Chapter 3 homework

褚朱钇恒　　3200104144

1 Theoretical questions

1.1 I

$s(1) = 1, s^{'}(1) = 3, s^{''}(1) = 6$

插值可得 $p(x) = 7x^3 - 18x^2 + 12x$, 故 $s^{''}(0) = -36 \neq 0$

故不是自然样条

1.2 II

1.2.1 a

在每个区间上，f 有三个待定系数，故共有 $3(n-1)$ 个待定系数。

在每个中间节点上，有 $f_{i-1} = f_i, f^{'}_{i-1} = f^{'}_i$，引入两个条件。

在每个形值点上，有 $f_i = f(x_i)$，引入 n 个条件。

故还需要确定 $3(n-1) - 2(n-2) - n = 1$ 个条件。

1.2.2 b

在 x_i 处做泰勒展开得 $p_i(x) = f_i + m_i(x - x_i) + a_i(x - x_i)^2$, 将 $p_i(x_{i+1}) = f_{i+1}$, 得

$p_i(x) = f_i + m_i(x - x_i) + \frac{f_{i+1} - f_i - m_i(x_{i+1} - x_i)}{(x_{i+1} - x_i)^2}(x - x_i)^2$

1.2.3 c

根据 (b) 得，$m_{i+1} = -m_i + 2\frac{f_{i+1} - f_i}{x_{i+1} - x_i}$, 故可以递推求得 $m_2, \cdots, m_{n-1}$

1.3 III

$s(0) = 1 + c, s^{'}(0) = 3c, s^{''}(0) = 6c$, 故 $s_2(x) = 1 + c + 3cx + 3cx^2 + ax^3$

由 s 为自然样条，$s^{''}(1) = 6c + 6a = 0$, 故 $a = -c$, 即 $s_2(x) = 1 + c + 3cx + 3cx^2 - cx^3$

$s(1) = -1 \Rightarrow c = -\frac{1}{3}$

1.4 IV

1.4.1 a

设 $s_1(x) = a_1 x^3 + bx^2 + cx + 1$, $s_2(x) = a_2 x^3 + bx^2 + cx + 1$,

由 $f(-1) = f(1) = 0, s^{''}(-1) = s^{''}(1) = 0$, 解得

$s_1(x) = -\frac{1}{2}x^3 - \frac{3}{2}x^2 + 1$, $s_2(x) = \frac{1}{2}x^3 - \frac{3}{2}x^2 + 1$

1.4.2 b

$\int_{-1}^{1}[s^{''}(x)]^2 dx = 6$

(i)

$g(x) = -x^2 + 1$

$\int_{-1}^{1}[g^{''}(x)]^2 dx = 8 > \int_{-1}^{1}[s^{''}(x)]^2 dx$

(ii)

$\int_{-1}^{1}[f^{''}(x)]^2 dx = \frac{\pi^4}{16} \approx 6.08 > \int_{-1}^{1}[s^{''}(x)]^2 dx$

1.5   V

1.5.1   a