МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ
ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
«Национальный исследовательский ядерный университет «МИФИ»
(НИЯУ МИФИ)
Институт интеллектуальных кибернетических систем
Кафедра Кибернетики

Лабораторная работа №5
«Идентификация параметров линейного регрессионного объекта при загрязненных шумах»
Вариант №2

Выполнил студент группы Б16-511: Меркулов А. В.

Проверила: Воробьева Д.В.

Москва 2020

Цель работы

Исследование эффективности применения подхода Хубера при идентификации параметров линейного регрессионного объекта в условиях бедной априорной информации о шумах.

Основные теоретические сведения

Задача определения функции потерь для произвольного объекта и произвольного класса распределений шума измерений является сложной вариационной задачей, которая не может быть решена в явном виде. Однако при идентификации линейного регрессионного объекта вида

$$y(i) = c_0 + c_1 u_1(i) + \ldots + c_4 u_4(i) + \eta(i)$$

и шумах измерений, принадлежащих классу alpha-загрязненных распределений эта задача может быть решена в явном виде. Это связано с тем, что нормированная информационная матрица для линейных регрессионных объектов не зависит ни от оцениваемых параметров, ни от дисперсии помехи, и, следовательно, не участвует в процессе решения вариационной задачи. Кроме того, наличие условия о принадлежности шума измерений классу alpha-загрязненных распределений гарантирует наличие седловой точки в асимптотической ковариационной матрице ошибки оценки.

Одним из наиболее распространенных подходов к определения функции потерь для формирования рекуррентного алгоритма определения параметров линейного регрессионного объекта в условиях alpha-загрязненных распределений шумов является подход Хубера , основанный на теореме Хубера.

Рассмотрим задачу идентификации коэффициентов линейного регрессионного объекта (4.1) в предположении, что распределение f (η) помех принадлежит классу alpha-загрязненных распределений:

$$\Phi = \{f(\eta): \ f(\eta) = (1-\alpha)h(\eta) + \alpha g(\mu)\}$$

где $h(\alpha)$ — некоторая известная плотность распределения, $g(\eta)$ — произвольная неизвестная плотность распределения и α — вероятность появления «выброса» с распределением $g(\eta)$, α удовлетворяет условию

$$0 \le \alpha \le 1 .$$

$f(\eta) = (1-\alpha)fN(\eta) + \alpha g(\eta)$ – помеха принадлежит классу приближенно нормальных распределений, где $fN(\eta)$ – нормальное распределение, α – вероятность появления «выброса» с распределением $g(\eta)$

$$\mathrm{f_N}(\eta) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma_\eta^2}} e^{-\frac{\eta^2}{\sigma_\eta^2}}$$

Оптимальная на классе плотность распределения:

$$f^*(\eta) = \begin{cases} (1-\alpha)\dfrac{1}{\left(2\pi\sigma_\eta^2\right)^{1/2}}\exp\left[-\dfrac{1}{2\sigma_\eta^2}\eta_0^2\right]\exp[k(\eta-\eta_0)],\ \eta<\eta_0; \\ 1-\alpha)\dfrac{1}{\left(2\pi\sigma_\eta^2\right)^{1/2}}\exp\left[-\dfrac{1}{2\sigma_\eta^2}\eta^2\right],\quad \eta_0\le\eta\le\eta_1; \\ (1-\alpha)\dfrac{1}{\left(2\pi\sigma_\eta^2\right)^{1/2}}\exp\left[-\dfrac{1}{2\sigma_\eta^2}\eta_1^2\right]\exp[-k(\eta-\eta_1)],\ \eta>\eta_1. \end{cases}$$

Соответствующая функция потерь будет иметь вид:

$$F^*(\varepsilon) = \begin{cases} -\ln\left[(1-\alpha)\dfrac{1}{\sqrt{2\pi\sigma_\eta^2}}\right]+\dfrac{1}{2\sigma_\eta^2}\eta_0^2-k(\varepsilon-\eta_0),\ \varepsilon\le\eta_0; \\ -\ln\left[(1-\alpha)\dfrac{1}{\sqrt{2\pi\sigma_\eta^2}}\right]+\dfrac{1}{2}\sigma_\eta^2\varepsilon^2,\quad \eta_0\le\varepsilon\le\eta_1; \\ -\ln\left[(1-\alpha)\dfrac{1}{\sqrt{2\pi\sigma_\eta^2}}\right]+\dfrac{1}{2}\sigma_\eta^2\eta_1^2+k(\varepsilon-\eta_1),\ \varepsilon\ge\eta_1. \end{cases}$$

Очевидно, записанная функция потерь будет эквивалентна более простой функции потерь:

$$F^*(\varepsilon) = \begin{cases} \dfrac{1}{2\sigma_\eta^2}\eta_0^2-k(\varepsilon-\eta_0),\quad \varepsilon\le\eta_0; \\ \dfrac{1}{2\sigma_\eta^2}\varepsilon^2,\quad \eta_0\le\varepsilon\le\eta_1; \\ \dfrac{1}{2\sigma_\eta^2}\eta_1^2+k(\varepsilon-\eta_1),\quad \varepsilon\ge\eta_1. \end{cases}$$

Форма рекуррентного алгоритма для оценивания параметров регрессионного объекта при условии, что на систему действует случайная помеха, имеющая приближенно нормальный закон распределения:

$$\hat{\bar{b}}(i) = \hat{\bar{b}}(i-1) + \Gamma(i) d(\varepsilon(i, \hat{\bar{b}}(i-1)))\bar{u}(i),$$

$$\Gamma(i) = \Gamma(i-1) - \frac{\Gamma(i-1)\bar{u}(i)\bar{u}^{\mathrm{T}}(i)\Gamma(i-1)}{\left(I_F^*\right)^{-1} + \bar{u}^{\mathrm{T}}(i)\Gamma(i-1)\bar{u}(i)},$$

$$\Gamma(0) = \lambda I, \quad \lambda >> 1, \quad \hat{\bar{b}}(0) = \bar{b}_0,$$

Окончание рекуррентного процесса связано с прекращением нормального функционирования объекта идентификации, в частности, с получением достоверной информации от датчиков.

где $\Delta = \xi\sigma_\eta$

$$d(\varepsilon(i, \hat{\bar{c}}(i-1))) = \frac{dF(\varepsilon(i, \hat{\bar{c}}(i-1)))}{d\varepsilon}\Big|_{\varepsilon=\varepsilon(i, \hat{\bar{c}}(i-1)))} = \begin{cases} -\Delta, & \varepsilon(i) \le -\Delta \\ \varepsilon(i, \hat{\bar{c}}(i-1))), & -\Delta \le |\varepsilon(i)| \le \Delta \\ \Delta, & \varepsilon(i) \ge \Delta \end{cases}$$

$$I_F = 2(1-\alpha)\frac{\Delta}{\sigma_\eta^2} f_N\left(\frac{\Delta}{\sigma_\eta}\right) + (1-\alpha)\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_\eta}\frac{1}{\sigma_\eta^4}\int_{-\Delta}^{\Delta} \eta^2 exp\left(\frac{-\eta^2}{2\sigma_\eta^2}\right)d\eta$$

Нормальная плотность распределения помехи:

$$f(\eta) = \frac{1}{\left(2\pi\sigma_\eta^2\right)^{1/2}} \exp\left(-\frac{1}{2\sigma_\eta^2}\eta^2\right).$$

Введем обозначения: $H(i) = \Gamma(i)/\sigma_\eta^2$.

Тогда в новых обозначениях рекуррентный алгоритм для нормального распределения запишем в виде

$$\hat{\bar{c}}(i) = \hat{\bar{c}}(i-1) + H(i)\bar{z}(i)\left(y(i) - \bar{z}^{\mathrm{T}}(i)\hat{\bar{c}}(i-1)\right), \qquad (2.1.75а)$$

$$\hat{\bar{c}}(0) = \bar{c}_0;$$

$$H(i) = H(i-1) - \frac{H(i-1)\bar{z}(i)\bar{z}^{\mathrm{T}}(i)H(i-1)}{1 + \bar{z}^{\mathrm{T}}(i)H(i-1)\bar{z}(i)}, \qquad (2.1.75б)$$

$$H(i) = \lambda I, \quad \lambda >> 1.$$

Входные параметры:

$$c_0 = 5, c_1 = 2, c_2 = 10, c_3 = 17, c_4 = 14$$
$$N = 20000$$
$$\mu(U) = 1$$
$$б^2(U) = 50$$
$$l = 0.1$$
$$ksi = \begin{cases} 1.1, \text{при } alpha = 0.1 \\ 0.9. \text{при } alpha = 0.3 \end{cases}$$

Результат выполнения

Начальное приближение: $c_0 = 4.7, c_1 = 2.3, c_2 = 9.8, c_3 = 17.3, c_4 = 13.8$

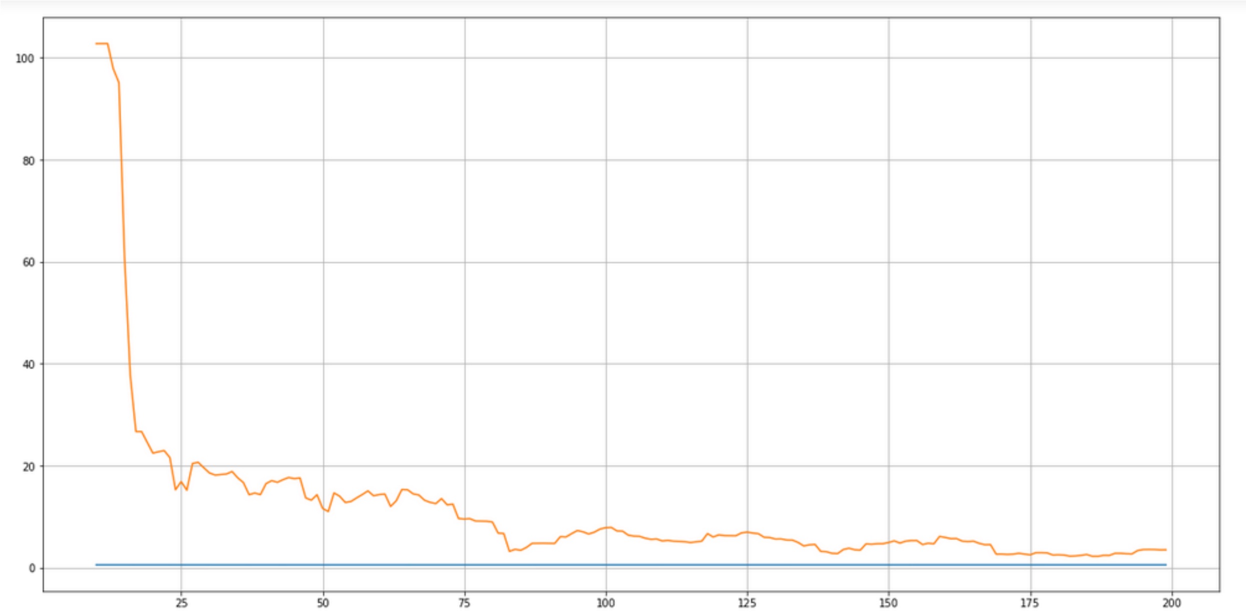

Рисунок 1 alpha=0.1, sigma_1=0.5, sigma_2 = 10

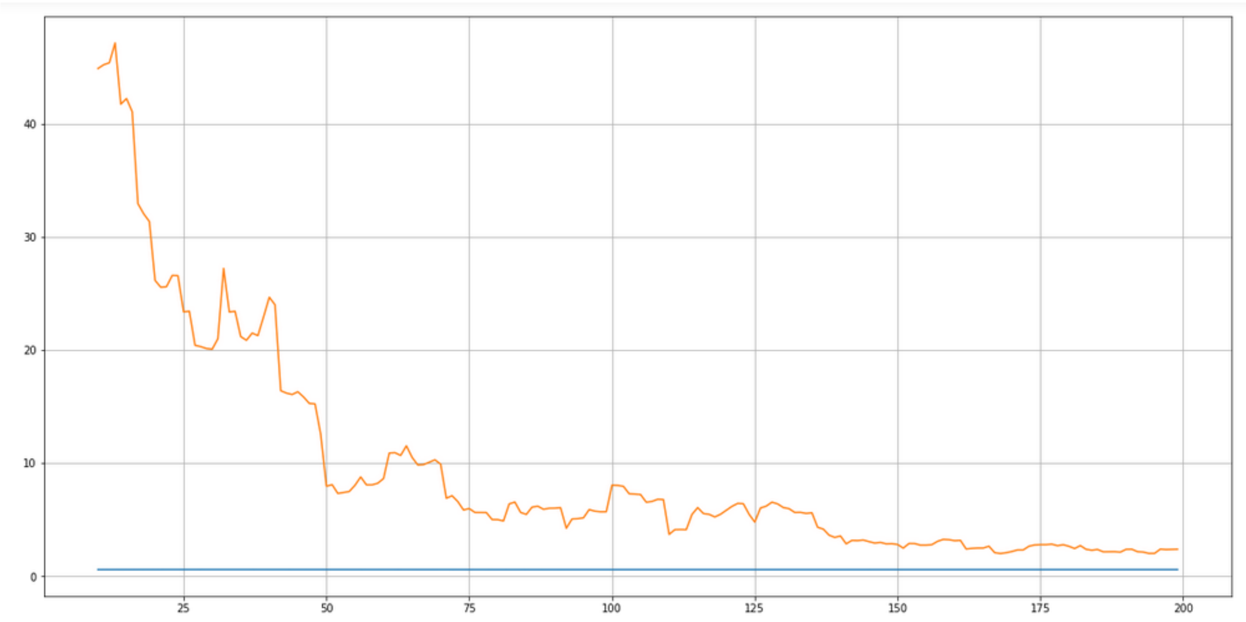

Рисунок 2 alpha=0.1, sigma_1=0.5, sigma_2 = 20

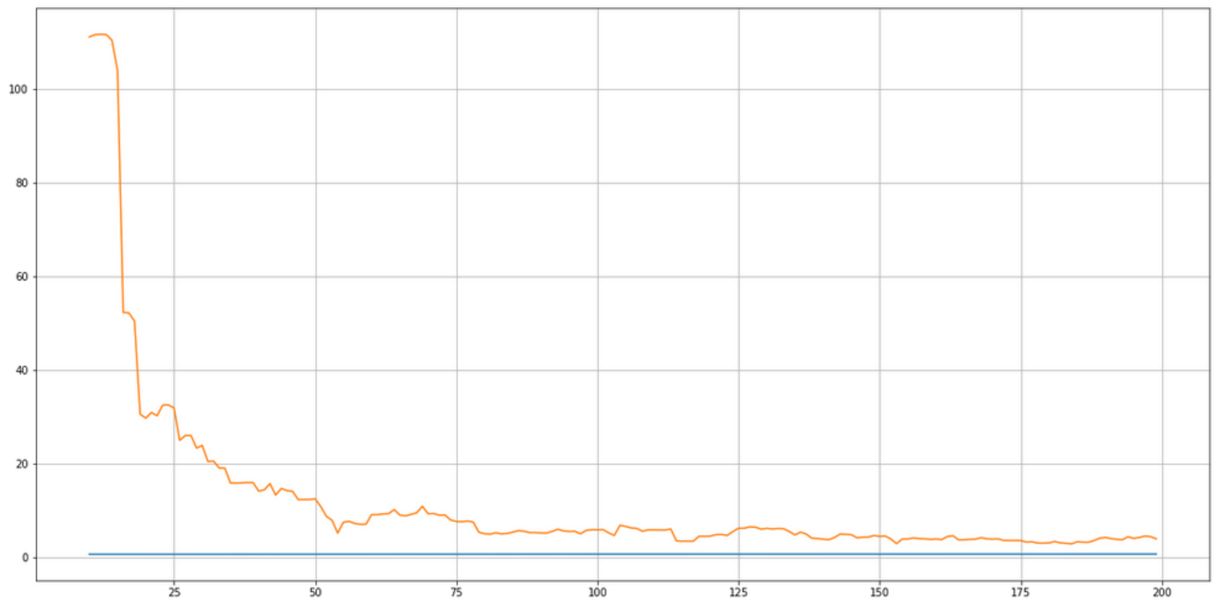

Рисунок 3 alpha=0.1, sigma_1=0.5, sigma_2 = 30

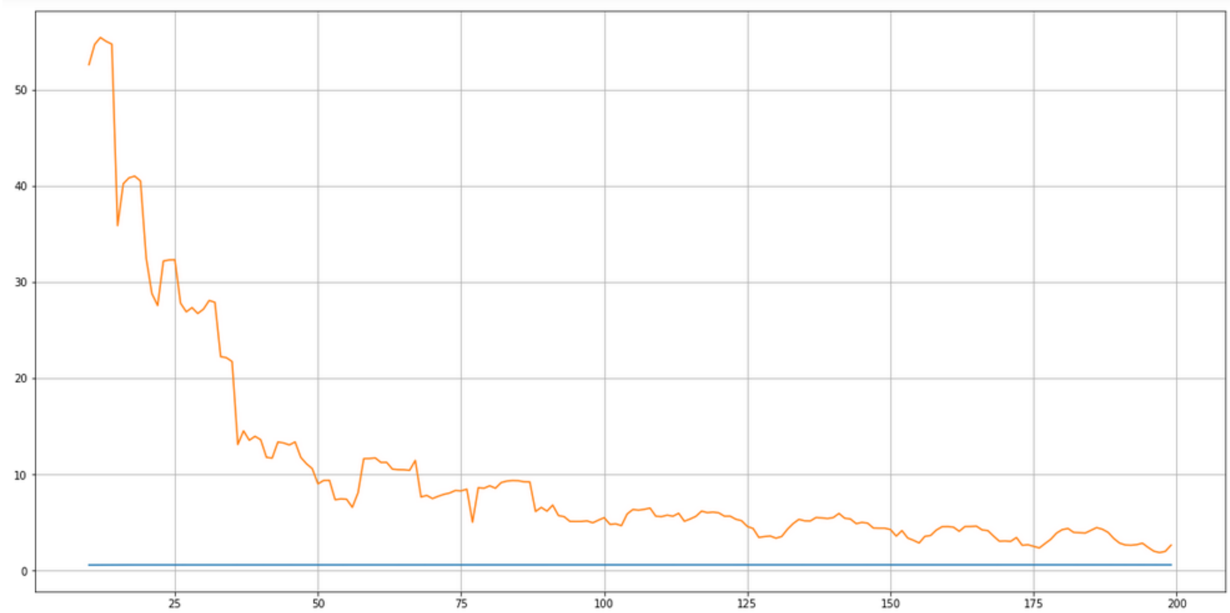

Рисунок 4 alpha=0.3, sigma_1=0.5, sigma_2 = 10

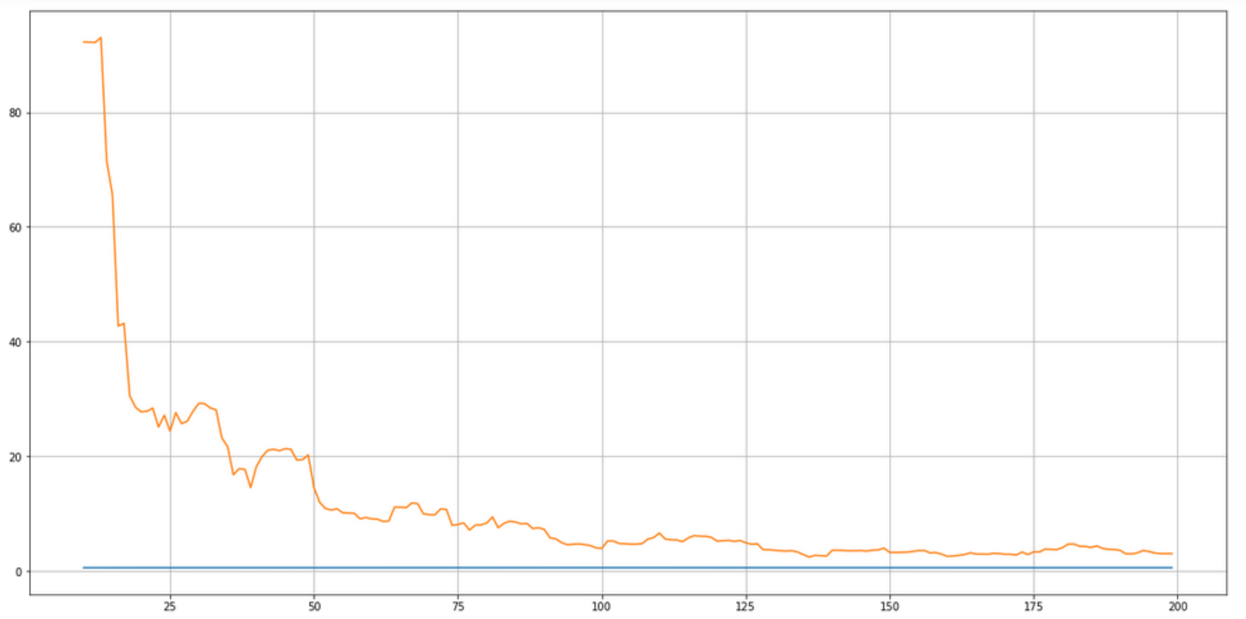

Рисунок 5 alpha=0.3, sigma_1=0.5, sigma_2 = 20

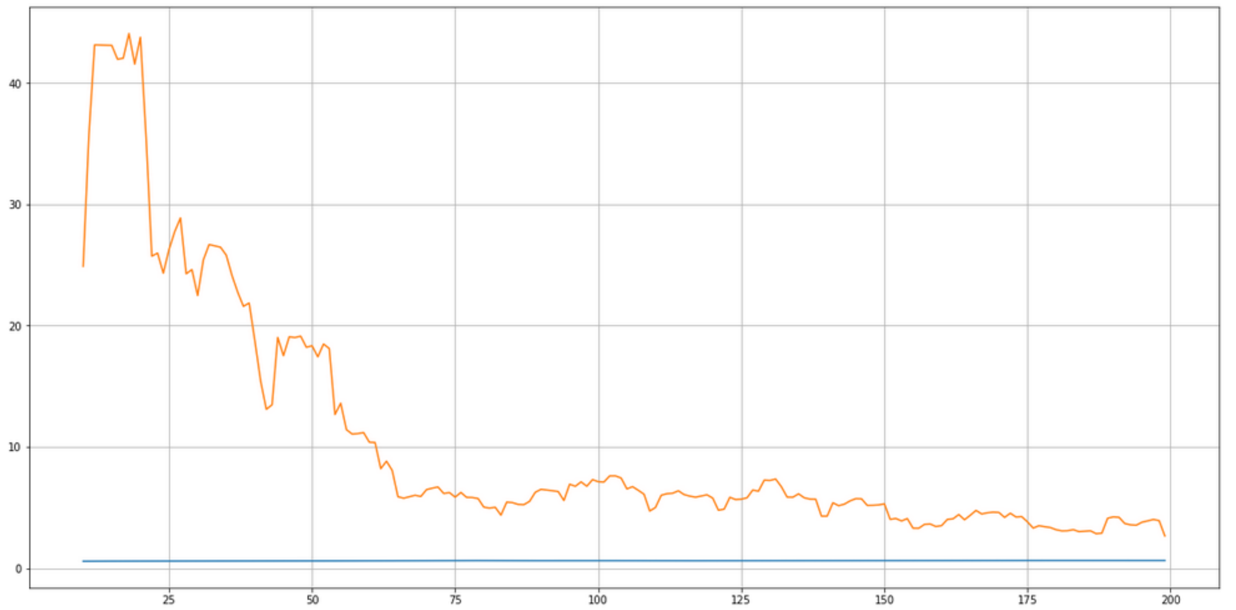

Рисунок 6 alpha=0.3, sigma_1=0.5, sigma_2 = 30

Вывод:

- Метод Хубера эффективнее МНК при идентификации параметров линейного регрессионного объекта в условиях бедной априорной информации о шумах.
- С увеличением alpha метод Хубера сходится быстрее.
- С увеличение sigma_2 метод Хубера сходится быстрее