МИНИСТЕРСТВО НАУКИ И ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ БЮДЖЕТНОЕ
ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
«БЕЛГОРОДСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ ТЕХНОЛОГИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ им. В. Г. ШУХОВА» (БГТУ им. В.Г. Шухова)

Кафедра программного обеспечения вычислительной техники и автоматизированных систем

Лабораторная работа №7

по дисциплине: «Вычислительная математика»

Выполнил: ст. группы ПВ-211

Чувилко Илья Романович

Проверил:

Бондаренко Татьяна Владимировна

Белгород 2023 г.

Тема: Минимизация функции многих переменных методом градиента с дроблением шага

Вариант: 23

Цель работы: изучить метод градиента с дроблением шага для решения задачи минимизации функции многих переменных и получить практические навыки его применения.

Ход работы:

23	$f(x_1,x_2) = x_1^2 - x_2^2 + x_1x_2 - x_1 - 2x_2 + 5$

Задание 1. Найти точные значения координат точки минимума и минимальное значение функции y = f (x1, x2) для функции соответствующего варианта задания, используя необходимые и достаточные условия локального минимума

Задание 2. Выполнить вручную вычисление приближенного значения точки минимума целевой функции методом градиента с дроблением шага, начиная с произвольно выбранного начального приближения M0 (x10, x20). Точность решения ε = 0,01. Вручную подробно достаточно выполнить первый шаг метода градиента с дроблением шага. Параметры метода выбрать самостоятельно

$f(x_1; x_2) = x_1^2 + x_2^2 + x_1 x_2 - x_1 - 2x_2 + 5$

№1.

$\operatorname{grad} f(\vec{x}) = \left\{ \frac{\partial f}{\partial x_1}, \frac{\partial f}{\partial x_2} \right\} = \{2x_1 + x_2 - 1; 2x_2 + x - 2\}$

$\begin{cases} 2x_1 + x_2 - 1 = 0 \\ 2x_2 + x_1 - 2 = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} x_1 = 0 \\ x_2 = 1 \end{cases}$

$$r = \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2}; & \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 x_2} \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x_2 x_1}; & \frac{\partial^2 f}{\partial x_2^2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$$

$\Delta_1 = 2 > 0$

$\Delta_2 = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} = 4 - 1 = 3 > 0$

Точка $(2;3)$ является точкой локального мин.

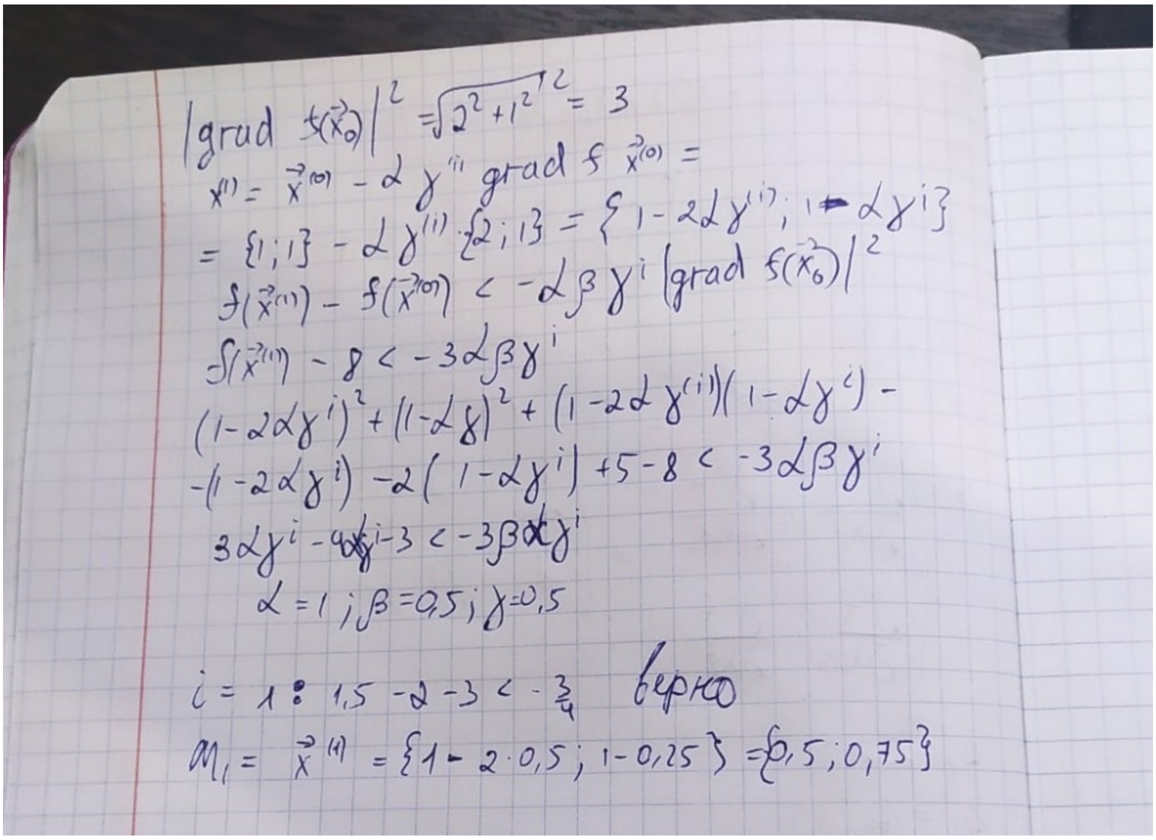
№2.

Пусть точка $M_0(1;1)$

$f = 1 + 1 + 1 - 1 - 2 + 5 = 5$

$\operatorname{grad} f(\vec{x}) = \{2x_1 + x_2 - 1; 2x_2 + x_1 - 2\}$

$\operatorname{grad} f(\vec{x}) = \{2; 1\}$



$|grad\ f(\vec{x}_0)|^2 = \sqrt{2^2+1^2}^2 = 3$

$x^{(1)} = \vec{x}^{(0)} - \alpha\gamma^{i}\ grad\ f\ \vec{x}^{(0)} =$

$= \{1;1\} - \alpha\gamma^{(1)}\{2;1\} = \{1-2\alpha\gamma^{(1)};\ 1-\alpha\gamma^{i}\}$

$f(\vec{x}^{(1)}) - f(\vec{x}^{(0)}) < -\alpha\beta\gamma^{i}\,|grad\ f(\vec{x}_0)|^2$

$f(\vec{x}^{(1)}) - 8 < -3\alpha\beta\gamma^{i}$

$(1-2\alpha\gamma^{i})^2 + (1-\alpha\gamma)^2 + (1-2\alpha\gamma^{(i)})(1-\alpha\gamma^{i}) -$

$-(1-2\alpha\gamma^{i}) - 2(1-\alpha\gamma^{i}) + 5 - 8 < -3\alpha\beta\gamma^{i}$

$3\alpha\gamma^{i} - \cancel{4\alpha\gamma^{i}} - 3 < -3\beta\alpha\gamma^{i}$

$\alpha = 1;\ \beta = 0{,}5;\ \gamma = 0{,}5$

$i = 1:\ 1{,}5 - 2 - 3 < -\frac{3}{4}$ верно

$M_1 = \vec{x}^{(1)} = \{1 - 2\cdot 0{,}5;\ 1 - 0{,}25\} = \{0{,}5;\ 0{,}75\}$

Задание 3. Реализовать логическую функцию для нахождения приближенного значения точки локального минимума и минимального значения целевой функции y = f(x1, x2) методом градиента с дроблением шага. Входными данными для логической функции являются:

- целевая функция y = f (x1, x2)
- градиент целевой функции grad (f (x1, x2));
- начальное приближение M0(x10, x20) к точке локального минимума;
- точность решения ε;
- ограничение на максимальное число итераций n;
- параметры метода градиента с дроблением шага α, β, γ.

Функция возвращает значение «истина», если приближенное решение с заданной точностью получено за число итераций, не превышающее n, и «ложь» в противном случае

Результат работы программы: приближенное значение точки локального минимума и минимальное значение целевой функции y = f (x1, x2) с заданной точностью, количество выполненных итераций.

Предусмотреть возможность сохранения пошаговых результатов реализации метода градиента с дроблением шага в файл

```cpp
#include <iostream>
#include "cmath"
#include "windows.h"

using namespace std;

struct Point {
  float x1;
  float x2;
  void output() {
    cout << x1 << ' ' << x2 << '\n';
  }
};

typedef float func(Point point);

typedef Point grad(Point point);

float targetFunction(Point point) {
  return pow(point.x1, 2) + pow(point.x2, 2) + point.x1 * point.x2 - point.x1 - 2 * point.x2 + 5;
}

Point gradient(Point point) {
  return {2 * point.x1 + point.x2 - 1, 2 * point.x2 + point.x1 - 2};
}

bool findMinPoint(func targetFunction, grad gradient, Point &point, float &minValue, float eps, int maxIterations,
                  float alpha, float betta, float gamma) {
  float precision = eps * 2;
  int iteration = 0;

  while (precision > eps && iteration < maxIterations) {
    Point currentGradient = gradient(point);
    float gradientModuleSquared = pow(currentGradient.x1, 2) + pow(currentGradient.x2, 2);
    Point newPoint;

    int i = 0;
    bool equationIsValid = false;
    while (!equationIsValid) {
      i++;
      newPoint = {(float) (point.x1 - alpha * pow(gamma, i) * currentGradient.x1),
                  (float) (point.x2 - alpha * pow(gamma, i) * currentGradient.x2)};

      equationIsValid = targetFunction(newPoint) - targetFunction(point) <
                        -betta * alpha * pow(gamma, i) * gradientModuleSquared;
    }

    precision = abs(targetFunction(newPoint) - targetFunction(point));
    point = newPoint;
    iteration++;
  }

  minValue = targetFunction(point);
  return precision < eps;
}


int main() {
  SetConsoleOutputCP(CP_UTF8);
  Point point = {1, 1};
  float minValue;
  bool isSuccessful = findMinPoint(targetFunction, gradient, point, minValue, 0.0001, 100, 1, 0.5, 0.5);
```

```
  if (isSuccessful) {
    cout << "Необходимая точность достигнута";
  } else {
    cout << "Необходимая точность не достигнута";
  }

  cout << "\n" << minValue << "\n" << point.x1 << " " << point.x2;
}
```

Результат работы программы:

```
C:\BGTU\BGTU\VicMat\Lab7\Example\Code\cmake-build-debug\Code.exe
Необходимая точность достигнута
4
0.0012207 0.999023
Process finished with exit code 0
```

Вывод: в ходе лабораторной работы мы изучили метод градиента с дроблением шага для решения задачи минимизации функции многих переменных и получили практические навыки его применения