

## ВВЕДЕНИЕ

Математическое моделирование технических, экономических, социальных, экологических и других систем очень широко используется в жизни. Целью моделирования поведения системы при ее проектировании является выбор ее структуры и параметров, обеспечивающих выполнение системой заданной цели. В случае уже существующей системы ее математическая модель необходима для анализа поведения системы в различных, чаще всего нестандартных ситуациях.

Исторически раньше всех появилось математическое моделирование технических систем, базирующееся на использовании законов физики. Математические модели таких систем представляют собой алгебраические или дифференциальные уравнения, позволяющие описывать установившееся состояние системы или ее динамическое поведение. В зависимости от вида технические системы делятся на системы с сосредоточенными параметрами и распределенными.

Первые – это системы, параметры которых можно представить в виде точечных. Для задач механики это точечная масса, задача электротехники – точечная емкость в электрической схеме, точечные индуктивность, сопротивление. Поведение таких систем в динамике, т. е. изменение их переменных во времени, описывается обыкновенными дифференциальными уравнениями.

В системе с распределенными параметрами эти характеристики уже нельзя представить в виде точечных, т. к. они распределены по системе. В механике это конструкции, содержащие разного рода пластины, балки, оболочки и т.д. В электротехнике это системы, в которых сопротивление, индуктивность, емкость необходимо рассматривать распределенными по всей электрической цепи. Такие системы описываются дифференциальными уравнениями в частных производных, они более сложны для анализа. Теории анализа таких систем хорошо разработаны и с их использованием созданы все существующие технические системы.

Развитие моделирования новой стороны человеческой деятельности обусловлено появлением в странах большого числа проектов, характерной чертой которых является большое число факторов разной природы и связей между ними, влияющих на

конечный результат и необходимость жесткой увязки всех требуемых действий и участвующих в них элементов. Использование такого моделирования, его назвали функциональным, позволяет существенно сократить время проектирования сложных систем за счет определения всех необходимых материальных средств и технического оборудования, финансовых средств, технологической документации и управляющих воздействий на каждом этапе и в каждом функциональном элементе моделируемого процесса.

Большое число взаимосвязанных элементов системы делает невозможным одному человеку держать в памяти всю систему. Поэтому в функциональном моделировании весь процесс создания модели системы разбивается на относительно самостоятельные существенные функции со связями с другими. Это позволяет организовать работу по созданию системы в коллективе, когда каждый его участник работает над своим участком проекта. Для осуществления функционального моделирования разработаны различные программные системы.

Другим видом моделирования является имитационное моделирование. Это название происходит от латинского слова *imitation* – подражание. Такой вид моделирования возник вследствие необходимости анализа поведения систем, процессов, характерными чертами которых является наличие большого числа элементов, в том числе и различной природы, функционирующих одновременно, наличие разного рода связей между элементами, влияющих на их функционирование, наличие действующих на систему случайных факторов.

Одной из проблем, которую надо решать при имитационном моделировании, является моделирование в текущий момент машинного времени одновременного функционирования всех элементов в системе при использовании однопроцессорной ЭВМ. В случае многопроцессорных ЭВМ эта проблема исчезает, т.к. поведение каждого элемента будет рассчитываться своим процессором, остается только синхронизировать работу процессоров. При однопроцессорной ЭВМ эту проблему можно решать разными способами. Одним из них является последовательное моделирование работы всех элементов системы на одном шаге времени, проверка появления новой связи между элементами вследствие выполнения условий связи, включение нового или исключение из моделирования старого элемента вследствие выполнения условия связи. Недостатком такого подхода

является большая затрата времени на вычисления. Другим подходом является просмотр активностей в программе. Активность – это событие, ведущее к изменениям в функционировании системы – появление новых функционирующих элементов, прекращение работы старых и т.д. В этом случае при разработке программы надо создать алгоритм расчета активностей, который бы учитывал как возникновение новых элементов и действий во времени, так и влияние случайных факторов. Элементами имитационных моделей могут быть технические объекты, биологические, социальные, экономические и т.д., а их поведение описываться дифференциальными уравнениями, алгебраическими, функциональными зависимостями, логическими выражениями.

Важным этапом разработки таких моделей является их проверка на адекватность моделируемым системам, процессам, т.к. результаты расчетов по модели используются для принятия управленческих, проектных решений, неправильный выбор которых из-за неправильности модели может привести к большим финансовым и материальным затратам.

Другим типом моделирования является системная динамика. Первоначально она создавалась для моделирования работы промышленных предприятий и должна была учитывать управленческие решения. Появление ее обусловлено усложнением производственных процессов, социальных, политических, экономических, военных и т. д. Вследствие этого усложняется управление ими, и увеличивается цена ошибки при неверном управлении.

При разработке методологии системной динамики были выделены основные факторы, влияющие на функционирование системы. Ими оказались так называемые потоки, существующие в таких системах. Для моделирования работы предприятия это поток сырья, полуфабрикатов, готового товара, энергии, финансовых средств, директивных документов, рабочей силы и т.д. Другим элементом является накопитель, обеспечивающий хранение элементов потока и их расходование. Кроме этих элементов вводятся дополнительные переменные, зависящие от решаемой задачи. Связь между потоками характеризует функционирование системы. Она может быть задана алгебраическими зависимостями, дифференциальными уравнениями, логическими выражениями и др. Вид ее определяют из анализа моделируемой системы.

Другим типом систем, имеющих свои особенности, являются системы массового обслуживания. Они широко распространены в обществе. Характерной чертой их является случайный характер поступления пользователей системы на ее вход, случайный характер времени обслуживания пользователя, образование очереди в систему со своими правилами выборки из очереди. Теория массового обслуживания для простых систем разработана в теории вероятностей, она позволяет исследовать влияние параметров системы, случайных факторов, интенсивности потока пользователей системы (заявок), конструктивных особенностей системы на качество ее функционирования.

Для анализа сложных и больших систем массового обслуживания на базе теории имитационного моделирования разработаны программные комплексы, позволяющие моделировать поведение заданной системы при действии случайных факторов, распределенных по разным законам.

## **ОСНОВНЫЕ ПРИНЦИПЫ СИСТЕМНОГО МОДЕЛИРОВАНИЯ**

1. Определяют элементы, которые надо учитывать в модели системы.

2. Определяют вид функциональных зависимостей, описывающих поведение элементов. В зависимости от глубины учета явлений, протекающих в элементарной системе, они могут быть статическими или динамическими, учитывающими случайные факторы (стохастические) или нет (детерминированные), могут характеризоваться количественными либо только качественными оценками результатов их функционирования – логические, вербальные (словесные).

3. Определяют виды связей между элементами системы (функциональная или стохастическая, логическая или вербальная).

4. Определяют управляющие воздействия в системе.

5. Определяют внешние факторы, действующие на систему, их тип (стохастические или детерминированные). Для стохастических определяют законы распределения или вероятностные характеристики (математическое ожидание, дисперсия, корелляционные моменты).

6. Разрабатывают алгоритмы для реализации функциональных зависимостей и связей (аналитические зависимости в случае возможности их получения, логические, вербальные).

7. Разрабатывают на каком-либо алгоритмическом языке программу для реализации этих алгоритмов и датчики случайных чисел для стохастических систем.

При исследовании с помощью математических моделей разнородных явлений, протекающих в системах, целесообразно вместо одной универсальной модели использовать несколько более простых моделей, предназначенных для исследования отдельных явлений.

## МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ СИСТЕМ С СОСРЕДОТОЧЕННЫМИ ПАРАМЕТРАМИ В СТАТИКЕ

*Система с сосредоточенными параметрами* – система, в которой тела, на которые действуют силы можно заменить материальными точками. Если тело представляет балку, то считаем, что она не деформируется. Для создания математических моделей технических систем используют законы физики, механики, электротехники.

*При математическом моделировании систем с сосредоточенными параметрами в статике используют закон механики, согласно которому для линейного движения в условии равновесия сумма всех сил, действующих на систему материальных точек по каждой координате, равна нулю:*

$$\sum_{i=1}^{Nx} F_{xi} = 0, \sum_{i=1}^{Ny} F_{yi} = 0, \sum_{i=1}^{Nz} F_{zi} = 0,$$

где  $F_{xi}$ ,  $F_{yi}$ ,  $F_{zi}$  – силы, действующие в системе по координатам  $x,y,z$  соответственно, а при угловом равна нулю сумма моментов

$$\sum_{i=1}^{Nx} M_{xi} = 0, \sum_{i=1}^{Ny} M_{yi} = 0, \sum_{i=1}^{Nz} M_{zi} = 0,$$

где индексы  $x,y,z$  указывают оси, вокруг которых действуют моменты.

*При составлении уравнений для анализа поведения системы под действием внешних сил необходимо определить число степеней свободы системы и учесть внутренние силы, действующие в системе.*

Числом степеней свободы системы называется суммарное число независимых возможных перемещений материальных точек системы.

Одной из основных сил является *сила упругости* материала, возникающая при его деформации. Величина этой силы определяется по формуле

$$F_{\text{упр}} = -k_y \Delta,$$

где  $k_y$  – коэффициент упругости;  $\Delta$  – величина удлинения упругости материала под действием сил.

Другой силой является *сила трения*. В случае постоянного трения формула имеет вид

$$F_t = -\text{sign}(V) K_t.$$

В случае трения, зависящего от скорости:

$$F_t = -K_t V.$$

Здесь  $K_t$  – коэффициент трения;  $V$  – относительная скорость труящихся тел.

**Пример 1.** Рассмотрим систему, представленную на рис. 1.  
Здесь  $k_1$ ,  $k_2$  – коэффициенты упругости пружин;  $P$  – внешняя сила.

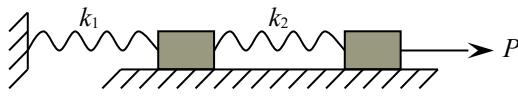


Рис. 1

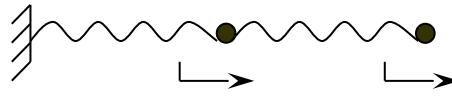


Рис. 2



Рис. 3

Определим число степеней свободы системы. В данном случае имеем две степени свободы, следовательно, вводим две линейные координаты  $x_1$  и  $x_2$  (рис.2). Зададим некоторые перемещения первому и второму телу  $x_1$  и  $x_2$ . Считая, что мы знаем эти величины перемещений, запишем силы, которые действуют на тела (рис.3)

$$F_{11} = -k_1 x_1;$$

$$F_{12} = k_2(x_2 - x_1);$$

$$F_{21} = -k_2(x_2 - x_1).$$

Кроме того, на второе тело действует сила  $P$ . Величина  $x_2 - x_1$  в формуле для  $F_{12}$  дает удлинение упругой связи. Суммируя силы, действующие на первое и второе тело, получим:

$$\begin{cases} F_{11} + F_{12} = 0, \\ F_{21} + P = 0. \end{cases}$$

Или

$$\begin{aligned} -k_1 x_1 + k_2(x_2 - x_1) &= 0, \\ -k_2(x_2 - x_1) + P &= 0. \end{aligned}$$

Это система линейных алгебраических уравнений. Решив ее, получим значения координат  $x_1$  и  $x_2$  первого и второго тел в условии ее равновесия.

**Пример 2.** Необходимо найти положение балки в условии статического равновесия при действии силы (рис.4).

Здесь  $k$  – коэффициент упругости;  $n$  – длина пружины в недеформированном состоянии;  $l$  – длина балки;  $m$  – масса балки.

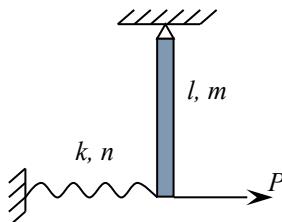


Рис. 4

Данная система имеет одну степень свободы. Угловую координату, задающую отклонение балки от вертикали, обозначим через  $\Phi$  (рис. 5), положительное направление против часовой стрелки. Чтобы составить уравнение равновесия нужно знать моменты всех сил, действующих на балку (их три: со стороны пружины  $F_y$ , сила тяжести и внешняя сила  $P$ ).

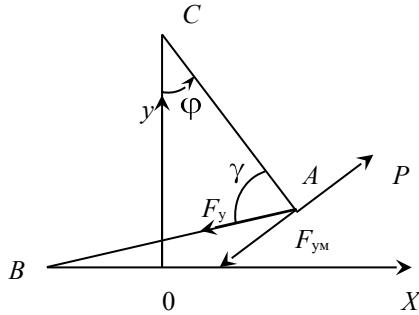


Рис. 5

Сила упругости определяется зависимостью

$$F_y = k \Delta,$$

где  $\Delta$  найдем как разницу длины пружины в деформированном и недеформированном состояниях

$$\Delta = AB - n.$$

Величину  $AB$  найдем как расстояние между точками  $A$  и  $B$ . Для этого введем систему координат  $Oxy$ .

Тогда координаты точек

$$A\{l \sin \varphi, l - l \cos \varphi\}; \\ B\{-n; 0\}; C\{0; l\},$$

а длина

$$AB = \sqrt{(l \sin \varphi + n)^2 + (l - l \cos \varphi)^2} .$$

Компонента  $F_{ym}$  силы  $F_y$ , перпендикулярная балке, создает вращающий момент. Поэтому надо найти проекцию силы  $F_y$  на перпендикуляр к балке. Обозначим угол между  $F_y$  и перпендикуляром через  $\alpha$ . Величину  $\alpha$  можно найти, вычислив угол  $\gamma$  между вектором силы  $F_y$  и балкой. Используем для этого теорему косинусов. Имеем:

$$\begin{aligned}
 BC &= \sqrt{n^2 + l^2}; \\
 BC^2 &= BA^2 + AC^2 - 2BA \cdot AC \cos \gamma; \\
 \gamma &= \arccos\left(\frac{BA^2 + AC^2 - BC^2}{2BA \cdot AC}\right); \\
 \alpha &= \frac{\pi}{2} - \gamma; \\
 F_{ym} &= F_y \cos \alpha; \\
 M_y &= -F_{ym}l.
 \end{aligned}$$

Момент силы  $P$  находим по формуле

$$M_p = PL.$$

Компоненты гравитационной силы, создающей вращающий момент, вычислим по зависимости

$$\frac{F}{mg} = mg \sin \varphi,$$

а момент этой силы

$$M_g = -0,5lmg \sin \varphi.$$

Окончательно уравнение для определения положения балки имеет вид:

$$M_y + M_p + M_g = 0$$

и является нелинейным алгебраическим уравнением.

**Пример 3.** Рассмотрим систему с тремя степенями свободы (рис. 6).

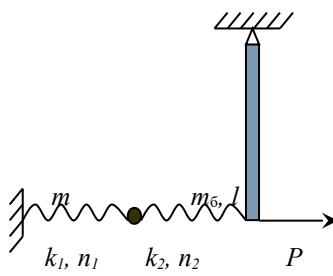


Рис. 6

Здесь обозначено  $k_1, k_2$  – коэффициенты упругости;  $n_1, n_2$  – длины пружин в недеформированном состоянии;  $m_6, l$  – соответственно масса и длина балки;  $P$  – сила;  $m$  – масса.

Данная система имеет три степени свободы. Масса  $m$  совершает два линейных движения, балка – угловое. Поэтому введем две

координаты  $-x, y$  для задания положения массы и  $\Phi$  для задания положения балки (рис. 7). Начало отсчета  $x, y$  совпадает с положением массы  $m$ , когда пружины не деформированы.

Для вычисления сил упругости от первой и второй пружины найдем их длины в зависимости от координат  $x, y, \Phi$ . Для этого определим координаты точек  $B, M, A, C$ .

Тогда

$$\begin{aligned} &A\{n_2 + l \sin \varphi; l - l \cos \varphi\}; \\ &B\{-n_1, 0\}, M\{x, y\}, C\{n_2, l\}; \\ &BM = \sqrt{(x + n_1)^2 + y^2}. \end{aligned}$$

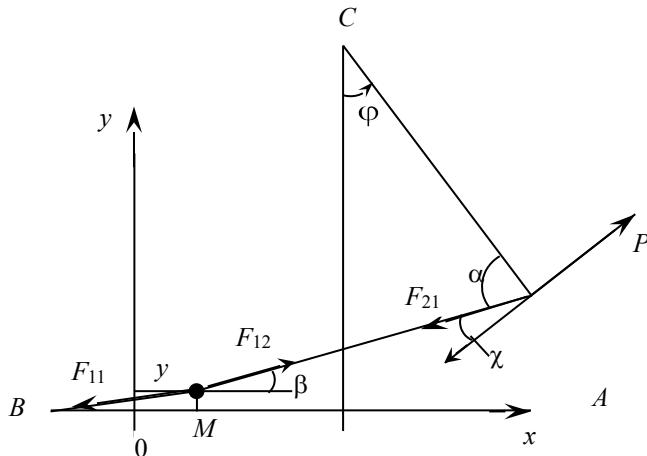


Рис. 7

Удлинение первой пружины:

$$\Delta n_1 = BM - n_1,$$

а сила от нее

$$F_{11} = k_1 \Delta n_1.$$

Найдем проекции  $F_{11}$  на оси  $x, y$ . Для этого найдем угол  $\gamma$  между  $BM$  и осью  $Ox$ .

Имеем:

$$\cos \gamma = \frac{x + n_1}{BM};$$

$$\sin \gamma = \frac{y}{BM};$$

$$F_{11x} = -F_{11} \cos \gamma;$$

$$F_{11y} = -F_{11} \sin \gamma.$$

Величина проекции гравитационной на ось  $y$  силы равна

$$F_{gy} = -mg.$$

Длину второй пружины вычислим по формуле

$$MA = \sqrt{(n_2 + l \sin \varphi - x)^2 + (l - l \cos \varphi - y)^2},$$

тогда

$$\Delta n_2 = MA - n_2$$

и сила равна

$$F_{12} = k_2 \Delta n_2.$$

Спроектируем силу  $F_{12}$  на оси  $x, y$ . Имеем:

$$\cos \beta = \frac{n_2 + l \sin \varphi - x}{MA};$$

$$\sin \beta = \frac{l - l \cos \varphi - y}{MA}.$$

Проекции сил, действующих на массу  $m$  со стороны второй пружины, равны

$$F_{12x} = F_{12} \cos \beta;$$

$$F_{12y} = F_{12} \sin \beta.$$

Используя эти зависимости, составим уравнения для определения положения массы  $m$  в системе координат  $Oxy$ .

$$\begin{cases} F_{11x} + F_{12x} = 0, \\ F_{11y} + F_{12y} + F_{gy} = 0. \end{cases}$$

Составим уравнение для определения углового положения балки. Со стороны второй пружины на балку действует сила  $F_{21} = F_{12}$ . Для нахождения компоненты этой силы, создающей врачающий момент, найдем углы  $\alpha$  и  $\chi$ . Имеем:

$$CM = \sqrt{(n_2 - x)^2 + (l - y)^2};$$

$$CM^2 = MA^2 + AC^2 - 2 \cdot MA \cdot AC \cos \alpha.$$

Отсюда найдем

$$\cos \alpha = \frac{MA^2 + AC^2 - CM^2}{2 \cdot MA \cdot AC};$$

$$\alpha = \arccos \alpha;$$

$$\chi = \frac{\pi}{2} - \alpha.$$

Моменты от силы упругости,  $P$  и гравитационной силы определяем по формулам:

$$M_{21} = -F_{21}l \cos \chi;$$

$$M_p = Pl;$$

$$M_g = -0,5lm g \sin \varphi.$$

Уравнение для балки имеет следующий вид:

$$M_{21} + M_p + M_g = 0.$$

Решая методом Ньютона полученную систему из трех уравнений, найдем значения координат  $x, y, \varphi$  тел системы в условии равновесия.

## СОСТАВЛЕНИЕ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ ДВИЖЕНИЯ СИСТЕМЫ ТЕЛ

При движении системы тел под действием внешних сил возникают инерционные силы, которые влияют на динамику движения системы.

Будем рассматривать системы с сосредоточенными параметрами, т.е. с точечными массами.

Существуют два подхода к составлению систем дифференциальных уравнений. Первый основан на непосредственном учете при составлении уравнений движения сил, действующих на систему. Он называется *методом сил*. Им мы пользовались при составлении уравнений статики. Другой подход основан на *вариационных принципах*.

*Вариационные принципы основаны на том, что физические процессы в природе происходят с минимальными затратами энергии.* На основе этих общих закономерностей были разработаны вариационные принципы механики.

Для составления дифференциального уравнения линейного движения тел методом сил используют *второй закон Ньютона*, либо *принцип Д'Аламбера*.

*Второй закон Ньютона гласит: ускорение тела под действием сил пропорционально сумме сил, действующих на тело, и обратно пропорционально массе.*

$$\frac{d^2x}{dt^2} = \frac{\sum_{i=1}^N F_i}{m}.$$

Здесь  $x$  – координата тела;  $F_i$  – силы, зависящие в общем случае от  $t$  и  $x$ ;  $m$  – масса тела. Если сила постоянна, то

$$\frac{d^2x}{dt^2} = P, V = \frac{dx}{dt} = Pt + C_1, x = \frac{Pt^2}{2} + C_1t + C_2.$$

*Принцип Д'Аламбера гласит: если к любой точке механической системы приложить кроме внешних и внутренних сил еще фиктивную силу инерции, равную  $F_u = -m \frac{d^2x}{dt^2}$ , то получим уравновешенную систему сил, к которым применимы все условия равновесия и уравнения статики.*

Здесь  $m$  – масса точки;  $x$  – ее координата;  $t$  – время.

Выведем дифференциальное уравнение для описания углового движения пространственного тела. Рассмотрим движение точечной

массы  $m$  на невесомой балке длиной  $L$  вокруг точки 0 под действием силы  $F$ (рис. 8).



Рис. 8

На малом угле  $\varphi$  можно записать

$$\frac{d^2 s}{dt^2} = \frac{F}{m},$$

где  $s = l\varphi$  путь.

Тогда

$$\frac{d^2 s}{dt^2} = l \frac{d^2 \varphi}{dt^2},$$

и

$$l \frac{d^2 \varphi}{dt^2} = \frac{F}{m}.$$

Преобразуя это выражение, получим

$$\frac{d^2 \varphi}{dt^2} = \frac{M}{J},$$

где  $M = Fl$  – момент силы;  $J = ml^2$  – момент инерции массы  $m$  на плече  $I$ , характеризующий инертность тела во вращательном движении.

Если на тело действуют несколько сил, то момент  $M$  является суммой моментов этих сил, зависящих в общем случае от  $\varphi$  и  $t$ .

Выведем формулы для моментов инерции некоторых тел.

### **Вычисление момента инерции стержня**

Рассмотрим однородный стержень постоянного сечения  $S$ , длиной  $l$ , с плотностью материала  $\rho$  (рис. 9).

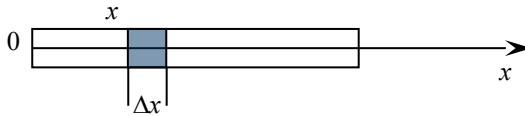


Рис. 9

Рассмотрим момент инерции элементарного кусочка длиной  $\Delta x$  как точечной массы, относительно точки 0. Положение этой массы зададим координатой  $x$ .

Имеем

$$\Delta m = \Delta x S \rho;$$

$$\Delta J = \Delta m x^2.$$

Момент инерции всего стержня равен пределу суммы элементарных моментов инерции.

$$J = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \sum \Delta J_i = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \sum \Delta m x_i^2 = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \sum S \rho x_i^2 \Delta x$$

или

$$J = \int_0^l S \rho x^2 dx = \frac{S \rho x^3}{3} \Big|_0^l = \frac{S \rho l^3}{3}.$$

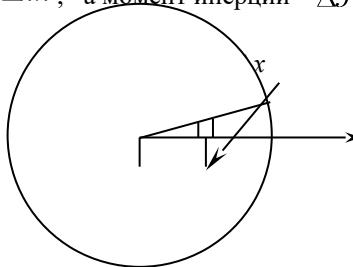
Учитывая, что  $S l \rho = m$ , получим  $J = \frac{m l^2}{3}$ .

### **Вычисление момента инерции диска**

Вычислим момент инерции диска постоянной толщины  $h$ , радиуса  $R$ , удельной плотностью материала  $\rho$ .

Момент инерции определим относительно оси, проходящей через центр диска.

Рассмотрим момент инерции элементарного кусочка как точечной массы (рис.10). Размеры его зададим величинами  $\Delta\varphi$  и  $\Delta x$ , а положение – координатой  $x$ . Объем его  $\Delta V = x \Delta\varphi \Delta x h$ , масса  $\Delta m = \rho \Delta V = \rho x \Delta\varphi \Delta x h$ , а момент инерции  $\Delta J = \Delta m x^2$ .



$\Delta\varphi$ 

Рис. 10

Вычисляя предел суммы элементарных моментов инерции по оси  $x$ , получим

$$\begin{aligned} J_s &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \sum_{i=1}^{\infty} \Delta J_i = \int_0^R \rho \Delta\varphi h x^3 dx = \\ &= \frac{\rho \Delta\varphi h x^4}{4} \Big|_0^R = \frac{\rho \Delta\varphi h R^4}{4}. \end{aligned}$$

Осуществляя суммирование по  $\varphi$ , получим

$$J = \lim_{\Delta\varphi \rightarrow 0} \sum_{i=1}^{\infty} J_{si} = \int_0^{2\pi} \frac{\rho h R^4}{4} d\varphi = \frac{\rho h R^4 \varphi}{4} \Big|_0^{2\pi} = \frac{\pi \rho h R^4}{2}.$$

Учитывая, что

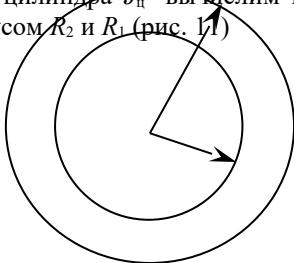
$$\begin{aligned} S_D &= \pi R^2, V_D = S_D h; \\ m_D &= V_D \rho = \pi R^2 h \rho. \end{aligned}$$

Получим

$$J = \frac{m_D R^2}{2}.$$

### **Вычисление момента инерции цилиндра**

Момент инерции цилиндра  $J_u$  вычислим как разность моментов инерции дисков радиусом  $R_2$  и  $R_1$  (рис. 11)



$$R_2$$

$$R_1$$

Рис. 11

Обозначим  $M_1$  – масса диска радиусом  $R_1$ ;  $M_2$  – масса диска радиусом  $R_2$ .

Так как

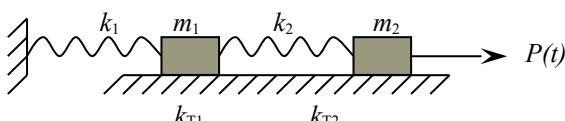
$$M_2 = h\pi R_2^2 \rho, M_1 = h\pi R_1^2 \rho,$$

то

$$\begin{aligned} J_{\text{ц}} &= \frac{M_2 R_2^2}{2} - \frac{M_1 R_1^2}{2} = \frac{h\pi R_2^2 \rho R_2^2 - h\pi R_1^2 \rho R_1^2}{2} = \\ &= \frac{h\pi \rho}{2} (R_2^4 - R_1^4) = \frac{h\pi \rho}{2} (R_2^2 - R_1^2)(R_2^2 + R_1^2) = \\ &= \frac{m_{\text{ц}}}{2} (R_2^2 + R_1^2). \end{aligned}$$

Здесь  $m_{\text{ц}}$  – масса цилиндра.

**Пример 1.** Рассмотрим систему тел, изображенную на рис.12, где  $k_1, k_2$  – коэффициенты упругости;  $m_1, m_2$  – массы;  $k_{T1}, k_{T2}$  – коэффициенты трения.



$x_1$                      $x_2$

Рис. 12

Для составления дифференциальных уравнений воспользуемся *вторым законом Ньютона*. Данная система имеет две степени свободы, движение масс – линейное. Вводим две координаты  $x_1$  и  $x_2$ .

При составлении уравнений учтем действие сил трения масс о поверхность. Общая форма составления дифференциальных уравнений

$$\frac{d^2x}{dt^2} = \frac{\sum_{i=1}^N F_i}{m}.$$

Формулы для сил, действующих на первое тело:

$$F_{11} = -k_1 x_1; F_{12} = k_2 (x_2 - x_1); F_{13} = -k_{T1} \dot{x}_1,$$

а дифференциальное уравнение для него

$$\frac{d^2x_1}{dt^2} = \frac{-k_1 x_1 + k_2 (x_2 - x_1) - k_{T1} \dot{x}_1}{m_1}.$$

Силы, действующие на второе тело:

$$F_{21} = -k_2 (x_2 - x_1); F_{22} = -k_{T2} \dot{x}_2; F_{23} = P(t).$$

Дифференциальное уравнение для него

$$\frac{d^2x_2}{dt^2} = \frac{-k_2 (x_2 - x_1) - k_{T2} \dot{x}_2 + P(t)}{m_2}.$$

В результате получили связанный систему линейных дифференциальных уравнений. Получить решение можно либо аналитическим, либо численным методом.

**Пример 2.** Рассмотрим систему тел, изображенную на рис.13.

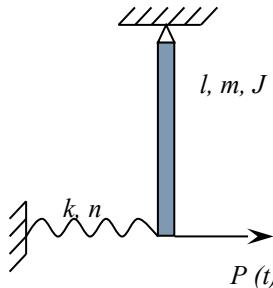


Рис. 13

Здесь  $l, m, J$  – соответственно длина, масса и момент инерции балки;  $k$  – коэффициент упругости пружины;  $n$  – длина пружины в недеформированном состоянии;  $P(t)$  – сила.

Система имеет одну степень свободы – угловое движение балки. Поэтому вводим координату  $\varphi$ , отсчитываемую от вертикали против часовой стрелки.

Общий вид дифференциального уравнения углового движения

$$\frac{d^2\varphi}{dt^2} = \frac{\sum_{i=1}^N M_i}{J}.$$

Рассмотрим нелинейный случай (рис.14).

Введем вспомогательную систему координат  $x, y$ . Ось  $y$  проходит через ось подвеса балки (точка  $C$ ) и совпадает с положением балки, в котором она находится при недеформированной пружине. Ось  $x$  проходит через точку крепления пружины (точка  $B$ ) и перпендикулярна оси  $y$ .

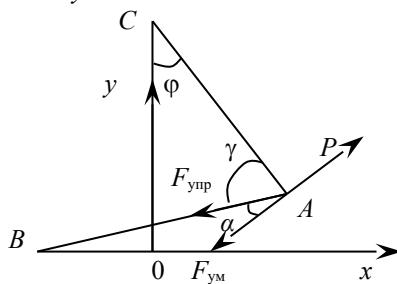


Рис. 14

Тогда координаты точек

$$B\{-n, 0\}, A\{l \sin \varphi, l - l \cos \varphi\}, C\{0, l\}.$$

Имеем

$$BA = \sqrt{(x_A - x_B)^2 + (y_A - y_B)^2};$$

$$CB = \sqrt{(x_B - x_C)^2 + (y_B - y_C)^2}.$$

Удлинение пружины определим по зависимости

$$\Delta n = BA - n; F_{\text{упр}} = k \Delta n; F_{\text{ум}} = F_{\text{упр}} \cos \alpha;$$

$$\alpha = \frac{\pi}{2} - \gamma.$$

Величину  $\gamma$  находим из зависимости

$$CB^2 = CA^2 + AB^2 - 2 \cdot AB \cdot CA \cdot \cos \gamma.$$

Используя эти зависимости, получим формулы для моментов сил

$$M_{\text{упр}} = -F_{\text{ум}} l;$$

$$M_g = -0,5lmgsin(\varphi);$$

$$M_p = P(t) \cdot l$$

и дифференциальное уравнение

$$\frac{d^2 \varphi}{dt^2} = \frac{M_g + M_p + M_y}{J}.$$

**Пример 3.** Составим дифференциальные уравнения движения балки длиной  $l$ , массой  $m_b$  и моментом инерции  $J_b$ , и массы  $m_r$ , связанной с балкой упругой связью с коэффициентом  $k$  (рис.15).

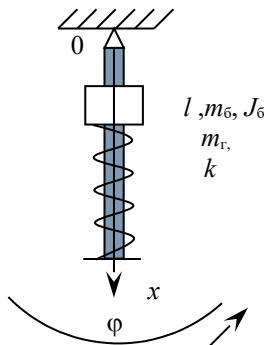


Рис.15

Данная система имеет две степени свободы: угловое движение балки и линейное движение груза вдоль балки. Вводим две координаты: угол  $\varphi$ , отсчитанный от вертикали, и координату  $x$ , задающую положение груза на балке.

Вычислим моменты сил, действующих на балку и вызывающих угловое движение:

сила тяжести балки

$$F_{T\bar{b}} = m_b g \sin \varphi;$$

момент силы тяжести балки

$$M_{T\bar{b}} = -0,5/m_b g \sin \varphi;$$

сила тяжести массы  $m_r$

$$F_{T\Gamma} = m_r g \sin \varphi;$$

момент силы тяжести  $m_r$

$$M_{T\Gamma} = -m_r g x \sin \varphi.$$

Вследствие наличия в системе углового движения балки с грузом и линейного движения груза вдоль балки возникает действие на балку кориолисовой силы.

Величина кориолисовой силы

$$F_{\kappa} = 2\dot{\varphi}\dot{x}m_r,$$

а ее момент

$$M_{\kappa} = -2\dot{\varphi}\dot{x}m_r x.$$

Дифференциальное уравнение углового движения имеет вид:

$$\frac{d^2\varphi}{dt^2} = \frac{M_{T6} + M_{Tr} + M_{\kappa}}{J_6 + m_r x^2}.$$

Вычислим силы, влияющие на линейное движение груза:

гравитационная сила

$$F_g = m_r g \cos \varphi;$$

сила упругости пружины

$$F_{np} = -kx;$$

центростебельная сила

$$F_u = m\dot{\varphi}^2 x.$$

Дифференциальное уравнение имеет вид:

$$\frac{d^2x}{dt^2} = \frac{F_g + F_{np} + F_u}{m_r}.$$

Полученная система дифференциальных уравнений – нелинейная, и ее решение можно найти численным методом, например, методом Рунге–Кутты. Для этого систему нужно представить в форме Коши.

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = v \\ \frac{dv}{dt} = \frac{F_g + F_{np} + F_u}{m_r} \end{cases}$$

Для интегрирования должны быть заданы начальные условия при  $t_0 = 0, x = x_0, \Phi = \varphi_0, V = V_0, \Omega = \omega_0$ .

**Пример 4.** Составим дифференциальное уравнение качения колеса без проскальзывания под действием силы  $F$  (рис.16). Масса колеса  $m$ , радиус  $R$ , момент инерции  $J$ .

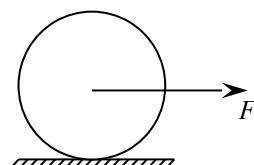


Рис. 16

При решении этой задачи необходимо учитывать, что тело одновременно совершает линейное движение центра масс и угловое движение вокруг центра масс. Осуществим это путем замены исходной системы, участвующей в двух видах движения, эквивалентной ей системой, но совершающей один вид движения: либо угловое, либо линейное. Эта замена совершается из условия равенства энергий исходной системы и ей эквивалентной. Энергия исходной системы (колеса) равна:

$$T = \frac{mV^2}{2} + \frac{J\omega^2}{2}.$$

Заменим исходное тело телом, которое движется линейно. В этом случае массу эквивалентного тела обозначим  $m_3$ .

Кинетическая энергия эквивалентного тела

$$T_3 = \frac{m_3 V^2}{2}.$$

Должно выполняться равенство  $T = T_3$ , или

$$\frac{mV^2}{2} + \frac{J\omega^2}{2} = \frac{m_3 V^2}{2}.$$

Так как  $V = \omega R$ , то

$$m\omega^2 R^2 + J\omega^2 = m_3 \omega^2 R^2.$$

Отсюда

$$m_3 = \frac{mR^2 + J}{R^2} = m + \frac{J}{R^2}.$$

Дифференциальное уравнение имеет вид

$$\frac{d^2 x}{dt^2} = \frac{F}{m_3}.$$

Первоначальную систему можно заменить эквивалентным вращающимся телом. Тогда имеем равенство

$$\frac{mV^2}{2} + \frac{J\omega^2}{2} = \frac{J_{\text{с}}\omega^2}{2},$$

из которого получим  $J_{\text{с}} = J + mR^2$ .

Так как тело совершает только угловое движение, то найдем момент, эквивалентный действующей силе  $F$ . Его найдем из условия равенства работ  $Fx = M_{\phi}$ . Величины  $x$  и  $\phi$  связаны зависимостью

$$x = R\phi,$$

поэтому

$$M_{\phi} = FR.$$

Дифференциальное уравнение примет вид

$$\frac{d^2\phi}{dt^2} = \frac{FR}{J + mR^2}.$$

*Приведение сил, действующих на балку, к силе, приложенной к центру масс, и к моменту*

В задачах механики часто возникает задача определения углового и линейного положения тела, в разных точках которого приложены силы.

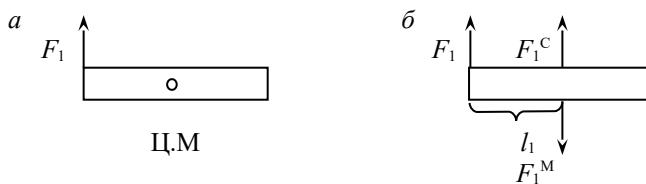


Рис. 17

Рассмотрим движение тела, к которому приложена сила  $F_1$  (рис. 17, а). Приложим к центру масс тела противоположно направленные и параллельные первоначальной силе  $F_1$ , силы  $F_1^C$  и  $F_1^M$ , причем  $|F_1^C| = |F_1^M| = |F_1|$ . Тогда пара сил  $F_1$  и  $F_1^M$  создает

вращающий момент  $M = F_1 l_1$ , а сила  $F_1^C$  вызывает линейное движение центра масс. Они могут быть использованы для составления дифференциальных уравнений линейного и углового движений. В случае действия нескольких сил, вызывающих линейное и угловое движения, силы и моменты от них суммируются.

**Пример 1.** Составим дифференциальные уравнения поведения системы, изображенной на рис. 18. Масса колеса  $m_k$ , большой радиус  $r_2$ , малый радиус  $r_1$ , момент инерции  $J$ , масса груза  $m_r$ , коэффициент упругости пружин  $k_1$  и  $k_2$ .

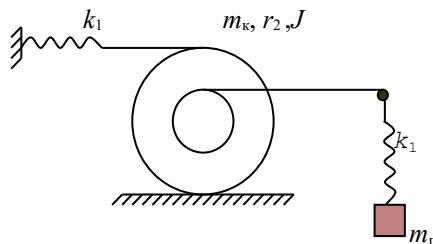
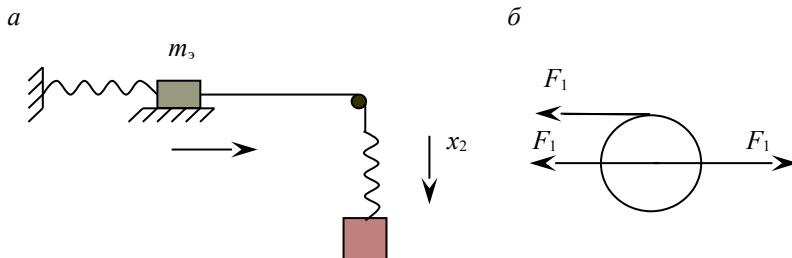


Рис. 18

Данная система имеет две степени свободы: линейное движение груза и линейное либо вращательное движение колеса. Эти два вида движений колеса жестко связаны между собой, т.е. определенному перемещению центра масс колеса однозначно соответствует некоторый угол поворота колеса, поэтому движение колеса можно заменить либо на линейное, либо на угловое. Заменим движение колеса на линейное (рис. 19). Поэтому введем две координаты  $x_1$  – для задания движения центра масс колеса, и  $x_2$  – для задания движения массы  $m_r$ . Эквивалентную массу колеса найдем по формуле

$$m_3 = m_k + \frac{J}{r_2^2}.$$



$$x_1 \quad m_r$$

Рис. 19

Найдем силы, действующие на  $m_s$ . Со стороны первой пружины на колесо действует сила  $F_1$ , вызывающая линейное и угловое движение колеса. Найдем эквивалентную ей силу, действующую на  $m_s$ .

Действие на колесо силы  $F_1$  на плече радиусом  $r_2$  заменим действием момента  $M_1 = F_1 r_2$  и силой  $F_1$ , приложенной к центру (рис. 19,б). В нашей новой расчетной схеме на массу  $m_s$  действует только сила, вызывающая линейное движение, а на колесо в исходной схеме действует и момент и сила, поэтому надо найти эквивалентную силу, действие которой на массу  $m_s$ , такое же, как и действие момента  $M_1$  и силы  $F_1$  на исходное колесо. Эквивалентную силу находим из условия равенства работ, производимых этой силой, а также моментом  $M_1$  и силой  $F_1$ . Имеем

$$\mathbf{A}_s = \mathbf{F}_s \mathbf{x}_1;$$

$$\mathbf{A} = \mathbf{F}_1 \mathbf{x} + \mathbf{M}_1 \boldsymbol{\varphi}.$$

Тогда условие равенства работ

$$F_s x_1 = F_1 x_1 + M_1 \varphi.$$

Имеем зависимости

$$x_1 = \varphi r_2;$$

$$\varphi = \frac{x_1}{r_2}.$$

Подставляя их в условие равенства работ получим

$$F_s x_1 = F_1 x_1 + F_1 r_2 \frac{x_1}{r_2},$$

или

$$F_s = 2F_1.$$

Аналогичное преобразование сделаем для силы  $F_2$ , действующей со стороны второй пружины (рис. 20).

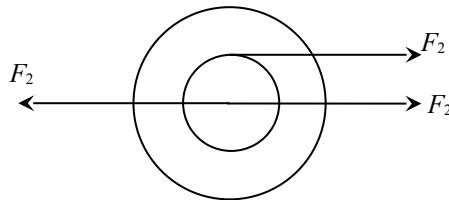


Рис. 20

Момент этой силы

$$M_2 = F_2 r_1.$$

Работа, совершенная этой силой, равна сумме работ момента и силы

$$A_2 = F_2 r_1 \varphi + F_2 x_1 = F_2 r_1 \frac{x_1}{r_2} + F_2 x_1,$$

а работа эквивалентной силы

$$A_{23} = F_{23} x_1.$$

Из равенства работ получим

$$F_{23} = F_2 \left(1 + \frac{r_1}{r_2}\right).$$

Найдем зависимость для сил  $F_1$  и  $F_2$ . Со стороны первой пружины на колесо действует сила упругости

$$F_1 = -k_1 x_{11},$$

где  $x_{11}$  – величина перемещения по оси  $x$  точки приложения силы  $F_1$ .

Так как

$$x_{11} = 2r_2 \varphi,$$

а

$$x_1 = r_2 \varphi,$$

то

$$x_{11} = 2x_1$$

и получим

$$F_1 = -2k_1x_1.$$

Величина силы со стороны второй пружины

$$F_2 = k_2(x_2 - x_k),$$

где  $x_k$  – величина перемещения точки приложения силы  $F_2$ .

Так как

$$x_k = (r_2 + r_1)\varphi = \frac{r_2 + r_1}{r_2}r_2\varphi = \left(1 + \frac{r_1}{r_2}\right)x_1,$$

то получим для силы, действующей на колесо

$$F_2 = k_2\left(x_2 - x_1\left(1 + \frac{r_1}{r_2}\right)\right),$$

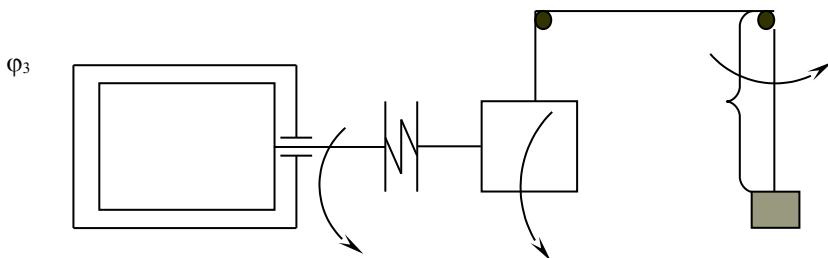
и на груз

$$F_3 = -F_2.$$

Дифференциальные уравнения для эквивалентной массы и массы  $m_r$

$$\frac{d^2x_1}{dt^2} = \frac{F_{13} + F_{23}}{m_3}, \quad \frac{d^2x_2}{dt^2} = \frac{F_3 + m_r g}{m_r}.$$

**Пример 2.** Пример составления дифференциальных уравнений системы с электродвигателем (рис. 21). Система предназначена для подъема груза и состоит из асинхронного электродвигателя, передающего вращающий момент через упругую муфту на барабан, на который наматывается трос, поднимающий груз. Груз раскачивается в одной плоскости. Трос считаем невесомым и нерастяжимым.



$$\varphi_1 \qquad \qquad \qquad \varphi_2$$

Рис. 21

Момент, создаваемый асинхронным двигателем, будем вычислять по упрощенной формуле

$$M_d = \frac{A(\omega_c - \omega_p)}{B + (\omega_c - \omega_p)^2},$$

где  $\omega_c$  – угловая скорость вращения магнитного поля в статоре электродвигателя;  $\omega_p$  – угловая скорость вращения ротора двигателя;  $A, B$  – коэффициенты, характеризующие мощность двигателя.

График момента двигателя в зависимости от угловой скорости приведен на рис. 22.

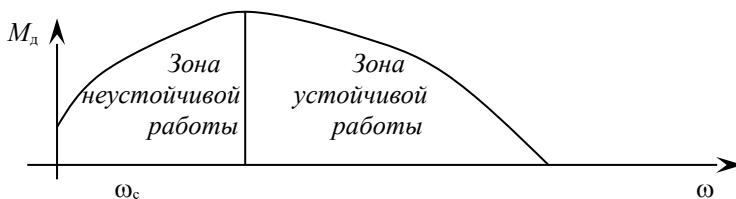


Рис.22

Упругость муфты характеризуется коэффициентом  $K_y$ , а момент, создаваемый ею

$$M_y = K_y(\varphi_2 - \varphi_1),$$

где  $\varphi_2, \varphi_1$  – углы поворота ее валов.

Барабан характеризуется радиусом  $R_b$  и моментом инерции  $J_b$ . Масса поднимаемого груза  $m_r$ , начальная длина троса  $L_0$ .

Данная система имеет три степени свободы:

- угол поворота ротора двигателя  $\varphi_1$ ;
- угловое вращение барабана  $\varphi_2$ ;
- угловое движение груза  $\varphi_3$ .

$$\text{Обозначим } \omega_1 = \frac{d\varphi_1}{dt}, \omega_2 = \frac{d\varphi_2}{dt}, \omega_3 = \frac{d\varphi_3}{dt}.$$

Линейное движение груза жестко связано с углом поворота барабана  $\varphi_2$  и поэтому не является самостоятельной степенью свободы.

Найдем формулы для сил и моментов, действующих на элементы системы. На ротор двигателя действуют два момента:

- со стороны магнитного поля статора (вращающий момент)

$$M_{\alpha} = \frac{A(\omega_c - \omega_1)}{B + (\omega_c - \omega_1)^2},$$

- со стороны муфты (упругий момент):

$$M_{y1} = K_y(\varphi_2 - \varphi_1).$$

Дифференциальное уравнение для ротора можно записать

$$\frac{d^2\varphi_1}{dt^2} = \frac{M_{\alpha} + M_{y1}}{J_{\alpha}},$$

где  $J_{\alpha}$  – момент инерции ротора двигателя.

На барабан действуют три момента:

- вызванный упругостью муфты

$$M_{y2} = -K_y(\varphi_2 - \varphi_1);$$

- вызванный тяжестью груза

$$M_r = -m_r g R_6 \cos \varphi_3;$$

- вызванный центробежной силой вследствие угловой скорости  $\omega_3$

$$F_u = m_r \omega_3^2 L; L = L_0 - \varphi_2 R_6;$$

$$M_u = -F_u R_6.$$

Действие этих сил вызывает угловое движение барабана и линейное поднятие груза. Поэтому вычислим эквивалентный момент инерции

$$J_{\Sigma} = J_{\delta} + m_r R_{\delta}^2.$$

Дифференциальное уравнение имеет вид

$$\frac{d^2 \varphi_2}{dt^2} = \frac{M_{y2} + M_r + M_u}{J_{\delta} + m_r R_{\delta}^2}.$$

На груз в угловом движении  $\varphi_3$  действуют два момента: момент силы тяжести и момент кориолисовой силы, вызванный тем, что поднимаемое тело одновременно совершает и линейное и угловое движение (рис.23).

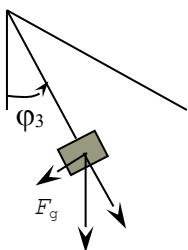


Рис.23

Гравитационная сила

$$F_g = m_r g \sin \varphi_3;$$

момент от нее

$$M_{3g} = -m_r g \sin \varphi_3 L.$$

Кориолисова сила

$$F_k = 2m_r V \omega_3,$$

а скорость определяется зависимостью

$$V = \omega_2 R_{\delta}.$$

Момент кориолисовой силы

$$M_k = F_k L.$$

Знак «+» в формуле для момента объясняется тем, что положительное направление линейного движения груза задано вверх.

Дифференциальное уравнение имеет вид

$$\frac{d^2\varphi_3}{dt^2} = \frac{M_{3g} + M_k}{m_r L^2}.$$

Чтобы численно проинтегрировать эту систему, ее нужно представить в виде шести уравнений первого порядка и задать начальные условия для углов и скоростей. Начальные условия для угловых скоростей  $\omega_{10} = \omega_c, \omega_{20} = \omega_c$ , а для углов  $\varphi_{10} = 0, \varphi_{20} = 0$ .

**Пример 3.** Рассмотрим систему, представляющую собой кран для поднятия и перемещения груза, приводимый в действие электродвигателем (рис. 24).

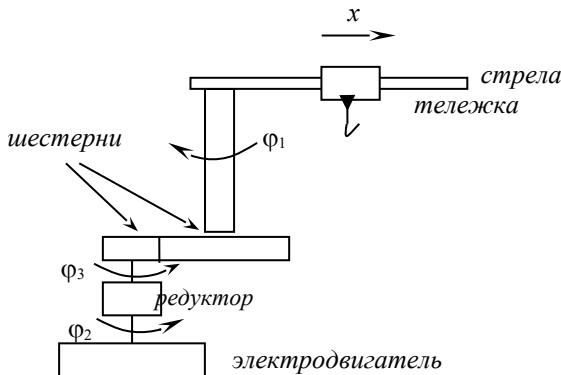


Рис. 24

Для перемещения крюка в то место, где находится груз, совершается угловое движение стрелы и линейное движение тележки с крюком. Угловое движение стрелы крана осуществляется асинхронным электродвигателем с врачающим моментом

$$M_B = \frac{A_B(\omega_{CB} - \omega_2)}{B_B + (\omega_{CB} - \omega_2)^2}.$$

Вращающий момент с ротора двигателя передается через редуктор с коэффициентом усиления момента  $K_{\text{в}}$ . Момент с выходного вала редуктора передается через шестерню радиусом  $R_p$  на шестерню, вращающую кран, радиусом  $R_k$ . Движение тележки тоже осуществляется асинхронным электродвигателем, момент которого выражается формулой

$$M_{\text{л}} = \frac{A_{\text{л}}(\omega_{\text{сл}} - \omega_{\text{л}})}{B_{\text{л}} + (\omega_{\text{сл}} - \omega_{\text{л}})^2}.$$

Радиус ведущей шестерни электродвигателя тележки, преобразующей угловое движение в линейное,  $R_{\text{ш}}$ , момент инерции стрелы крана относительно оси вращения без учета момента инерции тележки  $J_c$ , масса тележки  $m_t$ .

Момент сил трения при угловом движении стрелы крана

$$M_t = -K_t \omega_1,$$

где  $K_t$  – коэффициент трения.

Моменты инерции роторов двигателей, шестерен редуктора и ведущей шестерни можно не учитывать, так как они существенно меньше моментов инерции стрелы крана и массы тележки.

Данная система имеет две степени свободы. Угловое движение стрелы крана и линейное тележки. Задаем координаты  $\varphi_1$  – угол поворота стрелы крана,  $x$  – координата положения тележки. Начало оси  $x$  на оси вращения крана. Кроме того, задаем вспомогательные углы:  $\varphi_2$  – угол поворота ротора электродвигателя, и  $\varphi_3$  – угол поворота выходного вала редуктора. Найдем моменты, действующие на стрелу и вызывающие угловое движение  $\varphi_1$ . Поворот крана осуществляется электродвигателем. Так как он связан со стрелой через редуктор и шестерни, то угол поворота крана  $\varphi_1$  не равен углу поворота ротора двигателя  $\varphi_2$ . Найдем соотношение между этими углами.

При повороте крана на некоторый угол  $\varphi_1$  длина дуги поворота шестерни крана радиусом  $R_k$  будет равна длине дуги поворота шестерни редуктора радиусом  $R_p$ , т. е.  $\varphi_1 R_k = \varphi_3 R_p$ , отсюда

$$\varphi_3 = \varphi_1 \frac{R_k}{R_p}.$$

Редуктор позволяет увеличить или уменьшить момент, подаваемый на его вход. Если задан коэффициент  $K_m$  усиления момента редуктора, то момент на выходе

$$M_k = K_m M_h,$$

где  $M_h$  – входной момент.

Для угла поворота выходного вала редуктора и угловой скорости имеем

$$\varphi_k = \frac{\varphi_h}{K_m}, \omega_k = \frac{\omega_2}{K_m}.$$

В нашем случае

$$\varphi_3 = \frac{\varphi_2}{K_m}.$$

Найдем зависимость между  $\varphi_1$  и  $\varphi_2$ .

Имеем  $\varphi_2 = K_m \varphi_3$ . Используя связь между  $\varphi_1$  и  $\varphi_3$ , получим

$$\varphi_2 = K_m \frac{R_k}{R_p} \varphi_1;$$

$$\omega_2 = K_m \frac{R_k}{R_p} \omega_1.$$

Зная  $\omega_2$  – угловую скорость вращения ротора двигателя, вычисляем развиваемый им момент

$$M_B = \frac{A_B (\omega_{CB} - \omega_2)}{B_B + (\omega_{CB} - \omega_2)^2},$$

а также момент, вращающий кран

$$M_{dc} = M_B \cdot K_m \cdot \frac{R_k}{R_p}.$$

Вторым моментом, влияющим на угловую скорость вращения крана, является момент кориолисовых сил, возникающий вследствие взаимодействия линейного движения тележки и углового движения стрелы крана. Величина кориолисовой силы

$$F_k = 2m_t V \omega_1,$$

а создаваемый ею момент

$$M_k = -F_k x = -2m_T V \omega_1 x,$$

где  $V$  – скорость движения тележки;  $\omega_1$  – угловая скорость вращения стрелы крана;  $x$  – координата тележки. Знак «–» в выражении для  $M_k$  связан с тем, что ось  $x$  направлена от центра вращения, следовательно, при движении тележки в положительном направлении момент кориолисовых сил препятствует угловому движению стрелы крана. Момент сил трения

$$M_t = -k_t \omega_1.$$

Дифференциальное уравнение для вращения стрелы крана имеет вид

$$\frac{d^2 \phi_1}{dt^2} = \frac{M_{dc} + M_k + M_t}{J_c + m_T x^2}.$$

Рассмотрим силы, влияющие на линейное движение тележки. Одной из них является сила электродвигателя. Для определения момента, развиваемого электродвигателем, найдем связь между скоростью линейного движения тележки и угловой скоростью ротора электродвигателя. Имеем

$$\omega_L = \frac{V}{R_{ш}};$$

$$M_L = \frac{A_L (\omega_{сл} - \omega_L)}{B_L + (\omega_{сл} - \omega_L)^2}.$$

Зная момент  $M_L$ , развиваемый двигателем, найдем силу, с которой этот момент действует на тележку

$$F_L = \frac{M_L}{R_{ш}}.$$

Кроме того, на тележку в линейном движении действует центробежная сила, связанная с угловым движением крана

$$F_u = m_T \omega_1^2 x.$$

Дифференциальное уравнение движения тележки имеет вид

$$\frac{d^2x}{dt^2} = \frac{F_{\text{н}} + F_{\text{и}}}{m_{\text{т}}}.$$

При задании начального условия для угловой скорости  $\omega_{10}$  она должна соответствовать  $\omega_{20} = \omega_{\text{св}}$ .

### *Пример составления дифференциальных уравнений для динамических систем с дебалансом*

Электродвигатель дисковода ЭВМ закреплен в корпусе в двух точках. При изготовлении ротора не была осуществлена его динамическая балансировка, в результате чего он имеет дебаланс, характеризующийся массой  $m_d$  и ее расстоянием от оси вращения  $r_d$ . Составить дифференциальные уравнения движения электродвигателя относительно корпуса дисковода, если места крепления двигателя к корпусу можно представить в виде упругой связи с коэффициентом упругости  $k_y$ . Масса двигателя с ротором без учета разбалансировки  $M$ , и находится на оси вращения ротора, угловая скорость вращения ротора двигателя  $\omega(t)$  зависит только от времени, коэффициент демпфирования в опорах  $k_{\text{дем}}$ . Ось вращения двигателя расположена вертикально (рис. 25).

Будем рассматривать движение по одной горизонтальной координате  $x$ .

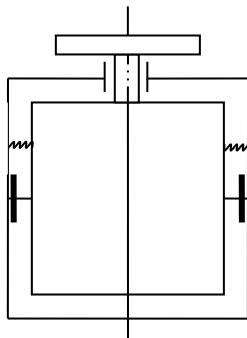
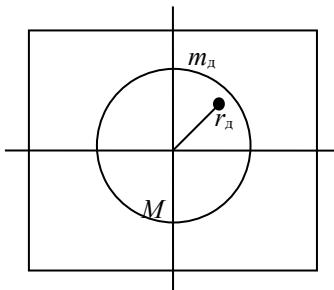
*a**б*

Рис. 25

Двигатель имеет только одну степень свободы в местах крепления к корпусу.

Расположим начало неподвижной системы координат  $Ox$  в точке, совпадающей с центром масс  $M$ , которое он занимает, когда на двигатель не действуют внешние силы (рис. 26).

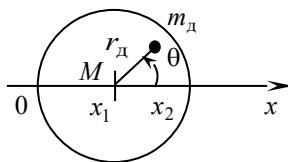


Рис. 26

Координату центра масс  $M$  при колебаниях двигателя обозначим  $x_1$ , а массы дебаланса  $m_d$  через  $x_2$ . Тогда

$$x_2 = x_1 + r_d \cos(\theta),$$

где  $\theta$  – угол поворота ротора относительно оси  $Ox$ .

Координата центра масс, соответствующая массам  $M$  и  $m_d$ , равна

$$x_c = \frac{Mx_1 + m_d x_2}{M + m_d} = \frac{Mx_1}{M + m_d} + \frac{m_d(x_1 + r_d \cos(\theta))}{M + m_d},$$

или

$$x_c = x_1 + \frac{m_d r_d \cos(\theta)}{M + m_d}.$$

На центр масс двигателя действуют внешние силы упругости опор и демпфирования

$$P_{\text{уп}} = -2k_y x_1;$$

$$P_{\text{дем}} = -2k_{\text{дем}} \frac{dx_1}{dt}.$$

Поэтому уравнение движение электродвигателя имеет вид

$$\frac{d^2 x_c}{dt^2} = \frac{P_{\text{уп}} + P_{\text{дем}}}{M + m_{\Delta}}.$$

Найдем производную координаты  $x_c$

$$\frac{dx_c}{dt} = \frac{dx_1}{dt} - \frac{m_{\Delta} r_{\Delta}}{M + m_{\Delta}} \sin(\theta) \frac{d\theta}{dt};$$

$$\frac{d^2 x_c}{dt^2} = \frac{d^2 x_1}{dt^2} - \frac{m_{\Delta} r_{\Delta}}{M + m_{\Delta}} \left[ \cos(\theta) \left( \frac{d\theta}{dt} \right)^2 + \sin(\theta) \frac{d^2 \theta}{dt^2} \right].$$

Уравнение движения электродвигателя примет вид

$$\frac{d^2 x_1}{dt^2} = \frac{P_{\text{уп}} + P_{\text{дем}}}{M + m_{\Delta}} + \frac{m_{\Delta} r_{\Delta}}{M + m_{\Delta}} \left[ \cos(\theta) \left( \frac{d\theta}{dt} \right)^2 + \sin(\theta) \frac{d^2 \theta}{dt^2} \right],$$

$$\Theta = \int_0^t \omega(t) dt; \frac{d\theta}{dt} = \omega(t); \frac{d^2 \theta}{dt^2} = \frac{d\omega(t)}{dt}.$$

где

Приведя его к форме Коши, получим

$$\frac{dV_{x1}}{dt} = \frac{P_{\text{уп}} + P_{\text{дем}}}{M + m_{\Delta}} + \frac{m_{\Delta} r_{\Delta}}{M + m_{\Delta}} \left[ \cos(\theta) \omega^2(t) + \sin(\theta) \frac{d\omega(t)}{dt} \right],$$

$$\frac{dx_1}{dt} = V_{x1}.$$

Начальные условия при  $t = 0$ ,  $V_{x1} = 0$ ,  $x_1 = 0$ .

### *Линеаризация системы*

Полученные дифференциальные уравнения, описывающие поведение системы, в общем случае являются нелинейными, позволяют анализировать ее поведение в большом диапазоне координат и характеризуются сложными зависимостями. Решение их возможно только численными методами. Однако бывают ситуации, когда необходимо проанализировать поведение системы в небольшой окрестности относительно положения равновесия, и составление полной, сложной модели в этом случае не оправдано. Тогда используют линеаризованную модель, которую можно получить из

нелинейной путем замены нелинейных зависимостей линейными, что бывает трудоемким, либо получить сразу при составлении уравнений, используя линеаризованные зависимости. В рассмотренных ранее примерах нелинейность наиболее часто возникала вследствие необходимости вычислять значения тригонометрических функций. При малых отклонениях угла от нуля, используя разложение в ряд Тейлора, можно записать  $\sin \varphi \approx \varphi$ ,  $\cos \varphi \approx 1$ .

Используя их в уравнениях для сил и моментов, освобождаемся от нелинейностей.

Рассмотрим пример. Необходимо составить уравнения поведения системы при малых отклонениях балки от вертикали. Коэффициенты упругости пружин  $k_1, k_2$ , масса балки  $m_b$ , длина  $l_b$ , момент инерции  $J$ , масса груза  $m_r$  (рис. 27).

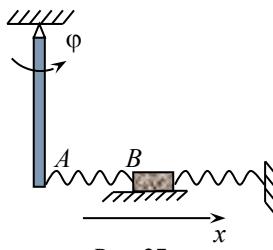


Рис. 27

Так как система имеет две степени свободы, то вводим две координаты  $\varphi$  и  $x$ . Величину смещения левого края пружины (точка  $A$ ) можно приближенно записать  $\Delta_1 \approx l_b \sin \varphi \approx l_b \varphi$ , а правого  $\Delta_2 = x$ . Тогда формулы для сил упругости имеют вид

$$F_b \approx k_1(x - l_b \varphi), \quad F_{r1} = -k_1(x - l_b \varphi), \quad F_{r2} = -k_2 x.$$

Вследствие того, что угол  $\varphi$  считаем малым, можно принять, что сила  $F_b$ , действующая на балку, перпендикулярна ей. Тогда момент этой силы

$$M_y = k_1(x - l_b \varphi) l_b.$$

Момент гравитационной силы

$$M_g = -m_r g l \sin \varphi$$

можно приближенно представить

$$M_g \approx -m_r g l \varphi.$$

Складывая силы и моменты, получим

$$\frac{d^2\varphi}{dt^2} = \frac{-m_r g l \varphi + k_1(x - l_0 \varphi)l_0}{J},$$

$$\frac{d^2x}{dt^2} = \frac{-k_1(x - l_0 \varphi) - k_2 x}{m_r}.$$

Данная система является линейной, и решение ее может быть получено аналитическим методом.

## ОСНОВНЫЕ ПРИНЦИПЫ КЛАССИЧЕСКОЙ МЕХАНИКИ

Принципом в механике называют достаточно общую количественную закономерность, описывающую поведение системы, которую можно записать в виде математических формул. Существуют понятия «законы механики» и «принципы механики». Понятие принципа является более общим, охватывающим все явления классической механики. Понятие закона механики используется для описания более узкого класса явлений и процессов в механике.

Основной особенностью, используемой в принципах механики, их главной методологической основой является выявление особых свойств истинного движения системы путем сравнения его с некоторыми допустимыми (виртуальными) возможными движениями этой же системы при тех же условиях (рис. 28).

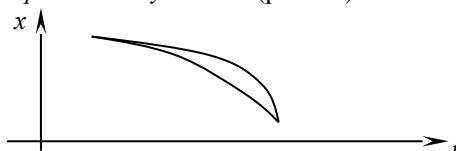


Рис. 28

Если анализ свойств истинного движения в сравнении со всеми возможными происходит в малой области пространства, когда рассматривают мгновенное состояние системы и небольшие вариации параметров ее движения, то такой подход называют

*дифференциальным принципом механики.* Среди них важнейшим является *принцип возможных (виртуальных) перемещений*.

Если анализ свойств истинного движения в сравнении с допустимыми происходит для конечных перемещений за конечный промежуток времени, то это *интегральный принцип механики*. Среди этих принципов важнейшим является *принцип Гамильтона*.

Существенной особенностью интегральных принципов является их связь с экстремальными свойствами реального движения

Чтобы сравнить истинное и возможные движения нужно установить меру механического движения. Сравнивая значения меры движения для реального движения и возможных движений можно найти характерные свойства истинного движения. Если в качестве меры движения выбрать величину

$$S_H = \int_{t_1}^{t_2} (T - \Pi) dt,$$

где  $T$ ,  $\Pi$  – соответственно кинетическая и потенциальная энергия системы, то для истинного движения величина  $S_H$  по сравнению с возможными движениями принимает экстремальное значение, поэтому вариация этой функции на множестве допустимых вариаций траектории будет обращаться в нуль. Эта мера движения называется *действием по Гамильтону*.

С точки зрения математики величина  $S_H$  является *функционалом*, т.е. функция от функции, или функция от бесконечного множества аргументов. Поэтому для нахождения вариации действия по Гамильтону используют математический аппарат функционального анализа.

Для анализа свойств реальных траекторий движения системы является полезной геометрическая интерпретация движения системы. Пусть механическая система материальных точек имеет  $s$  степеней свободы, ее положение в пространстве относительно системы отсчета определяется обобщенными координатами  $q_1, q_2, q_3, \dots, q_s$ . При движении системы обобщенные координаты будут меняться во времени, поэтому можно рассматривать совокупность координат для каждого момента времени как координаты точки в  $s$ -мерном пространстве, тогда каждому положению системы в пространстве

будет соответствовать точка в  $s$ -мерном пространстве. Движения являются непрерывными функциями времени  $t$ , поэтому каждому движению системы под действием сил будет соответствовать некоторая кривая в  $s$ -мерном пространстве. Такое  $s$ -мерное пространство называется *пространством конфигураций*, а кривую поведения системы в  $s$ -мерном пространстве, соответствующую реальному движению, называют *траекторией механической системы в пространстве конфигураций*. Каждая точка такой траектории в пространстве конфигураций однозначно соответствует некоторому положению системы в трехмерном пространстве.

Используя эти понятия, можно сказать, что для реально происходящих движений системы в пространстве конфигураций мера движения  $S_H$  принимает экстремальное значение.

## Дифференциальные принципы механики. Принцип виртуальных перемещений

При анализе поведения системы в статике в условиях равновесия мы использовали условие, что *сумма сил, действующих на каждую материальную точку, равна нулю*. Такой подход удобен в том случае, когда можно подобрать такую систему координат, что силы, обусловленные имеющимися в системе связями не учитывают. Для большого числа задач это не выполняется и нужны более общие принципы получения уравнений. Это позволяет делать принцип виртуальных перемещений.

Предположим, что дана механическая система материальных точек, на которую наложены идеальные связи. Допустим, что на какую-то точку этой системы действует некоторая активная сила. Представим, что мы даем этой точке некоторую совокупность бесконечно малых перемещений в области, центром которой является первоначально выбранное положение точки  $M$ . Единственное ограничение на перемещение заключается в том, что оно допускается наложенными на точку связями. В этом случае *виртуальным перемещением точки называется бесконечно малое перемещение, которое может иметь точка при наложенных на нее связях*.

### *Идеальные связи*

При рассмотрении поведения систем со связями стараются использовать постулат идеальных связей. Удерживающая связь, наложенная на систему, называется идеальной, если сумма виртуальных работ сил реакции связей равна нулю при всяком виртуальном перемещении механической системы.

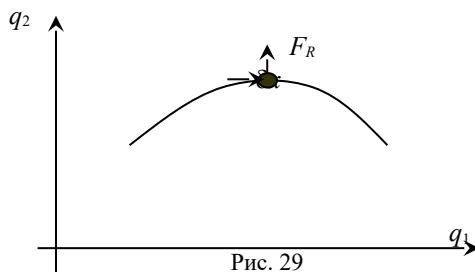


Рис. 29

Примером идеальной связи является поверхность, по которой движется тело (рис.29). В этом случае работа сил реакции связи  $F_R$  на любом допустимом перемещении  $\delta x$  равна нулю,  $\delta A_B = F_R \delta x \cos \alpha = 0$ , где  $\alpha$  – угол между вектором  $F_R$  и перемещением  $\delta x$ .

### *Использование принципа виртуальных перемещений для получения уравнений статики*

Для равновесия системы материальных точек с идеальными связями необходимо и достаточно, чтобы сумма элементарных работ всех действующих на систему активных сил на любом виртуальном перемещении была равна нулю.

Пусть на систему, которая находится в равновесии, действуют некоторые внешние силы  $F_a$  и силы реакций связей  $F_c$ . Так как система находится в равновесии, то

$$\vec{F}_a + \vec{F}_c = 0.$$

Умножим это выражение скалярно на вектор виртуальных перемещений  $\delta \vec{s}$ , где  $\delta \vec{s} = \{\delta x, \delta y, \delta z\}$ .

Получим

$$\vec{F}_a \delta \vec{s} + \vec{F}_c \delta \vec{s} = 0$$

или

$$F_{ax}\delta x + F_{ay}\delta y + F_{az}\delta z + F_{cx}\delta x + F_{cy}\delta y + F_{cz}\delta z = 0.$$

Так как работа сил  $\vec{F}_c$  на виртуальном перемещении равна нулю, то получим

$$\vec{F}_a \delta \vec{s} = 0.$$

Если силы, действующие в системе, обладают потенциалом, то мы можем записать

$$F_{ax} = -\frac{\partial \Pi}{\partial x}; F_{ay} = -\frac{\partial \Pi}{\partial y}; F_{az} = -\frac{\partial \Pi}{\partial z};$$

$$\frac{\partial \Pi}{\partial x} \delta x + \frac{\partial \Pi}{\partial y} \delta y + \frac{\partial \Pi}{\partial z} \delta z = 0,$$

где  $\Pi$  – потенциальная энергия системы.

Равенство нулю приращения потенциальной энергии при любых вариациях  $\delta x$ ,  $\delta y$ ,  $\delta z$  будет в том случае, если частные производные потенциальной энергии по координатам равны нулю, а это является условием того, что в положении равновесия системы ее потенциальная энергия имеет минимальное значение. Таким образом, принцип виртуальных перемещений дает способ получения уравнений равновесия системы в статике. Для этого необходимо получить формулы для потенциальной энергии системы под действием сил, а затем вычислить частные производные этой энергии по координатам и приравнять их нулю.

**Пример 1.** Рассмотрим систему, изображенную на рис. 30.

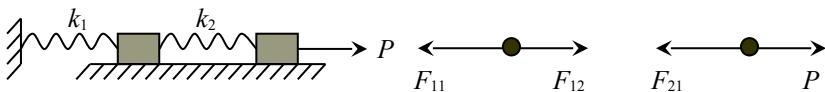


Рис. 30

Составим уравнения методом сил. Для сил упругости имеем

$$F_{11} = -k_1 x_1; \quad F_{12} = k_2(x_2 - x_1);$$

$$F_{21} = -k_2(x_2 - x_1).$$

Суммируя все действующие на массу силы, получим

$$\begin{cases} F_{11} + F_{12} = 0, \\ F_{21} + P = 0, \end{cases}$$

или

$$\begin{cases} -k_1x_1 + k_2(x_2 - x_1) = 0, \\ -k_2(x_2 - x_1) + P = 0. \end{cases}$$

Получим уравнение с помощью принципа виртуальных перемещений.

Работа упругой силы

$$F_y = kx$$

определяется формулой

$$A_y = \int_0^x kx dx = \frac{kx^2}{2}.$$

Поэтому для потенциальной энергии упругих сил получим

$$\Pi_1 = \frac{k_1 x_1^2}{2}; \quad \Pi_2 = \frac{k_2 (x_2 - x_1)^2}{2}.$$

Работу внешней силы  $P$  определим по формуле

$$A = \Pi_p = Px_2.$$

Полная потенциальная энергия

$$\Pi = \Pi_1 + \Pi_2 - \Pi_p = \frac{k_1 x_1^2}{2} + \frac{k_2 (x_2 - x_1)^2}{2} - Px_2.$$

Для получения уравнений продифференцируем выражение для потенциальной энергии.

$$\frac{\partial \Pi}{\partial x_1} = k_1 x_1 - k_2 (x_2 - x_1);$$

$$\frac{\partial \Pi}{\partial x_2} = k_2 (x_2 - x_1) - P.$$

Отсюда получим

$$\begin{cases} \kappa_1 x_1 - \kappa_2 (x_2 - x_1) = 0, \\ \kappa_2 (x_2 - x_1) - P = 0. \end{cases}$$

Данная система уравнений такая же, как и полученная методом сил.

**Пример 2.** Точечная масса  $m$  подвешена на нерастяжимой нити длиной  $l$  (маятник) и выводится из положения равновесия силой  $P$ , перпендикулярной нити (рис. 31).

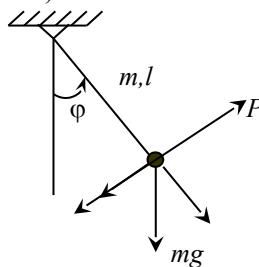


Рис. 31

Составим уравнения методом сил. Введем координату  $\varphi$ , задающую угловое движение. На маятник действуют два момента

$$M_g = -mg \sin(\varphi)l; M_P = Pl.$$

Суммируя их получим

$$-mg \sin(\varphi)l + Pl = 0$$

или

$$P - mg \sin \varphi = 0.$$

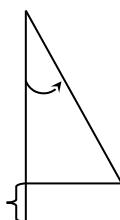
Получим эти уравнения с помощью принципа виртуальных перемещений. Потенциальную энергию тела в гравитационном поле определим по формуле

$$\Pi_g = mgh,$$

где  $h = l - l \cos \varphi$  (рис. 32),

или

$$\Pi_g = mg(l - l \cos \varphi).$$



$\varphi$  $h$ 

Рис. 32

Работа силы  $P$  равна моменту этой силы, умноженному на угол поворота под действием этого момента

$$A_p = \Pi_p = Pl\varphi.$$

Полная потенциальная энергия

$$\Pi = mg(l - l \cos \varphi) - Pl\varphi.$$

Продифференцируем потенциальную энергию системы по переменной  $\varphi$

$$\frac{\partial \Pi}{\partial \varphi} = mg/l \sin \varphi - Pl.$$

Уравнение равновесия имеет вид  $mg \sin \varphi - P = 0$ .

### **Получение дифференциальных уравнений движения с помощью вариационных принципов**

#### *Метод Д'Аламбера*

Этот метод относится к методам *кинетостатики*, которые характерны тем, что для получения уравнения движения тела используются уравнения и зависимости статики, но к силам, действующим в системе, добавляют еще *фактивные инерционные силы, вызванные ускоренным движением масс системы*. Величина инерционной силы для  $i$ -й массы при линейном движении

$$F_{I,i} = -m_i \ddot{x}_i,$$

а при угловом

$$M_{I,i} = -J_i \ddot{\varphi}_i.$$

Здесь  $x_i$ ,  $\varphi_i$  – соответствующие координаты в линейном и угловом движении;  $m_i$  – масса;  $J_i$  – момент инерции.

*Принцип Д'Аламбера гласит: если к точкам несвободной системы (т.е. системы со связями) наряду с активными силами приложить силы инерции, то совокупность этих сил уравновешивается реакциями связей.*

Рассмотрим пример (рис. 33). Диск вращается вокруг оси под действием силы тяжести массы  $m_r$ . Заданы момент инерции  $J$  диска, радиус  $R$ .

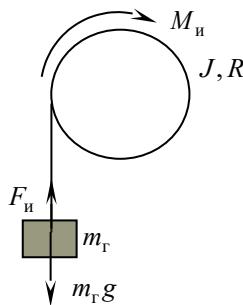


Рис. 33

Составим уравнение методом сил для углового движения

$$\frac{d^2\varphi}{dt^2} = \frac{M_u}{J} = \frac{m_r g R}{J + m_r R^2}.$$

Применим метод Д'Аламбера. Величина инерционной силы массы  $m_r$

$$F_u = -m_r \ddot{x}.$$

Величины  $x$  и  $\varphi$  связаны зависимостью

$$x = R\varphi, \ddot{x} = R\ddot{\varphi}.$$

Тогда инерционная сила

$$F_u = -m_r R\ddot{\varphi},$$

а инерционный момент при угловом движении диска

$$M_u = -J\ddot{\varphi}.$$

Вычислим момент, создаваемый силой тяжести груза и силами инерции

$$M_F = (F_u + m_r g)R = (-m_r R \ddot{\phi} + m_r g)R.$$

Суммарный момент всех сил, действующих на диск, определяется выражением

$$M_F + M_u = 0$$

или

$$-J\ddot{\phi} + m_r gR - m_r R^2 \ddot{\phi} = 0.$$

Отсюда получим

$$\frac{d^2\phi}{dt^2} = \frac{m_r gR}{J + m_r R^2},$$

что совпадает с уравнением, полученным методом сил.

### Уравнение Лагранжа второго рода

Мы составляли дифференциальные уравнения поведения динамической системы с помощью метода сил, принципа Д'Аламбера, но наиболее распространенным и удобным является использование уравнения Лагранжа второго рода, которое получается из метода виртуальных перемещений и принципа Д'Аламбера (общее уравнение механики)

$$(F - m\ddot{r})\delta r = 0.$$

Здесь  $\delta r(t)$  вариация координаты по отношению к реальному движению. Для системы из  $k$  масс можно записать

$$\sum_{i=1}^k (F_i - m_i \ddot{r}_i) \delta r_i = 0,$$

или

$$\sum_{i=1}^k F_i \delta r_i - \sum_{i=1}^k m_i \ddot{r}_i \delta r_i = 0,$$

Допустим, что на координаты  $r$  наложены связи, такие, что остается  $n$  независимых координат. Обозначим эти независимые координаты (назовем их *обобщенными координатами*) через  $q_j$  ( $j = \overline{1, n}$ ).

Тогда

$$r_i = r_i(q_1, q_2, \dots, q_n, t),$$

а

$$\delta r_i = \sum_{j=1}^n \frac{\partial r_i}{\partial q_j} \delta q_j.$$

Используя эти зависимости можно записать

$$\sum_{i=1}^k F_i \delta r_i = \sum_{i=1}^k F_i \sum_{j=1}^n \frac{\partial r_i}{\partial q_j} \delta q_j = \sum_{j=1}^n \sum_{i=1}^k F_i \frac{\partial r_i}{\partial q_j} \delta q_j = \sum_{j=1}^n Q_j \delta q_j$$

,

$$\text{где } Q_j = \sum_{i=1}^k F_i \frac{\partial r_i}{\partial q_j} - \text{обобщенная сила.}$$

Имеем

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^k m_i \ddot{r}_i \delta r_i &= \sum_{i=1}^k m_i \ddot{r}_i \sum_{j=1}^n \frac{\partial r_i}{\partial q_j} \delta q_j = \\ &= \sum_{j=1}^n \sum_{i=1}^k m_i \ddot{r}_i \frac{\partial r_i}{\partial q_j} \delta q_j = \\ &= \sum_{j=1}^n \sum_{i=1}^k \left\langle \frac{d}{dt} \left( m_i \dot{r}_i \frac{\partial r_i}{\partial q_j} \right) - m_i \dot{r}_i \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial r_i}{\partial q_j} \right) \right\rangle \delta q_j. \end{aligned}$$

Преобразуем выражение

$$\sum_{i=1}^k \frac{d}{dt} \left( m_i \dot{r}_i \frac{\partial r_i}{\partial q_j} \right).$$

Для этого надо преобразовать  $\frac{\partial r_i}{\partial q_j}$ .

Так как

$$r_i = r_i(q_1, q_2, \dots, q_n, t),$$

то

$$\frac{dr_i}{dt} = V_i = \sum_{j=1}^n \left( \frac{\partial r_i}{\partial q_j} \cdot \frac{dq_j}{dt} \right) + \frac{\partial r_i}{\partial t}$$

или

$$\dot{r}_i = \sum_{j=1}^n \frac{\partial r_i}{\partial q_j} \dot{q}_j + \frac{\partial r_i}{\partial t}.$$

Так как  $\frac{\partial r_i}{\partial q_j}, \frac{\partial r_i}{\partial t}$  не зависят от  $\dot{q}_j$ , то продифференцировав предыдущее равенство по  $\dot{q}_j$  получим

$$\frac{\partial \dot{r}_i}{\partial \dot{q}_j} = \frac{\partial r_i}{\partial q_j}.$$

Используя эту зависимость получим

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^k \frac{d}{dt} \left( m_i \dot{r}_i \frac{\partial r_i}{\partial q_j} \right) &= \sum_{i=1}^k \frac{d}{dt} \left( m_i \dot{r}_i \frac{\partial \dot{r}_i}{\partial \dot{q}_j} \right) = \sum_{i=1}^k \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial}{\partial \dot{q}_j} \left( \frac{1}{2} m_i \dot{r}_i^2 \right) \right) = \\ &= \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial}{\partial \dot{q}_j} \left( \sum_{i=1}^k \frac{1}{2} m_i \dot{r}_i^2 \right) \right) = \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial}{\partial \dot{q}_j} \left( \sum_{i=1}^k T_i \right) \right) = \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j} \right). \end{aligned}$$

Здесь  $T$  – полная кинетическая энергия системы.

Преобразуем выражение

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^k m_i \dot{r}_i \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial r_i}{\partial q_j} \right) &= \sum_{i=1}^k m_i \dot{r}_i \frac{\partial}{\partial q_j} \left( \frac{dr_i}{dt} \right) = \sum_{i=1}^k m_i \dot{r}_i \frac{\partial V_i}{\partial q_j} = \\ &= \sum_{i=1}^k m_i V_i \frac{\partial V_i}{\partial q_j} = \sum_{i=1}^k \frac{\partial}{\partial q_j} \left( \frac{1}{2} m_i V_i^2 \right) = \frac{\partial T}{\partial q_j}. \end{aligned}$$

Подставляя эти зависимости в исходное выражение получим

$$\sum_{j=1}^n Q_j \delta q_j - \sum_{j=1}^n \left\langle \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j} \right) - \frac{\partial T}{\partial q_j} \right\rangle \delta q_j = 0,$$

или

$$\sum_{j=1}^n \left\langle \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j} \right) - \frac{\partial T}{\partial q_j} - Q_j \right\rangle \delta q_j = 0.$$

При реальном движении системы под действием сил вариация энергии системы (кинетической, потенциальной и работ внешних сил) на допустимых вариациях координат равна нулю. Равенство нулю этого выражения будет только в том случае, если

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j} \right) - \frac{\partial T}{\partial q_j} - Q_j = 0.$$

Это уравнение называется *уравнением Лагранжа второго рода*. Если система тел обладает потенциальной энергией, то сила, обусловленная потенциальной энергией, действующая на  $j$ -й элемент, будет равна

$$Q_{\Pi j} = - \frac{\partial \Pi}{\partial q_j},$$

где  $\Pi$  – выражение для потенциальной энергии.

Тогда можно записать

$$Q_j = - \frac{\partial \Pi}{\partial q_j} + Q_{Aj},$$

где  $Q_{Aj}$  – активная сила, действующая по  $j$ -й координате.

Окончательно получим

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j} \right) - \frac{\partial T}{\partial q_j} + \frac{\partial \Pi}{\partial q_j} = Q_{Aj}.$$

Рассмотрим пример использования уравнения Лагранжа второго рода для составления дифференциальных уравнений. Составим дифференциальное уравнение для системы, изображенной на рис. 34.

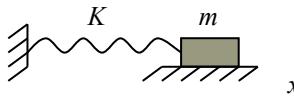


Рис. 34

Для кинетической и потенциальной энергии соответственно имеем

$$T = \frac{m\dot{x}^2}{2}, \quad \Pi = \frac{kx^2}{2}.$$

Тогда

$$\frac{\partial T}{\partial \dot{x}} = m\dot{x}, \quad \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial T}{\partial \dot{x}} \right) = \frac{d}{dt} (m\dot{x}) = m\ddot{x},$$

$$\frac{\partial T}{\partial x} = 0, \quad \frac{\partial \Pi}{\partial x} = kx.$$

Уравнение имеет вид

$$m\ddot{x} + kx = 0 .$$

### Принцип Гамильтона

При использовании принципа Гамильтона дифференциальные уравнения движения тела находятся из условия минимума выражения

$$S_H = \int_{t_1}^{t_2} (T - \Pi) dt,$$

где  $T, \Pi$  – соответственно кинетическая и потенциальная энергия системы.

В формулу для потенциальной энергии могут входить постоянные силы, или зависящие от времени. Силы, зависящие от скоростей (сила трения), учитываются другим специальным образом. Величина  $S_H$ , называемая *действием по Гамильтону*, является мерой механического движения в принципе Гамильтона и представляет собой функционал. Чтобы выявить экстремальные свойства реального движения нужно выбрать пучок траекторий, близких к реальной, и провести для него вычисление вариации функционала  $S_H$ .

Необходимо различать *дифференциал* – приращение функции (рис.35, а) и *вариацию функции* – небольшое приращение функции на интервале, для которого заданы некоторые условия на концах отрезка варьирования (рис. 35,б). Будем считать, что  $\delta x(t_1) = \delta x(t_2) = 0$ .

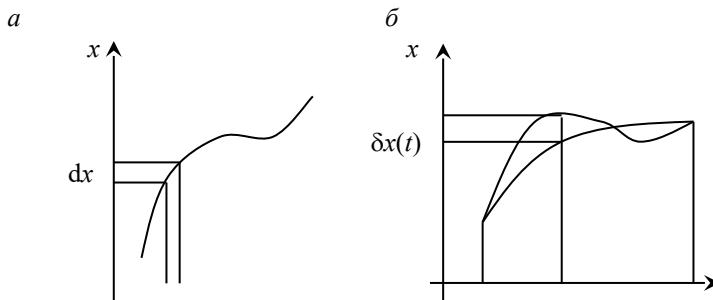




Рис. 35

### *Операции с вариациями*

С вариацией приходится выполнять операции дифференцирования и интегрирования. Покажем, что производная вариации равна вариации производной, т.е.

$$\frac{d}{dt} \delta x = \delta \frac{dx}{dt} = \delta \dot{x} .$$

Действительно

$$\frac{d}{dt} \delta x = \frac{d}{dt} (x_H - x_0) = \frac{dx_H}{dt} - \frac{dx_0}{dt} = \dot{x}_H - \dot{x}_0 = \delta \dot{x} .$$

Здесь  $x_H$ ,  $x_0$  – соответственно варьированная и действительная траектория.

Рассмотрим операцию интегрирования

$$\delta \int_{t_1}^{t_2} \Phi dt = \int_{t_1}^{t_2} \Phi_H dt - \int_{t_1}^{t_2} \Phi_0 dt = \int_{t_1}^{t_2} (\Phi_H - \Phi_0) dt = \int_{t_1}^{t_2} \delta \Phi dt .$$

Рассмотренные операции дифференцирования и интегрирования называют синхронным варьированием, так как изменение функции рассматривают для того же момента времени.

### *Общая схема применения принципа Гамильтона*

1. Составляют функцию  $L = T - \Pi$ , называем *лагранжианом*.

Здесь  $T$  – кинетическая энергия;  $\Pi$  – потенциальная. Лагранжиан является функцией координат и скоростей. Если в системе действуют постоянные силы  $F_i$  по координатам  $x_i$  ( $i = 1, 2, \dots, n$ ), то их учет в лагранжиане осуществляется по формуле  $P_i = F_i x_i$ , а лагранжиан можно записать

$$L_s = L(x_1, x_2, \dots, x_n, \dot{x}_1, \dot{x}_2, \dots, \dot{x}_n) + \sum_{i=1}^n F_i x_i.$$

Действие по Гамильтону примет вид

$$S_H = \int_{t_1}^{t_2} (L(x_1, x_2, \dots, x_n, \dot{x}_1, \dot{x}_2, \dots, \dot{x}_n) + \sum_{i=1}^n F_i x_i) dt.$$

На траектории реального движения величина действия по Гамильтону принимает минимальное значение. Это означает, что если дать вариации координатам процесса  $\delta x_i$  и скоростям  $\delta \dot{x}_i$ , то приращение действия  $S_H$  будет равно нулю.

2. Вычисляем вариацию функционала

$$\begin{aligned} \delta S_H &= \int_{t_1}^{t_2} \left( \delta L + \delta \sum_{i=1}^n F_i x_i \right) dt = \\ &= \int_{t_1}^{t_2} \left( \frac{\partial L}{\partial x_1} \delta x_1 + \frac{\partial L}{\partial x_2} \delta x_2 + \dots + \frac{\partial L}{\partial x_n} \delta x_n + \right. \\ &\quad \left. + \frac{\partial L}{\partial \dot{x}_1} \delta \dot{x}_1 + \frac{\partial L}{\partial \dot{x}_2} \delta \dot{x}_2 + \dots + \frac{\partial L}{\partial \dot{x}_n} \delta \dot{x}_n + \sum_{i=1}^n F_i \delta x_i \right) dt. \end{aligned}$$

3. Дальнейшим преобразованием будет замена вариаций производных соответствующими вариациями координат. Для такой замены используют формулу интегрирования по частям

$$\int_{t_1}^{t_2} u' v dt = uv \Big|_{t_1}^{t_2} - \int_{t_1}^{t_2} u v' dt.$$

В соответствии с ней имеем

$$\int_{t_1}^{t_2} \frac{\partial L}{\partial \dot{x}_i} \delta \dot{x}_i dt = \frac{\partial L}{\partial \dot{x}_i} \delta x_i \Big|_{t_1}^{t_2} - \int_{t_1}^{t_2} \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{x}_i} \right) \delta x_i dt = - \int_{t_1}^{t_2} \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{x}_i} \right) \delta x_i dt.$$

Величина  $\frac{\partial L}{\partial \dot{x}_i} \delta x_i \Big|_{t_1}^{t_2}$  равна нулю, так как вариация функции на

границах интервала равна нулю, т.е.  $\delta x_i(t_1) = \delta x_i(t_2) = 0$ .

Выполняя такое преобразование для  $i$  от 1 до  $n$  получим

$$\delta S_H \int_{t_1}^{t_2} \left\langle \sum_{i=1}^n \left( -\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{x}_i} \right) + \frac{\partial L}{\partial x_i} + F_i \right) \delta x_i \right\rangle dt.$$

Для того чтобы вариация функционала была равна нулю тождественно на любом произвольном интервале времени  $t_1, t_2$  и при любой допустимой вариации  $\delta x_i$  должно быть равно нулю выражение

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{x}_i} \right) - \frac{\partial L}{\partial x_i} - F_i = 0, (i = 1, \dots, n).$$

Это дифференциальные уравнения, описывающие реальное поведение системы под действием сил.

Покажем, что из этих уравнений вытекают уравнения Лагранжа второго рода. Имеем

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{x}_i} \right) - \frac{\partial L}{\partial x_i} - F_i = 0.$$

Подставим зависимость для  $L$ . Получим

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial(T - \Pi)}{\partial \dot{x}_i} \right) - \frac{\partial(T - \Pi)}{\partial x_i} - F_i = 0$$

или

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial T}{\partial \dot{x}_i} \right) - \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial \Pi}{\partial \dot{x}_i} \right) - \frac{\partial T}{\partial x_i} + \frac{\partial \Pi}{\partial x_i} - F_i = 0.$$

Так как потенциальная энергия не зависит от скорости, то получим

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial T}{\partial \dot{x}_i} \right) - \frac{\partial T}{\partial x_i} + \frac{\partial \Pi}{\partial x_i} = F_i,$$

что является уравнением Лагранжа второго рода.

**Пример 1.** Рассмотрим систему, изображенную на рис. 36. Здесь  $k_1, k_2$  – коэффициенты упругости;  $m_1, m_2$  – точечные массы.



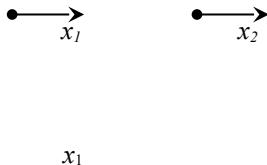


Рис. 36

Запишем действие по Гамильтону

$$S_H = \int_{t_1}^{t_2} (T - \Pi) dt.$$

Кинетическую и потенциальную энергию можно записать

$$T_1 = \frac{m_1 V_1^2}{2}; T_2 = \frac{m_2 V_2^2}{2}; \Pi_1 = \frac{k_1 x_1^2}{2}; \Pi_2 = \frac{k_2 (x_2 - x_1)^2}{2}.$$

Тогда

$$S_H = \int_{t_1}^{t_2} \left( \frac{m_1 V_1^2}{2} + \frac{m_2 V_2^2}{2} - \frac{k_1 x_1^2}{2} - \frac{k_2 (x_2 - x_1)^2}{2} \right) dt.$$

Запишем выражение для вариации

$$\delta S_H = \int_{t_1}^{t_2} (m_1 V_1 \delta V_1 + m_2 V_2 \delta V_2 - k_1 x_1 \delta x_1 - k_2 (x_2 - x_1) \delta x_2 + k_2 (x_2 - x_1) \delta x_1) dt.$$

Под знаком интеграла присутствуют вариации скоростей  $\delta V_1$  и  $\delta V_2$  и координат  $\delta x_1$  и  $\delta x_2$ . Необходимо преобразовать вариации скоростей, превратив их в вариации координат. Для этого используем метод интегрирования по частям.

$$\int_{t_1}^{t_2} m_i V_i \delta \dot{x}_i dt = m_i V_i \delta x_i \Big|_{t_1}^{t_2} - \int_{t_1}^{t_2} m_i \dot{V}_i \delta x_i dt = - \int_{t_1}^{t_2} m_i \ddot{x}_i \delta x_i dt,$$

так как

$$\delta x_i(t_1) = \delta x_i(t_2) = 0, (i = 1, 2).$$

Тогда

$$\begin{aligned} \delta S_H = \int_{t_1}^{t_2} & (-m_1 \ddot{x}_1 \delta x_1 - m_2 \ddot{x}_2 \delta x_2 - k_1 x_1 \delta x_1 - \\ & - k_2 (x_2 - x_1) \delta x_2 + k_2 (x_2 - x_1) \delta x_1) dt. \end{aligned}$$

Сгруппируем коэффициенты при одинаковых вариациях

$$\begin{aligned} \delta S_H = \int_{t_1}^{t_2} & (\langle -m_1 \ddot{x}_1 - k_1 x_1 + k_2 (x_2 - x_1) \rangle \delta x_1 + \\ & + \langle -k_2 (x_2 - x_1) - m_2 \ddot{x}_2 \rangle \delta x_2) dt. \end{aligned}$$

Для того чтобы вариация функционала была равна нулю при любых  $\delta x_1$  и  $\delta x_2$ , необходимо, чтобы множители перед вариациями были равны нулю. Из этого уравнения получаем систему дифференциальных уравнений

$$\begin{cases} -m_1 \ddot{x}_1 - k_1 x_1 + k_2 (x_2 - x_1) = 0, \\ -m_2 \ddot{x}_2 - k_2 (x_2 - x_1) = 0. \end{cases}$$

Выведем уравнения для этой системы методом сил (рис. 37).

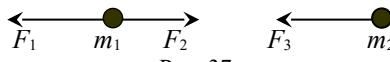


Рис. 37

Получим для сил

$$\begin{aligned} F_1 &= -k_1 x_1; \\ F_2 &= k_2 (x_2 - x_1); \\ F_3 &= -k_2 (x_2 - x_1); \end{aligned}$$

$$\frac{d^2x_1}{dt^2} = \frac{-k_1x_1 + k_2(x_2 - x_1)}{m_1};$$

$$\frac{d^2x_2}{dt^2} = \frac{-k_2(x_2 - x_1)}{m_2}.$$

Видим, что полученные разными методами уравнения совпадают.

**Пример 2.** Рассмотрим следующий пример (рис. 38). Диск катится без проскальзывания под действием сил, вызванных деформациями пружин. Коэффициенты их упругости  $k_1, k_2$ , момент инерции диска  $J$ , масса  $m_p$ , радиус  $R$ , масса груза  $m_r$ .

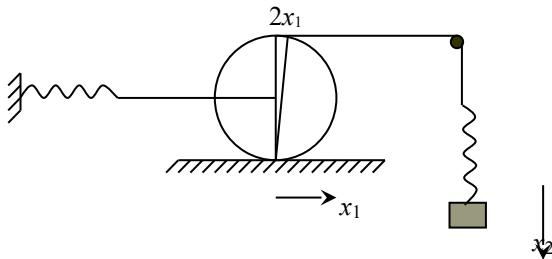


Рис. 38

Система имеет две степени свободы. Зададим перемещение центра масс диска координатой  $x_1$ , а груза  $x_2$ .

Запишем выражения для  $T$  и  $\Pi$

$$\Pi_1 = \frac{k_1 x_1^2}{2}; \Pi_2 = \frac{k_2(x_2 - 2x_1)^2}{2}; \Pi_3 = -m_r g x_2;$$

$$T_\phi = \frac{J\omega^2}{2}.$$

Так как

$$V_1 = \omega R ,$$

то

$$T_{\varphi} = \frac{JV_1^2}{2R^2} .$$

Здесь  $V_1 = \dot{x}_1$ .

Кинетическая энергия линейного движения центра масс диска и груза определяется формулами

$$T_{x_1} = \frac{m_p V_1^2}{2}; T_{x_2} = \frac{m_r V_2^2}{2}.$$

Действие по Гамильтону имеет вид

$$\begin{aligned} S_H &= \int_{t_1}^{t_2} (T_{\varphi} + T_{x_1} + T_{x_2} - \Pi_1 - \Pi_2 - \Pi_3) dt = \\ &= \int_{t_1}^{t_2} \left( \frac{JV_1^2}{2R^2} + \frac{m_p V_1^2}{2} + \frac{m_r V_2^2}{2} - \frac{k_1 x_1^2}{2} - \frac{k_2 (x_2 - 2x_1)^2}{2} + m_r g x_2 \right) dt. \end{aligned}$$

Запишем вариацию действия

$$\begin{aligned} \delta S_H &= \int_{t_1}^{t_2} \left( \frac{JV_1}{R^2} \delta V_1 + m_p V_1 \delta V_1 + m_r V_2 \delta V_2 - k_1 x_1 \delta x_1 - \right. \\ &\quad \left. - k_2 (x_2 - 2x_1) \delta x_2 + 2k_2 (x_2 - 2x_1) \delta x_1 + m_r g \delta x_2 \right) dt. \end{aligned}$$

Преобразуем вариации скорости в вариации координат.

$$\begin{aligned} \int_{t_1}^{t_2} \frac{JV_1}{R^2} \delta V_1 dt &= \frac{JV_1}{R^2} \delta x_1 \Big|_{t_1}^{t_2} - \int_{t_1}^{t_2} \frac{J\dot{V}_1}{R^2} \delta x_1 dt = - \int_{t_1}^{t_2} \frac{J\ddot{x}_1}{R^2} \delta x_1 dt; \\ \int_{t_1}^{t_2} m_p V_1 \delta V_1 dt &= - \int_{t_1}^{t_2} m_p \dot{x}_1 \delta x_1 dt; \\ \int_{t_1}^{t_2} m_r V_2 \delta V_2 dt &= - \int_{t_1}^{t_2} m_r \ddot{x}_2 \delta x_2 dt. \end{aligned}$$

Используя эти зависимости для вариации функционала получим

$$\delta S_H = \int_{t_1}^{t_2} \left( -\frac{J}{R^2} \ddot{x}_1 \delta x_1 - m_p \ddot{x}_1 \delta x_1 - m_r \ddot{x}_2 \delta x_2 - k_1 x_1 \delta x_1 - k_2 (x_2 - 2x_1) \delta x_2 + 2k_2 (x_2 - 2x_1) \delta x_1 + m_r g \delta x_2 \right) dt.$$

Сгруппируем слагаемые с одинаковыми вариациями

$$\delta S_H = \int_{t_1}^{t_2} \left( \left\langle -\frac{J}{R^2} \ddot{x}_1 - m_p \ddot{x}_1 - k_1 x_1 + 2k_2 (x_2 - 2x_1) \right\rangle \delta x_1 + \left\langle -m_r \ddot{x}_2 - k_2 (x_2 - 2x_1) + m_r g \right\rangle \delta x_2 \right) dt.$$

Для того, чтобы вариация функционала была равна 0, необходимо, чтобы выражения в треугольных скобках перед вариациями координат были равны нулю. Из этого условия получаем систему дифференциальных уравнений.

$$\begin{cases} -\frac{J}{R^2} x_1 - m_p x_1 - k_1 x_1 + 2k_2 (x_2 - 2x_1) = 0, \\ -m_r x_2 - k_2 (x_2 - 2x_1) + m_r g = 0. \end{cases}$$

Выведем уравнения методом сил.

Заменим вращение диска поступательным движением (рис. 39). Для этого найдем эквивалентную массу. На эту массу действуют две силы: со стороны первой пружины  $F_{\Pi 1}$  и со стороны нити, связанной со второй пружиной  $F_{\Pi 2}$ .

$$F_{\Pi 1} = -k_1 x_1, F_{\Pi 2} = k_2 (x_2 - 2x_1).$$

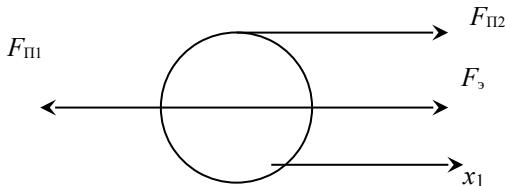


Рис. 39

Сила  $F_{\Pi 2}$ , действующая со стороны второй пружины, не приложена к центру масс диска. Она создает вращательный момент и линейно движущую силу. Необходимо найти эквивалентную ей силу, действующую на эквивалентную массу. Эту силу найдем из условия равенства работ исходной силы и эквивалентной. Обозначим работу момента от силы  $F_{\Pi 2}$  через  $A_m$ , а работу этой силы на пути  $x_1$  через  $A_c$ . Тогда имеем

$$A_m = M\varphi = F_{\Pi 2}R \frac{x_1}{R}, A_c = F_{\Pi 2}x_1.$$

Суммарная работа

$$A_\Sigma = A_m + A_c = 2F_{\Pi 2}x_1.$$

Приравняв ее работе эквивалентной силы

$$2F_{\Pi 2}x_1 = F_s x_1$$

получим

$$F_s = 2F_{\Pi 2}.$$

Эквивалентную массу находим по формуле

$$m_s = m_p + \frac{J}{R^2}.$$

Система уравнений имеет вид

$$\begin{cases} \frac{d^2x_1}{dt^2} = \frac{-k_1x_1 + 2k_2(x_2 - 2x_1)}{J/R^2 + m_p}, \\ \frac{d^2x_2}{dt^2} = \frac{-k_2(x_2 - 2x_1) + m_r g}{m_r}. \end{cases}$$

Использование метода Гамильтона при получении уравнений не требует дополнительных знаний об эквивалентной массе, так как в нем не надо находить эту эквивалентную массу и не надо находить эквивалентную силу. Необходимо только грамотно записать формулу кинетической и потенциальной энергии и правильно проварыровать действие по Гамильтону.

**Пример 3.** Составим дифференциальные уравнения для системы, изображенной на рис. 40. Коэффициент упругости пружины  $k$ , масса груза  $m_r$ , масса балки  $m_b$ , ее момент инерции  $J_b$ .

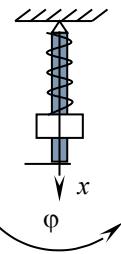


Рис. 40

Эта система имеет две степени свободы: угловое движение балки и линейное движение груза вдоль балки. Поэтому вводим две координаты: угловую  $\varphi$ , отсчитываемую от вертикали (положительное направление против часовой стрелки), и линейную координату  $x$ , направленную от оси вращения по оси балки.

Кинетическая энергия системы будет состоять из кинетической энергии линейного и углового движения груза и углового движения балки.

$$T_{r\varphi} = \frac{J_r \omega^2}{2} = \frac{m_r x^2 \omega^2}{2}; T_{rx} = \frac{m_r V^2}{2}; T_{b\varphi} = \frac{J_b \omega^2}{2}.$$

Потенциальная энергия системы будет состоять из потенциальной энергии пружины и потенциальной энергии положения балки и груза.

$$\Pi_{bg} = (0,5l - 0,5l \cos \varphi) m_b g;$$

$$\Pi_{\Pi} = \frac{kx^2}{2};$$

$$\Pi_{rg} = hm_r g = (l - x \cos \varphi) m_r g;$$

h

$$S_H = \int_{t_1}^{t_2} \left( \frac{m_r x^2 \omega^2}{2} + \frac{m_r V^2}{2} + \frac{J_0 \omega^2}{2} - \frac{kx^2}{2} - (l - x \cos \varphi) m_r g - (0,5l - 0,5l \cos \varphi) m_0 g \right) dt.$$

Запишем вариацию функционала  $S_H$

$$\delta S_H = \int_{t_1}^{t_2} \left( (m_r x \omega^2 \delta x + m_r x^2 \omega \delta \omega + m_r V \delta V + J_0 \omega \delta \omega - kx \delta x + m_r g \cos \varphi \delta x - m_r g x \sin \varphi \delta \varphi - 0,5l m_0 g \sin \varphi \delta \varphi) dt \right)$$

Преобразуем подынтегральную часть таким образом, чтобы она зависела только от вариаций координат. Вариации координат обращаются в нуль в моменты времени  $t_1$  и  $t_2$ .

$$\begin{aligned} \int_{t_1}^{t_2} m_r x^2 \omega \delta \omega dt &= m_r x^2 \omega \delta \varphi \Big|_{t_1}^{t_2} - \int_{t_1}^{t_2} m_r (2x \dot{x} \omega + x^2 \dot{\omega}) \delta \varphi dt = \\ &= - \int_{t_1}^{t_2} m_r (2x \dot{x} \omega + x^2 \dot{\omega}) \delta \varphi dt; \\ \int_{t_1}^{t_2} m_r V \delta V dt &= m_r V \delta x \Big|_{t_1}^{t_2} - \int_{t_1}^{t_2} m_r \dot{V} \delta x dt = - \int_{t_1}^{t_2} m_r \dot{V} \delta x dt; \\ \int_{t_1}^{t_2} J_0 \omega \delta \omega dt &= J_0 \omega \delta \varphi \Big|_{t_1}^{t_2} - \int_{t_1}^{t_2} J_0 \dot{\omega} \delta \varphi dt = - \int_{t_1}^{t_2} J_0 \dot{\omega} \delta \varphi dt. \end{aligned}$$

После этих замен вариация функционала примет вид

$$\begin{aligned} \delta S_H &= \int_{t_1}^{t_2} \left( (m_r x \omega^2 \delta x - m_r (2x \dot{x} \omega + x^2 \dot{\omega}) \delta \varphi - m_r \dot{V} \delta x - J_0 \dot{\omega} \delta \varphi - kx \delta x + m_r g \cos \varphi \delta x - m_r g x \sin \varphi \delta \varphi - 0,5l m_0 g \sin \varphi \delta \varphi) dt \right) \end{aligned}$$

Складываем сомножители при одинаковых вариациях

$$\delta S_H = \int_{t_1}^{t_2} (\langle m_r x\omega^2 - m_r \ddot{x} - kx + m_r g \cos \varphi \rangle \delta x + \\ + \langle -m_r (2x\dot{x}\omega + x^2\dot{\varphi}) - J_0 \ddot{\varphi} - m_r gx \sin \varphi - 0,5/m_0 g \sin \varphi \rangle \delta \varphi) dt.$$

Для того, чтобы это выражение равнялось нулю при всех возможных значениях вариаций координат  $\delta x$  и  $\delta \varphi$ , необходимо, чтобы сомножители перед вариациями были равны нулю. На основании этого получаем систему дифференциальных уравнений

$$\begin{cases} m_r x\omega^2 - m_r \ddot{x} - kx + m_r g \cos \varphi = 0, \\ -m_r (2x\dot{x}\omega + x^2\dot{\varphi}) - J_0 \ddot{\varphi} - m_r gx \sin \varphi - 0,5/m_0 g \sin \varphi = 0, \end{cases}$$

Преобразовав эти уравнения к стандартному виду получим

$$\begin{cases} \frac{d^2x}{dt^2} = x\omega^2 - \frac{kx}{m_r} + g \cos \varphi, \\ \frac{d^2\varphi}{dt^2} = -2m_r x\dot{x}\omega - m_r gx \sin \varphi - 0,5/m_0 g \sin \varphi, \\ \quad \quad \quad m_r x^2 + J_0. \end{cases}$$

Приведенный пример показывает, что при использовании принципа Гамильтона для составления уравнений не надо знать, какие силы и как действуют в системе, необходимо только правильно составить формулы для потенциальной и кинетической энергии системы.

## СИСТЕМЫ С РАСПРЕДЕЛЕННЫМИ ПАРАМЕТРАМИ

Математической основой для моделирования систем с распределенными параметрами является раздел математики, называемый *уравнениями математической физики*. В этой дисциплине учатся составлять дифференциальные уравнения процессов, которые описываются уравнениями в частных производных. Уравнения в частных производных – такие уравнения, в которых решение, т.е. неизвестная функция, зависит от нескольких аргументов: от времени и координат. Например, изменение температуры по длине трубы водопровода зависит от координаты точки, в которой измеряется температура, и времени ( $x, y, z, t$ ).

**Продольные колебания стержня постоянного сечения**

Неизвестной функцией при рассмотрении колебаний стержня постоянного сечения является продольное перемещение точки стержня. В зависимости от используемых гипотез, координаты точки могут задаваться либо тремя пространственными координатами, либо двумя, либо одной, а также зависеть от времени. Рассмотрим продольные колебания стержня постоянного сечения (рис. 41). Считаем, что все точки одного сечения перемещаются по одному закону. Поэтому поведение точек сечения будет зависеть от двух аргументов- координаты сечения и времени. Считаем, что удельная плотность материала  $\rho$  одинакова по всей длине стержня.

Для увеличения длины стержня под действием силы  $P_B$  можно записать

$$\Delta l = \frac{P_B l}{ES} ,$$

где  $l$  – длина стержня;  $E$  – модуль упругости материала;  $S$  – площадь поперечного сечения.

Обозначим

$$\frac{\Delta l}{l} = \varepsilon ,$$

она называется деформацией. В установившемся состоянии в материале возникают упругие силы, уравновешивающие внешнюю силу  $P_B$ . Величина упругой силы может быть вычислена по значению деформации

$$P = \varepsilon E S .$$

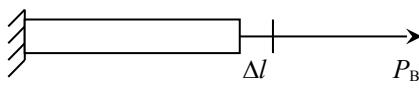
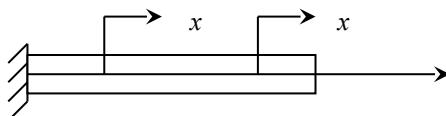


Рис. 41

Введем координату  $z$  (рис.42), которая задает положение точек сечения в недеформированном состоянии. Кроме того, введем локальную систему координат, обозначим ее  $x$ , которая характеризует смещение при действии сил сечения с координатой  $z$  относительно недеформированного состояния.



$z$

$z_1 \quad z_2$

Рис. 42

При действии переменной силы  $P_z$  точки сечения с координатой  $z_1$  будут смещаться на величину  $x$ . Это смещение является функцией координаты  $z$  и времени  $t$ , т.е.  $x = x(z, t)$ .

Найдем формулу для вычисления  $\varepsilon$  в общем случае. Рассмотрим элементарный недеформированный кусочек длиной  $\Delta z$  (рис. 43).

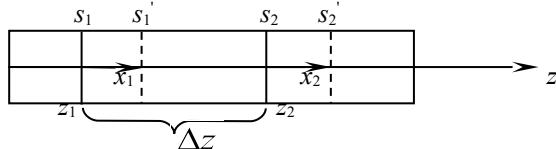


Рис. 43

Его сечения  $s_1$  и  $s_2$ , соответствующие координатам  $z_1$  и  $z_2$ , в процессе движения перемещаются на разную величину. Величина перемещения первого сечения  $x_1$ , второго  $x_2$ . Тогда этот элементарный кусочек длиной  $\Delta z = z_2 - z_1$  удлинится на величину  $\Delta l = x_2 - x_1$ . А величину деформации получим из выражения

$$\varepsilon = \lim_{\Delta z \rightarrow 0} \frac{x_2 - x_1}{z_2 - z_1} = \frac{\partial x}{\partial z},$$

где  $x = x(z, t)$ .

Таким образом, если мы знаем величину деформации  $\varepsilon$  в сечении, то можем вычислить величину силы упругости, действующей в данном сечении, по формуле  $P = \varepsilon E S$ . Рассмотрим элементарный кусочек длиной  $\Delta z$ , совершающий продольные колебания. В первом сечении действует сила  $P_{\text{упр}1}$ , а во втором сила  $P_{\text{упр}2}$  (рис. 44).

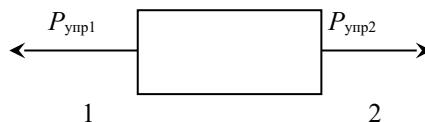


Рис. 44

Найдем формулу для  $P_{\text{упр}2}$ . Для этого используем линейную часть разложения в ряд Тейлора силы  $P_{\text{упр}1} = ES\varepsilon(z, t)$ .

$$P_{\text{упр}2} = P_{\text{упр}1} + \frac{\partial P_{\text{упр}1}}{\partial z} \Delta z = P_{\text{упр}1} + ES \frac{\partial \varepsilon}{\partial z} \Delta z = P_{\text{упр}1} + ES \frac{\partial^2 x}{\partial z^2} \Delta z.$$

Суммарную силу упругости, действующую на элементарный кусочек, вычислим по формуле

$$P_{\Sigma} = P_{\text{упр}2} - P_{\text{упр}1} = ES \frac{\partial^2 x}{\partial z^2} \Delta z.$$

Под действием этой силы происходит его движение.

Чтобы воспользоваться вторым законом Ньютона для получения дифференциального уравнения движения элементарного кусочка балки необходимо найти его массу. Она равна

$$\Delta m = S \Delta z \rho.$$

В соответствии со вторым законом Ньютона запишем

$$\frac{\partial^2 x}{\partial t^2} = \frac{P_{\Sigma}}{\Delta m},$$

или, используя зависимости для  $P_{\Sigma}$  и  $\Delta m$ ,

$$\frac{\partial^2 x}{\partial t^2} = \frac{E}{\rho} \frac{\partial^2 x}{\partial z^2}.$$

Обозначая  $a^2 = \frac{E}{\rho}$  окончательно получим

$$\frac{\partial^2 x}{\partial t^2} - a^2 \frac{\partial^2 x}{\partial z^2} = 0.$$

Это дифференциальное уравнение в частных производных называется *волновым уравнением*. Оно характеризует распространение перемещений точек сечения балки при продольных колебаниях.

Решение данного уравнения зависит от координаты  $z$  и  $t$ . Будем искать его в виде  $x(z, t) = U(z)\cos(\omega t + \gamma)$ . Подставим эту функцию в наше дифференциальное уравнение. Для этого вычислим

$$\frac{\partial^2 x}{\partial t^2} = -\omega^2 U(z) \cos(\omega t + \gamma);$$

$$\frac{\partial^2 x}{\partial z^2} = U''(z) \cos(\omega t + \gamma).$$

Подставляя эти зависимости получим

$$-\omega^2 U(z) \cos(\omega t + \gamma) - a^2 U''(z) \cos(\omega t + \gamma) = 0$$

или

$$U''(z) + \frac{\omega^2}{a^2} U(z) = 0.$$

Обозначим

$$f^2 = \frac{\omega^2}{a^2},$$

тогда

$$U'' + f^2 U = 0.$$

Получили линейное дифференциальное уравнение второго порядка. Его решением является гармоническая функция:

$$U = C_1 \sin(fz) + C_2 \cos(fz),$$

где  $C_1$  и  $C_2$  – неизвестные константы, которые находят из условия закрепления балки, т.е. из граничных условий.

Это уравнение задает формы колебаний сечения балки, так как  $z$  – пространственная координата.

Рассмотрим схему закрепления, изображенную на рис. 45.

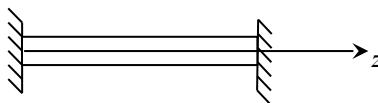


Рис. 45

Границное условие для данной схемы закрепления для левого конца балки  $z = 0, x = 0$ . Так как это условие должно выполняться для любого  $t$ , то из зависимости

$$x = U(z) \cos(\omega t + \gamma)$$

следует, что  $U(z)|_{z=0} = 0$ .

Подставляя это условие в формулу для  $U$  получим  $C_2=0$ . Аналогично при  $z = l$   $x = 0$  и отсюда следует  $U(z)|_{z=l} = 0$  или  $C_1 \sin(fl) = 0$ . Данному уравнению удовлетворяют значения  $f_k l = k\pi$ , ( $k = 1, 2, \dots$ ), соответствующие колебаниям балки. Подставляя  $f_k$  в значения  $\omega$  получим для частоты колебаний балки

$$\omega_k = \frac{k\pi\alpha}{l}, (k = 1, 2, \dots).$$

Таким образом, решение дифференциального уравнения, описывающего поведение балки, имеет вид

$$U_k = C_{1k} \sin(f_k z);$$

$$x = \sum_{k=1}^{\infty} C_{1k} \sin(f_k z) \cos(\omega_k t + \gamma_k).$$

Величины  $C_{1k}, \gamma_k$  находят из начальных условий.

Рассмотрим другую схему закрепления (рис. 46)

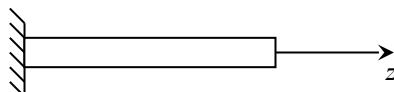


Рис. 46

Для нее граничные условия  $z = 0, x = 0$ . Так как это справедливо для любого  $t$ , то из зависимости  $x = U(z) \cos(\omega t + \gamma)$  следует  $U(z)|_{z=0} = 0$ , откуда  $C_2=0$ . Граничное условие для правого края для  $z = l$ , имеет вид  $\frac{\partial x}{\partial z}|_{z=l} = 0$ , т.е. деформация в сечении при  $z = l$  равна нулю. Так как

$$\frac{\partial x}{\partial z} = \frac{\partial u}{\partial z} \cos(\omega t + \gamma),$$

то получим  $\frac{\partial u}{\partial z}|_{z=l} = 0$ .

Имеем

$$\frac{\partial u}{\partial z} = C_1 f \cos(fz) - C_2 f \sin(fz).$$

Вследствие того, что  $C_2 = 0$ , уравнение примет вид  $C_1 f \cos(fz) = 0$ . Решением его является

$$f_k l = \frac{\pi}{2} + k\pi, (k = 0, 1, 2, \dots).$$

Отсюда получим

$$f_k = \frac{\pi}{2l} (1 + 2k);$$

$$\omega_k = af_k = \frac{\pi a}{2l} (1 + 2k).$$

### Получение волнового уравнения с помощью принципа Гамильтона

Покажем, как можно получить волновое ускорение с помощью принципа Гамильтона. Рассмотрим продольное колебание балки (рис. 47).

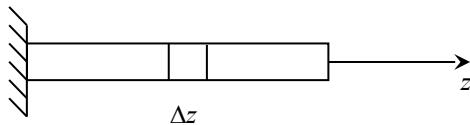


Рис. 47

Действие по Гамильтону имеет вид

$$S_H = \int_{t_1}^{t_2} (T - \Pi) dt.$$

Найдем формулы для кинетической и потенциальной энергий. Выделим элементарный элемент длиной  $\Delta z$ . Его объем  $\Delta W = \Delta z S$ , масса  $\Delta m = \Delta z S \rho$ , а кинетическая энергия

$$\Delta T = \frac{\Delta m V^2}{2} = \frac{\Delta z S \rho V^2}{2} = \left( \frac{\partial x}{\partial t} \right)^2 \frac{S \rho}{2} \Delta z.$$

Полная кинетическая энергия балки

$$T = \int_0^l \left( \frac{\partial x}{\partial t} \right)^2 \frac{S \rho}{2} dz.$$

Найдем потенциальную энергию. Сила упругости в произвольном сечении балки  $P_y = ES\varepsilon$ , где  $\varepsilon = \frac{\partial x}{\partial z}$ . Ее работу на элементарном перемещении  $\Delta x$  определим по формуле  $\Delta A = P_y \Delta x$ . Величину  $\Delta x$  выразим через элементарную длину  $\Delta z$  и элементарную деформацию  $\Delta\varepsilon$ .  $\Delta x = \Delta z \Delta\varepsilon$ .

Тогда  $\Delta A = ES\varepsilon \Delta z \Delta\varepsilon$ , а потенциальная энергия деформации элементарного кусочка при изменении деформации от нуля до  $\varepsilon$

$$A_s = \int_0^\varepsilon ES\varepsilon \Delta z d\varepsilon = \frac{ES\varepsilon^2}{2} \Delta z = \frac{ES}{2} \left( \frac{\partial x}{\partial z} \right)^2 \Delta z.$$

Полная потенциальная энергия продольной деформации балки

$$\Pi = \int_0^l \frac{ES}{2} \left( \frac{\partial x}{\partial z} \right)^2 dz.$$

Используя зависимости для кинетической и потенциальной энергий запишем действие по Гамильтону

$$S_H = \int_{t_1}^{t_2} \int_0^l \left( \left( \frac{\partial x}{\partial t} \right)^2 \frac{S \rho}{2} - \left( \frac{\partial x}{\partial z} \right)^2 \frac{ES}{2} \right) dz dt.$$

Полученное выражение для функционала зависит от двух интегралов по времени и координате, так как наша система распределена в пространстве (интегрирование по  $z$ ) и изменяет свое движение во времени (интегрирование по  $t$ ). Поэтому вариация координаты  $x$  зависит от  $z$  и  $t$ .

Заменив

$$\dot{x} = \frac{\partial x}{\partial t}, x' = \frac{\partial x}{\partial z}$$

можно записать

$$S_H = \int_{t_1}^{t_2} \int_0^l \left( \frac{S\rho}{2} \dot{x}^2 - \frac{ES}{2} (x')^2 \right) dz dt,$$

а для вариации

$$\delta S_H = \int_{t_1}^{t_2} \int_0^l (S\rho \dot{x} \delta \dot{x} - ESx' \delta x') dz dt.$$

Избавимся от вариаций производных

$$\begin{aligned} \int_0^l \int_{t_1}^{t_2} S\rho \dot{x} \delta \dot{x} dt dz &= \int_0^l \left( S\rho \dot{x} \delta x \Big|_{t_1}^{t_2} - \int_{t_1}^{t_2} S\rho \ddot{x} \delta x dt \right) dz \\ &= - \int_0^l \int_{t_1}^{t_2} S\rho \ddot{x} \delta x dt dz. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \int_{t_1}^{t_2} \int_0^l ESx' \delta x' dz dt &= \int_{t_1}^{t_2} \left( ESx' \delta x \Big|_0^l - \int_0^l ESx'' \delta x dz \right) dt \\ &= - \int_{t_1}^{t_2} \int_0^l ESx'' \delta x dz dt. \end{aligned}$$

При получении зависимостей использовалось, что

$$\delta x(0, t) = \delta x(l, t) = \delta x(z, t_1) = \delta x(z, t_2) = 0.$$

Тогда

$$\delta S_H = \int_{t_1}^{t_2} \int_0^l (ESx'' - S\rho \ddot{x}) \delta x dz dt.$$

Для того, чтобы этот интеграл был равен нулю для любых  $\delta x$ , необходимо, чтобы выражение в скобках равнялось нулю.

$$ESx'' - S\rho \ddot{x} = 0,$$

отсюда

$$x - \frac{E}{\rho} x'' = 0.$$

Это уравнение совпадает с уравнением, полученным методом сил.

### Крутильные колебания

Получим уравнение, описывающее поведение балки при ее вращении вокруг оси  $z$  (рис. 48).

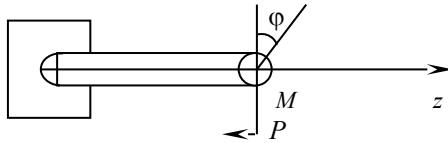


Рис. 48

Если момент приложен вокруг оси  $z$ , то угол поворота сечения

$$\varphi = \frac{Ml}{J_p G},$$

где  $l$  – длина балки;  $J_p$  – полярный момент инерции сечения;  $G$  – характеристика материала балки (модуль упругости второго рода).

В установившемся состоянии внешний момент уравновешивается моментом упругих сил, возникающих в балке. Поэтому, зная угол поворота сечения  $\Phi$ , можно вычислить упругий момент

$$M_y = \frac{\varphi J_p G}{l}.$$

Найдем формулу для вычисления момента в сечении. Рассмотрим элементарный кусочек длиной  $\Delta z$  (рис. 49). Первый конец его повернут на угол  $\varphi_1$ , а второй – на  $\varphi_2$ .



Рис. 49

Момент упругих сил, возникших в нем, определим по формуле

$$M_y = \frac{(\varphi_2 - \varphi_1) J_p G}{\Delta z} = \frac{\Delta\varphi J_p G}{\Delta z}.$$

Устремляя  $\Delta z$  к нулю, получим формулу для вычисления упругого момента в сечении

$$M_y = \lim_{\Delta z \rightarrow 0} \frac{\Delta\varphi}{\Delta z} J_p G = \frac{\partial\varphi}{\partial z} J_p G.$$

Угол поворота  $\varphi$  в общем случае зависит от координаты  $z$  и времени  $t$ . Обозначим упругий момент в первом сечении  $M_{y1}$ , а во втором  $M_{y2}$ . Тогда, используя линейную часть разложения в ряд Тейлора, запишем

$$M_{y2} \approx M_{y1} + \frac{\partial M_{y1}}{\partial z} \Delta z = M_{y1} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2} J_p G \Delta z.$$

Суммарный момент, действующий на элементарный кусочек, равен

$$M_\Sigma = M_{y2} - M_{y1} = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2} J_p G \Delta z.$$

Под действием этого момента происходит угловой поворот элементарного кусочка вокруг оси  $z$ . Это движение описывается уравнением

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} = \frac{M_\Sigma}{J_{\Delta z}},$$

где  $J_{\Delta z} = J_y \Delta z$  – момент инерции элементарного кусочка длиной  $\Delta z$  как твердого тела относительно оси  $z$ ;  $J_y$  – момент инерции единицы длины балки как твердого тела относительно оси  $z$ .

Подставляя зависимости для  $M_\Sigma, J_{\Delta z}$  и сокращая  $\Delta z$ , получим

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2} \frac{J_p G}{J_y},$$

или

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} - a^2 \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2} = 0,$$

$$\text{где } a^2 = \frac{J_p G}{J_y}.$$

Получили точно такое же уравнение, как и для продольных колебаний балки. Решение этого уравнения получаем точно таким же

способом, как и в случае продольных колебаний стержня, т.е. мы задаем решение в виде произведения двух функций: одна зависит от  $z$ , а другая от  $t$ , и, используя граничные условия для стержня (поворот стержня в точке закрепления равен нулю), находим константы  $C_1$  и  $C_2$  в решении дифференциального уравнения.

### Изгибные колебания

Получим уравнения для изгибных колебаний балки. Введем систему координат  $zy$  (рис. 50).

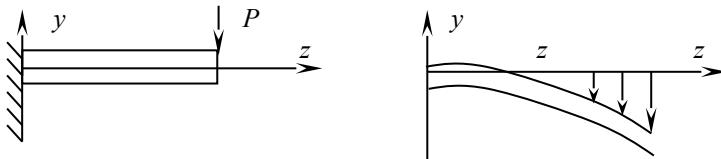


Рис. 50

При действии на балку изгибающего момента, допустим от силы  $P$ , вторая производная перемещения  $y$  сечения, заданного координатой  $z$ , связана с величиной момента  $M$  в этом сечении зависимостью

$$\frac{d^2y}{dz^2} = \frac{M}{J_S E},$$

где  $J_s$  – момент инерции сечения балки;  $E$  – модуль упругости материала (модуль Юнга).

Продифференцируем последнее выражение по  $z$ . Получим

$$\frac{d^3y}{dz^3} = \frac{Q}{J_S E}.$$

Здесь  $Q$  – перерезывающая сила.

Еще раз продифференцируем последнее уравнение. Получим

$$\frac{d^4y}{dz^4} = \frac{W}{J_S E},$$

где  $W$  – распределенная нагрузка на балке, действующая в направлении оси  $y$ . При свободных колебаниях балки единственными распределенными силами являются инерционные силы. Инерционные силы пропорциональны ускорению  $\frac{\partial^2 y}{\partial t^2}$  и массе  $m$  единицы длины.

$$W_i = -\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} m.$$

Подставляя в последнее уравнение вместо  $W$  выражение  $W_i$ , получим

$$\frac{\partial^4 y}{\partial z^4} = -\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} \cdot \frac{m}{J_S E},$$

или

$$\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} + \frac{J_S E}{m} \cdot \frac{\partial^4 y}{\partial z^4} = 0.$$

Обозначая  $a^2 = \frac{J_S E}{m}$ , окончательно получим *уравнение изгибных колебаний*:

$$\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} + a^2 \cdot \frac{\partial^4 y}{\partial z^4} = 0.$$

В уравнении вторая и четвертая производные четные, поэтому решение можно представить в виде произведения двух функций: одна зависит от координаты  $z$ , а другая от времени  $t$ . Так как производные четные, то производная от периодической функции будет равна этой функции, умноженной на некоторый коэффициент, и при подстановке решения в уравнение, решение, зависящее от времени сокращается. Получим обыкновенное дифференциальное уравнение, зависящее от координаты  $z$ . Если бы в уравнении были нечетные производные по времени, то такой подход был бы несправедлив.

Запишем решение в виде

$$y = f(z)(A \sin(pt) + B \cos(pt)),$$

где  $A, B$  и  $P$  – неизвестные величины.

Имеем

$$\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = -f(z)(p^2 A \sin(pt) + p^2 B \cos(pt)),$$

$$\frac{\partial^4 y}{\partial z^4} = f_z^{IV}(A \sin(pt) + B \cos(pt)).$$

Подставляя эти зависимости в уравнение изгибных колебаний, получим

$$f_z^{IV} - \frac{p^2}{a^2} f(z) = 0,$$

или

$$f_z^{IV} - k^4 f = 0,$$

$$\text{где } k^2 = \frac{p}{a}.$$

Решением являются тригонометрические и гиперболические функции

$$\operatorname{sh}(kz) = \frac{e^{kz} - e^{-kz}}{2}, \operatorname{ch}(kz) = \frac{e^{kz} + e^{-kz}}{2}.$$

Решение можно записать

$$f(z) = C_1 \sin kz + C_2 \cos kz + C_3 \operatorname{sh} kz + C_4 \operatorname{ch} kz.$$

Полученное решение справедливо для любой схемы закрепления. Оно содержит пять неизвестных:  $k, C_1, C_3, C_4$ . Их будем находить из условия закрепления балки.

Рассмотрим балку, левый конец которой жестко закреплен (рис. 51).

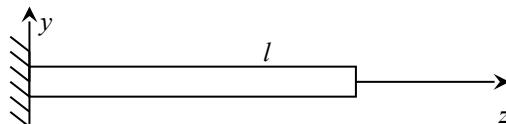


Рис. 51

Для левого конца балки можно записать условие, что при

$$z = 0, y = 0, \frac{\partial y}{\partial z} = 0.$$

Отсюда имеем

$$f(z = 0)(A \sin(pt) + B \cos(pt)) = 0.$$

Так как это справедливо для любого  $t$ , то получим

$$f(z = 0) = 0$$

или

$$C_2 + C_4 = 0.$$

Из равенства нулю производной на левом конце следует

$$f'_z(z = 0) = 0.$$

Так как

$$f'_z = C_1 k \cos kz - C_2 k \sin kz + C_3 k \operatorname{ch} kz + C_4 k \operatorname{sh} kz,$$

то получим

$$C_1 + C_3 = 0.$$

Рассмотрим правый конец балки. Имеем, что при  $z = l$ .

$y''_z = 0$ , так как изгиба на правом конце балки нет. Отсюда следует  $f''_z = 0$ . Кроме того, имеем условие  $y'''_z = 0$ , так как перерезывающая сила на правом конце балки равна нулю. Отсюда получаем  $f'''_z = 0$ .

Имеем

$$f''_z = -C_1 k^2 \sin kz - C_2 k^2 \cos kz + C_3 k^2 \operatorname{sh} kz + C_4 k^2 \operatorname{ch} kz;$$

$$f'''_z = -C_1 k^3 \cos kz + C_2 k^3 \sin kz + C_3 k^3 \operatorname{ch} kz + C_4 k^3 \operatorname{sh} kz.$$

Используя условия для  $z = l$  получим систему уравнений

$$\begin{cases} -C_1 k^2 \sin kl - C_2 k^2 \cos kl + C_3 k^2 \operatorname{sh} kl + C_4 k^2 \operatorname{ch} kl = 0, \\ -C_1 k^3 \cos kl + C_2 k^3 \sin kl + C_3 k^3 \operatorname{ch} kl + C_4 k^3 \operatorname{sh} kl = 0. \end{cases}$$

Так как из первых условий  $-C_1 = C_3, -C_2 = C_4$ , то

$$\begin{cases} C_3 \sin kl + C_4 \cos kl + C_3 \operatorname{sh} kl + C_4 \operatorname{ch} kl = 0, \\ C_3 \cos kl - C_4 \sin kl + C_3 \operatorname{ch} kl + C_4 \operatorname{sh} kl = 0, \end{cases}$$

или

$$\begin{cases} C_3(\sin kl + \operatorname{sh} kl) + C_4(\cos kl + \operatorname{ch} kl) = 0, \\ C_3(\cos kl + \operatorname{ch} kl) + C_4(-\sin kl + \operatorname{sh} kl) = 0. \end{cases}$$

Для того, чтобы данная система с неизвестными  $C_3, C_4$  имела ненулевое решение, ее определитель должен быть равен нулю. В этом случае имеем бесконечное множество решений, и тогда

$$\operatorname{sh}^2 kl - \sin^2 kl - (\cos kl + \operatorname{ch} kl)^2 = 0.$$

Раскрывая его, получим

$$\operatorname{sh}^2 kl - \sin^2 kl - \cos^2 kl - 2 \cos kl \cdot \operatorname{ch} kl - \operatorname{ch}^2 kl = 0,$$

или

$$-1 - 1 - 2 \cos(kl) \operatorname{ch}(kl) = 0.$$

Отсюда

$$\cos(kl) = -\frac{1}{\operatorname{ch}(kl)}.$$

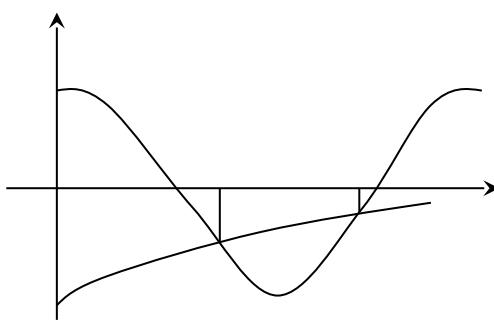
Данное уравнение имеет бесконечное множество решений (рис. 52). Первые два

$$k_1 l = 1,875, k_2 l = 4,694,$$

а остальные

$$k_n l = \frac{\pi}{2} + \pi(n-1), \text{ где } n = 3, 4, 5, 6, \dots$$

Зная  $k_i$ , находим  $p_i = a k_i^2$ .



1,875	4,694
-------	-------

Рис. 52

### ОПРЕДЕЛЕНИЕ ВЕРОЯТНОСТНЫХ ХАРАКТЕРИСТИК СИСТЕМ СО СЛУЧАЙНЫМИ ПАРАМЕТРАМИ

В рассмотренном выше материале изучались методы составления дифференциальных уравнений систем. Используя уравнения, можно осуществить прогнозирование поведения, качества функционирования разрабатываемой системы, выбрать ее параметры.

При изготовлении системы невозможно абсолютно точно, в соответствии с расчетами, выдержать ее геометрические и весовые характеристики, обеспечить расчетные силы и моменты, действующие в ней и на нее. Вследствие этого фазовые координаты реальной системы при ее функционировании будут отличаться от расчетных, что может привести к снижению эффективности ее работы и даже невыполнению поставленной задачи. Поэтому часто возникает задача оценки вероятностных характеристик фазовых координат разрабатываемой системы вследствие случайного характера ее параметров и действующих возмущений. Существует два класса задач такого типа. Первый, когда параметры системы при каждом ее включении принимают некоторые неизвестные случайные значения, не изменяющиеся во времени. Известны только их вероятностные характеристики. Ими могут быть параметры системы, начальные условия фазовых координат системы. Такие задачи называют оценкой вероятностных характеристик фазовых координат системы при действии случайных величин. В задачах второго класса случайные параметры в процессе работы системы не постоянны, а являются некоторыми случайными функциями, для которых известны вероятностные характеристики. Это задачи оценки вероятностных характеристик системы при действии случайных функций.

Мы рассмотрим один из методов решения задач первого класса, имеющий наибольшее распространение в практических исследованиях и получивший название *метода Доступова*, или *метода эквивалентных возмущений*.

Пусть анализируемая система описывается в общем случае дифференциальным уравнением

$$\frac{dx}{dt} = f(x, t, V),$$

где  $V$  – вектор случайных величин, размерности  $m$ .

Считаем, что математическое ожидание вектора  $V$  равно нулю, т.е.  $m_V = 0$ , он некоррелирован, т.е.  $M[V_i V_j] = 0$ , ( $i \neq j$ ), известны его дисперсии  $\sigma_{V_j}$ .

Допустим, необходимо оценить вероятностные характеристики  $x$  на момент времени  $t$ . Тогда, интегрируя уравнение аналитически или численным методом, можно получить зависимость фазовых координат от случайных величин

$$x = \varphi(t, V).$$

Разложим эту функцию в ряд Тейлора по случайным величинам в окрестности точки  $V = 0$  с учетом вторых членов разложения

$$x(t, V) = \varphi(t, 0) + \sum_{i=1}^m \frac{\partial \varphi}{\partial V_i} V_i + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^m \frac{\partial^2 \varphi}{\partial V_i \partial V_j} V_i V_j.$$

Осуществляя операцию вычисления математического ожидания, от этого выражения получим

$$M[x] = \varphi(t, 0) + \sum_{i=1}^m \frac{\partial \varphi}{\partial V_i} M[V_i] + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^m \frac{\partial^2 \varphi}{\partial V_i \partial V_j} M[V_i V_j].$$

Так как по условию  $M[V_i V_j] = 0$  ( $i \neq j$ ), то  $M[V_i V_j]$  ( $i, j = 1, 2, \dots, m$ ) является диагональной корреляционной матрицей, и предыдущая зависимость примет вид

$$M[x] = \varphi(t, 0) + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^m \frac{\partial^2 \varphi}{\partial V_i^2} \cdot \sigma_{V_i}^2.$$

Отсюда видно, что для вычисления математического ожидания  $x$  надо вычислить его значение при  $V = 0$  и значения вторых частных производных  $\frac{\partial^2 \phi}{\partial V_j^2}$ .

Дисперсия  $x$  может быть вычислена через его начальный момент второго порядка  $M[x^2]$ .

Действительно имеем

$$\begin{aligned} D[x] &= M[(x - m_x)^2] = M[x^2 - 2xm_x + m_x^2] = \\ &= M[x^2] - 2M[x]m_x + m_x^2 = M[x^2] - m_x^2. \end{aligned}$$

Вычисление  $M[x^2]$  можно осуществить так же, как и  $M[x]$ . Для этого запишем

$$x^2 = \phi(\tau, V),$$

где  $\phi(\tau, V) = \varphi^2(\tau, V)$ .

Тогда

$$M[x^2] = \phi(\tau, 0) + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^m \frac{\partial^2 \phi}{\partial V_i^2} \cdot \sigma_{V_i}^2.$$

Неудобством данных формул является необходимость вычисления частных производных  $\frac{\partial^2 \phi}{\partial V_j^2}, \frac{\partial^2 \phi}{\partial V_i^2}$ . Избежать этого можно

следующим

образом. Задаем  $L$  наборов случайных величин  $V$

$$\begin{array}{cccc} V_{11} & V_{21} & \dots & V_{m1} \\ V_{12} & V_{22} & \dots & V_{m2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ V_{1L} & V_{2L} & \dots & V_{mL} \end{array}$$

Проинтегрируем исходное уравнение  $L$  раз при этих наборах и получим  $L$  значений координат, которые обозначим  $x_j (j = 1, 2, \dots, L)$ . Эти значения можно выразить через значения случайных величин

$$\begin{aligned}
 x_1(t, V_1) &= \varphi(t, 0) + \sum_{i=1}^m \frac{\partial \varphi}{\partial V_i} V_{i1} + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^m \frac{\partial^2 \varphi}{\partial V_i \partial V_j} V_{i1} V_{j1}, \\
 x_2(t, V_2) &= \varphi(t, 0) + \sum_{i=1}^m \frac{\partial \varphi}{\partial V_i} V_{i2} + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^m \frac{\partial^2 \varphi}{\partial V_i \partial V_j} V_{i2} V_{j2}, \\
 \dots \\
 x_L(t, V_L) &= \varphi(t, 0) + \sum_{i=1}^m \frac{\partial \varphi}{\partial V_i} V_{iL} + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^m \frac{\partial^2 \varphi}{\partial V_i \partial V_j} V_{iL} V_{jL}.
 \end{aligned}$$

Здесь через  $V_K (K=1,2,\dots,L)$  обозначен  $K$ -й набор случайных величин.

Умножим первую зависимость на неизвестный пока коэффициент  $\alpha_1$ , вторую – на  $\alpha_2$  и т.д. Сложим их. Получим сумму

$$\begin{aligned}
 \sum_{i=1}^L \alpha_i x_i &= \varphi(t, 0) \sum_{i=1}^L \alpha_i + \frac{\partial \varphi}{\partial V_1} \sum_{i=1}^L \alpha_i V_{1i} + \frac{\partial \varphi}{\partial V_2} \sum_{i=1}^L \alpha_i V_{2i} + \dots + \\
 &+ \frac{\partial \varphi}{\partial V_m} \sum_{i=1}^L \alpha_i V_{mi} + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial V_1^2} \sum_{i=1}^L \alpha_i V_{1i}^2 + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial V_2^2} \sum_{i=1}^L \alpha_i V_{2i}^2 + \dots + \\
 &+ \frac{1}{2} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial V_m^2} \sum_{i=1}^L \alpha_i V_{mi}^2 + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial V_1 \partial V_2} \sum_{i=1}^L \alpha_i V_{1i} V_{2i} + \dots
 \end{aligned}$$

Для того, чтобы левая часть этого равенства равнялась математическому ожиданию  $x$ , т.е.

$$\sum_{i=1}^L \alpha_i x_i = M[x],$$

необходимо, чтобы для слагаемых правой части выполнялись условия

$$\sum_{i=1}^L \alpha_i = 1, \sum_{i=1}^L \alpha_i V_{1i} = 0, \quad \sum_{i=1}^L \alpha_i V_{2i} = 0, \dots, \sum_{i=1}^L \alpha_i V_{mi} = 0,$$

$$\sum_{i=1}^L \alpha_i V_{ji} V_{gi} = 0 (j, g = 1, 2, \dots, m); j \neq g;$$

$$\sum_{i=1}^L \alpha_i V_{ji}^2 = \sigma_{V_j}^2, (j = 1, 2, \dots, m).$$

Обеспечить выполнение этих условий можно различным выбором случайных величин  $V_{ij}$  и числа наборов  $L$ . Наиболее рациональным является выбор  $V$ , представленный в таблице. В этом случае  $L = m + 2$ .

#### Задание системы случайных величин

$L$	$V_1$	$V_2$	$V_3$	...	$V_m$	$x$
1	$\xi_1$	0	0	...	0	$x_1$
2	0	$\xi_2$	0	...	0	$x_2$
3	0	0	$\xi_3$	...	0	$x_3$
$m$	0	0	0	...	$\xi_m$	$x_m$
$m + 1$	$\xi_1$	$\xi_2$	$\xi_3$	...	$\xi_m$	$x_{m+1}$
$m + 2$	$-\xi_1$	$-\xi_2$	$-\xi_3$	...	$-\xi_m$	$x_{m+2}$

Здесь  $x_i$  – решение уравнения, полученное при  $i$ -м наборе случайных величин.

Тогда получим зависимости

$$\alpha_1 \xi_1 + \alpha_2 0 + \dots + \alpha_m 0 + \alpha_{m+1} \xi_1 - \alpha_{m+2} \xi_1 = 0,$$

$$\alpha_1 0 + \alpha_2 \xi_2 + \dots + \alpha_m 0 + \alpha_{m+1} \xi_2 - \alpha_{m+2} \xi_2 = 0,$$

.....

$$\alpha_1 0_1 + \alpha_2 0 + \dots + \alpha_m \xi_m + \alpha_{m+1} \xi_m - \alpha_{m+2} \xi_m = 0,$$

или  $\alpha_k + \alpha_{m+1} - \alpha_{m+2} = 0, (k = 1, 2, \dots, m)$ . Коэффициенты  $\xi_k$  сокращены, так как не равны нулю.

Используем эти зависимости для вычисления  $\alpha_k$ . Просуммируем последнюю зависимость по индексу  $k$ . Имеем

$$\sum_{k=1}^m \alpha_k + m\alpha_{m+1} - m\alpha_{m+2} = 0.$$

Преобразуем это выражение следующим образом:

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{m+2} \alpha_k - \alpha_{m+1} - \alpha_{m+2} + m\alpha_{m+1} - m\alpha_{m+2} &= \\ &= \sum_{k=1}^{m+2} \alpha_k + (m-1)\alpha_{m+1} - (m+1)\alpha_{m+2}. \end{aligned}$$

Так как имеем условие  $\sum_{i=1}^{m+2} \alpha_i = 1$ , то получим  
 $1 + (m-1)\alpha_{m+1} - (m+1)\alpha_{m+2} = 0$ .

Из условия  $\sum_{i=1}^L \alpha_i V_{ji} V_{gi} = 0$  и таблицы имеем  
 $\alpha_{m+1} \xi_j \xi_g + \alpha_{m+2} (-\xi_j) (-\xi_g) = 0$ ,

или

$$\alpha_{m+1} + \alpha_{m+2} = 0.$$

Получили два уравнения для определения  $\alpha_{m+1}, \alpha_{m+2}$ :

$$1 + (m-1)\alpha_{m+1} - (m+1)\alpha_{m+2} = 0;$$

$$\alpha_{m+1} + \alpha_{m+2} = 0.$$

Решая ее, получаем

$$\alpha_{m+1} = -\frac{1}{2m}, \alpha_{m+2} = \frac{1}{2m}.$$

Тогда из уравнения  $\alpha_k + \alpha_{m+1} - \alpha_{m+2} = 0$  получим

$$\alpha_k = \alpha_{m+1} - \alpha_{m+2} \text{ или } \alpha_k = \frac{1}{m}, (k=1,2,\dots,m).$$

Исходя из таблицы, зависимость

$$\sum_{i=1}^L \alpha_i V_{ji}^2 = \sigma_{Vj}^2, (j=1,2,\dots,m)$$

примет вид

$$\alpha_j \xi_j^2 + \alpha_{m+1} \xi_j^2 + \alpha_{m+2} \xi_j^2 = \sigma_{V_j}^2,$$

или

$$\frac{1}{m} \xi_j^2 = \sigma_{V_j}^2.$$

Отсюда получим

$$\xi_j = \sigma_{V_j} \sqrt{m}, \quad (j = 1, 2, \dots, m).$$

Используя полученные зависимости для  $\alpha_k, \alpha_{m+1}, \alpha_{m+2}, \xi_j$ , найдем формулы для вычисления математического ожидания

$$M[x] = \sum_{i=1}^{m+2} \alpha_i x_i = \frac{1}{m} \sum_{i=1}^m x_i + \frac{x_{m+2} - x_{m+1}}{2m},$$

а для дисперсии

$$D[x] = \frac{1}{m} \sum_{i=1}^m x_i^2 + \frac{x_{m+2}^2 - x_{m+1}^2}{2m} - M^2[x].$$

Вычисления при использовании этого метода осуществляют в следующей последовательности:

1. В соответствии с числом случайных величин и их дисперсий вычисляют  $\alpha_k, \xi_j$ .

2. Задают  $m + 2$  набора случайных величин в соответствии с таблицей и с каждым из них интегрируют дифференциальное уравнение, запоминая результаты.

3. Вычисляют по запомненным значениям  $x_i$  математическое ожидание и дисперсию координаты  $x$ .

Использование полученных зависимостей позволяет легко вычислить математическое ожидание и дисперсию. Недостатком рассмотренного метода с линейными и квадратичными членами разложения является иногда возникающая ситуация, когда в результате расчетов получают  $D[x] < 0$ . Происходить это может в случае, когда значения функций, от которых вычисляют дисперсию, имеют большие по модулю значения и число учитываемых в ЭВМ разрядов недостаточно для данной задачи. В этом случае используют метод Доступова, учитывающий три или четыре члена разложения.

При определении математического ожидания и дисперсии для решения системы дифференциальных уравнений, т.е. для вектора  $x$ ,

поступают аналогичным образом, осуществляя эти вычисления для всех компонент вектора решения.

## ИМИТАЦИОННОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ

При разработке математических моделей сложных систем могут возникнуть ситуации, когда система состоит из большого числа связанных между собой объектов, осуществляющих одновременное функционирование и подверженных действию случайных факторов. В этом случае возможны следующие ситуации:

1. Известны точные математические модели узлов объектов системы, однако, описание ее поведения аналитическими моделями невозможно вследствие большого числа элементов и сложности связей между ними.

2. Точные математические модели объектов неизвестны, имеются приближенные, но и с их помощью невозможно создать аналитическую модель, описывающую поведение системы.

Упомянутая выше аналитическая модель обладает свойством описывать поведение системы для заданных параметров и начальных условий. В случае сложных систем проблематичность создания аналитической модели обусловлена большим числом взаимодействующих компонент, связей между ними и наличием случайных факторов, влияющих на поведение системы. В этом случае для получения модели сложной системы можно:

1. Упростить зависимости, описывающие поведение ее элементов, сократить их число, упростить связи и создать аналитическую модель. Такой подход возможен, однако ведет к сильному огрублению модели, и получаемые результаты расчетов будут сильно отличаться от реальных процессов в системе.

2. Создать математическую модель, которая позволяет просчитывать отдельные ситуации, траектории поведения системы в зависимости от конкретных начальных условий и конкретных случайных факторов.

Модель системы называется *имитационной*, если она состоит из большого числа одновременно функционирующих в системе разнородных объектов, сложных связей между ними и большого числа воздействующих на систему случайных факторов.

Имитационная модель позволяет просчитывать отдельные траектории поведения системы при заданных начальных условиях, параметрах и значениях случайных факторов.

Имитационное моделирование используется в следующих случаях:

1. Не существует полной картины поведения сложной технической системы в разных условиях ее функционирования, поэтому имитационная модель служит средством изучения объектов системы.

2. Когда кроме оценки влияния на параметры системы случайных факторов, желательно проследить за поведением отдельных элементов в течение определенного времени.

Имитационное моделирование оказывается единственным возможным способом исследования сложной системы при невозможности наблюдения явления в реальных условиях, когда необходимо контролировать протекание процессов в сложной системе путем замедления или ускорения явлений в ходе имитации, при подготовке специалистов и освоении новой техники, когда на имитационной модели обеспечивается возможность проследить реакцию реальной системы на различные воздействия операторов и приобрести необходимые навыки для ее эксплуатации, когда изучаются новые ситуации в сложной системе, о которых мало что известно.

Разработка имитационной модели имеет следующие этапы:

1. Разработка математических моделей объектов системы, связей между ними и методов их расчета (расчетные алгоритмы: какими методами решать нелинейные уравнения, дифференциальные уравнения, вычислять интегралы).

2. Программирование расчетных алгоритмов на каком-либо языке.

3. Отладка программы.

4. Испытание имитационной модели на адекватность реальному процессу.

5. Проведение расчетов на имитационной модели.

6. Принятие решений на основе этих результатов.

### *Основные определения*

Каждая модель состоит из совокупности компонент, переменных, параметров, функциональных зависимостей, ограничений и целевых функций.

Компоненты – составные части, образующие систему.

Система – группа компонент, объединенных некоторой формой связи для выполнения заданной функции.

Параметры – постоянные или меняющиеся во времени величины, задающие характеристики компонент системы или связей между ними.

Переменные – переменные величины, описывающие состояние системы. Переменные бывают входные, эндогенные (внутренние) и выходные.

Функциональные зависимости описывают поведение переменных и параметров компонент во времени и между собой. Эти зависимости бывают детерминированные и стохастические.

Функциональное действие – событие, происходящее в какой-либо компоненте системы, ведущее к изменению состояния или процессов в этой или других компонентах.

Ограничения задают пределы изменения значений переменных.

Целевые функции определяют цели функционирования системы и качество функционирования.

### *Модельное время сложной системы*

При моделировании сложной системы необходимо описать одновременное функционирование компонент системы. Рассмотрим это на примере моделирования строительства дома, когда необходимые строительные конструкции не хранятся на стройке, а подвозятся по заданному графику и сразу монтируются на объекте. В этом случае можно выделить следующие компоненты системы:

1. Завод или цех по производству стройконструкций.
2. Транспортировка стройконструкций на стройку.
3. Работа на строительной площадке.

Количество рассматриваемых компонент зависит от цели исследования, и при увеличении глубины анализируемого процесса число компонент увеличивается.

Компонента системы «Цех» выполняет следующие функциональные действия: подготовка арматуры, заливка бетона, выдержка формы с конструкцией, транспортировка конструкций на склад.

Компонента системы «Транспортировка» выполняет следующие функциональные действия: погрузка стройконструкций на транспорт, перевозка стройконструкций до строительной площадки, разгрузка.

Компонента системы «Работа на стройплощадке» выполняет следующие функциональные действия: подготовка нужной техники для требуемой стройдетали, прием прибывшей стройдетали, доставка

её в нужное место строящегося здания, выполнение необходимых операций по ее установке.

Время каждой операции является случайной величиной и задается законом распределения либо его характеристиками: математическим ожиданием и дисперсией. В жизни каждое функциональное действие происходит во времени параллельно с другими функциональными действиями. При математическом моделировании ЭВМ в каждый момент времени может считать только один алгоритм, поэтому необходимо уметь моделировать на однопроцессорных ЭВМ параллельно протекающие процессы. Для этого введем локальное время, которое будет задавать моменты выполнения функциональных действий в каждой компоненте. Обозначим его  $\tau_i$ , где  $i$  – номер компоненты. В результате каждого функционального действия в сложной системе будет происходить событие, которое обозначим буквой С. Время выполнения функционального действия  $\Phi\Delta_{ij}$  будем обозначать  $\tau_{ij}$ .

При моделировании функционального действия в модели оно естественно будет отличаться от реального.

Функциональные действия компонент «Цех» и «Транспортировка» представлены соответственно на рис. 53, 54

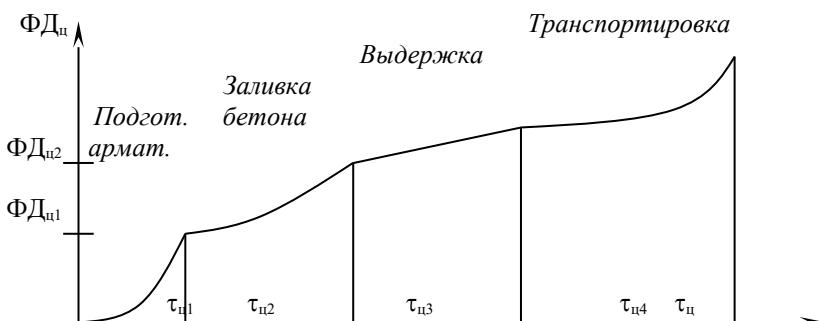
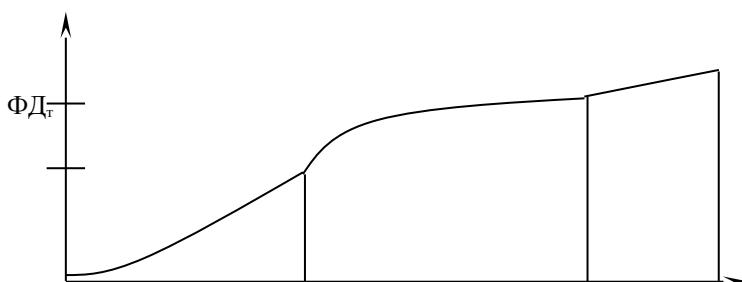


Рис. 53



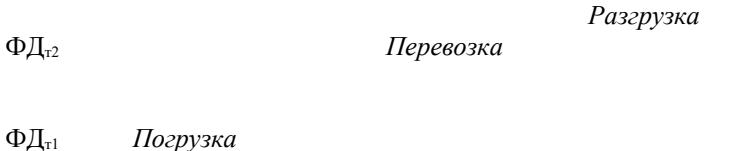


Рис. 54

Из графиков видно, что они отображают временные соотношения каждой компоненты. Каждое функциональное действие в модели описывается соответствующим алгоритмом, который обозначают  $AL_{ij}$ . Таким образом, для моделирования каждого действия надо иметь соответствующий алгоритм и время выполнения функционального действия. Эта пара (алгоритм – время выполнения функционального действия) называется активностью. Реализация активностей  $AK_{ij}$  ведет к выполнению в модели события. При моделировании поведения системы, состоящей из одной компоненты, это моделирование сводилось бы к поочередному выполнению активностей, т.е. к расчету очередного алгоритма и увеличению временной координаты. В реальных системах необходимо моделировать одновременное поведение нескольких компонент. Для этого в модели вводят модельное время системы. Обозначают его буквой  $t_0$ . С помощью этой переменной организуют синхронизацию всех активностей в модели и выполнение событий, т.е. организацию квазипараллелизма.

### *Организация квазипараллелизма способом просмотра активностей*

Этот способ удобно применять в случае, если функциональные действия всех компонент различны, и для начала их выполнения необходимо выполнение разных условий, алгоритмы расчета которых заданы. Считается, что связи между функциональными действиями разных компонент отсутствуют, т.е. моделирование функциональных действий происходит независимо от функциональных действий других компонент, но условия начала выполнения функционального действия

для одной компоненты могут зависеть от результатов выполнения функциональных действий других компонент.

Идея способа заключается в проверке на каждом шаге моделирования условия начала функциональных действий для всех компонент. Условиями могут быть: наступление заданного момента времени, достижение параметром или функцией от параметров заданного значения, достижение счетчиком заданного числа и др.

Рассмотрим этот способ на примере перевозки стройконструкций с завода на стройку. Примем, что по дороге от завода к стройке находится железнодорожный переезд, на котором возможна задержка движения. Рассмотрим три функциональных действия этой компоненты (рис. 55, 56, 57):

1. Функционирование железнодорожного переезда .
2. Движение автомобиля со строительными конструкциями.
3. Работа крана на стройке.

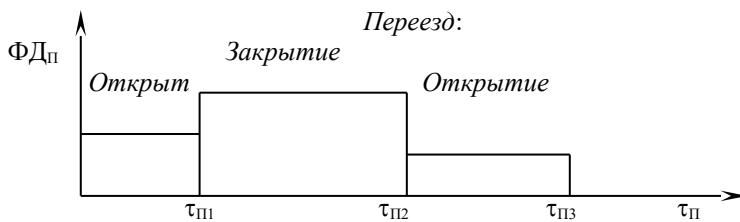


Рис. 55



Рис.56

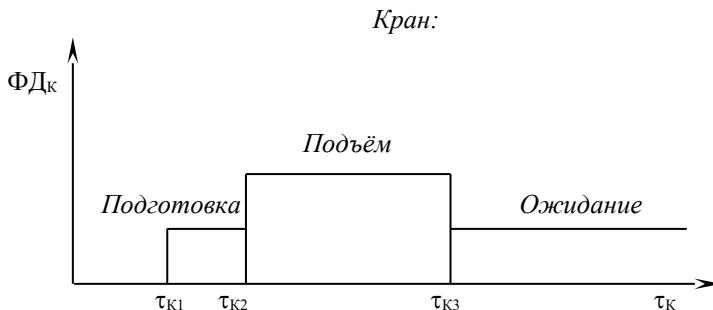


Рис.57

Считаем, что время начинается с нуля часов. Для функциональной компоненты «Переезд» нужно расписание поездов, формулы для вычисления времени закрытия и открытия переезда. Начало функционирования компоненты движения автомобиля происходит с момента времени  $\tau_{A1}$ , которое определяется началом работы склада. Для определения времени загрузки деталей на автомобиль и момента начала движения необходимы зависимости времени загрузки от веса конструкций для данного крана. При моделировании движения автомобиля необходимо знать, какая скорость допустима на трассе, и какую может развивать автомобиль с грузом, количество светофоров и т. д.

Момент достижения переезда автомобилем  $\tau_{A3}$  определяется как время прохождения автомобилем расстояния, равного расстоянию от склада до переезда. Величина эта не является фиксированной, а зависит от расстояния, скорости автомобиля и времени вынужденных простоев. Наступление события «Стоянка автомобиля» зависит от соотношения времен  $\tau_{p1}, \tau_{p2}$  и  $\tau_{A3}$ . Если  $\tau_{p1} < \tau_{A3} < \tau_{p2}$ , то это событие происходит. Если  $\tau_{A3} < \tau_{p2}$  или  $\tau_{A3} \geq \tau_{p1}$ , то события нет, и автомобиль движется без остановки.

Момент времени  $\tau_{A5}$  зависит от величины расстояния от переезда до стройплощадки, скорости автомобиля и времени вынужденных простоев.

Функционирование компоненты «Работа крана» начинается в момент  $\tau_{k1}$ , соответствующий началу работы на стройплощадке. Величина ( $\tau_{k1}, \tau_{k2}$ ) соответствует событию «Подготовка к работе» и

задается некоторым случайным интервалом времени. В момент  $\tau_{K2}$  начинается подъем стройдетали, оставшейся от предыдущей смены. Время подъема – случайная величина, зависит от числа конструкций, производительности крана, мастерства крановщика. В момент  $\tau_{K3}$  начинается ожидание конструкции с завода.

Для организации квазипараллелизма необходимо сделать следующее:

1. Для  $\tau = 0$  вычисляем моменты следующих активностей:  $\tau_{P1}, \tau_{A1}, \tau_{K1}$ . Из них наименьшее значение имеет  $\tau_{A1}$ .
2. Для момента  $\tau_{A1}$  вычисляем моменты следующих активностей:  $\tau_{P1}, \tau_{A2}, \tau_{K1}$ . Наименьшую величину имеет  $\tau_{K1}$ .
3. Для момента  $\tau_{K1}$  вычисляем моменты следующих активностей:  $\tau_{P1}, \tau_{A2}, \tau_{K2}$ . Наименьшую величину имеет  $\tau_{A2}$ .
4. Для момента  $\tau_{A2}$  вычисляем моменты следующих активностей:  $\tau_{P1}, \tau_{A3}, \tau_{K2}$ . . . . .

Таким образом, проверяются условия выполнения очередных функциональных действий для всех компонент, и новые вычисления осуществляются для той компоненты, функциональное действие которой наступит раньше других. При таком подходе необходимо определить параметры и переменные, от которых зависит поведение системы (время, координаты, скорости, количество каких-либо элементов, блоков).

### *Транзактный способ организации квазипараллелизма в имитационной модели*

Этот способ применяется в случаях, если исследуемая система может быть представлена в виде системы массового обслуживания. Основными допущениями, характеризующими такую систему, являются:

1. В системе можно выделить группы одинаковых функциональных действий, производимых разными компонентами.
2. На вход каждой компоненты поступает заявка (транзакт, сигнал).
3. Функциональное действие каждой компоненты заключается в обработке этой заявки. В течение времени обработки компонента закрыта для приема следующей заявки.
4. После обработки каждой заявки она передается по каналу связи в очередь для обработки следующей компонентой.

В зависимости от решаемой задачи в алгоритмах, моделирующих функциональные действия, могут использоваться сложные зависимости, учитывающие динамику процесса обработки, либо простые, позволяющие вычислить только время задержки заявки в компоненте.

Рассмотрим следующую задачу.

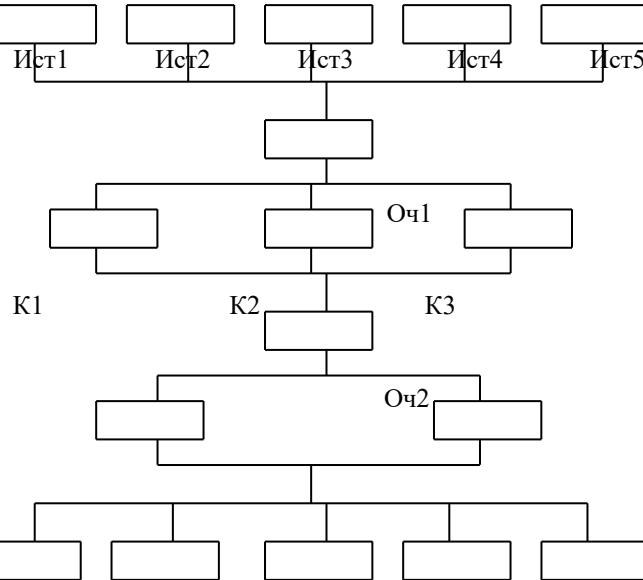
В домоуправлении выделены три человека (компоненты  $K_1, K_2, K_3$ ) для приема заявок от населения по газоснабжению, электроснабжению, водопроводу, ремонту квартир, теплоснабжению.

Обработка (функциональное действие) по каждой заявке различна и известна:  $t_r, t_s, t_b, t_p, t_t$ .

После приема заявки идут на подпись начальнику (компоненту  $K_4$ ) или заместителю (компоненту  $K_5$ ). Время работы с каждой заявкой различно и известно. Начальник имеет возможность работать с заявками в течение дня 1 час, его заместитель – 4 часа.

Распределить обработку заявок между всеми людьми так, чтобы время между поступлениями заявок на ремонт газоснабжения, водопровода, теплоснабжения и началом ремонта было минимальным, выполнение заявки на ремонт электрооборудования не превышало суток, а на ремонт квартир – неделю.

Блок-схема обработки заявок представлена на рис. 58. В источниках (ИСТ) транзакты создаются и поступают в очередь (Оч), для которой задан порядок извлечения транзакта с целью передачи на обработку в компоненты  $K_j$ . По окончании обработки транзакты попадают в поглотители (ПГ) – модели соответствующих ремонтных служб.



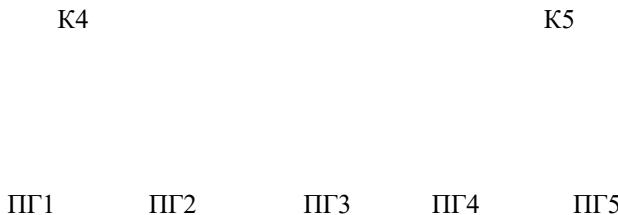


Рис. 58

Моделирование осуществляется в следующей последовательности. Допустим известно состояние системы в текущий момент модельного времени  $t_{0i}$ . Необходимо промоделировать поведение системы на следующем шаге. Найдем этот шаг  $\Delta t$ . Для этого создадим список активностей, в который включим ближайшие к  $t_{0i}$  моменты времени поступления очередного транзакта и активизации компонент системы. Под активизацией понимаем прекращение обслуживания компонентой очередной заявки и прием следующей. Из этого списка выбираем наиболее близкий к  $t_{0i}$  момент времени. Разница между этим наиболее близким к  $t_{0i}$  моментом времени и текущим является шагом. Для нового момента времени  $t_{0i+1}$  определяем поступление новых транзактов в систему. Если такие есть, то они ставятся в очередь. Проверка активизации компонент первого уровня: если момент активизации какой-либо компоненты совпал с текущим моментом времени, то обслуживаемый этой компонентой транзакт передается в очередь следующего уровня компонент, а в освободившуюся компоненту помещаем новый транзакт, который выбираем из очереди. Переходим на просмотр следующего уровня. Если активизации нет, то переходим на следующий уровень и т.д. По окончании просмотра компонент всех уровней проверяем поступление транзакта в его поглотитель. После этого переходим на начало и определяем новый шаг  $\Delta t$ . Процесс моделирования оканчивается, если происходит: либо исчерпание заявок, либо достижение заданного момента времени. Анализируется качество системы по количеству прошедших заявок в заданный интервал времени.

## ***Этапы создания имитационной модели***

Процесс создания имитационной модели включает следующие этапы:

1. Четкое уяснение задачи, решаемой с помощью имитационной модели.
2. Разработка структуры модели.
3. Разработка математических зависимостей, реализующих поведение компонент имитационной модели, и шумов, действующих на систему.
4. Разработка алгоритмов для реализации математических зависимостей.
5. Создание программы расчета на каком-либо языке.
6. Задание исходной информации.
7. Верификация имитационной модели. Верификация заключается в доказательстве соответствия алгоритма исходному замыслу путем работы с этой моделью. На этом этапе осуществляется проверка правильности функционирования элементов модели и комплексная отладка их совместного функционирования. Анализируются результаты расчетов по модели при действии детерминированных возмущений вместо случайных. Ищутся логические ошибки.
8. Проверка адекватности модели. При проверке адекватности модели в реальной системе проводят сравнение результатов расчета с натурным экспериментом. Чаще всего для этого используют методы математической статистики.
9. Калибровка модели. Если окажется, что модель не адекватна реальной системе, то производят ее калибровку. Осуществляют это путем изменения концепции построения модели, алгоритмов функционирования узлов и их связей, увеличение глубины учета процессов, происходящих в модели, изменение параметров модели.
10. Анализируют свойства модели, вычисляются вероятностные характеристики погрешности модели.
11. Составление плана имитационной модели на ЭВМ. Это необходимо вследствие того, что имитационные модели – очень сложные и расчеты по ним занимают очень много времени, поэтому разрабатывают такие методы расчета, чтобы получить максимум информации при минимуме расчетов.
12. Эксплуатация имитационной модели.

## ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Представленный в учебном пособии материал является методической основой для разработки математических моделей сложных технических систем. Для создания математической модели конкретных систем необходимо еще знание законов, по которым функционируют ее элементы, виды связей и воздействующих факторов. Эту информацию дают науки, занимающиеся изучением соответствующих вопросов – электротехника, сопротивление материалов, гидроаэродинамика, теория надежности и т.д. После создания модели важным и ответственным этапом является подготовка для нее исходных данных. Основным требованием в этом случае является их соответствие параметрам реальной системы. Правильно созданная математическая модель позволяет прогнозировать поведение системы в различных условиях, подбирать наиболее выгодные параметры и структуры системы, режимы функционирования. Все это дает возможность осуществлять проектирование новых сложных систем с высоким качеством и при минимальных затратах времени, избегая непродуктивных затрат.

Идеи и принципы моделирования сложных технических систем получили дальнейшее развитие при разработке математических моделей экономических, экологических, социальных и политических систем. Использование их позволит создать высокоразвитое демократическое общество и сохранить среду обитания для всего живого.

## БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. Даламбер Ж. Динамика /Ж. Даламбер. – М.: ГИТТЛ, 1950. – 231 с.
2. Лагранж Ж.Л. Аналитическая механика /Ж.Л. Лагранж. – 2-е изд. – М.: ГИТТЛ, 1950. – Т. 1,2. – 325 с.
3. Тарг С.М. Краткий курс теоретической механики /С.М. Тарг. – М.: Наука, 1963. – 281 с.

4. Уиттекер Е.Т. Аналитическая динамика /Е.Т. Уиттекер. – М.: ОНТИ, 1937. – 215 с.
5. Голдстейн Г. Классическая механика /Г. Голдстейн. – М.: ГИТТЛ, 1957. – 221 с.
6. Лурье А.И. Аналитическая механика /А.И. Лурье. – М.: Наука, 1962. – 312 с.
7. Вариационные принципы механики: Сборник статей /Под ред. Л.С. Полака. – М.: Физматгиз, 1959. – 360 с.
8. Казаков И.Е. Методы исследования нелинейных автоматических систем, основанные на статистической линеаризации. Современные методы проектирования систем управления /И.Е. Казаков. – М.: Машиностроение, 1967. – 487 с.
9. Казаков И.Е. Статистическая динамика нелинейных автоматических систем /И.Е. Казаков, Б.Г. Доступов. – М.: Физматгиз, 1962. – 332 с.
10. Пугачев В.С. Теория случайных функций и ее применение к задачам автоматического управления /В.С. Пугачев. – М.: Физматгиз, 1962. – 883 с.
11. Пупков К.А. Статистический расчет нелинейных систем автоматического управления /К.А. Пупков. – М.: Машиностроение, 1965. – 403 с.
12. Солодовников В.В. Статистическая динамика линейных систем автоматического управления /В.В. Солодовников. – М.: Физматгиз, 1960. – 542 с.
13. Бусленко Н.П. Лекции по теории сложных систем /Н.П. Бусленко, В.В. Калашников, И.Н. Коваленко. – М.: Сов. радио, 1973. – 439 с.
14. Бусленко В.Н. Автоматизация имитационного моделирования сложных систем /В.Н. Бусленко. – М.: Наука, 1977. – 240 с.
15. Шеннон Р. Имитационное моделирование систем /Р.Шеннон. – М.: Мир, 1975. – 314 с.

## СОДЕРЖАНИЕ

Введение .....	3
Основные принципы системного моделирования.....	3
Математическое моделирование систем с сосредоточенными	

параметрами в статике.....	4
Составление дифференциальных уравнений движения системы тел.....	11
Вычисление момента инерции стержня .....	13
Вычисление момента инерции диска .....	14
Вычисление момента инерции цилиндра .....	15
Приведение сил, действующих на балку, к силе, приложенной к центру масс, и к моменту .....	22
Пример составления дифференциальных уравнений для динамических систем с дебалансом .....	33
Линеаризация системы.....	36
Основные принципы классической механики .....	37
Дифференциальные принципы механики.	
Принцип виртуальных перемещений.....	39
Иdealные связи.....	40
Использование принципа виртуальных перемещений для получения уравнений статики .....	40
Получение дифференциальных уравнений движения с помощью вариационных принципов .....	44
Метод Д'Аламбера .....	44
Уравнение Лагранжа второго рода .....	46
Принцип Гамильтона .....	49
Операции с вариациями.....	50
Общая схема применения принципа Гамильтона .....	51
Системы с распределенными параметрами .....	61
Продольные колебания стержня постоянного сечения .....	62
Получение волнового уравнения с помощью принципа Гамильтона .....	67
Крутильные колебания .....	69
Изгибные колебания .....	71
Определение вероятностных характеристик систем со случайными параметрами .....	76
Имитационное моделирование .....	82
Основные определения .....	84
Модельное время сложной системы .....	85
Организация квазипараллелизма способом просмотра активностей .....	87
Транзактный способ организации квазипараллелизма в имитационной модели .....	90

Этапы создания имитационной модели .....	92
Заключение .....	93
Библиографический список .....	94
Содержание .....	95