle f(t), g_i(t) \rangle = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) g_i(t) dt$$

$$\langle g_k(t), g_l(t) \rangle = \int_{-\infty}^{+\infty} g_k(t) g_l(t) dt = \delta_{kl}, \quad k, l \in \mathbb{Z}$$

对于给定信号 $f(t)$ ，关键是选择合适的基 $g_i(t)$ ，使得 $f(t)$ 在这组基下的表现呈现出我们需要的特性



如果把 $f(t)$ 理解为信号的描述, Fourier 变换和逆变换的表达式

$$\hat{f}(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) e^{-i\omega t} dt, \quad t \in R$$

$$f(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \hat{f}(\omega) e^{i\omega t} d\omega, \quad \omega \in R$$

说明, 信号的 Fourier 变换能给出信号的频率特性, 即其频谱分析. 由于 Fourier 变换和逆变换具有很好的对称性, 使得信号的重构很容易进行.



Fourier变换不足:

Fourier变换仅适用于确定性的平稳信号:

从定义可以看出, 为了应用Fourier变换去研究一个 $-\infty < t < +\infty$ 信号的频谱特性, 必须获得在整个时域中信号的全部信息. 所以信号 $f(t)$ 的频谱 $\hat{f}(\omega)$ 的任一频点值都是由 $f(t)$ 在整个时间域上的贡献决定的; 反之, 信号 $f(t)$ 在任一时刻的状态也是由频谱 $f(\omega)$ 在整个频域 $-\infty < \omega < +\infty$ 上的贡献决定的. 所以在时域中Fourier变换没有任何分辨能力, 通过有限频段上的 $f(\omega)$ 不能获得信号 $f(t)$ 在任何有限时间间隔内的频率信息. 因为一个信号在某个时刻的一个小的邻域中发生了变化, 那么整个频域都要受到影响. 这就是说, Fourier变换在时域没有局域特性. 同样地分析可见, 在频域上Fourier变换也没有局域特性.



二、窗口Fourier变换

也称短时Fourier变换(STFT). 窗口Fourier变换是在 Fourier 变换的框架内,将非平稳过程看成是一系列短时平稳信号的叠加,通过在时域上加上窗口来实现短时性. 通常选择在有限区间外恒等于零或迅速趋于零的钟形函数 $g(t)$ 作为窗函数,用平移滑动的窗函数 $g(t-\tau)$ 与信号 $f(t)$ 相乘,有效地抑制了 $t=\tau$ 邻域以外的信号,在 τ 附近开窗,通过平移来覆盖整个时间域. 再进行Fourier变换,所得的结果反映了 $t=\tau$ 时刻附近的频谱信息,从而产生了时域局部化的作用.



设函数 $g \in L^1(\mathbb{R}) \cap L^2(\mathbb{R})$, $tg \in L^2(\mathbb{R})$,

则称 $f(t)g(t-\tau)$ 的Fourier变换

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)g(t-\tau)e^{-i\omega t} dt$$

为 $f(t)$ 的窗口Fourier变换, 也称 $f(t)$ 的Gabor变换, 记

为 $G_f(\omega, \tau)$, 其中 $g(t)$ 称为时窗函数.

以下总是取时窗函数 $g(t)$ 满足

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |g(t)|^2 dt = 1.$$



根据Fourier变换的反演公式, 有

$$f(t)g(t-\tau) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} G_f(\omega, \tau) e^{i\omega t} d\omega,$$

于是

$$f(t)(g(t-\tau))^2 = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} G_f(\omega, \tau) e^{i\omega t} g(t-\tau) d\omega,$$

从而

$$\begin{aligned} & f(t) \int_{-\infty}^{+\infty} (g(t-\tau))^2 d\tau \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} d\tau \int_{-\infty}^{+\infty} G_f(\omega, \tau) e^{i\omega t} g(t-\tau) d\omega. \end{aligned}$$



因为

$$\int_{-\infty}^{+\infty} (g(t-\tau))^2 d\tau = \int_{-\infty}^{+\infty} |g(t)|^2 d\tau = 1,$$

所以

$$f(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} d\tau \int_{-\infty}^{+\infty} G_f(\omega, \tau) e^{i\omega t} g(t-\tau) d\omega,$$

上式窗口Fourier变换的反演公式.



设 $g(t)$ 是时窗函数, 称

$$t^* = \int_{-\infty}^{+\infty} t |g(t)|^2 dt$$

为时窗中心, 称

$$\Delta t = \left(\int_{-\infty}^{+\infty} (t - t^*)^2 |g(t)|^2 dt \right)^{\frac{1}{2}}$$

为时窗半径.

于是时窗函数 $g(t)$ 的窗口为 $[t^* - \Delta t, t^* + \Delta t]$, 窗口的宽度为 $2\Delta t$. 下面讨论时窗函数 $g(t - \tau)$ 的时窗中心 t_τ^* 和时窗半径 Δt_τ .



$$t_{\tau}^* = \int_{-\infty}^{+\infty} t |g(t - \tau)|^2 dt = \int_{-\infty}^{+\infty} (u + \tau) |g(u)|^2 du$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} u |g(u)|^2 du + \tau \int_{-\infty}^{+\infty} |g(u)|^2 du = t^* + \tau,$$

$$\begin{aligned} \Delta t_{\tau} &= \left(\int_{-\infty}^{+\infty} (t - t_{\tau}^*)^2 |g(t - \tau)|^2 dt \right)^{\frac{1}{2}} \\ &= \left(\int_{-\infty}^{+\infty} (u + \tau - t_{\tau}^*)^2 |g(u)|^2 du \right)^{\frac{1}{2}} \\ &= \left(\int_{-\infty}^{+\infty} (u - t^*)^2 |g(u)|^2 du \right)^{\frac{1}{2}} = \Delta t. \end{aligned}$$

由此可见, 时窗中心在平移, 而时窗半径不变.



设 $g(t)$ 是时窗函数, 称 $\hat{g}(\omega) = G(\omega)$

为频窗函数, 并且称

$$\omega^* = \frac{\int_{-\infty}^{+\infty} \omega |G(\omega)|^2 d\omega}{\int_{-\infty}^{+\infty} |G(\omega)|^2 d\omega}$$

是频窗中心, 称

$$\Delta\omega = \left(\frac{\int_{-\infty}^{+\infty} (\omega - \omega^*)^2 |G(\omega)|^2 d\omega}{\int_{-\infty}^{+\infty} |G(\omega)|^2 d\omega} \right)^{\frac{1}{2}}$$

是频窗半径.

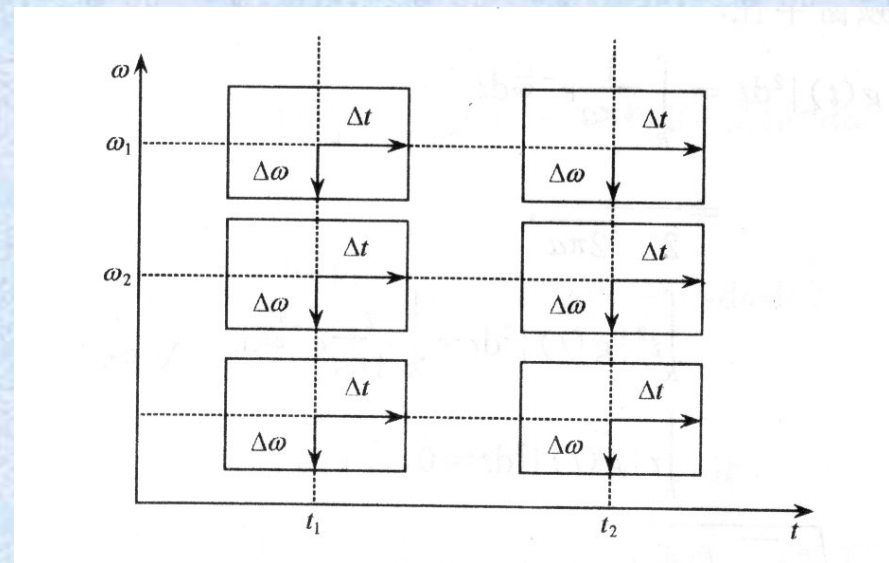


当频窗函数是 $G(\omega - \eta)$ 时, 类似地可以推导出
相应的频窗中心和频窗半径为

$$\omega_{\eta}^{*} = \omega^{*} + \eta, \quad \Delta\omega_{\eta} = \Delta\omega.$$

因此频窗中心在平移, 频窗半径不变.

在时-频坐标系中, 时窗
和频窗共同作用形成时-频
窗, 右图是通过时-频窗进行
时-频局部化的几何直观描述.





窗口Fourier变换把时域上的信号 $f(t)$ 映射到
时-频域平面 (τ, ω) 中的一个二维函数 $G_f(\omega, \tau)$.

一个常用的窗口函数是Gauss函数

$$g(t) = \frac{b}{2\sqrt{\pi a}} e^{-\frac{t^2}{4a}} \quad (a, b > 0),$$

其中 a, b 使得

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |g(t)|^2 dt = 1.$$



易见时窗中心 $t^* = \int_{-\infty}^{+\infty} t |g(t)|^2 dt = 0$, 并且时窗半径

$$\Delta t = \left(\int_{-\infty}^{+\infty} (t - t^*)^2 |g(t)|^2 dt \right)^{\frac{1}{2}} = \sqrt{a}.$$

相应的频窗函数 $G(\omega) = \hat{g}(\omega) = b e^{-a\omega^2}$, 因此可以计

算出频窗中心 $\omega^* = 0$, 频窗半径 $\Delta\omega = \frac{1}{2\sqrt{a}}$. 所以时

-频窗面积为 $(2\Delta t)(2\Delta\omega) = 2$.



加窗Fourier变换不足：

窗口Fourier变换的窗函数选定以后，其时-频窗就固定不变了，这样就限制了窗口Fourier变换的实际应用。为了提取高频分量的信息，时窗应该尽量地窄，而允许频窗适当地宽；对于低频分量，时窗则应适当加宽，以保证至少能包含一个周期的过程，频窗应当尽量缩小，保证有较高的频率分辨率。



三、连续小波变换

满足条件 $\psi \in L^2(R)$

$$C_\psi = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{|\hat{\psi}(\omega)|^2}{|\omega|} d\omega < \infty,$$

则称 $\psi(t)$ 为基本小波或小波母函数. 称

$$\psi_{a,b}(t) = \frac{1}{\sqrt{|a|}} \psi\left(\frac{t-b}{a}\right) \quad (a, b \in R, a \neq 0)$$

为由基本小波 $\psi(t)$, 生成的连续小波或小波基函数,
其中 a 和 b 为参数, 分别是伸缩因子和平移因子.



连续小波 $\psi_{a,b}(t)$ 的作用与窗口Fourier变换中的 $g(t-\tau)e^{-i\omega t}$ 作用类似, 其中 b 与 τ 一样都起着时间平移的作用, 而 a 在连续小波变换中是一个尺度参数, 它既能改变窗口的大小与形状, 同时也能改变连续小波的频谱结构.



常用的基本小波:

Morlet小波 $\psi(t) = e^{-\frac{t^2}{2}} e^{i\omega_0 t}, -\infty < t < +\infty, \omega_0 \geq 5.$

墨西哥草帽小波(Marr小波)

$$\psi(t) = (1 - t^2) \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{t^2}{2}}, -\infty < t < +\infty.$$

Haar小波 $\psi(t) = \begin{cases} 1, & 0 \leq t < 1/2 \\ -1, & 1/2 \leq t \leq 1 \\ 0, & \text{其他} \end{cases}$



设 $\psi_{a,b}$ 为由基本小波 $\psi(t)$ 生成的连续小波. 对 $f \in L^2(\mathbb{R})$, 称

$$(W_\psi f)(a,b) = \langle f, \psi_{a,b} \rangle = \frac{1}{\sqrt{|a|}} \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) \overline{\psi\left(\frac{t-b}{a}\right)} dt$$

为 $f(t)$ 的连续小波变换.

连续小波变换的反演公式

$$f(t) = \frac{1}{C_\psi} \int_{-\infty}^{+\infty} db \int_{-\infty}^{+\infty} (W_\psi f)(a,b) \left[\frac{1}{\sqrt{|a|}} \psi\left(\frac{t-b}{a}\right) \right] \frac{1}{a^2} da.$$



连续小波变换具有如下一些主要性质.

(1) 线性性质 设 $f, g \in L^2(\mathbb{R})$, k_1, k_2 是任意常数, 则

$$\left(W_{\psi}(k_1 f + k_2 g)\right)(a, b) = k_1 \left(W_{\psi} f\right)(a, b) + k_2 \left(W_{\psi} g\right)(a, b).$$

(2) 平移性质 设 $f \in L^2(\mathbb{R})$ 则

$$\left(W_{\psi} f(t - t_0)\right)(a, b) = \left(W_{\psi} f(t)\right)(a, b - t_0).$$

(3) 尺度法则 设 $f \in L^2(\mathbb{R})$ 则

$$\left(W_{\psi} f(\lambda t)\right)(a, b) = \frac{1}{\sqrt{\lambda}} \left(W_{\psi} f(t)\right)(\lambda a, \lambda b), \quad \lambda > 0.$$



与窗口Fourier变换类似, 在小波变换中, 也可称 $\psi_{a,b}(t)$ 是窗函数, 小波变换的时-频窗表现了小波变换的时-频局部化能力. 设 $\psi \in L^2(\mathbf{R})$ 是小波函数, 时窗中心 t^* , 时窗半径 Δt , 频窗中心 ω^* 和频窗半径 $\Delta\omega$ 分别为

$$t^* = \frac{\int_{-\infty}^{+\infty} t |\psi_{a,b}(t)|^2 dt}{\int_{-\infty}^{+\infty} |\psi_{a,b}(t)|^2 dt}, \quad \Delta t = \left(\frac{\int_{-\infty}^{+\infty} (t - t^*)^2 |\psi_{a,b}(t)|^2 dt}{\int_{-\infty}^{+\infty} |\psi_{a,b}(t)|^2 dt} \right)^{\frac{1}{2}},$$



$$\omega^* = \frac{\int_{-\infty}^{+\infty} \omega |\hat{\psi}_{a,b}(\omega)|^2 d\omega}{\int_{-\infty}^{+\infty} |\hat{\psi}_{a,b}(\omega)|^2 d\omega},$$

$$\Delta\omega = \left(\frac{\int_{-\infty}^{+\infty} (\omega - \omega^*)^2 |\hat{\psi}_{a,b}(\omega)|^2 d\omega}{\int_{-\infty}^{+\infty} |\hat{\psi}_{a,b}(\omega)|^2 d\omega} \right)^{\frac{1}{2}}.$$

小波变换中的窗函数 $\psi_{a,b}(t)$ 是由 $\psi(t)$ 的平移和缩放得来的, 分别记对应于 $\psi_{a,b}(t)$ 的有关量为: 时窗中心 t_ψ^* , 时窗半径 Δt_ψ , 频窗中心 ω_ψ^* , 频窗半径 $\Delta\omega_\psi$.

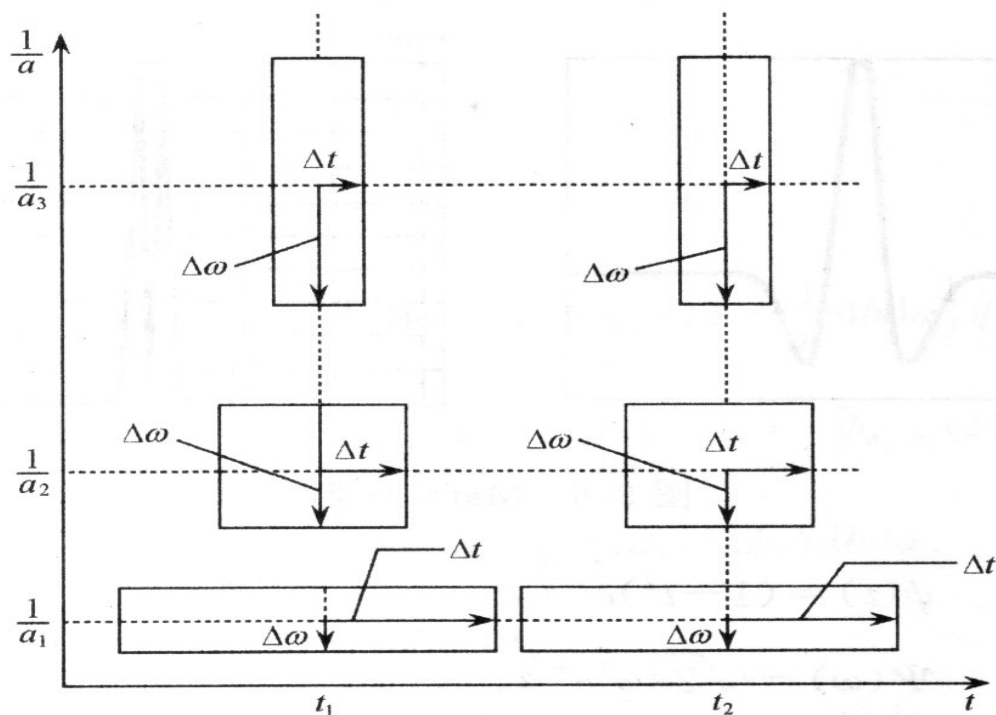
$$t^* = at_\psi^* + b, \quad \Delta t = a\Delta t_\psi, \quad \omega^* = \frac{1}{a}\omega_\psi^*, \quad \Delta\omega = \frac{1}{a}\Delta\omega_\psi.$$



虽然 $\psi_{a,b}(t)$ 的时窗和频窗的中心与宽度随着 a, b 在变化，
但是在时-频面上，窗口的面积不变，这是因为

$$(2\Delta t)(2\Delta\omega) = (2a\Delta t_\psi) \left(2\frac{1}{a}\Delta\omega_\psi \right) = (2\Delta t_\psi)(2\Delta\omega_\psi).$$

海森伯
测不准定理





四、二进小波变换和离散小波变换

在数字计算中, 要把连续小波及其变换离散化.

一般对小波变换进行二进制离散, 即取 a 为离散值

$$a_j = 2^{-j}, \quad j = 0, \pm 1, \pm 2, \dots,$$

而 b 仍取为连续的值. 这种离散化的小波和相应的小波变换叫做二进小波和二进小波变换. 如果在一定条件下, b 也取为离散的值, 则得到离散小波和相应的离散小波变换.



设 $\psi(t)$ 为基本小波, $a_0 > 1, b_0 \neq 0$. 在由 $\psi(t)$ 生成的连续小波

$$\psi_{a,b}(t) = \frac{1}{\sqrt{|a|}} \psi\left(\frac{t-b}{a}\right) \quad (a, b \in \mathbb{R}, a \neq 0)$$

中, 取 $a = a_0^{-m}, b = nb_0 a_0^{-m} \quad (m, n \in \mathbb{Z})$, 可得

$$\psi_{m,n}(t) = a_0^{\frac{m}{2}} \psi(a_0^m t - nb_0),$$

称函数族 $\{\psi_{m,n}\}_{m,n \in \mathbb{Z}}$ 为离散小波.



设 $\psi(t)$ 为基本小波, $\{\psi_{m,n}\}_{m,n \in \mathbb{Z}}$ 为相应的离散小波

对 $f \in L^2(\mathbb{R})$, 离散小波变换定义为

$$(\mathbf{D}f)_{m,n} = \langle f, \psi_{m,n} \rangle = a_0^{\frac{m}{2}} \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) \overline{\psi(a_0^m t - nb_0)} dt.$$



五、多分辨率分析

1、信号的级数展开

$$f(x) = \sum_k \alpha_k \varphi_k(x)$$

$F(x)$ 可以看成是一组基 φ_k 的展开，系数可用下面公式求出

$$\alpha_k = \langle \overline{\varphi_k(x)}, f(x) \rangle$$

$\overline{\varphi_k(x)}$ 为对偶基



要用上式求系数得满足3种情况：

1、如果展开函数构成一个标准正交基，此时该基与他的对偶基相等

$$\langle \alpha_j(x), \varphi_k(x) \rangle = \delta_{jk} = \begin{cases} 0, & j \neq k \\ 1, & j = k \end{cases}$$

2、如果展开函数函数满足下列情况，可利用其双正交对偶基

$$\langle \varphi_j(x), \varphi_k(x) \rangle = 0$$

3、如果展开函数不是V的一个基，但展开函数集合是紧框架
(公式见P301)



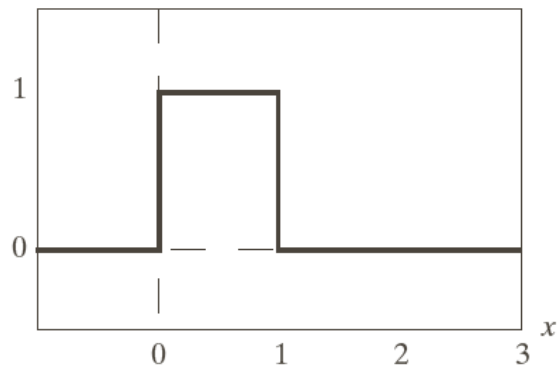
2、尺度函数

$$\varphi_{j,k}(x) = 2^{\frac{j}{2}} \varphi(2^j x - k)$$

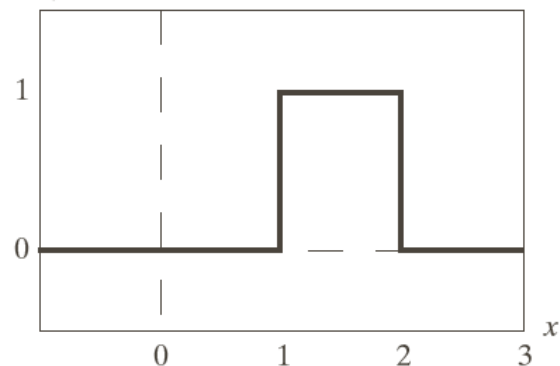
例：哈尔尺度函数

$$\varphi(x) = \begin{cases} 1, & 0 \leq x < 1 \\ 0, & \text{其它} \end{cases}$$

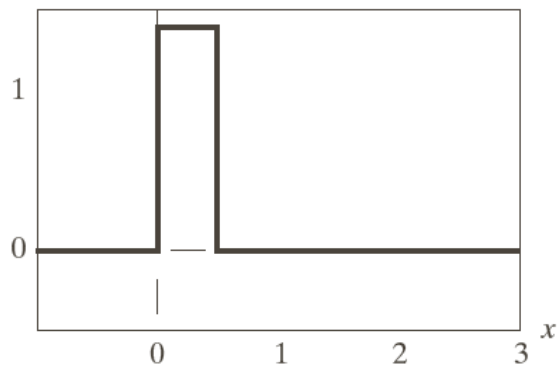
$$\varphi_{0,0}(x) = \varphi(x)$$



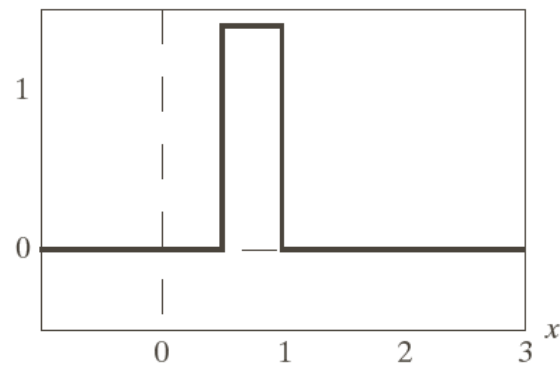
$$\varphi_{0,1}(x) = \varphi(x - 1)$$



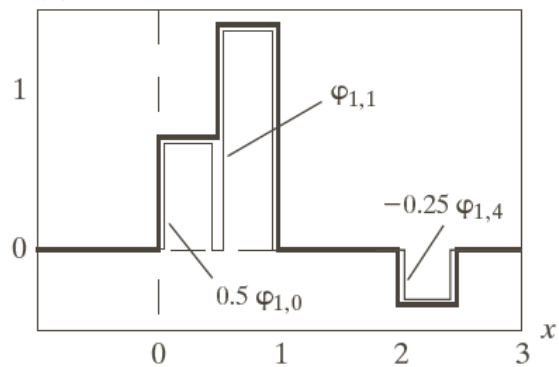
$$\varphi_{1,0}(x) = \sqrt{2} \varphi(2x)$$



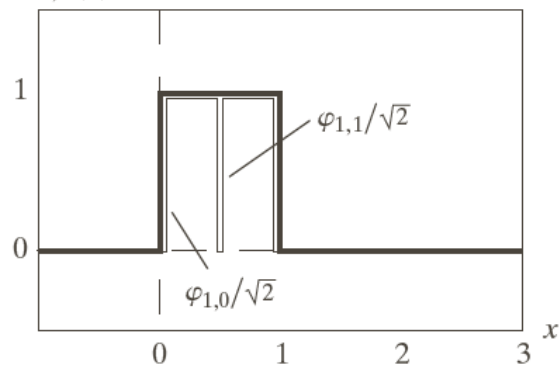
$$\varphi_{1,1}(x) = \sqrt{2} \varphi(2x - 1)$$



$$f(x) \in V_1$$



$$\varphi_{0,0}(x) \in V_1$$



a	b
c	d
e	f

FIGURE 7.11
Some Haar
scaling functions.



要实现上述例子要满足4个要求:

- 1、尺度函数平移正交
- 2、高尺度空间包含低尺度空间
- 3、唯一对所有尺度空间通用(各尺度空间基都可表示)的函数是 $f(x)=0$
- 4、任何函数都可以以任意精度表示

低尺度空间函数可以用高尺度空间函数求得

$$\varphi_{j,k}(x) = \sum_n \alpha_n \varphi_{j+1,n}(x)$$
$$\varphi(x) = \sum_n h_\varphi(n) \sqrt{2} \varphi(2x - n)$$

$h_\varphi(n)$ 称为尺度函数系数; h_φ 为尺度向量

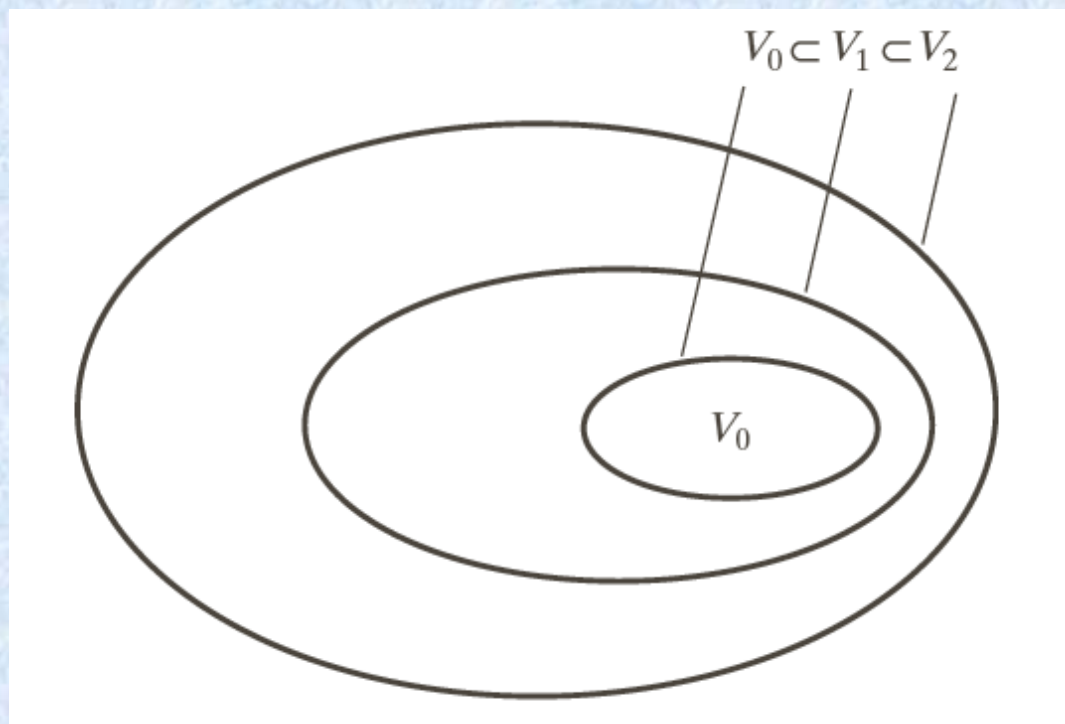


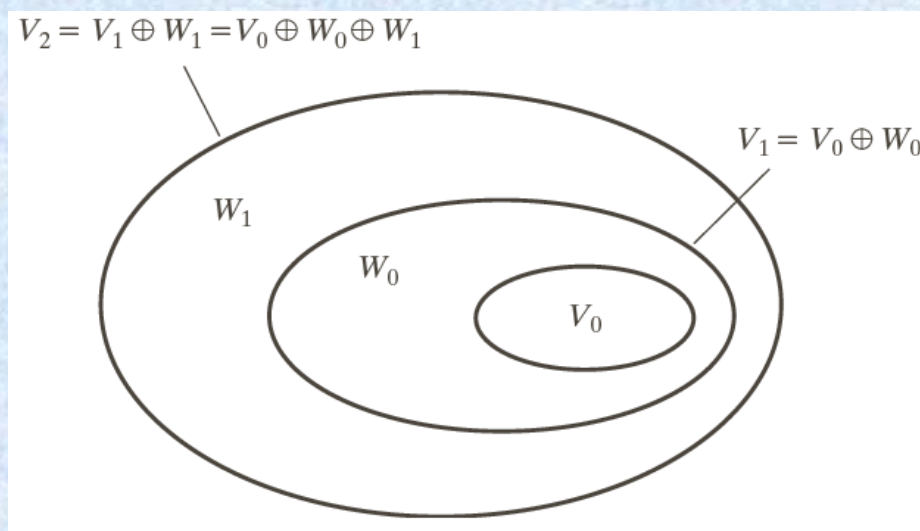
FIGURE 7.12

The nested function spaces spanned by a scaling function.



3、小波函数

$$\psi_{j,k}(x) = 2^{\frac{j}{2}} \psi(2^j x - k)$$



如果 $f(x)$ 属于 W_j 那么 $f(x) = \sum_k \alpha_k \psi_{j,k}(x)$

并且 $V_{j+1} = V_j \oplus W_j$, $\langle \varphi_{j,k}(x), \psi_{k,l}(x) \rangle = 0$



低尺度空间的小波函数可以用高尺度空间的尺度函数求得

$$\psi(x) = \sum_n h_\psi(n) \sqrt{2} \varphi(2x - n)$$

$h_\psi(n)$ 称为小波函数系数； h_ψ 为小波向量

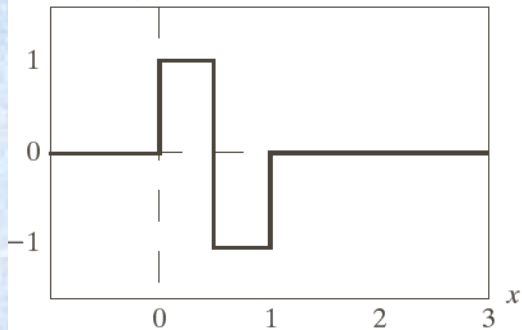
可以证明 $h_\psi(n)$ 和 $h_\varphi(n)$ 的关系为： $h_\psi(n) = (-1)^n h_\varphi(1 - n)$

哈尔小波函数

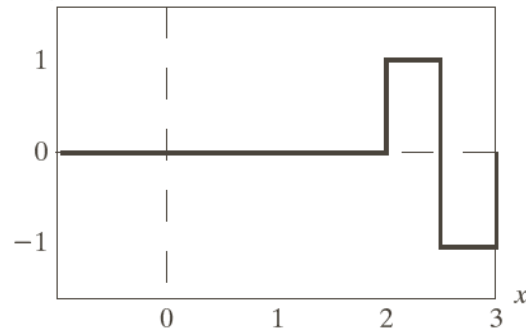
$$\psi(x) = \begin{cases} 1, & 0 \leq x \leq 0.5 \\ -1, & 0.5 \leq x < 1 \\ 0, & \text{其它} \end{cases}$$



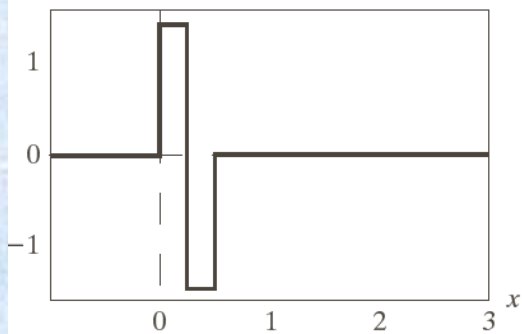
$$\psi(x) = \psi_{0,0}(x)$$



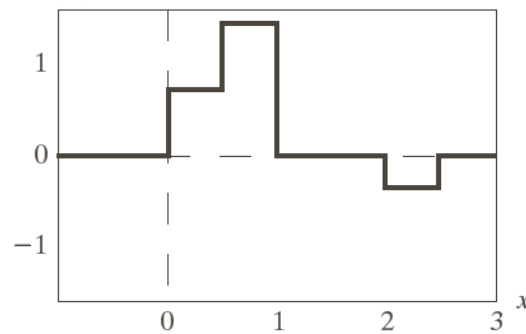
$$\psi_{0,2}(x) = \psi(x - 2)$$



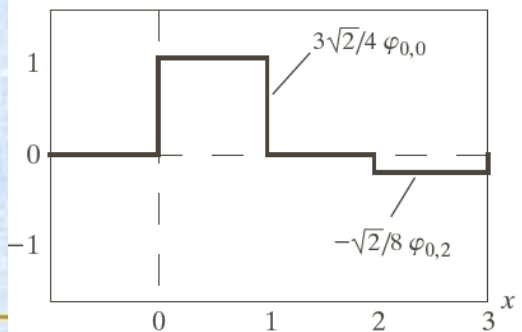
$$\psi_{1,0}(x) = \sqrt{2} \psi(2x)$$



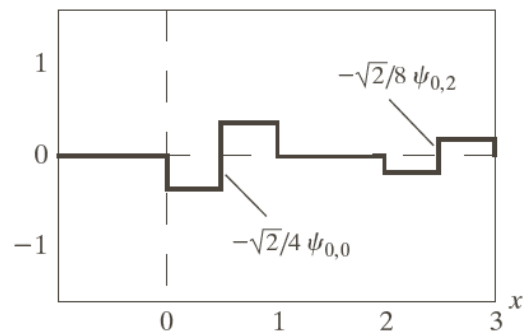
$$f(x) \in V_1 = V_0 \oplus W_0$$



$$f_a(x) \in V_0$$



$$f_d(x) \in W_0$$





设 $\{V_j\}_{j \in \mathbb{Z}}$ 是空间 $L^2(\mathbb{R})$ 中的闭子空间列. 如果满足

- (1) 单调性: $V_j \subset V_{j+1}, j \in \mathbb{Z};$
- (2) 逼近性: $\bigcap_{j \in \mathbb{Z}} V_j = \{0\}, \overline{\bigcup_{j \in \mathbb{Z}} V_j} = L^2(\mathbb{R});$
- (3) 伸缩性: $f(t) \in V_j \Leftrightarrow f(2t) \in V_{j+1} (j \in \mathbb{Z});$
- (4) 平移不变性: $f(t) \in V_j \Rightarrow f(t-n) \in V_j (j, n \in \mathbb{Z});$
- (5) Riesz基的存在性: 存在 $\varphi \in V_0$, 使得 $\{\varphi(t-n)\}_{n \in \mathbb{Z}}$ 是 V_0 的规范正交基,

则称 $\{V_j\}_{j \in \mathbb{Z}}$ 是空间 $L^2(\mathbb{R})$ 中的一个多分辨率分析

或多尺度分析, 其中 φ 称为尺度函数.



定理： 设 $\{V_j\}_{j \in \mathbb{Z}}$ 是空间 $L^2(\mathbb{R})$ 中的一个多

分辨分析, φ 为尺度函数, 则

$$\left\{ 2^{\frac{j}{2}} \varphi(2^j t - n) \right\}_{n \in \mathbb{Z}} \quad (j \in \mathbb{Z})$$

构成 V_j 的规范正交基, 记

$$\varphi_{j,n}(t) = 2^{\frac{j}{2}} \varphi(2^j t - n) \quad (j, n \in \mathbb{Z}).$$

多分辨分析的思想就是先在 $L^2(\mathbb{R})$ 的某个子空间中建立基底, 然后利用简单的伸缩与平移变换, 把子空间的基底扩充到 $L^2(\mathbb{R})$ 中.



定理： 设 $\{V_j\}_{j \in \mathbb{Z}}$ 是空间 $L^2(\mathbb{R})$ 中的一个多分辨分析, φ 为尺度函数. 如果存在 $\{h_k\}_{k \in \mathbb{Z}} \subset \mathbb{Z}$, 使得 $\sum_k |h_k|^2 < \infty$, 并且
$$\frac{1}{\sqrt{2}} \varphi\left(\frac{t}{2}\right) = \sum_k h_k \varphi(t - k),$$

对 $g_k = (-1)^k \bar{h}_{1-k}$, 定义函数 $\psi(t)$ 为

$$\frac{1}{\sqrt{2}} \psi\left(\frac{t}{2}\right) = \sum_k g_k \varphi(t - k),$$

令 $\psi_{j,n}(t) = 2^{\frac{j}{2}} \psi(2^j t - n)$ ($j, n \in \mathbb{Z}$), 则 $\{\psi_{j,n}\}_{j,n \in \mathbb{Z}}$

构成 $L^2(\mathbb{R})$ 的规范正交基.

称定理中的 $\psi(t)$ 为**正交小波函数**, $\{\psi_{j,n}\}_{j,n \in \mathbb{Z}}$ 为**正交小波基**.



六、小波展开

1、小波级数展开

考虑： $L^2(\mathbb{R}) = V_{j_0} \oplus W_{j_0} \oplus W_{j_0+1} \oplus \dots$

可得小波级数展开：

$$f(x) = \sum_k c_{j_0}(k) \varphi_{j_0,k}(x) + \sum_{j=j_0}^{\infty} \sum_k d_j(k) \psi_{j,k}(x)$$

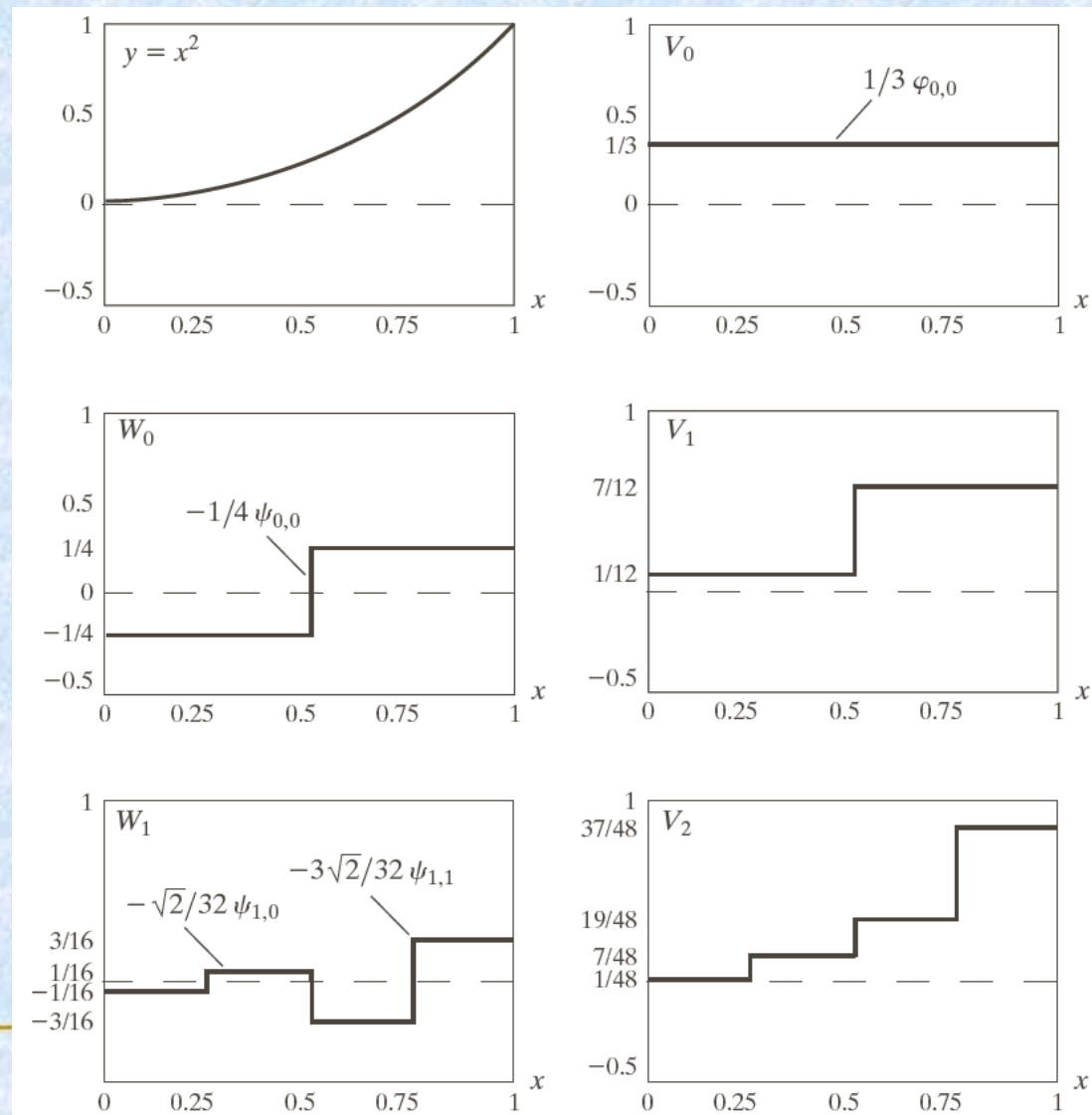
其中

$$c_{j_0}(k) = \langle f(x), \varphi_{j_0,k}(x) \rangle = \int f(x) \varphi_{j_0,k}(x) dx$$

$$d_j(k) = \langle f(x), \psi_{j,k}(x) \rangle = \int f(x) \psi_{j,k}(x) dx$$



例: $y=x^2$ 的哈尔小波展开



a	b
c	d
e	f

FIGURE 7.15
A wavelet series expansion of $y = x^2$ using Haar wavelets.



2、离散小波

对待展开展开函数进行离散化可得：

$$W_{\varphi}(j_0, k) = \frac{1}{\sqrt{M}} \sum_n f(n) \varphi_{j_0, k}(n)$$

$$W_{\psi}(j, k) = \frac{1}{\sqrt{M}} \sum_n f(n) \psi_{j, k}(n)$$

$$f(n) = \frac{1}{\sqrt{M}} \sum_k W_{\varphi}(j_0, k) \varphi_{j_0, k}(x) + \frac{1}{\sqrt{M}} \sum_{j=j_0}^{\infty} \sum_k W_{\psi}(j, k) \psi_{j, k}(x)$$



七、快速小波展开 (Mallat)

利用

$$\psi(x) = \sum_n h_\psi(n) \sqrt{2} \varphi(2x - n)$$

$$\varphi(x) = \sum_n h_\varphi(n) \sqrt{2} \varphi(2x - n)$$

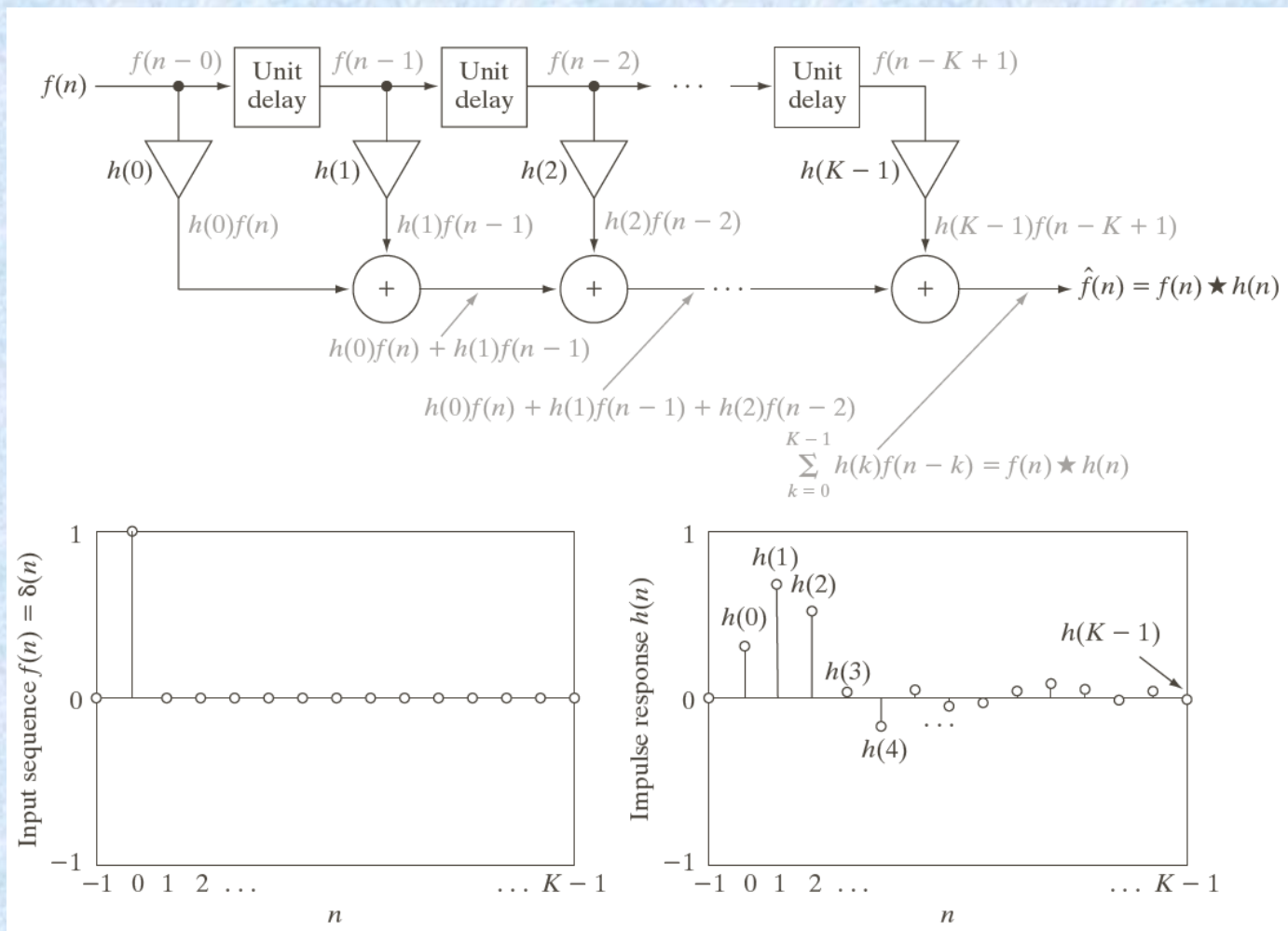
可推导出

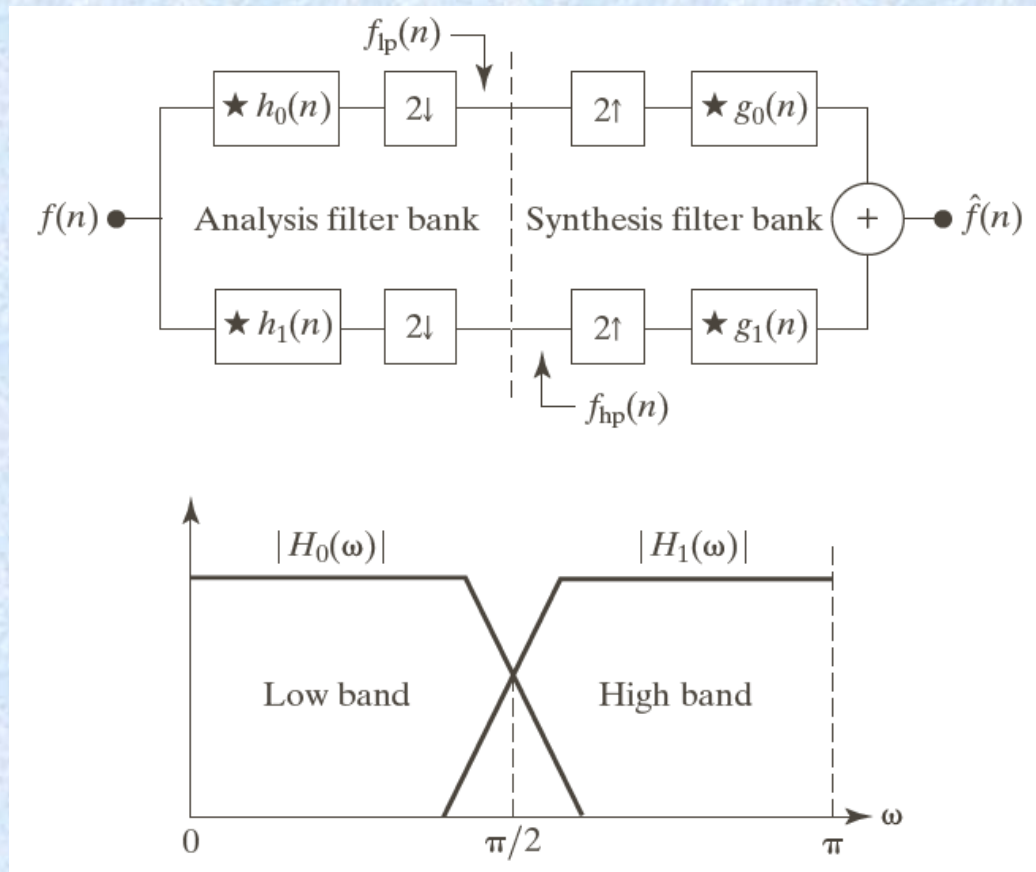
$$W_\psi(j, k) = \sum_m h_\psi(m - 2k) W_\psi(j + 1, m)$$

$$W_\varphi(j, k) = \sum_m h_\varphi(m - 2k) W_\varphi(j + 1, m)$$



设计延时滤波器





a
b

FIGURE 7.6

(a) A two-band subband coding and decoding system, and (b) its spectrum splitting properties.

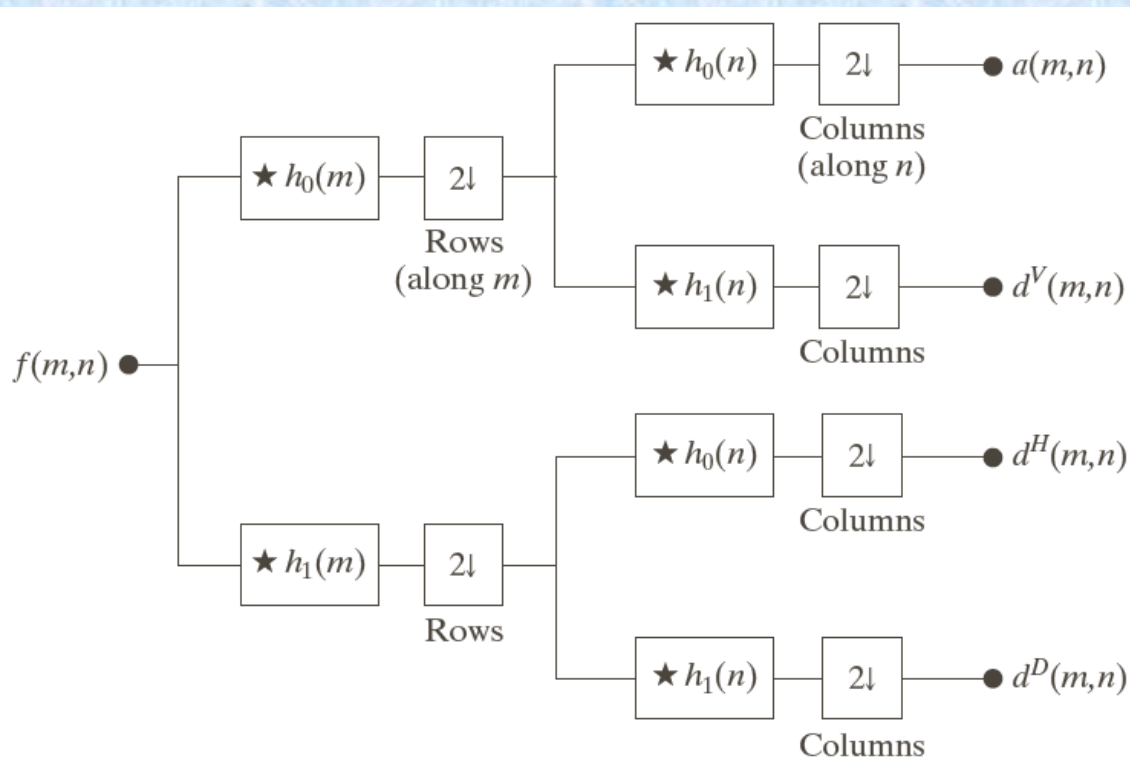


FIGURE 7.7

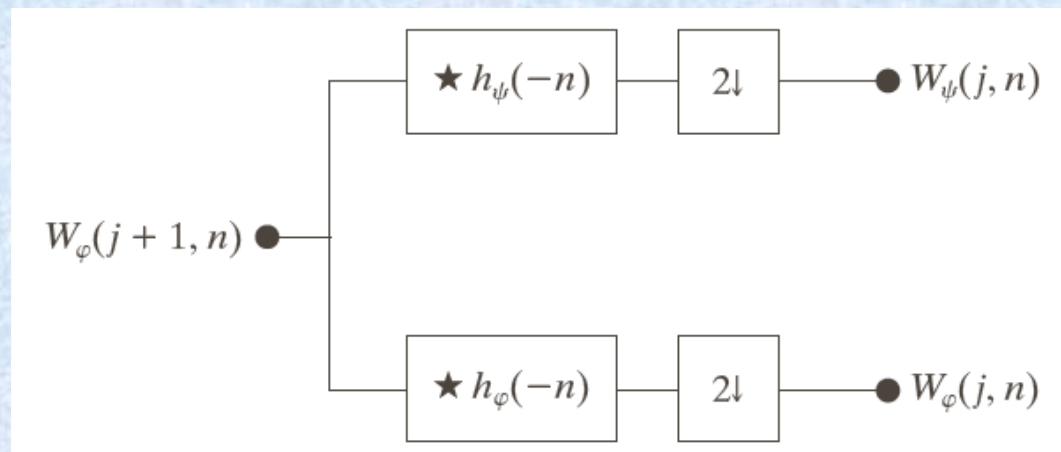
A two-dimensional, four-band filter bank for subband image coding.

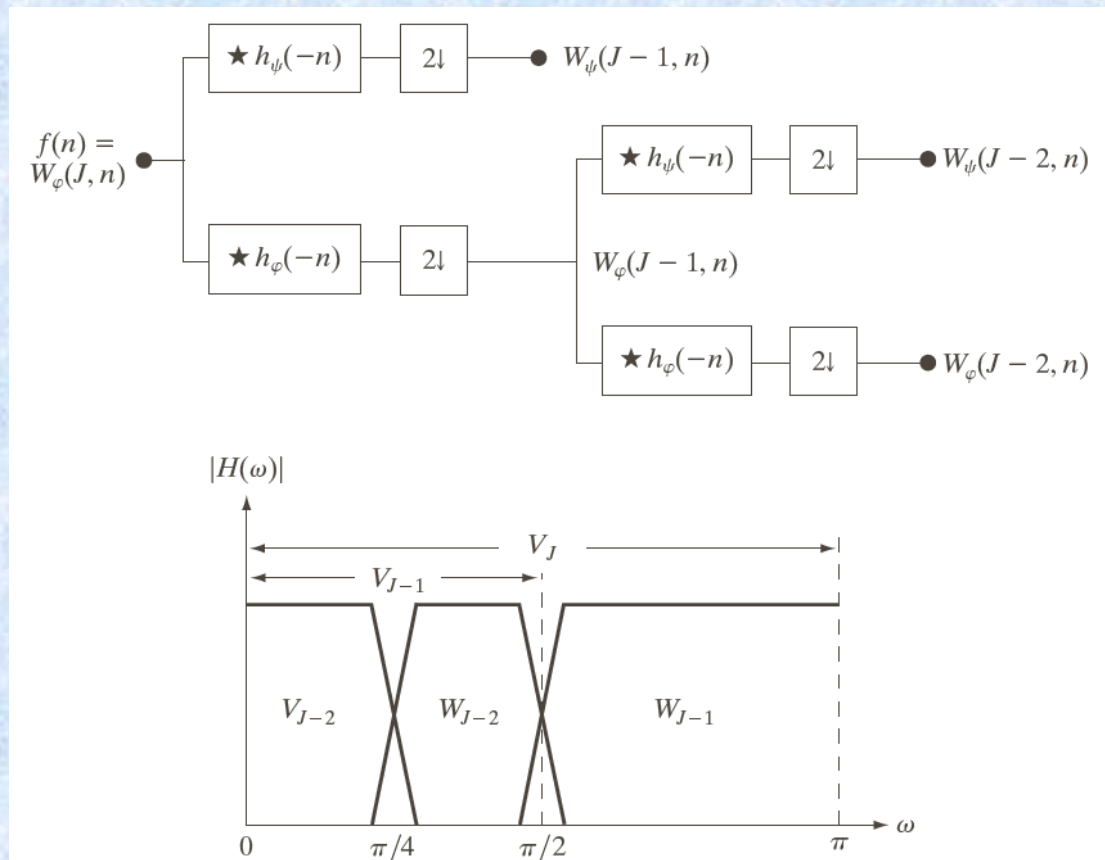


相邻尺度的小波系数可用尺度向量和小波向量的卷积操作后下采样求得

$$W_{\psi}(j, k) = W_{\varphi}(j + 1, m) * h_{\psi}(-n) \big|_{n=2k, k \geq 0}$$

$$W_{\varphi}(j, k) = W_{\varphi}(j + 1, m) * h_{\varphi}(-n) \big|_{n=2k, k \geq 0}$$





a
b

FIGURE 7.18

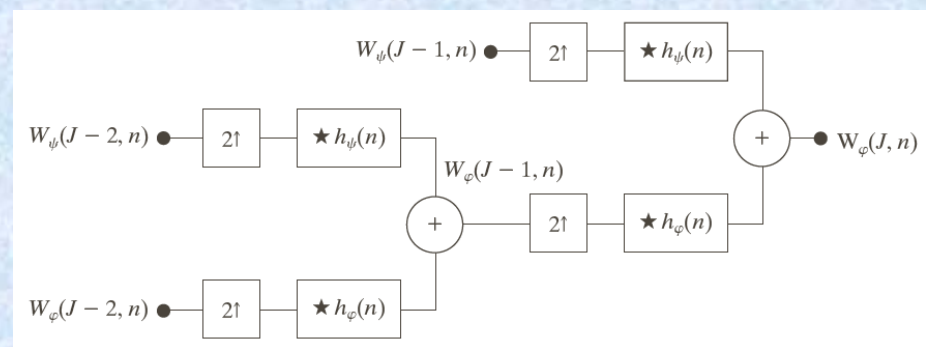
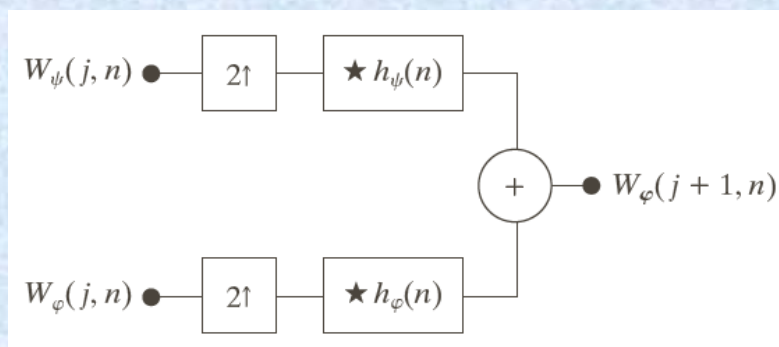
(a) A two-stage or two-scale FWT analysis bank and (b) its frequency splitting characteristics.



同理，重建也可利用小波系数与尺度向量和小波向量的卷积操作后求和求得（此时是上采样）

$$W_{\varphi}(j+1, k) = h_{\varphi}(k) * W_{\varphi}^{2\uparrow}(j, k) + h_{\psi}(k) * W_{\psi}^{2\uparrow}(j, k) |_{k \geq 0}$$

注意 $g(n) = h(-n)$





例：考虑离散函数 $f(n)=\{1,2,-3,0\}$ 的快速小波变换和逆变换

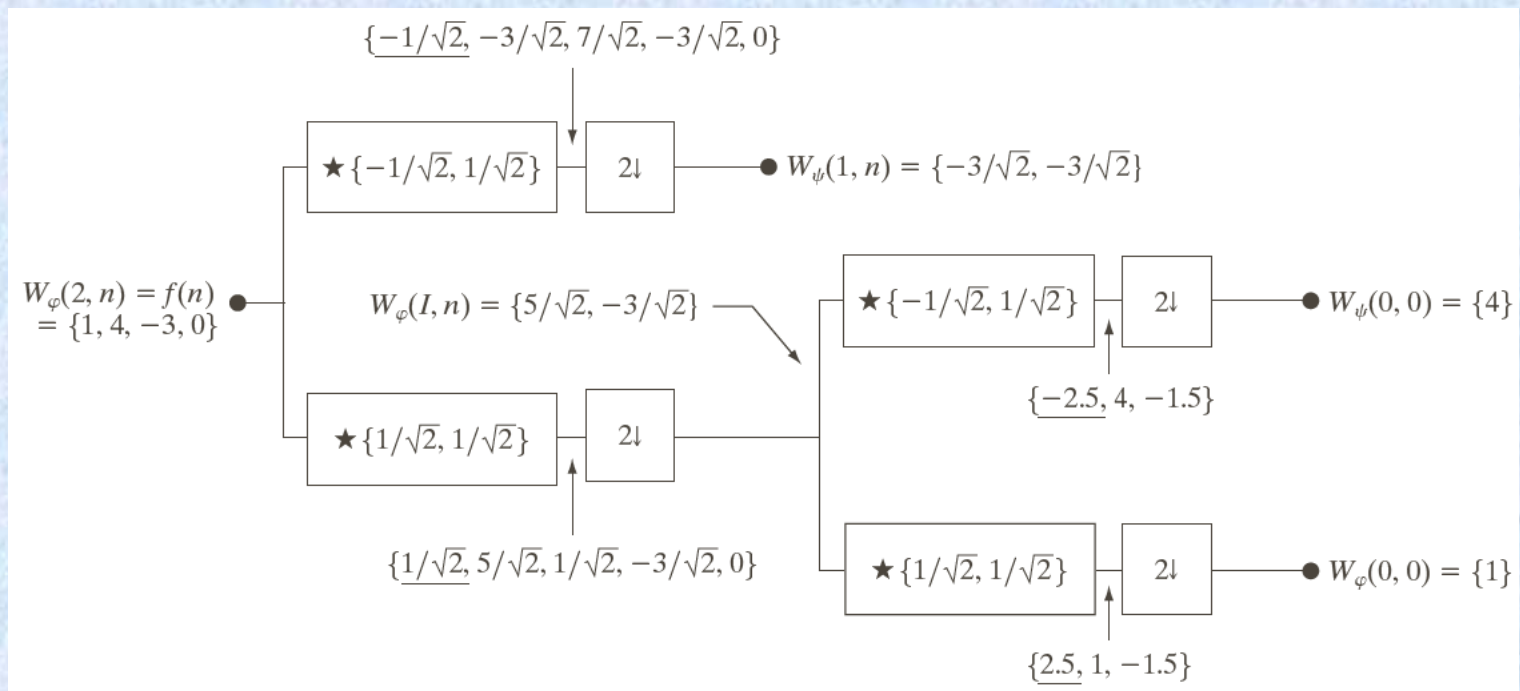


FIGURE 7.19 Computing a two-scale fast wavelet transform of sequence $\{1, 4, -3, 0\}$ using Haar scaling and wavelet vectors.

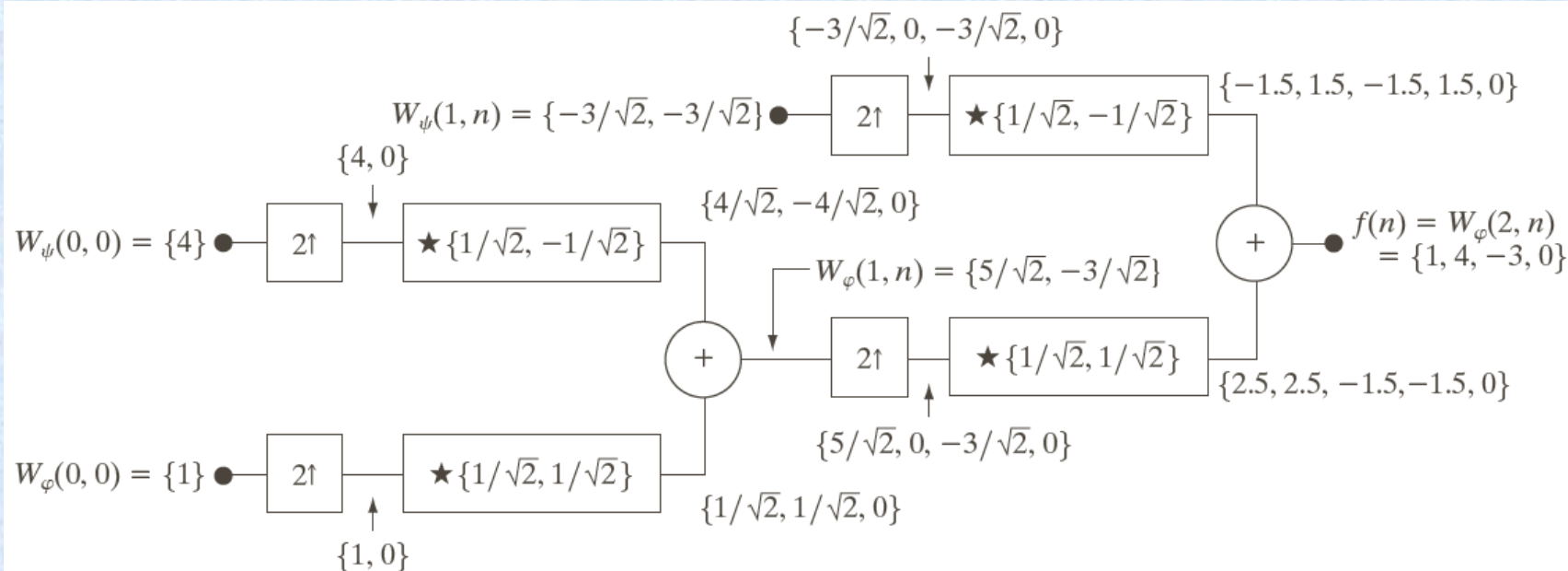
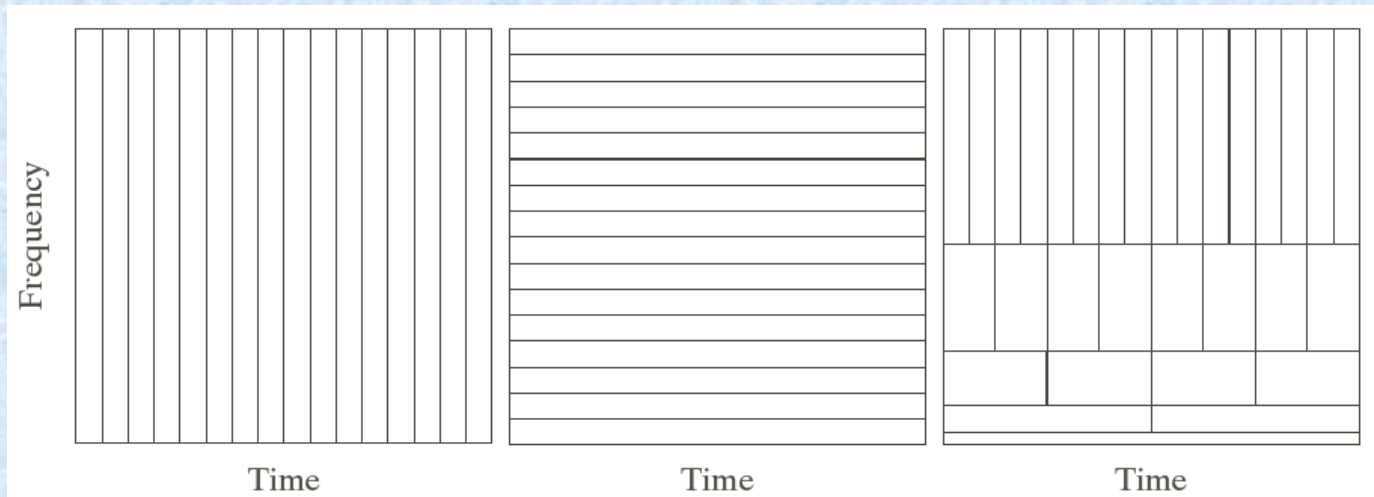


FIGURE 7.22 Computing a two-scale inverse fast wavelet transform of sequence $\{1, 4, -1.5\sqrt{2}, -1.5\sqrt{2}\}$ with Haar scaling and wavelet functions.



a b c

FIGURE 7.23 Time-frequency tilings for the basis functions associated with (a) sampled data, (b) the FFT, and (c) the FWT. Note that the horizontal strips of equal height rectangles in (c) represent FWT scales.



八、二维小波变换

把一维小波变换推广到二维得：

尺度函数

$$\varphi(x, y) = \varphi(x)\varphi(y)$$

小波函数

$$\psi^H(x, y) = \psi(x)\varphi(y) \text{ 水平方向}$$

$$\psi^V(x, y) = \varphi(x)\psi(y) \text{ 垂直方向}$$

$$\psi^D(x, y) = \psi(x)\psi(y) \text{ 对角方向}$$



二维DWT尺度函数

$$\varphi_{j,m,n}(x,y) = 2^{\frac{j}{2}} \varphi(2^j x - m, 2^j y - n)$$

二维DWT小波基函数

$$\psi_{j,m,n}^i(x,y) = 2^{\frac{j}{2}} \psi(2^j x - m, 2^j y - n), i = \{H, V, D\}$$

二维DWT小波变换

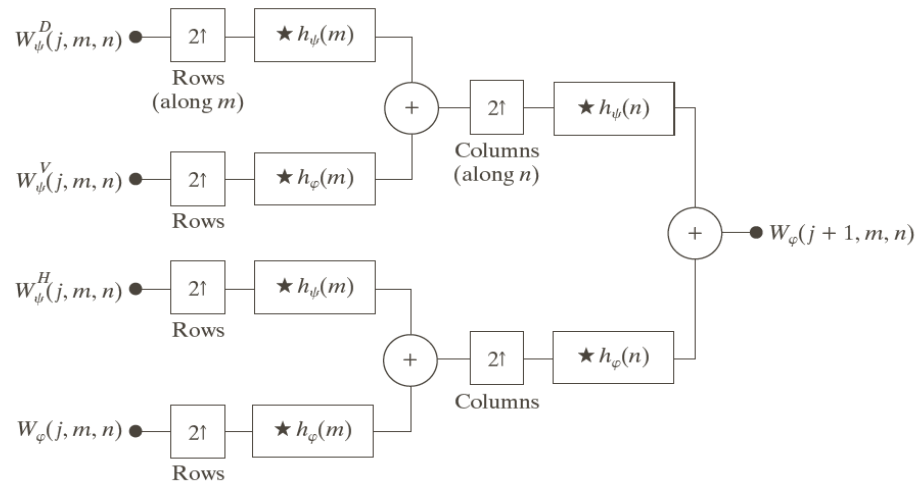
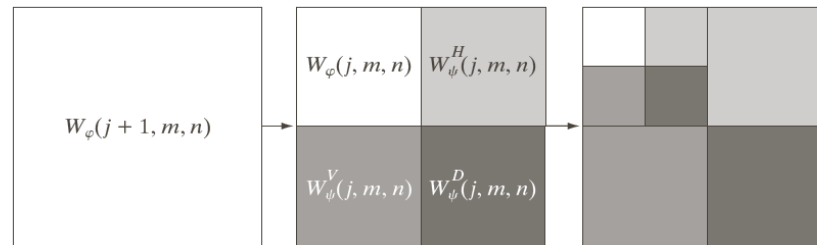
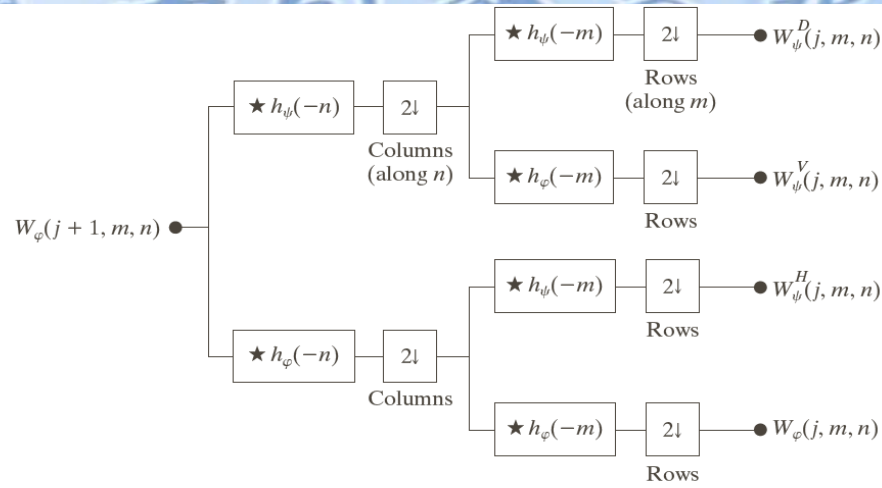
$$W_{\varphi}(j0,m,n) = \frac{1}{\sqrt{MN}} \sum_{x=0}^{M-1} \sum_{y=0}^{N-1} f(x,y) \varphi_{j0,m,n}(x,y)$$

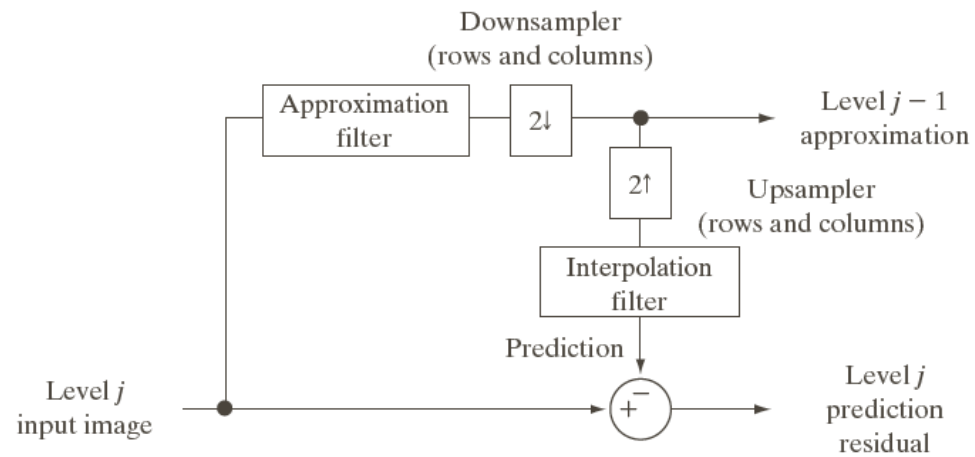
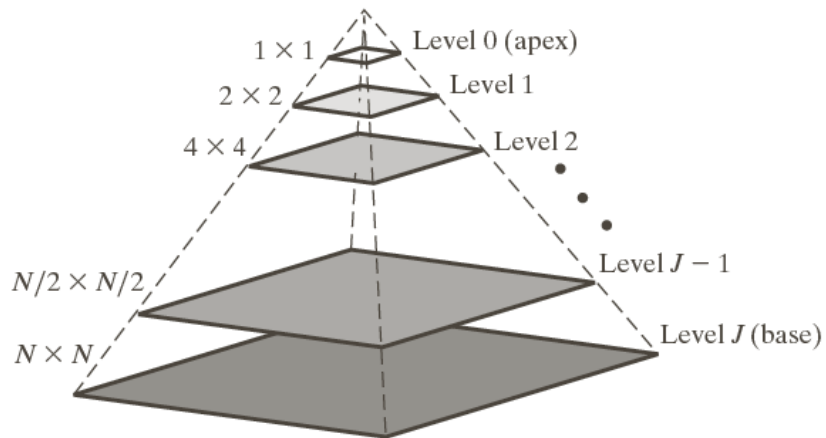
$$W_{\psi}^i(j,m,n) = \frac{1}{\sqrt{MN}} \sum_{x=0}^{M-1} \sum_{y=0}^{N-1} f(x,y) \psi_{j,m,n}^i(x,y), i = \{H, D, V\}$$

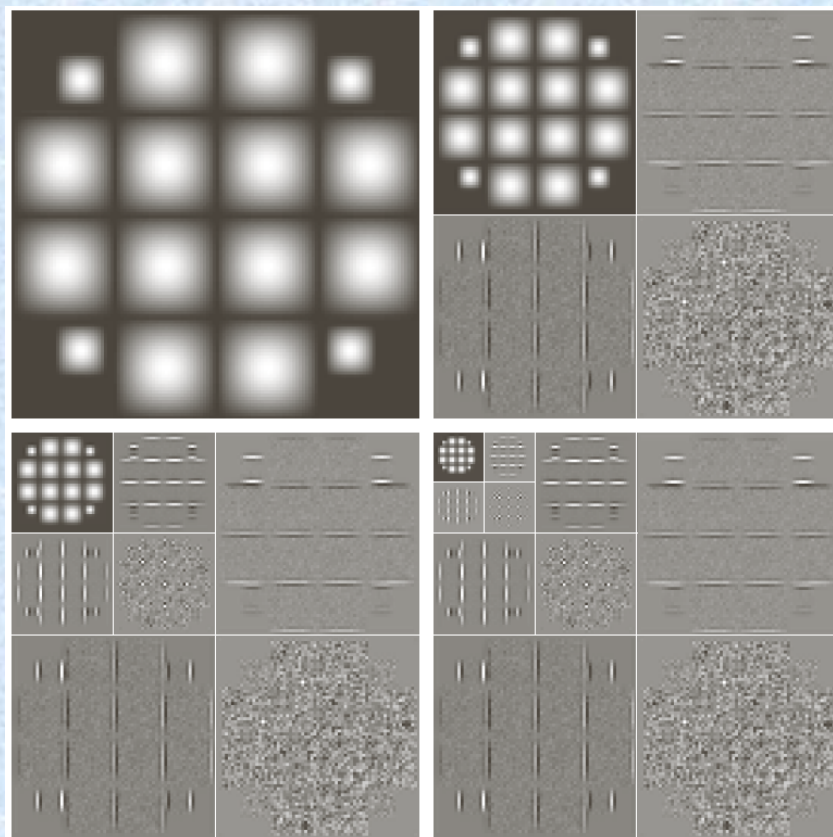


二维DWT小波反变换

$$f(x, y) = \frac{1}{\sqrt{MN}} \sum_m \sum_n W_{\varphi}(j_0, m, n) \varphi_{j_0, m, n}(x, y) \\ + \frac{1}{\sqrt{MN}} \sum_{i=H, V, D} \sum_{j=j_0}^{\infty} \sum_m \sum_n W_{\psi}^i(j, m, n) \psi_{j, m, n}^i(x, y)$$



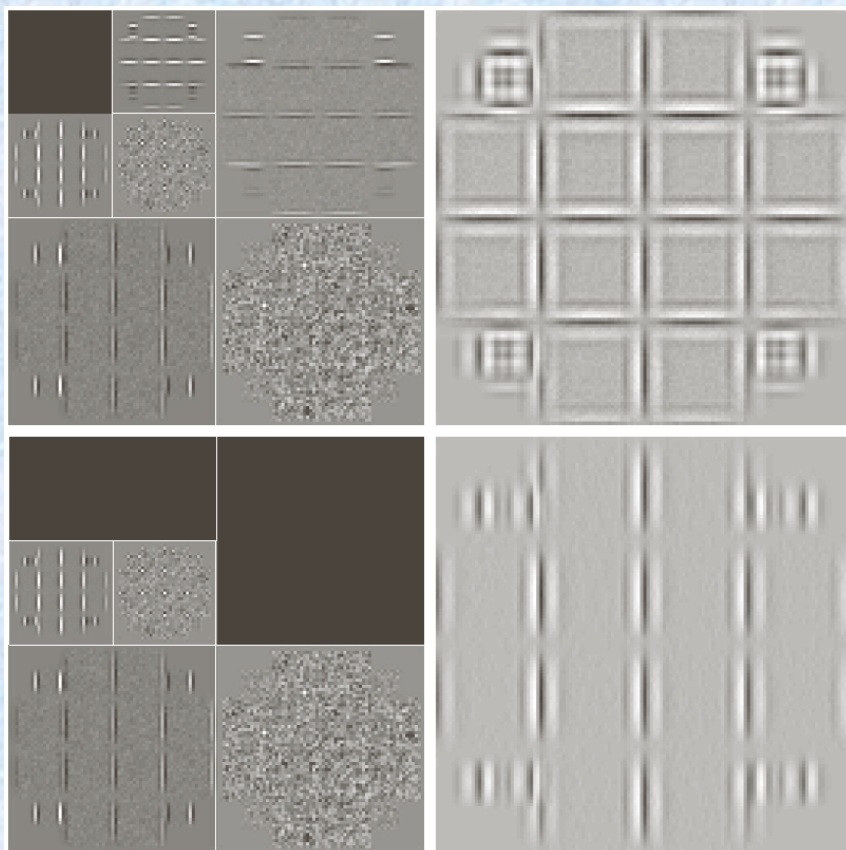




a	b
c	d

FIGURE 7.25

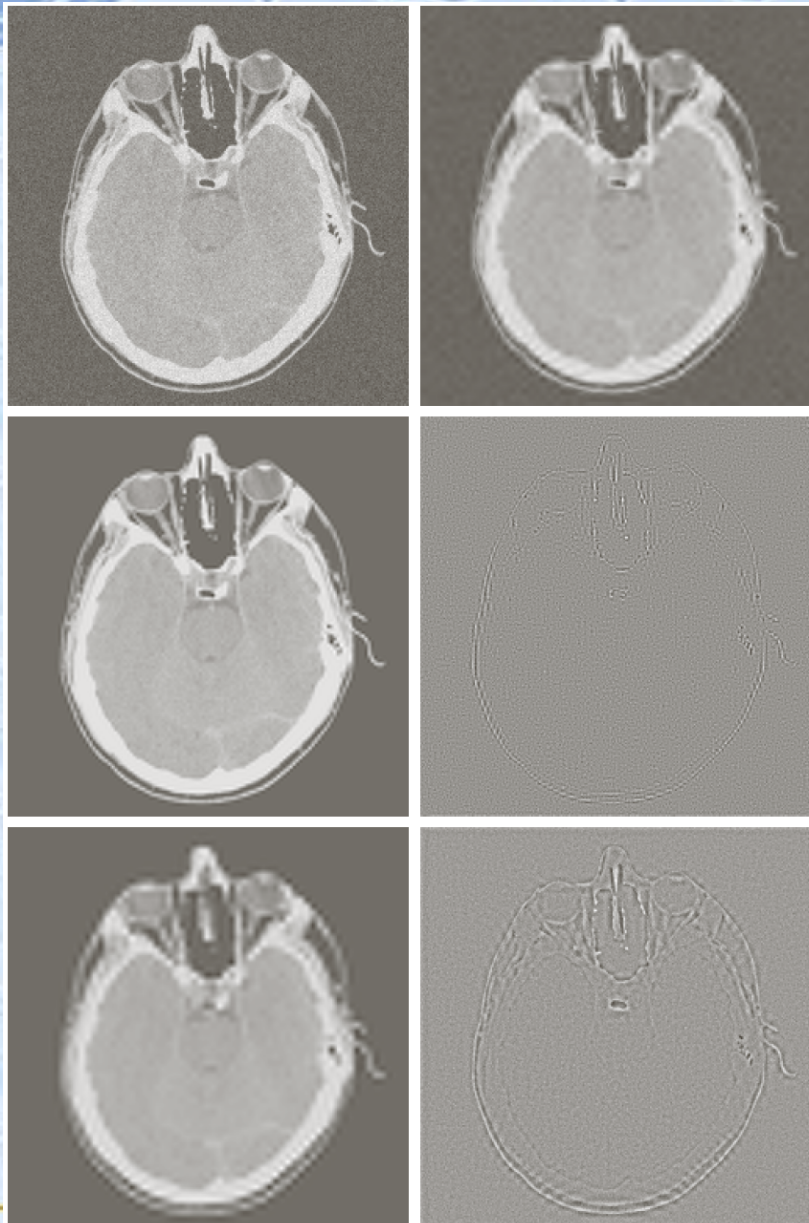
Computing a 2-D three-scale FWT: (a) the original image; (b) a one-scale FWT; (c) a two-scale FWT; and (d) a three-scale FWT.



a	b
c	d

FIGURE 7.27

Modifying a DWT for edge detection: (a) and (c) two-scale decompositions with selected coefficients deleted; (b) and (d) the corresponding reconstructions.



a	b
c	d
e	f

FIGURE 7.28

Modifying a DWT for noise removal: (a) a noisy CT of a human head; (b), (c) and (e) various reconstructions after thresholding the detail coefficients; (d) and (f) the information removed during the reconstruction of (c) and (e). (Original image courtesy Vanderbilt University Medical Center.)



利用二维小波变换可以 对图像进行压缩

一个图像作小波分解后, 得到一系列不同分辨率的子图像, 不同的子图像对应不同的频率. 高分辨率也即高频的子图像上大部分点的数值接近零, 表现图像的最主要部分是低频部分. 所以可以利用小波分解去掉图像的高频部分只保留低频部分, 就可以对图像进行压缩.
