Санкт-Петербургский государственный университет

На правах рукописи

Банкевич Сергей Викторович

О монотонности интегральных функционалов при перестановках

Специальность 01.01.02 —
«Дифференциальные уравнения, динамические системы и оптимальное управление»

Диссертация на соискание учёной степени
кандидата физико-математических наук

Научный руководитель:
доктор физико-математических наук, профессор
Назаров Александр Ильич

Санкт-Петербург — 2018

Оглавление

Стр.

Введение

bigl, bigr

Свои работы отдельно. Тезисы тоже считаются.

Во введении кроме исторической части ещё изложение результатов.

пройти по всем ссылкам и посмотреть, что все факты правильно называются: предложение вместо леммы

проверить орфографию

Make use of \norm, \abs, \meas, \set and other commands

fix discontinuity in graphs

introduce a section with formulations of external assertions, если нельзя их всех сделать в тексте, как сейчас во многих случаях сделано

широкую библиографию по эффекту Лаврентьева. Посмотреть кроме письма ещё в BGH

Пусть $\Omega = \omega \times [-1,1]$, где ω — ограниченная область в $\mathbb{R}^{n-1}$ с липшицевой границей. Обозначим $x = (x_1, \dots, x_{n-1}, y) = (x', y)$.

Напомним теорему о послойном представлении измеримой неотрицательной функции u, заданной на Ω (см. [1, Теорема 1.13]). Положим $\mathcal{A}_t(x') := \{y \in [-1,1] : \ u(x', y) > t\}$. Тогда имеет место равенство

$$u(x', y) = \int_0^\infty \mathcal{X}\{\mathcal{A}_t(x')\}(y)dt,$$

где $\mathcal{X}\{A\}$ — характеристическая функция множества A.

Определим симметричную перестановку измеримого множества $E \subset [-1, 1]$ и симметричную перестановку (симметризацию по Штейнеру) неотрицательной функции $u \in W_1^1(\Omega)$:

$$E^* := [-\frac{|E|}{2}, \frac{|E|}{2}]; \qquad u^*(x', y) = \int\limits_0^\infty \mathcal{X}\{(\mathcal{A}_t(x'))^*\}(y)dt.$$

В тех же условиях определим монотонную перестановку множества E и функции $u \in W_1^1(\Omega)$:

$$\overline{E} := [1 - \operatorname{meas} E, 1]; \qquad \overline{u}(x', y) = \int\limits_0^\infty \mathcal{X}\{\overline{\mathcal{A}_t(x')}\}(y)dt.$$

Возьмём выпуклую чётную функцию F и рассмотрим функционал

$$I(u) = \int_\Omega F(\|\nabla u\|)dx. \tag{1}$$

Для такого функционала хорошо известно классическое неравенство Пойа-Сегё: $I(u^*) \leqslant I(u)$.

fix В данной диссертации мы рассматриваем обобщения неравенства Пойа-Сегё на более общие классы функционалов. В первой и второй главах мы рассматриваем взвешенные аналоги классического функционала.

Определим множество $\mathfrak{F}$ непрерывных функций $F : \boldsymbol{\omega} \times \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$ (здесь и далее $\mathbb{R}_+ = [0, \infty)$), выпуклых и строго возрастающих по третьему аргументу, удовлетворяющих $F(\cdot, \cdot, 0) \equiv 0$.

Рассмотрим функционал:

$$J(u) = \int\limits_\Omega F(x', u(x), \|\mathcal{D}u\|)dx, \tag{2}$$

где $F \in \mathfrak{F}$, $\|\cdot\|$ — некоторая норма в $\mathbb{R}^n$, симметричная по последней координате, то есть удовлетворяющая $\|(x', y)\| = \|(x', -y)\|$,

$$\mathcal{D}u = (a_1(x', u(x))D_1 u,\ \ldots,\ a_{n-1}(x', u(x))D_{n-1}u,\ a(x, u(x))D_n u)$$

— градиент u с весом (обратите внимание, что только вес при $D_n u$ зависит от y), $a(\cdot, \cdot) : \Omega \times \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$ и $a_i(\cdot, \cdot) : \boldsymbol{\omega} \times \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$ — непрерывные функции. Здесь и далее индекс i пробегает от 1 до $n-1$. Очевидно, что при $a_i = a \equiv 1$ выполнено $J \equiv I$.

fix В первой главе мы рассматриваем аналог неравенства Пойа-Сегё для монотонной перестановки с функционалом (2):

$$J(\overline{u}) \leqslant J(u) \tag{3}$$

Мы устанавливаем необходимые для выполнения неравенства условия на весовую функцию a. Также мы доказываем неравенство при необходимых условиях и дополнительном ограничении на рост интегранта по производной.

Во второй главе мы снимаем требование ограничения роста, и также доказываем аналогичный результат для симметричной перестановки:

$$J(u^*) \leqslant J(u), \tag{4}$$

тем самым закрывая пробел в работе [2].

оставить здесь только мотивацию/историю

Глава 1. О неравенстве Пойа-Сегё с весом для монотонной перестановки в случае ограниченного роста интегранта по производной

1.1 Обозначения

Пусть $\Omega = \omega \times [-1,1]$, где ω — ограниченная область в $\mathbb{R}^{n-1}$ с липшицевой границей. Обозначим $x = (x_1, \ldots, x_{n-1}, y) = (x', y)$.

Напомним теорему о послойном представлении измеримой неотрицательной функции u, заданной на Ω (см. [1, Теорема 1.13]). Положим $\mathcal{A}_t(x') := \{y \in [-1,1] : \ u(x', y) > t\}$. Тогда имеет место равенство

$$u(x', y) = \int_0^\infty \mathcal{X}\{\mathcal{A}_t(x')\}(y)dt,$$

где $\mathcal{X}\{A\}$ — характеристическая функция множества A.

Определим симметричную перестановку измеримого множества $E \subset [-1, 1]$ и симметричную перестановку (симметризацию по Штейнеру) неотрицательной функции $u \in W_1^1(\Omega)$:

$$E^* := [-\frac{|E|}{2}, \frac{|E|}{2}]; \qquad u^*(x', y) = \int\limits_0^\infty \mathcal{X}\{(\mathcal{A}_t(x'))^*\}(y)dt.$$

В тех же условиях определим монотонную перестановку множества E и функции $u \in W_1^1(\Omega)$:

$$\overline{E} := [1 - \operatorname{meas} E, 1]; \qquad \overline{u}(x', y) = \int\limits_0^\infty \mathcal{X}\{\overline{\mathcal{A}_t(x')}\}(y)dt.$$

Определим множество $\mathfrak{F}$ непрерывных функций $F : \omega \times \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$ (здесь и далее $\mathbb{R}_+ = [0, \infty)$), выпуклых и строго возрастающих по третьему аргументу, удовлетворяющих $F(\cdot, \cdot, 0) \equiv 0$.

Рассмотрим функционал:

$$J(u) = \int\limits_\Omega F(x', u(x), \|\mathcal{D}u\|)dx, \tag{1.1}$$

где $F \in \mathfrak{F}$, $\|\cdot\|$ — некоторая норма в $\mathbb{R}^n$, симметричная по последней координате, то есть удовлетворяющая $\|(x',y)\| = \|(x',-y)\|$,

$$\mathcal{D}u = (a_1(x',u(x))D_1u,\ \ldots,\ a_{n-1}(x',u(x))D_{n-1}u,\ a(x,u(x))D_nu)$$

— градиент u с весом (обратите внимание, что только вес при D_nu зависит от y), $a(\cdot,\cdot) : \Omega \times \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$ и $a_i(\cdot,\cdot) : \omega \times \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$ — непрерывные функции. Здесь и далее индекс i пробегает от 1 до $n-1$.

В этой главе мы рассматриваем следующее неравенство:

$$J(\overline{u}) \leqslant J(u) \tag{1.2}$$

Мы устанавливаем необходимые для выполнения неравенства условия на весовую функцию a. Также мы доказываем неравенство при необходимых условиях и дополнительном ограничении на рост интегранта по производной.

1.2 Условия, необходимые для выполнения неравенства (1.2)

Теорема 1. *1. Если неравенство (1.2) выполняется для некоторой $F \in \mathfrak{F}$ и произвольной кусочно линейной u, то вес a чётен по y, то есть $a(x',y,v) \equiv a(x',-y,v)$.*

ii) *Если неравенство (1.2) выполняется для произвольной $F \in \mathfrak{F}$ и произвольной кусочно линейной u, то вес a удовлетворяет неравенству*

$$a(x',s,v) + a(x',t,v) \geqslant a(x',1-t+s,v), \qquad \forall x' \in \omega,\ -1 \leqslant s \leqslant t \leqslant 1,\ v \in \mathbb{R}_+. \tag{1.3}$$

Доказательство. Ясно, что достаточно доказать утверждения теоремы для каждого x' в отдельности. Поэтому далее в этом доказательстве мы по сути рассматриваем одномерный случай $u = u(y)$, $a = a(y,u)$, $J(u) = \int\limits_{-1}^{1} F(u(y), |a(y,u(y))u'(y)|)\,dy$.

i) Предположим, что $a(y,v) \not\equiv a(-y,v)$. Тогда найдутся такие $y_0 \in (-1,1)$ и $v_0 \in \mathbb{R}_+$, что

$$a(y_0,v_0) < a(-y_0,v_0).$$

Поэтому существует $\varepsilon > 0$ такое, что

$$a(y,v) < a(-y,v), \quad \text{для всех } y_0 - \varepsilon \leqslant y \leqslant y_0,\ v_0 \leqslant v \leqslant v_0 + \varepsilon,$$

и можно взять следующую функцию:

$$\begin{cases} u_1(y) = v_0 + \varepsilon, & y \in [-1, y_0 - \varepsilon] \\ u_1(y) = v_0 + y_0 - y, & y \in (y_0 - \varepsilon, y_0) \\ u_1(y) = v_0, & y \in [y_0, 1] \end{cases}$$

Тогда $\overline{u_1}(y) = u_1(-y)$ и

$$\begin{aligned} &J(u_1) - J(\overline{u_1}) \\ &= \int\limits_{y_0-\varepsilon}^{y_0} F\big(v_0+y_0-y, a(y, v_0+y_0-y)\big)\, dy - \int\limits_{-y_0}^{-y_0+\varepsilon} F\big(v_0+y_0+y, a(y, v_0+y_0+y)\big)\, dy \\ &= \int\limits_{y_0-\varepsilon}^{y_0} \Big(F\big(v_0+y_0-y, a(y, v_0+y_0-y)\big) - F\big(v_0+y_0-y, a(-y, v_0+y_0-y)\big)\Big)\, dy < 0, \end{aligned}$$

что противоречит предположениям теоремы. Утверждение **(i)** доказано.

ii) Предположим, что условие (1.3) не выполняется. Тогда в силу непрерывности функции a найдутся такие $-1 \leqslant s \leqslant t \leqslant 1$, $\varepsilon, \delta > 0$ и $v_0 \in \mathbb{R}_+$, что для любых $0 \leqslant y \leqslant \varepsilon$ и $v_0 \leqslant v \leqslant v_0 + \varepsilon$ справедливо неравенство

$$a(s+y, v) + a(t-y, v) + \delta < a(1 - t + s + 2y, v).$$

Рассмотрим функцию u_2 (см. рис. 1):

$$\begin{cases} u_2(y) = v_0, & y \in [-1, s] \cup [t, 1] \\ u_2(y) = v_0 + y - s, & y \in [s, s+\varepsilon] \\ u_2(y) = v_0 + \varepsilon, & y \in [s+\varepsilon, t-\varepsilon] \\ u_2(y) = v_0 + t - y, & y \in [t-\varepsilon, t] \end{cases} \tag{1.4}$$

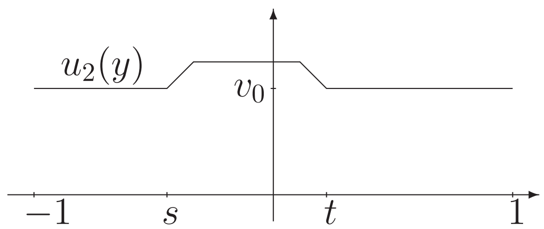

рис. 1

Тогда

$$\begin{cases} \overline{u_2}(y) = v_0, & y \in [-1, 1-t+s] \\ \overline{u_2}(y) = v_0 + \dfrac{y-(1-t+s)}{2}, & y \in [1-t+s, 1-t+s+2\varepsilon] \\ \overline{u_2}(y) = v_0 + \varepsilon, & y \in [1-t+s+2\varepsilon, 1] \end{cases}$$

(см. рис. 2).

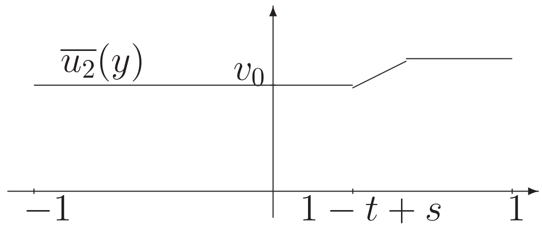

рис. 2

Имеем

$$J(a,\overline{u_2}) = \int_0^{2\varepsilon} F\big(u_2(1-t+s+z), \frac{a(1-t+s+z, u_2(1-t+s+z))}{2}\big)\,dz$$

$$= \int_0^{\varepsilon} 2F\big(v_0+y, \frac{a(1-t+s+2y, v_0+y)}{2}\big)\,dy$$

$$0 \leqslant J(a,u_2) - J(a,\overline{u_2}) = \int_0^{\varepsilon} \Big(F\big(v_0+y, a(s+y,v_0+y)\big) + F\big(v_0+y, a(t-y,v_0+y)\big)$$

$$- 2F\big(v_0+y, \frac{a(1-t+s+2y, v_0+y)}{2}\big)\Big)\,dy$$

$$< \int_0^{\varepsilon} \Big(F\big(v_0+y, a(s+y,v_0+y)\big) + F\big(v_0+y, a(t-y,v_0+y)\big)$$

$$- 2F\big(v_0+y, \frac{a(s+y,v_0+y) + a(t-y,v_0+y) + \delta}{2}\big)\Big)\,dy =: \Delta J.$$

Рассмотрим теперь функцию $F(v,p) = p^{\alpha}$. Очевидно, что при $\alpha = 1$ выполнено неравенство

$$\frac{F(v,p)+F(v,q)}{2} - F\big(v, \frac{p+q}{2} + \frac{\delta}{2}\big) < 0. \tag{1.5}$$

Нас интересуют p, q, лежащие на компакте $[0, A]$, где

$$A = \max_{(y,v)} a(y,v), \qquad (y,v) \in [-1,1] \times u_2([-1,1]).$$

Значит найдётся и $\alpha > 1$ такое, что неравенство (1.5) будет выполняться. Например, подходит любое $1 < \alpha < (\log_2 \frac{2A}{A+\delta})^{-1}$.

Тем самым, мы подобрали строго выпуклую по второму аргументу функцию F, для которой $\Delta J \leqslant 0$. Это противоречие доказывает утверждение **(ii)**. $\square$

Замечание 1. *Пусть $a(x', \cdot, v)$ чётна. Тогда условие (1.3) эквивалентно субаддитивности функции $a(x', 1 - \cdot, v)$. В частности, если неотрицательная функция a чётна и вогнута по y, она удовлетворяет (1.3).*

Теорема 2. *Если неравенство (1.2) выполняется для произвольной $F \in \mathfrak{F}$ и произвольной кусочно линейной u, закреплённой на левом конце: $u(-1) = 0$, то вес a удовлетворяет неравенству (1.3).*

Доказательство. Будем следовать схеме доказательства пункта 2 теоремы 1. Мы ставим дополнительное ограничение $s > -1$ (ввиду непрерывности весовой функции от этого требования легко потом избавиться). Также в качестве функции u_3 берём функцию, возрастающую от нуля на отрезке $[-1, s]$, а на отрезке $[s, 1]$ совпадающую с u_2 из теоремы 1. Тогда функция $\overline{u_3}$ на отрезке $[-1, s]$ совпадает с u_3, а на отрезке $[s, 1]$ совпадает с $\overline{u_2}$. Тем самым, $J(u_3) - J(u_2) = J(\overline{u_3}) - J(\overline{u_2})$, и рассуждения теоремы 1 начиная с вычисления ΔJ полностью повторяются. $\square$

1.3 Доказательство неравенства (1.2) для кусочно линейных функций

Лемма 1. *Пусть a удовлетворяет (1.3).*

i) *Для любых $x' \in \omega$, $-1 \leqslant t_1 \leqslant t_2 \leqslant \ldots \leqslant t_n \leqslant 1$, $v \in \mathbb{R}_+$ выполнены следующие неравенства*

$$\sum_{k=1}^{n} a(x', t_k, v) \geqslant a(x', 1 - \sum_{k=1}^{n} (-1)^k t_k, v), \qquad \text{для чётных } n,$$

$$\sum_{k=1}^{n} a(x', t_k, v) \geqslant a(x', -\sum_{k=1}^{n} (-1)^k t_k, v), \qquad \text{для нечётных } n.$$

ii) *Предположим дополнительно, что функция a чётна. Тогда для всех* $x' \in \omega$, $-1 \leqslant t_1 \leqslant t_2 \leqslant \ldots \leqslant t_n \leqslant 1$, $v \in \mathbb{R}_+$ *также выполнены следующие неравенства*

$$\sum_{k=1}^{n} a(t_k, v) \geqslant a(x', -1 + \sum_{k=1}^{n} (-1)^k t_k, v), \qquad \text{для чётных } n,$$
$$\sum_{k=1}^{n} a(t_k, v) \geqslant a(x', \sum_{k=1}^{n} (-1)^k t_k, v), \qquad \text{для нечётных } n.$$

Доказательство. **i)** Будем доказывать по индукции. Для $n = 1$ утверждение тривиально. Пусть теперь n чётное. Тогда, по предположению индукции,

$$\sum_{k=1}^{n-1} a(x', t_k, v) \geqslant a(x', -\sum_{k=1}^{n-1} (-1)^k t_k, v).$$

Значит

$$\sum_{k=1}^{n-1} a(x', t_k, v) + a(x', t_n, v) \geqslant a(x', -\sum_{k=1}^{n-1} (-1)^k t_k, v) + a(x', t_n, v)$$
$$\geqslant a(x', 1 - \sum_{k=1}^{n} (-1)^k t_k, v).$$

В случае нечётного n воспользуемся предположением индукции в следующем виде:

$$\sum_{k=2}^{n} a(x', t_k, v) \geqslant a(x', 1 + \sum_{k=2}^{n} (-1)^k t_k, v).$$

Тогда

$$a(x', t_1, v) + \sum_{k=2}^{n} a(x', t_k, v) \geqslant a(x', t_1, v) + a(x', 1 + \sum_{k=2}^{n} (-1)^k t_k, v)$$
$$\geqslant a(x', t_1 - \sum_{k=2}^{n} (-1)^k t_k, v) = a(x', -\sum_{k=1}^{n} (-1)^k t_k, v).$$

ii) Доказательство этой части очевидно. □

Лемма 2. *Пусть функция* $a(x', \cdot, u)$ *чётна и удовлетворяет условию* (1.3). *Тогда, если* u *— неотрицательная кусочно линейная функция, то* $J(u) \geqslant J(\overline{u})$.

Доказательство. Пусть функция u имеет изломы на множестве C ($\partial\Omega \subset C \subset \Omega$). Возьмём

$$U := \{(x', u(x', y)) : x' \in \omega, y \in (-1, 1), (x', y) \notin C\}.$$

Тогда открытое множество U разбивается в объединение конечного числа связных открытых множеств G_j. Обозначим m_j число прообразов значения $(x', u_0) \in G_j$, то есть число решений уравнения $u(x', y) = u_0$ (очевидно, это число постоянно для $(x', u_0) \in G_j$). Легко видеть, что эти прообразы являются линейными функциями (x', u_0): $y = y_k^j(x', u_0)$, $k = 1, \dots, m_j$, и $D_n y_k^j(x', u(x', y)) = \frac{1}{D_n u(x', y)}$. Мы будем считать, что $y_1^j(x', u_0) < y_2^j(x', u_0) < \dots < y_{m_j}^j(x', u_0)$.

Уравнение $\overline{u}(x_0', \overline{y}) = u_0$ задаёт $\overline{y}$ как функцию $(x_0', u_0) \in G_j$. Её можно выразить через y_k^j (в частности, $\overline{y}$ кусочно линейна):

$$\begin{array}{c|l|l} u(x_0', -1) < u_0 & m_j \text{ чётно} & \overline{y} = 1 - \sum\limits_{k=1}^{m_j} (-1)^k y_k^j \\ & m_j \text{ нечётно} & \overline{y} = - \sum\limits_{k=1}^{m_j} (-1)^k y_k^j \\ \hline u(x_0', -1) > u_0 & m_j \text{ чётно} & \overline{y} = -1 + \sum\limits_{k=1}^{m_j} (-1)^k y_k^j \\ & m_j \text{ нечётно} & \overline{y} = \sum\limits_{k=1}^{m_j} (-1)^k y_k^j \end{array} \tag{1.6}$$

Отсюда ясно, что

$$D_n \overline{y}(x', u(x', y)) = \frac{1}{D_n \overline{u}(x', y)} = \sum_{k=1}^{m_j} |D_n y_k^j(x', u(x', y))|$$

и $D_i \overline{u}(x', y) = \pm \sum_{k=1}^{m_j} (-1)^k D_i y_k^j(x', u(x', y))$, где знак перед правой частью зависит только от j.

Тогда

$$J(u) = \sum_{j=1}^{N} \int\limits_{G_j} F(x', u(x), \|a_i(x', u(x)) D_i u(x), a(x, u(x)) D_n u(x)\|) dx$$

$$= \sum_{j=1}^{N} \int\limits_{u(G_j)} \sum_{k=1}^{m_j} F\Big(x', u, \frac{\|a_i(x', u) D_i y_k^j(x', u), a(x', y_k^j(x', u), u)\|}{|D_n y_k^j(x', u)|}\Big) |D_n y_k^j(x', u)| dx' du, \tag{1.7}$$

$$J(\overline{u})=\sum_{j=1}^{N}\int\limits_{G_j}F(x',\overline{u},\|a_i(x',\overline{u}(x))D_i\overline{u}(x),a(x,\overline{u}(x))D_n\overline{u}(x)\|)dx$$
$$=\sum_{j=1}^{N}\int\limits_{u(G_j)}F\Big(x',\overline{u},\frac{\|a_i(x',\overline{u})D_i\overline{y}(x',\overline{u}),a(x',\overline{y}(x',\overline{u}),\overline{u})\|}{\sum_{k=1}^{m_j}|D_ny_k^j(x',\overline{u})|}\Big)\times$$
$$\times\sum_{k=1}^{m_j}|D_ny_k^j(x',\overline{u})|dx'd\overline{u}. \quad (1.8)$$

Зафиксируем j, x' и u и обозначим $b_k=|D_ny_k^j|$, $c_{ki}=D_iy_k^j$, $\overline{c}_i=D_i\overline{y}$, $y_k=y_k^j(x',u)$, $\overline{y}=\overline{y}(x',u)$, $m=m_j$. Тогда справедлива следующая цепочка неравенств:

$$\sum_{k=1}^{m}b_kF\Big(\frac{\|a_ic_{ki},a(y_k)\|}{b_k}\Big)\overset{a}{\geqslant}F\Big(\frac{\sum_{k=1}^{m}\|a_ic_{ki},a(y_k)\|}{\sum_{k=1}^{m}b_k}\Big)\sum_{k=1}^{m}b_k$$
$$\overset{b}{=}F\Big(\frac{\sum_{k=1}^{m}\|(-1)^ka_ic_{ki},a(y_k)\|}{\sum_{k=1}^{m}b_k}\Big)\sum_{k=1}^{m}b_k\overset{c}{\geqslant}F\Big(\frac{\|\sum_{k=1}^{m}((-1)^ka_ic_{ki},a(y_k))\|}{\sum_{k=1}^{m}b_k}\Big)\sum_{k=1}^{m}b_k$$
$$=F\Big(\frac{\|\sum_{k=1}^{m}(-1)^ka_ic_{ki},\sum_{k=1}^{m}a(y_k)\|}{\sum_{k=1}^{m}b_k}\Big)\sum_{k=1}^{m}b_k\overset{d}{\geqslant}F\Big(\frac{\|\sum_{k=1}^{m}(-1)^ka_ic_{ki},a(\overline{y})\|}{\sum_{k=1}^{m}b_k}\Big)\sum_{k=1}^{m}b_k$$
$$\overset{e}{=}F\Big(\frac{\|\pm a_i\sum_{k=1}^{m}(-1)^kc_{ki},a(\overline{y})\|}{\sum_{k=1}^{m}b_k}\Big)\sum_{k=1}^{m}b_k=F\Big(\frac{\|a_i\overline{c}_i,a(\overline{y})\|}{\sum_{k=1}^{m}b_k}\Big)\sum_{k=1}^{m}b_k. \quad (1.9)$$

Здесь в переходе (a) применено неравенство Йенсена, в переходах (b) и (e) использована чётность нормы, в (c) использовано неравенство треугольника, в (d) — лемма 1 и чётность веса a по y.

Из (1.9) видно, что подынтегральное выражение в (1.7) не меньше подынтегрального выражения в (1.8). Тем самым, доказательство завершено. □

Лемма 3. *Пусть функция* $a(x',\cdot,u)$ *удовлетворяет условию* (1.3). *Тогда, если* u *— неотрицательная кусочно линейная функция, удовлетворяющая* $u(\cdot,-1)\equiv 0$, *то* $J(u)\geqslant J(\overline{u})$.

Доказательство. Заметим, что в доказательстве леммы 2 мы используем чётность веса только в переходе (d) цепочки неравенств (1.9). Поскольку при $u(\cdot,-1)\equiv 0$ всегда выполнено $u(x_0',-1)<u_0$, с учётом соотношений (1.6) лемма 1 как раз обеспечивает требуемые для перехода (d) неравенства. □

1.4 О расширении класса функций, для которых выполняется неравенство (1.2)

проверить ещё раз, что всё ок в многомерном случае

кое-где вместо 2 вылезет $|\Omega|$

Следующее утверждение более-менее стандартно. Однако, множество $\{u : J(u) < \infty\}$ даже не является выпуклым подмножеством $W_1^1(\Omega)$. Поэтому здесь мы приводим полное доказательство для удобства читателя. это ок фраза для диссертации вообще?

Лемма 4. *Пусть функция a непрерывна. Тогда функционал $J(u)$ слабо полунепрерывен снизу в $W_1^1(\Omega)$.*

Доказательство. Пусть $u_m \rightharpoonup u$ в $W_1^1(\Omega)$. Обозначим $A = \underline{\lim}\, J(u_m) \geqslant 0$. Наша задача — доказать $J(u) \leqslant A$. Если $A = \infty$, то утверждение тривиально, поэтому можно считать $A < \infty$. Переходя к подпоследовательности, добиваемся $A = \lim J(u_m)$. Из слабой сходимости $u_m \rightharpoonup u$ заключаем, что найдётся R_0 такое, что $\|u_m\|_{W_1^1(\Omega)} \leqslant R_0$. Более того, переходя к подпоследовательности, можно считать, что $u_m \to u$ в $L_1(\Omega)$ и $u_m(x) \to u(x)$ почти всюду. Тогда по теореме Егорова для любого ε найдётся множество G_ε^1 такое, что $|G_\varepsilon^1| < \varepsilon$ и $u_m \rightrightarrows u$ в $\Omega \setminus G_\varepsilon^1$.

Из равномерной сходимости u_m следует существование такого K, что для каждого $m > K$ неравенство $|u_m| \leqslant |u| + \varepsilon$ выполнено для аргументов из $\Omega \setminus G_\varepsilon^1$. Возьмём $G_\varepsilon^2 = \{x \in \Omega \setminus G_\varepsilon^1 : |u(x)| \geqslant \frac{R_0+\varepsilon}{\varepsilon}\}$. Тогда

$$R_0 \geqslant \int\limits_\Omega |u(x)|\,dx \geqslant \int\limits_{G_\varepsilon^2} |u(x)|\,dx \geqslant \int\limits_{G_\varepsilon^2} \frac{R_0+\varepsilon}{\varepsilon}\,dx = |G_\varepsilon^2|\frac{R_0+\varepsilon}{\varepsilon}.$$

То есть $|G_\varepsilon^2| \leqslant \varepsilon\frac{R_0}{R_0+\varepsilon} < \varepsilon$. Тем самым, последовательность u_m равномерно сходится и равномерно ограничена вне множества $G_\varepsilon := G_\varepsilon^1 \cup G_\varepsilon^2$.

Из непрерывности F и a следует, что для произвольных ε и R найдётся такое $N(\varepsilon, R)$, что если $x \in \Omega \setminus G_\varepsilon$, $|M| \leqslant R$ и $m > N(\varepsilon, R)$, то

$$|F\big(u_m(x), a(x, u_m(x))M\big) - F\big(u(x), a(x, u(x))M\big)| < \varepsilon.$$

Рассмотрим множества $E_{m,\varepsilon} := \{x \in \Omega : |u'_m(x)| \geqslant \frac{R_0}{\varepsilon}\}$. Имеем

$$R_0 \geqslant \int\limits_\Omega |u'_m(x)|\,dx \geqslant \int\limits_{E_{m,\varepsilon}} |u'_m(x)|\,dx \geqslant \int\limits_{E_{m,\varepsilon}} \frac{R_0}{\varepsilon}\,dx = \frac{R_0}{\varepsilon}|E_{m,\varepsilon}|.$$

Поэтому $|E_{m,\varepsilon}| \leqslant \varepsilon$.

Теперь можно ввести $L_{m,\varepsilon} := \Omega \setminus (E_{m,\varepsilon} \cup G_\varepsilon)$. Тогда $|L_{m,\varepsilon}| \geqslant 2 - 3\varepsilon$.

Зафиксируем $R := \frac{R_0}{\varepsilon}$, $N(\varepsilon) := N(\varepsilon, \frac{R_0}{\varepsilon})$. Для любых $\varepsilon > 0$, $x \in L_{m,\varepsilon}$ и $m > N(\varepsilon)$ получим

$$\Big|F\big(u_m(x), a(x, u_m(x))|u'_m(x)|\big) - F\big(u(x), a(x, u(x))|u'_m(x)|\big)\Big| < \varepsilon,$$

откуда

$$\int\limits_{L_{m,\varepsilon}} \Big|F\big(u_m(x), a(x, u_m(x))|u'_m(x)|\big) - F\big(u(x), a(x, u(x))|u'_m(x)|\big)\Big|\,dx < 2\varepsilon. \quad (1.10)$$

Возьмём $\varepsilon_j = \frac{\varepsilon}{2^j}$ $(j \geqslant 1)$, $m_j = N(\varepsilon_j) + j \to \infty$ и $L_\varepsilon = \bigcap L_{m_j,\varepsilon_j}$. Тогда $\sum \varepsilon_j = \varepsilon$ и, тем самым, $|\Omega \setminus L_\varepsilon| < 3\varepsilon$. Поскольку из (1.10) следует

$$\int\limits_{L_\varepsilon} \Big|F\big(u_{m_j}(x), a(x, u_{m_j}(x))|u'_{m_j}(x)|\big) - F\big(u(x), a(x, u(x))|u'_{m_j}(x)|\big)\Big|\,dx < 2\varepsilon_j,$$

мы получаем

$$\begin{aligned} A = \lim J(u_{m_j}) &= \lim \int\limits_\Omega F\big(u_{m_j}(x), a(x, u_{m_j}(x))|u'_{m_j}(x)|\big)\,dx \\ &\geqslant \varliminf \int\limits_\Omega \chi_{L_\varepsilon}(x) F\big(u(x), a(x, u(x))|u'_{m_j}(x)|\big)\,dx =: \varliminf J_\varepsilon(u'_{m_j}). \end{aligned}$$

Наш новый функционал

$$J_\varepsilon(v) = \int\limits_\Omega \chi_{L_\varepsilon}(x) F\big(u(x), a(x, u(x))|v(x)|\big)\,dx$$

выпуклый. Вновь переходя к подпоследовательности u_k, можно считать, что $\varliminf J_\varepsilon(u'_{m_j}) = \lim J_\varepsilon(u'_k)$. Так как $u'_k \rightharpoonup u'$ в L_1, то можно подобрать последовательность выпуклых комбинаций u'_k, которые будут сходиться к u' сильно (см. [3, Теорема 3.13]). А именно: найдутся $\alpha_{k,l} \geqslant 0$ для $k \in \mathbb{N}$, $l \leqslant k$ такие, что

$\sum_{l=1}^{k} \alpha_{k,l} = 1$ для каждого k и $w_k := \sum_{l=1}^{k} \alpha_{k,l} u'_l \to u'$ в L_1. Кроме того, очевидно, можно потребовать, чтобы минимальный индекс l ненулевого коэффициента $\alpha_{k,l}$ стремился к бесконечности по k. Тогда

$$\lim J_\varepsilon(u'_k) = \lim \sum_{l=1}^{k} \alpha_{k,l} J_\varepsilon(u'_l).$$

В силу выпуклости J_ε имеем

$$\sum_{l=1}^{k} \alpha_{k,l} J_\varepsilon(u'_l) \geqslant J_\varepsilon(w_k).$$

Наконец, поскольку $w_k \to u'$ в $L_1(\Omega)$, переходя к подпоследовательности, можем считать, что $w_k(x) \to u'(x)$ почти всюду. Кроме того, так как для $x \in L_\varepsilon$ выполнено $|u'_j(x)| < \frac{R_0}{\varepsilon}$, то и $|w_k(x)| < \frac{R_0}{\varepsilon}$. Значит,

$$F\big(u(x), a(x, u(x))|w_k(x)|\big) \leqslant \max_{(x,M)} F\big(u(x), a(x, u(x))M\big) < \infty,$$

где максимум берется по компактному множеству $(x, M) \in \Omega \times [-\frac{R_0}{\varepsilon}, \frac{R_0}{\varepsilon}]$. оно не компактно Поэтому применима теорема Лебега, и мы получаем $\lim J_\varepsilon(w_k) = J_\varepsilon(u')$. Таким образом,

$$A \geqslant \lim J_\varepsilon(u'_k) = \lim \sum_{l=1}^{k} \alpha_{k,l} J_\varepsilon(u'_l) \geqslant \underline{\lim}\, J_\varepsilon(w_k) = J_\varepsilon(u').$$

Ввиду произвольности $\varepsilon > 0$ имеем $A \geqslant J(u)$. $\square$

Теорема 3. *Пусть $B \subset A \subset W_1^1(\Omega)$. Предположим, что для каждого $u \in A$ найдётся последовательность $u_k \in B$ такая, что $u_k \to u$ в $W_1^1(\Omega)$ и $J(u_k) \to J(u)$. Тогда*

i) *Если $\forall v \in B$ выполнено $J(v^*) \leqslant J(v)$, то $\forall u \in A$ будет выполнено $J(u^*) \leqslant J(u)$.*

ii) *Если $\forall v \in B$ выполнено $J(\overline{v}) \leqslant J(v)$, то $\forall u \in A$ будет выполнено $J(\overline{u}) \leqslant J(u)$.*

Доказательство. **i)** Возьмём некоторую $u \in A$ и для нее найдем приближающую последовательность $\{u_k\} \subset B$. По условию $J(u_k^*) \leqslant J(u_k) \to J(u)$. В [2, теорема 1] показано, что

$$u_k \to u \text{ в } W_1^1(\Omega) \quad \Longrightarrow \quad u_k^* \to u^* \text{ in } W_1^1(\Omega).$$

Из леммы 4 получаем

$$J(\overline{u}) \leqslant \underline{\lim}\, J(\overline{u_k}) \leqslant \lim J(u_k) = J(u).$$

ii) Поскольку $\overline{u_k}(x) = u_k^*(\frac{x-1}{2})$ и $\overline{u}(x) = u^*(\frac{x-1}{2})$, имеем

$$u_k \to u \text{ в } W_1^1(\Omega) \quad \Longrightarrow \quad \overline{u_k} \to \overline{u} \text{ in } W_1^1(\Omega).$$

Тем самым, рассуждения из доказательства предыдущего пункта могут быть дословно повторены. □

Это утверждение совпадает с первой частью следующей теоремы, но более подробно объяснено. Вставить формулировку теоремы, на которую ссылаемся, и перенести в следующий пункт

Следствие 1. *Пусть вес a непрерывен, и неравенство* (1.2) *верно для неотрицательных кусочно линейных функций u. Тогда оно верно для всех неотрицательных липшицевых функций.*

Доказательство. Не нужно ли тут что-то от границы Ω? Ввиду теоремы 1 из §6.6 [4], любая липшицева функция u может быть приближены последовательностью $u_k \in C^1(\overline{\Omega})$ в следующем смысле:

$$u_k \rightrightarrows u, \qquad u_k' \to u' \text{ п.в.}, \qquad |u_k'| \leqslant const.$$

Тогда по теореме Лебега $u_k \to u$ в $W_1^1(\Omega)$ и $J(u_k) \to J(u)$. В свою очередь, u_k могут быть аналогичным образом приближены кусочно линейными функциями. Применив лемму 2 и теорему 3, получаем требуемое. □

1.5 Переход к соболевским функциям

Теорема 4. *Пусть функция $a(x', \cdot, u)$ чётна и удовлетворяет условию* (1.3)*. Тогда*

i) *Неравенство (1.2) верно для произвольной неотрицательной $u \in Lip(\Omega)$.*

ii) *Предположим, что $\partial\omega \in Lip$ и для любых $x' \in \omega, z \in \mathbb{R}_+, p \in \mathbb{R}$ функция F удовлетворяет неравенству*

$$F(x', z, p) \leqslant C(1 + |z|^{q^*} + |p|^q),$$

где $\frac{1}{q^*} = \frac{1}{q} - \frac{1}{n}$, *если* $q < n$, *либо* q^* *любое в противном случае. Если* $q \leqslant n$, *то дополнительно предположим, что веса* a *и* a_i *ограничены. Тогда неравенство* (1.2) *верно для произвольной неотрицательной* $u \in W_q^1(\Omega)$.

Доказательство. **i)** Мы можем приблизить липшицевы u кусочно линейными функциями u_k вместе с производными почти всюду. Поскольку u_k равномерно ограничены вместе с производными, то и $F(x', u_k(x), \|\mathcal{D}u_k\|)$ равномерно ограничены. Тогда мы можем воспользоваться теоремой Лебега, получив $u_k \to u$ в $W_1^1(\Omega)$ и $J(u_k) \to J(u)$. Воспользовавшись теоремой 3, получаем требуемое.

ii) Рассмотрим произвольную $u \in W_q^1(\Omega)$. Для нее можно построить последовательность кусочно линейных функций u_k, приближающих её в $W_q^1(\Omega)$. Действительно, поскольку $\partial\Omega \in Lip$, u можно продолжить финитным образом на внутренность большого шара в $\mathbb{R}^n$ и приблизить гладкими финитными функциями. Далее шар триангулируется, и значения функции линейно интерполируются. Очевидно, в процессе все функции остаются неотрицательными.

Тогда, ввиду теоремы 3, достаточно добиться $J(u_k) \to J(u)$. Доказательство этой сходимости можно свести к теореме Красносельского о непрерывности оператора Немыцкого (см. [5, гл. 5, §17]). Однако для удобства читателя мы приводим здесь рассуждение целиком.

Покажем, что веса $a_i(x', u(x))$ и $a(x, u(x))$ ограничены. Если $q \leqslant n$, то это выполнено по предположению теоремы. Если же нет, то $W_q^1(\Omega)$ вкладывается в $C(\overline{\Omega})$, тем самым, $u_k(x)$ равномерно ограничены, а значит, и $a_i(x', u_k(x))$ и $a(x, u_k(x))$ равномерно ограничены. Поэтому $\|\mathcal{D}u_k(x)\| \leqslant C_1|\nabla u_k(x)|$. То есть,

$$F(x', u_k(x), \|\mathcal{D}u_k(x)\|) \leqslant C_2(1 + |u_k(x)|^{q^*} + |\nabla u_k(x)|^q).$$

Рассмотрим множества A_m, состоящие из $x \in \Omega$, для которых при всех $k \geqslant m$ выполнено $1 + |u_k(x)|^{q^*} + |\nabla u_k(x)|^q \leqslant 2(1 + |u(x)|^{q^*} + |\nabla u(x)|^q)$. Очевидно, что $A_m \subset A_{m+1}$. Переходя к подпоследовательности, можем считать, что $u_k \to u$ и $\nabla u_k \to \nabla u$ почти всюду. А значит $|A_m| \to |\Omega|$. Тогда

$$\begin{aligned}
\mathcal{X}\{A_k\}F(x', u_k(x), \|\mathcal{D}u_k(x)\|) &\leqslant 2(1 + |u(x)|^{q^*} + |\nabla u(x)|^q), \\
\mathcal{X}\{A_k\}F(x', u_k(x), \|\mathcal{D}u_k(x)\|) &\to F(x', u(x), \|\mathcal{D}u(x)\|)
\end{aligned}$$

почти всюду. По теореме вложения $\|u_k\|_{q^*} \leqslant C_3\|u_k\|_{W_q^1}$. Тем самым, мы нашли суммируемую мажоранту и получаем $\int_{A_k} \mathcal{X}\{A_k\}F(x', u_k(x), \|\mathcal{D}u_k(x)\|)dx \to J(u)$ по теореме Лебега .

Теперь оценим остаток:

$$\int_{\Omega\setminus A_k} F(x', u_k(x), \|\mathcal{D}u_k(x)\|)dx \leqslant \int_{\Omega\setminus A_k} C_2(1+|u_k(x)|^{q^*}+|\nabla u_k(x)|^q)dx$$

$$\leqslant C_4\Big(\int_{\Omega\setminus A_k}(1+|u(x)|^{q^*}+|\nabla u(x)|^q)dx+\int_{\Omega\setminus A_k}(1+|u(x)-u_k(x)|^{q^*}+|\nabla(u-u_k)(x)|^q)\Big)dx.$$

Первое слагаемое стремится к нулю по абсолютной непрерывности интеграла. Для второго слагаемого выполнено

$$\int_{\Omega\setminus A_k}(1+|u(x)-u_k(x)|^{q^*}+|\nabla(u-u_k)(x))|^q)dx$$

$$\leqslant (|\Omega\setminus A_m(k)|+\|u-u_k\|^{q^*}_{W^1_q}+\|u-u_k\|^q_{W^1_q})\to 0.$$

Тем самым, сходимость $J(u_k)\to J(u)$ доказана. $\square$

Теорема 5. *Пусть функция $a(x',\cdot,u)$ удовлетворяет условию (1.3). Тогда*

i) *Неравенство (1.2) верно для произвольной неотрицательной $u\in Lip(\Omega)$, удовлетворяющей $u(\cdot,-1)\equiv 0$.*

ii) *Предположим, что $\partial\omega\in Lip$ и для любых $x'\in\omega, z\in\mathbb{R}_+, p\in\mathbb{R}$ функция F удовлетворяет неравенству*

$$F(x',z,p)\leqslant C(1+|z|^{q^*}+|p|^q),$$

где $\frac{1}{q^*}=\frac{1}{q}-\frac{1}{n}$, если $q<n$, либо q^* любое в противном случае. Если $q\leqslant n$, то дополнительно предположим, что веса a и a_i ограничены. Тогда неравенство (1.2) верно для произвольной неотрицательной $u\in W^1_q(\Omega)$, удовлетворяющей $u(\cdot,-1)\equiv 0$.

Доказательство теоремы дословно повторяет доказательство теоремы 4.

Глава 2. О неравенстве Пойа-Сегё для монотонной перестановки и симметризации в общем случае при $n = 1$

2.1 Обозначения

В этой главе мы рассматриваем одномерный случай задачи из первой главы. Тем самым, пропадают весовые коэффициенты a_i, вес $a = a(x, v) : [-1, 1] \times \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$, $\mathfrak{F}$ — множество непрерывных функций $F : \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$ выпуклых и строго возрастающих по второму аргументу, удовлетворяющих $F(\cdot, 0) \equiv 0$. Рассматриваемый функционал имеет вид:

$$J(a, u) = \int\limits_{-1}^{1} F(u(x), a(x, u(x))|u'(x)|)\, dx.$$

Также мы будем использовать обозначение

$$J(B, a, u) = \int\limits_{B} F(u(x), a(x, u(x))|u'(x)|)\, dx.$$

Мы снимаем требование ограничения роста, стоящее в теореме 4, и также доказываем аналогичный результат для симметричной перестановки, устанавливая необходимые и достаточные условия:

$$J(u^*) \leqslant J(u). \tag{2.1}$$

Мы продолжаем ссылаться на условие (1.3), однако оно приобретает следующий вид:

$$a(s, v) + a(t, v) \geqslant a(1 - t + s, v), \qquad \forall s, t : -1 \leqslant s \leqslant t \leqslant 1,\ v \in \mathbb{R}_+. \tag{2.2}$$

2.2 Доказательство неравенства (1.2) для монотонных весов

В этом параграфе мы получим неравенство (1.2) при дополнительном условии монотонности весовой функции при $x \in [-1, 0]$ и при $x \in [0, 1]$.

Лемма 5. *Пусть a — непрерывная функция, $a(\cdot, u)$ возрастает на $[-1,0]$ и убывает на $[0,1]$ для всех $u \geqslant 0$. Тогда для любой функции $u \in W_1^1(-1,1)$, $u \geqslant 0$, найдётся последовательность $\{u_k\} \subset Lip[-1,1]$, удовлетворяющая*

$$u_k \to u \text{ в } W_1^1(-1,1) \quad \text{и} \quad J(a,u_k) \to J(a,u). \tag{2.3}$$

Для доказательства мы модифицируем схему из [6, Теорема 2.4]. Частично доказательство совпадает с [6], но для удобства читателя мы приводим здесь его полностью.

Нам потребуется следующее вспомогательное утверждение.

Предложение 1. *[6, лемма 2.7]. Пусть $\varphi_h : [-1,1] \to \mathbb{R}$ — последовательность липшицевых функций, удовлетворяющих условиям: $\varphi_h' \geqslant 1$ для почти всех x и всех h, $\varphi_h(x) \to x$ для почти каждого x. Тогда для любой $f \in L_1(\mathbb{R})$ выполнено $f(\varphi_h) \to f$ в $L_1(\mathbb{R})$.*

Доказательство леммы 5. Можно считать, что $J(a,u) < \infty$.

Мы докажем утверждение для функционала

$$J_1(u) = \int_0^1 F\big(u(x), a(x,u(x))|u'(x)|\big)\,dx.$$

Вторая часть с интегрированием по $[-1,0]$ сводится к J_1 заменой переменной.

Для $h \in \mathbb{N}$ покроем множество $\{x \in [0,1] : |u'(x)| > h\}$ открытым множеством A_h. Не умаляя общности, можно считать, что $A_{h+1} \subset A_h$ и $|A_h| \to 0$ при $h \to \infty$.

Обозначим v_h неотрицательную непрерывную функцию, заданную на $[0,1]$, совпадающую с u на множестве $[0,1] \setminus A_h$, и линейную на интервалах, составляющих A_h. Тогда $v_h \to u$ в $W_1^1(-1,1)$. Теперь изменим v_h так, чтобы сделать их липшицевыми.

Представим $A_h = \cup_k \Omega_{h,k}$, где $\Omega_{h,k} = (b_{h,k}^-, b_{h,k}^+)$. Обозначим

$$\alpha_{h,k} := |\Omega_{h,k}|, \quad \beta_{h,k} := v_h(b_{h,k}^+) - v_h(b_{h,k}^-) = u(b_{h,k}^+) - u(b_{h,k}^-).$$

Тогда $v_h' = \frac{\beta_{h,k}}{\alpha_{h,k}}$ в $\Omega_{h,k}$. Заметим, что

$$\sum_k |\beta_{h,k}| \leqslant \int_{A_h} |u'|\,dx \leqslant \|u'\|_{L_1(-1,1)} < \infty,$$

а значит, $\sum_k |\beta_{h,k}| \to 0$ при $h \to 0$ по теореме Лебега.

Определим функцию $\varphi_h \in W_1^1(0,1)$ следующим образом:

$$\begin{aligned} &\varphi_h(0) = 0 \\ &\varphi_h' = 1 && \text{в } [0,1] \setminus A_h, \\ &\varphi_h' = \max\Big(\frac{|\beta_{h,k}|}{\alpha_{h,k}}, 1\Big) && \text{в } \Omega_{h,k}. \end{aligned}$$

Заметим, что $\int_0^1 |\varphi_h'|\,dx \leqslant 1 + \sum_k |\beta_{h,k}| < \infty$.

Покажем, что $\varphi_h' \to 1$ в $L_1(0,1)$:

$$\int |\varphi_h' - 1|\,dx = \sum_k \Big(\max\Big(\frac{|\beta_{h,k}|}{\alpha_{h,k}}, 1\Big) - 1\Big)\alpha_{h,k} \leqslant \sum_k |\beta_{h,k}| \to 0.$$

Отсюда следует, что φ_h удовлетворяет условиям предложения 1.

Рассмотрим теперь $\varphi_h^{-1} : [0,1] \to [0,1]$ — ограничение обратной к φ_h функции на $[0,1]$. Тогда $0 \leqslant (\varphi_h^{-1})' \leqslant 1$ и

$$\begin{aligned} &\varphi_h^{-1}(0) = 0 \\ &(\varphi_h^{-1})' = 1 && \text{в } [0,1] \setminus \varphi_h(A_h), \\ &(\varphi_h^{-1})' = \min\Big(\frac{\alpha_{h,k}}{|\beta_{h,k}|}, 1\Big) && \text{в } [0,1] \cap \varphi_h(\Omega_{h,k}). \end{aligned}$$

Возьмём $u_h = v_h(\varphi_h^{-1})$. Заметим, что $u_h(0) = u(0)$, и

$$\begin{aligned} &u_h' = v_h'(\varphi_h^{-1}) \cdot (\varphi_h^{-1})' = u'(\varphi_h^{-1}) && \text{в } [0,1] \setminus \varphi_h(A_h), \\ &u_h' = v_h'(\varphi_h^{-1}) \cdot (\varphi_h^{-1})' = \operatorname{sign} \beta_{h,k} \cdot \min\Big(1, \frac{|\beta_{h,k}|}{\alpha_{h,k}}\Big) && \text{в } [0,1] \cap \varphi_h(\Omega_{h,k}). \end{aligned}$$

Тем самым, u_h липшицева, поскольку u' ограничена в $[0,1] \setminus A_h$.

Покажем, что $u_h \to u$ в $W_1^1(0,1)$. Для этого достаточно оценить

$$\|u_h' - u'\|_{L_1} \leqslant \int\limits_{[0,1]\setminus\varphi_h(A_h)} |u_h' - u'| + \int\limits_{[0,1]\cap\varphi_h(A_h)} |u_h'| + \int\limits_{[0,1]\cap\varphi_h(A_h)} |u'| =: P_h^1 + P_h^2 + P_h^3.$$

$$P_h^1 = \int\limits_{[0,1]\setminus\varphi_h(A_h)} |u'(\varphi_h^{-1}) - u'|\,dx = \int\limits_{\varphi_h^{-1}([0,1])\setminus A_h} |u' - u'(\varphi_h)|\,dz \leqslant \int\limits_{[0,1]} |u' - u'(\varphi_h)|\,dz.$$

В силу предложения 1, $P_h^1 \to 0$. Далее,

$$P_h^2 \leqslant |\varphi_h(A_h)| = \sum_k |\varphi_h(\Omega_{h,k})| = \sum_k \max(|\beta_{h,k}|, \alpha_{h,k}) \leqslant \sum_k \alpha_{h,k} + \sum_k |\beta_{h,k}| \to 0.$$

Наконец, $P_h^3 \to 0$ по абсолютной непрерывности интеграла, и утверждение доказано.

Осталось показать, что $J_2(u_h) \to J_2(u)$.

$$J_1(u_h) = \int\limits_{[0,1]\setminus\varphi_h(A_h)} F\big(u_h(x), a(x, u_h(x))|u_h'(x)|\big)\,dx \\ + \int\limits_{[0,1]\cap\varphi_h(A_h)} F\big(u_h(x), a(x, u_h(x))|u_h'(x)|\big)\,dx =: \hat{P}_h^1 + \hat{P}_h^2.$$

Поскольку $u \in W_1^1(0,1)$, имеем $u \in L_\infty([0,1])$. Обозначим $\|u\|_\infty = r$, тогда $\|u_h\|_\infty < 2r$ при достаточно больших h. Кроме того, $|u_h'| \leqslant 1$ почти всюду в $\varphi_h(A_h)$. Тогда $\hat{P}_h^2 \leqslant M_F|\varphi_h(A_h)| \to 0$, где

$$M_F = \max_{[-2r,2r]\times[-M_a,M_a]} F; \quad M_a = \max_{[0,1]\times[-2r,2r]} a.$$

Далее,

$$\hat{P}_h^1 = \int\limits_{[0,1]\setminus\varphi_h(A_h)} F\big(u(\varphi_h^{-1}(x)), a(x, u(\varphi_h^{-1}(x))|u'(\varphi_h^{-1}(x))(\varphi_h^{-1})'|)\big)\,dx \\ = \int\limits_{\varphi_h^{-1}([0,1])\setminus A_h} F\big(u(z), a(\varphi_h(z), u(z))|u'(z)|\big)\,dz \\ = \int\limits_{[0,1]} F\big(u(z), a(\varphi_h(z), u(z))|u'(z)|\big)\chi_{\varphi_h^{-1}([0,1])\setminus A_h}\,dz.$$

Последнее равенство, вообще говоря, не имеет смысла, так как $\varphi_h(z)$ может принимать значения вне $[0,1]$. Определим $a(z,u) = a(1,u)$ при $z > 1$, теперь выражение корректно. Заметим, что $\chi_{\varphi_h^{-1}([0,1])\setminus A_h}$ возрастают, так как множества $\varphi_h^{-1}([0,1])$ возрастают и A_h убывают, то есть $\varphi_{h_1}^{-1}([0,1]) \subset \varphi_{h_2}^{-1}([0,1])$ и $A_{h_1} \supset A_{h_2}$ при $h_1 \leqslant h_2$. На отрезке $[0,1]$ (и даже $\varphi_h([0,1])$) функция a убывает, а также $\varphi_h(z)$ убывает по h, значит $a(\varphi_h(z))$ будет расти по h. В таком случае можно применить теорему о монотонной сходимости и получить

$$\hat{P}_h^1 \to \int\limits_{[0,1]} F\big(u(z), a(z, u(z))|u'(z)|\big)\,dz.$$

$\square$

Замечание 2. *Очевидно, что те же рассуждения с закреплением функции u на левом конце можно провести на любом интервале $[x_0, x_1]$, где вес a убывает по x. То есть можно получить последовательность $\{u_h\}$, удовлетворяющую*

$$u_h(x_0) = u(x_0); \qquad u_h \to u \text{ в } W_1^1(x_0, x_1);$$

$$\int\limits_{x_0}^{x_1} F\big(u_h(x), a(x, u_h(x))|u_h'(x)|\big) \to \int\limits_{x_0}^{x_1} F\big(u(x), a(x, u(x))|u'(x)|\big).$$

Аналогично, если a возрастает по x, можно аппроксимировать u с закреплением на правом конце.

Следствие 2. *Пусть функция a непрерывна, чётна, убывает на $[0, 1]$ и удовлетворяет неравенству (1.3). Тогда для любой $u \in W_1^1(-1, 1)$ выполнено $J(a, u^*) \leqslant J(a, u)$.*

Доказательство. Неравенство немедленно следует из теоремы 3 и леммы 5. □

2.3 Свойства весовой функции

Здесь мы получаем несколько следствий из условия (1.3) на вес. Для удобства в пределах этого параграфа мы опускаем второй параметр веса: $a(x, v) = a(x)$; очевидно, что все полученные свойства буду выполняться для любых v.

Лемма 6. i) *Пусть функция a удовлетворяет условию (1.3). Если найдётся такое $x_0 \in [-1, 1]$, что $a(x_0) = 0$, то либо $a \equiv 0$ на $[x_0, 1]$, либо множество нулей функции a периодично на $[x_0, 1]$, причем период нацело делит $1 - x_0$.*

ii) *Пусть функция a удовлетворяет условию (1.3) и чётна. Если найдётся такое $x_0 \in [-1, 1]$, что $a(x_0) = 0$, то либо $a \equiv 0$, либо функция a периодична на отрезке $[-1, 1]$, причем период нацело делит $1 - x_0$.*

Доказательство. **i)** Прежде всего, заметим, что если для некоторых $s \leqslant t$ выполнено $a(s) = a(t) = 0$, то неравенство (1.3) влечёт

$$0 = a(s) + a(t) \geqslant a(1 - (t - s)) \geqslant 0,$$

то есть $a(1-(t-s))=0$. Подставив $s=t=x_0$, получаем $a(1)=0$.

Точно так же, если $s\leqslant 1-t$ и $a(s)=a(1-t)=0$, то $a(s+t)=0$.

Тем самым, множество нулей функции a симметрично на отрезке $[x_0,1]$, и если $a(s)=a(s+\Delta)=0$ $(\Delta\geqslant 0)$, то $a(s+k\Delta)=0$, для $s+k\Delta\leqslant 1$. Отсюда следует, что множество корней либо периодично на отрезке $[x_0,1]$, либо совпадает ним.

ii) Периодичность нулей функции a следует из её чётности и из первой части утверждения леммы. Обозначим расстояние между соседними нулями за Δ.

Тогда для $-1\leqslant x\leqslant 1-\Delta$ выполнено

$$a(x)=a(x)+a(1-\Delta)\geqslant a(x+\Delta).$$

С другой стороны, $-1\leqslant -(x+\Delta)\leqslant 1-\Delta$, и

$$a(x+\Delta)=a(-(x+\Delta))+a(1-\Delta)\geqslant a(-x)=a(x).$$

Тем самым, $a(x)=a(x+\Delta)$. □

Лемма 7. *Пусть функции a_1 и a_2 удовлетворяют неравенству (1.3). Тогда функции $\max(a_1(x),a_2(x))$ и $a_1(x)+a_2(x)$ тоже ему удовлетворяет.*

Доказательство. Положим $a(x)=\max(a_1(x),a_2(x))$. Тогда

$$\begin{aligned}a(1-t+s)=\max(a_1(1-t+s),a_2(1-t+s))&\leqslant\max(a_1(s)+a_1(t),a_2(s)+a_2(t))\\&\leqslant\max(a_1(s),a_2(s))+\max(a_1(t),a_2(t))=a(s)+a(t).\end{aligned}$$

Утверждение для второй функции очевидно. □

Лемма 8. *Пусть функция a удовлетворяет неравенству (1.3), $k\in\mathbb{N}$. Тогда кусочно линейная функция a_k, интерполирующая функцию a по узлам $(-1+\frac{2i}{k})$, $i=0,1,\dots,k$, тоже удовлетворяет неравенству (1.3).*

Доказательство. **1.** Пусть $s=-1+\frac{2i}{k}$, $t=-1+\frac{2j}{k}$. Тогда неравенство выполняется для a_k, потому что оно выполняется для a, а в этих точках они совпадают.

2. Пусть теперь $s=-1+\frac{2i}{k}$, и $t\in[-1+\frac{2j}{k},-1+\frac{2(j+1)}{k}]$.

Рассмотрим линейную функцию $h_1(t)=a_k(1-t+s)-a_k(t)-a_k(s)$. Из части 1 следует $h_1(-1+\frac{2j}{k})\leqslant 0$ и $h_1(-1+\frac{2(j+1)}{k})\leqslant 0$. Значит, поскольку h_1

линейна, $h_1(t) \leqslant 0$. Тем самым, неравенство выполняется для любого $s = -1+\frac{2i}{k}$ и $t \in [-1,1]$.

3. Пусть s и t удовлетворяют соотношению $1-t+s = \frac{2j}{k}$.

Рассмотрим функцию $h_2(y) = a_k(\frac{2j}{k}) - a_k(s+y) - a_k(t+y)$. Если взять y_0 такое, что $s+y_0$ — один из узлов, то $t+y_0$ — тоже узел. Следовательно $h_2(y_0) = a(\frac{2j}{k}) - a(s+y_0) - a(t+y_0) \leqslant 0$. Поскольку h_2 линейна между подобными y_0, получаем $h_2(y) \leqslant 0$ для всех допустимых y.

4. Наконец, для произвольного $t \in [-1,1]$ рассмотрим $h_3(s) = a_k(1-t+s) - a_k(t) - a_k(s)$. Заметим, что если s или $1-t+s$ являются узлами, то из частей 2 и 3 следует $h_3(s) \leqslant 0$. Поскольку h_3 линейна между такими s, имеем $h_3(s) \leqslant 0$ для всех допустимых s, что завершает доказательство. □

2.4 Доказательство неравенства (1.2) для произвольных весов

В этом параграфе мы избавимся от условия монотонности веса по x. Будем это делать в несколько этапов.

Для начала отметим, что все свойства функции a интересуют нас лишь в окрестности графиков функций u, $\overline{u}$. Более того, мы будем добиваться того, чтобы свойства веса нас не интересовали в окрестности графика $\overline{u}$.

Мы вводим несколько ограничений на весовую функцию. Каждое следующее, будучи добавленным к предыдущим, задаёт более узкий класс весов.

$(H1)$ $a(x,v)$ чётна по x и удовлетворяет неравенству (1.3), а также $J(a,u) < \infty$.

$(H2)$ На множестве $v \in [\min u(x), \max u(x)]$, для которых $a(\cdot,v) \not\equiv 0$, количество нулей функций $a(\cdot,v)$ ограничено константой, не зависящей от v.

$(H3)$ Если $a(x_0,u(x_0)) = 0$ для некоторого x_0, то $a(\cdot,u(x_0)) \equiv 0$. Кроме того, выполнено $\lim\limits_{k\to\infty} D_k(a,U(a)) = 0$, где

$$U(a) := \{v \in [\min u(x), \max u(x)] : a(\cdot,v) \not\equiv 0\},$$

$$D_k(a,U) := \sup_{v\in U} \frac{\max\limits_{|x_1-x_2|\leqslant\frac{2}{k}} |a(x_1,v)-a(x_2,v)|}{\min\limits_{\mathrm{dist}(x,u^{-1}(v))\leqslant\frac{2}{k}} a(x,v)}. \tag{2.4}$$

$(H4)$ Найдётся такое чётное k, что $a(\cdot, v)$ линейны для каждого v на участках $[-1+\frac{2i}{k}, -1+\frac{2(i+1)}{k}]$.

$(H5)$ Множество $v \in \mathbb{R}$, для которых $a(\cdot, v)$ имеет участки постоянства, отличается от множества $v \in \mathbb{R}$ таких, что $a(\cdot, v) \equiv 0$, лишь на множество меры 0.

$(H6)$ Отрезок $[-1, 1]$ можно разбить на конечное число промежутков, на каждом из которых в v-окрестности графика $u(x)$ вес a не меняет монотонности по x.

$(H7)$ Пусть $x_1 < x_2 < x_3$, и на $[x_1, x_2]$ вес $a(\cdot, v)$ в v-окрестности графика функции u убывает, а на $[x_2, x_3]$ возрастает. Тогда в некоторой окрестности точки $u(x_2)$ имеем $a(\cdot, v) \equiv 0$.

Вес, удовлетворяющий условию $(H1)$, мы будем называть допустимым для заданной функции $u(x)$.

Теперь мы можем сформулировать основное утверждение главы.

Теорема 6. *Пусть $F \in \mathfrak{F}$, функция $u \in W_1^1(-1, 1)$ неотрицательна, и весовая функция $a : [-1, 1] \times \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$ непрерывна и допустима для u. Тогда справедливо неравенство* (1.2).

Мы докажем неравенство (1.2) при условиях $(H1) - (H7)$, а затем будем постепенно избавляться от них.

Для доказательства нам потребуются следующие факты.

Предложение 2. *[1, теорема 6.19] Для любой $u \in W_1^1(-1, 1)$ и произвольного множества $A \subset \mathbb{R}$ нулевой меры выполнено $u'(x) = 0$ для почти всех $x \in u^{-1}(A)$.*

Лемма 9. *Пусть $u \in W_1^1(-1, 1)$ неотрицательна. И пусть замкнутое множество $W \subset \mathbb{R}_+$ таково, что множество всех $v \in W$, для которых $a(\cdot, v) \not\equiv 0$, имеет меру ноль. Тогда найдётся возрастающая последовательность весов $\mathfrak{b}_\ell$ такая, что*

1) $\mathfrak{b}_\ell(\cdot, v) \rightrightarrows a(\cdot, v)$ для почти всех v;

2) $\mathfrak{b}_\ell(\cdot, v) \equiv 0$ для каждого v в некоторой (зависящей от ℓ) окрестности W;

3) $J(\mathfrak{b}_\ell, u) \to J(a, u)$ и $J(\mathfrak{b}_\ell, \overline{u}) \to J(a, \overline{u})$.

Замечание 3. *Если a допустимы для u, то и $\mathfrak{b}_\ell$ тоже.*

Доказательство. Возьмём $\rho(d) := \min(1, \max(0, d))$,

$$\mathfrak{b}_\ell(x, v) := a(x, v) \cdot \rho(\ell \operatorname{dist}(v, W) - 1) \leqslant a(x, v).$$

Вес $\mathfrak{b}_\ell$ равен нулю в $\left(\frac{1}{\ell}\right)$-окрестности W. Кроме того, $\mathfrak{b}_\ell \equiv a$ вне $\left(\frac{2}{\ell}\right)$-окрестности W, а также $\mathfrak{b}_\ell(x, v)$ возрастает по ℓ. Тем самым тем самым или это ещё один очевидный факт?, $\mathfrak{b}_\ell(\cdot, v) \rightrightarrows a(\cdot, v)$ для почти всех v. По теореме о монотонной сходимости имеем $J(u^{-1}(\mathbb{R}_+ \setminus W), \mathfrak{b}_\ell, u) \nearrow J(u^{-1}(\mathbb{R}_+ \setminus W), a, u)$.

Разобьем множество W на два: $W_1 := \{v \in W : a(\cdot, v) \equiv 0\}$ и $W_2 = W \setminus W_1$. Тогда

$$J(u^{-1}(W_1), \mathfrak{b}_\ell, u) = J(u^{-1}(W_1), a, u),$$
$$J(u^{-1}(W_2), \mathfrak{b}_\ell, u) = \int\limits_{x \in u^{-1}(W_2)} F\big(u(x), \mathfrak{b}_\ell(x, u(x))|u'(x)|\big)\, dx.$$

При этом, по предложению 2, почти всюду на $u^{-1}(W_2)$ выполнено $u'(x) = 0$. То есть

$$J(u^{-1}(W_2), \mathfrak{b}_\ell, u) = \int\limits_{x \in u^{-1}(W_2)} F\big(u(x), 0\big)\, dx = 0.$$

Аналогично $J(u^{-1}(W_2), a, u) = 0$, откуда $J(\mathfrak{b}_\ell, u) \to J(a, u)$. Вторая часть пункта *3)* доказывается так же. $\square$

Перейдем к доказательству теоремы 6.

Шаг 1. *Пусть $u \in W_1^1(-1, 1)$, и вес a удовлетворяет условиям $(H1)$ – $(H7)$. Тогда выполняется неравенство (1.2).*

Разобьем отрезок $[-1, 1]$ на отрезки $\Delta_k = [\hat{x}_k, \hat{x}_{k+1}]$, состоящие из двух частей. В левой части каждого отрезка вес a будет возрастать по x в окрестности графика $u(x)$, в правой же будет убывать. Согласно замечанию 2 на каждом таком отрезке можно повторить схему из леммы 5, приближая функцию u липшицевыми функциями u_n. Это даёт $J(\Delta_k, a, u_n) \to J(\Delta_k, a, u)$.

Однако при такой аппроксимации функции u_n могут иметь разрывы в точках $\hat{x}_k$.

Заметим теперь, что согласно условию $(H7)$ можно выбрать точки $\hat{x}_k$ так, что $a \equiv 0$ в (x, v)-окрестности точек $(\hat{x}_k, u(\hat{x}_k))$.

Изменим теперь функции u_n в окрестности точек $\hat{x}_k$ на линейные, сделав u_n непрерывными на $[-1, 1]$. В силу вышесказанного, интегралов $J(\Delta_k, a, u_n)$ это не изменит, и мы получаем $J(a, u_n) \to J(a, u)$ и $u_n \to u$ в $W_1^1(-1, 1)$.

По теореме 3 получаем (1.2).

Шаг 2. *Пусть вес a удовлетворяет условиям* $(H1)-(H6)$*. Тогда выполняется неравенство (1.2).*

Применим лемму 9. В качестве множества W возьмем множество всех v, при которых происходит переход графика $u(x)$ из промежутка, в котором вес убывает по x, в промежуток, в котором вес возрастает. Очевидно, получившиеся функции $\mathfrak{b}_\ell$ удовлетворяют $(H1)-(H7)$. Из шага 1 имеем $J(\mathfrak{b}_\ell, \overline{u}) \leqslant J(\mathfrak{b}_\ell, u)$. Переходя к пределу, получаем требуемое неравенство (1.2).

Шаг 3. *Пусть вес a удовлетворяет условиям* $(H1)-(H5)$*. Тогда выполняется неравенство (1.2).*

Рассмотрим абсциссы точек излома функции a и ординаты, для которых a имеет участки постоянства. Эти абсциссы и ординаты определяют деление прямоугольника $[-1,1]\times[\min u(x), \max u(x)]$ на более мелкие, внутри которых вес a не меняет монотонности. Однако, количество мелких прямоугольников может оказаться бесконечным. Кроме того, если функция пересекает горизонтальную границу прямоугольника, монотонность в v-окрестности точки пересечения может меняться.

Возьмем множество W точек v, для которых вес a имеет участки постоянства по x. В соответствии с $(H5)$ множество $v \in W$, для которых $a(\cdot, v) \not\equiv 0$, имеет нулевую меру.

Применив лемму 9, построим последовательность весов $\mathfrak{b}_\ell$. У каждого из них количество участков монотонности конечно, поскольку между соседними по v участками строгой монотонности присутствует полоса нулевых значений веса шириной по крайней мере $\frac{2}{k}$.

Тем самым, вес $\mathfrak{b}_\ell$ может менять монотонность вдоль графика u либо в точках $x = -1 + \frac{2i}{k}$, либо в тех местах, где график пересекает полосу нулевых значений веса. Ясно, что таких пересечений может быть лишь конечное число, поскольку $\int |u'|$ увеличивается как минимум на $\frac{2}{\ell}$ во время такого перехода, а $u' \in L_1(-1,1)$.

Мы получили, что $\mathfrak{b}_\ell$ удовлетворяют $(H1)-(H6)$. Из шага 2 имеем $J(\mathfrak{b}_\ell, \overline{u}) \leqslant J(\mathfrak{b}_\ell, u)$. Переходя к пределу, получаем (1.2).

Шаг 4. *Пусть вес a удовлетворяет условиям* $(H1)-(H3)$*. Тогда выполняется неравенство (1.2).*

Предположим, что функция a удовлетворяет $(H1)-(H3)$, в частности $J(a,u) < \infty$.

Зафиксируем произвольное четное k. По точкам $a(-1+\frac{2i}{k}, v)$ для каждого v построим кусочно линейную по x интерполяцию. Получившаяся функция $a_k(x,v)$ непрерывна, четна по x и по лемме 8 удовлетворяет неравенству (1.3). Кроме того, $a_k \to a$ при $k \to \infty$, причем сходимость равномерная на компактах. Однако неравенство $a_k(x,u(x)) \leqslant a(x,u(x))$ не обязано выполняться, и потому веса a_k могут не быть допустимыми для u.

Возьмем $\mathfrak{c}_k := (1 - D_k(a_k, U(a_k)))a_k$, где D_k определены в (2.4). Числа $D_k(a_k, U(a_k))$ положительны и стремятся к нулю, поэтому $\mathfrak{c}_k \to a$ при $k \to \infty$. Покажем, что $\mathfrak{c}_k(x,u(x)) \leqslant a(x,u(x))$. Возьмем некоторое число $x \in [-1+\frac{2i}{k}, -1+\frac{2(i+1)}{k}] =: [x_i, x_{i+1}]$. Тогда $\mathfrak{c}_k(x,u(x)) \leqslant \max(\mathfrak{c}_k(x_i,u(x)), \mathfrak{c}_k(x_{i+1},u(x)))$, поскольку $\mathfrak{c}_k$ кусочно линейны по x. Далее,

$$\mathfrak{c}_k(x_i,u(x)) = (1 - D_k(a_k, U(a_k))) \cdot a(x_i,u(x)) \\ \leqslant a(x_i,u(x)) - \frac{a(x_i,u(x)) - a(x,u(x))}{a(x_i,u(x))} \cdot a(x_i,u(x)) = a(x,u(x)).$$

Аналогично, $\mathfrak{c}_k(x_{i+1},u(x)) \leqslant a(x,u(x))$. Тем самым, $\mathfrak{c}_k(x,u(x)) \leqslant a(x,u(x))$ для любого x, и $\mathfrak{c}_k$ являются допустимыми для u. То есть функции $\mathfrak{c}_k$ удовлетворяют $(H1)-(H4)$.

При заданном $k \in \mathbb{N}$, будем приближать функцию $\mathfrak{c}_k =: \mathfrak{c}$ весами, удовлетворяющими $(H1)-(H5)$. Рассмотрим вспомогательную функцию $\Lambda(x) = 1 - |x|$, удовлетворяющую условию (1.3).

Возьмем

$$t(v) := D_k(\mathfrak{c}, U(\mathfrak{c})) \cdot \max\{\tau \geqslant 0 : \forall x \in u^{-1}(v) \quad \tau\Lambda(x) \leqslant \mathfrak{c}(x,u(x))\}.$$

Функция t зависит от k, но мы будем опускать это в записи.

Ясно, что максимальное τ равно нулю только если $c(\cdot, v) \equiv 0$, иначе нарушается условие $(H3)$. Функция t может не быть непрерывной. Однако, несложно видеть, что она полунепрерывна снизу. Возьмем теперь

$$\tilde{t}(v) := \inf_{w \in u([-1,1])} \{t(w) + |v-w|\}.$$

Очевидно, что $\tilde{t} \leqslant t$, и множества нулей функций t и $\tilde{t}$ совпадают.

Покажем, что $\tilde{t}$ непрерывна (и даже липшицева). Зафиксируем некоторое v_1. Тогда найдутся сколь угодно малое $\varepsilon > 0$ и $w_1 \in u([-1,1])$, удовлетворяющие

$\tilde{t}(v_1) = t(w_1) + |v_1 - w_1| - \varepsilon$. Для любого v_2 имеем $\tilde{t}(v_2) \leqslant t(w_1) + |v_2 - w_1|$. И, тем самым, $\tilde{t}(v_2) - \tilde{t}(v_1) \leqslant |v_1 - v_2| + \varepsilon$. В силу произвольности v_1, v_2 и ε, получаем, что $\tilde{t}$ непрерывна.

При $\alpha \in [0, 1]$ функция $\mathfrak{d}_\alpha(x, v) := \mathfrak{c}(x, v) + \alpha\Lambda(x)\tilde{t}(v)$ чётна по x, удовлетворяет неравенству (1.3) согласно лемме 7, и не превосходит $a(x, v)$ по построению функции $\tilde{t}$. Таким образом, $\mathfrak{d}_\alpha$ — допустимый вес. И теперь очевидно, что $\mathfrak{d}_\alpha$ удовлетворяет условиям $(H1) - (H4)$.

Покажем, что для почти всех $\alpha \in [0, 1]$ выполнено следующее условие. $\mathfrak{d}_\alpha$ не имеет горизонтальных участков, за исключением v, для которых $\mathfrak{d}_\alpha(\cdot, v) \equiv 0$, и множества меры ноль. Введём обозначение для множества α, «плохих» на участке $[x_i, x_{i+1}]$:

$$A_i := \Big\{\alpha \in [0, 1] : \\ \operatorname{meas}\{v \in [\min u, \max u] : \frac{\mathfrak{c}(x_{i+1}, v) - \mathfrak{c}(x_i, v))}{\frac{2}{k}} + \alpha\chi_i\tilde{t}(v) = 0\} > 0\Big\},$$

где $\chi_i = 1$ если $[x_i, x_{i+1}] \subset [0, 1]$, и $\chi_i = -1$, если $[x_i, x_{i+1}] \subset [-1, 0]$.

Рассмотрим функцию

$$\begin{aligned} h_i(v) =& \frac{\mathfrak{c}(x_{i+1}, v) - \mathfrak{c}(x_i, v)}{\tilde{t}(v)} && \text{при } \tilde{t}(v) \neq 0 \\ h_i(v) =& 0 && \text{при } \tilde{t}(v) = 0. \end{aligned}$$

Тогда $\operatorname{card}(A_i) = \operatorname{card}(\{\alpha \in [0, 1] : \operatorname{meas}\{v \in [\min u, \max u] : h_i(v) \pm \frac{2}{k}\alpha = 0\} > 0\})$. Значит $\operatorname{card}(A_i) \leqslant \aleph_0$, а также $\operatorname{card}(\cup_i A_i) \leqslant \aleph_0$. Тем самым, найдётся последовательность весов $\mathfrak{d}_{\alpha_j} \searrow \mathfrak{c}$, удовлетворяющих $(H1) - (H5)$.

Из шага 3 имеем $J(\mathfrak{d}_{\alpha_j}, \overline{u}) \leqslant J(\mathfrak{d}_{\alpha_j}, u)$. Переходя к пределу, получаем $J(\mathfrak{c}, \overline{u}) \leqslant J(\mathfrak{c}, u)$.

Далее, при $x \in [-1, 1]$ имеем

$$F\big(u(x), \mathfrak{c}_k(x, u(x))|u'(x)|\big) \to F\big(u(x), a(x, u(x))|u'(x)|\big) \tag{2.5}$$

при $k \to \infty$. Кроме того, $F\big(u(x), a(x, u(x))|u'(x)|\big)$ является суммируемой мажорантой для левой части соотношения (2.5). По теореме Лебега о мажорируемой сходимости, получаем $J(\mathfrak{c}_k, u) \to J(a, u)$. Поскольку $J(\mathfrak{c}_k, \overline{u}) \leqslant J(\mathfrak{c}_k, u)$, теорема 3 даёт неравенство (1.2).

Шаг 5. *Пусть вес a удовлетворяет лишь условию $(H1)$. Тогда выполняется неравенство (1.2).*

Будем строить приближение для a весами, удовлетворяющими $(H1)-(H2)$. Воспользуемся леммой 9 с множеством $W=\{v\in\mathbb{R}_+ : a(\cdot,v)\equiv 0\}$. Введём обозначение

$$Z_a(v) := \{x\in[-1,1] : a(x,v)=0\}.$$

Заметим, что множества $Z_{\mathfrak{b}_\ell}(v)$ совпадают либо с $Z_a(v)$, либо с $[-1,1]$.

Покажем, что $\mathfrak{b}_\ell$ удовлетворяет $(H2)$. Действительно, в противном случае найдётся последовательность v_m, для которой $m<\mathrm{card}(Z_{\mathfrak{b}_\ell})(v_m)<\infty$. После перехода к подпоследовательности имеем $v_m\to v_0$. Из части 2 леммы 6 следует, что множества $Z_{\mathfrak{b}_\ell}(v_m)=Z_a(v_m)$ периодические с периодом не более $\frac{2}{m-1}$. Возьмем некоторый $x\in[-1,1]$. Для каждого m найдётся x_m такой, что $|x-x_m|\leqslant\frac{1}{m-1}$ и $a(x_m,v_m)=0$. Но $a(x_m,v_m)\to a(x,v_0)$. Тем самым, $a(x,v_0)=0$.

Отсюда $Z_a(v_0)=[-1,1]$. Но это означает, что для любого v, для которого $|v-v_0|\leqslant\frac{1}{\ell}$, выполнено $\mathfrak{b}_\ell(\cdot,v)\equiv 0$, что противоречит $\mathrm{card}(Z_{\mathfrak{b}_\ell})(v_m)<\infty$.

Зафиксируем теперь $\ell\in\mathbb{N}$, обозначим $\mathfrak{b}_\ell =: \mathfrak{b}$ и приблизим функцию $\mathfrak{b}$ весами, удовлетворяющими $(H1)-(H3)$. Из $(H2)$ следует, что найдётся множество $T\subset[-1,1]$ состоящее из конечного числа элементов, такое, что если $x\notin T$ и $\mathfrak{b}(x,v)=0$ для некоторого v, то $\mathfrak{b}(\cdot,v)\equiv 0$.

Вновь воспользуемся леммой 9 с множеством $W=u(T)\cup\overline{u}(T)$. Полученные при помощи леммы веса $\mathfrak{c}_j$ удовлетворяют $(H1)-(H2)$, поскольку отличаются от $\mathfrak{b}$ лишь домножением на непрерывный множитель, меньший единицы и зависящий только от v.

Из непрерывности u следует, что для достаточно больших k найдутся $j=j(k)$ такие, что

$$u\Big(\Big\{x\in[-1,1] : dist(x,T)\leqslant\frac{4}{k}\Big\}\Big)\subset\Big\{v\in\mathbb{R}_+ : dist(v,u(T))\leqslant\frac{1}{2j}\Big\},$$

и $j(k)\to\infty$ при $k\to\infty$. Отсюда $\min\limits_{dist(x,u^{-1}(v))\leqslant\frac{2}{k}} c_j(x,v)>0$ для всех $v\in U(c_j)$. Более того, при $v\in U(c_j)$

$$\frac{\max\limits_{|x_i-x_{i+1}|\leqslant\frac{2}{k}}|\mathfrak{c}_j(x_i,v)-\mathfrak{c}_j(x_{i+1},v)|}{\min\limits_{\mathrm{dist}(x,u^{-1}(v))\leqslant\frac{2}{k}}\mathfrak{c}_j(x,v)}=\frac{\max\limits_{|x_i-x_{i+1}|\leqslant\frac{2}{k}}|\mathfrak{b}(x_i,v)-\mathfrak{b}(x_{i+1},v)|}{\min\limits_{\mathrm{dist}(x,u^{-1}(v))\leqslant\frac{2}{k}}\mathfrak{b}(x,v)}.$$

При этом, знаменатель второй дроби при $v\in U(\mathfrak{c}_j)$ отделен от нуля. Тем самым, $D_k(\mathfrak{c}_j,U(\mathfrak{c}_j))$ ограничена.

Поскольку D_k не меняется при домножении первого аргумента на коэффициент, не зависящий от x, и $U(\mathfrak{c}_j) \nearrow U(\mathfrak{b})$, имеем

$$D_k(\mathfrak{c}_j, U(\mathfrak{c}_j)) = D_k(\mathfrak{b}, U(\mathfrak{c}_j)) \leqslant D_k(\mathfrak{b}, U(\mathfrak{b})) \to 0$$

при $k \to \infty$.

Таким образом, веса $\mathfrak{c}_{j(k)}$ удовлетворяют $(H1) - (H3)$. Из шага 4 имеем $J(\mathfrak{c}_{j(k)}, \overline{u}) \leqslant J(\mathfrak{c}_{j(k)}, u)$. Переходя к пределу, получаем $J(\mathfrak{b}_\ell, \overline{u}) \leqslant J(\mathfrak{b}_\ell, u)$, а затем и неравенство (1.2).

Тем самым, теорема 6 доказана. □

2.5 Доказательство неравенства (1.2) для функций, закреплённых на левом конце

Рассмотрим теперь случай, когда функция u удовлетворяет дополнительному условию $u(-1) = 0$.

Теорема 7. *Пусть $F \in \mathfrak{F}$, функция $u \in W_1^1(-1,1)$ неотрицательна, $u(-1) = 0$, весовая функция $a : [-1,1] \times \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$ непрерывна и удовлетворяет неравенству (1.3). Тогда справедливо неравенство (1.2).*

Доказательство. Мы следуем схеме доказательства теоремы 6, но вместо $(H1)$ и $(H7)$ накладываем следующие условия на вес:

$(H1')$ $a(x,v)$ удовлетворяет неравенству (1.3), а также $J(a,u) < \infty$.

$(H7')$ Выполнено условие $(H7)$, и $a(\cdot, v) \equiv 0$ в некоторой v-окрестности нуля.

Шаг 1. *Пусть $u \in W_1^1(-1,1)$, выполнено $u(-1) = 0$, и вес a удовлетворяет условиям $(H1'), (H2) - (H6), (H7')$. Тогда выполняется неравенство (1.2) holds.*

Для доказательства будем приближать функцию u так же, как и в первом шаге доказательства теоремы 6, с заменой u в некоторой окрестности точки $x = -1$ на линейную так, чтобы $u_n(-1) = 0$.

Шаг 2. *Пусть вес a удовлетворяет условиям $(H1'), (H2) - (H6)$. Тогда выполняется неравенство (1.2).*

Для доказательства добавим в множество W из второго шага доказательства теоремы 6 точку 0 и повторим рассуждение.

Дальнейшие шаги проходят без изменений. $\square$

2.6 Условия, необходимые для выполнения неравенства (2.1)

Нам потребуется вспомогательная

Лемма 10. *Если для функции $a \in C([-1,1] \times \mathbb{R}_+)$ выполнено соотношение*

$$\forall s, t \in [-1,1], \forall v \in \mathbb{R}_+ \quad a(s,v) + a(t,v) \geqslant a\Big(\frac{s-t}{2}, v\Big) + a\Big(\frac{t-s}{2}, v\Big), \qquad (2.6)$$

то она чётна и выпукла по первому аргументу.

Доказательство. Предположим для начала, что $a(\cdot, v) \in C^1([-1,1])$ при каждом v. Зафиксируем произвольные $s \in [-1,1]$ и $v \in \mathbb{R}_+$ и рассмотрим функцию

$$b(x) := a(s,v) + a(x,v) - a(\frac{s-x}{2}, v) - a(\frac{x-s}{2}, v) \geqslant 0.$$

$x = -s$ является точкой минимума функции b, поскольку $b(-s) = 0$. Значит,

$$b'(-s) = a'_x(-s,v) + \frac{1}{2}a'_x(s,v) - \frac{1}{2}a'_x(-s,v) = 0,$$

то есть $a'_x(s,v) = -a'_x(-s,v)$. Тем самым, функция $a(\cdot, v)$ четна.

Рассмотрим теперь случай произвольной непрерывной a.

Продолжим $a(x,v) := a(-1,v)$ при $x < -1$ и $a(x,v) := a(1,v)$ при $x > 1$. Рассмотрим усреднение функции:

$$a_\rho(x,v) = \int_{\mathbb{R}} \omega_\rho(z) a(x-z,v)dz = \int_{\mathbb{R}} \omega_\rho(z) a(x+z,v)dz,$$

где $\omega_\rho(z)$ — усредняющее ядро с радиусом ρ. Тогда для $-1+\rho \leqslant s,t \leqslant 1-\rho$

$$a_\rho(s,v) + a_\rho(t,v) - a_\rho(\frac{s-t}{2}, v) - a_\rho(\frac{t-s}{2}, v) =$$
$$\int_{\mathbb{R}} \omega_\rho(z)\big(a(s-z,v) + a(t+z,v) - a(\frac{s-t}{2} - z, v) - a(\frac{t-s}{2} + z, v)\big)dz \geqslant 0.$$

Значит функция $a_\rho(\cdot, v)$ чётна на $[-1+\rho, 1-\rho]$. Переходя к пределу при $\rho \to 0$, получаем, что функция $a(\cdot, v)$ чётна.

Наконец, для любых s, t и v имеем

$$a(s,v) + a(t,v) = a(s,v) + a(-t,v) \geqslant 2a\Big(\frac{s+t}{2}, v\Big).$$

$\square$

Теорема 8. *Если неравенство (2.1) выполняется для произвольной $F \in \mathfrak{F}$ и произвольной кусочно линейной u, то вес a — чётная и выпуклая по первому аргументу функция.*

Доказательство. Докажем, что в условиях теоремы выполнено неравенство (2.6). Если это так, то ввиду леммы 10 утверждение теоремы будет следовать.

Предположим, что неравенство (2.6) не выполнено. Тогда найдутся $-1 \leqslant s < t \leqslant 1$, $\varepsilon, \delta > 0$ $(2\varepsilon < t - s)$ и $v_0 \in \mathbb{R}_+$, такие, что для любого $0 \leqslant z \leqslant \varepsilon$ и любого $v_0 \leqslant v \leqslant v_0 + \varepsilon$ выполнено

$$a(s+z, v+z) + a(t-z, v+z) + 2\delta < a\Big(\frac{s-t}{2} + z, v+z\Big) + a\Big(\frac{t-s}{2} - z, v+z\Big). \quad (2.7)$$

Рассмотрим функцию u_2, введенную в (1.4). Тогда

$$\begin{cases} u_2^*(x) = v_0, & x \in [-1, \frac{s-t}{2}] \cup [\frac{t-s}{2}, 1] \\ u_2^*(x) = v_0 + x - \frac{s-t}{2}, & x \in [\frac{s-t}{2}, \frac{s-t}{2} + \varepsilon] \\ u_2^*(x) = v_0 + \varepsilon, & x \in [\frac{s-t}{2} + \varepsilon, \frac{t-s}{2} - \varepsilon] \\ u_2^*(x) = v_0 + \frac{t-s}{2} - x, & x \in [\frac{t-s}{2} - \varepsilon, \frac{t-s}{2}]. \end{cases}$$

Отсюда получаем

$$\begin{aligned} 0 &\leqslant J(a, u_2) - J(a, \overline{u_2}) \\ &= \int_0^\varepsilon F\Big(u_2(s+z), \frac{a(s+z, u_2(s+z))}{\varepsilon}\Big) dz + \int_0^\varepsilon F\Big(u_2(t-z), \frac{a(t-z, u_2(t-z))}{\varepsilon}\Big) dz \\ &\quad - \int_0^\varepsilon F\Big(u_2^*(\frac{s-t}{2} + z), \frac{a(\frac{s-t}{2} + z, u_2^*(\frac{s-t}{2} + z))}{\varepsilon}\Big) dz \\ &\quad - \int_0^\varepsilon F\Big(u_2^*(\frac{t-s}{2} - z), \frac{a(\frac{t-s}{2} - z, u_2^*(\frac{t-s}{2} - z))}{\varepsilon}\Big) dz =: \Delta J. \end{aligned}$$

Возьмем $F(v,p) := f(p) := p + \gamma p^2$, где $\gamma > 0$. Тогда

$$\begin{aligned} \Delta J = \int_0^\varepsilon \Big(f\Big(\frac{a(s+z, v_0+z)}{\varepsilon}\Big) + f\Big(\frac{a(t-z, v_0+z)}{\varepsilon}\Big) \\ - f\Big(\frac{a(\frac{s-t}{2} + z, v_0+z)}{\varepsilon}\Big) - f\Big(\frac{a(\frac{t-s}{2} - z, v_0+z)}{\varepsilon}\Big)\Big) dz. \end{aligned}$$

Обозначим

$$A = \max_{(x,v)} a(x,v), \qquad (x,v) \in [-1,1] \times u_2([-1,1]).$$

Если взять $\gamma := \frac{\delta/\varepsilon}{(A/\varepsilon)^2} > 0$, то для $p \leqslant \frac{A}{\varepsilon}$ имеем $p \leqslant f(p) \leqslant p + \frac{\delta}{\varepsilon}$, и

$$\Delta J \leqslant \frac{1}{\varepsilon} \int_0^\varepsilon \Big(a(s+z, v_0+z) + a(t-z, v_0+z) + 2\delta \\ - a(\frac{s-t}{2} + z, v_0+z) - a(\frac{t-s}{2} - z, v_0+z) \Big) dz < 0$$

(последнее неравенство следует из (2.7)).

Тем самым, мы пришли к противоречию, что завершает доказательство.

□

2.7 Доказательство неравенства (2.1)

Теорема 9. *Пусть $F \in \mathfrak{F}$, функция $u \in W_1^1(-1,1)$ неотрицательна, и непрерывная весовая функция $a : [-1,1] \times \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$ чётна и выпукла по первому аргументу. Тогда справедливо неравенство* (2.1).

Доказательство. Для липшицевых функций u утверждение теоремы доказано в [2]. Таким образом, необходимо лишь перейти к W_1^1-функциям.

Структура выпуклого по x веса гораздо проще структуры веса, который мы рассматривали для случая монотонной перестановки. Выпуклый вес убывает при $x < 0$ и возрастает при $x > 0$ независимо от v. Тем самым, мы сразу входим в условия $(H6)$ из теоремы 6. Чтобы войти в условия $(H7)$, применим лемму 9 с множеством $W = \{u(0)\}$. Это дает нам возможность сразу воспользоваться шагом 1 доказательства, получив неравенство (2.1) в общем виде. Заметим, что шаг 1 использует лишь условия $(H1)$, $(H6)$, $(H7)$, так что нет нужды проверять остальные. □

Глава 3. Монотонность функционалов с переменным показателем суммирования

3.1 Обозначения

В этой главе мы рассматриваем обобщения неравенства (2.1) на случай функционалов с переменным показателем суммирования в интегранте:

$$\mathcal{J}(u) = \int\limits_{-1}^{1} |u'(x)|^{p(x)} dx, \qquad \mathcal{I}(u) = \int\limits_{-1}^{1} (1 + |u'(x)|^2)^{\frac{p(x)}{2}} dx.$$

Здесь $p(x) \geqslant 1$ — непрерывная функция на отрезке $[-1, 1]$, $u \in \overset{o}{W}{}_1^1 (-1, 1)$, $u \geqslant 0$.

Мы используем обозначение $f_\pm = \max(\pm f, 0)$.

3.2 Необходимые условия

Теорема 10. *Пусть* $\mathcal{J}(u^*) \leqslant \mathcal{J}(u)$ *выполнено для любой кусочно линейной функции* $u \geqslant 0$. *Тогда* $p(x) \equiv const$.

Доказательство. Рассмотрим $x_0 \in (-1, 1)$. Для любых $\alpha > 0$ и $\varepsilon > 0$, удовлетворяющих $[x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon] \subset [-1, 1]$ определим

$$u_{\alpha,\varepsilon}(x) = \alpha(\varepsilon - |x - x_0|)_+.$$

Тогда $u^*_{\alpha,\varepsilon}(x) = \alpha(\varepsilon - |x|)_+$, и

$$\mathcal{J}(u_{\alpha,\varepsilon}) = \int\limits_{x_0-\varepsilon}^{x_0+\varepsilon} \alpha^{p(x)} dx, \qquad \mathcal{J}(u^*_{\alpha,\varepsilon}) = \int\limits_{-\varepsilon}^{\varepsilon} \alpha^{p(x)} dx.$$

Возьмём неравенство

$$\frac{\mathcal{J}(u^*_{\alpha,\varepsilon})}{2\varepsilon} \leqslant \frac{\mathcal{J}(u_{\alpha,\varepsilon})}{2\varepsilon},$$

и перейдём к пределу при $\varepsilon \to 0$. Поскольку p непрерывна, мы получим $\alpha^{p(0)} \leqslant \alpha^{p(x_0)}$. При $\alpha > 1$ и $\alpha < 1$ это даёт $p(0) \leqslant p(x_0)$ и $p(0) \geqslant p(x_0)$ соответственно. $\square$

Теорема 11. *Если неравенство $\mathcal{I}(u^*) \leqslant \mathcal{I}(u)$ выполняется для всех кусочно линейных $u \geqslant 0$, то p чётна и выпукла. Более того, выпукла следующая функция:*

$$K(s,x) = s(1+s^{-2})^{\frac{p(x)}{2}}, \qquad s > 0,\ x \in [-1,1].$$

Доказательство. Возьмём две точки $-1 < x_1 < x_2 < 1$ и рассмотрим финитную кусочно линейную функцию с ненулевой производной лишь в окрестностях x_1 и x_2. А именно, для произвольных $s, t > 0$ и достаточно малого $\varepsilon > 0$

$$\begin{cases} u_\varepsilon(x) = 0, & x \in [-1, x_1 - s\varepsilon] \cup [x_2 + s\varepsilon, 1] \\ u_\varepsilon(x) = \varepsilon + \dfrac{x - x_1}{s}, & x \in [x_1 - s\varepsilon, x_1 + s\varepsilon] \\ u_\varepsilon(x) = 2\varepsilon, & x \in [x_1 + s\varepsilon, x_2 + s\varepsilon] \\ u_\varepsilon(x) = \varepsilon + \dfrac{x_2 - x}{t}, & x \in [x_2 - t\varepsilon, x_2 + t\varepsilon]. \end{cases}$$

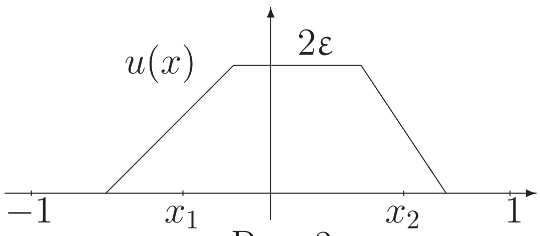

Рис. 3

Тогда

$$\begin{cases} u^*_\varepsilon(x) = 0, & x \in [-1, \dfrac{x_1 - x_2}{2} - \dfrac{s+t}{2}\varepsilon] \cup [\dfrac{x_2 - x_1}{2} + \dfrac{s+t}{2}\varepsilon, 1] \\ u^*_\varepsilon(x) = \varepsilon + \dfrac{2x - (x_2 - x_1)}{s+t}, & x \in [\dfrac{x_1 - x_2}{2} - \dfrac{s+t}{2}\varepsilon, \dfrac{x_1 - x_2}{2} + \dfrac{s+t}{2}\varepsilon] \\ u^*_\varepsilon(x) = 2\varepsilon, & x \in [\dfrac{x_1 - x_2}{2} + \dfrac{s+t}{2}\varepsilon, \dfrac{x_2 - x_1}{2} - \dfrac{s+t}{2}\varepsilon] \\ u^*_\varepsilon(x) = \varepsilon + \dfrac{(x_2 - x_1) - 2x}{s+t}, & x \in [\dfrac{x_2 - x_1}{2} - \dfrac{s+t}{2}\varepsilon, \dfrac{x_2 - x_1}{2} + \dfrac{s+t}{2}\varepsilon]. \end{cases}$$

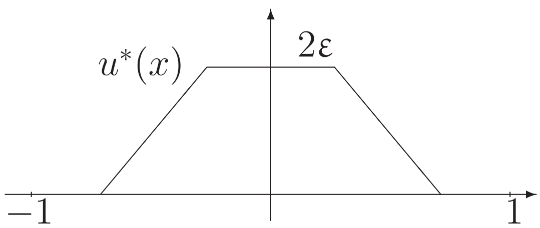

Рис. 4

Множества, на которых $u'_\varepsilon = 0$ и $u^{*\prime}_\varepsilon = 0$ имеют одинаковую меру. Поэтому неравенство $\mathcal{I}(u^*_\varepsilon) \leqslant \mathcal{I}(u_\varepsilon)$ эквивалентно следующему:

$$\int\limits_{x_1-s\varepsilon}^{x_1+s\varepsilon} (1+\frac{1}{s^2})^{\frac{p(x)}{2}}\,dx + \int\limits_{x_2-t\varepsilon}^{x_2+t\varepsilon} (1+\frac{1}{t^2})^{\frac{p(x)}{2}}\,dx$$
$$\geqslant \int\limits_{\frac{x_1-x_2}{2}-\frac{s+t}{2}\varepsilon}^{\frac{x_1-x_2}{2}+\frac{s+t}{2}\varepsilon} \left(1+\frac{1}{(\frac{s+t}{2})^2}\right)^{\frac{p(x)}{2}} dx + \int\limits_{\frac{x_2-x_1}{2}-\frac{s+t}{2}\varepsilon}^{\frac{x_2-x_1}{2}+\frac{s+t}{2}\varepsilon} \left(1+\frac{1}{(\frac{s+t}{2})^2}\right)^{\frac{p(x)}{2}} dx.$$

Разделим это неравенство на 2ε и устремим $\varepsilon \to 0$, получив в пределе

$$s\Big(1+\frac{1}{s^2}\Big)^{\frac{p(x_1)}{2}} + t\Big(1+\frac{1}{t^2}\Big)^{\frac{p(x_2)}{2}}$$
$$\geqslant \frac{s+t}{2}\Big(1+\frac{1}{(\frac{s+t}{2})^2}\Big)^{\frac{p(\frac{x_1-x_2}{2})}{2}} + \frac{s+t}{2}\Big(1+\frac{1}{(\frac{s+t}{2})^2}\Big)^{\frac{p(\frac{x_2-x_1}{2})}{2}}. \tag{3.1}$$

Для начала, положим $s = t$ в неравенстве (3.1). Получаем

$$(1+\frac{1}{s^2})^{\frac{p(x_1)}{2}} + (1+\frac{1}{s^2})^{\frac{p(x_2)}{2}} \geqslant (1+\frac{1}{s^2})^{\frac{p(\frac{x_2-x_1}{2})}{2}} + (1+\frac{1}{s^2})^{\frac{p(\frac{x_1-x_2}{2})}{2}}. \tag{3.2}$$

Обозначим $\sigma := \frac{1}{s^2}$ и применим разложение по Тейлору к неравенству (3.2) в точке $\sigma = 0$:

$$\sigma p(x_1) + \sigma p(x_2) \geqslant \sigma p(\frac{x_2-x_1}{2}) + \sigma p(\frac{x_1-x_2}{2}) + r(\sigma),$$

где $r(\sigma) = o(\sigma)$ при $\sigma \to 0$. Таким образом, для любых $x_1, x_2 \in [-1,1]$ имеем

$$p(x_1) + p(x_2) \geqslant p(\frac{x_2-x_1}{2}) + p(\frac{x_1-x_2}{2}).$$

По лемме 10 получаем, что p чётна и выпукла.

Теперь подставим $-x_2$ вместо x_2 в (3.1). Поскольку p чётна, получаем $K(s,x_1) + K(t,x_2) \geqslant 2K(\frac{s+t}{2}, \frac{x_1+x_2}{2})$. □

3.3 Доказательство неравенства $\mathcal{I}(u^*) \leqslant \mathcal{I}(u)$

В этом параграфе мы показываем, что необходимые условия, установленные в теореме 11, являются также и достаточными.

Лемма 11. *Пусть m — чётное положительное число, $s_k > 0$ $(k = 1 \ldots m)$, $-1 \leqslant x_1 \leqslant \ldots \leqslant x_m \leqslant 1$. Тогда, если $K(s, x)$ чётна по x и выпукла по совокупности аргументов, то*

$$\sum_{k=1}^{m} K(s_k, x_k) \geqslant 2K\Big(\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{m} s_k, \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{m}(-1)^k x_k\Big). \tag{3.3}$$

Доказательство. Заметим, что неравенство (3.3) равносильно такому же неравенству для функции $M(s, x) = K(s, x) - s$. Также заметим, что M убывает по s, поскольку M выпукла по s и

$$M_s(s, x) = (1 + \frac{1}{s^2})^{\frac{p(x)}{2}-1}(1 + \frac{1}{s^2} - \frac{p(x)}{s^2}) - 1 \to 0 \qquad \text{при} \quad s \to \infty.$$

Тогда

$$\sum_{k=1}^{m} M(s_k, x_k) \geqslant M(s_1, x_1) + M(s_m, x_m) \overset{a}{\geqslant} 2M(\frac{s_1 + s_m}{2}, \frac{x_m - x_1}{2}) \geqslant$$
$$\overset{b}{\geqslant} 2M\Big(\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{m} s_k, \frac{x_m - x_1}{2}\Big) \overset{c}{\geqslant} 2M\Big(\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{m} s_k, \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{m}(-1)^k x_k\Big).$$

Неравенство (a) следует из того, что M чётна по x и выпукла, (b) — из убывания M по s, (c) — из возрастания M по x при $x \geqslant 0$. □

Лемма 12. *Пусть функция $K(s, x)$ чётна по x и выпукла по совокупности аргументов. Тогда $\mathcal{I}(u^*) \leqslant \mathcal{I}(u)$ для любой кусочно линейной функции $u \in \overset{o}{W}{}_1^1[-1, 1]$.*

Доказательство. Обозначим $L \subset [-1, 1]$ множество точек излома функции u (включая концы отрезка). Возьмём $U = u([-1, 1]) \setminus u(L)$, образ функции u без образов точек излома. Это множество представляется в виде объединения конечного числа непересекающихся интервалов $U = \cup_j U_j$. Заметим, что для каждого j множество $u^{-1}(U_j)$ разбивается на чётное число интервалов (обозначим это количество m_j), на каждом из которых функция u совпадает с некоторой линейной функцией y_k^j, $k = 1, \ldots, m_j$. Для удобства считаем, что носители y_k^j для каждого j идут по порядку, то есть $\sup dom(y_k^j) \leqslant \inf dom(y_{k+1}^j)$. Обозначим $b_k^j = |{y_k^j}'(x)|$. Также обозначим

$$Z = \text{meas}\,\{x \in (-1, 1) | u'(x) = 0\} = \text{meas}\,\{x \in (-1, 1) | {u^*}'(x) = 0\}.$$

Тогда

$$\mathcal{I}(u)-Z=\sum_j\int\limits_{u^{-1}(U_j)}(1+u'^2(x))^{\frac{p(x)}{2}}dx=\sum_j\sum_k\int\limits_{dom(y_k^j)}(1+{y_k^j}'^2(x))^{\frac{p(x)}{2}}dx=$$

$$=\sum_j\int\limits_{U_j}\sum_k\frac{1}{b_k^j}(1+{b_k^j}^2)^{\frac{p((y_k^j)^{-1}(y))}{2}}dy=\sum_j\int\limits_{U_j}\sum_k K\Big(\frac{1}{b_k^j},(y_k^j)^{-1}(y)\Big)dy.$$

Любая точка $y\in U$ имеет два прообраза относительно функции u^*, поэтому на множестве U можно определить $(u^*)^{-1}:U\to[0,1]$. Для каждого j можно выразить $(u^*)^{-1}$ и модуль её производной на участке U_j следующим образом:

$$(u^*)^{-1}(y) \;=\; \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{m_j}(-1)^k(y_k^j)^{-1}(y);$$

$$|((u^*)^{-1})'(y)| \;=\; \frac{1}{|u^{*\prime}((u^*)^{-1}(y))|}=\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{m_j}\frac{1}{b_k^j}=:\frac{1}{b_j^*}.$$

Ввиду чётности u^* имеем

$$\mathcal{I}(u^*)-Z=2\int\limits_{(u^*)^{-1}(U)}(1+u^{*\prime 2}(x))^{\frac{p(x)}{2}}dx=$$

$$=2\int\limits_U|((u^*)^{-1})'(y)|\cdot\Big(1+\frac{1}{((u^*)^{-1})'(y)^2}\Big)^{\frac{p((u^*)^{-1}(y))}{2}}dy=$$

$$=2\sum_j\int\limits_{U_j}\frac{1}{b_j^*}\big(1+{b_j^*}^2\big)^{\frac{1}{2}p\left(\frac{1}{2}\sum\limits_{k=1}^{m_j}(-1)^k(y_k^j)^{-1}(y)\right)}dy=$$

$$=2\sum_j\int\limits_{U_j}K\Big(\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{m_j}\frac{1}{b_k^j},\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{m_j}(-1)^k(y_k^j)^{-1}(y)\Big)dy.$$

Зафиксируем j и y. Тогда для доказательства леммы достаточно выполнения

$$\sum_{k=1}^{m_j}K\Big(\frac{1}{b_k^j},(y_k^j)^{-1}(y)\Big)\geqslant 2K\Big(\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{m_j}\frac{1}{b_k^j},\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{m_j}(-1)^k(y_k^j)^{-1}(y)\Big).$$

Но это неравенство обеспечивается леммой 11. □

Теперь можно доказать неравенство для функций u общего вида.

Теорема 12. *Пусть p чётна, а K выпукла по совокупности переменных. Тогда для любой функции $u\in\overset{o}{W}{}_1^1[-1,1]$ выполнено $\mathcal{I}(u^*)\leqslant\mathcal{I}(u)$.*

Доказательство. Без потери общности предполагаем, что $I(u) < \infty$. Поскольку $p(x)$ ограничена, существует последовательность кусочно постоянных функций v_n, сходящаяся к u' в пространстве Орлича $L^{p(x)}$ (см. [7, Теорема 1.4.1]). Обозначим u_n первообразные v_n, удовлетворяющие $u_n(-1) = 0$.

Легко видеть, что $u_n \rightrightarrows u$, а значит $\varepsilon_n := -\inf u_n \to 0$. Определим δ_n через соотношение:

$$\int\limits_{-1}^{-1+\delta_n} (v_n)_- = \varepsilon_n \tag{3.4}$$

и возьмём

$$\tilde{v}_n = (v_n)_+ - (v_n)_- \cdot \chi_{[-1+\delta_n,1]}.$$

Мы утверждаем, что $\|\tilde{v}_n - v_n\|_{L^{p(x)}(-1,1)} \to 0$. Действительно, ввиду (3.4) мера множества

$$\mathcal{A}_n = \{x \in [-1, -1+\delta_n] \,:\, (v_n)_- \geqslant \sqrt{\varepsilon_n}\}$$

стремится к 0 при $n \to \infty$. Поскольку $v_n \to u'$ в $L^{p(x)}$, имеем

$$\|(v_n)_-\|_{L^{p(x)}(\mathcal{A}_n)} \leqslant \|u'\|_{L^{p(x)}(\mathcal{A}_n)} + \|v_n - u'\|_{L^{p(x)}(\mathcal{A}_n)} \to 0.$$

Поскольку

$$\|(v_n)_-\|_{L^{p(x)}([-1,-1+\delta_n]\setminus\mathcal{A}_n)} \to 0,$$

имеем

$$\|\tilde{v}_n - v_n\|_{L^{p(x)}(-1,1)} = \|(v_n)_-\|_{L^{p(x)}(-1,-1+\delta_n)} \to 0,$$

как и заявлено.

тут $\tilde{u}_n(+1) = 0$?? Обозначим $\tilde{u}_n$ первообразную $\tilde{v}_n$ Ю удовлетворяющую $\tilde{u}_n(-1) = 0$. По построению $\tilde{u}_n \geqslant 0$. Положим $\tilde{\varepsilon}_n = \tilde{u}_n(1) \to 0$, определим $\tilde{\delta}_n$ через соотношение

$$\int\limits_{1-\tilde{\delta}_n}^{1} (\tilde{v}_n)_+ = \tilde{\varepsilon}_n$$

и обозначим

$$\hat{v}_n = (\tilde{v}_n)_+ \cdot \chi_{[-1,1-\tilde{\delta}_n]} - (\tilde{v}_n)_-.$$

Используя те же рассуждения, получаем $\|\hat{v}_n - \tilde{v}_n\|_{L^{p(x)}(-1,1)} \to 0$.

Обозначим $\hat{u}_n$ первообразную $\hat{v}_n$, удовлетворяющую $\hat{u}_n(-1) = 0$. По построению $\hat{u}_n \geqslant 0$, $\hat{u}_n(1) = 0$ и $\hat{u}_n' \to u'$ в $L^{p(x)}(-1,1)$.

Из вложения $L^{p(x)}[-1,1] \mapsto L^1(-1,1)$ следует $\hat{u}_n \to u$ в $\overset{o}{W}{}_1^1(-1,1)$. Далее, поскольку $|\sqrt{1+x^2}-\sqrt{1+y^2}| \leqslant |x-y|$ для любых x и y, из сходимости $\hat{u}_n' \to u'$ в $L^{p(x)}$ следует $\mathcal{I}(\hat{u}_n) \to \mathcal{I}(u)$.

По [2, Theorem 1] из сходимости $\hat{u}_n \to u$ в $\overset{o}{W}{}_1^1(-1,1)$ следует слабая сходимость $\hat{u}_n^* \rightharpoonup u^*$ в $\overset{o}{W}{}_1^1(-1,1)$. Кроме того, функционал $\mathcal{I}$ секвенциально слабо полунепрерывен снизу по теореме Тонелли (см., напр., [8, Теорема 3.5]). Поэтому

$$\mathcal{I}(u^*) \leqslant \liminf_n \mathcal{I}(\hat{u}_n^*) \leqslant \lim_n \mathcal{I}(\hat{u}_n) = \mathcal{I}(u).$$

□

3.4 Некоторые достаточные условия

Условие выпуклости функции K на самом деле есть некоторое условие на функцию p. Вычисление показывает, что всегда $\partial^2_{ss}K > 0$, а также если p выпукла, то и $\partial^2_{xx}K \geqslant 0$. Поэтому выпуклость K равносильна выполнению неравенства $\det(K'') \geqslant 0$ в смысле мер.

Прямое вычисление приводит к

$$\det(K'') = \frac{(1+w)^{q-1}}{4}$$
$$\times\Big(w(wq+1)(q+1)\ln(1+w)(q'^2\ln(1+w)+2q'') - q'^2((1-qw)\ln(1+w)-2w)^2\Big),$$

где $q = q(x) = p(x) - 1$ и $w = w(s) = \frac{1}{s^2}$.

То есть мы имеем следующее неравенство на функцию q:

$$qq'' \geqslant q'^2\mathcal{B}(q), \tag{3.5}$$

где $\mathcal{B}(q) \equiv \sup\limits_{w>0} B(w,q)$ и

$$B(w,q) = \frac{q(4w-(w+3)\ln(w+1)) - \frac{w-1}{w}\ln(w+1) + 4\frac{w}{\ln(w+1)} - 4}{2(qw+1)} \cdot \frac{q}{q+1}.$$

Следующее утверждение проверяется прямым счётом.

Лемма 13. *Пусть $q \geqslant 0$ — непрерывная функция на $[-1,1]$. Тогда неравенство $qq'' \geqslant q'^2\mathcal{M}$ в смысле распределений при $\mathcal{M} \in (0,1)$ равносильно выпуклости функции $q^{1-\mathcal{M}}$.*

Отсюда простые достаточные условия:

Теорема 13. *Пусть $p(x) \geqslant 1$ — чётная непрерывная функция на $[-1,1]$.*

i) *Если функция $(p(x)-1)^{0.37}$ выпукла, то неравенство $\mathcal{I}(u^*) \leqslant \mathcal{I}(u)$ выполнено для любой неотрицательной $u \in \overset{o}{W}{}_1^1(-1,1)$.*

ii) *Если $p(x) \leqslant 2.36$ для всех $x \in [-1,1]$ и функция $\sqrt{p(x)-1}$ выпукла, то неравенство $\mathcal{I}(u^*) \leqslant \mathcal{I}(u)$ выполнено для любой неотрицательной $u \in \overset{o}{W}{}_1^1$ $(-1,1)$.*

Доказательство. Следующие неравенства доказаны в следующем параграфе:

$$\sup_{q \geqslant 0} \mathcal{B}(q) = \limsup_{q \to +\infty} \mathcal{B}(q) \leqslant 0.63; \tag{3.6}$$

$$\sup_{0 \leqslant q \leqslant 1.36} \mathcal{B}(q) \leqslant 0.5. \tag{3.7}$$

По лемме 13 неравенство (3.5) следует для обоих пунктов теоремы. Применение теоремы 12 завершает доказательство. □

3.5 Численные оценки функции $B(w,q)$

Для доказательства неравенства (3.6) мы делим положительный квадрант $(w,q) \in \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}_+$ на пять участков, см. рис. 3.1:

$$R_1 = [0,6] \times [0,1], \quad R_2 = [0,1] \times [1,\infty], \quad R_3 = [1,4] \times [1,\infty],$$
$$R_4 = [6,\infty] \times [0,1], \quad R_5 = [4,\infty] \times [1,\infty].$$

На каждом из участков мы доказываем неравенство численно-аналитическим методом.

Для $(w,q) \in R_1$ мы строим кусочно постоянную функцию $B_1(w,q)$, оценивающую $B(w,q)$ сверху. Для этого для мы делим R_1 на прямоугольники

$$Q \equiv \{w_0 \leqslant w \leqslant w_1; \quad q_0 \leqslant q \leqslant q_1\} \subset R_1$$

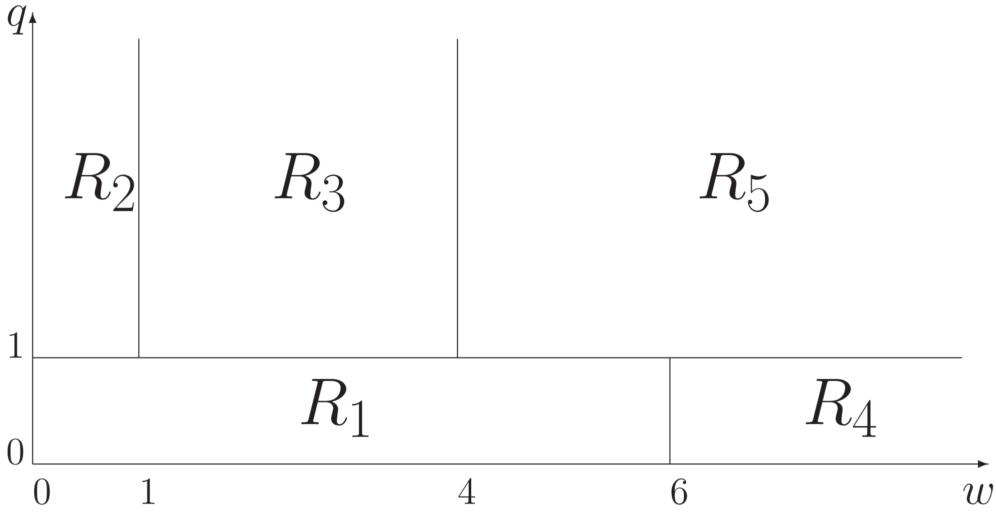

Рисунок 3.1 — К доказательству неравенства (3.6)

и находим постоянное значение B_1 на каждом из них, заменяя члены формулы для $B(w,q)$ их экстремальными значениями в этом прямоугольнике:

$$B(w,q) = \frac{q(4w - (w+3)\ln(w+1)) - (1-\frac{1}{w})\ln(w+1) + 4\frac{w}{\ln(w+1)} - 4}{2(qw+1)} \cdot \frac{q}{q+1}$$
$$\leqslant \frac{[4q_1 w_1] - [q_0(w_0+3)\ln(w_0+1)] - [\ln(w_0+1)] + [\frac{\ln(w_0+1)}{w_0}] + [4\frac{w_1}{\ln(w_1+1)}] - 4}{[2(q_0 w_0 + 1)]}$$
$$\times [\frac{q_1}{q_1+1}] =: B_1|_Q.$$

Здесь мы используем монотонность каждой из функций, заключённых в квадратные скобки, в R_1 по обеим переменным.

Для $(w,q) \in R_2$ мы полагаем $r = \frac{1}{q}$ и строим кусочно постоянную функцию $B_2(w,r)$, оценивающую $B(w,\frac{1}{r})$ сверху.

Аналогично, для $(w,q) \in R_4$ мы полагаем $v = \frac{1}{w}$ и строим кусочно постоянную функцию $B_4(v,q)$, оценивающую $B(\frac{1}{v},q)$ сверху.

Наконец, для $(w,q) \in R_5$ мы используем обозначения $v = \frac{1}{w}$, $r = \frac{1}{q}$ и строим кусочно постоянную функцию $B_5(w,r)$, оценивающую $B(\frac{1}{v},\frac{1}{r})$ сверху.

Оценочные функции B_1, B_2, B_4, B_5 были вычислены на достаточно мелких разбиениях на прямоугольники с 15 значащими цифрами. Были получены следующие результаты.

Участок		Шаг разбиения по w/v	Шаг разбиения по q/r	Неравенство
R_1		$6 \cdot 10^{-2}$	10^{-1}	$B_1 \leqslant 0.51$
R_2		10^{-2}	10^{-2}	$B_2 \leqslant 0.617$
R_4		$2 \cdot 10^{-2}$	10^{-1}	$B_4 \leqslant 0.50$
R_5		$2 \cdot 10^{-3}$	10^{-2}	$B_5 \leqslant 0.605$

Во всех случаях было получено $B(w,q) \leqslant 0.62$.

Анализ $B(w,q)$ в R_3 приходится производить более аккуратно. Мы снова берём $r = \frac{1}{q}$ и утверждаем, что $B(w, \frac{1}{r})$ убывает по r. Для доказательства мы строим кусочно постоянную функцию $B_3(w, r)$, оценивающую $\partial_r B(w, \frac{1}{r})$ сверху. Эта функция была вычислена на достаточно мелком разбиении с 15 значащими цифрами. Был получен следующий результат.

Участок		Шаг разбиения по w	Шаг разбиения по r	Неравенство
R_3		$5 \cdot 10^{-3}$	10^{-3}	$B_3 \leqslant -0.08$

Тем самым, мы получаем, что $B(w, \frac{1}{r})$ достигает максимума в R_3 при $r = 0$.

Для нахождения максимума мы берём

$$B(w, \infty) = 2 - \frac{1}{2}(\ln(w+1) + 3\frac{\ln(w+1)}{w})$$

и утверждаем, что $B(w, \infty)$ вогнута при $w \in [1, 4]$. Чтобы доказать это, мы строим кусочно постоянную функцию $B_\infty(w)$, оценивающую $\partial^2_{ww} B(w, \infty)$ сверху. Эта функция была вычислена на достаточно мелком разбиении с 15 значащими цифрами. Был получен следующий результат.

Участок		Шаг разбиения	Неравенство
$1 \leqslant w \leqslant 4$		$3 \cdot 10^{-3}$	$B_\infty \leqslant -0.13$

Тем самым, точка максимума единственна. С использованием стандартных численных методов было получено, что максимум достигается при $w \approx 1.816960565240$, $\max B(w,\infty) \approx 0.627178211634$. Неравенство (3.6) доказано.

Для доказательства неравенства (3.7) мы делим $(w, q) \in \mathbb{R}_+ \times [0, 1.36]$ на четыре участка, см. рис. 3.2:

$$R_6 = [0, 3] \times [0, 1.36], \quad R_7 = [3, 5] \times [0, 1.3],$$
$$R_8 = [3, 5] \times [1.3, 1.36], \quad R_9 = [5, \infty] \times [0,1.36].$$

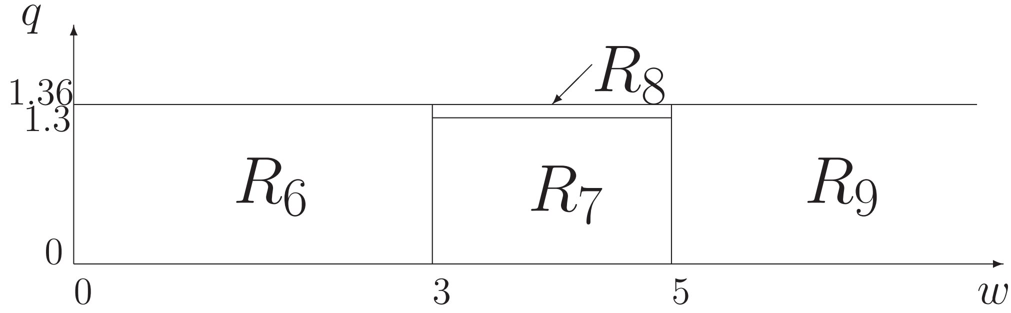

Рисунок 3.2 — К доказательству неравенства (3.7)

На этих участках мы используем кусочно постоянные функции B_1 и B_4, введённые ранее. Значения функций были вычислены при достаточно мелком разбиении с 15 значащими цифрами. В R_8 потребовался шаг разбиения меньше 10^{-5}, поэтому мы повторили вычисления с 18 значащими цифрами. Был получен следующий результат.

Участок		Шаг разбиения по $w(v)$	Шаг разбиения по q	Неравенство
R_6		$3 \cdot 10^{-3}$	$1.36 \cdot 10^{-3}$	$B_1 \leqslant 0.498$
R_7		$2 \cdot 10^{-3}$	$1.3 \cdot 10^{-3}$	$B_1 \leqslant 0.498$
R_8		$2 \cdot 10^{-4}$	$6 \cdot 10^{-6}$	$B_1 \leqslant 0.49996$
R_9		$2 \cdot 10^{-3}$	$1.36 \cdot 10^{-2}$	$B_4 \leqslant 0.4992$

Доказательство завершено.

3.6 Многомерный аналог неравенства $\mathcal{I}(u^*) \leqslant \mathcal{I}(u)$

В этом параграфе функция $u \in \overset{o}{W}{}_1^1(\Omega)$, где $\Omega = \omega \times [-1, 1]$. Как и в первой главе, мы используем обозначения $x = (x', y)$, где $x' \in \omega$, $y \in [-1, 1]$.

Введём многомерный аналог функционала $\mathcal{I}$:

$$\widehat{\mathcal{I}}(u) = \int\limits_{\Omega} (1 + |\nabla u(x)|^2)^{\frac{p(x)}{2}} dx.$$

Теорема 14. *Если $\widehat{\mathcal{I}}(u^*) \leqslant \widehat{\mathcal{I}}(u)$ для любой неотрицательной функции $u \in \overset{o}{W}{}_1^1(\Omega)$, то $p(x',y)$ не зависит от y.*

Доказательство. Для начала, мы докажем, что, аналогично теореме 11, p должна быть чётной и выпуклой по y, а функция

$$\mathcal{K}_{x'}(c,d,y) = c\big(1+\tfrac{1+d^2}{c^2}\big)^{\frac{p(x',y)}{2}}$$

должна быть выпуклой по совокупности аргументов на $[-1,1]\times\mathbb{R}\times\mathbb{R}_+$.

Действительно, рассмотрим две точки

$$x_1 = (x'_0, y_1),\ x_2 = (x'_0, y_2), \qquad \text{где} \quad x'_0 \in \boldsymbol{\omega},\ -1 < y_1 < y_2 < 1.$$

Зададим функцию $u \in \overset{o}{W}{}^1_1(\Omega)$ с ненулевым градиентом только в окрестностях x_1, x_2 и в окрестности боковой границы цилиндра с осью $[x_1, x_2]$ следующим образом

$$u(x) = \min\Big(\big(\frac{y-y_1}{c_1}+(x'-x'_0)\cdot\mathbf{b}'_1\big)_+, \big(\frac{y_2-y}{c_2}+(x'-x'_0)\cdot\mathbf{b}'_2\big)_+, \delta\big(w-|x'-x'_0|\big)_+, h\Big).$$

Здесь параметры $c_1, c_2 > 0$ — обратные производные по y в «основаниях» цилиндра, $\mathbf{b}'_1, \mathbf{b}'_2 \in \mathbb{R}^{n-1}$ — градиенты по x' в «основаниях» цилиндра, $\delta > 0$ — модуль градиента на боковой поверхности цилиндра, $w > 0$ — радиус цилиндра, а $h > 0$ — максимальное значение функции.

Зафиксировав y_1, y_2, c_1, c_2, $\mathbf{b}'_1$, $\mathbf{b}'_2$, мы выбираем h и δ как функции малого параметра w. Мы требуем $\varkappa \equiv \frac{h}{\delta} := \frac{w}{2}$ ($\varkappa$ — ширина бокового слоя с ненулевой производной).

Левое основание носителя u задаётся системой

$$\frac{y-y_1}{c_1} + (x'-x'_0)\cdot\mathbf{b}'_1 = 0; \qquad |x'-x'_0| \leqslant w.$$

То есть это $(n-1)$-мерный вытянутый эллипсоид вращения с большой полуосью $\sqrt{w^2+c_1^2w^2|\mathbf{b}'_1|^2}$ и радиусом w. Значит $\nabla u = (\mathbf{b}'_1, \frac{1}{c_1})$ на множестве A_1, которое является усечённым конусом с этим эллипсоидом в основании. Прямое вычисление показывает

$$\operatorname{meas} A_1 = C_1\delta c_1 w^n$$

(здесь и далее C с индексом или без — некоторые константы, зависящие только от n).

Аналогично $\nabla u = (\mathbf{b}'_2, -\frac{1}{c_2})$ на множестве A_2, $\operatorname{meas} A_2 = C_1\delta c_2 w^n$.

После симметризации на «основаниях» $\nabla u^* = (\frac{c_1\mathbf{b}'_1+c_2\mathbf{b}'_2}{c_1+c_2}, \pm\frac{2}{c_1+c_2})$. Тем самым, множества A_1 и A_2 переходят в A'_1 и A'_2, и выполнено

$$\operatorname{meas} A'_1 = \operatorname{meas} A'_2 = C_1\delta\frac{c_1+c_2}{2}w^n.$$

Далее обозначим за A_δ боковой слой с ненулевым градиентом. Прямая оценка даёт

$$\operatorname{meas} A_\delta \leqslant C\big((y_2-y_1)w^{n-1}+(c_1|\mathbf{b}_1'|+c_2|\mathbf{b}_2'|)w^n\big).$$

Также обозначим

$$Z=\operatorname{meas}\{x\in\Omega\,|\,\nabla u(x)=0\}=\operatorname{meas}\{x\in\Omega\,|\,\nabla u^*(x)=0\}.$$

При $\frac{1}{c_1}=\frac{1}{c_2}=w^2$, $\delta=w^4$ и $\mathbf{b}_1'=\mathbf{b}_2'=0$ из предположений теоремы следует

$$\begin{aligned}
0 &\leqslant (\widehat{\mathcal{I}}(u)-Z)-(\widehat{\mathcal{I}}(u^*)-Z)\leqslant \big((1+w^4)^{\frac{p(\bar{x}_1)}{2}}-1\big)\cdot\operatorname{meas} A_1\\
&+ \big((1+w^4)^{\frac{p(\bar{x}_2)}{2}}-1\big)\cdot\operatorname{meas} A_2+\big((1+w^8)^{\frac{P}{2}}-1\big)\cdot\operatorname{meas} A_\delta\\
&- \big((1+w^4)^{\frac{p(\hat{x}_1)}{2}}-1+(1+w^4)^{\frac{p(\hat{x}_2)}{2}}-1\big)\cdot\operatorname{meas} A_1'\\
&\leqslant w^4\big(\tfrac{p(\bar{x}_1)}{2}+\tfrac{p(\bar{x}_2)}{2}+o(w)\big)C_1w^{n+2}+w^8\big(\tfrac{P}{2}+o(w)\big)(y_2-y_1)Cw^{n-1}\\
&\quad -w^4\big(\tfrac{p(\hat{x}_1)}{2}+\tfrac{p(\hat{x}_2)}{2}+o(w)\big)C_1w^{n+2}.
\end{aligned}$$

Здесь $P=\max p(x',y)$, $\bar{x}_1\in A_1$, $\bar{x}_2\in A_2$, $\hat{x}_1\in A_1'$, $\hat{x}_2\in A_2'$.

Мы переходим к пределу при $w\to 0$ и получаем

$$0\leqslant p(x_0',y_1)+p(x_0',y_2)-p(x_0',\frac{y_1-y_2}{2})-p(x_0',\frac{y_2-y_1}{2}).$$

Применив лемму 10, получаем, что p чётна и выпукла по y.

Теперь зафиксируем произвольные положительные c_1, c_2, d_1 и d_2, положим $\mathbf{b}_1'=\frac{d_1}{c_1}\mathbf{e}$, $\mathbf{b}_2'=\frac{d_2}{c_2}\mathbf{e}$ (здесь $\mathbf{e}$ — некоторый единичный вектор в гиперплоскости x') и возьмём $\delta=w^2$. Тогда получаем

$$\begin{aligned}
0 &\leqslant (\widehat{\mathcal{I}}(u)-Z)-(\widehat{\mathcal{I}}(u^*)-Z)\leqslant \big(\tfrac{1}{c_1}\mathcal{K}_{\bar{x}_1'}(c_1,d_1,\bar{y}_1)-1\big)\cdot\operatorname{meas} A_1\\
&+ \big(\tfrac{1}{c_2}\mathcal{K}_{\bar{x}_2'}(c_2,d_2,\bar{y}_2)-1\big)\cdot\operatorname{meas} A_2+\big((1+w^4)^{\frac{P}{2}}-1\big)\cdot\operatorname{meas} A_\delta\\
&- \big(\tfrac{2}{c_1+c_2}\mathcal{K}_{\hat{x}_1'}(\tfrac{c_1+c_2}{2},\tfrac{d_1+d_2}{2},\hat{y}_1)-1\big)\cdot\operatorname{meas} A_1'\\
&- \big(\tfrac{2}{c_1+c_2}\mathcal{K}_{\hat{x}_2'}(\tfrac{c_1+c_2}{2},\tfrac{d_1+d_2}{2},\hat{y}_2)-1\big)\cdot\operatorname{meas} A_2'\\
&\leqslant \big(\mathcal{K}_{\bar{x}_1'}(c_1,d_1,\bar{y}_1)+\mathcal{K}_{\bar{x}_2'}(c_2,d_2,\bar{y}_2)\big)C_1w^{n+2}+(\tfrac{P}{2}+o(w))C(y_2-y_1)w^{n+3}\\
&- \big(\mathcal{K}_{\hat{x}_1'}(\tfrac{c_1+c_2}{2},\tfrac{d_1+d_2}{2},\hat{y}_1)+\mathcal{K}_{\hat{x}_2'}(\tfrac{c_1+c_2}{2},\tfrac{d_1+d_2}{2},\hat{y}_2)\big)C_1w^{n+2}.
\end{aligned}$$

Здесь $P=\max p(x',y)$, $(\bar{x}_1',\bar{y}_1)\in A_1$, $(\bar{x}_2',\bar{y}_2)\in A_2$, $(\hat{x}_1',\hat{y}_1)\in A_1'$, $(\hat{x}_2',\hat{y}_2)\in A_2'$.

Мы переходим к пределу при $w\to 0$ и получаем

$$\begin{aligned}
&\mathcal{K}_{x_0'}(c_1,d_1,y_1)+\mathcal{K}_{x_0'}(c_2,d_2,y_2)\\
&\qquad\geqslant \mathcal{K}_{x_0'}\big(\tfrac{c_1+c_2}{2},\tfrac{d_1+d_2}{2},\tfrac{y_1-y_2}{2}\big)+\mathcal{K}_{x_0'}\big(\tfrac{c_1+c_2}{2},\tfrac{d_1+d_2}{2},\tfrac{y_2-y_1}{2}\big).
\end{aligned}$$

Отсюда следует, что $\mathcal{K}_{x'_0}$ выпукла, поскольку она чётна по y.

Наконец, заметим (здесь мы опускаем для краткости x' в записи $\mathcal{K}_{x'}$), что

$$\mathcal{K}(c,d,y) = K(\frac{c}{\sqrt{1+d^2}}, y) \cdot \sqrt{1+d^2},$$

где функция K введена в теореме 11. Прямое вычисление показывает, что

$$\det(\mathcal{K}''(c,d,y)) = \frac{1}{(1+d^2)^{\frac{3}{2}}} \cdot \left[(\partial^2_{yy}K\partial^2_{ss}K - (\partial^2_{sy}K)^2)(K - s\partial_s K) - \partial^2_{ss}K(\partial_y K)^2 d^2\right]$$

(здесь $s = \frac{c}{\sqrt{1+d^2}}$). То есть если $\partial_y K \not\equiv 0$, можно выбрать достаточно большое d, чтобы получить $\det(\mathcal{K}''(c,d,y)) < 0$ и, тем самым, противоречие. $\square$

Список литературы

1. *Либ, Э.* Анализ / Э. Либ, М. Лосс. — Новосибирск : Научная книга, 1998. — 276 с.
2. *Brock, F.* Weighted Dirichlet-type inequalities for Steiner symmetrization / F. Brock // Calc. Var. and PDEs. — 1999. — Vol. 8, no. 1. — P. 15—25.
3. *Рудин, У.* Функциональный анализ / У. Рудин. — М. : Мир, 1975. — 444 с.
4. *Эванс, Л.* Теория меры и тонкие свойства функций / Л. Эванс, Р. Ф. Гариепи. — Новосибирск : Научная книга, 2002. — 216 с.
5. Интегральные операторы в пространствах суммируемых функций / М. А. Красносельский [и др.]. — М. : Наука, 1966. — 500 с.
6. *Alberti, G.* Non-occurrence of gap for one-dimensional autonomous functionals / G. Alberti, F. Serra Cassano // Proceedings of "Calc. Var., Homogen. and Cont. Mech." / ed. by G. Bouchitté, G. Buttazzo, P. Suquet. — Singapore, 1994. — P. 1—17.
7. *Шарапудинов, И. И.* Некоторые вопросы теории приближений в пространствах Лебега с переменным показателем / И. И. Шарапудинов. — Владикавказ : ЮМИ ВНЦ РАН и РСО-А, 2012. — 267 с. — (Итоги науки. Юг России. Математическая монография ; 5).
8. *Буттаццо, Д.* Одномерные вариационные задачи. Введение / Д. Буттаццо, М. Джаквинта, С. Гильдебрандт. — Новосибирск : Научная книга, 2002. — 246 с.