## МИНИСТЕРСТВО НАУКИ И ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ

## ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ БЮДЖЕТНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

# «БЕЛГОРОДСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ ТЕХНОЛОГИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ им. В. Г. ШУХОВА» (БГТУ им. В.Г. Шухова)

Кафедра программного обеспечения вычислительной техники и автоматизированных систем

## Лабораторная работа №1

по дисциплине: Математическая логика и теория алгоритмов Тема: Логика высказываний

> Выполнил: ст. группы ПВ-211 Чувилко Илья

Проверили: Куценко Дмитрий

## Вариант 23

**Цель работы:** изучить логику высказываний и закрепить навык решения теоретических и практических задач.

23	5.6	8.6	9.16	11.13	13.5	16.1	22.4	29.2	33	37.5	44.2	59.5

Выполнение работы:

5. Опустите лишние скобки и знак «&» в формулах:

6) 
$$((X \vee Y) \rightarrow (X \& Y)) \vee ((\overline{X} \& Y) \& (X \vee \overline{Y})).$$

$$((\times \vee Y) \rightarrow (\times \& Y)) \vee ((\bar{X} \& Y)) \& (\times \vee Y)) = (\times \vee Y \rightarrow \times \& Y) \vee \bar{X} \& Y \& (\times \vee \bar{Y})$$

8. Используя таблицы истинности, докажите равносильность формул:

6) 
$$A \vee A \equiv A$$
.

=>3начения AVA и A - эквивалентны

9. Применяя таблицы истинности, выясните, являются ли следующие формулы тождественно истинными:

16) 
$$(X \to (Y \to Z)) \to (X \& Y \to Z)$$
.  
 $(X \xrightarrow{\Rightarrow} (Y \xrightarrow{\Rightarrow} Z)) \xrightarrow{\Rightarrow} (X & Y \xrightarrow{\Rightarrow} Z) = F(X,Y,Z)$ 

X	9	Z Y→Z X→(Y→Z)			x & 4	F	
0	0	0	1	1	0	1	1
0	0	1	1	1	0	1	1
0	1	0	0	ı	0	1	1
0	ı	1	1	ı	0	l 1	1
1	0	0	1	1	0	1	1
- (	0	1	1	1	0	1	1
1	1	0	0	0	ı	0	1
- (	1	1	1	1	ı	'	1

Найдите КНФ для следующих формул:

13) 
$$X \to ZYW$$
.

$$X \rightarrow Z \wedge Y \wedge W = \overline{X} \sqrt{Z} \wedge Y \wedge W = (\overline{X} \vee Z)(\overline{X} \vee Y)(\overline{X} \vee W)$$

13. Докажите при помощи КНФ или ДНФ тождественную истинность формул:

$$(X \to Y) \to \left( (X \to Z) \to \left( X \to (Y \& Z) \right) \right).$$

$$5) (X \to Y) \to \Big( (X \to Z) \to (X \to (Y \& Z)) \Big).$$

$$(X \to Y) \to \Big( (X \to Z) \to (X \to (Y \& Z)) \Big) = (\overline{X} \lor Y) \to ((X \lor Z) \to (\overline{X} \lor Y)) = (\overline{X} \lor Y) \lor \overline{X} \lor Z \lor \overline{X} \lor Y = (\overline{X} \lor Y) \to (\overline{X} \lor Y)$$

$$= (x \vee \overline{y} \vee \overline{z}) (1) \vee \overline{x} = x \vee \overline{x} \vee \overline{y} \vee \overline{z} = 1$$

**16.** При каких значениях переменных X, Y, Z, U, V, W следующие формулы ложны:

$$1)\left(\left(X\to (Y\ \&\ Z)\right)\to (\overline{Y}\to \overline{X})\right)\to \overline{Y}.$$

Формула будет ложна, когда  $\overline{\mathbf{y}} = \mathbf{0}$  и оставшаяся часть будет истинной

Подставим Ү в формулу

Такая формула всегда истинна, при любых х и z

Исходная формула будет ложна при:

X	9	Z		
0	-1	0		
0	1	1		
ι	1	0		
1	١	1		

22. Приведите к СДНФ следующие формулы:

4) 
$$X \to YZ$$
.

29. Найдите двойственные формулы:

$$2) (\overline{Y \vee Z}) \& (X \vee \overline{YZ}). = 5 (X, 3, 7)$$

- 33. Рассмотрите следующее утверждение и выясните, противоречиво ли оно: «Если конгресс отказывается принять новые законы, то забастовка не будет окончена, кроме случая, когда она длится более месяца и президент фирмы уйдёт в отставку; и либо конгресс примет новые законы, либо забастовка не закончится, хотя она и длилась более месяца».
  - Х конгресс отказывается принять законы
  - Ү Забастовка не будет закончена
  - Z Забастовка длится более месяца
  - W президент фирмы уйдет в отставку

Формула не противоречива, так как остались несокращаемые термы

37. Найти все (с точностью до равносильности) посылки, логическим следствием которых являются формулы:

5) 
$$X \vee Y \rightarrow XY$$
. = 23

<u>Н</u>айдем СКНФ

Получим двойственную формулу для СДНФ

Заменим литералы на противоположные:

$$S_1 = (x \lor B)$$

$$23 \& s_1 = (\bar{x} \vee y)(x \vee \bar{y})(x \vee y)$$

- 44. Определите, следует ли на уровне логики высказываний:
- 2) из данной теоремы ей обратно-противоположная.

Пусть прямая теорема выражается P->Q. Тогда обратно-противоположная Q->P

				P->Q	Q > P
0	0	T	1	-1	- 1
	1	0	-1	1	1
	0	1	0	0	0
1	1	0	0	1	1

#### 59. Решить задачи:

- 5) Джонс утверждает, что не встречал этой ночью Смита. Если Джонс не встречал этой ночью Смита, то либо Смит был убийцей, либо Джонс лжёт. Если Смит не был убийцей, то Джонс не встречал его этой ночью, а убийство было совершено после полуночи. Если убийство было совершено после полуночи, то либо Смит был убийцей, либо Джонс лжёт. Кто был убийцей?
  - Х Джонс не встречал Смита
  - Ү Смит убийца
  - Z Убийство было совершенно после полуночи

Для начала предположим, что Смит убийца. Тогда:

```
(X→(Y ^ <del>X</del>))( <del>3</del> → XZ)( <del>2</del> →(Y ^ X))→ Y=( <del>x</del> v (<del>x</del> <del>y</del> v × y))( Y ∨ X Z)( <del>2</del> v (<del>x</del> <del>y</del> v × y)) → Y=
= (<del>x</del> ∨ Y)( Y ∨ XZ)(<del>2</del> v <del>x</del> <del>y</del> v × y) → Y=(<del>x</del> <del>y v y v × y z)(<del>2</del> v <del>x</del> <del>y v x y) → x=</del>
= Y(<del>2</del> v <del>x</del> <del>y v x y) → Y=(<del>y</del> <del>z</del> v x y) → Y=<del>y</del> <del>y v x y v x y z) → x=</del></del></del>
```

Предположение было верным. Задача решена.

miro

Разработать программу, решающую задачи согласно своему варианту по табл. 1.1. Программа должна считывать формулу логики высказываний в указанной нормальной форме. Алгоритмы, выполняющие решение задачи, должны содержаться в отдельном модуле.

- 1. Программа должна строить полную таблицу истинности введённой формулы. (КНФ)
- 4. Программа должна отыскивать все интерпретации, на которых введённая формула принимает истинное значение. (КНФ)

```
#include <iostream>
#include <string>
#include <set>
#include <map>
#include <stack>
#include <queue>
#include <cassert>
#include <cstdlib>
#include <windows.h>
#include <iomanip>
// Объявление типов.
// Токен (лексема):
typedef char Token;
// Стек токенов:
typedef std::stack<Token> Stack;
// Последовательность токенов:
typedef std::queue<Token> Queue;
// Множество различных токенов:
typedef std::set<Token> Set;
// Таблица значений переменных:
typedef std::map<Token, Token> Map;
// Пара переменная—значение:
typedef std::pair<Token, Token> VarVal;
// Строка символов:
typedef std::string String;
using TruthTable = std::map<Queue, Token>;
// Является ли токен числом?
inline bool isNumber(Token t) {
 return t == '0' || t == '1';
}
// Является ли токен переменной?
inline bool isVariable(Token t) {
 return (t >= 'A' && t <= 'Z') \parallel (t >= 'a' && t <= 'z');
}
```

```
// Является ли токен операцией?
inline bool isOperation(Token t) {
 return (t == '|' || t == '&' || t == '-' || t == '>' || t == '~');
}
// Является ли токен открывающей скобкой?
inline bool isOpeningPar(Token t) {
 return t == '(';
}
// Является ли токен закрывающей скобкой?
inline bool isClosingPar(Token t) {
 return t == ')';
}
// Вернуть приоритет операции
inline int priority(Token op) {
 assert (isOperation(op));
 int res = 0;
 switch (op) {
  case '-':
   // Отрицание — наивысший приоритет
   res = 5;
   break;
  case '&':
   // Конъюнкция
   res = 4;
   break:
  case ":
   // Дизъюнкция
   res = 3;
   break;
  case '>':
   // Импликация
   res = \frac{2}{3};
   break;
  case '~':
   // Эквивалентность — наинизший приоритет
   res = 1;
   break;
 }
 return res;
// Преобразовать последовательность токенов,
// представляющих выражение в инфиксной записи,
// в последовательность токенов, представляющих
// выражение в обратной польской записи
// (алгоритм Дейкстры «Сортировочная станция»)
Queue infixToPostfix(Queue input) {
 // Выходная последовательность (очередь вывода):
 Queue output;
 // Рабочий стек:
 Stack s;
 // Текущий входной токен:
 Token t;
 // Пока есть токены во входной последовательности:
 while (!input.empty()) {
  // Получить токен из начала входной последовательности
  t = input.front();
  input.pop();
  // Если токен — число или переменная, то:
```

```
if (isNumber(t) || isVariable(t)) {
   output.push(t);
   // Если токен — операция op1, то:
  } else if (isOperation(t)) {
   while (!s.empty() && isOperation(s.top())
       && priority(t) <= priority(s.top())
    output.push(s.top());
    s.pop();
   // Положить ор1 в стек
   s.push(t);
   // Если токен — открывающая скобка, то:
  } else if (isOpeningPar(t)) {
   // Положить его в стек
   s.push(t);
   // Если токен — закрывающая скобка, то:
  } else if (isClosingPar(t)) {
   // Пока токен на вершине стека не является открывающей скобкой:
   while (!s.empty() && !isOpeningPar(s.top())) {
    // Перекладывать токены-операции из стека
    // в выходную очередь
    assert (isOperation(s.top()));
    output.push(s.top());
    s.pop();
   // Если стек закончился до того, как была встречена открывающаяся скобка:
    throw String("Пропущена открывающая скобка!");
   } else {
    s.pop();
   }
  } else {
   // В остальных случаях входная последовательность
   // содержит токен неизвестного типа
   String msg("Неизвестный символ \"");
   msg += t + String("\");
   throw msg;
  }
 // Токенов на входе больше нет, но ещё могут остаться токены в стеке.
 // Пока стек не пустой:
 while (!s.empty()) {
  if (isOpeningPar(s.top())) {
   throw String("Незакрытая скобка!");
  } else {
   assert (isOperation(s.top()));
   output.push(s.top());
   s.pop();
  }
 return output;
// Напечатать последовательность токенов
void printSequence(Queue q) {
 while (!q.empty()) {
  std::cout << q.front();</pre>
  q.pop();
 }
 std::cout << std::endl;</pre>
```

```
// Является ли символ пробельным?
inline bool isSpace(char c) {
 return c <= ' ';
}
// Если символ — маленькая буква, преобразовать её в большую,
// иначе просто вернуть этот же символ
inline char toUpperCase(char c) {
 if (c \ge 'a' \&\& c \le 'z') {
  return c - 'a' + 'A';
 } else {
  return c;
 }
}
// Преобразовать строку с выражением в последовательность токенов
// (лексический анализатор)
Queue stringToSequence(const String &s) {
 Queue res;
 for (size_t i = 0; i < s.size(); ++i) {
  if (!isSpace(s[i])) {
   res.push(toUpperCase(s[i]));
  }
 }
 return res;
}
// Вывести сообщение об ошибке
inline void printErrorMessage(const String &err) {
 std::cerr << "*** ОШИБКА! " << err << std::endl;
}
// Ввод выражения с клавиатуры
inline String inputExpr() {
 String expr;
 std::cout << "Формула логики высказываний: ";
 std::getline(std::cin, expr);
 return expr;
}
// Выделить из последовательности токенов переменные
Set getVariables(Queue s) {
 Set res;
 while (!s.empty()) {
  if (isVariable(s.front()) && res.count(s.front()) == 0) {
   res.insert(s.front());
  }
  s.pop();
 }
 return res;
// Ввод значений переменных с клавиатуры
Map inputVarValues(const Set &var) {
 Token val;
 Map res;
 for (char i: var) {
  do {
   std::cout << i << " = ";
   std::cin >> val;
   if (!isNumber(val)) {
```

```
std::cerr << "Введите 0 или 1!" << std::endl;
  } while (!isNumber(val));
  res.insert(VarVal(i, val));
 }
 return res;
// Заменить переменные их значениями
Queue substValues(Queue expr, Map &varVal) {
 Queue res;
 while (!expr.empty()) {
  if (isVariable(expr.front())) {
   res.push(varVal[expr.front()]);
  } else {
   res.push(expr.front());
  expr.pop();
 return res;
// Является ли операция бинарной?
inline bool isBinOp(Token t) {
 return t == '&' || t == '|' || t == '>' || t == '~';
// Является ли операция унарной?
inline bool isUnarOp(Token t) {
return t == '-';
}
// Получить bool-значение токена-числа (true или false)
inline bool logicVal(Token x) {
 assert (isNumber(x));
 return x == '1';
// Преобразовать bool-значение в токен-число
inline Token boolToToken(bool x) {
 if (x) {
  return '1';
 } else {
  return '0';
// Вычислить результат бинарной операции
inline Token evalBinOp(Token a, Token op, Token b) {
 assert (isNumber(a) && isBinOp(op) && isNumber(b));
 bool res;
 // Получить bool-значения операндов
 bool left = logicVal(a);
 bool right = logicVal(b);
 switch (op) {
  case '&':
   // Конъюнкция
   res = left && right;
   break;
  case ":
   // Дизъюнкция
   res = left || right;
```

```
break:
  case '>':
   // Импликация
   res = !left || right;
   break;
  case '~':
   // Эквивалентность
   res = (!left || right) && (!right || left);
   break;
 return boolToToken(res);
// Вычислить результат унарной операции
inline Token evalUnarOp(Token op, Token a) {
 assert (isUnarOp(op) && isNumber(a));
 bool res = logicVal(a);
 switch (op) {
  case '-':
   // Отрицание
   res = !res;
   break;
 return boolToToken(res);
// Вычислить значение операции, модифицируя стек.
// Результат помещается в стек
void evalOpUsingStack(Token op, Stack &s) {
 assert (isOperation(op));
 // Если операция бинарная, то:
 if (isBinOp(op)) {
  // В стеке должны быть два операнда
  if (s.size() >= 2) {
   // Если это так, то извлекаем правый операнд-число
   Token b = s.top();
   if (!isNumber(b)) {
    throw String("Неверное выражение!");
   s.pop();
   // Затем извлекаем левый операнд-число
   Token a = s.top();
   if (!isNumber(a)) {
    throw String("Неверное выражение!");
   s.pop();
   // Помещаем в стек результат операции
   s.push(evalBinOp(a, op, b));
  } else {
   throw String("Неверное выражение!");
  // Иначе операция унарная
 } else if (isUnarOp(op) && !s.empty()) {
  // Извлекаем операнд
  Token a = s.top();
  if (!isNumber(a)) {
   throw String("Неверное выражение!");
  }
  // Помещаем в стек результат операции
  s.push(evalUnarOp(op, a));
 } else {
```

```
throw String("Неверное выражение!");
 }
}
// Вычислить значение выражения, записанного в обратной польской записи
Token evaluate(Queue expr) {
 // Рабочий стек
 Stack s;
 // Текущий токен
 Token t;
 // Пока входная последовательность содержит токены:
 while (!expr.empty()) {
  // Считать очередной токен
  t = expr.front();
  assert (isNumber(t) || isOperation(t));
  expr.pop();
  // Если это число, то:
  if (isNumber(t)) {
   // Поместить его в стек
   s.push(t);
   // Если это операция, то:
  } else if (isOperation(t)) {
   // Вычислить её, модифицируя стек
   // (результат также помещается в стек)
   evalOpUsingStack(t, s);
 }
 // Результат — единственный элемент в стеке
 if (s.size() == 1) {
  // Вернуть результат
  return s.top();
 } else {
  throw String("Неверное выражение!");
 }
}
// Вывести результат вычисления на экран
void printResult(Token r) {
 assert (isNumber(r));
 std::cout << "Значение выражения: " << r << std::endl;
}
// Возвращает результат возведения в степень power числа number
// Алгоритм быстрого возведения в натуральную степень
template<typename T>
T pow(T number, size_t power) {
 T res = 1;
 T currPowOf2 = number;
 while (power) {
  if (power & 1)
   res *= currPowOf2;
  currPowOf2 *= currPowOf2;
  power >>= 1;
 }
 return res;
// Возвращает очередь с элементами множества set
Queue setToQueue(const Set &set) {
 Queue res;
 for (char it: set)
  res.push(it);
```

```
return res;
}
// Возвращает таблицу истинности для заданных
// переменных vars и выражения output в постфиксной форме
TruthTable getTruthTable(const Queue &output,
               const Set &vars) {
 auto varsN = vars.size();
 auto maxNum = pow(2, varsN);
 Map substitutes;
 TruthTable res;
 auto expr = setToQueue(vars);
 for (int i = 0; i < maxNum; ++i) {
  auto var = vars.rbegin();
  int bit = i;
  while (var != vars.rend()) {
   substitutes[*var] = boolToToken(bit & 1);
   bit >>= 1;
  Queue rpn = substValues(output, substitutes);
  Queue rpn_vars = substValues(expr, substitutes);
  res[rpn_vars] = evaluate(rpn);
 }
 return res;
// Выводит на экран таблицу истинности table
// с заданными переменными vars и выводит результат выражения
// при заданном флаге expressionValueToPrint
void printTruthTable(const TruthTable &table,
             const Set &vars = {},
             const bool expressionValueToPrint = true) {
 if (!vars.empty()) {
  for (const auto &var: vars)
   std::cout << var << std::setw(4);</pre>
  if (expressionValueToPrint)
   std::cout << std::setw(7) << std::right << "Result";</pre>
  std::cout << '\n';</pre>
 for (const auto &row: table) {
  auto vals = row.first;
  while (!vals.empty()) {
   std::cout << vals.front() << std::setw(4);</pre>
   vals.pop();
  if (expressionValueToPrint)
   std::cout << row.second;</pre>
  std::cout << '\n';</pre>
 }
}
// Возвращает новую таблицу истинности, в которой отсутствуют
// строки из table, удовлетворяющие унарному предикату р
template<typename UnitPredicate>
TruthTable deleteRowsIf(const TruthTable &table,
               UnitPredicate p) {
 TruthTable res;
 for (const auto &pair: table) {
  if (!p(pair))
   res.insert(pair);
```

```
}
int main() {
 SetConsoleOutputCP(CP_UTF8);
 // Ввод
 std::string expr = inputExpr();
 Queue input = stringToSequence(expr);
 try {
  Queue output = infixToPostfix(input);
  printSequence(output);
  auto vars = getVariables(output);
  // Задание 1
  auto table = getTruthTable(output, vars);
  printTruthTable(table, vars);
  // Задание 4
  auto newTable = deleteRowsIf(table,
                    [](const auto &pair) {
                     return pair.second == '0';
  std::cout << '\n';</pre>
  printTruthTable(newTable, vars, false);
 } catch (const String &err) {
  printErrorMessage(err);
  exit(1);
 }
 return 0;
Результат работы программы:
                                     Формула логики высказываний:X&(-Y/Z)
                                      XY-Z|&
                                              Z Result
                                         0
                                                  0
                                     0
                                              0
                                     0
                                         0
                                                  0
                                              1
                                     0
                                         1
                                              0
                                                  Θ
                                         1
                                     0
                                              1
                                                  0
                                         0
                                    1
                                              0
                                                  1
                                         0
                                              1
                                                  1
                                    1
                                         1
                                                  0
                                     1
                                         1
                                              1
                                                  1
4.
                                     Χ
                                              Z
                                         0
                                              0
                                     1
                                         0
                                              1
                                     1
                                     1
                                         1
                                              1
```

return res;

**Вывод:** в ходе работы была изучена логика высказываний и закреплены навыки решения теоретических и практических задач.

Process finished with exit code  $\theta$