

Отчет по первому заданию: численное решение краевых задач для уравнения теплопроводности

Юдина Наталья

1. **Постановка задачи:** плоский слой $a < x < b$ с начальным распределением температур $u(x, 0) = u_0(x)$ в течение конечного времени $0 < t \leq T$ подвергается внешнему тепловому воздействию.

В области изменения переменных ($a < x < b$, $0 < t < T$) температура $u(x, t)$ удовлетворяет уравнению теплопроводности

$$u_t = u_{xx} + f$$

Уравнение теплопроводности аппроксимируется на равномерной сетке $x_i = a + ih$, $i = 0, \dots, N$; $h = (b - a)/N$ неявной двухслойной разностной схемой:

$$\frac{u^{n+1} - u^n}{\tau} = \Lambda(\sigma u^{n+1} + (1 - \sigma)u^n) + g^n,$$

где u^n решение на временном слое $t = n\tau$, Λ — трехточечный разностный аналог операции двойного дифференцирования по пространственной переменной

$$(\Lambda z)_i = \frac{z_{i+1} - 2z_i + z_{i-1}}{h^2}.$$

В качестве точного решения я взяла функцию: $\sin(3x + 2t)$
 $a = 0$, $b = 1$, $T = 1$

2. **Задача Дирихле:**

При $x = a$: условие первого рода $u(a, t) = \sin(3a + 2t)$,

При $x = b$: условие первого рода $u(b, t) = \sin(3b + 2t)$.

Рассмотрим результаты для схемы с погрешностью $O(\tau + h^2)$:

Вес схемы я выбрала $\sigma = 0,7$. Далее будем рассматривать полученные результаты для последнего временного слоя:

Число шагов разбиения по пространственной переменной x	Число шагов разбиения по временной переменной t	Максимальное отклонение на слое от точного решения	Полученный численный порядок сходимости схемы
5	7	0.181682	2.04647
10	28	0.0439808	2.00499
20	112	0.0109572	2.00099
40	448	0.00273744	2.00051
80	1792	0.000684118	

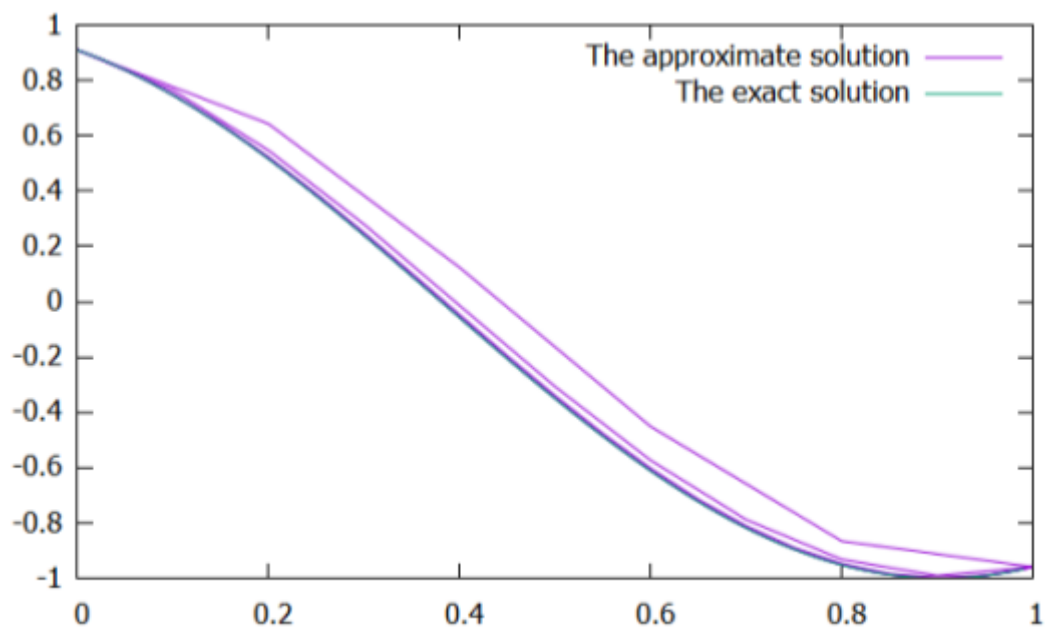


График приближенных решений с условием Дирихле всюду

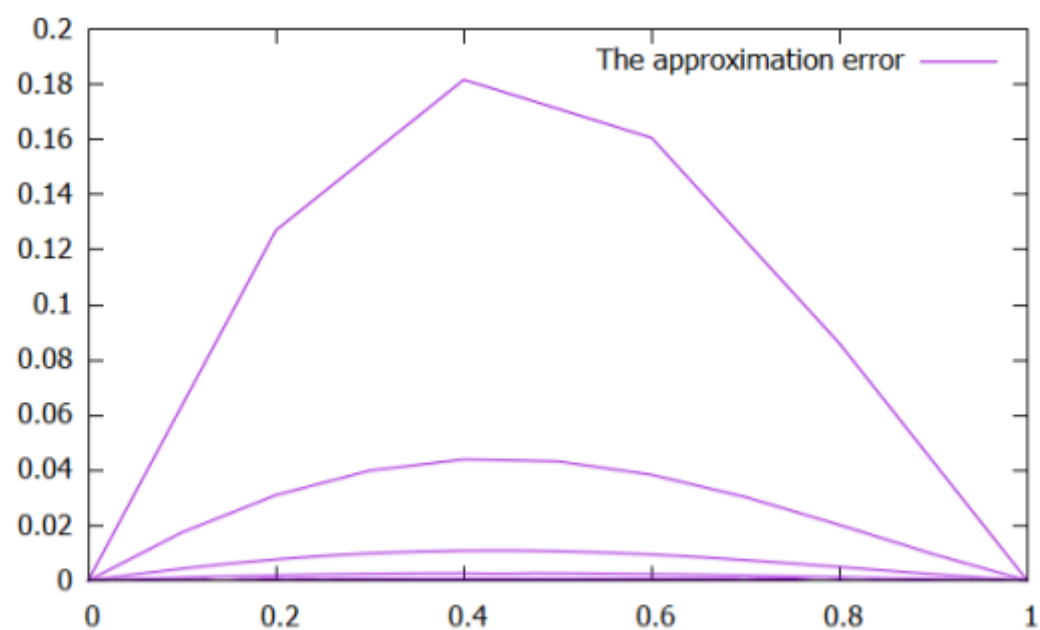


График погрешностей с условием Дирихле всюду

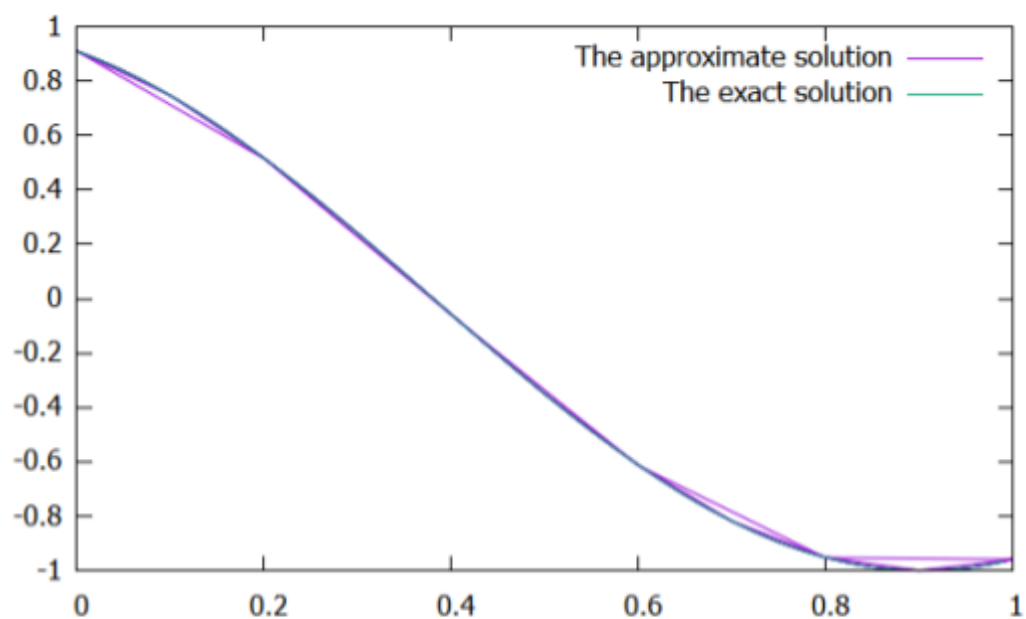
Рассмотрим результаты при повышенном порядке сходимости схемы с погрешностью $O(\tau^2 + h^4)$:

Вес схемы берем $\sigma = \frac{1}{2} - \frac{h^2}{12\tau}$, правую часть -

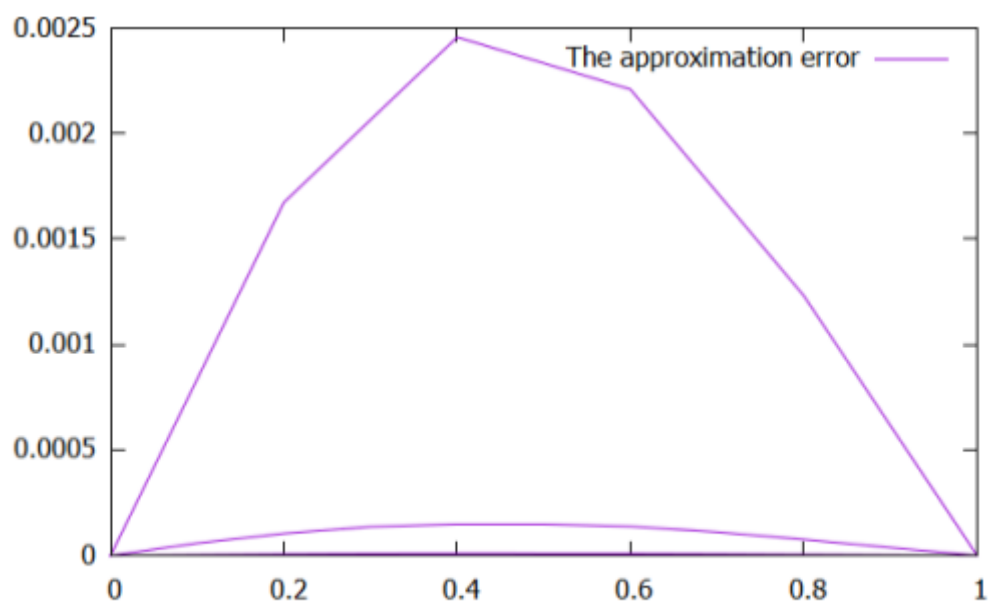
$$g^n = \frac{f^{n+1} + f^n}{2} + \frac{h^2}{12} \Lambda f^n,$$

полученные результаты для последнего временного слоя:

Число шагов разбиения по пространственной переменной x	Число шагов разбиения по временной переменной t	Максимальное отклонение на слое от точного решения	Полученный численный порядок сходимости схемы
5	7	0.00245672	4.0116
10	28	0.000152315	3.98237
20	112	9.63671e-06	4.00005
40	448	6.02274e-07	4.00001
80	1792	3.76419e-08	



Графики приближенных решений схемы повышенной точности для задачи Дирихле



Графики погрешностей для схемы повышенной точности с условием Дирихле

3. Задача с заданными краевыми условиями:

При $x = a$: условие второго рода $u_x(a, t) = 3\cos(3a + 2t)$

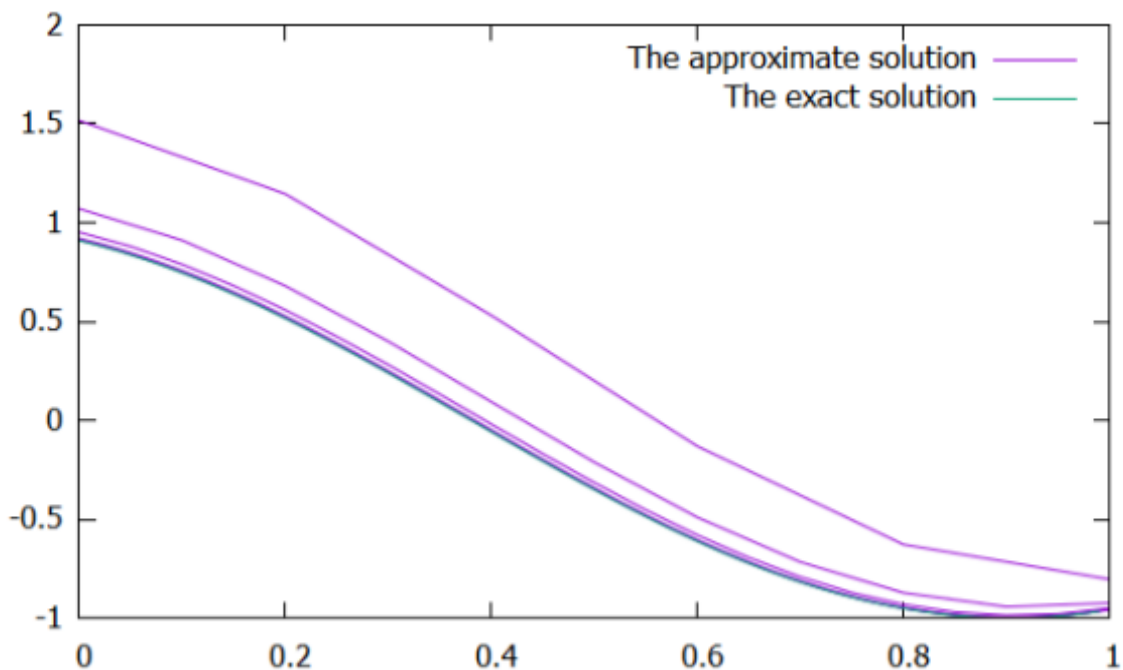
При $x = b$: условие третьего рода

$$u_x(b, t) = -\beta(u(b, t) - \sin(3b + 2t) - \frac{3}{\beta}\cos(3b + 2t)) .$$

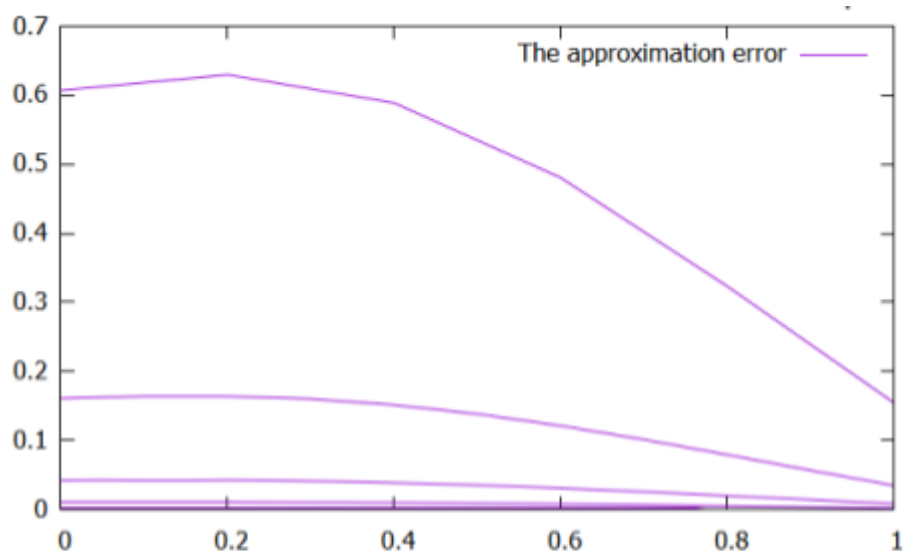
Рассмотрим результаты для схемы с погрешностью $O(\tau + h^2)$

Вес схемы $\sigma = 0,7$. Полученные результаты для последнего временного слоя:

Число шагов разбиения по пространственной переменной x	Число шагов разбиения по временной переменной t	Максимальное отклонение на слое от точного решения	Полученный численный порядок сходимости схемы
5	7	0.629653	1.93748
10	28	0.164385	1.95111
20	112	0.0425127	1.97403
40	448	0.0108212	1.98667
80	1792	0.00273041	



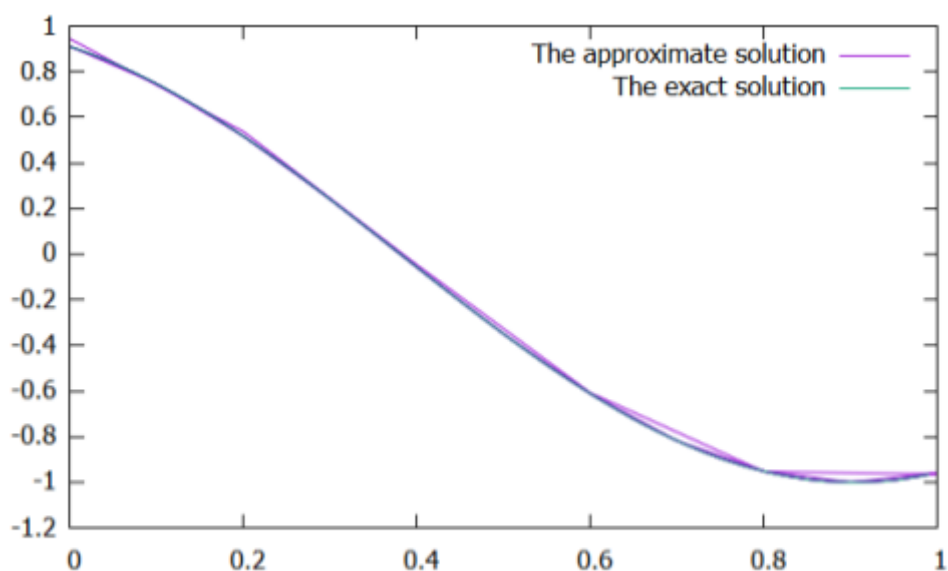
Графики приближенных решений при заданных условиях



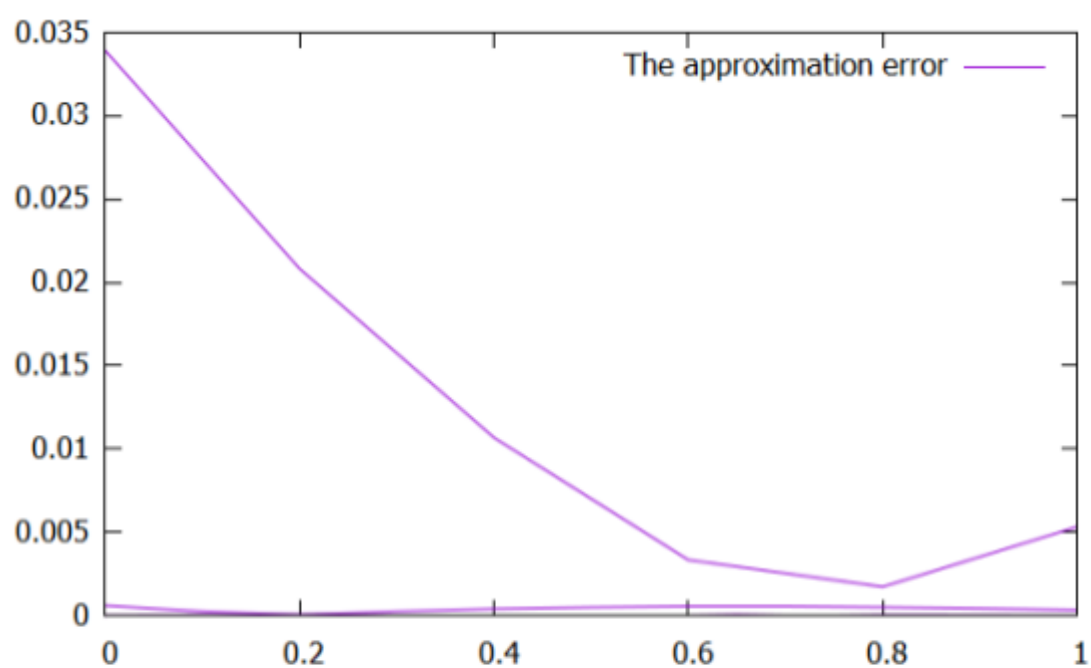
Графики погрешностей приближенных решений схемы с заданными краевыми условиями

Рассмотрим результаты при повышенном порядке сходимости схемы с погрешностью $O(\tau^2 + h^4)$ на последнем временном слое для задачи с заданными краевыми условиями:

Число шагов разбиения по пространственной переменной x	Число шагов разбиения по временной переменной t	Максимальное отклонение на слое от точного решения	Полученный численный порядок сходимости схемы
5	7	0.0339115	5.82829
10	28	0.000596839	3.26606
20	112	6.20405e-05	3.6416
40	448	4.97102e-06	3.83877
80	1792	3.47426e-07	



Графики приближенных решений с заданными краевыми условиями схемы повышенной точности



Графики погрешностей приближенных решений схемы повышенной точности с заданными краевыми условиями