1.23 найти сумму ряда: $\sum\limits_{n=6}^{\infty} \frac{48}{n^2-6n+8}$

Для начала проверим ряд на сходимость:

$$\frac{48}{n^2-6n+8} \sim \frac{1}{n^2}$$

Это можно доказать через:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\frac{1}{n^2}}{\frac{48}{n^2-6n+8}} = \frac{n^2-6n+8}{48n^2} = \frac{1}{48} - const$$

ряд $\sum\limits_{n=6}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ сходится (степень при n > 1);

Отсюда следует, что и исходный ряд $\sum\limits_{n=6}^{\infty} \frac{48}{n^2-6n+8}$

тоже сходится => можно искать его сумму:

$$\sum_{n=6}^{\infty} \frac{48}{n^2-6n+8} = \sum_{n=6}^{\infty} \frac{24((n-4)-(n-2))}{(n-4)(n-2)} = 24\left(\sum_{n=6}^{\infty}\frac{1}{n-2} - \sum_{n=6}^{\infty}\frac{1}{n-4}\right) =$$

$$= \lim_{n\to\infty}\Bigg[24\left(\cancel{\frac{1}{4}} + \cancel{\frac{1}{5}} + \cancel{\frac{1}{6}} + \dots + \cancel{\frac{1}{n-4}} + \frac{1}{n-3} + \frac{1}{n-2}\right) -$$

$$- \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cancel{\frac{1}{4}} + \cancel{\frac{1}{5}} + \cancel{\frac{1}{6}} + \dots + \cancel{\frac{1}{n-4}}\right)\Bigg] = 24\lim_{n\to\infty}\left(\overset{\to 0}{\frac{1}{n-3}} + \overset{\to 0}{\frac{1}{n-2}} - \frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right) =$$

$$= -\frac{24}{2} - \frac{24}{3} = -12 - 8 = -20$$

2.23 найти сумму ряда: $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{5^n - 2^n}{10^n}$

Упростим выражение:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{5^n - 2^n}{10^n} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{5^n}{10^n} - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n}{10^n} = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^n - \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{5}\right)^n$$

Воспользуемся формулой нахождения суммы бесконечно убывающей геометрической прогрессии:

$$S = \frac{b_1}{1-q} \ ; \quad \frac{\frac{1}{2}}{1-\frac{1}{2}} - \frac{\frac{1}{5}}{1-\frac{1}{5}} = \frac{2}{2} - \frac{\frac{1}{5}}{\frac{4}{5}} = 1 - \frac{1}{4} = \frac{3}{4}$$

3.23 Исследовать на сходимость ряд с положительными числами:

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{(2n+3)!} \sim \sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{n!}$$

Необходимый признак сходимости выполнен (n! растет быстрее чем n => $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n}{n!}\to 0$)

Воспользуемся методом Даламбера:

$$a_n=\frac{n}{(2n+3)!};\quad a_{n+1}=\frac{n+1}{(2n+5)!};$$

$$q=\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{n+1}{(2n+5)!}}{\frac{n}{(2n+3)!}}=\lim_{n\to\infty}\frac{(n+1)(2n+3)!}{n(2n+5)!}=$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{(n+1)\cancel{(2n+3)!}}{n\cancel{(2n+3)!}(2n+4)(2n+5)}\sim\frac{n}{n^3}\to 0<1$$

старшая степень у числителя 1, а у знаменателя - 3 => предел -> 0

$$q<1 \Rightarrow \text{ряд } \sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{(2n+3)!} - \text{сходится}$$

4.23 Исследовать на сходимость ряд с положительными числами:

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left(\arcsin\frac{1}{3n}\right)^{2n}$$

Функция возводится в n-ую степень => стоит проверить ее по радикальному признаку Коши:

$$q=\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_n}=\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{\left(\arcsin\frac{1}{3n}\right)^{2n}}=$$

$$=\lim_{n\to\infty}\left(\arcsin\frac{1}{3n}\right)^{2}=0$$

$q<1 \Rightarrow$ ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\arcsin\frac{1}{3n}\right)^{2n}$ - сходится

5.23 Исследовать на сходимость ряд с положительными числами:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt[5]{(3n-1)^4}}$$

Исследуем сходимость ряда при помощи интегрального признака сходимости Коши:

$$q = \int_1^{\infty} \frac{1}{\sqrt[5]{(3n-1)^4}} \cdot dn = \left[u = 3n-1 \;\middle|\; \begin{array}{l} n = \frac{u+1}{3} \\ dn = \frac{1}{3} du \end{array} \right] =$$

$$= \int_2^{\infty} \frac{1}{3\sqrt[5]{u^4}} du = \frac{5\sqrt[5]{u}}{3} \Big|_2^{\infty} = \frac{5\sqrt[5]{3n-1}}{3} \Big|_1^{\infty} =$$

$$= \infty - \frac{5 \cdot \sqrt[5]{2}}{3} = \infty > 1$$

$q > 1 \Rightarrow$ ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt[5]{(3n-1)^4}}$ расходится

6.23 Исследовать на условную и абсолютную сходимость знакочередующийся ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt{2n+1}}$$

Воспользуемся теоремой Лейбница:

$$\lim_{n\to\infty} |a_n| = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt{2n+1}} = 0$$

Ряд сходится, осталось только проверит условно или абсолютно:

Упростим выражение:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt{2n+1}} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt{2n}}$$

Воспользуемся интегральным методом Коши:

$$\int_1^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2n}} = \int_1^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2}\sqrt{n}} = \sqrt{2}\sqrt{n}\Big|_1^{\infty} = \infty - \sqrt{2} = \infty > 1$$

$\Rightarrow$ ряд сходится условно

7.23 Исследовать на условную и абсолютную сходимость знакочередующийся ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1}\frac{2n+1}{n(n+2)}$$

Воспользуемся теоремой Лейбница:

$$\lim_{n\to\infty}|a_n| = \lim_{n\to\infty}\frac{2n+1}{n(n+2)} \sim \lim_{n\to\infty}\frac{2n}{n^2} = 0$$

Таким образом, рассматриваемый ряд сходится.
Теперь нужно проверить абсолютно или условно:

Рассматриваемое выражение можно упростить:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{2n+1}{n(n+2)} = \frac{2n}{n^2} = \frac{2}{n}$$

Исследуем сходимость ряда при помощи интегрального признака сходимости Коши:

$$\int_1^{\infty}\frac{2}{n}dn = 2\ln(n)\Big|_1^{\infty} = \infty - 0 = \infty \Rightarrow$$

Так как несобственный интеграл расходится, то и исследуемый интеграл расходится.
Следовательно, ряд сходится условно

сходится условно

8.23 Найти область сходимости ряда. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n x^n}{n^2+1}$

Найдем радиус сходимости ряда.

Для этого найдем предел отношения.

$$a_{n+1} = \frac{2^{n+1}x^{n+1}}{(n+1)^2+1} \quad \text{и} \quad a_n = \frac{2^n x^n}{n^2+1}$$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{a_{n+1}} = \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{2^n}{n^2+1}}{\frac{2^{n+1}}{(n+1)^2+1}} = \lim_{n\to\infty} \frac{\cancel{2^n}((n+1)^2+1)}{\cancel{2^{n+1}}(n^2+1)} =$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{(n+1)^2+1}{2(n^2+1)} = \frac{1}{2}\lim_{n\to\infty} \frac{n^2+2n+1+1}{n^2+1} = \frac{1}{2}$$

Отсюда получаем радиус сходимости 1/2

Итак, ряд является сходящимся (абсолютно) при всех x, принадлежащих интервалу (-1/2;1/2)

Теперь проверим сходимость на концах интервала при x = 1/2

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^n}{n^2+1} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1^n}{n^2+1} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2+1} \sim \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$$

При x = 1/2 - ряд сходится

Теперь проверим сходимость на концах интервала при x = -1/2:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n \cdot \left(-\frac{1}{2}\right)^n}{n^2+1} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^2+1}$$

- Ряд знакочередующийся, поэтому воспользуемся теоремой Лейбница:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n^2+1} \to 0$$

- очевидно, что ряд стремится к нулю, поэтому ряд сходится. Осталось только проверить абсолютно или условно

Воспользуемся интегральным методом Коши:

$$\int_1^{\infty} \frac{1}{n^2+1} dn = \operatorname{arctg} n \Big|_1^{\infty} = \operatorname{arctg}(\infty) - \operatorname{arctg}(1) =$$

$$= \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{4} < 1 \Rightarrow \text{ряд сходится абсолютно}$$

Тогда область сходимости будет: $\left[-\frac{1}{2}; \frac{1}{2}\right]$

9.23 Найти область сходимости ряда.

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x-1)^n}{2^n(n+3)}$$

Найдем радиус сходимости ряда.

Для этого найдем предел отношения.

$$a_{n+1} = \frac{1}{2^{n+1}(n+4)}; \quad a_n = \frac{1}{2^n(n+3)}$$

$$R = \lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{a_{n+1}} = \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{1}{2^n(n+3)}}{\frac{1}{2^{n+1}(n+4)}} = \lim_{n\to\infty} \frac{\cancel{2^{n+1}}(n+4)}{\cancel{2^n}(n+3)} =$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{2(n+4)}{n+3} = \lim_{n\to\infty} \frac{2n+8}{n+3} = 2$$

Центр смещен в точку 1, поэтому интервал будет: (-1; 3)

Теперь проверим сходимость на концах интервала при x = 3

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(3-1)^n}{2^n(n+3)} = \sum_{n=1} \frac{2^n}{2^n(n+3)} = \sum_{n=1} \frac{1}{n+3} \sim \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$$

Воспользуемся интегральным методом Коши:

$$\int_1^{\infty} \frac{1}{n}\, dn = \ln(n)\Big|_1^{\infty} = \infty - 0 = \infty \Rightarrow$$ При x = 3 - ряд расходится

Теперь проверим сходимость на концах интервала при x = -1

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1-1)^n}{2^n(n+3)} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-\cancel{2})^n}{\cancel{2^n}(n+3)} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(n+3)}$$

- Ряд знакочередующийся, поэтому воспользуемся теоремой Лейбница:

$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n+3}\to 0$ - Условие Лейбница выполняется, поэтому ряд сходится. Осталось только проверить абсолютно или условно

Упростим исходное выражение:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n+3}\sim\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}$$

Воспользуемся интегральным методом Коши:

$$\int_1^{\infty}\frac{1}{n}dn=\ln(n)\Big|_1^{\infty}=\infty-0=\infty>1$$

Так как несобственный интеграл расходится, то расходится и исследуемый ряд => ряд сходится условно. Ряд расходится, значит, x = -1 - точка расходимости.

Тогда область сходимости будет: $(-1;3)$