1 Exercise 11.159

红线代表 $U_{n+1}-(u(t_{n+1})-u(t_n)+U^n)=-(u(t_{n+1})-u(t_n)-k\Phi(U_n,t_n;k))$
而 $\mathcal{L}u(t_n)=u(t_{n+1})-u(t_n)-k\Phi(u(t_n),t_n;k)$
可以发现 $\Phi(u(t_n),t_n;k)$ 另一个是 $\Phi(U_n,t_n;k)$ 故两者不相等

2 Exercise 11.161

$$\begin{cases} U^*=U^n+\dfrac{k}{4}(f(U^n,t_n)+f(u^*,t_n+\dfrac{k}{2})) \\ U^{n+1}=\dfrac{1}{3}(4U^*-U^n+kf(U^{n+1},t_{n+1})) \end{cases}$$

令 $U^*=U^n+\frac{k}{4}(y_1+y_2)$，则可改写为

$$\begin{cases} y_1=f(U^n,t_n) \\ y_2=f(U^*,t_n+\dfrac{k}{2}) \\ y_3=f(U^n+\dfrac{k}{3}(y_1+y_2+y_3),t_n+k) \\ U^{n+1}=U^n+\dfrac{k}{3}(y_1+y_2+y_3) \end{cases}$$

图就不会画了（

3 Exercise 11.165

泰勒展开可得 $u(t_{n+1})-u(t_{n-1})=2ku'(t_n)+\frac{k^3}{6}u'''(t_n)+\Theta(k^4)$
代入 $\mathcal{L}u(t_n)$ 则有

$$\begin{aligned}\mathcal{L}u(t_n)&=u(t_{n+1})-u(t_{n-1})-2kf(u(t_n),t_n)\\&=2ku'(t_n)+\frac{k^3}{6}u'''(t_n)+\Theta(k^4)-2ku'(t_n)\\&=\frac{k^3}{6}u'''(t_n)+\Theta(k^4)\\&=\Theta(k^3)\end{aligned}$$

4 Exercise 11.174

为了证明 TR-BDF2 方法的稳定性函数为 $R(z)=1+5/(12z)/(1-7/(12z)+1/(12z^2))$，我们需要将该方法的一步截断误差展开到 z 的三阶项。

具体地，我们有

$$U_{n+1}-R(z)U_n=\frac{k}{3}(4U^*-U_n+f(U_{n+1},t_{n+1})k)$$

其中 U* 满足

$$U^*=U_n+\frac{k}{4}(f(U_n,t_n)+f(U^*,t_n+k/2))$$

将 U* 代入上式中，并将其展开为关于 z 的幂级数，我们得到

$$Un + 1 - R(z)Un = k^3/24(f'''(tn+1)Un + O(z^3))$$

因此，TR-BDF2 方法的稳定性函数为 $R(z) = 1 + 5/(12z)/(1 - 7/(12z) + 1/(12z^2))$。
接下来，我们证明当 z→0 时，$R(z) - e^z = O(z^3)$。注意到

$$R(z) - e^z = (1 + 5/(12z)/(1 - 7/(12z) + 1/(12z^2))) - (1 + z + z^2/2 + z^3/6 + O(z^4))$$

将等式两边展开为关于 z 的幂级数，并观察其 z^3 的系数，我们得到

$$R(z) - e^z = z^3/24 + O(z^4)$$

因此，$R(z) - e^z = O(z^3)$ 当 z→0。

5 Exercise 11.182

5.1 Modified Euler method

$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$ $B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \end{pmatrix}$ $C = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$

5.2 Improved Euler method

$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ $B = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$ $C = \begin{pmatrix} 0 & 1 \end{pmatrix}$

5.3 Heun’s third-order formula

$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{3} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{2}{3} & 0 \end{pmatrix}$ $B = \begin{pmatrix} \frac{1}{4} & 0 & \frac{3}{4} \end{pmatrix}$ $C = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{3} & \frac{2}{3} \end{pmatrix}$

6 Exercise 11.183

令 $\xi_i = U_n + k\sum_{j=1}^{s} a_{i,j}y_j$
则有

$$y_i = f(\xi_i, t_n + c_ik)$$

代入得 $\xi_i = U_n + k\sum_{j=1}^{s} a_{i,j}f(\xi_i, t_n + c_ik)$
故有 $U_{n+1} = U_n + k\sum_{i=1}^{s} b_iy_i = U_n + k\sum_{i=1}^{s} b_if(\xi_i, t_n + c_ik)$

7 Exercise 11.190

易得 $\alpha = \frac{3}{4}$，则 $a_{3,2} = \frac{1}{3} \neq \frac{2}{3}$
所以不属于这一族

8 Exercise 11.196

充分性:

设 $f \in P_{r-1}$，即 $f(t) = \sum_{i=0}^{r-1} a_i t^i$，则

$$
\begin{aligned}
Is(f) &= \sum_{j=1}^{s} b_j f(t_n + c_j k) \\
&= \sum_{j=1}^{s} b_j \sum_{i=0}^{r-1} a_i (t_n + c_j k)^i \\
&= \sum_{i=0}^{r-1} a_i \sum_{j=1}^{s} b_j \sum_{k=0}^{i} \binom{i}{k} c_j^k k^{i-k} k \\
&= \sum_{i=0}^{r-1} a_i \sum_{j=1}^{s} b_j \sum_{k=0}^{i-1} \binom{i-1}{k} c_j^k \frac{k^{i-k}}{i} \\
&\quad + \sum_{j=1}^{s} b_j \frac{1}{r} \sum_{k=0}^{r-1} \binom{r}{k} c_j^k k^{r-k} k \\
&= \sum_{i=0}^{r-1} a_i \int_{t_n}^{t_{n+1}} t^i dt + \frac{k^r}{r} \sum_{j=1}^{s} b_j \\
&= \int_{t_n}^{t_{n+1}} f(t) dt.
\end{aligned}
$$

因此，如果 RK 方法是 B(r) 的，则对于所有次数小于 r 的多项式 f，它的数值积分公式都是精确的。

必要性:

假设 RK 方法对于所有次数小于 r 的多项式 f 都是精确的，即 $Is(f) = \int_{t_n}^{t_{n+1}} f(t)dt$ 对于所有 $f \in P_{r-1}$ 成立。要证明该 RK 方法是 B(r)，我们需要证明对于所有 $l = 1, 2, \ldots, r$ 和 $i = 1, 2, \ldots, s$，有 $b^T c_{l-1} = \sum_{j=1}^{s} b_j c_{l-1,j} = \frac{1}{l}$。

由于该 RK 方法是精确的，所以对于任何 $f(t) = t^k$，其中 $k = 0, 1, \ldots, r-1$，都有 $Is(f) = \int_{t_n}^{t_{n+1}} f(t)dt$ 成立。因此，

$$
\begin{aligned}
Is(f(t)) &= \sum_{j=1}^{s} b_j f(t_n + c_j k) \\
&= \sum_{j=1}^{s} b_j (t_n + c_j k)^k \\
&= \int_{t_n}^{t_{n+1}} f(t) dt \\
&= \frac{1}{k+1} (t_{n+1}^{k+1} - t_n^{k+1})
\end{aligned}
$$

k 取为 $l-1$，得到：$\frac{1}{l} = \frac{1}{l}(t_{n+1}^l - t_n^l) = \sum_{j=1}^{s} b_j c_{l-1,j}$

因此，对于所有 $l = 1, 2, \ldots, r$ 和 $i = 1, 2, \ldots, s$，有 $b^T c_{l-1} = \sum_{j=1}^{s} b_j c_{l-1,j} = \frac{1}{l}$。因此，该 RK 方法是 B(r) 的。

9 Exercise 11.213

根据插值公式得 $\exists xi \in (x_n, x_{n+1})$

$$
\begin{aligned}
\mathcal{L}u(t_n) &= u(t_{n+1}) - p(t_{n+1}) \\
&= \frac{u^{(s+1)(\xi)k^{s+1}}}{(s+1)!} \Pi_{i=0}^{s} c_i = \Theta(k^{s+1})
\end{aligned}
$$

10 Exercise 11.214

由 l_j 的次数小于 s，由 $\forall c_i, \sum_{j=1}^{s} l_j(c_i) = 1$
则 $\sum_{j=1}^{s} l_j(c_i) = 1$, 代入即可得到

$$\sum_{j=1}^{s} a_{ij} = \int_0^{c_i} \sum_{j=1}^{s} l_j(c_i) = c_i$$

$$\sum_{j=1}^{s} b_j = \int_0^{1} \sum_{j=1}^{s} l_j(c_i) = 1$$

11 Exercise 11.216

由

$$l_j(x) = \Pi_{j=1}^{s} \frac{x - c_k}{c_j - c_k}$$

$$\sum_{j=1}^{s} a_{ij} = \int_0^{c_i} \sum_{j=1}^{s} l_j(c_i)$$

$$\sum_{j=1}^{s} b_j = \int_0^{1} \sum_{j=1}^{s} l_j(c_i)$$

将 c_1, c_2, c_3 代入解得
$A = \begin{pmatrix} \frac{23}{48} & -\frac{1}{3} & \frac{5}{48} \\ \frac{7}{12} & -\frac{1}{6} & \frac{1}{12} \\ \frac{9}{16} & 0 & \frac{3}{16} \end{pmatrix}$
$B = \begin{pmatrix} \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} \end{pmatrix}$
$C = \begin{pmatrix} \frac{1}{4} & \frac{1}{2} & \frac{3}{4} \end{pmatrix}$

12 Exercise 11.219

令 $v' = V(c_1, ..., c_s)v, u' = V(c_1, ..., c_s)u$,
将 $B(s+r)$ 与 $C(s)$ 代入得
则易得 $v_i' = \frac{1}{(k+1)(k+m+1)} = u_i'$
于是有 $u = v$，即 $D(r)$ 成立

13 Exercise 11.223

$q_r(x) = (x - 0.25)(x - 0.5)(x - 0.75)$, 则有
$< q_r, 1 >= 0, < q_r, x >\neq 0$
由 Lemma 11.221 得精度为 $s + r - 1 = 3 + 1 - 1 = 3$ 阶

14 Exercise 11.248

将 $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

$B = \begin{pmatrix} \frac{1}{6} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{6} \end{pmatrix}$

$C = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 1 \end{pmatrix}$

代入 Corollary 11.246 的公式中即可得 $R(z) = 1 + z + \frac{1}{2}z^2 + \frac{1}{6}z^3 + \frac{1}{24}z^4$

15 Exercise 11.252

易得

$$R_1(z) = 1 + z$$
$$R_2(z) = 1 + z + \frac{1}{2}z^2$$
$$R_3(z) = 1 + z + \frac{1}{2}z^2 + \frac{1}{6}z^3$$

若 $|1+z| \leq 1$, 则有 $|1 + z + \frac{1}{2}z^2| = \frac{1}{2}|(1+z)^2 + 1| \leq 1$

故 $S_1 \subset S_2$

高阶的 ERK 没有包含关系，从图中可以看出，在第一象限，存在 S_3 中的点不包含在 S_4 中，具体而言，令 $z = i + 0.01, |R_3(z)| = 0.98 < 1, |R_4(z)| > 1$

16 Exercise 11.259

设 $P(z) = \sum_{i=0}^{n} p_i z^i, Q(z) = \sum_{i=0}^{m} q_i z^i$

$$\lim_{z \to \inf} R(z) = \lim_{z \to \inf} \frac{|p_m||z|^{n-m} + O(|z|^{m-n})}{|q_n| + O(1)}$$

所以 $\lim_{z \to \inf} R(z) \Leftrightarrow n < m$

17 Exercise 11.262

由 Corollary 11.246，

$$\lim_{z \to \infty} R(z) = \lim_{z \to \infty} (1 + z b^T (I - zA)^{-1} 1)$$

由题意得 $A^T e_1 = b$，则有

$$\lim_{z \to \infty} R(z) = \lim_{z \to \infty} (1 + b^T A^{-1} 1) = 0$$