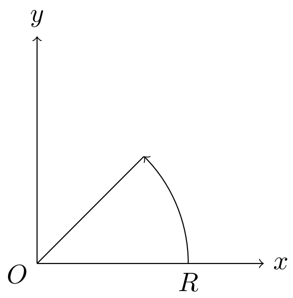

图 5.17

$$\left|\int_{C_R} e^{iz^2}dz\right| = \left|\frac{iR}{2}\int_0^{\pi/2} e^{iR^2}\left(\cos\theta + i\sin\theta\right)e^{i\frac{\theta}{2}}d\theta\right| \leqslant \frac{R}{2}\int_0^{\pi/2} e^{-R^2\sin\theta}d\theta$$

利用若尔当不等式 (5.14), 当 $R \to +\infty$ 时，有

$$\left|\int_{C_R} e^{iz^2}dz\right| \leqslant \frac{R}{2}\int_0^{\pi/2} e^{-\frac{2R^2\theta}{\pi}}d\theta = \frac{\pi}{4R}\left(1 - e^{-R^2}\right) \to 0$$

利用积分 $\int_0^{+\infty} e^{-t^2}dt = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$，在 (5.22) 式中，令 $R \to +\infty$，取极限得

$$\int_0^{+\infty} e^{ix^2}dx = e^{i\frac{\pi}{4}}\int_0^{-r^2} dr = e^{i\frac{\pi}{4}}\frac{\sqrt{\pi}}{2}$$

于是

$$\int_0^{+\infty}\cos x^2 dx + i\int_0^{+\infty}\sin x^2 dx = \left(\frac{1}{\sqrt{2}} + i\frac{1}{\sqrt{2}}\right)\frac{\sqrt{\pi}}{2}$$

比较两边的实部与虚部即得

$$\int_0^{+\infty}\sin x^2 dx = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{2}}$$

$$\int_0^{+\infty}\cos x^2 dx = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{2}}$$

利用菲涅尔积分，可得**考纽螺线**的坐标公式，此曲线的特点在于其弧长 s 与曲率 k 成正比，即 $s = a^2k$, 其中 a 是常数。因 $k = \frac{d\theta}{ds}$,$\cos\theta = \frac{dx}{ds}$,$\sin\theta = \frac{dy}{ds}$, 故