航天器姿态确定的乘法与加法滤波器的对比

F. Landis Markley

July 2004

摘要

由于没有全局非奇异的旋转三参数表示，迫使姿态卡尔曼滤波器估计出奇异的或冗余的姿态表示。我们使用简化的运动学和测量模型比较了两种滤波策略。我们的偏好策略估计是高维非奇异参数化指定的参考姿态的姿态偏差的三参数表示。假设与之参考的偏差足够小，可以避免三维参数化的任何奇异性或不连续性。我们指出了另一种直接估计四参数四元数表示的策略的一些缺点。

1 简介

实时航天器姿态估计一般采用扩展卡尔曼滤波器 (EKF)[1,2]。虽然 3×3 正交姿态矩阵是航天器姿态的基本表示，但正交性要求对其 9 个要素施加了 6 个约束，反映了旋转矩阵的特殊正交群 $SO(3)$ 具有维数 3 的事实。因此，大多数 EKFs 使用的是 $SO(3)$ 的低维参数化，最早使用的是最小三维参数化 [3]；但高维参数化可以避免所有三个参数表示中出现的奇点或不连续性 [4]。四分量四元数具有全局非奇异表示 $SO(3)$ 的最低维数，但它仍然有一个多余的自由度。因此，我们面临使用或有奇异或有冗余的姿态表示的困境。我们避免这种困境的首选策略是使用非奇异表示作为参考姿态，使用三分量表示与此参考姿态的偏差。这种方法，我们称之为乘法 EKF(Multiplicative EKF, MEKF)，它隐含在一些早期的航天器姿态估计 [5-8] 中，并在参考文献 [9] 中进行了详细讨论。另一种策略是加法 EKF (Additive EKF, AEKF)，将四元数的四个分量视为独立参数 [10]。

我们首先简要概述四元数估计，强调概念上的困难。然后在简化运动学和测量的模型中讨论了 MEKF。接下来是对两个版本的 AEKF 的分析，使

用与 MEKF 相同的模型，并总结我们的结论。参考文献 [11] 是本文的扩展版本，参考文献 [12] 给出了离散测量情况下的并行分析。

2 四元数估计

姿态矩阵一般写成四元数的齐次二次函数 [13]，

$$A(\bar{q}) = A\left(\begin{bmatrix} \mathbf{q} \\ q_4 \end{bmatrix}\right) = (q_4^2 - |\mathbf{q}|^2)\boldsymbol{I}_{3\times3} + 2\mathbf{q}\mathbf{q}^T - 2q_4[\mathbf{q}\times] \tag{1}$$

其中 $\boldsymbol{I}_{3\times3}$ 表示 3×3 单位矩阵，交叉积矩阵为

$$[\mathbf{q}\times] \equiv \begin{bmatrix} 0 & -q_3 & q_2 \\ q_3 & 0 & -q_1 \\ -q_2 & q_1 & 0 \end{bmatrix} \tag{2}$$

我们使用参考文献 [8] 和 [13] 的四元数积约定，所以

$$A(\bar{p}\otimes\bar{q}) = A\left(\begin{bmatrix} \mathbf{p} \\ p_4 \end{bmatrix} \otimes \begin{bmatrix} \mathbf{q} \\ q_4 \end{bmatrix}\right) = A\left(\begin{bmatrix} p_4\mathbf{q} + q_4\mathbf{p} - \mathbf{p}\times\mathbf{q} \\ p_4q_4 - \mathbf{p}\cdot\mathbf{q} \end{bmatrix}\right) = A(\bar{p})A(\bar{q}) \tag{3}$$

传统的“加法”四元数滤波器通过定义估计 $\hat{\bar{q}}$ 和误差 $\Delta\bar{q}$ 有

$$\hat{\bar{q}} \equiv E\{\bar{q}\} \quad \text{and} \quad \Delta\bar{q} = \bar{q} - \hat{\bar{q}} \tag{4}$$

其中 $E\{\cdot\}$ 表示期望值。这意味着

$$E\left\{|\bar{q}|^2\right\} = E\left\{\left|\hat{\bar{q}} + \Delta\bar{q}\right|^2\right\} = \left|\hat{\bar{q}}\right|^2 + E\left\{|\Delta\bar{q}|^2\right\} \geq \left|\hat{\bar{q}}\right|^2 \tag{5}$$

只有当 $\Delta\bar{q}$ 等于零时才具有相等性。只有当四元数有单位范数时，方程式 (1) 才给出正交矩阵。方程式 (5) 表明，如果随机变量 $\bar{q}$ 具有单位范数且不是无误差，则其期望范数必须小于 1。虽然单位范数约束的违反将体现在姿态误差方差的阶数上，但对于加法四元数 EKFs，我们将其视为一个严重的概念问题，因此我们首先转到 MEKF。

3 乘法 EKF

MEKF 用四元数的积表示姿态。

$$\bar{q} = \delta\bar{q}(\mathbf{a}) \otimes \bar{q}_{ref} \tag{6}$$

其中 $\bar{q}_{ref}$ 是某个单位参考四元数，$\delta\bar{q}(\mathbf{a})$ 是一个单位四元数，表示从 $\bar{q}_{ref}$ 到真实姿态 $\bar{q}$ 的旋转，由三分量矢量 $\mathbf{a}$ 参数化。虽然有几种 $\mathbf{a}$ 的参数化表示可供选择 [9]，但在本文中，最重要的是小角度旋转

$$\delta\bar{q}(\mathbf{a}) = \bar{1} + \frac{1}{2}\bar{\mathbf{a}} + order(|\mathbf{a}|^2) \tag{7}$$

其中，$\bar{1}$ 表示单位四元数，$\bar{\mathbf{a}}$ 表示向量部分为 $\mathbf{a}$ 和标量部分为 0 的四元数。方程式 (6) 中 $\delta\bar{q}$ 和 $\bar{q}_{ref}$ 的两种姿态表示显然是多余的。MEKF 的基本思想是计算三分量 $\mathbf{a}$ 的无约束估计，同时使用正确规范化的四分量 $\bar{q}_{ref}$ 提供全局非奇异姿态表示。给出 $\mathbf{a}$ 的估计值 $\hat{\mathbf{a}} \equiv E\{\mathbf{a}\}$，方程式 (6) 说明 $\delta\bar{q}(\hat{\mathbf{a}}) \otimes \bar{q}_{ref}$ 是真实姿态四元数 $\bar{q}$ 的相应估计。我们通过选择参考四元数 $\bar{q}_{ref}$ 来消除姿态表示中的冗余，使得 $\hat{\mathbf{a}}$ 恒等于零，从而避免了三分量表示的任何奇异性或不连续性。由于 $\delta\bar{q}(\mathbf{0})$ 是特征四元数，因此这个选择导致参考四元数是真四元数的估计。将 $\bar{q}_{ref}$ 识别为姿态估计意味着 $\mathbf{a}$ 是姿态误差的三分量表示。这为姿态误差统计提供了一种一致的处理方法，用 $\mathbf{a}$ 的协方差表示机体坐标系内姿态误差的协方差。MEKF 的基本概念优势在于，$\bar{q}_{ref}$ 是定义上的单位四元数。

3.1 动力学

四元数运动方程是

$$\dot{\bar{q}} = \frac{1}{2}\bar{\omega} \otimes \bar{q} \tag{8}$$

其中，ω 是机体坐标系中的角速度矢量。因为 $\bar{q}_{ref}$ 也是一个单位四元数，所以它必须遵守

$$\dot{\bar{q}}_{ref} = \frac{1}{2}\bar{\omega}_{ref} \otimes \bar{q}_{ref} \tag{9}$$

其中，参考姿态的角速度 ω_{ref} 必须由要求 $\hat{\mathbf{a}}$ 恒等于 0 的条件来确定。请注意，$\bar{q}_{ref}$ 和 ω_{ref} 不是随机变量。利用方程式 (8) 和 (9) 计算方程式 (6) 的时间导数，将整个方程与 $\bar{q}_{ref}$ 的倒数右乘，然后重新排列，得出

$$\delta\dot{\bar{q}} = \frac{1}{2}\left(\bar{\omega} \otimes \delta\bar{q} - \delta\bar{q} \otimes \bar{\omega}_{ref}\right) \tag{10}$$

我们现在假设简单的运动模型

$$\omega(t) = \hat{\omega}(t) + \mathbf{n}_\omega(t) \tag{11}$$

其中 $\hat{\omega}(t)$ 是名义角速度，$\mathbf{n}_\omega(t)$ 是零均值高斯过程噪声过程，遵守

$$E\left\{\mathbf{n}_\omega(t)\mathbf{n}_\omega^T(t')\right\} = \delta(t-t')Q = \delta(t-t')\sigma_\omega^2 \boldsymbol{I} \tag{12}$$

其中 $\delta(t-t')$ 表示狄拉克 δ 函数。将方程式 (10) 代入方程式 (7) 的时间导数，并在 $\mathbf{a}$ 和 $\mathbf{n}_\omega$ 中线性化，得出

$$\dot{\mathbf{a}} = \hat{\omega} - \omega_{ref} + F_a\mathbf{a} + G_a\mathbf{n}_\omega \tag{13}$$

其中

$$F_a \equiv -\frac{1}{2}\left[(\hat{\omega} + \omega_{ref})\times\right] \quad \text{and} \quad G_a \equiv \boldsymbol{I}_{3\times 3} \tag{14}$$

3.2 测量

我们在机体坐标系中对向量 $\mathbf{v}_B$ 的测量建模

$$\mathbf{z} = \mathbf{v}_B = \mathbf{h}(\mathbf{a}) + \mathbf{n}_z = A(\bar{q})\mathbf{v}_I + \mathbf{n}_z \tag{15}$$

其中，$\mathbf{v}_I$ 是惯性系中的相应矢量，$\mathbf{n}_z$ 是零均值高斯测量噪声，假设是各向同性。

$$R = E\left\{\mathbf{n}_z\mathbf{n}_z^T\right\} = \sigma_z^2\boldsymbol{I} \tag{16}$$

将方程式 (1)、(3)、(6) 和 (7) 代入方程式 (15) 并在 $\mathbf{a}$ 中线性化得出

$$\mathbf{h}(\mathbf{a}) = \hat{\mathbf{v}}_B + H_a\mathbf{a} \tag{17}$$

其中 $\hat{\mathbf{v}}_B$ 表示机体坐标系中的预测的测量值:

$$\hat{\mathbf{v}}_B \equiv A(\bar{q}_{ref})\mathbf{v}_I \tag{18}$$

并且测量灵敏度矩阵为

$$H_a = [\hat{\mathbf{v}}_B \times] \tag{19}$$

姿态误差估计 $\hat{\mathbf{a}}$ 由方程式 (13) 的期望值传播，其中 $\hat{\mathbf{a}} = 0$，在测量上的条件是假设测量是连续的 [1]。

$$\dot{\hat{\mathbf{a}}} = \hat{\omega} - \omega_{ref} + P_a H_a^T R^{-1} [\mathbf{z} - \mathbf{h}(\mathbf{0})] = \hat{\omega} - \omega_{ref} - \sigma_z^{-2} P_a \hat{\mathbf{v}}_B \times \mathbf{v}_B \tag{20}$$

式中，P_a 是误差向量 $\mathbf{a}$ 的协方差。这是使用近似值 $\omega_{ref} \approx \hat{\omega}$ 来传播的，它只忽略了比在 EKF 中通常保留的更高阶的项，并给出

$$\begin{aligned} \dot{P}_a &= F_a P_a + P_a F_a^T + G_a Q G_a^T - P_a H_a^T R^{-1} H_a P_a \\ &= -[\hat{\omega}\times] P_a - P_a [\hat{\omega}\times]^T + \sigma_\omega^2 \boldsymbol{I} - \sigma_z^{-2} P_a [\hat{\mathbf{v}}_B \times]^T [\hat{\mathbf{v}}_B \times] P_a \end{aligned} \tag{21}$$

由于 MEKF 要求 $\dot{\hat{\mathbf{a}}}$ 恒等于零，方程式 (20) 给出 ω_{ref} 为

$$\omega_{ref} = \hat{\omega} + \sigma_z^{-2} P_a (\mathbf{v}_B \times \hat{\mathbf{v}}_B) \tag{22}$$

方程第一个项包含假定的运动学，而第二个项包含测量更新。方程式 (9) 和 (22) 保持参考四元数的单位范数。与离散测量相比，连续测量不需要重置操作 [9]。我们强调，MEKF 不需要方程式 (20) 的积分，方程式 (20) 只用于推导方程式 (22)。

4 加法 EKF

AEKF 放宽四元数规范化条件，将四元数的四个分量作为独立参数，四元数估计和误差由方程式 (4) 给出。线性化方程式 (8) 和 (11) 给出了误差矢量动力学。

$$\Delta\dot{\bar{q}} = \frac{1}{2}\left(\hat{\omega} + \bar{\mathbf{n}}_\omega\right) \otimes \left(\hat{\bar{q}} + \Delta\bar{q}\right) - \frac{1}{2}\hat{\bar{\omega}} \otimes \hat{\bar{q}} = F_q \Delta\bar{q} + G_q \mathbf{n}_\omega \tag{23}$$

其中

$$F_q = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} -[\omega\times] & \omega \\ -\omega^T & 0 \end{bmatrix} \quad \text{and} \quad G_q = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} \hat{q}_4 \boldsymbol{I} + [\hat{\mathbf{q}}\times] \\ -\hat{\mathbf{q}}^T \end{bmatrix} \equiv \frac{1}{2}\hat{\Xi} \tag{24}$$

AEKF 中的四元数在角度和范数上都存在不确定性。角度不确定性的形式由方程式 (6) 给出，但 $\bar{q}_{ref}$ 在 MEKF 中的作用在 AEKF 中由 $\hat{\bar{q}}$ 承担。范数误差和 $\hat{\bar{q}}$ 平行，所以我们可以写

$$\bar{q} = \delta\bar{q}(\mathbf{a}) \otimes \hat{\bar{q}} + \beta\hat{\bar{q}} \approx \begin{bmatrix} \hat{\Xi} & \hat{\bar{q}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{1}{2}\mathbf{a} \\ 1 \end{bmatrix} + \beta\hat{\bar{q}} = \hat{\bar{q}} + \begin{bmatrix} \hat{\Xi} & \hat{\bar{q}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{1}{2}\mathbf{a} \\ \beta \end{bmatrix} \tag{25}$$

近似的方程式来自于乘积法则和方程式 (7)。注意，标准误差 β 是一个相对误差 (将 $\hat{\bar{q}}$ 的规范化数值乘以 $1+\beta$)，而不是绝对误差 (将 β 加到 $\hat{\bar{q}}$ 的规范化数值)。那么 4×4 四元数协方差是

$$P_q \equiv E\left\{\Delta\bar{q}\Delta\bar{q}^T\right\} = \begin{bmatrix} \hat{\Xi} & \hat{\bar{q}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{1}{4}P_a & \frac{1}{2}\mathbf{P}_c \\ \frac{1}{2}\mathbf{P}_c^T & p_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{\Xi} & \hat{\bar{q}} \end{bmatrix}^T \tag{26}$$

其中 P_a 为 3×3 姿态协方差，p_n 为四元数范数方差，$\mathbf{P}_c$ 是姿态/范数协方差的向量。这种因式分解不适用于无约束四元数估计，它直接估计四分量 $\Delta\bar{q}$ 和 4×4 P_q；但它阐明了 AEKF 与 MEKF 的关系。

4.1 测量

方程式 (15) 给出的 AEKF 测量模型与 MEKF 中的模型非常相似。然而，AEKF 使用不同的姿态矩阵 $A(\bar{q})$ 参数化，$\mathbf{h}$ 被视为四元数 $\bar{q}$ 的函数，而不是姿态误差矢量 $\mathbf{a}$ 的函数。我们将考虑 AEKF 的两种不同实现。第一种，我们称之为二次表示 AEKF，用方程式 (1) 表示 $A(\bar{q})$。我们已经看到，除非四元数有单位范数，否则这个姿态矩阵是不正交的，但是我们将证明这些测量在二次表示 AEKF 中驱动范数趋向单位范数。第二种实现是使用在方程式 (1) 中利用 $\bar{q}/|\bar{q}|$ 规范化四元数形成的正交姿态矩阵。

$$A_R(\bar{q}) \equiv A(\bar{q}/|\bar{q}|) = |\bar{q}|^{-2} A(\bar{q}) \tag{27}$$

我们将其称为射线表示 AEKF，因为在四元数空间中，沿射线 (穿过原点的直线) 的任意非零四元数表示相同的姿态。单位四元数表示的双重歧义

性对应于射线穿过单位球体的两个点。经过大量的代数运算，我们找到了测量灵敏度矩阵。

$$H_q \equiv \partial \mathbf{h}/\partial \bar{q}|_{\hat{\bar{q}}} = 2\left|\hat{\bar{q}}\right|^{-2}\left(\left[\hat{\mathbf{v}}_B\times\right]\hat{\Xi}^T + k\hat{\mathbf{v}}_B\hat{\bar{q}}^T\right) \tag{28}$$

其中，$\hat{\mathbf{v}}_B$ 是方程式 (18) 给出的预测测量值，用 $\hat{\bar{q}}$ 代替 $\bar{q}_{ref}$，其中 $k=1$ 表示二次 AEKF，$k=0$ 表示射线 AEKF。测量灵敏度矩阵的形式意味着四元数范数误差 (与 $\hat{\bar{q}}$ 平行) 在二次 AEKF 中是可观测的，但在射线表示 AEKF 中是不可观测的。

方程式 (8) 的期望值取决于测量值。

$$\begin{aligned}\dot{\hat{\bar{q}}} &= \tfrac{1}{2}\hat{\bar{\omega}}\otimes\hat{\bar{q}} + P_q H_q R^{-1}\left[\mathbf{z}-\mathbf{h}\left(\hat{\bar{q}}\right)\right] \\ &= \tfrac{1}{2}\bar{\omega}_{eff}\otimes\hat{\bar{q}} + \sigma_z^{-2}\left[\left(\hat{\mathbf{v}}_B\times\mathbf{P}_c + 2kp_n\hat{\mathbf{v}}_B\right)\cdot\left(\mathbf{v}_B-\hat{\mathbf{v}}_B\right)\right]\hat{\bar{q}}\end{aligned} \tag{29}$$

其中

$$\bar{\omega}_{eff} \equiv \hat{\bar{\omega}} + \sigma_z^{-2}\left\{P_a\left(\mathbf{v}_B\times\hat{\mathbf{v}}_B\right) + 2k\left[\hat{\mathbf{v}}_B\cdot\left(\mathbf{v}_B-\hat{\mathbf{v}}_B\right)\right]\mathbf{P}_c\right\} \tag{30}$$

方程式 (29) 右侧与 $\hat{\bar{q}}$ 平行的项修改了四元数估计的范数，但并不难证明

$$\frac{\mathrm{d}\left(\hat{\bar{q}}/\left|\hat{\bar{q}}\right|\right)}{\mathrm{d}t} = \frac{1}{2}\bar{\omega}_{eff}\otimes\left(\hat{\bar{q}}/\left|\hat{\bar{q}}\right|\right) \tag{31}$$

由于射线表示 AEKF($k=0$) 中的 ω_{eff} 与 MEKF 中的 ω_{ref} 相同，并且由于射线表示 AEKF 使用规范化四元数通过方程式 (27) 计算姿态，因此它给出了与 MEKF 相同的姿态估计。射线表示 AEKF 被用于估算 ALEXIS 和 CAPER 航天器的姿态 [14,15]。

二次表示 AEKF($k=1$) 不同。由于姿态矩阵依赖于四元数范数，因此方程式 (29) 右侧平行于 $\hat{\bar{q}}$ 的项是重要的。如果 $\hat{\bar{q}}$ 不是一个单位四元数，并且 p_n 不是零，$\mathbf{v}_B-\hat{\mathbf{v}}_B$ 会在 $\hat{\mathbf{v}}_B$ 上产生一个错误，，将 $\hat{\bar{q}}$ 的范数趋向单位范数。方程式 (30) 给出的角度更新与射线表示 AEKF 和 MEKF 相同，如果在 $\mathbf{P}_c$ 为零的情况下，但如果 $\mathbf{P}_c$ 不为零，情况则不同。在后一种情况下，很难避免二次表示 AEKF 给出错误估计的结论。

替换方程式 (26) 和 (28) 进入协方差传播方程

$$\dot{P}_q = F_q P_q + P_q F_q^T + G_q Q G_q^T - P_q H_q^T R^{-1} H_q P_q \tag{32}$$

经过一些代数，给出

$$\dot{P}_a = -\left[\hat{\omega}\times\right] P_a - P_a \left[\hat{\omega}\times\right]^T + \sigma_\omega^2 \boldsymbol{I} - \sigma_z^{-2}\left(P_a \left[\hat{\mathbf{v}}_B\times\right]^T \left[\hat{\mathbf{v}}_B\times\right] P_a + 4k\left|\hat{\mathbf{v}}_B\right|^2 \mathbf{P}_c\mathbf{P}_c^T\right) \tag{33a}$$

$$\dot{\mathbf{P}}_c = -\hat{\omega}\times\mathbf{P}_c - \sigma_z^{-2}\left(P_a\left[\hat{\mathbf{v}}_B\times\right]^T\left[\hat{\mathbf{v}}_B\times\right] + 4k\left|\hat{\mathbf{v}}_B\right|^2 p_n\right)\mathbf{P}_c \tag{33b}$$

$$\dot{p}_n = -\sigma_z^{-2}\left(\left|\hat{\mathbf{v}}_B\times\mathbf{P}_c\right|^2 + 4k\left|\hat{\mathbf{v}}_B\right|^2 p_n^2\right) \tag{33c}$$

方程式 (33a) 表明，3×3 姿态协方差 P_a 在射线表示 AEKF($k=0$) 中遵循与 MEKF 相同的方程。方程式 (33b) 表明，如果 $\mathbf{P}_c$ 的初始值为零，则在任何一个 AEKF 中，$\mathbf{P}_c$ 始终为零。方程式 (26) 表明，如果初始估计 $\hat{\bar{q}}$ 是初始协方差的特征向量，则为这种情况；这包括初始化 P_q 为单位矩阵的倍数的情况。方程式 (33b) 中的测量项将驱动 $\mathbf{P}_c$ 趋向零，如果它没有被初始化为零。在射线表示 AEKF 中，当 $\mathbf{P}_c$ 为零时，范数方差 p_n 为常数，当姿态估计收敛到小误差时，由于 P_a 与 p_n 混合在四元数协方差 P_q 中，这可能导致姿态协方差的显著性损失。

二次表示 AEKF($k=1$) 中的姿态协方差 P_a 与其他两个滤波器不同，除非 $\mathbf{P}_c$ 为零。方程式 (33c) 中的最后一项在二次表示 AEKF 中将 p_n 驱动为零，因此与零向量 $\hat{\bar{q}}$ 运算 4×4 协方差矩阵将变为奇异矩阵。只有在四元数模长中加入非物理过程噪声，才能避免二次表示 AEKF 的潜在不稳定性。请注意，$\left|\hat{\bar{q}}\right|$ 趋向单位范数和 p_n 趋向 0 的收敛纯粹是测量处理的结果，既不需要“蛮力”将四元数规范化，也不需要范数强制执行伪测量。然而，在 AEKF 实施过程中，由于数值和离散化效应而产生的范数误差的存在下，发现这种潜台词是有用的 [10]。

5 讨论

在本文所考虑的方法中，由于协方差矩阵的维数较低，因此 MEKF 所需的计算工作量最小。MEKF 在概念上也是最令人满意的，因为它尊重旋转群的维数，并且根据定义，它的姿态估计是一个单位四元数。

射线表示 AEKF 在概念上比 MEKF 简单，因为它不需要除四元数以外的任何姿态参数化，并且它以一些额外的计算负担为代价提供相同的姿

态估计和协方差。数值意义问题可能是由不可观测的四元数范数自由度引起的，但这些问题并没有给应用带来困难。

二次表示 AEKF 建立在不太安全的基础上。我们已经证明当四元数接近单位范数，则姿态矩阵接近正交矩阵，这是测量处理的自然结果，而不借助于四元数的“蛮力”规范化或范数强制伪测量。如果初始四元数估计是初始 4×4 四元数协方差的特征向量，则姿态误差和四元数范数误差始终不相关，姿态协方差和姿态估计与其他滤波器相同。如果姿态误差与四元数范数误差之间的相关性不为零，则姿态更新和姿态协方差与其他滤波器不同。因为姿态矩阵不是完全正交的，4×4 协方差矩阵变得奇异，所以在任何情况下，都应谨慎地考虑该方法提供的估计，这可能导致不稳定，只有在四元数模长中添加非物理过程噪声才能避免。

考虑加法 EKFs 的动机，尽管 MEKF 具有概念和计算上的优势，但似乎是它们表面上与线性卡尔曼滤波器相似。这种相似性是令人迷惑的，因为过程噪声和任何要估计的动态参数都是以乘法方式输入，而不是以加法方式输入到四元数运动学方程中。实际的测量模型也是非线性的，因此我们认为没有任何理由比 MEKF 更倾向于 AEKF。

6 References

1. Gelb, Arthur, ed., Applied Optimal Estimation, Cambridge, MA, the MIT Press, 1974

2. Schmidt, Stanley F., “The Kalman Filter: Its Recognition and Development for Aerospace Applications,” Journal of Guidance and Control, Vol. 4, No. 1, pp. 67,1981

3. Farrell, J. L., “Attitude Determination by Kalman Filtering,” Automatica, Vol. 6,1970, pp. 419-430

4. Stuelpnagel, John, “On the Parameterization of the Three-Dimensional Rotation Group,” SIAM Review, Vol. 6, No. 4, pp. 422-430, 1964

5. Paulson, D. C., Jackson, D. B., and Brown, C. D., “SPARS Algorithms and Simulation Results,” Proceedings of the Symposium on Spacecrafr Attitude Determination, Aerospace Corp. Report TR-0066 (5306)-12, Vol. 1, pp. 293-317, Sept.-Oct. 1969

6. Toda, N. F., Heiss, J. L., and Schlee, F. H., “SPARS: the System, Algorithm, and Test Results,” Proceedings of the Symposium on Spacecrafr Attitude Determination, Aerospace Corp. Report TR-0066 (5306)-12, Vol. 1, pp. 361-370, Sept.-Oct. 1969

7. Murrell, James W., “Precision Attitude Determination for Multimission Spacecraft,” AIAA Paper 78-1248, AIM Guidance and Control Conference, Palo Alto, CA, August 1978

8. Lefferts, E. J., Markley, F. L., and Shuster, M. D., “Kalman Filtering for Spacecraft Attitude Estimation,” Journal of Guidance, Control, and Dynamics, Vol. 5, No. 5, pp. 417-429, 1982

9. Markley, F. L., “Attitude Error Representations for Kalman Filtering,” Journal of Guidance, Control, andDynamics, Vol. 26, No. 2, pp. 31 1-317,2003

10. Bar-Itzhack, I. Y., and Oshman, Y. “Attitude Determination from Vector Observations: Quaternion Estimation,” IEEE Transactions on Aerospace and Electronic Systems, Vol. AES-21, pp. 128-136, 1985

11. Markley, F. L., “Attitude Estimation or Quaternion Estimation?,” Journal of the Astronautical Sciences, (in press)

12. Pittelkau, M. E., An Analysis of the Quaternion Attitude Determination Filter, Journal of the Astronautical Sciences, Vol. 51, No. 1, pp. 103-120, 2003.

13. Shuster, Malcolm D., “A Survey of Attitude Representations,” Journal of the Astronautical Sciences, Vol. 41, No. 4, pp. 439-517, 1993

14. Psiaki, M.L., Theiler, J., Bloch, J., Ryan, S., Dill, R.W., and Warner, R.E., “ALEXIS Spacecraft Attitude Reconstruction with ThermaWlexible Motions Due to Launch Damage,” Journal of Guidance, Control, and Dynamics, Vol. 20, NO. 5 , pp. 1033-1041, 1997

15. Psiaki, M.L., Klatt, E.M., Kintner, P.M. Jr., and Powell, S.P., “Attitude Estimation for a Flexible Spacecraft in an Unstable Spin,” Journal of Guidance, Control, and Dynamics, Vol. 25, No. 1, pp. 88-95,2002