微分方程数值解（第七章理论作业）

褚朱钇恒 - 3200104144

19th March 2023

1 Exercise 7.14

由 $\|g_1\| = O(h), \|g_N\| = O(h)$ $\|g_i\| = O(h^2)$ 得，

$\exists C > 0, x > 0$ 使 $t < x$ 时，$|g_1| \le Ch, |g_N| \le Ch, |g_i| \le Ch^2$,

$\|g\|_\infty = max\{g_1, \dots, g_N\}$, 故 $\exists C > 0, x > 0$ 使 $t < x$ 时（不妨设 $x < 1$），有 $\|g\|_\infty \le Cmax\{h, h^2\} = Ch$

所以有 $\|g\|_\infty = O(h)$。

对于 L1 范数，由 $\|g\|_1 = h\Sigma_{j=1}^{N}|g_j| \le h\Sigma_{j=2}^{N-1}|g_j| + |g_1|h + |g_N|h \le C|h^2| + C|h^2| + CN|h^3|$

所以有 $\|g\|_1 \le (2C + |h|N)|h^2|$，故 $||g||_1 = O(h^2)$

对于 L2 范数，由题意易得 $g_1^2 = O(h^2), g_N^2 = O(h^2), g_i^2 = O(h^4)$，同 L1 范数的推导可得 $h\Sigma g_i^2 = O(h^3)$, 故 $||g||_2 = \sqrt[2]{h\Sigma g_i^2} = O(h^{\frac{3}{2}})$

2 Exercise 7.35

设 $B_E = \begin{bmatrix} b_1 & b_2 & \cdots & b_n \end{bmatrix} = A_E^{-1}$，则有 $b_1 = (\frac{1}{h^2})^{-1} \begin{bmatrix} \frac{1}{h} \\ \frac{1}{h} \\ 0 \\ \cdots \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} h \\ h \\ 0 \\ \cdots \\ 0 \end{bmatrix}$

所以 $||b_1||_\infty = h = O(1)$，故原命题成立。

3 Exercise 7.40

通过对 $u_{i,j}$ 在网格点 (x_i, y_j) 处做 Taylor 展开，可以得到如下近似：

$$u_{i-1,j} - 2u_{i,j} + u_{i+1,j} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{h^2 \partial^4 u}{12\partial x^4} + O(h^4)$$
$$u_{i,j-1} - 2u_{i,j} + u_{i,j+1} = \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{h^2 \partial^4 u}{12\partial y^4} + O(h^4)$$

代入泊松方程可得

$$-\frac{1}{h^2}(u_{i-1,j} - 2u_{i,j} + u_{i+1,j} + u_{i-1,j} - 2u_{i,j} + u_{i+1,j}) = f_{i,j} - \frac{1}{12}(\frac{h^2 \partial^4 u}{12\partial x^4} + \frac{h^2 \partial^4 u}{12\partial y^4}) + O(h^4)$$

所以有

$$\tau_{i,j} = -\frac{h^2}{12}\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\right)_{(x_i,y_j)} + O(h^4)$$

4 Exercise 7.60

根据上一题的结论，对于正则化的点，有

$$\tau_{i,j} = -\frac{h^2}{12}\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\right)_{(x_i,y_j)} + O(h^4)$$

其中 $\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\right)_{(x_i,y_j)}$ 是常数，故 $\tau_{i,j} = O(h^2)$

对于非正则化的点，用类似的泰勒展开方法可以得到 $\tau_{i,j}$ 中存在 $\alpha h \frac{\partial u}{\partial x}(x_i, y_j)$ 和 $\theta h \frac{\partial u}{\partial x}(x_i, y_j)$ 的项，所以故 $\tau_{i,j} = O(h)$.

5 Exercise 7.62

对于 $\forall P \in X_1$，定义 $\psi_1 = E_P + \frac{T_{max}}{C_1}\phi_P$ 对于 $\forall P \in X_2$，定义 $\psi_2 = E_P + \frac{T_{max}}{C_2}\phi_P$

同 Theorem 7.58 理，可得 $L_h\psi_1 \le -T_P - Tmax = 0$,$L_h\psi_2 \le -T_P - Tmax = 0$

则有 $E_P \le max_{P\in X}(E_P + max\frac{T_1}{C_1}, \frac{T_2}{C_2}\phi_P)$

故有 $|E_P| \le (max_{Q\in X_{\partial\Omega\phi(Q)}})max\{\frac{T_1}{C_1}, \frac{T_2}{C_2}\}$