四元数的微分和积分

2019 年 5 月 3 日

1 预备知识

1.1 指数幂运算法则

运算法则

$a^m \cdot a^n = a^{m+n}$

$(a^m)^n = a^{m \cdot n}$

$(a \cdot b)^n = a^n \cdot b^n$

$\left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a^n}{b^n}$

$a^m \div a^n = a^{m-n}$

1.2 复数的欧拉公式

欧拉公式是指欧拉关于复数的公式:

$$e^{ix} = \cos(x) + i\sin(x) = \cos(x) + ix\frac{\sin(x)}{x}$$

欧拉公式的延伸特性，由:

$e^{ix} = \cos x + i\sin x$

得到:

$e^{-ix} = \cos(-x) + i\sin(-x) = \cos x - i\sin x$

上面两个等式相加:

$e^{ix} + e^{-ix} = (\cos x + i\sin x) + (\cos x - i\sin x) = 2\cos x$

所以有:

$\cos x = \frac{e^{ix}+e^{-ix}}{2}$

同样的，把上面 2 个等式相减:

$e^{ix}-e^{-ix}=(\cos x+i\sin x)-(\cos x-i\sin x)=2i\sin x$

所以有:

$\sin x=\frac{e^{ix}-e^{-ix}}{2i}$

1.3 四元数的欧拉公式

1.3.1 Hamilton 四元数

Hamilton 四元数是一种超复数，由英国数学家 Hamilton 发明。复数是由实数加上虚数单位 $\mathbf{i}$ 组成，其中 $\mathbf{i^2}=-1$。类似地，四元数都是由实数加上三个虚数单位 $\mathbf{i}$、$\mathbf{j}$、$\mathbf{k}$ 组成，一般可记为

$q=a+b\mathbf{i}+c\mathbf{j}+d\mathbf{k}=(a,\overrightarrow{v})$

简单地说，四元数就是“1 维实数 + 3 维向量”的组合。

若

$q_1=a_1+b_1\mathbf{i}+c_1\mathbf{j}+d_1\mathbf{k}=(a_1,\overrightarrow{v_1})$

$q_2=a_2+b_2\mathbf{i}+c_2\mathbf{j}+d_2\mathbf{k}=(a_2,\overrightarrow{v_2})$

根据乘法的运算规则，有

$q_1q_2=(a_1+\overrightarrow{v_1})(a_2+\overrightarrow{v_2})=a_1a_2+a_1\overrightarrow{v_2}+a_2\overrightarrow{v_1}+\overrightarrow{v_1}\overrightarrow{v_2}$

其中

$\overrightarrow{v_1}\overrightarrow{v_2}=-\overrightarrow{v_1}\cdot\overrightarrow{v_2}+\overrightarrow{v_1}\times\overrightarrow{v_2}$

于是

$q_1q_2=(a_1a_2-\overrightarrow{v_1}\cdot\overrightarrow{v_2},a_1\overrightarrow{v_2}+a_2\overrightarrow{v_1}+\overrightarrow{v_1}\times\overrightarrow{v_2})$

“·”和“×”表示通常意义上的向量的数量积（点乘）和矢量积（叉乘）。

特别的，若 $a=0$，则

$q_1q_2=(-\overrightarrow{v_1}\cdot\overrightarrow{v_2},\overrightarrow{v_1}\times\overrightarrow{v_2})=-\overrightarrow{v_1}\cdot\overrightarrow{v_2}+\overrightarrow{v_1}\times\overrightarrow{v_2}$

该乘法运算满足结合律但不满足交换律。

1.3.2 广义欧拉公式

广义欧拉公式，就是欧拉公式在四元数上地推广，也就是:

$$\begin{aligned}e^q&=e^{a+b\mathbf{i}+c\mathbf{j}+d\mathbf{k}}\\&=e^ae^{b\mathbf{i}+c\mathbf{j}+d\mathbf{k}}\\&=e^a[\cos(|\overrightarrow{v}|)+(b\mathbf{i}+c\mathbf{j}+d\mathbf{k})\frac{\sin(|\overrightarrow{v}|)}{|\overrightarrow{v}|}]\end{aligned}$$

这就是欧拉公式在四元数上最一般的形式。

2 四元数微分 (翻译一)

2.1 推导

翻译自Quaternion differentiation。有改动。

首先，需要指出似乎很重要的一点：实际上，四元数数值函数的积分或微分都没有什么特别之处。如果你有一个四元数值函数的一个变量 $q(t)$，那么

$\dot{q}(t) = q'(t) = \frac{\mathrm{d}q}{\mathrm{d}t} = \lim_{h\to 0} \frac{q(t+h)-q(t)}{h}$

这与任何实数或复数函数相同。

那么，这篇文章是关于什么的呢？简单的说：单位四元数通常用于表示旋转 (或刚体的方向)，而刚体动力学需要计算方向和时间的积分。几乎所有我能找到的资料来源都能神奇地从稀薄的空气中提取出一个解决方案，而那些给出了推导结果的资料来源往往使其变得比必要的情况更复杂。所以让我们从第一原则开始。我假设你知道，两个单位四元数 q_1q_0 相乘得到一个单位四元数，表示两个旋转的组合。现在假设我们要描述一个以恒定角速度旋转的刚体的方向 $q(t)$。然后我们可以写

$q(0) = q_0$

$q(1) = q_\omega q_0$

式中 q_ω 表示刚体在一个时间步内的旋转。因为我们有恒定的角速度，我们将有 $q(2) = q_\omega q_\omega q_0 = q_\omega^2 q_0$，更普遍地说，通过归纳，对于所有的非负整数 k，$q(k) = q_\omega^k q_0$。所以对于更一般情况的来说，我们希望有

$q(t) = q_\omega^t q_0$

现在，q_ω 是一个单位四元数，这意味着它可以写成极性形式。

$q_\omega = \cos(\theta/2) + \sin(\theta/2)(n_x\mathbf{i} + n_y\mathbf{j} + n_z\mathbf{k})$

其中 θ 是某个角度，$\overrightarrow{n}$ 是表示旋转轴的单位向量。这一部分通常在每个四元数教程中提到。嵌入实数 3-向量作为对应的纯虚数四元数，即只写作为四元数，例如，表示矢量 $\overrightarrow{n}$ 为四元数为 $n_x\mathbf{i} + n_y\mathbf{j} + n_z\mathbf{k}$，通常也会提到。通常没有提到的是一个重要的信息，即四元数的极性形式实际上只是欧拉公式的四元数版本：任何单位复数 z 都可以写成纯虚数的复指数 $z = \exp(it) = \cos(t) + i\sin(t)$ ，同样任何单位长度的四元数 (尤其是 q_ω) 都可以写成纯虚四元数的指数

$q_\omega = \exp(\frac{\theta}{2}\overrightarrow{n})$

这就给了我们一个自然的定义

$q_\omega^t = \exp(t\frac{\theta}{2}\overrightarrow{n})$

现在，如果我们想写一个关于 $q(t)$ 随时间变化的微分方程的行为怎么办？只需计算 $q(t)$ 的导数，就像计算 t 的任何其他函数一样。使用一些列推导和乘积规则，我们得到：

$\dot{q}(t) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(q_\omega^t q_0) = \frac{\theta}{2}\overrightarrow{n}\exp(t\frac{\theta}{2}\overrightarrow{n})q_0 = \frac{\theta}{2}\overrightarrow{n}q(t)$

因为 θ 是在一个时间步内的旋转角度，所以这里它的单位是 [radian/s]，所以矢量 $\theta\overrightarrow{n}$ 实际上就是三维角速度矢量 $\overrightarrow{\omega}$，它产生了经常被引用但很少推导出的方程：

$\dot{q} = \frac{\mathrm{d}q}{\mathrm{d}t} = \frac{1}{2}\overrightarrow{\omega}q$

这个公式通常是完全没有上下文的引用。特别是，通常没有提到 $q(t)$ 描述的是在角速度恒定的情况下刚体的运动方向，这与指数函数相似，是至关重要的。

2.2 工程应用

前面我们得到了四元数微分方程：

$\dot{q} = \frac{\mathrm{d}q}{\mathrm{d}t} = \frac{1}{2}\overrightarrow{\omega}q$

值得注意的是，角速度矢量 $\overrightarrow{\omega}$ 是在固定世界坐标系轴上的投影表示。如果我们应用同一角速度矢量在运动世界坐标系轴上的投影 $\overrightarrow{\omega'}$，明显地有：

$\overrightarrow{\omega} = q\overrightarrow{\omega'}q^{-1}$

所以有：

$\dot{q} = \frac{\mathrm{d}q}{\mathrm{d}t} = \frac{1}{2}\overrightarrow{\omega}q = \frac{1}{2}q\overrightarrow{\omega'}$

因为从 IMU 测量得到的角速度矢量是 $\overrightarrow{\omega'}$，所以上述方程在工程中更常使用。

假设我们已知刚体在时间 t 时的姿态为单位四元数 $q(t) = [q_0, q_1, q_2, q_3]^T$。经过时间 Δt，刚体的姿态发生了变化，用 $q(t+\Delta t) = [q_0', q_1', q_2', q_3']^T$ 表示时间 $t+\Delta t$ 时的姿态。因为 Δt 很小，我们假定这段时间里刚体的角速度恒定，根据微分方程：

$\dfrac{q(t+\Delta t) - q(t)}{\Delta t} = \Delta q$

做积分：

$q(t+\Delta t) - q(t) = \Delta q\Delta t$

所以有：

$q(t+\Delta t) = \Delta q\Delta t + q(t)$

所以 $t+\Delta t$ 时刻的新姿态 $q(t+\Delta t)$ 近似为 t 时刻的旧姿态 $q(t)$ 与姿态变化量 $\Delta q \Delta t$ 的叠加。

根据前面得到的微分方程
$\Delta q = \frac{1}{2} q(t) \overrightarrow{\omega'}$
我们把在 $t+\Delta t$ 时刻测量到的角速度矢量 $\overrightarrow{\omega'}$，表示为一个纯四元数：$\overrightarrow{\omega'} = (0, \omega_x, \omega_y, \omega_z)$。
根据四元数乘法定义

$$q\omega = (q_0 + q_1\boldsymbol{i} + q_2\boldsymbol{j} + q_3\boldsymbol{k})(\omega_0 + \omega_x\boldsymbol{i} + \omega_y\boldsymbol{j} + \omega_z\boldsymbol{k})$$

$$= \begin{bmatrix} q_0\omega_0 - q_1\omega_x - q_2\omega_y - q_3\omega_z \\ q_0\omega_x + q_1\omega_0 + q_2\omega_z - q_3\omega_y \\ q_0\omega_y - q_1\omega_z + q_2\omega_0 + q_3\omega_x \\ q_0\omega_z + q_1\omega_y - q_2\omega_x + q_3\omega_0 \end{bmatrix}^T$$

$$= \begin{bmatrix} \omega_0 & -\omega_x & -\omega_y & -\omega_z \\ \omega_x & \omega_0 & \omega_z & -\omega_y \\ \omega_y & -\omega_z & \omega_0 & \omega_x \\ \omega_z & \omega_y & -\omega_x & \omega_0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} q_0 \\ q_1 \\ q_2 \\ q_3 \end{bmatrix}$$

因为 $\omega_0 = 0$，所以

$$\Delta q = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 0 & -\omega_x & -\omega_y & -\omega_z \\ \omega_x & 0 & \omega_z & -\omega_y \\ \omega_y & -\omega_z & 0 & \omega_x \\ \omega_z & \omega_y & -\omega_x & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} q_0 \\ q_1 \\ q_2 \\ q_3 \end{bmatrix}$$

所以 $q(t+\Delta t)$ 的计算值为：

$$\begin{bmatrix} q'_0 \\ q'_1 \\ q'_2 \\ q'_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} q_0 \\ q_1 \\ q_2 \\ q_3 \end{bmatrix} + \frac{1}{2}\Delta t \begin{bmatrix} 0 & -\omega_x & -\omega_y & -\omega_z \\ \omega_x & 0 & \omega_z & -\omega_y \\ \omega_y & -\omega_z & 0 & \omega_x \\ \omega_z & \omega_y & -\omega_x & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} q_0 \\ q_1 \\ q_2 \\ q_3 \end{bmatrix}$$

其中：

$$M = \begin{bmatrix} 0 & -\omega_x & -\omega_y & -\omega_z \\ \omega_x & 0 & \omega_z & -\omega_y \\ \omega_y & -\omega_z & 0 & \omega_x \\ \omega_z & \omega_y & -\omega_x & 0 \end{bmatrix}$$

被称为旋转矩阵 M。

由于是增量计算，$q(t+\Delta t)$ 不一定是单位四元数，所以需要规范化为单位四元数以便下一个周期使用：

$q(t+\Delta t) \leftarrow \frac{q(t+\Delta t)}{|q(t+\Delta t)|}$

周而复始，就可以估计刚体的下一个时刻的姿态了。

3 四元数微分 (翻译二)

翻译自Quaternion differentiation

四元数微分公式用角速度 $W(t)$ 的矢量分量连接四元数 $q(t)$ 分量的时间导数。四元数 $q(t)=(q_0(t),q_1(t),q_2(t),q_3(t))$ 确定刚体以一个固定点移动时的姿态，角速度矢量 $W_x(t),W_y(t),W_z(t)$ 确定物体在时间点 t 的角速度。

四元数 $q(t)$ 的范数为单位范数，有

$q_0^2(t)+q_1^2(t)+q_2^2(t)+q_3^2(t)=1$

(1)

矢量 $W(t)$ 可以用标量部分为零的四元数表示。

$W(t)=(0,W_x(t),W_y(t),W_z(t))$

(2)

四元数微分公式可以表示为

$\frac{\mathrm{d}q(t)}{\mathrm{d}t}=\frac{1}{2}W(t)q(t)$

(3)

使用四元数乘法规则

$$\begin{aligned}
\frac{\mathrm{d}q_0(t)}{\mathrm{d}t} &= -\tfrac{1}{2}(W_x(t)q_1(t)+W_y(t)q_2(t)+W_z(t)q_3(t))\\
\frac{\mathrm{d}q_1(t)}{\mathrm{d}t} &= \tfrac{1}{2}(W_x(t)q_0(t)+W_y(t)q_3(t)-W_z(t)q_2(t))\\
\frac{\mathrm{d}q_2(t)}{\mathrm{d}t} &= \tfrac{1}{2}(W_y(t)q_0(t)+W_z(t)q_1(t)-W_x(t)q_3(t))\\
\frac{\mathrm{d}q_3(t)}{\mathrm{d}t} &= \tfrac{1}{2}(W_z(t)q_0(t)+W_x(t)q_2(t)-W_y(t)q_1(t))
\end{aligned}$$

(4)

下面是公式 (3) 简单而强健的推导。

设 R_0 为初始时刻，时间点为 t_0，固定在刚体上的任意给定矢量 (标量部分为零的四元数)，R_t 是在时间 t 时刻同一个矢量 (四元数)。

$R_t=q(t)R_0q^{-1}(t)$

(5)

如果我们对公式 (5) 进行微分

$\frac{\mathrm{d}R_t}{\mathrm{d}t}=\frac{\mathrm{d}q(t)}{\mathrm{d}t}R_0q^{-1}(t)+q(t)R_0\frac{\mathrm{d}q^{-1}(t)}{\mathrm{d}t}$

(6)

从公式 (5) 和 (6) 我们有

$\frac{\mathrm{d}R_t}{\mathrm{d}t}=\frac{\mathrm{d}q(t)}{\mathrm{d}t}q^{-1}(t)R_t+R_tq(t)\frac{\mathrm{d}q^{-1}(t)}{\mathrm{d}t}$

(7)

因为 $q(t)$ 的范数为单位范数，所以

$q(t)q^{-1}(t)=1$

(8)

我们有

$\frac{\mathrm{d}q(t)}{\mathrm{d}t}q^{-1}(t)+q(t)\frac{\mathrm{d}q^{-1}(t)}{\mathrm{d}t}=0$

(9)

从公式 (7) 和 (9) 我们有

$\frac{\mathrm{d}R_t}{\mathrm{d}t}=\frac{\mathrm{d}q(t)}{\mathrm{d}t}q^{-1}(t)R_t-R_t\frac{\mathrm{d}q(t)}{\mathrm{d}t}q^{-1}(t)$

(10)

设

$p(t)=\frac{\mathrm{d}q(t)}{\mathrm{d}t}q^{-1}(t)$

(11)

明显地

$q^{-1}(t)=S(q^{-1}(t))+V(q^{-1}(t))=q_0(t)-(q_1(t),q_2(t),q_2(t))$

(12)

这里 $S()$ 表示四元数的标量部分，$V()$ 表示四元数的矢量部分。

四元数 $p(t)$ 的标量部分 $S(p(t))$ 等于

$S(p(t))=\frac{\mathrm{d}q_0(t)}{\mathrm{d}t}q_0+\frac{\mathrm{d}q_1(t)}{\mathrm{d}t}q_1+\frac{\mathrm{d}q_2(t)}{\mathrm{d}t}q_2+\frac{\mathrm{d}q_3(t)}{\mathrm{d}t}q_3=0$

这是因为 $q(t)$ 的范数为单位范数。

由此可知，$p(t)$ 是一个矢量。因为 R_t 同样也是矢量，所以

$p(t)R_t-R_tp(t)=2[p(t)R_t]$

(13)

这里 $[ab]$ 是矢量 a 和矢量 b 的叉乘。

另一方面，变量 $\frac{\mathrm{d}R_t}{\mathrm{d}t}$ 是刚体上的一个点相对于某个固定点的速度。由此

$\frac{\mathrm{d}R_t}{\mathrm{d}t}=[W(t)R_t]$

(14)

因为 R_t 是任意矢量，从公式 (10)，(11)，(13) 和 (14) 由此可知，

$W(t)=2p(t)=2\frac{\mathrm{d}q(t)}{\mathrm{d}t}q^{-1}(t)$

(15)

从公式 (15) 最终可知

$\frac{\mathrm{d}q(t)}{\mathrm{d}t}=\frac{1}{2}W(t)q(t)$

(3)

这里有必要提醒：在公式 (3) 中的角速度矢量 $W(t)=W_X(t),W_Y(t),W_Z(t)$ 是在固定世界坐标系轴上的投影表示。如果我们应用同一角速度矢量在运动世界坐标系轴上的投影，明显地有：

$(0, W_X(t), W_Y(t), W_Z(t)) = q(t)(0, W_x(t), W_y(t), W_z(t))q^{-1}(t)$

(16)

其中 $W_x(t), W_y(t), W_z(t)$ 是角速度矢量在运动世界坐标系轴上的投影。

从公式 (3) 和 (16) 由此可知

$\frac{\mathrm{d}q(t)}{\mathrm{d}t} = \frac{1}{2}q(t)\overline{W}(t)$

$\overline{W}(t) = (W_x(t), W_y(t), W_z(t))$

(17)

最后，考虑公式 (3) 和 (17) 的示例用于所谓的二次曲线移动。在这种情况下，四元数 $q(t)$ 等于：

$q(t) \quad = (\cos(\frac{\beta}{2}), \quad \sin(\frac{\beta}{2})(\cos(\omega t), \sin(\omega t), 0))$

$q^{-1}(t) = (\cos(\frac{\beta}{2}), -\sin(\frac{\beta}{2})(\cos(\omega t), \sin(\omega t), 0))$

$\frac{\mathrm{d}q(t)}{\mathrm{d}t} = (0, \omega\sin(\frac{\beta}{2})(-\sin(\omega t), \cos(\omega t), 0))$

(18)

相应地，公式 (3) 和 (17) 角速度矢量在固定世界坐标系和运动世界坐标系轴上的投影等于：

$(W_X(t), W_Y(t), W_Z(t)) = 2\frac{\mathrm{d}q(t)}{\mathrm{d}t}q^{-1}(t) = (-\omega\sin(\beta)\sin(\omega t), \omega\sin(\beta)\cos(\omega t), \omega(1-\cos(\beta)))$

$(W_x(t),\ W_y(t),\ W_z(t)) = 2q^{-1}(t)\frac{\mathrm{d}q(t)}{\mathrm{d}t} = (-\omega\sin(\beta)\sin(\omega t), \omega\sin(\beta)\cos(\omega t), \omega(\cos(\beta)-1))$

4 四元数的微分和积分 (抄录三)

抄录自四元数与旋转——学习笔记 (三) 五、四元数的微分和积分

假设公式 (1):

$q = q_0 + \boldsymbol{q} = q_0 + q_1\mathbf{i} + q_2\mathbf{j} + q_3\mathbf{k}$

给出的四元数是时间 t 的函数。则对 $q(t)$ 求导有:

$\dot{q} = \dot{q}_0 + \dot{\boldsymbol{q}} = \dot{q}_0 + \dot{q}_1\mathbf{i} + \dot{q}_2\mathbf{j} + \dot{q}_3\mathbf{k}$

设 $p(t)$ 是另一个四元数，则对于公式 (3):

$pq = p_0q_0 - \boldsymbol{p} \cdot \boldsymbol{q} < p_0\boldsymbol{q} + q_0\boldsymbol{p} + \boldsymbol{p} \times \boldsymbol{q} >$

关于时间 t 求导为:

$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(pq) = \dot{p}q + p\dot{q}$

四元数函数 $q(t)$ 描述的是某移动物体方向的变化，具体一点就是物体的自身坐标系相对于固定的世界坐标系的变化（是坐标系旋转！）。令 $\omega(t)$ 是物体坐标系相对于世界坐标系变化的角速度。角速度可以由牛顿动力学方程确定。

定理 3:

令 $q(t)$ 是一个单位四元数函数，$\omega(t)$ 是由 $q(t)$ 确定的角速度。则 $q(t)$ 的导数为公式 (14):

$\dot{q} = \frac{1}{2}\omega q$

证明:

在 $t + \delta t$ 时刻，旋转可以描述为 $q(t + \delta t)$。在 δt 过程中，物体坐标系在经过了 $q(t)$ 旋转的前提下，又经过了额外的微小旋转。这个额外的微小旋转的瞬时旋转轴为 $\hat{\omega} = \omega/|\omega|$ ，旋转角度为 $\delta\theta = |\omega|\delta t$，可以用一个单位四元数描述:

$\delta q = \cos\frac{\delta\theta}{2} + \hat{\omega}\sin\frac{\delta\theta}{2} = \cos\frac{|\omega|\delta t}{2} + \hat{\omega}\sin\frac{|\omega|\delta t}{2}$

$t + \delta t$ 时刻的旋转可以描述成四元数序列 $q(t), \delta q$，由第四节四元数旋转算子序列的内容有:

$q(t + \delta t) = \delta q q(t)$

（注意先旋转的四元数在右边。有童鞋可能会疑惑这是坐标系旋转，为什么不是左边？因为这里的坐标系旋转其实就是将物体坐标系各个基向量进行旋转，与前面提到的指定向量不动坐标系旋转不同）

接下来推导 $\dot{q}$，首先求差值：

$q(t+\delta t)-q(t)=(\cos\frac{|\omega|\delta t}{2}+\hat{\omega}\sin\frac{|\omega|\delta t}{2})q(t)-q(t)$

$=-2\sin^2\frac{|\omega|\delta t}{2}q(t)+\hat{\omega}\sin\frac{|\omega|\delta t}{2}q(t)$ (注：这步推导有问题？)

等式右边第一项是高阶项趋近于 0，可省略。因此

$\dot{q}(t)=\lim_{\delta t\to 0}\frac{q(t+\delta t)-q(t)}{\delta t}$

$=\hat{\omega}\lim_{\delta t\to 0}\frac{\sin\frac{|\omega|\delta t}{2}}{\delta t}q(t)$

$=\hat{\omega}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\sin(\frac{|\omega|t}{2})|_{t=0}q(t)$

$=\hat{\omega}\frac{|\omega|}{2}q(t)$

$=\frac{1}{2}\omega(t)q(t)$

在实际中，能得到的角速度其实是相对于物体坐标系下的角速度 ω' (例如通过 IMU 获得)。世界坐标系下的角速度 ω 不动，物体坐标系旋转，则角速度 ω 在物体坐标系下的表示为 $\omega'=q^*\omega q$ 。将 $\omega=q\omega' q^*$ 代入公式 (14)，得到：

$\dot{q}=\frac{1}{2}q\omega'$

若 $\dot{q}$ 已知，公式 (14) 两边同时右乘 q^*，可以求得角速度：

$\omega=2\dot{q}q^*$

根据公式 (14)，四元数的二阶导为：

$\ddot{q}=\frac{1}{2}(\dot{\omega}q+\omega\dot{q})=\frac{1}{2}\dot{\omega}q+\frac{1}{4}\omega\omega q=(-\frac{1}{4}|\omega|^2+\frac{1}{2}\dot{\omega})q$

当 q 的一阶导和二阶导都是已知时，由上式两边同时右乘 q^* 可以求出角加速度：

$\dot{\omega}=2\ddot{q}q^*-\omega\dot{q}q^*=2\ddot{q}q^*-2\dot{q}q^*\dot{q}q^*=2(\ddot{q}q^*-(\dot{q}q^*)^2)$

微分方程 (14) 可以用数值积分求解。令 h 为时间步长，q_k 和 ω_k 是 kh 时刻的四元数和角速度。则在下一时刻的四元数近似为：

$q_{k+1}=q_k+\frac{1}{2}h\omega_k q_k$

由于增量计算，q_{k+1} 不一定是单位四元数，所以需要规范化为单位四元数：

$q_{k+1}\leftarrow\frac{q_{k+1}}{|q_{k+1}|}$