Apollo项目坐标系研究（知行合一）

2021年10月7日 星期四 上午10:57

blog.csdn.net/davidhopper/article/details/79162385

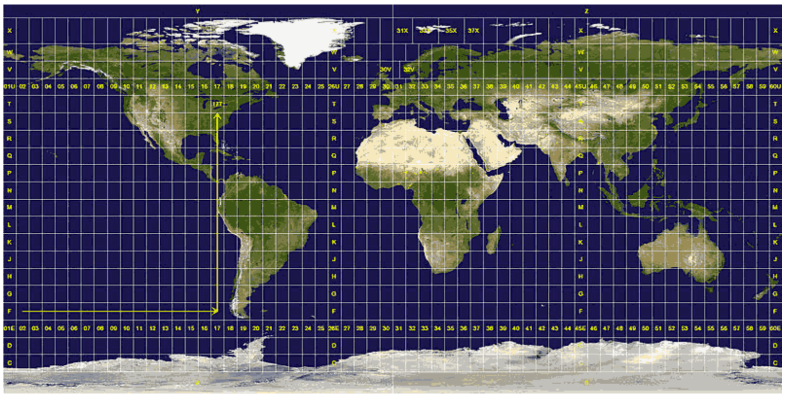
1. UTM 坐标系

统一横轴墨卡托

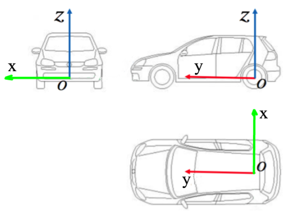
使用基于网格的方法表示坐标

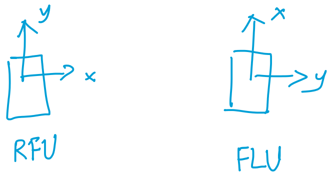
将地球分为60个经度区 → 每个经度区包含 $\frac{360^\circ}{60}=6^\circ$ 的经度范围，

每个区内的坐标均基于横轴墨卡托投影



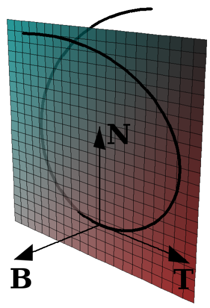
2. 车身坐标系





3. Frenet 坐标系

又称为 Frenet — Serret 公式，用于描述粒子在三维欧氏空间 R^3 内沿一条连续可微曲线的运动学特征



其中，$\vec{T}$ 称为切向量 (tangent)，表示沿曲线运动方向的单位向量；

$\vec{N}$ 称为法向量 (normal)，表示当前曲线运动平面内垂直于 $\vec{T}$ 的单位向量

$\vec{B}$ 称为副法向量 (binormal)，表示同时垂直于 $\vec{T}$ 和 $\vec{N}$ 的单位向量

令 $\vec{r}(t)$ 为欧氏空间内随t改变的一条非退化曲线

所谓非退化曲线就是一条不会退化为直线的曲线，或即曲率不为0的直线.

令 s(t) 是t时刻时曲线的累计弧长，其定义如下：

$$s(t)=\int_0^t \|r'(\sigma)\|\, d\sigma$$

假定 $r'(\sigma)\neq 0$，则意味着 s(t) 是严格单调递增函数，因此可将t表示为s的函数

从而有 $\vec{r}(s)=\vec{r}(t(s))$，这样我们就把曲线表示为弧长s的函数.

对于采用弧长参数s表示的非退化曲线 $\vec{r}(s)$，我们定义其切向量 $\vec{T}$，法向量 $\vec{N}$，副法向量 $\vec{B}$ 如下：

$$\vec{T} = \frac{\frac{d\vec{r}}{ds}}{\left\|\frac{d\vec{r}}{ds}\right\|} \qquad \vec{N} = \frac{\frac{d\vec{T}}{ds}}{\left\|\frac{d\vec{T}}{ds}\right\|} \qquad B = T \times N$$

基于上述定义的Frenet - Serret 公式表示为：

$$\frac{d\vec{T}}{ds} = \left\|\frac{d\vec{T}}{ds}\right\| \cdot \vec{N} = k \cdot \vec{N}$$

$$\frac{d\vec{N}}{ds} = -k \cdot \vec{T} + \tau \cdot \vec{B} \quad ?$$

$$\frac{d\vec{B}}{ds} = -\tau \cdot \vec{N} \quad ?$$

其中 k 表示曲线 $\vec{r}(s)$ 的曲率 → 曲率是曲线不能形成一条直线的度量值，曲率越趋于0，则曲线越趋近于直线

τ 表示曲线 $\vec{r}(s)$ 的挠率 → 挠率是曲线不能形成在同一平面内运动曲线的度量值，挠率越趋于0，则曲线越趋近于在同一平面内运动

令 $\vec{T}' = \frac{d\vec{T}}{ds}$，$\vec{N}' = \frac{d\vec{N}}{ds}$ $\vec{B}' = \frac{d\vec{B}}{ds}$，

则 Frenet - Serret 公式的矩阵表示形式为：

$$\begin{bmatrix} \vec{T}' \\ \vec{N}' \\ \vec{B}' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & k & 0 \\ -k & 0 & \tau \\ 0 & -\tau & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \vec{T} \\ \vec{N} \\ \vec{B} \end{bmatrix} \qquad (1)$$

可见，参数矩阵是反对称（skew- symmetric）的

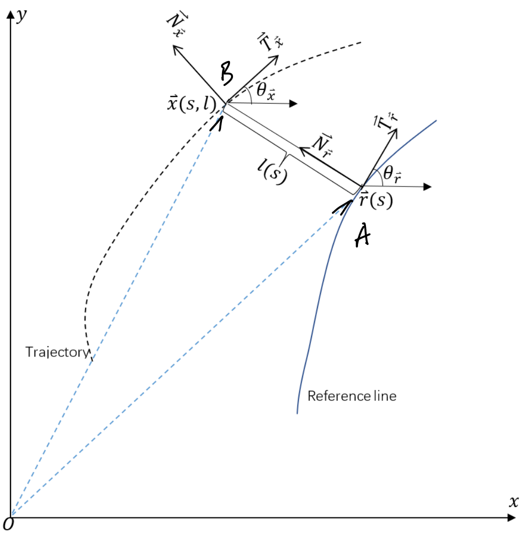
对于无人驾驶车辆，一般对高度信息不感兴趣，因此可以将车辆运动曲线投影到同一平面内，亦即 $\tau = 0$，这样 Frenet - Serret 公式就可以简化为：

$$\begin{bmatrix} \vec{T}' \\ \vec{N}' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & k \\ -k & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \vec{T} \\ \vec{N} \end{bmatrix} \qquad (2)$$

4. Frenet 坐标系与笛卡尔坐标系的转换公式

将笛卡尔坐标系转换为 Frenet 坐标系，可以将车辆的二维运动问题解耦为两个一维运动问题

前已述及，在不考虑高度信息下，Frenet 坐标系可简化为由曲线切向量 $\vec{T}$ 与法向量 $\vec{N}$ 组成的二维直角坐标系



$\vec{r}(s)$是参考线（reference line）在弧长s处的位置.
$\vec{x}$是当前车辆轨迹（trajectory）点，该向量一般采用笛卡尔坐标系（常用ENU坐标）表示
$\vec{x} = [x, y, z]^T$，z坐标一般忽略，
但这里我们采用弧长s和横向偏移l对其描述
（沿当前参考线位置 $\vec{r}(s)$ 法线方向 $\vec{N_r}$ 的偏移量）
即 $\vec{x} = \vec{x}(s, l)$

令 θ_r、$\vec{T_r}$、$\vec{N_r}$ 分别为当前参考线 $\vec{r}(s)$ 的方位角、单位切向量和单位法向量，
θ_x、$\vec{T_x}$、$\vec{N_x}$ 分别为当前轨迹点 $\vec{x}(s, l)$ 的方位角、单位切向量和单位法向量，
根据正交基的定义有：

$$\vec{T_r} = [\cos\theta_r, \sin\theta_r]^T$$

$$\vec{N_r} = [-\sin\theta_r, \cos\theta_r]^T$$

$$\vec{T_x} = [\cos\theta_x, \sin\theta_x]^T$$

$N_x = [-\sin\theta_x, \cos\theta_x]$

根据平面几何知识易知：

$\vec{x}(s,l) = \vec{r}(s) + l(s)\cdot \vec{N_r}(s)$ (3) √

从而，有（为简洁起见，下面的推导过程均省略参数）

$l\cdot \vec{N_r}^T\vec{N_r} = \vec{N_r}^T\cdot l\cdot\vec{N_r} = \vec{N_r}^T\cdot\vec{AB} = \vec{N_r}^T\cdot(\vec{OB}-\vec{OA}) = \vec{N_r}^T\cdot(\vec{x}-\vec{r})$

|| 1

说明：单位向量 $\vec{e} = [a, b]^T$ $a^2+b^2=1$

$\vec{e}^T\cdot\vec{e} = [a, b]\begin{bmatrix}a\\b\end{bmatrix} = a^2+b^2=1$

$l = (\vec{x}-\vec{r})\cdot\vec{N_r}$ (4)

(4) 式在数学上美观，但不好编程实现，因此换一个表示方法

设 $\vec{x}$，$\vec{r}$ 的笛卡尔坐标分别为：(x,y)、(x_r,y_r)，根据两点间距离公式及 $\vec{N_r}$ 的定义，

可得：$l = \pm\sqrt{(x-x_r)^2+(y-y_r)^2}$,

if $[(y-y_r)\cos\theta_r - (x-x_r)\sin\theta_r] > 0$, positive, (4.a)

otherwise, negetive

设 a 为任意一个变量（或向量），

记 $\dot{a} = \frac{da}{dt}$，$\ddot{a} = \frac{d\dot{a}}{dt}$，$a' = \frac{da}{ds}$，$a'' = \frac{da'}{ds}$，根据该约定，有：

$\dot{l} = [\dot{\vec{x}}-\dot{\vec{r}}]^T\cdot\vec{N_r} + [\vec{x}-\vec{r}]^T\cdot\dot{\vec{N_r}}$

根据单位切向量和单位法向量的定义，有：

$\dot{\vec{x}} = \frac{d\|\vec{x}\|}{dt}\cdot\vec{T_x} = V_x\cdot\vec{T_x}$ √ (5)

$\dot{\vec{r}} = \frac{d\|\vec{r}\|}{dt}\cdot\vec{T_r} = \dot{s}\cdot\vec{T_r}$ √ (6)

根据平面几何知识可知：

$\vec{x}-\vec{r} = \vec{OB}-\vec{OA} = \vec{AB} = l\cdot\vec{N_r}$ (7)

根据链式求导法则，$\dot{\vec{N_r}} = \frac{d\vec{N_r}}{ds}\cdot\frac{ds}{dt}$，又由二维 Frenet - serret 公式

可知：$\vec{N_r}' = -k_r\cdot\vec{T_r}$，于是有：

$\dot{\vec{N_r}} = -k_r\cdot\dot{s}\cdot\vec{T_r}$ (8)

将 (5) — (8) 式代入，得

$\dot{l} = [\dot{\vec{x}}-\dot{\vec{r}}]^T\cdot\vec{N_r} + [\vec{x}-\vec{r}]^T\cdot\dot{\vec{N_r}}$

$= [V_x\cdot\vec{T_x} - \dot{s}\cdot\vec{T_r}]^T\cdot\vec{N_r} + l\cdot\vec{N_r}^T\cdot(-k_r\cdot\dot{s}\cdot\vec{T_r})$

因为单位切向量和法向量正交，于是有：$\vec{T_r}^T\cdot\vec{N_r}=0$，$\vec{N_r}^T\cdot\vec{T_r}=0$，故：

$\dot{l} = V_x\cdot\vec{T_x}^T\cdot\vec{N_r}$

将 $\vec{T_x} = [\cos\theta_x, \sin\theta_x]^T$ 和 $\vec{N_r} = [-\sin\theta_r, \cos\theta_r]^T$ 代入，得到：

$\dot{l} = V_x\cdot[\cos\theta_x, \sin\theta_x]\cdot\begin{bmatrix}-\sin\theta_r\\ \cos\theta_r\end{bmatrix} = V_x\cdot(-\cos\theta_x\cdot\sin\theta_r + \sin\theta_x\cdot\cos\theta_r)$

$= V_x\cdot\sin(\theta_x-\theta_r)$ (9)

$= V_x\cdot\sin\Delta\theta$ $\Delta\theta = \theta_x-\theta_r$ (10)

现在来计算 V_x，根据定义：$V_x = \frac{d\|\vec{x}\|}{dt} = \|\frac{d\vec{x}}{dt}\| = \|\dot{\vec{x}}\|$，

下面先计算 $\dot{\vec{x}}$，由 (3) 式，有

$\vec{x}(s,l) = \vec{r}(s) + l(s)\vec{N_r}(s)$ (3)

$\dot{\vec{x}} = \frac{d(\vec{r}+l\cdot\vec{N_r})}{dt} = \dot{\vec{r}} + \dot{l}\cdot\vec{N_r} + l\cdot\dot{\vec{N_r}}$

将 (6) 式和 (8) 式代入，得到：

$$\dot{\vec{x}} = \dot{s}\vec{T_r} + \dot{l}\cdot\vec{N_r} + l\cdot -k_r\dot{s}\cdot\vec{T_r} = \dot{s}(1-k_r\cdot l)\cdot\vec{T_r} + \dot{l}\cdot\vec{N_r} \quad (11)$$

于是有 $V_x = \|\dot{\vec{x}}\| = \sqrt{\dot{\vec{x}}^T\cdot\dot{\vec{x}}} = \sqrt{[\dot{s}(1-k_r l)]^2 + \dot{l}^2} \quad (12)$

下面计算 l'：

$$l' = \frac{dl}{ds} = \frac{dl}{dt}\cdot\frac{dt}{ds} = \frac{\dot{l}}{\dot{s}}$$

$$l' = \frac{dl}{ds} = \frac{dl}{dt}\cdot\frac{dt}{ds} = \frac{\dot{l}}{\dot{s}}, \quad \frac{\dot{l}}{\dot{s}} = l'$$

将(9)(10)式代入

$$l' = \frac{V_x\cdot\sin\Delta\theta}{\dot{s}} = \frac{V_x}{\dot{s}}\sin\Delta\theta \quad (13)$$

再将(12)式代入得

$$l' = \frac{\sqrt{\dot{s}^2(1-k_r l)^2 + \dot{l}^2}}{\dot{s}}\sin\Delta\theta = \sqrt{(1-k_r l)^2 + \left(\frac{\dot{l}}{\dot{s}}\right)^2}\sin\Delta\theta = \sqrt{(1-k_r\cdot l)^2 + l'^2}\cdot\sin\Delta\theta$$

$$l'^2 = [(1-k_r\cdot l)^2 + l'^2]\cdot\sin^2\Delta\theta$$

$$1-\sin^2\theta = \cos^2\theta$$

$$l'^2(1-\sin^2\Delta\theta) = (1-k_r l)^2\cdot\sin^2\Delta\theta$$

假定车辆实际轨迹一直沿参考线附近运动（即不能与参考线反向的运动），使得：

$|\Delta\theta| < \pi/2$ ✓

$1-k_r l > 0$ ？

则求解上述关于 l' 的方程得到

$$l' = (1-k_r\cdot l)\cdot\tan\Delta\theta \quad ✓ \quad (14)$$

将(14)式代入(13)式，可得到速度 V_x 的表达式：

$$\frac{V_x}{\dot{s}}\sin\Delta\theta = (1-k_r\cdot l)\cdot\tan\Delta\theta$$

$$V_x = \frac{(1-k_r\cdot l)\cdot\dot{s}}{\cos\Delta\theta} \quad (15)$$

令 S_x 为车辆当前轨迹的弧长，则有：

$$\frac{d}{ds} = \frac{dS_x}{ds}\cdot\frac{d}{dS_x} = \frac{dS_x}{dt}\cdot\frac{dt}{ds}\cdot\frac{d}{dS_x} = \frac{V_x}{\dot{s}}\ \frac{d}{dS_x}$$

$\frac{d}{ds}$ 是什么意思？

相当 $\frac{d\text{什么}}{ds}$ 求导

将(15)式代入，得到：

$$\frac{d}{ds} = \frac{1-k_r\cdot l}{\cos\Delta\theta}\cdot\frac{d}{dS_x} \quad (16)$$

对(14)式求关于参考线弧长 s 的偏导：

$$l'' = (1-k_r\cdot l)'\cdot\tan\Delta\theta + \frac{(1-k_r l)\cdot(\Delta\theta)'}{\cos^2\Delta\theta} \quad (17)$$

注意到：$\Delta\theta = \theta_x - \theta_r$，于是有：

$$(\Delta\theta)' = \frac{d\theta_x}{ds} - \frac{d\theta_r}{ds} = \frac{d\theta_x}{ds} - \theta_r'$$

曲率定义：切线转角 $\Delta\alpha$，与该弧长 Δs 之比的绝对值，称为该段弧长的平均曲率

$$\bar{K} = \left|\frac{\Delta\alpha}{\Delta s}\right|$$

$$K = \frac{d\alpha}{ds}$$

根据曲率定义

$$k_r = \theta_r' = \frac{d\theta_r}{ds} ✓; \quad k_x = \theta_x' = \frac{d\theta_x}{ds} ✓$$

并将(16)式代入，得到：

$$(\Delta\theta)' = \frac{1-k_r l}{\cos\Delta\theta}\cdot\frac{d\theta_x}{dS_x} - \theta_r'$$

$$= k_x\frac{1-k_r\cdot l}{\cos\Delta\theta} - k_r \quad (18)$$

将(18)式代入(17)式，得：

$$l'' = -(k_r'\cdot l + k_r\cdot l')\tan\Delta\theta + \frac{(1-k_r\cdot l)}{\cos^2\Delta\theta}\cdot\left[k_x\frac{1-k_r l}{\cos\Delta\theta} - k_r\right] \quad (19)$$

最后求解 $a_x = \dot{V}_x = \frac{dV_x}{dt}$，

对(15)式求关于时间的导数，得：

故 $V_x = \dot{s}\,\frac{1-k_r\cdot l}{\cos\Delta\theta}$

$$a_x = \dot{V}_x = \ddot{s}\,\frac{1-k_r\cdot l}{\cos\Delta\theta} + \dot{s}\,\frac{d}{dt}\left(\frac{1-k_r l}{\cos\Delta\theta}\right).$$

$$= \ddot{s}\,\frac{1-k_r\cdot l}{\cos\Delta\theta} + \dot{s}\,\frac{d}{ds}\left(\frac{1-k_r l}{\cos\Delta\theta}\right)\cdot\frac{ds}{dt}$$

$$= \ddot{s}\,\frac{1-k_r\cdot l}{\cos\Delta\theta} + \dot{s}\,\frac{d}{ds}\left(\frac{1-k_r l}{\cos\Delta\theta}\right)\cdot\dot{s}$$

$$= \ddot{s}\,\frac{1-k_r\cdot l}{\cos\Delta\theta} + \frac{\dot{s}^2}{\cos\Delta\theta}\left[(1-k_r l)\tan\Delta\theta\,(\Delta\theta)' - (k_r' l + k_r l')\right] \qquad (20)$$

将式(18)代入式(20)得

$$a_x = \ddot{s}\,\frac{1-k_r l}{\cos\Delta\theta} + \frac{\dot{s}^2}{\cos\Delta\theta}\left[(1-k_r l)\cdot\tan\Delta\theta\cdot\left[k_x\frac{1-k_r l}{\cos\Delta\theta} - k_r\right] - (k_r' l + k_r l')\right] \quad (21)$$

(4.a) (14), (15) (19) (21) 式便是我们要求的坐标转换公式

$l = \pm\sqrt{(x-x_r)^2 + (y-y_r)^2}$,

if $[(y-y_r)\cos\theta_r - (x-x_r)\sin\theta_r] > 0$, positive, (4.a)

otherwise, negetive

$l' = (1-k_r\cdot l)\cdot\tan\Delta\theta$ ✓ (14) $\Delta\theta = \theta_x - \theta_r$

$V_x = \frac{(1-k_r\cdot l)\cdot\dot{s}}{\cos\Delta\theta}$ (15) $\dot{s} = \frac{ds}{dt}$ $V_x = \|\vec{v}_x\|$ (笛卡尔坐标)

$l'' = -(k_r'\cdot l + k_r\cdot l')\tan\Delta\theta + \frac{(1-k_r l)}{\cos^2\Delta\theta}\cdot\left[k_x\frac{1-k_r l}{\cos\Delta\theta} - k_r\right]$ (19)

$a_x = \frac{dV_x}{dt}$ (笛卡尔坐标)

$a_x = \ddot{s}\,\frac{1-k_r l}{\cos\Delta\theta} + \frac{\dot{s}^2}{\cos\Delta\theta}\left[\underbrace{(1-k_r l)\cdot\tan\Delta\theta}_{l'}\cdot\left[k_x\frac{1-k_r l}{\cos\Delta\theta} - k_r\right] - (k_r' l + k_r l')\right]$ (21)

只讲了笛卡尔坐标系 $\xrightarrow{\text{转换}}$ Frenet 坐标系,
没有讲怎么从 Frenet 坐标系转回到笛卡尔坐标系