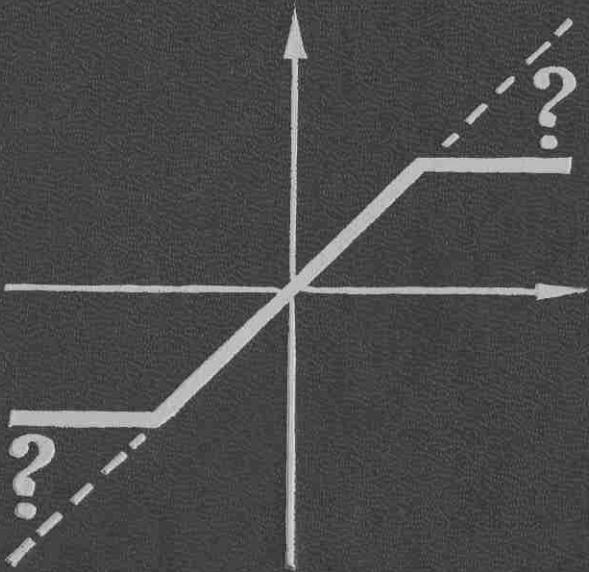


Я. З. ЦЫПКИН

ИНФОРМАЦИОННАЯ ТЕОРИЯ ИДЕНТИФИКАЦИИ



ББК 32.81
Ц97
УДК 62-51

Издание осуществляется при финансовой под-
держке Российского фонда фундаментальных
исследований согласно проекту 95-01-00034.

Цыпкин Я. З. Информационная теория идентификации. — М.: Наука.
Физматлит, 1995. — 336 с. — ISBN 5-02-015071-1.

Излагается информационная теория идентификации, позволяющая учитывать априорную информацию о структуре динамических объектов, помехах, области принадлежности неизвестных параметров объекта. Определяются оптимальные настраиваемые модели, оптимальные и оптимальные на классе критерии качества идентификации, оптимальные и оптимальные на классе или робастные алгоритмы идентификации. Изучаются свойства этих алгоритмов. Приводятся многочисленные примеры. Алгоритмы идентификации динамических объектов с постоянными параметрами обобщаются на случай нестационарных динамических объектов. Обсуждается возможность использования нейронных сетей для идентификации сложных нелинейных объектов.

Для научных и инженерно-технических работников в области кибернетики и автоматики, а также для аспирантов и студентов.

Табл. 12. Ил. 108. Библиогр. 471 назв.

Рецензент

доктор технических наук А. И. Пропой

Научное издание

ЦЫПКИН Яков Залманович

Информационная теория идентификации

Редакторы А. В. Назин, Л. В. Богачев
Корректор О. Ф. Алексеева

ИБ 41679

ЛР № 020297 от 27.11.91

Подписано к печати с оригинал-макета 25.09.95.
Формат 60×90/16. Бумага книжно-журнальная. Печать офсетная.
Усл. печ. л. 21. Уч.-изд. л. 23,1. Тираж 1000 экз.
Заказ тип. № 3308 С-046.

Издательская фирма
«Физико-математическая литература» РАН
117071 Москва В-71, Ленинский проспект, 15

Отпечатано в Московской типографии № 2 РАН
121099 Москва Г-99, Шубинский пер., 6

Ц $\frac{1402000000 - 046}{053(02) - 95}$ Без объявл.

© Я. З. Цыпкин, 1995

ISBN 5-02-015071-1

Оглавление

Предисловие	6
Введение	10
Глава 1. Задача идентификации и ее особенности	13
§ 1.1. О методах идентификации	13
§ 1.2. Объекты и их классификация	17
§ 1.3. Настраиваемая модель	25
§ 1.4. Критерий качества идентификации и оптимальное решение	35
§ 1.5. Алгоритмы идентификации	40
§ 1.6. Асимптотическая скорость сходимости алгоритмов	44
§ 1.7. Оптимальные алгоритмы идентификации	50
§ 1.8. Заключение	56
Глава 2. Оптимальные функции потерь	58
§ 2.1. Эмпирические средние потери и оценки оптимального решения	58
§ 2.2. Асимптотические свойства оценок и средних потерь	60
§ 2.3. Предельно возможная скорость сходимости оценок	64
§ 2.4. Определение оптимальной функции потерь	68
§ 2.5. Свойства оптимальной функции потерь	72
§ 2.6. Заключение	78
Глава 3. Абсолютно оптимальные алгоритмы идентификации	80
§ 3.1. Формирование оптимальных и абсолютно оптимальных алгоритмов	80
§ 3.2. Основные виды абсолютно оптимальных алгоритмов	83
§ 3.3. Абсолютно оптимальные алгоритмы с настройкой параметра масштаба	88
§ 3.4. Одномерные абсолютно оптимальные и оптимальные алгоритмы и их свойства	95

§ 3.5. Многомерные абсолютно оптимальные и оптимальные алгоритмы и их свойства	108
§ 3.6. Заключение	119
Глава 4. Оптимальные на классе функции потерь	121
§ 4.1. Априорная информация о помехах и классы распределений	121
§ 4.2. Понятие оптимальности на классе	126
§ 4.3. Принцип оптимальности на классе	130
§ 4.4. Вариационные задачи минимизации и методика их решения	132
§ 4.5. Оптимальные на классе функции потерь для Р-объектов с простой помехой	139
§ 4.6. Оптимальные на классе функции потерь для АР-объектов	146
§ 4.7. Оптимальные на классе функции потерь для РАР-объектов и Р-объектов с преобразованной помехой	152
§ 4.8. О грубости оценок оптимального решения	158
§ 4.9. Оптимальность на классе и робастность	162
§ 4.10. Заключение	163
Глава 5. Абсолютно оптимальные на классе алгоритмы идентификации	164
§ 5.1. Формирование абсолютно оптимальных на классе алгоритмов	164
§ 5.2. Реализуемые абсолютно оптимальные на классе алгоритмы	165
§ 5.3. Абсолютно оптимальные на классе алгоритмы с настройкой параметра масштаба	171
§ 5.4. Одномерные абсолютно оптимальные на классе алгоритмы	173
§ 5.5. Многомерные абсолютно оптимальные на классе алгоритмы	180
§ 5.6. Заключение	185
Глава 6. Алгоритмы идентификации неминимально-фазовых по возмущению объектов	186
§ 6.1. Неминимально-фазовые объекты	186
§ 6.2. Особенности оптимальной настраиваемой модели	188
§ 6.3. Преобразование плотностей распределения линейным дискретным фильтром	192
§ 6.4. Оптимальные и оптимальные на классе функции потерь	197
§ 6.5. Абсолютно оптимальные и абсолютно оптимальные на классе алгоритмы	199
§ 6.6. Примеры	201
§ 6.7. Заключение	203
Глава 7. Акселерантные алгоритмы идентификации	205
§ 7.1. Об акселерации оценок оптимального решения	205
§ 7.2. Представление априорной информации об оптимальном решении	206
§ 7.3. Обобщенные эмпирические средние потери	208
§ 7.4. Акселерантные абсолютно оптимальные алгоритмы	210
§ 7.5. Акселерантные абсолютно оптимальные на классе алгоритмы	214
§ 7.6. Линейные акселерантные алгоритмы	219
§ 7.7. Выбор оптимальных входных воздействий	224
§ 7.8. Примеры	230
§ 7.9. Заключение	231
Глава 8. Модифицированные алгоритмы идентификации	233
§ 8.1. О возможных модификациях алгоритмов	233
§ 8.2. Алгоритмы со скалярной матрицей усиления	234
§ 8.3. Усредненные алгоритмы со скалярной матрицей усиления	236

§ 8.4. Алгоритмы с упрощенным градиентом функции потерь	241
§ 8.5. Алгоритмы идентификации при коррелированной помехе	244
§ 8.6. Алгоритмы идентификации некоторых классов нелинейных объектов	248
§ 8.7. Примеры	251
§ 8.8. Еще о возможности акселеризации алгоритмов	255
§ 8.9. О критериальных алгоритмах идентификации	258
§ 8.10. Заключение	261
Г л а в а 9. Алгоритмы идентификации нестационарных объектов	262
§ 9.1. Описание нестационарных динамических объектов и их особенности	262
§ 9.2. Критерий качества и алгоритмы идентификации	265
§ 9.3. Оптимальные алгоритмы	267
§ 9.4. Абсолютно оптимальные алгоритмы	271
§ 9.5. Оптимальные алгоритмы для многошаговых моделей дрейфа	273
§ 9.6. Упрощенные алгоритмы	274
§ 9.7. Акселерантные алгоритмы	276
§ 9.8. Заключение	278
Г л а в а 10. Введение в искусственные нейронные сети	279
§ 10.1. О нейронных сетях	279
§ 10.2. Структуры нейронных сетей	280
§ 10.3. Условие оптимальности	283
§ 10.4. Алгоритмы настройки нейронной сети	287
§ 10.5. Алгоритмы настройки общей нейронной сети	289
§ 10.6. Заключение	290
Послесловие	291
Комментарии	295
Список литературы	310

Предисловие

Задаче идентификации посвящено необозримое число работ, отличающихся не только типами объектов, которые необходимо идентифицировать, но и самими методами и алгоритмами идентификации. Большое внимание в этих работах уделяется идентификации линейных динамических объектов, описывающихся дифференциальными или разностными уравнениями с неизвестными коэффициентами. Среди разнообразных алгоритмов идентификации, предназначенных для оценивания коэффициентов уравнений по наблюдаемым данным, чаще всего используются рекуррентные алгоритмы, позволяющие осуществить идентификацию в режиме нормальной работы объекта.

Принципы формирования алгоритмов идентификации тесно связаны с выбором уравнения, использующего наблюдаемые данные и аппроксимирующего уравнения объекта, выбором критерия качества этой аппроксимации (функции потерь) и, наконец, выбором метода оптимизации критерия. Эти принципы до самого последнего времени были в значительной мере произвольны и зависели во многом от вкусов и возможностей исследователя. Они вырабатывались и утверждались на основе различных эвристических соображений и, в частности, удобства работы с выбираемыми уравнениями аппроксимации, критериями и алгоритмами.

Такой произвол обусловил безраздельное господство линейной аппроксимации уравнения объекта и квадратичного критерия. В результате задача идентификации часто сводилась к решению системы линейных уравнений. Но практика показала, что не всегда такой выбор

уравнения аппроксимации и критерия приводят к утешительным результатам. Естественно, возникли вопросы: как выбирать уравнение аппроксимации, критерий, а затем и алгоритм, которые бы гарантировали получение удовлетворительного, а если возможно, то и наилучшего в рассматриваемых условиях решения задачи идентификации?

Цель излагаемой в данной книге информационной теории идентификации состоит в том, чтобы дать ответ на эти вопросы.

Книга состоит из десяти глав.

В первой главе приводится формулировка задачи идентификации и дается краткая характеристика известной методологии. Описываются типичные линейные объекты и приводятся их уравнения. Эти уравнения положены в основу классификации объектов. Обсуждается вопрос о выборе уравнений аппроксимации, определяющих ту или иную настраиваемую модель. Естественно потребовать, чтобы эта настраиваемая модель наилучшим, в каком-то смысле, образом предсказывала выходную величину объекта. Оказывается, что такая оптимальная модель существует; ее структура зависит от точки приложения к объекту помех. Далее рассмотрены свойства критериев аппроксимации, характеризующих качество идентификации. Приводятся условия оптимальности и выясняются свойства оптимального решения, определяющего неизвестные параметры идентифицируемого объекта. Наконец, приводятся алгоритмы идентификации и указываются их особенности. Определяется асимптотическая скорость сходимости алгоритмов идентификации и устанавливаются оптимальные по скорости сходимости алгоритмы идентификации.

Вторая глава посвящена выяснению влияния функции потерь на асимптотические свойства оценок оптимального решения и средних потерь. Здесь изучается вопрос о предельно возможной скорости сходимости оценок оптимального решения и определяется оптимальная функция потерь, при которой эта предельно возможная скорость сходимости максимальна.

В третьей главе показано, что оптимальная функция потерь позволяет сформировать алгоритмы, обладающие предельно возможной скоростью сходимости. Эти алгоритмы названы абсолютно оптимальными. Они оптимальны не только по матрице усиления, но и по функции потерь. Здесь же приводятся абсолютно оптимальные алгоритмы с настройкой параметра масштаба. Подробно исследуются свойства конкретных одномерных и многомерных алгоритмов. Отметим, что оптимальная функция потерь, а значит, и абсолютно оптимальные алгоритмы могут быть определены лишь при полной априорной информации относительно помех, т. е. когда плотность распределения помех известна.

В четвертой главе рассматриваются случаи, когда априорная информация о помехах не полна, т. е. плотность распределения помех полностью не известна. Здесь вводится понятие оптимальной на

классе функции потерь. Описываются классы распределения помех, характеризующие различные уровни априорной информации о помехах. Формулируется принцип оптимальности на классе и обсуждаются методы решения вариационных задач минимизации на классе. Приводятся примеры оптимальных на классе функций потерь. Устанавливается связь между оптимальностью на классе и робастностью, т. е. нечувствительностью свойств оценок при малых отклонениях функций потерь от оптимальных.

Пятая глава посвящена формированию абсолютно оптимальных на классе алгоритмов идентификации, в том числе и алгоритмов с настройкой параметра масштаба. Выясняются свойства абсолютно оптимальных на классе алгоритмов.

В шестой главе рассмотрен сравнительно новый вопрос, связанный с идентификацией неминимально-фазовых по возмущению объектов. Обсуждается специфика неминимально-фазовых объектов и показывается, как использовать полученные в предыдущих главах результаты, чтобы охватить и этот класс объектов, весьма важный для приложений. Здесь, однако, возникают новые задачи, которые к настоящему времени полностью не решены.

Седьмая глава посвящена учету априорной информации об исскомом решении. Эта априорная информация не влияет на асимптотические свойства алгоритмов, но она обеспечивает ускорение получения оценок оптимального решения. Такие алгоритмы уместно называть акселерантными. Они осуществляют также регуляризацию получаемых оценок. Акселерантные абсолютно оптимальные на классе алгоритмы полностью учитывают имеющуюся в наличии априорную информацию о решении и о помехах и являются оптимальными в условиях неполной априорной информации. Подробно рассмотрены линейные акселерантные абсолютно оптимальные на классе алгоритмы. Указано на возможность улучшения алгоритмов за счет управления входными воздействиями.

В восьмой главе приводятся различные модификации акселерантных абсолютно оптимальных на классе алгоритмов. Эти модификации, с одной стороны, касаются упрощения алгоритмов (упрощения матрицы усиления или градиента функции потерь), а с другой стороны, они охватывают более сложные задачи идентификации (учет коррелированности помех и идентификация нелинейных объектов). Рассмотрены также критериальные алгоритмы.

В девятой главе, написанной совместно с М. В. Бондаренко, изложены алгоритмы идентификации нестационарных объектов, параметры которых являются функциями времени.

Десятая глава, написанная совместно с Э. Д. Аведьяном, посвящена нейронным сетям и их применению для идентификации объектов. В ней показано, что приведенные в предшествующих главах алгоритмы по существу используются в нейронных сетях.

Почти во всех главах приведены конкретные числовые примеры, иллюстрирующие свойства и особенности алгоритмов идентификации, а также эффективность абсолютно оптимальных на классе алгоритмов.

Излагаемая в книге информационная теория идентификации основана на общем подходе, связанном с вероятностными рекуррентными алгоритмами оптимизации в условиях неопределенности. Этому подходу были посвящены предшествующие книги автора: «Адаптация и обучение в автоматических системах» (М.: Наука, 1968) и «Основы теории обучающихся систем» (М.: Наука, 1970). Вопросы оптимизации моделей, функций потерь и алгоритмов были впервые систематически рассмотрены в книге автора «Основы информационной теории идентификации» (М.: Наука, 1984). Для настоящего издания материал этой книги был существенно переработан и дополнен рассмотрением ряда новых вопросов.

Из всех задач оптимизации в условиях неопределенности мы ограничились в настоящей книге лишь одной задачей — задачей идентификации. Это позволило наиболее рельефно показать, какие возможности открывает учет априорной информации различного уровня как при формулировке, так и при решении задач идентификации. Прежде всего, учет этой априорной информации вносит в теорию идентификации определенность, однозначность. Такая однозначность непривычна, но очень удобна, и автор надеется, что заинтересованный читатель к этому быстро привыкнет.

В настоящей книге, как и в упомянутых выше книгах, нет последовательности лемм, теорем и их подробных доказательств. Это сделано не только потому, что нам хотелось в основном тексте рельефно изложить главные идеи, закономерности и методы, но и потому, что не все высказанные положения могут быть в настоящее время формально обоснованы.

В основном тексте отсутствуют литературные ссылки. Они приводятся в комментариях, помещенных в конце книги. Там же можно познакомиться с обсуждением и сравнением полученных результатов с ранее известными, а также с различного рода замечаниями по рассматриваемому кругу вопросов.

Известен афоризм: «Чистая математика делает то, что можно, так, как нужно; прикладная — то, что нужно, так, как можно». Эта книга следует принципу прикладной математики.

При подготовке книги к печати неоценимая помощь мне была оказана ее редактором А. В. Назиным. Я очень благодарен Э. Д. Аведьяну, М. В. Бондаренко, А. В. Назину и Л. В. Богачеву за помощь, которая позволила завершить эту книгу.

Москва, 1995

Я. Цыпкин

Введение

Задача идентификации систем, т. е. определение структуры и параметров систем по наблюдениям, является одной из основных задач современной теории и техники автоматического управления. Эта задача возникает при изучении свойств и особенностей объектов с целью последующего управления ими, либо при создании *адаптивных систем*, в которых на основе идентификации объекта вырабатываются *оптимальные управляющие воздействия*. К различным вариантам задачи идентификации, по существу, приводят статистические методы обработки экономической, биологической, медицинской информации.

Наиболее часто используется *идентификация в режиме нормальной работы*. По наблюдаемым входным воздействиям и выходным величинам объекта подбираются *параметры настраиваемой модели*, обеспечивающие экстремум некоторого *критерия*, характеризующего *качество идентификации*. Изменение параметров настраиваемой модели осуществляется при помощи *адаптивных устройств*, реализующих *алгоритмы идентификации*.

К настоящему времени предложены различные адаптивные алгоритмы идентификации. Многочисленность и разнообразие настраиваемых моделей, критериев и алгоритмов, естественно, затрудняет решение конкретных задач идентификации. Это обстоятельство вызвало к жизни специальные работы по экспериментальному исследованию и сравнению алгоритмов идентификации для типовых задач. К сожалению, результаты этих работ, кроме констатации отдельных фактов, не позволяют установить какие-либо общие закономерности.

Практика применения адаптивных алгоритмов идентификации обнаружила, что алгоритмы простейшей формы — типа *стохастической аппроксимации* — часто оказывались неработоспособными. Оценки параметров настраиваемой модели, даваемые этими алгоритмами, во многих случаях зависели от произвола в выборе начальных значений, а сходимость алгоритмов часто была очень медленной. Попытки улучшения или оптимизации этих алгоритмов за счет замены скалярного коэффициента усиления матричным и подбора элементов этой матрицы, как это делается в рекуррентной форме *метода наименьших квадратов*, не всегда приводили к удаче. Подобные оптимальные алгоритмы, несмотря на теоретическую сходимость и минимальность асимптотической дисперсии, в ряде случаев практически оказывались несходящимися.

Такое поведение адаптивных алгоритмов идентификации вызывалось несоответствием используемых алгоритмов условиям, характеризующим конкретные задачи идентификации. Так, алгоритмы типа стохастической аппроксимации слишком универсальны. Они не учитывают имеющуюся *априорную информацию* как о помехах, так и о самом решении, т. е. о параметрах объекта. Оптимальные же алгоритмы рекуррентной формы метода наименьших квадратов не всегда оказываются адекватными априорной информации о помехах и области принадлежности параметров идентифицируемого объекта. В итоге выбираемые — по существу, наугад — алгоритмы идентификации часто не приводили к надежным и обоснованным результатам. Поэтому возникла важная задача обоснованного выбора или, точнее говоря, формирования алгоритмов идентификации. Решение этой задачи тесно связано с возможностью учета в настраиваемых моделях, в критериях качества и, наконец, в алгоритмах идентификации имеющейся в нашем распоряжении априорной информации.

Поскольку адаптивные алгоритмы идентификации определяются принятой настраиваемой моделью идентифицируемого объекта и критерием качества идентификации, оценивающим близость модели и объекта, то однозначный выбор алгоритма возможен лишь при однозначном выборе настраиваемой модели и критерия. Таким образом, задача обоснованного, а значит, и однозначного формирования адаптивного алгоритма сводится прежде всего к задачам выбора настраиваемой модели и выбора критерия идентификации.

Современная теория идентификации предоставляет в распоряжение исследователя возможность широкого выбора настраиваемых моделей и критериев качества идентификации, а также большое число алгоритмов идентификации. К сожалению, какие-либо указания о выборе настраиваемых моделей, критериев и алгоритмов, кроме соображений простоты, отсутствуют.

Развиваемая в настоящей книге *информационная теория идентификации* дает возможность устраниить эту неопределенность и для ка-

ждого конкретного класса задач идентификации, характеризуемого тем или иным уровнем априорной информации, однозначно определить настраиваемую модель, критерий качества идентификации и алгоритм идентификации, обеспечивающий в определенном смысле наилучшее использование обрабатываемых данных для целей идентификации. Такой подход привлекателен не только с точки зрения внесения большей определенности в задачу идентификации и устранения необходимости в проведении сравнительного анализа разнообразных алгоритмов, но также и потому, что он позволяет установить общие закономерности.

Учет априорной информации в задаче идентификации связан с широким использованием основных понятий теории информации и статистики, таких, как информационные меры Шеннона, Кульбака, Фишера и разновидностей этих понятий. Поэтому развивающую теорию идентификации уместно назвать информационной теорией идентификации. Информационная теория идентификации позволяет не только внести определенность в постановку и решение разнообразных задач идентификации, но и по-новому взглянуть на традиционные методы идентификаций, методы *робастного (стабильного) оценивания*, методы *регуляризации* и методы *планирования эксперимента*.

На этом пути формируются асимптотически оптимальные алгоритмы идентификации, т. е. алгоритмы, обладающие предельно возможной, максимальной скоростью сходимости, если известна плотность распределения помехи.

В том случае, когда плотность распределения помехи неизвестна, а известен лишь класс, которому она принадлежит, формируются асимптотически оптимальные на классе алгоритмы идентификации, обладающие гарантированной скоростью сходимости. Замена в этих алгоритмах нормированной информационной матрицы и фишеровской информации выборочными позволяет, не изменяя асимптотических свойств алгоритмов, придать им нужные свойства на конечных шагах.

Конечно, на пути развития информационной теории идентификации возникает множество трудностей как формального характера, связанных с теми или иными доказательствами, так и не формального характера, связанных с используемыми предположениями. Но, как сказал С. Джонсон: «Если прежде, чем начать дело, было бы необходимо найти пути преодоления всех возможных препятствий, которые могут встретиться в ходе его выполнения, то ни одно дело не было бы начато». Поэтому в комментариях читатель найдет множество вопросов, которые ждут ответа, и множество задач, ждущих своего решения.

— Скажите, пожалуйста, куда мне отсюда идти?
— А куда ты хочешь попасть? — ответил Кот.
— Мне все равно... — сказала Алиса.
— Тогда все равно, куда и идти, — заметил Кот.
— ...Только бы попасть куда-нибудь, — пояснила Алиса.
— Куда-нибудь ты обязательно попадешь, — сказал Кот. — Нужно только достаточно долго идти.

Льюис Кэррол

ГЛАВА 1

Задача идентификации и ее особенности

§ 1.1. О методах идентификации

Идентификация динамических объектов в общем случае состоит в определении их структуры и параметров по наблюдаемым данным — входному воздействию и выходной величине. Идентификация осуществляется при помощи *настраиваемой модели* той или иной структуры, параметры которой могут изменяться. Функциональную схему идентификации можно представить в виде, изображенном на рис. 1.1. В каждый момент времени $n = 1, 2, \dots$ ко входам объекта и настраиваемой модели приложено внешнее воздействие $u(n)$. Объект возмущается также некоторой случайной ненаблюдаемой помехой $\xi(n)$. Выходная величина объекта $y(n)$ зависит как от внешнего воздействия и помехи, так и от неизвестного вектора параметров c^* . Выходная величина настраиваемой модели $\hat{y}(n)$ зависит от *вектора настраиваемых параметров* c , который пересчитывается в силу алгоритма, обрабатывающего вектор *всех наблюдений* $z(n)$. Набор этих наблюдений зависит от конкретных задач идентификации.

Разность выходных величин объекта и настраиваемой модели образует *невязку*

$$\varepsilon(z(n), c) = y(n) - \hat{y}(n), \quad (1.1.1)$$

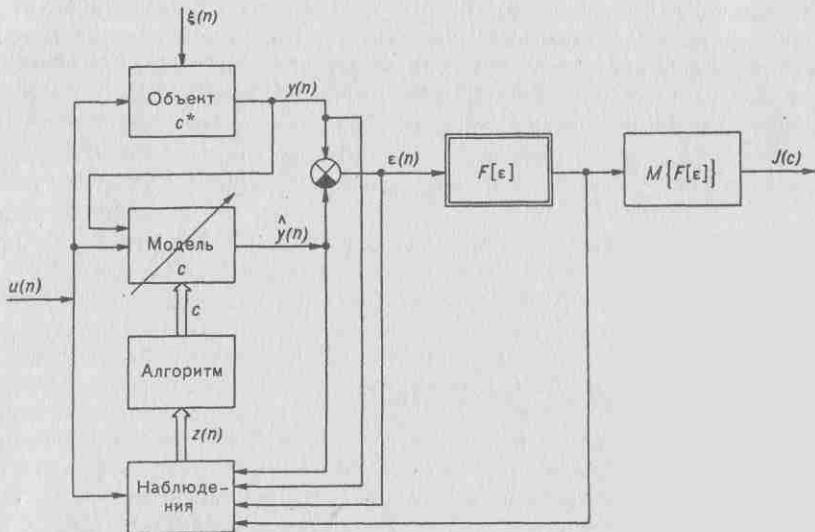


Рис. 1.1

которая поступает на вход функционального преобразователя, изображенного на рис. 1.1 двойным прямоугольником. Далее всегда предполагается, что объект работает в стационарном режиме, т. е. вероятностные характеристики последовательностей $y(n)$, $\hat{y}(n)$, а значит, и $z(n)$ не зависят от момента времени n . Такой режим называется обычно *режимом нормальной работы*.

Соответствие настраиваемой модели объекту, т. е. качество идентификации, оценивается *критерием качества идентификации*

$$J(c) = M\{F[\varepsilon(z(n), c)]\}. \quad (1.1.2)$$

Здесь $F[\cdot]$ — функция потерь, а M — символ математического ожидания.

Критерий качества идентификации (1.1.2) представляет собой *средние потери*. Чем меньше средние потери, тем выше качество идентификации. Улучшение качества идентификации осуществляется надлежащим выбором структуры настраиваемой модели и изменением ее параметров. Это изменение осуществляется *алгоритмом идентификации*.

Алгоритм идентификации определяется функцией потерь и структурой настраиваемой модели. По наблюдениям входного воздействия

и выходных величин объекта и настраиваемой модели алгоритм идентификации изменяет параметры последней так, чтобы средние потери достигали с ростом n минимума. Эти условия соответствуют идентификации в режиме нормальной работы объекта.

Идентификацию можно осуществить иным способом, а именно: провести специальные эксперименты на объекте, затем полученные результаты этих экспериментов обработать, приблизенно восстановить средние потери и далее тем или иным способом минимизировать восстановленные средние потери. Такие алгоритмы минимизации не позволяют обрабатывать поступающие наблюдения последовательно, в режиме нормальной работы. Их мы не будем подробно рассматривать. В дальнейшем, говоря об идентификации, мы всегда будем иметь в виду идентификацию в режиме нормальной работы, если нет специальных оговорок.

Для решения задачи идентификации, как это следует из функциональной схемы (рис. 1.1), необходимо:

- 1) очертить класс объектов;
- 2) выбрать для этого класса объектов настраиваемую модель, т. е. модель, параметры которой можно изменять;
- 3) выбрать критерий качества идентификации — средние потери, которые бы характеризовали различие между выходными величинами объекта и настраиваемой модели;
- 4) сформировать алгоритм идентификации, который, используя доступные для наблюдения значения входных и выходных величин, изменял бы параметры настраиваемой модели так, чтобы средние потери с ростом n достигали минимума.

Динамические объекты описываются дифференциальными уравнениями (обыкновенными или в частных производных) с неизвестными коэффициентами, либо интегральными уравнениями с неизвестным ядром. Динамические объекты, управляемые цифровыми вычислительными машинами (ЦВМ), а также разнообразные процессы, характеризуемые временными рядами, описываются разностными уравнениями, которые являются дискретными аналогами дифференциальных уравнений, либо уравнениями типа свертки (с неизвестным ядром). Как правило, объекты подвержены воздействию помех, которые непосредственно не измеряются. Эти мешающие воздействия фигурируют в уравнениях динамического объекта. Коэффициенты этих уравнений неизвестны.

На основании сведений об объекте формируется настраиваемая модель. Настраиваемая модель описывается уравнениями, подобными уравнениям объекта, либо соотношениями, содержащими измеряемые входные и выходные величины, характеризующие состояние динамического объекта. Коэффициенты этих уравнений или соотношений являются параметрами настраиваемой модели. Близость настраиваемой модели к динамическому объекту характеризуется функционалом

невязки — средними потерями $J(c)$ (1.1.2). Минимизация средних потерь достигается изменением параметров настраиваемой модели при помощи алгоритмов идентификации.

В современной теории идентификации выбор структуры настраиваемой модели для заданного класса динамических объектов в значительной мере произволен. Так, широко используются *статические настраиваемые модели*, описываемые соотношениями типа линейной комбинации измеряемых входных и выходных величин динамического объекта. Несколько реже применяются *динамические настраиваемые модели*, описываемые уравнениями, подобными уравнениям объекта. Часто такие настраиваемые модели приводят к смещенным оценкам параметров. Тогда для устранения смещенности в настраиваемую модель вводят оценки ненаблюдаемых помех, либо используют преобразованные тем или иным способом наблюдаемые величины (инструментальные переменные).

Критерий качества идентификации в подавляющем большинстве работ выбирался квадратичным в виде среднего значения квадрата невязки. Минимизация такого квадратичного критерия во многих случаях сводилась к решению системы линейных алгебраических уравнений. Возможность получения теоретически точного результата на основе различных вариантов метода наименьших квадратов обеспечила господствующее положение квадратичному критерию идентификации. Значительно реже использовались критерии качества идентификации, отличные от квадратичных, например, модульный критерий типа среднего значения абсолютной величины невязки.

Что же касается алгоритмов идентификации, то здесь широкое распространение получили *рекуррентный метод наименьших квадратов*, а также различные варианты метода *стохастической аппроксимации*. Простота и универсальность последнего метода позволила не ограничиваться квадратичными критериями идентификации и формировать разнообразные как линейные, так и нелинейные алгоритмы идентификации. Появление большого числа различных алгоритмов идентификации вызвало к жизни работы по их сравнительному анализу. Разумеется, такой анализ иногда позволял выделить лучший из сравниваемых алгоритмов. Но является ли этот алгоритм наилучшим в рассматриваемой задаче идентификации, — на этот вопрос пока ответа не было.

Развитая к настоящему времени теория идентификации предлагает огромное число методов и способов, но эта теория не касается вопросов обоснованного выбора метода, т. е. выбора настраиваемой модели, критерия качества идентификации и алгоритмов. Выбор настраиваемых моделей и алгоритмов является скорее искусством, чем наукой. Поэтому много усилий затрачивается на экспериментальное исследование выбранных настраиваемых моделей и алгоритмов и сравнение их с ранее предложенными.

Теория идентификации также не пытается объяснить причины неудовлетворительной работы тех или иных конкретных алгоритмов. Поэтому особенно важно рассмотреть возможности обоснования выбора настраиваемой модели, критерия и алгоритма идентификации, которые бы гарантировали не только удовлетворительную работу алгоритмов, но и наилучшее, в том или ином смысле, решение конкретных задач идентификации. Все это и составляет содержание информационной теории идентификации.

§ 1.2. Объекты и их классификация

Динамические объекты описываются дифференциальными, интегральными или функциональными уравнениями относительно некоторых координат, характеризующих их состояние. Широкое применения цифровых вычислительных машин для управления этими объектами приводит к необходимости описать эти объекты разностными или суммарными уравнениями, которые определяются на основании известных способов теории дискретных систем по дифференциальным или интегральным уравнениям. Поэтому далее мы будем иметь дело с разностными или суммарными уравнениями. Для наглядности мы ограничимся рассмотрением линейных динамических объектов. Обобщение на определенные классы нелинейных объектов, как будет видно из дальнейшего, не представит труда.

В общем случае уравнение линейных динамических объектов при наличии входного воздействия $u(n)$ и помехи $\xi(n)$ (рис. 1.2) может быть представлено в виде линейного разностного уравнения

$$y(n) + \sum_{m=1}^N a_m^* y(n-m) = \sum_{m=0}^N b_m^* u(n-m) + \sum_{m=0}^N d_m^* \xi(n-m), \quad (1.2.1)$$

где $n = 0, 1, 2, \dots$ — дискретное время.

Введем оператор запаздывания q , определяемый как

$$q^m y(n) = y(n-m), \quad m = 1, \dots, N; \quad (1.2.2)$$

тогда уравнение линейных динамических объектов можно записать в операторной форме

$$Q(q) y(n) = P_u(q) u(n) + P_\xi(q) \xi(n), \quad (1.2.3)$$

или

$$y(n) = K_u(q) u(n) + K_\xi(q) \xi(n), \quad (1.2.4)$$



Рис. 1.2

где

$$K_u(q) = \frac{P_u(q)}{Q(q)}, \quad K_\xi(q) = \frac{P_\xi(q)}{Q(q)} \quad (1.2.5)$$

— передаточные функции динамического объекта по воздействию и возмущению соответственно.

В уравнении (1.2.3) и передаточных функциях (1.2.5)

$$Q(q) = 1 + a_1^* q + \dots + a_N^* q^N \quad (1.2.6)$$

— характеристический полином, а

$$\begin{aligned} P_u(q) &= b_0^* + b_1^* q + \dots + b_N^* q^N, \\ P_\xi(q) &= d_0^* + d_1^* q + \dots + d_N^* q^N \end{aligned} \quad (1.2.7)$$

— полиномы по воздействию и по возмущению соответственно. Равенство степеней всех этих полиномов не является ограничением (если это не так, достаточно приравнять старшие коэффициенты нулю).

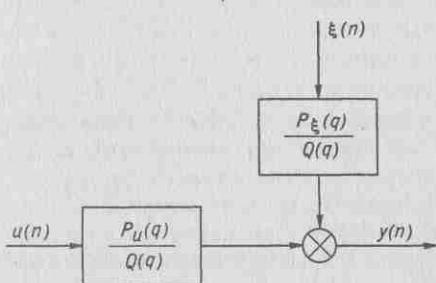


Рис. 1.3

Блок-схема динамического объекта, описываемого уравнением (1.2.4) или, что эквивалентно, (1.2.3), (1.2.1), приведена на рис. 1.3.

Идентификация динамических объектов непосредственно по наблюдаемым входным, $u(n)$, и выходным, $y(n)$, величинам может быть осуществлена лишь тогда, когда динамический объект устойчив, т. е. когда его реакция на ограниченные воздействия также ограничена. Но, как известно

из теории дискретных систем, для того чтобы линейный динамический объект был устойчивым, необходимо и достаточно, чтобы все корни q_ν , $\nu = 1, \dots, N$, характеристического полинома $Q(q)$ (1.2.6) лежали вне единичного круга с центром в начале координат:

$$|q_\nu| > 1, \quad \nu = 1, \dots, N. \quad (1.2.8)$$

Полином, нули которого удовлетворяют условию (1.2.8), для краткости будем называть *внешним полиномом*.

Критерии, позволяющие судить об устойчивости динамических систем по коэффициентам характеристического полинома, широко известны. Они приводятся в руководствах по теории дискретных си-

стем, и мы не будем их здесь выписывать. Далее всегда будет предполагаться устойчивость идентифицируемых динамических объектов.

Назовем динамический объект **минимально-фазовым**, если полиномы $P_u(q)$ и $P_\xi(q)$ внешние, т. е. если все их нули лежат вне единичного круга с центром в начале координат. В противном случае, если не все нули полиномов $P_u(q)$ и (или) $P_\xi(q)$ лежат вне единичного круга с центром в начале координат, будем называть динамический объект **неминимально-фазовым по воздействию** и (или) **по возмущению**. Уравнения линейных динамических объектов (1.2.1), или (1.2.4), (1.2.5), являются наиболее общими. Они охватывают в качестве частных случаев различные объекты и процессы: *регрессии, авторегрессии, скользящего среднего, временные ряды* и т. п.

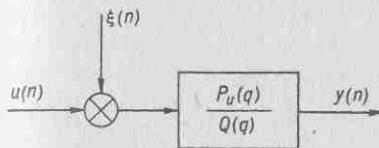


Рис. 1.4

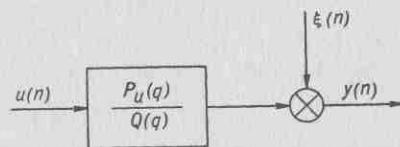


Рис. 1.5

Рассмотрим, как меняются уравнения динамических объектов при изменении точки приложения возмущения — помехи $\xi(n)$. Предположим, что помеха приложена ко входу объекта (рис. 1.4). Тогда

$$K_\xi(q) = K_u(q), \quad \text{т. е.} \quad P_\xi(q) = P_u(q). \quad (1.2.9)$$

В этом случае

$$d_m^* = b_m^*, \quad m = 0, 1, \dots, N, \quad (1.2.10)$$

и уравнения объекта (1.2.1), (1.2.4) принимают вид

$$y(n) + \sum_{m=1}^N a_m^* y(n-m) = \sum_{m=0}^N b_m^* [u(n-m) + \xi(n-m)] \quad (1.2.11)$$

и

$$y(n) = \frac{P_u(q)}{Q(q)} [u(n) + \xi(n)]. \quad (1.2.12)$$

Если помеха приложена к выходу объекта (рис. 1.5), то

$$K_\xi(q) \equiv 1, \quad \text{т. е.} \quad P_\xi(q) = Q(q). \quad (1.2.13)$$

В этом случае

$$d_0^* = 1 \quad \text{и} \quad d_m^* = a_m^*, \quad m = 1, \dots, N, \quad (1.2.14)$$

и уравнения объекта (1.2.1), (1.2.4) принимают вид

$$y(n) - \xi(n) + \sum_{m=1}^N a_m^* [y(n-m) - \xi(n-m)] = \sum_{m=0}^N b_m^* u(n-m) \quad (1.2.15)$$

и

$$y(n) = \frac{P_u(q)}{Q(q)} u(n) + \xi(n). \quad (1.2.16)$$

Наконец, существует такая точка приложения помехи, для которой

$$K_\xi(q) = \frac{1}{Q(q)}, \quad \text{т. е.} \quad P_\xi(q) = 1. \quad (1.2.17)$$

В этом случае

$$d_0^* = 1 \quad \text{и} \quad d_m^* = 0, \quad m = 1, \dots, N, \quad (1.2.18)$$

и уравнения объекта (1.2.1), (1.2.4) записутся в виде

$$y(n) + \sum_{m=1}^N a_m^* y(n-m) = \sum_{m=0}^N b_m^* u(n-m) + \xi(n) \quad (1.2.19)$$

и

$$y(n) = \frac{P_u(q)}{Q(q)} u(n) + \frac{1}{Q(q)} \xi(n). \quad (1.2.20)$$

Реакция выходной величины $y(n)$, вызываемая помехой $\xi(n)$, в этом случае не зависит от параметров b_m^* , $m = 1, \dots, N$. Блок-схема такого динамического объекта изображена на рис. 1.6. Разностное уравнение (1.2.19) особенно часто фигурирует в работах по идентификации.

Заметим, что параметры d_m^* , если они отличны от нуля, зависят, вообще говоря, от параметров a_k^* , b_k^* , b_0^* , $k = 1, \dots, N$. Поэтому параметры a_k^* , b_k^* , b_0^* , $k = 1, \dots, N$, мы назовем *основными*, а параметры d_m^* , $m = 0, 1, \dots, N$, выражющиеся через основные, — *вспомогательными*.

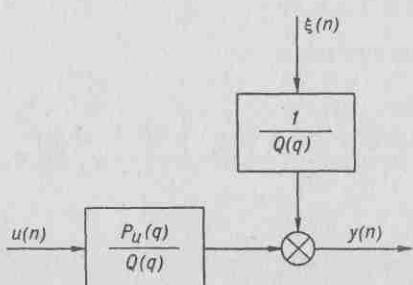


Рис. 1.6

Приведенные выше уравнения динамических систем являются наиболее общими. Рассмотрим некоторые частные случаи этих уравнений.

Пусть

$$P_\xi(q) = Q(q) = 1, \quad (1.2.21)$$

т. е. $d_0^* = 1$ и $d_m^* = a_m^* = 0$, $m = 1, \dots, N$.

Это значит, что

$$K_u(q) = P_u(q) \quad \text{и} \quad K_\xi(q) = 1. \quad (1.2.22)$$

Тогда уравнения (1.2.4) и (1.2.1) соответственно принимают вид

$$y(n) = P_u(q)u(n) + \xi(n) \quad (1.2.23)$$

и

$$y(n) = \sum_{m=0}^N b_m^* u(n-m) + \xi(n). \quad (1.2.24)$$

Эти уравнения соответствуют динамическому объекту с конечной длительностью переходного процесса. Блок-схема такого динамического объекта изображена на рис. 1.7.

Уравнение, аналогичное (1.2.24), но в котором вместо $u(n-m)$ фигурирует $u_m(n)$, т. е.

$$y(n) = \sum_{m=0}^N b_m^* u_m(n) + \xi(n), \quad (1.2.25)$$

соответствует *статическому объекту* с $N + 1$ входами и одним выходом (рис. 1.8).

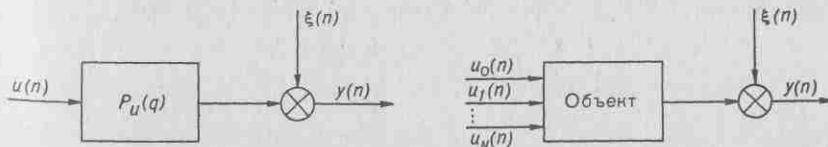


Рис. 1.7

Рис. 1.8

Объекты, соответствующие уравнениям (1.2.24), (1.2.25), будем называть *регрессионными объектами*, или кратко, *Р-объектами*. Таким образом, к Р-объектам относятся как динамические (1.2.24), так и статические объекты (1.2.25).

Предположим теперь, что

$$P_u(q) = 0, \quad P_\xi(q) = 1, \quad (1.2.26)$$

т. е. $d_0^* = 1$, $b_0^* = 0$ и $d_m^* = b_m^* = 0$, $m = 1, \dots, N$. Следовательно,

$$K_u(q) \equiv 0, \quad K_\xi(q) = \frac{1}{Q(q)}, \quad (1.2.27)$$

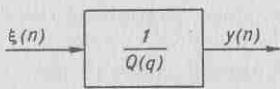
и уравнения (1.2.4), (1.2.1) соответственно записутся в виде

$$y(n) = \frac{1}{Q(q)} \xi(n) \quad (1.2.28)$$

и

$$y(n) + \sum_{m=1}^N a_m^* y(n-m) = \xi(n). \quad (1.2.29)$$

Уравнения (1.2.28), (1.2.29) соответствуют динамическому объек



екту при отсутствии входных воздействий. Такие объекты будем называть, как это принято в эконометрике, *авто-регрессионными объектами*, или, кратко, *АР-объектами*. Они широко используются при исследовании различного

вида временных рядов. Блок-схема АР-объекта изображена на рис. 1.9.

Рис. 1.9

Положим

$$P_u(q) \equiv 0, \quad Q(q) \equiv 1, \quad (1.2.30)$$

т. е. $b_0^* = 0$, $b_m^* = a_m^* = 0$, $m = 1, \dots, N$. В этом случае

$$K_u(q) \equiv 0, \quad K_\xi(q) = P_\xi(q), \quad (1.2.31)$$

и уравнения (1.2.4), (1.2.1) соответственно принимают вид

$$y(n) = P_\xi(q) \xi(n) \quad (1.2.32)$$

и

$$y(n) = \sum_{m=0}^N d_m^* \xi(n-m). \quad (1.2.33)$$

Эти уравнения соответствуют операции скользящего среднего. Очевидно, что операция скользящего среднего будет фигурировать и в Р-объектах и в АР-объектах, если изменить точку приложения помехи.

Объекты, описываемые общими уравнениями (1.2.1), (1.2.4), назовем *регрессионно-авторегрессионными объектами*, или, кратко, *РАР-объектами*. В отличие от Р-объектов, к АР-объектам и РАР-объектам относятся только динамические системы.

Если перейти от уравнения динамического объекта в операторной форме (1.2.16) к уравнению относительно $y(n)$, то мы получим уравнение типа свертки

$$y(n) = \sum_{m=0}^{\infty} k^*(m) u(n-m) + \xi(n), \quad (1.2.34)$$

где $k^*(m)$ — *временная, или импульсная характеристика объекта*, равная

$$k^*(m) = \sum_{\nu=1}^N \frac{P_u(q_{\nu})}{Q'(q_{\nu})} e^{q_{\nu}(m-1)}, \quad m \geq 1, \quad (1.2.35)$$

$$k^*(0) = 0.$$

Здесь q_{ν} ($\nu = 1, \dots, N$) — нули характеристического полинома $Q(q)$ (1.2.6), которые предполагаются различными. Выражение $k^*(m)$ для случая кратных нулей (если в этом есть необходимость) может быть получено из (1.2.35) предельным переходом.

Для устойчивого объекта

$$k^*(m) \rightarrow 0 \quad \text{при} \quad m \rightarrow \infty. \quad (1.2.36)$$

Поэтому всегда можно предположить, что при достаточно большом n_0

$$k^*(m) \approx 0, \quad \text{если} \quad m > n_0, \quad (1.2.37)$$

и, значит, уравнение (1.2.34) можно приближенно записать так:

$$y(n) = \sum_{m=0}^{n_0} k^*(m) u(n-m) + \xi(n). \quad (1.2.38)$$

Сопоставляя уравнения (1.2.38) и (1.2.24), заключаем, что при

$$b_m^* = k^*(m), \quad m = 0, 1, \dots, n_0 \quad (N = n_0) \quad (1.2.39)$$

эти уравнения идентичны, но теперь для уравнения (1.2.38) неизвестными являются не параметры b_m^* , а дискреты временной характеристики $k^*(m)$.

Из сказанного следует, что в зависимости от формы описания объекта (1.2.15) или (1.2.34), а значит, и от того, какие величины подлежат определению при идентификации: a_m^* , b_m^* , b_0^* или $k^*(m)$ ($m =$

$= 1, \dots, N; N = n_0$), — динамический объект может быть отнесен к РАР-объектам либо к Р-объектам.

Рассмотренные выше Р-, АР- и РАР-объекты назовем *объектами с простой помехой*, если в правую часть уравнения объекта (1.2.1) входит только $\xi(n)$, т. е. $d_0^* = 1$ и $d_m^* = 0$ ($m = 1, \dots, N$). Примером уравнения РАР-объекта с простой помехой является уравнение (1.2.19), Р-объекта — (1.2.24), а АР-объекта — (1.2.29). В тех случаях, когда в правую часть уравнения объекта (1.2.1) входят, кроме $\xi(n)$, также и $\xi(n-m)$, $m > 0$, соответствующие объекты будем называть *объектами с преобразованной помехой*.

Далее всегда будет предполагаться, если нет особых оговорок, что помехи $\xi(n)$ образуют последовательность независимых одинаково распределенных случайных величин, имеющих симметричную плотность распределения $p_0(\xi)$, т. е. $p_0(\xi)$ — четная функция:

$$p_0(\xi) = p_0(-\xi). \quad (1.2.40)$$

Если, кроме того, $\xi(n)$ имеет конечную дисперсию σ_ξ^2 , то корреляционная функция помех равна

$$M\{\xi(n)\xi(n-m)\} = \begin{cases} \sigma_\xi^2, & m = 0, \\ 0, & m \neq 0. \end{cases} \quad (1.2.41)$$

Очевидно, что

$$M\{\xi(n)\} = 0. \quad (1.2.42)$$

Внешнее воздействие $u(n)$, вообще говоря, может быть произвольным. Для режима нормальной работы оно представляет собой стационарный случайный процесс со средним \bar{u} и дисперсией σ_u^2 . Помеху $\xi(n)$ будем считать не зависящей от входных воздействий $u(1), \dots, u(n)$. Именно эти предположения, если нет особых оговорок, и будем далее иметь в виду.

Для любых нелинейных преобразований помехи $\varphi(\xi)$ и $\psi(\xi)$ получим при $m \neq 0$ (считая, что математические ожидания существуют)

$$M\{\varphi(\xi(n))\psi(\xi(n-m))\} = M\{\varphi(\xi(n))\}M\{\psi(\xi(n-m))\}. \quad (1.2.43)$$

Если же $\varphi(\xi)$ — нечетная функция, т. е. $\varphi(-\xi) = -\varphi(\xi)$, то

$$M\{\varphi(\xi(n))\} = 0. \quad (1.2.44)$$

Из общего уравнения линейного динамического объекта (1.2.1) не трудно видеть, что $y(n-m)$ при $m > 0$ не зависят от $\xi(n)$. Поэтому

$$M\{\xi(n)y(n-m)\} = M\{\xi(n)\}M\{y(n-m)\}, \quad m > 0, \quad (1.2.45)$$

а учитывая (1.2.42), получаем

$$M\{\xi(n) y(n-m)\} = 0, \quad m > 0. \quad (1.2.46)$$

Аналогично (1.2.43), при $m \neq 0$

$$M\{\varphi(\xi(n)) \psi(y(n-m))\} = M\{\varphi(\xi(n))\} M\{\psi(y(n-m))\}, \quad (1.2.47)$$

и если $\varphi(\xi)$ — нечетная функция, то

$$M\{\varphi(\xi(n)) \psi(y(n-m))\} = 0, \quad m > 0. \quad (1.2.48)$$

Случай коррелированных помех, для которых условия, подобные приведенным выше, не выполняются, будет рассмотрен в главе 8.

Идентификация линейных объектов состоит в оценке основных параметров a_m^*, b_m^*, b_0^* , $m = 1, \dots, N$, либо дискрет $k^*(m)$, $m = 1, \dots, n_0$, по наблюдаемым величинам: входной величине $u(n)$ и выходной величине $y(n)$ для Р- и РАР-объектов или только по выходной величине $y(n)$ для АР-объектов..

§ 1.3. Настраиваемая модель

Настраиваемая модель, фигурирующая в функциональной схеме идентификации, должна вырабатывать прогнозирующую величину $\hat{y}(n)$ на основе наблюдаемых входных воздействий и выходных величин объекта. Поэтому настраиваемую модель можно также называть прогнозирующей, предсказывающей моделью. Чем ближе параметры настраиваемой модели к параметрам объекта, тем точнее прогноз, т. е. тем ближе $\hat{y}(n)$ к выходной величине объекта $y(n)$.

Существует множество различных настраиваемых моделей. Как уже упоминалось, выбор настраиваемой модели обычно не аргументировался и был довольно произвольным. Тем не менее интуитивно ощущалось, что модель должна формироваться на основе той априорной информации, которая нам известна об объекте. К этой априорной информации относятся: порядок уравнений объекта, точка приложения помехи, длительность временной характеристики объекта и т. д. Возникает задача синтеза в определенном смысле наилучшей настраиваемой модели на основе имеющейся априорной информации об объекте.

Напомним, что в общем случае уравнение объекта имеет вид (1.2.4), т. е.

$$y(n) = K_u(q)u(n) + K_\xi(q)\xi(n). \quad (1.3.1)$$

Будем искать уравнение настраиваемой модели в такой форме:

$$\hat{y}(n) = \hat{K}_1(q)u(n) + [1 - \hat{K}_2(q)]y(n), \quad (1.3.2)$$

где $\hat{K}_1(q)$ и $\hat{K}_2(q)$ — пока неизвестные передаточные функции настраиваемой модели, представляющие собой дробно-рациональные функции переменной q . Эти передаточные функции определяют способ обработки наблюдаемых входных, $u(n)$, и выходных, $y(n)$, величин объекта.

Выбор уравнения настраиваемой модели в форме (1.3.2) объясняется тем, что выходная величина настраиваемой модели $\hat{y}(n)$ не должна зависеть от выходной величины объекта в тот же момент времени n , т. е. от $y(n)$. Условием этого, как видно из (1.3.2), является равенство

$$\hat{K}_2(0) = 1. \quad (1.3.3)$$

Класс настраиваемых моделей, определяемых уравнением (1.3.2) при условии (1.3.3), обозначим через \mathcal{M} .

Назовем *невязкой* $\varepsilon(n) = \varepsilon(z(n), c)$ разность между выходными величинами объекта $y(n)$ и настраиваемой модели $\hat{y}(n)$:

$$\varepsilon(n) = y(n) - \hat{y}(n). \quad (1.3.4)$$

Близость настраиваемой модели к объекту будем характеризовать математическим ожиданием квадрата невязки

$$M\{\varepsilon^2(n)\} = M\{[y(n) - \hat{y}(n)]^2\}. \quad (1.3.5)$$

Если

$$M\{\varepsilon(n)\} = M\{y(n) - \hat{y}(n)\} = 0,$$

то мерой близости настраиваемой модели и объекта будет дисперсия невязки.

Под *оптимальной настраиваемой моделью* будем подразумевать такую, для которой $M\{\varepsilon^2(n)\}$ достигает минимально возможного значения при определенных значениях ее параметров. Поскольку модель полностью определяется передаточными функциями $\hat{K}_1(q)$, $\hat{K}_2(q)$ (см. (1.3.2)), то $M\{\varepsilon^2(n)\}$ является *функционалом*, зависящим от этих передаточных функций, — $\Phi(\hat{K}_1, \hat{K}_2)$. Таким образом, задача определения оптимальной настраиваемой модели сводится к задаче минимизации *функционала невязки*

$$M\{\varepsilon^2(n)\} = \Phi(\hat{K}_1, \hat{K}_2) \rightarrow \min_{\hat{K}_1, \hat{K}_2}. \quad (1.3.6)$$

Найдем явное выражение этого функционала. Из уравнения настраиваемой модели (1.3.2) и определения невязки (1.3.4) следует

$$\varepsilon(n) = -\hat{K}_1(q)u(n) + \hat{K}_2(q)y(n). \quad (1.3.7)$$

Подставляя в (1.3.7) $y(n)$ из уравнения (1.3.1), получим

$$\varepsilon(n) = W_u(q)u(n) + W_\xi(q)\xi(n), \quad (1.3.8)$$

где

$$\begin{aligned} W_u(q) &= K_u(q)\hat{K}_2(q) - \hat{K}_1(q), \\ W_\xi(q) &= K_\xi(q)\hat{K}_2(q). \end{aligned} \quad (1.3.9)$$

Функционал $\Phi(\hat{K}_1, \hat{K}_2)$ может быть выражен через передаточные функции $W_u(q)$ и $W_\xi(q)$ (1.3.9) и спектральные плотности воздействия $S_u(q)$ и возмущения $S_\xi(q)$. Как известно из теории дискретных систем, для независимых между собой воздействий $u(n)$ и возмущений $\xi(n)$ функционал $\Phi(\hat{K}_1, \hat{K}_2)$ можно представить в виде

$$\begin{aligned} \Phi(\hat{K}_1, \hat{K}_2) &= M\{\varepsilon^2(n)\} = \\ &= \frac{1}{2\pi j} \oint_L \left[W_u(q) W_u\left(\frac{1}{q}\right) + S_u(q) + W_\xi(q) W_\xi\left(\frac{1}{q}\right) S_\xi(q) \right] \frac{dq}{q}. \end{aligned} \quad (1.3.10)$$

Здесь L , контур интегрирования на комплексной плоскости, — окружность единичного радиуса с центром в начале координат (рис. 1.10), j — мнимая единица.

Как следует из (1.2.41), спектральная плотность возмущения (помехи) есть

$$S_\xi(q) = \sigma_\xi^2. \quad (1.3.11)$$

Что же касается спектральной плотности воздействия $S_u(q)$, то она зависит от статистических свойств воздействия $u(n)$ и различна для различных воздействий.

Потребуем, чтобы структура настраиваемой модели не зависела от характеристик внешних воздействий. Это будет иметь место, если функционал (1.3.10) не зависит от спектральной плотности воздействия $S_u(q)$, т. е. если

$$W_u(q) = K_u(q)\hat{K}_2(q) - \hat{K}_1(q) = 0. \quad (1.3.12)$$

Это условие налагает связь на передаточные функции настраиваемой модели $\hat{K}_1(q)$ и $\hat{K}_2(q)$. При выполнении условия (1.3.12) функционал (1.3.10) упрощается и принимает вид

$$\Phi(\hat{K}_1, \hat{K}_2) = \Phi_0(\hat{K}_2) = \frac{\sigma_\xi^2}{2\pi j} \oint_L W_\xi(q) W_\xi\left(\frac{1}{q}\right) \frac{dq}{q}, \quad (1.3.13)$$

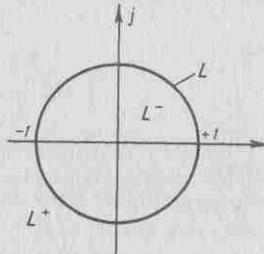


Рис. 1.10

или, после подстановки $W_\xi(q)$ из (1.3.9),

$$\Phi_0(\hat{K}_2) = \frac{\sigma_\xi^2}{2\pi j} \oint_L \hat{K}_2(q) \hat{K}_2\left(\frac{1}{q}\right) K_\xi(q) K_\xi\left(\frac{1}{q}\right) \frac{dq}{q}. \quad (1.3.14)$$

Функционал $\Phi_0(\hat{K}_2)$ не зависит от передаточной функции $\hat{K}_1(q)$. Задача минимизации (1.3.6), таким образом, упрощается и сводится к задаче минимизации вида

$$\Phi(\hat{K}_2) \rightarrow \min_{\hat{K}_2}. \quad (1.3.15)$$

Передаточная же функция $\hat{K}_1(q)$ определяется по передаточной функции $\hat{K}_2(q)$ из условия (1.3.12)

$$\hat{K}_1(q) = K_u(q) \hat{K}_2(q). \quad (1.3.16)$$

Условие минимума функционала $\Phi_0(\hat{K}_2)$ (1.3.14) получается приравниванием нулю его вариации по $\hat{K}_2(q)$ и $\hat{K}_2(1/q)$, т. е.

$$\begin{aligned} \delta\Phi_0(\hat{K}_2) &= \frac{1}{2\pi j} \oint_L \hat{K}_2(q) K_\xi(q) K_\xi\left(\frac{1}{q}\right) \delta\hat{K}_2\left(\frac{1}{q}\right) \frac{dq}{q} + \\ &+ \frac{1}{2\pi j} \oint_L \hat{K}_2\left(\frac{1}{q}\right) K_\xi\left(\frac{1}{q}\right) K_\xi(q) \delta\hat{K}_2(q) \frac{dq}{q} = 0. \end{aligned} \quad (1.3.17)$$

Но второй интеграл заменой переменной q на $1/q$ сводится к первому. Поэтому условие минимума (1.3.17) упрощается и может быть записано в виде

$$\oint_L \hat{K}_2(q) K_\xi(q) K_\xi\left(\frac{1}{q}\right) \delta\hat{K}_2\left(\frac{1}{q}\right) \frac{dq}{q} = 0. \quad (1.3.18)$$

Контурный интеграл в левой части равенства (1.3.18) обратится в нуль, если подынтегральное выражение не будет иметь полюсов в области L^+ , т. е. вне единичного круга (рис. 1.10). Для обеспечения этого условия достаточно положить

$$\hat{K}_2(q) K_\xi(q) = \beta, \quad (1.3.19)$$

где β — неопределенная пока постоянная.

Отсюда находим, учитывая (1.2.5),

$$\hat{K}_2(q) = \hat{K}_2^0(q) = \beta K_\xi^{-1}(q) = \beta \frac{Q(q)}{P_\xi(q)}. \quad (1.3.20)$$

Значение постоянной β определяется из условия $\hat{K}_2(0) = 1$ (1.3.3):

$$\beta = K_\xi(0) = \frac{P_\xi(0)}{Q(0)} = d_0^*. \quad (1.3.21)$$

Следовательно, оптимальная передаточная функция (1.3.20) окончательно принимает вид

$$\hat{K}_2^0(q) = d_0^* \frac{Q(q)}{P_\xi(q)}. \quad (1.3.22)$$

Подставляя это выражение $\hat{K}_2^0(q)$ в (1.3.16), находим

$$\hat{K}_1^0(q) = K_u(q) \hat{K}_2^0(q) = d_0^* \frac{P_u(q)}{P_\xi(q)}. \quad (1.3.23)$$

Нетрудно проверить (мы этого делать не будем), что найденные оптимальные передаточные функции $\hat{K}_1^0(q)$ и $\hat{K}_2^0(q)$ удовлетворяют и достаточным условиям минимума функционала $\Phi(\hat{K}_1, \hat{K}_2)$. Заменяя в (1.3.23) и (1.3.22) полиномы $P_u(q)$, $P_\xi(q)$, $Q(q)$ (1.2.6), (1.2.7) на полиномы

$$\hat{P}_u(q) = b_0 + b_1 q + \dots + b_N q^N, \quad (1.3.24)$$

$$\hat{P}_\xi(q) = d_0 + d_1 q + \dots + d_N q^N, \quad (1.3.25)$$

$$\hat{Q}(q) = 1 + a_1 q + \dots + a_N q^N, \quad (1.3.26)$$

отличающиеся лишь коэффициентами от $P_u(q)$, $P_\xi(q)$, $Q(q)$, найдем передаточные функции оптимальной настраиваемой модели

$$\hat{K}_1(q) = d_0 \frac{\hat{P}_u(q)}{\hat{P}_\xi(q)}, \quad (1.3.27)$$

$$\hat{K}_2(q) = d_0 \frac{\hat{Q}(q)}{\hat{P}_\xi(q)}. \quad (1.3.28)$$

Следовательно, уравнение оптимальной настраиваемой модели (1.3.2) представится в виде

$$\hat{y}(n) = d_0 \frac{\hat{P}_u(q)}{\hat{P}_\xi(q)} u(n) + \left[1 - d_0 \frac{\hat{Q}(q)}{\hat{P}_\xi(q)} \right] y(n) \quad (1.3.29)$$

или

$$\hat{P}_\xi(q) \hat{y}(n) = d_0 \hat{P}_u(q) u(n) + [\hat{P}_\xi(q) - d_0 \hat{Q}(q)] y(n). \quad (1.3.30)$$

Наконец, воспользовавшись свойством (1.2.2) оператора запаздывания q , получим окончательно

$$\begin{aligned}\hat{y}(n) = & - \sum_{m=1}^N a_m y(n-m) + \sum_{m=0}^N b_m u(n-m) + \\ & + \sum_{m=1}^N \frac{d_m}{d_0} [y(n-m) - \hat{y}(n-m)].\end{aligned}\quad (1.3.31)$$

Таким образом, для устойчивого и минимально-фазового объекта оптимальная настраиваемая модель описывается уравнениями (1.3.29) — (1.3.31). Настраиваемая модель в общем случае — динамическая с двумя входными воздействиями $u(n)$ и $y(n)$.

Найдем минимальное значение функционала $\Phi(\hat{K}_1^0, \hat{K}_2^0)$ (1.3.10), достигаемое при равенстве параметров настраиваемой модели (как основных, так и вспомогательных) параметрам идентифицируемого объекта, т. е. при

$$a_m = a_m^*, \quad b_m = b_m^*, \quad d_m = d_m^*, \quad m = 0, 1, \dots, N. \quad (1.3.32)$$

Согласно (1.3.23), (1.3.22) в этом случае

$$\hat{K}_1^0(q) = d_0^* \frac{P_u(q)}{P_\xi(q)}, \quad \hat{K}_2^0(q) = d_0^* \frac{Q(q)}{P_\xi(q)}. \quad (1.3.33)$$

Подставляя выражения этих передаточных функций $\hat{K}_1^0(q)$ и $\hat{K}_2^0(q)$, а также $K_u(q)$ и $K_\xi(q)$ (1.2.5) в (1.3.9), получим

$$W_u(q) \equiv 0, \quad W_\xi(q) = d_0^*. \quad (1.3.34)$$

При этих значениях $W_u(q)$ и $W_\xi(q)$ (1.3.34) и спектральной плотности помехи $S_\xi(q)$ (1.3.11) функционал достигает минимума, равного

$$\Phi(\hat{K}_1^0, \hat{K}_2^0) = M\{\varepsilon^2(n)\} = \frac{(d_0^* \sigma_\xi)^2}{2\pi j} \oint_L \frac{dq}{q} = (d_0^* \sigma_\xi)^2. \quad (1.3.35)$$

Из (1.3.8) при выполнении (1.3.12) получаем

$$M\{\varepsilon(n)\} = 0,$$

поэтому функционал $\Phi(\hat{K}_1, \hat{K}_2)$ представляет собой дисперсию невязки. Отсюда следует, что минимально возможная дисперсия невязки равна произведению дисперсии помехи σ_ξ^2 на d_0^{*2} . Это предельно возможная дисперсия невязки, которая принципиально может быть достигнута.

Рассмотрим частные случаи оптимальной настраиваемой модели. Предположим, что помеха приложена к объекту в специальной точке (рис. 1.6). Тогда (см. (1.2.17), (1.2.18)), полагая

$$\hat{P}_\xi(q) \equiv 1, \quad (1.3.36)$$

т. е. $d_0 = 1, d_m = 0, m = 1, \dots, N$, получаем из (1.3.29) и (1.3.31)

$$\hat{y}(n) = \hat{P}_u(q) u(n) + [1 - \hat{Q}(q)] y(n), \quad (1.3.37)$$

или

$$\hat{y}(n) = - \sum_{m=1}^N a_m y(n-m) + \sum_{m=0}^N b_m u(n-m). \quad (1.3.38)$$

Это уравнение отвечает статической настраиваемой модели. Структурная схема такой модели изображена на рис. 1.11. Она содержит $2N$ элементов запаздывания (ЭЗ) и $2N + 1$ усилителей, коэффициенты усиления которых равны значениям настраиваемых параметров $a_m, b_m, b_0, m = 1, \dots, N$. Входными величинами оптимальной статической настраиваемой модели являются выходная $y(n)$ и входная $u(n)$ величины идентифицируемого объекта.

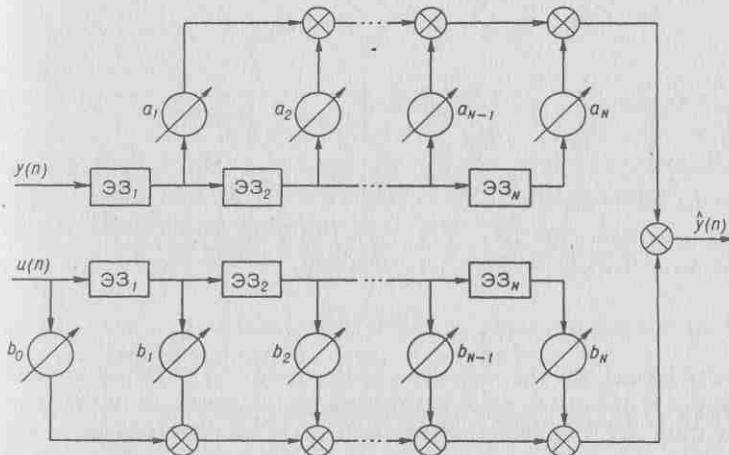


Рис. 1.11

Предположим теперь, что помеха приложена ко входу объекта (рис. 1.4). Тогда (см. (1.2.13), (1.2.14)), полагая

$$\hat{P}_\xi(q) = \hat{Q}(q), \quad (1.3.39)$$

т. е. $d_0 = 1, d_m = a_m, m = 1, \dots, N$, получим из (1.3.29), (1.3.31)

$$\hat{y}(n) = \frac{\hat{P}_u(q)}{\hat{Q}(q)} u(n), \quad (1.3.40)$$

или

$$\hat{y}(n) = - \sum_{m=1}^N a_m \hat{y}(n-m) + \sum_{m=0}^N b_m u(n-m). \quad (1.3.41)$$

Это уравнение соответствует динамической настраиваемой модели. Ее структурная схема изображена на рис. 1.12. Она содержит N элементов запаздывания и $2N + 1$ усилителей, коэффициенты усиления которых равны значениям настраиваемых параметров $a_m, b_m, b_0, m = 1, \dots, N$. Входной величиной оптимальной динамической настраиваемой модели является входная величина $u(n)$ идентифицируемого объекта.

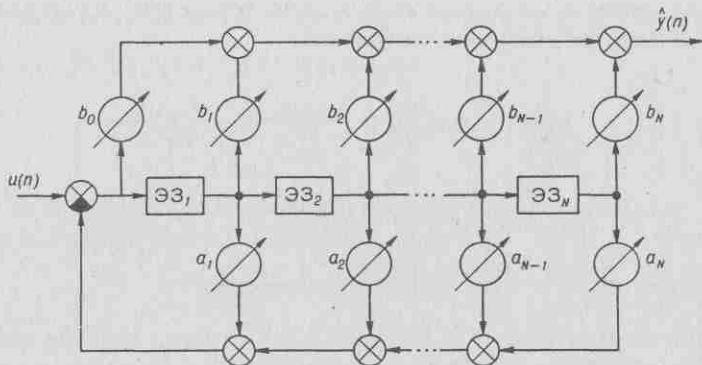


Рис. 1.12

Статическая настраиваемая модель (рис. 1.11) очень широко используется в практике идентификации. Динамическая настраиваемая модель (рис. 1.12) также применяется, но в значительно меньшей степени. Однако, как правило, это не связано с введенной выше оптимальной настраиваемой моделью. Применение же той или иной произвольно выбранной настраиваемой модели обычно не обеспечивает выполнения условия (1.3.6). Поэтому такие модели не являются наилучшими с принятой точки зрения. Кроме того, они могут приводить к смещенным оценкам.

Оптимальная настраиваемая из класса \mathcal{M} модель, как показано

выше, обладает тем свойством, что при $c = c^*$ для нее средние квадратичные потери достигают своего минимума. Это значит, что

$$J(c) = \min_{\mathcal{M}} \min_{\mathbf{c}} M\{\varepsilon(\mathbf{z}(n), \mathbf{c})\} = (d_0^* \sigma_\xi)^2. \quad (1.3.42)$$

В тех случаях, когда в уравнении объекта $d_0^* = 1$, уравнения оптимальной модели (1.3.29) (1.3.31) (при $d_0 = 1$) принимают вид

$$\hat{y}(n) = \frac{\hat{P}_u(q)}{\hat{P}_\xi(q)} u(n) + \left[1 - \frac{\hat{Q}(q)}{\hat{P}(q)} \right] y(n), \quad (1.3.43)$$

или

$$\begin{aligned} \hat{y}(n) = & - \sum_{m=1}^N a_m y(n-m) + \sum_{m=0}^N b_m u(n-m) + \\ & + \sum_{m=1}^N d_m [y(n-m) - \hat{y}(n-m)]. \end{aligned} \quad (1.3.44)$$

Введем вектор наблюдений

$$\begin{aligned} \mathbf{x}(n) = & (-y(n-1), \dots, -y(n-N), u(n), \dots, u(n-N), \\ & y(n-1) - \hat{y}(n-1), \dots, y(n-N) - \hat{y}(n-N)) \end{aligned} \quad (1.3.45)$$

и вектор параметров

$$\mathbf{c} = (a_1, \dots, a_N, b_0, \dots, b_N, d_1, \dots, d_N) \quad (1.3.46)$$

размерности $N_c = 3N + 1$. Эти векторы представляют собой матрицы-столбцы. Транспонирование вектора параметров \mathbf{c} приводит к матрице-строке, для которой мы примем обозначение

$$\mathbf{c}^\top = [a_1, \dots, a_N, b_0, \dots, b_N, d_1, \dots, d_N].$$

Пользуясь этими обозначениями, представим уравнение оптимальной настраиваемой модели (1.3.44) в такой форме:

$$\hat{y}(n) = f(\mathbf{x}(n), \mathbf{c}) = \mathbf{c}^\top \mathbf{x}(n). \quad (1.3.47)$$

Обозначим вектор всех наблюдений до момента времени n

$$\mathbf{z}(n) = (y(n), \mathbf{x}(n)). \quad (1.3.48)$$

Он включает вектор наблюдений $\mathbf{x}(n)$ и выходную величину $y(n)$.

Тогда невязка

$$\varepsilon(n) = \varepsilon(\mathbf{z}(n), \mathbf{c}) = y(n) - \hat{y}(n) \quad (1.3.49)$$

представится в виде

$$\varepsilon(z(n), c) = y(n) - f(x(n), c) = y(n) - c^T x(n). \quad (1.3.50)$$

Введем обозначение *оптимального решения*

$$c^* = (a_1^*, \dots, a_N^*, b_0^*, \dots, b_N^*, d_1^*, \dots, d_N^*). \quad (1.3.51)$$

Заметим, что размерность векторов c и c^* , которую мы обозначили N_c , не всегда равна $3N + 1$. Часто ряд компонент c_k^* вектора c^* известен априори и нет необходимости их оценивать. Тогда соответствующие компоненты $x_k(n)$, c_k и c_k^* исключаются из выражений $x(n)$, c и c^* (1.3.45), (1.3.46), (1.3.51), при этом $N_c < 3N + 1$.

При $c = c^*$ получаем

$$\varepsilon(z(n), c^*) = \xi(n) \quad (1.3.52)$$

и, значит,

$$M\{\varepsilon^2(z(n), c^*)\} = M\{\xi^2(n)\} = \sigma_\xi^2.$$

Это минимальное значение функционала $\Phi(\hat{K}_1^0, \hat{K}_2^0)$ (1.3.35) при $d_0^* = 1$ равно, таким образом,

$$\Phi(\hat{K}_1^0, \hat{K}_2^0) = M\{\varepsilon^2(z(n), c^*)\} = \sigma_\xi^2, \quad (1.3.53)$$

и, значит, в этом случае

$$J(c^*) = \min_M \min_c M\{\varepsilon^2(z(n), c^*)\} = \sigma_\xi^2. \quad (1.3.54)$$

Далее часто будут рассматриваться объекты, для которых $d_0^* = 1$ и это нам известно.

Отметим важное свойство вектора наблюдений $x(n)$ (1.3.45). В число его компонент входят $-y(n-1), \dots, -y(n-N)$. Принимая во внимание свойства помех $\xi(n)$ и входных воздействий $u(n)$ (см. § 1.2), получим

$$M\{\xi(n)x(n)\} = 0 \quad (1.3.55)$$

и

$$M\{\xi(n)x(n-m)\} = 0, \quad m > 0. \quad (1.3.56)$$

Эти равенства показывают, что помеха $\xi(n)$ и наблюдения $x(n-m)$, $m \geq 0$, не коррелированы.

Введенное понятие оптимальной настраиваемой модели позволяет по априорной информации об объекте (структура и порядок разностного уравнения объекта) однозначно выбрать настраиваемую модель.

Оптимальная настраиваемая модель при $c = c^*$ доставляет предельно возможный минимум функционала невязки.

Далее мы будем рассматривать задачу идентификации объектов, минимально-фазовых по возмущению, не оговаривая этого каждый раз. Именно таким объектам и посвящена вся огромная литература по идентификации.

Идентификация неминимально-фазовых по возмущению объектов до самого последнего времени считалась невозможной. В действительности же этот широко распространенный вывод оказался неверным. Изложению специфики идентификации неминимально-фазовых по возмущению объектов посвящена глава 6.

§ 1.4. Критерий качества идентификации и оптимальное решение

Качество идентификации, как уже упоминалось в § 1.1, определяется средними потерями

$$J(c) = M\{F[\varepsilon(z(n), c)]\}, \quad (1.4.1)$$

где функция потерь $F[\varepsilon]$ обычно представляет собой четную функцию невязки:

$$F[\varepsilon] = F[-\varepsilon]. \quad (1.4.2)$$

Наиболее распространенные функции потерь — квадратичные, $F[\varepsilon] = \varepsilon^2$. Реже применяются модульные функции потерь $F[\varepsilon] = |\varepsilon|$. Еще реже используют иные функции потерь, отличные от квадратичных и модульных.

Метод минимизации квадратичного критерия

$$J(c) = M\{\varepsilon^2(z(n), c)\} \quad (1.4.3)$$

соответствует широко распространенному методу наименьших квадратов (МНК). Этот метод приводит к решению системы линейных алгебраических уравнений (так называемой системы нормальных уравнений), и поэтому оптимальное решение c^* , минимизирующее функционал (1.4.3), может быть выражено в явной аналитической форме через корреляционные функции.

Минимизация же неквадратичных критериев приводит к необходимости решения нелинейной системы уравнений. В этом случае оптимальное решение c^* , как правило, может быть найдено лишь приближенно. Найдем условия, определяющие оптимальное решение c^* .

Будем предполагать, что функция потерь $F[\varepsilon]$ дважды дифференцируема по аргументу. Тогда условия, определяющие оптимальное ре-

шение c^* , записывается при $c = c^*$ в виде:

$$\nabla J(c) = M\{\nabla_c F[\varepsilon(z(n), c)]\} = 0, \quad (1.4.4)$$

$$\nabla^2 J(c^*) = M\{\nabla_c^2 F[\varepsilon(z(n), c^*)]\} > 0. \quad (1.4.5)$$

Здесь и далее оператор

$$\nabla = \nabla_c = \left(\frac{\partial}{\partial c_1}, \dots, \frac{\partial}{\partial c_{N_c}} \right)$$

является вектор-столбцом, N_c — размерность вектора c ; для упрощения записи мы полагаем

$$\nabla \nabla^T J(c) = \nabla^2 J(c) \quad (1.4.6)$$

и

$$\nabla^2 J(c)|_{c=c^*} = \nabla^2 J(c^*).$$

Векторы, фигурирующие в (1.4.4),

$$\nabla J(c) = \left(\frac{\partial J(c)}{\partial c_1}, \dots, \frac{\partial J(c)}{\partial c_{N_c}} \right) \quad (1.4.7)$$

и

$$\nabla_c F[\varepsilon(z(n), c)] = \left(\frac{\partial F[\varepsilon(z(n), c)]}{\partial c_1}, \dots, \frac{\partial F[\varepsilon(z(n), c)]}{\partial c_{N_c}} \right), \quad (1.4.8)$$

представляют собой градиенты средних потерь и функции потерь соответственно. Матрицы, фигурирующие в (1.4.5),

$$\nabla^2 J(c) = \left[\frac{\partial^2 J(c)}{\partial c_\mu \partial c_\nu} \right]_{\mu, \nu=1, \dots, N_c}, \quad (1.4.9)$$

$$\nabla_c^2 F[\varepsilon(z(n), c)] = \left[\frac{\partial^2 F[\varepsilon(z(n), c)]}{\partial c_\mu \partial c_\nu} \right]_{\mu, \nu=1, \dots, N_c}, \quad (1.4.10)$$

представляют собой матрицы Гессе — матрицы вторых производных функции средних потерь и функции потерь соответственно. Частные производные в (1.4.8), (1.4.10) понимаются как обобщенные функции. Матричное неравенство (1.4.5) означает положительную определенность матрицы Гессе средних потерь; оно представляет собой условие идентифицируемости, которое подробно обсуждается ниже.

Далее, как правило, мы будем рассматривать лишь тот случай, когда условия оптимальности (1.4.4), (1.4.5) определяют единственное решение c^* , не оговаривая этого каждый раз. Замечая, что

$$\nabla_c F[\varepsilon(\mathbf{z}(n), c)] = F'[\varepsilon(\mathbf{z}(n), c)] \nabla_c \varepsilon(\mathbf{z}(n), c), \quad (1.4.11)$$

где штрих у $F[\varepsilon]$ означает производную по аргументу ε , запишем условие оптимальности (1.4.4) в такой форме:

$$\nabla_c J(c) = M\{F'[\varepsilon(\mathbf{z}(n), c)] \nabla_c \varepsilon(\mathbf{z}(n), c)\} = 0. \quad (1.4.12)$$

Для оптимальной настраиваемой модели невязка равна (1.3.50)

$$\varepsilon(\mathbf{z}(n), c) = y(n) - f(\mathbf{x}(n), c), \quad (1.4.13)$$

следовательно,

$$\nabla_c \varepsilon(\mathbf{z}(n), c) = -\nabla_c f(\mathbf{x}(n), c), \quad (1.4.14)$$

поэтому условие оптимальности (1.4.4) запишется в виде

$$\nabla J(c) = -M\{F'[\varepsilon(\mathbf{z}(n), c)] \nabla_c f(\mathbf{x}(n), c)\} = 0. \quad (1.4.15)$$

Вспоминая, что (см. (1.3.47))

$$\hat{y}(n) = f(\mathbf{x}(n), c) = c^T \mathbf{x}(n), \quad (1.4.16)$$

получаем в общем случае

$$\nabla_c f(\mathbf{x}(n), c) = \mathbf{x}(n) + [\nabla_c \mathbf{x}^T(n)] c. \quad (1.4.17)$$

Заменив в условии оптимальности (1.4.15) $\nabla_c f(\mathbf{x}(n), c)$ из (1.4.17), будем иметь

$$\nabla J(c) = -M\{F'[\varepsilon(\mathbf{z}(n), c)] (\mathbf{x}(n) + [\nabla_c \mathbf{x}^T(n)] c)\} = 0. \quad (1.4.18)$$

Этому условию удовлетворяет оптимальное решение c^* , т. е. вектор параметров настраиваемой модели равен c^* . При $c = c^*$, как уже упоминалось (см. (1.3.52)), невязка равна помехе:

$$\varepsilon(\mathbf{z}(n), c^*) = \xi(n). \quad (1.4.19)$$

Поэтому из (1.4.18) при $c = c^*$ находим

$$\nabla J(c^*) = -M\{F'[\xi(n)] (\mathbf{x}(n) + [\nabla_c \mathbf{x}^T(n)] c^*)\} = 0. \quad (1.4.20)$$

Так как $\xi(n)$ и $\mathbf{x}(n)$, а значит, и $\xi(n)$ и $\nabla_c \mathbf{x}^T(n)$ взаимно независимы, то из (1.4.20) следует

$$\nabla J(c^*) = -M\{F'[\xi(n)]\} M\{\mathbf{x}(n) + [\nabla_c \mathbf{x}^T(n)] c^*\} = 0. \quad (1.4.21)$$

Это равенство имеет место для любых четных функций потерь: $F[\varepsilon] = F[-\varepsilon]$, поскольку для них $F'[\varepsilon] = -F'[-\varepsilon]$ и поэтому (см. (1.2.44))

$$M\{F'[\xi(n)]\} = 0.$$

Таким образом, оптимальное решение c^* удовлетворяет условию оптимальности (1.4.18) при любых четных функциях потерь. Иначе говоря, оптимальное решение c^* инвариантно относительно четных функций потерь. Именно это обстоятельство часто используется для обоснования выбора квадратичной функции потерь как наиболее простой и допускающей часто нахождение оптимального решения или его оценок в аналитической форме.

Вектор $\nabla_c f(\mathbf{x}(n), c)$ (1.4.17), фигурирующий в условии оптимальности (1.4.15), представляет собой вектор коэффициентов чувствительности. Обозначим его через $\mathbf{v}(n)$, так что

$$\mathbf{v}(n) = \nabla_c f(\mathbf{x}(n), c) = \nabla_c \hat{y}(n), \quad (1.4.22)$$

или, учитывая (1.4.17),

$$\mathbf{v}(n) = \mathbf{x}(n) + [\nabla_c \mathbf{x}^\top(n)] \mathbf{c}. \quad (1.4.23)$$

Здесь $\nabla_c \mathbf{x}^\top(n)$ — матрица коэффициентов чувствительности.

Используя уравнение оптимальной настраиваемой модели (1.3.44), которое мы перепишем в виде

$$\hat{y}(n) = - \sum_{m=1}^N d_m \hat{y}(n-m) + \sum_{m=1}^N (d_m - a_m) y(n-m) + \sum_{m=0}^N b_m u(n-m), \quad (1.4.24)$$

и определение вектора наблюдений $\mathbf{x}(n)$ (1.3.45), нетрудно показать, что матрицу коэффициентов чувствительности можно представить в виде блочной матрицы, содержащей нулевые векторы и векторы коэффициентов чувствительности $\mathbf{v}(n-k)$, $k = 1, \dots, N$, т. е.

$$\nabla_c \mathbf{x}^\top(n) = [\underbrace{0, \dots, 0}_{2N+1}, -\mathbf{v}(n-1), \dots, -\mathbf{v}(n-N)]. \quad (1.4.25)$$

Подставляя (1.4.25) в (1.4.23), получим разностное уравнение относительно векторов коэффициентов чувствительности

$$\mathbf{v}(n) = \mathbf{x}(n) - \sum_{m=1}^N d_m \mathbf{v}(n-m). \quad (1.4.26)$$

Это уравнение определяет модель чувствительности. Сопоставляя уравнение оптимальной настраиваемой модели (1.4.24) и уравнение

модели чувствительности (1.4.26), заключаем, что уравнения модели чувствительности получаются из уравнения оптимальной настраиваемой модели по простому правилу: выходные величины настраиваемой модели $\hat{y}(n-m)$, $m = 0, \dots, N$, заменяются на векторы коэффициентов чувствительности $v(n-m)$, $m = 0, \dots, N$, а правая часть уравнения модели

$$\sum_{m=1}^N (d_m - a_m) y(n-m) + \sum_{m=0}^N b_m u(n-m)$$

— на вектор наблюдений $x(n)$. По существу, модель чувствительности представляет собой динамическую систему с настраиваемыми параметрами d_m ($m = 1, \dots, N$) и внешним воздействием $x(n)$ (рис. 1.13).

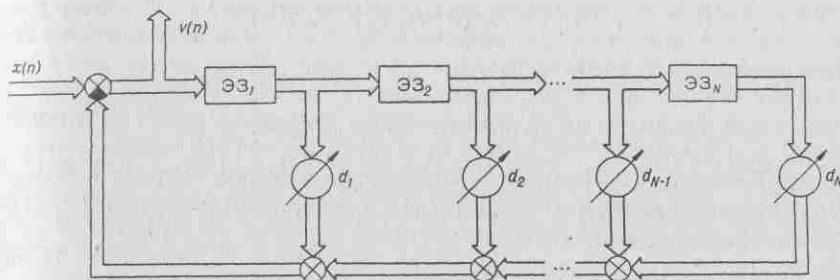


Рис. 1.13

При $d_m = 0$ ($m = 1, \dots, N$) из (1.4.26) получаем

$$v(n) = x(n), \quad (1.4.27)$$

и динамическая модель чувствительности вырождается. Вектор коэффициентов чувствительности $v(n)$ становится равным вектору наблюдений $x(n)$. В этом случае ($d_m = 0$), соответствующем Р-, АР-, РАР-объектам с простой помехой, условие оптимальности принимает простой вид

$$\nabla J(c) = -M\{F'[\varepsilon(z(n), c)]x(n)\} = 0. \quad (1.4.28)$$

Для Р-, АР-, РАР-объектов с преобразованной помехой условие оптимальности можно записать в виде

$$\nabla J(c) = -M\{F'[\varepsilon(z(n), c)]v(n)\} = 0, \quad (1.4.29)$$

где $v(n)$ определяется уравнением чувствительности (1.4.26). Подчеркнем еще раз, что наблюдения $x(n)$, $v(n)$, а значит, и коэффициенты

чувствительности $v(n)$, входящие в условия оптимальности, предполагаются стационарными. Их вероятностные характеристики не зависят от момента времени n . Условия оптимальности позволяют не только установить ряд важных свойств оптимального решения c^* , но и, как будет показано далее, сформировать наилучшие, в определенном смысле, алгоритмы оценивания оптимального решения.

§ 1.5. Алгоритмы идентификации

Оптимальное решение c^* является решением уравнения (1.4.4), представляющего собой условие оптимальности

$$\nabla J(c) = M\{\nabla_c F[\varepsilon(z(n), c)]\} = 0. \quad (1.5.1)$$

Это векторное уравнение эквивалентно системе, вообще говоря, нелинейных уравнений относительно компонент вектора c . В общем случае, когда вектор c входит нелинейно в (1.5.1), явное аналитическое выражение для оптимального вектора c^* найти невозможно даже при наличии полной априорной информации. Поэтому приходится довольствоваться различными приближенными методами решения уравнения (1.5.1). Большинство из них относится к методам последовательных приближений. Физический смысл этих методов состоит в замене статического уравнения, коим является условие оптимальности, «динамическим» — разностным уравнением, решение которого $c(n)$ с течением времени $n \rightarrow \infty$ стремится к оптимальному вектору c^* . Такое разностное уравнение и определяет собой алгоритм идентификации.

Предположим сначала, что условие оптимальности (1.5.1) полностью определено, т. е. градиент средних потерь $\nabla J(c)$ известен. В этом случае метод последовательных приближений приводит к итеративным алгоритмам вида

$$c(n) = c(n-1) - \Gamma(n) \nabla J(c(n-1)), \quad (1.5.2)$$

где $\Gamma(n)$ — матрица усиления, $c(0) = c_0$ — начальное условие; последнее, как правило, берется произвольным, поэтому мы часто при записи алгоритмов идентификации не будем указывать начальных условий, если это нам не потребуется по каким-либо другим причинам. Также для краткости не будем указывать, что $n = 1, 2, \dots$

Выбор матрицы усиления $\Gamma(n)$ определяет тот или иной конкретный метод. Так, *скалярная матрица усиления*

$$\Gamma(n) = \Gamma = \begin{bmatrix} \gamma & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \gamma & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \gamma \end{bmatrix} = \gamma E, \quad \gamma > 0, \quad (1.5.3)$$

где E — единичная матрица, соответствует градиентному методу.
Диагональная матрица усиления

$$\Gamma(n) = \Gamma = \begin{bmatrix} \gamma_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \gamma_2 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \gamma_{N_c} \end{bmatrix}, \quad \gamma_\nu > 0, \quad \nu = 1, \dots, N_c, \quad (1.5.4)$$

соответствует псевдоградиентному методу. Матрица, равная обратной матрице Гессе вида

$$\Gamma(n) = [\nabla^2 J(c(n-1))]^{-1}, \quad (1.5.5)$$

соответствует *методу Ньютона*, а матрица вида

$$\Gamma(n) = [\nabla^2 J(c_0)]^{-1}, \quad (1.5.6)$$

где c_0 — начальное значение $c(n)$, отвечает *модифицированному методу Ньютона*.

Для того чтобы оценка $c(n)$, порождаемая алгоритмом (1.5.2), стремилась к оптимальному решению c^* при $n \rightarrow \infty$, должны быть выполнены определенные условия сходимости. Эти условия приводятся в руководствах по методам оптимизации и численному анализу, и мы их здесь воспроизвести не будем.

Блок-схема итеративного алгоритма (1.5.2) изображена на рис. 1.14. Она представляет собой автономную дискретную систему с обратной связью, состоящую из нелинейного преобразователя $\nabla J(c)$, матричного усилителя $\Gamma(n)$ и дискретного интегратора — *дигратора*. Дигратор состоит из элементов запаздывания, охваченных положительной обратной связью. Двойные стрелки на рис. 1.14 означают векторные связи, а зачерненная часть сумматора соответствует изменению знака.

Если средние потери квадратичны по c , то их градиент $\nabla J(c)$ будет линейной функцией c , а матрица усиления $\Gamma(n)$, определяемая обратной матрицей Гессе (1.5.5) или (1.5.6), не

будет зависеть от $c(n-1)$ или c_0 . В этом случае алгоритм (1.5.2), соответствующий *методу Ньютона — Рафсона*, приводит к оптимально-

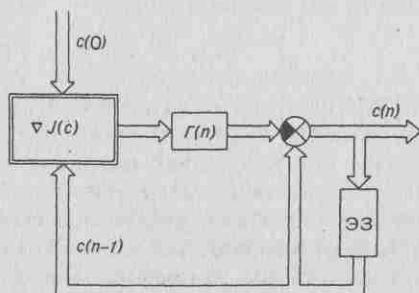


Рис. 1.14

му решению c^* за одну итерацию, или, иначе, за один шаг при любом начальном значении c_0 , т. е. $c(1) = c^*$. При ином выборе матрицы усиления $\Gamma(n)$ (1.5.3) или (1.5.4) и соблюдении условий сходимости $c(n)$ стремится к c^* при $n \rightarrow \infty$.

Особенность дискретной системы (рис. 1.14), соответствующей итеративному алгоритму (1.5.2), состоит в том, что она автономна. Это естественно, поскольку этот алгоритм использует полную априорную информацию и не требует какой-либо дополнительной информации. Итеративный алгоритм (1.5.2) непосредственно не может быть использован для определения оптимального решения c^* , если градиент средних потерь $\nabla J(c)$ не полностью определен, что бывает в часто возникающем на практике случае, когда нам не известна полностью плотность распределения помех и наблюдений. Поэтому широкое распространение получили *рекуррентные алгоритмы*, не требующие знания градиента средних потерь $\nabla J(c)$, а использующие *текущую информацию*, содержащуюся в наблюдениях. Эти рекуррентные алгоритмы тесно связаны с методом стохастической аппроксимации, который является фундаментом аддитивного подхода. Их особенность состоит в том, что вместо градиента средних потерь в них фигурирует градиент функций потерь $\nabla_c F[\varepsilon(z(n), c)]$, который непосредственно зависит от наблюдений $z(n)$. Рекуррентные алгоритмы можно представить в виде

$$c(n) = c(n-1) - \Gamma(n) \nabla_c F[\varepsilon(z(n), c(n-1))]. \quad (1.5.7)$$

Конкретный вид матрицы усиления определяет тот или иной метод стохастической аппроксимации.

Скалярная матрица усиления

$$\Gamma(n) = \begin{bmatrix} \gamma(n) & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \gamma(n) & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \gamma(n) \end{bmatrix} = \gamma(n) E, \quad \gamma(n) > 0, \quad (1.5.8)$$

соответствует градиентному методу стохастической аппроксимации. Диагональная матрица

$$\Gamma(n) = \begin{bmatrix} \gamma_1(n) & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \gamma_2(n) & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \gamma_{N_c}(n) \end{bmatrix}, \quad \gamma_\nu(n) > 0, \quad \nu = 1, \dots, N_c, \quad (1.5.9)$$

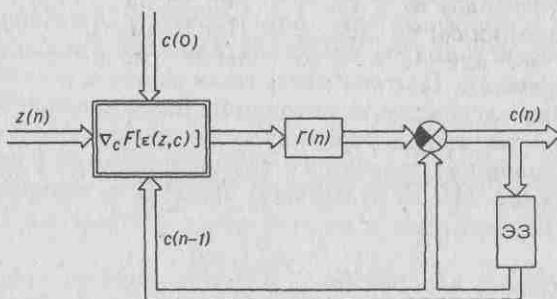


Рис. 1.15

соответствует псевдоградиентному методу стохастической аппроксимации. Наконец, случай

$$\Gamma(n) = \gamma(n) B, \quad (1.5.10)$$

в частности, при $\gamma(n) = 1/n$

$$\Gamma(n) = \frac{1}{n} B, \quad (1.5.11)$$

где $B > 0$ — положительно определенная матрица, также соответствует псевдоградиентному методу стохастической аппроксимации.

Скалярные множители $\gamma(n)$ в (1.5.8), (1.5.10), а также $\gamma_\nu(n)$, $\nu = 1, \dots, N_c$, в (1.5.9) должны удовлетворять условиям вида

$$\text{а) } \gamma_\nu(n) > 0, \quad \text{б) } \sum_{n=1}^{\infty} \gamma_\nu(n) = \infty, \quad \text{в) } \sum_{n=1}^{\infty} \gamma_\nu^2(n) < \infty, \quad (1.5.12)$$

которые обеспечивают сходимость рекуррентных алгоритмов (1.5.7) (т. е. сходимость в вероятностном смысле порождаемых ими оценок $c(n)$ к оптимальному решению c^*) для широкого класса функций потерь $F[\epsilon]$ и плотностей распределения помех $p_0(\xi)$. Условия (1.5.12) имеют ясный физический смысл. Они обеспечивают изменение оценки $c(n)$, порождаемой рекуррентным алгоритмом, в среднем в сторону антиградиента (условие а); уменьшение шага алгоритма не настолько быстрое, чтобы оценка $c(n)$ перестала изменяться при достижении некоторой произвольной точки (условие б), и не настолько медленное, чтобы оценка $c(n)$, достигнув оптимальной точки c^* , не смогла остановиться в ней (условие в). Этим условиям удовлетворяет, например, $\gamma_\nu(n) = \beta_\nu / n$.

Блок-схема рекуррентного алгоритма (1.5.7), приведенная на рис. 1.15, отличается от блок-схемы итеративного алгоритма (рис. 1.14)

функциональным преобразователем. Как видно из рис. 1.15, к функциональному преобразователю кроме обратной связи приложено еще и внешнее воздействие $z(n)$, представляющее собой наблюдения — текущую информацию. Поэтому дискретная система, соответствующая рекуррентному алгоритму, не автономна. Использование и обработка этой системой текущей информации позволяет компенсировать недостаток априорной информации и с течением времени получить оптимальное решение. Мы не будем здесь приводить полностью условия сходимости итеративных и рекуррентных алгоритмов идентификации.

В итеративных алгоритмах (1.5.2) используется предварительно накопленная и обработанная информация, по которой определяются градиент $\nabla J(c(n-1))$ или его оценки $\nabla \hat{J}_n(c(n-1))$. В рекуррентных же алгоритмах (1.5.7) используется текущая информация, фигурирующая в невязке $\varepsilon(z(n), c(n-1))$, а значит, и в градиенте функции потерь $\nabla_c F[\varepsilon(z(n), c(n-1))]$.

Известно огромное число как итеративных, так и рекуррентных алгоритмов идентификации, отличающихся друг от друга матрицей усиления $\Gamma(n)$. Поэтому естественно возникает задача выяснения влияния выбора матрицы усиления $\Gamma(n)$ на свойства алгоритма, а значит, и на свойства порождаемых им оценок. Важным показателем этих алгоритмов и порождаемых ими оценок, характеризующим их точность, является асимптотическая скорость сходимости оценок к оптимальному решению.

§ 1.6. Асимптотическая скорость сходимости алгоритмов

Точность оценок $c(n)$, порождаемых рекуррентными алгоритмами, можно характеризовать матрицей ковариаций ошибок (МКО):

$$V_n = M\{(c(n) - c^*)(c(n) - c^*)^T\} = M\{\delta(n) \delta^T(n)\}, \quad (1.6.1)$$

где

$$\delta(n) = c(n) - c^* \quad (1.6.2)$$

— вектор ошибки. В развернутой форме

$$V_n = \begin{bmatrix} M\{\delta_1(n) \delta_1(n)\} & \dots & M\{\delta_1(n) \delta_{N_c}(n)\} \\ M\{\delta_2(n) \delta_1(n)\} & \dots & M\{\delta_2(n) \delta_{N_c}(n)\} \\ \dots & \dots & \dots \\ M\{\delta_{N_c}(n) \delta_1(n)\} & \dots & M\{\delta_{N_c}(n) \delta_{N_c}(n)\} \end{bmatrix}, \quad (1.6.3)$$

где

$$\delta_k(n) = c_k(n) - c_k^* \quad (1.6.4)$$

— компоненты вектора ошибки. Диагональные элементы МКО равны дисперсиям компонент ошибки, а остальные, внедиагональные, элементы МКО — соответствующим значениям корреляционных функций ошибки.

Обозначим

$$V(n) = n V_n \quad (1.6.5)$$

и определим асимптотическую матрицу ковариаций ошибок (АМКО) как предел

$$V = \lim_{n \rightarrow \infty} V(n) = \lim_{n \rightarrow \infty} n V_n. \quad (1.6.6)$$

АМКО характеризует асимптотическую скорость сходимости рекуррентных алгоритмов. Найдем уравнение, которому удовлетворяет АМКО. Для этой цели составим разностное уравнение относительно $V(n)$. Приводимый далее вывод этого разностного уравнения носит эвристический характер и не претендует на строгость.

Пользуясь обозначением вектора ошибки (1.6.2), запишем рекуррентный алгоритм (1.5.7), (1.5.11)

$$c(n) = c(n-1) - \frac{1}{n} B \nabla_c F[\varepsilon(z(n), c(n-1))] \quad (1.6.7)$$

в такой форме:

$$\delta(n) = \delta(n-1) - \frac{1}{n} B \nabla_c F[\varepsilon(z(n), \delta(n-1) + c^*)]. \quad (1.6.8)$$

Выбор $\Gamma(n)$ в виде (1.5.11), как будет видно далее, позволяет обеспечить максимальную скорость сходимости.

Разлагая $\nabla_c F[\varepsilon(z(n), \delta(n-1) + c^*)]$ в степенной ряд в точке c^* и ограничиваясь линейным приближением по $\delta(n-1)$, получим приближенно

$$\delta(n) = \delta(n-1) - \frac{1}{n} B \{ \nabla_c F[\varepsilon(z(n), c^*)] + \nabla_c^2 F[\varepsilon(z(n), c^*)] \delta(n-1) \}. \quad (1.6.9)$$

Но при $c = c^*$ из (1.4.19) следует

$$\nabla_c F[\varepsilon(z(n), c^*)] = \nabla_c F[\xi(n)] = \nu(n), \quad (1.6.10)$$

причем в силу четности функции потерь F (1.4.2) и плотности распределения помехи (1.2.40)

$$M\{\nu(n)\} = 0, \quad n = 1, 2, \dots \quad (1.6.11)$$

Подставляя (1.6.10) в (1.6.9), получим

$$\delta(n) = \left[E - \frac{1}{n} B \nabla_c^2 F[\varepsilon(z(n), c)] \right] \delta(n-1) - \frac{1}{n} B \nu(n). \quad (1.6.12)$$

Умножив обе части этого уравнения на \sqrt{n} и обозначив

$$\eta(n) = \sqrt{n} \delta(n), \quad (1.6.13)$$

приходим к уравнению

$$\eta(n) = \left[E - \frac{1}{n} B \nabla_c^2 F[\varepsilon(z(n), c)] \right] \sqrt{\frac{n}{n-1}} \eta(n-1) - \frac{1}{\sqrt{n}} B \nu(n). \quad (1.6.14)$$

Но при достаточно больших n приближенно

$$\sqrt{\frac{n}{n-1}} \approx 1 + \frac{1}{2n}.$$

Производя эту замену в (1.6.14) и пренебрегая слагаемыми порядка $o(1/n)$, получим

$$\eta(n) = \left[E - \frac{1}{n} B \nabla_c^2 F[\varepsilon(z(n), c)] + \frac{1}{2n} E \right] \eta(n-1) - \frac{1}{\sqrt{n}} B \nu(n). \quad (1.6.15)$$

Но согласно (1.6.5)

$$V(n) = n V_n = M\{\eta(n) \eta^\top(n)\}. \quad (1.6.16)$$

Подставляя в (1.6.16) $\eta(n)$ из (1.6.15), учитывая некоррелированность $\nu(n)$ (1.6.10) и $\eta(n-1)$, четность функции потерь и пренебрегая слагаемыми порядка $o(1/n)$, после несложных преобразований получим

$$\begin{aligned} V(n) = V(n-1) - \frac{1}{n} \left\{ \left[B \nabla^2 J(c^*) - \frac{1}{2} E \right] V(n+1) + \right. \\ \left. + V(n-1) \left[B \nabla^2 J(c^*) - \frac{1}{2} E \right]^\top - B R B^\top \right\}. \quad (1.6.17) \end{aligned}$$

Отметим, что здесь также предполагалось, что

$$M\{\|\nabla_c^2 F[\xi(n)]\|^2\} < \infty.$$

Матрица R представляет собой *полную информационную матрицу*

$$R = M\{\nu(n) \nu^\top(n)\}, \quad (1.6.18)$$

и, согласно (1.4.5),

$$\nabla^2 J(c^*) = M\{\nabla_c^2 F[\varepsilon(z(n), c^*)]\}. \quad (1.6.19)$$

Соотношение (1.6.17) представляет собой матричный рекуррентный алгоритм, решающий линейное матричное уравнение

$$\left[\frac{1}{2} E - B \nabla^2 J(c^*) \right] V + V \left[\frac{1}{2} E - B \nabla^2 J(c^*) \right]^\top = -B R B^\top. \quad (1.6.20)$$

Для его сходимости достаточно потребовать, чтобы все собственные числа матрицы

$$G = \frac{1}{2}E - B\nabla^2J(c^*) \quad (1.6.21)$$

имели отрицательные действительные части, т. е. чтобы эта матрица была устойчивой. Далее всегда будет предполагаться, что это условие выполняется.

Для полного определения матричного уравнения АМКО осталось вычислить матрицу R (1.6.18) и матрицу Гессе $\nabla^2J(c^*)$ (1.6.19). Замечая, что в силу (1.4.14)

$$\nabla_c F[\varepsilon(\mathbf{z}(n), c)] = -F'[\varepsilon(\mathbf{z}(n), c)] \nabla_c f(\mathbf{x}(n), c), \quad (1.6.22)$$

получаем из (1.6.10) при $c = c^*$ с учетом (1.4.19)

$$\nu(n) = -F'[\xi(n)] \nabla_c f(\mathbf{x}(n), c^*). \quad (1.6.23)$$

Подставляя $\nu(n)$ из (1.6.23) в выражение для полной информационной матрицы R (1.6.18), получим

$$R = M\{F'^2[\xi(n)] \nabla_c f(\mathbf{x}(n), c^*) \nabla_c^\top f(\mathbf{x}(n), c^*)\} \quad (1.6.24)$$

или, в силу независимости $\xi(n)$ и $\mathbf{x}(n)$,

$$R = M\{F'^2[\xi(n)]\} M\{\nabla_c f(\mathbf{x}(n), c^*) \nabla_c^\top f(\mathbf{x}(n), c^*)\}. \quad (1.6.25)$$

Матрицу

$$A(c^*, \sigma^2(p_0)) = M\{\nabla_c f(\mathbf{x}(n), c^*) \nabla_c^\top f(\mathbf{x}(n), c^*)\} \quad (1.6.26)$$

назовем *нормированной информационной матрицей*. Она в общем случае, как это будет показано далее, зависит от дисперсии помех $\sigma_\xi^2 = \sigma^2(p_0)$ и оптимального решения c^* . Таким образом,

$$R = M\{F'^2[\xi(n)]\} A(c^*, \sigma^2(p_0)). \quad (1.6.27)$$

Далее, из (1.6.22) легко получить, что

$$\begin{aligned} \nabla_c^2 F[\varepsilon(\mathbf{z}(n), c)] &= F''[\varepsilon(\mathbf{z}(n), c)] \nabla_c f(\mathbf{x}(n), c) \nabla_c^\top f(\mathbf{x}(n), c) - \\ &\quad - F'[\varepsilon(\mathbf{z}(n), c)] \nabla_c^2 f(\mathbf{x}(n), c). \end{aligned} \quad (1.6.28)$$

Подставляя $\nabla_c^2 F[\varepsilon(\mathbf{z}(n), c)]$ при $c = c^*$ в (1.6.19), получим

$$\begin{aligned} \nabla^2 J(c^*) &= M\{F''[\varepsilon(\mathbf{z}(n), c^*)] \nabla_c f(\mathbf{x}(n), c^*) \nabla_c^\top f(\mathbf{x}(n), c^*)\} - \\ &\quad - M\{F'[\varepsilon(\mathbf{z}(n), c^*)] \nabla_c^2 f(\mathbf{x}(n), c^*)\}. \end{aligned} \quad (1.6.29)$$

Учитывая (1.4.19), независимость $\xi(n)$ и $\mathbf{x}(n)$, получим

$$\nabla^2 J(\mathbf{c}^*) = \mathbf{M}\{F''[\xi(n)]\} \mathbf{M}\{\nabla_{\mathbf{c}} f(\mathbf{x}(n), \mathbf{c}^*) \nabla_{\mathbf{c}}^T f(\mathbf{x}(n), \mathbf{c}^*)\}. \quad (1.6.30)$$

Используя обозначение нормированной информационной матрицы (1.6.26), окончательно получаем

$$\nabla^2 J(\mathbf{c}^*) = \mathbf{M}\{F''[\xi(n)]\} A(\mathbf{c}^*, \sigma^2(p_0)). \quad (1.6.31)$$

Подставляя выражения R (1.6.27) и $\nabla^2 J(\mathbf{c}^*)$ (1.6.31) в уравнение АМКО (1.6.20), запишем его в такой форме:

$$\begin{aligned} GV + VG^T &= -B \mathbf{M}\{F'^2[\xi(n)]\} A(\mathbf{c}^*, \sigma^2(p_0)) B^T, \\ G &= \frac{1}{2} E - B \mathbf{M}\{F''[\xi(n)]\} A(\mathbf{c}^*, \sigma^2(p_0)). \end{aligned} \quad (1.6.32)$$

В уравнении АМКО фигурирует нормированная информационная матрица $A(\mathbf{c}^*, \sigma^2(p_0))$ (1.6.26). Она играет важную роль в задачах идентификации. Поэтому рассмотрим ее подробнее.

После выполнения несложных, но громоздких преобразований, которые мы здесь опускаем, нормированную информационную матрицу можно представить в виде блочной 3×3 -матрицы:

$$A(\mathbf{c}^*, \sigma^2(p_0)) =$$

$$= \begin{bmatrix} T_{11}(\mathbf{c}^*) \sigma_u^2 + T_{12}(\mathbf{c}^*) \bar{u}^2 + T_{13}(\mathbf{a}^*, \mathbf{d}^*) \sigma^2(p_0) & T_{14}(\mathbf{c}^*) \sigma_u^2 + T_{15}(\mathbf{c}^*) \bar{u}^2 & T_{16}(\mathbf{a}^*, \mathbf{d}^*) \sigma^2(p_0) \\ T_{14}^T(\mathbf{c}^*) \sigma_u^2 + T_{15}^T(\mathbf{c}^*) \bar{u}^2 & T_{22}(\mathbf{d}^*) \sigma_u^2 + T_{23}(\mathbf{d}^*) \bar{u}^2 & 0 \\ T_{16}^T(\mathbf{a}^*, \mathbf{d}^*) \sigma^2(p_0) & 0 & T_{33}(\mathbf{d}^*) \sigma^2(p_0) \end{bmatrix}, \quad (1.6.33)$$

где $\mathbf{c}^* = (\mathbf{a}^*, \mathbf{b}^*, \mathbf{d}^*)$ — вектор оптимального решения, \bar{u}^2, σ_u^2 — среднее значение и дисперсия входного воздействия $u(n)$, $\sigma^2(p_0)$ — дисперсия помех, а T_{km} — прямоугольные матрицы, не зависящие от характеристик помех $\xi(n)$ и входных воздействий $u(n)$. Если в уравнении объекта какие-либо векторы коэффициентов \mathbf{a}^* , \mathbf{b}^* или \mathbf{d}^* отсутствуют, т. е. равны нулю, то в нормированных информационных матрицах исключаются соответствующие строки и столбцы и размерность блочной матрицы уменьшается. Конкретный вид матриц T_{km} будет приведен далее.

Рассмотрим частные случаи. Для Р-объекта с простой помехой $\mathbf{a}^* = \mathbf{d}^* = 0$, и из (1.6.33) следует

$$A(\mathbf{c}^*, \sigma^2(p_0)) = A_1 = T_{22}(0) \sigma_u^2 + T_{23}(0) \bar{u}^2. \quad (1.6.34)$$

В этом случае нормированная информационная матрица не зависит от дисперсии помехи $\sigma^2(p_0)$ и вектора оптимального решения $\mathbf{c}^* = \mathbf{b}^*$.

Для Р-объекта с преобразованной помехой $\mathbf{a}^* = 0$, и из (1.6.33) следует

$$A(\mathbf{c}^*, \sigma^2(p_0)) = \left[\begin{array}{c|c} T_{22}(\mathbf{d}^*) \sigma_u^2 + T_{23}(\mathbf{d}^*) \bar{u}^2 & 0 \\ \hline 0 & T_{33}(\mathbf{d}^*) \sigma^2(p_0) \end{array} \right]. \quad (1.6.35)$$

Эту нормированную информационную матрицу можно записать в виде

$$A(\mathbf{c}^*, \sigma^2(p_0)) = A_2(\mathbf{d}^*) + \sigma^2(p_0) A_3(\mathbf{d}^*), \quad (1.6.36)$$

где

$$A_2(\mathbf{d}^*) = \left[\begin{array}{c|c} T_{22}(\mathbf{d}^*) \sigma_u^2 + T_{23}(\mathbf{d}^*) \bar{u}^2 & 0 \\ \hline 0 & 0 \end{array} \right] \quad (1.6.37)$$

и

$$A_3(\mathbf{d}^*) = \left[\begin{array}{c|c} 0 & 0 \\ \hline 0 & T_{33}(\mathbf{d}^*) \end{array} \right]. \quad (1.6.38)$$

При этом $\mathbf{c}^* = (\mathbf{b}^*, \mathbf{d}^*)$. Для Р-объекта с преобразованной помехой нормированная информационная матрица зависит от компонент вектора оптимального решения \mathbf{d}^* и линейно от дисперсии помехи $\sigma^2(p_0)$.

Для АР-объекта $\mathbf{b}^* = 0$, $\bar{u} = 0$, $\sigma_u^2 = 0$. Поэтому из (1.6.33) получаем

$$A(\mathbf{c}^*, \sigma^2(p_0)) = \sigma^2(p_0) A_4(\mathbf{c}^*), \quad (1.6.39)$$

где $\mathbf{c}^* = (\mathbf{a}^*, \mathbf{d}^*)$ и

$$A_4(\mathbf{c}^*) = \left[\begin{array}{c|c} T_{13}(\mathbf{a}^*, \mathbf{d}^*) & T_{16}(\mathbf{a}^*, \mathbf{d}^*) \\ \hline T_{16}^\top(\mathbf{a}^*, \mathbf{d}^*) & T_{33}(\mathbf{d}^*) \end{array} \right]. \quad (1.6.40)$$

Для АР-объекта нормированная информационная матрица пропорциональна дисперсии помехи $\sigma^2(p_0)$ и зависит от вектора оптимального решения $\mathbf{c}^* = (\mathbf{a}^*, \mathbf{d}^*)$.

Наконец, для РАР-объекта нормированную информационную матрицу можно представить в виде

$$A(\mathbf{c}^*, \sigma^2(p_0)) = A_5(\mathbf{c}^*) + \sigma^2(p_0) A_6(\mathbf{c}^*), \quad (1.6.41)$$

где

$$A_5(c^*) = \begin{bmatrix} T_{11}(c^*) \sigma_u^2 + T_{12}(c^*) \bar{u}^2 & T_{14}(c^*) \sigma_u^2 + T_{15}(c^*) \bar{u}^2 & 0 \\ T_{14}^\top(c^*) \sigma_u^2 + T_{15}^\top(c^*) \bar{u}^2 & T_{22}(d^*) \sigma_u^2 + T_{23}(d^*) \bar{u}^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}. \quad (1.6.42)$$

и

$$A_6(c^*) = \begin{bmatrix} T_{13}(a^*, d^*) & 0 & T_{16}(a^*, d^*) \\ 0 & 0 & 0 \\ T_{16}^\top(a^*, d^*) & 0 & T_{33}(d^*) \end{bmatrix}. \quad (1.6.43)$$

Для РАР-объекта, так же как и для Р-объекта с преобразованной помехой, нормированная информационная матрица линейно зависит от дисперсии помехи $\sigma^2(p_0)$.

Примеры нормированных информационных матриц для простейших объектов при $\bar{u} = 0$ приведены в табл. 1.1.

Матричное уравнение (1.6.32) определяет АМКО $V = V(B)$ алгоритмов стохастической аппроксимации (1.6.7) при заданной матрице B , т. е. при заданной матрице усиления $\Gamma(n) = \frac{1}{n}B$. Оно может быть использовано для исследования влияния выбора той или иной матрицы B на асимптотическую скорость сходимости алгоритмов стохастической аппроксимации.

К сожалению, в общем случае уравнение АМКО не разрешимо. Однако для ряда важных частных случаев его можно решить и найти явное выражение АМКО. Далее этой возможностью мы и воспользуемся.

§ 1.7. Оптимальные алгоритмы идентификации

Алгоритмы стохастической аппроксимации (1.6.7) с учетом выражения градиента $\nabla_c F[\varepsilon]$ (1.4.11) и (1.4.14) могут быть представлены в виде

$$c(n) = c(n-1) + \frac{1}{n} B F'[\varepsilon(z(n), c(n-1))] \nabla_c f(x(n), c(n-1)). \quad (1.7.1)$$

Важной характеристикой этих алгоритмов является их асимптотическая скорость сходимости, характеризуемая АМКО $V = V(B)$. Асимптотическая скорость сходимости существенно зависит от матрицы B . Назовем алгоритм стохастической аппроксимации (1.7.1) *оптимальным по асимптотической скорости сходимости* при $B = B_0$,

Таблица 1.1

Нормированная информационная матрица $A(c^*, \sigma^2(p_0))$
для простейших объектов

Тип объекта	Уравнение объекта	$A(c^*, \sigma^2(p_0))$
PAP	$y(n) = -a^*y(n-1) + b^*u(n) + \xi(n)$	$\begin{bmatrix} \frac{\sigma^2(p_0)}{1-a^{*2}} + \frac{b^{*2}\sigma_u^2}{1-a^{*2}} & 0 \\ 0 & \sigma_u^2 \end{bmatrix}$
AP	$y(n) = -a^*y(n-1) + \xi(n)$	$\frac{\sigma^2(p_0)}{1-a^{*2}}$
P	$y(n) = b^*u(n) + \xi(n)$	σ_u^2
P	$y(n) = b^*u(n) + \xi(n) + d^*\xi(n-1)$	$\begin{bmatrix} \frac{\sigma_u^2}{1-d^{*2}} & 0 \\ 0 & \frac{\sigma^2(p_0)}{1-d^{*2}} \end{bmatrix}$
P	$y(n) = b^* + \xi(n)$	1
P	$y(n) = b^* + \xi(n) + d^*\xi(n-1)$	$\begin{bmatrix} \frac{1}{(1+d^*)^2} & 0 \\ 0 & \frac{\sigma^2(p_0)}{1-d^{*2}} \end{bmatrix}$

если соответствующая ему АМКО $V(B_0)$ минимальна, т. е. если

$$V(B) \geq V(B_0) \quad \forall B > 0. \quad (1.7.2)$$

Здесь и далее такое матричное неравенство означает, что $V(B) - V(B_0) \geq 0$, т. е. разность $V(B) - V(B_0)$ неотрицательно определена. Напомним, что матрицы $V(B)$ квадратные и симметричные.

Часто алгоритм (1.7.1) при $B = B_0$ называется *асимптотически оптимальным*. Однако поскольку далее оптимальность алгоритмов в каком-либо ином смысле не рассматривается, если это специально не оговорено, то алгоритм (1.7.1) при $B = B_0$ для краткости и удобства будем называть просто *оптимальным*.

Исходя из уравнения (1.6.32), найдем матрицу $B = B_0$, минимизи-

рующую АМКО $V(B)$. Положим

$$B = B_0 + \lambda \delta B, \quad (1.7.3)$$

где B_0 — оптимальная матрица, δB — вариация, λ — параметр. Обозначим

$$\begin{aligned} \Phi(\lambda) &= V(B_0 + \lambda \delta B), \\ G(\lambda) &= G - \lambda \delta B \nabla^2 J(c^*), \end{aligned} \quad (1.7.4)$$

где $G = \frac{1}{2} E - B_0 \nabla^2 J(c^*)$. Тогда уравнение АМКО (1.6.32) запишется в виде

$$\begin{aligned} G \Phi(\lambda) + \Phi(\lambda) G^\top - \lambda [\delta B \nabla^2 J(c^*) \Phi(\lambda) + \Phi(\lambda) [\delta B \nabla^2 J(c^*)]^\top] &= \\ = -(B_0 + \lambda \delta B) M\{F'^2[\xi(n)]\} A(c^*, \sigma^2(p_0)) (B_0 + \lambda \delta B)^\top. \end{aligned} \quad (1.7.5)$$

Условие минимума АМКО можно представить в виде

$$\Phi'(\lambda)|_{\lambda=0} = \Phi'(0) = 0 \quad \forall \delta B. \quad (1.7.6)$$

Дифференцируя обе части уравнения АМКО (1.7.5) по λ и полагая затем $\lambda = 0$, получим

$$\begin{aligned} \delta B [M\{F''[\xi(n)]\} A(c^*, \sigma^2(p_0)) \Phi(0) - \\ - M\{F'^2[\xi(n)]\} A(c^*, \sigma^2(p_0)) B_0^\top] + [\Phi(0) M\{F''[\xi(n)]\} A(c^*, \sigma^2(p_0)) - \\ - B_0 M\{F'^2[\xi(n)]\} A(c^*, \sigma^2(p_0))] \delta B^\top &= 0. \end{aligned} \quad (1.7.7)$$

Это условие должно выполняться для всех вариаций δB .

Нетрудно видеть, что условие (1.7.7) будет выполняться для любых δB при обращении в нуль выражений в квадратных скобках. Отсюда находим

$$\Phi(0) = V(B_0) = \frac{M\{F'^2[\xi(n)]\}}{M\{F''[\xi(n)]\}} B_0^\top. \quad (1.7.8)$$

Для определения оптимальной матрицы B_0 представим $\Phi(0) = V(B_0)$ (1.7.8) в уравнение АМКО (1.6.32) или, что то же, в уравнение (1.7.5) при $\lambda = 0$; тогда после несложных, но несколько громоздких преобразований находим

$$B_0 = B_0^\top = \frac{1}{M\{F''[\xi(n)]\}} A^{-1}(c^*, \sigma^2(p_0)), \quad (1.7.9)$$

и, значит,

$$V(B_0) = \frac{M\{F'^2[\xi(n)]\}}{[M\{F''[\xi(n)]\}]^2} A^{-1}(c^*, \sigma^2(p_0)). \quad (1.7.10)$$

Подставляя оптимальную матрицу B_0 (1.7.9) в алгоритм (1.7.1), получаем оптимальный алгоритм идентификации

$$c(n) = c(n-1) + \Gamma_A(n) F'[\varepsilon(\mathbf{z}(n), c(n-1))] \nabla_{\mathbf{c}} f(\mathbf{x}(n), c(n-1)), \quad (1.7.11)$$

где

$$\Gamma_A(n) = \frac{1}{n \mathbb{M}[F''[\xi(n)]]} A^{-1}(c^*, \sigma^2(p_0)). \quad (1.7.12)$$

АМКО этого оптимального алгоритма минимальна и определяется выражением (1.7.10).

Матрица усиления $G_A(n)$ (1.7.12) в общем случае зависит от оптимального решения c^* , а также от плотности распределения помех $p_0(\xi)$, фигурирующей в $M\{F''[\xi(n)]\}$, и дисперсии помех $\sigma^2(p_0)$. Поэтому, даже если плотность распределения помех $p_0(\xi)$ и дисперсия $\sigma^2(p_0)$ известны, оптимальный алгоритм (1.7.11), (1.7.12) реализовать невозможно.

Для обхода этой трудности заменим в нормированной информационной матрице $A(c^*, \sigma^2(p_0))$ оптимальное решение c^* его оценкой $c(n-1)$ и образуем матрицу усиления

$$\Gamma_{A_1}(n) = \frac{1}{n \mathbf{M}\{F''[\xi(n)]\}} A^{-1}(c(n-1), \sigma^2(p_0)). \quad (1.7.13)$$

Тогда мы приходим к реализуемому оптимальному алгоритму

$$c(n) = c(n-1) + \Gamma_{A_1}(n) F'[\varepsilon(x(n), c(n-1))] \nabla_c f(x(n), c(n-1)). \quad (1.7.14)$$

Блок-схема, соответствующая этому реализуемому оптимальному алгоритму, изображена на рис. 1.16. Она не автономна и использует

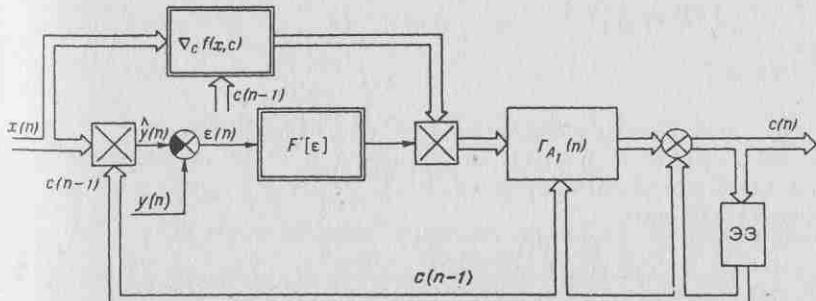


Рис. 1.16

текущую информацию $z(n) = (y(n), x(n))$ наряду с оценкой $c(n-1)$ — сигналом обратной связи.

Для образования матрицы усиления $\hat{\Gamma}_{A_1}(n)$ в этой блок-схеме необходимо предварительно осуществить операцию обращения нормированной информационной матрицы $A(c(n-1), \sigma^2(p_0))$. Для устранения этой громоздкой операции заменим $A(c^*, \sigma^2(p_0))$ ее выборочной, или эмпирической оценкой

$$\hat{A}_n(\mathbf{x}, c^*) = \frac{1}{n} \sum_{m=1}^n \nabla_{\mathbf{c}} f(\mathbf{x}(m), c^*) \nabla_{\mathbf{c}}^T f(\mathbf{x}(m), c^*). \quad (1.7.15)$$

Тогда оценка матрицы усиления $\hat{\Gamma}_A(n)$ (1.7.12) запишется в виде

$$\begin{aligned} \hat{\Gamma}_A(n) &= \frac{1}{n \mathbf{M}\{F''[\xi(n)]\}} \hat{A}_n^{-1}(\mathbf{x}, c^*) = \\ &= \left[\mathbf{M}\{F''[\xi(n)]\} \sum_{m=1}^n \nabla_{\mathbf{c}} f(\mathbf{x}(m), c^*) \nabla_{\mathbf{c}}^T f(\mathbf{x}(m), c^*) \right]^{-1}. \end{aligned} \quad (1.7.16)$$

Для того чтобы избежать многократного обращения матриц на каждом шаге n , воспользуемся леммой об обращении квадратных матриц. Если квадратная матрица имеет вид

$$T(n) = \left[\varkappa \sum_{m=1}^n \mathbf{t}(m) \mathbf{t}^T(m) + U \right]^{-1}, \quad (1.7.17)$$

где \varkappa — скаляр, $\mathbf{t}(m)$ — вектор, U — постоянная квадратная матрица той же размерности, что $T(n)$, то

$$\begin{aligned} T(n) &= T(n-1) - \frac{T(n-1) \mathbf{t}(n) \mathbf{t}^T(n) T(n-1)}{\varkappa^{-1} + \mathbf{t}^T(n) T(n-1) \mathbf{t}(n)}, \\ T(0) &= U^{-1}. \end{aligned} \quad (1.7.18)$$

Полагая

$$\begin{aligned} \mathbf{t}(m) &= \nabla_{\mathbf{c}} f(\mathbf{x}(m), c^*), \quad \varkappa = \mathbf{M}\{F''[\xi(n)]\}, \\ U &= 0E, \quad T(n) = \hat{\Gamma}_{A_1}(n), \end{aligned} \quad (1.7.19)$$

получим из (1.7.16), после замены c^* оценкой $c(n-1)$,

$$\begin{aligned} \hat{\Gamma}_{A_1}(n) &= \hat{\Gamma}_{A_1}(n-1) - \\ &- \frac{\hat{\Gamma}_{A_1}(n-1) \nabla_{\mathbf{c}} f(\mathbf{x}(n), c(n-1)) \nabla_{\mathbf{c}}^T f(\mathbf{x}(n), c(n-1)) \hat{\Gamma}(n-1)}{\mathbf{M}\{F''[\xi(n)]\}^{-1} + \nabla_{\mathbf{c}}^T f(\mathbf{x}(n), c(n-1)) \hat{\Gamma}_{A_1}(n-1) \nabla_{\mathbf{c}} f(\mathbf{x}(n), c(n-1))}, \\ \hat{\Gamma}_{A_1}(0) &= \infty E. \end{aligned} \quad (1.7.20)$$

Начальное значение $\widehat{\Gamma}_{A_1}(0)$ вместо ∞E обычно берут равным скалярной матрице

$$\widehat{\Gamma}_{A_1}(0) = \gamma E, \quad \gamma \gg 1. \quad (1.7.21)$$

Таким образом, реализуемый оптимальный алгоритм представится в виде

$$c(n) = c(n-1) + \widehat{\Gamma}_{A_1}(n) F'[\varepsilon(\mathbf{z}(n), c(n-1))] \nabla_c f(\mathbf{x}(n), c(n-1)), \quad (1.7.22)$$

где матрица усиления $\widehat{\Gamma}_{A_1}(n)$ определяется рекуррентным соотношением (1.7.20).

В такой форме алгоритмы (1.7.22), (1.7.20) вряд ли стоит реализовывать. Дело в том, что член $\nabla_c f(\mathbf{x}(n), c(n-1))$ в явной форме в этих алгоритмах не определен. Поэтому важно получить такую форму реализуемых алгоритмов, которая не требовала бы дополнительных пояснений и содержала бы все необходимое для реализации алгоритмов. Для этой цели достаточно воспользоваться определением вектора коэффициентов чувствительности (1.4.22) $v(n) = \nabla_c f(\mathbf{x}(n), c(n-1))$, который удовлетворяет разностному уравнению (1.4.26) при замене в нем d_m на оценку $d_m(n-1)$:

$$v(n) = \mathbf{x}(n) - \sum_{m=1}^N d_m(n-1) v(n-m). \quad (1.7.23)$$

Производя замену в (1.7.22) и (1.7.20) $\nabla_c f(\mathbf{x}(n), c(n-1))$ на $v(n)$, окончательно запишем реализуемый оптимальный алгоритм в виде совокупности трех рекуррентных процедур:

$$\begin{aligned} c(n) &= c(n-1) + \widehat{\Gamma}_{A_1}(n) F'_*[\varepsilon(\mathbf{z}(n), c(n-1))] v(n), \\ c(0) &= c_0, \end{aligned} \quad (1.7.24)$$

$$v(n) = \mathbf{x}(n) - \sum_{m=1}^N d_m(n-1) v(n-m), \quad (1.7.25)$$

$$v(m) = 0, \quad m = 0, -1, \dots, 1 - N,$$

$$\begin{aligned} \widehat{\Gamma}_{A_1}(n) &= \widehat{\Gamma}_{A_1}(n-1) - \frac{\widehat{\Gamma}_{A_1}(n-1) v(n) v^T(n) \widehat{\Gamma}_{A_1}(n-1)}{M\{F''[\xi(n)]\}^{-1} + v^T(n) \widehat{\Gamma}(n-1) v(n)}, \\ \widehat{\Gamma}_{A_1}(0) &= \gamma E, \quad \gamma \gg 1. \end{aligned} \quad (1.7.26)$$

Блок-схема этого реализуемого оптимального алгоритма изображена на рис. 1.17. По сравнению с рис. 1.16 она содержит дополнительное устройство формирования оценки матрицы усиления $\widehat{\Gamma}_{A_1}(n)$ по

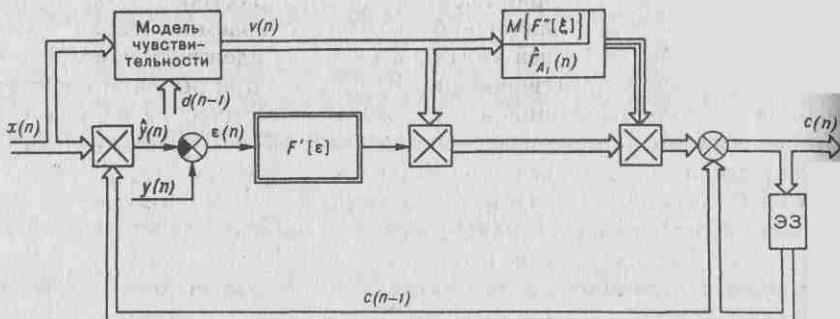


Рис. 1.17

наблюдениям $\mathbf{z}(n)$ и, возможно, по оценкам $d_m(n-1)$. Здесь уже появляется матричная связь. Она на блок-схеме обозначена тройными линиями. Заметим также, что в левом верхнем углу блока формирования $\hat{\mathbf{G}}_{A_1}(n)$ указана величина $\mathbf{M}\{F''[\xi(n)]\}$, входящая в правую часть (1.7.26). Этим обозначением мы будем пользоваться и далее.

Приведенные оптимальные алгоритмы обеспечивают максимальную асимптотическую скорость сходимости оценок, которая может быть достигнута в алгоритмах типа стохастической аппроксимации путем выбора соответствующей матрицы усиления. В отличие от обычных алгоритмов метода стохастической аппроксимации (1.5.7), (1.5.8) формирование оптимальных алгоритмов требует, вообще говоря, знания плотности распределения помехи $p_0(\xi)$ для вычисления фигурирующей в $\widehat{\Gamma}_A(n)$ (1.7.16), $\widehat{\Gamma}_{A_1}(n)$ (1.7.20) величины

$$M\{F''[\xi(n)]\} = \int_{-\infty}^{\infty} p_0(\xi) F''[\xi] d\xi$$

(если функция $F[\xi]$ отлична от квадратичной), а в $\Gamma_{A_1}(n)$ (1.7.13) также и дисперсии помехи $\sigma^2(p_0) = M\{\xi^2(n)\}$. Это свидетельствует о том, что оптимальность здесь достигается за счет учета в алгоритмах априорной информации о помехе.

§ 1.8. Заключение

В этой главе была кратко изложена, может быть, в несколько упорядоченной форме, современная теория идентификации линейных динамических объектов, а также введено понятие оптимальности и построена оптимальная настраиваемая модель.

Для современной теории идентификации характерен большой произвол в выборе для заданного объекта настраиваемой модели, функции потерь, определяющей критерий качества идентификации, и особенно алгоритмов идентификации. Чаще всего при решении конкретных задач идентификации использовались статические настраиваемые модели и квадратичные функции потерь. Это существенно упрощало решение задачи идентификации. Обоснованием выбора квадратичной функции потерь часто служила инвариантность оптимального решения относительно симметричных функций потерь. Однако такой произвол в выборе модели, критерия и алгоритмов далеко не всегда приводил к хорошим или даже сколь-нибудь приемлемым результатам. Так, алгоритмы типа стохастической аппроксимации со скалярными матрицами усиления слишком медленно сходятся.

Уменьшение произвола за счет использования оптимальной настраиваемой модели и учета априорной информации о помехе в матрице усиления позволило получить оптимальные алгоритмы, обладающие максимальной в этих условиях скоростью сходимости. Возникает вопрос: предельна ли эта максимальная скорость сходимости или ее еще можно увеличить? Ответу на этот вопрос посвящены главы 2 и 3.

Как показывает опыт, в ряде случаев оптимальные алгоритмы не оправдывают возлагавшихся на них надежд: на практике они не только не оказываются быстро сходящимися, но и могут расходиться. Возникает задача объяснения такого поведения рекуррентных алгоритмов идентификации, разработки путей устранения этих недостатков и дальнейшего совершенствования алгоритмов идентификации. Решение этой задачи возможно лишь на основе учета имеющейся в нашем распоряжении априорной информации об объекте, помехе и оптимальном решении, какого бы уровня она ни была. Этому посвящены последующие главы 4 — 6.

Где нет ответа — нет и вопроса.
A. Витгенштейн

ГЛАВА 2

Оптимальные функции потерь

§ 2.1. Эмпирические средние потери и оценки оптимального решения

Под эмпирическими средними потерями подразумевается среднее арифметическое функций потерь от невязок для всех наблюдений, полученных к моменту n :

$$\hat{J}_n(c) = \frac{1}{n} \sum_{m=1}^n F[\varepsilon(\mathbf{z}(m), c)]. \quad (2.1.1)$$

Эмпирические средние потери $\hat{J}_n(c)$ получаются из средних потерь (1.4.1)

$$J(c) = M\{F[\varepsilon(\mathbf{z}(n), c)]\} \quad (2.1.2)$$

при замене плотности распределения $p\{\mathbf{z}(n)|c\}$ на эмпирическую плотность распределения

$$\hat{p}_n(\mathbf{z}) = \frac{1}{n} \sum_{m=1}^n \delta(\mathbf{z} - \mathbf{z}(m)), \quad (2.1.3)$$

где $\delta(z)$ — функция Дирака: $\delta(z) = 0$ при $z \neq 0$, $\delta(z) = \infty$ при $z = 0$ и $\int \delta(z) dz = 1$.

Назовем оптимальной выборочной оценкой такую оценку $\hat{c}(n)$, для которой при каждом n эмпирические средние потери (2.1.1) минимальны. Оптимальная выборочная оценка

$$\hat{c}(n) = \arg \min_c \hat{J}_n(c) \quad (2.1.4)$$

удовлетворяет условию оптимальности, которое для эмпирических средних потерь имеет вид

$$\nabla \hat{J}_n(\hat{c}(n)) = 0, \quad n = 1, 2, \dots, \quad (2.1.5)$$

где, принимая во внимание (1.4.14), градиент эмпирических средних потерь равен

$$\nabla \hat{J}_n(c) = \frac{1}{n} \sum_{m=1}^n \nabla_c F[\varepsilon(\mathbf{z}(m), c)] = -\frac{1}{n} \sum_{m=1}^n F'[\varepsilon(\mathbf{z}(m), c)] \nabla_c f(\mathbf{x}(m), c). \quad (2.1.6)$$

Условие оптимальности лежит в основе как методов исследования свойств оценки $\hat{c}(n)$, так и методов фактического определения ее.

Далее мы будем рассматривать лишь такие ситуации, когда оптимальное решение c^* и его оптимальная выборочная оценка единственны, не оговаривая этого каждый раз.

При некоторых предположениях, касающихся гладкости функций потерь и выпуклости функций эмпирических средних потерь, а также устойчивости идентифицируемых объектов, имеет место сходимость в вероятностном смысле эмпирических средних потерь $\hat{J}_n(c)$ к средним потерям $J(c)$ и оптимальной выборочной оценки $c(n)$ к оптимальному решению c^* . Различают сходимость по вероятности, в среднеквадратичном и почти наверное, или с вероятностью единица.

Для эмпирических средних потерь при выполнении условий усиленного закона больших чисел имеет место сходимость почти наверное, т. е.

$$P\left\{ \lim_{n \rightarrow \infty} [\hat{J}_n(c) - J(c)] = 0 \right\} = 1 \quad \forall c, \quad (2.1.7)$$

или, кратко,

$$\hat{J}_n(c) \xrightarrow{\text{п.н.}} J(c) \quad \forall c. \quad (2.1.8)$$

Если при этом матрица Гессе положительно определена

$$\nabla^2 J(c^*) > 0, \quad (2.1.9)$$

то выборочная оценка $\hat{c}(n)$ (2.1.4) сходится почти наверное к c^* , т. е.

$$P\left\{ \lim_{n \rightarrow \infty} (\hat{c}(n) - c^*) = 0 \right\} = 1, \quad (2.1.10)$$

или, кратко,

$$\hat{c}(n) \xrightarrow{\text{П.Н.}} c^*. \quad (2.1.11)$$

Для того чтобы убедиться в этом, рассмотрим условие оптимальности (2.1.5), которому удовлетворяет оценка $\hat{c}(n)$. Разлагая $\nabla \hat{J}_n(\hat{c}(n))$ в ряд Тейлора относительно c^* и ограничиваясь линейным приближением, получим вместо (2.1.5) приближенно

$$\nabla \hat{J}_n(\hat{c}(n)) \approx \nabla \hat{J}_n(c^*) + \nabla^2 \hat{J}_n(c^*)(\hat{c}(n) - c^*) \approx 0. \quad (2.1.12)$$

Если выполнены условия усиленного закона больших чисел, то

$$\nabla \hat{J}_n(c^*) \xrightarrow{\text{П.Н.}} \nabla J(c^*) = 0 \quad (2.1.13)$$

и

$$\nabla^2 \hat{J}_n(c^*) \xrightarrow{\text{П.Н.}} \nabla^2 J(c^*) > 0, \quad (2.1.14)$$

поэтому из (2.1.12) получаем

$$\hat{c}(n) \xrightarrow{\text{П.Н.}} c^*.$$

Таким образом, с ростом n оценка $\hat{c}(n)$ сходится к оптимальному решению c^* почти наверное.

§ 2.2. Асимптотические свойства оценок и средних потерь

Выясним асимптотические свойства оценок $\hat{c}(n)$. Для этой цели найдем асимптотическую матрицу ковариаций ошибок — АМКО

$$V = \lim_{n \rightarrow \infty} V(n) = \lim_{n \rightarrow \infty} n V_n, \quad (2.2.1)$$

где

$$V_n = M\{(\hat{c}(n) - c^*)(\hat{c}(n) - c^*)^T\} = M\{\delta(n) \delta^T(n)\} \quad (2.2.2)$$

и

$$\delta(n) = \hat{c}(n) - c^*. \quad (2.2.3)$$

Обозначим, как и ранее в (1.6.13),

$$\eta(n) = \sqrt{n} \delta(n) = \sqrt{n} (\hat{c}(n) - c^*). \quad (2.2.4)$$

Тогда матрица $V(n) = n V_n$ (1.6.5) запишется в виде

$$V(n) = M\{\eta(n) \eta^T(n)\}, \quad (2.2.5)$$

а из (2.1.12) получим

$$\eta(n) \approx -[\nabla^2 J_n(c^*)]^{-1} \sqrt{n} \nabla \hat{J}_n(c^*). \quad (2.2.6)$$

Но при больших n в силу (2.1.14)

$$\nabla^2 \hat{J}_n(c^*) \approx \nabla^2 J(c^*),$$

поэтому $\eta(n)$ можно представить в виде

$$\eta(n) \approx -\sqrt{n} [\nabla^2 J(c^*)]^{-1} \nabla \hat{J}_n(c^*). \quad (2.2.7)$$

Полагая в $\nabla \hat{J}_n(c)$ (2.1.6) $c = c^*$ и учитывая, что $\varepsilon(\mathbf{z}(m), c^*) = \xi(m)$ (1.3.52), находим градиент эмпирических средних потерь при $c = c^*$

$$\nabla \hat{J}_n(c^*) = -\frac{1}{n} \sum_{m=1}^n F'[\xi(m)] \nabla_c f(\mathbf{x}(m), c^*). \quad (2.2.8)$$

Используя обозначение (1.6.23)

$$\nu(n) = -F'[\xi(n)] \nabla_c f(\mathbf{x}(n), c^*), \quad (2.2.9)$$

запишем $\nabla \hat{J}_n(c^*)$ в виде

$$\nabla \hat{J}_n(c^*) = \frac{1}{n} \sum_{m=1}^n \nu(m). \quad (2.2.10)$$

Что же касается матрицы Гессе $\nabla^2 J(c^*)$, то, как было установлено ранее в § 1.6 (см. (1.6.31)),

$$\nabla^2 J(c^*) = M\{F''[\xi(n)]\} A(c^*, \sigma^2(p_0)), \quad (2.2.11)$$

где

$$A(c^*, \sigma^2(p_0)) = M\{\nabla_c f(\mathbf{x}(m), c^*) \nabla_c^\top f(\mathbf{x}(m), c^*)\} \quad (2.2.12)$$

— нормированная информационная матрица. Примеры информационных матриц приведены в § 1.6 (см. табл. 1.1).

Подставляя $\nabla \hat{J}_n(c^*)$ из (2.2.10) и $\nabla^2 J(c^*)$ из (2.2.11) в (2.2.7), получим

$$\eta(n) \approx -\frac{1}{M\{F''[\xi(n)]\}} A^{-1}(c^*, \sigma^2(p_0)) \frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{m=1}^n \nu(m). \quad (2.2.13)$$

Теперь уже нетрудно вычислить АМКО (2.2.1). После простых преобразований находим из (2.2.5), (2.2.13)

$$V = \lim_{n \rightarrow \infty} V(n) = [\mathbf{M}\{F''[\xi(n)]\}]^{-2} A^{-1}(c^*, \sigma^2(p_0)) \times \\ \times \lim_{n \rightarrow \infty} \mathbf{M} \left\{ \frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{m=1}^n \nu(m) \frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{k=1}^n \nu^T(k) \right\} A^{-1}(c^*, \sigma^2(p_0)). \quad (2.2.14)$$

И хотя равенство (2.2.13) приближенное, полученная формула для АМКО (2.2.14) является точной. Поскольку строгий вывод этой формулы слишком громоздок, мы не будем его здесь приводить.

Преобразуем правую часть формулы (2.2.14). Учитывая (1.6.10), (1.6.11) и независимость помех, получим

$$\mathbf{M} \left\{ \frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{m=1}^n \nu(m) \frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{k=1}^n \nu^T(k) \right\} = \frac{1}{n} \sum_{m=1}^n \sum_{k=1}^n \mathbf{M}\{\nu(m)\nu^T(k)\}. \quad (2.2.15)$$

А из (2.2.9), (2.2.12) следует, что

$$\mathbf{M}\{\nu(m)\nu^T(k)\} = \begin{cases} \mathbf{M}\{F'^2[\xi(m)]\} A(c^*, \sigma^2(p_0)) & \text{при } k = m, \\ 0 & \text{при } k \neq m. \end{cases} \quad (2.2.16)$$

Но в силу стационарности помехи

$$\begin{aligned} \mathbf{M}\{F'^2[\xi(m)]\} &= \mathbf{M}\{F'^2[\xi]\}, \\ \mathbf{M}\{F''[\xi(m)]\} &= \mathbf{M}\{F''[\xi]\}, \quad m = 0, 1, \dots \end{aligned} \quad (2.2.17)$$

Поэтому АМКО (2.2.14) представляется в виде

$$V = V(F, p_0) = \frac{\mathbf{M}\{F'^2[\xi]\}}{[\mathbf{M}\{F''[\xi]\}]^2} A^{-1}(c^*, \sigma^2(p_0)). \quad (2.2.18)$$

Здесь обозначение $V(F, p_0)$ фиксирует тот факт, что АМКО зависит как от функции потерь $F[\cdot]$, так и от плотности распределения помех $p_0(\xi)$.

Сопоставляя найденное выражение АМКО $V(F, p_0)$ (2.2.18) оптимальной выборочной оценки (2.1.4) с АМКО $V(B_0)$ (1.7.10) оптимального алгоритма (1.7.11), (1.7.12), заключаем, что они равны друг другу. А это значит, что оценки, порождаемые асимптотически оптимальным алгоритмом (1.7.11), (1.7.12), и оптимальные выборочные оценки $\hat{c}(n)$ (2.1.4), являющиеся решением уравнения (2.1.5), имеют одинаковую асимптотическую скорость сходимости. Если же матрица B в рекуррентном алгоритме (1.7.1) или, что то же, матрица усиления $\Gamma(n)$ в рекуррентном алгоритме (1.5.7) будет отлична от $\Gamma_A(n)$

(1.7.12), то асимптотическая скорость сходимости алгоритма уменьшается. Таким образом, при заданной функции потерь асимптотически оптимальный алгоритм имеет максимальную скорость сходимости, которая совпадает со скоростью сходимости оптимальной выборочной оценки $\hat{c}(n)$ (2.1.4). Но если рекуррентные алгоритмы явно определяют оценки $c(n)$, то оптимальную выборочную оценку $\hat{c}(n)$ нужно еще найти. А это сводится к непростой задаче — решению, вообще говоря, нелинейного уравнения.

Выясним еще асимптотические свойства средних потерь. Рассмотрим уклонение средних потерь

$$w_n = M\{J(\hat{c}(n))\} - J(c^*), \quad (2.2.19)$$

где, напомним, $J(c^*)$ — минимальное значение средних потерь.

Разложим $J(\hat{c}(n))$ по степеням $\delta(n) = \hat{c}(n) - c^*$, ограничившись квадратичным приближением:

$$J(\hat{c}(n)) \approx J(c^*) + \nabla^T J(c^*) \delta(n) + \frac{1}{2} \delta^T(n) \nabla^2 J(c^*) \delta(n). \quad (2.2.20)$$

Замечая, что в силу условия оптимальности (1.4.4) $\nabla J(c^*) = 0$, а матрица Гессе определяется выражением (2.2.11), представим $J(\hat{c}(n))$ в виде

$$J(\hat{c}(n)) \approx J(c^*) + \frac{1}{2} M\{F''[\xi]\} \delta^T(n) A(c^*, \sigma^2(p_0)) \delta(n).$$

Беря от обеих частей математическое ожидание, получаем приближенное выражение для уклонения средних потерь

$$w_n = M\{J(\hat{c}(n))\} - J(c^*) = \frac{1}{2} M\{F''[\xi]\} M\{\delta^T(n) A(c^*, \sigma^2(p_0)) \delta(n)\}. \quad (2.2.21)$$

Но, как нетрудно проверить,

$$M\{\delta^T(n) A(c^*, \sigma^2(p_0)) \delta(n)\} = \text{tr}[A(c^*, \sigma^2(p_0)) M\{\delta(n) \delta^T(n)\}], \quad (2.2.22)$$

где tr обозначает след матрицы. Принимая во внимание обозначение V_n (2.2.2), получаем

$$M\{\delta^T(n) A(c^*, \sigma^2(p_0)) \delta(n)\} = \text{tr}[A(c^*, \sigma^2(p_0)) V_n], \quad (2.2.23)$$

и, следовательно, уклонение средних потерь w_n (2.2.21) можно записать в виде

$$w_n = \frac{1}{2} M\{F''[\xi]\} \text{tr}[A(c^*, \sigma^2(p_0)) V_n]. \quad (2.2.24)$$

Назовем по аналогии с (2.2.1) величину

$$w = \lim_{n \rightarrow \infty} n w_n \quad (2.2.25)$$

асимптотическим уклонением средних потерь (АУСП). АУСП характеризует асимптотическую скорость сходимости средних потерь $J(\hat{c}(n))$ к минимальным средним потерям $J(c^*)$. Умножая обе части (2.2.24) на n и переходя к пределу при $n \rightarrow \infty$, находим, учитывая (1.6.6) или (2.2.1):

$$w = \frac{1}{2} \mathbf{M}\{F''[\xi]\} \operatorname{tr}[A(c^*, \sigma^2(p_0)) V(F, p_0)]. \quad (2.2.26)$$

Здесь $V(F, p_0)$ представляет собой АМКО и определяется выражением (2.2.18). Подставляя $V(F, p_0)$ из (2.2.18) в (2.2.26), получим

$$w = \frac{\mathbf{M}\{F''[\xi]\} \mathbf{M}\{F'^2[\xi]\}}{[\mathbf{M}\{F''[\xi(n)]\}]^2} \operatorname{tr}[A(c^*, \sigma^2(p_0)) A^{-1}(c^*, \sigma^2(p_0))]. \quad (2.2.27)$$

Производя очевидные сокращения и замечая, что $\operatorname{tr} A A^{-1} = N_c$, где N_c — размерность вектора оценок, окончательно получаем

$$w = \frac{1}{2} \frac{\mathbf{M}\{F'^2[\xi]\}}{\mathbf{M}\{F''[\xi]\}} N_c. \quad (2.2.28)$$

Отсюда следует, что АУСП пропорционально размерности вектора оценок.

§ 2.3. Предельно возможная скорость сходимости оценок

Для несмещенных оценок $c(n)$ оптимального решения c^* , каким бы способом они ни определялись, существует предельно возможная скорость сходимости. Она устанавливается неравенством Крамера — Рао:

$$V_n \geq [\mathbf{M}\{\nabla_c \ln p(y^{(n)}|c^*) \nabla_c^\top \ln p(y^{(n)}|c^*)\}]^{-1}, \quad (2.3.1)$$

где

$$V_n = \mathbf{M}\{(c(n) - c^*)(c(n) - c^*)^\top\}$$

— МКО (1.6.1), а

$$p(y^{(n)}|c^*) = p(y(n), y(n-1), \dots, y(1)|c^*) \quad (2.3.2)$$

— совместная плотность распределения выходов объекта, имеющего вектор параметров c^* .

Чтобы упростить запись, мы не делаем различия в обозначениях случайных величин или процессов $y(n)$, $u(n)$, $\xi(n)$ и принимаемых ими значений. Условимся также не вводить специальных обозначений для различных плотностей распределения: плотности распределения при различных аргументах различны, если не оговорено обратное. Такое соглашение, могущее вызвать протест у педантично настроенного читателя, в последнее время становится общеупотребительным даже в работах чисто математического характера. По существу, мы молчаливо пользовались подобным соглашением при записи плотности распределения помехи $p_0(\xi)$ (1.2.40) и ее корреляционной функции $M\{\xi(n)\xi(n-m)\}$ (1.2.41).

Правая часть неравенства Крамера — Рао (2.3.1), определяющая нижнюю границу МКО, а значит, и максимальную допустимую точность оценок, содержит так называемую *информационную матрицу*

$$M\{\nabla_c \ln p(y^{(n)}|c^*) \nabla_c^T \ln p(y^{(n)}|c^*)\}. \quad (2.3.3)$$

Найдем более удобное выражение для информационной матрицы.

Совместная плотность распределения $p(y^{(n)}|c^*)$ может быть представлена в виде произведения условных плотностей распределения

$$p(y^{(n)}|c^*) = \prod_{m=1}^n p(y(m)|y^{(m-1)}, c^*), \quad (2.3.4)$$

где $y^{(0)} = (0, \dots, 0)$. Для нормального режима работы устойчивого динамического объекта как входные $u(n)$, так и выходные $y(n)$ величины представляют собой стационарные случайные дискретные процессы, статистические свойства которых не зависят от моментов времени.

Поскольку для оптимальной модели невязка при $c = c^*$ равна

$$\varepsilon(z(n), c^*) = y(n) - f(x(n), c^*) = \xi(n), \quad (2.3.5)$$

то выход объекта $y(n)$ можно представить в виде

$$y(n) = f(x(n), c^*) + \xi(n), \quad (2.3.6)$$

где $x(n)$ — вектор наблюдений (1.3.45).

При фиксированных $y^{(m-1)}$ и c , очевидно, фиксированы и наблюдения $x(m)$. Поэтому в силу (2.3.6) для условной плотности распределения $p(y(m)|y^{(m-1)}, c^*)$ справедливо представление

$$p(y(m)|y^{(m-1)}, c^*) = p(y(m)|x(m), c^*) = p_0(y(m) - f(x(m), c^*)), \quad (2.3.7)$$

где $p_0(\xi)$ — плотность распределения помехи $\xi(n)$, не зависящая от момента времени n . Плотность распределения помехи $p_0(\xi)$ удовлетворяет условиям

$$\int_{-\infty}^{\infty} p_0(\xi) d\xi = \int_{-\infty}^{\infty} p_0(\xi + t) d\xi = 1 \quad \forall t. \quad (2.3.8)$$

Дифференцируя (2.3.8) по t и полагая $t = 0$, получим

$$\int_{-\infty}^{\infty} p_0'(\xi) d\xi = 0. \quad (2.3.9)$$

Следовательно,

$$\mathbb{M} \left\{ \frac{p_0'(\xi(m))}{p_0(\xi(m))} \right\} = \mathbb{M} \left\{ \frac{p_0'(\xi)}{p_0(\xi)} \right\} = 0, \quad m = 1, 2, \dots \quad (2.3.10)$$

Учитывая независимость помех $\xi(m)$ и $\xi(k)$ при $m \neq k$, из (2.3.10) получим

$$\mathbb{M} \left\{ \frac{p_0'(\xi(m))}{p_0(\xi(m))} \frac{p_0'(\xi(k))}{p_0(\xi(k))} \right\} = 0, \quad m \neq k. \quad (2.3.11)$$

Из выражения совместной плотности распределения (2.3.4) следует, что

$$\ln p(\mathbf{y}^{(n)} | \mathbf{c}^*) = \sum_{m=1}^n \ln p(\mathbf{y}(m) | \mathbf{y}^{(m-1)}, \mathbf{c}^*), \quad (2.3.12)$$

или, принимая во внимание (2.3.7),

$$\ln p(\mathbf{y}^{(n)} | \mathbf{c}^*) = \sum_{m=1}^n \ln p_0(\mathbf{y}(m) - \mathbf{f}(\mathbf{x}(m), \mathbf{c}^*)). \quad (2.3.13)$$

Функция вектора параметров

$$\ln p(\mathbf{y}^{(n)} | \mathbf{c}) = \sum_{m=1}^n \ln p_0(\mathbf{y}(m) - \mathbf{f}(\mathbf{x}(m), \mathbf{c})) \quad (2.3.14)$$

называется *логарифмической функцией правдоподобия*. Ее градиент при $\mathbf{c} = \mathbf{c}^*$ равен в силу (2.3.14)

$$\nabla_{\mathbf{c}} \ln p(\mathbf{y}^{(n)} | \mathbf{c}^*) = \sum_{m=1}^n \frac{p_0'(\xi(m))}{p_0(\xi(m))} \nabla_{\mathbf{c}} \mathbf{f}(\mathbf{x}(m), \mathbf{c}^*).$$

Поэтому информационную матрицу, определяющую нижнюю границу МКО, можно записать в виде

$$\begin{aligned} & M\{\nabla_c \ln p(\mathbf{y}^{(n)}|c^*) \nabla_c^\top \ln p(\mathbf{y}^{(n)}|c^*)\} = \\ & = M\left\{ \sum_{m=1}^n \sum_{k=1}^n \frac{p'_0(\xi(m)) p'_0(\xi(k))}{p_0(\xi(m)) p_0(\xi(k))} \nabla_c f(\mathbf{x}(m)), c^* \right\} \nabla_c^\top f(\mathbf{x}(k), c^*). \quad (2.3.15) \end{aligned}$$

Учитывая свойства помехи (1.2.43), (1.2.44) и ее плотности распределения (2.3.11), правую часть равенства (2.3.15) после несложных преобразований можно привести к виду

$$\begin{aligned} & M\left\{ \sum_{m=1}^n \sum_{k=1}^n \frac{p'_0(\xi(m)) p'_0(\xi(k))}{p_0(\xi(m)) p_0(\xi(k))} \nabla_c f(\mathbf{x}(m)), c^* \right\} \nabla_c^\top f(\mathbf{x}(k), c^*) = \\ & = n M\left\{ \left(\frac{p'_0(\xi)}{p_0(\xi)} \right)^2 \right\} M\{\nabla_c f(\mathbf{x}(n)), c^*\} \nabla_c^\top f(\mathbf{x}(n), c^*). \quad (2.3.16) \end{aligned}$$

Здесь матрица

$$M\{\nabla_c f(\mathbf{x}(n), c^*) \nabla_c^\top f(\mathbf{x}(n), c^*)\} = A(c^*, \sigma^2(p_0)) \quad (2.3.17)$$

— это нормированная информационная матрица (1.6.26), или, более подробно, (1.6.33). Скалярный же множитель

$$M\left\{ \left(\frac{p'_0(\xi)}{p_0(\xi)} \right)^2 \right\} = I(p_0) \quad (2.3.18)$$

представляет собой широко известную в статистике *фишеровскую информацию*.

Таким образом, окончательно получаем, что информационная матрица равна произведению числа наблюдений n , фишеровской информации $I(p_0)$ и нормированной информационной матрицы $A(c^*, \sigma^2(p_0))$, т. е.

$$M\{\nabla_c \ln p(\mathbf{y}^{(n)}|c^*) \nabla_c^\top \ln p(\mathbf{y}^{(n)}|c^*)\} = n I(p_0) A(c^*, \sigma^2(p_0)). \quad (2.3.19)$$

Следовательно, неравенство Крамера — Рао (2.3.1) можно записать и в такой форме:

$$V_n \geq \frac{1}{n I(p_0)} A^{-1}(c^*, \sigma^2(p_0)), \quad (2.3.20)$$

или, для матрицы $V(n) = n V_n$ (1.6.5),

$$V(n) \geq \frac{1}{I(p_0)} A^{-1}(c^*, \sigma^2(p_0)).$$

Но АМКО (2.2.1) есть предел $V(n)$ при $n \rightarrow \infty$. Следовательно, для АМКО имеет место неравенство

$$V = V(F, p_0) \geq \frac{1}{I(p_0)} A^{-1}(c^*, \sigma^2(p_0)). \quad (2.3.21)$$

Правая часть этого неравенства, определяющая предельно возможную скорость сходимости любых несмешанных оценок $c(n)$, зависит только от статистических характеристик помех (плотности распределения, дисперсии) и параметров идентифицируемого объекта (вектора его параметров — оптимального решения c^*). Левая же часть неравенства, т. е. АМКО $V(F, p_0)$, зависит от плотности распределения помех $p_0(\xi)$, функции потерь $F[\cdot]$ и, естественно, от способа определения оценки $c(n)$.

Примеры фишеровской информации $I(p_0)$ и дисперсий $\sigma^2(p_0)$ для типовых плотностей распределения приведены в табл. 2.1.

При заданной плотности $p_0(\xi)$ и различных $F[\varepsilon]$ тот способ определения оценки лучший, для которого АМКО $V(F, p_0)$ меньшая, т. е. для которого $V(F, p_0)$ ближе к правой части неравенства (2.3.21). Возникает естественный вопрос: можно ли достигнуть предельно возможной скорости сходимости оценок? И если да, то какой способ оценивания этому соответствует? Ответам на эти вопросы посвящены следующие параграфы.

§ 2.4. Определение оптимальной функции потерь

Как было установлено в § 1.4, оптимальное решение c^* минимизирует средние потери $J(c) = M\{F[\varepsilon(z(n), c)]\}$ для любых непрерывных четных функций потерь, $F[\varepsilon] = F[-\varepsilon]$. Такая инвариантность оптимального решения c^* относительно функций потерь позволяет, на первый взгляд, выбирать такую функцию потерь, которая приводила бы к удобным и простым аналитическим результатам. Этот вывод был бы действительно справедливым, если бы в задачах идентификации мы непосредственно определяли оптимальное решение c^* . Но эта возможность, как правило, отсутствует. Обычно находятся лишь те или иные оценки оптимального решения $\hat{c}(n)$ по наблюдаемым данным. С ростом числа этих данных ($n \rightarrow \infty$) оценки $\hat{c}(n)$ при определенных условиях стремятся к оптимальному решению c^* . Свойства оценок $\hat{c}(n)$ существенно зависят от функции потерь. Найдем такую функцию потерь $F[\varepsilon] = F_0[\varepsilon]$, при которой оценка $\hat{c}(n)$ обладала бы максимально возможной скоростью сходимости.

Назовем оптимальной функцией потерь $F_0[\varepsilon]$ такую функцию потерь, которая минимизирует АМКО на некотором классе допустимых функций потерь \mathcal{F} , т. е. для которой

$$V(F_0, p_0) \leq V(F, p_0) \quad \forall F \in \mathcal{F}. \quad (2.4.1)$$

Таблица 2.1

Фишеровская информация $I(p_0)$ и дисперсия $\sigma^2(p_0)$

N°	$p_0(\xi)$	$I(p_0) = M\left\{\left(\frac{p'_0(\xi)}{p_0(\xi)}\right)^2\right\}$	$\sigma^2(p_0) = M\{\xi^2\}$
1	$N(0, \sigma^2)$ $\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{\xi^2}{2\sigma^2}}$	$\frac{1}{\sigma^2}$	σ^2
2	$L(0, s)$ $\frac{1}{2s} e^{-\frac{ \xi }{s}}$	$\frac{1}{s^2} = \frac{2}{\sigma^2(p_0)}$	$2s^2$
3	$Se(0, s)$ $\frac{1}{2s} \operatorname{sech}^2 \frac{\xi}{s}$	$\frac{4}{3s^2} \approx \frac{1,1}{\sigma^2(p_0)}$	$\frac{\pi^2 s^2}{12} \approx 0,82 s^2$
4	$St(0, s)$ $\frac{2}{\pi} \frac{s^3}{(s^2 + \xi^2)^2}$	2	s^2
5	$C(0, s)$ $\frac{s}{\pi} \frac{1}{s^2 + \xi^2}$	$\frac{1}{2s^2}$	∞
6	$R(0, l)$ $\begin{cases} \frac{1}{2l}, & \xi \leq l \\ 0, & \xi > l \end{cases}$	∞	$\frac{l^2}{3}$

Оптимальная функция потерь, таким образом, равна

$$F_0[\varepsilon] = \arg \min_{F \in \mathcal{F}} V(F, p_0), \quad (2.4.2)$$

где, как было показано ранее (2.2.18),

$$V(F, p_0) = \frac{M\{F'^2[\xi]\}}{[M\{F''[\xi]\}]^2} A^{-1}(c^*, \sigma^2(p_0)), \quad (2.4.3)$$

причем

$$M\{F'^2[\xi]\} = \int_{-\infty}^{\infty} p_0(\xi) F'^2[\xi] d\xi \quad (2.4.4)$$

и

$$M\{F''[\xi]\} = \int_{-\infty}^{\infty} p_0(\xi) F''[\xi] d\xi. \quad (2.4.5)$$

Предполагая, что для допустимых функций потерь

$$\int_{-\infty}^{\infty} p_0(\xi) F''[\xi] d\xi = - \int_{-\infty}^{\infty} p'_0(\xi) F'[\xi] d\xi, \quad (2.4.6)$$

запишем $V(F, p_0)$ (2.4.3) в такой форме:

$$V(F, p_0) = \frac{\int_{-\infty}^{\infty} p_0(\xi) F'^2[\xi] d\xi}{\left[\int_{-\infty}^{\infty} p'_0(\xi) F'[\xi] d\xi \right]^2} A^{-1}(c^*, \sigma^2(p_0)). \quad (2.4.7)$$

Найдем оптимальную функцию потерь $F_0[\xi]$ (2.4.2). Для этой цели рассмотрим изменение $V(F, p_0)$ при вариации оптимальной функции потерь $F[\xi] = F_0[\xi] + \lambda \delta F[\xi]$. Обозначим

$$\Phi(\lambda) = V(F_0 + \lambda \delta F, p_0). \quad (2.4.8)$$

Условие экстремума можно представить в виде

$$\Phi'(\lambda)|_{\lambda=0} = \Phi'(0) = 0. \quad (2.4.9)$$

Поскольку

$$\Phi(\lambda) = \frac{\int_{-\infty}^{\infty} p_0(\xi) ([F'_0[\xi] + \lambda \delta F'[\xi]]^2 d\xi}{\left[\int_{-\infty}^{\infty} p'_0(\xi) ([F'_0[\xi] + \lambda \delta F'[\xi]] d\xi \right]^2} A^{-1}(c^*, \sigma^2(p_0)), \quad (2.4.10)$$

то, дифференцируя $\Phi(\lambda)$ по λ и полагая $\lambda = 0$, получим после элементарных преобразований

$$\begin{aligned} \Phi'(0) = & \frac{2}{\left[\int_{-\infty}^{\infty} p'_0(\xi) F'_0[\xi] d\xi \right]^3} A^{-1}(c^*, \sigma^2(p_0)) \times \\ & \times \left\{ \int_{-\infty}^{\infty} p_0(\xi) F'_0[\xi] \delta F'[\xi] d\xi - \int_{-\infty}^{\infty} p'_0(\xi) F'_0[\xi] d\xi \right. \\ & \left. - \int_{-\infty}^{\infty} p_0(\xi) F'^2_0[\xi] d\xi - \int_{-\infty}^{\infty} p'_0(\xi) \delta F'[\xi] d\xi \right\} = 0. \quad (2.4.11) \end{aligned}$$

Отсюда следует, что оптимальная функция потерь удовлетворяет условию

$$\int_{-\infty}^{\infty} \left[\frac{p_0(\xi) F'_0[\xi]}{\int_{-\infty}^{\infty} p_0(\xi) F'^2_0[\xi] d\xi} - \frac{p'_0(\xi)}{\int_{-\infty}^{\infty} p'_0(\xi) F'_0[\xi] d\xi} \right] \delta F'[\xi] d\xi = 0. \quad (2.4.12)$$

Это условие должно быть выполнено при любых вариациях $\delta F'[\xi]$, следовательно,

$$\frac{\int_{-\infty}^{\infty} p_0(\xi) F'_0[\xi] d\xi}{\int_{-\infty}^{\infty} p_0(\xi) F'^2_0[\xi] d\xi} = \frac{\int_{-\infty}^{\infty} p'_0(\xi) F'_0[\xi] d\xi}{\int_{-\infty}^{\infty} p'_0(\xi) F'_0[\xi] d\xi}. \quad (2.4.13)$$

Умножая обе части (2.4.13) на $F'_0[\xi]$, получим

$$\frac{\int_{-\infty}^{\infty} p_0(\xi) F'_0[\xi] d\xi}{\int_{-\infty}^{\infty} p_0(\xi) F'^2_0[\xi] d\xi} = \frac{\int_{-\infty}^{\infty} p'_0(\xi) F'_0[\xi] d\xi}{\int_{-\infty}^{\infty} p'_0(\xi) F'_0[\xi] d\xi}. \quad (2.4.14)$$

Но равенство таких нормированных функций может иметь место лишь тогда, когда сами функции пропорциональны, т. е.

$$p_0(\xi) F'^2_0[\xi] = k_1 p'_0(\xi) F'_0[\xi], \quad (2.4.15)$$

где k_1 — коэффициент пропорциональности. Отсюда находим

$$F'_0[\xi] = k_1 \frac{p'_0(\xi)}{p_0(\xi)}, \quad (2.4.16)$$

и, значит,

$$F'_0[\xi] = k_1 \frac{p'_0(\xi)}{p_0(\xi)} \Big|_{\xi=\varepsilon}, \quad (2.4.17)$$

т. е. производная оптимальной функции потерь пропорциональна отношению производной плотности распределения помех к самой плотности.

Интегрируя обе части (2.4.16), получим, полагая затем $\xi = \varepsilon$,

$$F_0[\varepsilon] = k_1 \ln p_0(\xi) \Big|_{\xi=\varepsilon} + k_2. \quad (2.4.18)$$

Из очевидных геометрических соображений следует, что постоянная k_1 , определяющая, по существу, основание логарифма, должна быть отрицательной: $k_1 < 0$. Что же касается постоянной k_2 , то она определяет минимальное значение $F_0[\varepsilon]$, т. е. $F_0[0]$. При $k_2 > -k_1 \ln p_0(\xi)$ всегда $F_0[\varepsilon] > 0$.

Таким образом, оптимальная функция потерь не единственна, а зависит от постоянных $k_1 < 0$ и k_2 . Этот факт является следствием того, что АМКО $V(F, p_0)$ (2.4.7) зависит непосредственно от $F'[\varepsilon]$.

Для задач идентификации, т. е. задач, связанных с нахождением оценок оптимального решения, конкретные значения постоянных k_1 и k_2 не существенны. Удобно принять $k_1 = -1$, а $k_2 = 0$. Таким образом, оптимальная функция потерь (2.4.2) равна логарифму плотности распределения помех при $\xi = \varepsilon(z, c)$, взятой с обратным знаком:

$$F_0[\varepsilon(z, c)] = -\ln p_0(\xi) \Big|_{\xi=\varepsilon(z, c)}. \quad (2.4.19)$$

Пользуясь терминологией § 2.3, можно сказать, что оптимальная функция потерь равна логарифмической функции правдоподобия с обратным знаком, т. е. логарифмической функции неправдоподобия, а ее производная по аргументу (2.4.17)

$$F'_0[\varepsilon(z, c)] = \frac{p'_0(\xi)}{p_0(\xi)} \Big|_{\xi=\varepsilon(z, c)} \quad (2.4.20)$$

равна информанту с обратным знаком, или негинформанту.

Примеры оптимальных функций потерь $F_0[\varepsilon] = -\ln p_0(\xi) \Big|_{\xi=\varepsilon}$ и их производных (оптимальных негинформантов)

$$F'_0[\varepsilon] = \frac{p'_0(\xi)}{p_0(\xi)} \Big|_{\xi=\varepsilon}$$

для типовых плотностей распределения помехи $p_0(\xi)$ приведены в табл. 2.2. Гауссовой плотности распределения помехи соответствует квадратичная функция потерь. Лапласовой плотности распределения помехи соответствует модульная функция потерь. Плотности распределения помехи типа Коши и другим плотностям соответствуют сложные нелинейные функции потерь.

§ 2.5. Свойства оптимальной функции потерь

Оптимальная функция потерь $F_0[\varepsilon]$ (2.4.19) минимизирует АМКО $V(F, p_0)$ (2.4.7). Найдем минимальную АМКО. Для этого подставим $F_0[\varepsilon]$ при $\varepsilon = \xi$ из (2.4.19) в $V(F, p_0)$. Замечая, что

$$\int_{-\infty}^{\infty} p_0(\xi) F'^2_0[\xi] d\xi = - \int_{-\infty}^{\infty} p'_0(\xi) F'_0[\xi] d\xi = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{p'^2_0(\xi)}{p_0(\xi)} d\xi \quad (2.5.1)$$

Таблица 2.2

Оптимальные функции потерь $F_0[\varepsilon]$ и их производные $F'_0[\varepsilon]$

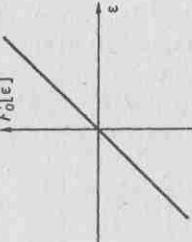
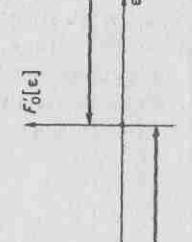
$\#$	$p_0(\xi)$	$F_0[\varepsilon] = -\ln p_0(\xi) _{\xi=\varepsilon}$	$F'_0[\varepsilon] = -\frac{p'_0(\xi)}{p_0(\xi)} _{\xi=\varepsilon}$
1	$N(0, \sigma^2): \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{\xi^2}{2\sigma^2}}$	$\frac{\varepsilon^2}{2\sigma^2} + \ln \sqrt{2\pi} \sigma$	
2	$L(0, s): \frac{1}{2s} e^{-\frac{ \xi }{s}}$	$\frac{ \varepsilon }{s} + \ln 2s$	

Таблица 2.2 (продолжение)

\mathcal{M}	$p_0(\xi)$	$F_0[\varepsilon] = -\ln p_0(\xi) \Big _{\xi=\varepsilon}$	$F'_0[\varepsilon] = -\frac{p'_0(\xi)}{p_0(\xi)} \Big _{\xi=\varepsilon}$
3	$\text{Se}(0, s): \frac{1}{2s} \operatorname{sech}^2 \frac{\xi}{s}$	$2 \ln \operatorname{sech} \frac{\xi}{s} + \ln 2s$	$\frac{2}{s} \operatorname{th} \frac{\xi}{s}$
4	$\text{St}(0, s): \frac{2}{\pi} \frac{s^3}{(s^2 + \xi^2)^2}$	$2 \ln(s^2 + \varepsilon^2) + \ln \frac{\pi}{2s^3}$	$\frac{4\varepsilon}{s^2 + \varepsilon^2}$

Таблица 2.2 (окончание)

5	$p_0(\xi) = \arg \min_{p_0 \in \mathcal{P}} I(p_0)$ $C(0, s): \frac{1}{\pi} \frac{s}{s^2 + \xi^2}$	$F_0[\varepsilon] = -\ln p_0(\xi) \Big _{\xi=\varepsilon}$ $\ln(s^2 + \varepsilon^2) + \ln \frac{\pi}{s}$	$F'_0[\varepsilon] = -\frac{p'_0(\xi)}{p_0(\xi)} \Big _{\xi=\varepsilon}$ $\frac{2\varepsilon}{s^2 + \varepsilon^2}$
6	$R(0, l):$ $\begin{cases} \frac{1}{2l}, & \xi \leq l \\ 0, & \xi > l \end{cases}$	$F_0[\varepsilon] \begin{cases} \ln 2l, & \varepsilon \leq l \\ \infty, & \varepsilon > l \end{cases}$	$F'_0[\varepsilon]$

и, как следует из (2.3.18),

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{p_0'^2(\xi)}{p_0(\xi)} d\xi = M \left\{ \left(\frac{p_0'(\xi)}{p_0(\xi)} \right)^2 \right\} = I(p_0), \quad (2.5.2)$$

где $I(p_0)$ — фишеровская информация, находим минимальное значение АМКО (2.4.7)

$$V(F_0, p_0) = \frac{1}{I(p_0)} A^{-1}(c^*, \sigma^2(p_0)). \quad (2.5.3)$$

Таким образом, для любых $F \in \mathcal{F}$

$$V(F, p_0) \geq V(F_0, p_0), \quad (2.5.4)$$

т. е. отклонение функции потерь $F[\varepsilon]$ от оптимальной функции $F_0[\varepsilon] = -\ln p_0(\xi)|_{\xi=\varepsilon}$ приводит к увеличению АМКО. Более того, замечая, что правая часть (2.5.3) совпадает с нижней границей АМКО (2.3.21), заключаем, что при оптимальной функции потерь достигается предельно возможная максимальная скорость сходимости как оптимальной выборочной оценки

$$\hat{c}^0(n) = \arg \min_c \hat{J}_n^0(c), \quad (2.5.5)$$

где

$$\hat{J}_n^0(c) = \frac{1}{n} \sum_{m=1}^n F_0[\varepsilon(z(m), c)], \quad (2.5.6)$$

так и оценки $c(n)$, порождаемой оптимальным рекуррентным алгоритмом (1.7.11), (1.7.12) при $F[\varepsilon] = F_0[\varepsilon]$. Этот алгоритм мы подробно рассмотрим в главе 3.

Нетрудно видеть из (2.5.1), (2.5.2) и (2.4.6), что для оптимальной функции потерь имеет место равенство левых частей (2.4.4) и (2.4.5), т. е.

$$M\{F_0'^2[\xi]\} = M\{F_0''[\xi]\} = I(p_0). \quad (2.5.7)$$

Это свойство оптимальной функции потерь будет далее использовано.

Рассмотрим в заключение, как влияет выбор оптимальной функции потерь $F[\varepsilon] = F_0[\varepsilon]$ (2.4.19) на критерий качества идентификации — средние потери — при $c = c^*$. При оптимальном решении $J^0(c)$ (1.4.1) достигает минимума, равного

$$J^0(c^*) = M\{F_0[\varepsilon(z(n), c^*)]\} = -M\{\ln p_0(\xi)\}. \quad (2.5.8)$$

Но величина

$$-M\{\ln p_0(\xi)\} = -\int_{-\infty}^{\infty} p_0(\xi) \ln p_0(\xi) d\xi \approx I_{Sh}(p_0) \quad (2.5.9)$$

представляет собой *энтропию*, или *шенноновскую информацию*. Таким образом, минимально возможные средние потери при оптимальной функции потерь равны шенноновской информации.

Для любой иной, не оптимальной, функции потерь, которая может быть представлена в виде

$$F[\varepsilon(z, c)] = -\ln p(\xi) \Big|_{\xi=\varepsilon(z, c)}, \quad (2.5.10)$$

где $p(\xi) \neq p_0(\xi)$, минимальные средние потери (при $c = c^*$) будут равны

$$J(c^*) = M\{F[\varepsilon(z, c)]\} = -M\{\ln p(\xi)\}. \quad (2.5.11)$$

Назовем величину

$$-M\{\ln p(\xi)\} = -\int_{-\infty}^{\infty} p_0(\xi) \ln p(\xi) d\xi = I_{Sh}(p_0, p) \quad (2.5.12)$$

квазишенноновской информацией. Покажем, что всегда имеет место неравенство

$$J(c^*) = -M\{\ln p(\xi)\} \geq -M\{\ln p_0(\xi)\} \approx J^0(c^*), \quad (2.5.13)$$

т. е. квазишенноновская информация всегда не меньше шенноновской информации:

$$I_{Sh}(p_0, p) \geq I_{Sh}(p_0). \quad (2.5.14)$$

Для этой цели рассмотрим *кульбаковскую информацию*, представляющую собой уклонение средних потерь для оптимальной и произвольной функций потерь:

$$J^0(c^*) - J(c^*) = M\left\{\ln \frac{p(\xi)}{p_0(\xi)}\right\} = \int_{-\infty}^{\infty} p_0(\xi) \ln \frac{p(\xi)}{p_0(\xi)} d\xi = I_K(p_0, p). \quad (2.5.15)$$

При $p(\xi) = p_0(\xi)$ кульбаковская информация, очевидно, обращается в нуль: $I_K(p_0, p)|_{p(\xi)=p_0(\xi)} = 0$.

Замечая, что

$$\ln \frac{p(\xi)}{p_0(\xi)} \leq \frac{p(\xi)}{p_0(\xi)} - 1,$$

получаем из (2.5.15)

$$J^0(c^*) - J(c^*) \leq M \left\{ \frac{p(\xi)}{p_0(\xi)} - 1 \right\}. \quad (2.5.16)$$

Но

$$M \left\{ \frac{p(\xi)}{p_0(\xi)} - 1 \right\} = \int_{-\infty}^{\infty} (p(\xi) - p_0(\xi)) d\xi = 0.$$

Поэтому из (2.5.16) получаем

$$J^0(c^*) - J(c^*) \leq 0,$$

а значит, неравенства (2.5.13), (2.5.14) справедливы.

Из этих неравенств следует, что при оптимальной функции потерь средние потери для оптимального решения достигают минимум-миниморума. Отклонение функции потерь от оптимальной приводит к увеличению соответствующего минимума средних потерь. Оптимальная функция потерь минимизирует минимальные потери по всем функциям потерь типа логарифмических функций неправдоподобия. В силу результатов § 1.3 это значит, что для оптимальной настраиваемой модели и оптимальной функции потерь

$$J^0(c^*) = \min_{\mathcal{F}} \min_{\mathcal{M}} \min_{\mathbf{c}} M\{F[\varepsilon(z(n), \mathbf{c})]\}, \quad (2.5.17)$$

где \mathcal{M} — класс моделей, которому принадлежит оптимальная модель, а \mathcal{F} — класс функций потерь, которому принадлежит оптимальная функция потерь.

При оптимальной модели и оптимальной функции потерь средние потери достигают минимально возможного значения, равного шенноновской информации $I_{Sh}(p_0)$. Значения шенноновской информации для типовых плотностей распределения помех $p_0(\xi)$ приведены в табл. 2.3.

Найдем в заключение АУСП w (2.2.28) для оптимальной функции потерь. В этом случае, как следует из (2.5.7), $M\{F_0'^2[\xi]\} = M\{F_0''[\xi]\}$ и, значит, из (2.2.28) получаем

$$w = \frac{1}{2} N_c, \quad (2.5.18)$$

т. е. для оптимальной функции потерь $F_0[\varepsilon]$ АУСП равно половине размерности вектора оценок.

§ 2.6. Заключение

Оптимальное решение c^* , минимизирующее средние потери, может быть найдено в явной форме в крайне редких случаях. Поэтому, как правило, приходится довольствоваться оценками $\hat{c}(n)$ оптимального решения, минимизирующими эмпирические средние потери. Точность

Таблица 2.3

Шенноновская информация $I_{Sh}(p_0)$

№	$p_0(\xi)$	$I_{Sh}(p_0) = -M\{\ln p_0(\xi)\}$	№	$p_0(\xi)$	$I_{Sh}(p_0) = -M\{\ln p_0(\xi)\}$
1	$N(0, \sigma^2)$ $\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{\xi^2}{2\sigma^2}}$	$\ln \sigma^2 + 1,42$	4	$St(0, s)$ $\frac{2}{\pi} \frac{s^3}{(s^2 + \xi^2)^2}$	$\ln s + 0,778$
2	$L(0, s)$ $\frac{1}{2s} e^{-\frac{ \xi }{s}}$	$\ln s + 1$	5	$C(0, s)$ $\frac{s}{\pi} \frac{1}{s^2 + \xi^2}$	$\ln s + 2,53$
3	$Se(0, s)$ $\frac{1}{2s} \operatorname{sech}^2 \frac{\xi}{s}$	$\ln s + 3,7$	6	$R(0, s)$ $\begin{cases} \frac{1}{2l}, & \xi \leq l \\ 0, & \xi > l \end{cases}$	$\ln l + 0,7$

этих оценок определяется матрицей ковариаций ошибок (МКО) V_n . В силу неравенства Крамера — Рао, при заданной длине выборки наблюдений МКО ограничена снизу обратной информационной матрицей. Последняя равна произведению фишеровской информации, нормированной информационной матрицы и числа наблюдений.

Скорость сходимости оценки $\hat{c}(n)$ к оптимальному решению характеризуется матрицей $V(n) = nV_n$. Предел этой матрицы $V(n)$ при $n \rightarrow \infty$ равен асимптотической матрице ковариаций ошибок (АМКО) V , которая определяет асимптотическую скорость сходимости оценок $\hat{c}(n)$ к оптимальному решению c^* .

Минимизация АМКО по функциям потерь дает возможность найти оптимальную функцию потерь $F_0[\varepsilon] = -\ln p_0(\xi)|_{\xi=\varepsilon}$, где $p_0(\xi)$ — плотность распределения помех. Отклонение функции потерь вида $F[\varepsilon] = -\ln p(\xi)|_{\xi=\varepsilon}$ от оптимальной приводит к увеличению АМКО. Таким образом, для оптимальной функции потерь оценки $\hat{c}(n)$, порождаемые минимизацией эмпирических средних потерь $\hat{J}_n(c)$, обладают предельно возможной асимптотической скоростью сходимости к оптимальному решению. Средние же потери $J^0(c^*)$ при оптимальной функции потерь достигают минимально возможного значения.

Итак, знание плотности распределения помех $p_0(\xi)$ позволяет определить оптимальную функцию потерь, а значит, и минимальные средние потери. При этих условиях оценки $\hat{c}(n)$ обладают максимальной асимптотической скоростью сходимости. Теперь возникает задача нахождения этих оценок.

Строго говоря, действенность любого конкретного метода зависит от истинности имеющейся информации.

K. R. Rao

ГЛАВА 3

Абсолютно оптимальные алгоритмы идентификации

§ 3.1. Формирование оптимальных и абсолютно оптимальных алгоритмов

Оптимальные алгоритмы, получаемые из алгоритмов метода стохастической аппроксимации при надлежащем выборе матрицы усиления, обладают максимальной скоростью сходимости, характеризуемой $V = V(B_0) = V(F, p_0)$ (1.7.10), (2.2.18). Попытаемся сформировать эти оптимальные алгоритмы независимо от схемы метода стохастической аппроксимации.

Напомним, что при выводе АМКО, изложенном в § 2.2, было использовано приближенное выражение оценки $\hat{c}(n)$ (2.1.12)

$$\hat{c}(n) - c^* \approx -[\nabla^2 \hat{J}_n(c^*)]^{-1} \nabla \hat{J}_n(c^*). \quad (3.1.1)$$

Как было отмечено ранее (см. (2.1.14)), при $n \rightarrow \infty$

$$\nabla^2 \hat{J}_n(c^*) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \nabla^2 J(c^*). \quad (3.1.2)$$

Произведя в (3.1.1) замену матрицы Гессе $\nabla^2 \hat{J}_n(c^*)$ на $\nabla^2 J(c^*)$ и

изменив обозначение $\hat{c}(n)$ на $c(n)$, получим

$$c(n) - c^* = -[\nabla^2 J(c^*)]^{-1} \nabla \hat{J}_n(c^*), \quad (3.1.3)$$

а значит, и

$$c(n-1) - c^* = -[\nabla^2 J(c^*)]^{-1} \nabla \hat{J}_{n-1}(c^*), \quad (3.1.4)$$

где, напомним (см. (2.1.6)),

$$\nabla \hat{J}_k(c) = -\frac{1}{k} \sum_{m=1}^k F'[\varepsilon(\mathbf{z}(m), c)] \nabla_c f(\mathbf{x}(m), c). \quad (3.1.5)$$

Вычитая (3.1.4) из (3.1.3), получим

$$c(n) - c(n-1) = -[\nabla^2 J(c^*)]^{-1} (\nabla \hat{J}_n(c^*) - \nabla \hat{J}_{n-1}(c^*)). \quad (3.1.6)$$

Вычислим разность градиентов. Учитывая (3.1.5), находим

$$\begin{aligned} \nabla \hat{J}_n(c^*) - \nabla \hat{J}_{n-1}(c^*) &= -\frac{1}{n} F'[\varepsilon(\mathbf{z}(n), c^*)] \nabla_c f(\mathbf{x}(n), c^*) + \\ &+ \frac{1}{n(n-1)} \sum_{m=1}^{n-1} F'[\varepsilon(\mathbf{z}(m), c^*)] \nabla_c f(\mathbf{x}(m), c^*). \end{aligned} \quad (3.1.7)$$

При больших n второе слагаемое в правой части (3.1.7) имеет порядок убывания $o(1/n)$. Пренебрегая этим слагаемым, получим

$$\nabla \hat{J}_n(c^*) - \nabla \hat{J}_{n-1}(c^*) \approx -\frac{1}{n} F'[\varepsilon(\mathbf{z}(n), c^*)] \nabla_c f(\mathbf{x}(n), c^*). \quad (3.1.8)$$

Заменим в правой части этого приближенного равенства неизвестное оптимальное решение c^* на оценку $c(n-1)$, которая при больших n близка к c^* ; будем иметь

$$\nabla \hat{J}_n(c^*) - \nabla \hat{J}_{n-1}(c^*) \approx -\frac{1}{n} F'[\varepsilon(\mathbf{z}(n), c(n-1))] \nabla_c f(\mathbf{x}(n), c(n-1)). \quad (3.1.9)$$

Далее, как было уже ранее показано (см. (1.6.31)),

$$\nabla^2 J(c^*) = M\{F''[\xi]\} A(c^*, \sigma^2(p_0)). \quad (3.1.10)$$

Подставляя в (3.1.6) выражение матрицы Гессе $\nabla^2 J(c^*)$ из (3.1.10) и заменяя разность градиентов приближенным значением (3.1.9), получим рекуррентный алгоритм

$$c(n) = c(n-1) + \Gamma_0(n) F'[\varepsilon(\mathbf{z}(n), c(n-1))] \nabla_c f(\mathbf{x}(n), c(n-1)), \quad (3.1.11)$$

где

$$\Gamma_0(n) = \frac{1}{n M\{F''[\xi]\}} A^{-1}(c^*, \sigma^2(p_0)). \quad (3.1.12)$$

Этот рекуррентный алгоритм получен из уравнения (3.1.3), определяющего оценку $\hat{c}(n) \approx c(n)$, АМКО которой, как показано в § 1.7, равна

$$V = V(F, p_0) = \frac{M\{F'^2[\xi]\}}{[M\{F''[\xi]\}]^2} A^{-1}(c^*, \sigma^2(p_0)). \quad (3.1.13)$$

Но рекуррентный алгоритм (3.1.11), (3.1.12) полностью совпадает с оптимальным алгоритмом стохастической аппроксимации (1.7.11), (1.7.12) при фиксированной функции потерь $F[\varepsilon]$. Такой алгоритм стохастической аппроксимации является оптимальным по матрице усиления $\Gamma_0(n)$ и обладает максимальной в этих условиях (когда функция потерь $F[\varepsilon]$ фиксирована) скоростью сходимости, определяемой АМКО $V = V(F, p_0)$ (3.1.13). При замене одной функции потерь другой АМКО $V(F, p_0)$ (3.1.13) будет изменяться и для некоторой функции $F_0[\varepsilon]$ достигнет минимума. Назовем оптимальный алгоритм, обладающий максимальной скоростью сходимости по всем допустимым функциям потерь, *абсолютно оптимальным алгоритмом*.

Поскольку максимальная скорость сходимости оптимального алгоритма достигается при оптимальной функции потерь $F[\varepsilon] = F_0[\varepsilon] = -\ln p_0(\xi)|_{\xi=\varepsilon}$, то отсюда следует, что абсолютно оптимальный алгоритм представляет собой оптимальный алгоритм при оптимальной функции потерь

$$F[\varepsilon] = F_0[\varepsilon] = -\ln p_0(\xi)|_{\xi=\varepsilon}.$$

Для получения абсолютно оптимального алгоритма нужно в оптимальном алгоритме (3.1.11), (3.1.12) произвести замены

$$F'[\varepsilon] \quad \text{на} \quad F'_0[\varepsilon] = -\left. \frac{p'_0(\xi)}{p_0(\xi)} \right|_{\xi=\varepsilon} \quad (3.1.14)$$

и

$$M\{F''[\xi]\} \quad \text{на} \quad M\{F''_0[\xi]\} = I(p_0),$$

где $I(p_0)$ — фишеровская информация (2.5.7). Производя эти замены, запишем абсолютно оптимальный алгоритм в виде:

$$c(n) = c(n-1) + \Gamma_0(n) F'_0[\varepsilon(z(n), c(n-1))] \nabla_c f(x(n), c(n-1)), \quad (3.1.15)$$

где

$$\Gamma_0(n) = \frac{1}{n I(p_0)} A^{-1}(c^*, \sigma^2(p_0)). \quad (3.1.16)$$

Принимая во внимание, что (см. (2.5.7))

$$\mathbf{M}\{F_0''[\xi]\} = \mathbf{M}\{F''^2[\xi]\} = I(p_0), \quad (3.1.17)$$

находим из (3.1.13) АМКО абсолютно оптимального алгоритма

$$V(F_0, p_0) = \frac{1}{I(p_0)} A^{-1}(c^*, \sigma^2(p_0)). \quad (3.1.18)$$

Правая часть этого равенства совпадает с нижней границей неравенства Крамера — Рао (2.3.21), определяющей предельно возможную скорость сходимости несмешанных оценок. Поэтому абсолютно оптимальные алгоритмы обладают предельно возможной скоростью сходимости, которая не может быть превзойдена никакими иными алгоритмами и методами, порождающими несмешанные оценки.

В заключение отметим, что если оптимальные алгоритмы — это алгоритмы стохастической аппроксимации, оптимальные по матрице усиления, то абсолютно оптимальные алгоритмы — это алгоритмы стохастической аппроксимации, оптимальные как по матрице усиления, так и по функции потерь.

§ 3.2. Основные виды абсолютно оптимальных алгоритмов

Абсолютно оптимальный алгоритм (3.1.15), (3.1.16) оказывается физически нереализуемым, когда нормированная информационная матрица $A(c^*, \sigma^2(p_0))$ явно зависит от оптимального решения. Для перехода к реализуемому абсолютно оптимальному алгоритму можно воспользоваться теми же соображениями, которые использовались при получении реализуемых оптимальных алгоритмов (см. § 1.7). Однако замены (3.1.14), приводящие к реализуемому абсолютно оптимальному алгоритму, значительно удобнее применять непосредственно к реализуемым оптимальным алгоритмам. Так, из алгоритма (1.7.14), (1.7.13) после замены производной функции потерь $F'[\varepsilon]$ на $F'_0[\varepsilon]$ (3.1.14) получаем реализуемый абсолютно оптимальный алгоритм вида

$$c(n) = c(n-1) + \Gamma_{01}(n) F'_0[\varepsilon(z(n), c(n-1))] \nabla_c f(x(n), c(n-1)), \quad (3.2.1)$$

где

$$\Gamma_{01}(n) = \frac{1}{n I(p_0)} A^{-1}(c(n-1), \sigma^2(p_0)). \quad (3.2.2)$$

Он отличается от нереализуемого абсолютно оптимального алгоритма (3.1.15), (3.1.16) лишь тем, что в матрице усиления $\Gamma_0(n)$ (3.1.16)

оптимальное решение c^* заменено его оценкой $c(n-1)$, порождаемой самим алгоритмом.

Блок-схема абсолютно оптимальных алгоритмов (3.2.1), (3.2.2) отличается от блок-схемы оптимальных алгоритмов (1.7.14), (1.7.13), изображенной на рис. 1.16, лишь тем, что теперь в ней вместо $F'[\varepsilon]$ и $\Gamma_{A_1}(n)$ будут фигурировать $F'_0[\varepsilon]$ и $\hat{\Gamma}_0(n)$. Поэтому эту блок-схему мы не будем здесь воспроизводить.

Обратимся к реализуемым оптимальным алгоритмам (1.7.24) — (1.7.26). Заменяя в них $F'[\varepsilon]$ на $F'_0[\varepsilon]$ и $M\{F''[\varepsilon]\}$ на $M\{F''_0[\varepsilon]\} = I(p_0)$, получим *реализуемые абсолютно оптимальные алгоритмы*

$$\begin{aligned} c(n) &= c(n-1) + \hat{\Gamma}_0(n) F'_0[\varepsilon](z(n), c(n-1)) v(n), \\ c(0) &= c_0, \end{aligned} \quad (3.2.3)$$

$$v(n) = x(n) - \sum_{m=1}^N d_m(n-1) v(n-m), \quad (3.2.4a)$$

$$v(m) = 0, \quad m = 0, -1, \dots, 1 - N,$$

$$\begin{aligned} \hat{\Gamma}_0(n) &= \hat{\Gamma}_0(n-1) - \frac{\hat{\Gamma}_0(n-1) v(n) v^\top(n) \hat{\Gamma}_0(n-1)}{I^{-1}(p_0) + v^\top(n) \hat{\Gamma}(n-1) v(n)}, \\ \hat{\Gamma}_0(0) &= \gamma E, \quad \gamma \gg 1. \end{aligned} \quad (3.2.4b)$$

Блок-схема этих реализуемых абсолютно оптимальных алгоритмов изображена на рис. 3.1. Она получается из блок-схемы оптимальных

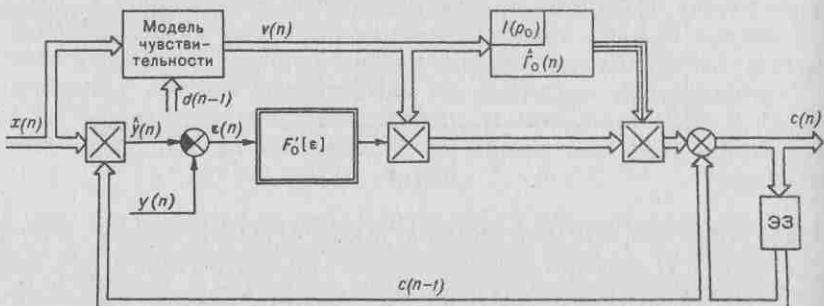


Рис. 3.1

алгоритмов (1.7.24) — (1.7.26) (рис. 1.17) заменой в ней $F'[\varepsilon]$ на $F'_0[\varepsilon]$ и, соответственно, $M\{F''[\varepsilon]\}$ на $M\{F''_0[\varepsilon]\} = I(p_0)$.

Абсолютно оптимальные алгоритмы (3.2.3), (3.2.4) удобно представить в ином виде, а именно,

$$c(n) = c(n-1) + \hat{K}_0(n) F'_0[\varepsilon(z(n), c(n-1))], \quad (3.2.5)$$

где

$$\hat{K}_0(n) = \hat{\Gamma}_0(n) v(n) \quad (3.2.6)$$

представляет собой вектор усиления. Если умножить обе части матричного рекуррентного соотношения (3.2.4б) справа на $v(n)$, то не трудно получить связь между $\hat{K}_0(n)$ и $\hat{\Gamma}_0(n-1)$:

$$\hat{K}_0(n) = \frac{\hat{\Gamma}_0(n-1) v(n) I^{-1}(p_0)}{I^{-1}(p_0) + v^T(n) \hat{\Gamma}_0(n-1) v(n)}, \quad (3.2.7)$$

где $\hat{\Gamma}_0(n-1)$ и $v(n)$ определяются по-прежнему из рекуррентных соотношений (3.2.4).

Блок-схема оптимальных алгоритмов (3.2.5), (3.2.6), (3.2.4) изображена на рис. 3.2.

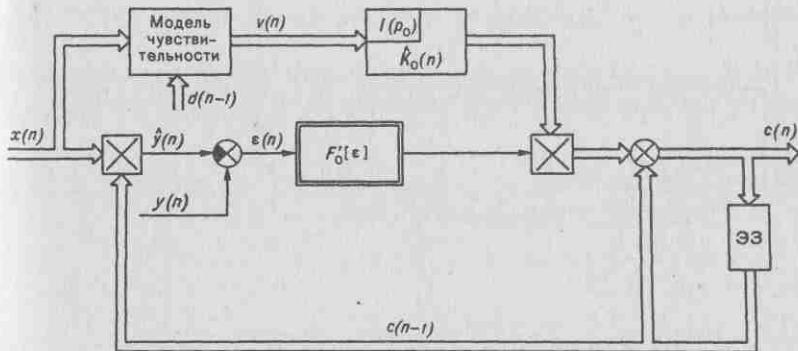


Рис. 3.2

Для объектов с простой помехой ($d_m = 0$ при $m = 1, \dots, N$) согласно (1.4.26) $v(n) = x(n)$ и абсолютно оптимальные алгоритмы упрощаются. Из (3.2.1) и (3.2.2) получаем

$$c(n) = c(n-1) + \Gamma_{01}(n) F'_0[\varepsilon(z(n), c(n-1))] x(n) \quad (3.2.8)$$

и

$$\Gamma_{01}(n) = \frac{1}{n I(p_0)} A^{-1}(c(n-1), \sigma^2(p_0)). \quad (3.2.9)$$

Нормированная информационная матрица $A(c^*, \sigma^2(p_0))$ не зависит в данном случае от вектора параметров c^* , поэтому вычисление матрицы усиления $G_{01}(n)$ (3.2.9) производится независимо от основного алгоритма (3.2.8). Аналогично, существенно упрощаются абсолютно оптимальные алгоритмы (3.2.3), (3.2.4). Они принимают вид

$$\begin{aligned} c(n) &= c(n-1) + \hat{\Gamma}_0(n) F'_0[\varepsilon(z(n), c(n-1))] \mathbf{x}(n), \\ c(0) &= c_0, \end{aligned} \quad (3.2.10)$$

И

$$\begin{aligned}\widehat{\Gamma}_0(n) &= \widehat{\Gamma}_0(n-1) - \frac{\widehat{\Gamma}_0(n-1) \mathbf{x}(n) \mathbf{x}^\top(n) \widehat{\Gamma}_0(n-1)}{I^{-1}(p_0) + \mathbf{x}^\top(n) \widehat{\Gamma}(n-1) \mathbf{x}(n)}, \\ \widehat{\Gamma}_0(0) &= \gamma E, \quad \gamma \gg 1.\end{aligned}\quad (3.2.11)$$

Блок-схема этих абсолютно оптимальных алгоритмов изображена на рис. 3.3. Заметим еще раз, что в этой блок-схеме матрица усиле-

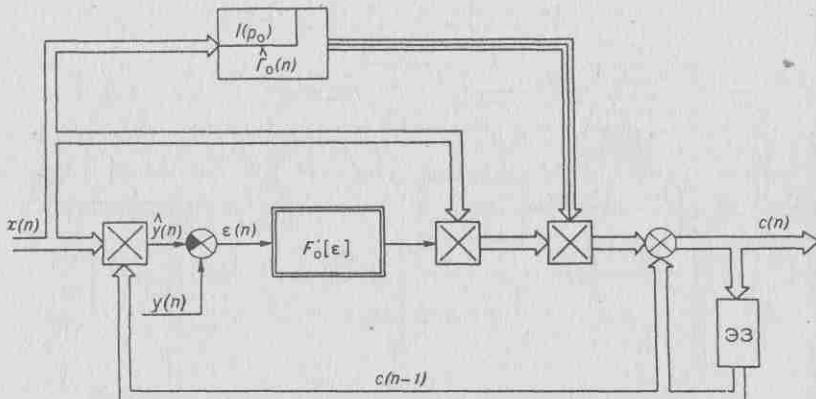


Рис. 3.3

ния $\hat{\Gamma}_0(n)$ не зависит явно от оптимального решения c^* , которое в (3.2.9) было заменено на $c(n-1)$. Эта важная особенность алгоритма (3.2.8), (3.2.9) объясняется тем, что в нем $\hat{\Gamma}_0(n)$ выражается через наблюдения, которые не зависят явно от оценок оптимального решения c^* . Наконец, абсолютно оптимальные алгоритмы (3.2.5), (3.2.6) в этом случае запишутся в виде

$$c(n) = c(n-1) + \hat{K}_0(n) F_0'[\varepsilon(z(n), c(n-1))], \quad (3.2.12)$$

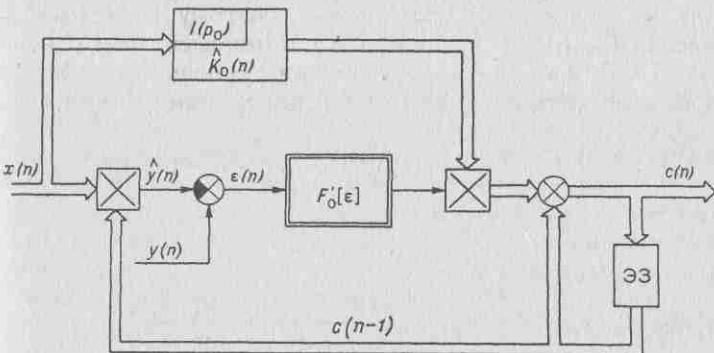


Рис. 3.4

где

$$\hat{K}_0(n) = \frac{\hat{\Gamma}_0(n-1) \mathbf{x}(n) I^{-1}(p_0)}{I^{-1}(p_0) + \mathbf{x}^\top(n) \hat{\Gamma}_0(n-1) \mathbf{x}(n)}, \quad (3.2.13)$$

а $\widehat{G}_0(n)$ определяется из матричного рекуррентного соотношения (3.2.11).

Блок-схема абсолютно оптимальных алгоритмов (3.2.12), (3.2.13), (3.2.11) приведена на рис. 3.4. Блок-схема формирования матрицы уси-

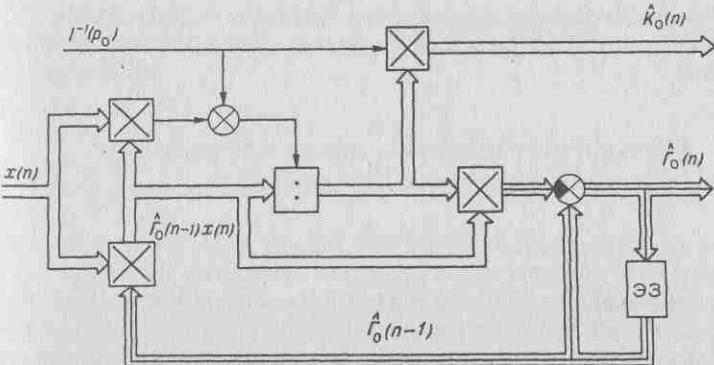


Рис. 3.5

ления $\widehat{\Gamma}_0(n)$ (3.2.11) и вектора усиления (3.2.13), которые фигурируют в блок-схеме алгоритмов (рис. 3.4), приведена на рис. 3.5. Если вход

$x(n)$ в ней заменить на $v(n)$, то мы получим матрицу усиления $\hat{\Gamma}_0(n)$ и вектор усиления, фигурирующие в блок-схемах более общих алгоритмов (рис. 3.1, 3.2).

Заметим, что начальные значения алгоритмов $c(0) = c_0$, $\hat{\Gamma}_0(0) = \gamma E$ не влияют на их асимптотические свойства, которыми мы сейчас только и интересуемся. Поэтому мы не будем обсуждать вопросы выбора этих начальных значений. К этому вопросу вернемся в главе 7.

Абсолютно оптимальные алгоритмы учитывают полную априорную информацию о помехах (плотность распределения $p_0(\xi)$, дисперсию $\sigma^2(p_0)$) и благодаря этому обладают предельно возможной скоростью сходимости, которая не может быть превзойдена никакими иными алгоритмами. Однако такие алгоритмы (3.2.1), (3.2.2) не всегда существуют. Так, для равномерной плотности распределения помех

$$p_0(\xi) = \begin{cases} \frac{1}{2l}, & |\xi| \leq l, \\ 0, & |\xi| > l, \end{cases} \quad (3.2.14)$$

фишеровская информация $I(p_0)$ равна бесконечности (см. табл. 2.1) и, значит, в силу (3.2.2) $\Gamma_0(n) = 0$. При идентификации АР-объектов с помехой, имеющей плотность распределения Коши: $p_0(\xi) = C(0, s)$, дисперсия помехи бесконечна: $\sigma^2(p_0) = \infty$; следовательно, нормированная информационная матрица $A(c^*, \sigma^2(p_0)) = \sigma^2(p_0)A_1(c^*)$ обращается в бесконечность и, как видно из (3.2.2), опять $\Gamma_0(n) = 0$.

Для таких нерегулярных случаев существуют иные алгоритмы, имеющие более высокую скорость сходимости, чем та, что определяется нижней границей неравенства Крамера — Рао. Далее мы этих нерегулярных случаев касаться не будем. Они требуют особого рассмотрения.

§ 3.3. Абсолютно оптимальные алгоритмы с настройкой параметра масштаба

Абсолютно оптимальные алгоритмы, полученные в настоящей главе, предназначены для идентификации динамических систем, в которых вспомогательный параметр d_0^* известен и равен единице. Если же этот вспомогательный параметр не известен и, следовательно, подлежит определению (как это имеет место, например, в том случае, когда помеха приложена ко входу объекта (рис. 1.5) и $d_0^* = b_0^*$), то необходимо как-то видоизменить алгоритмы идентификации. Аналогичная ситуация имеет место и тогда, когда плотность распределения помехи $p_0(\xi)$ известна с точностью до параметра s^* , характеризующего меру разброса помехи $\xi(n)$.

Введем обозначение параметра масштаба, характеризующего меру разброса:

$$s_0^* = d_0^* s^*, \quad (3.3.1)$$

и пусть $\bar{p}_0(\xi)$ — плотность распределения с единичной мерой разброса. Тогда плотность распределения с заданной мерой разброса s_0^* можно представить в виде

$$p_0(\xi) = \frac{1}{s_0^*} \bar{p}_0\left(\frac{\xi}{s_0^*}\right) = \frac{1}{d_0^* s^*} \bar{p}_0\left(\frac{\xi}{d_0^* s^*}\right). \quad (3.3.2)$$

Рассмотрим возможность построения абсолютно оптимальных алгоритмов идентификации, когда параметр масштаба s_0^* неизвестен, а известна лишь плотность распределения с единичной мерой разброса $\bar{p}_0(\xi)$. Оптимальная функция потерь теперь будет зависеть не только от вектора

$$c = (a_1, \dots, a_N, b_0, \dots, b_N, \bar{d}_1, \dots, \bar{d}_N), \quad (3.3.3)$$

где

$$\bar{d}_k = \frac{d_k}{d_0}, \quad k = 1, \dots, N, \quad (3.3.4)$$

входящего в невязку $\varepsilon(z(n), c)$, но и от параметра масштаба s :

$$F_0[\varepsilon(z, c); s] = -\ln \frac{1}{s} \bar{p}_0\left(\frac{\xi}{s}\right) \Big|_{\xi=\varepsilon(z, c)}, \quad (3.3.5)$$

или

$$F_0[\varepsilon(z, c); s] = \ln s - \ln \bar{p}_0\left(\frac{\xi}{s}\right) \Big|_{\xi=\varepsilon(z, c)}. \quad (3.3.6)$$

Обозначим

$$\bar{F}_0\left[\frac{\varepsilon(z, c)}{s}\right] = -\ln \bar{p}_0\left(\frac{\xi}{s}\right) \Big|_{\xi=\varepsilon(z, c)}. \quad (3.3.7)$$

Тогда оптимальная функция потерь представится в виде

$$F_0[\varepsilon(z, c); s] = \ln s + \bar{F}_0\left[\frac{\varepsilon(z, c)}{s}\right]. \quad (3.3.8)$$

Таким образом, средние потери, которые теперь зависят и от параметра масштаба s , равны

$$J^0(c, s) = M\{F_0[\varepsilon(z(n), c); s]\}, \quad (3.3.9)$$

или, после подстановки F_0 из (3.3.8),

$$J^0(c, s) = \ln s + M\left\{\bar{F}_0\left[\frac{\varepsilon(z(n), c)}{s}\right]\right\}. \quad (3.3.10)$$

Градиент $\nabla_c J^0(c, s)$ и производная $\frac{\partial}{\partial s} J^0(c, s)$ средних потерь равны соответственно

$$\nabla_c J^0(c, s) = -M \left\{ \bar{F}'_0 \left[\frac{\varepsilon(z(n), c)}{s} \right] \frac{\nabla_c f(x(n), c)}{s} \right\} \quad (3.3.11)$$

и

$$\frac{\partial}{\partial s} J^0(c, s) = \frac{1}{s^2} - M \left\{ \bar{F}'_0 \left[\frac{\varepsilon(z(n), c)}{s^2} \right] \frac{\varepsilon(z(n), c)}{s^2} \right\}. \quad (3.3.12)$$

Используем эти выражения для формирования как основного абсолютно оптимального алгоритма оценивания c^* , так и вспомогательного алгоритма оценивания параметра масштаба s_0^* .

Принимая во внимание, что фишеровские информации и дисперсии для плотностей распределения $p_0(\xi)$ и $\bar{p}_0(\xi)$ связаны очевидными соотношениями

$$I(p_0) = \frac{1}{(s_0^*)^2} I(\bar{p}_0), \quad \sigma^2(p_0) = (s_0^*)^2 \sigma^2(\bar{p}_0), \quad (3.3.13)$$

запишем основной алгоритм в уже знакомой нам форме,

$$c(n) = c(n-1) + \Gamma_0(n) \bar{F}'_0 \left[\frac{\varepsilon(z(n), c(n-1))}{s(n-1)} \right] \frac{\nabla_c f(x(n), c(n-1))}{s(n-1)}, \quad (3.3.14)$$

где в соответствии с (3.2.2)

$$\Gamma_0(n) = \frac{s^2(n-1)}{n I(\bar{p}_0)} A^{-1}(c(n-1), s^2(n-1) \sigma^2(\bar{p}_0)). \quad (3.3.15)$$

Этот алгоритм отличается от абсолютно оптимального алгоритма, например, вида (3.2.1), (3.2.2), лишь тем, что в нем вместо фиксированного параметра масштаба s_0^* фигурирует его оценка $s(n-1)$. Что же касается вспомогательного алгоритма, то он также формируется по правилам, установленным в § 3.1. Используя выражение производной $\frac{\partial}{\partial s} J^0(c, s)$ (3.3.12), получаем

$$s(n) = s(n-1) -$$

$$- \gamma_0(n) \left\{ s(n-1) - \bar{F}'_0 \left[\frac{\varepsilon(z(n), c(n-1))}{s(n-1)} \right] \varepsilon(z(n), c(n-1)) \right\}, \quad (3.3.16)$$

$$s(0) = s^0,$$

где коэффициент усиления равен

$$\gamma_0(n) = \frac{1}{n (s_0^*)^2 \frac{\partial^2}{\partial s^2} J^0(c^*, s_0^*)}. \quad (3.3.17)$$

Заметим, что параметр масштаба s_0^* является положительным, поэтому алгоритм (3.3.16) следовало бы снабдить соответствующим проектором, чтобы всегда было $s(n) > 0$. Мы, однако, не будем этого делать.

Вычислим коэффициент усиления $\gamma_0(n)$. Дифференцируя $\frac{\partial}{\partial s} J^0(c, s)$ (3.3.12) по s , получим при $c = c^*$ и $s = s_0^*$

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial s^2} J^0(c^*, s_0^*) = & -\frac{1}{(s_0^*)^2} + M \left\{ \bar{F}_0'' \left[\frac{\varepsilon(z(n), c^*)}{s_0^*} \right] \frac{\varepsilon^2(z(n), c^*)}{(s_0^*)^4} \right\} + \\ & + 2M \left\{ \bar{F}_0' \left[\frac{\varepsilon(z(n), c^*)}{s_0^*} \right] \frac{\varepsilon(z(n), c^*)}{(s_0^*)^3} \right\}. \end{aligned} \quad (3.3.18)$$

Но для оптимальных решений c^* и s_0^* из (3.3.12) имеем

$$M \left\{ \bar{F}_0' \left[\frac{\varepsilon(z(n), c^*)}{s_0^*} \right] \frac{\varepsilon(z(n), c^*)}{(s_0^*)^3} \right\} = \frac{1}{(s_0^*)^2}. \quad (3.3.19)$$

Поэтому выражение для $\frac{\partial^2}{\partial s^2} J^0(c^*, s_0^*)$ (3.3.18) упрощается:

$$\frac{\partial^2}{\partial s^2} J^0(c^*, s_0^*) = \frac{1}{(s_0^*)^2} + \frac{1}{(s_0^*)^4} M \left\{ \bar{F}_0'' \left[\frac{\varepsilon(z(n), c^*)}{s_0^*} \right] \varepsilon^2(z(n), c^*) \right\}. \quad (3.3.20)$$

Учитывая (3.3.7), получим

$$\bar{F}_0'' \left[\frac{\varepsilon(z(n), c^*)}{s_0^*} \right] = \frac{\bar{p}_0'^2 \left(\frac{\xi}{s_0^*} \right) - \bar{p}_0'' \left(\frac{\xi}{s_0^*} \right) \bar{p}_0 \left(\frac{\xi}{s_0^*} \right)}{\bar{p}_0^2 \left(\frac{\xi}{s_0^*} \right)} \Big|_{\xi=\varepsilon(z(n), c^*)} \quad (3.3.21)$$

Умножая это равенство на ξ^2 и беря математическое ожидание, получим после несложных преобразований

$$M \left\{ \xi^2 \bar{F}_0'' \left[\frac{\xi}{s_0^*} \right] \right\} = (s_0^*)^2 \left[M \left\{ \xi^2 \left(\frac{\bar{p}_0'(\xi)}{\bar{p}_0(\xi)} \right)^2 \right\} - M \left\{ \xi^2 \frac{\bar{p}_0''(\xi)}{\bar{p}_0(\xi)} \right\} \right]. \quad (3.3.22)$$

Первое слагаемое в (3.3.22)

$$M \left\{ \xi^2 \left(\frac{\bar{p}_0'(\xi)}{\bar{p}_0(\xi)} \right)^2 \right\} = I_D(\bar{p}_0) \quad (3.3.23)$$

представляет собой гибрид фишеровской информации и дисперсии. Будем называть $I_D(\bar{p}_0)$ фишеровской дисперсионной информацией, или, короче, фишеровской динформацией. Примеры фишеровской динформации $I_D(\bar{p}_0)$ вместе с фишеровской информацией $I(\bar{p}_0)$ для ряда плотностей распределений приведены в табл. 3.1.

Таблица 3.1
Фишеровская информация и фишеровская информация

№	$\bar{p}_0(\xi)$	$I_D(\bar{p}_0) = M\left\{\xi^2 \left(\frac{\bar{p}'_0(\xi)}{\bar{p}_0(\xi)}\right)^2\right\}$	$I(\bar{p}_0) = M\left\{\left(\frac{\bar{p}'_0(\xi)}{\bar{p}_0(\xi)}\right)^2\right\}$
1	$N(0, 1)$ $\frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{\xi^2}{2}}$	3	1
2	$L(0, 1)$ $\frac{1}{2} e^{- \xi }$	2	1
3	$Se(0, 1)$ $\frac{1}{2} \operatorname{sech}^2 \xi$	$\frac{\pi^2 + 12}{9} \approx 2,43$	$\frac{4}{3} \approx 1,33$
4	$St(0, 1)$ $\frac{2}{\pi} \frac{1}{(1 + \xi^2)^2}$	3	2
5	$C(0, 1)$ $\frac{1}{\pi} \frac{1}{1 + \xi^2}$	1,5	0,5

Что же касается второго слагаемого в (3.3.22), то, как нетрудно показать,

$$M\left\{\xi^2 \frac{\bar{p}''_0(\xi)}{\bar{p}_0(\xi)}\right\} = 2.$$

Таким образом,

$$M\left\{\xi^2 F_0''\left[\frac{\xi}{s_0^*}\right]\right\} = (s_0^*)^2 (I_D(\bar{p}_0) - 2),$$

и из (3.3.20) получаем

$$\frac{\partial^2}{\partial s^2} J^0(c^*, s_0^*) = \frac{1}{(s_0^*)^2} (I_D(\bar{p}_0) - 1).$$

Окончательно, коэффициент усиления $\gamma_0(n)$ (3.3.17) запишется в виде

$$\gamma_0(n) = \frac{1}{n(I_D(\bar{p}_0) - 1)}. \quad (3.3.24)$$

Блок-схема абсолютно оптимального алгоритма с настройкой параметра масштаба (3.3.14) — (3.3.17) изображена на рис. 3.6. По сравнению с рис. 3.1 она содержит дополнительный контур настройки параметра масштаба.

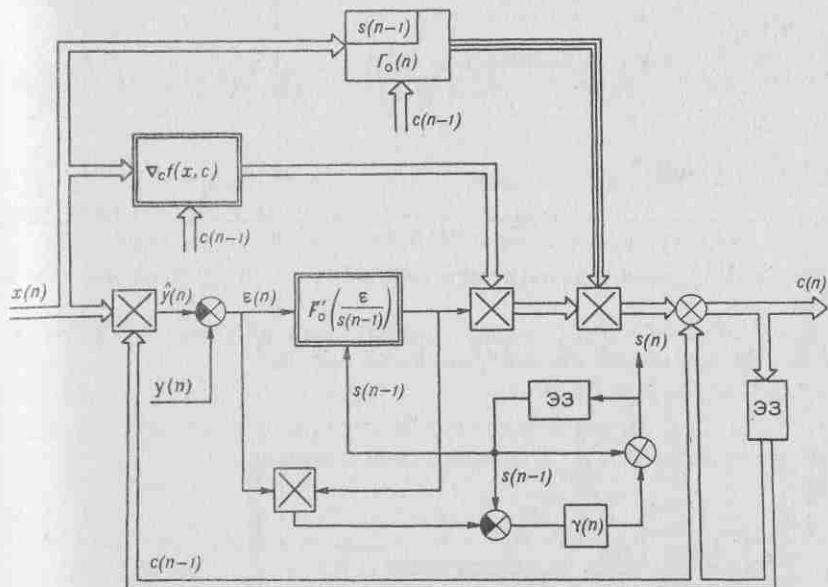


Рис. 3.6

Можно получить иную форму алгоритма с настройкой параметра масштаба, если использовать вместо $\Gamma_0(n)$ (3.3.15) оценку матрицы усиления $\widehat{\Gamma}_0(n)$ в виде рекуррентного соотношения, аналогичного (3.2.46). Поскольку $\nabla_c f(\mathbf{x}(n), \mathbf{c}(n-1))$ представляет собой вектор $\mathbf{v}(n)$ коэффициентов чувствительности (1.4.22), то окончательно абсолютно оптимальные алгоритмы с настройкой параметра масштаба примут следующий вид:

— основной алгоритм

$$c(n) = c(n-1) + \widehat{F}_0(n) \widehat{F}'_0 \left[\frac{\varepsilon(z(n), c(n-1))}{s(n-1)} \right] \frac{v(n)}{s(n-1)}, \quad (3.3.25)$$

$$c(0) = c_0,$$

Где

$$v(n) = x(n) - \sum_{m=1}^N d_m(n-1) v(n-m), \quad (3.3.26a)$$

$$v(m) = 0 \quad \text{при} \quad m = 0, -1, \dots, 1 - N,$$

$$\begin{aligned}\widehat{\Gamma}_0(n) &= \widehat{\Gamma}_0(n-1) - \frac{\widehat{\Gamma}_0(n-1) \mathbf{v}(n) \mathbf{v}^\top(n) \widehat{\Gamma}_0(n-1)}{s^2(n-1) I^{-1}(p_0) + \mathbf{v}^\top(n) \widehat{\Gamma}_0(n-1) \mathbf{v}(n)}, \\ \widehat{\Gamma}_0(0) &= \gamma E, \quad \gamma \gg 1.\end{aligned}\quad (3.3.266)$$

— вспомогательный алгоритм

$$\begin{aligned} s(n) &= s(n-1) - \\ &- \gamma_0(n) \left\{ s(n-1) - \bar{F}'_0 \left[\frac{\varepsilon(z(n), c(n-1))}{s(n-1)} \right] \varepsilon(z(n), c(n-1)) \right\}, \quad (3.3.27) \\ s(0) &= s_0, \end{aligned}$$

где в силу (3.3.24)

$$\gamma_0(n) = \frac{1}{n(I_D(\bar{p}_0) - 1)}. \quad (3.3.28)$$

Начальные условия для алгоритмов (3.3.25) — (3.3.28) те же, что и ранее.

Блок-схема этого абсолютно оптимального алгоритма с настройкой параметра масштаба изображена на рис. 3.7.

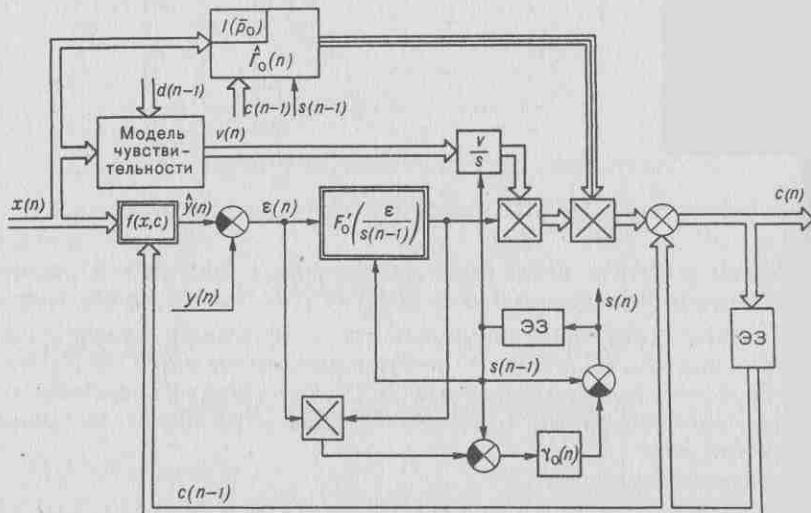


Рис. 3.7

Напомним, что если оптимальная модель статическая, то соответствует идентификации объектов с простой помехой, то во всех этих алгоритмах $v(n) = x(n)$, и необходимость в модели чувствительности (3.3.26а) отпадает.

§ 3.4. Одномерные абсолютно оптимальные и оптимальные алгоритмы и их свойства

Простейшей задачей идентификации является задача оценки постоянной величины, наблюдаемой на фоне помех

$$y(n) = c^* + \xi(n), \quad (3.4.1)$$

где $\xi(n)$ — независимая помеха с плотностью распределения $p_0(\xi)$. Уравнение оптимальной настраиваемой модели имеет вид

$$\hat{y}(n) = c, \quad (3.4.2)$$

где c — скалярная оценка. Это — наиболее простой, вырожденный вид статической модели.

Оптимальные средние потери в такой задаче имеют вид

$$J^0(c) = M\{F_0[\varepsilon(z(n), c)]\}, \quad (3.4.3)$$

где

$$\varepsilon(z(n), c) = y(n) - \hat{y}(n) = y(n) - c \quad (3.4.4)$$

— невязка, $F_0[\varepsilon] = -\ln p_0(\xi)|_{\xi=\varepsilon}$ — оптимальная функция потерь, а $p_0(\xi)$ — плотность распределения помех. Кроме того,

$$\begin{aligned} f(x, c) &= c, \quad \nabla_c f(x, c) \Rightarrow f'_c(x, c) = 1, \\ A(c^*, \sigma^2(p_0)) &= 1. \end{aligned} \quad (3.4.5)$$

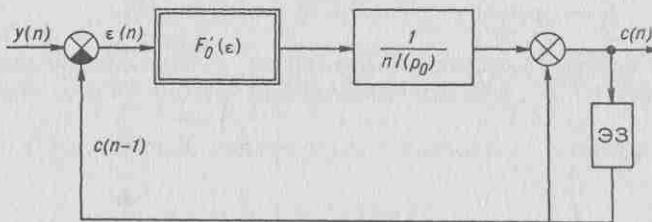


Рис. 3.8

Тогда из (3.2.1), (3.2.2) или (3.1.15), (3.1.16) получаем абсолютно оптимальный алгоритм оценки постоянной величины в условиях помех:

$$c(n) = c(n-1) + \frac{1}{nI(p_0)} F'_0[y(n) - c(n-1)]. \quad (3.4.6)$$

Блок-схема этого абсолютно оптимального алгоритма изображена на рис. 3.8. Она содержит нелинейный преобразователь $F'_0[\varepsilon]$.

Для помех с гауссовой плотностью распределения $p_0(\xi) = N(0, \sigma_\xi^2)$ имеем

$$F'_0[\varepsilon] = \frac{\varepsilon}{\sigma_f^2}, \quad I(p_0) = \frac{1}{\sigma_f^2}. \quad (3.4.7)$$

В этом случае из (3.4.6) следует, что абсолютно оптимальный алгоритм представляет собой линейный алгоритм

$$c(n) = c(n-1) + \frac{1}{n} (y(n) - c(n-1)). \quad (3.4.8)$$

Схема, реализующая этот алгоритм, изображена на рис. 3.9. В ней нелинейный преобразователь отсутствует.

Оценка $c(n)$, порождаемая абсолютно оптимальным линейным алгоритмом (3.4.8), как нетрудно убедиться, равна

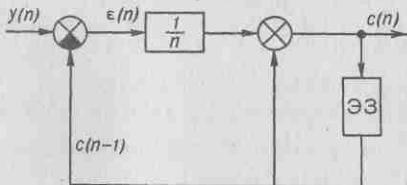


Рис. 3.9

$$c(n) = \frac{1}{n} \sum_{m=1}^n y(m). \quad (3.4.9)$$

Отметим ряд особенностей алгоритма (3.4.8). Он не требует знания дисперсии помехи σ_e^2 , а значения порождаемых им оценок

$c(n)$ не зависят от выбора начального значения $c(0) = c_0$. Действительно, при любом c_0 из алгоритма (3.4.8) при $n = 1$ получаем

$$c(1) = c(0) + (y(1) - c(0)) = y(1). \quad (3.4.10)$$

Отсюда видно, что оценка $c(1)$, а значит, и последующие оценки $c(n)$ не зависят от c_0 , а будут определяться только наблюдениями $y(1), y(2), \dots$

Для помех с плотностью распределения Лапласа $p_0(\xi) = L(0, s_\xi)$ имеем

$$F[\varepsilon] = \frac{\operatorname{sign} \varepsilon}{s_\xi}, \quad I(p_0) = \frac{1}{s_\xi^2}. \quad (3.4.11)$$

В этом случае из (3.4.6) следует, что абсолютно оптимальный алгоритм является релейным алгоритмом:

$$c(n) = c(n-1) + \frac{s\xi}{n} \operatorname{sign}(y(n) - c(n-1)). \quad (3.4.12)$$

Блок-схема этого алгоритма изображена на рис. 3.10. Она содержит релейный преобразователь. Оценка, порождаемая абсолютно оптимальным релейным алгоритмом, соответствует оценке медианы.

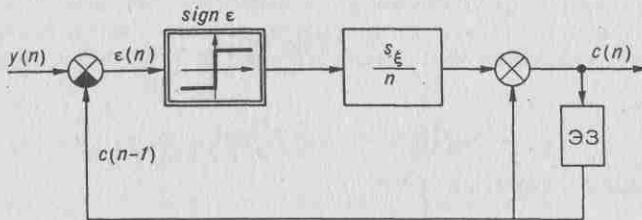


Рис. 3.10

Для помех с плотностью распределения Коши $p_0(\xi) = C(0, s_\xi^2)$ имеем

$$F'_0[\varepsilon] = \frac{2\varepsilon}{s_\xi^2 + \varepsilon^2}, \quad I(p_0) = \frac{1}{2s_\xi^2}. \quad (3.4.13)$$

В этом случае из (3.4.6) получаем абсолютно оптимальный нелинейный алгоритм:

$$c(n) = c(n-1) + \frac{4s_\xi^2}{n} \frac{y(n) - c(n-1)}{s_\xi^2 + (y(n) - c(n-1))^2}. \quad (3.4.14)$$

Блок-схема этого алгоритма изображена на рис. 3.11.

В отличие от линейного алгоритма (3.4.8), релейный (3.4.12) и нелинейный (3.4.14) абсолютно оптимальные алгоритмы порождают оценки, зависящие как от параметра масштаба s_ξ , так и от начального значения $c(0)$.

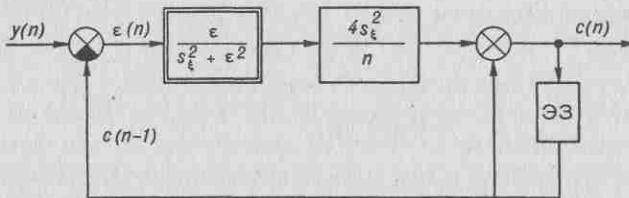


Рис. 3.11

Для приведенных выше абсолютно оптимальных алгоритмов асимптотическая матрица ковариаций ошибок АМКО $V(F_0, p_0) = V(p_0)$ вырождается в скалярную величину — асимптотическую дисперсию ошибки (АДО), которую мы будем обозначать $\sigma_A^2(F_0, p_0) = \sigma_A^2(p_0)$. Принимая во внимание (3.4.5), получаем из (2.5.3) выражение

$$V(p_0) = \sigma_A^2(p_0) = I^{-1}(p_0). \quad (3.4.15)$$

Подставляя в (3.4.15) значения фишеровских информаций, соответствующих различным плотностям распределения помех, из табл. 2.1 найдем АДО для соответствующих абсолютно оптимальных алгоритмов:

$$\sigma_A^2(p_0) = \sigma_\xi^2 = \sigma^2(p_0) \quad (3.4.16)$$

для линейного алгоритма (3.4.8),

$$\sigma_A^2(p_0) = s_\xi^2 = \frac{\sigma^2(p_0)}{2} \quad (3.4.17)$$

для релейного алгоритма (3.4.12) и

$$\sigma_A^2(p_0) = 2s_\xi^2 \quad (3.4.18)$$

для нелинейного алгоритма (3.4.14).

Таким образом, для линейного алгоритма (3.4.8) АДО равна дисперсии гауссовых помех. Для релейного алгоритма (3.4.12) АДО равна квадрату параметра масштаба лапласовой плотности распределения, или половине дисперсии лапласовых помех. Что же касается нелинейного алгоритма (3.4.14), то для него АДО равна удвоенному квадрату параметра масштаба плотности распределения Коши. Заметим, что дисперсия σ_ξ^2 в этом случае равна бесконечности.

Выясним теперь свойства одномерных оптимальных алгоритмов. Для произвольной симметричной функции потерь средние потери равны

$$J(c) = M\{F[y(n) - c]\}, \quad (3.4.19)$$

и оптимальный алгоритм из (3.1.11), (3.1.12) при учете (3.4.5) записывается в виде

$$c(n) = c(n-1) + \frac{1}{n M\{F''[\xi]\}} F'[y(n) - c(n-1)]. \quad (3.4.20)$$

АДО этого оптимального алгоритма находится из (2.2.18):

$$V(F, p_0) = \sigma_A^2(F, p_0) = \frac{M\{F'^2[\xi]\}}{[M\{F''[\xi]\}]^2}. \quad (3.4.21)$$

При этом всегда

$$\sigma_A^2(F_0, p_0) < \sigma_A^2(F, p_0) \quad \forall F[\varepsilon] \neq F_0[\varepsilon],$$

т. е. АДО абсолютно оптимального алгоритма всегда меньше АДО оптимального алгоритма при произвольной функции потерь.

Для квадратичной функции потерь

$$F[\varepsilon] = \varepsilon^2, \quad F'[\varepsilon] = 2\varepsilon, \quad F''[\varepsilon] = 2 \quad (3.4.22)$$

и, значит,

$$\mathbb{M}\{F'^2[\xi]\} = 4\mathbb{M}[\xi^2] = 4\sigma^2(p_0), \quad \mathbb{M}\{F''[\xi]\} = 2. \quad (3.4.23)$$

Поэтому из (3.4.20) получим оптимальный алгоритм

$$c(n) = c(n-1) + \frac{1}{n} [y(n) - c(n-1)], \quad (3.4.24)$$

а из (3.4.21) находим его АДО

$$\sigma_A^2(\varepsilon^2, p_0) = \frac{4\sigma^2(p_0)}{4} = \sigma^2(p_0). \quad (3.4.25)$$

Отсюда следует, что для квадратичной функции потерь (3.4.22) оптимальный алгоритм линеен и совпадает с линейным абсолютно оптимальным алгоритмом (3.4.8). АДО линейного оптимального алгоритма равна дисперсии помех. При этом плотность распределения может быть любой симметричной функцией, дисперсия которой равна $\sigma^2(p_0) < \infty$. Иначе говоря, оптимальный линейный алгоритм инвариантен относительно всех плотностей распределения помех, обладающих конечной одинаковой дисперсией. Это очень важное и интересное свойство оптимального линейного алгоритма. Чем больше дисперсия помех, тем больше АДО, а значит, тем меньше скорость сходимости этого алгоритма. Если плотность распределения помех имеет бесконечную дисперсию, что соответствует, например, плотности распределения Коши, то

$$\sigma_A^2(\varepsilon^2, p_0) = \infty. \quad (3.4.26)$$

Это значит, что скорость сходимости линейного алгоритма равна нулю, т. е. линейный алгоритм в этих условиях не работоспособен. Оценка, порождаемая им, не сходится не только к оптимальному решению c^* , но и ни к какой иной постоянной. В этом случае попросту не выполняется одно из условий сходимости линейного алгоритма, состоящее в ограниченности дисперсии помехи.

Для модульной функции потерь

$$F[\varepsilon] = |\varepsilon|, \quad F'[\varepsilon] = \text{sign } \varepsilon, \quad F''[\varepsilon] = 2\delta(\varepsilon), \quad (3.4.27)$$

где $\delta(\varepsilon)$ — дельта-функция. Следовательно,

$$\begin{aligned} \mathbb{M}\{F'^2[\xi]\} &= \mathbb{M}\{(\text{sign } \xi)^2\} = 1, \\ \mathbb{M}\{F''[\xi]\} &= \mathbb{M}\{2\delta(\xi)\} = 2p_0(0). \end{aligned} \quad (3.4.28)$$

Оптимальный алгоритм, получаемый из (3.4.20), принимает вид

$$c(n) = c(n-1) + \frac{1}{2np_0(0)} \operatorname{sign}[y(n) - c(n-1)], \quad (3.4.29)$$

а его АДО (3.4.21) будет равна

$$\sigma_A^2(|\varepsilon|, p_0) = \frac{1}{4p_0^2(0)}. \quad (3.4.30)$$

Отсюда следует, что для модульной функции потерь (3.4.27) оптимальный алгоритм является релейным. Он отличается от абсолютно оптимального релейного алгоритма (3.4.12), если плотность распределения помех отлична от лапласовой с фиксированным параметром масштаба $s_\xi = 1$. Чем больше максимальное значение плотности распределения $p_0(0)$, тем меньше АДО, а значит, тем больше скорость сходимости релейного алгоритма.

Для лапласовой плотности распределения помех $p_0(0) = 1/(2s_\xi) = p_L(0)$ и

$$\sigma_A^2(|\varepsilon|, p_0) = s_\xi^2 = \frac{\sigma_\xi^2}{2}, \quad (3.4.31)$$

т. е. АДО равна квадрату параметра масштаба, или половине дисперсии лапласовой плотности помех. Для гауссовой плотности распределения помех

$$\begin{aligned} p_0(0) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi} \sigma_\xi} = p_N(0), \\ \sigma_A^2(|\varepsilon|, p_N) &= \frac{\pi}{2} \sigma_\xi^2 = \frac{\pi}{2} \sigma^2(p_N); \end{aligned} \quad (3.4.32)$$

АДО в $\pi/2 \approx 1,57$ раз больше дисперсии помех. Наконец, для плотности распределения типа Коши

$$p_0(0) = \frac{1}{\pi s_\xi} = p_C(0), \quad \sigma_A^2(|\varepsilon|, p_C) = \frac{\pi^2 s_\xi^2}{4} < \infty \quad (3.4.33)$$

В отличие от $\sigma_A^2(\varepsilon^2, p_C)$ теперь $\sigma_A^2(|\varepsilon|, p_C)$ — конечная величина, что свидетельствует о работоспособности оптимального релейного алгоритма при наличии помех с плотностью распределения типа Коши.

Из сопоставления АДО (3.4.25) при $p_0 = p_L$ и (3.4.31) видно, что

$$\sigma_A^2(\varepsilon^2, p_L) = 2\sigma_A^2(|\varepsilon|, p_L), \quad (3.4.34)$$

т. е. АДО для линейного алгоритма в два раза больше АДО для релейного алгоритма. Иными словами, при лапласовой помехе скорость

сходимости оптимального линейного алгоритма в два раза меньше скорости сходимости оптимального релейного алгоритма.

Если параметр масштаба s_0^* неизвестен, то следует воспользоваться алгоритмами идентификации с настройкой параметра масштаба. В рассматриваемом случае оценивания постоянной величины, учитывая (3.4.5), запишем алгоритмы (3.3.14), (3.3.16), (3.3.24) в виде:

— основной алгоритм

$$c(n) = c(n-1) + \frac{s(n-1)}{nI(\bar{p}_0)} \bar{F}'_0 \left[\frac{y(n) - c(n-1)}{s(n-1)} \right], \quad (3.4.35)$$

— вспомогательный алгоритм

$$s(n) = s(n-1) - \frac{1}{n(I_D(\bar{p}'_0) - 1)} \times \\ \times \left[s(n-1) - \bar{F}'_0 \left[\frac{y(n) - c(n-1)}{s(n-1)} \right] (y(n) - c(n-1)) \right], \quad (3.4.36)$$

Блок-схема абсолютно оптимальных алгоритмов с настройкой параметра масштаба изображена на рис. 3.12.

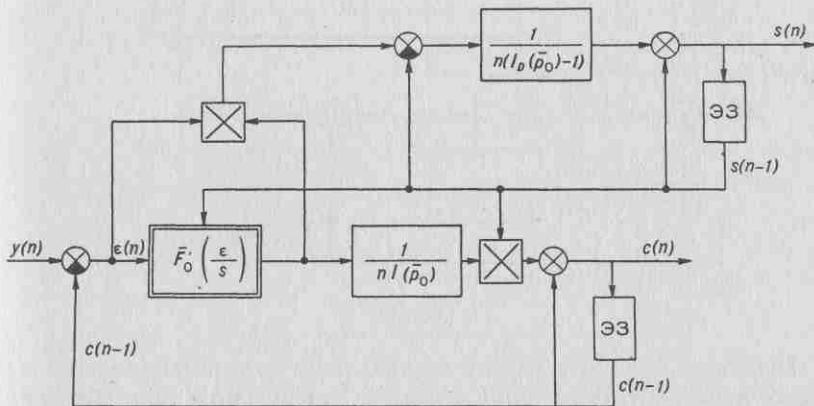


Рис. 3.12

Рассмотрим частные случаи этих алгоритмов. Предположим, что помехи имеют плотность распределения Гаусса $p_0(\xi) = N(0, \sigma_\xi^2)$. Тогда, как видно из табл. 2.2 и 3.1,

$$\bar{F}'_0\left[\frac{\varepsilon}{s}\right] = \frac{\varepsilon}{s}, \quad I(\bar{p}_0) = 1, \quad I_D(\bar{p}_0) = 3, \quad (3.4.37)$$

и из (3.4.35) и (3.4.36) мы получаем линейный и квадратичный алгоритмы с настройкой параметра масштаба:

— основной алгоритм

$$c(n) = c(n-1) + \frac{1}{n} [y(n) - c(n-1)], \quad (3.4.38)$$

— вспомогательный алгоритм

$$s(n) = s(n-1) - \frac{1}{2n} \left[s(n-1) - \frac{(y(n) - c(n-1))^2}{s(n-1)} \right]. \quad (3.4.39)$$

Блок-схема абсолютно оптимальных линейного и квадратичного алгоритмов с настройкой параметра масштаба (3.4.38), (3.4.39) изображена на рис. 3.13. Она состоит из двух схем.

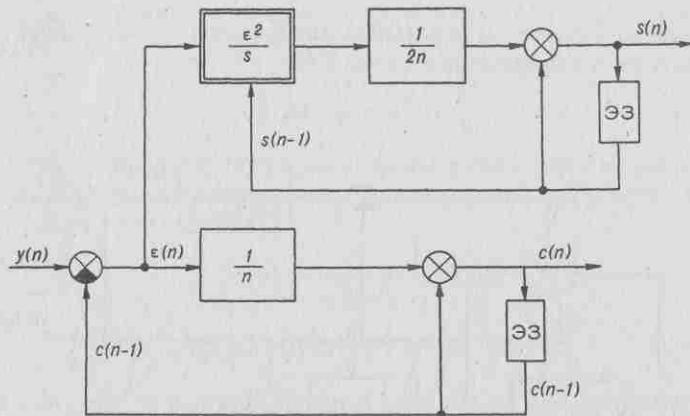


Рис. 3.13

Выходная величина первой из этих схем формирует оценку $c(n)$, а выходная величина второй схемы — оценку $s(n) = \sigma(n)$. Как видно из блок-схемы, формирование оценки $c(n)$ не требует использования оценки $s(n-1)$. Этот факт вытекает из независимости основного алгоритма от дисперсии или параметра масштаба s .

Для помехи с плотностью распределения Лапласа $p_0(\xi) = L(0, s_\xi)$, как видно из табл. 2.2 и 3.1.

$$\bar{F}'_0 \left[\frac{\xi}{s} \right] = \operatorname{sign} \frac{\xi}{s}, \quad I(\bar{p}_0) = 1, \quad I_D(\bar{p}_0) = 2, \quad (3.4.40)$$

и из (3.4.35), (3.4.36) мы получим релейный и модульный алгоритмы с настройкой параметра масштаба:

— основной алгоритм

$$c(n) = c(n-1) + \frac{s(n-1)}{n} \operatorname{sign}[y(n) - c(n-1)], \quad (3.4.41)$$

— вспомогательный алгоритм

$$s(n) = s(n-1) - \frac{1}{n} [s(n-1) - |y(n) - c(n-1)|]. \quad (3.4.42)$$

Поскольку $s > 0$, то в алгоритме (3.4.41) $\operatorname{sign} \varepsilon/s$ мы заменили на $\operatorname{sign} \varepsilon$. Блок-схема релейного и модульного алгоритмов с настройкой параметра масштаба изображена на рис. 3.14. Здесь уже возникает необходимость в подстройке параметра масштаба в основном алгоритме.

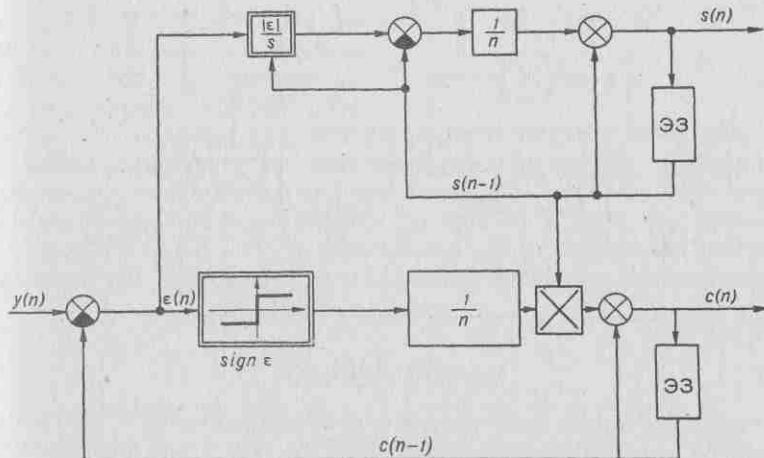


Рис. 3.14

Наконец, для помехи с плотностью распределения Коши $p_0(\xi) = C(0, s_\xi)$ (см. табл. 2.2 и 3.1) имеем

$$\bar{F}'_0\left[\frac{\varepsilon}{s}\right] = \frac{2\varepsilon s}{s^2 + \varepsilon^2}, \quad I(\bar{p}_0) = \frac{1}{2}, \quad I_D(\bar{p}_0) = \frac{3}{2}, \quad (3.4.43)$$

и из (3.4.35), (3.4.36) получим нелинейные алгоритмы с настройкой параметра масштаба:

— основной алгоритм

$$c(n) = c(n-1) + \frac{4s^2(n-1)}{n} \frac{y(n) - c(n-1)}{s^2(n-1) + (y(n) - c(n-1))^2}, \quad (3.4.44)$$

— вспомогательный алгоритм

$$s(n) = s(n-1) - \frac{2}{n} \left[s(n-1) - \frac{2[y(n) - c(n-1)]^2 s(n-1)}{s^2(n-1) + (y(n) - c(n-1))^2} \right]. \quad (3.4.45)$$

Блок-схема нелинейных алгоритмов с настройкой параметра масштаба изображена на рис. 3.15. Она также содержит две взаимно связанные схемы оценивания $c(n)$ и $s(n)$.

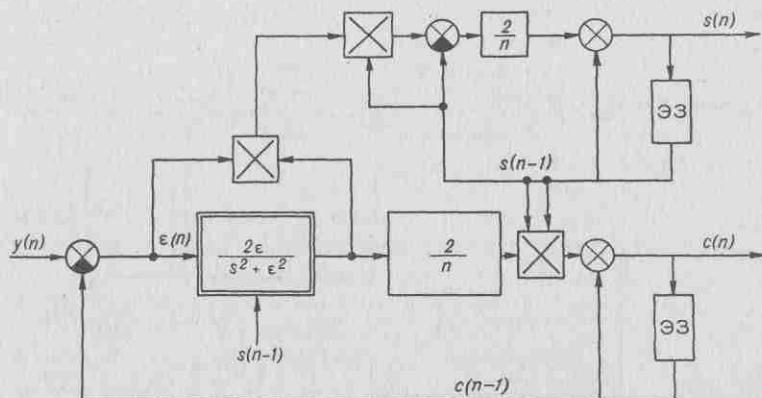


Рис. 3.15

Асимптотические свойства алгоритмов оценивания с настройкой параметра масштаба сохраняются теми же, что и для алгоритмов, в которых параметр масштаба предполагается известным.

Приведем числовые примеры. Изменение ошибок $M\{(c(n) - c^*)^2\}$, порождаемых линейным алгоритмом (3.4.8), изображено на рис. 3.16 для гауссовых помех $N(0, 1)$ (кривая *a*), для лапласовых помех $L(0, 1)$ (кривая *b*) и для помех Коши $C(0, \sqrt{2}/2)$ (кривая *c*). Параметры соответствующих распределений выбраны так, что фишеровские информации рассматриваемых распределений одинаковы и равны единице. Наиболее быстрая сходимость оценок получается для абсолютно оптимального алгоритма (кривая *a*). Меньшая скорость сходимости получается для оптимального алгоритма при лапласовой помехе (кривая *b*), и, наконец, при помехе Коши оптимальный линейный алгоритм

расходится. В табл. 3.2 приведены величины $n M\{(c(n) - c^*)^2\}$, полученные путем усреднения по ста реализациям для оценок $c(n)$, порождаемых линейным алгоритмом, при $n = 10, 20, 30, 50, 150$. В последней графе указана АДО, вычисляемая по формуле (3.4.21). Отход от оптимальной функции потерь приводит к увеличению АДО, при помехах типа Коши линейный алгоритм становится неработоспособным.

Изменение ошибок $M\{(c(n) - c^*)^2\}$, порождаемых релейным алгоритмом (3.4.12), изображено на рис. 3.17: для лапласовых помех $L(0, 1)$ — кривая a , для гауссовых $N(0, 1)$ — кривая b , и для помех Коши $C(0, \sqrt{2}/2)$ — кривая c . Наиболее быстрой сходимостью оценок обладает абсолютно оптимальный алгоритм (кривая a), меньшая скорость сходимости оптимального релейного алгоритма получается для гауссовой помехи (кривая b). Наконец, в отличие от линейного алгоритма, релейный алгоритм остается работоспособным при помехе Коши (кривая c). В табл. 3.3 приведены величины $n M\{(c(n) - c^*)^2\}$, полученные путем усреднения по ста реализациям для оценок $c(n)$, порожденных релейным алгоритмом при

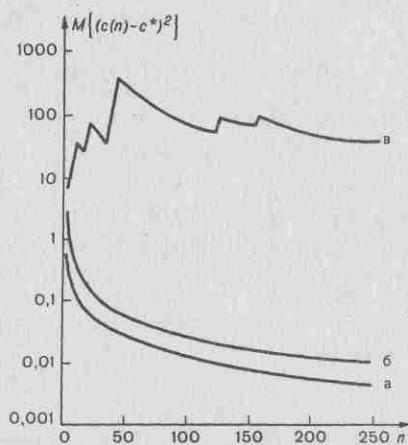


Рис. 3.16

Линейный алгоритм.
Зависимость $n M\{(c(n) - c^*)^2\}$ от n для различных помех

Таблица 3.2

n	$\xi(n) \sim N(0, 1)$	$\xi(n) \sim L(0, 1)$	$\xi(n) \sim C(0, \sqrt{2}/2)$
10	0,72	1,9	319
20	1,04	2,1	949
30	1,21	2,1	15361
50	1,06	1,85	9197
150	0,81	2,04	8087
$\sigma_A^2(F, p_0)$	1	2	∞

Таблица 3.3

Релейный алгоритм.
Зависимость $n M\{(c(n) - c^*)^2\}$ от n для различных помех

n	$\xi(n) \sim N(0, 1)$	$\xi(n) \sim L(0, 1)$	$\xi(n) \sim C(0, \sqrt{2}/2)$
10	1,66	2,22	1,88
20	1,74	2,19	2,16
30	2,07	2,07	2,22
50	2,04	1,72	2,43
150	1,66	1,35	2,82
$\sigma_A^2(F, p_0)$	$\pi/2 \approx 1,57$	1	$\pi^2/8 \approx 1,23$

$n = 10, 20, 30, 50, 150$. В последней графе приведено значение асимптотической дисперсии, вычисленной по формуле (3.4.21). Оптимальный релейный алгоритм остается работоспособным при помехах с бесконечной дисперсией.

Рассмотрим в заключение задачу идентификации простейшего динамического объекта

$$y(n) = 0,5y(n-1) + \xi(n). \quad (3.4.46)$$

Уравнение оптимальной настраиваемой модели имеет вид

$$\hat{y}(n) = a y(n-1). \quad (3.4.47)$$

Для помех, плотность распределения которых нормальна, $p_0(\xi) = N(0, \sigma_\xi^2)$, абсолютно оптимальный алгоритм — линейный:

$$a(n) = a(n-1) + \frac{1}{\sum_{m=1}^n y^2(m)} [y(n) - a(n-1)y(n-1)] y(n-1). \quad (3.4.48)$$

Для помех, плотность распределения которых лапласова, $p_0(\xi) = L(0, s_\xi)$, абсолютно оптимальный алгоритм — релейный:

$$a(n) = a(n-1) + \frac{s_\xi}{\sum_{m=1}^n y^2(m)} \operatorname{sign} [y(n) - a(n-1)y(n-1)] y(n-1). \quad (3.4.49)$$

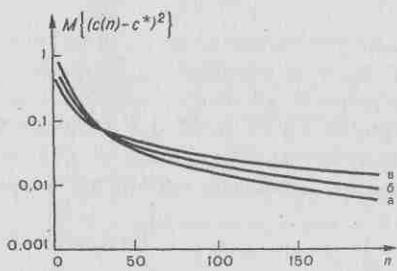


Рис. 3.17

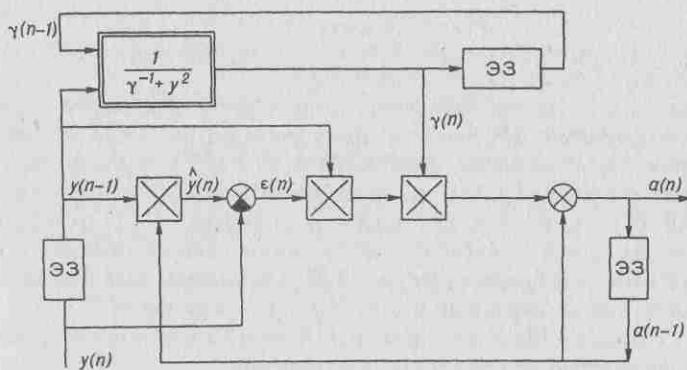


Рис. 3.18

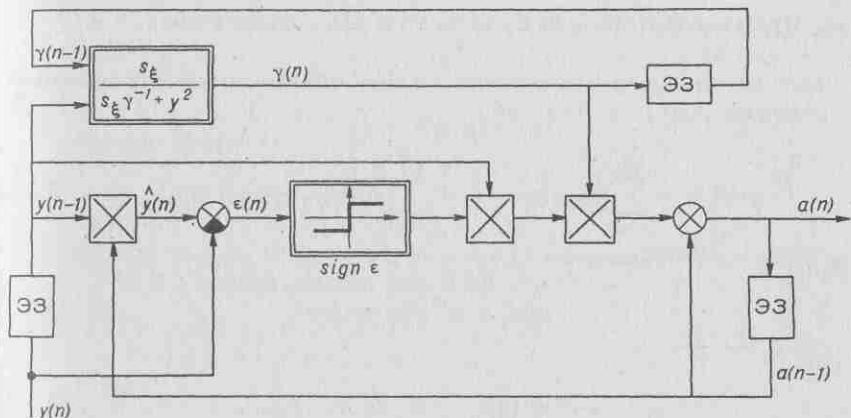


Рис. 3.19

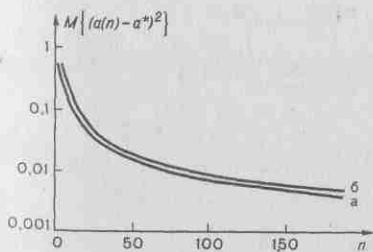


Рис. 3.20

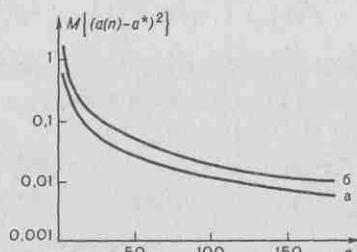


Рис. 3.21

Заметим, что алгоритмы (3.4.48), и (3.4.49) получены из общего абсолютно оптимального алгоритма (3.2.10) заменой $\hat{G}_0(n)$ на его явное выражение, которое соответствует рекуррентной процедуре (3.2.11) с бесконечным начальным условием $\gamma = \infty$.

Схемы абсолютно оптимальных линейного и релейного алгоритмов идентификации АР-объекта приведены на рис. 3.18 и рис. 3.19 соответственно. Изменение ошибок $M\{(a(n) - a^*)^2\}$, порождаемых линейным алгоритмом (3.4.48), изображено на рис. 3.20: для нормальных помех $N(0, 1)$ — кривая a , для лапласовых помех $L(0, 1)$ — кривая b . Изменение же ошибок $M\{(a(n) - a^*)^2\}$, порождаемых реальным алгоритмом (3.4.49), изображено на рис. 3.21: для лапласовых помех $L(0, 1)$ — кривая a , для нормальных помех $N(0, 1)$ — кривая b .

Как и следовало ожидать, наиболее быстрая сходимость достигается для абсолютно оптимальных алгоритмов.

§ 3.5. Многомерные абсолютно оптимальные и оптимальные алгоритмы и их свойства

Рассмотрим задачу идентификации РАР-объектов с простой помехой, уравнение которых имеет вид

$$y(n) = - \sum_{m=1}^N a_m^* y(n-m) + \sum_{m=0}^N b_m^* u(n-m) + \xi(n), \quad (3.5.1)$$

или

$$y(n) = c^{*T} \mathbf{x}(n) + \xi(n), \quad (3.5.2)$$

где

$$c^* = (a_1^*, \dots, a_N^*, b_0^*, \dots, b_N^*) \quad (3.5.3)$$

— вектор неизвестных параметров РАР-объекта, а

$$\mathbf{x}(n) = (-y(n-1), \dots, -y(n-N), u(n), \dots, u(n-N)) \quad (3.5.4)$$

— вектор наблюдений. Уравнение оптимальной настраиваемой модели (1.3.47) представится в виде

$$\hat{y}(n) = c^T \mathbf{x}(n), \quad (3.5.5)$$

где

$$c = (a_1, \dots, a_N, b_0, \dots, b_N) \quad (3.5.6)$$

— вектор параметров настраиваемой модели.

В рассматриваемом случае (ПАР-объект с простой помехой) оптимальная настраиваемая модель статическая. Поскольку невязка равна

$$\varepsilon(\mathbf{z}(n), \mathbf{c}) = y(n) - \hat{y}(n) = y(n) - \mathbf{c}^T \mathbf{x}(n), \quad (3.5.7)$$

то оптимальные средние потери запишутся в виде

$$J^0(\mathbf{c}) = M\{F_0[y(n) - \mathbf{c}^T \mathbf{x}(n)]\}, \quad (3.5.8)$$

где $F_0[\varepsilon] = -\ln p_0(\xi)|_{\xi=\varepsilon}$ — оптимальная функция потерь, а $p(\xi)$ — плотность распределения помех. Кроме того,

$$\begin{aligned} f(\mathbf{x}, \mathbf{c}) &= \mathbf{c}^T \mathbf{x}, \quad \nabla_{\mathbf{c}} f(\mathbf{x}, \mathbf{c}) = \mathbf{x}, \\ \nabla_{\mathbf{c}} F_0[\varepsilon(\mathbf{z}(n), \mathbf{c})] &= F'_0[\varepsilon(\mathbf{z}(n), \mathbf{c})] \mathbf{x}(n). \end{aligned} \quad (3.5.9)$$

Реализуемые абсолютно оптимальные алгоритмы (3.2.10), (3.2.11) запишутся в таком виде:

$$\begin{aligned} \mathbf{c}(n) &= \mathbf{c}(n-1) + \hat{\Gamma}_0(n) \mathbf{x}(n) F'_0[y(n) - \mathbf{c}^T(n-1) \mathbf{x}(n)], \\ \mathbf{c}(0) &= \mathbf{c}_0, \end{aligned} \quad (3.5.10)$$

где

$$\begin{aligned} \hat{\Gamma}_0(n) &= \hat{\Gamma}_0(n-1) - \frac{\hat{\Gamma}_0(n-1) \mathbf{x}(n) \mathbf{x}^T(n) \hat{\Gamma}_0(n-1)}{I^{-1}(p_0) + \mathbf{x}^T(n) \hat{\Gamma}_0(n-1) \mathbf{x}(n)}, \\ \hat{\Gamma}_0(0) &= \gamma E, \quad \gamma \gg 1, \end{aligned} \quad (3.5.11)$$

— матрица усиления. Блок-схема абсолютно оптимального алгоритма (3.5.10), (3.5.11) изображена на рис. 3.22.

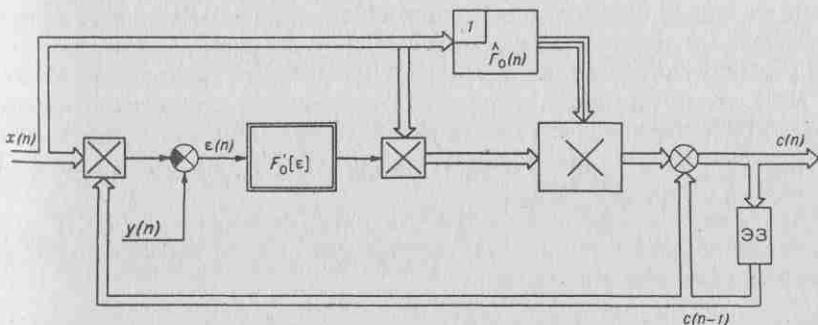


Рис. 3.22

Рассмотрим частные случаи абсолютно оптимальных алгоритмов. Для помех с нормальной плотностью распределения $p_0(\xi) = N(0, \sigma_\xi^2)$, принимая во внимание (3.4.7), получаем из (3.5.10), (3.5.11) линейный абсолютно оптимальный алгоритм

$$\begin{aligned} c(n) &= c(n-1) + \hat{H}(n) \mathbf{x}(n) [y(n) - c^\top(n-1) \mathbf{x}(n)], \\ c(0) &= c_0, \end{aligned} \quad (3.5.12)$$

где

$$\begin{aligned} \hat{H}(n) &= \hat{H}(n-1) - \frac{\hat{H}(n-1) \mathbf{x}(n) \mathbf{x}^\top(n) \hat{H}(n-1)}{1 + \mathbf{x}^\top(n) \hat{H}(n-1) \mathbf{x}(n)}, \\ \hat{H}(0) &= \gamma E, \quad \gamma \gg 1. \end{aligned} \quad (3.5.13)$$

Аналогично, из (3.2.12), (3.2.13) после очевидных преобразований линейный абсолютно оптимальный алгоритм можно представить в несколько иной форме:

$$c(n) = c(n-1) + \hat{K}_1(n) [y(n) - c^\top(n-1) \mathbf{x}(n)] \quad (3.5.14)$$

и

$$\hat{K}_1(n) = \frac{\hat{H}(n-1) \mathbf{x}(n)}{1 + \mathbf{x}^\top(n) \hat{H}(n-1) \mathbf{x}(n)}, \quad (3.5.15)$$

где $\hat{H}(n-1)$ определяется из (3.5.13).

Линейные абсолютно оптимальные алгоритмы (3.5.12), (3.5.13) и (3.5.14), (3.5.15) представляют собой рекуррентную форму метода наименьших квадратов (МНК). Важно подчеркнуть, что алгоритмы МНК не зависят от дисперсии помех σ_ξ^2 . Оценки, порождаемые этими алгоритмами, при надлежащих начальных условиях представляют собой решение системы так называемых нормальных уравнений в МНК.

Блок-схемы линейных абсолютно оптимальных алгоритмов, сводящиеся при нормальной плотности распределения помехи к блок-схемам МНК, приведены на рис. 3.23 (алгоритм (3.5.12), (3.5.13)) и рис. 3.24 (алгоритм (3.5.14), (3.5.15)).

Для помех с лапласовой плотностью распределения $p_0(\xi) = L(0, s_\xi)$, принимая во внимание (3.4.11), получаем из (3.5.11) абсолютно оптимальный релейный алгоритм

$$\begin{aligned} c(n) &= c(n-1) + \hat{H}(n) \mathbf{x}(n) \operatorname{sign} [y(n) - c^\top(n-1) \mathbf{x}(n)], \\ c(0) &= c_0, \end{aligned} \quad (3.5.16)$$

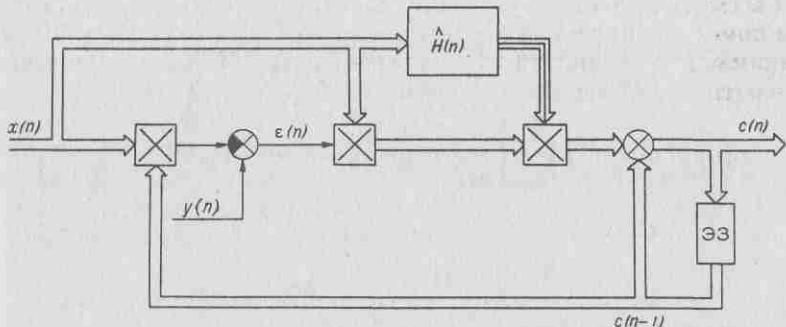


Рис. 3.23

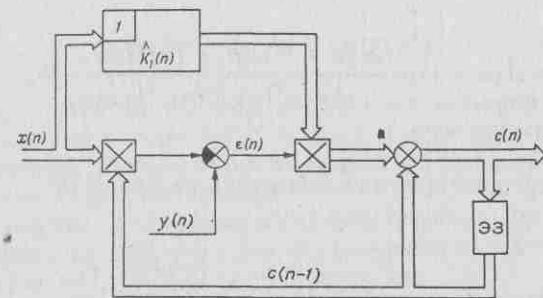


Рис. 3.24

где

$$\hat{H}(n) = \hat{H}(n-1) - \frac{\hat{H}(n-1) \mathbf{x}(n) \mathbf{x}^T(n) \hat{H}(n-1)}{s_\xi + \mathbf{x}^T(n) \hat{H}(n-1) \mathbf{x}(n)}, \quad (3.5.17)$$

$$\hat{H}(0) = \gamma E, \quad \gamma \gg 1.$$

Этот абсолютно оптимальный алгоритм (его блок-схема приведена на рис. 3.25) соответствует методу наименьших модулей (МНМ), который в последнее время начинает находить широкое применение.

Для помех с плотностью распределения Коши $p_0(\xi) = C(0, s_\xi)$, принимая во внимание (3.4.13), из (3.5.10), (3.5.11) находим абсолютно оптимальный нелинейный алгоритм

$$c(n) = c(n-1) + 4\hat{H}(n) \mathbf{x}(n) \frac{y(n) - c^T(n-1) \mathbf{x}(n)}{s_\xi^2 + [y(n) - c^T(n-1) \mathbf{x}(n)]^2}, \quad (3.5.18)$$

$$c(0) = c_0,$$

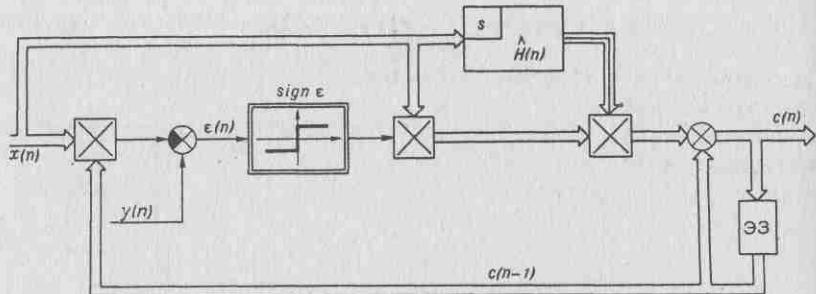


Рис. 3.25

где

$$\begin{aligned}\hat{H}(n) &= \hat{H}(n-1) - \frac{\hat{H}(n-1) \mathbf{x}(n) \mathbf{x}^\top(n) \hat{H}(n-1)}{s_\xi^2 + \mathbf{x}^\top(n) \hat{H}(n-1) \mathbf{x}(n)}, \\ \hat{H}(0) &= \gamma E, \quad \gamma \gg 1.\end{aligned}\quad (3.5.19)$$

Блок-схема этого алгоритма изображена на рис. 3.26.

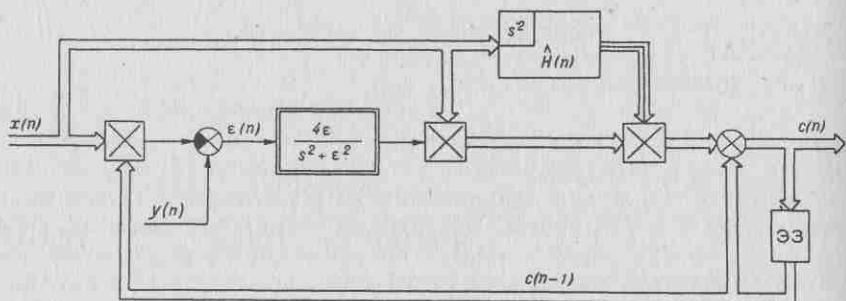


Рис. 3.26

Приведенные абсолютно оптимальные алгоритмы идентификации РАР-объектов с простой помехой обладают предельно возможной скоростью сходимости, определяемой нижней границей неравенства Крамера — Рао. АМКО этих алгоритмов, как было показано ранее (см. (2.3.23)), равна

$$V(F_0, p_0) = V(p_0) = \frac{1}{I(p_0)} A^{-1}(c^*, \sigma^2(p_0)), \quad (3.5.20)$$

где

$$A(c^*, \sigma^2(p_0)) = M\{\mathbf{x}(n) \mathbf{x}^T(n)\} \quad (3.5.21)$$

— нормированная информационная матрица, выражения которой были приведены в § 1.6.

Для РАР- и АР-объектов с простой помехой нормированная информационная матрица $A(c^*, \sigma^2(p_0))$ зависит как от оптимального решения c^* , так и от дисперсии помех $\sigma^2(p_0)$.

Для Р-объектов с простой помехой

$$A(c^*, \sigma^2(p_0)) = A_1 = M\{\mathbf{x}(n) \mathbf{x}^T(n)\}$$

не зависит ни от c^* , ни от $\sigma^2(p_0)$. Поэтому АМКО абсолютно оптимальных алгоритмов идентификации Р-объектов (3.5.10), (3.5.11), где теперь $\mathbf{x}(n) = (u(n), \dots, u(n-N))$ и $c = (b_0, \dots, b_N)$, будет равна

$$V(F_0, p_0) = V(p_0) = \frac{1}{I(p_0)} A_1^{-1}. \quad (3.5.22)$$

Отсюда следует, что все выводы, полученные для одномерных абсолютно оптимальных алгоритмов (см. § 3.4), остаются справедливыми и для многомерных абсолютно оптимальных алгоритмов идентификации Р-объектов с простой помехой.

Многие свойства одномерных абсолютно оптимальных и оптимальных алгоритмов сохраняются и для многомерных алгоритмов. Однако есть и различия, которые мы сейчас отметим.

Для РАР-объектов с простой помехой при произвольной симметричной функции потерь средние потери равны

$$J(c) = M\{F[y(n) - c^T \mathbf{x}(n)]\}, \quad (3.5.23)$$

и оптимальный алгоритм (1.7.22), (1.7.20) представится в виде

$$\begin{aligned} c(n) &= c(n-1) + \widehat{\Gamma}(n) F'[\varepsilon(\mathbf{z}(n), c(n-1))] \mathbf{x}(n), \\ c(0) &= c_0, \end{aligned} \quad (3.5.24)$$

где

$$\widehat{\Gamma}(n) = \widehat{\Gamma}(n-1) - \frac{\widehat{\Gamma}(n-1) \mathbf{x}(n) \mathbf{x}^T(n) \widehat{\Gamma}_0(n-1)}{[M\{F''[\xi]\}]^{-1} + \mathbf{x}^T(n) \widehat{\Gamma}(n-1) \mathbf{x}(n)}, \quad (3.5.25)$$

$$\widehat{\Gamma}(0) = \gamma E, \quad \gamma \gg 1.$$

АМКО $V(B_0) = V(F, p_0)$ (1.7.10) для них равна

$$V(F, p_0) = \frac{M\{F'^2[\xi]\}}{[M\{F''[\xi]\}]^2} A^{-1}(c^*, \sigma^2(p_0)). \quad (3.5.26)$$

Рассмотрим случай квадратичной функции потерь $F[\xi] = \varepsilon^2$. Из (3.5.24), (3.5.25) получаем линейные оптимальные алгоритмы, алгоритмы МНК (3.5.12), (3.5.13) или, что эквивалентно, (3.5.14), (3.5.15). При этом из (3.5.26) находим выражение АМКО

$$V(\varepsilon^2, p_0) = \sigma^2(p_0) A^{-1}(c^*, \sigma^2(p_0)). \quad (3.5.27)$$

Отсюда видно, что для АР-объектов и Р-объектов АМКО зависит от дисперсии помех $\sigma^2(p_0)$. Поэтому, какова бы ни была симметричная непрерывная плотность распределения помех $p_0(\xi)$, если ее дисперсия $\sigma^2(p_0)$ конечна и равна одной и той же фиксированной величине, то АМКО оптимальных линейных алгоритмов одна и та же и она совпадает с АМКО абсолютно оптимальных линейных алгоритмов. Это свойство линейных алгоритмов, алгоритмов МНК (их инвариантность относительно формы плотностей распределения с одинаковой конечной дисперсией), характеризует определенную их универсальность.

Для АР-объектов, учитывая, что

$$A(c^*, \sigma^2(p_0)) = \sigma^2(p_0) A_4(c^*) \quad (3.5.28)$$

(см. (1.6.39)), имеем

$$V(\varepsilon^2, p_0) = A_4^{-1}(c^*). \quad (3.5.29)$$

Это значит, что АМКО алгоритмов МНК идентификации АР-объектов не зависит от дисперсии помех. Такая независимость АМКО от дисперсии придает определенные особенности алгоритмам МНК идентификации АР-объектов, которые будут выяснены позже.

Рассмотрим теперь случай модульной функции потерь $F[\varepsilon] = |\varepsilon|$. Из (3.5.24), (3.5.23) получим релейные оптимальные алгоритмы — алгоритмы МНМ, которые отличаются от абсолютно оптимальных релейных алгоритмов (3.5.16), (3.5.17) лишь тем, что в (3.5.17) s_ξ заменено на $s(n-1)$. При этом АМКО равна

$$V(|\varepsilon|, p_0) = \frac{1}{4p_0(0)} A^{-1}(c^*, \sigma^2(p_0)). \quad (3.5.30)$$

Отсюда видно, что для релейных оптимальных алгоритмов, алгоритмов МНМ, при одинаковой дисперсии помех $\sigma^2(p_0)$ АМКО будет тем меньше, чем больше величина плотности распределения в нулевой точке.

Рассмотрим еще многомерные алгоритмы идентификации динамических объектов с простой помехой и с настройкой параметра масштаба. Они получаются из общих алгоритмов (3.3.25) — (3.3.28), если в них положить

$$\varepsilon(z(n), c(n-1)) = y(n) - c^T(n-1) x(n)$$

и

$$v(n) = x(n).$$

После очевидных преобразований из (3.3.25), (3.3.26) получаем

$$\begin{aligned} c(n) &= c(n-1) + \hat{H}(n) \bar{F}'_0 \left[\frac{y(n) - c^T(n-1) x(n)}{s(n-1)} \right] x(n), \\ c(0) &= c_0, \end{aligned} \quad (3.5.31)$$

где, аналогично (3.5.11),

$$\begin{aligned} \hat{H}(n) &= \hat{H}(n-1) - \frac{\hat{H}(n-1) x(n) x^T(n) \hat{H}(n-1)}{s(n-1) I^{-1}(\bar{p}_0) + x^T(n) \hat{H}(n-1) x(n)}, \\ \hat{H}(0) &= \gamma E, \quad \gamma \gg 1. \end{aligned} \quad (3.5.32)$$

Из (3.3.27) будем иметь

$$\begin{aligned} s(n) &= s(n-1) - \frac{1}{n(I_D(\bar{p}_0) - 1)} \left\{ s(n-1) - \right. \\ &\quad \left. - \bar{F}'_0 \left[\frac{y(n) - c^T(n-1) x(n)}{s(n-1)} \right] (y(n) - c^T(n-1) x(n)) \right\}, \\ s(0) &= s_0. \end{aligned} \quad (3.5.33)$$

Блок-схема алгоритма идентификации РАР-объектов с простой помехой и настройкой параметра масштаба приведена на рис. 3.27. Она состоит из основной схемы, формирующей оценки $c(n)$, и вспомогательной схемы, формирующей оценки $s(n)$.

Рассмотрим частные случаи, соответствующие конкретным видам помех. Для помехи с нормальной плотностью распределения $p_0(\xi) = N(0, \sigma_\xi^2)$, получим из (3.5.31) — (3.5.33), принимая во внимание (3.4.7), линейный основной алгоритм

$$c(n) = c(n-1) + \hat{H}(n) x(n) [y(n) - c^T(n-1) x(n)], \quad (3.5.34)$$

$$\hat{H}(n) = \hat{H}(n-1) - \frac{\hat{H}(n-1) x(n) x^T(n) \hat{H}(n-1)}{1 + x^T(n) \hat{H}(n-1) x(n)}, \quad (3.5.35)$$

$$\hat{H}(0) = \gamma E, \quad \gamma \gg 1,$$

и вспомогательный алгоритм для $s(n) = \sigma(n)$

$$\sigma(n) = \sigma(n-1) - \frac{1}{2n} \left(\sigma(n-1) - \frac{(y(n) - c^T(n-1) x(n))^2}{\sigma(n-1)} \right). \quad (3.5.36)$$

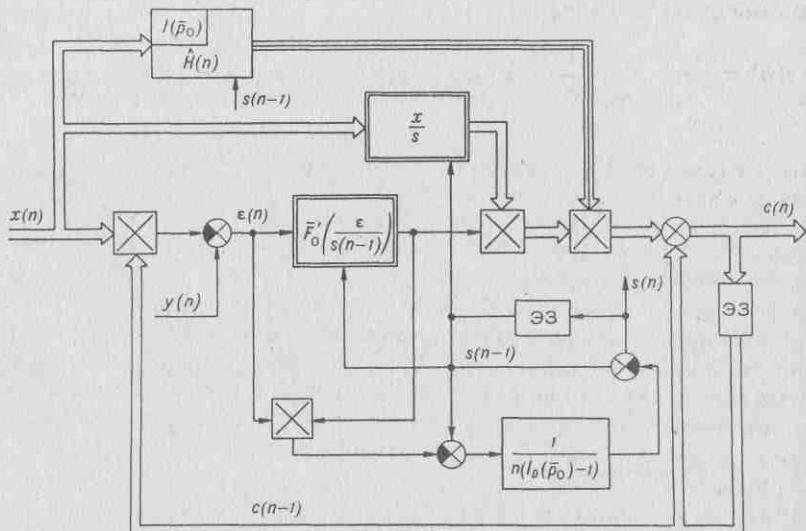


Рис. 3.27

Основной алгоритм оценивания $c(n)$ (3.5.34), (3.5.35) совпадает с алгоритмом (3.5.12), (3.5.13). Он не зависит от оценки параметра масштаба. Поэтому алгоритм МНК является алгоритмом, инвариантным к параметру масштаба нормального распределения. Иначе говоря, алгоритм МНК абсолютно оптимален для всего класса нормальных распределений независимо от величины дисперсии. Это важное свойство линейных алгоритмов. Что же касается вспомогательного алгоритма (3.5.36), то он формирует оценку среднеквадратического отклонения $\sigma(n)$.

Для помехи с плотностью распределения Лапласа $p_0(\xi) = L(0, s_\xi)$, учитывая (3.4.11), получим из (3.5.31) — (3.5.33) релейный основной алгоритм

$$\begin{aligned} c(n) &= c(n-1) + \hat{H}(n) x(n) \operatorname{sign} [y(n) - c^T(n-1) x(n)], \\ c(0) &= c_0, \end{aligned} \quad (3.5.37)$$

где

$$\begin{aligned}\widehat{H}(n) &= \widehat{H}(n-1) - \frac{\widehat{H}(n-1) \mathbf{x}(n) \mathbf{x}^T(n) \widehat{H}(n-1)}{s(n-1) + \mathbf{x}^T(n) \widehat{H}(n-1) \mathbf{x}(n)}, \\ \widehat{H}(0) &= \gamma E, \quad \gamma \gg 1,\end{aligned}\quad (3.5.38)$$

и вспомогательный алгоритм

$$\begin{aligned} s(n) &= s(n-1) - \frac{1}{n} (s(n-1) - |y(n) - c^T(n-1) x(n)|), \\ s(0) &= s_0. \end{aligned} \quad (3.5.39)$$

В этом случае, соответствующем МНМ, оценка $c(n)$, определяемая основным алгоритмом зависит от оценки параметра масштаба $s(n-1)$, которая определяется вспомогательным алгоритмом (3.5.39).

Блок-схемы алгоритмов для рассмотренных частных случаев получаются из блок-схем общих алгоритмов (рис. 3.22) лишь конкретизациями нелинейных преобразователей и матриц усиления.

Мы не будем здесь рассматривать алгоритмы идентификации объектов с преобразованной помехой. Блок-схемы их сложны. Они содержат модели чувствительности. Как будет показано в главе 8, эти алгоритмы можно существенно упростить за счет возможности устранения моделей чувствительности.

Приведем в заключение результаты моделирования многомерных алгоритмов для конкретных числовых примеров. Изменения ошибок $M\{\|c(n) - c^*\|^2\}$, порождаемые алгоритмами МНК (3.5.12), (3.5.13) при идентификации Р-объекта с простой помехой

$$y(n) = u(n) + 2u(n-1) + 3u(n-2) - u(n-3) - 2u(n-4) + \xi(n),$$

приведены на рис. 3.28 (нормальные помехи $N(0, 1)$ — кривая a , лапласовы помехи $L(0, 1)$ — кривая b). Изменения же ошибок, порождаемые

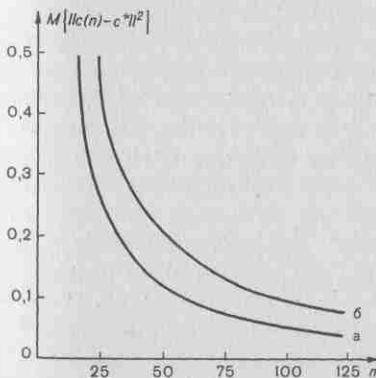


Рис. 3.28

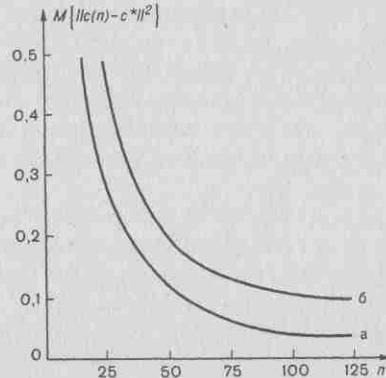


Рис. 3.29

алгоритмами МНМ (3.5.16), (3.5.17), изображены на рис. 3.29: для лапласовых помех $L(0, 1)$ — кривая a , для нормальных помех $N(0, 1)$ —

кривая *б*. И здесь наиболее быстрая скорость сходимости — у абсолютно оптимальных алгоритмов.

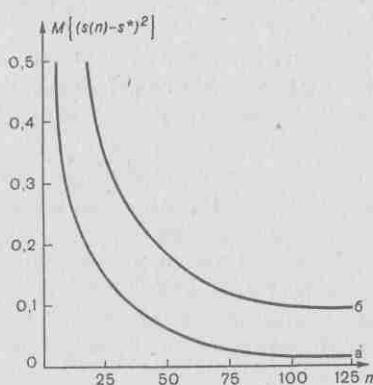


Рис. 3.30

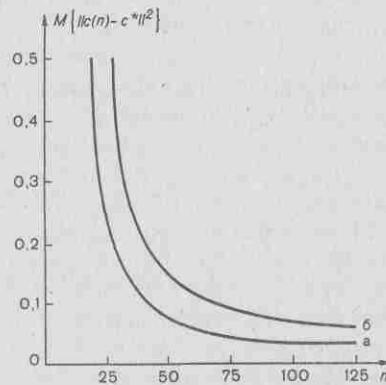


Рис. 3.31

Моделирование алгоритмов МНК с настройкой параметра масштаба приводит к тем же результатам, что и для основного алгоритма (см. рис. 3.28). Что же касается ошибок $M\{(s(n) - s^*)^2\}$, то их изменение изображено на рис. 3.30: для нормальных помех $N(0, 1)$ — кривая *а*, для лапласовых помех $L(0, 1)$ — кривая *б*.

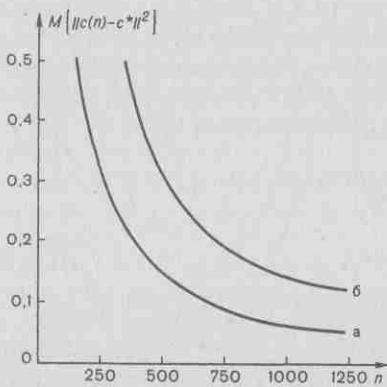


Рис. 3.32

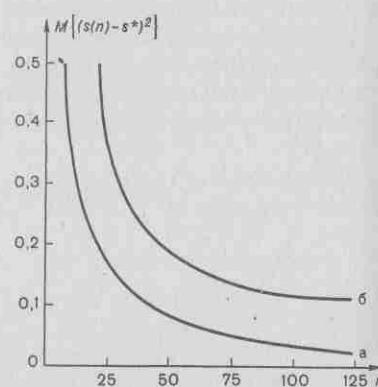


Рис. 3.33

Для алгоритмов МНМ с настройкой параметра масштаба изменения ошибок $M\{\|c(n) - c^*\|^2\}$ и $M\{(s(n) - s^*)^2\}$ приведены на рис. 3.31 и 3.32 соответственно: для лапласовых помех $L(0, 1)$ — кривая *а*, для

нормальных помех $N(0, 1)$ — кривая *б*. Сходимость этих алгоритмов МНМ с настройкой параметра масштаба несколько медленнее сходимости абсолютно оптимальных алгоритмов на конечных шагах, однако их асимптотические скорости сходимости совпадают.

Наконец, на рис. 3.33 приведены примеры моделирования алгоритма МНК идентификации РАР-объекта с преобразованной помехой ($\xi(n) \sim N(0, 1)$ — кривая *а*, $\xi(n) \sim L(0, 1)$ — кривая *б*), описываемого уравнением

$$y(n) = 0,3y(n-1) + u(n) + 2u(n-1) + 0,1u(n-2) + \\ + \xi(n) + 0,1\xi(n-1) + 0,4\xi(n-2).$$

В этом случае алгоритмы существенно усложняются за счет наличия моделей чувствительности.

§ 3.6. Заключение

Поскольку оптимальное решение c^* , минимизирующее средние потери, как правило, не может быть найдено в явной форме, то приходится довольствоваться оценками $c(n)$ этого оптимального решения, которые формируются рекуррентными алгоритмами. При заданной функции потерь $F[\varepsilon]$ и надлежащем выборе матрицы усиления $\hat{G}(n)$ или $\hat{H}(n)$ эти алгоритмы становятся оптимальными в том смысле, что асимптотическая скорость сходимости, характеризуемая АМКО $V(F, p_0)$, достигает максимума. Но само максимальное значение асимптотической скорости сходимости зависит от выбора функции потерь. Для оптимальной функции потерь $F_0[\varepsilon] = -\ln p_0(\xi)|_{\xi=\varepsilon}$, полностью определяемой плотностью распределения помех $p_0(\xi)$ (предполагаемой симметричной и достаточно гладкой), скорость сходимости оптимальных алгоритмов достигает максимум-максимума. Поэтому оптимальные алгоритмы при оптимальных функциях потерь называются абсолютно оптимальными.

Скорость сходимости абсолютно оптимальных алгоритмов достигает предельно возможной скорости, определяемой нижней границей неравенства Крамера — Рао. Приведены различные типы абсолютно оптимальных алгоритмов. Для того случая, когда плотность распределения помех $p_0(\xi)$ известна не полностью, а с точностью до параметра масштаба, сформированы алгоритмы с настройкой параметра масштаба.

При квадратичной функции потерь оптимальные алгоритмы линейны и соответствуют рекуррентным алгоритмам метода наименьших квадратов (МНК). Алгоритмы МНК не зависят от дисперсии помех. Дисперсия помех $\sigma^2(p_0)$ определяет их скорость сходимости, которая инвариантна относительно любых помех, обладающих сим-

метричными и достаточно гладкими плотностями распределения с конечной и заданной дисперсией σ_ξ^2 .

При нормальной плотности распределения алгоритмы МНК являются линейными абсолютно оптимальными алгоритмами. Для работы этих алгоритмов нет необходимости знать параметр масштаба нормальной плотности распределения.

При модульной функции потерь оптимальные алгоритмы релейные и соответствуют рекуррентным алгоритмам метода наименьших модулей (МНМ). В отличие от алгоритмов МНК, которые становятся неработоспособными при помехах с неограниченной дисперсией, алгоритмы МНМ не теряют сходимости и в этом случае. Скорость сходимости рекуррентных алгоритмов МНМ определяется максимальным значением плотности распределения помех $p_0(0)$. Предельно возможная скорость сходимости достигается у абсолютно оптимальных релейных алгоритмов, которые зависят от параметра масштаба (дисперсии) лапласовой плотности распределения (когда релейные алгоритмы оказываются абсолютно оптимальными). Для формирования абсолютно оптимальных релейных алгоритмов необходимо знать параметр масштаба (дисперсию) плотности распределения Лапласа, либо оценивать его дополнительным алгоритмом.

Приведенные примеры одномерных и многомерных абсолютно оптимальных и оптимальных алгоритмов иллюстрируют установленные свойства и особенности этих алгоритмов.

В действительности все выглядит иначе,
чем на самом деле.

Ежи Лец

ГЛАВА 4

Оптимальные на классе функции потерь

§ 4.1. Априорная информация о помехах и классы распределений

До сих пор мы предполагали, что плотность распределения помех $p_0(\xi)$ полностью известна. Это позволило определить оптимальную функцию потерь и сформировать абсолютно оптимальные алгоритмы, обладающие предельно возможной максимальной скоростью сходимости, которая не может быть превзойдена никакими иными алгоритмами. Если плотность распределения помех известна с точностью до параметра масштаба, то можно также определить с точностью до параметра оптимальную функцию потерь и сформировать абсолютно оптимальные алгоритмы с настройкой параметра масштаба.

Часто столь полная априорная информация о помехах отсутствует. Это значит, что плотность распределения помех $p_0(\xi)$ полностью не известна, однако могут быть известны какие-либо сведения о $p_0(\xi)$, которые определяют тот или иной уровень априорной информации. Каждому уровню априорной информации о помехах соответствует определенный класс распределений P , которому принадлежит неизвестная нам истинная плотность распределения помех $p_0(\xi)$. Чем ниже уровень априорной информации о помехах, тем шире соответствую-

щий класс распределений. Так, при полной априорной информации, т. е. априорной информации максимального уровня, мы приходим к наиболее узкому классу распределений, включающему единственную плотность распределения. При априорной информации минимального уровня, соответствующей лишь факту существования плотности распределения, мы приходим к наиболее широкому классу распределений, включающему все плотности распределения.

Далее мы будем интересоваться только симметричными непрерывными унимодальными плотностями распределения

$$p_0(-\xi) = p_0(\xi), \quad (4.1.1)$$

имеющими конечную фишеровскую информацию, не оговаривая этого каждый раз. Естественно, все плотности распределения должны удовлетворять условиям неотрицательности и нормировки

$$p_0(\xi) \geq 0, \quad \int_{-\infty}^{\infty} p_0(\xi) d\xi = 1. \quad (4.1.2)$$

Условия (4.1.1) и (4.1.2) для упрощения записи мы не будем выписывать каждый раз при определении классов распределений помех.

Приведем примеры типовых классов распределений, которые представляются наиболее естественными и удобными для описания априорной информации о помехах.

\mathcal{P}_1 — класс невырожденных распределений:

$$\mathcal{P}_1 = \left\{ p_0(\xi) : p_0(0) \geq \frac{1}{2s_1} > 0 \right\}. \quad (4.1.3)$$

Этот класс распределений — наиболее широкий. В него входят все плотности распределения, для которых значение в нуле отделено от нуля. Условие принадлежности плотности распределения этому классу: $p_0(\xi) \in \mathcal{P}_1$, — по существу, близко к полному отсутствию априорной информации о помехах.

\mathcal{P}_2 — класс распределений с ограниченной дисперсией:

$$\mathcal{P}_2 = \left\{ p_0(\xi) : \int_{-\infty}^{\infty} \xi^2 p_0(\xi) d\xi = \sigma^2(p_0) \leq \sigma_1^2 \right\}. \quad (4.1.4)$$

К этому классу относятся распределения, дисперсия которых равномерно ограничена. Распределения Коши, разумеется, не входят в этот класс.

\mathcal{P}_3 — класс приближенно нормальных распределений:

$$\mathcal{P}_3 = \left\{ p_0(\xi) : p_0(\xi) = (1 - \alpha) p_N(\xi) + \alpha g(\xi) \right\}. \quad (4.1.5)$$

Плотности распределения, входящие в этот класс, представляют собой смесь нормальной, или гауссовой плотности распределения $p_N(\xi) =$

$= N(0, \sigma_N^2)$ с нулевым средним и дисперсией σ_N^2 и произвольной плотностью распределения $g(\xi)$. Параметр α , $0 \leq \alpha \leq 1$, характеризует степень «засорения» нормальной плотности распределения; $\alpha = 0$ соответствует чистой нормальной плотности распределения, а $\alpha = 1$ соответствует полному отсутствию информации о плотности распределения.

\mathcal{P}_4 — класс приближенно экспоненциальных распределений:

$$\mathcal{P}_4 = \{p_0(\xi) : p_0(\xi) = (1 - \alpha)p_L(\xi) + \alpha g(\xi)\}. \quad (4.1.6)$$

Плотности этого класса представляют собой смесь двойной экспоненциальной, или лапласовой плотности распределения $p_L(\xi) = L(0, s_L)$ с нулевым средним и параметром масштаба s_L и произвольной неизвестной плотности распределения $g(\xi)$. Параметр α , $0 \leq \alpha \leq 1$, характеризует степень близости $p_0(\xi)$ к экспоненциальной плотности распределения $p_L(\xi)$.

\mathcal{P}_5 — класс приближенно равномерных распределений:

$$\mathcal{P}_5 = \{p_0(\xi) : p_0(\xi) = (1 - \alpha)p_R(\xi) + \alpha g(\xi)\}. \quad (4.1.7)$$

Входящие в этот класс плотности распределения представляют собой смесь равномерной плотности распределения $p_R(\xi) = R(0, l_R)$ с нулевым средним и параметром финитности l_R и произвольной неизвестной плотности распределения $g(\xi)$. Параметр α , $0 \leq \alpha \leq 1$, характеризует степень близости $p_0(\xi)$ к равномерной плотности распределения $p_R(\xi)$.

\mathcal{P}_6 — класс финитных распределений:

$$\mathcal{P}_6 = \left\{ p_0(\xi) : \int_{-l}^l p_0(\xi) d\xi = 1 \right\}. \quad (4.1.8)$$

Этот класс соответствует ограниченности по абсолютной величине помехи ξ (т. е. с вероятностью единица $|\xi| \leq l$). При этом какие-либо дополнительные сведения о плотности распределения помехи отсутствуют.

\mathcal{P}_7 — класс приближенно финитных распределений:

$$\mathcal{P}_7 = \left\{ p_0(\xi) : \int_{-l}^l p_0(\xi) d\xi = 1 - \beta \right\}. \quad (4.1.9)$$

Параметр β , $0 \leq \beta \leq 1$, характеризует степень приближения $p_0(\xi)$ к финитной плотности распределения. Условие, определяющее этот класс, означает, что с вероятностью $1 - \beta$ имеет место неравенство $|\xi| \leq l$. Очевидно, что класс финитных плотностей распределения \mathcal{P}_6 является частным случаем класса \mathcal{P}_7 .

Наряду с этими основными классами распределений введем более узкие классы, которые получаются из основных введением дополнительных ограничений снизу или сверху на дисперсии

$$\sigma^2(p_0) = \int_{-\infty}^{\infty} \xi^2 p_0(\xi) d\xi, \quad \sigma^2(g) = - \int_{-\infty}^{\infty} \xi^2 g(\xi) d\xi. \quad (4.1.10)$$

$\mathcal{P}_{11}, \mathcal{P}_{12}$ — классы невырожденных распределений с ограниченной снизу или сверху дисперсией:

$$\mathcal{P}_{11} = \left\{ p_0(\xi) : p_0(0) \geq \frac{1}{2s_1} > 0, \quad \sigma^2(p_0) \geq \sigma_1^2 \right\} \quad (4.1.11)$$

и

$$\mathcal{P}_{12} = \left\{ p_0(\xi) : p_0(0) \geq \frac{1}{2s_1} > 0, \quad \sigma^2(p_0) \leq \sigma_1^2 \right\}. \quad (4.1.12)$$

Эти классы выделяют из общего класса \mathcal{P}_1 плотности распределения, дисперсия которых не меньше или не больше заданного значения σ_1^2 .

\mathcal{P}_{21} — класс распределений с ограниченной снизу дисперсией:

$$\mathcal{P}_{21} = \left\{ p_0(\xi) : \sigma^2(p_0) \geq \sigma_1^2 \right\}. \quad (4.1.13)$$

Этот класс распределений, в отличие от класса \mathcal{P}_2 , охватывает все плотности распределения, дисперсия которых не меньше заданной величины σ_1^2 ; в отличие от класса \mathcal{P}_{11} , не налагается ограничение на значение $p_0(0)$.

$\mathcal{P}_{31}, \mathcal{P}_{32}$ — классы приближенно нормальных распределений с ограниченной дисперсией:

$$\mathcal{P}_{31} = \left\{ p_0(\xi) : p_0(\xi) = (1 - \alpha) p_N(\xi) + \alpha g(\xi), \quad \sigma^2(g) \geq \sigma_1^2 \right\} \quad (4.1.14)$$

и

$$\mathcal{P}_{32} = \left\{ p_0(\xi) : p_0(\xi) = (1 - \alpha) p_N(\xi) + \alpha g(\xi), \quad \sigma^2(g) \leq \sigma_1^2 \right\}. \quad (4.1.15)$$

$\mathcal{P}_{41}, \mathcal{P}_{42}$ — классы приближенно экспоненциальных распределений с ограниченной дисперсией:

$$\mathcal{P}_{41} = \left\{ p_0(\xi) : p_0(\xi) = (1 - \alpha) p_L(\xi) + \alpha g(\xi), \quad \sigma^2(g) \geq \sigma_1^2 \right\} \quad (4.1.16)$$

и

$$\mathcal{P}_{42} = \left\{ p_0(\xi) : p_0(\xi) = (1 - \alpha) p_L(\xi) + \alpha g(\xi), \quad \sigma^2(g) \leq \sigma_1^2 \right\}. \quad (4.1.17)$$

$\mathcal{P}_{51}, \mathcal{P}_{52}$ — классы приближенно равномерных распределений с ограниченной дисперсией:

$$\mathcal{P}_{51} = \left\{ p_0(\xi) : p_0(\xi) = (1 - \alpha) p_R(\xi) + \alpha g(\xi), \quad \sigma^2(g) \geq \sigma_1^2 \right\} \quad (4.1.18)$$

и

$$\mathcal{P}_{52} = \{p_0(\xi) : p_0(\xi) = (1 - \alpha)p_R(\xi) + \alpha g(\xi), \sigma^2(g) \leq \sigma_1^2\}. \quad (4.1.19)$$

Интервал финитности, определяемый параметром l_R , может быть не фиксирован.

Отметим, что в классах распределений (4.1.14) — (4.1.19) дисперсия «засоряющей» плотности распределения ограничена снизу (4.1.14), (4.1.16), (4.1.18) или сверху (4.1.15), (4.1.17), (4.1.19).

$\mathcal{P}_{61}, \mathcal{P}_{62}$ — классы финитных распределений с ограниченной дисперсией:

$$\mathcal{P}_{61} = \left\{ p_0(\xi) : \int_{-l}^l p_0(\xi) d\xi = 1, \sigma^2(p_0) \geq \sigma_1^2 \right\} \quad (4.1.20)$$

и

$$\mathcal{P}_{62} = \left\{ p_0(\xi) : \int_{-l}^l p_0(\xi) d\xi = 1, \sigma^2(p_0) \leq \sigma_1^2 \right\}. \quad (4.1.21)$$

Естественно, для этих классов величина σ_1^2 не произвольна, она не может превосходить по крайней мере дисперсии равномерного распределения, т. е. $l^2/3$. Интервал финитности l может быть не фиксирован.

$\mathcal{P}_{71}, \mathcal{P}_{72}$ — классы приближенно финитных распределений с ограниченной дисперсией:

$$\mathcal{P}_{71} = \left\{ p_0(\xi) : \int_{-l}^l p_0(\xi) d\xi = 1 - \alpha, \sigma^2(p_0) \geq \sigma_1^2 \right\} \quad (4.1.22)$$

и

$$\mathcal{P}_{72} = \left\{ p_0(\xi) : \int_{-l}^l p_0(\xi) d\xi = 1 - \alpha, \sigma^2(p_0) \leq \sigma_1^2 \right\}. \quad (4.1.23)$$

Здесь, как и ранее, $0 \leq \alpha \leq 1$.

Число классов распределений можно существенно увеличить, если, например, выбрать в классах, подобных $\mathcal{P}_3, \mathcal{P}_4, \mathcal{P}_{31}, \mathcal{P}_{41}, \mathcal{P}_{32}, \mathcal{P}_{42}$, в качестве основных плотностей распределения какие-либо симметричные плотности распределения, отличные от нормальной, двойной экспоненциальной и равномерной (см. табл. 2.1). Однако мы не будем этого делать. Оставим эту возможность заинтересованному читателю.

Заданные плотности распределения $p_0(\xi)$, определяющие оптимальные функции потерь, можно рассматривать как плотности распределения, принадлежащие вырожденным классам типа $\mathcal{P}_4 - \mathcal{P}_7, \mathcal{P}_{41} - \mathcal{P}_{71}, \mathcal{P}_{42} - \mathcal{P}_{72}$ при $\alpha = 0$.

Приведенные классы распределений хотя и не исчерпывают все возможности, но они достаточно типичны и соответствуют широкому

диапазону уровней априорной информации о помехах: от почти полного незнания плотности распределения (класс \mathcal{P}_1) до полного знания плотности распределения (классы типа $\mathcal{P}_4 - \mathcal{P}_7$ при $\alpha = 0$). Все эти классы распределений, как нетрудно в этом убедиться, выпуклые.

§ 4.2. Понятие оптимальности на классе

При неполной априорной информации о помехах плотность распределения их неизвестна и поэтому определить оптимальную функцию потерь невозможно. А это значит, что невозможно сформировать абсолютно оптимальные алгоритмы идентификации. Предположим теперь, что нам известен лишь класс распределений помех \mathcal{P} , характеризующий имеющийся уровень априорной информации относительно истинной плотности распределения $p_0(\xi)$. Возникает вопрос: как определить оптимальную функцию потерь в этих условиях? Для ответа на этот вопрос введем понятие оптимальной функции потерь на классе распределений \mathcal{P} .

Рассмотрим АМКО при произвольной функции потерь (2.4.7)

$$V(F, p_0) = \frac{\int_{-\infty}^{\infty} p_0(\xi) F'^2[\xi] d\xi}{\left[\int_{-\infty}^{\infty} p'_0(\xi) F'[\xi] d\xi \right]^2} A^{-1}(c^*, \sigma^2(p_0)). \quad (4.2.1)$$

Функцию потерь $F[\xi]$ без ограничения общности удобно представить в виде

$$F[\xi] = -\ln p(\xi) \Big|_{\xi=\varepsilon}, \quad (4.2.2)$$

где $p(\xi)$ — некоторая плотность, удовлетворяющая условиям (4.1.1), (4.1.2). В этом случае

$$F'[\xi] = -\frac{p'(\xi)}{p(\xi)} \Big|_{\xi=\varepsilon}. \quad (4.2.3)$$

Подставляя $F'[\xi]$ из (4.2.3) в (4.2.1) и обозначая для простоты $V(F, p_0)$ через $V(p, p_0)$, получим выражение АМКО

$$V(p, p_0) = \frac{\int_{-\infty}^{\infty} p_0(\xi) \left(\frac{p'(\xi)}{p(\xi)} \right)^2 d\xi}{\left[\int_{-\infty}^{\infty} p'_0(\xi) \frac{p'(\xi)}{p(\xi)} d\xi \right]^2} A^{-1}(c^*, \sigma^2(p_0)). \quad (4.2.4)$$

Введем обозначения

$$I_1(p, p_0) = \int_{-\infty}^{\infty} p'_0(\xi) \frac{p'(\xi)}{p(\xi)} d\xi = M \left\{ \frac{p'_0(\xi)}{p_0(\xi)} \frac{p'(\xi)}{p(\xi)} \right\}, \quad (4.2.5)$$

$$I_2(p, p_0) = \int_{-\infty}^{\infty} p_0(\xi) \left(\frac{p'(\xi)}{p(\xi)} \right)^2 d\xi = M \left\{ \left(\frac{p'(\xi)}{p(\xi)} \right)^2 \right\}.$$

Назовем $I_1(p, p_0)$ и $I_2(p, p_0)$ квазифишеровскими информациами 1-го и 2-го рода соответственно. Тогда АМКО представится в виде

$$V(p, p_0) = \frac{I_2(p, p_0)}{I_1^2(p, p_0)} A^{-1}(c^*, \sigma^2(p_0)). \quad (4.2.6)$$

При $p(\xi) = p_0(\xi)$, что соответствует выбору оптимальной функции потерь $F[\xi] = F_0[\xi]$, квазифишеровские информации 1-го и 2-го рода становятся равными фишеровской информации

$$I_1(p_0, p_0) = I_2(p_0, p_0) = I(p_0), \quad (4.2.7)$$

и из (4.2.6) следует уже знакомое нам выражение АМКО для оптимальной функции потерь

$$V(p, p_0) = V(p_0) = \frac{1}{I(p_0)} A^{-1}(c^*, \sigma^2(p_0)). \quad (4.2.8)$$

В каждом классе распределений \mathcal{P} таких «оптимальных» функций потерь $F_0[\xi] = -\ln p_0(\xi)|_{\xi=\epsilon}$ бесконечное множество. Наша задача — выбрать среди них такую, которая с определенной точки зрения была бы оптимальной на рассматриваемом классе \mathcal{P} .

Назовем функцию потерь

$$F_*[\xi] = -\ln p_*(\xi)|_{\xi=\epsilon} \quad (4.2.9)$$

оптимальной на классе \mathcal{P} , если для любой плотности распределения помех $p_0(\xi) \in \mathcal{P}$ АМКО $V(p_*, p_0)$ удовлетворяет матричному неравенству

$$V(p_*, p_0) \leq V(p_*, p_*) = V(p_*) \quad \forall p_0(\xi) \in \mathcal{P}. \quad (4.2.10)$$

Выясним смысл этого неравенства, для чего воспользуемся неравенством (2.5.4), определяющим оптимальную функцию потерь. В принятых здесь обозначениях оно запишется в виде

$$V(p_0, p_0) = V(p_0) \leq V(p, p_0). \quad (4.2.11)$$

В частности, при $p(\xi) = p_*(\xi)$

$$V(p_0) \leq V(p_*, p_0). \quad (4.2.12)$$

Но в силу неравенства (4.2.10)

$$V(p_0) \leq V(p_*, p_0) \leq V(p_*). \quad (4.2.13)$$

Отсюда следует, что

$$V(p_*) = \max_{p_0 \in \mathcal{P}} V(p_0), \quad (4.2.14)$$

т. е.

$$p_*(\xi) = \arg \max_{p_0 \in \mathcal{P}} V(p_0). \quad (4.2.15)$$

Таким образом, $p_*(\xi)$ представляет собой плотность распределения из класса \mathcal{P} , для которой АМКО $V(p_0)$ достигает максимума. Эту плотность распределения уместно назвать *наименее благоприятной плотностью распределения*. Оптимальная на классе функция потерь (4.2.9) представляет собой оптимальную функцию потерь для наименее благоприятной плотности распределения из заданного класса.

Оптимальная на классе функция потерь (4.2.9), как видно из (4.2.10), гарантирует АМКО $V(F_*, p_0)$, не превосходящую $V(F_*, p_*)$, т. е. $V(p_*)$. Принимая во внимание, что АМКО представляет собой симметрические положительно определенные матрицы, матричное неравенство (4.2.10) можно записать относительно обратных АМКО

$$V^{-1}(p_*, p_0) \geq V^{-1}(p_*, p_*) = V^{-1}(p_*) \quad \forall p_0 \in \mathcal{P}, \quad (4.2.16)$$

и, значит,

$$p_*(\xi) = \arg \min_{p_0 \in \mathcal{P}} V^{-1}(p_0). \quad (4.2.17)$$

Разумеется, предложенное определение (4.2.10), (4.2.15) или (4.2.16), (4.2.17) оптимальной на классе функции потерь (4.2.9) будет иметь смысл лишь тогда, когда матричные неравенства (4.2.16) и, значит, (4.2.10) будут действительно иметь место для $p_*(\xi)$ (4.2.17) и всех $p_0(\xi)$, принадлежащих заданному классу \mathcal{P} . Покажем, что если решение задачи (4.2.17) существует, то оно удовлетворяет неравенству (4.2.16), а следовательно, и неравенству (4.2.10).

Вспоминая, что в общем случае для динамического объекта нормированная информационная матрица имеет вид (см. (1.6.41))

$$A(c^*, \sigma^2(p_0)) = A_I(c^*) + \sigma^2(p_0) A_{II}(c^*), \quad (4.2.18)$$

представим обратные АМКО (4.2.8) и (4.2.6) в форме

$$V^{-1}(p_0) = I(p_0) [A_I(c^*) + \sigma^2(p_0) A_{II}(c^*)] \quad (4.2.19)$$

и

$$V^{-1}(p, p_0) = \frac{I_1^2(p, p_0)}{I_2(p, p_0)} [A_I(c^*) + \sigma^2(p_0) A_{II}(c^*)]. \quad (4.2.20)$$

Пусть плотность распределения $g(\xi)$ принадлежит классу распределений \mathcal{P} ; тогда и плотность распределения

$$p_\lambda(\xi) = (1 - \alpha)p_*(\xi) + \lambda g(\xi) = p_*(\xi) + \lambda(g(\xi) - p_*(\xi)) \quad (4.2.21)$$

будет также принадлежать классу \mathcal{P} при $0 \leq \lambda \leq 1$. Напомним, что все интересующие нас классы распределений выпуклы. Подставляя $p_\lambda(\xi)$ вместо $p_0(\xi)$ в (4.2.19), получим

$$\chi_1(\lambda) = V^{-1}(p_\lambda) = I(p_\lambda)[A_I(c^*) + \sigma^2(p_\lambda) A_{II}(c^*)], \quad (4.2.22)$$

где теперь

$$I(p_\lambda) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{[p'_*(\xi) + \lambda(g'(\xi) - p'_*(\xi))]^2}{p_*(\xi) + \lambda(g(\xi) - p_*(\xi))} d\xi \quad (4.2.23)$$

и

$$\sigma^2(p_\lambda) = \sigma^2(p_*) + \lambda(\sigma^2(g) - \sigma^2(p_*)). \quad (4.2.24)$$

Поскольку

$$V^{-1}(p_*) = \min_{p_0 \in \mathcal{P}} V^{-1}(p_0), \quad (4.2.25)$$

то условие минимума запишется в виде

$$\left. \frac{d\chi_1(\lambda)}{d\lambda} \right|_{\lambda=0} = \chi_1(0) \geq 0. \quad (4.2.26)$$

Дифференцируя $\chi_1(\lambda)$ (4.2.22) по λ и полагая затем $\lambda = 0$, получим после несложных преобразований

$$\begin{aligned} \chi'_1(0) &= [2I_1(p_*, g) - I(p_*) - 2I_2(p_*, g)] A(c^*, \sigma^2(p_*)) + \\ &+ I(p_*) A_{II}(c^*) (\sigma^2(g) - \sigma^2(p_*)) \geq 0 \quad \forall g(\xi) \in \mathcal{P}. \end{aligned} \quad (4.2.27)$$

Рассмотрим теперь $V(p, p_0)$ (4.2.6) при $p(\xi) = p_*(\xi)$. Производя замену $p_0(\xi)$ на $p_\lambda(\xi)$ (4.2.21), получим

$$\chi_2(\lambda) = V^{-1}(p_*, p_\lambda) = \frac{I_1^2(p_*, p_\lambda)}{I_2(p_*, p_\lambda)} [A_I(c^*) + \sigma^2(p_\lambda) A_{II}(c^*)], \quad (4.2.28)$$

где теперь

$$I_1(p_*, p_\lambda) = \int_{-\infty}^{\infty} \left[p'_*(\xi) + \lambda(g'(\xi) - p'_*(\xi)) \right] \frac{p'_*(\xi)}{p_*(\xi)} d\xi, \quad (4.2.29)$$

$$I_2(p_*, p_\lambda) = \int_{-\infty}^{\infty} \left[p_*(\xi) + \lambda(g(\xi) - p_*(\xi)) \right] \left(\frac{p'_*(\xi)}{p_*(\xi)} \right)^2 d\xi, \quad (4.2.30)$$

а $\sigma^2(p_\lambda)$ по-прежнему определяется выражением (4.2.24). Дифференцируя $\chi_2(\lambda)$ (4.2.28) по λ и полагая затем $\lambda = 0$, получим после преобразований

$$\begin{aligned} \chi'_2(0) = & [2I_1(p_*, g) - I(p_*) - I_2(p_*, g)] A(c^*, \sigma^2(p_*)) + \\ & + I(p_*) A_{\Pi}(c^*) (\sigma^2(g) - \sigma^2(p_*)). \end{aligned} \quad (4.2.31)$$

Сопоставляя $\chi'_1(0)$ и $\chi'_2(0)$ (4.2.27), (4.2.31), заключаем, что $\chi'_1(0) = \chi'_2(0)$, поэтому необходимые условия минимума $V^{-1}(p_0)$ и $V^{-1}(p_*, p_0)$ по $p_0 \in \mathcal{P}$ совпадают. Если бы функционалы $V^{-1}(p_0)$ и $V^{-1}(p_*, p_0)$ были выпуклыми на классе \mathcal{P} , то можно было бы сделать вывод, что они достигают минимума при одной и той же плотности распределения $p_*(\xi)$. Но выпуклость этих функционалов можно обеспечить, если рассмотреть их на произвольном однопараметрическом подклассе $\mathcal{P}(\sigma) = \mathcal{P} \cap \{p_0 : \sigma(p_0) = \sigma\}$. Произведя минимизацию $V^{-1}(p_0)$ и $V^{-1}(p_*, p_0)$ сначала на подклассе $\mathcal{P}(\sigma)$ при произвольном допустимом значении σ , а затем по параметру σ , получим, что эти функционалы достигают минимума одновременно.

Отсюда и следует справедливость матричного неравенства (4.2.16). Таким образом, мы обосновали понятие оптимальности на классе.

§ 4.3. Принцип оптимальности на классе

Рассмотрим некоторые свойства наименее благоприятной плотности распределения

$$p_*(\xi) = \arg \max_{p_0 \in \mathcal{P}} V(p_0), \quad (4.3.1)$$

или, что эквивалентно,

$$p_*(\xi) = \arg \min_{p_0 \in \mathcal{P}} V^{-1}(p_0). \quad (4.3.2)$$

Из определения оптимальной на классе функции потерь (4.2.10), (4.2.16) следует

$$V(p_*, p_0) \leq V(p_*, p_*) \quad \forall p_0(\xi) \in \mathcal{P}. \quad (4.3.3)$$

С другой стороны, из матричного неравенства (4.2.11), которое лежало в основе определения оптимальной функции потерь (см. (2.5.4)),

$$V(p_0, p_0) \leq V(p, p_0); \quad (4.3.4)$$

при $p_0(\xi) = p_*(\xi)$ из (4.3.4) следует

$$V(p_*, p_*) \leq V(p, p_*). \quad (4.3.5)$$

Объединяя матричные неравенства (4.3.3) и (4.3.5), получаем

$$V(p_*, p_0) \leq V(p_*, p_*) \leq V(p_0, p_*) \quad \forall p_0(\xi) \in \mathcal{P}. \quad (4.3.6)$$

Для обратной АМКО $V^{-1}(p_*, p_0)$ справедливы матричные неравенства обратного знака

$$V^{-1}(p_*, p_0) \geq V^{-1}(p_*, p_*) \geq V^{-1}(p_0, p_*) \quad \forall p_0(\xi) \in \mathcal{P}. \quad (4.3.7)$$

Но эти неравенства являются не чем иным, как определением седловой точки $p_*(\xi)$ матричных функционалов. Таким образом, наименее благоприятная плотность распределения $p_*(\xi)$ является седловой точкой АМКО и обратной АМКО. Однако седловая точка матричного функционала не всегда существует. Поэтому целесообразно вместо матричных неравенств (4.3.7) ввести аналогичные неравенства относительно такой скалярной функции матрицы, для которой седловая точка уже существовала бы (для интересующих нас классов распределений), а в тех случаях, когда существует и седловая точка матричных функционалов, совпадала бы с ней. Такой скалярной функцией матрицы является след матрицы $\text{tr } V^{-1}(p, p_0)$.

Если выполняется матричное неравенство относительно обратных АМКО (4.3.7), то выполняется и неравенство относительно следов обратных АМКО

$$\text{tr } V^{-1}(p_*, p_0) \geq \text{tr } V^{-1}(p_*, p_*) \geq \text{tr } V^{-1}(p_0, p_*) \quad \forall p_0(\xi) \in \mathcal{P}. \quad (4.3.8)$$

В этом случае наименее благоприятная плотность распределения определяется как решение вариационной задачи минимизации

$$\text{tr } V^{-1}(p) \rightarrow \min_{p_0 \in \mathcal{P}}, \quad (4.3.9)$$

т. е.

$$p_*(\xi) = \arg \min_{p_0 \in \mathcal{P}} \text{tr } V^{-1}(p_0) \quad (4.3.10)$$

совпадает с решением матричной вариационной задачи минимизации

$$V^{-1}(p) \rightarrow \min_{p_0 \in \mathcal{P}}, \quad (4.3.11)$$

определенным (4.3.2). В тех же случаях, когда седловой точки обратной АМКО (4.3.7) не существует, т. е. когда матричная вариационная задача минимизации (4.3.2) не имеет решения, седловая точка ее следа, т. е. решение вариационной задачи минимизации (4.3.9), в интересующих нас случаях существует. Эта седловая точка определяет наименее благоприятное распределение $p_*(\xi)$ (4.3.10), а значит, и оптимальную на классе функцию потерь $F_*[\varepsilon] = -\ln p_*(\xi)|_{\xi=\varepsilon}$. Однако теперь оптимальная на классе функция потерь $F_*[\xi]$ гарантирует не обратную АМКО $V^{-1}(F_*, p_0)$, не меньшую $V^{-1}(F_*, p_*) = V^{-1}(p_*)$, а только след обратной АМКО $\text{tr } V^{-1}(F_*, p_0)$, не меньший след обратной АМКО $\text{tr } V^{-1}(F_*, p_*) = \text{tr } V^{-1}(p_*)$. Доказательство этого факта полностью аналогично проведенному в § 4.2 доказательству при замене матриц $A_I(c^*)$, $A_{II}(c^*)$ на их следы.

Теперь можно сформулировать *принцип оптимальности на классе*: наименее благоприятная плотность распределения $p_*(\xi)$, определяющая оптимальную на классе функцию потерь $F_*[\varepsilon] = -\ln p_*(\xi)|_{\xi=\varepsilon}$, представляет собой седловую точку следа обратной АМКО (4.3.8).

В тех случаях, когда нам почему-либо понадобится подчеркнуть различие между принципами оптимальности для матриц и их следов, будем говорить о матричном и скалярном принципах оптимальности соответственно.

Принцип оптимальности на классе совпадает с особой формой принципа минимакса (седловой точки). В общей форме принцип минимакса имеет вид

$$\Phi(X_*, Y) \geq \Phi(X_*, Y_*) \geq \Phi(X, Y_*). \quad (4.3.12)$$

Оптимальные стратегии обычно предполагаются независимыми либо связанными между собой функциональной зависимостью $X_* = \varphi(Y_*)$. В принципе оптимальности (4.3.8) оптимальные стратегии совпадают друг с другом, т. е. $X_* = Y_*$.

§ 4.4. Вариационные задачи минимизации и методика их решения

Определение оптимальной на классе функции потерь

$$F_*[\xi] = -\ln p_*(\xi)|_{\xi=\varepsilon}$$

сводится к нахождению наименее благоприятной плотности распределения $p_*(\xi)$, являющейся решением вариационной задачи минимизации (4.3.9), которая с учетом представления нормированной информационной матрицы (4.2.18)

$$A(c^*, \sigma^2(p_0)) = A_I(c^*) + \sigma^2(p_0) A_{II}(c^*) \quad (4.4.1)$$

запишется в виде

$$I(p_0)(\eta + \mu \sigma^2(p_0)) \rightarrow \min_{p_0 \in \mathcal{P}}. \quad (4.4.2)$$

В общем случае

$$\eta = \operatorname{tr} A_I(c^*) \geq 0, \quad \mu = \operatorname{tr} A_{II}(c^*) \geq 0. \quad (4.4.3)$$

Напомним, что фишеровская информация $I(p_0)$ и дисперсия $\sigma^2(p_0)$, входящие в левую часть (4.4.2), определяются выражениями

$$I(p_0) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{p_0'^2(\xi)}{p_0(\xi)} d\xi, \quad \sigma^2(p_0) = \int_{-\infty}^{\infty} \xi^2 p_0(\xi) d\xi. \quad (4.4.4)$$

Как следует из результатов, приведенных в § 1.6:

для Р-объектов с простой помехой $A_I(c^*) \equiv A_1$ и $A_{II}(c^*) \equiv 0$ (см. (1.6.34)) и, значит,

$$\eta = \operatorname{tr} A_1, \quad \mu = 0; \quad (4.4.5)$$

для АР-объектов $A_I(c^*) \equiv 0$, $A_{II}(c^*) = A_4(a^*, d^*)$ (см. (1.6.39)) и, значит,

$$\eta = 0, \quad \mu = \operatorname{tr} A_4(a^*, d^*); \quad (4.4.6)$$

для Р-объектов с преобразованной помехой $A_I(c^*) = A_2(d^*)$, $A_{II}(c^*) = A_3(d^*)$ (см. (1.6.36)) и, значит,

$$\eta = \operatorname{tr} A_2(d^*), \quad \mu = \operatorname{tr} A_3(d^*); \quad (4.4.7)$$

для РАР-объектов $A_I(c^*) = A_5(c^*)$, $A_{II}(c^*) = A_6(c^*)$ (см. (1.6.41)) и, значит,

$$\eta = \operatorname{tr} A_5(c^*), \quad \mu = \operatorname{tr} A_6(c^*). \quad (4.4.8)$$

Нетрудно видеть, что для Р-объектов с простой помехой и АР-объектов матричный принцип оптимальности на классе справедлив всегда. Вариационная задача минимизации (4.4.2) в этих случаях существенно упрощается. Так, для Р-объектов с простой помехой, учитывая (4.4.5), получаем из (4.4.2) следующую задачу

$$I(p_0) \rightarrow \min_{p_0 \in \mathcal{P}}. \quad (4.4.9)$$

Наименее благоприятная плотность распределения $p_*(\xi)$ доставляет минимум фишеровской информации на соответствующих классах плотностей распределения \mathcal{P} . Для АР-объектов при учете (4.4.6) из (4.4.2) получаем такую задачу:

$$I(p_0) \sigma^2(p_0) \rightarrow \min_{p_0 \in \mathcal{P}}. \quad (4.4.10)$$

Наименее благоприятная плотность распределения доставляет минимум произведению фишеровской информации и дисперсии на соответствующих классах плотностей распределения \mathcal{P} . Для Р-объектов с преобразованной помехой и РАР-объектов, как видно из (4.4.7) и (4.4.8), вариационная задача минимизации (4.4.2) не упрощается.

Остановимся теперь на ограничениях, задающих классы плотностей распределения \mathcal{P} . Эти ограничения определяются условиями вида:

$$\int_{-\infty}^{\infty} f_{\nu}(\xi) p_0(\xi) d\xi \geq \alpha_{\nu}, \quad \nu = 1, \dots, k, \quad (4.4.11)$$

$$p_0(\xi) \geq \varphi(\xi), \quad (4.4.12)$$

где ξ — аргумент соответствующих функций. В частности, условие $\int_{-\infty}^{\infty} p_0(\xi) d\xi = 1$ нормировки плотности распределения имеет вид (4.4.11), а условие ее положительности $p_0(\xi) \geq 0$ относится к виду (4.4.12). Ограничение на дисперсию имеет вид (4.4.11) при $f_1(\xi) = -\xi^2$. Ограничение типа $p_0(0) \geq 1/(2s_1)$ можно записать как (4.4.11) при $f_1(\xi) = \delta(\xi)$, где $\delta(\xi)$ — дельта-функция, либо как ограничение (4.4.12) при $\varphi(\xi) = 1/(2s_1)$ для $\xi = 0$ и $\varphi(0) = 0$, когда $\xi \neq 0$. Условие типа $p_0(\xi) = (1 - \alpha)p(\xi) + \alpha g(\xi)$ эквивалентно ограничению $p_0(\xi) \geq (1 - \alpha)p(\xi)$, т. е. имеет вид (4.4.12).

Вариационную задачу минимизации, возникающую при нахождении наименее благоприятной плотности распределения, а значит, и оптимальной на классе функции потерь, можно сформулировать так:

$$I(p_0) [\eta + \mu \sigma^2(p_0)] \rightarrow \min_{p_0 \in \mathcal{P}}$$

$$\mathcal{P} = \left\{ p_0(\xi) : \int_{-\infty}^{\infty} p_0(\xi) f_{\nu}(\xi) d\xi \geq \alpha_{\nu}, \nu = 1, \dots, k; \quad p_0(\xi) \geq \varphi(\xi) \right\}. \quad (4.4.13)$$

Это вариационная задача минимизации неклассического типа, и какие-либо общие методы ее решения к настоящему времени отсутствуют.

В тех случаях, например, когда в (4.4.13) отсутствуют ограничения вида $p_0(\xi) \geq \varphi(\xi)$, можно использовать классический путь, основанный на *уравнении Эйлера*. В этом случае составляется *функционал Лагранжа*

$$L(p_0, \lambda_1, \dots, \lambda_k) = I(p_0) [\eta + \mu \sigma^2(p_0)] +$$

$$+ \sum_{\nu=1}^k \lambda_{\nu} \left(\int_{-\infty}^{\infty} p_0(\xi) f_{\nu}(\xi) d\xi - \alpha_{\nu} \right), \quad (4.4.14)$$

где $\lambda_1, \dots, \lambda_k$ — множители Лагранжа. Варьируя этот функционал и приравнивая вариацию нулю, получаем интегро-дифференциальное

уравнение относительно $p_0(\xi)$

$$\left[-2 \frac{p_0''(\xi)}{p_0(\xi)} + \left(\frac{p_0'(\xi)}{p_0(\xi)} \right)^2 \right] (\eta + \mu \sigma^2(p_0)) + \mu I(p_0) \xi^2 + \sum_{\nu=1}^k \lambda_\nu f_\nu(\xi) = 0. \quad (4.4.15)$$

Это уравнение можно назвать обобщенным уравнением Эйлера. Наряду с этим уравнением рассмотрим дифференциальное уравнение

$$-2 \frac{p_0''(\xi)}{p_0(\xi)} + \left(\frac{p_0'(\xi)}{p_0(\xi)} \right)^2 + \tilde{\lambda}_0 \xi^2 + \sum_{\nu=1}^k \tilde{\lambda}_\nu f_\nu(\xi) = 0, \quad (4.4.16)$$

которое зависит от $k+1$ произвольных параметров $\tilde{\lambda}_0, \tilde{\lambda}_1, \dots, \tilde{\lambda}_k$. Решение уравнения (4.4.15) совпадает с решением уравнения (4.4.16) $p_0(\xi, \tilde{\lambda})$, где $\tilde{\lambda} = (\tilde{\lambda}_0, \dots, \tilde{\lambda}_k)$, при соответствующих граничных условиях (типа $p_0(0) = 1/(2s_1)$ и $p(\infty) = 0$ или $p_0'(0) = 0$ и $p_0'(\infty) = 0$) и определении вектора $\tilde{\lambda}$ из ограничений, задающих класс плотностей распределения \mathcal{P} , а также из условия

$$\tilde{\lambda}_0 = \frac{I(p_0(\xi, \tilde{\lambda}))}{\eta + \mu \sigma^2(p_0(\xi, \tilde{\lambda}))}.$$

Полученное таким путем решение $p_0(\xi) = p_0(\xi, \tilde{\lambda})$ будет удовлетворять уравнению (4.4.15) и ограничениям, определяющим класс \mathcal{P} . Заметим, что уравнение (4.4.16), как правило, не интегрируется в квадратурах. Поэтому его приходится решать численными методами. Здесь, однако, возникает серьезное препятствие при необходимости учета ограничений типа $p_0(\xi) \geq \varphi(\xi)$.

Иной подход основан на прямых численных методах решения вариационной задачи минимизации (4.4.13). Они связаны с той или иной аппроксимацией плотности распределения $p_0(\xi)$ и последующим решением задачи математического программирования.

Так, если аппроксимировать $p_0(\xi)$ кусочно линейной финитной функцией, интегралы — суммами, а производные — разностями, мы приходим к задаче нелинейного программирования с линейными ограничениями:

$$\begin{aligned} \sum_{m=1}^K \frac{(p_{m+1} - p_m)^2}{p_m} \left[\eta + 2\mu \sum_{m=1}^K (mh)^2 p_m h \right] &\rightarrow \min_{\{p_m\}}, \\ \sum_{m=1}^K f_\nu(mh) p_m h &\geq \alpha_\nu, \quad \nu = 1, \dots, k; \\ p_m &= p_0(mh) \geq \varphi(mh), \quad m = 1, \dots, K. \end{aligned} \quad (4.4.17)$$

Для подобной задачи нелинейного программирования известны хорошо разработанные методы решения.

Для минимизации фишеровской информации (4.4.9) в тех случаях, когда существует аналитическое решение для наименее благоприятной плотности распределения $p_*(\xi)$, можно использовать простой подход, основанный на неравенстве Коши — Буняковского

$$\left(\int_{-\infty}^{\infty} p_0(\xi) \psi(\xi) \varphi(\xi) d\xi \right)^2 \leq \int_{-\infty}^{\infty} p_0(\xi) \psi^2(\xi) d\xi \int_{-\infty}^{\infty} p_0(\xi) \varphi^2(\xi) d\xi. \quad (4.4.18)$$

Равенство в (4.4.18) достигается при условии пропорциональности функций $\psi(\xi)$ и $\varphi(\xi)$, т. е. при условии

$$\psi(\xi) = -\lambda \varphi(\xi), \quad (4.4.19)$$

где λ — числовой множитель.

Выберем в качестве функции ψ информант

$$\psi(\xi) = \frac{p'_0(\xi)}{p_0(\xi)}. \quad (4.4.20)$$

Принимая во внимание определение фишеровской информации (4.4.4), неравенство (4.4.18) можно преобразовать к виду

$$I(p_0) \geq \frac{\left(\int_{-\infty}^{\infty} p'_0(\xi) \varphi(\xi) d\xi \right)^2}{\int_{-\infty}^{\infty} p_0(\xi) \varphi^2(\xi) d\xi}. \quad (4.4.21)$$

Правая часть неравенства (4.4.21) определяет нижнюю границу фишеровской информации $I(p_0)$, и эта нижняя граница равна

$$I^* = \min_{p_0 \in \mathcal{P}} \frac{\left(\int_{-\infty}^{\infty} p'_0(\xi) \varphi(\xi) d\xi \right)^2}{\int_{-\infty}^{\infty} p_0(\xi) \varphi^2(\xi) d\xi}. \quad (4.4.22)$$

Следовательно,

$$\min_{p_0 \in \mathcal{P}} I(p_0) \geq I^*. \quad (4.4.23)$$

Если для некоторой плотности распределения $\tilde{p}_0(\xi) \in \mathcal{P}$ выполнено условие, аналогичное (4.4.19), т. е.

$$\frac{\tilde{p}'_0(\xi)}{\tilde{p}_0(\xi)} = -\lambda \varphi(\xi), \quad (4.4.24)$$

то при $p_0(\xi) = \tilde{p}_0(\xi)$ неравенство (4.4.21) обращается в равенство, т. е.

$$I(\tilde{p}_0) = \frac{\left(\int_{-\infty}^{\infty} \tilde{p}'_0(\xi) \varphi(\xi) d\xi \right)^2}{\int_{-\infty}^{\infty} \tilde{p}_0(\xi) \varphi^2(\xi) d\xi}. \quad (4.4.25)$$

Плотность распределения $\tilde{p}_0(\xi)$ (4.4.24) зависит от параметра λ , так что $\tilde{p}_0(\xi) = \tilde{p}_0(\xi, \lambda)$. Если при некотором значении $\lambda = \lambda_*$ фишеровская информация $I(\tilde{p}_0)$ в (4.4.25) равна I^* и $\tilde{p}_0(\xi, \lambda_*) \in \mathcal{P}$, то в силу (4.4.23) $p_*(\xi) = \tilde{p}_0(\xi, \lambda_*)$ представляет собой наименее благоприятную плотность распределения на классе \mathcal{P} .

Описанный способ отыскания наименее благоприятной плотности распределения $p_*(\xi)$ остается в силе, если правую часть (4.4.21) представить в несколько иной форме.

Если $\lim_{\xi \rightarrow \pm\infty} p_0(\xi) \varphi(\xi) = 0$, то интегрирование по частям дает $\int_{-\infty}^{\infty} p'_0(\xi) \varphi(\xi) d\xi = - \int_{-\infty}^{\infty} p_0(\xi) \varphi'(\xi) d\xi$, поэтому из (4.4.21) получим неравенство

$$I(p_0) \geq \frac{\left(\int_{-\infty}^{\infty} p_0(\xi) \varphi'(\xi) d\xi \right)^2}{\int_{-\infty}^{\infty} p_0(\xi) \varphi^2(\xi) d\xi}. \quad (4.4.26)$$

Это неравенство иногда удобнее использовать для отыскания наименее благоприятной плотности распределения $p_*(\xi)$, чем неравенство (4.4.21).

Условие (4.4.24) представляет собой дифференциальное уравнение. Интегрируя его, получим

$$\tilde{p}_0(\xi) = \tilde{p}_0(0) \exp \left(-\lambda \int_0^{\xi} \varphi(\xi) d\xi \right). \quad (4.4.27)$$

Здесь $\tilde{p}_0(0)$ — значение $\tilde{p}_0(\xi)$ при $\xi = 0$. Это значение $\tilde{p}_0(0)$ находится из условия нормировки (4.1.2), которое для симметричных плотностей распределения (4.1.1) имеет вид

$$2 \int_0^{\infty} \tilde{p}_0(\xi) d\xi = 1. \quad (4.4.28)$$

Подставляя (4.4.27) в (4.4.28), находим

$$\tilde{p}_0(0) = \left[2 \int_0^{\infty} \exp \left\{ \left(-\lambda \int_0^{\xi} \varphi(\xi) d\xi \right) d\xi \right\} \right]^{-1}, \quad (4.4.29)$$

и, значит, из (4.4.27) получим

$$\tilde{p}_0(\xi) = \left[2 \int_0^\infty \exp \left\{ \left(-\lambda \int_0^\xi \varphi(\xi) d\xi \right) d\xi \right\} \right]^{-1} \exp \left(-\lambda \int_0^\xi \varphi(\xi) d\xi \right). \quad (4.4.30)$$

Если минимум функционала, стоящего в правой части неравенства (4.4.21) или (4.4.26), на заданном классе \mathcal{P} достигается на плотности распределения $p_*(\xi)$, совпадающей при некотором λ с плотностью распределения (4.4.30), то $p_*(\xi)$ является решением задачи минимизации (4.4.9) и, следовательно, представляет собой наименее благоприятную плотность распределения для класса \mathcal{P} .

Таким образом, для определения наименее благоприятной плотности распределения можно поступить следующим образом:

1) задавшись функцией $\varphi(\xi)$, найти минимум I^* правой части неравенства (4.4.21) или (4.4.26) по плотностям распределения $p_0(\xi)$ из класса \mathcal{P} ;

2) определить по (4.4.30) плотность распределения $p_0(\xi) = \tilde{p}_0(\xi, \lambda)$, зависящую от произвольного параметра λ , и найти такое $\lambda = \lambda_*$, которое минимизирует правую часть неравенства (4.4.21) (или (4.4.26)) по плотностям распределения вида $p_0(\xi) = \tilde{p}_0(\xi, \lambda)$, принадлежащим заданному классу \mathcal{P} ;

3) проверить выполнение равенства $I(\tilde{p}_0(\xi, \lambda_*)) = I^*$. Если это равенство выполнено, то найденная плотность распределения $\tilde{p}_0(\xi, \lambda_*)$ представляет собой наименее благоприятную плотность распределения на классе \mathcal{P} .

Естественно, простота описанного подхода не дается даром. Его успех определяется адекватностью выбранной функции $\varphi(\xi)$ заданному классу \mathcal{P} .

В заключение отметим, что поскольку производная $F'_*(\xi)$ оптимальной на классе функции потерь $F_*[\xi] = -\ln p_*(\xi)|_{\xi=\varepsilon}$ по аргументу равна *негинформанту*

$$F'_*(\varepsilon) = -\frac{p'_*(\xi)}{p_*(\xi)} \Big|_{\xi=\varepsilon}, \quad (4.4.31)$$

то из (4.4.24) получаем

$$F'_*(\varepsilon) = \lambda_* \varphi(\xi) \Big|_{\xi=\varepsilon}. \quad (4.4.32)$$

Это значит, что производная оптимальной на классе функции потерь определяется функцией $\varphi(\xi)$ и найденным фиксированным значением параметра λ_* . Этот факт важен с той точки зрения, что он позволяет широко использовать интуитивные соображения неформального характера при определении оптимальных на классе функций потерь $F_*[\xi]$ для различного уровня априорной информации о помехах.

Описанные выше подходы далее мы будем использовать как для аналитического, так и для численного определения наименее благоприятных плотностей распределения на заданных классах, а значит, и для определения оптимальных на классе функций потерь.

§ 4.5. Оптимальные на классе функции потерь для Р-объектов с простой помехой

Для Р-объектов с простой помехой наименее благоприятная плотность распределения определяется решением вариационной задачи минимизации (4.4.9)

$$I(p_0) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{p_0'^2(\xi)}{p_0(\xi)} d\xi \rightarrow \min_{p_0 \in \mathcal{P}}, \quad (4.5.1)$$

т. е.

$$p_*(\xi) = \arg \min_{p_0 \in \mathcal{P}} I(p_0). \quad (4.5.2)$$

Определим $p_*(\xi)$, пользуясь методикой, основанной на неравенстве Коши — Буняковского. Рассмотрим классы распределений \mathcal{P}_k , $k = 1, \dots, 7$.

Класс невырожденных распределений \mathcal{P}_1 определяется ограничением (4.1.3)

$$p_0(0) \geq \frac{1}{2s_1} > 0. \quad (4.5.3)$$

Выберем

$$\varphi(\xi) = \operatorname{sign} \xi. \quad (4.5.4)$$

Для этой функции из (4.4.30) находим

$$\tilde{p}_0(\xi) = \frac{\lambda}{2} e^{-\lambda|\xi|}. \quad (4.5.5)$$

Подставляя $\varphi(\xi)$ в (4.4.26), получим для любой плотности распределения $p_0(\xi) \in \mathcal{P}_1$

$$I(p_0) \geq 4p_0^2(0) \geq \frac{1}{s_1^2}. \quad (4.5.6)$$

Но при $\lambda = 1/s_1$ плотность распределения (4.5.5) принадлежит классу \mathcal{P}_1 , а фишеровская информация $I(\tilde{p}_0)$ становится минимальной и равной $1/s_1^2$. Таким образом, наименее благоприятной плотностью рас-

пределения для класса \mathcal{P}_1 является двойная экспоненциальная плотность распределения, или плотность распределения Лапласа

$$p_*(\xi) = \frac{1}{s_1} e^{-\frac{|\xi|}{s_1}}. \quad (4.5.7)$$

Отсюда находим оптимальную на классе \mathcal{P}_1 функцию потерь

$$F_*[\varepsilon] = -\ln p_*(\xi) \Big|_{\xi=\varepsilon} = \frac{|\varepsilon|}{s_1} + \ln 2s_1. \quad (4.5.8)$$

Оптимальная на классе \mathcal{P}_1 функция потерь — модульная.

Класс распределений с ограниченной дисперсией \mathcal{P}_2 определяется ограничением (4.1.4)

$$\sigma^2(p_0) = - \int_{-\infty}^{\infty} \xi^2 p_0(\xi) d\xi \leq \sigma_1^2. \quad (4.5.9)$$

Выберем

$$\varphi(\xi) = \xi. \quad (4.5.10)$$

Тогда из (4.4.30) следует

$$\tilde{p}_0(\xi) = \sqrt{\frac{\lambda}{2\pi}} e^{-\frac{\lambda \xi^2}{2}}. \quad (4.5.11)$$

Подставляя $\varphi(\xi)$ в (4.4.26), получим для любой плотности распределения $p_0(\xi) \in \mathcal{P}_2$

$$I(p_0) \geq \frac{1}{\sigma^2(p_0)} \geq \frac{1}{\sigma_1^2}. \quad (4.5.12)$$

При $\lambda = 1/\sigma_1^2$ плотность распределения (4.5.11) принадлежит классу \mathcal{P}_2 и имеет минимальную фишеровскую информацию, равную $1/\sigma_1^2$. Таким образом, наименее благоприятной плотностью распределения для класса \mathcal{P}_2 является нормальная, или гауссова плотность распределения

$$p_*(\xi) = \frac{1}{\sqrt{2\pi} \sigma_1} e^{-\frac{\xi^2}{2\sigma_1^2}}. \quad (4.5.13)$$

Отсюда находим оптимальную на классе \mathcal{P}_2 функцию потерь

$$F_*[\varepsilon] = -\ln p_*(\xi) \Big|_{\xi=\varepsilon} = \frac{\varepsilon^2}{2\sigma_1^2} + \ln \sqrt{2\pi} \sigma_1. \quad (4.5.14)$$

Оптимальная на классе \mathcal{P}_2 функция потерь — квадратичная.

Класс приближенно нормальных распределений \mathcal{P}_3 . Ограничение, определяющее класс \mathcal{P}_3 (4.1.5), можно записать в виде неравенства

$$p_0(\xi) \geq (1 - \alpha) p_N(\xi) \quad \forall \xi, \quad (4.5.15)$$

где $p_N(\xi) = N(0, \sigma_N^2)$ — нормальная, или гауссова плотность распределения. Выберем

$$\varphi(\xi) = \begin{cases} \xi & \text{при } |\xi| \leq \Delta, \\ \Delta \operatorname{sign} \xi & \text{при } |\xi| > \Delta. \end{cases} \quad (4.5.16)$$

Тогда из (4.4.30) следует

$$\tilde{p}_0(\xi) = \begin{cases} \tilde{p}_0(0) e^{-\frac{\lambda \xi^2}{2}} & \text{при } |\xi| \leq \Delta, \\ \tilde{p}_0(0) e^{-\lambda \Delta \left(|\xi| - \frac{\Delta}{2}\right)} & \text{при } |\xi| > \Delta, \end{cases} \quad (4.5.17)$$

где

$$\tilde{p}_0(0) = \frac{1}{2} \left(\sqrt{\frac{2\pi}{\lambda}} \Phi(\Delta\sqrt{\lambda}) + \frac{1}{\lambda\Delta} e^{-\frac{\lambda\Delta^2}{2}} \right), \quad (4.5.18)$$

а

$$\Phi(\Delta\sqrt{\lambda}) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^{\Delta\sqrt{\lambda}} e^{-\frac{\xi^2}{2}} d\xi.$$

Подставляя $\varphi(\xi)$ (4.5.16) в (4.4.26), получим для любой плотности распределения $p_0(\xi) \in \mathcal{P}_3$

$$I(p_0) \geq \frac{2 \left(\int_0^\Delta p_0(\xi) d\xi \right)^2}{\frac{\Delta^2}{2} - \int_0^\Delta (\Delta^2 - \xi^2) p_0(\xi) d\xi} \geq \frac{2(1 - \alpha)^2 \left(\int_0^\Delta p_N(\xi) d\xi \right)^2}{\frac{\Delta^2}{2} - (1 - \alpha) \int_0^\Delta (\Delta^2 - \xi^2) p_N(\xi) d\xi}, \quad (4.5.19)$$

или, после преобразования правой части этого неравенства,

$$I(p_0) \geq \frac{2(1 - \alpha)^2 \Phi^2\left(\frac{\Delta}{\sigma_N}\right)}{\frac{\Delta^2}{2} - \frac{(1 - \alpha)\Delta \sigma_N^2}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{\Delta^2}{2\sigma_N^2}} + (\sigma_N^2 - \Delta^2)(1 - \alpha) \Phi\left(\frac{\Delta}{\sigma_N}\right)}. \quad (4.5.20)$$

Равенство здесь может достигаться только для такой плотности распределения $p_0(\xi) = \tilde{p}_0(\xi) \in \mathcal{P}_3$ при некотором $\lambda = \lambda_* > 0$, которая имеет вид (4.5.17), (4.5.18) и, кроме того, удовлетворяет при всех $|\xi| \leq \Delta$ равенству

$$p(\xi) = (1 - \alpha)p_N(\xi). \quad (4.5.21)$$

Отсюда получаем

$$\lambda_* = \frac{1}{\sigma_N^2} \quad \text{и} \quad \frac{1 - \alpha}{\sqrt{2\pi}\sigma_N} = \tilde{p}_0(0). \quad (4.5.22)$$

После подстановки этих значений в (4.5.18) будем иметь

$$\Phi\left(\frac{\Delta}{\sigma_N}\right) = \frac{1}{2(1 - \alpha)} - \frac{\sigma_N}{\Delta\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{\Delta^2}{2\sigma_N^2}}. \quad (4.5.23)$$

Таким образом, наименее благоприятной плотностью распределения для класса \mathcal{P}_3 является плотность распределения

$$p_*(\xi) = \begin{cases} \frac{1 - \alpha}{\sqrt{2\pi}\sigma_N} e^{-\frac{\xi^2}{2\sigma_N^2}} & \text{при } |\xi| \leq \Delta, \\ \frac{1 - \alpha}{\sqrt{2\pi}\sigma_N} e^{-\frac{\Delta}{\sigma_N^2}(|\xi| - \frac{\Delta}{2})} & \text{при } |\xi| > \Delta, \end{cases} \quad (4.5.24)$$

где Δ определяется из трансцендентного уравнения (4.5.23).

Из (4.5.24) находим оптимальную на классе \mathcal{P}_3 функцию потерь

$$F_*[\varepsilon] = -\ln p_*(\xi) \Big|_{\xi=\varepsilon} =$$

$$= \begin{cases} \frac{\varepsilon^2}{2\sigma_N^2} + \ln \frac{\sqrt{2\pi}\sigma_N}{1 - \alpha} & \text{при } |\varepsilon| \leq \Delta, \\ \frac{\Delta}{\sigma_N^2} \left(|\varepsilon| - \frac{\Delta}{2}\right) + \ln \frac{\sqrt{2\pi}\sigma_N}{1 - \alpha} & \text{при } |\varepsilon| > \Delta. \end{cases} \quad (4.5.25)$$

Оптимальная на классе \mathcal{P}_3 функция потерь — квадратично-линейная.

Класс приближенно экспоненциальных распределений \mathcal{P}_4 . Ограничение, определяющее этот класс (4.1.6), можно записать в виде неравенства

$$p_0(\xi) \geq (1 - \alpha)p_L(\xi) \quad \forall \xi, \quad (4.5.26)$$

где $p_L(\xi) = L(0, s_L)$ — двойная экспоненциальная, или лапласова плотность распределения. Очевидно, что для всех $p_0(\xi) \in \mathcal{P}_4$ выполняется

неравенство

$$p_0(0) \geq \frac{1-\alpha}{2s_L}, \quad (4.5.27)$$

т. е. класс \mathcal{P}_4 является частью класса \mathcal{P}_1 при $s_1 = s_L/(1-\alpha)$. Согласно (4.5.7) наименее благоприятная плотность распределения для класса \mathcal{P}_1 в этом случае равна

$$p_*(\xi) = \frac{1-\alpha}{2s_L} e^{-\frac{(1-\alpha)|\xi|}{s_L}}. \quad (4.5.28)$$

Она принадлежит классу \mathcal{P}_4 . Таким образом, наименее благоприятной плотностью распределения для класса \mathcal{P}_4 является лапласова плотность распределения (4.5.28).

Из (4.5.28) находим оптимальную на классе \mathcal{P}_4 функцию потерь

$$F_*[\varepsilon] = -\ln p_*(\xi)|_{\xi=\varepsilon} = \frac{1-\alpha}{s_L} |\varepsilon| + \ln \frac{2s_L}{1-\alpha}. \quad (4.5.29)$$

Для класса \mathcal{P}_4 оптимальная на классе функция потерь — модульная.

Класс приближенно равномерных распределений \mathcal{P}_5 . Ограничение, определяющее класс \mathcal{P}_5 (4.1.7), можно записать в виде неравенства

$$p_0(\xi) \geq (1-\alpha) p_R(\xi) \quad \forall \xi, \quad (4.5.30)$$

где $p_R(\xi) = R(0, l_R)$ — равномерная плотность распределения:

$$p_R(\xi) = \begin{cases} \frac{1}{2l} & \text{при } |\xi| \leq l_R, \\ 0 & \text{при } |\xi| > l_R. \end{cases}$$

Выберем

$$\varphi(\xi) = \begin{cases} 0 & \text{при } |\xi| \leq \Delta, \\ \text{sign } \xi & \text{при } |\xi| > \Delta. \end{cases} \quad (4.5.31)$$

Поступая далее аналогично тому, как это делалось для класса \mathcal{P}_3 , получим, что наименее благоприятной плотностью распределения для класса \mathcal{P}_5 является равномерно-экспоненциальная плотность

$$p_*(\xi) = \begin{cases} \frac{1-\alpha}{2l_R} & \text{при } |\xi| \leq l_R, \\ \frac{1-\alpha}{2l_R} e^{-\frac{1-\alpha}{\alpha l_R} (|\xi| - l_R)} & \text{при } |\xi| > l_R. \end{cases} \quad (4.5.32)$$

Отсюда находим оптимальную на классе \mathcal{P}_4 функцию потерь

$$F_*[\varepsilon] = -\ln p_*(\xi)|_{\xi=\varepsilon} =$$

$$= \begin{cases} \ln \frac{2l_R}{1-\alpha} & \text{при } |\varepsilon| \leq l_R, \\ \frac{1-\alpha}{\alpha l_R} (|\varepsilon| - l_R) + \ln \frac{2l_R}{1-\alpha} & \text{при } |\varepsilon| > l_R. \end{cases} \quad (4.5.33)$$

Оптимальная на классе \mathcal{P}_5 функция потерь — постоянно-линейная.

Класс финитных распределений \mathcal{P}_6 определяется ограничением (4.1.8)

$$\int_{-l}^l p_0(\xi) d\xi = 1. \quad (4.5.34)$$

Выберем

$$\varphi(\xi) = \operatorname{tg} \frac{\pi \xi}{2l}, \quad |\xi| \leq l. \quad (4.5.35)$$

Для финитных плотностей распределения с конечной фишеровской информацией должны выполняться граничные условия

$$p_0(\pm l) = p'_0(\pm(l-0)) = 0. \quad (4.5.36)$$

Поэтому неравенство (4.4.26) запишется в виде

$$I(p_0) \geq \frac{\left(\int_{-l}^l \varphi'(\xi) p_0(\xi) d\xi \right)^2}{\int_{-l}^l \varphi^2(\xi) p_0(\xi) d\xi}, \quad (4.5.37)$$

или, после несложных преобразований,

$$I(p_0) \geq \frac{\left(\frac{\pi}{2l} \right)^2 \left(1 + \int_{-l}^l \varphi^2(\xi) p_0(\xi) d\xi \right)^2}{\int_{-l}^l \varphi^2(\xi) p_0(\xi) d\xi} \geq \left(\frac{\pi}{2l} \right)^2 \min_{v>0} \frac{(1+v)^2}{v} = \frac{\pi^2}{l^2}, \quad (4.5.38)$$

причем фигурирующий здесь минимум достигается при

$$v = 1. \quad (4.5.39)$$

Равенство в (4.5.37) достигается на плотностях распределения $p_0(\xi)$, удовлетворяющих при некотором λ уравнению (4.4.24) для интервала

$|\xi| < l$ и граничным условиям (4.5.36), т. е.

$$\tilde{p}_0(\xi) = \left(\int_{-l}^l \cos^2 \frac{\pi \xi}{2l} d\xi \right)^{-1} \cos^2 \frac{\pi \xi}{2l}, \quad (4.5.40)$$

где $\nu = 2l\lambda/\pi$. Отсюда и из (4.5.38), (4.5.39) заключаем, что равенство $I(p_0) = (\pi/l)^2$ может выполняться лишь для плотностей вида (4.5.40), удовлетворяющих условию

$$\int_{-l}^l \varphi^2(\xi) p_0(\xi) d\xi = 1, \quad (4.5.41)$$

которое, как нетрудно проверить, выполняется лишь при $\nu = 2$.

Таким образом, наименее благоприятной плотностью распределения для класса \mathcal{P}_6 является

$$p_*(\xi) = \begin{cases} \frac{1}{l} \cos^2 \frac{\pi \xi}{2l} & \text{при } |\xi| \leq l, \\ 0 & \text{при } |\xi| > l. \end{cases} \quad (4.5.42)$$

Отсюда находим оптимальную на классе \mathcal{P}_6 функцию потерь

$$F_*[\varepsilon] = -\ln p_*(\xi)|_{\xi=\varepsilon} = -2 \ln \cos \frac{\pi \varepsilon}{2l} + \ln l, \quad |\varepsilon| < l. \quad (4.5.43)$$

Оптимальная на классе \mathcal{P}_6 функция потерь нелинейна. Она отлична от нуля лишь в интервале финитности.

Класс приближенно финитных распределений \mathcal{P}_7 . Ограничение, определяющее класс \mathcal{P}_7 (4.1.9), имеет вид

$$\int_{-l}^l p_0(\xi) d\xi = 1 - \beta, \quad 0 \leq \beta < 1. \quad (4.5.44)$$

Определение наименее благоприятной плотности распределения для рассматриваемого класса \mathcal{P}_7 сопряжено с громоздкими выкладками, поэтому приведем здесь лишь схему рассуждений и конечный результат.

Выберем

$$\varphi(\xi) = \begin{cases} \operatorname{tg} \beta_1 \xi & \text{при } |\xi| \leq l, \\ \operatorname{tg} \beta_1 l \operatorname{sign} \xi & \text{при } |\xi| > l. \end{cases} \quad (4.5.45)$$

Тогда, следуя изложенной выше методике, получим наименее благоприятную плотность распределения в виде

$$p_*(\xi) = \begin{cases} \beta_2 \cos^2 \beta_1 \xi & \text{при } |\xi| \leq l, \\ \beta_3 e^{-\beta_4 |\xi|} & \text{при } |\xi| > l, \end{cases} \quad (4.5.46)$$

где константы β_k ($k = 1, \dots, 4$) определяются из системы уравнений

$$\begin{aligned} \int_{-l}^l p_*(\xi) d\xi &= 1 - \beta, & p_*(l-0) &= p_*(l+0), \\ \int_{-\infty}^{\infty} p_*(\xi) d\xi &= 1, & p'_*(l-0) &= p'_*(l+0). \end{aligned} \quad (4.5.47)$$

Оптимальная на классе \mathcal{P}_7 функция потерь имеет вид

$$F_*[\varepsilon] = -\ln p_*(\xi) \Big|_{\xi=\varepsilon} = \begin{cases} -(2 \ln \cos \beta_1 \varepsilon + \ln \beta_2) & \text{при } |\varepsilon| \leq l, \\ \beta_4 |\varepsilon| - \ln \beta_3 & \text{при } |\varepsilon| > l, \end{cases} \quad (4.5.48)$$

т. е. является нелинейно-линейной.

Таким образом, мы определили оптимальные на классах функции потерь для Р-объектов с простой помехой, когда априорная информация о помехах задается наиболее общими классами плотностей распределения \mathcal{P}_k ($k = 1, \dots, 7$).

Любопытно отметить, что для рассмотренных классов удалось найти точное аналитическое выражение оптимальных на классе функций потерь. Наименее благоприятные плотности распределения $p_*(\xi)$ для различных классов распределений и соответствующие им оптимальные на классах функции потерь $F_*[\varepsilon]$, а также их производные $F'_*[\varepsilon]$ для Р-объектов с простой помехой приведены в табл. 4.1. Нетрудно усмотреть характерную особенность оптимальных на классе функций потерь $F_*[\varepsilon]$. При наличии в помехе больших выбросов, которые ухудшают оценивание Р-объектов, производные оптимальных на классе функций потерь $F'_*[\varepsilon]$, благодаря насыщению, уменьшают влияние этих выбросов.

§ 4.6. Оптимальные на классе функции потерь для АР-объектов

Для АР-объектов наименее благоприятная плотность распределения определяется решением вариационной задачи минимизации (4.4.10)

$$I(p_0) \sigma^2(p_0) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{p'_0(\xi)^2}{p_0(\xi)} d\xi \int_{-\infty}^{\infty} \xi^2 p_0(\xi) d\xi \rightarrow \min_{p_0 \in \mathcal{P}}, \quad (4.6.1)$$

т. е.

$$p_*(\xi) = \arg \min_{p_0 \in \mathcal{P}} I(p_0) \sigma^2(p_0). \quad (4.6.2)$$

Таблица 4.1

Наименее благоприятные на классах \mathcal{P} плотности распределения помех $p_*(\xi)$ и оптимальные функции потерь $F_*[\varepsilon]$ и их производные $F'_*[\varepsilon]$ для Р-объектов с простой помехой

Класс \mathcal{P}	$p_*(\xi) = \arg \min_{p_0 \in \mathcal{P}} I(p_0)$	$F_*[\varepsilon] = -\ln p_*(\xi) \Big _{\xi=\varepsilon}$	$F'_*[\varepsilon] = -\frac{p'_*(\xi)}{p_*(\xi)} \Big _{\xi=\varepsilon}$
$\mathcal{P}_1: p_0(0) \geq \frac{1}{2s_1} > 0$	$\frac{1}{2s_1} e^{-\frac{ \xi }{s_1}}$	$\frac{ \varepsilon }{s_1} + \ln 2s_1$	$\frac{1}{s_1} \operatorname{sign} \varepsilon$
$\mathcal{P}_2: \sigma^2(p_0) \leq \sigma_1^2$	$\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_1} e^{-\frac{\xi^2}{2\sigma_1^2}}$	$-\frac{\varepsilon^2}{2\sigma_1^2} + \ln \sqrt{2\pi} \sigma_1$	$\frac{\varepsilon}{\sigma_1^2}$

Таблица 4.1 (продолжение)

Класс \mathcal{P}	$p_*(\xi) = \arg \min_{p_0 \in \mathcal{P}} I(p_0)$	$F_*[\varepsilon] = -\ln p_*(\xi) \Big _{\xi=\varepsilon}$	$F'_*[\varepsilon] = -\frac{p'_*(\xi)}{p_*(\xi)} \Big _{\xi=\varepsilon}$
$\mathcal{P}_3: p_0(\xi) \geq (1-\alpha) N(0, \sigma_N^2)$	$\begin{cases} \frac{1-\alpha}{\sqrt{2\pi}\sigma_N} e^{-\frac{\xi^2}{2\sigma_N^2}}, & \xi \leq \Delta \\ \frac{1-\alpha}{\sqrt{2\pi}\sigma_N} e^{-\frac{\Delta}{\sigma_N^2} \left(\xi - \frac{\Delta}{2} \right)}, & \xi > \Delta \end{cases}$	$\begin{cases} \frac{\varepsilon^2}{2\sigma_N^2} + \ln \frac{\sqrt{2\pi}\sigma_N}{1-\alpha}, & \varepsilon \leq \Delta \\ \frac{\Delta}{\sigma_N^2} \left(\varepsilon - \frac{\Delta}{2} \right) + \ln \frac{\sqrt{2\pi}\sigma_N}{1-\alpha}, & \varepsilon > \Delta \end{cases}$	$\begin{cases} \frac{\varepsilon}{\sigma_N^2}, & \varepsilon \leq \Delta \\ \frac{\Delta}{\sigma_N^2} \operatorname{sign} \varepsilon, & \varepsilon > \Delta \end{cases}$
$\mathcal{P}_4: p_0(\xi) \geq (1-\alpha) L(0, s_L)$	$\frac{1-\alpha}{2s_L} e^{-\frac{ \xi (1-\alpha)}{s_L}}$	$\frac{ \varepsilon (1-\alpha)}{s_L} + \ln \frac{2s_L}{1-\alpha}$	$\frac{1-\alpha}{s_L} \operatorname{sign} \varepsilon$

Таблица 4.1 (окончание)

Класс \mathcal{P}	$p_*(\xi) = \arg \min_{p_0 \in \mathcal{P}} I(p_0)$	$F_*[\varepsilon] = -\ln p_*(\xi) \Big _{\xi=\varepsilon}$	$F'_*[\varepsilon] = -\frac{p'_*(\xi)}{p_*(\xi)} \Big _{\xi=\varepsilon}$
$\mathcal{P}_5: p_0(\xi) \geq (1-\alpha)R(0, l_R)$	$\begin{cases} \frac{1-\alpha}{2\Delta}, & \xi \leq \Delta \\ \frac{1-\alpha}{2\Delta} e^{-\frac{1-\alpha}{\alpha\Delta}(\xi - \Delta)}, & \xi > \Delta \end{cases}$	$\begin{cases} \ln \frac{2\Delta}{1-\alpha}, & \varepsilon \leq \Delta \\ \frac{1-\alpha}{\alpha\Delta} (\ln \varepsilon - \Delta) + \ln \frac{2\Delta}{1-\alpha}, & \varepsilon > \Delta \end{cases}$	$\begin{cases} 0, & \varepsilon \leq \Delta \\ \frac{1-\alpha}{\alpha\Delta} \operatorname{sign} \varepsilon, & \varepsilon > \Delta \end{cases}$
$\mathcal{P}_6: \int_{-l}^l p_0(\xi) d\xi = 1$	$\begin{cases} \rho_*(\xi) & \text{если } \xi \leq l \\ 0 & \text{если } \xi > l \end{cases}$	$\begin{cases} F_*[\varepsilon] & \text{если } \varepsilon \leq l \\ 0 & \text{если } \varepsilon > l \end{cases}$	$\begin{cases} F'_*[\varepsilon] & \text{если } \varepsilon \leq l \\ 0 & \text{если } \varepsilon > l \end{cases}$
		$\begin{cases} -\ln \cos^2 \frac{\pi \xi}{2l} + \ln l & \text{если } \xi \leq l \\ 0 & \text{если } \xi > l \end{cases}$	$\begin{cases} \frac{\pi}{l} \operatorname{tg} \frac{\pi \xi}{2l} & \text{если } \xi \leq l \\ 0 & \text{если } \xi > l \end{cases}$

Наименее благоприятная плотность, очевидно, должна обладать конечной дисперсией $\sigma^2(p_*) < \infty$. При этом из неравенства (4.5.12), справедливого для плотностей распределения с конечной дисперсией, следует, что

$$I(p_0) \sigma^2(p_0) \geq 1. \quad (4.6.3)$$

Но для любой нормальной плотности распределения $p_0(\xi) = p_N(\xi)$ имеет место равенство

$$I(p_N) \sigma^2(p_N) = 1. \quad (4.6.4)$$

Поэтому если классы \mathcal{P} содержат нормальное распределение с какой-либо дисперсией σ_N^2 , то наименее благоприятная плотность распределения будет нормальна

$$p_*(\xi) = p_N(\xi) = \frac{1}{\sqrt{2\pi} \sigma_N} e^{-\frac{\xi^2}{2\sigma_N^2}}, \quad (4.6.5)$$

а оптимальная на классе функция потерь будет квадратичной

$$F_*(\varepsilon) = -\ln p_*(\xi) \Big|_{\xi=\varepsilon} = \frac{\varepsilon^2}{2\sigma_N^2} + \ln \sqrt{2\pi} \sigma_N. \quad (4.6.6)$$

В отличие от Р-объектов с простой помехой, где этот результат соответствовал классу распределений с ограниченной дисперсией \mathcal{P}_2 , для АР-объектов он соответствует всем классам, которые содержат нормальное распределение. Таких классов немало. К ним относятся классы $\mathcal{P}_1 - \mathcal{P}_3, \mathcal{P}_7$, а если параметр $\alpha \in (0, 1)$ не мал, то и класс \mathcal{P}_5 . Создается впечатление, что в подавляющем большинстве случаев для АР-объектов оптимальная на классе функция потерь квадратичная.

Такой чисто формальный подход не учитывает специфики идентификации АР-объектов. Дело в том, что АР-объект представляет собой систему, в которой входные воздействия отсутствуют, а движение в ней вызывается лишь помехами. При отсутствии помех идентифицировать АР-объект в установившемся режиме невозможно. Таким образом, в отличие от Р-объектов, в которых увеличение интенсивности помехи ухудшает условия идентификации, в АР-объектах увеличение интенсивности помехи улучшает условия идентификации.

Эти особенности приводят к необходимости сужения классов плотностей распределения помех за счет ограничения дисперсии помех снизу: $\sigma^2(p_0) \geq \sigma_1^2$. Поэтому для АР-объектов мы будем рассматривать классы $\mathcal{P}_{\nu 1}$, учитывающие это ограничение. При достаточно малых σ_1^2 классы $\mathcal{P}_{\nu 1}$ близки к основным классам \mathcal{P}_ν и оптимальная на классе функция потерь квадратична. С увеличением нижней границы дисперсии σ_1^2 оптимальные на классе функции потерь могут измениться и станут отличаться от квадратичной.

К сожалению, определить аналитически все эти оптимальные на классе функции потерь невозможно, и поэтому приходится прибегать к численным методам решения вариационных задач минимизации (4.6.1) на классах $\mathcal{P}_{\nu,1}$ при различных значениях σ_1^2 . Для этой цели разработана специальная программа ПРОАР (программа авторегрессии), которая позволяет приближенно определить $p_*(\xi)$, $F_*[\varepsilon]$, $F'_*[\varepsilon]$. Этой программой решается задача нелинейного программирования вида (4.4.17) при $\eta = 0$, $\mu = 1$, к которой сводится исходная вариационная задача (см. § 4.4).

Сделаем некоторые замечания, относящиеся к применению этого метода. Полагая в уравнении (4.4.15) $\lambda_2 = \lambda_3 = \dots = \lambda_k = 0$, $f_1(\xi) = 1$ (ограничение, соответствующее множителю Лагранжа λ_1 , имеет вид $\int_{-\infty}^{\infty} p_0(\xi) d\xi = 1$) и делая замену переменных $y(\xi) = -\frac{p'_0(\xi)}{p_0(\xi)}$, получим

$$2y' - y^2 + \lambda_0 \xi^2 + \lambda_1 = 0. \quad (4.6.7)$$

При численном решении этого уравнения приходится бесконечный интервал $(-\infty, +\infty)$ изменения ξ заменять конечным интервалом $[-l, l]$. При этом l не должно быть слишком велико, так как плотность распределения $p_*(\xi)$ быстро убывает с ростом $|\xi|$. Из свойств дифференциального уравнения (4.6.7) следует, что при $|\xi| \rightarrow \infty$

$$\frac{y(\xi)}{\xi} = -\frac{p'_0(\xi)}{p_0(\xi) \xi} \rightarrow \alpha_1 = \text{const}. \quad (4.6.8)$$

Это значит, что при достаточно больших $|\xi|$, т. е. при $|\xi| \geq l$, плотность распределения $p_0(\xi)$ приблизительно равна нормальной плотности распределения

$$p_0(\xi) \approx \alpha_2 e^{-\frac{\alpha_1}{2}(|\xi| - \alpha_3)|\xi|}, \quad |\xi| \geq l. \quad (4.6.9)$$

Параметры $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ зависят от λ, σ_1^2 и возможных ограничений, определяющих класс \mathcal{P} принадлежности плотностей распределения $p_0(\xi)$. Параметр λ_1 и параметры, входящие в ограничения, должны быть такими, чтобы в точках $-l$ и l решение $y(\xi)$ удовлетворяло бы условию $y(\pm l) = \pm \alpha_1 l$. Это обеспечивает непрерывность $y(\xi)$. Решая теперь численным методом вариационную задачу (4.6.1) при ограничении

$$2 \int_0^l p_0(\xi) d\xi = \alpha_4, \quad (4.6.10)$$

где

$$\alpha_4 = 1 - \alpha_2 \int_l^{\infty} e^{-\frac{\alpha_1}{2}(\xi - \alpha_3)\xi} d\xi, \quad (4.6.11)$$

находим приближенное выражение для наименее благоприятной плотности распределения $p_*(\xi) \approx \tilde{p}_*(\xi)$.

Выбирая несколько различных значений множителя λ_1 , можно установить качественный вид $\tilde{p}_*(\xi)$ и $\tilde{y}(\xi) = -\frac{\tilde{p}'_*(\xi)}{\tilde{p}_*(\xi)}$, а значит, и качественный вид приближенно оптимальной на классе функции потерь $\tilde{F}_*[\varepsilon] = -\ln \tilde{p}_*(\xi)|_{\xi=\varepsilon}$ и ее производной $\tilde{F}'_*[\varepsilon] = -\frac{\tilde{p}'_*(\xi)}{\tilde{p}_*(\xi)}|_{\xi=\varepsilon}$.

Примеры наименее благоприятных плотностей распределения $p_*(\xi)$ и производных $F'_*[\varepsilon]$ оптимальных на классе функций потерь $F_*[\varepsilon]$ для различных классов распределений \mathcal{P} приведены в табл. 4.2 (для классов $\mathcal{P}_{\nu 1}$ при различных σ_1^2) и табл. 4.3 (для классов \mathcal{P}_ν). В тех случаях, когда аналитическое решение отсутствует, приводятся результаты численных расчетов ($\tilde{p}_*(\xi)$ и $\tilde{F}'_*[\varepsilon]$ соответственно). Мы не выписываем в табл. 4.2 и 4.3 подробных громоздких выражений для функций $\tilde{p}_*(\xi)$ $\tilde{F}'_*[\varepsilon]$ и их параметров, а ограничиваемся качественными графиками производной $\tilde{F}'_*[\varepsilon]$, дающими наглядное представление об оптимальной на классе функции потерь. В каждом конкретном случае нетрудно получить и количественно точные графики. Оставим эту возможность заинтересованному читателю.

Из табл. 4.2 видно, что, в соответствии со сделанным выше замечанием, с ростом нижней границы дисперсии σ_1^2 квадратичная функция потерь $F_*[\varepsilon]$ преобразуется в неквадратичную (линейная производная $F'_*[\varepsilon]$ становится нелинейной).

Сопоставляя данные табл. 4.3 и 4.2, нетрудно также заметить, что для АР-объектов наряду с линейной и релейной производными функций потерь мы для определенных классов \mathcal{P} встречаемся с нелинейно-релейными производными функций потерь. Подчеркнем, что при достаточно большой дисперсии помех $\sigma^2(p_0)$ для Р-объектов с простой помехой производная $F'_*[\varepsilon]$ характеризовалась насыщением при превышении ε определенного порога, тогда как для АР-объектов $F'_*[\varepsilon]$ при достаточно больших ε близка к линейной функции. Это является следствием уже ранее отмеченного свойства: увеличение интенсивности помех улучшает условия идентификации для АР-объектов и ухудшает условия идентификации для Р-объектов с простой помехой.

§ 4.7. Оптимальные на классе функции потерь для РАР-объектов и Р-объектов с преобразованной помехой

Для РАР-объектов и Р-объектов с преобразованной помехой наименее благоприятная плотность распределения определяется решением

Таблица 4.2

Наименее благоприятные на классах \mathcal{P}_{ν_1} плотности распределения помех $p_*(\xi) \in \operatorname{Arg} \min_{p_0 \in \mathcal{P}_{\nu_1}} I(p_0) \sigma^2(p_0)$ (или приближенное решение $\tilde{p}_*(\xi)$) и производные оптимальных функций потерь $F_*[\varepsilon] = -\ln p_*(\xi)|_{\xi=\varepsilon}$ (или, соответственно, $\tilde{F}_*[\varepsilon] = -\ln \tilde{p}_*(\xi)|_{\xi=\varepsilon}$) для АР-объектов

Класс \mathcal{P}_{ν_1}	$p_*(\xi)$ или $\tilde{p}_*(\xi)$	$F'_*[\varepsilon]$ или $\tilde{F}'_*[\varepsilon]$
$p_0(0) \geq \frac{1}{2s_1}$, $\sigma^2(p_0) \geq \sigma_1^2$ $(\frac{2}{\pi}s_1^2 \geq \sigma_1^2)$	$p_*(\xi) = N(0, \sigma_1^2)$	
$p_0(0) \geq \frac{1}{2s_1}$, $\sigma^2(p_0) \geq \sigma_1^2$ $(2s_1^2 > \sigma_1^2 \geq \frac{2}{\pi}s_1^2)$	$\tilde{p}_*(\xi) = (1 - \alpha)N(0, \frac{2}{\pi}s_1^2) + \alpha L(0, s_1)$	
$p_0(0) \geq \frac{1}{2s_1}$, $\sigma^2(p_0) \geq \sigma_1^2$ $(\sigma_1^2 = 2s_1^2)$	$p_*(\xi) = L(0, s_1)$	
$p_0(0) \geq \frac{1}{2s_1}$, $\sigma^2(p_0) \geq \sigma_1^2$ $(\sigma_1^2 > 2s_1^2)$	$\tilde{p}_*(\xi) = (1 - \alpha)L(0, s_1) + \alpha N(\mu, \sigma^2)$	

Таблица 4.3

Наименее благоприятные на классах $\mathcal{P}_{\nu 1}$ плотности распределения помех $p_*(\xi) = \arg \min_{p_0 \in \mathcal{P}_{\nu}} I(p_0) \sigma^2(p_0)$ (или приближенное решение $\tilde{p}_*(\xi)$) и производные оптимальных функций потерь $F_*(\varepsilon) = -\ln p_*(\xi)|_{\xi=\varepsilon}$ (или, соответственно, $\tilde{F}_*(\varepsilon) = -\ln \tilde{p}_*(\xi)|_{\xi=\varepsilon}$) для АР-объектов

Класс \mathcal{P}_{ν}	$p_*(\xi)$ или $\tilde{p}_*(\xi)$	$F'_*(\varepsilon)$ или $\tilde{F}'_*(\varepsilon)$
$\mathcal{P}_1 : p_0(0) \geq \frac{1}{2s_1} > 0$	$p_*(\xi) = N(0, \sigma_*^2),$ $\sigma_*^2 \leq \frac{2}{\pi} s_1^2$	
$\mathcal{P}_2 : \sigma^2(p_0) \leq \sigma_1^2$	$p_*(\xi) = N(0, \sigma_*^2),$ $\sigma_*^2 \leq \sigma_1^2$	
$\mathcal{P}_3 : p_0(\xi) = (1-\alpha)N(0, \sigma_N^2) + \alpha g(\xi)$	$p_*(\xi) = N(0, \sigma_N^2)$	
$\mathcal{P}_4 : p_0(\xi) = (1-\alpha)L(0, s_L) + \alpha g(\xi)$	$\tilde{p}_*(\xi) = \begin{cases} N(0, \frac{2}{\pi} s_L^2), & \xi \leq \Delta, \\ (1-\alpha)L(0, s_L) + \alpha N(0, \sigma^2), & \xi > \Delta \end{cases}$	

общей вариационной задачи минимизации (4.4.2)

$$I(p_0)[\eta + \mu \sigma^2(p_0)] = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{p_0'^2(\xi)}{p_0(\xi)} d\xi \left[\eta + \mu \int_{-\infty}^{\infty} \xi^2 p_0(\xi) d\xi \right] \rightarrow \min_{p_0 \in \mathcal{P}}, \quad (4.7.1)$$

т. е.

$$p_*(\xi) = \arg \min_{p_0 \in \mathcal{P}} I(p_0)[\eta + \mu \sigma^2(p_0)]. \quad (4.7.2)$$

Здесь η и μ — постоянные (4.4.3), различные для АР-объекта (4.4.8) и Р-объектов с преобразованной помехой (4.4.7). Аналитическое решение этой вариационной задачи минимизации существует лишь для

класса \mathcal{P}_2 (4.1.14), и это решение представляет собой нормальную плотность распределения. Действительно, $I(p_0)$ и $I(p_0)\sigma^2(p_0)$ достигают одновременно минимума при

$$p_0(\xi) = p_*(\xi) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_1} e^{-\frac{\xi^2}{2\sigma_1^2}}. \quad (4.7.3)$$

Следовательно, $p_*(\xi)$ является наименее благоприятной плотностью распределения при любых неотрицательных η и μ .

Для более узких классов $\mathcal{P}_{\nu 1}$ можно искать наименее благоприятную плотность распределения $p_*(\xi)$ таким путем. Решаем задачу минимизации (4.7.1) при $\mathcal{P} = \mathcal{P}_\nu$ (см. § 4.4), проверяя для найденного решения $p(\xi)$, удовлетворяет ли оно условию $\sigma^2(p) \geq \sigma_1^2$. Если да, то $p(\xi) = p_*(\xi)$ является искомым решением, т. е. наименее благоприятной плотностью распределения, и определяет оптимальную на классе функцию потерь для РАР-объектов и Р-объектов с преобразованной помехой. Если нет, то решение можно искать при помощи минимизации фишеровской информации на классе $\mathcal{P}_\nu \cap \{p : \sigma^2(p) = \sigma_1^2\}$. Воспользуемся иной, более простой возможностью, которая, однако, приводит к приближенному решению. Эта возможность связана с использованием неравенства Коши — Буняковского, которое широко применялось в § 4.4, 4.5 при определении наименее благоприятных распределений для Р-объектов с простой помехой. Но здесь это неравенство используется несколько иначе.

Запишем минимизируемый функционал (4.7.1) в виде

$$\mathcal{J}(p_0) = \int_{-\infty}^{\infty} p_0(\xi) \left(\frac{p'_0(\xi)}{p_0(\xi)} \right)^2 d\xi - \int_{-\infty}^{\infty} p_0(\xi) (\eta + \mu \xi^2) d\xi. \quad (4.7.4)$$

Полагая в неравенстве Коши — Буняковского (4.4.18)

$$\varphi(\xi) = \frac{p'_0(\xi)}{p_0(\xi)}, \quad \psi(\xi) = \sqrt{\eta + \mu \xi^2} \operatorname{sign} \xi, \quad (4.7.5)$$

получим

$$\mathcal{J}(p_0) \geq \left(\int_{-\infty}^{\infty} p'_0(\xi) \sqrt{\eta + \mu \xi^2} \operatorname{sign} \xi \right)^2. \quad (4.7.6)$$

Оценим правую часть этого неравенства, предполагая, что $p_0(\xi)$ удовлетворяет условию $p_0(0) = \beta$. После интегрирования по частям, определяя максимум и минимум правой части неравенства (4.7.6), будем иметь

$$\mu + 4\eta\beta^2 \leq \left(\int_{-\infty}^{\infty} p'_0(\xi) \sqrt{\eta + \mu \xi^2} \operatorname{sign} \xi \right)^2 \leq (\sqrt{\mu} + 2\beta\sqrt{\eta})^2. \quad (4.7.7)$$

Но равенство в (4.7.6) достигается при

$$\frac{p'_0(\xi)}{p_0(\xi)} = -\lambda \sqrt{\eta + \mu \xi^2} \operatorname{sign} \xi, \quad (4.7.8)$$

откуда находим

$$\begin{aligned} \tilde{p}_*(\xi) &= p_0(\xi) = \\ &= C \exp \left\{ -\frac{1}{2} \lambda \sqrt{\mu} [|\xi| \sqrt{\xi^2 + \eta/\mu} + \frac{\eta}{\mu} \ln(|\xi| \sqrt{\xi^2 + \eta/\mu})] \right\}, \quad (4.7.9) \end{aligned}$$

где C определяется из условия нормировки

$$\int_{-\infty}^{\infty} p_0(\xi) d\xi = 1,$$

а λ — из условия $p_0(0) = \beta$. Соответствующая приближенно оптимальная на классе функция потерь будет иметь вид

$$\begin{aligned} \tilde{F}_*[\varepsilon] &= -\ln \tilde{p}_*(\xi) \Big|_{\xi=\varepsilon} = \\ &= \frac{1}{2} \lambda \sqrt{\mu} \left[|\varepsilon| \sqrt{\varepsilon^2 + \eta/\mu} + \frac{\eta}{\mu} \ln(|\varepsilon| + \sqrt{\varepsilon^2 + \eta/\mu}) \right] - \ln C. \quad (4.7.10) \end{aligned}$$

Относительная погрешность $\delta(\beta)$ найденной таким образом плотности распределения $\tilde{p}_*(\xi)$ удовлетворяет неравенствам

$$\frac{4 \sqrt{\mu \eta} \beta}{(\sqrt{\mu} + 2 \sqrt{\eta} \beta)^2} \leq \delta(\beta) \leq \frac{4 \sqrt{\mu \eta} \beta}{\mu + 4 \eta \beta^2}, \quad (4.7.11)$$

откуда

$$\delta(\beta) = \frac{\mathcal{J}(\tilde{p}_*) - \mathcal{J}(p_*)}{\mathcal{J}(\tilde{p}_*)} \rightarrow 0 \quad \text{при } \beta \rightarrow 0 \quad \text{и } \beta \rightarrow \infty,$$

т. е. при «больших» и «малых» β плотность $\tilde{p}_*(\xi)$ близка к истинной наименее благоприятной плотности распределения $p_*(\xi)$ в слабом смысле, или по функционалу (4.7.4). Это позволяет считать найденную плотность (4.7.10) приближенным решением задачи (4.7.1) для класса плотностей распределения \mathcal{P} , определяемого условием $p_0(0) = \beta$.

Полученное решение (4.7.10) может быть использовано в качестве приближенного в задаче (4.7.1) с различными классами распределений \mathcal{P} . Для оценки точности такого приближения следует определять границы правой части неравенства (4.7.6) для рассматриваемого класса.

Заметим, что при $\mu = 0$ или $\eta = 0$ из (4.7.11) следует $\delta(\beta) = 0$, т. е. решение уравнения (4.7.8) является точным решением задачи (4.7.1) соответственно для Р-объекта с простой помехой и АР-объекта.

Таблица 4.4

Наименее благоприятные на классах \mathcal{P}_ν плотности распределения помех $p_*(\xi) = \arg \min_{p_0 \in \mathcal{P}_\nu} I(p_0)(\eta + \mu \sigma^2(p_0))$ (или приближенное решение $\tilde{p}_*(\xi)$) и производные оптимальных функций потерь $F'_*(\varepsilon) = -\ln p_*(\xi)|_{\xi=\varepsilon}$ (или, соответственно, $\tilde{F}'_*(\varepsilon) = -\ln \tilde{p}_*(\xi)|_{\xi=\varepsilon}$) для РАР-объектов и Р-объектов с преобразованной помехой

Класс \mathcal{P}_ν	$p_*(\xi)$ или $\tilde{p}_*(\xi)$	$F'_*(\varepsilon)$ или $\tilde{F}'_*(\varepsilon)$
$\mathcal{P}_2 : \sigma^2(p_0) \leq \sigma_1^2$	$p_*(\xi) = N(0, \sigma_1^2)$	
$\mathcal{P}_1 : p_0(0) \geq \frac{1}{2s_1}$, (s_1 малое)	$\tilde{p}_* = L(0, s_1)$	
$\mathcal{P}_1 : p_0(0) \geq \frac{1}{2s_1}$, (s_1 велико)	$\tilde{p}_*(\xi) = C \exp \left\{ -\frac{1}{2} \lambda \sqrt{\mu} \times \right. \\ \times \left[\xi \sqrt{\xi^2 + \eta/\mu} + \right. \\ \left. \left. + (\eta/\mu) \ln \left(\xi + \sqrt{\xi^2 + \eta/\mu} \right) \right] \right\}$	

Результаты приближенного, а в тех случаях, когда это возможно, точного аналитического решения для $p_*(\xi)$, $F'_*(\varepsilon)$ приведены в табл. 4.4. Обозначения $\tilde{p}_*(\xi)$, $\tilde{F}'_*(\varepsilon)$ приняты для приближенных выражений, когда аналитическое решение отсутствует.

§ 4.8. О грубости оценок оптимального решения

Для того чтобы показать важность понятия оптимальной на классе функции потерь, рассмотрим поведение оценок $\hat{c}(n)$ оптимального решения c^* (см. § 2.4) в тех случаях, когда «оптимальная» функция потерь $F_0[\varepsilon]$ принимается равной $F_n[\varepsilon] = -\ln p_n(\xi)|_{\xi=\varepsilon}$ и определяется по предполагаемой плотности распределения помехи $p_n(\xi)$, а истинная плотность распределения помехи $p_0(\xi)$ несколько отличается от нее. Представим истинную плотность распределения в виде «засоренной» предполагаемой плотности распределения

$$p_0(\xi) = (1 - \alpha) p_n(\xi) + \alpha g(\xi), \quad (4.8.1)$$

где $g(\xi)$ — произвольная симметричная плотность распределения, дисперсия которой $\sigma^2(g)$ много больше дисперсии предполагаемой плотности распределения $\sigma^2(p_n)$. Параметр $\alpha \in (0, 1)$ характеризует степень засорения.

При малом засорении ($\alpha \ll 1$) истинная плотность распределения $p_0(\xi)$ будет мало отличаться от предполагаемой даже тогда, когда $\sigma^2(g)$ велико. Пусть $\sigma^2(g)$ настолько велико, что при $\alpha \ll 1$

$$\alpha \sigma^2(g) \gg \sigma^2(p_n). \quad (4.8.2)$$

Найдем АМКО для функции потерь $F_n[\varepsilon] = -\ln p_n(\xi)|_{\xi=\varepsilon}$, которую мы считаем оптимальной, но которая в действительности таковой не является. АМКО находится из (4.2.6) при $p_0(\xi) = p_n(\xi)$, и она равна

$$V(p_n, p_0) = \frac{I_2(p_n, p_0)}{I_1^2(p_n, p_0)} A^{-1}(c^*, \sigma^2(p_0)). \quad (4.8.3)$$

Здесь $\sigma^2(p_0)$ — дисперсия помех, равная

$$\sigma^2(p_0) = \int_{-\infty}^{\infty} \xi^2 p_0(\xi) d\xi = (1 - \alpha) \sigma^2(p_n) + \alpha \sigma^2(g). \quad (4.8.4)$$

Учитывая условие (4.8.2), заключаем, что

$$\sigma^2(p_0) \approx \alpha \sigma^2(g) \gg \sigma^2(p_n). \quad (4.8.5)$$

Если засорение помехи отсутствует, что соответствует $\alpha = 0$ в (4.8.1), то $p_0(\xi) = p_n(\xi)$. В этом, оптимальном, случае АМКО становится равной

$$V(p_n, p_n) = V(p_n) = \frac{1}{I(p_n)} A^{-1}(c^*, \sigma^2(p_n)). \quad (4.8.6)$$

Выясним влияние на АМКО отклонения предполагаемой плотности распределения $p_n(\xi)$ от истинной $p_0(\xi)$. Допустим вначале, что предполагаемая плотность распределения нормальна, т. е. $p_n(\xi) = N(0, \sigma^2(p_n))$. Оптимальная функция потерь $F_n[\varepsilon]$ в этом случае (см. табл. 2.2) квадратичная. Как следует из (4.2.5) и из табл. 2.1, фишеровская и квазифишеровские информации 1-го и 2-го родов соответственно равны

$$I(p_n) = I_1(p_n, p_0) = \frac{1}{\sigma^2(p_n)}, \quad I_2(p_n, p_0) = \frac{\sigma^2(p_0)}{\sigma^4(p_n)}.$$

Подставляя эти значения в выражения для АМКО (4.8.3) и (4.8.6), получим

$$V(p_n, p_0) = \sigma^2(p_0) A^{-1}(c^*, \sigma^2(p_0)), \quad (4.8.7)$$

и

$$V(p_n) = \sigma^2(p_n) A^{-1}(c^*, \sigma^2(p_n)). \quad (4.8.8)$$

АМКО $V(p_n, p_0)$ и $V(p_n)$ отличаются лишь дисперсиями помех $\sigma^2(p_0)$ и $\sigma^2(p_n)$, причем, как следует из (4.8.5), $\sigma^2(p_0) \gg \sigma^2(p_n)$. Сопоставим эти АМКО для типовых объектов.

Для Р-объектов с простой помехой нормированная информационная матрица $A(c^*, \sigma^2(p_0)) = A_1$ (1.6.34) представляет собой матрицу, не зависящую ни от c^* , ни от $\sigma^2(p_0)$. Поэтому из (4.8.7) и (4.8.8) получим

$$V(p_n, p_0) = \sigma^2(p_0) A_1^{-1} \quad (4.8.9)$$

и

$$V(p_n) = \sigma^2(p_n) A_1^{-1}, \quad (4.8.10)$$

или

$$V(p_n, p_0) = \frac{\sigma^2(p_0)}{\sigma^2(p_n)} V(p_n). \quad (4.8.11)$$

Но $\sigma^2(p_0)/\sigma^2(p_n) \gg 1$. Поэтому действительная АМКО $V(p_n, p_0)$ значительно больше предполагаемой АМКО $V(p_n)$, т. е.

$$V(p_n, p_0) \gg V(p_n).$$

Этот факт означает, что малое отклонение предполагаемой плотности распределения $p_n(\xi)$ от истинной $p_0(\xi)$ может вызывать сильное увеличение АМКО $V(p_n, p_0)$, т. е. резкое ухудшение точности оценки $\hat{c}(n)$ оптимального решения $c^* = b^*$.

Таким образом, при квадратичной функции потерь для Р-объектов с простой помехой «засорение» помехи приводит к существенному

изменению оценок $\hat{c}(n)$ оптимального решения. В этой ситуации оценки $\hat{c}(n)$ с ростом n очень медленно стремятся к оптимальному решению c^* .

Предположим теперь, что в (4.8.1) засоренная помеха имеет плотность распределения типа Коши $g(\xi) = C(0, s)$ (см. табл. 4.1), т. е. что $\sigma^2(g) = \infty$, а значит, и $\sigma^2(p_0) = \infty$. В этом случае из (4.8.9) получаем $V(p_n, p_0) = \infty A_1^{-1}$, поэтому $\hat{c}(n)$ с ростом n не будет вовсе стремиться к оптимальному решению $c^* = b^*$, т. е. оценка $\hat{c}(n)$ несостоительна, как говорят статистики. Но квадратичная функция потерь, как было указано в главе 3, соответствует МНК. Таким образом, в описанных выше условиях МНК приводит либо к очень медленной сходимости оценок $\hat{c}(n)$, либо к их расходимости. Вот плата за слишком доверчивое отношение к точности полной априорной информации относительно помех. Эти выводы справедливы и в отношении оценок $c(n)$, порождаемых соответствующими рекуррентными алгоритмами.

Такая ситуация, когда малые отклонения предполагаемой плотности распределения $p_n(\xi)$ от действительной $p_0(\xi)$ приводят к резким отклонениям результатов, характеризует негрубость оценок. Понятие грубости, введенное в теорию динамических систем А. А. Андronовым, позволило выделить широкий класс систем, свойства которых качественно не изменяются при малом изменении параметров систем. Это понятие играет важную роль и в задачах идентификации, но почему-то оно до последнего времени не использовалось в полной мере.

Таким образом, мы приходим к выводу, что МНК при идентификации Р-объектов с простой помехой негруб. Негрубые методы, как правило, не могут быть практически использованы.

Совершенно иная ситуация возникает при идентификации АР-объектов. Для АР-объектов как с простой, так и с преобразованной помехой нормированные информационные матрицы, как видно из (1.6.39), равны

$$A(c^*, \sigma^2(p_0)) = \sigma^2(p_0) A_4(c^*) \quad (4.8.12)$$

и

$$A(c^*, \sigma^2(p_n)) = \sigma^2(p_n) A_4(c^*), \quad (4.8.13)$$

где $c^* = (a^*, d^*)$.

Поскольку дисперсии $\sigma^2(p_0)$ и $\sigma^2(p_n)$ в нормированных информационных матрицах являются множителями, то из (4.8.7), (4.8.8) получаем

$$V(p_n, p_0) = A_4^{-1}(c^*) \quad (4.8.14)$$

и

$$V(p_n) = A_4^{-1}(c^*). \quad (4.8.15)$$

Отсюда видно, что при квадратичной функции потерь для АР-объектов АМКО $V(p_n, p_0)$ и $V(p_n)$ не зависят от дисперсий и для всех $p_0(\xi)$ имеет место равенство

$$V(p_n, p_0) = V(p_n). \quad (4.8.16)$$

АМКО в этом случае инвариантна относительно любой плотности распределения помех $p_0(\xi)$ с конечной дисперсией. В этом случае оценки МНК $\hat{c}(n)$ оптимального решения $c^* = (a^*, d^*)$ грубые.

Для Р-объектов с преобразованной помехой и РАР-объектов нормированные информационные матрицы равны (см. (1.6.36), (1.6.41))

$$A(c^*, \sigma^2(p)) = A_I(c^*) + \sigma^2(p) A_{II}(c^*), \quad (4.8.17)$$

где для Р-объектов с преобразованной помехой $c^* = (b^*, d^*)$ и $A_I(c^*) = A_2(d^*)$, $A_{II}(c^*) = A_3(d^*)$ — неотрицательно определенные блочные 2×2 -матрицы (1.6.37) и (1.6.38), а для РАР-объектов $c^* = (a^*, b^*, d^*)$ и $A_I(c^*) = A_5(c^*)$, $A_{II}(c^*) = A_6(c^*)$ — неотрицательно определенные блочные 3×3 -матрицы (1.6.42), (1.6.43). Полагая в (4.8.17) $p(\xi) = p_0(\xi)$ и затем $p(\xi) = p_n(\xi)$ и подставляя эти нормированные информационные матрицы в (4.8.7), (4.8.8), получим для Р-объектов с преобразованной помехой и для РАР-объектов

$$V(p_n, p_0) = \left[\frac{1}{\sigma^2(p_0)} A_I(c^*) + A_{II}(c^*) \right]^{-1} \quad (4.8.18)$$

и

$$V(p_n) = \left[\frac{1}{\sigma^2(p_n)} A_I(c^*) + A_{II}(c^*) \right]^{-1}. \quad (4.8.19)$$

Для выяснения свойств РАР-объектов и, в частности, Р-объектов с преобразованной помехой необходимо иметь какой-либо способ сравнения этих матриц. Можно предположить, что этот общий случай занимает промежуточное положение между рассмотренными выше случаями Р-объектов с простой помехой и АР-объектов. Будем говорить, что АМКО $V(p_n, p_0)$ частично многое больше, чем АМКО $V(p_n)$

$$V(p_n, p_0) \gg V(p_n),$$

если для некоторого числа $\rho \gg 1$ имеет место матричное неравенство

$$V(p_n, p_0) \geq \begin{bmatrix} E & 0 & 0 \\ 0 & \rho E & 0 \\ 0 & 0 & E \end{bmatrix} V(p_n), \quad (4.8.20)$$

или, что эквивалентно,

$$V^{-1}(p_n, p_0) \leq \begin{bmatrix} E & 0 & 0 \\ 0 & \rho^{-1} E & 0 \\ 0 & 0 & E \end{bmatrix} V^{-1}(p_n), \quad (4.8.21)$$

где E — единичные матрицы соответствующих размерностей. Учитывая выражения АМКО (4.8.18), (4.8.19) и структуру блочных матриц $A_I(c^*)$, $A_{II}(c^*)$ (1.6.42), (1.6.43) или (1.6.37), (1.6.38), нетрудно проверить, что при

$$\rho = \frac{\sigma^2(p_0)}{\sigma^2(p_n)} \gg 1$$

неравенство (4.8.21) выполняется. Отсюда следует, что МНК в этом случае не груб по отношению к оцениванию параметров b^* и груб по отношению к оцениванию параметров a^* и d^* .

При произвольном выборе функции потерь $F[\varepsilon]$ можно получить большие проигрыши в точности оценки $\hat{c}(n)$ оптимального решения c^* . Это иллюстрировалось на примерах в § 3.4, 3.5.

§ 4.9. Оптимальность на классе и робастность

Причиной негрубости, нестабильности, ухудшения точности оценок, а значит, и методов их получения является неадекватность используемой функции потерь реальной ситуации. Вера в то, что нам точно задана полная априорная информация о помехе, т. е. известна плотность распределения помехи $p_n(\xi) = p_0(\xi)$, часто может не оправдываться. Малые же отклонения $p_0(\xi)$ от предполагаемой плотности $p_n(\xi)$ могут привести к ухудшению точности оценок. Поэтому более реалистический подход состоит в использовании известной нам неполной априорной информации относительно помехи, которая задается классом распределений \mathcal{P} . В этом случае согласно принципу оптимальности на классе

$$V(p_*, p_0) \leq V(p_*) \quad \text{или} \quad \text{tr } V(p_*, p_0) \leq \text{tr } V(p_*), \quad (4.9.1)$$

где $p_*(\xi)$ — наименее благоприятная плотность распределения, определяющая оптимальную на классе функцию потерь $F_*(\varepsilon) = -\ln p_*(\xi)|_{\xi=\varepsilon}$.

Из (4.9.1) видно, что АМКО $V(p_*, p_0)$ или ее след всегда ограничены и, следовательно, оценки $\hat{c}(n)$ при этой функции потерь всегда грубы.

Таким образом, в отличие от предполагаемых нами «оптимальных» функций потерь $F_n[\varepsilon]$, оптимальные на классе функции потерь $F_*[\varepsilon]$ устраниют нестабильность, негрубость и улучшают точность оценок $\hat{c}(n)$. Такие оценки и порождающие их методы можно было бы назвать, как это иногда делается, «устойчивыми», «стабильными», «грубыми», «свободными от распределения». Но, к сожалению, эти термины часто ассоциируются с совершенно конкретными понятиями, к которым мы давно привыкли и которые хотя и имеют определенное отношение к интересующим нас свойствам алгоритмов идентификации, но слишком перегружены иными представлениями. Поэтому мы

воспользуемся новым для русского языка термином и будем называть такие грубые, стабильные алгоритмы идентификации — *робастными*. Термин «robust», означающий в переводе «крепкий», «дюжий», «сильный», широко используется в зарубежной литературе в работах по статистике. Большим удобством термина «робастный» является его краткость.

Робастность алгоритмов следует ассоциировать с идентификацией Р- и РАР-объектов, т. е. с оценкой параметров b^* , когда может возникать негрубость. При идентификации же АР-объектов и параметров a^* и d^* в РАР-объектах или, наконец, параметров d^* в Р-объектах с преобразованной помехой негрубость не возникает. В этом случае оптимальность на классе позволяет гарантировать точность оценивания этих параметров.

Робастные оценки, методы, алгоритмы являются частным случаем оценок, методов и алгоритмов, оптимальных на классе.

§ 4.10. Заключение

Реально различные уровни априорной информации о помехах можно представить в виде классов распределений, к которым относится неизвестное нам распределение помех.

Введенное понятие оптимальной на классе функции потерь, которая определяется по наименее благоприятному для данного класса распределению, позволило сформулировать принцип оптимальности на классе. Согласно этому принципу след АМКО $\text{tr } V(F, p_*)$ ограничен максимально возможным для данного класса следом АМКО

$$\text{tr } V(F_*, p_*) = \text{tr } V(p_*).$$

В частных случаях справедлив матричный принцип оптимальности, при этом АМКО $V(F, p_*)$ не превосходит АМКО $V(F_*, p_*)$, т. е.

$$V(F, p_*) \leq V(F_*, p_*).$$

Нахождение оптимальной на классе функции потерь сводится к решению вариационных задач минимизации. Для Р-объектов с простой помехой возможно аналитическое решение этих задач. Для Р-объектов с преобразованной помехой, АР-объектов, РАР-объектов аналитическое решение возможно лишь в некоторых случаях, и поэтому приходится использовать здесь численные методы. Для этой цели разработаны специальные программы.

Оптимальность на классе позволяет более реалистически подходить к учету априорной информации о помехах. Она устраняет негрубость, которая встречается при использовании оптимальных функций потерь в неадекватных условиях, и придает оценкам свойство грубо-сти, робастности, либо улучшает их точность.

При получении наилучших решений возникает еще одна трудность. Очень часто, когда такое решение найдено, приходит Некто с еще лучшим решением, полученным благодаря тому, что он учел еще одну, не замеченную раньше, переменную.

А. Кимбалл

ГЛАВА 5

Абсолютно оптимальные на классе алгоритмы идентификации

§ 5.1. Формирование абсолютно оптимальных на классе алгоритмов

Подобно тому как абсолютно оптимальные алгоритмы получались из оптимальных алгоритмов заменой в них фиксированной функции потерь $F[\varepsilon]$ на оптимальную функцию потерь $F_0[\varepsilon] = -\ln p_0(\xi)|_{\xi=\varepsilon}$, так и абсолютно оптимальные на классе алгоритмы получаются из оптимальных алгоритмов заменой в них фиксированной функции потерь $F[\varepsilon]$ на оптимальную на классе функцию потерь $F_*[\varepsilon] = -\ln p_*(\xi)|_{\xi=\varepsilon}$.

Рассмотрим оптимальный алгоритм (3.1.11), (3.1.12)

$$c(n) = c(n-1) + \Gamma_0(n) F'[\varepsilon(z(n), c(n-1))] \nabla_c f(x(n), c(n-1)), \quad (5.1.1)$$

где

$$\Gamma_0(n) = \frac{1}{n M\{F''[\xi]\}} A^{-1}(c^*, \sigma^2(p_0)). \quad (5.1.2)$$

Вспоминая, что (см. (2.4.5), (2.4.6))

$$M\{F''[\xi]\} = \int_{-\infty}^{\infty} p_0(\xi) F''[\xi] d\xi = \int_{-\infty}^{\infty} p_0'(\xi) F'[\xi] d\xi, \quad (5.1.3)$$

получим после замены $F'[\xi]$ на $F'_*[\xi] = -\frac{p'_*(\xi)}{p_*(\xi)}$

$$M\{F''_*[\xi]\} = \int_{-\infty}^{\infty} p'_0(\xi) \frac{p'_*(\xi)}{p_*(\xi)} d\xi = I_1(p_*, p_0), \quad (5.1.4)$$

где $I_1(p_*, p_0)$ — квазифишеровская информация 1-го рода (4.2.5). Следовательно, абсолютно оптимальный на классе алгоритм представляется в виде

$$c(n) = c(n-1) + \Gamma_*(n) F'_*[\varepsilon(z(n), c(n-1))] \nabla_c f(z(n), c(n-1)), \quad (5.1.5)$$

где

$$\Gamma_*(n) = \frac{1}{n I_1(p_*, p_0)} A^{-1}(c^*, \sigma^2(p_0)). \quad (5.1.6)$$

АМКО абсолютно оптимального на классе алгоритма (5.1.6), как следует из (4.2.6) при $p(\xi) = p_*(\xi)$, равна

$$V(p_*, p_0) = \frac{I_2(p_*, p_0)}{I_1^2(p_*, p_0)} A^{-1}(c^*, \sigma^2(p_0)), \quad (5.1.7)$$

а согласно скалярному принципу оптимальности на классе

$$\text{tr } V^{-1}(p_*, p_0) \geq \text{tr } V^{-1}(p_*) \geq \text{tr } V^{-1}(p, p_*) \quad \forall p(\xi), p_0(\xi) \in \mathcal{P}. \quad (5.1.8)$$

Это значит, что оценки, порождаемые абсолютно оптимальным на классе алгоритмом, оптимальны в минимаксном смысле на соответствующих классах распределений.

§ 5.2. Реализуемые абсолютно оптимальные на классе алгоритмы

Абсолютно оптимальный на классе алгоритм (5.1.5), (5.1.6) не реализуем, поскольку матрица усиления $\Gamma_*(n)$ (5.1.6) зависит, вообще говоря, как от неизвестного оптимального решения c^* , так и от неизвестной плотности распределения помехи $p_0(\xi)$. Для получения реализуемых абсолютно оптимальных на классе алгоритмов воспользуемся приемами, близкими к тем, которые применялись при получении реализуемых оптимальных алгоритмов в § 3.2. Прежде всего заменим в матрице усиления $\Gamma_*(n)$ (5.1.6) квазифишеровскую информацию 1-го рода $I_1(p_*, p_0)$ на фишеровскую информацию при наименее благоприятной плотности распределения $I(p_*)$. Тогда получим

$$\tilde{\Gamma}_*(n) = \frac{1}{n I(p_*)} A^{-1}(c^*, \sigma^2(p_0)), \quad (5.2.1)$$

и вместо абсолютно оптимального на классе алгоритма (5.1.5), (5.1.6) будем иметь

$$c(n) = c(n-1) + \tilde{\Gamma}_*(n) F'_*[\varepsilon(z(n), c(n-1))] \nabla_c f(\mathbf{z}(n), c(n-1)), \quad (5.2.2)$$

где, как видно из (5.2.1),

$$\tilde{\Gamma}_*(n) = \frac{1}{n} B_1, \quad (5.2.3)$$

$$B_1 = \frac{1}{I(p_*)} A^{-1}(c^*, \sigma^2(p_0)). \quad (5.2.4)$$

Найдем АМКО для этого алгоритма. Для этой цели воспользуемся уравнением АМКО (1.6.32)

$$GV + VG^\top = -B_1 M\{F'^2[\xi]\} A(c^*, \sigma^2(p_0)) B_1^\top, \quad (5.2.5)$$

$$G = \frac{1}{2} E - B_1 \nabla^2 J(c^*).$$

При оптимальной на классе функции потерь $F[\varepsilon] = F_*[\varepsilon]$, как видно из (1.6.31) и (4.2.2), (4.2.5), (5.1.4), имеем

$$\begin{aligned} \nabla^2 J(c^*) &= I_1(p_*, p_0) A(c^*, \sigma^2(p_0)), \\ M\{F'^2[\xi]\} &= I_2(p_*, p_0). \end{aligned} \quad (5.2.6)$$

Учитывая (5.2.4), получим

$$G = \left[\frac{1}{2} - \frac{I_1(p_*, p_0)}{I(p_*)} \right] E. \quad (5.2.7)$$

Обозначая через $\tilde{V} = \tilde{V}(p_*, p_0)$ АМКО для рассматриваемого алгоритма, запишем уравнение АМКО (5.2.5) в виде

$$\left[1 - \frac{2I_1(p_*, p_0)}{I(p_*)} \right] \tilde{V}(p_*, p_0) = -\frac{I_2(p_*, p_0)}{I^2(p_*)} A^{-1}(c^*, \sigma^2(p_0)). \quad (5.2.8)$$

Отсюда находим АМКО для алгоритма (5.2.2) — (5.2.4)

$$\tilde{V}(p_*, p_0) = \frac{I_2(p_*, p_0)}{2I(p_*)I_1(p_*, p_0) - I^2(p_*)} A^{-1}(c^*, \sigma^2(p_0)). \quad (5.2.9)$$

Обратная АМКО равна

$$\tilde{V}^{-1}(p_*, p_0) = \frac{2I(p_*)I_1(p_*, p_0) - I^2(p_*)}{I_2(p_*, p_0)} A(c^*, \sigma^2(p_0)). \quad (5.2.10)$$

Покажем, что обратная АМКО $\tilde{V}^{-1}(p_*, p_0)$ удовлетворяет неравенствам

$$V^{-1}(p_*, p_0) \geq \tilde{V}^{-1}(p_*, p_0) \geq V^{-1}(p_*). \quad (5.2.11)$$

Левая часть этого неравенства,

$$V^{-1}(p_*, p_0) \geq \tilde{V}^{-1}(p_*, p_0), \quad (5.2.12)$$

означает, что переход от нереализуемого абсолютно оптимального на классе алгоритма (5.1.5), (5.1.6) к алгоритму (5.2.2) — (5.2.4) не увеличивает обратную АМКО, т. е. не уменьшает АМКО. Правая часть неравенства (5.2.11)

$$\tilde{V}^{-1}(p_*, p_0) \geq V^{-1}(p_*) \quad (5.2.13)$$

свидетельствует о том, что и для алгоритма (5.2.2) — (5.2.4) остается справедливым принцип оптимальности на классе (4.3.7), т. е. алгоритм (5.2.2) — (5.2.4) также является абсолютно оптимальным на классе алгоритмом.

Для доказательства неравенства (5.2.12) достаточно заметить, что поскольку всегда

$$[I_1(p_*, p_0) - I(p_*)]^2 \geq 0, \quad (5.2.14)$$

то

$$I_1^2(p_*, p_0) \geq 2I_1(p_*, p_0)I(p_*) - I^2(p_*). \quad (5.2.15)$$

Пользуясь этим неравенством, из (5.2.10) получаем (5.2.12)

$$\tilde{V}^{-1}(p_*, p_0) \leq \frac{I_1^2(p_*, p_0)}{I_2(p_*, p_0)} A(c^*, \sigma^2(p_0)) = V^{-1}(p_*, p_0). \quad (5.2.16)$$

Для доказательства неравенства (5.2.13) воспользуемся теми же соображениями, которые применялись при установлении принципа оптимальности на классе. Покажем, что $\tilde{V}^{-1}(p_*, p_0)$ достигает минимума по $p_0(\xi)$ при $p_0(\xi) = p_*(\xi)$, что и означает выполнение неравенства (5.2.13).

Обозначим

$$\chi_3(\lambda) = V^{-1}(p_*, p_\lambda) = \frac{I_1^2(p_*, p_\lambda)}{I_2(p_*, p_\lambda)} A(c^*, \sigma^2(p_\lambda)), \quad (5.2.17)$$

где $p_\lambda(\xi)$ определяется выражением (4.2.21), в котором $g(\xi) = p_0(\xi)$. Вычисляя $\chi_3'(0)$ аналогично тому, как это делалось в § 4.2, получим после элементарных преобразований

$$\begin{aligned} \chi_3'(0) = & [2I_1(p_*, p_0) - I(p_*) - I_2(p_*, p_0)] A(c^*, \sigma^2(p_0)) + \\ & + I(p_*) A_{II}(c^*) (\sigma^2(p_0) - \sigma^2(p_*)). \end{aligned} \quad (5.2.18)$$

Сопоставляя выражение для $\chi'_3(0)$ с $\chi'_1(0) \geq 0$ (4.2.27), заключаем, что

$$\chi'_3(0) = \chi'_1(0) \geq 0. \quad (5.2.19)$$

А это неравенство и есть условие минимума $V^{-1}(p_*, p_0)$ по $p_0(\xi)$, т. е. неравенство (5.2.13) доказано.

Для того чтобы можно было реализовать матрицу усиления $\tilde{\Gamma}_*(n)$ (5.2.3), (5.2.4), необходимо освободиться в (5.2.4) от истинной плотности распределения помех $p_0(\xi)$ и оптимального решения c^* . С подобной задачей мы уже встречались при формировании реализуемых абсолютно оптимальных алгоритмов в § 3.2. Поступим таким же образом. Заменим в матрице усиления $\tilde{\Gamma}_*(n)$ (5.2.3), (5.2.4) нормированную информационную матрицу $A(c^*, \sigma^2(p_0))$ (1.6.26) ее эмпирической оценкой $\hat{A}_n(x, c^*)$ (1.7.15). Полученная таким образом оценка матрицы усиления запишется в виде

$$\begin{aligned} \hat{\Gamma}_*(n) &= \frac{1}{n I(p_*)} \hat{A}_n^{-1}(x, c^*) = \\ &= \left[I(p_*) \sum_{m=1}^n \nabla_c f(x(m), c^*) \nabla_c^\top f(x(m), c^*) \right]^{-1}. \end{aligned} \quad (5.2.20)$$

Вспоминая, что

$$\nabla_c f(x(n), c^*) = v(n) = x(n) - \sum_{m=1}^N d_m^* v(n-m),$$

представим $\hat{\Gamma}_*(n)$ в виде

$$\hat{\Gamma}_*(n) = \left[I(p_*) \sum_{m=1}^n v(m) v^\top(m) \right]^{-1}.$$

Отсюда на основании леммы об обращении матриц (1.7.17), (1.7.18) при $t_m = v(m)$, $\kappa = I(p_*)$, $T(n) = \hat{\Gamma}_*(n)$ получим

$$\hat{\Gamma}_*(n) = \hat{\Gamma}_*(n-1) - \frac{\hat{\Gamma}_*(n-1) v(n) v^\top(n) \hat{\Gamma}_*(n-1)}{I^{-1}(p_*) + v^\top(n) \hat{\Gamma}_*(n-1) v(n)}, \quad (5.2.21a)$$

$$\hat{\Gamma}_*(0) = \gamma E, \quad \gamma \gg 1,$$

где

$$v(n) = x(n) - \sum_{m=1}^N d_m(n-1) v(n-m), \quad (5.2.21b)$$

$$v(m) = 0, \quad m = 0, -1, \dots, 1 - N.$$

Поэтому реализуемый абсолютно оптимальный на классе алгоритм представится в виде

$$\begin{aligned} c(n) &= c(n-1) + \hat{\Gamma}_*(n) F'_*[\varepsilon(z(n), c(n-1))] v(n), \\ c(0) &= c_0, \end{aligned} \quad (5.2.22)$$

где оценка матрицы усиления $\widehat{G}_*(n)$ определяется рекуррентным соотношением (5.2.21а), а коэффициенты чувствительности — (5.2.21б). Блок-схема этого реализуемого абсолютно оптимального на классе алгоритма изображена на рис. 5.1. Она отличается от блок-схемы абсолютно оптимального алгоритма (рис. 3.1) иными выражениями производной функции потерь в (5.2.22) и фишеровской информации в (5.2.21а).

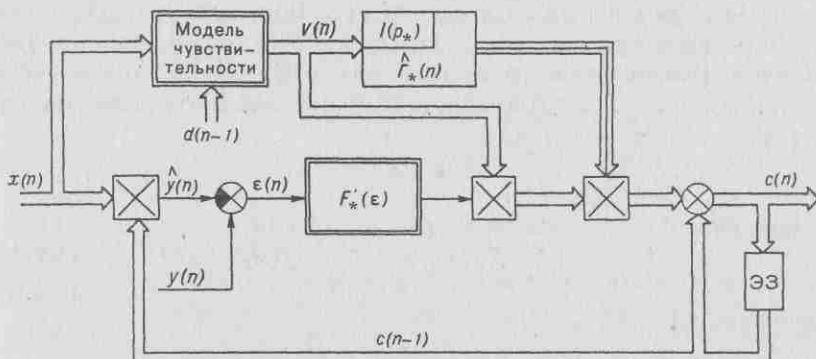


Рис. 5.1

Таким образом, для получения реализуемых абсолютно оптимальных на классе алгоритмов достаточно в оптимальных алгоритмах заменить производную оптимальной функции потерь $F'_0[\varepsilon]$ на производную оптимальной на классе функции потерь $F'_*[\varepsilon]$, а в матрице усиления заменить фишеровскую информацию $I(p_0)$ на $I(p_*)$.

Для объектов с простой помехой $d_m = 0$, $m = 1, \dots, N$, и $v(n) = x(n)$. Следовательно, из (5.2.21), (5.2.22) получаем

$$c(n) = c(n-1) + \widehat{\Gamma}_*(n) F'_*[\varepsilon(z(n), c(n-1))] x(n), \quad (5.2.23)$$

$$c(0) = c_0,$$

$$\widehat{\Gamma}_*(n) = \widehat{\Gamma}_*(n-1) - \frac{\widehat{\Gamma}_*(n-1) \mathbf{x}(n) \mathbf{x}^\top(n) \widehat{\Gamma}_*(n-1)}{I^{-1}(p_*) + \mathbf{x}^\top(n) \widehat{\Gamma}_*(n-1) \mathbf{x}(n)}, \quad (5.2.24)$$

$$\widehat{\Gamma}_*(0) = \gamma E, \quad \gamma \gg 1,$$

Блок-схема этого абсолютно оптимального на классе алгоритма изображена на рис. 5.2.

Реализуемые абсолютно оптимальные на классе алгоритмы идентификации объектов с простой помехой можно представить и в не-

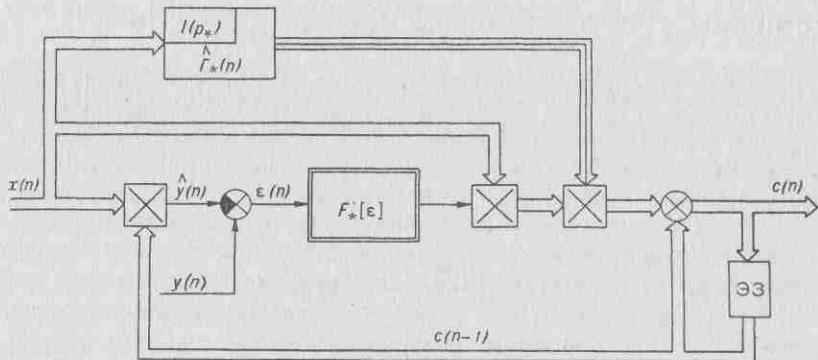


Рис. 5.2

сколько иной форме, аналогично (3.2.12), (3.2.13):

$$c(n) = c(n-1) + \hat{K}_*(n) F'_*(\varepsilon(z(n), c(n-1))), \quad (5.2.25)$$

$$c(0) = c_0,$$

$$\hat{K}_*(n) = \hat{\Gamma}_*(n-1) x(n) I^{-1}(p_*), \quad (5.2.26)$$

Матрица $\hat{\Gamma}_*(n)$, а значит, и $\hat{\Gamma}_*(n-1)$ определяется по-прежнему из рекуррентного соотношения (5.2.24). Блок-схема реализуемого абсолютно оптимального на классе алгоритма этого вида изображена на рис. 5.3.

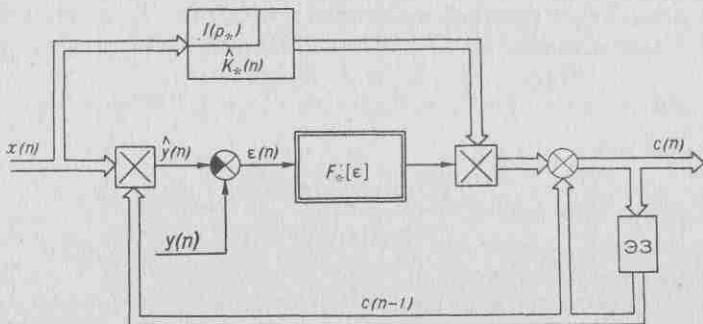


Рис. 5.3

§ 5.3. Абсолютно оптимальные на классе алгоритмы с настройкой параметра масштаба

Для формирования абсолютно оптимальных на классе алгоритмов с настройкой параметра масштаба мы воспользуемся правилом формирования их из соответствующих абсолютно оптимальных алгоритмов. В рассматриваемом случае кроме замены производной оптимальной функции потерь $\bar{F}_0[\varepsilon/s]$ на производную оптимальной на классе функции потерь $\bar{F}_*[\varepsilon/s]$ и фишеровской информации $I(p_0)$ на $I(\bar{p}_*)$ нужно еще заменить фишеровскую информацию $I_D(\bar{p}_0)$ на $I_D(\bar{p}_*)$. Таким образом, из абсолютно оптимальных алгоритмов (3.3.25) — (3.3.28) после указанных замен получаем абсолютно оптимальные на классе алгоритмы с настройкой параметра масштаба:

$$\begin{aligned} c(n) &= c(n-1) + \hat{\Gamma}_*(n) \bar{F}'_* \left[\frac{\varepsilon(\mathbf{z}(n), c(n-1))}{s(n-1)} \right] \frac{v(n)}{s(n-1)}, \\ c(0) &= c_0, \end{aligned} \quad (5.3.1)$$

где

$$\begin{aligned} v(n) &= \mathbf{x}(n) - \sum_{m=1}^N d_m(n-1) v(n-m), \\ v(m) &= 0, \quad m = 0, -1, \dots, 1 - N, \end{aligned} \quad (5.3.2a)$$

$$\begin{aligned} \hat{\Gamma}_*(n) &= \hat{\Gamma}_*(n-1) - \frac{\hat{\Gamma}_*(n-1) v(n) v^T(n) \hat{\Gamma}_*(n-1)}{s^2(n-1) I^{-1}(\bar{p}_*) + v^T(n) \hat{\Gamma}_*(n-1) v(n)}, \\ \hat{\Gamma}_*(0) &= \gamma E, \quad \gamma \gg 1, \end{aligned} \quad (5.3.2b)$$

$$\begin{aligned} s(n) &= s(n-1) - \gamma_1(n) \left[s(n-1) - \bar{F}'_* \left[\frac{\varepsilon(\mathbf{z}(n), c(n-1))}{s(n-1)} \right] \varepsilon(\mathbf{z}(n), c(n-1)) \right], \\ s(0) &= s_0 \end{aligned} \quad (5.3.3)$$

и

$$\gamma_1(n) = \frac{1}{n(I_D(\bar{p}_*) - 1)}. \quad (5.3.4)$$

Нетрудно видеть, что алгоритмы (5.3.1) — (5.3.4) совпадают с абсолютно оптимальными на классе алгоритмами (5.2.21), (5.2.22), если в них заменить оценку $s(n-1)$ на фиксированный параметр $s = 1$. Что же касается алгоритма (5.3.3), (5.3.4), то он осуществляет настройку параметра масштаба. Блок-схема абсолютно оптимальных на классе алгоритмов с настройкой параметра масштаба изображена на рис. 5.4.

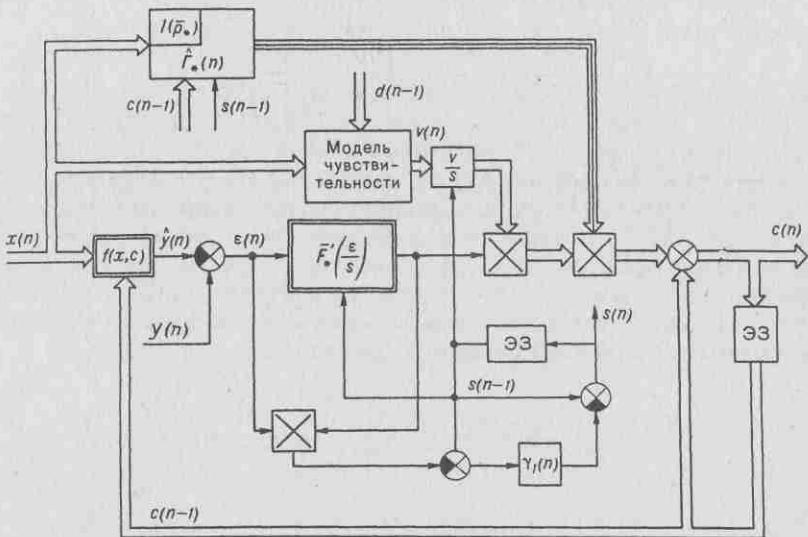


Рис. 5.4

Обозначая

$$\hat{\mathbf{K}}_*(n) = \frac{\hat{\Gamma}_*(n-1) \mathbf{v}(n)}{s(n-1)}, \quad (5.3.5)$$

запишем алгоритм (5.3.1) в такой форме

$$c(n) = c(n-1) + \hat{K}_*(n) \bar{F}'_* \left[\frac{\varepsilon(z(n), c(n-1))}{s(n-1)} \right], \quad (5.3.6)$$

где вектор усиления $\hat{K}_*(n)$ (5.3.5) может быть представлен в виде

$$\hat{K}_*(n) = \frac{\hat{\Gamma}_*(n-1) v(n) s(n-1)}{s^2(n-1) + I(\bar{p}_*) v^T(n) \hat{\Gamma}_*(n-1) v(n)}. \quad (5.3.7)$$

Матрица усиления $\widehat{G}_*(n)$ в (5.3.7) и алгоритм настройки параметра масштаба имеют прежний вид (5.3.2) и (5.3.3), (5.3.4). Блок-схема, соответствующая этим алгоритмам (5.3.6), (5.3.7), (3.3.2) — (3.3.4) приведена на рис. 5.5. В блок-схемах алгоритмов с настройкой параметра масштаба появляется дополнительный контур оценивания параметра масштаба.

Абсолютно оптимальные на классе алгоритмы с настройкой параметра масштаба обладают большей стабильностью, чем соответствующие алгоритмы с фиксированным масштабом.

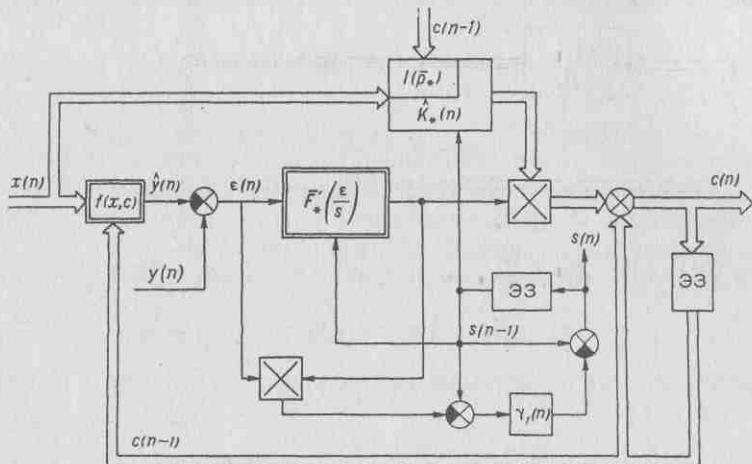


Рис. 5.5

ствующие оптимальные или абсолютно оптимальные алгоритмы. Они обладают свойством робастности.

§ 5.4. Одномерные абсолютно оптимальные на классе алгоритмы

Абсолютно оптимальные алгоритмы оценивания параметра сдвига подробно исследовались в § 3.4. Там же рассматривались и некоторые оптимальные алгоритмы. Рассмотрим вначале абсолютно оптимальные на классе алгоритмы оценивания параметра сдвига и выясним их особенности. Такие одномерные алгоритмы, минимизирующие средние потери

$$J_*(c) = M\{F_*[y(n) - c]\}, \quad (5.4.1)$$

будут иметь вид

$$c(n) = c(n-1) + \gamma_*(n) F'_*[y(n) - c(n-1)], \quad (5.4.2)$$

где $F_*(\varepsilon)$ и $F'_*(\varepsilon)$ — оптимальная на классе функция потерь и ее производная, определяемые имеющимся уровнем априорной информации о помехах, т. е. классами распределений (см. табл. 4.1), а $\gamma_*(n)$ — коэффициент усиления, равный

$$\gamma_*(n) = \frac{1}{n I(p_*)}. \quad (5.4.3)$$

Удобно одномерный алгоритм (5.4.2), (5.4.3) записать в такой форме

$$c(n) = c(n-1) + \frac{b}{n} \bar{F}'_*(y(n) - c(n-1)), \quad (5.4.4)$$

где b — постоянная, а $\bar{F}'_*(\varepsilon)$ — нормированная производная функции потерь.

Приведем примеры оптимальных на классе алгоритмов (5.4.4) для типовых классов \mathcal{P} , характеризующих уровень априорной информации о помехах. Воспользуемся для этой цели табл. 4.1.

Класс невырожденных распределений \mathcal{P}_1 . В этом случае

$$\bar{F}'_*(\varepsilon) = \operatorname{sign} \varepsilon, \quad b = s_1, \quad (5.4.5)$$

и, значит, абсолютно оптимальный на классе \mathcal{P}_1 алгоритм (5.4.4) — релейный:

$$c(n) = c(n-1) + \frac{s_1}{n} \operatorname{sign}(y(n) - c(n-1)). \quad (5.4.6)$$

Свойства абсолютно оптимального релейного алгоритма, а также оптимального релейного алгоритма при разных коэффициентах усиления рассматривались в § 3.4. Там же была установлена его работоспособность при весьма широких условиях. Любое отклонение наблюдений $y(n)$ от оценки $c(n-1)$, как бы велико оно ни было, преобразуется в величину, равную ± 1 , а коэффициент усиления с ростом n стремится к нулю. Асимптотическая дисперсия оценок, порождаемых робастным релейным алгоритмом (5.4.6), удовлетворяет неравенству

$$\sigma_A^2 \leq \frac{1}{I(p_*)} = s_1^2. \quad (5.4.7)$$

Класс распределений с ограниченной дисперсией \mathcal{P}_2 . Для этого класса

$$\bar{F}'_*(\varepsilon) = \varepsilon, \quad b = 1, \quad (5.4.8)$$

и, значит, абсолютно оптимальный на классе \mathcal{P}_2 алгоритм (5.4.4) — линейный:

$$c(n) = c(n-1) + \frac{1}{n} (y(n) - c(n-1)). \quad (5.4.9)$$

Абсолютно оптимальный на классе алгоритм (5.4.9) не зависит от дисперсии помех. Асимптотическая дисперсия оценок, порождаемых им, удовлетворяет неравенству

$$\sigma_A^2 \leq \frac{1}{I(p_*)} = \sigma_1^2. \quad (5.4.10)$$

Класс приближенно нормальных распределений \mathcal{P}_3 . Для этого класса

$$\bar{F}'_*[\varepsilon] = \begin{cases} \varepsilon, & |\varepsilon| \leq \Delta, \\ \Delta \operatorname{sign} \varepsilon, & |\varepsilon| > \Delta, \end{cases} \quad b = \left(2 \int_0^\Delta p_*(\xi) d\xi \right)^{-1}, \quad (5.4.11)$$

где параметр Δ определяется из трансцендентного уравнения (4.5.23), и, значит, абсолютно оптимальный на классе алгоритм — линейно-релейный:

$$c(n) = \begin{cases} c(n-1) + \frac{b}{n} (y(n) - c(n-1)), & |y(n) - c(n-1)| \leq \Delta, \\ c(n-1) + \frac{b}{n} \Delta \operatorname{sign}(y(n) - c(n-1)), & |y(n) - c(n-1)| > \Delta. \end{cases} \quad (5.4.12)$$

Значения параметра $b = b(\Delta)$, зависящего от степени засорения α , приведены в табл. 5.1.

Таблица 5.1

Δ	0	0,005	0,01	0,02	0,05	0,1	0,2
$b(\Delta)$	1	1,03	1,06	1,12	1,27	1,49	2,04

Абсолютно оптимальный на классе линейно-релейный алгоритм характеризуется тем, что при резком отличии наблюдения $y(n)$ от оценки $c(n-1)$ он уменьшает невязку до постоянной величины $\pm\Delta$, т. е. он ограничивает модуль невязки некоторой фиксированной величиной. Асимптотическая дисперсия оценок линейно-релейного алгоритма удовлетворяет условию

$$\sigma_A^2 \leq \frac{1}{I(p_*)} = \frac{\int_{-\Delta}^{\Delta} \xi^2 p_*(\xi) d\xi + 2\Delta^2 \int_{-\Delta}^{\Delta} p_*(\xi) d\xi}{\left(\int_{-\Delta}^{\Delta} p_*(\xi) d\xi \right)^2}. \quad (5.4.13)$$

Класс приближенно экспоненциальных распределений \mathcal{P}_4 . В этом случае

$$\bar{F}'_*[\varepsilon] = \operatorname{sign} \varepsilon, \quad b = \frac{s_L}{1 - \alpha}, \quad (5.4.14)$$

и, значит, абсолютно оптимальный на классе \mathcal{P}_4 алгоритм — релейный:

$$c(n) = c(n-1) + \frac{s_L}{n(1 - \alpha)} \operatorname{sign}(y(n) - c(n-1)). \quad (5.4.15)$$

В отличие от алгоритма (5.4.6) в алгоритме (5.4.15) изменен коэффициент усиления в $1 - \alpha$ раз. Асимптотическая дисперсия оценок этого релейного алгоритма удовлетворяет условию

$$\sigma_A^2 \leq \frac{1}{I(p_*)} = \frac{s_L^2}{(1 - \alpha)^2}. \quad (5.4.16)$$

Класс приближенно равномерных распределений \mathcal{P}_5 . Для этого класса

$$\bar{F}'_*(\varepsilon) = \begin{cases} 0, & |\varepsilon| \leq l_R, \\ \operatorname{sign} \varepsilon, & |\varepsilon| > l_R, \end{cases} \quad b = \frac{l_R}{1 - \alpha}, \quad (5.4.17)$$

и, значит, абсолютно оптимальный на классе \mathcal{P}_5 алгоритм — релейный с зоной нечувствительности:

$$\begin{aligned} c(n) &= c(n-1) && \text{при } |y(n) - c(n-1)| \leq l_R, \\ c(n) &= c(n-1) + \frac{l_R}{n(1-\alpha)} \operatorname{sign}(y(n) - c(n-1)) && (5.4.18) \\ && \text{при } |y(n) - c(n-1)| > l_R. \end{aligned}$$

Оценка $c(n)$ не изменяется, если невязка лежит в пределах зоны нечувствительности, и пересчитывается, если невязка превысит размер зоны нечувствительности. Асимптотическая дисперсия оценок этого релейного алгоритма с зоной нечувствительности удовлетворяет условию

$$\sigma_A^2 \leq \frac{1}{I(p_*)} = \frac{\alpha l_R^2}{(1 - \alpha)^2}. \quad (5.4.19)$$

Класс финитных распределений \mathcal{P}_6 . В этом случае

$$\bar{F}'_*(\varepsilon) = \overline{\operatorname{tg}} \frac{\pi \varepsilon}{2l}, \quad b = \frac{l}{\pi}, \quad \overline{\operatorname{tg}} \nu = \begin{cases} \operatorname{tg} \nu, & |\nu| < \frac{\pi}{2}, \\ +\infty, & \nu \geq \frac{\pi}{2}, \\ -\infty, & \nu \leq -\frac{\pi}{2}, \end{cases} \quad (5.4.20)$$

и, значит, абсолютно оптимальный на классе \mathcal{P}_6 алгоритм — нелинейный проекционный:

$$c(n) = \left[c(n-1) + \frac{l}{\pi n} \overline{\operatorname{tg}} \left(\frac{\pi(y(n) - c(n-1))}{2l} \right) \right]_{y_{\max}(n-1)-l}^{y_{\min}(n-1)+l}, \quad (5.4.21)$$

где

$$\begin{aligned} y_{\min}(n) &= \min\{y(1), \dots, y(n)\}, \\ y_{\max}(n) &= \max\{y(1), \dots, y(n)\} \end{aligned} \quad (5.4.22)$$

и

$$[c]_{\alpha}^{\beta} = \begin{cases} \beta, & c > \beta, \\ c, & \alpha \leq c \leq \beta, \\ \alpha, & c < \alpha. \end{cases}$$

Если же неизвестен параметр масштаба, то следует воспользоваться абсолютно оптимальным на классе алгоритмом (5.3.1) — (5.3.4), который для случая оценки параметра сдвига представится в виде:

$$c(n) = c(n-1) + \gamma_{*}(n) \bar{F}'_{*} \left[\frac{y(n) - c(n-1)}{s(n-1)} \right], \quad (5.4.23)$$

где

$$\gamma_{*}(n) = \frac{s(n-1)}{n I(\bar{p}_{*})}, \quad (5.4.24)$$

и

$$s(n) = s(n-1) - \gamma_{*}(n) \left(s(n-1) - \bar{F}'_{*} \left[\frac{y(n) - c(n-1)}{s(n-1)} \right] (y(n) - c(n-1)) \right), \quad (5.4.25)$$

где

$$\gamma_{*}(n) = \frac{1}{n (I_D(\bar{p}_{*}) - 1)}. \quad (5.4.26)$$

Приведем примеры абсолютно оптимальных на классе алгоритмов с настройкой параметра масштаба для типовых классов \mathcal{P}_k .

1. Класс \mathcal{P}_1 :

$$c(n) = c(n-1) + \frac{s(n-1)}{n} \operatorname{sign}(y(n) - c(n-1)), \quad (5.4.27)$$

$$s(n) = s(n-1) - \frac{1}{n} (s(n-1) - |y(n) - c(n-1)|). \quad (5.4.28)$$

2. Класс \mathcal{P}_2 :

$$c(n) = c(n-1) + \frac{1}{n} (y(n) - c(n-1)), \quad (5.4.29)$$

$$s(n) = s(n-1) - \frac{1}{2n} \left(s(n-1) - \frac{(y(n) - c(n-1))^2}{s(n-1)} \right). \quad (5.4.30)$$

3. Класс \mathcal{P}_3 :

$$c(n) = c(n-1) + \frac{b}{n} (y(n) - c(n-1)),$$

$$s(n) = s(n-1) - \gamma_{*}(n) \left(s(n-1) - \frac{(y(n) - c(n-1))^2}{s(n-1)} \right) \quad (5.4.31)$$

$$\text{при } |y(n) - c(n-1)| \leq \Delta s(n-1),$$

$$c(n) = c(n-1) + \frac{b \Delta s(n-1)}{n} \operatorname{sign}(y(n) - c(n-1)),$$

$$s(n) = s(n-1) - \gamma_1(n) (s(n-1) - \Delta |y(n) - c(n-1)|)$$

$$\text{при } |y(n) - c(n-1)| > \Delta s(n-1),$$

где $\gamma_1(n)$, b и Δ определены в (5.4.26), (5.4.11) и (4.5.23) соответственно. Некоторые значения b приведены в табл. 5.1.

Приведем числовые примеры. Рассмотрим класс распределений \mathcal{P}_1 . В него входят все распределения, для которых $p_0(0) \geq 1/(2s_1) > 0$. Наихудшим на этом классе является распределение Лапласа, и соответственно абсолютно оптимальным алгоритмом будет релейный алгоритм (5.4.6). Исследование этого алгоритма проводилось в условиях помех, для которых $p_0(0) \geq 1/2$. На рис. 5.6 изображены кривые изменения ошибок, порождаемых релейным алгоритмом (5.4.6) при наихудших на классе \mathcal{P}_1 лапласовых помехах с $p_0(0) = 1/2$ (кривая b), при гауссовых помехах этого класса с $p_0(0) = 10/\sqrt{2\pi} \approx 3,99 > 1/2$ (кривая a) и помехах Коши с $p_0(0) = 100/\pi \approx 31,83 \gg 1/2$ (кривая c). Кривые получены путем усреднения по 100 реализациям. Наименьшую скорость сходимости алгоритм имеет в случае лапласовых помех.

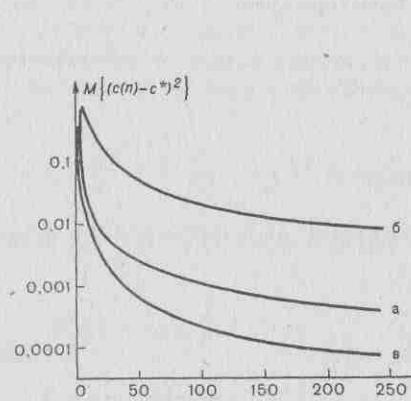


Рис. 5.6

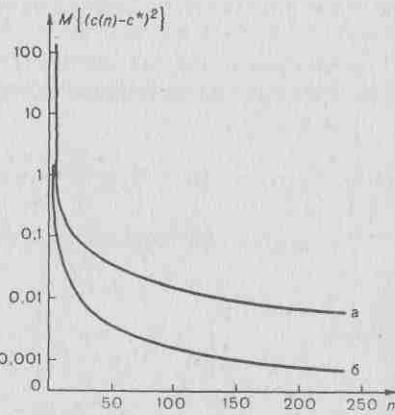


Рис. 5.7

Класс распределений \mathcal{P}_2 рассмотрим на примере распределений, дисперсия которых не превосходит единицы. Абсолютно оптимальным алгоритмом на этом классе является линейный алгоритм (5.4.9). Результаты исследования этого алгоритма на ЭВМ в условиях наихудшего распределения из класса \mathcal{P}_2 (нормальное распределение с дисперсией, равной единице) и лапласова распределения с дисперсией, равной 0,25, приведены на рис. 5.7. Кривые a и b отражают зависимость

ошибок оценивания $M\{(c(n) - c^*)^2\}$, полученных усреднением по 100 реализациям, как функций n при гауссовой и лапласовой помехах соответственно. Как и следовало ожидать, оценки в первом случае хуже оценок для второго случая.

Для класса приближенно нормальных распределений \mathcal{P}_3 помеха распределена по закону

$$p_0(\xi) = (1 - \alpha) N(0, \sigma_N^2) + \alpha N(0, \sigma_1^2), \quad \sigma_1 \gg \sigma_N.$$

Параметры распределения помехи при моделировании были приняты: $\alpha = 0,1$; $\sigma_N = 1$; $\sigma_1 = 10$ либо $\sigma_1 = 1000$.

Абсолютно оптимальным на этом классе алгоритмом в соответствии с (5.4.11) и (5.4.12) и при принятых значениях параметров является линейно-релейный алгоритм:

$$c(n) = \begin{cases} c(n-1) + \frac{1,5}{n} (y(n) - c(n-1)), & |y(n) - c(n-1)| \leq 1,1, \\ c(n-1) + \frac{1,6}{n} \operatorname{sign}(y(n) - c(n-1)), & |y(n) - c(n-1)| > 1,1. \end{cases}$$

На рис. 5.8 изображены кривые изменения ошибок $M\{(c(n) - c^*)^2\}$, порождаемых этим алгоритмом при $\sigma_1 = 10$ (кривая *а*) и $\sigma_1 = 1000$ (кривая *б*). Алгоритм одинаково хорошо справляется с выбросами разной величины (кривые *а* и *б* практически совпадают).

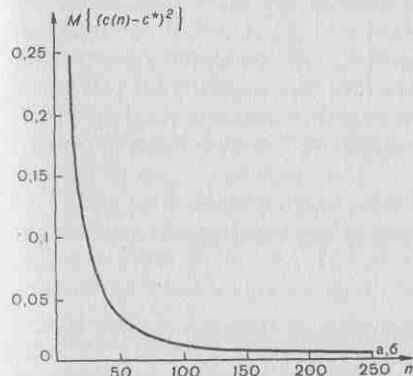


Рис. 5.8

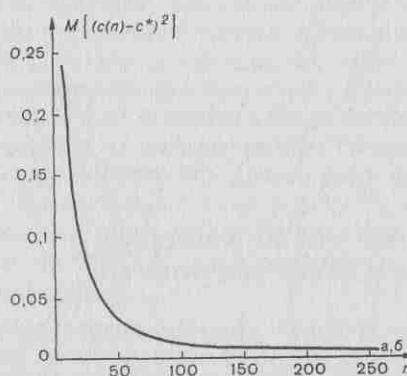


Рис. 5.9

При тех же значениях параметров α и σ абсолютно оптимальный на классе \mathcal{P}_3 алгоритм с настройкой параметра масштаба имеет вид (5.4.31). На рис. 5.9 изображены кривые изменения ошибок $M\{(c(n) - c^*)^2\}$, порождаемых этим алгоритмом для $\sigma_1 = 10$ (кривая *а*) и $\sigma_1 = 1000$ (кривая *б*). Как видно, и в этом случае на работу алгоритма практически не влияет величина выбросов (кривые *а* и *б* совпадают).

Сравнение кривых изменения ошибок, порождаемых алгоритмом без настройки параметра масштаба и алгоритмом с настройкой параметра масштаба, показывает, что алгоритм с настройкой параметра масштаба при малых n порождает оценки, которые хуже, чем у алгоритма без настройки параметра масштаба. Это является естественной платой за незнание свойств распределения.

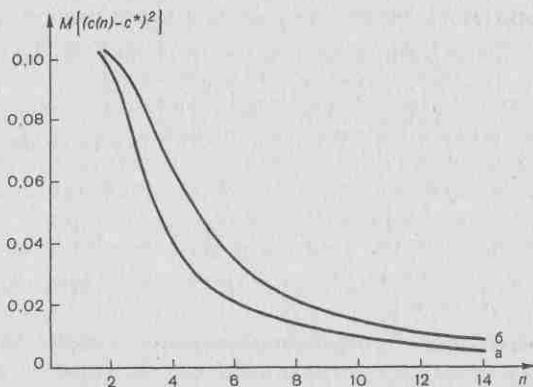


Рис. 5.10

Изменение ошибок $M\{(c(n) - c^*)^2\}$, порождаемых абсолютно оптимальным на классе финитных распределений \mathcal{P}_6 ($l = 0,5$) алгоритмом (5.4.21), изображены на рис. 5.10. Кривая a соответствует работе алгоритма в условиях принадлежащих классу \mathcal{P}_6 равномерно распределенных помех, кривая b — в условиях помех, имеющих наихудшее на классе \mathcal{P}_6 распределение — «косинус-квадрат». Оценки во втором случае хуже оценок для первого случая.

§ 5.5. Многомерные абсолютно оптимальные на классе алгоритмы

Конкретный вид многомерного абсолютно оптимального на классе алгоритма, который следует из общих алгоритмов (5.2.21), (5.2.22), существенно зависит от вида идентифицируемого объекта и от адекватной априорной информации об объекте. Так, для Р-объектов и РАР-объектов адекватная априорная информация задается как более широкими классами \mathcal{P}_ν , так и более узкими классами $\mathcal{P}_{\nu 1}$, $\mathcal{P}_{\nu 2}$. Для АР-объектов адекватная априорная информация задается узкими классами $\mathcal{P}_{\nu 1}$. Количество конкретных многомерных абсолютно оптимальных на классе алгоритмов весьма велико. Поэтому мы здесь ограничимся наиболее интересными с практической точки зрения примерами.

Для Р-объектов с простой помехой, плотность распределения которой принадлежит наиболее широкому классу \mathcal{P}_1 (4.1.3), алгоритм — релейный. Он совпадает с абсолютно оптимальным релейным алгоритмом (3.5.16), (3.5.17), если в выражении матрицы усиления $\tilde{H}(n)$ (3.5.17) положить $s = s_1$, где s_1 — постоянная, определяющая класс \mathcal{P}_1 (4.1.3). Таким образом, абсолютно оптимальный на наиболее широком классе алгоритм является рекуррентным алгоритмом МНМ.

Если же плотность распределения помехи принадлежит классу \mathcal{P}_2 (4.1.4), т. е. обладает ограниченной дисперсией, то абсолютно оптимальный на этом классе алгоритм — линейный. Он совпадает с абсолютно оптимальным линейным алгоритмом (3.5.12), (3.5.13) и не зависит от постоянной σ_1^2 , определяющей класс \mathcal{P}_2 . Отсюда следует, что в этом случае абсолютно оптимальным алгоритмом на классе является рекуррентный алгоритм МНК.

Приведем результаты моделирования многомерных абсолютно оптимальных на классе алгоритмов идентификации Р-объекта, описываемого уравнением

$$y(n) = u(n) + 2u(n-1) + 3u(n-2) - u(n-3) - 2u(n-4) + \xi(n), \quad (5.5.1)$$

где $u(n)$, $\xi(n)$ — независимые последовательности типа дискретного белого шума.

Изменение ошибки $M\{\|c(n) - c^*\|^2\}$, порождаемое абсолютно оптимальным на классе \mathcal{P}_2 ($\sigma^2(p_0) \leq 1$) алгоритмом, т. е. алгоритмом МНК, приведено на рис. 5.11: для лапласовой помехи ($\sigma^2(p_0) = 0,5$) — кривая a , для нормальной помехи ($\sigma^2(p_0) = 1$) — кривая b . Аналогичные кривые, полученные для абсолютно оптимального на классе \mathcal{P}_1 (при $p_0(0) \geq 1$) алгоритма, т. е. алгоритма МНМ, изображены на рис. 5.12: для нормальной помехи ($p_0(0) = 20$) — кривая a , для лапласовой помехи ($p_0(0) = 1$) — кривая b .

Если плотность распределения помехи принадлежит классу \mathcal{P}_3 , например, представляет собой смесь двух нормальных распределений: $p_0(\xi) = 0,9N(0, 1) + 0,1N(0, 100)$, то абсолютно оптимальный на этом классе алгоритм можно представить в виде:

$$\begin{aligned} c(n) &= c(n-1) + \hat{\Gamma}(n) \varphi(\varepsilon(z(n), c(n-1))) x(n), \\ \varepsilon(z(n), c) &= y(n) - c^T x(n), \quad c(n) = (b_0(n), \dots, b_4(n)), \\ x(n) &= (u(n), u(n-1), \dots, u(n-4)), \end{aligned} \quad (5.5.2)$$

где $\varphi(\varepsilon) = \varepsilon$ при $|\varepsilon| < a$ и $\varphi(\varepsilon) = a \operatorname{sign} \varepsilon$ при $|\varepsilon| \geq a$. Изменение ошибки $M\{\|c(n) - c^*\|^2\}$, порождаемое этим алгоритмом, приведено на рис. 5.13 (кривая a). Здесь же изображено изменение ошибки, порожданное алгоритмом МНК, примененным в этом неадекватном ему случае (кривая b). Из этого рисунка видно, что применение алгоритма МНК в случае приближенно нормальных помех может резко ухудшить точность идентификации.

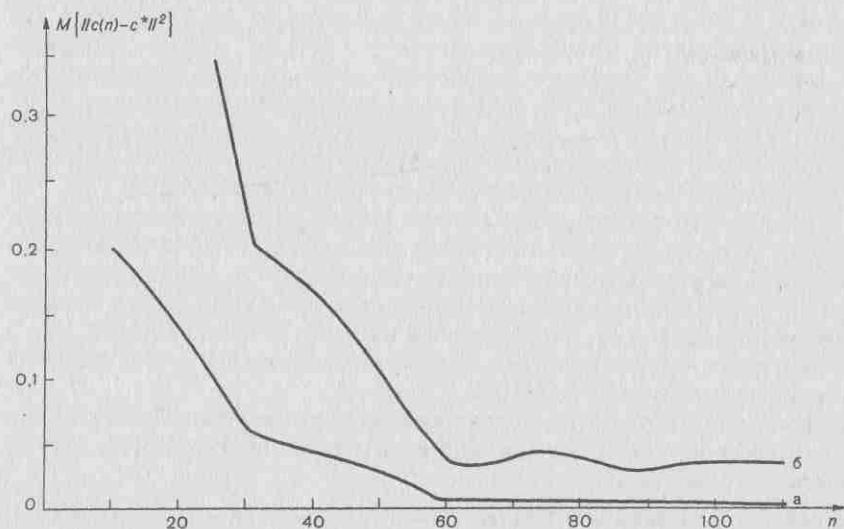


Рис. 5.11

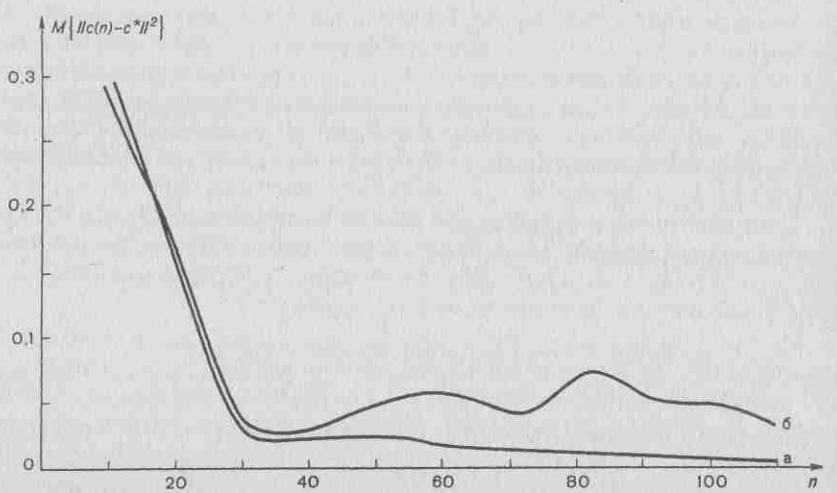


Рис. 5.12

Рассмотрим теперь результаты моделирования абсолютно оптимальных на классе алгоритмов идентификации АР-объекта, описываемого уравнением $y(n) = 0,3y(n-1) + 0,4y(n-2) + \xi(n)$. Для

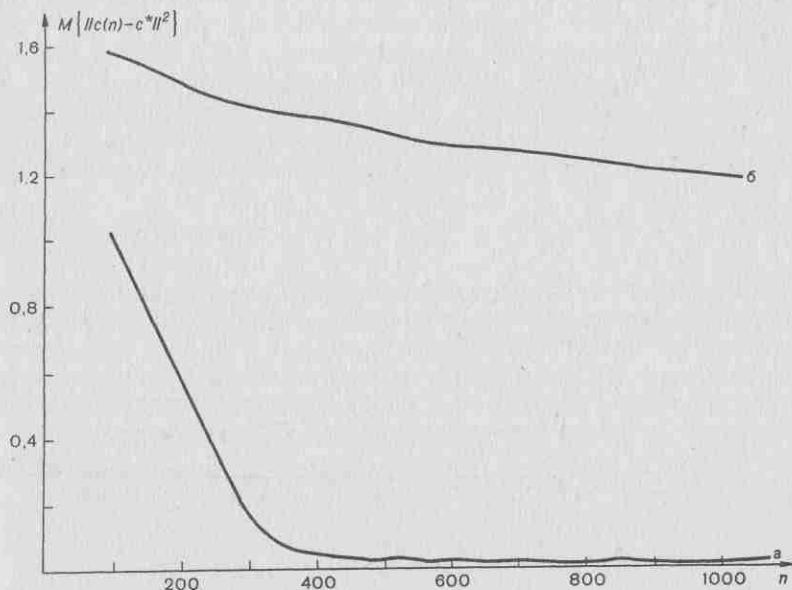


Рис. 5.13

класса распределений $\mathcal{P}_{11} = \{p_0(\xi) : p_0(0) \geq 1/(2s_1), \sigma^2(p_0) \geq \sigma_1^2\}$, как это следует из результатов § 4.7, абсолютно оптимальные алгоритмы на этом классе имеют вид (5.5.2), где $c(n) = (a_1(n), a_2(n))$, $x(n) = (y(n-1), y(n-2))$, а $\varphi(\varepsilon)$ — нелинейная функция, изображенная на рис. 5.14 (см. также табл. 4.3, пункт 2). Рассматривалась помеха $\xi(n)$, распределенная по закону Коши

$$p_0(\xi) = \frac{1}{\pi(\xi^2 + 1)}. \quad (5.5.3)$$

На рис. 5.15 показано изменение ошибки $M\{\|c(n) - c^*\|^2\}$, полученное в результате моделирования (кривая *a*). Здесь же для сравнения приведена аналогичная кривая *(b)*, соответствующая алгоритму МНК. Из этих результатов видно, что точность идентификации АР-объекта абсолютно оптимальным алгоритмом (5.5.2) значительно выше, чем алгоритмом МНК.

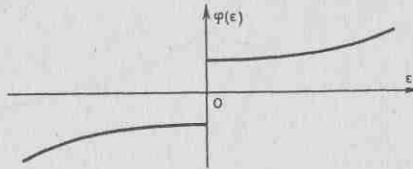


Рис. 5.14

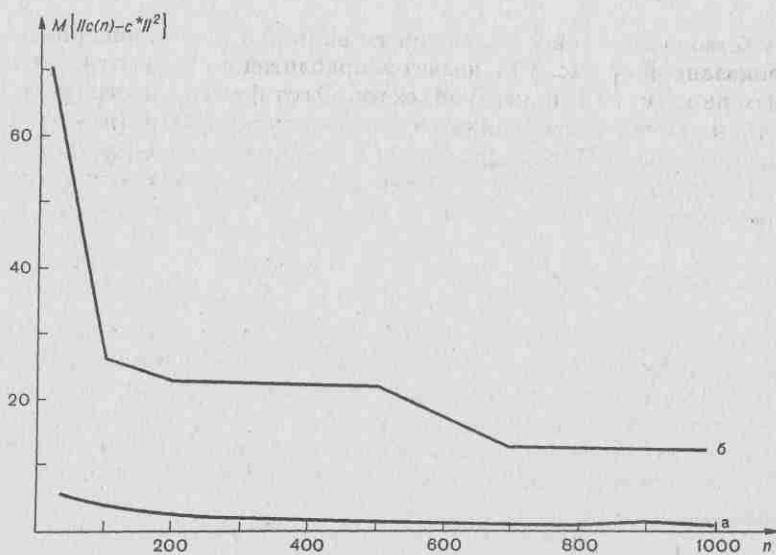


Рис. 5.15

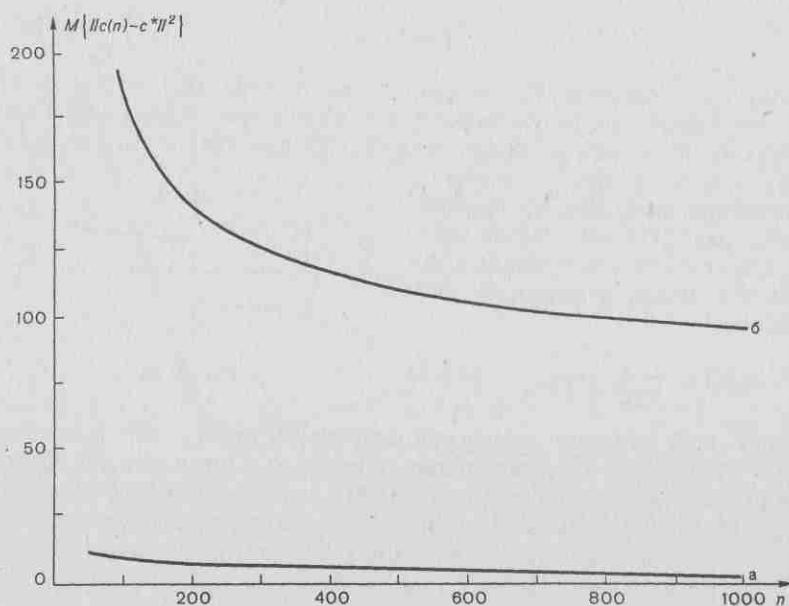


Рис. 5.16

Как было показано в § 4.7, алгоритм вида (5.5.2) с нелинейностью $\varphi(\varepsilon)$, показанной на рис. 5.14, является приближено абсолютно оптимальным на классе \mathcal{P}_{11} и для Р-объектов. Этот факт иллюстрируется рис. 5.16, на котором изображено изменение ошибки $M\{\|c(n) - c^*\|^2\}$ при идентификации Р-объекта (5.5.1) с помехой, распределенной по закону Коши (5.5.3) (кривая *a*). Здесь же приведена аналогичная зависимость для алгоритма МНК (кривая *b*).

§ 5.6. Заключение

Реализуемые абсолютно оптимальные на классе алгоритмы идентификации получаются из абсолютно оптимальных алгоритмов простой заменой $F'_0[\varepsilon]$ на $F'_*[\varepsilon]$ и $I(p_0)$ на $I(p_*)$. За исключением случая класса распределений с ограниченной сверху дисперсией \mathcal{P}_2 эти алгоритмы существенно нелинейны. Они порождают грубые, робастные оценки и являются оптимальными для соответствующих классов в минимаксном смысле.

Нет ничего опаснее для новой истины,
как старое заблуждение.

И.-В. Гете

ГЛАВА 6

Алгоритмы идентификации неминимально-фазовых по возмущению объектов

§ 6.1. Неминимально-фазовые объекты

Уравнение линейных динамических объектов, как было установлено в § 1.2, имеет вид

$$y(n) = K_u(q)u(n) + K_\xi(q)\xi(n), \quad (6.1.1)$$

где, напомним,

$$K_u(q) = \frac{P_u(q)}{Q(q)}, \quad K_\xi(q) = \frac{P_\xi(q)}{Q(q)} \quad (6.1.2)$$

— передаточные функции динамического объекта по воздействию и возмущению. Непосредственная идентификация динамического объекта по наблюдениям входных воздействий и выходных величин возможна лишь тогда, когда этот объект устойчив. Поэтому всегда предполагалось, что характеристический полином $Q(q)$ внешний. Что же касается полинома воздействия $P_u(q)$, то он может быть любым — как внешним, так и не внешним. В последнем случае объект будет неминимально-фазовым по воздействию. Ранее всегда предполагалось,

что полином возмущения $P_\xi(q)$ внешний или, иначе, что идентифицируемый объект минимально-фазовый по возмущению. Более того, довольно прочно укоренилось мнение, что идентификация неминимально-фазового по возмущению объекта принципиально невозможна.

На первый взгляд здесь трудно что-либо возразить. Как было установлено в § 1.3, уравнение оптимальной настраиваемой модели имеет вид

$$\hat{y}(n) = \hat{K}_1(q)u(n) + [1 - \hat{K}_2(q)]y(n), \quad (6.1.3)$$

где

$$\hat{K}_1(q) = d_0 \frac{\hat{P}_u(q)}{\hat{P}_\xi(q)}, \quad \hat{K}_2(q) = d_0 \frac{\hat{Q}_u(q)}{\hat{P}_\xi(q)}, \quad (6.1.4)$$

причем $\hat{K}_2(0) = 1$. Для неминимально-фазового по возмущению объекта полином

$$P_\xi(q) = d_0^* + d_1^*q + \dots + d_N^*q^N \quad (6.1.5)$$

не является внешним. Он имеет корни как вне единичного круга с центром в начале координат (область L^+), так и внутри него (область L^- , рис. 6.1). Поэтому если коэффициенты полинома

$$\hat{P}_\xi(q) = d_0 + d_1q + \dots + d_Nq^N \quad (6.1.6)$$

d_m будут приближаться к коэффициентам d_m^* полинома $P_\xi(q)$ (6.1.5), то настраиваемая модель будет неустойчивой. Это свидетельствует о том, что для неминимально-фазовых по возмущению объектов ранее найденные оптимальные настраиваемые модели, оптимальные или оптимальные на классе функций потерь и соответствующие им абсолютно оптимальные и абсолютно оптимальные на классе алгоритмы непосредственно не применимы. Необходимо уточнить и развить методы синтеза оптимальных настраиваемых моделей и функций потерь для этого случая.

Возможность идентификации неминимально-фазовых по возмущению объектов, если она существует, связана, очевидно, с отказом от требования восстановления точных значений вспомогательных коэффициентов d_m^* ($m = 0, 1, \dots, N$). Но так ли уж нам необходимо точно их восстанавливать? Ведь эти коэффициенты — вспомогательные. Обычно они выражаются через основные коэффициенты a_m^* , b_m^* , и если бы

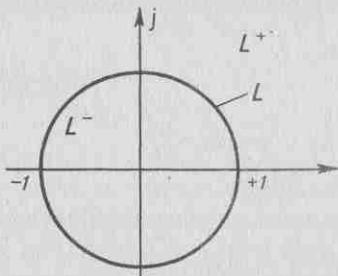


Рис. 6.1

дут найдены эти последние, то нетрудно будет определить в случае необходимости и d_m^* .

Идентификация неминимально-фазовых по возмущению объектов имеет ряд особенностей. Рассмотрению этих особенностей и посвящена настоящая глава.

§ 6.2. Особенности оптимальной настраиваемой модели

Для синтеза наилучшей настраиваемой модели, пригодной для идентификации неминимально-фазового по возмущению объекта, необходимо решить задачу минимизации второго момента невязки

$$M\{\varepsilon^2(n)\} = \Phi(\hat{K}_1, \hat{K}_2) \rightarrow \min_{\hat{K}_1, \hat{K}_2}, \quad (6.2.1)$$

которая подробно рассматривалась в § 1.3 для минимально-фазового объекта. Там же было показано, что при надлежащем выборе $\hat{K}_1(q)$ (1.3.16) эта задача сводится к задаче минимизации

$$M\{\varepsilon^2(n)\} = \Phi_1(\hat{K}_2) \rightarrow \min_{\hat{K}_2} \quad (6.2.2)$$

при

$$\hat{K}_2(0) = 1. \quad (6.2.3)$$

Для выяснения специфики неминимально-фазовости объекта воспользуемся условием минимума этого функционала (1.3.18)

$$\oint_L \hat{K}_2(q) K_\xi(q) K_\xi\left(\frac{1}{q}\right) \delta \hat{K}_2\left(\frac{1}{q}\right) \frac{dq}{q} = 0. \quad (6.2.4)$$

Напомним, что $K_\xi(q)$ — передаточная функция объекта по возмущению (6.1.2). В отличие от случая минимально-фазового по возмущению объекта, рассмотренного в § 1.3, теперь полином $P_\xi(q)$ не внешний, и выбор $\hat{K}_2^0(q) = \beta K_\xi^{-1}(q)$ (1.3.20) непригоден. Предположим, что полином $P_\xi(q)$ имеет r корней в области L^- и, значит, $N - r$ корней в области L^+ . Число r определяет порядок неминимально-фазовости объекта. Произведем факторизацию полинома возмущения

$$P_\xi(q) = P_\xi^+(q) P_\xi^-(q), \quad (6.2.5)$$

где

$$P_\xi^+(q) = d_0^* + d_1^+ q + \dots + d_{N-r}^+ q^{N-r} \quad (6.2.6)$$

— внешний полином (все его корни расположены в области L^+), а

$$P_\xi^-(q) = 1 + d_1^- q + \dots + d_r^- q^r \quad (6.2.7)$$

— внутренний полином (все его корни расположены в области L^-), и, значит, $d_r^- > 1$. Очевидно, что факторизация $P_\xi(1/q)$ приводит к выражению

$$P_\xi\left(\frac{1}{q}\right) = P_\xi^+\left(\frac{1}{q}\right) P_\xi^-\left(\frac{1}{q}\right). \quad (6.2.8)$$

Но теперь полином

$$P_\xi^+\left(\frac{1}{q}\right) q^{N-r} = d_0^* q^{N-r} + d_1^* q^{N-r-1} + \dots + d_{N-r}^* \quad (6.2.9)$$

— внутренний, а полином

$$P_\xi^-\left(\frac{1}{q}\right) q^r = q^r + d_1^- q^{r-1} + \dots + d_r^- \quad (6.2.10)$$

— внешний.

Используя факторизацию полиномов (6.2.5) — (6.2.10), представим $K_\xi(q) K_\xi(1/q)$ после очевидной перегруппировки в такой форме:

$$K_\xi(q) K_\xi\left(\frac{1}{q}\right) = \frac{P_\xi^+(q) P_\xi^-\left(\frac{1}{q}\right) q^r}{Q(q)} \frac{P_\xi^-(q) P_\xi^+\left(\frac{1}{q}\right) q^{N-r}}{Q\left(\frac{1}{q}\right) q^N}. \quad (6.2.11)$$

Тогда условие оптимальности (6.2.4) после подстановки в него (6.2.11) примет вид

$$\oint_L \widehat{K}_2(q) \frac{P_\xi^+(q) P_\xi^-\left(\frac{1}{q}\right) q^r}{Q(q)} \frac{P_\xi^-(q) P_\xi^+\left(\frac{1}{q}\right) q^{N-r}}{Q\left(\frac{1}{q}\right) q^N} \delta \widehat{K}_2\left(\frac{1}{q}\right) \frac{dq}{q} = 0. \quad (6.2.12)$$

Условие (6.2.12) будет выполнено, если подынтегральное выражение не будет иметь полюсов в области L^+ (см. рис. 6.1). Для устранения этих полюсов выберем, аналогично тому, как это было сделано ранее (см. (1.3.20)),

$$\widehat{K}_2(q) = \widehat{K}_2^0(q) = \beta \frac{Q(q)}{P(q)}, \quad (6.2.13)$$

где

$$P(q) = P_\xi^+(q) P_\xi^-\left(\frac{1}{q}\right) q^r = d_0^0 + d_1^0 q + \dots + d_N^0 q^N, \quad (6.2.14)$$

причем

$$d_0^0 = d_0^* d_r^- . \quad (6.2.15)$$

Значение β , как и в § 1.3, определяется из условия

$$\hat{K}_2(0) = 1; \quad (6.2.16)$$

отсюда следует

$$\beta = \frac{P_\xi(0)}{Q(0)} = d_0^0 = d_0^* d_r^-, \quad (6.2.17)$$

и оптимальная передаточная функция (6.2.13) принимает вид

$$\hat{K}_2^0(q) = d_0^0 \frac{Q(q)}{P(q)}. \quad (6.2.18)$$

Сопоставляя $\hat{K}_2^0(q)$ (6.2.18) с $\hat{K}_2^0(q)$ (1.3.25) для минимально-фазового по возмущению объекта, заключаем, что в случае неминимально-фазового по возмущению объекта полином возмущения $P_\xi(q)$ заменяется полиномом $P(q)$ (6.2.14), а коэффициент d_0^* — на $d_0^0 = d_0^* d_r^-$. Производя эти замены, находим аналогично тому, как это было сделано в § 1.3 для минимально-фазовых по возмущению объектов, уравнение оптимальной настраиваемой модели

$$\hat{y}(n) = \hat{K}_1(q)u(n) + [1 - \hat{K}_2(q)]y(n). \quad (6.2.19)$$

Здесь

$$\hat{K}_1(q) = d_0 \frac{\hat{P}_u(q)}{\hat{P}(q)}, \quad \hat{K}_2(q) = d_0 \frac{\hat{Q}_u(q)}{\hat{P}(q)} \quad (6.2.20)$$

— передаточные функции модели, а

$$\hat{P}(q) = d_0 + d_1 q + \dots + d_N q^N \quad (6.2.21)$$

— характеристический полином модели.

Уравнение оптимальной настраиваемой модели можно представить также в виде

$$\hat{P}(q)\hat{y}(n) = d_0 \hat{P}_u(q)u(n) + [\hat{P}(q) - d_0 \hat{Q}(q)]y(n), \quad (6.2.22)$$

или, наконец, в виде разностного уравнения

$$\begin{aligned} \hat{y}(n) = & - \sum_{m=1}^N a_m y(n-m) + \sum_{m=0}^N b_m u(n-m) + \\ & + \sum_{m=1}^N \frac{d_m}{d_0} (y(n-m) - \hat{y}(n-m)). \end{aligned} \quad (6.2.23)$$

Уравнение оптимальной настраиваемой модели (6.2.23) для неминимально-фазовых по возмущению объектов совпадает с уравнением оптимальной настраиваемой модели (1.3.31) для минимально-фазовых объектов. Что же касается уравнений (6.2.19) — (6.2.22), то и они совпадают с аналогичными уравнениями (1.3.29) — (1.3.30), поскольку, как видно из (6.2.21), (1.3.25), $\hat{P}(q)$ и $\hat{P}_\xi(q)$ — просто различное обозначение одних и тех же полиномов. Однако, если для минимально-фазовых объектов $P(q) = \hat{P}_\xi(q)$, что означает, что вспомогательные параметры модели d_m могут принимать значение d_m^* , то для неминимально-фазовых объектов $P(q) \neq \hat{P}_\xi(q)$. Последнее неравенство означает, что вспомогательные параметры модели d_m не могут принимать значений d_m^* (напомним, полином $P_\xi(q)$ не внешний), а могут принимать лишь значения d_m^0 , которые функционально связаны с d_m^* .

Для оптимальной настраиваемой модели функционал $\Phi(\hat{K}_1, \hat{K}_2)$ достигает минимума, равного

$$\Phi(\hat{K}_1^0, \hat{K}_2^0) = \Phi_1(\hat{K}_2^0) = M\{\varepsilon^2(n)\} = (d_0^0 \sigma_\xi)^2. \quad (6.2.24)$$

Но $d_0^0 = d_0^* d_r^-$, причем $d_r^- > 1$. Поэтому

$$\Phi(\hat{K}_1^0, \hat{K}_2^0) = (d_0^* d_r^- \sigma_\xi)^2. \quad (6.2.25)$$

Таким образом, в этом случае для квадратичной функции потерь

$$J(c^*) = \min_c \min_M M\{\varepsilon^2(z(n), c)\} = (d_0^* d_r^- \sigma_\xi)^2. \quad (6.2.26)$$

(При $r = 0$, $d_r^- = 1$ мы приходим к известному результату (1.3.42))

$$J(c^*) = \min_c \min_M M\{\varepsilon^2(z(n), c)\} = (d_0^* \sigma_\xi)^2. \quad (6.2.27)$$

Так как $d_r^- > 1$, то из сопоставления (6.2.26) и (6.2.27) заключаем, что минимальное значение второго момента невязки для неминимально-фазового по возмущению объекта всегда больше, чем для соответствующего минимально-фазового по возмущению объекта.

Найдя коэффициенты оптимального внешнего характеристического полинома

$$P(q) = d_0^0 + d_1^0 q + \dots + d_N^0 q^N, \quad (6.2.28)$$

нетрудно по нем определить коэффициенты d_m^+ и d_m^- , а затем и d_m^* . Однако этого делать, как правило, не следует. Дело в том, что коэффициенты d_m^* являются функциями основных параметров системы a_k^* , b_k^* и они могут быть восстановлены непосредственно по структурной схеме, если в этом есть необходимость.

§ 6.3. Преобразование плотностей распределения линейным дискретным фильтром

Найдем невязку $\varepsilon_d(n) = y(n) - \hat{y}(n)$ при равенстве основных параметров оптимальной настраиваемой модели и объекта, т. е. при $a_m = a_m^*$, $b_m = b_m^*$ и в предположении, что $d_0^* = 1$. Уравнение оптимальной настраиваемой модели (6.2.19) в этом случае принимает вид

$$\hat{y}(n) = \hat{K}_1^0(q)u(n) + [1 - \hat{K}_2^0(q)]y(n), \quad (6.3.1)$$

и, значит,

$$\varepsilon_d(n) = \hat{K}_2^0(q)y(n) - \hat{K}_1^0(q)u(n). \quad (6.3.2)$$

Заменяя в (6.3.2) $y(n)$ его значением из уравнения объекта (6.1.1), получим

$$\varepsilon_d(n) = [\hat{K}_2^0(q)K_u(q) - \hat{K}_1^0(q)]u(n) + \hat{K}_2^0(q)K_\xi(q)\xi(n). \quad (6.3.3)$$

Но для оптимальной настраиваемой модели справедливо условие независимости невязки $\varepsilon_d(n)$ от внешнего воздействия $u(n)$ — условие (1.3.12). Поэтому из (6.3.3) будем иметь

$$\varepsilon_d(n) = \hat{K}_2^0(q)K_\xi(q)\xi(n). \quad (6.3.4)$$

Подставляя в (6.3.4) выражение для $\hat{K}_2^0(q)$ (6.2.18) и (6.1.2), получим после сокращения на $Q(q)$ с учетом того, что $d_0^* = 1$,

$$\varepsilon_d(n) = d_0^0 \frac{P_\xi(q)}{P(q)} \xi(n) = d_r^- \frac{P_\xi(q)}{P(q)} \xi(n). \quad (6.3.5)$$

Для минимально-фазового объекта $P(q) = d_0^0 P_\xi(q)$; из (6.3.5) следует

$$\varepsilon_d(n) = \xi(n), \quad (6.3.6)$$

т. е. невязка $\varepsilon_d(n)$ равна помехе.

Для неминимально-фазового объекта, подставляя в (6.3.5) $P_\xi(q)$ (6.2.5) и $P(q)$ (6.2.14), получим после сокращения на $P_\xi^+(q)$

$$\varepsilon_d(n) = d_r^- \frac{P_\xi^-(q)}{P_\xi^-(\frac{1}{q})q^r} \xi(n). \quad (6.3.7)$$

Учитывая выражения $P_\xi^-(q)$ (6.2.7) и $P_\xi^-(1/q)q^r$ (6.2.10), будем иметь

$$\varepsilon_d(n) = d_r^- \frac{1 + d_1^- q + \dots + d_r^- q^r}{q^r + d_1^- q^{r-1} + \dots + d_r^-} \xi(n). \quad (6.3.8)$$

Для неминимально-фазовых по возмущению объектов равенство (6.3.6) заменяется уравнением (6.3.7), означающим, что в этом случае $\varepsilon_d(n)$ представляет собой не просто помеху $\xi(n)$, как это следует из (6.3.6), а является результатом прохождения помехи $\xi(n)$ через некоторую динамическую систему — дискретный фильтр. Передаточная функция такого дискретного фильтра, как это видно из (6.3.7), (6.3.8), равна

$$K_d(q) = d_r^- \frac{P_\xi^-(q)}{P_\xi^-(\frac{1}{q}) q^r}. \quad (6.3.9)$$

Выясним некоторые особенности этого фильтра. Полагая в (6.3.9) $q = e^{-j\omega}$, найдем частотную характеристику фильтра

$$K_d(e^{-j\omega}) = d_r^- \frac{P_\xi^-(e^{-j\omega})}{P_\xi^-(e^{j\omega}) e^{-j\omega r}}, \quad (6.3.10)$$

или, в развернутой форме,

$$K_d(e^{-j\omega}) = d_r^- \frac{1 + d_1^- e^{-j\omega} + \dots + d_r^- e^{-j\omega r}}{e^{-j\omega r} + d_1^- e^{-j\omega(r-1)} + \dots + d_r^-}. \quad (6.3.11)$$

Нетрудно видеть, что

$$|P_\xi^-(e^{-j\omega})|^2 = |P_\xi^-(e^{j\omega}) e^{-j\omega r}|^2. \quad (6.3.12)$$

Следовательно,

$$|K_d(e^{-j\omega})|^2 = (d_r^-)^2, \quad (6.3.13)$$

т. е. модуль частотной характеристики есть постоянная величина. А это значит, что такой дискретный фильтр не вносит корреляции. Иначе говоря, при воздействии на фильтр с передаточной функцией $K_d(q)$ (6.3.9) некоррелированной помехи (белого шума) $\xi(n)$ его выходная величина $\varepsilon_d(n) = \zeta(n)$ будет также некоррелированна. Однако $\zeta(n)$, в отличие от $\xi(n)$, вообще говоря, уже не будет независимой.

Дисперсия выходной величины этого фильтра будет равна

$$\sigma_\zeta^2 = M\{\varepsilon_d^2(n)\} = \frac{1}{2\pi} \oint_L |K_d(e^{-j\omega})|^2 \sigma_\xi^2 d\omega = (d_r^- \sigma_\xi)^2. \quad (6.3.14)$$

Это значит, что дисперсия выходной величины дискретного фильтра пропорциональна дисперсии помехи с коэффициентом пропорциональности $(d_r^-)^2 > 1$. Отсюда следует, что если дисперсия, характеризующая параметр масштаба плотности распределения входной вели-

чины (помехи $\xi(n)$), конечна, то дисперсия, характеризующая параметр масштаба плотности распределения выходной величины фильтра $\zeta(n)$, превышает ее в $(d_r^-)^2 > 1$ раз, где r — порядок неминимально-фазовых объектов нормированная информационная матрица равна не $A(c^*, \sigma^2(p_0(\xi)))$, как это было ранее, а $A(a^*, b^*, d^0, (d_r^-)^2 \sigma^2(p_0(\xi)))$. Разумеется, плотность распределения $p_0(\zeta)$ теперь будет отличаться от плотности распределения $p_0(\xi)$.

Для определения плотности распределения $p_0(\zeta)$ по $p_0(\xi)$ необходимо решить задачу преобразования плотности распределения $p_0(\xi)$ линейным дискретным фильтром, передаточная функция которого равна $K_d(q)$ (6.3.9). Воспользуемся уравнением (6.3.7). Разлагая входящую в него передаточную функцию $K_d(q)$ (6.3.9) по степеням $q = e^{-p}$ и учитывая, что $q^m \xi(n) = \xi(n - m)$, представим $\varepsilon_d(n) = \zeta(n)$ в виде бесконечной суммы взвешенных помех

$$\varepsilon_d(n) = \zeta(n) = \xi(n) + \sum_{m=1}^{\infty} \beta_m \xi(n - m), \quad (6.3.15)$$

где β_m — коэффициенты, стремящиеся к нулю при $m \rightarrow \infty$. Определение плотности распределения $p_0(\zeta)$ теперь сводится к определению плотности распределения суммы взвешенных независимых случайных помех, т. е. к многократному применению операции свертки к плотности распределения помех $p_0(\xi)$. Эта громоздкая операция может быть обойдена, если воспользоваться понятием характеристической функции $\chi_0(t)$, которая связана с плотностью распределения $p_0(\xi)$ прямым преобразованием Фурье

$$\chi_0(t) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{j t \xi} p_0(\xi) d\xi. \quad (6.3.16)$$

Примеры некоторых плотностей распределения и соответствующих характеристических функций приведены в табл. 6.1. Здесь же приведены и основные свойства плотностей распределения и соответствующих им характеристических функций для суммы независимых случайных величин $\xi_1 + \xi_2$ и случайной величины $\beta \xi$. Поскольку характеристическая функция суммы независимых величин равна произведению характеристических функций слагаемых, то из (6.3.15) получаем

$$\chi(t) = \chi_0(t) \prod_{m=1}^{\infty} \chi_0(\beta_m t), \quad (6.3.17)$$

и, значит, согласно обратному преобразованию Фурье

$$p_0(\zeta) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-j t \zeta} \chi(t) dt. \quad (6.3.18)$$

Таблица 6.1

Плотности распределения $p_0(\xi)$ и характеристические функции $\chi_0(t)$

№	$p_0(\xi)$	$\chi_0(t)$
1	$\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-jt\xi} \chi(t) dt$	$\int_{-\infty}^{\infty} e^{jt\xi} p_0(\xi) d\xi$
2	$\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{\xi^2}{2\sigma^2}}$	$e^{-\frac{\sigma^2 t}{2}}$
3	$\frac{s}{\pi} \frac{1}{s^2 + \xi^2}$	$e^{-s t }$
4	$\frac{1}{2s} e^{-\frac{ \xi }{s}}$	$\frac{1}{1+s^2t^2}$
5	$p_0(\xi) = p_1(\xi) * p_2(\xi) =$ $= \int_{-\infty}^{\infty} p_1(\eta) p_2(\xi - \eta) d\eta$	$\chi_0(t) = \chi_1(t) \chi_2(t)$
6	$p_0(\xi) = \frac{1}{\beta} p(\xi/\beta)$	$\chi_0(t) = \chi(\beta t)$

Как видно из табл. 6.1 и (6.3.17), (6.3.18), в общем случае $\chi(t)$ функционально отличается от $\chi_0(t)$, а значит, и $p_0(\zeta)$ функционально отличается от $p_0(\xi)$. Явное аналитическое выражение для $p_0(\zeta)$ (6.3.18) удается найти лишь в редких случаях. Физически это означает, что, вообще говоря, фильтр преобразует заданные плотности распределения $p_0(\xi)$ — скажем, типа Лапласа $L(0, s)$, секансную $Se(0, s)$, логистическую $Lo(0, s)$, — в плотности распределения $p_0(\zeta)$ нового типа, ранее не встречавшиеся в статистике. Эти новые плотности могут быть найдены лишь численными методами по формулам (6.3.16), (6.3.17). Единственное, что можно сказать относительно этих плотностей, это то, что их параметр масштаба (дисперсия) удовлетворяет равенству (6.3.14).

Однако существуют такие плотности распределения $p_0(\xi)$, которые преобразуются дискретным фильтром в плотности распределений

$p_0(\zeta)$ того же типа, отличающиеся лишь параметром масштаба. Такие плотности распределения называются в статистике *устойчивыми*. Не трудно видеть, что к устойчивым плотностям распределения среди симметричных плотностей относятся нормальная плотность распределения $N(0, \sigma^2)$ и плотность распределения Коши $C(0, s)$. Это следует из того, что соответствующие им характеристические функции $\chi_0(t)$ — экспоненциальные (см. табл. 6.1), а произведение экспоненциальных функций — также экспоненциальная функция. Найденная по ней плотность распределения, таким образом, либо нормальна, если $p_0(\xi)$ нормальная, либо типа Коши, если $p_0(\xi)$ типа Коши.

Если

$$p_0(\xi) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{\xi^2}{2\sigma^2}}, \quad (6.3.19)$$

то

$$p_0(\zeta) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}d_r^-\sigma} e^{-\frac{\zeta^2}{2(d_r^-\sigma)^2}}. \quad (6.3.20)$$

Этот факт следует также из устойчивости нормальной плотности распределения и выражения дисперсии выходной величины фильтра (6.3.14).

Если же

$$p_0(\xi) = \frac{1}{\pi} \frac{s}{s^2 + \xi^2}, \quad (6.3.21)$$

то

$$p_0(\zeta) = \frac{1}{\pi} \frac{s \sum_{m=0}^{\infty} |\beta_m|}{\left(s \sum_{m=0}^{\infty} |\beta_m|\right)^2 + \zeta^2}, \quad \beta_0 = 1. \quad (6.3.22)$$

При неполной априорной информации относительно плотности распределения помех мы располагаем лишь сведениями о классе, которому принадлежит плотность распределения помех $p_0(\xi)$, и возникает вопрос: если $p_0(\xi) \in \mathcal{P}$, то какому классу будет принадлежать преобразованная линейным фильтром плотность распределения $p_0(\zeta)$? В ряде случаев ответ на этот вопрос получить нетрудно.

Если $p_0(\xi)$ принадлежит классу невырожденных распределений \mathcal{P}_1 , то, очевидно, и $p_0(\zeta)$ принадлежит этому же классу, но условие $p_0(\xi)|_{\xi=0} \geq 1/(2s_1) > 0$ теперь заменится на $p_0(\zeta)|_{\zeta=0} \geq 1/(2s_d) > 0$, где $s_d = s_1 d_r^-$.

Если $p_0(\xi)$ принадлежит классу распределений с ограниченной дисперсией \mathcal{P}_2 , то в силу соотношения (6.3.14) и $p_0(\zeta)$ будет также при-

надлежать этому классу, но теперь условие $\sigma^2(p_0) \leq \sigma_1^2$ заменяется на $\sigma_\zeta^2 \leq (d_r^- \sigma_1)^2$.

Если $p_0(\xi)$ принадлежит классу финитных распределений \mathcal{P}_6 , то и $p_0(\zeta)$ будет также принадлежать этому же классу, но теперь условие $\int_{-l}^l p_0(\xi) d\xi = 1$ заменится на $\int_{-l d_r^-}^{l d_r^-} p_0(\zeta) d\zeta = 1$.

Можно предположить, что если $p_0(\xi)$ принадлежит классу приближенно нормальных распределений \mathcal{P}_3 , то и $p_0(\xi)$ будет принадлежать этому же классу, но представление плотностей распределения, входящих в этот класс $p_0(\xi) = (1 - \alpha)p_N(\xi) + \alpha q(\xi)$, теперь заменится на $p_0(\zeta) = (1 - \alpha_d)p_N(\zeta) + \alpha_d q(\zeta)$, где $p_N(\zeta) = N(0, (d_r^- \sigma_N)^2)$ — нормальная плотность распределения, $q(\zeta)$ — произвольная плотность распределения, а $\alpha_d \in (0, 1)$ подлежит определению. Эта задача пока не имеет точного решения. Также отсутствуют решения и для других классов.

§ 6.4. Оптимальные и оптимальные на классе функции потерь

Среди всех плотностей распределения только нормальная плотность распределения обладает тем свойством, что если $\zeta(n)$ некоррелированы, то они будут и независимы. Для всех иных плотностей распределения $\zeta(n)$ будут зависимы. Поэтому, строго говоря, для неминимально-фазовых по возмущению объектов только для нормальной плотности распределения $p_0(\xi)$, соответствующей квадратичной функции потерь, могут быть строго обоснованы оптимальные и оптимальные на классе \mathcal{P}_2 функции потерь. Во всех остальных случаях строгое обоснование оптимальных и оптимальных на классе функций потерь, отличных от квадратичных, пока отсутствует. Но несмотря на это, мы по аналогии будем ими пользоваться.

Оптимальную функцию потерь для неминимально-фазовых по возмущению объектов будем определять так же, как и для минимально-фазовых объектов, используя $p_0(\zeta)$ вместо плотности распределения $p_0(\xi)$. Оптимальную функцию потерь, определяющую оптимальные средние потери и фигурирующую в абсолютно оптимальных алгоритмах идентификации, запишем в виде

$$F_0[\varepsilon(z(n), c)] = -\ln p_0(\zeta) \Big|_{\zeta=\varepsilon(z(n), c)}. \quad (6.4.1)$$

Для устойчивых плотностей распределения плотности $p_0(\zeta)$ находятся в явной форме (для нормальной плотности распределения и плотности распределения Коши). В остальных случаях приходится прибегать к предварительному вычислению интеграла (6.3.16), что в общем случае можно сделать лишь численными методами. Однако вряд ли стоит этим заниматься. Ведь на этом пути оптимальная функция потерь может быть получена лишь приближенно, и, следовательно, в ряде случа-

ев мы можем столкнуться с сильной чувствительностью оптимального решения и его оценки, вызванной отклонением приближенной функции потерь от точной.

При неполной априорной информации относительно помех будем использовать оптимальную на классе функцию потерь

$$F_*[\varepsilon(z, c)] = -\ln p_*(\zeta) \Big|_{\zeta=\varepsilon(z(n), c)}, \quad (6.4.2)$$

где $p_*(\zeta)$ — наименее благоприятная плотность распределения для данного класса, соответствующего заданному уровню априорной информации о помехах. Используя свойства преобразования плотностей распределения фильтром (6.3.9), нетрудно для ряда классов \mathcal{P} найти наименее благоприятную плотность распределения $p_*(\zeta)$, а значит, и оптимальную на классе функцию потерь $F_*[\varepsilon]$ (6.4.2).

Так, для Р-объектов наименее благоприятная плотность распределения определяется из условия минимума фишеровской информации $I(p_0)$. Вспоминая, что плотности распределения $p_0(\xi)$ и $p_0(\zeta)$ хотя и различны, но при конечной дисперсии отличаются параметрами масштаба s и $d_r^- s$, запишем условия, определяющие классы распределений.

Класс невырожденных распределений:

$$\mathcal{P}'_1 = \left\{ p_0(\zeta) : p_0(0) \Big|_{\zeta=0} \geq \frac{1}{2s_1 d_r^-} > 0 \right\}. \quad (6.4.3)$$

Класс распределений с ограниченной дисперсией:

$$\mathcal{P}'_2 = \left\{ p_0(\zeta) : \sigma_\zeta^2 = \int_{-\infty}^{\infty} \zeta^2 p_0(\zeta) d\zeta \leq (d_r^- \sigma_1)^2 \right\}. \quad (6.4.4)$$

Класс приближенно нормальных распределений:

$$\mathcal{P}'_3 = \left\{ p_0(\zeta) : p_0(\zeta) = (1 - \alpha_d) p_N(\zeta) + \alpha_d q(\zeta) \right\}, \quad (6.4.5)$$

где $p_N(\zeta) = N(0, (d_r^- \sigma_N)^2)$, $q(\zeta)$ — произвольная плотность распределения, а коэффициент $\alpha_d \in (0, 1)$ подлежит определению.

Класс финитных распределений:

$$\mathcal{P}'_6 = \left\{ p_0(\zeta) : \int_{-l d_r^-}^{l d_r^-} p_0(\zeta) d\zeta = 1 \right\}. \quad (6.4.6)$$

Из определения этих классов следует, что мы можем воспользоваться ранее найденными наименее благоприятными плотностями распределения для минимально-фазовых Р-объектов (см. § 3.5), изменив в них параметры масштаба s или σ_1 на $d_r^- s$ или на $d_r^- \sigma_1$ и параметр α на α_d .

Заметим, что вряд ли нужно стремиться для класса \mathcal{P}'_3 точно определять значение α_d : влияние неточного значения на эффективность оценивания, как было отмечено ранее (см. § 5.4), невелико.

Для РАР-объектов и класса распределений с ограниченной дисперсией \mathcal{P}'_2 , а также для АР-объектов и класса распределений с ограниченной снизу дисперсией \mathcal{P}'_{21} , если последняя достаточно мала, наименее благоприятная плотность распределения — нормальная, и, значит, оптимальная на классе функция потерь — квадратичная. В остальных случаях оптимальные на классе функции потерь могут быть найдены лишь численными методами.

§ 6.5. Абсолютно оптимальные и абсолютно оптимальные на классе алгоритмы

Определив оптимальные или оптимальные на классе функции потерь, нетрудно по описанным ранее правилам сформировать абсолютно оптимальные на классе алгоритмы идентификации неминимально-фазовых по возмущению объектов.

Поскольку абсолютно оптимальные алгоритмы являются частным случаем абсолютно оптимальных на классе алгоритмов при вырождении класса распределений в единственное распределение, мы ограничимся рассмотрением последних. Эти алгоритмы имеют обычный вид:

$$\begin{aligned} c(n) &= c(n-1) + \hat{\Gamma}(n) F'_*[\varepsilon(z(n), c(n-1))] v(n), \\ c(0) &= c_0, \end{aligned} \quad (6.5.1)$$

$$v(n) = x(n) - \sum_{m=1}^N d_m(n-1) v(n-m), \quad (6.5.2a)$$

$$v(m) = 0, \quad m = 0, -1, \dots, -N+1,$$

$$\hat{\Gamma}(n) = \hat{\Gamma}(n-1) - \frac{\hat{\Gamma}(n-1) v(n) v^\top(n) \hat{\Gamma}(n-1)}{I^{-1}(p_*) + v^\top(n) \hat{\Gamma}(n-1) v(n)}, \quad (6.5.2b)$$

$$\hat{\Gamma}(0) = \gamma E, \quad \gamma \gg 1,$$

или

$$\begin{aligned} c(n) &= c(n-1) + \hat{K}(n) F'_*[\varepsilon(z(n), c(n-1))], \\ c(0) &= c_0, \end{aligned} \quad (6.5.3)$$

где

$$\hat{K}(n) = \hat{\Gamma}(n) \nabla_c f(x(n), c(n-1)) = \frac{\hat{\Gamma}(n-1) v(n) I^{-1}(p_*)}{I^{-1}(p_*) + v^\top(n) \hat{\Gamma}(n-1) v(n)}. \quad (6.5.4)$$

Матрицы усиления $\hat{\Gamma}(n)$ и, значит, $\hat{\Gamma}(n-1)$ определяются из рекуррентного соотношения (6.5.26), а $v(n)$ определяется из (6.5.2а).

Все эти алгоритмы внешне не отличаются от алгоритмов идентификации минимально-фазовых по возмущению объектов. Однако

в них производные оптимальных на классе функций потерь, $F'_*(\varepsilon)$, и фишеровские информации $I(p_*)$ существенно зависят от порядка неминимально-фазовости; кроме того, порождаемые алгоритмами оценки вспомогательных параметров $d_m(n)$ с ростом n стремятся не к d_1^* , а к $d_1^0 \neq d_1^*$.

Так, в случае, когда полином возмущения $P_\xi(q) = 1 + d_1^* q$, $|d_1^*| > 1$, имеет первый порядок, оценки $d_1(n)$ стремятся к $1/d_1^*$ (см. рис. 6.2).

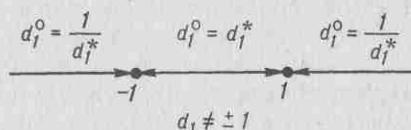


Рис. 6.2

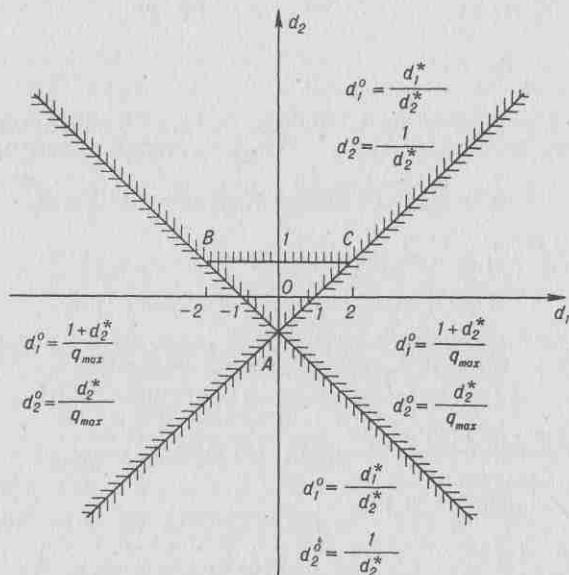


Рис. 6.3

Для неминимально-фазового полинома возмущения второго порядка $P_\xi(q) = 1 + d_1^* q + d_2^* q^2$, параметры d_1^* и d_2^* которого принадлежат всей плоскости (d_1, d_2) кроме треугольника ABC (рис. 6.3), оценки $d_1(n)$ и $d_2(n)$ стремятся к значениям, которые принадлежат треугольнику ABC . Предельные значения $d_1(n)$ и $d_2(n)$ определяются значениями

d_1^* и d_2^* рассчитываются для каждой области в соответствии с формулами, приведенными на рис. 6.3. В этих формулах q_{\max} равно наибольшему по модулю среди чисел

$$q_1 = -\frac{d_1^*}{2} - \sqrt{\left(\frac{d_1^*}{2}\right)^2 - d_2^*},$$

и

$$q_2 = -\frac{d_1^*}{2} + \sqrt{\left(\frac{d_1^*}{2}\right)^2 - d_2^*}.$$

Конкретные алгоритмы идентификации неминимально-фазовых по возмущению объектов, зависящие от уровня априорной информации о помехах, т. е. от классов распределений, получаются из (6.5.1), (6.5.2) или (6.5.3), (6.5.4) при замене в них $F_*[\varepsilon]$ и $I(p_*)$ соответствующими этому уровню априорной информации выражением $F'_*[\varepsilon]$ и значением $I(p_*)$; мы их здесь приводить не будем.

§ 6.6. Примеры

Рассмотрим пример применения абсолютно оптимальных на классе алгоритмов для идентификации неминимально-фазового по помехе динамического объекта, который описывается разностным уравнением вида

$$y(n) = 0,9y(n-1) + u(n) + 2u(n-1) + 0,1u(n-2) + \xi(n) + 7\xi(n-1) + 12\xi(n-2), \quad (6.6.1)$$

если известно, что помеха обладает ограниченной дисперсией.

Абсолютно оптимальным на классе распределений с ограниченной дисперсией алгоритмом является алгоритм типа МНК:

$$\begin{aligned} c(n) &= c(n-1) + \hat{\Gamma}(n) v(n) \varepsilon(z(n), c(n-1)), \\ c(0) &= c_0, \end{aligned} \quad (6.6.2)$$

$$\hat{\Gamma}(n) = \hat{\Gamma}(n-1) - \frac{\hat{\Gamma}(n-1) v(n) v^T(n) \hat{\Gamma}(n-1)}{1 + v^T(n) \hat{\Gamma}(n-1) v(n)}, \quad (6.6.3)$$

$$\hat{\Gamma}(0) = \gamma E, \quad \gamma \gg 1,$$

где

$$\begin{aligned} v(n) &= -d_1(n-1) v(n-1) - d_2(n-1) v(n-2) + x(n), \\ v(0) &= 0, \quad v(-1) = 0, \\ \varepsilon(z(n), c(n-1)) &= \varepsilon(n) = y(n) - c^T(n-1) x(n), \end{aligned} \quad (6.6.4)$$

и

$$\begin{aligned} \mathbf{z}(n) &= (y(n-1), u(n), u(n-1), u(n-2), \varepsilon(n-1), \varepsilon(n-2)), \\ \mathbf{c}(n) &= (a_1(n), b_0(n), b_1(n), b_2(n), d_1(n), d_2(n)). \end{aligned} \quad (6.6.5)$$

Результаты идентификации объекта (6.6.1) с помощью алгоритма (6.6.2), (6.6.3) при гауссовой помехе $N(0, 1)$ приведены на рис. 6.4. Кривая a на рис. 6.4 показывает изменение усредненной по 100 реализациям ошибки основных параметров $M\{\|a(n) - a^*\|^2 + \|b(n) - b^*\|^2\}$, а кривая b — ошибки вспомогательных параметров $M\{\|d(n) - d^*\|^2\}$ в зависимости от n .

Из рис. 6.4 следует, что величина $M\{\|a(n) - a^*\|^2 + \|b(n) - b^*\|^2\}$ стремится к нулю, т. е. основные параметры $a_1(n), b_0(n), b_1(n)$ и $b_2(n)$ стремятся к истинным параметрам $a_1^* = 0,9, b_0^* = 1, b_1^* = 2, b_2^* = 0,1$. Вспомогательные параметры $d_1(n)$ и $d_2(n)$ не стремятся к истинным значениям $d_1^* = 7$ и $d_2^* = 12$, и поэтому величина $M\{\|d(n) - d^*\|^2\}$ не стремится к нулю. Предельное значение $d_1(n)$ равно $7/12$, а предельное значение $d_2(n)$ равно $1/12$, так что $\lim_{n \rightarrow \infty} M\{\|d(n) - d^*\|^2\} = (7 - \frac{7}{12})^2 + (12 - \frac{1}{12})^2 = 183,2$.

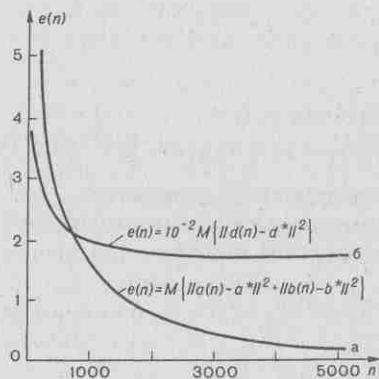


Рис. 6.4

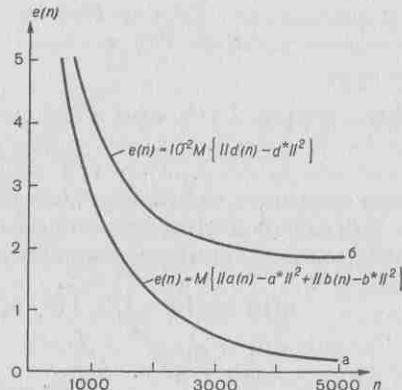


Рис. 6.5

Аналогичная ситуация имеет место при идентификации этого же объекта (6.6.1) при лапласовой помехе $L(0, 1)$ абсолютно оптимальным на классе невырожденных распределений алгоритмом типа наименьших модулей:

$$\begin{aligned} \mathbf{c}(n) &= \mathbf{c}(n-1) + \widehat{\Gamma}(n) \mathbf{v}(n) \operatorname{sign} \varepsilon(\mathbf{z}(n), \mathbf{c}(n-1)), \\ \mathbf{c}(0) &= \mathbf{c}_0, \end{aligned} \quad (6.6.6)$$

и

$$\begin{aligned}\hat{\Gamma}(n) &= \hat{\Gamma}(n-1) - \frac{\hat{\Gamma}(n-1) v(n) v^T(n) \hat{\Gamma}(n-1)}{1 + v^T(n) \hat{\Gamma}(n-1) v(n)}, \\ \hat{\Gamma}(0) &= \gamma E, \quad \gamma \gg 1.\end{aligned}\quad (6.6.7)$$

Обозначения в выражениях (6.6.6), (6.6.7) полностью совпадают с обозначениями (6.6.4), (6.6.5).

На рис. 6.5 показаны результаты идентификации объекта (6.6.1) алгоритмом (6.6.6), (6.6.7). Кривая a соответствует усредненной по 100 реализациям ошибке основных параметров a и b , а кривая b — ошибке вспомогательных параметров d . Как и следовало ожидать, кривые на рис. 6.4 и 6.5 достаточно похожи. Отметим, что при идентификации объекта (6.6.1) алгоритмом (6.6.2) помеха $\xi(n)$ имела гауссово распределение с $\sigma_N^2 = 1$, а при идентификации алгоритмом (6.6.6), (6.6.7) плотность распределения помехи являлась смесью двух нормальных распределений с дисперсиями, равными $\sigma_N^2 = 1$ и $\sigma^2(q) = 100$ соответственно. Оценки основных параметров стремятся к истинным значениям параметров объекта a^* , b^* , а оценки вспомогательных параметров — к значениям d^0 , отличным от d^* .

§ 6.7. Заключение

Идентификация неминимально-фазовых по возмущению объектов долгое время считалась невозможной. В действительности это оказалось не так. Но если при идентификации минимально-фазовых объектов мы можем точно восстановить все параметры — как основные a_m^* , b_m^* , так и вспомогательные d_m^* , — то при идентификации неминимально-фазовых систем точно восстанавливаются основные параметры a_m^* , b_m^* . Что же касается вспомогательных параметров d_m^* , то их оценки стремятся к значениям d_m^0 , которые функционально связаны с d_m^* , но, вообще говоря, не совпадают с ними. Во многих случаях, однако, нет необходимости в определении d_m^* , поскольку они могут быть выражены через основные параметры.

Отметим, что оптимальная настраиваемая модель остается прежней. Что же касается оптимальных функций потерь, то они также качественно не изменяются при нормальных помехах и помехах типа Коши. Это связано с тем, что при формировании абсолютно оптимальных и абсолютно оптимальных на классе алгоритмов идентификации неминимально-фазовых по возмущению объектов возникают новые задачи, связанные с преобразованием плотностей распределения и классов их линейным дискретным фильтром. Этот фильтр характеризуется тем, что модуль его частотной характеристики не зависит от частоты, хотя зависимость фазовой характеристики от ча-

стоты остается. Аналитическое решение этих задач возможно лишь в случае нормальных помех и помех типа Коши, которые обладают свойством устойчивости, воспроизводимости (при прохождении помех через линейный фильтр их плотности распределения качественно не изменяются). В общем случае приходится прибегать к численным методам решения, при этом оптимальные функции потерь существенно меняются по сравнению со случаем минимально-фазовых объектов и определяются плотностью распределения помехи, преобразованной линейным фильтром. Но если тем или иным путем эти задачи решены, то алгоритмы формируются стандартным путем.

Абсолютно оптимальные и оптимальные на классе алгоритмы идентификации неминимально-фазовых по возмущению объектов к настоящему времени могут быть строго обоснованы лишь для нормальных помех, т. е. в том случае, когда они сводятся к линейным алгоритмам. Однако экспериментальное исследование подтверждает их работоспособность и эффективность и при помехах, отличных от нормальных.

Как отголоски бурь порой объединяются
В обширной, точно ночь, глубокой, точно сон,
Гармонии, звуча друг другу в унисон, —
Так запах, цвет и звук сливаются, роднятся.

Ш. Бодлер

ГЛАВА 7

Акселерантные алгоритмы идентификации

§ 7.1. Об акселеризации оценок оптимального решения

До сих пор мы занимались изучением асимптотических свойств оценок, порождаемых абсолютно оптимальными или абсолютно оптимальными на классе алгоритмами идентификации. Эти асимптотические свойства определяются априорной информацией о помехах, задаваемой, в общем случае, тем или иным классом распределений \mathcal{P} , которому принадлежит плотность распределения помех $p_0(\xi)$. В частном случае, если класс распределения помех \mathcal{P} содержит единственную плотность распределения $p_0(\xi)$, мы приходим к абсолютно оптимальным алгоритмам, обладающим максимально возможной асимптотической скоростью сходимости.

Наряду с асимптотическими свойствами алгоритмов идентификации представляют огромный интерес свойства этих алгоритмов при конечных значениях моментов наблюдений n . Эти свойства для рекуррентных алгоритмов существенно зависят от выбора начальных значений оценки $c(0)$ и матрицы усиления $\hat{\Gamma}(0)$. Как уже отмечалось выше, эти начальные значения не влияют на асимптотические свойства алгоритмов. От абсолютно оптимальных алгоритмов, так же как

и от абсолютно оптимальных на классе алгоритмов, естественно добиваться того, чтобы при неизменных присущих им асимптотических свойствах они порождали бы оценки $c(n)$, которые при конечных n обладали бы более высокой точностью, чем иные алгоритмы типа стохастической аппроксимации. Важно также рассмотреть возможность дальнейшего улучшения асимптотических свойств всех этих алгоритмов. Любые способы ускорять получение оценок заданной точности и улучшать асимптотические свойства, т. е. любые способы увеличивать скорость сходимости абсолютно оптимальных алгоритмов, будем называть *акселерацией* оценок оптимального решения.

Акселерация может быть осуществлена как путем учета априорной информации об оптимальном решении c^* , так и путем выбора надлежащих входных воздействий, используемых при идентификации. Изучению этих возможностей и посвящена настоящая глава. В ней устанавливается связь акселерации с известными методами регуляризации и планирования эксперимента.

§ 7.2. Представление априорной информации об оптимальном решении

Рассмотрим возможность вероятностного представления априорной информации об оптимальном решении c^* . Как правило, такая априорная информация может быть представлена в виде тех или иных областей в пространстве решений, внутри которых — точно или приближенно — должно находиться оптимальное решение c^* . Попытаемся связать ограничения подобного рода с некоторыми плотностями распределения.

Наряду с детерминированным оптимальным решением c^* рассмотрим рандомизированное оптимальное решение

$$v = c^* + w, \quad (7.2.1)$$

где w — случайный вектор, который мы назовем *вектором рандомизации*. Пусть $r_\Phi(w)$ — плотность распределения вектора w . Заметим, что эта плотность, в отличие от плотности распределения помех $r_0(\xi)$, не является плотностью частотного распределения, а характеризует лишь степень нашего знания области принадлежности оптимального решения c^* . Чтобы подчеркнуть эту особенность плотности распределения $r_\Phi(w)$, ее называют *фидуциальной*, т. е. основанной на вере, убеждении (об этом будет напоминать индекс « Φ »). Таким образом, в отличие от физической рандомизации, широко применяемой, скажем, для вибрационной линеаризации релейных систем, для осуществления случайного поиска оптимального решения и т. п., — рандомизация оптимального решения (7.2.1) является мысленной, будучи лишь способом выражения наших сведений об оптимальном решении c^* .

Итак, рандомизированное решение v (7.2.1) характеризуется плотностью распределения

$$p_{\Phi}(v|c^*) = p_{\Phi}(v - c) = p_{\Phi}(w). \quad (7.2.2)$$

Оптимальное решение $c^* = (c_1^*, c_2^*, \dots, c_{N_c}^*)$ представляет собой вектор размерности N_c . Эту же размерность имеют рандомизированное оптимальное решение v и вектор рандомизации w . Будем предполагать, что компоненты вектора рандомизации независимы. Это означает, что

$$p_{\Phi}(w) = p_{\Phi}(w_1, w_2, \dots, w_{N_c}) = \prod_{\nu=1}^{N_c} p_{\Phi}(w_{\nu}), \quad (7.2.3)$$

и, следовательно,

$$\ln p_{\Phi}(w) = \ln p_{\Phi}(w_1, w_2, \dots, w_{N_c}) = \sum_{\nu=1}^{N_c} \ln p_{\Phi}(w_{\nu}), \quad (7.2.4)$$

где $p_{\Phi}(w_{\nu})$ — одномерные фидуциальные плотности распределения.

Допустим теперь, что мы знаем — точно или приближенно, с той или иной степенью точности, — что оптимальное решение c^* принадлежит области, представляющей собой N_c -мерный параллелепипед Ω_{N_c} . Тогда ребра этого параллелепипеда $2l_{\nu}$, $\nu = 1, \dots, N_c$, определяют дисперсии фидуциальных плотностей распределений. В случае, когда наша информация о принадлежности оптимального решения c^* параллелепипеду Ω_{N_c} является приближенной, можно принять фидуциальную плотность распределения нормальной (рис. 7.1):

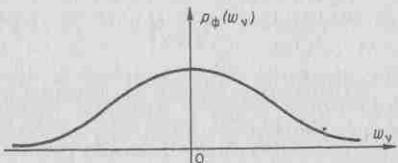


Рис. 7.1

$$p_{\Phi}(w_{\nu}) = \frac{1}{\sqrt{2\pi} \sigma_{\Phi\nu}} e^{-\frac{w_{\nu}^2}{2\sigma_{\Phi\nu}^2}}, \quad \nu = 1, \dots, N_c, \quad (7.2.5)$$

с фидуциальной дисперсией

$$\sigma_{\Phi\nu}^2 = \frac{1}{9} l_{\nu}^2, \quad \nu = 1, \dots, N_c. \quad (7.2.6)$$

Эта фидуциальная плотность распределения является также наименее благоприятной для класса \mathcal{P}_2 распределений с ограниченными дисперсиями $\sigma^2(p_0) \leq \sigma_{\Phi\nu}^2$.

Если же нам точно известно, что оптимальное решение c^* принадлежит параллелепипеду Ω_{N_c} , то можно воспользоваться наименее благоприятным для класса финитных распределений \mathcal{P}_6 распределением с плотностью

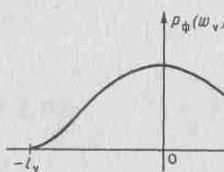


Рис. 7.2

$$p_{\Phi}(w_{\nu}) = \begin{cases} \frac{1}{l_{\nu}} \cos^2 \frac{\pi w_{\nu}}{2l_{\nu}}, & |w_{\nu}| < l_{\nu}, \\ 0, & |w_{\nu}| \geq l_{\nu}, \end{cases} \quad (7.2.7)$$

(рис. 7.2) и дисперсией, равной

$$\sigma_{\Phi\nu}^2 = \left(\frac{1}{3} - \frac{2}{\pi^2} \right) l_{\nu}^2 \approx 0,13 l_{\nu}^2. \quad (7.2.8)$$

Фишеровские информации для этих фидуциальных плотностей распределения (см. табл. 2.1) соответственно равны

$$I(p_{\Phi\nu}) = \sigma_{\Phi\nu}^{-2} = 9 l_{\nu}^{-2}, \quad \nu = 1, \dots, N_c, \quad (7.2.9)$$

и

$$I(p_{\Phi\nu}) = \left(\frac{\pi^2}{3} - 2 \right) \sigma_{\Phi\nu}^{-2}, \quad \nu = 1, \dots, N_c. \quad (7.2.10)$$

Выбранные выше фидуциальные плотности распределения (7.2.5), (7.2.7) являются наиболее естественным выражением априорной информации об оптимальных решениях. Как будет ясно из дальнейшего, замена их иными плотностями распределения, обладающими конечными фишеровскими информацией, — например, лапласовой, логистической, Коши или финитной, — не вносит каких-либо существенных изменений в получаемые результаты. Поэтому далее априорная информация о решении будет всегда характеризоваться фидуциальным распределением, наименее благоприятным либо для класса распределений с ограниченной дисперсией \mathcal{P}_2 , т. е. с нормальной плотностью распределения (7.2.5), либо для класса финитных распределений \mathcal{P}_6 , т. е. с квадратично-косинусоидальной плотностью распределения (7.2.7).

§ 7.3. Обобщенные эмпирические средние потери

До сих пор мы рассматривали эмпирические средние потери вида (2.1.1)

$$\hat{J}_n(c) = \frac{1}{n} \sum_{m=1}^n F[\varepsilon(z(m), c)]. \quad (7.3.1)$$

При оптимальной функции потерь

$$F[\varepsilon] = F_0[\varepsilon] = -\ln p_0(\xi) \Big|_{\xi=\varepsilon} \quad (7.3.2)$$

оптимальные эмпирические средние потери

$$\hat{J}_n^0(c) = \frac{1}{n} \sum_{m=1}^n F_0[\varepsilon(z(m), c)] \quad (7.3.3)$$

учитывают априорную информацию относительно помех, задаваемую плотностью распределения помех $p_0(\xi)$.

Обобщим теперь определение эмпирических средних потерь так, чтобы они учитывали и априорную информацию относительно оптимального решения c^* , задаваемую фидуциальной плотностью распределения $p_\Phi(w)$. Определим дополнительную функцию потерь по аналогии с основной оптимальной функцией потерь (7.3.2), а именно,

$$F_\Phi[v - c] = -\ln p_\Phi(w) \Big|_{w=v-c}. \quad (7.3.4)$$

Если невязка $\varepsilon(z(n), c)$ в основной оптимальной функции потерь $F_0[\varepsilon]$ является функцией наблюдений $z(n)$, $n = 1, 2, \dots$, то разность $v - c$ в дополнительной функции потерь зависит не от наблюдаемых величин, а от априорных сведений относительно оптимального решения c^* . Эти априорные сведения могут определяться, например, как $v = c^a$.

Для учета априорной информации об оптимальном решении введем понятие обобщенных эмпирических средних потерь. Определим обобщенные эмпирические средние потери для оптимальной функции потерь следующим образом:

$$\hat{J}_{(n)}^0(c) = \frac{1}{n} \sum_{m=1}^n F_0[\varepsilon(z(m), c)] + \frac{1}{n} F_\Phi[c^a - c]. \quad (7.3.5)$$

Обобщенные эмпирические средние потери $\hat{J}_{(n)}^0(c)$ (7.3.5) отличаются от средних потерь $\hat{J}_n^0(c)$ (7.3.3) тем, что они при $n = 1$ равны не $F_0[\varepsilon(z(1), c)]$, как в (7.3.3), а $F_0[\varepsilon(z(1), c)] + F_\Phi[c^a - c]$, т. е. зависят не только от наблюдения $z(1)$, но и от априорной информации c^a об оптимальном решении c^* . Принимая во внимание (7.3.3), запишем обобщенные эмпирические средние потери (7.3.5) в виде

$$\hat{J}_{(n)}^0(c) = \hat{J}_n^0(c) + \frac{1}{n} F_\Phi[c^a - c]. \quad (7.3.6)$$

Градиент обобщенных эмпирических средних потерь будет равен

$$\nabla \hat{J}_{(n)}^0(c) = \nabla \hat{J}_n^0(c) + \frac{1}{n} \nabla F_\Phi[c^a - c]. \quad (7.3.7)$$

Оценка $c^0(n)$, минимизирующая обобщенные эмпирические средние потери $\hat{J}_{(n)}^0(c)$, удовлетворяет условию оптимальности

$$\nabla \hat{J}_{(n)}^0(c^0(n)) = \nabla \hat{J}_n^0(c^0(n)) + \frac{1}{n} \nabla F_\Phi[c^a - c^0(n)] = 0, \quad n = 1, 2, \dots \quad (7.3.8)$$

С ростом числа наблюдений $n \rightarrow \infty$ различие между $\hat{J}_{(n)}^0(c)$ и $\hat{J}_n^0(c)$, а также их градиентами $\nabla \hat{J}_{(n)}^0(c)$ и $\nabla \hat{J}_n^0(c)$ устраняется, и они стремятся к средним потерям $J^0(c)$ и их градиентам $\nabla J^0(c)$ соответственно. Значит, при $n \rightarrow \infty$ влияние априорной информации на оценку $c^0(n) \rightarrow c^*$ устраняется.

7.4. Акселерантные абсолютно оптимальные алгоритмы

Алгоритмы, порождаемые условием оптимальности вида (7.3.8), учитывающим априорную информацию об оптимальном решении, как выше было установлено, назовем *акселерантными*. Для формирования акселерантных алгоритмов воспользуемся одной из разновидностей алгоритмов Ньютона — Рафсона для решения системы нелинейных уравнений. В общем случае

$$\begin{aligned} c(n) &= c(n-1) - [\nabla^2 \hat{J}_{(n)}^0(c)]^{-1} \nabla \hat{J}_{(n)}^0(c(n-1)), \\ c(0) &= c_0 = c^a. \end{aligned} \quad (7.4.1)$$

Выбор вектора c в матрице Гессе $\nabla^2 \hat{J}_{(n)}^0(c)$ определяет ту или иную разновидность алгоритма Ньютона — Рафсона. При $c = c(n-1)$ из (7.4.1) получаем классический алгоритм Ньютона — Рафсона

$$\begin{aligned} c(n) &= c(n-1) - [\nabla^2 \hat{J}_{(n)}^0(c(n-1))]^{-1} \nabla \hat{J}_{(n)}^0(c(n-1)), \\ c(0) &= c^a. \end{aligned} \quad (7.4.2)$$

При $c = c_0 = c^a$ из (7.4.1) следует модифицированный алгоритм Ньютона — Рафсона

$$\begin{aligned} c(n) &= c(n-1) - [\nabla^2 \hat{J}_{(n)}^0(c^a)]^{-1} \nabla \hat{J}_{(n)}^0(c(n-1)), \\ c(0) &= c^a. \end{aligned} \quad (7.4.3)$$

Наконец, при $c = c^*$ из (7.4.1) получим необычную модификацию алгоритма Ньютона — Рафсона

$$\begin{aligned} c(n) &= c(n-1) - [\nabla^2 \hat{J}_{(n)}^0(c^*)]^{-1} \nabla \hat{J}_{(n)}^0(c(n-1)), \\ c(0) &= c^a. \end{aligned} \quad (7.4.4)$$

Сделаем еще один шаг. Заменим в (7.4.4) матрицу Гессе $\nabla^2 \hat{J}_{(n)}^0(c^*)$ на

$$\nabla^2 J_{(n)}^0(c^*) = M\{\nabla^2 F_0[\varepsilon(z(m), c^*)]\} + \frac{1}{n} M\{\nabla^2 F_\Phi[v - c^*]\}. \quad (7.4.5)$$

Тогда эта модификация алгоритма Ньютона — Рафсона окончательно представится в виде

$$\begin{aligned} c(n) &= c(n-1) - [\nabla^2 J_{(n)}^0(c^*)]^{-1} \nabla \hat{J}_{(n)}^0(c(n-1)), \\ c(0) &= c^a. \end{aligned} \quad (7.4.6)$$

Этим алгоритмом мы и воспользуемся для формирования акселерантных алгоритмов идентификации.

Рассмотрим вначале градиент обобщенных эмпирических средних потерь, входящий в алгоритм (7.4.6):

$$\begin{aligned} \nabla \hat{J}_{(n)}^0(c(n-1)) &= -\frac{1}{n} \sum_{m=1}^n F'_0[\varepsilon(z(m), c(n-1))] v(m) + \\ &\quad + \frac{1}{n} \nabla_c F_\Phi[c^a - c(n-1)], \end{aligned} \quad (7.4.7a)$$

где

$$\begin{aligned} v(n) &= \nabla_c f(x(n), c(n-1)) = x(n) - \sum_{m=1}^N d_m(n-1) v(n-m), \\ v(m) &= 0, \quad \text{при } m = 0, -1, \dots, 1 - N. \end{aligned} \quad (7.4.7b)$$

Его можно представить в виде

$$\begin{aligned} \nabla \hat{J}_{(n)}^0(c(n-1)) &= \\ &= -\frac{n-1}{n} \nabla \hat{J}_{(n-1)}^0(c(n-1)) - \frac{1}{n} F'_0[\varepsilon(z(n), c(n-1))] v(n). \end{aligned} \quad (7.4.8)$$

Предположим, что приближенно $c(n-1)$ удовлетворяет условию оптимальности (7.3.8), т. е.

$$\nabla \hat{J}_{(n-1)}^0(c(n-1)) \approx 0. \quad (7.4.9)$$

Тогда из (7.4.8) получим

$$\nabla \hat{J}_{(n)}^0(c(n-1)) \approx -\frac{1}{n} F'_0[\varepsilon(z(n), c(n-1))] v(n). \quad (7.4.10)$$

Таким образом определяется градиент $\nabla \hat{J}_{(n)}^0(c(n-1))$, входящий в алгоритм (7.4.6). Оказывается, он зависит явно лишь от наблюдений $z(n)$ для n -го момента времени.

Теперь займемся вычислением матрицы Гессе $\nabla^2 J_{(n)}^0(c^*)$, входящей в алгоритм (7.4.6). Принимая во внимание выражение для $\nabla^2 J_{(n)}^0(c^*)$ (7.4.5), заключаем, что

$$\nabla^2 J_{(n)}^0(c^*) = I(p_0) A(c^*, \sigma^2(p_0)) + \frac{1}{n} M\{\nabla_c^2 F_\Phi[w]\}. \quad (7.4.11)$$

Но в силу (7.3.4), (7.2.1)

$$\begin{aligned} M\{\nabla_c^2 F_\Phi[w]\} &= -M\{\nabla_c^2 \ln p_\Phi(v - c)|_{c=c^*}\} = \\ &= M\left\{\frac{\nabla_c p_\Phi(w) \nabla_c^\top p_\Phi(w)}{p_\Phi(w)}\right\} = I_\Phi(p_\Phi), \quad (7.4.12) \end{aligned}$$

где $I_\Phi(p_\Phi)$ представляет собой матрицу фишеровских информаций. Таким образом,

$$\nabla^2 J_{(n)}^0(c^*) = I(p_0) A(c^*, \sigma^2(p_0)) + \frac{1}{n} I_\Phi(p_\Phi). \quad (7.4.13)$$

Если принять, что компоненты вектора рандомизации (7.2.3) независимы, то матрица фишеровских информаций (7.4.12) будет диагональной положительно определенной матрицей вида

$$I_\Phi(p_\Phi) = \begin{bmatrix} I(p_{\Phi 1}) & 0 & \dots & 0 \\ 0 & I(p_{\Phi 2}) & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & I(p_{\Phi N_c}) \end{bmatrix}. \quad (7.4.14)$$

Здесь

$$I(p_{\Phi \nu}) = M\left\{\left(\frac{p'_{\Phi \nu}(w_\nu)}{p_{\Phi \nu}(w_\nu)}\right)^2\right\}, \quad \nu = 1, \dots, N_c, \quad (7.4.15)$$

— фишеровские информации, соответствующие фидуциальным плотностям распределения компонент вектора рандомизации.

Заменяя в формуле (7.4.13) нормированную информационную матрицу $A(c^*, \sigma^2(p_0))$ ее оценкой

$$\widehat{A}_n(\mathbf{x}(n)) = \frac{1}{n} \sum_{m=1}^n \mathbf{v}(m) \mathbf{v}^\top(m), \quad (7.4.16)$$

где $\mathbf{v}(n)$ определяется из (7.4.76), получим приближенное выражение матрицы Гессе:

$$\nabla^2 J_{(n)}^0(c^*) \approx I(p_0) \widehat{A}_n(\mathbf{x}(n)) + \frac{1}{n} I_\Phi(p_\Phi). \quad (7.4.17)$$

Подставляя выражение градиента (7.4.10) и матрицы Гессе (7.4.17) в алгоритм (7.4.6), получим после уже знакомых преобразований

$$\begin{aligned} c(n) &= c(n-1) + \widehat{\Gamma}_0(n) F'_0[\varepsilon(\mathbf{z}(n), c(n-1))] \mathbf{v}(n), \\ c(0) &= c^a, \end{aligned} \quad (7.4.18)$$

где

$$\widehat{\Gamma}_0(n) = \left[I(p_0) \sum_{m=1}^n \mathbf{v}(m) \mathbf{v}^\top(m) + I_\Phi(p_\Phi) \right]^{-1}. \quad (7.4.19)$$

Применяя к матрице усиления $\widehat{\Gamma}_0(n)$ (7.4.19) лемму об обращении матриц (1.7.17), (1.7.18) с последующей заменой, если в этом есть необходимость, \mathbf{d}^* на $\mathbf{d}(n-1)$ (см. § 1.7), получим рекуррентное соотношение

$$\widehat{\Gamma}_0(n) = \widehat{\Gamma}_0(n-1) - \frac{\widehat{\Gamma}_0(n-1) \mathbf{v}(n) \mathbf{v}^\top(n) \widehat{\Gamma}_0(n-1)}{I^{-1}(p_0) + \mathbf{v}^\top(n) \widehat{\Gamma}_0(n-1) \mathbf{v}(n)}. \quad (7.4.20)$$

Начальное значение матрицы усиления $\widehat{\Gamma}_0(0)$, которое в абсолютно оптимальных алгоритмах (3.2.3), (3.2.4) принималось имеющим вид γE , где $\gamma \gg 1$, теперь становится вполне определенным. Как видно из (7.4.19), начальное значение $\widehat{\Gamma}_0(0)$ равно обратной матрице фишеровских информаций

$$\widehat{\Gamma}_0(0) = I_\Phi^{-1}(p_\Phi). \quad (7.4.21)$$

Таким образом, мы приходим к акселерантным абсолютно оптимальным алгоритмам (7.4.18) — (7.4.21), (7.4.76).

Акселерантные алгоритмы (7.4.18), (7.4.19) можно представить и в несколько иной форме:

$$\begin{aligned} c(n) &= c(n-1) + \widehat{\mathbf{K}}_0(n) F'_0[\varepsilon(\mathbf{z}(n), c(n-1))], \\ c(0) &= c^a, \end{aligned} \quad (7.4.22)$$

$$\widehat{\mathbf{K}}_0(n) = \frac{\widehat{\Gamma}_0(n-1) \mathbf{v}(n) I^{-1}(p_0)}{I^{-1}(p_0) + \mathbf{v}^\top(n) \widehat{\Gamma}_0(n-1) \mathbf{v}(n)}, \quad (7.4.23)$$

где $\mathbf{v}(n)$ определяется из (7.4.76).

Сопоставляя акселерантные абсолютно оптимальные алгоритмы (7.4.76), (7.4.18), (7.4.20), (7.4.21) или (7.4.22), (7.4.23), (7.4.20), (7.4.76), (7.4.21) с соответствующими абсолютно оптимальными алгоритмами (3.2.3), (3.2.4) или (3.2.5), (3.2.7), (3.2.4), заключаем, что они отличаются лишь начальными значениями. В акселерантных абсолютно

оптимальных алгоритмах начальные значения $c(0)$ и $\hat{\Gamma}_0(0)$ не произвольны, а определяются априорной информацией об оптимальном решении: $c(0) = c^a$, $\hat{\Gamma}_0(0) = I_\Phi^{-1}(p_\Phi)$.

Таким образом, акселеризация алгоритмов идентификации сводится к замене в них произвольных начальных значений начальными значениями, определенными априорной информацией об оптимальном решении. Блок-схемы акселерантных алгоритмов совпадают с блок-схемами абсолютно оптимальных алгоритмов рис. 1.16 (см. § 3.2) и рис. 3.1 при конкретных начальных значениях.

Мы не будем приводить здесь выражения акселерантных алгоритмов с настройкой параметра масштаба. Они образуются из оптимальных алгоритмов с настройкой параметра масштаба (3.3.25) — (3.3.27) заменой произвольных начальных значений начальными значениями, определяемыми априорной информацией об оптимальном решении и параметре масштаба, а именно:

$$c(0) = c^a, \quad \hat{\Gamma}_0(0) = I_\Phi^{-1}(p_\Phi), \quad s(0) = s^a. \quad (7.4.24)$$

Блок-схемы этих акселерантных алгоритмов совпадают с блок-схемами алгоритмов с настройкой параметра масштаба рис. 3.12 при конкретных начальных значениях (7.4.24).

§ 7.5. Акселерантные абсолютно оптимальные на классе алгоритмы

Для формирования акселерантных абсолютно оптимальных на классе алгоритмов идентификации достаточно в абсолютно оптимальных на классе алгоритмах заменить произвольные начальные значения $c(0)$ и $\hat{\Gamma}_0(0)$ начальными значениями, определяемыми априорной информацией об оптимальном решении. Вспоминая выражения абсолютно оптимальных на классе алгоритмов (5.2.21), (5.2.22), запишем акселерантные абсолютно оптимальные на классе алгоритмы в обычной форме:

$$\begin{aligned} c(n) &= c(n-1) + \hat{\Gamma}_*(n) F'_*[\varepsilon(z(n), c(n-1))] v(n), \\ c(0) &= c^a, \end{aligned} \quad (7.5.1)$$

где

$$\begin{aligned} \hat{\Gamma}_*(n) &= \hat{\Gamma}_*(n-1) - \frac{\hat{\Gamma}_*(n-1) v(n) v^T(n) \hat{\Gamma}_*(n-1)}{I^{-1}(p_*) + v^T(n) \hat{\Gamma}_*(n-1) v(n)}, \\ \hat{\Gamma}_*(0) &= I_\Phi^{-1}(p_\Phi), \end{aligned} \quad (7.5.2)$$

и в несколько иной форме:

$$\begin{aligned} c(n) &= c(n-1) + \hat{K}_*(n) F'_*(\varepsilon(z(n), c(n-1))), \\ c(0) &= c^a, \end{aligned} \quad (7.5.3)$$

где

$$\hat{K}_*(n) = \frac{\hat{\Gamma}_*(n-1) v(n) I^{-1}(p_*)}{I^{-1}(p_*) + v^T(n) \hat{\Gamma}_*(n-1) v(n)}, \quad (7.5.4)$$

а $\hat{\Gamma}_*(n)$ и, значит, $\hat{\Gamma}_*(n-1)$ определяются из рекуррентного соотношения (7.5.2), $v(n)$ — из соотношения (7.4.76).

Рассмотрим подробнее начальное значение матрицы усиления

$$\hat{\Gamma}_*(0) = I_{\Phi}^{-1}(p_{\Phi}). \quad (7.5.5)$$

Если априорная информация об оптимальном решении такова, что дисперсия рандомизированного оптимального решения ограничена, то ей соответствует фидуциальная нормальная плотность распределения (7.2.3), (7.2.5). Принимая во внимание выражение для фишеровских информаций $I(p_{\Phi\nu})$ (7.2.9), получим

$$I_{\Phi}(p_{\Phi}) = \begin{bmatrix} \frac{9}{l_1^2} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \frac{9}{l_2^2} & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \frac{9}{l_{N_c}^2} \end{bmatrix}, \quad (7.5.6)$$

и, значит, из (7.5.5) найдем

$$\hat{\Gamma}_*(0) = I_{\Phi}^{-1}(p_{\Phi}) = \begin{bmatrix} \frac{l_1^2}{9} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \frac{l_2^2}{9} & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \frac{l_{N_c}^2}{9} \end{bmatrix}. \quad (7.5.7)$$

Пусть априорная информация об оптимальном решении такова, что оптимальное решение принадлежит области, определяемой N_c -мерным параллелепипедом. Тогда ей соответствует фидуциальная финитная плотность распределения (7.2.3), (7.2.7). Принимая во внимание выражение фишеровских информаций $I(p_{\Phi\nu})$ (7.2.10), в этом случае приходим к акселерантным оптимальным на классе алгоритмам

проекционного типа

$$\begin{aligned} c(n) &= \pi\{c(n-1) + \hat{\Gamma}_*(n) F'_*[e(z(n), c(n-1))] v(n)\}, \\ c(0) &= c^a, \end{aligned} \quad (7.5.8)$$

где $\hat{\Gamma}_*(n)$ по-прежнему определяется из рекуррентного соотношения (7.5.2), или, в несколько иной форме,

$$\begin{aligned} c(n) &= \pi\{c(n-1) + \hat{K}_*(n) F'_*[e(z(n), c(n-1))]\}, \\ c(0) &= c^a, \end{aligned} \quad (7.5.9)$$

где $\hat{K}_*(n)$ по-прежнему определяется соотношениями (7.5.4), (7.5.2).

В этих проекционных алгоритмах $\pi\{\cdot\}$ представляет собой проектор на область финитности. Это векторный функциональный преобразователь, и в нашем случае он имеет вид

$$\pi\{c\} = (\pi_1\{c_1\}, \pi_2\{c_2\}, \dots, \pi_{N_c}\{c_{N_c}\}), \quad (7.5.10)$$

где

$$\pi_k\{c_k\} = \begin{cases} c_k^a + l_k, & c_k \geq c_k^a + l_k, \\ c_k, & |c_k - c_k^a| < l_k, \\ c_k^a - l_k, & c_k \leq c_k^a + l_k, \end{cases} \quad (7.5.11)$$

а c_k^a, l_k — постоянные; начальные значения для проекционных алгоритмов имеют прежний вид: $c(0) = c^a$ и $\hat{\Gamma}_*(0) = I_\Phi^{-1}(p_\Phi)$. Но теперь фишеровские информации вместо (7.2.9) определяются выражениями (7.2.10) и, значит,

$$I_\Phi(p_\Phi) = \begin{bmatrix} \frac{\pi^2}{l_1^2} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \frac{\pi^2}{l_2^2} & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \frac{\pi^2}{l_{N_c}^2} \end{bmatrix}. \quad (7.5.12)$$

Следовательно, начальное значение матрицы усиления

$$\hat{\Gamma}_*(0) = I_\Phi^{-1}(p_\Phi) = \begin{bmatrix} \frac{l_1^2}{\pi^2} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \frac{l_2^2}{\pi^2} & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \frac{l_{N_c}^2}{\pi^2} \end{bmatrix}. \quad (7.5.13)$$

Блок-схемы проекционных акселерантных алгоритмов (7.5.8), (7.5.2) и (7.5.9), (7.5.4), (7.5.2) приведены на рис. 7.3 и рис. 7.4 соответственно.

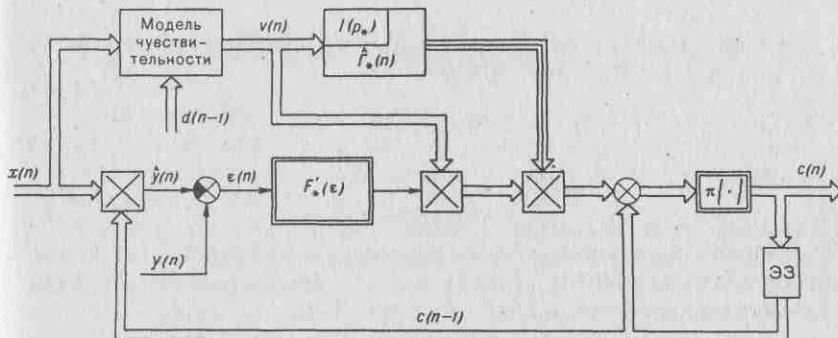


Рис. 7.3

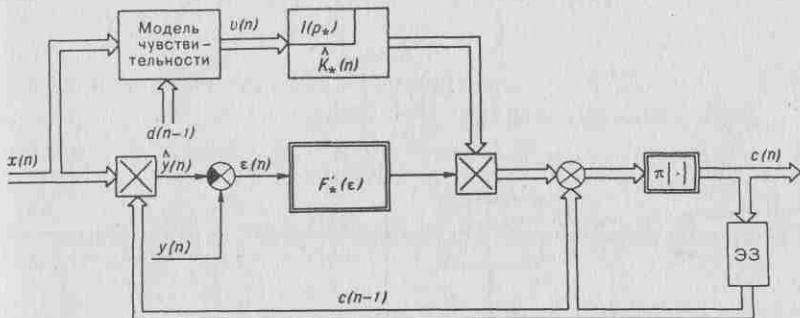


Рис. 7.4

Приведем в заключение проекционные акселерантные алгоритмы с настройкой параметра масштаба:

— основной алгоритм

$$c(n) = \pi \left\{ c(n-1) + \hat{K}_0(n) \bar{F}'_* \left[\frac{\varepsilon(z(n), c(n-1))}{s(n-1)} \right] \right\}, \quad (7.5.14)$$

$$c(0) = c^a,$$

$$\hat{K}_*(n) = \frac{\hat{\Gamma}_*(n-1) v(n) s(n-1) I^{-1}(p_*)}{s^2(n-1) I^{-1}(p_*) + v^T(n) \hat{\Gamma}_*(n-1) v(n)}, \quad (7.5.15)$$

где $\widehat{\Gamma}_*(n)$ и, значит, $\widehat{\Gamma}_*(n-1)$ определяются из (7.5.2), а $v(n)$ — из (7.4.76);

— вспомогательный алгоритм

$$s(n) = \pi_1 \left\{ s(n-1) - \gamma_1(n) \left[s(n-1) - \bar{F}'_* \left[\frac{\varepsilon(z(n), c(n-1))}{s(n-1)} \right] \varepsilon(z(n), c(n-1)) \right] \right\},$$

$$s(0) = s^a, \quad (7.5.16)$$

где

$$\gamma_1(n) = \frac{s^2(n-1)}{n(I_D(\bar{p}_*) - 1)} \quad (7.5.17)$$

В основном алгоритме $\pi\{\cdot\}$ — векторный функциональный преобразователь типа (7.5.10), (7.5.11), а во вспомогательном алгоритме $\pi_1\{\cdot\}$ — скалярный функциональный преобразователь вида

$$\pi_I\{s\} = \begin{cases} s^a + \varkappa, & s \geq s^a + \varkappa, \\ s, & |s - s^a| < \varkappa, \\ s^a - \varkappa, & s \leq s^a - \varkappa. \end{cases} \quad (7.5.18)$$

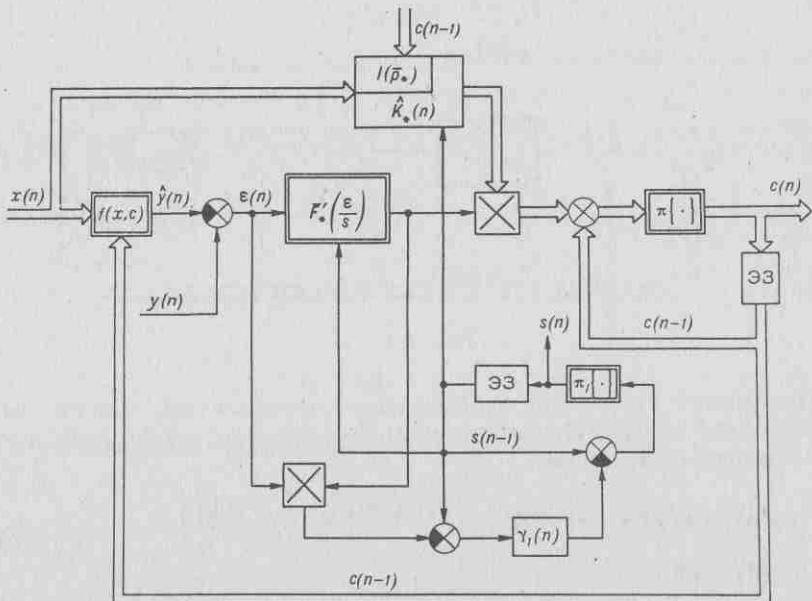


Рис. 7.5

За счет этих функциональных преобразователей обеспечивается при-
надлежность оценок, порождаемых проекционными алгоритмами, об-
ласти финитности.

Блок-схема проекционных акселерантных алгоритмов с настрой-
кой параметра масштаба изображена на рис. 7.5.

§ 7.6. Линейные акселерантные алгоритмы

В общем случае как оптимальные, так и оптимальные на классе функ-
ций потерь не квадратичны и, следовательно, условие оптимально-
сти представляет собой нелинейную систему уравнений относительно
оптимального решения.

Формируемые на основе условий оптимальности алгоритмы полу-
чаются в результате ряда приближений, поэтому акселерантные аб-
солютно оптимальные на классе алгоритмы в общем случае являются
приближенными алгоритмами. И только для объектов с простой по-
мехой, обладающей ограниченной дисперсией (т. е. с плотностью рас-
пределения, принадлежащей классу P_2), и, значит, для статической
оптимальной настраиваемой модели акселерантные абсолютно опти-
мальные на классе алгоритмы становятся точными. В этом случае
оптимальная на классе функция потерь и ее производная равны соот-
ветственно

$$F_*[\varepsilon] = -\ln p_*(\xi)|_{\xi=\varepsilon} = \frac{\varepsilon^2}{2\sigma_1^2} + \ln \sqrt{2\pi} \sigma_1 \quad (7.6.1)$$

и

$$F'_*[\varepsilon] = \frac{\varepsilon^2}{2\sigma_1^2}. \quad (7.6.2)$$

Вспоминая еще, что для оптимальной статической настраиваемой мо-
дели (см. § 1.3)

$$\varepsilon(\mathbf{z}(n), \mathbf{c}(n-1)) = y(n) - \mathbf{c}^\top(n-1) \mathbf{z}(n) \quad (7.6.3)$$

и

$$\nabla_{\mathbf{c}} f(\mathbf{z}(n), \mathbf{c}(n-1)) = -\mathbf{z}(n),$$

получим из (7.5.1), (7.5.2) после очевидных преобразований линейные
акселерантные алгоритмы :

$$\begin{aligned} \mathbf{c}(n) &= \mathbf{c}(n-1) + \hat{H}_*(n) \mathbf{z}(n) (y(n) - \mathbf{c}^\top(n-1) \mathbf{z}(n)), \\ \mathbf{c}(0) &= \mathbf{c}^a, \end{aligned} \quad (7.6.4)$$

$$\hat{H}_*(n) = \hat{H}_*(n-1) - \frac{\hat{H}_*(n-1) \mathbf{z}(n) \mathbf{z}^\top(n) \hat{H}_*(n-1)}{1 + \mathbf{z}^\top(n) \hat{H}_*(n-1) \mathbf{z}(n)}. \quad (7.6.5)$$

Здесь фидуциальное распределение считается нормальным с независимыми компонентами, так что в силу (7.4.14) и (7.2.9) начальное значение матрицы $\hat{H}_*(n)$ при $n = 0$ можно представить в виде

$$\hat{H}_*(0) = \sigma_1^{-2} I_{\Phi}^{-1}(p_{\Phi}) \quad (7.6.6)$$

или

$$\hat{H}_*(0) = \begin{bmatrix} \frac{\sigma_{\Phi 1}^2}{\sigma_1^2} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \frac{\sigma_{\Phi 2}^2}{\sigma_1^2} & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \frac{\sigma_{\Phi N_{\Phi}}^2}{\sigma_1^2} \end{bmatrix}. \quad (7.6.7)$$

Элементы этой диагональной матрицы равны отношению фидуциальных дисперсий к дисперсии помех.

Линейные алгоритмы идентификации (7.6.4) — (7.6.6) соответствуют рекуррентной форме метода наименьших квадратов. Как уже было установлено, линейные алгоритмы абсолютно оптимальны при помехе, плотность распределения которой нормальна. Они также абсолютно оптимальны на классе помех с ограниченной дисперсией.

Рассмотрим теперь поведение акселерантных линейных алгоритмов при конечных значениях n и покажем, что они являются оптимальными как по оценкам обобщенных эмпирических средних потерь $\hat{J}_{(n)}^0(c)$, так и по матрице ковариаций ошибок МКО

$$V(n) = M\{(c(n) - c^*) (c(n) - c^*)^T\}. \quad (7.6.8)$$

Обозначая, как обычно, ошибку

$$\eta(n) = c(n) - c^*, \quad (7.6.9)$$

выведем уравнение относительно МКО

$$V(n) = M\{\eta(n) \eta^T(n)\} \quad (7.6.10)$$

в силу линейного акселерантного алгоритма (7.6.4), (7.6.5).

Алгоритм (7.6.4), учитывая (7.6.9), можно представить в виде

$$\eta(n) = \eta(n-1) - \hat{H}_*(n) x(n) (-\xi(n) + x^T(n) \eta(n-1)), \quad (7.6.11)$$

или

$$\eta(n) = [E - \hat{H}_*(n) x(n) x^T(n)] \eta(n-1) + \hat{H}_*(n) x(n) \xi(n). \quad (7.6.12)$$

Нетрудно найти решение этого векторного линейного разностного уравнения:

$$\begin{aligned}\boldsymbol{\eta}(n) = & \sum_{m=1}^n \prod_{\nu=m+1}^n [E - \widehat{H}_*(\nu) \mathbf{x}(\nu) \mathbf{x}^T(\nu)] H_*(m) \mathbf{x}(m) \xi(m) + \\ & + \prod_{m=1}^n [E - \widehat{H}_*(m) \mathbf{x}(m) \mathbf{x}^T(m)] \boldsymbol{\eta}(0).\end{aligned}\quad (7.6.13)$$

Матрица $\widehat{H}_*(n)$ определяется выражением (7.6.5). Однако сейчас запишем ее в несколько более общей форме

$$\widehat{H}_*(n) = \left[\sum_{m=1}^n \mathbf{x}(m) \mathbf{x}^T(m) + \widehat{H}_*^{-1}(0) \right]^{-1}, \quad (7.6.14)$$

где $\widehat{H}_*(0)$, в отличие от (7.6.6), — произвольное начальное значение матрицы $\widehat{H}_*(n)$. Из (7.6.14) следует, что

$$\widehat{H}_*^{-1}(n) = \sum_{m=1}^n \mathbf{x}(m) \mathbf{x}^T(m) + \widehat{H}_*^{-1}(0) \quad (7.6.15)$$

и, значит,

$$\widehat{H}_*^{-1}(n) - \widehat{H}_*^{-1}(n-1) = \mathbf{x}(n) \mathbf{x}^T(n). \quad (7.6.16)$$

Отсюда, после умножения слева на $\widehat{H}_*(n)$, получим

$$\widehat{H}_*(n) \widehat{H}_*^{-1}(n-1) = E - \widehat{H}_*(n) \mathbf{x}(n) \mathbf{x}^T(n). \quad (7.6.17)$$

Полагая здесь $n = \nu$ ($\nu = m+1, m+2, \dots, n$) и перемножая почленно эти равенства, будем иметь

$$\widehat{H}_*(n) \widehat{H}_*^{-1}(m) = \prod_{\nu=m+1}^n [E - \widehat{H}_*(\nu) \mathbf{x}(\nu) \mathbf{x}^T(\nu)]. \quad (7.6.18)$$

Это соотношение позволяет упростить выражение для $\boldsymbol{\eta}(n)$ (7.6.13) и представить его в виде

$$\boldsymbol{\eta}(n) = \widehat{H}_*(n) \sum_{m=1}^n \mathbf{x}(m) \xi(m) + \widehat{H}_*(n) \widehat{H}_*^{-1}(0) \boldsymbol{\eta}(0). \quad (7.6.19)$$

Рассмотрим вначале Р-объект с простой помехой. В этом случае вектор наблюдений $\mathbf{x}(n) = (u(n), u(n-1), \dots, u(n-N))$ не зависит

от помехи $\xi(n)$. Найдем для этого случая МКО (7.6.10). Подставляя в (7.6.10) $\eta(n)$ из (7.6.19), получим

$$V(n) = M\{\hat{H}_*(n) \left[\sum_{m=1}^n \sum_{\nu=1}^n \mathbf{x}(m) \xi(m) \xi(\nu) \mathbf{x}^\top(\nu) \right] \hat{H}_*(n) \} + \\ + M\{\hat{H}_*(n) \hat{H}_*^{-1}(0) \eta(0) \eta^\top \hat{H}_*^{-1}(0) \hat{H}_*(n)\}. \quad (7.6.20)$$

Учитывая соотношение (7.6.15) и принимая во внимание независимость $\mathbf{x}(m)$ и $\xi(m)$, преобразуем $V(n)$ к виду

$$V(n) = \sigma_\xi^2 M\{\hat{H}_*(n) [\hat{H}_*^{-1}(n) - \hat{H}_*^{-1}(0)] \hat{H}_*(n)\} + \\ + M\{\hat{H}_*(n) \hat{H}_*^{-1}(0) V(0) \hat{H}_*^{-1}(0) \hat{H}_*(n)\}, \quad (7.6.21)$$

или, после несложных преобразований,

$$V(n) = \sigma_\xi^2 M\{\hat{H}_*(n)\} + M\{\hat{H}_*(n) \hat{H}_*^{-1}(0) [V(0) \hat{H}_*^{-1}(0) - E \sigma_\xi^2] \hat{H}_*(n)\}. \quad (7.6.22)$$

МКО $V(n)$ состоит из двух слагаемых. Второе слагаемое зависит от начального значения МКО $V(0) = M\{(c(0) - c^*) (c(0) - c^*)^\top\}$, которое определяется априорной информацией о решении, и от начального значения матрицы усиления $\hat{H}_*(0)$, которое мы можем выбирать. Естественно выбрать $\hat{H}_*(0)$ так, чтобы второе слагаемое в выражении МКО (7.6.22) обратилось в нуль. Это возможно лишь в двух случаях: когда

$$\hat{H}_*^{-1}(0) = E \cdot 0, \quad \text{т. е.} \quad \hat{H}_*(0) = E \cdot \infty, \quad (7.6.23)$$

либо когда

$$V(0) \hat{H}_*^{-1}(0) = E \sigma_\xi^2, \quad \text{т. е.} \quad \hat{H}_*(0) = \sigma_\xi^{-2} V(0). \quad (7.6.24)$$

Но при учете фидуциального распределения МКО $V(0)$ совпадает с обратной матрицей фишеровских информаций (7.4.14), (7.4.15), т. е.

$$V(0) = I_\Phi^{-1}(p_\Phi). \quad (7.6.25)$$

Следовательно, вместо (7.6.24) будем иметь

$$\hat{H}_*(0) = \sigma_\xi^{-2} I_\Phi^{-1}(p_\Phi). \quad (7.6.26)$$

Найдем теперь МКО для этих двух случаев. В первом случае при выборе $\hat{H}_*(n)$ в виде (7.6.23) из (7.6.22) получаем

$$V_1(n) = \sigma_\xi^2 M\{\hat{H}_*(n)\} = \sigma_\xi^2 M\left\{ \sum_{m=1}^n [\mathbf{x}(m) \mathbf{x}^\top(m)]^{-1} \right\}. \quad (7.6.27)$$

Во втором случае, выбирая $\hat{H}_*(0)$ в соответствии с (7.6.26), из (7.6.22) и (7.6.14) получаем

$$V_{\Pi}(n) = \sigma_{\xi}^2 M\{\hat{H}_*(n)\} = \sigma_{\xi}^2 M\left\{\left[\sum_{m=1}^n \mathbf{x}(m) \mathbf{x}^T(m) + \sigma_{\xi}^2 I_{\Phi}(p_{\Phi})\right]^{-1}\right\}. \quad (7.6.28)$$

Сопоставляя (7.6.28) и (7.6.27), заключаем, что

$$V_1(n) > V_{\Pi}(n). \quad (7.6.29)$$

Из этого неравенства следует, что учет априорной информации об оптимальном решении уменьшает МКО линейных алгоритмов на каждом шаге n .

Для РАР-объектов и АР-объектов с простыми помехами ситуация изменяется. В этих случаях наблюдения $\mathbf{x}(n)$ зависят от $\xi(m)$ при $m < n - 1$. Но сделанный выше вывод остается справедливым и в этих случаях. Действительно, из (7.6.19) следует, что

$$\hat{H}_*^{-1}(n) \boldsymbol{\eta}(n) = \hat{H}_*^{-1}(0) \boldsymbol{\eta}(0) + \sum_{m=1}^n \mathbf{x}(m) \xi(m), \quad (7.6.30)$$

откуда после несложных преобразований получаем

$$\begin{aligned} M\{\hat{H}_*^{-1}(n) \boldsymbol{\eta}(n) \boldsymbol{\eta}^T(n) \hat{H}_*^{-1}(n)\} &= \\ &= \sigma_{\xi}^2 M\{\hat{H}_*^{-1}(n)\} + \hat{H}_*^{-1}(0) [V(0) \hat{H}_*^{-1}(0) - \sigma_{\xi}^2 E]. \end{aligned} \quad (7.6.31)$$

При выполнении условия (7.6.23) или (7.6.24) второе слагаемое здесь обращается в нуль, так что

$$\begin{aligned} M\{\hat{H}_*^{-1}(n) \boldsymbol{\eta}(n) \boldsymbol{\eta}^T(n) \hat{H}_*^{-1}(n)\} &= \\ &= \sigma_{\xi}^2 M\{\hat{H}_*^{-1}(n)\} = M\{\hat{H}_*^{-1}(n) (\sigma_{\xi}^2 \hat{H}_*(n)) \hat{H}_*^{-1}(n)\}. \end{aligned} \quad (7.6.32)$$

Из (7.6.32) следует, что матрицы $\boldsymbol{\eta}(n) \boldsymbol{\eta}^T(n)$ и $\sigma_{\xi}^2 \hat{H}_*(n)$ «слабо в среднем» эквивалентны (в отличие от «средней» эквивалентности в случае Р-объектов) при всех $n = 1, 2, \dots$, что свидетельствует о том, что для РАР-объектов и АР-объектов с простыми помехами учет априорной информации об оптимальном решении улучшает оценивание при конечном n , т. е. что в этих случаях имеет место эффект акселерации.

Можно ожидать, что эффект акселерации, достигаемый соотвествующим выбором начальных значений $\mathbf{c}(0) = \mathbf{c}^a$ и $\hat{\Gamma}(0) = I_{\Phi}^{-1}(p_{\Phi})$, имеет место и для динамических объектов с преобразованными помехами, а также в общем случае нелинейных абсолютно

оптимальных на классе алгоритмов. Однако мы пока не владеем формальным доказательством этого факта.

Природа эффекта акселерации, как следует из изложенного выше, состоит в увеличении матрицы $\hat{H}_*(n)$ на матрицу $\sigma_\xi^{-2} I_\Phi^{-1}(p_\Phi)$, определяемую априорной информацией об оптимальном решении. С ростом n

$$\lim_{n \rightarrow \infty} n V_I(n) = \lim_{n \rightarrow \infty} n V_{II}(n) = V, \quad (7.6.33)$$

где $V = V(p_*, p_0)$ — АМКО (см. 4.2.4)). Отсюда следует, что асимптотика акселерантных оптимальных и оптимальных на классе алгоритмов одна и та же. Иначе говоря, учет априорной информации об оптимальном решении не влияет на асимптотические свойства оценок, формируемых алгоритмами.

§ 7.7. Выбор оптимальных входных воздействий

Рассмотрим возможность акселерации оценок оптимального решения путем надлежащего выбора входных воздействий. Для простоты ограничимся вначале динамическими объектами с простой помехой при $b_0^* = 0$.

Статистические свойства входных воздействий существенно влияют на нормированную информационную матрицу $A(c^*, \sigma^2(p_0))$, а значит, и на ее оценку

$$\hat{A}_n(\mathbf{x}(n)) = \frac{1}{n} \sum_{m=1}^n \mathbf{x}(m) \mathbf{x}^\top(m). \quad (7.7.1)$$

Выбор входных воздействий целесообразно подчинить, как это принято в теории планирования эксперимента, минимизации скалярных функционалов оценок обратной нормированной информационной матрицы $T(\hat{A}_n^{-1})$, т. е.

$$T(\hat{A}_n^{-1}) \rightarrow \min_{u(n-1)} \quad \forall n. \quad (7.7.2)$$

Сопоставляя $\hat{A}_n(\mathbf{x}(n))$ (7.7.1) и $\hat{H}_*(n)$ (7.6.15), с учетом (7.6.26) заключаем, что

$$\hat{A}_n(\mathbf{x}(n)) = \frac{1}{n} [\hat{H}_*^{-1}(n) - \sigma_\xi^2 I_\Phi(p_\Phi)]. \quad (7.7.3)$$

Отсюда следует, что задачу минимизации (7.7.2) можно заменить следующей близкой к ней задачей:

$$T(\hat{H}_*(n)) \rightarrow \min_{u(n-1)} \quad \forall n. \quad (7.7.4)$$

Выше было показано, что матрица $\hat{H}_*(n)$ пропорциональна МКО $V(n)$, т. е. она характеризует качество процесса идентификации, осуществляемого линейными акселерантными алгоритмами на каждом шаге. Найдем оптимальные входные воздействия $u^0(n-1)$, которые являются решением задачи минимизации (7.7.4). В качестве скалярного функционала матрицы выберем ее детерминант

$$T(\hat{H}_*(n)) = \det \hat{H}_*(n), \quad (7.7.5)$$

что соответствует в теории планирования эксперимента критерию D -оптимальности. Этот критерий соответствует минимальному объему эллипсоида рассеяния оценок, т. е. минимальной обобщенной дисперсии оценок. Итак, мы приходим к задаче минимизации

$$\det \hat{H}_*(n) \rightarrow \min_{u(n-1)} \quad \forall n. \quad (7.7.6)$$

Предположим, что входные воздействия $u(n-1)$ могут подчиняться ограничениям, например,

$$|u(n-1)| \leq 1. \quad (7.7.7)$$

Для решения этой задачи минимизации найдем прежде всего соотношение между детерминантами матриц $\hat{H}_*(n)$ и $\hat{H}_*(n-1)$. Воспользуемся рекуррентным соотношением (7.6.5), которое удобно представить в такой форме:

$$\hat{H}_*(n) = \left[E - \hat{H}_*(n-1) \frac{\mathbf{x}(n) \mathbf{x}^T(n)}{1 + \mathbf{x}^T(n) \hat{H}_*(n-1) \mathbf{x}(n)} \right] \hat{H}_*(n-1). \quad (7.7.8)$$

Детерминант произведения двух квадратных матриц равен произведению детерминантов этих матриц, т. е.

$$\det \hat{H}_*(n) = \det \left(E - \hat{H}_*(n-1) \frac{\mathbf{x}(n) \mathbf{x}^T(n)}{1 + \mathbf{x}^T(n) \hat{H}_*(n-1) \mathbf{x}(n)} \right) \det \hat{H}_*(n-1). \quad (7.7.9)$$

Используя тождество для векторов \mathbf{h} , \mathbf{x}

$$\det(E - \mathbf{h} \mathbf{x}^T) = 1 - \mathbf{x}^T \mathbf{h} \quad (7.7.10)$$

и полагая в нем

$$\mathbf{h} = \hat{H}_*(n-1) \frac{\mathbf{x}(n)}{1 + \mathbf{x}^T(n) \hat{H}_*(n-1) \mathbf{x}(n)}, \quad (7.7.11)$$

запишем (7.7.9) в виде

$$\det \widehat{H}_*(n) = \left(1 - \frac{\mathbf{x}^T(n) \widehat{H}_*(n-1) \mathbf{x}(n)}{1 + \mathbf{x}^T(n) \widehat{H}_*(n-1) \mathbf{x}(n)} \right) \det \widehat{H}_*(n-1), \quad (7.7.12)$$

или, окончательно,

$$\det \widehat{H}_*(n) = \frac{1}{1 + \mathbf{x}^T(n) \widehat{H}_*(n-1) \mathbf{x}(n)} \det \widehat{H}_*(n-1). \quad (7.7.13)$$

Отсюда следует, что задача минимизации детерминанта $\det \widehat{H}_*(n)$ (7.7.6) на n -м шаге сводится к задаче максимизации квадратичной формы $\mathbf{x}^T(n) \widehat{H}_*(n-1) \mathbf{x}(n)$, т. е. к задаче

$$\mathbf{x}^T(n) \widehat{H}_*(n-1) \mathbf{x}(n) \rightarrow \max_{u(n-1)} \quad \forall n. \quad (7.7.14)$$

Вспоминая, что вектор наблюдений для РАР-объекта с простой помехой имеет вид

$$\mathbf{x}(n) = (-y(n-1), \dots, -y(n-N), u(n-1), \dots, u(n-N)), \quad (7.7.15)$$

и выделяя в нем входное воздействие $u(n-1)$, запишем квадратичную форму в (7.7.14) в виде

$$\begin{aligned} \mathbf{x}^T(n) \widehat{H}_*(n-1) \mathbf{x}(n) &= \widehat{H}_1(n-1) u^2(n-1) + \\ &+ 2 \widehat{H}_2^T(n-1) \mathbf{x}_{(-)}(n) u(n-1) + \mathbf{x}_{(-)}^T(n) \widehat{H}_3(n-1) \mathbf{x}_{(-)}(n), \end{aligned} \quad (7.7.16)$$

где приняты обозначения

$$\mathbf{x}_{(-)}(n) = (-y(n-1), \dots, -y(n-N), u(n-2), \dots, u(n-N)), \quad (7.7.17)$$

$$\widehat{H}_1(n-1) = h_{N+1, N+1}(n-1), \quad (7.7.18)$$

$$\begin{aligned} \widehat{H}_2(n-1) &= (h_{1, N+1}(n-1), \dots, h_{N, N+1}(n-1), h_{N+2, N+1}(n-1), \dots \\ &\dots, h_{2N, N+1}(n-1)), \end{aligned} \quad (7.7.19)$$

$h_{\nu, \mu}(n-1)$ — (ν, μ) -й элемент матрицы $\widehat{H}_*(n-1)$, а $(2N-1) \times (2N-1)$ -матрица $\widehat{H}_3(n-1)$ образована вычеркиванием $(N+1)$ -го столбца и $(N+1)$ -й строки в матрице $\widehat{H}_*(n-1)$:

$$\hat{H}_3(n-1) =$$

$$= \begin{bmatrix} h_{1,1}(n-1) & \dots & h_{1,N}(n-1) & h_{1,N+2}(n-1) & \dots & h_{1,2N}(n-1) \\ \dots & & \dots & \dots & & \dots \\ h_{N,1}(n-1) & \dots & h_{N,N}(n-1) & h_{N,N+2}(n-1) & \dots & h_{N,2N}(n-1) \\ \dots & & \dots & \dots & & \dots \\ h_{N+2,1}(n-1) & \dots & h_{N+2,N}(n-1) & h_{N+2,N+2}(n-1) & \dots & h_{N+2,2N}(n-1) \\ \dots & & \dots & \dots & & \dots \\ h_{2N,1}(n-1) & \dots & h_{2N,N}(n-1) & h_{2N,N+2}(n-1) & \dots & h_{2N,2N}(n-1) \end{bmatrix}. \quad (7.7.20)$$

Максимальное значение неотрицательно определенной квадратичной формы (7.7.16) при наличии ограничения (7.7.7) достигается, когда каждое из слагаемых этой формы принимает максимальное значение. Первое слагаемое максимально при $u(n-1) = \pm 1$, второе — при $u(n-1) = \text{sign}\{\hat{H}_2(n-1) \mathbf{x}_{(-)}(n)\}$. Следовательно, вся квадратичная форма (7.7.16) максимальна при

$$u(n-1) = u^0(n-1) = \text{sign}\{\hat{H}_2(n-1) \mathbf{x}_{(-)}(n)\}. \quad (7.7.21)$$

Последовательный выбор входных воздействий сводится к использованию в рекуррентных алгоритмах идентификации (7.6.4) — (7.6.6) соотношения (7.7.21). Таким образом, акселерантные рекуррентные линейные алгоритмы с последовательным выбором входных воздействий запишутся в виде

$$\begin{aligned} c(n) &= c(n-1) + \hat{H}_*(n) \mathbf{x}(n) (y(n) - c^\top(n-1) \mathbf{x}(n)), \\ c(0) &= c^a, \end{aligned} \quad (7.7.22)$$

$$\hat{H}_*(n) = \hat{H}_*(n-1) - \frac{\hat{H}_*(n-1) \mathbf{x}(n) \mathbf{x}^\top(n) \hat{H}_*(n-1)}{1 + \mathbf{x}^\top(n) \hat{H}_*(n-1) \mathbf{x}(n)}, \quad (7.7.23)$$

$$\hat{H}_*(0) = \sigma_\xi^2 I_\Phi^{-1}(p_\Phi),$$

где

$$\mathbf{x}(n) = (-y(n-1), \dots, -y(n-N), u^0(n-1), \dots, u^0(n-N)) \quad (7.7.24)$$

— вектор наблюдений размерности $2N$,

$$u^0(n-1) = \text{sign}\{\hat{H}_2(n-1) \mathbf{x}_{(-)}(n)\}, \quad (7.7.25)$$

а

$$\mathbf{x}_{(-)}(n) = (-y(n-1), \dots, -y(n-N), u^0(n-2), \dots, u^0(n-N)) \quad (7.7.26)$$

— вектор размерности $2N-1$. Блок-схема линейного акселерантного алгоритма с последовательным выбором оптимальных входных воз-

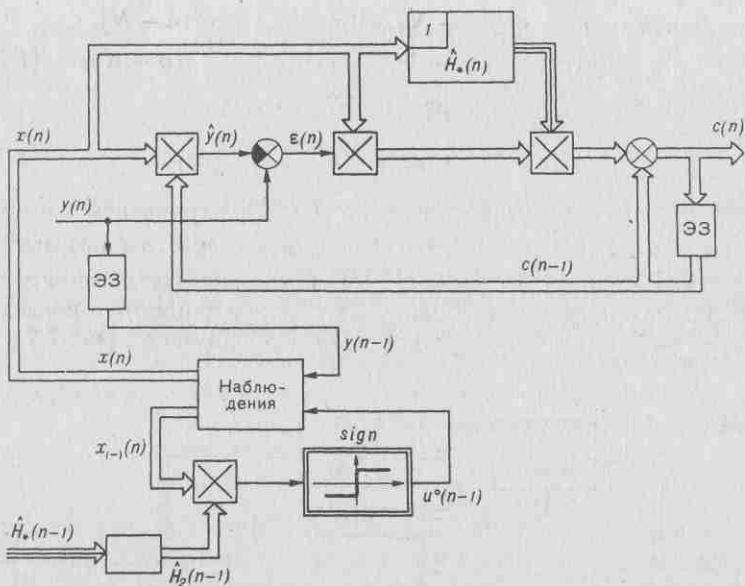


Рис. 7.6

действий приведена на рис. 7.6. Она содержит специальный блок формирования входных воздействий идентифицируемого объекта.

Нетрудно распространить последовательный выбор оптимальных входных воздействий на общий случай акселерантных оптимальных на классе алгоритмов идентификации. Они будут иметь вид

$$c(n) = c(n-1) + \hat{\Gamma}_*(n) F'_*(\varepsilon(z(n), c(n-1))) v(n), \quad (7.7.27)$$

$$c(0) = c^a,$$

где

$$v(n) = x(n) - \sum_{m=1}^N d_m(n-1) v(n-m), \quad (7.7.28a)$$

$$v(m) = 0, \quad m = 0, -1, \dots, 1 - N,$$

$$\hat{\Gamma}_*(n) = \hat{\Gamma}_*(n-1) - \frac{\hat{\Gamma}_*(n-1) v(n) v^T(n) \hat{\Gamma}_*(n-1)}{I^{-1}(p_*) + v^T(n) \hat{\Gamma}_*(n-1) v(n)}, \quad (7.7.28b)$$

$$\hat{\Gamma}_*(0) = I_\Phi^{-1}(p_\Phi),$$

а

$$\begin{aligned} \mathbf{x}(n) &= (-y(n-1), \dots, -y(n-N), u^0(n-1), \dots, u^0(n-N), \\ &\quad y(n-1) - \hat{y}(n-1), \dots, y(n-N) - \hat{y}(n-N)), \quad (7.7.29) \end{aligned}$$

— вектор наблюдений размерности $3N$, в котором

$$u^0(n-1) = \text{sign}\{\hat{\Gamma}_2^\top(n-1) \mathbf{x}_{(-)}(n)\}. \quad (7.7.30)$$

Вектор $\mathbf{x}_{(-)}(n)$ получается из вектора (7.7.29) устранением компоненты $u^0(n-1)$, а $\hat{\Gamma}_2(n-1)$ является $(N+1)$ -м вектор-столбцом матрицы $\hat{\Gamma}_*(n-1)$, в котором устранен $(N+1)$ -й элемент. Блок-схема акселерантного абсолютно оптимального на классе алгоритма с последовательным выбором входных воздействий изображена на рис. 7.7.

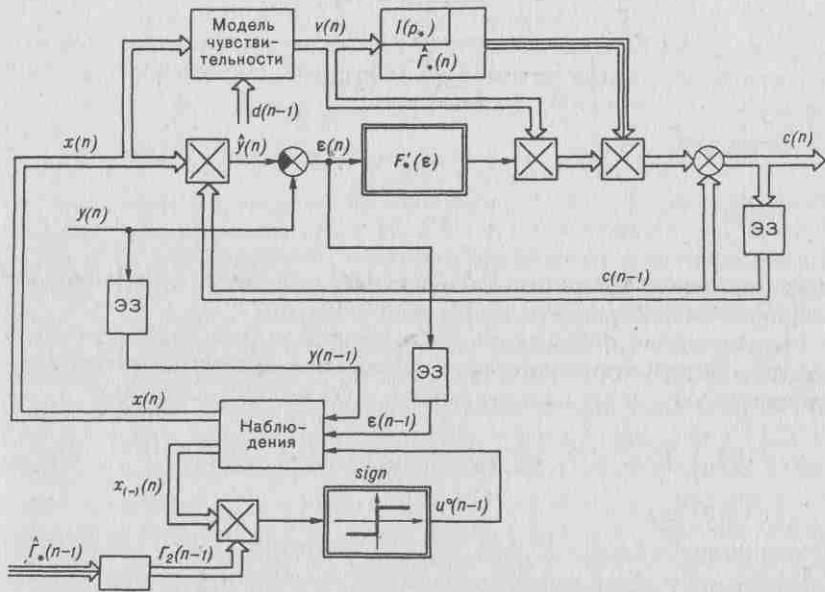


Рис. 7.7

В тех случаях, когда мы имеем возможность управлять входными воздействиями, следует использовать эту возможность. Она позволит существенно улучшить свойства алгоритмов, в том числе и асимптотические свойства. Приведенные выше алгоритмы используют, по существу, последовательный метод планирования эксперимента.

§ 7.8. Примеры

Одномерные абсолютно оптимальные и абсолютно оптимальные на классе алгоритмы оценивания параметра сдвига были приведены и подробно изучены в § 3.4 и § 5.4. Рассмотрим здесь соответствующие им акселерантные алгоритмы. В этом случае (см. (3.4.1), (3.4.4))

$$y(n) = c^* + \xi(n), \quad (7.8.1)$$

$$\varepsilon(z(n), c) = y(n) - \hat{y}(n) = y(n) - c. \quad (7.8.2)$$

Полагая в акселерантных алгоритмах (7.4.18) и (7.4.19) $f(x, c) = c$ и, значит, $\nabla_c f(x, c) = 1$, получим

$$c(n) = c(n-1) + \Gamma_0(n) F'_0[y(n) - c(n-1)], \quad (7.8.3)$$

где матрица усиления $\Gamma_0(n)$ теперь вырождается в скаляр

$$\Gamma_0(n) = [I(p_0)n + I(p_{\Phi 1})]^{-1}. \quad (7.8.4)$$

Подставляя $\Gamma_0(n)$ из (7.8.4) в (7.8.3), окончательно получаем акселерантный абсолютно оптимальный алгоритм оценивания параметра сдвига:

$$\begin{aligned} c(n) &= c(n-1) + \frac{1}{I(p_0)n + I(p_{\Phi 1})} F'_0[y(n) - c(n-1)], \\ c(0) &= c^a, \end{aligned} \quad (7.8.5)$$

Он отличается от абсолютно оптимального алгоритма (3.4.6) учетом априорной информации об оптимальном решении в виде начального условия c^a и фишеровской информации $I(p_{\Phi 1})$.

Аналогичным образом, из (7.5.1) и (7.5.2) при $\nabla_c f(x, c) = 1$ несложно получить акселерантный абсолютно оптимальный на классе алгоритм

$$\begin{aligned} c(n) &= c(n-1) + \frac{1}{I(p_*)n + I(p_{\Phi 1})} F'_*[y(n) - c(n-1)], \\ c(0) &= c^a. \end{aligned} \quad (7.8.6)$$

В алгоритмах (7.8.5) и (7.8.6), как это следует из (7.2.9), $I(p_{\Phi 1}) = \sigma_{\Phi 1}^{-2}$.

Если априорная информация об оптимальном решении характеризуется финитной фидуциальной плотностью распределения (7.2.3), (7.2.7), то из алгоритмов (7.5.8), (7.5.2) в этом случае получаем акселерантный проекционный алгоритм

$$\begin{aligned} c(n) &= \pi \left\{ c(n-1) + \frac{1}{I(p_*)n + I(p_{\Phi 1})} F'_*[y(n) - c(n-1)] \right\}, \\ c(0) &= c^a, \end{aligned} \quad (7.8.7)$$

где, как следует из (7.2.10), $I(p_{\Phi 1}) = (\frac{\pi^2}{3} - 2) \sigma_{\Phi 1}^{-2}$.

Рассмотрим линейные алгоритмы. Они соответствуют абсолютно оптимальным алгоритмам при нормальной плотности распределения помех и алгоритмам, абсолютно оптимальным на классе распределений с ограниченной дисперсией. Полагая в (7.8.6) $F_*'[\varepsilon] = \varepsilon \sigma_\xi^{-2}$ и $I(p_*) = \sigma_\xi^{-2}$, получим линейный акселерантный алгоритм

$$\begin{aligned} c(n) &= c(n-1) + \frac{1}{n + \sigma_\xi^2 / \sigma_{\phi 1}^2} (y(n) - c(n-1)), \\ c(0) &= c^a. \end{aligned} \quad (7.8.8)$$

При $\sigma_{\phi 1}^2 = \infty$, что соответствует отсутствию априорной информации об оптимальном решении, он совпадает с линейным абсолютно оптимальным на классе \mathcal{P}_2 алгоритмом (5.4.9). Отметим, что в акселерантном алгоритме (7.8.8) последующие оценки $c(n)$ уже зависят от начального условия $c(0)$ и степень этой зависимости определяется величиной отношения $\sigma_\xi^2 / \sigma_{\phi 1}^2$.

Приведем еще акселерантный абсолютно оптимальный алгоритм на классе \mathcal{P}_1 :

$$\begin{aligned} c(n) &= c(n-1) + \frac{s}{n + s^2 / \sigma_{\phi 1}^2} \operatorname{sign} (y(n) - c(n-1)), \\ c(0) &= c^a. \end{aligned} \quad (7.8.9)$$

Результаты моделирования алгоритмов (7.8.8), (7.8.9) при тех же условиях, которые были приняты в § 3.4, приведены на рис. 7.8 и 7.9 (кривые *a*). Для сравнения здесь же приведены результаты из § 3.4 (кривые *b*). Заметно, что оценки, порождаемые ими на начальных шагах, более точны, чем для произвольных начальных значений.

Что же касается многомерных алгоритмов, то, как это неоднократно подчеркивалось, акселерантность в них достигается также за счет выбора соответствующих начальных значений $c(0)$ и $\hat{c}(0)$. Так, для рассмотренных в § 3.5 примеров идентификации Р- и РАР-объектов алгоритмом МНК (3.5.12), (3.5.13) учет априорной информации в начальных условиях $c(0)$ и $\hat{c}(0)$ позволяет получать на начальных шагах оценки $c(n)$ более точные, чем без учета начальных условий. На рис. 7.10 и 7.11 приведены зависимости $M\{|c(n) - c^*|^2\}$ от n для Р- и РАР-объектов соответственно. Кривые *a* соответствуют учету априорной информации, кривые *b* — отсутствию априорной информации.

§ 7.9. Заключение

Акселеризация оценок оптимального решения, т. е. увеличение точности этих оценок при малом числе наблюдений n , связана с учетом априорной информации об оптимальном решении. Эта априорная ин-

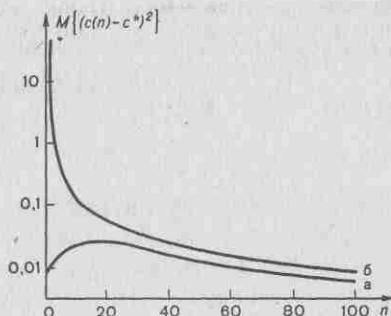


Рис. 7.8

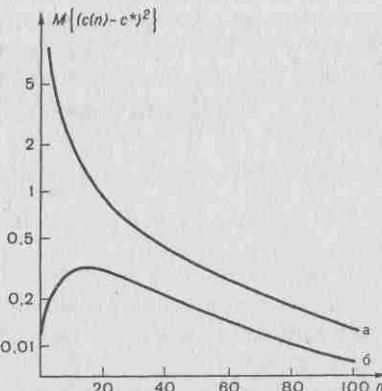


Рис. 7.9

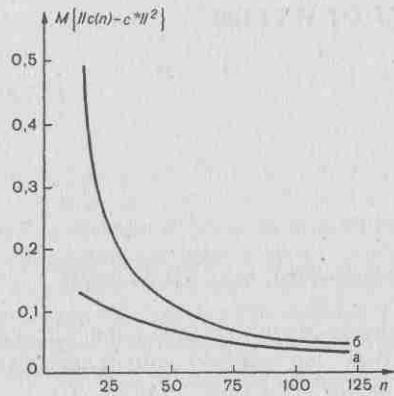


Рис. 7.10

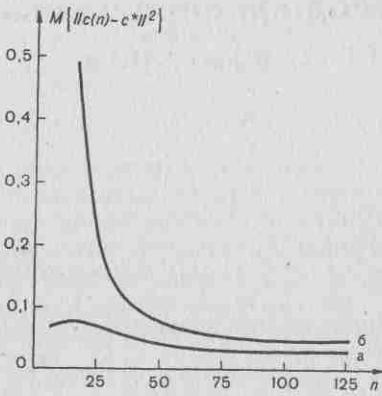


Рис. 7.11

формация задается фидуциальной нормальной или финитной плотностью распределения. Учет подобной априорной информации об оптимальном решении определяет начальные условия акселерантных абсолютно оптимальных и абсолютно оптимальных на классе алгоритмов. Оказывается, что начальная матрица усиления равна обратной матрице фишеровских информаций, соответствующих фидуциальной плотности распределения. Для финитной плотности распределения получаются акселерантные абсолютно оптимальные и абсолютно оптимальные на классе алгоритмы проекционного типа. Дальнейшее улучшение алгоритмов достигается при помощи выбора оптимальных входных воздействий.

Мы находимся в центре огромного темного леса. Понемногу мы освобождаем вокруг себя небольшой участок земли... Однако все время перед нами находится эта таинственная опушка леса.

Луи де Броиль

ГЛАВА 8

Модифицированные алгоритмы идентификации

§ 8.1. О возможных модификациях алгоритмов

Полученные в предыдущих главах абсолютно оптимальные и абсолютно оптимальные на классе акселерантные алгоритмы допускают как упрощение, так и распространение на более сложные задачи.

Упрощение алгоритмов идентификации может относиться к замене общей матрицы усиления более простой скалярной матрицей, замене градиента функции потерь, зависящего от функций чувствительности, более простым псевдоградиентом, который уже не содержит функций чувствительности. Такие упрощенные алгоритмы значительно легче реализовать. При этом часто они сохраняют свойства абсолютной оптимальности и акселерантности.

В ряде случаев возникает необходимость в идентификации объектов, возмущаемых коррелированными помехами с известными или не известными корреляционными свойствами. Представляет интерес также выяснить, как следует видоизменить алгоритмы для идентификации некоторых классов нелинейных объектов, и обсудить так называемые *критериальные алгоритмы*.

Настоящая глава и посвящена рассмотрению ряда перечисленных выше задач идентификации. Мы приведем основные идеи и соображе-

ния, позволяющие сформировать такие модифицированные алгоритмы идентификации.

§ 8.2. Алгоритмы со скалярной матрицей усиления

Рассмотрим абсолютно оптимальный алгоритм идентификации

$$c(n) = c(n-1) + \Gamma(n) F'_0[\varepsilon(z(n), c(n-1))] v(n), \quad (8.2.1a)$$

где

$$v(n) = x(n) - \sum_{m=1}^N d_m(n-1) v(n-m). \quad (8.2.1b)$$

Заменим в нем полную матрицу усиления (3.1.12)

$$\Gamma(n) = \frac{1}{n} B$$

скалярной матрицей усиления

$$\Gamma_c(n) = \frac{b}{n} E. \quad (8.2.2)$$

В этом случае мы приходим к алгоритму типа классической стохастической аппроксимации

$$c(n) = c(n-1) + \frac{b}{n} F'_0[\varepsilon(z(n), c(n-1))] v(n). \quad (8.2.3)$$

Для такого алгоритма матричное уравнение (1.6.20), определяющее АМКО $V_c(p_0)$, после замены в нем матрицы B на скалярную матрицу bE примет вид

$$G V_c(p_0) + V_c(p_0) G^\top = -b^2 I(p_0) A(c^*, \sigma^2(p_0)), \quad (8.2.4)$$

где, в отличие от (1.6.21), теперь

$$G = \frac{1}{2} E - b \nabla^2 J(c^*) = \frac{1}{2} E - b I(p_0) A(c^*, \sigma^2(p_0)). \quad (8.2.5)$$

Выберем величину b равной

$$b = \frac{\|A^{-1}(c^*, \sigma^2(p_0))\|}{I(p_0)} = \frac{\lambda_{\max}(A^{-1})}{I(p_0)}, \quad (8.2.6)$$

где $\|A^{-1}(c^*, \sigma^2(p_0))\|$ — норма обратной нормированной информационной матрицы $A^{-1}(c^*, \sigma^2(p_0))$, представляющая собой максимальное

собственное число $\lambda_{\max}(A^{-1})$. Подставляя значение b (8.2.6) в матричное уравнение (8.2.4), получим

$$GV_c(p_0) + V_c(p_0)G^\top = \frac{\lambda_{\max}^2(A^{-1})}{I(p_0)} A(c^*, \sigma^2(p_0)), \quad (8.2.7)$$

где

$$G = \lambda_{\max}(A^{-1}) A(c^*, \sigma^2(p_0)) - \frac{1}{2} E. \quad (8.2.8)$$

Решение этого матричного уравнения (8.2.7), (8.2.8), определяющее АМКО, как нетрудно проверить, имеет вид

$$V_c(p_0) = \frac{\lambda_{\max}(A^{-1})}{4I(p_0)} (2E + G^{-1}). \quad (8.2.9)$$

Вычислим максимальное собственное значение АМКО, т. е. ее норму:

$$\|V_c(p_0)\| = \lambda_{\max}(V_c) = \frac{\lambda_{\max}(A^{-1})}{4I(p_0)} \lambda_{\max}(2E + G^{-1}),$$

или

$$\|V_c(p_0)\| = \frac{\lambda_{\max}(A^{-1})}{4I(p_0)} \left(2 + \frac{1}{\lambda_{\min}(G)} \right). \quad (8.2.10)$$

Пользуясь тождеством $\lambda_{\max}(A^{-1}) \lambda_{\min}(A) = 1$, из (8.2.8) получаем

$$\lambda_{\min}(G) = \lambda_{\max}(A^{-1}) \lambda_{\min}(A) - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}.$$

Следовательно, (8.2.10) запишется в виде

$$\|V_c(p_0)\| = \lambda_{\max}(V_c) = \frac{\lambda_{\max}(A^{-1})}{I(p_0)}. \quad (8.2.11)$$

Норму АМКО $\|V_c(p_0)\|$ можно рассматривать как меру скорости сходимости алгоритма (8.2.3) со скалярной матрицей усиления (8.2.2), (8.2.6). Оценим с помощью той же меры скорость сходимости алгоритма (8.2.1) с матрицей усиления $\Gamma_0(n) = \frac{1}{nI(p_0)} A^{-1}(c^*, \sigma^2(p_0))$. Для этого алгоритма, как было установлено ранее, АМКО имеет вид

$$V(p_0) = V_M(p_0) = \frac{1}{I(p_0)} A^{-1}(c^*, \sigma^2(p_0)). \quad (8.2.12)$$

Норма этой АМКО равна

$$\|V_M(p_0)\| = \lambda_{\max}(V_M) = \frac{\lambda_{\max}(A^{-1})}{I(p_0)}. \quad (8.2.13)$$

Сопоставляя (8.2.13) и (8.2.11), заключаем, что

$$\lambda_{\max}(V_c) = \|V_c(p_0)\| = \|V_m(p_0)\| = \lambda_{\max}(V_m). \quad (8.2.14)$$

Таким образом, скорость сходимости, оцениваемая нормой АМКО алгоритмов с полной (8.2.1) и, соответственно, скалярной (8.2.3), (8.2.6) матрицами усиления, одна и та же. А это значит, что АМКО достигает нижней границы неравенства Рао — Крамера относительно норм матриц. Следовательно, алгоритм

$$c(n) = c(n-1) + \frac{\lambda_{\max}(A^{-1})}{n I(p_0)} F'_0[\varepsilon(z(n), c(n-1))] v(n) \quad (8.2.15)$$

является абсолютно оптимальным в указанном выше смысле не только среди рекуррентных алгоритмов, но и среди всех алгоритмов, порождающих асимптотически несмешенные оценки.

Заметим, что, выбирая в качестве b вместо (8.2.6) величину

$$b = \frac{\lambda_{\min}(A^{-1})}{I(p_0)},$$

мы получили бы аналогично (8.2.11) и (8.2.14)

$$\lambda_{\min}(V_c) = \frac{\lambda_{\min}(A^{-1})}{I(p_0)} = \lambda_{\min}(V_m),$$

т. е. равенство минимальных собственных значений АМКО модифицированного и абсолютно оптимального алгоритмов.

Заменяя $A(c^*, \sigma^2(p_0))$ на $\hat{A}_n(x(n))$ (7.7.1) и определяя $\lambda_{\max}(\hat{A}_n^{-1})$, можно получить реализуемые алгоритмы со скалярной матрицей усиления. Применение оптимальных на классе функций потерь приводит к абсолютно оптимальным на классе алгоритмам типа

$$c(n) = c(n-1) + \frac{\lambda_{\max}(\hat{A}_n^{-1})}{n I(p_*)} F'_*[\varepsilon(z(n), c(n-1))] v(n). \quad (8.2.16)$$

Структурная схема этого алгоритма приведена на рис. 8.1.

§ 8.3. Усредненные алгоритмы со скалярной матрицей усиления

Рассмотрим оптимальный алгоритм идентификации со скалярной матрицей усиления

$$c(n) = c(n-1) + \gamma(n) F'_0[\varepsilon(z(n), c(n-1))] v(n), \quad (8.3.1)$$

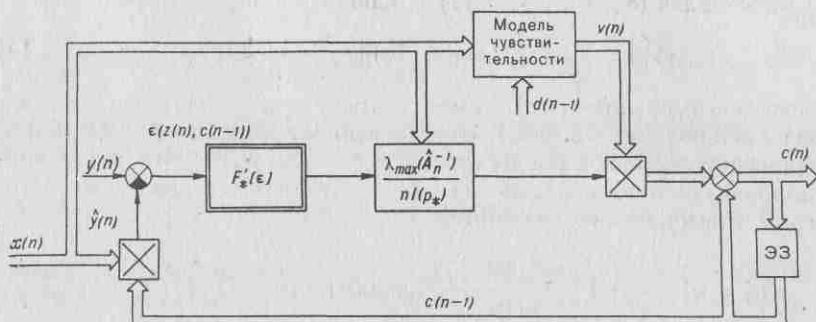


Рис. 8.1

где $\gamma(n) > 0$ — скалярный коэффициент усиления, а вектор коэффициентов чувствительности $v(n)$ определяется соотношением (8.2.16). Алгоритм (8.2.3), рассмотренный в предыдущем параграфе, соответствовал алгоритму (8.3.1) при

$$\gamma(n) = \frac{b}{n}. \quad (8.3.2)$$

Было показано, что выбор коэффициента b в виде (8.2.6) обеспечивает минимум нормы АМКО $\|V_c(p_0)\|$, достигающий нижней границы в неравенстве Крамера — Рао относительно норм матриц.

Рассмотрим теперь другую возможность формирования абсолютно оптимального алгоритма, связанную с идеей усреднения траектории алгоритма (8.3.1), когда оценки $c(n)$ (8.3.1) играют вспомогательную или промежуточную роль, а основными являются усредненные оценки

$$\tilde{c}(n) = \frac{1}{n} \sum_{t=1}^n c(t), \quad (8.3.3)$$

которые, очевидно, могут быть вычислены рекуррентным образом:

$$\tilde{c}(n) = \tilde{c}(n-1) + \frac{1}{n} (c(n) - \tilde{c}(n-1)). \quad (8.3.4)$$

Однако если коэффициент усиления $\gamma(n)$ выбран оптимальным, например в виде (8.3.2), (8.2.6), то дополнительное усреднение (8.3.3) или (8.3.4) не только не дает никакого выигрыша, но даже приводит к снижению скорости сходимости.

Рассмотрим алгоритм (8.3.1), (8.3.4) с коэффициентом усиления вида

$$\gamma(n) = \frac{b}{n^\alpha}, \quad 0 < \alpha < 1, \quad b > 0. \quad (8.3.5)$$

Такой коэффициент усиления является неоптимальным для алгоритма (8.3.1), причем АМКО (1.6.6)

$$V = \lim_{n \rightarrow \infty} n V_n = \lim_{n \rightarrow \infty} n M \{ (c(n) - c^*) (c(n) - c^*)^\top \} \quad (8.3.6)$$

равна бесконечности, поскольку, как будет показано ниже, V_n имеет порядок $\gamma(n)$. Однако оценки $\tilde{c}(n)$, полученные в результате усреднения (8.3.4), ведут себя оптимальным образом, т. е. АМКО

$$\tilde{V} = \lim_{n \rightarrow \infty} n \tilde{V}_n = \lim_{n \rightarrow \infty} n M \{ (\tilde{c}(n) - c^*) (\tilde{c}(n) - c^*)^\top \} \quad (8.3.7)$$

совпадает с нижней границей неравенства Крамера — Рао (2.3.23):

$$\tilde{V} = \frac{1}{I(p_0)} A^{-1} (c^*, \sigma^2(p_0)). \quad (8.3.8)$$

Покажем это.

Получим сначала уравнение для нормированной МКО неоптимального алгоритма (8.3.1), (8.3.5)

$$V(n) = n^\alpha V_n = n^\alpha M \{ (\delta(n) \delta^\top(n)) \}, \quad (8.3.9)$$

где

$$\delta(n) = c(n) - c^*. \quad (8.3.10)$$

Подставляя выражение для $c(n)$ (8.3.1) в (8.3.10) и рассуждая так же, как в § 1.6, получаем приближенное уравнение ошибки, аналогичное (1.6.12):

$$\delta(n) = (E - \gamma(n) \nabla_c^2 F_0[\xi(n)]) \delta(n-1) - \gamma(n) \nu(n), \quad (8.3.11)$$

где $\nu(n)$ определяется выражением (1.6.10), т. е.

$$\nu(n) = \nabla_c F_0[\xi(n)]. \quad (8.3.12)$$

Умножим обе части этого уравнения на $n^{\alpha/2}$ и обозначим

$$\eta(n) = n^{\alpha/2} \delta(n). \quad (8.3.13)$$

Учитывая (8.3.5) и то, что при достаточно больших n приближенно

$$\left(\frac{n}{n-1} \right)^{\alpha/2} \approx 1 + O\left(\frac{1}{n}\right),$$

получим из (8.3.11), (8.3.12)

$$\eta(n) = \left(E - \frac{b}{n^\alpha} \nabla_c^2 F_0[\xi(n)] \right) \eta(n-1) - \frac{b}{n^{\alpha/2}} \nu(n). \quad (8.3.14)$$

Здесь отброшены члены более высокого порядка, поскольку в силу (8.3.5) $1/n = o(\gamma(n))$. Но из (8.3.9), (8.3.13) следует, что

$$V(n) = M\{(\eta(n) \eta^\top(n))\}, \quad (8.3.15)$$

поэтому, рассуждая как в § 1.6, получаем из (8.3.14), (8.3.15) аналогично (1.6.17) следующее уравнение:

$$V(n) = V(n-1) - b n^{-\alpha} [\nabla^2 J^0(c^*) V(n-1) + V(n-1) \nabla^2 J^0(c^*) - bR], \quad (8.3.16)$$

где, как и ранее, R — полная информационная матрица (1.6.18) при оптимальной функции потерь:

$$R = I(p_0) A(c^*, \sigma^2(p_0)) = \nabla^2 J^0(c^*). \quad (8.3.17)$$

Последнее равенство справедливо в силу (1.6.31).

Соотношение (8.3.16) можно рассматривать как рекуррентный алгоритм, решающий линейное матричное уравнение

$$\nabla^2 J^0(c^*) V + V \nabla^2 J^0(c^*) = bR,$$

которое в силу (8.3.17) эквивалентно уравнению

$$[\nabla^2 J^0(c^*)]^{-1} V + V [\nabla^2 J^0(c^*)]^{-1} = b [\nabla^2 J^0(c^*)]^{-1}. \quad (8.3.18)$$

Поскольку $\nabla^2 J^0(c^*) > 0$, этот алгоритм сходится, т. е.

$$V(n) \rightarrow V \quad \text{при} \quad n \rightarrow \infty, \quad (8.3.19)$$

где V — симметричная матрица, удовлетворяющая уравнению (8.3.18).

Рассмотрим теперь ошибку алгоритма (8.3.4)

$$\tilde{\delta}(n) = \tilde{c}(n) - c^*, \quad (8.3.20)$$

удовлетворяющую уравнению

$$\tilde{\delta}(n) = \left(1 - \frac{1}{n} \right) \tilde{\delta}(n-1) + \frac{1}{n} \delta(n). \quad (8.3.21)$$

Для нормированной МКО

$$\tilde{V}(n) = n M\{(\tilde{\delta}(n) \tilde{\delta}^\top(n))\} \quad (8.3.22)$$

из (8.3.20), (8.3.21) и (8.3.9) получим уравнение

$$\tilde{V}(n) = \left(1 - \frac{1}{n}\right)\tilde{V}(n-1) + \frac{1}{n}\left(1 - \frac{1}{n}\right)[W(n) + W^T(n)] + n^{-(\alpha+1)}V(n), \quad (8.3.23)$$

где

$$W(n) = n M\{(\delta(n)\tilde{\delta}^T(n))\}. \quad (8.3.24)$$

Учитывая (8.3.19), заключаем, что последним членом правой части (8.3.23) можно пренебречь. Если теперь удастся показать, что последовательность матриц $W(n)$ (8.3.24) имеет конечный предел

$$W = \lim_{n \rightarrow \infty} W(n), \quad (8.3.25)$$

то из (8.3.23) получим при $n \rightarrow \infty$

$$\tilde{V}(n) \approx \frac{1}{n} \sum_{t=1}^n [W(n) + W^T(n)] \rightarrow W + W^T. \quad (8.3.26)$$

Таким образом, асимптотика нормированной МКО $\tilde{V}(n)$ определяется поведением последовательности матриц $W(n)$.

Чтобы вывести уравнение относительно $W(n)$, умножим уравнение (8.3.11) на $\tilde{\delta}^T(n-1)$ и вычислим математическое ожидание от обеих частей равенства. С учетом (8.3.21), (8.3.24), (8.3.5) и свойств помехи $\xi(n)$, в частности (1.6.11), получим

$$W(n) = [E - \gamma(n) \nabla^2 J^0(c^*) + o(\gamma(n))] W(n-1) + n^{-\alpha} V(n). \quad (8.3.27)$$

Как легко убедиться, из уравнений (8.3.27), (8.3.19) и (8.3.5) следует существование предела (8.3.25):

$$W = [b \nabla^2 J^0(c^*)]^{-1} V.$$

Теперь, используя (8.3.18) и (8.3.26), получаем окончательно

$$\tilde{V} = \lim_{n \rightarrow \infty} \tilde{V}(n) = [\nabla^2 J^0(c^*)]^{-1},$$

что в силу (2.2.11), (2.5.7) совпадает с (8.3.8), так как

$$\nabla^2 J^0(c^*) = \frac{1}{I(p_0)} A^{-1}(c^*, \sigma^2(p_0)).$$

Итак, алгоритм идентификации

$$\tilde{c}(n) = \tilde{c}(n-1) + \frac{1}{n} (c(n) - \tilde{c}(n-1)), \quad (8.3.28)$$

где

$$c(n) = c(n-1) + \frac{b}{n^\alpha} F'_0[\varepsilon(z(n), c(n-1))] v(n), \quad (8.3.29)$$

при любых $b > 0$, $0 < \alpha < 1$ обладает теми же асимптотическими свойствами, что и абсолютно оптимальные алгоритмы. При этом

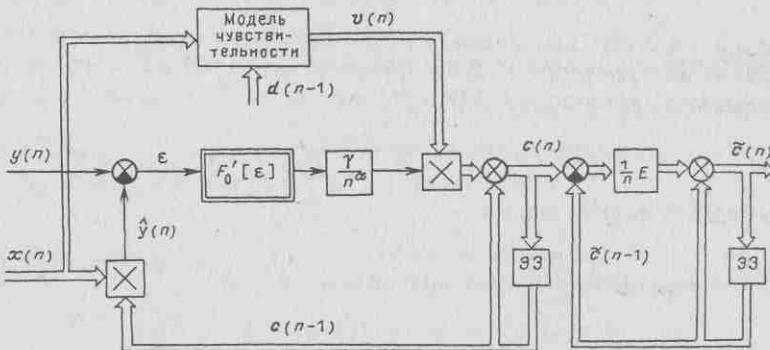


Рис. 8.2

он существенно проще с точки зрения вычисления оценок и является реализуемым. Блок-схема алгоритма (8.3.28), (8.3.29) приведена на рис. 8.2.

§ 8.4. Алгоритмы с упрощенным градиентом функции потерь

Рассмотрим общее условие оптимальности (1.4.15)

$$\nabla J^0(c) = -M\{F'_0[\varepsilon(z(n), c)]v(n)\} = 0. \quad (8.4.1)$$

Для оптимальной динамической настраиваемой модели (1.3.44)

$$v(n) = x(n) - \sum_{m=1}^N d_m^* v(n-m). \quad (8.4.2)$$

Поэтому в абсолютно оптимальных алгоритмах идентификации, которые были рассмотрены в главе 3, вместо вектора наблюдений $\mathbf{x}(n)$ фигурирует вектор $\mathbf{v}(n)$, что существенно усложняет алгоритмы идентификации. Реализация $\mathbf{v}(n)$ требует использования моделей чувствительности с настраиваемыми параметрами. Поэтому важно обсудить

возможность упрощения алгоритмов, при котором надобность в использовании моделей чувствительности отпадает. А такая возможность существует.

Рассмотрим подробнее общее условие оптимальности (8.4.1) при замене в нем $v(n)$ из (8.4.2):

$$\nabla J^0(c) = -M\{F'_0[\varepsilon(z(n), c)](x(n) - \sum_{m=1}^N d_m^* v(n-m))\} = 0. \quad (8.4.3)$$

Это условие оптимальности выполняется при $c = c^*$:

$$\begin{aligned} \nabla J^0(c^*) = & -M\{F'_0[\varepsilon(z(n), c^*)]x(n)\} + \\ & + M\{F'_0[\varepsilon(z(n), c^*)]\sum_{m=1}^N d_m^* v(n-m)\} = 0. \end{aligned} \quad (8.4.4)$$

Но при $c = c^*$ для минимально-фазового по возмущению объекта и оптимальной настраиваемой модели (см. (1.4.19))

$$\varepsilon(z(n), c^*) = y(n) - f(x(n), c^*) = \xi(n). \quad (8.4.5)$$

Поэтому из (8.4.4) получаем

$$\begin{aligned} \nabla J^0(c^*) = & -M\{F'_0[\xi(n)]x(n)\} + \\ & + M\{F'_0[\xi(n)]\sum_{m=1}^N d_m^* v(n-m)\} = 0. \end{aligned} \quad (8.4.6)$$

В силу независимости $\xi(n)$ и $x(n)$, а значит, и $\xi(n)$ и $v(n)$, из (8.4.6) следуют равенства

$$M\{F'_0[\xi(n)]x(n)\} = 0 \quad (8.4.7)$$

и

$$M\{F'_0[\xi(n)]\sum_{m=1}^N d_m^* v(n-m)\} = 0, \quad (8.4.8)$$

которые ранее (см. (1.4.18) — (1.4.21)) были использованы для установления инвариантности оптимального решения c^* относительно любых симметричных функций потерь. Теперь мы используем (8.4.7) для построения упрощенных алгоритмов. Условие оптимальности (8.4.3) можно заменить более простым:

$$M\{F'_0[\varepsilon(z(n), c)]x(n)\} = 0. \quad (8.4.9)$$

Достаточным для выполнения условия псевдоградиентности

$$(c - c^*)^\top M\{F'_0[\varepsilon(z(n), c)]x(n)\} \leq 0 \quad (8.4.10)$$

для минимально-фазовых объектов, описываемых уравнением (1.2.1), является неотрицательность вещественной части полинома по помехе, т. е.

$$\operatorname{Re} P_\xi(e^{j\omega}) \geq 0, \quad |\omega| \leq \pi. \quad (8.4.11)$$

Упрощенное условие оптимальности (8.4.9) порождает упрощенный псевдоградиентный алгоритм

$$\begin{aligned} c(n) &= c(n-1) + \hat{\Gamma}_0(n) F'_0[\varepsilon(\mathbf{z}(n), c(n-1))] \mathbf{x}(n), \\ c(0) &= c^a. \end{aligned} \quad (8.4.12)$$

Представляя $\hat{\Gamma}_0(n)$ в рекуррентной форме, аналогично тому, как это делалось в § 1.7 и § 7.4,

$$\begin{aligned} \hat{\Gamma}_0(n) &= \hat{\Gamma}_0(n-1) - \frac{\hat{\Gamma}_0(n-1) \mathbf{x}(n) \mathbf{x}^T(n) \hat{\Gamma}_0(n-1)}{I^{-1}(p_0) + \mathbf{x}^T(n) \hat{\Gamma}_0(n-1) \mathbf{x}(n)}, \\ \hat{\Gamma}_0(0) &= I_\Phi^{-1}(p_\Phi), \end{aligned} \quad (8.4.13)$$

находим упрощенные акселерантные псевдоградиентные алгоритмы идентификации (8.4.12), (8.4.13).

Если в алгоритмах (8.4.12), (8.4.13) заменить $F'_0[\varepsilon]$ на $F'_*(\varepsilon)$ и $I(p_0)$ на $I(p_*)$, то мы получим упрощенные акселерантные абсолютно оптимальные на классе алгоритмы

$$\begin{aligned} c(n) &= c(n-1) + \hat{\Gamma}_*(n) F'_*[\varepsilon(\mathbf{z}(n), c(n-1))] \mathbf{x}(n), \\ c(0) &= c^a, \end{aligned} \quad (8.4.14)$$

и

$$\begin{aligned} \hat{\Gamma}_*(n) &= \hat{\Gamma}_*(n-1) - \frac{\hat{\Gamma}_*(n-1) \mathbf{x}(n) \mathbf{x}^T(n) \hat{\Gamma}_*(n-1)}{I^{-1}(p_*) + \mathbf{x}^T(n) \hat{\Gamma}_*(n-1) \mathbf{x}(n)}, \\ \hat{\Gamma}_*(0) &= I_\Phi^{-1}(p_\Phi). \end{aligned} \quad (8.4.15)$$

Таким образом, упрощение, которое достигается в такого рода алгоритмах, состоит в том, что в них не фигурируют модели чувствительности. Внешне эти алгоритмы напоминают алгоритмы идентификации как бы при статических оптимальных моделях.

Эти упрощенные алгоритмы остаются справедливыми и для идентификации неминимально-фазовых по возмущению объектов. В этом случае, как следует из результатов § 6.2 — 6.4, в условии (8.4.6) будет фигурировать преобразованная помеха $\zeta(n)$, которая, хотя и является линейным преобразованием $\xi(n)$, но таким, которое оставляет $\zeta(n)$ некоррелированной. Достаточным для выполнения условия псевдогра-

дентности теперь является условие неотрицательности вещественной части полинома (6.2.14), фигурирующего в уравнении модели (6.2.19), которое имеет вид

$$\operatorname{Re} P(e^{j\omega}) \geq 0, \quad |\omega| \leq \pi. \quad (8.4.16)$$

На рис. 8.3 штриховкой выделена область, где условие (8.4.16) выполняется как для минимально-фазового, так и для неминимально-

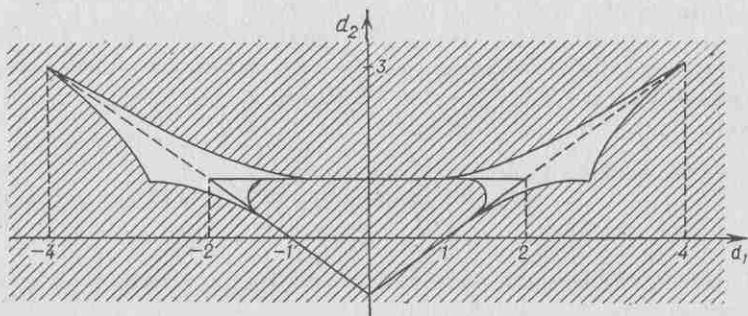


Рис. 8.3

фазового по возмущению объекта, полиномом возмущения $P_\xi(q)$, которого равен

$$P_\xi(q) = 1 + d_1 q + d_2 q^2. \quad (8.4.17)$$

Для указанной области параметров d_1, d_2 гарантируется, что упрощенные алгоритмы (8.4.12), (8.4.13) сходятся по векторам оценок $a(n)$ и $b(n)$ к векторам параметров объекта a^* и b^* .

§ 8.5. Алгоритмы идентификации при коррелированной помехе

До сих пор всегда предполагалось, что помеха, приложенная к объекту, не коррелирована. Откажемся сейчас от этого предположения.

Обозначим через $\xi_1(n)$ коррелированную помеху, которая образуется из $\xi(n)$ в результате прохождения последней через линейную систему с заданной передаточной функцией (рис. 8.4), так что

$$\xi_1(n) = \frac{P_1(q)}{P_2(q)} \xi(n). \quad (8.5.1)$$

Здесь

$$\begin{aligned} P_1(q) &= 1 + d_{11}^* q + \dots + d_{1N}^* q^N, \\ P_2(q) &= 1 + d_{21}^* q + \dots + d_{2N}^* q^N \end{aligned} \quad (8.5.2)$$

— полиномы с известными коэффициентами, причем $P_2(q)$ — внешний полином, а полином $P_1(q)$ для минимально-фазовой системы — также внешний, а для неминимально-фазовой системы имеет корни как вне, так и внутри единичного круга. Для простоты мы подробно рассмотрим лишь тот случай, когда $P_1(q)$ — внешний полином.

Уравнение идентифицируемого объекта, блок-схема которого изображена на рис. 8.5a, запишется в виде

$$y_I(n) = \frac{P_u(q)}{Q(q)} u(n) + \frac{P_\xi(q)}{Q(q)} \xi_I(n), \quad (8.5.3)$$

или, с учетом (8.5.1) (рис. 8.5б),

$$y_I(n) = \frac{P_u(q)}{Q(q)} u(n) + \frac{P_\xi(q)}{Q(q)} \frac{P_1(q)}{P_2(q)} \xi(n), \quad (8.5.4)$$

Преобразуем это уравнение к виду

$$y_I(n) = \frac{P_u(q) P_2(q)}{Q(q) P_2(q)} u(n) + \frac{P_\xi(q) P_1(q)}{Q(q) P_2(q)} \xi(n). \quad (8.5.5)$$

Оно отличается от уравнения объекта при некоррелированной помехе (1.2.4), (1.2.5) тем, что в нем вместо $Q(q)$, $P_u(q)$ и $P_\xi(q)$ фигурируют

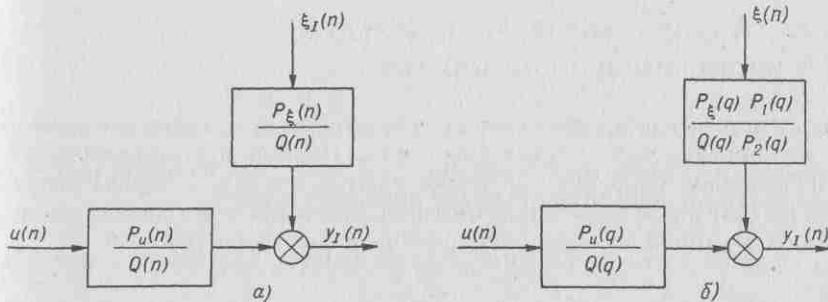


Рис. 8.5

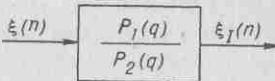


Рис. 8.4

$Q(q)P_2(q)$, $P_u(q)P_2(q)$ и $P_\xi(q)P_1(q)$ соответственно. Поэтому уравнение оптимальной настраиваемой модели для такого объекта запишется в форме

$$\hat{y}_1(n) = \frac{\hat{P}_u(q)P_2(q)}{\hat{P}_\xi(q)P_1(q)} u(n) + \left(1 - \frac{\hat{Q}(q)P_2(q)}{\hat{P}_\xi(q)P_1(q)}\right) y_1(n). \quad (8.5.6)$$

Из этого уравнения находим уравнение невязки $\varepsilon_1(n)$ для случая коррелированной помехи:

$$\varepsilon_1(n) = \frac{\hat{Q}(q)P_2(q)}{\hat{P}_\xi(q)P_1(q)} y_1(n) - \frac{\hat{P}_u(q)P_2(q)}{\hat{P}_\xi(q)P_1(q)} u(n). \quad (8.5.7)$$

Это уравнение можно записать в виде

$$\varepsilon_1(n) = \frac{P_2(q)}{P_1(q)} \varepsilon(n), \quad (8.5.8)$$

где

$$\varepsilon(n) = \frac{\hat{Q}(q)}{\hat{P}_\xi(q)} y_1(n) - \frac{\hat{P}_u(q)}{\hat{P}_\xi(q)} u(n) \quad (8.5.9)$$

— невязка для случая некоррелированной помехи.

Из (8.5.8) получаем

$$\varepsilon_1(n) = (1 - P_1(q)) \varepsilon_1(n) + P_2(q) \varepsilon(n). \quad (8.5.10)$$

Эти соотношения показывают закон преобразования невязки $\varepsilon(n)$.

Принимая во внимание более подробное обозначение невязки $\varepsilon_1(n)$ и преобразованных наблюдений $z_1(n)$, $x_1(n)$

$$\begin{aligned} \varepsilon_1(n) &= \varepsilon_1(z_1(n), c), \quad \varepsilon(n) = \varepsilon(z(n), c), \\ z_1(n) &= \frac{P_2(q)}{P_1(q)} z(n), \quad x_1(n) = \frac{P_2(q)}{P_1(q)} x(n), \end{aligned} \quad (8.5.11)$$

запишем алгоритм идентификации объектов при коррелированных помехах, получаемых по обычным правилам, в виде

$$\begin{aligned} c(n) &= c(n-1) + \hat{\Gamma}_0(n) F_0'[\varepsilon_1(z_1(n), c(n-1))] v_1(n), \\ c(0) &= c^a, \end{aligned} \quad (8.5.12)$$

$$\varepsilon_I(\mathbf{z}_I(n), \mathbf{c}(n-1)) = (1 - P_1(q)) \varepsilon_I(\mathbf{z}_I(n), \mathbf{c}(n-1)) + P_2(q) \mathbf{y}(n) - \mathbf{c}^\top(n-1) P_2(q) \mathbf{x}(n), \quad (8.5.13)$$

$$v_I(n) = (1 - P_1(q)) v_I(n) + P_2(q) v(n), \quad (8.5.14)$$

$$v(n) = x(n) - \sum_{m=1}^N d_m(n-1) v(n-m), \quad (8.5.15a)$$

$$\begin{aligned}\widehat{\Gamma}_0(n) &= \widehat{\Gamma}_0(n-1) - \frac{\widehat{\Gamma}_0(n-1) \mathbf{v}_1(n) \mathbf{v}_1^\top(n) \widehat{\Gamma}_0(n-1)}{I^{-1}(p_0) + \mathbf{v}_1^\top(n) \widehat{\Gamma}_0(n-1) \mathbf{v}_1(n)}, \\ \widehat{\Gamma}_0(0) &= I_\Phi^{-1}(p_\Phi).\end{aligned}\quad (8.5.156)$$

Блок-схема этого акселерантного абсолютного оптимального алгоритма изображена на рис. 8.6. В ней присутствует блок преобра-

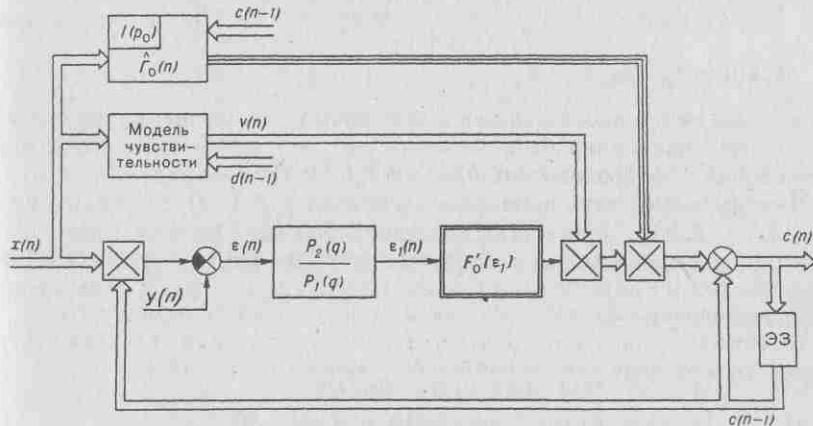


Рис. 8.6

зования невязок, который осуществляет декорреляцию помехи $\xi_1(n)$. Действительно, при $c = c^*$

$$\varepsilon(n) = \varepsilon(z(n), c^*) = \xi_I(n),$$

и, значит, в силу (8.5.1), (8.5.8)

$$\varepsilon_1(n) = \frac{P_2(q)}{P_1(q)} \xi_1(n) = \frac{P_2(q)}{P_1(q)} \frac{P_1(q)}{P_2(q)} \xi(n) = \xi(n). \quad (8.5.16)$$

Другими словами, невязка $\varepsilon_I(n) = \varepsilon_I(\mathbf{z}_I(n), \mathbf{c}^*)$ равна некоррелированной помехе $\xi(n)$.

Если в (8.5.12) — (8.5.15) заменить $F'_0[\varepsilon_I]$ на $F'_*[\varepsilon_I]$ и $I(p_0)$ на $I(p_*)$, то мы получим акселерантные абсолютно оптимальные на классе алгоритмы идентификации:

$$\begin{aligned} \mathbf{c}(n) &= \mathbf{c}(n-1) + \hat{\Gamma}_*(n) F'_*[\varepsilon_I(\mathbf{z}_I(n), \mathbf{c}(n-1))] \mathbf{v}_I(n), \\ \mathbf{c}(0) &= \mathbf{c}^a, \end{aligned} \quad (8.5.17)$$

$$\begin{aligned} \varepsilon_I(\mathbf{z}_I(n), \mathbf{c}(n-1)) &= (1 - P_1(q)) \varepsilon_I(\mathbf{z}_I(n), \mathbf{c}(n-1)) + \\ &+ P_2(q) \mathbf{v}(n) \mathbf{y}(n) - \mathbf{c}^\top(n-1) P_2(q) \mathbf{x}(n), \end{aligned} \quad (8.5.18)$$

$$\mathbf{v}_I(n) = (1 - P_1(q)) \mathbf{v}_I(n) + P_2(q) \mathbf{v}(n), \quad (8.5.19)$$

$$\mathbf{v}(n) = \mathbf{x}(n) - \sum_{m=1}^N d_m(n-1) \mathbf{v}(n-m), \quad (8.5.20a)$$

$$\begin{aligned} \hat{\Gamma}_*(n) &= \hat{\Gamma}_*(n-1) - \frac{\hat{\Gamma}_*(n-1) \mathbf{v}_I(n) \mathbf{v}_I^\top(n) \hat{\Gamma}_*(n-1)}{I^{-1}(p_*) + \mathbf{v}_I^\top(n) \hat{\Gamma}_*(n-1) \mathbf{v}_I(n)}, \\ \hat{\Gamma}_*(0) &= I_\Phi^{-1}(p_\Phi). \end{aligned} \quad (8.5.20b)$$

Блок-схема этого акселерантного абсолютно оптимального на классе алгоритма аналогична блок-схеме на рис. 8.6: в ней надо заменить нелинейный преобразователь $F'_0[\varepsilon]$ на $F'_*[\varepsilon]$ и $I(p_0)$ на $I(p_*)$.

Нетрудно получить варианты алгоритмов (8.5.12) — (8.5.15) или (8.5.16) — (8.5.18), пригодные для идентификации неминимально-фазового по помехе объекта, а также алгоритмы с упрощенными матрицей усиления и градиентом функции потерь. Мы, однако, этим здесь заниматься не будем.

§ 8.6. Алгоритмы идентификации некоторых классов нелинейных объектов

Хотя все предыдущее изложение касалось идентификации линейных объектов, описывающихся линейными разностными или суммарными уравнениями, тем не менее развитый подход можно распространить и на некоторые классы нелинейных объектов.

В качестве примера рассмотрим нелинейный РАР-объект, описываемый нелинейным разностным уравнением вида

$$y(n) = \Psi(y(n-1), \dots, y(n-N), u(n), \dots, u(n-N), \mathbf{c}^*) + \xi(n), \quad (8.6.1)$$

где \mathbf{c}^* — вектор неизвестных параметров, $\Psi = \Psi(\cdot)$ — нелинейная функция, $u(n)$ — входное воздействие, $\xi(n)$ — возмущение (незави-

симая помеха). Функция Ψ предполагается известной и удовлетворяющей некоторым условиям монотонности и гладкости, а также некоторым условиям на рост по c^* , которые обычно используются при доказательстве сходимости алгоритмов.

Уравнение оптимальной настраиваемой модели для такого нелинейного объекта, очевидно, будет иметь вид

$$\hat{y}(n) = \Psi(y(n-1), \dots, y(n-N), u(n), \dots, u(n-N), c), \quad (8.6.2)$$

или, кратко,

$$\hat{y}(n) = \Psi(\mathbf{x}(n), c), \quad (8.6.3)$$

где $\mathbf{x}(n)$ — вектор наблюдений.

Обозначим невязку

$$\varepsilon(\mathbf{z}(n), c) = y(n) - \hat{y}(n) = y(n) - \Psi(\mathbf{x}(n), c). \quad (8.6.4)$$

Тогда алгоритмы идентификации можно сформировать по обычной схеме, описанной в главах 3, 5, 7, но с заменой в них $f(\mathbf{x}(n), c)$ на $\Psi(\mathbf{x}(n), c)$. Так, акселерантные абсолютно оптимальные на классе алгоритмы идентификации нелинейного объекта, т. е. оценки вектора параметров c^* , можно представить в виде

$$\begin{aligned} c(n) &= c(n-1) + \hat{\Gamma}_*(n) F'_*[\varepsilon(\mathbf{z}(n), c(n-1))] \nabla_c \Psi(\mathbf{x}(n), c(n-1)), \\ c(0) &= c^a, \end{aligned} \quad (8.6.5)$$

$$\begin{aligned} \hat{\Gamma}_*(n) &= \hat{\Gamma}_*(n-1) - \\ &- \frac{\hat{\Gamma}_*(n-1) \nabla_c \Psi(\mathbf{x}(n), c(n-1)) \nabla_c^\top \Psi(\mathbf{x}(n), c(n-1)) \hat{\Gamma}_*(n-1)}{I^{-1}(p_*) + \nabla_c^\top \Psi(\mathbf{x}(n), c(n-1)) \hat{\Gamma}_*(n-1) \nabla_c \Psi(\mathbf{x}(n), c(n-1))}, \\ \hat{\Gamma}_*(0) &= I_\Phi^{-1}(p_\Phi). \end{aligned} \quad (8.6.6)$$

Часто уравнения нелинейных объектов можно представить в виде отрезка дискретного ряда Вольтерра

$$y(n) = \sum_{r=1}^{k_0} \sum_{m_1=0}^{k_1-1} \dots \sum_{m_r=0}^{k_r-1} b_{m_1 \dots m_r} u(n-m_1) \dots u(n-m_r) + \xi(n), \quad (8.6.7)$$

или, в развернутой форме,

$$\begin{aligned} y(n) &= \sum_{m_1=0}^{k_1-1} b_{m_1} u(n-m_1) + \sum_{m_1=0}^{k_1-1} \sum_{m_2=0}^{k_2-1} b_{m_1 m_2} u(n-m_1) u(n-m_2) + \dots \\ &\quad \dots + \xi(n). \end{aligned} \quad (8.6.8)$$

Здесь $\xi(n)$ — независимые одинаково распределенные помехи.

Уравнение оптимальной настраиваемой модели для такого нелинейного объекта запишем в виде

$$\hat{y}(n) = \mathbf{c}^T \mathbf{x}(n) = \mathbf{x}^T(n) \mathbf{c}, \quad (8.6.9)$$

где

$$\begin{aligned} \mathbf{x}(n) = & (u(n), \dots, u(n - k_1 + 1), u^2(n), u(n)u(n - 1), \dots \\ & \dots, u(n - k_1 + 1)u(n - k_2 + 1), \dots) \end{aligned} \quad (8.6.10)$$

— вектор наблюдений и

$$\mathbf{c} = (b_0, \dots, b_{k_1-1}, b_{00}, b_{01}, \dots, b_{(k_1-1)(k_2-1)}, \dots) \quad (8.6.11)$$

— вектор параметров оптимальной настраиваемой модели. В этом случае мы приходим к Р-объекту, линейному относительно параметров и нелинейному относительно наблюдений.

Все приведенные ранее алгоритмы для статической настраиваемой модели остаются справедливыми и для рассматриваемого нелинейного объекта. Так, акселерантные абсолютно оптимальные на классе алгоритмы идентификации нелинейных объектов будут иметь следующий вид:

$$\begin{aligned} \mathbf{c}(n) = & \mathbf{c}(n-1) + \hat{\Gamma}_*(n) F'_*[\varepsilon(\mathbf{z}(n), \mathbf{c}(n-1))] \mathbf{x}(n), \\ \mathbf{c}(0) = & \mathbf{c}^a, \end{aligned} \quad (8.6.12)$$

$$\hat{\Gamma}_*(n) = \hat{\Gamma}_*(n-1) - \frac{\hat{\Gamma}_*(n-1) \mathbf{x}(n) \mathbf{x}^T(n) \hat{\Gamma}_*(n-1)}{I^{-1}(p_*) + \mathbf{x}^T(n) \hat{\Gamma}_*(n-1) \mathbf{x}(n)}, \quad (8.6.13)$$

$$\hat{\Gamma}_*(0) = I_\Phi^{-1}(p_\Phi).$$

Но теперь невязка равна

$$\varepsilon(\mathbf{z}(n), \mathbf{c}) = y(n) - \mathbf{c}^T \mathbf{x}(n). \quad (8.6.14)$$

В ней фигурируют вектор наблюдений $\mathbf{x}(n)$ (8.6.10) и вектор параметров \mathbf{c} (8.6.11), которые отличаются от прежних физическим смыслом.

Нетрудно сформировать алгоритмы идентификации и в том случае, когда вместо независимой помехи $\xi(n)$ в уравнении объекта фигурирует коррелированная помеха $\xi_1(n)$ (8.5.1), а также когда предшествующие значения независимой помехи $\xi(n-m)$, $m = 1, 2, \dots$, являются также аргументами нелинейной функции $\Psi(\cdot)$, т. е. когда уравнение объекта вместо (8.6.1), например, имеет вид

$$\begin{aligned} y(n) = & \Psi(y(n-1), \dots, y(n-N), u(n), \dots \\ & \dots, u(n-N), \xi(n-1), \dots, \xi(n-N); \mathbf{c}^*) + \xi(n), \end{aligned} \quad (8.6.15)$$

В этом последнем случае оптимальная настраиваемая модель, уравнение которой имеет вид

$$\hat{y}(n) = \Psi(y(n-1), \dots, y(n-N), u(n), \dots, u(n-N), \\ y(n-1) - \hat{y}(n-1), \dots, y(n-N) - \hat{y}(n-N); c^*) + \xi(n), \quad (8.6.16)$$

будет динамической и нелинейной. Формирование акселерантных абсолютно оптимальных или абсолютно оптимальных на классе алгоритмов идентификации такого рода нелинейных объектов также не представляет труда.

Разумеется, все это не должно создавать иллюзии легкости строгого обоснования как сходимости, так и оптимальности подобных алгоритмов.

§ 8.7. Примеры

Приведем результаты моделирования модифицированных алгоритмов идентификации.

На рис. 8.7 и 8.8 изображены зависимости $M\{\|c(n) - c^*\|^2\}$ от n при идентификации Р- и РАР-объектов соответственно, детально рассмотренных в главе 3, § 3.5. Эти зависимости получены с помощью модифицированного алгоритма (8.2.1), в котором $\Gamma_c(n) = \frac{b}{n} E$ (8.2.2), (8.2.6) (непрерывные кривые).

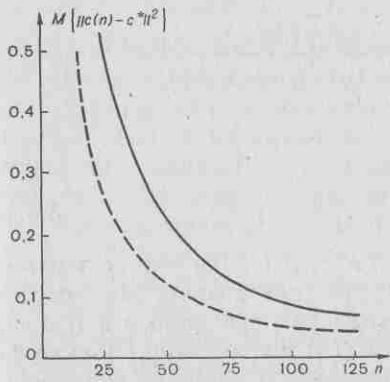


Рис. 8.7

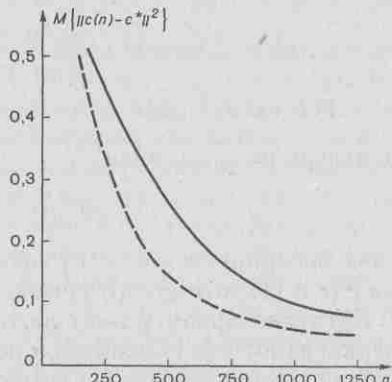


Рис. 8.8

Оценивание параметров того же РАР-объекта без использования функций чувствительности иллюстрирует рис. 8.9 (непрерывная кривая). Для сравнения модифицированных алгоритмов с абсолютно оптимальными алгоритмами на рис. 8.7 — 8.9 пунктиром показаны со-

ответствующие зависимости, полученные с помощью абсолютно оптимальных алгоритмов, которые ранее были приведены в главе 3 (рис. 3.28, 3.33, кривые *a*).

Из сравнения оценок, полученных с помощью оптимального алгоритма и алгоритма со скалярной матрицей усиления (рис. 8.7, 8.8),

следует, что асимптотически эти алгоритмы практически ведут себя одинаково. В то же время видно, что на начальном участке оценки, получаемые с помощью оптимального алгоритма, точнее оценок, порождаемых алгоритмом со скалярной матрицей усиления. Учет функций чувствительности практически не влияет на точность оценивания, а в некоторых случаях даже может приводить к уменьшению точности (рис. 8.9).

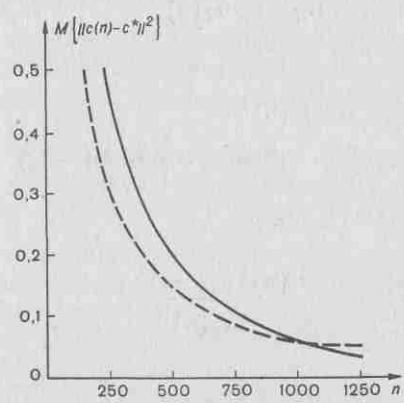


Рис. 8.9

Усредненный алгоритм (8.3.1), (8.3.4), (8.3.5) со скалярной матрицей усиления $\gamma(n) = n^{-3/4}$ применялся для идентификации РАР-объекта с простой помехой, описываемого уравнением

$$y(n) = 0,3y(n-1) + u(n) + 2u(n-1) + 0,1u(n-2) + \xi(n),$$

где входная последовательность и помехи предполагаются гауссовскими: $u(n) \sim N(0, 1)$, $\xi(n) \sim N(0, 1)$. Результат представлен на рис. 8.10 сплошной линией. Для сравнения пунктирной линией показана аналогичная кривая для рекуррентного алгоритма МНК, который дает оптимальные оценки в рассматриваемом случае. Приведенные результаты не только подтверждают оптимальность усредненного алгоритма «в асимптотике», но и демонстрируют достаточно высокую точность полученных с его помощью оценок на начальных шагах.

Результаты идентификации линейного динамического объекта $y(n) = -a_1^*y(n-1) + b_1^*u(n-1) + \xi_1(n)$ при $a_1^* = -0,9$, $b_1^* = 2$ и с коррелированной помехой $\xi_1(n)$, образованной прохождением центрированного гауссовского белого процесса $\xi(n)$ с единичной дисперсией через линейный фильтр с передаточной функцией

$$\frac{P_1(q)}{P_2(q)} = \frac{1 - 0,5q}{1 + 0,6q},$$

отражены на рис. 8.11. Здесь приведена зависимость $M\{(a_1(n) - a_1^*)^2 + (b_1(n) - b_1^*)^2\} = M\{||c(n) - c^*||^2\}$ от n (непрерывная кривая). Оценки

$a_1(n)$ и $b_1(n)$ вычисляются с помощью абсолютно оптимального акселерантного линейного алгоритма, получаемого из (8.5.12) — (8.5.15) при $F_0'[\varepsilon] = \frac{1}{2}\varepsilon^2$ и $v_1(n) = x_1(n)$:

$$\begin{aligned} c(n) &= c(n-1) + \widehat{\Gamma}_0(n) \varepsilon(z_I(n), c(n-1)) x_I(n), \\ c(0) &= c^a, \\ \varepsilon(z_I(n), c(n-1)) &= 0,5 \varepsilon(z_I(n-1), c(n-1)) + y(n) + \\ &+ 0,6 y(n-1) - c^T(n-1) (x(n) + 0,6 x(n-1)), \\ x_I(n) &= 0,5 x_I(n-1) + x(n) + 0,6 x(n-1), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \widehat{\Gamma}_0(n) &= \widehat{\Gamma}_0(n-1) - \frac{\widehat{\Gamma}_0(n-1) x_I(n) x_I^T(n) \widehat{\Gamma}_0(n-1)}{1 + x_I^T(n) \widehat{\Gamma}_0(n-1) x_I(n)}, \\ \widehat{\Gamma}_0(0) &= I_\Phi^{-1}(p_\Phi), \end{aligned}$$

где

$$x(n) = (-y(n-1), u(n-1)), \quad c(n) = (a_1(n), b_1(n)).$$

Для сравнения на рис. 8.11 приведена та же зависимость (пунктирная кривая) для случая, когда оценки $c(n)$ вычисляются с помощью рекуррентного алгоритма метода наименьших квадратов так, как будто процесс $\xi_1(n)$ является гауссовским белым процессом. Это приводит к уменьшению точности оценок и к появлению смещения.

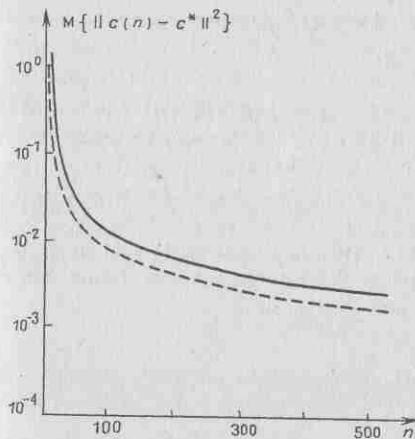


Рис. 8.10

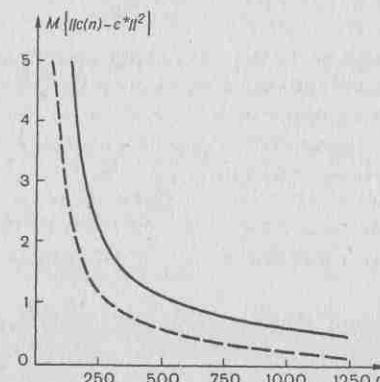


Рис. 8.11

На рис. 8.12 приведена зависимость $M\{\|c(n) - c^*\|^2\}$ от n при идентификации нелинейного динамического объекта, описываемого уравнением

$$y(n) = 0,5\varphi(y(n-1)) + u(n) + 2u^3(n-1) + \xi(n) + 0,3\xi(n-1),$$

где $c^* = (0,5; 1; 2)$ — вектор идентифицируемых параметров. Параметр $d^* = 0,3$ известен, $u(n)$, $\xi(n)$ — дискретные белые гауссовские процессы с нулевым средним и единичной дисперсией, а нелинейность $\varphi(\cdot)$ имеет характер насыщения:

$$\varphi(y) = \begin{cases} 1, & y > 1, \\ y, & |y| \leq 1, \\ -1, & y < -1. \end{cases}$$

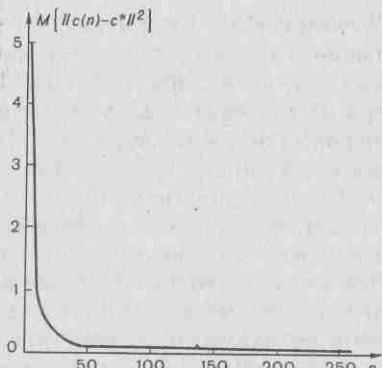


Рис. 8.12

Оценивание параметров производилось абсолютно оптимальным акселерантным линейным алгоритмом:

$$c(n) = c(n-1) + \widehat{\Gamma}_0(n) F'_0[\varepsilon(z_I(n), c(n-1))] x_I(n),$$

$$c(0) = c^a,$$

$$\widehat{\Gamma}_0(n) = \widehat{\Gamma}_0(n-1) - \frac{\widehat{\Gamma}_0(n-1) x_I(n) x_I^T(n) \widehat{\Gamma}_0(n-1)}{I^{-1}(p_0) + x_I^T(n) \widehat{\Gamma}_0(n-1) x_I(n)},$$

$$\widehat{\Gamma}_0(0) = I_\Phi^{-1}(p_\Phi),$$

в котором используется преобразованная невязка $\varepsilon(z_I(n), c(n-1))$ и преобразованный вектор наблюдений $z_I(n) = (y(n), x_I(n))$, где

$$\varepsilon(z_I(n), c(n-1)) = -0,3\varepsilon(z_I(n-1), c(n-2)) + y(n) - c^T(n-1) x(n),$$

$$x_I(n) = -0,3x_I(n-1) + x(n),$$

$$x(n) = (\varphi(y(n-1)), u(n), u^3(n-1)).$$

Рис. 8.12 иллюстрирует возможность применения акселерантных абсолютно оптимальных алгоритмов для идентификации нелинейных объектов рассмотренного типа.

§ 8.8. Еще о возможности акселерации алгоритмов

Акселерация алгоритмов путем учета априорной информации о решении, как было показано в главе 7, сводилась к определению начальных условий алгоритмов $c(0)$ и $\Gamma(0)$. При этом начальное значение матрицы усиления оказалось равным значению обратной фишеровской информационной матрицы, определенной фидуциальной плотностью распределения.

Естественно, чем ближе начальное условие $c(0)$ к c^* , тем быстрее оценки, порождаемые абсолютно оптимальным алгоритмом, достигают своего асимптотического, а значит, и оптимального поведения. При отсутствии такой априорной информации абсолютно оптимальные алгоритмы на конечных шагах n могут приводить, вообще говоря, к оценкам $c(0)$, очень далеким от c^* . Возникает задача такой модификации абсолютно оптимальных алгоритмов, которая, не изменяя их асимптотических свойств, позволила бы при конечном n получить лучшие оценки, мало зависящие от произвольного выбора начальных условий. Обсуждению этой возможности мы и посвятим настоящий параграф книги.

Абсолютно оптимальные алгоритмы идентификации, обладающие предельно возможной асимптотической скоростью сходимости, имеют вид (3.1.15), (3.2.4а), (3.1.16)

$$c(n) = c(n-1) + \Gamma_0(n) F'_0[\varepsilon(z(n), c(n-1))] v(n), \quad (8.8.1)$$

$$v(n) = - \sum_{m=1}^N d_m(n-1) v(n-m) + x(n), \quad (8.8.2)$$

$$\Gamma_0(n) = \frac{1}{n I(p_0)} A^{-1}(c^*, \sigma^2(p_0)), \quad (8.8.3)$$

где

$$A(c^*, \sigma^2(p_0)) = M\{v(n) v^\top(n)\}. \quad (8.8.4)$$

Для получения реализуемых алгоритмов мы в предыдущих главах широко использовали замену в матрице усиления $\Gamma_0(n)$ (8.8.3) вектора оптимального решения c^* оценкой $c(n-1)$, а также нормированной информационной матрицы $A(c^*, \sigma^2(p_0))$ — оценкой

$$\hat{A}_n = \frac{1}{n} \sum_{t=1}^n v(t) v^\top(t), \quad (8.8.5)$$

что, в частности, приводило к оценке обратной матрицы усиления

$$\hat{\Gamma}_0^{-1}(n) = I(p_0) \sum_{t=1}^n v(t) v^\top(t). \quad (8.8.6)$$

Отсюда, в свою очередь, вытекало рекуррентное представление оценки матрицы усиления

$$\widehat{\Gamma}_0(n) = \widehat{\Gamma}_0(n-1) - \frac{\widehat{\Gamma}_0(n-1) \mathbf{v}(n) \mathbf{v}^T(n) \widehat{\Gamma}_0(n-1)}{I^{-1}(p_0) + \mathbf{v}^T(n) \widehat{\Gamma}_0(n-1) \mathbf{v}(n)}. \quad (8.8.7)$$

Пойдем еще дальше по этому пути. Поскольку, как это видно из (8.8.3), (8.8.4) и (2.5.7),

$$\Gamma_0(n) = [n \mathbf{M}\{F_0''[\xi(n)] \mathbf{v}(n) \mathbf{v}^T(n)\}]^{-1}, \quad (8.8.8)$$

то, переходя в (8.8.8) от математического ожидания к его эмпирической оценке, получим

$$\widehat{\Gamma}(n) = \left[\sum_{t=1}^n F_0''[\varepsilon(t)] \mathbf{v}(t) \mathbf{v}^T(t) \right]^{-1}. \quad (8.8.9)$$

Применяя к (8.8.9) формулу обращения матрицы (1.7.18) и заменяя затем $\varepsilon(t)$ на $\varepsilon(\mathbf{z}(t), \mathbf{c}(t-1))$, запишем матрицу усиления $\widehat{\Gamma}(n)$ (8.8.9) в виде рекуррентного соотношения

$$\widehat{\Gamma}(n) = \widehat{\Gamma}(n-1) - \frac{\widehat{\Gamma}(n-1) \mathbf{v}(n) \mathbf{v}^T(n) \widehat{\Gamma}(n-1)}{(F_0''[\varepsilon(\mathbf{z}(n), \mathbf{c}(n-1))])^{-1} + \mathbf{v}^T(n) \widehat{\Gamma}(n-1) \mathbf{v}(n)}. \quad (8.8.10)$$

Сопоставляя (8.8.10) и (8.8.7), замечаем, что $\widehat{\Gamma}(n)$ получается из $\widehat{\Gamma}_0(n)$ путем замены фишеровской информации $I(p_0) = \mathbf{M}\{F_0''[\xi]\}$ величиной $F_0''[\varepsilon(\mathbf{z}(n), \mathbf{c}(n-1))]$. Таким образом, из абсолютно оптимальных алгоритмов (3.2.3), (3.2.4) заменой в матрице усиления математического ожидания эмпирическим средним мы приходим к абсолютно оптимальным алгоритмам

$$\mathbf{c}(n) = \mathbf{c}(n-1) + \widehat{\Gamma}(n) F_0'[\varepsilon(\mathbf{z}(n), \mathbf{c}(n-1))] \mathbf{v}(n), \quad (8.8.11)$$

$$\mathbf{v}(n) = - \sum_{m=1}^N d_m(n-1) \mathbf{v}(n-m) + \mathbf{x}(n), \quad (8.8.12)$$

$$\widehat{\Gamma}(n) = \widehat{\Gamma}(n-1) - \frac{\widehat{\Gamma}(n-1) \mathbf{v}(n) \mathbf{v}^T(n) \widehat{\Gamma}(n-1)}{(F_0''[\varepsilon(\mathbf{z}(n), \mathbf{c}(n-1))])^{-1} + \mathbf{v}^T(n) \widehat{\Gamma}(n-1) \mathbf{v}(n)}. \quad (8.8.13)$$

Заменяя в (8.8.11) и (8.8.13) $F_0[\varepsilon]$ на $F_*[\varepsilon]$, получаем абсолютно оптимальные на классе алгоритмы

$$\mathbf{c}(n) = \mathbf{c}(n-1) + \widehat{\Gamma}(n) F_*'[\varepsilon(\mathbf{z}(n), \mathbf{c}(n-1))] \mathbf{v}(n), \quad (8.8.14)$$

$$v(n) = - \sum_{m=1}^N d_m(n-1) v(n-m) + x(n), \quad (8.8.15)$$

$$\hat{\Gamma}(n) = \hat{\Gamma}(n-1) - \frac{\hat{\Gamma}(n-1) v(n) v^T(n) \hat{\Gamma}(n-1)}{(F''_*[\varepsilon(z(n), c(n-1))])^{-1} + v^T(n) \hat{\Gamma}(n-1) v(n)}. \quad (8.8.16)$$

Эти абсолютно оптимальные на классе алгоритмы можно также назвать акселерантными. В них матрица усиления зависит от невязки $\varepsilon(z(n), c(n-1)) = y(n) - c^T(n-1)x(n)$, и это обстоятельство приводит к акселерации. Чтобы убедиться в этом, рассмотрим два класса распределений: \mathcal{P}_2 — класс распределений с ограниченной дисперсией и \mathcal{P}_3 — класс приближенно нормальных распределений (см. табл. 4.1). Для класса \mathcal{P}_2 имеем $F''_*[\varepsilon] = \sigma_1^2 = \text{const}$, и из (8.8.14) — (8.8.16) следуют алгоритмы метода наименьших квадратов. Для класса \mathcal{P}_3

$$F''_*[\varepsilon] = \begin{cases} \sigma_N^{-2} & \text{при } |\varepsilon| \leq \Delta, \\ 0 & \text{при } |\varepsilon| > \Delta. \end{cases} \quad (8.8.17)$$

Отсюда вытекает, что при большой величине невязки, а именно при $|\varepsilon(z(n), c(n-1))| > \Delta$, второе слагаемое в (8.8.16) обращается в нуль и, значит, матрица усиления остается неизменной, а не уменьшается монотонно с ростом n , как это имеет место в алгоритмах (8.8.1) — (8.8.3). Постоянство матрицы $\hat{\Gamma}(n)$ при $|\varepsilon(z(n), c(n-1))| > \Delta$ ускоряет сходимость алгоритма при малых n .

Разумеется, изложенный путь акселерации применим не только к абсолютно оптимальным и абсолютно оптимальным на классе алгоритмам, но и к их модификациям, описанным в настоящей главе. Отметим, что замена в рекуррентных формах матрицы усиления (8.8.7) фишеровской информации $I(p_0) = M\{F''_0[\varepsilon]\}$ на $F''_*[\varepsilon(z(n), c(n-1))]$ позволяет не только ускорить сходимость, но и обеспечить сходимость в тех случаях, когда при матрицах усиления вида (8.8.7) она может нарушаться для отдельных реализаций.

Рассмотрим простейший пример акселерации алгоритма оценки среднего значения. Абсолютно оптимальный на классе алгоритм оценки среднего значения, как было показано в § 5.4, может быть записан в виде

$$c(n) = c(n-1) + \gamma(n) F'_* [y(n) - c(n-1)], \quad (8.8.18)$$

где

$$\gamma(n) = \frac{1}{n I(p_*)}. \quad (8.8.19)$$

Из равенства

$$\gamma^{-1}(n) = \gamma^{-1}(n-1) + I(p_*), \quad (8.8.20)$$

эквивалентного (8.8.19), вытекает, что $\gamma(n)$ можно представить в рекуррентной форме:

$$\gamma(n) = \gamma(n-1) - \frac{\gamma^2(n-1)}{I^{-1}(p_*) + \gamma(n-1)}. \quad (8.8.21)$$

Акселерантный алгоритм получается из (8.8.21) после замены $I(p_*)$ на $F_*''[y(n) - c(n-1)]$, т. е.

$$c(n) = c(n-1) + \hat{\gamma}(n) F_*'[y(n) - c(n-1)] \quad (8.8.22)$$

и

$$\hat{\gamma}(n) = \hat{\gamma}(n-1) - \frac{\hat{\gamma}^2(n-1)}{(F_*''[y(n) - c(n-1)])^{-1} + \hat{\gamma}(n-1)}. \quad (8.8.23)$$

Легко видеть, что при $F_*''[y(n) - c(n-1)] = 0$ коэффициент усиления $\hat{\gamma}(n)$ не изменяет своего значения, т. е. $\hat{\gamma}(n) = \hat{\gamma}(n-1)$.

Физический смысл таких акселерантных алгоритмов состоит в том, что благодаря постоянству или даже возрастанию коэффициента усиления на некоторых участках процесса адаптации быстрее устанавливаются асимптотические свойства оценок. При этом устраняется существенное влияние начальных условий.

§ 8.9. О критериальных алгоритмах идентификации

До сих пор рассматривались алгоритмы идентификации, оценивающие наилучшим образом параметры динамического объекта, т. е. оценивающие оптимальное решение, минимизирующее средние потери. Такие алгоритмы можно назвать *аргументными*. Однако в ряде случаев могут оказаться полезными алгоритмы, определяющие наилучшим образом минимальное значение средних потерь. В отличие от аргументных алгоритмов эти алгоритмы уместно назвать *критериальными*. Такое подразделение уже приобрело права гражданства в задачах оптимизации.

Для формирования критериальных алгоритмов идентификации воспользуемся уклонением средних потерь (2.2.19)

$$w_n = M\{J(\hat{c}(n))\} - J(c^*), \quad (8.9.1)$$

где $J(c) = M\{F[\varepsilon(z(n), c)]\}$ — средние потери, $J(c^*)$ — минимальное значение средних потерь. Для асимптотического уклонения средних потерь (АУСП) $w = \lim_{n \rightarrow \infty} n w_n$ (2.2.25) в § 2.2 была получена формула (см. (2.2.28))

$$w = w(F) = \frac{1}{2} \frac{M\{F'^2[\xi]\}}{[M\{F''[\xi]\}]^2} N_c, \quad (8.9.2)$$

где N_c — размерность вектора параметров c . С другой стороны, АМКО $V(F, p_0)$ согласно (2.2.18) имеет вид

$$V(F, p_0) = \frac{M\{F'^2[\xi]\}}{[M\{F''[\xi]\}]^2} A^{-1}(c^*, \sigma^2(p_0)). \quad (8.9.3)$$

Сопоставляя АУСП (8.9.2) и АМКО (8.9.3), заключаем, что АМКО $V(F, p_0)$ зависит от функции потерь F и плотности распределения помех $p_0(\xi)$ или, точнее, дисперсии помех $\sigma^2(p_0)$, тогда как АУСП $w(F)$ зависит только от функции потерь и размерности вектора параметров c . В случае, если плотность распределения помех $p_0(\xi)$ известна, выбор оптимальной функции потерь сводится к минимизации скалярного множителя в АМКО, который фигурирует также в АУСП. Следовательно, оптимальная функция потерь, согласно (2.4.19) имеющая вид

$$F_0[\varepsilon] = -\ln p_0(\xi)|_{\xi=\varepsilon}, \quad (8.9.4)$$

одновременно минимизирует АМКО и АУСП. Соответствующие минимальные значения равны

$$V(F_0, p_0) = \frac{1}{I(p_0)} A^{-1}(c^*, \sigma^2(p_0)) \leq V(F, p_0), \quad (8.9.5)$$

$$w(F_0) = \frac{1}{I(p_0)} N_c \leq w(F). \quad (8.9.6)$$

Таким образом, в этом случае оптимальные аргументные и критериальные алгоритмы совпадают друг с другом, поскольку оптимальная функция потерь (8.9.4) однозначно определяет нелинейное преобразование невязки $F'[\varepsilon]$ и матрицу усиления $\hat{\Gamma}_0(n)$.

Если, однако, плотность распределения полностью не известна, а известно лишь, что она принадлежит некоторому классу: $p_0(\xi) \in \mathcal{P}$, то аргументные и критериальные алгоритмы существенно отличаются друг от друга. В этом случае

$$F_*[\varepsilon] = -\ln p_*(\xi)|_{\xi=\varepsilon}, \quad (8.9.7)$$

где для аргументных алгоритмов (§ 4.2)

$$p_*(\xi) = \arg \min_{p_0 \in \mathcal{P}} I(p_0) A(c^*, \sigma^2(p_0)), \quad (8.9.8)$$

а для критериальных алгоритмов

$$p_*(\xi) = \arg \min_{p_0 \in \mathcal{P}} I(p_0). \quad (8.9.9)$$

Задача минимизации (8.9.8) сложна, и в большинстве случаев ее решение может быть найдено лишь приближенно (§ 4.7 и табл. 4.4), в то

время как задача (8.9.9) во многих случаях допускает аналитическое решение (§ 4.5, табл. 4.1).

Таким образом, для АР- и РАР-объектов, а также для Р-объектов с преобразованной помехой оптимальная функция потерь в критериальных алгоритмах совпадает с оптимальной функцией потерь в аргументных алгоритмах для Р-объектов с простой помехой.

Допустим теперь, что нормированная информационная матрица $A(c^*, \sigma^2(p_0))$ может быть вырожденной, т. е. $A(c^*, \sigma^2(p_0)) \geq 0$ и ее ранг $\text{rank } A(c^*, \sigma^2(p_0)) = \tilde{N} < N_c$. В этом случае аргументные алгоритмы теряют свойство сходимости и, значит, абсолютно оптимальные аргументные алгоритмы не существуют, тогда как абсолютно оптимальные критериальные алгоритмы обеспечивают асимптотическую критериальную скорость сходимости, равную

$$\tilde{w} = \frac{1}{I(p_0)} \tilde{N}. \quad (8.9.10)$$

Чем меньше \tilde{N} , тем меньше АУСП \tilde{w} .

Абсолютно оптимальные на классе критериальные алгоритмы с учетом акселерации совпадают с абсолютно оптимальными на классе аргументными алгоритмами (8.8.14) — (8.8.16). Они имеют вид

$$c(n) = c(n-1) + \hat{\Gamma}(n) F'_*[\varepsilon(z(n), c(n-1))] v(n),$$

$$c(0) = c_0,$$

$$v(n) = - \sum_{m=1}^N d_m(n-1) v(n-m) + x(n),$$

$$v(m) = 0, \quad m = 0, -1, \dots, -N+1,$$

$$\hat{\Gamma}(n) = \hat{\Gamma}(n-1) - \frac{\hat{\Gamma}(n-1) v(n) v^\top(n) \hat{\Gamma}(n-1)}{(F''_*[\varepsilon(z(n), c(n-1))])^{-1} + v^\top(n) \hat{\Gamma}(n-1) v(n)},$$

$$\hat{\Gamma}(0) = \gamma E, \quad \gamma \gg 1.$$

Однако теперь рекуррентное соотношение относительно $\hat{\Gamma}(n)$ осуществляет псевдообращение матрицы

$$\sum_{m=1}^n F''_*[\xi(m)] v(m) v^\top(m)$$

с последующей заменой $\xi(n)$ на $\varepsilon(n)$. Можно ожидать, что такие оптимальные на классе критериальные алгоритмы найдут широкое применение в практике идентификации динамических объектов.

§ 8.10. Заключение

В этой главе были рассмотрены различные модификации акселерантных оптимальных на классе алгоритмов идентификации. Они касались как упрощения алгоритмов, так и расширения их возможностей. Упрощение алгоритмов достигается заменой матрицы усиления скаляром, исключением из алгоритма моделей чувствительности. Расширение их возможностей относится к обобщению их на случаи коррелированных помех и некоторых классов нелинейных объектов. Расширение возможностей связано также с акселерацией алгоритмов за счет введения зависимости матрицы усиления от невязки путем замены фишеровской информации второй производной функции потерь от невязки и с введением критериальных алгоритмов идентификации.

Подробное исследование всех таких модифицированных алгоритмов к настоящему времени провести невозможно. Однако их работоспособность и эффективность наглядно иллюстрируется численными экспериментами.

Метод важнее результата, потому что с его помощью может быть получено много результатов.

Л. Д. Ландау

ГЛАВА 9

Алгоритмы идентификации нестационарных объектов

§ 9.1. Описание нестационарных динамических объектов и их особенности

Нестационарные динамические объекты характеризуются дрейфом их параметров во времени. При наличии входного воздействия и помех уравнение линейного нестационарного динамического объекта можно представить в виде линейного разностного уравнения с переменными коэффициентами:

$$y(n) + \sum_{m=1}^N a_m^*(n) y(n-m) = \sum_{m=0}^N b_m^*(n) u(n-m) + \sum_{m=0}^N d_m^*(n) \xi(n-m), \quad (9.1.1)$$

или в операторной форме

$$Q(q, n)y(n) = P_u(q, n)u(n) + P_\xi(q, n)\xi(n), \quad (9.1.2)$$

где $Q(q, n)$, $P_u(q, n)$, $P_\xi(q, n)$ — полиномы от оператора задержки с изменяющимися во времени коэффициентами:

$$Q(q, n) = 1 + a_1^*(n)q + \dots + a_N^*(n)q^N, \quad (9.1.3a)$$

$$\begin{aligned} P_u(q, n) &= b_0^*(n) + b_1^*(n)q + \dots + b_N^*(n)q^N, \\ P_\xi(q, n) &= d_0^*(n) + d_1^*(n)q + \dots + d_N^*(n)q^N. \end{aligned} \quad (9.1.36)$$

Классификация нестационарных объектов аналогична классификации объектов с постоянными параметрами, приведенной в § 1.2, поэтому здесь мы не будем на ней останавливаться.

Изменение параметров нестационарного объекта вызывает изменение коэффициентов уравнения (9.1.1). Описание этих изменений определяется моделями их дрейфа, которые, в свою очередь, связаны с физической природой объекта и априорной информацией о его поведении. Как и ранее, образуем из коэффициентов уравнения (9.1.1) вектор параметров $c^*(n)$ размерности $N_c = 3N + 2$:

$$c^*(n) = (a_1^*(n), \dots, a_N^*(n), b_0^*(n), \dots, b_N^*(n), d_0^*(n), \dots, d_N^*(n)). \quad (9.1.4)$$

Обсудим возможные модели дрейфа.

1. Дрейф задается в виде явной функции времени с неизвестными параметрами:

$$c^*(n) = f(n, \theta^*), \quad (9.1.5)$$

где $f(n, \theta^*)$ — вектор-функция, θ^* — вектор неизвестных параметров.

2. Дрейф задается в виде разностного уравнения с неизвестными начальными условиями:

$$c^*(n) = g_n(c^*(n-1)). \quad (9.1.6)$$

Здесь $g_n: R^{N_c} \rightarrow R^{N_c}$ — заданная вектор-функция, $c^*(0)$ — неизвестное начальное значение. В этой форме, в частности, записывается условие отсутствия дрейфа

$$c^*(n) = c^*(n-1). \quad (9.1.7)$$

3. Дрейф задается в виде разностного уравнения с неизвестными параметрами:

$$c^*(n) = g_n(c^*(n-1), \theta^*), \quad (9.1.8)$$

где $\theta^* \in R^M$ — вектор неизвестных параметров, $g_n: R^{N_c+M} \rightarrow R^{N_c}$ — заданная вектор-функция. Этот случай сводится к предыдущему путем расширения пространства параметров. Именно, введем расширенный вектор параметров $\bar{c}^*(n)$ размерности $N_c + M$ и расширенную вектор-функцию $\bar{g}_n(\bar{c}^*(n-1))$ следующим образом:

$$\bar{c}^*(n) = (c^*(n), \theta^*(n)), \quad (9.1.9)$$

$$\bar{g}_n(\bar{c}^*(n-1)) = (g_n(c^*(n-1)), \theta^*(n-1)). \quad (9.1.10)$$

Присоединим условие

$$\theta^*(n) = \theta^*(n-1). \quad (9.1.11)$$

Тогда уравнение (9.1.8) будет эквивалентно расширенному уравнению

$$\bar{c}^*(n) = \bar{g}_n(\bar{c}^*(n-1)), \quad (9.1.12)$$

уже не содержащему неизвестных параметров.

Таким образом, модели дрейфа можно представить в явной (9.1.5) и неявной (9.1.6) формах. Эти два представления взаимосвязаны: $f(n, \theta^*)$ в (9.1.5) можно рассматривать как решение разностного уравнения (9.1.6) при соответствующих начальных значениях $\bar{c}^*(0)$.

Для иллюстрации рассмотрим пример полиномиального дрейфа:

$$c^*(n) = f(n, \theta^*) = \theta_0^* + \theta_1^* n + \dots + \theta_k^* n^k, \quad (9.1.13)$$

где $\theta_i^* \in R^{Nc}$, $i = 0, 1, \dots, k$, и $\theta^* = (\theta_0^*, \theta_1^*, \dots, \theta_k^*) \in R^{(k+1)Nc}$. Нетрудно проверить, что $c^*(n)$ (9.1.13) удовлетворяет многошаговому разностному уравнению

$$c^*(n) = \alpha_1 c^*(n-1) + \dots + \alpha_{k+1} c^*(n-k-1), \quad (9.1.14)$$

где коэффициенты $\alpha_1, \dots, \alpha_{k+1}$ определяются из разложения

$$(1-q)^{k+1} = 1 - \alpha_1 q - \dots - \alpha_{k+1} q^{k+1}. \quad (9.1.15)$$

В свою очередь, вводя расширенную матрицу параметров

$$C^*(n) = [c^*(n), c^*(n-1), \dots, c^*(n-k)] \quad (9.1.16)$$

со столбцами $c^*(n-i)$, $i = 0, \dots, k$, уравнение (9.1.14) можно записать в виде одношагового разностного матричного уравнения

$$C^*(n) = C^*(n-1) A, \quad (9.1.17)$$

где матрица A имеет вид

$$A = \begin{bmatrix} \alpha_1 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ \alpha_2 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \alpha_k & 0 & 0 & \dots & 1 \\ \alpha_{k+1} & 0 & 0 & \dots & 0 \end{bmatrix}. \quad (9.1.18)$$

При явной форме модели дрейфа задача идентификации сводится к оцениванию постоянных коэффициентов. Для этой цели в ряде случаев могут быть использованы алгоритмы идентификации стационарных объектов. Неявная форма приводит к иным алгоритмам идентификации, которые являются обобщением рассмотренных в предыдущих главах алгоритмов идентификации стационарных объектов.

§ 9.2. Критерий качества и алгоритмы идентификации

Для нестационарных объектов, описываемых уравнениями (9.1.2), (9.1.4), (9.1.6), согласованная настраиваемая модель представима в виде

$$\hat{y}(n) = \hat{y}(n, c(n-1)) = g_n^T(c(n-1)) \mathbf{x}(n). \quad (9.2.1)$$

Здесь

$$\mathbf{x}(n) = (-y(n-1), \dots, -y(n-N), u(n), \dots, u(n-N), \varepsilon(n-1), \dots, \varepsilon(n-N)) \quad (9.2.2)$$

— вектор наблюдений,

$$\varepsilon(n) = y(n) - \hat{y}(n, c(n-1)) \quad (9.2.3)$$

— невязка. С учетом (9.2.1)

$$\varepsilon(n) = y(n) - g_n^T(c(n-1)) \mathbf{x}(n) = \varepsilon(\mathbf{z}(n), c(n-1)), \quad (9.2.4)$$

где $\mathbf{z}(n) = (y(n), \mathbf{x}(n))$ — вектор всех наблюдений (1.3.48).

В общем случае критерий качества идентификации, определяющий средние потери, записывается в виде

$$J_n(c(n-1)) = M\{F[\varepsilon(\mathbf{z}(n), c(n-1))]\}. \quad (9.2.5)$$

В отличие от стационарного случая, для нестационарных объектов критерий качества существенно зависит от дискретного времени n . Приравнивая градиент средних потерь нулю, получаем условие оптимальности

$$\nabla_c J_n(c(n-1)) = M\{\nabla_c F[\varepsilon(\mathbf{z}(n), c(n-1))]\} = 0. \quad (9.2.6)$$

Градиент $\nabla_c J_n(c(n-1))$ назовем *динамическим*, поскольку он зависит не только от $c(n-1)$, но и от n . Замечая, что

$$M\{\nabla_c F[\varepsilon(\mathbf{z}(n), c(n-1))]\} = -\nabla_c \hat{y}(n, c(n-1)) F'[\varepsilon(\mathbf{z}(n), c(n-1))], \quad (9.2.7)$$

представим условие оптимальности в следующем виде:

$$\nabla_c J_n(c(n-1)) = -M\{\nabla_c \hat{y}(n, c(n-1)) F'[\varepsilon(\mathbf{z}(n), c(n-1))]\} = 0. \quad (9.2.8)$$

При $c(n-1) = c^*(n-1)$ невязка (9.2.4) равна помехе:

$$\varepsilon(\mathbf{z}(n), c^*(n-1)) = y(n) - \hat{y}(n, c^*(n-1)) = \xi(n), \quad (9.2.9)$$

и условие оптимальности (9.2.8) в силу свойств помехи (1.2.44) становится тождеством. Действительно, в этом случае

$$F'[\varepsilon(\mathbf{z}(n), c(n-1))] = F'[\xi(n)] \quad (9.2.10)$$

и в силу независимости помехи $\xi(n)$

$$\nabla_{\mathbf{c}} J_n(c(n-1)) = -\mathbf{M}\{\nabla_{\mathbf{c}} \hat{y}(n, c(n-1))\} \mathbf{M}\{F'[\xi(n)]\} \equiv 0, \quad (9.2.11)$$

так как $\mathbf{M}\{F'[\xi(n)]\} = 0$.

Вычислим вектор $\nabla_{\mathbf{c}} \hat{y}(n, c(n-1))$. Как следует из (9.2.1),

$$\nabla_{\mathbf{c}} \hat{y}(n, c(n-1)) = \nabla_{\mathbf{c}} \mathbf{g}_n^T(c(n-1)) \mathbf{x}(n) + \nabla_{\mathbf{c}(n-1)} \mathbf{x}^T(n) \mathbf{g}_n(c(n-1)). \quad (9.2.12)$$

Из (9.2.2) находим

$$\nabla_{\mathbf{c}(n-1)} \mathbf{x}^T(n) = [0, \dots, 0, 0, \dots, 0, \nabla_{\mathbf{c}(n-1)} \varepsilon(n-1), \dots, \nabla_{\mathbf{c}(n-1)} \varepsilon(n-N)].$$

Для вычисления $\nabla_{\mathbf{c}(n-1)} \varepsilon(n-k)$, $k = 1, \dots, N$, нужно воспользоваться уравнением дрейфа параметра:

$$\begin{aligned} c(n) &= \mathbf{g}_n(c(n-1)) = \mathbf{g}_n(\mathbf{g}_{n-1}(c(n-2))) = \\ &= \mathbf{g}_n(\mathbf{g}_{n-1}(\dots(\mathbf{g}_{n-k+1}(c(n-k)))\dots)). \end{aligned}$$

Тогда с учетом (9.2.3) имеем

$$\begin{aligned} \nabla_{\mathbf{c}(n-1)} \varepsilon(n-k) &= - \left(\prod_{i=1}^k \nabla_{\mathbf{c}(n-i-1)} \mathbf{g}_{n-i}^T(c(n-i-1)) \right)^{-1} \times \\ &\quad \times \nabla_{\mathbf{c}} \hat{y}(n-k, c(n-k-1)), \quad k = 1, \dots, N. \end{aligned}$$

Введем вектор чувствительности

$$\mathbf{v}(n) = \nabla_{\mathbf{c}} \hat{y}(n, c(n-1)). \quad (9.2.13)$$

Обозначим

$$G_{nk} = \left(\prod_{i=1}^k \nabla_{\mathbf{c}(n-i-1)} \mathbf{g}_{n-i}^T(c(n-i-1)) \right)^{-1}. \quad (9.2.14)$$

Тогда для вектора чувствительности имеет место уравнение, аналогичное (1.7.23):

$$\mathbf{v}(n) = \nabla_{\mathbf{c}} \mathbf{g}_n^T(c(n-1)) \mathbf{x}(n) - G_{n1} \hat{d}_1 \mathbf{v}_{n-1} - \dots - G_{nN} \hat{d}_N \mathbf{v}_{n-N}, \quad (9.2.15)$$

где \hat{d}_i , $i = 1, \dots, N$, — часть компонент вектор-функции $\mathbf{g}_n(c(n-1))$, соответствующая предсказанным параметрам d_1, \dots, d_N .

Таким образом, условие оптимальности (9.2.8) окончательно записывается в виде

$$\nabla_{\mathbf{c}} J_n(c(n-1)) = -\mathbf{M}\{F'[\varepsilon(\mathbf{z}(n), c(n-1)) \mathbf{v}(n)]\} = 0, \quad (9.2.16)$$

который отличается от условия оптимальности для стационарных объектов (1.4.28) тем, что теперь вектор оценок $\mathbf{c}(n-1)$ зависит от дискретного времени n . Принимая во внимание условие оптимальности (9.2.16) и уравнение модели дрейфа (9.1.12), алгоритм идентификации можно представить в виде

$$\begin{aligned} \mathbf{c}(n) &= \mathbf{g}_n(\mathbf{c}(n-1)) + \Gamma(n) \mathbf{v}(n) F'[\varepsilon(\mathbf{z}(n), \mathbf{c}(n-1))], \\ \mathbf{v}(n) &= \nabla_{\mathbf{c}} \mathbf{g}_n^T(\mathbf{c}(n-1)) \mathbf{x}(n) - G_{n1} \hat{d}_1 \mathbf{v}_{n-1} - \dots - G_{nN} \hat{d}_N \mathbf{v}_{n-N}, \quad (9.2.17) \\ \mathbf{v}(0) &= 0, \end{aligned}$$

где $\Gamma(n)$ — матрица усиления, $F'[\varepsilon]$ — нелинейное преобразование невязки.

Дальнейшая задача состоит в выборе $\Gamma(n)$ и $F'[\varepsilon]$, определяющих свойства алгоритма (9.2.17).

§ 9.3. Оптимальные алгоритмы

Меру качества алгоритмов (9.2.17) будем определять матрицей ковариаций ошибки

$$V_n = \mathbf{M}\{(\mathbf{c}(n) - \mathbf{c}^*(n))(\mathbf{c}(n) - \mathbf{c}^*(n))^T\}, \quad (9.3.1)$$

или, коротко,

$$V_n = V_n(\Gamma, F) = \mathbf{M}\{\delta(n) \delta^T(n)\}, \quad (9.3.2)$$

где

$$\delta(n) = \mathbf{c}(n) - \mathbf{c}^*(n). \quad (9.3.3)$$

В отличие от (1.6.1) и (1.6.2) теперь $\mathbf{c}^*(n)$ зависит от времени.

Матрица ковариаций (9.3.2) характеризует скорость сходимости алгоритмов (9.2.17). К сожалению, точное выражение для матрицы ковариаций получить невозможно, поэтому ограничимся нахождением приближенной формулы для V_n . Для этого необходимо из (9.2.17) получить выражение для $\delta(n)$ и линеаризовать все содержащиеся в нем нелинейные функции. Вычитаем (9.1.6) из (9.2.17):

$$\delta(n) = \mathbf{g}_n(\mathbf{c}(n-1)) - \mathbf{g}_n(\mathbf{c}^*(n-1)) + \Gamma(n) \mathbf{v}(n) F'[\varepsilon(\mathbf{z}(n), \mathbf{c}(n-1))]. \quad (9.3.4)$$

Выразим разность вектор-функций через $\delta(n)$:

$$\mathbf{g}(\mathbf{c}(n-1)) - \mathbf{g}(\mathbf{c}^*(n-1)) \cong \nabla_{\mathbf{c}} \mathbf{g}^T(\mathbf{c}(n-1)) \delta(n-1). \quad (9.3.5)$$

Линеаризуем невязку:

$$\begin{aligned} \varepsilon(n) &= y(n) - \hat{y}(n, \mathbf{c}(n-1)) = (y(n) - \hat{y}(n, \mathbf{c}^*(n-1))) + \\ &\quad + (\hat{y}(n, \mathbf{c}^*(n-1)) - \hat{y}(n, \mathbf{c}(n-1))). \quad (9.3.6) \end{aligned}$$

Согласно (9.2.9) первое слагаемое равно $\xi(n)$. Линеаризуя второе слагаемое, получим

$$\varepsilon(n) = \xi(n) - \nabla_c \hat{y}(n, c(n-1)) \delta(n-1), \quad (9.3.7)$$

что с учетом (9.2.12) и (9.2.13) дает

$$\varepsilon(n) \cong \xi(n) - v^T(n) \nabla_c g^T(c(n-1)) \delta(n-1). \quad (9.3.8)$$

Пользуясь (9.3.8), линеаризуем F' :

$$\begin{aligned} F'[\varepsilon(n)] &= F'[\xi(n) - v^T(n) g'_c(c(n-1)) \delta(n-1)] \cong \\ &\cong F'[\xi(n)] - F''[\xi(n)] v^T(n) g'_c(c(n-1)) \delta(n-1), \end{aligned} \quad (9.3.9)$$

где $g'_c = \nabla_c g^T$. Подставляя (9.3.5) и (9.3.9) в (9.3.4), получим рекуррентное уравнение для $\delta(n)$:

$$\begin{aligned} \delta(n) &= g'_c(c(n-1)) \delta(n-1) + \\ &+ \Gamma(n) v(n) (F'[\xi(n)] - F''[\xi(n)] v^T(n) g'_c(c(n-1)) \delta(n-1)). \end{aligned} \quad (9.3.10)$$

Учитывая, что $\xi(n)$ и $c(n-1)$ независимы, находим условное математическое ожидание

$$\begin{aligned} M\{\delta(n) \delta^T(n) | z(1), \dots, z(n-1)\} &= \\ &= g'_c(c(n-1)) \delta(n-1) \delta^T(n-1) g'^T_c(c(n-1)) + \alpha \Gamma(n) v(n) v^T(n) \Gamma(n) + \\ &+ \gamma \Gamma(n) v(n) v^T(n) g'_c(c(n-1)) \delta(n-1) \times \\ &\times \delta^T(n-1) g'^T_c(c(n-1)) v(n) v^T(n) \Gamma^T(n) - \\ &- \beta g'_c(c(n-1)) \delta(n-1) \delta^T(n-1) g'^T_c(c(n-1)) v(n) v^T(n) \Gamma^T(n) - \\ &- \beta \Gamma(n) v(n) v^T(n) g'_c(c(n-1)) \delta(n-1) \delta^T(n-1) g'^T_c(c(n-1)), \end{aligned} \quad (9.3.11)$$

где

$$\alpha = M\{F'^2[\xi]\}, \quad \beta = M\{F''[\xi]\}, \quad \gamma = M\{F''^2[\xi]\}. \quad (9.3.12)$$

Введем обозначение

$$W_n = \nabla_c g(c(n)) V_n \nabla_c g^T(c(n)). \quad (9.3.13)$$

Взятие безусловного математического ожидания от обеих частей равенства (9.3.11) дает

$$\begin{aligned} V_n &= W_{n-1} + \alpha \Gamma(n) v(n) v^T(n) \Gamma^T(n) + \gamma \Gamma(n) v(n) v^T(n) W_{n-1} \times \\ &\times v(n) v^T(n) \Gamma^T(n) - \beta W_{n-1} v(n) v^T(n) \Gamma^T(n) - \beta \Gamma(n) v(n) v^T(n) W_{n-1}. \end{aligned} \quad (9.3.14)$$

Это рекуррентное соотношение позволяет вычислять точность получаемых оценок $c(n)$ на каждом шаге при заданных матрицах усиления $\Gamma(n)$ и нелинейном преобразовании $F[\varepsilon]$. В общем случае оно является приближенным. Для линейного уравнения дрейфа (9.1.6) и при $F'[\varepsilon] = \varepsilon$ оно становится точным.

Зафиксируем функцию потерь и найдем оптимальную матрицу усиления $\Gamma(n) = \Gamma_0(n)$, для которой разность $V_n(\Gamma, F) - V_n(\Gamma_0, F) \geq 0$ представляет собой неотрицательно определенную матрицу для всех n и F . Для этого выделим в (9.3.14) слагаемые, содержащие $\Gamma(n)$:

$$\begin{aligned}
 V_n &= W_{n-1} + (\alpha + \gamma v^\top(n) W_{n-1} v(n)) \Gamma(n) v(n) v^\top(n) \Gamma^\top(n) - \\
 &\quad - \beta (W_{n-1} v(n) v^\top(n) \Gamma^\top(n) + \Gamma(n) v(n) v^\top(n) W_{n-1}) = \\
 &= (\alpha + \gamma v^\top(n) W_{n-1} v(n)) \left[\frac{\beta W_{n-1} v(n)}{\alpha + \gamma v^\top(n) W_{n-1} v(n)} + \Gamma(n) v(n) \right] \times \\
 &\quad \times \left[\frac{\beta v^\top(n) W_{n-1}}{\alpha + \gamma v^\top(n) W_{n-1} v(n)} + v^\top(n) \Gamma^\top(n) \right] + \\
 &\quad + W_{n-1} - \frac{\beta^2 W_{n-1} v(n) v^\top(n) W_{n-1}}{\alpha + \gamma v^\top(n) W_{n-1} v(n)}. \quad (9.3.15)
 \end{aligned}$$

Отсюда приходим к выражению

$$V_n = W_{n-1} - \frac{\beta^2 W_{n-1} v(n) v^\top(n) W_{n-1}}{\mu^2(n)} + a(n) a^\top(n), \quad (9.3.16)$$

где

$$\mu^2(n) = \alpha + \gamma v^\top(n) W_{n-1} v(n), \quad (9.3.17)$$

$$a(n) = \frac{\beta}{\mu(n)} W_{n-1} v(n) - \mu(n) \Gamma(n) v(n). \quad (9.3.18)$$

Заметим, что от матрицы усиления $\Gamma(n)$ в (9.3.16) зависит лишь слагаемое $a(n) a^\top(n)$, поэтому $V(n)$ достигает наименьшего значения при такой матрице усиления $\Gamma_0(n)$, для которой

$$a(n) a^\top(n) = 0.$$

При этом

$$V_n(\Gamma(n), F) \geq V_n(\Gamma_0(n), F) \quad (9.3.19)$$

для всех F и n . Приравнивая $a(n)$ из (9.3.18) нулю, получим

$$\Gamma_0(n) v(n) = \frac{\beta}{\mu^2(n)} W_{n-1} v(n). \quad (9.3.20)$$

При этом из (9.3.16) следует

$$V_n = W_{n-1} - \frac{\beta^2}{\mu^2(n)} W_{n-1} \mathbf{v}(n) \mathbf{v}^\top(n) W_{n-1}. \quad (9.3.21)$$

Пользуясь формулой обращения матриц (1.7.18), перейдем в (9.3.21) к обратным матрицам:

$$V_n^{-1} = W_{n-1}^{-1} + \rho(n) \mathbf{v}(n) \mathbf{v}^\top(n), \quad (9.3.22)$$

$$\rho(n) = \frac{\beta^2}{\alpha + (\gamma - \beta^2) \mathbf{v}^\top(n) W_{n-1} \mathbf{v}(n)}. \quad (9.3.23)$$

С ростом n МКО V_n , а значит и W_{n-1} , стремится к нулю, следовательно, приближенно

$$\rho(n) = \frac{\beta^2}{\alpha} \quad (9.3.24)$$

и

$$V_n^{-1} = W_{n-1}^{-1} + \frac{\beta^2}{\alpha} \mathbf{v}(n) \mathbf{v}^\top(n). \quad (9.3.25)$$

В линейном случае, когда $F'[\varepsilon] = k\varepsilon$, имеем $\beta^2 = \gamma = k^2$, поэтому $\rho(n) \equiv \beta^2/\alpha$, и соотношение (9.3.25) становится точным.

Для нахождения явного выражения для оптимальной матрицы усиления $\Gamma_0(n)$, удовлетворяющей соотношению (9.3.13), положим

$$\Gamma_0(n) = \lambda(n) V_n, \quad (9.3.26)$$

где $\lambda(n)$ — некоторый скалярный множитель. Тогда в силу (9.3.21)

$$\Gamma_0(n) \mathbf{v}(n) = \lambda(n) \left[1 - \frac{\beta^2 \mathbf{v}^\top(n) W_{n-1} \mathbf{v}(n)}{\mu^2(n)} \right] W_{n-1} \mathbf{v}(n), \quad (9.3.27)$$

и при

$$\lambda(n) = \frac{\rho(n)}{\beta} = \frac{\beta}{\alpha + (\gamma - \beta^2) \mathbf{v}^\top(n) W_{n-1} \mathbf{v}(n)} \quad (9.3.28)$$

равенство (9.3.20) удовлетворяется.

Поскольку $\rho(n) \cong \beta^2/\alpha$, то $\lambda(n) \cong \beta/\alpha$. Следовательно,

$$\Gamma_0(n) = \frac{\beta}{\alpha} V_n. \quad (9.3.29)$$

Тогда

$$W_n = \nabla_{\mathbf{c}} \mathbf{g}(c(n)) \frac{\alpha}{\beta} \Gamma_0(n) \nabla_{\mathbf{c}} \mathbf{g}^\top(c(n)), \quad (9.3.30)$$

и из (9.3.25) приходим к следующему алгоритму:

$$\Gamma_0^{-1}(n) = K_0^{-1}(n-1) + \beta v(n) v^T(n), \quad (9.3.31)$$

или, переходя к обратным матрицам,

$$\Gamma_0(n) = K_0(n-1) - \frac{K_0(n-1) v(n) v^T(n) K_0(n-1)}{\beta^{-1} + v^T(n) K_0(n-1) v(n)}, \quad (9.3.32)$$

где

$$K_0(n-1) = \nabla_c g_n(c(n-1)) \Gamma_0(n-1) \nabla_c g_n^T(c(n-1)). \quad (9.3.33)$$

§ 9.4. Абсолютно оптимальные алгоритмы

Для каждой функции потерь F алгоритм (9.2.17) при $\Gamma(n) = \Gamma_0(n)$ оптимален. Среди этих оптимальных алгоритмов найдем алгоритм, оптимальный по F , т. е. такой алгоритм, для которого

$$V_n(\Gamma_0, F) - V_n(\Gamma_0, F_0) \geq 0. \quad (9.4.1)$$

Такой алгоритм является абсолютно оптимальным.

Отыскание абсолютно оптимальной функции потерь $F_0[\varepsilon]$ как для нестационарных, так и для стационарных объектов приводится к одной и той же задаче минимизации

$$\frac{\alpha}{\beta^2} = \frac{M\{F'^2[\varepsilon]\}}{(M\{F''[\varepsilon]\})^2} \rightarrow \min_F. \quad (9.4.2)$$

Решение этой задачи, как было показано в главе 4, дает

$$F_0[\varepsilon] = -\ln p_0(\xi) \Big|_{\xi=\varepsilon}, \quad (9.4.3)$$

и, значит,

$$F'_0[\varepsilon] = -\frac{\partial \ln p_0(\varepsilon)}{\partial \varepsilon} = -\frac{p'_0(\varepsilon)}{p_0(\varepsilon)}. \quad (9.4.4)$$

При этом

$$\alpha = \beta = M \left\{ \left(\frac{p'_0(\xi)}{p_0(\xi)} \right)^2 \right\} = M\{F'^2_0[\xi]\} = I(p_0), \quad (9.4.5)$$

где $I(p_0)$ представляет собой фишеровскую информацию. Следовательно, наименьшая матрица ковариаций ошибки удовлетворяет соотношению (9.3.25) при $\beta^2/\alpha = I(p_0)$.

Итак, асимптотически абсолютно оптимальный алгоритм имеет следующий вид:

$$\begin{aligned}
 \mathbf{c}(n) &= \mathbf{g}_n(\mathbf{c}(n-1)) + \Gamma_0(n) F'_0[\varepsilon(\mathbf{z}(n), \mathbf{c}(n-1))] \mathbf{v}(n), \\
 \varepsilon(\mathbf{z}(n), \mathbf{c}(n-1)) &= y(n) - \mathbf{g}_n^\top(\mathbf{c}(n-1)) \mathbf{x}(n), \\
 \mathbf{v}(n) &= \nabla_{\mathbf{c}} \mathbf{g}_n^\top(\mathbf{c}(n-1)) \mathbf{x}(n) - G_{n1} \hat{d}_1 \mathbf{v}_{n-1} - \dots - G_{nN} \hat{d}_N \mathbf{v}_{n-N}, \\
 \Gamma_0(n) &= K_0(n-1) - \frac{K_0(n-1) \mathbf{v}(n) \mathbf{v}^\top(n) K_0(n-1)}{I^{-1}(p_0) + \mathbf{v}^\top(n) K_0(n-1) \mathbf{v}(n)}, \tag{9.4.6} \\
 K_0(n-1) &= \nabla_{\mathbf{c}} \mathbf{g}_n(\mathbf{c}(n-1)) \Gamma_0(n-1) \nabla_{\mathbf{c}} \mathbf{g}_n^\top(\mathbf{c}(n-1)), \\
 F'_0[\varepsilon] &= -\frac{p'_0(\varepsilon)}{p_0(\varepsilon)}, \quad I(p_0) = \int_{-\infty}^{\infty} F'_0[\varepsilon]^2 p_0(\varepsilon) d\varepsilon.
 \end{aligned}$$

Тогда асимптотически

$$V_n = I^{-1}(p_0) \Gamma_0(n).$$

Здесь $\mathbf{c}(0) = \mathbf{c}_0$, $\Gamma_0(0) = \Gamma_{00} > 0$ — произвольные начальные значения. Обычно $\Gamma_0(0) = \gamma_0 E$, где $\gamma_0 \gg 1$, E — единичная матрица.

В частном случае, когда $\mathbf{g}_n(\mathbf{c}(n-1)) = \mathbf{c}(n-1)$, имеем $K_0(n-1) = \Gamma_0(n-1)$, и из (9.4.6) следуют абсолютно оптимальные алгоритмы идентификации стационарных объектов.

Для линейных уравнений дрейфа параметров

$$\mathbf{c}^*(n) = A(n) \mathbf{c}^*(n-1) \tag{9.4.7}$$

и квадратичной функции потерь $F[\varepsilon] = \varepsilon^2/2$, как уже упоминалось, уравнение (9.3.14) становится точным. В этом случае из (9.4.6) получаем линейные алгоритмы:

$$\begin{aligned}
 \mathbf{c}(n) &= A(n) \mathbf{c}(n-1) + \Gamma_0(n) \varepsilon(\mathbf{z}(n), \mathbf{c}(n-1)) \mathbf{v}(n), \\
 \mathbf{c}(0) &= \mathbf{c}_0, \\
 \mathbf{v}(n) &= \nabla_{\mathbf{c}} \mathbf{g}_n^\top(\mathbf{c}(n-1)) \mathbf{x}(n) - G_{n1} \hat{d}_1 \mathbf{v}_{n-1} - \dots - G_{nN} \hat{d}_N \mathbf{v}_{n-N}, \\
 \mathbf{v}(0) &= 0, \tag{9.4.8} \\
 \Gamma_0(n) &= K_0(n-1) - \frac{K_0(n-1) \mathbf{v}(n) \mathbf{v}^\top(n) K_0(n-1)}{1 + \mathbf{v}^\top(n) K_0(n-1) \mathbf{v}(n)}, \\
 K_0(n-1) &= A(n) \Gamma_0(n-1) A^\top(n).
 \end{aligned}$$

По своей структуре они соответствуют структуре калмановского фильтра и не только асимптотически оптимальны, но и оптимальны на каждом шаге.

§ 9.5. Оптимальные алгоритмы для многошаговых моделей дрейфа

Расширим классы законов изменения параметров объекта, заменив одношаговое уравнение дрейфа параметров (9.1.6) многошаговым

$$c^*(n) = g(n, c^*(n-1), \dots, c^*(n-r)) \quad (9.5.1)$$

с неизвестными начальными условиями $c^*(0) = c_0^*, \dots, c^*(1-r) = c_{r-1}^*$. Эта задача сводится к ранее рассмотренной путем расширения пространства параметров, как это было сделано в примере (9.1.13). Введем расширенный вектор параметров

$$\bar{c}^*(n) = (c^*(n), c_1^*(n), \dots, c_{r-1}^*(n)), \quad (9.5.2)$$

где $c_s^*(n) = c^*(n-s)$, и расширенную вектор-функцию

$$G(n, \bar{c}^*(n)) = (g(n, \bar{c}^*(n-1)), c_1^*(n), \dots, c_{r-1}^*(n)). \quad (9.5.3)$$

Тогда уравнение (9.5.1) можно представить в обычной форме:

$$\bar{c}^*(n) = G(n, \bar{c}^*(n-1)), \quad \bar{c}^*(0) = (c_0^*, \dots, c_{r-1}^*). \quad (9.5.4)$$

Однако теперь размерность вектора $\bar{c}^*(n)$ равна $r(3N+1)$. Вводя расширенный вектор наблюдений

$$x_1(n) = (x(n), 0, \dots, 0), \quad \dim x_1(n) = (r-1)(3N+1), \quad (9.5.5)$$

и используя методику формирования абсолютно оптимальных алгоритмов, получим для этого случая:

$$\begin{aligned} \bar{c}(n) &= G(n, \bar{c}(n-1)) + \Gamma_0(n) F'_0[\varepsilon(z(n), \bar{c}(n-1))] v(n), \\ v(n) &= \nabla_{\bar{c}} G^T(n, \bar{c}(n-1)) x(n) - G_{n1} \hat{d}_1 v_{n-1} - \dots - G_{nN} \hat{d}_N v_{n-N}, \\ v(0) &= 0, \\ \Gamma_0(n) &= K_0(n-1) - \frac{K_0(n-1) v(n) v^T(n) K_0(n-1)}{I^{-1}(p_0) + v^T(n) K_0(n-1) v(n)}, \\ K_0(n-1) &= \nabla_{\bar{c}} G(n, \bar{c}(n-1)) \Gamma_0(n-1) \nabla_{\bar{c}} G^T(n, \bar{c}(n-1)). \end{aligned} \quad (9.5.6)$$

Эти алгоритмы весьма громоздки, несмотря на то, что многие компоненты вектора наблюдений нулевые.

§ 9.6. Упрощенные алгоритмы

Рассмотрим следующий класс объектов:

$$y(n) = c^{*\top}(n) \mathbf{x}(n) + \xi(n), \quad (9.6.1)$$

$$c^*(n) = g(n, c^*(n-1), \dots, c^*(n-r)). \quad (9.6.2)$$

Для него алгоритм (9.5.6) выглядит так:

$$\begin{aligned} c(n) &= g(n, c(n-1), c_1(n-1), \dots, c_{r-1}(n-1)) + \\ &\quad + \Gamma_{11}(n) F'[\varepsilon(\mathbf{z}(n), \bar{c}(n-1))] \mathbf{x}(n), \\ c_1(n) &= c(n-1) + \Gamma_{21}(n) F'[\varepsilon(\mathbf{z}(n), \bar{c}(n-1))] \mathbf{x}(n), \\ &\dots \\ c_{r-1}(n) &= c_{r-2}(n-1) + \Gamma_{r1}(n) F'[\varepsilon(\mathbf{z}(n), \bar{c}(n-1))] \mathbf{x}(n). \end{aligned} \quad (9.6.3)$$

В этом алгоритме приходится вычислять вспомогательные величины $c_1(n), \dots, c_{r-1}(n)$. Исключим эти величины. Подставляя по очереди последующее уравнение в предыдущее, получим

$$\begin{aligned} c(n) &= g(n, c(n-1), c_1(n-1), \dots, c_{r-1}(n-1)) + \\ &\quad + \Gamma_{11}(n) F'[\varepsilon(\mathbf{z}(n), \bar{c}(n-1))] \mathbf{x}(n), \\ c_1(n) &= c(n-1) + \Gamma_{21}(n) F'[\varepsilon(\mathbf{z}(n), \bar{c}(n-1))] \mathbf{x}(n), \\ &\dots \\ c_{r-1}(n) &= c_{r-2}(n-1) + \sum_{i=0}^{r-2} \Gamma_{r-1,1}(n-i) F'[\varepsilon(n-i, \bar{c}(n-i-1))] \mathbf{x}(n-i). \end{aligned} \quad (9.6.4)$$

Пользуясь (9.6.4), линеаризуем первое уравнение:

$$\begin{aligned} g(n, c(n-1), \dots, c_{r-1}(n-1)) &= g(n, c(n-1), \dots, c(n-r)) + \\ &+ \sum_{k=2}^r \sum_{j=1}^{k-1} g'_{c(n-k)}(n, c(n-1), \dots, c(n-r)) \Gamma_{r-j+1,1}(n-j) \times \\ &\quad \times F'[\varepsilon(n-j)] \mathbf{x}(n-j), \end{aligned} \quad (9.6.5)$$

$$\varepsilon(\mathbf{z}(n), \bar{c}(n-1)) \cong y(n) - g^\top(n, c(n-1), \dots, c(n-r)) \mathbf{x}(n). \quad (9.6.6)$$

Отсюда получаем упрощенный алгоритм

$$\begin{aligned} c(n) &= g(n, c(n-1), \dots, c(n-r)) + \\ &\quad + \Gamma_{11}(n) F'[\varepsilon(\mathbf{z}(n), c(n-1), \dots, c(n-r))] \mathbf{x}(n) + \end{aligned}$$

$$+ \sum_{k=2}^r \sum_{j=1}^{k-1} g'_{c(n-k)}(n, c(n-1), \dots, c(n-r)) \Gamma_{r-j+1,1}(n-j) \times \\ \times F'[\epsilon(z(n), c(n-j-1), \dots, c(n-j-r))] x(n). \quad (9.6.7)$$

Этот алгоритм содержит r нелинейных преобразований от задержанных на соответствующее число шагов невязок. Однако за простоту приходится платить некоторым ухудшением качества. Так, на рис. 9.1 представлено поведение алгоритмов (9.6.7) и (9.5.6) для линейного дрейфа. Видно, что значение квадрата ошибки для упрощенного

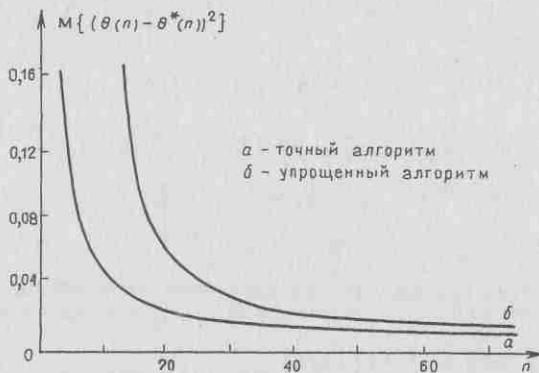


Рис. 9.1

алгоритма в несколько раз меньше. Кроме того, при исследовании целесообразности выбора параметрической (9.1.5) или функциональной (9.5.1) формы задания дрейфа оказалось, что по сложности вычислений, объему операций и времени счета между ними нет существенных отличий. Выбор параметрического или функционального алгоритма зависит от специфики задачи. Например, в задачах, связанных с технологией производства, где требуется знание каждого параметра, используются параметрические алгоритмы, а в экономических задачах прогнозирования удобнее применять функциональный алгоритм.

В заключение рассмотрим простой пример. Пусть объект описывается уравнением

$$y(n) = a \sin(\omega n + \varphi) + \xi(n). \quad (9.6.8)$$

Если частота ω известна, то для параметра

$$c(n) = a \sin(\omega n + \varphi) \quad (9.6.9)$$

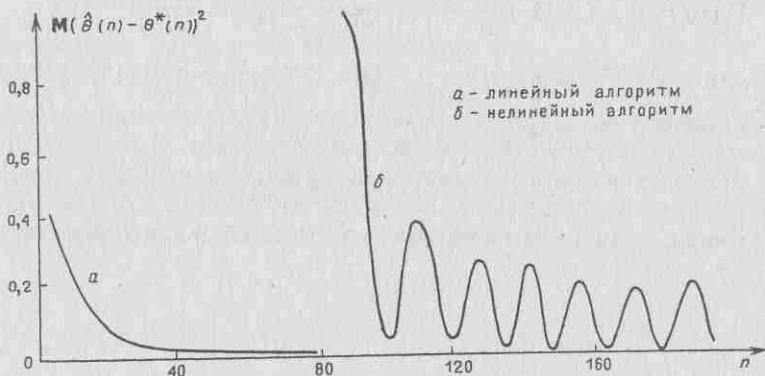


Рис. 9.2

имеем линейный алгоритм типа (9.4.8) или (9.5.6), где

$$G = \begin{bmatrix} 2 \cos \omega & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Если же частота неизвестна, то алгоритм становится существенно нелинейным:

$$c(n) = \frac{c(n-1) - c(n-3)}{c(n-2)} c(n-1) - c(n-2). \quad (9.6.10)$$

На рис. 9.2 сравниваются линейный и нелинейный алгоритмы. Нелинейный дает гораздо большую ошибку, которая при этом довольно сильно зависит от того, насколько хорошо подобраны начальные значения. Для нелинейных случаев может оказаться, что полезнее использовать модели полиномиальных дрейфов высоких степеней, поскольку для достаточно гладких трендов разности высоких порядков близки к нулю. Но в этом случае имеются свои трудности, связанные с вычислительными ошибками.

§ 9.7. Акселерантные алгоритмы

Абсолютно оптимальные алгоритмы идентификации, обладающие предельно возможной асимптотической скоростью сходимости, имеют вид (9.4.6):

$$\begin{aligned} c(n) &= g(n, c(n-1)) + \Gamma_0(n) F_0'[\varepsilon(z(n), c(n-1))] v(n), \\ v(n) &= \nabla_c g^T(n, c(n-1)) z(n) - G_{n1} \hat{d}_1 v_{n-1} - \dots - G_{nN} \hat{d}_N v_{n-N}, \end{aligned} \quad (9.7.1a)$$

$$\Gamma_0(n) = K_0(n-1) - \frac{K_0(n-1) \mathbf{v}(n) \mathbf{v}^\top(n) K_0(n-1)}{I^{-1}(p_0) + \mathbf{v}^\top(n) K_0(n-1) \mathbf{v}(n)}, \quad (9.7.16)$$

$$K_0(n-1) = \nabla_{\mathbf{c}} \mathbf{g}(n, \mathbf{c}(n-1)) \Gamma_0(n-1) \nabla_{\mathbf{c}} \mathbf{g}^\top(n, \mathbf{c}(n-1)),$$

или, как следует из (9.3.25) и (9.4.5),

$$\Gamma_0^{-1}(n) = K_0^{-1}(n) + I(p_0) \mathbf{v}(n) \mathbf{v}^\top(n). \quad (9.7.2)$$

Отсюда видно, что оценку обратной матрицы усиления можно представить в виде

$$\begin{aligned} \Gamma_0^{-1}(n) = I(p_0) \sum_{t=1}^n & (\nabla_{\mathbf{c}} \mathbf{g}^\top(n, \mathbf{c}(n-1)))^{-(n-t)} \mathbf{v}(t) \times \\ & \times \mathbf{v}^\top(t) (\nabla_{\mathbf{c}} \mathbf{g}(n, \mathbf{c}(n-1)))^{-(n-t)}, \end{aligned} \quad (9.7.3)$$

или, в силу (9.4.5),

$$\begin{aligned} \Gamma_0^{-1}(n) = \sum_{t=1}^n & \mathbf{M}\{F_0''[\xi(n)]\} (\nabla_{\mathbf{c}} \mathbf{g}^\top(n, \mathbf{c}(n-1)))^{-(n-t)} \mathbf{v}(t) \times \\ & \times \mathbf{v}^\top(t) (\nabla_{\mathbf{c}} \mathbf{g}(n, \mathbf{c}(n-1)))^{-(n-t)}. \end{aligned} \quad (9.7.4)$$

Переходя от математического ожидания к его эмпирической оценке, получим

$$\begin{aligned} \widehat{\Gamma}_0^{-1}(n) = \sum_{t=1}^n & \mathbf{M}\{F_0''[\varepsilon(t)]\} (\nabla_{\mathbf{c}} \mathbf{g}^\top(n, \mathbf{c}(n-1)))^{-(n-t)} \mathbf{v}(t) \times \\ & \times \mathbf{v}^\top(t) (\nabla_{\mathbf{c}} \mathbf{g}(n, \mathbf{c}(n-1)))^{-(n-t)}. \end{aligned} \quad (9.7.5)$$

Наконец, применяя к (9.7.5) формулу обращения матриц и заменяя $\varepsilon(t)$ на $\varepsilon(\mathbf{z}(t), \mathbf{c}(t-1))$, приходим к абсолютно оптимальным алгоритмам

$$\mathbf{c}(n) = \mathbf{g}(n, \mathbf{c}(n-1)) + \widehat{\Gamma}_0(n) F_0'[\varepsilon(\mathbf{z}(n), \mathbf{c}(n-1))] \mathbf{v}(n),$$

$$\mathbf{c}(0) = \mathbf{c}_0,$$

$$\begin{aligned} \mathbf{v}(n) = \nabla_{\mathbf{c}} \mathbf{g}^\top(n, \mathbf{c}(n-1)) \mathbf{x}(n) - G_{n1} \widehat{d}_1 \mathbf{v}_{n-1} - \dots - G_{nN} \widehat{d}_N \mathbf{v}_{n-N}, \\ \mathbf{v}(0) = 0, \end{aligned} \quad (9.7.6)$$

$$\widehat{\Gamma}_0(n) = \widehat{K}_0(n-1) - \frac{\widehat{K}_0(n-1) \mathbf{v}(n) \mathbf{v}^\top(n) \widehat{K}_0(n-1)}{(F_0''[\varepsilon(\mathbf{z}(n), \mathbf{c}(n-1))])^{-1} + \mathbf{v}^\top(n) \widehat{K}_0(n-1) \mathbf{v}(n)},$$

$$\widehat{\Gamma}_0(0) = \Gamma_{00} > 0,$$

$$\widehat{K}_0(n-1) = \nabla_{\mathbf{c}} \mathbf{g}(n, \mathbf{c}(n-1)) \widehat{\Gamma}_0(n-1) \nabla_{\mathbf{c}} \mathbf{g}^\top(n, \mathbf{c}(n-1)).$$

При неполной информации относительно помех, т. е. когда относительно плотности распределения $p_0(\xi)$ известно лишь, что она принадлежит тому или иному классу плотностей распределения \mathcal{P} , можно определить оптимальную на этом классе функцию потерь $F_*[\varepsilon]$ и ее производные $F'_*[\varepsilon]$, $F''_*[\varepsilon]$. Заменяя в алгоритмах (9.4.6) $F'_*[\varepsilon]$ и $F''_*[\varepsilon]$ соответственно на $F'_0[\varepsilon]$ и $F''_0[\varepsilon]$, получаем оптимальные на классе, или робастные алгоритмы идентификации.

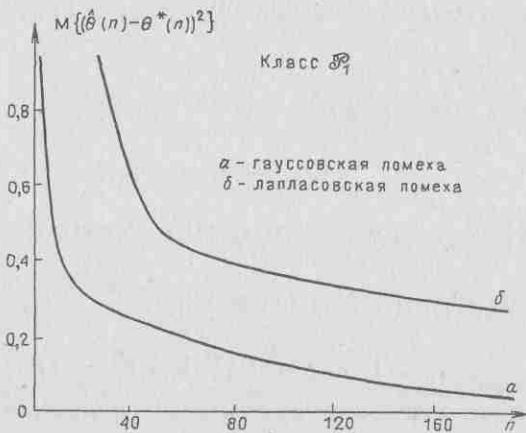


Рис. 9.3

Например, на классе невырожденных распределений $\mathcal{P}_1 = \{p_0(\xi) : p_0(0) \geq 1/(2s_1) > 0\}$ наихудшой является плотность распределения Лапласа, и абсолютно оптимальным будет релейный алгоритм. На рис. 9.3 представлено поведение этого алгоритма для лапласовских помех при $p_0(0) = 1/2$ и для гауссовских помех при $p_0(0) = 10/(2\sqrt{\pi})$ для линейного дрейфа. Очевидна полная аналогия со стационарным случаем.

§ 9.8. Заключение

В этой главе приведены алгоритмы идентификации для существенно нестационарных объектов и рассмотрены различные способы описания нестационарных дрейфов. Полученные алгоритмы, вообще говоря, носят приближенный характер, но для линейных законов дрейфа являются точными. Хотя строгое обоснование и оценка скорости сходимости этих алгоритмов отсутствуют, численные примеры свидетельствуют о работоспособности и эффективности предложенных алгоритмов.

Стану ли я отказываться от своего обеда
только потому, что я не полностью пони-
маю процесс пищеварения?

О. Хевисайд

ГЛАВА 10

Введение в искусственные нейронные сети

§ 10.1. О нейронных сетях

Одним из направлений современной теории автоматического управления, вызывающих наибольший интерес, является направление, связанное с исследованием и применением искусственных нейронных сетей, которые оказались универсальным средством эффективного построения моделей практически любых нелинейных структур. С их помощью решаются сложные задачи распознавания образов, оптимизации, идентификации, управления динамическими объектами. Искусственные нейронные сети строятся по принципам построения нейронных структур живой природы.

Общность искусственных и живых нейронных сетей состоит в наличии большого числа направленно связанных между собой настраиваемых элементов переработки информации: нейрона — в живой природе, и перцептрана — в искусственных сетях, настраиваемые параметры которых придают сетям желаемые свойства. Эти свойства позволяют цепям адаптироваться как к решению различных задач, так и к изменению окружающих условий. Далее речь будет идти об искусственных нейронных сетях.

§ 10.2. Структуры нейронных сетей

Основным элементом нейронных сетей является перцептрон — элемент с N входами $x_i(n)$, $i = 1, \dots, N$, и одним выходом $\hat{y}(n)$, которые связаны между собой зависимостью

$$\hat{y}(n) = \psi \left(\sum_{i=1}^N c_i x_i(n) \right), \quad (10.2.1)$$

где c_i — i -й настраиваемый параметр перцептрана, n — момент времени воздействия входного сигнала $x_i(n)$, $i = 1, \dots, N$, на перцептран, $\psi(\cdot)$ — нелинейная характеристика перцептрана. Нелинейная характеристика $\psi(\cdot)$ для симметричного случая обычно описывается уравнением

$$\psi(v) = \frac{1 - e^{-v}}{1 + e^{-v}}, \quad (10.2.2)$$

а для несимметричного случая —

$$\psi(v) = \frac{1}{1 + e^{-v}}. \quad (10.2.3)$$

Зависимость (10.2.1) удобно представить в более компактной векторной форме

$$\hat{y}(n) = \psi(c^T \mathbf{x}(n)), \quad (10.2.4)$$

где $c = (c_1, \dots, c_N)$, $\mathbf{x}(n) = (x_1(n), \dots, x_N(n))$ — векторы параметров и входов перцептрана, соответственно.

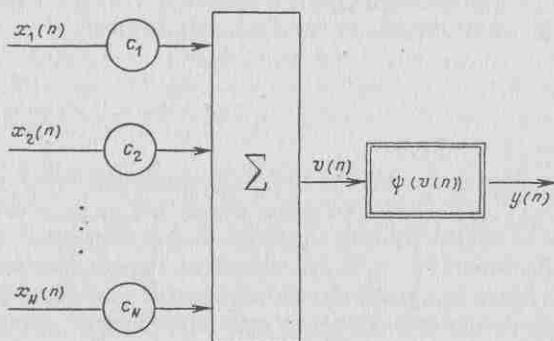


Рис. 10.1

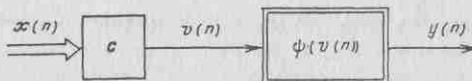


Рис. 10.2

Структура перцептрона в форме (10.2.1) и (10.2.4), а также характеристики нелинейного преобразования для симметричного (10.2.2) и несимметричного (10.2.3) случаев показаны соответственно на рис. 10.1 — 10.4.

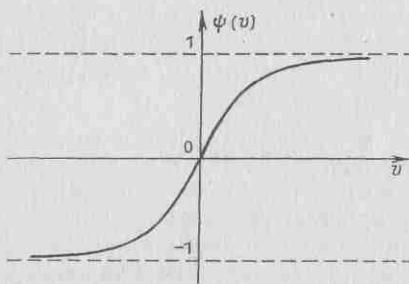


Рис. 10.3

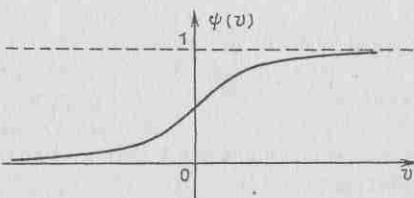


Рис. 10.4

Перцептроны, образующие нейронную сеть, могут быть соединены друг с другом, вообще говоря, самым произвольным образом, образуя большое число всевозможных структур. Среди различных структур нейронных сетей наибольший интерес вызывают статические и динамические многослойные нейронные сети. Для этих сетей наиболее характерным является наличие слоистой структуры, в которой сигналы передаются от слоя с меньшим номером к ближайшему слою с большим номером, т. е. слои в такой структуре соединены последовательно. Входом первого слоя является внешнее воздействие на нейронную сеть, а выход последнего слоя является выходом всей нейронной сети. Слои состоят из перцептронов. Для статической многослойной нейронной сети в каждом слое перцептроны соединены параллельно, для динамической же многослойной нейронной сети выходы

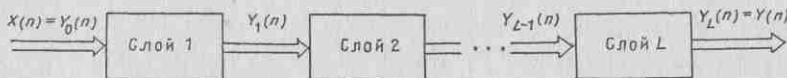


Рис. 10.5

перцептронов в каждом слое через элементы запаздывания замкнуты обратной связью. На рис. 10.5 схематически изображена структура L -слойной нейронной сети, а на рис. 10.6 показана (непрерывными линиями) структурная схема l -го слоя статической сети. Динамическая сеть получается из статической введением обратной связи через элемент запаздывания на такт, которая показана на рис. 10.6 штриховыми линиями.

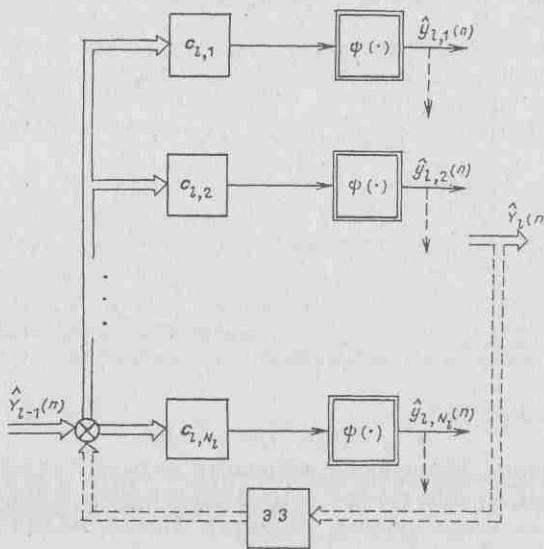


Рис. 10.6

Статические многослойные нейронные сети служат для аппроксимации статических объектов, а динамические — для аппроксимации или построения моделей нелинейных динамических объектов. Далее рассматриваются только статические нейронные сети.

Число перцептронов в каждом l -м слое сети полагается равным N_l , и, следовательно, размерность вектора входа $\hat{Y}_{l-1}(n)$ и выхода $\hat{Y}_l(n)$ для l -го слоя равна соответственно N_{l-1} и N_l . Размерность вектора входов $X(n)$ всей нейронной сети полагается равной N_0 . В соответствии со структурой l -го слоя нейронной сети (рис. 10.6) связь между векторами входа $\hat{Y}_{l-1}(n)$ и выхода $\hat{Y}_l(n)$ задается соотношением

$$\hat{Y}_l(n) = \Psi(C_l^\top \hat{Y}_{l-1}(n)), \quad (10.2.5)$$

где

$$C_l = [c_{l,1}, c_{l,2}, \dots, c_{l,N_l}], \quad l = 1, \dots, L \quad (10.2.6)$$

— $(N_{l-1} \times N_l)$ -матрица весовых коэффициентов l -го слоя, столбцами которой служат векторы $c_{l,k}$ (размерности N_{l-1}) весовых коэффициентов k -го перцептрона из l -го слоя, а $\Psi(\cdot)$ — нелинейный оператор, преобразующий каждую компоненту вектора $C_l^T \hat{Y}_{l-1}(n)$ по формуле (10.2.2) либо (10.2.3).

Рекуррентное соотношение (10.2.5) позволяет достаточно просто вычислить сигнал на выходе нейронной сети

$$\hat{Y}_L(n) = \Psi(C_L^T \Psi(C_{L-1}^T \dots \Psi(C_1^T X(n)) \dots)). \quad (10.2.7)$$

Весовые коэффициенты l -го слоя сети задаются как матрицей весовых коэффициентов C_l (10.2.6), так и вектором весовых коэффициентов c_l размерности $N_{l-1} \cdot N_l$:

$$c_l = (c_{l,1}, c_{l,2}, \dots, c_{l,N_l}), \quad l = 1, \dots, L. \quad (10.2.8)$$

Таким образом, (10.2.7) определяет уравнение нейронной сети.

Нейронные сети могут служить настраиваемой моделью и использоваться для идентификации сложных нелинейных систем. Их можно рассматривать как обобщение настраиваемых нелинейных моделей, описанных в § 8.5.

§ 10.3. Условие оптимальности

Нейронная сеть может быть использована для построения моделей сложных нелинейных объектов, связь между входом $X(n)$ и выходом $Y(n)$ которых описывается соотношением

$$Y(n) = \varphi(X(n)) + \xi(n), \quad (10.3.1)$$

где входная величина имеет размерность N_0 , а выходная величина $Y(n)$, нелинейная вектор-функция $\varphi(X(n))$ и помеха измерений $\xi(n)$ имеют размерность N_L .

Помеха измерений $\xi(n)$ — последовательность независимых, одинаково распределенных центрированных случайных векторных величин с плотностью распределения $p_0(\xi)$, принадлежащей классу \mathcal{P} .

Предположим, что существует неизвестный набор весовых коэффициентов нейронной сети

$$c^* = (c_1^*, c_2^*, \dots, c_L^*) \quad (10.3.2)$$

такой, что нелинейная функция $\varphi(X(n))$ в (10.3.1) может быть точно воспроизведена выходной величиной сети (10.2.7), т. е.

$$\varphi(X(n)) = \Psi(C_L^{*\top} \Psi(C_{L-1}^{*\top} \dots \Psi(C_1^{*\top} X(n)) \dots)). \quad (10.3.3)$$

Наличие информации о плотности распределения помехи $p_0(\xi)$ позволяет строить оптимальные алгоритмы настройки весовых параметров с нейронной сети, минимизирующие средние потери

$$J^0(c) = M\{F_*[\varepsilon(X(n), c)]\}, \quad (10.3.4)$$

где $F_*[\varepsilon] = -\ln p_*(\xi)|_{\xi=\varepsilon}$ — оптимальная на классе функция потерь,

$$\varepsilon(X(n), c) = Y(n) - \Psi(C_L^T \Psi(C_{L-1}^T \dots \Psi(C_1^T X(n)) \dots)) \quad (10.3.5)$$

— вектор невязки размерности N_L . Напомним, что $p_*(\xi)$ здесь представляет собой наименее благоприятную плотность распределения из заданного класса \mathcal{P} .

Необходимое условие, определяющее оптимальное решение $c = c^*$, имеет вид

$$\begin{aligned} \nabla J^0(c) &= M\{\nabla_c F_*[\varepsilon(X(n), c)]\} = \\ &= M\{\nabla_c \Psi^T(C_L^T \Psi(C_{L-1}^T \dots \Psi(C_1^T X(n)) \dots)) \nabla_c F_*[\varepsilon(X(n), c)]\} = 0. \end{aligned} \quad (10.3.6)$$

В частном случае, когда нейронная сеть имеет скалярный выход, условие оптимальности (10.3.6) принимает более простой вид:

$$\nabla J^0(c) = M\{\nabla_c \Psi(C_L^T \Psi(C_{L-1}^T \dots \Psi(C_1^T X(n)) \dots)) \cdot F'_{*\varepsilon}[\varepsilon(X(n), c)]\} = 0. \quad (10.3.7)$$

Из условия (10.3.6) следует, что для определения оптимального решения c^* необходимо вычислять либо градиент минимизируемого функционала $\nabla_c F_*[\varepsilon(X(n), c)]$, либо градиент векторного выхода нейронной сети $\nabla_c \Psi^T(\cdot)$ и градиент функционала по вектору невязки $\varepsilon(X(n), c)$.

Вычисление $\nabla_c F_*[\varepsilon(X(n), c)]$ довольно эффективно проводится с помощью процедуры, известной как метод расчета в обратном направлении. Сущность этого метода заключается в том, что градиент минимизируемого функционала по вектору весовых коэффициентов нейронной сети рассматривается как набор градиентов по матрицам C_l , $l = 1, \dots, L$ (10.2.6) весовых коэффициентов отдельных слоев. При этом оказывается, что для вычисления градиента по матрице весов нижележащего слоя могут быть существенно использованы результаты расчета по матрице весов вышележащего слоя.

Это утверждение иллюстрируется блок-схемой на рис. 10.7, где вместе со структурой нейронной сети приведена структура вычисления текущего значения градиента минимизируемого функционала $\nabla_c F_*[\varepsilon(X(n), c)]$. Для наглядности представления блок-схема приведена для трехслойной нейронной сети. Двойными прямоугольниками с

символами $\Psi(\cdot)$ и $\Psi'(\cdot)$ обозначены нелинейные блоки, преобразующие каждую i -ю компоненту вектора $V_l(n)$, $l = 1, 2, 3$, в $Y_{l,i}(n)$ и $Z_{l,i}(n)$, соответственно, по формулам

$$Y_{l,i}(n) = \psi(V_{l,i}(n)), \quad Z_{l,i}(n) = \psi'(V_{l,i}(n)), \quad (10.3.8)$$

двойными окружностями с буквой Π — блоки умножения векторов (вход — векторы a и b , выход — матрица $a b^\top$), двойными окружностями с буквой π — блоки покомпонентного умножения векторов (вход — векторы $a = (a_i)$ и $b = (b_i)$, выход — вектор $c = (a_i b_i)$).

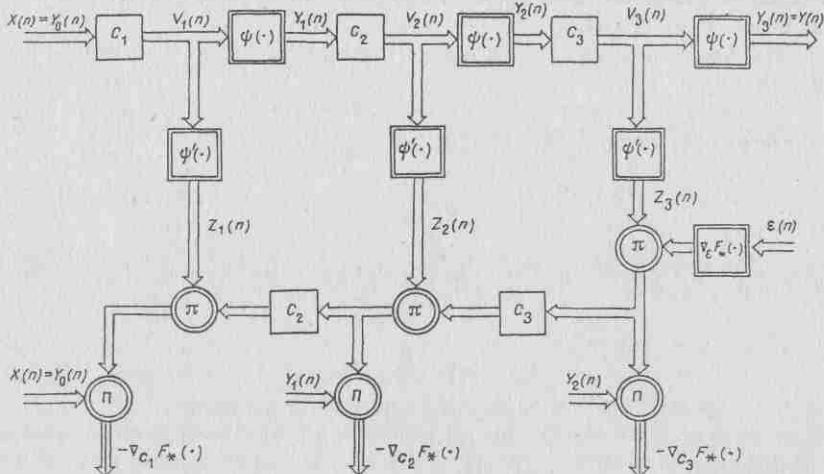


Рис. 10.7

Для построения оптимальных алгоритмов настройки параметров нейронной сети нужно вычислять отдельно как градиент векторного выхода нейронной сети $\nabla_c \Psi^\top(\cdot)$, так и градиент функционала по вектору невязки $\nabla_\epsilon F_*(\epsilon(X(n), c))$. Вычисление $\nabla_\epsilon F_*(\epsilon(X(n), c))$ не представляет особых трудностей. Вычисление $\nabla_c \Psi^\top(\cdot)$ можно выполнить с помощью метода, близкого к методу расчета в обратном направлении. В этом модифицированном методе $\nabla_c \Psi^\top(\cdot)$ рассматривается как набор градиентов по векторам весовых коэффициентов c_l (10.2.8) соответствующих слоев. Можно показать, что выражение для градиента выхода сети по вектору весовых коэффициентов l -го слоя представляется в виде $((N_{l-1} \cdot N_l) \times N_L)$ -матрицы

$$\nabla_{c_l} \hat{Y}_L^\top(n) = (\nabla_{c_l} \hat{Y}_{L,1}^\top(n), \nabla_{c_l} \hat{Y}_{L,2}^\top(n), \dots, \nabla_{c_l} \hat{Y}_{L,N_L}^\top(n)) =$$

$$= \begin{cases} \left(\text{diag } \Psi'(V_l(n)) \prod_{i=l+1}^L C_i \text{ diag } \Psi'(V_i(n)) \right) \otimes Y_{l-1}(n), & l < L, \\ \text{diag } \Psi'(V_L(n)) \otimes Y_{L-1}(n), & l = L. \end{cases} \quad (10.3.9)$$

Здесь $\text{diag } \Psi'(V_l(n))$ — диагональная $(N_l \times N_l)$ -матрица, элементами которой являются компоненты $\psi'(V_{l,i}(n))$ вектора $\Psi'(V_l(n))$, C_i — $(N_{i-1} \times N_i)$ -матрица весовых коэффициентов i -го слоя, а \otimes — символ кронекеровского произведения матриц.

Из выражений (10.3.9) следует, что для вычисления $\nabla_{C_l} \hat{Y}_L^T(n)$ могут быть существенно использованы результаты расчетов для $(l+1)$ -го слоя и что наиболее простой вид градиент принимает при $l = L$.

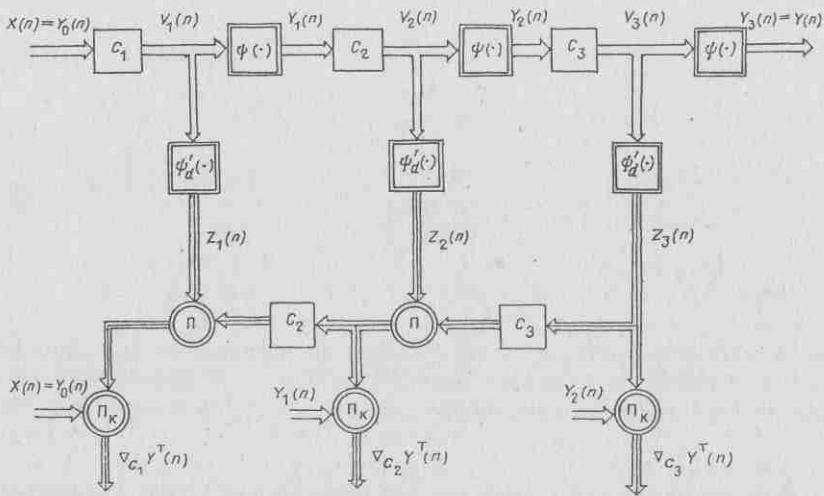


Рис. 10.8

На рис. 10.8 приведена структура вычисления текущего значения градиента выхода сети по векторам весовых коэффициентов отдельных слоев. Тройные стрелки обозначают матричный выход соответствующего элемента (выход нелинейного блока $\Psi'_d(\cdot)$ — диагональная матрица из (10.3.9)); Π — блок умножения входных матриц; Π_k — блок кронекеровского умножения матриц. Как следует из рис. 10.8, структура вычисления $\nabla_{C_l} \hat{Y}_L^T(n)$ во многом аналогична вычислениям градиента функционала.

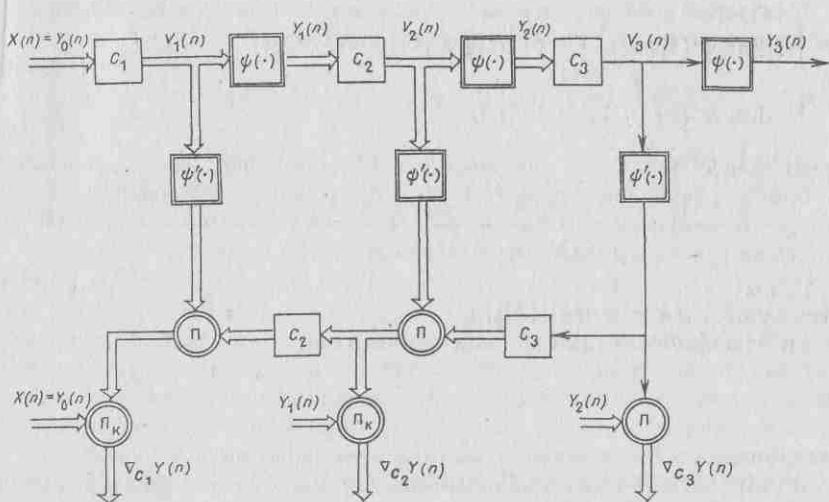


Рис. 10.9

На рис. 10.9 приведена структура, аналогичная структуре на рис. 10.8, со скалярным выходом нейронной сети.

§ 10.4. Алгоритмы настройки нейронной сети

Возможность эффективного вычисления градиента выхода нейронной сети по вектору настраиваемых параметров с помощью описанной в предыдущем параграфе модифицированной процедуры позволяет воспользоваться полученными ранее результатами для формирования алгоритмов настройки параметров нейронной сети. Особенно просто можно это сделать при скалярном выходе нейронной сети. В этом случае условие оптимальности имеет вид (10.3.7). Задача настройки сети принципиально решается на основе приведенных в гл. 8 алгоритмов.

Оптимальный на классе алгоритм (8.6.5), (8.6.6) в этом случае принимает вид

$$c(n) = c(n-1) + \hat{\Gamma}_*(n) F'_*[\varepsilon(X(n), c(n-1))] \nabla_c \hat{Y}_L(X(n), c(n-1)), \quad (10.4.1)$$

$$\begin{aligned} \hat{\Gamma}_*(n) = & \hat{\Gamma}_*(n-1) - \\ & - \frac{\hat{\Gamma}_*(n-1) \nabla_c \hat{Y}_L(X(n), c(n-1)) \nabla_c^\top \hat{Y}_L(X(n), c(n-1)) \hat{\Gamma}_*(n-1)}{I^{-1}(p_*) + \nabla_c^\top \hat{Y}_L(X(n), c(n-1)) \hat{\Gamma}_*(n-1) \nabla_c \hat{Y}_L(X(n), c(n-1))}. \end{aligned} \quad (10.4.2)$$

Учитывая возможность акселеризации алгоритмов по аналогии с алгоритмами вида (8.8.14) — (8.8.16), получим

$$c(n) = c(n-1) + \widehat{\Gamma}_*(n) F'_*[\varepsilon(X(n), c(n-1))] \nabla_c \widehat{Y}_L(X(n), c(n-1)), \quad (10.4.3)$$

$$\widehat{\Gamma}_*(n) = \widehat{\Gamma}_*(n-1) - \frac{\widehat{\Gamma}_*(n-1) \nabla_c \widehat{Y}_L(X(n), c(n-1)) \nabla_c^\top \widehat{Y}_L(X(n), c(n-1)) \widehat{\Gamma}_*(n-1)}{\widehat{I}_n^{-1} + \nabla_c^\top \widehat{Y}_L(X(n), c(n-1)) \widehat{\Gamma}_*(n-1) \nabla_c \widehat{Y}_L(X(n), c(n-1))}, \quad (10.4.4)$$

где $\widehat{I}_n = F''_*[\varepsilon(X(n), c(n-1))]$.

Оптимальные на классе алгоритмы (10.4.1) — (10.4.4) настройки весовых параметров нейронных сетей относятся к классу аргументных алгоритмов, наилучшим образом оценивающих параметры сети c . В то же время, основное назначение нейронной сети заключается в наилучшем воспроизведении выхода идентифицируемого объекта, а этой цели служат критериальные алгоритмы. Но, как было показано в § 8.9, оптимальные на классе критериальные алгоритмы совпадают с оптимальными на классе аргументными алгоритмами (10.4.3), (10.4.4).

Применение приведенных выше алгоритмов весьма громоздко. Эта громоздкость вызвана необходимостью вычисления матрицы усиления $\widehat{\Gamma}_*(n)$. Для устранения этих громоздких вычислений можно воспользоваться алгоритмами со скалярной матрицей усиления, которые аналогичны описанным в § 8.2 алгоритмам. Для нейронной сети со скалярным выходом они принимают вид, аналогичный (8.2.16):

$$c(n) = c(n-1) + \frac{\lambda_{\max}(\widehat{A}_n^{-1})}{n I(p_*)} F'_*[\varepsilon(X(n), c(n-1))] \nabla_c \widehat{Y}_L(X(n), c(n-1)), \quad (10.4.5)$$

где $\lambda_{\max}(\widehat{A}_n^{-1})$ — максимальное собственное число оценки нормированной информационной матрицы.

Однако вычисление $\lambda_{\max}(\widehat{A}_n^{-1})$ осуществить не столь просто. Поэтому для нейронных сетей наиболее целесообразно использовать двухшаговые усредненные алгоритмы, описанные в § 8.3, а именно

$$\tilde{c}(n) = \tilde{c}(n-1) + \frac{1}{n} (c(n) - \tilde{c}(n-1)), \quad (10.4.6)$$

$$c(n) = c(n-1) + \frac{b}{n^\alpha} F'_*[\varepsilon(X(n), c(n-1))] \nabla_c \widehat{Y}_L(X(n), c(n-1)), \quad (10.4.7)$$

где $b > 0$ и $0 < \alpha < 1$. Обладая той же асимптотической скоростью сходимости, что и оптимальные на классе алгоритмы, эти алгоритмы соответствуют наиболее приемлемой реализации настройки нейронных сетей.

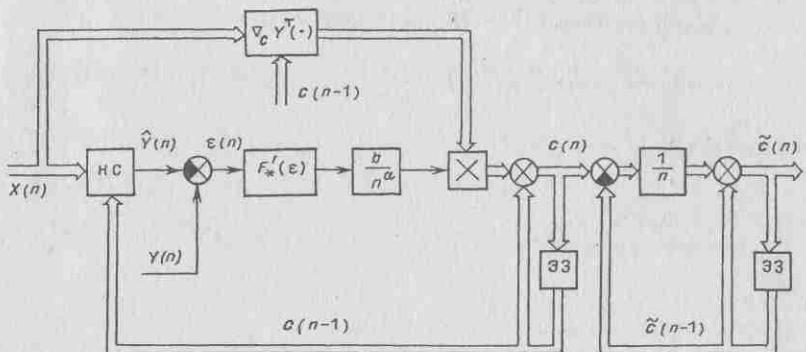


Рис. 10.10

Блок-схема алгоритма (10.4.6), (10.4.7) изображена на рис. 10.10. Блок НС представляет собой нейронную сеть, описываемую уравнением (10.2.5).

§ 10.5. Алгоритмы настройки общей нейронной сети

Для общей нейронной сети (рис. 10.5), представляющей собой многомерную настраиваемую модель, алгоритмы настройки, естественно, отличаются от алгоритмов, которые были рассмотрены в предыдущих главах. В этом случае невязка $\epsilon(X(n), c(n-1))$, (10.3.5) представляет собой вектор, градиент которого определяется выражением

$$\nabla_c \epsilon^\top(X(n), c(n-1)) = -\nabla_c \hat{Y}_L^\top(X(n), c(n-1)). \quad (10.5.1)$$

Алгоритм настройки общей нейронной сети может быть представлен в виде

$$c(n) = c(n-1) + \hat{\Gamma}_*(n) \nabla_c \hat{Y}_L^\top(X(n), c(n-1)) \nabla_\epsilon F_*(\epsilon(X(n), c(n-1))), \quad (10.5.2)$$

$$\begin{aligned} \hat{\Gamma}_*(n) = & \hat{\Gamma}_*(n-1) - \hat{\Gamma}_*(n-1) \nabla_c \hat{Y}_L^\top(X(n), c(n-1)) \times \\ & \times \left((\nabla_\epsilon^2 F_*(\epsilon(X(n), c(n-1))))^{-1} + \right. \\ & + \nabla_c \hat{Y}_L(X(n), c(n-1)) \hat{\Gamma}_*(n-1) \nabla_c \hat{Y}_L^\top(X(n), c(n-1)) \left. \right)^{-1} \times \\ & \times \nabla_c \hat{Y}_L(X(n), c(n-1)) \hat{\Gamma}_*(n-1). \quad (10.5.3) \end{aligned}$$

Для устранения необходимости в вычислении матрицы усиления (10.5.3) удобно воспользоваться усредненным алгоритмом

$$\tilde{c}(n) = \tilde{c}(n-1) + \frac{1}{n} (c(n) - \tilde{c}(n-1)), \quad (10.5.4)$$

$$c(n) = c(n-1) + \frac{b}{n^\alpha} \nabla_c \hat{Y}_L^\top(X(n), c(n-1)) \nabla_\epsilon F_*(\epsilon(X(n), c(n-1))), \quad (10.5.5)$$

где $b > 0$, $0 < \alpha < 1$.

Блок-схема алгоритма (10.5.4), (10.5.5) изображена на рис. 10.11.

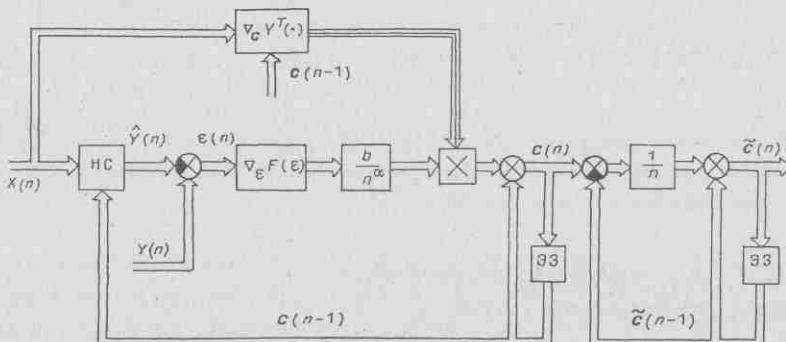


Рис. 10.11

Мы ограничимся выписыванием этих алгоритмов и не будем обсуждать их свойства и особенности.

§ 10.6. Заключение

Задачу настройки нейронной цепи можно рассматривать как задачу идентификации статического нелинейного объекта. Развитый в предыдущих главах информационный подход к формированию алгоритмов идентификации позволил получить абсолютно оптимальные и robustные алгоритмы настройки нейронных цепей. Использование этих алгоритмов позволяет ускорить процесс настройки нейронной сети по сравнению с обычно применяемыми алгоритмами типа стохастической аппроксимации.

Послесловие

Проблеме идентификации посвящено необозримое число работ. В них используются различные настраиваемые или прогнозирующие модели, те или иные критерии качества идентификации и большое число различных алгоритмов идентификации. Многие работы посвящены как разработке новых алгоритмов идентификации, так и сравнению разных алгоритмов между собой. Большое внимание уделяется рекуррентным алгоритмам, осуществляющим, по существу, адаптацию прогнозирующей модели к идентифицируемому объекту на основе получения и надлежащей обработки текущей информации о состоянии объекта.

По мере развития теории идентификации возникали и новые задачи, связанные, в частности, с формированием оптимальных, с той или иной точки зрения, рекуррентных алгоритмов. Наиболее естественным критерием оптимальности алгоритмов, очевидно, является скорость адаптации, т. е. скорость сходимости алгоритмов.

Аналогично тому, как в теории линейных автоматических систем их качество оценивалось быстротой затухания свободного процесса — степенью устойчивости, в теории идентификации эту роль играет асимптотическая скорость сходимости алгоритмов.

Несмотря на то, что понятие асимптотической скорости сходимости возникло давно в теории стохастической аппроксимации, эта оценка качества рекуррентных алгоритмов долгое время не привлекала внимание специалистов. Может быть, причина этого состояла в

том, что усилия были в основном направлены на обоснование и доказательство сходимости алгоритмов.

Сравнительно недавно было понято, что оптимизация рекуррентных алгоритмов идентификации тесно связана с учетом в них априорной информации об объекте и о статистических свойствах приложенных к нему помех. Учет априорной информации в алгоритмах, обрабатывающих текущую информацию, лежит в основе информационной теории идентификации. Эта теория при заданном уровне априорной информации позволяет однозначно определить оптимальную прогнозирующую модель, оптимальную функцию потерь и оптимальные алгоритмы идентификации. При этом априорная информация о структуре динамического объекта определяет оптимальную прогнозирующую модель, обладающую тем свойством, что при совпадении параметров этой модели (оценок) с параметрами объекта второй момент невязки достигает минимально возможного значения.

Априорная информация о помехе, задаваемая ее плотностью распределения, однозначно определяет оптимальную функцию потерь, т. е. критерий качества идентификации (средние потери), и абсолютно оптимальные алгоритмы, обладающие предельно возможной асимптотической скоростью сходимости. Эта скорость сходимости не может быть превзойдена никакими иными алгоритмами, как рекуррентными, так и нерекуррентными.

Неполная априорная информация о помехе, задаваемая классом принадлежности неизвестной плотности распределения, также однозначно определяет критерий качества идентификации и абсолютно оптимальные на классе алгоритмы идентификации, обладающие скоростью сходимости, не меньшей некоей гарантированной. Эти алгоритмы характеризуются грубостью, нечувствительностью по отношению к отклонению от принятых априори предположений; они называются робастными.

Априорная информация об области принадлежности параметров идентифицируемого объекта, задаваемая в виде так называемой фидуциальной плотности распределения, позволяет подобрать начальные значения алгоритмов идентификации, приводящие к акселеризации оценок, т. е. ускоряющие получение оценок заданной точности. Такие абсолютно оптимальные на классе алгоритмы, осуществляющие регуляризацию оценок, можно назвать акселерантными.

Абсолютно оптимальные на классе алгоритмы идентификации допускают упрощение путем замены полной матрицы усиления на скалярную, а градиента средних потерь — на псевдоградиент, а также при использовании дополнительного усреднения в алгоритмах со скалярной матрицей усиления. Это позволяет получить различные модификации алгоритмов, удобные в тех или иных конкретных ситуациях. С другой стороны, возможно распространение абсолютно оптималь-

ных на классе алгоритмов на более общие случаи, охватывающие коррелированные помехи, а также нелинейные объекты.

Недавно обнаружена еще одна возможность улучшения оценок при небольшом числе наблюдений, связанная с заменой фишеровской информации в матрице усиления ее простейшей оценкой. Это делает оценку матрицы усиления зависимой от невязки и благодаря этому замедляет убывание компонент этой матрицы с ростом числа наблюдений.

Дальнейшее улучшение оценок также и в асимптотике может быть достигнуто путем надлежащего выбора входных воздействий, если это допустимо условиями, при которых осуществляется идентификация объекта.

Информационная теория идентификации вносит однозначность как в формулировку, так и в решение задачи идентификации динамических объектов. Сейчас уже очевидны некоторые обобщения информационной теории идентификации на случаи идентификации неустойчивого динамического объекта путем охвата его стабилизирующей обратной связью. По-видимому, обратную связь можно использовать и при идентификации неминимально-фазового объекта, устранив тем самым неудобства, вызванные неминимально-фазостью.

Дальнейшее развитие информационной теории идентификации, с одной стороны, состоит в обосновании построения упрощенных прогнозирующих моделей, обеспечивающих минимально возможное для них значение средних потерь и упрощение оптимальных на классе алгоритмов идентификации, а с другой стороны — в распространении идей информационной теории идентификации на более сложные случаи динамических систем с несколькими помехами, как линейных, так и нелинейных. При этом важно охватить случай идентификации динамических систем при наличии помех, не обладающих свойством независимости, которое лежит в основе изложенной выше информационной теории. Информационный подход позволяет также формировать оптимальные и оптимальные на классе алгоритмы идентификации нестационарных динамических систем. В последнем случае форма алгоритмов идентификации зависит от моделей нестационарности, которые могут быть весьма разнообразными.

В изложенной информационной теории идентификации рассматривались алгоритмы, которые можно назвать аргументными; они обеспечивают наибольшую скорость сходимости оценок (параметров прогнозирующей модели) к истинным значениям (параметрам динамического объекта). Во многих случаях, однако, нас могут интересовать алгоритмы иного типа — называемые критериальными, — которые должны обеспечивать сходимость средних потерь к минимальным средним потерям; при этом сами оценки могут сходиться к произвольным значениям. В частности, оказалось, что после надлежащего

обобщения такие алгоритмы могут применяться для настройки параметров нейронных сетей.

Небезынтересно отметить, что до последнего времени использование нейронных сетей было основано на простейших алгоритмах типа алгоритмов стохастической аппроксимации. Применение оптимальных на классе алгоритмов настройки нейронных сетей существенно повышает их эффективность и позволяет осуществить идентификацию сложных нелинейных систем.

Алгоритмы идентификации, как аргументные, так и критериальные, являются основой для решения более общей задачи адаптивного управления динамическими объектами, т. е. задачи управления в условиях неопределенности, а также различных задач оптимизации в условиях неполной информации.

Очевидно, информационная теория идентификации может сыграть важную роль и в теории адаптивных систем управления. Она позволит не только устраниТЬ неоднозначность в выборе алгоритмов адаптации, но и оптимизировать контуры настройки параметров в адаптивных системах. Благодаря этому могут быть созданы не просто адаптивные системы, а адаптивные системы, оптимальные по скорости адаптации.

Создание информационной теории идентификации свидетельствует о завершении эпохи поиска алгоритмов идентификации методом «проб и ошибок» и наступлении эпохи сознательного формирования оптимальных или оптимальных на классе алгоритмов на основе априорной информации.

Комментарии

К ГЛАВЕ 1

§ 1.1. Методам идентификации посвящено необозримое число работ. Поэтому здесь мы укажем лишь монографии и обзоры, которые могут дать представление о достигнутых к настоящему времени результатах и которые содержат обширную библиографию.

Общим вопросам идентификации разнообразных технических систем посвящены книги Эйхоффа [1.1], Брикмана и Кристникова [1.1], Ли [1.1], Райбмана и Чадеева [1.1], Дейча [1.1], Химмельблау [1.1], Сейджа и Мелзы [1.1], Гропа [1.1], Гудвина и Пейна [1.1], Перельмана [1.1], Льюнга [1.4]. Идентификация динамических систем рассматривается в книгах Мендела [1.1], Арбачаускене и др. [1.1], Каминскаса и Немуры [1.1], Острёма [1.1], Саридиса [1.1], Ландау [1.2], посвященных рассмотрению также и адаптивных систем управления, в которых используются результаты идентификации.

В книгах Фишера [1.1], Маленво [1.1], [1.2], Гренджера и Хатанака [1.1] рассмотрены вопросы идентификации экономических систем. Большое внимание в этих книгах уделяется изучению временных рядов.

Идентификация, трактуемая как оценивание параметров, излагается в обширной литературе по статистике, включая книги Кендалла и Стьюарта [1.1] — [1.3], Андерсона [1.1], Хеннана [1.1], [1.2], Кокса и Хинкли [1.1], [1.2], Бартлетта [1.1] и др. Укажем также на обзоры, посвященные задачам идентификации, Острёма и Эйхоффа [1.1], Густавсона [1.1], Густавсона, Льюнга и Содерстрёма [1.1], Янга [1.1], Стрейца [1.1], Райбмана [1.2]. В этих обзорах подведен определенный итог результатов, полученных к настоящему времени и изложенных в журнальных публикациях. Регулярно статьи по идентификации публикуются в журналах: Автоматика и телемеханика, Техническая кибернетика, Automatica, IEEE Transactions on Automatic Control, International Journal of Control, International Journal of Systems Science, а также в журналах биологического и экономического направлений.

Теории и технике идентификации посвящаются специальные симпозиумы. К

настоящему времени состоялось девять симпозиумов: Прага (1967), Прага (1970), Гаага — Дельфт (1973), Тбилиси (1976), Дармштадт (1979), Вашингтон (1982), Йорк (1985), Пекин (1988), Будапешт (1991). Изданы труды этих симпозиумов — Identification and System Parameter Estimation. В результате усилий ведущих специалистов мира по идентификации создан под редакцией Эйкхоффа обзор современного состояния теории идентификации. Идентификация как пример оптимизации в условиях неопределенности рассматривалась в предыдущих книгах автора (Цыпкин [1.1], [1.2]). Знакомство со всеми этими публикациями показывает, что существует огромное число методов идентификации, отличающихся не только типами идентифицируемых объектов, но и прогнозирующими или настраиваемыми моделями, отчасти критериями качества идентификации и особенно алгоритмами идентификации. Какая-либо определенная единая классификация постановок задач идентификации и методов их решения к настоящему времени по существу отсутствует.

§ 1.2. Описание динамического объекта линейным разностным уравнением было использовано во многих работах по идентификации и аддитивному управлению: см., например, Острём и Болин [1.1], Острём [1.1], Эйкхофф [1.1], Острём и Эйкхофф [1.1], Сейдж и Мелза [1.1], Райбман и Чадеев [1.1], Саридис [1.1], Ландау [1.1]. Частные случаи этого разностного уравнения охватывают регрессионные и авторегрессионные задачи.

Регрессионные задачи особенно подробно рассмотрены в статистике: см., например, Крамер [1.1], Рао [1.1], Шметтерер [1.1], Кендалл и Стьюарт [1.2], Закс [1.1]. Современное состояние методов регрессионного анализа описано Демиденко [1.1]. Авторегрессионные задачи и тесно связанные с ними задачи обработки временных рядов, определения скользящих средних рассмотрены в книгах Бокса и Дженкинса [1.1], Андерсона [1.1], Хеннана [1.1], [1.2], Кендалла и Стьюарта [1.3], Бриллинджа [1.1] и др. В литературе авторегрессионные задачи в тех случаях, когда в уравнении фигурирует помеха при различных моментах времени $\xi(n), \xi(n-1), \dots, \xi(n-N)$, часто называют задачами авторегрессии — скользящего среднего (APCC); см., например, Бокс и Дженкинс [1.1]. Возможность идентификации неустойчивого авторегрессионного объекта методом наименьших квадратов обоснована Барабановым [1.1].

Мы не останавливаемся на методах определения порядка разностных уравнений динамических объектов. Этой задаче посвящено большое число работ. Отметим лишь недавно появившиеся работы, посвященные определению порядка разностных уравнений AP-объектов: Имагаки [1.1], Стоица и Содерстрём [1.1]. Интересующийся читатель в библиографии этих работ найдет указание на прежние работы в этой области. При записи уравнений идентифицируемых динамических объектов в операторной форме в литературе встречаются различные обозначения оператора сдвига: $B = 1 - \Delta$ (Бокс и Дженкинс [1.1]), Z^{-1} (Эйкхофф [1.1]), q^{-1} (Острём [1.1]). Наиболее простое обозначение оператора сдвига — q , так что $qx(n) = x(n-1)$, и в общем случае $q^kx(n) = x(n-k)$.

§ 1.3. В задачах идентификации линейных динамических объектов используются, как правило, два типа прогнозирующих или настраиваемых моделей — статистические и динамические. Обычно прогнозирующие или настраиваемые модели выбирались, исходя из различных интуитивных соображений. Часто оказывалось, что эти модели не удовлетворяли ряду требований. Тогда в них вводилось то или иное видоизменение. Так, метод инструментальных переменных (Янг [1.1], [1.2]), расширенный матричный метод (Пануска [1.1], [1.2]) были предложены с целью устранения смещенностей оценок параметров динамических объектов; см. также Содерстрём [1.2]. Эти методы, как правило, приводили к видоизменению первоначально принятой настраиваемой модели.

Задача о выборе наилучшей, оптимальной предсказывающей или настраиваемой модели до сих пор не рассматривалась. Эта задача была поставлена и решена в работе Цыпкина [1.3]. В § 1.3 излагаются результаты этой работы в несколько более простой форме. Для минимально-фазового по помехе объекта оптимальную настраиваемую модель можно также получить на основании следующих простых соображений. Перепишем уравнение объекта в виде

$$\frac{1}{K_\xi(q)} y(n) = \frac{K_u(q)}{K_\xi(q)} u(n) + \xi(n),$$

или

$$\frac{Q(q)}{P_\xi(q)} y(n) = \frac{P_u(q)}{P_\xi(q)} u(n) + \xi(n).$$

Обозначая

$$\hat{K}_1^0(q) = \frac{P_u(q)}{P_\xi(q)}, \quad \hat{K}_2^0(q) = \frac{Q(q)}{P_\xi(q)},$$

получим

$$y(n) = \hat{K}_1^0(q) u(n) + [1 - \hat{K}_2^0(q)] y(n) + \xi(n).$$

Таким образом,

$$y(n) = \hat{y}(n) + \xi(n),$$

где

$$\hat{y}(n) = \hat{K}_1^0(q) u(n) + [1 - \hat{K}_2^0(q)] y(n)$$

и есть уравнение оптимальной настраиваемой модели при $c = c^*$.

Оптимальная настраиваемая модель минимизирует второй момент невязки $\varepsilon(n) = y(n) - \hat{y}(n)$, и она по существу является оптимальным экстраполатором выходной величины объекта на один шаг. Эти простые соображения становятся непригодными в том случае, когда объект неминимально-фазовый по помехе. Поэтому мы предпочли общий подход, охватывающий все интересующие нас случаи.

Введение понятия оптимальной прогнозирующей, или настраиваемой модели устраняет существовавшую ранее неопределенность и приводит к выбору модели, которая наилучшим образом предсказывает выходную величину объекта. Отметим, что оптимальная прогнозирующая модель связана, как нам кажется, с оптимальными наблюдателями и предсказателями на один шаг (см., например, Острём [1.1]). Но эту связь мы вскрывать не будем.

§ 1.4. Как правило, критерий качества идентификации выбирался квадратичным. Это было связано не только с простотой критерия, но и с тем, что оптимальное решение c^* не зависит от конкретного вида симметричной выпуклой функции потерь (см., например, Виттерби [1.1], Сейдж и Мелза [1.1]). Мы к этому вопросу еще вернемся. Функции чувствительности, фигурирующие в условии оптимальности, являются объектом исследования теории чувствительности (см., например, монографию Розенвассера и Юсупова [1.1] и библиографию к ней).

§ 1.5. Рекуррентным алгоритмам типа стохастической аппроксимации посвящена огромная и разнообразная литература. Эти алгоритмы были положены в основу теории адаптивных и обучающихся систем в книгах Цыпкина [1.1] и [1.2], Фу [1.1], Менделя и Фу [1.1], Айзермана, Бравермана и Розоновэра [1.1], Катковника [1.1], Коростелева [1.1], статье Сакрисона [1.1]. Они использовались также в качестве алгоритмов идентификации в книгах, перечисленных в комментарии к § 1.2. Математическим вопросам теории алгоритмов стохастической аппроксимации посвящены специальные монографии Вазана [1.1], Невельсона и Хасьминского [1.1], Альберта и Гардиера [1.1], Гудвина и Пейна [1.1], Бенвениста, Метивье и Приоре [1.1]. В этих монографиях также приводятся и примеры применения рекуррентных алгоритмов. Все упомянутые выше книги содержат обширную библиографию как по свойствам рекуррентных алгоритмов, так и по их применением в задачах адаптации и обучения, задачах оптимизации в условиях неопределенности. См.

также статьи Соло [1.1] — [1.3], посвященные сходимости алгоритмов идентификации линейных динамических систем типа стохастической аппроксимации.

§ 1.6. Асимптотическая скорость сходимости рекуррентных алгоритмов стохастической аппроксимации изучалась в работах Чжуна [1.1], Сакса [1.1], Фабиана [1.1], [1.2], в книге Каниновского, Кнопова и Некрыловой [1.1]. Были найдены условия справедливости теоремы об асимптотической нормальности, при которых случайная величина $\sqrt{n}(c(n) - c^*)$, где $c(n)$ порождается алгоритмом стохастической аппроксимации, при $n \rightarrow \infty$ имеет нормальное распределение с нулевым средним и матрицей ковариаций, характеризующей асимптотическую скорость сходимости.

Теорема об асимптотической нормальности излагалась, усиливалась и обобщалась Острёмом и Болином [1.1], Невельсоном и Хасьминским [1.1], Гудвином и Пейном [1.1], Репиным и Тартаковским [1.1], Содерстрёмом и Стоицей [1.1], Каниновским, Кноповым и Некрыловой [1.1]. Специально теореме об асимптотической нормальности для задач идентификации динамических систем посвящена работа Льюнга и Кайнеса [1.1], в которой приведена подробная библиография. Подход Льюнга и Кайнеса получил дальнейшее развитие в работах Содерстрёма и Стоицы [1.2] и Стоицы и Содерстрёма [1.3].

Оценкам скорости сходимости алгоритмов стохастической аппроксимации посвящены работы Кашнера [1.1] и книга Кашнера и Кларка [1.1]. См. также: Катковник [1.1], Цыпкин и Поляк [1.1], Поляк [1.1], [1.2], Шильман и Ястребов [1.1], Альбер и Шильман [1.1], Каниновский, Кнопов и Некрылова [1.1]. Мы не приводим точные формулировки и доказательства теорем об асимптотической нормальности. Для нашей цели достаточно знать лишь вид АМКО, характеризующей скорость сходимости.

Различные способы получения матричного уравнения относительно АМКО приведены у Сакса [1.1], Невельсона и Хасьминского [1.1], Репина и Тартаковского [1.1]. Часто в литературе это матричное уравнение называют матричным уравнением Ляпунова или матричным уравнением Риккети. Изучению свойств подобных матричных уравнений и способов их решения посвящена огромная литература. Укажем на работы Дэвисона и Манна [1.1], Гудорзи [1.1], Зайдана [1.1], Шапиро [1.1], Квона и Пирсона [1.1], Хоскинса, Мика и Уолтона [1.1], Нейтала и Тоды [1.1], Мори, Фукума и Кувахара [1.1], Биаласа [1.1], Карапама [1.1]. Они могут оказаться полезными для читателей, специально интересующихся этим кругом вопросов.

Вывод уравнения, определяющего АМКО, строго говоря, справедлив, когда $P_\xi(q) \equiv 1$. Если же $P_\xi(q)$ представляет собой полином, то $\hat{y}(n) = c^T(n-1)z(n)$ является функционалом от последовательности $c(n-1), c(n-2), \dots$, а значит, и $\nabla_c F[\varepsilon(z(n), c(n-1))]$ представляет собой также функционал последовательности $c(n-1), c(n-2), \dots$. Поэтому рассуждения, связанные с алгоритмом для АМКО, не могут претендовать на какую-либо строгость, если $P_\xi(q) \neq 1$. Да они и не претендуют на это. Цель здесь состояла в получении АМКО из эвристических соображений. Для строгого математического вывода уравнения АМКО нужна иная техника, отличная от той, которая хорошо работала для регрессионных задач. Страгому обоснованию уравнения АМКО в различных частных случаях посвящены упомянутые выше работы.

§ 1.7. Вопросам оптимизации рекуррентных алгоритмов с разных точек зрения посвящено довольно большое число работ. К ним относятся работы Чжуна [1.1], Дворецкого [1.1], Кестена [1.1]. Наглядное изложение этих результатов содержится в гл. 6 превосходной книги Уайльда [1.1]; см. также книги Невельсона и Хасьминского [1.1] и Цыпкина [1.1]. Оптимальные алгоритмы с точки зрения асимптотической скорости сходимости, которые получаются путем надлежащего выбора матрицы усиления, впервые были предложены и исследованы Саксом [1.1]. Эти оптимальные алгоритмы и их различные варианты исследовались Вентером [1.1], Цыпкиным [1.1], [1.2], Стратоновичем [1.1], Репиным и Тартаковским [1.1].

Невельсоном и Хасьминским [1.1] и др. с несколько отличных друг от друга точек зрения. Оптимальным или, точнее, асимптотически оптимальным алгоритмам посвящены специальные обзоры Фабиана [1.1], [1.2]. Любопытно, что до сих пор продолжается публикация работ по улучшению алгоритмов типа стохастической аппроксимации, начало которому было положено Кестеном [1.1] (см., например, Саридис [1.1], Унтон [1.1], [1.2]), хотя предельные асимптотические свойства подобных алгоритмов при фиксированной произвольной функции потерь известны со времени появления статьи Сакса [1.1].

Фигурирующая в асимптотически оптимальных алгоритмах нормированная информационная матрица $A(c^*, \sigma^2(p_0))$ может быть записана в различной форме как через корни характеристического уравнения (см., например, Бокс и Дженкинс [1.1]), так и через коэффициенты разностного уравнения a^*, b^*, d^* (см., например, Острём [1.1]). Приведенные в тексте выражения нормированных информационных матриц $A(c^*, \sigma^2(p_0))$ были получены А. В. Назиным.

Приемы построения реализуемых оптимальных алгоритмов, связанные с заменой в матрице усиления оптимального решения c^* его оценкой $c(n-1)$, давно применялись в алгоритмах стохастической аппроксимации, см., например, Вентер [1.1], Невельсон и Хасьминский [1.1].

К ГЛАВЕ 2

§ 2.1. Эмпирические средние потери и оценки оптимального решения, порождаемые ими для регрессионных задач, т. е. Р-объектов с простой помехой, довольно подробно изучены в работах по статистике. Их также называют оценками минимального эмпирического риска (минимального контраста). Одной из первых работ в этом направлении была статья Хьюбера [2.1]. Методу минимизации эмпирического риска посвящена книга Вапника [2.1]. Применительно к идентификации нелинейных Р-объектов с простой помехой при произвольной функции потерь см. Цыбаков [2.1]. Айвазян, Енюков и Мешалкин [2.1] приводят многочисленные примеры задач, в которых применяются оценки минимального эмпирического риска.

§ 2.2. Асимптотические свойства оценок метода наименьших квадратов и метода максимального правдоподобия Р-объектов с простой помехой рассмотрены в книгах по статистике: Крамер [1.1], Уилкс [2.1], Закс [1.1], Ибрагимов и Хасьминский [2.1]; см. также статью Холево [2.1]. Для иных видов объектов (Р-объектов с преобразованной помехой, РАР-объектов и АР-объектов) различные частные случаи теоремы об асимптотической нормальности приведены у Кокса и Хинкли [1.2] (АР-объект произвольного порядка и квадратичная функция потерь), Кайнеса и Риссанена [2.1], Гудвина и Пейна [1.1], Содерстрёма и Стоицы [1.1] (РАР-объект и квадратичная функция потерь), Руссана [2.1], Льюнга и Кайнеса [1.1], Огата [2.1], Басавы, Фейджина и Хейде [2.1] (РАР-объект и произвольная функция потерь). Отметим, в частности, работы по асимптотическим свойствам оценок МНК: Манн и Вальд [2.1] (АР-объекты с простой помехой), Дурбин [2.2] (Р-объекты с преобразованной помехой), Дурбин [2.1] (РАР-объекты с простой помехой); см. также Маленко [1.2], Андерсон [1.1].

Чтобы как-то утешить математически настроенного читателя, приведем вывод соотношения (2.2.22).

В силу определения матрица $A = A(c^*, \sigma^2(p_0))$ симметрична. Поэтому существует ортогональная матрица S такая, что $\bar{A} = S^T A S$ — диагональная матрица. Обозначая $\delta(n) = S^T \delta(n)$ и пользуясь свойствами диагональных матриц, получим

$$M\{\delta^T(n) A \delta(n)\} = M\{\delta^T(n) \bar{A} \delta(n)\} = \text{tr}[\bar{A} M\{\delta(n) \delta^T(n)\}],$$

где $\text{tr} B$ обозначает след матрицы B . Принимая во внимание обозначение МКО V_n (2.2.2), получаем

$$M\{\delta(n) \delta^T(n)\} = S^T M\{\delta^T(n) \delta(n)\} S = S^T V_n S.$$

Следовательно,

$$M\{\delta^T(n)A\delta(n)\} = \text{tr}[\bar{A}S^T V_n S] = \text{tr}[S^T A S S^T V_n S] = \text{tr}[S^T A V_n S] = \text{tr}[A V_n].$$

Таким образом,

$$M\{\delta^T(n)A\delta(n)\} = \text{tr}[A M\{\delta(n)\delta^T(n)\}].$$

§ 2.3. Вывод неравенства Крамера — Рао для регрессионных задач (Р-объектов с простой помехой) содержится в книгах по статистике. Помимо упомянутых ранее книг, укажем еще на книги Левина [2.1], Хелстрёма [2.1], Ван Триса [2.2]. В последней из них и в книге Ибрагимова и Хасьминского [2.1] приведена матричная форма неравенства Крамера — Рао. Для динамических задач (охватывающих Р-объекты с преобразованной помехой, РАР-объекты и АР-объекты) неравенства Крамера — Рао приводятся в книге Кашиапа и Рао [2.1] и статьях Галдоса [2.1], Острёма [1.1], Бобровски и Закай [2.1], Чанга [2.1]. Информационные неравенства, аналогичные неравенству Крамера — Рао, были получены и для других, близких к идентификации задач: для задач стохастической аппроксимации и стохастической оптимизации — Фабианом [2.1] и Назиным [2.1], планирования эксперимента — Малютовым [2.1], аддитивного управления — Немировским и Цыпкиным [2.1], Назиным и Юдицким [2.1], Назиным [2.2].

§ 2.4. Выбор критерия качества идентификации сводится к выбору функции потерь $F[\varepsilon]$. До сих пор этот выбор был в значительной мере произвольным, и поэтому предпочитали квадратичную функцию потерь, которая приводит к задаче, допускающей аналитическое решение. Этот произвол, как правило, оправдывается тем, что для всех симметричных унимодальных плотностей распределения помехи и симметричной выпуклой функции потерь оптимальное решение c^* одно и то же. Интересно познакомиться с различными мнениями по этому поводу, разбросанными по литературе. Приведем некоторые из них.

«Нет решительно никаких общих оснований для предпочтения одного критерия другому... Критерий квадратичного уклонения... применяется особенно часто потому, что при пользовании им получаются, как правило, сравнительно простые выкладки» (Харкевич [2.1]).

«Выбор самого критерия оптимальности произведен. Выбор всегда представляет собой компромисс между стремлением приблизиться к реальности и стремлением к математической простоте» (Миддлтон [2.1]).

«Выбор критерия приближения всегда является трудным и сложным вопросом. Случаи, когда можно с должным основанием указать, какого рода приближение необходимо, являются скорее исключением из правила» (Вакман и Седлецкий [2.1]).

Подобные цитаты из самых разнообразных источников можно продолжить, но и этих достаточно, чтобы охарактеризовать состояние этого вопроса не только в задачах идентификации. Конечно, следует иметь в виду, что здесь речь идет о критериях, характеризующих качество аппроксимации, а не о технико-экономических или физических критериях, которые, как правило, имеют определенный технический, экономический или физический смысл. К таким критериям относятся размеры или вес устройств, коэффициент полезного действия силовой установки, прибыль предприятия и т. п. В этих случаях неопределенности в выборе критерия не возникает или, по крайней мере, не должно возникать, если не иметь в виду многокритериальных задач (см., например, Красненкер [2.1]). В книге критерии подобного типа не рассматриваются.

Для определения оптимальной функции потерь можно также воспользоваться неравенством Коши — Буняковского, как это было сделано в работе Цыпкина и Поляка [2.1]. Сейчас, однако, нам кажется, что такой прием несколько искусствен, и мы предпочли иной, более прямой подход, который был использован в статье Цыпкина [2.1].

§ 2.5. Здесь использованы понятия шенноновской информации (Шеннон [2.1]) и кульбаковской информации (Кульбак [2.1]). Неравенство, связанное с энтропией,

встречается во многих работах по теории информации и статистике (см., например, Кульбак [2.1], Ченцов [2.1], Уилкс [2.1]). Отметим также статьи Линдли [2.1] и Сакагучи [2.1] по использованию шенноновской информации в качестве меры информативности экспериментов и Фразера [2.1], Шютценбергера [2.1] по применению информации в статистике. Связь шенноновской информации — энтропии — с информационными процессами подробно рассмотрен в монографиях Шамбадаля [2.1], Поплавского [2.1] и Стратоновича [2.1].

Найденная оптимальная функция потерь $F_0[\varepsilon] = -\ln p_0(\xi)|_{\xi=\varepsilon}$ по существу представляет собой логарифмическую функцию правдоподобия с обратным знаком, т. е. логарифмическую функцию неправдоподобия.

Задача выбора наилучшей скалярной функции потерь для матричной невязки $\frac{1}{n} \sum_{m=1}^n \varepsilon(m, c) \varepsilon^T(m, c) = Q^n(c)$ рассматривалась в интересной работе Содерстрёма и Стоицы [1.2]. Оказалось, что наилучшей функцией потерь является определитель матричной невязки, т. е. $\det Q^n(c)$.

Метод максимального правдоподобия предложен Фишером [2.1]. Для временных рядов, описываемых разностными уравнениями первого порядка, и нормального распределения помехи этот метод изложен в книге Кендалла и Стьюарта [1.3]. Там же имеются ссылки на прежние работы. Применению и исследованию метода максимального правдоподобия для идентификации динамических систем посвящены работы Калмана [2.1], Острёма [2.1], Острёма и Содерстрёма [2.1], Гертлера и Баньиша [2.1], Ворчика [2.1], Содерстрёма [2.1], Кашиапа [2.1]. Большое число различных плотностей распределения $p_0(\xi)$, и в частности интересующих нас симметричных плотностей распределения, содержится в справочнике Хастингса и Пикока [2.1].

К ГЛАВЕ 3

§ 3.1. Как правило, во всех известных нам работах, связанных с исследованием семейств рекуррентных алгоритмов, структура алгоритма постулируется, т. е. задается заранее. Затем рассматривается задача выбора матрицы усиления (см., например, Сакс [1.1]), а в ряде случаев и функции потерь или, точнее, ее производной (см., например, Сакрисон [3.1]), при которых максимизируется асимптотическая скорость сходимости. В отличие от установившейся традиции, в основном тексте книги оптимальные и абсолютно оптимальные рекуррентные алгоритмы идентификации синтезируются, или формируются. Одновременно с этим устраивается водораздел между изучением свойств оценок $\hat{c}(n)$, минимизирующих эмпирические средние потери, и оценок $c(n)$, порождаемых оптимальными рекуррентными алгоритмами, т. е. алгоритмами типа стохастической аппроксимации.

Асимптотическое поведение оценок $\hat{c}(n)$ и $c(n)$, характеризуемое АМКО, однаково. Термин «абсолютно оптимальный алгоритм» предложен О. А. Цыпкиной и навеян далекой аналогией с термином «абсолютной устойчивости», введенным в теорию управления А. И. Лурье. Под абсолютно оптимальным понимается алгоритм, наилучший в смысле выбора функции потерь среди всех оптимальных алгоритмов.

§ 3.2. Здесь используются приемы формирования реализуемых рекуррентных оптимальных алгоритмов, развитые в § 3.1 применительно к абсолютно оптимальным алгоритмам. Впервые абсолютно-оптимальный алгоритм для Р-объекта с простой помехой был предложен Сакрисоном [3.1] — [3.3]. Иные итеративные методы рассматривались Кейлом [3.1], [3.2].

§ 3.3. Настройка параметра масштаба в абсолютно оптимальных алгоритмах по существу в литературе не рассматривалась. Может быть, оправданием этому служило то, что для линейных алгоритмов, которые чаще всего встречались, в этом не было необходимости.

§ 3.4. Одномерные абсолютно оптимальные алгоритмы оценивания параметра сдвига были подробно исследованы Анбаром [3.1] и Абдельхамидом [3.1]. В последней работе рассматривались также одномерные поисковые алгоритмы. Свойства таких алгоритмов исследовались Фабианом [3.1], [3.2].

§ 3.5. Многомерные абсолютно оптимальные алгоритмы идентификации, или оценивания параметров Р-объектов, предложенные Сакрисоном [3.1], исследовались Хасьминским [3.1], Невельсоном и Хасьминским [1.1], Поляком и Цыпкиным [3.1], Цыпкиным [3.1]. Абсолютно оптимальные алгоритмы идентификации АР-объектов рассматривались Немировским [3.1], Поляком и Цыпкиным [3.2]. Отметим здесь также абсолютно оптимальные алгоритмы оптимизации, предложенные и исследованные Цыпкиным и Поляком [2.1] и Поляком и Цыпкиным [3.1], [3.2] (не-поисковые алгоритмы) и Цыпкиным и Позняком [3.1] (поисковые алгоритмы).

К ГЛАВЕ 4

§ 4.1. Часть из приведенных классов распределений довольно популярна среди статистиков. Особенно это относится к классу \mathcal{P}_3 почти нормальных распределений. Этот класс был введен Тьюки [4.1]. Он широко использовался Хьюбером [4.1], [4.2] и его последователями (см. обзоры Хэмпела [4.3] и Бикела [4.1] по робастному оцениванию). Классы \mathcal{P}_6 и \mathcal{P}_7 финитных и приближенно финитных распределений рассматривались в работах Мартина и Масрелиза [4.1], Сакса и Ильвисакера [4.1] и Хьюбера [4.4]. Известны и другие классы, в которых имеет место близость не плотностей, а функций распределения (см. Хьюбер [4.1]). Мы, однако, такие классы не рассматриваем.

§ 4.2. Понятие оптимальности на классе тесно связано с понятиями нечувствительности, грубости, робастности, хотя полностью и не совпадает с ними. Для задач оптимизации в условиях неопределенности понятие оптимальности на классе было введено Поляком и Цыпкиным [4.1].

§ 4.3. Принцип оптимальности для частного случая оценивания одномерного параметра сдвига соответствует минимаксному принципу Хьюбера [4.1], [4.7]. В связи с общим минимаксным принципом см. книги Гермейера [4.1], Демьянова и Малоземова [4.1], Карлина [4.1], Федорова [4.1]. Отметим также статьи Бхата и Дорансвами [4.1] и Дорансвами [4.1]. Минимаксный подход в последнее время получил развитие для построения гарантированных оценок параметров Р-объектов при ограниченности помех или их матриц ковариаций в работах Эльяшберга. Он подробно изложен в монографиях Эльяшберга [4.1], Бахшияна, Назирова и Эльяшберга [4.1].

§ 4.4. Вариационные задачи минимизации комбинаций фишеровской информации $I(p_0)$ и дисперсии $\sigma^2(p_0)$ в общем случае ранее не рассматривались. Они являются сравнительно новыми. Их частный случай — минимизация $I(p_0)$ — рассматривался в литературе по характеризационным задачам математической статистики (Каган, Линник и Рао [4.1] — класс \mathcal{P}_2), а также в связи с робастным оцениванием (Хьюбер [4.1] — класс \mathcal{P}_3 , Сакс и Ильвисакер [4.1], Хьюбер [4.4], Мартин и Масрелиз [4.1] — классы \mathcal{P}_6 , \mathcal{P}_7). Решение задачи минимизации $I(p_0)$ на классах \mathcal{P}_1 и \mathcal{P}_4 получено Цыпкиным и Поляком [2.1].

§ 4.5. Оптимальные на классах функции потерь для Р-объектов с простой помехой были найдены Поляком и Цыпкиным [3.1]. Ранее часто предлагались не оптимальные, но близкие к ним функции потерь. При этом обычно исходили из интуитивных соображений. Так, функция потерь $F[\varepsilon] = |\varepsilon|^r$, $1 \leq r \leq 2$, рассмотрена Форсайтом [4.1]. При $r = 1$ мы приходим к методу наименьших модулей (МНМ), подробное исследование которого приведено в книге Мудрова и Кушко [4.1] и в статьях Епишина [4.1], Бассета и Коенкера [4.1], Мерилл и Швеппе [4.1] предлагают $F[\varepsilon] = \gamma_1 \varepsilon^2$ при $|\varepsilon| < k$ и $F[\varepsilon] = \gamma_2 \sqrt{\varepsilon}$ при $|\varepsilon| \geq k$, где $\gamma_1 > 0$, $\gamma_2 > 0$, $k > 0$. Близкая по форме функция потерь получается из логарифмической функции неправдоподобия при смеси двух нормальных распределений (см. Колас

[4.1]). Примеры иных функций потерь можно найти в работах Эндрюса, Бикела, Хэмпела, Хьюбера, Роджерса и Тьюки [4.1], Гильбо и Челпанова [4.1] — [4.4], Демиденко [1.1]. В книге Хэмпела, Рончетти, Рауссе и Штаэля [4.1] приводятся разнообразные функции потерь, полученные на основе подхода, использующего функции влияния.

Оптимальная на классе функция потерь определяется по наименее благоприятной на данном классе плотности распределения, т. е. плотности распределения, минимизирующей фишеровскую информацию. При обсуждении наименее благоприятных, или наименее предпочтительных, плотностей распределения встречаются иногда и неточные гипотезы. Так, Репин и Тартаковский [1.1] замечают в своей книге, что «во всех предыдущих примерах наименее предпочтительное распределение вероятностей λ обладает характерной особенностью — оно является распределением с максимальной для заданного класса энтропией», и далее: «Можно высказать гипотезу, что и в других случаях наименее предпочтительным распределением является распределение с максимальной энтропией. Хотя доказать такую гипотезу или установить условия, при которых она справедлива, довольно затруднительно, она обладает большой степенью правдоподобия». Аналогичная точка зрения высказывалась Гольдманом [4.1]. Эта гипотеза в общем случае, очевидно, неверна.

§ 4.6. Для АР-объектов аналитическое решение вариационной задачи может быть получено для класса P_2 и для классов P_1, P_3 , но при дополнительном ограничении $\sigma^2(p_0) \geq \sigma_1^2$ либо при малых σ_1^2 , либо при фиксированных значениях $\sigma^2(p_0)$. В иных случаях соответствующую задачу приходится решать численно. Задачи идентификации АР-объектов и их особенности рассмотрены в статье Поляка и Цыпкина [4.1]. Оцениванием параметров АР-объектов интенсивно занимались Мартин [4.1], [4.4], [4.5], Денби и Мартин [4.1].

Методы исследования асимптотики решения дифференциальных уравнений, подобных уравнению (4.6.7), описаны, например, в книге Федорюка [4.1].

§ 4.7. Для РАР-объектов и Р-объектов с преобразованной помехой вариационная задача может быть решена лишь численно на ЭВМ. Примеры такого решения, приведенные в тексте (табл. 4.4), были получены А. С. Красненкером.

§ 4.8, 4.9. Впервые термин «робастный» («robust» (англ.) — крепкий, стойкий, сильный) появился в работах Бокса [4.1] и Бокса и Андерсона [4.1]. Робастной называлась «статистическая процедура, нечувствительная к отклонениям от предложений, лежащих в ее основе».

Обычно в русской литературе используются термины: «устойчивые», «помехоустойчивые», «стабильные», «свободные от распределения» и, наконец, «робастные» оценки. Последний термин уже получил право гражданства и постепенно вытесняет слишком перегруженные и неадекватные термины, перечисленные выше. Большую роль в пропаганде необходимости робастных оценок сыграли работы Тьюки [4.1], [4.2]. Тьюки [4.2] цитирует высказывание Джери [4.1]: «Нормальность — это миф. В реальном мире никогда не было и не будет нормального распределения». Можно еще к этому прибавить высказывание Пуанкаре: «В нормальном законе должно быть что-то таинственное, так как математики считают его законом природы, тогда как физики убеждены в том, что он доказан математически».

Хэмпел [4.1] в своем обзоре приводит многочисленные примеры практических задач, в которых встречаются выбросы. Так, в инженерных измерениях по данным Олмстеда обычно содержится 10% выбросов (см. Тьюки [4.1]), а по данным Даниеля [4.1] — от 1 до 20%. При обработке сейсмограмм, как отмечает Фридман [4.1], возникает 5—7% выбросов. В клинических условиях наблюдаемая медицинская информация, по данным Порта, содержит 8—12% выбросов (см. Хэмпел [4.1]). Примеры подобного рода приводятся Боксом и Андерсоном [4.1], Тьюки [4.1], Романовски и Грином [4.1], Демиденко [1.1], а также в наиболее полном обзоре по робастным методам оценивания Ершова [4.1]. См. также обзоры Хэмпела

[4.3] — [4.5], Бикела [4.1], Хогга [4.1], Демпстера [4.1], монографии Хьюбера [4.5], [4.8], Барнетта и Льюиса [4.1], Рея [4.1], Такеухи [4.1], Смоляка и Титаренко [4.1] и сборники под редакцией Лаунера и Уилкинсона [4.1], Новака и Зентграфа [4.1].

В практике обработки статистической информации уже давно применялись различные эмпирические приемы устранения влияния выбросов. Описание таких приемов можно найти, например, в книгах Дейвида [4.1], Барнетта и Льюиса [4.1]. Очень любопытное сравнение различных методов оценивания параметра сдвига, таких, как среднее, медиана, цензурирование, а также методов, основанных на нелинейных преобразованиях типа насыщения, гармонического, параболического преобразований и т. п., приведено в статье Стиглера [4.1]. Это сравнение проведено на реальных данных Галлея по определению параллакса Солнца, Кевендиша по определению плотности Земли и Майкельсона и Ньюкомба по определению скорости света. Заинтересованному читателю рекомендуется познакомиться с дискуссией, следующей за этой статьей.

Теория робастного оценивания первоначально развивалась в направлении, связанном с оценкой одномерных параметров сдвига и масштаба и со смежными вопросами. Традиционно рассматривались нерекуррентные оценки. Достижения этого периода наиболее полно изложены в книге Хьюбера [4.8]. В ней отражены результаты, полученные до 1975—1976 гг. Обобщение основных результатов теории робастного оценивания на задачу регрессии, а затем на более широкую задачу оптимизации в условиях неопределенности было сделано в работах Поляка и Цыпкина [3.1], [3.2], [4.1] — [4.3]. В этих работах также показано, что робастные рекуррентные алгоритмы, обладающие большей простотой реализации, чем нерекуррентные оценки, не уступают последним по асимптотической скорости сходимости. Что же касается АР-объектов, то они рассматривались в статьях, связанных с обработкой временных рядов: Бокс [4.1], Мартин [4.1], [4.4], [4.5], Денби и Мартин [4.1], но с несколько иными позициями, чем это сделано в тексте.

Понятие «качественной робастности», наиболее близкое к понятию грубости, нечувствительности, было разработано Хэмпелем [4.1] (см. также Папантони-Каракос [4.1]).

Отметим также работы по робастной фильтрации (Масрелиз [4.1], Масрелиз и Мартин [4.1], Ершов и Липцер [4.1], Мартин [4.2]), по робастному оцениванию при асимметричных помехах (Коллинз [4.1]), при коррелированных помехах (Цыпкин и Позняк [4.1]) и по робастной непараметрической регрессии (Хьюбер [4.7], Цыбаков [4.1]).

Довольно полная библиография по робастным методам оценивания приведена в обзоре Ершова [4.1] и несколько позже появившемся обзоре Стогова, Макшанова и Мусаева [4.1], который сильно пересекается с обзором Ершова, но не содержит ссылки на него. Быть может, причина этого состоит в том, что в «Зарубежной радиоэлектронике» не принято ссылаться на отечественных авторов даже тогда, когда они являются авторами обзоров. Более поздние работы зарубежных авторов частично отражены в библиографии к книге Хьюбера [4.7] и в сборниках под редакцией Лаунера и Уилкинсона [4.1] и Новака и Зентграфа [4.1].

К ГЛАВЕ 5

§ 5.1, 5.2. Исследование рекуррентных абсолютно оптимальных на классе алгоритмов идентификации Р-объектов с простой помехой или, как их называют, робастных алгоритмов, посвящено небольшое число работ. Укажем на работы Мартина [5.1], Мартина и Масрелиза [4.1], Поляка и Цыпкина [3.1], [4.3]. Некоторые из рекуррентных абсолютно оптимальных на классе алгоритмов идентификации АР-объектов рассмотрены Мартином [4.1] — [4.5], Денби и Мартином [4.1]. Несколько иные алгоритмы подобного типа, основанные на ранговых статистиках, содержатся в статье Эванса, Керстейна и Курца [5.1]; см. также обзоры Хогга [4.1] и Ершова [4.1].

§ 5.3. Нерекуррентные оценки с настройкой параметра масштаба рассматривали Бикел [5.1], Иохай и Маронна [5.1], Маронна [5.1], Хьюбер [4.8]. Итеративные алгоритмы для вычисления этих оценок описаны Хьюбером [4.8]. Иной подход см. в работах Джонсона, Мак-Гуире и Милликена [5.1], Кэрролла [5.1].

§ 5.4. Робастные алгоритмы оценивания одномерного параметра сдвига рассматривали Мартин [5.1], Мартин и Масрелиз [4.1], Цыпкин и Поляк [2.1], Прайс и Ванделинде [5.1]. Релейные алгоритмы исследовались Бедельбаевой [5.1]. Отметим здесь различные применения робастных алгоритмов: в радиолокации — Фелер и Мак-Карти [5.1], в метеорологии — Кливленд и Гуарино [5.1], в управлении энергосистемами — Хандшин, Швеппе, Колас и Фихтер [5.1], Гамм [5.1]. В книге Гамма [5.1] читатель найдет дополнительные ссылки на работы по робастному оцениванию.

§ 5.5. Частные случаи многомерных робастных алгоритмов исследовались Поляком и Цыпкиным [3.1], [4.2], Клейнером, Мартином и Томсоном [5.1].

К ГЛАВЕ 6

§ 6.1. Неминимально-фазовые системы изучаются в курсах теории линейных цепей и теории автоматического управления (см., например, книги Карни [6.1], Боде [6.1], Цыпкина [6.1]). В теории идентификации, как правило, неминимально-фазовые по возмущению объекты исключались из рассмотрения. Почему-то все считали, что идентифицировать неминимально-фазовый по возмущению объект невозможно. Но вслух об этом говорили немногие. Может быть, это было связано с желанием получать оценки не только основных коэффициентов a_m^* и b_m^* , но и вспомогательных коэффициентов d_m^* . На принципиальную возможность идентификации неминимально-фазового по возмущению объекта, состоящую в оценке коэффициентов a^* и b^* и коэффициентов d_m^0 , являющихся функциями d_m^* , впервые указал Э. Д. Аведьян.

§ 6.2. Особенности оптимальной настраиваемой модели для неминимально-фазового по возмущению объекта были выяснены в статье Цыпкина [1.3].

§ 6.3. Задача нахождения распределения случайной величины после преобразования ее линейным дискретным фильтром в общем случае не имеет аналитического решения. В частных случаях так называемых устойчивых распределений закон распределения при этом не меняется. Из симметричных устойчивых плотностей, выражаемых в элементарных функциях, известны лишь нормальная плотность $N(0, \sigma^2)$ и плотность Коши $C(0, s)$. Об устойчивых плотностях распределения см. Гнеденко и Колмогоров [6.1], Петров [6.1], Лукач [6.1].

§ 6.4. Сколь-нибудь полное рассмотрение задач по определению оптимальных и оптимальных на классе функций потерь пока наталкивается на непреодолимые препятствия.

§ 6.5. Сходимость линейных алгоритмов идентификации неминимально-фазовых по возмущению объектов изучалась в работе Цыпкина, Аведьяна и Гулинского [6.1]. С несколько иной точки зрения идентификация неминимально-фазовых по возмущению объектов рассматривалась в работе Бенвениста, Гурса и Руже [6.1].

§ 6.6. Строгое обоснование нелинейных абсолютно оптимальных и абсолютно оптимальных на классе алгоритмов к настоящему времени отсутствует. Однако приведенные примеры иллюстрируют не только работоспособность этих алгоритмов, но и их оптимальность на классе.

К ГЛАВЕ 7

§ 7.1. Акселеризация оценок тесно связана с регуляризацией решений так называемых некорректных обратных задач. См. книги Тихонова и Арсенина [7.1], Иванова и Васина [7.1], Федорова [7.1], а также обзор Морозова [7.1].

§ 7.2. Физическая рандомизация широко применяется при решении самых разнообразных задач. Укажем на задачи суммирования расходящихся рядов (Харди [7.1], Кемени и Снелл [7.1]), аппроксимации плохо определенных функций (Гюнтер [7.1], Хеннан [7.1]), ускорения сходимости итерационных процессов (Боголюбов и Митропольский [7.1]), поиска экстремума многоэкстремальных функций (Хасьминский [7.1], Катковник [1.1]), случайного поиска (Растригин [7.1]). Рандомизация оптимального решения фигурирует в итерационных методах решений задач теории игр (Браун [7.1], Евтушенко и Жадан [7.1]), задачах векторной оптимизации (Красенкер [7.1]), задачах оптимизации в условиях неопределенности (Каплинский, Красенкер и Цыпкин [7.1], приближенных методах решения задач дискретного программирования (Гарусин и Каплинский [7.1]). Рассматриваемая здесь рандомизация связана с преднамеренным введением случайности. Она представляет собой искусственное рассмотрение оптимального решения как случайного, характеризуемого так называемой фидуциальной плотностью распределения («fiducial» (анал.) — основанный на вере, доверии). Кендалл и Стьюарт [1.2] пишут по этому поводу: «Фидуциальное распределение не является частотным распределением в том смысле, в каком использовалось это выражение до сих пор. Это новое понятие, выражающее интенсивность нашей веры в различные возможные значения параметра...». Фидуциальное распределение «...можно рассматривать как распределение вероятностей в смысле степеней убежденности». «Фидуциальное распределение можно также рассматривать как новое понятие, дающее формальное выражение некоторым интуитивным идеям относительно величины нашего доверия к различным значениям параметра M ». О фидуциальной плотности распределения см. также Рао [1.1], Клинов [7.1]. Искусственная рандомизация тесно связана с регуляризацией решений, см. Цыпкин [7.1].

§ 7.3. Возможные методы учета априорной информации об оптимальном решении рассматривались в работах Жуковского и Морозова [7.1], Успенского и Федорова [7.1], Поляка и Цыпкина [7.1], Цыпкина [7.1], а также в ранее упомянутом обзоре Морозова [7.1]. Эти методы, по существу, сводились к байесовскому методу или методу максимума апостериорной вероятности.

§ 7.6. Различные способы получения акселерантных линейных, т. е. соответствующих МНК, алгоритмов были описаны в работах Жуковского [7.1] — [7.3], Мелешко [7.1] — [7.4], Жуковского и Мелешко [7.1], Поляка и Цыпкина [7.1], Цыпкина [7.1]; см. также Моррис [7.1].

Иной путь получения акселерантных алгоритмов как линейных, так и нелинейных, основан на использовании переключающейся матрицы усиления

$$\Gamma = \begin{cases} \Gamma_0, & n < n_0, \\ \Gamma(n), & n \geq n_0. \end{cases}$$

Такие алгоритмы обладают при $n < n_0$ повышенной скоростью сходимости в окрестность оптимального решения, и можно ожидать, что это позволит более быстро выходить на режим, при котором наиболее полно используются асимптотические свойства алгоритмов. Мы, однако, здесь эту возможность не будем рассматривать. Отметим, что в последнее время интерес к алгоритмам с постоянной матрицей усиления возрос. Их исследованию посвящены работы Кашнера и Хуанга [7.1], Бенвениста и Руже [7.1].

Термин «акселерантный алгоритм» предложен И. П. Белоглазовым.

§ 7.7. Выбор оптимальных входных воздействий тесно связан с методами планирования эксперимента и, в частности, с последовательными рекуррентными методами планирования. Эти методы и их применения описаны в книгах Гудвина и Пейна [1.1], Круг, Сосулина и Фатеева [7.1], Хартмана, Лецкого и Шефера [7.1], а также в статьях Соколова [7.1], Аrimoto и Кимура [7.1], Мехры [7.1], [7.2], Аоки и Стейли [7.1], Лопес-Толедо и Атанса [7.1]. Обычно в теории планирования эксперимента используются различные скалярные функционалы матрицы \hat{H}_n , т. е. $\kappa(\hat{H}_n)$

типа определителя: $\kappa(\hat{H}_n) = \det \hat{H}_n$, следа: $\kappa(\hat{H}_n) = \text{tr } \hat{H}_n$ или максимального собственного числа: $\kappa(\hat{H}_n) = \lambda_{\max}(\hat{H}_n)$. На основании результатов Содерстрёма и Стоицы [7.1] можно показать, что в рассматриваемом случае имеют место неравенства $\det \hat{H}_n \leq \text{tr } \hat{H}_n$ и $\det \hat{H}_n \leq \lambda_{\max}(\hat{H}_n)$. Эти неравенства могут служить оправданием выбора в качестве предпочтительного скалярного функционала не $\text{tr } \hat{H}_n$ и не $\lambda_{\max}(\hat{H}_n)$, а $\det \hat{H}_n$.

К ГЛАВЕ 8

§ 8.2. Оптимальные и оптимальные на классе алгоритмы со скалярной матрицей усиления рассматривались Поляком и Цыпкиным [3.1]. Рекуррентный способ оценивания минимальных собственных значений информационных матриц предложен и исследован Ждановым [8.1].

§ 8.3. Усредненные алгоритмы со скалярной матрицей усиления относятся к классу двухшаговых алгоритмов. Обычно рассматриваемые двухшаговые алгоритмы не оправдали надежды на ускорение сходимости, высказанные Фу и Николичем [8.1]. Более того, их сходимость оказалась более медленной, чем для одношаговых алгоритмов. Этот факт был отмечен в работах Цыпкина [1.2], [8.1] — [8.3] и Поляка [8.1]. Эффект ускорения сходимости, достигаемый за счет надлежащего выбора коэффициента усиления основного алгоритма, изменяющегося медленнее, чем $1/n$, обнаружен Поляком [8.2]. Им подробно исследованы усредненные линейные ($F'[\varepsilon] = \varepsilon$) алгоритмы со скалярной матрицей усиления на основе матричных лемм. Скалярный алгоритм типа стохастической аппроксимации рассматривался Руппертом [8.1]. Продолжение исследования усредненных алгоритмов идентификации со скалярной матрицей усиления читатель может найти в работах Поляка и Юдицкого [8.1] и Йина [8.1]. Кроме того, отметим работу Юдицкого и Назина [8.1], посвященную использованию этого подхода в задачах адаптивного управления.

§ 8.4. Алгоритмы с упрощенными градиентом и скалярной, но не оптимальной матрицей усиления, впервые рассматривались Пануской [1.1], [1.2], [8.1], Янгом [8.1], однако вне связи с абсолютно оптимальными алгоритмами.

§ 8.5. Алгоритмы стохастической аппроксимации при наличии коррелированных помех исследовались Портным [8.1], Девлином, Гнанадесиканом и Кеттенрингом [8.1], Фарденом [8.1], Пануской [8.2], Бородиным [8.1], Кашнером и Хуангом [1.1], Немировским [1.1], [1.2], Соло [8.1], а оптимальные алгоритмы оптимизации — Цыпкиным и Позняком [8.1].

§ 8.6. Описание нелинейных систем при помощи функциональных рядов Вольтерра довольно широко используется в литературе по идентификации (см., например, книгу Ван Триса [2.1] и статью Биллингс и Факхури [8.1], а также библиографию в этих работах). Идентификации нелинейных систем посвящены, например, работы Нетравали и Фигуенредо [8.1], Каминская и Яницкене [8.1] — [8.3].

§ 8.8. Любопытно отметить, что на начальной стадии развития робастных рекуррентных алгоритмов часто матрица усиления $\hat{G}(n)$ или, в одномерном случае, коэффициент усиления $\hat{\gamma}(n)$ выписывались в виде (8.8.10) или (8.8.23) (см., например, Цыпкин и Поляк [2.1], Поляк и Цыпкин [4.1], Ершов [4.1]). Основной алгоритм (8.7.11) при таких $\hat{G}(n)$ (или $\hat{\gamma}(n)$) относили к асимптотически оптимальным на классе алгоритмам.

Только недавно были поняты акселерантные свойства подобных алгоритмов. Численный эксперимент подтверждает эти свойства. Более того, как установлено Платоновым, Позняком, Тихоновым и Шабатиным, функцию $F_0''[\varepsilon]$ в (8.8.13) или $F''_0[\varepsilon]$ в (8.8.16) можно заменять иными функциями, удовлетворяющими определенным условиям, при которых гарантирована сходимость алгоритмов и обеспечивается их акселеризация.

§ 8.9. Задачи оптимизации, как это неоднократно отмечалось в литературе (см., например, Цыпкин [8.4], Тихонов и Арсенин [7.1], Цирлин [8.1]), подразделяются на два типа. В задачах первого типа, которые естественно назвать аргументными, основной целью является нахождение точки минимума, которая предполагается единственной, а минимизируемый функционал здесь играет роль меры отличия оценки $c(n)$ от истинного решения c^* . В задачах второго типа — их можно назвать критериальными — основной целью является нахождение любой точки, в которой значение функционала минимально.

В большинстве работ по оптимизации рассматриваются задачи аргументной оптимизации. Интересно отметить, что вопрос о критериальной, а не аргументной сходимости рассматривался в одной из первых работ по обоснованию детерминированных алгоритмов оптимизации Канторовичем [8.1].

Для стохастических алгоритмов критериальная сходимость исследовалась Литваковым [8.1], Девятериковым, Каплинским и Цыпкиным [8.1], Айзерманом, Бравermanом и Розонэром [1.1], Ермольевым [1.1].

Задача построения оптимальных критериальных алгоритмов оптимизации сравнительно нова. Она была поставлена и решена в работах Поляка и Цыпкина [8.1], [8.2] для непоисковых алгоритмов и в работе Цыпкина, Позняка и Песина [8.1] для поисковых алгоритмов. Задачи идентификации до последнего времени безоговорочно относились к аргументным задачам. Оптимальные критериальные алгоритмы идентификации здесь приводятся впервые. В обосновании этих алгоритмов принимали участие Б. Т. Поляк и А. В. Назин.

К ГЛАВЕ 9

§ 9.1. Задачи, связанные с анализом и оцениванием нестационарных объектов, возникают во многих областях человеческой деятельности. К задачам идентификации линейных объектов вида (9.1.1) относится большое число задач, связанных с изучением временных рядов в экономике (см., например, Гренджер и Хатанака [1.1], Льюис [9.1], Лукашин [9.1], Четыркин [9.1]). Различные модели дрейфов анализируются у Кендалла и Стьюарта [1.3]. В обзоре Цыпкина и Поляка [9.1] рассмотрены различные постановки нестационарных задач и пути их решения, приведена подробная библиография.

§ 9.2. Задание законов изменения параметров, т. е. дрейфа в явной и неявной формах, широко использовалось при описании нестационарных объектов. Эти описания использовались в задачах динамической стохастической аппроксимации, введенной в работах Дупача [9.1], [9.2]. Развитию этого направления посвящены работы Фигуэиредо [9.1], Чиена и Фу [9.1], Цыпкина [9.1], Цыпкина, Каплинского и Ларионова [9.1], Катковника и Хейсина [9.1], Хейсина [9.1], Рупперта [9.1], Сугиява и Уосаки [9.1], Станковича [9.1], Теодореску и Вольфа [9.1] и др.

Используемые в этом параграфе понятия согласованной настраиваемой модели и вектора чувствительности были введены в гл. 1. Условие оптимальности (9.2.16) и алгоритмы идентификации нестационарных объектов вида (9.2.17) были получены в статье Цыпкина [9.2].

§ 9.3. Оптимальные алгоритмы в форме (9.3.31) были введены в работе Цыпкина [9.1]. Сходимость различных частных случаев линейных алгоритмов, соответствующих $F'[\varepsilon] = \varepsilon$ и $v(n) = x(n)$ для линейных дрейфов исследовалась в работах Цыпкина, Каплинского, Ларионова [9.1], Бенвениста и Фухс [9.1], Ковачевича и Станковича [9.1], Хианы и Эванса [9.1], [9.2]. Нелинейный одномерный алгоритм был введен Уосаки [9.1]. Им же показано, что введение нелинейного преобразования невязки может привести к ускорению скорости сходимости алгоритма.

§ 9.4. Оптимальные и абсолютно оптимальные алгоритмы идентификации нестационарных объектов введены Цыпкиным и Поляком [9.1] и Цыпкиным [9.1]. Там же вводится термин «многошаговые алгоритмы».

Алгоритмы типа расширенного фильтра Калмана рассматривались в работах Катковника и Хейсина [9.1], Нг и Янга [9.1]. В статье Минага, Мики и Нагаи [9.1] авторы применяют алгоритм типа расширенного фильтра Калмана для оценивания нестационарных параметров и входных возбуждений в ARMA-системе при синтезе речевых сигналов.

Доказательству сходимости и асимптотической нормальности линейных алгоритмов посвящена статья Бондаренко и Позняка [9.1]. Другой подход, не требующий использования в явном виде модели дрейфа, может быть основан на выборе постоянного коэффициента усиления в алгоритме идентификации. Этому направлению посвящены работы Бенвениста и Руже [7.1], Назина и Юдицкого [9.1] и др.

§ 9.5. Многошаговые алгоритмы особенно эффективно работают при полиномиальных дрейфах параметра. В связи с этим вызывает интерес работа Женга [9.1], в которой применяется локальная аппроксимация нестационарностей полиномами Тейлора.

§ 9.6. Скалярные упрощенные алгоритмы в литературе ранее не рассматривались. В связи с приведенным в этом параграфе примером заслуживают внимания работы Аленгрина, Барло и Менеза [9.1] и Чанга, Янга и Ванга [9.1], в которых предложено представлять нелинейный дрейф в виде разложения по полной ортогональной системе функций (полиномы Тейлора, Лежандра, ряды Фурье и др.).

§ 9.7. При негауссовых помехах алгоритмы (9.7.6) становятся робастными. Робастные алгоритмы рассматривались в работе Ковачевича и Станковича [9.1], однако полученные в этой работе алгоритмы не являются оптимальными.

К ГЛАВЕ 10

§ 10.1. Среди большого числа работ, заложивших основы теории искусственных нейронных сетей, отметим работу Мак-Кулоча и Питса [10.1] и книги Хебба [10.1] и Розенблата [10.1]. Применению нейронных сетей для решения задач распознавания образов посвящены работы Бурра [10.1], Гормана и Сейновски [10.1], Сейновски и Розенберга [10.1], Уидроу, Винтера и Бакстера [10.1] и многие другие. Кроме того, искусственные нейронные сети применялись, в частности, Хопфилдом и Танком [10.1], Раухом и Винарске [10.1] для решения задач оптимизации, Ченом, Биллингсом и Грантом [10.1], Нарендрой и Парласарати [10.1] для идентификации и управления динамическими объектами. См. также обзор Хорна, Ямшиди и Вади [10.1].

§ 10.2. Структуры нейронных сетей довольно подробно описаны в работе Нарендрой и Парласарати [10.1], в которой основное внимание уделяется статическим и динамическим многослойным нейронным сетям. Различные подходы к описанию структур нейронных сетей можно найти в работе Хопфилда [10.1], в трудах международного симпозиума «Модели нейронных структур» (см. Трапезников [10.1]), в книге Свечникова и Шквар [10.1] и др.

§ 10.3. Процедура расчета в обратном направлении (Back Propagation) была предложена в работе Румельхарта, Хинтона и Вильямс [10.1]. Ее обобщение на случай комплексных коэффициентов и сигналов приведено в работе Леунга и Хайкина [10.1]. Эта процедура в некотором смысле сходна с вычислениями, возникающими в условиях оптимальности дискретных систем (см., например, Пропой [10.1]).

§ 10.4. Обычно применяемые алгоритмы настройки нейронных сетей представляют собой алгоритмы типа стохастической аппроксимации со скалярным коэффициентом усиления вида $1/n$ (см., например, Станкович и Милосавлиевич [10.1]). Скорость сходимости этих алгоритмов весьма медленная. Замена их на двухшаговые алгоритмы с усреднением позволяет существенно повысить скорость сходимости.

Список литературы

К ГЛАВЕ 1

Айзerman M. A., Браверман Э. М., Розенэр Л. И.

1.1. Метод потенциальных функций в теории обучения машин. — М.: Мир, 1970.

Альбер Я. И., Шильман С. В.

1.1. Неасимптотические оценки скорости сходимости итеративных алгоритмов // Автоматика и телемеханика. — 1981. — № 1. — С. 41–51.

Альберт, Гарднер (Albert A., Gardner I.)

1.1. Stochastic approximation and nonlinear regression. — Cambridge, Massachusetts: MIT-Press, 1967.

Андерсон (Anderson T.)

1.1. Статистический анализ временных рядов / Пер. с англ. — М.: Мир, 1976.

Арбачаускене Н., Балтрунас И., Немура А., Непорта А., Рубикене Г.

1.1. Идентификация динамических систем. — Вильнюс: Минитис, 1974.

Барабанов А. Е.

1.1. О сильной сходимости метода наименьших квадратов // Автоматика и телемеханика. — 1983. — № 10. — С. 119–132.

Бартлетт (Bartlett M. S.)

1.1. Введение в теорию случайных процессов / Пер. с англ. — М.: ИЛ, 1958.

Бенвенист, Шаур (Benveniste A., Chaure Ch.)

1.1. AR and ARMA identification of Levinson type: an innovations approach // IEEE Transactions on Automatic Control. — 1981. — V. AC-26, No. 6. — P. 1243–1261.

Бенвенист, Метивье, Приоре (Benveniste A., Metivier M., Priouret P.)

1.1. Algorithmes adaptifs et approximations stochastiques (theorie et applications). — Paris: Masson, 1987. (Имеется английский перевод: Adaptive Algorithms and Stochastic Approximations. — Berlin: Springer-Verlag, 1990.)

Биалас (Bialas S.)

- 1.1. On the Lyapunov matrix equation // IEEE Transactions on Automatic Control. — 1980. — V. AC-25, No. 4. — P. 813–814.

Бокс, Дженкинс (Box G. B. P., Jenkins G. M.)

- 1.1. Анализ временных рядов. Прогноз и управление. Вып. 1, 2 / Пер. с англ. — М.: Мир, 1974.

Брикман М. С., Кристников Д. С.

- 1.1. Аналитическая идентификация управляемых систем. — Рига: Зинатне, 1974.

Брэйлингэр (Brillinger D.)

- 1.1. Временные ряды. Обработка данных и теория / Пер. с англ. — М.: Мир, 1980.

Вазан (Wasan M.)

- 1.1. Стохастическая аппроксимация / Пер. с англ. — М.: Мир, 1972.

Вентер (Venter J. H.)

- 1.1. An extension of the Robbins — Monro procedures // The Annals of Mathematical Statistics. — 1967. — V. 38, No. 1. — P. 181–190.

Верулава Ю. Ш.

- 1.1. Сходимость алгоритма стохастической аппроксимации для оценки параметра авторегрессии // Автоматика и телемеханика. — 1981. — № 7. — С. 115–119.

Витерби (Viterbi A.)

- 1.1. Принципы когерентной связи / Пер. с англ. — М.: Сов. радио, 1970.

Грэнджер, Хатанака (Granger C. W. J., Hatanaka M.)

- 1.1. Спектральный анализ временных рядов в экономике / Пер. с англ. — М.: Статистика, 1972.

Грапе (Graupe D.)

- 1.1. Методы идентификации систем / Пер. с англ. — М.: Мир, 1976.

Гудвин, Пейн (Goodwin G. C., Payne R. L.)

- 1.1. Dynamic System Identification: Experimental Design and Data Analysis. — New York: Academic Press, 1977.

Гайдорзи (Guidorzi R. P.)

- 1.1. Transformation approaches in the solution of the matrix equation $A'X + XA = P$ // IEEE Transactions on Automatic Control. — 1972. — V. AC-17, No. 3. — P. 377–379.

Гусева О. В.

- 1.1. О скорости сходимости метода обобщенных градиентов // Кибернетика. — 1971. — № 4. — С. 143–145.

Густавссон (Gustavsson I.)

- 1.1. Comparison of different methods for identification of industrial processes // Automatica. — 1972. — V. 8, No. 2. — P. 127–142.

Густавссон, Льюнг, Сöдерстрöм (Gustavsson J., Ljung L., Söderström T.)

- 1.1. Identification of a process in loop-identifiability and accuracy aspects // Automatica. — 1977. — V. 13, No. 1. — P. 59–75.

Дворецкий (Dvoretzky A.)

- 1.1. On stochastic approximation // Proc. Third Berkeley Symposium on Mathematical Statistics and Probability, Vol. 1. — Berkeley: Univ. of Calif., 1956. — P. 39–55.

Дейч А. М.

- 1.1. Методы идентификации динамических объектов. — М.: Энергия, 1979.

Демиденко Е. З.

- 1.1. Линейная и нелинейная регрессия. — М.: Финансы и статистика, 1981.

Дэвисон, Манн (Devison E. J., Mann F. T.)

- 1.1. The numerical solution of $A'Q + QA = -C$ // IEEE Transactions on Automatic Control. — 1968. — V. AC-14, No. 3. — P. 448-449.

Ермольев Ю. М.

- 1.1. Методы стохастического программирования. — М.: Наука, 1976.

Зайдан (Ziedan I. E.)

- 1.1. Explicit solution on the Lyapunov matrix equation // IEEE Transactions on Automatic Control. — 1972. — V. AC-17, No. 3. — P. 379-380.

Закс (Zacks S.)

- 1.1. Теория статистических выводов / Пер. с англ. — М.: Мир, 1975.

Инагаки (Inagaki M.)

- 1.1. On estimating of the orders of an autoregressive process // IEEE Transactions on Automatic Control. — 1981. — V. AC-26, No. 2. — P. 520-521.

Кайнес (Caines P. E.)

- 1.1. On the asymptotic normality of instrumental variable and least squares estimators // IEEE Transactions on Automatic Control. — 1976. — V. AC-21, No. 4. — P. 598-600.

Каниовский Ю. М., Кнопов П. С., Некрылова З. В.

- 1.1. Предельные теоремы для процессов стохастического программирования. — Киев: Наукова думка, 1980.

Каминская В., Немура А.

- 1.1. Статистические методы в идентификации динамических систем. — Вильнюс: Минитис, 1975.

Каранам (Karanam V. R.)

- 1.1. Lower bounds on the solution of Lyapunov matrix and algebraic Riccati equations // IEEE Transactions on Automatic Control. — 1981. — V. AC-26, No. 6. — P. 1288-1290.

Катковник В. Я.

- 1.1. Линейные оценки и стохастические задачи оптимизации. — М.: Наука, 1976.

Кашап, Насбург (Kashyap R. L., Nasburg R. E.)

- 1.1. Parameter estimation in multivariable stochastic difference equations // IEEE Transactions on Automatic Control. — 1974. — V. AC-19, No. 6. — P. 784-797.

Кашнер (Kushner H. J.)

- 1.1. Convergence of recursive adaptive and identification procedures via weak convergence theory // IEEE Transactions on Automatic Control. — 1977. — V. AC-15, No. 6. — P. 921-930.

- 1.2. Rates of convergence for sequential Monte-Carlo optimization methods // SIAM Journal of Control and Optimization. — 1978. — V. 16, No. 1. — P. 150-168.

Кашнер, Кларк (Kushner H. J., Clark D. S.)

- 1.1. Stochastic Approximation Methods for Constrained and Unconstrained Systems. — New York: Springer-Verlag, 1978.

Кашнер, Хуанг (Kushner H. J., Huang H.)

- 1.1. Rates of convergence for stochastic approximation type algorithms // SIAM Journal of Control and Optimization. — 1979. — V. 17, No. 5. — P. 607-617.

Квон, Пирсон (Kwon W. H., Pearson A.)

- 1.1. A note of algebraic Riccati equation // IEEE Transactions on Automatic Control. — 1977. — V. AC-22, No. 1. — P. 143-144.

Кендалл, Стюарт (Kendall M. G., Stewart A. S.)

- 1.1. Теория распределений / Пер. с англ. — М.: Наука, 1966.

- 1.2. Статистические выводы и связи / Пер. с англ. — М.: Наука, 1973.

- 1.3. Многомерный статистический анализ и временные ряды / Пер. с англ. — М.: Наука, 1976.

Кестен (Kesten H.)

1. Accelerated stochastic approximation // The Annals of Mathematical Statistics. — 1958. — V. 29, No. 1. — P. 41–58.

Кокс, Хинкли (Cox D., Hinkley D.)

1. Теоретическая статистика / Пер. с англ. — М.: Мир, 1978.
2. Задачи по теоретической статистике с решениями / Пер. с англ. — М.: Мир, 1981.

Коростелев А. П.

1. Стохастические рекуррентные процедуры. — М.: Наука, 1984.

Крамер (Cramér H.)

1. Математические методы статистики / Пер. с англ. — М.: Мир, 1975.

Ландай (Landau I. D.)

- 1.1. Unbiased recursive identifications using model reference adaptive techniques // IEEE Transactions on Automatic Control. — 1976. — V. AC-21, No. 2. — P. 194–202.
- 1.2. Adaptive Control. The model reference approach. — New York, Basel: Marcel Dekker Inc., 1979.

Ли (Lee R.)

1. Оптимальные оценки, определение характеристик и управление / Пер. с англ. — М.: Наука, 1966.

Ли, Фридландер, Морф (Lee D. T. L., Friedlander B., Morf M.)

1. Recursive ladder algorithms for ARMA modelling // IEEE Transactions on Automatic Control. — 1982. — V. AC-27, No. 4. — P. 753–764.

Льюнг (Ljung L.)

1. On positive real transfer functions and the convergence of some recursive scheme // IEEE Transactions on Automatic Control. — 1977. — V. AC-22, No. 4. — P. 539–551.
- 1.2. Analysis of recursive stochastic algorithms // IEEE Transactions on Automatic Control. — 1977. — V. AC-22, No. 4. — P. 551–575.
- 1.3. Comments on «Nonconvergence of the approximate maximum likelihood identification algorithms» // Automatica. — 1980. — V. 16, No. 2. — P. 219–220.
- 1.4. Идентификация систем. Теория для пользователя / Пер. с англ. — М.: Наука, 1991.

Льюнг, Кайнес (Ljung L., Caines P. E.)

- 1.1. Asymptotic normality of prediction error estimators for approximate system models // Stochastics. — 1979. — V. 3, No. 1. — P. 29–46.

Льюнг, Сöдерстрöм, Густавссон (Ljung L., Söderström T., Gustavsson I.)

- 1.1. Counterexamples to general convergence of a commonly used recursive identification method // IEEE Transactions on Automatic Control. — 1975. — V. AC-20, No. 5. — P. 643–652.

Маленвонд (Malinvond E.)

- 1.1. Статистические методы в эконометрии. Вып. I / Пер. с англ. — М.: Статистика, 1975.
- 1.2. Статистические методы в эконометрии. Вып. II / Пер. с англ. — М.: Статистика, 1976.

Мендел (Mendel S. M.)

- 1.1. Discrete Techniques of Parameter Identification. The Equation Error Formulation. — New York: Marcel Dekker Inc., 1973.

Мендел, Фу (Mendel J., Fu K. S.)

- 1.1. Adaptive Learning and Pattern Recognition. — New York: Academic Press, 1972.

Мехра (Mehra R. K.)

1. On line identification of linear dynamic systems with applications to Kalman filtering // IEEE Transactions on Automatic Control. — 1971. — V. AC-16, No. 1. — P. 12–21.

Миддлтон (Middlton D.)

1. Очерки теории связи / Пер. с англ. — М.: Сов. радио, 1966.

Мори, Фукума, Кувахара (Mori T., Fukuma N., Kuwahara M.)

1. A note on the Lyapunov matrix equation // IEEE Transactions on Automatic Control. — 1981. — V. AC-26, No. 4. — P. 941–942.

Невельсон М. Б., Хасьминский Р. З.

1. Стохастическая аппроксимация и рекуррентное оценивание. — М.: Наука, 1972.

2. Адаптивная процедура Робинса — Монро // Автоматика и телемеханика. — 1973. — № 10. — С. 71–83.

Немировский А. С.

1. О процедуре стохастической аппроксимации при зависимых шумах // Техническая кибернетика. — 1981. — № 1. — С. 14–25.

2. О рекуррентном оценивании параметров линейных объектов // Автоматика и телемеханика. — 1981. — № 4. — С. 77–86.

Немировский А. С., Юдин Д. Б.

1. Сложность задач и эффективность методов оптимизации. — М.: Наука, 1980.

Острём (Aström K. J.)

1. Введение в стохастическую теорию управления / Пер. с англ. — М.: Мир, 1973.

Острём, Болин (Aström K. J., Bohlin T.)

1. Цифровая идентификация динамических систем на основе данных о нормальном режиме работы // Теория самонастраивающихся систем управления. Труды II Международного симпозиума ИФАК по самонастраивающимся системам. — М.: Наука, 1969. — С. 99–116.

Острём, Эйххорфф (Aström K. J., Eykhoff P.)

1. System identification — A survey // Automatica. — 1971. — V. 7, No. 2. — P. 123–162.

Пануска (Panuska V.)

1. A stochastic approximation method for identification of linear systems using adaptive filtering // Proceedings of the Joint Automatic Control Conference, Ann. Arbor, Michigan, 1969.

2. An adaptive recursive least squares identification algorithm // Proceedings of the 8th IEEE Symposium on Adaptive Processes, Pennsylvania State University, 1969.

Парзен (Parzen E.)

1. Some recent advances in time series modeling // IEEE Transactions on Automatic Control. — 1974. — V. AC-19, No. 6. — P. 723–730.

Перельман И. И.

1. Оперативная идентификация объектов управления. — М.: Энергоиздат, 1982.

Позняк А. С.

1. О сходимости алгоритмов стохастической аппроксимации при идентификации параметров динамических систем // Автоматика и телемеханика. — 1979. — № 8. — С. 186–190.

2. Estimating the parameters of autoregression processes by the method of least squares // International Journal of Systems Science. — 1980. — V. 11, No. 5. — P. 577–588.

Поляк Б. Т.

1. Сходимость и скорость сходимости итеративных стохастических алгоритмов: I. Общий случай // Автоматика и телемеханика. — 1976. — № 2. — С. 83–94.
2. Сходимость и скорость сходимости итеративных стохастических алгоритмов: II. Линейный случай // Автоматика и телемеханика. — 1976. — № 4. — С. 101–107.

Райбман Н. С.

1. Что такое идентификация. — М.: Наука, 1970.
2. Идентификация объектов управления (обзор) // Автоматика и телемеханика. — 1979. — № 6. — С. 80–93.

Райбман Н. С., Чадеев В. М.

1. Построение моделей процессов производства. — М.: Энергия, 1975.

Rao (Rao C. R.)

1. Линейные статистические методы и их применения / Пер. с англ. — М.: Наука, 1968.

Репин В. Г., Тартаковский Г. П.

1. Статистический синтез при априорной неопределенности и адаптация информационных систем. — М.: Советское радио, 1977.

Розенвассер Е. Н., Юсупов Р. М.

1. Чувствительность систем управления. — М.: Наука, 1981.

Сакаи, Арасе (Sakai H., Arase M.)

1. Recursive parameter estimation of an autoregressive process disturbed by white noise // International Journal of Control. — 1979. — V. 30, No. 6. — P. 949–966.

Сакрисон (Sacrison D. T.)

1. Efficient recursive estimation, application to estimating the parameter of a covariance function // International Journal of Engineering Science. — 1965. — V. 3, No. 4. — P. 461–483.

2. Лекции об аналоговой связи / Пер. с англ. — М.: Мир, 1974.

3. Stochastic approximation: a recursive method for solving regression problem // Advances in Communication Systems. — 1966. — V. 2. — P. 51–106.

Сакс (Sacks J.)

1. Asymptotic distribution of stochastic approximation // The Annals of Mathematical Statistics. — 1958. — V. 29, No. 2. — P. 373–405.

Саридис (Saridis G.)

1. Comparison of six on line identification algorithms // Automatica. — 1974. — V. 10, No. 1. — P. 69–79.

2. Самоорганизующиеся стохастические системы управления / Пер. с англ. — М.: Наука, 1980.

Сейдж, Мелза (Sage A., Melsa J.)

1. Идентификация систем управления / Пер. с англ. — М.: Наука, 1974.

2. Теория оценивания и ее применение в связи и управлении / Пер. с англ. — М.: Связь, 1976.

Сöдерстрöм (Söderström T.)

1. Convergence of identification method based on instrumental variable methods // Automatica. — 1974. — V. 10, No. 6. — P. 685–688.

2. On a method for model selection in system identification // Automatica. — 1981. — V. 13, No. 2. — P. 387–388.

Сöдерстрöм, Стоица (Söderström T., Stoica P.)

1. Comparison of some instrumental variable methods—consistency and accuracy aspects // Automatica. — 1981. — V. 17, No. 1. — P. 89–115.

2. On criterion selection and noise model parametrization for prediction error identification methods // International Journal of Control. — 1981. — V. 34, No. 4. — P. 801–811.

Соло (Solo V.)

- 1.1. The convergence of AML // IEEE Transactions on Automatic Control. — 1979. — V. AC-24, No. 6. — P. 958–962.
- 1.2. The convergence of an instrumental-variable-like recursion // Automatica. — 1981. — V. 17, No. 3. — P. 545–547.
- 1.3. Some aspects of recursive parameter estimation // International Journal of Control. — 1980. — V. 32, No. 3. — P. 395–410.

Стернби (Sternby T.)

- 1.1. On consistency for the method of least squares using martingale theory // IEEE Transactions on Automatic Control. — 1977. — V. AC-22, No. 3. — P. 346–52.

Стоица, Сöдерстрöм (Stoica P., Söderström T.)

- 1.1. A method for the identification of linear systems using the generalized least squares principles // IEEE Transactions on Automatic Control. — 1977. — V. AC-22, No. 4. — P. 631–639.
- 1.2. Convergence properties of «A method for the identification of linear systems using the generalized least squares principles» // IEEE Transactions on Automatic Control. — 1979. — V. AC-24, No. 1. — P. 138–139.
- 1.3. Asymptotic behaviour of some bootstrap estimators // International Journal of Control. — 1981. — V. 33, No. 3. — P. 433–454.

Стратонович Р. Л.

- 1.1. Принципы адаптивного приема. — М.: Советское радио, 1973.

Стреиц (Streic V.)

- 1.1. Trends in identification // Automatica. — 1981. — V. 17, No. 1. — P. 7–19.

Уайдльд (Wilde D.)

- 1.1. Методы поиска экстремума / Пер. с англ. — М.: Наука, 1967.

Уиттл (Wittle P.)

- 1.1. Estimation and information in stationary time series // Arkiv för Matematik. — 1953. — V. 2, No. 23. — P. 423–434.

Унтон (Unton F. Z.)

- 1.1. A method for accelerating the first-order stochastic approximation algorithms // IEEE Transactions on Automatic Control. — 1981. — V. AC-26, No. 2. — P. 573–575.
- 1.2. Estymacja przyspieszona metoda approksymacji stochasticznej // Archiwum Automatiki i Telemekaniki. — 1981. — T. 26, No. 1. — P. 57–67.

Фабиан (Fabian V.)

- 1.1. On asymptotic normality in stochastic approximation // The Annals of Mathematical Statistics. — 1968. — V. 39, No. 4. — P. 1327–1332.
- 1.2. Asymptotic efficient stochastic approximation; the RM case // The Annals of Statistics. — 1973. — V. 1, No. 3. — P. 486–495.

Фишер (Fisher F.)

- 1.1. Проблема идентификации в эконометрии / Пер. с англ. — М.: Статистика, 1978.

Фогел (Fogel E.)

- 1.1. A fundamental approach to the convergence analysis of least square algorithms // IEEE Transactions on Automatic Control. — 1981. — V. AC-26, No. 3. — P. 646–655.

Фриел (Friel J. O.)

- 1.1. Adaptive prediction of stationary time series by modified conjugate direction method // Communications on Statistics. — 1975. — V. 4, No. 1. — P. 19–32.
- 1.2. A convergence rate for adaptive prediction of time series using a modified conjugate direction method // Sankhyā: The Journal of Statistics. Ser. A, Pt. 1. — 1978. — V. 40. — P. 44–51.

Фу (Fu K. S.)

- 1.1. Последовательные методы в распознавании образов и обучении машин / Пер. с англ. — М.: Наука, 1971.

Харкевич А. А.

- 1.1. Борьба с помехами. — М.: Физматгиз, 1963.

Хеннан (Hannan E. J.)

- 1.1. Анализ временных рядов / Пер. с англ. — М.: Наука, 1964.

- 1.2. Многомерные временные ряды / Пер. с англ. — М.: Мир, 1974.

Химмельблау (Himmelblau D.)

- 1.1. Анализ процессов статистическими методами / Пер. с англ. — М.: Мир, 1973.

Хоскинс, Уолтон (Hoskins W. D., Meek D. S., Walton D. J.)

- 1.1. The numerical solution of $A'Q + QA = -C$ // IEEE Transactions on Automatic Control. — 1977. — V. AC-22, No. 5. — P. 882–883.

Це, Вейнерт (Tse E., Weinert H. L.)

- 1.1. Structure determination and parameter identification for multivariable stochastic linear systems // IEEE Transactions on Automatic Control. — 1975. — V. AC-20, No. 5. — P. 603–613.

Цыпкин Я. З.

- 1.1. Адаптация и обучение в автоматических системах. — М.: Наука, 1968.

- 1.2. Основы теории обучающихся систем. — М.: Наука, 1970.

- 1.3. Синтез оптимальной настраиваемой модели в задачах идентификации // Автоматика и телемеханика. — 1981. — № 12. — С. 62–77.

Цыпкин Я. З., Поляк Б. Т.

- 1.1. Достижимая точность алгоритмов адаптации // Доклады АН СССР. — 1974. — Т. 218, № 3. — С. 532–535.

Чжун (Chung K. L.)

- 1.1. On stochastic approximation method // The Annals of Mathematical Statistics. — 1954. — V. 25, No. 3. — P. 463–483.

Шапиро (Shapiro E. Y.)

- 1.1. On the Lyapunov matrix equation // IEEE Transactions on Automatic Control. — 1974. — V. AC-19, No. 5. — P. 594–596.

Шильман С. В., Ястребов А. И.

- 1.1. Стохастические алгоритмы оптимизации при марковских шумах в измерении градиента // Автоматика и телемеханика. — 1970. — № 6. — С. 96–100.

Шметтерер (Schmetterer L.)

- 1.1. Введение в математическую статистику / Пер. с нем. — М.: Наука, 1976.

Эйххорфф (Eukhoff P.)

- 1.1. Основы идентификации систем управления / Пер. с англ. — М.: Мир, 1975.

Юдин Д. Б.

- 1.1. Математические методы управления в условиях неопределенности. — М.: Сов. радио, 1974.

Янг (Young P. C.)

- 1.1. The use of linear regression and related procedures for the identification of dynamic processes // Proceedings of the 7th IEEE Symposium on Adaptive Processes, 1968. — P. 501–505.

- 1.2. An instrumental variable method for real-time identification of a noise process // Automatica. — 1970. — V. 6, No. 2. — P. 271–287.

- 1.3. Self-adaptive Kalman filter // Electronics Letters. — 1976. — V. 16, No. 12. — P. 358–360.

Янг, Якеман (Young P. C., Jakeman A. J.)

- 1.1. Refined instrumental variable method of recursive time series analysis // International Journal of Control. — 1979. — V. 29, No. 1. — P. 1–30.

К ГЛАВЕ 2

Айвазян С. А., Енюков И. С., Мешалкин Л. Д.

- 2.1. О структуре и содержании пакета программ по прикладному статистическому анализу // Алгоритмическое и программное обеспечение прикладного статистического анализа. — М.: Наука, 1980. — С. 7–62.

Акаике (Akaike H.)

- 2.1. Maximum likelihood identification of Gaussian autoregressive moving average model // Biometrika. — 1973. — V. 60, No. 2. — P. 255–265.

Басава, Фейджин, Хайде (Basawa I. V., Feigin P. D., Heyde C. C.)

- 2.1. Asymptotic properties of maximum likelihood estimators for stochastic processes // Sankhyā. Ser. A. — 1976. — V. 38, No. 3. — P. 259–270.

Березин А. В., Вейдель В. А.

- 2.1. Теория и проектирование радиосистем. — М.: Советское радио, 1977.

Боровски, Закай (Bobrovsky B. Z., Zakai M.)

- 2.1. A lower bound of the estimation error for Markov processes // IEEE Transactions on Automatic Control. — 1975. — V. AC-20, No. 6. — P. 785–786.

- 2.2. A lower bound of the estimation error for certain diffusion processes // IEEE Transactions on Information Theory. — 1976. — V. IT-22, No. 1. — P. 45–52.

Бакман Д. Е., Седлецкий Р. М.

- 2.1. Вопросы синтеза радиолокационных сигналов. — М.: Советское радио, 1973.

Ван Трис (Van Trees H. L.)

- 2.1. Теория обнаружения, оценок и модуляции. Том I / Пер. с англ. — М.: Советское радио, 1972.

Ванниш В. Н.

- 2.1. Восстановление зависимостей по эмпирическим данным. — М.: Наука, 1979.

Ворчик Б. Г.

- 2.1. Асимптотические оценки максимального правдоподобия параметров замкнутой стохастической системы // Автоматика и телемеханика. — 1976. — № 12. — С. 32–48.

Галдос (Galdos J.I.)

- 2.1. Cramér — Rao bound for multidimensional-discrete-time dynamical systems // IEEE Transactions on Automatic Control. — 1980. — V. AC-25, No. 1. — P. 117–119.

Гертлер, Баньяш (Gertler J., Banyasz Cs.)

- 2.1. A recursive (on-line) maximum likelihood identification method // IEEE Transactions on Automatic Control. — 1974. — V. AC-19, No. 6. — P. 816–820.

Дурбин (Durbin J.)

- 2.1. Estimation of parameters in time-series regression models // Journal of the Royal Statistical Society. Ser. B. — 1960. — V. 22, No. 1. — P. 139–153.

- 2.2. The fitting of time-series models // Revue de l'Institut International de Statistique. — 1960. — V. 28, No. 3. — P. 233–244.

Ибрагимов И. А., Хасьминский Р. З.

- 2.1. Асимптотическая теория оценивания. — М.: Наука, 1979.

Кайнес, Риссанен (Caines P. E., Rissanen J.)

- 2.1. Maximum likelihood estimation of parameters in multivariate Gaussian stochastic process // IEEE Transactions on Information Theory. — 1974. — V. IT-20, No. 1. — P. 102–104.

Калман (Kalman R. E.)

- 2.1. A new approach to linear filtering and prediction problems // Trans. Amer. Soc. Mech. Eng., J. Basic Engineering. — 1960. — V. 82, No. 1. — P. 35–45.

Кашап (Kashyap R. L.)

- 2.1. Maximum likelihood identification of stochastic linear systems // IEEE Transactions on Automatic Control. — 1970. — V. AC-15, No. 1. — P. 25–34.

Кашап, По (Kashyap R. L., Rao A. R.)

- 2.1. Dynamic Stochastic Models from Empirical Data. — New York, London: Academic Press, 1976.

Красненкер А. С.

- 2.1. Задачи и методы векторной оптимизации // Измерения, контроль, автоматизация. — 1975. — Вып. 1 (3). — С. 51–56.

Кульбак (Kullback S.)

- 2.1. Теория информации и статистики / Пер. с англ. — М.: Наука, 1967.

Левин Б. Р.

- 2.1. Теоретические основы статистической радиотехники. Кн. 2. — М.: Советское радио, 1975.

- 2.2. Теоретические основы статистической радиотехники. Кн. 3. — М.: Советское радио, 1976.

Линдли (Lindly D. V.)

- 2.1. О мере информации, даваемой экспериментом / Пер. с англ. // Математика. — 1959. — Т. 3, № 3. — С. 87–104.

Малютов М. Б.

- 2.1. Последовательное планирование эксперимента // Математическая теория планирования эксперимента / Под ред. С. М. Ермакова. — М.: Наука, 1983. — С. 131–147.

Манн, Вальд (Mann H. B., Wald A.)

- 2.1. On the statistical treatment of linear stochastic difference equations // Econometrica. — 1943. — V. 11, No. 3–4. — P. 173–220.

Миддлтон (Middleton D.)

- 2.1. Очерки теории связи / Пер. с англ. — М.: Советское радио, 1966.

Назин А. В.

- 2.1. Информационные неравенства в задаче градиентной стохастической оптимизации и оптимальные реализуемые алгоритмы // Автоматика и телемеханика. — 1989. — № 4. — С. 127–138.

- 2.2. Информационные неравенства в задаче адаптивного управления многомерным линейным объектом // Автоматика и телемеханика. — 1992. — № 4. — С. 111–118.

Назин А. В., Юдцкий А. Б.

- 2.1. Информационные неравенства в задаче адаптивного управления линейным объектом // Доклады АН СССР. — 1991. — Т. 317, № 2. — С. 323–325.

Немировский А. С., Цыпкин Я. З.

- 2.1. Об оптимальных алгоритмах адаптивного управления // Автоматика и телемеханика. — 1984. — № 12. — С. 64–77.

Огата (Ogata Y.)

- 2.1. Maximum likelihood estimates of incorrect Markov models for time series and the derivation of AIC // Journal of Applied Probability. — 1980. — V. 17, No. 1. — P. 59–72.

Острём (Aström K. J.)

- 2.1. Maximum likelihood and prediction error methods // Automatica. — 1980. — V. 16, No. 5. — P. 551–574.

Острём, Содерстрём (Aström K. J., Söderström T.)

- 2.1. Uniqueness of the maximum likelihood estimation of the parameters of an ARMA model // IEEE Transactions on Automatic Control. — 1974. — V. AC-19, No. 6. — P. 709–733.

Петтерсон (Peterson I.)

- 2.1. Статистический анализ и оптимизация систем автоматического управления / Пер. с англ. — М.: Советское радио, 1964.

Поплавский Р. П.

- 2.1. Термодинамика информационных процессов. — М.: Наука, 1981.

Розенберг В. Я.

- 2.1. Радиотехнические методы измерения параметров процессов и систем. — М.: Изд. Комитета стандартов, 1970.

Руссан (Roussan G. S.)

- 2.1. Asymptotic normality of the maximum likelihood estimate in Markov processes // Metrika. — 1968. — V. 14, No. 1. — P. 62–70.

Сакагучи (Sakaguchi M.)

- 2.1. Заметки по статистическим приложениям теории информации / Пер. с англ. // Математика. — 1955. — Т. 3, № 3. — С. 105–113.

Содерстрём (Söderström T.)

- 2.1. On the uniqueness of maximum likelihood identification // Automatica. — 1975. — V. 11, No. 2. — P. 193–198.

Стратонович Р. Л.

- 2.1. Теория информации. — М.: Советское радио, 1975.

Уилкс (Wilks S.)

- 2.1. Математическая статистика / Пер. с англ. — М.: Наука, 1967.

Фабиан (Fabian V.)

- 2.1. A local asymptotic minimax optimality of an adaptive Robbins — Monro stochastic approximation procedure // Mathematical Learning Models — Theory and Algorithms. (Lecture Notes in Statistics, Vol. 20.) — Berlin: Springer-Verlag, 1983. — P. 43–50.

Фишер (Fisher R. A.)

- 2.1. Theory of statistical estimation // Proceedings of the Cambridge Philosophical Society. — 1925. — V. 22, No. 25. — P. 700–710.

Фрэзер (Fraser D. A. S.)

- 2.1. On information in statistics // The Annals of Mathematical Statistics. — 1965. — V. 36, No. 3. — P. 890–896.

Хастингс, Пикок (Hastings N. A. J., Peacock J. B.)

- 2.1. Справочник по статистическим распределениям / Пер. с англ. — М.: Статистика, 1980.

Харкевич А. А.

- 2.1. Борьба с помехами. — М.: Физматгиз, 1963.

Хелстрём (Helström K.)

- 2.1. Статистическая теория обнаружения сигналов / Пер. с англ. — М.: ИЛ, 1963.

Холево А. С.

- 2.1. Об асимптотической нормальности оценок коэффициентов регрессии // Теория вероятностей и ее применения. — 1971. — Т. 16, № 4. — С. 724–728.

Хьюбер (Huber P. J.)

- 2.1. The behavior of maximum likelihood estimates under nonstandard conditions // Proc. Fifth Berkeley Symposium on Mathematical Statistics and Probability, Vol. 1. — Berkeley: Univ. of Calif., 1967. — P. 221–233.

Цыбаков А. Б.

- 2.1. О методе минимизации эмпирического риска в задачах идентификации // Автоматика и телемеханика. — 1981. — № 9. — С. 77–85.

Цыпкин Я. З.

- 2.1. Оптимальные критерии в задачах идентификации // Автоматика и телемеханика. — 1982. — № 11. — С. 5–24.

Цыпкин Я. З., Поляк Б. Т.

- 2.1. Огрубленный метод максимального правдоподобия // Динамика систем. — 1977. — Вып. 12. — С. 22–46.

Чанг (Chang C. B.)

- 2.1. Two lower bounds on the covariance for nonlinear estimation problems // IEEE Transactions on Automatic Control. — 1981. — V. AC-26, No. 6. — P. 1294–1297.

Ченцов Н. Н.

- 2.1. Статистические решающие правила и оптимальные выводы. — М.: Наука, 1972.

Шамбадаль (Shambadal P.)

- 2.1. Развитие и приложение понятия энтропии / Пер. с франц. — М.: Наука, 1967.

Шеннон (Shannon C.)

- 2.1. Работы по теории информации и кибернетике / Пер. с англ. — М.: ИЛ, 1963.

Шютценбергер (Schutzenberger M. P.)

- 2.1. О некоторых мерах информации, используемых в статистике // Теория передачи сообщений / Пер. с англ.; Под ред. В. И. Сифорова. — М.: ИЛ, 1957. — С. 7–18.

К ГЛАВЕ 3

Абдельхамид (Abdelhamid S.)

- 3.1. Transformation of observations in stochastic approximation procedures // The Annals of Mathematical Statistics. — 1973. — V. 1, No. 6. — P. 1158–1174.

Анаши, Имай, Мустафа (Akashi H., Imai H., Moustafa K. A. P.)

- 3.1. Parameter identification technique for multivariable stochastic systems // Automatica. — 1979. — V. 15, No. 2. — P. 217–221.

Анбар (Anbar D.)

- 3.1. On optimal estimation methods using stochastic approximation procedures // The Annals of Mathematical Statistics. — 1973. — V. 1, No. 6. — P. 1175–1184.

- 3.2. A stochastic Newton — Raphson method // Journal of Statistical Planning and Inference. — 1978. — V. 2, No. 2. — P. 153–163.

Барнетт (Barnett V. D.)

- 3.1. Evaluation of the maximum likelihood estimator where the likelihood equation has multiple roots // Biometrika. — 1966. — V. 53, No. 1. — P. 151–165.

Кашап (Kashyap R. L.)

- 3.1. Estimation of parameters in a partially whitened representation of a stochastic process // IEEE Transactions on Automatic Control. — 1974. — V. AC-19, No. 1. — P. 13–21.

Кейл (Kale R. K.)

- 3.1. On the solution of the likelihood equations by iteration processes // Biometrika. — 1961. — V. 48, No. 3–4. — P. 452–456.

- 3.2. On the solution of the likelihood equation by iteration processes — the multiparametric case // Biometrika. — 1962. — V. 49, No. 3–4. — P. 479–486.

Коллинз (Collins J. R.)

- 3.1. Upper bound on asymptotic variances of M -estimators of location // The Annals of Statistics. — 1977. — V. 5, No. 4. — P. 646–657.

Мехра (Mehra R. K.)

- 3.1. On-line identification of linear dynamic systems with applications to Kalman filtering // IEEE Transactions on Automatic Control. — 1971. — V. AC-16, No. 1. — P. 12–21.

Немировский А. С.

- 3.1. Оптимизация рекуррентных алгоритмов оценки параметров линейных объектов // Автоматика и телемеханика. — 1981. — № 6. — С. 90–99.

Полляк Б. Т., Цыпкин Я. З.

- 3.1. Адаптивные алгоритмы оценивания (сходимость, оптимальность, стабильность) // Автоматика и телемеханика. — 1979. — № 3. — С. 71–84.
- 3.2. Оптимальные псевдоградиентные алгоритмы стохастической оптимизации // Доклады АН СССР. — 1980. — Т. 250, № 5. — С. 1084–1087.
- 3.3. Оптимальные псевдоградиентные алгоритмы адаптации // Автоматика и телемеханика. — 1980. — № 8. — С. 74–84.
- 3.4. Оптимальные методы оценивания коэффициентов авторегрессии при неполной информации // Техническая кибернетика. — 1983. — № 1. — С. 118–126.

Сакрисон (Sakrison D. J.)

- 3.1. Efficient recursive estimation with application to estimating the parameter of a covariance function // International Journal of Engineering Science. — 1965. — V. 3, No. 4. — P. 461–483.
- 3.2. Efficient recursive estimation of the parameters of a radar or radio astronomy target // IEEE Transactions on Information Theory. — 1966. — V. IT-3, No. 1. — P. 35–41.
- 3.3. Stochastic approximation: a recursive method for solving regression problems // Advances in Communication Systems. Theory and Applications. Vol. 2. / Ed. Balakrishnan A. V. — New York: Academic Press, 1966. — P. 51–106.
- 3.4. Лекции по аналоговой связи / Пер. с англ. — М.: Мир, 1974.

Фабиан (Fabian V.)

- 3.1. Stochastic approximation // Optimizing Methods in Statistics / Ed. Rustagi J. S. — New York: Academic Press, 1971. — P. 439–470.
- 3.2. On asymptotically efficient recursive estimation // The Annals of Statistics. — 1978. — V. 6, No. 4. — P. 854–866.

Хасминский (Hasmanskii R. Z.)

- 3.1. Stochastic approximation methods in nonlinear regression models // Mathematische Operationsforschung und Statistik. Ser. Statistics. — 1977. — V. 8, No. 1. — P. 95–106.

Цыпкин Я. З.

- 3.1. Оптимальные алгоритмы оценивания параметров в задачах идентификации // Автоматика и телемеханика. — 1982. — № 12. — С. 9–23.

Цыпкин Я. З., Позняк А. С.

- 3.1. Оптимальные поисковые алгоритмы стохастической оптимизации // Доклады АН СССР. — 1981. — Т. 260, № 3. — С. 550–553.

Янг (Young P. C.)

- 3.1. Comments on «On-line identification of linear dynamic systems with applications to Kalman filtering» // IEEE Transactions on Automatic Control. — 1972. — V. AC-17, No. 2. — P. 269–270.

К ГЛАВЕ 4

Барнетт, Льюис (Barnett V., Lewis T.)

- 4.1. Outliers in Statistical Data. — Chichester, New York: John Wiley and Sons, 1978.

Бассет, Коенкер (Basset G. W., Koenker R. W.)

- 4.1. Asymptotic theory of least absolute error regression // Journal of the American Statistical Association. — 1978. — V. 73, No. 363. — P. 618–622.

Бахшиян Б. Ц., Назиров Р. Р., Эльясберг П. Е.

- 4.1. Определение и коррекция движения. — М.: Наука, 1980.

Бикел (Bickel P. J.)

- 4.1. Another look at robustness: A review of reviews and some new developments // Scandinavian Journal of Statistics. — 1979. — V. 3, No. 4. — P. 145–168.

Бокс (Box G. E. P.)

- 4.1. Non-normality and test of variances // Biometrika. — 1953. — V. 40, No. 3–4. — P. 318–335.

Бокс, Андерсон (Box G. E. P., Anderson S. L.)

- 4.1. Permutation theory in the derivation of robust criteria and the study of departure from assumptions // Journal of the Royal Statistical Society, Ser. B. — 1955. — V. 17, No. 1. — P. 1–34.

Бхат, Дорайсвами (Bhat M. W., Doraiswami R.)

- 4.1. Nonrandom parameter estimation using minimal theory // IEEE Transactions on Reliability. — 1975. — V. R-24, No. 2. — P. 121–125.

Ванделинде (Vandelinde V. D.)

- 4.1. Robust properties of solutions to linear-quadratic estimation on control problems // IEEE Transactions on Automatic Control. — 1968. — V. AC-13, No. 1. — P. 88–90.

Гермейер Ю. Б.

- 4.1. Введение в теорию исследований операций. — М.: Наука, 1975.

Гильбо Е. П., Челпанов И. Б.

- 4.1. Оптимальное нелинейное преобразование сигналов нескольких приборов при учете ненадежности их работы // Автоматика и телемеханика. — 1966. — № 2. — С. 70–75.

- 4.2. Выбор среднего числа вариационного ряда как эффективное средство повышенной точности // Автоматика и телемеханика. — 1972. — № 2. — С. 169–172.

- 4.3. Применение алгоритма выбора медианы при обработке избыточных данных // Приборы и системы управления. — 1972. — № 5. — С. 15–17.

- 4.4. Обработка сигналов на основе упорядоченного выбора (мажоритарные и близкие к нему преобразования). — М.: Советское радио, 1975.

Гольдман Ф. М.

- 4.1. Статистические методы интерпретации. — М.: Наука, 1971.

Даниэлз (Daniel C.)

- 4.1. Statistical aids in the planning of experimental work. — Course at the University of California, Berkeley, 1968.

Дэвид (David G.)

- 4.1. Порядковые статистики / Пер. с англ. — М.: Наука, 1979.

Демпстер (Dempster A. P.)

- 4.1. A subjectivist look at robustness // Bulletin of the International Statistical Institute. Proc. of the 40th Session, Warsaw, 1975. — V. XLVI, Book 1. — P. 349–374.

Демьянов И. Ф., Малоземов В. Н.

- 4.1. Введение в минимакс. — М.: Наука, 1975.

Денби, Мартин (Denby L., Martin R. D.)

- 4.1. Robust estimation of the first-order autoregressive parameter // Journal of the American Statistical Association. — 1979. — V. 74, No. 365. — P. 140–146.

Джери (Geery R. C.)

- 4.1. Testing of normality // Biometrika. — 1947. — V. 34, No. 2. — P. 209–292.

Дорайсвами (Doraiswami R.)

- 4.1. A design theoretical approach to parameter estimation // IEEE Transactions on Automatic Control. — 1976. — V. AC-21, No. 6. — P. 860–866.

Епишин Ю. Г.

- 4.1. Об оценках параметров регрессии по методу наименьших модулей // Экономика и математические методы. — 1974. — Т. 10, вып. 5. — С. 1023–1028.

Ершов А. А.

- 4.1. Стабильные методы оценки параметров (обзор) // Автоматика и телемеханика. — 1978. — № 8. — С. 66–100.

Ершов А. А., Липцер Р. Ш.

- 4.1. Робастный фильтр Калмана в дискретном времени // Автоматика и телемеханика. — 1978. — № 3. — С. 60–62.

Каган А. М., Линник Ю. В., Рао С. Р.

- 4.1. Характеризационные задачи математической статистики. — М.: Наука, 1972.

Карлин (Karlin S.)

- 4.1. Математические методы в теории игр, программировании и экономике / Пер. с англ. — М.: Мир, 1964.

Колас (Kohlas J.)

- 4.1. On bad data suppression in estimation // IEEE Transactions on Automatic Control. — 1972. — V. AC-17, No. 6. — P. 827–828.

Коллинз (Collins J. R.)

- 4.1. Robust estimation of a location parameter in the presence of asymmetry // The Annals of Statistics. — 1976. — V. 4, No. 1. — P. 68–85.

Лаунер, Уилкинсон (Launer R. L., Wilkinson G. N.), ред.

- 4.1. Устойчивые статистические методы оценки данных / Пер. с англ. — М.: Машиностроение, 1984.

Мартин (Martin R. D.)

- 4.1. Robust estimation for time series autoregressions // Robustness in Statistics / Eds. Launer R. L., Wilkinson G. N. — New York: Academic Press, 1979. — P. 147–176.

- 4.2. Approximate conditional-mean type smoothers and interpolators // Smoothing Techniques for Curve Estimation / Eds. Gasser Th., Rosenblatt M. — Berlin: Springer-Verlag, 1979. — P. 117–143.

- 4.3. Time series: model estimation data analysis and robust procedures // Proceedings of Symposium in Applied Mathematics. — 1980. — V. 23. — P. 73–110.

- 4.4. Robust estimation of autoregressive models // Directions in Time Series / Ed. Brillinger D. et al. — Hayward, California, 1980. — P. 228–262.

- 4.5. Robust methods for time series // Proc. Nottingham International Time Series Meeting. — Amsterdam: North Holland, 1980. — P. 77–89.

Мартин, Масрелиз (Martin R. D., Masreliez C. J.)

- 4.1. Robust estimation via stochastic approximation // IEEE Transactions on Information Theory. — 1975. — V. IT-21, No. 3. — P. 263–271.

Масрелиз (Masreliez C. J.)

- 4.1. Approximate non-gaussian filtering with linear state and observation relations // IEEE Transactions on Automatic Control. — 1975. — V. AC-20, No. 2. — P. 107–110.

Масрелиз, Мартин (Masreliez C. J., Martin R. D.)

- 4.1. Robust Gaussian estimation for the linear model and robustifying the Kalman filter // IEEE Transactions on Automatic Control. — 1977. — V. AC-22, No. 1. — P. 361–371.

Меррил, Швеппе (Merril H. M., Schweippe F. C.)

- 4.1. Bad data suppression in power system static state estimation // IEEE Transactions on Power Apparatus and Systems. — 1971. — V. PAS-90, No. 12. — P. 2718–2724.

Мудров В. И., Кушко В. Л.

- 4.1. Методы обработки наблюдений. Квазиправдоподобные оценки. — М.: Радио и связь, 1983.

Новак, Зентграф (Nowak H., Zentgraf R.), ред.

- 4.1. Robuste Verfahren. — Berlin: Springer-Verlag, 1980.

Оуэн (Owen D. B.), гл. ред.

- 4.1. Special issue in robustness // *Communication in Statistics: Theory and Methods*. — 1977. — V. A-6, No. 9. — P. 789–894.

Папантони-Казакос (Papantoni-Kazakos P.)

- 4.1. Robustness in parameter estimation // *IEEE Transactions on Information Theory*. — 1977. — V. IT-23, No. 2. — P. 223–231.

Поляк Б. Т., Цыпкин Я. З.

- 4.1. Помехоустойчивая идентификация // Идентификация и оценка параметров систем: Труды IV симпозиума ИФАК, ч. I. — Тбилиси, 1976. — С. 190–213.

- 4.2. Robust identification // *Automatica*. — 1980. — V. 16, No. 1. — P. 53–65.

- 4.3. Робастные псевдоградиентные алгоритмы адаптации // *Автоматика и телемеханика*. — 1980. — № 10. — С. 91–97.

Рей (Rey W. J. J.)

- 4.1. Robust Statistical Methods. (Lecture Notes in Mathematics, Vol. 690.) — Berlin: Springer-Verlag, 1978.

Репин В. Г.

- 4.1. Об отыскании наименее благоприятного распределения вероятностей // Техническая кибернетика. — 1968. — 2. — С. 59–65.

Романовски, Грин (Romanovski M., Green E.)

- 4.1. Practical applications of the modified normal distribution // *Bulletin Geodesique*. — 1965. — V. 76, No. 1. — P. 1–20.

Сакс, Ильисакер (Sacks J., Ylvisaker D.)

- 4.1. A note on Huber's robust estimation of a location parameter // *The Annals of Mathematical Statistics*. — 1972. — V. 43, No. 4. — P. 1068–1075.

Смоляк С. А., Титаренко Б. П.

- 4.1. Устойчивые методы оценивания. — М.: Статистика, 1980.

Стиглер (Stigler S. M.)

- 4.1. Do robust estimators work with real data? // *The Annals of Statistics*. — 1977. — V. 5, No. 6. — P. 1055–1078. (Discussions: P. 1078–1098.)

Стогов Г. В., Макшанов А. В., Мусаев А. А.

- 4.1. Устойчивые методы обработки результатов измерений // Зарубежная радиоэлектроника. — 1982. — № 8. — С. 3–46.

Такеути (Takeuchi K.)

- 4.1. A survey of robust estimation of location: models and procedures, especially in the case of measurement of a physical quantity // *Bulletin of the International Statistical Institute. Proc. of the 40th Session, Warsaw, 1975*. — V. XLVI, Book 1. — P. 337–348.

Тьюки (Tukey J. W.)

- 4.1. A survey of sampling from contaminated distributions // *Contributions to Probability and Statistics / Ed. Olkin I.* — Stanford: Stanford University, 1960. — P. 448–485.

- 4.2. The future of data analysis // *The Annals of Mathematical Statistics*. — 1967. — V. 33, No. 1. — P. 1–67.

Федоров В. В.

- 4.1. Численные методы максимина. — М.: Наука, 1979.

Федорюк М. В.

- 4.1. Метод перевала. — М.: Наука, 1977.

Форсайт (Forsythe A. B.)

- 4.1. Robust estimation of straight line regression coefficients by minimizing p -th power deviations // *Technometrics*. — 1972. — V. 14, No. 1. — P. 159–166.

Фридман (Freedman H. W.)

- 4.1. The «Little variable factors». A statistical discussion of the reading of seismograms // *Bulletin of the Seismological Society of America*. — 1966. — V. 56, No. 2. — P. 593–604.

Хемпел (Hampel F. R.)

- 4.1. A general qualitative definition of robustness // *The Annals of Mathematical Statistics*. — 1971. — V. 42, No. 6. — P. 1887–1896.
- 4.2. The influence curve and its role in robust estimation // *Journal of the American Statistical Association*. — 1974. — V. 69, No. 346. — P. 383–393.
- 4.3. Robust estimation: a condensed partial survey // *Zeitschrift für Wahrscheinlichkeitstheorie und verw. Geb.* — 1973. — Bd. 27, No. 5. — P. 87–104.
- 4.4. Modern trends in the theory of robustness // *Mathematische Operationsforschung und Statistik. Ser. Statistics*. — 1978. — V. 9, No. 3. — P. 425–442.
- 4.5. Beyond location parameter: Robust concepts and methods // *Bulletin of the International Statistical Institute. Proc. of the 40th Session, Warsaw, 1975*. — V. XLVI, Book 1. — P. 375–382.

Хемпел, Рончетти, Рассеу, Штаэль (Hampel F. R., Ronchetti E. M., Rousseeuw P. T., Stahel W. A.)

- 4.1. Робастность в статистике. Подход на основе функций влияния / Пер. с англ. — М.: Мир, 1989.

Хогг (Hogg R. V.)

- 4.1. Adaptive robust procedures: A partial review and some suggestions for future applications and theory // *Journal of the American Statistical Association*. — 1974. — V. 69, No. 348. — P. 909–923.
- 4.2. Statistical robustness: on view of its use in applications theory // *The American Statistician*. — 1979. — V. 33, No. 3. — P. 108–115.

Хьюбер (Huber P. J.)

- 4.1. Robust estimation of a location parameter // *The Annals of Mathematical Statistics*. — 1964. — V. 35, No. 1. — P. 73–101.
- 4.2. Robust statistics: A review // *The Annals of Mathematical Statistics*. — 1972. — V. 43, No. 4. — P. 1041–1067.
- 4.3. Robust regression: asymptotics, conjectures and Monte-Carlo // *The Annals of Statistics*. — 1973. — V. 1, No. 5. — P. 799–821.
- 4.4. Fisher information and spline interpolation // *The Annals of Mathematical Statistics*. — 1975. — V. 12, No. 5. — P. 1029–1033.
- 4.5. Robust statistical procedures // Philadelphia: SIAM, 1977.
- 4.6. Robust methods of estimation of regression coefficients // *Mathematische Operationsforschung und Statistik. Ser. Statistics*. — 1977. — V. 8, No. 1. — P. 41–53.
- 4.7. Robust smoothing // *Robustness in statistics* / Eds. Launer R. L., Wilkinson G. N. — New York: Academic Press, 1979. — P. 33–47.
- 4.8. Робастность в статистике / Пер. с англ. — М.: Мир, 1989.

Цыбаков А. Б.

- 4.1. Непараметрическое оценивание сигнала при неполной информации о распределении шума / Проблемы передачи информации. — 1982. — Т. 8, № 2. — С. 44–60.

Цыпкин Я. З., Позняк А. С.

- 4.1. Оптимальные и робастные алгоритмы оптимизации при наличии коррелированных помех // Доклады АН СССР. — 1981. — Т. 258, № 6. — С. 1330–1333.

Эльясберг П. Е.

- 4.1. Определение движения по результатам измерения. — М.: Наука, 1976.

Эндрюс, Бикел, Хемпел, Хьюбер, Роджерс, Тьюки (Andrews D. A., Bickel P. J., Hampel F. R., Huber P. J., Rodgers W. H., Tukey J. W.)

- 4.1. *Robust Estimates of Location: Survey and Advances*. — Princeton, New York: Princeton University Press, 1972.

К ГЛАВЕ 5

Бедельбаева А. А.

- 5.1. Релейные алгоритмы оценивания // Автоматика и телемеханика. — 1978. — № 1. — С. 87–95.

Бикел (Bickel P. J.)

- 5.1. One-step Huber estimates in the linear model // Journal of the American Statistical Association. — 1975. — V. 70, No. 350. — P. 428–434.

Гамм А. З.

- 5.1. Статистические методы оценивания состояния электроэнергетических систем. — М.: Наука, 1976.

Девлин, Гнанадесикан, Кеттенринг (Devlin S. J., Gnanadesikan R., Kettenring J. R.)

- 5.1. Robust estimation of dispersion matrices and principal components // Journal of the American Statistical Association. — 1981. — V. 76, No. 374. — P. 355–362.

Джонсон, Мак-Гуире, Милликен (Johnson D. E., McGuire S. A., Milliken A.)

- 5.1. Estimating σ^2 in the presence of outliers // Technometrics. — 1978. — V. 20, No. 4. — P. 441–455.

Йохай, Маронна (Yohai V. J., Maronna R. A.)

- 5.1. Asymptotic behaviour of M -estimates for the linear model // The Annals of Statistics. — 1979. — V. 7, No. 2. — P. 258–268.

Клейнер, Мартин, Томсон (Kleiner B., Martin R. D., Thompson D. J.)

- 5.1. Robust estimation of power spectra // Journal of the Royal Statistical Society, Ser. E. — 1979. — V. 41, No. 3. — P. 313–351.

Кливленд, Гуарино (Cleveland W. S., Guarino R.)

- 5.1. Some robust statistical procedures and their application to air pollution data // Technometrics. — 1976. — V. 4, No. 1. — P. 51–67.

Кэрролл (Carroll R.)

- 5.1. On estimating variances of robust estimators when the errors are asymmetric // Journal of the American Statistical Association. — 1979. — V. 74, No. 369. — P. 674–679.

Маронна (Maronna R. A.)

- 5.1. Robust M -estimators of multivariate location and scatter // The Annals of Mathematical Statistics. — 1976. — V. 4, No. 1. — P. 51–67.

Мартин (Martin R. D.)

- 5.1. Robust estimation of signal amplitude // IEEE Transactions on Information Theory. — 1972. — V. IT-18, No. 5. — P. 546–566.

Мартин, Мак-Гам (Martin R. D., McGath C. P.)

- 5.1. Robust detection of stochastic signals // IEEE Transactions on Information Theory. — 1974. — V. IT-20, No. 4. — P. 537–541.

Мартин, Шварц (Martin R. D., Schwarz S. C.)

- 5.1. Robust detection of a known signal in nearly Gaussian noise // IEEE Transactions on Information Theory. — 1971. — V. IT-17, No. 1. — P. 50–56.

Прайс, Ванделинде (Price E. L., Vandelinde V.)

- 5.1. Robust estimation using Robbins — Monro stochastic approximation algorithm // IEEE Transactions on Information Theory. — 1979. — V. IT-25, No. 6. — P. 698–704.

Феллер, Мак-Карти (Fehler L. F., McCarty T. A.)

- 5.1. How to harvest the full potential of LORAN-C // Navigation Journal of the Institute of Navigation. — 1979. — V. 21, No. 3. — P. 223–233.

Хандшин, Швеппе, Колас, Фихтер (Handschin E., Schweppe F. C., Kohlas J., Fiechter A.)

- 5.1. Bad data analysis for power system state estimation // IEEE Transactions on Power Apparatus and Systems. — 1975. — V. PAS-94, No. 2. — P. 329–337.

Эванс, Керстейн, Кури (Evans J., Kerstein P., Kurz L.)

- 5.1. Robustized recursive estimators with applications // *Information Sciences*. — 1976. — V. 11, No. 1. — P. 69–92.
- 5.2. Robustized vector Robbins — Monro algorithm with applications to M -interval detection // *Information Sciences*. — 1976. — V. 11, No. 2. — P. 121–140.

К ГЛАВЕ 6

Бенвенист, Гурса, Руже (Benveniste A., Goursat M., Ruget G.)

- 6.1. Robust identification of a nonminimum phase system: Blind adjustment of a linear equalizer in data communications // *IEEE Transactions on Automatic Control*. — 1980. — V. AC-25, No. 3. — P. 385–397.
- 6.2. Analysis of stochastic approximation schemes with discontinuous and dependent forcing terms with applications to data communications algorithms // *IEEE Transactions on Automatic Control*. — 1980. — V. AC-25, No. 6. — P. 1042–1057.

Боде (Bode H.)

- 6.1. Теория цепей и проектирование усилителей с обратной связью / Пер. с англ. — М.: ИЛ, 1948.

Гнеденко Б. В., Колмогоров А. Н.

- 6.1. Пределные распределения для сумм независимых случайных величин. — М., Л.: Гостехиздат, 1949.

Карни (Karni Sh.)

- 6.1. Теория цепей. Анализ и синтез / Пер. с англ. — М.: Связь, 1973.

Лукач (Lucacs E.)

- 6.1. Характеристические функции / Пер. с англ. — М.: Наука, 1979.

Петров В. В.

- 6.1. Суммы независимых случайных величин. — М.: Наука, 1972.

Цыпкин Я. З.

- 6.1. Основы теории автоматических систем. — М.: Наука, 1979.

Цыпкин, Аведьян, Гулинский (Tsypkin Ya. Z., Avedian E. D., Goullinsky O. V.)

- 6.1. On convergence of the recursive identification algorithms // *IEEE Transactions on Automatic Control*. — 1981. — V. AC-26, No. 5. — P. 1009–1017.

К ГЛАВЕ 7

Аоки, Стейли (Aoki M., Staley R. M.)

- 7.1. On input signal in identification // *Automatica*. — 1970. — V. 6, No. 3. — P. 431–440.

Аrimoto, Кимура (Arimoto S., Kimura H.)

- 7.1. Optimal inputs for systems identification // *International Journal of Systems Science*. — 1971. — V. 1, No. 3. — P. 279–290.

Бенвенист, Руже (Benveniste A., Ruget G.)

- 7.1. A measure of the tracking capability of recursive stochastic algorithms with constant gains // *IEEE Transactions on Automatic Control*. — 1982. — V. AC-27, No. 3. — P. 639–649.

Боголюбов Н. Н., Митропольский Ю. А.

- 7.1. Метод ускорений сходимости в нелинейной механике. — Киев: Наукова думка, 1969.

Браун (Brown G. V.)

- 7.1. Iterative solution of games by fiction play. Activity analysis of production and allocation / Ed. Koopman J. S. — New York: John Wiley and Sons, 1961.

Гарусин М. И., Каплинский А. И.

- 7.1. О формировании адаптивных алгоритмов решения задач оптимизации с булевыми переменными // Автоматика и телемеханика. — 1976. — № 9. — С. 96–104.

Горский В. Г.

- 7.1. Статистические задачи при обработке кинетических экстремумов // Вопросы кибернетики. Некоторые вопросы планирования экспериментов. — М., 1972. — С. 103–132.

Горский В. Г., Адлер Ю. П., Талалаев М. Г.

- 7.1. Планирование промышленных экспериментов. — М.: Металлургия, 1978.

Гудвин (Goodwin G. C.)

- 7.1. Input synthesis for minimum covariance and parameter estimations // Electronics Letters. — 1969. — V. 5, No. 21. — P. 539–540.

- 7.2. Optimal input signals for nonlinear system identification // Proceedings of the IEEE. — 1971. — V. 118, No. 7. — P. 922–926.

Гудвин, Заррон, Пейн (Goodwin G. C., Zarrop M. R., Payne R. L.)

- 7.1. Coupled design of test signals sampling intervals and filters for system identification // IEEE Transactions on Automatic Control. — 1974. — V. AC-19, No. 6. — P. 749–752.

Гюнтер Н. М.

- 7.1. О слгаживании функций и связанных с ним задачах // Ученые записки ЛГУ. — 1977. — № 17. — С. 51–78.

Денисов В. И.

- 7.1. Математическое обеспечение системы «ЭВМ — экспериментатор». Регрессионный и дисперсионный анализ. — М.: Наука, 1977.

Евтушенко Ю. Г., Жадан В. Г.

- 7.1. Численные методы решения игровых задач // Исследование операций. (Сер. ВЦ АН СССР; Вып. 3.) — М.: Наука, 1972. — С. 95–110.

Емелин И. В., Красносельский М. А.

- 7.1. Правило останова в итерационных процедурах решения некорректных задач // Автоматика и телемеханика. — 1978. — № 12. — С. 59–63.

Жуковский Е. Л.

- 7.1. Статистическая регуляризация систем алгебраических уравнений // Журнал вычислительной математики и математической физики. — 1972. — Т. 12, № 1. — С. 185–191.

- 7.2. Метод наименьших квадратов для вырожденных и плохо обусловленных систем линейных алгебраических уравнений // Журнал вычислительной математики и математической физики. — 1977. — Т. 17, № 4. — С. 814–827.

- 7.3. Негантропийный принцип и регуляризация линейных систем // Доклады АН СССР. — 1979. — Т. 246, № 5. — С. 1041–1045.

Жуковский Е. Л., Мелешко В. И.

- 7.1. О помехоустойчивых решениях в линейной условной алгебре // Доклады АН СССР. — 1978. — Т. 241, № 5. С. 1009–1012.

Жуковский Е. Л., Морозов В. А.

- 7.1. О последовательной байесовской регуляризации алгебраических систем уравнений // Журнал вычислительной математики и математической физики. — 1972. — Т. 12, № 2. — С. 464–465.

Заррон (Zarrop M.)

- 7.1. Optimal experiment design for dynamic system identification. — New York: Springer-Verlag, 1979.

Иванов В. К., Васин В. Б.

- 7.1. Теория линейных некорректных задач и ее приложения. — М.: Наука, 1978.

Каплинский А. И., Красненкер А. С., Цыпкин Я. З.

- 7.1. Рандомизация и сглаживание в задачах алгоритмах оптимизации // Автоматика и телемеханика. — 1974. — № 6. — С. 47–57.

Кашнер, Хуан (Kushner H. J., Huang H.)

- 7.1. Asymptotic properties of stochastic approximations with constant coefficients // SIAM Journal of Control Optimization. — 1981. — V. 19, No. 1. — P. 87–105.

Кемени, Снелл (Kemeny J. G., Snell J. L.)

- 7.1. Конечные цепи Маркова / Пер. с англ. — М.: Наука, 1970.

Климов Г. П.

- 7.1. Инвариантные выводы в статистике. — М.: Изд-во Моск. ун-та, 1973.

Красненкер А. С.

- 7.1. Рандомизация и сглаживание в задачах векторной оптимизации // Автоматика и телемеханика. — 1975. — № 3. — С. 75–79.

Круг Г. К., Сосулин Ю. А., Фатеев В. А.

- 7.1. Планирование экспериментов в задачах идентификации и экстраполяции. — М.: Наука, 1977.

Лопес-Толедо, Атанас (Lopes-Toledo A. A., Athans M.)

- 7.1. Optimal policies for identification of stochastic linear systems // IEEE Transactions on Automatic Control. — 1975. — V. AC-20, No. 6. — P. 754–765.

Мелешко В. И.

- 7.1. Устойчивое к возмущениям псевдообращение замкнутых операторов // Журнал вычислительной математики и математической физики. — 1977. — Т. 17, № 5. — С. 1132–1143.

- 7.2. Ускоренные алгоритмы адаптации с неопределенностью на основе теории псевдообратных операторов // Техническая кибернетика. — 1978. — № 2. — С. 39–54.

- 7.3. Применение рекуррентных оптимальных оценок с псевдообращением в задачах идентификации // Автоматика и телемеханика. — 1978. — № 9. — С. 79–89.

- 7.4. Об оценках решений некорректных стохастических алгебраических уравнений // Доклады АН СССР. — 1980. — Т. 250, № 2. — С. 280–284.

Мехра (Mehra R. K.)

- 7.1. Optimal inputs for linear system identification // IEEE Transactions on Automatic Control. — 1974. — V. AC-19, No. 3. — P. 192–200.

- 7.2. Optimal input signals for parameter estimation in dynamical systems — Survey and new results // IEEE Transactions on Automatic Control. — 1974. — V. AC-19, No. 6. — P. 753–768.

Морозов В. А.

- 7.1. Линейные и нелинейные некорректные задачи // Итоги науки и техники. Математический анализ. — М.: ВИНИТИ, 1973. — Т. 4. — С. 129–178.

Моррис (Morris J. M.)

- 7.1. The Kalman filter: A robust estimator for some classes of linear quadratic problems // IEEE Transactions on Information Theory. — 1976. — V. IT-22, No. 5. — P. 526–534.

Петерсон И. Ф.

- 7.1. Статистическая оптимизация посредством сглаживания // Известия АН СССР. Техническая кибернетика. — 1969. — № 2. — С. 36–44.

Поляк Б. Т., Цыпкин Я. З.

- 7.1. Стабильное оценивание в условиях неполной информации // Вопросы кибернетики. Адаптивные системы управления. — М., 1977. — С. 6–15.

Растригин Л. А.

- 7.1. Статистические методы поиска. — М.: Наука, 1968.

Сöдерстрём, Стоица (Söderström T., Stoica P.)

- 7.1. On criterion selection and noise model parametrization for prediction-error identification methods // International Journal of Control. — 1981. — V. 34, No. 4. — P. 801–811.

Соколов С. И.

- 7.1. Непрерывное планирование регрессионных экспериментов. I // Теория вероятностей и ее применения. — 1968. — Т. 8, № 1. — С. 96–101.

Тихонов А. Н., Арсенин В. Я.

- 7.1. Методы решения некорректных задач. — М.: Наука, 1980.

Успенский А. Б., Федоров В. В.

- 7.1. Линейное оценивание в обратных задачах зондирования // Труды государственного научно-исследовательского центра изучения природных ресурсов. — 1976. — Вып. 2. — С. 80–89.

Федоров В. В.

- 7.1. Теория оптимального эксперимента. — М.: Наука, 1971.

Харди (Hardy H.)

- 7.1. Расходящиеся ряды / Пер. с англ. — М.: ИЛ, 1954.

Хартмайер, Лецкий, Шефер (Hartmann K., Lezki E., Schäfer W.)

- 7.1. Планирование эксперимента в исследовании технологических процессов / Пер. с нем. — М.: Мир, 1977.

Хасьминский Р. З.

- 7.1. Применение случайного шума в задачах оптимизации и опознания // Проблемы передачи информации. — 1965. — № 3. — С. 113–117.

Хеннан (Hannan E. J.)

- 7.1. Анализ временных рядов / Пер. с англ. — М.: Наука, 1964.

Цыпкин Я. З.

- 7.1. Стабилизация и регуляризация оценок оптимальных решений при наличии неопределенности // Доклады АН СССР. — 1977. — Т. 236, № 2. — С. 304–307.

К ГЛАВЕ 8

Биллингс, Факхури (Billings S. A., Fakhuri S. A.)

- 8.1. Identification of systems containing dynamic and static nonlinear elements // Automatica. — 1981. — V. 17, No. 1. — P. 15–26.

Бородин А. Н.

- 8.1. Процедура стохастической аппроксимации при наблюдениях, удовлетворяющих условию слабой зависимости // Теория вероятностей и ее применения. — 1979. — Т. 24, № 1. — С. 34–51.

Девлин, Гнанадесикан, Кеттенринг (Devlin S. J., Gnanadesikan R., Kettenring J. R.)

- 8.1. Robust estimation and outlier detection with correlation coefficients // Biometrika. — 1975. — V. 62, No. 3. — P. 531–545.

Девятников И. П., Каплинский А. И., Цыпкин Я. З.

- 8.1. О сходимости алгоритмов обучения // Автоматика и телемеханика. — 1969. — № 10. — С. 83–89.

Жданов А. И.

- 8.1. Рекуррентное оценивание минимальных собственных значений информационных матриц // Автоматика и телемеханика. — 1987. — № 4. — С. 77–82.

Йин (Yin G.)

- 8.1. Stochastic approximation via averaging: Polyak's approach revisited // Lecture Notes in Economics and Mathematical Systems, Vol. 374 / Pflug G., Dieter U., eds. — Berlin: Springer-Verlag, 1992. — P. 119–134.

Каминская В. Н., Янищев Д. Ю.

- 8.1. Идентификация нелинейных дискретных систем класса Гаммерштейна: 1. Алгоритмы оценивания параметров // Труды АН Литовской ССР. Сер. Б. — 1978. — Т. 2 (105). — С. 121–130.
- 8.2. Идентификация нелинейных дискретных систем класса Гаммерштейна: 2. Определение порядка модели и обобщения // Труды АН Литовской ССР. Сер. Б. — 1978. — Т. 3 (106). — С. 75–81.
- 8.3. Идентификация нелинейных дискретных систем класса Гаммерштейна: 3. Моделирование алгоритмов оценивания параметров // Труды АН Литовской ССР. Сер. Б. — 1979. — Т. 6 (109). — С. 95–110.

Канторович Л. В.

- 8.1. Об одном эффективном методе решения экстремальных задач для квадратичного функционала // Доклады АН СССР. — 1968. — Т. 48, № 7. — С. 483–487.

Левин И. К., Назин А. В.

- 8.1. Оптимальная критериальная идентификация процесса регрессии // Теория и применение дискретных аддитивных систем. — М.: Институт проблем управления, 1987. — С. 30–37.

Литваков В. М.

- 8.1. О сходимости рекуррентных алгоритмов обучения распознаванию образов // Автоматика и телемеханика. — 1968. — № 1. — С. 142–150.

Льюнг (Ljung L.)

- 8.1. Asymptotic behavior of the extended Kalman filter as estimator for linear systems // IEEE Transactions on Automatic Control. — 1979. — V. AC-24, No. 1. — P. 36–50.

Нетравали, Фигуэйредо (Netravali A. N., de Figueiredo R. J. P.)

- 8.1. On the identification of nonlinear dynamical systems // IEEE Transactions on Automatic Control. — 1971. — V. AC-16, No. 1. — P. 28–36.

Пануска (Panuska V.)

- 8.1. Derivation of the recursive maximum likelihood identification algorithm // Electronics Letters. — 1977. — V. 13, No. 1. — P. 19–20.
- 8.2. A new form of the extended Kalman filter for parameter estimation in linear systems with correlated noise // IEEE Transactions on Automatic Control. — 1980. — V. AC-25, No. 2. — P. 229–235.

Поляк Б. Т.

- 8.1. Сравнение скорости сходимости одношаговых и многошаговых алгоритмов оптимизации при наличии помех // Известия АН СССР. Техническая кибернетика. — 1977. — № 1. — С. 9–12.
- 8.2. Новый метод типа стохастической аппроксимации // Автоматика и телемеханика. — 1990. — № 7. — С. 98–107.

Поляк Б. Т., Цыпкин Я. З.

- 8.1. Оптимальные алгоритмы критериальной оптимизации в условиях неопределенности // Доклады АН СССР. — 1983. — Т. 273, № 2. — С. 315–318.
- 8.2. Критериальные алгоритмы стохастической оптимизации // Автоматика и телемеханика. — 1984. — № 6. — С. 95–104.

Поляк, Юдицкий (Polyak B. T., Juditsky A. B.)

- 8.1. Acceleration of stochastic approximation procedures by averaging // SIAM Journal of Control and Optimization. — 1992. — V. 30, № 4. — P. 838–855.

Портной (Portnoy S. L.)

- 8.1. Robust estimation in dependent situations // The Annals of Statistics. — 1977. — V. 5, No. 1. — P. 22–43.

Рупперт (Ruppert D.)

- 8.1. Efficient estimators from a slowly convergent Robbins — Monro process // Tech. Rept. No. 781, School of Operations Research and Industrial Engineering, Cornell Univ., Ithaca, New York, 1988.

Соло (Solo V.)

- 8.1. Stochastic approximation with dependent noise // Stochastic Processes and their Applications. — 1982. — V. 13, No. 2. — P. 157—170.

Спиди, Браун, Гудвин (Speedy C. B., Brown B. F., Goodwin G. C.)

- 8.1. Теория управления. Идентификация и оптимальное управление / Пер. с англ. — М.: Мир, 1973.

Фарден (Farden P. C.)

- 8.1. Stochastic approximation with correlated data // IEEE Transactions on Information Theory. — 1981. — V. IT-27, No. 1. — P. 105—113.

Фу, Николич (Fu K. S., Nicolici Z. J.)

- 8.1. On some reinforcement techniques and their relations to the stochastic approximation // IEEE Transactions on Automatic Control. — 1966. — V. AC-11, No. 4. — P. 105—113.

Цирлин А. М.

- 8.1. Вариационные методы выбора оптимальных параметров аппаратов химической технологии. — М.: Машиностроение, 1978.

Цыпкин Я. З.

- 8.1. Об одном классе обучающихся систем // Адаптивные автоматические системы. — М.: Советское радио, 1972. — С. 43—47.

- 8.2. On learning systems // Automatica. — 1972. — V. 8, No. 6. — P. 85—91.

- 8.3. Class of learning systems // Journal of Cybernetics. — 1973. — V. 3, No. 2. — P. 102—112.

- 8.4. Оптимизация в условиях неопределенности // Доклады АН СССР. — 1976. — Т. 228, № 6. — С. 1306—1309.

Цыпкин Я. З., Позняк А. С.

- 8.1. Оптимальные и робастные алгоритмы оптимизации при наличии коррелированных помех // Доклады АН СССР. — 1981. — Т. 258. — С. 1330—1333.

Цыпкин Я. З., Позняк А. С., Песин А. М.

- 8.1. Поисковые алгоритмы критериальной оптимизации в условиях неопределенности // Доклады АН СССР. — 1983. — Т. 270, № 3. — С. 565—568.

Чиен, Фу (Chien Y. T., Fu K. S.)

- 8.1. On Bayesian learning and stochastic approximation // IEEE Transactions on Systems Science and Cybernetics. — 1967. — V. SSC-2, No. 1. — P. 17—35.

Юдитский, Назин (Juditsky A. B., Nazin A. V.)

- 8.1. Lower informational bounds for adaptive control problems and efficient algorithms // Proc. First European Control Conference, July 2—5, 1991, Grenoble, France. — V. 2. — P. 1534—1539.

Янг (Young P. C.)

- 8.1. Optimization in the presence of noise — a guided tour // Optimization in Action / Ed. Dixon D. C. W. — London: Academic Press, 1976.

К ГЛАВЕ 9

Агаштейн М. Э.

- 9.1. Рекуррентные алгоритмы для нестационарной регрессии // Автоматика и телемеханика. — 1986. — № 4. — С. 171—176.

Алемерин, Барло, Менез (Alengrin G., Barlaud M., Menez J.)

- 9.1. Unbiased parameter estimation of nonstationary signals in noise // IEEE Transactions on Acoustics, Speech, and Signal Processing. — 1986. — V. ASSP-34, No. 5. — P. 1319—1322.

Андерссон (Andersson P.)

- 9.1. Adaptive forgetting in recursive identification for multiple models // International Journal of Control. — 1985. — V. 42, No. 5. — P. 1175–1193.

Бенвенист, Фухс (Benveniste A., Fuchs J.-J.)

- 9.1. Single sample model identification of a nonstationary stochastic process // IEEE Transactions on Automatic Control. — 1985. — V. AC-30, No. 1. — P. 66–74.

Бондаренко М. В., Позняк А. С.

- 9.1. Асимптотическая нормальность и оценка скорости сходимости алгоритмов идентификации нестационарных объектов // Автоматика и телемеханика. — 1992. — № 7. — С. 44–55.

Дупач (Dupač V.)

- 9.1. A dynamic stochastic approximation // The Annals of Mathematical Statistics. — 1965. — V. 36, No. 6. — P. 1695–1702.

- 9.2. The continuous dynamic Robbins — Monro procedure // Kybernetika. — 1976. — V. 12, No. 6. — P. 414–420.

Женг (Zheng Li)

- 9.1. Stochastic adaptive control for time-varying systems via an auxiliary variable // Proceedings of the 29th Conference on Decision and Control, Los Angeles, December 1987. — P. 850–854.

Катковник В. Я., Хейсин В. Е.

- 9.1. Динамическая стохастическая аппроксимация полиномиальных дрейфов // Автоматика и телемеханика. — 1979. — № 5. — С. 89–98.

Ковачевич, Станкович (Kovačević B. D., Stanković S. S.)

- 9.1. On a class of robust real-time algorithms for identification of linear time varying systems // Automatica. — 1985. — No. 5, 6. — P. 261–266.

Лукашин Ю. П.

- 9.1. Адаптивные методы краткосрочного прогнозирования. — М.: Статистика, 1979.

Льюис (Lewis K. D.)

- 9.1. Методы прогнозирования экономических показателей / Пер. с англ. — М.: Финансы и статистика, 1986.

Миянага, Мики, Нагаи (Miyanaga Y., Miki N., Nagai N.)

- 9.1. Adaptive identification of a time-varying ARMA speech model // IEEE Transactions on Acoustics, Speech, and Signal Processing. — 1986. — V. ASSP-34, No. 3. — P. 423–433.

Назин А. В., Юдицкий А. Б.

- 9.1. Оптимальное и робастное оценивание медленно дрейфующих параметров процесса линейной регрессии // Автоматика и телемеханика. — 1991. — № 6. — С. 66–76.

Нг, Янг (Ng C. N., Young P. C.)

- 9.1. Recursive estimation and forecasting of non-stationary time series // Journal of Forecasting. — 1990. — V. 9, No. 5. — P. 173–204.

Рупперт (Ruppert D.)

- 9.1. A new dynamic stochastic approximation procedure // The Annals of Statistics. — 1979. — V. 7, No. 6. — P. 1179–1195.

Станкович (Stanković S. S.)

- 9.1. On the convergence of real-time identification methods based on dynamic stochastic approximation // IEEE Transactions on Automatic Control. — 1978. — V. AC-23, No. 1. — P. 58–61.

Сугиява, Уосаки (Sugiyawa H., Uosaki K.)

- 9.1. On an application of the stochastic approximation process to the control processes with a time-varying parameters // Journal of the Japan Association of Automatic Control Engineering. — 1969. — V. 13, No. 8. — P. 529–536.

Теодореску, Волф (Theodorescu R., Wolff H.)

- 9.1. On dynamic stochastic approximation // *Mathematische Operationsforschung und Statistik. Ser. Statistics.* — 1983. — V. 14, No. 3. — P. 529–536.

Уосаки (Uosaki K.)

- 9.1. Application of stochastic approximation to the tracking of a stochastic nonlinear dynamic systems // *International Journal of Control.* — 1973. — V. 18, No. 6. — P. 1233–1247.
- 9.2. An asymptotically more efficient nonlinear state estimation scheme based on stochastic approximation // *International Journal of Systems Science.* — 1977. — V. 8, No. 9. — P. 971–983.

Фигуэредо (de Figueiredo R. J.)

- 9.1. Convergent algorithms for pattern recognition in linearly evolving nonstationary environment // *Proceedings of the IEEE.* — 1968. — V. 56, No. 2. — P. 188–189.

Хейсин В. Е.

- 9.1. Об адаптивной фильтрации нестационарных дрейфов // *Автоматика и телемеханика.* — 1991. — № 8. — С. 125–132.

Хианя, Эванс (Xianya X., Evans R.)

- 9.1. Discrete-time adaptive control for deterministic time varying systems // *Automatica.* — 1984. — V. 20, No. 3. — P. 638–640.
- 9.2. Discrete-time stochastic control for time-varying systems // *IEEE Transactions on Automatic Control.* — 1984. — V. AC-29, No. 7. — P. 638–640.

Цыпкин Я. З.

- 9.1. Алгоритмы динамической адаптации // *Автоматика и телемеханика.* — 1972. — № 1. — С. 68–77.
- 9.2. Алгоритмы обучения распознаванию образов в нестационарных условиях // *Проблемы передачи информации.* — 1978. — Т. 8, № 3. — С. 94–102.
- 9.3. Идентификация нестационарных динамических систем // *Автоматика и телемеханика.* — 1986. — № 2. — С. 3–9.

Цыпкин Я. З., *Поляк* Б. Т.

- 9.1. Идентификация нестационарных динамических объектов // *Итоги науки и техники. Техническая кибернетика.* — М.: ВИНИТИ, 1987. — Т. 21. — С. 68–91.

Цыпкин Я. З., *Каплинский* А. И., *Ларионов* К. А.

- 9.1. Алгоритмы адаптации в нестационарных условиях // *Техническая кибернетика.* — 1970. — № 5. — С. 9–21.

Чанг, Янг, Ванг (Chang R. Y., Yang S. Y., Wang M. L.)

- 9.1. A new approach for parameter identification of time-varying systems via generalized orthogonal polynomials // *International Journal of Control.* — 1986. — V. 44, No. 6. — P. 1747–1755.

Четыркин Е. М.

- 9.1. Статистические методы прогнозирования. — М.: Статистика, 1975.

Чиен, Фу (Chien Y. I., Fu K. S.)

- 9.1. Stochastic learning of time-varying parameters in random environment // *IEEE Transactions on Systems Science and Cybernetics.* — 1969. — V. SSC-5, No. 3. — P. 237–246.

К ГЛАВЕ 10

Бурр (Burr D. J.)

- 10.1. Experiments on neural net recognition on spoken and written text // *IEEE Transactions on Acoustics, Speech, and Signal Processing.* — 1988. — V. ASSP-36, No. 7. — P. 1162–1168.

- Горман, Сейновски (Gorman R. P., Sejnowski T. J.)*
 10.1. Learned classification of sonar targets using a massively parallel network // IEEE Transactions on Acoustics, Speech, and Signal Processing. — 1988. — V. ASSP-36, No. 7. — P. 1135–1140.
- Леунг, Хайкин (Leung H., Haykin S.)*
 10.1. The complex Backpropagation Algorithm // IEEE Transactions on Acoustics, Speech, and Signal Processing. — 1991. — V. ASSP-39, No. 9. — P. 2101–2104.
- Мак-Кулоч, Питс (McCulloch W. S., Pitts W. H.)*
 10.1. A logical calculus of the ideas immanent in nervous activity // Bulletin of Mathematical Biophysics. — 1943. — P. 115–133.
- Нарендра, Партасарати (Narendra K. S., Parthasarathy K.)*
 10.1. Identification and control of dynamical systems using neural networks // IEEE Transactions on Neural Networks. — 1990. — V. 1, No. 1. — P. 4–27.
- Пропой А. И.*
 10.1. Элементы теории оптимальных дискретных процессов. — М.: Наука, 1973.
- Раух, Винарске (Rauch H., Winarske T.)*
 10.1. Neural networks for routing communication traffic // IEEE Control Syst. Mag. — 1988. — V. 8, No. 2. — P. 26–30.
- Розенблatt (Rosenblatt F.)*
 10.1. Principles of Neurodynamics. — New York: Spartan Books, 1959.
- Румельхарт, Хинтон, Вильямс (Rumelhart D. E., Hinton G. E., Williams R. J.)*
 10.1. Learning internal representations by error propagation // Parallel Distributed Processing: Explorations in the Microstructure of Cognition, Vol. 2 / Eds. Rumelhart D. E. et al. — Cambridge: MIT Press, 1986. — P. 216–271.
- Свешников С. В., Шкаар А. М.*
 10.1. Нейротехнические системы обработки информации. — Киев: Наукова думка, 1983.
- Сейновски, Розенберг (Sejnowski T. J., Rosenberg C. R.)*
 10.1. Parallel network that learn to pronounce English text // Complex Systems. — 1987. — V. 1. — P. 145–168.
- Станкович, Милосављевич (Stanković S. S., Milosavljević M. M.)*
 10.1. Training of multilayer perceptrons by stochastic approximation // Proc. V European Signal Processing Conference, 1990.
- Трапезников В. А. (гл. ред.)*
 10.1. Модели нейронных структур: Труды международного симпозиума по техническим и биологическим проблемам управления. Ереван, 24–28 сентября 1968 г. — М.: Наука, 1970.
- Уидроу, Винтер, Бакстер (Widrow B., Winter R. G., Baxter R. A.)*
 10.1. Layered neural nets for pattern recognition // IEEE Transactions on Acoustics, Speech, and Signal Processing. — 1988. — V. ASSP-36, No. 7. — P. 1109–1118.
- Хебб (Hebb D. O.)*
 10.1. The Organization of Behaviour. — New York: John Wiley and Sons, 1949.
- Хопфилд (Hopfield J. J.)*
 10.1. Neural networks and physical systems with emergent collective computational abilities // Proc. Nat. Acad. Sci. USA. — 1982. — V. 79. — P. 2554–2558.
- Хопфилд, Танк (Hopfield J. J., Tank D. W.)*
 10.1. Neural computation of decision in optimization problems // Biolog. Cybern. — 1985. — V. 52. — P. 141–152.
- Хорн, Ямшиди, Вади (Horne B., Jamshidi M., Vadiee N.)*
 10.1. Neural networks in robotics: A survey // J. Intelligent and Robotic Systems. — 1990. — V. 3. — P. 51–66.
- Чен, Биллингс, Грант (Chen S., Billings S. A., Grant P. M.)*
 10.1. Non-linear system identification using neural networks // International Journal of Control. — 1990. — V. 51, No. 6. — P. 1191–1214.