

一维非线性方程的求根

最终项目作业

褚朱钊恒

数学软件

2022 年 7 月 4 日

- ① 定义
- ② 数学理论
- ③ 问题分析与算法
- ④ 数值算例和收敛性测试
- ⑤ 结论
- ⑥ 参考文献

求解一维非线性方程

求解

$$f(x) = 0 \quad (1)$$

即确定 $x^* \in [a, b]$ 使 $f(x^*) = 0$ ，其中 f 是定义在 $[a, b]$ 上的连续非线性函数，满足 $f(x^*) = 0$ 的 x^* 成为方程 (1) 的根，也称为 $f(x)$ 的零点。

数学理论 [2]

定理 1

介值定理 如果 $f(x)$ 在区间 $[a, b]$ 上连续且 $f(a)f(b) < 0$, 则至少存在一点 $\eta \in [a, b]$ 使 $f(\eta) = 0$

定理 2

泰勒公式 把 $f(x)$ 在 x_0 点附近展开成 *Taylor* 级数, 得到

$$f(x) = f(x_0) + (x - x_0)f'(x_0) + (x - x_0)^2f''(x_0) + \cdots$$

二分法和牛顿法

由上述两个定理，可以得出二分法和牛顿法的基本想法。[3]

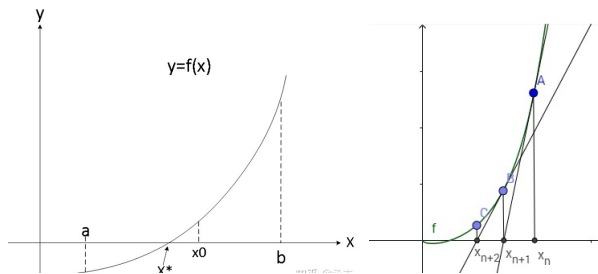
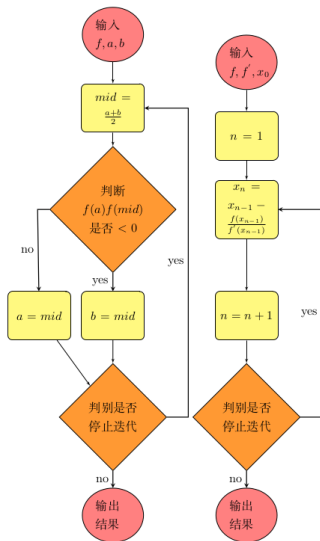


图 1: 二分法和牛顿法的示意图

算法流程



测试

测试方法：随机生成 100000 个一维非线性方程，分别使用 gsl 库提供的 Newton 法和二分法求一个解 [1]。

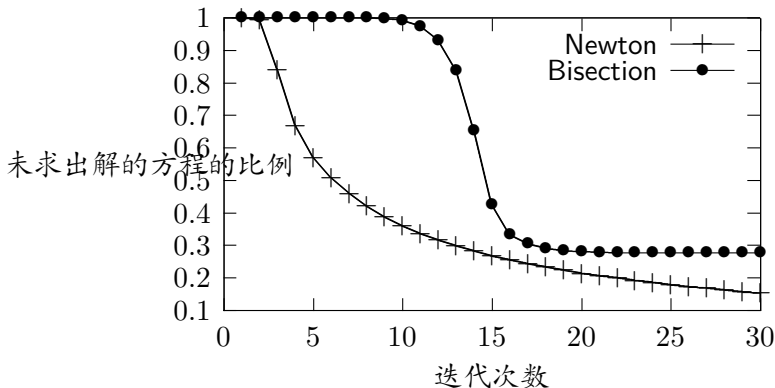


图 2: 测试结果

结论

	Newton 法	二分法	差距
求解成功率	84.76%	72.31%	12.45%
成功求解平均迭代次数	8.190147	14.506403	-6.316256

在本次测试的场景下，牛顿法的收敛性和收敛速度都优于二分法，但从稳定性和对函数可导性的要求来看，二分法也有可取之处。

参考文献

- [1] GSL.
One dimensional root-finding.
<https://www.gnu.org/software/gsl/doc/html/roots.html>.
- [2] 华东师范大学数学科学学院.
数学分析, 第五版上册.
高等教育出版社, 2019.
- [3] 梁唐.
快速求解方程的根——二分法与牛顿迭代法, 2020.
<https://zhuanlan.zhihu.com/p/112845185>.