МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ
РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ

Белгородский государственный технологический университет
им. В.Г. Шухова

Т. В. Бондаренко, Е. А. Федотов

Утверждено
ученым советом
университета

ВЫЧИСЛИТЕЛЬНАЯ МАТЕМАТИКА

ЛАБОРАТОРНЫЙ ПРАКТИКУМ

учебного пособия для студентов направлений подготовки
09.03.01 — Информатика и вычислительная техника,
09.03.04 — Программная инженерия

Белгород
2017

УДК 519,6
ББК 22.19я7
М54

Рецензенты:
канд. техн. наук, доцент *В.М. Михелев* (НИУ «БелГУ»)
канд. техн. наук, доцент *Е.Н. Коробкова* (БГТУ им. В.Г. Шухова)

М54 Вычислительная математика: учебное пособие / Т. В. Бондаренко, Е. А. Федотов. — Белгород: Изд-во БГТУ, 2017. — с.

В учебном пособии представлены основные теоретические сведения и примеры решения типовых задач, а также варианты индивидуальных заданий к лабораторным работам по курсу «Вычислительная математика».

Издание предназначено для студентов направлений 09.03.01 — Информатика и вычислительная техника, 09.03.04 — Программная инженерия.

Данное издание публикуется в авторской редакции.

УДК 004
ББК 32.81

СОДЕРЖАНИЕ

Лабораторная работа № 1
Метод Гаусса

Цель работы: изучить прямой и обратный ход метода Гаусса для решения систем линейных алгебраических уравнений; изучить схему единственного деления с выбором максимального по модулю элемента; изучить применение метода Гаусса для вычисления определителя матрицы и обратной матрицы; получить практические навыки программной реализации метода Гаусса и решения поставленных задач методом Гаусса с помощью ЭВМ.

Задания к работе

1. Выполнить вручную действия над матрицами A и B из пункта 3 задания соответствующего варианта.
2. Выполнить следующие действия, не используя метод Гаусса:
   – решить вручную систему линейных алгебраических уравнений с тремя неизвестными из пункта 1 задания соответствующего варианта;
   – найти вручную определитель матрицы A из пункта 2 задания соответствующего варианта;
   – найти вручную матрицу A^{-1} обратную матрице A из пункта 2 задания соответствующего варианта.
3. Решить вручную методом Гаусса систему линейных алгебраических уравнений с тремя неизвестными из пункта 1 задания соответствующего варианта.
4. Найти вручную с помощью метода Гаусса определитель матрицы A из пункта 2 задания соответствующего варианта.
5. Найти вручную с помощью метода Гаусса матрицу A^{-1} обратную матрице A из пункта 2 задания соответствующего варианта.

Выполнить проверку полученной матрицы на соответствие условию:

$$A \cdot A^{-1} = E,$$

где E — единичная матрица.

6. Создать модуль для работы с матрицами произвольного порядка, содержащий подпрограммы для умножения двух матриц, умножения числа на матрицу, сложения матриц, вычитания матриц, транспонирования матрицы, умножения матрицы на вектор, ввода и вывода матрицы.
7. Создать модуль, содержащий подпрограммы, реализующие прямой и обратный ход метода Гаусса для схемы единственного

деления с выбором максимального по модулю элемента.

8. Создать программу для решения следующих задач:

– нахождение методом Гаусса решения системы линейных алгебраических уравнений с одной и той же матрицей коэффициентов при неизвестных и произвольным числом столбцах свободных членов.

Замечание. В прямом ходе метода Гаусса выполняется приведение расширенной матрицы (коэффициенты при неизвестных и свободные члены) к треугольному виду, и одновременно изменяются все столбцы свободных членов. На этапе обратного хода выполняется вычисление решения системы для каждого столбца свободных членов, составляется матрица решений.

– вычисление определителя заданной матрицы методом Гаусса;
– нахождение для заданной матрицы обратной матрицы методом Гаусса.

9. Решить все задания соответствующего варианта с помощью составленной программы. Выполнить проверку правильности найденного решения системы линейных уравнений и матрицы обратной к заданной матрице с помощью составленной программы, сравнить значения, полученные при решении заданий с помощью метода Гаусса и с использованием произвольного метода решения.

Содержание отчета

1. Титульный лист.
2. Цель работы. Вариант задания.
3. Текст задания к работе.
4. Выполнение задания соответствующего варианта вручную полностью. Все действия выполняемые при решении задачи вручную расписывать подробно с указанием всех промежуточных операций. Указание только окончательного ответа не допускается.
5. Текст программы, включающий необходимые комментарии и спецификации подпрограмм.
6. Результаты работы программы.

Основные теоретические сведения

Будем решать систему из n линейных уравнений с n неизвестными:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = p_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = p_2, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \ldots + a_{nn}x_n = p_n, \end{cases}$$

где x_i — искомые неизвестные; a_i — известные коэффициенты; p_i — свободные члены; i = 1, 2, …, n.

Прямой ход схемы единственного деления. Цель прямого хода метода Гаусса преобразование исходной системы уравнений к треугольной.

Составляем расширенную матрицу коэффициентов A, соответствующую системе:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} & p_1 \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} & p_2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} & p_n \end{pmatrix}$$

Рассмотрим произвольный k-ый шаг метода Гаусса:

− выбирается ведущий элемент k-го шага $a_{kk} \neq 0$.

− вычисляем числа, называемые множителями k-ого шага, используя значения коэффициентов, полученные на предыдущем (k-1) шаге, по формуле:

$$\mu_{ik} = -\frac{a_{ik}^{(k-1)}}{a_{kk}^{(k-1)}}, \; i = k+1, \dots, n$$

− изменяем значения элементов по формулам

$$a_{ij}^{(k)} = a_{ij}^{(k-1)} + \mu_{ik} a_{kj}^{(k-1)};$$
$$p_i^{(k)} = p_i^{(k-1)} + \mu_{ik} p_k^{(k-1)}, \quad i = k+1, \dots, n; \; j = k, \dots, n.$$

Результат прямого хода:

$$B = \begin{pmatrix} a_{11}^{(0)} & a_{12}^{(0)} & \dots & a_{1n}^{(0)} & p_1^{(0)} \\ 0 & a_{22}^{(1)} & \dots & a_{2n}^{(1)} & p_2^{(1)} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & a_{nn}^{(n-1)} & p_n^{(n-1)} \end{pmatrix}$$

Обратный ход схемы единственного деления. Цель обратного хода — вычисление неизвестных, последовательно начиная с n-го, по формуле

$$x_k = \frac{p_k^{(k-1)} - \sum\limits_{j=k+1}^{n} a_{kj}^{(k-1)} x_j}{a_{kk}^{(k-1)}}, \quad k = n, n-1, ..., 1.$$

Вышеописанная схема может быть модифицирована в схему с выбором максимального по модулю элемента в столбце.

Вычисление определителя матрицы. Определитель матрицы A в результате применения к ней прямого хода метода Гаусса по схеме с выбором максимального по модулю элемента, вычисляется по формуле:

$$\det A = (-1)^k a_{11}^{(0)} a_{22}^{(1)} ... a_{nn}^{(n-1)},$$

где k — число реальных перестановок строк матрицы A.

Вычисление обратной матрицы. Согласно определению обратной матрицы, верно равенство:

$$A \cdot A^{-1} = E, \tag{1.1}$$

где E — единичная матрица.

Выполним умножение матриц из равенства (1.1) в общем виде и обозначим искомую матрицу за X, затем приравняем построчно и поэлементно полученную матрицу и единичную матрицу. В итоге получим СЛАУ, в которой неизвестными являются элементы обратной матрицы.

Вычисление обратной матрицы методом Гаусса сводится к решению полученной системы линейных уравнений. Для решения такой системы необходимо составить расширенную матрицу коэффициентов A_1, записав вместе коэффициенты при неизвестной и единичную матрицу соответствующего порядка:

$$A_1 = \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} & ... & c_{1n} & 1 & 0....0 \\ c_{21} & c_{22} & ... & c_{2n} & 0 & 1....0 \\ \multicolumn{6}{c}{..................................} \\ c_{n1} & c_{n2} & ... & c_{nn} & 0 & 0....1 \end{pmatrix}$$

Элементы $\{c_{ij}\}$ матрицы A_1 являются коэффициентами при неизвестных СЛАУ; элементы $\{t_{ij}\}$ являются неизвестными элементами матрицы A^{-1}, которые необходимо найти, решив СЛАУ; элементы единичной матрицы являются столбцами свободных членов, СЛАУ.

Преобразуем значащую часть матрицы A_1 (элементы $\{a_{ij}\}$) к треугольному виду, выполнив прямой ход метода Гаусса для решения СЛАУ. Затем найдем все решения полученной системы уравнений, приметив обратный ход метода Гаусса. Решение системы для каждого столбца свободных членов будет соответствовать столбцу обратной матрицы.

Пример 1.1. Решите систему линейных алгебраических уравнений методом Гаусса:

$$\begin{cases} x+2y+z=4, \\ 3x-5y+3z=1, \\ 2x+7y-z=8. \end{cases}$$

Решение:

Составим расширенную матрицу A системы линейных алгебраических уравнений:

$$A=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 4 \\ 3 & -5 & 3 & 1 \\ 2 & 7 & -1 & 8 \end{pmatrix}$$

Преобразуем матрицу A к треугольному виду, используя схему с выбором максимального по модулю элемента в столбце.

В первом столбце матрицы A максимальный по модулю элемент расположен в строке под номером 2, выполним обмен строк 1 и 2 местами.

В итоге ведущим элементом первого шага метода Гаусса будет максимальный по модулю элемент первого столбца $a_{11} = 3$.

Определим множители первого шага:

$$\mu_{21}=-\frac{a_{21}}{a_{11}}=-\frac{1}{3},\quad \mu_{31}=-\frac{a_{31}}{a_{11}}=-\frac{2}{3}.$$

Умножаем первую строку матрицы A на множитель μ_{21} и складываем со второй строкой; умножаем первую строку матрицы A на множитель μ_{31} и складываем с третьей строкой.

В результате получим матрицу, в которой все элементы первого столбца, кроме a_{11}, равны нулю:

$$A=\begin{pmatrix} 3 & -5 & 3 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 4 \\ 2 & 7 & -1 & 8 \end{pmatrix} \begin{vmatrix} \cdot\left(-1/3\right) \\ \lrcorner(+) \\ \end{vmatrix} \begin{vmatrix} \cdot\left(-2/3\right) \\ \\ \lrcorner(+) \end{vmatrix} \Rightarrow A=\begin{pmatrix} 3 & -5 & 3 & 1 \\ 0 & 11/3 & 0 & 11/3 \\ 0 & 31/3 & -3 & 22/3 \end{pmatrix}$$

Во втором столбце матрицы A максимальный по модулю элемент расположен в строке под номером 3 (сравниваем элементы 2 и 3 строк), выполним обмен строк 2 и 3 местами.

В итоге ведущим элементом второго шага метода Гаусса элемент второго столбца $a_{22} = 31/3$.

Определим множитель второго шага:

$$\mu_{32} = -\frac{a_{32}}{a_{22}} = -\frac{11}{3} : \frac{31}{3} = -\frac{11}{31}.$$

Умножаем вторую строку матрицы A на множитель μ_{32} и складываем с третьей строкой.

В результате получим матрицу, в которой все элементы второго столбца, расположенные под элементом a_{22}, равны нулю.

$$A = \begin{pmatrix} 3 & -5 & 3 & 1 \\ 0 & 31/3 & -3 & 22/3 \\ 0 & 11/3 & 0 & 11/3 \end{pmatrix} \left| \begin{matrix} \\ \cdot\left(-11/31\right) \\ \lrcorner(+) \end{matrix} \right. \Rightarrow A = \begin{pmatrix} 3 & -5 & 3 & 1 \\ 0 & 31/3 & -3 & 22/3 \\ 0 & 0 & 33/31 & 33/31 \end{pmatrix}$$

Прямой ход метода Гаусса завершен. Получена треугольная матрица, которая соответствует исходной системе уравнений.

Обратный ход метода Гаусса заключается в решении системы линейных алгебраических уравнений с низу вверх.

Требуется решить систему линейных алгебраических уравнений вида:

$$\begin{cases} 3x - 5y + 3z = 1, \\ \quad 31/3\, y - 3z = 22/3, \\ \qquad 33/31\, z = 33/31. \end{cases}$$

Вычисляем значение неизвестного z из уравнения три; подставляем найденное значение z в уравнение второе и вычисляем неизвестное y; подставляем найденные значения z и y в уравнение первое и вычисляем неизвестное x. В итоге получим следующие значения неизвестных:

$$z = 1,\ y = 1,\ x = 1.$$

Ответ: (1; 1; 1) — решение системы уравнений.

Пример 1.2. Методом Гаусса вычислить определитель матрицы A:

$$A=\begin{pmatrix}1 & 2 & 1\\ 3 & -5 & 3\\ 2 & 7 & -1\end{pmatrix}$$

Решение:

Преобразуем исходную матрицу А к треугольному виду, используя схему с выбором максимального по модулю элемента в столбце.

$$A=\begin{pmatrix}3 & -5 & 3 & 1\\ 1 & 2 & 1 & 4\\ 2 & 7 & -1 & 8\end{pmatrix}\left|\begin{matrix}\cdot\left(-1/3\right)\\ \lrcorner(+)\\ \ \end{matrix}\right.\left|\begin{matrix}\cdot\left(-2/3\right)\\ \ \\ \lrcorner(+)\end{matrix}\right. \Rightarrow A=\begin{pmatrix}3 & -5 & 3 & 1\\ 0 & 31/3 & -3 & 22/3\\ 0 & 11/3 & 0 & 11/3\end{pmatrix}\left|\begin{matrix}\ \\ \cdot\left(-11/31\right)\\ \lrcorner(+)\end{matrix}\right.$$

$$A=\begin{pmatrix}3 & -5 & 3 & 1\\ 0 & 31/3 & -3 & 22/3\\ 0 & 0 & 33/31 & 33/31\end{pmatrix}$$

При выполнении прямого хода метода Гаусса было выполнено два обмена строк местами (k = 2).

$$\det A=(-1)^k\, a_{11}\, a_{22}\, a_{33}=(-1)^2\cdot 3\cdot 31/3\cdot 33/31=33$$

Ответ: определитель матрицы A равен 33.

Пример 1.3. Методом Гаусса вычислить матрицу обратную к матрице A:

$$A=\begin{pmatrix}1 & 2 & 1\\ 3 & -5 & 3\\ 2 & 7 & -1\end{pmatrix}$$

Решение:

Запишем расширенную матрицу B, содержащую исходную матрицу A и единичную матрицу. Применим к матрице B прямой ход метода Гаусса:

$$B=\begin{pmatrix}1 & 2 & 1 & 1 & 0 & 0\\ 3 & -5 & 3 & 0 & 1 & 0\\ 2 & 7 & -1 & 0 & 0 & 1\end{pmatrix}$$

Используем схему с выбором максимального по модулю элемента в столбце.

Максимальный элемент первого столбца расположен в строке два. Выполним обмен местами первой и второй строк матрицы B (k = 1). Ведущий элемент первого шага b_{11} = 3, множители первого шага
μ_{21} = -1/3, μ_{31} = -2/3.

Результат первого шага

$$B=\begin{pmatrix}3 & -5 & 3 & 1 & 0 & 0\\ 1 & 2 & 1 & 0 & 1 & 0\\ 2 & 7 & -1 & 0 & 0 & 1\end{pmatrix}\begin{array}{|c|c}\cdot\left(-\frac{1}{3}\right) & \cdot\left(-\frac{2}{3}\right)\\ \lrcorner(+) & \\ & \lrcorner(+)\end{array}\Rightarrow B=\begin{pmatrix}3 & -5 & 3 & 0 & 1 & 0\\ 0 & \frac{11}{3} & 0 & 1 & -\frac{1}{3} & 0\\ 0 & \frac{31}{3} & -3 & 0 & -\frac{2}{3} & 1\end{pmatrix}$$

Максимальный элемент второго столбца, начиная со строки два, расположен в строке три.

Выполним обмен местами третьей и второй строк матрицы B
(k = 2). Ведущий элемент второго шага b_{22} = 31/3, множитель второго шага μ_{32} = -11/31.

Результат второго шага

$$B=\begin{pmatrix}3 & -5 & 3 & 0 & 1 & 0\\ 0 & \frac{31}{3} & -3 & 0 & -\frac{2}{3} & 1\\ 0 & \frac{11}{3} & 0 & 1 & -\frac{1}{3} & 0\end{pmatrix}\begin{array}{|c}\\ \cdot\left(-\frac{11}{31}\right)\\ \lrcorner(+)\end{array}\Rightarrow B=\begin{pmatrix}3 & -5 & 3 & 0 & 1 & 0\\ 0 & \frac{31}{3} & -3 & 0 & -\frac{2}{3} & 1\\ 0 & 0 & \frac{33}{31} & 1 & -\frac{3}{31} & -\frac{11}{31}\end{pmatrix}$$

Для нахождения элементов обратной матрицы необходимо применить обратный ход метода Гаусса три раза, используя 4, 5, 6 столбцы матрицы B в качестве свободных членов. Каждое найденное решение образует соответствующий столбец обратной матрицы B^{-1}.

Подставляем первый столбец свободных членов:

$$B=\begin{pmatrix}3 & -5 & 3 & 0\\ 0 & \frac{31}{3} & -3 & 0\\ 0 & 0 & \frac{33}{31} & 1\end{pmatrix}\Rightarrow\begin{cases}3t_1-5t_2+3t_3=0,\\ \frac{31}{3}t_2-3t_3=0,\\ \frac{33}{31}t_3=1.\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}t_1=-\frac{16}{33},\\ t_2=\frac{3}{11},\\ t_3=\frac{31}{33}.\end{cases}$$

Подставляем второй столбец свободных членов:

$$B=\begin{pmatrix}3 & -5 & 3 & 1\\ 0 & \frac{31}{3} & -3 & -\frac{2}{3}\\ 0 & 0 & \frac{33}{31} & -\frac{3}{31}\end{pmatrix}\Rightarrow\begin{cases}3t_1-5t_2+3t_3=1,\\ \frac{31}{3}t_2-3t_3=-\frac{2}{3},\\ \frac{33}{31}t_3=-\frac{3}{31}.\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}t_1=\frac{3}{11},\\ t_2=-\frac{1}{11},\\ t_3=-\frac{1}{11}.\end{cases}$$

Подставляем третий столбец свободных членов:

$$B=\begin{pmatrix}3 & -5 & 3 & 0\\ 0 & 31/3 & -3 & 1\\ 0 & 0 & 33/31 & -11/31\end{pmatrix}\Rightarrow\begin{cases}3t_1-5t_2+3t_3=0,\\ \frac{31}{3}t_2-3t_3=1,\\ \frac{33}{31}t_3=-\frac{11}{31}.\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}t_1=1/3,\\ t_2=0,\\ t_3=-1/3.\end{cases}$$

Искомая обратная матрица имеет вид:

$$A^{-1}=\begin{pmatrix}-16/33 & 3/11 & 1/3\\ 3/11 & -1/11 & 0\\ 31/33 & -1/11 & -1/3\end{pmatrix}$$

Выполним проверку полученных результатов:

$$A\cdot A^{-1}=\begin{pmatrix}-16/33 & 3/11 & 1/3\\ 3/11 & -1/11 & 0\\ 31/33 & -1/11 & -1/3\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1 & 2 & 1\\ 3 & -5 & 3\\ 2 & 7 & -1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}$$

$A\ A^{-1} = E$ — верно

Проверка выполнена.

Варианты заданий

Вариант	Задание		
	1	2	3
1	$\begin{cases}x_1+x_2+x_3=8,\\ x_1+5x_2+x_3=12,\\ x_1+x_2-2x_3=5.\end{cases}$	$A=\begin{pmatrix}5 & 1 & 1\\ 1 & 2 & -2\\ 2 & 3 & 1\end{pmatrix}$	**(*A* + *B*) · (*B* - 2*A*)** $A=\begin{pmatrix}3 & 7 & 0\\ 5 & -6 & 1\\ 4 & 8 & -2\end{pmatrix}, B=\begin{pmatrix}1 & 6 & 10\\ 0 & -2 & 3\\ 4 & 2 & 5\end{pmatrix}$
2	$\begin{cases}x_1+x_2+x_3=2,\\ x_1+5x_2+x_3=6,\\ x_1+x_2-2x_3=-1.\end{cases}$	$A=\begin{pmatrix}5 & 1 & 1\\ 0 & 4 & 0\\ 2 & 2 & 1\end{pmatrix}$	***B* + 2A · (*A* - *B*)** $A=\begin{pmatrix}4 & 7 & 2\\ 2 & 1 & 0\\ 6 & 2 & -3\end{pmatrix}, B=\begin{pmatrix}-3 & 6 & 9\\ 1 & 0 & 3\\ 5 & -6 & 6\end{pmatrix}$
3	$\begin{cases}2x_1+2x_2+x_3=1,\\ x_1+3x_2-x_3=-8,\\ x_1+x_2+4x_3=3.\end{cases}$	$A=\begin{pmatrix}2 & 8 & 1\\ 3 & 6 & 8\\ 0 & 4 & 1\end{pmatrix}$	**2*B* + (*B* + *A* · *B*)** $A=\begin{pmatrix}4 & 5 & -2\\ 3 & -1 & 0\\ 4 & 2 & 7\end{pmatrix}, B=\begin{pmatrix}2 & 1 & -1\\ 0 & 4 & 3\\ 5 & 7 & 3\end{pmatrix}$

Продолжение

Вари ант	Задание		
	1	2	3
4	$\begin{cases} 2x_1+2x_2+x_3=5, \\ x_1+3x_2-x_3=8, \\ x_1+x_2+4x_3=-1. \end{cases}$	$A=\begin{pmatrix} 8 & 7 & 6 \\ 2 & 0 & 4 \\ 5 & 0 & 5 \end{pmatrix}$	$\boldsymbol{A+A^2-B\cdot A}$ $A=\begin{pmatrix} 7 & 2 & 0 \\ -8 & 0 & 4 \\ 3 & 5 & 1 \end{pmatrix}, B=\begin{pmatrix} 0 & 2 & 3 \\ 1 & 9 & 6 \\ 3 & 8 & -7 \end{pmatrix}$
5	$\begin{cases} 3x_1-3x_2+2x_3=-3, \\ 2x_1+4x_2+x_3=9, \\ x_1+2x_2+3x_3=12. \end{cases}$	$A=\begin{pmatrix} -4 & 3 & 1 \\ 2 & 6 & 8 \\ -1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$	$\boldsymbol{(A-B)\cdot(B+A)}$ $A=\begin{pmatrix} 6 & 4 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 3 & -3 & 2 \end{pmatrix}, B=\begin{pmatrix} 3 & 6 & 7 \\ -1 & 1 & 4 \\ 2 & -3 & 2 \end{pmatrix}$
6	$\begin{cases} x_1+2x_2-2x_3=-7, \\ 4x_1-x_2+2x_3=12, \\ 2x_1+2x_2+x_3=6. \end{cases}$	$A=\begin{pmatrix} 4 & 1 & 7 \\ 0 & 1 & -5 \\ 5 & -5 & -3 \end{pmatrix}$	$\boldsymbol{B\cdot(2B+A)-A}$ $A=\begin{pmatrix} 4 & -1 & 3 \\ 3 & 0 & -3 \\ 1 & -2 & 6 \end{pmatrix}, B=\begin{pmatrix} 7 & 6 & 4 \\ 0 & 5 & 2 \\ -2 & 1 & -3 \end{pmatrix}$
7	$\begin{cases} x_1+2x_2-2x_3=7, \\ 4x_1+x_2+2x_3=-2, \\ 2x_1+2x_2+x_3=-1. \end{cases}$	$A=\begin{pmatrix} 5 & -2 & 3 \\ 3 & -5 & 3 \\ 8 & -4 & 0 \end{pmatrix}$	$\boldsymbol{0{,}5A+B\cdot A+2B}$ $A=\begin{pmatrix} 4 & 0 & -6 \\ 1 & -1 & 5 \\ 7 & 8 & -4 \end{pmatrix}, B=\begin{pmatrix} -3 & 2 & 1 \\ 7 & -7 & 2 \\ 6 & 4 & 5 \end{pmatrix}$
8	$\begin{cases} x_1+2x_2-2x_3=-3, \\ 4x_1+x_2+2x_3=14, \\ 2x_1+2x_2+x_3=10. \end{cases}$	$A=\begin{pmatrix} 1 & 4 & 0 \\ 2 & 6 & 8 \\ 0 & -3 & 1 \end{pmatrix}$	$\boldsymbol{B-A\cdot B+2A}$ $A=\begin{pmatrix} 0 & 8 & -2 \\ 7 & 2 & 3 \\ 3 & 4 & 2 \end{pmatrix}, B=\begin{pmatrix} -4 & 2 & 4 \\ 1 & 5 & 2 \\ 9 & -3 & 4 \end{pmatrix}$
9	$\begin{cases} 3x_1+2x_2-2x_3=-1, \\ 4x_1+4x_2-3x_3=2, \\ 5x_1+2x_2+x_3=3. \end{cases}$	$A=\begin{pmatrix} -2 & 7 & 9 \\ 6 & 4 & 4 \\ 9 & 6 & 0 \end{pmatrix}$	$\boldsymbol{A^2\cdot B+B-A}$ $A=\begin{pmatrix} 11 & 4 & 2 \\ 4 & 10 & 3 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, B=\begin{pmatrix} 4 & 6 & -12 \\ 8 & 9 & 1 \\ 2 & 4 & -7 \end{pmatrix}$
10	$\begin{cases} -3x_1+2x_2-x_3=-1, \\ x_1-2x_2-3x_3=-5, \\ 5x_1-2x_2+x_3=-1. \end{cases}$	$A=\begin{pmatrix} 3 & 2 & -2 \\ 2 & 5 & 1 \\ -1 & 4 & 0 \end{pmatrix}$	$\boldsymbol{B^2+A^2-2BA}$ $A=\begin{pmatrix} 4 & 0 & 1 \\ -3 & 7 & 0 \\ 1 & 9 & 2 \end{pmatrix}, B=\begin{pmatrix} 2 & 0 & 2 \\ 6 & -8 & 8 \\ 1 & 0 & 3 \end{pmatrix}$

Продолжение

Вари ант	Задание		
	1	2	3
11	$\begin{cases} x_1 - x_2 + 2x_3 = 3, \\ x_1 - 2x_2 + 3x_3 = 4, \\ 3x_1 - 3x_2 + x_3 = -1. \end{cases}$	$A = \begin{pmatrix} 7 & 1 & 7 \\ 1 & -1 & -6 \\ 4 & -5 & 0 \end{pmatrix}$	**$B + A + B^2 \cdot A$** $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 4 & 3 & 0 \\ 3 & -8 & 1 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 8 & 5 & -3 \\ 0 & 6 & 2 \\ 5 & -1 & 1 \end{pmatrix}$
12	$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = -4, \\ x_1 - 2x_2 + 3x_3 = -4, \\ 3x_1 + 3x_2 - 2x_3 = 3. \end{cases}$	$A = \begin{pmatrix} 2 & 7 & 3 \\ -1 & 5 & 1 \\ 2 & 1 & 5 \end{pmatrix}$	**$A^2 - B^2 \cdot A$** $A = \begin{pmatrix} 4 & 3 & 1 \\ -1 & 2 & 4 \\ 3 & 3 & 0 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 7 & 7 & 4 \\ -1 & 0 & 5 \\ 5 & 3 & 11 \end{pmatrix}$
13	$\begin{cases} 3x_1 - 8x_2 + 4x_3 = 11, \\ 2x_1 - 5x_2 + x_3 = 5, \\ 6x_1 - 9x_2 + 2x_3 = 2. \end{cases}$	$A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 6 \\ -4 & -7 & 1 \\ 4 & 7 & -2 \end{pmatrix}$	**$2B - 3A \cdot B$** $A = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 0 \\ 4 & 5 & 7 \\ 6 & 2 & 1 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 5 & 1 & 3 \\ 1 & 0 & 2 \\ 3 & 2 & 6 \end{pmatrix}$
14	$\begin{cases} 2x_1 - 3x_2 + x_3 = 9, \\ 2x_1 + 4x_2 - 2x_3 = 6, \\ 3x_1 - 2x_2 - 3x_3 = 9. \end{cases}$	$A = \begin{pmatrix} 5 & 7 & 3 \\ 6 & 5 & 7 \\ -6 & 0 & -4 \end{pmatrix}$	**$B + A^2 \cdot (A - B)$** $A = \begin{pmatrix} 4 & 3 & 1 \\ 6 & -3 & 9 \\ 2 & 0 & 6 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 9 & 0 & 7 \\ 4 & 6 & 2 \\ 3 & -2 & 5 \end{pmatrix}$
15	$\begin{cases} 6x_1 - 8x_2 - 5x_3 = 19, \\ 2x_1 - 3x_2 - 4x_3 = 13, \\ 3x_1 - 8x_2 + 2x_3 = -8. \end{cases}$	$A = \begin{pmatrix} -5 & 2 & 1 \\ 4 & 0 & 6 \\ 7 & -5 & 7 \end{pmatrix}$	**$(2B^2 + A^2) + A$** $A = \begin{pmatrix} 9 & 1 & 3 \\ 3 & -2 & 1 \\ 4 & -2 & 0 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 12 & 4 & 3 \\ 6 & -17 & 0 \\ 8 & 3 & 5 \end{pmatrix}$
16	$\begin{cases} x_1 - 2x_2 + 4x_3 = -7, \\ 2x_1 + 2x_2 - 4x_3 = 10, \\ 5x_1 - 2x_3 = 11. \end{cases}$	$A = \begin{pmatrix} 2 & -4 & -5 \\ 9 & 3 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix}$	**$(B - A)^2 + A - B$** $A = \begin{pmatrix} 4 & 4 & 5 \\ 3 & 0 & 2 \\ 8 & -2 & -6 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 3 & -2 & 5 \\ 2 & 0 & 9 \\ 7 & -3 & 4 \end{pmatrix}$
17	$\begin{cases} 2x_1 - x_2 + 2x_3 = -20, \\ 3x_1 - 4x_2 - 2x_3 = -15, \\ 2x_1 + x_2 - 6x_3 = 28. \end{cases}$	$A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 7 & 8 & -5 \\ -1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$	**$3B^2 \cdot (2A - B)$** $A = \begin{pmatrix} 2 & 8 & -7 \\ 6 & 1 & 4 \\ 8 & 6 & 0 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 3 & -3 & 1 \\ 9 & 6 & 0 \\ 5 & -1 & 8 \end{pmatrix}$

Продолжение

Вари ант	Задание		
	1	2	3
18	$\begin{cases}2x_1-3x_2=-5,\\5x_1-4x_2-x_3=15,\\x_1-2x_2+2x_3=-12.\end{cases}$	$A=\begin{pmatrix}8&-5&-1\\-8&11&0\\-4&1&5\end{pmatrix}$	$\boldsymbol{B+3(A-B)^2}$ $A=\begin{pmatrix}5&2&5\\0&6&4\\-2&9&-1\end{pmatrix}, B=\begin{pmatrix}0&1&-2\\6&9&3\\4&7&2\end{pmatrix}$
19	$\begin{cases}3x_1+7x_2-5x_3=-3,\\4x_1-2x_2+x_3=8,\\5x_1+x_2-4x_3=-11.\end{cases}$	$A=\begin{pmatrix}3&2&-5\\4&1&0\\1&-3&2\end{pmatrix}$	$\boldsymbol{B+A\cdot B-3B^2}$ $A=\begin{pmatrix}2&7&-4\\3&-1&2\\0&6&4\end{pmatrix}, B=\begin{pmatrix}8&3&3\\2&-5&2\\-3&1&0\end{pmatrix}$
20	$\begin{cases}3x_1-5x_2+x_3=3,\\2x_1+2x_2-5x_3=-4,\\3x_1-4x_2+2x_3=6.\end{cases}$	$A=\begin{pmatrix}1&2&1\\8&6&3\\2&-6&1\end{pmatrix}$	$\boldsymbol{B^2+\cdot(A-B)^2}$ $A=\begin{pmatrix}8&3&1\\3&6&0\\-5&2&4\end{pmatrix}, B=\begin{pmatrix}5&-1&2\\1&2&4\\6&-1&0\end{pmatrix}$
21	$\begin{cases}2x_1-9x_2+2x_3=1,\\2x_1-4x_2-5x_3=-8,\\2x_1-7x_2+x_3=1.\end{cases}$	$A=\begin{pmatrix}-2&6&1\\-2&0&1\\1&2&9\end{pmatrix}$	$\boldsymbol{B\cdot(A^2+2B)}$ $A=\begin{pmatrix}8&-2&0\\1&-5&4\\2&6&3\end{pmatrix}, B=\begin{pmatrix}-4&2&5\\6&0&4\\3&7&1\end{pmatrix}$
22	$\begin{cases}5x_1-9x_2-x_3=-13,\\4x_1+x_3=-5,\\3x_1-x_2+2x_3=0.\end{cases}$	$A=\begin{pmatrix}2&0&-2\\6&-3&8\\1&2&3\end{pmatrix}$	$\boldsymbol{B\cdot(A-B)-A+B}$ $A=\begin{pmatrix}1&2&3\\0&-4&7\\2&5&1\end{pmatrix}, B=\begin{pmatrix}6&2&4\\-1&0&2\\7&3&5\end{pmatrix}$
23	$\begin{cases}3x_1-2x_2+2x_3=10,\\2x_1+x_2-4x_3=-7,\\2x_1+2x_2-6x_3=-12.\end{cases}$	$A=\begin{pmatrix}3&5&1\\1&0&2\\2&2&-1\end{pmatrix}$	$\boldsymbol{(B^3\cdot A^2)+A}$ $A=\begin{pmatrix}1&3&-2\\6&5&2\\7&0&4\end{pmatrix}, B=\begin{pmatrix}4&3&5\\7&0&2\\1&5&2\end{pmatrix}$
24	$\begin{cases}2x_1+2x_2-6x_3=-10,\\4x_1-3x_2+5x_3=-7,\\6x_1+5x_2-9x_3=-15.\end{cases}$	$A=\begin{pmatrix}2&0&1\\6&5&3\\1&2&-6\end{pmatrix}$	$\boldsymbol{A\cdot(2A+2B)^2}$ $A=\begin{pmatrix}4&-3&2\\3&0&8\\6&3&7\end{pmatrix}, B=\begin{pmatrix}1&-7&-2\\2&1&0\\6&5&8\end{pmatrix}$

Окончание

Вариант	Задание		
	1	2	3
25	$\begin{cases}2x_1-2x_2+3x_3=3,\\ x_1-4x_2+4x_3=15,\\ 2x_1+x_2+x_3=-9.\end{cases}$	$A=\begin{pmatrix}7&2&4\\-4&0&1\\6&1&-8\end{pmatrix}$	**$(BA)^2 - B + A$** $A=\begin{pmatrix}2&0&-4\\1&9&6\\3&-2&5\end{pmatrix}, B=\begin{pmatrix}2&8&5\\5&7&9\\1&6&3\end{pmatrix}$
26	$\begin{cases}x_1+2x_2+x_3=4,\\ x_1+5x_2+x_3=10,\\ x_1-x_2-2x_3=-11.\end{cases}$	$A=\begin{pmatrix}5&1&1\\1&0&-2\\2&3&1\end{pmatrix}$	**$(A - B)\cdot(B + 3A)$** $A=\begin{pmatrix}3&7&0\\5&-4&1\\4&6&-2\end{pmatrix}, B=\begin{pmatrix}1&6&9\\1&2&3\\4&2&5\end{pmatrix}$
27	$\begin{cases}x_1+3x_2-x_3=-14,\\ 2x_1+5x_2+x_3=-15,\\ x_1+4x_2-x_3=-18.\end{cases}$	$A=\begin{pmatrix}5&1&1\\0&3&1\\2&2&1\end{pmatrix}$	**$A + 2B\cdot(A + B)$** $A=\begin{pmatrix}4&7&2\\1&1&-3\\5&2&3\end{pmatrix}, B=\begin{pmatrix}2&6&8\\1&0&3\\5&6&-7\end{pmatrix}$
28	$\begin{cases}2x_1-x_2+x_3=9,\\ x_1-3x_2-x_3=8,\\ 3x_1+4x_3=13.\end{cases}$	$A=\begin{pmatrix}2&9&1\\2&6&8\\1&4&1\end{pmatrix}$	**$2A + (A^2 + B)$** $A=\begin{pmatrix}4&4&-2\\3&8&-1\\4&1&7\end{pmatrix}, B=\begin{pmatrix}2&-1&-1\\0&8&3\\4&7&9\end{pmatrix}$
29	$\begin{cases}4x_1+2x_2=8,\\ x_1-3x_2-x_3=5,\\ x_1+x_2+4x_3=17.\end{cases}$	$A=\begin{pmatrix}7&6&5\\2&0&4\\5&0&4\end{pmatrix}$	**$A + (A - B)\cdot B$** $A=\begin{pmatrix}6&2&0\\-8&1&3\\3&5&1\end{pmatrix}, B=\begin{pmatrix}0&2&3\\1&0&5\\3&0&-9\end{pmatrix}$
30	$\begin{cases}3x_1-4x_2+2x_3=15,\\ 2x_1+4x_2-2x_3=0,\\ x_1+x_2-3x_3=4.\end{cases}$	$A=\begin{pmatrix}4&3&1\\2&6&8\\1&1&0\end{pmatrix}$	**$(A + B)\cdot(2B - A)$** $A=\begin{pmatrix}6&4&1\\1&1&-2\\3&4&2\end{pmatrix}, B=\begin{pmatrix}3&5&7\\7&-2&4\\0&-3&2\end{pmatrix}$

Вопросы для контроля

1. Определение матрицы. Правила выполнения действий над матрицами.
2. Определение системы линейных алгебраических уравнений (СЛАУ).
3. Определение решения СЛАУ.
4. Форма записи системы линейных алгебраических уравнений.
5. Случаи, когда СЛАУ имеет единственное решения, не имеет решения, имеет бесконечное множество решений.
6. Этапы схемы единственного деления метода Гаусса.
7. Описание первого шага прямого хода метода Гаусса. Условие его выполнимости.
8. Описание обратного хода метода Гаусса.
9. Недостатки схемы единственного деления метода Гаусса.
10. Вычисление определителя матрицы по методу Гаусса.
11. Решение методом Гаусса систем линейных уравнений с общей матрицей коэффициентов при неизвестных и произвольным числом столбцах свободных членов.
12. Понятие обратной матрицы. Связь между матрицей и обратной к ней матрицей. Вычисление обратной матрицы методом Гаусса.

Лабораторная работа № 2

Интерполяция функций

Цель работы: изучить понятие интерполяции, основные свойства интерполяционной функции, способы задания интерполяционной функции; понятие интерполяционного многочлена; изучить способы построения интерполяционного многочлена для случая равномерной и неравномерной сетки интерполяции; получить практические навыки решения задачи интерполяции с помощью ЭВМ.

Задания к работе

1. Найти область допустимых значений переменной x для функции $y = f(x)$ задания соответствующего варианта.
2. Составить таблицу значений функции $y = f(x)$, используя ($n \geq 6$) узлов интерполяции ($x_i \neq a$, где a точка, не являющаяся узлом интерполяционной сетке, в которой необходимо приближенно вычислить значение функции в соответствии с вариантом задания; $x_0 < a < x_n$).
3. По полученной таблице значений функции $y = f(x)$ составить интерполяционный многочлен Лагранжа для случаев линейной,

квадратичной и кубической интерполяции: $L_1(x)$, $L_2(x)$, $L_3(x)$.

Замечание. Интервал $(x_0,\ x_n)$, $n = 1, 2, 3$, используемый для построения интерполяционного многочлена Лагранжа должен содержать точку a.

4. По таблице значений функции составить интерполяционный многочлен Ньютона $I_{\text{n}}(x)$. При построении интерполяционного многочлена Ньютона необходимо использовать конечные разности для случая равномерной сетки интерполяции и разделенные разности для неравномерной сетки интерполяции. Можно построить таблицу значений функции для равномерной сетки, выполнить построение многочлена Ньютона с конечными разностями, затем убрать 1 значение из середины таблицы и выполнить построение многочлена Ньютона с разделенными разностями для получившейся неравномерной сетки интерполяции.
5. Вычислить точное значение функции $y = f(x)$ при $x=a$ ($y_T = f(a)$).
6. Вычислить приближенное значение функции при $x=a$ по всем полученным интерполяционным многочленам.
7. Определить абсолютную Δ и относительную δ погрешность вычисления значения функции для каждого интерполяционного многочлена (интерполяционные многочлены Лагранжа и Ньютона) при заданном значении $x=a$.
8. Построить в одной системе координат графики полученных интерполяционных функций (многочлены Лагранжа и Ньютона), исходной функции $y= f(x)$ и отметить значения функций в точке $x=a$.
9. Представить полученные результаты в виде таблицы (см. табл. 2.1).
10. Составить программу, реализующую вычисление приближенного значения функции в произвольной точке путем построения интерполяционного многочлена Ньютона для случая равномерной и неравномерной сетки.

Таблица 2.1. Оценка погрешности интерполяционного многочлена

	Многочлен Лагранжа			Многочлен Ньютона	
Погрешность	Линейная интерполяция	Квадратичная интерполяция	Кубическая интерполяция	Разделенные разности	Конечные разности
Δ					
δ					

Входные данные: значения узлов интерполяционной сетки x_i, значения функции в узлах интерполяции y_i. Предусмотреть возможность ввода значений с клавиатуры и из файла.

В программе выполняется проверка равномерности заданной интерполяционной сетки и в зависимости от результата используется метод конечных или разделенных разностей.

Результатом работы программы является таблица конечных или разделенных разностей и значение интерполяционного многочлена в произвольной точке $x=a$, удовлетворяющей условию: $x_0<a< x_n$.

Содержание отчета

1. Титульный лист.
2. Цель работы. Вариант задания.
3. Текст задания к работе.
4. Выполнение задания соответствующего варианта вручную полностью. Все действия выполняемые при решении задачи вручную расписывать подробно с указанием всех промежуточных операций. Указание только окончательного ответа не допускается.
5. Текст программы, включающий необходимые комментарии и спецификации подпрограмм.
6. Результаты работы программы.

Основные теоретические сведения

Пусть известно $(n+1)$ попарно различных точек x_0, $x_1,\dots$, x_n, для каждой из которых известно значение функции $y = f(x)$, то есть известны числа $y_\mathrm{i} = f(x_\mathrm{i})$, $i=0,\dots,n$.

Числа x_i называют узлами интерполяции, а набор точек x_i образует интерполяционную сетку на оси OX.

Интерполяционная сетка является равномерной с шагом $h > 0$, если

$$x_i = x_0 + ih, i = 0,\dots,n,$$

иначе — неравномерной.

Задача интерполяции состоит в поиске такой функции $g(x)$, что $f(x) \approx g(x)$ и $y_i = f(x_i) = g(x_i)$, где $x_0 \le x \le x_n$.

Функцию $g(x)$, как правило, выбирают в заранее определенном классе функций, например, $g(x)$ может быть многочленом. Для этого класса функций легко доказывается единственность такого интерполяционного многочлена, путем доказательства существования единственного решения для системы уравнений вида $y_i = g(x_i)$.

Рассмотрим несколько способов получения интерполяционного многочлена.

Интерполяционный многочлен Лагранжа. Интерполяционный многочлен Лагранжа имеет вид

$$L_n(x)=\sum_{j=0}^{n} y_j l_j^{(n)}(x) = y_0 l_0^{(n)}(x)+y_1 l_1^{(n)}(x)+\ldots y_n l_n^{(n)}(x).$$

Вспомогательный многочлен n-ой степени

$$l_j^{(n)}(x)=\frac{(x-x_0)(x-x_1)\ldots(x-x_{j-1})(x-x_{j+1})\ldots(x-x_n)}{(x_j-x_0)(x_j-x_1)\ldots(x_j-x_{j-1})(x_j-x_{j+1})\ldots(x_j-x_n)}.$$

$$l_j^{(n)}(x_i)=\begin{cases}1, & i=j\\ 0, & i\neq j\end{cases}$$

Интерполяционный многочлен Лагранжа степени 1, 2 и 3: линейная, квадратичная и кубическая интерполяция. При этом точки x_0, x_1,… выбираются вокруг точки $x=a$, в которой необходимо вычислить приближенное значение.

Интерполяционный многочлен Лагранжа хорош своей наглядностью, однако увеличение числа узлов интерполяции требует перевычисления всех ранее найденных значений.

Метод разделенных разностей.

Разделенными разностями k-го порядка называются числа

$$y(x_i, x_{i+1}, \ldots, x_{i+k})=\frac{y(x_{i+1},\ldots,x_{i+k})-y(x_i,\ldots,x_{i+k-1})}{x_{i+k}-x_i},\ i=0,1,\ldots,n-k.$$

Интерполяционный многочлен Ньютона с разделенными разностями имеет вид

$$I_n(x)=y_0+y(x_0,x_1)(x-x_0)+y(x_0,x_1,x_2)(x-x_0)(x-x_1)+$$
$$+y(x_0,x_1,x_2,x_3)(x-x_0)(x-x_1)(x-x_2)+\ldots..+y(x_0,x_1,x_2,\ldots,x_n)(x-x_0)(x-x_1)\ldots(x-x_{n-1}).$$

Метод разделенных разностей применяется для случая неравномерной сетки интерполяции. Полученные значения разделенных разностей записываются в табличной форме следом за столбцом, содержащем значения y_i.

Как видно из формулы интерполяционного многочлена с разделенными разностями построение будет выполняться по первым элементам таблицы разделенных разностей, начиная со значения y_0.

Многочлен Ньютона с разделенными разностями позволяет добавить в интерполяционную сетку узел x_{n+1} путем вычисления нескольких новых разностей, которые будут записаны в добавленной в табл. 2.2 еще одной строке и одном столбце, все остальные, рнее вычисленные значения сохраняются.

Таблица 2.2. Таблица разделенных разностей

<table>
<tr><td>i</td><td>x_i</td><td>y_i</td><td>$y(x_i, x_{i+1})$</td><td>$y(x_i, x_{i+1}, x_{i+2})$</td><td rowspan="8">…</td><td>$y(x_0, x_1, \dots, x_n)$</td></tr>
<tr><td>0</td><td>x_0</td><td>y_0</td><td>$y(x_0, x_1)$</td><td>$y(x_0, x_1, x_2)$</td><td rowspan="7">$y(x_0, x_1, \dots, x_n)$</td></tr>
<tr><td>1</td><td>x_1</td><td>y_1</td><td>$y(x_1, x_2)$</td><td>$y(x_1, x_2, x_3)$</td></tr>
<tr><td>2</td><td>x_2</td><td>y_2</td><td>$y(x_2, x_3)$</td><td>…….</td></tr>
<tr><td>…</td><td>…</td><td>…</td><td>…</td><td>$y(x_{n-2}, x_{n-1}, x_n)$</td></tr>
<tr><td>$n-1$</td><td>x_{n-1}</td><td>y_{n-1}</td><td>$y(x_{n-1}, x_n)$</td><td rowspan="2"></td></tr>
<tr><td>n</td><td>x_n</td><td>y_n</td><td></td></tr>
</table>

Метод конечных разностей. Конечными разностями (k+1)-го порядка называются следующие числа:

$$\Delta^{(k+1)} y_i = \Delta^{(k)} y_{i+1} - \Delta^{(k)} y_i, \ i = 0, 1, \dots, n-k-1.$$

Интерполяционный многочлен Ньютона с конечными разностями для интерполирования вперед имеет вид

$$I_n(x) = y_0 + \Delta y_0 t + \frac{\Delta^{(2)} y_0}{2!} t(t-1) + \frac{\Delta^{(3)} y_0}{3!} t(t-1)(t-2) + \dots + \frac{\Delta^{(n)} y_0}{n!} t(t-1)\dots(t-n+1),$$

$$t = \frac{x - x_0}{h}.$$

Интерполяционный многочлен Ньютона с конечными разностями для интерполирования назад имеет вид

$$I_n(x) = y_n + \Delta y_{n-1} q + \frac{\Delta^{(2)} y_{n-2}}{2!} q(q+1) + \frac{\Delta^{(3)} y_{n-3}}{3!} q(q+1)(q+2) + \dots + \frac{\Delta^{(n)} y_0}{n!} q(q+1)\dots(q+n-1),$$

$$q = \frac{x - x_n}{h}.$$

Пример 2.1. Найти приближенное значение функции $y(x)=ln(x)$, используя интерполяционный многочлен Лагранжа, при $x = a = 1,23$.

Решение:

Построим таблицу значений функции $y(x)=ln(x)$, с шагом 0,1 (см. табл. 2.3).

Таблица 2.3. Таблица значений функции *y*(*x*)=*ln*(*x*)

i	x_i	y_i
0	1	0
1	1,1	0,09531
2	1,2	0,182322
3	1,3	0,262364
4	1,4	0,336472

Используем линейную интерполяцию.

Выбираем в таблице значений 2.3 значения x_0 и x_1, так что $x_0 < a < x_1$.

Так как 1,2 < 1,23 < 1,3, то формируем новую таблицу значений (табл. 2.4).

Таблица 2.4. Таблица значений функции для линейной интерполяции

i	x_i	y_i
0	1,2	0,182322
1	1,3	0,262364

$$L_1(x)=\sum_{j=0}^{1} y_j l_j^{(n)}(x) = y_0 l_0^{(1)}(x)+y_1 l_1^{(1)}(x);$$

$$L_1(x)=y_0\frac{x-x_1}{x_0-x_1}+y_1\frac{x-x_0}{x_1-x_0};$$

$$L_1(1,23)=y_0\frac{x-x_1}{x_0-x_1}+y_1\frac{x-x_0}{x_1-x_0}=0,182322\frac{1,23-1,3}{1,2-1,3}+0,262364\frac{1,23-1,2}{1,3-1,2}=0,206334.$$

Определим погрешность вычисления:

$$y(1,23)=ln(1,23)=0,207014,$$

абсолютная погрешность вычисления:

$$\Delta = |ln(1,23)-L_1(1.23)| = |0,207014-0,206334| = 0,00068,$$

относительная погрешность вычисления

$$\delta=\frac{\Delta}{\ln(1.23)}100\%=0,328\%.$$

Аналогичные действия выполняем при построении многочлена Лагранжа второй и третьей степени, выбирая среди заданных значений функции x_0, x_1, x_2, x_3, так что $x_0 < a < x_n$.

Пример 2.2. Известна таблица значений (см. табл. 2.5) функции $y(x)$.

Таблица 2.5. Таблица значений неизвестной функции

i	x_i	y_i
0	-2	-25
1	0	3
2	1	8
3	2	23

Найти приближенное значений функции $y(x)$ в точке $x = 1,5$.

Решение:

Для определения приближенного значения функции в точке необходимо найти соответствующий этой функции интерполяционный многочлен.

Найдем интерполяционный многочлен Ньютона для функции $y(x)$, используя все известные значения, указанные в табл. 2.5. Ищем многочлен степени три.

Так как интерполяционная сетка неравномерная, то используем метод разделенных разностей.

Представим вычисленные значения разделенных разностей в виде таблицы (табл. 2.6).

Составим выражение для интерполяционного многочлена, используя первую строку значений разделенных разностей из таблицы 2.6.

Таблица 2.6. Таблица разделенных разностей

I	x_i	y_i	$y(x_i, x_{i+1})$	$y(x_i, x_{i+1}, x_{i+2})$	$y(x_0, x1, x_2, x_3)$
0	-2	-25	$\frac{3-(-25)}{0-(-2)}=14$	$\frac{5-14}{1-(-2)}=-3$	$\frac{5-(-3)}{2-(-2)}=2$
1	0	3	$\frac{8-3}{1-0}=5$	$\frac{15-5}{2-0}=5$	
2	1	8	$\frac{23-8}{2-1}=15$		
3	2	23			

На основании вычисленных значений разделенных разностей, формируем выражение для интерполяционного многочлена Ньютона, используя формулу для интерполирования вперед:

$$I_3(x) = -25 + 14(x-(-2)) + (-3)(x-(-2))(x-0) + 2(x-(-2))(x-0)(x-1);$$

$$I_3(x) = -25 + 14(x+2) - 3x(x+2) + 2x(x+2)(x-1);$$

$$I_3(x) = 2x^3 - x^2 + 4x + 3.$$

Определим приближенное значение функции $y(x)$ в точке:

$$y(1,5) \approx I_3(1,5) = 2 \cdot 1,5^3 - 1,5^2 + 4 \cdot 1,5 + 3 = 13,5.$$

Ответ: $y(1,5) \approx 13,5$.

Пример 2.3. Известна таблица значений (табл. 2.7) функции $y(x)$.

Таблица 2.7. Таблица значений неизвестной функции

i	x_i	y_i
0	-2	-25
1	-1	4
2	0	3
3	1	8

Найти приближенное значений функции $y(x)$ в точке $x = 1,5$.

Решение:

Так как интерполяционная сетка равномерная, то используем метод конечных разностей.

Представим вычисленные значения конечных разностей в виде таблицы (табл. 2.8).

Составим выражение для интерполяционного многочлена, используя первую строку значений конечных разностей из табл. 2.8.

Таблица 2.8. Таблица разделенных разностей

I	x_i	y_i	$y(x_i, x_{i+1})$	$y(x_i, x_{i+1}, x_{i+2})$	$y(x_0, x1, x_2, x_3)$
0	-2	-25	$4-(-25)=29$	$-1-29=-30$	$6-(-30)=36$
1	-1	4	$3-4=-1$	$5-(-1)=6$	
2	0	3	$8-3=5$		
3	1	8			

На основании вычисленных значений конечных разностей, формируем выражение для интерполяционного многочлена Ньютона, используя формулу для интерполирования вперед:

$$I_3(x) = -25 + 29t + \frac{-30}{2}t(t-1) + \frac{36}{6}t(t-1)(t-2); \qquad t = \frac{x-(-2)}{1} = x+2;$$

$$I_3(x) = -25 + 29t - 15t(t-1) + 6t(t-1)(t-2).$$

Определим приближенное значение функции $y(x)$ в точке:

$$t = 1,5 + 2 = 3,5; \quad I_3(1,5) = -25 + 29 \cdot 3,5 - 15 \cdot 3,5(3,5-1) + 6 \cdot 3,5(3,5-1)(3,5-2);$$

$$I_3(1,5) = -25 + 101,5 - 131,25 + 78,75 = 24.$$

Ответ: $y(1,5) \approx 24$.

Варианты заданий

Вариант	Функция $y = f(x)$	Значение a
1	$\cos(2x)$	35°
2	$\lg(x + 15)$	40
3	$0{,}5 \ln(x)$	25
4	$3 + \sin(x)$	46°
5	$4 \log_3(x)$	63
6	$2 + \lg(x – 4)$	28
7	$3 \log_2 x$	30
8	$\cos^2 x$	55°
9	$2\, tg\, x$	40°
10	$0.5 \lg x$	15
11	$2 \sec x$	64°
12	$\ln^2 x$	48
13	$cosec(x +2)$	38°
14	$- 2 \cos x$	27°
15	$- tg\, x$	5°
16	$\sin^4 x$	44°
17	$\log_3 x$	29
18	$tg(x^3)$	14°
19	$3 \cos^2 x$	48°
20	$4 \lg(x – 2)$	13
21	$\ln(x^{0.5})$	48
22	$\sec^3 x$	33°
23	$x + \lg x$	15
24	$\sin(5x) - 1$	28°
25	$\cos(4x) + 2$	21°
26	$\cos(3x)$	28°
27	$\lg(x -10)$	35
28	$2 \ln(x)$	15
29	$2 + \sin(x)$	35°
30	$3 \log_3(x)$	53

Примечание. $\sec x = 1 / (\cos x)$ — *секанс* x, $cosec\, x = 1 / (\sin x)$ — *косеканс* x

Вопросы для контроля

1. Понятие интерполяционного многочлена и его свойства.
2. Форма записи интерполяционного многочлена степени n.
3. Интерполяционный многочлен Лагранжа: понятие, форма записи.
4. Определение разделенных разностей: первого, второго, k-го

порядка.

5. Определение конечных разностей: первого, второго, k-го порядка.
6. Интерполяционный многочлен Ньютона: интерполирование вперед, интерполирование назад.
7. Увеличение числа узлов интерполяционной сетки.
8. Свойства конечных и разделенных разностей.
9. Погрешность интерполяционного многочлена.
10. Принцип Рунге для оценки погрешности вычислений.

Лабораторная работа № 3

Численное интегрирование

Цель работы: изучить понятие квадратурной формулы; изучить основные способы численного интегрирования; получить практические навыки решения задачи численного интегрирования с помощью ЭВМ.

Задания к работе

1. Вычислить «вручную» интегралы из таблицы вариантов заданий:

– точно (все 3 интеграла);

– по формуле центральных (средних) прямоугольников, используя для оценки точности двойной просчёт при n_1=8; n_2=10 (интеграл 1);

– по формуле трапеций при n=8 (интеграл 1 и 2);

– по формуле парабол (Симпсона) при n=8 (интеграл 1 и 3).

Замечание. Для вычисления значений «вручную» рекомендуется использовать Microsoft Excel или другую программу.

2. Определить погрешность вычисления интеграла 1 по каждой из формул. Результаты представить в виде табл. 3.1.

Таблица 3.1 Оценка погрешности вычислений

<table>
<tr><th rowspan="2">Погрешность</th><th colspan="2">Формула центральных прямоугольников</th><th rowspan="2">Формула трапеций n = 8</th><th rowspan="2">Формула парабол n = 8</th><th colspan="4">Формула Гаусса</th></tr>
<tr><th>n = 8</th><th>n = 10</th><th>n=1</th><th>n=2</th><th>n=3</th><th>n=4</th></tr>
<tr><td>Δ</td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td></tr>
<tr><td>δ</td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td></tr>
</table>

3. Описать в модуле функции, которые возвращают приближенные значения интегралов от функции $f(x)$ с оценкой точности по принципу Рунге для методов центральных прямоугольников, трапеций и парабол.

Исходными данными являются: подынтегральная функция $f(x)$; пределы интегрирования a, b; начальное число отрезков разбиения n; точность вычисления ε. Необходимые для работы значения подынтегральной функции вычисляются непосредственной подстановкой значений аргумента в вычислительную формулу функции.

4. Составить программу для вычисления приближенных значений интегралов согласно варианту (все функции из таблицы вариантов заданий) с использованием всех функций, описанныx в модуле.

5. Вычислить «вручную» интеграл из столбца 1 табл. 3.1 по формуле Гаусса при n = 2.

Значения узлов t_i и весов A_i приведены в табл. 3.2.

6. Описать в модуле функцию для вычисления приближенного значения интеграла от функции $f(x)$ по формуле Гаусса
при n = 1, 2, 3, 4.

Добавить в составленную программу вычисление приближенных значений интегралов (все функции из таблицы вариантов заданий) с использованием формулы Гаусса.

Таблица 3.2. Значение узлов и весов для формулы Гаусса

n	1	2	3	4
t_0 A_0	0 2	–0,5773502692 1	–0,7745966692 0,5555555556	–0.8611363115 0,3478548451
t_1 A_1		0,5773502692 1	0 0,8888888888	–0,3399810436 0,6521451549
$t2$ A_2			0,7745966692 0,5555555556	0,3399810436 0,6521451549
t_3 A_3				08611363115 0,3478548451

7. Заполнить значения погрешности вычисления интеграла 1 в таблице 3.1 для формулы Гаусса при n = 1, 2, 3, 4.

Содержание отчета

1. Титульный лист.
2. Цель работы. Вариант задания.
3. Текст задания к работе.
4. Выполнение задания соответствующего варианта вручную полностью. Все действия выполняемые при решении задачи вручную

расписывать подробно с указанием всех промежуточных операций. Указание только окончательного ответа не допускается.

5. Текст программы, включающий необходимые комментарии и спецификации подпрограмм.
6. Результаты работы программы.

Основные теоретические сведения

Определенный интеграл — это число, значение которого вычисляется по формуле Ньютона - Лейбница:

$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a),$$

где $F(a)$ — значение первообразной функции $f(x)$ в точке a; $F(b)$ — значение первообразной функции $f(x)$ в точке b.

Геометрический смысл определенного интеграла: определенный интеграл — это число, равное площади криволинейной трапеции.

Криволинейная трапеция — фигура, ограниченная сверху графиком положительной на отрезке $[a; b]$ функции $y = f(x)$, слева прямой $x = a$, справа прямой $x = b$, и снизу осью OX.

Однако в некоторых случаях вычисление определенного интеграла точно невозможно или требует достаточно много усилий. Поэтому возникает задача приближенного интегрирования.

Постановка задачи численного интегрирования: вычислить приближенное значение определенного интеграла функции $f(x)$ по отрезку $[a, b]$ с заданной точностью.

Для решения этой задачи можно использовать одну из представленных ниже вычислительных формул.

Выбираем число отрезков разбиения по отрезку $[a, b]$.

Построим на отрезке $[a, b]$ равномерную сетку с шагом h:

$$h = \frac{b-a}{n};$$
$$a = x_0 < x_1 < \ldots < x_n = b;$$
$$x_i = x_0 + ih;$$
$$y_i = f(x_i).$$

Квадратурная формула центральных прямоугольников.

$$\int_a^b f(x)dx \approx h\left(y_{\frac{1}{2}} + y_{\frac{3}{2}} + \ldots + y_{n-\frac{1}{2}}\right);$$

$$y_{i+\frac{1}{2}} = f\left(x_{i+\frac{1}{2}}\right);$$

$$x_{i+\frac{1}{2}} = x_0 + \left(i + \frac{1}{2}\right)h, \quad i = 0, 1, ..., n-1.$$

Квадратурная формула трапеций.

$$\int_a^b f(x)dx \approx h\left(\frac{y_0 + y_n}{2} + \sum_{i=1}^{n-1} y_i\right).$$

Квадратурная формула парабол.

$$\int_a^b f(x)dx \approx \frac{h}{3}\left(y_0 + y_{2m} + 4\left(y_1\, y_3 + ...y_{2m-1}\right) + 2\left(y_2 + y_4 + ... + y_{2m-2}\right)\right),$$

$n = 2m.$

Квадратурная формула Гаусса.

$$\int_a^b f(x)dx \approx \frac{b-a}{2}\sum_{i=0}^{n} A_i f\left(\frac{b+a}{2} + \frac{b-a}{2}t_i\right).$$

t_i — узлы квадратурной формулы Гаусса;
A_i — веса квадратурной формулы Гаусса (табл. 3).

Пример 3.1. Найти приближенное значение определенного интеграла по формуле центральных прямоугольников, трапеций и парабол.

$$\int_1^2 (x^4)dx - ?$$

Оценить погрешность найденного решения.

Решение:

Найдем значение определенного интеграла точно:

$$\int_1^2 (x^4)dx = \left.\frac{x^5}{5}\right|_1^2 = \frac{2^5}{5} - \frac{1^5}{5} = \frac{32}{5} - \frac{1}{5} = \frac{31}{5} = 6{,}2.$$

Вычислим значение определенного интеграла приближенно, используя формулы численного интегрирования. Составим таблицу значений подынтегральной функции с шагом 0,2.

Вычислим приближенное значение интеграла по формуле центральных прямоугольников для этого используем значения функции, вычисленные с половинным шагом (табл. 3.3).

Таблица 3.3. Таблица значений функции

i	$x_{i+1/2}$	$y_{i+1/2}$
0	1,1	1,4641
1	1,3	2,8561
2	1,5	5,0625
3	1,7	8,3521
4	1,9	13,0321
Сумма		30,7669

$$\int_1^2 (x^4)dx \approx I_{ц.п.} = 0,2\cdot\sum_{i=0}^{4} y_{i+\frac{1}{2}} = 0,2\cdot 30,7669 = 6,15338.$$

Определим погрешность вычисления по формуле центральных прямоугольников:

абсолютная погрешность вычисления

$$\Delta = |6,2 - 6,15338| = 0,04662,$$

относительная погрешность вычисления

$$\delta = \frac{\Delta}{6,2}100\% = 0,7519\%.$$

Вычислим приближенное значение определенного интеграла по формуле трапеций для этого используем значения функции, вычисленные с шагом 0,2 (табл. 3.4).

Таблица 3.4. Таблица значений функции

i	x_i	y_i
0	1	1
1	1,2	2,0736
2	1,4	3,8416
3	1,6	6,5536
4	1,8	10,4976
5	2	16

$$\int_1^2 (x^4)dx \approx I_{трап.} = 0,2\cdot\left(\frac{1+16}{2} + \sum_{i=1}^{4} y_i\right) = 0,2\cdot\left(8,5 + 22,9664\right) = 6,29328.$$

Определим погрешность вычисления по формуле трапеций:

абсолютная погрешность вычисления

$$\Delta = |6,2 - 6,29328| = 0,09328,$$

относительная погрешность вычисления

$$\delta = \frac{\Delta}{6,2}100\% = 1,505\%.$$

Вычислим приближенное значение определенного интеграла по формуле парабол для этого используем таблицу значений функции, содержащую четное число отрезков разбиения (табл. 3.5).

Таблица 3.5. Таблица значений функции

i	x_i	y_i
0	1	1
1	1,125	1,601807
2	1,25	2,441406
3	1,375	3,574463
4	1,5	5,0625
5	1,625	6,9729
6	1,75	9,378906
7	1,875	12,35962
8	2	16

$$\int_1^2 (x^4)dx \approx I_{параб.} = \frac{0,2}{3}\begin{pmatrix} 1+16+4\left(1,601807+3,574463+6,9729+12,35962\right)+ \\ +2\left(2,441406+5,0625+9,378906\right) \end{pmatrix} = 6,200033.$$

Определим погрешность вычисления по формуле трапеций

абсолютная погрешность вычисления

$$\Delta = |6,2 - 6,200033| = 0,000033,$$

относительная погрешность вычисления

$$\delta = \frac{\Delta}{6,2}100\% = 0,0005\%.$$

Пример 3.2. Найти приближенное значение определенного интеграла по формуле Гаусса:

$$\int_1^2 (x^4)dx - ?$$

Оценить погрешность найденного решения

Решение:

Вычислим приближенное значение определенного интеграла по формуле Гаусса с двумя узлами:

$$\int_a^b x^4 dx \approx \frac{2-1}{2}\sum_{i=0}^{1} A_i f\left(\frac{2+1}{2}+\frac{2-1}{2}t_i\right)=\frac{1}{2}\left(1\cdot f\left(\frac{3}{2}+\frac{1}{2}\left(-\frac{1}{\sqrt{3}}\right)\right)+1\cdot f\left(\frac{3}{2}+\frac{1}{2}\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)\right)\right)=$$

$$=\frac{1}{2}\left(f\left(1,211325\right)+ f\left(1,788675\right)\right)=\frac{1}{2}\left(2,152993+10,2359\right)=6,194444.$$

Определим погрешность вычисления по формуле трапеций:

абсолютная погрешность вычисления

$$\Delta = |6,2 - 6,194444| = 0,00556$$

относительная погрешность вычисления

$$\delta=\frac{\Delta}{6,2}100\%=0,08961\%.$$

Варианты заданий

Вариант	Определенный интеграл функции *f(x)*		
	1	2	3
1	$\int_0^3 (x^3+2)dx$	$\int_0^\pi \sin x dx$	$\int_0^1 \frac{1}{2}e^x dx$
2	$\int_{-2}^2 (x^2+2x)dx$	$\int_0^{\pi/2} \sin x dx$	$\int_0^1 (e^x+2)dx$
3	$\int_{-3}^{-2} (2x^2+3)dx$	$\int_0^{\pi/2} 2\sin x dx$	$\int_2^4 (2+\ln x)dx$
4	$\int_{-1}^2 (x^4+1)dx$	$\int_o^{\pi/3} \cos(2x)dx$	$\int_0^2 5^x dx$
5.	$\int_0^3 \left(x^2+x\right)dx$	$\int_0^\pi \cos x dx$	$\int_0^1 (5^x+2)dx$
6	$\int_{-2}^2 (2x^3+3x)dx$	$\int_0^{\pi/2} \cos x dx$	$\int_1^3 (2+\ln(2x))dx$
7	$\int_0^4 (x^5+1)dx$	$\int_0^{\pi/2} 2\sin x\cdot\cos x dx$	$\int_2^3 e^{2x}dx$
8	$\int_0^3 (x^3+x^2)dx$	$\int_0^{\pi/3} \cos(3x)dx$	$\int_0^2 (3^x+2)dx$

Продолжение

Вариант	Определенный интеграл функции *f(x)*		
	1	2	3
9	$\int_{-1}^{3}(x^4+4)dx$	$\int_{0}^{\pi/2}\cos(2x)dx$	$\int_{2}^{3}(\ln x-x)dx$
10	$\int_{1}^{5}(x^2+2x+1)dx$	$\int_{0}^{\pi}\sin x\cdot\cos x dx$	$\int_{0}^{1}(e^x+e)dx$
11	$\int_{0}^{4}(x^3-3x)dx$	$\int_{0}^{\pi/3}\cos(3x)dx$	$\int_{0}^{4}2^x dx$
12	$\int_{-2}^{2}(x^5-x)dx$	$\int_{0}^{\pi}\sin(2x)dx$	$\int_{2}^{3}(x+\ln x)dx$
13	$\int_{0}^{3}(x^4-x^2)dx$	$\int_{0}^{2\pi}\sin x dx$	$\int_{4}^{5}(e^{2x}-e)dx$
14	$\int_{0}^{4}(x^2-2x)dx$	$\int_{0}^{2\pi}\cos x dx$	$\int_{1}^{3}(\ln x+1)dx$
15	$\int_{1}^{5}(x^4-x+1)dx$	$\int_{\pi/6}^{\pi/2}\sin(2x)dx$	$\int_{2}^{5}(e^x-5)dx$
16	$\int_{2}^{6}(3x^4+5x)dx$	$\int_{\pi/6}^{\pi/2}\cos(2x)dx$	$\int_{1}^{2}(e^x+2e)dx$
17	$\int_{-1}^{3}(x^2-x)dx$	$\int_{\pi/6}^{\pi/3}\sin(2x)dx$	$\int_{1}^{3}(2^x-\ln x)dx$
18	$\int_{2}^{4}(2x^3-3x)dx$	$\int_{\pi/6}^{\pi/3}\cos(2x)dx$	$\int_{0}^{2}(e^{x+2}+1)dx$
19	$\int_{1}^{5}(x^5-1)dx$	$\int_{\pi/2}^{2\pi}\sin x dx$	$\int_{1}^{2}\ln(2x)dx$
20	$\int_{-2}^{2}2(x^3-x^2)dx$	$\int_{\pi/3}^{\pi}2\cos x dx$	$\int_{0}^{2}(2^x+e^x)dx$
21	$\int_{0}^{3}(x^3-x^2)dx$	$\int_{\pi/3}^{\pi}\sin x dx$	$\int_{0}^{2}3(5^x-1)dx$

Окончание

Вариант	Определенный интеграл функции *f(x)*		
	1	2	3
22	$\int_1^5 (x^2 - 2x + 3)dx$	$\int_0^{\pi/2} 3\cos x dx$	$\int_0^2 (2^x + e)dx$
23	$\int_{-2}^1 (6x^2 - 2x + 3)dx$	$\int_0^{\pi} \sin x \cdot \cos x dx$	$\int_1^2 (1 + \ln(2x))dx$
24	$\int_2^6 (3x^4 - 5x)dx$	$\int_0^{\pi/4} \sin(3x)dx$	$\int_3^5 (2^x + \ln x)dx$
25	$\int_1^4 (x^3 - 2)dx$	$\int_0^{\pi/4} \cos x dx$	$\int_2^4 (3e^x - e)dx$
26	$\int_0^3 (x^3 - 2)dx$	$\int_0^{2\pi} \sin x dx$	$\int_0^1 \frac{1}{3} e^x dx$
27	$\int_0^4 (x^2 + x)dx$	$\int_0^{\pi} 2\sin x dx$	$\int_0^1 (e^x + 3)dx$
28	$\int_1^2 (2x^2 + 4)dx$	$\int_0^{\pi/2} 2\sin x dx$	$\int_1^4 (3 + \ln x)dx$
29	$\int_2^4 (x^4 - 1)dx$	$\int_o^{\pi/4} 2\cos(2x)dx$	$\int_1^3 5^x dx$
30	$\int_1^4 (x^2 + 2x)dx$	$\int_0^{\pi} 3\cos x dx$	$\int_2^4 (5^x + 3)dx$

Вопросы для контроля

1. Понятие интеграла. Неопределенный и определенный интеграл.
2. Постановка задачи численного интегрирования.
3. Геометрический смысл определенного интеграла.
4. Формула центральных прямоугольников. Геометрическое обоснование.
5. Формула трапеций. Геометрическое обоснование.
6. Формула парабол. Геометрическое обоснование.
7. Квадратурная формула Гаусса.
8. Погрешность квадратурной формулы.

Лабораторная работа № 4

Численные методы решения задачи Коши

Цель работы: изучить численные методы решения задачи Коши; получить практические навыки приближенного решения дифференциальных уравнений с помощью ЭВМ.

Задания к работе

1. Вычислить «вручную» приближенное решение $y(x)$ задачи Коши методом последовательного дифференцирования.

Замечание. Ряд Тейлора ограничить значением производной третьего порядка.

2. Вычислить значение функции $\varphi(x)$, которая является точным решением задачи Коши и функции $y(x)$, которая является приближенным решением задачи Коши по методу последовательного дифференцирования, в точке $x = b$.

Замечание. $x = b$ – правый конец указанного в задании отрезка, которому принадлежит значение x, $a \le x \le b$,

$x = b = x_0 + ih$, $h>0$ — шаг сетки, $x_0 = a$.

3. Определить относительную и абсолютную погрешности вычисления приближенного решения задачи Коши методом последовательного дифференцирования.

Значения погрешностей внести в соответствующие ячейки таблицы 4.

4. Вычислить «вручную» приближенное решение $y(x)$ задачи Коши четырьмя численными методами решения:

– методом Эйлера;
– методом Эйлера-Коши;
– модифицированным методом Эйлера;
– методом Рунге-Кутты.

Сначала выполнить вычисления с шагом h = 0,2, а затем с шагом h = 0,1.

Вычисления вручную можно выполнить с помощью MS Excel или другой программы и *обязательно* их включать в отчет.

5. Сравнить полученные в пункте 4 значения приближенного решения дифференциального уравнения $y(x)$ с точным значением решения дифференциального уравнения $\varphi(x)$ в точке $x = b$.

6. Определить относительную и абсолютную погрешности вычисления приближенного решения задачи Коши заданными численными методами.

Значения погрешностей внести в соответствующие ячейки табл. 4.1.

7. Описать в модуле функции, каждая из которых возвращает приближенное значение решения задачи Коши:

$$\begin{cases} y' = f(x, y), \\ y(x_0) = y_0. \end{cases}$$

в точке $x = b$ с точностью ε, реализующие метод Эйлера, метод Эйлера-Коши, модифицированный метод Эйлера и метод Рунге-Кутты. Оценка точности вычисления должна осуществляться по принципу Рунге.

Таблица 4.1. Оценка погрешности численных методов решения задачи Коши

Погрешность	Вычислительный метод				
	Последовательного дифференцирования	Эйлера	Эйлера-Коши	Модифицированный метод Эйлера	Рунге-Кутта
h=0,2					
Δ					
δ					
h=0,1					
Δ					
δ					

8. Составить программу для вычисления приближенных значений решения задачи Коши с точностью ε на отрезке $[a, b]$ с шагом h для соответствующего варианта задания с использованием всех функций, описанных в модуле.

Результат работы программы таблица значений приближенного решения задачи Коши для заданного отрезка $a \le x \le b$.

Предусмотреть возможность сохранения результата работы программы в файл.

Основные теоретические сведения

Задачей Коши для дифференциального уравнения порядка m называется задача нахождения такого решения дифференциального уравнения: $y = y(x)$, которое удовлетворяет заданным m начальным условиям.

Приближенные методы задачи Коши делятся на численные и аналитические.

Метод последовательного дифференцирования

Решение $y = y(x)$ ищут в виде ряда Тейлора с центром в точке x_0:

$$y(x)=y(x_0)+y'(x_0)(x-x_0)+\frac{y''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2+\ldots+\frac{y^{(m)}(x_0)}{m!}(x-x_0)^m+\ldots$$

Производные порядка 0, 1, …, m находятся из начальных условий, а следующие вычисляются из данного дифференциального уравнения.

Для дифференциального уравнения первого порядка задача Коши имеет вид:

$$\begin{cases} y' = f(x, y), \\ y(x_0) = y_0. \end{cases}$$

Результат применения любого численного метода — это таблица значений:

x_i	y_i
x_0	y_0
x_1	y_1
…	…
x_n	y_n

y_i — приближенное значение решения задачи Коши в точке x_i,

$$x_i = x_0 + ih,\ i = 1,\ \ldots n.$$

h — шаг сетки, x_0 — начальное значение переменной x.

Метод Эйлера. Задано дифференциальное уравнение первого порядка и начальное условие $y(x_0) = y_0$.

Точки x_0, x_1, …, x_n образуют сетку на оси OX.

Если сетка неравномерна, то значения y_i находятся по формуле

$$y_{i+1}=y_i+f(x_i,y_i)(x_{i+1}-x_i),\ i=0,1,\ldots,n-1.$$

Если сетка равномерна, то значения y_i находятся по формуле

$$y_{i+1}=y_i+hf(x_i,y_i),\ i=0,1,\ldots,n;$$

$$x_i=a+ih=x_0+ih;$$

$$h=\frac{b-a}{n},$$

$[a, b]$ — отрезок на котором лежат точки x_0, x_1, …, x_n.

Метод Эйлера имеет первый порядок точности.

Метод Эйлера-Коши.

$$y_{k+1}^{Э-К}=y_k^{Э-К}+\frac{1}{2}h\left(f\left(x_k,y_k^{Э-К}\right)+f\left(x_k+h,y_k^{Э-К}+hf\left(x_k,y_k^{Э-К}\right)\right)\right),\ k=0,\ldots,n-1$$

Метод Эйлера-Коши имеет второй порядок точности.

Модифицированный метод Эйлера.

$$y_{k+1}^{МЭ} = y_k^{МЭ} + h\, f\left(x_k + \frac{h}{2}, y_k^{МЭ} + \frac{h}{2}\, f\left(x_k, y_k^{МЭ}\right)\right), \;\; k = 0,\ldots, n-1$$

Модифицированный метод Эйлера имеет второй порядок точности.
При i=0 получаем:

$$y_0^{Э-К} = y_0^{МЭ} = y_0 = y(x_0)$$

Метод Рунге-Кутты.

$$y_{k+1}^{РК} = y_k^{РК} + \frac{h}{6}\left(m_k^{(1)} + 2m_k^{(2)} + 2m_k^{(3)} + m_k^{(4)}\right), \;\; k = 0,\ldots, n-1$$

$$m_k^{(1)} = f\,(x_k, y_k);$$

$$m_k^{(2)} = f\left(x_k + \frac{h}{2}, y_k + \frac{h}{2} m_k^{(1)} \right);$$

$$m_k^{(3)} = f\left(x_k + \frac{h}{2}, y_k + \frac{h}{2} m_k^{(2)} \right);$$

$$m_k^{(4)} = f\left(x_k + h, y_k + h m_k^{(3)}\right).$$

Метод Рунге-Кутты имеет четвертый порядок точности.

Оценка погрешности. Практическая оценка погрешности численных методов решения задачи Коши выполняется по принципу Рунге.

После применения любой численной формулы вычисления с шагом h, уменьшаем шаг вдвое, и повторяем вычисления с шагом (h/2), получим два приближенных значения функции в одной и той же точке x_k.

Введем обозначение погрешности:

$$\delta = \frac{y_{k+1}^{(h/2)} - y_{k+1}^{(h)}}{2^p - 1},$$

$y_{k+1}^{(h/2)}, y_{k+1}^{(h)}$ – приближенные значения решения задачи Коши, вычисленные с шагом h и с шагом (h/2) на одном и том же отрезке $[x_0, x_n]$.

Вычисления выполняются пока полученная погрешность больше заданной точности. В итоге решение задачи Коши формируется в виде

$$y^T\,(x_{k+1}) \approx y_{k+1}^{(h/2)} + \delta.$$

Пример 4.1. Найдите приближенное решение задачи Коши методом последовательного дифференцирования:

$$\begin{cases} y' - 3x^2 = 0, \\ y(x_0) = y_0 = 3, \quad x_0 = 1. \end{cases}$$

Решение:

Найдем точное решение задачи Коши:

$$y' - 3x^2 = 0;$$
$$y' = 3x^2;$$
$$y(x) = \int 3x^2\, dx = 3\frac{1}{3}x^3 + C = x^3 + C.$$

Подставим начальное условие в найденное решение дифференциального уравнения:

$$y(1) = 1^3 + C = 3,$$
$$C = 2;$$
$$y^T(x) = x^3 + 2.$$

Найдено точное решение задачи Коши.

Найдем приближенное решение задачи Коши.

Запишем приближенное решение в виде ряда Тейлора, ограничившись производной третьего порядка:

$$y(x) \approx y^{П}(x) = y(x_0) + y'(x_0)(x - x_0) + \frac{y''(x_0)}{2!}(x - x_0)^2 + \frac{y'''(x_0)}{3!}(x - x_0)^3.$$

По условию задачи x_0 = 1 подставим это значение в отрезок ряда Тейлора:

$$y^{П}(x) = y(x_0) + y'(1)(x - 1) + \frac{y''(1)}{2!}(x - 1)^2 + \frac{y'''(1)}{3!}(x - 1)^3.$$

Вычислим значения необходимых производных в точке x_0 = 1.

Из условия задачи берем значение функции в точке x_0 = 1:

$$y(x_0) = y_0 = y(1) = 3.$$

Подставляем значение x_0 = 1 в первую производную функции:

$$y'(x_0) = y'(1) = = 3 \cdot 1^2 = 3.$$

Найдем вторую производную функции, выполнив дифференцирование первой производной:

$$y''(x) = (y'(x))' = (3x^2)' = 3 \cdot 2x = 6x;$$
$$y''(x_0) = y''(1) = 6 \cdot 1 = 6.$$

Найдем третью производную функции, выполнив дифференцирование второй производной:

$$y'''(x)=(y''(x))'=(6x)'=6\cdot 1=6;$$

$$y'''(x_0)=y'''(1)=6;$$

$$y^{П}(x)=3+3(x-1)+\frac{6}{2}(x-1)^2+\frac{6}{2\cdot 3}(x-1)^3=3+3(x-1)+3(x-1)^2+(x-1)^3;$$

$$y^{П}(x)=3+3x-3+3x^2-6x+3+x^3-3x^2+3x-1;$$

$$y^{П}(x)=x^3+2.$$

При заданных условиях было найдено точное решение задачи Коши методом последовательного дифференцирования.

Пример 4.2. Найдите приближенное решение задачи Коши в точки a = 2 методом Эйлера:

$$\begin{cases} y'-3x^2=0, \\ y(x_0)=y_0=3, \quad x_0=1. \end{cases}$$

Решение:

Формула метода Эйлера имеет вид

$$y_{i+1}=y_i+f\left(x_i,y_i\right)\left(x_{i+1}-x_i\right),\ i=0,1,...,n-1.$$

Вычислим шаг:

$$h=\frac{b-a}{n}=\frac{2-1}{5}=\frac{1}{5}=0,2.$$

Вычислим y_1 — приближенное значение функции $y(x)$ в точке x_1:

$$x_1 = x_0 + h = 1 + 0,2 = 1,2;$$

$$y_1 = y_0 + hf(x_0;\, y_0) = 3 + 0.2\cdot 3\cdot 1^2 = 3,6.$$

Вычислим y_2 — приближенное значение функции $y(x)$ в точке x_2:

$$x_2 = x_1 + h = 1,2 + 0,2 = 1,4;$$

$$y_2 = y_1 + hf(x_1;\, y_1) = 3,6 + 0.2\cdot 3\cdot 1,2^2 = 4,464.$$

Вычислим y_3 — приближенное значение функции $y(x)$ в точке x_2:

$$x_3 = x_2 + h = 1,4 + 0,2 = 1,6;$$

$$y_3 = y_2 + hf(x_2;\, y_2) = 4,464 + 0.2\cdot 3\cdot 1,4^2 = 5,64.$$

Аналогично вычисляем остальные приближенные значения, пока не доходим до заданной точки $x = a = 2$.

Точное решение функции было вычислено в примере 4.1.

Результаты вычислений оформим в виде таблицы, записав приближенные и точные значения (табл. 4.2).

Таблица 4.2. Таблица значений функции

i	x_i	y_i	$y_{i\ точное}$
0	1	3	3
1	1,2	3,6	3,728
2	1,4	4,464	4,744
3	1,6	5,64	6,096
4	1,8	7,176	7,82
5	2	9,12	10

Определим погрешность вычисления по формуле трапеций: абсолютная погрешность вычисления

$$\Delta = |10 - 9{,}12| = 0{,}88,$$

относительная погрешность вычисления

$$\delta = \frac{\Delta}{10}100\% = \frac{0{,}88}{10}100\% = 8{,}8\%.$$

Для увеличения точности решения необходимо уменьшить шаг h и повторить все вычисления еще раз.

Варианты заданий

Вариант	Задача Коши	Точное решение
1	$y' - \frac{3y}{x} = x^3 + x, \quad y\big\|_{x=1} = 3, \quad 1 \le x \le 2$	$\varphi(x) = x^4 - x^2 + 2x^3$
2	$y' - \frac{y}{x} = x^2, \quad y\big\|_{x=1} = 0, \quad 1 \le x \le 2$	$\varphi(x) = \frac{x^3 - x}{2}$
3	$y' - y\,\mathrm{ctg}x = 2x\sin x, y\Big\|_{x=\pi/2} = 0, \frac{\pi}{2} \le x \le \frac{\pi}{2} + 1$	$\varphi(x) = \left(x^2 - \frac{\pi^2}{4}\right)\sin x$
4	$y' - \frac{y}{x+2} = x^2 + 2x, \quad y\big\|_{x=-1} = 1.5, \ -1 \le x \le 1$	$\varphi(x) = \frac{(x^2+2)(x+2)}{2}$
5	$y' + y\,\mathrm{tg}x = \cos^2 x, y\Big\|_{x=\pi/4} = \frac{1}{2}, \frac{\pi}{4} \le x \le \frac{\pi}{4} + 1$	$\varphi(x) = \sin x \cdot \cos x$
6	$y' - \frac{1}{x+1}y = e^x(x+1), \quad y\big\|_{x=0} = 1, \quad 0 \le x \le 2$	$\varphi(x) = e^x(x+1)$

Продолжение

Вари ант	Задача Коши	Точное решение
7	$y' - \dfrac{y}{x} = x\sin x, \quad y\Big\|_{x=\pi/2} = 1, \quad \dfrac{\pi}{2} \le x \le \dfrac{\pi}{2} + 1$	$\varphi(x) = x\left(\dfrac{2}{\pi} - \cos x\right)$
8	$y' + \dfrac{y}{x} = \sin x, \quad y\Big\|_{x=\pi} = \dfrac{1}{\pi}, \quad \pi \le x \le \pi + 1$	$\varphi(x) = \dfrac{\sin x - x\cos x + 1 - \pi}{x}$
9	$y' + \dfrac{y}{2x} = x^2, \quad y\Big\|_{x=1} = 1, \quad 1 \le x \le 2$	$\varphi(x) = \dfrac{2}{7}x^3 + \dfrac{5}{7\sqrt{x}}$
10	$y' + \dfrac{2x}{1+x^2}y = \dfrac{2x^2}{1+x^2}, y\Big\|_{x=0} = \dfrac{2}{3}, 0 \le x \le 1$	$\varphi(x) = \dfrac{2(x^3+1)}{3(x^2+1)}$
11	$y' - \dfrac{2x-5}{x^2}y = 5, \quad y\Big\|_{x=2} = 4, \quad 2 \le x \le 4$	$\varphi(x) = x^2$
12	$y' + \dfrac{y}{x} = \dfrac{x+1}{x}e^x, \quad y\Big\|_{x=1} = e, \quad 1 \le x \le 2$	$\varphi(x) = e^x$
13	$y' - \dfrac{y}{x} = -2\dfrac{\ln x}{x}, \quad y\Big\|_{x=1} = 1, \quad 1 \le x \le 2$	$\varphi(x) = 2(\ln x + 1) - x$
14	$y' - \dfrac{y}{x} = -\dfrac{12}{x^3}, \quad y\Big\|_{x=1} = 4, \quad 1 \le x \le 2$	$\varphi(x) = \dfrac{4}{x^2}$
15	$y' + \dfrac{2y}{x} = x^3, \quad y\Big\|_{x=1} = -\dfrac{5}{6}, \quad 1 \le x \le 2$	$\varphi(x) = \dfrac{x^4}{6} - \dfrac{1}{x^2}$
16	$y' + \dfrac{y}{x} = 3x, \quad y\Big\|_{x=1} = 1, \quad 1 \le x \le 3$	$\varphi(x) = x^2$
17	$y' - \dfrac{2xy}{x^2+1} = x^2 + 1, \quad y\Big\|_{x=1} = 3, \quad 1 \le x \le 2$	$\varphi(x) = x^3 + 0.5x^2 + x + 0.5$
18	$y' + \dfrac{1-2x}{x^2}y = 1, \quad y\Big\|_{x=1} = 1, \quad 1 \le x \le 2$	$\varphi(x) = x^2\left(2e^{1/x-1} - 1\right)$
19	$y' + \dfrac{3y}{x} = \dfrac{2}{x^3}, \quad y\Big\|_{x=1} = 1, \quad 1 \le x \le 3$	$\varphi(x) = \dfrac{2}{x^2} - \dfrac{1}{x^3}$
20	$y' + 2xy = -2x^3, \quad y\Big\|_{x=1} = \dfrac{1}{e}, \quad 1 \le x \le 2$	$\varphi(x) = -x^2 + 1 + e^{-x^2}$

Окончание

Вари ант	Задача Коши	Точное решение
21	$y' + \dfrac{xy}{2(1-x^2)} = \dfrac{x}{2}, \quad y\Big\|_{x=0} = \dfrac{2}{3}, \quad 0 \le x \le 2$	$\varphi(x) = \sqrt[4]{1-x^2} - \dfrac{1}{3}(1-x^2)$
22	$y' + xy = -x^3, \quad y\|_{x=0} = 3, \quad 0 \le x \le 2$	$\varphi(x) = 1 - x^2 + e^{-x^2/2}$
23	$y' - \dfrac{2}{x+1} y = e^x (1+x)^2, \quad y\|_{x=0} = 1, 0 \le x \le 2$	$\varphi(x) = e^x (x+1)^2$
24	$y' + 2xy = xe^{-x^2} \sin x, \quad y\|_{x=0} = 1, \quad 0 \le x \le 1$	$\varphi(x) = e^{-x^2}(-x\cos x + \sin x + 1)$
25	$y' + \dfrac{2y}{x+1} = (1+x)^2, \quad y\Big\|_{x=0} = \dfrac{1}{2}, \quad 0 \le x \le 2$	$\varphi(x) = \dfrac{x^4}{2} + 2x^3 + 3x^2 + 2x + \dfrac{1}{2}$
26	$y' - y\cos x = -\sin 2x, y\|_{x=0} = 3, 0 \le x \le 2$	$\varphi(x) = 2(\sin x + 1) + e^{\sin x}$
27	$y' - 4xy = -4x^3, y\Big\|_{x=0} = -\dfrac{1}{2}, 0 \le x \le 2$	$\varphi(x) = 2x - 4xe^{2x^2}$
28	$y' - \dfrac{y}{x} = -\dfrac{\ln x}{x}, \quad y\|_{x=1} = 1, \quad 1 \le x \le 2$	$\varphi(x) = \ln x + 1$
29	$y' - y\cos x = \sin 2x, y\|_{x=0} = -1, 0 \le x \le 1$	$\varphi(x) = -2(\sin x + 1) + e^{\sin x}$
30	$y' - \dfrac{y}{x} = -\dfrac{2}{x^2}, \quad y\|_{x=1} = 1, \quad 1 \le x \le 2$	$\varphi(x) = \dfrac{1}{x}$

Вопросы для контроля

1. Определение дифференциального уравнения (ДУ). Порядок ДУ. Определение решения ДУ.
2. Постановка задачи Коши. Решение задачи Коши.
3. Понятие аналитического метода приближенного решения задачи Коши.
4. Понятие численного метода приближенного решения задачи Коши.
5. Метод последовательного дифференцирования.
6. Геометрический смысл метода Эйлера.
7. Методы второго порядка точности: формулы вычисления.
8. Метод Рунге-Кутты: формулы вычисления.

9. Относительная и абсолютная погрешность.
10. Применение принципа Рунге для достижения заданной точности. Приближенное значение функции в точке по методу Рунге.

Лабораторная работа № 5

Решение системы двух нелинейных уравнений с двумя неизвестными методом Ньютона

Цель работы: изучение и получение практических навыков приближенного решения систем двух нелинейных уравнений с двумя неизвестными методом Ньютона.

Задания к работе

1. Записать для уравнений системы соответствующего варианта задания функции $F(x, y)$ и $\Phi(x, y)$.

Построить в одной системе координат графики функций $F(x, y)$ и $\Phi(x, y)$.

Найти точки пересечения графиков функций $F(x, y)$ и $\Phi(x, y)$, которые соответствуют решениям системы уравнений.

2. Определить область содержащую одну из точек пересечения графиков функций $F(x, y)$ и $\Phi(x, y)$.

Выбрать начальное приближение решения системы уравнений — точку M_0 с координатами $(x_0; y_0)$, принадлежащую выбранной области.

3. Найти частные производные первого порядка по переменным x, y для функций $F(x, y)$ и $\Phi(x, y)$ и вычислить значения производных в точке M_0.

Записать линеаризованную систему, соответствующую исходной нелинейной системе, для выбранного начального приближения $M_0(x_0; y_0)$.

4. Выполнить один шаг численного метода решения системы двух нелинейных уравнений с двумя неизвестными «вручную» и найти следующее приближение к решению системы уравнений $(x_1; y_1)$.

Выполнить проверку правила остановки с точностью ε=0,001.

5. Описать в модуле логическую функцию для приближенного решения системы двух нелинейных уравнений с двумя неизвестными методом Ньютона с заданной точностью ε.

Входными данными являются:

- функции уравнений системы и их частные производные

$$\left(f(x, y), \partial f / \partial x, \partial f / \partial y\right), \left(g(x, y), \partial g / \partial x, g / \partial y\right);$$

- начальное приближение $(x_0; y_0)$;

- точность решения ε;
- максимальное число итераций n.

Функция возвращает значение «истина», если приближенное решение системы с заданной точностью получено за число итераций, не превышающее n, при этом вычисленная пара $(x; y)$ – приближенное решение системы двух уравнений с точность решения ε.

В противном случае функция возвращает значение «ложь».

6. Составить программу для решения системы двух нелинейных уравнений соответствующего варианта задания.

Основные теоретические сведения

Метод предназначен для поиска приближенного решения системы двух нелинейных уравнений с двумя неизвестными.

Канонический вид системы двух нелинейных уравнений с двумя неизвестными имеет вид

$$\begin{cases} F(x,y)=0, \\ \Phi(x,y)=0. \end{cases}$$

Предположим, что данная система уравнений имеет решение $M\,(x^{\mathrm{T}}, y^{\mathrm{T}})$.

Пусть известна точка $M_0(x_0,\ y_0)$ — точка, расположенная достаточно близко к точке M, решению системы уравнений.

Разложим функции $F(x, y)$ и $\Phi(x, y)$ в многочлен Тейлора с центром в точке $M_0(x_0, y_0)$, в итоге получим следующую систему уравнений:

$$\begin{cases} F(x_0,y_0) + \left.\dfrac{\partial F}{\partial x}\right|_{M_0} h + \left.\dfrac{\partial F}{\partial y}\right|_{M_0} l = 0, \\ \Phi(x_0,y_0) + \left.\dfrac{\partial \Phi}{\partial x}\right|_{M_0} h + \left.\dfrac{\partial \Phi}{\partial y}\right|_{M_0} l = 0, \end{cases}$$

$$h=(x-x_0), l=(y-y_0).$$

В итоге будет получена система двух линейных уравнений с двумя неизвестными h и l, которая будет иметь решение, если главный определитель системы не равен нулю:

$$\begin{cases} \left.\dfrac{\partial F}{\partial x}\right|_{M_0} h + \left.\dfrac{\partial F}{\partial y}\right|_{M_0} l = -F(x_0,y_0), \\ \left.\dfrac{\partial \Phi}{\partial x}\right|_{M_0} h + \left.\dfrac{\partial \Phi}{\partial y}\right|_{M_0} l = -\Phi(x_0,y_0). \end{cases}$$

Решив систему линейных уравнение, находим следующее приближение к решению исходной системы нелинейных уравнений по формуле:

$$\begin{cases} x_1 = x_0 + h, \\ y_1 = y_0 + l. \end{cases}$$

Проверяем полученную точку $M_1(x_1, y_1)$ на соответствие правилу остановки:

$$\left|F(x_1, y_1)\right| + \left|\Phi(x_1, y_1)\right| < \varepsilon,$$

где ε — заданная точность вычисления.

Если неравенство верно, то решение системы приближенно равно (x_1, y_1) с точностью ε, иначе повторяем вычисления, выполнив замену M_0 на M_1.

Вычисление выполняется до тех пор, пока не будет достигнута заданная точность вычисления решения, или не будет превышено заданное число итераций.

Пример 5.1. Найти приближенное решение системы двух нелинейных уравнений с двумя неизвестными:

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 4, \\ x^2 = y. \end{cases}$$

Решение:

Запишем выражение для функций, соответствующих уравнениям системы:

$$F(x, y) = x^2 + y^2 - 4;$$

$$\Phi(x, y) = x^2 - y.$$

Построим в одной системе координат графики указанных функций (рис. 5.1). По внешнему виду графиков функций можно сделать вывод, что система уравнений имеет решение, так как графики функций $F(x, y)$ и $\Phi(x, y)$ пересекаются.

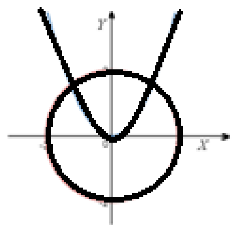

Рис. 5.1. График функций $F(x, y)$ и $\Phi(x, y)$

Вычислим частные производные функций $F(x, y)$ и $\Phi(x, y)$:

$$\frac{\partial F}{\partial x}=2x; \qquad \frac{\partial \Phi}{\partial x}=2x;$$

$$\frac{\partial F}{\partial y}=2y; \qquad \frac{\partial \Phi}{\partial y}=-1.$$

Выбираем начальное приближение к решению.

Пусть выбрана точка $(x_0; y_0) = (1,5; 1,5)$.

Найдем значения функций $F(x, y)$ и $\Phi(x, y)$ и их частных производных в начальной точке.

$$F(x_0;y_0)=x_0^2+y_0^2-4=1,5^2+1.5^2-4=0,5;$$

$$\Phi(x_0;y_0)=x_0^2-y=1,5^2-1.5=0,75;$$

$$\left.\frac{\partial F}{\partial x}\right|_{(x_0;y_0)}=2x_0=2\cdot 1,5=3; \qquad \left.\frac{\partial F}{\partial y}\right|_{(x_0;y_0)}=2y_0=2\cdot 1,5=3;$$

$$\left.\frac{\partial \Phi}{\partial x}\right|_{(x_0;y_0)}=2x_0=2\cdot 1,5=3; \qquad \left.\frac{\partial F}{\partial y}\right|_{(x_0;y_0)}=-1.$$

Введем обозначение:

$$\begin{cases} x_1=x_0+h, \\ y_1=y_0+l. \end{cases}$$

Составим систему линейных уравнений с неизвестными h и l:

$$\begin{cases} 3h+3l=-0,5, \\ 3h-l=-0,75. \end{cases}$$

Решим полученную систему линейных уравнений. Вычтем из первого уравнения системы второе:

$$\begin{cases} 3h+3l=-0,5, \\ 4l=0,25; \end{cases} \begin{cases} 3h=-0,5-3l=-0,5-3\cdot 0,0625=-0,6875, \\ l=0,0625; \end{cases} \begin{cases} h=-0,2292, \\ l=0,0625. \end{cases}$$

Вычисляем следующее приближение к решению системы:

$$\begin{cases} x_1=1,5+0,0625=1,5625, \\ y_1=1,5-0,2292=1,2708. \end{cases}$$

Проверим условие остановки:

$$F(x_1,y_1)=0,5634; \quad \Phi(x_1,y_1)=1,1706;$$

$$\left|F(x_1,y_1)\right|+\left|\Phi(x_1,y_1)\right|=\left|0,05634+1,1706\right|>\varepsilon=0.001.$$

Условие остановки не выполнено, значит необходимо продолжить вычисление. Выполняем все действия еще раз, выбрав в качестве начального приближения новую точку:

$$\begin{cases} x_0 = x_1 = 1,5625, \\ y_0 = y_1 = 1,2708. \end{cases}$$

Варианты заданий

Вариант	Система уравнений
1	$\begin{cases} \sin(x+1) - y = 0,5; \\ x^2 + y^2 = 1. \end{cases}$
2	$\begin{cases} \cos(x+1) - y = 0,5; \\ x^2 + y^2 = 1. \end{cases}$
3	$\begin{cases} \sin x + 2y = 2; \\ x^2 + y^2 = 1. \end{cases}$
4	$\begin{cases} \cos x + 2y = 2; \\ x^2 + y^2 = 1. \end{cases}$
5	$\begin{cases} \sin(x+1) - y = 2; \\ \cos(x-1) - y = 2. \end{cases}$
6	$\begin{cases} \sin(x+0,5) - 1,5y = 0; \\ x^2 + y^2 = 1. \end{cases}$
7	$\begin{cases} \sin(x-1) = 1,5 - y; \\ y - \sin(x+1) = 0,8. \end{cases}$
8	$\begin{cases} \sin(2x-0,5) - y = -2,5; \\ x^2 + y^2 = 4. \end{cases}$
9	$\begin{cases} \cos(2x+0,5) - y = 0,5; \\ \sin x - 2y = 1. \end{cases}$
10	$\begin{cases} \sin(4x) - 2,2y = 0,1; \\ x^2 + y^2 = 4. \end{cases}$
11	$\begin{cases} \sin(x-1,2) - 1,4y = -0,4; \\ x^2 + y^2 = 1. \end{cases}$
12	$\begin{cases} \sin(x-0,6) + 2y = 1,6; \\ y - \cos(2x+1) = 0,8. \end{cases}$
13	$\begin{cases} \sin(3x) = 1,1y - 0,1; \\ x^2 + y^2 = 2. \end{cases}$
14	$\begin{cases} \cos(x+0,5) - 3y = 2; \\ \sin x - 2y = 1. \end{cases}$
15	$\begin{cases} \sin(x-2) - y = 0; \\ x^2 + y^2 = \dfrac{9}{4}. \end{cases}$
16	$\begin{cases} \sin(x+6) - y = 1; \\ 2y + \cos x = 2. \end{cases}$
17	$\begin{cases} \sin(x+3) - 2,5y = 0; \\ x^2 + y^2 = 1. \end{cases}$
18	$\begin{cases} \sin x - 2y = 1,6; \\ \cos(x-3) - y = 1,1. \end{cases}$
19	$\begin{cases} \sin(x+1,2) = 1,2y - 1,2; \\ x^2 + y^2 = 4. \end{cases}$
20	$\begin{cases} \cos(x+1) - y = 2; \\ \sin(x-1) - y = 2. \end{cases}$

Окончание

Вариант	Система уравнений	Вариант	Система уравнений
21	$\begin{cases}\sin(2x+1)-y=-1{,}5\\2y+\cos x=2.\end{cases}$	26	$\begin{cases}\cos(4x+1)=1{,}5y-1{,}1;\\x^2+y^2=9.\end{cases}$
22	$\begin{cases}\sin(4x+1)=1{,}5y-1{,}1;\\x^2+y^2=9.\end{cases}$	27	$\begin{cases}\cos(4x)-2{,}2y=0{,}1;\\x^2+y^2=4.\end{cases}$
23	$\begin{cases}\sin x+2{,}5y=3;\\\cos(x-1)+y=0{,}9.\end{cases}$	28	$\begin{cases}\cos(4x+1)=1{,}4y-1{,}2;\\x^2+y^2=9.\end{cases}$
24	$\begin{cases}\sin(2x+0{,}1)=1{,}2y+0{,}1;\\x^2+y^2=1.\end{cases}$	29	$\begin{cases}\cos(x-1)=-1{,}5-y;\\y-\cos(4x+1)=0{,}8.\end{cases}$
25	$\begin{cases}\sin(x+0{,}5)-y=1;\\\cos(x-2)+y=0{,}1.\end{cases}$	30	$\begin{cases}\cos x-2y=1{,}6;\\\sin(x-3)-y=1{,}1.\end{cases}$

Вопросы для контроля

1. Определение системы уравнений.
2. Определение решения системы уравнений.
3. Понятие СЛАУ. Условие единственности решения СЛАУ.
4. Корень системы уравнений: графическая интерпретация.
5. Понятие частной производной функции нескольких переменных и ее вычисление.
6. Ряд Тейлора: понятие, вычислительные формулы.
7. Линеаризация системы двух нелинейных уравнений с двумя неизвестными.
8. Правила Крамера для решения системы линейных уравнений.
9. Выбор начального приближения к точному решению системы двух нелинейных уравнений с двумя неизвестными методом Ньютона.
10. Правило остановки для решения системы двух нелинейных уравнений с двумя неизвестными методом Ньютона.

Лабораторная работа № 6

Одномерная минимизация функции

Цель работы: изучить методы нахождения приближенного решения задачи одномерной минимизации функции одной переменной, и получить практические навыки их применения.

Задания к работе

1. Найти область определения заданной функции $y = f(x)$ и построить её график, используя равномерную сетку значений x_i (шаг сетки выбрать самостоятельно).

2. Найти промежутки унимодальности функции $y = f(x)$, используя построенный график.

3. Найти первую $y'=f'(x)$ и вторую $y''= f''(x)$ производные заданной функции $y = f(x)$.

4. Найти точное решение задачи одномерной минимизации — минимум функции $y = f(x)$, точку x^{T}, и минимальное значение функции $min\left(f(x^{\text{T}})\right)$.

5. Найти приближенное решение задачи одномерной минимизации, точку $\tilde{x}$ такую, что $x^{\text{T}} \approx \tilde{x}$ вручную, используя численные методы одномерной минимизации:

– метод оптимального поиска;

– метод, основанный на использовании чисел Фибоначчи;

– метод деления отрезка пополам;

с точностью ε =0,01.

Необходимые параметры методов выбрать самостоятельно.

Подробно «вручную» достаточно выполнить только первый шаг численного метода решения.

Окончательный результат вычислений может быть получен с помощью приложения MS Excel.

6. Определить абсолютную Δ и относительную δ погрешность решения задачи одномерной минимизации для каждого из используемых численных методов. Представить полученные результаты в виде таблицы (табл. 6.1).

7. Описать в модуле функции, которые возвращают приближенные значения минимума функции $y = f(x)$ для заданного промежутка унимодальности $X \subset \mathrm{R}$ с заданной точностью ε каждым из рассмотренных численных методов: метод оптимального поиска; метод, основанный на использовании чисел Фибоначчи; метод деления отрезка пополам.

8. Составить программу для вычисления приближенного решения задачи одномерной минимизации для заданного варианта задания с использованием функций, описанных в модуле.

Таблица 6.1. Оценка погрешности численных методов одномерной минимизации функции

Погрешность	Задача одномерной минимизации		
	метод оптимального поиска	метод чисел Фибоначчи	метод деления отрезка пополам
Δ			
δ			

Содержание отчета

1. Титульный лист.
2. Цель работы. Вариант задания.
3. Текст заданий к работе.
4. Выполнение заданий соответствующего варианта вручную полностью.
5. Вычисление точного решения задачи одномерной минимизации функции соответствующего варианта вручную. Вычисление приближенного решения задачи одномерной минимизации с помощью метода оптимального поиска; метода, основанный на использовании чисел Фибоначчи; метода деления отрезка пополам с точностью ε=0,001. Расписать один шаг применения формулы каждого численного метода подробно с подстановкой всех необходимых значений.
6. Текст программы, включающий необходимые комментарии и спецификации подпрограмм.
7. Результаты работы программы.

Основные теоретические сведения

Задача минимизации функции сводится к поиску минимального значения функции одной или нескольких переменных. Задача максимизации сводиться к задаче минимизации путем введения новой целевой функции $g(x) = - f(x)$.

Если изменяется один скалярный параметр x, то возникает задача одномерной минимизации.

Определение. Точка λ называется точкой глобального минимума функции $y = f(x)$ на множестве X, если для всех $x \in X$ выполняется неравенство: $f(\lambda) \le f(x)$.

Значение $f(\lambda)$ называется минимальным значением функции на множестве X.

Определение. Точка λ называется точкой локального минимума функции $y = f(x)$, если существует такая окрестность точки$(\lambda - \delta; \lambda + \delta)$, что для всех точек, принадлежащих этой окрестности выполняется неравенство: $f(\lambda) \leq f(x)$.

Пусть функция $y = f(x)$ — действительная функция одной переменной, определенная на множестве X.

Перед применением одного из методов минимизации функции необходимо определить отрезок $[a, b]$, который содержит точку минимума функции, и на котором она является единственной. Этот отрезок называется отрезком локализации точки минимума.

Одним из способов поиска отрезка локализации минимума функции является построение и анализ графика функции.

Определение. Функция $y = f(x)$ называется унимодальной на $[a, b]$, если существует такое число λ, принадлежащее отрезку $[a, b]$, что для всех $x \leq \lambda$ функция $y = f(x)$ убывает, а для всех $x > \lambda$ функция $y = f(x)$ возрастает.

Существует три случая расположения точки λ на отрезке $[a, b]$:

- точка λ является внутренней точкой отрезка;
- точка λ совпадает с левым краем отрезка;
- точка λ совпадает с правым концом отрезка.

Теорема. Если функция $y = f(x)$ дважды дифференцируема на отрезке $[a, b]$ и для всех $x \in [a, b]$: $f''(x) > 0$, то $y = f(x)$ унимодальная на отрезке $[a, b]$, то есть имеет единственную точку с наименьшим значением.

Теорема 1. Пусть функция $y = f(x)$ унимодальная на отрезке $[a, b]$, пусть выбраны две точки этого отрезка $a \leq \boldsymbol{\alpha} < \boldsymbol{\beta} \leq b$, вычислим значения функции в этих точках $f(\boldsymbol{\alpha})$ и $f(\boldsymbol{\beta})$:

- если $f(\boldsymbol{\alpha}) \leq f(\boldsymbol{\beta})$, то $\lambda \in [a, \boldsymbol{\beta}]$;
- если $f(\boldsymbol{\alpha}) > f(\boldsymbol{\beta})$, то $\lambda \in [\boldsymbol{\alpha}, b]$.

Таким образом, применив теорему 1 к выбранному отрезку, можно за один шаг отбросить часть выбранного отрезка, а затем к оставшейся части повторно применить теорему 1.

Ряд методов минимизации основан на сравнении значений функции $y = f(x)$, вычисленных в точках $x_1, x_2, \ldots, x_n$. Эти методы часто называют методами прямого поиска, а точки — пробными точками.

Оптимальный пассивный поиск. Метод решения задает правило вычисления сразу всех пробных точек $x_1, x_2, \ldots, x_n$ и за точку λ принимается та точка x_i, для которой значение функции будет наименьшим.

При этом справедлива следующая оценка погрешности:

$$\left|x^T - \lambda\right| \leq \max\left|x_i - x_{i-1}\right|,\ i = 0, \ldots, N+1,\ x_0 = a,\ x_{N+1} = b\,.$$

Пусть точки x_i расположены на отрезке $[a, b]$ равномерно с шагом h. Метод с таким выбором пробных точек называется оптимальным пассивным поиском.

При этом справедлива следующая оценка погрешности:

$$\left|x^T - \lambda\right| \le \frac{\Delta}{N+1} = \frac{b-a}{N+1} \cdot$$

Для достижения заданной точности вычисления должно выполняться следующее условие:

$$\frac{\Delta}{N+1} = \frac{b-a}{N+1} \le \varepsilon,$$

тогда

$$\frac{\Delta}{N+1} = \frac{b-a}{N+1} = \varepsilon;$$

$$N+1 = \frac{b-a}{\varepsilon}; \quad N = \left[\frac{b-a}{\varepsilon} - 1\right].$$

Метод деления отрезка пополам. Суть метода состоит в последовательном уменьшении отрезка унимодальности функции на основе теоремы 1.

Если функция унимодальная на некотором отрезке $[a, b]$, то она унимодальная на любом отрезке, входящем в отрезок $[a, b]$.

Пусть известен отрезок $[a, b]$, обозначим его как $[a^{(0)}, b^{(0)}]$. Поиск минимума функции $y = f(x)$ выполняется по следующим шагам:

1. Выбор на отрезке $[a^{(0)}, b^{(0)}]$ двух симметрично расположенных точек:

$$\alpha^{(0)} = \frac{a^{(0)} + b^{(0)}}{2} - \delta;$$

$$\beta^{(0)} = \frac{a^{(0)} + b^{(0)}}{2} + \delta, \ 0 < \delta < \frac{b-a}{2}.$$

2. Вычислить значения функции в выбранных точках: $f(\alpha^{(0)})$ и $f(\beta^{(0)})$.

3. Сравниваем полученные значения по теореме 1 и выбираем новый отрезок локализации точки минимума:

- если $f(\alpha^{(0)}) \le f(\beta^{(0)})$, то $\lambda \in [a^{(0)}, \beta^{(0)}] = [a^{(1)}, b^{(1)}]$,
- если $f(\alpha^{(0)}) > f(\beta^{(0)})$, то $\lambda \in [\alpha^{(0)}, b^{(0)}] = [a^{(1)}, b^{(1)}]$.

Вычисления продолжаются до тех пор, пока не будет выполнено правило остановки:

$$b^{(n)} - a^{(n)} = \Delta^{(n)} \leq \varepsilon;$$

$$x^T \approx \frac{a^{(n)} + b^{(n)}}{2}.$$

Метод деления отрезка пополам требует на каждой итерации вычисление двух новых значений функции.

Метод, основанный на использовании чисел Фибоначчи. Числа Фибоначчи вычисляются по формуле:

$$F_n = F_{n-2} + F_{n-1},\ n \geq 2,\ F_0 = F_1 = 1,$$

F_n: 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 89, 144, …

Пусть известен отрезок $[a^{(k)}, b^{(k)}]$, содержащий точку минимума функции, тогда вычисление внутренних точек этого отрезка выполняется по формуле:

$$\alpha^{(k)} = a^{(k)} + \frac{F_{N-k-1}}{F_{N-k+1}} \Delta^{(k)};$$

$$\beta^{(0)} = a^{(k)} + \frac{F_{N-k}}{F_{N-k+1}} \Delta^{(k)}.$$

Сравниваем полученные значения по теореме 1 и выбираем новый отрезок локализации точки минимума:

- если $f(\alpha^{(k)}) \leq f(\beta^{(k)})$, то $\lambda \in [a^{(k)}, \beta^{(k)}] = [a^{(k+1)}, b^{(k+1)}]$,
- если $f(\alpha^{(k)}) > f(\beta^{(k)})$, то $\lambda \in [\alpha^{(k)}, b^{(k)}] = [a^{(k+1)}, b^{(k+1)}]$.

В первом случае за очередное приближение к точке минимума функции принимают значение $x^{(k+1)} = \alpha^{(k)}$, во втором — $x^{(k+1)} = \beta^{(k)}$.

При этом справедлива следующая оценка погрешности:

$$\left| x^T - x^{(N-1)} \right| \leq \frac{1}{F_{N+1}} \Delta,$$

Где $x^{(N-1)}$ — точка последнего отрезка локализации точки минимума.

Метод «золотого сечения». *Определение.* Точка делит отрезок в «золотом сечении», если отношение длины всего отрезка к длине его большей части равно отношению длины большей части к длине меньшей части отрезка.

Известен отрезок $[a, b]$ длины l, пусть точки p и c делят этот отрезок в «золотом сечении», тогда:

$$c = a + \frac{\sqrt{5}-1}{2} l \approx a + 0,6l;$$

$$p = b - \frac{\sqrt{5}-1}{2} l = l + a - \frac{\sqrt{5}-1}{2} l = a + \frac{3-\sqrt{5}}{2} l \approx a + 0,4l.$$

В качестве внутренних точек отрезка локализации минимума выбираются точки p и c. Вычисляются значения функции в этих точках и выполняется их сравнение по теореме 1, аналогично уже рассмотренным методам.

Пример 6.1. Найти приближенное значение точки локального минимума функции $f(x) = x^3 - x + e^{-x}$ с точностью ε=0,1.

Решение:

Построим график функции $f(x)$ и определим отрезок локализации точки локального минимума функции (см. рис. 6.1).

Определим с помощью графика функции отрезки локализации двух точек минимума:

$$x_1 \in [-4, -3], \quad x_2 \in [0, 1]$$

Выполним поиск приближенного значения точки минимума методом оптимального пассивного поиска.

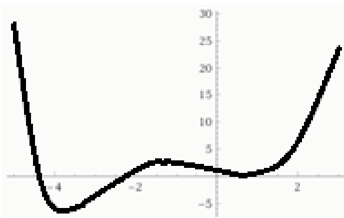

Рис. 6.1. График функции $f(x)$

Вычислим значение шага:

$$h = \frac{\Delta}{N+1} = \frac{b-a}{N+1} = \varepsilon; \quad (b-a) = \varepsilon(N+1);$$

$$(1-0) = 0,1 \cdot (N+1); \quad 0,1(N+1) = 1;$$

$$N+1 = 10; \quad N = 10; \quad h = \frac{1}{9+1} = 0,1$$

Строим таблицу значений функции $f(x)$ с шагом h (табл. 6.2).

Таблица 6.2. Таблица значений функции *f*(*x*)

i	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
x	0	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8	0,9	1
y	1	0,81	0,63	0,47	0,33	0,23	0,17	0,14	0,16	0,24	0,36

Выбираем в таблице минимальное значение функции:

$$\min\{f(x),\ x = x_i,\ \ i = 0,1,\ldots,10\} = f(x_7) = 0{,}14.$$

Значит приближенное значение точки локального минимума функции $f(x)$ с точностью ε равно x_7=0,7.

Пример 6.2. Найти приближенное значение точки локального минимума функции $f(x) = x^3 - x + e^{-x}$ с точностью ε=0,01 методом деления отрезка пополам.

Решение:

Выполним первый шаг метода деления отрезка пополам.

$$\alpha^{(0)} = \frac{a^{(0)} + b^{(0)}}{2} - \delta = \frac{0+1}{2} - \delta = 0{,}5 - 0{,}001 = 0{,}499;$$

$$\beta^{(0)} = \frac{a^{(0)} + b^{(0)}}{2} + \delta = \frac{0+1}{2} + \delta = 0{,}5 + 0{,}001 = 0{,}501;$$

$$0 < \delta < \frac{b-a}{2},\ \ \delta = 0{,}001;$$

$$f(\alpha^{(0)}) = f(0.499) = 0{,}232389;$$

$$f(\beta^{(0)}) = f(0.501) = 0{,}230676.$$

Применим теорему, и выберем новый отрезок локализации точки минимума:

$$f(\alpha^{(0)}) > f(\beta^{(0)}) \Rightarrow \left[a^{(1)}, b^{(1)}\right] = \left[\alpha^{(1)}, b^{(1)}\right] = [0.499,\ 1]$$

Проверим условие остановки метода:

$$\Delta = 1 - 0{,}499 = 0{,}501 > \varepsilon$$

Условие остановки не выполнено, значит, продолжаем вычисления.

В итоге будет выполнено 7 шагов метода.

На последнем шаге будет получен отрезок локализации точки минимума:

$$\left[a^{(7)}, b^{(7)}\right] = [0{,}701607,\ 0{,}719813];$$

$$x_{\min} \approx x_{np} = \frac{a^{(7)} + b^{(7)}}{2} = 0{,}70647;$$

$$f_{\min} \approx f(x_{np}) = 0{,}014012.$$

Приближенное значение точки локального минимума и минимальное значение функции найдены.

Варианты заданий

Вариант	Функция $y = f(x)$
1	$y=(x^2-4)(2x^2-3)$
2	$y=(4x^2-9)(x^2+1)$
3	$y=(2x+4)(x^3-8)$
4	$y=x^4+6x^2-x+2$
5	$y=x(x^3+2x)+1$
6	$y=x^2+10x+25$
7	$y=-(x^2+1)(x^2-4)$
8	$y=(2x^2-3x)(3x^2+6)$
9	$y=(2x^2-3x)(x^2-4)$
10	$y=(x-1)(x-2)$
11	$y=x^4+2x^2-3$
12	$y=(4x^2-16)(x^2-1)$
13	$y=x^4-3x^2-4$
14	$y=(x^2+9)x^2$
15	$y=(2x^2+3)(x^2+3)$

Вариант	Функция $y = f(x)$
16	$y=(x^2+2)(x^2-3)$
17	$y=(x^2+1)(x^2-9)$
18	$y=(2x^3+2)x$
19	$y=(x^2+1)(2x^2-3)$
20	$y=(x^2+2)^2$
21	$y=(x^2+6)(x^2-1)$
22	$y=(5x^2+8)x^2$
23	$y=-2(x^2+2)x^2$
24	$y=-x^4-4x^2-25$
25	$y=(x^4+9)$
26	$y=-(x^2+2)x^2$
27	$y=x^2(x^2-9)$
28	$y=x^4+2x^2+10$
29	$y=(x^2+8)(2x^2+4)$
30	$y=(x^2+3)(x^2-3)$

Вопросы для контроля

1. Постановка задачи одномерной минимизации.
2. Понятие локального и глобального минимума функции $y = f(x)$.
3. Понятие локального и глобального максимума функции $y = f(x)$.
4. Понятие унимодальности функции на отрезке.
5. Теорема об уменьшении отрезка локализации точки минимума функции.
6. Локализация минимума функции с помощью ее графика.
7. Метод оптимального поиска: понятие, вычислительные формулы.
8. Метод, основанный на использовании чисел Фибоначчи: понятие, вычислительные формулы.
9. Метод деления отрезка пополам: понятие, вычислительные формулы.
10. Метод «золотого сечения»: понятие, вычислительные формулы.

Лабораторная работа № 7

Минимизация функции многих переменных методом градиента с дроблением шага

Цель работы: изучить метод градиента с дроблением шага для решения задачи минимизации функции многих переменных и получить практические навыки его применения.

Задания к работе

1. Найти точные значения координат точки минимума и минимальное значение функции $y = f(x_1, x_2)$ для функции соответствующего варианта задания, используя необходимые и достаточные условия локального минимума.
2. Выполнить вручную вычисление приближенного значения точки минимума целевой функции методом градиента с дроблением шага, начиная с произвольно выбранного начального приближения M_0 (x_{10}, x_{20}). Точность решения $\varepsilon = 0{,}01$. Вручную подробно достаточно выполнить первый шаг метода градиента с дроблением шага. Параметры метода выбрать самостоятельно.
3. Реализовать логическую функцию для нахождения приближенного значения точки локального минимума и минимального значения целевой функции $y = f(x_1, x_2)$ методом градиента с дроблением шага.

Входными данными для логической функции являются:

- целевая функция $y = f(x_1, x_2)$;
- градиент целевой функции $grad\,(f(x_1, x_2))$;
- начальное приближение $M_0(x_{10}, x_{20})$ к точке локального минимума;
- точность решения ε;
- ограничение на максимальное число итераций n;
- параметры метода градиента с дроблением шага α, β, γ.

Функция возвращает значение «истина», если приближенное решение с заданной точностью получено за число итераций, не превышающее n, *и* «ложь» в противном случае.

Результат работы программы: приближенное значение точки локального минимума и минимальное значение целевой функции $y = f(x_1, x_2)$ с заданной точностью, количество выполненных итераций.

Предусмотреть возможность сохранения пошаговых результатов реализации метода градиента с дроблением шага в файл.

Содержание отчета

1. Титульный лист.
2. Цель работы. Вариант задания.
3. Текст заданий к работе.
4. Выполнение заданий соответствующего варианта вручную полностью. Вычисление градиента заданной функции. Определение стационарных точек функции. Составление и анализ матрицы Гессе. Точное значение координат точки локального минимума и минимального значения функции.

Выбор параметров метода градиента с дроблением шага α, β, γ и начального приближения M_0 к точке локального минимума функции. Вычисление значения функции в точке M_0.

Составление в методе градиента с дроблением шага неравенства и определение значения i_0, при котором оно выполниться впервые. Вычисление первого приближения M_1 к точке локального минимума функции.

Вычисление значения функции в точке M_1. Проверка условия остановки.

5. Текст программы, включающий необходимые комментарии и спецификации подпрограмм.
6. Результаты работы программы.

Основные теоретические сведения

Дана функция m ($m \geq 2$) действительных переменных $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$.

$$f(x_1, x_2, \ldots, x_n) = f(M) = f(\vec{x}) = u(M) = u(\vec{x})$$

Если функция $f(M)$ определена во всем m-мерном пространстве X, то возникает задача безусловной минимизации, иначе — условной минимизации.

Определение. Точка M^{T} называется точкой глобального минимума функции $f(M)$, если на всем множестве X справедливо неравенство $f(M^{\text{T}}) \leq f(M)$.

Значение функции $f(M^{\text{T}})$ называется минимальным значением функции на X.

Определение. Точка M^{T} называется точкой локального минимума функции $f(M)$, если существует такая окрестность U_δ этой точки, что для всех точек этой окрестности справедливо неравенство $f(M^{\text{T}}) \leq f(M)$.

Большинство методов безусловной минимизации служат для поиска точек локального минимума, а глобальный минимум выбирается из всех известных локальных минимумов.

Определение. Множество точек, для которых целевая функция принимает постоянное значение, называется поверхностью уровня.

Для дифференцируемой функции определен вектор из первых частных производных, называемый вектор-градиент:

$$\operatorname{grad} u(\vec{x}) = \left\{ \frac{\partial u}{\partial x_1}(\vec{x}), \frac{\partial u}{\partial x_2}(\vec{x}), \ldots, \frac{\partial u}{\partial x_m}(\vec{x}) \right\}.$$

Если в точке M градиент функции не равен нулю, то он указывает в точке M направление наискорейшего возрастания функции.

Точка M^{T} будет точкой строгого локального минимума, если выполняются два условия:

$$\text{- } \operatorname{grad} u\left(M^T\right) = \left\{ \frac{\partial u}{\partial x_1}\left(M^T\right), \frac{\partial u}{\partial x_2}\left(M^T\right), \ldots, \frac{\partial u}{\partial x_m}\left(M^T\right) \right\} = 0;$$

- матрица Гессе, составленная из вторых частных производных функции положительно определена.

Метод градиента с дроблением шага. Введем три параметра $\alpha > 0$, $\beta > 0$, $0 < \gamma < 1$

Рассмотрим неравенство

$$f\left(\vec{x}^{(0)} - \alpha\gamma^i \, grad\, u\left(\vec{x}^{(0)}\right)\right) - f\left(\vec{x}^{(0)}\right) < -\beta\alpha\gamma^i \left|grad\, u\left(\vec{x}^{(0)}\right)\right|^2, i = 0, 1, \ldots$$

Когда неравенство выполниться впервые, при i=-i_0, задается следующее приближение к точке минимума, точка M_1:

$$M_1 = \vec{x}^{(1)} = \vec{x}^{(0)} - \alpha\gamma^{i_0} \operatorname{grad} u\left(\vec{x}^{(0)}\right).$$

Правило остановки

$$\left| f(M_0) - f(M_1) \right| < \varepsilon,$$

Где ε — заданная точность вычисления.

Пример 7.1. Найти точку минимума функции от двух переменных $u(x_1, x_2)$:

$$u(x_1, x_2) = x_1^2 - 2x_1 + 2x_2^2 + 8x_2 + 4.$$

Решение:

Найдем значение вектора градиента функции $u(x_1, x_2)$:

$$\operatorname{grad} u(\vec{x}) = \left\{ \frac{\partial u}{\partial x_1}(\vec{x}), \frac{\partial u}{\partial x_2}(\vec{x}) \right\} = \{2x_1 - 2; 4x_2 + 8\}.$$

Решим уравнение:

$$\operatorname{grad} u(\vec{x}) = \vec{0}.$$

Вектор равен нулю, если каждая его компонента равна нулю, составим систему двух линейных уравнений с двумя неизвестными и решим ее:

$$\begin{cases} 2x_1 - 2 = 0, \\ 4x_2 + 8 = 0; \end{cases} \quad \begin{cases} 2x_1 = 2, \\ 4x_2 = -8; \end{cases} \quad \begin{cases} x_1 = 1, \\ x_2 = -2. \end{cases}$$

Получена стационарная точка функции $M(1; -2)$.

Составим матрицу Гессе, для этого необходимо вычислить частные производные второго порядка:

$$\Gamma = \left.\begin{pmatrix} \dfrac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} & \dfrac{\partial^2 u}{\partial x_1 x_2} \\ \dfrac{\partial^2 u}{\partial x_2 x_1} & \dfrac{\partial^2 u}{\partial x_2^2} \end{pmatrix}\right|_M = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}.$$

Найдем все левые угловые миноры матрицы Γ:

$$\Delta_1 = 2 > 0; \qquad \Delta_2 = \begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 4 \end{vmatrix} = 2 \cdot 4 - 0 \cdot 0 = 8 > 0.$$

Матрица Гессе положительно определена в точке $M(1; -2)$, значит стационарная точка $M(1; -2)$ является точкой локального минимума функции $u(x_1, x_2)$.

Пример 7.2. Найти приближенное значение точки минимума функции от двух переменных $u(x_1, x_2)$ методом градиента с дроблением шага.

$$u(x_1, x_2) = x_1^2 - 2x_1 + 2x_2^2 + 8x_2 + 4.$$

Решение:

Выбираем начальное приближение к точному значению точки локального минимума. Пусть это точка $M_0(0; 0)$.

Вычислим начальное значение функции в точке $M_0(0; 0)$;

$$u(0,0) = 0^2 - 2 \cdot 0 + 2 \cdot 0^2 + 8 \cdot 0 + 4 = 4.$$

Найдем значение вектора градиента функции в точке $M_0(0; 0)$:

$$\operatorname{grad} u(\vec{x}) = \{2x_1 - 2; 4x_2 + 8\} = \{2 \cdot 0 - 2; 4 \cdot 0 + 8\} = \{-2; 8\}.$$

Найдем квадрат модуля вектора градиента.

$$\left|\mathrm{grad}\, u\left(\vec{x}\right)\right|^2=\left(\sqrt{4+64}\right)^2=68.$$

Запишем выражение для следующего приближения к точке локального минимума:

$$\vec{x}^{(1)}=\vec{x}^{(0)}-\alpha\gamma^i grad\, u(\vec{x}^{(0)})=\{0;0\}-\alpha\gamma^i\{-2;8\}=\{0-\alpha\gamma^i(-2);0-\alpha\gamma^i 8\}=\{2\alpha\gamma^i;-8\alpha\gamma^i\}.$$

Составим неравенство метода градиента с дроблением шага.

$$f\left(\vec{x}^{(1)}\right)-f\left(\vec{x}^{(0)}\right)<-\beta\alpha\gamma^i\left|grad\, u\left(\vec{x}^{(0)}\right)\right|^2;$$

$$f\left(2\alpha\gamma^i;-8\alpha\gamma^i\right)-f\left(0;0\right)<-\beta\alpha\gamma^i 68;$$

$$f\left(2\alpha\gamma^i;-8\alpha\gamma^i\right)-4<-68\beta\alpha\gamma^i;$$

$$f\left(2\alpha\gamma^i;-8\alpha\gamma^i\right)-4=\left(2\alpha\gamma^i\right)^2-2\cdot 2\alpha\gamma^i+2\left(-8\alpha\gamma^i\right)^2+8\left(-8\alpha\gamma^i\right)+4-4;$$

$$f\left(2\alpha\gamma^i;-8\alpha\gamma^i\right)-4=132\alpha^2\gamma^{2i}-68\alpha\gamma^i.$$

После упрощения неравенство примет вид

$$132\alpha^2\gamma^{2i}-68\alpha\gamma^i<-68\beta\alpha\gamma^i.$$

Пусть α=1, β=0,5 и γ=0,5 (выбираем произвольно в указанных пределах).

Подставим выбранные параметры в неравенство:

$$132\left(0,5\right)^{2i}-68(0,5)^i<-68(0,5)(0,5)^i.$$

Разделим обе части неравенства на число 4:

$$33\left(0,5\right)^{2i}-17(0,5)^i<-17(0,5)(0,5)^i.$$

Перенесем правую часть неравенства влево и упростим:

$$33\left(0,5\right)^{2i}-17(0,5)^i+17(0,5)(0,5)^i<0;$$

$$33\left(0,5\right)^{2i}-17(0,5)(0,5)^i<0;$$

$$33\left(0,5\right)^{2i}<17(0,5)^{i+1}\Big|\ :(0,5)^{i+1};$$

$$33(0,5)^{2i-i-1}<17;$$

$$33(0,5)^i<8,5.$$

Подставляем в полученное неравенство значения i=0, 1, …, пока оно не выполниться впервые.

$i=0:\ 33(0,5)^0<8,5;\quad 33<8,5-$ *ложно*;

$i=1:\ 33(0,5)^1<8,5;\quad 16,5<8,5-$ *ложно*;

$i=2:\ 33(0,5)^2<8,5;\quad 8,25<8,5-$ *верно*.

Неравенство выполнено. Вычисляем значение первого приближения к точке локального минимума:

$$M_1 = \vec{x}^{(1)} = \left\{2\alpha\gamma^i; -8\alpha\gamma^i\right\} = \left\{2\cdot 1\cdot 0,5^2; (-8)\cdot 1\cdot 0,5^2\right\} = \left\{0,5; -2\right\}.$$

Найдем значение функции в точке M_1.

$$u(0,5;\,-2) = 0,5^2 - 2\cdot 0,5 + 2\cdot(-2)^2 + 8\cdot(-2) + 4 = -4,75.$$

Проверим условие остановки.

$$\left| f\left(M_0\right) - f\left(M_1\right)\right| = \left|-4,75 - 4\right| = 8,75 > \varepsilon = 0,01.$$

Условие остановки не выполнено, значит необходимо взять в качестве начального приближения точку M_1 и повторить все вычисления еще раз.

Варианты заданий

Вариант	Функция $y = f(x_1, x_2)$
1	$f(x_1, x_2) = 2x_1^4 + 4x_2^4 - 3x_1x_2 + 2$
2	$f(x_1, x_2) = x_1^2 - 3x_2^2 + 4x_1x_2 + 5$
3	$f(x_1, x_2) = x_1^2 + x_2^2 - 2x_1 + 2x_2$
4	$f(x_1, x_2) = x_1^4 + x_2^2 - 2x_2 - x_1 + 5$
5	$f(x_1, x_2) = x_1^2 + x_2^2 + 2x_1 - 3x_2 + 4$
6	$f(x_1, x_2) = x_1^2 + 2x_2^2 + 2x_1 - 2x_2 + 3$
7	$f(x_1, x_2) = x_1x_2 + x_1^2 - 10x_2^2 + 1$
8	$f(x_1, x_2) = x_1^2 + x_2^2 - x_1x_2 + 2x_1 - 4x_2$
9	$f(x_1, x_2) = x_1^2 + x_2^2 + 6x_1x_2 + 4x_1 - 4x_2 + 1$
10	$f(x_1,x_2) = x_1^2 + x_2^2 + 3x_2 - 3x_1 + 8$
11	$f(x_1,x_2) = 2x_1^2 + 3x_2^2 + x_1x_2 + x_1 + x_2 + 2$
12	$f(x_1,x_2) = x_1^2 + x_2^2 - x_1x_2 + 6x_1 - 3x_2 + 3$
13	$f(x_1,x_2) = x_1^2 - 6x_1 + x_2^2 - 4x_2 + 4 + 4x_1x_2$
14	$f(x_1,x_2) = 4x_1^2 + 6x_2^2 - x_1 - 2x_2 - 2$
15	$f(x_1,x_2) = 2x_1^2 + 2x_2^2 - x_1x_2 - x_1 + x_2 + 2$
16	$f(x_1,x_2) = x_1^3 + x_2^2 - 12x_1x_2 - 19x_1 + 8x_2 + 20$
17	$f(x_1,x_2) = 3x_1^2 + 2x_2^2 - 5x_1x_2 + 1$
18	$f(x_1,x_2) = (x_1^2 + x_2^2)^2 + 2$
19	$f(x_1,x_2) = 2x_1^2 + x_2^2 - 4x_1 - 8x_2 + 2$
20	$f(x_1,x_2) = x_1^4 - x_2^4 + 4x_1^2 + x_2^2 + 3$

Окончание

Вариант	Функция $y = f(x_1, x_2)$
21	$f(x_1,x_2) = x_1^2 + x_2^2 + 2x_1x_2 - 2x_1 - 4x_2 + 8$
22	$f(x_1,x_2) = 5x_1^4 + 4x_2^2 - 4x_1x_2^2 - x_2 + 6$
23	$f(x_1,x_2) = x_1^2 - x_2^2 + x_1x_2 - x_1 - 2x_2 + 5$
24	$f(x_1, x_2) = 4x_1^2 + 3x_2^2 + 8x_1x_2 + 6x_1 - 5x_2 + 8$
25	$f(x_1, x_2) = 3(x_1^2 + x_2^2) + 4(x_2 + x_1) + 7$
26	$f(x_1, x_2) = 2x_1^2 + 3x_2^2 + 5x_1x_2 + 3x_1 - 5x_2 + 2$
27	$f(x_1,x_2) = 3x_1^4 - 6x_1^4 + 4x_2^2 - 2x_1^2 - 5$
28	$f(x_1, x_2) = 4x_1^4 + 2x_2^4 - 6x_1x_2 + 5$
29	$f(x_1,x_2) = x_1^4 + x_1^2 - 5x_2^2 + x_1x_2 - 3$
30	$f(x_1,x_2) = 2x_1^2 - 3x_1 + 2x_2^2 - 8x_2 + 2$

Вопросы для контроля

1. Определение точки локального минимума функции m переменных.
2. Определение точки глобального минимума функции m переменных.
3. Понятие окрестности точки в m-мерном пространстве.
4. Понятие поверхности уровня для целевой функции.
5. Определение градиента функции m переменных
6. Условие локального минимума функции m переменных.
7. Метод наискорейшего спуска: параметры, формула вычисления приближенного значения минимума функции, правило остановки.
8. Метод градиента с дроблением шага: параметры, формула вычисления приближенного значения минимума функции, правило остановки.

Лабораторная работа № 8

Комбинированный метод решения нелинейных уравнений

Цель работы: изучить методы нахождения приближенного решения нелинейного уравнения с заданной точностью и получить практические навыки применения комбинированного метода.

Задание к работе

1. Найти область определения, провести исследование и построить график функции, соответствующей заданному уравнению.
2. Определить корни уравнения графически по построенному графику функции, соответствующей уравнению.
3. Выбрать отрезок локализации корня уравнения $[a, b]$, используя построенный график.
4. Доказать выполнение условий применимости комбинированного метода нахождения приближенного решения уравнения для выбранного отрезка локализации корня $[a, b]$.
5. Выбрать неподвижную точку метода хорд и начальное приближение для метода хорд и для метода касательных.
6. Вычислить вручную комбинированным методом один корень уравнения с точностью $\varepsilon = 0{,}1$.
7. Разработать функцию, которая возвращает приближенное значение корня заданного уравнения, вычисленное комбинированным методом на заданном отрезке локализации корня [a, b] с заданной точностью ε.
8. Найти с помощью разработанной программы приближенное решение уравнения комбинированным методом с заданной точностью $\varepsilon = 0{,}0001$
9. Выполните подстановку полученного приближенного решения в соответствующее уравнение, сравните полученный результат с точным.

Содержание отчета

1. Титульный лист.
2. Цель работы. Вариант задания.
3. Текст заданий к работе.
4. Выполнение заданий соответствующего варианта вручную полностью. Включение в отчет всех этапов анализа функции и построения ее графика. Обоснование выбора отрезка локализации корня. Выполнение первого шага комбинированного метода постностью и включение его в отчет, последующие шаги можно выполнять с помощью разработанной программы и включить в отчет только найденное приближенное значение решения уравнения.
5. Текст программы, включающий необходимые комментарии и спецификации подпрограмм.
6. Результаты работы программы.

Основные теоретические сведения

Канонический вид нелинейного уравнения с одним неизвестным $f(x) = 0$.

Большинство методов приближенного решения уравнения с одним неизвестным включают два этапа:

1. Локализация корней уравнения,
2. Поиск локализованного корня уравнения с заданной точностью.

При выполнении этапа локализации корня уравнения используются две теоремы.

Теорема 1. Пусть функция $f(x)$ непрерывна на отрезке $[a, b]$ и ее значения на концах этого отрезка имеют разные знаки, тогда отрезок $[a, b]$ содержит хотя бы один корень уравнения $f(x) = 0$.

Теорема 2. Пусть функция $f(x)$ непрерывна на отрезке $[a, b]$, дифференцируема на интервале (a, b) и имеет на концах отрезка $[a, b]$ значения разных знаков. Если первая производная функции $f'(x)$ сохраняет свой знак на интервале (a, b), то корень уравнения $x = c$, существующий по теореме 1, единственный на интервале (a, b).

Одним из способов локализации корня является графический, при котором решение уравнения находят путем построения и анализа графика соответствующей функции.

Определение. Число λ называется приближенным значением корня уравнения $x = c$ с точностью ε, если выполняется неравенство $|c - \lambda| \leq \varepsilon$. $(c \approx \lambda)$ Таких чисел существует бесконечное множество.

На этапе поиска локализованного корня может быть использован метод хорд и метод касательных. Если применять указанные методы попеременно, то будет получен комбинированный метод решения нелинейного уравнения с одним неизвестным.

Метод хорд. Пусть на отрезке $[a, b]$ выполнены условия:

1) значения функции $y = f(x)$ имеют разные знаки на концах отрезка $[a, b]$, то есть $f(a)\cdot f(b) < 0$;

2) первая и вторая производные функции $y = f(x)$ сохраняют каждая свой знак на отрезке $[a, b]$.

Тогда возможно ситуация, представленная на рис. 8.1, на отрезке $[a, b]$ существует единственный корень уравнения $f(x) = 0$.

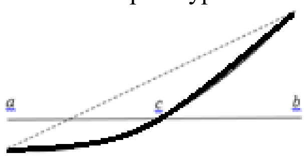

Рисунок 8.1. Метод хорд

Соединим концы графика функции $y = f(x)$ в точках a и b, в итоге получим хорду, пересекающую отрезок $[a, b]$ в некоторой точке x_1, которая является первым приближением к точному значению корня уравнения $f(x) = 0$ точке $x = c$.

При этом на отрезке $[a, b]$ выделяют неподвижную точку — тот конец отрезка, для которого знак функции и знак второй производной совпадают, и нулевое приближение к корню — другой конец отрезка $[a, b]$.

Алгоритм метода хорд:

t — неподвижная точка;

x_0 — начальное приближение к корню уравнения.

Если значение функции и ее второй производной имеют один и тот же знак в точке $x = a$, то $t = a$, $x_0 = b$, иначе $t = b$, $x_0 = a$.

До тех пор, пока не будет достигнута заданная точность решения, выполняем вычисление следующего приближения к корню по формуле

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)(t - x_n)}{f(t) - f(x_n)}, \; n = 0, 1, 2, \ldots$$

Метод касательных (Ньютона). Пусть выполняются все условия применения метода хорд. Выбираем на отрезке $[a, b]$ некоторую точку, и выполняем построение касательной к графику функции $y = f(x)$ в этой точке. Точка пересечения построенной касательной с осью OX — первое приближение к точному значению корня уравнения $f(x) = 0$ точке $x = c$.

До тех пор, пока не будет достигнута заданная точность решения, выполняем вычисление следующего приближения к корню по формуле:

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}, \; n = 0, 1, 2, \ldots$$

Комбинированный метод. Если в качестве начального приближения метода касательных выбрать неподвижную точку метода хорд, то можно получить метод, в котором будут попеременно применяться метод касательных и метод хорд, который называется комбинированным методом.

Алгоритм комбинированного метода

Если значение функции и ее второй производной имеют один и тот же знак в точке $x = a$, то x_0_х $= b$, x_0_к $= a$, иначе x_0_х $= a$, x_0_к $= b$.

Вычисляем первое приближение по методу касательных:

$$x_1^K = x_0^K - \frac{f\left(x_0^K\right)}{f'\left(x_0^K\right)}, \; t = x_1^K.$$

Вычисляем первое приближение по методу хорд:

$$x_1^X = x_0^X - \frac{f\left(x_0^X\right)\left(t - x_0^X\right)}{f(t) - f\left(x_0^X\right)}.$$

Выполним проверку условия остановки:

$$\left|x_1^K - x_1^X\right| \le \varepsilon.$$

Если заданная точность достигнута, то приближенное решение уравнения

$$c \approx \frac{x_1^K + x_1^X}{2}.$$

Если правило остановки не выполнено, то выполняем вычисления еще раз, принимая в качестве нулевых приближений вычисленные значения:

$$x_0^X = x_1^X, \quad x_0^K = x_1^K.$$

Пример 8.1. Найти комбинированным методом приближенное значение корня уравнения: $x^2 - 4 = 0$.

Решение:

Выполним локализацию отрезка, содержащего корень уравнения графически. Построим график функции, соответствующей уравнению (рис. 7.2.)

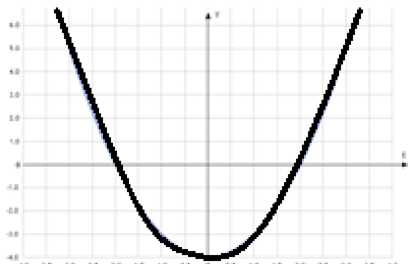

Рис. 8.2. График функции $y = x^2 - 4$

Согласно графику, уравнение имеет два корня на отрезках [-3; -1] и [1; 3].

Выбираем отрезок локализации корня уравнения [-3; -1].

Проверяем выполнение теоремы существования корня:

$$y(-3) = (-3)^2 - 4 = 9 - 4 = 5;$$
$$y(-1) = (-1)^2 - 4 = 1 - 4 = -3,$$

$y(-3)\ y(-3) < 0$ – верно, значит корень на отрезке существует.

Проверяем теорему единственности корня.

Найдем производную функции $y = x^2 - 4$:

$$y' = 2x.$$

Производная сохраняет знак «минус» для всех точек отрезка [-3; -1], значит, корень уравнения на этом отрезке единственный.

Выбираем начальное приближение метода хорд и метода касательных:

$$y(-3)y''(-3) = 5\cdot 2 = 10 > 0 \ \Rightarrow\ x_0^X = -1, \quad x_0^K = -3.$$

Найдем первые приближения к корню уравнения:

$$x_1^K = x_0^K - \frac{y(x_0^K)}{y'(x_0^K)} = -3 - \frac{5}{2(-3)} \approx -2{,}1667, \quad t = x_1^K;$$

$$x_1^X = x_0^X - \frac{y(x_0^X)(t - x_0^X)}{y(t) - y(x_0^X)} = -1 - \frac{y(-1)(-2.1667 - (-1))}{y(-2.1667) - y(-1)} \approx -1{,}94736.$$

Проверяем условие остановки.

$$\left|x_1^K - x_1^X\right| = \left|-2{,}1667 - (-1{,}94736)\right| = 0{,}21934 \le \varepsilon = 0{,}01$$

Правило остановки не выполнено, значит необходимо взять в качестве начального приближения вычисленные значения и повторить все вычисления еще раз. Эти действия выполняем до тех пор, пока не будет достигнута требуемая точность, или не будет превышено установленное число шагов.

Варианты заданий

Вариант	Уравнение	Вариант	Уравнение
1	$x^3 - 6x^2 + 11x - 6 = 0$	16	$x^3 + 2x^2 - 16x - 32 = 0$
2	$x^3 - 7x^2 + 16x - 12 = 0$	17	$x^3 + 6x^2 + 3x - 10 = 0$
3	$x^3 - 8x^2 + 21x - 18 = 0$	18	$x^3 - 6x^2 - 4x + 24 = 0$
4	$x^3 - 9x^2 + 27x - 27 = 0$	19	$x^3 - 5x^2 - 8x + 12 = 0$
5	$x^3 - 7x^2 + 15x - 9 = 0$	20	$x^3 - 3x^2 - 16x - 12 = 0$
6	$x^3 - 6x^2 + 5x + 12 = 0$	21	$x^3 - x^2 - 24x - 36 = 0$
7	$x^3 - 4x^2 + x + 6 = 0$	22	$x^3 - 9x^2 + 14x + 24 = 0$
8	$x^3 - x^2 - 5x - 3 = 0$	23	$x^3 - 4x^2 - 11x - 6 = 0$
9	$x^3 + x^2 - 9x - 9 = 0$	24	$x^3 + 8x^2 + 13x + 6 = 0$

Окончание

Вариант	Уравнение
10	$x^3 - 7x^2 + 7x + 15 = 0$
11	$x^3 - 6x^2 + 3x + 10 = 0$
12	$x^3 + 3x^2 - 6x – 8 = 0$
13	$x^3 + x^2 - 10x + 8 = 0$
14	$x^3 - 2x^2 - 19x + 20 = 0$
15	$x^3 + 7x^2 + 14x + 8 = 0$

Вариант	Уравнение
25	$x^3 + 10x^2 + 19x – 30 = 0$
26	$x^3 + 11x^2 + 17x – 10 = 0$
27	$x^3 - 8x^2 + 12x + 1 = 0$
28	$x^3 - 4x^2 + 2x - 5 = 0$
29	$x^3 - 4x^2 - 10x - 1 = 0$
30	$x^3 + 7x^2 - 19x – 8 = 0$

Вопросы для контроля

1. Понятие решения уравнения с одним неизвестным.
2. Кратность корня уравнения. Простые и кратные корни.
3. Схема исследование функции.
4. Построение графика функции.
5. Поиск решения уравнения с одним неизвестным графическим методом.
6. Метод хорд: условия, алгоритм, графическая интерпретация.
7. Метод касательных: условия, алгоритм, графическая интерпретация.
8. Комбинированный метод: условия, алгоритм, графическая интерпретация.

Лабораторная работа № 9

Решение систем линейных уравнений методом итераций

Цель работы: изучить метод итераций для решения систем линейных уравнений и получить практические навыки его применения.

Задания к работе

1. Преобразовать систему линейных уравнений заданного варианта к виду, требуемому для метода итераций (получить матрицу **B** коэффициентов при неизвестных, для которой выполняется условие диагонального преобладания).
2. Вычислить нормы первую $\|\mathbf{B}\|_1$ и бесконечную $\|\mathbf{B}\|_\infty$ матрицы **B** и выбрать из них меньшую.
3. Вычислить количество шагов (итераций) метода, используя априорную оценку.
4. Выбрать начальное приближение метода итераций.
5. Методом итераций получить приближенное решение системы уравнений с заданной точностью ε=0,1.

6. Подсчитать число фактически выполненных итераций.
7. Сравнить количество итераций, полученных применением априорной и апостериорной оценок.
8. Вычислить вектор невязки для полученного приближенного решения.
9. Описать в модуле функцию, выполняющую решение заданной системы линейных уравнений с заданной точностью методом итераций за конечное число шагов.

* Дополнительное задание: Предусмотреть в программе возможность преобразования системы уравнений к требуемой форме, то есть к системе уравнений с диагональным преобладанием.

Содержание отчета

1. Титульный лист.
2. Цель работы. Вариант задания.
3. Текст заданий к работе.
4. Выполнение заданий соответствующего варианта вручную полностью. Подробное описания способа получения матрицы с диагональным преобладанием. Вычисление первой и бесконечной нормы матрицы. Сравнение полученных значений и вычисление требуемой точности решения. Выполнение первого шага метода простой итерации подробно. Вычисление приближенного решения системы уравнений с заданной точностью, подстановка полученного решения в исходную систему уравнений и вычисление вектора невязки.
5. Текст программы, включающий необходимые комментарии и спецификации подпрограмм.
6. Результаты работы программы.

Основные теоретические сведения

Решением системы уравнений с n неизвестными является упорядоченный набор n чисел. Эти наборы образуют множество объектов, которое называется линейным пространством L_n, а эти наборы называются векторами или элементами линейного пространства.

Действия над элементами пространства производятся по таким же правилам, как и для векторов трехмерного пространства.

Введем понятие нормы вектора.

Норма вектора — это число, которое обозначается: $\|\vec{x}\|$.

Для $p \geq 1$ *можно* ввести p-норму вектора по формуле

$$\|\vec{x}\|_p = \sqrt[p]{\sum_{i=1}^{n} |x_i|^p}.$$

Первой нормой вектора является число

$$\|\vec{x}\|_1 = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} |x_i|}.$$

Второй нормой вектора является корень из скалярного произведения вектора самого на себя:

$$\|\vec{x}\|_2 = \sqrt{\vec{x} \cdot \vec{x}} = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} x_i^2}.$$

Бесконечной нормой вектора является наибольший из модулей его компонентов:

$$\|\vec{x}\|_\infty = \max_{1 \le i \le n} \{ |x_i| \}.$$

В линейном пространстве действуют квадратные матрицы порядка n.

Если в линейном пространстве введена какая-нибудь норма вектора, то можно ввести подчиненную этой норме вектора норму матрицы, которая обозначается: $\|A\|$.

Если в линейном пространстве введена первая норма вектора, то подчиненная ей первая норма матрицы равна

$$\|A\|_1 = \max_{1 \le j \le n} \left(\sum_{i=1}^{n} |a_{ij}| \right) = \max \left\{ \sum_{i=1}^{n} |a_{i1}|;\ \sum_{i=1}^{n} |a_{i2}|; \ldots \sum_{i=1}^{n} |a_{in}|; \right\}.$$

Если в линейном пространстве введена бесконечная норма вектора, то подчиненная ей бесконечная норма матрицы равна

$$\|A\|_\infty = \max_{1 \le i \le n} \left(\sum_{j=1}^{n} |a_{ij}| \right).$$

Евклидова норма матрицы равна

$$\|A\|_E = \sqrt{\sum_{i,j=1}^{n} |a_{ij}|^2}.$$

Понятие нормы вектора необходимо для оценки степени близости двух векторов в линейном пространстве L_n.

Пусть даны точный вектор $\vec{x}^T$ и его приближенное значение $\vec{x}^*$, тогда погрешность приближения оценивается следующим образом:

$$\left\| \vec{x}^T - \vec{x}^* \right\| = \Delta\left(\vec{x}^*\right);$$

$$\delta\left(\vec{x}^*\right) = \frac{\Delta\left(\vec{x}^*\right)}{\left\|\vec{x}^T\right\|}.$$

Последовательность векторов называется сходящейся по какой-либо норме к точному вектору, если:

$$\lim_{k\to\infty}\left\| \vec{x}^{(k)} - \vec{x}^T \right\| = 0;$$

$$\left\| \vec{x}^{(k)} - \vec{x}^T \right\| \le \varepsilon \Rightarrow \vec{x}^T \approx \vec{x}^{(k)}.$$

Сходимость по норме равносильна покоординатной сходимости:

$$\lim_{k\to\infty}\left\| x_i^{(k)} \right\| = x_i^T,\ \forall i = 1,\dots,n.$$

Пусть $A_{\text{Т}}$ — точное значение матрицы; A^* — приближенное значение матрицы, тогда абсолютная и относительная погрешности оцениваются по формуле

$$\left\| A_T - A^* \right\| = \Delta\left(A^*\right);$$

$$\delta\left(A^*\right) = \frac{\Delta\left(A^*\right)}{\left\|A^*\right\|}.$$

Метод итераций решения систем линейных алгебраических уравнений. Система n линейных уравнений с n неизвестными в векторно-матричной форме имеет вид:

$$A \cdot \vec{x} = \vec{h}.$$

Для применения метода простой итерации необходимо преобразовать эту систему в равносильную ей систему вида:

$$\vec{x} = B \cdot \vec{x} + \vec{c}. \tag{9.1}$$

Самым простым способом приведения исходной системы к требуемому виду является следующий: из первого уравнения системы выразить неизвестное x_1, из второго — x_2 и т.д.

При таком преобразовании на главной диагонали матрицы B будут расположены нули.

В развернутом виде полученная система имеет вид

$$\begin{cases} x_1 = \qquad b_{12}x_2 + b_{13}x_3 + \dots + b_{1,n-1}x_{n-1} + b_{1n}x_n + c_1, \\ x_2 = b_{21}x_1 + \qquad b_{23}x_3 + \dots + b_{2,n-1}x_{n-1} + b_{2n}x_n + c_2, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ x_n = b_{n1}x_1 + b_{n2}x_2 + b_{n3}x_3 + \dots + b_{n,n-1}x_{n-1} + \qquad c_n. \end{cases}$$

Этапы метода:

1. Выбрать произвольное начальное приближение к вектору решения системы:

$$\vec{x}^{(0)} = \left\{ x_1^{(0)},\ x_2^{(0)}, \dots, x_n^{(0)} \right\}.$$

2. Подставить начальное приближение в правую часть системы (9.1) и вычислить следующее, первое, приближение к решению:

$$\vec{x}^{(1)} = B \cdot \vec{x}^{(0)} + \vec{c}.$$

3. Подставляем найденное первое приближение к решению в правую часть системы (9.1) и получаем второе приближение и т.д.

В итоге будет получена последовательность векторов, являющихся нулевым, первым, вторым, …, k-м приближениями к решению.

Вычисление повторяется до тех под, пока не будет выполнено правило остановки:

$$\left\| \vec{x}^{(k+1)} - \vec{x}^{(k)} \right\| \le \frac{\left(1 - \|B\|\right)\varepsilon}{\|B\|} = \varepsilon_1.$$

При этом должно выполняться условие сходимости метода простой итерации.

Пусть в n-мерном пространстве введена какая-либо норма вектора и подчиненная ей норма матрицы B и выполнено условие, что норма матрицы B меньше единицы, тогда:

1) решение системы уравнений существует, и оно единственное;

2) при любом начальном приближении метод простой итерации сходится.

Если в матрице A обеспечено преобладание диагонального элемента в каждой строке, то переход к требуемой форме осуществляется рассмотренным методом. Преобладание диагонального элемента в строке означает, что

$$\forall\, i = 1, 2, \dots, n : \left|a_{ii}\right| > \sum_{j=1,\, j \ne i}^{n} \left|a_{ij}\right|.$$

Обеспечить условие выполнения диагонального преобладания непросто, одним из способов является замена какого-либо из уравнений системы линейной комбинацией уравнений системы.

Пример 9.1. Решите систему линейных алгебраических уравнений методом итераций:

$$\begin{cases} 5x-3y+z=1, \\ 4x+3y-3z=3, \\ x-2y-5z=2. \end{cases}$$

Решение:

Проверим выполнение диагонального преобладания для каждого уравнения системы:

$$|5|>|-3|+|1|-\textit{верно};\quad |3|>|4|+|-3|-\textit{ложно};\quad |-5|>|1|+|-2|-\textit{верно}.$$

Во второй строке не выполняется условие диагонального преобладания, значит нужно заменить второе уравнение линейной комбинацией уравнений системы. Например, сформируем новое уравнение отняв от первого уравнения системы второе. В итоге будет получена система, в которой выполняется условие диагонального преобладания:

$$\begin{cases} 5x-3y+z=1, \\ x-6y+4z=-2, \\ x-2y-5z=2. \end{cases}$$

Выразим неизвестные из соответствующих уравнений системы:

$$\begin{cases} x=\frac{3}{5}y-\frac{1}{5}z+\frac{1}{5}, \\ y=\frac{1}{6}x+\frac{2}{3}z+\frac{1}{3}, \\ z=\frac{1}{5}x-\frac{2}{5}y-\frac{2}{5}. \end{cases}\qquad B=\begin{pmatrix} 0 & \frac{3}{5} & \frac{1}{5} \\ \frac{1}{6} & 0 & \frac{2}{3} \\ \frac{1}{5} & -\frac{2}{5} & 0 \end{pmatrix},\qquad C=\begin{pmatrix} \frac{1}{5} \\ \frac{1}{3} \\ -\frac{2}{5} \end{pmatrix}.$$

Найдем нормы матрицы B:

$$\|B\|_1=\max_{1\le j\le 3}\left(\sum_{i=1}^{3}|b_{ij}|\right)=\max\left\{\frac{1}{6}+\frac{1}{5};\ \frac{3}{5}+\frac{2}{5};\ \frac{1}{5}+\frac{2}{3}\right\}=1;$$

$$\|B\|_\infty=\max\left\{\frac{3}{5}+\frac{1}{5};\ \frac{1}{6}+\frac{2}{3};\ \frac{1}{5}+\frac{2}{5}\right\}=\frac{5}{6}<1.$$

Так как бесконечная норма матрицы B меньше 1, то будем использовать эту норму в дальнейших вычислениях.

В качестве начального приближения используем вектор C.

Найдем бесконечную норму вектора начального приближения:

$$\left\|\vec{x}^{(0)}\right\|_\infty=\max_{1\le i\le 3}\{|x_i|\}=\max\left\{\frac{1}{5};\ \frac{1}{3};\ \frac{2}{5}\right\}=\frac{2}{5}.$$

Зададим точность вычисления ε = 0,01.

Выполним априорную оценку числа итераций:

$$k+1 \geq \frac{\ln \varepsilon + \ln\left(1-\|B\|_{\infty}\right)-\ln\left(\|C\|_{\infty}\right)}{\ln\left(\|B\|_{\infty}\right)};$$

$$k+1 \geq \frac{\ln(0,01)+\ln\left(1-5/6\right)-\ln\left(2/3\right)}{\ln\left(5/6\right)} \approx 30,06,$$

k = 30 — оценка числа итераций.

Полученное количество итераций может в несколько раз превосходить число итераций, которое фактически потребуется для решения поставленной задачи. Смысл этой оценки заключается в установление факта решения задачи за приемлемое число шагов.

Вычислим точность вычисления ε_1:

$$\varepsilon_1 = \frac{\left(1-\|B\|_{\infty}\right)\varepsilon}{\|B\|_{\infty}} = \frac{\left(1-5/6\right)0,01}{5/6} = 0,002.$$

Вычисляем первое приближение к решению:

$$\begin{cases} x^{(1)} = \dfrac{3}{5}\cdot\dfrac{1}{3} - \dfrac{1}{5}\left(-\dfrac{2}{5}\right) + \dfrac{1}{5}, \\ y^{(1)} = \dfrac{1}{6}\cdot\dfrac{1}{5} + \dfrac{2}{3}\left(-\dfrac{2}{5}\right) + \dfrac{1}{3}, \\ z^{(1)} = \dfrac{1}{5}\cdot\dfrac{1}{5} - \dfrac{2}{5}\cdot\dfrac{1}{3} - \dfrac{2}{5}. \end{cases} \qquad \begin{cases} x^{(1)} = 0,8, \\ y^{(1)} = 0,1, \\ z^{(1)} = -0,4939. \end{cases}$$

Проверяем условие остановки:

$$\left\| \vec{x}^{(1)} - \vec{x}^{(0)} \right\|_{\infty} = \| 0,6; 0,233; 0,0933 \|_{\infty} = 0,6 \leq \varepsilon_1 - \textit{ложно}.$$

Правило остановки не выполнено, значит продолжаем вычисления.

В итоге было выполнено 10 итераций и получено приближенное решение системы с точностью ε_1:

$$\begin{cases} x^{(10)} = 0,99623, \\ y^{(10)} = 2,999264, \\ z^{(10)} = 1,997948. \end{cases}$$

Вычислим вектор невязки как разницу между полученным значением правой части уравнений системы при подстановке приближенного решения и точным:

$$\vec{\eta} = \{0,0038;\ 0,00074;\ 0,0021\}$$

Варианты заданий

Вариант	Система
1	$\begin{cases} 1{,}2x + 2{,}7y - 5{,}9z = -5{,}5 \\ 4{,}5x - 5{,}1y + 4{,}3z = 4{,}65 \\ -1{,}2x + 3{,}1y + 1{,}3z = 5{,}2 \end{cases}$
2	$\begin{cases} 1{,}1x + 6{,}1y + 3{,}3z = -1{,}8 \\ 1{,}8x + 7{,}7y - 10{,}9z = -9{,}5 \\ 6{,}1x - 10{,}7y - 1{,}9z = 8{,}1 \end{cases}$
3	$\begin{cases} 6{,}1x + 2{,}9y - 4{,}25z = -8{,}95 \\ 3{,}6x + 6{,}7y - 11{,}9z = 8{,}5 \\ -11{,}3x + 2{,}5y + 4{,}3z = 11{,}2 \end{cases}$
4	$\begin{cases} 1{,}8x + 6{,}4y + 1{,}4z = -4{,}7 \\ -2{,}6x + 5{,}5y - 10.8z = 8{,}5 \\ 6{,}1x - 10{,}65y + 6{,}1z = 3{,}4 \end{cases}$
5	$\begin{cases} -4{,}3x - 4{,}25y - 9{,}3z = 8{,}5 \\ 13{,}5x - 7{,}5y - 4{,}1z = 9{,}6 \\ 0{,}25x + 6{,}25y + 3{,}25z = 0{,}1 \end{cases}$
6	$\begin{cases} 2{,}3x + 4{,}5y + 10z = 8{,}5 \\ -1{,}5x - 7{,}5y + 4{,}3z = 6{,}9 \\ -6{,}9x + 14{,}8y - 19{,}5z = -13{,}1 \end{cases}$
7	$\begin{cases} 0{,}8x + 1{,}7y - 3{,}9z = -5{,}5 \\ 4{,}3x - 2{,}1y + 2{,}8z = -0{,}15 \\ -4{,}2x + 9{,}1y + 4{,}6z = 9{,}7 \end{cases}$
8	$\begin{cases} -3{,}45x - 2{,}4y + 4{,}05z = -9{,}1 \\ -2{,}6x - 5{,}4y + 9{,}6z = -5 \\ 10{,}8x - 3{,}5y - 4{,}6z = 11{,}2 \end{cases}$

Вариант	Система
16	$\begin{cases} 2{,}5x + 6{,}5y - 3{,}8z = 4{,}9 \\ 26{,}8x + 17{,}25y + 9{,}4z = -27{,}3 \\ -8{,}5x - 6{,}5y + 0{,}3z = 6{,}6 \end{cases}$
17	$\begin{cases} -3{,}5x + 6{,}7y + 2{,}5z = 9{,}8 \\ -9{,}95x + 4{,}85y - 3{,}15z = 4{,}3 \\ -4{,}3x + 3{,}8y - 9{,}6z = 8{,}5 \end{cases}$
18	$\begin{cases} 3{,}3x - 4{,}6y - 11z = 7{,}4 \\ 20x - 13{,}1y + 30{,}2z = -15{,}3 \\ -4{,}5x + 5{,}9y - 1{,}1z = 7{,}85 \end{cases}$
19	$\begin{cases} 11{,}3x - 5{,}5y + 5z = 7{,}6 \\ -2{,}9x + 7{,}6y + 12z = 13{,}2 \\ -14{,}6x + 14{,}1y - 9{,}1z = -1{,}45 \end{cases}$
20	$\begin{cases} 7{,}3x + 9{,}6y - 0{,}7z = 5{,}5 \\ 10x - 3{,}4y - 2{,}7z = 6 \\ -10{,}45x - 4{,}35y + 6{,}6z = 0{,}85 \end{cases}$
21	$\begin{cases} 10{,}9x + 4{,}4y - 5{,}5z = 8 \\ 5{,}6x - 4{,}8y + 10{,}8z = 10{,}5 \\ -16{,}9x - 6{,}9y + 27{,}9z = 13{,}5 \end{cases}$
22	$\begin{cases} -3{,}1x + 6{,}1y + 2{,}3z = 7{,}65 \\ 2{,}6x + 6{,}4y - 9{,}8z = 12 \\ 17{,}5x - 15{,}7y + 2{,}1z = -10{,}8 \end{cases}$
23	$\begin{cases} 2{,}6x - 9{,}4y + 3{,}4z = 7 \\ 0{,}6x + 7{,}25y - 9{,}8z = 8{,}5 \\ 4{,}5x + 2{,}9y + 12z = -19{,}7 \end{cases}$

Окончание

Вариант	Система
9	$\begin{cases} 3{,}3x+4{,}9y+8{,}1z=-10 \\ 10{,}2x+5{,}6y-3{,}1z=9{,}6 \\ 1{,}25x-7{,}075y-3{,}15z=5{,}35 \end{cases}$
10	$\begin{cases} -3{,}1x-4{,}4y-10z=-7{,}5 \\ 5{,}5x-9y-3{,}3z=-5{,}9 \\ 4{,}7x+23{,}9y+12{,}7z=21{,}3 \end{cases}$
11	$\begin{cases} 1{,}3x-8{,}6y+1{,}8z=5{,}1 \\ 8{,}5x-0{,}4y+2{,}7z=9 \\ -6{,}65x+5{,}75y-7z=-11{,}8 \end{cases}$
12	$\begin{cases} 1{,}3x-4{,}5y-6z=-5{,}6 \\ -12{,}8x+6{,}2y+6{,}8z=-0{,}6 \\ -2{,}7x+6{,}9y+1{,}1z=6{,}5 \end{cases}$
13	$\begin{cases} 0{,}6x-11y+3{,}6z=8 \\ 10x-2{,}6y+4{,}7z=8{,}9 \\ -6{,}05x+8{,}2y-8{,}4z=-11{,}45 \end{cases}$
14	$\begin{cases} 2{,}3x+8{,}5y-2{,}4z=4{,}8 \\ 9x-0{,}5y+4{,}7z=-5 \\ -4{,}4x-5{,}95y+3{,}9z=-3{,}9 \end{cases}$
15	$\begin{cases} 7{,}2x-3{,}5y+2z=8{,}6 \\ 3{,}9x-4{,}6y+9{,}5z=-5{,}2 \\ -4{,}4x-4{,}4y+2{,}2z=-2{,}1 \end{cases}$

Вариант	Система
24	$\begin{cases} -1{,}5x-5{,}5y+2{,}8z=-4{,}5 \\ -32{,}2x-23{,}3y-6{,}2z=-30 \\ 11{,}5x+5{,}6y-1{,}3z=7{,}5 \end{cases}$
25	$\begin{cases} -2{,}5x+8y-4{,}3z=8{,}8 \\ 8{,}25x+1{,}2y+1{,}45z=0{,}8 \\ 1{,}3x-2{,}7y+7{,}6z=-5 \end{cases}$
26	$\begin{cases} 8{,}9x-2{,}4y-6z=9{,}5 \\ 4{,}6x+6{,}8y-13z=12{,}5 \\ -15{,}8x+29{,}9y-13{,}4z=-1{,}5 \end{cases}$
27	$\begin{cases} -8{,}5x+1{,}5y-4z=6 \\ 7{,}8x-3{,}3y+14z=-9 \\ 11{,}3x-12{,}5y+9{,}2z=-10{,}6 \end{cases}$
28	$\begin{cases} 7{,}7x+1{,}2y-5{,}5z=7{,}5 \\ 5{,}6x-3{,}8y-10{,}1z=-7{,}8 \\ -9{,}4x-0{,}5y-10{,}6z=-36{,}1 \end{cases}$
29	$\begin{cases} 9x-5{,}2z=-7 \\ 2{,}5x+8{,}3y-11z=3{,}1 \\ -6{,}9x+6{,}6y-12{,}4z=21{,}7 \end{cases}$
30	$\begin{cases} 4{,}3x-5{,}6y-10z=8{,}4 \\ 18x-15{,}1y+32{,}2z=-17{,}3 \\ -3{,}5x+6{,}9y-2{,}1z=8{,}85 \end{cases}$

Вопросы для контроля

1. Матрица и вектор: понятие, основные действия.
2. Решение системы уравнений: точное и приближенное.
3. Понятие нормы вектора и нормы матрицы.
4. Вычисление первой и бесконечной нормы вектора.

5. Вычисление первой и бесконечной нормы матрицы
6. Понятие диагонального преобладания.
7. Метод итераций: понятие, алгоритм метода.
8. Оценка предполагаемого числа итераций.
9. Вектор невязки: понятие и вычисление.

Лабораторная работа № 10

Вычисление собственных чисел и собственных векторов матрицы

Цель работы: изучить степенной метод определения собственных чисел матрицы и получить практические навыки его применения.

Задания к работе

1. Используя степенной метод, определить два собственных числа матрицы с пятью-шестью верными цифрами и соответствующие им собственные векторы, имеющие вторую норму, равную единице.

Выбрать произвольный начальный вектор.

Вычислить с точностью $\varepsilon = 0{,}01$ наибольшее по модулю собственное число и соответствующий ему собственный вектор, имеющий вторую норму, равную 1

Сформировать матрицу $B = A - \lambda_1 E$ и найти наибольшее по модулю собственное число и соответствующий собственный вектор
матрицы B.

Записать два собственных числа и соответствующие им собственные векторы матрицы A.

2. Описать в модуле функцию, возвращающую значение наибольшего по модулю собственного числа и соответствующего ему собственного вектора матрицы.

Содержание отчета

1. Титульный лист.
2. Цель работы. Вариант задания.
3. Текст заданий к работе.
4. Выполнение заданий соответствующего варианта вручную полностью. Выполнение первого шага степенного метода полностью и подробно, следующие шаги можно выполнить, используя, например, MS Office Excel. Записать найденный ответ с заданной точностью.
5. Текст программы, включающий необходимые комментарии и спецификации подпрограмм.
6. Результаты работы программы.

Основные теоретические сведения

Число λ называется собственным числом квадратной матрицы A, если существует ненулевой вектор x, называемый собственным вектором матрицы A, соответствующий собственному числу λ, что

$$A \cdot \vec{x} = \lambda \cdot \vec{x}.$$

Собственное число матрицы A является решением уравнения

$$\det(A - \lambda E) = 0.$$

В общем случае собственное число является решением алгебраического уравнения степени n, которое называется характеристическим уравнением:

$$\lambda^n + p_1\lambda^{n-1} + \ldots + p_{n-1}\lambda + p_n = 0$$

Степенной метод. Пусть необходимо вычислить максимальное по модулю собственное число матрицы A, что означает поиск вещественного числа λ_1.

Выбираем начальное приближение для собственного вектора матрицы, такой что

$$\left\| \vec{x}^{(0)} \right\|_2 = 1.$$

Если норма вектора отличается от единицы, то его необходимо пронормировать.

Вычисляем вектор по формуле

$$\vec{y}^{(1)} = A \cdot \vec{x}^{(0)}.$$

Вычисляем начальное приближение к собственному числу:

$$\lambda^{(0)} = \vec{x}^{(0)} \cdot \vec{y}^{(1)}.$$

Вычисляем первое приближение к собственному вектору:

$$\vec{x}^{(1)} = \frac{1}{\left\| \vec{y}^{(1)} \right\|_2} \vec{y}^{(1)}.$$

Полагаем $\vec{x}^{(0)} = \vec{x}^{(1)}$ и повторяем вычисления.

Правило остановки

$$\begin{cases} \left| \lambda^{(1)} - \lambda^{(0)} \right| < \varepsilon, \\ \left\| \vec{x}^{(2)} - \vec{x}^{(0)} \right\|_2 < \varepsilon. \end{cases}$$

Второе приближение к собственному вектору вычисляется при подстановке в формулу вектора первого приближения.

Степенной метод со сдвигами. Пусть найдено наибольшее по модулю собственное число λ_1.

Рассмотрим матрицу: $B = A - \lambda_1 E$.

Матрица B имеет свое собственное число λ'_2 и соответствующий ему собственный вектор z. Вычислим их для матрицы B.

$\lambda_2 = \lambda_1 + \lambda'_2$ — собственное число матрицы A; вектор z — собственный вектор матриц A и B.

Пример 10.1. Найти наибольшее собственное число и соответствующий ему собственный вектор матрицы A:

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 4 & 1 \end{pmatrix}.$$

Решение:

Составляем выражение для матрицы и ее определителя:

$$A - \lambda E = \begin{pmatrix} 3-\lambda & 2 \\ 4 & 1-\lambda \end{pmatrix}.$$

Составляем характеристическое уравнение. Приравниваем определитель полученной матрицы к нулю:

$$\det\begin{pmatrix} 3-\lambda & 2 \\ 4 & 1-\lambda \end{pmatrix} = 0;$$

$$(3-\lambda)(1-\lambda) - 4\cdot 2 = 0;$$

$$\lambda^2 - 4\lambda - 5 = 0.$$

Решаем полученное квадратное уравнение:

$$\left[\begin{array}{l} \lambda = 5, \\ \lambda = -1. \end{array}\right.$$

Собственное число матрицы A равно $\lambda_1 = 5$.

Найдем собственный вектор, соответствующий собственному числу $\lambda_1 = 5$.

Для этого решим следующее уравнение:

$$\left(A - \lambda_1 E\right)\vec{x} = \vec{0};$$

$$\begin{pmatrix} 3-5 & 2 \\ 4 & 1-5 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}; \qquad \begin{pmatrix} -2 & 2 \\ 4 & -4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Запишем полученное матричное уравнение в виде системы двух линейных уравнений с двумя неизвестными x_1 и x_2:

$$\begin{cases} -2x_1 + 2x_2 = 0, \\ 4x_1 - 4x_2 = 0; \end{cases} \quad \begin{cases} x_1 - x_2 = 0, \\ x_1 - x_2 = 0. \end{cases}$$

Полученная система линейных уравнений имеет бесконечное множество решений. Найдем одно из частных решений. Выбираем одну из неизвестных, например x_1, в качестве базисной, вторая неизвестная x_2 будет свободной:

$$\left(A - \lambda_1 E\right)\vec{x} = \vec{0}.$$

Варианты заданий

Вариант	Матрица	Вариант	Матрица
1	$A=\begin{pmatrix} 2{,}2 & -1 & 1{,}3 \\ 1{,}1 & 3 & 1{,}6 \\ 1{,}4 & 1{,}8 & 3{,}7 \end{pmatrix}$	16	$A=\begin{pmatrix} 2{,}7 & 0{,}9 & 1{,}7 \\ 0{,}7 & 3{,}2 & 1{,}8 \\ 2{,}8 & 0{,}8 & 4{,}8 \end{pmatrix}$
2	$A=\begin{pmatrix} 1{,}6 & 1{,}3 & 0{,}8 \\ 1{,}4 & 1{,}7 & 0{,}6 \\ 0{,}5 & 0{,}5 & -0{,}8 \end{pmatrix}$	17	$A=\begin{pmatrix} 3 & 1 & 4{,}1 \\ 1{,}1 & 3{,}9 & 2{,}6 \\ -2 & 2{,}3 & 4{,}3 \end{pmatrix}$
3	$A=\begin{pmatrix} 1{,}9 & 1 & 1{,}2 \\ -1 & 3{,}4 & 1{,}6 \\ 1{,}8 & 2{,}6 & 3{,}3 \end{pmatrix}$	18	$A=\begin{pmatrix} 2{,}5 & 1{,}2 & -0{,}4 \\ -1{,}3 & 2 & 1{,}4 \\ 0{,}6 & 1{,}5 & 1{,}8 \end{pmatrix}$
4	$A=\begin{pmatrix} 2{,}6 & 1{,}3 & 1{,}3 \\ 1{,}5 & 1{,}1 & -0{,}5 \\ -1{,}7 & 0{,}6 & 1{,}3 \end{pmatrix}$	19	$A=\begin{pmatrix} 3{,}2 & 1{,}2 & 2{,}3 \\ 1 & -3{,}3 & 1{,}3 \\ 2{,}2 & 2{,}3 & 4{,}2 \end{pmatrix}$
5	$A=\begin{pmatrix} 1{,}5 & 2 & 3{,}8 \\ 1 & 1{,}5 & 1{,}6 \\ 1{,}8 & 4 & 2{,}8 \end{pmatrix}$	20	$A=\begin{pmatrix} 3{,}4 & 2{,}1 & 1{,}3 \\ 2 & -3{,}9 & 3{,}4 \\ 2{,}3 & 0{,}4 & -2{,}8 \end{pmatrix}$
6	$A=\begin{pmatrix} 3{,}5 & 1{,}2 & 3{,}6 \\ -1 & 3{,}3 & 2{,}5 \\ 1{,}2 & 1{,}8 & 3 \end{pmatrix}$	21	$A=\begin{pmatrix} 2{,}4 & -1 & 1{,}3 \\ 2{,}3 & 1{,}2 & 2{,}3 \\ 2{,}7 & 1{,}7 & 3{,}4 \end{pmatrix}$

Окончание

Вариант	Матрица	Вариант	Матрица
7	$A=\begin{pmatrix} 3{,}3 & 1{,}4 & 2{,}2 \\ -2 & 1{,}7 & 1{,}5 \\ 2{,}3 & 1{,}5 & 1{,}8 \end{pmatrix}$	22	$A=\begin{pmatrix} 1{,}5 & -0{,}2 & 1{,}8 \\ 2{,}5 & 1{,}9 & 1{,}4 \\ 2{,}4 & 0{,}9 & 4{,}3 \end{pmatrix}$
8	$A=\begin{pmatrix} 3{,}2 & 0{,}1 & 2{,}5 \\ 1 & 1{,}5 & 1{,}8 \\ 0{,}9 & 2{,}3 & 3{,}7 \end{pmatrix}$	23	$A=\begin{pmatrix} 2{,}2 & 0{,}6 & 1{,}3 \\ 1{,}2 & 1{,}7 & 2{,}1 \\ -1 & 1{,}6 & 1{,}7 \end{pmatrix}$
9	$A=\begin{pmatrix} 3{,}3 & 0{,}1 & 2{,}3 \\ 1{,}8 & 0{,}8 & 3{,}1 \\ 2{,}7 & 1{,}9 & 4{,}1 \end{pmatrix}$	24	$A=\begin{pmatrix} 3{,}4 & 2{,}2 & -0{,}3 \\ 2{,}2 & 1{,}9 & 2{,}3 \\ 1{,}8 & 0{,}5 & 3{,}8 \end{pmatrix}$
10	$A=\begin{pmatrix} 2{,}2 & -1 & 3{,}3 \\ 0{,}7 & 2{,}6 & 1{,}2 \\ 2{,}7 & 1{,}4 & 3{,}2 \end{pmatrix}$	25	$A=\begin{pmatrix} 2{,}7 & 0{,}6 & 1{,}7 \\ 1{,}9 & 2{,}2 & 1{,}4 \\ 0{,}8 & 1{,}1 & 3{,}7 \end{pmatrix}$
11	$A=\begin{pmatrix} 3{,}2 & 2 & 3{,}2 \\ -1 & 1{,}7 & 1{,}9 \\ 1{,}6 & 2{,}3 & 1{,}8 \end{pmatrix}$	26	$A=\begin{pmatrix} 3{,}7 & 1{,}1 & 3{,}4 \\ 2{,}1 & 2{,}2 & 0{,}7 \\ 2{,}6 & 1{,}5 & 1{,}7 \end{pmatrix}$
12	$A=\begin{pmatrix} 3{,}1 & 1{,}2 & 0{,}6 \\ 2 & 2{,}5 & 2{,}9 \\ 1{,}8 & 1{,}3 & 2{,}3 \end{pmatrix}$	27	$A=\begin{pmatrix} 0{,}6 & 1{,}7 & 2{,}6 \\ 1{,}3 & 2{,}5 & 1{,}1 \\ 0{,}8 & 1{,}2 & 3{,}2 \end{pmatrix}$
13	$A=\begin{pmatrix} 1{,}8 & 1{,}1 & 1{,}6 \\ -1 & 2{,}2 & 2{,}8 \\ 1{,}3 & 1{,}5 & 2{,}5 \end{pmatrix}$	28	$A=\begin{pmatrix} 1{,}5 & 1{,}1 & 0{,}5 \\ 2{,}1 & 3 & 1{,}5 \\ 1{,}8 & 2{,}3 & 3{,}4 \end{pmatrix}$
14	$A=\begin{pmatrix} 2{,}4 & 1{,}3 & 0{,}4 \\ 0{,}8 & 2{,}5 & 1{,}3 \\ 1{,}2 & 2{,}8 & 3{,}1 \end{pmatrix}$	29	$A=\begin{pmatrix} 2{,}2 & -1 & 1{,}3 \\ 2 & 3{,}8 & 1{,}5 \\ 1{,}1 & 3{,}3 & 2{,}2 \end{pmatrix}$
15	$A=\begin{pmatrix} 1{,}4 & 1{,}2 & 1{,}9 \\ 2 & 2{,}9 & 2{,}4 \\ 1{,}8 & 1{,}4 & 1{,}5 \end{pmatrix}$	30	$A=\begin{pmatrix} 2{,}4 & 0{,}9 & 2{,}5 \\ 0{,}8 & 2{,}9 & 2{,}5 \\ 3{,}2 & 2{,}7 & 1{,}8 \end{pmatrix}$

Вопросы для контроля

1. Понятие матрицы. Действия с матрицами.
2. Понятие собственного числа матрицы.
3. Понятие собственного вектора матрицы.
4. Понятие и вычисление нормы вектора.
5. Степенной метод: вычислительные формулы и алгоритм.
6. Степенной метод со сдвигами: вычислительные формулы и алгоритм.

Лабораторная работа № 11

Метод наименьших квадратов

Цель работы: изучить теоретические сведения об аппроксимации данных и получить практические навыки применения метода наименьших квадратов.

Задания к работе

1. Составить таблицу значений заданной функции $y(x)$ на отрезке [a, b] в точках $x_i = a + ih, i=0, 1,\dots,n;\ h=(b-a)/n$
2. Написать подпрограмму, выполняющую построение таблицы значений функции $y(x)$ с произвольными параметрами a, b, n.
3. Выбрать базисные функции, например, $\varphi_i(x)=x^k, k=0,1,2,\dots$
4. Реализовать метод наименьших квадратов с произвольным числом базисных функций.
5. Записать аппроксимирующие функции $\Phi_1(x); \Phi_2(x); \Phi_3(x)$, полученные при использовании в качестве базисных соответствующих наборов:
   1) $\varphi_0(x)=1, \varphi_1(x)=x;$
   2) $\varphi_0(x)=1, \varphi_1(x)=x; \varphi_2(x)=x^2;$
   3) $\varphi_0(x)=1, \varphi_1(x)=x; \varphi_2(x)=x^2; \quad \varphi_3(x)=x^3;$
6. Построить в одной системе координат графики функций точной и приближенных: y(x), $\Phi_1(x); \Phi_2(x); \Phi_3(x)$.
7. Оценить степень близости базисной и аппроксимирующих функций, используя графики.

Содержание отчета

1. Титульный лист.
2. Цель работы. Вариант задания.
3. Текст заданий к работе.
4. Выполнение заданий соответствующего варианта вручную полностью. Выполнить построение аппроксимирующей функции

методом наименьших квадратов полностью и подробно. Представить графики исходной и аппроксимирующих функций, проанализировать их.

5. Текст программы, включающий необходимые комментарии и спецификации подпрограмм.
6. Результаты работы программы.

Основные теоретические сведения

Задача аппроксимации — это одна из форм задачи приближения функции.

Изученная форма приближения функции — задача интерполяции.

Пусть имеется таблица значений функции (табл. 11.1). Эти данные могут быть результатами эксперимента, тогда погрешность может быть значительной.

Таблица 11.1. Таблица значений функции

i	x_i	y_i
0	x_0	y_0
1	x_1	y_1
…	…	…
n	x_n	y_n

Применение интерполяции при обработке экспериментальных данных приводит к повторению ошибок наблюдения, а желательно сглаживание этих ошибок. Результаты измерений значений y_i имеют высокую погрешность и обуславливает колебание значений ординат. Реальное поведение процесса может описываться функцией $y_{апр}(x)$, график которой является плавным. В этом случае происходит отказ от выполнения в точках x_i точных равенств $y_{апр}(x) = y_i$.

Истинная аппроксимирующая кривая $y = y_{апр}(x)$ должная удовлетворять условию $y(x_i) \approx y_i$.

Методы аппроксимации различаются между собой выбором критерия близости.

Выберем $(m + 1)$ базисную функцию: $\varphi_0(x), \varphi_1(x),\ldots, \varphi_m(x)$, $m \le n$.

Обобщенным многочленом степени m называется функция

$$\Phi_m(x) = a_0\,\phi_0(x) + a_1\,\phi_1(x) + \ldots + a_m\,\phi_m(x),$$

$\{a_0, a_1, \ldots, a_m\}$ — вектор неизвестных коэффициентов.

В точках x_i выполняются приближения:

$$\begin{cases} a_0\,\phi_0(x_0)+a_1\,\phi_1(x_0)+\ldots+a_m\,\phi_m(x_0)\approx y_0, \\ a_0\,\phi_0(x_1)+a_1\,\phi_1(x_1)+\ldots+a_m\,\phi_m(x_1)\approx y_1, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_0\,\phi_0(x_n)+a_1\,\phi_1(x_n)+\ldots+a_m\,\phi_m(x_n)\approx y_n. \end{cases}$$

Задача аппроксимации методом наименьших квадратов заключается в том, чтобы подобрать параметры (значения коэффициентов) таким образом, чтобы:

$$\sum_{i=0}^{n}\left(\Phi_m(x_i)-y_i\right)^2 \to \min.$$

Сумма квадратов отклонений приняла минимальное возможное значение среди всех обобщенных многочленов этого вида, т.е.:

$$\sum_{i=0}^{n}\left(\sum_{j=0}^{m}a_j\phi_j\left(x_i\right)-y_i\right)^2 \to \min.$$

Простейший подход к решению задачи состоит в использовании необходимого условия экстремума функции: функция достигает минимума в одной из стационарных точек, которые являются решениями системы из (m + 1) уравнения с (m + 1) неизвестными значениями a_i:

$$\sum_{i=0}^{n}\left(\sum_{j=0}^{m}a_j\phi_j\left(x_i\right)-y_i\right)^2 = S(a_0,a_1,\ldots,a_m);$$

$$\begin{cases} \dfrac{\partial S}{\partial a_0}=0, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots \\ \dfrac{\partial S}{\partial a_m}=0. \end{cases}$$

Выполним вычисление частных производных и упрощение полученных выражений. Итоговая формула примет вид:

$$\left(\sum_{i=0}^{n}\phi_0\left(x_i\right)\phi_k\left(x_i\right)\right)a_0+\left(\sum_{i=0}^{n}\phi_1\left(x_i\right)\phi_k\left(x_i\right)\right)a_1+\ldots+\left(\sum_{i=0}^{n}\phi_m\left(x_i\right)\phi_k\left(x_i\right)\right)a_m=$$

$$=\sum_{i=0}^{n}y_i\phi_k\left(x_i\right),\quad k=0,1,\ldots,m.$$

Расписав это выражение для каждого значения k, получим систему уравнений, которая называется нормальной системой метода наименьших квадратов.

Пример 11.1. По известной таблице (табл. 11.2) экспериментальных значений получить выражение для линейного обобщенного многочлена.

Таблица 11.2. Таблица значений функции

i	x_i	y_i
0	-1	4
1	0	3
2	1	4
3	2	7

Решение: Составим выражение линейного обобщенного многочлена:

$$\Phi_1(x) = a_0\,\phi_0(x) + a_1\,\phi_1(x).$$

В качестве базисных используем две функции:

$$\phi_0(x) = 1; \quad \phi_1(x) = x; \quad n = 3; \quad m = 1; \quad k = 0{,}1.$$

Запишем систему уравнений в общем виде:

$$\begin{cases} a_0\left(\sum\limits_{i=0}^{3}\phi_0^2(x_i)\right) + a_1\left(\sum\limits_{i=0}^{3}\phi_1(x_i)\phi_0(x_i)\right) = \sum\limits_{i=0}^{3} y_i^{Э}\phi_0(x_i), \\ a_0\left(\sum\limits_{i=0}^{3}\phi_0(x_i)\phi_1(x_i)\right) + a_1\left(\sum\limits_{i=0}^{3}\phi_1^2(x_i)\right) = \sum\limits_{i=0}^{3} y_i^{Э}\phi_1(x_i). \end{cases}$$

Подставим в систему уравнений выражения базисных функций:

$$\begin{cases} a_0\left(\sum\limits_{i=0}^{3}1^2\right) + a_1\left(\sum\limits_{i=0}^{3}(x_i\cdot 1)\right) = \sum\limits_{i=0}^{3} y_i^{Э}\cdot 1, \\ a_0\left(\sum\limits_{i=0}^{3}(1\cdot x_i)\right) + a_1\left(\sum\limits_{i=0}^{3}(x_i^2)\right) = \sum\limits_{i=0}^{3} y_i^{Э}\cdot x_i. \end{cases}$$

Вычислим значения коэффициентов при неизвестных a_0 и a_1 и запишем полученную систему уравнений:

$$\sum_{i=0}^{3}1^2 = 1+1+1+1 = 4; \quad \sum_{i=0}^{3}(x_i\cdot 1) = -1+0+1+2 = 2; \quad \sum_{i=0}^{3} y_i^{Э}\cdot 1 = 4+3+4+7 = 18;$$

$$\sum_{i=0}^{3}(x_i^2) = (-1)^2 + 0^2 + 1^2 + 2^2 = 6; \quad \sum_{i=0}^{3} y_i^{Э}\cdot x_i = (-1)\cdot 4 + 0\cdot 3 + 1\cdot 4 + 2\cdot 7 = 14,$$

$$\begin{cases} 4a_0 + 2a_1 = 18, & |:2 \\ 2a_0 + 6a_1 = 14. & |:2 \end{cases} \qquad \begin{cases} 2a_0 + a_1 = 9, \\ a_0 + 3a_1 = 7. \end{cases}$$

Решив полученную систему линейных уравнений получим следующие значения: $a_0 = 4$ и $a_1 = 1$.

Запишем искомый линейный обобщенный многочлен:

$$\Phi_1(x) = 4 + x.$$

Определим погрешность полученного решения.

$$\delta = \sqrt{\frac{1}{n+1}\sum_{i=0}^{n}\left(\Phi_m\left(x_i\right) - y_i^{Э}\right)^2},$$

$$\delta = \sqrt{\frac{1}{3+1}\sum_{i=0}^{3}\left(\Phi_1\left(x_i\right) - y_i^{Э}\right)^2} = \sqrt{\frac{1}{4}\left(\left(3-4\right)^2 + \left(4-3\right)^2 + (5-4)^2 + (6-7)^2\right)} = 1.$$

Как видно из решения линейный обобщенный многочлен плохо приближает заданную таблицей функцию.

Варианты заданий

Вариант	Функция $y=y(x)$
1	$y = 2\sin(x - 1) + x$
2	$y = \cos(x^2 + 2) + x$
3	$y = x\sin(x - 4) + e^x$
4	$y = e^x \sin(x^2 - x)$
5	$y = \sin(x+5) + x^2$
6	$y = x^3\cos(x + 8)$
7	$y = x^2 + x + e^{-3x}$
8	$y = x\sin(2x^2 - 1)$
9	$y = e^x + 3\cos(x+1)$
10	$y = e^x(\sin x + \cos x)$
11	$y = e^{2x}\cos(x + 5)$
12	$y = \sin^2(x + 2)$
13	$y = 3^x\cos(x - 6)$
14	$y = \sin(x - 2) + \sin(x^2)$
15	$y = \cos(x^2 + x) + 4^x$

Вариант	Функция $y=y(x)$
16	$y = 5^x - \sin(x^2 - 9)$
17	$y = 2^x(\sin x + \sin(2x))$
18	$y = 3^{2x} + \sin(7 - x)$
19	$y = 2\sin(x + 4) * \cos(x - 4)$
20	$y = x^3 - \sin(x^2 + 2)$
21	$y = e^x + 3^x$
22	$y = \sin(x^2 - 9)\, 5^x$
23	$y = 4\sin(x^2 + 2) + e^x$
24	$y = \cos(x + 4) * x$
25	$y = \sin(x^2 - 16) + 9^x$
26	$y = 7^x\sin(x^2 + 2x + 1)$
27	$y = \sin(x^2 + 1) + e^{2x}$
28	$y = (x + 1)\sin(x + 3)$
29	$y = (x^2 + 1)\, 8^x$
30	$y = (x^3 - 1)\cos(x^2 + 9)$

Вопросы для контроля

1. Постановка задачи аппроксимации данных.
2. Постановка задачи интерполяции.
3. Отличие интерполяции и аппроксимации функции.
4. Графическая иллюстрация интерполирующей и аппроксимирующей функций.
5. Получение вычислительных формул метода наименьших квадратов.
6. Метод наименьших квадратов: алгоритм, вычислительные формулы.

Библиографический список

1. Кузнецов Л.А. Сборник заданий по высшей математике (типовые расчеты). — М: Высшая школа, 1983. — 91 с.
2. Демидович Б. П., Марон И. А. Основы вычислительной математики. Изд-во «Лань», 2006. – 664 с.
3. Амосов А. А., Дубинский Ю. А., Копченова Н. В. Вычислительные методы для инженеров. – М.: МЭИ, 2003. – 595 с.
4. Киреев В.И., Пантелеев А.В. Численные методы в примерах и задачах. - М.: Высшая школа, 2008 г. — 480 с.
5. Ракитин В. И., Первушин В. Е. Практическое руководство по методам вычислений с приложением программ для персональных компьютеров: практикум, — М.: Высш. шк., 1998. — 383 с.
6. Пантина И.В., Синчуков А.В. Вычислительная математика: учебник, — М.: Московский финансово-промышленный университет «Синергия», 2012. — 176 с. Режим доступа: http://www.iprbookshop.ru/17012
7. Поршнев С. В. Вычислительная математика: учебное пособие. — СПб.: БХВ-Петербург, 2004. — 320 с.

Учебное издание

Бондаренко Татьяна Владимировна
Федотов Евгений Александрович

ВЫЧИСЛИТЕЛЬНАЯ МАТЕМАТИКА
Практикум

Подписано в печать 12.10.17. Формат 60×84/16. Усл.печ.л.. Уч.-изд.л.
Тираж 85 экз. Заказ Цена
Отпечатано в Белгородском государственном технологическом университете
им. В. Г. Шухова
308012, г. Белгород, ул. Костюкова, 46