例 19 设 n 次多项式

$$P(z) = a_0 z^n + a_1 z^{n-1} + ... + a_n \quad (a_0 \neq 0)$$

在虚轴上没有零点，试证明它的零点全在左半平面 $Re_z < 0$ 内的充要条件为

$$\triangle Arg_{y(-\infty \nearrow +\infty)} P(iy) = n\pi.$$

即当点 z 自下而上沿虚线从点 ∞ 走向点 ∞ 的过程中，$P(z)$ 绕原点转了半圈。

证 令围线 C_R 是右半圆周

$$\Gamma_R : z = Re^{i\theta}\big(-\frac{\pi}{2} \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}$$

在虚轴上从 Ri 到 $-Ri$ 的有向线段所构成（图 5.12）。

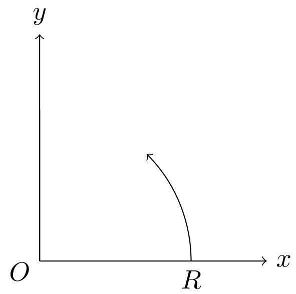

图 5.17

于是 $P(z)$ 的零点全在左半平面的充要条件为 $N(P, C_R) = 0$ 对任意 R 均成立，由 (5.29) 式即可知此条件可写成

$$0 = \lim_{R\to+\infty} \triangle_{C_R} ArgP(z) \quad = \lim_{R\to+\infty} \triangle_{C_R} ArgP(z) - \lim_{R\to+\infty} \triangle_{y(-R\nearrow+R)} ArgP(iy) \tag{1}$$

$$0 = \lim_{R\to+\infty} \triangle_{C_R} ArgP(z) = \lim_{R\to+\infty} \triangle_{C_R} ArgP(z) - \lim_{R\to+\infty} \triangle_{y(-R\nearrow+R)} ArgP(iy)$$

但我们有

$$\triangle_{\Gamma_R} ArgP(z) = \triangle_{\Gamma_R} Arga_0 z^n[1 + g(z)] = \triangle_{\Gamma_R} Arg(a_0 z^n + \triangle_{\Gamma_R} Arg[1 + g(z)],$$

其中 $g(z) = \frac{a_1 z^{n-1} + ... + a_n}{a_0 z^n}$, 在 $R \to +\infty$ 时，$g(z)$ 沿 Γ_R 一致趋于零,
由此知

$$\lim_{R\to+\infty} \triangle_{\Gamma_R} Arg[1 + g(z)] = 0.$$

另一方面又有

$$\triangle_{\Gamma_R} Arga_0 z^n = \triangle_{\theta[-\frac{\pi}{2}\nearrow+\frac{\pi}{2}]} Arga_0 R^n e^{in\theta} = n\pi.$$

这样一来，(5.30) 式就是我们所要证明的