Санкт-Петербургский государственный университет

На правах рукописи

Фамилия Имя Отчество

О монотонности интегральных функционалов при перестановках

Специальность XX.XX.XX —
«Название специальности»

Диссертация на соискание учёной степени
кандидата физико-математических наук

Научный руководитель:
уч. степень, уч. звание
Назаров Александр Ильич

Санкт-Петербург — 20XX

Оглавление

Введение

010102

дфмн проф?

limits

Свои работы отдельно. Тезисы тоже считаются.

Во введении кроме исторической части ещё изложение результатов. J(многа) — во вторую вместе с явным одномерным видом функционала/

fix graphs 1-2-?

зам 3 -> lm. thm 3 нормально написать. Чуть приподнять тему Ландеса.

св-ва весов разбить. Первую лемму в следующий параграф. Остальное в виде параграфа в следующую главу.

сразу потребовать липшицевость границы

д-во теоремы 2 I -> J

lm 7 -> thm. 1) для симметризации 2) для монотонной

Убрать номера формул из названий. Можно нер-ве П-С с весом. В параграфах можно буквами

стр 20 + стоит в конце строки

IWg без слеша

стр 24 - к док-ву теоремы — добавить номер теоремы

стр 26 чётна x, удовлетворяет неравенству (1.1) согласно лемме 3 -> чётна по x. Далее Покажем, что найдётся последовательность -> для которой $d_alpha_j(v)$ .. за исключением. И сделать "покажем, что "на для почти всех. И дальше "Из шага 3"с красной строки

$\lim\inf\underline{\lim}$

проверить орфографию

Make use of \norm, \abs, \meas, \set and other commands

ё

fix discontinuity in graphs

introduce a section with formulations of external assertions, если нельзя их всех сделать в тексте, как сейчас во многих случаях сделано

широкую библиографию по эффекту Лаврентьева. Посмотреть кроме письма ещё в BGH

Пусть $\Omega = \omega \times [-1{,}1]$, где ω — ограниченная область в $\mathbb{R}^{n-1}$ с липшицевой границей. Обозначим $x = (x_1, \dots, x_{n-1}, y) = (x', y)$.

Напомним теорему о послойном представлении измеримой неотрицательной функции u, заданной на Ω (см. [1, Теорема 1.13]). Положим $\mathcal{A}_t(x') := \{y \in [-1{,}1] : \ u(x', y) > t\}$. Тогда имеет место равенство

$$u(x', y) = \int_0^\infty \mathcal{X}\{\mathcal{A}_t(x')\}(y)dt,$$

где $\mathcal{X}\{A\}$ — характеристическая функция множества A.

Определим симметричную перестановку измеримого множества $E \subset [-1, 1]$ и симметричную перестановку (симметризацию по Штейнеру) неотрицательной функции $u \in W_1^1(\Omega)$:

$$E^* := [-\frac{|E|}{2}, \frac{|E|}{2}]; \qquad u^*(x', y) = \int\limits_0^\infty \mathcal{X}\{(\mathcal{A}_t(x'))^*\}(y)dt.$$

В тех же условиях определим монотонную перестановку множества E и функции $u \in W_1^1(\Omega)$:

$$\overline{E} := [1 - \operatorname{meas} E, 1]; \qquad \overline{u}(x', y) = \int\limits_0^\infty \mathcal{X}\{\overline{\mathcal{A}_t(x')}\}(y)dt.$$

Возьмём выпуклую чётную функцию F и рассмотрим функционал

$$I(u) = \int_\Omega F(\|\nabla u\|)dx. \tag{1}$$

Для такого функционала хорошо известно классическое неравенство Пойа-Сегё: $I(u^*) \leqslant I(u)$.

fix В данной диссертации мы рассматриваем обобщения неравенства Пойа-Сегё на более общие классы функционалов. В первой и второй главах мы рассматриваем взвешенные аналоги классического функционала.

Определим множество $\mathfrak{F}$ непрерывных функций $F : \omega \times \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$ (здесь и далее $\mathbb{R}_+ = [0, \infty)$ move to notations), выпуклых и строго возрастающих по третьему аргументу, удовлетворяющих $F(\cdot, \cdot, 0) \equiv 0$.

Рассмотрим функционал:

$$J(u) = \int\limits_\Omega F(x', u(x), \|\mathcal{D}u\|)dx, \tag{2}$$

где $F \in \mathfrak{F}$, $\|\cdot\|$ — некоторая норма в $\mathbb{R}^n$, симметричная по последней координате, то есть удовлетворяющая $\|(x', y)\| = \|(x', -y)\|$,

$$\mathcal{D}u = (a_1(x', u(x))D_1u,\ \ldots,\ a_{n-1}(x', u(x))D_{n-1}u,\ a(x, u(x))D_nu)$$

— градиент u с весом (обратите внимание, что только вес при D_nu зависит от y), $a(\cdot,\cdot) : \Omega \times \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$ и $a_i(\cdot,\cdot) : \omega \times \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$ — непрерывные функции. Здесь и далее индекс i пробегает от 1 до $n-1$. Очевидно, что при $a_i = a \equiv 1$ выполнено $J \equiv I$.

fix В первой главе мы рассматриваем аналог неравенства Пойа-Сегё для монотонной перестановки с функционалом (1.2):

$$J(\overline{u}) \leqslant J(u) \tag{3}$$

Мы устанавливаем необходимые для выполнения неравенства условия на весовую функцию a. Также мы доказываем неравенство при необходимых условиях и дополнительном ограничении на рост интегранта по производной.

Во второй главе мы снимаем требование ограничения роста, и также доказываем аналогичный результат для симметричной перестановки:

$$J(u^*) \leqslant J(u), \tag{4}$$

тем самым закрывая пробел в работе [2].

оставить здесь только мотивацию/историю

Глава 1. О неравенстве Пойа-Сегё с весом для монотонной перестановки в случае ограниченного роста интегранта по производной

1.1 Обозначения

Пусть $\Omega = \omega \times [-1{,}1]$, где ω — ограниченная область в $\mathbb{R}^{n-1}$ с липшицевой границей. Обозначим $x = (x_1, \ldots, x_{n-1}, y) = (x', y)$.

Напомним теорему о послойном представлении измеримой неотрицательной функции u, заданной на Ω (см. [1, Теорема 1.13]). Положим $\mathcal{A}_t(x') := \{y \in [-1{,}1] : \ u(x', y) > t\}$. Тогда имеет место равенство

$$u(x', y) = \int_0^\infty \mathcal{X}\{\mathcal{A}_t(x')\}(y)dt,$$

где $\mathcal{X}\{A\}$ — характеристическая функция множества A.

Определим симметричную перестановку измеримого множества $E \subset [-1, 1]$ и симметричную перестановку (симметризацию по Штейнеру) неотрицательной функции $u \in W_1^1(\Omega)$:

$$E^* := [-\frac{|E|}{2}, \frac{|E|}{2}]; \qquad u^*(x', y) = \int\limits_0^\infty \mathcal{X}\{(\mathcal{A}_t(x'))^*\}(y)dt.$$

В тех же условиях определим монотонную перестановку множества E и функции $u \in W_1^1(\Omega)$:

$$\overline{E} := [1 - \operatorname{meas} E, 1]; \qquad \overline{u}(x', y) = \int\limits_0^\infty \mathcal{X}\{\overline{\mathcal{A}_t(x')}\}(y)dt.$$

Возьмём выпуклую чётную функцию F и рассмотрим функционал

$$I(u) = \int_\Omega F(\|\nabla u\|)dx. \tag{1.1}$$

Для такого функционала хорошо известно классическое неравенство Пойа-Сегё: $I(u^*) \leqslant I(u)$.

Определим множество $\mathfrak{F}$ непрерывных функций $F : \omega \times \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$ (здесь и далее $\mathbb{R}_+ = [0, \infty)$), выпуклых и строго возрастающих по третьему аргументу, удовлетворяющих $F(\cdot, \cdot, 0) \equiv 0$.

Рассмотрим функционал:

$$J(u) = \int_\Omega F(x', u(x), \|\mathcal{D}u\|)dx, \tag{1.2}$$

где $F \in \mathfrak{F}$, $\|\cdot\|$ — некоторая норма в $\mathbb{R}^n$, симметричная по последней координате, то есть удовлетворяющая $\|(x', y)\| = \|(x', -y)\|$,

$$\mathcal{D}u = (a_1(x', u(x))D_1 u,\ \ldots,\ a_{n-1}(x', u(x))D_{n-1}u,\ a(x, u(x))D_n u)$$

— градиент u с весом (обратите внимание, что только вес при $D_n u$ зависит от y), $a(\cdot,\cdot) : \Omega \times \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$ и $a_i(\cdot,\cdot) : \omega \times \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$ — непрерывные функции. Здесь и далее индекс i пробегает от 1 до $n-1$.

В этой главе мы рассматриваем следующее неравенство:

$$J(\overline{u}) \leqslant J(u) \tag{1.3}$$

Мы устанавливаем необходимые для выполнения неравенства условия на весовую функцию a. Также мы доказываем неравенство при необходимых условиях и дополнительном ограничении на рост интегранта по производной.

1.2 Условия, необходимые для выполнения неравенства (1.3)

add remark that we omit n-1 dimensions here

Теорема 1. ***1.*** *Если неравенство* (1.3) *выполняется для некоторой $F \in \mathfrak{F}$ и произвольной кусочно линейной u, то вес a чётен по первому аргументу, то есть $a(x, v) \equiv a(-x, v)$.*

2. *Если неравенство* (1.3) *выполняется для произвольной $F \in \mathfrak{F}$ и произвольной кусочно линейной u, то вес a удовлетворяет неравенству*

$$a(s, v) + a(t, v) \geqslant a(1 - t + s, v), \qquad -1 \leqslant s \leqslant t \leqslant 1, v \in \mathbb{R}_+. \tag{1.4}$$

Доказательство. **1.** Предположим, что $a(x, v) \not\equiv a(-x, v)$. Тогда найдутся такие $x_0 \in (-1, 1)$ и $v_0 \in \mathbb{R}_+$, что

$$a(x_0, v_0) < a(-x_0, v_0).$$

Поэтому существует $\varepsilon > 0$ такое, что

$$a(x,v) < a(-x,v), \qquad x_0 - \varepsilon \leqslant x \leqslant x_0, v_0 \leqslant v \leqslant v_0 + \varepsilon,$$

и можно взять следующую функцию:

$$\begin{cases} u_1(x) = v_0 + \varepsilon, & x \in [-1, x_0 - \varepsilon] \\ u_1(x) = v_0 + x_0 - x, & x \in (x_0 - \varepsilon, x_0) \\ u_1(x) = v_0, & x \in [x_0, 1] \end{cases}$$

Тогда $\overline{u_1}(x) = u_1(-x)$ и

$$\begin{aligned} &J(a,u_1) - J(a,\overline{u_1}) \\ &= \int\limits_{x_0-\varepsilon}^{x_0} F\big(v_0+x_0-x, a(x, v_0+x_0-x)\big)\,dx - \int\limits_{-x_0}^{-x_0+\varepsilon} F\big(v_0+x_0+x, a(x, v_0+x_0+x)\big)\,dx \\ &= \int\limits_{x_0-\varepsilon}^{x_0} \Big(F\big(v_0+x_0-x, a(x, v_0+x_0-x)\big) - F\big(v_0+x_0-x, a(-x, v_0+x_0-x)\big)\Big)\,dx < 0, \end{aligned}$$

что противоречит предположениям теоремы. Утверждение **1** доказано.

2. Предположим, что условие (1.4) не выполняется. Тогда в силу непрерывности функции a найдутся такие $-1 \leqslant s \leqslant t \leqslant 1$, $\varepsilon, \delta > 0$ и $v_0 \in \mathbb{R}_+$, что для любых $0 \leqslant y \leqslant \varepsilon$ и $v_0 \leqslant v \leqslant v_0 + \varepsilon$ справедливо неравенство

$$a(s+y,v) + a(t-y,v) + \delta < a(1-t+s+2y,v).$$

Рассмотрим функцию u_2 (см. рис. 1):

$$\begin{cases} u_2(x) = v_0, & x \in [-1, s] \cup [t, 1] \\ u_2(x) = v_0 + x - s, & x \in [s, s+\varepsilon] \\ u_2(x) = v_0 + \varepsilon, & x \in [s+\varepsilon, t-\varepsilon] \\ u_2(x) = v_0 + t - x, & x \in [t-\varepsilon, t] \end{cases} \tag{1.5}$$

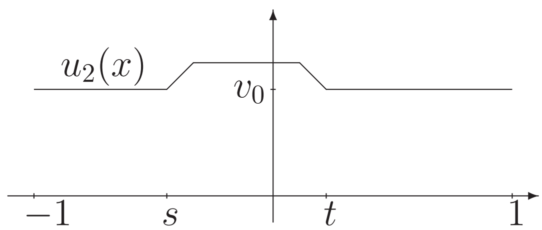

рис. 1

Тогда

$$\begin{cases} \overline{u_2}(x) = v_0, & x \in [-1, 1-t+s] \\ \overline{u_2}(x) = v_0 + \dfrac{x-(1-t+s)}{2}, & x \in [1-t+s, 1-t+s+2\varepsilon] \\ \overline{u_2}(x) = v_0 + \varepsilon, & x \in [1-t+s+2\varepsilon, 1] \end{cases}$$

(см. рис. 2).

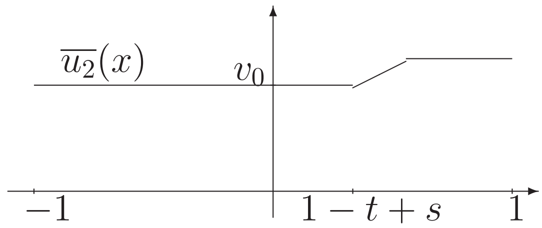

рис. 2

Имеем

$$J(a,\overline{u_2}) = \int\limits_0^{2\varepsilon} F\bigl(u_2(1-t+s+z), \frac{a(1-t+s+z, u_2(1-t+s+z))}{2}\bigr)\,dz$$

$$= \int\limits_0^{\varepsilon} 2F\bigl(v_0+y, \frac{a(1-t+s+2y, v_0+y)}{2}\bigr)\,dy$$

$$0 \leqslant J(a,u_2) - J(a,\overline{u_2}) = \int\limits_0^{\varepsilon} \Bigl(F\bigl(v_0+y, a(s+y,v_0+y)\bigr) + F\bigl(v_0+y, a(t-y,v_0+y)\bigr)$$

$$- 2F\bigl(v_0+y, \frac{a(1-t+s+2y, v_0+y)}{2}\bigr)\Bigr)\,dy$$

$$< \int\limits_0^{\varepsilon} \Bigl(F\bigl(v_0+y, a(s+y,v_0+y)\bigr) + F\bigl(v_0+y, a(t-y,v_0+y)\bigr)$$

$$- 2F\bigl(v_0+y, \frac{a(s+y,v_0+y) + a(t-y,v_0+y) + \delta}{2}\bigr)\Bigr)\,dy =: \Delta J.$$

Рассмотрим теперь функцию $F(v,p) = p^{\alpha}$. Очевидно, что при $\alpha = 1$ выполнено неравенство

$$\frac{F(v,p)+F(v,q)}{2} - F\bigl(v, \frac{p+q}{2} + \frac{\delta}{2}\bigr) < 0. \tag{1.6}$$

Нас интересуют p, q, лежащие на компакте $[0, A]$, где

$$A = \max_{(x,v)} a(x,v), \qquad (x,v) \in [-1,1] \times u_2([-1,1]).$$

Значит найдётся и $\alpha > 1$ такое, что неравенство (1.6) будет выполняться. Например, подходит любое $1 < \alpha < (\log_2 \frac{2A}{A+\delta})^{-1}$.

Тем самым, мы подобрали строго выпуклую по второму аргументу функцию F, для которой $\Delta J \leqslant 0$. Это противоречие доказывает утверждение **2**. □

Замечание 1. *Пусть $a(\cdot, v)$ чётна. Тогда условие (1.4) эквивалентно субаддитивности функции $a(1 - \cdot, v)$. В частности, если неотрицательная функция a чётна и вогнута по первому аргументу, она удовлетворяет (1.4).*

Теорема 2. *Если неравенство* (1.3) *выполняется для произвольной $F \in \mathfrak{F}$ и произвольной кусочно линейной u, закреплённой на левом конце: $u(-1) = 0$, то вес a удовлетворяет неравенству* (1.4).

Доказательство. Будем следовать схеме доказательства пункта 2 теоремы 1. Мы ставим дополнительное ограничение $s > -1$ (ввиду непрерывности весовой функции от этого требования легко избавиться). Также в качестве функции u берём функцию, возрастающую от нуля на отрезке $[-1, s]$, а на отрезке $[s, 1]$ совпадающую с u_2 из теоремы 1. Тогда функция $\overline{u}$ на отрезке $[-1, s]$ совпадает с u, а на отрезке $[s, 1]$ совпадает с $\overline{u_2}$. Тем самым, значения $J(u)$ и $J(\overline{u})$ увеличиваются на одну и ту же величину, и рассуждения, начиная с вычисления ΔJ, полностью повторяются. □

1.3 Свойства весовой функции

move some or all properties to chapter 2

Для краткости в этом параграфе будем опускать второй аргумент у функции a. Тем самым, $a \in C[-1, 1]$ и $a \geqslant 0$.

Лемма 1. *Пусть a удовлетворяет (1.4).*

1. *Для любых $-1 \leqslant t_1 \leqslant t_2 \leqslant \ldots \leqslant t_n \leqslant 1$ выполнены следующие неравенства*

$$\sum_{k=1}^{n} a(t_k) \geqslant a(1 - \sum_{k=1}^{n}(-1)^k t_k), \qquad \text{для чётных } n,$$

$$\sum_{k=1}^{n} a(t_k) \geqslant a(- \sum_{k=1}^{n}(-1)^k t_k), \qquad \text{для нечётных } n.$$

2. *Предположим дополнительно, что функция a чётна. Тогда также выполнены следующие неравенства*

$$\sum_{k=1}^{n} a(t_k) \geqslant a(-1 + \sum_{k=1}^{n}(-1)^k t_k), \qquad \text{для чётных } n,$$
$$\sum_{k=1}^{n} a(t_k) \geqslant a(\sum_{k=1}^{n}(-1)^k t_k), \qquad \text{для нечётных } n.$$

Доказательство. **1.** Будем доказывать по индукции. Для $n = 1$ утверждение тривиально. Пусть теперь n чётное. Тогда, по предположению индукции,

$$\sum_{k=1}^{n-1} a(t_k) \geqslant a(-\sum_{k=1}^{n-1}(-1)^k t_k).$$

Значит

$$\sum_{k=1}^{n-1} a(t_k) + a(t_n) \geqslant a(-\sum_{k=1}^{n-1}(-1)^k t_k) + a(t_n) \geqslant a(1 - \sum_{k=1}^{n}(-1)^k t_k).$$

В случае нечётного n воспользуемся предположением индукции в следующем виде: $\sum_{k=2}^{n} a(t_k) \geqslant a(1 + \sum_{k=2}^{n}(-1)^k t_k)$. Тогда

$$a(t_1)+\sum_{k=2}^{n} a(t_k) \geqslant a(t_1)+a(1+\sum_{k=2}^{n}(-1)^k t_k) \geqslant a(-\sum_{k=2}^{n}(-1)^k t_k+t_1) = a(-\sum_{k=1}^{n}(-1)^k t_k).$$

2. Доказательство этой части очевидно. □

Лемма 2. *1. Пусть функция a удовлетворяет условию (1.4). Если найдётся такое $x_0 \in [-1, 1]$, что $a(x_0) = 0$, то либо $a \equiv 0$ на $[x_0, 1]$, либо множество нулей функции a периодично на $[x_0, 1]$, причем период нацело делит $1 - x_0$.*

2. Пусть функция a удовлетворяет условию (1.4) и чётна. Если найдётся такое $x_0 \in [-1, 1]$, что $a(x_0) = 0$, то либо $a \equiv 0$, либо функция a периодична на отрезке $[-1, 1]$, причем период нацело делит $1 - x_0$.

Доказательство. **1.** Прежде всего, заметим, что если для некоторых $s \leqslant t$ выполнено $a(s) = a(t) = 0$, то неравенство (1.4) влечёт

$$0 = a(s) + a(t) \geqslant a(1 - (t - s)) \geqslant 0,$$

то есть $a(1 - (t - s)) = 0$. Подставив $s = t = x_0$, получаем $a(1) = 0$.

Точно так же, если $s \leqslant 1 - t$ и $a(s) = a(1 - t) = 0$, то $a(s + t) = 0$.

Тем самым, множество нулей функции a симметрично на отрезке $[x_0, 1]$, и если $a(s) = a(s + \Delta) = 0$ $(\Delta \geqslant 0)$, то $a(s + k\Delta) = 0$, для $s + k\Delta \leqslant 1$. Отсюда следует, что множество корней либо периодично на отрезке $[x_0, 1]$, либо совпадает ним.

2. Периодичность нулей функции a следует из её чётности и из первой части утверждения леммы. Обозначим расстояние между соседними нулями за Δ.

Тогда для $-1 \leqslant x \leqslant 1 - \Delta$ выполнено

$$a(x) = a(x) + a(1 - \Delta) \geqslant a(x + \Delta).$$

С другой стороны, $-1 \leqslant -(x + \Delta) \leqslant 1 - \Delta$, и

$$a(x + \Delta) = a(-(x + \Delta)) + a(1 - \Delta) \geqslant a(-x) = a(x).$$

Тем самым, $a(x) = a(x + \Delta)$. □

Лемма 3. *Пусть функции a_1 и a_2 удовлетворяют неравенству (1.4). Тогда функции $\max(a_1(x), a_2(x))$ и $a_1(x) + a_2(x)$ тоже ему удовлетворяет.*

Доказательство. Положим $a(x) = \max(a_1(x), a_2(x))$. Тогда

$$\begin{aligned} a(1-t+s) = \max(a_1(1-t+s), a_2(1-t+s)) &\leqslant \max(a_1(s)+a_1(t), a_2(s)+a_2(t)) \\ &\leqslant \max(a_1(s), a_2(s)) + \max(a_1(t), a_2(t)) = a(s) + a(t). \end{aligned}$$

Утверждение для второй функции очевидно. □

Лемма 4. *Пусть функция a удовлетворяет неравенству (1.4), $k \in \mathbb{N}$. Тогда кусочно линейная функция a_k, интерполирующая функцию a по узлам $(-1 + \frac{2i}{k})$, $i = 0, 1, \ldots, k$, тоже удовлетворяет неравенству (1.4).*

Доказательство. **1.** Пусть $s = -1 + \frac{2i}{k}$, $t = -1 + \frac{2j}{k}$. Тогда неравенство выполняется для a_k, потому что оно выполняется для a, а в этих точках они совпадают.

2. Пусть теперь $s = -1 + \frac{2i}{k}$, и $t \in [-1 + \frac{2j}{k}, -1 + \frac{2(j+1)}{k}]$.

Рассмотрим линейную функцию $h_1(t) = a_k(1 - t + s) - a_k(t) - a_k(s)$. Из части 1 следует $h_1(-1 + \frac{2j}{k}) \leqslant 0$ и $h_1(-1 + \frac{2(j+1)}{k}) \leqslant 0$. Значит, поскольку h_1 линейна, $h_1(t) \leqslant 0$. Тем самым, неравенство выполняется для любого $s = -1+\frac{2i}{k}$ и $t \in [-1, 1]$.

3. Пусть s и t удовлетворяют соотношению $1 - t + s = \frac{2j}{k}$.

Рассмотрим функцию $h_2(y) = a_k(\frac{2j}{k}) - a_k(s+y) - a_k(t+y)$. Если взять y_0 такое, что $s + y_0$ — один из узлов, то $t + y_0$ узел. Следовательно $h_2(y_0) = a(\frac{2j}{k}) - a(s+y_0) - a(t+y_0) \leqslant 0$. Поскольку h_2 линейна между подобными y_0, получаем $h_2(y) \leqslant 0$ для всех допустимых y.

4. Наконец, для произвольного $t \in [-1, 1]$ рассмотрим $h_3(s) = a_k(1 - t + s) - a_k(t) - a_k(s)$. Заметим, что если s или $1 - t + s$ являются узлами, то из частей 2 и 3 следует $h_3(s) \leqslant 0$. Поскольку h_3 линейна между такими s, имеем $h_3(s) \leqslant 0$ для всех допустимых s, что завершает доказательство. □

1.4 Доказательство неравенства (1.3) для кусочно линейных функций

Лемма 5. *Пусть функция $a(x', \cdot, u)$ чётна и удовлетворяет условию (1.4) для всех (x', u). Тогда, если u — неотрицательная кусочно линейная функция, то $I(u) \geqslant I(\overline{u})$.*

Доказательство. Пусть функция u имеет изломы на множестве C ($\partial\Omega \subset C \subset \Omega$). Возьмём

$$U := \{(x', u(x', y)) : x' \in \omega, y \in (-1, 1), (x', y) \notin C\}.$$

Тогда открытое множество U разбивается в объединение конечного числа связных открытых множеств G_j. Обозначим m_j число прообразов значения $(x', u_0) \in G_j$, то есть число решений уравнения $u(x', y) = u_0$ (очевидно, это число постоянно для $(x', u_0) \in G_j$). Легко видеть, что эти прообразы являются линейными функциями (x', u_0): $y = y_k^j(x', u_0)$, $k = 1, \ldots, m_j$, и $D_n y_k^j(x', u(x', y)) = \frac{1}{D_n u(x', y)}$. Мы будем считать, что $y_1^j(x', u_0) < y_2^j(x', u_0) < \cdots < y_{m_j}^j(x', u_0)$.

Уравнение $\overline{u}(x_0', \overline{y}) = u_0$ задаёт $\overline{y}$ как функцию $(x_0', u_0) \in G_j$. Её можно выразить через y_k^j (в частности, $\overline{y}$ кусочно линейна):

$u(x'_0,-1)<u_0$	m_j чётно	$\overline{y}=1-\sum\limits_{k=1}^{m_j}(-1)^k y_k^j$
	m_j нечётно	$\overline{y}=-\sum\limits_{k=1}^{m_j}(-1)^k y_k^j$
$u(x'_0,-1)>u_0$	m_j чётно	$\overline{y}=-1+\sum\limits_{k=1}^{m_j}(-1)^k y_k^j$
	m_j нечётно	$\overline{y}=\sum\limits_{k=1}^{m_j}(-1)^k y_k^j$

Отсюда ясно, что

$$D_n\overline{y}(x',u(x',y))=\frac{1}{D_n\overline{u}(x',y)}=\sum_{k=1}^{m_j}|D_n y_k^j(x',u(x',y))|$$

и $D_i\overline{u}(x',y)=\pm\sum_{k=1}^{m_j}(-1)^k D_i y_k^j(x',u(x',y))$, где знак перед правой частью зависит только от j.

Тогда

$$I(u)=\sum_{j=1}^{N}\int\limits_{G_j}F(x',u(x),\|a_i(x',u(x))D_iu(x),a(x,u(x))D_nu(x)\|)dx$$
$$=\sum_{j=1}^{N}\int\limits_{u(G_j)}\sum_{k=1}^{m_j}F\Big(x',u,\frac{\|a_i(x',u)D_iy_k^j(x',u),a(x',y_k^j(x',u),u)\|}{|D_ny_k^j(x',u)|}\Big)|D_ny_k^j(x',u)|dx'du, \tag{1.7}$$

$$I(\overline{u})=\sum_{j=1}^{N}\int\limits_{G_j}F(x',\overline{u},\|a_i(x',\overline{u}(x))D_i\overline{u}(x),a(x,\overline{u}(x))D_n\overline{u}(x)\|)dx$$
$$=\sum_{j=1}^{N}\int\limits_{u(G_j)}F\Big(x',\overline{u},\frac{\|a_i(x',\overline{u})D_i\overline{y}(x',\overline{u}),a(x',\overline{y}(x',\overline{u}),\overline{u})\|}{\sum_{k=1}^{m_j}|D_ny_k^j(x',\overline{u})|}\Big)\times$$
$$\times\sum_{k=1}^{m_j}|D_ny_k^j(x',\overline{u})|dx'd\overline{u}. \tag{1.8}$$

Зафиксируем j, x' и u и обозначим $b_k=|D_ny_k^j|$, $c_{ki}=D_iy_k^j$, $\overline{c}_i=D_i\overline{y}$, $y_k=y_k^j(x',u)$, $\overline{y}=\overline{y}(x',u)$, $m=m_j$. Тогда справедлива следующая цепочка неравенств:

$$
\begin{aligned}
&\sum_{k=1}^m b_k F\Big(\frac{\|a_i c_{ki}, a(y_k)\|}{b_k}\Big) \overset{a}{\geqslant} F\Big(\frac{\sum_{k=1}^m \|a_i c_{ki}, a(y_k)\|}{\sum_{k=1}^m b_k}\Big) \sum_{k=1}^m b_k \\
&\overset{b}{=} F\Big(\frac{\sum_{k=1}^m \|(-1)^k a_i c_{ki}, a(y_k)\|}{\sum_{k=1}^m b_k}\Big) \sum_{k=1}^m b_k \overset{c}{\geqslant} F\Big(\frac{\|\sum_{k=1}^m ((-1)^k a_i c_{ki}, a(y_k))\|}{\sum_{k=1}^m b_k}\Big) \sum_{k=1}^m b_k \\
&= F\Big(\frac{\|\sum_{k=1}^m (-1)^k a_i c_{ki}, \sum_{k=1}^m a(y_k)\|}{\sum_{k=1}^m b_k}\Big) \sum_{k=1}^m b_k \overset{d}{\geqslant} F\Big(\frac{\|\sum_{k=1}^m (-1)^k a_i c_{ki}, a(\overline{y})\|}{\sum_{k=1}^m b_k}\Big) \sum_{k=1}^m b_k \\
&\overset{e}{=} F\Big(\frac{\|\pm a_i \sum_{k=1}^m (-1)^k c_{ki}, a(\overline{y})\|}{\sum_{k=1}^m b_k}\Big) \sum_{k=1}^m b_k = F\Big(\frac{\|a_i \overline{c}_i, a(\overline{y})\|}{\sum_{k=1}^m b_k}\Big) \sum_{k=1}^m b_k. \qquad (1.9)
\end{aligned}
$$

Здесь в переходе (a) применено неравенство Йенсена, в переходах (b) и (e) использована чётность нормы, в (c) использовано неравенство треугольника, в (d) — предложение 1 и чётность веса a по y.

Из (1.9) видно, что подынтегральное выражение в (1.7) не меньше подынтегрального выражения в (1.8). Тем самым, доказательство завершено. $\square$

Замечание 2. *Если $u(\cdot, -1) \equiv 0$, то утверждение леммы верно без условия чётности веса. Чётность используется только в переходе (d) цепочки неравенств (1.9), и, поскольку при $u(\cdot, -1) \equiv 0$ всегда выполнено $u(x'_0, -1) < u_0$, то предложение 1 как раз обеспечивает требуемые для перехода (d) неравенства.*

1.5 О расширении класса функций, для которых выполняется неравенство (1.3)

проверить ещё раз, что всё ок в многомерном случае

кое-где вместо 2 вылезет $|\Omega|$

Следующее утверждение более-менее стандартно. Однако, множество $\{u : J(u) < \infty\}$ даже не является выпуклым подмножеством $W_1^1(\Omega)$. Поэтому здесь мы приводим полное доказательство для удобства читателя. это ок фраза для диссертации вообще?

Лемма 6. *Пусть функция a непрерывна. Тогда функционал $J(u)$ слабо полунепрерывен снизу в $W_1^1(\Omega)$.*

Доказательство. Пусть $u_m \rightharpoonup u$ в $W_1^1(\Omega)$. Обозначим $A = \underline{\lim}\, J(u_m) \geqslant 0$. Наша задача — доказать $J(u) \leqslant A$. Если $A = \infty$, то утверждение тривиально, поэтому можно считать $A < \infty$. Переходя к подпоследовательности, добиваемся $A = \lim J(u_m)$. Из слабой сходимости $u_m \rightharpoonup u$ заключаем, что найдётся R_0 такое, что $\|u_m\|_{W_1^1(\Omega)} \leqslant R_0$. Более того, переходя к подпрослeдовательности, можно считать, что $u_m \to u$ в $L_1(\Omega)$ и $u_m(x) \to u(x)$ почти всюду. Тогда по теореме Егорова для любого ε найдётся множество G_ε^1 такое, что $|G_\varepsilon^1| < \varepsilon$ и $u_m \rightrightarrows u$ в $\Omega \setminus G_\varepsilon^1$.

Из равномерной сходимости u_m следует существование такого K, что для каждого $m > K$ неравенство $|u_m| \leqslant |u| + \varepsilon$ выполнено для аргументов из $\Omega \setminus G_\varepsilon^1$. Возьмём $G_\varepsilon^2 = \{x \in \Omega \setminus G_\varepsilon^1 : |u(x)| \geqslant \frac{R_0+\varepsilon}{\varepsilon}\}$. Тогда

$$R_0 \geqslant \int\limits_\Omega |u(x)|\, dx \geqslant \int\limits_{G_\varepsilon^2} |u(x)|\, dx \geqslant \int\limits_{G_\varepsilon^2} \frac{R_0+\varepsilon}{\varepsilon}\, dx = |G_\varepsilon^2| \frac{R_0+\varepsilon}{\varepsilon}.$$

То есть $|G_\varepsilon^2| \leqslant \varepsilon \frac{R_0}{R_0+\varepsilon} < \varepsilon$. Тем самым, последовательность u_m равномерно сходится и равномерно ограничена вне множества $G_\varepsilon := G_\varepsilon^1 \cup G_\varepsilon^2$.

Из непрерывности F и a следует, что для произвольных ε и R найдётся такое $N(\varepsilon, R)$, что если $x \in \Omega \setminus G_\varepsilon$, $|M| \leqslant R$ и $m > N(\varepsilon, R)$, то

$$|F\big(u_m(x), a(x, u_m(x))M\big) - F\big(u(x), a(x, u(x))M\big)| < \varepsilon.$$

Рассмотрим множества $E_{m,\varepsilon} := \{x \in \Omega : |u_m'(x)| \geqslant \frac{R_0}{\varepsilon}\}$. Имеем

$$R_0 \geqslant \int\limits_\Omega |u_m'(x)|\, dx \geqslant \int\limits_{E_{m,\varepsilon}} |u_m'(x)|\, dx \geqslant \int\limits_{E_{m,\varepsilon}} \frac{R_0}{\varepsilon}\, dx = \frac{R_0}{\varepsilon}|E_{m,\varepsilon}|.$$

Поэтому $|E_{m,\varepsilon}| \leqslant \varepsilon$.

Теперь можно ввести $L_{m,\varepsilon} := \Omega \setminus (E_{m,\varepsilon} \cup G_\varepsilon)$. Тогда $|L_{m,\varepsilon}| \geqslant 2 - 3\varepsilon$.

Зафиксируем $R := \frac{R_0}{\varepsilon}$, $N(\varepsilon) := N(\varepsilon, \frac{R_0}{\varepsilon})$. Для любых $\varepsilon > 0$, $x \in L_{m,\varepsilon}$ и $m > N(\varepsilon)$ получим

$$\Big|F\big(u_m(x), a(x, u_m(x))|u_m'(x)|\big) - F\big(u(x), a(x, u(x))|u_m'(x)|\big)\Big| < \varepsilon,$$

откуда

$$\int\limits_{L_{m,\varepsilon}} \Big|F\big(u_m(x), a(x, u_m(x))|u_m'(x)|\big) - F\big(u(x), a(x, u(x))|u_m'(x)|\big)\Big|\, dx < 2\varepsilon. \quad (1.10)$$

Возьмём $\varepsilon_j = \frac{\varepsilon}{2^j}$ $(j \geqslant 1)$, $m_j = N(\varepsilon_j) + j \to \infty$ и $L_\varepsilon = \bigcap L_{m_j,\varepsilon_j}$. Тогда $\sum \varepsilon_j = \varepsilon$ и, тем самым, $|\Omega \setminus L_\varepsilon| < 3\varepsilon$. Поскольку из (1.10) следует

$$\int\limits_{L_\varepsilon} \Big| F\big(u_{m_j}(x), a(x, u_{m_j}(x))|u'_{m_j}(x)|\big) - F\big(u(x), a(x, u(x))|u'_{m_j}(x)|\big) \Big| \, dx < 2\varepsilon_j,$$

мы получаем

$$\begin{aligned} A = \lim J(u_{m_j}) = \lim \int\limits_\Omega F\big(u_{m_j}(x), a(x, u_{m_j}(x))|u'_{m_j}(x)|\big)\, dx \\ \geqslant \varliminf \int\limits_\Omega \chi_{L_\varepsilon}(x) F\big(u(x), a(x, u(x))|u'_{m_j}(x)|\big)\, dx =: \varliminf J_\varepsilon(u'_{m_j}). \end{aligned}$$

Наш новый функционал

$$J_\varepsilon(v) = \int\limits_\Omega \chi_{L_\varepsilon}(x) F\big(u(x), a(x, u(x))|v(x)|\big)\, dx$$

выпуклый. Вновь переходя к подпоследовательности u_k, можно считать, что $\varliminf J_\varepsilon(u'_{m_j}) = \lim J_\varepsilon(u'_k)$. Так как $u'_k \rightharpoonup u'$ в L_1, то можно подобрать последовательность выпуклых комбинаций u'_k, которые будут сходиться к u' сильно (см. [3, Теорема 3.13]). А именно: найдутся $\alpha_{k,l} \geqslant 0$ для $k \in \mathbb{N}$, $l \leqslant k$ такие, что $\sum_{l=1}^k \alpha_{k,l} = 1$ для каждого k и $w_k := \sum_{l=1}^k \alpha_{k,l} u'_l \to u'$ в L_1. Кроме того, очевидно, можно потребовать, чтобы минимальный индекс l ненулевого коэффициента $\alpha_{k,l}$ стремился к бесконечности по k. Тогда

$$\lim J_\varepsilon(u'_k) = \lim \sum_{l=1}^k \alpha_{k,l} J_\varepsilon(u'_l).$$

В силу выпуклости J_ε имеем

$$\sum_{l=1}^k \alpha_{k,l} J_\varepsilon(u'_l) \geqslant J_\varepsilon(w_k).$$

Наконец, поскольку $w_k \to u'$ в $L_1(\Omega)$, переходя к подпоследовательности, можем считать, что $w_k(x) \to u'(x)$ почти всюду. Кроме того, так как для $x \in L_\varepsilon$ выполнено $|u'_j(x)| < \frac{R_0}{\varepsilon}$, то и $|w_k(x)| < \frac{R_0}{\varepsilon}$. Значит,

$$F\big(u(x), a(x, u(x))|w_k(x)|\big) \leqslant \max_{(x,M)} F\big(u(x), a(x, u(x))M\big) < \infty,$$

где максимум берется по компактному множеству $(x, M) \in \Omega \times [-\frac{R_0}{\varepsilon}, \frac{R_0}{\varepsilon}]$. оно не компактно Поэтому применима теорема Лебега, и мы получаем $\lim J_\varepsilon(w_k) = J_\varepsilon(u')$. Таким образом,

$$A \geqslant \lim J_\varepsilon(u'_k) = \lim \sum_{l=1}^{k} \alpha_{k,l} J_\varepsilon(u'_l) \geqslant \underline{\lim}\, J_\varepsilon(w_k) = J_\varepsilon(u').$$

Ввиду произвольности $\varepsilon > 0$ имеем $A \geqslant J(u)$. □

Лемма 7. *Пусть $A \subset W_1^1(\Omega)$. И пусть $B \subset A$ таково, что $\forall v \in B$ выполнено $J(\overline{v}) \leqslant J(v)$. Предположим, что для каждого $u \in A$ найдётся последовательность $u_k \in B$ такая, что $u_k \to u$ в $W_1^1(\Omega)$ и $J(u_k) \to J(u)$. Тогда $\forall u \in A$ будет выполнено $J(\overline{u}) \leqslant J(u)$.*

Доказательство. Возьмём некоторую $u \in A$ и для нее найдем приближающую последовательность $\{u_k\} \subset B$. По условию $J(\overline{u_k}) \leqslant J(u_k) \to J(u)$. В [2, Theorem 1] показано, что

$$u_k \to u \text{ в } W_1^1(\Omega) \quad \Longrightarrow \quad {u_k}^* \rightharpoonup u^* \text{ in } W_1^1(\Omega).$$

Поскольку $\overline{u_k}(x) = {u_k}^*(\frac{x-1}{2})$ and $\overline{u}(x) = u^*(\frac{x-1}{2})$, имеем $\overline{u_k} \rightharpoonup \overline{u}$ в $W_1^1(\Omega)$. Из леммы 6 получаем

$$J(\overline{u}) \leqslant \liminf J(\overline{u_k}) \leqslant \lim J(u_k) = J(u).$$

□

Следствие 1. *Пусть вес a непрерывен, и неравенство (1.3) верно для неотрицательных кусочно линейных функций u. Тогда оно верно для всех неотрицательных липшицевых функций.*

Доказательство. Не нужно ли тут что-то от границы Ω? Ввиду теоремы 1 из §6.6 [4], любая липшицева функция u может быть приближены последовательностью $u_k \in C^1(\bar(\Omega))$ в следующем смысле:

$$u_k \rightrightarrows u, \qquad u'_k \to u' \text{ п.в.}, \qquad |u'_k| \leqslant const.$$

Тогда по теореме Лебега $u_k \to u$ в $W_1^1(\Omega)$ и $J(u_k) \to J(u)$. В свою очередь, u_k могут быть аналогичным образом приближены кусочно линейными функциями. Применив лемму 5 и лемму 7, получаем требуемое. □

1.6 Переход к соболевским функциям

Теорема 3. *Пусть функция $a(x', \cdot, u)$ чётна и удовлетворяет условию (1.4) для всех x' и u. Тогда*

1. *Неравенство (1.3) верно для произвольной неотрицательной $u \in Lip(\Omega)$.*

2. *Предположим, что $\partial\omega \in Lip$ и для любых $x' \in \omega, z \in \mathbb{R}_+, p \in \mathbb{R}$ функция F удовлетворяет неравенству*

$$F(x', z, p) \leqslant C(1 + |z|^{q^*} + |p|^q),$$

где $\frac{1}{q^*} = \frac{1}{q} - \frac{1}{n}$, если $q < n$, либо q^* любое в противном случае. Если $q \leqslant n$, то дополнительно предположим, что веса a и a_i ограничены. Тогда неравенство (1.3) верно для произвольной неотрицательной $u \in W_q^1(\Omega)$.

Доказательство. **1.** Мы можем приблизить липшицевы u кусочно линейными функциями u_k вместе с производными почти всюду. Поскольку u_k равномерно ограничены вместе с производными, то и $F(x', u_k(x), \|\mathcal{D}u_k\|)$ равномерно ограничены. Тогда мы можем воспользоваться теоремой Лебега, получив $u_k \to u$ в $W_1^1(\Omega)$ и $I(u_k) \to I(u)$. Воспользовавшись предложением 7, получаем требуемое.

2. Рассмотрим произвольную $u \in W_q^1(\Omega)$. Для нее можно построить последовательность кусочно линейных функций u_k, приближающих её в $W_q^1(\Omega)$. Действительно, поскольку $\partial\Omega \in Lip$, u можно продолжить финитным образом на внутренность большого шара в $\mathbb{R}^n$ и приблизить гладкими финитными функциями. Далее шар триангулируется, и значения функции линейно интерполируются. Очевидно, в процессе все функции остаются неотрицательными.

Тогда, ввиду предложения 7, достаточно добиться $I(u_k) \to I(u)$. Доказательство этой сходимости можно свести к теореме Красносельского о непрерывности оператора Немыцкого (см. [5, гл. 5, §17]). Однако для удобства читателя мы приводим здесь рассуждение целиком.

Покажем, что веса $a_i(x', u(x))$ и $a(x, u(x))$ ограничены. Если $q \leqslant n$, то это выполнено по предположению теоремы. Если же нет, то $W_q^1(\Omega)$ вкладывается в $C(\overline{\Omega})$, тем самым, $u_k(x)$ равномерно ограничены, а значит, и $a_i(x', u_k(x))$ и $a(x, u_k(x))$ равномерно ограничены. Поэтому $\|\mathcal{D}u_k(x)\| \leqslant C_1|\nabla u_k(x)|$. То есть,

$$F(x', u_k(x), \|\mathcal{D}u_k(x)\|) \leqslant C_2(1 + |u_k(x)|^{q^*} + |\nabla u_k(x)|^q).$$

Рассмотрим множества A_m, состоящие из $x \in \Omega$, для которых при всех $k \geqslant m$ выполнено $1+|u_k(x)|^{q^*}+|\nabla u_k(x)|^q \leqslant 2(1+|u(x)|^{q^*}+|\nabla u(x)|^q)$. Очевидно, что $A_m \subset A_{m+1}$. Переходя к подпоследовательности, можем считать, что $u_k \to u$ и $\nabla u_k \to \nabla u$ почти всюду. А значит $|A_m| \to |\Omega|$. Тогда

$$\begin{aligned} \mathcal{X}\{A_k\}F(x', u_k(x), \|\mathcal{D}u_k(x)\|) &\leqslant 2(1+|u(x)|^{q^*}+|\nabla u(x)|^q), \\ \mathcal{X}\{A_k\}F(x', u_k(x), \|\mathcal{D}u_k(x)\|) &\to F(x', u(x), \|\mathcal{D}u(x)\|) \end{aligned}$$

почти всюду. По теореме вложения $\|u_k\|_{q^*} \leqslant C_3\|u_k\|_{W_q^1}$. Тем самым, мы нашли суммируемую мажоранту и получаем $\int_{A_k} \mathcal{X}\{A_k\}F(x', u_k(x), \|\mathcal{D}u_k(x)\|)dx \to I(u)$ по теореме Лебега .

Теперь оценим остаток:

$$\int_{\Omega\setminus A_k} F(x', u_k(x), \|\mathcal{D}u_k(x)\|)dx \leqslant \int_{\Omega\setminus A_k} C_2(1+|u_k(x)|^{q^*}+|\nabla u_k(x)|^q)dx$$
$$\leqslant C_4\Big(\int_{\Omega\setminus A_k}(1+|u(x)|^{q^*}+|\nabla u(x)|^q)dx+\int_{\Omega\setminus A_k}(1+|u(x)-u_k(x)|^{q^*}+|\nabla(u-u_k)(x)|^q)\Big)dx.$$

Первое слагаемое стремится к нулю по абсолютной непрерывности интеграла. Для второго слагаемого выполнено

$$\int_{\Omega\setminus A_k}(1+|u(x)-u_k(x)|^{q^*}+|\nabla(u-u_k)(x))|^q)dx$$
$$\leqslant (|\Omega\setminus A_m(k)|+\|u-u_k\|^{q^*}_{W_q^1}+\|u-u_k\|^q_{W_q^1}) \to 0.$$

Тем самым, сходимость $I(u_k) \to I(u)$ доказана. $\square$

Аналогично, с учётом замечаний (2) и (2), доказывается

Теорема 4. *Пусть $u(\cdot, -1) \equiv 0$ и функция $a(x', \cdot, u)$ удовлетворяет условию (1.4) для всех x' и u. Тогда верны выводы теоремы 3.*

Глава 2. О неравенстве Пойа-Сегё для симметризации и монотонной перестановки в общем случае при $n = 1$

fix all

$$J(a, u) =$$

Вторую форму записи $J(a, u)$ мы используем лишь во второй главе. Также во второй главе мы будем использовать обозначение

$$J(B, a, u) = \int\limits_B F(x', u(x), \|\mathcal{D}u\|) dx.$$

Во второй главе мы снимаем требование ограничения роста, и также доказываем аналогичный результат для симметричной перестановки:

$$J(u^*) \leqslant J(u), \tag{2.1}$$

тем самым закрывая пробел в работе [2].

2.1 Доказательство неравенства (1.3) для монотонных весов

В этом параграфе мы получим неравенство (1.3) при дополнительном условии монотонности весовой функции при $x \in [-1, 0]$ и при $x \in [0, 1]$.

Лемма 8. *Пусть a — непрерывная функция, $a(\cdot, u)$ возрастает на $[-1, 0]$ и убывает на $[0, 1]$ для всех $u \geqslant 0$. Тогда для любой функции $u \in W_1^1(-1, 1)$, $u \geqslant 0$, найдётся последовательность $\{u_k\} \subset Lip[-1, 1]$, удовлетворяющая*

$$u_k \to u \text{ в } W_1^1(-1, 1) \quad \text{и} \quad J(a, u_k) \to J(a, u). \tag{2.2}$$

Доказательство. Можно считать, что $J(a, u) < \infty$.

Мы докажем утверждение для функционала

$$J_1(u) = \int\limits_0^1 F\big(u(x), a(x, u(x))|u'(x)|\big)\, dx.$$

Вторая часть с интегрированием по $[-1,0]$ сводится к J_1 заменой переменной.

Для доказательства мы модифицируем схему из [6, Теорема 2.4]. Частично доказательство совпадает с [6], но для удобства читателя мы приводим здесь его полностью.

Нам потребуется следующее вспомогательное утверждение.

Предложение 1. *[6, Lemma 2.7]. Пусть $\varphi_h : [-1,1] \to \mathbb{R}$ — последовательность липшицевых функций, удовлетворяющих условиям: $\varphi_h' \geqslant 1$ для почти всех x и всех h, $\varphi_h(x) \to x$ для почти каждого x. Тогда для любой $f \in L_1(\mathbb{R})$ выполнено $f(\varphi_h) \to f$ в $L_1(\mathbb{R})$.*

Для $h \in \mathbb{N}$ покроем множество $\{x \in [0,1] : |u'(x)| > h\}$ открытым множеством A_h. Не умаляя общности, можно считать, что $A_{h+1} \subset A_h$ и $|A_h| \to 0$ при $h \to \infty$.

Обозначим v_h неотрицательную непрерывную функцию, заданную на $[0,1]$, совпадающую с u на множестве $[0,1] \setminus A_h$, и линейную на интервалах, составляющих A_h. Тогда $v_h \to u$ в $W_1^1(-1,1)$. Теперь изменим v_h так, чтобы сделать их липшицевыми.

Представим $A_h = \cup_k \Omega_{h,k}$, где $\Omega_{h,k} = (b_{h,k}^-, b_{h,k}^+)$. Обозначим

$$\alpha_{h,k} := |\Omega_{h,k}|, \quad \beta_{h,k} := v_h(b_{h,k}^+) - v_h(b_{h,k}^-) = u(b_{h,k}^+) - u(b_{h,k}^-).$$

Тогда $v_h' = \frac{\beta_{h,k}}{\alpha_{h,k}}$ в $\Omega_{h,k}$. Заметим, что

$$\sum_k |\beta_{h,k}| \leqslant \int\limits_{A_h} |u'|\,dx \leqslant \|u'\|_{L_1(-1,1)} < \infty,$$

а значит, $\sum_k |\beta_{h,k}| \to 0$ при $h \to 0$ по теореме Лебега.

Определим функцию $\varphi_h \in W_1^1(0,1)$ следующим образом:

$$\begin{aligned} &\varphi_h(0) = 0 \\ &\quad \varphi_h' = 1 && \text{в } [0,1] \setminus A_h, \\ &\quad \varphi_h' = \max\Big(\frac{|\beta_{h,k}|}{\alpha_{h,k}}, 1\Big) && \text{в } \Omega_{h,k}. \end{aligned}$$

Заметим, что $\int_0^1 |\varphi_h'|\,dx \leqslant 1 + \sum_k |\beta_{h,k}| < \infty$.

Покажем, что $\varphi_h' \to 1$ в $L_1(0,1)$:

$$\int |\varphi_h' - 1|\,dx = \sum_k \Big(\max\Big(\frac{|\beta_{h,k}|}{\alpha_{h,k}}, 1\Big) - 1\Big)\alpha_{h,k} \leqslant \sum_k |\beta_{h,k}| \to 0.$$

Отсюда следует, что φ_h удовлетворяет условиям предложения 1.

Рассмотрим теперь $\varphi_h^{-1} : [0,1] \to [0,1]$ — ограничение обратной к φ_h функции на $[0,1]$. Тогда $0 \leqslant (\varphi_h^{-1})' \leqslant 1$ и

$$\begin{aligned}
&\varphi_h^{-1}(0) = 0 && \\
&(\varphi_h^{-1})' = 1 && \text{в } [0,1] \setminus \varphi_h(A_h), \\
&(\varphi_h^{-1})' = \min\Big(\frac{\alpha_{h,k}}{|\beta_{h,k}|}, 1\Big) && \text{в } [0,1] \cap \varphi_h(\Omega_{h,k}).
\end{aligned}$$

Возьмём $u_h = v_h(\varphi_h^{-1})$. Заметим, что $u_h(0) = u(0)$, и

$$\begin{aligned}
&u_h' = v_h'(\varphi_h^{-1}) \cdot (\varphi_h^{-1})' = u'(\varphi_h^{-1}) && \text{в } [0,1] \setminus \varphi_h(A_h), \\
&u_h' = v_h'(\varphi_h^{-1}) \cdot (\varphi_h^{-1})' = \operatorname{sign} \beta_{h,k} \cdot \min\Big(1, \frac{|\beta_{h,k}|}{\alpha_{h,k}}\Big) && \text{в } [0,1] \cap \varphi_h(\Omega_{h,k}).
\end{aligned}$$

Тем самым, u_h липшицева, поскольку u' ограничена в $[0,1] \setminus A_h$.

Покажем, что $u_h \to u$ в $W_1^1(0,1)$. Для этого достаточно оценить

$$\|u_h' - u'\|_{L_1} \leqslant \int\limits_{[0,1]\setminus\varphi_h(A_h)} |u_h' - u'| + \int\limits_{[0,1]\cap\varphi_h(A_h)} |u_h'| + \int\limits_{[0,1]\cap\varphi_h(A_h)} |u'| =: P_h^1 + P_h^2 + P_h^3.$$

$$P_h^1 = \int\limits_{[0,1]\setminus\varphi_h(A_h)} |u'(\varphi_h^{-1}) - u'|\,dx = \int\limits_{\varphi_h^{-1}([0,1])\setminus A_h} |u' - u'(\varphi_h)|\,dz \leqslant \int\limits_{[0,1]} |u' - u'(\varphi_h)|\,dz.$$

В силу предложения 1, $P_h^1 \to 0$. Далее,

$$P_h^2 \leqslant |\varphi_h(A_h)| = \sum_k |\varphi_h(\Omega_{h,k})| = \sum_k \max(|\beta_{h,k}|, \alpha_{h,k}) \leqslant \sum_k \alpha_{h,k} + \sum_k |\beta_{h,k}| \to 0.$$

Наконец, $P_h^3 \to 0$ по абсолютной непрерывности интеграла, и утверждение доказано.

Осталось показать, что $J_2(u_h) \to IWg_2(u)$.

$$J_1(u_h) = \int\limits_{[0,1]\setminus\varphi_h(A_h)} F\big(u_h(x), a(x, u_h(x))|u_h'(x)|\big)\,dx + \\ \int\limits_{[0,1]\cap\varphi_h(A_h)} F\big(u_h(x), a(x, u_h(x))|u_h'(x)|\big)\,dx =: \hat{P}_h^1 + \hat{P}_h^2.$$

Поскольку $u \in W_1^1(0,1)$, имеем $u \in L_\infty([0,1])$. Обозначим $\|u\|_\infty = r$, тогда $\|u_h\|_\infty < 2r$ при достаточно больших h. Кроме того, $|u_h'| \leqslant 1$ почти всюду в $\varphi_h(A_h)$. Тогда $\hat{P}_h^2 \leqslant M_F|\varphi_h(A_h)| \to 0$, где

$$M_F = \max_{[-2r,2r]\times[-M_a,M_a]} F; \quad M_a = \max_{[0,1]\times[-2r,2r]} a.$$

Далее,

$$\hat{P}_h^1 = \int\limits_{[0,1]\setminus\varphi_h(A_h)} F\big(u(\varphi_h^{-1}(x)), a(x, u(\varphi_h^{-1}(x))|u'(\varphi_h^{-1}(x))(\varphi_h^{-1})'|)\big)\,dx$$

$$= \int\limits_{\varphi_h^{-1}([0,1])\setminus A_h} F\big(u(z), a(\varphi_h(z), u(z))|u'(z)|\big)\,dz$$

$$= \int\limits_{[0,1]} F\big(u(z), a(\varphi_h(z), u(z))|u'(z)|\big)\chi_{\varphi_h^{-1}([0,1])\setminus A_h}\,dz.$$

Последнее равенство, вообще говоря, не имеет смысла, так как $\varphi_h(z)$ может принимать значения вне $[0,1]$. Определим $a(z,u) = a(1,u)$ при $z > 1$, теперь выражение корректно. Заметим, что $\chi_{\varphi_h^{-1}([0,1])\setminus A_h}$ возрастают, так как множества $\varphi_h^{-1}([0,1])$ возрастают и A_h убывают, то есть $\varphi_{h_1}^{-1}([0,1]) \subset \varphi_{h_2}^{-1}([0,1])$ и $A_{h_1} \supset A_{h_2}$ при $h_1 \leqslant h_2$. На отрезке $[0,1]$ (и даже $\varphi_h([0,1])$) функция a убывает, а также $\varphi_h(z)$ убывает по h, значит $a(\varphi_h(z))$ будет расти по h. В таком случае можно применить теорему о монотонной сходимости и получить

$$\hat{P}_h^1 \to \int\limits_{[0,1]} F\big(u(z), a(z, u(z))|u'(z)|\big)\,dz.$$

□

Замечание 3. *Очевидно, что те же рассуждения с закреплением функции и на левом конце можно провести на любом интервале $[x_0, x_1]$, где вес a убывает по x. То есть можно получить последовательность $\{u_h\}$, удовлетворяющую*

$$u_h(x_0) = u(x_0); \qquad u_h \to u \text{ в } W_1^1(x_0, x_1);$$

$$\int\limits_{x_0}^{x_1} F\big(u_h(x), a(x, u_h(x))|u_h'(x)|\big) \to \int\limits_{x_0}^{x_1} F\big(u(x), a(x, u(x))|u'(x)|\big).$$

Аналогично, если a возрастает по x, можно аппроксимировать и с закреплением на правом конце.

Следствие 2. *Пусть функция a непрерывна, чётна, убывает на $[0,1]$ и удовлетворяет неравенству* (1.4). *Тогда для любой $u \in W_1^1(-1,1)$ выполнено $IWg(a,u^*) \leqslant IWg(a,u)$.*

Доказательство. Неравенство немедленно следует из лемм 7 и 8. □

2.2 Доказательство неравенства (1.3) для произвольных весов

Теперь мы хотим избавиться от условия монотонности веса по x. Будем это делать в несколько этапов.

Для начала отметим, что все свойства функции a интересуют нас лишь в окрестности графиков функций u, $\overline{u}$.

Мы вводим несколько ограничений на весовую функцию. Каждое следующее, будучи добавленным к предыдущим, задаёт более узкий класс весов.

$(H1)$ $a(x,v)$ чётна по x и удовлетворяет неравенству (1.4), а также $J(a,u) < \infty$.

$(H2)$ На множестве $v \in [\min u(x), \max u(x)]$, для которых $a(\cdot,v) \not\equiv 0$, количество нулей функций $a(\cdot,v)$ ограничено константой, не зависящей от v.

$(H3)$ Если $a(x_0,u(x_0)) = 0$ для некоторого x_0, то $a(\cdot,u(x_0)) \equiv 0$. Кроме того, выполнено $\lim_{k\to\infty} D_k(a,U(a)) = 0$, где

$$U(a) := \{v \in [\min u(x), \max u(x)] : a(\cdot,v) \not\equiv 0\},$$

$$D_k(a,U) := \sup_{v\in U} \frac{\max\limits_{|x_1-x_2|\leqslant \frac{2}{k}} |a(x_1,v) - a(x_2,v)|}{\min\limits_{\operatorname{dist}(x,u^{-1}(v))\leqslant \frac{2}{k}} a(x,v)}. \tag{2.3}$$

$(H4)$ Найдётся такое чётное k, что $a(\cdot,v)$ линейны для каждого v на участках $[-1+\frac{2i}{k}, -1+\frac{2(i+1)}{k}]$.

$(H5)$ Множество $v \in \mathbb{R}$, для которых $a(\cdot,v)$ имеет участки постоянства, отличается от множества $v \in \mathbb{R}$ таких, что $a(\cdot,v) \equiv 0$, лишь на множество меры 0.

$(H6)$ Отрезок $[-1,1]$ можно разбить на конечное число промежутков, на каждом из которых в v-окрестности графика $u(x)$ вес a не меняет монотонности по x.

$(H7)$ Пусть $x_1 < x_2 < x_3$, и на $[x_1, x_2]$ вес $a(\cdot, v)$ в v-окрестности графика функции u убывает, а на $[x_2, x_3]$ возрастает. Тогда в некоторой окрестности точки $u(x_2)$ имеем $a(\cdot, v) \equiv 0$. Выглядит как бред. Проверить. Вроде беда с параметрами a

Вес, удовлетворяющий условию $(H1)$, мы будем называть допустимым для заданной функции $u(x)$.

Теперь мы можем сформулировать основное утверждение.

Теорема 5. *Пусть $F \in \mathfrak{F}$, функция $u \in W_1^1(-1,1)$ неотрицательна, и весовая функция $a : [-1,1] \times \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$ непрерывна и допустима для u. Тогда справедливо неравенство* (1.3).

Мы докажем неравенство (1.3) при условиях $(H1) - (H7)$, а затем будем постепенно избавляться от них.

Для доказательства нам потребуются следующие факты.

Предложение 2. *[1, Theorem 6.19] Для любой $u \in W_1^1(-1,1)$ и произвольного множества $A \subset \mathbb{R}$ нулевой меры выполнено $u'(x) = 0$ для почти всех $x \in u^{-1}(A)$.*

Лемма 9. *Пусть $u \in W_1^1(-1,1)$ неотрицательна. И пусть замкнутое множество $W \subset \mathbb{R}_+$ таково, что множество всех $v \in W$, для которых $a(\cdot, v) \not\equiv 0$, имеет меру ноль. Тогда найдётся возрастающая последовательность весов $\mathfrak{b}_\ell$ такая, что*

1) $\mathfrak{b}_\ell(\cdot, v) \rightrightarrows a(\cdot, v)$ для почти всех v;

2) $\mathfrak{b}_\ell(\cdot, v) \equiv 0$ для каждого v в некоторой (зависящей от ℓ) окрестности W;

3) $J(\mathfrak{b}_\ell, u) \to J(a, u)$ и $J(\mathfrak{b}_\ell, \overline{u}) \to J(a, \overline{u})$.

Замечание 4. *Если a допустимы для u, то и $\mathfrak{b}_\ell$ тоже.*

Доказательство. Возьмём $\rho(d) := \min(1, \max(0, d))$,

$$\mathfrak{b}_\ell(x, v) := a(x, v) \cdot \rho(\ell \operatorname{dist}(v, W) - 1) \leqslant a(x, v).$$

Вес $\mathfrak{b}_\ell$ равен нулю в $\left(\frac{1}{\ell}\right)$-окрестности W. Кроме того, $\mathfrak{b}_\ell \equiv a$ вне $\left(\frac{2}{\ell}\right)$-окрестности W, а также $\mathfrak{b}_\ell(x, v)$ возрастает по ℓ. Тем самым тем самым или это ещё один очевидный факт?, $\mathfrak{b}_\ell(\cdot, v) \rightrightarrows a(\cdot, v)$ для почти всех v. По теореме о монотонной сходимости имеем $J(u^{-1}(\mathbb{R}_+ \setminus W), \mathfrak{b}_\ell, u) \nearrow J(u^{-1}(\mathbb{R}_+ \setminus W), a, u)$.

Разобьем множество W на два: $W_1 := \{v \in W : a(\cdot, v) \equiv 0\}$ и $W_2 = W \setminus W_1$. Тогда

$$J(u^{-1}(W_1), \mathfrak{b}_\ell, u) = J(u^{-1}(W_1), a, u),$$
$$J(u^{-1}(W_2), \mathfrak{b}_\ell, u) = \int\limits_{x \in u^{-1}(W_2)} F\big(u(x), \mathfrak{b}_\ell(x, u(x))|u'(x)|\big)\, dx.$$

При этом, по предложению 2, почти всюду на $u^{-1}(W_2)$ выполнено $u'(x) = 0$. То есть

$$J(u^{-1}(W_2), \mathfrak{b}_\ell, u) = \int\limits_{x \in u^{-1}(W_2)} F\big(u(x), 0\big)\, dx = 0.$$

Аналогично $J(u^{-1}(W_2), a, u) = 0$, откуда $J(\mathfrak{b}_\ell, u) \to J(a, u)$. Вторая часть пункта *3)* доказывается так же. $\square$

Перейдем к доказательству теоремы.

Шаг 1. *Пусть $u \in W_1^1(-1, 1)$, и вес a удовлетворяет условиям $(H1)$ – $(H7)$. Тогда выполняется неравенство (1.3).*

Разобьем отрезок $[-1, 1]$ на отрезки $\Delta_k = [\hat{x}_k, \hat{x}_{k+1}]$, состоящие из двух частей. В левой части каждого отрезка вес a будет возрастать по x в окрестности графика $u(x)$, в правой же будет убывать. Согласно замечанию 3 на каждом таком отрезке можно повторить схему из леммы 8, приближая функцию u липшицевыми функциями u_n. Это даёт $J(\Delta_k, a, u_n) \to J(\Delta_k, a, u)$.

Однако при такой аппроксимации функции u_n могут иметь разрывы в точках $\hat{x}_k$.

Заметим теперь, что согласно условию $(H7)$ можно выбрать точки $\hat{x}_k$ так, что $a \equiv 0$ в (x, v)-окрестности точек $(\hat{x}_k, u(\hat{x}_k))$.

Изменим теперь функции u_n в окрестности точек $\hat{x}_k$ на линейные, сделав u_n непрерывными на $[-1, 1]$. В силу вышесказанного, интегралов $J(\Delta_k, a, u_n)$ это не изменит, и мы получаем $J(a, u_n) \to J(a, u)$ и $u_n \to u$ в $W_1^1(-1, 1)$.

По лемме 7 получаем (1.3).

Шаг 2. *Пусть вес a удовлетворяет условиям $(H1)$ – $(H6)$. Тогда выполняется неравенство (1.3).*

Применим лемму 9. В качестве множества W возьмем множество всех v, при которых происходит переход графика $u(x)$ из промежутка, в котором вес убывает по x, в промежуток, в котором вес возрастает. Очевидно, получившиеся функции $\mathfrak{b}_\ell$ удовлетворяют $(H1)-(H7)$. Из шага 1 имеем $J(\mathfrak{b}_\ell,\overline{u}) \leqslant J(\mathfrak{b}_\ell,u)$. Переходя к пределу, получаем требуемое неравенство (1.3).

Шаг 3. *Пусть вес a удовлетворяет условиям $(H1)-(H5)$. Тогда выполняется неравенство (1.3).*

Рассмотрим абсциссы точек излома функции a и ординаты, для которых a имеет участки постоянства. Эти абсциссы и ординаты определяют деление прямоугольника $[-1,1]\times[\min u(x),\max u(x)]$ на более мелкие, внутри которых вес a не меняет монотонности. Однако, количество мелких прямоугольников может оказаться бесконечным. Кроме того, если функция пересекает горизонтальную границу прямоугольника, монотонность в v-окрестности точки пересечения может меняться.

Возьмем множество W точек v, для которых вес a имеет участки постоянства по x. В соответствии с $(H5)$ множество $v\in W$, для которых $a(\cdot,v)\not\equiv 0$, имеет нулевую меру.

Применив лемму 9, построим последовательность весов $\mathfrak{b}_\ell$. У каждого из них количество участков монотонности конечно, поскольку между соседними по v участками строгой монотонности присутствует полоса нулевых значений веса шириной по крайней мере $\frac{2}{k}$.

Тем самым, вес $\mathfrak{b}_\ell$ может менять монотонность вдоль графика u либо в точках $x=-1+\frac{2i}{k}$, либо в тех местах, где график пересекает полосу нулевых значений веса. Ясно, что таких пересечений может быть лишь конечное число, поскольку $\int|u'|$ увеличивается как минимум на $\frac{2}{\ell}$ во время такого перехода, а $u'\in L_1(-1,1)$.

Мы получили, что $\mathfrak{b}_\ell$ удовлетворяют $(H1)-(H6)$. Из шага 2 имеем $J(\mathfrak{b}_\ell,\overline{u}) \leqslant J(\mathfrak{b}_\ell,u)$. Переходя к пределу, получаем (1.3).

Шаг 4. *Пусть вес a удовлетворяет условиям $(H1)-(H3)$. Тогда выполняется неравенство (1.3).*

Предположим, что функция a удовлетворяет $(H1)-(H3)$, в частности $J(a,u)<\infty$.

Зафиксируем произвольное четное k. По точкам $a(-1+\frac{2i}{k},v)$ для каждого v построим кусочно линейную по x интерполяцию. Получившаяся функция $a_k(x,v)$ непрерывна, четна по x и по лемме 4 удовлетворяет неравенству (1.4). Кроме того, $a_k\to a$ при $k\to\infty$, причем сходимость равномерная на компактах.

Однако неравенство $a_k(x,u(x)) \leqslant a(x,u(x))$ не обязано выполняться, и потому веса a_k могут не быть допустимыми для u.

Возьмем $\mathfrak{c}_k := (1 - D_k(a_k, U(a_k)))a_k$, где D_k определены в (2.3). Числа $D_k(a_k, U(a_k))$ положительны и стремятся к нулю, поэтому $\mathfrak{c}_k \to a$ при $k \to \infty$. Покажем, что $\mathfrak{c}_k(x,u(x)) \leqslant a(x,u(x))$. Возьмем некоторое число $x \in [-1 + \frac{2i}{k}, -1 + \frac{2(i+1)}{k}] =: [x_i, x_{i+1}]$. Тогда $\mathfrak{c}_k(x,u(x)) \leqslant \max(\mathfrak{c}_k(x_i,u(x)), \mathfrak{c}_k(x_{i+1},u(x)))$, поскольку $\mathfrak{c}_k$ кусочно линейны по x. Далее,

$$\begin{aligned}\mathfrak{c}_k(x_i,u(x)) &= (1 - D_k(a_k, U(a_k))) \cdot a(x_i,u(x)) \\ &\leqslant a(x_i,u(x)) - \frac{a(x_i,u(x)) - a(x,u(x))}{a(x_i,u(x))} \cdot a(x_i,u(x)) = a(x,u(x)).\end{aligned}$$

Аналогично, $\mathfrak{c}_k(x_{i+1},u(x)) \leqslant a(x,u(x))$. Тем самым, $\mathfrak{c}_k(x,u(x)) \leqslant a(x,u(x))$ для любого x, и $\mathfrak{c}_k$ являются допустимыми для u. То есть функции $\mathfrak{c}_k$ удовлетворяют $(H1) - (H4)$.

При заданном $k \in \mathbb{N}$, будем приближать функцию $\mathfrak{c}_k =: \mathfrak{c}$ весами, удовлетворяющими $(H1) - (H5)$. Рассмотрим вспомогательную функцию $\Lambda(x) = 1 - |x|$, удовлетворяющую условию (1.4).

Возьмем

$$t(v) := D_k(\mathfrak{c}, U(\mathfrak{c})) \cdot \max\{\tau \geqslant 0 : \forall x \in u^{-1}(v) \quad \tau\Lambda(x) \leqslant \mathfrak{c}(x,u(x))\}.$$

Функция t зависит от k, но мы будем опускать это в записи.

Ясно, что максимальное τ равно нулю только если $c(\cdot, v) \equiv 0$, иначе нарушается условие $(H3)$. Функция t может не быть непрерывной. Однако, несложно видеть, что она полунепрерывна снизу. Возьмем теперь

$$\tilde{t}(v) := \inf_{w \in u([-1,1])} \{t(w) + |v - w|\}.$$

Очевидно, что $\tilde{t} \leqslant t$, и множества нулей функций t и $\tilde{t}$ совпадают.

Покажем, что $\tilde{t}$ непрерывна (и даже липшицева). Зафиксируем некоторое v_1. Тогда найдутся сколь угодно малое $\varepsilon > 0$ и $w_1 \in u([-1,1])$, удовлетворяющие $\tilde{t}(v_1) = t(w_1) + |v_1 - w_1| - \varepsilon$. Для любого v_2 имеем $\tilde{t}(v_2) \leqslant t(w_1) + |v_2 - w_1|$. И, тем самым, $\tilde{t}(v_2) - \tilde{t}(v_1) \leqslant |v_1 - v_2| + \varepsilon$. В силу произвольности v_1, v_2 и ε, получаем, что $\tilde{t}$ непрерывна.

При $\alpha \in [0,1]$ функция $\mathfrak{d}_\alpha(x,v) := \mathfrak{c}(x,v) + \alpha\Lambda(x)\tilde{t}(v)$ чётна x, удовлетворяет неравенству (1.4) согласно лемме 3, и не превосходит $a(x,v)$ по построению функции $\tilde{t}$. Таким образом, $\mathfrak{d}_\alpha$ — допустимый вес. И теперь очевидно, что $\mathfrak{d}_\alpha$ удовлетворяет условиям $(H1)-(H4)$.

Покажем, что найдётся последовательность $\alpha_j \searrow 0$, что $\mathfrak{d}_{\alpha_j}$ не имеет горизонтальных участков, кроме v, для которых $\mathfrak{d}_{\alpha_j}(\cdot, v) \equiv 0$, и множества меры ноль. Обозначим множество α, "плохих" на участке $[x_i, x_{i+1}]$:

$$A_i := \Big\{\alpha \in [0,1] : \\ \operatorname{meas}\{v \in [\min u, \max u] : \frac{\mathfrak{c}(x_{i+1}, v) - \mathfrak{c}(x_i, v))}{\frac{2}{k}} + \alpha\chi_i \tilde{t}(v) = 0\} > 0\Big\},$$

где $\chi_i = 1$ если $[x_i, x_{i+1}] \subset [0,1]$, и $\chi_i = -1$, если $[x_i, x_{i+1}] \subset [-1, 0]$.

Рассмотрим функцию

$$\begin{aligned} h_i(v) =& \frac{\mathfrak{c}(x_{i+1}, v) - \mathfrak{c}(x_i, v)}{\tilde{t}(v)} && \text{при } \tilde{t}(v) \neq 0 \\ h_i(v) =& 0 && \text{при } \tilde{t}(v) = 0. \end{aligned}$$

Тогда $\operatorname{card}(A_i) = \operatorname{card}(\{\alpha \in [0,1] : \operatorname{meas}\{v \in [\min u, \max u] : h_i(v) \pm \frac{2}{k}\alpha = 0\} > 0\})$. Значит $\operatorname{card}(A_i) \leqslant \aleph_0$, а также $\operatorname{card}(\cup_i A_i) \leqslant \aleph_0$. Тем самым, найдётся последовательность весов $\mathfrak{d}_{\alpha_j} \searrow \mathfrak{c}$, удовлетворяющих $(H1)-(H5)$. Из шага 3 имеем $J(\mathfrak{d}_{\alpha_j}, \overline{u}) \leqslant J(\mathfrak{d}_{\alpha_j}, u)$. Переходя к пределу, получаем $J(\mathfrak{c}, \overline{u}) \leqslant J(\mathfrak{c}, u)$.

Далее, при $x \in [-1, 1]$ имеем

$$F\big(u(x), \mathfrak{c}_k(x, u(x))|u'(x)|\big) \to F\big(u(x), a(x, u(x))|u'(x)|\big) \tag{2.4}$$

при $k \to \infty$. Кроме того, $F\big(u(x), a(x, u(x))|u'(x)|\big)$ является суммируемой мажорантой для левой части соотношения (2.4). По теореме Лебега о мажорируемой сходимости, получаем $J(\mathfrak{c}_k, u) \to J(a, u)$. Поскольку $J(\mathfrak{c}_k, \overline{u}) \leqslant J(\mathfrak{c}_k, u)$, лемма 7 даёт неравенство (1.3).

Шаг 5. *Пусть вес a удовлетворяет лишь условию $(H1)$. Тогда выполняется неравенство (1.3).*

Будем строить приближение для a весами, удовлетворяющими $(H1)-(H2)$. Воспользуемся леммой 9 с множеством $W = \{v \in \mathbb{R}_+ : a(\cdot, v) \equiv 0\}$. Введем обозначение

$$Z_a(v) := \{x \in [-1, 1] : a(x, v) = 0\}.$$

Заметим, что множества $Z_{\mathfrak{b}_\ell}(v)$ совпадают либо с $Z_a(v)$, либо с $[-1, 1]$.

Покажем, что $\mathfrak{b}_\ell$ удовлетворяет $(H2)$. Действительно, в противном случае найдётся последовательность v_m, для которой $m < \operatorname{card}(Z_{\mathfrak{b}_\ell})(v_m) < \infty$. После перехода к подпоследовательности имеем $v_m \to v_0$. Из части 2 леммы 2 следует, что множества $Z_{\mathfrak{b}_\ell}(v_m) = Z_a(v_m)$ периодические с периодом не более $\frac{2}{m-1}$. Возьмем некоторый $x \in [-1,1]$. Для каждого m найдётся x_m такой, что $|x-x_m| \leqslant \frac{1}{m-1}$ и $a(x_m, v_m) = 0$. Но $a(x_m, v_m) \to a(x, v_0)$. Тем самым, $a(x, v_0) = 0$.

Отсюда $Z_a(v_0) = [-1,1]$. Но это означает, что для любого v, для которого $|v - v_0| \leqslant \frac{1}{\ell}$, выполнено $\mathfrak{b}_\ell(\cdot, v) \equiv 0$, что противоречит $\operatorname{card}(Z_{\mathfrak{b}_\ell})(v_m) < \infty$.

Зафиксируем теперь $\ell \in \mathbb{N}$, обозначим $\mathfrak{b}_\ell =: \mathfrak{b}$ и приблизим функцию $\mathfrak{b}$ весами, удовлетворяющими $(H1) - (H3)$. Из $(H2)$ следует, что найдётся множество $T \subset [-1,1]$ состоящее из конечного числа элементов, такое, что если $x \notin T$ и $\mathfrak{b}(x,v) = 0$ для некоторого v, то $\mathfrak{b}(\cdot, v) \equiv 0$.

Вновь воспользуемся леммой 9 с множеством $W = u(T) \cup \overline{u}(T)$. Полученные при помощи леммы веса $\mathfrak{c}_j$ удовлетворяют $(H1) - (H2)$, поскольку отличаются от $\mathfrak{b}$ лишь домножением на непрерывный множитель, меньший единицы и зависящий только от v.

Из непрерывности u следует, что для достаточно больших k найдутся $j = j(k)$ такие, что

$$u\Big(\Big\{x \in [-1,1] : dist(x,T) \leqslant \frac{4}{k}\Big\}\Big) \subset \Big\{v \in \mathbb{R}_+ : dist(v, u(T)) \leqslant \frac{1}{2j}\Big\},$$

и $j(k) \to \infty$ при $k \to \infty$. Отсюда $\min\limits_{dist(x,u^{-1}(v)) \leqslant \frac{2}{k}} c_j(x,v) > 0$ для всех $v \in U(c_j)$. Более того, при $v \in U(c_j)$

$$\frac{\max\limits_{|x_i - x_{i+1}| \leqslant \frac{2}{k}} |\mathfrak{c}_j(x_i, v) - \mathfrak{c}_j(x_{i+1}, v)|}{\min\limits_{\operatorname{dist}(x,u^{-1}(v)) \leqslant \frac{2}{k}} \mathfrak{c}_j(x,v)} = \frac{\max\limits_{|x_i - x_{i+1}| \leqslant \frac{2}{k}} |\mathfrak{b}(x_i, v) - \mathfrak{b}(x_{i+1}, v)|}{\min\limits_{\operatorname{dist}(x,u^{-1}(v)) \leqslant \frac{2}{k}} \mathfrak{b}(x,v)}.$$

При этом, знаменатель второй дроби при $v \in U(\mathfrak{c}_j)$ отделен от нуля. Тем самым, $D_k(\mathfrak{c}_j, U(\mathfrak{c}_j))$ ограничена.

Поскольку D_k не меняется при домножении первого аргумента на коэффициент, не зависящий от x, и $U(\mathfrak{c}_j) \nearrow U(\mathfrak{b})$, имеем

$$D_k(\mathfrak{c}_j, U(\mathfrak{c}_j)) = D_k(\mathfrak{b}, U(\mathfrak{c}_j)) \leqslant D_k(\mathfrak{b}, U(\mathfrak{b})) \to 0$$

при $k \to \infty$.

Таким образом, веса $\mathfrak{c}_{j(k)}$ удовлетворяют $(H1) - (H3)$. Из шага 4 имеем $J(\mathfrak{c}_{j(k)}, \overline{u}) \leqslant J(\mathfrak{c}_{j(k)}, u)$. Переходя к пределу, получаем $J(\mathfrak{b}_\ell, \overline{u}) \leqslant J(\mathfrak{b}_\ell, u)$, а затем и неравенство (1.3).

Тем самым, теорема 5 доказана. $\square$

2.3 Доказательство неравенства (1.3) для функций, закреплённых на левом конце

Рассмотрим теперь случай, когда функция u удовлетворяет дополнительному условию $u(-1) = 0$.

Теорема 6. *Пусть $F \in \mathfrak{F}$, функция $u \in W_1^1(-1,1)$ неотрицательна, $u(-1) = 0$, весовая функция $a : [-1,1] \times \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$ непрерывна и удовлетворяет неравенству (1.4). Тогда справедливо неравенство (1.3).*

Доказательство. Мы следуем схеме доказательства теоремы 5, но вместо $(H1)$ и $(H7)$ накладываем следующие условия на вес:

$(H1')$ $a(x,v)$ удовлетворяет неравенству (1.4), а также $J(a,u) < \infty$.

$(H7')$ Выполнено условие $(H7)$, и $a(\cdot, v) \equiv 0$ в некоторой v-окрестности нуля.

Шаг 1. *Пусть $u \in W_1^1(-1,1)$, выполнено $u(-1) = 0$, и вес a удовлетворяет условиям $(H1'), (H2) - (H6), (H7')$. Тогда выполняется неравенство (1.3) holds.*

Для доказательства будем приближать функцию u так же, как и в первом шаге доказательства теоремы 5, с заменой u в некоторой окрестности точки $x = -1$ на линейную так, чтобы $u_n(-1) = 0$.

Шаг 2. *Пусть вес a удовлетворяет условиям $(H1'), (H2) - (H6)$. Тогда выполняется неравенство (1.3).*

Для доказательства добавим в множество W из второго шага доказательства теоремы 5 точку 0 и повторим рассуждение.

Дальнейшие шаги проходят без изменений. $\square$

2.4 Доказательство неравенства (2.1)

Теорема 7. *Пусть $F \in \mathfrak{F}$, функция $u \in W_1^1(-1,1)$ неотрицательна, и непрерывная весовая функция $a : [-1,1] \times \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$ чётна и выпукла по первому аргументу. Тогда справедливо неравенство* (2.1).

Доказательство. Для липшицевых функций u утверждение теоремы доказано в [2]. Таким образом, необходимо лишь перейти к W_1^1-функциям.

Структура выпуклого по x веса гораздо проще структуры веса, который мы рассматривали для случая монотонной перестановки. Выпуклый вес убывает при $x < 0$ и возрастает при $x > 0$ независимо от v. Тем самым, мы сразу входим в условия $(H6)$ из теоремы 5. Чтобы войти в условия $(H7)$, применим лемму 9 с множеством $W = \{u(0)\}$. Это дает нам возможность сразу воспользоваться шагом 1 доказательства, получив неравенство (2.1) в общем виде. Заметим, что шаг 1 использует лишь условия $(H1)$, $(H6)$, $(H7)$, так что нет нужды проверять остальные. $\square$

Глава 3. Монотонность функционалов с переменным показателем суммирования

3.1 Введение

Положим $u \in \overset{o}{W}{}_1^1 [-1, 1]$, $u \geqslant 0$. Обозначим через $symmu$ симметричную перестановку функции u. Тогда выполнено классическое неравенство Пойя-Сегё:

$$I(u^*) \leqslant I(u), \qquad \text{где } I(u) = \int\limits_{-1}^{1} |u'(x)|^p dx, \quad p \geqslant 1 \tag{3.1}$$

Обобщения неравенства (3.1) обсуждаются в большом количестве работ (см. обзор [7] и цитированную в нем литературу). В частности, в статье [2] показано, что неравенство (3.1) выполняется для функционалов вида

$$\int_{-1}^{1} F(u(x), a(x, u(x))|u'(x)|)dx,$$

где a выпукла, а F непрерывна и выпукла по второму аргументу, а также для многомерного аналога. В работе [8] восполнены пробелы в доказательстве [2], и результат доказан для естественного класса функций u. Аналогичные результаты для монотонной перестановки также получены в [9] и [8].

Рассмотрим функционалы с переменным показателем суммирования:

$$\mathcal{J}(u) = \int\limits_{-1}^{1} |u'(x)|^{p(x)} dx, \qquad \mathcal{I}(u) = \int\limits_{-1}^{1} (1 + |u'(x)|^2)^{\frac{p(x)}{2}} dx.$$

Здесь $p(x) \geqslant 1$ — непрерывная функция на $[-1, 1]$, $u \in \overset{o}{W}{}_1^1 [-1, 1]$. Подобные функционалы встречаются в некоторых задачах математической физики, в частности при моделировании электрореологических жидкостей. Более подробное описание задач и связанных с ними подходов может быть найдено в книгах [10] и [11].

3.2 Необходимые условия

Теорема 8. *Предположим, что неравенство $\mathcal{J}(u^*) \leqslant \mathcal{J}(u)$ выполнено для любой кусочно линейной функции u. Тогда $p(x) \equiv const$.*

Доказательство. Зафиксируем произвольное $x_0 \in (-1, 1)$. Для каждого $\alpha > 0$ и $\varepsilon > 0$ такого, что $[x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon] \subset [-1, 1]$, определим функцию

$$u_{\alpha,\varepsilon}(x) = \alpha(\varepsilon - |x - x_0|)_+.$$

Тогда $symm u_{\alpha,\varepsilon}(x) = \alpha(\varepsilon - |x|)_+$, и

$$\mathcal{J}(u_{\alpha,\varepsilon}) = \int\limits_{x_0-\varepsilon}^{x_0+\varepsilon} \alpha^{p(x)} dx, \qquad \mathcal{J}(u_{\alpha,\varepsilon}{}^*) = \int\limits_{-\varepsilon}^{\varepsilon} \alpha^{p(x)} dx.$$

Перейдя к пределу при $\varepsilon \to 0$ в неравенстве

$$\frac{\mathcal{J}(u_{\alpha,\varepsilon}{}^*)}{2\varepsilon} \leqslant \frac{\mathcal{J}(u_{\alpha,\varepsilon})}{2\varepsilon},$$

получим $\alpha^{p(0)} \leqslant \alpha^{p(x_0)}$, в силу непрерывности $\alpha^{p(x)}$. Заметим, что при $\alpha > 1$ и $\alpha < 1$ это даёт неравенства $p(0) \leqslant p(x_0)$ и $p(0) \geqslant p(x_0)$ соответственно. □

Таким образом, прямое обобщение неравенства (3.1) невозможно.

Теорема 9. *Предположим, что неравенство $\mathcal{I}(u^*) \leqslant \mathcal{I}(u)$ выполнено для любой кусочно линейной функции u. Тогда функция p чётна и выпукла. Более того, выпукла функция двух переменных*

$$K(s, x) = s(1 + s^{-2})^{\frac{p(x)}{2}} \qquad s > 0,\ x \in [-1, 1].$$

Набросок доказательства. Зафиксируем две точки на отрезке $-1 < x_1 < x_2 < 1$ и рассмотрим финитную кусочно линейную функцию с ненулевыми производными только в окрестностях x_1 и x_2. А именно, для произвольных $s, t > 0$ и достаточно малого ε положим

$$u_\varepsilon(x) = \min\bigl(2\varepsilon, (\varepsilon + s^{-1}(x - x_1))_+, (\varepsilon + t^{-1}(x_2 - x))_+\bigr).$$

Тогда

$$u_\varepsilon{}^*(x) = \min\bigl(2\varepsilon, (\varepsilon + (t + s)^{-1}(x_2 - x_1 - 2|x|))_+\bigr).$$

Полагая $s = t$, из неравенства $\mathcal{I}(u^*) \leqslant \mathcal{I}(u)$ получим $p(x_1) + p(x_2) \leqslant p(\frac{x_1 - x_2}{2}) + p(\frac{x_2 - x_1}{2})$. Можно проверить ([8, Lemma 10]), что отсюда следует чётность и выпуклость функции p. Далее, рассматривая произвольные s и t, получаем выпуклость функции K. $\square$

3.3 Доказательство неравенства $\mathcal{I}(u^*) \leqslant \mathcal{I}(u)$

В этом параграфе мы покажем, что условия, приведенные в теореме 9 являются не только необходимыми, но и достаточными.

Лемма 10. *Пусть m — чётное положительное число, $s_k > 0$ $(k = 1 \dots m)$, $-1 \leqslant x_1 \leqslant \dots \leqslant x_m \leqslant 1$. Тогда, если $K(s, x)$ чётна по x и выпукла по совокупности аргументов, то*

$$\sum_{k=1}^{m} K(s_k, x_k) \geqslant 2K\Big(\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{m} s_k, \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{m}(-1)^k x_k\Big). \tag{3.2}$$

Доказательство. Заметим, что неравенство (3.2) равносильно такому же неравенству для функции $M(s, x) = K(s, x) - s$. Прямое вычисление показывает, что функция M убывает по s. Тогда

$$\sum_{k=1}^{m} M(s_k, x_k) \geqslant M(s_1, x_1) + M(s_m, x_m) \overset{a}{\geqslant} 2M\Big(\frac{s_1 + s_m}{2}, \frac{x_m - x_1}{2}\Big) \geqslant$$
$$\overset{b}{\geqslant} 2M\Big(\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{m} s_k, \frac{x_m - x_1}{2}\Big) \overset{c}{\geqslant} 2M\Big(\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{m} s_k, \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{m}(-1)^k x_k\Big).$$

Неравенство (a) сделует из того, что M чётна по x и выпукла, (b) — из убывания M по s, (c) — из возрастания M по x при $x \geqslant 0$. $\square$

Лемма 11. *Пусть функция $K(s, x)$ чётна по x и выпукла по совокупности аргументов. Тогда $\mathcal{I}(u^*) \leqslant \mathcal{I}(u)$ для любой кусочно линейной функции $u \in \overset{o}{W}{}_1^1$ $[-1, 1]$.*

Доказательство. Обозначим $L \subset [-1, 1]$ множество точек перелома функции u (включая концы отрезка). Возьмём $U = u([-1, 1]) \setminus u(L)$, образ функции

u без образов точек излома. Это множество представляется в виде объединения конечного числа непересекающихся интервалов $U = \cup_j U_j$. Заметим, что для каждого j множество $u^{-1}(U_j)$ разбивается на чётное число интервалов, на каждом из которых функция u совпадает с некоторой линейной функцией y_k^j, $k = 1, \ldots, m_j$. Для удобства считаем, что носители y_k^j для каждого j идут по порядку, то есть $\sup dom(y_k^j) \leqslant \inf dom(y_{k+1}^j)$. Обозначим $b_k^j = |y_k^j{}'(x)|$. Также обозначим

$$Z = \operatorname{meas}\{x \in (-1,1) | u'(x) = 0\} = \operatorname{meas}\{x \in (-1,1) | u^*{}'(x) = 0\}.$$

Тогда

$$\mathcal{I}(u) - Z = \sum_j \int\limits_{u^{-1}(U_j)} (1 + u'^2(x))^{\frac{p(x)}{2}} dx = \sum_j \sum_k \int\limits_{dom(y_k^j)} (1 + y_k^j{}'^2(x))^{\frac{p(x)}{2}} dx =$$

$$= \sum_j \int\limits_{U_j} \sum_k \frac{1}{b_k^j} (1 + b_k^j{}^2)^{\frac{p((y_k^j)^{-1}(y))}{2}} dy = \sum_j \int\limits_{U_j} \sum_k K\Big(\frac{1}{b_k^j}, (y_k^j)^{-1}(y)\Big) dy.$$

Любая точка $y \in U$ имеет два прообраза относительно функции $symmu$, поэтому на множестве U можно определить $(u^*)^{-1} : U \to [0,1]$. Для каждого j можно выразить $(u^*)^{-1}$ и модуль её производной на участке U_j следующим образом:

$$\begin{aligned} (u^*)^{-1}(y) &= \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{m_j} (-1)^k (y_k^j)^{-1}(y); \\ |((u^*)^{-1})'(y)| &= \frac{1}{|u^*{}'((u^*)^{-1}(y))|} = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{m_j} \frac{1}{b_k^j} =: \frac{1}{b_j{}^*}. \end{aligned}$$

Ввиду чётности $symmu$ имеем

$$\mathcal{I}(u^*) - Z = 2 \int\limits_{(u^*)^{-1}(U)} (1 + u^*{}'^2(x))^{\frac{p(x)}{2}} dx =$$

$$= 2 \int\limits_U |((u^*)^{-1})'(y)| \cdot \Big(1 + \frac{1}{((u^*)^{-1})'(y)^2}\Big)^{\frac{p((u^*)^{-1}(y))}{2}} dy =$$

$$= 2 \sum_j \int\limits_{U_j} \frac{1}{b_j{}^*} \big(1 + b_j{}^*{}^2\big)^{\frac{1}{2} p\left(\frac{1}{2} \sum\limits_{k=1}^{m_j} (-1)^k (y_k^j)^{-1}(y)\right)} dy =$$

$$= 2 \sum_j \int\limits_{U_j} K\Big(\frac{1}{2} \sum_{k=1}^{m_j} \frac{1}{b_k^j}, \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{m_j} (-1)^k (y_k^j)^{-1}(y)\Big) dy.$$

Зафиксируем j и y. Тогда для доказательства леммы достаточно выполнения

$$\sum_{k=1}^{m_j} K\Big(\frac{1}{b^j_k}, (y^j_k)^{-1}(y)\Big) \geqslant 2K\Big(\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{m_j}\frac{1}{b^j_k}, \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{m_j}(-1)^k (y^j_k)^{-1}(y)\Big).$$

Но это неравенство обеспечивается леммой 10. □

Теперь можно доказать неравенство для функций u общего вида.

Теорема 10. *Пусть p чётна, а K выпукла. Тогда для любой функции $u \in \overset{o}{W}{}_1^1[-1,1]$ выполнено $\mathcal{I}(u^*) \leqslant \mathcal{I}(u)$.*

Доказательство. Поскольку $p(x)$ ограничена, можно построить последовательность кусочно постоянных функций v_n, сходящуюся к u' в $L^{p(x)}$ (см. [12, Теорема 1.4.1]). Обозначим u_n первообразные к v_n. Изменяя, если необходимо, v_n в окрестности концов отрезка, можно считать, что $u_n \geqslant 0$ и $u_n(\pm 1) = 0$.

Из вложения $L^{p(x)}[-1,1]$ в $L^1[-1,1]$ следует $u_n \to u$ в $\overset{o}{W}{}_1^1[-1,1]$. Также, поскольку $|\sqrt{1+x^2} - \sqrt{1+y^2}| \leqslant |x-y|$ для любых аргументов, из $v_n \to u'$ в $L^{p(x)}$ следует сходимость $\mathcal{I}(u_n) \to \mathcal{I}(u)$.

Согласно [2, Theorem 1], из $u_n \to u$ в $\overset{o}{W}{}_1^1[-1,1]$ следует $symmu_n \rightharpoonup u^*$ в $\overset{o}{W}{}_1^1[-1,1]$. Кроме того, функционал $\mathcal{I}$ секвенциально слабо полунепрерывен снизу по теореме Тонелли (см., напр., [13, Теорема 3.5]). Поэтому

$$\mathcal{I}(u^*) \leqslant \liminf \mathcal{I}(u_n{}^*) \leqslant \lim \mathcal{I}(u_n) = \mathcal{I}(u).$$

□

3.4 Некоторые достаточные условия

Вычисление показывает, что функция K выпукла по s. Если p выпукла, то K выпукла также по x. А выпуклость K по совокупности переменных равносильна выполнению неравенства $D_{ss}K(s,x)D_{xx}K(s,x) - (D_{sx}K(s,x))^2 \geqslant 0$ в смысле мер.

Это неравенство приводится к следующему виду:

$$q''(x) \geqslant \frac{q'(x)^2}{q(x)} A(q(x), w), \tag{3.3}$$

где $q(x) = p(x) - 1$, $w = s^{-2}$,

$$A(q,w) = \frac{q(4w - (w+3)\ln(w+1)) - \frac{w-1}{w}\ln(w+1) + 4\frac{w}{\ln(w+1)} - 4}{2(qw+1)} \cdot \frac{q}{q+1}.$$

Лемма 12. *Для любого $\alpha > 0$ и $q \in C[-1,1]$ выпуклость функции q^α равносильна выполнению неравенства $q''(x) \geqslant (1-\alpha)\frac{q'(x)^2}{q(x)}$ в смысле мер.*

Лемма доказывается прямым вычислением.

Из леммы следует, что если $A(q,w) \leqslant M$, где $M < 1$ — некоторая константа, то неравенство (3.3) следует из выпуклости функции $(p(x)-1)^{1-M}$.

Численное исследование показывает, что при всех $q \geqslant 0$ и $w > 0$ выполнено неравенство $A(q,w) < 0.63$. Если же дополнительно $q < 1.36$, то $A(q,w) < 0.5$. Отсюда с учётом теоремы 10 следует

Теорема 11. *Пусть функция $p(x)$ чётна.*

1) Если $(p(x)-1)^{0.37}$ — выпуклая функция, то для всех $u \in \overset{o}{W}{}_1^1 [-1,1]$ справедливо неравенство $\mathcal{I}(u^*) \leqslant \mathcal{I}(u)$.

2) Если $p(x) < 2.36$ и $\sqrt{p(x)-1}$ — выпуклая функция, то для всех $u \in \overset{o}{W}{}_1^1 [-1,1]$ справедливо неравенство $\mathcal{I}(u^*) \leqslant \mathcal{I}(u)$.

Список литературы

1. *Либ, Э.* Анализ / Э. Либ, М. Лосс. — Новосибирск : Научная книга, 1998. — 276 с.
2. *Brock, F.* Weighted Dirichlet-type inequalities for Steiner symmetrization / F. Brock // Calc. Var. and PDEs. — 1999. — Т. 8, № 1. — С. 15—25.
3. *Рудин, У.* Функциональный анализ / У. Рудин. — М. : Мир, 1975. — 444 с.
4. *Эванс, Л.* Теория меры и тонкие свойства функций / Л. Эванс, Р. Ф. Гариепи. — Новосибирск : Научная книга, 2002. — 216 с.
5. Интегральные операторы в пространствах суммируемых функций / М. А. Красносельский [и др.]. — М. : Наука, 1966. — 500 с.
6. *Alberti, G.* Non-occurrence of gap for one-dimensional autonomous functionals / G. Alberti, F. Serra Cassano // Proceedings of "Calc. Var., Homogen. and Cont. Mech." / под ред. G. Bouchitté, G. Buttazzo, P. Suquet. — Singapore, 1994. — С. 1—17.
7. *Talenti, G.* The art of rearranging / G. Talenti // Milan Journ of Math. — 2016. — Т. 84, № 1. — С. 105—157.
8. *Bankevich, S. V.* On monotonicity of some functionals under rearrangements / S. V. Bankevich, A. I. Nazarov // Calc. Var. and PDEs. — 2015. — Т. 53, № 3/4. — С. 627—647.
9. *Банкевич, С. В.* Об обобщении неравенства Пойа-Сеге для одномерных функционалов / С. В. Банкевич, А. И. Назаров // Доклады Академии Наук. — 2011. — Т. 438, № 1. — С. 11—13.
10. Lebesgue and Sobolev spaces with Variable Exponents / L. Diening [и др.]. — Berlin : Springer, 2011. — IX, 509. — (Lecture Notes in Mathematics ; 2017).
11. *Жиков, В. В.* О вариационных задачах и нелинейных эллиптических уравнениях с нестандартными условиями роста / В. В. Жиков. — Новосибирск : Т. Рожковская, 2017. — 120 с.

12. *Шарапудинов, И. И.* Некоторые вопросы теории приближений в пространствах Лебега с переменным показателем / И. И. Шарапудинов. — Владикавказ : ЮМИ ВНЦ РАН и РСО-А, 2012. — 267 с. — (Итоги науки. Юг России. Математическая монография ; 5).

13. *Буттаццо, Д.* Одномерные вариационные задачи. Введение / Д. Буттаццо, М. Джаквинта, С. Гильдебрандт. — Новосибирск : Научная книга, 2002. — 246 с.