Chapter 3 homework

褚朱钇恒　**3200104144**

1 Theoretical questions

1.1 I

$s(1)=1, s^{'}(1)=3, s^{''}(1)=6$
插值可得 $p(x)=7x^3-18x^2+12x$，故 $s^{''}(0)=-36\neq 0$
故不是自然样条

1.2 II

1.2.1 a

在每个区间上，f 有三个待定系数，故共有 $3(n-1)$ 个待定系数。
在每个中间节点上，有 $f_{i-1}=f_i, f^{'}_{i-1}=f^{'}_i$，引入两个条件。
在每个形值点上，有 $f_i=f(x_i)$，引入 n 个条件。
故还需要确定 $3(n-1)-2(n-2)-n=1$ 个条件。

1.2.2 b

在 x_i 处做泰勒展开得 $p_i(x)=f_i+m_i(x-x_i)+a_i(x-x_i)^2$, 将 $p_i(x_{i+1})=f_{i+1}$, 得
$p_i(x)=f_i+m_i(x-x_i)+\frac{f_{i+1}-f_i-m_i(x_{i+1}-x_i)}{(x_{i+1}-x_i)^2}(x-x_i)^2$

1.2.3 c

根据 (b) 得，$m_{i+1}=-m_i+2\frac{f_{i+1}-f_i}{x_{i+1}-x_i}$, 故可以递推求得 $m_2,\cdots,m_{n-1}$

1.3 III

$s(0)=1+c, s^{'}(0)=3c, s^{''}(0)=6c$, 故 $s_2(x)=1+c+3cx+3cx^2+ax^3$
由 s 为自然样条，$s^{''}(1)=6c+6a=0$, 故 $a=-c$, 即 $s_2(x)=1+c+3cx+3cx^2-cx^3$
$s(1)=-1\Rightarrow c=-\frac{1}{3}$

1.4 IV

1.4.1 a

设 $s_1(x)=a_1x^3+bx^2+cx+1$,$s_2(x)=a_2x^3+bx^2+cx+1$,
由 $f(-1)=f(1)=0, s^{''}(-1)=s^{''}(1)=0$, 解得
$s_1(x)=-\frac{1}{2}x^3-\frac{3}{2}x^2+1$,$s_2(x)=\frac{1}{2}x^3-\frac{3}{2}x^2+1$

1.4.2 b

$\int_{-1}^{1}[s^{''}(x)]^2dx=6$
(i)
$g(x)=-x^2+1$
$\int_{-1}^{1}[g^{''}(x)]^2dx=8>\int_{-1}^{1}[s^{''}(x)]^2dx$
(ii)
$\int_{-1}^{1}[f^{''}(x)]^2dx=\frac{\pi^4}{16}\approx 6.08>\int_{-1}^{1}[s^{''}(x)]^2dx$

1.5 V

1.5.1 a

当 $x \in [t_{i-1}, t_i]$ 时，$B_i^2(x) = \frac{(x-t_{i-1})^2}{(t_{i+1}-t_{i-1})(t_i-t_{i-1})}$
当 $x \in [t_i, t_{i+1}]$ 时，$B_i^2(x) = \frac{(x-t_{i-1})(t_{i+1}-x)}{(t_{i+1}-t_{i-1})(t_{i+1}-t_i)} + \frac{(x-t_i)(t_{i+2}-x)}{(t_{i+2}-t_i)(t_{i+1}-t_i)}$
当 $x \in [t_{i+1}, t_{i+2}]$ 时，$B_i^2(x) = \frac{(x-t_{i+2})^2}{(t_{i+2}-t_i)(t_{i+2}-t_{i+1})}$

1.5.2 b

$\frac{d}{dx}B_i^2(t_i^-) = \frac{2}{t_{i+1}-t_{i-1}} = \frac{d}{dx}B_i^2(t_i^+)$
$\frac{d}{dx}B_i^2(t_{i+1}^-) = -\frac{2}{t_{i+2}-t_{i-1}} = \frac{d}{dx}B_i^2(t_{i+1}^+)$
故 $\frac{d}{dx}B_i^2$ 在 t_i 和 t_{i+1} 上连续。

1.5.3 c

当 $x \in (t_{i-1}, t_i)$ 时,$\frac{d}{dx}B_i^2 = \frac{2(x-t_{i-1})}{(t_{i+1}-t_{i-1})(t_i-t_{i-1})} \neq 0$
当 $x \in (t_i, t_{i+1})$ 时，$\frac{d}{dx}B_i^2$ 为线性函数，故只有一处 x^* 为 0.
$x^* = \frac{(t_{i+1}+t_{i-1})(t_{i+2}-t_i)+(t_{i+2}+t_i)(t_{i+1}-t_{i-1})}{2(t_{i+1}+t_{i+2}-t_{i-1}-t_i)}$

1.5.4 d

只需考虑边界点和极值点，$B_i^2(t_i) = 0$,$B_i^2(x^*) < 1$
故 $B_i^2(x) \in [0, 1)$

1.5.5 e

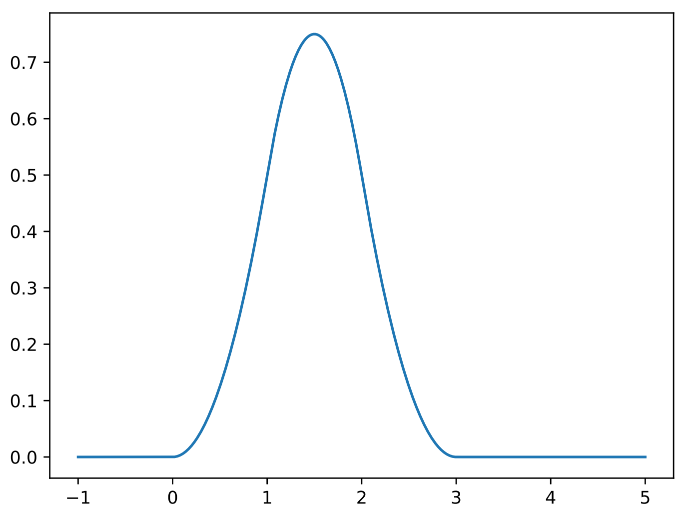

图 1: $B_1^2(x)$ 的图像

1.6 VI

$LHS = [t_i, t_{i+1}, t_{i+2}](t-x)_+^2 - [t_{i-1}, t_i, t_{i+1}](t-x)_+^2$

当 $x \le t_{i-1}$ 时，$LHS = 0 = RHS$
当 $t_{i-1} < x \le t_i$ 时，$LHS = \frac{(x-t_{i-1})^2}{(t_{i+1}-t_{i-1})(t_i-t_{i-1})} = RHS$
当 $t_i < x \le t_{i+1}$ 时，$LHS = \frac{(x-t_{i-1})(t_{i+1}-x)}{(t_{i+1}-t_{i-1})(t_{i+1}-t_i)} + \frac{(x-t_i)(t_{i+2}-x)}{(t_{i+2}-t_i)(t_{i+1}-t_i)} = RHS$
当 $t_{i+1} < x \le t_{i+2}$ 时，$LHS = \frac{(x-t_{i+2})^2}{(t_{i+2}-t_i)(t_{i+2}-t_{i+1})} = RHS$
当 $x > t_{i+2}$ 时，$LHS = 0 = RHS$
综上，原等式成立。

1.7 VII

由 B 样条的微分性质，$\frac{d}{dx}B_i^n(x) = \frac{nB_i^{n-1}(x)}{t_{i+n-1}-t_{i-1}} - \frac{nB_{i+1}^{n-1}(x)}{t_{i+n}-t_i}$
那么有 $\int_{t_{i-1}}^{t_{i+n}} \frac{B_i^n(x)}{t_{i+n}-t_{i-1}}dx - \int_{t_i}^{t_{i+n+1}} \frac{B_{i+1}^n(x)}{t_{i+n+1}-t_i}dx =$
$\int_{t_{i-1}}^{t_{i+n+1}} [\frac{B_i^n(x)}{t_{i+n}-t_{i-1}} - \frac{B_{i+1}^n(x)}{t_{i+n+1}-t_i}]dx =$
$\frac{1}{n}B_i^{n+1}(x)|_{t_{i-1}}^{t_{i+n+1}} = 0$
故 $\int_{t_{i-1}}^{t_{i+n}} \frac{B_i^n(x)}{t_{i+n}-t_{i-1}}dx = \int_{t_i}^{t_{i+n+1}} \frac{B_{i+1}^n(x)}{t_{i+n+1}-t_i}dx$, 原命题成立

1.8 VIII

该命题可表示为 $\forall m \in N, \forall n = 0, 1, \cdots m$
$\tau_{m-n}(x_0, \cdots, x_n) = [x_0, \cdots, x_n]x_m$
(a) 当 $m = 4, n = 2$ 时, 可列出差商表

$$\begin{array}{c|c|c|c}
x_1 & x_1^4 & & \\
x_2 & x_2^4 & x_1^3 + x_1^2 x_2 + x_1 x_2^2 + x_2^3 & \\
x_3 & x_3^4 & x_2^3 + x_2^2 x_3 + x_2 x_3^2 + x_3^3 & x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_1 x_2 + x_2 x_3 + x_1 x_3
\end{array}$$

故有 $\tau_2(x_1, x_2, x_3) = [x_1, x_2, x_3]x^4$
(b)
由 $(x_{n+1} - x_0)\tau_k(x_0, \cdots, x_n, x_{n+1})$
$= \tau_{k+1}(x_0, \cdots, x_n, x_{n+1}) - \tau_{k+1}(x_0, \cdots, x_n) - x_0\tau_k(x_0, \cdots, x_n, x_{n+1})$
$= \tau_{k+1}(x_1, \cdots, x_n, x_{n+1}) - \tau_{k+1}(x_0, \cdots, x_n)$
当 $n = 0$ 时，$\forall m$, 有 $\tau_m(x_0) = [x_0]x^m$.
假设对某个 $n < m$，原式成立，则有
$\tau_{m-n-1}(x_0, \cdots, x_{n+1})$
$= \frac{\tau_{m-n}(x_1, \cdots, x_n, x_{n+1}) - \tau_{m-n}(x_0, \cdots, x_n)}{x_{n+1} - x_0}$
$= \frac{[x_1, \cdots, x_n, x_{n+1}]x^m - [x_0, \cdots, x_n]x^m}{x_{n+1} - x_0}$
$= [x_0, \cdots, x_n, x_{n+1}]x^m$
故原命题成立。