

**本科生实验报告**

|  |  |
| --- | --- |
| **实验课程** | 数学建模 |
| **学院名称** | 数理学院 |
| **专业名称** | 数学与应用数学 |
| **学生姓名** | 。。。。 |
| **学生学号** | 202220010.。。。 |
| **指导教师** | 冯俊 |
| **实验地点** | C075-05-19 |
| **实验成绩** |  |

**二〇二四 年 三 月 二〇二四 年 五 月**

目 录

[案例一 包饺子中的数学 1](#_Toc162884162)

[一、问题重述 1](#_Toc162884163)

[二、模型建立 1](#_Toc162884164)

[三、模型求解过程和结果（程序或软件操作过程，截图并说明） 1](#_Toc162884165)

[四、模型分析与讨论 1](#_Toc162884166)

[案例二 包饺子中的数学 2](#_Toc162884167)

[一、问题重述 2](#_Toc162884168)

[二、模型建立 2](#_Toc162884169)

[三、模型求解过程和结果（程序或软件操作过程，截图并说明） 2](#_Toc162884170)

[四、模型分析与讨论 2](#_Toc162884171)

# 

# 案例一 课程得分规划模型

## 一、问题重述

研究生入学考试科目为数学、外语和专业课三门，王君已经报考，尚有 12 周复习时间，下表是他每门课的复习时间和预计得分，问在下面两种情况下他应该如何分配 12 周的复习时间？预计最高可得多少分？

(1)只考虑总分最多。(2)在三门课都及格的条件下总分最多。

## 二、模型建立

### (1) 只考虑总分最多

在这种情况下，我们的目标是最大化总分，而不考虑及格线。我们可以将这个问题建模为一个线性规划问题，其中目标是最大化总得分，约束条件是复习时间的总和不超过12周。

设数学、外语和专业课分别复习 (x), (y), (z) 周。那么我们可以得到以下目标函数和约束条件：

目标函数：( %FontSize=12
%TeXFontSize=12
\documentclass{article}
\pagestyle{empty}
\begin{document}
\[
\text{S} = 20x + 30y + 50z
\]
\end{document} )

约束条件：(%FontSize=12
%TeXFontSize=12
\documentclass{article}
\pagestyle{empty}
\begin{document}
\[
 x + y + z \leq 12
\]
\end{document} )

由于分数与复习周数之间的关系是线性的（或近似线性的，从表格数据看），我们可以直接通过遍历所有可能的周数组合来找到最优解。

### (2) 在三门课都及格的条件下总分最多

在这种情况下，我们不仅要考虑总分，还要考虑每门课都达到及格线。假设数学、外语和专业课的及格分数分别为 (M), (F), (P)，则我们需要确保通过以下分数达到或超过及格线：

数学：( %FontSize=12
%TeXFontSize=12
\documentclass{article}
\pagestyle{empty}
\begin{document}
\[
20 \times 1 + 30 \times (x-1)
\]
\end{document} )

外语：( %FontSize=12
%TeXFontSize=12
\documentclass{article}
\pagestyle{empty}
\begin{document}
\[
30 \times 1 + 15 \times (y-1)
\]
\end{document} )

专业课：( %FontSize=12
%TeXFontSize=12
\documentclass{article}
\pagestyle{empty}
\begin{document}
\[
50 \times 1 + 20 \times (z-1)
\]
\end{document} )

其中 (x), (y), (z) 分别表示每门课超过1周复习的周数。

我们的目标函数和约束条件变为：

目标函数：最大化总分（同上）

约束条件：

(%FontSize=12
%TeXFontSize=12
\documentclass{article}
\pagestyle{empty}
\begin{document}
\[
 x + y + z \leq 12
\]
\end{document} )

数学得分 (\geq M)

外语得分 (\geq F)

专业课得分 (\geq P)

## 三、模型求解过程和结果

### 情况（1）：只考虑总分最多

% 定义目标函数系数向量

f = [-20; -30; -50];

% 定义不等式约束矩阵和右侧向量

A = [1, 1, 1];

b = 12;

% 设置变量下界为0

lb = [0; 0; 0];

% 使用linprog函数求解线性规划问题

[x, maxScore] = linprog(f, [], [], A, b, lb, []);

% 输出结果

disp('最优复习时间分配：');

disp(['数学：', num2str(x(1)), ' 周']);

disp(['外语：', num2str(x(2)), ' 周']);

disp(['专业课：', num2str(x(3)), ' 周']);

disp(['预计最高得分：', num2str(-maxScore)]);



### 情况（2）：在三门课都及格的条件下总分最多

% 定义目标函数系数向量

f = [-20; -30; -50];

% 定义不等式约束矩阵和右侧向量

A = [1, 0, 0; 0, 1, 0; 0, 0, 1];

b = [55; 53; 85];

% 定义等式约束矩阵和右侧向量

Aeq = [1, 1, 1];

beq = 12;

% 设置变量下界为0

lb = [0; 0; 0];

% 使用linprog函数求解线性规划问题

[x, maxScore] = linprog(f, [], [], Aeq, beq, A, b, lb, []);

% 输出结果

disp('最优复习时间分配：');

disp(['数学：', num2str(x(1)), ' 周']);

disp(['外语：', num2str(x(2)), ' 周']);

disp(['专业课：', num2str(x(3)), ' 周']);

disp(['预计最高得分：', num2str(-maxScore)]);



## 四、模型分析与讨论

我们的数学模型旨在最大化考试总分，考虑到12周的复习时间限制。首先，我们分析了两种情况：一是只考虑总分最多，二是在三门课都及格的条件下总分最多。通过线性规划方法，我们确定了最优的复习时间分配方案，并计算出了预计最高得分。这个模型考虑了及格线的重要性，为考生提供了合理的复习计划建议，但需要注意模型结果仍受到假设和数据准确性的影响。

# 案例二 证券投资优化模型

## 一、问题重述

某银行经理计划用一笔资金进行有价证券的投资，可供购进的证券以及其信用等级、到期年限、到期税前收益如下表所示.按照规定，市政证券的收益可以免税，其他证券的收益需按 50%的税率纳税。此外还有以下限制：

(1) 政府及代办机构的证券总共至少要购进 400 万元； (2) 所购证券的平均信用等级不超过 1.4( 信用等级数字越小，信用程度越高);

(3)所购证券的平均到期年限不超过 5 年

证券名称,证券种类,信用等级,到期年限,到期税前收益

A,市政,2,9,4.3,

B,代办机构,2,15,5.4,

C,政府,,4,5.0,

D,政府,1,3,4.4,

E,市政,5,2,4.5,

问:(1)若该经理有1000万元资金,应如何投资?

(2) 如果能够以2.75%的利率借到不超过 100 万元资金，该经理应如何操作？

(3) 在 1 000 万元资金情况下，若证券 A 的税前收益增加为 4. 5%,投资应否改变？证券 C 的

群前收益减少为4.8%,投资应否改变

## 二、模型建立

(1) 对于第一个问题，我们需要建立线性规划模型来求解最优投资策略。设购买A、B、C、D、E五种证券的金额分别为%FontSize=12
%TeXFontSize=12
\documentclass{article}
\pagestyle{empty}
\begin{document}
\[
x_1, x_2, x_3, x_4, x_5
\]
\end{document}万元。

目标函数是税后总收益最大化，即：

%FontSize=12
%TeXFontSize=12
\documentclass{article}
\pagestyle{empty}
\begin{document}
\[
 \text{Maximize} \quad 4.3x_1 + 0.5 \times 5.4x_2 + 0.5 \times 5.0x_3 + 0.5 \times 4.4x_4 + 4.5x_5
\]
\end{document}

约束条件包括：

政府及代办机构的证券总金额至少为400万元：%FontSize=12
%TeXFontSize=12
\documentclass{article}
\pagestyle{empty}
\begin{document}
\[
x_2 + x_3 \geq 400
\]
\end{document}

所购证券的平均信用等级不超过1.4：%FontSize=12
%TeXFontSize=12
\documentclass{article}
\pagestyle{empty}
\begin{document}
\[
2 \times \frac{x_1 + x_2}{x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5} + 4 \times \frac{x_3}{x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5} + 1 \times \frac{x_4}{x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5} + 5 \times \frac{x_5}{x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5} \leq 1.4
\]
\end{document}

- 所购证券的平均到期年限不超过5年：%FontSize=12
%TeXFontSize=12
\documentclass{article}
\pagestyle{empty}
\begin{document}
\[
9 \times \frac{x_1}{x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5} + 15 \times \frac{x_2}{x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5} + 4 \times \frac{x_3}{x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5} + 3 \times \frac{x_4}{x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5} + 2 \times \frac{x_5}{x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5} \leq 5
\]
\end{document}

总投资金额为1000万元：%FontSize=12
%TeXFontSize=12
\documentclass{article}
\pagestyle{empty}
\begin{document}
\[
x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 = 1000
\]
\end{document}

所有投资金额非负：%FontSize=12
%TeXFontSize=12
\documentclass{article}
\pagestyle{empty}
\begin{document}
\[
x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 \geq 0
\]
\end{document}

(2) 对于第二个问题，我们可以将可借入的100万元资金纳入考虑范围，并调整目标函数和约束条件。设借入资金为%FontSize=12
%TeXFontSize=12
\documentclass{article}
\pagestyle{empty}
\begin{document}
\[
x_6
\]
\end{document}万元，则%FontSize=12
%TeXFontSize=12
\documentclass{article}
\pagestyle{empty}
\begin{document}
\[
0 \leq x_6 \leq 100
\]
\end{document}

目标函数变为税后总收益减去借款利息，即：

%FontSize=12
%TeXFontSize=12
\documentclass{article}
\pagestyle{empty}
\begin{document}
\[
\text{Maximize} \quad 4.3x_1 + 0.5 \times 5.4x_2 + 0.5 \times 5.0x_3 + 0.5 \times 4.4x_4 + 4.5x_5 - 0.0275x_6 
\]
\end{document}

约束条件中需要加入借款金额的限制：

总投资金额（包括借款）为1000万元加上可借入的资金：%FontSize=12
%TeXFontSize=12
\documentclass{article}
\pagestyle{empty}
\begin{document}
\[
x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 + x_6 = 1000 + x_6
\]
\end{document}

其余约束条件与第一个问题相同。

(3) 对于第三个问题，我们需要分别考虑证券A的税前收益增加为4.5%和证券C的税前收益减少为4.8%的情况，然后重新求解线性规划问题。

对于证券A税前收益增加的情况，将目标函数中%FontSize=12
%TeXFontSize=12
\documentclass{article}
\pagestyle{empty}
\begin{document}
\[
4.3x_1
\]
\end{document}替换为%FontSize=12
%TeXFontSize=12
\documentclass{article}
\pagestyle{empty}
\begin{document}
\[
4.5x_1
\]
\end{document}，然后重新求解。

对于证券C税前收益减少的情况，将目标函数中的%FontSize=12
%TeXFontSize=12
\documentclass{article}
\pagestyle{empty}
\begin{document}
\[
0.5 \times 5.0x_3
\]
\end{document}替换为%FontSize=12
%TeXFontSize=12
\documentclass{article}
\pagestyle{empty}
\begin{document}
\[
0.5 \times 4.8x_3
\]
\end{document}，然后重新求解。

在每次求解后，比较新旧解的目标函数值，如果新解更优，则改变投资策略；否则，保持原投资策略不变。

## 三、模型求解过程和结果

% 目标函数系数

f = [-4.3; -0.5\*5.4; -0.5\*5.0; -0.5\*4.4; -4.5];

% 线性不等式约束条件

A = [0 1 1 0 0; % x2 + x3 >= 400

2 2 0 1 5; % 平均信用等级约束

9 15 4 3 2]; % 平均到期年限约束

b = [400; 1.4\*(sum(A,2)); 5\*sum(A,2)];

% 等式约束条件

Aeq = [1 1 1 1 1];

beq = 1000;

% 变量下界

lb = zeros(5,1);

% 调用linprog求解

[x, fval] = linprog(f, A, b, Aeq, beq, lb);

% 显示结果

disp('最优投资策略：');

disp(x);

disp(['最大税后总收益：' num2str(-fval)]);

% 目标函数系数（包括借款利息）

f = [-4.3; -0.5\*5.4; -0.5\*5.0; -0.5\*4.4; -4.5; 0.0275];

% 线性不等式约束条件

A = [0 1 1 0 0 0; % x2 + x3 >= 400

2 2 0 1 5 0; % 平均信用等级约束

9 15 4 3 2 0; % 平均到期年限约束

-1 -1 -1 -1 -1 1]; % x1 + x2 + x3 + x4 + x5 <= 1000 + x6

b = [400; 1.4\*(sum(A(1:3,:),2)); 5\*sum(A(1:3,:),2); 1100]; % 1000万元加上最多可借的100万元

% 等式约束条件（包括借款）

Aeq = [1 1 1 1 1 1];

beq = 1100; % 1000万元本金加上借款

% 变量下界

lb = [zeros(5,1); 0]; % x6的下界为0

% 调用linprog求解

[x, fval] = linprog(f, A, b, Aeq, beq, lb);

% 显示结果

disp('最优投资策略（包括借款）：');

disp(x);

disp(['最大税后总收益减去借款利息：' num2str(-fval)]);

% 目标函数系数（证券A税前收益增加为4.5%）

f\_new = f;

f\_new(1) = -4.5; % 更新A的系数

% 调用linprog求解（使用新的目标函数系数）

[x\_new, fval\_new] = linprog(f\_new, A, b, Aeq, beq, lb);

% 显示结果

disp('当证券A税前收益增加为4.5%时的最优投资策略：');

disp(x\_new);

disp(['此时的最大税后总收益：' num2str(-fval\_new)]);

## 四、模型分析与讨论

模型分析表明，该线性规划模型能够有效地在给定约束条件下优化税后总收益。通过调整不同证券的投资金额，模型可以找到满足政府及代办机构证券投资总额、平均信用等级和平均到期年限要求的最佳投资策略。此外，模型的灵活性允许我们根据市场条件的变化（如证券税前收益的调整）迅速更新投资策略，以确保持续的最大化税后收益。

讨论方面，该模型提供了一个结构化框架，用于在复杂的投资环境中做出决策。然而，需要注意的是，模型的有效性取决于输入数据的准确性和完整性。此外，模型假设了市场是静态的，没有考虑动态因素（如市场波动、利率变化等）对投资决策的影响。在实际应用中，可能需要对模型进行扩展，以纳入更多现实世界的因素，从而提高投资决策的准确性和可靠性。

|  |  |
| --- | --- |
| **学生实习 心得** | 学生（签名）： 。。。。  2024年 4月2日 |
| **诚信承诺** | 本人郑重声明所呈交的实习报告是本人在指导教师指导下进行的研究工作及取得的研究成果。据我所知，除了文中特别加以标注的地方外，报告中不包含其他人已经发表或撰写过的研究成果。与我一同工作的同学对本文研究所做的贡献均已在报告中作了明确的说明并表示谢意。  学生（签名）： |

**实验报告评价标准**

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| **评价项目** | **评级内容** | **评价等级** |
| 实验报告整体评价（40分） | 报告中对实验过程叙述详细、概念正确，语言表达准确，结构严谨，条理清楚，逻辑性强，自己努力完成，没有抄袭。（35-40） |  |
| 报告中对实验过程叙述较详细、概念正确，语言表达准确，结构严谨，条理清楚，逻辑性强，自己努力完成，没有抄袭。（30-35） |
| 报告中对实验过程叙述较详细，自己努力完成，没有抄袭。（25-30） |
| 报告中对实验过程叙述简单，没有抄袭。（25以下） |
| 实验内容评价（40分） | 实验过程详细透彻、规范、全面；能结合实验内容描述正确、深刻。（35-40） |  |
| 实验过程较详细透彻、规范、全面；能结合实验内容描述正确。（30-35） |
| 对实验过程中每个问题有较详细的过程体现，但不全面。（25-30） |
| 对实验过程中每个题目有简单分析和描述。（25以下） |
| 实验心得体会（20分） | 实验心得体会深刻、有创意，有自己的个人见解和想法。（15-20） |  |
| 实验心得体会较为深刻，有自己的个人见解和想法。（10-15） |
| 实验心得体会有个人见解和想法。（5-10） |
| 实验心得体会不够深刻，缺乏创意。（5分以下） |
| **最终得分：** | | |
| **指导教师：** | | |
| **年 月 日** | | |