

卡尔曼滤波的姿态误差表示

F. Landis Markley

March-April 2003

摘要

四元数具有全局非奇异姿态表示的最低维数。四元数必须服从单位范数约束，这导致了扩展卡尔曼滤波器的发展，该滤波器使用四元数进行全局姿态估计，并对姿态误差进行三分量表示。该乘法扩展卡尔曼滤波器采用非线性保持范数的四元数重置操作，考虑了各种姿态误差表示。在此框架下计算了二阶偏差修正。

1 简介

对于航天器姿态估计使用扩展卡尔曼滤波器 (EKF)(另见参考文献 [2] 和 [3]) 的历史悠久。最早发布的应用程序 [4] 和最近的示例 [5] 采用了三维姿态表示，但不可避免的是，所有三维姿态表示对于某些姿态而言都是奇异的或不连续的，这导致了对其它参数化方法的追求 [6]。四分量单位四元数是所有全局非奇异姿态参数化的最小维数，因此在卡尔曼滤波器中得到了广泛应用 [7-12]。对四元数施加单位范数约束使其具有与旋转群维数一致的三个自由度，但需要某种约束四元数估计。本文提出并测试了各种规避或实施规范约束的方法 [9-13]。最成功的方法是使用单位四元数参数化全局姿态，同时对姿态误差采用三分量表示 [7-9]。我们提供了这个滤波器的一个新推导，它被称为乘法 EKF(MEKF)，突出了四元数和三分量姿态表示之间的相互作用。本文的主要目的是消除人们对 MEKF 已有的某种错误的疑虑。我们证明了 MEKF 并不是真正的四元数估计，它对三分量姿态误差进行了无约束估计，四元数起到了定义误差的参考作用。然后，我们将展示如何正确理解 MEKF，从而使二阶姿态滤波器得到一致的扩展。

本文首先对姿态表示进行了讨论，然后简要评述了四元数备选估计方案。参考文献 [9] 对 1981 年的文献引文进行了广泛的回顾。然后，我们开发了 MEKF 的基本方程，包括向量测量和四元数测量的详细模型。本文继续在同一基础上构建一个二阶模型，然后是结束语。

2 姿态参数化

这个简短的讨论将建立约定和符号；参考文献 [14] 对姿态表示进行了全面的回顾。我们把 3×3 的正交姿态矩阵或方向余弦矩阵作为基本姿态表示。

2.1 欧拉轴/角度和旋转向量

欧拉定理 [15] 指出，一点固定的刚体最一般的运动是绕某个轴旋转 ϕ 角度。我们用单位向量 \mathbf{e} 指定该轴，旋转向量

$$\mathbf{a}_\phi \equiv \phi \mathbf{e} \quad (1)$$

是由 \mathbf{a} 表示的三参数姿态表示的一般类的第一个示例。所有旋转都可以映射到旋转向量空间中半径为 π 的球的内部和表面上的点，直径的两端的点表示相同的姿态。当姿态平稳变化时，旋转向量可能从直径的一端跳到另一端，从而限制了其作为全球姿态表示的实用性。将表示扩展到半径为 2π 的球体可以推迟这些跳跃，但不能完全避免，因为旋转向量的运动方程对于 $\phi = 2\pi$ 是奇异的。

2.2 四元数

表示航天器姿态的单位四元数有一个三向量部分和一个标量部分，它们与旋转轴和旋转角有关。

$$\mathbf{q} = \begin{bmatrix} \mathbf{q} \\ q_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{e} \sin(\phi/2) \\ \cos(\phi/2) \end{bmatrix} \quad (2)$$

四元数分量服从单位长度约束。

$$|\mathbf{q}|^2 \equiv |\mathbf{q}|^2 + q_4^2 = 1 \quad (3)$$

用 q 来表示四元数而不是向量部分的大小，这是本文采用的用相应的非黑体字符 v 来表示三向量 \mathbf{v} 的大小的约定的一个例外。

q 的四个分量是欧拉对称参数或欧拉-罗德里格斯参数 (Euler-Rodrigues parameters)，它首先出现在欧拉 [16] 的一篇论文和高斯未发表的笔记中 [17]。罗德里格斯 [18] 首先证明了它们的一般用途，所以它们被称为欧拉对称参数或欧拉-罗德里格斯参数 [23]。汉密尔顿在 1844 年将四元数作为一个抽象的数学对象引入，但他是否正确理解了四元数与旋转的关系还存在一些问题 (见参考文献 [20])。

[25] 单位四元数位于嵌入四维欧几里得方程 E^4 的三维球体 S^3 上。姿态矩阵是单位四元数各分量的齐次二次函数；

$$A(q) = (q_4^2 - |\mathbf{q}|^2)\mathbf{I}_{3 \times 3} - 2q_4[\mathbf{q} \times] + 2\mathbf{q}\mathbf{q}^T \quad (4)$$

其中 $\mathbf{I}_{3 \times 3}$ 是 3×3 单位矩阵，而又乘矩阵是

$$[\mathbf{q} \times] \equiv \begin{bmatrix} 0 & -q_3 & q_2 \\ q_3 & 0 & -q_1 \\ -q_2 & q_1 & 0 \end{bmatrix} \quad (5)$$

四元数表示是 $2:1$ ，因为方程式 (4) 表明 q 和 $-q$ 表示相同的旋转矩阵。四元数是一种理想的全局姿态表示，因为它在 S^3 上随姿态变化而不断变化，避免了某些三维参数化所要求的跳跃。然而，通常将代表姿态误差的四元数限制在 $q_4 > 0$ 的 S^3 半球。

我们按照参考文献 [9] 和 [14] 编写四元数乘法约定

$$q' \otimes q \equiv \begin{bmatrix} q'_4\mathbf{q} + q'_4\mathbf{q}' - \mathbf{q}' \times \mathbf{q} \\ q'_4q_4 - \mathbf{q}' \cdot \mathbf{q} \end{bmatrix} \quad (6)$$

它的有用特性是

$$A(q')A(q) = A(q' \otimes q) \quad (7)$$

这意味着旋转群和四元数群几乎是同构的，由于映射的 $2:1$ 性质，“几乎”是定性的 [21]。四元数的运动方程是。

$$\dot{q} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} \boldsymbol{\omega} \\ 0 \end{bmatrix} \otimes q \quad (8)$$

其中， $\boldsymbol{\omega}$ 是机体坐标系中的角速度向量。利用精确算法，方程式 (8) 保持了 q 的规范化，如果计算误差导致范数约束被违反，则可以用 q 除以 2 倍范数来恢复它。

2.3 吉布斯向量 (Gibbs Vector) 或罗德里格斯参数 (Rodrigues Parameters)

吉布斯向量的三个组分是 [22]

$$\mathbf{g} \equiv \frac{\mathbf{q}}{q_4} = \frac{\mathbf{e} \sin(\phi/2)}{\cos(\phi/2)} = \mathbf{e} \tan(\phi/2) \equiv \frac{\mathbf{a}_g}{2} \quad (9)$$

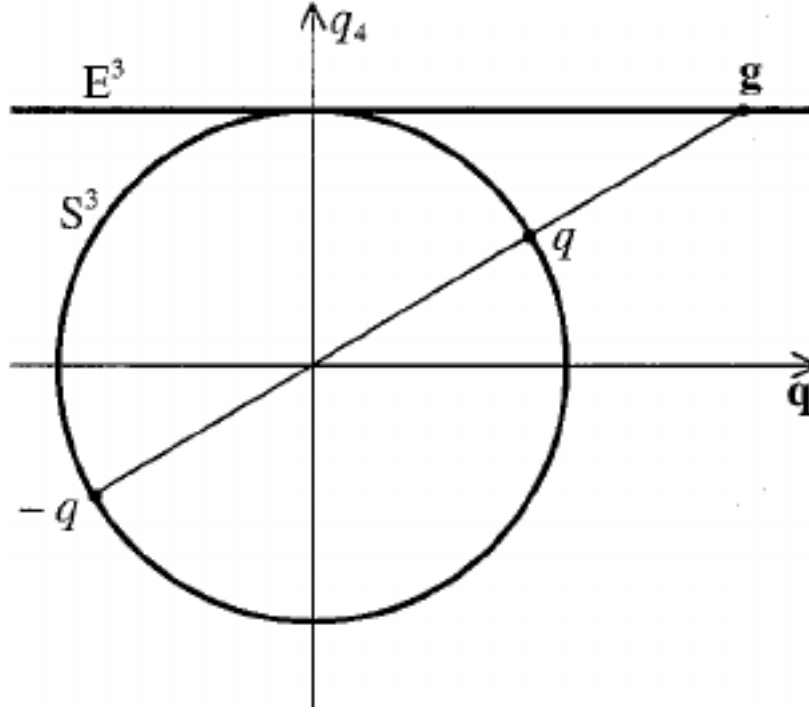


图 1: Gibbs vector as a gnomonic projection.

这是罗德里格斯早先介绍的 [18]。方程式 (9) 最后一项中的一半因子确保小旋转时 \mathbf{a}_q 的量级近似等于 ϕ 。吉布斯向量可以看作是 S^3 四元数空间在三维欧几里德 \mathbf{g} 空间上的一个几何投影，如图 1 所示。这是 S^3 的 2:1 映射， q 和 $-q$ 映射到同一点。由于 q 和 $-q$ 代表相同的旋转，吉布斯向量参数化是 E^3 上旋转的 1:1 表示。吉布斯向量对于 180° 旋转是无限的 (S^3 的 $q_4 = 0$ 算子)，这对于旋转的全局表示是不可取的。

2.4 改进型罗德里格斯参数 (Modified Rodrigues Parameters, MRPs)

[23]Wiener 首先介绍了 MRPs:

$$\mathbf{p} \equiv \frac{\mathbf{q}}{1 + q_4} = \frac{\mathbf{e} \sin(\phi/2)}{1 + \cos(\phi/2)} = \mathbf{e} \tan(\phi/4) \equiv \frac{\mathbf{a}_p}{4} \quad (10)$$

最后一项中四分之一的系数确保小旋转的 \mathbf{a}_p 大约等于 ϕ 。Marandi 和 Modi[24] 指出，这些参数可以看作是 S^3 四元数空间在 E^3 上的立体平面投影，如图 2 所示。 S^3 的一个半球在三维 \mathbf{p} 空间中投影到单位球体的内部， S^3 的另一个半球投影到单位 \mathbf{p} 球体的外部。所有旋转都可以用单元球内部

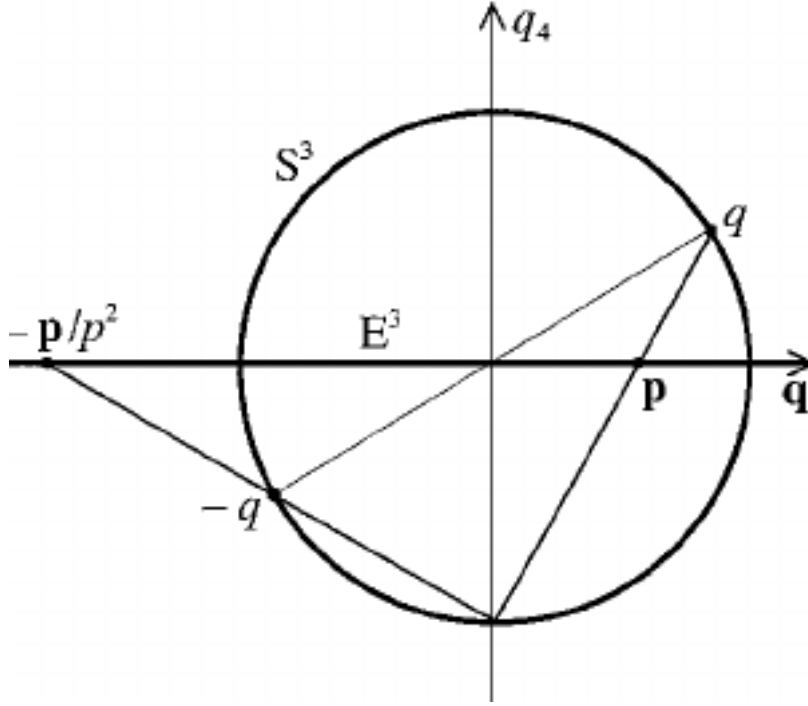


图 2: Modified Rodrigues parameters as a stereographic projection.

和表面的 MRP 表示。如果我们将表示扩展到所有欧几里得空间，我们有一个 2:1 的参数化，其中 p 和 $-p/p^2$ 表示相同的旋转。这种参数化与旋转向量参数化有许多共同的特点，包括离散跳跃的需求，但又避免了超越函数。

2.5 替代四元数估计方法

因为单位四元数驻留在 S^3 上，所以将四元数视为随机变量并将其估计定义为条件期望似乎很自然。

$$E\{q|Z\} \equiv \int_{S^3} q \rho(q|Z) d^3q \quad (11)$$

其中， $\rho(q|Z)$ 是 q 在 S^3 上的概率密度函数，以测量 Z 为条件。然而，这是一个不令人满意的定义，因为将四元数空间中的概率分布限制在一个单位球体的表面上意味着它的期望必须在球体内部。除非概率分布函数集中在一点上，否则积分不能给出单位四元数。这是基于方程式 (11) 的隐式或显式四元数估计方法的基本概念问题。

一个建议的解决方案是放宽方程式 (3) 的四元数规范化要求，并通过参

数化姿态为

$$A(q) = |q|^{-2} \{ (q_4^2 - |q|^2) \mathbf{I}_{3 \times 3} - 2q_4[\mathbf{q} \times] + 2\mathbf{q}\mathbf{q}^T \} \quad (12)$$

这是一个正交矩阵，不管四元数是否规范化。这种方法隐含地引入了一个不可观测的自由度，四元数范数，其性能并不令人鼓舞 [11,12]。

其他的方法只是在滤波器之外，通过蛮力将四元数规范化 [9-12]。Lef-ferts 等人的方法在参考文献 [9] 的第 9 节中，将 4×4 的四元数协方差投影到 3×3 的矩阵上，认为这不会导致任何信息丢失。所得到的滤波器在测量残差中服从四元数范数对一阶的约束，使得四元数规范化后的二阶修正不在一阶 EKF 的范围内。Vathsar 在这个基础上建立了二阶滤波器，但是他的测量更新违反了二阶范数约束 [25]。一些四元数估计甚至放宽了姿态矩阵完全正交的要求，采用了方程式 (4) 和不完全规范化的四元数。然而，从理论上讲，这些方法都不完全令人满意。

参考文献 [11] 第 9 节中的方法避免了所有这些问题。这是最初的方法出处 [7,8]，它导致了与协方差投影方法相同的 EKF。然而，它建立在更坚实的概念基础上，并为一致的二阶滤波器提供了基础。

3 乘法扩展卡尔曼滤波器 (MEKF)

MEKF 以四元数积表示真正的姿态。

$$q(t) = \delta q(\mathbf{a}(t)) \otimes q_{\text{ref}}(t) \quad (13)$$

其中 $q_{\text{ref}}(t)$ 是一些单位参考四元数，而 $\delta q(\mathbf{a}(t))$ 是一个单位四元数，表示从 $q_{\text{ref}}(t)$ 到由 $q(t)$ 参数化的真实姿态的旋转。我们用前面讨论的三向量 $\mathbf{a}(t)$ 中的一种形式来参数化 $\delta q(\mathbf{a}(t))$ 。方程式 (13) 中的两种姿态表示形式 $\mathbf{a}(t)$ 和 $q_{\text{ref}}(t)$ 显然是多余的。MEKF 的基本思想是在使用正确规范化的四分量 $q_{\text{ref}}(t)$ 提供全局非奇异姿态表示的同时，计算三分量 $\mathbf{a}(t)$ 的无约束估计。

给出一个估计值 $\hat{\mathbf{a}}(t)$ ，其中帽子符号表示对随机变量的期望值，方程式 (13) 表示对真实姿态四元数的相应估计值为 $\delta q(\hat{\mathbf{a}}(t)) \otimes q_{\text{ref}}(t)$ 。我们通过选择参考四元数 $q_{\text{ref}}(t)$ 来消除姿态表示中的冗余，使 $\hat{\mathbf{a}}(t)$ 等于零。因为 $\delta q(\mathbf{0})$ 是单位四元数，这意味着参考四元数是真实四元数的最佳估计。我们重申，MEKF 中的四元数估计并非如方程式 (11) 中所定义的随机变量的期望值。MEKF 的基本概念优势在于， $q_{\text{ref}}(t)$ 是定义上的单位四元数。

将 $q_{\text{ref}}(t)$ 识别为姿态估计，反过来意味着 $\mathbf{a}(t)$ 是姿态误差的三分量表示，即真实的姿态和我们的估计之间的差异。这为姿态误差统计提供了一致

的处理, 用 $\mathbf{a}(t)$ 的协方差表示机体坐标系中姿态误差角的协方差 (以弧度平方表示)。该方程式的变形具有一些优点, 当它颠倒方程式 (13) 中的乘法顺序, 则使得 $\mathbf{a}(t)$ 表示惯性参考坐标系而非机体坐标系中的姿态误差 [26]。

连续/离散滤波分三个步骤进行: 时间传播、测量更新和重置。连续时间传播被安排为保持 $\hat{\mathbf{a}}(t) \equiv 0$, 但离散测量更新将有限更新后的值 $\hat{\mathbf{a}}(+)$ 分配给 $\hat{\mathbf{a}}$ 。测量更新后, 参考四元数仍保留其预更新值 $q_{\text{ref}}(-)$, 因此它不再代表最佳估计。重置操作纠正了这种情况, 将更新信息从 $\hat{\mathbf{a}}(+)$ 移动到更新后参考四元数 $q_{\text{ref}}(+)$, 之后, $\hat{\mathbf{a}}$ 复位为零。由于该操作不改变真四元数, 方程式 (13) 要求

$$\delta q(\hat{\mathbf{a}}(+)) \otimes q_{\text{ref}}(-) = \delta q(\mathbf{0}) \otimes q_{\text{ref}}(+) = q_{\text{ref}}(+) \quad (14)$$

即使在测量更新期间, 也可以通过考虑将更新分布在无穷小的时间间隔内, 而不是瞬时, 来消除离散重置并保持 $\hat{\mathbf{a}}(t) \equiv 0$ [27]。然而, 本文将测量更新视为即时更新。

重置的重要性在标准 EKF 中被掩盖, 它表示真实状态 \mathbf{X} 是参考值 \mathbf{X}_{ref} , 通常称为完整状态估计值 $\hat{\mathbf{X}}$, 和一个小误差 \mathbf{x} 的总和。

$$\mathbf{X} = \mathbf{X}_{\text{ref}} + \mathbf{x} \quad (15)$$

测量过程产生误差向量的更新值。

$$\hat{\mathbf{x}}(+) = \hat{\mathbf{x}}(-) + \Delta \mathbf{x} \quad (16)$$

其中 $\Delta \mathbf{x}$ 是测量更新产生的校正。重置操作通过以下方式将更新信息从误差状态移动到完整状态的估计值:

$$\mathbf{X}_{\text{ref}}(+) = \mathbf{X}_{\text{ref}}(-) + \hat{\mathbf{x}}(+) - \hat{\mathbf{x}}(-) = \mathbf{X}_{\text{ref}}(-) + \Delta \mathbf{x} \quad (17)$$

由于方程的最终形式的出现, 更新和重置通常被认为是一个单一的操作。然而, 姿态的重置必须在 MEKF 中明确处理, 因为它不是纯粹的加法。

3.1 姿态误差表示

误差四元数由方程式 (1)、(9) 或 (10) 的三分量表示法参数化。分别为

$$\delta q(\mathbf{a}_\phi) = \begin{bmatrix} (\mathbf{a}_\phi/a_\phi) \sin(a_\phi/2) \\ \cos(a_\phi/2) \end{bmatrix} \quad (18a)$$

$$\delta q(\mathbf{a}_g) = \frac{1}{\sqrt{4 + a_g^2}} \begin{bmatrix} \mathbf{a}_g \\ 2 \end{bmatrix} \quad (18b)$$

或

$$\delta q(\mathbf{a}_p) = \frac{1}{16 + a_p^2} \begin{bmatrix} 8\mathbf{a}_p \\ 16 - a_p^2 \end{bmatrix} \quad (18c)$$

第四个参数化 \mathbf{a}_q , 定义为 δq 向量部分的两倍, 给出

$$\delta q(\mathbf{a}_q) = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} \mathbf{a}_q \\ \sqrt{4 - a_q^2} \end{bmatrix} \quad (18d)$$

这与参考文献 11 的第 9 节的参数化不同, 只有两个因子。 \mathbf{a} 的这四个定义提供了与误差四元数相同的二阶近似值,

$$\delta q(\mathbf{a}) \approx \begin{bmatrix} \mathbf{a}/2 \\ 1 - a^2/8 \end{bmatrix} \quad (19)$$

以及姿态误差矩阵

$$A(\delta q(\mathbf{a})) \approx \mathbf{I}_{3 \times 3} - [\mathbf{a} \times] - \frac{1}{2}(a^2 \mathbf{I}_{3 \times 3} - \mathbf{a}\mathbf{a}^T) \quad (20)$$

因此, 它们与 EKF 和二阶滤波器等价, 但它们在 \mathbf{a} 中的三阶和更高阶上有所不同。

旋转向量的缺点是需要三角函数评估, 但这并不妨碍它在最近的应用中得到使用 [28]。其他参数化通过不显式使用旋转角度 ϕ 来避免三角函数。吉布斯向量 [22] 的优点是重置可以首先定义非标准化四元数

$$q_{\text{unnorm}} \equiv \begin{bmatrix} \mathbf{a}_g \\ 2 \end{bmatrix} \otimes q_{\text{ref}}(-) \quad (21)$$

然后更新单位四元数

$$q_{\text{ref}}(+) = q_{\text{unnorm}} / |q_{\text{unnorm}}| \quad (22)$$

以避免四元数范数中数值误差的累积。MRPs 具有不需要平方根或三角函数的计算优势。方程式 (18d) 给出了 $a_q > 2$ 的一个无意义的复数结果, 它可能出现在滤波器收敛之前。尽管大的测量值更新违反了线性假设, 但是一个健壮的滤波器需要在不需要特殊计算的情况下处理它们。

注意方程式 (19) 和 (20) 不适用于所有三个参数姿态表示。特别是, 只有当 \mathbf{a} 的分量被视为欧拉角 [15] 绕三个正交轴旋转时, 它们才保持一阶,

如参考文献 [4] 和 [7] 中所述。欧拉角参数化将导致相同的 EKF，但其扩展到二阶取决于所使用的特定欧拉旋转序列。然而，方程式 (19) 和 (20) 对于在吉布斯向量和 MRPs 之间插值的连续参数化族 [29] 是有效的。

3.2 姿态和状态传播

因为 q_{ref} 是一个单位四元数，它必须服从形式的运动方程。

$$\dot{q}_{\text{ref}} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} \boldsymbol{\omega}_{\text{ref}} \\ 0 \end{bmatrix} \otimes q_{\text{ref}} \quad (23)$$

其中 $\boldsymbol{\omega}_{\text{ref}}$ 作为参考姿态的角速度有着明显的解释，并且由于紧凑性忽略了时间参数。我们现在展示 $\boldsymbol{\omega}_{\text{ref}}$ 是如何由 $\hat{\mathbf{a}}$ 恒等为零的要求确定的，这是参考姿态是最优姿态估计的条件。利用方程式 (13) 计算时间导数，使用方程式 (8) 和 (23)，给出

$$\begin{bmatrix} \boldsymbol{\omega} \\ 0 \end{bmatrix} \otimes q = 2 \frac{d[\delta q(\mathbf{a})]}{dt} \otimes q_{\text{ref}} + \delta q(\mathbf{a}) \otimes \begin{bmatrix} \boldsymbol{\omega}_{\text{ref}} \\ 0 \end{bmatrix} \otimes q_{\text{ref}} \quad (24)$$

用方程式 (13) 代替左侧的 q ，用整个方程式乘以 q_{ref} 的倒数，然后重新排列得到

$$2 \frac{d[\delta q(\mathbf{a})]}{dt} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{\omega} \\ 0 \end{bmatrix} \otimes \delta q(\mathbf{a}) - \delta q(\mathbf{a}) \otimes \begin{bmatrix} \boldsymbol{\omega}_{\text{ref}} \\ 0 \end{bmatrix} \quad (25)$$

常用 EKF 方法是用 \mathbf{a} 和 $\boldsymbol{\omega}$ 的期望值 $\hat{\mathbf{a}}$ 和 $\hat{\boldsymbol{\omega}}$ 的同一个非线性函数近似 \mathbf{a} 和 $\boldsymbol{\omega}$ 的期望值，给出

$$2 \frac{d[\delta q(\hat{\mathbf{a}})]}{dt} = \begin{bmatrix} \hat{\boldsymbol{\omega}} \\ 0 \end{bmatrix} \otimes \delta q(\hat{\mathbf{a}}) - \delta q(\hat{\mathbf{a}}) \otimes \begin{bmatrix} \boldsymbol{\omega}_{\text{ref}} \\ 0 \end{bmatrix} \quad (26)$$

请注意， $\boldsymbol{\omega}_{\text{ref}}$ 不是随机变量。 $\hat{\mathbf{a}}$ 为零的要求意味着 $\delta q(\hat{\mathbf{a}})$ 是恒等四元数，所以恒量，因此方程式 (26) 给出

$$\boldsymbol{\omega}_{\text{ref}}(t) = \hat{\boldsymbol{\omega}}(t) \quad (27)$$

由方程式 (23) 和 (27) 指定的四元数传播，与用常规方法推导的传播方程相同。

现在我们专门研究一组陀螺仪用来获得角速度信息来代替航天器动力学模型的情况 [8,9]。我们采用了 Farrenkopf 的陀螺动力学误差模型 [30]，这意味着我们忽略了速率积分陀螺的输出噪声 [31]。这是导航级陀螺仪的最佳近似值。角速度向量根据陀螺仪输出向量 $\boldsymbol{\omega}_{\text{out}}(t)$ 给出，由

$$\boldsymbol{\omega}(t) = \boldsymbol{\omega}_{\text{out}}(t) - \mathbf{b}(t) - \boldsymbol{\eta}_1(t) \quad (28)$$

其中陀螺漂移向量 $\mathbf{b}(t)$ 服从

$$\dot{\mathbf{b}}(t) = \boldsymbol{\eta}_2(t) \quad (29)$$

其中 $\boldsymbol{\eta}_1(t)$ 和 $\boldsymbol{\eta}_2(t)$ 是零均值白噪声过程。估计角速度为

$$\hat{\boldsymbol{\omega}}(t) = \boldsymbol{\omega}_{\text{out}}(t) - \hat{\mathbf{b}}(t) \quad (30)$$

卡尔曼滤波器估计六分量状态向量

$$\mathbf{x}(t) \equiv \begin{bmatrix} \mathbf{a}(t) \\ \mathbf{b}(t) \end{bmatrix} \quad (31)$$

注意，参考四元数 q_{ref} 不是状态向量的一部分。这种状态向量的期望 $\hat{\mathbf{x}}(t)$ 的传播是微不足道的，因为假设 $\dot{\mathbf{a}}(t)$ 恒等于零，方程式 (29) 清楚地表明 $\dot{\mathbf{b}}(t) = \mathbf{0}$ 。

3.3 协方差传播

协方差矩阵的传播

$$P(t) \equiv E \{ (\mathbf{x} - \hat{\mathbf{x}})(\mathbf{x} - \hat{\mathbf{x}})^T | Z \} = \begin{bmatrix} P_a & P_c \\ P_c^T & P_b \end{bmatrix} \quad (32)$$

由下式给出

$$\dot{P} = FP + PF^T + GQG^T \quad (33)$$

其中矩阵 F 、 G 和 Q 将被确定。将协方差矩阵分为 3×3 的姿态、偏差和相关子矩阵将在以后有用。

我们考虑吉布斯向量 [22] 参数化的特殊性。方程式 (25) 代入

$$\mathbf{a}_g = 2(\delta q)_V / (\delta q)_4 \quad (34)$$

其中下标 V 和 4 表示四元数的向量和标量部分，给出

$$\dot{\mathbf{a}}_g = \left(\mathbf{I}_{3 \times 3} + \frac{1}{4} \mathbf{a}_g \mathbf{a}_g^T \right) (\boldsymbol{\omega} - \boldsymbol{\omega}_{\text{ref}}) - \frac{1}{2} (\boldsymbol{\omega} + \boldsymbol{\omega}_{\text{ref}}) \times \mathbf{a}_g \equiv \mathbf{f}(\mathbf{x}, t) \quad (35)$$

在一些直白的四元数代数之后。这是一个精确的动力学方程，既不依赖于 EKF 近似，也不依赖于航天器姿态动力学模型。插入方程式 (27)、(28) 和 (30)，并忽略 \mathbf{a} 中高于一阶的项和速率误差

$$\boldsymbol{\omega} - \boldsymbol{\omega}_{\text{ref}} = \hat{\mathbf{b}} - \mathbf{b} - \boldsymbol{\eta}_1 \quad (36)$$

给出线性 EKF 近似值

$$\mathbf{f}(\mathbf{x}, t) = \hat{\mathbf{b}} - \mathbf{b} - \boldsymbol{\eta}_1 - \boldsymbol{\omega}_{\text{ref}} \times \mathbf{a} \quad (37)$$

\mathbf{a} 中的下标省略了，因为附录表明，如果用方程式 (18c) 或 (18d) 代替方程式 (18b)，方程式 (37) 同样成立。实际上，它只需要满足方程式 (19) 至少一阶的表示。接下来是

$$F(t) \equiv \begin{bmatrix} \frac{\partial \mathbf{f}}{\partial \mathbf{a}} & \frac{\partial \mathbf{f}}{\partial \mathbf{b}} \\ 0_{3 \times 3} & 0_{3 \times 3} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -[\boldsymbol{\omega}_{\text{ref}} \times] & -\mathbf{I}_{3 \times 3} \\ 0_{3 \times 3} & 0_{3 \times 3} \end{bmatrix} \quad (38)$$

$$G(t) \equiv \begin{bmatrix} \frac{\partial \mathbf{f}}{\partial \boldsymbol{\eta}_1} & \frac{\partial \mathbf{f}}{\partial \boldsymbol{\eta}_2} \\ 0_{3 \times 3} & \mathbf{I}_{3 \times 3} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\mathbf{I}_{3 \times 3} & 0_{3 \times 3} \\ 0_{3 \times 3} & \mathbf{I}_{3 \times 3} \end{bmatrix} \quad (39)$$

和

$$E \left\{ \begin{bmatrix} \boldsymbol{\eta}_1(t) \\ \boldsymbol{\eta}_2(t) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \boldsymbol{\eta}_1(t') \\ \boldsymbol{\eta}_2(t') \end{bmatrix}^T \right\} = \delta(t - t') Q(t) \quad (40)$$

其中

$$\left[\frac{\partial \mathbf{f}}{\partial \mathbf{x}} \right]_{ij} \equiv \frac{\partial f_i}{\partial x_j} \quad (41)$$

$\delta(t - t')$ 是狄拉克 δ 函数。如果过程 $\boldsymbol{\eta}_1(t)$ 和 $\boldsymbol{\eta}_2(t)$ 在统计上独立，则矩阵 $Q(t)$ 为块对角线矩阵，如通常假设的那样。这种协方差传播与参考文献 [7-9] 中的传播相同，除了一些因子是一半。

3.4 向量测量模型和更新

向量测量被建模为航天器机体坐标系中向量 \mathbf{v}_B 的 m 分量函数 $\mathbf{h}(\mathbf{v}_B)$ ，受到零均值白噪声的破坏。机体坐标系中 \mathbf{v}_B 的表示是通过姿态矩阵在惯性参考坐标系中表示 \mathbf{v}_I 的映射：

$$\mathbf{v}_B = A(q)\mathbf{v}_I \approx \left\{ \mathbf{I}_{3 \times 3} - [\mathbf{a} \times] - \frac{1}{2}(a^2 \mathbf{I}_{3 \times 3} - \mathbf{a}\mathbf{a}^T) \right\} A(q_{\text{ref}})\mathbf{v}_I \quad (42)$$

其中我们使用了方程式 (7), (13) 和方程式 (20)。将其替换为 $\mathbf{h}(\mathbf{v}_B)$, 并扩展到 \mathbf{a} 中有关预更新参考的一阶项, 给出

$$\mathbf{h}(\mathbf{v}_B) = \mathbf{h}(\bar{\mathbf{v}}_B) - \left. \frac{\partial \mathbf{h}}{\partial \mathbf{v}} \right|_{\bar{\mathbf{v}}_B} [\mathbf{a} \times] \bar{\mathbf{v}}_B = \mathbf{h}(\bar{\mathbf{v}}_B) + H_a \mathbf{a} \quad (43)$$

其中 $\bar{\mathbf{v}}_B \equiv A(q_{\text{ref}}(-))\mathbf{v}_I$ 是由预更新四元数预测的机体坐标系向量, 并且

$$H_a \equiv \left. \frac{\partial \mathbf{h}}{\partial \mathbf{v}} \right|_{\bar{\mathbf{v}}_B} [\bar{\mathbf{v}}_B \times] \quad (44)$$

因为测量值不明确地依赖于陀螺漂移, $m \times 6$ 测量灵敏度矩阵为

$$H = \begin{bmatrix} \frac{\partial \mathbf{h}}{\partial \mathbf{a}} & \frac{\partial \mathbf{h}}{\partial \mathbf{b}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} H_a & 0_{m \times 3} \end{bmatrix} \quad (45)$$

卡尔曼增益矩阵由下式给出

$$K = \begin{bmatrix} P_a(-) \\ P_c^T(-) \end{bmatrix} H_a^T [H_a P_a(-) H_a^T + R]^{-1} \quad (46)$$

其中 R 是测量白噪声的协方差。状态更新由

$$\hat{\mathbf{x}}(+) = \hat{\mathbf{x}}(-) + K [\mathbf{h}_{\text{obs}} - \mathbf{h}(\bar{\mathbf{v}}_B) - H_a \hat{\mathbf{a}}(-)] \quad (47)$$

其中 \mathbf{h}_{obs} 表示测量值, 并且预测值由方程式 (43) 的预更新期望值给出。协方差更新是

$$P(+) = P(-) - K H_a \begin{bmatrix} P_a(-) & P_c(-) \end{bmatrix} \quad (48)$$

3.5 重置

如果在每次测量更新后执行重置, 方程式 (47) 中的项 $H_a \hat{\mathbf{a}}(-)$ 等于零。为了计算效率, 重置通常会延迟, 直到对一组同时测量进行了所有更新, 在这种情况下, 方程式 (47) 中的 $\hat{\mathbf{a}}(-)$ 是上一次更新的 $\hat{\mathbf{a}}(+)$ 。但是, 在开始下一次传播之前必须执行重置, 以确保传播开始时 $\hat{\mathbf{a}}$ 为零, 从而避免在测量之间传播 $\hat{\mathbf{a}}(t)$ 。重置不会修改协方差, 因为它既不会增加也不会减少估计的总信息内容; 它只是将这些信息从姿态表示的一部分移动到另一部分。

3.6 四元数测量

许多现代的星体跟踪器同时跟踪 5 到 50 颗恒星, 将它们与内部星体目录中的恒星匹配, 并将它们的姿态计算为一个惯性参考四元数 [32,34]。计

算还产生姿态误差角 3×3 协方差的估计 [35,36]。将这些量从星体跟踪器参考坐标系转换到航天器坐标系是一件简单的事情，以产生四元数“测量”值 q_{obs} 和 3×3 测量协方差矩阵 R 。将这些信息呈现给卡尔曼滤波器最方便的方法是根据观测和预测姿态之间的偏差采用一种三维参数化方法 [37]

$$q_{\text{obs}} = \delta q(\mathbf{a}_{\text{obs}}) \otimes q_{\text{ref}}(-) \quad (49)$$

测量模型很简单

$$\mathbf{h}(\mathbf{a}) = \mathbf{a} \quad (50)$$

所以 H_a 是 3×3 单位矩阵， R 是这个误差角的协方差。由于观测的预测值与方程式 (49) 相同为零，因此状态更新简化为：

$$\hat{\mathbf{x}}(+) = \hat{\mathbf{x}}(-) + \begin{bmatrix} P_a(-) \\ P_c^T(-) \end{bmatrix} [P_a(-) + R]^{-1} [\mathbf{a}_{\text{obs}} - \hat{\mathbf{a}}(-)] \quad (51)$$

在观测处理中使用与重置中相同的三维参数化非常重要 [方程式 (49)]。例如，如果方程式 (34) 选择吉布斯向量 [22] 形式用于观测处理，则选择方程式 (18b) 应用于重置。有了这个条件，我们可以看到，当 $R \ll P_a(-)$ ，使得 $\hat{\mathbf{a}}(+) = \mathbf{a}_{\text{obs}}$ 时，我们有 $q_{\text{ref}} = q_{\text{obs}}$ 。

4 二阶滤波器

非线性卡尔曼滤波器中的二阶项在非线性对测量和过程噪声项具有重要意义时会变得重要。一个带有偏差修正项的一阶滤波器获得了一阶滤波器的基本好处，而无需额外的二阶矩计算的计算代价 [38]。该滤波器对状态传播和测量残差方程添加二阶校正，但对协方差和增益使用 EKF 表达式。因为方程式 (18a-18d) 精确到 \mathbf{a} 的所有阶，二阶滤波器中的复位与 MEKF 中的相同。

4.1 传播

当包含二阶修正时，我们将发现 $\hat{\mathbf{a}}(t)$ 恒等于零的要求不再导致 ω_{ref} 的方程式 (27)。状态估计传播由

$$\dot{\hat{\mathbf{x}}}(t) = \begin{bmatrix} \mathbf{f}(\hat{\mathbf{x}}, t) + \hat{\mathbf{b}}_p \\ \mathbf{0} \end{bmatrix} \quad (52)$$

其中传播偏差校正由以下方程式给出 [38]：

$$\hat{\mathbf{b}}_p(t) \equiv \frac{1}{2} \sum_{ij} \left. \frac{\partial^2 \mathbf{f}(\mathbf{x}, t)}{\partial x_i \partial x_j} \right|_{\hat{\mathbf{x}}(t)} P_{ij}(t) \quad (53)$$

对于吉布斯向量 [22] 参数化, 方程式 (28-32), (35) 和 (53) 给出

$$\hat{\mathbf{b}}_p = \frac{1}{4} P_a (\hat{\boldsymbol{\omega}} - \boldsymbol{\omega}_{\text{ref}}) + \boldsymbol{\omega}_c \quad (54)$$

其中

$$\boldsymbol{\omega}_c \equiv \frac{1}{2} \begin{bmatrix} (P_c)_{32} - (P_c)_{23} \\ (P_c)_{13} - (P_c)_{31} \\ (P_c)_{21} - (P_c)_{12} \end{bmatrix} = \frac{1}{2} E \left\{ (\mathbf{b} - \hat{\mathbf{b}}) \times \mathbf{a} | Z \right\} \quad (55)$$

把这个二阶项从方程式 (35) 加到 $\mathbf{f}(\hat{\mathbf{x}}, t)$ 中, 给出

$$\begin{aligned} \dot{\hat{\mathbf{a}}}_g(t) = & \left[\mathbf{I}_{3 \times 3} + \frac{1}{4} (\hat{\mathbf{a}}_g \hat{\mathbf{a}}_g^T + P_a) \right] (\hat{\boldsymbol{\omega}} - \boldsymbol{\omega}_{\text{ref}}) \\ & - \frac{1}{2} (\hat{\boldsymbol{\omega}} + \boldsymbol{\omega}_{\text{ref}}) \times \hat{\mathbf{a}}_g + \boldsymbol{\omega}_c \end{aligned} \quad (56)$$

$\hat{\mathbf{a}}_g$ 和 $\dot{\hat{\mathbf{a}}}_g$ 等于 0 产出的要求是

$$\boldsymbol{\omega}_{\text{ref}} = \hat{\boldsymbol{\omega}} + \left(\mathbf{I}_{3 \times 3} + \frac{1}{4} P_a \right)^{-1} \boldsymbol{\omega}_c \quad (57)$$

附录中显示, $\left(\mathbf{I}_{3 \times 3} + \frac{1}{4} P_a \right)^{-1}$ 的系数取决于姿态误差的三维参数化的具体选择。由于 P_a 和 $\boldsymbol{\omega}_c$ 在估计误差中都是二阶的, 在二阶滤波器中可以用特征矩阵代替 $\left(\mathbf{I}_{3 \times 3} + \frac{1}{4} P_a \right)$, 给出

$$\boldsymbol{\omega}_{\text{ref}} = \hat{\boldsymbol{\omega}}(t) + \boldsymbol{\omega}_c(t) \quad (58)$$

测量之间的时间传播由 MEKF 改变, 通过姿态误差和陀螺漂移偏差之间的协方差的倾斜部分引起的二阶修正 $\boldsymbol{\omega}_c(t)$ 与角速度向量相加。这相当于 Vathsar 得出的结果 [25]。

4.2 测量更新

在二阶滤波器中, 预测测量值近似为

$$E \{ \mathbf{h}(\mathbf{x}, t) | Z \} \approx \mathbf{h}(\hat{\mathbf{x}}(-), t) + \hat{\mathbf{b}}_m \quad (59)$$

其中, Z 包括当前测量之前的所有测量, 测量偏差项由下式 [38] 给出。

$$\hat{\mathbf{b}}_m \equiv \frac{1}{2} \sum_{i,j} \frac{\partial^2 \mathbf{h}(\mathbf{x}, t)}{\partial x_i \partial x_j} \bigg|_{\hat{\mathbf{x}}(-)} P_{ij}(-) \quad (60)$$

利用方程式 (42) 将一个向量测量 $\mathbf{h}(\mathbf{v}_B)$ 扩展到 \mathbf{a} 中的二阶，给出

$$\begin{aligned} \mathbf{h}(\mathbf{v}_B) = & \mathbf{h}(\bar{\mathbf{v}}_B) - \frac{\partial \mathbf{h}}{\partial \mathbf{v}} \bigg|_{\bar{\mathbf{v}}_B} \left\{ [\mathbf{a} \times] + \frac{1}{2} (a^2 \mathbf{I}_{3 \times 3} - \mathbf{a} \mathbf{a}^T) \right\} \bar{\mathbf{v}}_B \\ & + \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^3 \frac{\partial^2 \mathbf{h}}{\partial v_i \partial v_j} \bigg|_{\bar{\mathbf{v}}_B} ([\bar{\mathbf{v}}_B \times] \mathbf{a})_i ([\bar{\mathbf{v}}_B \times] \mathbf{a})_j \end{aligned} \quad (61)$$

其中，参数 $(-)$ 因紧凑性而省略。将其插入方程式 (60) 中，利用 P_a 的对称性和混合二阶偏导数，以及测量不明确依赖于陀螺漂移偏差的事实，给出

$$\begin{aligned} \hat{\mathbf{b}}_m = & -\frac{1}{2} \frac{\partial \mathbf{h}}{\partial \mathbf{v}} \bigg|_{\bar{\mathbf{v}}_B} [(\text{tr} P_a) \mathbf{I}_{3 \times 3} - P_a] \bar{\mathbf{v}}_B \\ & + \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^3 \frac{\partial^2 \mathbf{h}}{\partial v_i \partial v_j} \bigg|_{\bar{\mathbf{v}}_B} ([\bar{\mathbf{v}}_B \times]^T P_a [\bar{\mathbf{v}}_B \times])_{ij} \end{aligned} \quad (62)$$

其中，tr 表示矩阵 trace。这一结果与 Vathsar 发现的测量偏差不同，Vathsar 的计算忽略了四元数范数对二阶的约束 [25]。

考虑一个特殊情况，即姿态协方差 P_a 是某个标量 p_a 的单位矩阵的倍数， $P_a = p_a \mathbf{I}_{3 \times 3}$ ，给出

$$\hat{\mathbf{b}}_m = P_a \left\{ -\frac{\partial \mathbf{h}}{\partial \mathbf{v}} \bigg|_{\bar{\mathbf{v}}_B} \bar{\mathbf{v}}_B + \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^3 \frac{\partial^2 \mathbf{h}}{\partial v_i \partial v_j} \bigg|_{\bar{\mathbf{v}}_B} [\bar{\mathbf{v}}_B^2 \delta_{ij} - (\bar{\mathbf{v}}_B)_i (\bar{\mathbf{v}}_B)_j] \right\} \quad (63)$$

这个情况很有趣，因为卡尔曼滤波器通常是用这种形式的大数值协方差初始化的。我们不希望这会破坏更新。在这种情况下。现在考虑两种不同的恒星跟踪器或数字太阳传感器的测量模型。第一种是普通模型，

$$\mathbf{h}(\mathbf{v}) = \begin{bmatrix} u_1/u_3 \\ u_2/u_3 \end{bmatrix} \quad (64)$$

其中

$$\mathbf{u} = B \mathbf{v}_B \quad (65)$$

是传感器参考坐标系中被观测对象的向量，该坐标系通过正交变换矩阵 B 从航天器机体坐标系旋转而来。测量灵敏度矩阵为¹

¹译注：上一版本中这个方程式不一样。 u_1 和 u_2 位置交换。

$$H_a = \frac{1}{u_3^2} \begin{bmatrix} u_3 & 0 & -u_1 \\ 0 & u_3 & -u_2 \end{bmatrix} [\mathbf{u} \times] B \quad (66)$$

方程式 (63) 中的第一项用于二阶测量偏差消除，第二项下式给出

$$\hat{\mathbf{b}}_m = p_a(1 + h^2(\bar{\mathbf{v}}_B))\mathbf{h}(\bar{\mathbf{v}}_B) \quad (67)$$

第二种测量模型是向量本身的测量，就像用三轴磁强计一样，

$$\mathbf{h}(\mathbf{v}) = \mathbf{u} \quad (68)$$

这种测量模型的测量灵敏度矩阵是

$$H_a = [\mathbf{u} \times] B \quad (69)$$

在这种情况下，方程式 (63) 中的第二项用于消除，第一项下式给出

$$\hat{\mathbf{b}}_m = -p_a\mathbf{h}(\bar{\mathbf{v}}_B) \quad (70)$$

这两个测量模型给出了相同数量级但符号相反的测量偏差。对于大的初始化误差， 20° 或 0.349 弧度 (radian)，或的星体跟踪器初始化误差，对预测测量值的修正为前导项 $\mathbf{h}(\bar{\mathbf{v}}_B)$ 的 12%。²

因为给卡尔曼滤波器输入的四元数测量值在三维姿态参数向量中是线性的，因此在这种情况下，测量偏差 $\hat{\mathbf{b}}_m(t)$ 恒等为零。恒星跟踪器中的四元数计算算法考虑了测量的非线性，因此卡尔曼滤波器看不到它们。

5 总结

本文的主要研究成果是阐明 MEKF 中姿态四元数表示与姿态误差三元表示之间的关系。我们将此过滤器视为基于以参考四元数表示的姿态的明显冗余表示和指定姿态与参考偏差的三个向量。通过约束参考四元数，消除了这种明显的冗余度，使三个姿态偏差向量的期望值为零。因此，不需要传播相同的零期望值。MEKF 的基本结构是以这种方式约束参考四元数：参考四元数成为姿态估计，三个向量成为姿态误差向量，三个向量的协方差成为姿态协方差。虽然这个滤波器有很长的历史，但基本的假设还不清楚。阐明这些假设为将 MEKF 扩展到一致的二阶滤波器扫清了道路。几个不同的三维参数化在线性 EKF 和二阶滤波器中给出了相同的结果，除了在重置步骤中，它们在测量更新中的三阶不同。

²译注：上一版本中这些误差数字不一样。

6 附录

当方程式 (18c) 或 (18d) 被用来替代吉布斯向量, [22] 方程式 (18b) 替代方程式 (35) 为

$$\dot{\mathbf{a}}_p = \left[\left(1 - \frac{1}{16} a_p^2 \right) \mathbf{I}_{3 \times 3} + \frac{1}{8} \mathbf{a}_p \mathbf{a}_p^T \right] (\boldsymbol{\omega} - \boldsymbol{\omega}_{\text{ref}}) - \frac{1}{2} (\boldsymbol{\omega} + \boldsymbol{\omega}_{\text{ref}}) \times \mathbf{a}_p \equiv \mathbf{f}(\mathbf{x}, t) \quad (71)$$

或

$$\dot{\mathbf{a}}_q = \left(1 - \frac{1}{4} a_q^2 \right)^{\frac{1}{2}} (\boldsymbol{\omega} - \boldsymbol{\omega}_{\text{ref}}) - \frac{1}{2} (\boldsymbol{\omega} + \boldsymbol{\omega}_{\text{ref}}) \times \mathbf{a}_q \equiv \mathbf{f}(\mathbf{x}, t) \quad (72)$$

这两个方程都给出了 EKF 近似中的方程式 (37), 即忽略 \mathbf{a} 和 $\boldsymbol{\omega} - \boldsymbol{\omega}_{\text{ref}}$ 中高于二阶的项。用方程式 (53) 减去方程式 (71),

$$\hat{\mathbf{b}}_p = \left[\frac{1}{8} P_a - \frac{1}{16} (\text{tr} P_a) \mathbf{I}_{3 \times 3} \right] (\hat{\boldsymbol{\omega}} - \boldsymbol{\omega}_{\text{ref}}) + \boldsymbol{\omega}_c \quad (73)$$

替换方程式 (54)。 $\hat{\mathbf{a}}_q$ 和 $\dot{\hat{\mathbf{a}}}_q = \mathbf{f}(\hat{\mathbf{x}}, t) + \hat{\mathbf{b}}_p$ 为零的要求产生

$$\boldsymbol{\omega}_{\text{ref}} = \hat{\boldsymbol{\omega}} + \left[\left(1 - \frac{1}{16} \text{tr} P_a \right) \mathbf{I}_{3 \times 3} + \frac{1}{8} P_a \right]^{-1} \boldsymbol{\omega}_c \quad (74)$$

减去方程式 (72) 给出

$$\hat{\mathbf{b}}_p = -\frac{1}{8} (\text{tr} P_a) (\hat{\boldsymbol{\omega}} - \boldsymbol{\omega}_{\text{ref}}) + \boldsymbol{\omega}_c \quad (75)$$

和

$$\boldsymbol{\omega}_{\text{ref}} = \hat{\boldsymbol{\omega}} + \left(1 - \frac{1}{8} \text{tr} P_a \right)^{-1} \boldsymbol{\omega}_c \quad (76)$$

方程式 (74) 和 (76) 的二阶近似值为方程式 (58)。

7 REFERENCES

1. Kalman, R. E., "A New Approach to Linear Filtering and Prediction Problems," Journal of Basic Engineering, Vol. 82, Series D, No. 1, 1960, pp. 35-45.
2. Gelb, A. (ed.), Applied Optimal Estimation, MIT Press, Cambridge, MA, 1974, pp. 182-190.

3. Brown, R. G., and Hwang, P. Y. C., *Introduction to Random Signals and Applied Kalman Filtering*, 3rd ed., Wiley, New York, 1994, pp. 343–347.
4. Farrell, J. L., “Attitude Determination by Kalman Filtering,” *Automatica*, Vol. 6, No. 3, 1970, pp. 419–430.
5. Crassidis, J. L., and Markley, F. L., “Attitude Estimation Using Modified Rodrigues Parameters,” *Flight Mechanics/Estimation Theory Symposium 1996*, NASA CP 3333, May 1996, pp. 71–83.
6. Stuelpnagel, J., “On the Parameterization of the Three-Dimensional Rotation Group,” *SIAM Review*, Vol. 6, No. 4, 1964, pp. 422–430.
7. Toda, N. F., Heiss, J. L., and Schlee, F. H., “SPARS: the System, Algorithm, and Test Results,” *Proceedings of the Symposium on Spacecraft Attitude Determination*, Vol. 1, The Aerospace Corp., El Segundo, CA, 1969, pp. 361–370.
8. Murrell, J. W., “Precision Attitude Determination for Multimission Spacecraft,” *AIAA Guidance and Control Conference*, AIAA, New York, 1978, pp. 70–87.
9. Lefferts, E. J., Markley, F. L., and Shuster, M. D., “Kalman Filtering for Spacecraft Attitude Estimation,” *Journal of Guidance, Control, and Dynamics*, Vol. 5, No. 5, 1982, pp. 417–429.
10. Bar-Itzhack, I. Y., and Oshman, Y., “Attitude Determination from Vector Observations: Quaternion Estimation,” *IEEE Transactions on Aerospace and Electronic Systems*, Vol. AES-21, No. 1, 1985, pp. 128–135.
11. Bar-Itzhack, I. Y., Deutschmann, J., and Markley, F. L., “Quaternion Normalization in Additive EKF for Spacecraft Attitude Determination,” *AIAA Guidance, Navigation, and Control Conference*, AIAA, Washington, DC, 1991, pp. 908–916.
12. Deutschmann, J., Markley, F. L., and Bar-Itzhack, I., “Quaternion Normalization in Spacecraft Attitude Determination,” *Flight Mechanics/Estimation Theory Symposium*, National Aeronautics and Space Administration, Washington, DC, NASA CP 3186, May 1992, pp. 523–536.
13. Shuster, M. D., “The Quaternion in the Kalman Filter,” *Astrodynamics 1993*, *Advances in the Astronautical Sciences*, Vol. 85, Univelt, San Diego, CA, 1993, pp. 25–37.
14. Shuster, M. D., “A Survey of Attitude Representations,” *Journal of the Astronautical Sciences*, Vol. 41, No. 4, 1993, pp. 439–517.

15. Euler, L., "Formulae Generales pro Translatione Quacunque Corporum Rigidorum," *Novi Commentarii Academiae Scientiarum Petropolitanae*, Vol. 20, 1775, pp. 189–207.
16. Euler, L., "Problema Algebraicum Ob Affectiones Prorsus Singulares Memorabile," *Novi Commentarii Academiae Scientiarum Petropolitanae*, Vol. 15, Sec. 33, 1770, p. 101.
17. Gauss, K. F., *Werke*, Vol. 8, Königliche Gesellschaft der Wissenschaften, Göttingen, Germany, 1900, pp. 357–362.
18. Rodrigues, O., "Des lois géométriques qui régissent les déplacements d'un système solide dans l'espace, et de la variation des coordonnées provenant de ces déplacements considérés indépendamment des causes qui peuvent les produire," *Journal de Mathématiques*, Vol. 5, 1840, pp. 380–440.
19. Hamilton, W. R., "On Quaternions; or a New System of Imaginaries in Algebra," *Philosophical Magazine*, 3rd Ser., Vol. 25, 1844, pp. 489–495.
20. Altmann, S. L., "Hamilton, Rodrigues, and the Quaternion Scandal," *Mathematics Magazine*, Vol. 62, No. 5, 1989, pp. 291–308.
21. Curtis, M. L., *Matrix Groups*, 2nd ed., Springer-Verlag, New York, 1984, pp. 60–66.
22. Gibbs, J. W., *Scientific Papers*, Vol. 2, Dover, New York, 1961, pp. 65, 66.
23. Wiener, T. F., "Theoretical Analysis of Gimballess Inertial Reference Equipment Using Delta-Modulated Instruments," D.Sc. Dissertation, Dept. of Aeronautics and Astronautics, Massachusetts Inst. of Technology, Cambridge, MA, March 1962.
24. Marandi, S. R., and Modi, V. J., "A Preferred Coordinate System and the Associated Orientation Representation in Attitude Dynamics," *Acta Astronautica*, Vol. 15, No. 11, 1987, pp. 833–843.
25. Vathsala, S., "Spacecraft Attitude Determination Using a Second-Order Nonlinear Filter," *Journal of Guidance, Control, and Dynamics*, Vol. 10, No. 6, 1987, pp. 559–566.
26. Gray, C. W., "Star Tracker/IRU Attitude Determination Filter," *Guidance and Control 2001, Advances in the Astronautical Sciences*, Vol. 107, Univelt, San Diego, CA, 2001, pp. 459–476.
27. Markley, F. L., "Attitude Representations for Kalman Filtering,"

Astrodynamics 2001, Advances in the Astronautical Sciences, Vol. 109, Univelt, San Diego, CA, 2001, pp. 133–151.

28. Pittelkau, M. E., “Spacecraft Attitude Determination Using the Bortz Equation,” Astrodynamics 2001, Advances in the Astronautical Sciences, Vol. 109, Univelt, San Diego, CA, 2001, pp. 153–165.

29. Schaub, H., and Junkins, J. L., “Stereographic Orientation Parameters for Attitude Dynamics: A Generalization of the Rodrigues Parameters,” Journal of the Astronautical Sciences, Vol. 44, No. 1, 1996, pp. 1–19.

30. Farrenkopf, R. L., “Analytic Steady-State Accuracy Solutions for Two Common Spacecraft Attitude Estimators,” Journal of Guidance and Control, Vol. 1, No. 4, 1978, pp. 282–284.

31. Markley, F. L., and Reynolds, R. G., “Analytic Steady-State Accuracy of a Spacecraft Attitude Estimator,” Journal of Guidance, Control, and Dynamics, Vol. 23, No. 6, 2000, pp. 1065–1067.

32. Chapel, J. D., and Kiessig, R., “A Lightweight, Low-Cost Star Camera Designed for Interplanetary Missions,” Guidance and Control 1998, Advances in the Astronautical Sciences, Vol. 98, Univelt, San Diego, CA, 1998, pp. 345–355.

33. Maresi, L., Paulsen, T., Noteborn, R., Mikkelsen, O., and Nielsen, R., “The TERMA Star Tracker for the NEMO Satellite,” Guidance and Control 2000, Advances in the Astronautical Sciences, Vol. 104, Univelt, San Diego, CA, 2000, pp. 355–364.

34. Van Bezooijen, R. W. H., Anderson, K. A., and Ward, D. K., “Performance of the AST-201 Star Tracker for the Microwave Anisotropy Probe,” AIAA Paper 2002-4582, Aug. 2002.

35. Shuster, M. D., “Maximum Likelihood Estimate of Spacecraft Attitude,” Journal of the Astronautical Sciences, Vol. 37, No. 1, 1989, pp. 79–88.

36. Markley, F. L., and Mortari, D., “Quaternion Attitude Estimation Using Vector Observations,” Journal of the Astronautical Sciences, Vol. 48, No. 2/3, 2000, pp. 359–380.

37. Fisher, H. L., Shuster, M. D., and Strikwerda, T. E., “Attitude Determination for the Star Tracker Mission,” Astrodynamics 1989, Advances in the Astronautical Sciences, Vol. 71, Univelt, San Diego, CA, 1989, pp. 139–150.

38. Maybeck, P. S., Stochastic Models, Estimation, and Control, Vol. 2, Navtech Book and Software Store, Arlington, VA, 1994, pp. 224–225, 249.