МИНИСТЕРСТВО НАУКИ И ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ БЮДЖЕТНОЕ
ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

**«БЕЛГОРОДСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ
ТЕХНОЛОГИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ им. В. Г. ШУХОВА»
(БГТУ им. В.Г. Шухова)**

Кафедра программного обеспечения вычислительной техники и
автоматизированных систем

Лабораторная работа №1

по дисциплине: «Исследование операций»

Выполнил: ст. группы
ПВ-211
Медведев Дмитрий
Сергеевич

Проверила:
Куртова Лилиана
Николаевна

Белгород 2022 г.

Исследование множества опорных планов системы ограничений задачи линейного программирования (задачи ЛП) в канонической форме

Цель работы: изучить метод Гаусса-Жордана и операцию замещения, а также освоить их применение к отысканию множества допустимых базисных видов системы линейных уравнений, и решению задачи линейного программирования простым перебором опорных решений.

Ход работы

1. Составить программу для отыскания всех базисных видов системы линейных уравнений.

   В задании используем модуль matrix, созданный в ходе лабораторных по другим предметам.

   Код добавленных функций:

```
void Matrix::divideRowByNum(int row, float num) {
    for (int i = 0; i < columns; i++) {
        setData(row, i, getData(row, i) / num);
    }
}

void Matrix::subtractMultipliedRow(int from, int which, float multiplier) {
    for (int i = 0; i < columns; i++) {
        setData(from, i, getData(from, i) - getData(which, i) *
multiplier);
    }
}

void Matrix::deleteRow(int row) {
    data.erase(data.begin() + row);

    rows--;
}

Matrix Matrix::jordanGaussForward(bool &hasSolution) {
    Matrix result(rows, columns);
    result.copy(*this);
    hasSolution = true;

    for (int handledRow = 0; handledRow < result.rows; handledRow++) {
        if (result.isZeroRow(handledRow)) {
            result.deleteRow(handledRow);
            continue;
        } else if (result.isBadRow(handledRow)) {
            hasSolution = false;
```

```
            return result;
        }

        for (int column = 0; column < result.columns - 1; column++) {
            if (!fcmp(result.getData(handledRow, column), 0)) {
                result.divideRowByNum(handledRow,
result.getData(handledRow, column));

                for (int i = 0; i < result.rows; i++) {
                    if (i != handledRow)
                        result.subtractMultipliedRow(i, handledRow,
result.getData(i, column));
                }

                break;
            }
        }
    }

    return result;
}

void Matrix::substitution(int row, int column) {
    divideRowByNum(row, getData(row, column));

    for (int i = 0; i < rows; i++) {
        if (i != row) {
            subtractMultipliedRow(i, row, getData(i, column));
        }
    }
}

bool Matrix::checkIfBasicColumn(int column, int &oneRow) {
    bool hasOneValue = false;

    for (int row = 0; row < rows; row++) {
        if (!fcmp(getData(row, column), 0)) {
            if (fcmp(getData(row, column), 1)) {
                if (hasOneValue)
                    return false;
                else {
                    hasOneValue = true;
                    oneRow = row;
                }
            } else {
                return false;
            }
        }
    }

    return true;
}

vector<float> Matrix::getBasicSolutionFromMatrix() {
    vector<float> basicSolution(columns - 1);
```

```
    for (int column = 0; column < columns - 1; column++) {
        int oneRow;
        bool isBasicColumn = checkIfBasicColumn(column, oneRow);

        if (isBasicColumn) {
            basicSolution[column] = getData(oneRow, columns - 1);
        } else {
            basicSolution[column] = 0;
        }
    }

    return basicSolution;
}

void Matrix::recursiveSearchOfSolution(int row, vector<vector<float>>
&solutions) {
    Matrix matrixCopy(rows, columns);
    matrixCopy.copy(*this);

    for (int column = 0; column < matrixCopy.columns - 1; column++) {
        if (!fcmp(matrixCopy.getData(row, column), 0)) {
            matrixCopy.substitution(row, column);

            if (row == matrixCopy.rows - 1) {

solutions.push_back(matrixCopy.getBasicSolutionFromMatrix());
            } else {
                matrixCopy.recursiveSearchOfSolution(row + 1, solutions);
            }
        }
    }
}

vector<vector<float>> Matrix::getBasicSolutions() {
    bool hasSolution;
    Matrix preparedMatrix = this->jordanGaussForward(hasSolution);
    if (!hasSolution)
        return {};

    vector<vector<float>> solutions;
    preparedMatrix.recursiveSearchOfSolution(0, solutions);

    return solutions;
}
```

2. Организовать отбор опорных планов среди всех базисных решений, а также нахождение оптимального опорного плана методом прямого перебора. Целевая функция выбирается произвольно.

   Файл main.cpp:

```cpp
#include <iostream>
#include "libs/matrix/matrix.h"
#include "vector"

using namespace std;

bool compareVectors(vector<float> v1, vector<float> v2) {
    for (int i = 0; i < v1.size(); i++) {
        if (!fcmp(v1[i], v2[i]))
            return false;
    }

    return true;
}

void removeDuplicates(vector<vector<float>> &v) {
    for (int i = 0; i < v.size(); i++) {
        for (int j = i + 1; j < v.size(); j++) {
            if (compareVectors(v[i], v[j])) {
                v.erase(v.begin() + j);
                j--;
            }
        }
    }
}

bool checkIfReference(vector<float> v) {
    for (float i: v) {
        if (i < 0)
            return false;
    }

    return true;
}

float vectorMultiplication(vector<float> v1, vector<float> v2) {
    float result = 0;
    for (int i = 0; i < v1.size(); i++) {
        result += v1[i] * v2[i];
    }

    return result;
}

int main() {
    Matrix m;
    m.inputMatrix(4, 6,
                  {{6,  -2,  2, 0,  5, 2},
                   {-1, -13, 7, 11, 0, 17},
                   {4,  -7,  2, 1,  3, -6},
                   {5,  -15, 9, 11, 5, 19}});


    vector<vector<float>> solutions = m.getBasicSolutions();
```

```
    if (solutions.empty())
        cout << "Система не имеет решений";
    else {
        removeDuplicates(solutions);

        vector<vector<float>> referenceSolutions;

        for (int i = 0; i < solutions.size(); i++) {
            if (checkIfReference(solutions[i]))
                referenceSolutions.push_back(solutions[i]);
        }

        cout << "Решения:\n";
        for (auto i: solutions) {
            cout << "{";
            for (auto j: i) {
                cout << setw(8) << setprecision(4) << j << " ; ";
            }

            cout << "\b\b}\n";
        }

        cout << "\nОпорные решения:\n";
        for (auto i: referenceSolutions) {
            cout << "{";
            for (auto j: i) {
                cout << setw(8) << setprecision(4) << j << " ; ";
            }

            cout << "\b\b}\n";
        }

        vector<float> coefficientsOfAimFunction{2, -3, 1, 4, 1};

        float maxValueOfFunction =
vectorMultiplication(coefficientsOfAimFunction, referenceSolutions[0]);
        int maxValueSolution = 0;

        for (int i = 1; i < referenceSolutions.size(); i++) {
            float multiplicationValue =
vectorMultiplication(referenceSolutions[i], coefficientsOfAimFunction);
            if (multiplicationValue > maxValueOfFunction) {
                maxValueSolution = i;
                maxValueOfFunction = multiplicationValue;
            }
        }

        cout << "\nОптимальное решение:\n{";
        for (auto i: referenceSolutions[maxValueSolution])
            cout << setw(8) << setprecision(4) << i << " ; ";
        cout << "\b\b}\n";
    }
}
```

Вывод программы:

```
"/Users/dmedv/Desktop/Учеба/4 семестр/Исследование операций/Лабораторные работы/ЛР1/Code/cmake-build-debug/Code"
Решения:
{      -1 ;        2 ;        6 ;        0 ;        0 }
{       1 ;        2 ;        0 ;        4 ;        0 }
{  -17.47 ;  0.03636 ;        0 ;        0 ;    21.38 }
{  -17.78 ;        0 ;  -0.1111 ;        0 ;    21.78 }
{  -17.81 ;        0 ;        0 ; -0.07407 ;    21.78 }
{       0 ;        2 ;        3 ;        2 ;        0 }
{       0 ;    1.894 ;        0 ;    3.783 ;    1.157 }
{       0 ;        0 ;   -53.44 ;    35.56 ;    21.78 }
{       0 ;    2.119 ;    6.364 ;        0 ;   -1.298 }

Опорные решения:
{       1 ;        2 ;        0 ;        4 ;        0 }
{       0 ;        2 ;        3 ;        2 ;        0 }
{       0 ;    1.894 ;        0 ;    3.783 ;    1.157 }

Оптимальное решение:
{       1 ;        2 ;        0 ;        4 ;        0 }

Process finished with exit code 0
```

3. Решить одну из следующих ниже задач вручную (подготовить тестовые данные).

$$\left(\begin{array}{ccccc|c} 6 & -2 & 2 & 0 & 5 & 2 \\ -1 & -13 & 7 & 11 & 0 & 17 \\ 4 & -7 & 2 & 1 & 3 & -6 \\ 5 & -15 & 9 & 11 & 5 & 19 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 13 & -7 & -11 & 0 & -17 \\ 6 & -2 & 2 & 0 & 5 & 2 \\ 4 & -7 & 2 & 1 & 3 & -6 \\ 5 & -15 & 9 & 11 & 5 & 19 \end{array}\right) \sim$$

$\mathrm{I} = \mathrm{II} \cdot (-1)$
$\mathrm{II} = \mathrm{I}$

$\mathrm{II} = \mathrm{II} + \mathrm{I} \cdot (-6)$
$\mathrm{III} = \mathrm{III} + \mathrm{I} \cdot (-4)$
$\mathrm{IV} = \mathrm{IV} + \mathrm{I} \cdot (-5)$

$$\sim \left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 13 & -7 & -11 & 0 & -17 \\ 0 & -80 & 44 & 66 & 5 & 104 \\ 0 & -59 & 30 & 45 & 3 & 62 \\ 0 & -80 & 44 & 66 & 5 & 104 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 13 & -7 & -11 & 0 & -17 \\ 0 & -21 & 14 & 21 & 2 & 42 \\ 0 & -59 & 30 & 45 & 3 & 62 \end{array}\right) \sim$$

IV – исключаем
$\mathrm{II} = \mathrm{II} - \mathrm{III}$

$\mathrm{III} = \mathrm{III} + \mathrm{II} \cdot (-2)$

$$\sim \left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 13 & -7 & -11 & 0 & -17 \\ 0 & -21 & 14 & 21 & 2 & 42 \\ 0 & -17 & 2 & 3 & -1 & -22 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 0 & \frac{5}{3} & 2 & \frac{26}{21} & 9 \\ 0 & 1 & -\frac{2}{3} & -1 & -\frac{2}{21} & -2 \\ 0 & 0 & -\frac{28}{3} & -14 & -\frac{55}{21} & -56 \end{array}\right) \sim$$

$\mathrm{II} = \mathrm{II} \cdot \left(-\frac{1}{21}\right)$
$\mathrm{III} = \mathrm{III} + 17 \cdot \left(\mathrm{II} \cdot \left(-\frac{1}{21}\right)\right)$
$\mathrm{I} = \mathrm{I} - 13 \cdot \left(\mathrm{II} \cdot \left(-\frac{1}{21}\right)\right)$

$\mathrm{III} = \mathrm{III} \cdot \left(-\frac{3}{28}\right)$
$\mathrm{I} = \mathrm{I} - \frac{5}{3} \cdot \left(\mathrm{III} \cdot \left(-\frac{3}{28}\right)\right)$
$\mathrm{II} = \mathrm{II} + \frac{2}{3} \cdot \left(\mathrm{III} \cdot \left(-\frac{3}{28}\right)\right)$

$$\sim \left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 0 & 0 & -\frac{1}{2} & \frac{151}{196} & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & \frac{27}{294} & 2 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{3}{2} & \frac{55}{196} & 6 \end{array}\right)$$

1) $x_1 x_2 x_3$: $(-1; 2; 6; 0; 0)$

Берём базис $x_1 x_2 x_4$

$$\left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 0 & 0 & -\frac{1}{2} & \frac{151}{196} & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & \frac{27}{294} & 2 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{3}{2} & \frac{55}{196} & 6 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 0 & \frac{1}{3} & 0 & \frac{508}{588} & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & \frac{27}{294} & 2 \\ 0 & 0 & \frac{2}{3} & 1 & \frac{110}{588} & 4 \end{array}\right)$$

$\mathrm{III} = \mathrm{III} \cdot \frac{2}{3}$; $\mathrm{II} = \mathrm{II} - \left(\mathrm{III} \cdot \frac{2}{3}\right) \cdot 0$; $\mathrm{I} = \mathrm{I} + \left(\mathrm{III} \cdot \frac{2}{3}\right) \cdot \frac{1}{2}$

2) $x_1 x_2 x_4$: $(1;\ 2;\ 0;\ 4;\ 0)$

Берём базис $x_1 x_2 x_5$

$$\left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 0 & 0 & -\frac{1}{2} & \frac{151}{196} & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & \frac{27}{294} & 2 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{3}{2} & \frac{55}{196} & 6 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 0 & -\frac{103}{55} & \frac{308}{110} & 0 & -\frac{961}{55} \\ 0 & 1 & -\frac{18}{55} & -\frac{27}{55} & 0 & \frac{2}{55} \\ 0 & 0 & \frac{196}{55} & \frac{104}{55} & 1 & \frac{1176}{55} \end{array}\right)$$

$$\text{III} = \text{III} \cdot \frac{196}{55};\quad \text{II} = \text{II} - \left(\text{III} \cdot \frac{196}{55}\right) \cdot \frac{27}{294};\quad \text{I} = \text{I} - \left(\text{III} \cdot \frac{196}{55}\right) \cdot \frac{151}{196}$$

3) $x_1 x_2 x_5$: $\left(-\frac{961}{55};\ \frac{2}{55};\ 0;\ 0;\ \frac{1176}{55}\right)$

Берём базис $x_1 x_3 x_4$

$$\left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 0 & 0 & -\frac{1}{2} & \frac{151}{196} & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & \frac{27}{294} & 2 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{3}{2} & \frac{55}{196} & 6 \end{array}\right)$$

Необходимо заместить x_2 на x_4, но во второй строке (определяющей x_2) в четвертом столбце стоит 0. Это означает что такого решения не существует.

4) $x_1 x_3 x_4$ – не существует.

Берём базис $x_1 x_3 x_5$

$$\left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 0 & 0 & -\frac{1}{2} & \frac{151}{196} & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & \frac{27}{294} & 2 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{3}{2} & \frac{55}{196} & 6 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & -\frac{151}{18} & 0 & -\frac{1}{2} & 0 & -\frac{160}{9} \\ 0 & \frac{294}{27} & 0 & 0 & 1 & \frac{588}{27} \\ 0 & -\frac{55}{18} & 1 & \frac{3}{2} & 0 & -\frac{1}{9} \end{array}\right)$$

$$\text{II} = \text{II} \cdot \frac{294}{27};\quad \text{I} = \text{I} - \left(\text{II} \cdot \frac{294}{27}\right) \cdot \frac{151}{196};\quad \text{III} = \text{III} - \left(\text{II} \cdot \frac{294}{27}\right) \cdot \frac{55}{196}$$

5) $x_1 x_3 x_5$: $\left(-\frac{160}{9};\ 0;\ -\frac{1}{9};\ 0;\ \frac{588}{27}\right)$

Берём базис $x_1 x_4 x_5$

$$\left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & -\frac{151}{18} & 0 & \frac{1}{2} & 0 & -\frac{160}{9} \\ 0 & \frac{294}{27} & 0 & 0 & 1 & \frac{588}{27} \\ 0 & -\frac{55}{18} & 1 & \frac{3}{2} & 0 & -\frac{1}{9} \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & -\frac{151}{27} & \frac{1}{3} & 0 & 0 & -\frac{481}{27} \\ 0 & \frac{294}{27} & 0 & 0 & 1 & \frac{588}{27} \\ 0 & -\frac{55}{27} & \frac{2}{3} & 1 & 0 & -\frac{2}{27} \end{array}\right)$$

$$\mathrm{III} = \mathrm{III}\cdot\frac{2}{3};\quad \mathrm{II} = \mathrm{II} + \left(\mathrm{III}\cdot\frac{2}{3}\right)\cdot 0;\quad \mathrm{I} = \mathrm{I} + \frac{1}{2}\left(\mathrm{III}\cdot\frac{2}{3}\right)$$

6) $x_1 x_4 x_5 : \left(-\frac{481}{27}; 0; 0; -\frac{2}{27}; \frac{588}{27}\right)$

Берём базис $x_2 x_3 x_4$

$$\left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 0 & \frac{1}{3} & 0 & \frac{508}{588} & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & \frac{27}{294} & 2 \\ 0 & 0 & \frac{2}{3} & 1 & \frac{110}{588} & 4 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccccc|c} 3 & 0 & 1 & 0 & \frac{508}{196} & 3 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & \frac{27}{294} & 2 \\ 2 & 0 & 0 & 1 & -\frac{453}{294} & 2 \end{array}\right)$$

$$\mathrm{I} = \mathrm{I}\cdot 3;\quad \mathrm{II} = \mathrm{II};\quad \mathrm{III} = \mathrm{III} - \frac{2}{3}(\mathrm{I}\cdot 3)$$

7) $x_2 x_3 x_4 : (0; 2; 3; 2; 0)$

Берём базис $x_2 x_3 x_5$

$$\left(\begin{array}{ccccc|c} 3 & 0 & 1 & 0 & \frac{508}{196} & 3 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & \frac{27}{294} & 2 \\ -2 & 0 & 0 & 1 & -\frac{453}{294} & 2 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccccc|c} -\frac{105}{453} & 0 & 1 & -\frac{462}{453} & 0 & \frac{2883}{453} \\ -\frac{54}{453} & 1 & 0 & \frac{27}{453} & 0 & \frac{960}{453} \\ \frac{588}{453} & 0 & 0 & -\frac{294}{453} & 1 & -\frac{588}{453} \end{array}\right)$$

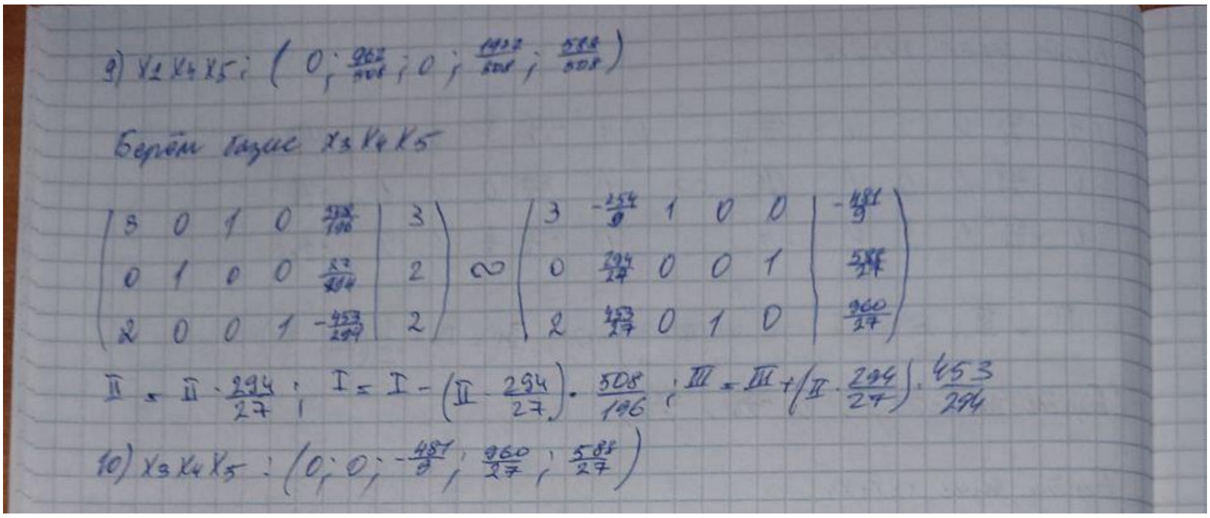
$$\mathrm{III} = \mathrm{III}\cdot\left(-\frac{294}{453}\right);\quad \mathrm{II} = \mathrm{II} - \left(\mathrm{III}\cdot\left(-\frac{294}{453}\right)\right)\cdot\frac{27}{294};\quad \mathrm{I} = \mathrm{I} - \left(\mathrm{III}\cdot\left(-\frac{294}{453}\right)\right)\cdot\frac{508}{196}$$

8) $x_2 x_3 x_5 : \left(0; \frac{960}{453}; \frac{2883}{453}; 0; -\frac{588}{453}\right)$

Берём базис $x_2 x_4 x_5$

$$\left(\begin{array}{ccccc|c} 3 & 0 & 1 & 0 & \frac{508}{196} & 3 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & \frac{27}{294} & 2 \\ 2 & 0 & 0 & 1 & -\frac{453}{294} & 2 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccccc|c} \frac{588}{508} & 0 & \frac{196}{508} & 0 & 1 & \frac{588}{508} \\ -\frac{54}{508} & 1 & -\frac{18}{508} & 0 & 0 & \frac{962}{508} \\ \frac{1426}{508} & 0 & \frac{302}{508} & 1 & 0 & \frac{1432}{508} \end{array}\right)$$

$$\mathrm{I} = \mathrm{I}\cdot\frac{196}{508};\quad \mathrm{II} = \mathrm{II} - \left(\mathrm{I}\cdot\frac{196}{508}\right)\cdot\frac{27}{294};\quad \mathrm{III} = \mathrm{III} + \left(\mathrm{I}\cdot\frac{196}{508}\right)\cdot\frac{453}{294}$$



9) $x_2 x_4 x_5$: $\left(0; \frac{962}{508}; 0; \frac{1432}{508}; \frac{588}{508}\right)$

Берём базис $x_3 x_4 x_5$

$$\left(\begin{array}{ccccc|c} 3 & 0 & 1 & 0 & \frac{508}{196} & 3 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & \frac{27}{294} & 2 \\ 2 & 0 & 0 & 1 & -\frac{453}{294} & 2 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccccc|c} 3 & -\frac{254}{9} & 1 & 0 & 0 & -\frac{481}{9} \\ 0 & \frac{294}{27} & 0 & 0 & 1 & \frac{588}{27} \\ 2 & \frac{453}{27} & 0 & 1 & 0 & \frac{960}{27} \end{array}\right)$$

$II = II \cdot \frac{294}{27}$; $I = I - \left(II \cdot \frac{294}{27}\right) \cdot \frac{508}{196}$; $III = III + \left(II \cdot \frac{294}{27}\right) \cdot \frac{453}{294}$

10) $x_3 x_4 x_5$: $\left(0; 0; -\frac{481}{9}; \frac{960}{27}; \frac{588}{27}\right)$

Результаты работы программы совпали с вычислениями, выполненными вручную.

Вывод: в ходе лабораторной работы мы изучили метод Гаусса-Жордана и операцию замещения, а также освоили их применение к отысканию множества допустимых базисных видов системы линейных уравнений, и решению задачи линейного программирования простым перебором опорных решений