

Государственный комитет Российской Федерации по высшему образованию  
Белгородский технологический институт строительных материалов  
Кафедра программного обеспечения ЭВМ

Утверждено  
методологическим советом института

МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ

Методические указания  
к выполнению лабораторных работ  
для студентов специальности 22.04

Белгород 2020

Составители: Полунин А. И., канд. техн. наук, проф.  
Смышляева Л. Г., инженер

Рецензент Редькин Г. М. доктор физ.-мат. наук,

## Лабораторная работа N1. Поведение механических систем в статике

### Цель работы

1. Разработать математическую модель, описывающую поведение элементов механической системы в статике при действии возмущающей силы или момента (конкретный вариант табл. 1). Если в системе есть угловое движение, то возмущением является момент, приложенный к элементу с угловым движением, если нет, то сила, приложенная к элементу с линейным движением.

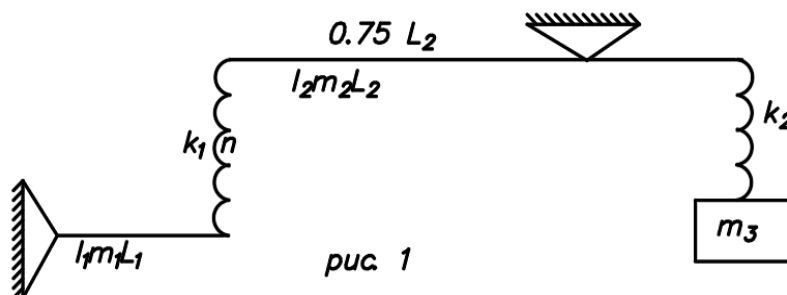
2. Разработать программу на основании математической модели, отладить ее и произвести расчёты, при каком значении возмущающей силы или момента происходит бифуркация поведения элементов системы, т.е. статическое состояние переходит в динамическое, возникает движение элементов системы.

•

### Пример выполнения работы

Дана механическая система (рис. 1). Первая балка имеет момент инерции относительно точки закрепления  $I_1$ , массу  $m_1$ , длину  $l_1$ , вторая соответственно  $I_2$ ,  $m_2$ ,  $l_2$ . Коэффициент упругости первой пружины  $K_1$ , второй  $K_2$ . Ось вращения второй балки находится на расстоянии  $0,75l_2$  от её конца. Масса прикреплённого ко второй пружине элемент равна  $m_3$ .

Анализируемая система имеет три степени свободы — двое угловых движений балок и линейное движение массы  $m_3$ . Положение первой и второй балок будем характеризовать углами  $\varphi_1$  и  $\varphi_2$ , отсчитываемых против часовой стрелки от горизонтального положения, когда пружины находятся в свободном состоянии, т.е. не растянуты и не сжаты. Положение массы  $m_3$  будем задавать координатой  $x$ . Начало её совпадает с центром масс при свободном состоянии пружин.



В общем случае поведение элементов системы, т.е. значения ее координат в статике, определяется решением в общем случае системы нелинейных уравнений

$$\sum_{i=1}^N M_i = 0, \sum_{i=1}^L F_i = 0,$$

где  $M_i$  — моменты, включая возмущающий, действующие на элементы, совершающие угловое движение,  $F_i$  — силы, включая возмущающую, действующие на элементы системы, совершающие линейное движение.

Найдём формулы для моментов сил, действующих на первую балку. Равнодействующая сил тяжести первой балки приложена на середине её длины (рис. 2). Это силу разложим на две. Первая  $F_1$ , перпендикулярная к балке, вызывает её угловое движение. Эта сила равна

$$F_1 = m_1 g \cos \varphi_1,$$

где  $g$  — ускорение свободного падения.

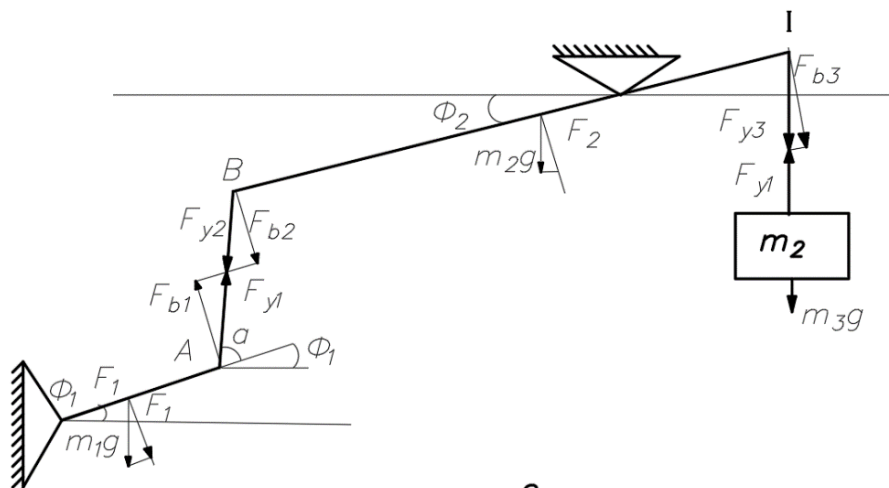


рис. 2

Момент от этой силы

$$M_1 = -0,5 F_1 l_1.$$

Знак «минус» ставится, потому что момент действует в отрицательном направлении. Вторая сила  $F_1$  вызывает осевое сжатие балки. Считаем, что под действием этой силы длина балки не изменится, поэтому влиянием силы  $F_2$  на движение можно пренебречь.

Со стороны пружины на балку действует сила упругости, равная

$$F_{y1} = k_1 \Delta l_1,$$

где  $\Delta l_1$  — удлинение пружины.

Определим  $\Delta l_1$ . Для этого введём вспомогательную систему координат  $O_1 X_1 Y_1$ , в которой определим координаты верхнего В и нижнего А концов

первой пружины. Начало системы  $O_1$  поместим на правом крае первой балки, когда она находится в свободном состоянии. Тогда

$$X_{1A} = l_1 \cos \varphi_1 - l_1, y_{1A} = l_1 \sin \varphi_1,$$

$$X_{1B} = 0,75l_2 - 0,75l_2 \cos \varphi_2, y_{1B} = n - 0,75l_2 \sin \varphi_2.$$

Длина деформированной пружины

$$d = \sqrt{(x_{1A} - x_{1B})^2 + (y_{1A} - y_{1B})^2},$$

а её удлинение

$$\Delta l_1 = d - n.$$

Направление силы упругости пружины задаётся направляющим косинусом

$$\cos \alpha_1 = \frac{x_1 - x_1}{d}. \text{ Будем считать}$$

Проекция силы  $F_{y1}$ , вызывающей вращение первой балки, равна

$$F_{B1} = F_{y1} \sin(\alpha_1 - \varphi_1).$$

Данная формула справедлива и при  $\varphi_1 < 0$ , что можно проверить, построив рисунок действия сил для  $\varphi_1 < 0$ .

Тогда  $M_1 = F_{B1} l_1$ .

Возмущающую силу  $F_{\text{вз}}$  будем считать приложенной к концу первой балки перпендикулярно. Тогда создаваемый ею момент равен

$$M_{B3} = F_{\text{вз}} l_1.$$

Найдём моменты сил, действующих на вторую балку.

Момент силы тяжести

$$M_2 = 0,25l_2 m_2 g \cos \varphi_2.$$

создает вращающий момент, направленный положительно.

На левый край балки действует сила упругости первой пружины. Модуль её равен модулю силы упругости, действующей на первую балку, а направлена она в противоположную сторону

$$F_{y2} = -F_{y1}.$$

Величина момент этой силы

$$M_{y2} = F_{y1} \sin(\alpha_1 - \varphi^2) 0,75l_2.$$

Знак “плюс” в формуле взят потому, что при положительном  $\Delta l_1$  (удлинении) пружина стремится повернуть вторую балку в положительном направлении — против часовой стрелки.

Найдём зависимости для вычисления момента упругих сил, действующих на вторую балку со стороны второй пружины.

Перемещение верхнего края пружины при положительном угле  $\varphi_2$

$$\Delta n_B = 0,25 l_2 \sin \varphi_2.$$

Перемещение нижнего края  $\Delta n_H = x$ .

Суммарное удлинение второй пружины  $\Delta l_2 = 0,25 l_2 \sin \varphi_2 + x$ .

а сила  $F_{y3} = K_2 \Delta l_2$ .

При положительном  $\Delta l_2$  упругая сила создает момент, стремящийся повернуть вторую балку в отрицательном направлении

$$M_{y3} = -0,25 l_2 F_{y3} \cos \varphi_2.$$

Найдём зависимости для вычисления сил, действующих на массу  $m$ . Со стороны второй пружины на массу действует сила

$$F_{y4} = -F_{y3},$$

направленная в отрицательном направлении оси  $X$  при положительном  $\Delta l_2$  (удлинении).

Сила тяжести

$$F_3 = m_3 g.$$

Полученные формулы позволяют составить систему нелинейных алгебраических уравнений с неизвестными координатами системы  $\varphi_1, \varphi_2, x$  в установившемся состоянии

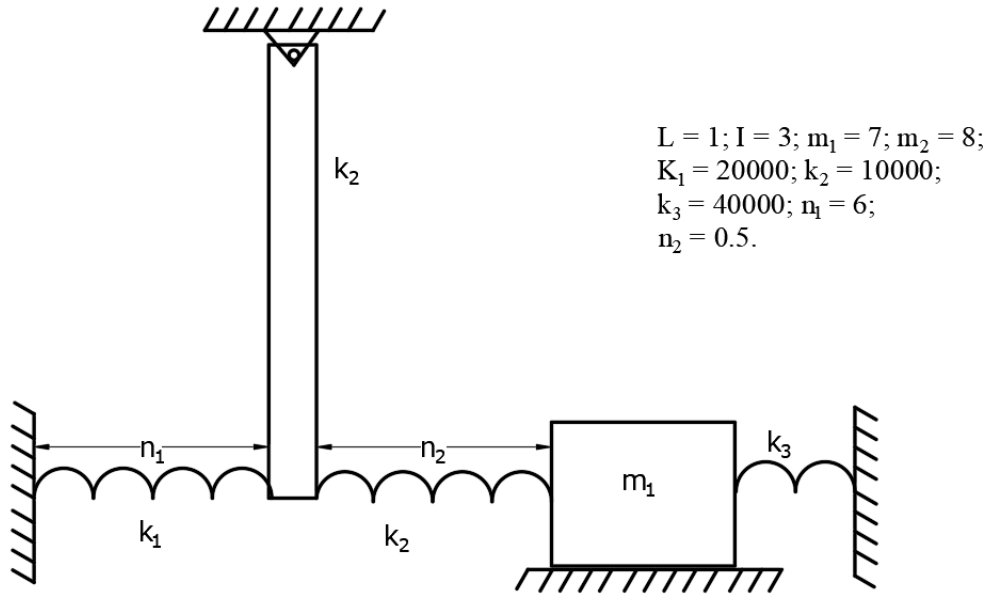
$$M_1 + M_{y1} + M_{B3} = 0, \quad M_{y2} + M_2 + M_{y3} = 0, \quad F_{y4} + F_3 = 0.$$

Решая эту систему численным методом Ньютона получим значения установившихся координат элементов системы. Значение точки бифуркации определяется как отсутствие решения этой системы уравнений при превышении возмущающей силой или моментом некоторого предельного значения. Процесс нахождения решения в этом случае не сходится.

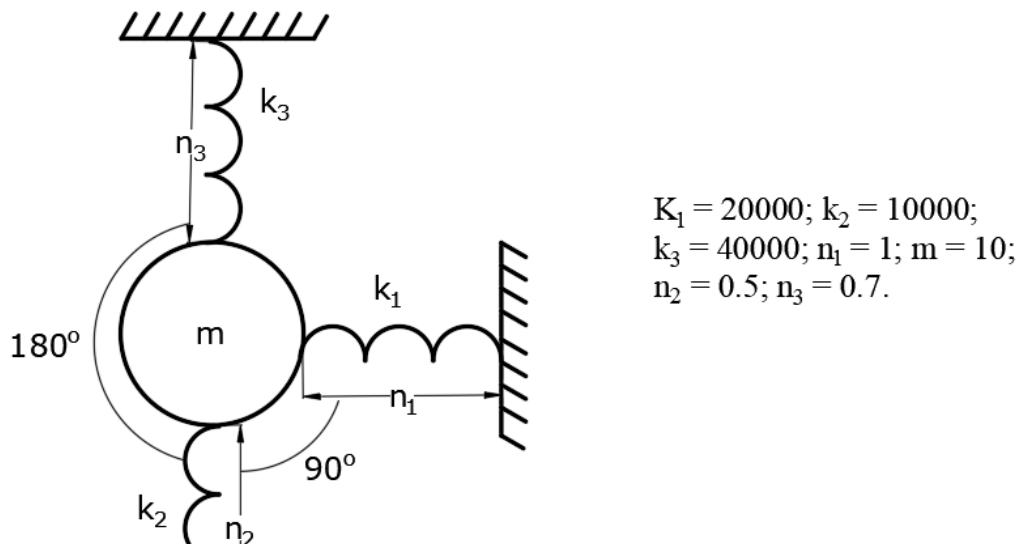
При выполнении уравнений пользоваться учебным пособием по системному моделированию.

Варианты заданий

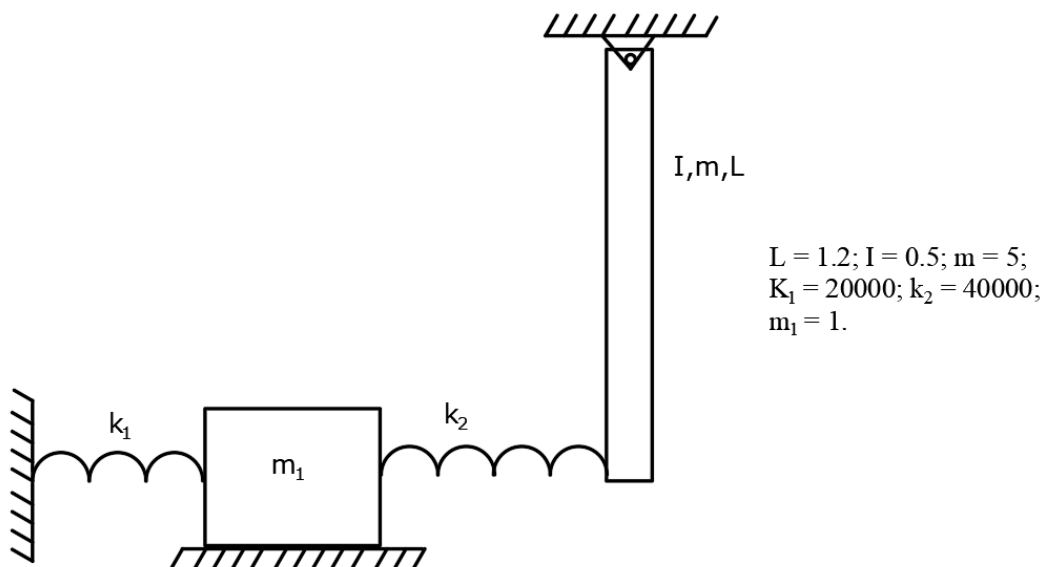
1



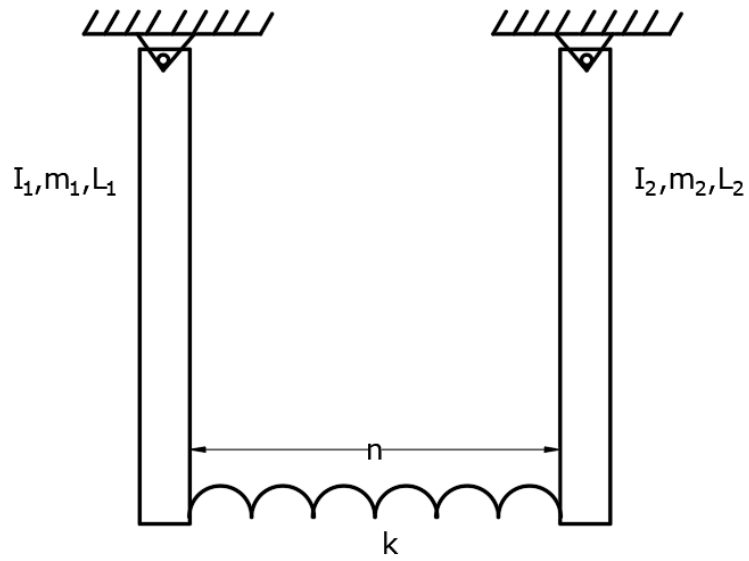
2



3

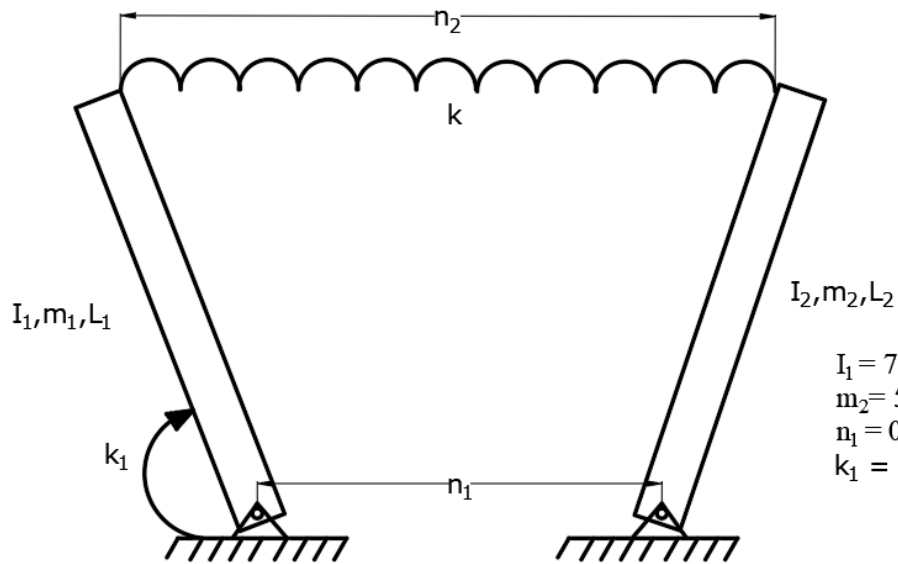


4



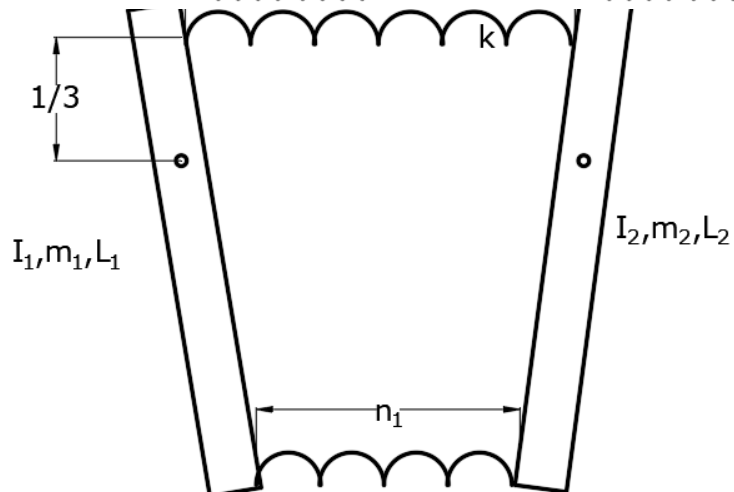
$$I_1 = 1; I_2 = 3; m_1 = 10; \\ m_2 = 3; L_1 = 1; L_2 = 0.8; \\ n = 0.5; k = 4000.$$

5



$$I_1 = 7; I_2 = 3; m_1 = 10; \\ m_2 = 5; L_1 = 1; L_2 = 1; \\ n_1 = 0.7; n_2 = 1; k = 40000; \\ k_1 = 1000.$$

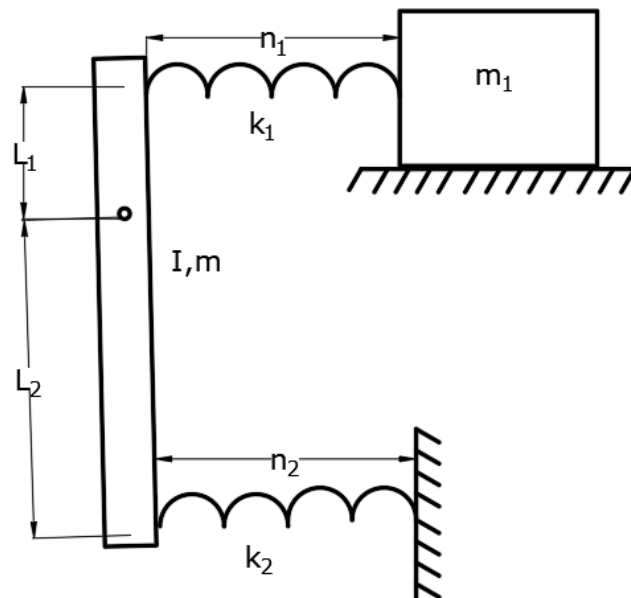
6



$$I_1 = 5; I_2 = 2; m_1 = 10; \\ m_2 = 6; L_1 = 1; k_1 = 7000; \\ n_1 = 1.2; n_2 = 1; k_2 = 5000; \\ L_2 = L_1.$$



7



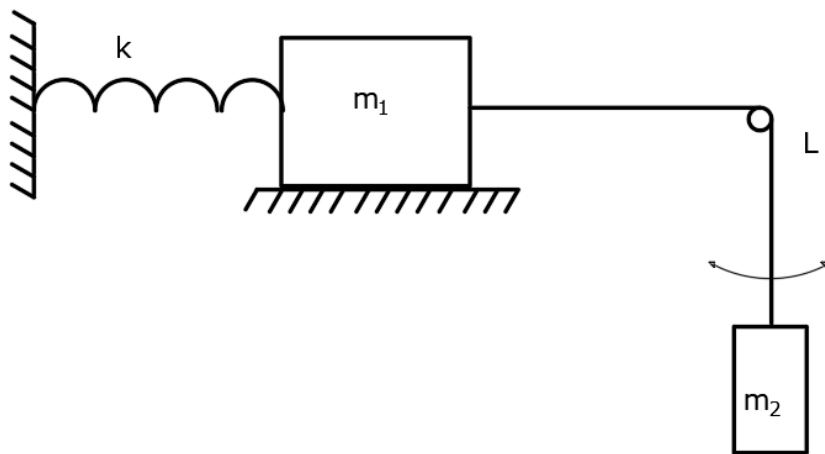
$$k_1 = 10000; k_2 = 15000;$$

$$m_1 = 5; n_1 = 1; L_1 = 0.5;$$

$$L_2 = 1; n_2 = 0.8; I = 1;$$

$$m = 1.$$

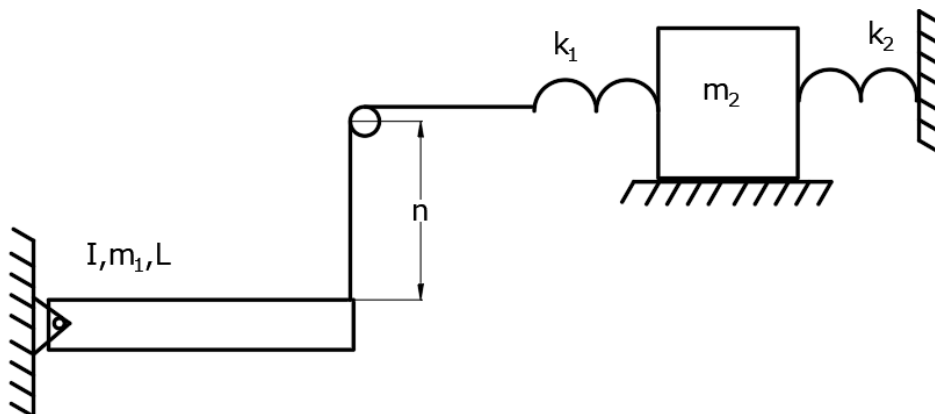
8



$$k = 10000; L = 1;$$

$$m_1 = 10; m_2 = 5.$$

9



$$I = 2; m_1 = 5;$$

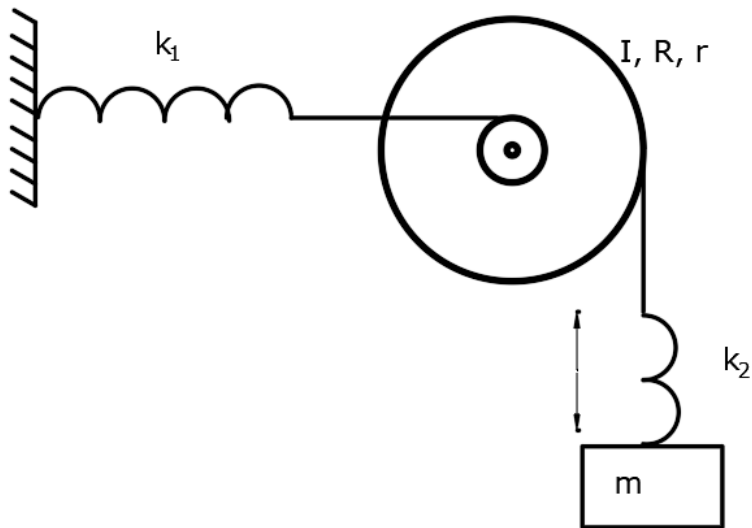
$$L = 1; n = 2;$$

$$k_1 = 10000;$$

$$k_2 = 20000;$$

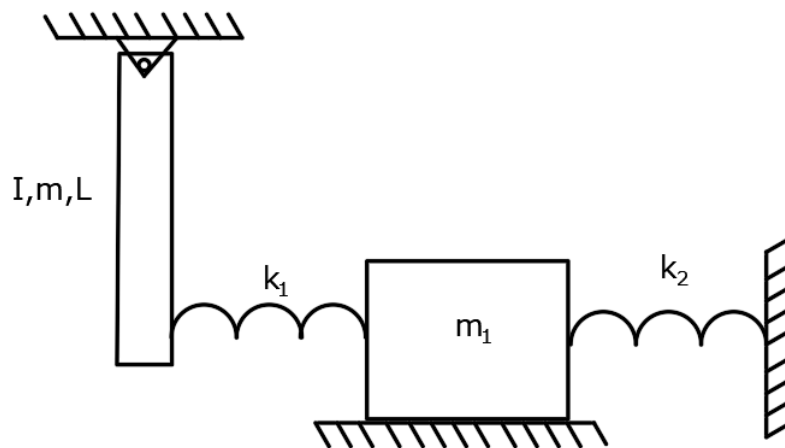
$$m_2 = 15.$$

10



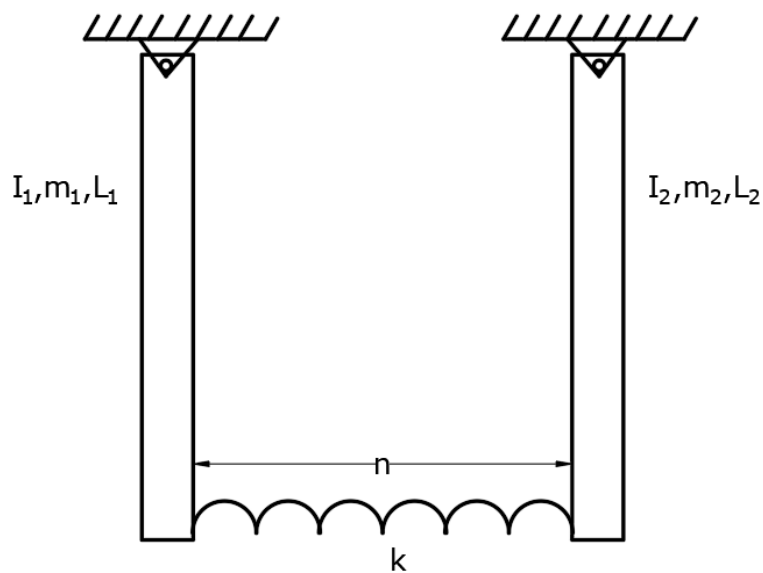
$$\begin{aligned} k_1 &= 5000; \\ k_2 &= 7000; \\ I &= 5; R = 1; \\ r &= 0.2; m = 10. \end{aligned}$$

11



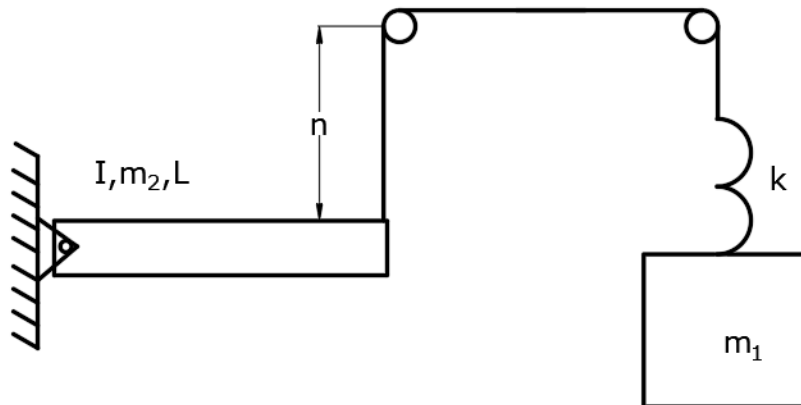
$$\begin{aligned} L &= 1; I = 2; m = 5; \\ K_1 &= 20000; k_2 = 10000; \\ m_1 &= 5. \end{aligned}$$

12



$$\begin{aligned} I_1 &= 10; I_2 = 18; m_1 = 10; \\ m_2 &= 15; L_1 = 1; L_2 = 1.2; \\ n &= 0.5; k = 10000. \end{aligned}$$

13

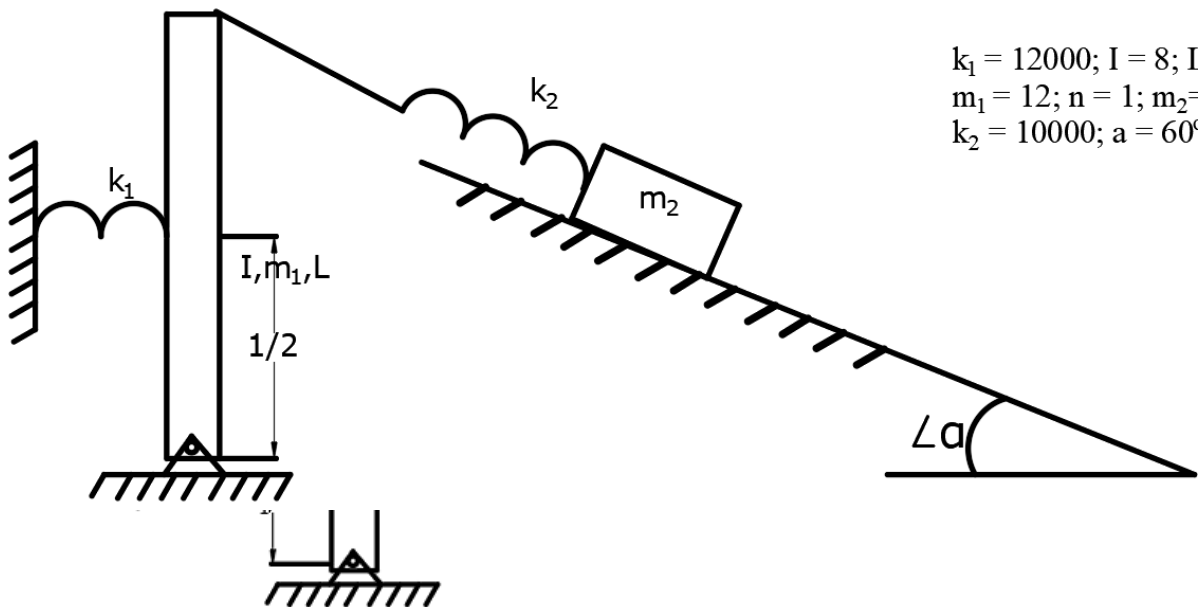


$$m_2 = 20; I = 10;$$

$$L = 1.8; n = 1;$$

$$k = 10000; m_1 = 20.$$

14

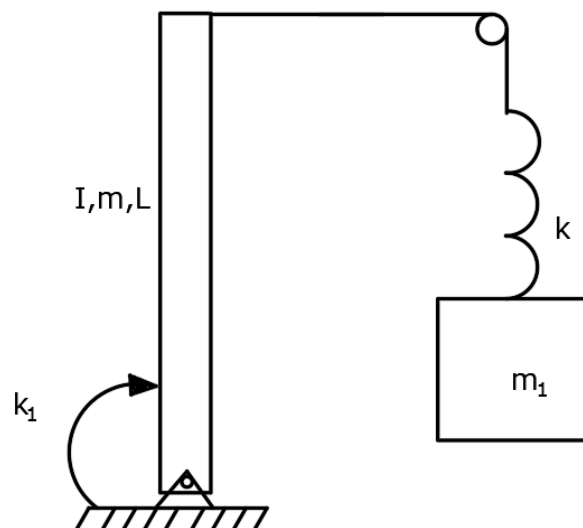


$$k_1 = 12000; I = 8; L = 1;$$

$$m_1 = 12; n = 1; m_2 = 10;$$

$$k_2 = 10000; a = 60^\circ.$$

15



$$L = 1; I = 3;$$

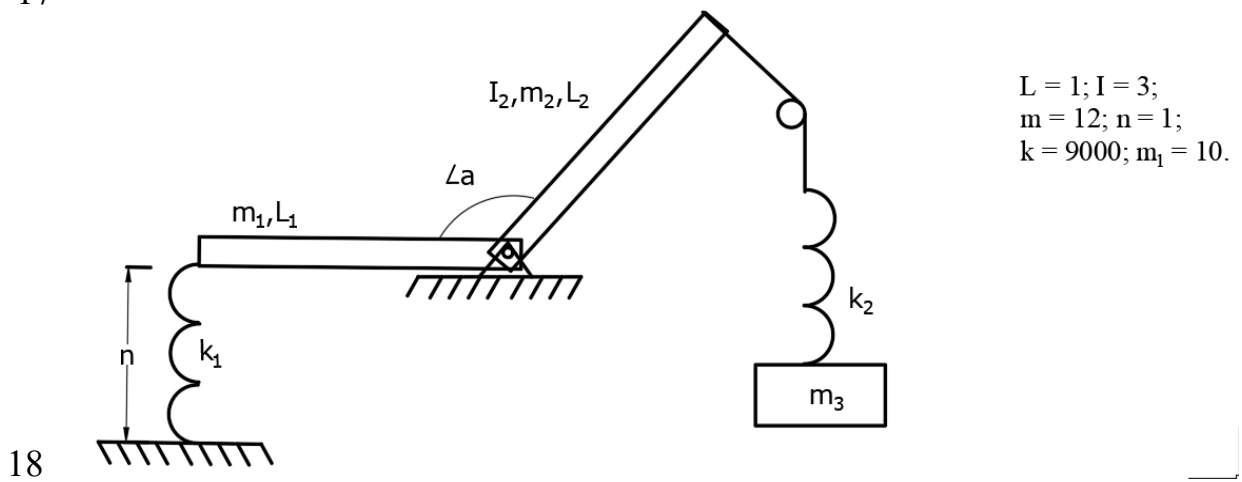
$$m = 12; n = 1;$$

$$k = 9000; m_1 = 10;$$

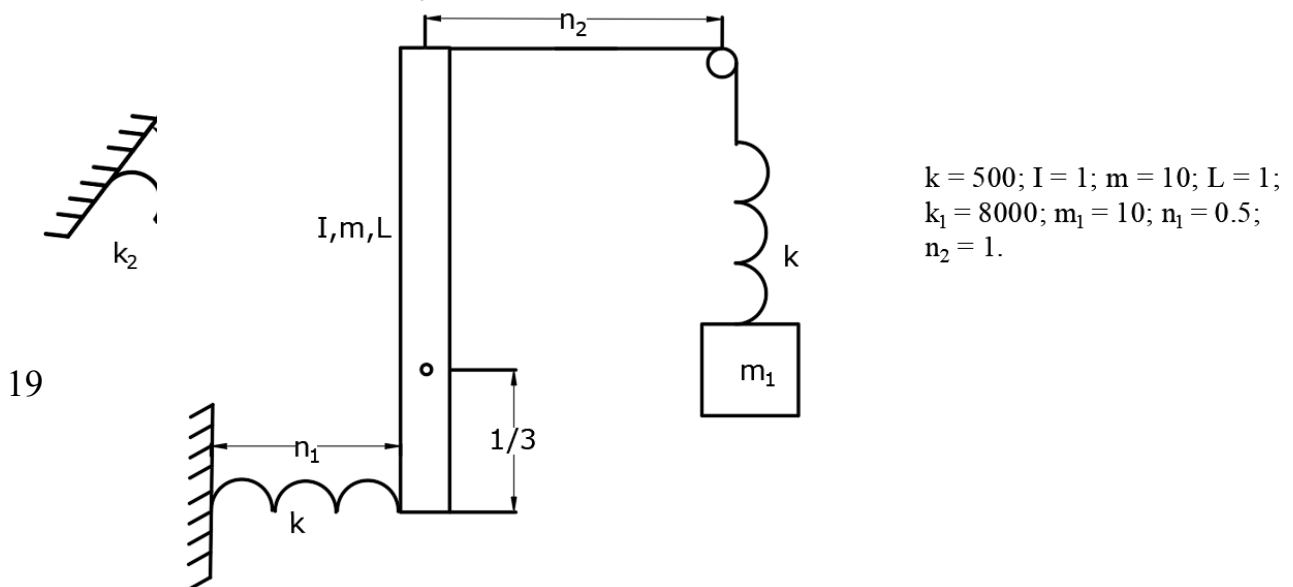
$$k_1 = 1000.$$

16

17

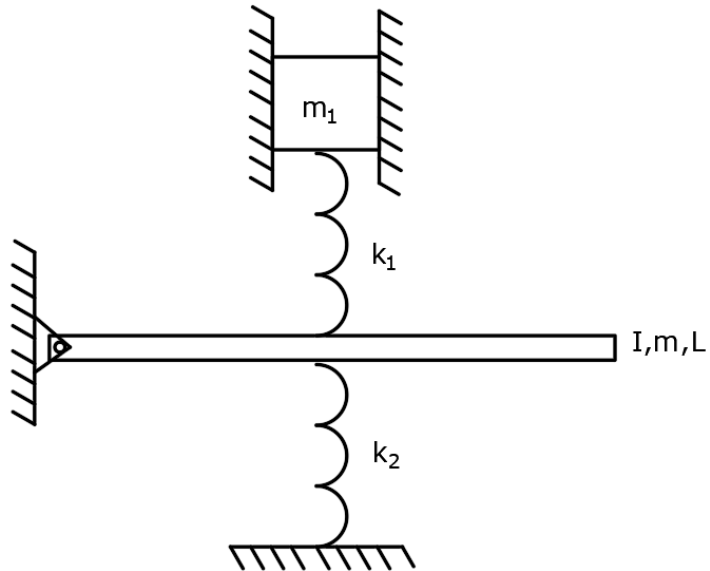


18



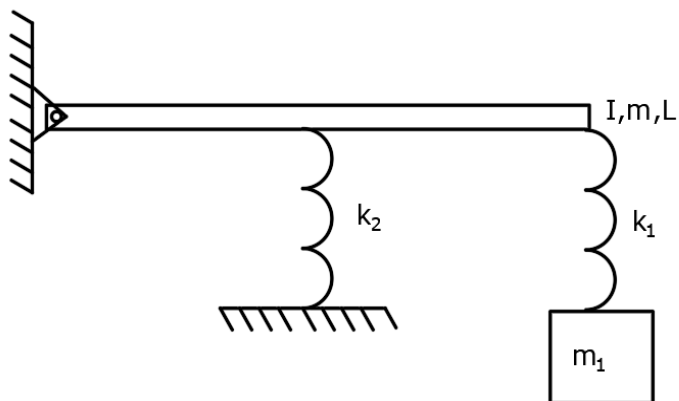
19

20



$$k_1 = 3000; k_2 = 9000; m_1 = 5; \\ I = 2; m = 8; L = 0.9.$$

21



$$k_1 = 10000; k_2 = 5000; m_1 = 10; \\ I = 3; m = 15; L = 1.2.$$

### Содержание отчёта

1. Постановка задачи (конкретный вариант).
2. Математическая модель.
3. Текст программы.
4. Результаты отчётов. Таблица значений возмущающей силы или момента и соответствующие им значения координат системы.

## Лабораторная работа N 2. Движение механических систем

### Цель работы

1. Разработать математическую модель, описывающую поведение элементов механической системы (конкретный вариант табл. 1) и расчетный алгоритм.
2. Разработать программу на основании математической модели, отладить ее и произвести расчёты при разных параметрах системы.

### Содержание работы

Поведение системы, т.е. движение ее элементов, описывается обыкновенными дифференциальными уравнениями, которые в нашем случае имеют вид для углового движения

$$\frac{d^2\varphi}{dt^2} = \frac{\sum M_i}{I},$$

а для движения массы  $m_3$

$$\frac{d^2x}{dt^2} = \frac{\sum F_i}{m_3},$$

где  $M_i$  — моменты,  $F_i$  — силы, действующие на элементы системы.

Получаются эти уравнения на основании второго закона Ньютона.

Для вычисления суммы сил и моментов используются те же формулы, что и для уравнений статики системы. Для численного интегрирования этой системы ее приводят к системе уравнений первого порядка. Для системы, рассмотренной в качестве примера в первой лабораторной, окончательно получим

$$\frac{d\omega_1}{dt} = \frac{\sum M_{1i}}{I_1}, \quad \frac{d\omega_2}{dt} = \frac{\sum M_{2i}}{I_2}, \quad \frac{dv}{dt} = \frac{\sum F_i}{m_3}, \quad \frac{d\varphi_1}{dt} = \omega_1, \quad \frac{d\varphi_2}{dt} = \omega_2, \quad \frac{dx}{dt} = v.$$

При составлении уравнений не надо вводить возмущающие силы и моменты.

Решается данная система методом Рунге – Кутты четвертого порядка с начальными условиями  $t=t_0$ ,  $\omega_1=\omega_{10}$ ,  $\omega_2=\omega_{20}$ ,  $\varphi_1=\varphi_{10}$ ,  $\varphi_2=\varphi_{20}$ ,  $v=v_0$ ,

$x=x_0$ .

При отладке программы целесообразно начальные условия по скорости полагать равными нулю, а по координатам брать такими, для которых исследователь знает характер поведения системы.

### Содержание отчёта

1. Постановка задачи (конкретный вариант).
2. Математическая модель.
3. Текст программы.
4. Результаты расчётов.

## Лабораторная работа N3. Переходные процессы в электрических цепях

### Цель работы

1. Разработать математическую модель для определения токов и напряжения в электрической цепи (конкретный вариант табл. 2).
2. Разработать программу на основании математической модели, отладить ее и произвести расчёты.

### Содержание работы

В цепи, состоящей из трёх контуров (рис. 3), источник напряжения включается в момент времени  $t = 0$ . Параметры элементов цепи постоянны. В момент времени  $t = 0$  напряжения на конденсаторах равны нулю, ток через индуктивности тоже равен нулю.

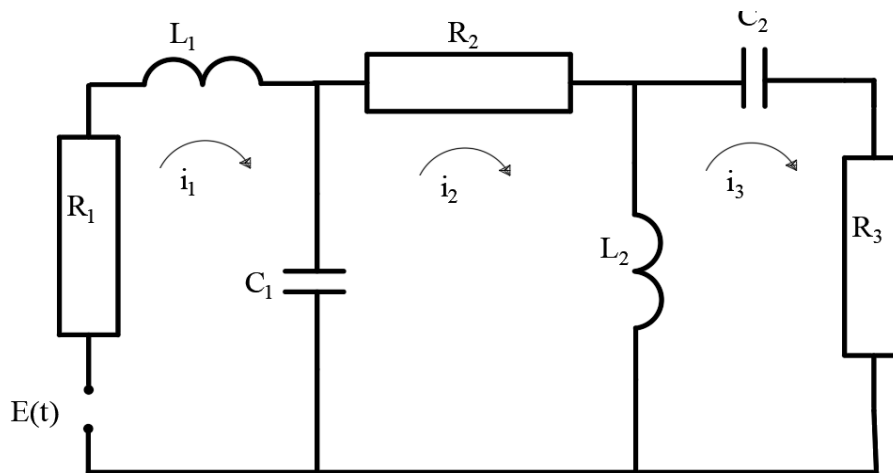


рис. 3

Обозначим токи в первом, втором и третьем контурах  $i_1$ ,  $i_2$ ,  $i_3$ . Тогда на основании второго закона Кирхгофа получим:

$$i_1 R_1 + L_1 \frac{di_1}{dt} + \frac{1}{C_1} \int_0^t i_1 dt - \frac{1}{C_1} \int_0^t i_2 dt = E(t),$$

$$\frac{1}{C_1} \int_0^t i_2 dt + i_2 R_2 + L_2 \frac{di_2}{dt} - L_2 \frac{di_3}{dt} = 0,$$

$$L_2 \frac{di_3}{dt} - L_2 \frac{di_2}{dt} + \frac{1}{C_2} \int_0^t i_3 dt + i_3 R_3 = 0.$$

Перенесём производные в левую часть и подставим

$$Q_1 = \int_0^t i_1 dt, Q_2 = \int_0^t i_2 dt, Q_3 = \int_0^t i_3 dt$$



в полученные зависимости. Имеем систему уравнений:

$$\begin{aligned} L_1 \frac{I_1}{t} &= E(t) + \frac{Q_2}{c_1} - \frac{Q_1}{c_1} - I_1 R_1, L_2 \frac{I_2}{t} - L_2 \frac{I_3}{t} = \frac{-Q_2}{c_1} - I_2 R_2, \\ -L_2 \frac{dI_2}{dt} + L_2 \frac{I_3}{t} &= \frac{-Q_3}{c_2} - I_3 R_3, \frac{Q_1}{t} = 1, \frac{Q_2}{t} = I_2, \frac{Q_3}{t} = I_3. \end{aligned}$$

Видим, что второе и третье уравнения имеют линейно зависимые левые части, поэтому разрешить эти уравнения относительно производных нельзя. Сложим второе и третье уравнения:

$$\frac{-Q_2}{c_1} - I_2 R_2 - \frac{Q_3}{c_2} - I_3 R_3 = 0.$$

Получили алгебраическую зависимость, связывающую токи и заряды в контурах. Ток во втором контуре:

$$I_2 = \frac{-Q_2}{c_1 R_2} - \frac{Q_3}{c_2 R_2} - \frac{I_3 R_3}{R_2}.$$

Введём новые переменные:

$$S_1 = I_1, S_2 = I_2 - I_3, S_3 = I_3.$$

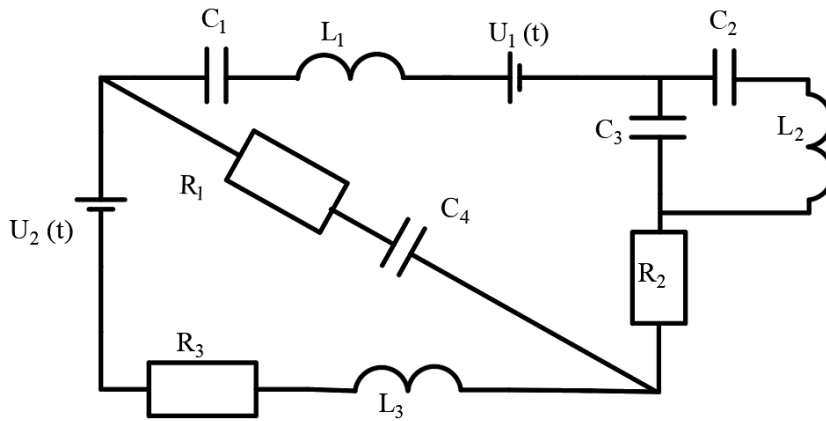
Тогда  $I_2 = S_2 + S_3$ . Подставим новые переменные в систему уравнений. Вместо третьего уравнения используем полученную алгебраическую зависимость, разрешив её относительно какой-либо переменной, допустим  $S_2$ .

$$\begin{aligned} \frac{S_1}{t} &= \frac{E(t)}{L_1} + \frac{Q_2}{c_1 L_1} - \frac{Q_1}{c_1 L_1} - \frac{S_1 R_1}{L_1}, \frac{S_2}{t} = \frac{-Q_2}{c_1 L_2} - \frac{(S_2 + S_3) R_2}{L_2}, \\ S_2 &= \frac{-Q_2}{c_1 R_1} - \frac{Q_3}{c_2 R_2} - \frac{S_3 R_3}{R_2} - S_3, \frac{Q_1}{t} = S_1, \frac{Q_2}{t} = S_2 + S_3, \frac{Q_3}{t} = S_3. \end{aligned}$$

Подставляя зависимость для  $S_2$  в правые части уравнения, получим замкнутую систему из пяти дифференциальных уравнений, которую можно интегрировать численным методом при заданных начальных условиях.

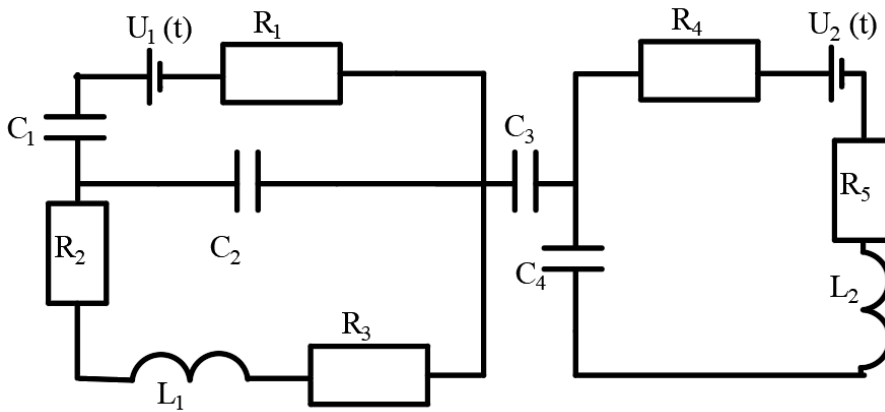
## Варианты заданий

1



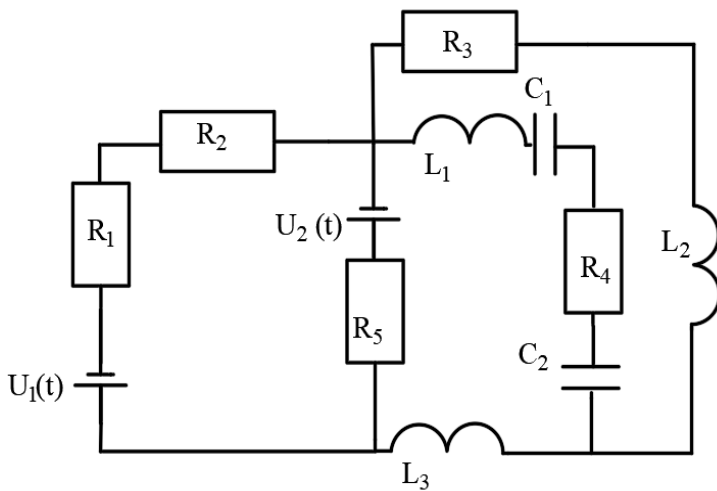
$$\begin{aligned} C_1 &= 5 \cdot 10^{-6}; C_2 = 2 \cdot 10^{-6}; \\ C_3 &= 2 \cdot 10^{-6}; C_4 = 3 \cdot 10^{-6}; \\ L_1 &= 10^{-2}; L_2 = 2 \cdot 10^{-2}; L_3 = 10^{-2} \\ R_1 &= 10; R_2 = 5; R_3 = 8; U_1 = 10 \\ U_2 &= 12. \end{aligned}$$

2



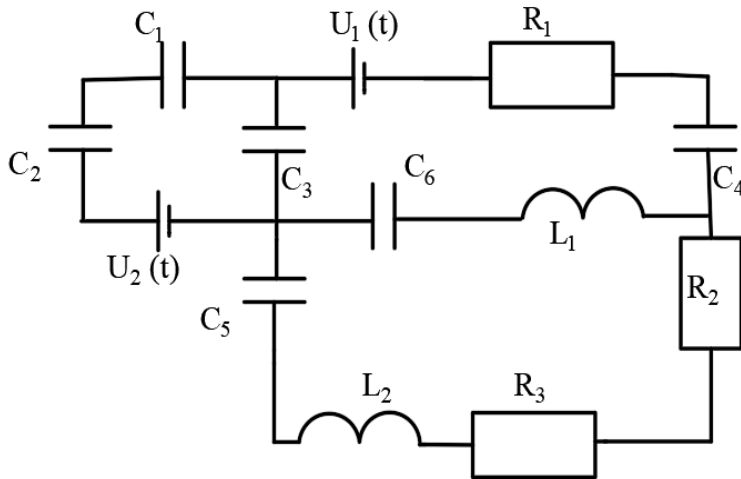
$$\begin{aligned} C_1 &= 3 \cdot 10^{-6}; C_2 = 4 \cdot 10^{-6}; \\ C_3 &= 3 \cdot 10^{-6}; C_4 = 4 \cdot 10^{-6}; \\ L_1 &= 2 \cdot 10^{-2}; L_2 = 3 \cdot 10^{-2}; \\ R_1 &= 2; R_2 = 4; R_3 = 4; \\ R_4 &= 5; R_5 = 3; \\ U_1 &= 8; U_2 = 15. \end{aligned}$$

3



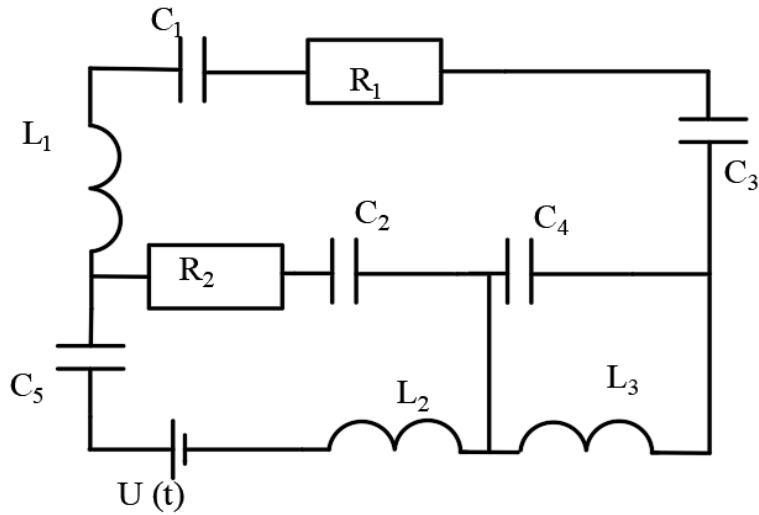
$$\begin{aligned} C_1 &= 2 \cdot 10^{-6}; C_2 = 10^{-6}; \\ L_1 &= 10^{-2}; L_2 = 10^{-2}; L_3 = 10^{-2}; \\ R_1 &= 10; R_2 = 11; R_3 = 9; \\ R_4 &= 5; R_5 = 7; \\ U_1 &= 10; U_2 = 10. \end{aligned}$$

4



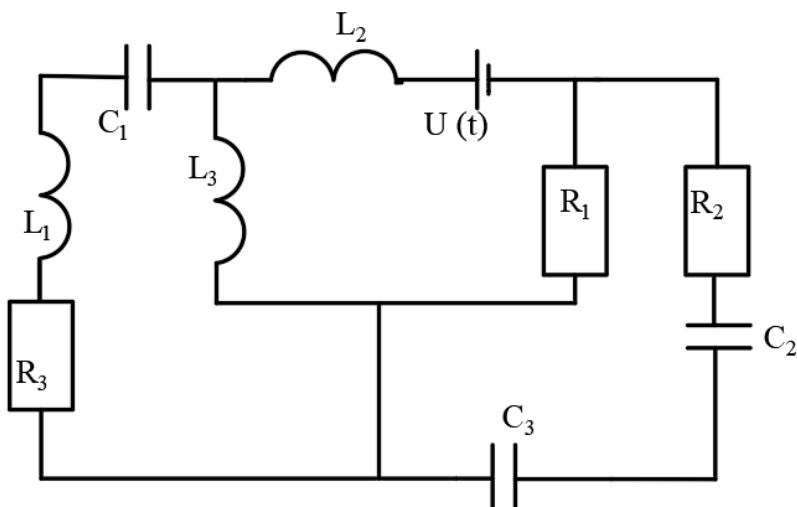
$$\begin{aligned} C_1 &= 2 \cdot 10^{-6}; C_2 = 2 \cdot 10^{-6}; \\ C_3 &= 2 \cdot 10^{-6}; C_4 = 3 \cdot 10^{-6}; \\ C_5 &= 4 \cdot 10^{-6}; C_6 = 3 \cdot 10^{-6}; \\ L_1 &= 3 \cdot 10^{-2}; L_2 = 3 \cdot 10^{-2}; \\ R_1 &= 9; R_2 = 9; R_3 = 5; \\ U_1 &= 12; U_2 = 11. \end{aligned}$$

5



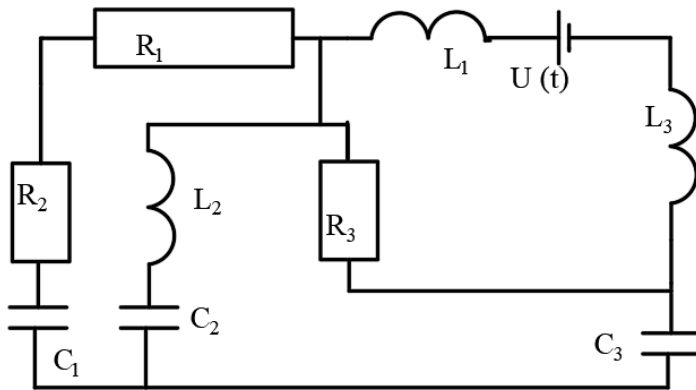
$$\begin{aligned} C_1 &= 10^{-6}; C_2 = 2 \cdot 10^{-6}; \\ C_3 &= 5 \cdot 10^{-6}; C_4 = 10^{-6}; \\ C_5 &= 5 \cdot 10^{-6}; \\ L_1 &= 2 \cdot 10^{-2}; L_2 = 3 \cdot 10^{-2}; \\ L_3 &= 4 \cdot 10^{-2}; \\ R_1 &= 8; R_2 = 7; R_3 = 14; \\ U &= 14. \end{aligned}$$

6



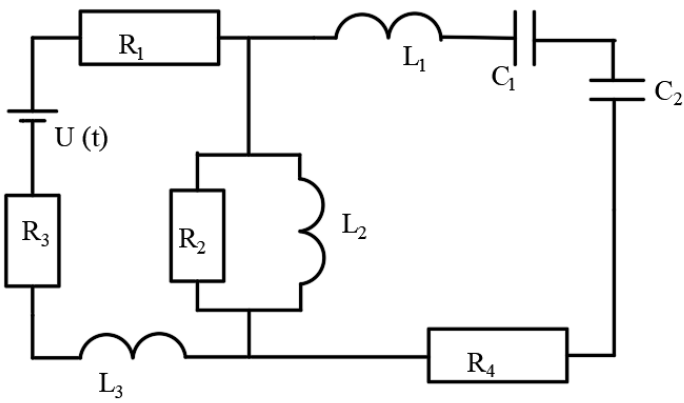
$$\begin{aligned} C_1 &= 6 \cdot 10^{-6}; C_2 = 5 \cdot 10^{-6}; \\ C_3 &= 6 \cdot 10^{-6}; \\ L_1 &= 10^{-2}; L_2 = 10^{-2}; \\ L_3 &= 2 \cdot 10^{-2}; \\ R_1 &= 6; R_2 = 10; R_3 = 7; \\ U &= 12. \end{aligned}$$

7



$$\begin{aligned} C_1 &= 6 \cdot 10^{-6}; C_2 = 5 \cdot 10^{-6}; \\ C_3 &= 4 \cdot 10^{-6}; \\ L_1 &= 10^{-2}; L_2 = 2 \cdot 10^{-2}; \\ L_3 &= 3 \cdot 10^{-2}; \\ R_1 &= 5; R_2 = 8; R_3 = 8; \\ U &= 10. \end{aligned}$$

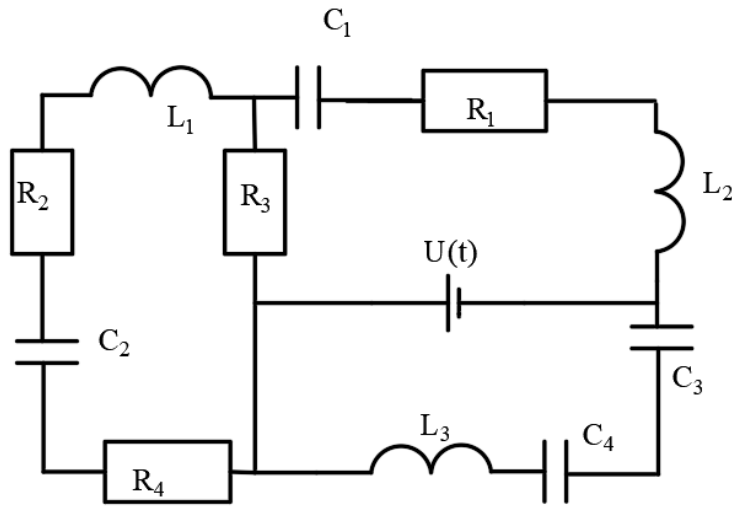
8



$$\begin{aligned} C_1 &= 5 \cdot 10^{-6}; C_2 = 3 \cdot 10^{-6}; \\ L_1 &= 10^{-2}; L_2 = 10^{-2}; \\ L_3 &= 2 \cdot 10^{-2}; \\ R_1 &= 10; R_2 = 11; R_3 = 8; R_4 = 9; \\ U &= 15. \end{aligned}$$

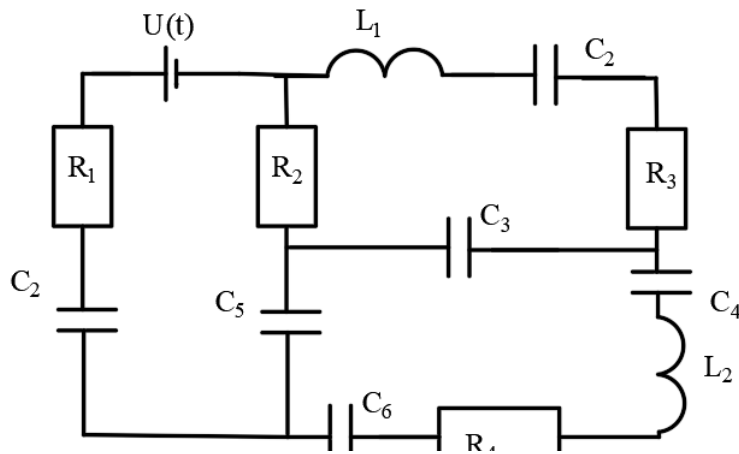
9

10



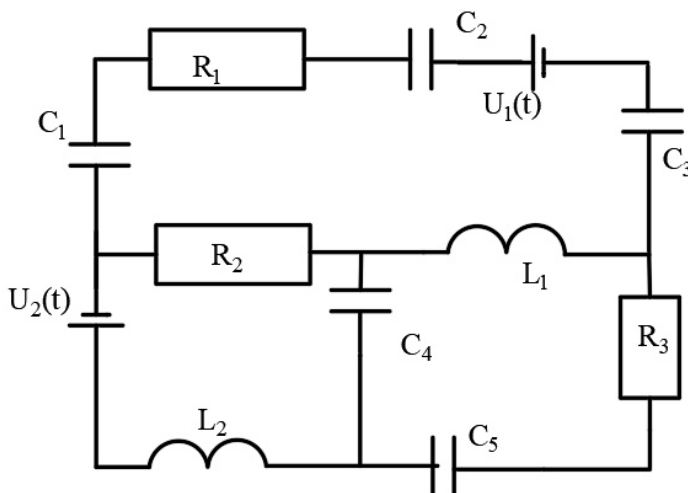
$$\begin{aligned} C_1 &= 5 \cdot 10^{-6}; C_2 = 5 \cdot 10^{-6}; \\ C_3 &= 4 \cdot 10^{-6}; C_4 = 6 \cdot 10^{-6}; \\ L_1 &= 10^{-2}; L_2 = 2 \cdot 10^{-2}; \\ L_3 &= 2 \cdot 10^{-2}; \\ R_1 &= 7; R_2 = 7; R_3 = 8; R_4 = 9; \\ U &= 10. \end{aligned}$$

11

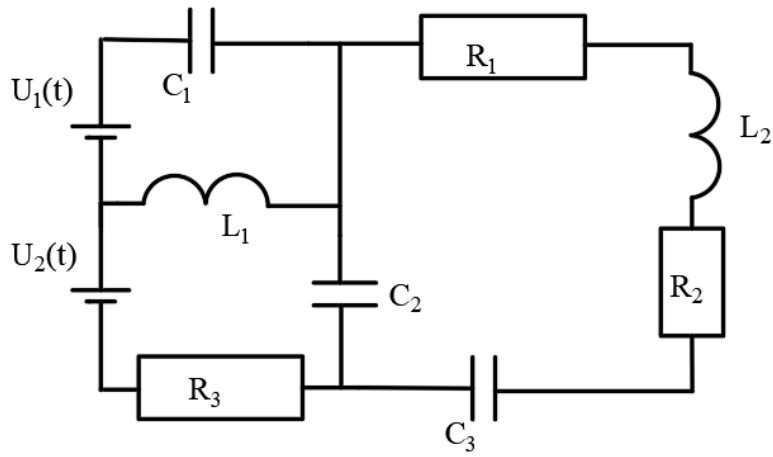


$$\begin{aligned} C_1 &= 6 \cdot 10^{-6}; C_2 = 6 \cdot 10^{-6}; \\ C_3 &= 7 \cdot 10^{-6}; C_4 = 7 \cdot 10^{-6}; \\ C_5 &= 5 \cdot 10^{-6}; C_6 = 5 \cdot 10^{-6}; \\ L_1 &= 2 \cdot 10^{-2}; L_2 = 3 \cdot 10^{-2}; \\ R_1 &= 8; R_2 = 8; R_3 = 9; R_4 = 9; \\ U &= 12. \end{aligned}$$

12

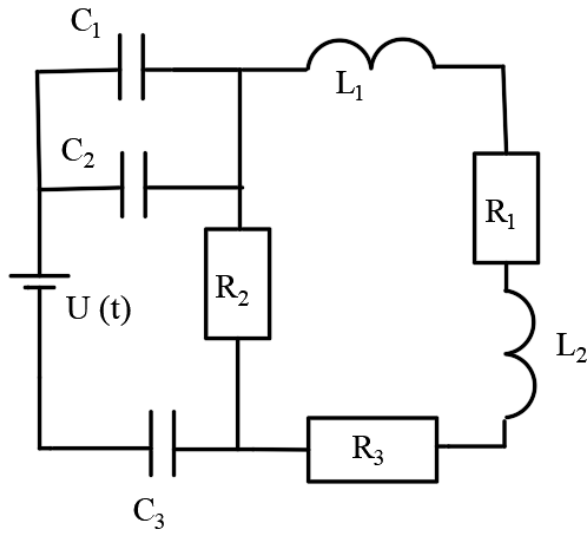


$$\begin{aligned} C_1 &= 6 \cdot 10^{-6}; C_2 = 6 \cdot 10^{-6}; \\ C_3 &= 6 \cdot 10^{-6}; C_4 = 7 \cdot 10^{-6}; \\ C_5 &= 7 \cdot 10^{-6}; \\ L_1 &= 3 \cdot 10^{-2}; L_2 = 3 \cdot 10^{-2}; \\ R_1 &= 9; R_2 = 5; R_3 = 6; \\ U_1 &= 12; U_2 = 11. \end{aligned}$$



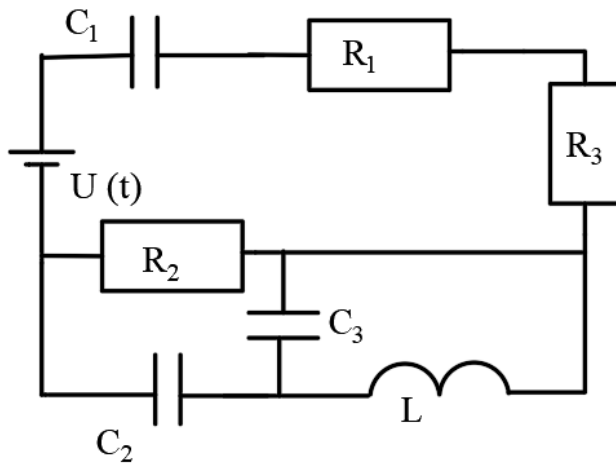
$$\begin{aligned} C_1 &= 5 \cdot 10^{-6}; C_2 = 5 \cdot 10^{-6}; \\ C_3 &= 5 \cdot 10^{-6}; \\ L_1 &= 10^{-2}; L_2 = 10^{-2}; \\ R_1 &= 10; R_2 = 8; R_3 = 10; \\ U_1 &= 15; U_2 = 16. \end{aligned}$$

13



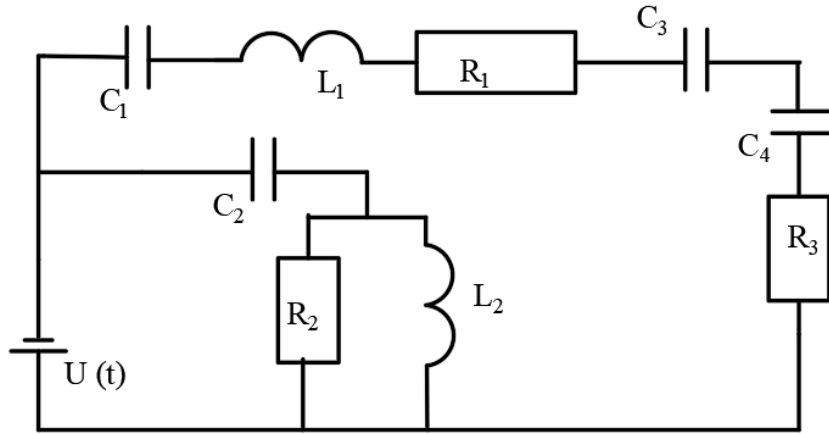
$$\begin{aligned} C_1 &= 7 \cdot 10^{-6}; C_2 = 6 \cdot 10^{-6}; \\ C_3 &= 6 \cdot 10^{-6}; \\ L_1 &= 3 \cdot 10^{-2}; L_2 = 3 \cdot 10^{-2}; \\ R_1 &= 12; R_2 = 11; R_3 = 10; \\ U &= 16. \end{aligned}$$

14



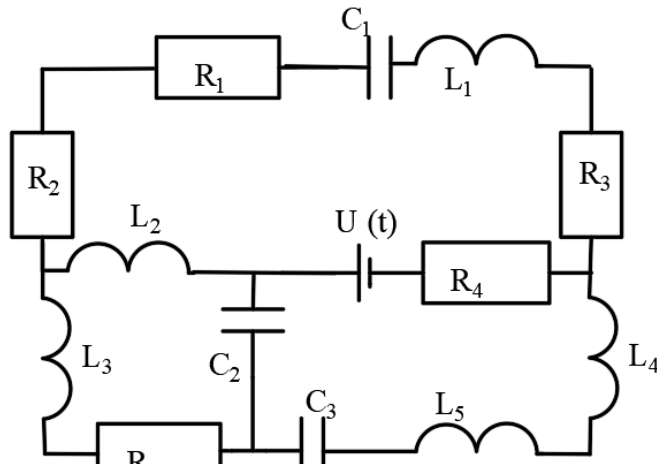
$$\begin{aligned} C_1 &= 4 \cdot 10^{-6}; C_2 = 4 \cdot 10^{-6}; \\ C_3 &= 5 \cdot 10^{-6}; \\ L &= 10^{-2}; \\ R_1 &= 9; R_2 = 9; R_3 = 9; \\ U &= 10. \end{aligned}$$

15



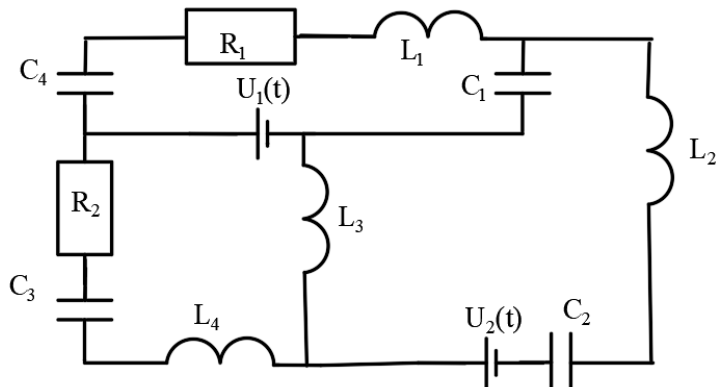
$$\begin{aligned} C_1 &= 3 \cdot 10^{-6}; C_2 = 10^{-6}; \\ C_3 &= 2 \cdot 10^{-6}; C_4 = 10^{-6}; \\ L_1 &= 2 \cdot 10^{-2}; L_2 = 2 \cdot 10^{-2}; \\ R_1 &= 5; R_2 = 6; R_3 = 6; \\ U &= 12. \end{aligned}$$

16



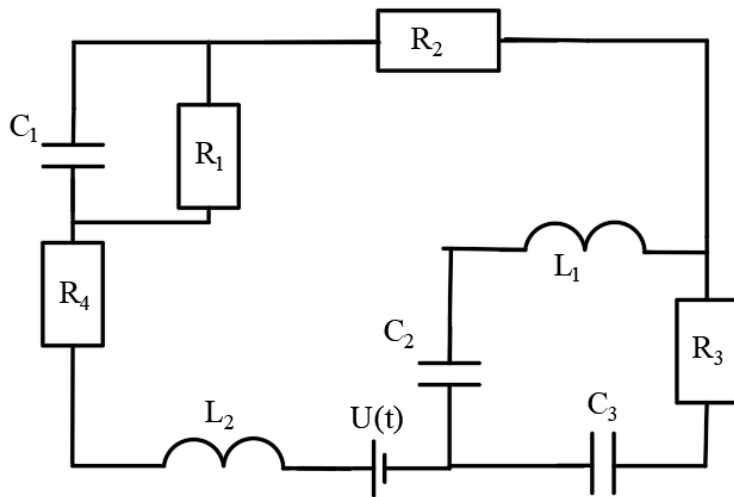
$$\begin{aligned} C_1 &= 2 \cdot 10^{-6}; C_2 = 3 \cdot 10^{-6}; \\ C_3 &= 3 \cdot 10^{-6}; \\ L_1 &= 10^{-2}; L_2 = 2 \cdot 10^{-2}; \\ L_3 &= 10^{-2}; L_4 = 2 \cdot 10^{-2}; \\ L_5 &= 3 \cdot 10^{-2}; \\ R_1 &= 8; R_2 = 8; R_3 = 7; \\ R_4 &= 7; R_5 = 9; \\ U &= 14. \end{aligned}$$

17



$$\begin{aligned} C_1 &= 10^{-6}; C_2 = 2 \cdot 10^{-6}; \\ C_3 &= 2 \cdot 10^{-6}; C_4 = 6 \cdot 10^{-6}; \\ L_1 &= 3 \cdot 10^{-2}; L_2 = 3 \cdot 10^{-2}; \\ L_3 &= 4 \cdot 10^{-2}; L_4 = 4 \cdot 10^{-2}; \\ R_1 &= 10; R_2 = 10; \\ U_1 &= 14; U_2 = 14. \end{aligned}$$

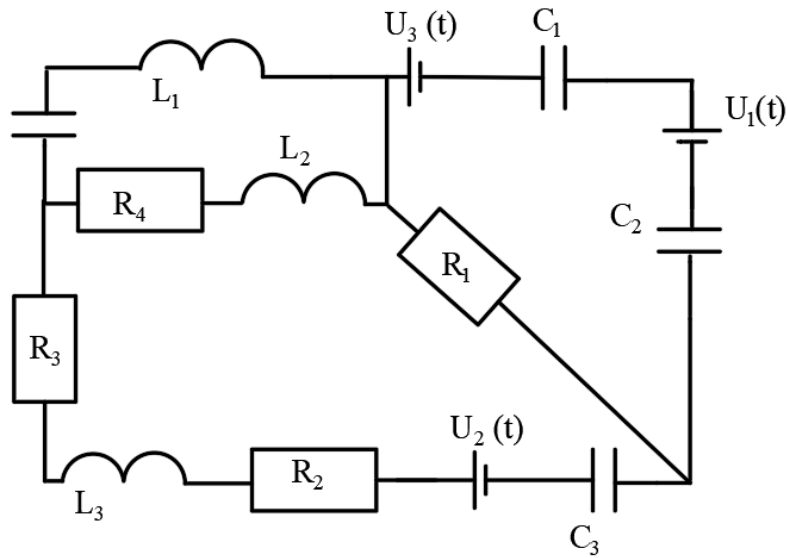
18



$$\begin{aligned}
 C_1 &= 5 \cdot 10^{-6}; \quad C_2 = 5 \cdot 10^{-6}; \\
 C_3 &= 4 \cdot 10^{-6}; \\
 L_1 &= 10^{-2}; \quad L_2 = 10^{-2}; \\
 R_1 &= 5; \quad R_2 = 5; \quad R_3 = 7; \quad R_4 = 10; \\
 U &= 12.
 \end{aligned}$$

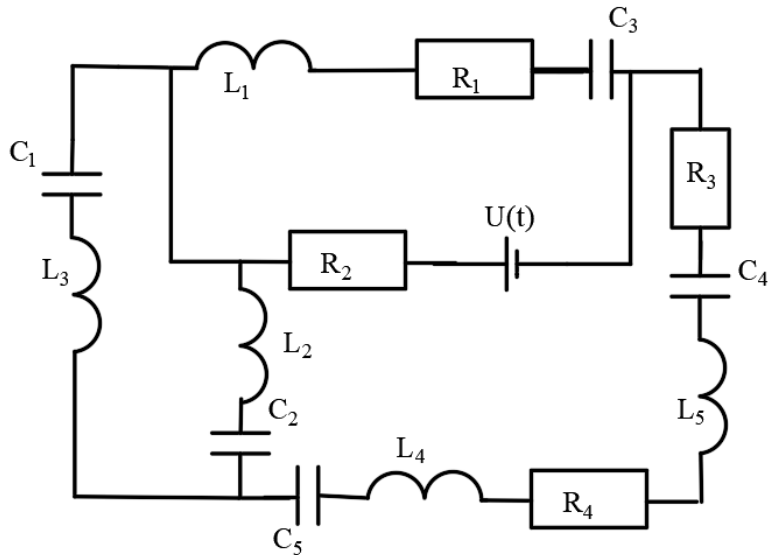


19



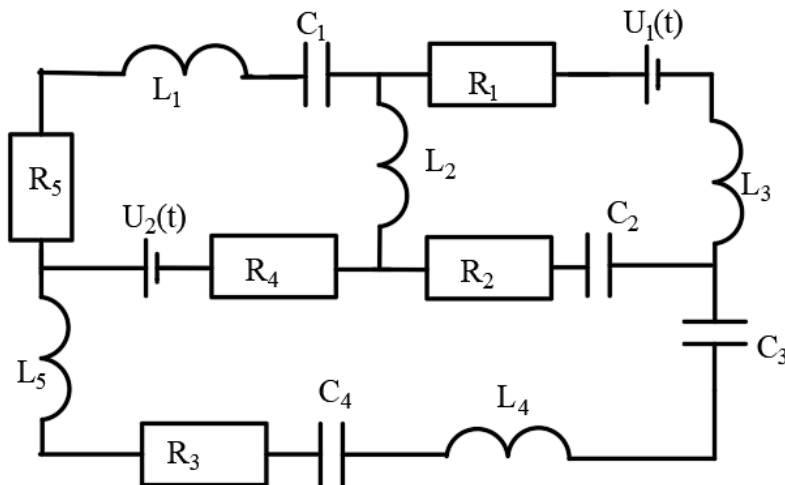
$$\begin{aligned} C_1 &= 6 \cdot 10^{-6}; C_2 = 5 \cdot 10^{-6}; \\ C_3 &= 5 \cdot 10^{-6}; C_4 = 4 \cdot 10^{-6}; \\ L_1 &= 2 \cdot 10^{-2}; L_2 = 10^{-2}; \\ L_3 &= 2 \cdot 10^{-2}; \\ R_1 &= 8; R_2 = 8; R_3 = 9; R_4 = 8; \\ U_1 &= 10; U_2 = 12; U_3 = 14. \end{aligned}$$

20



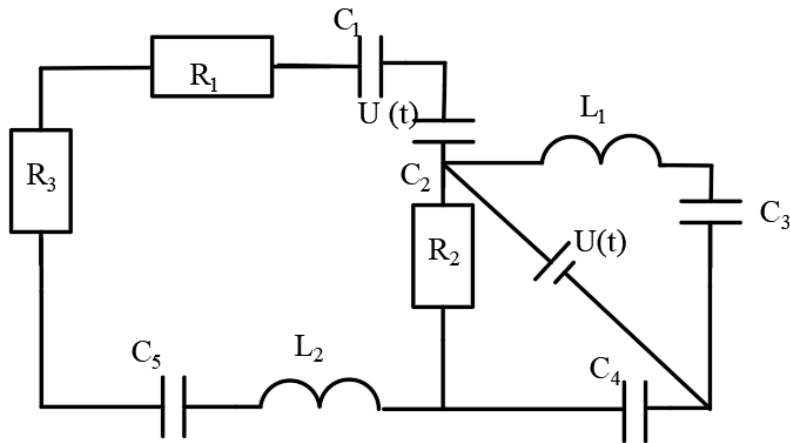
$$\begin{aligned} C_1 &= 6 \cdot 10^{-6}; C_2 = 4 \cdot 10^{-6}; \\ C_3 &= 4 \cdot 10^{-6}; C_4 = 5 \cdot 10^{-6}; \\ C_5 &= 5 \cdot 10^{-6}; \\ L_1 &= 2 \cdot 10^{-2}; L_2 = 2 \cdot 10^{-2}; \\ L_3 &= 3 \cdot 10^{-2}; L_4 = 3 \cdot 10^{-2}; \\ L_5 &= 10^{-2}; \\ R_1 &= 10; R_2 = 10; R_3 = 8; R_4 = 9; \\ U &= 12. \end{aligned}$$

21



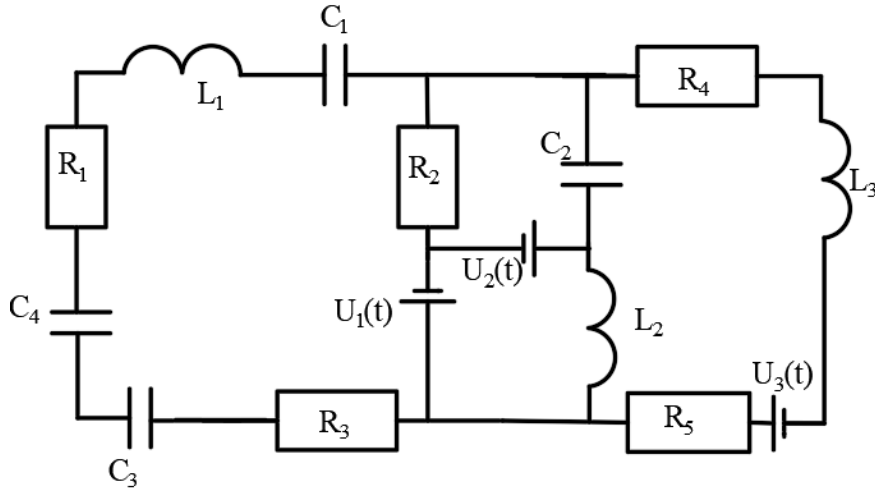
$$\begin{aligned} C_1 &= 10^{-6}; C_2 = 10^{-6}; \\ C_3 &= 2 \cdot 10^{-6}; C_4 = 10^{-6}; \\ L_1 &= 10^{-2}; L_2 = 2 \cdot 10^{-2}; \\ L_3 &= 3 \cdot 10^{-2}; L_4 = 10^{-2}; \\ L_5 &= 10^{-2}; \\ R_1 &= 10; R_2 = 8; R_3 = 7; \\ R_4 &= 6; R_5 = 10; \\ U_1 &= 15; U_2 = 14. \end{aligned}$$

22



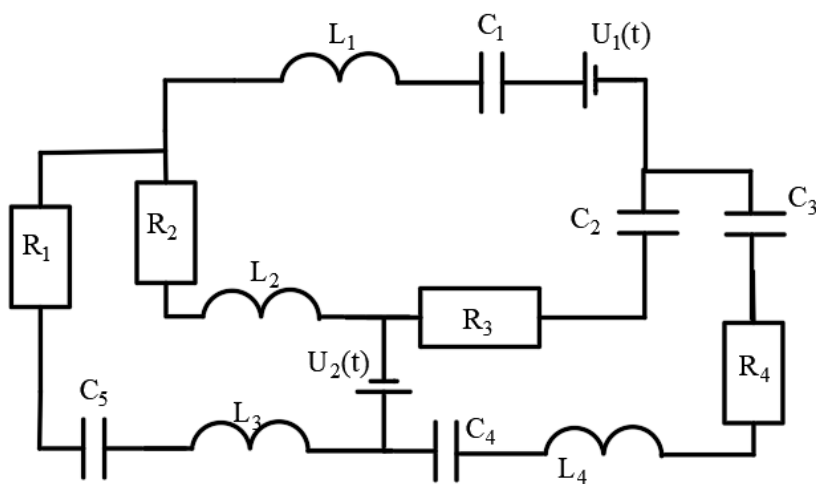
$$\begin{aligned} C_1 &= 2 \cdot 10^{-6}; C_2 = 2 \cdot 10^{-6}; \\ C_3 &= 10^{-6}; C_4 = 10^{-6}; \\ C_5 &= 3 \cdot 10^{-6}; \\ L_1 &= 4 \cdot 10^{-2}; L_2 = 4 \cdot 10^{-2}; \\ R_1 &= 5; R_2 = 6; R_3 = 7; \\ U &= 16. \end{aligned}$$

23



$$\begin{aligned} C_1 &= 3 \cdot 10^{-6}; C_2 = 3 \cdot 10^{-6}; \\ C_3 &= 2 \cdot 10^{-6}; C_4 = 2 \cdot 10^{-6}; \\ L_1 &= 10^{-2}; L_2 = 2 \cdot 10^{-2}; \\ L_3 &= 2 \cdot 10^{-2}; \\ R_1 &= 8; R_2 = 10; R_3 = 10; \\ R_4 &= 8; R_5 = 6; \\ U_1 &= 10; U_2 = 9; U_3 = 14. \end{aligned}$$

24



$$\begin{aligned} C_1 &= 5 \cdot 10^{-6}; C_2 = 6 \cdot 10^{-6}; \\ C_3 &= 6 \cdot 10^{-6}; C_4 = 5 \cdot 10^{-6}; \\ C_5 &= 10^{-6}; \\ L_1 &= 2 \cdot 10^{-2}; L_2 = 10^{-2}; \\ L_3 &= 3 \cdot 10^{-2}; L_4 = 3 \cdot 10^{-2}; \\ R_1 &= 5; R_2 = 6; R_3 = 6; \\ R_4 &= 9; \\ U_1 &= 12; U_2 = 15. \end{aligned}$$

### Содержание отчёта

1. Постановка задачи (конкретный вариант).
2. Математическая модель.
3. Текст программы.
4. Результаты отчётов (вывести на экран в виде графиков).

## Лабораторная работа N4. Оценка вероятностных характеристик фазовых координат систем

### Цель работы

1. Изучить метод Доступова для оценки вероятностных характеристик фазовых координат систем.
2. Разработать программу для оценки вероятностных характеристик вектора  $X$  на момент времени  $t_k$  (конкретный вариант).

### Содержание работы

Пусть анализируемая система описывается в общем случае системой дифференциальных уравнений:

$$\frac{dX}{dt} = F(t, X, V),$$

где  $X$  — вектор фазовых координат размерности  $n$ ;  $V$  — вектор случайных величин размерности  $m$ .

Считаем, что математическое ожидание его равно нулю, т. е.  $m_v = 0$ , он некоррелирован, т. е.  $M(V_j, V_i) = 0, (i \neq j)$ , известны его дисперсии  $\sigma_{v_j}$ .

Допустим необходимо оценить вероятностные характеристики вектора  $X$  на момент времени  $t$ . Тогда, интегрируя систему аналитически или численным методом, можно получить зависимость фазовых координат от случайных величин:

$$X = \varphi(t, V).$$

Разложим эту функцию в ряд Тейлора по случайным величинам в окрестности точки  $V = 0$  с учётом вторых членов разложения:

$$X(t, V) = \varphi(t, 0) + \sum_{i=1}^m \frac{\partial \varphi}{\partial V_i} V_i + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^m \frac{\partial^2 \varphi}{\partial V_i \partial V_j} V_i V_j.$$

Осуществляя с этой функцией операцию вычисления математического ожидания, получим:

$$M(X) = \varphi(t, 0) + \sum_{i=1}^m \frac{\partial \varphi}{\partial V_i} M(V_i) + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^m \frac{\partial^2 \varphi}{\partial V_i \partial V_j} M(V_i V_j).$$

Так как по условию  $M(V) = m_v = 0, M(V_i, V_j), (i, j = 1, 2, \dots, m)$  является диагональной корреляционной матрицей, то предыдущая зависимость примет вид:

$$M(X) = \varphi(t, 0) + \frac{1}{2} \sum_{j=1}^m \frac{\partial^2 \varphi}{\partial V_j^2} \sigma_{v_j}^2.$$

Отсюда видно, что для вычисления математического ожидания вектора  $X$  надо вычислить его значение при  $V = 0$  и значение вторых частных производных  $\frac{\partial^2 \varphi}{\partial V_j^2}$ .

Дисперсия вектора  $X$  может быть вычислена через его начальный момент второго порядка  $M(X_i^2), (i=1, 2, \dots, n)$ , где  $X_i$  — компонента вектора  $X$ .

Действительно,

$$D(X_i) = M[(X_i - m_{X_i})^2] = M[X_i^2 - 2X_i m_{X_i} + m_{X_i}^2] = M(X_i^2) - 2m_{X_i} M(X_i) + m_{X_i}^2 = M(X_i^2) - m_{X_i}^2.$$

Вычисление  $M(X_i^2)$  можно осуществить так же, как и  $M(X)$ . Для этого запишем выражение  $X_i^2 = \varphi_i(t, V)$ , ( $i = 1, 2, \dots, n$ ), где  $\varphi_i(t, V) = \varphi_i^2(t, V)$ .

$$\text{Тогда } M(X_i^2) = \varphi_i(t, 0) + \frac{1}{2} \sum_{j=1}^m \frac{\partial^2 \varphi_i}{\partial V_j^2} \sigma_{V_j}^2.$$

Неудобством данных формул является необходимость вычисления частных производных  $\frac{\partial^2 \varphi}{\partial V_i^2}, \frac{\partial^2 \varphi}{\partial V_j^2}$ . Избежать этого можно следующим образом. Задаем  $L$  наборов случайных величин  $V$ :

$$\begin{array}{c} V_{11}, V_{21}, V_{31}, \dots, V_{m1}, \\ V_{12}, V_{22}, V_{32}, \dots, V_{m2}, \\ \vdots \\ V_{1L}, V_{2L}, V_{3L}, \dots, V_{mL}. \end{array}$$

Таблица 3

L	V <sub>1</sub>	V <sub>2</sub>	V <sub>3</sub>	...	V <sub>m</sub>	X
1	ξ <sub>1</sub>	0	0	...	0	X <sub>1</sub>
2	0	ξ <sub>2</sub>	0	...	0	X <sub>2</sub>
3	0	0	ξ <sub>3</sub>	...	0	X <sub>3</sub>
⋮	⋮	⋮	⋮	...	⋮	⋮
m	0	0	0	...	ξ <sub>m</sub>	X <sub>m</sub>
m+1	ξ <sub>1</sub>	ξ <sub>2</sub>	ξ <sub>3</sub>	...	ξ <sub>m</sub>	X <sub>m+1</sub>
m+2	-ξ <sub>1</sub>	-ξ <sub>2</sub>	-ξ <sub>3</sub>	...	-ξ <sub>m</sub>	X <sub>m+2</sub>

Тогда получим зависимости:

$$\begin{aligned}
 \alpha_1 \xi_1 + \alpha_2 0 + \dots + \alpha_m 0 + \alpha_{m+1} \xi_1 - \alpha_{m+2} \xi_1 &= 0, \\
 \alpha_1 0 + \alpha_2 \xi_2 + \dots + \alpha_m 0 + \alpha_{m+1} \xi_2 - \alpha_{m+2} \xi_2 &= 0, \\
 &\dots \\
 \alpha_1 0 + \alpha_2 0 + \dots + \alpha_m \xi_m + \alpha_{m+1} \xi_m - \alpha_{m+2} \xi_m &= 0,
 \end{aligned}$$

или  $\alpha_k + \alpha_{m+1} - \alpha_{m+2} = 0$ , ( $k = 1, 2, \dots, m$ ). Коэффициенты  $\xi_k$  сокращены, так как не равны нулю.

Используем эти зависимости для вычисления  $\alpha_k$ . Просуммируем последнюю зависимость по индексу k. Имеем:

$$\sum_{k=1}^m \alpha_k + m \alpha_{m+1} - m \alpha_{m+2} = 0.$$

Преобразуем это выражение следующим образом:

$$\sum_{k=1}^m \alpha_k + \alpha_{m+1} + \alpha_{m+2} - \alpha_{m+1} - \alpha_{m+2} + m \alpha_{m+1} - m \alpha_{m+2} = \sum_{k=1}^{m+2} \alpha_k + (m+1) \alpha_{m+1} - (m+1) \alpha_{m+2}.$$

Так как имеем условие  $\sum_{i=1}^L \alpha_i = 0$ , то получим  $1 + (m-1) \alpha_{m+1} - (m+1) \alpha_{m+2} = 0$ .

Из условия  $\sum_{i=1}^L \alpha_i V_{ji} V_{gi} = 0$  и табл. 4 имеем:

$$\alpha_{m+1} \xi_j \xi_g + \alpha_{m+2} (-\xi_j) (-\xi_g) = 0$$

или  $\alpha_{m+1} + \alpha_{m+2} = 0$ .

Получили два уравнения для определения  $\alpha_{m+1}, \alpha_{m+2}$ :

$$1 + (m-1) \alpha_{m+1} - (m+1) \alpha_{m+2} = 0; \alpha_{m+1} + \alpha_{m+2} = 0.$$

Решая её, получаем:

$$\alpha_{m+1} = \frac{-1}{2m}, \alpha_{m+2} = \frac{1}{2m}.$$

Тогда из уравнения  $\alpha_k + \alpha_k - \alpha_{m+2} = 0$  получим  $\alpha_k = \alpha_{m+2} - \alpha_{m+1}$  или  $\alpha_k = \frac{1}{m}$ , ( $k = 1, 2, \dots, m$ ).

Исходя из таблицы, зависимость  $\sum_{i=1}^L \alpha_i V_j^2 = \sigma_{Vj}^2$ , ( $j = 1, 2, \dots, m$ ) примет вид:

$$\alpha_j \xi_j^2 + \alpha_{m+1} \xi_j^2 + \alpha_{m+2} \xi_j^2 = \sigma_{Vj}^2 \text{ или } \frac{1}{m} \xi_j^2 = \sigma_{Vj}^2. \text{ Отсюда получим } \xi_j = \sigma_{Vj} \sqrt{m}, (j = 1, 2, \dots, m).$$

Используя найденные зависимости для  $\alpha_k, \alpha_{m+1}, \alpha_{m+2}, \xi_j$ , найдём формулы для вычисления математического ожидания вектора  $X$ :

$$M(X) = \sum_{i=1}^{m+2} \alpha_i X_i = \frac{1}{m} \sum_{i=1}^m X_i + \frac{X_{m+2} - X_{m+1}}{2m},$$

дисперсии

$$D(X_j) = \frac{1}{m} \sum_{i=1}^m X_{j,i}^2 + \frac{X_{j,m+2}^2 - X_{j,m+1}^2}{2m} - (M[X_j]).$$

Здесь  $X_{j,i}$  —  $i$ -ая компонента вектора  $\bar{X}_i$ .

### Пример выполнения задания

Дана система дифференциальных уравнений, описывающих поведение анализируемой системы:

$$\begin{cases} \frac{dx_1}{dt} = f(x_1, x_2, t) \\ \frac{dx_2}{dt} = \varphi(x_1, x_2, t) \end{cases},$$

где  $x_1, x_2$  — фазовые координаты системы.

В качестве компонент вектора случайных величин  $V$  примем начальные условия для фазовых координат системы дифференциальных уравнений:

$$V^T = [x_{01}, x_{02}], (m=2).$$

Известны математическое ожидание  $m_1, m_2$  и дисперсии  $\sigma_1^2, \sigma_2^2$  фазовых координат на момент начала функционирования системы.

Оценим вероятностные характеристики фазовых координат на момент времени  $t_k$ , т. е. найдем  $m_{1k}, m_{2k}$  и  $\sigma_{1k}^2, \sigma_{2k}^2$ .

1. Вычислим  $\xi_1$  и  $\xi_2$ :

$$\xi_1 = \sigma_1 \sqrt{m}, \xi_2 = \sigma_2 \sqrt{m}.$$

2. Зададим системы случайных величин:

	$V_1$	$V_2$
1	$\xi_1$	0
2	0	$\xi_2$
3	$\xi_1$	$\xi_2$
4	$-\xi_1$	$-\xi_2$

3. Зададим четыре набора начальных условий:

$$1) \begin{cases} x_{01} = m_1 + \xi_1 \\ x_{02} = m_2 + 0 \end{cases}; \quad 3) \begin{cases} x_{01} = m_1 + \xi_1 \\ x_{02} = m_2 + \xi_2 \end{cases};$$

$$2) \begin{cases} x_{01} = m_1 + 0 \\ x_{02} = m_2 + \xi_2 \end{cases}; \quad 4) \begin{cases} x_{01} = m_1 - \xi_1 \\ x_{02} = m_2 - \xi_2 \end{cases}.$$

4. Интегрируем четыре раза систему дифференциальных уравнений, каждый раз используя новый набор начальных условий. В результате получим четыре набора фазовых координат за момент времени  $t_k$ .

$$1) x_{11}, x_{21}; \quad 3) x_{13}, x_{23};$$

$$2) x_{12}, x_{22}; \quad 4) x_{14}, x_{24}.$$

5. Вычислим математические ожидания фазовых координат на момент времени  $t_k$  по следующим зависимостям:

$$m_{1k} = \frac{1}{m} (x_{11} + x_{12}) + \frac{(x_{14} - x_{13})}{2m};$$

$$m_{2k} = \frac{1}{m} (x_{21} + x_{22}) + \frac{(x_{24} - x_{23})}{2m}.$$

6. Вычислим дисперсии фазовых координат на момент времени  $t_k$  по следующим зависимостям:

$$\sigma_{1k} = \frac{1}{m} (x_{11}^2 + x_{12}^2) + \frac{x_{14}^2 - x_{13}^2}{2m} - m_{1k}^2;$$

$$\sigma_{2k} = \frac{1}{m} (x_{21}^2 + x_{22}^2) + \frac{x_{24}^2 - x_{23}^2}{2m} - m_{2k}^2.$$

### Варианты заданий

Таблица 4

№ вар	Система дифференциальных уравнений	$\sigma_{x1}$	$\sigma_{x2}$	$m_1$	$m_2$	$t_k$
----------	---------------------------------------	---------------	---------------	-------	-------	-------



1	2	3	4	5	6	7
1	$\frac{x_1}{t} = \cos x_1 - x_2 \frac{x_2}{t} = \sin x_1 t + x_2$	1	2	0	0.5	30
2	$\frac{x_1}{t} = x_2 + x_1^2 - t \frac{x_2}{t} = \cos x_1 x_2$	1	1	0.5	0	28
3	$\frac{x_1}{t} = \sin(x_1 + x_2) \frac{x_2}{t} = x_1 t + 2 x_2$	2	2	0.1	0.3	35
4	$\frac{x_1}{t} = 0.1 \quad x_1 + x_2 \frac{x_2}{t} = \cos x_1 - x_2$	3	1	1	0.5	30
5	$\frac{x_1}{t} = 0.2 \ln x_2 - x_1^2 \frac{x_2}{t} = x_1 x_2 t$	2	3	0.3	1	40
6	$\frac{x_1}{t} = x_1 \sin t + x_2 \frac{x_2}{t} = x_1^2 + x_2 t$	1	2	0	0.3	38
7	$\frac{x_1}{t} = \ln x_1 / t - 5 x_2$ $\frac{x_2}{t} = (x_1 + x_2) / t$	2	1	0.8	0.5	42

Продолжение табл. 4

1	2	3	4	5	6	7
8	$\frac{x_1}{t} = \cos x_2 + t x_1 \frac{x_2}{t} = x_2 - x_1^2 + t$	1	3	0	0.7	35

9	$\begin{aligned}\frac{x_1}{t} &= \sin(x_1 + t) - \dot{x}_2 \dot{x}_1 \\ \frac{x_2}{t} &= \cos(x_1 + x_2)\end{aligned}$	3	2	0.5	0.8	25
10	$\frac{x_1}{t} = x_1 x_2 + \cos t \frac{x_2}{t} = t + 2 x_1 x_2$	2	2	1	0.8	30
11	$\frac{x_1}{t} = \cos x_1 + x_2 t \frac{x_2}{t} = x_2 / x_1$	3	1	0.9	0.3	37
12	$\frac{x_1}{t} = x_1 \cos x_2 \frac{x_2}{t} = t \sin(x_1 + x_2)$	1	1	0.2	0.5	35
13	$\frac{x_1}{t} = x_1^3 - \sin x_2 \frac{x_2}{t} = 2 x_1 x_2 t$	2	3	0.5	1	45
14	$\frac{x_1}{t} = \ln x_2 - x_1 + t \frac{x_2}{t} = \sin x_1 - x_2$	3	1	1	0.3	29
15	$\frac{x_1}{t} = (x_1 + x_2^2) / t - \frac{x_2}{t} = \cos x_1 - t x_2$	1	2	2	0.8	37
16	$\frac{x_1}{t} = \frac{ \sin x_1 }{t} - x_2^2 \frac{x_2}{t} = x_1^2 + x_2$	3	3	0.5	2	42

Окончание табл. 4

1	2	3	4	5	6	7
17	$\frac{x_1}{t} =  \cos x_1 x_2  \frac{x_2}{t} = \sin x_1 t - 5 x_2$	3	2	1	2	30
18	$\frac{x_1}{t} =  \cos x_1  + x_2 t \frac{x_2}{t} =  \sin x_2  + x_1 t$	1	3	0	1	35
19	$\frac{x_1}{t} = \cos x_2 - x_1^2 \frac{x_2}{t} = x_1 x_2 + t$	4	2	1	0.5	40
20	$\frac{x_1}{t} = 2 \sin x_1 + x_2 t \frac{x_2}{t} = x_2^2 - \cos x_1$	3	4	2	0.8	28
21	$\frac{x_1}{t} = \ln x_1 t - x_2^3 \frac{x_2}{t} = \cos x_1 + \sin x_2$	4	1	0.3	1	37
22	$\frac{x_1}{t} = \cos x_1 - x_2^2 t \frac{x_2}{t} = \sin x_2 - x_1^2$	4	3	1	2	25
23	$\frac{x_1}{t} = e^{x_1} - \sin x_2 \frac{x_2}{t} = \cos(x_1 + x_2)$	2	4	0.5	2	30
24	$\frac{x_1}{t} = \ln(x_1 + t) - \cos x_2$ $\frac{x_2}{t} = \sin x_1 + x_2$	1	4	0.8	0	35

## Содержание отчёта

1. Постановка задачи.
2. Математическая модель.
3. Текст программы и результаты оценки математического ожидания и

дисперсии координат системы.

Александр Иванович Полунин  
Лариса Геннадьевна Смышляева

МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ

Методические указания  
к выполнению лабораторных работ  
для студентов специальности 22.04

Ответственный за выпуск Смышляева Л.Г.

---

Подписано в печать 23.01.2020  
Объем 2 уч.-изд.л.  
Заказ 456

---

Формат 60x84/16  
Тираж 100  
Бесплатно

---

Ротапринт Белгородского технологического института строительных  
материалов. 308012, г. Белгород, ул. Костюкова, 46.