Санкт-Петербургский государственный университет

На правах рукописи

Банкевич Сергей Викторович

О монотонности интегральных функционалов при перестановках

Специальность 01.01.02 —
«Дифференциальные уравнения, динамические системы
и оптимальное управление»

Диссертация на соискание учёной степени
кандидата физико-математических наук

Научный руководитель:
доктор физико-математических наук, профессор
Назаров Александр Ильич

Санкт-Петербург — 2018

Оглавление

Введение

Актуальность темы исследования. Перестановки играют значимую роль в вариационном исчислении. Впервые симметричная перестановка (симметризация) была введена Штейнером в 1836 году. Штейнер работал над доказательством изопериметрического неравенства (задачей Дидоны) о максимальной площади плоской фигуры с фиксированным периметром. Штейнер используя симметризацию доказал в [1], что если максимум существует, он достигается на круге. Только в 1879 году Вейерштрасс доказал существование максимума методами вариационного исчисления.

Примерно во время появления доказательства в своей книге [2] лорд Рэлей сформулировал гипотезу о том, что среди всех плоских мембран заданной площади, закреплённых по краю, наименьшей основной частотой обладает круг (а точнее, предположил, что выполняется некоторая оценка первого собственного числа через меру области). Математически эта задача сводится к нахождению минимума первого собственного числа задачи Дирихле для оператора Лапласа, которая имеет вариационную природу. Гипотеза Рэлея была доказана независимо Фабером ([3]) и Краном ([4]) с использованием симметризации и получила в дальнейшем название неравенства Крана-Фабера. Отметим, что другая гипотеза Рэлея о наименьшей основной частоте закреплённой пластины была доказана лишь в 1995 году Надирашвили [5] с использованием варианта симметризации, предложенного ранее Пойа и Сегё.

Впоследствии изучение свойств перестановок получило дальнейшее развитие в работах Пойа и Сегё, подытоженное в классическом труде [6]. «Изопериметрические неравенства в математической физике». В книге при помощи симметризации доказано множество соотношений между различными геометрическими и физическими характеристиками областей, такими как уже упомянутые периметр, площадь, основная частота мембраны, основная частота закреплённой пластины, а также моментом инерции, жёсткостью кручения, ёмкостью и другими. Эти соотношения позволяют не только сформулировать утверждения относительно наиболее выгодных форм области с точки зрения разнообразных величин, но и оценить сложные для вычисления величины через те, которые получить просто.

В частности, в книге [6] доказано так называемое неравенство Пойа-Сегё, состоящее в следующем. Пусть функция $u : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}_+$ (здесь и далее $\mathbb{R}_+ = [0, \infty)$) гладкая и финитная, тогда выполнено неравенство

$$\int\limits_{\mathbb{R}^n} |\nabla u^*(x)|^p dx \leqslant \int\limits_{\mathbb{R}^n} |\nabla u(x)|^p dx, \tag{1}$$

где u^* — симметричная перестановка функции u. И даже более общее утверждение: для $u \geqslant 0$ и для любой выпуклой $F : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$, $F \geqslant 0$ выполнено

$$\int\limits_{\mathbb{R}^n} F(|\nabla u^*(x)|) dx \leqslant \int\limits_{\mathbb{R}^n} F(|\nabla u(x)|) dx. \tag{2}$$

Также, поскольку это неравенство может применяться для нахождения функций, доставляющих минимум функционала, особый интерес представляет вопрос, когда (2) превращается в равенство. Только в 1988 году Бразерс и Зимер ([7]) установили условия, при которых из равенства в (2) следует совпадение u и u^* с точностью до параллельного переноса.

В течение 80-х годов вышло несколько публикаций об обобщении неравенства Пойа-Сегё на функционалы вида

$$\int F(u) G(\|\nabla u\|) dx.$$

Далее, в работе [8] неравенство Пойа-Сегё распространено при некоторых (необходимых, судя по всему) ограничениях на функционалы вида

$$\int F(x', u) G(\|\nabla u\|) dx,$$

где норма $\|\cdot\|$ — некоторая взвешенная норма с весами, зависящими от x'. Доказательство дано для гладких функций u. Также, аналогичные неравенства были получены для монотонной перестановки.

Отметим ещё связанное с перестановками понятие поляризации, которое используется для доказательства многих утверждений изопериметрического характера, см. напр. [9—15].

Степень разработанности темы исследования. Существенно сложнее оказалось распространить неравенство на более общую зависимость от функции и от переменной, по которой происходит перестановка. Значительную роль в решении этого вопроса сыграла работа [16]. В ней для липшицевых функций при некоторых условиях на весовую функцию был получен аналог неравенства (2).

$$\int\limits_{\Omega} F(x', u^*(x), \|\mathcal{D}u^*\|)dx \leqslant \int\limits_{\Omega} F(x', u(x), \|\mathcal{D}u\|)dx, \tag{3}$$

где $x = (x_1, \ldots, x_n) = (x', x_n)$,

$$\mathcal{D}u = (a_1(x', u(x))D_1 u,\ \ldots,\ a_{n-1}(x', u(x))D_{n-1}u,\ a(x, u(x))D_n u).$$

Однако в переносе этого неравенства на общий случай содержится пробел. В [16] доказано, что если последовательность функций сходится в $W_1^1(\mathbb{R}^n)$, то подпоследовательность из симметризаций этих функций сходится там же слабо (см. также [17—19] для более детального анализа сходимости перестановок сходящейся последовательности). Ввиду этого факта доказательство можно вести по следующей схеме.

- Неравенство доказывается для кусочно линейных функций u.
- Доказывается, что функционал слабо полунепрерывен снизу.
- Находится последовательность кусочно линейных функций u_n, приближающих предельную функцию u в смысле пространств Соболева ($u_n \to u$ в $W_1^1(\mathbb{R}^n)$) и в смысле функционала ($I(u_n) \to I(u)$). После чего можно написать

$$I(u^*) \leqslant \underline{\lim}\, I(u_n^*) \leqslant \lim I(u_n) = I(u).$$

Автор [16] постулировал существование u_n по существу без доказательства. Между тем, приближение функции в смысле функционала регулярными (в частности липшицевыми) функциями нельзя назвать простым вопросом. Известно множество примеров, когда даже инфимум функционала по естественной области определения функционала отличается от инфимума по множеству регулярных функций, в том числе и в одномерном случае. Для таких функционалов говорят о возникновении эффекта Лаврентьева.

В 1927 г. М. А. Лаврентьев обнаружил ([20]), что для интегрального функционала с выпуклым по производной и коэрцитивным интегрантом инфимум по абсолютно непрерывным функциям может быть строго меньше инфимума по липшицевым функциям. В [21] дан более простой пример, для которого возникает эффект Лаврентьева в одномерном случае.

В работе [22] получено знаменитое логарифмическое условие отсутствия эффекта Лаврентьева в многомерном случае, а также приведёны простые примеры на плоскости, для которых эффект Лаврентьева имеет место. Дальнейшая литература по эффекту Лаврентьева весьма обширна, см. напр. [23; 24].

В статье [25] показано, что для функционалов вида

$$\int_{-1}^{1} F(u(x), u'(x))dx$$

можно найти последовательность регулярных функций u_n, приближающих u и в $W_1^1[-1, 1]$, и в смысле функционала. В частности, для таких функционалов эффект Лаврентьева отсутствует.

В статье [26] пробел в работе [16] частично закрыт для функционалов схожей структуры при помощи тонких результатов геометрической теории функций, полученных в работе [27], и приближения лагранжиана снизу.

Отметим ещё работу [28], в которой рассматривается неравенство Пойа-Сегё с весом для монотонных перестановок в двумерном случае при условии, что функция u закреплена на левом краю прямоугольника. Неравенство доказано при условии степенного роста интегранта по производной и убывания веса по y. Заметим, что условие на вес довольно ограничительны.

Цели и задачи. В главе 1 неравенство (3) переносится на случай монотонной перестановки. Получены необходимые условия и доказана их достаточность при степенном ограничении на рост лагранжиана по производной. В главе 2 неравенства для монотонной и симметричной перестановок доказываются в одномерном случае лишь при необходимых условиях. В частности, в одномерном случае закрыт пробел в работе [16]. В главе 3 исследуется обобщение неравенства Пойа-Сегё (1) на случай переменного показателя суммирования.

Научная новизна. Выносимые на защиту положения являются новыми.

Теоретическая и практическая значимость работы. Работа носит теоретический характер. Результаты представляют интерес для специалистов по вариационному исчислению и уравнениям в частных производных.

Методология и методы исследования. При доказательстве основных результатов диссертации были использованы классические методы вариационного исчисления, математического и функционального анализа, а также обобщение метода аппроксимации в смысле функционала, разработанного в

[25]. В главе 2 использован разработанный автором оригинальный метод аппроксимации непрерывной функции многих переменных функциями с конечным числом монотонных участков при некоторых ограничениях.

Положения, выносимые на защиту.

– Получены необходимые условия на вес для выполнения неравенства Пойа-Сегё с весом для монотонной перестановки.
– Доказано неравенство Пойа-Сегё с весом для монотонной перестановки в случае ограниченного (степенного) роста интегранта .
– Доказано неравенство Пойа-Сегё с весом в одномерном случае без ограничений, лишь при необходимых условиях.
– Доказана необходимость условий, налагаемых в работе [16] на вес для выполнения неравенства Пойа-Сегё с весом для симметризации.
– В одномерном случае закрыт пробел в работе [16]: доказано неравенство Пойа-Сегё с весом для симметризации без дополнительных ограничений.
– Представлены необходимые и достаточные условия выполнения неравенства Пойа-Сегё с весом для монотонной перестановки на функциях, закреплённых на левом конце. Неравенство доказано в многомерном случае для интегрантов ограниченного роста по производной и в одномерном случае без дополнительных ограничений.
– Представлены необходимые и достаточные условия выполнения неравенства Пойа-Сегё с переменным показателем суммирования в одномерном случае. Показано, что прямое многомерное обобщение отсутствует.

Степень достоверности и апробация. Все результаты диссертации снабжены подробными доказательствами и опубликованы в ведущих научных изданиях. Результаты диссертации докладывались на следующих семинарах и конференциях:

– Международная конференция по дифференциальным уравнениям и динамическим системам (Суздаль, 2006).
– Международная конференция «Теория приближений» (Санкт-Петербург, 2010).
– Международная конференция по дифференциальным уравнениям и динамическим системам (Суздаль, 2010).

– Международная конференция «Дифференциальные уравнения и смежные вопросы», посвящённая 110-летию И. Г. Петровского (Москва, 2011).
– Международная школа “Variational Analysis and Applications” (Эриче, Италия, 2012).
– Международная конференция по дифференциальным уравнениям и динамическим системам (Суздаль, 2016).
– Семинар им. В.И. Смирнова по математической физике в Санкт-Петербургском отделении математического института им. В.А.Стеклова РАН (Санкт-Петербург, рук: Н. Н. Уральцева, А. И. Назаров, Т. А. Суслина).
– Городской семинар по конструктивной теории функций (Санкт-Петербург, рук.: М. А. Скопина)
– Семинар по теории функций многих действительных переменных и ее приложениям к задачам математической физики (Семинар Никольского) (Москва, рук.: О. В. Бесов).

Публикации. Результаты диссертации опубликованы в работах [53—56], [57—61]. Работы [53; 56] опубликованы в журналах из перечня ВАК. Работы [54; 55] опубликованы в изданиях, удовлетворяющем достаточному условию включения в перечень ВАК — журнал «Calculus of Variations and Partial Differential Equations» и переводная версия журнала «Записки научных семинаров Ленинградского отделения математического института им. В.А. Стеклова АН СССР» («Journal of Mathematical Sciences») входят в систему цитирования Scopus.

Работы [53; 54] написаны в неразделимом соавторстве, за исключением оригинального метода аппроксимации, предложенного автором.

Объем и структура работы. Диссертация состоит из введения, четырёх глав, содержащих 20 параграфов, заключения и списка литературы. Полный объём диссертации составляет 73 страницы, включая 6 рисунков и 2 таблицы. Список литературы содержит 61 наименование.

Во введении описаны актуальность темы исследования и степень ее разработанности, поставлены цели и задачи, аргументирована научная новизна, достоверность, теоретическая и практическая значимость результатов, перечислены использованные методы, выносимые на защиту положения, публикации и доклады по теме диссертации, кратко изложена структура работы.

В главе 0 диссертации введены обозначения, используемые в работе, а также приведены используемые известные факты со ссылками на источники.

Напомним определения перестановок. Пусть $\Omega = \omega \times (-1,1)$, где ω — ограниченная область в $\mathbb{R}^{n-1}$ с липшицевой границей. Обозначим $x = (x_1, \ldots, x_{n-1}, y) = (x', y)$.

Для измеримой неотрицательной функции u, заданной на $\overline{\Omega}$ выполнена теорема о послойном представлении (см. [29, теорема 1.13]), состоящая в следующем. Пусть $\mathcal{A}_t(x') := \{y \in [-1,1] : \ u(x', y) > t\}$. Тогда имеет место равенство

$$u(x', y) = \int_0^\infty \mathcal{X}\{\mathcal{A}_t(x')\}(y)dt,$$

где $\mathcal{X}\{A\}$ — характеристическая функция множества A.

Определим симметричную перестановку измеримого множества $E \subset [-1,1]$ и симметричную перестановку (симметризацию по Штейнеру) неотрицательной функции $u \in W_1^1(\overline{\Omega})$.

$$E^* := [-\frac{\text{meas}\, E}{2}, \frac{\text{meas}\, E}{2}]; \qquad u^*(x', y) = \int\limits_0^\infty \mathcal{X}\{(\mathcal{A}_t(x'))^*\}(y)dt.$$

В тех же условиях определим монотонную перестановку множества E и функции $u \in W_1^1(\overline{\Omega})$.

$$\overline{E} := [1 - \text{meas}\, E, 1]; \qquad \overline{u}(x', y) = \int\limits_0^\infty \mathcal{X}\{\overline{\mathcal{A}_t(x')}\}(y)dt.$$

В главе 1 диссертации изучается неравенство, аналогичное неравенству (3), с монотонной перестановкой вместо симметризации.

Определим множество $\mathfrak{F}$ непрерывных функций $F : \overline{\omega} \times \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$, выпуклых и строго возрастающих по третьему аргументу, удовлетворяющих $F(\cdot, \cdot, 0) \equiv 0$.

Рассмотрим функционал

$$J(u) = \int\limits_\Omega F(x', u(x), \|\mathcal{D}u\|)dx,$$

где $F \in \mathfrak{F}$, $\|\cdot\|$ — некоторая норма в $\mathbb{R}^n$, симметричная по последней координате,

$$\mathcal{D}u = (a_1(x', u(x))D_1 u, \ \ldots, \ a_{n-1}(x', u(x))D_{n-1}u, \ a(x, u(x))D_n u)$$

— градиент u с весом (обратите внимание, что только вес при $D_n u$ зависит от y), $a(\cdot, \cdot) : \overline{\Omega} \times \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$ и $a_i(\cdot, \cdot) : \overline{\omega} \times \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$ — непрерывные функции. Здесь и далее индекс i пробегает от 1 до $n-1$.

Рассмотрим неравенство

$$J(\overline{u}) \leqslant J(u) \tag{4}$$

В §1.1 вводятся необходимые обозначения.

В §1.2 устанавливаются условия, необходимые для выполнения неравенства (4).

Теорема 1. i) *Если неравенство (4) выполняется для некоторой $F \in \mathfrak{F}$ и произвольной кусочно линейной u, то вес a чётен по y, то есть $a(x', y, v) \equiv a(x', -y, v)$.*

ii) *Если неравенство (4) выполняется для произвольной $F \in \mathfrak{F}$ и произвольной кусочно линейной u, то вес a удовлетворяет неравенству*

$$a(x', s, v)+a(x', t, v) \geqslant a(x', 1-t+s, v), \qquad x' \in \overline{\omega},\ -1 \leqslant s \leqslant t \leqslant 1,\ v \in \mathbb{R}_+. \tag{5}$$

Также получены необходимые условия в случае закреплённых на левом конце функций.

Теорема 2. *Если неравенство (4) выполняется для произвольной $F \in \mathfrak{F}$ и произвольной кусочно линейной u, закреплённой на левом конце: $u(\cdot, -1) \equiv 0$, то вес a удовлетворяет неравенству (5).*

В §1.3 доказывается неравенство (4) для кусочно линейных u.

Лемма 1. *Пусть функция $a(x', \cdot, u)$ чётна и удовлетворяет условию (5). Тогда, если u — неотрицательная кусочно линейная функция, то $J(u) \geqslant J(\overline{u})$.*

Лемма 2. *Пусть функция $a(x', \cdot, u)$ удовлетворяет условию (5). Тогда, если u — неотрицательная кусочно линейная функция, удовлетворяющая $u(\cdot, -1) \equiv 0$, то $J(u) \geqslant J(\overline{u})$.*

В §1.4 устанавливается слабая полунепрерывность функционала J и доказывается теорема, которая в дальнейшем является основой для предельных переходов.

Теорема 3. *Пусть $B \subset A \subset W_1^1(\overline{\Omega})$. Предположим, что для каждого $u \in A$ найдётся последовательность $u_k \in B$ такая, что $u_k \to u$ в $W_1^1(\overline{\Omega})$ и $J(u_k) \to J(u)$. Тогда*

i) *Если для любой функции $v \in B$ выполнено $J(v^*) \leqslant J(v)$, то для любой функции $u \in A$ будет выполнено $J(u^*) \leqslant J(u)$.*

ii) *Если для любой функции $v \in B$ выполнено $J(\overline{v}) \leqslant J(v)$, то для любой функции $u \in A$ будет выполнено $J(\overline{u}) \leqslant J(u)$.*

В §1.5 неравенство (4) доказывается для интегрантов с ограниченным ростом по производной.

Теорема 4. *Пусть функция $a(x', \cdot, u)$ чётна и удовлетворяет условию (5). Тогда*

i) *Неравенство (4) верно для произвольной неотрицательной $u \in Lip(\overline{\Omega})$.*

ii) *Предположим, что для любых $x' \in \overline{\omega}, z \in \mathbb{R}_+, p \in \mathbb{R}$ функция F удовлетворяет неравенству*

$$F(x', z, p) \leqslant C(1 + |z|^{q^*} + |p|^q),$$

где $\frac{1}{q^*} = \frac{1}{q} - \frac{1}{n}$, если $q < n$, либо q^* любое в противном случае. Если $q \leqslant n$, то дополнительно предположим, что веса a и a_i ограничены. Тогда неравенство (4) верно для произвольной неотрицательной $u \in W^1_q(\overline{\Omega})$.

Теорема 5. *Пусть функция $a(x', \cdot, u)$ удовлетворяет условию (5). Тогда*

i) *Неравенство (4) верно для произвольной неотрицательной $u \in Lip(\overline{\Omega})$, удовлетворяющей $u(\cdot, -1) \equiv 0$.*

ii) *Предположим, что для любых $x' \in \overline{\omega}, z \in \mathbb{R}_+, p \in \mathbb{R}$ функция F удовлетворяет неравенству*

$$F(x', z, p) \leqslant C(1 + |z|^{q^*} + |p|^q),$$

где $\frac{1}{q^*} = \frac{1}{q} - \frac{1}{n}$, если $q < n$, либо q^* любое в противном случае. Если $q \leqslant n$, то дополнительно предположим, что веса a и a_i ограничены. Тогда неравенство (4) верно для произвольной неотрицательной $u \in W^1_q(\overline{\Omega})$, удовлетворяющей $u(\cdot, -1) \equiv 0$.

Глава 2 диссертации посвящена снятию условия ограниченного роста с интегранта. Это удаётся сделать только в одномерном случае, поэтому далее $u \in W^1_1[-1, 1]$ и

$$J(u) = \int\limits_{-1}^{1} F(u(x), a(x, u(x))|u'(x)|)\, dx.$$

В §2.1 формулируется одномерный вариант задачи.

В §2.2 удаётся распространить результат статьи [25] на случай функционала J и доказать отсутствие эффекта Лаврентьева в случае кусочной монотонности веса.

Лемма 3. *Пусть a — непрерывная функция, $a(\cdot, u)$ возрастает на $[-1, 0]$ и убывает на $[0, 1]$ для всех $u \geqslant 0$. Тогда для любой функции $u \in W_1^1[-1, 1]$, $u \geqslant 0$, найдётся последовательность $\{u_k\} \subset Lip[-1, 1]$, удовлетворяющая*

$$u_k \to u \text{ в } W_1^1[-1, 1] \quad \text{ и } \quad J(u_k) \to J(u). \tag{6}$$

Теорема 6. *Пусть функция a непрерывна, чётна, убывает на $[0, 1]$ и удовлетворяет неравенству (5). Тогда для любой $u \in W_1^1[-1, 1]$ выполнено $J(u^*) \leqslant J(u)$.*

В §2.3 доказано несколько важных свойств весовых функций, удовлетворяющих необходимым условиям. В частности установлена структура множества нулей весовых функций.

В §2.4 с веса снимается требование монотонности и, тем самым, неравенство (4) доказано в наиболее общем виде.

Теорема 7. *Пусть $F \in \mathfrak{F}$, функция $u \in W_1^1[-1, 1]$ неотрицательна, и весовая функция $a : [-1, 1] \times \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$ непрерывна и допустима для u. Тогда справедливо неравенство (4).*

В §2.5 завершается доказательство для функций, закреплённых на левом конце.

Теорема 8. *Пусть $F \in \mathfrak{F}$, функция $u \in W_1^1[-1, 1]$ неотрицательна, $u(-1) = 0$, весовая функция $a : [-1, 1] \times \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$ непрерывна и удовлетворяет неравенству (5). Тогда справедливо неравенство (4).*

В §2.6 доказано, что условия, накладываемые на вес в работе [16], являются необходимыми в случае симметричной перестановки.

Теорема 9. *Если неравенство (3) выполняется для произвольной $F \in \mathfrak{F}$ и произвольной кусочно линейной u, то вес a — чётная и выпуклая по первому аргументу функция.*

И наконец, в §2.7 закрывается пробел в работе [16] в одномерном случае.

Теорема 10. *Пусть $F \in \mathfrak{F}$, функция $u \in W_1^1[-1,1]$ неотрицательна, и непрерывная весовая функция $a : [-1,1] \times \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$ чётна и выпукла по первому аргументу. Тогда справедливо неравенство (3).*

В главе 3 диссертации рассмотрено обобщение неравенства Пойа-Сегё на случай переменного показателя суммирования. А именно, рассматриваются два функционала:

$$
\begin{aligned}
\mathcal{J}(u) &= \int_{-1}^{1} |u'(x)|^{p(x)} dx \\
\mathcal{I}(u) &= \int_{-1}^{1} (1 + |u'(x)|^2)^{\frac{p(x)}{2}} dx.
\end{aligned}
$$

Подобные функционалы возникают при моделировании электрореологических жидкостей (см., напр., [30; 31]). В частности, в настоящее время активно изученаются эллиптические уравнения с $p(x)$-лапласианом в качестве главного члена. Литература в этой области обширна, см. напр. [32—47] и ссылки оттуда.

В §3.1 ставится задача и вводятся обозначения.

В §3.2 получены условия, необходимые для выполнения неравенств $\mathcal{J}(u^*) \leqslant \mathcal{J}(u)$ и $\mathcal{I}(u^*) \leqslant \mathcal{I}(u)$.

Теорема 11. *Пусть $\mathcal{J}(u^*) \leqslant \mathcal{J}(u)$ выполнено для любой кусочно линейной функции $u \geqslant 0$. Тогда $p(x) \equiv const$.*

То есть изучение аналога неравенства Пойа-Сегё для функционала $\mathcal{I}$ теряет смысл.

Теорема 12. *Если неравенство $\mathcal{I}(u^*) \leqslant \mathcal{I}(u)$ выполняется для всех кусочно линейных $u \geqslant 0$, то p чётна и выпукла. Более того, выпукла следующая функция:*

$$
K(s,x) = s(1 + s^{-2})^{\frac{p(x)}{2}}, \qquad s > 0,\ x \in [-1,1].
$$

В §3.3 показано, что условия, необходимые для выполнения неравенства $\mathcal{I}(u^*) \leqslant \mathcal{I}(u)$, являются и достаточными.

Лемма 4. *Пусть p чётна, а K выпукла по совокупности переменных. Тогда для любой кусочно линейной функции $u \in \overset{o}{W}{}_1^1[-1,1]$ выполнено $\mathcal{I}(u^*) \leqslant \mathcal{I}(u)$.*

Теорема 13. *Пусть p чётна, а K выпукла по совокупности переменных. Тогда для любой функции $u \in \overset{o}{W}{}_1^1 [-1,1]$ выполнено $\mathcal{I}(u^*) \leqslant \mathcal{I}(u)$.*

Условие выпуклости функции K есть на самом деле неявное условие на функцию p. В §3.4 приведены некоторые явные достаточные условия выполнения неравенства $\mathcal{I}(u^*) \leqslant \mathcal{I}(u)$.

Выпуклость функции K равносильна неотрицательности гессиана K (если есть выпуклость по какому-нибудь направлению: K всегда выпукла по s), которая в свою очередь сводится к условию

$$qq'' \geqslant q'^2 B(w,q),$$

где $w = \frac{1}{s^2}$, $q(x) = p(x) - 1$,

$$B(w,q) = \frac{q(4w - (w+3)\ln(w+1)) - \frac{w-1}{w}\ln(w+1) + 4\frac{w}{\ln(w+1)} - 4}{2(qw+1)} \cdot \frac{q}{q+1}.$$

Теорема 14. *Пусть $p(x) \geqslant 1$ — чётная непрерывная функция на $[-1,1]$.*

i) *Если функция $(p(x)-1)^{0.37}$ выпукла, то неравенство $\mathcal{I}(u^*) \leqslant \mathcal{I}(u)$ выполнено для любой неотрицательной $u \in \overset{o}{W}{}_1^1 [-1,1]$.*

ii) *Если $p(x) \leqslant 2.36$ для всех $x \in [-1,1]$ и функция $\sqrt{p(x)-1}$ выпукла, то неравенство $\mathcal{I}(u^*) \leqslant \mathcal{I}(u)$ выполнено для произвольной неотрицательной $u \in \overset{o}{W}{}_1^1 [-1,1]$.*

В §3.5 описаны численно-аналитические методы для получения оценок, на которых основаны выводы теоремы 14. Пусть $\mathcal{B}(q) \equiv \sup\limits_{w>0} B(w,q)$. Тогда

$$\sup_{q\geqslant 0} \mathcal{B}(q) = \limsup_{q\to+\infty} \mathcal{B}(q) \leqslant 0.63; \tag{7}$$

$$\sup_{0\leqslant q\leqslant 1.36} \mathcal{B}(q) \leqslant 0.5. \tag{8}$$

Наконец, в §3.6 показано, что прямое распространение неравенства $\mathcal{I}(u^*) \leqslant \mathcal{I}(u)$ на многомерный случай несодержательно.

Теорема 15. *Если $\int\limits_\Omega (1 + |\nabla u^*(x)|^2)^{\frac{p(x)}{2}} dx \leqslant \int\limits_\Omega (1 + |\nabla u(x)|^2)^{\frac{p(x)}{2}} dx$ для любой неотрицательной функции $u \in \overset{o}{W}{}_1^1 (\overline{\Omega})$, то $p(x',y)$ не зависит от y.*

<u>В заключении</u> перечисляются основные результаты диссертации.

Работа поддержана грантом РФФИ 18-01-00472.

Глава 0. Обозначения и известные факты, используемые в диссертации

Перечислим обозначения функциональных пространств, используемых в работе. Все перечисленные пространства состоят из функций, определённых на множестве $E \subset \mathbb{R}^n$, являющемся замыканием области в $\mathbb{R}^n$.

$\mathcal{C}(E)$ — множество непрерывных функций.

$\mathcal{C}^1(E)$ — множество непрерывно дифференцируемых функций.

$Lip(E)$ — множество липшицевых функций.

$L^1(E)$ — множество суммируемых функций.

$W^1_q(E)$ — множество дифференцируемых в соболевском смысле функций, суммируемых в степени q вместе с первыми производными.

$\overset{o}{W}{}^1_1(E)$ — замыкание множества гладких финитных функций в $W^1_1(E)$.

$L^{p(x)}(E)$ — пространство Орлича. Измеримая функция $u \in L^{p(x)}$, если интеграл $\int\limits_E |u(x)|^{p(x)}dx$ конечен. Норма в этом пространстве определяется как

$$\|u\|_{L^{p(x)}} = \inf\Big\{\alpha > 0 : \int\limits_E \Big|\frac{u(x)}{\alpha}\Big|^{p(x)}dx \leqslant 1\Big\}.$$

Мы используем обозначение $f_\pm = \max(\pm f, 0)$.

0.1 Свойства меры и функций

Предложение 1 ([48, теорема 3.5], теорема Тонелли о полунепрерывности)**.** *Пусть I — ограниченный интервал на $\mathbb{R}$ и $F(x, u, p)$ — лагранжиан, удовлетворяющий следующим условиям:*

i) *F и F_p непрерывны по (x, u, p),*

ii) *F неотрицательна,*

iii) *F выпукла по p.*

Тогда функционал $\int\limits_I F(x, u(x), u'(x))dx$ секвенциально слабо полунепрерывен снизу в $W^1_1(I)$.

Предложение 2 ([49, теорема 3.13]). *Пусть X — метрическое локально выпуклое пространство. Если $\{x_k\}$ — последовательность в X, слабо сходящаяся к некоторому $x \in X$, то найдётся последовательность $\{y_k\}$, удовлетворяющая условиям:*

i) *каждый y_k является выпуклой комбинацией конечного количества x_k,*

ii) *y_k сходятся сильно к x в пространстве X.*

Предложение 3 ([50, §6.6, теорема 1]). *Пусть $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ — липшицева функция. Тогда для любого ε найдётся непрерывно дифференцируемая функция $\tilde{f} : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, удовлетворяюшая*

$$\mathrm{meas}\{x : \tilde{f}(x) \neq f(x) \text{ или } \nabla\tilde{f}(x) \neq \nabla f(x)\} < \varepsilon.$$

Более того, для некоторой константы, зависящей только от n, выполнено

$$\sup_{\mathbb{R}^n} |\nabla\tilde{f}(x)| \leqslant C Lip(f),$$

где $Lip(f)$ — константа липшицевости функции f.

Предложение 4 ([25, лемма 2.7]). *Пусть $\varphi_h : [-1, 1] \to \mathbb{R}$ — последовательность липшицевых функций, удовлетворяющих условиям: $\varphi'_h \geqslant 1$ для почти всех x и всех h, $\varphi_h(x) \to x$ для почти каждого x. Тогда для любой $f \in L^1(\mathbb{R})$ выполнено $f(\varphi_h) \to f$ в $L^1(\mathbb{R})$.*

Предложение 5 ([29, теорема 6.19]). *Для любой $u \in W_1^1[-1, 1]$ и произвольного множества $A \subset \mathbb{R}$ нулевой меры выполнено $u'(x) = 0$ для почти всех $x \in u^{-1}(A)$.*

Предложение 6 ([51, §2.1]). *Пусть $p(x)$ — измеримая функция на отрезке $[-1, 1]$, удовлетворяющая $1 \leqslant p(x) \leqslant \sup p(x) < \infty$. Тогда ступенчатые функции плотны в пространстве Орлича $L^{p(x)}$.*

0.2 Перестановки

Пусть $\Omega = \omega \times (-1, 1)$, где ω — ограниченная область в $\mathbb{R}^{n-1}$ с липшицевой границей. Обозначим $x = (x_1, \ldots, x_{n-1}, y) = (x', y)$.

Напомним теорему о послойном представлении измеримой неотрицательной функции u, заданной на $\overline{\Omega}$ (см. [29, теорема 1.13]). Положим $\mathcal{A}_t(x') := \{y \in [-1,1] : \ u(x',y) > t\}$. Тогда имеет место равенство

$$u(x',y) = \int_0^\infty \mathcal{X}\{\mathcal{A}_t(x')\}(y)dt,$$

где $\mathcal{X}\{A\}$ — характеристическая функция множества A.

Определим симметричную перестановку измеримого множества $E \subset [-1,1]$ и симметричную перестановку (симметризацию по Штейнеру) неотрицательной функции $u \in W_1^1(\overline{\Omega})$:

$$E^* := [-\frac{|E|}{2}, \frac{|E|}{2}]; \qquad u^*(x',y) = \int\limits_0^\infty \mathcal{X}\{(\mathcal{A}_t(x'))^*\}(y)dt.$$

В тех же условиях определим монотонную перестановку множества E и функции $u \in W_1^1(\overline{\Omega})$:

$$\overline{E} := [1 - \operatorname{meas} E, 1]; \qquad \overline{u}(x',y) = \int\limits_0^\infty \mathcal{X}\{\overline{\mathcal{A}_t(x')}\}(y)dt.$$

Предложение 7 ([16, доказательство теоремы 1])**.** *Пусть $u_k \to u$ в $W_1^1(\mathbb{R}^n)$. Тогда найдётся подпоследовательность u_{k_l}, для которой $u_{k_l}^* \rightharpoonup u^*$ в $W_1^1(\mathbb{R}^n)$.*

Глава 1. О неравенстве Пойа-Сегё с весом для монотонной перестановки в случае ограниченного роста интегранта по производной

1.1 Обозначения

Пусть $\Omega = \omega \times (-1, 1)$, где ω — ограниченная область в $\mathbb{R}^{n-1}$ с липшицевой границей. Обозначим $x = (x_1, \dots, x_{n-1}, y) = (x', y)$.

Определим множество $\mathfrak{F}$ непрерывных функций $F : \overline{\omega} \times \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$ (здесь и далее $\mathbb{R}_+ = [0, \infty)$), выпуклых и строго возрастающих по третьему аргументу, удовлетворяющих $F(\cdot, \cdot, 0) \equiv 0$.

Рассмотрим функционал:

$$J(u) = \int\limits_{\Omega} F(x', u(x), \|\mathcal{D}u\|) dx, \tag{1.1}$$

где $F \in \mathfrak{F}$, $\|\cdot\|$ — некоторая норма в $\mathbb{R}^n$, симметричная по последней координате, то есть удовлетворяющая $\|(x', y)\| = \|(x', -y)\|$,

$$\mathcal{D}u = (a_1(x', u(x)) D_1 u,\ \dots,\ a_{n-1}(x', u(x)) D_{n-1} u,\ a(x, u(x)) D_n u)$$

— градиент u с весом (обратите внимание, что только вес при $D_n u$ зависит от y), $a(\cdot, \cdot) : \overline{\Omega} \times \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$ и $a_i(\cdot, \cdot) : \overline{\omega} \times \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$ — непрерывные функции. Здесь и далее индекс i пробегает от 1 до $n - 1$.

В этой главе мы рассматриваем следующее неравенство:

$$J(\overline{u}) \leqslant J(u) \tag{1.2}$$

Мы устанавливаем необходимые для выполнения неравенства условия на весовую функцию a. Также мы доказываем неравенство при необходимых условиях и дополнительном ограничении на рост интегранта по производной.

1.2 Условия, необходимые для выполнения неравенства (1.2)

Теорема 1.1. i) *Если неравенство* (1.2) *выполняется для некоторой* $F \in \mathfrak{F}$ *и произвольной кусочно линейной* u, *то вес* a *чётен по* y, *то есть* $a(x', y, v) \equiv a(x', -y, v)$.

ii) *Если неравенство* (1.2) *выполняется для произвольной* $F \in \mathfrak{F}$ *и произвольной кусочно линейной* u, *то вес* a *удовлетворяет неравенству*

$$a(x', s, v) + a(x', t, v) \geqslant a(x', 1 - t + s, v), \qquad x' \in \overline{\omega}, \ -1 \leqslant s \leqslant t \leqslant 1, \ v \in \mathbb{R}_+. \tag{1.3}$$

Доказательство. **1.** Докажем утверждение теоремы в одномерном случае: $u = u(y)$, $a = a(y, u)$,

$$J(u) = \int\limits_{-1}^{1} F(u(y), |a(y, u(y))u'(y)|)\, dy.$$

i) Предположим, что $a(y, v) \not\equiv a(-y, v)$. Тогда найдутся такие $y_0 \in (-1, 1)$ и $v_0 \in \mathbb{R}_+$, что

$$a(y_0, v_0) < a(-y_0, v_0).$$

Поэтому существует $\varepsilon > 0$ такое, что

$$a(y, v) < a(-y, v) \quad \text{для всех } y_0 - \varepsilon \leqslant y \leqslant y_0, \ v_0 \leqslant v \leqslant v_0 + \varepsilon,$$

и можно взять следующую функцию:

$$\begin{cases} u_1(y) = v_0 + \varepsilon, & y \in [-1, y_0 - \varepsilon] \\ u_1(y) = v_0 + y_0 - y, & y \in (y_0 - \varepsilon, y_0) \\ u_1(y) = v_0, & y \in [y_0, 1] \end{cases}$$

Тогда $\overline{u_1}(y) = u_1(-y)$ и

$$\begin{aligned} &J(u_1) - J(\overline{u_1}) \\ &= \int\limits_{y_0-\varepsilon}^{y_0} F\big(v_0 + y_0 - y, a(y, v_0 + y_0 - y)\big)\, dy - \int\limits_{-y_0}^{-y_0+\varepsilon} F\big(v_0 + y_0 + y, a(y, v_0 + y_0 + y)\big)\, dy \\ &= \int\limits_{y_0-\varepsilon}^{y_0} \Big(F\big(v_0 + y_0 - y, a(y, v_0 + y_0 - y)\big) - F\big(v_0 + y_0 - y, a(-y, v_0 + y_0 - y)\big)\Big)\, dy < 0, \end{aligned}$$

что противоречит предположениям теоремы. Утверждение **(i)** доказано.

ii) Предположим, что условие (1.3) не выполняется. Тогда в силу непрерывности функции a найдутся такие $-1 \leqslant s \leqslant t \leqslant 1$, $\varepsilon, \delta > 0$ и $v_0 \in \mathbb{R}_+$, что для любых $0 \leqslant y \leqslant \varepsilon$ и $v_0 \leqslant v \leqslant v_0 + \varepsilon$ справедливо неравенство

$$a(s+y,v) + a(t-y,v) + \delta < a(1-t+s+2y,v).$$

Рассмотрим функцию u_2 (см. рис. 1.1a):

$$\begin{cases} u_2(y) = v_0, & y \in [-1,s] \cup [t,1] \\ u_2(y) = v_0 + y - s, & y \in [s, s+\varepsilon] \\ u_2(y) = v_0 + \varepsilon, & y \in [s+\varepsilon, t-\varepsilon] \\ u_2(y) = v_0 + t - y, & y \in [t-\varepsilon, t] \end{cases} \tag{1.4}$$

Тогда

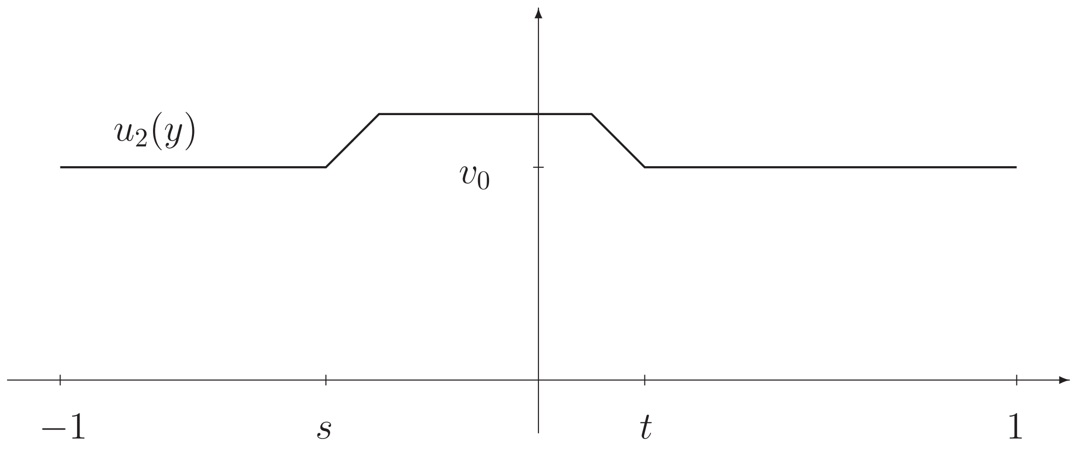
$$\begin{cases} \overline{u_2}(y) = v_0, & y \in [-1, 1-t+s] \\ \overline{u_2}(y) = v_0 + \dfrac{y-(1-t+s)}{2}, & y \in [1-t+s, 1-t+s+2\varepsilon] \\ \overline{u_2}(y) = v_0 + \varepsilon, & y \in [1-t+s+2\varepsilon, 1] \end{cases}$$

(см. рис. 1.1б).

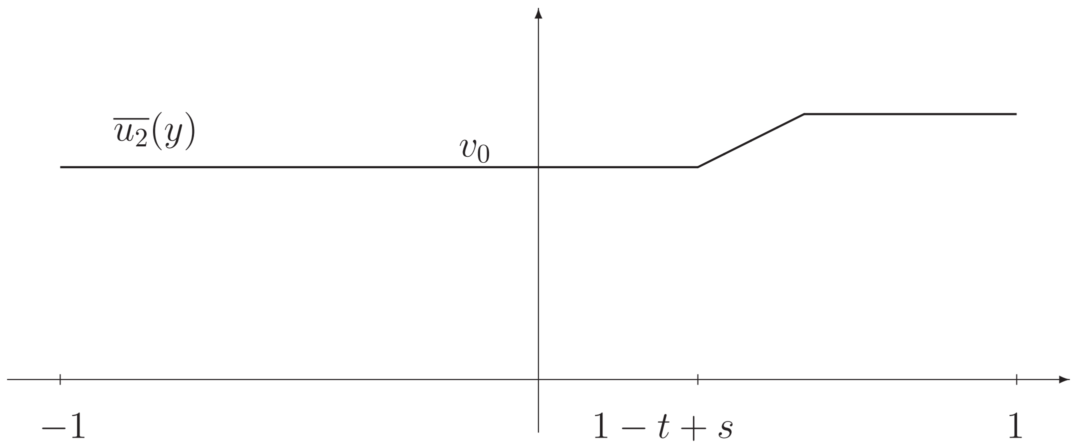
Имеем

$$J(a,\overline{u_2}) = \int\limits_0^{2\varepsilon} F\big(u_2(1-t+s+z), \frac{a(1-t+s+z, u_2(1-t+s+z))}{2}\big)\,dz$$
$$= \int\limits_0^{\varepsilon} 2F\big(v_0+y, \frac{a(1-t+s+2y, v_0+y)}{2}\big)\,dy$$

$$0 \leqslant J(a,u_2) - J(a,\overline{u_2}) = \int\limits_0^{\varepsilon} \Big(F\big(v_0+y, a(s+y,v_0+y)\big) + F\big(v_0+y, a(t-y,v_0+y)\big)$$
$$- 2F\big(v_0+y, \frac{a(1-t+s+2y, v_0+y)}{2}\big)\Big)\,dy$$
$$< \int\limits_0^{\varepsilon} \Big(F\big(v_0+y, a(s+y,v_0+y)\big) + F\big(v_0+y, a(t-y,v_0+y)\big)$$
$$- 2F\big(v_0+y, \frac{a(s+y,v_0+y) + a(t-y,v_0+y) + \delta}{2}\big)\Big)\,dy =: \Delta J.$$



(а) График u_2



(б) График $\overline{u_2}$

Рисунок 1.1: К доказательству теоремы 1.1

Рассмотрим теперь функцию $F(v,p) = p^\alpha$. Очевидно, что при $\alpha = 1$ выполнено неравенство

$$\frac{F(v,p)+F(v,q)}{2} - F\Big(v, \frac{p+q}{2} + \frac{\delta}{2}\Big) < 0. \tag{1.5}$$

В нашем случае p, q могут принимать значения на компакте $[0, M]$, где

$$M = \max_{(y,v)} a(y,v), \qquad (y,v) \in [-1,1] \times u_2([-1,1]).$$

Значит найдётся и $\alpha > 1$ такое, что неравенство (1.5) будет выполняться. Например, подходит любое $1 < \alpha < (\log_2 \frac{2M}{M+\delta})^{-1}$.

Тем самым, мы подобрали строго выпуклую по второму аргументу функцию F, для которой $\Delta J < 0$. Это противоречие доказывает утверждение **(ii)**.

2. i) Предположим, что $a(x', y, v) \not\equiv a(x', -y, v)$. Тогда найдутся такие $x'_0 \in \omega$, $y_0 \in (-1, 1)$ и $v_0 \in \mathbb{R}_+$, что

$$a(x'_0, y_0, v_0) < a(x'_0, -y_0, v_0).$$

Поэтому существует $\varepsilon > 0$ такое, что

$$a(x', y, v) < a(x', -y, v) \quad \text{для всех } |x' - x'_0| \leqslant \varepsilon,\ y_0 - \varepsilon \leqslant y \leqslant y_0,\ v_0 \leqslant v \leqslant v_0 + \varepsilon,$$

и можно взять функцию

$$u_1(x) = v_0 + \big(\min(\varepsilon - |x' - x'_0|, y_0 - y)\big)_+.$$

У этой функции в почти каждой точке либо производная по y, либо все производные по x' равны нулю. Кроме того, участки с ненулевой производной по x' дают одинаковые вклады и в $J(u_1)$, и в $J(\overline{u_1})$. Тогда дальнейшие рассуждения из пункта 1 повторяются дословно.

ii) Предположим, что условие (1.3) не выполняется. Тогда в силу непрерывности функции a найдутся такие $x'_0 \in \omega$, $-1 \leqslant s \leqslant t \leqslant 1$, $\varepsilon, \delta > 0$ и $v_0 \in \mathbb{R}_+$, что для любых $|x' - x'_0| \leqslant \varepsilon$, $0 \leqslant y \leqslant \varepsilon$ и $v_0 \leqslant v \leqslant v_0 + \varepsilon$ справедливо неравенство

$$a(s + y, v) + a(t - y, v) + \delta < a(1 - t + s + 2y, v).$$

Рассмотрим функцию

$$u_2(x) = v_0 + \big(\min(\varepsilon - |x' - x'_0|, y - s, t - y)\big)_+.$$

Аналогично, вклад производных по x' в $J(u_2)$ и $J(\overline{u_2})$ одинаков, и дальнейшие рассуждения совпадают с рассуждениями в пункте 1. $\square$

Замечание 1.1. *Пусть $a(x', \cdot, v)$ чётна. Тогда условие (1.3) эквивалентно субаддитивности функции $a(x', 1 - \cdot, v)$. В частности, если неотрицательная функция a чётна и вогнута по y, она удовлетворяет (1.3).*

Теорема 1.2. *Если неравенство* (1.2) *выполняется для произвольной $F \in \mathfrak{F}$ и произвольной кусочно линейной u, закреплённой на левом конце: $u(-1) = 0$, то вес a удовлетворяет неравенству* (1.3).

Доказательство. Будем следовать схеме доказательства пункта ii теоремы 1.1. Мы ставим дополнительное ограничение $s > -1$ (ввиду непрерывности весовой функции от этого требования легко потом избавиться). Также в качестве функции u_3 берём функцию, возрастающую от нуля на отрезке $[-1, s]$, а на отрезке $[s, 1]$ совпадающую с u_2 из теоремы 1.1. Тогда функция $\overline{u_3}$ на отрезке $[-1, s]$ совпадает с u_3, а на отрезке $[s, 1]$ совпадает с $\overline{u_2}$. Тем самым, $J(u_3) - J(u_2) = J(\overline{u_3}) - J(\overline{u_2})$, и рассуждения теоремы 1.1 начиная с вычисления ΔJ полностью повторяются. □

1.3 Доказательство неравенства (1.2) для кусочно линейных функций

Лемма 1.1. *Пусть a удовлетворяет (1.3).*

i) *Для любых $x' \in \overline{\omega}$, $-1 \leqslant t_1 \leqslant t_2 \leqslant \ldots \leqslant t_n \leqslant 1$, $v \in \mathbb{R}_+$ выполнены следующие неравенства*

$$\sum_{k=1}^{n} a(x', t_k, v) \geqslant a(x', 1 - \sum_{k=1}^{n}(-1)^k t_k, v), \qquad \text{для чётных } n,$$
$$\sum_{k=1}^{n} a(x', t_k, v) \geqslant a(x', -\sum_{k=1}^{n}(-1)^k t_k, v), \qquad \text{для нечётных } n.$$

ii) *Предположим дополнительно, что функция a чётна. Тогда для всех $x' \in \overline{\omega}$, $-1 \leqslant t_1 \leqslant t_2 \leqslant \ldots \leqslant t_n \leqslant 1$, $v \in \mathbb{R}_+$ также выполнены следующие неравенства*

$$\sum_{k=1}^{n} a(x', t_k, v) \geqslant a(x', -1 + \sum_{k=1}^{n}(-1)^k t_k, v), \qquad \text{для чётных } n,$$
$$\sum_{k=1}^{n} a(x', t_k, v) \geqslant a(x', \sum_{k=1}^{n}(-1)^k t_k, v), \qquad \text{для нечётных } n.$$

Доказательство. **i)** Будем доказывать по индукции. Для $n = 1$ утверждение тривиально. Пусть теперь n чётное. Тогда, по предположению индукции,

$$\sum_{k=1}^{n-1} a(x', t_k, v) \geqslant a(x', -\sum_{k=1}^{n-1}(-1)^k t_k, v).$$

Значит

$$\sum_{k=1}^{n-1} a(x', t_k, v) + a(x', t_n, v) \geqslant a(x', -\sum_{k=1}^{n-1}(-1)^k t_k, v) + a(x', t_n, v)$$

$$\geqslant a(x', 1 - \sum_{k=1}^{n}(-1)^k t_k, v).$$

В случае нечётного n воспользуемся предположением индукции в следующем виде:

$$\sum_{k=2}^{n} a(x', t_k, v) \geqslant a(x', 1 + \sum_{k=2}^{n}(-1)^k t_k, v).$$

Тогда

$$a(x', t_1, v) + \sum_{k=2}^{n} a(x', t_k, v) \geqslant a(x', t_1, v) + a(x', 1 + \sum_{k=2}^{n}(-1)^k t_k, v)$$

$$\geqslant a(x', t_1 - \sum_{k=2}^{n}(-1)^k t_k, v) = a(x', -\sum_{k=1}^{n}(-1)^k t_k, v).$$

ii) Доказательство этой части очевидно. □

Лемма 1.2. *Пусть функция $a(x', \cdot, u)$ чётна и удовлетворяет условию* (1.3). *Тогда, если u — неотрицательная кусочно линейная функция, то $J(u) \geqslant J(\overline{u})$.*

Доказательство. Обозначим через A множество точек $x \in \overline{\Omega}$, на которых функция u имеет изломы, объединённое с $\partial\Omega$. Это множество замкнуто. Возьмём

$$U_1 := \{(x', u(x', y)) : (x', y) \in \Omega\} \qquad U_2 := \{(x', u(x', y)) : (x', y) \in A\}$$
$$U := U_1 \setminus U_2.$$

Множество U_2 замкнуто. Поскольку функция u кусочно линейна, множество U_1 открыто. Тем самым, множество U тоже открыто и может быть представлено в виде объединения конечного числа связных непересекающихся открытых множеств G_j. Обозначим m_j число решений уравнения $u(x', y) = u_0$ (это число постоянно для $(x', u_0) \in G_j$, поскольку количество решений может меняться только при переходе через множество U_2). Легко видеть, что эти прообразы являются линейными функциями аргумента (x', u): $y = y_k^j(x', u)$, $k = 1, \ldots, m_j$, и $D_n y_k^j(x', u(x', y)) = \frac{1}{D_n u(x', y)}$. Мы будем считать, что $y_1^j(x', u) < y_2^j(x', u) < \cdots < y_{m_j}^j(x', u)$.

Уравнение $\overline{u}(x',\overline{y}) = u$ задаёт $\overline{y}$ как функцию $(x',u) \in G_j$. Её можно выразить через y_k^j (в частности, $\overline{y}$ кусочно линейна):

$$
\begin{array}{c|l|l}
\multirow{2}{*}{$u(x',-1) < u$} & m_j \text{ чётно} & \overline{y} = 1 - \sum\limits_{k=1}^{m_j} (-1)^k y_k^j \\
 & m_j \text{ нечётно} & \overline{y} = - \sum\limits_{k=1}^{m_j} (-1)^k y_k^j \\
\hline
\multirow{2}{*}{$u(x',-1) > u$} & m_j \text{ чётно} & \overline{y} = -1 + \sum\limits_{k=1}^{m_j} (-1)^k y_k^j \\
 & m_j \text{ нечётно} & \overline{y} = \sum\limits_{k=1}^{m_j} (-1)^k y_k^j
\end{array}
\qquad (1.6)
$$

Отсюда ясно, что

$$D_n\overline{y}(x',u(x',y)) = \frac{1}{D_n\overline{u}(x',y)} = \sum_{k=1}^{m_j} |D_n y_k^j(x',u(x',y))|$$

и $D_i\overline{u}(x',y) = \pm\sum_{k=1}^{m_j}(-1)^k D_i y_k^j(x',u(x',y))$, где знак перед правой частью зависит только от j.

Тогда

$$
\begin{aligned}
J(u) &= \sum_{j=1}^{N}\int\limits_{G_j} F(x',u(x),\|a_i(x',u(x))D_iu(x),a(x,u(x))D_nu(x)\|)dx \\
&= \sum_{j=1}^{N}\int\limits_{u(G_j)}\sum_{k=1}^{m_j} F\Big(x',u,\frac{\|a_i(x',u)D_iy_k^j(x',u),a(x',y_k^j(x',u),u)\|}{|D_ny_k^j(x',u)|}\Big) \\
&\qquad\qquad \times |D_ny_k^j(x',u)|dx'du, \qquad (1.7)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
J(\overline{u}) &= \sum_{j=1}^{N}\int\limits_{G_j} F(x',\overline{u},\|a_i(x',\overline{u}(x))D_i\overline{u}(x),a(x,\overline{u}(x))D_n\overline{u}(x)\|)dx \\
&= \sum_{j=1}^{N}\int\limits_{u(G_j)} F\Big(x',\overline{u},\frac{\|a_i(x',\overline{u})D_i\overline{y}(x',\overline{u}),a(x',\overline{y}(x',\overline{u}),\overline{u})\|}{\sum_{k=1}^{m_j}|D_ny_k^j(x',\overline{u})|}\Big) \\
&\qquad\qquad \times \sum_{k=1}^{m_j}|D_ny_k^j(x',\overline{u})|dx'd\overline{u}. \qquad (1.8)
\end{aligned}
$$

Зафиксируем j, x' и u и обозначим $b_k = |D_ny_k^j|$, $c_{ki} = D_iy_k^j$, $\overline{c}_i = D_i\overline{y}$, $y_k = y_k^j(x',u)$, $\overline{y} = \overline{y}(x',u)$, $m = m_j$. Тогда справедлива следующая цепочка неравенств:

$$\sum_{k=1}^{m} b_k F\Big(\frac{\|a_i c_{ki}, a(y_k)\|}{b_k}\Big) \overset{a}{\geqslant} F\Big(\frac{\sum_{k=1}^m \|a_i c_{ki}, a(y_k)\|}{\sum_{k=1}^m b_k}\Big)\sum_{k=1}^{m} b_k$$
$$\overset{b}{=} F\Big(\frac{\sum_{k=1}^m \|(-1)^k a_i c_{ki}, a(y_k)\|}{\sum_{k=1}^m b_k}\Big)\sum_{k=1}^{m} b_k \overset{c}{\geqslant} F\Big(\frac{\|\sum_{k=1}^m ((-1)^k a_i c_{ki}, a(y_k))\|}{\sum_{k=1}^m b_k}\Big)\sum_{k=1}^{m} b_k$$
$$= F\Big(\frac{\|\sum_{k=1}^m (-1)^k a_i c_{ki}, \sum_{k=1}^m a(y_k)\|}{\sum_{k=1}^m b_k}\Big)\sum_{k=1}^{m} b_k$$
$$\overset{d}{\geqslant} F\Big(\frac{\|\sum_{k=1}^m (-1)^k a_i c_{ki}, a(\overline{y})\|}{\sum_{k=1}^m b_k}\Big)\sum_{k=1}^{m} b_k$$
$$\overset{e}{=} F\Big(\frac{\|\pm a_i \sum_{k=1}^m (-1)^k c_{ki}, a(\overline{y})\|}{\sum_{k=1}^m b_k}\Big)\sum_{k=1}^{m} b_k = F\Big(\frac{\|a_i \overline{c}_i, a(\overline{y})\|}{\sum_{k=1}^m b_k}\Big)\sum_{k=1}^{m} b_k. \quad (1.9)$$

Здесь в переходе (a) применено неравенство Йенсена, в переходах (b) и (e) использована чётность нормы, в (c) использовано неравенство треугольника, в (d) — лемма 1.1 и чётность веса a по y.

Из (1.9) видно, что подынтегральное выражение в (1.7) не меньше подынтегрального выражения в (1.8). Тем самым, доказательство завершено. $\square$

Лемма 1.3. *Пусть функция $a(x', \cdot, u)$ удовлетворяет условию (1.3). Тогда, если u — неотрицательная кусочно линейная функция, удовлетворяющая $u(\cdot, -1) \equiv 0$, то $J(u) \geqslant J(\overline{u})$.*

Доказательство. Заметим, что в доказательстве леммы 1.2 мы используем чётность веса только в переходе (d) цепочки неравенств (1.9). Поскольку при $u(\cdot, -1) \equiv 0$ всегда выполнено $u(x', -1) < u$, с учётом соотношений (1.6) лемма 1.1 как раз обеспечивает требуемые для перехода (d) неравенства. $\square$

1.4 О расширении класса функций, для которых выполняется неравенство (1.2)

Следующее утверждение более или менее стандартно и близко к теореме Тонелли (предложение 1). Однако, в нашем случае множество $\{u : J(u) < \infty\}$ даже не является выпуклым подмножеством $W_1^1(\overline{\Omega})$. Поэтому здесь мы приводим полное доказательство для удобства читателя.

Лемма 1.4. *Пусть функция a непрерывна. Тогда функционал* $J(u)$ *слабо полунепрерывен снизу в* $W_1^1(\overline{\Omega})$.

Доказательство. Пусть $u_m \rightharpoonup u$ в $W_1^1(\overline{\Omega})$. Обозначим $J_{lim} = \underline{\lim}\, J(u_m) \geqslant 0$. Наша задача — доказать $J(u) \leqslant J_{lim}$. Если $J_{lim} = \infty$, то утверждение тривиально, поэтому можно считать $J_{lim} < \infty$. Переходя к подпоследовательности, добиваемся $J_{lim} = \lim J(u_m)$. Из слабой сходимости $u_m \rightharpoonup u$ заключаем, что найдётся R_0 такое, что $\|u_m\|_{W_1^1(\overline{\Omega})} \leqslant R_0$. Более того, переходя к подпоследовательности, можно считать, что $u_m \to u$ в $L^1(\overline{\Omega})$ и $u_m(x) \to u(x)$ почти всюду. Тогда по теореме Егорова для любого ε найдётся множество G_ε^1 такое, что $\operatorname{meas} G_\varepsilon^1 < \varepsilon$ и $u_m \rightrightarrows u$ в $\Omega \setminus G_\varepsilon^1$.

Из равномерной сходимости u_m следует существование такого K, что для каждого $m > K$ неравенство $|u_m| \leqslant |u| + \varepsilon$ выполнено для аргументов из $\Omega \setminus G_\varepsilon^1$. Возьмём $G_\varepsilon^2 = \{x \in \Omega \setminus G_\varepsilon^1 : |u(x)| \geqslant \frac{R_0+\varepsilon}{\varepsilon}\}$. Тогда

$$R_0 \geqslant \int\limits_\Omega |u(x)|\, dx \geqslant \int\limits_{G_\varepsilon^2} |u(x)|\, dx \geqslant \int\limits_{G_\varepsilon^2} \frac{R_0+\varepsilon}{\varepsilon}\, dx = \operatorname{meas} G_\varepsilon^2 \cdot \frac{R_0+\varepsilon}{\varepsilon}.$$

То есть $\operatorname{meas} G_\varepsilon^2 \leqslant \varepsilon \frac{R_0}{R_0+\varepsilon} < \varepsilon$. Тем самым, последовательность u_m равномерно сходится и равномерно ограничена вне множества $G_\varepsilon := G_\varepsilon^1 \cup G_\varepsilon^2$.

Из непрерывности F, a_i и a следует, что для произвольных ε и R найдётся такое $N(\varepsilon, R)$, что если $x \in \Omega \setminus G_\varepsilon$, $|M_i| \leqslant R$, $|M| \leqslant R$ и $m > N(\varepsilon, R)$, то

$$\begin{aligned}|F\big(x', u_m(x), \|a_i(x', u_m(x))M_i, a(x, u_m(x))M\|\big)& \\ - F\big(x', u(x), \|a_i(x', u(x))M_i, a(x, u(x))M\|\big)| &< \varepsilon.\end{aligned}$$

Рассмотрим множества

$$E_{m,\varepsilon} := \{x \in \Omega : \max\{|D_i u_m(x)|, |D_n u_m(x)|\} \geqslant \frac{R_0}{\varepsilon}\}.$$

Имеем

$$R_0 \geqslant \int\limits_\Omega |\nabla u_m(x)|\, dx \geqslant \int\limits_{E_{m,\varepsilon}} |\nabla u_m(x)|\, dx \geqslant \int\limits_{E_{m,\varepsilon}} \frac{R_0}{\varepsilon}\, dx = \operatorname{meas} E_{m,\varepsilon} \cdot \frac{R_0}{\varepsilon}.$$

Поэтому $\operatorname{meas} E_{m,\varepsilon} \leqslant \varepsilon$.

Теперь можно ввести $L_{m,\varepsilon} := \Omega \setminus (E_{m,\varepsilon} \cup G_\varepsilon)$. Тогда

$$\operatorname{meas} L_{m,\varepsilon} \geqslant \operatorname{meas} \Omega - 3\varepsilon.$$

Зафиксируем $R := \frac{R_0}{\varepsilon}$, $N(\varepsilon) := N(\varepsilon, \frac{R_0}{\varepsilon})$. Для любых $\varepsilon > 0$, $x \in L_{m,\varepsilon}$ и $m > N(\varepsilon)$ получим

$$\Big| F\big(x', u_m(x), \|a_i(x', u_m(x))D_i u_m(x), a(x, u_m(x))D_n u_m(x)\|\big) \\ - F\big(x', u(x), \|a_i(x', u(x))D_i u_m(x), a(x, u(x))D_n u_m(x)\|\big)\Big| < \varepsilon,$$

откуда

$$\int\limits_{L_{m,\varepsilon}} \Big| F\big(x', u_m(x), \|a_i(x', u_m(x))D_i u_m(x), a(x, u_m(x))D_n u_m(x)\|\big) \\ - F\big(x', u(x), \|a_i(x', u(x))D_i u_m(x), a(x, u(x))D_n u_m(x)\|\big)\Big|\, dx < \operatorname{meas}\Omega \cdot \varepsilon. \quad (1.10)$$

Возьмём $\varepsilon_j = \frac{\varepsilon}{2^j}$ $(j \geqslant 1)$, $m_j = N(\varepsilon_j) + j \to \infty$ и $L_\varepsilon = \bigcap L_{m_j,\varepsilon_j}$. Тогда $\sum \varepsilon_j = \varepsilon$ и, тем самым, $\operatorname{meas}(\Omega \setminus L_\varepsilon) < 3\varepsilon$. Поскольку из (1.10) следует

$$\int\limits_{L_\varepsilon} \Big| F\big(x', u_m(x), \|a_i(x', u_m(x))D_i u_m(x), a(x, u_m(x))D_n u_m(x)\|\big) \\ - F\big(x', u(x), \|a_i(x', u(x))D_i u_m(x), a(x, u(x))D_n u_m(x)\|\big)\Big|\, dx < \operatorname{meas}\Omega \cdot \varepsilon_j.$$

мы получаем

$$\begin{aligned} J_{lim} &= \lim J(u_{m_j}) \\ &= \lim \int\limits_\Omega F\big(x', u_{m_j}(x), \|a_i(x', u_{m_j}(x) D_i u_{m_j}, a(x, u_{m_j}(x))D_n u_{m_j}(x)\|\big)\, dx \\ &\geqslant \underline{\lim} \int\limits_\Omega \mathcal{X}\{L_\varepsilon\}(x) F\big(x', u(x), \|a_i(x', u(x))D_i u_{m_j}(x), a(x, u(x))D_n u_{m_j}(x)\|\big)\, dx \\ &=: \underline{\lim}\, J_\varepsilon(\nabla u_{m_j}). \end{aligned}$$

Наш новый функционал

$$J_\varepsilon(v) = \int\limits_\Omega \mathcal{X}\{L_\varepsilon\}(x) F\big(x', u(x), \|a_i(x', u(x))v_i(x), a(x, u(x))v_n(x)\|\big)\, dx$$

выпуклый. Вновь переходя к подпоследовательности u_k, можно считать, что $\underline{\lim}\, J_\varepsilon(u'_{m_j}) = \lim J_\varepsilon(u'_k)$. Так как $\nabla u'_k \rightharpoonup \nabla u'$ в L^1, по предложению 2 можно подобрать последовательность выпуклых комбинаций ∇u_k, которые будут сходиться к ∇u сильно. А именно: найдутся $\alpha_{k,l} \geqslant 0$ для $k \in \mathbb{N}$, $l \leqslant k$ такие, что $\sum_{l=1}^{k}\alpha_{k,l} = 1$ для каждого k и $w_k := \sum_{l=1}^{k}\alpha_{k,l}\nabla u_l \to \nabla u$ в L^1. Кроме того, очевидно, можно потребовать, чтобы минимальный индекс l ненулевого коэффициента $\alpha_{k,l}$ стремился к бесконечности при $k \to +\infty$. Тогда

$$\lim J_\varepsilon(\nabla u_k) = \lim \sum_{l=1}^{k}\alpha_{k,l} J_\varepsilon(\nabla u_l).$$

В силу выпуклости J_ε имеем

$$\sum_{l=1}^{k}\alpha_{k,l} J_\varepsilon(\nabla u_l) \geqslant J_\varepsilon(w_k).$$

Наконец, поскольку $(w_k)_i \to D_i u$ и $(w_k)_n \to D_n u$ в $L^1(\overline{\Omega})$, переходя к подпоследовательности, можем считать, что $w_k(x) \to \nabla u(x)$ почти всюду. Кроме того, так как для $x \in L_\varepsilon$ выполнено $|D_i u_j(x)| < \frac{R_0}{\varepsilon}$ и $|D_n u_j(x)| < \frac{R_0}{\varepsilon}$, то $|(w_k)_i(x)| < \frac{R_0}{\varepsilon}$ и $|(w_k)_n(x)| < \frac{R_0}{\varepsilon}$. Значит,

$$\begin{aligned}\mathcal{X}\{L_\varepsilon\}(x)F\big(x', u(x), \|a_i(x', u(x))(w_k)_i(x), a(x, u(x))(w_k)_n(x)\|\big)\\ \leqslant \max_{(x,M_i,M)} \mathcal{X}\{L_\varepsilon\}(x)F\big(x', u(x), \|a_i(x', u(x))M_i, a(x, u(x))M\|\big) < \infty,\end{aligned}$$

где максимум берется по компактному множеству $(x, M_i, M) \in \overline{\Omega} \times [-\frac{R_0}{\varepsilon}, \frac{R_0}{\varepsilon}]^n$. Поэтому применима теорема Лебега, и мы получаем $\lim J_\varepsilon(w_k) = J_\varepsilon(\nabla u)$. Таким образом,

$$J_{lim} \geqslant \lim J_\varepsilon(\nabla u_k) = \lim \sum_{l=1}^{k}\alpha_{k,l} J_\varepsilon(\nabla u_l) \geqslant \underline{\lim}\, J_\varepsilon(w_k) = J_\varepsilon(\nabla u).$$

Ввиду произвольности $\varepsilon > 0$ имеем $J_{lim} \geqslant J(u)$. $\square$

Теорема 1.3. *Пусть $B \subset A \subset W_1^1(\overline{\Omega})$. Предположим, что для каждого $u \in A$ найдётся последовательность $u_k \in B$ такая, что $u_k \to u$ в $W_1^1(\overline{\Omega})$ и $J(u_k) \to J(u)$. Тогда*

i) *Если для любой функции $v \in B$ выполнено $J(v^*) \leqslant J(v)$, то для любой функции $u \in A$ будет выполнено $J(u^*) \leqslant J(u)$.*

ii) *Если для любой функции $v \in B$ выполнено $J(\overline{v}) \leqslant J(v)$, то для любой функции $u \in A$ будет выполнено $J(\overline{u}) \leqslant J(u)$.*

Доказательство. **i)** Возьмём некоторую $u \in A$ и для неё найдём приближающую последовательность $\{u_k\} \subset B$. По условию $J(u_k^*) \leqslant J(u_k) \to J(u)$. По предложению 7 найдётся подпоследовательность u_{k_l}, для которой

$$u^*_{k_l} \rightharpoonup u^* \text{ in } W^1_1(\overline{\Omega}).$$

Из леммы 1.4 получаем

$$J(\overline{u}) \leqslant \underline{\lim}\, J(u^*_{k_l}) \leqslant \lim J(u_{k_l}) = J(u).$$

ii) Поскольку $\overline{u_k}(x) = u^*_k(\frac{x-1}{2})$ и $\overline{u}(x) = u^*(\frac{x-1}{2})$, из сходимости $u_k \to u$ в $W^1_1(\overline{\Omega})$ также следует сходимость $\overline{u_{k_l}} \rightharpoonup \overline{u}$ в $W^1_1(\overline{\Omega})$ для некоторой подпоследовательности u_{k_l}. Тем самым, рассуждения из доказательства предыдущего пункта могут быть дословно повторены. $\square$

1.5 Переход к соболевским функциям

Теорема 1.4. *Пусть функция $a(x', \cdot, u)$ чётна и удовлетворяет условию (1.3). Тогда*

i) *Неравенство (1.2) верно для произвольной неотрицательной $u \in Lip(\overline{\Omega})$.*

ii) *Предположим, что для любых $x' \in \overline{\omega}, z \in \mathbb{R}_+, p \in \mathbb{R}$ функция F удовлетворяет неравенству*

$$F(x', z, p) \leqslant C(1 + |z|^{q^*} + |p|^q),$$

где $\frac{1}{q^*} = \frac{1}{q} - \frac{1}{n}$, если $q < n$, либо q^* любое в противном случае. Если $q \leqslant n$, то дополнительно предположим, что веса a и a_i ограничены. Тогда неравенство (1.2) верно для произвольной неотрицательной $u \in W^1_q(\overline{\Omega})$.

Доказательство. **i)** Из предложения 3 следует, что любая липшицева функция u может быть приближена последовательностью $u_k \in \mathcal{C}^1(\overline{\Omega})$ в следующем смысле:

$$u_k \rightrightarrows u, \qquad \nabla u_k \to \nabla u \text{ п.в.}, \qquad |\nabla u_k| \leqslant const.$$

Тогда по теореме Лебега $u_k \to u$ в $W^1_1(\overline{\Omega})$ и $J(u_k) \to J(u)$. В свою очередь, u_k могут быть аналогичным образом приближены кусочно линейными функциями. Применив лемму 1.2 и теорему 1.3, получаем требуемое.

ii) Рассмотрим произвольную $u \in W^1_q(\overline{\Omega})$. Для неё можно построить последовательность кусочно линейных функций u_k, приближающих её в $W^1_q(\overline{\Omega})$. Действительно, поскольку $\partial\Omega \in Lip$, u можно продолжить финитным образом на внутренность большого шара в $\mathbb{R}^n$ и приблизить гладкими финитными функциями. Далее шар триангулируется, и значения функции линейно интерполируются. Очевидно, в процессе все функции остаются неотрицательными.

Тогда, ввиду теоремы 1.3, достаточно добиться $J(u_k) \to J(u)$. Доказательство этой сходимости можно свести к теореме Красносельского о непрерывности оператора Немыцкого (см. [52, гл. 5, §17]). Однако для удобства читателя мы приводим здесь рассуждение целиком.

Покажем, что веса $a_i(x', u(x))$ и $a(x, u(x))$ ограничены. Если $q \leqslant n$, то это выполнено по предположению теоремы. Если же нет, то $W^1_q(\overline{\Omega})$ вкладывается в $\mathcal{C}(\overline{\Omega})$, тем самым, $u_k(x)$ равномерно ограничены, а значит, и $a_i(x', u_k(x))$ и $a(x, u_k(x))$ равномерно ограничены. Поэтому $\|\mathcal{D}u_k(x)\| \leqslant C_1|\nabla u_k(x)|$. То есть,

$$F(x', u_k(x), \|\mathcal{D}u_k(x)\|) \leqslant C_2(1 + |u_k(x)|^{q^*} + |\nabla u_k(x)|^q).$$

Рассмотрим множества A_m, состоящие из $x \in \overline{\Omega}$, для которых при всех $k \geqslant m$ выполнено $1+|u_k(x)|^{q^*}+|\nabla u_k(x)|^q \leqslant 2(1+|u(x)|^{q^*}+|\nabla u(x)|^q)$. Очевидно, что $A_m \subset A_{m+1}$. Переходя к подпоследовательности, можем считать, что $u_k \to u$ и $\nabla u_k \to \nabla u$ почти всюду. А значит $|A_m| \to |\overline{\Omega}|$. Тогда

$$\mathcal{X}\{A_k\}F(x', u_k(x), \|\mathcal{D}u_k(x)\|) \leqslant 2(1 + |u(x)|^{q^*} + |\nabla u(x)|^q),$$

и

$$\mathcal{X}\{A_k\}F(x', u_k(x), \|\mathcal{D}u_k(x)\|) \to F(x', u(x), \|\mathcal{D}u(x)\|)$$

почти всюду. По теореме вложения $\|u_k\|_{q^*} \leqslant C_3\|u_k\|_{W^1_q}$. Тем самым, мы нашли суммируемую мажоранту и получаем $\int_{A_k} \mathcal{X}\{A_k\}F(x', u_k(x), \|\mathcal{D}u_k(x)\|)dx \to J(u)$ по теореме Лебега .

Теперь оценим остаток:

$$\begin{aligned}\int_{\Omega\setminus A_k} F(x', u_k(x), \|\mathcal{D}u_k(x)\|)dx &\leqslant \int_{\Omega\setminus A_k} C_2(1 + |u_k(x)|^{q^*} + |\nabla u_k(x)|^q)dx \\ &\leqslant C_4\Big(\int_{\Omega\setminus A_k} (1 + |u(x)|^{q^*} + |\nabla u(x)|^q)dx \\ &\qquad + \int_{\Omega\setminus A_k} (1 + |u(x) - u_k(x)|^{q^*} + |\nabla(u - u_k)(x)|^q)dx\Big).\end{aligned}$$

Первое слагаемое стремится к нулю по абсолютной непрерывности интеграла. Для второго слагаемого выполнено

$$\int_{\Omega\setminus A_k} (1 + |u(x) - u_k(x)|^{q^*} + |\nabla(u - u_k)(x))|^q)dx$$
$$\leqslant (|\Omega \setminus A_k| + \|u - u_k\|^{q^*}_{W^1_q} + \|u - u_k\|^q_{W^1_q}) \to 0.$$

Тем самым, сходимость $J(u_k) \to J(u)$ доказана. □

Теорема 1.5. *Пусть функция $a(x', \cdot, u)$ удовлетворяет условию (1.3). Тогда*

i) *Неравенство (1.2) верно для произвольной неотрицательной $u \in Lip(\overline{\Omega})$, удовлетворяющей $u(\cdot, -1) \equiv 0$.*

ii) *Предположим, что для любых $x' \in \overline{\omega}, z \in \mathbb{R}_+, p \in \mathbb{R}$ функция F удовлетворяет неравенству*

$$F(x', z, p) \leqslant C(1 + |z|^{q^*} + |p|^q),$$

где $\frac{1}{q^*} = \frac{1}{q} - \frac{1}{n}$, если $q < n$, либо q^* любое в противном случае. Если $q \leqslant n$, то дополнительно предположим, что веса a и a_i ограничены. Тогда неравенство (1.2) верно для произвольной неотрицательной $u \in W^1_q(\overline{\Omega})$, удовлетворяющей $u(\cdot, -1) \equiv 0$.

Доказательство теоремы дословно повторяет доказательство теоремы 1.4.

Глава 2. О неравенстве Пойа-Сегё с весом для монотонной перестановки и симметризации в общем случае при $n = 1$

2.1 Обозначения

В этой главе мы рассматриваем одномерный случай задачи из первой главы. Тем самым, пропадают весовые коэффициенты a_i, вес $a = a(x, v)$: $[-1, 1] \times \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$, $\mathfrak{F}$ — множество непрерывных функций $F : \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$ выпуклых и строго возрастающих по второму аргументу, удовлетворяющих $F(\cdot, 0) \equiv 0$. Рассматриваемый функционал имеет вид:

$$J(a, u) = \int\limits_{-1}^{1} F(u(x), a(x, u(x))|u'(x)|)\, dx.$$

Также мы будем использовать обозначение

$$J(B, a, u) = \int\limits_{B} F(u(x), a(x, u(x))|u'(x)|)\, dx.$$

Мы снимаем требование ограничения роста, стоящее в теореме 1.4, и также доказываем аналогичный результат для симметричной перестановки, устанавливая необходимые и достаточные условия для выполнения неравенства

$$J(u^*) \leqslant J(u). \tag{2.1}$$

Мы продолжаем ссылаться на условие (1.3), однако оно приобретает следующий вид:

$$a(s, v) + a(t, v) \geqslant a(1 - t + s, v), \qquad s, t : -1 \leqslant s \leqslant t \leqslant 1,\ v \in \mathbb{R}_+. \tag{2.2}$$

2.2 Доказательство неравенства (1.2) для кусочно монотонных весов

В этом параграфе мы получим неравенство (1.2) при дополнительном условии монотонности весовой функции при $x \in [-1, 0]$ и при $x \in [0, 1]$.

Лемма 2.1. *Пусть a — непрерывная функция, $a(\cdot, u)$ возрастает на $[-1,0]$ и убывает на $[0,1]$ для всех $u \geqslant 0$. Тогда для любой функции $u \in W_1^1[-1,1]$, $u \geqslant 0$, найдётся последовательность $\{u_k\} \subset Lip[-1,1]$, удовлетворяющая*

$$u_k \to u \text{ в } W_1^1[-1,1] \quad \text{и} \quad J(a, u_k) \to J(a, u). \tag{2.3}$$

Для доказательства мы модифицируем схему теоремы 2.4 из [25], в которой аналогичный факт доказывается для интегрантов, не зависящих от свободной переменной. Частично доказательство совпадает доказательством в [25], но для удобства читателя мы приводим здесь его полностью.

Доказательство леммы 2.1. Можно считать, что $J(a,u) < \infty$.

Мы докажем утверждение для функционала

$$J_1(u) = \int_0^1 F\big(u(x), a(x, u(x))|u'(x)|\big)\, dx.$$

Вторая часть с интегрированием по $[-1,0]$ сводится к J_1 заменой переменной.

Для $h \in \mathbb{N}$ покроем множество $\{x \in [0,1] : |u'(x)| > h\}$ открытым множеством A_h. Не умаляя общности, можно считать, что $A_{h+1} \subset A_h$ и $|A_h| \to 0$ при $h \to \infty$.

Обозначим v_h неотрицательную непрерывную функцию, заданную на $[0,1]$, совпадающую с u на множестве $[0,1] \setminus A_h$, и линейную на интервалах, составляющих A_h. Тогда $v_h \to u$ в $W_1^1[-1,1]$. Теперь изменим v_h так, чтобы сделать их липшицевыми.

Представим $A_h = \cup_k \Omega_{h,k}$, где $\Omega_{h,k} = (b^-_{h,k}, b^+_{h,k})$. Обозначим

$$\alpha_{h,k} := |\Omega_{h,k}|, \quad \beta_{h,k} := v_h(b^+_{h,k}) - v_h(b^-_{h,k}) = u(b^+_{h,k}) - u(b^-_{h,k}).$$

Тогда $v_h' = \frac{\beta_{h,k}}{\alpha_{h,k}}$ в $\Omega_{h,k}$. Заметим, что

$$\sum_k |\beta_{h,k}| \leqslant \int_{A_h} |u'|\, dx \leqslant \|u'\|_{L^1[-1,1]} < \infty,$$

а значит, $\sum_k |\beta_{h,k}| \to 0$ при $h \to 0$ по теореме Лебега.

Определим функцию $\varphi_h \in W_1^1[0,1]$ следующим образом:

$$\begin{aligned}
&\varphi_h(0) = 0 \\
&\quad \varphi_h' = 1 && \text{в } [0,1] \setminus A_h, \\
&\quad \varphi_h' = \max\Big(\frac{|\beta_{h,k}|}{\alpha_{h,k}}, 1\Big) && \text{в } \Omega_{h,k}.
\end{aligned}$$

Заметим, что $\int_0^1 |\varphi_h'|\,dx \leqslant 1 + \sum_k |\beta_{h,k}| < \infty$.

Покажем, что $\varphi_h' \to 1$ в $L^1(0,1)$:

$$\int |\varphi_h' - 1|\,dx = \sum_k \Big(\max\Big(\frac{|\beta_{h,k}|}{\alpha_{h,k}}, 1\Big) - 1\Big)\alpha_{h,k} \leqslant \sum_k |\beta_{h,k}| \to 0.$$

Отсюда следует, что φ_h удовлетворяет условиям предложения 4.

Рассмотрим теперь $\varphi_h^{-1} : [0,1] \to [0,1]$ — ограничение обратной к φ_h функции на $[0,1]$. Тогда $0 \leqslant (\varphi_h^{-1})' \leqslant 1$ и

$$\begin{aligned} &\varphi_h^{-1}(0) = 0 \\ &(\varphi_h^{-1})' = 1 && \text{в } [0,1] \setminus \varphi_h(A_h), \\ &(\varphi_h^{-1})' = \min\Big(\frac{\alpha_{h,k}}{|\beta_{h,k}|}, 1\Big) && \text{в } [0,1] \cap \varphi_h(\Omega_{h,k}). \end{aligned}$$

Возьмём $u_h = v_h(\varphi_h^{-1})$. Заметим, что $u_h(0) = u(0)$, и

$$\begin{aligned} &u_h' = v_h'(\varphi_h^{-1}) \cdot (\varphi_h^{-1})' = u'(\varphi_h^{-1}) && \text{в } [0,1] \setminus \varphi_h(A_h), \\ &u_h' = v_h'(\varphi_h^{-1}) \cdot (\varphi_h^{-1})' = \operatorname{sign}\beta_{h,k} \cdot \min\Big(1, \frac{|\beta_{h,k}|}{\alpha_{h,k}}\Big) && \text{в } [0,1] \cap \varphi_h(\Omega_{h,k}). \end{aligned}$$

Тем самым, u_h липшицева, поскольку u' ограничена в $[0,1] \setminus A_h$.

Покажем, что $u_h \to u$ в $W_1^1[0,1]$. Для этого достаточно оценить

$$\|u_h' - u'\|_{L^1} \leqslant \int\limits_{[0,1]\setminus\varphi_h(A_h)} |u_h' - u'| + \int\limits_{[0,1]\cap\varphi_h(A_h)} |u_h'| + \int\limits_{[0,1]\cap\varphi_h(A_h)} |u'| =: P_h^1 + P_h^2 + P_h^3.$$

$$P_h^1 = \int\limits_{[0,1]\setminus\varphi_h(A_h)} |u'(\varphi_h^{-1}) - u'|\,dx = \int\limits_{\varphi_h^{-1}([0,1])\setminus A_h} |u' - u'(\varphi_h)|\,dz \leqslant \int\limits_{[0,1]} |u' - u'(\varphi_h)|\,dz.$$

В силу предложения 4, $P_h^1 \to 0$. Далее,

$$P_h^2 \leqslant |\varphi_h(A_h)| = \sum_k |\varphi_h(\Omega_{h,k})| = \sum_k \max(|\beta_{h,k}|, \alpha_{h,k}) \leqslant \sum_k \alpha_{h,k} + \sum_k |\beta_{h,k}| \to 0.$$

Наконец, $P_h^3 \to 0$ по абсолютной непрерывности интеграла, и утверждение доказано.

Осталось показать, что $J_1(u_h) \to J_1(u)$.

$$J_1(u_h) = \int\limits_{[0,1]\setminus\varphi_h(A_h)} F\big(u_h(x), a(x, u_h(x))|u_h'(x)|\big)\,dx$$
$$+ \int\limits_{[0,1]\cap\varphi_h(A_h)} F\big(u_h(x), a(x, u_h(x))|u_h'(x)|\big)\,dx =: \hat{P}_h^1 + \hat{P}_h^2.$$

Поскольку $u \in W_1^1[0,1]$, имеем $u \in L_\infty([0,1])$. Обозначим $\|u\|_\infty = r$, тогда $\|u_h\|_\infty < 2r$ при достаточно больших h. Кроме того, $|u_h'| \leqslant 1$ почти всюду в $\varphi_h(A_h)$. Тогда $\hat{P}_h^2 \leqslant M_F|\varphi_h(A_h)| \to 0$, где

$$M_F = \max_{[-2r,2r]\times[-M_a,M_a]} F; \quad M_a = \max_{[0,1]\times[-2r,2r]} a.$$

Далее,

$$\hat{P}_h^1 = \int\limits_{[0,1]\setminus\varphi_h(A_h)} F\big(u(\varphi_h^{-1}(x)), a(x, u(\varphi_h^{-1}(x))|u'(\varphi_h^{-1}(x))(\varphi_h^{-1})'|)\big)\,dx$$
$$= \int\limits_{\varphi_h^{-1}([0,1])\setminus A_h} F\big(u(z), a(\varphi_h(z), u(z))|u'(z)|\big)\,dz$$
$$= \int\limits_{[0,1]} F\big(u(z), a(\varphi_h(z), u(z))|u'(z)|\big)\mathcal{X}\{\varphi_h^{-1}([0,1]) \setminus A_h\}\,dz.$$

Последнее равенство, вообще говоря, не имеет смысла, так как $\varphi_h(z)$ может принимать значения вне $[0,1]$. Определим $a(z,u) = a(1,u)$ при $z > 1$, теперь выражение корректно. Заметим, что $\mathcal{X}\{\varphi_h^{-1}([0,1]) \setminus A_h\}$ возрастают, так как множества $\varphi_h^{-1}([0,1])$ возрастают и A_h убывают, то есть $\varphi_{h_1}^{-1}([0,1]) \subset \varphi_{h_2}^{-1}([0,1])$ и $A_{h_1} \supset A_{h_2}$ при $h_1 \leqslant h_2$. На отрезке $[0,1]$ (и даже $\varphi_h([0,1])$) функция a убывает, а также $\varphi_h(z)$ убывает по h, значит $a(\varphi_h(z))$ будет расти по h. В таком случае можно применить теорему о монотонной сходимости и получить

$$\hat{P}_h^1 \to \int\limits_{[0,1]} F\big(u(z), a(z, u(z))|u'(z)|\big)\,dz.$$

$\square$

Замечание 2.1. *Очевидно, что те же рассуждения с закреплением функции u на левом конце можно провести на любом интервале $[x_0, x_1]$, где вес* *а убывает по x. То есть можно получить последовательность $\{u_h\}$, удовлетворяющую*

$$u_h(x_0) = u(x_0); \qquad u_h \to u \text{ в } W_1^1[x_0, x_1];$$
$$\int_{x_0}^{x_1} F\big(u_h(x), a(x, u_h(x))|u_h'(x)|\big) \to \int_{x_0}^{x_1} F\big(u(x), a(x, u(x))|u'(x)|\big).$$

Аналогично, если a возрастает по x, можно аппроксимировать и с закреплением на правом конце.

Следствие 2.1. *Пусть функция a непрерывна, чётна, убывает на $[0, 1]$ и удовлетворяет неравенству (1.3). Тогда для любой $u \in W_1^1[-1, 1]$ выполнено $J(a, u^*) \leqslant J(a, u)$.*

Доказательство. Неравенство немедленно следует из теоремы 1.3 и леммы 2.1.

□

2.3 Свойства весовой функции

Здесь мы получаем несколько следствий из условия (1.3) на вес. Для удобства в пределах этого параграфа мы опускаем второй параметр веса: $a(x, v) = a(x)$; очевидно, что все полученные свойства буду выполняться для любых v.

Лемма 2.2. i) *Пусть функция a удовлетворяет условию (1.3). Если найдётся такое $x_0 \in [-1, 1]$, что $a(x_0) = 0$, то либо $a \equiv 0$ на $[x_0, 1]$, либо множество нулей функции a периодично на $[x_0, 1]$, причем период нацело делит $1 - x_0$.*

ii) *Пусть функция a удовлетворяет условию (1.3) и чётна. Если найдётся такое $x_0 \in [-1, 1]$, что $a(x_0) = 0$, то либо $a \equiv 0$, либо функция a периодична на отрезке $[-1, 1]$, причем период нацело делит $1 - x_0$.*

Доказательство. **i)** Прежде всего, заметим, что если для некоторых $s \leqslant t$ выполнено $a(s) = a(t) = 0$, то неравенство (1.3) влечёт

$$0 = a(s) + a(t) \geqslant a(1 - (t - s)) \geqslant 0,$$

то есть $a(1-(t-s))=0$. Подставив $s=t=x_0$, получаем $a(1)=0$.

Точно так же, если $s \leqslant 1-t$ и $a(s)=a(1-t)=0$, то $a(s+t)=0$.

Тем самым, множество нулей функции a симметрично на отрезке $[x_0,1]$, и если $a(s)=a(s+\Delta)=0$ $(\Delta \geqslant 0)$, то $a(s+k\Delta)=0$, для $s+k\Delta \leqslant 1$. Отсюда следует, что множество корней либо периодично на отрезке $[x_0,1]$, либо совпадает с ним.

ii) Периодичность нулей функции a следует из её чётности и из первой части утверждения леммы. Обозначим расстояние между соседними нулями за Δ.

Тогда для $-1 \leqslant x \leqslant 1-\Delta$ выполнено

$$a(x)=a(x)+a(1-\Delta) \geqslant a(x+\Delta).$$

С другой стороны, $-1 \leqslant -(x+\Delta) \leqslant 1-\Delta$, и

$$a(x+\Delta)=a(-(x+\Delta))+a(1-\Delta) \geqslant a(-x)=a(x).$$

Тем самым, $a(x)=a(x+\Delta)$. □

Лемма 2.3. *Пусть функции a_1 и a_2 удовлетворяют неравенству (1.3). Тогда функции $\max(a_1(x),a_2(x))$ и $a_1(x)+a_2(x)$ тоже ему удовлетворяет.*

Доказательство. Положим $a(x)=\max(a_1(x),a_2(x))$. Тогда

$$\begin{aligned} a(1-t+s) &= \max(a_1(1-t+s),a_2(1-t+s)) \leqslant \max(a_1(s)+a_1(t),a_2(s)+a_2(t)) \\ &\leqslant \max(a_1(s),a_2(s))+\max(a_1(t),a_2(t)) = a(s)+a(t). \end{aligned}$$

Утверждение для функции $a(x)=a_1(x)+a_2(x)$ очевидно. □

Лемма 2.4. *Пусть функция a удовлетворяет неравенству (1.3), $k \in \mathbb{N}$. Тогда кусочно линейная функция a_k, интерполирующая функцию a по узлам $(-1+\frac{2i}{k})$, $i=0,1,\ldots,k$, тоже удовлетворяет неравенству (1.3).*

Доказательство. **1.** Пусть $s=-1+\frac{2i}{k}$, $t=-1+\frac{2j}{k}$. Тогда неравенство выполняется для a_k, потому что оно выполняется для a, а в этих точках они совпадают.

2. Пусть теперь $s=-1+\frac{2i}{k}$, и $t \in [-1+\frac{2j}{k},-1+\frac{2(j+1)}{k}]$.

Рассмотрим линейную функцию $h_1(t)=a_k(1-t+s)-a_k(t)-a_k(s)$. Из части 1 следует $h_1(-1+\frac{2j}{k}) \leqslant 0$ и $h_1(-1+\frac{2(j+1)}{k}) \leqslant 0$. Значит, поскольку h_1

линейна, $h_1(t) \leqslant 0$. Тем самым, неравенство выполняется для любого $s = -1+\frac{2i}{k}$ и $t \in [-1,1]$.

3. Пусть s и t удовлетворяют соотношению $1 - t + s = \frac{2j}{k}$.

Рассмотрим функцию $h_2(y) = a_k(\frac{2j}{k}) - a_k(s+y) - a_k(t+y)$. Если взять y_0 такое, что $s + y_0$ — один из узлов, то $t + y_0$ — тоже узел. Следовательно $h_2(y_0) = a(\frac{2j}{k}) - a(s+y_0) - a(t+y_0) \leqslant 0$. Поскольку h_2 линейна между подобными y_0, получаем $h_2(y) \leqslant 0$ для всех допустимых y.

4. Наконец, для произвольного $t \in [-1,1]$ рассмотрим $h_3(s) = a_k(1 - t + s) - a_k(t) - a_k(s)$. Заметим, что если s или $1 - t + s$ являются узлами, то из частей 2 и 3 следует $h_3(s) \leqslant 0$. Поскольку h_3 линейна между такими s, имеем $h_3(s) \leqslant 0$ для всех допустимых s, что завершает доказательство. □

2.4 Доказательство неравенства (1.2) для произвольных весов

В этом параграфе мы избавимся от условия монотонности веса по x. Будем это делать в несколько этапов.

Для начала отметим, что все свойства функции a существенны лишь в окрестности графиков функций u, $\overline{u}$. Более того, все рассуждения этого параграфа будет построены так, чтобы использовать свойства веса только в окрестности графика u.

Мы вводим несколько ограничений на весовую функцию. Каждое следующее, будучи добавленным к предыдущим, задаёт более узкий класс весов.

$(H1)$ $a(x,v)$ чётна по x и удовлетворяет неравенству (1.3), а также $J(a,u) < \infty$.

$(H2)$ На множестве $v \in [\min u(x), \max u(x)]$, для которых $a(\cdot, v) \not\equiv 0$, количество нулей функций $a(\cdot, v)$ ограничено константой, не зависящей от v.

$(H3)$ Если $a(x_0, u(x_0)) = 0$ для некоторого x_0, то $a(\cdot, u(x_0)) \equiv 0$. Кроме того, выполнено $\lim\limits_{k\to\infty} D_k(a, U(a)) = 0$, где

$$U(a) := \{v \in [\min u(x), \max u(x)] : a(\cdot, v) \not\equiv 0\},$$

$$D_k(a,U) := \sup_{v\in U} \frac{\max\limits_{|x_1-x_2|\leqslant\frac{2}{k}} |a(x_1,v) - a(x_2,v)|}{\min\limits_{\operatorname{dist}(x,u^{-1}(v))\leqslant\frac{2}{k}} a(x,v)}. \qquad (2.4)$$

$(H4)$ Найдётся такое чётное k, что $a(\cdot, v)$ линейны для каждого v на участках $[-1+\frac{2i}{k}, -1+\frac{2(i+1)}{k}]$.

$(H5)$ Множество $v \in \mathbb{R}$, для которых $a(\cdot, v)$ имеет участки постоянства, отличается от множества $v \in \mathbb{R}$ таких, что $a(\cdot, v) \equiv 0$, лишь на множество меры 0.

$(H6)$ Отрезок $[-1, 1]$ можно разбить на конечное число промежутков, на каждом из которых в v-окрестности графика $u(x)$ вес a не меняет монотонности по x.

$(H7)$ Пусть $x_1 < x_2 < x_3$, и на $[x_1, x_2]$ вес $a(\cdot, v)$ в v-окрестности графика функции u убывает, а на $[x_2, x_3]$ возрастает. Тогда в некоторой окрестности точки $u(x_2)$ имеем $a(\cdot, v) \equiv 0$.

Вес, удовлетворяющий условию $(H1)$, мы будем называть допустимым для заданной функции $u(x)$.

Теперь мы можем сформулировать основное утверждение главы.

Теорема 2.1. *Пусть $F \in \mathfrak{F}$, функция $u \in W_1^1[-1,1]$ неотрицательна, и весовая функция $a : [-1,1] \times \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$ непрерывна и допустима для u. Тогда справедливо неравенство* (1.2).

Мы докажем неравенство (1.2) при условиях $(H1) - (H7)$, а затем будем постепенно избавляться от них.

Для доказательства нам потребуются следующая

Лемма 2.5. *Пусть $u \in W_1^1[-1,1]$ неотрицательна. И пусть замкнутое множество $W \subset \mathbb{R}_+$ таково, что множество всех $v \in W$, для которых $a(\cdot, v) \not\equiv 0$, имеет меру ноль. Тогда найдётся возрастающая последовательность весов $\mathfrak{b}_\ell$ такая, что*

1) $\mathfrak{b}_\ell(\cdot, v) \rightrightarrows a(\cdot, v)$ для почти всех v;

2) $\mathfrak{b}_\ell(\cdot, v) \equiv 0$ для каждого v в некоторой (зависящей от ℓ) окрестности W;

3) $J(\mathfrak{b}_\ell, u) \to J(a, u)$ и $J(\mathfrak{b}_\ell, \overline{u}) \to J(a, \overline{u})$.

Замечание 2.2. *Если a допустимы для u, то и $\mathfrak{b}_\ell$ тоже.*

Доказательство. Возьмём $\rho(d) := \min(1, \max(0, d))$,

$$\mathfrak{b}_\ell(x, v) := a(x, v) \cdot \rho(\ell \operatorname{dist}(v, W) - 1) \leqslant a(x, v).$$

Вес $\mathfrak{b}_\ell$ равен нулю в $\left(\frac{1}{\ell}\right)$-окрестности W. Кроме того, $\mathfrak{b}_\ell \equiv a$ вне $\left(\frac{2}{\ell}\right)$-окрестности W, а также $\mathfrak{b}_\ell(x,v)$ возрастает по ℓ. Тем самым , $\mathfrak{b}_\ell(\cdot,v) \rightrightarrows a(\cdot,v)$ для почти всех v. По теореме о монотонной сходимости имеем $J(u^{-1}(\mathbb{R}_+ \setminus W), \mathfrak{b}_\ell, u) \nearrow J(u^{-1}(\mathbb{R}_+ \setminus W), a, u)$.

Разобьем множество W на два: $W_1 := \{v \in W : a(\cdot,v) \equiv 0\}$ и $W_2 = W \backslash W_1$. Тогда

$$J(u^{-1}(W_1), \mathfrak{b}_\ell, u) = J(u^{-1}(W_1), a, u),$$
$$J(u^{-1}(W_2), \mathfrak{b}_\ell, u) = \int\limits_{x \in u^{-1}(W_2)} F\big(u(x), \mathfrak{b}_\ell(x, u(x))|u'(x)|\big)\, dx.$$

При этом, по предложению 5, почти всюду на $u^{-1}(W_2)$ выполнено $u'(x) = 0$. То есть

$$J(u^{-1}(W_2), \mathfrak{b}_\ell, u) = \int\limits_{x \in u^{-1}(W_2)} F\big(u(x), 0\big)\, dx = 0.$$

Аналогично $J(u^{-1}(W_2), a, u) = 0$, откуда $J(\mathfrak{b}_\ell, u) \to J(a,u)$. Вторая часть пункта *3)* доказывается так же. $\square$

Перейдем к доказательству теоремы 2.1.

Шаг 1. *Пусть $u \in W_1^1[-1,1]$, и вес a удовлетворяет условиям $(H1)$ – $(H7)$. Тогда выполняется неравенство (1.2).*

Разобьем отрезок $[-1,1]$ на отрезки $\Delta_k = [\hat{x}_k, \hat{x}_{k+1}]$, состоящие из двух частей. В левой части каждого отрезка вес a будет возрастать по x в окрестности графика $u(x)$, в правой же будет убывать. Согласно замечанию 2.1 на каждом таком отрезке можно повторить схему из леммы 2.1, приближая функцию u липшицевыми функциями u_n. Это даёт $J(\Delta_k, a, u_n) \to J(\Delta_k, a, u)$.

Однако при такой аппроксимации функции u_n могут иметь разрывы в точках $\hat{x}_k$.

Заметим теперь, что согласно условию $(H7)$ можно выбрать точки $\hat{x}_k$ так, что $a \equiv 0$ в (x,v)-окрестности точек $(\hat{x}_k, u(\hat{x}_k))$.

Изменим теперь функции u_n в окрестности точек $\hat{x}_k$ на линейные, сделав u_n непрерывными на $[-1,1]$. В силу вышесказанного, интегралов $J(\Delta_k, a, u_n)$ это не изменит, и мы получаем $J(a, u_n) \to J(a,u)$ и $u_n \to u$ в $W_1^1[-1,1]$.

По теореме 1.3 получаем (1.2).

Шаг 2. *Пусть вес a удовлетворяет условиям $(H1)$ – $(H6)$. Тогда выполняется неравенство (1.2).*

Применим лемму 2.5. В качестве множества W возьмем множество всех v, при которых происходит переход графика $u(x)$ из промежутка, в котором вес убывает по x, в промежуток, в котором вес возрастает. Очевидно, получившиеся функции $\mathfrak{b}_\ell$ удовлетворяют $(H1)-(H7)$. Из шага 1 имеем $J(\mathfrak{b}_\ell, \overline{u}) \leqslant J(\mathfrak{b}_\ell, u)$. Переходя к пределу, получаем требуемое неравенство (1.2).

Шаг 3. *Пусть вес a удовлетворяет условиям $(H1)-(H5)$. Тогда выполняется неравенство (1.2).*

Рассмотрим абсциссы точек излома функции a и ординаты, для которых a имеет участки постоянства. Эти абсциссы и ординаты определяют деление прямоугольника $[-1,1]\times[\min u(x), \max u(x)]$ на более мелкие, внутри которых вес a не меняет монотонности. Однако, количество мелких прямоугольников может оказаться бесконечным. Кроме того, если функция пересекает горизонтальную границу прямоугольника, монотонность в v-окрестности точки пересечения может меняться.

Возьмем множество W точек v, для которых вес a имеет участки постоянства по x. В соответствии с $(H5)$ множество $v \in W$, для которых $a(\cdot, v) \not\equiv 0$, имеет нулевую меру.

Применив лемму 2.5, построим последовательность весов $\mathfrak{b}_\ell$. У каждого из них количество участков монотонности конечно, поскольку между соседними по v участками строгой монотонности присутствует полоса нулевых значений веса шириной по крайней мере $\frac{2}{k}$.

Тем самым, вес $\mathfrak{b}_\ell$ может менять монотонность вдоль графика u либо в точках $x = -1 + \frac{2i}{k}$, либо в тех местах, где график пересекает полосу нулевых значений веса. Ясно, что таких пересечений может быть лишь конечное число, поскольку $\int |u'|$ увеличивается как минимум на $\frac{2}{\ell}$ во время такого перехода, а $u' \in L^1[-1,1]$.

Мы получили, что $\mathfrak{b}_\ell$ удовлетворяют $(H1)-(H6)$. Из шага 2 имеем $J(\mathfrak{b}_\ell, \overline{u}) \leqslant J(\mathfrak{b}_\ell, u)$. Переходя к пределу, получаем (1.2).

Шаг 4. *Пусть вес a удовлетворяет условиям $(H1)-(H3)$. Тогда выполняется неравенство (1.2).*

Предположим, что функция a удовлетворяет $(H1)-(H3)$, в частности $J(a, u) < \infty$.

Зафиксируем произвольное четное k. По точкам $a(-1+\frac{2i}{k}, v)$ для каждого v построим кусочно линейную по x интерполяцию. Получившаяся функция

$a_k(x, v)$ непрерывна, четна по x и по лемме 2.4 удовлетворяет неравенству (1.3). Кроме того, $a_k \to a$ при $k \to \infty$, причем сходимость равномерная на компактах. Однако неравенство $a_k(x, u(x)) \leqslant a(x, u(x))$ не обязано выполняться, и потому веса a_k могут не быть допустимыми для u.

Возьмем $\mathfrak{c}_k := (1 - D_k(a_k, U(a_k)))a_k$, где D_k определены в (2.4). Числа $D_k(a_k, U(a_k))$ положительны и стремятся к нулю, поэтому $\mathfrak{c}_k \to a$ при $k \to \infty$. Покажем, что $\mathfrak{c}_k(x, u(x)) \leqslant a(x, u(x))$. Возьмем некоторое число $x \in [-1 + \frac{2i}{k}, -1 + \frac{2(i+1)}{k}] =: [x_i, x_{i+1}]$. Тогда $\mathfrak{c}_k(x, u(x)) \leqslant \max(\mathfrak{c}_k(x_i, u(x)), \mathfrak{c}_k(x_{i+1}, u(x)))$, поскольку $\mathfrak{c}_k$ кусочно линейны по x. Далее,

$$\begin{aligned}\mathfrak{c}_k(x_i, u(x)) &= (1 - D_k(a_k, U(a_k))) \cdot a(x_i, u(x)) \\ &\leqslant a(x_i, u(x)) - \frac{a(x_i, u(x)) - a(x, u(x))}{a(x_i, u(x))} \cdot a(x_i, u(x)) = a(x, u(x)).\end{aligned}$$

Аналогично, $\mathfrak{c}_k(x_{i+1}, u(x)) \leqslant a(x, u(x))$. Тем самым, $\mathfrak{c}_k(x, u(x)) \leqslant a(x, u(x))$ для любого x, и $\mathfrak{c}_k$ являются допустимыми для u. То есть функции $\mathfrak{c}_k$ удовлетворяют $(H1) - (H4)$.

При заданном $k \in \mathbb{N}$, будем приближать функцию $\mathfrak{c}_k =: \mathfrak{c}$ весами, удовлетворяющими $(H1) - (H5)$. Рассмотрим вспомогательную функцию $\Lambda(x) = 1 - |x|$, удовлетворяющую условию (1.3).

Возьмем

$$t(v) := D_k(\mathfrak{c}, U(\mathfrak{c})) \cdot \max\{\tau \geqslant 0 : \forall x \in u^{-1}(v) \quad \tau\Lambda(x) \leqslant \mathfrak{c}(x, u(x))\}.$$

Функция t зависит от k, но мы будем опускать это в записи.

Ясно, что максимальное τ равно нулю только если $c(\cdot, v) \equiv 0$, иначе нарушается условие $(H3)$. Функция t может не быть непрерывной. Однако, несложно видеть, что она полунепрерывна снизу. Возьмем теперь

$$\tilde{t}(v) := \inf_{w \in u([-1,1])} \{t(w) + |v - w|\}.$$

Очевидно, что $\tilde{t} \leqslant t$, и множества нулей функций t и $\tilde{t}$ совпадают.

Покажем, что $\tilde{t}$ непрерывна (и даже липшицева). Зафиксируем некоторое v_1. Тогда найдутся сколь угодно малое $\varepsilon > 0$ и $w_1 \in u([-1, 1])$, удовлетворяющие $\tilde{t}(v_1) = t(w_1) + |v_1 - w_1| - \varepsilon$. Для любого v_2 имеем $\tilde{t}(v_2) \leqslant t(w_1) + |v_2 - w_1|$. И, тем самым, $\tilde{t}(v_2) - \tilde{t}(v_1) \leqslant |v_1 - v_2| + \varepsilon$. В силу произвольности v_1, v_2 и ε, получаем, что $\tilde{t}$ непрерывна.

При $\alpha \in [0,1]$ функция $\mathfrak{d}_\alpha(x,v) := \mathfrak{c}(x,v) + \alpha\Lambda(x)\tilde{t}(v)$ чётна по x, удовлетворяет неравенству (1.3) согласно лемме 2.3, и не превосходит $a(x,v)$ по построению функции $\tilde{t}$. Таким образом, $\mathfrak{d}_\alpha$ — допустимый вес. И теперь очевидно, что $\mathfrak{d}_\alpha$ удовлетворяет условиям $(H1)-(H4)$.

Покажем, что для почти всех $\alpha \in [0,1]$ выполнено следующее условие. $\mathfrak{d}_\alpha$ не имеет горизонтальных участков, за исключением v, для которых $\mathfrak{d}_\alpha(\cdot,v) \equiv 0$, и множества меры ноль. Введём обозначение для множества α, «плохих» на участке $[x_i, x_{i+1}]$:

$$A_i := \Big\{\alpha \in [0,1] : \\ \operatorname{meas}\{v \in [\min u, \max u] : \frac{\mathfrak{c}(x_{i+1},v) - \mathfrak{c}(x_i,v))}{\frac{2}{k}} + \alpha\chi_i\tilde{t}(v) = 0\} > 0\Big\},$$

где $\chi_i = 1$ если $[x_i, x_{i+1}] \subset [0,1]$, и $\chi_i = -1$, если $[x_i, x_{i+1}] \subset [-1,0]$.

Рассмотрим функцию

$$\begin{aligned} h_i(v) =& \frac{\mathfrak{c}(x_{i+1},v) - \mathfrak{c}(x_i,v)}{\tilde{t}(v)} && \text{при } \tilde{t}(v) \neq 0 \\ h_i(v) =& 0 && \text{при } \tilde{t}(v) = 0. \end{aligned}$$

Тогда $\operatorname{card}(A_i) = \operatorname{card}(\{\alpha \in [0,1] : \operatorname{meas}\{v \in [\min u, \max u] : h_i(v) \pm \frac{2}{k}\alpha = 0\} > 0\})$. Значит $\operatorname{card}(A_i) \leqslant \aleph_0$, а также $\operatorname{card}(\cup_i A_i) \leqslant \aleph_0$. Тем самым, найдётся последовательность весов $\mathfrak{d}_{\alpha_j} \searrow \mathfrak{c}$, удовлетворяющих $(H1)-(H5)$.

Из шага 3 имеем $J(\mathfrak{d}_{\alpha_j}, \overline{u}) \leqslant J(\mathfrak{d}_{\alpha_j}, u)$. Переходя к пределу, получаем $J(\mathfrak{c}, \overline{u}) \leqslant J(\mathfrak{c}, u)$.

Далее, при $x \in [-1,1]$ имеем

$$F\big(u(x), \mathfrak{c}_k(x,u(x))|u'(x)|\big) \to F\big(u(x), a(x,u(x))|u'(x)|\big) \tag{2.5}$$

при $k \to \infty$. Кроме того, $F\big(u(x), a(x,u(x))|u'(x)|\big)$ является суммируемой мажорантой для левой части соотношения (2.5). По теореме Лебега о мажорируемой сходимости, получаем $J(\mathfrak{c}_k, u) \to J(a,u)$. Поскольку $J(\mathfrak{c}_k, \overline{u}) \leqslant J(\mathfrak{c}_k, u)$, теорема 1.3 даёт неравенство (1.2).

Шаг 5. *Пусть вес a удовлетворяет лишь условию $(H1)$. Тогда выполняется неравенство (1.2).*

Будем строить приближение для a весами, удовлетворяющими $(H1)-(H2)$. Воспользуемся леммой 2.5 с множеством $W = \{v \in \mathbb{R}_+ : a(\cdot,v) \equiv 0\}$.

Введём обозначение

$$Z_a(v) := \{x \in [-1,1] : a(x,v) = 0\}.$$

Заметим, что множества $Z_{\mathfrak{b}_\ell}(v)$ совпадают либо с $Z_a(v)$, либо с $[-1,1]$.

Покажем, что $\mathfrak{b}_\ell$ удовлетворяет $(H2)$. Действительно, в противном случае найдётся последовательность v_m, для которой $m < \mathrm{card}(Z_{\mathfrak{b}_\ell})(v_m) < \infty$. После перехода к подпоследовательности имеем $v_m \to v_0$. Из части 2 леммы 2.2 следует, что множества $Z_{\mathfrak{b}_\ell}(v_m) = Z_a(v_m)$ периодические с периодом не более $\frac{2}{m-1}$. Возьмем некоторый $x \in [-1,1]$. Для каждого m найдётся x_m такой, что $|x - x_m| \leqslant \frac{1}{m-1}$ и $a(x_m, v_m) = 0$. Но $a(x_m, v_m) \to a(x, v_0)$. Тем самым, $a(x, v_0) = 0$.

Отсюда $Z_a(v_0) = [-1,1]$. Но это означает, что для любого v, для которого $|v - v_0| \leqslant \frac{1}{\ell}$, выполнено $\mathfrak{b}_\ell(\cdot, v) \equiv 0$, что противоречит $\mathrm{card}(Z_{\mathfrak{b}_\ell})(v_m) < \infty$.

Зафиксируем теперь $\ell \in \mathbb{N}$, обозначим $\mathfrak{b}_\ell =: \mathfrak{b}$ и приблизим функцию $\mathfrak{b}$ весами, удовлетворяющими $(H1) - (H3)$. Из $(H2)$ следует, что найдётся множество $T \subset [-1,1]$ состоящее из конечного числа элементов, такое, что если $x \notin T$ и $\mathfrak{b}(x,v) = 0$ для некоторого v, то $\mathfrak{b}(\cdot, v) \equiv 0$.

Вновь воспользуемся леммой 2.5 с множеством $W = u(T) \cup \overline{u}(T)$. Полученные при помощи леммы веса $\mathfrak{c}_j$ удовлетворяют $(H1) - (H2)$, поскольку отличаются от $\mathfrak{b}$ лишь домножением на непрерывный множитель, меньший единицы и зависящий только от v.

Из непрерывности u следует, что для достаточно больших k найдутся $j = j(k)$ такие, что

$$u\Big(\Big\{x \in [-1,1] : dist(x,T) \leqslant \frac{4}{k}\Big\}\Big) \subset \Big\{v \in \mathbb{R}_+ : dist(v, u(T)) \leqslant \frac{1}{2j}\Big\},$$

и $j(k) \to \infty$ при $k \to \infty$. Отсюда $\min\limits_{dist(x,u^{-1}(v)) \leqslant \frac{2}{k}} c_j(x,v) > 0$ для всех $v \in U(c_j)$. Более того, при $v \in U(c_j)$

$$\frac{\max\limits_{|x_i - x_{i+1}| \leqslant \frac{2}{k}} |\mathfrak{c}_j(x_i, v) - \mathfrak{c}_j(x_{i+1}, v)|}{\min\limits_{\mathrm{dist}(x,u^{-1}(v)) \leqslant \frac{2}{k}} \mathfrak{c}_j(x,v)} = \frac{\max\limits_{|x_i - x_{i+1}| \leqslant \frac{2}{k}} |\mathfrak{b}(x_i, v) - \mathfrak{b}(x_{i+1}, v)|}{\min\limits_{\mathrm{dist}(x,u^{-1}(v)) \leqslant \frac{2}{k}} \mathfrak{b}(x,v)}.$$

При этом, знаменатель второй дроби при $v \in U(\mathfrak{c}_j)$ отделен от нуля. Тем самым, $D_k(\mathfrak{c}_j, U(\mathfrak{c}_j))$ ограничена.

Поскольку D_k не меняется при домножении первого аргумента на коэффициент, не зависящий от x, и $U(\mathfrak{c}_j) \nearrow U(\mathfrak{b})$, имеем

$$D_k(\mathfrak{c}_j, U(\mathfrak{c}_j)) = D_k(\mathfrak{b}, U(\mathfrak{c}_j)) \leqslant D_k(\mathfrak{b}, U(\mathfrak{b})) \to 0$$

при $k \to \infty$.

Таким образом, веса $\mathfrak{c}_{j(k)}$ удовлетворяют $(H1)-(H3)$. Из шага 4 имеем $J(\mathfrak{c}_{j(k)}, \overline{u}) \leqslant J(\mathfrak{c}_{j(k)}, u)$. Переходя к пределу, получаем $J(\mathfrak{b}_\ell, \overline{u}) \leqslant J(\mathfrak{b}_\ell, u)$, а затем и неравенство (1.2).

Тем самым, теорема 2.1 доказана. $\square$

2.5 Доказательство неравенства (1.2) для функций, закреплённых на левом конце

Рассмотрим теперь случай, когда функция u удовлетворяет дополнительному условию $u(-1) = 0$.

Теорема 2.2. *Пусть $F \in \mathfrak{F}$, функция $u \in W_1^1[-1,1]$ неотрицательна, $u(-1) = 0$, весовая функция $a : [-1,1] \times \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$ непрерывна и удовлетворяет неравенству* (1.3). *Тогда справедливо неравенство* (1.2).

Доказательство. Мы следуем схеме доказательства теоремы 2.1, но вместо $(H1)$ и $(H7)$ накладываем следующие условия на вес:

$(H1')$ $a(x,v)$ удовлетворяет неравенству (1.3), а также $J(a,u) < \infty$.

$(H7')$ Выполнено условие $(H7)$, и $a(\cdot, v) \equiv 0$ в некоторой v-окрестности нуля.

Шаг 1. *Пусть $u \in W_1^1[-1,1]$, выполнено $u(-1) = 0$, и вес a удовлетворяет условиям $(H1'), (H2)-(H6), (H7')$. Тогда выполняется неравенство (1.2).*

Для доказательства будем приближать функцию u так же, как и в первом шаге доказательства теоремы 2.1, с заменой u в некоторой окрестности точки $x = -1$ на линейную так, чтобы $u_n(-1) = 0$.

Шаг 2. *Пусть вес a удовлетворяет условиям $(H1'), (H2)-(H6)$. Тогда выполняется неравенство (1.2).*

Для доказательства добавим в множество W из второго шага доказательства теоремы 2.1 точку 0 и повторим рассуждение.

Дальнейшие шаги проходят без изменений. $\square$

2.6 Условия, необходимые для выполнения неравенства (2.1)

Нам потребуется вспомогательная

Лемма 2.6. *Если для функции $a \in \mathcal{C}([-1,1]\times\mathbb{R}_+)$ выполнено соотношение*

$$a(s,v)+a(t,v) \geqslant a\Big(\frac{s-t}{2},v\Big)+a\Big(\frac{t-s}{2},v\Big), \quad s,t\in[-1,1],\ v\in\mathbb{R}_+ \qquad (2.6)$$

то она чётна и выпукла по первому аргументу.

Доказательство. Предположим для начала, что $a(\cdot,v)\in\mathcal{C}^1[-1,1]$ при каждом v. Зафиксируем произвольные $s\in[-1,1]$ и $v\in\mathbb{R}_+$ и рассмотрим функцию

$$b(x) := a(s,v)+a(x,v)-a(\frac{s-x}{2},v)-a(\frac{x-s}{2},v)\geqslant 0.$$

$x=-s$ является точкой минимума функции b, поскольку $b(-s)=0$. Значит,

$$b'(-s)=a'_x(-s,v)+\frac{1}{2}a'_x(s,v)-\frac{1}{2}a'_x(-s,v)=0,$$

то есть $a'_x(s,v)=-a'_x(-s,v)$. Тем самым, функция $a(\cdot,v)$ четна.

Рассмотрим теперь случай произвольной непрерывной a.

Продолжим $a(x,v):=a(-1,v)$ при $x<-1$ и $a(x,v):=a(1,v)$ при $x>1$. Рассмотрим усреднение функции:

$$a_\rho(x,v)=\int_{\mathbb{R}}\omega_\rho(z)a(x-z,v)dz=\int_{\mathbb{R}}\omega_\rho(z)a(x+z,v)dz,$$

где $\omega_\rho(z)$ — усредняющее ядро с радиусом ρ. Тогда для $-1+\rho\leqslant s,t\leqslant 1-\rho$

$$a_\rho(s,v)+a_\rho(t,v)-a_\rho(\frac{s-t}{2},v)-a_\rho(\frac{t-s}{2},v)=$$
$$\int_{\mathbb{R}}\omega_\rho(z)\big(a(s-z,v)+a(t+z,v)-a(\frac{s-t}{2}-z,v)-a(\frac{t-s}{2}+z,v)\big)dz\geqslant 0.$$

Значит функция $a_\rho(\cdot,v)$ чётна на $[-1+\rho,1-\rho]$. Переходя к пределу при $\rho\to 0$, получаем, что функция $a(\cdot,v)$ чётна.

Наконец, для любых s, t и v имеем

$$a(s,v)+a(t,v)=a(s,v)+a(-t,v)\geqslant 2a(\frac{s+t}{2},v).$$

□

Теорема 2.3. *Если неравенство* (2.1) *выполняется для произвольной* $F \in \mathfrak{F}$ *и произвольной кусочно линейной* u, *то вес* a — *чётная и выпуклая по первому аргументу функция.*

Доказательство. Докажем, что в условиях теоремы выполнено неравенство (2.6). Отсюда, ввиду леммы 2.6, будет следовать утверждение теоремы.

Предположим, что неравенство (2.6) не выполнено. Тогда найдутся $-1 \leqslant s < t \leqslant 1$, $\varepsilon, \delta > 0$ $(2\varepsilon < t - s)$ и $v_0 \in \mathbb{R}_+$, такие, что для любого $0 \leqslant z \leqslant \varepsilon$ и любого $v_0 \leqslant v \leqslant v_0 + \varepsilon$ выполнено

$$a(s+z, v+z)+a(t-z, v+z)+2\delta < a\Big(\frac{s-t}{2}+z, v+z\Big)+a\Big(\frac{t-s}{2}-z, v+z\Big). \quad (2.7)$$

Рассмотрим функцию u_2, введенную в (1.4). Тогда

$$\begin{cases} u_2^*(x) = v_0, & x \in [-1, \frac{s-t}{2}] \cup [\frac{t-s}{2}, 1] \\ u_2^*(x) = v_0 + x - \dfrac{s-t}{2}, & x \in [\frac{s-t}{2}, \frac{s-t}{2} + \varepsilon] \\ u_2^*(x) = v_0 + \varepsilon, & x \in [\frac{s-t}{2} + \varepsilon, \frac{t-s}{2} - \varepsilon] \\ u_2^*(x) = v_0 + \dfrac{t-s}{2} - x, & x \in [\frac{t-s}{2} - \varepsilon, \frac{t-s}{2}]. \end{cases}$$

Отсюда получаем

$$\begin{aligned} 0 &\leqslant J(a, u_2) - J(a, \overline{u_2}) \\ &= \int_0^\varepsilon F\Big(u_2(s+z), \frac{a(s+z, u_2(s+z))}{\varepsilon}\Big)dz + \int_0^\varepsilon F\Big(u_2(t-z), \frac{a(t-z, u_2(t-z))}{\varepsilon}\Big)dz \\ &\quad - \int_0^\varepsilon F\Big(u_2^*(\frac{s-t}{2}+z), \frac{a(\frac{s-t}{2}+z, u_2^*(\frac{s-t}{2}+z))}{\varepsilon}\Big)dz \\ &\quad - \int_0^\varepsilon F\Big(u_2^*(\frac{t-s}{2}-z), \frac{a(\frac{t-s}{2}-z, u_2^*(\frac{t-s}{2}-z))}{\varepsilon}\Big)dz =: \Delta J. \end{aligned}$$

Возьмем $F(v, p) := f(p) := p + \gamma p^2$, где $\gamma > 0$. Тогда

$$\begin{aligned} \Delta J = \int_0^\varepsilon \Big(f\big(\frac{a(s+z, v_0+z)}{\varepsilon}\big) + f\big(\frac{a(t-z, v_0+z)}{\varepsilon}\big) \\ - f\big(\frac{a(\frac{s-t}{2}+z, v_0+z)}{\varepsilon}\big) - f\big(\frac{a(\frac{t-s}{2}-z, v_0+z)}{\varepsilon}\big)\Big)dz. \end{aligned}$$

Обозначим

$$M = \max_{(x,v)} a(x, v), \qquad (x, v) \in [-1, 1] \times u_2([-1, 1]).$$

Если взять $\gamma := \frac{\delta/\varepsilon}{(M/\varepsilon)^2} > 0$, то для $p \leqslant \frac{M}{\varepsilon}$ имеем $p \leqslant f(p) \leqslant p + \frac{\delta}{\varepsilon}$, и

$$\Delta J \leqslant \frac{1}{\varepsilon}\int_0^\varepsilon \Big(a(s+z, v_0+z) + a(t-z, v_0+z) + 2\delta \\ - a(\frac{s-t}{2}+z, v_0+z) - a(\frac{t-s}{2}-z, v_0+z)\Big)dz < 0$$

(последнее неравенство следует из (2.7)).

Тем самым, мы пришли к противоречию, что завершает доказательство.

□

2.7 Доказательство неравенства (2.1)

Теорема 2.4. *Пусть $F \in \mathfrak{F}$, функция $u \in W_1^1[-1,1]$ неотрицательна, и непрерывная весовая функция $a : [-1,1] \times \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$ чётна и выпукла по первому аргументу. Тогда справедливо неравенство* (2.1).

Доказательство. Для липшицевых функций u утверждение теоремы доказано в [16]. Таким образом, необходимо лишь перейти к W_1^1-функциям.

Структура выпуклого по x веса гораздо проще структуры веса, который мы рассматривали для случая монотонной перестановки. Выпуклый вес убывает при $x < 0$ и возрастает при $x > 0$ независимо от v. Тем самым, мы сразу входим в условия $(H6)$ из теоремы 2.1. Чтобы войти в условия $(H7)$, применим лемму 2.5 с множеством $W = \{u(0)\}$. Это дает нам возможность сразу воспользоваться шагом 1 доказательства, получив неравенство (2.1) в общем виде. Заметим, что шаг 1 использует лишь условия $(H1)$, $(H6)$, $(H7)$, так что нет нужды проверять остальные. □

Глава 3. О неравенстве Пойа-Сегё с переменным показателем суммирования

3.1 Обозначения

В этой главе мы рассматриваем обобщения неравенства (2.1) на случай функционалов с переменным показателем суммирования в интегранте:

$$\mathcal{J}(u) = \int_{-1}^{1} |u'(x)|^{p(x)} dx, \qquad \mathcal{I}(u) = \int_{-1}^{1} (1 + |u'(x)|^2)^{\frac{p(x)}{2}} dx.$$

Здесь $p(x) \geqslant 1$ — непрерывная функция на отрезке $[-1,1]$, $u \in \overset{o}{W}{}_1^1 [-1,1]$, $u \geqslant 0$.

3.2 Необходимые условия

Теорема 3.1. *Пусть $\mathcal{J}(u^*) \leqslant \mathcal{J}(u)$ выполнено для любой кусочно линейной функции $u \geqslant 0$. Тогда $p(x) \equiv const$.*

Доказательство. Рассмотрим $x_0 \in (-1,1)$. Для любых $\alpha > 0$ и $\varepsilon > 0$, удовлетворяющих $[x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon] \subset [-1,1]$, определим функцию

$$u_{\alpha,\varepsilon}(x) = \alpha(\varepsilon - |x - x_0|)_+.$$

Тогда $u^*_{\alpha,\varepsilon}(x) = \alpha(\varepsilon - |x|)_+$, и

$$\mathcal{J}(u_{\alpha,\varepsilon}) = \int_{x_0-\varepsilon}^{x_0+\varepsilon} \alpha^{p(x)} dx, \qquad \mathcal{J}(u^*_{\alpha,\varepsilon}) = \int_{-\varepsilon}^{\varepsilon} \alpha^{p(x)} dx.$$

Возьмём неравенство

$$\frac{\mathcal{J}(u^*_{\alpha,\varepsilon})}{2\varepsilon} \leqslant \frac{\mathcal{J}(u_{\alpha,\varepsilon})}{2\varepsilon},$$

и перейдём к пределу при $\varepsilon \to 0$. Поскольку p непрерывна, мы получим $\alpha^{p(0)} \leqslant \alpha^{p(x_0)}$. При $\alpha > 1$ и $\alpha < 1$ это даёт $p(0) \leqslant p(x_0)$ и $p(0) \geqslant p(x_0)$ соответственно.

$\square$

Теорема 3.2. *Если неравенство $\mathcal{I}(u^*) \leqslant \mathcal{I}(u)$ выполняется для всех кусочно линейных $u \geqslant 0$, то p чётна и выпукла. Более того, выпукла следующая функция:*

$$K(s,x) = s(1+s^{-2})^{\frac{p(x)}{2}}, \qquad s>0,\ x\in[-1,1].$$

Доказательство. Возьмём две точки $-1 < x_1 < x_2 < 1$ и рассмотрим финитную кусочно линейную функцию с ненулевой производной лишь в окрестностях x_1 и x_2. А именно, для произвольных $s,t>0$ и достаточно малого $\varepsilon>0$

$$\begin{cases} u_\varepsilon(x) = 0, & x \in [-1, x_1 - s\varepsilon] \cup [x_2 + s\varepsilon, 1] \\ u_\varepsilon(x) = \varepsilon + \dfrac{x-x_1}{s}, & x \in [x_1 - s\varepsilon, x_1 + s\varepsilon] \\ u_\varepsilon(x) = 2\varepsilon, & x \in [x_1 + s\varepsilon, x_2 + s\varepsilon] \\ u_\varepsilon(x) = \varepsilon + \dfrac{x_2 - x}{t}, & x \in [x_2 - t\varepsilon, x_2 + t\varepsilon]. \end{cases}$$

Тогда

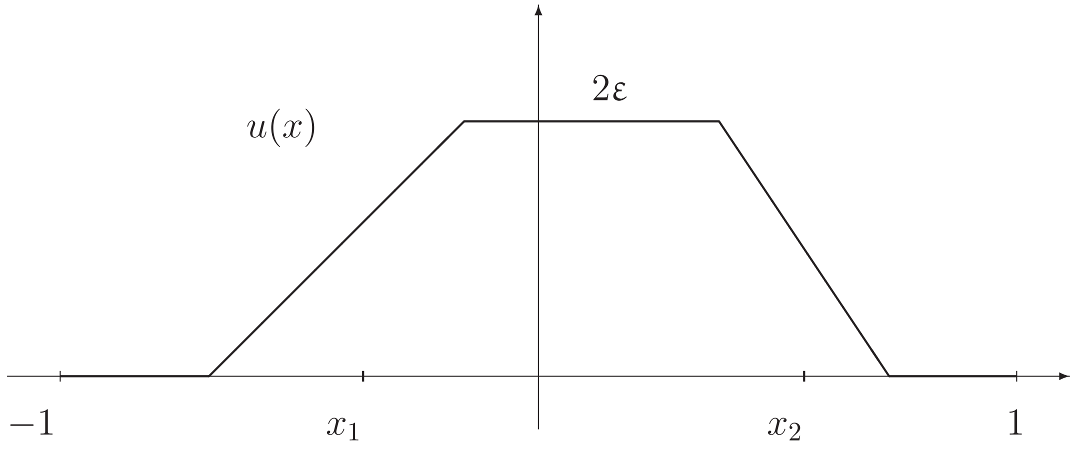
$$\begin{cases} u^*_\varepsilon(x) = 0, & x \in [-1, \dfrac{x_1-x_2}{2} - \dfrac{s+t}{2}\varepsilon] \cup [\dfrac{x_2-x_1}{2} + \dfrac{s+t}{2}\varepsilon, 1] \\ u^*_\varepsilon(x) = \varepsilon + \dfrac{2x - (x_2-x_1)}{s+t}, & x \in [\dfrac{x_1-x_2}{2} - \dfrac{s+t}{2}\varepsilon, \dfrac{x_1-x_2}{2} + \dfrac{s+t}{2}\varepsilon] \\ u^*_\varepsilon(x) = 2\varepsilon, & x \in [\dfrac{x_1-x_2}{2} + \dfrac{s+t}{2}\varepsilon, \dfrac{x_2-x_1}{2} - \dfrac{s+t}{2}\varepsilon] \\ u^*_\varepsilon(x) = \varepsilon + \dfrac{(x_2-x_1) - 2x}{s+t}, & x \in [\dfrac{x_2-x_1}{2} - \dfrac{s+t}{2}\varepsilon, \dfrac{x_2-x_1}{2} + \dfrac{s+t}{2}\varepsilon]. \end{cases}$$

Множества, на которых $u'_\varepsilon = 0$ и $u^{*\prime}_\varepsilon = 0$ имеют одинаковую меру. Поэтому неравенство $\mathcal{I}(u^*_\varepsilon) \leqslant \mathcal{I}(u_\varepsilon)$ эквивалентно следующему:

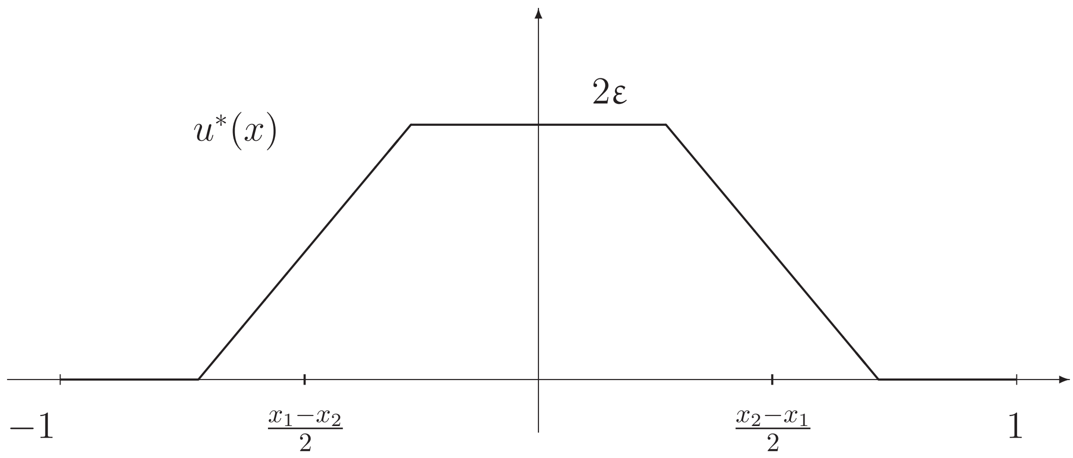
$$\int\limits_{x_1 - s\varepsilon}^{x_1+s\varepsilon} \Big(1 + \frac{1}{s^2}\Big)^{\frac{p(x)}{2}} dx + \int\limits_{x_2-t\varepsilon}^{x_2+t\varepsilon} \Big(1+\frac{1}{t^2}\Big)^{\frac{p(x)}{2}} dx$$
$$\geqslant \int\limits_{\frac{x_1-x_2}{2} - \frac{s+t}{2}\varepsilon}^{\frac{x_1-x_2}{2} + \frac{s+t}{2}\varepsilon} \Bigg(1 + \frac{1}{(\frac{s+t}{2})^2}\Bigg)^{\frac{p(x)}{2}} dx + \int\limits_{\frac{x_2-x_1}{2} - \frac{s+t}{2}\varepsilon}^{\frac{x_2-x_1}{2} + \frac{s+t}{2}\varepsilon} \Bigg(1 + \frac{1}{(\frac{s+t}{2})^2}\Bigg)^{\frac{p(x)}{2}} dx.$$

Разделим это неравенство на 2ε и устремим $\varepsilon \to 0$, получив в пределе

$$s\Big(1+\frac{1}{s^2}\Big)^{\frac{p(x_1)}{2}} + t\Big(1+\frac{1}{t^2}\Big)^{\frac{p(x_2)}{2}}$$
$$\geqslant \frac{s+t}{2}\Bigg(1 + \frac{1}{(\frac{s+t}{2})^2}\Bigg)^{\frac{p(\frac{x_1-x_2}{2})}{2}} + \frac{s+t}{2}\Bigg(1+\frac{1}{(\frac{s+t}{2})^2}\Bigg)^{\frac{p(\frac{x_2-x_1}{2})}{2}}. \quad (3.1)$$



(а) График u_ε



(б) График u_ε^*

Рисунок 3.1: К доказательству теоремы 3.2

Для начала, положим $s = t$ в неравенстве (3.1). Получаем

$$(1+\frac{1}{s^2})^{\frac{p(x_1)}{2}} + (1+\frac{1}{s^2})^{\frac{p(x_2)}{2}} \geqslant (1+\frac{1}{s^2})^{\frac{p(\frac{x_2-x_1}{2})}{2}} + (1+\frac{1}{s^2})^{\frac{p(\frac{x_1-x_2}{2})}{2}}. \tag{3.2}$$

Обозначим $\sigma := \frac{1}{s^2}$ и применим разложение по Тейлору к неравенству (3.2) в точке $\sigma = 0$:

$$\sigma p(x_1) + \sigma p(x_2) \geqslant \sigma p(\frac{x_2 - x_1}{2}) + \sigma p(\frac{x_1 - x_2}{2}) + r(\sigma),$$

где $r(\sigma) = o(\sigma)$ при $\sigma \to 0$. Таким образом, для любых $x_1, x_2 \in [-1, 1]$ имеем

$$p(x_1) + p(x_2) \geqslant p(\frac{x_2 - x_1}{2}) + p(\frac{x_1 - x_2}{2}).$$

По лемме 2.6 получаем, что p чётна и выпукла.

Теперь подставим $-x_2$ вместо x_2 в (3.1). Поскольку p чётна, получаем $K(s,x_1)+K(t,x_2) \geqslant 2K(\frac{s+t}{2},\frac{x_1+x_2}{2})$. $\square$

3.3 Доказательство неравенства $\mathcal{I}(u^*) \leqslant \mathcal{I}(u)$

В этом параграфе мы показываем, что необходимые условия, установленные в теореме 3.2, являются также и достаточными.

Лемма 3.1. *Пусть m — чётное положительное число, $s_k > 0$ ($k = 1\dots m$), $-1 \leqslant x_1 \leqslant \dots \leqslant x_m \leqslant 1$. Тогда, если $K(s,x)$ чётна по x и выпукла по совокупности аргументов, то*

$$\sum_{k=1}^{m} K(s_k,x_k) \geqslant 2K\Big(\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{m} s_k, \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{m}(-1)^k x_k\Big). \tag{3.3}$$

Доказательство. Заметим, что неравенство (3.3) равносильно такому же неравенству для функции $M(s,x) = K(s,x) - s$. Также заметим, что M убывает по s, поскольку M выпукла по s и

$$M_s(s,x) = (1+\frac{1}{s^2})^{\frac{p(x)}{2}-1}(1+\frac{1}{s^2}-\frac{p(x)}{s^2}) - 1 \to 0 \qquad \text{при} \quad s\to\infty.$$

Тогда

$$\sum_{k=1}^{m} M(s_k,x_k) \geqslant M(s_1,x_1)+M(s_m,x_m) \overset{a}{\geqslant} 2M(\frac{s_1+s_m}{2},\frac{x_m-x_1}{2}) \geqslant$$
$$\overset{b}{\geqslant} 2M\Big(\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{m} s_k, \frac{x_m-x_1}{2}\Big) \overset{c}{\geqslant} 2M\Big(\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{m} s_k, \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{m}(-1)^k x_k\Big).$$

Неравенство (a) следует из того, что M чётна по x и выпукла, (b) — из убывания M по s, (c) — из возрастания M по x при $x \geqslant 0$. $\square$

Лемма 3.2. *Пусть функция $K(s,x)$ чётна по x и выпукла по совокупности аргументов. Тогда $\mathcal{I}(u^*) \leqslant \mathcal{I}(u)$ для любой кусочно линейной функции $u \in \overset{o}{W}{}_1^1$ $[-1,1]$.*

Доказательство. Обозначим $L \subset [-1,1]$ множество точек излома функции u (включая концы отрезка). Возьмём $U = u([-1,1]) \setminus u(L)$, множество значений функции u без образов точек излома. Это множество представляется в виде объединения конечного числа непересекающихся интервалов $U = \cup_j U_j$. Заметим, что для каждого j множество $u^{-1}(U_j)$ разбивается на чётное число интервалов (обозначим это количество m_j), на каждом из которых функция u совпадает с некоторой линейной функцией y_k^j, $k = 1, \ldots, m_j$. Для удобства считаем, что носители y_k^j для каждого j идут по порядку, то есть $\sup dom(y_k^j) \leqslant \inf dom(y_{k+1}^j)$. Обозначим $b_k^j = |{y_k^j}'(x)|$. Также обозначим

$$Z = \operatorname{meas}\{x \in (-1,1) | u'(x) = 0\} = \operatorname{meas}\{x \in (-1,1) | {u^*}'(x) = 0\}.$$

Тогда

$$\mathcal{I}(u) - Z = \sum_j \int\limits_{u^{-1}(U_j)} (1 + u'^2(x))^{\frac{p(x)}{2}} dx = \sum_j \sum_k \int\limits_{dom(y_k^j)} (1 + {y_k^j}'^2(x))^{\frac{p(x)}{2}} dx =$$

$$= \sum_j \int\limits_{U_j} \sum_k \frac{1}{b_k^j} (1 + {b_k^j}^2)^{\frac{p((y_k^j)^{-1}(y))}{2}} dy = \sum_j \int\limits_{U_j} \sum_k K\Big(\frac{1}{b_k^j}, (y_k^j)^{-1}(y)\Big) dy.$$

Любая точка $y \in U$ имеет два прообраза относительно функции u^*, поэтому на множестве U можно определить $(u^*)^{-1} : U \to [0,1]$. Для каждого j можно выразить $(u^*)^{-1}$ и модуль её производной на участке U_j следующим образом:

$$(u^*)^{-1}(y) = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{m_j} (-1)^k (y_k^j)^{-1}(y);$$

$$|((u^*)^{-1})'(y)| = \frac{1}{|{u^*}'((u^*)^{-1}(y))|} = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{m_j} \frac{1}{b_k^j} =: \frac{1}{b_j^*}.$$

Ввиду чётности u^* имеем

$$\mathcal{I}(u^*) - Z = 2 \int\limits_{(u^*)^{-1}(U)} (1 + {u^*}'^2(x))^{\frac{p(x)}{2}} dx =$$

$$= 2 \int\limits_U |((u^*)^{-1})'(y)| \cdot \big(1 + \frac{1}{((u^*)^{-1})'(y)^2}\big)^{\frac{p((u^*)^{-1}(y))}{2}} dy =$$

$$= 2 \sum_j \int\limits_{U_j} \frac{1}{b_j^*} \big(1 + {b_j^*}^2\big)^{\frac{1}{2} p\left(\frac{1}{2} \sum\limits_{k=1}^{m_j} (-1)^k (y_k^j)^{-1}(y)\right)} dy =$$

$$= 2 \sum_j \int\limits_{U_j} K\Big(\frac{1}{2} \sum_{k=1}^{m_j} \frac{1}{b_k^j}, \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{m_j} (-1)^k (y_k^j)^{-1}(y)\Big) dy.$$

Зафиксируем j и y. Тогда для доказательства леммы достаточно выполнения

$$\sum_{k=1}^{m_j} K\Big(\frac{1}{b_k^j}, (y_k^j)^{-1}(y)\Big) \geqslant 2K\Big(\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{m_j}\frac{1}{b_k^j}, \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{m_j}(-1)^k (y_k^j)^{-1}(y)\Big).$$

Но это неравенство обеспечивается леммой 3.1. □

Теперь можно доказать неравенство для функций u общего вида.

Теорема 3.3. *Пусть p чётна, а K выпукла по совокупности переменных. Тогда для любой функции $u \in \overset{o}{W}{}_1^1[-1,1]$ выполнено $\mathcal{I}(u^*) \leqslant \mathcal{I}(u)$.*

Доказательство. Без потери общности предполагаем, что $I(u) < \infty$. По предложению 6 существует последовательность кусочно постоянных функций v_k, сходящаяся к u' в пространстве Орлича $L^{p(x)}$. Обозначим u_k первообразные v_k, удовлетворяющие $u_k(-1) = 0$.

Легко видеть, что $u_k \rightrightarrows u$, а значит $\varepsilon_k := -\inf u_k \to 0$. Определим δ_k через соотношение:

$$\int_{-1}^{-1+\delta_k} (v_k)_- = \varepsilon_k \tag{3.4}$$

и возьмём

$$\tilde{v}_k = (v_k)_+ - (v_k)_- \cdot \mathcal{X}\{[-1+\delta_k, 1]\}.$$

Мы утверждаем, что $\|\tilde{v}_k - v_k\|_{L^{p(x)}[-1,1]} \to 0$. Действительно, ввиду (3.4) мера множества

$$\mathcal{A}_k = \{x \in [-1, -1+\delta_k] \,:\, (v_k)_- \geqslant \sqrt{\varepsilon_k}\}$$

стремится к 0 при $k \to \infty$. Поскольку $v_k \to u'$ в $L^{p(x)}$, имеем

$$\|(v_k)_-\|_{L^{p(x)}(\mathcal{A}_k)} \leqslant \|u'\|_{L^{p(x)}(\mathcal{A}_k)} + \|v_k - u'\|_{L^{p(x)}(\mathcal{A}_k)} \to 0.$$

Поскольку

$$\|(v_k)_-\|_{L^{p(x)}([-1,-1+\delta_k]\setminus\mathcal{A}_k)} \to 0,$$

имеем

$$\|\tilde{v}_k - v_k\|_{L^{p(x)}[-1,1]} = \|(v_k)_-\|_{L^{p(x)}[-1,-1+\delta_k]} \to 0,$$

как и заявлено.

Обозначим $\tilde{u}_k$ первообразную $\tilde{v}_k$, удовлетворяющую $\tilde{u}_k(-1) = 0$. По построению $\tilde{u}_k \geqslant 0$. Положим $\tilde{\varepsilon}_k = \tilde{u}_k(1) \to 0$, определим $\tilde{\delta}_k$ через соотношение

$$\int\limits_{1-\tilde{\delta}_k}^{1} (\tilde{v}_k)_+ = \tilde{\varepsilon}_k$$

и обозначим

$$\hat{v}_k = (\tilde{v}_k)_+ \cdot \mathcal{X}\{[-1, 1 - \tilde{\delta}_k]\} - (\tilde{v}_k)_-.$$

Используя те же рассуждения, получаем $\|\hat{v}_k - \tilde{v}_k\|_{L^{p(x)}[-1,1]} \to 0$.

Обозначим $\hat{u}_k$ первообразную $\hat{v}_k$, удовлетворяющую $\hat{u}_k(-1) = 0$. По построению $\hat{u}_k \geqslant 0$, $\hat{u}_k(1) = 0$ и $\hat{u}_k' \to u'$ в $L^{p(x)}[-1,1]$.

Из вложения $L^{p(x)}[-1,1] \mapsto L^1[-1,1]$ следует $\hat{u}_k \to u$ в $\overset{o}{W}{}_1^1[-1,1]$. Далее, поскольку $|\sqrt{1+x^2} - \sqrt{1+y^2}| \leqslant |x-y|$ для любых x и y, из сходимости $\hat{u}_k' \to u'$ в $L^{p(x)}$ следует $\mathcal{I}(\hat{u}_k) \to \mathcal{I}(u)$.

По предложению 7 из сходимости $\hat{u}_k \to u$ в $\overset{o}{W}{}_1^1[-1,1]$ следует слабая сходимость $\hat{u}_{k_l}^* \rightharpoonup u^*$ в $\overset{o}{W}{}_1^1[-1,1]$. Кроме того, по предложению 1 функционал $\mathcal{I}$ секвенциально слабо полунепрерывен снизу. Поэтому

$$\mathcal{I}(u^*) \leqslant \varliminf_k \mathcal{I}(\hat{u}_{k_l}^*) \leqslant \lim_k \mathcal{I}(\hat{u}_{k_l}) = \mathcal{I}(u).$$

$\square$

3.4 Некоторые достаточные условия

Условие выпуклости функции K на самом деле есть некоторое условие на функцию p. Вычисление показывает, что всегда $\partial_{ss}^2 K > 0$, а также если p выпукла, то и $\partial_{xx}^2 K \geqslant 0$. Поэтому выпуклость K равносильна выполнению неравенства $\det(K'') \geqslant 0$ в смысле мер.

Прямое вычисление приводит к

$$\det(K'') = \frac{(1+w)^{q-1}}{4}$$
$$\times \Big(w(wq+1)(q+1)\ln(1+w)(q'^2\ln(1+w) + 2q'') - q'^2((1-qw)\ln(1+w) - 2w)^2 \Big),$$

где $q = q(x) = p(x) - 1$ и $w = w(s) = \frac{1}{s^2}$.

Поэтому неравенство $\det(K'') \geqslant 0$ даёт следующее неравенство на функцию q:

$$qq'' \geqslant q'^2\mathcal{B}(q), \tag{3.5}$$

где $\mathcal{B}(q) \equiv \sup\limits_{w>0} B(w,q)$ и

$$B(w,q) = \frac{q(4w-(w+3)\ln(w+1)) - \frac{w-1}{w}\ln(w+1) + 4\frac{w}{\ln(w+1)} - 4}{2(qw+1)} \cdot \frac{q}{q+1}.$$

Следующее утверждение проверяется прямым счётом.

Лемма 3.3. *Пусть $q \geqslant 0$ — непрерывная функция на $[-1,1]$. Тогда неравенство $qq'' \geqslant q'^2\mathcal{M}$ в смысле распределений при $\mathcal{M} \in (0,1)$ равносильно выпуклости функции $q^{1-\mathcal{M}}$.*

Сформулируем теперь простые достаточные условия для выполнения неравенства $\mathcal{I}(u^*) \leqslant \mathcal{I}(u)$:

Теорема 3.4. *Пусть $p(x) \geqslant 1$ — чётная непрерывная функция на $[-1,1]$.*

i) *Если функция $(p(x)-1)^{0.37}$ выпукла, то неравенство $\mathcal{I}(u^*) \leqslant \mathcal{I}(u)$ выполнено для любой неотрицательной $u \in \overset{o}{W}{}_1^1[-1,1]$.*

ii) *Если $p(x) \leqslant 2.36$ для всех $x \in [-1,1]$ и функция $\sqrt{p(x)-1}$ выпукла, то неравенство $\mathcal{I}(u^*) \leqslant \mathcal{I}(u)$ выполнено для любой неотрицательной $u \in \overset{o}{W}{}_1^1[-1,1]$.*

Доказательство. Следующие неравенства доказаны в параграфе 3.5:

$$\sup_{q\geqslant 0}\mathcal{B}(q) = \limsup_{q\to+\infty}\mathcal{B}(q) \leqslant 0.63; \tag{3.6}$$

$$\sup_{0\leqslant q\leqslant 1.36}\mathcal{B}(q) \leqslant 0.5. \tag{3.7}$$

По лемме 3.3 неравенство (3.5) следует для обоих пунктов теоремы. Применение теоремы 3.3 завершает доказательство. $\square$

3.5 Численные оценки функции $B(w,q)$

Для доказательства неравенства (3.6) мы делим положительный квадрант $(w,q) \in \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}_+$ на пять участков, см. рис. 3.2:

$$R_1 = [0,6] \times [0,1], \quad R_2 = [0,1] \times [1,\infty], \quad R_3 = [1,4] \times [1,\infty],$$
$$R_4 = [6,\infty] \times [0,1], \quad R_5 = [4,\infty] \times [1,\infty].$$

На каждом из участков мы доказываем неравенство численно-аналитическим методом.

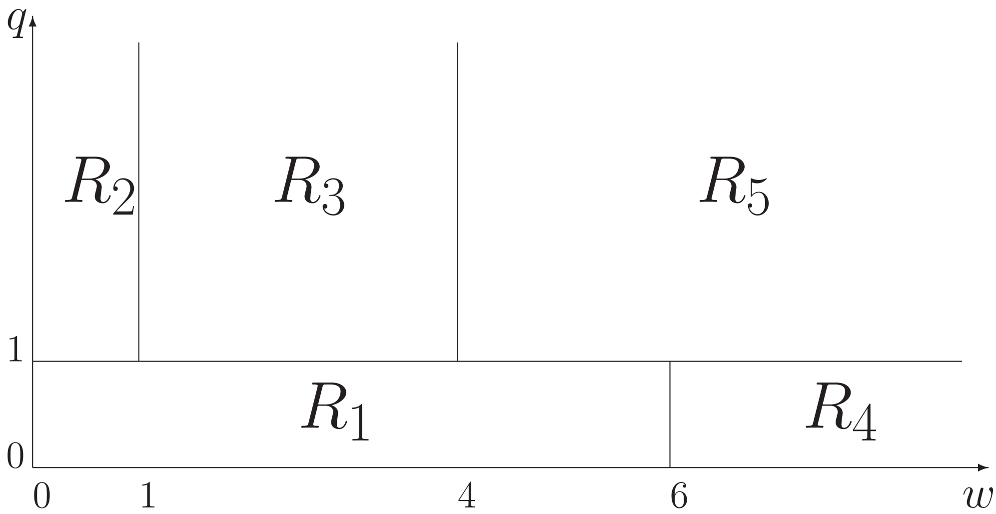


Рисунок 3.2: К доказательству неравенства (3.6)

Для $(w,q) \in R_1$ мы строим кусочно постоянную функцию $B_1(w,q)$, оценивающую $B(w,q)$ сверху. Для этого мы делим R_1 на прямоугольники

$$Q \equiv \{w_0 \leqslant w \leqslant w_1; \quad q_0 \leqslant q \leqslant q_1\} \subset R_1$$

и находим постоянное значение B_1 на каждом из них, заменяя члены формулы для $B(w,q)$ их экстремальными значениями в этом прямоугольнике:

$$B(w,q) = \frac{q(4w-(w+3)\ln(w+1)) - (1-\frac{1}{w})\ln(w+1) + 4\frac{w}{\ln(w+1)} - 4}{2(qw+1)} \cdot \frac{q}{q+1}$$
$$= \frac{[4qw] - [q(w+3)\ln(w+1)] - [\ln(w+1)] + [\frac{\ln(w+1)}{w}] + [4\frac{w}{\ln(w+1)}] - 4}{[2(qw+1)]} \cdot [\frac{q}{q+1}]$$
$$\overset{(*)}{\leqslant} \frac{[4q_1w_1] - [q_0(w_0+3)\ln(w_0+1)] - [\ln(w_0+1)] + [\frac{\ln(w_0+1)}{w_0}] + [4\frac{w_1}{\ln(w_1+1)}] - 4}{[2(q_0w_0+1)]}$$
$$\times [\frac{q_1}{q_1+1}] =: B_1|_Q.$$

Неравенство $(*)$ вытекает из монотонности в R_1 каждой из функций, заключённых в квадратные скобки, по обеим переменным.

Для $(w,q) \in R_2$ мы полагаем $r = \frac{1}{q}$ и строим кусочно постоянную функцию $B_2(w,r)$, оценивающую $B(w,\frac{1}{r})$ сверху. Для каждого прямоугольника

$$Q \equiv \{w_0 \leqslant w \leqslant w_1; \quad \frac{1}{r_1} \leqslant q = \frac{1}{r} \leqslant \frac{1}{r_0}\} \subset R_2$$

берём

$$\begin{aligned} B(w,\frac{1}{r}) = \Big(&[4(\frac{w}{\ln(w+1)} - 1)r] + [3(w - \ln(w+1))] - [w\ln(w+1)] - [r\ln(w+1)] \\ &+ [w] + [r\frac{\ln(w+1)}{w}]\Big) \Big/ \Big([2(w+r)] \cdot [1+r]\Big) \\ \leqslant \Big(&[4(\frac{w_1}{\ln(w_1+1)} - 1)r_1] + [3(w_1 - \ln(w_1+1))] - [w_0\ln(w_0+1)] - [r_0\ln(w_0+1)] \\ &+ [w_1] + [r_1\frac{\ln(w_0+1)}{w_0}]\Big) \Big/ \Big([2(w_0+r_0)] \cdot [1+r_0]\Big) =: B_2|_Q. \end{aligned}$$

Аналогично, для $(w,q) \in R_4$ мы полагаем $v = \frac{1}{w}$ и строим кусочно постоянную функцию $B_4(v,q)$, оценивающую $B(\frac{1}{v},q)$ сверху. Для каждого прямоугольника

$$Q \equiv \{\frac{1}{v_1} \leqslant w = \frac{1}{v} \leqslant \frac{1}{v_0}; \quad q_0 \leqslant q \leqslant q_1\} \subset R_4$$

берём

$$\begin{aligned} B(\frac{1}{v},q) = \Big(&[4q] - [q(1+3v)\ln(\frac{1}{v}+1)] - [v\ln(\frac{1}{v}+1)] + [v^2\ln(\frac{1}{v}+1)] \\ &+ [\frac{4}{\ln(\frac{1}{v}+1)}] - [4v]\Big) \Big/ \Big([2(v+q)]\Big) \times [\frac{q}{q+1}] \\ \leqslant \Big(&[4q_1] - [q_0(1+3v_0)\ln(\frac{1}{v_0}+1)] - [v_0\ln(\frac{1}{v_0}+1)] + [v_1^2\ln(\frac{1}{v_1}+1)] \\ &+ [\frac{4}{\ln(\frac{1}{v_1}+1)}] - [4v_0]\Big) \Big/ \Big([2(v_0+q_0)]\Big) \times [\frac{q_1}{q_1+1}] =: B_4|_Q. \end{aligned}$$

Наконец, для $(w,q) \in R_5$ мы используем обозначения $v = \frac{1}{w}$, $r = \frac{1}{q}$ и строим кусочно постоянную функцию $B_5(w,r)$, оценивающую $B(\frac{1}{v},\frac{1}{r})$ сверху. Для каждого прямоугольника

$$Q \equiv \{\frac{1}{v_1} \leqslant w = \frac{1}{v} \leqslant \frac{1}{v_0}; \quad \frac{1}{r_1} \leqslant q = \frac{1}{r} \leqslant \frac{1}{r_0}\} \subset R_5$$

берём

$$B(\frac{1}{v},\frac{1}{r}) = \frac{[\frac{4r}{\ln(\frac{1}{v}+1)}] + [4(1-rv)] - [(r(v-v^2)+3v+1)\ln(\frac{1}{v}+1)]}{2(1+r)(1+rv)}$$
$$\leqslant \frac{[\frac{4r_1}{\ln(\frac{1}{v_1}+1)}] + [4(1-r_0v_0)] - [(r_0(v_1-v_1^2)+3v_1+1)\ln(\frac{1}{v_1}+1)]}{2(1+r_0)(1+r_0v_0)} =: B_5|_Q.$$

Оценочные функции B_1, B_2, B_4, B_5 были вычислены с 15 значащими цифрами на достаточно мелких разбиениях на прямоугольники. Были получены следующие результаты.

Участок		Шаг разбиения по $w(v)$	Шаг разбиения по $q(r)$	Неравенство
R_1		$6 \cdot 10^{-2}$	10^{-1}	$B_1 \leqslant 0.51$
R_2		10^{-2}	10^{-2}	$B_2 \leqslant 0.617$
R_4		$2 \cdot 10^{-2}$	10^{-1}	$B_4 \leqslant 0.50$
R_5		$2 \cdot 10^{-3}$	10^{-2}	$B_5 \leqslant 0.605$

Во всех случаях было получено $B(w,q) \leqslant 0.62$.

Анализ $B(w,q)$ в R_3 приходится производить более аккуратно. Мы снова берём $r = \frac{1}{q}$ и утверждаем, что $B(w,\frac{1}{r})$ убывает по r. Для доказательства мы строим кусочно постоянную функцию $B_3(w,r)$, оценивающую $\partial_r B(w,\frac{1}{r})$ сверху. Для каждого прямоугольника

$$Q \equiv \{w_0 \leqslant w \leqslant w_1; \quad \frac{1}{r_1} \leqslant q = \frac{1}{r} \leqslant \frac{1}{r_0}\} \subset R_2$$

берём

$$\partial_r B(w,\frac{1}{r}) = \Big([4\frac{w}{\ln(w+1)}][w-r^2] + 4\big([r^2] - [2rw+w^2+2w]$$
$$+ ([r^2+2r(3+w)+4+3w+w^2] - [\frac{r^2}{w}])[\ln(w+1)]\big)\Big)\Big/\Big([2(1+r)^2(w+r)^2]\Big)$$
$$\leqslant \Big([4\frac{w_1}{\ln(w_1+1)}][w_1-r_0^2] + 4\big([r_1^2] - [2r_0w_0+w_0^2+2w_0]$$
$$+ ([r_1^2+2r_1(3+w_1)+4+3w_1+w_1^2] - [\frac{r_0^2}{w_1}])[\ln(w_1+1)]\big)\Big)\Big/\Big([2(1+r_0)^2(w_0+r_0)^2]\Big)$$
$$=: B_3|_Q.$$

Функция B_3 была вычислена на достаточно мелком разбиении с 15 значащими цифрами. Был получен следующий результат.

Участок		Шаг разбиения по w	Шаг разбиения по r	Неравенство
R_3		$5 \cdot 10^{-3}$	10^{-3}	$B_3 \leqslant -0.08$

Тем самым, поскольку в R_3 есть точки, в которых значение функции B больше 0.62, мы получаем, что $B(w, \frac{1}{r})$ достигает максимума в R_3 при $r = 0$.

Для нахождения максимума мы берём

$$B(w, \infty) = 2 - \frac{1}{2}(\ln(w+1) + 3\frac{\ln(w+1)}{w})$$

и утверждаем, что $B(w, \infty)$ вогнута при $w \in [1, 4]$. Чтобы доказать это, мы строим кусочно постоянную функцию $B_\infty(w)$, оценивающую $\partial^2_{ww} B(w, \infty)$ сверху. На каждом отрезке $[w_0, w_1] \subset [1, 4]$ берём

$$\partial^2_{ww} B(w, \infty) = \frac{\frac{[w(w^2+9w+6)]}{[(w+1)^2]} - [6\ln(w+1)]}{[2w^3]}$$
$$\leqslant \frac{\frac{[w_1(w_1^2+9w_1+6)]}{[(w_0+1)^2]} - [6\ln(w_0+1)]}{[2w_0^3]} =: B_\infty|_{[w_0, w_1]}.$$

Функция $B_\infty(w)$ была вычислена на достаточно мелком разбиении с 15 значащими цифрами. Был получен следующий результат.

Участок		Шаг разбиения	Неравенство
$1 \leqslant w \leqslant 4$		$3 \cdot 10^{-3}$	$B_\infty \leqslant -0.13$

Тем самым, точка максимума единственна. С использованием стандартных численных методов было получено, что максимум достигается при

$$w \approx 1.816960565240,$$

причём

$$\max B(w, \infty) \approx 0.627178211634.$$

Неравенство (3.6) доказано.

Для доказательства неравенства (3.7) мы делим $(w, q) \in \mathbb{R}_+ \times [0, 1.36]$ на четыре участка, см. рис. 3.3:

$$R_6 = [0, 3] \times [0, 1.36], \quad R_7 = [3, 5] \times [0, 1.3],$$
$$R_8 = [3, 5] \times [1.3, 1.36], \quad R_9 = [5, \infty] \times [0, 1.36].$$

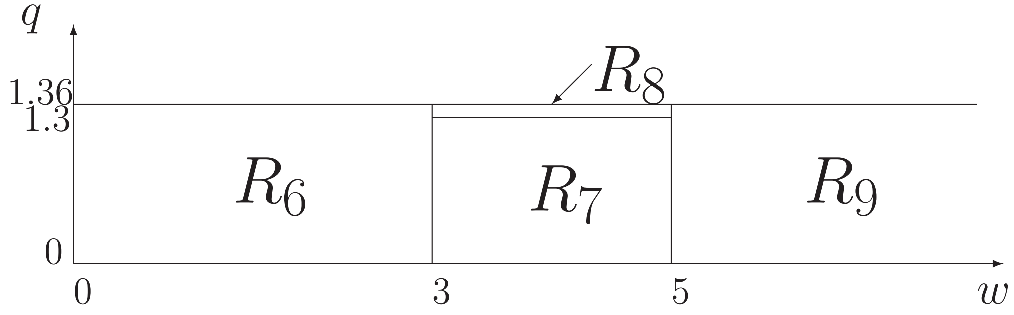


Рисунок 3.3: К доказательству неравенства (3.7)

На этих участках мы используем кусочно постоянные функции B_1 и B_4, введённые ранее. Значения функций были вычислены при достаточно мелком разбиении с 15 значащими цифрами. В R_8 потребовался шаг разбиения меньше 10^{-5}, поэтому мы повторили вычисления с 18 значащими цифрами. Был получен следующий результат.

Участок		Шаг разбиения по $w(v)$	Шаг разбиения по q	Неравенство
R_6		$3 \cdot 10^{-3}$	$1.36 \cdot 10^{-3}$	$B_1 \leqslant 0.498$
R_7		$2 \cdot 10^{-3}$	$1.3 \cdot 10^{-3}$	$B_1 \leqslant 0.498$
R_8		$2 \cdot 10^{-4}$	$6 \cdot 10^{-6}$	$B_1 \leqslant 0.49996$
R_9		$2 \cdot 10^{-3}$	$1.36 \cdot 10^{-2}$	$B_4 \leqslant 0.4992$

Доказательство завершено.

3.6 Многомерный аналог неравенства $\mathcal{I}(u^*) \leqslant \mathcal{I}(u)$

В этом параграфе функция $u \in \overset{o}{W}{}_1^1(\overline{\Omega})$, где $\Omega = \omega \times (-1,1)$. Как и в первой главе, мы используем обозначения $x = (x', y)$, где $x' \in \overline{\omega}$, $y \in [-1,1]$.

Введём многомерный аналог функционала $\mathcal{I}$:

$$\widehat{\mathcal{I}}(u) = \int\limits_{\Omega} (1 + |\nabla u(x)|^2)^{\frac{p(x)}{2}} dx.$$

Теорема 3.5. *Если $\widehat{\mathcal{I}}(u^*) \leqslant \widehat{\mathcal{I}}(u)$ для любой неотрицательной функции $u \in \overset{o}{W}{}_1^1(\overline{\Omega})$, то $p(x',y)$ не зависит от y.*

Доказательство. Для начала, мы докажем, что, аналогично теореме 3.2, p должна быть чётной и выпуклой по y, а функция

$$\mathcal{K}_{x'}(c,d,y) = c\big(1 + \tfrac{1+d^2}{c^2}\big)^{\frac{p(x',y)}{2}}$$

должна быть выпуклой по совокупности аргументов на $\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}_+ \times [-1,1]$.

Действительно, рассмотрим две точки

$$x_1 = (x_0', y_1),\ x_2 = (x_0', y_2), \qquad \text{где} \quad x_0' \in \omega,\ -1 < y_1 < y_2 < 1.$$

Зададим функцию $u \in \overset{o}{W}{}_1^1(\overline{\Omega})$ с ненулевым градиентом только в окрестностях x_1, x_2 и в окрестности боковой границы цилиндра с осью $[x_1, x_2]$ следующим образом

$$u(x) = \min\Big(\big(\frac{y-y_1}{c_1} + (x'-x_0')\cdot\mathbf{b}_1'\big)_+, \big(\frac{y_2-y}{c_2} + (x'-x_0')\cdot\mathbf{b}_2'\big)_+, \delta\big(w - |x'-x_0'|\big)_+, h\Big).$$

Здесь параметры $c_1, c_2 > 0$ — обратные производные по y в «основаниях» цилиндра, $\mathbf{b}_1', \mathbf{b}_2' \in \mathbb{R}^{n-1}$ — градиенты по x' в «основаниях» цилиндра, $\delta > 0$ — модуль градиента на боковой поверхности цилиндра, $w > 0$ — радиус цилиндра, а $h > 0$ — максимальное значение функции.

Зафиксировав y_1, y_2, c_1, c_2, $\mathbf{b}_1'$, $\mathbf{b}_2'$, мы выбираем h и δ как функции малого параметра w. Мы требуем $\varkappa \equiv \frac{h}{\delta} := \frac{w}{2}$ ($\varkappa$ — ширина бокового слоя с ненулевой производной).

Левое основание носителя u задаётся системой

$$\frac{y-y_1}{c_1} + (x'-x_0')\cdot\mathbf{b}_1' = 0; \qquad |x'-x_0'| \leqslant w.$$

То есть это $(n-1)$-мерный вытянутый эллипсоид вращения с большой полуосью $\sqrt{w^2 + c_1^2 w^2 |\mathbf{b}_1'|^2}$ и радиусом w. Значит $\nabla u = (\mathbf{b}_1', \frac{1}{c_1})$ на множестве A_1, которое является усечённым конусом с этим эллипсоидом в основании. Прямое вычисление показывает

$$\operatorname{meas} A_1 = C_1 \delta c_1 w^n$$

(здесь и далее C с индексом или без — некоторые константы, зависящие только от n).

Аналогично $\nabla u = (\mathbf{b}_2', -\frac{1}{c_2})$ на множестве A_2, $\operatorname{meas} A_2 = C_1 \delta c_2 w^n$.

После симметризации на «основаниях» $\nabla u^* = (\frac{c_1\mathbf{b}_1' + c_2\mathbf{b}_2'}{c_1+c_2}, \pm\frac{2}{c_1+c_2})$. Тем самым, множества A_1 и A_2 переходят в A_1' и A_2', и выполнено

$$\operatorname{meas} A_1' = \operatorname{meas} A_2' = C_1 \delta \frac{c_1+c_2}{2} w^n.$$

Далее обозначим за A_δ боковой слой с ненулевым градиентом. Прямая оценка даёт

$$\operatorname{meas} A_\delta \leqslant C\big((y_2 - y_1)w^{n-1} + (c_1|\mathbf{b}_1'| + c_2|\mathbf{b}_2'|)w^n\big).$$

Также обозначим

$$Z = \operatorname{meas}\{x \in \Omega \,|\, \nabla u(x) = 0\} = \operatorname{meas}\{x \in \Omega \,|\, \nabla u^*(x) = 0\}.$$

При $\frac{1}{c_1} = \frac{1}{c_2} = w^2$, $\delta = w^4$ и $\mathbf{b}_1' = \mathbf{b}_2' = 0$ из предположений теоремы следует

$$\begin{aligned}
0 \ &\leqslant\ (\widehat{\mathcal{I}}(u) - Z) - (\widehat{\mathcal{I}}(u^*) - Z) \leqslant \big((1+w^4)^{\frac{p(\bar{x}_1)}{2}} - 1\big) \cdot \operatorname{meas} A_1 \\
&+\ \big((1+w^4)^{\frac{p(\bar{x}_2)}{2}} - 1\big) \cdot \operatorname{meas} A_2 + \big((1+w^8)^{\frac{P}{2}} - 1\big) \cdot \operatorname{meas} A_\delta \\
&-\ \big((1+w^4)^{\frac{p(\hat{x}_1)}{2}} - 1 + (1+w^4)^{\frac{p(\hat{x}_2)}{2}} - 1\big) \cdot \operatorname{meas} A_1' \\
&\leqslant\ w^4\big(\tfrac{p(\bar{x}_1)}{2} + \tfrac{p(\bar{x}_2)}{2} + o(w)\big)C_1 w^{n+2} + w^8\big(\tfrac{P}{2} + o(w)\big)(y_2 - y_1)Cw^{n-1} \\
&\quad -w^4\big(\tfrac{p(\hat{x}_1)}{2} + \tfrac{p(\hat{x}_2)}{2} + o(w)\big)C_1 w^{n+2}.
\end{aligned}$$

Здесь $P = \max p(x', y)$, $\bar{x}_1 \in A_1$, $\bar{x}_2 \in A_2$, $\hat{x}_1 \in A_1'$, $\hat{x}_2 \in A_2'$.

Мы переходим к пределу при $w \to 0$ и получаем

$$0 \leqslant p(x_0', y_1) + p(x_0', y_2) - p(x_0', \frac{y_1 - y_2}{2}) - p(x_0', \frac{y_2 - y_1}{2}).$$

Применив лемму 2.6, получаем, что p чётна и выпукла по y.

Теперь зафиксируем произвольные положительные c_1, c_2, d_1 и d_2, положим $\mathbf{b}_1' = \frac{d_1}{c_1}\mathbf{e}$, $\mathbf{b}_2' = \frac{d_2}{c_2}\mathbf{e}$ (здесь $\mathbf{e}$ — некоторый единичный вектор в гиперплоскости x') и возьмём $\delta = w^2$. Тогда получаем

$$\begin{aligned}
0 \ &\leqslant\ (\widehat{\mathcal{I}}(u) - Z) - (\widehat{\mathcal{I}}(u^*) - Z) \leqslant \big(\tfrac{1}{c_1}\mathcal{K}_{\bar{x}_1'}(c_1, d_1, \bar{y}_1) - 1\big) \cdot \operatorname{meas} A_1 \\
&+\ \big(\tfrac{1}{c_2}\mathcal{K}_{\bar{x}_2'}(c_2, d_2, \bar{y}_2) - 1\big) \cdot \operatorname{meas} A_2 + \big((1+w^4)^{\frac{P}{2}} - 1\big) \cdot \operatorname{meas} A_\delta \\
&-\ \big(\tfrac{2}{c_1+c_2}\mathcal{K}_{\hat{x}_1'}(\tfrac{c_1+c_2}{2}, \tfrac{d_1+d_2}{2}, \hat{y}_1) - 1\big) \cdot \operatorname{meas} A_1' \\
&-\ \big(\tfrac{2}{c_1+c_2}\mathcal{K}_{\hat{x}_2'}(\tfrac{c_1+c_2}{2}, \tfrac{d_1+d_2}{2}, \hat{y}_2) - 1\big) \cdot \operatorname{meas} A_2' \\
&\leqslant\ \big(\mathcal{K}_{\bar{x}_1'}(c_1, d_1, \bar{y}_1) + \mathcal{K}_{\bar{x}_2'}(c_2, d_2, \bar{y}_2)\big)C_1 w^{n+2} + (\tfrac{P}{2} + o(w))C(y_2 - y_1)w^{n+3} \\
&-\ \big(\mathcal{K}_{\hat{x}_1'}(\tfrac{c_1+c_2}{2}, \tfrac{d_1+d_2}{2}, \hat{y}_1) + \mathcal{K}_{\hat{x}_2'}(\tfrac{c_1+c_2}{2}, \tfrac{d_1+d_2}{2}, \hat{y}_2)\big)C_1 w^{n+2}.
\end{aligned}$$

Здесь $P = \max p(x', y)$, $(\bar{x}_1', \bar{y}_1) \in A_1$, $(\bar{x}_2', \bar{y}_2) \in A_2$, $(\hat{x}_1', \hat{y}_1) \in A_1'$, $(\hat{x}_2', \hat{y}_2) \in A_2'$.

Мы переходим к пределу при $w \to 0$ и получаем

$$\begin{aligned}
&\mathcal{K}_{x_0'}(c_1, d_1, y_1) + \mathcal{K}_{x_0'}(c_2, d_2, y_2) \\
&\qquad\qquad \geqslant \mathcal{K}_{x_0'}\big(\tfrac{c_1+c_2}{2}, \tfrac{d_1+d_2}{2}, \tfrac{y_1-y_2}{2}\big) + \mathcal{K}_{x_0'}\big(\tfrac{c_1+c_2}{2}, \tfrac{d_1+d_2}{2}, \tfrac{y_2-y_1}{2}\big).
\end{aligned}$$

Отсюда следует, что $\mathcal{K}_{x'_0}$ выпукла, поскольку она чётна по y.

Наконец, заметим (здесь мы опускаем для краткости x' в записи $\mathcal{K}_{x'}$), что

$$\mathcal{K}(c,d,y) = K(\frac{c}{\sqrt{1+d^2}}, y) \cdot \sqrt{1+d^2},$$

где функция K введена в теореме 3.2. Прямое вычисление показывает, что

$$\det(\mathcal{K}''(c,d,y)) = \frac{1}{(1+d^2)^{\frac{3}{2}}} \cdot \left[(\partial^2_{yy}K\partial^2_{ss}K - (\partial^2_{sy}K)^2)(K - s\partial_s K) - \partial^2_{ss}K(\partial_y K)^2 d^2\right]$$

(здесь $s = \frac{c}{\sqrt{1+d^2}}$). То есть если $\partial_y K \not\equiv 0$, можно выбрать достаточно большое d, чтобы получить $\det(\mathcal{K}''(c,d,y)) < 0$ и, тем самым, противоречие. $\square$

Заключение

В данной диссертации получены следующие результаты. Получены необходимые условия на вес для выполнения неравенства Пойа-Сегё с весом для монотонной перестановки. Доказано неравенство Пойа-Сегё с весом для монотонной перестановки в случае ограниченного (степенного) роста интегранта . Доказано неравенство Пойа-Сегё с весом в одномерном случае без ограничений, лишь при необходимых условиях. Доказана необходимость условий, налагаемых в работе [16] на вес для выполнения неравенства Пойа-Сегё с весом для симметризации. В одномерном случае закрыт пробел в работе [16]: доказано неравенство Пойа-Сегё с весом для симметризации без дополнительных ограничений. Представлены необходимые и достаточные условия выполнения неравенства Пойа-Сегё с весом для монотонной перестановки на функциях, закреплённых на левом конце. Неравенство доказано в многомерном случае для интегрантов ограниченного роста по производной и в одномерном случае без дополнительных ограничений. Представлены необходимые и достаточные условия выполнения неравенства Пойа-Сегё с переменным показателем суммирования в одномерном случае. Показано, что прямое многомерное обобщение отсутствует.

Список литературы

1. *Steiner J.* Einfache Beweise der isoperimetrischen Hauptsätze // J. Reine Angew. Math. — 1838. — Т. 18. — С. 281—296.
2. *Стретт (лорд Рэлей) Д. В.* Теория звука. — М. : ГИТТЛ, 1995.
3. *Faber G.* Beweis, dass unter allen homogenen Membranen von gleicher Fläche und gleicher Spannung die kreisförmige den tiefsten Grundton gibt // Sitzungsber. Bayer. Akad. Wiss. München, Math.-Phys. Kl. — 1923. — С. 169—172.
4. *Krahn E.* Über eine von Rayleigh formulierte Minimaleigenschaft des Kreises // Math. Ann. — 1925. — Т. 94. — С. 97—100.
5. *Nadirashvili N.* Rayleigh's conjecture on the principal frequency of the clamped plate // Arch. Rational Mech. Anal. — 1995. — Т. 129. — С. 1—10.
6. *Полиа Г.*, *Сегё Г.* Изопериметрические неравенства в математической физике. — М. : Государственное издательство физико-математической литературы, 1962.
7. *Brothers J. E.*, *Ziemer W. P.* Minimal rearrangements of Sobolev functions // J. Reine Angew. Math. — 1988. — Т. 384. — С. 153—179.
8. *Kawohl B.* On the isoperimetric nature of a rearrangement inequality and its consequences for some variational problems // Arch. Rat. Mech. Anal. — 1986. — Т. 94, вып. 3. — С. 227—243.
9. *Дубинин В. Н.* Преобразование функций и принцип Дирихле // Матем. заметки. — 1985. — Т. 38, вып. 1. — С. 49—55.
10. *Дубинин В. Н.* Преобразование конденсаторов в пространстве // Докл. АН СССР. — 1987. — Т. 296, вып. 1. — С. 18—20.
11. *Dubinin V. N.* Capacities and geometric transformations of subsets in n-space // Geom. Funct. Anal. — 1993. — Т. 3, вып. 4. — С. 342—369.
12. *Дубинин В. Н.* Симметризация в геометрической теории функций комплексного переменного // УМН. — 1994. — Т. 49, 1(295). — С. 3—76.
13. *Brock F.*, *Solynin A.* An approach to symmetrization via polarization // Trans. Amer. Math. Soc. — 2000. — Т. 352, № 4. — С. 1759—1796.

14. *Solynin A. Y.*, *Zalgaller V. A.* An isoperimetric inequality for logarithmic capacity of polygons // Ann. Math. — 2004. — Т. 159, вып. 1. — С. 277—303.

15. *Bobkov V.*, *Kolonitskii S.* On qualitative properties of solutions for elliptic problems with the p-Laplacian through domain perturbations // arXiv. — 25.01.2017. — препринт по адресу https://arxiv.org/pdf/1701.07408.pdf.

16. *Brock F.* Weighted Dirichlet-type inequalities for Steiner symmetrization // Calc. Var. and PDEs. — 1999. — Т. 8, № 1. — С. 15—25.

17. *Coron J. M.* The continuity of the rearrangement in $W^{1,p}$ // Ann. Scuola Norm. Sup. Pisa. — 1984. — Т. 11, вып. 1. — С. 57—85.

18. *Almgren F. J.*, *H. L. E.* Symmetric decreasing rearrangement is sometimes continuous // J. Amer. Math. Soc. — 1989. — Т. 2. — С. 683—773.

19. *Burchard A.* Steiner Symmetrization is Continuous in $W^{1,p}$ // Geometric & Functional Analysis GAFA. — 1997. — Т. 7, вып. 5. — С. 823—860.

20. *Lavrentieff M.* Sur quelques problèmes du calcul des variations // Ann. Mat. Pura Appl. — 1927. — Т. 4, вып. 1. — С. 7—28.

21. *Mania B.* Sopra un esempio di Lavrentieff // Boll. Un. Mat. Ital. — 1934. — Т. 13. — С. 147—153.

22. *Zhikov V. V.* On Lavrentiev's Phenomenon // Russian J. Math. Phys. — 1995. — Т. 3, № 2. — С. 249—269.

23. *Жиков В. В.* О плотности гладких функций в пространстве Соболева–Орлича // Зап. научн. сем. ПОМИ. — 2004. — Т. 310. — С. 67—81.

24. *Жиков В. В.*, *Сурначёв М. Д.* О плотности гладких функций в весовых соболевских пространствах с переменным показателем // Алгебра и анализ. — 2015. — Т. 27, вып. 3. — С. 95—124.

25. *Alberti G.*, *Serra Cassano F.* Non-occurrence of gap for one-dimensional autonomous functionals // Proceedings of "Calc. Var., Homogen. and Cont. Mech." / под ред. G. Bouchitté, G. Buttazzo, P. Suquet. — Singapore, 1994. — С. 1—17.

26. *Esposito L.*, *Trombetti C.* Steiner symmetrization: a weighted version of Pólya-Szegö principle // NoDEA Nonlinear Differential Equations Appl. — 2007. — Т. 14, вып. 1/2. — С. 219—231.

27. *Cianchi A.*, *Fusco N.* Steiner symmetric extremals in Pólya-Szegö type inequalities // Adv. Math. — 2006. — Т. 203, вып. 2. — С. 673—728.

28. *Landes R.* Some remarks on rearrangements and functionals with non-constant density // Math. Nachr. — 2007. — Т. 280, № 5/6. — С. 560—570.

29. *Либ Э.*, *Лосс М.* Анализ. — Новосибирск : Научная книга, 1998.

30. *Rajagopal K. R.*, *Ružička M.* On the modeling of electrorheological materials // Mech. Research Comm. — 1996. — Вып. 23. — С. 401—407.

31. *Ružička M.* Electrorheological fluids: modeling and mathematical theory. Т. 1748. — Berlin : Springer, 2000. — (Lecture Notes in Mathematics).

32. Lebesgue and Sobolev spaces with Variable Exponents. Т. 2017 / L. Diening [и др.]. — Berlin : Springer, 2011. — (Lecture Notes in Mathematics).

33. *Жиков В. В.* О вариационных задачах и нелинейных эллиптических уравнениях с нестандартными условиями роста. — Новосибирск : Т. Рожковская, 2017.

34. *Жиков В. В.* К технике предельного перехода в нелинейных эллиптических уравнениях // Функц. анализ и его прил. — 2009. — Т. 43, вып. 2. — С. 19—38.

35. *Алхутов Ю. А.*, *Жиков В. В.* Теоремы существования и единственности решений параболических уравнений с переменным порядком нелинейности // Матем. сб. — 2014. — Т. 205, вып. 3. — С. 3—14.

36. *Алхутов Ю. А.*, *Жиков В. В.* Гёльдеровская непрерывность решений параболических уравнений с переменным порядком нелинейности // Тр. сем. им. И. Г. Петровского. — М., 2011. — Т. 28. — С. 8—74.

37. *Алхутов Ю. А.*, *Жиков В. В.* Теоремы существования решений параболических уравнений с переменным порядком нелинейности // Тр. МИАН. — М., 2010. — Т. 270. — С. 21—32. — (Дифференциальные уравнения и динамические системы).

38. *Алхутов Ю. А.* Неравенство Харнака и гёльдеровость решений нелинейных эллиптических уравнений с нестандартным условием роста // Дифференц. уравнения. — 1997. — Т. 33, вып. 12. — С. 1651—1660.

39. *Алхутов Ю. А.* О гёльдеровой непрерывности $p(x)$-гармонических функций // Матем. сб. — 2005. — Т. 196, вып. 2. — С. 3—28.

40. *Алхутов Ю. А.*, *Крашенинникова О. В.* Непрерывность в граничных точках решений квазилинейных эллиптических уравнений с нестандартным условием роста // Изв. РАН. Сер. матем. — 2004. — Т. 68, вып. 6. — С. 3—60.

41. *Алхутов Ю. А.*, *Сурначёв М. Д.* О неравенстве Харнака для эллиптического (p, q)-лапласиана // Доклады Академии Наук. — 2016. — Т. 470, № 6. — С. 623—627.

42. *Alkhutov Y. A.*, *Surnachev M. D.* A Harnack inequality for a transmission problem with $p(x)$-Laplacian // Applicable Analysis. — 2018. — С. 1—13.

43. *Жиков В. В.*, *Пастухова С. Е.* О повышенной суммируемости градиента решений эллиптических уравнений с переменным показателем нелинейности // Матем. сб. — 2008. — Т. 199, вып. 12. — С. 19—52.

44. *Пастухова С. Е.* О вырожденных уравнениях монотонного типа: эффект Лаврентьева и вопросы достижимости // Матем. сб. — 2007. — Т. 198, вып. 10. — С. 89—118.

45. *Жиков В. В.*, *Пастухова С. Е.* Леммы о компенсированной компактности в эллиптических и параболических уравнениях // Тр. МИАН. — М., 2010. — Т. 270. — С. 110—137. — (Дифференциальные уравнения и динамические системы).

46. *Жиков В. В.*, *Пастухова С. Е.* О Г-сходимости осциллирующих интегрантов с нестандартными условиями коэрцитивности и роста // Матем. сб. — 2014. — Т. 205, вып. 4. — С. 33—68.

47. *Жиков В. В.*, *Пастухова С. Е.* Равномерная выпуклость и вариационная сходимость // Тр. МИАН. — М., 2014. — Т. 75. — С. 245—276.

48. *Буттаццо Д.*, *Джаквинта М.*, *Гильдебрандт С.* Одномерные вариационные задачи. Введение. — Новосибирск : Научная книга, 2002.

49. *Рудин У.* Функциональный анализ. — М. : Мир, 1975.

50. *Эванс Л.*, *Гариепи Р. Ф.* Теория меры и тонкие свойства функций. — Новосибирск : Научная книга, 2002.

51. *Шарапудинов И. И.* Некоторые вопросы теории приближений в пространствах Лебега с переменным показателем. — Владикавказ : ЮМИ ВНЦ РАН и РСО-А, 2012. — (Итоги науки. Юг России. Математическая монография ; 5).

52. Интегральные операторы в пространствах суммируемых функций / М. А. Красносельский [и др.]. — М. : Наука, 1966.

Публикации автора по теме диссертации

Публикации в рецензируемых изданиях

53. *Банкевич С. В.*, *Назаров А. И.* Об обобщении неравенства Пойа-Сеге для одномерных функционалов // Доклады Академии Наук. — 2011. — Т. 438, № 1. — С. 11—13.

54. *Bankevich S. V.*, *Nazarov A. I.* On monotonicity of some functionals under rearrangements // Calc. Var. and PDEs. — 2015. — Т. 53, № 3/4. — С. 627—647.

55. *Банкевич С. В.* О монотонности некоторых функционалов при монотонной перестановке по одной переменной // Зап. научн. сем. ПОМИ. — 2016. — Т. 444. — С. 5—14.

56. *Банкевич С. В.* О неравенстве Пойи–Сегё для функционалов с переменным показателем суммирования // Функц. анализ и его прил. — 2018. — Т. 52, вып. 1. — С. 56—60.

Прочие публикации

57. *Банкевич С. В.*, *Назаров А. И.* О поведении некоторых функционалов при монотонных перестановках // Международная конференция по дифференциальным уравнениям и динамическим системам. Тезисы докладов. — Владимир, 2006. — С. 26.

58. *Банкевич С. В.* О свойствах монотонной перестановки // Международная конференция «Теория приближений». Тезисы докладов. — СПб, 2010. — С. 3.

59. *Банкевич С. В.* Об эффекте Лаврентьева для одномерных функционалов // Международная конференция по дифференциальным уравнениям и динамическим системам. Тезисы докладов. — Владимир, 2010. — С. 28.

60. *Bankevich S. V.* On monotonicity of some functionals under rearrangements // Международная конференция «Дифференциальные уравнения и смежные вопросы», посвящённая 110-летию И. Г. Петровского. Сборник тезисов. — М., 2011. — С. 14.

61. *Bankevich S. V.* The Pólya-Szegő type inequality with variable exponent // Международная конференция по дифференциальным уравнениям и динамическим системам. Тезисы докладов. — 2016. — С. 242.