数理泛函分析与复变函数试卷及参考解答

@ 慕水

不对解答的正确性做任何的保证

最近更新: 2017 年 7 月 5 日

1 2011-2012 学年第二学期泛函分析期末考试 (09 级)

一、(本题 40 分, 每小题 8 分) 证明以下结论:

(1) 设 E 是 $\mathbb{K}$ 中的闭集, 则 $A = \{x = (x_1, x_2, \cdots) \in l^p : x_i \in E(\forall i)\}$ 是 l^p $(1 \le p < \infty)$ 中的闭集.

证明:

设 $\{x_i^{(n)}\} \subset A$, 且 $x^{(n)} = (x_1^{(n)}, x_2^{(n)}, \cdots) \to x = (x_1, x_2, \cdots)$. 下证明 $x_i^{(n)} \to x_i$ 且 $x \in A$.

由于 $x^{(n)} \to x$, 所以, $\forall \epsilon > 0, \exists N > 0$, 当 $n > N$, 有:

$$\|x - x^{(n)}\| = (\sum_{i=1}^{\infty} |x_i - x_i^{(n)}|^p)^{\frac{1}{p}} < \epsilon \qquad (1)$$

所以:

$$|x_i - x_i^{(n)}| \le (\sum_{i=1}^{\infty} |x_i - x_i^{(n)}|^p)^{\frac{1}{p}} < \epsilon$$

即: $x_i^{(n)} \to x_i$. 由于 E 是闭集, 则有 $x_i \in E$. 下证明: $x \in A$. 由 (1) 式可知:

$$\sum_{i=1}^{\infty} |x_i - x_i^{(n)}|^p < \epsilon^p < +\infty$$

所以, $x - x^{(n)} \in l^p$. 由于 l^p 是线性空间, 所以 $x = x - x^{(n)} + x^{(n)} \in l^p$.

综上, $x \in A$. 即:A 是 l^p 中的闭集.

(2) 当 $|\lambda| < (e-1)^{-1}$ 时, $L^2[0,1]$ 上的算子 $(Tx)(t) = \lambda \int_0^1 \sqrt{e^{s+t}} x(s) ds$ 存在唯一的不动点.

证明:

作映射 $T: L^2[0,1] \to L^2[0,1]$,

$$(Tx)(t) = \lambda \int_0^1 \sqrt{e^{s+t}} x(s) ds$$

对于 $\forall x_1(t), x_2(t) \in L^2[0,1]$, 由 Holder 不等式可得:

$$\begin{aligned}
\|Tx_1 - Tx_2\|_2^2 &= \int_0^1 |\lambda \int_0^1 \sqrt{e^{s+t}} x_1(s) ds - \lambda \int_0^1 \sqrt{e^{s+t}} x_2(s) ds|^2 dt \\
&= |\lambda|^2 \int_0^1 | \int_0^1 \sqrt{e^{s+t}} (x_1(s) - x_2(s)) ds|^2 dt \\
&\leq |\lambda|^2 (\int_0^1 |x_1(s) - x_2(s)|^2 ds)^{\frac{1}{2}} (\int_0^1 (\int_0^1 e^{s+t} ds)^{\frac{1}{2}} dt) \\
&= (e-1)^2 |\lambda|^2 \|x_1 - x_2\|_2^2
\end{aligned}$$

由于 $|\lambda| < (e-1)^{\frac{1}{2}}$, 所以 $(e-1)^2|\lambda|^2 < 1$, 所以映射 T 是压缩的.

由于 $L^2[0,1]$ 是完备距离空间, 由压缩映射原理可知, 算子 T 存在唯一的不动点.

(3) 设 A 是距离空间 X 中的紧集, $x \in X$, 则必存在 $y_0 \in A$ 使得 $d(x, y_0) = \inf\limits_{y \in A} d(x, y)$.

证明:

对于 $x \in X$, 定义函数 $f: f(y) = d(x, y), y \in A$. 下证明 f 是 A 上的连续函数. 注意到:

$$d(x,z) \leq d(x,y) + d(y,z) \quad \Rightarrow \quad d(x,z) - d(x,y) \leq d(y,z)$$

$$d(x,y) \leq d(x,z) + d(y,z) \quad \Rightarrow \quad d(x,z) - d(x,y) \leq -d(y,z)$$

所以 $|d(x,z) - d(x,y)| \leq d(y,z)$. 所以有:

$$|f(y_1) - f(y_1)| = |d(x,y_1) - d(x,y_2)| \leq d(y_1, y_2)$$

从而 $\forall \epsilon > 0, \exists \delta = \epsilon$, 当 $d(y_1, y_2) < \delta$, 有 $|f(y_1) - f(y_2)| < \epsilon$.

所以 f 在 A 上连续. 又由于 A 是紧集, 所以, $\exists y_0 \in A$, 使得:

$$d(x, y_0) = f_{min}(y) = \inf_{y \in A} d(x, y)$$

(4) 设 $a_n = \ln(1 + \frac{1}{n})(n \geq 1)$. 则 l^1 上算子 $T(x_1, x_2, \cdots) = (a_1 x_1, a_2 x_2, \cdots)$ 是紧算子.

证明:

记 $x=(x_1,x_2,\cdots)$, 则:

$$\|Tx\|_1=\sum_{n=1}^{\infty}|a_nx_n|\le\sup_{n\ge 1}|a_n|\sum_{n=1}^{\infty}|x_n|=(\sum_{n=1}^{\infty}|x_n|)\ln 2$$

易验证 T 是线性的. 所以 T 是有界线性算子. 对每个 $n=1,2,\cdots$, 令:

$$T_n(x_1,x_2,\cdots)=(a_1x_1,a_2x_2,\cdots,a_nx_n)$$

则每个 T_n 是有界的有限秩算子, 从而每个 T_n 是紧算子. 对于 $\forall x=(x_i)\in l^1$, 有:

$$\|Tx-Tx_n\|_1=\sum_{k=n+1}^{\infty}|a_kx_k|\le(\sup_{k\ge n+1}|a_k|)\sum_{k=n+1}^{\infty}|x_k|\le(\sup_{k\ge n+1}|a_k|)\sum_{n=1}^{\infty}|x_n|=\|x\|_1\ln(1+\frac{1}{n+1})$$

所以:

$$\|T-T_n\|\le\ln(1+\frac{1}{n+1})\to 0\ \ (n\to\infty)$$

所以, T 是紧算子.

(5) 设 $E=\{f\in L^2(-\infty,+\infty):\text{在}(-\infty,0]\text{ 上}f=0\ a.e.\}$. 求 $E^{\perp}$.

解:

任取 $g\in E^{\perp}$, 则对于 $\forall f\in E$, 有:

$$(f,g)=\int_{\mathbb{R}}f\overline{g}dx=\int_{-\infty}^{0}f\overline{g}dx+\int_{0}^{+\infty}f\overline{g}dx$$

由于在 $(-\infty,0]$ 上 $f=0\ a.e.$, 则存在 $m(E)=0$, 当 $x\in(-\infty,0]\setminus E,f=0$.

则当 $x\in(-\infty,0]\setminus E$ 时, $f\overline{g}=0$. 即存在 $E_1,m(E_1)\le m(E)=0$, 使得当 $x\in(-\infty,0]\setminus E_1$ 时,

$$fg=0$$

即:

$$f\overline{g}=0\ a.e.\quad x\in(-\infty,0]$$

所以可得:

$$\int_{-\infty}^{0}f\overline{g}dx=0$$

由 f 的任意性, 取 $f=g,\ x\in(0,\infty)$, 则:

$$(f,g)=\int_{-\infty}^{0}f\overline{g}dx+\int_{0}^{+\infty}f\overline{g}dx=\int_{0}^{+\infty}|g|^2dx=0$$

当 $g=0\ a.e.\ x\in[0,\infty)$ 时, 上式成立. 假设 $g=0\ a.e.\ x\in[0,+\infty)$ 不成立.

则存在可测集 $E_2, m(E_2)>0$, 当 $x\in E_2$ 时, $|g|>0$. 从而:

$$(f,g)=\int_0^{+\infty}|g|^2dx>\int_{E_2}|g|^2dx>0$$

矛盾. 所以:$g=0\ a.e.\ x\in[0,+\infty)$. 由于 g 是从 $E^{\perp}$ 中任意取的元素, 所以:

$$E^{\perp}=\{g\in L^2(-\infty,+\infty):\text{在}[0,+\infty)\ \text{上}g=0\ a.e.\}$$

以下六题任选五题，每题 12 分

二、 设 $C^{(1)}[a,b]$ 是 $[a,b]$ 上具有连续导数函数的全体. 在 $C^{(1)}[a,b]$ 上定义:

$$\|x\|=\max_{a\le t\le b}|x(t)|+\max_{a\le t\le b}|x'(t)|,\quad x\in C^{(1)}[a,b]$$

证明: $C^{(1)}[a,b]$ 是完备的.

证明:

设 $\{x_n\}$ 是 $C^{(1)}[a,b]$ 中的 Cauchy 列, 则 $\forall\epsilon>0,\exists N>0$, 当 $m,n>N$, 有:

$$\|x_m-x_n\|=\max_{a\le t\le b}|x_m(t)-x_n(t)|+\max_{a\le t\le b}|x_m^{'}(t)-x_n^{'}(t)|$$

所以可得:

$$\max_{a\le t\le b}|x_m(t)-x_n(t)|,\quad \max_{a\le t\le b}|x_m^{'}(t)-x_n^{'}(t)|<\epsilon$$

即:$x_(t),x_n^{'}(t)$ 都是一致收敛的. 记:$x_n\to x,x_n^{'}\to x^{(')}$. 由一致收敛函数列可微性质可得:

$$x'(t)=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(\lim_{n\to\infty}x^n(t))=\lim_{n\to\infty}x_n^{'}=x^{(')}$$

而 $x_n(t)$ 的连续性再结合 $x_n(t)$ 的一致收敛性可导出 $x(t)$ 的连续性, 而 $x_n^{'}(t)$ 的连续性以及一致收敛性可以导出 $x^{(')}(t)$ 的连续性.

所以 $x(t)$ 具有连续的导数, $x(t)\in C^{(1)}[a,b]$. 所以 $C^{(1)}[a,b]$ 是完备的.

三、 计算 $C[-\pi,\pi]$ 上的线性泛函 $f(x)=\int_{-\pi}^{\pi}x(t)sintdt$ 的范数.

证明:

首先, 有:

$$|f(x)|=|\int_{-\pi}^{\pi}x(t)sintdt|\le\int_{-\pi}^{\pi}|x(t)sint|dt\le(\max_{a\le t\le b}|x(t)|)\int_{-\pi}^{\pi}|sint|dt=(\int_{-\pi}^{\pi}|sint|dt)\|x\|$$

所以, $\|f\| \leq \int_{-\pi}^{\pi} |sint|dt = 4$. 另一方面, 令:

$$x_0(t) = \begin{cases} -1 & , \quad t \in [-\pi, -\epsilon] \\ \dfrac{x}{\epsilon} & , \quad t \in (-\epsilon, \epsilon) \\ 1 & , \quad t \in [\epsilon, \pi] \end{cases}$$

则 $x_0 \in C[-\pi, \pi]$ 且 $\|x\| = 1$, 于是有:

$$\begin{aligned} f(x_0) &= \int_{-\pi}^{\pi} x_0(t) sintdt \\ &= \int_{-\pi}^{-\epsilon} (-sint)dt + \int_{-\epsilon}^{\epsilon} \frac{tsint}{\epsilon} dt + \int_{\epsilon}^{\pi} sintdt \\ &> cos(\epsilon) + 1 + 1 + cos(\epsilon) = 4 - 4sin^2(\frac{\epsilon}{2}) \\ &> 4 - \epsilon^2 \end{aligned}$$

所以 $\|f\| > 4 - \epsilon^2$. 由 ϵ 的任意性可知, $\|f\| \geq 4$. 综上, $\|f\| = 4$.

四、 (1) 设 X, Y 是距离空间, 若 $T : X \to Y$ 是双射的闭算子, 则 T^{-1} 是闭算子.

(2) 用闭图像定理证明逆算子定理.

证明:

(1) 设 $\{y_n\} \subset Y$, 且 $y_n \to y, T^{-1}y_n \to x$.

由于 T 是双射, 所以存在唯一的 $x_n \in X$, 使得 $x_n = T^{-1}y_n$. 所以 $Tx_n = T(T^{-1}yn) = y_n \to y$.

由于 T 是闭算子, 所以 $y = Tx$, 从而 $x = T^{-1}y$. 所以 T^{-1} 是闭算子.

(2) 设 X, Y 是 Banach 空间, T 是双射且有界的线性算子.

线性算子 T 有界 $\Leftrightarrow T$ 连续 $\Rightarrow T$ 是闭算子.

由 (1) 可知, T^{-1} 是闭算子. 再由闭图像定理, T^{-1} 有界, 得证.

五、 设 X 是赋范空间, $\{x_n\}$ 是 X 中的有界序列, $x \in X$. 证明若对 X^* 的某个稠密子集 A 中的每个元 f, 成立 $f(x_n) \to f(x)$, 则 $x_n \xrightarrow{w} x$.

证明:

对于 $\forall f \in X^*$, 由于 A 在 X 中稠密, 所以 $\exists f_n \in A$, 使得:

$$f_n \to f$$

由于 $\{x_n\}$ 是有界序列, 所以 $\forall x \in \{x_n\}$, 当 $k > N$, 有

$$|f_k(x) - f(x)| \le \|f_k - f\| \|x\| < \frac{\epsilon}{3}$$

由题目条件可知:

$$f_k(x_n) \to f_k(x) \quad \Rightarrow \quad |f_k(x_n) - f_k(x)| < \frac{\epsilon}{3}, \quad k = 1, 2, \cdots$$

所以 $\forall f \in X^*$, 有:

$$\begin{aligned}
|f(x_n) - f(x)| &= |f(x_n) - f_n(x_n) + f_n(x_n) - f_n(x) + f_n(x) - f(x)| \\
&\le |f(x_n) - f_k(x_n)| + |f_k(x_n) - f_k(x)| + |f_k(x) - f(x)| \\
&< \frac{\epsilon}{3} + \frac{\epsilon}{3} + \frac{\epsilon}{3} \\
&< \epsilon
\end{aligned}$$

所以 $\forall f \in X^*$, 有 $f(x_n) \to f(x)$. 所以:$x_n \xrightarrow{w} x$.

六、 证明 $(R^n, \|\cdot\|_1)^* \cong (R^n, \|\cdot\|_\infty)$, 其中

$$\|x\|_1 = \sum_{i=1}^{n} |x_i|, \quad \|x\|_\infty = \max_{1 \le i \le n} |x_i|, \quad x = (x_1, \cdots, x_n) \in R^n$$

证明:

分三个步骤证明上述命题.

(1) 设 $\{e_i\}_{i=1}^n$ 是 R^n 中的标准基. 对于 $\forall f \in R^n, \|\cdot\|_1)^*$. 令 $a_i = f(e_i) (i = 1, 2, \cdots)$.

对于 $\forall x = (x_1, x_2, \cdots, x_n)$, 有:

$$f(x) = f(\sum_{i=1}^{n} x_i e_i) = \sum_{i=1}^{n} x_i f(e_i) = \sum_{i=1}^{n} a_i x_i$$

这表明 $\forall f \in \forall f \in R^n, \|\cdot\|_1)^*$, f 的一般表达式为 $f = \sum\limits_{i=1}^{n} a_i x_i$.

对每个 $i = 1, 2, \cdots$, 有:

$$|a_i| = |f(e_i)| \le \|f\| \|e_i\|_1 = \|f\|$$

所以, $(\max\limits_{n \ge 1} |a_n|) \le \|f\|$. 记 $a = (a_1, a_2, \cdots, a_n)$, 从而: $a \in (R^n, \|\cdot\|_\infty)$.

(2) 反过来, 对 $\forall a = (a_1, a_2, \cdots, a_n) \in (R^n, \|\cdot\|_\infty)$, 令:

$$f(x) = \sum_{i=1}^{n} a_i x_i, \quad x = (x_1, x_2, \cdots, x_n) \in (R^n, \|\cdot\|_1)$$

则 f 是 $(R^n, \|\cdot\|_1)^*$ 上的线性泛函, 且 $f(e_i) = a_i$. 对 $\forall x = (x_1, \cdots, x_n) \in (R^n, \|\cdot\|_1)$:

$$|f(x)| = |\sum_{i=1}^{n} a_i x_i| \leq (\max_{k\geq 1} |a_k|) \sum_{i=1}^{n} |x_i| = \|a\|_\infty \|x\|_1$$

这说明, $\|f\| \leq \|a\|_\infty$.

(3) 作映射:

$$\begin{array}{rccc} T: & (R^n, \|\cdot\|_1)^* & \to & (R^n, \|\cdot\|_\infty) \\ & f & \mapsto & a = (a_1, a_2, \cdots, a_n) \end{array}$$

易知 T 是线性映射. 由 (2) 知 T 是满射. 且:

$$\|Tf\|_\infty = \|a\|_\infty = \|f\|$$

所以 T 是保距同构映射. 从而: $(R^n, \|\cdot\|_1)^* \cong (R^n, \|\cdot\|_\infty)$.

七、 设 $\lambda_1, \cdots, \lambda_n \in \mathbb{K}$. 定义 $T: l^2 \to l^2, T(x_1, x_2, \cdots) = (\lambda_1 x_1, \cdots, \lambda_n x_n, 0, \cdots)$.

(1) 求 T 的伴随算子 T^* 的表达式.

(2) 当 $\lambda_1, \cdots, \lambda_n$ 满足什么条件时, T 是投影算子?

证明:

(1) 对于 $\forall x = (x_1, x_2, \cdots) \in l^2$,

$$\|Tx\|_2 = (\sum_{k=1}^{n} |\lambda_i x_i|^2)^{\frac{1}{2}} \leq (\sup_{k\geq 1} \lambda_i)(\sum_{i=1}^{n} |x_i|^2)^{\frac{1}{2}} \leq (\sup_{k\geq 1} \lambda_i)\|x\|_2$$

易验证, T 是线性算子. 所以, T 是有界线性算子. 设 $T^*(y_1, y_2, \cdots) = (z_1, z_2, \cdots)$, 则:$\forall x, y \in l^2$, 有

$$(Tx, y) = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i x_i \bar{y}_i, \quad (x, T^* y) = \sum_{i=1}^{\infty} x_i \bar{z}_i$$

依次取 $x = e_i = (0, \cdots, 1, 0, \cdots)$, 可以得到: $z_i = \bar{\lambda}_i y_i, (\ i = 1, \cdots, n)$, $z_i = 0, (i \geq n+1)$ 即:

$$T^*(y_1, y_2, \cdots) = (\bar{\lambda}_1 y_1, \bar{\lambda}_2 y_2, \cdots, \bar{\lambda}_n y_n, 0, 0, \cdots)$$

(2) 由于 T 是投影算子当且仅当 T 是幂等和自伴的. 所以, $\forall x \in l^2$,

$$T(T(x)) = T(\lambda_1 x_1, \lambda_2 x_2, \cdots, \lambda_n x_n, 0, 0, \cdots) = (\lambda_1^2 x_1, \lambda_2^2 x_2, \cdots, \lambda_n^2 x_n, 0, 0, \cdots)$$

所以,

$$T^2 = T \quad \Rightarrow \quad \lambda_i = \lambda_i^2 \quad \Rightarrow \quad \lambda_i = 0, 1$$

对于自伴性,

$$T = T^* \quad \Rightarrow \quad \lambda_i = \bar{\lambda}_i \quad \Rightarrow \quad \{\lambda_i\}_{i=1}^n \text{是实数列}$$

综上, 当 $\lambda_i \in \{0, 1\}, (i = 1, 2, \cdots, n)$ 时, T 是投影算子.

2 2012-2013 年学年第二学期泛函分析期末考试（10 级）

一、(本题 40 分, 每小题 8 分) 证明以下结论:

(1) $A=\{X\in C[a,b]:\int_a^b x(t)dt=0\}$ 是 $C[a,b]$ 中的闭集.

证明:

取 $\{x_n\}\subset A$, 且 $x_n\to x$. 下证明:$x\in A$.

由于 $x_n\to x$, 所以 $\forall\epsilon>0,\exists N>0$, 当 $n>N$ 时:

$$\max_{a\le t\le b}|x(t)-x_n(t)|<\epsilon$$

所以有:

$$|\int_a^b x(t)dt|=|\int_a^b x(t)-x_n(t)dt|\le\int_a^b|x(t)-x_n(t)|dt<(b-a)\epsilon$$

由 ϵ 的任意性可得, $\int_a^b x(t)dt=0$. 即:$x\in A$. 所以 A 是闭集.

(2) 当 $|\lambda|<\dfrac{\pi}{2}$ 时, $C[0,1]$ 上的算子 $(Tx)(t)=\lambda\int_0^1 x(s)cos\frac{\pi}{2}sds+e^t$ 存在唯一的不动点.

证明:

作映射 $T:C[0,1]\to C[0,1]$:

$$(Tx)(t)=\lambda\int_0^1 x(s)cos\frac{\pi}{2}sds+e^t$$

对于 $\forall x_1,x_2\in C[0,1]$, 有:

$$\begin{aligned}\|Tx_1-Tx_2\|&=\|\lambda\int_0^1 x_1(s)cos\frac{\pi}{2}sds+e^t-\lambda\int_0^1 x_2(s)cos\frac{\pi}{2}sds-e^t\|\\&=\max_{0\le t\le 1}(\int_0^1|\lambda||(x_1(s)-x_2(s))cos\frac{\pi}{2}s|ds)\\&\le|\lambda|(\max_{0\le s\le 1}|x_1(s)-x_2(s)|)(\max_{0\le t\le 1}\int_0^1|cos\frac{\pi}{2}s|ds)\\&=\frac{2|\lambda|}{\pi}\|x_1-x_2\|\end{aligned}$$

由于 $|\lambda|<\dfrac{\pi}{2}$, 所以 $\dfrac{2|\lambda|}{\pi}<1$. 所以映射 T 是压缩的. 而 $C[0,1]$ 是完备的, 由压缩映射原理可知存在唯一不动点.

(3) 令 $A=\{sin(t+\lambda):\lambda\in\mathbb{R}\}$. 则 A 是 $C[0,1]$ 中的列紧集.

证明:

对于 $\forall x=sin(t+\lambda)\in A$, 有 $|sin(t+\lambda)|\leq 1$. 所以函数族 A 是一致有界的.

对于 $\forall t\in[0,1]$, 由微分中值定理可得:

$$|x(t_1)-x(t_2)|=|sin(t_1+\lambda)-sin(t_2+\lambda)|=|cos(\xi)||t_1-t_2|\leq|t_1-t_2|,\quad \xi\in[0,1]$$

所以 x 满足 Lipschitz 条件, 从而函数族 A 是等度连续的. 由 Arzela-Ascoli 定理, A 是 $C[0,1]$ 中的列紧集.

(4) 设 X 和 Y 是两个拓扑同构赋范空间. 若 X 是可分的, 则 Y 也是可分的.

证明:

由于 X 是可分的, 所以存在可数集 $A=\{a_i\}_{i\geq 1}\subset X$, 使得 A 在 X 中稠密.

由于 X,Y 是拓扑同构的, 所以存在从 X 到 Y 的有界线性双射 $T:X\to Y$, 使得 $Tx_n=y_n\in Y$.

显然 B 是 Y 中的可数集, 下证明 B 在 Y 中稠密. 对于 $\forall\epsilon\in\epsilon,\forall y\in Y$, 考虑邻域 $U(y,\epsilon)$. 记 $Tx=y$.

由于 T 是有界的, 所以 T 是连续的. 从而 $\forall\epsilon>0,\exists\delta>0$, 当 $d(x,x_0)<\delta$ 时, $|y-y_0|<\epsilon$

由于 A 在 X 中稠密, 所以 $\exists x_k\in U(x,\delta)$. 由于 $d(x,x_k)<\delta$, 所以 $d(y,y_k)<\epsilon$.

即 $\forall\epsilon>0,\forall y\in Y,\exists y_k\in B$, 使得 $y_k\in U(y,\epsilon)$. 从而 B 是 Y 中的稠密集.

从而 $B=\{y_i\}_{i\geq 1}$ 是 Y 中可数的稠密子集. 所以 Y 是可分的.

(5) 设 $\alpha(t)$ 是有界可测函数, h 是常数. 在 $L^2(-\infty,+\infty)$ 上定义算子 $(Ax)(t)=\alpha(t)x(t+h)$, 求 A 的伴随算子 A^* 的表达式.

解:

显然算子 A 是线性的, 下证明算子 A 是有界的. 我们有:

$$\begin{aligned}\|Ax\|_2&=(\int_{-\infty}^{+\infty}|\alpha(t)x(t+h)|^2dt)^{\frac{1}{2}}\\&\leq(\max_{t\in\mathbb{R}}|\alpha(t)|)(\int_{-\infty}^{+\infty}|x(t+h)|^2dt)^{\frac{1}{2}}\\&=(\max_{t\in\mathbb{R}}|\alpha(t)|)(\int_{-\infty}^{+\infty}|x(t)|^2dt)^{\frac{1}{2}}\\&=(\max_{t\in\mathbb{R}}|\alpha(t)|)\|x\|_2\end{aligned}$$

由于 $\alpha(t)$ 是有界可测函数, 所以 $\|A\|_2\leq(\max_{t\in\mathbb{R}}|\alpha(t)|)<\infty$. 即 A 是有界的.

设 $(A^*x)(t)=z(t)$, 下面求 A 的伴随算子 A^* 的表达式. 对于 $\forall x,y\in L^2(-\infty,+\infty)$, 有:

$$(Ax,y)=\int_{-\infty}^{+\infty}\alpha(t)x(t+h)\overline{y(t)}=\int_{-\infty}^{+\infty}\alpha(t-h)x(t)\overline{y(t-h)}dt$$

$$(x,A^*y)=\int_{-\infty}^{+\infty}x(t)\overline{z(t)}dt$$

所以:

$$(Ax,y)-(x,A^*y)=\int_{-\infty}^{+\infty}x(t)\overline{(\overline{\alpha(t-h)}y(t-h)-z(t))}=0$$

由 $x(t)$ 的任意性, 取 $x(t)=\overline{\alpha(t-h)}y(t-h)-z(t)$, 可得: $z(t)=\overline{\alpha(t-h)}y(t-h)$. 所以:

$$(A^*y)(t)=\overline{\alpha(t-h)}y(t-h)$$

以下六题任选五题，每题 12 分

二、 设 $X=\{f=(f_i)_{i\geq 1}:f_i\in L^p[a,b],且\sup\limits_{i\geq 1}\|f_i\|_p<\infty\}$. 在 X 上定义范数 $\|f\|=\sup\limits_{i\geq 1}\|f_i\|_p$. 证明 X 按照这个范数所成的赋范空间是完备的.

证明:

设 $f^{(n)}=(f_i^{(n)})_{i\geq 1}$ 是 X 中的 Cauchy 列, 所以 $\forall\epsilon>0,\exists N>0$, 当 $m,n>N$, 有:

$$\|f^{(m)}-f^{(n)}\|=\sup_{i\geq 1}\|f_i^{(m)}-f_i^{(n)}\|<\epsilon \quad (1)$$

所以, 对每个 $i=1,2,\cdots$, 有:

$$\|f_i^{(m)}-f_i^{(n)}\|\leq\sup_{i\geq 1}\|f_i^{(m)}-f_i^{(n)}\|<\epsilon$$

所以, 对每个 $i=1,2,\cdots$, 有 $f_i^{(n)}$ 收敛. 记: $f_i^{(n)}\to f_i,\ f=(f_1,f_2,f_3\cdots)$.

下证明 $f\in X$, 且 $f^{(n)}\to f$. 在 (1) 式中, 令 $m\to\infty$, 有:

$$\|f-f^{(n)}\|=\sup_{i\geq 1}\|f_i-f_i^{(n)}\|<\epsilon$$

所以 $f-f^{(n)}\in X$. 由于 X 是赋范空间, 所以 $f=f-f^{(n)}+f^{(n)}\in X$. 且式 (1) 还表明, $\forall\epsilon>0,\exists N>0$, 当 $n>N$ 时, 有:

$$\|f-f^{(n)}\|\sup_{i\geq 1}\|f_i-f_i^{(n)}\|<\epsilon$$

所以 $f^{(n)}\to f$. 综上, X 是完备的赋范空间.

三、 计算 $L^1[0,1]$ 上的泛函 $f(x)=\int_0^1 x(t)costdt$ 的范数.

解:

首先, 对于 $\forall x\in L^1[0,1]$, 有:

$$|f(x)|=|\int_0^1 x(t)costdt|\le\int_0^1|x(t)cost|dt\le(\max_{0\le t\le 1}cost)\|x\|=\|x\|$$

所以, $\|f\|\le 1$. 易验证 f 是线性的. 所以 f 是有界线性泛函.

由共轭空间表示定理可知: $L^1[0,1]^*\cong L^\infty[0,1]$, 且 $\forall f\in L^1[0,1]^*$, f 可唯一的表示为:

$$f(x)=\int_0^1 x(t)y(t)dt,\quad x\in L^1[0,1]$$

其中, $y\in L^\infty[0,1]$, 且 $\|f\|=\|y\|_\infty$. 注意到: $|cost|\le 1,\forall t\in[0,1]$, 所以 $y=cost\in L^\infty[0,1]$. 所以:

$$\|f\|=\|cost\|_\infty=1$$

四、 设 $x_k=t^k(k=0,1,\cdots,n)$, $\lambda_0,\lambda_1,\cdots,\lambda_n$ 是常数. 证明: 存在 $C[a,b]$ 上的有界线性泛函 f, 使得

$$f(x_k)=\lambda_k$$

提示: 考虑子空间 $E=span\{x_0,x_1,\cdots,x_n\}$, 利用 Hahn-Banach 定理.

证明:

易知, $\{x_k=t^k:k=0,1,\cdots,n\}$ 是 $C[a,b]$ 内一组线性无关的向量. 记: $E=span\{x_0,x_1,\cdots,x_n\}$.

在 E 上定义泛函:

$$f_0(x)=\sum_{i=0}^n a_i\lambda_i,\quad \text{其中},\ x=\sum_{i=0}^n a_ix_i$$

由于 $x=\sum\limits_{i=0}^n\lambda_ix_i$, 且 $\{x_i\}$ 是 E 的一组基. 所以存在 $a,b\in\mathbb{R}$, 使得:

$$a\left(\sum_{i=0}^n|\lambda_i|^2\right)^{\frac{1}{2}}\le\|x\|\le b\left(\sum_{i=0}^n|\lambda_i|^2\right)^{\frac{1}{2}}$$

从而, 对于 $\forall x\in E$, 有

$$|f_0(x)|=|\sum_{i=0}^n a_i\lambda_i|\le\left(\sum_{i=0}^n|a_i|^2\right)^{\frac{1}{2}}\left(\sum_{i=0}^n|\lambda_i|^2\right)^{\frac{1}{2}}\le c\left(\sum_{i=0}^n|a_i|^2\right)^{\frac{1}{2}}\|x\|$$

所以 f_0 是 E 上的有界线性泛函. 再由 Hahn-Banach 定理可知, 存在线性泛函 f 将 f_0 延拓到 $C[a,b]$ 上, 即存在 $f\in C[a,b]^*$, 使得:

$$f(x_k)=\lambda_k,\quad k=0,1,\cdots,n$$

五、 (1) 设 $1<p<\infty$, 令 $x_n(t)=n^{\frac{1}{p}}\chi_{[0,\frac{1}{n}]}(t)(n\geq 1)$. 证明在 $L^p[0,1]$ 中 $x_n\xrightarrow{w}0$.

(2) 令 $y_n(t)=n\chi_{[0,\frac{1}{n}]}(t)(n\geq 1)$. 在 $L^1[0,1]$ 是否 $y_n\xrightarrow{w}0$.

提示: 利用 $L^p[0,1]$ 的共轭空间表示定理.

证明:

(1) 由于 $L^p[0,1]^*\cong L^q[0,1]$ $(1<p<\infty, p^{-1}+q^{-1}=1$, 且对于 $\forall f\in L^p[0,1]^*$, f 可唯一的表示为:

$$f(x)=\int_0^1 x(t)y(t)dt,\quad x(t)\in L^p[0,1]$$

其中, $y(t)\in L^q[0,1]$, 且 $\|f\|=\|y\|_q$. 于是:

$$|f(x_n)|=|\int_0^1 x_n(t)y(t)dt|=|\int_0^{\frac{1}{n}} n^{\frac{1}{p}}y(t)dt|\leq\int_0^{\frac{1}{n}} n^{\frac{1}{p}}|y(t)|dt\leq(\int_0^{\frac{1}{n}} ndt)^{\frac{1}{p}}(\int_0^{\frac{1}{n}} |y(t)|^q)^{\frac{1}{q}}=(\int_0^{\frac{1}{n}} |y(t)|^q)^{\frac{1}{q}}$$

当 $n\to\infty$, 可得到 $f(x_n)\to 0=f(0)$. 所以: $x_n\xrightarrow{w}0$.

(2) 在 $L^1[0,1]$ 中 $y_n\xrightarrow{w}0$ 不成立. 考虑 $L^1[0,1]$ 上的有界线性泛函 $f(y)=\int_0^1 y(t)dt$, 则:

$$|f(y_n)|=|\int_0^1 n\chi_{[0,\frac{1}{n}]}dt|=|\int_0^{\frac{1}{n}} ndt|=1\nrightarrow 0=f(0)$$

即: 在 $L^1[0,1]$ 上, $y_n\xrightarrow{w}0$ 不成立.

六、 设 c_{00} 是只有有限项不为零的数列的全体所成的集. 证明:(1) c_{00} 在 l^2 中稠密. (2) ${c_{00}}^{\perp}=\{0\}$.

证明:

(1) 任取 $x=(x_1,x_2,\cdots)\in l^2$, 对于 $\forall\epsilon>0$, 考虑邻域 $U(x,\epsilon)$.

由于 $x\in l^2$, 所以有:

$$\sum_{n=1}^{\infty}|x_n|^2<\infty\quad\Rightarrow\quad\exists N>0,\ \sum_{n=N+1}^{\infty}|x_n|^2<\epsilon^2$$

取 $x_0=(x_1,x_2,\cdots,x_N,0,0,\cdots)\in c_{00}$, 则:

$$\|x-x_0\|_2=(\sum_{k=N+1}^{\infty}|x_n|^2)^{\frac{1}{2}}<\epsilon$$

即: $\forall\epsilon>0,\forall x\in l^2,\exists x_0\in c_{00}$, 使得:$x_0\in U(x,\epsilon)$. 所以, c_{00} 在 l^2 中稠密.

(2) 任取 $y=(y_1,y_2,\cdots)\in {c_{00}}^{\perp}$, 则 $\forall x\in c_{00},(x,y)=0$. 取 $x_n=(0,0,\cdots,1,0\cdots)\in c_{00}$, 则:

$$(x_n,y)=\overline{y}_n=0,\quad(n=1,2,\cdots)$$

所以, $y=(0,0,\cdots)$. 即: ${c_{00}}^{\perp}=\{0\}$.

七、 设 J 是 H 上的自伴算子, 并且存在 $c>0$, 使得 $(Jx,x)\ge c(x,x)(x\in H)$. 令

$$<x,y>=(Jx,y),\quad x,y\in H$$

证明: (1) $<\cdot,\cdot>$ 是 H 上的内积, H 按照新内积成为 Hilbert 空间.

(2) $(H,<\cdot,\cdot>)$ 上的有界线性算子 A 是自伴的当且仅当 $JA=A^*J$, 其中 A^* 是 A 在 $(H,(\cdot,\cdot))$ 上的伴随算子.

证明:

(1) 设 $\forall x,y\in(H,<\cdot,\cdot>)$, 验证正定性, 共轭对称性以及对第一个变元的线性性:

- 正定性

  $<x,x>=(Jx,x)\ge c(x,x)\ge 0$. 当 $x=0$ 时, $<0,0>=(J(0),0)=0$.

  设 $<x,x>=0$, 假设 $x\neq 0$, 则 $<x,x>=(Jx,x)\ge c(x,x)>0$. 矛盾. 所以, $x=0$.

  综上, $<x,x>\ge 0$, 且 $<x,x>=0$ 当且仅当 $x=0$.

- 共轭对称性

  $<x,y>=(Jx,y)=(x,Jy)=\overline{(Jy,x)}=\overline{<y,x>}$

- 对第一个变元的线性性

  $<x_1+x_2,y>=(J(x_1+x_2),y)=(Jx_1+Jx_2,y)=(Jx_1,y)+J(x_2,y)=<x_1,y>+<x_2,y>$

所以, $<\cdot,\cdot>$ 是 H 上的内积. 下证明 H 在此内积导出的范数 $\|\cdot\|_1$ 下是完备的.
设 $\{x_n\}$ 是 $(H,<\cdot,\cdot>)$ 内的 Cauchy 序列, 则 $\forall\epsilon>0,\exists N>0$, 当 $m,n>N$ 时, 有:

$$\epsilon^2>\|x_m-x_n\|_1^2=<x_m-x_n,x_m-x_n>=(J(x_m-x_n),x_m-x_n)\ge c(x_m-x_n,x_m-x_n)=c\|x_m-x_n\|^2$$

即: $\forall\epsilon>0,\exists N>0$, 当 $m,n>N$, 有:

$$\|x_m-x_n\|<\frac{\epsilon}{\sqrt{c}}$$

这说明 $\{x_n\}$ 在内积空间 $(H,(\cdot,\cdot))$ 中也是 Cauchy 列. 而 $(H,(\cdot,\cdot))$ 是完备的, 所以 $\{x_n\}$ 在 H 中收敛.
所以 $\{x_m\}$ 在 $(H,<\cdot,\cdot>)$ 中收敛. 即: H 按照新内积 $\|\cdot\|_1$ 成为 Hilbert 空间.

(2) 下证明:$(H,<\cdot,\cdot>)$ 上的有界线性算子 A 是自伴的当且仅当 $JA=A^*J$.

- "$\Longrightarrow$"

  对于 $\forall x, y \in H$, 有:

  $$<Ax, y> - <x, Ay> = (JAx, y) - (Jx, Ay) = (JAx, y) - (A^*Jx, y) = ((JA - A^*J)x, y)$$

  由 y 的任意性, 取 $y = (JA - A^*J)x$, 可得 $(JA - A^*J)x = 0$. 再由 x 的任意性可得:

  $$JA = A^*J$$

- "$\Longleftarrow$"

  对于 $\forall x, y \in H$, 有:

  $$<Ax, y> - <x, Ay> = (JAx, y) - (Jx, Ay) = (JAx, y) - (A^*Jx, y) = 0$$

  所以 A 是 $(H, <\cdot, \cdot>)$ 内的自伴算子.

3 2013-2014 学年第二学期泛函分析期末考试 (11 级)

一、(本题 40 分, 每小题 8 分) 证明以下结论:

(1) 设 $A=\{x\in C[a,b]:x(t)\le 1,\forall t\in[a,b]\}$. 则 A 是 $C[a,b]$ 中的闭集.

证明:

设 $\{x_n(t)\}\subset A$ 且 $x_n\to x$, 则 $\forall\epsilon>0,\exists N>0$, 当 $n>N$ 时, 有:

$$\|x_n(t)-x(t)\|=\max_{a\le t\le b}|x_n(t)-x(t)|<\epsilon$$

这说明 $x_n(t)$ 在 $[a,b]$ 上一致收敛于 $x(t)$. 由于 $x_n(t)\in C[a,b]$, 所以 $x(t)\in C[a,b]$.

另一方面,

$$|x(t)-x_n(t)|\le\max_{a\le t\le b}|x(t)-x_n(t)|<\epsilon\quad\Rightarrow\quad x(t)\le x_n(t)+\epsilon\le 1+\epsilon$$

由 ϵ 的任意性可知, $x(t)\le 1$.

综上, $x(t)\in A$. 从而 A 是 $C[a,b]$ 中的闭集.

(2) 当 $|\lambda|<\dfrac{1}{\sqrt{2}}$ 时, $L^2[0,\dfrac{\pi}{2}]$ 上的算子 $(Tx)(t)=\lambda\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sqrt{sin(s+t)}x(s)ds$ 存在唯一的不动点.

证明:

作映射: $T:L^2[0,\dfrac{\pi}{2}]\to L^2[0,\dfrac{\pi}{2}]$

$$(Tx)(t)=\lambda\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sqrt{sin(s+t)}x(s)ds$$

对 $\forall x_1x_2\in L^2[0,\dfrac{\pi}{2}]$, 有:

$$\begin{aligned}\|Tx_1-Tx_2\|_2&=\left(\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left|\lambda\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sqrt{sin(s+t)}(x_1(s)-x_2(s))ds\right|^2dt\right)^{\frac{1}{2}}\\&\le|\lambda|\left(\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left(\int_0^{\frac{\pi}{2}}|\sqrt{sin(s+t)}(x_1(s)-x_2(s))|ds\right)^2dt\right)^{\frac{1}{2}}\\&\le|\lambda|\left(\int_0^{\frac{\pi}{2}}|x_1(s)-x_2(x)|^2ds\right)^{\frac{1}{2}}\left(\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left(\int_0^{\frac{\pi}{2}}sin(s+t)ds\right)dt\right)^{\frac{1}{2}}\\&=\sqrt{2}\lambda\|x_1-x_2\|\end{aligned}$$

由于 $|\lambda|<\dfrac{1}{\sqrt{2}}$, 所以 $\sqrt{2}|\lambda|<1$, 从而映射 T 是压缩的. 而 $L^2[0,\dfrac{\pi}{2}]$ 是完备的, 由压缩映射原理可知 T 存在唯一不动点.

(3) 距离空间上的连续映射将列紧集映射为列紧集.

证明:

设 X, Y 是距离空间, $T: X \to Y$ 是连续映射, A 是 X 中的列紧集, $T(A) = B \subset Y$.

任取 $\{y_n\} \subset B$, 则 $\exists x_n \in A$, 使得 $Tx_n = y_n$, $(n = 1, 2, \cdots)$.(这里 x_n 可能不唯一, 但至少可找到一个).

由于 A 是列紧集, 所以 $\exists \{x_{n_k}\} \subset \{x_n\}$, 且 $x_{n_k} \to x$. 记 $Tx = y$.

由于 T 是连续映射. 所以 $\forall \epsilon > 0$, $\exists \delta > 0$, 只要 $d(x, x_{n_k}) < \delta$, 就有:

$$d(x, y_{n_k}) = d(Tx, Tx_{n_k}) < \epsilon$$

而 $x_{n_k} \to x$, 所以 $\forall \delta > 0$, $\exists N > 0$, 当 $n_k > N$, 有:

$$d(x, x_{n_k}) < \delta$$

即: $\forall \epsilon > 0$, $\exists N > 0$, 当 $n_k > N$ 时, 有:

$$d(y, y_{n_k}) < \epsilon$$

所以 $\{y_{n_k}\}$ 收敛. 即 B 中的任意序列都有收敛子列. 从而 B 是列紧集.

即: 距离空间上的连续映射将列紧集映射为列紧集.

(4) 令 $A = \{r_1, r_2, \cdots, r_k, r, r, \cdots\}, r_i, r$是有理数$, k = 1, 2, \cdots\}$. 证明 A 在空间 c 中稠密 (这里设 c 是实空间).

证明:

任取 $x = (x_1, x_2, \cdots) \in c$, 记 $x_n \to l$. 对于 $\forall \epsilon > 0$, 只需要证明 $U(x, \epsilon)$ 包含 A 中的元素.

由于 $x_n \to l$, 则 $\forall \epsilon > 0, \exists N_0 > 0$, 当 $n > N_0$ 时, $|x_n - l| < \dfrac{\epsilon}{4}$.

由有理数集的稠密性可知, $\exists r > 0$, 使得:$|l - r| < \dfrac{\epsilon}{4}$. 从而, 当 $n > N_0$ 时,

$$|x_n - r| \leq |x_n - l| + |l - r| < \frac{\epsilon}{2}$$

由有理数集的稠密性, 可以取 $r_1, r_2, \cdots, r_{N_0}$, 使得:

$$|x_i - r_i| < \frac{\epsilon}{2}$$

所以, 取 $y = (r_1, r_2, \cdots, r_{N_0}) \in A$, 有:

$$\|x - y\| = \sup_{i \geq 1} |x_i - y_i| \leq \frac{\epsilon}{2} < \epsilon$$

即: $y \in U(x,\epsilon)$. 所以, A 在空间 c 中稠密.

(5) 在 $L^2[0,1]$ 上定义算子 $(Tx)(t)=x(t^{\frac{1}{2}})$. 求 T 的伴随算子的表达式.

证明:

对于 $\forall x \in L^2[0,1]$, 有:

$$\|Tx\|_2=\left(\int_0^1 |x(t^{\frac{1}{2}})|^2 dt\right)^{\frac{1}{2}}=\left(\int_0^1 2t\,|x(t)|^2\,dt\right)^{\frac{1}{2}} \le \sqrt{2}\|x\|_2$$

易验证, T 是线性算子, 所以 T 是有界线性算子. 记 $(T^*y)(t)=z(t)$. 则 $\forall x(t),y(t) \in L^2[0,1]$, 有:

$$\begin{aligned}(Tx,y)-(x,T^*y)&=\int_0^1 x(t^{\frac{1}{2}})\overline{y(t)}dt-\int_0^1 x(t)\overline{z(t)}dt\\&=\int_0^1 x(t)2t\overline{y(t^2)}dt-\int_0^1 x(t)\overline{z(t)}dt\\&=\int_0^1 x(t)\overline{\left(\overline{2t}y(t^2)-z(t)\right)}dt\end{aligned}$$

由 $x(t)$ 的任意性, 取 $x(t)=\overline{(2t)}y(t^2)-z(t)$, 由内积正定性可得: $z(t)=\overline{2t}y(t^2)$.

再由 $y(t)$ 的任意性可得:

$$(T^*y)(t)=\overline{2t}y(t^2)$$

以下六题任选五题，每题 12 分

二、 设 $C_0[0,+\infty)=\{x=x(t): x(t)\text{在}[0,+\infty)\text{上连续, 并且}\lim\limits_{t\to+\infty}x(t)=0\}$. 在 $C_0[0,+\infty)$ 上定义范数 $\|x\|=\sup\limits_{t\in[0,+\infty)}|x(t)|$. 证明: $C_0[0,+\infty)$ 是完备的.

证明:

设 $\{x_n(t)\}\subset C_0[a,b]$, 且 $\{x_n(t)\}$ 是 Cauchy 列. 则 $\forall\epsilon>0,\exists N>0$, 当 $n>N$ 时, 有:

$$\|x_m-x_n\|=\sup_{t\in[0,+\infty)}|x_n(t)-x(t)|<\epsilon \quad (1)$$

这表明对任意 $t\in[0,+\infty)$, $\{x_n(t)\}$ 是 Cauchy 序列. 记: $x(t)=\lim\limits_{n\to\infty}x_n(t)$.

在 (1) 式中, 令 $m\to+\infty$, 则:

$$\|x(t)-x_n(t)\|=\sup_{t\in[0,+\infty)}|x(t)-x_n(t)|<\epsilon \quad (2)$$

即:$x_n(t)$ 在 $[0,+\infty)$ 上一致收敛于 $x(t)$. 由于 $x_n(t)$ 在 $[0,+\infty)$ 上连续, 所以 $x(t)$ 在 $[0,+\infty)$ 上连续.

再由 (2) 式可得:

$$|x(t)-x_n(t)| \le \sup_{t\in[0,+\infty)} |x(t)-x_n(t)| < \epsilon \quad \Rightarrow \quad |x(t)| < |x_n(t)| + \epsilon$$

由于 $\lim\limits_{t\to+\infty} x_n(t) = 0$, 所以 $\forall \epsilon > 0, \exists T > 0$, 当 $t > T$, 有:

$$|x_n(t)| < \epsilon$$

所以, $\forall \epsilon > 0, \exists N > 0, T > 0$, 当 $n > N, t > T$ 时,

$$|x(t)| \le |x_n(t)| + \epsilon < 2\epsilon$$

由 ϵ 的任意性可得: $\lim\limits_{t\to+\infty} x(t) = 0$. 综上, $x(t) \in C_0[0,+\infty)$.
由 (2) 式可知, 当 $n > N$ 时,

$$\|x - x_n\| = \sup_{t\in[0,+\infty)} |x(t)-x_n(t)| < \epsilon$$

所以 $x_n(t) \to x(t)$. 综上, $C_0[0,+\infty)$ 是完备的.

三、 设 $a, b > 0$. 计算 $C[0,1]$ 上的线性泛函 $f(x) = a\int_0^{\frac{1}{2}} x(t)dt - b\int_{\frac{1}{2}}^1 x(t)dt$ 的范数.

证明:

首先, 对于 $\forall x(t) \in C[0,1]$, 有:

$$\begin{aligned}
|f(x)| &= |a\int_0^{\frac{1}{2}} x(t)dt - b\int_{\frac{1}{2}}^1 x(t)dt| \\
&\le a|\int_0^{\frac{1}{2}} x(t)dt| + b|\int_{\frac{1}{2}}^1 x(t)dt| \\
&\le \frac{a}{2}(\max_{0\le t\le\frac{1}{2}} |x(t)|) + \frac{b}{2}(\max_{\frac{1}{2}\le t\le 1} |x(t)|) \\
&\le \frac{a+b}{2}\|x\|
\end{aligned}$$

于是有: $\|f\| \le \dfrac{a+b}{2}$. 另一方面, 令:

$$x_0(t) = \begin{cases} 1 & , \quad 0 \le t \le \frac{1}{2} - \epsilon \\ \frac{1}{\epsilon}(\frac{1}{2} - t) & , \quad \frac{1}{2} - \epsilon < t < \frac{1}{2} + \epsilon \\ -1 & , \quad \frac{1}{2} + \epsilon \le t \le 1 \end{cases}$$

则 $\|x_0\| = 1$. 注意到:

$$\begin{aligned} f(x_0) &= a\int_0^{\frac{1}{2}-\epsilon} 1dt + a\int_{\frac{1}{2}-\epsilon}^{\frac{1}{2}} \frac{1}{\epsilon}(\frac{1}{2}-t)dt - b\int_{\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}+\epsilon} \frac{1}{\epsilon}(\frac{1}{2}-t) - b\int_{\frac{1}{2}+\epsilon}^{1} (-1)dt \\ &\geq a\int_0^{\frac{1}{2}-\epsilon} 1dt + b\int_{\frac{1}{2}+\epsilon}^{1} 1dt \\ &= \frac{a+b}{2} - (a+b)\epsilon \end{aligned}$$

由 ϵ 的任意性可知, $\|f\| \geq \dfrac{a+b}{2}$. 综上, $\|f\| = \dfrac{a+b}{2}$.

四、 设 $y^{(n)} = (y_i^{(n)})$ 是 l^q 中的一列元, 使得对每个 $x = (x_i) \in l^p$, 极限 $\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{i=1}^{\infty} x_i y_i^{(n)}$ 存在, 其中 $1 < p, q < \infty, p^{-1} + q^{-1} = 1$. 证明存在唯一的 $y = (y_i) \in l^q$, 使得对每个 $x = (x_i) \in l^p$ 有:

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{\infty} x_i y_i^{(n)} = \sum_{i=1}^{\infty} x_i y_i$$

提示: 对每个 $n = 1, 2, \cdots$, 令 $f_n(x) = \sum\limits_{i=1}^{\infty} x_i y_i^{(n)}, (x \in l^p)$. 利用共鸣定理.

证明:

记 $f_n(x) = \sum\limits_{i=1}^{\infty} x_i y_i^{(n)}, , (x \in l^p)$. 对于 $\forall x \in l^p$, 有:

$$|f_n(x)| = |\sum_{i=1}^{\infty} x_i y_i^{(n)}| \leq \left(\sum_{i=1}^{\infty} |x_i|^p\right)^{\frac{1}{p}} \left(\sum_{i=1}^{\infty} |y_i^{(n)}|^q\right)^{\frac{1}{q}} = \|y^{(n)}\|_q \|x\|_p$$

易验证 f 是线性的, 所以 $\{f_n\}$ 是有界线性泛函. 由题意, 对每个 $x = (x_i) \in l^p$, 极限

$$\lim_{n\to+\infty} f_n(x) = \lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{\infty} x_i y_i^{(n)}$$

存在. 令:

$$f(x) = \lim_{n\to+\infty}\sum_{i=1}^{\infty} x_i y_i^{(n)}$$

则由共鸣定理的推论可知, f 也是有界线性泛函. 由共轭空间表示定理可知, $f(x)$ 的表示方法唯一, 即: 存在唯一的 $y = (y_i) \in l^q$, 使得对每个 $x = (x_i) \in l^p$ 有:

$$\sum_{i=1}^{\infty} x_i y_i = f(x) = \lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{\infty} x_i y_i^{(n)}$$

五、 设 $\|\cdot\|_1$ 是 $C[a,b]$ 上的另一范数, 使得 $(C[a,b],\|\cdot\|_1)$ 成为 Banach 空间, 并且当 $\|x_n-x\|_1\to 0$ 时, 必有 $x_n(t)\to x(t),(t\in[a,b])$. 证明 $\|\cdot\|_1$ 与 $C[a,b]$ 上的原来的范数 $\|\cdot\|$ 等价.

提示: 考虑 $C[a,b]$ 上的恒等算子, 利用闭图像定理.

证明:

考虑 $C[a,b]$ 上的恒等算子 I:

$$I:\ (X,\|\cdot\|_1)\to(X,\|\cdot\|),\quad Ix=x$$

其中, $\|x\|=\max\limits_{a\le t\le b}|x(t)|,\ x\in C[a,b]$. 显然 I 是一个线性双射的算子.

设 $\{x_n\}$ 是 $C[a,b]$ 中的任意一组序列, 满足 $x_n\to x, Ix_n\to y$.

为证明 I 是一个闭算子, 只需要证明:$y=Ix$.

由于 $x_n\to x$, 则:$\|x_n-x\|_1\to 0$. 由题设条件可得:$x_n(t)\to x(t)$.

由于 $Ix_n\to y$, 则有:$\|Ix_n-y\|=\|x_n-y\|=\sup\limits_{a\le t\le b}|x_n(t)-y(t)|\to 0$. 即:$x_n(t)$ 一致收敛于 $y(t)$

所以:$|y(t)-x(t)|=|y(t)-x_n(t)+x_n(t)-x(t)|\le|y(t)-x_n(t)|+|x_n(t)-x(t)|\to 0$. 即:

$$y(t)=x(t),\ t\in[a,b]$$

所以 I 是闭算子. 又因 $(C[a,b],\|\cdot\|_1),(C[a,b],\|\cdot\|)$ 是 Banach 空间, 由闭图像定理可知, I 有界. 从而:

$$\|x\|=\|Ix\|\le\|I\|\|x\|_1$$

再由逆算子定理, I^{-1} 也是有界的. 所以:

$$\|x\|_1=\|I^{-1}x\|_1\le\|I^{-1}\|\|x|$$

. 综上, $\|\cdot\|_1$ 与 $C[a,b]$ 上的原来的范数 $\|\cdot\|$ 等价.

六、 证明: $c_0^*\cong l^1$.

证明:

分三步来证明这个结论.

(i) 设 $\{e_i\}$ 是 c_0 的标准基, 对任意的 $f\in c_0^*$, 令 $a_i=f(e_i)$, 对任意的 $x=(x_i)\in c_0$, 由于 f 是连续的线性泛函, 有:

$$f(x)=f(\sum_{n=1}^{\infty}x_ie_i)=\lim_{n\to\infty}f(\sum_{i=1}^{n}x_ie_i)=\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n}x_if(e_i)=\sum_{n=1}^{\infty}a_ix_i$$

这表明对于 $\forall f\in c_0^*$, f 的一般表达式为:$f(x)=\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_ix_i$, 其中 $x=(x_1,x_2,\cdots),\ a_i=f(e_i)$.

对每个 $n=1,2,\cdots$, 取 $x^{(n)}=(\mathrm{sgn}a_1,\mathrm{sgn}a_2,\cdots,\mathrm{sgn}a_n,0,\cdots)$, 则有 $\|x^{(n)}\|\le 1$, 且:

$$\sum_{i=1}^{n}|a_i|=f(x^{(n)})\le\|f\|\|x^{(n)}\|\le\|f\|$$

令 $n\to+\infty$, 得到:

$$\|a\|_1=\sum_{n=1}^{\infty}|a_n|\le\|f\|$$

因此: $a\in l^1$, 且 $\|a\|_1\ge\|f\|$.

(ii) 反过来, 对于 $\forall a=(a_i)\in l^1$, 在 c_0 上定义:

$$f(x)=\sum_{n=1}^{\infty}a_ix_i,\quad x=(x_i)\in c_0$$

则 f 是线性泛函, 并且 $f(e_i)=a_i\ (i=1,2,\cdots)$. 对于 $\forall x\in c_0$, 有:

$$|f(x)|=|\sum_{n=1}^{\infty}a_ix_i|\le(\max_{n\ge1}|x_i|)(\sum_{n=1}^{\infty}|a_i|)=\|a\|_1\|x\|$$

所以 f 有界, 从而 $f\in c_0^*$, 且:

$$\|f\|\le\|a\|_1$$

(iii) 作映射:

$$\begin{aligned}T:\quad c_0^*&\longrightarrow\quad l^1\\ f&\longmapsto\quad a=(a_i)\end{aligned}$$

其中, $a_i=f(e_i)$. 显然 T 是线性的, 步骤 (2) 表明 T 是满射, 且:

$$\|Tf\|=\|a\|_1=\|f\|$$

所以 T 是 c_0^* 到 l^1 的保距同构映射. 从而:$c_0^*\cong l^1$.

七、 设 $E=\{f\in L^2[-\pi,\pi]:\text{在}[-\pi,0]\text{上}\ f=0\ a.e.\}$.

(1) 证明 E 是 $L^2[-\pi,\pi]$ 的闭子空间. (2) 求由 E 确定的投影算子 P_E 的表达式.

证明:

(1) 设 $\{f_n\}\subset E$, 且 $f_n\xrightarrow{L^2}f$, 则 $f_n\xrightarrow{m}f$. 由 Riesz 定理可知, $\exists\{f_{n_k}\}\subset\{f_n\}$, 使得:

$$f_{n_k}\to f,\ a.e.$$

由于当 $x \in [-\pi, 0]$ 时, $f_n = 0 a.e.$. 所以, $f_{n_k} = 0$ $a.e.$ $x \in [-\pi, 0]$. 所以 $\exists E_1, m(E_1) = 0$, 当 $x \in [-\pi.0] \setminus E_1$ 时,

$$f_{n_k} = 0$$

又因为 $f_{n_k} \to f$ $a.e.$, 所以 $\exists E_2, m(E_2) = 0$, 当 $x \in [-\pi, 0] \setminus E_2$ 时,

$$\lim_{k \to \infty} f_{n_k} = f$$

所以当 $x \in [-\pi, 0] \setminus (E_1 \cup E_2)$ 时, $f = 0$, $a.e.$. 又因为:

$$m(E_1 \cup E_2) \le m(E_1) + m(E_2) = 0$$

所以 $f = 0$ $a.e.$. 所以 $f \in E$. 从而, E 是 $L^2[-\pi, \pi]$ 的闭子空间.

(2) 注意到, $\forall f = f(t) \in L^2[-\pi, \pi]$, f 可分解为:

$$f(t) = f_1(t) + f_2(t) = f(t)\chi_{[-\pi,0]}(t) + f(t)\chi_{(0,\pi]}(t)$$

显然, $f_2(t) = f(t)\chi_{(0,\pi]}(t) \in E$. 对 $\forall g \in E$, 有:

$$(f_1, g) = \int_{-\pi}^{\pi} f_1(t)\overline{g(t)}dt = \int_{-\pi}^{0} f(t)\overline{g(t)}dt = 0$$

所以 $f_1 \in E^\perp$. 由于 E 是 $L^2[-\pi, \pi]$ 的闭子空间, $L^2[-\pi, \pi]$ 是 Hilbert 空间, 由正交分解定理可知:

$$L^2[-\pi, \pi] = E \bigoplus E^\perp$$

由直和的定义可得,f 的分解是唯一的:

$$f = f_1 + f_2, \quad f_1 \in E^\perp, \ f_2 \in E$$

从而

$$(P_E f)(t) = (P_E f_1)(t) + (P_E f_2)(t) = f_2(t) = f(t)\chi_{(0,\pi]}(t)$$

4 2014-2015 学年第二学期泛函分析期末考试 (12 级)

一、(本题 40 分, 每小题 8 分) 证明以下结论:

(1) $A=\{x\in L^1[a,b]:\ \int_a^b x(t)dt=0\}$ 为 $L^1[a,b]$ 中的闭集.

证明:

取 $\{x_n\}inA$, 且 $x_n\in x$, 则 $\forall\epsilon>0,\exists N>0$, 当 $n>N$ 时,

$$\int_a^b |x(t)-x_n(t)|dt<\epsilon$$

所以

$$|\int_a^b x(t)dt|=|\int_a^b (x(t)-x_n(t))\,dt|\le\int_a^b |x(t)-x_n(t)|dt<\epsilon$$

由 ϵ 的任意性可知, $|\int_a^b x(t)dt|=0$. 从而 $\int_a^b x(t)dt=0$, $x(t)\in A$. 所以 A 是闭集.

(2) 当 $|\lambda|<\sqrt{\dfrac{3}{2}}$ 时, $L^2[0,1]$ 上的算子 $(Tx)(t)=\lambda\int_0^1\sqrt{s^2+t^2}x(s)ds$ 存在唯一的不动点.

证明:

作映射 $L^2[0,1]\to L^2[0,1]$:

$$(Tx)(t)=\lambda\int_0^1\sqrt{s^2+t^2}x(s)ds$$

对于 $\forall x_1(t),x_2(t)\in L^2[0,1]$, 有:

$$\begin{aligned}\|Tx_1-Tx_2\|_2&=\left(\int_0^1\left|\lambda\int_0^1\sqrt{s^2+t^2}\,(x_1(s)-x_2(s))\,ds\right|^2dt\right)^{\frac12}\\&\le|\lambda|\left(\int_0^1\left(\int_0^1|\sqrt{s^2+t^2}\,(x_1(s)-x_2(s))\,|ds\right)^2dt\right)^{\frac12}\\&\le|\lambda|\left(\int_0^1|x_1(s)-x_2(s)|\,ds\right)^{\frac12}\left(\int_0^1\left(\int_0^1(s^2+t^2)ds\right)dt\right)^{\frac12}\\&=\sqrt{\frac23}|\lambda|\|x_1-x_2\|\end{aligned}$$

由于 $|\lambda|<\sqrt{\dfrac32}$, 所以 $\sqrt{\dfrac23}|\lambda|<1$. 由于 $L^2[0,1]$ 是完备的, 所以由压缩映射原理可知, 算子 T 存在唯一的不动点.

(3) $\|\cdot\|_1$ 和 $\|\cdot\|_2$ 等价. 若 $(X,\|\cdot\|_1)$ 完备, 则 $(X,\|\cdot\|_2))$ 也是完备的.

证明:

设 $\{x_n\}$ 是 $(X, \|\cdot\|_2)$ 中的 Cauchy 列, 则 $\forall \epsilon > 0, \exists N > 0$, 当 $m, n > N$ 时, 有:

$$\|x_m - x_n\|_2 < \epsilon$$

由于 $\|\cdot\|_1$ 与 $\|\cdot\|_2$ 等价, 则存在常数 $a > 0$, 使得:

$$\|x_m - x_n\|_1 \leq a\|x_m - x_n\|_2$$

于是:

$$\|x_m - x_n\|_1 \leq a\|x_m - x_n\|_2 < a\epsilon$$

由 ϵ 的任意性可知, $\{x_n\}$ 也是 $(X, \|\cdot\|_1)$ 内的 Cauchy 列.

而 $(X, \|\cdot\|_1)$ 是完备的, 所以 $\{x_n\}$ 在 X 内收敛.

从而 $\{x_n\}$ 也是 $(X, \|\cdot\|_2)$ 内的收敛序列. 从而 $(X, \|\cdot\|_2)$ 也是完备的.

(4)$\{a_n\}$ 是收敛于 0 的数列. 在 $l^p(1 \leq p < \infty)$ 上定义算子 $T(x_1, x_2, \cdots) = (a_1x_1, a_2x_2, \cdots)$. 则 T 是紧算子.

证明:

由于收敛序列是有界的, 所以 $\exists M > 0$, 使得:

$$|a_i| \leq M, \quad (i = 1, 2, \cdots)$$

所以, 对于 $\forall x = (x_1, x_2, \cdots) \in l^p$, 有:

$$\|Tx\|_p = \left(\sum_{n=1}^{\infty} |a_ix_i|^p\right)^{\frac{1}{p}} \leq M\left(\sum_{n=1}^{\infty} |x_i|^p\right) = M\|x\|_p$$

易验证, T 是线性的. 所以 T 是有界线性算子. 考虑算子 T_n :

$$T_n(x_1, x_2, \cdots) = (a_1x_1, a_2x_2, \cdots, a_nx_n, 0, \cdots)$$

则 T 是有界的有限秩算子. 注意到 $\forall x \in l^p$, 有:

$$\|Tx - T_nx\|_p = \left(\sum_{k=n+1}^{\infty} |a_kx_k|^p\right)^{\frac{1}{p}} \leq \left(\sup_{k \geq n+1} |a_i|\right)\left(\sum_{k=n+1}^{\infty} |x|^p\right)^{\frac{1}{p}} \leq \left(\sup_{k \geq n+1} |a_i|\right)\|x\|_p$$

由于 $a_n \to 0$, 所以: $\sup\limits_{k \geq n+1} |a_i| \to 0$. 所以:

$$\|T - T_n\|_p \leq \sup_{k \geq n+1} |a_i| \to 0$$

所以, T 是紧算子.

(5) P, Q 是投影算子, 并且 $PQ = QP$, 则 $P + Q - PQ$ 也是投影算子.

证明:

只需要证明 $P + Q - PQ$ 是幂等和自伴的.

$$\begin{aligned}(P+Q-PQ)^2 &= (P+Q-PQ)(P+Q-PQ)\\ &= P^2 + PQ - P^2Q + QP + Q^2 - QPQ - PQP - PQ^2 + PQPQ\\ &= P^2 + PQ - P^2Q + PQ + Q^2 - PQ^2 - P^2Q - PQ^2 + PQ^2P\\ &= P + PQ - PQ + PQ + Q - PQ - PQ - PQ + PQ\\ &= P + Q - PQ\end{aligned}$$

其中, 用到了 $PQ = QP, P^2 = P, Q^2 = Q$. 所以 $P + Q - PQ$ 是幂等的. 对于任意 $x, y \in X$, 有:

$$\begin{aligned}((P+Q-PQ)x, y) &= (Px, y) + (Qx, y) - (PQx, y)\\ &= (x, Py) + (x, Qy) - (Qx, Py)\\ &= (x, Py) + (x, Qy) - (x, QPy)\\ &= (x, Py) + (x, Qy) - (x, PQy)\\ &= (x, (P+Q-PQ)y)\end{aligned}$$

所以 $P + Q - PQ$ 是自伴的. 综上, $P + Q - PQ$ 是投影算子.

以下六题任选五题，每题 12 分

二、 $T : L^2[0,1] \to L^2[0,1]$, $(Tx)(t) = x(t)cost$. 求 $\|T\|$.

证明:

$\forall x(t) \in L^2[0,1]$, 有:

$$\|Tx\|_2 = \left(\int_0^1 |x(t)cost|^2 dt\right)^{\frac{1}{2}} \leq \left(\int_0^1 |x(t)|^2\right)^{\frac{1}{2}} = \|x\|_2$$

所以, $\|T\| \leq 1$. 另一方面, 取 $x_0(t)$ 如下式:

$$x_0(t) = \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{\epsilon}} & , \quad x \in [0, \epsilon] \\ 0 & , \quad x \in (\epsilon, 1] \end{cases}$$

则 $\|x_0\|_2 = \int_0^\epsilon \dfrac{1}{\epsilon} dt = 1$, 且:

$$\|Tx_0\|_2 = \left(\int_0^\epsilon \frac{cos^2 t}{\epsilon} dt\right)^{\frac{1}{2}} \geq \left(cos^2 \epsilon\right)^{\frac{1}{2}} = cos\epsilon = 1 - 2sin^2(\frac{\epsilon}{2}) > 1 - \frac{\epsilon^2}{2}$$

由 ϵ 的任意性可得, $\|T\| \geq \|Tx_0\| \geq 1$. 综上, $\|T\| = 1$.

三、 设 X 是 Banach 空间, E_1, E_2 是 X 的闭线性子空间, 使得 $X = E_1 \bigoplus E_2$. 证明存在 $c > 0$, 使得对任意 $x = x_1 + x_2 (x \in E_1, x_2 \in E_2)$, 有:

$$\|x_1\| \leq c\|x\|, \quad \|x_2\| \leq c\|x\|$$

证明:

考虑算子 $P_1: X \longrightarrow E_1,\ P_2: X \longrightarrow E_2$:

$$P_1(x) = x_1,\ P_2(x) = x_2, \quad \text{其中}, x = x_1 + x_2, x_1 \in E_1, x_2 \in E_2$$

由于 X 是 Banach 空间, E_1 是 X 的闭线性子空间, 所以 E_1 也是 Banach 空间.

对 X 中的任意序列 $\{x^{(n)}\}$, 设:

$$x^{(n)} \to x, P_1 x^{(n)} \to y$$

其中, $x^{(n)} = x_1^{(n)} + x_2^{(n)}, x_1^{(n)} \in E_1, x_2^{(n)} \in E_2$.

则 $P_1 x^{(n)} = x_1^{(n)} \in E_1$. 由于 E_1 是闭集, 所以 $P_1 x^{(n)} = x_1^{(n)} \to y \in E_1$.

由因为 $x_2^{(n)} = x^{(n)} - x_1^{(n)} \to x - y$, 而 $x_2^{(n)} \in E_2$, E_2 是闭集, 所以 $x - y \in E_2$.

注意到 $x = y + (x - y),\ y \in E_1,\ x - y \in E_2$, 所以 $P_1 x = y$. 从而 P_1 是个闭算子. 同理 P_2 也是闭算子.

由闭图像定理, P_1, P_2 有界, 从而:

$$\|x_1\| = \|P_1 x\| \leq \|P_1\|\|x\|$$

$$\|x_1\| = \|P_2 x\| \leq \|P_2\|\|x\|$$

记 $c = max\{\|P_1\|,\ \|P_2\|\}$, 则对于 $\forall x = x_1 + x_2 (x_1 \in E_1, x_2 \in E_1)$, 有:

$$\|x_1\| \leq c\|x\|, \quad \|x_2\| \leq c\|x\|$$

四、 在空间 c 上定义泛函 $f(x) = \lim\limits_{n \to \infty} x_n$. 证明 f 可延拓为 l^∞ 上的有界线性泛函, 且 $\|f\| = 1$.

证明:

任取 $x=(x_1,x_2,\cdots)\in c$, 由于收敛序列是有界的, $x\in l^{\infty}$. 即: $c\subset l^{\infty}$.

又由于 c 是线性空间, 所以 c 是 l^{∞} 的线性子空间. 对于 $\forall x\in c$, 有

$$|f(x)|=|\lim_{n\to}x_n|\le\sup_{n\ge1}|x_n|=\|x\|$$

所以 f 是有界泛函, 且 $\|f\|\le1$. 对于 $\forall x=(x_i),y=(y_i)\in c$, 有:

$$f(k_1x+k_2y)=\lim_{n\to\infty}(k_1x_n+k_2y_n)=k_1\lim_{n\to\infty}x_n+k_2\lim_{n\to\infty}y_n=k_1f(x)+k_2f(y)$$

所以 f 是线性的. 即:f 是有界线性泛函. 由 Hahn-Banach 定理, f 可延拓为 l^{∞} 上的有界线性泛函.

另一方面, 取 $x=(1,1,\cdots)\in c$, 则 $\|x\|=1$, 且 $f(x)=1$. 所以:$\|f\|\ge1$.

综上: $\|f\|=1$.

五、 $1<p,q<\infty,p^{-1}+q^{-1}=1$. 证明: $(R^n,\|\cdot\|_p)^*\cong(R^n,\|\cdot\|_q)$.

证明:

分三步证明该结论.

(i) 取 R^n 内的标准基 $\{e_n\}$. 则对于 $\forall x=(x_i)\in(R^n,\|\cdot\|_p)$, 有 $x=\sum\limits_{i=1}^{n}x_ie_i$. 对于 $\forall f\in(R^n,\|\cdot\|_p)^*$, 记 $a_i=f(e_i)$ 有:

$$f(x)=f(\sum_{i=1}^{n}x_ie_i)=\sum_{i=1}^{n}x_if(e_i)=\sum_{i=1}^{n}a_ix_i$$

这表明 f 的一般表达式为:$f(x)=\sum\limits_{i=1}^{n}a_ix_i,\ x=(x_i)\in(R^n,\|\cdot\|_p)$.

对每个正整数 $n=1,2,\cdots$, 取

$$x^{(n)}=(|a_1|^{q-1}\mathrm{sgn}a_1,|a_2|^{q-1}\mathrm{sgn}a_2,\cdots,|a_n|^{q-1}\mathrm{sgn}a_n)$$

则 $x^n\in(R,\|\cdot\|_p)$. 且:

$$\|x^{(n)}\|=\left(\sum_{i=1}^{n}|a_i|^q\right)^{\frac{1}{p}}$$

则:

$$\sum_{i=1}^{n}|a_i|^q=|\sum_{i=1}^{n}a_ix_i|=|f(x^{(n)})|\le\|f\|\|x^n\|_p=\|f\|\left(\sum_{i=1}^{n}|a_i|^q\right)^{\frac{1}{p}}$$

两边同除 $\left(\sum\limits_{i=1}^{n}|a_i|^q\right)^{\frac{1}{p}}$, 得到:

$$\left(\sum_{i=1}^{n}|a_i|^q\right)^{\frac{1}{q}}\le\|f\|$$

所以 $a=(a_i)\in(R^n,\|\cdot\|_q)$. 且:

$$\|f\|\geq\|a\|_q$$

(ii) 对任意的 $a=(a_i)\in(R^n,\|\cdot\|_q)$, 定义泛函:

$$f(x)=\sum_{i=1}^{n}a_ix_i,\ x=(x_i)\in(R^n,\|\cdot\|_p)$$

易验证, f 是 $(R^n,\|\cdot\|_p)$ 上的线性泛函. 并且 $a_i=f(e_i)$. 对于任意 $x\in(R^n,\|\cdot\|_p)$, 有:

$$|f(x)|=|\sum_{i=1}^{n}a_ix_i|\leq\sum_{i=1}^{n}|a_ix_i|\leq\left(\sum_{i=1}^{n}|a_i|^q\right)^{\frac{1}{q}}\left(\sum_{i=1}^{n}|x_i|^p\right)^{\frac{1}{p}}=\|a\|_q\|x\|_p$$

所以 f 是 $(R^n,\|\cdot\|_p)$ 上的有界线性泛函, 且:

$$\|f\|\leq\|a\|_q$$

(iii) 作映射:

$$\begin{aligned}T:\quad(R^n,\|\cdot\|_p)^* &\longrightarrow (R^n,\|\cdot\|_q)\\ f &\longmapsto a=(a_i)\end{aligned}$$

其中, $f(x)=\sum\limits_{i=1}^{n}a_ix_i, x=(x_i)\in(R^n,\|\cdot\|_p), a=f(e_i)$.
显然 T 是线性的. 步骤 (ii) 表明 T 是满射, 且:

$$\|Tf\|_q=\|a\|_q=\|f\|$$

所以 T 是 $(R^n,\|\cdot\|_p)^*$ 到 $(R^n,\|\cdot\|_q)$ 的保距同构映射. 从而:

$$(R^n,\|\cdot\|_p)^*\cong(R^n,\|\cdot\|_q)$$

六、 (1) 写出 c_0 上连续线性泛函的一般表达式.

(2) 设 $x=(x_i)\in c_0$. 令 $x^{(n)}=(0,0,\cdots,0,x_1,x_2,\cdots),n=1,2,\cdots$. 证明: c_0 中 $x^{(n)}\xrightarrow{w}0$, 但 $\{x^{(n)}\}$ 按范数不收敛于 0.

证明:

(1) 由于 $c_0^*\cong l^1$, 所以 c_0 上的连续线性泛函即有界线性泛函的一般表达式为:

$$f(x)=\sum_{n=1}^{\infty}a_ix_i,\ a=(a_i)\in l^1,\ x=(x_i)\in c_0$$

(2) 任取 $f=\sum\limits_{i=1}^{\infty} a_i x_i \in c_0^*$, 则有:

$$|f(x^{(n)})| = |\sum_{i=1}^{\infty} a_{i+n}x_i| \le \sum_{i=1}^{\infty} |a_{i+n}x_i| \le \|x\| \left(\sum_{i=n+1}^{\infty} |a_i|\right)$$

由于 $a=(a_i)\in l^1$, 则:

$$\sum_{i=1}^{\infty} |a_i| < \infty \quad \Rightarrow \quad \sum_{i=n+1}^{\infty} |a_i| \to 0, \quad n\to+\infty$$

所以

$$|f(x_n)| \le \left(\sum_{i=n+1}^{\infty} |a_i|\right) \|x\| \to 0$$

所以 $f(x_n)\to 0 = f(0)$. 即: $x \xrightarrow{w} 0$.

但是

$$\|x^{(n)}\| = \sup_{n\ge 1} |x_n| = \|x\| \nrightarrow 0$$

所以 $\{x^{(n)}\}$ 按范数不收敛于 0.

七、 (1) 设 $M=\{x=(x_i)\in l^2 : x_{2k}=0\}$. 求 $M^{\perp}$.

(2) 在 $L^2[0,1]$ 上定义 $(Tx)(t)=\lambda x(t^{\frac{1}{2}})$. 求 T 的伴随算子 T^*.

证明:

(1) 任取 $y=(y_i)\in M^{\perp}$, 对于 $\forall x\in M$, 有:

$$(x,y)=\sum_{n=1}^{\infty} x_i\overline{y_i} = \sum_{k=1}^{\infty} x_{2k-1}\overline{y_{2k-1}}$$

由 x 的任意性, 取 $x=e_{2k-1}, k=1,2,\cdot$. 则有: $y_{2k-1}=0,\ k=1,2,\cdots$. 由 y 的任意性可知:

$$M^{\perp}=\{y\in l^2:\ y_{2k-1}=0,\ k=1,2,\cdots\}$$

(2) 对于 $\forall x(t)\in L^2[0,1]$, 有:

$$\|Tx\|_2 = \left(\int_0^1 |\lambda x(t^{\frac{1}{2}})|dt\right)^{\frac{1}{2}} = |\lambda|\left(\int_0^1 |x(t^{\frac{1}{2}})|dt\right)^{\frac{1}{2}} \le |\lambda|\left(\int_0^1 2t|x(t)|dt\right)^{\frac{1}{2}} = \sqrt{2}|\lambda|\|x\|_2$$

所以 T 是有界的. 易验证 T 是线性的. 所以 T 是有界线性泛函.

设 $(T^*y)(t)=z(t)$, 则对于 $\forall x(t),y(t)\in L^2[0,1]$, 有:

$$
\begin{aligned}
(Tx,y)-(x,T^*y) &= \int_0^1 \lambda x(t^{\frac{1}{2}})\overline{y(t)}dt - \int_0^1 x(t)\overline{z(t)}dt \\
&= \int_0^1 2\lambda t x(t)\overline{y(t^2)}dt - \int_0^1 x(t)\overline{z(t)}dt \\
&= \int_0^1 x(t)\left(\overline{2\overline{\lambda}t y(t^2)-z(t)}\right)dt \\
&= 0
\end{aligned}
$$

由 $x(t)$ 的任意性, 取 $x(t)=2\overline{\lambda}ty(t^2)-z(t)$ 再由内积正定性可得:

$$
2\overline{\lambda}ty(t^2)-z(t)=0 \quad\Rightarrow\quad z(t)=2\overline{\lambda}ty(t^2)
$$

再由 $y(t)$ 的任意性可知:

$$
(T^*y)(t)=2\overline{\lambda}ty(t^2),\quad y(t)\in L^2[0,1]
$$

5 2011-2012 学年第二学期复变函数期末考试 (09 级)

一、(本题 40 分, 每小题 8 分)

(1) 设 $f(z)=u(x,y)+iv(x,y)$ 在区域 D 内解析, 并且 $v=ku$(其中 k 是常数). 证明 $f(z)$ 在 D 内恒为常数.

证明:

设 $z=x+iy$, 由于 $f(z)$ 在区域 D 内解析, 它应该满足 Cauchy-Riemann 条件:

$$\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{\partial v}{\partial y},\quad \frac{\partial u}{\partial y}=-\frac{\partial v}{\partial x}$$

由于 $v=ku$, 则上述 Cauchy-Riemann 条件变为:

$$\frac{\partial v}{\partial y}=k\frac{\partial u}{\partial y}=\frac{\partial u}{\partial x},\qquad \frac{\partial v}{\partial x}=k\frac{\partial u}{\partial x}=-\frac{\partial u}{\partial y}$$

所以:

$$k\frac{\partial u}{\partial x}=k^2\frac{\partial u}{\partial y}=-\frac{\partial u}{\partial y}\quad\Rightarrow\quad(k^2+1)\frac{\partial u}{\partial y}=0\quad\Rightarrow\quad\frac{\partial u}{\partial y}=0$$

于是可以得到:

$$\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{\partial u}{\partial y}=\frac{\partial v}{\partial x}=\frac{\partial v}{\partial y}=0$$

从而 $u(x,y)=C_1, v(x)=C_2$. 从而:$f(z)=C_1+iC_2=C\in\mathbb{C}$, 即 $f(z)$ 在 D 内为常数.

(2) 计算积分 $I=\int_L\frac{cosz}{z^2(z-1)}dz$, 其中 L 分别为 $|z+1|=\frac{1}{2},|z-1|=\frac{1}{2}$ 和 $|z|=\frac{1}{2}$.

解:

(i) 令 $f_1(z)=\frac{cosz}{z^2(z-1)}$, 由于 $f_1(z)$ 在以 $|z+1|=\frac{1}{2}$ 为边界的有界区域 D_1 内解析, 在 $\overline{D}_1=D_1+L_1$ 上连续, 由 Cauchy 积分定理知:

$$I=\int_{L_1}\frac{cosz}{z^2(z-1)}dz=0$$

(ii) 令 $f_2(z)=\frac{cosz}{z^2}$, 则 $f_2(z)$ 在 $\overline{D}_2=\{z:|z-1|\le\frac{1}{2}\}$ 上解析. 又因为 $z_0=1\in\overline{D}_2$, 由 Cauchy 积分公式:

$$I=\int_{L_2}\frac{cosz}{z^2(z-1)}dz=\int_{L_2}\frac{f_2(z)}{(z-1)}dz=2\pi i\left.\frac{cosz}{z^2}\right|_{z=1}=2\pi icos1$$

(iii) 令 $f_3(z)=\frac{cosz}{z-1}$, 则 $f_3(z)$ 在 $\overline{D}_3=\{z:|z|\le\frac{1}{2}\}$ 上解析. 又因为 $z_0=0\in\overline{D}_2$, 由 Cauchy 求导公式:

$$I=\int_{L_3}\frac{cosz}{z^2(z-1)}dz=\int_{L_3}\frac{f_3(z)}{z^2}dz=\frac{2\pi i}{1!}\left.\left(\frac{cosz}{z-1}\right)'\right|_{z=0}=2\pi i\left.\frac{-(z-1)sinz-cosz}{(z-1)^2}\right|_{z=0}=-2\pi i$$

(3) 求 $f(z)=\dfrac{z}{(z-1)(z-2)}$ 在 $|z|<1$ 和 $1<|z|<2$ 内的洛朗展式.

解:

首先, 将 $f(z)$ 进行化简:

$$f(z)=\frac{z}{(z-1)(z-2)}=\frac{z}{z-2}-\frac{z}{z-1}$$

(i) 当 $|z|<1$ 时, $|\dfrac{z}{2}|<1$, 所以:

$$f(z)=\frac{z}{z-2}-\frac{z}{z-1}=\frac{1}{1-z}-\frac{1}{1-\frac{z}{2}}=\sum_{n=0}^{\infty}z^n-\sum_{n=0}^{\infty}(\frac{z}{2})^n=\sum_{n=1}^{\infty}(1-\frac{1}{2^n})z^n$$

(ii) 当 $1<|z|<2$ 时, $|\dfrac{z}{2}|<1, |\dfrac{1}{z}|<1$, 所以:

$$f(z)=\frac{z}{z-2}-\frac{z}{z-1}=1-\frac{1}{1-\frac{z}{2}}-\frac{1}{1-\frac{1}{z}}=1-\sum_{n=0}^{\infty}(\frac{z}{2})^n-\sum_{n=0}^{\infty}(\frac{1}{z})^n=-\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{z^n}-\sum_{n=1}^{\infty}\frac{z^n}{2^n}$$

(4) 证明当 $\lambda>e$ 时方程 $cosz=\lambda z^n$ 在 $|z|<1$ 内有 n 个根.

证明:

先证明一个不等式: 对于 $\forall z\in\mathbb{C}$, 有:

$$|e^z|\le e^{|z|}$$

这是由于 (记 $z=x+iy$):

$$|e^z|=(e^z\overline{e^z})^{\frac{1}{2}}=(e^ze^x\overline{(cosy+isiny)})^{\frac{1}{2}}=e^{\frac{z+\overline{z}}{2}}=e^{Rez}\le e^{|z|}$$

从而, 在 $|z|=1$ 上:

$$|-cosz|=|\frac{e^{iz}+e^{-iz}}{2}|\le\frac{|e^{iz}|+|e^{-iz}|}{2}\le\frac{e^{|iz|}+e^{|-iz|}}{2}=e<|\lambda|=|\lambda z^n|$$

由于 $cosz,\lambda z^n$ 在 $|z|\le1$ 上解析, 由 Rouche 定理可知:

$$\lambda z^n,\quad \lambda z^n-cosz$$

在 $|z|<1$ 内有相同的零点个数.

由于 $\lambda z^n=0$ 在 $|z|<1$ 内有 n 重零点 $z=0$, 所以, $cosz=\lambda z^n$ 在 $|z|<1$ 内有 n 个根.

(5) 设 $f(z)$ 在 $0<|z-z_0|<R$ 内连续, 并且 $\lim\limits_{z\to z_0}(z-z_0)f(z)=A$. 证明

$$\lim_{r\to 0}\int_{|z-z_0|=r} f(z)dz=2\pi iA$$

证明:

由于 $\lim\limits_{z\to z_0}(z-z_0)f(z)=A$, 所以 $\forall\epsilon>0$, $\exists r>0$, 当 $|z-z_0|<r$ 时,

$$|(z-z_0)f(z)-A|<\frac{\epsilon}{2\pi}$$

$$\begin{aligned}\left|\lim_{r\to 0}\int_{|z-z_0|=r} f(z)dz-2\pi iA\right| &= |\lim_{r\to 0}\int_{|z-z_0|=r} f(z)dz-\frac{A}{z-z0}dz| \\ &= \left|\lim_{r\to 0}\int_{|z-z_0|=r}\frac{(z-z_0)f(z)-A}{z-z_0}dz\right| \\ &\le \lim_{r\to 0}\int_{|z-z_0|=r}\left|\frac{(z-z_0)f(z)-A}{z-z_0}\right||dz| \\ &\le \lim_{r\to 0}\frac{\epsilon}{2\pi r}2\pi r=\epsilon\end{aligned}$$

所以,

$$\lim_{r\to 0}\int_{|z-z_0|=r} f(z)dz=2\pi iA$$

二、(本题 10 分)

确定函数 $F(z)=\sqrt[3]{z(z-1)(z-2)}$ 的枝点, 作出 $F(z)$ 的一个可单值分枝区域, 使得该区域包含 3 和 $1+i$ 两点. 设 $f(z)$ 是满足 $f(3)=\sqrt[3]{6}$ 的分枝, 求 $f(1+i)$.

解:

由于 1 不是 3 的倍数, $1+1+1$ 是 3 的倍数, 所以 $0,1,2$ 是 $F(z)$ 的枝点, ∞ 不是 $F(z)$ 的枝点. 根据根式函数的定义:

$$F(z)=\sqrt[3]{|z(z-1)(z-2)|}e^{i\frac{Argz+Arg(z-1)+Arg(z-2)}{3}}$$

以区间 $[0,2]$ 为割线, 把复平面 C 割开得到区域 D, 下说明 D 是 $F(z)$ 的可单值分枝区域.

对于 D 内的任意一条简单闭曲线 L, 设 z_0 是 L 上某一点. 由于 L 或者不围绕 0,1,2, 或者同时围绕 $0,1,2$. 当 z_0 沿着 L 逆时针方向连续移动回到 z_0 时, 或者 $argz, arg(z-1), arg(z-2)$ 都不变, 或者

$argz, arg(z-1), arg(z-2)$ 同时增加 2π, 这两种情况下, $F(z)$ 的之都不发生变化, 这说明 D 确实是 $F(z)$ 的可单值分枝区域. 注意到 3 和 $1+i$ 都在区域 D 内, 所以寻找的区域 D 符合要求.

下面计算指定的分枝在给定的点的值. 在 $z=3$ 处取:

$$argz = 0, \quad arg(z-1) = 0, \quad arg(z-2) = 0$$

于是,

$$f(3) = \sqrt[3]{6}e^{i\frac{0+0+0+2k\pi}{3}} = \sqrt[3]{6} \quad \Rightarrow \quad k = 0$$

所以, $f(z) = \sqrt[3]{|z(z-1)(z-2)|}e^{i\frac{argz+arg(z-1)+arg(z-2)}{3}}$. 从而:

$$f(1+i) = \sqrt[3]{2}e^{i\frac{\frac{\pi}{4}+\frac{\pi}{2}+\frac{3\pi}{4}}{3}} = \sqrt[3]{2}i$$

三、**(本题 10 分)**

求下列函数的奇点 (包括无穷远点), 并确定它们的类型 (极点要指明阶数):

(1) $f(z) = \dfrac{z+1}{z^2(z-1)}$ (2) $f(z) = \dfrac{1}{sin\dfrac{1}{z}}$

解:

(1) $f(z)$ 的奇点有 $0, 1, \infty$, 下面判断奇点的类型:

(i) 由于

$$f(z) = \frac{z+1}{z^2(z-1)} = \frac{1}{z^2}\frac{z+1}{z-1} = \frac{1}{z^2}\phi(z)$$

而 $\phi(z)$ 在 $z=0$ 处解析, 所以 $z=0$ 是 $f(z)$ 的二阶极点.

(ii) 由于

$$f(z) = \frac{z+1}{z^2(z-1)} = \frac{1}{z-1}\frac{z+1}{z^2} = \frac{1}{z^2}\phi(z)$$

而 $\phi(z)$ 在 $z=1$ 处解析, 所以 $z=0$ 是 $f(z)$ 的一阶极点.

(iii) 由于 $f(z)$ 在 $2<|z|<+\infty$ 内解析, 故 $z=\infty$ 是 $f(z)$ 的孤立奇点. 由于

$$\lim_{z\to\infty} f(z) = 0$$

所以 $z=\infty$ 是 $f(z)$ 的可去奇点.

(2)$f(z)$ 的奇点有:$0, z_k = \dfrac{1}{k\pi}, \infty$. 下讨论奇点的类型:

(i) 考虑 $g(z) = \dfrac{1}{f(z)} = sin(\dfrac{1}{z})$, 则:

$$g(z_k) = 0, \quad g'(z_k) = \left(sin(\frac{1}{z})\right)'\Bigg|_{z=z_k} \neq 0$$

所以 $z_k=\dfrac{1}{k\pi}$ 是 $g(z)$ 的一阶零点, 从而是 $f(z)$ 的一阶极点.

(ii) 考虑 $g(w)=f(\dfrac{1}{w})=\dfrac{1}{sinw}$. 由于 $w=0$ 是 $\dfrac{1}{g(w)}$ 的一阶零点, 所以 $w=0$ 是 $g(w)$ 的一阶极点.

所以 $z=\infty$ 是 $f(z)$ 的一阶极点.

(iii) 由于 $z_n=\dfrac{1}{n\pi}\to 0$, 所以 $z=0$ 不是 $f(z)$ 的孤立奇点, 它是孤立奇点 $z_n=\dfrac{1}{n\pi}$ 的极限点.

四、(本题 12 分)

用留数定理计算积分 $I=\displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{xsinmx}{(x^2+a^2)^2}dx,\ (m>0,a>0)$.

解:

令 $g(z)=\dfrac{ze^{imz}}{(z^2+a^2)^2}$. 则 $g(z)$ 在上半平面除了有一个二阶极点 $z=ai$ 外处处解析. 设 D 是以原点为中心, 以 R 为半径的上半圆盘, 其边界为 C_R+L_R. 当 $R>a$ 时, $z=ai$ 包含在 D 内, 由留数定理可知:

$$\int_{-R}^{R}\frac{xe^{imx}}{(x^2+a^2)^2}dx+\int_{C_R}\frac{ze^{imz}}{(z^2+a^2)^2}dz=2\pi iRes(f,ai)=2\pi i\left(\frac{ze^{imz}}{(z+ai)^2}\right)'\Bigg|_{z=ai}=\frac{i\pi me^{-ma}}{2a}$$

而:

$$\int_{C_R}\frac{ze^{imz}}{(z^2+a^2)^2}dz=m^2\int_{C_{mR}}\frac{ue^{iu}}{(u^2+a^2m^2)^2}du=m^2\int_{C_{mR}}\frac{ze^{iz}}{(z^2+a^2m^2)^2}dz$$

由于 $\displaystyle\lim_{z\to\infty}\frac{z}{(z^2+a^2m^2)^2}=0$, 所以:

$$\lim_{R\to\infty}\int_{C_R}\frac{ze^{imz}}{(z^2+a^2)^2}dz=m^2\lim_{mR\to\infty}\int_{C_{mR}}\frac{ze^{iz}}{(z^2+a^2m^2)^2}dz=0$$

令 $R\to+\infty$, 可得:

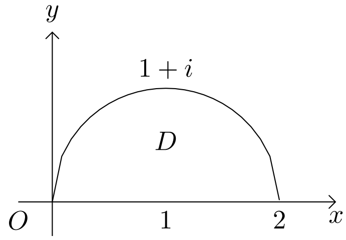
$$\int_{-\infty}^{\infty}\frac{xe^{imx}}{(x^2+a^2)^2}dx=\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{ixsinmx}{(x^2+a^2)^2}dx+\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{xcosmx}{(x^2+a^2)^2}dx=\frac{i\pi me^{-ma}}{2a}$$

比较实部虚部可得:

$$\int_0^{+\infty}\frac{xsinmx}{(x^2+a^2)^2}dx=\frac{1}{2}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{xsinmx}{(x^2+a^2)^2}dx=\frac{\pi me^{-ma}}{4a}$$

五、(本题 10 分)

作一保形映射把半圆盘 $D=\{z:|z-1|<1,\mathrm{Im}z>0\}$(如下图) 映为单位圆盘 $|w|<1$.



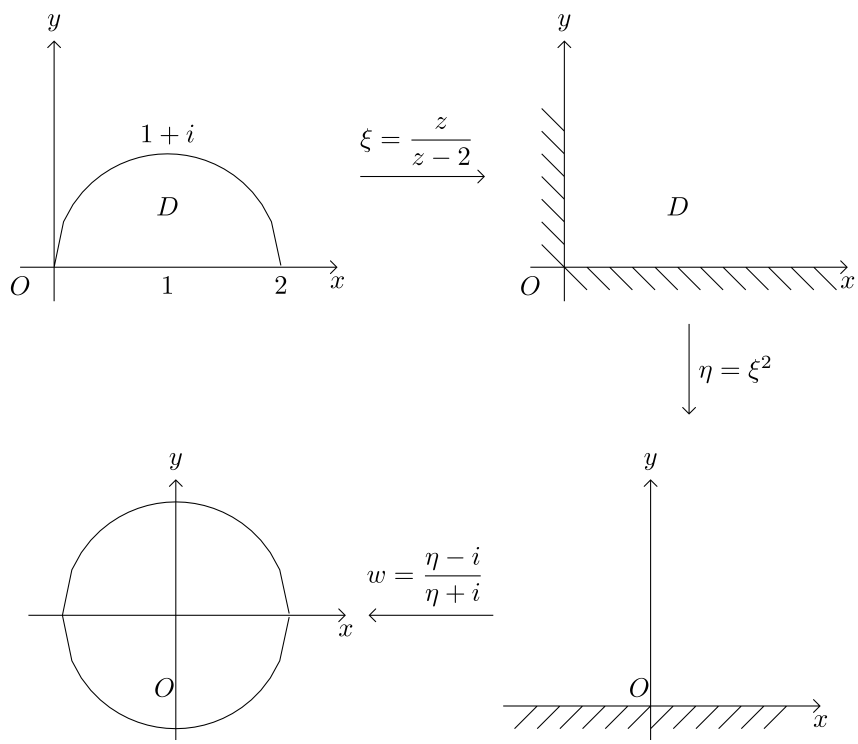
提示: 先作映射 $\xi = \dfrac{z}{2-z}$.

解:

作映射:

$$\xi = \frac{z}{2-z}$$

这个映射把上半圆上的点 $0, 1+i, 2$ 映射为 $0, i, \infty$, 由分式线性映射的保圆性可知, 它把上半圆映射为上半虚轴. 这个映射同时把实轴上的点 $0, 1, 2$ 映射为 $0, 1, \infty$, 由分式线性映射的保圆性可知, 它把底部边界映射为正实轴. 因此该映射把 D 映射为 ξ 平面上以正半实轴与正半虚轴为边界的区域. 由于映射把区域 D 内的点 $z = 1 + \dfrac{i}{2}$ 映射为 $\xi = \dfrac{3}{5} + \dfrac{4}{5}i$, 因此该映射把上半圆盘 D 映射为 ξ 平面上的第一象限.



作映射 $\eta = \xi^2$, 它把第一象限 D_ξ 映射为上半平面.

最后, 取 η 平面关于实轴的对称点 $i, -i$, 作映射:

$$w = \frac{\eta - i}{\eta + i}$$

它把上半平面映射为 w 平面的单位圆盘 $|w| < 1$. 把以上映射复合起来, 得到:

$$w = \frac{z^2 - i(z-2)^2}{z^2 + i(z-2)^2} = \frac{(1-i)z^2 + 4iz + 4i}{(1+i)z^2 - 4iz + 4i}$$

六、(本题 8 分)

设 $f(z)$ 和 $g(z)$ 都在区域 D 内解析, 并且 $f(z)g(z) = 0 (z \in D)$. 证明在 D 内, 或者 $f(z) \equiv 0$, 或者 $g(z) \equiv 0$.

证明:

由于 D 是区域 (连通开集), 任取 $z_0 \in D, \exists 2r > 0$, 使得:

$$U(z_0, 2r) \subset D \quad \Rightarrow \quad \overline{U(z_0, r)} \subset U(z_0, 2r) \subset D$$

由于 $f(z)g(z) = 0$, 所以 $\exists \{z_n\} \subset \overline{U(z_0, r)}$, 使得:$f(z_n)g(z_n) = 0$.

所以, $\{z_n\}$ 中存在无限项 $\{z_{n_k}\}$, 或者使得 $f(z_{n_k}) = 0$, 或者使得 $g(z_{n_k}) = 0$.

(i) 当 $f(z_{n_k}) = 0$ 时, 由于 $\{z_{n_k}\}$ 是 $\overline{U(z_0, r)}$ 中的有界无穷点列, 则存在聚点 z'. 而 $\overline{U(z_0, r)}$ 是闭集, 所以 $z' \in \overline{U(z_0, r)}$.

又由于 $\overline{U(z_0, r)} \subset D$, 所以存在 D 中两两不同的点列 $\{z_{n_k}\}$, 它在 D 中有聚点 z', 且:

$$f(z_{n_k}) = 0, \quad (k = 1, 2, \cdots)$$

由解析函数唯一性定理可知, $f(z)$ 在 D 上恒为零.

(ii) 当 $g(z_{n_k}) = 0$ 时, 模仿 (i) 的证明可得:$g(z)$ 在 D 上恒为零.

综上, 在 D 内, 或者 $f(z) \equiv 0$, 或者 $g(z) \equiv 0$.

另解:

假设 $f(z)$ 在 D 内不恒等于零. 则存在 $z_0 \in D$, 使得 $f(z_0) \neq 0$. 由于 $f(z)$ 在 D 内解析, 所以存在 $r > 0$, 使得:

$$|f(z)| > 0 \quad z \in U(z_0, r)$$

而 $f(z)g(z) = 0 \ (x \in D)$, 所以任意 $z \in U(z_0, r)$, 有:

$$g(z) = 0$$

由解析函数唯一性定理的推论可知, $g(z) \equiv 0,\ x \in D$.

若 $g(z)$ 在 D 内不恒等于零, 仿照上述过程可证明 $f(z) \equiv 0,\ x \in D$.

综上, 在 D 内, 或者 $f(z) \equiv 0$, 或者 $g(z) \equiv 0$.

七、(本题 10 分)

设 $f(z)$ 在复平面 $\mathbb{C}$ 上除有一个一阶极点外处处解析, 并且 $z = \infty$ 是其可去奇点, 求 $f(z)$ 的一般表达式.

解:

设 $z_0 \in \mathbb{C}$ 是 $f(z)$ 的一阶极点, 因为 $f(z)$ 除 z_0 外处处解析, 因此 $f(z)$ 在 $0 < |z - z_0| < +\infty$ 内的洛朗展式为:

$$f(z) = \frac{\alpha_{-1}}{z - z_0} + \alpha_0 + \alpha_1(z - z_0) + \alpha_2(z - z_0)^2 + \cdots$$

其中, $\alpha_{-1} \neq 0$. 令:

$$F(z) = f(z) - \frac{\alpha_{-1}}{z - z_0}$$

则 $F(z)$ 除 z_0 外处处解析, z_0 是 $F(z)$ 的孤立奇点. 而:

$$\lim_{z \to z_0} F(z) = \lim_{z \to z_0} (\alpha_0 + \alpha_1(z - z_0) + \alpha_2(z - z_0)^2 + \cdots) = \alpha_0$$

所以, $z = z_0$ 是 $F(z)$ 的可去奇点. 又由于 $z = \infty$ 是 $f(z)$ 的可去奇点, 因此存在极限 $\lim\limits_{z \to \infty} f(z) = a$. 从而, $\lim\limits_{z \to \infty} F(z) = a$. 这说明 $F(z)$ 有界. 根据刘维尔定理, $F(z) = C$. 由于 $\lim\limits_{z \to \infty} F(z) = a$, 因此 $F(z) = a$. 从而:

$$f(z) = a + \frac{\alpha_{-1}}{z - z_0} = a + \frac{b}{z - z_0},\ \text{其中}, b = \alpha_{-1} \neq 0$$

6 2012-2013 学年第二学期复变函数期末考试 (10 级)

一、(本题 48 分, 每小题 8 分)

(1) 计算 2^i 的全部值.

解:

$$2^i = e^{i\mathrm{Ln}2} = e^{i(\ln^+ 2+2ki\pi))} = e^{-2k\pi+i\ln^+ 2} = e^{-2k\pi}\left[cos(\ln^+ 2)+isin(\ln^+ 2)\right] \quad (k\in\mathbb{Z})$$

(2) 设 $f(z)=u(x,y)+iv(x,y)$ 在区域 D 内解析, 并且 $v=u^3$. 证明 $f(z)$ 在 D 内恒为常数.

证明:

由于 $f(z)$ 在区域 D 内解析, 它应该满足 Cauchy-Riemann 条件, 即:

$$\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{\partial v}{\partial y},\quad \frac{\partial u}{\partial y}=-\frac{\partial v}{\partial x}$$

由于 $v=u^3$, 则:

$$\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{\partial v}{\partial y}=3u^2\frac{\partial u}{\partial y},\quad \frac{\partial u}{\partial y}=-\frac{\partial v}{\partial x}=-3u^2\frac{\partial u}{\partial x}$$

则可以得到:

$$(9u^4+1)\frac{\partial u}{\partial y}=0 \quad\Rightarrow\quad \frac{\partial u}{\partial y}=0$$

从而:

$$\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{\partial u}{\partial y}=\frac{\partial v}{\partial x}=\frac{\partial v}{\partial y}=0$$

所以:$u(x,y)=C_1, v(x,y)=C_2$. 从而 $f(z)=C_1+iC_2\in\mathbb{C}$, 即:$f(z)$ 在 D 内恒为常数.

(3) 计算积分 $I=\int_L \frac{z^{100}}{(z+1)^2(z-1)}dz$, 其中 L 分别为 $|z|=1, |z-1|=1$ 和 $|z+1|=1$.

解:

(i)

(ii) 令 $f_2(z)=\frac{z^{100}}{(z+1)^2}$, 则 $f_3(z)$ 在 $\overline{D}_2=\{z:|z-1|\le 1\}$ 内解析. 而 $z_0\in\overline{D}_2$, 由 Cauchy 积分公式:

$$I=\int_{L_1}\frac{z^{100}}{(z+1)^2(z-1)}dz=\int_{L_2}\frac{f(z)}{z-1}dz=2\pi i f(1)=\frac{\pi i}{2}$$

(iii) 令 $f_3(z)=\frac{z^{100}}{z-1}$, 则 $f_3(z)$ 在 $\overline{D}_3=\{z:|z+1|\le 1\}$ 内解析. 而 $z_0=1\in\overline{D}_3$, 由 Cauchy 导数公式:

$$I=\int_{L_3}\frac{z^{100}}{(z+1)^2(z-1)}dz=I=\int_{L_3}\frac{f(z)}{(z+1)^2}dz=2\pi i f'(z)|_{z=-1}=\frac{199}{2}\pi i$$

(4) 证明当 $\lambda > e$ 时方程 $\lambda z^n + sinz = 0$ 在 $|z| < 1$ 内有 n 个根.

证明:

由 09 级第 (4) 题可知,

$$|e^z| \leq e^{|z|}$$

所以, 在 $|z| = 1$ 上:

$$|sinz| = |\frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i}| \leq \frac{|e^{iz}| + |e^{-iz}|}{2} \leq \frac{e^{|z|} + e^{|z|}}{2} = e < |\lambda| = |\lambda z^n|$$

又由于 λz^n, $sinz$ 在 $\overline{D} = \{z : |z| \leq 1\}$ 上解析, 由 Rouche 定理可得:

$$\lambda z^n, \quad \lambda z^n + sinz$$

在区域 $|z| < 1$ 内有相同个数的零点. 由于 λz^n 在 $|z| < 1$ 内有 n 重零点 $z = 0$,

所以 $\lambda z^n + sinz = 0$ 在 $|z| < 1$ 内有 n 个零点.

(5) 证明代数基本定理: n 次代数方程 $a_0 + a_1 z + \cdots + a_n z^n = 0 (a_n \neq 0)$ 至少有一个根.

证明:

(i) 用刘维尔定理证明.

设 $p(z) = a_0 + a_1 z + a_2 z^2 + \cdots + a_n z^n$ 在 z 平面上零点, 则 $p(z)$ 为整函数且:

$$p(z) = z^n \left(a_n + \frac{a_{n-1}}{z} + \cdots + \frac{a_0}{z^n} \right) \to \infty$$

令 $f(z) = \dfrac{1}{p(z)}$, 则 $p(z)$ 是整函数, 且: $\lim\limits_{z \to \infty} f(z) = 0$.

所以 $f(z)$ 在 z 平面上有界. 由刘维尔定理可知, $f(z) = \dfrac{1}{p(z)}$ 在复平面为常数. 从而 $p(z)$ 在复平面为常数, 矛盾.

所以, n 次代数方程 $a_0 + a_1 z + \cdots + a_n z^n = 0 (a_n \neq 0)$ 至少有一个根.

(ii) 用鲁歇定理证明.

设 $p(z) = a_0 + a_1 z + a_2 z^2 + \cdots + a_n z^n$, $f(z) = a_n z^n, g(z) = a_0 + a_1 z + \cdots + a_{n-1} z^{(n-1)}$.

取 $R > max\{1, \dfrac{|a_0| + |a_1| + \cdots + |a_{n-1}|}{|a_n|}\}$, 则 $f(z), g(z)$ 在 $\overline{D} = \{z : |z| \leq R\}$ 上解析, 且在 $|z| = R$ 上:

$$\begin{aligned} |g(z)| &= |a_0 + a_1 z + a_2 z^2 + \cdots + a_{n-1} z^{n-1}| \\ &\leq |a_0| + |a_1|R + |a_2|R^2 + \cdots + |a_{n-1}R^{n-1} \\ &\leq (|a_0| + |a_1| + \cdots + |a_{n-1}|)\, R^{n-1} \\ &< |a_n|R^n = |f(z)| \end{aligned}$$

由 Rouche 定理可知, $f(z) + g(z)$ 与 $f(z)$ 在 $D = \{z : |z| < R\}$ 内有相同个数的零点. 注意到 $f(z) = a_n z^n$ 在 D 内有 n 重零点 $z = 0$. 所以, $p(z) = f(z) + g(z) = a_0 + a_1 z + \cdots + a_n z^n$ 在 D 内有 n 个根. 由于 R 可以充分大, 所以 $p(z)$ 在复数域有 n 个根, 所以 n 次代数方程 $a_0 + a_1 z + \cdots + a_n z^n = 0 (a_n \neq 0)$ 至少有一个根.

(6) 设 $f(z)$ 在区域 D 内解析, 并且在 D 内不恒为常数. 证明 $e^{Ref(z)}$ 在 D 内不能取得最大值.

证明:

考虑函数 $g(z) = e^{f(z)}$. 由于 $f(z)$ 在 D 内解析, $h(z) = e^z$ 在全平面解析, 所以:

$$g(z) = h(f(z)) = e^{f(z)}$$

在 D 内解析. 注意到:

$$|g(z)| = |e^{f(z)}| = e^{Ref(z)}$$

由最大模原理, $|g(z)| = |e^{f(z)}| = e^{Ref(z)}$ 在 D 内不能取得最大值.

二、(本题 8 分)

设 $f(z)$ 在区域 D 内解析, 并且 $f(z)$ 在 D 内不恒为 0, $D = \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} G_n$, 其中每个 G_n 是包含于 G 的有界区域并且 $\overline{G}_n \subset D$. 证明:

(1) $f(z)$ 在每个 G_n 内只有有限个零点. (2) $f(z)$ 在 D 内的零点至多是一可列集.

证明:

(1) 假设 $f(z)$ 在 G_n 内有无穷个零点, 且 G_n 是有界开集. 则在复域 $\mathbb{C}$ 中, 有界无穷点列必有收敛子列, 记为 $z_n \to z_0 \in \overline{G}_n$, 且 $f(z_k) = 0 (k = 1, 2, \cdots)$.

注意到 $\overline{G}_n \subset D$, 所以 $z_0 \in D$. 从而: 存在彼此不相同的点列 $\{z_n\} \subset D$, 且 $\{z_n\}$ 在 D 内有极限点 (聚

点), 满足:

$$f(z_n) = 0 \quad (n = 1, 2, \cdots)$$

由解析函数唯一性定理可知: $f(z) \equiv 0,\ x \in D$. 矛盾.
从而 $f(z)$ 在每个 G_n 只有有限个零点.

(2) 由于 $D = \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} G_n$, 且 $f(z)$ 在 G_n 内只有有限个零点.
注意到可列个有限集的并集是至多可列集, 所以 $f(z)$ 在 D 内的零点至多是一可列集.

三、(本题 10 分)

确定函数 $F(z) = \sqrt[3]{z(z-1)^2}$ 的枝点, 作出 $F(z)$ 的一个可单值分枝区域 D, 使得该区域包含 2 和 i 两点. 设 $f(z)$ 是在 $z = 2$ 取正值的分枝, 求 $f(i)$.

解:

由于 $1, 2$ 不是 3 的倍数, $1 + 2$ 是 3 的倍数, 所以 $0, 1$ 是 $F(z)$ 的枝点, ∞ 不是 $F(z)$ 的枝点. 根据根式函数的定义, 我们有:

$$F(z) = \sqrt[3]{z(z-1)^2} = \sqrt[3]{|z(z-1)^2|}e^{i\dfrac{Argz + 2Arg(z-1)}{3}}$$

以区间 $[0, 1]$ 为割线, 割开复平面得到区域 D. 对于 D 内任意一条简单封闭曲线 L, L 或不围绕 $0, 1$ 两点, 或者同时围绕 $0, 1$ 两点. 在 L 上任取一点 z_0, 当 z_0 绕着 L 逆时针方向移动回 z_0 时, 或者 $argz, arg(z-1)$ 都不变, 或者 $argz, arg(z-1)$ 同时增加 2π, 两种情况下, $F(z)$ 的值都不发生改变. 所以 D 是 $F(z)$ 的可单值分枝区域. 注意到 2 和 i 在区域 D 内, 所以我们选择的区域 D 是符合题目要求的.

下面计算指定分枝在给定点下的函数值. 在 $z = 2$ 处, 取:

$$argz = 0, \quad arg(z-1) = 0$$

则:

$$f(2) = \sqrt[3]{2}e^{i\dfrac{2k\pi}{3}} = \sqrt[3]{2}\left(cos(\frac{2k\pi}{3}) + isin(\frac{2k\pi}{3})\right)$$

由于 $f(2)$ 是实数, 所以 $k = 0$. 从而:

$$f(z) = \sqrt[3]{|z(z-1)^2|}e^{i\dfrac{argz + 2arg(z-1)}{3}}$$

从而:$f(i)=\sqrt[3]{2}e^{i\dfrac{\frac{\pi}{2}+2\times\frac{3\pi}{4}}{3}}=\sqrt[3]{2}\left(cos(\frac{2\pi}{3})+isin(\frac{2\pi}{3})\right)=\sqrt[3]{2}(-\dfrac{1}{2}+i\dfrac{\sqrt{3}}{2})$.

四、(本题 10 分)

设 $f(z)=e^{\frac{1}{z}}cosz$. 证明:

(1) $z=0$ 是 $f(z)$ 的本性奇点. (2) $\mathrm{Res}(f,\,0\,)=\sum\limits_{n=0}^{+\infty}\dfrac{(-1)^n}{(2n+1)!(2n)!}$.

证明:

(1) 取 $x_n=\dfrac{1}{n\pi}$, $y_n=-\dfrac{1}{n\pi}$, 则 $x_n\to 0, y_n\to 0$. 但是:

$$\lim_{n\to+\infty}f(x_n)=\lim_{n\to+\infty}e^{n\pi}cos(\frac{1}{n\pi})\to+\infty,\quad \lim_{n\to+\infty}f(y_n)=\lim_{n\to+\infty}e^{-n\pi}cos(\frac{1}{n\pi})\to 0$$

即:$\lim\limits_{z\to 0}f(z)$ 不存在有限或者无穷的极限. 从而:$z=0$ 是 $f(z)$ 的本性奇点.

(2) 考虑 $f(z)$ 的洛朗展开式:

$$f(z)=e^{\frac{1}{z}}cosz=\left(\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{1}{n!}\frac{1}{z^n}\right)\left(\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{1}{(2n)!}z^{2n}\right)$$

考虑展开式中 $\dfrac{1}{z}$ 的系数, 则有:

$$Res(f,0)=\alpha_{-1}=\sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n\frac{1}{(2n)!}\frac{1}{(2n+1)!}=\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{(2n+1)!(2n)!}$$

五、(本题 12 分)

用留数定理计算积分 $I=\displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{cosx}{(x^2+1)^2}dx$.

解:

令 $g(z)=\dfrac{e^iz}{(z^2+1)^2}$, 则 $g(z)$ 在上半平面除了有一个二阶极点 $z=i$ 外处处解析. 设 D 是以 O 为中心, R 为半径的上半圆盘, 其边界为 C_R+L_R. 则由留数定理可知:

$$\int_{-R}^{+R}\frac{e^{ix}}{(x^2+1)^2}dx+\int_{C_R}\frac{e^{iz}}{(z^2+1)^2}dz=2\pi iRes(g,i)=2\pi i\left(\frac{e^{iz}}{(z+i)^2}\right)'\Bigg|_{z=i}=2\pi i\left(-\frac{i}{2e}\right)=\frac{\pi}{e}$$

由于 $\lim\limits_{z\to\infty}\dfrac{1}{(z^2+1)^2}=0$, 所以:

$$\lim_{R\to+\infty}\int_{C_R}\frac{e^{iz}}{(z^2+1)^2}=0$$

令 $R \to +\infty$, 有:

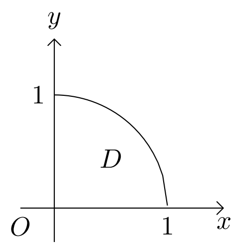
$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{ix}}{(x^2+1)^2} dx = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{cosx}{(x^2+1)^2} dx + \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{isinx}{(x^2+1)^2} dx = \frac{\pi}{e}$$

比较实部虚部, 以及利用 $\dfrac{cosx}{(x^2+1)^2}$ 是偶函数, 可以得到:

$$I = \int_{0}^{+\infty} \frac{cosx}{(x^2+1)^2} dx = \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{cosx}{(x^2+1)^2} dx = \frac{\pi}{2e}$$

六、(本题 12 分)

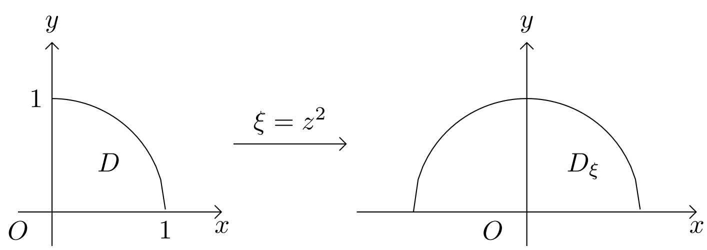
作一保形映射把单位圆盘在第一象限的部分 D(如下图) 映为上半平面.



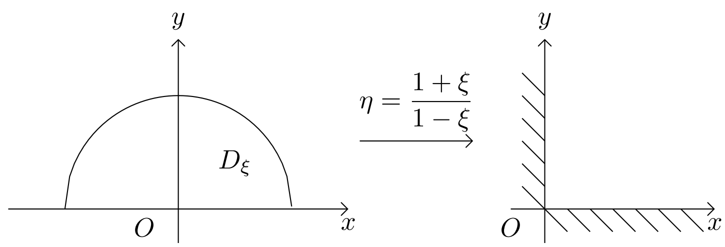
提示: 先作映射 $\xi = z^2$, 它把 D 映射为上半单位圆盘. 再作映射 $\eta = \dfrac{1+\xi}{1-\xi}$.

解:

先作映射 $\xi = z^2$, 由幂函数的性质可知, 他把单位圆盘的第一象限部分映射为上半单位圆盘.

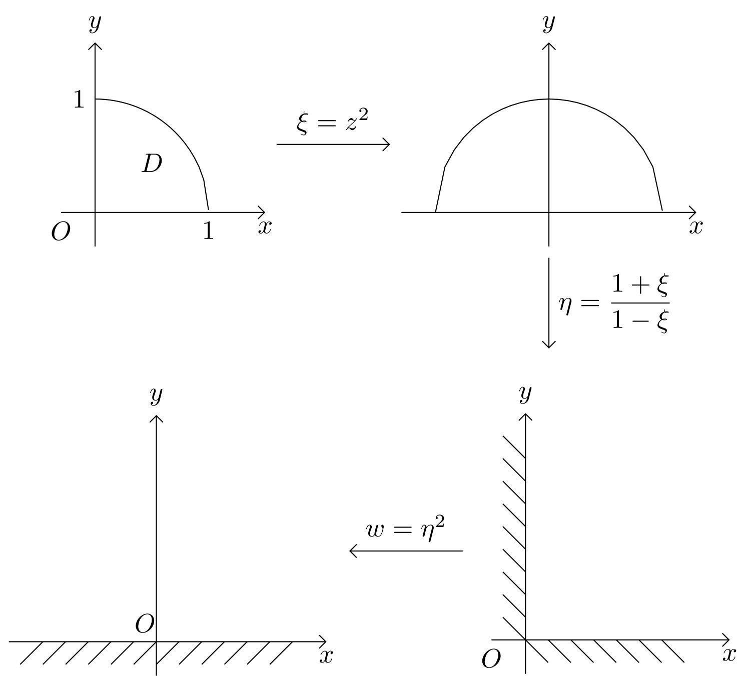


再作映射 $\eta = \dfrac{1+\xi}{1-\xi}$, 它把 ξ 平面上的点 $-1, 0, 1$ 映射为 η 平面上的 $0, 1, \infty$, 由分式线性映射的保圆性可知, η 把 ξ 平面上的上半单位圆盘的下边界映射为 η 平面上的正半实轴. 注意到映射 η 把 ξ 平面上的上半单位圆弧上的点 $-1, i, 1$ 映射为 $0, i, \infty$, 由分式线性映射的保圆性可知, 映射 η 把上半圆弧映射为 η 平面上的正半虚轴. 取 $z = \dfrac{i}{2} \in D_\xi$, 则 $\eta(z) = \dfrac{3}{5} + \dfrac{4}{5}i$, 在 η 平面的第一象限内. 所以 η 把上半单位圆盘映射为第一象限.



最后, 作映射 $w = \eta^2$. 由幂函数的性质可得, 它将 η 平面的第一象限映射为 w 平面的上半平面.

完整的图示如下:



将以上映射复合起来, 可以得到:

$$w = \frac{(1+z^2)^2}{(1-z^2)^2} = \frac{z^4+2z^2+1}{z^4-2z^2+1}$$

7　2014-2015 学年第二学期复变函数期末考试 (12 级)

一、(本题 48 分, 每小题 8 分)

(1) 求 $cos(\frac{\pi}{4}+i)$.

解:

$$cos(\frac{\pi}{4}+i)=\frac{e^{i(\frac{\pi}{4}+i)}+e^{-i(\frac{\pi}{4}+i)}}{2}=\frac{e^{-1+i\frac{\pi}{4}}+e^{1-i\frac{\pi}{4}}}{2}=\frac{\sqrt{2}}{4}(e+\frac{1}{e})+i\frac{\sqrt{2}}{4}(\frac{1}{e}-e)$$

(2) 讨论 $f(z)=x^2+2xy-y^2+i(ax^2+2xy+y^2)$ 的可导性、解析性.

证明:

记 $u(x,y)=x^2+2xy-y^2$, $v(x,y)=ax^2+2xy+y^2$. 则:

$$\frac{\partial u}{\partial x}=2x+2y,\ \frac{\partial u}{\partial y}=2x-2y,\ \frac{\partial v}{\partial x}=2ax+2y,\ \frac{\partial v}{\partial y}=2x+2y$$

注意到: $\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{\partial v}{\partial y}=2x+2y$ 成立. 下面分情况讨论:

(i) 当 $a=-1$ 时, $\frac{\partial u}{\partial y}=-\frac{\partial v}{\partial x}$. 由于 u,v 在复平面有连续的一阶偏导数, 并且处处满足 C-R 条件. 所以 $f(z)$ 在复平面上解析, 在复平面处处可导.

(ii) 当 $a\neq -1$ 时, C-R 条件仅仅在直线 $x=0$ 上满足. 由于 u,v 在复平面有连续的一阶偏导数, 所以 $f(z)$ 在直线 $x=0$ 上可导, 在复平面上处处不解析.

(3) 求 $I=\int_L \frac{zsinz}{(z+1)^2(z-1)}dz$, L 分别为 $|z|=\frac{1}{2},|z-1|=\frac{1}{2}$ 以及 $|z+1|=\frac{1}{2}$.

证明:

(i) 由于 $f(z)=\frac{zsinz}{(z+1)^2(z-1)}dz$ 在 $|z|<\frac{1}{2}$ 内无奇点, 在 $|z|\le\frac{1}{2}$ 上连续, 由 Cauchy 积分定理可知:

$$I=\int_{L_1}\frac{zsinz}{(z+1)^2(z-1)}dz=0$$

(ii) 由于 $f_2(z)=\frac{zsinz}{(z+1)^2}$ 在 $|z-1|\le\frac{1}{2}$ 上解析, 由 Cauchy 积分公式:

$$I=\int_{L_2}\frac{zsinz}{(z+1)^2(z-1)}dz=\int_{L_2}\frac{f_2(z)}{z-1}dz=2\pi i f_2(1)=\frac{\pi i sin1}{2}$$

(iii) 由于 $f_3(z)=\frac{zsinz}{z-1}$ 在 $|z+1|\le\frac{1}{2}$ 上解析, 由 Cauchy 导数公式:

$$\int_{L_3}\frac{zsinz}{(z+1)^2(z-1)}dz=\int_{L_3}\frac{f_3(z)}{(z+1)^2}dz=2\pi i f_3'(z)|_{z=-1}=\frac{(sin1+2cos1)\,\pi i}{2}$$

(4) $f(z)$ 是整函数, $Ref(z) \le M$. 证明 $f(z) =$ 常数.

证明:

考虑函数 $g(z) = e^{f(z)}$. 由 10 年第 (6) 题证明过程可知: $g(z)$ 在 C 上解析. 所以 $g(z)$ 也是整函数. 而:

$$|g(z)| = |e^{f(z)}| = |e^{u+iv}| = e^u = e^{Ref(z)} \le e^M$$

所以 $g(z)$ 是有界整函数, 由刘维尔定理可知, $g(z) = e^{f(z)} =$ 常数. 从而:

$$g'(z) = f'(z)e^f(z) = 0 \quad \Rightarrow \quad f'(z) = 0$$

从而: f(z) 在 $\mathbb{C}$ 上为常数.

(5) 证明 $a > e$ 时, $e^{z^2} = az^n$ 在 $|z| < 1$ 内有 n 个根.

证明:

由 09 年第 (4) 题可知:$\forall z \in \mathbb{C}$

$$|e^z| \le e^{|z|}$$

记 $f(z) = az^n, g(z) = -e^{z^2}$, 则在 $|z| = 1$ 上:

$$|-g(z)| = |e^{z^2}| \le e^{|z^2|} = e < |a| = |az^n| = |f(z)|$$

由于 $f(z), g(z)$ 在 $|z| \le 1$ 上解析, 由 Rouche 定理可知,

$$f(z) = az^n, \quad f(z) + g(z) = az^n - e^{z^2}$$

在 $|z| < 1$ 内有相同个数的零点. 而 $f(z)$ 在 $|z| < 1$ 内有 n 重零点 $z = 0$, 所以 $az^n = e^{z^2}$ 在 $|z| < 1$ 内有 n 个根.

(6) $f(z) = e^{z-\frac{1}{z}}$, 判断 $z = 0$ 的奇点类型, 并求 $\text{Res}(f, 0)$.

解:

取 $x_n = \dfrac{1}{n}$, $y_n = -\dfrac{1}{n}$, 则 $x_n \to 0, y_n \to 0$. 而:

$$\lim_{n\to+\infty} f(x_n) = \lim_{n\to+\infty} e^{\frac{1}{n}-n} = 0, \quad \lim_{n\to+\infty} f(y_n) = \lim_{n\to+\infty} e^{-\frac{1}{n}+n} = +\infty$$

所以 $f(z)$ 在 $z=0$ 不存在有限或无穷的极限. 而 $f(z)$ 在 $0<|z|<R$ 内解析, 所以 $z=0$ 是 $f(z)$ 的本性奇点.

下求 $\mathrm{Res}(f,0)$. 只需要求 f 在 $z=0$ 处展开的洛朗级数中 $\dfrac{1}{z}$ 的系数.

$$f(z)=e^{z-\frac{1}{z}}=e^{z}e^{-\frac{1}{z}}=\left(\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{1}{n!}z^n\right)\left(\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{n!}\frac{1}{z^n}\right)$$

由排列组合的相关知识点可知,

$$\mathrm{Res}(f,0)=\alpha_{-1}=\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{1}{n!}\frac{(-1)^{n+1}}{(n+1)!}=\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n!(n+1)!}$$

二、(本题 10 分)

设 $f(z)$ 在 $0<|z-z_0|<R$ 内解析, 且有界. 证明对于 $\forall 0<r<R$, 有:

$$\int_{|z-z_0|=r}f(z)dz=0$$

提示: 说明对 $\forall 0<\epsilon<r$, $\int_{|z-z_0|=r}f(z)dz=\int_{|z-z_0|=\epsilon}f(z)dz$.

证明:

首先, 对于 $\forall 0<\epsilon<r$, 作圆环 $D=\{z:\epsilon<|z-z_0|<r\}$, 则 $f(z)$ 在 D 上解析, 且 (积分路径取逆时针):

$$\int_{|z-z_0|=r}f(z)dz=\int_{|z-z_0|=\epsilon}f(z)dz$$

由于 $f(z)$ 在 $0<|z-z_0|<R$ 内有界, 所以存在 $M>0$, 使得 $|f(z)|\le M$. 而:

$$\left|\int_{|z-z_0|=\epsilon}f(z)dz\right|\le\int_{|z-z_0|=\epsilon}|f(z)|\,|dz|\le 2M\pi\epsilon\to 0$$

所以:

$$\int_{|z-z_0|=r}f(z)dz=\lim_{\epsilon\to 0}\int_{|z-z_0|=\epsilon}f(z)dz=0$$

三、(本题 10 分)

设 D 是有界区域, $f(z)$ 在 D 内解析, 在 $\overline{D}$ 上连续, 在 D 内无零点. 证明: 若在边界 L 上 $f(z)\equiv$ 常数, 则在 D 内 $f(z)\equiv$ 常数.

提示: 对 $f(z)$ 和 $\dfrac{1}{f(z)}$ 用最大模原理.

证明:

由于 $f(z)$ 在 D 内解析, 在 $\overline{D}$ 上连续, 在 D 内无零点, 所以 $\dfrac{1}{f(z)}$ 也在 D 内解析, 在 $\overline{D}$ 上连续.
假设 $f(z)$ 在 D 内不恒为常数. 由最大模原理的推论, $|f(z)|$, $\left|\dfrac{1}{f(z)}\right|$ 都在 D 的边界 L 上达到最大值.
而在边界 L 上, $f(z)=C$. 所以, 在 D 内:

$$|f(x)|<C,\quad \left|\frac{1}{f(z)}\right|<\frac{1}{C} \quad\Rightarrow\quad |f(z)|<C, |f(z)|>C$$

矛盾. 所以 $f(z)$ 在 D 内恒为常数.

四、(本题 12 分)

确定 $F(z)=\sqrt[3]{z^2(z-1)}$ 的枝点, 作出 $F(z)$ 的可单值分枝区域 D, 使得 D 中包含 2 和 i. $f(z)$ 是 $F(z)$ 在 $z=2$ 时取正值的单值解析分枝. 求 $f(i)$.

解:

由于 $2,1$ 不是 3 的倍数, $2+1$ 是 3 的倍数, 所以 $0,1$ 是 $F(z)$ 的枝点, ∞ 不是 $F(z)$ 的枝点. 根据根式函数的定义:

$$F(z)=\sqrt[3]{|z^2(z-1)|}e^{i\dfrac{2Argz+Arg(z-1)}{3}}$$

以区间 $[0,1]$ 为割线割开复平面 $\mathbb{C}$ 得到区域 D, 下说明 D 是 $F(z)$ 的可单值分枝区域. 对于 D 内任意一条简单封闭曲线 L, L 或者不围绕 $0,1$, 或者同时围绕 $0,1$. 设 z_0 是 L 上任意一点, 当 z_0 沿着 L 逆时针运动回到 z_0 时, 或者 $argz, arg(z-1)$ 都不变, 或者 $argz, arg(z-1)$ 同时增加 2π, 两种情况下 $F(z)$ 都不发生改变. 所以 D 确实是 $F(z)$ 的一个可单值分枝区域. 注意到 2 和 i 在区域 D 内, 所以我们所作的区域 D 符合题目要求.

下面计算指定单值分枝在给定点的函数值. 在 $z=2$ 处, 取:

$$argz=0,\quad arg(z-1)=0$$

所以:

$$f(2)=\sqrt[3]{4}e^{i\dfrac{2k\pi}{3}}=\sqrt[3]{2}\left[cos(\frac{2\pi}{3})+isin(\frac{2\pi}{3})\right]$$

由于 $f(2)$ 取正值, 所以 $k=0$. 从而:

$$f(i)=\sqrt[6]{2}e^{i\dfrac{2\times\frac{\pi}{2}+\frac{3\pi}{4}}{3}}=\sqrt[6]{2}\left[cos(\frac{7\pi}{12})+isin(\frac{7\pi}{12})\right]$$

五、(本题 10 分)

用留数定理求积分 $I = \int_0^{+\infty} \frac{sinx}{x(x^2+1)}dx$.

解:

令 $g(z) = \frac{e^{iz}}{z(z^2+1)}$, 则 $g(z)$ 在上半平面除了有一个一阶极点 $z=i$ 以及在积分路径上有一个一阶奇点 $z=0$ 外处处解析. 设 D 是以 O 为圆心,R 为半径的上半圆盘. 当 $R>1$ 时, $z=i$ 在区域 D 中. 设 D 的边界由 $C_R + L_R$ 组成, 由留数定理可知:

$$\begin{aligned}\int_{-R}^{R} \frac{e^{ix}}{x(x^2+1)}dx + \int_{C_R} \frac{e^{iz}}{z(z^2+1)}dz &= 2\pi i\left(\mathrm{Rex}(f,i) + \frac{1}{2}\mathrm{Res}(f,0)\right)\\ &= 2\pi i\left(\left.\frac{e^{iz}}{z(z+i)}\right|_{z=i} + \frac{1}{2}\left.\frac{e^{iz}}{z^2+1}\right|_{z=0}\right)\\ &= \left(1-\frac{1}{e}\right)\pi i\end{aligned}$$

由于 $\lim\limits_{z\to\infty} \frac{1}{z(z^2+1)} = 0$, 所以:

$$\lim_{R\to+\infty}\int_{C_R} \frac{e^{iz}}{z(z^2+1)}dz = 0$$

令 $R\to+\infty$, 有:

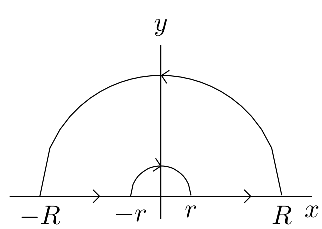
$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{ix}}{x(x^2+1)}dx = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{cosx}{x(x^2+1)}dx + \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{isinx}{x(x^2+1)}dx = \left(1-\frac{1}{e}\right)\pi i$$

比较实部虚部, 及结合 $\frac{sinx}{x(x^2+1)}$ 是个偶函数可得:

$$I = \int_0^{+\infty} \frac{sinx}{x(x^2+1)}dx = \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{sinx}{x(x^2+1)}dx = \frac{\pi}{2}\left(1-\frac{1}{e}\right)$$

另解:

令 $g(z) = \frac{e^{iz}}{z(z^2+1)}$. 作如下图所示的积分路径:



当 $g(z)$ 沿着如上图所示的路径积分时, 它在以该路径为边界的区域内只有一个一阶极点 $z=i$. 由留数定理可知:

$$\int_{-R}^{-r} \frac{e^{ix}}{x(x^2+1)}dx + \int_{C_r^-} \frac{e^{iz}}{z(z^2+1)}dz + \int_r^R \frac{e^{ix}}{x(x^2+1)}dx + \int_{C_R} \frac{e^{iz}}{z(z^2+1)}dz = 2\pi i\mathrm{Res}(g,i) = -\frac{\pi i}{e}$$

当 $R \to +\infty$ 时, 由于 $\lim\limits_{z\to\infty} \dfrac{1}{z(z^2+1)} = 0$, 所以:

$$\lim_{R\to+\infty} \int_{C_R} \frac{e^{iz}}{z(z^2+1)} dz = 0$$

又由于:

$$\lim_{z\to 0} zg(z) = \lim_{z=0} \frac{e^{iz}}{z^2+1} = 1$$

所以:

$$\lim_{r\to} \int_{C_r^-} \frac{e^{iz}}{z(z^2+1)} dz = -i \times (\pi - 0) = -\pi i$$

令 $R \to +\infty, r \to 0$, 有:

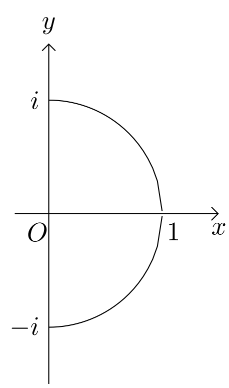
$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{ix}}{x(x^2+1)} dx = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{cosx}{x(x^2+1)} dx + \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{isinx}{x(x^2+1)} dx = -\frac{\pi i}{e} + \pi i = (1 - \frac{1}{e})\pi i$$

比较实部虚部以及结合 $\dfrac{sinx}{x(x^2+1)}$ 是偶函数可得:

$$I = \int_0^{+\infty} \frac{sinx}{x(x^2+1)} dx = \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{sinx}{x(x^2+1)} dx = \frac{\pi}{2}(1 - \frac{1}{e})$$

六、(本题 10 分)

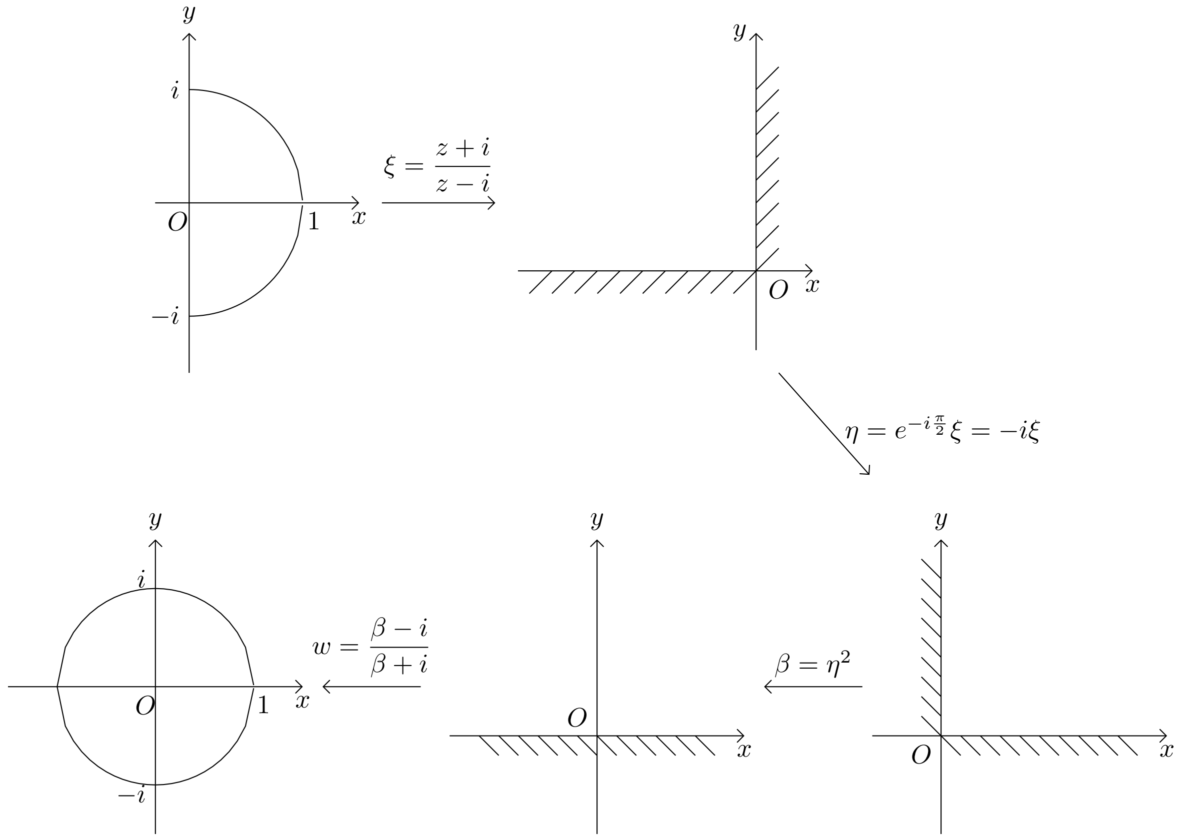
作保形映射将 $D = \{z : |z| < 1, Ref(z) > 0\}$(如下图) 映射为 $|w| < 1$.



提示: 先作映射 $\xi = \dfrac{z+i}{z-i}$.

解:

先作映射 $\xi = \dfrac{z+i}{z_i}$. 映射 ξ 将 z 平面上的 $-i, 0, i$ 映射为 ξ 平面上的 $0, -1, \infty$. 由分式线性映射的保圆性可知, ξ 把 z 平面上的虚轴映射为负半实轴; ξ 还将 z 平面圆弧上的点 $-i, 1, i$ 映射为 $0, i, \infty$, 由分式线性映射的保圆性可知, ξ 将圆弧映射为正半虚轴. 取区域 D 内的点 $z = \dfrac{1}{2}$, 则 ξ 将 $z = \dfrac{1}{2}$ 映射为 $\xi = -\dfrac{3}{5} + i\dfrac{4}{5}$, 在第二象限. 所以映射 ξ 将 z 平面的区域 D 映射为 ξ 平面的第二象限.



再作映射 $\eta = e^{-i\frac{\pi}{2}}\xi$, 这个映射是旋转变换 (顺时针旋转 $\dfrac{\pi}{2}$), 将第二象限映射为第一象限.

再作映射 $\beta = \eta^2$, 这个映射将第一象限张成上半平面.

最后取 β 平面关于实轴对称的两点 $i, -1$, 作映射:

$$w = \frac{\beta - i}{\beta + i}$$

它把 β 平面的上半圆盘映射为 w 平面的单位圆 $|w| < 1$. 将上述映射复合起来, 可得:

$$w = \frac{(z+i)^2 + i(z-i)^2}{(z+i)^2 - i(z-i)^2} = \frac{(1+i)z^2 + 2(1+i)z - (1+i)}{(1-i)z^2 - 2(1-i)z - (1-i)} = i\frac{z^2 + 2z - 1}{z^2 - 2z - 1}$$