SVD & 矩阵子空间

Hongyu Chen

2314727047@qq.com

一、子空间

对矩阵 $A \in R^{m\times n}$，其子空间定义如下。

1. 像空间 & 列空间

$$R(A) = \{Ax|x \in R^n\} \subseteq R^m$$

像空间是向量 $x \in R^n$ 经矩阵 A 变换后所有像的集合，也可以将乘积 Ax 看成关于 A 的列向量的线性组合：

$$A = [A_1 \ \ A_2 \ \ \cdots \ \ A_n]$$
$$Ax = \Sigma_{i=1}^{n} x_i A_i$$

所以像空间也可以称为列空间。

2. 行空间

即 A 的行向量的线性组合，可以用 $R(A^T)$ 表示。

3. 零空间

$$N(A) = \{x|Ax = 0\} \subseteq R^n$$

零空间是 $Ax = 0$ 所有解的集合。

4. 左零空间

$$N(A^T) = \{y|A^T y = 0\} \subseteq R^m$$

左零空间是 $y^T A = 0^T$ 所有解的集合。

二、SVD

对矩阵 $A \in R^{m\times n}$，$rank(A) = r$，SVD分解为 $A = U\Sigma V^H$，$U \in R^{m\times m}$，$\Sigma \in R^{m\times n}$，$V \in R^{n\times n}$ 。

将 U 和 V 按列分块：

$$U_1 = [u_1, \cdots, u_r], \ \ U2 = [u_{r+1}, \cdots, u_m]$$
$$V_1 = [v_1, \cdots, v_r], \ \ V2 = [v_{r+1}, \cdots, v_n]$$

将矩阵形式 $U\Sigma V^H$ 展开，得到 SVD 的展开形式：

$$A = \sigma_1 u_1 v_1^H + \sigma_2 u_2 v_2^H + \cdots + \sigma_r u_r v_r^H$$

1. 像空间

对于 $y = Ax$ ， $x \in R^n$ ， 将 A 写为 SVD 展开形式：

$$\begin{aligned} y &= Ax \\ &= \Sigma_{i=1}^r \sigma_i u_i v_i^H x \\ &= \Sigma_{i=1}^r (\sigma_i v_i^H x) u_i \\ &= \Sigma_{i=1}^r \alpha_i u_i \end{aligned}$$

上式 $v_i^H x$ 能和 u_i 调换顺序，是因为 $v_i^H x$ 是标量。

由于 U 和 V 都是酉矩阵（对应实数域的正交矩阵），所以 α_i 各标量之间相互独立。那么矩阵 A 的像空间（列空间）：

$$R(A) = \{y | y = Ax, \forall x \in R^n\} = R(U_1)$$

2. 零空间

与像空间类似，令 $Ax = 0$ ：

$$\begin{aligned} Ax &= \Sigma_{i=1}^r \sigma_i u_i v_i^H x \\ &= \Sigma_{i=1}^r (\sigma_i v_i^H x) u_i \\ &= \Sigma_{i=1}^r \alpha_i u_i \\ &= 0 \end{aligned}$$

要得到 $Ax = 0$ ，就要让 $\alpha_i = 0$ ，由于 V 是酉矩阵，所以当 $\alpha_i = 0$ 时，x 是 $v_{r+1}, \cdots, v_n$ 的线性组合。所以：

$$N(A) = \{x | Ax = 0\} = R(V_2)$$

3. 行空间和左零空间

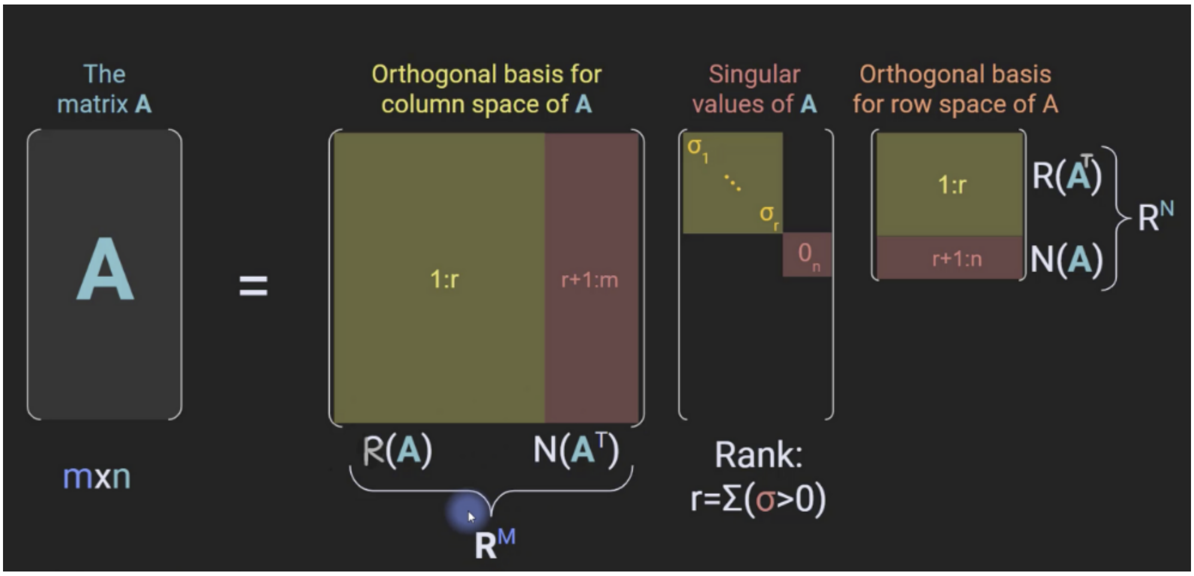
可以对 A^T 进行 SVD 分解：

$$\begin{aligned} A &= U \Sigma V^H \\ A^T &= V \Sigma^H U^H \end{aligned}$$

那么：

$$\begin{aligned} R(A^T) &= R(V_1) \\ N(A^T) &= R(U_2) \end{aligned}$$

4. 总结



三、举例

求解方程组：

$$\begin{bmatrix} A-I & B & 0 \\ C & D & -I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_s \\ u_s \\ y_t \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

令 $z_s = [x_s^T \quad u_s^T]^T$ ，方程组 $[A-I \quad B]\, z_s = 0$ 的解为 $[A-I \quad B]$ 的零空间，对其SVD分解后就是 $R(V_2)$ 。直接令 $M_\theta = V_2$ ，参数 $\theta \in R^{n_\theta}$ ，那么 $R(V_2)$ 可以表示为 $M_\theta \theta$ ，即 $z_s = M_\theta \theta$ 。

那么 $y_t = [C \quad D]\, z_s = [C \quad D]\, M_\theta \theta$ ，令 $N_\theta = [C \quad D]\, M_\theta$ ，即可表示为：

$$z_s = M_\theta \theta$$
$$y_t = N_\theta \theta$$