

作业四: Mandelbrot Set 的生成和探索

褚朱钊恒

信息与计算科学 3200104144

2022 年 7 月 1 日

摘要

Mandelbrot 集是复数的集合 c , 使 $f_c(z) = z^2 + c$ 迭代时不会发散到无穷大. 我们可以用迭代法判断每个像素对应的复数是否属于 c , 然后进行着色, 画出 *Mandelbrot set* 的图像。

1 引言

Mandelbrot 集的图像有了一个精细且无限复杂的边界, 随着放大倍数的增加, 它会显示出越来越精细的递归细节; 在数学上, 它的边界是一条分形曲线。我们可以用一张 bmp 图片对应复平面上的一片区域, 这样就让一个像素点对应了一个复数, 我们可以根据该复数迭代多少次后模大于 2, 来选择该像素点的颜色, 于是我们便可以画出 *Mandelbrot* 集的图像。

2 问题的背景介绍

Mandelbrot 集起源于复动力学, 这是 20 世纪初法国数学家 Pierre Fatou 和 Gaston Julia 首次研究的领域。1978 年, 罗伯特·W·布鲁克斯和彼得·马特爾斯基首次定义并绘制了这种分形, 作为克莱因群研究的一部分。1980 年 3 月 1 日, Benoit Mandelbrot 在纽约约克镇高地的 IBM 托马斯 J. 沃森研究中心首次看到了该集合的可视化。

1985 年 8 月的《科学美国人》的封面文章向广大读者介绍了计算 Mandelbrot 集的算法。封面由不来梅大学的 Peitgen、Richter 和 Saupe 创作。Mandelbrot 集在 1980 年代中期作为计算机图形演示变得突出, 当时个人计算机变得足够强大, 可以以高分辨率绘制和显示该集。[1]

3 数学理论

定理 1 判断是否不收敛 从 0 开始迭代的轨道趋于无穷当且仅当在某个点它的模数 > 2 .

4 算法

Algorithm 1 判断 c 对应的 f_c 是否有界

Require: c, N 需要判断的复数和迭代次数

Ensure: $iterator_times, is_bound$ 迭代到模数大于 2 的次数, 是否在给定的迭代次数内是否存在某个点模大于 2.

```
1:  $z \leftarrow 0$ 
2:  $is\_bound \leftarrow 1$ 
3: for  $i = 1; i \leq N; i++$  do
4:    $z \leftarrow z * z + c$ 
5:   if  $|z| > 2$  then
6:      $iterator\_times \leftarrow i$ 
7:      $is\_bound \leftarrow 0$ 
8:     break
9:   end if
10: end for
```

Algorithm 2 判断每个像素点的颜色信息

Require: ox, oy, dim 图片中心对应的复数 $ox + oy\mathbf{i}$, 图片横向所表示的范围 $[-dim, dim]$

```
1:  $N \leftarrow \frac{255}{3}$ 
2: for 每个像素点 do
3:    $c \leftarrow$  该像素点对应的复数
4:   use Algorithm 1
5:   if  $is\_bound$  then
6:     该节点的 RGB 值  $\leftarrow 0$ 
7:   else
8:     该节点的 RGB 值  $\leftarrow 255 - iterator\_times * 3$ 
9:   end if
10: end for
```

5 数值算例

(请先使用make命令得到可执行文件)

首先我们来看一下整体图像

使用命令 `./test all.bmp 0 0 1` 得到图像

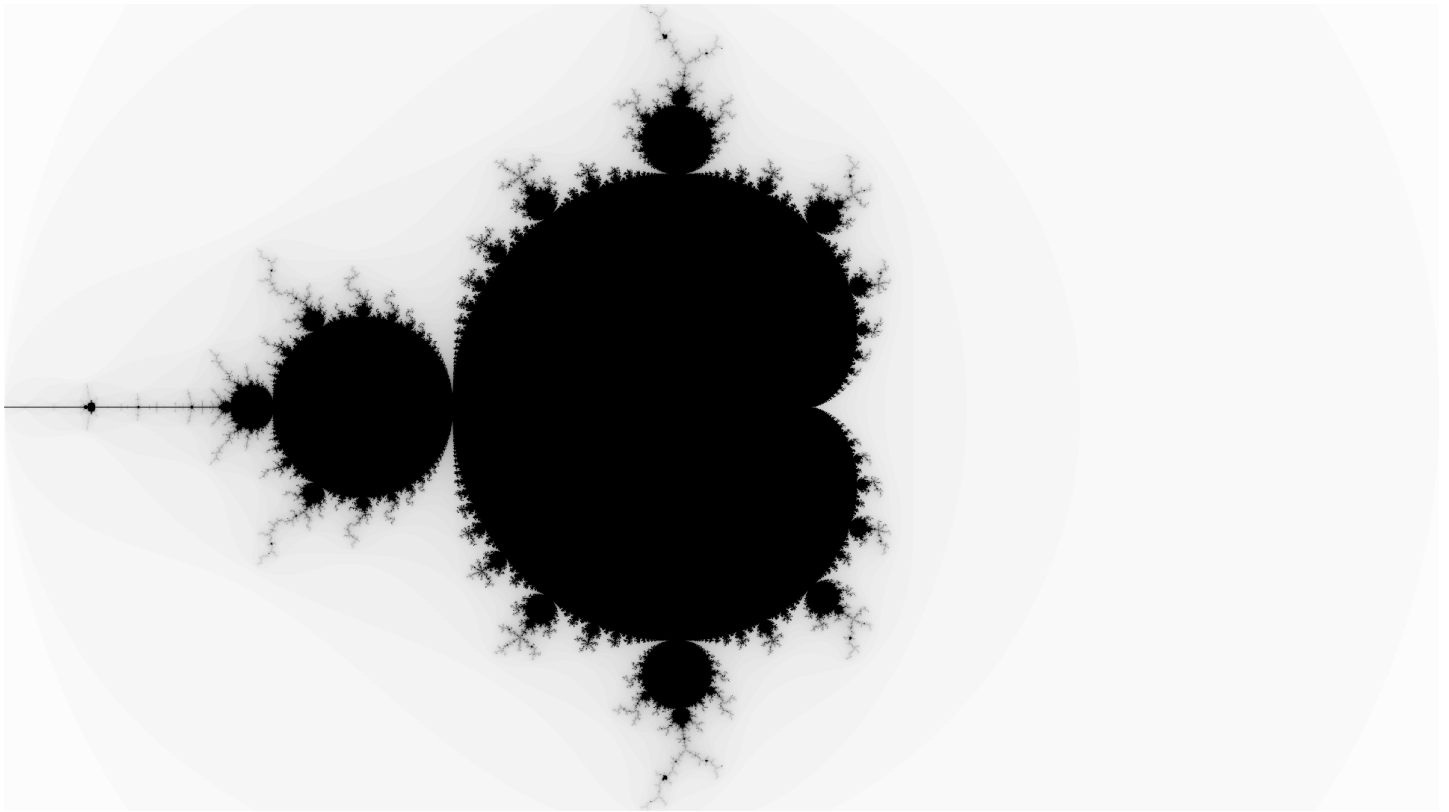


图 1: 整体图像

然后我们以 $(-1.4, 0)$ 为中心放大，用更小的精度渲染更小范围的图像，容易发现其有美丽的分形结构。
使用命令 `./test part.bmp -1.4 0 0.05` 得到图像

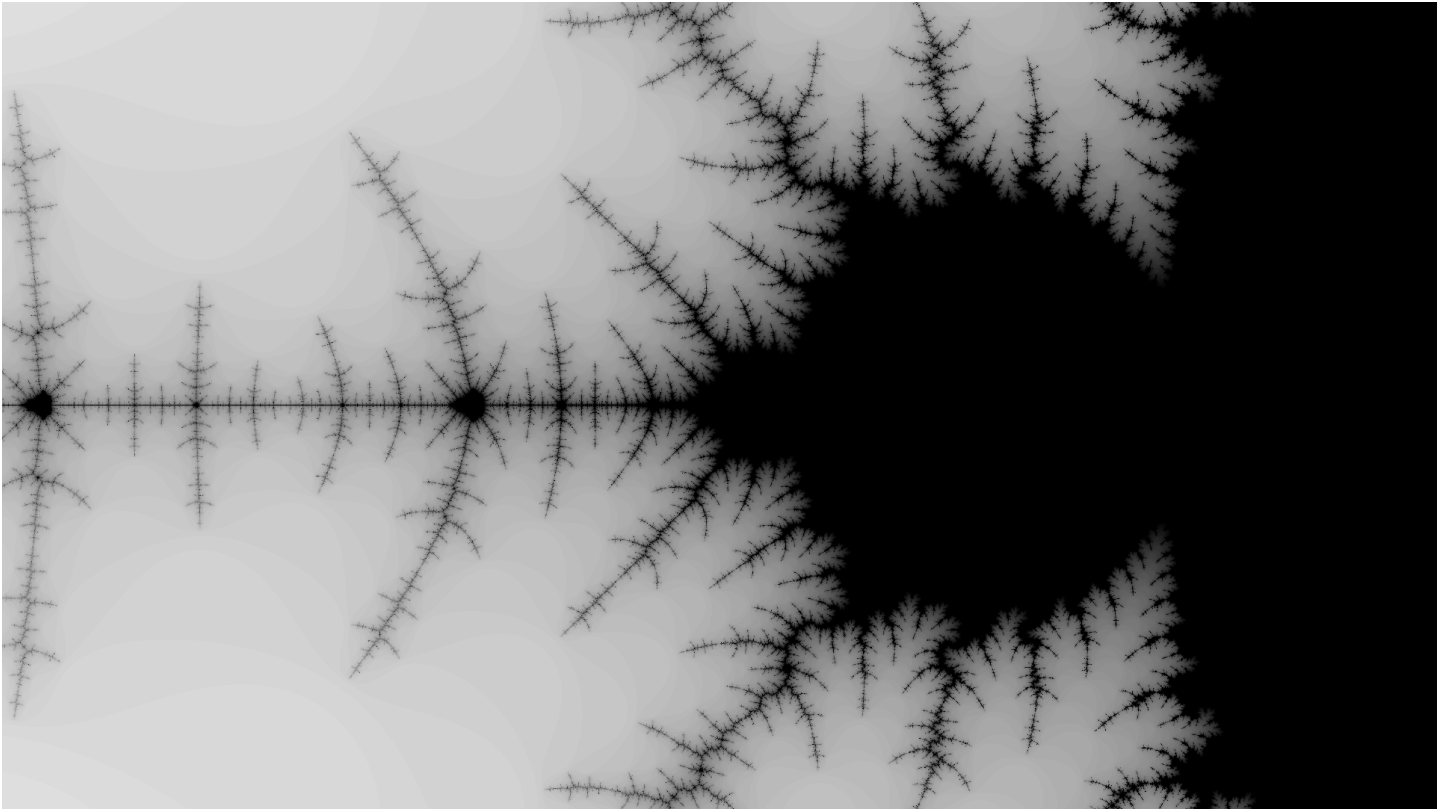


图 2: 局部图像

似乎灰度变化的分界线不太明显，我们不妨改成用颜色分界，这样更容易看出图像的分形特征。使用命令 `./test part.bmp -1.4 0 0.05 colorful` 得到图像

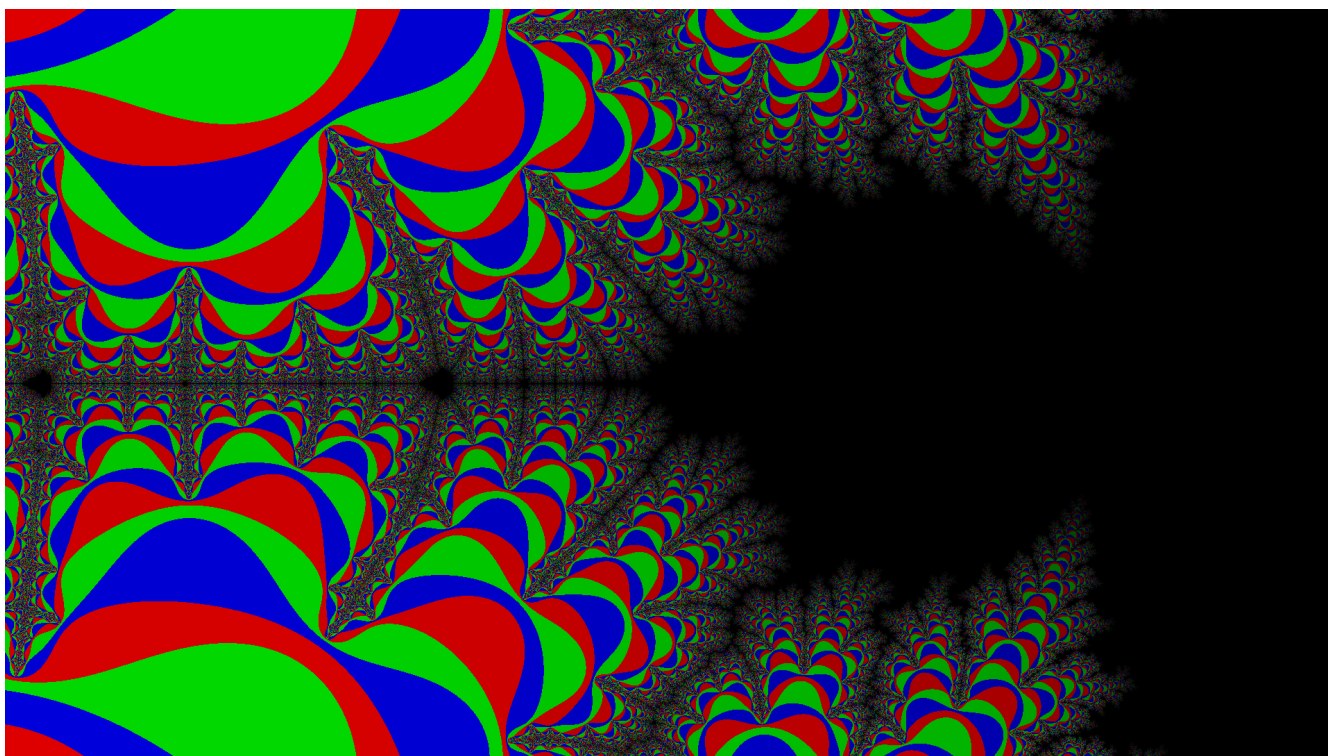


图 3: 彩色图像

6 结论

我们用 C++ 程序画出了 Mandelbrot Set 的简单示意图, 用观察图像的方式感性理解了一下这个集合的特点。

容易发现在该图像的一个部分内, 能找到大小更小而和整体形状相似的图形结构. 这说明 Mandelbrot Set 是一个分形结构.

7 附注

本项目用到的 .cpp 文件都放在 src 文件夹中, 用到的 .h 文件都放在 include 文件夹中; 您可以使用 make 命令得到名为 test 的可执行文件, 也可以使用 make report 命令得到该 pdf 文档。

参考文献

[1] wikipedia. Mandelbrot set, 2022. https://en.wikipedia.org/wiki/Mandelbrot_set.