

# 数值分析项目作业报告

褚朱钊恒

3200104144

## 1 运行说明

本项目需要调用jsoncpp与eigen3库，故请在运行此项目前安装好这两个包。  
在project目录下使用make命令即可编译整个项目并得到实验报告。

## 2 程序设计思路

所有实现样条计算的相关代码都在头文件spline.h中，其中设计了一下几个类：

### 2.1 Class Function

其定义了(),diff,diff2三个虚函数，分别用于函数求值，求导和求二阶导。  
该基类有以下两个衍生类：

- Class Polynomial 用于存储一个多项式函数，形如  $\sum C_{O_i}(x - x_0)^i$
- Class B\_spline\_base 用于存储一个  $k$  阶的 B 样条基函数，其控制点为  $t$

### 2.2 Class Interpolation

定义了solve,()两个虚函数，分别用于插值系数计算和插值求值。该基类有以下两个衍生类：

- Class ppForm\_interpolation 用于使用多项式进行样条插值
- Class B\_spline\_base 用于使用 B 样条基函数进行样条插值

以上两个衍生类可以在初始化时制定样条的阶数  $order = 1or3$ ，1 对应线性样条，3 对应三次样条 ( $S_3^2$ )；以及边界条件  $condition = 1or2or3,m,1$  对应 complete cubic spline，2 对应 cubic spline with specified second derivatives at its end points，3 对应 natural cubic spline.

## 3 作业题运行结果

### 3.1 A

对不同的插值点数  $N$ ，使用多项式样条拟合图像。结果如下：

N	6	11	21	41	81	161	321	641	801
err_max	0.4217	0.0219	0.003	$2.7 * 10^{-4}$	$1.6 * 10^{-5}$	$9.6 * 10^{-7}$	$5.9 * 10^{-8}$	$3.6 * 10^{-9}$	$1.4 * 10^{-9}$

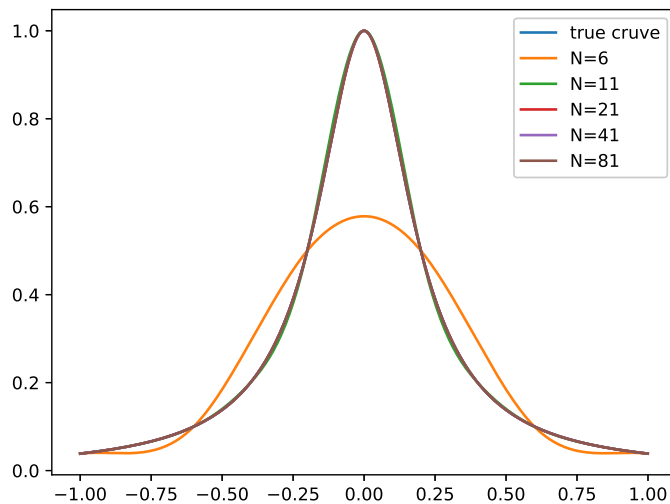


图 1: 三次样条拟合图像

容易发现随着  $N$  的变大, 拟合结果没有发生龙格现象, 为了判断其究竟是否更加精准, 此处做出其最大误差的自然对数和  $N$  的关系并作图。

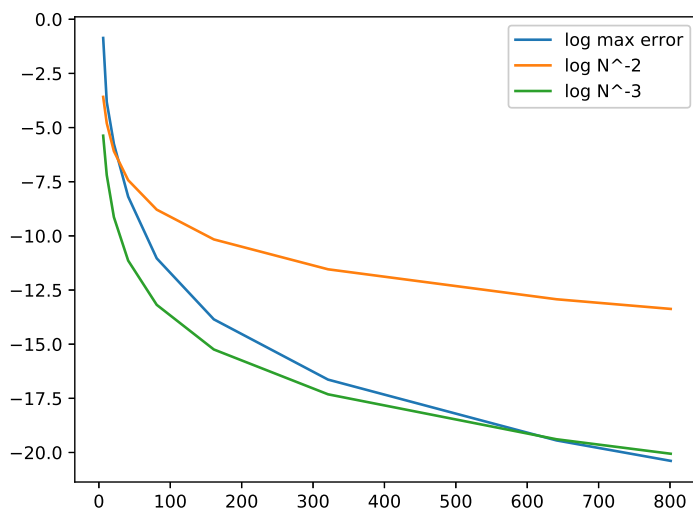


图 2: 误差变化曲线

容易发现该样条的拟合精度随着  $N$  的变大而提升, 其收敛阶至少大于 3.

### 3.2 B

实现代码可见 `spline.h`

### 3.3 C

使用三次 B 样条和线性 B 样条分别拟合函数  $f(x) = \frac{1}{1+x^2}$ , 结果如下图:

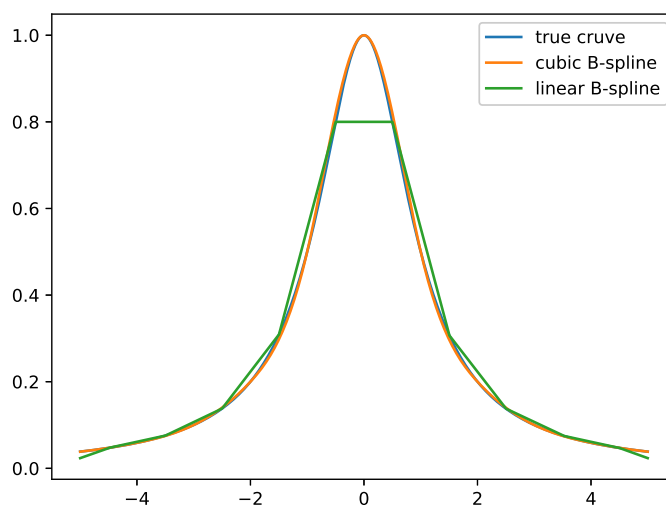


图 3:  $f(x) = \frac{1}{1+x^2}$  拟合结果

显然, 三次样条的结果更精确。

### 3.4 D

问题 C 中的两个样条的误差如下图:

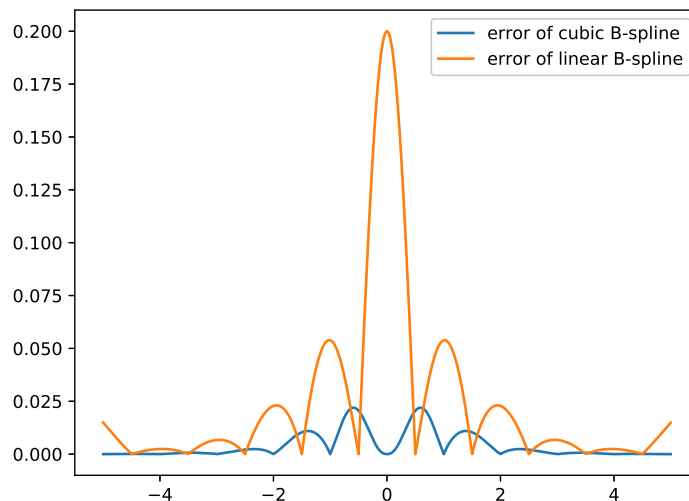


图 4: 误差变化曲线

可以发现插值节点处的误差极小，接近机器精度，因为插值时我们给了这些位置的精确信息，故结果也很精确。

此外从图像也可以看出，三次样条的误差更小。

### 3.5 E

将  $(0, \pm \frac{2}{3}\sqrt{3})$ ,  $(\pm\sqrt{3}, \frac{2}{3}\sqrt{3})$  设为特征点，使用三次 B 样条的拟合结果如下：

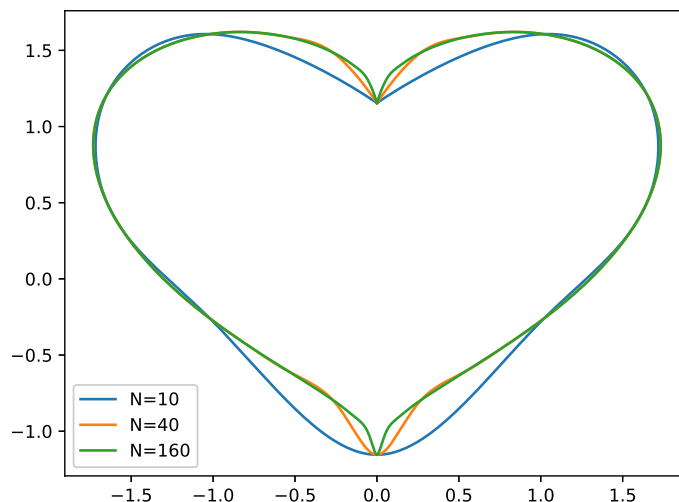


图 5: 三次 B 样条心形拟合结果

从图像可以看出  $N = 40$  时的拟合结果已经较为优秀。对于边界条件，natural cubic spline 的边界条件最合适，因为离散的点值难以计算边界的导数，而规定其二阶导为 0 较为方便。

使用线性样条的拟合结果如下：

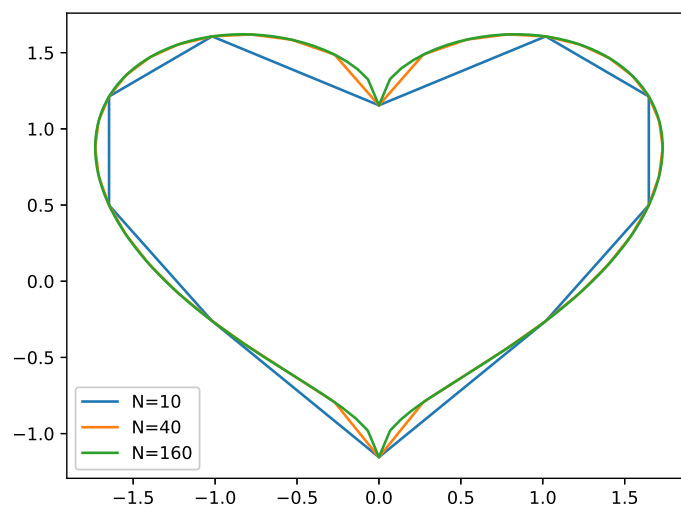


图 6: 线性样条心形拟合结果

从图像可以看出  $N = 40$  时的拟合结果已经较为优秀。对于边界条件，线性样条不需要规定。