МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ
ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
«Национальный исследовательский ядерный университет «МИФИ»
(НИЯУ МИФИ)
Институт интеллектуальных кибернетических систем
Кафедра Кибернетики

Лабораторная работа №5
«Идентификация параметров линейного регрессионного объекта при загрязненных шумах»
Вариант №4

Выполнил студент группы Б15-501: Огнянович П.А.

Проверила: Воробьева Д.В.

Москва, 2019

Цель работы

Исследование эффективности применения подхода Хубера при идентификации параметров линейного регрессионного объекта в условиях бедной априорной информации о шумах.

Описание метода

Дан линейный регрессионный объект вида:

$$y(i)= b_1u_1(i)+...+b_nu_n(i)+\eta(i)$$

Шум измерений принадлежит классу α-загрязненных распределений. Для определения функции потерь для формирования рекуррентного алгоритма определения параметров линейного регрессионного объекта в условиях α-загрязненных распределений шумов является подход Хубера, основанный на теореме Хубера:

$$\Phi=\{f(\eta): f(\eta)=(1-\alpha)h(\eta)+\alpha g(\mu)\},$$

где $f(\eta)$ – распределение помех, $h(\alpha)$ — некоторая известная плотность распределения, $g(\eta)$ - произвольная неизвестная плотность распределения и α - вероятность появления «выброса» с распределением $g(\eta)$, α удовлетворяет условию:

$$0\leq \alpha\leq 1$$

Результат, полученный Хубером, получил название «Теорема Хубера».

$f(\eta)=(1-\alpha)fN(\eta)+\alpha g(\eta)$ - помеха принадлежит классу приближенно нормальных распределений, где $fN(\eta)$ – нормальное распределение, α — вероятность появления «выброса» с распределением $g(\eta)$

$$f_N(\eta) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma_\eta^2}} e^{-\frac{\eta^2}{\sigma_\eta^2}}$$

Оптимальная на классе плотность распределения:

$$
f^*(\eta)=\begin{cases}
(1-\alpha)\dfrac{1}{\left(2\pi\sigma_\eta^2\right)^{1/2}}\exp\left[-\dfrac{1}{2\sigma_\eta^2}\eta_0^2\right]\exp[k(\eta-\eta_0)],\ \eta<\eta_0;\\
1-\alpha)\dfrac{1}{\left(2\pi\sigma_\eta^2\right)^{1/2}}\exp\left[-\dfrac{1}{2\sigma_\eta^2}\eta^2\right],\ \ \eta_0\le\eta\le\eta_1;\\
(1-\alpha)\dfrac{1}{\left(2\pi\sigma_\eta^2\right)^{1/2}}\exp\left[-\dfrac{1}{2\sigma_\eta^2}\eta_1^2\right]\exp[-k(\eta-\eta_1)],\ \eta>\eta_1.
\end{cases}
$$

Соответствующая функция потерь будет иметь вид:

$$
F^*(\varepsilon)=\begin{cases}
-\ln\left[(1-\alpha)\dfrac{1}{\sqrt{2\pi\sigma_\eta^2}}\right]+\dfrac{1}{2\sigma_\eta^2}\eta_0^2-k(\varepsilon-\eta_0),\ \varepsilon\le\eta_0;\\
-\ln\left[(1-\alpha)\dfrac{1}{\sqrt{2\pi\sigma_\eta^2}}\right]+\dfrac{1}{2}\sigma_\eta^2\varepsilon^2,\ \ \eta_0\le\varepsilon\le\eta_1;\\
-\ln\left[(1-\alpha)\dfrac{1}{\sqrt{2\pi\sigma_\eta^2}}\right]+\dfrac{1}{2}\sigma_\eta^2\eta_1^2+k(\varepsilon-\eta_1),\ \varepsilon\ge\eta_1.
\end{cases}
$$

Очевидно, записанная функция потерь будет эквивалентна более простой функции потерь:

$$
F^*(\varepsilon)=\begin{cases}
\dfrac{1}{2\sigma_\eta^2}\eta_0^2-k(\varepsilon-\eta_0),\ \ \varepsilon\le\eta_0;\\
\dfrac{1}{2\sigma_\eta^2}\varepsilon^2,\ \ \eta_0\le\varepsilon\le\eta_1;\\
\dfrac{1}{2\sigma_\eta^2}\eta_1^2+k(\varepsilon-\eta_1),\ \ \varepsilon\ge\eta_1.
\end{cases}
$$

Форма рекуррентного алгоритма для оценивания параметров регрессионного объекта при условии, что на систему действует случайная помеха, имеющая приближенно нормальный закон распределения:

$$
\hat{\hat{b}}(i)=\hat{\hat{b}}(i-1)+\Gamma(i)d(\varepsilon(i,\hat{\hat{b}}(i-1)))\bar{u}(i),
$$

$$
\Gamma(i)=\Gamma(i-1)-\frac{\Gamma(i-1)\bar{u}(i)\bar{u}^{\mathrm{T}}(i)\Gamma(i-1)}{\left(I_F^*\right)^{-1}+\bar{u}^{\mathrm{T}}(i)\Gamma(i-1)\bar{u}(i)},
$$

$$
\Gamma(0)=\lambda I,\quad \lambda>>1,\quad \hat{\hat{b}}(0)=\hat{\hat{b}}_0,
$$

Окончание рекуррентного процесса связано с прекращением нормального функционирования объекта идентификации, в частности, с получением достоверной информации от датчиков.

Результаты работы

Параметры объекта: M = 4

b_0=1,9 b_1=-0,9 b_2=0,8 b_3=0 b_4=2.5

Входные воздействия $U_1(i), U_2(i), U_3(i), U_4(i)$ имели нормальный закон распределения: $M_{U_1} = 1.5, M_{U_2} = 0.5, M_{U_3} = 1, M_{U_3} = 0$

$$\sigma^2{}_{U_1} = 99, \sigma^2{}_{U_2} = 99, \sigma^2{}_{U_3} = 99, \sigma^2{}_{U_4} = 99$$

N = 190 – количество измерений

Шум, действующий в объекте $\eta(i)$, имел приближенно нормальный закон распределения:

$$f(\eta)=(1-\alpha)f_N(\eta)+\alpha g(\eta),$$

где $f_N(\eta)$ — нормальный закон распределения:

$$f_N(\eta)=\frac{1}{(2\pi)^{1/2}\sigma_\eta}e^{-\frac{1}{2\sigma_\eta^2}\eta^2},$$

а «выброс» $g(\eta)$ — также нормальный закон распределения

$$g(\eta)=\frac{1}{(2\pi)^{1/2}\sigma_{\eta\ \text{выбр}}}e^{-\frac{1}{2\sigma^2_{\eta\ \text{выбр}}}\eta^2}$$

Оценка эффективности алгоритма Хубера по сравнению с обычным рекуррентным алгоритмом с квадратичной функцией потерь (линейный рекуррентный алгоритм) проводилась при следующих статистических характеристиках распределений:

1) $\sigma_\eta = 0.5;\ \alpha = 0.1;\ \sigma_{\eta\ \text{выбр}} = 10;$

2) $\sigma_\eta = 0.5;\ \alpha = 0.1;\ \sigma_{\eta\ \text{выбр}} = 50;$

3) $\sigma_\eta = 0.5;\ \alpha = 0.1;\ \sigma_{\eta\ \text{выбр}} = 99;$

4) $\sigma_\eta = 0.5;\ \alpha = 0.3;\ \sigma_{\eta\ \text{выбр}} = 10;$

5) $\sigma_\eta = 0.5;\ \alpha = 0.3;\ \sigma_{\eta\ \text{выбр}} = 50;$

6) $\sigma_\eta = 0.5;\ \alpha = 0.3;\ \sigma_{\eta\ \text{выбр}} = 99;$

По полученным результатам были построены графики сходимости сглаженной ошибки по двум алгоритмам: алгоритм с использованием теоремы Хубера и рекуррентный алгоритм, соответствующий методу наименьших квадратов.

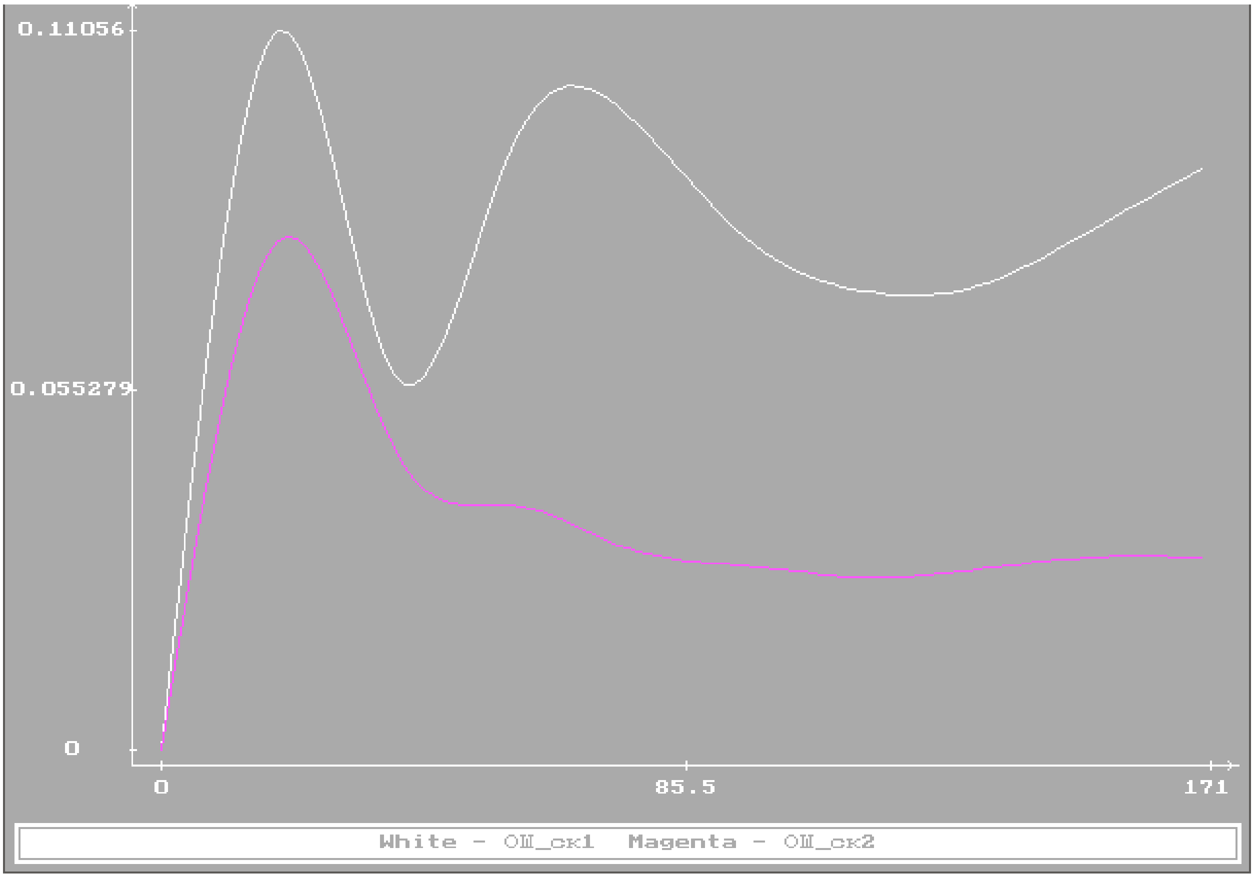

Рис.1. График зависимости сглаженной ошибки оценки он номера измерений для $\sigma_\eta = 0.5;\ \alpha = 0.1;\ \sigma_{\eta\ \text{выбр}} = 10;$ *(а — линейный алгоритм; б — алгоритм Хубера)*

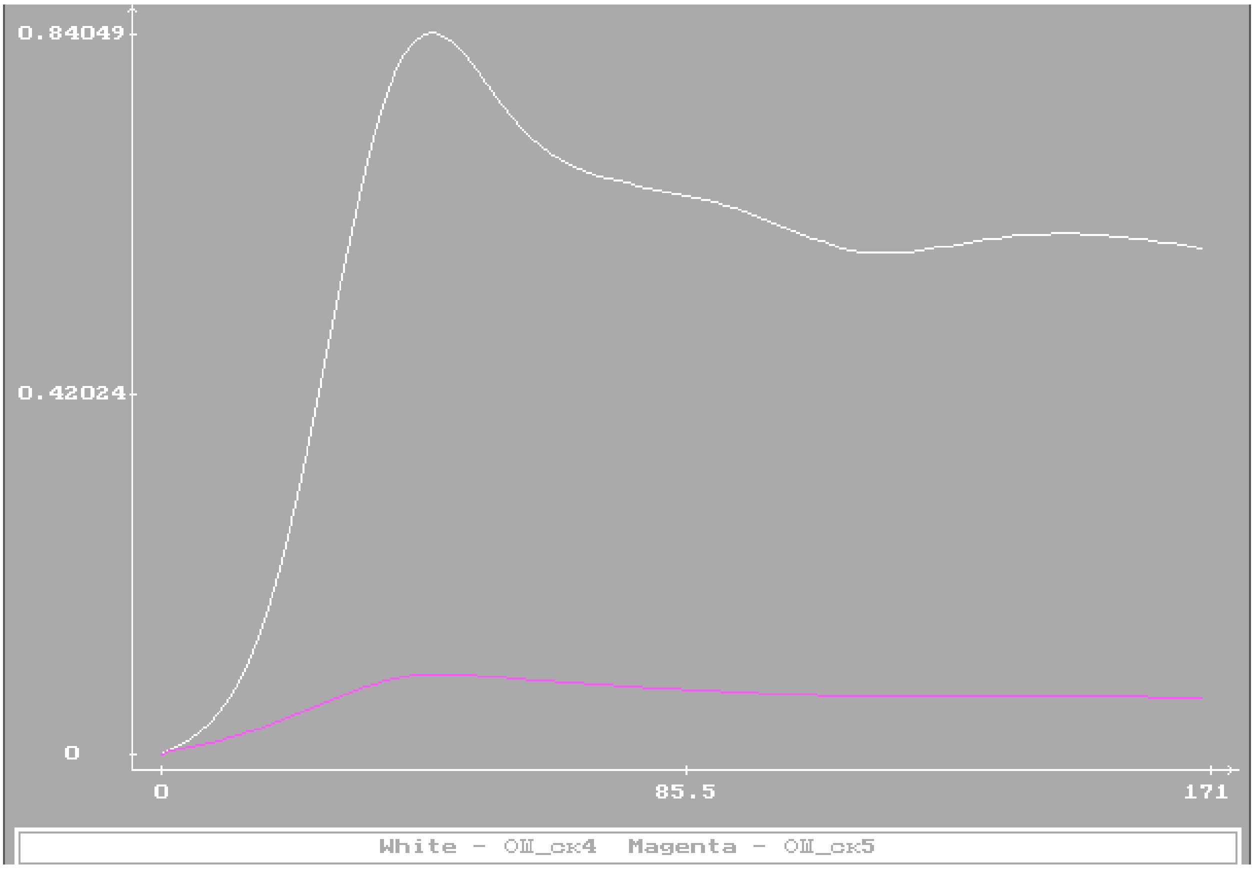

Рис.2. График зависимости сглаженной ошибки оценки он номера измерений для $\sigma_\eta = 0.5$; $\alpha = 0.1$; $\sigma_{\eta\ \text{выбр}} = 50$; *(а — линейный алгоритм; б — алгоритм Хубера)*

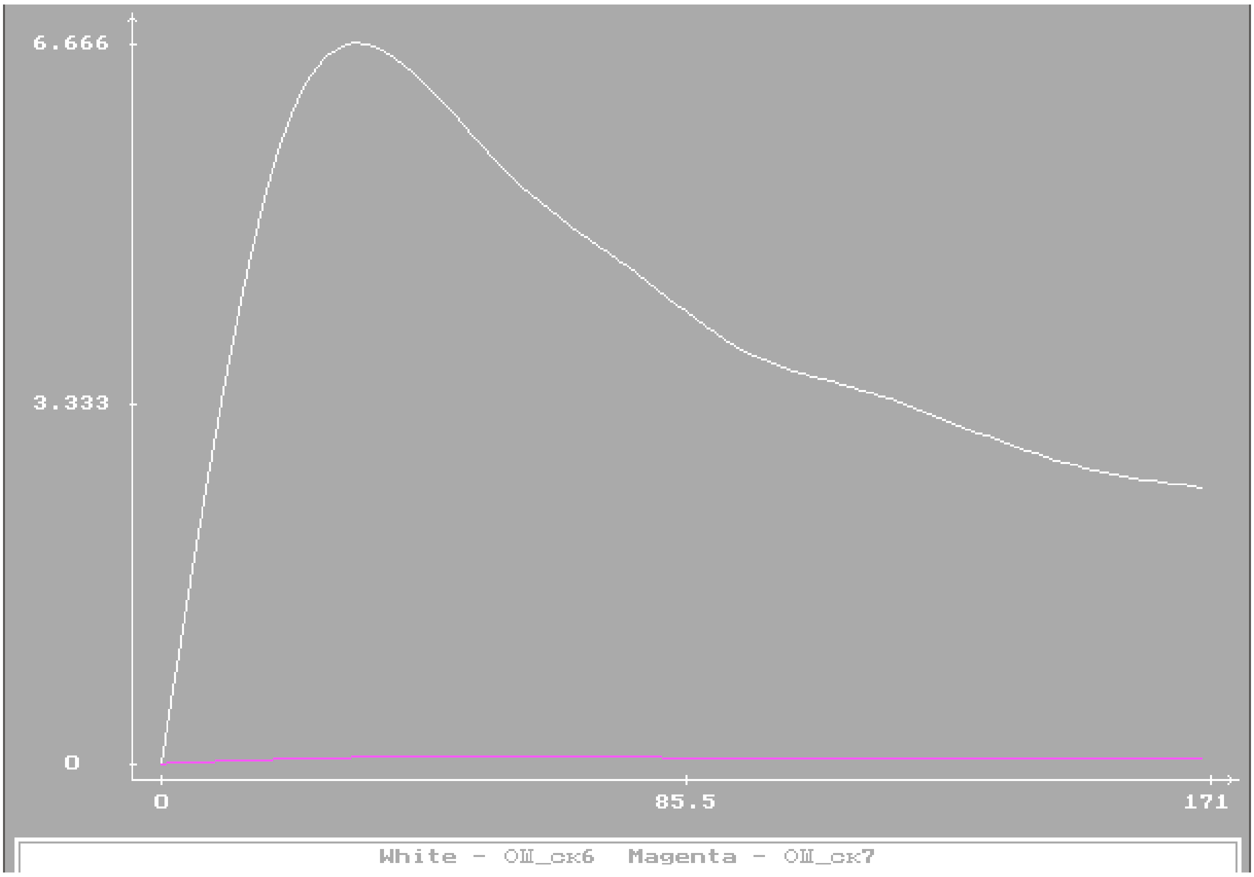

Рис.3. График зависимости сглаженной ошибки оценки он номера измерений для $\sigma_\eta = 0.5$; $\alpha = 0.1$; $\sigma_{\eta\ \text{выбр}} = 99$; *(а — линейный алгоритм; б — алгоритм Хубера)*

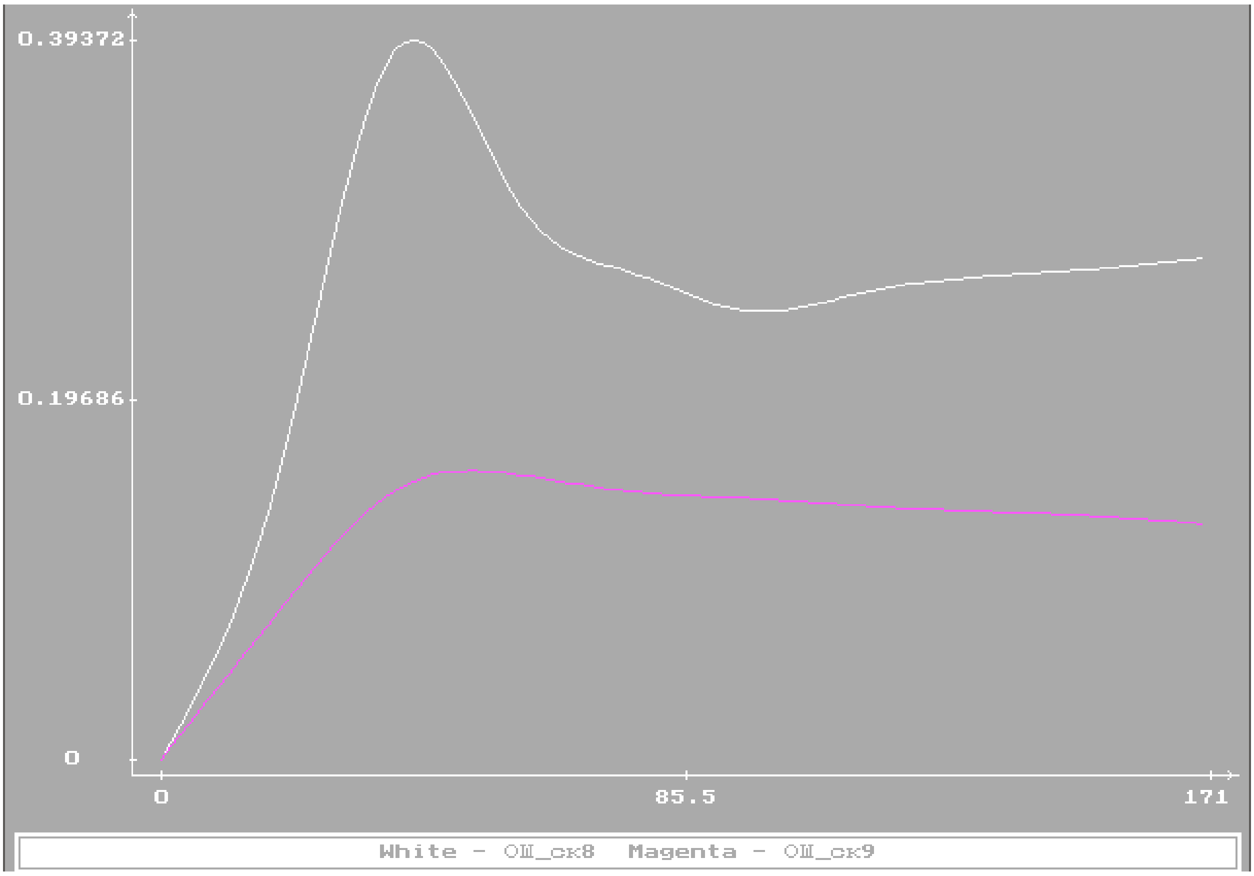

Рис.4. График зависимости сглаженной ошибки оценки он номера измерений для $\sigma_\eta = 0.5$; $\alpha = 0.3$; $\sigma_{\eta\ \text{выбр}} = 10$; *(а — линейный алгоритм; б — алгоритм Хубера)*

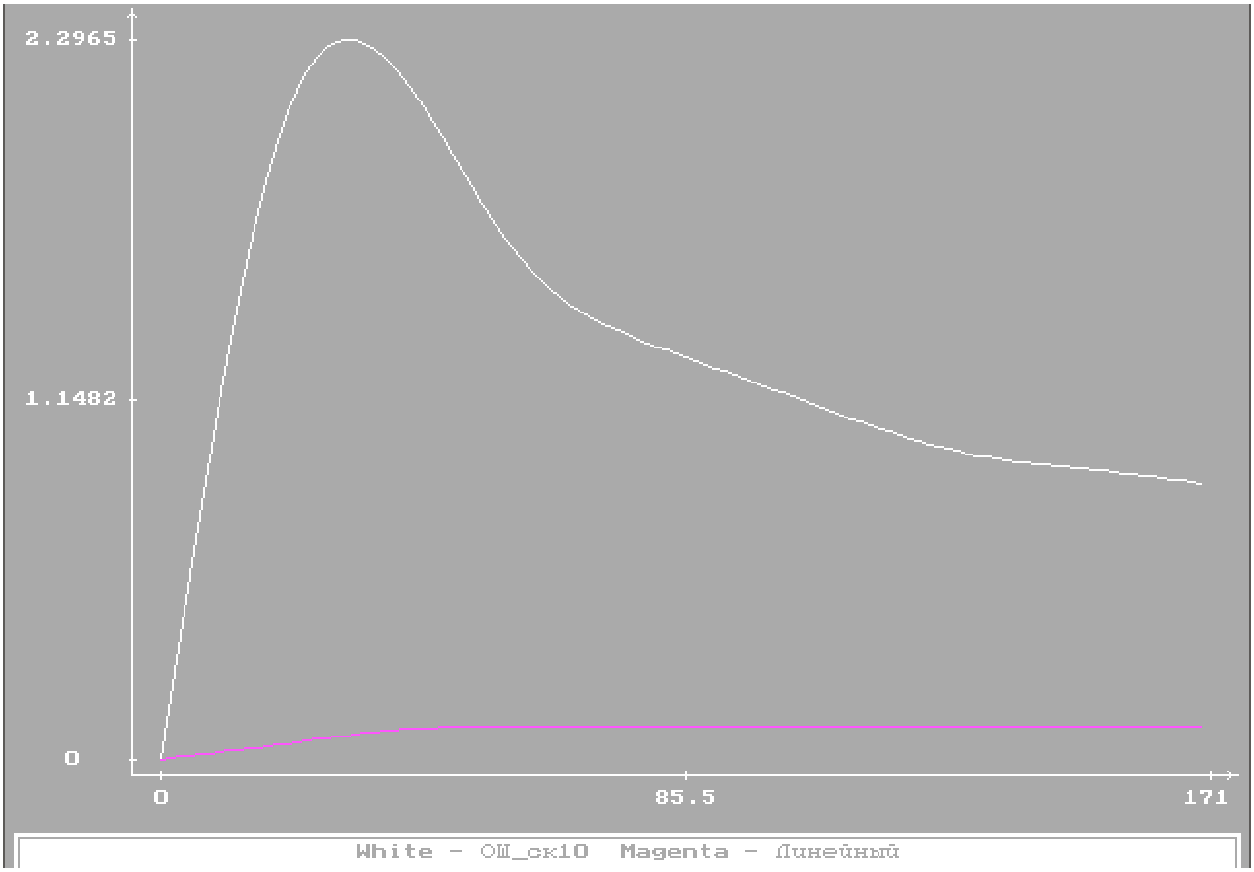

Рис.5. График зависимости сглаженной ошибки оценки он номера измерений для $\sigma_\eta = 0.5$; $\alpha = 0.3$; $\sigma_{\eta\ \text{выбр}} = 50$; *(а — линейный алгоритм; б — алгоритм Хубера)*

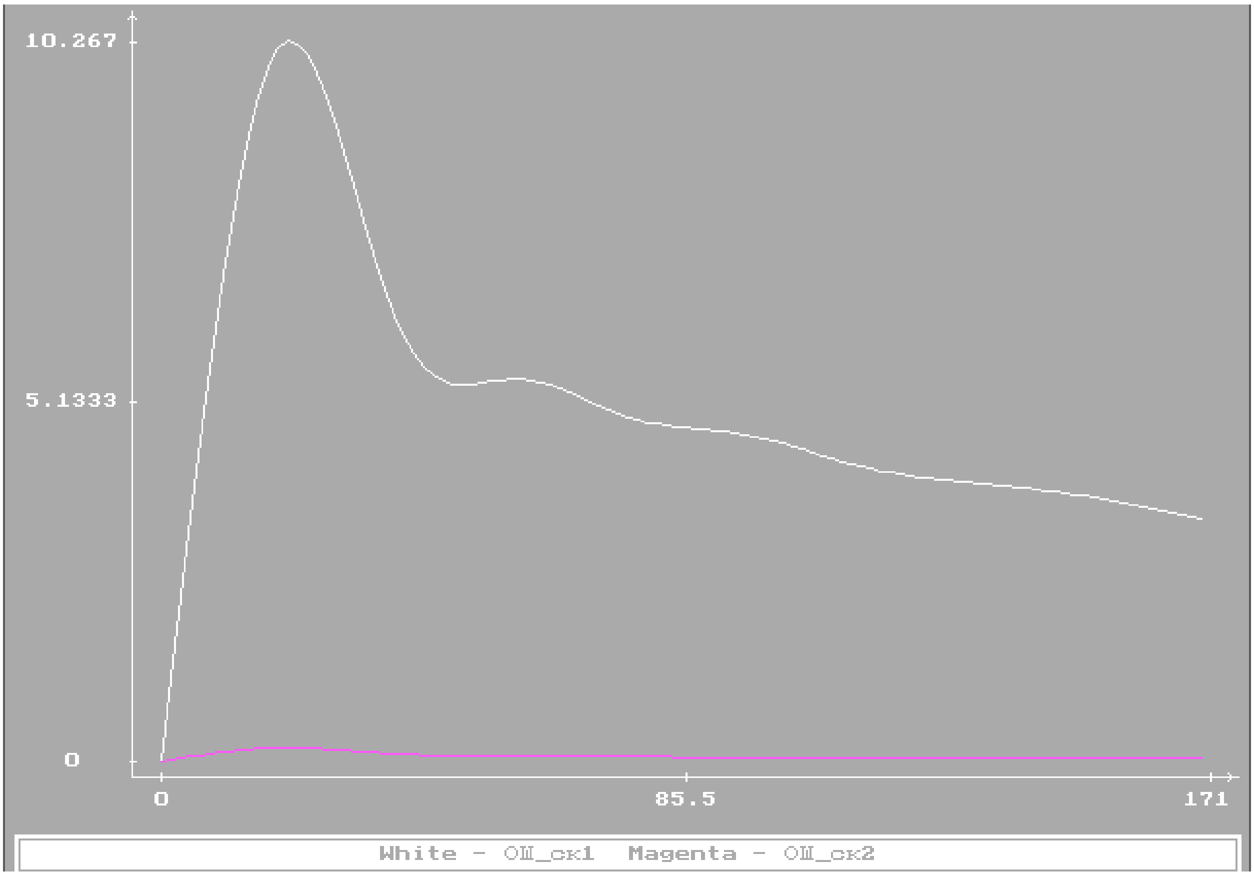

Рис.6. График зависимости сглаженной ошибки оценки он номера измерений для $\sigma_\eta = 0.5$; $\alpha = 0.3$; $\sigma_{\eta\ \text{выбр}} = 99$; *(а — линейный алгоритм; б — алгоритм Хубера)*

Заключение

В данной работе проводилось исследование эффективности применения подхода Хубера при идентификации параметров линейного регрессионного объекта в условиях бедной априорной информации о шумах.

Были проведены эксперименты при различных статистических характеристиках распределений: вероятности появления выброса и СКО.

Из графиков видно, что эффективность использования рекуррентного алгоритма с использованием теоремы Хубера возрастает с увеличением вероятности выброса α и с увеличением интенсивности выброса. При больших α и $\sigma_{\eta\ \text{выбр}}$ обычный рекуррентный алгоритм практически неработоспособен, тогда как алгоритм Хубера обеспечивает достаточно хорошую сходимость оценок к истинным значениям параметров.