О. Р. Волкова, В. П. Климанов

Моделирование информационных систем

Москва
2015

Министерство образования и науки Российской Федерации
Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение
высшего образования
«Московский государственный технологический университет «СТАНКИН»

О.Р. Волкова, В.П. Климанов

Моделирование информационных систем

Допущено Учебно-методическим объединением по образованию в области автоматизированного машиностроения (УМО АМ) в качестве учебного пособия для студентов высших учебных заведений, обучающихся по направлениям подготовки: бакалавров и магистров «Технология, оборудование и автоматизация машиностроительных производств» и дипломированных специалистов «Конструкторско-технологическое обеспечение машиностроительных производств»; «Автоматизированные технологии и производства»

Москва
2015

УДК 519.711.03:681.518.3
ББК 32.973:32.811 я73
В67

Рецензенты: *доктор технических наук, проф. Ю.П. Кораблин (кафедра информационных систем, сетей и безопасности ФГБОУ ВО Российского государственного социального университета);*

кандидат технических наук, проф. А.А. Крюков (кафедра прикладной математики ФГБОУ ВО «НИУ «МЭИ»).

Волкова О.Р., Климанов В.П.

В67 Моделирование информационных систем: учебное пособие / О.Р. Волкова, В.П. Климанов — М.: ФГБОУ ВО «МГТУ «СТАНКИН», 2015 . — 90 с.: ил.

ISBN 978-5-7028-0677-8

Данное учебное пособие разработано с целью оказания помощи студентам при подготовке к лабораторным занятиям по дисциплине «Моделирование информационных систем».

Учебное пособие предназначено для студентов 4-го года обучения по направлению 09.03.02 «Информационные системы и технологии», академический бакалавр, 15.03.04 «Автоматизация технологических процессов и производств», 15.03.05 «Конструкторско-технологическое обеспечение машиностроительных производств».

УДК 519.711.03:681.518.3
ББК 32.973:32.811 я73

ISBN 978-5-7028-0677-8

Оглавление

ОБЩИЕ СВЕДЕНИЯ

Лабораторное занятие является одной из основных форм организации учебного процесса по курсу «Моделирование информационных систем».

Лабораторная работа заключается в выполнении студентами под руководством преподавателя или самостоятельно комплекса заданий направленных на усвоение научно-теоретических основ учебного курса «Моделирование информационных систем», приобретение навыков и опыта творческой деятельности, овладения современными методами практической работы с применением компьютерных средств, современных информационных и коммуникационных технологий.

При выполнении лабораторной работы студент должен продемонстрировать:

– знание теоретического материала и умение использовать его для решения практических задач;
– умение работать с учебной и учебно-методической литературой в традиционной и электронной форме;
– умения и навыки применения методов создания программных продуктов, реализации поставленной задачи с помощью современных языков программирования, методов и технологий конкретной учебной дисциплины;
– познавательные способности, самостоятельность мышления, творческую активность;
– умение рационального сочетания коллективной и индивидуальной форм в ходе выполнения лабораторной работы.

В ходе выполнения лабораторной работы студенты собирают данные и составляют отчет о выполненной работе. Отчет предоставляется преподавателю, ведущему лабораторные занятия по данному курсу, в электронном и печатном виде.

Отчет о выполненной лабораторной включает в себя следующие элементы:

Титульный лист - первая страница отчета о проделанной работе, содержащая информацию о наименовании учебного учреждения, названии лабораторной работы, студенте, выполнившем лабораторную работу, наименовании места и года выполнения. Образец титульного листа приведен в Приложении 1;

Формулировка задания – задание, полученное от преподавателя;

Основная часть - краткое описание работы и числовые данные, отражающие существо, методику и отдельные результаты, достигнутые в ходе ее выполнения.

В описании работы должны освещаться следующие вопросы:

- формулировка темы и цель лабораторного занятия;
- постановка задачи;
- список методов, приемов, способов, использованных в ходе выполнения задания;
- примеры использования разработанного программного обеспечение;
- требования к описанию выполненных экспериментальных и исследовательских работ, с помощью разработанного программного обеспечения;
- описание проведенных экспериментов:
  - ✓ цель эксперимента (какие зависимости предполагалось исследовать),
  - ✓ способ генерации и предоставления исходных и выходных данных,
  - ✓ алгоритм, который исследовался или применялся в эксперименте;
  - ✓ суть эксперимента – параметры исходных данных, расход памяти, времени, исследуемые зависимости и т.д.;
  - ✓ результаты эксперимента в наглядной форме (таблиц, графиков и т.д.);

Заключение - выводы, характеризующие итоги проделанной работы;

Список литературы - упорядоченный в алфавитно-хронологической последовательности перечень библиографических описаний документальных источников информации по теме выполненной работы, оформленный в соответствии с приложением 2.

При оформлении отчета следует выдержать общие правила оформления, требования к текстовым документам, использование формул, таблиц, рисунков, сносок и др. элементов, изложенные в ГОСТах (приложение 3).

Аттестация по лабораторной работе производится на основании представленного отчета о выполнении и работающего программного модуля в виде ее защиты на занятии перед преподавателем. В отсутствие преподавателя защита может быть проведена перед другим преподавателем, ведущим эту же или сходную дисциплину, или заведующим кафедрой. Аттестация по лабораторной работе выставляется ***по шкале от 25 до 54 баллов*** и служит одним из элементов при выставлении оценок промежуточной аттестации по данному курсу.

ВВЕДЕНИЕ

В реалиях современного мира моделирование стало основным и эффективным инструментом исследования сложных систем практически во всех областях знаний. Моделирование – сложнейший многоэтапный процесс исследования, направленный на выявление свойств и закономерностей, присущих исследуемой системе, с целью ее создания или изменения. Этот процесс предполагает решение нескольких взаимосвязанных задач:

- построение моделей, представленных на языке математических отношений в терминах определенной математической теории, позволяющей получить функциональные зависимости характеристик исследуемой системы от параметров;
- анализ свойств исследуемой системы;
- выработка рекомендаций по модернизации существующей или проектированию новой системы.

При построении модели исследуемой системы, необходимо принимать во внимание, что характер ее поведения подчиняется сложным нелинейным законам, а процессы, протекающие в них, очень часто могут быть отнесены к случайным. Что порождает дополнительную задачу - построение моделей случайных процессов с заданными характеристиками.

Как известно, [1-3] для моделирования случайных процессов используются генераторы следующих основных типов:

– физические генераторы;
– генераторы псевдослучайных последовательностей.

Физические генераторы построены на принципе организации выборки из некоторого флуктуационного процесса с использованием стабилизирующего эффекта квантования. Тестирующие воздействия от физических генераторов случайны в полном смысле этого слова, однако использование таких генераторов сопряжено с рядом трудностей:

– сложен контроль вычислений и невозможно повторение реализации моделируемых процессов;

– существует схемная нестабильность физических генераторов, что усложняет их математическую эксплуатацию.

Генераторы псевдослучайных последовательностей основаны на имитации случайных чисел с использованием механизма квантования путем преобразования ранее имитированных псевдослучайных чисел. Т.е. основой для построения моделей случайных процессов и потоков информационных систем является математическое описание случайных величин в виде закона распределения и/или числовых характеристик законов распределения.

Генераторы псевдослучайных последовательностей лишены недостатков физических генераторов, т.к. для них всегда существует возможность восстановить последовательность чисел, задав надлежащим образом начальные условия (т.е. как бы теряется свойство "случайности").

Как правило, моделирование случайных процессов с использованием генераторов псевдослучайных последовательностей состоит из двух этапов:

- формирование псевдослучайной последовательности с равномерным законом распределения на интервале (0;1);
- преобразование полученной последовательности в псевдослучайную последовательность с заданным законом распределения.

Исходя из выше изложенного, сформулируем цель и задачи работы.

Цели лабораторных работ:

Исследовать различные методы конструирования моделей случайных процессов с заданным законом распределения.

Выработать навыки построения генераторов моделей случайных процессов с заданным законом распределения.

Применить навыки конструирования моделей случайных процессов в разработке:

– программного продукта, имитирующего модель функционирования оптового склада (метод однородной градуировки времени);

– программного продукта, имитирующего модель функционирования двухпроцессорного сервера (метод событийного моделирования).

Для достижения поставленной цели необходимо решить следующие задачи:

1. Разработать общий алгоритм получения псевдослучайных величин с задаваемыми параметрами;
2. Разработать с помощью объектно-ориентированных технологий пакет прикладных программ конструирования моделей случайных процессов с заданным законом распределения;
3. На основе метода однородной градуировки времени встроить в разрабатываемый пакет прикладных программ, имитирующий функционирование оптового склада;
4. Разработать на основе метода неоднородной градуировки времени (событийный метод) модуль, имитирующий функционирование двухпроцессорного сервера и встроить его в разработанный пакет прикладных программ.

Разрабатываемый пакет прикладных программ обязательно должен иметь следующие составляющие:

- ✓ Модули конструирования случайных процессов с заданным законом распределения;
- ✓ Модули различных вариантов графического представления реализуемой модели случайного процесса в виде: результата генерирования случайного процесса, гистограммы, функции и плотности распределения;
- ✓ Модули расчета числовых характеристик реализованной модели случайного процесса;
- ✓ Справочную информацию по типу распределения реализуемой модели случайного процесса;

- ✓ Модуль имитационной модели функционирования оптового склада на основе метода однородной градуировки времени;
- ✓ Модуль имитационной модели функционирования двухпроцессорного сервера на основе метода Монте-Карло.

ЛАБОРАТОРНАЯ РАБОТА
КОНСТРУИРОВАНИЕ МОДЕЛЕЙ СЛУЧАЙНЫХ ПРОЦЕССОВ С РАВНОМЕРНЫМ РАСПРЕДЕЛЕНИЕМ

Целью данной работы является исследование различных методов генерации моделей случайных процессов с равномерным законом распределения, что позволит студентам ознакомиться с основными методами генерации, определить их преимущества и недостатки.

Задача:

Разработать модуль программного продукта конструирования псевдослучайной последовательности с равномерным законом распределения с помощью:

- встроенной функции генерации случайных чисел на интервале от $[0;1]$;
- метода простых конгруэнций;
- метода линейной конгруэнтной последовательности Д. Г. Лемера [4].

Порядок выполнения лабораторной работы:

1. Изучить теоретические сведения о методах конструирования псевдослучайных последовательностей с равномерным законом распределения.
2. Разработать функции модуля конструирования псевдослучайных последовательностей с заданным законом распределения.
3. Провести серию экспериментов, используя разработанный метод, для определения лучшего метода и наилучших показателей для него.
4. Используя результаты, полученные с помощью разработанного модуля, дать рекомендации по выбору параметров рекуррентной формулы метода линейной конгруэнтной последовательности.
5. Оформить отчет о выполненной лабораторной работе.

Теоретические сведения

В основу всех методов и приемов моделирования случайных факторов заложено использование случайных чисел, имеющих равномерное распределение на интервале $[0;1]$. Модели случайных процессов с данным законом распределения является основой для моделей случайных процессов с законами распределения отличными от равномерного. Так модели с законом распределения отличным от равномерного могут быть получены с помощью композиции нескольких моделей случайных процессов с равномерным законом распределения или методом обратного преобразования. Тема обратного преобразования будет рассмотрена в последующих лабораторных работах. А сейчас, прежде чем, мы поговорим о методах моделирования случайных чисел в виде псевдослучайных последовательностей, вспомним, что же такое случайная величина с равномерным законом распределения.

Равномерное распределение

Случайная величина X называется распределённой равномерно на отрезке $[a;b]$, если плотность распределения вероятностей постоянна на данном отрезке:

$$f(x)=\begin{cases} 0, & x \notin [a;b], \\ \dfrac{1}{b-a}, & x \in [a;b]. \end{cases} \tag{1.1}$$

Иными словами, все возможные значения равномерно распределённой случайной величины лежат в пределах некоторого интервала; в пределах которого все значения случайной величины одинаково вероятны (обладают одной и той же плотностью вероятности) (*рис.1.1*).

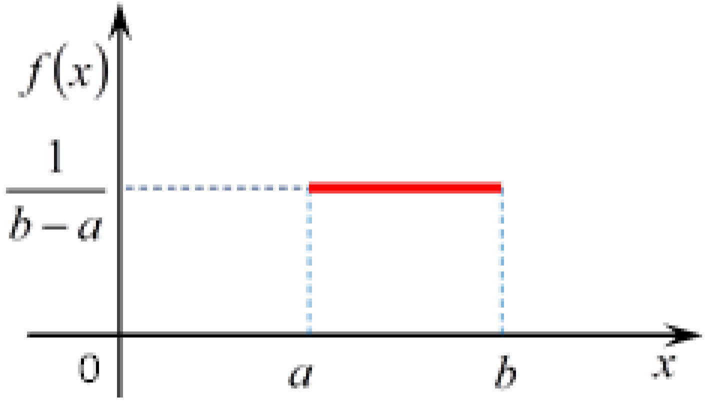


Рис.1.1. График плотности распределения и случайной величины
с равномерным законом распределения

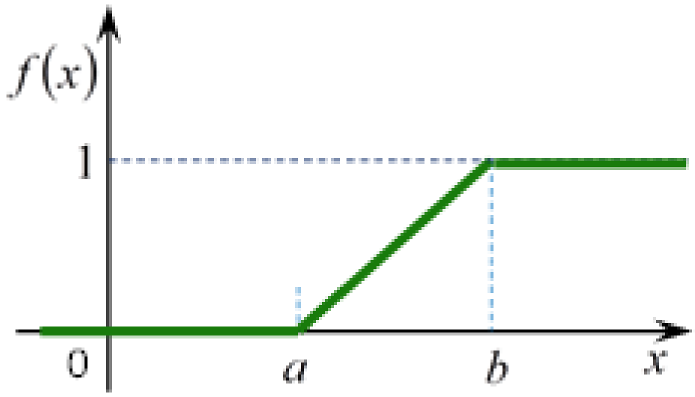


Рис.1.2. График функции распределения и случайной величины
с равномерным законом распределения

Если $a=0$, а $b=1$, то такое непрерывное равномерное распределение называют **стандартным.**

И хотя достаточно знать плотность и функцию распределения, чтобы определить закон распределения, для решения многих практических задач определяют лишь некоторые числа, характеризующие распределение, так называемые числовые характеристики случайной величины. Из числовых характеристик наиболее часто используются моменты случайной величины.

Первый момент называется математическим ожиданием (или средним случайной величины) и вычисляется следующей формуле:

$$M_X = \int_{-\infty}^{+\infty} x\ f(x)dx.$$

Математическое ожидание M_X характеризует среднее положение значений случайной величины X. Для равномерно распределенной случайной величины математическое ожидание определяется по следующей формуле:

$$M_X = \frac{a+b}{2}.$$

Второй центральный момент характеризует разброс значений случайной величины вокруг значения M_X и называется дисперсией D_X. Для равномерно распределенной случайной величины дисперсия определяется в виде:

$$D_X = \frac{(b-a)^2}{12}.$$

В заключение изложения обще теоретических данных хотелось бы отметить, что сумма равномерно распределенных случайных величин по мере их увеличения стремиться к нормальном закону распределения, что пригодится нам в следующих лабораторных занятиях.

Как уже отмечалось выше, целью данной работы является исследование различных методов генерации моделей случайных процессов с заданными законом распределения с помощью ЭВМ.

На данный момент времени, существует множество различных методов конструирования моделей случайных процессов с равномерным законом распределения.

В данной работе необходимо реализовать с помощью языка программирования, поддерживающего объектно-ориентированные технологии разработки программного продукта встраиваемый модуль генерации псевдослучайных последовательностей тремя методами.

Первый из них – это метод ***конструирования псевдослучайной последовательности с помощью встроенной функции генерации случайных чисел.*** Встроенная функция является базовой для большинства современных языков программирования, но реализуема по различным алгоритмам (VBA - *rnd*(), Pascal - *random*()., C++ - *rand*()).

Данный метод позволяет легко и быстро, используя алгоритм, представленный на *рис 1.3*, реализовать псевдослучайную последовательность заданной выборки элементов.

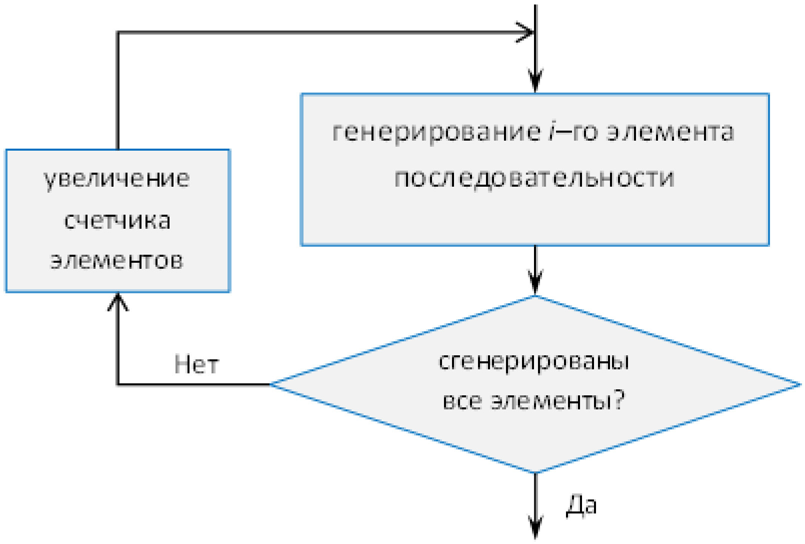


Рис.1.3. Алгоритм генерирования псевдослучайной последовательности

Но при использовании данного метода, нужно внимательно изучить встроенные функции каждого языка программирования.

Так на языке C++ функция *rand*() генерирует случайные целые случайные величины от нуля и до максимального числа, определённого в библиотеке <*cstdlib*>. Обычно данное число равно *32767*, но оно может быть и больше, в зависимости от компилятора. Поэтому для получения случайной величины распределенной на отрезке $[0;1]$ необходимо каждую полученную случайную величину разделить на это число:

```
//Заполнение double массива случайными числами на [0, 1]
   void fill(double arr[], int size)
     {
     for (int i = 0; i < size; i ++)
     arr[i] = (double)rand() / (double)RAND_MAX
     }.
```

В тоже время встроенная функция VBA - ***rnd*()** сразу генерирует случайные величины на интервале $\left[0;1\right]$. Алгоритм формирования случайной величины встроенной функцией ***rnd*()** приведен на *рис.1.4*.

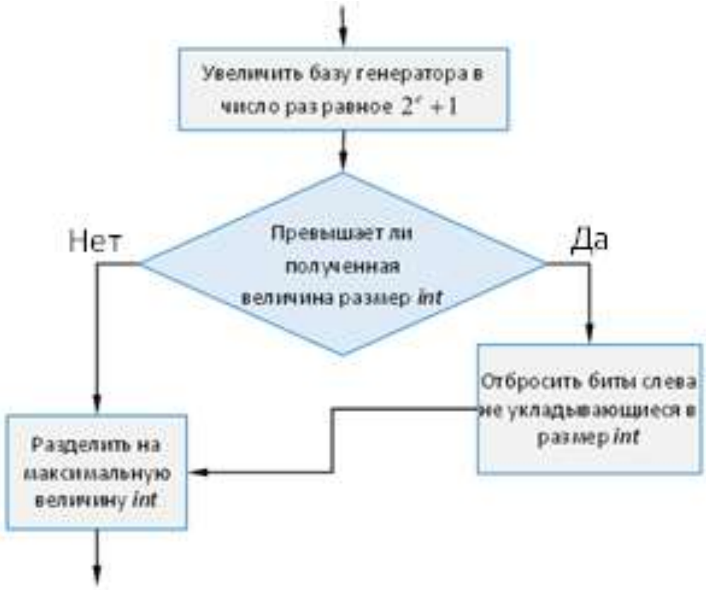


Рис.1.4. Алгоритм величины встроенной функцией ***rnd*()**

Кроме того, следует отметить, что встроенные функции не реализуют в должной мере случайности псевдослучайной последовательности, а при малых выборках быстро замечается цикличность.

Второй метод – это метод ***простых конгруэнций***. Данный метод заключается в получение следующего значения псевдослучайной последовательности из предыдущего по формуле:

$$X_{i+1} = (A \cdot X_i) \bmod p, \qquad (1.2)$$

где X_{i+1} – искомый элемент псевдослучайной последовательности, A – множитель, выбранный определенным образом, p – простое большое число, $\bmod$ – операция нахождения остатка от деления на модуль.

Преимуществом данного метода является простота реализации и небольшой объем памяти, требуемый при вычислении.

При реализации данного метода с помощью ЭВМ удобна версия $p = q^e$, где q – число цифр в системе счисления, принятой в ЭВМ (для двоичной $q = 2$ и для десятичной машины $q = 10$); e – число бит в машинном слове. Тогда вычисление остатка от деления на простое большое число p сводится к выделению младших разрядов делимого, а преобразование целого числа X_i в рациональную дробь из интервала $[0;1]$ осуществляется подстановкой слева от X_i двоичной или десятичной запятой.

Третий метод – это метода ***линейной конгруэнтной последовательности Д. Г. Лемера***. Данный метод является один из практикуемых методов генерации последовательностей псевдослучайных чисел и задается рекурсивным уравнением:

$$X_{i+1} = (a \cdot X_i + c) \bmod m, \qquad (1.3)$$

где X_{i+1} -следующее число псевдослучайной последовательности,

a – множитель (константа),

c – приращение (константа),

m– модуль,

$\bmod$ – операция нахождения остатка от деления на модуль.

В результате применения формулы (1.3) получается последовательность псевдослучайных чисел равномерно распределенных на интервале от 0 до m.

Последовательность является периодической и одним из требований к ней является как можно большая длина периода. Идеально период должен быть такого размера, как модуль m. Чтобы обеспечить скорость генерирования и наибольшую длину периода последовательности неповторяющихся случайных величин Д. Кнут в работе [2] предложил выбирать модуль, таким, чтобы он был больше на одну единицу длины компьютерного слова, используемой системы.

Для наилучших статических свойств реализуемой последовательности необходимо также подобрать такие множитель a и приращение c, при этом должны выполнялись следующие три условия:

- ***приращение c и модуль m взаимно простые;***
- ***$a-1$ кратно p для каждого простого p, являющегося делителем модуля m;***
- ***если модуль m кратен 4, то $a-1$ должно быть кратно 4.***

<u>Отчет о выполненной лабораторной работе.</u>

Отчет о выполненной лабораторной работе должен быть оформлен в соответствии с требованиями, изложенными в начале методических указаний в разделе общие сведения.

Пример оформления результатов выполненной лабораторной работы для равномерно распределенной случайной величины приведен ниже на рис. 1.5-1.8 (пункт 3 отчёта).

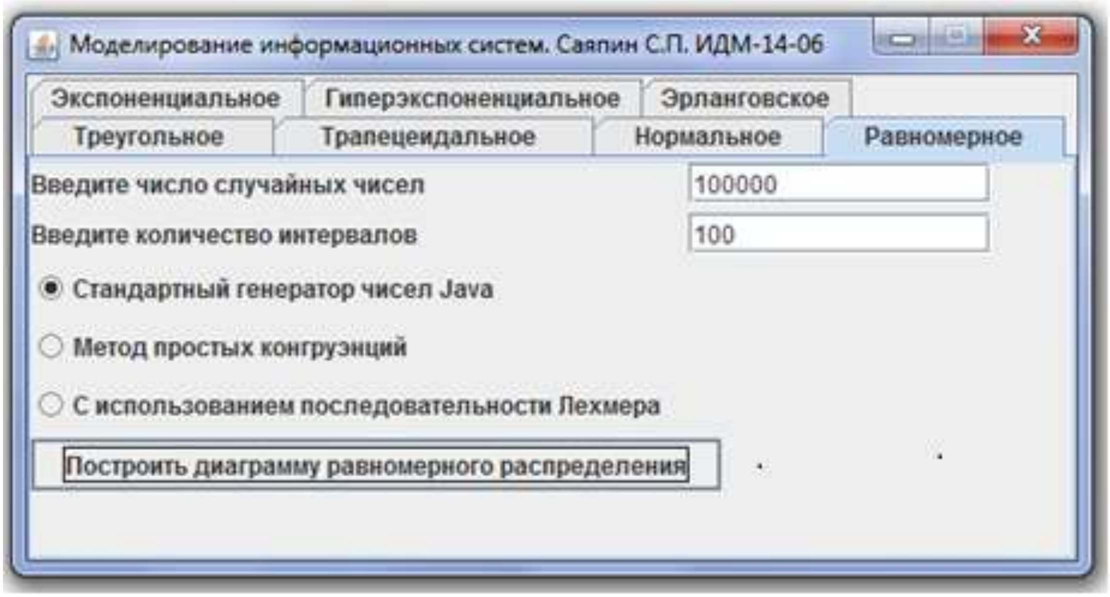


Рис.1.5. Вариант формы ввода исходных данных для формирования псевдослучайных последовательностей с равномерным законом распределения, реализованного с помощью встроенного генератора случайных чисел

Рис.1.6. Гистограмма плотности распределения случайной величины с равномерным законом распределения, реализованного с помощью встроенного генератора случайных чисел

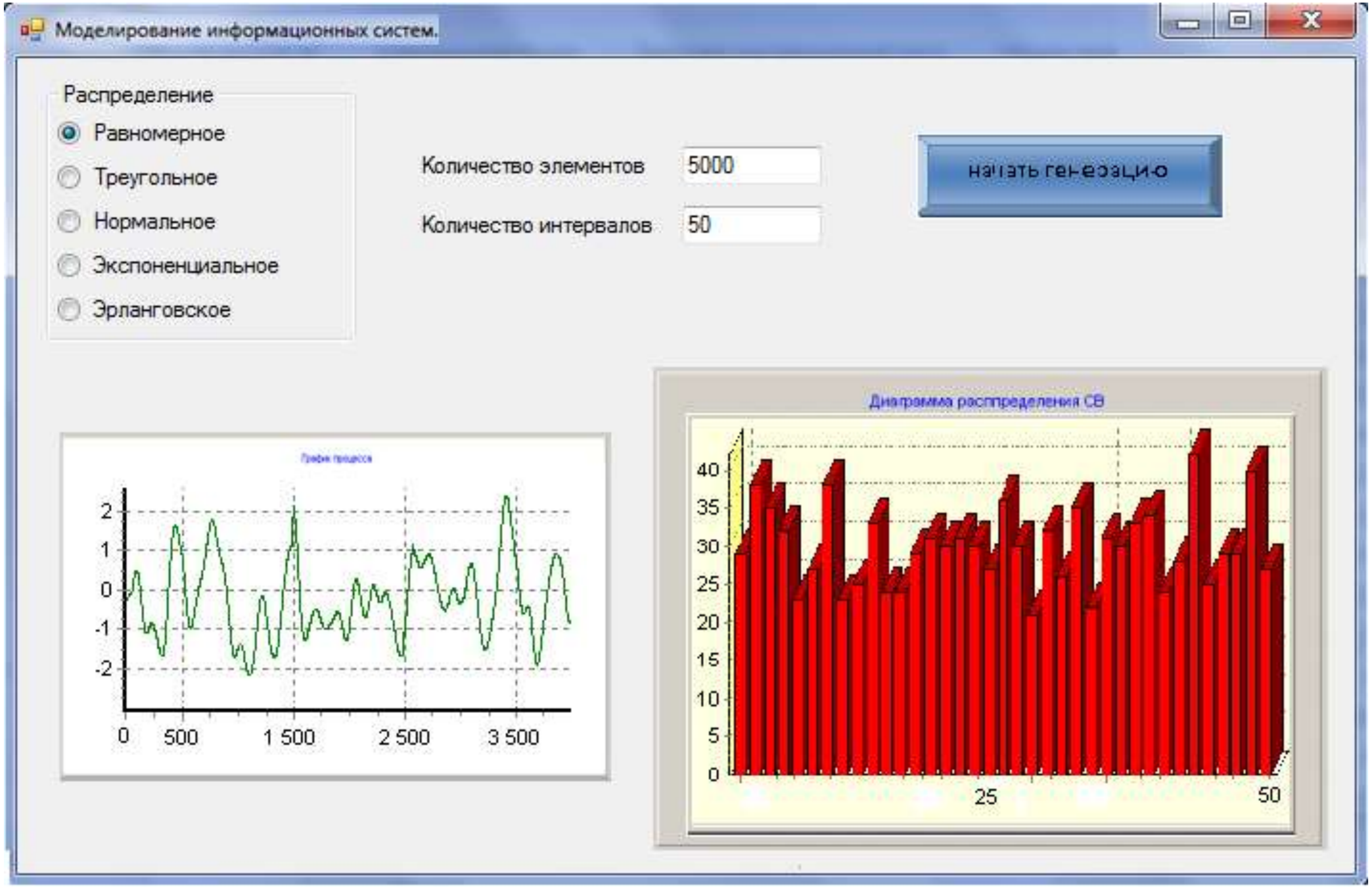
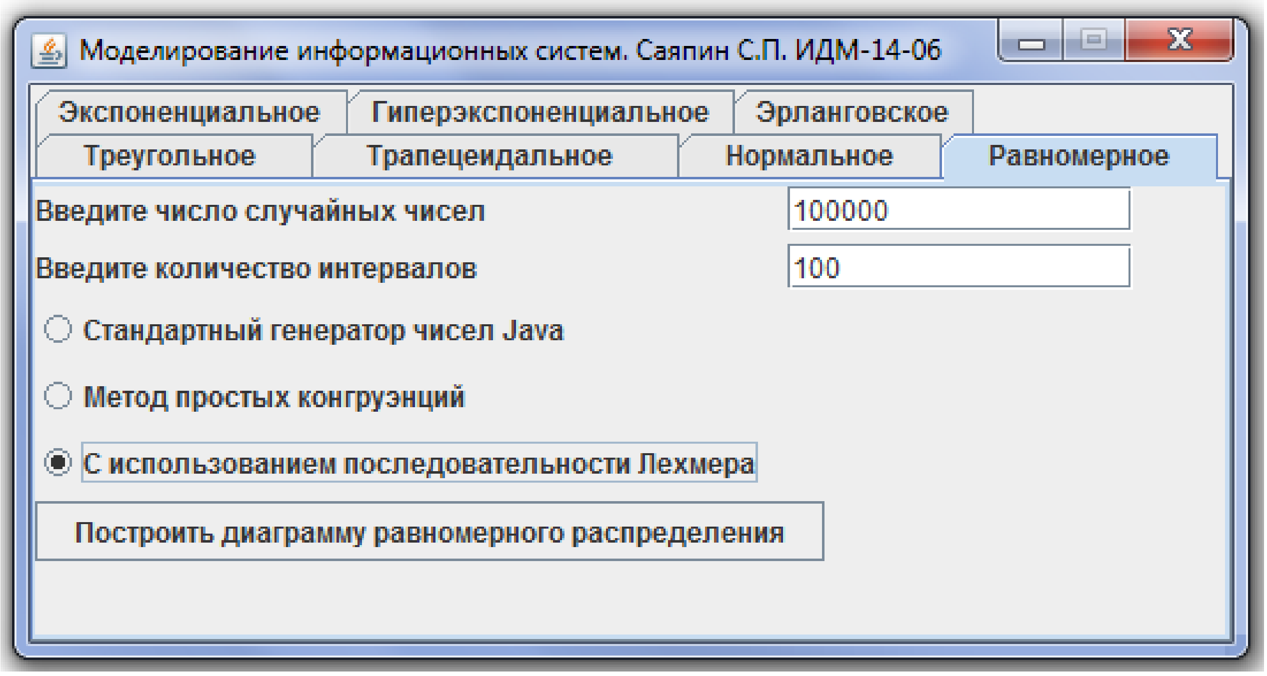


Рис.1.7. График процесса и гистограмма плотности распределения случайной величины с равномерным законом распределения, реализованного с помощью встроенного генератора случайных чисел



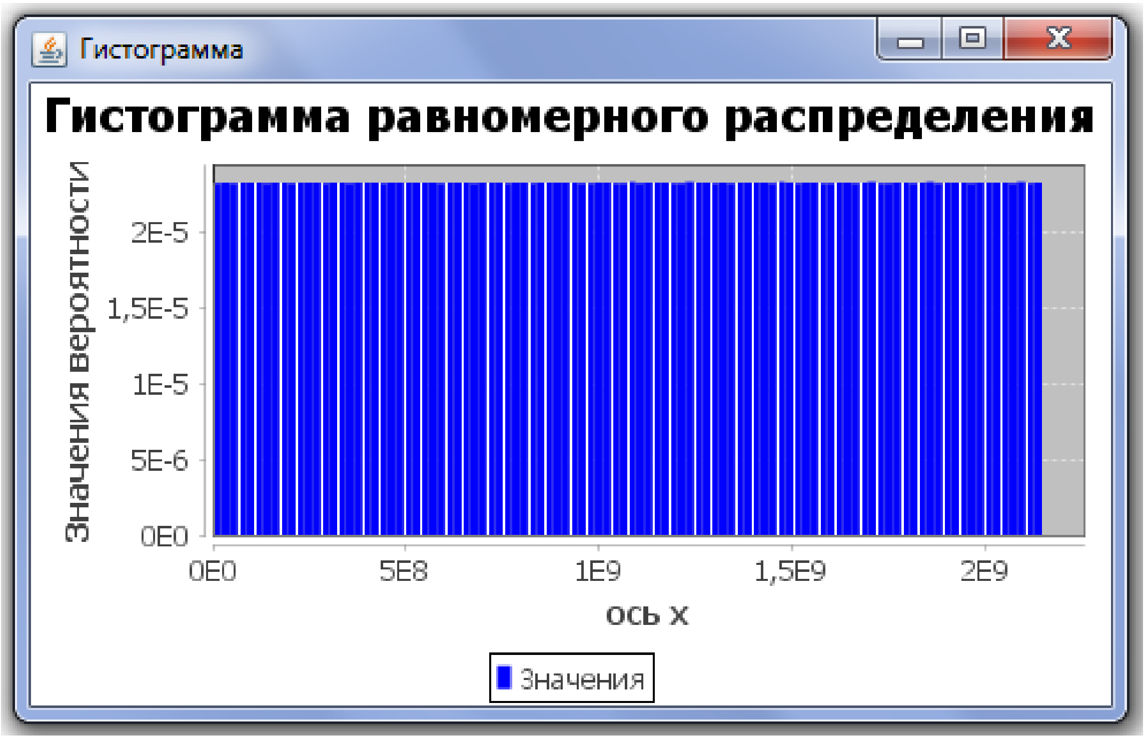


Рис.1.8. Гистограмма плотности распределения случайной величины с равномерным законом распределения, реализованного методом линейной конгруэнтной последовательности

Контрольные вопросы:

1. Какое распределение называется равномерным?
2. С помощью каких числовых характеристик определяют распределение псевдослучайной последовательности?
3. Назовите преимущества и недостатки метода генерации моделей случайных процессов с помощью встроенной функции генерации случайных чисел?
4. Как с помощью метода формирования моделей случайных процессов с использованием встроенной функции генерации случайных чисел получить псевдослучайную последовательность на отрезке от $[a;b]$?
5. Почему метод простых конгруэнций обладает низкой технологичностью?
6. Как параметры рекуррентной формулы, используемой в методе линейной конгруэнтной последовательности, влияют на цикличность получаемой псевдослучайной последовательности?
7. Как с помощью метода линейной конгруэнтной последовательности получить псевдослучайную последовательность на отрезке от $[0;1]$?

ЛАБОРАТОРНАЯ РАБОТА
КОНСТРУИРОВАНИЕ МОДЕЛЕЙ СЛУЧАЙНЫХ ПРОЦЕССОВ С РАСПРЕДЕЛЕНИЕМ СИМПСОНА

Целью лабораторной работы является исследование различных композиций моделей случайных процессов равномерно распределённых законом распределения.

Задача:

Разработать модуль программного продукта генерации псевдослучайной последовательности:

- с трапецеидальным законом распределения;
- с треугольным законом распределения.

Порядок выполнения лабораторной работы:

1. Изучить теоретические сведения о методах генерации псевдослучайных последовательностей с законом распределения Симпсона.
2. Разработать модуль программного продукта генерации псевдослучайных последовательностей с заданным законом распределения.
3. Провести серию экспериментов, используя разработанный модуль. На основе полученных результатов, определить влияние вводимых с клавиатуры параметров на формирование моделей случайных процессов с законом распределения Симпсона.
4. Оформить отчет о выполненной лабораторной работе.

Теоретические сведения

Как уже отмечалось в начале первой лабораторной работы, большинство моделей случайных процессов с заданным законом распределения можно получить с помощью дополнительного преобразования модели случайного процесса с равномерным законом распределения. И модель случайного процесса с Симпсона законом распределения не исключение.

Случайная величина X называется распределенной на отрезке $[a-l;a+l]$ по трапецеидальному закону (обобщенному закону Симпсона) распределения, если плотность распределения вероятностей на данном отрезке имеет вид:

$$f(x)=\begin{cases} \dfrac{x-a-l}{l^2-b^2}, & x\in[a-l;a-b]; \\ \dfrac{1}{l+b}, & x\in[a-b;a+b]; \\ \dfrac{a-l-x}{l^2-b^2}, & x\in[a+b;a+l]; \\ 0, & \text{иначе}\ , \end{cases} \tag{2.1}$$

где l – это половина области возможных значений, и определяется как сумма половин областей каждого исходного равномерно распределенного распределения l_1, l_2;

a – это центр области возможных значений $[a-l;a+l]$, равный математическому ожиданию;

b – половина горизонтального участка кривой распределения, равный $|l_2-l_1|$.

Как видно из графика плотности распределения трапецеидального, представленного на *рис.2.1*, данное распределение получается комбинацией двух равномерно распределенных случайных процессов разной шириной распределения.

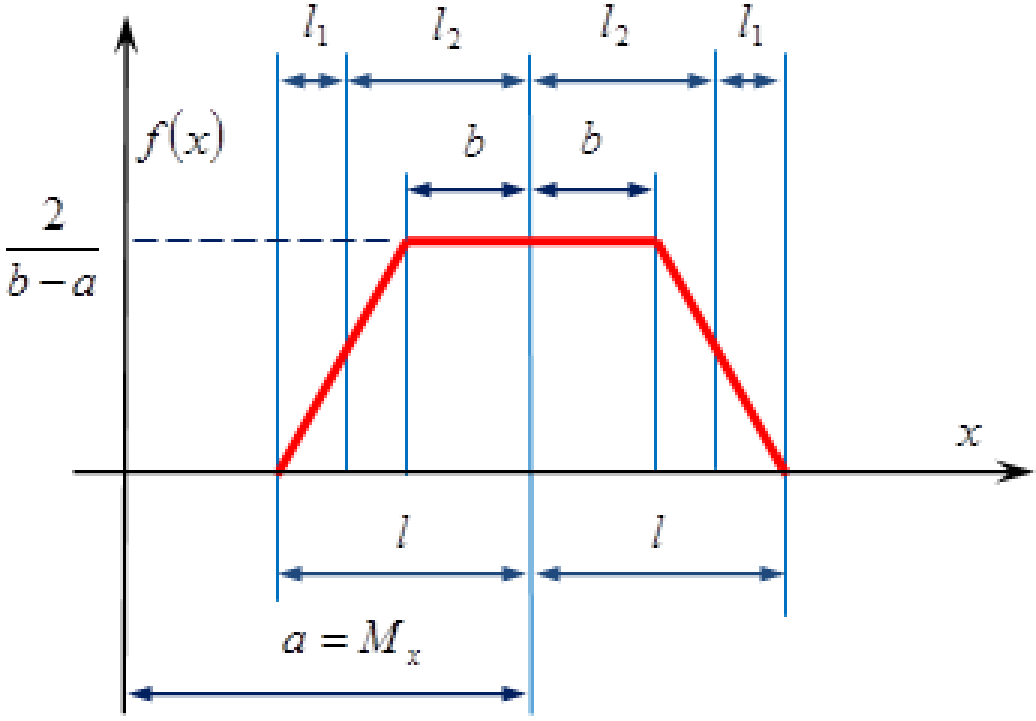


Рис.2.1. График плотности распределения случайной величины с обобщенным законом распределения

Математическое ожидание M_X трапецеидально распределенной случайной величины определяется по следующей формуле:

$$M_X = a.$$

Дисперсия трапецеидально распределенной случайной величины равна:

$$D_X = \frac{l^2 + b^2}{6}.$$

Если же ширина распределения двух независимых равномерно распределённых случайных процессов l_1 и l_2 будут одинаковыми, то будет получен частный случай трапецеидального закона распределения – треугольный закон распределения.

Случайная величина X называется распределенной на отрезке $[a;b]$ по треугольному закону распределения Симпсона, если её плотность распределения вероятностей на данном отрезке имеет вид:

$$f(x)=\begin{cases} 0, & x \notin [a;b]; \\ \dfrac{4(x-a)}{(b-a)^2}, & x \in \left[a;\dfrac{a+b}{2}\right]; \\ \dfrac{4(b-x)}{(b-a)^2}, & x \in \left[\dfrac{a+b}{2};b\right]. \end{cases} \tag{2.2}$$

Как видно, на *рис.2.2* плотность распределения Симпсона отлична от нуля только в заданном отрезке $[a;b]$, но, в отличие от равномерного распределения, не является на нём постоянной, а имеет треугольный вид.

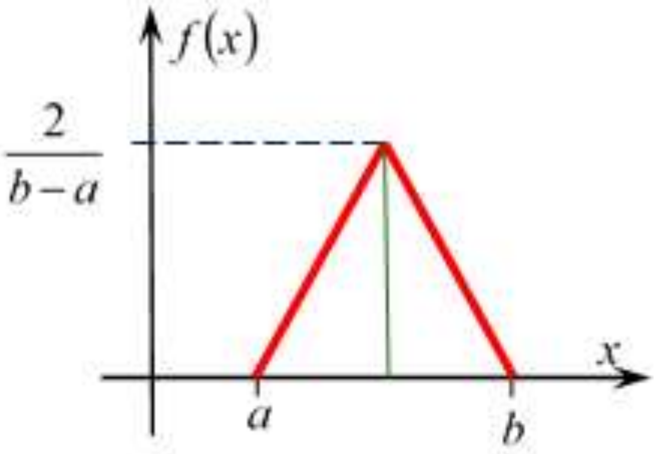


Рис.2.2. Графика плотности распределения случайной величины с треугольным законом распределения

При этом функция треугольного распределения Симпсона левее точки a равна нулю и правее b равна единице, а в отрезке $[a;b]$ имеет выражение:

$$F(x)=\begin{cases} 0, & x<a; \\ \dfrac{2(x-a)^2}{(b-a)^2}, & x \in \left[a;\dfrac{a+b}{2}\right]; \\ 1-\dfrac{2(b-x)^2}{(b-a)^2}, & x \in \left[\dfrac{a+b}{2};b\right]; \\ 1, & x>b. \end{cases} \tag{2.3}$$

Математическое ожидание M_X треугольно распределенной случайной величины определяется по следующей формуле:

$$M_X = \frac{a+b}{2}.$$

Дисперсия треугольно распределенной случайной величины равна:

$$D_X = \frac{(b-a)^2}{24}.$$

Для реализации функции конструирования модели случайного процесса с трапецеидальным и треугольным распределением воспользуемся тем фактом, что данные распределения Симпсона можно рассматривать как композицию двух моделей случайных процессов с равномерным законом распределения. Т.е. для определения элемента последовательности с заданным законом распределения можно использовать соотношение $X_i = y + z$, где y и z – независимые случайные величин, распределенные равномерно на отрезках различной ширины l_1и l_2 для трапецеидального и отрезках одинаковой ширины $\left[\frac{a}{2};\frac{b}{2}\right]$ для треугольного законов распределений.

<u>Отчет о выполненной лабораторной работе.</u>

Отчет о выполненной лабораторной работе должен быть оформлен в соответствии с требованиями, изложенными в начале методических указаний в разделе общие сведения.

Пример оформления результатов выполненной лабораторной работы для трапецеидального и треугольного закона распределения случайной величины приведен ниже на рис. 2.3-2.5 (пункт 3 отчёта).

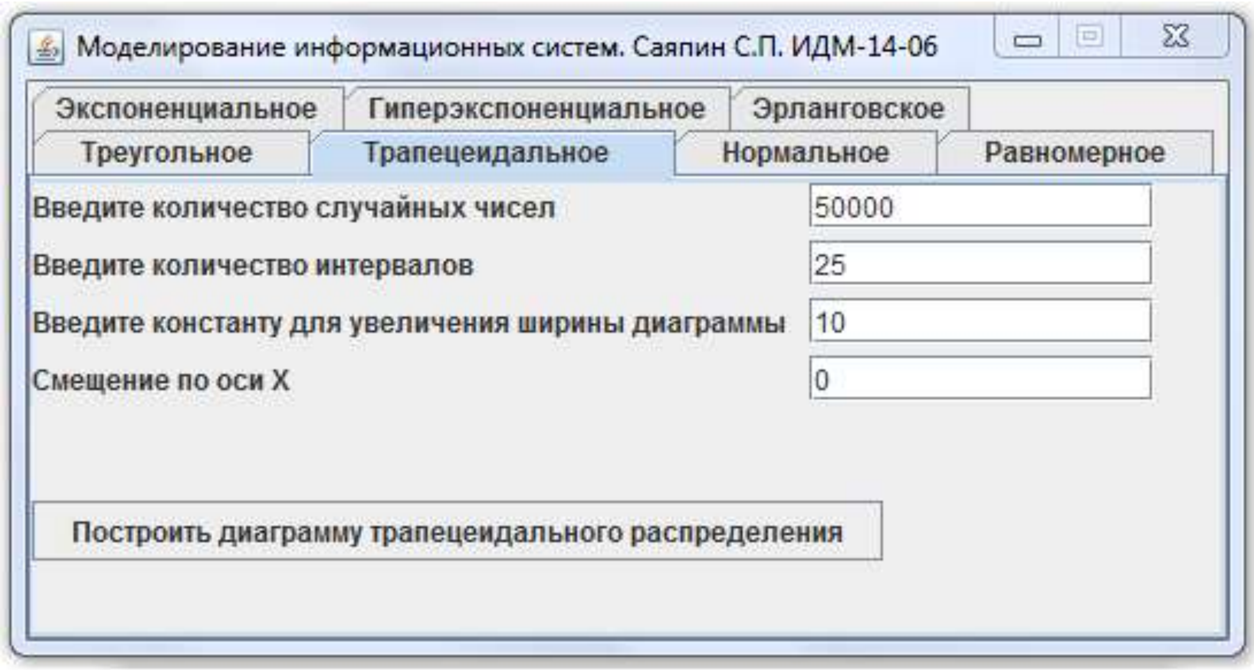


Рис.2.3. Гистограмма распределения псевдослучайной последовательности с обобщенным законом распределения Симпсона (трапецеидальное)

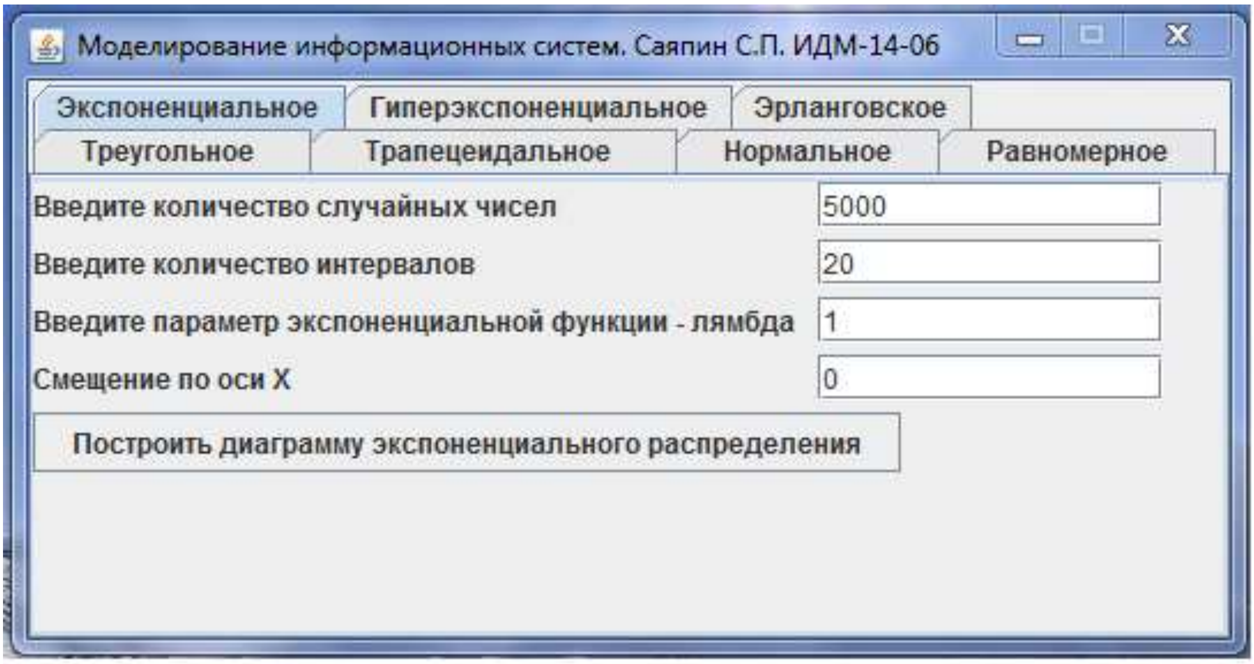


Рис.2.4. Гистограмма распределения псевдослучайной последовательности с треугольным законом распределения

Рис.2.5. Вариант представления результатов моделирования псевдослучайной последовательности с треугольным законом распределения в виде гистограммы плотности распределения

Контрольные вопросы:

1. Чем отличается метод конструирования моделей случайного процесса с треугольным законом распределения от трапецеидального?
2. Модель случайного процесса какого закона распределения получится, если для композиции использовать модели случайных процессов равномерно распределенных на отрезках одинаковой ширины, но имеющих различные начальные значения для генерации псевдослучайных последовательностей?
3. Можно ли получить модель случайного процесса распределенного по равномерному закону распределения композицией двух равномерно распределенных псевдослучайных последовательностей?
4. Как изменится график плотности распределения, если композиция будет состоять из большего количества псевдослучайных последовательностей с равномерным законом распределения?

ЛАБОРАТОРНАЯ РАБОТА
КОНСТРУИРОВАНИЕ МОДЕЛЕЙ СЛУЧАЙНЫХ ПРОЦЕССОВ С НОРМАЛЬНЫМ РАСПРЕДЕЛЕНИЕМ

Цель:

Исследование методов генерации псевдослучайных последовательностей с нормальным законом распределения.

Задача:

Разработать модуль пакета прикладных программ генерации псевдослучайной последовательности:

- методом, описанным в теоретической части данной лабораторной работы;
- любым другим методом, используемым для генерации моделей случайных процессов с нормальным законом распределения.

Порядок выполнения лабораторной работы

1. Изучить теоретические сведения о методе генерации псевдослучайных последовательностей с нормальным (Гауссова) законом распределения.
2. Изучить с помощью свободной литературы дополнительные методы конструирования модели случайного процесса с нормальным (Гауссова) законом распределением и выбрать один из них для реализации в модуле программного продукта.
3. Разработать модуль программного продукта генерации псевдослучайных последовательностей с заданным законом распределения двумя методами. В разрабатываемом модуле должна быть реализована возможность графического представления полученных результатов по двум методам одновременно.
4. Провести серию экспериментов, используя разработанный метод, для определения лучшего метода.
5. Оформить отчет о выполненной лабораторной работе.

Теоретические сведения

Нормальное распределение или распределение Гаусса является наиболее универсальным, удобным и широко применяемым. Этому закону распределения подчиняются многие природные явления и процессы. Он занимает особое место в теории вероятности, теории надежности информационных систем и теории обработки экспериментальных данных. А основная особенность данного закона распределения, выделяющая его среди других законов, состоит в том, что он является предельным законом, к которому приближаются другие законы распределения при весьма часто встречающихся типичных условиях.

Случайная величина X называется распределенной по нормальному закону с параметрами σ_X и M_X, если плотность распределения вероятностей определяется как:

$$f(x) = \frac{1}{\sigma_X \sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-M_X)^2}{2\sigma_X{}^2}}, \tag{3.1}$$

где M_X – математическое ожидание, а σ_X – среднеквадратичное отклонение случайной величины.

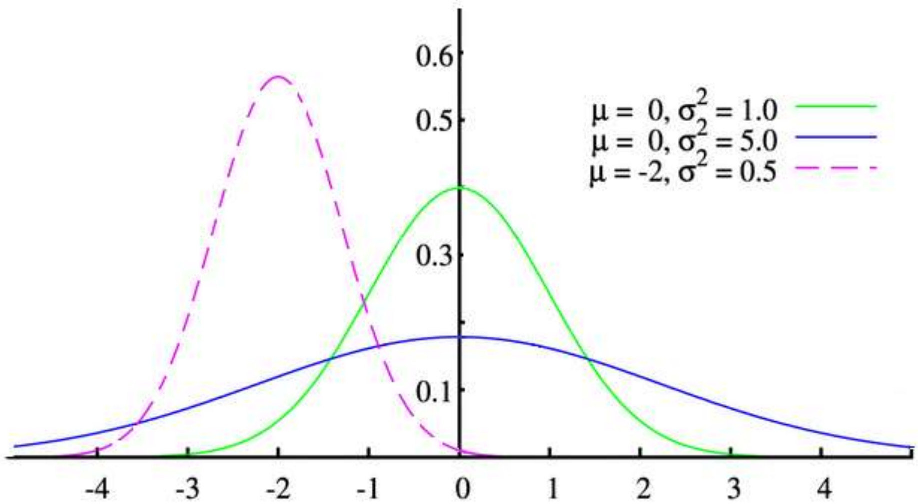


Рис.3.1. График плотности нормального закона распределения

При этом функция распределения:

$$F(x)=\frac{1}{\sigma_x\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{x}e^{-\frac{(x-M_x)^2}{2\sigma_X{}^2}}dx. \tag{3.2}$$

Если $M_X=0$ и $\sigma_X=1$, то такое нормальное распределение называется *нормализованным нормальным распределением*.

Непосредственное использование выражения $F(x)$ для расчета случайной величины, распределенной по нормальному закону, требует сравнительно больших затрат, так как связано с численным решением не поддающегося аналитическому расчету интеграла. А т.к. нормальный закон распределения встречается в природе весьма часто, для него разработаны отдельные эффективные методы моделирования.

Рассмотрим одно из возможных решений формирования модели случайных процессов, имеющей закон распределения, близкий к нормальному. Для этого воспользуемся предельной теоремой Ляпунова:

Если случайные величины $X_1, X_2, \ldots, X_n$ взаимно независимы; имеют математические ожидания $m_1, m_2, \ldots, m_n$, дисперсии $D_1, D_2, \ldots, D_n$ и третий абсолютный центральный момент, тогда при выполнении условия:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\sum_{k=1}^{n}\mathrm{E}|X_k-m_k|^3}{\left(\sum_{k=1}^{n}D_k\right)^{3/2}}=0,$$

распределение суммы этих величин близко к нормальному.

Иными словами, если предоставляется возможность рассматривать искомую случайную величину как сумму достаточно большого числа других случайных величин, то данная случайная величина обычно подчиняется нормальному закону распределения. Суммируемые случайные величины могут подчиняться каким угодно распределениям, но при этом должно выполняться условие их независимости (или слабой зависимости) и ничтожно малого влияния каждой из этих величин на всю сумму. При соблюдении некоторых не очень жестких условий указанная сумма случайных величин подчиняется приближенно нормальному закону распределения и тем точнее, чем большее количество величин суммируется. При этом ни одна из суммируемых случайных величин не должна резко отличаться от других, т. е. каждая из них должна играть в общей сумме примерно одинаковую роль и не иметь исключительно большую по сравнению с другими величинами дисперсию.

Предположим, что для имитации поведения информационной системы необходимо построить модель случайного процесса с нормальным законом распределения с математическим ожидаем и среднеквадратичным отклонением [1,5,6]. Тогда

1. Образуем модель случайного процесса $\{\xi_i\}$, имеющего статистические характеристики, отличающиеся от требуемых. Для формирования такого процесса можно применить алгоритм, изученный в первой лабораторной работе.
2. Полученную модель случайного процесса равномерно распределенного на интервале от 0 до 1 преобразуем по следующему правилу:

$$z_j = \sqrt{\frac{12}{n}}\left(\sum_{i=1}^{n}\xi_i - \frac{n}{2}\right), \tag{3.3}$$

где n - заданное число (обычно $n = 12$).

При этом полученная случайная величина z_j будет асимптотически нормальна с математическим ожиданием M_X, равным нулю и дисперсией D_X, равной 1.

3. После получения модель случайного процесса $\{z_i\}$ нормально распределенного на интервале от 0 до 1 может быть подвергнута коррекции для обеспечения заданных статистических характеристик по формуле:

$$y_i = M_X + \sigma_X \cdot z_i.$$

Из формулы видно, что операция масштабирования выражается в математической модели через умножение (это соответствует изменению разброса величины, растягиванию геометрического образа), операция смещения выражается через сложение (это соответствует изменению значения наиболее вероятной величины, смещению геометрического образа).

<u>Отчет о выполненной лабораторной работе.</u>

Отчет о выполненной лабораторной работе должен быть оформлен в соответствии с требованиями, изложенными в начале методических указаний в разделе общие сведения.

Пример оформления результатов выполненной лабораторной работы для экспоненциального закона распределения случайной величины приведен ниже на рис. 3.2-3.6 (пункт 3 отчёта).

Рис.3.2. Вариант представления результатов моделирования случайного процесса с нормальным законом распределения в виде гистограммы плотности распределения

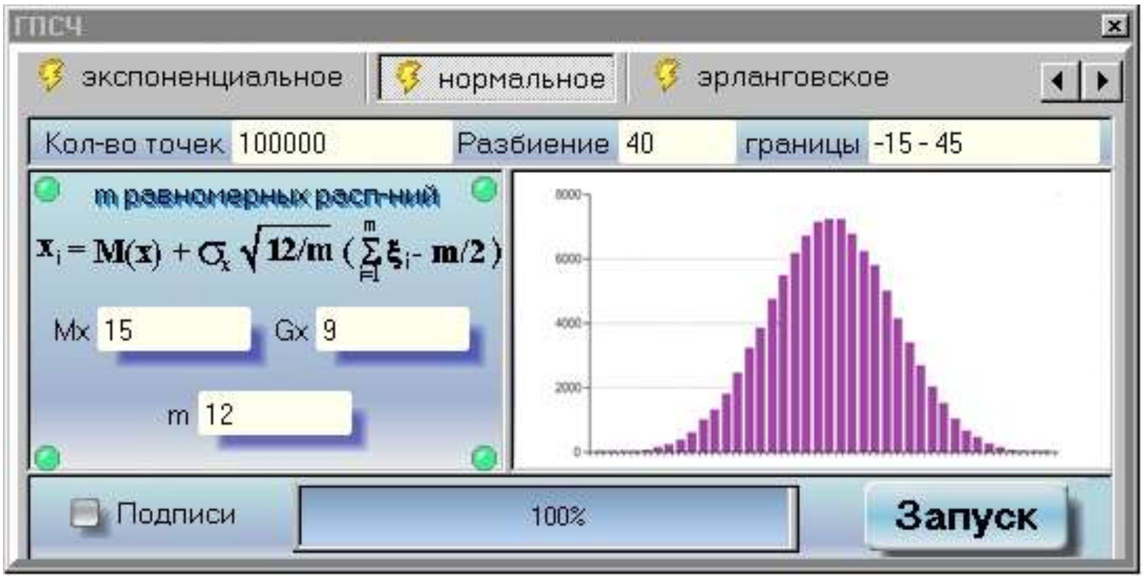


Рис.3.3. Вариант представления результатов формирования модели случайного процесса с нормальным законом распределения

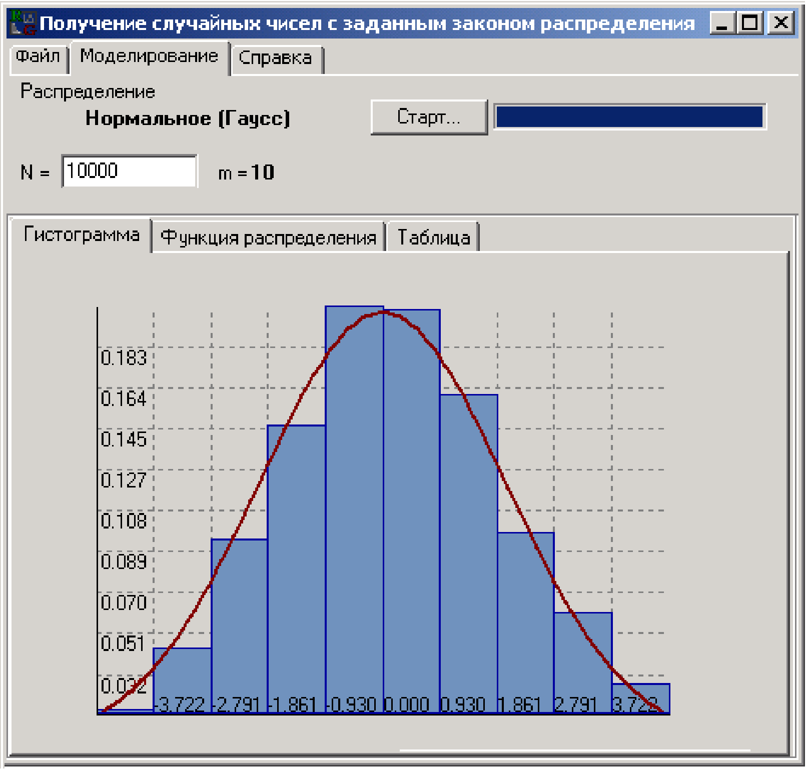


Рис.3.4. Вариант представления результатов формирования модели случайного процесса с нормальным законом распределения

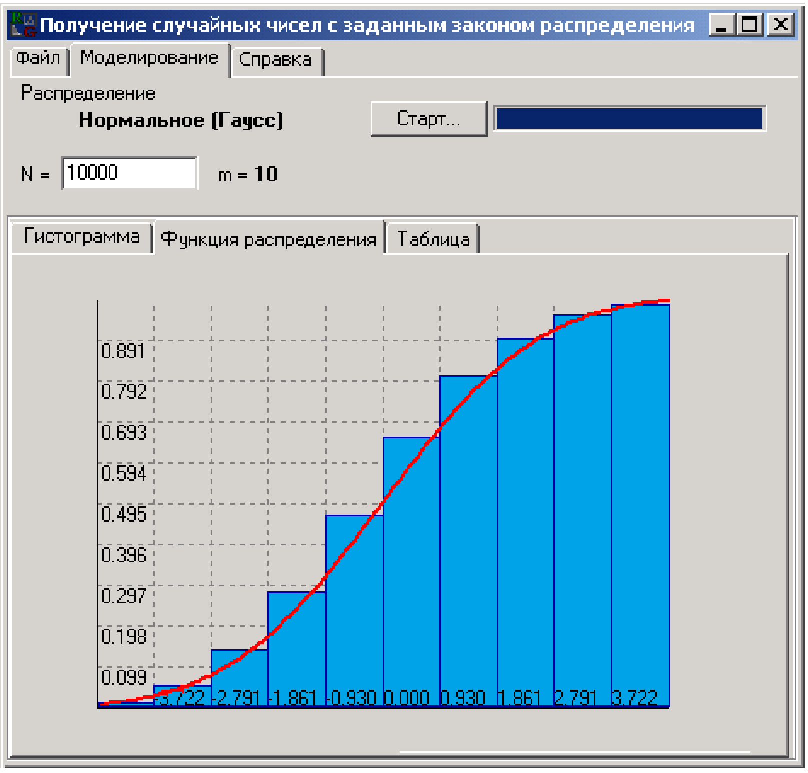


Рис.3.5. Вариант представления результатов формирования модели случайного процесса с нормальным законом распределения

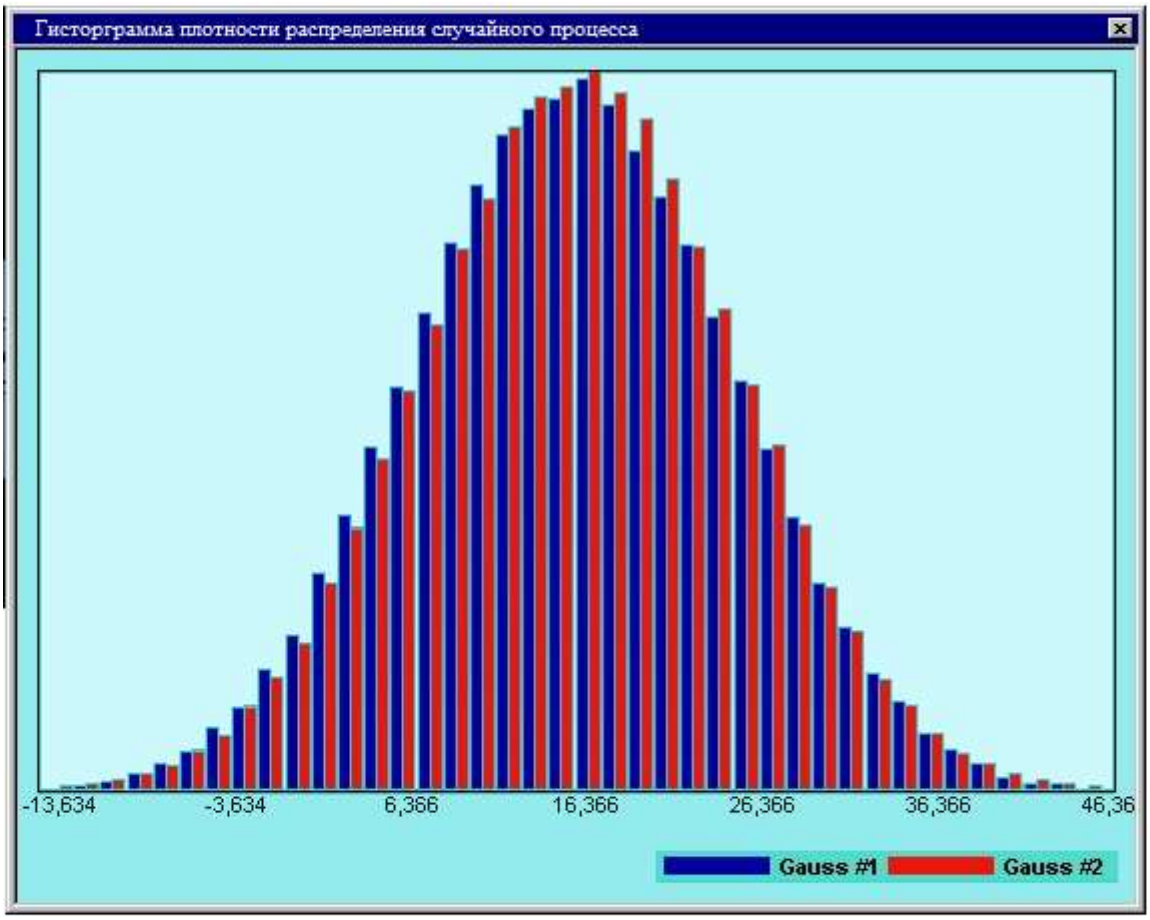


Рис.3.6. Гистограмма сравнения плотности распределения моделей случайного процесса с нормальным законом распределения, полученными разными методами

Контрольные вопросы:

1. Какая величина называется распределённой по нормальному закону?
2. Чему равен коэффициент вариации экспоненциального закона распределения?
3. Как параметр нормального распределения влияет на форму графика плотности?
4. Как получить случайный процесс, нормально распределенный на отрезке $[a;b]$?

ЛАБОРАТОРНАЯ РАБОТА
КОНСТРУИРОВАНИЕ МОДЕЛЕЙ СЛУЧАЙНЫХ ПРОЦЕССОВ С ЭКСПОНЕНЦИАЛЬНЫМ РАСПРЕДЕЛЕНИЕМ

Цель:

Исследование методов генерации псевдослучайных последовательностей с показательным законом распределения.

Задача:

Разработать модуль программного продукта генерации псевдослучайной последовательности:

- Экспоненциального закона распределения;
- Гиперэкспоненциального закона распределения.

Порядок выполнения лабораторной работы:

1. Изучить теоретические сведения о методе генерации псевдослучайных последовательностей с Гауссова законом распределения.
2. Разработать модуль программного продукта генерации псевдослучайных последовательностей с заданным законом распределения двумя методами. В разрабатываемом модуле должна быть реализована возможность графического представления по двум методам одновременно.
3. Провести серию экспериментов, используя разработанный программный модуль.
4. Оформить отчет о выполнении лабораторной работы.

Теоретические сведения

Экспоненциальное распределение широко применяется при моделировании информационных систем для описания случайных процессов, протекающих в информационных системах. Это объясняется тем, что экспоненциальное распределение обладает замечательным свойством, присущим только этому распределению, благодаря которому для многих моделей удается получить достаточно простые аналитические результаты в явном виде. Хотя распределение реальных процессов, протекающих в информационной системе, часто существенно отличаются от экспоненциального, использование последнего позволяет получить во многих случаях оценку для более напряженного режима обслуживания системы.

Случайная величина X называется распределённой по ***экспоненциальному закону*** распределения с параметром λ, если её плотность распределения вероятностей определяется по формуле (4.1), а функции – по формуле (4.2):

$$f(x)=\begin{cases} 0, & x<0; \\ \lambda e^{-\lambda x}, & x\ge 0. \end{cases} \qquad (4.1)$$

$$F(x)=\begin{cases} 0, & x<0; \\ 1-e^{-\lambda x}, & x\ge 0. \end{cases} \qquad (4.2)$$

Кривая плотности распределения случайной величины по экспоненциального распределению вероятностей от параметра λ показана на *рис.4.1*.

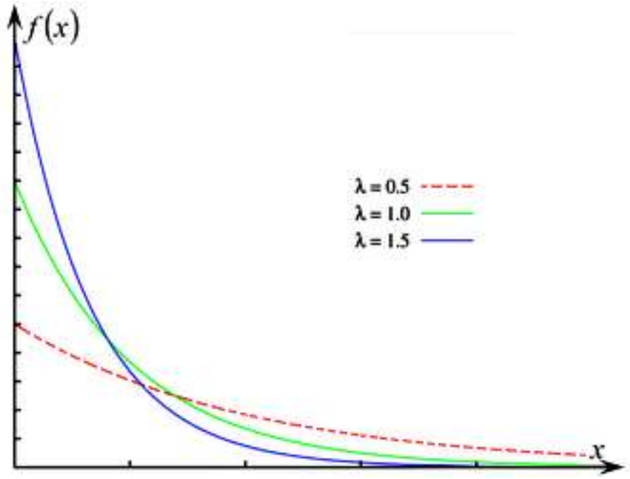


Рис.4.1. График плотности экспоненциального закона распределения в зависимости от параметра λ

Основные характеристики (математическое ожидание и дисперсия) случайной величины X, распределённой по экспоненциальному закону, имеют вид

$$M_X = \frac{1}{\lambda}; \qquad D_X = \frac{1}{\lambda^2}.$$

Замечательной особенностью экспоненциального распределения является то, что его коэффициент вариации не зависит от параметра λ и всегда равен единице.

Для моделирования случайных величин X_i, имеющих экспоненциальное распределение, можно воспользоваться методом обратного преобразования.

Суть метода сводится к тому, что для получения распределения с требуемым видом функции распределения $F(x)$, нужно применить обратную этому виду функцию $F^{-1}(x)$ к базовому равномерному распределению на интервале $[0;1]$. И далее полученное распределение привести в соответствие конкретным параметрам закона. Это делается смещением с помощью операций сложения/вычитания и масштабированием с помощью операций умножения/деления.

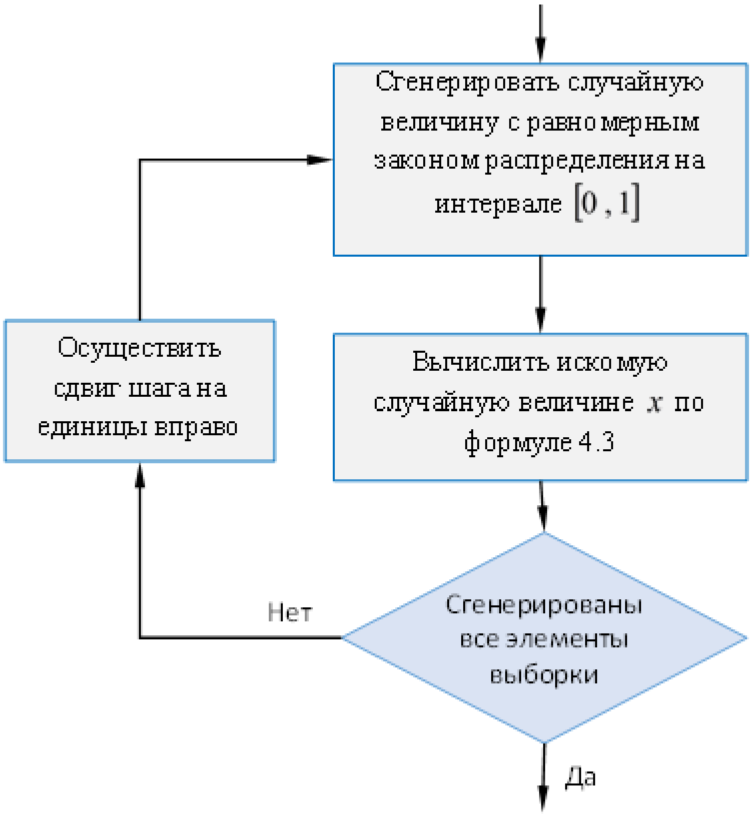


Рис.4.2. Алгоритм формирования элемента псевдослучайной последовательности с экспоненциальным законом распределения

Так для нахождения случайной величины, имеющей экспоненциальное распределение, методом обратного преобразования необходимо воспользоваться следующей рекуррентным отношением:

$$X_i = -\frac{1}{\lambda}\ln(\xi_i), \tag{4.3}$$

где ξ_i – элемент псевдослучайной последовательности равномерно распределенной на интервале от 0 до 1.

Полученная таким образом модель случайного процесса с показательным законом распределения, в дальнейшем может быть использована для конструирования других моделей случайных процессов с заданным законом распределения, например, случайные процессы, имеющие распределение гиперэкспоненциальное или Эрланга.

Гиперэкспоненциальное распределение случайной величины является обобщением экспоненциального (показательного) распределения на случай, когда коэффициент вариации больше единицы.

Как следует из названия гиперэкспоненциальное распределение некоторым образом связано с экспоненциальным и представляет собой аддитивную смесь разных экспоненциальных распределений. Процесс моделирования случайных величин с гиперэкспоненциальным распределением из экспоненциально распределенных случайных величин может быть представлен следующим образом.

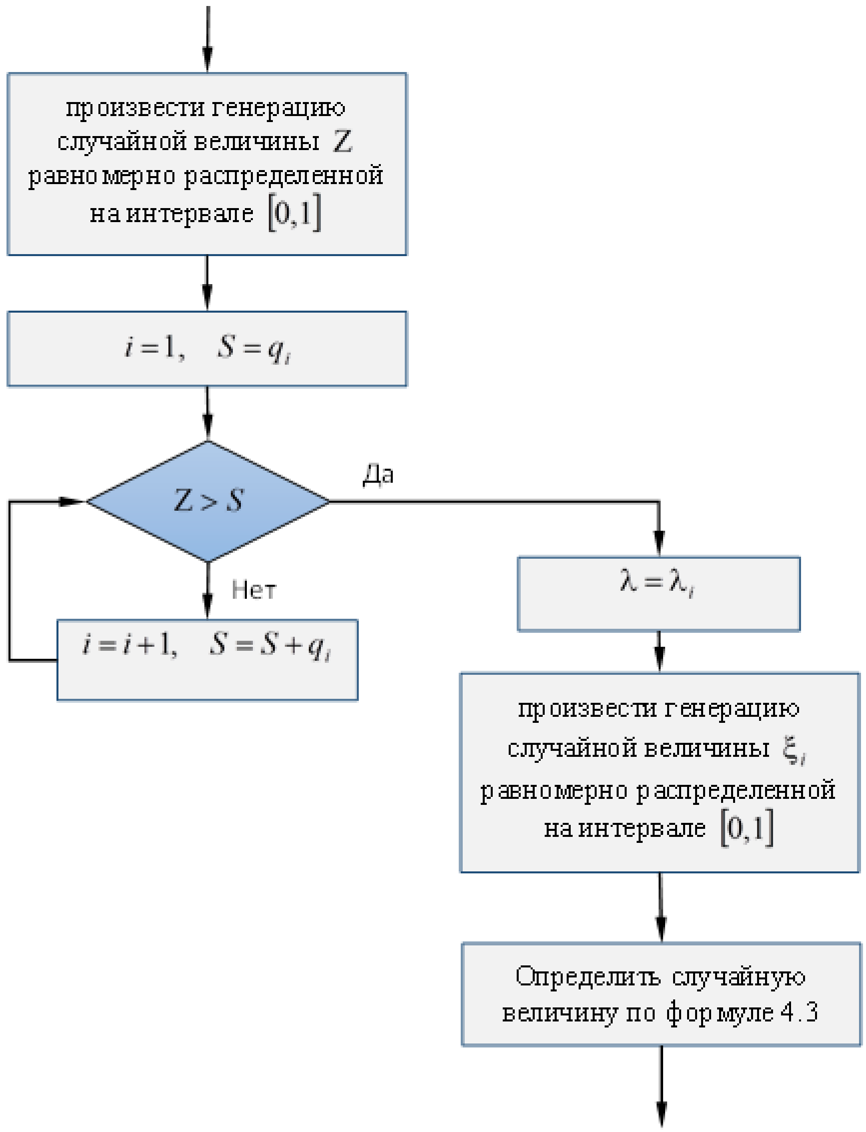


Рис.4.3. Алгоритм формирования элемента псевдослучайной последовательности с гиперэкспоненциальным законом распределения

Положим, что имеется n разных генераторов случайных величин распределенных по экспоненциальному закону с параметрами $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$, соответственно, причем $\lambda_i \neq \lambda_j$ для всех $i \neq j$ $(i, j = \overline{1,n})$. Пусть в результате одного опыта с вероятностью q_i вырабатывается только одна случайная величина i-м генератором с параметром λ_i $(i = \overline{1,n})$. Совокупность случайных величин, полученных в результате проведения множества таких опытов, будет распределена по гиперэкспоненциальному закону.

Случайная величина X считается распределенной по **гиперэкспоненциальному закону**, если её функция распределения (интегральная функция) имеет вид:

$$F(x) = 1 - \sum_{1}^{n} q_i e^{-\lambda_i x}, \qquad (4.4)$$

где n – число различных генераторов случайных величин с экспоненциальным законом распределения,

λ_i – параметр распределения на *i*-ом генераторе ($\lambda_i \geq 0$),

q_i – вероятность выбора случайной величины на *i*-ом генераторе ($0 < q_i < 1$, $\sum_{i=1}^{n} q_i = 1$).

Из выше сказанного следует, что для генерации простейшего случайного процесса с гиперэкспоненциальным распределением могут быть использованы два случайных процесса с экспоненциальным распределением. Тогда функция (4.5) и плотность (4.6) гиперэкспоненциального распределения будут иметь вид:

$$F(x) = q\left(1 - e^{-\lambda_1 x}\right) + (1-q)\left(1 - e^{-\lambda_2 x}\right), \qquad (4.5)$$

$$f(x) = q\lambda_1 e^{-\lambda_1 x} + (1-q)\lambda_2 e^{-\lambda_2 x}. \qquad (4.6)$$

Заметим, что данное гиперэкспоненциальное распределение (4.5) является трехпараметрическим, то есть содержит три независимых параметра: λ_1, λ_2, q. Следовательно, аппроксимация реальных распределений гиперэкспоненциальным может осуществляться по трем моментам распределения.

<u>Отчет о выполененой лабораторной работе.</u>

Отчет о выполненной лабораторной работе должен быть оформлен в соответствии с требованиями, изложенными в начале методических указаний в разделе общие сведения.

Пример оформления результатов, полученных при выполнении лабораторной работы, формирования случайного процесса с экспоненциальным законом распределения приведен ниже на рис. 4.4-4.5 (пункт 3 отчёта).

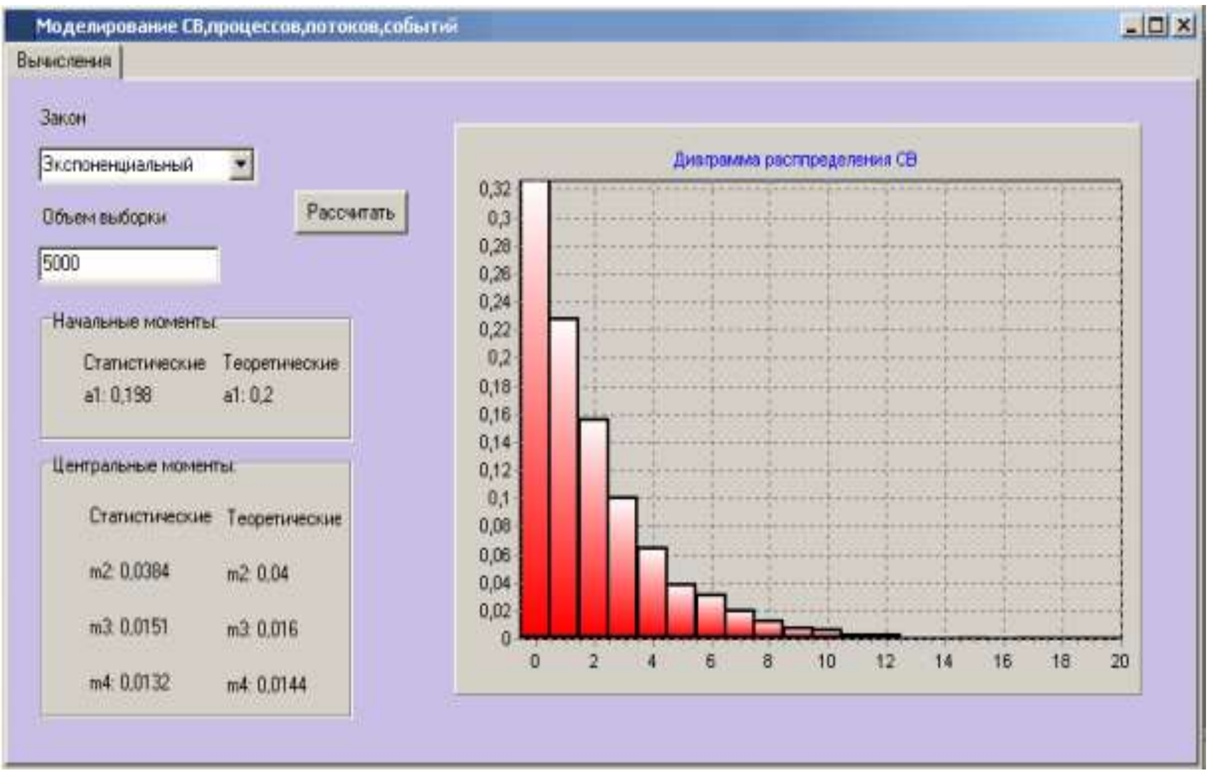


Рис.4.4. Гистограмма распределения модели случайного процесса с экспоненциальным законом распределения

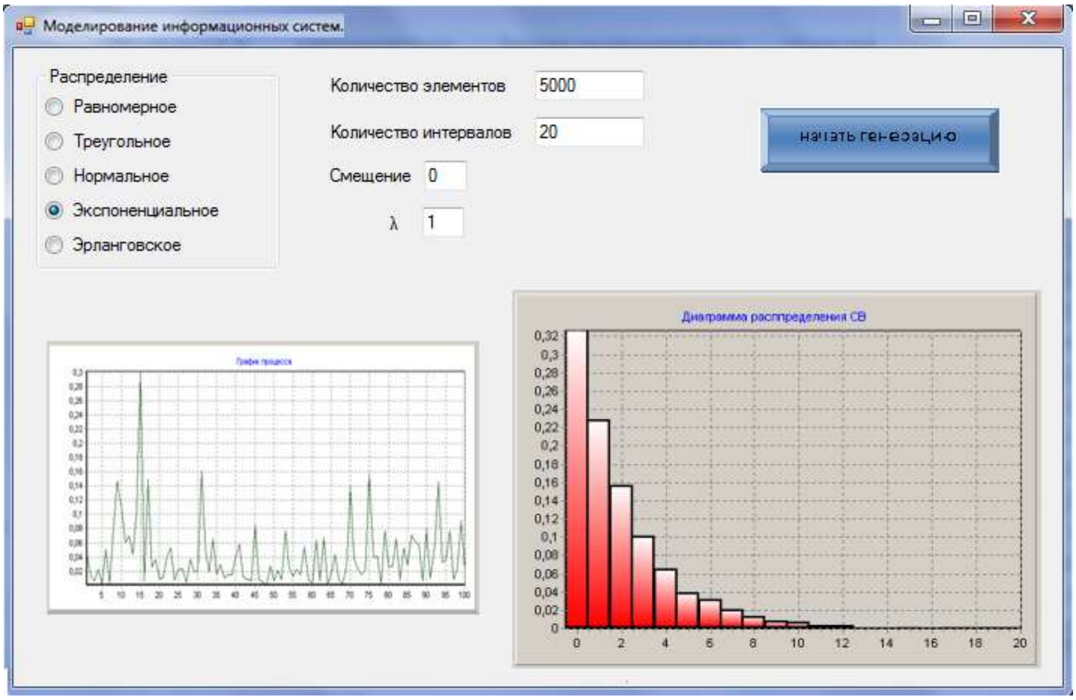


Рис.4.5. Экранная форма, отображающая и график случайного процесса с экспоненциальным распределением, и гистограмму распределения этого же случайного процесса

Пример оформления результатов выполненной лабораторной работы для гиперэкспоненциального закона распределения случайной величины приведен ниже на рис. 4.6-4.7 (пункт 3 отчёта).

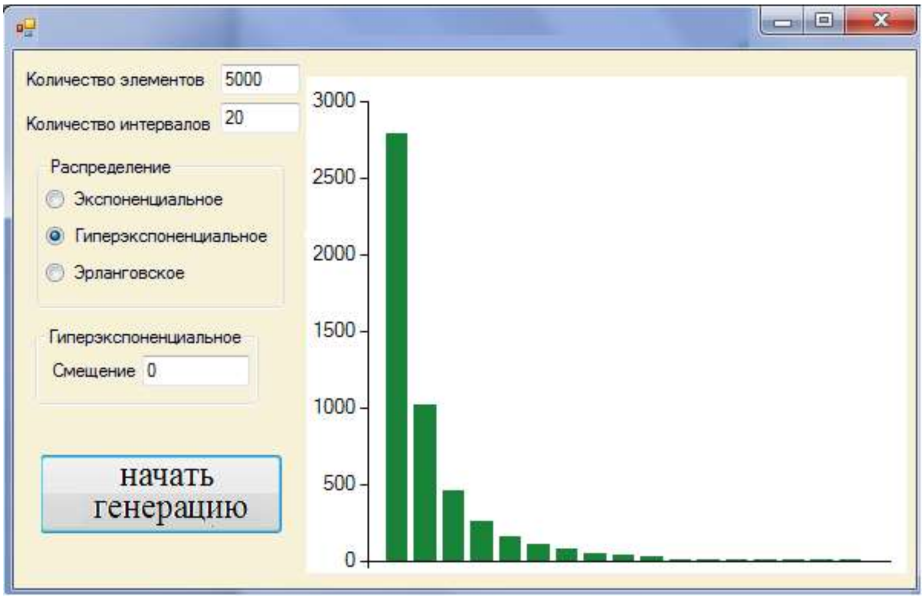


Рис.4.6. Экранная форма, отображающая результат моделирования случайного процесса с гиперэкспоненциальным законами распределения в виде гистограммы

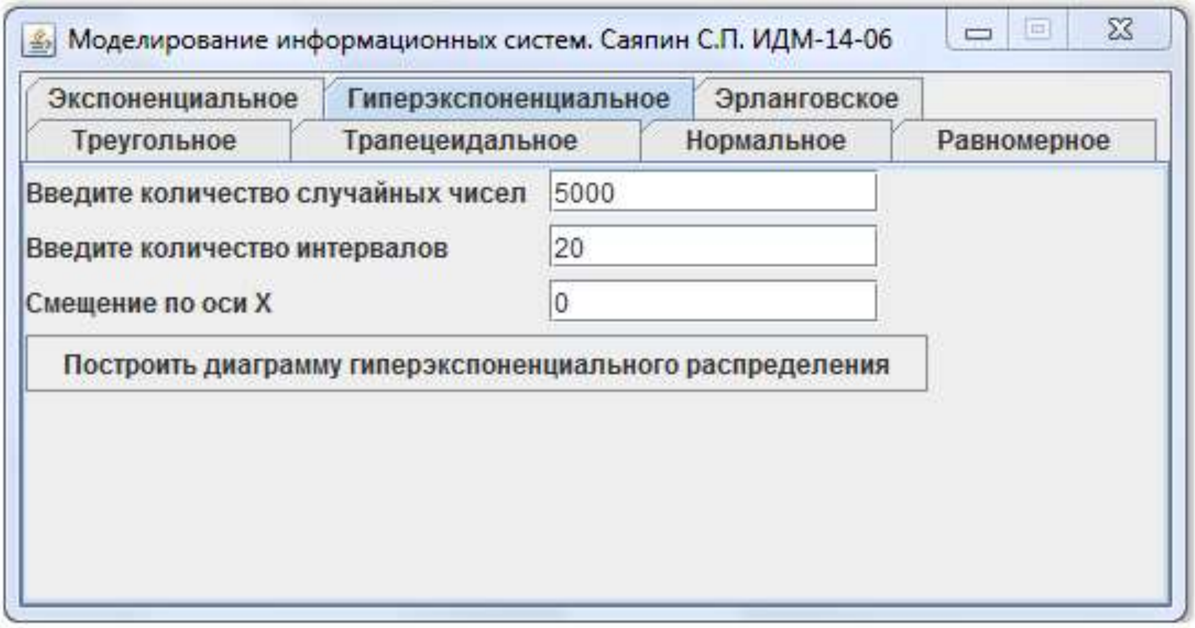


Рис.4.7. Экранная форма, отображающая результаты конструирования в виде гистограммы плотности распределения модели случайного процесса с гиперэкспоненциальным законом распределения

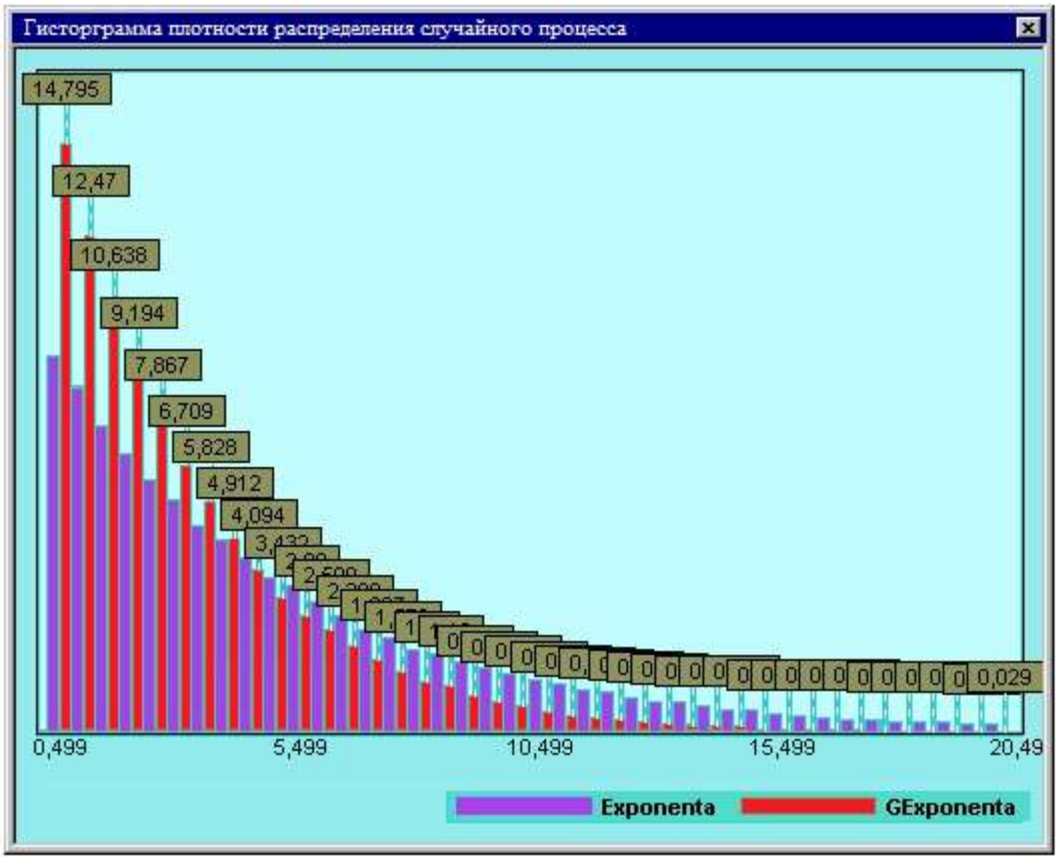


Рис.4.8. Экранная форма, отображающая сравнение гистограмм плотности распределения модели случайного процесса с экспоненциальным и гиперэкспоненциальным законами распределения

Контрольные вопросы:

1. Дайте определение случайной величины распределённой по экспоненциальному распределению.
2. Чему равен коэффициент вариации экспоненциального закона распределения?
3. Какой метод используется для формирования элементов случайного процесса, имеющего экспоненциальный закон распределения?
4. Как параметр λ влияет на плотности экспоненциального?
5. Какая случайная величина называется распределенной по гиперэкспоненциальному закону?
6. Сколько параметров необходимо будет учитывать при формировании модели случайного процесса по формуле (4.4)?

ЛАБОРАТОРНАЯ РАБОТА
КОНСТРУИРОВАНИЕ МОДЕЛЕЙ СЛУЧАЙНЫХ ПРОЦЕССОВ С РАСПРЕДЕЛЕНИЕМ ЭРЛАНГА

Цель:

Исследование методов генерации псевдослучайной последовательности с Эрланга законом распределения.

Задача:

Разработать модуль программного продукта генерации псевдослучайной последовательности с Эрланга законом распределения.

Порядок выполнения лабораторной работы:

1. Изучить теоретические сведения о методе генерации псевдослучайной последовательности с Эрланга законом распределения.
2. Разработать модуль программного продукта генерации псевдослучайной последоватлности с заданным законом распределения.
3. Провести серию экспериментов, используя разработанный метод.
4. Оформить отчет о выполнении лабораторной работы.

Теоретические сведения

Распределение Эрланга.

Распределение Эрланга получило широкое применение в теории массового обслуживания, экономике и менеджменте, теории и практике надежности и испытаний, в различных областях техники и т.д. В частности, распределению Эрланга подчинены во многих ситуациях такие величины, как интенсивность отказов элементов информационной системы, общий срок службы изделия, время наработки до k-го отказа и т.д.

Распределение Эрланга есть частный случай гамма-распределения, плотность вероятности которого имеет вид

$$f(x,a,b,c)=\begin{cases}\dfrac{1}{\Gamma(a)}(x-c)^{a-1}b^{-a}e^{-\frac{x-c}{b}}\\ 0\end{cases}. \tag{5.1}$$

Как видно из формулы (5.1) плотность вероятности определяется тремя параметрами: a – параметр формы $a>0, b$ – параметр масштаба $b>0$, c – параметр сдвига, и $\Gamma(a)$– одна из используемых в математике специальных функций, так называемая "гамма-функция", по которой названо и распределение, задаваемое формулой:

$$\Gamma(a)=\int_0^{\infty}x^{a-1}e^{-x}dx, \tag{5.2}$$

Множитель $1/\Gamma(a)$ является нормировочным, он введен, чтобы

$$\int_{-\infty}^{\infty}f(x,a,b,c)dx=1.$$

На *рис.5.1.* показаны кривые плотности распределения вероятностей непрерывной случайной величины в зависимости от параметра a.

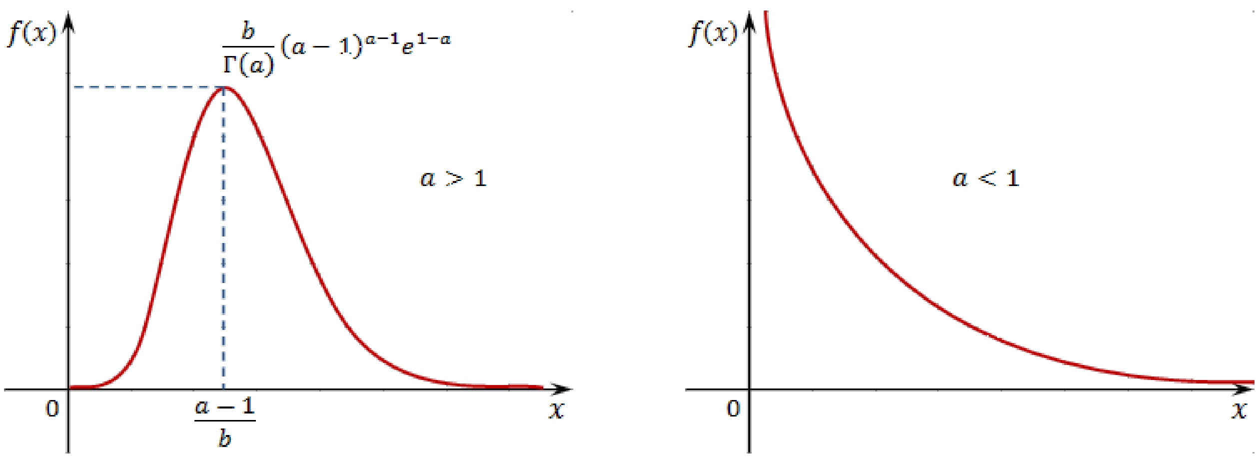


Рис.5.1. График плотности распределения гамма-распределения

При фиксированном a, $b=1$ и $c=0$ формула (5.1) задает масштабно-сдвиговое семейство распределений, порождаемое распределением с плотностью

$$f(x,a)=\begin{cases}\frac{1}{\Gamma(a)}x^{a-1}e^{-x}, & x\geq 0;\\ 0, & x<0.\end{cases}, \tag{5.3}$$

Распределение вида (5.3) называется ***стандартным*** гамма-распределением.

Если параметр a положим равным 1, то получим ***экспоненциальное*** распределение с параметром λ, где $\lambda=\frac{1}{b}$.

Если же параметр a может принимать любое значение из множества натуральных чисел, а параметр сдвига c равен нулю, то гамма-распределения называют ***распределением Эрланга***.

Случайная величина X называется распределенной по закону Эрланга k-го порядка, если плотность распределения вероятностей определяется как:

$$f(x)=\frac{a^k}{\Gamma(k)}x^{k-1}e^{-ax}, \tag{5.4}$$

где a и k – положительные параметры распределения.

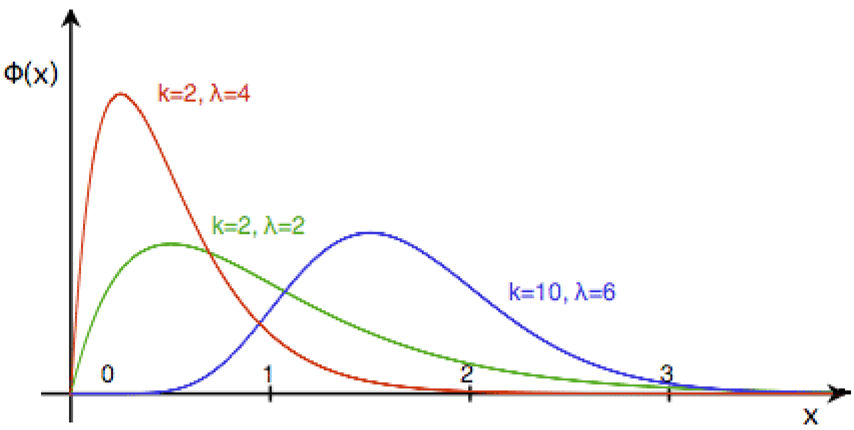


Рис.5.2 График плотности распределения Эрланга k-го порядка

Распределения Эрланга используют в тех же прикладных областях, в которых применяют экспоненциальные распределения. Это основано на том факте, что сумма k независимых случайных величин, экспоненциально распределенных с одинаковыми параметрами λ, имеет распределение Эрланга с параметром формы $a = k$, параметром масштаба $b = 1/\lambda$ и параметром сдвига c равным 0.

Из выше изложенного следует, что наиболее естественным и простым вариантом моделирования потока Эрланга является использование его физической сути, т.е. случайный процесс, распределенный по закону Эрланга, является суммой k случайных процессов с экспоненциальным распределением.

В таком алгоритме необходимо реализовать моделирование случайных величин появления потоков событий для экспоненциального распределения. Затем k таких величин складываются, в результате чего образуется случайная величина X, распределённая по закону Эрланга. Блок-схема алгоритма для этого варианта приведена на *рис. 5.3*.

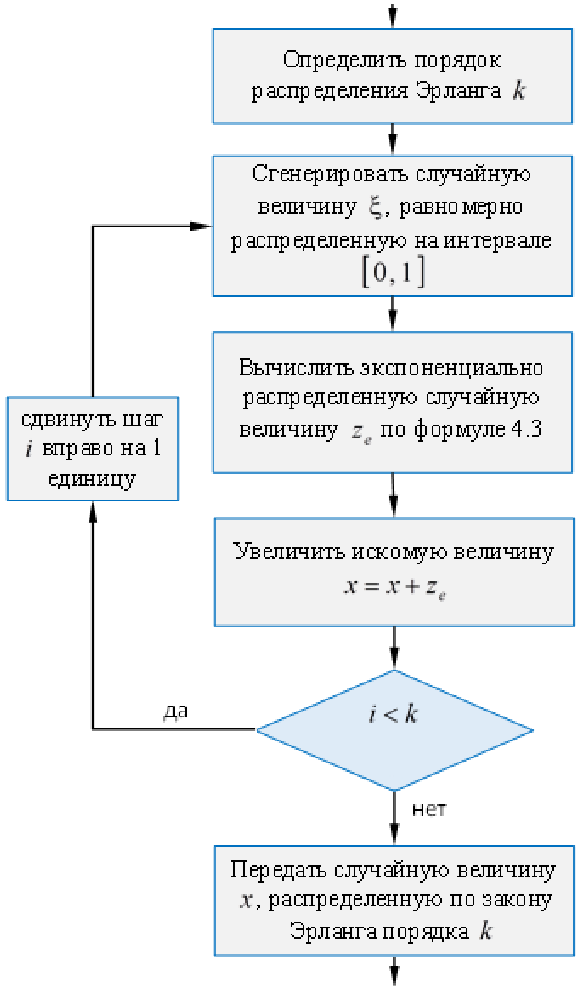


Рис.5.3. Алгоритм формирования элемента случайного потока распределенного по закону Эрланга k-го порядка

Отчет о выполнении лабораторной работы.

Отчет о выполненной лабораторной работе должен быть оформлен в соответствии с требованиями, изложенными в начале методических указаний в разделе общие сведения.

Пример оформления результатов, полученных во время выполнения лабораторной работы, для экспоненциального закона распределения случайной величины приведен ниже на рис. 5.4 - 5.6 (пункт 3 отчёта).

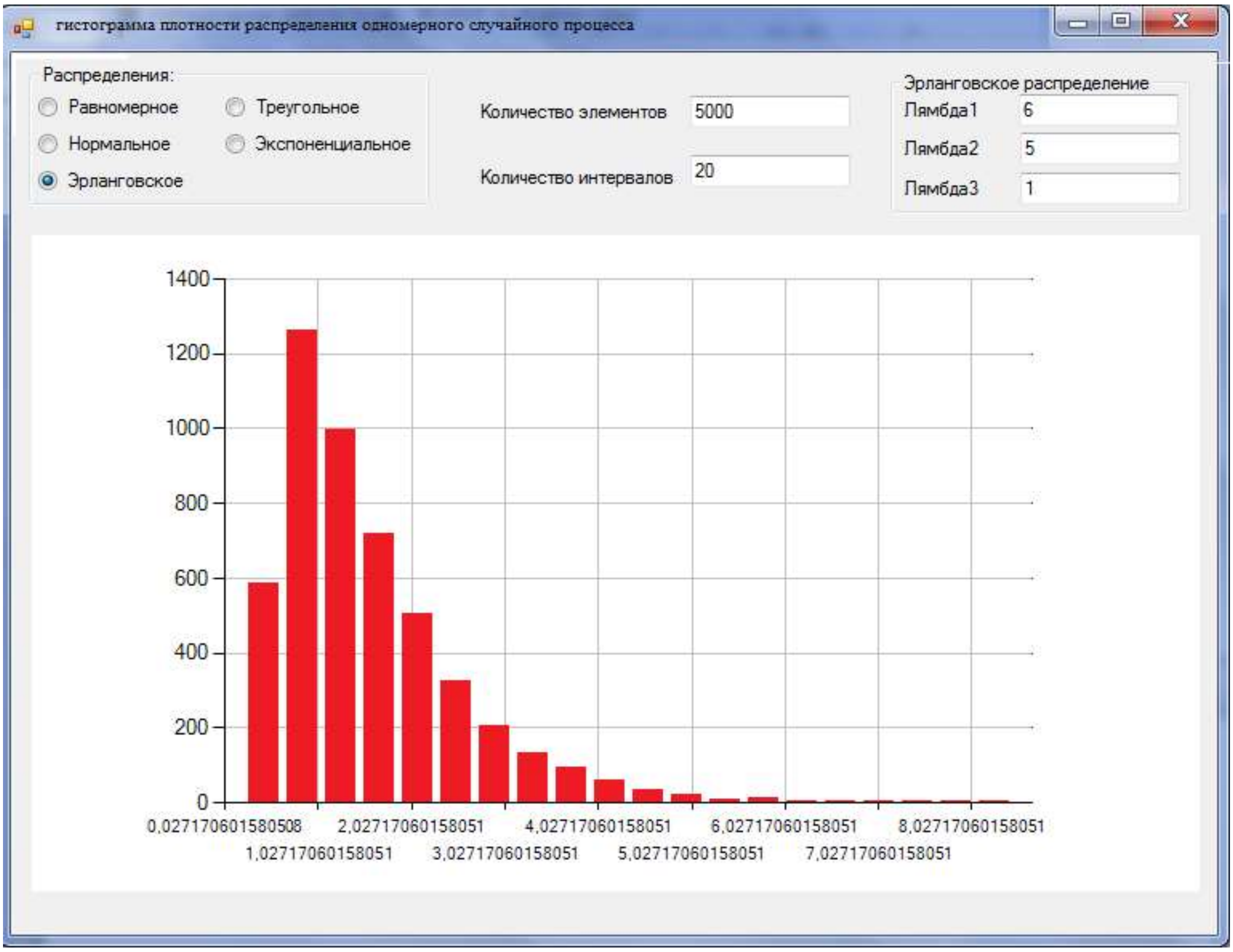


Рис.5.4. Гистограмма плотности распределения модели случайного процесса с законом распределения Эрланга третьего порядка

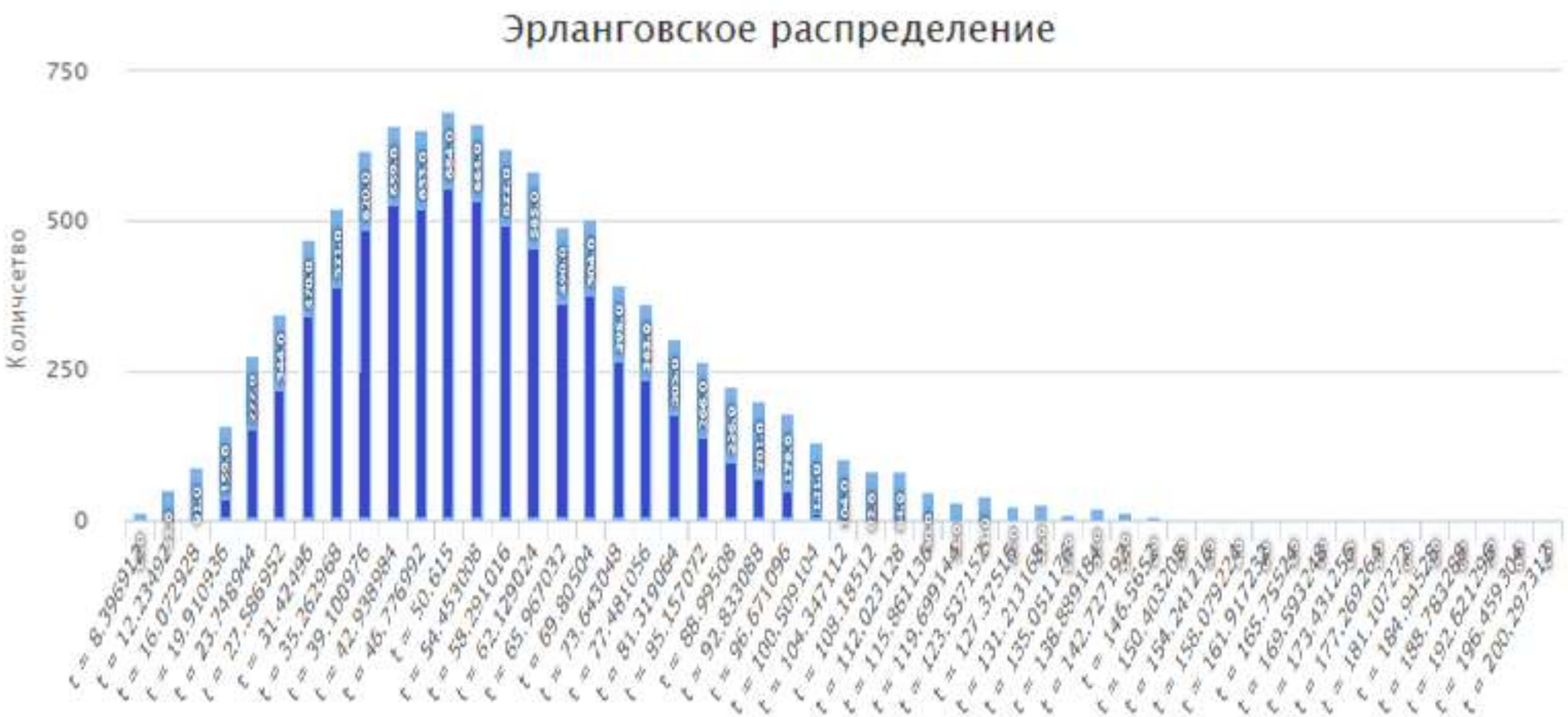


Рис.5.5. Вариант представления результатов моделирования случайного процесса с законом распределения Эрланга в виде гистограммы плотности распределения

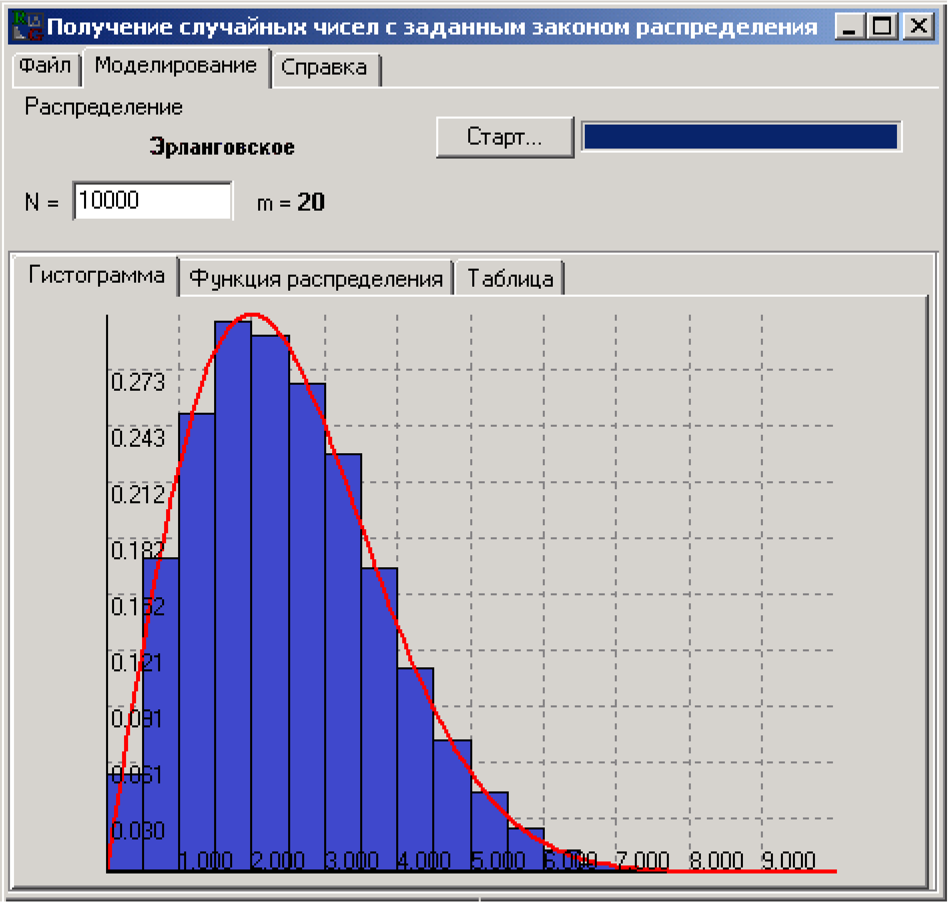


Рис.5.6. Вариант представления результатов формирования модели случайного процесса с законом распределения Эрланга

Контрольные вопросы:

1. Дайте определение случайной величины распределённой по распределению Эрланга.
2. В чем заключается суть метода формирования элементов случайного процесса , имеющего закон распределения Эрланга k-го порядка?
3. Как параметр k влияет на плотность распределения Эрланга k-го порядка?
4. Сколько параметров необходимо будет учитывать при формировании модели случайного процесса распределенного по закону Эрланга k-го порядка?

ЛАБОРАТОРНАЯ РАБОТА
ПОСТРОЕНИЕ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ МОДЕЛИ СИСТЕМЫ УПРАВЛЕНИЯ ОПТОВЫМ СКЛАДОМ МЕТОДОМ ИМИТАЦИОННОГО МОДЕЛИРОВАНИЯ
(ОДНОРОДНАЯ ГРАДУИРОВКА ВРЕМЕНИ)

Цель работы:

1. Создать логико-аналитическую математическую модель заданной системы и внешних воздействий.
2. Разработать программный модуль имитации функционирования системы с возможностью определении временных изменений состояния системы под влиянием внешних воздействий.
3. Получить серию выборок значений выходных параметров, по которым определяются основные вероятностные характеристики исследуемой системы.

Задача:

Разработать программный модуль, реализующий имитационную модель заданной системы. Используя разработанный программный продукт, провести серию экспериментов. Провести анализ эмпирических результатов моделирования. Найти оптимальные параметры системы, при которых системы будет удовлетворять заданным требованиям (вероятности невыполненных заказов потребителей при заданных R_j и l_j, которые обеспечивают 95% заявок потребителей).

Порядок выполнения лабораторной работы:

1. Изучить теоретические сведения о методах разработки имитационных моделей с однородной градуировкой времени.
2. Разработать программный продукт моделирования заданной системы с учетом индивидуальных заданий преподавателя на запросы потребителей продукции.
3. Провести серию экспериментов, используя разработанный программный продукт. Провести анализ эмпирических результатов моделирования.
4. Найти оптимальные входные параметры исследуемой системы, при которых ее работа будет удовлетворять заданным требованиям (вероятности невыполненных заказов потребителей).
5. Оформить отчет о выполнении лабораторной работы.

Теоретические сведения

Имитационное моделирование систем. Процедура имитационного моделирования

Метод имитационного моделирования заключается в создании логико-аналитической математической модели системы и внешних воздействий, имитации функционирования системы, т.е. в определении временных изменений состояния системы под влиянием внешних воздействий и в поучении выборок значений выходных параметров, по которым определяются их основные вероятностные характеристики. Данное определение справедливо для стохастических систем.

При исследовании детерминированных систем отпадает необходимость изучения выборок значений выходных параметров.

Модель системы со структурным принципом управления представляет собой совокупность моделей элементов и их функциональные взаимосвязи.

Модель элемента (агрегата, обслуживающего прибора) - это, в первую очередь, набор правил (***алгоритмов***) поведения устройства по отношению к выходным воздействиям (***заявкам***) и правил изменений состояний элемента. Элемент отображает функциональное устройство на том или ином уровне детализации. В простейшем случае устройство может находится в работоспособном состоянии или в состоянии отказа. В работоспособном состоянии устройство может быть ***занято,*** например, выполнение операции по обслуживанию заявки или быть ***свободным***. К правилам поведения устройства относятся правила выборки заявок из очереди; реакция устройства на поступление заявки, когда устройство занято или к нему имеется очередь заявок; реакция устройства на возникновение отказа в процессе обслуживания заявки и некоторые другие.

Имитационное моделирование — это метод исследования, который основан на том, что анализируемая динамическая система заменяется имитатором и с ним производятся эксперименты для получения об изучаемой системе. Роль имитатора зачастую выполняет программа ЭВМ.

Т.е. метод имитационного моделирования – это экспериментальный метод исследования реальной системы по ее модели, который сочетает особенности экспериментального подхода и специфические условия использования вычислительной техники.

При имитационном моделировании важную роль играет не только проведение исследуемой системы, но и планирование эксперимента с моделью, реализующую поведение исследуемой системы. Так в процессе имитационного моделирования приходится постоянно взаимодействовать со следующими элементами (*рис 6.1*):

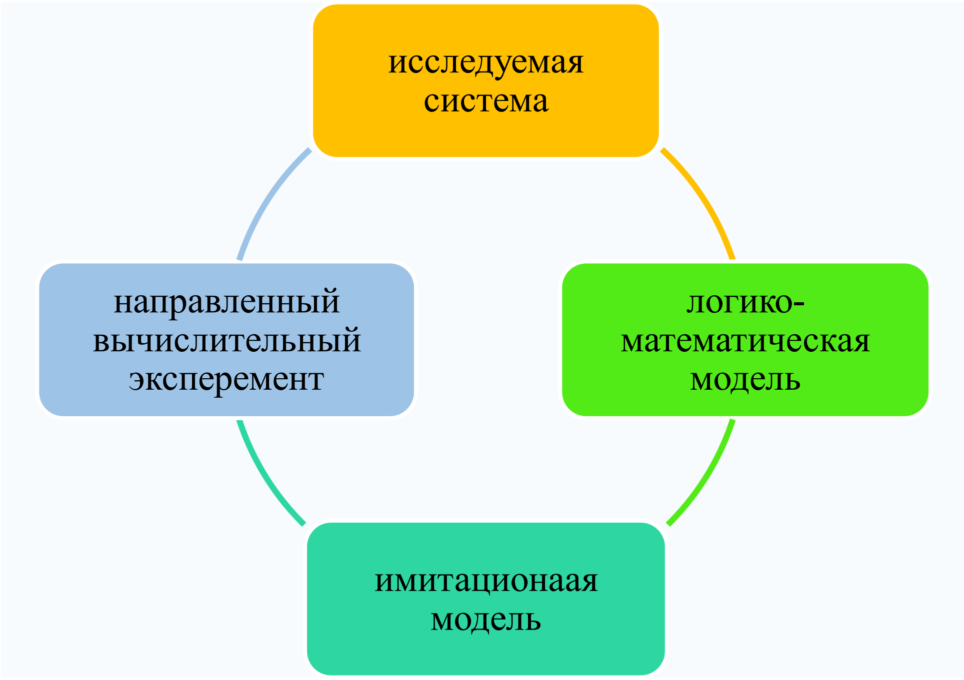


Рис.6.1. Основные элементы имитационного моделирования

Особенностью имитационного моделирования является то, что машинная модель позволяет воспроизводить исследуемые объекты:

- с сохранением их логической структуры;
- с сохранением динамики поведения исследуемой реальной системы, т.е. последовательности чередования во времени событий, происходящих в системе.

Основная идея метода имитационного моделирования состоит в следующем. Пусть необходимо определить функцию распределения случайной величины y. Допустим, что искомая величина y может быть представлена в виде зависимости: $y = f(x)$, где x случайные величины с известными функциями распределения.

Для решения задач такого вида применяется следующий алгоритм:

1) по каждой из величин x производится случайное испытание, в результате каждого определяется некоторое конкретное значение случайной величины x_i;

2) используя найденные величины, определяется одно частное значение y_i по выше приведённой зависимости;
3) предыдущие операции повторяются N раз, в результате чего определяется N значений случайной величины y_i;
4) на основании N значений величины находится её эмпирическая функция распределения.

Проще говоря, идея метода, с точки зрения программной реализации, состоит в следующем: элементам системы необходимо поставить в соответствие некоторые программные компоненты, а состояния этих элементов описывать с помощью переменных состояния. Т.к. элементы, по определению, взаимодействуют, значит, может быть реализован алгоритм функционирования элементов по отдельности. Кроме того, элементы существуют во времени, значит надо задать алгоритм изменения переменных состояний, что реализуется с помощью механизма продвижения модельного времени.

Особенностью метода является то, что получаемая в результате информация по своей природе аналогична той, которую можно получить в процессе исследования реальной системы. Однако её объем значительно больше и на ее получение затрачивается меньше сил и времени.

Метод имитации обычно используется для решения вероятностных задач. Практический интерес решения вероятностных задач заключается в том, что он позволяет решать задачи, не сформулированные в виде уравнений и формул.

Различные случайные величины, которые характеризуют отдельные стороны исследуемого процесса, воспроизводятся в соответствии с заданными законами распределения вероятностей.

Достоинства:

- Теоретической основой метода служит закон больших чисел, следовательно, этот метод основан на самых общих теоремах вероятности и принципиально не содержат никаких ограничений.

- Этот метод может быть применим для исследования любых систем с известным алгоритмом функционирования, а при достаточно большом числе измерений от него можно потребовать результат с любой точностью.
- Этот метод позволяет полнее учесть особенности функционирования исследуемых систем, использовать любые законы распределения исходных случайных величин.
- Метод имеет наглядную вероятностную трактовку.
- Имеет простую вычислительную схему и малую чувствительность к случайным сбоям в процессе работы системы.

Недостатки:

- Большая трудоемкость составления программы для моделирования.
- Частный характер полученных результатов.

Как уже ранее отмечалось, при имитационном моделировании, логическая структура реальной системы отображается в модели, а также имитируется динамика взаимодействий подсистем в моделируемой системе.

Для описания динамики моделируемых процессов в имитационном моделировании реализован механизм задания модельного времени. Этот механизм встраивается в управляющие программы системы моделирования.

Так если имитируется поведение одной компоненты системы, то выполнение действий в имитационной модели можно осуществить последовательно, по пересчету временной координаты.

А чтобы обеспечить имитацию параллельных событий реальной системы вводят некоторую глобальную переменную (обеспечивающую синхронизацию всех событий в системе) t_0, которую называют модельным (или системным) временем. На основе изменения этого модального времени выделяют два принципиальных подхода к формированию имитационной модели:

1) подход, основанный на однородной градуировке времени, или пошаговый (т.е. применяются фиксированные интервалы изменения модельного времени);
2) подход, основанный на неоднородная градуировке времени, или событийный (применяются переменные интервалы изменения модельного времени, при этом величина шага измеряется интервалом до следующего события.

В случае подхода, основанного на однородной градуировке времени, продвижение времени происходит с минимально возможной постоянной длиной шага. Эти алгоритмы не очень эффективны с точки зрения использования машинного времени на их реализацию.

Способ фиксированного шага применяется в случаях:

- если закон изменения от времени описывается интегро-дифференциальными уравнениями. Характерный пример: решение интегро-дифференциальных уравнений численным методом. В подобных методах шаг моделирования равен шагу интегрирования. Динамика модели является дискретным приближением реальных непрерывных процессов;
- когда события распределены равномерно и можно подобрать шаг изменения временной координаты;
- когда сложно предсказать появление определенных событий;
- когда событий очень много и они появляются группами.

В остальных случаях применяется событийный подход, например, когда события распределены неравномерно на временной оси и появляются через значительные временные интервалы или носят случайный характер появления.

При событийном подходе координаты времени меняются тогда, когда изменяется состояние системы. В событийном методе длина шага временного сдвига максимально возможная. Модельное время с текущего момента изменяется до ближайшего момента наступления следующего события. Применение событийного метода предпочтительнее в том случае, если частота наступления событий невелика. Тогда большая длина шага позволит ускорить ход модельного времени. На практике событийный метод получил наибольшее распространение.

В данной лабораторной работе познакомимся с первым методом.

Метод построения имитационной модели, основанный на однородной градуировке времени

Данный алгоритм реализует принцип постоянного приращения модельного времени (принципа Δt), представлен на следующем рисунке:

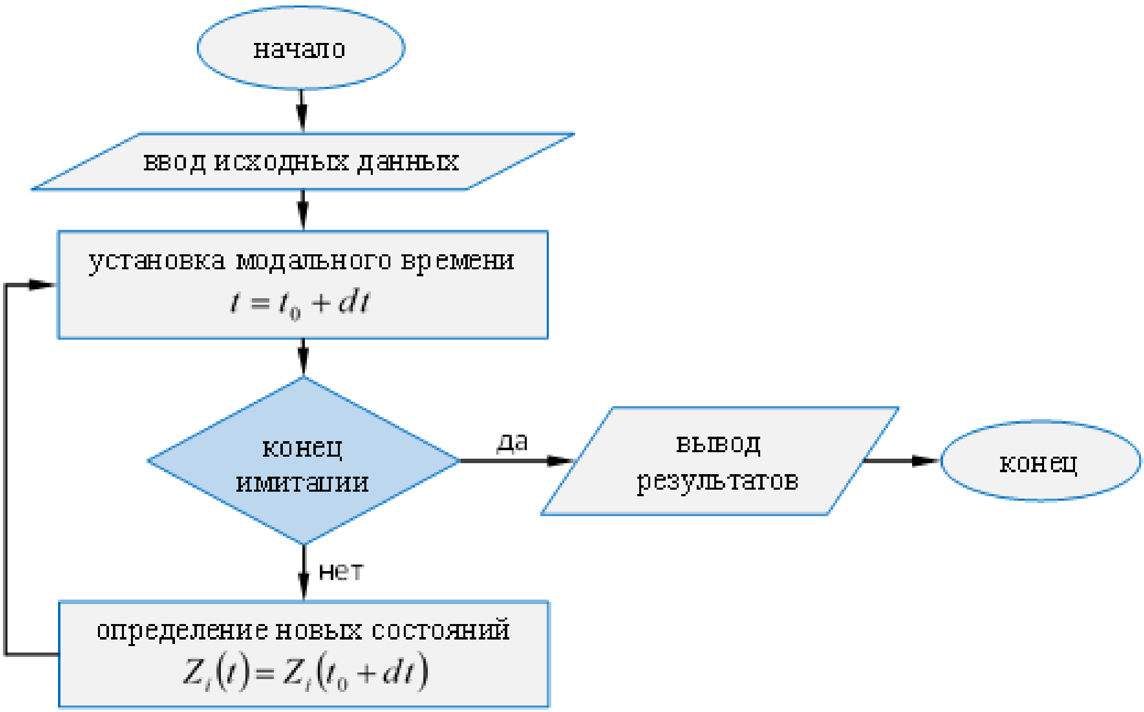


Рис.6.2. Обобщённый алгоритм моделирования систем по принципу приращений "dt"

В начале инициализируется программа, в частности вводятся значения $Z_i(t_0),\ i = 1,2,\ldots,k$. Которые характеризуют состояние системы в k-мерном фазовом пространстве состояний в начальный момент времени t_0. Модельное время устанавливается $t = t_0 = 0$.

Основные операции по имитации системы осуществляется в цикле. Функционирование системы отслеживается по последовательной схеме состояний $Z_i(t)$. Для этого модельному времени даётся некоторое приращение dt. Затем по вектору текущих состояний определяются новые состояния $Z_i(t + dt)$, которые становятся текущими. Для определения новых состояний по текущим в формализованном описании системы должны существовать необходимые математические зависимости.

По ходу имитации измеряются, вычисляются, фиксируются необходимые выходные характеристики.

При моделировании стохастических систем вместо новых состояний вычисляются распределения вероятностей для возможных состояний. Конкретные значения вектора текущих состояний определяются по результатам случайных испытаний.

В результате проведения имитационного эксперимента получается одна из возможных реализаций случайного многомерного процесса в заданном интервале времени (t_0, T_k).

Моделирующий алгоритм, основанный на применении dt, применим для более широкого круга систем, и в экономических задачах называется «календарным планированием».

Метод модели построения имитационной, основанный на однородной градуировке времени, на примере работы оптового склада продукции

Склад оптовой торговли. Основное назначение склада состоит в снабжении розничной сети и мелких потребителей. Такие склады в силу своего назначения концентрируют запасы с очень широкой номенклатурой товаров и неравномерной их оборачиваемостью (сезонный товар), реализуемых различными партиями поставки.

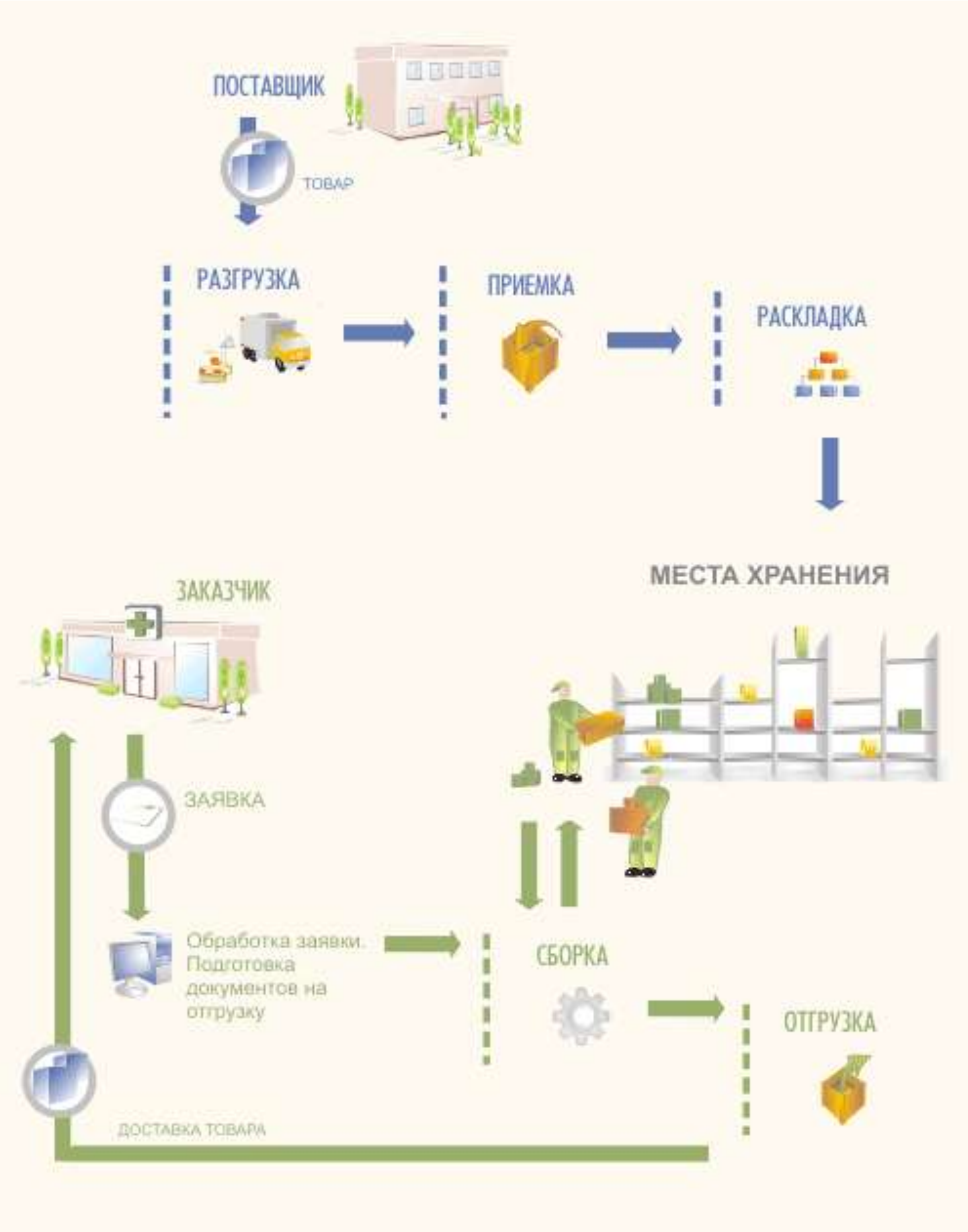


Рис.6.3. Схема работы оптового склада

Зачастую неоправданное увеличение товарных запасов, связанное с желанием обеспечить высокий уровень обслуживания потребителей приводит к затовариванию складов, отвлечением капитала из более перспективных направлений и потерей гибкости системы и ухудшением качества обслуживания клиентов. Поэтому очень важно найти оптимальную стратегию управления запасами, обеспечивающую максимальную прибыльность активов и высокий уровень удовлетворения покупателей.

Оптимизация управления материальными потоками очень важна, так как непосредственно связана с повышением экономической эффективности деятельности предприятия: уменьшением сроков и затрат на обработку заказов, повышением качества обслуживания.

В настоящее время разработано большое количество различных логистических технологий, отличающихся способами управления материальными потоками, которые реализуются с использованием средств автоматизации современных интегрированных информационных систем управления предприятием, например, ERP-систем. Для планирования товарно-материальных потоков компании наиболее часто используют следующие модели: MRP, JIT, SIC и SCOR.

Математическая модель оптового склада. Для построения любых моделей управления запасами необходима определенная входная информация. Одной из важнейших компонент данной информации являются данные о характере и объемах спроса на товары. Характер спроса определяет набор соответствующих методов планирования и управления запасами компании.

В настоящее время существует множество методов и моделей прогнозирования временных рядов, используемых в разных ситуациях. Анализ данных методов подробно представлен в специализированной литературе. В данной работе внимание будет акцентировано на модели, наиболее подходящей для прогнозирования спроса в рамках процессов управления запасами на складе.

Пусть имеется r предприятий, каждое из которых выпускает различные товары. Есть m потребителей, торгующих в розницу и ежедневно закупающих товары с оптового склада. Потребитель может закупать несколько видов товара, но не все. Задан спрос каждого потребителя.

На складе к концу дня остается C_j единиц товара.

Пусть l_j – это минимальный остаток j-ого товара на конец дня, при котором еще не требуется дополнительных закупок на предприятии.

Если $0 \le C_j \le l_j$ то оптовый склад делает заказ предприятиям на производство R_j единиц товара, который к утру следующего дня будет изготовлен и доставлен на склад. Если $C_j > l_j$, то заказа на производство не будет. Таким образом, к следующему дню на оптовом складе находится некоторое кол-во b_j товара.

Необходимо построить модель данной системы и провести вычислительный эксперимент. С помощью полученной имитационной модели определить такие значения параметров R_j и l_j, которые обеспечивают 95% заявок потребителей.

Обозначения:

- l_j – минимальное число мест на складе под j-ый товар, при котором еще не требуется дополнительных закупок на предприятии;
- b_j – кол-во j-ого товара на начало дня после произведения закупок всеми потребителями в предыдущий день и выполнения заказов на
- склада предприятиям на следующий день;
- C_j – остаток j-ого товара после удовлетворения всех заявок покупателей на текущий день;
- a_{ij} – заявки i-ого потребителя на j-ый товар;
- a_j – суммарные заявки производство товаров предприятиям;
- R_j – заказ оптового всех потребителей на j-ый товар на текущий день;
- A – суммарная заявка потребителей на все товары на текущий день;
- A_1 – суммарная заявка потребителей на все виды товара с первого дня моделирования по текущий день;

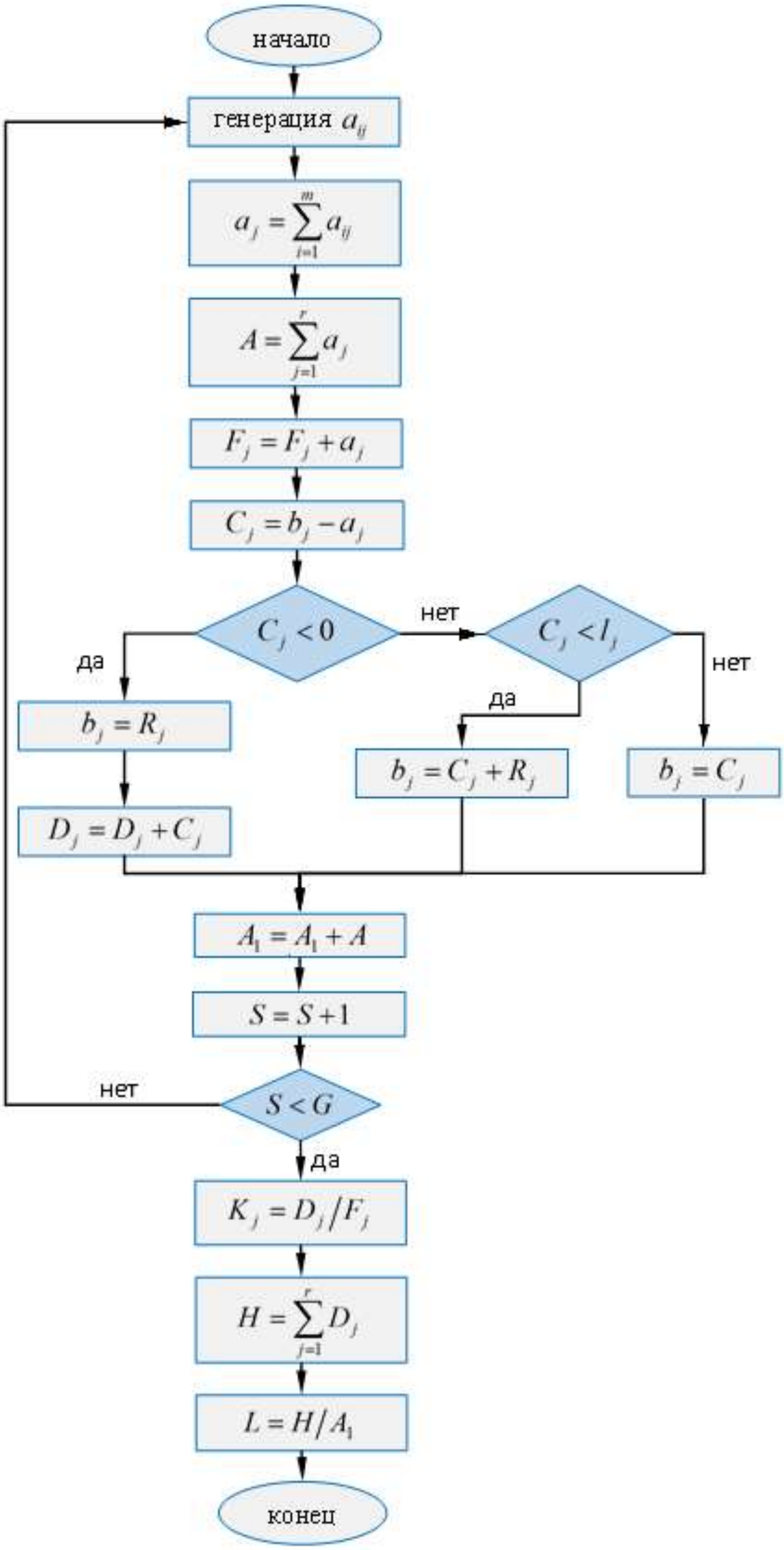


Рис.6.4. Блок–схема алгоритма имитационной модели функционирования оптового склада продукции

Обозначения (продолжение):

- S – текущий день моделирования;
- G – период моделирования.
- D – кол-во j-ого товара, которого не хватило для удовлетворения заявок потребителей на j-ый товар, начиная с первого дня моделирования на текущий день;
- F – общее число заявок потребителей на j-ый товар с первого дня моделирования по текущий день;
- K – доля j-ого товара, не выданного потребителям к общему числу заявок за весь период моделирования;
- H – общее кол-во неудовлетворенных заявок потребителей за весь период моделирования;
- L – доля всех не выполненных заявок потребителей к общему числу заявок на весь период моделирования.

Блок-схема алгоритма имитационной модели функционирования оптового склада продукции представлена на *рис.6.4.*

Контрольные вопросы:

1. Метод однородной градуировки времени на примере модели работы оптового склада продукции.
2. Однородная градуировка времени. Достоинства, недостатки.
3. Укажите способы генерации законов распределения вероятностей заявок потребителей, дайте их характеристики.
4. Опишите способ поиска таких R_j и l_j, которые обеспечивают 95% заявок потребителей.
5. Дайте алгоритм оценки точности результатов моделирования.

ЛАБОРАТОРНАЯ РАБОТА
ПОСТРОЕНИЕ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ МОДЕЛИ ФУНКЦИОНИРОВАНИЯ ДВУХПРОЦЕССОРНОГО СЕРВЕРА НА ОСНОВЕ МЕТОДА МОНТЕ-КАРЛО
(НЕОДНОРОДНАЯ ГРАДУИРОВКА ВРЕМЕНИ – СОБЫТИЙНОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ)

Цель работы состоит в:

1. Создании логико-аналитической математической модели заданной системы и внешних воздействий;
2. Определение характерных состояний при функционировании двухпроцессорного сервера;
3. Разработки алгоритма событийной имитационной модели функционирования двухпроцессорного сервера;
4. Разработке программы имитации функционирования системы, т.е. в определении временных изменений состояния системы под влиянием сложившихся ситуаций;
5. Анализе выборок значений выходных параметров, по которым определяются их основные вероятностно-временные характеристики.

Задача:

Разработать встраиваемый модуль, имитирующий функционирование заданной системы и провести серию экспериментов, используя разработанный программный продукт. На основе экспериментально полученных данных провести анализ результатов моделирования и определить насколько исследуемая система соответствует поставленной задаче по критерию времени решения исходного потока задач и загрузке используемого оборудования.

Порядок выполнения лабораторной работы:

1. Изучить теоретические сведения о методах разработки имитационных моделей с неоднородной градуировкой времени.
2. Определить характерные состояния функционировании двухпроцессорного сервера
3. Разработать алгоритм событийной имитационной модели функционирования двухпроцессорного сервера.
4. На основе полученного алгоритма разработать программный продукт, реализующий имитационную модель функционирования заданной системы с учетом индивидуальных заданий.
5. Провести серию экспериментов, используя разработанный программный продукт.
6. На основе полученных эмпирических данных провести анализ моделирования и найти оптимальные априорные данные потока входных параметров исследуемой системы, при которых ее работа будет удовлетворять заданным требованиям производительности процессора.
7. Оформить отчет о выполнении лабораторной работы.

Теоретические сведения

Метод неоднородной градуировки времени

Как уже отмечалось в предыдущей лабораторной работе, при имитационном моделировании, логическая структура реальной системы отображается в модели, а для описания динамики моделируемых процессов реализован механизм задания модельного времени, встроенный в управляющие системы.

Метод неоднородной градуировки времени основан на событийном изменении интервалов модельного времени, при этом величина шага измеряется интервалом до следующего события.

Т.е. при событийном подходе координаты времени меняются тогда, когда изменяется состояние системы. Соответственно длина шага временного сдвига максимально возможная.

Применение событийного метода предпочтительнее в том случае, если частота наступления событий невелика. Тогда большая длина шага позволит ускорить ход модельного времени. Что позволило широко применять этот метод на практике.

Метод неоднородной градуировки времени на примере модели вычислительной системы

Рассмотрим вычислительную систему (ВС), состоящую из процессора ***1*** с основной памятью, клавиатуры ***4***, принтера ***2*** и монитора ***3*** (*рис. 7.1*).

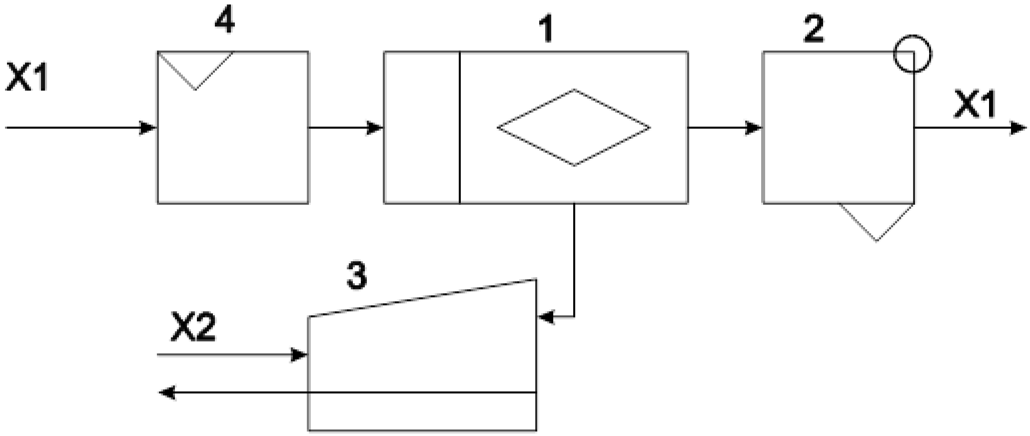


Рис.7.1. Упрощённая схема моделируемой системы

Через устройство ***4*** поступает поток заданий от абонентов $X1$. Процессор обрабатывает задания и результаты выдаёт на принтер ***2***. Одновременно с этим ВС используется как информационно-справочная система. Пользователь, работающий за монитором, посылает в систему с помощью клавиатуры запросы $X2$, которые обрабатываются процессором и ответы выводятся на экран дисплея. Процессор работает в двух программном режиме: в одном разделе обрабатываются задания $X1$, в другом, с более высоким относительным приоритетом запросы $X2$.

Представим данную ВС в упрощённом варианте в виде стохастической сети из четырех СМО. Потоки заданий и запросы будем называть потоками заявок. Считаем потоки $X1$ и $X2$ независимыми. Известны плотности распределения вероятностей (ПРВ) периодов следования заявок $f_1(t)$ и $f_2(t)$ и длительность обслуживания T_{1K}, T_{2K} заявок в k-ом устройстве. Требуется определить времена загрузки каждого устройства и времена реакции по каждому из потоков.

Вначале определяется момент поступления в систему 1-ой заявки потока $X1$ по результатам случайного испытания в соответствии с ПРВ периода следования заявок.

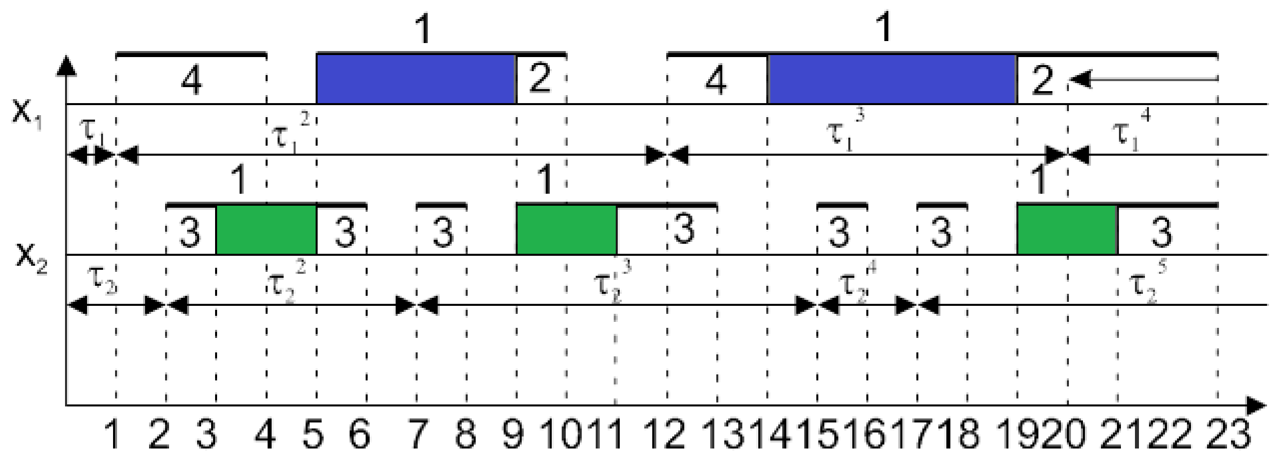


Рис.7.2. Временная диаграмма функционирования ВС

Как видно на *рис.7.2* искомый момент времени $t_1 = 0 + T_1^1$ (здесь и далее верхний индекс обозначает порядковый номер заявки данного потока). То же самое делается для потока $X2$. На *рис.7.2* момент поступления 1-ой заявки потока $X2$ – $t_2 = 0 + T_2^1$. Затем находится минимальное время, т.е. наиболее раннее событие. В рассматриваемом примере это время t_1.

Для 1-ой заявки потока $X1$ методом случайного испытания определяется время обслуживания устройством ввода ***4*** T_{14}^1 и отмечается момент окончания обслуживания $t_4 = t_1 + T_{14}^1$. На рис.7.2 показан переход устройства ***4*** в состояние "занято".

Одновременно определяется момент поступления следующей заявки потока $X1$: $t_{12} = t_1 + T_1^2$. И опять происходит поиск минимального времени поступления заявки потоков $X1$ и $X2$. Следующее минимальное время – это момент поступления заявки потока $X2$: t_2.

Соответственно, теперь находится время обслуживания на дисплее заявки потока $X2$ T_{23}^1 и отслеживается время окончания ее обслуживания $t_3 = t_2 + T_{23}^1$. Параллельно определяется момент поступления второй заявки потока $X2$: $t_7 = t_2 + T_2^2$.

И повторяем процедуру поиска минимального времени по двум потокам (t_4, t_3, t_7, t_{12}). В рассматриваемом нами примере минимальное время — это t_3(рис.7.2.). В этот момент заявка потока $X2$ начинает обрабатываться процессором ***1***. По результату случайного испытания определяется время её обслуживания T_{21}^1 и отмечается момент окончания обслуживания $t_5 = t_3 + T_{21}^1$.

Следующее минимальное время t_4 (t_4, t_5, t_7, t_{12}) – момент завершения обслуживания заявки потока $X1$ устройством ***4***. С этого момента заявка может начать обрабатываться процессором ***1***, но он занят обслуживанием потока $X2$. Следовательно, заявка потока $X1$ переходит в состояние ожидания, становиться в очередь. В следующий момент времени t_5 освобождается процессор. С этого момента процессор начинает обрабатывать заявку потока $X1$, а заявка потока $X2$ переходит на обслуживание дисплеем, т.е. ответ на запрос пользователя передаётся из основной памяти в буферный накопитель дисплея. Далее определяются времена обслуживания заявок процессором T_{11}^1, дисплеем T_{23}^1 и отмечаются моменты окончания обслуживания, соответственно, $t_9 = t_5 + T_{11}^1$ и $t_6 = t_5 + T_{23}^1$.

Следует отметить, что в момент t_6 полностью завершается обработка первой заявки потока $X2$, а значит, по разности моментов времени t_6 и t_2 вычисляется время реакции по этой заявке $u_2^1 = t_6 - t_2$.

Следующий минимальный момент $t_7 (t_9,\ t_7,\ t_{12})$ – это наступление 2-ой заявки потока $X2$. Далее определяется время поступления очередной заявки этого потока $t_{15} = t_7 + T_2^3$ и вычисляется время обслуживания 2-ой заявки на дисплее T_{23}^2 и отмечается момент окончания обслуживания поступившей заявки $t_8 = t_7 + T_{23}^2$, после чего заявка становится в очередь, т.к. процессор занят.

2-ая заявка потока $X2$ поступит на обслуживание в процессор только после его освобождения в момент t_9. В этот же момент 1-ая заявка потока $X1$ начнет обслуживаться в устройстве ***2***. Следовательно, необходимо определить по результатам случайных испытаний времена обслуживания заявок потока $X2$ T_{21}^2 и потока $X1$ T_{12}^1 и отметить моменты окончания обслуживания $t_{11} = t_9 + T_{21}^2$ и $t_{10} = t_9 + T_{12}^1$.

В момент времени t_{10} завершается полное обслуживание 1-ой заявки потока $X1$. Разность между этим моментом и моментом времени t_1 даёт первое значение времени реакции по потоку $X1$ $u_1^1 = t_{10} - t_1$.

Указанные процедуры выполняются до истечения времени моделирования. В результате получается некоторое количество (выборка) случайных значений времени реакции (u_1) и (u_2) по 1-ому и 2-ому потокам соответственно. По этим значениям могут быть определены эмпирические функции распределения и вычислены количественные вероятностные характеристики времени реакции. В процессе моделирования можно суммировать продолжительности занятости каждого устройства обслуживанием всех потоков. Например, на *рис.7.2* занятость процессора ***1*** выделена заштрихованными ступеньками. Если результаты суммирования разделить на время моделирования, то получатся коэффициенты загрузки устройств.

Можно определить время ожидания заявок в очереди, обслуженных системой, среднюю и максимальную длину очереди заявок к каждому устройству, требуемая ёмкость памяти и др.

Имитация даёт возможность учесть надёжностные характеристики вычислительной системы. В частности, если известны времена наработки на отказ и восстановления всех входящих в систему устройств, то определяются моменты возникновения отказов устройств в период моделирования и моменты восстановления. Если устройство отказало, то возможны решения:

- снятие заявки без возврата;
- помещение заявки в очередь и дообслуживание после восстановления;
- поступление на повторное обслуживание из очереди.

Обобщённые алгоритмы имитационного моделирования

Алгоритм моделирования по принципу особых состояний.

При построении имитационной модели исследуемой системы с помощью данного алгоритма выделяют два вида состояний: особое и обычное.

Особые состояния — это такие состояния в изолированные моменты времени, в которых характеристики системы изменяются скачкообразно. Для изменения состояния системы нужна определенная причина, например, приход очередного входного сигнала, т.е. есть требуется отслеживать моменты перехода системы из одного состояния в другое.

Обычным состоянием называется такое состояние исследуемой системы, в котором она находится длительное время без изменений. Такие состояния интереса не представляют, хотя занимают большую часть времени.

Следует отметить, что между особыми состояниями изменение координат происходит плавно и непрерывно или не происходит совсем. Таким образом, следя при моделировании системы только за ее особыми состояниями в те моменты времени, когда эти состояния имеют место (скачкообразное изменение моделируемой функции), можно получить информацию, необходимую для построения функций моделирующей функции.

В выше приведенном примере использовался данный алгоритм. А в качестве особых событий были выделены следующие события:

- поступление заявки в систему;
- освобождение элемента после обслуживания заявки;
- завершения моделирования;
- возникновение отказа устройств;
- завершение восстановления устройств.

Процесс имитации развивался с использованием управляющих последовательностей, определяемых по функциям распределения вероятностей исходных данных путём проведения случайных испытаний. В качестве управляющих последовательностей использовались в примере последовательности значений периодов следования заявок по каждому i-ому потоку $\{T_i\}$ и длительности обслуживания заявок i-ого потока k-ым устройством $\{T_{ik}\}$. Моменты наступления будущих событий определялись по простым рекуррентным соотношениям. Эта особенность даёт возможность построить простой циклический алгоритм моделирования (*рис.7.3*).

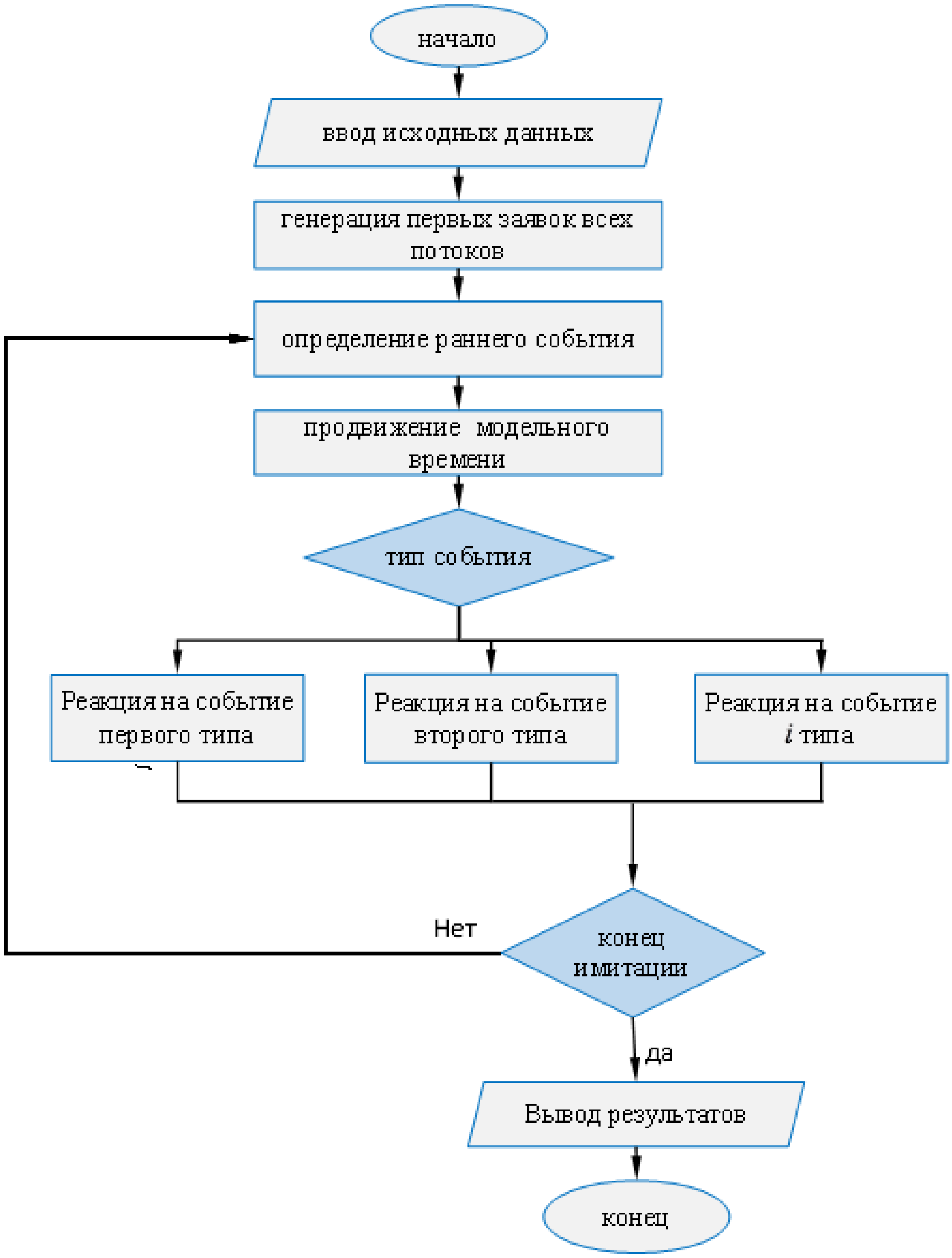


Рис.7.3. Обобщённый алгоритм моделирования систем по принципу особых состояний

Данный алгоритм моделирования сводится к следующим действиям:

1. определяется событие с минимальным временем — наиболее раннее событие;
2. модельному времени присваивается значение времени наступления наиболее раннего события;
3. определяется тип события;
4. в зависимости от типа события предпринимаются действия, направленные на загрузку устройств и продвижение заявок в соответствии с алгоритмом их обработки, и вычисляются моменты наступления будущих событий; эти действия называют реакцией модели на события;
5. перечисленные действия повторяются до истечения времени моделирования.

В процессе моделирования производится измерение и статистическая обработка значений выходных характеристик.

Контрольные вопросы:

1. Сущность, достоинства и недостатки имитационного моделирования.
2. Метод статистических испытаний и единичный жребий. Механизм случайного выбора и сведение его к стандартной задаче.
3. Методы построения систем на основе имитационных моделей.
4. Неоднородная градуировка времени. Достоинства, недостатки.
5. Метод неоднородной градуировки времени на примере модели массового обслуживания.
6. Какое событие системы называют особым?

ГРАФИЧЕСКОЕ ОТОБРАЖЕНИЕ РЕЗУЛЬТАТОВ ЭМПИРИЧЕСКИХ ДАННЫХ

Случайной величиной называется величина, принимающая случайные значения, зависящие от ряда факторов, действия которых на исследуемую величину нельзя предусмотреть.

Полный набор значений, которые принимает случайная величина, называется ***генеральной совокупностью***.

Набор случайно отобранных из генеральной совокупности объектов называют ***выборочной совокупностью*** или ***выборкой***.

Объёмом совокупности называют число объектов в ней. При больших объёмах генеральной совокупности для обеспечения теоретических построений объём ***генеральной совокупности*** принимается равным ***бесконечности***, а ***выборкой*** реально наблюдаемою совокупность объектов, статистически представленных рядом наблюдений $x_1, x_2, \ldots, x_n$ случайной величины X.

Наглядной формой графического представления эмпирических данных является гистограмма или полигон выборки.

Гистограммой частот называется ступенчатая фигура, состоящая из прямоугольников, основаниями которых служат частичные интервалы длины h, а высоты равны отношению n_i / h (плотность частоты). Площадь частичного i-го прямоугольника равна $h(n_i / h) = n_i$ - числу выборочных элементов, попавших в i-й интервал. Площадь гистограммы частот равна объему выборки n.

Полигон частот – это ломаная линия, получающаяся при соединении точек с координатами $(\bar{x}_i,\ n_i / h)$, т.е. соединяются середины верхних сторон прямоугольников гистограммы.

Также для графического отображения результатов могут быть использованы гистограмма и полигон относительных частот.

Для ***гистограммы относительных частот*** площадь частичного i-го прямоугольника равна $h(w_i / h) = w_i$ – относительной частоте элементов, попавших в i-й интервал. Площадь гистограммы относительных частот равна сумме всех относительных частот, т. е. единице.

Полигон относительных частот – это ломаная линия, соединяющая точки:

$$(\bar{x}_1, w_1 / h),\ (\bar{x}_2, w_2 / h),\ \ldots,\ (\bar{x}_m, w_m / h),$$

где $\bar{x}_i$ - середины интервалов группировки, w_i - соответствующие им относительные частоты.

В математической статистике доказано, что гистограмма и полигон относительных частот являются состоятельными оценками плотности распределения, а состоятельной оценкой истинной функции распределения генеральной совокупности является полигон накопленных относительных частот – ломаная линия, получающаяся соединением точек с координатами $\left(b_1, \frac{n_1}{n}\right), \left(b_2, \frac{n_1 + n_2}{n}\right), \ldots, \left(b_k, \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{k} n_i\right), \ldots, \left(b_m, \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{m} n_i = 1\right)$.

При этом, чем больше объем выборки, тем мельче можно взять интервалы разбиения h и тем точнее гистограмма и эмпирическая функция распределения будут аппроксимировать соответствующие теоретические распределения.

Число интервалов группировки эмпирических данных m существенно влияет на вид гистограммы. Рекомендаций, каким образом выбрать интервал группировки, не существует, ясно лишь то, что интервал не должен быть «очень малым» или «очень большим». В зависимости от объема выборки число интервалов обычно выбирают в диапазоне 8 – 20.

В то же время в литературе для выбора числа интервалов группировки m рекомендуется формула:

$$m = 1 + 3.32 \lg(n)$$

или

$$m = 5\ln(n),$$

где n - объем выборки. Эти формулы дают лишь ориентировочное количество интервалов, которое может быть изменено в ту или другую сторону.

Статистическая обработка опытных данных начинается с их расположения в порядке возрастания. Упорядоченная таким образом выборка называется ***вариационным рядом***, а сама процедура упорядочения – ***ранжированием*** опытных данных.

Далее в соответствии с определенным числом интервалов выборки m вычисляется длина интервалов

$$h = \frac{x_{\max} - x_{\min}}{m}.$$

Для отображения эмпирических данных должна быть выполнена группировка значений предварительно вариационного ряда, которая состоит в следующем:

- весь интервал $[x_{\min}, x_{\max}]$, в котором заключены элементы выборки, разбивается на ряд частичных интервалов (a_i, b_i) определенной длины h;
- подсчитывается число элементов выборки n_i, попавших в i-й интервал $i = 1, 2, \ldots, m$;
- одновременно вычисляется относительная частота $w_i = n_i / n$.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В современном мире владение конкретным инструментом по созданию имитационных моделей исследуемых объектов – это только часть необходимых знаний и навыков специалиста. Не менее важным является освоение содержательной стороны имитационного моделирования, а именно, построение имитационной модели должно иметь четкую цель; структура, разрабатываемой модели, должна соответствовать исследуемому процессу; корректный сбор априорных данных и их дальнейшая обработка, планирование и постановка эксперимента с помощью разработанной имитационной модели.

В результате выполнения описанного выше лабораторного практикума в рамках изучения дисциплины «Моделирования информационных систем» студент:

- ✓ получает практические навыки проведения работ:
  - по созданию программного продукта предназначенного для исследования разрабатываемых аналитических моделей, процессы в которых носят случайный характер;
  - по формированию тестовых случайных процессов;
- ✓ изучает на практике методы планирования, реализации и анализа результатов вычислительных экспериментов.

В заключение можно отметить, что организация лабораторного практикума по дисциплине "Моделирование информационных систем" в описанной выше форме обеспечивает достижение цели изучения данной дисциплины, а именно:

- ✓ обеспечивает ознакомление студентов с практикой имитационного моделирования генераторов моделей случайных процессов с заданным законом распределения;
- ✓ позволяет на основе разработанного программного продукта исследовать различные методы конструирования моделей случайных процессов с заданным законом распределения;

- ✓ применить навыки конструирования моделей случайных процессов в разработке имитационной модели функционирования оптового склада и двухпроцессорного сервера.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Климанов В.П. Моделирование информационных систем [Электронный ресурс] – электронный конспект лекций по курсу: направления подготовки: 220200 "Автоматизация и управление", 220300 "Автоматизированные технологии производства", 230100 "Информатика и вычислительная техника", 230200 "Информационные системы" – Москва : ФГБОУ ВПО МГТУ "СТАНКИН", 2013. – 1 электрон. опт. диск (CD-ROM) : ил.; 12 см
2. Ермаков С.М., Михайлов Г.А. Курс статистического моделирования. – М.: Наука, 1976. – 320 с.
3. Полляк Ю.Г. Вероятностное моделирование на электронных вычислительных машинах. – М.: Советское радио, 1971. – 400 с.
4. Кнут Д. Э., Искусство программирования. Т.2. Получисленные методы – Вильямс. 2001. С.21-37.
5. Волкова О.Р. «Моделирование случайных факторов производственных систем на основе конструирования случайных процессов с заданными статистическими характеристикам» / Высокие технологии и фундаментальные исследования, Т.1: сб. тр. X международной научно-практической конференции «Исследование, разработка и применение высоких технологий в промышленности» 09.12.2010-11.12.2010, Санкт-Петербург, Россия / под ред. А.П. Кудинова, - СПб.: Изд-во Политехн. университета, 2010. С.118-120.
6. Козлова О.Р. «Конструирование моделей случайных процессов с заданными статистическими характеристиками», Фундаментальные физико-математические проблемы и моделирование технико-технологических систем: сб. науч. тр. / Под ред. Л.А. Уваровой. – М.: Янус-К, 2003. – 245 с.
7. Вентцель Е. С. Теория вероятностей. – 10-е изд., стер. – М.: Академия, 2005. – 576 с.

Приложение 1 *Образец оформления титульного листа отчета*

МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ
РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ
Федеральное Государственное Бюджетное Образовательное Учреждение
Высшего Образования
МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ ТЕХНОЛОГИЧЕСКИЙ
УНИВЕРСИТЕТ «СТАНКИН»

Факультет информационных технологий и систем управления

Кафедра информационных систем

направление 09.03.02 – «Информационные системы и технологии»

ОТЧЕТ
О ВЫПОЛНЕНИИ ЛАБОРАТОРНОЙ РАБОТЫ
по курсу «Моделирование информационных систем»
«название работы»

студента (ки) ______ курса, __________ группы

_____________________ __________
(Фамилия И.О.) Подпись

Москва, 20____

Приложение 2 *Образец оформления списка литературы по ГОСТ 7.1-2003*

1. Климанов В.П. Моделирование информационных систем [Электронный ресурс] - электронный конспект лекций по курсу : направления подготовки: 220200 "Автоматизация и управление", 220300 "Автоматизированные технологии производства", 230100 "Информатика и вычислительная техника", 230200 "Информационные системы" - Москва : ФГБОУ ВПО МГТУ "СТАНКИН", 2013. - 1 электрон. опт. диск (CD-ROM) : ил.; 12 см
2. ГОСТ 7. 1–2003. Библиографическая запись. Библиографическое описание общие требования и правила составления- взамен ГОСТ 7.1-84, ГОСТ 7.16-79, ГОСТ 7.18-79, ГОСТ 7.34-81, ГОСТ 7.40-82 - Межгосударственный совет по стандартизации, метрологии и сертификации – М.: Изд-во стандартов, 2004.

В тексте статьи или книги отсылка к источнику делается по образцу: [4, с. 11] или в круглых скобках: (4, с. 11). При необходимости указать несколько источников записи в скобках разделяют знаком «;»: [4, с. 11; 8, с. 52; 10; 11].

Приложение 3 *Требования к оформлению документа*

Текст отчета о выполненной лабораторной работе должен набираться в текстовом редакторе с помощью средств вычислительной техники и печататься, соблюдая следующие правила:

Размер страницы должен соответствовать формату А4 (210x297), размеры полей страницы: левое – 30 мм, правое – 10 мм, верхнее – 15 мм, нижнее – 20 мм.

Текст на листе должен иметь книжную ориентацию, альбомная ориентация допускается только для таблиц и схем приложений.

Шрифт текста – «Times New Roman», размер – 14тп, выравнивание основного текста по ширине, красная строка - 1,25 (1,27 мм), отступ слева и справа - 0 см., запрет висячих строк, междустрочный интервал – полуторный;

Заголовки структурных элементов документа и разделов основной части следует располагать в середине строки без точки в конце и печатать прописными буквами.

Нумерация страниц сквозная, начинается с титульного листа. На титульном листе нумерация не проставляется.

Иллюстрации: рисунки, схемы, диаграммы и другой графический материал - должны быть вставлены в текст отчета в формате растровой графики (.tiff, .jpeg, .png).

Количество иллюстраций должно быть достаточным для пояснения излагаемого текста. Иллюстрации могут быть расположены как по тексту документа (возможно ближе к соответствующим частям текста), так и в конце его. Иллюстрации должны быть пронумерованы арабскими цифрами сквозной нумерацией в пределах раздела *и,* при необходимости, иметь наименование и пояснительные данные. *Например – Рисунок 1.1. – Гистограмма распределения элементов модели случайного процесса*.

Таблицы позволяют систематизировать текст, обеспечить наглядность информации. Каждая таблица должна иметь название, точно и кратко отражающее содержание таблицы. Название следует помещать над таблицей.

Слово «Таблица» и порядковый номер – над таблицей в правом верхнем углу над названием. На все таблицы в тексте документа должны быть ссылки. Например – Таблица 1.

Формулы, используемые в отчете, набираются в редакторе Microsoft Equation 3.0.

Учебное издание

Волкова Ольга Рудольфовна, **Климанов** Вячеслав Петрович

Моделирование информационных систем

Учебное пособие