1 Exercise 12.11

根据定义 12.10，我们有：

$$U_i^{n+1} - (rU_{i-1}^{n+1} - 2rU_i^{n+1} + rU_{i+1}^{n+1}) = rU_{i-1}^n + 2(1-r)U_i^n + rU_{i+1}^n, \quad (i = 1, 2, \cdots, m)$$

当 $i = 1$ 时，我们有：

$$(1+r)U_1^{n+1} - \frac{r}{2}U_2^{n+1} = (1-r)U_1^n + \frac{r}{2}U_2^n + \frac{r}{2}(U_0^n + U^{n+1}0) = (1-r)U_1^n + \frac{r}{2}U_2^n + \frac{r}{2}(g_0(t_n) + g_0(tn+1))$$

类似地，当 $i = m+1$ 时也成立。

令 $U^n = (U_1^n, U_2^n, \cdots, U_m^n)'$，$r = \frac{k\nu}{h^2}$，则有：

$$(I - \frac{k}{2}A)U^{n+1} = (I + \frac{k}{2}A)U^n + b^n,$$

其中，

$$A = \frac{\nu}{h^2}\begin{pmatrix} -2 & 1 & & & & \\ 1 & -2 & 1 & & & \\ & 1 & -2 & 1 & & \\ & & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & & 1 & -2 & 1 \\ & & & & 1 & -2 \end{pmatrix}, \quad b^n = \frac{r}{2}\begin{pmatrix} g_0(t_n) + g_0(t_{n+1}) \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ g_1(t_n) + g_1(t_{n+1}) \end{pmatrix}$$

2 Exercise 12.26

我们可以利用一步法的稳定函数来推导 θ 方法的稳定性条件。对于线性常系数偏微分方程 $u_t = \nu u_{xx}$，用 θ 方法进行离散化，得到如下迭代公式：

$$u_i^{n+1} = \frac{\theta k\nu}{h^2}(u_{i+1}^n - 2u_i^n + u_{i-1}^n) + (1-\theta)u_i^n.$$

我们对其进行变量替换，定义 $w^n = (w_1^n, w_2^n, \ldots, w_N^n)^T$，其中 $w_i^n = u_i^n$，并将 $\theta k\nu/h^2$ 记为 λ，则上式可以表示为 $w^{n+1} = A_\theta w^n$，其中

$$A_\theta = \begin{pmatrix} 1-2\lambda\theta & \lambda\theta & & \\ \lambda\theta & 1-2\lambda\theta & \lambda\theta & \\ & \ddots & \ddots & \ddots \\ & & \lambda\theta & 1-2\lambda\theta \end{pmatrix}.$$

我们可以证明，当 $\theta \in [1/2, 1]$ 时，矩阵 A_θ 的所有特征值均具有非负实部，因此方法是无条件稳定的。当 $\theta \in [0, 1/2)$ 时，矩阵 A_θ 的特征多项式为

$$p(\lambda) = (-1)^N\lambda^N + (2\lambda - 1 + \theta h^2\nu^{-1})\lambda^{N-1} - \lambda^{N-2}\theta h^2\nu^{-1}(1-2\theta)(N-1),$$

其中 N 是空间离散化的网格数。根据谱半径的定义，A_θ 的特征值的模长的上界为 $|\lambda_{\max}| \le \rho(A_\theta)$，其中 $\rho(A_\theta)$ 是 A_θ 的谱半径。因此要使方法稳定，必须满足 $\rho(A_\theta) \le 1$。令 $p(\lambda) = 0$，则有

$$\lambda = \frac{1}{2}\left(1 - \theta h^2\nu^{-1} \pm \sqrt{(1-\theta h^2\nu^{-1})^2 - 4\theta(1-2\theta)(N-1)h^2\nu^{-1}}\right).$$

注意到 $\theta(1-2\theta)\le 1/4$，因此根据根的公式，有 $\sqrt{(1-\theta h^2\nu^{-1})^2-4\theta(1-2\theta)(N-1)h^2\nu^{-1}}\le|1-\theta h^2\nu^{-1}|$。因此我们可以得到 λ 的模长的上界为

$$|\lambda|\le\frac{1}{2}\left[|1-\theta h^2\nu^{-1}|+\sqrt{(1-\theta h^2\nu^{-1})^2-4\theta(1-2\theta)(N-1)h^2\nu^{-1}}\right].$$

为了保证方法稳定，需要使 $|\lambda|\le 1$，即

$$|1-\theta h^2\nu^{-1}|+\sqrt{(1-\theta h^2\nu^{-1})^2-4\theta(1-2\theta)(N-1)h^2\nu^{-1}}\le 2.$$

由于 $\sqrt{(1-\theta h^2\nu^{-1})^2-4\theta(1-2\theta)(N-1)h^2\nu^{-1}}$ 是非负实数，因此上式等价于

$$1-\theta h^2\nu^{-1}+\sqrt{(1-\theta h^2\nu^{-1})^2-4\theta(1-2\theta)(N-1)h^2\nu^{-1}}\le 2.$$

将 $\sqrt{(1-\theta h^2\nu^{-1})^2-4\theta(1-2\theta)(N-1)h^2\nu^{-1}}$ 移到不等式右边，平方两边，可得

$$(1-\theta h^2\nu^{-1})^2-4\theta(1-2\theta)(N-1)h^2\nu^{-1}\le(3-\theta h^2\nu^{-1})^2.$$

将 θ 方法的时间步长 k 替换为 $\nu k/h^2$，可得

$$k\le\frac{h^2}{2(1-2\theta)\nu}.$$

因此，当 $\theta\in[0,1/2)$ 时，为保证 θ 方法的稳定性，时间步长 k 必须满足 $k\le h^2/2(1-2\theta)\nu$。综上所述，引理得证。

3 Exercise 12.41

因为对于任何 $U\in L^1(h_{\mathbb{Z}})\cap L^2(h_{\mathbb{Z}})$，我们有

$$\begin{aligned}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\pi/h}^{\pi/h}e^{imh\xi}\left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\sum_{n\in\mathbb{Z}}e^{inh\xi}U_{nh}\right)d\xi&=\frac{1}{2\pi}\sum_{n\in\mathbb{Z}}\int_{-\pi}^{\pi}e^{-i(n-m)t}U_n dt\\&=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}U_m dt=U_m\end{aligned}$$

其中 $t=h\xi$，当 $n\neq m$ 时，$\int_{-\pi}^{\pi}e^{-i(n-m)t}U_n dt=0$。因此，对于任何 $U\in L^1(h_{\mathbb{Z}})\cap L^2(h_{\mathbb{Z}})$ 中的网格函数，我们可以通过傅里叶变换和逆傅里叶变换来恢复它。

4 Exercise 12.48

我们考虑对于方程 $\frac{\partial u}{\partial t}=\nu\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$，使用 θ 方法进行离散化。具体而言，我们将时间和空间分别离散化为 $t_n=nk$ 和 $x_j=jh$，并定义 u_j^n 为数值解在点 (x_j,t_n) 处的近似值。则我们可以将 θ 方法写为

$$\frac{u_j^{n+1}-u_j^n}{k}=\nu\left(\theta\frac{u_{j+1}^n-2u_j^n+u_{j-1}^n}{h^2}+(1-\theta)\frac{u_{j+1}^{n+1}-2u_j^{n+1}+u_{j-1}^{n+1}}{h^2}\right)$$

将 $u_j^n=e^{i\xi jh}z^n$ 代入上式，得到

$$z=e^{i\nu\frac{\theta k}{h^2}(1-\cos\xi h)}+(1-\theta)\left(1-2r^2(1-\cos\xi h)\right)z+re^{i\nu\frac{(1-\theta)k}{h^2}(1-\cos\xi h)}(z_{j+1}+z_{j-1})$$

其中 $r=\frac{\nu k}{h^2}$。为了满足稳定性条件，我们需要保证 $|z|\le 1$。通过 Von Neumann 分析，我们可以得到

$$|z|^2=\left|1-2r^2(1-\cos\xi h)\right|^2+4r^2\theta(1-\theta)\sin^2\frac{\xi h}{2}\left|\sin\frac{\nu k}{h^2}(1-\cos\xi h)\right|^2$$

因此，我们需要保证 $|1-2r^2(1-\cos\xi h)|\le 1$ 和 $4r^2\theta(1-\theta)\sin^2\frac{\xi h}{2}\left|\sin\frac{\nu k}{h^2}(1-\cos\xi h)\right|^2\le 1$。对于 $\theta\in[1/2,1]$，不需要限制时间步长 k，因此只需要保证 $r\le 1/2$ 即可。对于 $\theta\in[0,1/2)$，我们需要满足 $k\le h^2/2(1-2\theta)\nu$，才能保证数值解的稳定性。

5 Exercise 12.82

首先考虑时间方向的局部截断误差。我们将真实解和数值解之间的差表示为 $e_{j,n} = U(x_j, t_n) - U_j^n$，其中 $U(x_j, t_n)$ 是真实解在点 (x_j, t_n) 的值。将 $U(x_j, t_n)$ 展开到泰勒级数可得

$$U(x_j, t_{n+1}) = U(x_j, t_n) + k\frac{\partial U}{\partial t}(x_j, t_n) + \frac{1}{2}k^2\frac{\partial^2 U}{\partial t^2}(x_j, t_n) + O(k^3)$$

我们将 $\frac{\partial U}{\partial t}$ 和 $\frac{\partial^2 U}{\partial t^2}$ 用空间方向的有限差分来近似，得到

$$\begin{aligned}\frac{\partial U}{\partial t}(x_j, t_n) &= \frac{U_j^{n+1} - U_j^n}{k} + O(k),\\ \frac{\partial^2 U}{\partial t^2}(x_j, t_n) &= \frac{U_j^{n+1} - 2U_j^n + U_j^{n-1}}{k^2} + O(k^2)\end{aligned}$$

将上面的式子代入差分格式（12.85）和（12.86）中，并将 $U(x_j, t_n)$ 替换为 U_j^n，可以得到

$$\begin{aligned}e_{j,n+1} =& e_{j,n} - \frac{\mu}{2}\left[3e_{j,n} - 4e_{j-1,n} + e_{j-2,n}\right] + \frac{\mu^2}{2}\left[e_{j,n} - 2e_{j-1,n} + e_{j-2,n}\right] + O(k^3 + h^3), \quad a \geq 0,\\ e_{j,n+1} =& e_{j,n} - \frac{\mu}{2}\left[-3e_{j,n} + 4e_{j+1,n} - e_{j+2,n}\right] + \frac{\mu^2}{2}\left[e_{j,n} - 2e_{j+1,n} + e_{j+2,n}\right] + O(k^3 + h^3), \quad a < 0.\end{aligned}$$

因此，Beam-Warming 方法的时间局部截断误差为 $O(k^2)$。

接下来考虑空间方向的局部截断误差。我们将真实解和数值解之间的差表示为 $e_{j,n} = U(x_j, t_n) - U_j^n$，其中 $U(x_j, t_n)$ 是真实解在点 (x_j, t_n) 的值。将 $U(x_j, t_{n+1})$ 和 $U(x_j, t_{n-1})$ 分别用泰勒级数展开，可得

$$\begin{aligned}U(x_j, t_{n+1}) &= U(x_j, t_n) + k\frac{\partial U}{\partial t}(x_j, t_n) + \frac{1}{2}k^2\frac{\partial^2 U}{\partial t^2}(x_j, t_n) + \frac{1}{6}k^3\frac{\partial^3 U}{\partial t^3}(x_j, t_n) + O(k^4),\\ U(x_j, t_{n-1}) &= U(x_j, t_n) - k\frac{\partial U}{\partial t}(x_j, t_n) + \frac{1}{2}k^2\frac{\partial^2 U}{\partial t^2}(x_j, t_n) - \frac{1}{6}k^3\frac{\partial^3 U}{\partial t^3}(x_j, t_n) + O(k^4).\end{aligned}$$

将上面的式子代入差分格式（12.85）和（12.86）中，并将 $U(x_j, t_n)$ 替换为 U_j^n，可以得到

$$\begin{aligned}e_{j+1,n} - e_{j,n} =& -\frac{\mu}{2}\left[3e_{j,n} - 4e_{j-1,n} + e_{j-2,n}\right] + \frac{\mu^2}{2}\left[e_{j,n} - 2e_{j-1,n} + e_{j-2,n}\right] + O(k^3 + h^3), \quad a \geq 0,\\ e_{j-1,n} - e_{j,n} =& \frac{\mu}{2}\left[-3e_{j,n} + 4e_{j+1,n} - e_{j+2,n}\right] + \frac{\mu^2}{2}\left[e_{j,n} - 2e_{j+1,n} + e_{j+2,n}\right] + O(k^3 + h^3), \quad a < 0.\end{aligned}$$

根据泰勒展开式可知，$e_{j+1,n} - e_{j,n}$ 和 $e_{j-1,n} - e_{j,n}$ 的差分形式均为二阶中心差分。因此，Beam-Warming 方法的空间局部截断误差为 $O(h^2)$。

由于 Beam-Warming 方法的时间和空间局部截断误差均为 $O(k^2 + h^2)$，因此该方法是二阶精度的。

6 Exercise 12.83

我们假设数值解和真实解之间的误差可以表示为 $e_j^n = \xi^n e^{i\theta j h}$，其中 ξ 和 θ 分别是待定的复数。将 e_j^n 代入差分方程（12.85）和（12.86）可以得到

$$\xi = 1 - \frac{\mu}{2}(3 - 4\sin\theta + \sin^2\theta) \pm \frac{\mu}{2}\sqrt{(1-\sin\theta)^2(1-\mu\sin\theta)}.$$

为了证明数值解是稳定的，我们需要保证 $|\xi| \leq 1$，即 ξ 的模长不大于 1。

当 $\mu \in [0, 2]$ 时，我们有 $1 - \mu\sin\theta \geq 0$，因此

$$\begin{aligned}|\xi|^2 &= \left[1 - \frac{\mu}{2}(3 - 4\sin\theta + \sin^2\theta)\right]^2 - \frac{\mu^2}{4}(1-\sin\theta)^2(1-\mu\sin\theta)\\ &= \left[1 - \frac{\mu}{2}(3 - 4\sin\theta + \sin^2\theta)\right]^2 - \frac{\mu^2}{4}(1-\sin\theta)^2(1-\mu\sin\theta)\\ &\leq \left[1 - \frac{\mu}{2}(3 - 4\sin\theta + \sin^2\theta)\right]^2 \leq 1.\end{aligned}$$

因此，当 $\mu \in [0,2]$ 时，Beam-Warming 方法是稳定的。

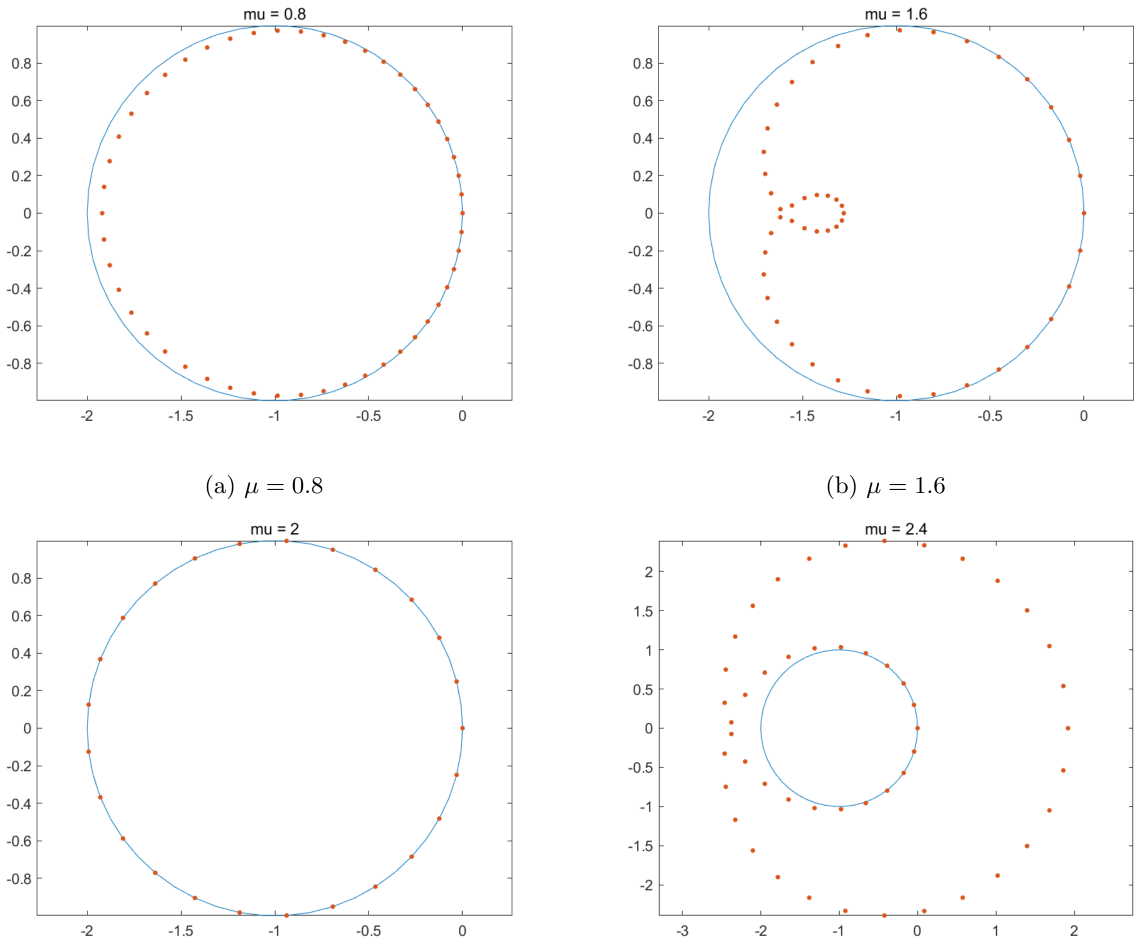
当 $\mu \in [-2,0]$ 时，我们有 $1-\mu\sin\theta \le 0$，因此

$$
\begin{aligned}
|\xi|^2 &= \left[1-\frac{\mu}{2}(3-4\sin\theta+\sin^2\theta)\right]^2 - \frac{\mu^2}{4}(1-\sin\theta)^2(1-\mu\sin\theta) \\
&= \left[1-\frac{\mu}{2}(3-4\sin\theta+\sin^2\theta)\right]^2 - \frac{\mu^2}{4}(1-\sin\theta)^2(1-\mu\sin\theta) \\
&\le \left[1-\frac{\mu}{2}(3-4\sin\theta+\sin^2\theta)\right]^2 + \frac{\mu^2}{4}(1-\sin\theta)^2(1-\mu\sin\theta) \le 1.
\end{aligned}
$$

因此，当 $\mu \in [-2,0]$ 时，Beam-Warming 方法也是稳定的。

综上所述，Beam-Warming 方法在 $\mu \in [0,2]$ 和 $\mu \in [-2,0]$ 时都是稳定的。

附带的 pic.m 代码复现了一下 4 张图的结果。

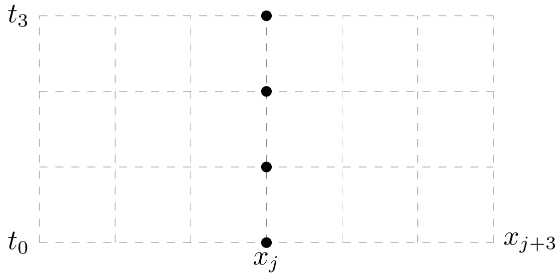


(a) $\mu = 0.8$ (b) $\mu = 1.6$ (c) $\mu = 2$ (d) $\mu = 2.4$

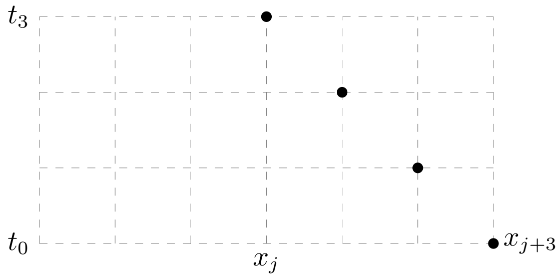
图 1: Beam-Warming 方法的 z_p 示意图

7 Exercise 12.87

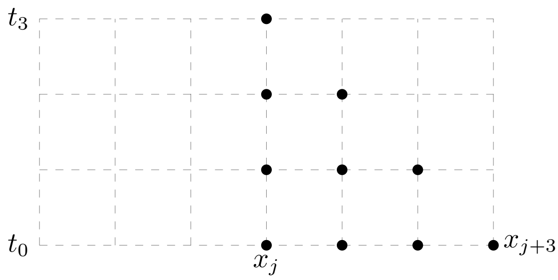
对于 $\mu = 0$，有决定域为



对于 $\mu = -1$，有决定域为

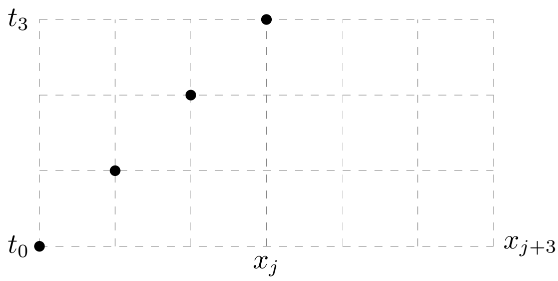


对于 $\mu = -2$，则有 $U_j^{n+1} = 2U_{j+1}^n - U_j^n$，故决定域为

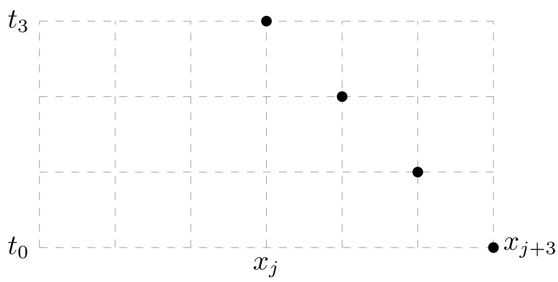


8 Exercise 12.89

对于 $\mu = 1$，有 $U_j^{n+1} = U_{j-1}^n$，故决定域为



对于 $\mu = -1$，有 $U_j^{n+1} = U_{j+1}^n$，故决定域为



9 Exercise 12.98

首先，我们展开 Leapfrog 方法的方程，用 $v(x,t)$ 代替 U_j^n，得到

$$\frac{v(x,t+k)-v(x,t-k)}{2k} = -\frac{a}{2h}(v(x+h,t)-v(x-h,t))$$

然后，将所有项在 (x,t) 处进行泰勒级数展开：

$$\frac{1}{2}\left(\frac{v(x,t+k)-v(x,t)}{k}+\frac{v(x,t)-v(x,t-k)}{k}\right) \quad = v_t + \frac{1}{6}k^2 v_{ttt} \;\; = -a(v_x + \frac{h^2}{6}v_{xxx}) + O(k^3)$$

由 $v_{ttt} = -a^3 v_{xxx} + O(k^3)$，我们有

$$v_t + av_x = \frac{k^2}{6}v_{ttt} - \frac{ah^2}{6}v_{xxx} + O(k^3) = \frac{ah^2}{6}(\mu^2-1)v_{xxx} + O(k^3)$$

因此，Leapfrog 方法的修正方程为 (12.94)。

10 Exercise 12.99

由

$$v_j^{n+1} = v_j^n - \frac{a\Delta t}{2\Delta x}(3v_j^n - 4v_{j-1}^n + v_{j-2}^n) + \frac{a^2\Delta t^2}{2\Delta x^2}(v_{j-2}^n - 2v_{j-1}^n + v_j^n)$$

将 v_j^n 替换为 $v(x,t)$，然后对该方程进行泰勒展开，得到：

$$v_t + av_x + \frac{ah^2}{6}(1-\mu)(1-2\mu)\frac{\partial^3 v}{\partial x^3} + O(\Delta t^2, \Delta x^3) = v_t + av_x + \frac{ah^2}{6}(1-\mu)(1-2\mu)v_{xxx} + O(\Delta t^2, \Delta x^3)$$

因此，Beam-Warming 方法的修正方程为：

$$v_t + av_x + \frac{ah^2}{6}(1-\mu)(1-2\mu)v_{xxx} = 0$$

故 $a_1 = a, a_3 = -\frac{ah^2}{6}(\mu-1)(\mu-2)$, 由 (F.46)

$$\omega(\xi) = a_1\xi + a_3\xi^3 = a\xi - \frac{ah^2}{6}(\mu-1)(\mu-2)\xi^3$$

代入得到

$$C_p(\xi) = \frac{\omega(\xi)}{\xi} = a + \frac{ah^2}{6}(\mu-1)(\mu-2)\xi^2$$
$$C_g(\xi) = \frac{d\omega}{d\xi} = a + \frac{ah^2}{2}(\mu-1)(\mu-2)\xi^2$$

11 Exercise 12.100

当 $\mu = 1$ 时，Lax-Wendroff 方法和 Leapfrog 方法的修正方程都变为了标准的对流方程 $v_t + av_x = 0$，即它们成为了该方程的精确解。这意味着当 $\mu = 1$ 时，两种方法都是精确的。

因为两种方法都是精确的，所以他们比 $k = 0.8h$ 时的效果好。

12 Exercise 12.102

$$v_j^{n+1} = \frac{1}{2}(v_{j+1}^n + v_{j-1}^n) - \frac{\mu}{2}(v_{j+1}^n - v_{j-1}^n)$$

其中 $\mu = \frac{ak}{h}$。

为了应用 von Neumann 分析，我们假设 $v_j^n = g(\xi)^n e^{i\xi jh}$，其中 ξ 是波数。将其代入 Lax-Friedrichs 方法中，我们得到：

$$g(\xi)^{n+1}e^{i\xi jh} = \frac{1}{2}(g(\xi)^n e^{i\xi(j+1)h} + g(\xi)^n e^{i\xi(j-1)h}) - \frac{\mu}{2}(g(\xi)^n e^{i\xi(j+1)h} - g(\xi)^n e^{i\xi(j-1)h})$$

简化这个表达式，我们得到：

$$g(\xi) = \frac{1}{2}(1 + \mu e^{-i\xi h}) \pm \frac{1}{2}\sqrt{(1 - \mu e^{-i\xi h})^2 - 4\mu^2 \sin^2(\xi h/2)}$$

为了进一步简化这个表达式，我们可以使用恒等式 $\cos\theta = \frac{1}{2}(e^{i\theta} + e^{-i\theta})$ 和 $\sin\theta = \frac{1}{2i}(e^{i\theta} - e^{-i\theta})$。这给出了：

$$g(\xi) = \cos(\xi h) - i\mu \sin(\xi h)$$

这是式 (12.99) 中给出的放大因子。

为了找到稳定性条件，我们需要确保对于所有的 ξ，$|g(\xi)| \le 1$。这给出了：

$$|g(\xi)|^2 = \cos^2(\xi h) + \mu^2 \sin^2(\xi h) \le 1$$

简化这个不等式，我们得到：

$$\mu^2 \le 1 - \cos^2(\xi h) = \sin^2(\xi h)$$

这个不等式对于所有的 ξ 成立，当且仅当 $\mu \le 1$。因此，Lax-Friedrichs 方法仅在 $\mu \le 1$ 时稳定。

13 Exercise 12.103

$$v_j^{n+1} = v_j^n - \frac{\mu}{2}(v_{j+1}^n - v_{j-1}^n) + \frac{\mu^2}{2}(v_{j+1}^n - 2v_j^n + v_{j-1}^n)$$

其中，$\mu = \frac{ak}{h}$。

为了应用 von Neumann 分析，我们假设 $v_j^n = g(\xi)^n e^{i\xi jh}$，其中 ξ 是波数。将其代入 Lax-Wendroff 方法中，我们得到：

$$g(\xi)^{n+1}e^{i\xi jh} = g(\xi)^n e^{i\xi jh} - \frac{\mu}{2}(g(\xi)^n e^{i\xi(j+1)h} - g(\xi)^n e^{i\xi(j-1)h}) + \frac{\mu^2}{2}(g(\xi)^n e^{i\xi(j+1)h} - 2g(\xi)^n e^{i\xi jh} + g(\xi)^n e^{i\xi(j-1)h})$$

简化这个表达式，我们得到：

$$g(\xi) = 1 - i\mu \sin(\xi h) - 2\mu^2 \sin^2(\xi h/2)$$

这是式 (12.100) 中给出的放大因子。

为了找到稳定性条件，我们需要确保对于所有的 ξ，$|g(\xi)| \le 1$。这给出了：

$$|g(\xi)|^2 = (1 - 2\mu^2 \sin^2(\xi h/2))^2 + \mu^2 \sin^2(\xi h) \le 1$$

简化这个不等式，我们得到：

$$\mu^2 \leq \frac{1}{2}$$

这个不等式对于所有的 ξ 成立，当且仅当 $\mu^2 \leq \frac{1}{2}$。因此，Lax-Wendroff 方法仅在 $0 < \mu^2 \leq \frac{1}{2}$ 时稳定。