МИНИСТЕРСТВО НАУКИ И ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ РОССИЙСКОЙ

ФЕДЕРАЦИИ ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«Национальный исследовательский ядерный университет «МИФИ»

Институт Интеллектуальных Кибернетических Систем

Кафедра Кибернетики

Лабораторная работа №1
«Оценивание параметров линейного стационарного объекта методом наименьших квадратов»

Работу выполнил студент группы Б17-511: Чудновец И.В.

Проверил: Рамазанов Р. Н.

Москва 2020

Цель работы

Исследование свойств метода наименьших квадратов для оценки параметров линейного регрессионного объекта, исследование точности оценки в зависимости от дисперсии входных данных и дисперсии шума

Задание

В данной работе моделируется объект: $y = -7 + 8 \times u_1 + 6 \times u_2 + 12 \times u_3 - 20 \times u_4$

Описание метода

Регрессионный объект и соответствующая ему модель имеют вид:

$$\overline{y} = U\overline{b} + \overline{\eta}$$

$$\tilde{y} = U\tilde{b}$$

Критерий качества, соответствующий методу наименьших квадратов, и, записанный в векторной форме, имеет вид:

$$J(\tilde{b}) = \left(\overline{y} - \tilde{y}(\tilde{b})\right)^T R\left(\overline{y} - \tilde{y}(\tilde{b})\right)$$

Для нахождения оценки коэффициентов подставим уравнение модели и найдем минимум критерия качества. Для этого необходимо решить уравнение:

$$\frac{\partial J}{\partial \tilde{b}} = 0$$

Решая данное уравнение, получим:

$$\hat{b}_0 = (U^T R U)^{-1} U^T R \overline{y}$$

Если в модели присутствует свободный член, или при большом количестве измерений используется центрированная форма. При этом свободный член может быть определен по формуле:

$$\hat{b}_0 = y^{cp} - U_1^{cp}\hat{b}_1 - \ldots - U_m^{cp}\hat{b}_m$$

При этом оценка свободного члена получается наименее точной, так как содержит в себе ошибки оценки других параметров и среднее значение шума

Результаты выполнения работы

Исходные данные тестового моделирования		Ошибки оценки параметров						Критерий фишера
		$\lvert\hat{b}_0 - b_0\rvert$	$\lvert\hat{b}_1 - b_1\rvert$	$\lvert\hat{b}_2 - b_2\rvert$	$\lvert\hat{b}_3 - b_3\rvert$	$\lvert\hat{b}_4 - b_4\rvert$	$\frac{1}{5}\sum(\hat{b}_j - b_j)^2$	
$\mu_\eta=0$ $\sigma^2_\eta=0.5$	$\sigma^2_u=0.5$	0.0102	0.1835	0.1017	0.0151	0.0603	0.0032	1.0013
	$\sigma^2_u=20$	0.0191	0.0033	0.0020	0.0028	0.000002	0.000078	1.0000009
	$\sigma^2_u=50$	0.0358	0.0004	0.0011	0.0002	0.0021	0.00068	1.0000002
$\mu_\eta=0$ $\sigma^2_\eta=10$	$\sigma^2_u=0.5$	0.2345	0.0481	0.2704	2.2832	4.5714	1.9830	2.1042
	$\sigma^2_u=20$	0.8089	0.0658	0.0228	0.0031	0.0066	0.1331	1.000406
	$\sigma^2_u=50$	1.6631	0.0152	0.0283	0.0250	0.0232	0.5582	1.000059
$\mu_\eta=0$ $\sigma^2_\eta=20$	$\sigma^2_u=0.5$	1.9042	5.1142	9.5994	2.5914	2.1421	25.3007	3.0654
	$\sigma^2_u=20$	0.6314	0.0802	0.1651	0.1506	0.01961	0.09493	1.0017
	$\sigma^2_u=50$	1.6664	0.0044	0.0576	0.0218	0.0071	0.5547	1.0001580
$\mu_\eta=3$ $\sigma^2_\eta=0.5$	$\sigma^2_u=50$	2.9726	0.0002	0.0008	0.0011	0.00027	1.7673	1.00000011

Заключение

Из полученных результатов видно, что оценки параметров достаточно точны в случаях, когда дисперсия шума меньше дисперсии входных параметров. При одинаковой дисперсии входных параметров оценки точнее при меньших значениях дисперсии шума.

Математическое ожидание шума уменьшило точность оценки свободного члена, но при этом точность оценки остальных параметров осталась высокой.

Модель становится неадекватной тестовому объекту в случаях, когда дисперсия шума больше дисперсии входных параметров.