

МИНИСТЕРСТВО НАУКИ И ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ БЮДЖЕТНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ
УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«БЕЛГОРОДСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ
ТЕХНОЛОГИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ им. В. Г. ШУХОВА»
(БГТУ им. В.Г. Шухова)

Кафедра программного обеспечения вычислительной техники и автоматизированных систем

Лабораторная работа №1

по дисциплине: Математическая логика и теория алгоритмов

Тема: Логика высказываний

Выполнил: ст. группы ПВ-211
Чувилко Илья

Проверили:
Куценко Дмитрий

Белгород 2022 г.

23	5.6	8.6	9.16	11.13	13.5	16.1	22.4	29.2	33	37.5	44.2	59.5
----	-----	-----	------	-------	------	------	------	------	----	------	------	------

Выполнение работы:

5. Опустите лишние скобки и знак «&» в формулах:

6) $((X \vee Y) \rightarrow (X \& Y)) \vee ((\bar{X} \& Y) \& (X \vee \bar{Y}))$.

$$\begin{aligned}
 ((X \vee Y) \rightarrow (X \& Y)) \vee ((\bar{X} \& Y) \& (X \vee \bar{Y})) &= ((\overline{X \vee Y}) \vee (X \& Y)) \vee ((\bar{X} \& Y) \& (X \vee \bar{Y})) = \\
 &= (\overline{X \vee Y}) \vee (X \& Y) \vee \bar{X} \& Y \& \bar{X} \vee \bar{X} \& Y \& Y = (\overline{X \vee Y}) \vee \underline{X \& Y} \vee \underline{\bar{X} \& Y} = \\
 &\quad \text{ⓕ} \quad \bar{X} \& \bar{Y} \vee Y = X \rightarrow Y
 \end{aligned}$$

X	Y	F	X → Y
0	0	1	1
0	1	1	1
1	0	0	0
1	1	1	1

8. Используя таблицы истинности, докажите равносильность формул:

6) $A \vee A \equiv A$.

A	A ∨ A	A	A
0	0	0	0
1	1	1	1

=> Значения $A \vee A$ и A - эквивалентны

9. Применяя таблицы истинности, выясните, являются ли следующие формулы тождественно истинными:

16) $(X \rightarrow (Y \rightarrow Z)) \rightarrow (X \& Y \rightarrow Z)$.

$(X \overset{1}{\rightarrow} (Y \overset{1}{\rightarrow} Z)) \overset{5}{\rightarrow} (X \overset{3}{\&} Y \overset{4}{\rightarrow} Z) = F(X, Y, Z)$

X	Y	Z	Y → Z	X → (Y → Z)	X & Y	(X & Y) → Z	F
0	0	0	1	1	0	1	1
0	0	1	1	1	0	1	1
0	1	0	0	1	0	1	1
0	1	1	1	1	0	1	1
1	0	0	1	1	0	1	1
1	0	1	1	1	0	1	1
1	1	0	0	0	1	0	1
1	1	1	1	1	1	1	1

11. Найдите КНФ для следующих формул:

13) $X \rightarrow ZYW$.

$X \rightarrow Z \wedge Y \wedge W = \bar{X} \vee (Z \wedge Y \wedge W) = (\bar{X} \vee Z)(\bar{X} \vee Y)(\bar{X} \vee W)$

13. Докажите при помощи КНФ или ДНФ тождественную истинность формул:

$$\begin{aligned}
 (X \rightarrow Y) \rightarrow ((X \rightarrow Z) \rightarrow (X \rightarrow (Y \& Z))) &= (\overline{X \rightarrow Y}) \vee ((\overline{X \rightarrow Z}) \vee (\overline{X \rightarrow (Y \& Z)})) = \\
 &= X \& \bar{Y} \vee X \& \bar{Z} \vee \bar{X} \vee Y \& Z = (X \vee X) \& (X \vee \bar{Z}) \& (\bar{Y} \vee X) \& (\bar{Y} \vee \bar{Z}) \vee (\bar{X} \vee Y) \& (\bar{X} \vee Z) = \\
 &= (\underline{X \vee \bar{X} \vee Z})(\underline{X \vee \bar{X} \vee Y})(\underline{X \vee \bar{X} \vee \bar{Z} \vee Y})(\underline{X \vee \bar{X} \vee \bar{Z} \vee Z})(\underline{\bar{Y} \vee X \vee \bar{X} \vee Y})(\underline{\bar{Y} \vee X \vee \bar{X} \vee Z})(\underline{\bar{Y} \vee \bar{Z} \vee \bar{X} \vee Y})(\underline{\bar{Y} \vee \bar{Z} \vee \bar{X} \vee Z})
 \end{aligned}$$

Полученная КНФ является тождественно истинной, так как каждый элементарный дизъюнкт содержит переменную и ее отрицанию

16. При каких значениях переменных X, Y, Z, U, V, W следующие формулы ложны:

$$1) ((X \rightarrow (Y \& Z)) \rightarrow (\bar{Y} \rightarrow \bar{X})) \rightarrow \bar{Y}.$$

$$((X \rightarrow (Y \& Z)) \rightarrow (\bar{Y} \rightarrow \bar{X})) \rightarrow \bar{Y}$$

Формула будет ложна, когда $\bar{Y} = 0$ и оставшаяся часть будет истинной

$$\begin{cases} \bar{Y} = 0 \\ (X \rightarrow (Y \& Z)) \rightarrow (\bar{Y} \rightarrow \bar{X}) = 1 \end{cases}$$

Подставим Y в формулу

$$(X \rightarrow (1 \& Z)) \rightarrow (0 \rightarrow \bar{X})$$

Такая формула всегда истинна, при любых x и z

Исходная формула будет ложна при:

X	Y	Z
0	1	0
0	1	1
1	1	0
1	1	1

22. Приведите к СДНФ следующие формулы:

$$4) X \rightarrow YZ.$$

$$\begin{aligned} X \rightarrow YZ &= \bar{X} \vee YZ = \bar{X} \vee \bar{X}Y \vee \bar{X}\bar{Y} \vee \bar{X}YZ \vee X\bar{Y}Z = \bar{X}YZ \vee \bar{X}Y\bar{Z} \vee \bar{X}\bar{Y}Z \vee \bar{X}\bar{Y}\bar{Z} \vee \bar{X}YZ \vee X\bar{Y}Z = \\ &= \bar{X}YZ \vee \bar{X}Y\bar{Z} \vee \bar{X}\bar{Y}Z \vee \bar{X}\bar{Y}\bar{Z} \vee X\bar{Y}Z \end{aligned}$$

29. Найдите двойственные формулы:

$$2) (\bar{Y} \vee \bar{Z}) \& (X \vee \bar{Y}Z) = f(x, y, z)$$

$$f^*(x, y, z) = \overline{Y \vee Z} \vee \overline{X \vee \bar{Y}Z} = \bar{Y}\bar{Z} \vee X \& \bar{Y}\bar{Z}$$

33. Рассмотрите следующее утверждение и выясните, противоречиво ли оно: «Если конгресс отказывается принять новые законы, то забастовка не будет окончена, кроме случая, когда она длится более месяца и президент фирмы уйдёт в отставку; и либо конгресс примет новые законы, либо забастовка не закончится, хотя она и длилась более месяца».

X - конгресс отказывается принять законы

Y - Забастовка не будет закончена

Z - Забастовка длится более месяца

W - президент фирмы уйдет в отставку

$$\begin{aligned} (X \rightarrow Y \vee ZW) \& (\bar{X} \wedge YZ) &= (\bar{X} \vee Y \vee ZW) (\bar{X} \& \bar{Y}\bar{Z} \vee X\bar{Y}Z) = (\bar{X} \vee Y \vee ZW) (\bar{X} \& (\bar{Y} \vee \bar{Z}) \vee X\bar{Y}Z) = \\ &= (\bar{X} \vee Y \vee ZW) (\bar{X}\bar{Y} \vee \bar{X}\bar{Z} \vee X\bar{Y}Z) = \bar{X}\bar{Y} \vee \bar{X}\bar{Z} \vee \bar{X}Y\bar{Z} \vee X\bar{Y}Z \vee \bar{X}\bar{Y}ZW \vee X\bar{Y}Z\bar{W} = \\ &= \bar{X}\bar{Y} \vee \bar{X}\bar{Z} \vee X\bar{Y}Z \end{aligned}$$

Формула не противоречива, так как остались несокращаемые термы

37. Найти все (с точностью до равносильности) посылки, логическим следствием которых являются формулы:

$$5) X \vee Y \rightarrow XY. = 23$$

Найдем СКНФ

$$\begin{aligned} f &= \overline{X \vee Y \vee XY} = \overline{\bar{X} \bar{Y} \vee XY} = \overline{\bar{X} \bar{Y}} \& \overline{XY} = \overline{(X \vee Y)} \& \overline{(X \vee Y)} = \overline{X \bar{Y} \vee \bar{X} Y} = \\ &= \overline{X \bar{Y}} \vee \overline{\bar{X} Y} = (\bar{X} \vee Y)(X \vee \bar{Y}) \end{aligned}$$

Получим двойственную формулу для СДНФ

$$23^* = (\bar{X} \vee \bar{Y}) \& (X \vee Y)$$

Заменяем литералы на противоположные:

$$(X \vee Y) \& (\bar{X} \vee \bar{Y})$$

$$f_1 = (X \vee Y)$$

$$f_2 = (\bar{X} \vee \bar{Y})$$

$$23 \& f_1 = (\bar{X} \vee Y)(X \vee \bar{Y})(X \vee Y)$$

$$23 \& f_2 = (\bar{X} \vee Y)(X \vee \bar{Y})(\bar{X} \vee \bar{Y})$$

$$23 \& f_1 \& f_2 = (\bar{X} \vee Y)(X \vee \bar{Y})(X \vee Y)(\bar{X} \vee \bar{Y})$$

44. Определите, следует ли на уровне логики высказываний:

2) из данной теоремы ей обратно-противоположная.

Пусть прямая теорема выражается $P \rightarrow Q$. Тогда обратно-противоположная $\bar{Q} \rightarrow \bar{P}$

P	Q	\bar{P}	\bar{Q}	$P \rightarrow Q$	$\bar{Q} \rightarrow \bar{P}$
0	0	1	1	1	1
0	1	1	0	1	1
1	0	0	1	0	0
1	1	0	0	1	1

$$P \rightarrow Q \equiv \bar{Q} \rightarrow \bar{P}$$

59. Решить задачи:

5) Джонс утверждает, что не встречал этой ночью Смита. Если Джонс не встречал этой ночью Смита, то либо Смит был убийцей, либо Джонс лжёт. Если Смит не был убийцей, то Джонс не встречал его этой ночью, а убийство было совершено после полуночи. Если убийство было совершено после полуночи, то либо Смит был убийцей, либо Джонс лжёт. Кто был убийцей?

X - Джонс не встречал Смита

Y - Смит - убийца

Z - Убийство было совершено после полуночи

Для начала предположим, что Смит убийца. Тогда:

$$\begin{aligned}
 & (X \rightarrow (Y \wedge \bar{X})) (\bar{Y} \rightarrow XZ) (Z \rightarrow (Y \wedge X)) \rightarrow Y = (\bar{X} \vee (\bar{X}\bar{Y} \vee XY)) (Y \vee XZ) (\bar{Z} \vee (\bar{X}\bar{Y} \vee XY)) \rightarrow Y = \\
 & = (\bar{X} \vee Y) (Y \vee XZ) (\bar{Z} \vee \bar{X}\bar{Y} \vee XY) \rightarrow Y = (\bar{X}Y \vee Y \vee XYZ) (\bar{Z} \vee \bar{X}\bar{Y} \vee XY) \rightarrow X = \\
 & = Y (\bar{Z} \vee \bar{X}\bar{Y} \vee XY) \rightarrow Y = (Y\bar{Z} \vee XY) \rightarrow Y = Y (\bar{Z} \vee X) \rightarrow Y = \bar{Y} \vee Z\bar{X} \vee Y = 1
 \end{aligned}$$

Предположение было верным. Задача решена.