

МИНИСТЕРСТВО НАУКИ И ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ БЮДЖЕТНОЕ
ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
«БЕЛГОРОДСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ ТЕХНОЛОГИЧЕСКИЙ
УНИВЕРСИТЕТ им. В. Г. ШУХОВА» (БГТУ им. В.Г. Шухова)

Кафедра программного обеспечения вычислительной техники и
автоматизированных систем

Лабораторная работа №6

по дисциплине: «Исследование операций»

Вариант 23

Выполнил: ст. группы ПВ-211

Чувилко Илья Романович

Проверил:

Куртова Лилиана Николаевна

Вирченко Юрий Петрович

Белгород 2023 г.

Тема: Нахождение седловой точки в смешанных стратегиях для матричной игры с нулевой суммой

Цель работы: освоить метод нахождения седловой точки в смешанных стратегиях с помощью построения пары двойственных задач ЛП.

Ход работы:

1. Изучить основные понятия теории матричных игр двух игроков с нулевой суммой, анализ игры в чистых стратегиях, понятие смешанной стратегии и седловой точки в смешанных стратегиях, а также метод нахождения седловой точки в смешанных стратегиях с помощью построения пары двойственных задач ЛП.
2. Составить и отладить программу для нахождения седловой точки игры с помощью решения пары симметрично двойственных задач ЛП.
3. Для подготовки тестовых данных решить вручную одну из следующих ниже задач.

$$\begin{pmatrix} 8 & 3 & 6 \\ 7 & 6 & 5 \\ 3 & 9 & 4 \\ 5 & 2 & 10 \end{pmatrix}$$

Код программы:

```
#include <iostream>
#include <vector>
#include <string>
#include <iomanip>

using namespace std;

using SimplexTable = vector<pair<string,
    vector<double>>>>;

void outputSimplexTable(const SimplexTable &simplexTable) {
    cout << "BV\FV\t";
    for (size_t i{1}; i < simplexTable.at(0).second.size(); ++i) {
        cout << "y" << i << "\t";
    }
    cout << "\n";
    for (size_t i{}; i < simplexTable.size(); ++i) {
        cout << simplexTable.at(i).first << "\t";
        for (size_t j{}; j < simplexTable.at(i).second.size(); ++j) {
            cout << simplexTable.at(i).second.at(j) << "\t";
        }
        cout << "\n";
    }
    cout << "\n";
}

void outputMixedStrategyForPlayers(const SimplexTable
    &simplexTable, const double &gamePrice, const
    vector<string> &freeVarSecPlayer) {
    cout << ",\tq = (";
```

```

    for (size_t i{}; i < freeVarSecPlayer.size(); ++i) {
    bool findVar{false};
        for (size_t j{}; !findVar && j < simplexTable.size() - 1;
            ++j) {
            if (freeVarSecPlayer.at(i) ==
                simplexTable.at(j).first) {
                findVar = true;
                cout << simplexTable.at(j).second.at(0) *
                    gamePrice << ' ';
            }
        }
    }
    cout << "\b),\t";
    cout << "p = (" ;
    for (size_t i{freeVarSecPlayer.size() + 1}; i <
        simplexTable.at(
            0).second.size(); ++i) {
        cout << simplexTable.at(simplexTable.size() -
            1).second.at(i) * gamePrice << ' ';
    }
    cout << "\b)\n";
}

bool objFunctionHasNegative(const SimplexTable &simplexTable,
                           size_t &minNegativeIndex) {
    size_t rowIndex{simplexTable.size() - 1};
    size_t minIndex{};
    bool findNegative{false};
    for (size_t i{1}; i < simplexTable.at(0).second.size(); ++i) {
        if (simplexTable.at(rowIndex).second.at(i) < 0) {
            findNegative = true;
            if (simplexTable.at(rowIndex).second.at(i) <
                simplexTable.at(rowIndex).second.at(minIndex)) {
                minIndex = i;
            }
        }
    }
}

minNegativeIndex = minIndex;
return findNegative;
}

bool exHasPositiveCoeff(const SimplexTable &simplexTable, const
size_t &colIndex, size_t &minCoeffIndex) {
    size_t minCoeffIn{};
    double minCoeff{static_cast<double>(LONG_LONG_MAX)};
    bool findPositive{false};
    for (size_t i{}; i < simplexTable.size() - 1; ++i) {
        if (simplexTable.at(i).second.at(0) /
            simplexTable.at(i).second.at(colIndex) > 0) {
            findPositive = true;
            const double coeff{simplexTable.at(i).second.at(0) /
                simplexTable.at(i).second.at(colIndex)};
            if (coeff < minCoeff) {
                minCoeff = coeff;
                minCoeffIn = i;
            }
        }
    }
}

```

```

minCoeffIndex = minCoeffIn;
return findPositive;
}

double maxValueOfTheObjFunctionWithTableDisplay(SimplexTable
&simplexTable) {
size_t minIndex{};
size_t minCoeffIndex{};
while (objFunctionHasNegative(simplexTable, minIndex)) {
cout << "Simplex table :\n";
outputSimplexTable(simplexTable);
if (exHasPositiveCoeff(simplexTable, minIndex,
minCoeffIndex)) {
const double
divider{simplexTable.at(minCoeffIndex).second.at(minIndex)};
for (size_t i{}; i <
simplexTable.at(minCoeffIndex).second.size(); ++i) {
simplexTable.at(minCoeffIndex).second.at(i) /=
divider;
}
for (size_t i{}; i < simplexTable.size(); ++i) {
if (i != minCoeffIndex) {
const double divide{-simplexTable.at(i).second.at(minIndex) /
simplexTable.at(minCoeffIndex).second.at(
minIndex)};
for (size_t j{}; j <
simplexTable.at(i).second.size(); ++j) {
simplexTable.at(i).second.at(j) +=
(divide * simplexTable.at(minCoeffIndex).second.at(j));
}
}
}
simplexTable.at(minCoeffIndex).first = "y" + to_string(minIndex);
} else {
cout << "The problem does not have solution(The objective function"
" is unbounded on the range of admissible values of solutions)";
exit(1);
}
}
}
cout << "Simplex table :\n";
outputSimplexTable(simplexTable);
return simplexTable.at(simplexTable.size() - 1).second.at(0);
}

int main(int argc, char **argv) {
size_t numberOfFreeVar{};
cout << "Number of free variables = ";
cin >> numberOfFreeVar;
cout
<< "Enter variables that are free (In ascending order of indices) : ";
vector<string> freeVar(numberOfFreeVar);
for (size_t i{}; i < numberOfFreeVar; ++i) {
cin >> freeVar.at(i);
}
size_t numberOfRows{};
size_t numberOfCols{};
cout << "Number of rows in simplex table = ";
cin >> numberOfRows;

```

```

cout << "Number of cols in simplex table = ";
cin >> numberOfCols;
cout << "Enter simplex table(with the names of basic variables) : \n";
SimplexTable simplexTable(numberOfRows);
for (size_t i{}; i < numberOfRows; ++i) {
    string basisVarName{};
    cin >> basisVarName;
    simplexTable.at(i).first = basisVarName;
    for (size_t j{}; j < numberOfCols; ++j) {
        double value{};
        cin >> value;
        simplexTable.at(i).second.push_back(value);
    }
}
cout << setprecision(2);
double gamePrice{1 /
    maxValueOfTheObjFunctionWithTableDisplay(simplexTable)};
cout << "u = v = " << gamePrice;
outputMixedStrategyForPlayers(simplexTable, gamePrice, freeVar);
return 0;
}

```

3. Первый игрок:

$$\begin{aligned}
 & z = v \rightarrow \max \\
 & \left\{ \begin{aligned}
 & 8p_1 + 7p_2 + 3p_3 + 5p_4 \geq v \\
 & 3p_1 + 6p_2 + 9p_3 + 2p_4 \geq v \\
 & 6p_1 + 5p_2 + 4p_3 + 10p_4 \geq v \\
 & p_1 + p_2 + p_3 + p_4 = 1 \\
 & p_i \geq 0 (i = \overline{1,4})
 \end{aligned} \right.
 \end{aligned}$$

Рассмотрим ограничение $p_1 + p_2 + p_3 + p_4 = 1$ и разделим обе его части на v , обозначив $x_i = p_i v$ ($i = 1, 4$). Поскольку в нашей задаче $v \rightarrow \max$, мы получим задачу на минимум для новой целевой функции:

$$z_1 = 1/v = x_1 + x_2 + x_3 + x_4 \rightarrow \min$$

Разделив все неравенства системы ограничений на v , получим для переменных x_i условия:

$$\begin{aligned} z &= v \rightarrow \max \\ \begin{cases} 8x_1 + 7x_2 + 3x_3 + 5x_4 \geq 1 \\ 3x_1 + 6x_2 + 9x_3 + 2x_4 \geq 1 \\ 6x_1 + 5x_2 + 4x_3 + 10x_4 \geq 1 \end{cases} \\ x_i &\geq 0 (i = \overline{1,4}) \end{aligned}$$

Второй игрок:

$$\begin{aligned} z &= u \rightarrow \min \\ \begin{cases} 8q_1 + 3q_2 + 6q_3 \leq u \\ 7q_1 + 6q_2 + 5q_3 \leq u \\ 3q_1 + 9q_2 + 4q_3 \leq u \\ 5q_1 + 2q_2 + 10q_3 \leq u \\ q_1 + q_2 + q_3 = 1 \end{cases} \\ q_j &\geq 0 (j = \overline{1,3}) \end{aligned}$$

Рассмотрим ограничение $q_1 + q_2 + q_3 = 1$ и разделим обе его части на u , обозначив $u_j = q_j u$ ($j = \overline{1,3}$). Поскольку в нашей задаче $u \rightarrow \min$, мы получим задачу на максимум для новой целевой функции:

$f_1 = 1 \quad u = y_1 + y_2 + y_3 \rightarrow \max$ Разделив все неравенства системы ограничений на u , получим для переменных y_j условия:

$$\begin{cases} f = u \rightarrow \min \\ 8y_1 + 3y_2 + 6y_3 \leq 1 \\ 7y_1 + 6y_2 + 5y_3 \leq 1 \\ 3y_1 + 9y_2 + 4y_3 \leq 1 \\ 5y_1 + 2y_2 + 10y_3 \leq 1 \\ y_j \geq 0 \quad (j = \overline{1,3}) \end{cases}$$

miro

Решаем задачу на \max симплекс методом в чистом виде:

$$\begin{cases} f_1 = y_1 + y_2 + y_3 \rightarrow \max \\ 8y_1 + 3y_2 + 6y_3 + y_4 = 1 \\ 7y_1 + 6y_2 + 5y_3 + y_5 = 1 \\ 3y_1 + 9y_2 + 4y_3 + y_6 = 1 \\ 5y_1 + 2y_2 + 10y_3 + y_7 = 1 \\ y_j \geq 0 \quad (j = \overline{1,3}) \end{cases}$$

miro

Таблица 1

Б	С	$y_1 \downarrow$	y_2	y_3	y_4	y_5	y_6	y_7	Отн
$\leftarrow y_4$	1	8	3	6	1	0	0	0	1/8
y_5	1	7	6	5	0	1	0	0	1/7
y_6	1	3	9	4	0	0	1	0	1/3
y_7	1	5	2	10	0	0	0	1	1/5
f_1	0	-1	-1	-1	0	0	0	0	

Таблица 2

Б	С	y1	y2↓	y3	y4	y5	y6	y7	Отн
y1	1/8	1	3/8	3/4	1/8	0	0	0	1/3
←y5	1/8	0	3 3/8	- 1/4	- 7/8	1	0	0	1/27
y6	5/8	0	7 7/8	1 3/4	- 3/8	0	1	0	5/63
y7	3/8	0	1/8	6 1/4	- 5/8	0	0	1	3
f1	1/8	0	- 5/8	- 1/4	1/8	0	0	0	

Таблица 3

Б	С	y1	y2	y3↓	y4	y5	y6	y7	Отн
y1	1/9	1	0	7/9	2/9	- 1/9	0	0	1/7
y2	1/27	0	1	- 2/27	- 7/27	8/27	0	0	
y6	1/3	0	0	2 1/3	1 2/3	-2 1/3	1	0	1/7
←y7	10/27	0	0	6 7/27	- 16/27	- 1/27	0	1	10/169
f1	4/27	0	0	- 8/27	- 1/27	5/27	0	0	

Таблица 4

Б	С	y1	y2	y3	y4↓	y5	y6	y7	Отн
y1	11/169	1	0	0	50/169	- 18/169	0	- 21/169	11/50
y2	7/169	0	1	0	- 45/169	50/169	0	2/169	
←y6	33/169	0	0	0	1 150/169	-2 54/169	1	- 63/169	3/29
y3	10/169	0	0	1	- 16/169	- 1/169	0	27/169	
f1	28/169	0	0	0	- 11/169	31/169	0	8/169	

Таблица 5

Б	С	y1	y2	y3	y4	y5	y6	y7
y1	1/29	1	0	0	0	82/319	- 50/319	- 21/319
y2	2/29	0	1	0	0	- 10/319	45/319	- 13/319
y4	3/29	0	0	0	1	-1 73/319	169/319	- 63/319
y3	2/29	0	0	1	0	- 39/319	16/319	45/319
f1	5/29	0	0	0	0	3/29	1/29	1/29

$$f_{1max} = z_{1min} = \frac{5}{29}$$

$$U = V = \frac{1}{f_{1max}} = \frac{29}{5}$$

$$q_j = y_j \cdot u$$

$$\vec{q}^0 = \left(\frac{1}{29} \cdot \frac{29}{5}; \frac{2}{29} \cdot \frac{29}{5}; \frac{3}{29} \cdot \frac{29}{5} \right) = \left(\frac{1}{5}; \frac{2}{5}; \frac{3}{5} \right)$$

$$y_4 \rightarrow x_1$$

$$y_5 \rightarrow x_2$$

$$y_6 \rightarrow x_3$$

$$y_7 \rightarrow x_4$$

$$p_i = k_i \cdot V$$

$$\vec{p}^0 = \left(0; \frac{3}{29} \cdot \frac{29}{5}; \frac{1}{29} \cdot \frac{29}{5}; \frac{1}{29} \cdot \frac{29}{5} \right) = \left(0; \frac{3}{5}; \frac{1}{5}; \frac{1}{5} \right)$$

Результат работы программы:

```
D:\BGTU\IsOp\Lab6\Code\cmake-build-debug\Code.exe
Number of free variables = 3
Enter variables that are free (In ascending order of indices) : y1 y2 y3
Number of rows in simplex table = 5
Number of cols in simplex table = 8
Enter simplex table(with the names of basic variables) :
y4 1 8 3 6 1 0 0 0
y5 1 7 6 5 0 1 0 0
y6 1 3 9 4 0 0 1 0
y7 1 5 2 10 0 0 0 1
f1 0 -1 -1 -1 0 0 0 0
Simplex table :
BV      FV      y1      y2      y3      y4      y5      y6      y7
y4      1      8      3      6      1      0      0      0
y5      1      7      6      5      0      1      0      0
y6      1      3      9      4      0      0      1      0
y7      1      5      2      10     0      0      0      1
f1      0      -1     -1     -1      0      0      0      0

Simplex table :
BV      FV      y1      y2      y3      y4      y5      y6      y7
y1      0.12    1      0.38    0.75    0.12    0      0      0
y5      0.12    0      3.4     -0.25   -0.88    1      0      0
y6      0.62    0      7.9     1.8     -0.38    0      1      0
y7      0.38    0      0.12    6.2     -0.62    0      0      1
f1      0.12    0      -0.62   -0.25    0.12    0      0      0

Simplex table :
BV      FV      y1      y2      y3      y4      y5      y6      y7
y1      0.11    1      0      0.78    0.22    -0.11    0      0
y2      0.037   0      1      -0.074  -0.26    0.3     0      0
y6      0.33    0      0      2.3     1.7     -2.3     1      0
y7      0.37    0      0      6.3     -0.59   -0.037   0      1
f1      0.15    0      0      -0.3    -0.037   0.19     0      0

Simplex table :
BV      FV      y1      y2      y3      y4      y5      y6      y7
y1      0.065   1      0      0      0.3     -0.11    0      -0.12
y2      0.041   0      1      0      -0.27    0.3     0      0.012
y6      0.2     0      0      0      1.9     -2.3     1      -0.37
y3      0.059   0      0      1      -0.095  -0.0059  0      0.16
f1      0.17    0      0      0      -0.065  0.18     0      0.047
```

```

Simplex table :
BV      FV      y1      y2      y3      y4      y5      y6      y7
y1      0.034    1       0       0       0       0.26    -0.16    -0.066
y2      0.069    0       1       0       0       -0.031   0.14     -0.041
y4      0.1      0       0       0       1       -1.2     0.53     -0.2
y3      0.069    0       0       1       0       -0.12    0.05     0.14
f1      0.17     0       0       0       0       0.1      0.034    0.034

u = v = 5.8,      q = (0.2;0.4;0.4),      p = (0;0.6;0.2;0.2)

Process finished with exit code 0

```

Результат, полученный при решении задачи «вручную», совпал с результатом, полученным программой.

Вывод: освоил метод нахождения седловой точки в смешанных стратегиях с помощью построения пары двойственных задач ЛП