

МИНИСТЕРСТВО НАУКИ И ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ БЮДЖЕТНОЕ
ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

**«БЕЛГОРОДСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ ТЕХНОЛОГИЧЕСКИЙ
УНИВЕРСИТЕТ им. В. Г. ШУХОВА» (БГТУ им. В.Г. Шухова)**

Кафедра программного обеспечения вычислительной техники и
автоматизированных систем

Лабораторная работа №4

по дисциплине: «Вычислительная математика»

Выполнил: ст. группы ПВ-
211

Медведев Дмитрий
Сергеевич

Проверила:
Бондаренко Т.В.

Белгород 2023 г.

Численные методы решения задачи Коши

Вариант 8

Цель работы: изучить численные методы решения задачи Коши; получить практические навыки приближенного решения дифференциальных уравнений с помощью ЭВМ.

Ход работы:

I_8	$y' + \frac{y}{x} = \sin x, \quad y _{x=\pi} = \frac{1}{\pi}, \quad \pi \leq x \leq \pi + 1$	$\varphi(x) = \frac{\sin x - x \cos x + 1 - \pi}{x}$
-------	--	--

1. Вычислить «вручную» приближенное решение $y(x)$ задачи Коши методом последовательного дифференцирования.
Замечание. Ряд Тейлора ограничить значением производной третьего порядка.
2. Вычислить значение функции $\varphi(x)$, которая является точным решением задачи Коши и функции $y(x)$, которая является приближенным решением задачи Коши по методу последовательного дифференцирования, в точке $x = b$.
Замечание. $x = b$ – правый конец указанного в задании отрезка, которому принадлежит значение x , $a \leq x \leq b$, $x = b = x_0 + ih$, $h > 0$ — шаг сетки, $x_0 = a$.
3. Определить относительную и абсолютную погрешности вычисления приближенного решения задачи Коши методом последовательного дифференцирования. Значения погрешностей внести в соответствующие ячейки таблицы 4.
4. Вычислить «вручную» приближенное решение $y(x)$ задачи Коши четырьмя численными методами решения:
– методом Эйлера;

$$f(x_i, y_i) = \sin x - \frac{y}{x}$$

Формула ячейки C3:

$$=C2 + (1/10) * (SIN(B2) - C2/B2)$$

i	xi	yi	φi		Абс. Погрешность	Отн. Погрешность
0	3,141593	0,31831	0,31831		0	0
1	3,241593	0,308178	0,303546		0,004631879	0,015259239
2	3,341593	0,288687	0,279723		0,00896415	0,03204649
3	3,441593	0,260181	0,247201		0,012979989	0,052507768
4	3,541593	0,223069	0,206408		0,016661699	0,080722291
5	3,641593	0,177829	0,157838		0,019991427	0,126658255
6	3,741593	0,125003	0,102051		0,022951796	0,224904403
7	3,841593	0,065198	0,039672		0,025526471	0,643445879
8	3,941593	-0,00092	-0,02862		0,027700655	0,967823362
9	4,041593	-0,07263	-0,10209		0,029461532	0,288570564
10	4,141593	-0,14917	-0,17997		0,03079864	0,171134571
i	xi	yi	φi		Абс. Погрешность	Отн. Погрешность
0	3,141593	0,31831	0,31831		0	0
1	3,341593	0,298046	0,279723		0,018322359	0,065501729
2	3,541593	0,240473	0,206408		0,034065584	0,165040309
3	3,741593	0,14901	0,102051		0,046958286	0,460143745
4	3,941593	0,028116	-0,02862		0,056737697	1,982338251
5	4,141593	-0,11678	-0,17997		0,06318562	0,351094849

– методом Эйлера-Коши;

Формула ячейки C3:

$$=C2+1/2*(B3-B2)*((\sin(B2)-C2/B2)+(\sin(B3)-(C2+(B3-B2)*(\sin(B2)-C2/B2)/B3)))$$

i	xi	yi	φi		Абс. Погрешность	Отн. Погрешность
0	3,141593	0,31831	0,31831		0	0
1	3,241593	0,303499	0,303546		4,72255E-05	0,000155579
2	3,341593	0,27964	0,279723		8,28401E-05	0,00029615
3	3,441593	0,247094	0,247201		0,000107019	0,000432922
4	3,541593	0,206288	0,206408		0,000120017	0,000581458
5	3,641593	0,157715	0,157838		0,000122172	0,000774035
6	3,741593	0,101937	0,102051		0,000113898	0,001116088
7	3,841593	0,039576	0,039672		9,56907E-05	0,002412075
8	3,941593	-0,02869	-0,02862		6,81176E-05	0,002379938
9	4,041593	-0,10213	-0,10209		3,18182E-05	0,000311654
10	4,141593	-0,17995	-0,17997		1,25031E-05	6,94744E-05
i	xi	yi	φi		Абс. Погрешность	Отн. Погрешность
0	3,141593	0,31831	0,31831		0	0
1	3,341593	0,279392	0,279723		0,000331725	0,001185904
2	3,541593	0,205927	0,206408		0,000480677	0,002328777
3	3,741593	0,101595	0,102051		0,000456325	0,004471525
4	3,941593	-0,02889	-0,02862		0,000273215	0,009545759
5	4,141593	-0,17992	-0,17997		4,93588E-05	0,000274265

– модифицированным методом Эйлера;

i	x _i	x(i+1/2)	f(x _i , y _i)	y _i	φ _i		Абс. Погрешность	Отн. Погрешность
0	3,141593	3,19159	-0,1013	0,31831	0,31831		0	0
1	3,241593	3,29159	-0,1935	0,303497	0,303546		4,85748E-05	0,000160025
2	3,341593	3,39159	-0,2824	0,279627	0,279723		9,62998E-05	0,000344268
3	3,441593	3,49159	-0,3673	0,247058	0,247201		0,000143167	0,000579152
4	3,541593	3,59159	-0,4476	0,206219	0,206408		0,000189121	0,00091625
5	3,641593	3,69159	-0,5227	0,157603	0,157838		0,000234068	0,001482965
6	3,741593	3,79159	-0,5918	0,101773	0,102051		0,000277882	0,002722959
7	3,841593	3,89159	-0,6545	0,039351	0,039672		0,000320413	0,008076652
8	3,941593	3,99159	-0,71	-0,02898	-0,028622		0,000361492	0,012630049
9	4,041593	4,09159	-0,758	-0,1025	-0,102095		0,000400936	0,003927094
10	4,141593	2,0708	-0,7979	-0,18041	-0,179967		0,000438549	0,002436827
i	x _i	x(i+1/2)	f(x _i , y _i)	y _i	φ _i		Абс. Погрешность	Отн. Погрешность
0	3,141593	3,24159	-0,1013	0,31831	0,31831		0	0
1	3,341593	3,44159	-0,2823	0,279329	0,279723		0,00039406	0,001408749
2	3,541593	3,64159	-0,4475	0,205633	0,206408		0,000774735	0,003753421
3	3,741593	3,84159	-0,5916	0,100912	0,102051		0,001139484	0,011165795
4	3,941593	4,04159	-0,7097	-0,03011	-0,028622		0,001483687	0,051838003
5	4,141593	2,0708	-0,7976	-0,18177	-0,179967		0,001801446	0,010009845

– методом Рунге-Кутты.

i	x _i	m1	m2	m3	m4	y _i	φ _i		Абс. Погрешность	Отн. Погрешность
0	3,141593	-0,10132	-0,14813	-0,14739	-0,19348	0,31831	0,31831		0	0
1	3,241593	-0,19347	-0,23872	-0,23803	-0,28238	0,303546	0,303546		4,10763E-09	1,35321E-08
2	3,341593	-0,28238	-0,32572	-0,32508	-0,36735	0,279723	0,279723		7,58261E-09	2,71075E-08
3	3,441593	-0,36735	-0,40844	-0,40785	-0,4477	0,247201	0,247201		1,04253E-08	4,21732E-08
4	3,541593	-0,4477	-0,4862	-0,48567	-0,52277	0,206408	0,206408		1,26405E-08	6,12403E-08
5	3,641593	-0,52277	-0,55836	-0,55788	-0,59192	0,157838	0,157838		1,42376E-08	9,02043E-08
6	3,741593	-0,59192	-0,6243	-0,62387	-0,65454	0,102051	0,102051		1,52307E-08	1,49246E-07
7	3,841593	-0,65454	-0,68342	-0,68305	-0,71009	0,039672	0,039672		1,56381E-08	3,94191E-07
8	3,941593	-0,71009	-0,73522	-0,7349	-0,75806	-0,02862	-0,02862		1,54827E-08	5,40944E-07
9	4,041593	-0,75807	-0,7792	-0,77894	-0,79801	-0,10209	-0,10209		1,47912E-08	1,44877E-07
10	4,141593	-0,79802	-0,81497	-0,81477	-0,82957	-0,17997	-0,17997		1,35944E-08	7,55384E-08
h	0,1									
i	x _i	m1	m2	m3	m4	y _i	φ _i		Абс. Погрешность	Отн. Погрешность
0	3,141593	-0,10132	-0,1949	-0,19202	-0,28243	0,31831	0,31831		0	0
1	3,341593	-0,28238	-0,36859	-0,36609	-0,44773	0,279723	0,279723		1,21489E-07	4,3432E-07
2	3,541593	-0,4477	-0,52381	-0,52172	-0,59192	0,206408	0,206408		2,02538E-07	9,8125E-07
3	3,741593	-0,59192	-0,65537	-0,65372	-0,71008	0,102052	0,102051		2,44059E-07	2,39153E-06
4	3,941593	-0,71009	-0,75868	-0,75747	-0,79798	-0,02862	-0,02862		2,48125E-07	8,66916E-06
5	4,141593	-0,79802	-0,82996	-0,82921	-0,85239	-0,17997	-0,17997		2,17907E-07	1,21082E-06

Сначала выполнить вычисления с шагом $h = 0,2$, а затем с шагом $h = 0,1$.

Вычисления вручную можно выполнить с помощью MS Excel или другой программы и обязательно их включать в отчет.

- Сравнить полученные в пункте 4 значения приближенного решения дифференциального уравнения $y(x)$ с точным значением решения дифференциального уравнения $\varphi(x)$ в точке $x = b$.

6. Определить относительную и абсолютную погрешности вычисления приближенного решения задачи Коши заданными численными методами. Значения погрешностей внести в соответствующие ячейки табл. 4.1.

Погрешность	Вычислительный метод				
	Послед. Дифференцирова	Эйлера	Эйлера- Коши	мод. Эйлера	Рунге- Кутты
h=0,2					
Δ	0,522873727	0,063186	4,94E-05	0,001801	2,18E-07
δ	2,905380562	0,351095	0,000274	0,01001	1,21E-06
h=0,1					
Δ	0,522873727	0,030799	1,25E-05	0,000439	1,36E-08
δ	2,905380562	0,171135	6,95E-05	0,002437	7,55E-08

7. Описать в модуле функции, каждая из которых возвращает приближенное значение решения задачи Коши в точке $x = b$ с точностью ε , реализующие метод Эйлера, метод Эйлера-Коши, модифицированный метод Эйлера и метод Рунге-Кутты. Оценка точности вычисления должна осуществляться по принципу Рунге.
8. Составить программу для вычисления приближенных значений решения задачи Коши с точностью ε на отрезке $[a, b]$ с шагом h для соответствующего варианта задания с использованием всех функций, описанных в модуле. Результат работы программы таблица значений приближенного решения задачи Коши для заданного отрезка $a \leq x \leq b$. Предусмотреть возможность сохранения результата работы программы в файл.