МИНИСТЕРСТВО НАУКИ И ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ БЮДЖЕТНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«БЕЛГОРОДСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ ТЕХНОЛОГИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ им. В. Г. ШУХОВА» (БГТУ им. В.Г. Шухова)

Кафедра программного обеспечения вычислительной техники и автоматизированных систем

Лабораторная работа №3

по дисциплине: Математическая логика и теория алгоритмов Тема: «Формальные теории»

> Выполнил: ст. группы ПВ-211 Чувилко Илья Романович

Проверили: Куценко Дмитрий Александрович

Белгород 2022 г.

5.2 Алексей старше Бориса или Борис старше Владимира. Однако, Борис не старше Владимира. Следовательно, Алексей старше Бориса.

Введем следующие обозначения:

- А Алексей старше Бориса
- В Борис старше Виктора

Тогда получим формулу:

12.9 Доказать, что следующие формулы выводимы в исчислении высказываний.

для доказательства **U≡** В необходимо док-ть, что **U №** и В С

1) A- unome3A

Правило вывода, введение дизъюнкции и введение конъюкции

15.7 Построить выводы в различных исчислениях высказыванний

A&BFB&A

Исчисление высказываний:

20.7 Доказать в исчислении предикатов

Практическая часть

Разработать программу, реализующую метод резолюций для логики высказываний. Программа считывает несколько формул-посылок и следствие, истинность которого необходимо доказать. На экран программа выводит не только результат доказательства (фразы «Теорема доказана», «Теорема опровергнута»), но и объяснение доказательства, а именно исходное множество дизъюнктов и выполненные склейки.

```
#include <iostream>
#include <string>
#include <set>
#include <map>
#include <stack>
#include <queue>
#include <cassert>
#include <ctime>
#include <algorithm>
#include <windows.h>
// Объявление типов.
// Токен (лексема):
typedef char Token;
// Стек токенов:
typedef std::stack<Token> Stack;
// Последовательность токенов:
typedef std::queue<Token> Queue;
// Множество различных токенов:
typedef std::set<Token> Set;
// Таблица значений переменных:
typedef std::map<Token, Token> Map;
// Пара переменная—значение:
typedef std::pair<Token, Token> VarVal;
// Строка символов:
typedef std::string String;
// Является ли токен числом?
inline bool isNumber(Token t) {
 return t == '0' || t == '1';
}
// Является ли токен переменной?
inline bool isVariable(Token t) {
 return (t \ge 'A' \&\& t \le 'Z') || (t \ge 'a' \&\& t \le 'z');
}
// Является ли токен операцией?
inline bool isOperation(Token t) {
 return (t == '|' || t == '&' || t == '-' || t == '>' || t == '\sim');
}
// Является ли токен открывающей скобкой?
inline bool isOpeningPar(Token t) {
 return t == '(';
}
// Является ли токен закрывающей скобкой?
inline bool isClosingPar(Token t) {
 return t == ')';
}
// Вернуть величину приоритета операции
// (чем больше число, тем выше приоритет)
```

```
inline int priority(Token op) {
 assert (isOperation(op));
 int res = 0;
 switch (op) {
  case '-':
   // Отрицание — наивысший приоритет
   res = 5;
   break;
  case '&':
   // Конъюнкция
   res = 4;
   break;
  case ":
   // Дизъюнкция
   res = 3;
   break;
  case '>':
   // Импликация
   res = 2;
   break:
  case '~':
   // Эквивалентность — наинизший приоритет
   res = 1;
   break;
 return res;
// Преобразовать последовательность токенов,
// представляющих выражение в инфиксной записи,
// в последовательность токенов, представляющих
// выражение в обратной польской записи
// (алгоритм Дейкстры «Сортировочная станция»)
Queue infixToPostfix(Queue input) {
 // Выходная последовательность (очередь вывода):
 Queue output;
 // Рабочий стек:
 Stack s;
 // Текущий входной токен:
 Token t;
 // Пока есть токены во входной последовательности:
 while (!input.empty()) {
  // Получить токен из начала входной последовательности
  t = input.front();
  input.pop();
  // Если токен — число или переменная, то:
  if (isNumber(t) || isVariable(t)) {
   // Добавить его в очередь вывода
   output.push(t);
   // Если токен — операция op1, то:
  } else if (isOperation(t)) {
   // Пока на вершине стека присутствует токен-операция ор2
   // и у op1 приоритет меньше либо равен приоритету op2, то:
   while (!s.empty() && isOperation(s.top())
       && priority(t) <= priority(s.top())
        ) {
    // переложить ор2 из стека в выходную очередь
    output.push(s.top());
    s.pop();
   // Положить ор1 в стек
   s.push(t);
```

```
// Если токен — открывающая скобка, то:
  } else if (isOpeningPar(t)) {
   // Положить его в стек
   s.push(t);
   // Если токен — закрывающая скобка, то:
  } else if (isClosingPar(t)) {
   // Пока токен на вершине стека не является открывающей скобкой:
   while (!s.empty() && !isOpeningPar(s.top())) {
    // Перекладывать токены-операции из стека
    // в выходную очередь
    assert (isOperation(s.top()));
    output.push(s.top());
    s.pop();
   // Если стек закончился до того,
   // как был встречен токен-«открывающая скобка», то:
   if (s.empty()) {
    // В выражении пропущена открывающая скобка
    throw String("Пропущена открывающая скобка!");
    // Иначе выкинуть открывающую скобку из стека
    // (но не добавлять в очередь вывода)
    s.pop();
   }
  } else {
   // В остальных случаях входная последовательность
   // содержит токен неизвестного типа
   String msg("Неизвестный символ \"");
   msg += t + String("\'!");
   throw msg;
  }
 // Токенов на входе больше нет, но ещё могут остаться токены в стеке.
 // Пока стек не пустой:
 while (!s.empty()) {
  // Если токен на вершине стека — открывающая скобка, то:
  if (isOpeningPar(s.top())) {
   // В выражении присутствует незакрытая скобка
   throw String("Незакрытая скобка!");
  } else {
   // Иначе переложить токен-операцию из стека в выходную очередь
   assert (isOperation(s.top()));
   output.push(s.top());
   s.pop();
 // Конец алгоритма.
 // Выдать полученную последовательность
 return output;
// Напечатать последовательность токенов
void printSequence(Queue q) {
 while (!q.empty()) {
  std::cout << q.front();</pre>
  q.pop();
 }
 std::cout << std::endl;</pre>
// Является ли символ пробельным?
inline bool isSpace(char c) {
```

}

```
return c <= ' ';
}
// Если символ — маленькая буква, преобразовать её в большую,
// иначе просто вернуть этот же символ
inline char toUpperCase(char c) {
 if (c \ge 'a' \&\& c \le 'z') {
  return c - 'a' + 'A';
 } else {
  return c;
 }
}
// Преобразовать строку с выражением в последовательность токенов
// (лексический анализатор)
Queue stringToSequence(const String &s) {
 Queue res:
 for (char i:s) {
  if (!isSpace(i)) {
   res.push(toUpperCase(i));
  }
 }
 return res;
}
// Напечатать сообщение об ошибке
inline void printErrorMessage(const String &err) {
 std::cerr << "*** ОШИБКА! " << err << std::endl;
}
// Ввести выражение с клавиатуры
inline String inputExpr() {
 String expr;
 std::cout << "Формула логики высказываний: ";
 std::getline(std::cin, expr);
 return expr;
}
// Выделить из последовательности токенов переменные
Set getVariables(Queue s) {
 Set res:
 while (!s.empty()) {
  if (isVariable(s.front()) && res.count(s.front()) == 0) {
   res.insert(s.front());
  }
  s.pop();
 return res;
// Получить значения переменных с клавиатуры
Map inputVarValues(const Set &var) {
 Token val;
 Map res;
 for (Set::const_iterator i = var.begin(); i != var.end(); ++i) {
   std::cout << *i << " = ";
   std::cin >> val;
   if (!isNumber(val)) {
    std::cerr << "Введите 0 или 1!" << std::endl;
  } while (!isNumber(val));
  res.insert(VarVal(*i, val));
```

```
}
 return res;
// Заменить переменные их значениями
Queue substValues(Queue expr, Map &varVal) {
 Queue res;
 while (!expr.empty()) {
  if (isVariable(expr.front())) {
   res.push(varVal[expr.front()]);
  } else {
   res.push(expr.front());
  expr.pop();
 return res;
// Является ли операция бинарной?
inline bool isBinOp(Token t) {
 return t == '&' || t == '|' || t == '>' || t == '~';
// Является ли операция унарной?
inline bool isUnarOp(Token t) {
 return t == '-';
}
// Получить bool-значение токена-числа (true или false)
inline bool logicVal(Token x) {
 assert (isNumber(x));
 return x == '1';
}
// Преобразовать bool-значение в токен-число
inline Token boolToToken(bool x) {
 if (x) {
  return '1';
 } else {
  return '0';
 }
}
// Вычислить результат бинарной операции
inline Token evalBinOp(Token a, Token op, Token b) {
 assert (isNumber(a) && isBinOp(op) && isNumber(b));
 bool res;
 // Получить bool-значения операндов
 bool left = logicVal(a);
 bool right = logicVal(b);
 switch (op) {
  case '&':
   // Конъюнкция
   res = left && right;
   break;
  case '|':
   // Дизъюнкция
   res = left || right;
   break;
  case '>':
   // Импликация
   res = !left || right;
```

```
break:
  case '~':
   // Эквивалентность
   res = (!left || right) && (!right || left);
   break;
 }
 return boolToToken(res);
}
// Вычислить результат унарной операции
inline Token evalUnarOp(Token op, Token a) {
 assert (isUnarOp(op) && isNumber(a));
 bool res = logicVal(a);
 switch (op) {
  case '-':
   // Отрицание
   res = !res;
   break;
 return boolToToken(res);
// Вычислить значение операции, модифицируя стек.
// Результат помещается в стек
void evalOpUsingStack(Token op, Stack &s) {
 assert (isOperation(op));
 // Если операция бинарная, то:
 if (isBinOp(op)) {
  // В стеке должны быть два операнда
  if (s.size() >= 2) {
   // Если это так, то извлекаем правый операнд-число
   Token b = s.top();
   if (!isNumber(b)) {
    throw String("Неверное выражение!");
   }
   s.pop();
   // Затем извлекаем левый операнд-число
   Token a = s.top();
   if (!isNumber(a)) {
    throw String("Неверное выражение!");
   s.pop();
   // Помещаем в стек результат операции
   s.push(evalBinOp(a, op, b));
  } else {
   throw String("Неверное выражение!");
  // Иначе операция унарная
 } else if (isUnarOp(op) && !s.empty()) {
  // Извлекаем операнд
  Token a = s.top();
  if (!isNumber(a)) {
   throw String("Неверное выражение!");
  }
  s.pop();
  // Помещаем в стек результат операции
  s.push(evalUnarOp(op, a));
 } else {
  throw String("Неверное выражение!");
}
```

```
// Вычислить значение выражения, записанного в обратной польской записи
Token evaluate(Queue expr) {
 // Рабочий стек
 Stack s;
 // Текущий токен
 Token t;
 // Пока входная последовательность содержит токены:
 while (!expr.empty()) {
  // Считать очередной токен
  t = expr.front();
  assert (isNumber(t) || isOperation(t));
  expr.pop();
  // Если это число, то:
  if (isNumber(t)) {
   // Поместить его в стек
   s.push(t);
   // Если это операция, то:
  } else if (isOperation(t)) {
   // Вычислить её, модифицируя стек
   // (результат также помещается в стек)
   evalOpUsingStack(t, s);
 // Результат — единственный элемент в стеке
 if (s.size() == 1) {
  // Вернуть результат
  return s.top();
 } else {
  throw String("Неверное выражение!");
 }
}
// Вывести результат вычисления на экран
void printResult(Token r) {
 assert (isNumber(r));
 std::cout << "Значение выражения: " << r << std::endl;
}
/*Возвращает словарь, элементы которого имеют вид [переменная: значение] или
[var[i]: a[i]].*/
Map input_by_arr(const Set &vars, int *a) {
 Token val;
 Map res;
 for (auto i = vars.begin(); i != vars.end(); i ++ ) { // перебираем множество переменных
  val = (*a?'1':'0'); // подготавливаем значение в соответствии с массивом а
  a++;
  if (!isNumber(val)) {
   std::cerr << "Введите 0 или 1!" << std::endl;
  res.insert(VarVal(*i, val)); // вносим в список пару «переменная : значение»
 }
 return res;
/*Cmpouм таблицу истинности truth_table для формулы input, имеющую переменные
vars.*/
void BuildTruthTable(Queue &input, Set &vars, std::vector<std::vector<int>>
&truth_table) {
 static int binary_arr[100];
 static int i = 0; // счетчик бинарного вектора
 static int z = 0; // счетчик строки матрицы truth_table (таблицы истинности)
 for (int x = 0; x < 2; x++) { // порождение всех бинарных векторов длины = количеству переменных
```

```
binary_arr[i] = x;
  if (i == vars.size() - 1) { //бинарный вектор построен
   Map map_vars = input_by_arr(vars, binary_arr); // создаем список пар «переменная»
   Token r = evaluate(substValues(input, map_vars)); // вычисляем значение формулы при заданных переменных
   // заносим данные в таблицу истинности truth table
   for (int k = 0; k \le i; k++)
    truth_table[z][k] = binary_arr[k];
   truth_table[z][vars.size()] = (r == '1');
   z++;
  } else {
   i++;
   BuildTruthTable(input, vars, truth_table);
  }
 if (i == 0) {
  z = 0;
 }
}
/*Структура - дизъюнкт.
i-й элемент вектора sign coomветствует i+1 переменной множества всех
переменных.
Состояния і-ого элемента вектора:
1 – в дизъюнкте есть і-ая переменной
0 – в дизъюнкте нет і-ой переменной
-1 -в дизъюнкте есть отрицание і-ой переменной */
typedef struct Disjunct {
 std::vector<int> sign;
} Disjunct;
/*Возвращает структуру-дизъюнкт, построенную по вектору а.*/
Disjunct CreateDisjunct(std::vector<int> &a) {
 Disjunct res = \{a\};
 return res:
}
///*Возвращает значениен "истина", если в векторе а есть элемент х,
// иначе возвращает значение "ложь".*/
int FindInVector(std::vector<int> &a, int x) {
 return find(a.begin(), a.end(), x) != a.end();
}
/* Возвращает значение "истина", если в векторе дизъюнктов а есть дизъюнкт х,
иначе возвращает значение "ложь".*/
int FindInVector(std::vector<Disjunct> &a, std::vector<int> &x) {
 for (int i = 0; i < a.size(); i++) {
  int j = 0;
  for (j = 0; j < x.size(); j++)
   if (a[i].sign[j] != x[j])
    break;
  if (j == x.size())
   return 1;
 return 0;
}
/*Вывод дизъюнкта а на экран. Используются переменные из множества vars.*/
void PrintDisjunct(std::vector<int> &a, Set &vars) {
 bool fl first = 0; //флаг того, что первый элемент выведен
 int i = 0;
 auto iter = vars.begin();
 //выводим до первого элемента включительно
```

```
std::cout << "(";
 for (; !fl_first and i < a.size() and iter != vars.end(); i++, iter++)
  if (a[i]!=0) {
   fl_first = 1;
   if (a[i] == -1)
    std::cout << '-';
   std::cout << *iter << " ";
  }
 // продолжение вывода
 for (; i < a.size() and iter != vars.end(); i++, iter++)
  if (a[i] != 0) {
   std::cout << "| "; //отличие – добавление знака дизъюнкции
   if (a[i] == -1)
    std::cout << '-';
   std::cout << *iter << " ";
 std::cout << ")";
/*Заполняет массив дизъюнктов а дизъюнктами СКНФ, относящейся к таблице
ucmuнноcmu truth_table.*/
void GetDisjunctArr(std::vector<Disjunct> &a, std::vector<std::vector<int>>
&truth table) {
 for (int i = 0; i < truth_table.size(); i++)</pre>
  if (truth_table[i][truth_table[i].size() - 1] == 0) {
   a.resize(a.size() + 1);
   a[a.size() - 1].sign.resize(truth_table[i].size() - 1);
   for (int j = 0; j < truth_table[i].size() - 1; <math>j++)
    a[a.size() - 1].sign[j] = truth_table[i][j] == 1 ? -1 : 1;
}
/*Вывод массива дизъюнктов а. Используются переменные из множества vars. */
void PrintDisjunctArr(std::vector<Disjunct> &a, Set &vars) {
 std::cout << "Множество дизъюнктов: {";
 for (int i = 0; i < a.size(); i++) {
  PrintDisjunct(a[i].sign, vars);
  if (i != a.size() - 1)
   std::cout << ", ";
 }
 std::cout << "}\n";
/*Создает резольвенту res на основе дизъюнкции dis1 и dis 2. k-ая переменная
сокращается.*/
void GetResolvent(std::vector<int> &res, std::vector<int> &dis1,
           std::vector<int> &dis2, int k) {
 res = dis1;
 for (int i = 0; i < dis2.size(); i++)
  if (res[i] == 0 \text{ and } dis2[i] != 0)
   res[i] = dis2[i];
 res[k] = 0;
/*dis_arr – массив дизъюнктантов; vars – множество используемых переменных.
Поиск новых резольвент. Возвращает 2, если из массива dis_arr можно получить пустую резольвенту,
использя принцип резолюции. Возвращает 1, если из массива dis arr можно нельзя пустую резольвенту,
использя принцип резолюции. Возвращает 0, если при использовании принципа резолюции для получения
резольвент произошло зацикливание. */
int FindResolvents(std::vector<Disjunct> &dis_arr, Set &vars) {
 const time_t MAX_TIME = 19000; // максимальное время, которое отводится на работу цикла
 time_t start = time(NULL); // время начала поиска решения
```

```
int fl condition = 0; // исходное значение флага-состояния
 while (time(NULL) - start < MAX TIME and fl condition == 0) {
  bool there is new resolvent = false; // на данной итерации была получена новая резольвента?
  // сформируем все возможные резольвенты на данной итерации
  for (int i = 0; i < dis arr.size(); i++)
   for (int j = i + 1; j < dis_arr.size() and fl_condition == 0;</pre>
      j++) {
    std::vector<int> new_resolvent;
    // пытаемся создать резольвенту из і-го и ј-го дизъюнктов
    for (int k = 0; k < vars.size(); k++)
      if (dis_arr[i].sign[k] != dis_arr[j].sign[k] and
        dis arr[i].sign[k] != 0 &&
        dis_arr[j].sign[k] != 0) {
       GetResolvent(new resolvent, dis arr[i].sign,
              dis_arr[j].sign, k);
       // если такой резольвенты нет в массиве дизъюнкт dis_arr – добавим и выведем вычисления
       if (FindInVector(dis arr, new resolvent) == 0) {
        there_is_new_resolvent = true; // получена новая резольвента
        PrintDisjunct(dis arr[i].sign, vars);
        std::cout << " | ";
        PrintDisjunct(dis_arr[j].sign, vars);
        std::cout << " = ";
        PrintDisjunct(new_resolvent, vars);
        std::cout << '\n';
        dis_arr.push_back(CreateDisjunct(new_resolvent));
       // если мы получили пустую резольвенту – выход. формула общезначима.
       if (FindInVector(new_resolvent, 1) == 0 and
         FindInVector(new resolvent, -1) == 0) {
        fl_{condition} = 2;
        break;
       }
      }
   }
  // если за итерацию основного цикла не получено новых резольвент — выход. формула не общезначима.
  if (there is new resolvent == 0) {
   std::cout << "Невозможно создать новую резольвенту.\n";
   fl condition = 1;
  }
 return fl_condition;
/* Метод резолюций для проверки формулы, записанной в посылках sends и
следствии consequence на общезначимость.
Возвращает 2, если формула общезначима.
Возвращает 1, если формула не общезначима.
Возвращает 0, если нельзя ничего сказать об общезначимости формулы.*/
int Resolution(String sends, String consequence) {
 // приводим формулу к виду противоречивости
 String formula = sends + "&" + "-" + "(" + consequence + ")";
 // Преобразуем строку в последовательность токенов
 Queue input = stringToSequence(formula);
 // Преобразовать последовательность токенов в ОПЗ
 Queue output = infixToPostfix(input);
 // Выделяем из токенов токены-переменные
 Set vars = getVariables(output);
 // Создаем матрицу truth_table (таблицу истинности) размера т на п, где т количество всех двоичных
векторов длины =
 // количеству переменных, п = количеств переменных + 1
 std::vector<std::vector<int>>> truth_table(1 << vars.size());</pre>
 for (int i = 0; i < (1 << vars.size()); i++)
```

```
truth_table[i].resize(vars.size() + 1);
 //заполняем таблицу истинности
 BuildTruthTable(output, vars, truth_table);
 // Получим наш массив дизъюнктов dis_arr по таблице истинности
 std::vector<Disjunct> dis arr;
 GetDisjunctArr(dis arr, truth table);
 //выводим массив дизъюнктов
 PrintDisjunctArr(dis_arr, vars);
 //поиск новых резольвент
 return FindResolvents(dis_arr, vars);
}
int main() {
 SetConsoleOutputCP(CP_UTF8);
 std::cout << "Количество посылок: ";
 int n;
 std::cin >> n;
 std::cout << "\nПосылки:\n";
 String send1;
 std::cin >> send1;
 String sends = "(" + send1 + ")";
 for (int i = 1; i < n; i++) {
  std::cin >> send1;
  sends = sends + "&" + "(" + send1 + ")";
 std::cout << "Следствие:\n";
 String consequence;
 std::cin >> consequence;
 switch (Resolution(sends, consequence)) {
   std::cout << "\пБыла получена пустая резольвента, выходит, следствие верное.\n";
   break;
  case 1:
   std::cout << "\nне была получена пустая резольвента, выходит, следствие не верное.\n";
   std::cout << "\nНевозможно получить ответ с помощью метода резолюций.\n";
   break;
 }
 return 0;
}
                    C:\BGTU\BGTU\MatLogika\3lab\Code\cmake-build-debug\Code.exe
                    Количество посылок:1
                    Посылки:
                    A \mid (A\&B)
                    Следствие:
                    Множество дизъюнктов: {(A | B ), (A | -B ), (-A | B ), (-A | -B )}
                    (A \mid B) \mid (A \mid -B) = (A)
                    (A \mid B) \mid (-A \mid B) = (B)
                    (A \mid -B) \mid (-A \mid B) = (-B)
                    (-A \mid B) \mid (-A \mid -B) = (-A)
                    (A) | (-A) = ()
                    Была получена пустая резольвента, выходит, следствие верное.
                    Process finished with exit code 0
```

```
      C:\BGTU\BGTU\MatLogika\3lab\Code\cmake-build-debug\Code.exe

      Количество посылок:1

      Посылки:

      А&В

      Следствие:

      В&А

      Множество дизъюнктов: {(A | B ), (A | -B ), (-A | B ), (-A | -B )}

      (A | B ) | (A | -B ) = (A )

      (A | B ) | (-A | B ) = (-B )

      (A | B ) | (-A | B ) = (-A )

      (A ) | (-A ) = ()

      Была получена пустая резольвента, выходит, следствие верное.

      Ргосеss finished with exit code 0
```

Вывод: в ходе лабораторной работы были изучены формальные теории, разработана программа, реализующая метод резолюций для логики высказываний