МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ
ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
«Национальный исследовательский ядерный университет «МИФИ»
(НИЯУ МИФИ)
Институт интеллектуальных кибернетических систем
Кафедра Кибернетики

# Лабораторная работа №5
# «Идентификация параметров линейного регрессионного объекта при загрязненных шумах»
## Вариант №14

**Выполнил студент группы Б17-511:** Чудновец И.В.

**Проверила:** Воробьева Д.В.

Москва, 2021

## Цель работы

Исследование эффективности применения подхода Хубера при идентификации параметров линейного регрессионного объекта в условиях бедной априорной информации о шумах.

## Описание метода

Дан линейный регрессионный объект вида:

$$y(i)= b_1u_1(i)+...+b_nu_n(i)+\eta(i)$$

Шум измерений принадлежит классу $\alpha$-загрязненных распределений. Для определения функции потерь для формирования рекуррентного алгоритма определения параметров линейного регрессионного объекта в условиях $\alpha$-загрязненных распределений шумов является подход Хубера, основанный на теореме Хубера:

$$\Phi=\{f(\eta): f(\eta)=(1-\alpha)h(\eta)+\alpha g(\eta)\},$$

где $f(\eta)$ – распределение помех, $h(\eta)$ — некоторая известная плотность распределения, $g(\eta)$ - произвольная неизвестная плотность распределения и $\alpha$ - вероятность появления «выброса» с распределением $g(\eta)$, $\alpha$ удовлетворяет условию:

$$0\leq \alpha\leq 1$$

Результат, полученный Хубером, получил название «Теорема Хубера».

$f(\eta)=(1-\alpha)fN(\eta)+\alpha g(\eta)$ - помеха принадлежит классу приближенно нормальных распределений, где $f_N(\eta)$ – нормальное распределение, $\alpha$ — вероятность появления «выброса» с распределением $g(\eta)$

$$fN(\eta) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma_\eta^2}} e^{\frac{-\eta^2}{2\sigma_\eta^2}}$$

Оптимальная на классе плотность распределения:

$$f^*(\eta) = \begin{cases} (1-\alpha)\dfrac{1}{\left(2\pi\sigma_\eta^2\right)^{1/2}}\exp\left[-\dfrac{1}{2\sigma_\eta^2}\eta_0^2\right]\exp[k(\eta-\eta_0)], \eta<\eta_0; \\ (1-\alpha)\dfrac{1}{\left(2\pi\sigma_\eta^2\right)^{1/2}}\exp\left[-\dfrac{1}{2\sigma_\eta^2}\eta^2\right], \quad \eta_0\leq\eta\leq\eta_1; \\ (1-\alpha)\dfrac{1}{\left(2\pi\sigma_\eta^2\right)^{1/2}}\exp\left[-\dfrac{1}{2\sigma_\eta^2}\eta_1^2\right]\exp[-k(\eta-\eta_1)], \eta>\eta_1. \end{cases}$$

Соответствующая функция потерь будет иметь вид:

$$F^*(\varepsilon)=\begin{cases}-\ln\left[(1-\alpha)\dfrac{1}{\sqrt{2\pi\sigma_\eta^2}}\right]+\dfrac{1}{2\sigma_\eta^2}\eta_0^2-k(\varepsilon-\eta_0),\ \varepsilon\le\eta_0;\\ -\ln\left[(1-\alpha)\dfrac{1}{\sqrt{2\pi\sigma_\eta^2}}\right]+\dfrac{1}{2\sigma_\eta^2}\varepsilon^2,\ \ \eta_0\le\varepsilon\le\eta_1;\\ -\ln\left[(1-\alpha)\dfrac{1}{\sqrt{2\pi\sigma_\eta^2}}\right]+\dfrac{1}{2\sigma_\eta^2}\eta_1^2+k(\varepsilon-\eta_1),\ \varepsilon\ge\eta_1.\end{cases}$$

Форма рекуррентного алгоритма для оценивания параметров регрессионного объекта при условии, что на систему действует случайная помеха, имеющая приближенно нормальный закон распределения:

$$F^*(\varepsilon)=\begin{cases}\dfrac{1}{2\sigma_\eta^2}\eta_0^2-k(\varepsilon-\eta_0),\ \ \varepsilon\le\eta_0;\\ \dfrac{1}{2\sigma_\eta^2}\varepsilon^2,\ \ \eta_0\le\varepsilon\le\eta_1;\\ \dfrac{1}{2\sigma_\eta^2}\eta_1^2+k(\varepsilon-\eta_1),\ \ \varepsilon\ge\eta_1.\end{cases}$$

Окончание рекуррентного процесса связано с прекращением нормального функционирования объекта идентификации, в частности, с получением достоверной информации от датчиков.

## Результаты работы

Параметры объекта: M = 4

$b_0$=3,5 $b_1$=-0,3 $b_2$=0 $b_3$=6,0 $b_4$=-2,2

Входные воздействия $U_1(i)$,$U_2(i)$, $U_3(i)$, $U_4(i)$ имели нормальный закон распределения: $M_{U_1}=1$, $M_{U_2}=1$, $M_{U_3}=1$, $M_{U_3}=1$

$$\sigma^2{}_{U_1}=50,\ \sigma^2{}_{U_2}=50, \sigma^2{}_{U_3}=50, \sigma^2{}_{U_4}=50$$

N = 200 – количество измерений

Шум, действующий в объекте $\eta(i)$, имел приближенно нормальный закон распределения:

$$f(\eta)=(1-\alpha)f_N(\eta)+\alpha g(\eta)\ ,$$

где $f_N(\eta)$ — нормальный закон распределения:

$$f_N(\eta)=\frac{1}{(2\pi)^{1/2}\sigma_\eta}e^{-\frac{1}{2\sigma_\eta^2}\eta^2},$$

а «выброс» $g(\eta)$ — также нормальный закон распределения

$$g(\eta)=\frac{1}{(2\pi)^{1/2}\sigma_{\eta\ \text{выбр}}}e^{-\frac{1}{2\sigma_{\eta\ \text{выбр}}^2}\eta^2}$$

Оценка эффективности алгоритма Хубера по сравнению с обычным рекуррентным алгоритмом с квадратичной функцией потерь (линейный рекуррентный алгоритм) проводилась при следующих статистических характеристиках распределений:

1) $\sigma_\eta = 0.5; \alpha = 0.1; \sigma_{\eta\text{выбр}} = 10;$

2) $\sigma_\eta = 0.5; \alpha = 0.1; \sigma_{\eta\text{выбр}} = 20;$

3) $\sigma_\eta = 0.5; \alpha = 0.1; \sigma_{\eta\text{выбр}} = 30;$

4) $\sigma_\eta = 0.5; \alpha = 0.3; \sigma_{\eta\text{выбр}} = 10;$

5) $\sigma_\eta = 0.5; \alpha = 0.3; \sigma_{\eta\text{выбр}} = 20;$

6) $\sigma_\eta = 0.5; \alpha = 0.3; \sigma_{\eta\text{выбр}} = 30;$

По полученным результатам были построены графики сходимости сглаженной ошибки по двум алгоритмам: алгоритм с использованием теоремы Хубера и рекуррентный алгоритм, соответствующий методу наименьших квадратов.

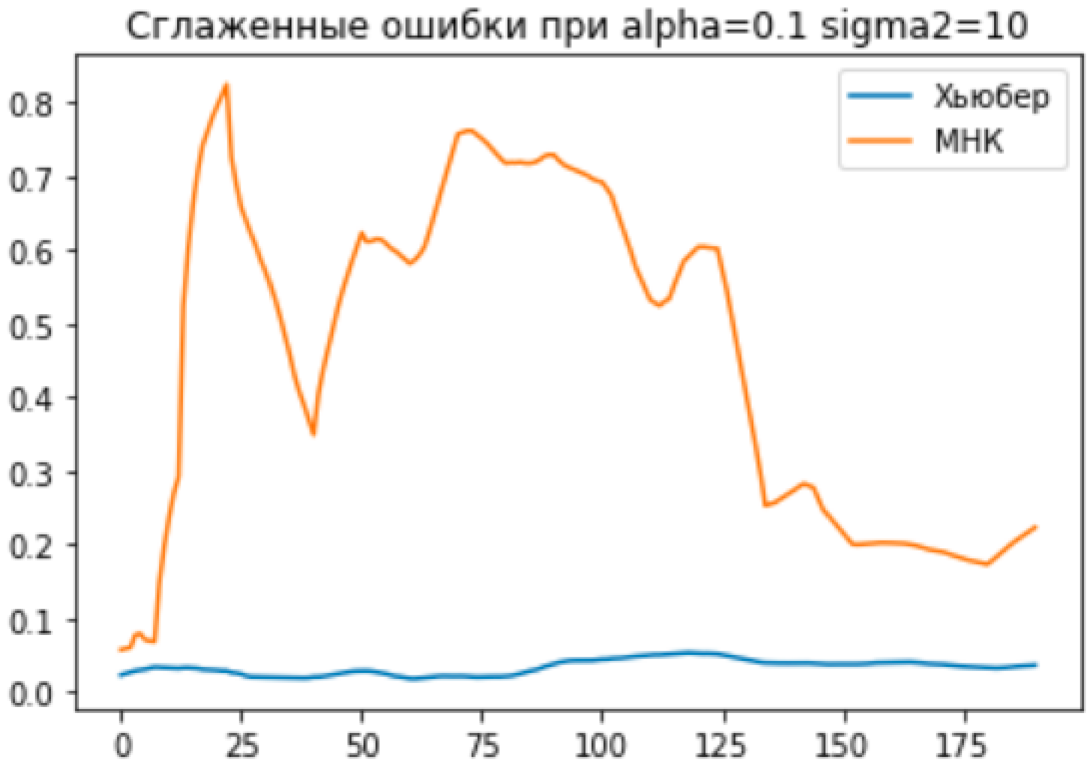


*Рис.1. График зависимости сглаженной ошибки оценки он номера измерений для* $\sigma_\eta = 0.5; \alpha = 0.1; \sigma_{\eta выбр} = 10$; *(а — алгоритм Хубера; б — МНК)* f(η)=(1−α)fN(η)+αg(η)

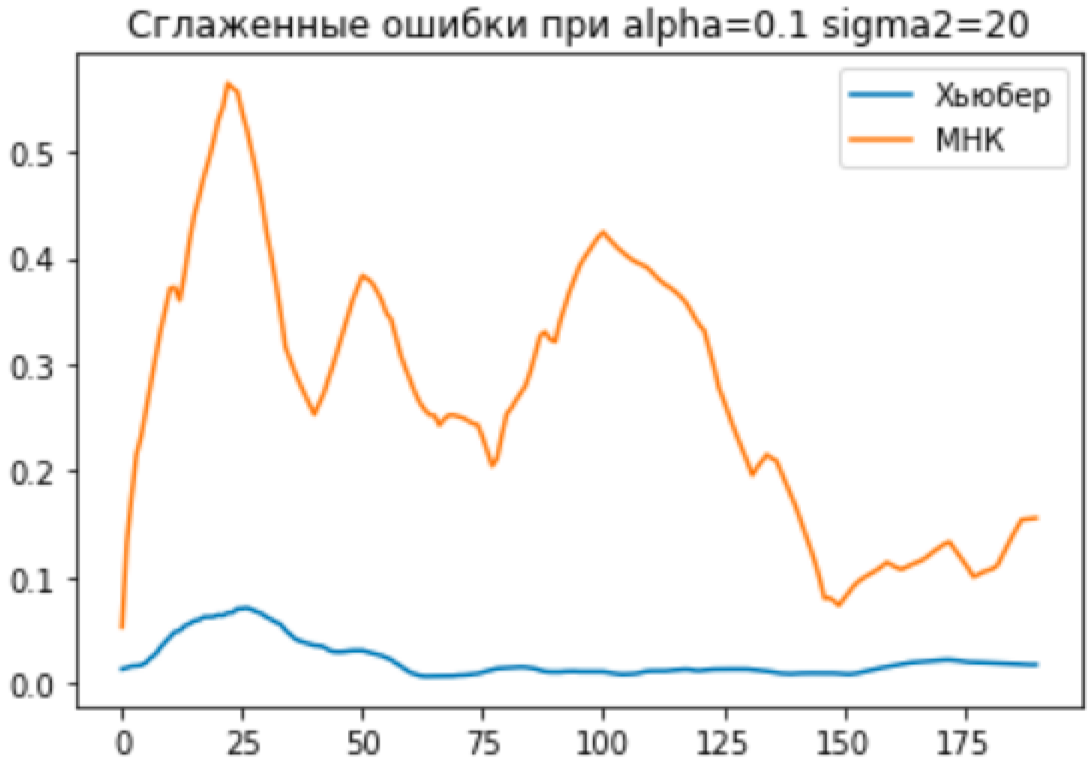


*Рис.2. График зависимости сглаженной ошибки оценки он номера измерений для* $\sigma_\eta = 0.5; \alpha = 0.1; \sigma_{\eta выбр} = 20$; *(а — алгоритм Хубера; б — МНК)*

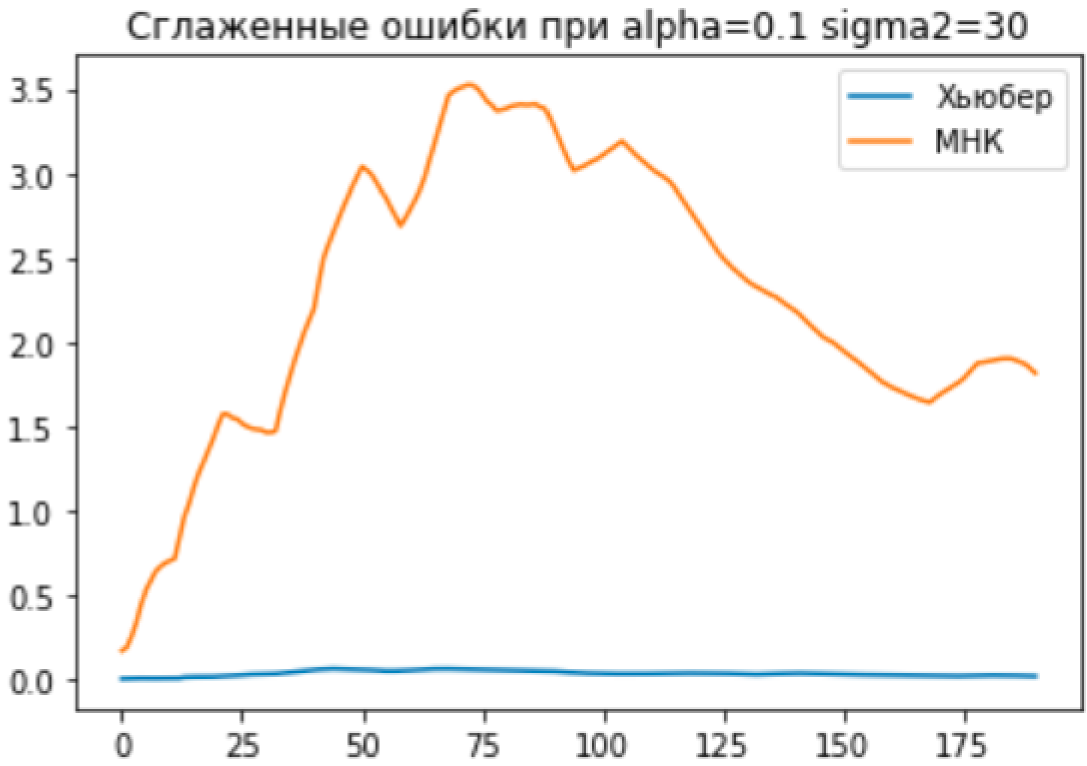


*Рис.3. График зависимости сглаженной ошибки оценки он номера измерений для* $\sigma_\eta = 0.5; \alpha = 0.1; \sigma_{\eta \text{выбр}} = 30;$ *(а — алгоритм Хубера; б — МНК)*

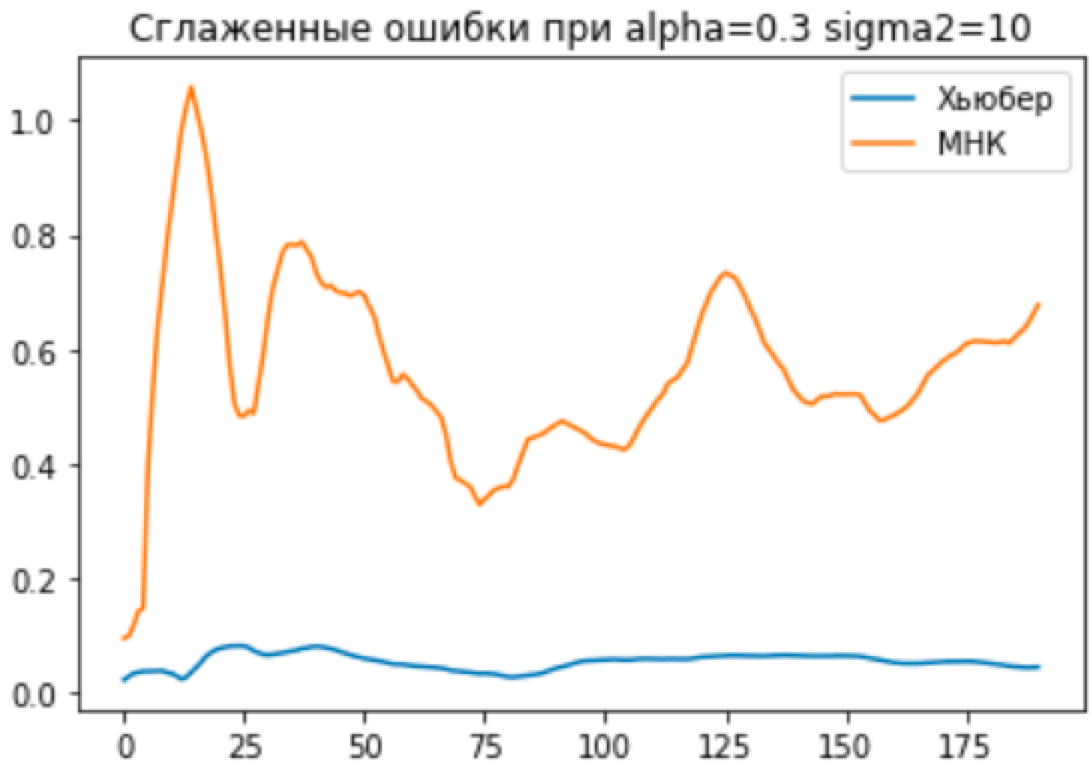


*Рис.4. График зависимости сглаженной ошибки оценки он номера измерений для* $\sigma_\eta = 0.5; \alpha = 0.3; \sigma_{\eta \text{выбр}} = 10;$ *(а — алгоритм Хубера; б — МНК)*

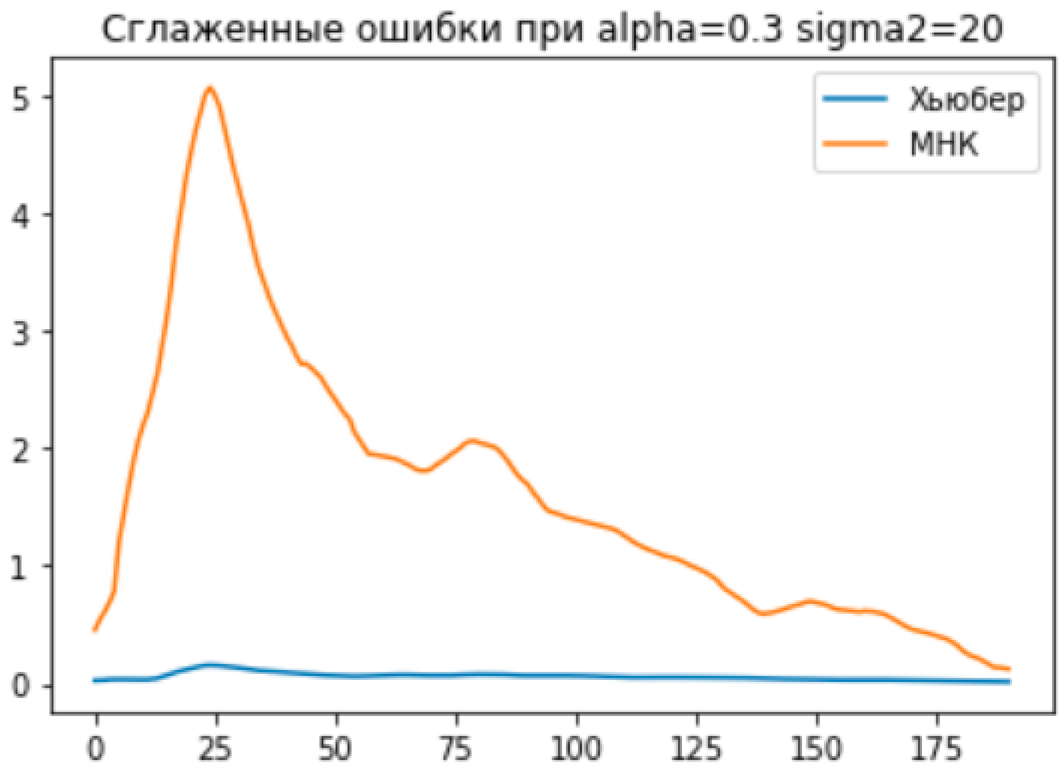


*Рис.5. График зависимости сглаженной ошибки оценки он номера измерений для* $\sigma_\eta = 0.5; \alpha = 0.3; \sigma_{\eta\text{выбр}} = 20$; *(а — алгоритм Хубера; б — МНК)*

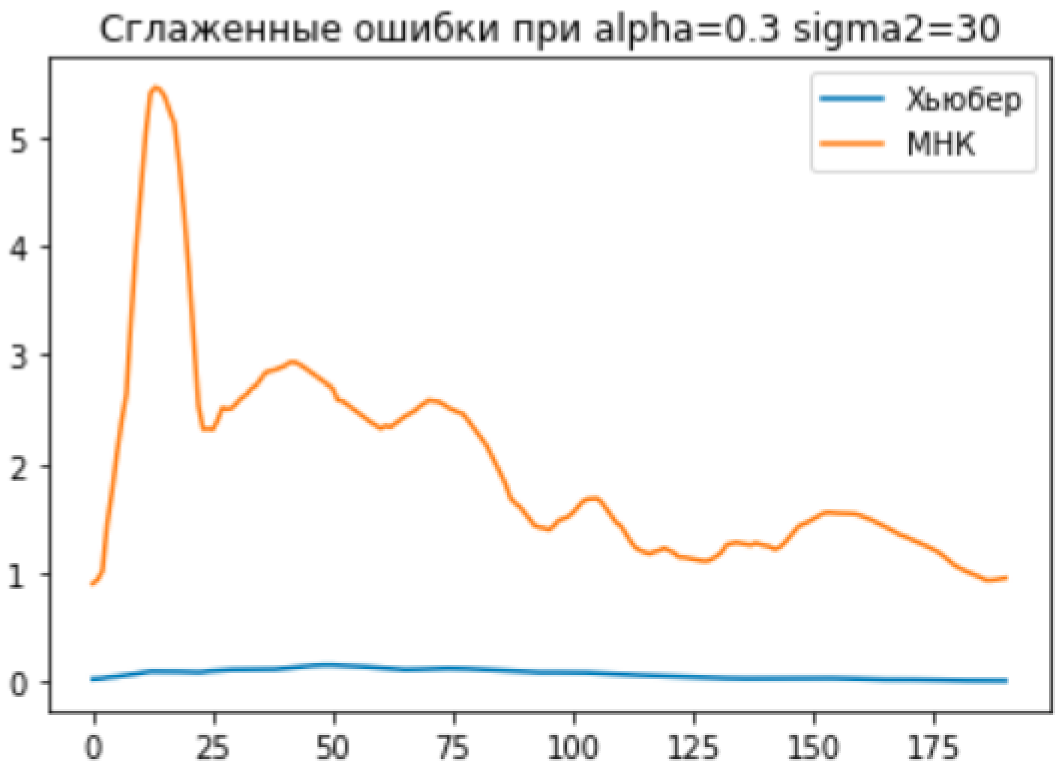


*Рис.6. График зависимости сглаженной ошибки оценки он номера измерений для* $\sigma_\eta = 0.5; \alpha = 0.3; \sigma_{\eta\text{выбр}} = 30$; *(а — алгоритм Хубера; б — МНК)*

## Заключение

В данной работе проводилось исследование эффективности применения подхода Хубера при идентификации параметров линейного регрессионного объекта в условиях бедной априорной информации о шумах.

Были проведены эксперименты при различных статистических характеристиках распределений: вероятности появления выброса и СКО.

Из графиков видно, что эффективность использования рекуррентного алгоритма с использованием теоремы Хубера возрастает с увеличением вероятности выброса $\alpha$ и с увеличением интенсивности выброса. При больших $\alpha$ и $\sigma_{\eta \text{выбр}}$ обычный рекуррентный алгоритм практически неработоспособен, тогда как алгоритм Хубера обеспечивает достаточно хорошую сходимость оценок к истинным значениям параметров.