作业一: 实对称矩必可在实数域上相似对角化的叙述与证明

褚朱钇恒
信息与计算科学 3200104144

2022 年 6 月 27 日

这是一个来自线性代数领域的问题.

1 问题描述

问题叙述如下: 任何一个 n 阶的实对称阵均可在 $\mathbb{R}$ 上相似对角化，且存在 n 阶的正交矩阵 U，使 $U^T AU$ 为对角阵。

2 证明

我们只要证明存在 n 阶的正交矩阵 U，使 $U^T AU$ 为对角阵即可。为此，我们对矩阵的阶做归纳，若 A 为一阶方阵，则它已经相似对角化，令 $U = (1)_{1\times 1}$ 即得证。

设已证明任何一个 $n-1$ 是对称矩阵都存在想要的正交矩阵 U_1，使得 $U_1^T AU_1$ 为对角阵，则对于任意一个 n 阶实对称阵 A，由于 n 阶实对称矩阵有 n 个实特征值。设 λ_1 为其中一个特征值，ξ_1 为 A 的属于 λ_1 的一个实特征向量且 $|\xi_1| = 1$. 用 Schmidt 正交化方法将 ξ_1 扩充成 $\mathbb{R}^n$ 中的一个标准正交基 $\xi_1, \xi_2, \cdots, \xi_n$，则 $A\xi_1, A\xi_2, \cdots, A\xi_n$ 均可以经 $\xi_1, \xi_2, \cdots, \xi_n$ 线性表示，不难验证

$$\begin{aligned} A\begin{pmatrix}\xi_1 & \xi_2 & \cdots & \xi_n\end{pmatrix} &= \begin{pmatrix}A\xi_1 & A\xi_2 & \cdots & A\xi_n\end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix}\xi_1 & \xi_2 & \cdots & \xi_n\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\lambda_1 & \alpha \\ O & A_1\end{pmatrix} \end{aligned} \tag{1}$$

这里 α 为 $n-1$ 维实行向量，A_1 为 $n-1$ 阶实方阵。令

$$U_0 = \begin{pmatrix} \xi_1 & \xi_2 & \cdots & \xi_n \end{pmatrix}$$

则依 $\xi_1 \quad \xi_2 \quad \cdots \quad \xi_n$ 为 $\mathbb{R}^n$ 的一个标准正交基知 U_0 为正交矩阵。故 (1) 等价于

$$U_0^T A U_0 = \begin{pmatrix} \lambda_1 & \alpha \\ O & A_1 \end{pmatrix} \tag{2}$$

由于 (2) 等式左端为实对称的，故右端也是实对称的，从而 $\alpha = \theta$,A_1 为 $n-1$ 阶的实对称阵。依归纳假设知，存在 $n-1$ 阶的正交矩阵 U_1 与 $n-1$ 阶对角阵 D_1 使 $U_1^T A_1 U_1 = D_1$, 令

$$U = U_0 \begin{pmatrix} 1 & \\ & U_1 \end{pmatrix}$$

则 U 为正交矩阵，且

$$\begin{aligned} U^T A U &= \begin{pmatrix} 1 & \\ & U_1^T \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda_1 & \\ & A_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & \\ & U_1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \lambda_1 & \\ & D_1 \end{pmatrix} \end{aligned} \tag{3}$$

这说明所要证明的结论对于 n 阶实对称阵 A 也成立。依数学归纳法，定理得证。