

经验总结 - F. Landis Markley

F. Landis Markley

January 2013

摘要

本文围绕着三个我对自己的职业生涯感兴趣的课题展开：协方差分析、约束估计和角动量。讨论了协方差分析的解析法和数值法。关于约束的一节首先从旋转组的性质引起的一般考虑开始，然后转到 Wahba 问题和四元数卡尔曼滤波器。角动量的讨论包括角动量在姿态确定和控制以及航天器异常检测和诊断中的应用。包括相关的示例。

1 简介

2 协方差分析的效用

我从我在航空领域最重要的导师 Gene Lefferts 那里学会了协方差分析的价值。在卡尔曼滤波中，第 i 次测量后的协方差矩阵 $P_i(+)$ ，本次测量前的协方差矩阵 $P_i(-)$ 和上一次测量后的协方差矩阵 $P_{i-1}(+)$ 满足众所周知的方程 [2]

$$P_i(-) = \Phi(t_i, t_{i-1}) P_{i-1}(+) \Phi^T(t_i, t_{i-1}) + \int_{t_{i-1}}^{t_i} \Phi(t_i, t) Q(t) \Phi^T(t_i, t) dt \quad (1a)$$

$$K_i = P_i(-) H_i^T [H_i P_i(-) H_i^T + R_i]^{-1} \quad (1b)$$

$$P_i(+) = (I - K_i H_i) P_i(-) \quad (1c)$$

其中 Φ 为状态转换矩阵， Q 为过程噪声的功率谱密度， K_i 为卡尔曼增益， H_i 为测量灵敏度矩阵， R_i 为测量噪声协方差。这些方程一般都要用数值求解。当测量时间间隔均匀且 H 和 R 不变，过程噪声功率谱密度

图 1: Steady-state angle standard deviation.

图 2: Batch Estimation Accuracy Estimate for the Compton Gamma Ray Observatory.

不变, $\Phi(t, t')$ 只依赖于 $t - t'$, 协方差可以接近稳态值 $P_i(+) \Rightarrow P(+)$ 和 $P_i(-) \Rightarrow P(-)$ 。在所述假设下, 通过求解 $P(+)$ 和 $P(-)$ 的耦合方程 (1), 可以用数值方法或有时代数方法求出稳态解。用代数方法求解这些方程对于除最简单情况外的所有情况都是一个棘手的问题, 但在测量之间的时间间隔 Δt 远小于滤波器的时间常数的限制下, 它们变得更易于管理。这是当 $R\Delta t$ 接近常量时更新间隔变为 0 的限制。在这个极限中, $\Phi(\Delta t, 0) \approx I + F\Delta t$, 任何一个测量值的更新都可以忽略不计, 因此 $P(+)$ 和 $P(-)$ 相等。稳态协方差矩阵满足方程

$$0 = FP + PF^T + Q - PH^T(R\Delta t)^{-1}HP \quad (2)$$

这是连续时间卡尔曼滤波器的代数 Riccati 方程, 它比耦合方程 (1) 更易于解析解。我通过找到一些简单情况的稳态协方差获得了非常有用的见解, 比如偏航陀螺罗盘, 但这些情况通常太不符合物理模型, 无法实际应用。

2.1 Farrenkopf 等式

(3)

(4)

2.2 姿态确定误差分析系统 (ADEAS)

2.3 热带降雨测量任务 (TRMM)

3 约束的复杂性

3.1 姿态估计中的约束条件

姿态估计的基本约束条件是姿态矩阵 A 是旋转群或特殊正交群 $SO(3)$ 的成员。这只是说 A 必须是行列式 +1 的正交矩阵的群理论方法。正交性约束

$$A^T A = I_{3 \times 3} \quad (5)$$

是非线性的，这导致了复杂的问题，使得姿态估计困难，但也使得它有趣。事实上，正交性约束非常有用，因为它减少了要估计的自由度 [13]。姿态矩阵的运动学方程为 [14, 15]

$$dA/dt = -[\omega \times] A \quad (6)$$

其中

$$[\omega \times] \equiv \begin{bmatrix} 0 & -\omega_3 & \omega_2 \\ \omega_3 & 0 & -\omega_1 \\ -\omega_2 & \omega_1 & 0 \end{bmatrix} \quad (7)$$

是交叉积矩阵。这个运动学方程用精确的算法保持了 A 的正交性。

方程 (5) 相当于 6 个独立的标量约束，而不是 9 个，因为矩阵 $A^T A$ 是对称的。这意味着姿态矩阵有三个自由度。存在许多旋转的三维表示 [15, 16]，但众所周知，对于某些姿态，所有的 $SO(3)$ 的三个参数表示都是奇异的或不连续的 [17]。这导致了四元数的广泛使用，即具有最低维数的非奇异参数化 [15, 16]。四元数用三向量部分 \mathbf{q} 和标量部分 q_4 写成

$$q = \begin{bmatrix} \mathbf{q} \\ q_4 \end{bmatrix} \quad (8)$$

姿态矩阵参数化为

$$A(q) = (q_4^2 - \|\mathbf{q}\|^2)I_{3 \times 3} + 2\mathbf{q}\mathbf{q}^T - 2q_4[\mathbf{q} \times] \quad (9)$$

其中 $\|\cdot\|$ 表示欧氏向量范数。简单代数表明方程 (9) 给出了

$$A^T(q)A(q) = \|q\|^4 I_{3 \times 3} \quad (10)$$

其中

$$\|q\|^2 = q_4^2 + \|\mathbf{q}\|^2 \quad (11)$$

因此，当且仅当四元数满足标准化条件时，方程 (9) 表示正交矩阵。

$$\|q\|^2 = 1 \quad (12)$$

这也是一个非线性约束。从方程 (9) 可以清楚地看出， q 和 $-q$ 表示相同的姿态。四元数表示的这种不唯一性是一个小麻烦，如果不引入像那些困扰三维姿态表示的不连续性，就无法消除。四元数的运动方程是 [14, 15]

$$dq/dt = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} \boldsymbol{\omega} \\ 0 \end{bmatrix} \otimes q \quad (13)$$

在这里，我们使用四元数积，得到 $A(q \otimes q') = A(q)A(q')$ [5, 15]。方程 (13) 用精确的算术保持四元数规范化。

在讨论包含动力学的约束估计问题之前，我们首先考虑静态问题，即利用在单个时间点上进行的向量测量来找到最佳估计。

3.2 Wahba 的问题

1965 年，Grace Wahba 提出了静态姿态估计问题，即寻找适当的正交矩阵，使损失函数最小化 [18]

$$L(A) \equiv \frac{1}{2} \sum_i a_i \|\mathbf{b}_i - A\mathbf{r}_i\|^2 = \frac{1}{2} \sum_i a_i \left(\|\mathbf{b}_i\|^2 + \|A\mathbf{r}_i\|^2 \right) - \sum_i a_i \mathbf{b}_i^T A\mathbf{r}_i \quad (14)$$

当总和超过观测值时， \mathbf{r}_i 是参考坐标系中观测对象的矢量， \mathbf{b}_i 是航天器体坐标系中的对应矢量， a_i 是分配给观测值的非负权重。方程 (14) 右侧的第一项与由于正交性约束而产生的姿态无关，第二项可根据矩阵 trace 重写为

$$\Sigma_i a_i \mathbf{b}_i^T \mathbf{A} \mathbf{r}_i = \text{trace}(AB^T) \quad (15)$$

其中 B 是“姿态剖面矩阵”

$$B \equiv \Sigma_i a_i \mathbf{b}_i \mathbf{r}_i^T \quad (16)$$

因此, Wahba 的问题是最大化 $\text{trace}(AB^T)$ 的问题。使用 Frobenius 范数 (也称为 Euclidean, Schur, 或 Hilbert-Schmidt 范数)[19、20]

$$\|M\|_F^2 \equiv \Sigma_{i,j} M_{ij}^2 = \text{trace}(MM^T) \quad (17)$$

我们看这个

$$\|A - B\|_F^2 = \|A\|_F^2 + \|B\|_F^2 - 2\text{trace}(AB^T) = 3 + \|B\|_F^2 - 2\text{trace}(AB^T) \quad (18)$$

这意味着 Wahba 问题等价于在 Frobenius 范数中找到最接近 B 的正交矩阵 A 。Wahba 问题是正交 Procrustes 问题的一个特例 [19, 20]。我们发现, 在方程 (14) 和 (18) 中, 对姿态矩阵的正交性约束至关重要。

1977 年, Paul Davenport 通过将姿态矩阵的四元数表示代入方程 (15) 中, 找到了第一个真正有用的 Wahba 问题的解, 给出了 [21]

$$\text{trace}[A(q)B^T] = q^T K q \quad (19)$$

其中

$$K \equiv \begin{bmatrix} B + B^T - I_{3 \times 3} \text{trace} B & \Sigma_i a_i \mathbf{b}_i \times \mathbf{r}_i \\ (\Sigma_i a_i \mathbf{b}_i \times \mathbf{r}_i)^T & \text{trace} B \end{bmatrix} \quad (20)$$

因此, Wahba 的问题也相当于 $q^T K q$ 的最大化, 如果没有四元数规范化约束, 这是没有意义的。使用拉格朗日乘子将此约束附加到方程 (19) 中是一种推导 Davenport 的结果的方法, 即最佳四元数是具有最大特征值的 K 的特征向量, 即。

$$K q_{\text{opt}} = \lambda_{\text{max}} q_{\text{opt}} \quad (21)$$

Davenport 的 q 方法吸引了那些喜欢使用特征向量和特征值的物理学家。

尽管非常健壮，Davenport 的 q 方法在当时可用的计算机上非常缓慢，这导致 Malcolm Shuster 开发了他的 QUEST 算法 [22]，该算法已被用于自主决定其姿态的星体跟踪器中。自从 QUEST 被开发后，许多其他算法也被开发出来，包括 SVD 方法 [23]，FOAM[24]，和 Daniele Mortari 的 ESOQ[25] 和 ESOQ2 [26] 算法。随着 1990 年的临近，Malcolm Shuster 建议我们写一篇题为“Wahba 问题 25 年”的调查论文，但我们从未找到时间来做。1995 年，我做了一个名为“Wahba 问题 30 年”的演讲，毫不奇怪。Daniele Mortari 邀请我在罗马重复这个演讲，这导致我们的论文调查了不同的方法，并比较了它们的速度和准确性 [27]。

3.3 一般统计考虑

在讨论卡尔曼滤波之前，让我们先探讨一些一般的统计概念。考虑在 N 维欧几里得空间 \mathbb{R}^N 上定义的向量的概率分布。我们用顶线表示分布或期望的平均值，

$$\bar{\mathbf{x}} \equiv E[\mathbf{x}] \quad (22)$$

这通常是在没有约束的情况下 \mathbf{x} 的最佳估计。假设概率分布中的所有向量都满足一些非线性约束，例如四元数上的范数约束，我们将其表示为 $\mathbf{x} \in S$ ，其中 S 是约束向量的集合。通常，期望不会满足约束，即 $\bar{\mathbf{x}} \notin S$ 。这导致了错误的信念，即非欧几里得流形上的概率分布函数 (probability distribution function, pdf) 必然产生非物理估计 [28]。与此相反，Oshman 和 Carmi[29] 强调，最小均方误差 (MMSE) 估计或最大似然估计 (MLE) 可以提供满足非线性约束的完全有效的姿态估计。

用帽子符号 $\hat{\cdot}$ 表示的 MMSE 估计定义为

$$\hat{\mathbf{x}} \equiv \arg \min_{\mathbf{x}' \in S} E[\|\mathbf{x}' - \mathbf{x}\|^2] \quad (23)$$

其中 \mathbf{x}' 在计算期望值时被视为常量向量。注意， $\hat{\mathbf{x}}$ 的定义要求它满足约束。将 $\mathbf{x}' - \mathbf{x} = (\mathbf{x}' - \bar{\mathbf{x}}) - (\mathbf{x} - \bar{\mathbf{x}})$ 代入等式 (23)，我们看到

$$\begin{aligned}
\hat{\mathbf{x}} &\equiv \arg \min_{\mathbf{x}' \in S} \left\{ E \left[\|\mathbf{x}' - \bar{\mathbf{x}}\|^2 \right] + E \left[\|\mathbf{x} - \bar{\mathbf{x}}\|^2 \right] - 2E \left[(\mathbf{x}' - \bar{\mathbf{x}}) \cdot (\mathbf{x} - \bar{\mathbf{x}}) \right] \right\} \\
&= \arg \min_{\mathbf{x}' \in S} \|\mathbf{x}' - \bar{\mathbf{x}}\|^2
\end{aligned} \tag{24}$$

第二个等式是因为 $\mathbf{x}' - \bar{\mathbf{x}}$ 不依赖于 \mathbf{x} , $E \left[\|\mathbf{x} - \bar{\mathbf{x}}\|^2 \right]$ 不依赖于 \mathbf{x}' , 并且根据 $\bar{\mathbf{x}}$ 的定义, $E[\mathbf{x} - \bar{\mathbf{x}}] = 0$ 。因此 $\hat{\mathbf{x}}$ 是 S 中最接近 $\bar{\mathbf{x}}$ 的向量。我们注意到, 如果没有约束, 即如果 $S \equiv R^N$, 那么 MMSE 估计显然与预期相同。

MLE 简单地定义为分布中概率达到最大值的点, 假设该点是唯一的。Shuster 已经表明, Wahba 的问题可以理解为最大似然估计问题 [30]。

在约束为范数约束 $\|\mathbf{x}\| = 1$ 的特殊情况下, 稍微考虑一下, 一般来说 $\|\bar{\mathbf{x}}\| < 1$ 是因为概率分布中的所有向量都假定服从约束。在这种情况下, 方程 (24) 给出了 MMSE 估计值 $\hat{\mathbf{x}} = \bar{\mathbf{x}} / \|\bar{\mathbf{x}}\|$ 。

$$p(x, y) = (2/\pi)(1+y)(1-y^2) \quad \text{for } x \geq 0 \tag{25a}$$

$$p(x, y) = 0 \quad \text{for } x < 0 \tag{25b}$$

期望值 $\bar{\mathbf{x}} = \begin{bmatrix} 8/3\pi & 1/4 \end{bmatrix}$, 由叉号表示, 显然违反了规范约束。由圆表示的 MMSE 估计值和 $\begin{bmatrix} \sqrt{8}/3 & 1/3 \end{bmatrix}$ 处的平方表示的 MLE 服从约束。我们希望 \mathbf{x} 的“最佳估计”位于圆上, 因为概率分布中的每个点都有这个性质。

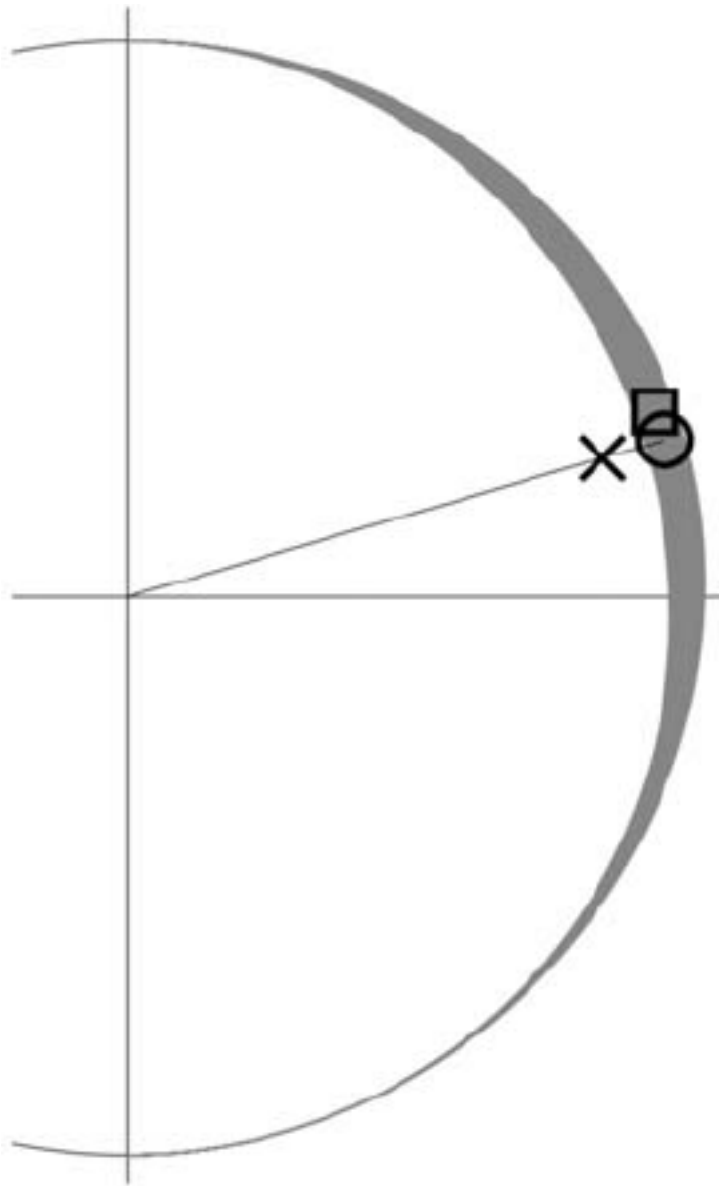
对于姿态估计问题, 并行结果是成立的。姿态矩阵的期望

$$\bar{A} \equiv E[A] \tag{26}$$

一般不会是正交矩阵, 即它不属于旋转群 $SO(3)$ 。姿态矩阵的 MMSE 估计由以下公式给出:

$$\hat{A} \equiv \arg \min_{A' \in SO(3)} E \left[\|A' - A\|_F^2 \right] \tag{27}$$

在向量的情况下, 我们可以操纵这个方程



× denotes the expectation

○ denotes the MMSE estimate

□ denotes the MLE

图 3: Constrained Estimation.

$$\begin{aligned}
\hat{A} &= \arg \min_{A' \in \text{SO}(3)} \left\{ E \left[\|A'\|_F^2 \right] - 2E \left[\text{trace} (A' A^T) \right] + E \left[\|A\|_F^2 \right] \right\} \\
&= \arg \min_{A' \in \text{SO}(3)} \text{trace} (A' \bar{A}^T)
\end{aligned} \tag{28}$$

最后的等式成立是因为 A 和 A' 都是正交的，所以它们的 Frobenius 范数等于常数 3，也因为 $\text{trace} (A' A^T)$ 是 A^T 的线性函数。这个方程与方程 (15) 的相似性意味着我们可以用任何一种方法来解 Wahba 问题，从 \bar{A} 中找出 \hat{A} 。Oshman 和 Carmi 在他们的粒子滤波器开发中使用了这些概念 [29]，我设计了一个基于它们的正交姿态滤波器 (Orthogonal Attitude Filter, OAF)[31]。然而，事实证明，后者是一个非常笨拙的 OAF。

对于实际应用中遇到的概率分布，期望值、MMSE 估计值和 MLE 值都非常接近，在分布的传播上只有二阶差异。一般来说，我们希望我们的估计满足约束条件，所以我们希望 MMSE 估计或 MLE 而不是期望。目前还不清楚，如果这些估计中的任何一个扩展卡尔曼滤波器 (EKF) 产生非线性问题，我们将相当不小心区分它们。

3.4 四元数和卡尔曼滤波器

在 Farrenkopf 的笔记 [3] 发表后不久，我开始尝试将他的稳态协方差解扩展到三轴情况，但这是徒劳的。很快就很明显，没有封闭形式的稳态解，但我坚持发展一般方程。经过大量的努力，我得出了一个公式，与 Jim Murrell 为陆地卫星 4 号和 5 号使用的模块化姿态控制系统开发的卡尔曼滤波器完全相同 [4]。我非常失望，我问 Gene Lefferts，他是否认为我的分析有任何价值。他说 Malcolm Shuster 开发了一个平行分析，我们的结合工作将值得出版。这篇论文是 Malcolm 或我写过的被引用最多的论文之一 [5]。最后一个版本是在周末在 Gene 家写的。他提供了矢量测量模型，这是此文中唯一真正的创新，同时也起到了缓冲作用，以防止 Malcolm 和我在演讲中因意见分歧而受到抨击。

自从参考文献 [5] 发表以来，关于如何正确估计四元数的问题已经耗费很多墨水了 [28, 32-38]。我们注意到卡尔曼滤波器处理状态估计及其协方差。假定适当规范化的 MMSE 或 MLE 四元数估计服从传播方程。

$$d\hat{q}/dt = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} \hat{\omega} \\ 0 \end{bmatrix} \otimes \hat{q} \quad (29)$$

对于一些 $\hat{\omega}$ 。这保留了四元数的规范化，因此没有问题。但是，测量更新通常违反规范化条件，因此在更新时必须小心。传统的 EKF，我们有时称之为加法 EKF(AEKF)，它将四元数误差定义为

$$\Delta q = q - \bar{q} \quad (30)$$

有 4×4 的协方差矩阵

$$P = E \left[(\Delta q) (\Delta q)^T \right] \quad (31)$$

方程式 (12) 的约束意味着

$$\|q\|^2 = \|\bar{q} + \Delta q\|^2 = \|\bar{q}\|^2 + 2(\Delta q)^T \bar{q} + \|\Delta q\|^2 = 1 \quad (32)$$

Δq 的期望值为零，因此方程 (32) 的期望值为

$$\|\bar{q}\|^2 + \text{trace}P = 1 \quad (33)$$

因此

$$\|\bar{q}\| = (1 - \text{trace}P)^{1/2} \quad (34)$$

MMSE 的四元数估计是

$$\hat{q} = (1 - \text{trace}P)^{1/2} \bar{q} \quad (35)$$

通过对四元数卡尔曼滤波的考虑，给出了四元数卡尔曼滤波的主要问题。

$$P\bar{q} = E \left[(\Delta q) (\Delta q)^T \bar{q} \right] = \frac{1}{2} E \left[(\Delta q) (\text{trace}P - \|\Delta q\|^2) \right] = -\frac{1}{2} E \left[\|\Delta q\|^2 (\Delta q) \right] \quad (36)$$

如果 \bar{q} 的概率分布是对称的，那么这个方程的右边是 0， P 是奇异的。然而，范数约束意味着概率分布不对称，所以 P 是病态的，而不是奇异的。在玩具模型 [28] 和数值研究 [38] 中被观察到了这一点，分析表明方程式

(36) 的右侧为 P^2 阶 [34]。值得注意的是, 如果范数约束是线性的, P 真的是奇异的。

在卡尔曼滤波中, 一个条件不好的协方差矩阵会导致数值问题, 如果可能的话, 我们希望避免这种问题。旋转群 $SO(3)$ 只有三个自由度, 如上所述, 因此可以在一个条件良好的 3×3 矩阵中表示所有有用的四元数协方差信息。这种尺寸缩减的概念优势, 作为更真实地代表系统实际自由度的概念优势, 已被详细讨论过 [28, 32–38], 但计算优势是无可争辩的。

通过将姿态矩阵参数化为

$$A(q/\|q\|) = \|q\|^{-2} \left\{ (q_4^2 - \|q\|^2) I_{3 \times 3} - 2q_4 [\mathbf{q} \times] + 2\mathbf{q}\mathbf{q}^T \right\} \quad (37)$$

这是一个正交矩阵, 不管四元数是否规范化 [28]。我们称之为射线表示, 因为沿射线穿过原点的任何四元数都对应于相同的姿态矩阵。这种方法避免了强制范数约束的复杂性, 但引入了不可观测的自由度四元数范数。结果是, P 的一个特征值不受测量值的影响, 因此保持其初始值, 如果姿态估计变得非常精确, 则可能导致数值精度损失 [34]。在本文中, 我们不会进一步考虑这种方法。

接下来的两小节将考虑参考文献 [5] 中提出的四元数卡尔曼滤波的两种具体方法。在参考文献中分析的 EKF 包括用于模型替换模式的陀螺仪, 这些陀螺仪具有漂移偏差, 需要与四元数一起估计。我们将遵循这个例子并考虑七分量状态向量

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} q \\ \mathbf{b} \end{bmatrix} \quad (38)$$

其中 \mathbf{b} 是陀螺漂移偏差矢量。如果我们用欧拉方程来建模动力学, 而不是在模型替换模式中使用陀螺仪, 那么状态向量中的 \mathbf{b} 将被角速度 $\boldsymbol{\omega}$ 或角动量向量 \mathbf{L} 替换。对状态向量中其他分量情况的推广也很简单, 因此我们只讨论七维情况。那么方程 (36) 意味着有一个空向量

$$\mathbf{x}_{null} = \begin{bmatrix} \hat{q} \\ 0_{3 \times 1} \end{bmatrix} \quad (39)$$

其中, $P\mathbf{x}_{null}$ 的阶是 P^2 。这不是协方差矩阵的一个空向量, 而是沿着特征值方向的一个向量, 它比其他向量小得多, 从而导致病态条件反射, 如上所述。

3.5 乘法 EKF 方法

乘法 EKF (multiplicative EKF, MEKF) 表示作为四元数积的真实姿态。

$$q = \delta q(\mathbf{a}) \otimes \hat{q} \quad (40)$$

其中 \hat{q} 是标准化四元数估计, $\delta q(\mathbf{a})$ 是表示四元数误差的单位四元数, 由误差的三分量表示 \mathbf{a} 参数化。如前所述, 三分量表示都具有奇点或不连续性, 但是 MEKF 从未遇到过它们, 因为它只使用 \mathbf{a} 来处理较小的姿态误差。MEKF 假设选择 \mathbf{a} , 以便

$$\delta q(\mathbf{a}) = \begin{bmatrix} \mathbf{a}/2 \\ 1 \end{bmatrix} + \text{order}(\|\mathbf{a}\|^2) \quad (41a)$$

$$A(\delta q(a)) = I_{3 \times 3} - [\mathbf{a} \times] + \text{order}(\|\mathbf{a}\|^2) \quad (41b)$$

对于接近单位矩阵 $I_{3 \times 3}$ 的旋转矩阵。 \mathbf{a} 的具体选择如下所述。MEKF 的基本思想是计算三分量 \mathbf{a} 的无约束估计, 同时使用正确规范化的四分量 \hat{q} 提供全局非奇异姿态表示 [35]。

MEKF 包含六组分状态的传统加法 EKF。

$$\bar{\mathbf{x}} = \begin{bmatrix} \mathbf{a} \\ \mathbf{b} \end{bmatrix} \quad (42)$$

离散测量更新将有限的更新后的值 $\hat{\mathbf{a}}(+)$ 分配给 \mathbf{a} 。在测量更新后, \hat{q} 仍保留其更新前的值 $\hat{q}(-)$, 但方程式 (40) 表示姿态四元数的最佳估计值为 $\delta q(\hat{\mathbf{a}}(+)) \otimes \hat{q}(-)$ 。MEKF 中的重置过程通过将更新信息从 $\hat{\mathbf{a}}(+)$ 移动到更新后估计值 $\hat{q}(+)$ 并将 $\hat{\mathbf{a}}$ 重置为 0 来纠正这种明显的不一致。重置不会改变整体姿态估计, 因此方程 (40) 和 (41) 要求

$$\hat{q}(+) = \delta q(\hat{\mathbf{a}}(+)) \otimes \hat{q}(-) \quad (43)$$

\mathbf{b} 的更新是常规的。如果 q 和 \hat{q} 分别遵守方程式 (13) 和 (29), 适当选择 $\hat{\omega}$, 则在测量之间 $\hat{\mathbf{a}}(t)$ 继续为 0, 因此无需传播。Reynolds[40] 和 Zanetti 等人 [36] 都指出, 重置修改了协方差矩阵, 与参考文献 [35] 中的断言相反。然而, 忽略附录中提到的这种小修改, 并没有导致应用程序中出现任何问题。

方程式 (40) 和 (41b) 表明

$$A(q) = A(\delta q(\mathbf{a})) A(\hat{q}) \approx (I_{3 \times 3} - [\mathbf{a} \times]) A(\hat{q}) \quad (44)$$

这对于计算测量灵敏度矩阵非常方便。选择 \mathbf{a} 作为旋转角矢量，四元数矢量部分的 2 倍，Rodrigues 参数矢量的 2 倍，或改进型 Rodrigues 参数矢量的 4 倍 [15]，给出比方程 (41b) 更强的关系，即

$$A(\delta q(\mathbf{a})) = I - [\mathbf{a} \times] + \frac{1}{2} [\mathbf{a} \times]^2 + \text{order}(\|\mathbf{a}\|^3) \quad (45)$$

不对称 (例如 1-2-3) 欧拉角的矢量满足方程 (41b) 但不满足方程 (45)，对称 (例如 3-1-3) 欧拉角的矢量也不满足方程 (35)。我们更喜欢罗德里格斯 (Rodrigues) 参数 (也称为吉布斯矢量 (Gibbs vector))，因为

$$\delta q(\mathbf{a}) = \left(1 + \|\mathbf{a}\|^2/4\right)^{-1/2} \begin{bmatrix} \mathbf{a}/2 \\ 1 \end{bmatrix} \quad (46)$$

这同时具有计算和概念上的优势。其计算优势在于，通过首先定义非规范化四元数，重置可以避免舍入误差的累积。

$$\hat{q}_{unnorm} \equiv \begin{bmatrix} \hat{\mathbf{a}}(+)/2 \\ 1 \end{bmatrix} \otimes \hat{q}(-) \quad (47)$$

然后更新单位四元数

$$\hat{q}(+) = \hat{q}_{unnorm} / \|\hat{q}_{unnorm}\| \quad (48)$$

罗德里格斯参数的概念优势在于，它们将旋转组映射为三维欧几里得空间，最大可能的 180° 姿态误差映射到无穷远处的点。因此，具有无限长尾的概率分布，如高斯分布，在罗德里格斯参数空间中是有意义的。Shuster 更倾向于将 \mathbf{a} 作为旋转角矢量的 2 倍或 δq 矢量部分的 2 倍，而后者 (除了 2 的因数) 是参考文献 [5] 的第 11 节中找到的方法。

在二阶卡尔曼滤波器 [35] 和无迹姿态估计器 [39] 中，采用了 MEKF 的乘法误差模型。

3.6 协方差投影法

与 MEKF 相比, 参考文献 [5] 第 9 节中提出的协方差投影法是一种估计方程 (38) 七分量状态向量的 EKF。它基于隐式假设, 即估计误差与方程 (39) 定义的空向量正交, 即

$$(\Delta \mathbf{x})^T \mathbf{x}_{null} = (\Delta q)^T \hat{q} = 0 \quad (49)$$

这意味着, 我们不假设四元数概率分布在四维四元数空间中的单位球体 S3 上, 而是假设它位于 \hat{q} 上与 S3 相切的三维超平面上。方程 (32) 和 (49) 表明 \bar{q} 满足一阶四元数规范化条件, 这是一个可接受的近似值, 因为 EKF 基于一阶线性化。从方程 (49) 可以得出, $P\mathbf{x}_{null} = \mathbf{0}_{7 \times 1}$ 完全正确, 这意味着在 EKF 的上下文中, 我们将 7×7 协方差矩阵 P 视为奇异矩阵, 即使它实际上只是病态的。

协方差投影方法没有六维状态向量, 但它有一个六维状态误差向量, 定义为

$$\Delta \tilde{\mathbf{x}} = S^+ \Delta \mathbf{x} \quad (50)$$

其中 6×7 矩阵 S^+ 及其 7×6 Moore-Penrose 伪逆 S 满足关系 [19, 20]

$$S^+ S = I_{6 \times 6} \quad (51a)$$

$$S S^+ = I_{7 \times 7} - \mathbf{x}_{null} \mathbf{x}_{null}^T \quad (51b)$$

$$S^+ \mathbf{x}_{null} = \mathbf{0}_{6 \times 1} \quad (51c)$$

由方程 (49) 得出的与 \mathbf{x}_{null} 正交的七分量误差矢量, 可通过以下方法恢复:

$$\Delta \mathbf{x} = S \Delta \tilde{\mathbf{x}} \quad (52)$$

这说明 $\Delta \tilde{\mathbf{x}}$ 包含了所有的状态误差信息, 所有的协方差信息都包含在六维误差状态的条件良好的 6×6 协方差矩阵中。

$$\tilde{P} \equiv E \left[(\Delta \tilde{\mathbf{x}}) (\Delta \tilde{\mathbf{x}})^T \right] = S^+ P (S^+)^T \quad (53)$$

由于方程 (49) 和 (51b), 7×7 的误差协方差可以通过下式得到

$$P = S\tilde{P}S^T \quad (54)$$

对于四元数估计问题, 可以用 4×3 矩阵显式地给出 S^+ 和 S 。

$$\Xi(q) = \begin{bmatrix} q_4 I_{3 \times 3} + [\mathbf{q} \times] \\ -\mathbf{q}^T \end{bmatrix} \quad (55)$$

作为

$$S = \begin{bmatrix} (1/2)\Xi(\hat{q}) & 0_{4 \times 3} \\ 0_{3 \times 3} & I_{3 \times 3} \end{bmatrix} \quad (56a)$$

$$S^+ = \begin{bmatrix} 2\Xi^T(\hat{q}) & 0_{3 \times 3} \\ 0_{3 \times 4} & I_{3 \times 3} \end{bmatrix} \quad (56b)$$

这些形式与参考文献 [5] 中的形式不同, 在 S 和 S^+ 的左上角分别有 $1/2$ 和 2 的系数。这种改变使得姿态误差用全角度表示, 以符合 MEKF 的公式, 而不是参考文献 [5] 中的一半角度。

用方程 (1b) 给出卡尔曼增益的预更新量, 用方程 (1c) 更新协方差。为了避免使用病态协方差矩阵, 我们将方程 (54) 与预先更新的 S 矩阵替换为方程 (1b), 给出

$$K = S(-)\tilde{K} \quad (57)$$

其中下标 i 被省略以简化符号, 其中 \tilde{K} 由

$$\tilde{K} = \tilde{P}(-)\tilde{H}^T \left[\tilde{H}\tilde{P}(-)\tilde{H}^T + R \right]^{-1} \quad (58)$$

其中

$$\tilde{H} \equiv HS(-) \quad (59)$$

七分量状态通过其非线性动力学传播, 就像在任何 EKF 中一样, 并通过以下方式更新:

$$\hat{\mathbf{x}}(+) = \hat{\mathbf{x}}(-) + K\Delta y = \hat{\mathbf{x}}(-) + S(-)\tilde{K}\Delta y \quad (60)$$

其中 Δy 是测量残差。

通过将方程 (54) 和 (57) 代入方程 (1c) 并使用方程 (59) 得出协方差更新。

$$S(+)\tilde{P}(+)S^T(+)=S(-)\left(I_{6\times 6}-\tilde{K}\tilde{H}\right)\tilde{P}(-)S^T(-) \quad (61)$$

该方程左侧的 $S(+)$ 和右侧的 $S(-)$ 的出现反映了方程 (49) 的假设, 即预更新四元数概率分布位于 $\hat{q}(-)$ 处与 $S3$ 相切的三维超平面上, 而后更新概率分布位于 $\hat{q}(+)$ 处的超平面相切上。方程 (61) 的两边有不同的空向量, 因此该方程不可能精确。附录显示了如何通过重置协方差矩阵来治疗这种疾病。两个空向量之间的差异, 因此 $S(+)$ 和 $S(-)$ 之间的差异, 是按照状态更新的顺序进行的, 因此, 按照线性化 EKF 的精神, 通常忽略这个小的差异并写入 [5]

$$\tilde{P}(+)=\left(I_{6\times 6}-\tilde{K}\tilde{H}\right)\tilde{P}(-) \quad (62)$$

在这种近似下, 最终 EKF 公式中没有矩阵 $S^+(\pm)$ 和 $S(+)$, 而 $S(-)$ 只出现在状态更新方程中。协方差传播和更新方程、测量灵敏度和卡尔曼增益都可以用六维表示法计算。

四元数更新违反四元数规范化, 因此使用公式 (48) 来规范化更新的四元数。这会改变估计值, 但只会在状态更新中更改为二阶, 这是可以接受的, 因为 EKF 不知道二阶效应。整体算法在数学上与使用状态更新方程 (47) 和 (48) 的 MEKF 相同, 即使它基于一个非常不同的基础。协方差投影思想在概念上不如 MEKF 满意, 但更容易推广到其他约束估计问题。

4 角动量的重要性

这确实是前一个主题的副主题, 因为角动量守恒是一个约束条件; 但是角动量在航天器姿态分析中的重要性值得一节。

4.1 姿态角动量参数化

我的第一次航空航天研究是在 Goddard 和 Mel Velez 一起进行的。他正在研究自旋稳定同步气象卫星 (Synchronous Meteorological Satellite SMS) 的同步轨道/姿态估计, 以便使用地平仪数据中包含的轨道信息。轨道和姿态动力学的不同时间尺度阻碍了进展; 轨道运动方程可以与几十分钟的时间

步相结合，而刚体姿态动力学则需要旋转周期分数的时间步。这导致 Velez 所追求的参数变化方法的刚体动力学。Harold Morton、John Junkins 和他们的学生在这方面做了有趣的工作 [41, 42]，但我尝试了另一种方法。

通常的方法是将机体坐标系中角动量的运动方程进行积分，

$$d\mathbf{L}_B/dt = \mathbf{N}_B - \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{L}_B \quad (63)$$

以及四元数的方程式 (13)，其中 \mathbf{N} 表示外部扭矩，

$$\boldsymbol{\omega} = J^{-1}(\mathbf{L}_B - \mathbf{L}_{internal}) \quad (64)$$

是角速度， J 是航天器的转动惯量张量， $\mathbf{L}_{internal}$ 是任何内部运动部件 (如反作用轮) 的角动量。可以将航天器角动量的惯性分量的运动方程积分，而不是方程 (63)

$$d\mathbf{L}_I/dt = \mathbf{N}_I \quad (65)$$

并将机体坐标系组件计算为 $\mathbf{L}_B = A_{BI}\mathbf{L}_I$ 。这两个过程中的一个问题是四元数的分量都是快速变量。我的想法是同时使用方程式 (63) 和 (65)，而不是方程式 (13)。姿态矩阵可以参数化为

$$A_{BI} = R_{BI}R(\mathbf{L}_I/L, \zeta) = R(\mathbf{L}_B/L, \zeta) R_{BI} \quad (66)$$

其中， R_{BI} 是表示将 \mathbf{L}_I 带入 \mathbf{L}_B 的最小角度旋转的矩阵，这是 \mathbf{L}_I 和 \mathbf{L}_B 的已知函数，并且 $R(\mathbf{e}/L, \zeta)$ 表示单位向量 \mathbf{e} 的旋转，用角度 ζ 表示，角度变量 ζ 服从快速方程。

$$d\zeta/dt = L(L^2 + \mathbf{L}_B \cdot \mathbf{L}_I)^{-1} [(\mathbf{L}_B + \mathbf{L}_I) \cdot \boldsymbol{\omega} + L^{-2}(\mathbf{L}_B \times \mathbf{L}_I) \cdot (\mathbf{N}_B + \mathbf{N}_I)] \quad (67)$$

这比方程 (13) 要复杂得多，但它的优点是它是一个标量方程。姿态动力学的参数变化方法永远不会产生影响，这些方程 (以更粗糙的形式) 被放在抽屉里，直到它们在 John Junkins 和 Malcolm Shuster 编辑的《宇宙航行科学杂志》的姿态表示专题中找到了地方为止 [43]。

4.2 SpinKF

角动量参数化在 Joe Sdelak 于 2004 年开发了一个 EKF 来利用这些变量旋转航天器之前从未得到广泛应用 [44]。状态向量

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} \mathbf{L}_B \\ \mathbf{L}_I \\ \zeta \end{bmatrix} \quad (68)$$

受非线性约束，即在惯性和物体参考系中角动量的大小相同，即

$$\|\mathbf{L}_B\| = \|\mathbf{L}_I\| = L \quad (69)$$

这个约束可以表示为一阶 $(\Delta \mathbf{L}_B)^T \hat{\mathbf{L}}_B = (\Delta \mathbf{L}_I)^T \hat{\mathbf{L}}_I$ ，帽子 $\hat{\cdot}$ 符号表示估计，而不是单位向量。它由协方差投影技术处理，空向量

$$\mathbf{x}_{null} = \frac{1}{\sqrt{2}\hat{L}} \begin{bmatrix} \hat{\mathbf{L}}_B \\ -\hat{\mathbf{L}}_I \\ 0 \end{bmatrix} \quad (70)$$

Joe 和我在这个类型中开发了几个滤波器，通常称为 SpinKF，使用不同的六组分误差状态 [45]。最佳 SpinKF 变种的误差状态包括微小姿态误差角矢量和惯性系中的角动量矢量。

4.3 太阳、异常和磁层粒子探测器 (SAMPEX)

4.4 哈勃太空望远镜 (HST)

4.5 威尔金森微波各向异性探针 (WMAP)

5 总结

我的航天事业非常令人满意，但我最大的回报是有机会与天资非凡的同事共事。回顾我的职业生涯，我发现我在很大程度上是偶然的——一个在正确的时间在正确的地点的问题——同时也抓住了提供给我的机会。我仍然认为 WMAP 是它的最高点。它让我有机会用一张干净的纸开始一个姿态控制系统的设计，并且在决定宇宙的年龄方面扮演一个小角色。

当然，我的职业生涯并没有以 WMAP 结束。我可以提到 Swift，一个 2004 年发射的 MIDEX 航天器，它使用 6 个反作用轮在 60 秒内旋转 60° ，以捕捉飞行中难以捕捉的短期伽马射线爆发。我继续跟踪 HST，它使用了双陀螺精确指向模式，在继续执行任务的同时，保存了其他剩余的可操作陀螺。在未来需要的情况下，可以采用一种性能相当的单陀螺精对准方式。我一直致力于詹姆斯·韦伯太空望远镜的开发，特别是在处理网球场大小的遮阳板上太阳辐射压力扭矩引起的复杂问题上。然而，我在很大程度上是一个对这些发展感兴趣的观察者和友好的批评者。火炬传递给了新一代。

6 References

- [1] MARKLEY, F. L. “Humble Problems,” presented as paper AAS 06-238 at the 2006 AAS/AIAA Space Flight Mechanics Meeting, San Diego, CA, 2006; *Advances in the Astronautical Sciences*, Vol. 124, Part II, 2006, pp. 2205–2222.
- [2] CRASSIDIS, J. L. and JUNKINS, J. L. *Optimal Estimation of Dynamic Systems*, Chapman & Hall/CRC, Boca Raton, FL, 2004, Chapter 5.
- [3] FARRENKOPF, R. L. “Analytic Steady-State Accuracy Solutions for Two Common Spacecraft Attitude Estimators,” *Journal of Guidance and Control*, Vol. 1, No. 4, 1978, pp. 282–284.
- [4] MURRELL, J. W. “Precision Attitude Determination for Multi-mission Spacecraft,” presented as paper AIAA 78-1248 at the 1978 AIAA Guidance and Control Conference, Palo Alto, CA, August 1978, pp. 70–87.
- [5] LEFFERTS, E. J., MARKLEY, F. L., and SHUSTER, M. D. “Kalman Filtering for Spacecraft Attitude Estimation,” *Journal of Guidance, Control, and Dynamics*, Vol. 5, No. 5, 1982, pp. 417–429.
- [6] FALLON, III, L. “Gyroscope Models,” in *Spacecraft Attitude Determination and Control*, J. R. Wertz, ed., D. Reidel, Dordrecht, Holland, 1978, pp. 266–270.
- [7] MARKLEY, F. L. and REYNOLDS, R. R. “Analytic Steady-State Accuracy of a Spacecraft Attitude Estimator,” *Journal of Guidance, Control, and Dynamics*, Vol. 23, No. 6, 2000, pp. 1065–1067.

- [8] MARKLEY, F. L., SEIDWITZ, E., and DEUTSCHMANN, J. "Attitude Determination Error Analysis: General Model and Specific Application," *Mécanique Spatiale: Space Dynamics*, Cepadues-Editions, Toulouse, France, 1989, pp. 251–266.
- [9] MARKLEY, F. L. and CARPENTER, J. R. "Generalized Linear Covariance Analysis," *The Journal of the Astronautical Sciences*, Vol. 57, Nos. 1 & 2, 2009. (this issue) pp. 236–250.
- [10] BAUER, F. H., FEMIANO, M. D., and MOSIER, G. E. "Attitude Control System Conceptual Design for the X-Ray Timing Explorer," presented as paper AIAA 92-4334 at the 1992 AIAA Guidance, Navigation, and Control Conference, Hilton Head Island, SC, August 1992,
- [11] SEDLAK, J. and HASHMALL, J. "Accurate Magnetometer/Gyroscope Attitudes Using a Filter with Correlated Sensor Noise," *Proceedings of the 1997 Flight Mechanics Symposium*, NASA Conference Publication 3345, Greenbelt, MD, 1976, pp. 83–87.
- [12] ANDREWS, S. F. and BILANOW, S. "Recent Flight Results of the TRMM Kalman Filter," presented as paper AIAA 2002-5047 at the 2002 AIAA Guidance, Navigation, and Control Conference, Monterey, CA, August 2002.
- [13] MARKLEY, F. L. and BAR-ITZHACK, I. Y. "Unconstrained Optimal Transformation Matrix," *IEEE Transactions on Aerospace and Electronic System*, Vol. 34, No. 1, 1998, pp. 338 –340.
- [14] MARKLEY, F. L. "Equations of Motion," in *Spacecraft Attitude Determination and Control*, J. R. Wertz, ed., D. Reidel, Dordrecht, Holland, 1978, pp. 510–523.
- [15] SHUSTER, M. D. "A Survey of Attitude Representations," *The Journal of the Astronautical Sciences*, Vol. 41, No. 4, 1993, pp. 439 –517.
- [16] MARKLEY, F. L. "Parameterization of the Attitude," in *Spacecraft Attitude Determination and Control*, J. R. Wertz, ed., D. Reidel, Dordrecht, Holland, 1978, pp. 410–420.
- [17] STUELPNAGEL, J. "On the Parameterization of the Three-Dimensional Rotation Group," *SIAM Review*, Vol. 6, No. 4, 1964, pp. 422 –430.

- [18] WAHBA, G. "A Least Squares Estimate of Spacecraft Attitude," SIAM Review, Vol. 7, No. 3, 1965, p. 409.
- [19] HORN, R. A. and JOHNSON, C. R. Matrix Analysis, Cambridge, UK, Cambridge University Press, 1985.
- [20] GOLUB, G. H. and VAN LOAN, C. F. Matrix Computations, Baltimore, MD, The Johns Hopkins University Press, 1983.
- [21] LERNER, G. M. "Three-Axis Attitude Determination," in Spacecraft Attitude Determination and Control, J. R. Wertz, ed., D. Reidel, Dordrecht, Holland, 1978, pp. 420–428.
- [22] SHUSTER, M. D. and OH, S. D. "Three-Axis Attitude Determination from Vector Observations," Journal of Guidance and Control, Vol. 4, No. 1, 1981, pp. 70–77.
- [23] MARKLEY, F. L. "Attitude Determination Using Vector Observations and the Singular Value Decomposition," The Journal of the Astronautical Sciences, Vol. 36, No. 3, 1988, pp. 245–258.
- [24] MARKLEY, F. L. "Attitude Determination Using Vector Observations: a Fast Optimal Matrix Algorithm," The Journal of the Astronautical Sciences, Vol. 41, No. 2, 1993, pp. 261–280.
- [25] MORTARI, D. "ESQ: A Closed-Form Solution to the Wahba Problem," The Journal of the Astronautical Sciences, Vol. 45, No. 2, 1997, pp. 195–204.
- [26] MORTARI, D. "Second Estimator of the Optimal Quaternion," Journal of Guidance, Control, and Dynamics, Vol. 23, No. 5, 2000, pp. 885–888.
- [27] MARKLEY, F. L. and MORTARI, D. "Quaternion Attitude Estimation Using Vector Observations," The Journal of the Astronautical Sciences, Vol. 48, No. 2/3, 2000, pp. 359–380.
- [28] MARKLEY, F. L. "Attitude Estimation or Quaternion Estimation?" The Journal of the Astronautical Sciences, Vol. 52, No. 1/2, 2004, pp. 221–238.
- [29] OSHMAN, Y. and CARMI, A. "Attitude Estimation from Vector Observations Using a Genetic-Algorithm-Embedded Quaternion Particle Filter," Journal of Guidance, Control, and Dynamics, Vol. 29, No. 4, 2006,

pp. 879–891.

[30] SHUSTER, M. D. “Maximum Likelihood Estimate of Spacecraft Attitude,” *The Journal of the Astronautical Sciences*, Vol. 37, No. 1, 1989, pp. 79–88.

[31] MARKLEY, F. L. “Attitude Filtering on $SO(3)$,” *The Journal of the Astronautical Sciences*, Vol. 54, No. 3/4, 2006, pp. 391–413.

[32] SHUSTER, M. D. “Constraint in Attitude Estimation Part I: Constrained Estimation,” *The Journal of the Astronautical Sciences*, Vol. 51, No. 1, 2003, pp. 51–74.

[33] SHUSTER, M. D. “Constraint in Attitude Estimation Part II: Unconstrained Estimation,” *The Journal of the Astronautical Sciences*, Vol. 51, No. 1, 2003, pp. 75–101.

[34] PITTELKAU, M. E. “An Analysis of the Quaternion Attitude Determination Filter,” *The Journal of the Astronautical Sciences*, Vol. 51, No. 1, 2003, pp. 103–120.

[35] MARKLEY, F. L. “Attitude Error Representations for Kalman Filtering,” *Journal of Guidance, Control, and Dynamics*, Vol. 26, No. 2, 2003, pp. 311–317.

[36] ZANETTI, R., MAJJI, M., BISHOP, R. H., and MORTARI, D. “Norm Constrained Kalman Filtering,” *Journal of Guidance, Control, and Dynamics*, Vol. 32, No. 5, 2009, pp. 1458–1465.

[37] CALISE, A. J. “Enforcing an Algebraic Constraint in Extended Kalman Filter Design,” presented as paper AIAA 2007-6515 at the 2007 AIAA Guidance, Navigation, and Control Conference, Hilton Head, SC, August 2007.

[38] CARMÍ, A. and OSHMAN, Y. “Asymptotic Behavior of the Estimation Error Covariance of Quaternion Estimators,” *Journal of Guidance, Control, and Dynamics*, Vol. 31, No. 6, 2008, pp. 1665–1676.

[39] CRASSIDIS, J. L. and MARKLEY, F. L. “Unscented Filtering for Spacecraft Attitude Estimation,” *Journal of Guidance, Control, and Dynamics*, Vol. 26, No. 4, 2003, pp. 536–542.

[40] REYNOLDS, R. G. “Asymptotically Optimal Attitude Filtering with Guaranteed Convergence,” *Journal of Guidance, Control, and Dynam-*

ics, Vol. 31, No. 1, 2008, pp. 114–122.

[41] MORTON, H. S., Jr., JUNKINS, J. L., and BLANTON, J. N. “Analytical Solutions for Euler Parameters,” *Celestial Mechanics*, Vol. 10, 1974, pp. 287–301.

[42] KRAIGE, L. G. and JUNKINS, J. L. “Perturbation Formulations for Satellite Attitude Dynamics,” *Celestial Mechanics*, Vol. 13, 1976, pp. 39–64.

[43] MARKLEY, F. L. “New Dynamic Variables for Momentum-Bias Spacecraft,” *The Journal of the Astronautical Sciences*, Vol. 41, No. 4, 1993, pp. 557–567.

[44] SEDLAK, J. E. “Spinning Spacecraft Attitude Estimation Using Markley Variables: Filter Implementation and Results,” *Proceedings of the 2005 Flight Mechanics Symposium*, Goddard Space Flight Center, Greenbelt, MD, NASA Conference Publication NASA/CP-2005-212789, October 2005.

[45] MARKLEY, F. L. and SEDLAK, J. E. “Kalman Filter for Spinning Spacecraft Attitude Estimation,” *Journal of Guidance, Control, and Dynamics*, Vol. 31, No. 6, 2008, pp. 1750–1760.

[46] KUZNIK, F. “Satellite Saviors,” *AIR & SPACE/Smithsonian*, Vol. 6, No. 3, 1991, pp. 66–70.

[47] FLATLEY, T. W., FORDEN, J. K., HENRETTY, D. A., LIGHTSEY, E. G., and MARKLEY, F. L. “Onboard Attitude Determination and Control Algorithms for SAMPEX,” *Proceedings of the 1990 Flight Mechanics/ Estimation Theory Symposium*, Goddard Space Flight Center, Greenbelt, MD, NASA Conference Publication 3102, May 1990, pp. 379–398.

[48] MCCULLOUGH, J. D., FLATLEY, T. W., HENRETTY, D. A., MARKLEY, F. L., and SAN, J. K. “Testing of the Onboard Attitude Determination and Control Algorithms for SAMPEX,” *Proceedings of the 1992 Flight Mechanics/ Estimation Theory Symposium*, Goddard Space Flight Center, Greenbelt, MD, May 1992, NASA Conference Publication 3186, pp. 55–68.

[49] MARKLEY, F. L., FLATLEY, T. W. and LEOUTSAKOS, T. “SAMPEX Special Pointing Mode,” *Proceedings of the 1995 Flight Mechan-*

ics/Estimation Theory Symposium, Goddard Space Flight Center, Greenbelt, MD, May 1995, NASA Conference Publication 3299, pp. 201–215.

[50] TSAI, D. C., MARKLEY, F. L., and WATSON, T. P. “SAMPEX Recovery to Spin Stabilized Mode,” SpaceOps 2008, Heidelberg, Germany, May 12–16, 2008.

[51] MARKLEY, F. L. and NELSON, J. D. “Zero-Gyro Safemode Controller for the Hubble Space Telescope,” Journal of Guidance, Control, and Dynamics, Vol. 17, No. 4, 1994, pp. 815–822.

[52] MARKLEY, F. L., KENNEDY, K. R., NELSON, J. D., and MOY, E. W. “Autonomous Spacecraft Gyro Failure Detection Based on Conservation of Angular Momentum,” Journal of Guidance, Control, and Dynamics, Vol. 17, No. 6, 1994, pp. 1385–1387.

[53] MARKLEY, F. L., ANDREWS, S. F., O’ DONNELL, J. R., Jr., and WARD, D. K. “Attitude Control System of the Wilkinson Microwave Anisotropy Probe,” Journal of Guidance, Control, and Dynamics, Vol. 28, No. 3, 2005, pp. 385–397.

A 四元数协方差矩阵的重置

A.1 乘法 EKF

重置后, MEKF 中的四元数协方差应为参考 $\hat{q}(+)$ 的重置姿态误差矢量的协方差, 我们将其表示为 $\mathbf{a}(++)$ 。我们用一个 $\mathbf{a}(+)$ 表示与 $\hat{q}(-)$ 相关的预复位姿态误差矢量。真正的四元数不关心参考帧, 因此方程 (40) 和 (43) 给出

$$\begin{aligned} q &= \delta q(\mathbf{a}(+)) \otimes \hat{q}(-) = \delta q(\mathbf{a}(++)) \otimes \hat{q}(+) \\ &= \delta q(\mathbf{a}(++)) \otimes \delta q(\hat{\mathbf{a}}(+)) \otimes \hat{q}(-) \end{aligned} \quad (71)$$

这意味着这个 $\delta q(\mathbf{a}(+)) = \delta q(\mathbf{a}(++)) \otimes \delta q(\hat{\mathbf{a}}(+))$, 或

$$\delta q(\mathbf{a}(++)) = \delta q(\mathbf{a}(+)) \otimes \delta q(-\hat{\mathbf{a}}(+)) \quad (72)$$

所有遵守方程 (41a) 的三个参数误差表示将给予相同的协方差重置为 $\|\hat{\mathbf{a}}(+)\|$ 中的一阶, 但在更高阶上有所不同。不过, 目前还不清楚更高的阶

有多大意义。如果我们使用等式 (46) 给出的首选 Rodrigues 参数表示, 等式 (72) 等于 Rodrigues 参数的乘积规则 [15, 16]

$$\rho'' = (1 - \rho' \cdot \rho)^{-1} (\rho' + \rho - \rho' \times \rho) \quad (73)$$

其中 $\rho'' = \mathbf{a}(++)/2$, $\rho' = \mathbf{a}(+)/2$, 并且 $\rho = -\hat{\mathbf{a}}(+)/2$ 。这给出

$$\begin{aligned} \mathbf{a}(++) &= [1 + (1/4)\mathbf{a}(+) \cdot \hat{\mathbf{a}}(+)]^{-1} [\mathbf{a}(+) - \hat{\mathbf{a}}(+) + (1/2)\mathbf{a}(+) \times \hat{\mathbf{a}}(+)] \\ &= \left\{ 1 - [4 + \mathbf{a}(+) \cdot \hat{\mathbf{a}}(+)]^{-1} [\hat{\mathbf{a}}(+) \cdot \Delta\mathbf{a}(+)] \right\} M \Delta\mathbf{a}(+) \end{aligned} \quad (74)$$

这里 $\Delta\mathbf{a}(+) \equiv \mathbf{a}(+) - \hat{\mathbf{a}}(+)$ 并且

$$M \equiv \left(1 + \|\hat{\mathbf{a}}(+)\|^2 / 4 \right)^{-1} \{ I_{3 \times 3} - [\hat{\mathbf{a}}(+) \times] / 2 \} \quad (75)$$

忽略方程式 (74) 中 $\Delta\mathbf{a}(+)$ 中的二阶和更高阶项, 这与 EKF 中的通常假设一致, 并记住, 根据重置的定义, $\hat{\mathbf{a}}(++) \equiv 0$ 给出

$$\Delta\mathbf{a}(++) \equiv \mathbf{a}(++) - \hat{\mathbf{a}}(++) = M \Delta\mathbf{a}(+) \quad (76)$$

向量 \mathbf{b} 不受重置的影响, 因此方程 (42) 的六维状态的协方差必须重置为

$$\tilde{P}(++) = \begin{bmatrix} M & 0_{3 \times 3} \\ 0_{3 \times 3} & I_{3 \times 3} \end{bmatrix} \tilde{P}(+) \begin{bmatrix} M & 0_{3 \times 3} \\ 0_{3 \times 3} & I_{3 \times 3} \end{bmatrix}^T \quad (77)$$

A.2 协方差投影法

如果方程式 (61) 为真, 则方程式 (51a) 将给出

$$\tilde{P}(+) = [S^+(+) S(-)] \left(I_{6 \times 6} - \tilde{K} \tilde{H} \right) \tilde{P}(-) [S^+(+) S(-)]^T \quad (78)$$

与方程式 (61) 不同, 该方程式没有疾病。我们使用它来定义重置协方差 $\tilde{P}(++)$ 为左侧的数量, 并保留 $\tilde{P}(+)$ 的符号表示由出现在右侧的方程式 (62) 定义的更新协方差。然后利用方程 (56a) 和 (56b), 我们得到

$$\tilde{P}(++) = \begin{bmatrix} \Xi^T(+) \Xi(-) & 0_{3 \times 3} \\ 0_{3 \times 3} & I_{3 \times 3} \end{bmatrix} \tilde{P}(+) \begin{bmatrix} \Xi^T(+) \Xi(-) & 0_{3 \times 3} \\ 0_{3 \times 3} & I_{3 \times 3} \end{bmatrix}^T \quad (79)$$

方程 (55) 和一些四元数代数 [15] 给出

$$\Xi^T(+) \Xi(-) = (\delta \hat{q}_4) I_{3 \times 3} - [\delta \hat{\mathbf{q}} \times] \quad (80)$$

这里, 方程 (46)

$$\delta \hat{q} = \begin{bmatrix} \delta \hat{\mathbf{q}} \\ \delta \hat{q}_4 \end{bmatrix} = \hat{q}(+) \otimes \hat{q}^{-1}(-) = \left(1 + \|\hat{\mathbf{a}}(+)\|^2 / 4\right)^{-1/2} \begin{bmatrix} \hat{\mathbf{a}}(+)/2 \\ 1 \end{bmatrix} \quad (81)$$

结合这些方程得出

$$\Xi^T(+) \Xi(-) = \left(1 + \|\hat{\mathbf{a}}(+)\|^2 / 4\right)^{-1/2} \{I_{3 \times 3} - [\hat{\mathbf{a}}(+)\times] / 2\} \quad (82)$$

方程 (62) 下面讨论的更新四元数的规范化提供了 $\left(1 + \|\hat{\mathbf{a}}(+)\|^2 / 4\right)^{-1/2}$ 的另一个校正系数, 并将该系数和等式 (82) 插入等式 (79) 中可精确地恢复等式 (77)。因此, 对协方差矩阵的重置校正 MEKF 和协方差投影法中是相同的, 至少在 $\|\hat{\mathbf{a}}(+)\|$ 中是二阶的。