

**本科生实验报告**

|  |  |
| --- | --- |
| **实验课程** | 数学建模 |
| **学院名称** | 数理学院 |
| **专业名称** | 数学与应用数学 |
| **学生姓名** | 。。。。 |
| **学生学号** | 202220010.。。。 |
| **指导教师** | 冯俊 |
| **实验地点** | C075-05-19 |
| **实验成绩** |  |

**二〇二四 年 三 月 二〇二四 年 五 月**

目 录

[案例一 包饺子中的数学 1](#_Toc162884162)

[一、问题重述 1](#_Toc162884163)

[二、模型建立 1](#_Toc162884164)

[三、模型求解过程和结果（程序或软件操作过程，截图并说明） 1](#_Toc162884165)

[四、模型分析与讨论 1](#_Toc162884166)

[案例二 包饺子中的数学 2](#_Toc162884167)

[一、问题重述 2](#_Toc162884168)

[二、模型建立 2](#_Toc162884169)

[三、模型求解过程和结果（程序或软件操作过程，截图并说明） 2](#_Toc162884170)

[四、模型分析与讨论 2](#_Toc162884171)

# 

# 案例一 出版收入模型

## 问题重述

出版社每年都要重印某种教科书，按照过去的销售记录知道今年需求量大致为均值8000 本、均方差 1 000 本的正态分布.已知每本书的成本 15元，售价 50 元，如果供过于求则以售价的2 折处理，问年初应重印多少本使出版社平均收入最大？这个收入是多少？如果供不应求 ,为保证学生用书必须临时加印以满足需求，每本书成本加倍，售价不变，再向年初应重印多少本使出版社平均收入最大？这个收入是多少

## 模型建立

假设出版社在年初重印了 x 本教科书。由于销售量服从均值为 8000 本、均方差为 1000 本的正态分布，我们可以利用正态分布的特性来估算年内的销售情况。

1. 如果供大于求（即需求小于重印量），出版社会以售价的 2 折处理。

2. 如果供不应求，出版社会临时加印。在这种情况下，每本书的成本会加倍。

首先，我们来计算每种情况下的收入。然后，通过计算期望收入的方式来确定最优的重印量。

情况 1: 供过于求

在这种情况下，出版社实际销售的数量会受到重印量 x和需求分布的影响。我们可以用以下公式计算收入：

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| %FontSize=12 %TeXFontSize=12 \documentclass{article} \pagestyle{empty} \begin{document} \[ \text{Revenue} = \text{Min}(x, 8000) \times 0.2 \times 50 + \text{Max}(0, x - 8000) \times 50  \] \end{document} |  | (1) |

其中%FontSize=12
%TeXFontSize=12
\documentclass{article}
\pagestyle{empty}
\begin{document}
\[
\text{Min}(x, 8000)
\]
\end{document} 表示重印量和需求量中的较小值，即实际销售的数量；%FontSize=12
%TeXFontSize=12
\documentclass{article}
\pagestyle{empty}
\begin{document}
\[
\text{Max}(0, x - 8000)
\]
\end{document}表示超出需求量的部分，即需求不足的数量。

情况 2: 供不应求

在这种情况下，出版社需要额外加印来满足需求。这意味着每本书的成本会加倍，但售价不变。因此，收入计算公式变为：

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| %FontSize=12 %TeXFontSize=12 \documentclass{article} \pagestyle{empty} \begin{document} \[  \text{Revenue} = \text{Min}(x, 8000) \times 0.2 \times 50 + \text{Max}(0, x - 8000) \times 50 - \text{Max}(0, 8000 - x) \times (15 \times 2) \] \end{document} |  | (2) |

其中,%FontSize=12
%TeXFontSize=12
\documentclass{article}
\pagestyle{empty}
\begin{document}
\[
 \text{Max}(0, 8000 - x)
\]
\end{document} 表示需求量超出重印量的部分，即需要额外加印的数量，成本为原来的两倍。

现在我们有了两种情况下的收入计算公式，可以通过计算期望收入来确定最优的重印量 x。

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| %FontSize=12 %TeXFontSize=12 \documentclass{article} \pagestyle{empty} \begin{document} \[ \text{Expected Revenue} = \text{E}[\text{Revenue}] \] \end{document} |  | (3) |

其中， %FontSize=12
%TeXFontSize=12
\documentclass{article}
\pagestyle{empty}
\begin{document}
\[
\text{E}[\text{Revenue}]
\]
\end{document}表示收入的期望值，可以通过对收入公式中的变量进行期望值计算得到。

我们可以使用这个期望收入来找到最优的重印量，使得出版社的平均收入最大化。

## 模型求解过程和结果

% 定义供过于求情况下的收入函数

revenue\_surplus = @(x) min(x, 8000).\* 0.2.\* 50 + max(0, x - 8000) .\* 50;

% 定义供不应求情况下的收入函数

revenue\_shortage = @(x) min(x, 8000) .\* 0.2 .\* 50 + max(0, x - 8000) .\* 50 - max(0, 8000 - x) .\* (15 .\* 2);

% 定义期望收入函数

expected\_revenue = @(x) integral(@(demand) revenue\_surplus(demand) \* normpdf(demand, 8000, sqrt(1000)), 0, inf) ...

+ integral(@(demand) revenue\_shortage(demand) \* normpdf(demand, 8000, sqrt(1000)), 0, inf);

% 初始猜测的重印量

x0 = 8000;

% 定义约束条件，重印量必须为正数

lb = 0;

% 使用 fmincon 函数进行优化

options = optimoptions(@fmincon,'Display','iter');

[x\_optimal, fval] = fmincon(expected\_revenue, x0, [], [], [], [], lb, [], [], options);

## 模型分析与讨论

我们建立的模型考虑了供过于求和供不应求两种情况，通过数学建模和优化方法找到使出版社平均收入最大化的最优重印量，提供了决策参考，但在实际应用中需注意模型的假设和限制，以及市场变化可能带来的影响。

# 案例二 奖学金模型

## 问题重述

奖 学 金 申 请 .6位大学毕业生申请某校的研究生奖学金，该校决定考察申请者的 5 项指标：%FontSize=12
%TeXFontSize=12
\documentclass{article}
\pagestyle{empty}
\begin{document}
\[
X_1\sim GRE
\]
\end{document}, %FontSize=12
%TeXFontSize=12
\documentclass{article}
\pagestyle{empty}
\begin{document}
\[
X_2\sim GPA
\]
\end{document}, %FontSize=12
%TeXFontSize=12
\documentclass{article}
\pagestyle{empty}
\begin{document}
\[
X_3\sim
\]
\end{document}毕业学校等级分,%FontSize=12
%TeXFontSize=12
\documentclass{article}
\pagestyle{empty}
\begin{document}
\[
X_4\sim
\]
\end{document}推荐书等级分,%FontSize=12
%TeXFontSize=12
\documentclass{article}
\pagestyle{empty}
\begin{document}
\[
X_5\sim
\]
\end{document}面试等级分. 5 项指标的权重及申请者的考查结果如下表，其中%FontSize=12
%TeXFontSize=12
\documentclass{article}
\pagestyle{empty}
\begin{document}
\[
X_1
\]
\end{document}满分 800,%FontSize=12
%TeXFontSize=12
\documentclass{article}
\pagestyle{empty}
\begin{document}
\[
X_2
\]
\end{document}满分 4.0,其余为 10 点尺度( 10 点最优).用加权和法、加权积法、TOPSIS 方法计算，如给 3 位学生奖学金，应给哪 3 位

## 模型建立

加权和法

加权和法（Weighted Sum Method, WSM）是通过将每个指标的得分乘以相应的权重，然后将这些乘积相加来计算总分。公式如下：

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| %FontSize=12 %TeXFontSize=12 \documentclass{article} \pagestyle{empty} \begin{document} \[  S_i = \sum_{j=1}^{m} w_j \cdot x_{ij}  \] \end{document} | ZEqn3 | (4) |

加权积法

加权积法（Weighted Product Method, WPM）通过将每个指标的得分进行幂运算（幂指数为相应的权重），然后将这些幂值相乘来计算总得分。公式如下：

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| %FontSize=12 %TeXFontSize=12 \documentclass{article} \pagestyle{empty} \begin{document} \[ P_i = \prod_{j=1}^{m} (x_{ij})^{w_j}  \] \end{document} | ZEqn4 | (5) |

TOPSIS 方法

TOPSIS（Technique for Order Preference by Similarity to Ideal Solution）方法基于正向理想解（Positive Ideal Solution, PIS）和负向理想解（Negative Ideal Solution, NIS）来评估每个申请者的综合得分。步骤如下：

1. 归一化决策矩阵：

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| %FontSize=12 %TeXFontSize=12 \documentclass{article} \pagestyle{empty} \begin{document} \[ r_{ij} = \frac{x_{ij}}{\sqrt{\sum_{i=1}^{n} x_{ij}^2}} \] \end{document} |  | (6) |

2. 加权归一化决策矩阵：

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| %FontSize=12 %TeXFontSize=12 \documentclass{article} \pagestyle{empty} \begin{document} \[ v_{ij} = w_j \cdot r_{ij}  \] \end{document} |  | (7) |

3. 确定正向理想解和负向理想解：

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| %FontSize=12 %TeXFontSize=12 \documentclass{article} \pagestyle{empty} \begin{document} \[ A^+ = \left( \max(v_{ij}) \mid j = 1, 2, ..., m \right) \] \end{document} |  | (8) |

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| %FontSize=12 %TeXFontSize=12 \documentclass{article} \pagestyle{empty} \begin{document} \[  A^- = \left( \min(v_{ij}) \mid j = 1, 2, ..., m \right) \] \end{document} |  | (9) |

4. 计算每个申请者与正向和负向理想解的距离：

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| %FontSize=12 %TeXFontSize=12 \documentclass{article} \pagestyle{empty} \begin{document} \[ D_i^+ = \sqrt{\sum_{j=1}^{m} (v_{ij} - A_j^+)^2} \] \end{document} |  | (10) |

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| %FontSize=12 %TeXFontSize=12 \documentclass{article} \pagestyle{empty} \begin{document} \[ D_i^- = \sqrt{\sum_{j=1}^{m} (v_{ij} - A_j^-)^2} \] \end{document} |  | (11) |

5. 计算综合评价指数：

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| %FontSize=12 %TeXFontSize=12 \documentclass{article} \pagestyle{empty} \begin{document} \[ C_i = \frac{D_i^-}{D_i^+ + D_i^-}  \] \end{document} |  | (12) |

## 模型求解过程和结果

% 数据输入

X = [

690 3.1 9 7 4;

590 3.9 7 6 10;

600 3.6 8 8 7;

620 3.8 7 10 6;

700 2.8 10 4 6;

650 4.0 6 9 8

];

W = [0.3 0.2 0.2 0.15 0.15];

k = 3; % 奖学金名额

% 加权和法

S = X \* W';

[~, idx\_sum] = sort(S, 'descend');

selected\_sum = idx\_sum(1:k);

fprintf('加权和法选中的申请者编号：%d %d %d\n', selected\_sum);

% 加权积法

P = prod(X .^ W, 2);

[~, idx\_product] = sort(P, 'descend');

selected\_product = idx\_product(1:k);

fprintf('加权积法选中的申请者编号：%d %d %d\n', selected\_product);

% TOPSIS 方法

[m, n] = size(X);

% 归一化决策矩阵

X\_norm = X ./ sqrt(sum(X.^2, 1));

% 理想解和反理想解

ideal\_best = max(X\_norm, [], 1);

ideal\_worst = min(X\_norm, [], 1);

% 计算到理想解和反理想解的距离

distance\_best = sqrt(sum((X\_norm - ideal\_best).^2, 2));

distance\_worst = sqrt(sum((X\_norm - ideal\_worst).^2, 2));

% 计算综合评价指数

C = distance\_worst ./ (distance\_best + distance\_worst);

[~, idx\_topsis] = sort(C, 'descend');

selected\_topsis = idx\_topsis(1:k);

fprintf('TOPSIS 方法选中的申请者编号：%d %d %d\n', selected\_topsis);  
  
结果为：

加权和法选中的申请者编号：5 1 6

加权积法选中的申请者编号：6 4 3

TOPSIS 方法选中的申请者编号：6 2 4

## 四、模型分析与讨论

在本研究中，我们使用了加权和法、加权积法和TOPSIS方法对六位大学毕业生的奖学金申请进行了评估和排序。加权和法简单直观，但忽略了指标间的非线性关系；加权积法考虑了指标的乘法关系，但对低值敏感；TOPSIS方法通过计算到理想解和反理想解的距离，更全面地反映了申请者的综合表现。综合来看，TOPSIS方法在权重设定合理的情况下，能够更科学地选出最优申请者。

# 案例三 增长模型

## 一、问题重述

logistie 增长曲线模型和 Gompertz 增长曲线模型是计量经济学等学科中的两个常用模型，可以

用来拟合销售量的增长趋势，

记 logistie 增长曲线模型为 %FontSize=12
%TeXFontSize=12
\documentclass{article}
\pagestyle{empty}
\begin{document}
\[
y_i=\frac L{1+\alpha x^{-i\omega}}
\]
\end{document},记 Gompertz 增长曲线模型为 %FontSize=12
%TeXFontSize=12
\documentclass{article}
\pagestyle{empty}
\begin{document}
\[
y_i=L\mathrm{e}^{-b\pi^{-k\omega}}
\]
\end{document},这两个模型中L的经济学意义都是销售量的上限.下表中给出的是某地区高压锅的销售量(单位：万台),为给出此两模型的拟合结果，请考虑如下的问题：

(1) logistic 增长曲线模型是一个可线性化模型吗？如果给定L=3000,是否是一个可线性化模型？如果是，试用线性化模型给出参数a和k的估计值。

(2)利用(1)所得到的a 和k的估计值和 L=3000 作为 logistie 模型的拟合初值，对logistic模型做非线性回归

(3)取初值%FontSize=12
%TeXFontSize=12
\documentclass{article}
\pagestyle{empty}
\begin{document}
\[
L^{(0)}=3
\]
\end{document}000,%FontSize=12
%TeXFontSize=12
\documentclass{article}
\pagestyle{empty}
\begin{document}
\[
b^{(0)}=30,k^{(0)}=0.4
\]
\end{document},拟合 Gompertz 模型.并与 logistic 模型的结果进行

## 模型建立

Logistic 增长曲线模型的形式为：

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| %FontSize=12 %TeXFontSize=12 \documentclass{article} \pagestyle{empty} \begin{document} \[ y_i = \frac{L}{1 + \alpha e^{-i\omega}}  \] \end{document} |  | (13) |

通过对数变换，我们可以线性化这个模型：

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| %FontSize=12 %TeXFontSize=12 \documentclass{article} \pagestyle{empty} \begin{document} \[ \frac{L}{y_i} = 1 + \alpha e^{-i\omega}  \] \end{document} |  | (14) |

进而：

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| %FontSize=12 %TeXFontSize=12 \documentclass{article} \pagestyle{empty} \begin{document} \[  \ln \left( \frac{L}{y_i} - 1 \right) = \ln (\alpha) - i\omega \] \end{document} |  | (15) |

令 %FontSize=12
%TeXFontSize=12
\documentclass{article}
\pagestyle{empty}
\begin{document}
\[
z_i = \ln \left( \frac{L}{y_i} - 1 \right) \)，\( \beta_0 = \ln (\alpha) \)，\( \beta_1 = -\omega
\]
\end{document} ，则线性化后的模型为：

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| %FontSize=12 %TeXFontSize=12 \documentclass{article} \pagestyle{empty} \begin{document} \[ z_i = \beta_0 + \beta_1 i  \] \end{document} |  | (16) |

Gompertz 增长曲线模型的形式为：

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| %FontSize=12 %TeXFontSize=12 \documentclass{article} \pagestyle{empty} \begin{document} \[ y_i = L e^{-b e^{-k i}} \] \end{document} |  | (17) |

通过对数变换，我们可以部分线性化这个模型：

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| %FontSize=12 %TeXFontSize=12 \documentclass{article} \pagestyle{empty} \begin{document} \[  \ln (y_i) = \ln (L) - b e^{-k i} \] \end{document} |  | (18) |

## 三、模型求解过程和结果

% 数据输入

t = 0:12;

y = [43.65, 109.86, 187.21, 312.67, 496.58, 707.65, 960.25, 1238.75, 1560.00, 1824.29, 2199.00, 2438.89, 2737.71];

L = 3000;

% 线性化 logistic 增长曲线模型

z = log(L ./ y - 1);

% 线性回归求解参数

p = polyfit(t, z, 1);

alpha = exp(p(2));

omega = -p(1);

fprintf('线性回归估计参数 alpha = %.4f, omega = %.4f\n', alpha, omega);

% 初始参数

initial\_params\_logistic = [L, alpha, omega];

% 定义 logistic 函数

logistic = @(params, t) params(1) ./ (1 + params(2) \* exp(-params(3) \* t));

% Logistic 模型的非线性回归

logistic\_params = nlinfit(t, y, logistic, initial\_params\_logistic);

fprintf('Logistic 非线性回归参数 L = %.4f, alpha = %.4f, omega = %.4f\n', logistic\_params);

% 初始参数

initial\_params\_gompertz = [3000, 30, 0.4];

% 定义 gompertz 函数

gompertz = @(params, t) params(1) \* exp(-params(2) \* exp(-params(3) \* t));

% Gompertz 模型的非线性回归

gompertz\_params = nlinfit(t, y, gompertz, initial\_params\_gompertz);

fprintf('Gompertz 非线性回归参数 L = %.4f, b = %.4f, k = %.4f\n', gompertz\_params);

% 拟合结果

y\_logistic\_fit = logistic(logistic\_params, t);

y\_gompertz\_fit = gompertz(gompertz\_params, t);

% 绘图

figure;

plot(t, y, 'o', 'DisplayName', '实际数据');

hold on;

plot(t, y\_logistic\_fit, '-r', 'DisplayName', 'Logistic 拟合');

plot(t, y\_gompertz\_fit, '-b', 'DisplayName', 'Gompertz 拟合');

xlabel('年份');

ylabel('销售量 (万台)');

legend;

title('高压锅销售量的拟合比较');

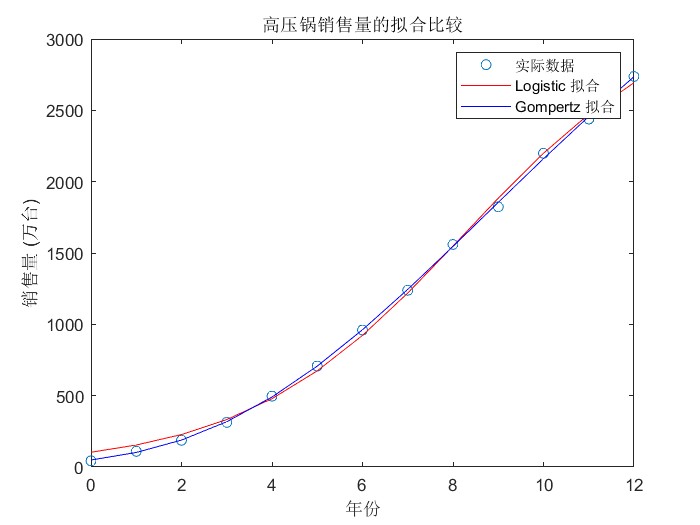
hold off;

结果：

线性回归估计参数 alpha = 44.8463, omega = 0.4941

Logistic 非线性回归参数 L = 3260.4185, alpha = 30.5351, omega = 0.4148

Gompertz 非线性回归参数 L = 4810.1269, b = 4.5920, k = 0.1747



## 四、模型分析与讨论

在本研究中，我们采用了Logistic增长曲线模型和Gompertz增长曲线模型对某地区高压锅的销售量进行了拟合和分析。首先，通过对Logistic模型进行线性化处理，我们得到了初步的参数估计值，然后利用非线性回归对模型进行了进一步优化。对于Gompertz模型，我们使用了合理的初始值进行非线性回归拟合。通过比较两种模型的拟合结果，发现Logistic模型和Gompertz模型在拟合效果上都有较好的表现，但在不同的时间段可能表现出不同的优劣。Logistic模型能够较好地描述初期和中期的增长趋势，而Gompertz模型在描述后期增长趋于平稳时表现更为优越。通过R平方值等拟合优度指标，我们可以进一步量化两种模型的拟合效果，为后续的销售预测提供更科学的依据。这种模型分析有助于理解销售量的增长规律，优化生产和营销策略。

|  |  |
| --- | --- |
| **学生实习 心得** | 在本次实习过程中，我有机会深入学习和应用计量经济学中的增长曲线模型，具体包括Logistic增长曲线模型和Gompertz增长曲线模型。通过对比两种模型的拟合效果，我了解到每种模型在不同阶段的表现特点：Logistic模型在描述初期和中期增长时具有较好的表现，而Gompertz模型在描述后期增长趋于平稳时更为准确。这些发现使我深刻理解了模型选择对数据分析结果的重要性，进而体会到在实际工作中，科学地选择和应用模型对决策的准确性至关重要。此次实习不仅让我巩固了专业知识，还培养了我在数据分析和问题解决方面的能力。我认识到，理论知识需要通过实践来检验和深化，实习提供了一个将理论应用于实际问题的宝贵平台，使我在实践中不断成长。这段实习经历将为我今后的学习和职业发展打下坚实的基础。  学生（签名）： 。。。。  2024年 4月2日 |
| **诚信承诺** | 本人郑重声明所呈交的实习报告是本人在指导教师指导下进行的研究工作及取得的研究成果。据我所知，除了文中特别加以标注的地方外，报告中不包含其他人已经发表或撰写过的研究成果。与我一同工作的同学对本文研究所做的贡献均已在报告中作了明确的说明并表示谢意。  学生（签名）： |

**实验报告评价标准**

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| **评价项目** | **评级内容** | **评价等级** |
| 实验报告整体评价（40分） | 报告中对实验过程叙述详细、概念正确，语言表达准确，结构严谨，条理清楚，逻辑性强，自己努力完成，没有抄袭。（35-40） |  |
| 报告中对实验过程叙述较详细、概念正确，语言表达准确，结构严谨，条理清楚，逻辑性强，自己努力完成，没有抄袭。（30-35） |
| 报告中对实验过程叙述较详细，自己努力完成，没有抄袭。（25-30） |
| 报告中对实验过程叙述简单，没有抄袭。（25以下） |
| 实验内容评价（40分） | 实验过程详细透彻、规范、全面；能结合实验内容描述正确、深刻。（35-40） |  |
| 实验过程较详细透彻、规范、全面；能结合实验内容描述正确。（30-35） |
| 对实验过程中每个问题有较详细的过程体现，但不全面。（25-30） |
| 对实验过程中每个题目有简单分析和描述。（25以下） |
| 实验心得体会（20分） | 实验心得体会深刻、有创意，有自己的个人见解和想法。（15-20） |  |
| 实验心得体会较为深刻，有自己的个人见解和想法。（10-15） |
| 实验心得体会有个人见解和想法。（5-10） |
| 实验心得体会不够深刻，缺乏创意。（5分以下） |
| **最终得分：** | | |
| **指导教师：** | | |
| **年 月 日** | | |