

1 Exercise 12.11

根据定义 12.10, 我们有:

$$U_i^{n+1} - (rU_{i-1}^{n+1} - 2rU_i^{n+1} + rU_{i+1}^{n+1}) = rU_{i-1}^n + 2(1-r)U_i^n + rU_{i+1}^n, \quad (i = 1, 2, \dots, m)$$

当 $i = 1$ 时, 我们有:

$$(1+r)U_1^{n+1} - \frac{r}{2}U_2^{n+1} = (1-r)U_1^n + \frac{r}{2}U_2^n + \frac{r}{2}(U_0^n + U_2^{n+1}) = (1-r)U_1^n + \frac{r}{2}U_2^n + \frac{r}{2}(g_0(t_n) + g_0(t_{n+1}))$$

类似地, 当 $i = m+1$ 时也成立。

令 $U^n = (U_1^n, U_2^n, \dots, U_m^n)'$, $r = \frac{k\nu}{h^2}$, 则有:

$$(I - \frac{k}{2}A)U^{n+1} = (I + \frac{k}{2}A)U^n + b^n,$$

其中,

$$A = \frac{\nu}{h^2} \begin{pmatrix} -2 & 1 & & & \\ 1 & -2 & 1 & & \\ & 1 & -2 & 1 & \\ & & \ddots & \ddots & \ddots \\ & & & 1 & -2 & 1 \\ & & & & 1 & -2 \end{pmatrix}, \quad b^n = \frac{r}{2} \begin{pmatrix} g_0(t_n) + g_0(t_{n+1}) \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ g_1(t_n) + g_1(t_{n+1}) \end{pmatrix}$$

2 Exercise 12.26

我们可以利用一步法的稳定函数来推导 θ 方法的稳定性条件。对于线性常系数偏微分方程 $u_t = \nu u_{xx}$, 用 θ 方法进行离散化, 得到如下迭代公式:

$$u_i^{n+1} = \frac{\theta k\nu}{h^2}(u_{i+1}^n - 2u_i^n + u_{i-1}^n) + (1-\theta)u_i^n.$$

我们对其进行变量替换, 定义 $w^n = (w_1^n, w_2^n, \dots, w_N^n)^T$, 其中 $w_i^n = u_i^n$, 并将 $\theta k\nu/h^2$ 记为 λ , 则上式可以表示为 $w^{n+1} = A_\theta w^n$, 其中

$$A_\theta = \begin{pmatrix} 1-2\lambda\theta & \lambda\theta & & & \\ \lambda\theta & 1-2\lambda\theta & \lambda\theta & & \\ & & \ddots & \ddots & \ddots \\ & & & \lambda\theta & 1-2\lambda\theta \end{pmatrix}.$$

我们可以证明, 当 $\theta \in [1/2, 1]$ 时, 矩阵 A_θ 的所有特征值均具有非负实部, 因此方法是无条件稳定的。当 $\theta \in [0, 1/2)$ 时, 矩阵 A_θ 的特征多项式为

$$p(\lambda) = (-1)^N \lambda^N + (2\lambda - 1 + \theta h^2 \nu^{-1}) \lambda^{N-1} - \lambda^{N-2} \theta h^2 \nu^{-1} (1 - 2\theta)(N-1),$$

其中 N 是空间离散化的网格数。根据谱半径的定义, A_θ 的特征值的模长的上界为 $|\lambda_{\max}| \leq \rho(A_\theta)$, 其中 $\rho(A_\theta)$ 是 A_θ 的谱半径。因此要使方法稳定, 必须满足 $\rho(A_\theta) \leq 1$ 。令 $p(\lambda) = 0$, 则有

$$\lambda = \frac{1}{2} \left(1 - \theta h^2 \nu^{-1} \pm \sqrt{(1 - \theta h^2 \nu^{-1})^2 - 4\theta(1 - 2\theta)(N-1)h^2 \nu^{-1}} \right).$$

注意到 $\theta(1-2\theta) \leq 1/4$, 因此根据根的公式, 有 $\sqrt{(1-\theta h^2 \nu^{-1})^2 - 4\theta(1-2\theta)(N-1)h^2 \nu^{-1}} \leq |1-\theta h^2 \nu^{-1}|$ 。因此我们可以得到 λ 的模长的上界为

$$|\lambda| \leq \frac{1}{2} \left[|1-\theta h^2 \nu^{-1}| + \sqrt{(1-\theta h^2 \nu^{-1})^2 - 4\theta(1-2\theta)(N-1)h^2 \nu^{-1}} \right].$$

为了保证方法稳定, 需要使 $|\lambda| \leq 1$, 即

$$|1-\theta h^2 \nu^{-1}| + \sqrt{(1-\theta h^2 \nu^{-1})^2 - 4\theta(1-2\theta)(N-1)h^2 \nu^{-1}} \leq 2.$$

由于 $\sqrt{(1-\theta h^2 \nu^{-1})^2 - 4\theta(1-2\theta)(N-1)h^2 \nu^{-1}}$ 是非负实数, 因此上式等价于

$$1-\theta h^2 \nu^{-1} + \sqrt{(1-\theta h^2 \nu^{-1})^2 - 4\theta(1-2\theta)(N-1)h^2 \nu^{-1}} \leq 2.$$

将 $\sqrt{(1-\theta h^2 \nu^{-1})^2 - 4\theta(1-2\theta)(N-1)h^2 \nu^{-1}}$ 移到不等式右边, 平方两边, 可得

$$(1-\theta h^2 \nu^{-1})^2 - 4\theta(1-2\theta)(N-1)h^2 \nu^{-1} \leq (3-\theta h^2 \nu^{-1})^2.$$

将 θ 方法的时间步长 k 替换为 $\nu k/h^2$, 可得

$$k \leq \frac{h^2}{2(1-2\theta)\nu}.$$

因此, 当 $\theta \in [0, 1/2)$ 时, 为保证 θ 方法的稳定性, 时间步长 k 必须满足 $k \leq h^2/2(1-2\theta)\nu$ 。综上所述, 引理得证。

3 Exercise 12.41

因为对于任何 $U \in L^1(h_{\mathbb{Z}}) \cap L^2(h_{\mathbb{Z}})$, 我们有

$$\begin{aligned} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\pi/h}^{\pi/h} e^{imh\xi} \left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \sum_{n \in \mathbb{Z}} e^{inh\xi} U_{nh} \right) d\xi &= \frac{1}{2\pi} \sum_{n \in \mathbb{Z}} \int_{-\pi}^{\pi} e^{-i(n-m)t} U_n dt \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} U_m dt = U_m \end{aligned}$$

其中 $t = h\xi$, 当 $n \neq m$ 时, $\int_{-\pi}^{\pi} e^{-i(n-m)t} U_n dt = 0$ 。因此, 对于任何 $U \in L^1(h_{\mathbb{Z}}) \cap L^2(h_{\mathbb{Z}})$ 中的网格函数, 我们可以通过傅里叶变换和逆傅里叶变换来恢复它。

4 Exercise 12.48

我们考虑对于方程 $\frac{\partial u}{\partial t} = \nu \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$, 使用 θ 方法进行离散化。具体而言, 我们将时间和空间分别离散化为 $t_n = nk$ 和 $x_j = jh$, 并定义 u_j^n 为数值解在点 (x_j, t_n) 处的近似值。则我们可以将 θ 方法写为

$$\frac{u_j^{n+1} - u_j^n}{k} = \nu \left(\theta \frac{u_{j+1}^n - 2u_j^n + u_{j-1}^n}{h^2} + (1-\theta) \frac{u_{j+1}^{n+1} - 2u_j^{n+1} + u_{j-1}^{n+1}}{h^2} \right)$$

将 $u_j^n = e^{i\xi jh} z^n$ 代入上式, 得到

$$z = e^{i\nu \frac{\theta k}{h^2} (1 - \cos \xi h)} + (1-\theta) (1 - 2r^2(1 - \cos \xi h)) z + r e^{i\nu \frac{(1-\theta)k}{h^2} (1 - \cos \xi h)} (z_{j+1} + z_{j-1})$$

其中 $r = \frac{\nu k}{h^2}$ 。为了满足稳定性条件, 我们需要保证 $|z| \leq 1$ 。通过 Von Neumann 分析, 我们可以得到

$$|z|^2 = |1 - 2r^2(1 - \cos \xi h)|^2 + 4r^2\theta(1-\theta) \sin^2 \frac{\xi h}{2} \left| \sin \frac{\nu k}{h^2} (1 - \cos \xi h) \right|^2$$

因此, 我们需要保证 $|1 - 2r^2(1 - \cos \xi h)| \leq 1$ 和 $4r^2\theta(1-\theta) \sin^2 \frac{\xi h}{2} \left| \sin \frac{\nu k}{h^2} (1 - \cos \xi h) \right|^2 \leq 1$ 。对于 $\theta \in [1/2, 1]$, 不需要限制时间步长 k , 因此只需要保证 $r \leq 1/2$ 即可。对于 $\theta \in [0, 1/2)$, 我们需要满足 $k \leq h^2/2(1-2\theta)\nu$, 才能保证数值解的稳定性。

5 Exercise 12.82

首先考虑时间方向的局部截断误差。我们将真实解和数值解之间的差表示为 $e_{j,n} = U(x_j, t_n) - U_j^n$ ，其中 $U(x_j, t_n)$ 是真实解在点 (x_j, t_n) 的值。将 $U(x_j, t_n)$ 展开到泰勒级数可得

$$U(x_j, t_{n+1}) = U(x_j, t_n) + k \frac{\partial U}{\partial t}(x_j, t_n) + \frac{1}{2} k^2 \frac{\partial^2 U}{\partial t^2}(x_j, t_n) + O(k^3)$$

我们将 $\frac{\partial U}{\partial t}$ 和 $\frac{\partial^2 U}{\partial t^2}$ 用空间方向的有限差分来近似，得到

$$\begin{aligned} \frac{\partial U}{\partial t}(x_j, t_n) &= \frac{U_j^{n+1} - U_j^n}{k} + O(k), \\ \frac{\partial^2 U}{\partial t^2}(x_j, t_n) &= \frac{U_j^{n+1} - 2U_j^n + U_j^{n-1}}{k^2} + O(k^2) \end{aligned}$$

将上面的式子代入差分格式 (12.85) 和 (12.86) 中，并将 $U(x_j, t_n)$ 替换为 U_j^n ，可以得到

$$\begin{aligned} e_{j,n+1} &= e_{j,n} - \frac{\mu}{2} [3e_{j,n} - 4e_{j-1,n} + e_{j-2,n}] + \frac{\mu^2}{2} [e_{j,n} - 2e_{j-1,n} + e_{j-2,n}] + O(k^3 + h^3), \quad a \geq 0, \\ e_{j,n+1} &= e_{j,n} - \frac{\mu}{2} [-3e_{j,n} + 4e_{j+1,n} - e_{j+2,n}] + \frac{\mu^2}{2} [e_{j,n} - 2e_{j+1,n} + e_{j+2,n}] + O(k^3 + h^3), \quad a < 0. \end{aligned}$$

因此，Beam-Warming 方法的时间局部截断误差为 $O(k^2)$ 。

接下来考虑空间方向的局部截断误差。我们将真实解和数值解之间的差表示为 $e_{j,n} = U(x_j, t_n) - U_j^n$ ，其中 $U(x_j, t_n)$ 是真实解在点 (x_j, t_n) 的值。将 $U(x_j, t_{n+1})$ 和 $U(x_j, t_{n-1})$ 分别用泰勒级数展开，可得

$$\begin{aligned} U(x_j, t_{n+1}) &= U(x_j, t_n) + k \frac{\partial U}{\partial t}(x_j, t_n) + \frac{1}{2} k^2 \frac{\partial^2 U}{\partial t^2}(x_j, t_n) + \frac{1}{6} k^3 \frac{\partial^3 U}{\partial t^3}(x_j, t_n) + O(k^4), \\ U(x_j, t_{n-1}) &= U(x_j, t_n) - k \frac{\partial U}{\partial t}(x_j, t_n) + \frac{1}{2} k^2 \frac{\partial^2 U}{\partial t^2}(x_j, t_n) - \frac{1}{6} k^3 \frac{\partial^3 U}{\partial t^3}(x_j, t_n) + O(k^4). \end{aligned}$$

将上面的式子代入差分格式 (12.85) 和 (12.86) 中，并将 $U(x_j, t_n)$ 替换为 U_j^n ，可以得到

$$\begin{aligned} e_{j+1,n} - e_{j,n} &= -\frac{\mu}{2} [3e_{j,n} - 4e_{j-1,n} + e_{j-2,n}] + \frac{\mu^2}{2} [e_{j,n} - 2e_{j-1,n} + e_{j-2,n}] + O(k^3 + h^3), \quad a \geq 0, \\ e_{j-1,n} - e_{j,n} &= \frac{\mu}{2} [-3e_{j,n} + 4e_{j+1,n} - e_{j+2,n}] + \frac{\mu^2}{2} [e_{j,n} - 2e_{j+1,n} + e_{j+2,n}] + O(k^3 + h^3), \quad a < 0. \end{aligned}$$

根据泰勒展开式可知， $e_{j+1,n} - e_{j,n}$ 和 $e_{j-1,n} - e_{j,n}$ 的差分形式均为二阶中心差分。因此，Beam-Warming 方法的空间局部截断误差为 $O(h^2)$ 。

由于 Beam-Warming 方法的时间和空间局部截断误差均为 $O(k^2 + h^2)$ ，因此该方法是二阶精度的。

6 Exercise 12.83

我们假设数值解和真实解之间的误差可以表示为 $e_j^n = \xi^n e^{i\theta jh}$ ，其中 ξ 和 θ 分别是待定的复数。将 e_j^n 代入差分方程 (12.85) 和 (12.86) 可以得到

$$\xi = 1 - \frac{\mu}{2} (3 - 4 \sin \theta + \sin^2 \theta) \pm \frac{\mu}{2} \sqrt{(1 - \sin \theta)^2 (1 - \mu \sin \theta)}.$$

为了证明数值解是稳定的，我们需要保证 $|\xi| \leq 1$ ，即 ξ 的模长不大于 1。

当 $\mu \in [0, 2]$ 时，我们有 $1 - \mu \sin \theta \geq 0$ ，因此

$$\begin{aligned} |\xi|^2 &= \left[1 - \frac{\mu}{2} (3 - 4 \sin \theta + \sin^2 \theta) \right]^2 - \frac{\mu^2}{4} (1 - \sin \theta)^2 (1 - \mu \sin \theta) \\ &= \left[1 - \frac{\mu}{2} (3 - 4 \sin \theta + \sin^2 \theta) \right]^2 - \frac{\mu^2}{4} (1 - \sin \theta)^2 (1 - \mu \sin \theta) \\ &\leq \left[1 - \frac{\mu}{2} (3 - 4 \sin \theta + \sin^2 \theta) \right]^2 \leq 1. \end{aligned}$$

因此, 当 $\mu \in [0, 2]$ 时, Beam-Warming 方法是稳定的。

当 $\mu \in [-2, 0]$ 时, 我们有 $1 - \mu \sin \theta \leq 0$, 因此

$$\begin{aligned} |\xi|^2 &= \left[1 - \frac{\mu}{2}(3 - 4 \sin \theta + \sin^2 \theta) \right]^2 - \frac{\mu^2}{4}(1 - \sin \theta)^2(1 - \mu \sin \theta) \\ &= \left[1 - \frac{\mu}{2}(3 - 4 \sin \theta + \sin^2 \theta) \right]^2 - \frac{\mu^2}{4}(1 - \sin \theta)^2(1 - \mu \sin \theta) \\ &\leq \left[1 - \frac{\mu}{2}(3 - 4 \sin \theta + \sin^2 \theta) \right]^2 + \frac{\mu^2}{4}(1 - \sin \theta)^2(1 - \mu \sin \theta) \leq 1. \end{aligned}$$

因此, 当 $\mu \in [-2, 0]$ 时, Beam-Warming 方法也是稳定的。

综上所述, Beam-Warming 方法在 $\mu \in [0, 2]$ 和 $\mu \in [-2, 0]$ 时都是稳定的。

附带的 pic.m 代码复现了一下 4 张图的结果。

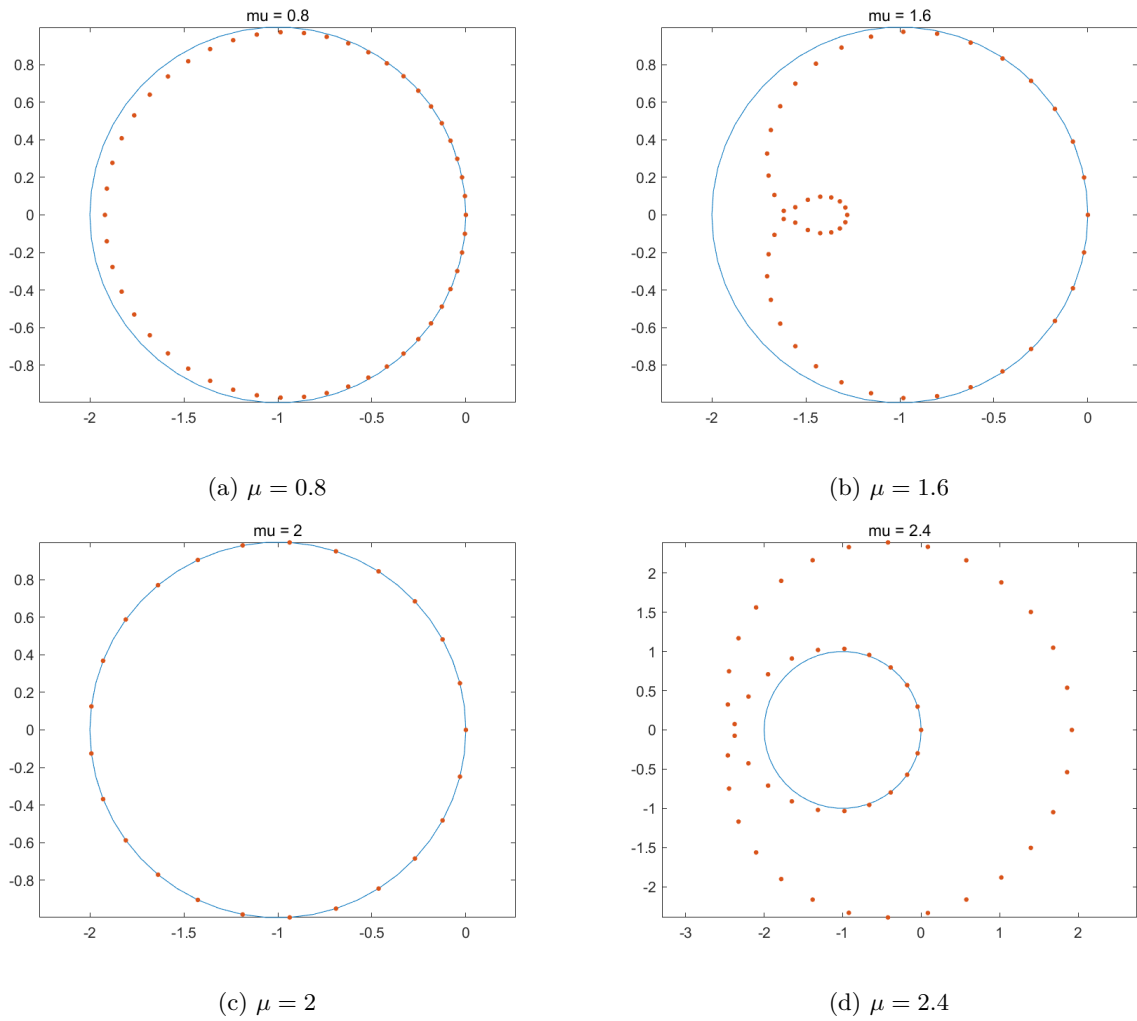


图 1: Beam-Warming 方法的 z_p 示意图