# Angewandte Regression — Serie 2 (Fakultativ)

**1.** Wir nehmen den Datensatz aus Aufgabe 1, Serie1, und möchten das Band beschrieben in 2.4.g* konstruieren. Da $\hat{\alpha}$ und $\hat{\beta}$ korreliert sind, formulieren wir das gewünschte Band mit dem unkorrelierten Paar $\hat{\gamma} = \hat{\alpha} + \hat{\beta}\overline{x} (= \overline{Y})$ und $\hat{\beta}$ um (siehe dazu das Skript 2.B.a bis 2.B.f).

1. Schritt: Verteilung und Formulierung der Hyptohese
Gemeinsame Nullhypothese über $\gamma$ und $\beta$:

$$H_0: \quad \gamma = \gamma_0 \qquad \text{und} \qquad \beta = \beta_0.$$

Die Testgrösse, die sich aus den Konturen gleicher Dichte der gemeinsamen Verteilung von $\gamma$ und $\beta$ bilden lässt (siehe dazu Stahel's Buch 6.9.b), ist

$$\left(\frac{\gamma - \hat{\gamma}}{\sigma_\gamma}\right)^2 + \left(\frac{\beta - \hat{\beta}}{\sigma_\beta}\right)^2$$

mit

$$\sigma_\gamma^2 = \frac{\sigma^2}{n} \qquad \text{und} \qquad \sigma_\beta^2 = \frac{\sigma^2}{SSQ^{(X)}}$$

und unbekanntem $\sigma^2$, hat unter der Nullhypothese eine F-Verteilung mit 2 und $n-2$ Freiheitsgraden.
Das Vertrauensbereich in der $(\beta, \gamma)$-Ebene ist eine Ellipse.

2. Schritt: Enveloppe der plausiblen Geraden.
Jedem Punkt in der Ellipse entspricht eine Gerade in der $(x, y)$-Ebene, $y = \gamma + \beta(x - \overline{x})$. Der Bereich aller der sich so bildenden Geraden wird mit hyperbolischen Linien begrenzt. Diese Begrenzungslinie nennt man Enveloppe der plausiblen Geraden.

Machen Sie die folgenden Aufgaben:

**a)** Zeichnen Sie die Ellipsengleichung

$$\left(\frac{\gamma - \hat{\gamma}}{\sigma_\gamma}\right)^2 + \left(\frac{\beta - \hat{\beta}}{\sigma_\beta}\right)^2 = q^2$$

in die $(\beta, \gamma)$-Ebene mit $q^2 = F^{-1}_{2,n-2}(0.95)$ (das 0.95-Quantil der F-Verteilung mit Freiheitsgraden 2 und $n-2$)und $n = 10$.

**b)** Zu einem fixen $x_0$ in der $(x, y)$ Ebene, entspricht $y = \gamma + \beta(x_0 - \overline{x})$ einem parallelen Geradenschar in der $(\beta, \gamma)$-Ebene (Achsenabschnitt $y$, Steigung $-(x_0 - \overline{x})$). Diese Geraden schneiden den Ellipsenrand in keinem, einem (Tangenialpunkt) oder zwei Punkten. Die Tangentialpunkte minimieren respektive maximieren $y = \gamma + \beta(x_0 - \overline{x})$; zurück in der $(x, y)$-Ebene liegen für ein fixes $x_0$ der minimale resp maximale $y$-Werte auf dem Rand des Bereiches und somit auf der Enveloppe.

Für die gescuhten Tangentialpunkte $(\beta_{max,min}, \gamma_{max,min})$ erhalten wir

$$\begin{aligned}\beta_{max,min} &= \hat{\beta} \pm q \frac{\sigma_\beta^2 (x_0 - \overline{x})}{\sqrt{\sigma_\gamma^2 + \sigma_\beta^2 (x_0 - \overline{x})^2}} = \hat{\beta} \pm q \frac{\sigma_\beta^2 (x_0 - \overline{x})}{\mathrm{se}^{(\eta)}} \\ \gamma_{max,min} &= \hat{\gamma} \pm q \frac{\sigma_\gamma^2}{\sqrt{\sigma_\gamma^2 + \sigma_\beta^2 (x_0 - \overline{x})^2}} = \hat{\gamma} \pm q \frac{\sigma_\gamma^2}{\mathrm{se}^{(\eta)}}.\end{aligned}$$

Zeichnen Sie dieses Enveloppe-Band mit den anderen Bändern (Vertrauens- und Vorhersageband) in das Steudiagramm.