模式识别

第8讲 模糊模式识别

2018~2019学年

内容安排

一、绪论、数学基础（第1讲）

二、聚类分析（第2讲）

三、判别函数分类法（几何分类法）（第3、4讲）

四、统计决策分类法（概率分类法）（第5、6讲）

五、特征提取与选择（第7讲）

六、模糊模式识别（第8讲）

七、神经网络模式识别（第9讲）

期末考试（平时作业：40%，期末考试：60%）

六、模糊模式识别

6.1　模糊数学概述

6.2　模糊集合

6.3　模糊关系与模糊矩阵

6.4　模糊模式分类的直接和间接方法

6.1　模糊数学概述

6.1.1 模糊数学的产生背景

模糊数学诞生的标志：1965年美国加利福尼亚大学控制论专家L. A. Zadeh（查德）发表的文章“Fuzzy sets”。

模糊数学与模糊集合论一般互换使用 。

1．精确数学方法及其局限性

1) 精确数学方法

忽略对象的一般特性，着重注意对象的数量、空间形式和几何形状的数学方法。

如：牛顿力学、牛顿和莱布尼茨创立的微积分学等。

2) 近代科学的特点

(1) 理论研究方面：用精确定义的概念和严格证明的定理，描述现实事物的数量关系和空间形式。

(2) 工程技术方面：用精确的实验方法和精确的测量计算，探索客观世界的规律，建立严密的理论体系。

3) 精确数学方法的局限性

现实世界中的许多现象，用精确数学方法难以解决。

例如：著名的问题之一——秃头悖论

用**精确数学方法**判断“秃头”：

方法：首先给出一个精确的定义，然后推理，最后结论。

定义：头发根数≤n时，判决为秃头；否则判决为不秃。

即头发根数n为判断秃与不秃的界限标准。

问题：当头发根数恰好为n+1，应判决为秃还是不秃？

推理：两种选择

均表现出精确方法在这个问题上与常理对立的情况

(1) 承认精确方法：判定为不秃。

结论：有n根头发的是秃头，有$n+1$根头发的不是秃头。

——显然不合理

(2) 承认生活常识：认为仅一根头发之差不会改变秃与不秃的结果，即有$n+1$根头发者也应是秃头。

那么采用传统的逻辑推理，会得到下面的一些命题：

头发为n根者为秃头，

头发为$n+1$根者为秃头，

头发为$n+2$根者为秃头，

……

头发为$n+k$根者为秃头。

其中，k是一个有限整数，显然k完全可以取得很大。

结论：头发很多者为秃头。

类似地：没有头发者不是秃头

2．模糊数学的诞生

1965年查德（Zadeh）发表“模糊集合”论文后，在科学界引起了爆炸性的反映，他准确地阐述了模糊性的含义，制定了刻画模糊性的数学方法（隶属度、隶属函数、模糊集合等），为模糊数学作为一门独立的学科建立了必要的基础。

6.1.2 模糊性

1．模糊性的基本概念

人们在认识事物时，总是根据一定的标准对事物进行分类，有些事物可以依据某种精确的标准对它们进行界线明确的认识，有些事物根本**无法找出精确的分类标准**，例如“秃头悖论”中的头发根数的界线n，实际是不存在的。

1) 清晰性：事物具有的明确的类属特性(或是或非)。

2) 模糊性：事物具有的不明确类属特性(只能区别程度、等级)。

3) 模糊性本质：事物**类属的不确定性**和对象**资格程度的渐变性**。

例：

类　属	实　　例
界限分明	行星、整数、鸡蛋
模　糊	高山、优秀、胖子

2．与模糊性容易混淆的几个概念

1) 模糊性与近似性

① 共同点：描述上的不精确性。

② 区别：不精确性的根源和表现形式不同。

a) 近似性：**问题本身有精确解**，描述它时的不**精确性源于认识条件的局限性和认识过程发展的不充分性**。

例：薄雾中观远山。

b) 模糊性：**问题本身无精确解**，描述的**不精确性来源于对象自身固有的性态上的不确定性**。

例：观察一片秋叶。

2) 模糊性与随机性

① 共同点：不确定性。

② 区别：不确定性的**性质不同**。

a) 模糊性：表现在**质的不确定性**。是由于**概念外延的模糊性**而呈现出的不确定性。

b) 随机性：是**外在的不确定性**。是由于条件不充分、或过于复杂，导致条件与结果事件之间不能出现确定的因果关系，而事物本身的性态和类属是确定的。

例：降雨量：大雨、中雨或小雨，典型的模糊性。

投掷硬币：随机性。

c) 排中律：即事件的发生和不发生必居且仅居其一，不存在第三种现象。**随机性遵守排中律，模糊性不遵守**，它存在着多种，甚至无数种中间现象。

3) 模糊性与含混性

① 共同点：不确定性。

② 区别：

a) 含混性：由信息不充分（二义性）引起，一个含混的命题即是模糊的，又是二义的。一个命题是否带有含混性与其应用对象或上下文有关。

b) 模糊性：是质的不确定性。

例：命题“张三很高”是一个模糊性命题，根源在于“很高”是一个模糊类。该命题对于“给张三购衣服”而言是含混的（信息不充分），但是对于“给张三买领带”而言，则虽然是模糊的，但信息是成分的，因此不是含混的。

总之，模糊性：由本质决定。而近似性、随机性、含混性等都是由外界条件带来的不确定性引起。

6.1.3 模糊数学在模式识别领域的应用

模式识别从模糊数学诞生开始就是模糊技术应用研究的一个活跃领域，研究内容涉及：计算机图像识别、手书文字自动识别、癌细胞识别、白血球的识别与分类、疾病预报、各类信息的分类等。

研究方法：

* 针对具体模糊识别问题设计相应的模糊识别系统。
* 用模糊数学对传统模式识别中的一些方法进行改进。

6.2 模糊集合

1. 经典集合论中几个概念

传统经典集合论中的集合称为：

经典集合、普通集合、确定集合、脆集合（Crisp）。

1）论域

讨论集合前给出的所研究对象的范围。选取一般不唯一，根据具体研究的需要而定。

2）子集

对于任意两个集合A、B，若A的每一个元素都是B的元素，则称A是B的“子集”，记为 $A\subseteq B$或$B\supseteq A$；若B中存在不属于A的元素，则称A是B的“真子集”，记为$A\subset B$或$B\supset A$。

3）幂集

对于一个集合A，由其所有子集作为元素构成的集合称为A的“幂集”。

例：论域X={ 1, 2 }，其幂集为 $X' = \{\{\phi\}, \{1\}, \{2\}, \{1,2\}\}$

2. 模糊集合的定义

给定论域X上的一个模糊子集 $\underset{\sim}{A}$，是指：对于任意 $x \in X$，都确定了一个数 $\mu_{\underset{\sim}{A}}(x)$，称 $\mu_{\underset{\sim}{A}}(x)$ 为 x 对 $\underset{\sim}{A}$ 的隶属度，且 $\mu_{\underset{\sim}{A}}(x) \in [0,1]$。

映射 $\mu_{\underset{\sim}{A}}(x)$： $X \to [0, \ 1]$

$$x \mapsto \mu_{\underset{\sim}{A}}(x)$$

叫做 $\underset{\sim}{A}$ 的**隶属函数**，或从属函数。模糊子集常称为模糊集合或模糊集。

说明：

(1) 明确：经典集合+隶属函数$\Rightarrow$模糊集合，隶属函数、隶属度的概念很重要。一般用字母表示经典集合，如A；用大写字母下加“~”号表示模糊集合，如$\underset{\sim}{A}$。

(2) 隶属函数$\mu_{\underset{\sim}{A}}(x)$用于刻画集合$\underset{\sim}{A}$中的元素对$\underset{\sim}{A}$的隶属程度——隶属度，$\mu_{\underset{\sim}{A}}(x)$值越大，$x$隶属于$\underset{\sim}{A}$的程度就越高。

例：$\mu_{\underset{\sim}{A}}(x)=1$：　x完全属于$\underset{\sim}{A}$。

$\mu_{\underset{\sim}{A}}(x)=0$：　x不属于$\underset{\sim}{A}$。

$0<\mu_{\underset{\sim}{A}}(x)<1$：　x属于$\underset{\sim}{A}$的程度介于“属于”和“不属于”之间——模糊的。

(3) 当 $\mu_{\underset{\sim}{A}}(x)$ 的值域[0，1]变为集合{0，1}时，模糊集合退化为经典集合。即，

$$\text{经典集合} \underset{\text{特 例}}{\overset{\text{推 广}}{\rightleftarrows}} \text{模糊集合}$$

(4) 模糊集合中的元素 x 是一个标量时：$\mu_{\underset{\sim}{A}}(x)$ 是 x 的单变量函数。

当 x 为多变量，即 $x=\{x_1, x_2, \Lambda\ , x_n\}$ 时，隶属函数通常定义为

$$\mu_{\underset{\sim}{A}}(x)=\mu_{\underset{\sim}{A(1)}}(x_1)\cdot\mu_{\underset{\sim}{A(2)}}(x_2)\cdots\cdots\mu_{\underset{\sim}{A(n)}}(x_n)$$

其中，$\underset{\sim}{A}(1)$，$\underset{\sim}{A}(2)$，…，$\underset{\sim}{A}(n)$：对应于各变量的模糊子集；

$\mu_{\underset{\sim}{A(i)}}(x_i)$：相应的单变量隶属函数。

单变量隶属函数是基础。

3．相关的几个概念

1）核：模糊集合 $\underset{\sim}{A}$ 的核为

$$\mathrm{Ker}\,\underset{\sim}{A} = \{x \mid \mu_{\underset{\sim}{A}}(x) = 1\}$$

即：是隶属度为1的元素组成的经典集合。

正规模糊集：模糊集合的核是非空的；

非正规模糊集：模糊集合的核是空的。

2）支集：模糊集合 $\underset{\sim}{A}$ 的支集为

$$\mathrm{Supp}\,\underset{\sim}{A} = \{x \mid \mu_{\underset{\sim}{A}}(x) > 0\}$$

即：是隶属度大于零的元素组成的经典集合。

$(\mathrm{Supp}\,\underset{\sim}{A} - \mathrm{Ker}\,\underset{\sim}{A})$ 称为模糊集合 $\underset{\sim}{A}$ 的边界。

3）模糊幂集

模糊集合 $\underset{\sim}{A}$ 的模糊子集组成的集合 $F(\underset{\sim}{A})$ 称为“模糊幂集”。

例：与经典集合中的“幂集”相比较。

经典集合：$A=\{1,\quad 2\}$，

幂集为 $A'=\{\ \{\phi\},\ \{1\},\ \{2\},\ \{1,2\}\ \}$

模糊集合：$\underset{\sim}{A}=\{(0.9,1),\ (0.8,2)\}$

幂集为 $F(\underset{\sim}{A})=\left\{\{\varphi\},\{0.1,1\},\{(0.01,1)\},\ldots\right\}$

可见，经典集合论域为有限集，其幂集必为有限集；

模糊集合的幂集 $F(\underset{\sim}{A})$ 可以为无穷集合。

4．模糊集合的表示

有多种表示方法：要求表现出论域中所有元素与其对应的隶属度之间的关系。

查德的求和表示法和积分表示法：

1）**求和表示法**：

设 $X=\{x_1,x_2,\dots,x_n\}$ 为论域，$\underset{\sim}{A}$ 为 X 上的一个模糊集合。

$$\underset{\sim}{A}=\sum_{i=1}^{n}\mu_{\underset{\sim}{A}}(x_i)\Big/x_i$$

——适用于离散域论域。

“Σ”和“/”：描述 $\underset{\sim}{A}$ 中有哪些元素，以及各元素的隶属度值。

2）**积分表示法**：

$$\underset{\sim}{A}=\int_X\left(\mu_{\underset{\sim}{A}}(x)\Big/x\right)$$

——适合于任何种类的论域，特别是连续论域。

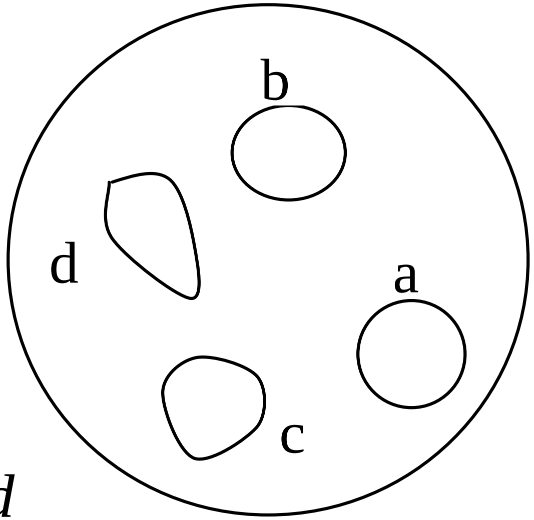
“$\int$”：连续域时元素与隶属度关系的一个总括，标记法。

常用的模糊集合表示方法：

例 6.1　设论域 $X=\{a,b,c,d\}$，$\underset{\sim}{A}$ 为模糊集合“圆形”，对 X 中的每一个元素指定一个它对 $\underset{\sim}{A}$ 的隶属度，表征它们对于圆形的隶属程度，分别为

$$\mu_{\underset{\sim}{A}}(a)=1，\quad \mu_{\underset{\sim}{A}}(b)=0.9，$$

$$\mu_{\underset{\sim}{A}}(c)=0.5，\quad \mu_{\underset{\sim}{A}}(d)=0.2$$



$\underset{\sim}{A}$ 的表示方法有以下几种：

1）求和表示法：$\underset{\sim}{A}=1/a+0.9/b+0.5/c+0.2/d$

2）序偶表示法：$\underset{\sim}{A}=\{(1,a),\ (0.9,b),\ (0.5,c),\ (0.2,d)\}$

3）向量表示法：$\underset{\sim}{A}=(1,\ 0.9,\ 0.5,\ 0.2)$

4）其他表示法，如：$\underset{\sim}{A}=\{1/a，0.9/b，0.5/c，0.2/d\}$

注：当某一元素的隶属函数为0时，这一项可以不计入。

例 6.2 以年龄作为论域，取 X=[0,200]，Zadeh 给出了“年老”与“年轻”两个模糊集 $\underset{\sim}{O}$ 和 $\underset{\sim}{Y}$ 的隶属函数如下：

①

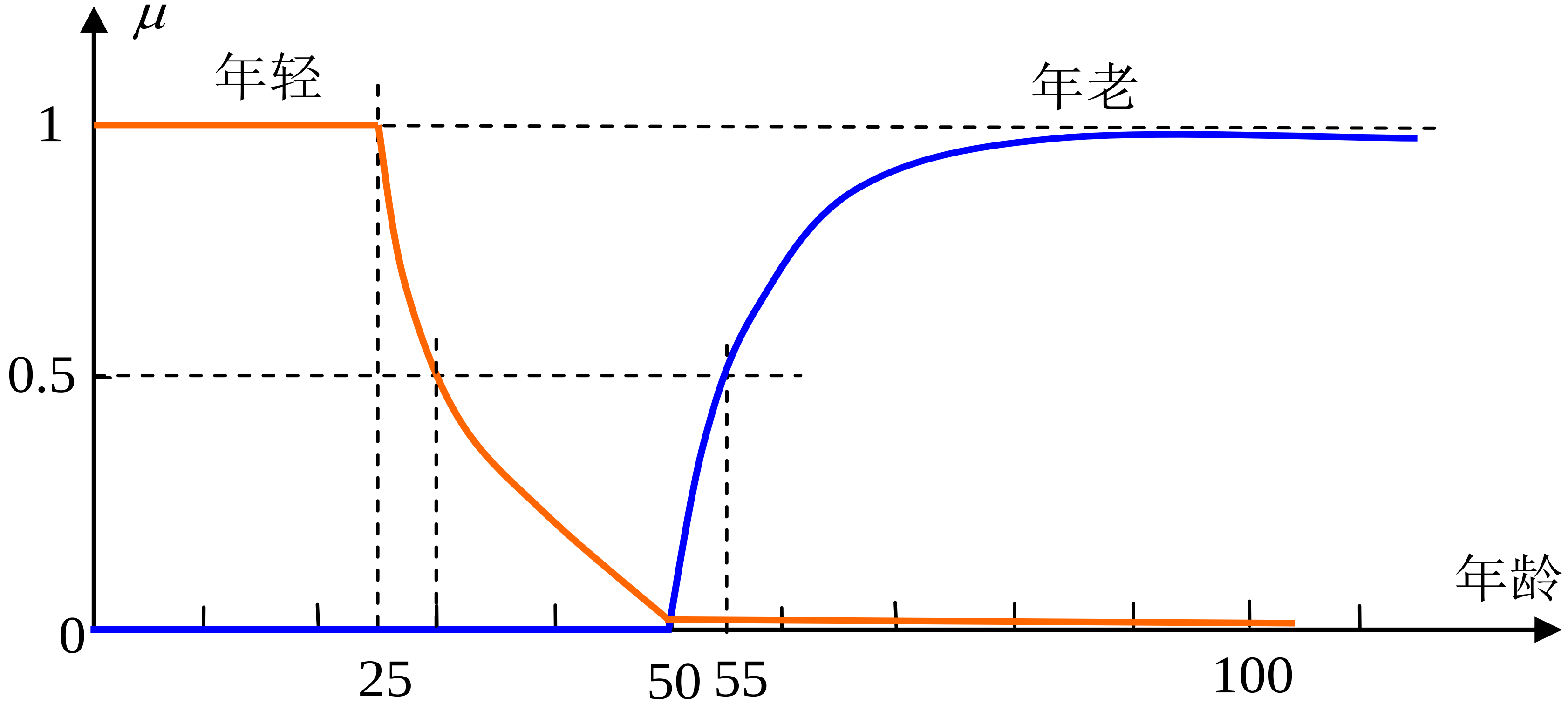
$$\mu_{\underset{\sim}{O}}(x)=\begin{cases}0, & 0\le x\le 50\\ \left[1+\left(\dfrac{x-50}{5}\right)^{-2}\right]^{-1}, & 50<x\le 200\end{cases}$$

$$\mu_{\underset{\sim}{Y}}(x)=\begin{cases}1, & 0\le x\le 25\\ \left[1+\left(\dfrac{x-25}{5}\right)^{+2}\right]^{-1}, & 25<x\le 200\end{cases}$$

② X是一个连续的实数区间，模糊集合表示为

$$\underset{\sim}{O}=\int_X\left(\mu_{\underset{\sim}{O}}(x)\big/x\right)\qquad \underset{\sim}{Y}=\int_X\left(\mu_{\underset{\sim}{Y}}(x)\big/x\right)$$

③ 年轻与年老的隶属函数曲线



6.2.2 隶属函数的确定

隶属函数是模糊集合赖以存在的基石。正确地确定隶属函数是利用模糊集合恰当地定量表示模糊概念的基础。

常用的形式：

S型函数：从0到1单调增长。

π型函数：中间高两边低的函数。

隶属函数的确定：

目前很难找到统一的途径。

构造一个概念的隶属函数时，结果不唯一 。

几种隶属函数的构造与确定方法：

1. 简单正规模糊集合隶属函数的构成

简单正规模糊集合$\underset{\sim}{A}$：含有且只含有一点x_0使$\mu_{\underset{\sim}{A}}(x_0)=1$。

隶属函数的构成：

已知：$\underset{\sim}{A}$的核为x_0；x_0的两边分别有点x_1和x_2，使得$\mu_{\underset{\sim}{A}}(x_1)=0$，$\mu_{\underset{\sim}{A}}(x_2)=0$；当$x_1<x<x_2$时$\mu_{\underset{\sim}{A}}(x)>0$。论域为实数域。

方法：

1）假定：$\mu_{\underset{\sim}{A}}(x)=\begin{cases}[f_1(x)]^{\alpha}, & x_1\le x\le x_0\\ [f_2(x)]^{\beta}, & x_0\le x\le x_2\\ 0, & \text{其它}\end{cases}$

式中，$f_1(x)$和$f_2(x)$为线性函数，且

$$f_1(x_1)=f_2(x_2)=0 \qquad f_1(x_0)=f_2(x_0)=1$$

2) 确定α和β

定出模糊边界x_1^*和x_2^*，满足$\mu_{\underset{\sim}{A}}(x_1^*)=\mu_{\underset{\sim}{A}}(x_2^*)=0.5$。

并确定$x_1^*\in(x_1,x_0)$，$x_2^*\in(x_0,x_2)$，有

$$\alpha=-\lg 2/\lg[f_1(x_1^*)] \qquad \beta=-\lg 2/\lg[f_2(x_2^*)]$$

2. 模糊统计法：利用模糊统计的方法确定隶属函数。

模糊统计试验四要素：

1）论域X，例如人的集合；

2）X中的一个元素x_0，例如王平；

3）X中的一个边界可变的普通集合A，例如“高个子”；

4）条件s，制约着A边界的改变。

方法：

每次试验下，对x_0是否属于A做出一个确定的判断，有

$$x_0 \text{对} \underset{\sim}{A} \text{的隶属频率} \triangleq \frac{\text{“}x_0 \in A\text{” 的次数}}{n}$$

随着n的增大，隶属频率呈现稳定性，所在的稳定值叫隶属度。

$$\mu_{\underset{\sim}{A}}(x_0) = \lim_{n \to \infty} \frac{\text{“}x_0 \in A\text{” 的次数}}{n}$$

例：100 位测试者中，90 位认为王平是高个子，则可以认为

$$\mu_{\underset{\sim}{\text{高个子}}}(\text{王平}) = 0.9$$

3. 二元对比排序法

从两种事物的对比中，做出对某一概念符合程度的判断。是区别事物的一种重要方法。

缺点：

往往不满足数学上对“序”的要求，不具有传递性，出现循环现象。

1）择优比较法

例6.4 求茶花、月季、牡丹、梅花、荷花对“好看的花”的隶属度。

方法：

10名试验者逐次对两种花作对比，优胜花得1分，失败者0分。

表6.1 一位测试者的二元对比结果

失败 优胜	茶花	月季	牡丹	梅花	荷花	得分
茶花		1	0	1	0	2
月季	0		0	1	0	1
牡丹	1	1		1	0	3
梅花	0	0	0		0	0
荷花	1	1	1	1		4

表6.2 五种花对“好看的花”的隶属度

名 称	总 得 分	隶 属 度
茶 花	23	0.23
月 季	18	0.18
牡 丹	20	0.20
梅 花	15	0.15
荷 花	24	0.24

2）优先关系定序法

设对象 $x_1,\dots,x_n$，按某种特性排出优劣次序。定义 c_{ij} 表示 x_i 比 x_j 优越的成分，称作 x_i 对 x_j 的优先选择比，要求

（1）$c_{ii}=0,\quad 0\leq c_{ij}\leq 1$；

（2）$c_{ij}+c_{ji}=1$。

得优先关系矩阵 $\boldsymbol{C}=\left(c_{ij}\right)$。

取阈值 $\lambda\in[0,\ \ 1]$，得到截矩阵 $\boldsymbol{C}_{\lambda}=(c_{ij}^{\lambda})$，其中

$$c_{ij}^{\lambda}=\begin{cases}1, & c_{ij}\geq\lambda\text{时}\\ 0, & c_{ij}\geq\lambda\text{时}\end{cases}$$

令 λ 从 1 下降至 0，若首次出现截矩阵 $\boldsymbol{C}_{\lambda}$ 中的第 i 行元素，除对角线元素外均为 1，则称 x_i 对其它元素的优越成分一致地超过 λ，称其为第一优越元素（不一定唯一）。

除去第一优越元素，得新的优先关系矩阵，同理得第二优越元素，直到将全体元素排序完毕。

例 6.5 设 $X=\{x_1,x_2,x_3\}$，其优先关系矩阵 $\boldsymbol{C}=\begin{pmatrix}0 & 0.9 & 0.2\\ 0.1 & 0 & 0.7\\ 0.8 & 0.3 & 0\end{pmatrix}$，

λ 从 1 至 0 依次截取得

$$\boldsymbol{C}_1=\begin{pmatrix}0&0&0\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix},\quad \boldsymbol{C}_{0.9}=\begin{pmatrix}0&1&0\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix},\quad \boldsymbol{C}_{0.3}=\begin{pmatrix}0&1&0\\0&0&1\\1&1&0\end{pmatrix}$$

x_3为第一优越元素。除去x_3得新的优先关系矩阵。

$$\boldsymbol{C}=\begin{pmatrix}0&0.9\\0.1&0\end{pmatrix}$$

有 $\boldsymbol{C}_{0.9}=\begin{pmatrix}0&1\\0&0\end{pmatrix}$，$x_1$为第二优越元素，排序完毕。

按x_3，x_1，x_2顺序赋予相应的隶属度。

3）相对比较法

4）对比平均法

4. 推理法

根据不同的数学物理知识，设计隶属度函数，然后在实践中检验调整。

一般以成功的实例进行借鉴。

5. 专家评分法

难免引入个人的主观成份，但对某些难以用上述几种方法实现的应用来说，仍不失为一种办法。

6.2.3 模糊集合的运算

1. 基本运算

两个模糊子集间的运算：

逐点对隶属函数作相应的运算，得到新的隶属函数。

在此过程中，论域保持不变。

设 $\underset{\sim}{A}$、$\underset{\sim}{B}$、$\underset{\sim}{C}$、$\underset{\sim}{\bar{A}}$ 为论域中的模糊集合，定义如下几个集合关系

(1)两个模糊子集相等：

若 $\forall x \in X$，均有 $\mu_{\underset{\sim}{A}}(x) = \mu_{\underset{\sim}{B}}(x)$，则称 $\underset{\sim}{A}$ 和 $\underset{\sim}{B}$ 相等。

即： $\underset{\sim}{A} = \underset{\sim}{B} \Leftrightarrow \mu_{\underset{\sim}{A}}(x) = \mu_{\underset{\sim}{B}}(x)$

(2)包含：若$\forall x \in X$，均有$\mu_{\underset{\sim}{A}}(x) \le \mu_{\underset{\sim}{B}}(x)$，称$\underset{\sim}{B}$包含$\underset{\sim}{A}$。

即：
$$\underset{\sim}{A} \subseteq \underset{\sim}{B} \Leftrightarrow \mu_{\underset{\sim}{A}}(x) \le \mu_{\underset{\sim}{B}}(x)$$

(3)补集：

若$\forall x \in X$，均有$\mu_{\underset{\sim}{\overline{A}}}(x) = 1 - \mu_{\underset{\sim}{A}}(x)$，称$\underset{\sim}{\overline{A}}$为$\underset{\sim}{A}$的补集。

即：
$$\underset{\sim}{\overline{A}} \Leftrightarrow \mu_{\underset{\sim}{\overline{A}}}(x) = 1 - \mu_{\underset{\sim}{A}}(x)$$

(4)空集：若$\forall x \in X$，均有$\mu_{\underset{\sim}{A}}(x) = 0$，称$\underset{\sim}{A}$为空集。

即：
$$\underset{\sim}{A} = \phi \Leftrightarrow \mu_{\underset{\sim}{A}}(x) = 0$$

(5)全集：若$\forall x \in X$，均有$\mu_{\underset{\sim}{A}}(x) = 1$，称$\underset{\sim}{A}$为全集，记作$\Omega$。

即：
$$\underset{\sim}{A} = \Omega \Leftrightarrow \mu_{\underset{\sim}{A}}(x) = 1$$

(6)并集：若 $\forall x \in X$，均有 $\mu_{\underset{\sim}{C}}(x) = \max\left(\mu_{\underset{\sim}{A}}(x),\ \mu_{\underset{\sim}{B}}(x)\right)$，

则称 $\underset{\sim}{C}$ 为 $\underset{\sim}{A}$ 与 $\underset{\sim}{B}$ 的并集。

即：$\underset{\sim}{C} = \underset{\sim}{A} \cup \underset{\sim}{B} \Leftrightarrow \mu_{\underset{\sim}{C}}(x) = \max\left(\mu_{\underset{\sim}{A}}(x),\ \mu_{\underset{\sim}{B}}(x)\right)$

或 $\underset{\sim}{C} = \underset{\sim}{A} \cup \underset{\sim}{B} \Leftrightarrow \mu_{\underset{\sim}{C}}(x) = \vee\left(\mu_{\underset{\sim}{A}}(x),\ \mu_{\underset{\sim}{B}}(x)\right) = \mu_{\underset{\sim}{A}}(x) \vee \mu_{\underset{\sim}{B}}(x)$

(7) 交集：若 $\forall x \in X$，均有 $\mu_{\underset{\sim}{C}}(x) = \min\left(\mu_{\underset{\sim}{A}}(x),\ \mu_{\underset{\sim}{B}}(x)\right)$，

则称 $\underset{\sim}{C}$ 为 $\underset{\sim}{A}$ 与 $\underset{\sim}{B}$ 的交集。

即：$\underset{\sim}{C} = \underset{\sim}{A} \cap \underset{\sim}{B} \Leftrightarrow \mu_{\underset{\sim}{C}}(x) = \min\left(\mu_{\underset{\sim}{A}}(x),\ \mu_{\underset{\sim}{B}}(x)\right)$

或 $\underset{\sim}{C} = \underset{\sim}{A} \cap \underset{\sim}{B} \Leftrightarrow \mu_{\underset{\sim}{C}}(x) = \wedge\left(\mu_{\underset{\sim}{A}}(x),\ \mu_{\underset{\sim}{B}}(x)\right) = \mu_{\underset{\sim}{A}}(x) \wedge \mu_{\underset{\sim}{B}}(x)$

例 ① $\underset{\sim}{A}=\left\{\left(0.2,\quad 1\right)\right\}$， $\underset{\sim}{B}=\left\{\left(0.2,\quad 1\right)\right\}$： $\underset{\sim}{A}=\underset{\sim}{B}$

② $\underset{\sim}{C}=\left\{\left(0.7,\quad 1\right)\right\}$， $\underset{\sim}{D}=\left\{\left(0.0,\quad 1\right)\right\}$：

$$\underset{\sim}{C}\supseteq\underset{\sim}{D},\quad \underset{\sim}{D}=\phi,\quad \overline{C}=\left\{\left(\underset{\sim}{0.3}\quad 1\right)\right\}$$

③ $\underset{\sim}{E}=\left\{\left(1.0,\quad 1\right)\right\}$： $\underset{\sim}{E}=\Omega$

例 $\underset{\sim}{A}=\left\{\left(0.1,\quad 1\right)\right\}$， $\underset{\sim}{B}=\left\{\left(0.5,\quad 1\right)\right\}$，

则： $\underset{\sim}{A}\cup\underset{\sim}{B}=\left\{\left(0.1\vee 0.5,\quad 1\right)\right\}=\left\{\left(0.5,\quad 1\right)\right\}$

$$\underset{\sim}{A}\cap\underset{\sim}{B}=\left\{\left(0.1\wedge 0.5,\quad 1\right)\right\}=\left\{\left(0.1,\quad 1\right)\right\}$$

2. 运算的基本性质

（1）自反律： $\underset{\sim}{A} \subseteq \underset{\sim}{A}$

（2）反对称律：若 $\underset{\sim}{A} \subseteq \underset{\sim}{B}$， $\underset{\sim}{B} \subseteq \underset{\sim}{A}$，则 $\underset{\sim}{A} = \underset{\sim}{B}$

（3）交换律： $\underset{\sim}{A} \cup \underset{\sim}{B} = \underset{\sim}{B} \cup \underset{\sim}{A}$， $\underset{\sim}{A} \cap \underset{\sim}{B} = \underset{\sim}{B} \cap \underset{\sim}{A}$

（4）结合律：$(\underset{\sim}{A} \cup \underset{\sim}{B}) \cup \underset{\sim}{C} = \underset{\sim}{A} \cup (\underset{\sim}{B} \cup \underset{\sim}{C})$

$$(\underset{\sim}{A} \cap \underset{\sim}{B}) \cap \underset{\sim}{C} = \underset{\sim}{A} \cap (\underset{\sim}{B} \cap \underset{\sim}{C})$$

（5）分配律： $\underset{\sim}{A} \cup (\underset{\sim}{B} \cap \underset{\sim}{C}) = (\underset{\sim}{A} \cup \underset{\sim}{B}) \cap (\underset{\sim}{A} \cup \underset{\sim}{C})$

$$\underset{\sim}{A} \cap (\underset{\sim}{B} \cup \underset{\sim}{C}) = (\underset{\sim}{A} \cap \underset{\sim}{B}) \cup (\underset{\sim}{A} \cap \underset{\sim}{C})$$

（6）传递律：若 $\underset{\sim}{A} \subseteq \underset{\sim}{B}$， $\underset{\sim}{B} \subseteq \underset{\sim}{C}$， 则 $\underset{\sim}{A} \subseteq \underset{\sim}{C}$

（7）幂等律：$\underset{\sim}{A}\cup\underset{\sim}{A}=\underset{\sim}{A}$，$\underset{\sim}{A}\cap\underset{\sim}{A}=\underset{\sim}{A}$

（8）吸收律：$(\underset{\sim}{A}\cap\underset{\sim}{B})\cup\underset{\sim}{A}=\underset{\sim}{A}$，$(\underset{\sim}{A}\cup\underset{\sim}{B})\cap\underset{\sim}{A}=\underset{\sim}{A}$

（9）对偶律：$\overline{\underset{\sim}{A}\cup\underset{\sim}{B}}=\overline{\underset{\sim}{A}}\cap\overline{\underset{\sim}{B}}$，$\overline{\underset{\sim}{A}\cap\underset{\sim}{B}}=\overline{\underset{\sim}{A}}\cup\overline{\underset{\sim}{B}}$，

也称德·摩根定律。

（10）对合律：$\overline{\overline{\underset{\sim}{A}}}=\underset{\sim}{A}$，即双重否定律。

（11）定常律：$\underset{\sim}{A}\cup\Omega=\Omega$，$\underset{\sim}{A}\cap\Omega=\underset{\sim}{A}$

$\underset{\sim}{A}\cup\varphi=\underset{\sim}{A}$，$\underset{\sim}{A}\cap\varphi=\varphi$

（12) 一般地互补律不成立：$\underset{\sim}{A}\cup\overline{\underset{\sim}{A}}\neq\Omega$，$\underset{\sim}{A}\cap\overline{\underset{\sim}{A}}\neq\varphi$

例 $\underset{\sim}{A}=\{(0.8,\quad a)\}$时，有 $\overline{\underset{\sim}{A}}=\{(0.2,\quad a)\}$，则：

$$\underset{\sim}{A}\cup\overline{\underset{\sim}{A}}=\{(0.8\vee 0.2,\quad a)\}=\{(0.8,\quad a)\}$$

$$\underset{\sim}{A}\cap\overline{\underset{\sim}{A}}=\{(0.8\wedge 0.2,\quad a)\}=\{(0.2,\quad a)\}$$

互补律成立的特例：

$\underset{\sim}{A}=\{(0.0,\quad a)\}$时，$\overline{\underset{\sim}{A}}=\{(1.0,\quad a)\}$；

$\underset{\sim}{A}=\{(1.0,\quad a)\}$时，$\overline{\underset{\sim}{A}}=\{(0.0,\quad a)\}$

此时模糊集合退化为经典集合。

6.2.4 模糊集合与普通集合的相互转化

截集是联系普通集合与模糊集合的桥梁，它们使模糊集合论中的问题转化为普通集合论的问题来解。**等高线的扩展**。

$$\text{模糊集合} \xrightarrow{\text{截集}} \text{普通集合}$$

例：假设有五个病人： x_1 x_2 x_3 x_4 x_5

体温分别为(℃)： 38.9 37.0 37.2 39.2 38.1

则护士统计时有下面记录：

37.0℃以上者 5 人： x_1， x_2， x_3， x_4， x_5

37.5℃以上者 3 人： x_1， x_4， x_5

39.0℃以上者 1 人： x_4

发烧属于模糊概念，用模糊数学来描述更为合适。

根据医生的经验，可将各温度段用“**发烧**”的隶属度表示如下：

T>39.0℃——隶属度=1.0

38.5℃≤ T<39.0℃——隶属度=0.9

38.0℃≤ T<38.5℃——隶属度=0.7

37.0℃≤ T<38.0℃——隶属度=0.4

T<37.0℃——隶属度=0.0

用模糊集合 $\underset{\sim}{A}$ 表示“发烧病人”：

$$\underset{\sim}{A} = \{ (0.9, x_1), (0.4, x_2), (0.4, x_3), (1.0, x_4), (0.7, x_5) \}$$

这样可以方便地对病人分类。例如，对隶属度≥0.9 的病人作为“发高烧”进行特护处理：$A_{0.9} = \{x_1, x_4\}$

类似的还可以有：

$$A_{0.8} = \{x_1, x_4\} \qquad A_{0.4} = \{x_1, x_2, x_3, x_4, x_5\}$$

1. 截集定义

设给定模糊集合 $\underset{\sim}{A}$，论域 X，对任意 $\lambda \in [0,\ 1]$称

$$\text{普通集合}\ A_\lambda = \left\{ x \mid x \in X,\ \ \mu_{\underset{\sim}{A}}(x) \geq \lambda \right\}$$

为 $\underset{\sim}{A}$ 的 λ 截集（隶属度大于 λ 的成员集合）。

例： $\underset{\sim}{A} = 1/a + 0.9/b + 0.5/c + 0.2/d$，论域 $X = \{a,b,c,d\}$，

则： $A_1 = \{a\}$， $A_{0.9} = \{a,b\}$， $A_{0.8} = \{a,b\}$，

$A_{0.5} = \{a,b,c\}$， $A_{0.1} = \{a,b,c,d\}$， $A_0 = X$ 。

2. 截集的三个性质

① $(\underset{\sim}{A}\cup\underset{\sim}{B})_\lambda=A_\lambda\cup B_\lambda$

例： $\underset{\sim}{A}=\{(0.5,a),\ (0.8,b)\}$， $\underset{\sim}{B}=\{(0.9,a),\ (0.2,b)\}$，则

左： $\underset{\sim}{A}\cup\underset{\sim}{B}=\{(0.5\vee0.9,a),\ (0.8\vee0.2,b)\}=\{(0.9,a),\ (0.8,b)\}$

$(\underset{\sim}{A}\cup\underset{\sim}{B})_{0.5}=\{a,b\}$

右： $A_{0.5}=\{a,b\}$， $B_{0.5}=\{a\}$，有 $A_{0.5}\cup B_{0.5}=\{a,b\}$

所以：在 $\lambda=0.5$时，$(\underset{\sim}{A}\cup\underset{\sim}{B})_\lambda=A_\lambda\cup B_\lambda$。在其他 λ 值时同样成立。

② $(\underset{\sim}{A}\cap\underset{\sim}{B})_\lambda = A_\lambda \cap B_\lambda$

左： $\underset{\sim}{A}\cap\underset{\sim}{B} = \left\{ \left(0.5\wedge 0.9, a\right),\quad \left(0.8\wedge 0.2, b\right) \right\} = \left\{ \left(0.5, a\right),\quad \left(0.2, b\right) \right\}$

$(\underset{\sim}{A}\cap\underset{\sim}{B})_{0.3} = \left\{ a \right\}$

右： $A_{0.3} = \left\{ a, b \right\}$， $B_{0.3} = \left\{ a \right\}$，有 $A_{0.3}\cap B_{0.3} = \left\{ a \right\}$

所以： $\lambda = 0.3$时， $(\underset{\sim}{A}\cap\underset{\sim}{B})_\lambda = A_\lambda \cap B_\lambda$

③ 若 λ, $\mu \in [0,\ 1]$，且 $\lambda \le \mu$，则 $A_\lambda \supseteq A_\mu$。

例：对 $\underset{\sim}{A} = \left\{ \left(0.2, x_1\right),\quad \left(0.5, x_2\right),\quad \left(0.8, x_3\right),\quad \left(1.0, x_4\right),\quad \left(0.7, x_5\right) \right\}$

有 $A_{0.4} = \left\{ x_2, x_3, x_4, x_5 \right\}$， $A_{0.5} = \left\{ x_2, x_3, x_4, x_5 \right\}$， $A_{0.8} = \left\{ x_3, x_4 \right\}$

显然： $A_{0.5} \supset A_{0.8}$（或 $A_{0.5} \supseteq A_{0.8}$）

$A_{0.4} = A_{0.5}$（满足 $A_{0.4} \supseteq A_{0.5}$）

6.3 模糊关系与模糊矩阵

普通关系：二值的，存在或者不存在关系，
两者必居且仅居其一。

模糊关系：需要用描述关系程度的量补充描述，
关系程度通过隶属度表示。

6.3.1 模糊关系定义

1．基本概念

设X、Y是两个论域，

笛卡尔积：$X \times Y = \{(x,y) \mid x \in X, y \in Y\}$ 又称直积。

——— 由两个集合间元素无约束地搭配成的序偶（x，y）的全体构成的集合。

如果：　　　给无约束搭配施以某种约束

$\Big\downarrow$ 体现一种特殊关系

接受约束的元素对便构成笛卡尔集中的一个子集

子集表现了一种关系

序偶中两个元素的排列是有序的：

对于 $X \times Y$ 中的元素必须是 (x, y)， $x \in X$， $y \in Y$，

即 (x, y) 与 (y, x) 是不同的序偶。一般地，$X \times Y \neq Y \times X$ 。

普通集合论：

X到Y的一个关系，定义为$X \times Y$的一个子集R，记作

$$X \xrightarrow{R} Y$$

模糊关系的定义类似。

2. 模糊关系定义

设 X、Y 是两个论域，称 $X\times Y$ 的一个模糊子集 $\underset{\sim}{R}$ 为从 X 到 Y 的一个模糊关系，记作

$$X \xrightarrow{\underset{\sim}{R}} Y$$

模糊关系 $\underset{\sim}{R}$ 的隶属函数 $\mu_{\underset{\sim}{R}}$ 为

$$\mu_{\underset{\sim}{R}}:\quad X\times Y \to [0\quad 1]$$

$\mu_{\underset{\sim}{R}}(x_0,y_0)$：是 (x_0,y_0) 具有关系 $\underset{\sim}{R}$ 的程度。

特别地，当 $X=Y$ 时，称 $\underset{\sim}{R}$ 为“论域 X 中的模糊关系”。

例 6.9 X={张，王，赵}，$\underset{\sim}{R}$——朋友关系。则

$\underset{\sim}{R}$（张，王）=1 ---关系极好；

$\underset{\sim}{R}$（张，赵）=0.8 ---相对不错；

$\underset{\sim}{R}$（王，赵）=0.2 ---酒肉朋友；

例 6.10 设 X、Y 均为实数集合，对任意的 $x \in X$，$y \in Y$，“x 远大于 y”是一个 X 到 Y 的模糊关系 $\underset{\sim}{R}$，其隶属函数可以描述为：

$$\mu_{\underset{\sim}{R}}(x, y) = \begin{cases} 0, & x \le y \\ \left[1 + \dfrac{100}{(x-y)^2}\right]^{-1}, & x > y \end{cases}$$

计算有：

$$x = y + 1: \qquad \mu_{\underset{\sim}{R}}(x, y) = \frac{1}{101}$$

$$x = y + 10: \qquad \mu_{\underset{\sim}{R}}(x, y) = \frac{1}{2}$$

$$x = y + 100: \qquad \mu_{\underset{\sim}{R}}(x, y) = \frac{100}{101}$$

$$0 \;\big\downarrow\; 1$$

例 6.11 医学上通常用公式体重(kg)=身高(cm)-100 来描述正常人的体重与身高的关系，这是一个普通的二元关系。模糊关系将能更客观地反映出身高与体重的关系。注：这种模糊关系，反映的是个体体重-身高关系与标准关系的契合程度。

身高与标准体重间的模糊关系

$\mu_{\underset{\sim}{R}}(x,y)$	40kg	50kg	60kg	70kg	80kg
140cm	1	0.8	0.2	0.1	0
150cm	0.8	1	0.8	0.2	0.1
160cm	0.2	0.8	1	0.8	0.2
170cm	0.1	0.2	0.8	1	0.8
180cm	0	0.1	0.2	0.8	1

6.3.2 模糊关系的表示

1. 用模糊矩阵表示

对于矩阵 $\boldsymbol{R}=\left(r_{ij}\right)_{n\times m}$，若其所有元素满足 $r_{ij}\in[0,1]$，则称 $\boldsymbol{R}$ 为模糊矩阵，其中 $r_{ij}=\mu_{\underset{\sim}{R}}\left(x_i,y_j\right)$。

当 X、Y 是有限论域时，模糊关系 $\underset{\sim}{R}$ 可以用模糊矩阵 $\boldsymbol{R}$ 表示。

如：例6.11中的模糊关系对应的模糊矩阵

$$\begin{array}{cc} & \text{体重 } y \\ \boldsymbol{R}= & \begin{pmatrix} 1 & 0.8 & 0.2 & 0.1 & 0 \\ 0.8 & 1 & 0.8 & 0.2 & 0.1 \\ 0.2 & 0.8 & 1 & 0.8 & 0.2 \\ 0.1 & 0.2 & 0.8 & 1 & 0.8 \\ 0 & 0.1 & 0.2 & 0.8 & 1 \end{pmatrix} \text{身高 } x \end{array}$$

特别地，当 $r_{ij}\in\{0,\ 1\}$时，矩阵 $\boldsymbol{R}$ 退化为布尔矩阵，

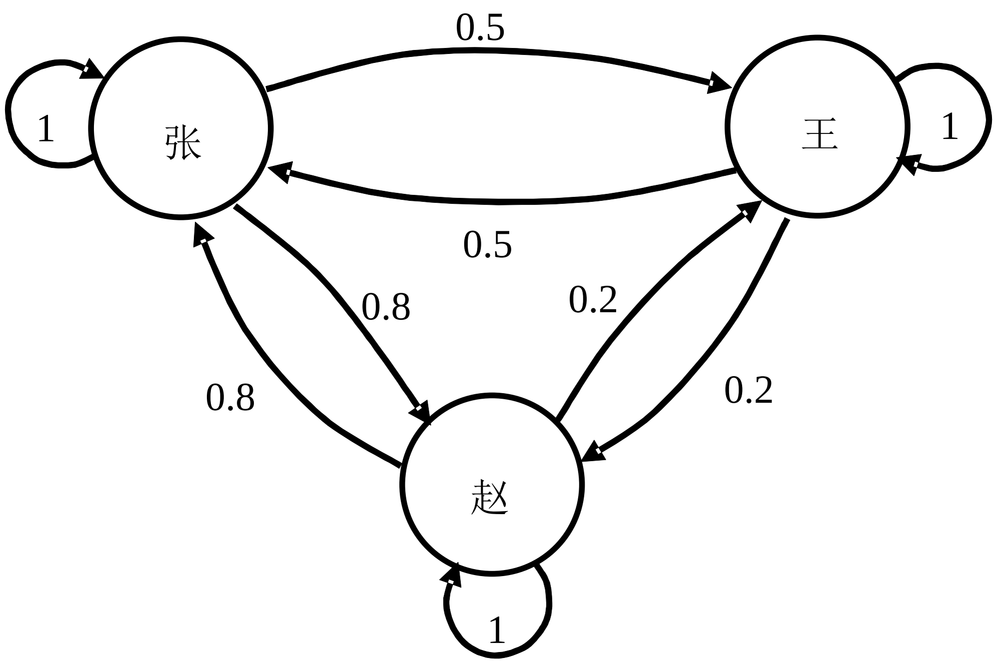
布尔矩阵可以表示一种普通关系。

2. 用有向图表示

例 6.12 设 $\underset{\sim}{R}$ 为模糊关系“相像”，且有

$\underset{\sim}{R}$ (张，王)=0.5， $\underset{\sim}{R}$ (张，赵)=0.8， $\underset{\sim}{R}$ (王，赵)=0.2

有向图表示：



模糊关系的有向图表示

6.3.3 模糊关系的建立

计算 r_{ij}

第一步：正规化。

极值标准化公式：$x = \dfrac{x' - x'_{\min}}{x'_{\max} - x'_{\min}}$

当 $x' = x'_{\max}$ 时，x=1；

当 $x' = x'_{\min}$ 时，x=0；

其他，取[0，1]之间的值。

第二步：计算 r_{ij}，确定模糊关系 $\underset{\sim}{R}$ 的矩阵 $\boldsymbol{R}$。其中 $i, j = 1, 2, \ldots, n$，n 为对象个数。

$$\boldsymbol{R} = \begin{bmatrix} r_{11} & r_{12} & \cdots & r_{1n} \\ r_{21} & r_{22} & & r_{2n} \\ \cdots & & & \cdots \\ r_{n1} & r_{n2} & \cdots & r_{nn} \end{bmatrix}$$

计算r_{ij}的常用方法：

1）欧式距离法

$$r_{ij} = \sqrt{\frac{1}{m}\sum_{k=1}^{m}\left(x_{ik} - x_{jk}\right)^2}$$

x_{ik}和x_{jk}：分别为第 i 个对象和第 j 个对象的第 k 个因子的值；

m：因子的个数。

2）内积法

$$r_{ij} = \begin{cases} 1, & 当 i = j \\ \sum_{k=1}^{m} \dfrac{x_{ik} \cdot x_{jk}}{M}, & 当 i \neq j \end{cases}$$

M：正数，满足

$$M \geq \max_{i,\ j} \sum_{k=1}^{m} (x_{ik} \cdot x_{jk})$$

3）相关系数法

$$r_{ij} = \frac{\sum_{k=1}^{m} | x_{ik} - \bar{x}_i || x_{jk} - \bar{x}_j |}{\sqrt{\sum_{k=1}^{m} (x_{ik} - \bar{x}_i)^2} \cdot \sqrt{\sum_{k=1}^{m} (x_{jk} - \bar{x}_j)^2 |}}$$

其中，$\bar{x}_i = \frac{1}{m}\sum_{k=1}^{m} x_{ik} \quad \bar{x}_j = \frac{1}{m}\sum_{k=1}^{m} x_{jk}$

4）最大最小法

$$r_{ij} = \frac{\sum_{k=1}^{m} \min\left(x_{ik}, x_{jk}\right)}{\sum_{k=1}^{m} \max\left(x_{ik}, x_{jk}\right)}$$

5）主观评定法

以百分制打分，然后除以100，得[0，1]区间的一个数。

6.3.4 模糊关系和模糊矩阵的运算

1．并、交、补运算

1）模糊关系的并、交、补运算

设论域 X 和 Y，$\underset{\sim}{R}$ 和 $\underset{\sim}{S}$ 均为从 X 到 Y 的模糊关系，

对于任意的 $(x, y) \in X \times Y$ 定义

$\underset{\sim}{R}$ 与 $\underset{\sim}{S}$ 的并运算记为 $\underset{\sim}{R} \cup \underset{\sim}{S}$，隶属函数为 $\mu_{\underset{\sim}{R} \cup \underset{\sim}{S}}(x, y) = \mu_{\underset{\sim}{R}}(x, y) \vee \mu_{\underset{\sim}{S}}(x, y)$；

$\underset{\sim}{R}$ 与 $\underset{\sim}{S}$ 的交运算记为 $\underset{\sim}{R} \cap \underset{\sim}{S}$，隶属函数为 $\mu_{\underset{\sim}{R} \cap \underset{\sim}{S}}(x, y) = \mu_{\underset{\sim}{R}}(x, y) \wedge \mu_{\underset{\sim}{S}}(x, y)$；

$\underset{\sim}{R}$ 的补运算记为 $\overline{\underset{\sim}{R}}$ ，隶属函数定义为 $\mu_{\overline{\underset{\sim}{R}}}(x, y) = 1 - \mu_{\underset{\sim}{R}}(x, y)$

2）模糊矩阵的并、交、补运算

设 $\boldsymbol{R}=\left(r_{ij}\right)_{n\times m}$， $\boldsymbol{S}=\left(s_{ij}\right)_{n\times m}$，定义

$\boldsymbol{R}\cup\boldsymbol{S}=\left(r_{ij}\vee s_{ij}\right)$为模糊矩阵 $\boldsymbol{R}$ 与 $\boldsymbol{S}$ 的并运算；

$\boldsymbol{R}\cap\boldsymbol{S}=\left(r_{ij}\wedge s_{ij}\right)$为模糊矩阵 $\boldsymbol{R}$ 与 $\boldsymbol{S}$ 的交运算；

$\overline{\boldsymbol{R}}=\left(1-r_{ij}\right)$为模糊矩阵 $\boldsymbol{R}$ 的补运算。

模糊关系并、交、补运算分别与模糊矩阵并、交、补运算对应。
模糊关系和模糊矩阵的运算实际上就是隶属度的运算。

例 6.13 模糊关系运算。设论域 $X=\{x_1\ \ x_2\ \ x_3\}$，$Y=\{y_1\ \ y_2\ \ y_3\ \ y_4\}$，

$\underset{\sim}{R}$、$\underset{\sim}{S}$ 是两个 X 到 Y 的模糊关系：

$\underset{\sim}{R}$ = "x 比 y 高":

$$\begin{array}{c|cccc} & y_1 & y_2 & y_3 & y_4 \\ \hline x_1 & 0 & 0 & 0.1 & 0.8 \\ x_2 & 0 & 0.8 & 0 & 0 \\ x_3 & 0.1 & 0.8 & 1 & 0.8 \end{array}$$

$\underset{\sim}{S}$ = "x 比 y 胖":

$$\begin{array}{c|cccc} & y_1 & y_2 & y_3 & y_4 \\ \hline x_1 & 0.4 & 0.4 & 0.2 & 0.1 \\ x_2 & 0.5 & 0 & 1 & 1 \\ x_3 & 0.5 & 0.1 & 0.2 & 0.6 \end{array}$$

求：a) 关系"x比y高或比y胖"；

b) 关系"与y相比，x又高又胖"；

c) 关系"x没y高"。

解：a) 可用 $\underset{\sim}{R}$ 与 $\underset{\sim}{S}$ 的并集表示：

$\underset{\sim}{R} \cup \underset{\sim}{S}$：

$$\begin{array}{c|cccc} & y_1 & y_2 & y_3 & y_4 \\ \hline x_1 & 0.4 & 0.4 & 0.2 & 0.8 \\ x_2 & 0.5 & 0.8 & 1 & 1 \\ x_3 & 0.5 & 0.8 & 1 & 0.8 \end{array}$$

b)可用 $\underset{\sim}{R}$ 与 $\underset{\sim}{S}$ 的交集表示：

$\underset{\sim}{R} \cap \underset{\sim}{S}$：

$$\begin{array}{c|cccc} & y_1 & y_2 & y_3 & y_4 \\ \hline x_1 & 0 & 0 & 0.1 & 0.1 \\ x_2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ x_3 & 0.1 & 0.1 & 0.2 & 0.6 \end{array}$$

$\underset{\sim}{R}$ = “x 比 y 高”:

	y_1	y_2	y_3	y_4
x_1	0	0	0.1	0.8
x_2	0	0.8	0	0
x_3	0.1	0.8	1	0.8

c) 关系“x 没 y 高” 可用 $\underset{\sim}{R}$ 的补集表示:

$\overline{\underset{\sim}{R}}$:

	y_1	y_2	y_3	y_4
x_1	1	1	0.9	0.2
x_2	1	0.2	1	1
x_3	0.9	0.2	0	0.2

例 6.14　模糊矩阵运算，设 $\boldsymbol{R}=\begin{pmatrix}0.5 & 0.3\\ 0.4 & 0.8\end{pmatrix}$、$\boldsymbol{S}=\begin{pmatrix}0.8 & 0.5\\ 0.3 & 0.7\end{pmatrix}$，求 $\boldsymbol{R}\cup\boldsymbol{S}$、$\boldsymbol{R}\cap\boldsymbol{S}$、$\overline{\boldsymbol{R}}$。

解：$$\boldsymbol{R}\cup\boldsymbol{S}=\begin{pmatrix}0.5\vee 0.8 & 0.3\vee 0.5\\ 0.4\vee 0.3 & 0.8\vee 0.7\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0.8 & 0.5\\ 0.4 & 0.8\end{pmatrix}$$

$$\boldsymbol{R}\cap\boldsymbol{S}=\begin{pmatrix}0.5\wedge 0.8 & 0.3\wedge 0.5\\ 0.4\wedge 0.3 & 0.8\wedge 0.7\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0.5 & 0.3\\ 0.3 & 0.7\end{pmatrix}$$

$$\overline{\boldsymbol{R}}=\begin{pmatrix}1-0.5 & 1-0.3\\ 1-0.4 & 1-0.8\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0.5 & 0.7\\ 0.6 & 0.2\end{pmatrix}$$

2. 模糊关系的倒置与模糊矩阵的转置

1）模糊关系的倒置

设 $\underset{\sim}{R} \in X \times Y$，则 $\underset{\sim}{R}$ 的“倒置” $\underset{\sim}{R}^{\mathrm{T}} \in Y \times X$ 是指

$$\mu_{\underset{\sim}{R}^{\mathrm{T}}}(y,x) = \mu_{\underset{\sim}{R}}(x,y)$$

—— 又称 $\underset{\sim}{R}$ 的逆关系

2）模糊矩阵的转置（同一关系的不同表达）

设 $\boldsymbol{R} = (r_{ij})_{n \times m}$， 则称 $\boldsymbol{R}^{\mathrm{T}} = (r_{ij}^{\mathrm{T}})_{m \times n}$ 是 $\boldsymbol{R}$ 的转置矩阵，

其中，

$$r_{ij}^{\mathrm{T}} = r_{ji},\ \ (1 \le i \le m, 1 \le j \le n)$$

例6.15　模糊关系$\underset{\sim}{R}$ = “x比y高”　　对应的模糊矩阵

$$\begin{array}{c|cccc} & y_1 & y_2 & y_3 & y_4 \\ \hline x_1 & 0 & 0 & 0.1 & 0.8 \\ x_2 & 0 & 0.8 & 0 & 0 \\ x_3 & 0.1 & 0.8 & 1 & 0.8 \end{array}$$

$$\boldsymbol{R} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0.1 & 0.8 \\ 0 & 0.8 & 0 & 0 \\ 0.1 & 0.8 & 1 & 0.8 \end{pmatrix}$$

则 $\underset{\sim}{R}$ 的逆关系　“y 比 x 低” 可以用 $\underset{\sim}{R}^{\mathrm{T}}$ 表示：

$\underset{\sim}{R}^{\mathrm{T}}$ = “y比x低”　　对应的模糊矩阵

$$\begin{array}{c|ccc} & x_1 & x_2 & x_3 \\ \hline y_1 & 0 & 0 & 0.1 \\ y_2 & 0 & 0.8 & 0.8 \\ y_3 & 0.1 & 0 & 1 \\ y_4 & 0.8 & 0 & 0.8 \end{array}$$

$$\boldsymbol{R}^{\mathrm{T}} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0.1 \\ 0 & 0.8 & 0.8 \\ 0.1 & 0 & 1 \\ 0.8 & 0 & 0.8 \end{pmatrix}$$

原来的 “ x_1 比 y_4 高， $\mu = 0.8$ ” 变为 “ y_4 比 x_1 低， $\mu = 0.8$ ”

3．截矩阵与截关系

对任意 $\lambda \in [0,1]$，记 $\boldsymbol{R}_\lambda = \left(r_{ij}^{\lambda}\right)$，其中 $r_{ij}^{\lambda} = \begin{cases} 1, & r_{ij} \geq \lambda \\ 0, & r_{ij} < \lambda \end{cases}$，

称 $\boldsymbol{R}_\lambda$ 为 $\boldsymbol{R}$ 的 λ 截矩阵，它所对应的关系叫 $\underset{\sim}{R}$ 的截关系。

截矩阵必是布尔矩阵。

例：对关系矩阵如下：$\boldsymbol{R} = \begin{pmatrix} 0.3 & 0.7 & 0.5 \\ 0.8 & 1 & 0 \\ 0 & 0.6 & 0.4 \end{pmatrix}$

则：$\boldsymbol{R}_{0.7} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$，$\boldsymbol{R}_{0.4} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$

4. 模糊关系合成与模糊矩阵合成

例：模糊关系 $\underset{\sim}{Q}$ = “x 比 y 年龄大”， $\underset{\sim}{R}$ = “y 比 z 年龄大”，则 “x 比 z 年龄大”。

1）模糊关系合成

设论域 X，Y，Z， $\underset{\sim}{Q}$ 和 $\underset{\sim}{R}$ 为两个模糊关系，且 $\underset{\sim}{Q} \in X \times Y$，$\underset{\sim}{R} \in Y \times Z$，定义 $\underset{\sim}{Q}$ 对 $\underset{\sim}{R}$ 的“合成”为 X 到 Z 的一个模糊关系 $\underset{\sim}{Q} \circ \underset{\sim}{R}$，它具有隶属函数

$$\mu_{\underset{\sim}{Q} \circ \underset{\sim}{R}}(x, z) = \bigvee_{y \in Y}\left(\mu_{\underset{\sim}{Q}}(x, y) \wedge \mu_{\underset{\sim}{R}}(y, z)\right)$$

幂运算：模糊关系与自身的运算，即：

$$\underset{\sim}{R}^2 = \underset{\sim}{R} \circ \underset{\sim}{R} \qquad \underset{\sim}{R}^n = \underset{\sim}{R}^{n-1} \circ \underset{\sim}{R}$$

2）模糊矩阵合成

设 $\boldsymbol{Q}=\left(q_{ij}\right)_{n\times m}$, $\boldsymbol{R}=\left(r_{jk}\right)_{m\times l}$ ，定义模糊矩阵 $\boldsymbol{Q}$ 与 $\boldsymbol{R}$ 的“合成”为 $\boldsymbol{S}=\boldsymbol{Q}\circ\boldsymbol{R}$ ，且

$$\boldsymbol{S}=\left(s_{ik}\right)_{n\times l}, \quad s_{ik}=\bigvee_{j=1}^{m}\left(q_{ij}\wedge r_{jk}\right)$$

$\boldsymbol{S}$ 也称作 $\boldsymbol{Q}$ 对 $\boldsymbol{R}$ 的模糊乘积。

类似

对比　对有限论域：

普通矩阵乘法运算　　模糊矩阵乘积运算

$$\left(\boldsymbol{Q}_{n\times m}\boldsymbol{R}_{m\times l}\right)_{ik}=\sum_{j=1}^{m} q_{ij}\cdot r_{jk} \qquad \left(\boldsymbol{Q}_{n\times m}\boldsymbol{R}_{m\times l}\right)_{ik}=\bigvee_{j=1}^{m}\left(q_{ij}\wedge r_{jk}\right)$$

加法 → 求大

乘法 → 求小

例 6.16 $\boldsymbol{Q}=\begin{pmatrix}0.1 & 0.5\\ 0.2 & 0.3\end{pmatrix}$， $\boldsymbol{R}=\begin{pmatrix}0.3 & 0.4\\ 0.6 & 0.3\end{pmatrix}$， 求$\boldsymbol{Q}$对$\boldsymbol{R}$的合成矩阵。

$$\boldsymbol{S}=\boldsymbol{Q}\circ\boldsymbol{R}=\begin{pmatrix}(0.1\wedge 0.3)\vee(0.5\wedge 0.6) & (0.1\wedge 0.4)\vee(0.5\wedge 0.3)\\ (0.2\wedge 0.3)\vee(0.3\wedge 0.6) & (0.2\wedge 0.4)\vee(0.3\wedge 0.3)\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0.5 & 0.3\\ 0.3 & 0.3\end{pmatrix}$$

例 6.17 $\boldsymbol{Q}=\begin{pmatrix}0.3 & 0.7 & 0.2\\ 1 & 0 & 0.4\\ 0 & 0.5 & 1\\ 0.6 & 0.7 & 0.8\end{pmatrix}_{4\times 3}$， $\boldsymbol{R}=\begin{pmatrix}0.1 & 0.9\\ 0.9 & 0,1\\ 0.6 & 0.4\end{pmatrix}_{3\times 2}$， 求合成矩阵。

解： 显然$\boldsymbol{R}\circ\boldsymbol{Q}$是无意义的， 求$\boldsymbol{S}=\boldsymbol{Q}\circ\boldsymbol{R}$：

$$s_{11}=(0.3\wedge 0.1)\vee(0.7\wedge 0.9)\vee(0.2\wedge 0.6)$$

$$=0.1\vee 0.7\vee 0.2=0.7$$

$s_{12}=\Lambda\ \Lambda$

$$\boldsymbol{S}=\begin{pmatrix}0.7 & 0.3\\ 0.4 & 0.9\\ 0.6 & 0.4\\ 0.7 & 0.6\end{pmatrix}_{4\times 2}$$

与普通矩阵运算相同，模糊矩阵的合成运算不满足交换律，即$\boldsymbol{Q}\circ\boldsymbol{R}\neq\boldsymbol{R}\circ\boldsymbol{Q}$。

6.3.5 模糊关系的三大性质

1. 自反性

设 $\underset{\sim}{R}$ 是 $X\times X$ 中的模糊关系，对 $\forall x\in X$ 若存在 $\mu_{\underset{\sim}{R}}(x,x)=1$，则称 $\underset{\sim}{R}$ 满足自反性。其相应矩阵 $\boldsymbol{R}$ 称自反模糊矩阵，满足 $\boldsymbol{R}\supseteq\boldsymbol{I}$。

例：关系“等于”——具有自反性，

关系“了解”——不具有自反性。

2. 对称性

设 $\underset{\sim}{R}$ 是 $X\times X$ 中的模糊关系，对 $\forall(x,y)\in X\times X$，若存在 $\mu_{\underset{\sim}{R}}(x,y)=\mu_{\underset{\sim}{R}}(y,x)$，则称 $\underset{\sim}{R}$ 满足对称性。其相应矩阵 $\boldsymbol{R}$ 称对称模糊矩阵，满足 $\boldsymbol{R}^{\mathrm{T}}=\boldsymbol{R}$。

例 6.18　模糊矩阵 $\boldsymbol{R}=\begin{pmatrix}1 & 0.2 & 0.4\\ 0.2 & 1 & 0.7\\ 0.4 & 0.7 & 1\end{pmatrix}$， $\boldsymbol{S}=\begin{pmatrix}0.1 & 0.3 & 0.6\\ 0.3 & 0.7 & 0.2\\ 0.6 & 0.2 & 1.0\end{pmatrix}$

a) $\boldsymbol{R}$ 具有对称性和自反性：可表示“相像”之类的关系。

如 x_1 像 x_1 自己（$\mu=1$）； x_1 像 x_2 0.2 ， x_2 像 x_1 也是 0.2。

b) $\boldsymbol{S}$只有对称性，无自反性。

3. 传递性

设 $\underset{\sim}{R}$ 是 $X\times X$ 中的模糊关系，对 $\forall(x,y),(y,z),(x,z)\in X\times X$，

若存在：

$$\mu_{\underset{\sim}{R}}(x,y)\geq\lambda，\quad \mu_{\underset{\sim}{R}}(y,z)\geq\lambda\text{ 时，}\quad \mu_{\underset{\sim}{R}}(x,z)\geq\lambda\text{ 成立}$$

则称 $\underset{\sim}{R}$ 满足传递性。其相应矩阵 $\boldsymbol{R}$ 称为传递模糊矩阵，满足

$$\boldsymbol{R}\supseteq\boldsymbol{R}\circ\boldsymbol{R}$$

说明：

1） 矩阵 $\boldsymbol{R}\supseteq\boldsymbol{R}\circ\boldsymbol{R}$ 可以理解为：$\boldsymbol{R}(x,z)\supseteq\boldsymbol{R}(x,y)\circ\boldsymbol{R}(y,z)$。

注意：关系 $\underset{\sim}{R}$ 始终不变。

$\boldsymbol{R}(x,y)$与 $\boldsymbol{R}(y,z)$合成后的隶属度反映的是模糊关系 $\underset{\sim}{R}(x,z)$ 存在的最低基本条件，只要 x、z 具有关系 $\underset{\sim}{R}$ 的隶属度大于或等于这个合成后的隶属度，这个模糊关系可以传递下去。

2） 其中“若存在 $\mu_{\underset{\sim}{R}}(x,y)\geq\lambda$， $\mu_{\underset{\sim}{R}}(y,z)\geq\lambda$ 时，有 $\mu_{\underset{\sim}{R}}(x,z)\geq\lambda$ 成立”，也可描述为：

$$\mu_{\underset{\sim}{R}}(x,z)\geq\bigvee_{y}\left[\mu_{\underset{\sim}{R}}(x,y)\wedge\mu_{\underset{\sim}{R}}(y,z)\right]$$

例：“个子高”——具有传递性，

“认　识”——不具有传递性。

例6.19　判断模糊矩阵 $\boldsymbol{R}=\begin{pmatrix}0.1 & 0.2 & 0.3\\ 0 & 0.1 & 0.2\\ 0 & 0 & 0.1\end{pmatrix}$是否是传递的。

解：$\boldsymbol{R}\circ\boldsymbol{R}=\begin{pmatrix}0.1 & 0.2 & 0.3\\ 0 & 0.1 & 0.2\\ 0 & 0 & 0.1\end{pmatrix}\circ\begin{pmatrix}0.1 & 0.2 & 0.3\\ 0 & 0.1 & 0.2\\ 0 & 0 & 0.1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0.1 & 0.1 & 0.2\\ 0 & 0.1 & 0.1\\ 0 & 0 & 0.1\end{pmatrix}\overset{?}{\subseteq}\boldsymbol{R}$

$\therefore$ $\boldsymbol{R}$是一个传递模糊矩阵。

4. 模糊等价关系和模糊相似关系

定义：

设 $\underset{\sim}{R}$ 是 $X \times X$ 中的模糊关系，若 $\underset{\sim}{R}$ 具有自反性和对称性，则称 $\underset{\sim}{R}$ 为模糊相似关系， $\underset{\sim}{R}$ 对应的矩阵称模糊相似矩阵；

若 $\underset{\sim}{R}$ 具有自反性、对称性和传递性，则称 $\underset{\sim}{R}$ 为模糊等价关系，与 $\underset{\sim}{R}$ 对应的矩阵称模糊等价矩阵。

在应用模糊关系分类时，必须保证模糊关系是等价的，这时可利用截矩阵直接进行分类。

6.4 模糊模式分类的直接方法和间接方法

6.4.1 直接方法——隶属原则

直接计算样品的隶属度，根据隶属度最大原则进行分类。

——用于单个模式的识别

隶属原则：

设论域 X 中有 M 个模糊集 $\underset{\sim}{A}_1, \underset{\sim}{A}_2, \ldots, \underset{\sim}{A}_M$ ，且对每一个 $\underset{\sim}{A}_i$ 均有隶属函数 $\mu_{\underset{\sim}{A}_i}(x)$，则对任一 $x_0 \in X$ ，若有

$$\mu_{\underset{\sim}{A}_i}(x_0) = \max\left[\mu_{\underset{\sim}{A}_1}(x_0), \mu_{\underset{\sim}{A}_2}(x_0), \ldots, \mu_{\underset{\sim}{A}_M}(x_0)\right]$$

则认为 x_0 隶属于 $\underset{\sim}{A}_i$ 。

隶属原则是显然的，易于公认的，但其分类效果如果，十分依赖于建立已知模式类隶属函数的技巧。

例 6.20 将人分为老、中、青三类，它们分别对应于三个模糊集合 $\underset{\sim}{A}_1$、$\underset{\sim}{A}_2$、$\underset{\sim}{A}_3$，其隶属函数为：

$$\text{老：}\quad \mu_{\underset{\sim}{A}_1}(x)=\begin{cases} 0, & 0\le x\le 50 \\ 2\left(\dfrac{x-50}{20}\right)^2, & 50< x\le 60 \\ 1-2\left(\dfrac{x-70}{20}\right)^2, & 60< x\le 70 \\ 1, & x>70 \end{cases}$$

中： $$\mu_{\underset{\sim}{A}_2}(x)=\begin{cases} 0, & 0\le x\le 20 \\ 2\left(\dfrac{x-20}{20}\right)^2, & 20<x\le 30 \\ 1-2\left(\dfrac{x-45}{30}\right)^2, & 30<x\le 60 \\ 2\left(\dfrac{x-70}{20}\right)^2, & 60<x\le 70 \\ 0, & x>70 \end{cases}$$

青： $$\mu_{\underset{\sim}{A}_3}(x)=\begin{cases} 1, & 0\le x\le 20 \\ 1-2\left(\dfrac{x-20}{20}\right)^2, & 20<x\le 30 \\ 2\left(\dfrac{x-40}{20}\right)^2, & 30<x\le 40 \\ 0, & x>40 \end{cases}$$

现有45岁、30岁、65岁、21岁各一人，问应分别属于哪一类？

解：① 将 x=45 代入三个隶属函数：

$$\mu_{\underset{\sim}{A}_1}(45)=0，\quad \mu_{\underset{\sim}{A}_2}(45)=1，\quad \mu_{\underset{\sim}{A}_3}(45)=0，$$

即 $$\max[0,\quad 1,\quad 0]=1=\mu_{\underset{\sim}{A}_2}(45)，$$

∴ 45 岁的人属于 $\underset{\sim}{A}_2$ 中年人。

② x=30： $$\mu_{\underset{\sim}{A}_1}(30)=0，\quad \mu_{\underset{\sim}{A}_2}(30)=0.5，\quad \mu_{\underset{\sim}{A}_3}(30)=0.5，$$

$$\max[0,\quad 0.5,\quad 0.5]=0.5=\mu_{\underset{\sim}{A}_2}(30)=\mu_{\underset{\sim}{A}_3}(30)$$

∴ 30 岁的人属于 $\underset{\sim}{A}_3$ 青年人或 $\underset{\sim}{A}_2$ 中年人。

③ $x=65$： $\mu_{\underset{\sim}{A}_1}(65)=7/8$， $\mu_{\underset{\sim}{A}_2}(65)=1/8$， $\mu_{\underset{\sim}{A}_3}(65)=0$，

$$\max[7/8,\quad 1/8,\quad 0]=7/8=\mu_{\underset{\sim}{A}_1}(65)$$

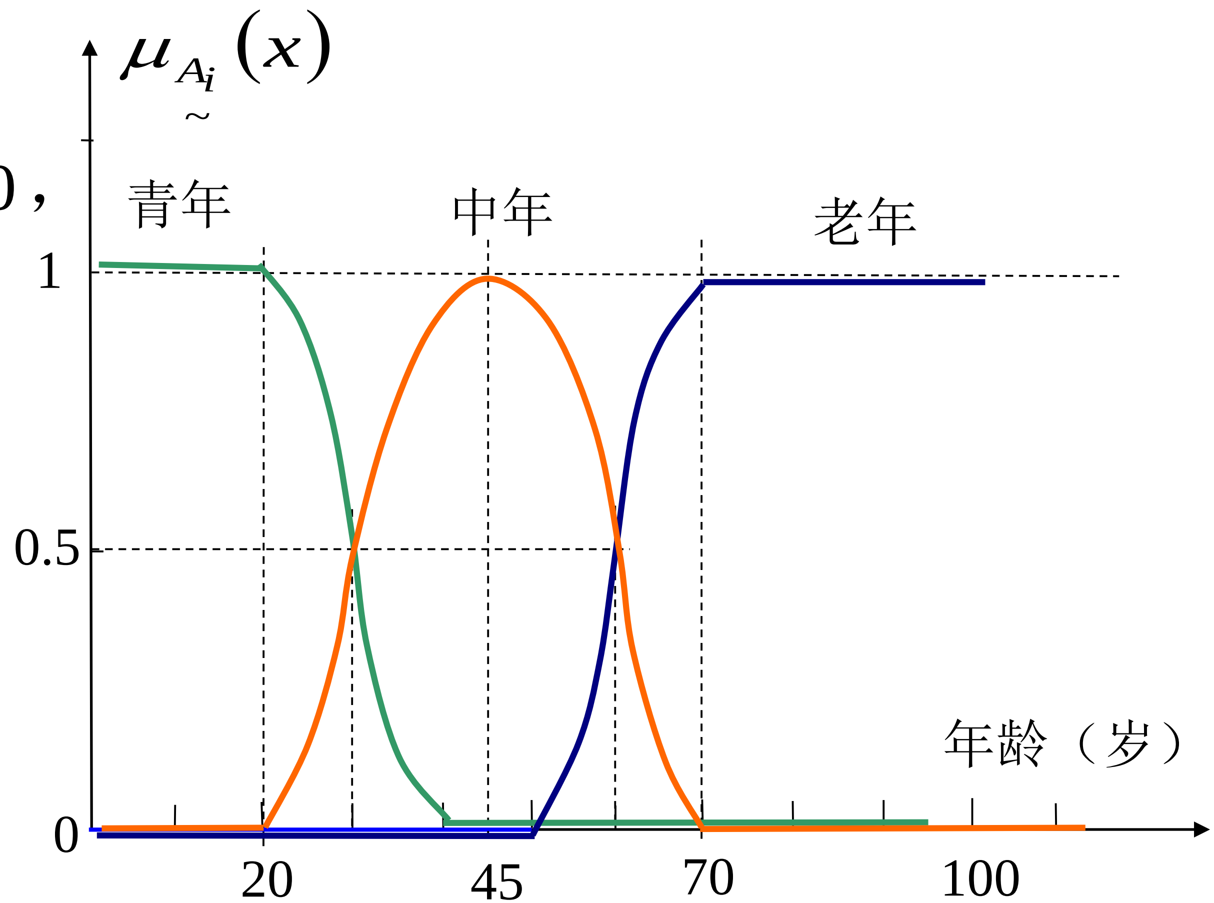
∴ 属于老年人。

④ $x=21$： $\mu_{\underset{\sim}{A}_1}(21)=0$，

$\mu_{\underset{\sim}{A}_2}(21)=1/200$，

$\mu_{\underset{\sim}{A}_3}(21)=199/200$，

∴属于青年人。



6.4.2 间接方法——择近原则

求模糊集合之间接近程度的问题。

——适合于一组模糊模式的分类

1. 模糊集合间的距离

设论域 $X=\{x_1,x_2,\dots,x_n\}$， $\underset{\sim}{A}$， $\underset{\sim}{B}$ 为 X 中的模糊集合，p 为正实数，则定义

$$d_M(\underset{\sim}{A},\underset{\sim}{B})=\left(\sum_{i=1}^{n}\left|\mu_{\underset{\sim}{A}}(x_i)-\mu_{\underset{\sim}{B}}(x_i)\right|^p\right)^{1/p}$$

为模糊集合 $\underset{\sim}{A}$ 与 $\underset{\sim}{B}$ 的明可夫斯基距离。

聚类分析中
两向量间的明氏距离

两种常用的绝对距离公式（**把集合视为向量**）：

当 $p=1$ 时称为海明距离，或线性距离，记为 $d_H(\underset{\sim}{A}, \underset{\sim}{B})$，

$$d_H(\underset{\sim}{A}, \underset{\sim}{B}) = \sum_{i=1}^{n} \left| \mu_{\underset{\sim}{A}}(x_i) - \mu_{\underset{\sim}{B}}(x_i) \right|$$

街坊距离

当 $p=2$ 时称为欧几里得距离，记为 $d_E(\underset{\sim}{A}, \underset{\sim}{B})$，

$$d_E(\underset{\sim}{A}, \underset{\sim}{B}) = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} \left| \mu_{\underset{\sim}{A}}(x_i) - \mu_{\underset{\sim}{B}}(x_i) \right|^2}$$

欧氏距离

其他：相对距离、加权距离

2. 贴近度

令 $\underset{\sim}{A}$， $\underset{\sim}{B}$， $\underset{\sim}{C}$ 为论域 X 中的模糊集合，若映射

$$\sigma : X \times X \longrightarrow [0,\ 1]$$

具有性质

说明两个相同的模糊集的贴近度最大

① $\sigma\left(\underset{\sim}{A}, \underset{\sim}{A}\right) = 1$；

要求贴近度映射具有对称性

② $\sigma\left(\underset{\sim}{A}, \underset{\sim}{B}\right) = \sigma\left(\underset{\sim}{B}, \underset{\sim}{A}\right)$；

③ 对任意的 $x \in X$， 由 $\mu_{\underset{\sim}{A}}(x) \le \mu_{\underset{\sim}{B}}(x) \le \mu_{\underset{\sim}{C}}(x)$ 或

$\mu_{\underset{\sim}{A}}(x) \ge \mu_{\underset{\sim}{B}}(x) \ge \mu_{\underset{\sim}{C}}(x)$ 可得 $\sigma\left(\underset{\sim}{A}, \underset{\sim}{C}\right) \le \sigma\left(\underset{\sim}{B}, \underset{\sim}{C}\right)$。

描述了两个较“接近”的模糊集合的贴近度也较大

则称 $\sigma\left(\underset{\sim}{A}, \underset{\sim}{B}\right)$ 为 $\underset{\sim}{A}$ 与 $\underset{\sim}{B}$ 的贴近度。

模糊集合贴近度的具体形式不唯一。

两种常用贴近度：

1) 距离贴近度

$$\sigma(\underset{\sim}{A}, \underset{\sim}{B}) = 1 - C[d(\underset{\sim}{A}, \underset{\sim}{B})]^{\alpha}$$

C 和 α： 适当选择的参数；

$d\left(\underset{\sim}{A}, \underset{\sim}{B}\right)$： 不同的距离。

当 $d\left(\underset{\sim}{A}, \underset{\sim}{B}\right)$为海明距离时即为海明贴近度，定义为

$$\sigma_H\left(\underset{\sim}{A}, \underset{\sim}{B}\right) = 1 - \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\left|\mu_{\underset{\sim}{A}}(x_i) - \mu_{\underset{\sim}{B}}(x_i)\right|$$

n： 集合中元素的个数。

2）格贴近度

$$\sigma\left(\underset{\sim}{A}, \underset{\sim}{B}\right)=\frac{1}{2}\left[\underset{\sim}{A}\bullet\underset{\sim}{B}+\left(1-\underset{\sim}{A}\odot\underset{\sim}{B}\right)\right]$$

其中，$\underset{\sim}{A}\bullet\underset{\sim}{B}$称为$\underset{\sim}{A}$与$\underset{\sim}{B}$的内积，$\underset{\sim}{A}\odot\underset{\sim}{B}$称为$\underset{\sim}{A}$与$\underset{\sim}{B}$的外积。

内积、外积分别定义为

$$\underset{\sim}{A}\bullet\underset{\sim}{B}=\bigvee_{x\in X}\left[\mu_{\underset{\sim}{A}}(x_i)\wedge\mu_{\underset{\sim}{B}}(x_i)\right]$$

$$\underset{\sim}{A}\odot\underset{\sim}{B}=\bigwedge_{x\in X}\left[\mu_{\underset{\sim}{A}}(x_i)\vee\mu_{\underset{\sim}{B}}(x_i)\right]$$

例习题 7.8　设论域为$X=\{x_1,\ x_2,\ x_3,\ x_4\}$，$\underset{\sim}{A}$和$\underset{\sim}{B}$是论域$X$

上的两个模糊集，分别为

$$\underset{\sim}{A} = \{0.5/x_1, \ 0.7/x_2, \ 0.4/x_3, \ 0.3/x_4\}$$

$$\underset{\sim}{B} = \{0.7/x_1, \ 0.8/x_2, \ 0.7/x_3, \ 0.5/x_4\}$$

下式为采用内积、外积函数表示的一种贴近度

$$\sigma(\underset{\sim}{A}, \underset{\sim}{B}) = 1 - (\overline{A} - \underline{A}) + (\underset{\sim}{A} \bullet \underset{\sim}{B} - \underset{\sim}{A} \odot \underset{\sim}{B})$$

其中 $\overline{A}$， $\underline{A}$ 分别为模糊集 $\underset{\sim}{A}$ 中隶属度的最大值和最小值，求贴近度 $\sigma(\underset{\sim}{A}, \underset{\sim}{B})$。

解： $\underset{\sim}{A} \bullet \underset{\sim}{B} = \bigvee_{x \in X} \left[\mu_{\underset{\sim}{A}}(x_i) \wedge \mu_{\underset{\sim}{B}}(x_i) \right]$

$$= (0.5 \wedge 0.7) \vee (0.7 \wedge 0.8) \vee (0.4 \wedge 0.7) \vee (0.3 \wedge 0.5)$$

$$= 0.5 \vee 0.7 \vee 0.4 \vee 0.3 = 0.7$$

$$\underset{\sim}{A} \odot \underset{\sim}{B} = \underset{x \in X}{\wedge} \left[\mu_{\underset{\sim}{A}}(x_i) \vee \mu_{\underset{\sim}{B}}(x_i) \right]$$

$$= (0.5 \vee 0.7) \wedge (0.7 \vee 0.8) \wedge (0.4 \vee 0.7) \wedge (0.3 \vee 0.5)$$

$$= 0.7 \wedge 0.8 \wedge 0.7 \wedge 0.5 = 0.5$$

$$\sigma\left(\underset{\sim}{A}, \underset{\sim}{B}\right) = 1 - (\overline{A} - \underline{A}) + (\underset{\sim}{A} \bullet \underset{\sim}{B} - \underset{\sim}{A} \odot \underset{\sim}{B})$$

$$= 1 - (0.7 - 0.3) + (0.7 - 0.5) = 1 - 0.4 + 0.2 = 0.8$$

3. 择近原则

设论域 X 中有 n 个已知类别模糊子集 $\underset{\sim}{A}_1$， $\underset{\sim}{A}_2$， …， $\underset{\sim}{A}_n$，

若有 $i \in \{1, 2, \ldots, n\}$ 使得

$$\sigma\left(\underset{\sim}{B}, \underset{\sim}{A}_i\right) = \max_{1 \le j \le n} \sigma\left(\underset{\sim}{B}, \underset{\sim}{A}_j\right)$$

或

$$d\left(\underset{\sim}{B}, \underset{\sim}{A}_i\right) = \min_{1 \le j \le n} d\left(\underset{\sim}{B}, \underset{\sim}{A}_j\right)$$

则称相对于 $\underset{\sim}{A}_1$， $\underset{\sim}{A}_2$， …， $\underset{\sim}{A}_{i-1}$， $\underset{\sim}{A}_{i+1}$， …， $\underset{\sim}{A}_n$ 而言， $\underset{\sim}{B}$ 与 $\underset{\sim}{A}_i$ 最接近， $\underset{\sim}{B}$ 归入 $\underset{\sim}{A}_i$ 模式类。

例 6.22 设 $X=\{x_1,\ x_2,\ x_3,\ x_4,\ x_5,\ x_6\}$，标准模型由以下模糊集合表示：

$$\underset{\sim}{A}_1=\{(1.0,\ x_1),\ (0.8,\ x_2),\ (0.5,\ x_3),\ (0.4,\ x_4),\ (0.0,\ x_5),\ (0.1,\ x_6)\}$$

$$\underset{\sim}{A}_2=\{(0.0,\ x_1),\ (1.0,\ x_2),\ (0.2,\ x_3),\ (0.7,\ x_4),\ (0.5,\ x_5),\ (0.8,\ x_6)\}$$

$$\underset{\sim}{A}_3=\{(0.8,\ x_1),\ (0.2,\ x_2),\ (0,\ x_3),\ (0.5,\ x_4),\ (1.0,\ x_5),\ (0.7,\ x_6)\}$$

$$\underset{\sim}{A}_4=\{(0.5,\ x_1),\ (0.7,\ x_2),\ (0.8,\ x_3),\ (0,\ x_4),\ (0.5,\ x_5),\ (1.0,\ x_6)\}$$

现有一待识别的模型

$$\underset{\sim}{B}=\{(0.7,\ x_1),\ (0.2,\ x_2),\ (0.1,\ x_3),\ (0.4,\ x_4),\ (1.0,\ x_5),\ (0.8,\ x_6)\}$$

采用海明贴近度计算，$\underset{\sim}{B}$ 与哪个标准模型最相近？

解：海明贴近度：$\sigma_H\left(\underset{\sim}{A}, \underset{\sim}{B}\right)=1-\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\left|\mu_{\underset{\sim}{A}}(x_i)-\mu_{\underset{\sim}{B}}(x_i)\right|$

$$\sigma_H(\underset{\sim}{A_1}, \quad \underset{\sim}{B})=1-\frac{1}{6}\left(0.3+0.6+0.4+0+1+0.7\right)=1-\frac{3}{6}=0.5$$

$$\sigma_H(\underset{\sim}{A_2}, \quad \underset{\sim}{B})=1-\frac{1}{6}\left(0.7+0.8+0.1+0.3+0.5+0\right)=1-\frac{2.4}{6}=0.6$$

$$\sigma_H(\underset{\sim}{A_3}, \quad \underset{\sim}{B})=1-\frac{1}{6}\left(0.1+0+0.1+0.1+0+0.1\right)=1-\frac{0.4}{6}=0.93$$

$$\sigma_H(\underset{\sim}{A_4}, \quad \underset{\sim}{B})=1-\frac{1}{6}\left(0.2+0.5+0.7+0.4+0.5+0.2\right)=1-\frac{2.5}{6}=0.58$$

$\because \quad \max\left(0.5, \quad 0.6, \quad 0.93, \quad 0.58\right)=0.93=\sigma_H(\underset{\sim}{A_3}, \underset{\sim}{B})$

$\therefore \quad \underset{\sim}{B}$ 与 $\underset{\sim}{A_3}$ 最相似。

课后作业

- 见另文。
- 下次上课前提交。
- 最好使用电子档。

End of This Part