МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ
ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
«Национальный исследовательский ядерный университет «МИФИ»
(НИЯУ МИФИ)
Институт интеллектуальных кибернетических систем
Кафедра Кибернетики

Лабораторная работа №5
«Идентификация параметров линейного регрессионного объекта при загрязненных шумах»
Вариант №5

Выполнил студент группы Б17-501: Дорошин С.Ю.

Проверила: Воробьева Д.В.

Москва, 2021

Цель работы

Исследование эффективности применения подхода Хубера при идентификации параметров линейного регрессионного объекта в условиях бедной априорной информации о шумах.

Описание метода

Дан линейный регрессионный объект вида:

$$y(i)= b_1u_1(i)+...+b_nu_n(i)+\eta(i)$$

Шум измерений принадлежит классу α-загрязненных распределений. Для определения функции потерь для формирования рекуррентного алгоритма определения параметров линейного регрессионного объекта в условиях α-загрязненных распределений шумов является подход Хубера, основанный на теореме Хубера:

$$\Phi=\{f(\eta): f(\eta)=(1-\alpha)h(\eta)+\alpha g(\mu)\},$$

где $f(\eta)$ – распределение помех, $h(\alpha)$ — некоторая известная плотность распределения, $g(\eta)$ – произвольная неизвестная плотность распределения и α – вероятность появления «выброса» с распределением $g(\eta)$, α удовлетворяет условию:

$$0\leq \alpha\leq 1$$

Результат, полученный методом Хубера, получил название «Теорема Хубера». $f(\eta)=(1-\alpha)fN(\eta)+\alpha g(\eta)$ – помеха принадлежит классу приближенно нормальных распределений, где $fN(\eta)$ – нормальное распределение, α — вероятность появления «выброса» с распределением $g(\eta)$

$$f_N(\eta) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma_\eta^2}}e^{-\frac{\eta^2}{\sigma_\eta^2}}$$

Оптимальная на классе плотность распределения:

$$f^*(\eta)=\begin{cases}(1-\alpha)\dfrac{1}{\left(2\pi\sigma_\eta^2\right)^{1/2}}\exp\left[-\dfrac{1}{2\sigma_\eta^2}\eta_0^2\right]\exp[k(\eta-\eta_0)],\ \eta<\eta_0;\\ 1-\alpha)\dfrac{1}{\left(2\pi\sigma_\eta^2\right)^{1/2}}\exp\left[-\dfrac{1}{2\sigma_\eta^2}\eta^2\right],\ \ \eta_0\le\eta\le\eta_1;\\ (1-\alpha)\dfrac{1}{\left(2\pi\sigma_\eta^2\right)^{1/2}}\exp\left[-\dfrac{1}{2\sigma_\eta^2}\eta_1^2\right]\exp[-k(\eta-\eta_1)],\ \eta>\eta_1.\end{cases}$$

Соответствующая функция потерь будет иметь вид:

$$F^*(\varepsilon)=\begin{cases}-\ln\left[(1-\alpha)\dfrac{1}{\sqrt{2\pi\sigma_\eta^2}}\right]+\dfrac{1}{2\sigma_\eta^2}\eta_0^2-k(\varepsilon-\eta_0),\ \varepsilon\le\eta_0;\\ -\ln\left[(1-\alpha)\dfrac{1}{\sqrt{2\pi\sigma_\eta^2}}\right]+\dfrac{1}{2}\sigma_\eta^2\varepsilon^2,\ \ \eta_0\le\varepsilon\le\eta_1;\\ -\ln\left[(1-\alpha)\dfrac{1}{\sqrt{2\pi\sigma_\eta^2}}\right]+\dfrac{1}{2}\sigma_\eta^2\eta_1^2+k(\varepsilon-\eta_1),\ \varepsilon\ge\eta_1.\end{cases}$$

Очевидно, записанная функция потерь будет эквивалентна более простой функции потерь:

$$F^*(\varepsilon)=\begin{cases}\dfrac{1}{2\sigma_\eta^2}\eta_0^2-k(\varepsilon-\eta_0),\ \ \varepsilon\le\eta_0;\\ \dfrac{1}{2\sigma_\eta^2}\varepsilon^2,\ \ \eta_0\le\varepsilon\le\eta_1;\\ \dfrac{1}{2\sigma_\eta^2}\eta_1^2+k(\varepsilon-\eta_1),\ \ \varepsilon\ge\eta_1.\end{cases}$$

Форма рекуррентного алгоритма для оценивания параметров регрессионного объекта при условии, что на систему действует случайная помеха, имеющая приближенно нормальный закон распределения:

$$\hat{\bar{b}}(i)=\hat{\bar{b}}(i-1)+\Gamma(i)d(\varepsilon(i,\hat{\bar{b}}(i-1)))\bar{u}(i)\,,$$

$$\Gamma(i)=\Gamma(i-1)-\frac{\Gamma(i-1)\bar{u}(i)\bar{u}^{\mathrm{T}}(i)\Gamma(i-1)}{\left(I_F^*\right)^{-1}+\bar{u}^{\mathrm{T}}(i)\Gamma(i-1)\bar{u}(i)},$$

$$\Gamma(0)=\lambda I\,,\quad \lambda>>1\,,\quad \hat{\bar{b}}(0)=\hat{\bar{b}}_0\,,$$

Окончание рекуррентного процесса связано с прекращением нормального функционирования объекта идентификации, в частности, с получением достоверной информации от датчиков.

Результаты работы

Параметры объекта:

b_0=3.5 b_1=-0.3 b_2=0 b_3=6.0 b_4=-2.2

Входные воздействия $U_1(i), U_2(i), U_3(i), U_4(i)$ имели нормальный закон распределения: $M_{U_1} = 1, M_{U_2} = 1, M_{U_3} = 1, M_{U_3} = 1$

$$\sigma^2{}_{U_1} = 100, \sigma^2{}_{U_2} = 100, \sigma^2{}_{U_3} = 100, \sigma^2{}_{U_4} = 100$$

N = 200 – количество измерений

Шум, действующий в объекте $\eta(i)$, имел приближенно нормальный закон распределения:

$$f(\eta)=(1-\alpha)f_N(\eta)+\alpha g(\eta),$$

где $f_N(\eta)$ — нормальный закон распределения:

$$f_N(\eta)=\frac{1}{(2\pi)^{1/2}\sigma_\eta}e^{-\frac{1}{2\sigma_\eta^2}\eta^2},$$

а «выброс» $g(\eta)$ — также нормальный закон распределения

$$g(\eta)=\frac{1}{(2\pi)^{1/2}\sigma_{\eta\text{ выбр}}}e^{-\frac{1}{2\sigma_{\eta\text{ выбр}}^2}\eta^2}$$

Оценка эффективности алгоритма Хубера по сравнению с обычным рекуррентным алгоритмом с квадратичной функцией потерь (линейный рекуррентный алгоритм) проводилась при следующих статистических характеристиках распределений:

1) $\sigma_\eta = 0.5;\ \alpha = 0.1;\ \sigma_{\eta\text{ выбр}} = 10;$

2) $\sigma_\eta = 0.5;\ \alpha = 0.1;\ \sigma_{\eta\text{ выбр}} = 20;$

3) $\sigma_\eta = 0.5;\ \alpha = 0.1;\ \sigma_{\eta\text{ выбр}} = 30;$

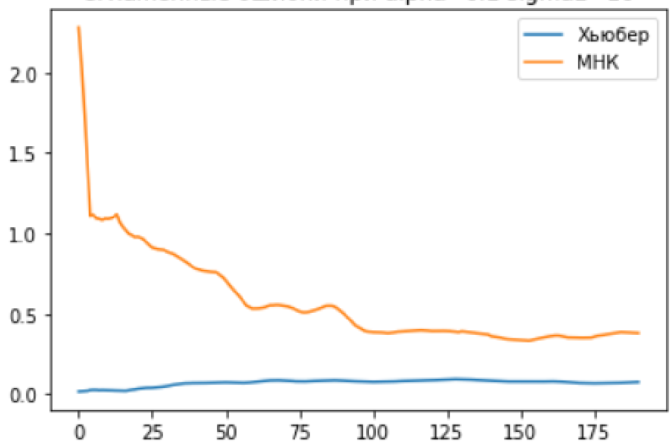
4) $\sigma_\eta = 0.5;\ \alpha = 0.3;\ \sigma_{\eta\text{ выбр}} = 10;$

5) $\sigma_\eta = 0.5;\ \alpha = 0.3;\ \sigma_{\eta\text{ выбр}} = 20;$

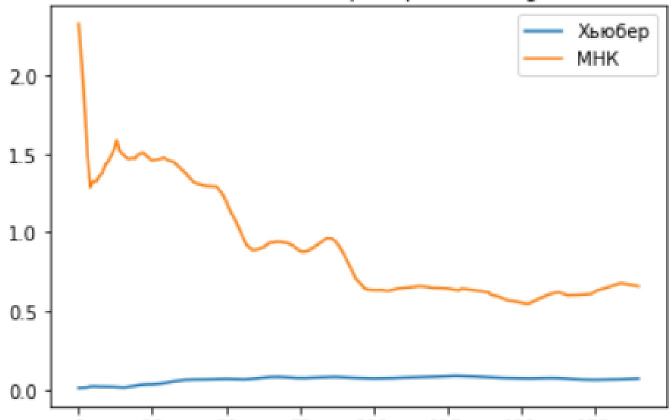
6) $\sigma_\eta = 0.5;\ \alpha = 0.3;\ \sigma_{\eta\text{ выбр}} = 30;$

По полученным результатам были построены графики сходимости сглаженной ошибки по двум алгоритмам: алгоритм с использованием теоремы Хубера и рекуррентный алгоритм, соответствующий методу наименьших квадратов.

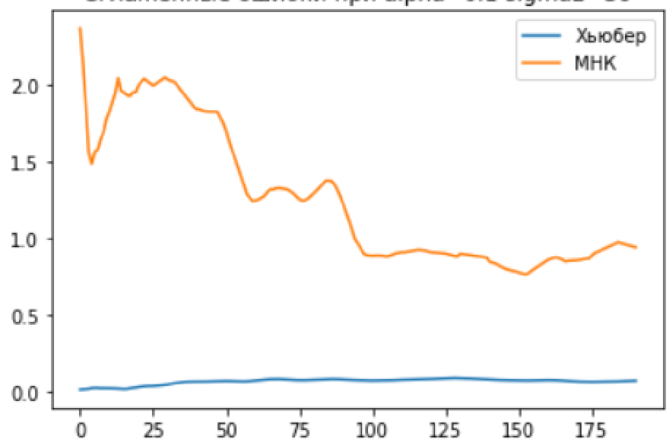
Сглаженные ошибки при alpha=0.1 sigma2=10



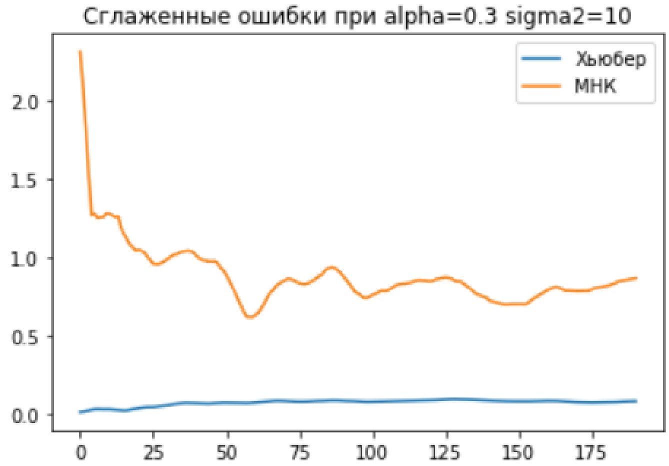
Сглаженные ошибки при alpha=0.1 sigma2=20



Сглаженные ошибки при alpha=0.1 sigma2=30



Сглаженные ошибки при alpha=0.3 sigma2=10



Заключение

В данной работе проводилось исследование эффективности применения подхода Хубера при идентификации параметров линейного регрессионного объекта в условиях бедной априорной информации о шумах.

Были проведены эксперименты при различных статистических характеристиках распределений: вероятности появления выброса и СКО.

Из графиков видно, что эффективность использования рекуррентного алгоритма с использованием теоремы Хубера возрастает с увеличением вероятности выброса α и с увеличением интенсивности выброса. При больших α и $\sigma_{\eta\ \text{выбр}}$ обычный рекуррентный алгоритм практически неработоспособен, тогда как алгоритм Хубера обеспечивает достаточно хорошую сходимость оценок к истинным значениям параметров.