数值分析项目作业报告

褚朱钇恒 **3200104144**

1 运行说明

本项目需要调用jsoncpp与eigen3库，故请在运行此项目前安装好这两个包。
在project目录下使用make命令即可编译整个项目并得到实验报告。

2 程序设计思路

所有实现样条计算的相关代码都在头文件spline.h中，其中设计了一下几个类：

2.1 Class Function

其定义了(),diff,diff2三个虚函数，分别用于函数求值，求导和求二阶导。
该基类有以下两个衍生类：

- Class Polynomial 用于存储一个多项式函数，形如 $\Sigma Co_i(x-x_0)^i$
- Class B_spline_base 用于存储一个 k 阶的 B 样条基函数，其控制点为 t

2.2 Class Interpolation

定义了solve,()两个虚函数，分别用于插值系数计算和插值求值。该基类有以下两个衍生类：

- Class ppForm_interpolation 用于使用多项式进行样条插值
- Class B_spline_base 用于使用 B 样条基函数进行样条插值

以上两个衍生类可以在初始化时制定样条的阶数 $order = 1 or 3$，1 对应线性样条，3 对应三次样条 ($\mathbb{S}_3^2$)；以及边界条件 $condition = 1 or 2 or 3$,m,1 对应 complete cubic spline，2 对应 cubic spline with specified second derivatives at its end points，3 对应 natural cubic spline.

3 作业题运行结果

3.1 A

对不同的插值点数 N, 使用多项式样条拟合图像。结果如下：

N	6	11	21	41	81	161	321	641	1281
err_max	0.4217	0.0219	0.003	$2.7*10^{-4}$	$1.6*10^{-5}$	$9.6*10^{-7}$	$5.9*10^{-8}$	$3.6*10^{-9}$	$2*10^{-10}$

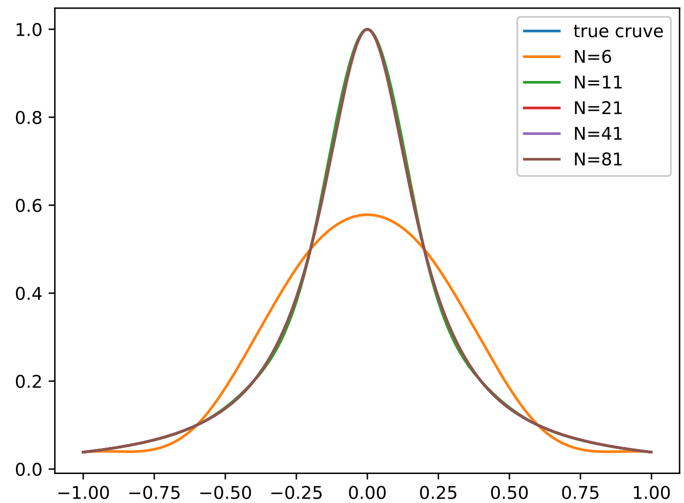

图 1: 三次样条拟合图像

容易发现随着 N 的变大，拟合结果没有发生龙格现象，为了判断其究竟是否更加精准，此处做出其最大误差的自然对数和 N 的关系并作图。

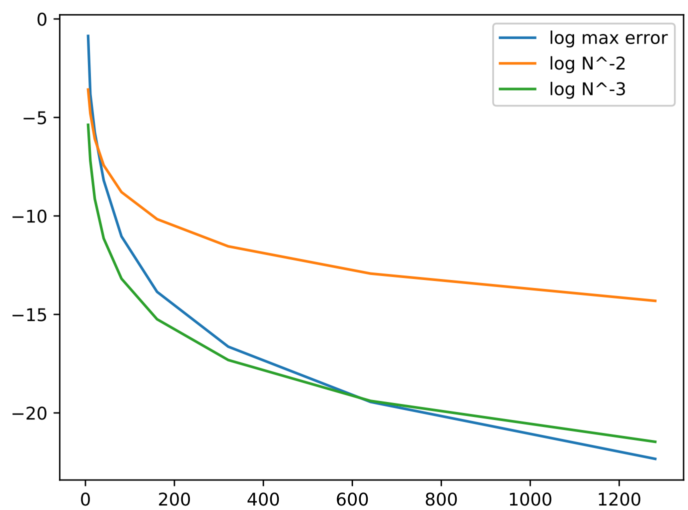

图 2: 误差变化曲线

容易发现该样条的拟合精度随着 N 的变大而提升，其收敛阶至少大于 3.
为了更精确的判断收敛阶的大小，求最大误差序列前一项与后一项的比值并作图如下：

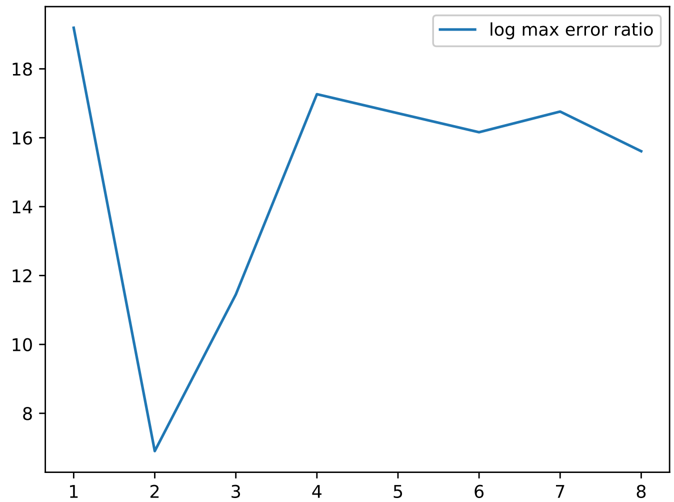

图 3: 误差变化曲线

可以发现，随着 N 的增长，N 每增大为原先的 2 倍，误差缩小为之前的 $\frac{1}{16}$，故三次 B 样条的误差收敛阶为 $\sqrt[2]{16} = 4$

3.2 B

实现代码可见`spline.h`

3.3 C

使用三次 B 样条和线性 B 样条分别拟合函数 $f(x) = \frac{1}{1+x^2}$，结果如下图：

可以发现在插值节点处的误差极小，接近机器精度，因为插值时我们给了这些位置的精确信息，故结果也很精确。

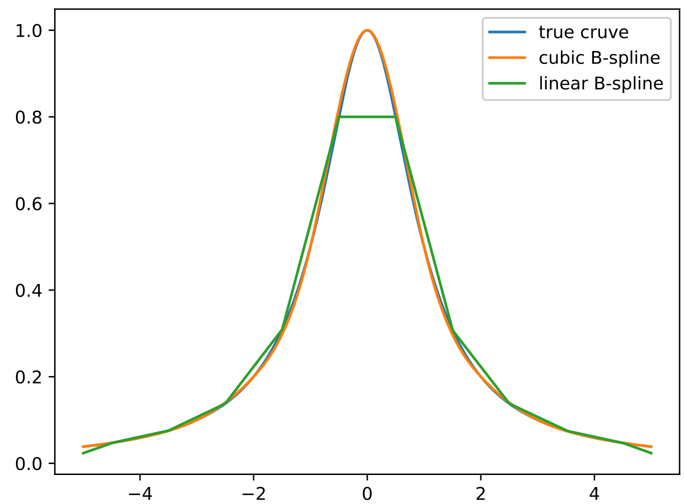

图 4: $f(x) = \frac{1}{1+x^2}$ 拟合结果

显然，三次样条的结果更精确。

3.4 D

问题 C 中的两个样条的误差如下图：

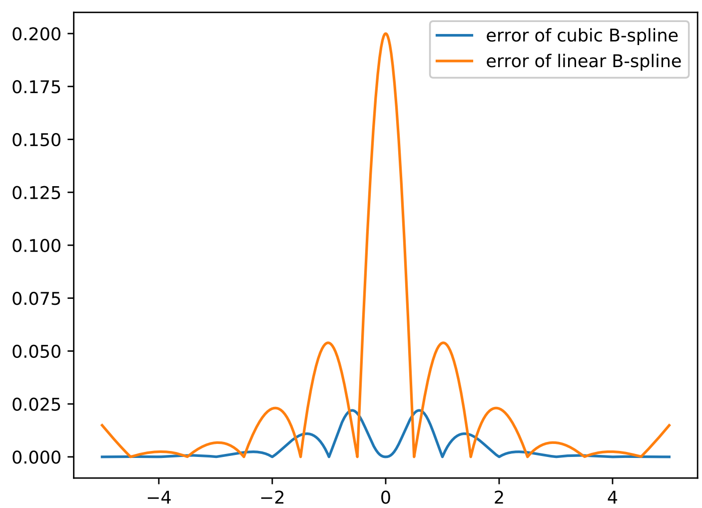

图 5: 误差变化曲线

可以发现在插值节点处的误差极小，接近机器精度，因为插值时我们给了这些位置的精确信息，故结果也很精确。

此外从图像也可以看出，三次样条的误差更小。

3.5 E

将 $(0,\pm\frac{2}{3}\sqrt{3})$， $(\pm\sqrt{3},\frac{2}{3}\sqrt[4]{3})$ 设为特征点，使用三次 B 样条的拟合结果如下：

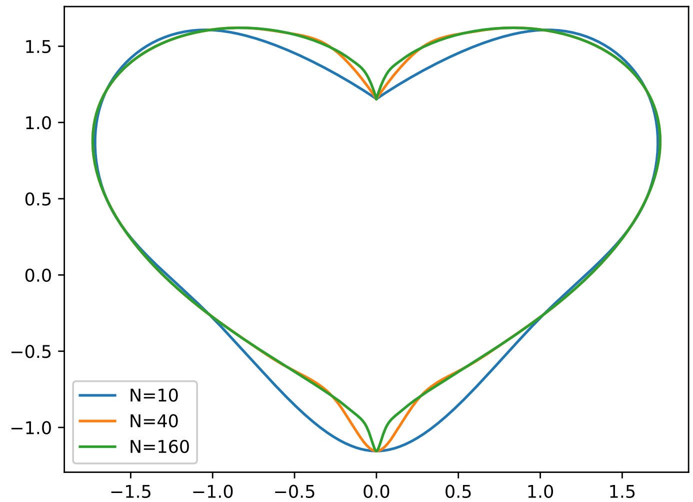

图 6: 三次 B 样条心形拟合结果

从图像可以看出 $N=40$ 时的拟合结果已经较为优秀。对于边界条件，natural cubic spline 的边界条件最合适，因为离散的点值难以计算边界的导数，而规定其二阶导为 0 较为方便。

使用线性样条的拟合结果如下：

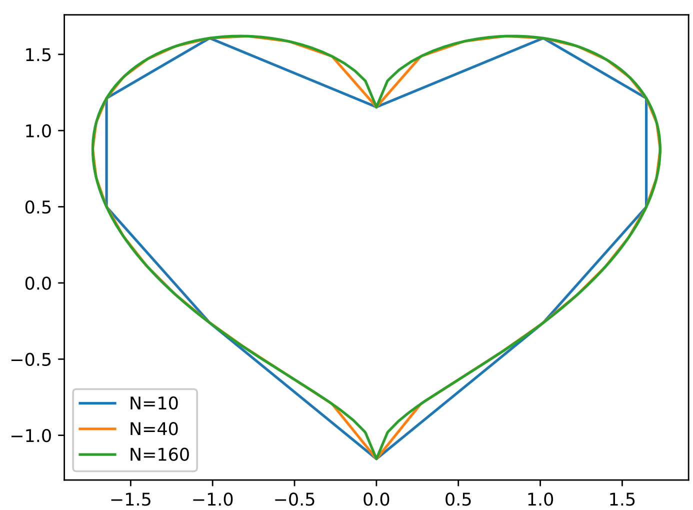

图 7: 线性样条心形拟合结果

从图像可以看出 $N=40$ 时的拟合结果已经较为优秀。对于边界条件，线性样条不需要规定。