

一份并不简短的物竞笔记¹

温州中学蒋徐祺

2025 年 3 月 14 日

¹公开版，仅限个人使用，严禁外传，本人依法享有著作权

素
澗
題
話

前言

0.1 自序

此版本作为公开版本，删去了部分模型

本书由整理改编而成，主要关解题一事。第一章泛谈笔者所在时代 (2021 至 2023) 机构卷特性。第二章为分块梳理。第三章为应试方面碎碎念。

针对的读者主要是已经开始写机构卷的同学，为之提供一些经验与补充。

图由手绘而成 (所以丑)，全书由 \LaTeX 编写。

笔者身为退役选手，大学新生，力多有不逮。如有错漏，恳请指出。

整理原书标题为“素澜题话”，取“素看平生，不问波澜”之意。为往昔自勉之语。人生苦旅，多经荣辱，方抵坦途，非独物竞一事，望与诸位共勉。

ix92024

目录

前言	iii
0.1 自序	iii
第一章 机构卷泛谈	3
第二章 模型与方法	5
2.1 小振动	6
2.1.1 总论	6
2.1.2 特殊形式	7
2.1.3 近似方法	10
2.2 光学方法	16
2.2.1 光线传递矩阵	16
2.2.2 特性矩阵	20
2.2.3 琼斯矩阵	22
2.2.4 双折射	24
2.2.5 其它	27
2.3 运动学随记	30
2.3.1 几种约束	30
2.3.2 杆环体系	31
2.3.3 一个证明	32
2.4 热学拾遗	34
2.4.1 相变潜热	34
2.4.2 非平衡两个小结论	35
2.4.3 余弦辐射	36
2.5 相对论变换	37
2.5.1 魏格纳转动	37
2.5.2 斐索流水实验	38
2.5.3 分布变换	39

2.5.4 波动的变换方法	39
2.5.5 光强变换	43
第三章 易错与感想	45
3.1 罗列一	46
3.2 罗列二	52
3.3 罗列三	58
3.4 罗列四	64

ixq2024

第一章 机构卷泛谈

此版本作为公开版本, 不予置评

()

ixq2024

第二章 模型与方法

写在前面

积累模型，掌握方法，提高速率和准确率，是物竞学习主旋律，也是写机构卷的主要目的。写完试卷整理是必须的，这不限于错题，还包括答案与自己解法不一致的题。

另外整理绝不是抄一遍标准答案，个人建议要做到下面几点。先搞懂答案来龙去脉，看懂每一个步骤的细节。再想其适用范围在哪，怎么优化，能推广到什么程度。

此处的这些专题是笔者自己整理中内容共通的一些模型与方法的集合。

当然，绝大部分的整理并不会真正在正式考试中派上用场，但这些对个人的思维有很大提升，使我们在真正的考试中能多一份从容。

2.1 小振动

2.1.1 总论

小振动题是一种综合性较强的题，由于其便于考察计算，可以与各种题无缝缝合，以及出题成本低廉，在复决赛和机构卷广泛出现。此处先讨论小振动题的一般方法。

首先根据对象，可分为质点和刚体两类。根据自由度，判断是否使用简正模。对质点而言，常见的是其在外场中的小振动。对最普通的有势静场，可以求出有效势能 U ，只要知道 U'' 即可求得运动。若在磁场中，使用使用广义角动量代入有效势能，或者直接受力求解。若在变化的外场中，那么一般要对运动方程进行近似，比如高频振动场和参变共振。

对于刚体，最常见的是重力场下平面上光滑或纯滚的刚体在平衡位置处的小振动。这种题只要知道接触位置的曲率半径 ρ ，质心高度 h_c ，以及和运动相应的转动惯量 I 。若光滑则是质心转动惯量 $I = I_c$ ，若纯滚则是对接触点的转动惯量 $I = I_c + mh_c^2$ 。可得其角频率为

$$\omega = \sqrt{\frac{mg(\rho - h_c)}{I}}$$

它的主要难点在于各个量的计算。若在更一般的外场下运动，只要积分出刚体的动能和势能即可。

对于有约束的情况，主要是几何约束和运动学约束。几何约束，如杆置于抛物线形轨道之中求振动。重点是将动能与势能表示为单参量，出于方便表示转动的考虑，一般取斜率。若不能化为单参数，那么只能对约束进行小量展开，解多元方程，下面有一个示例。

运动学约束，就如那种筒里套筒的情况，先将约束代入消去自由度，再求循环坐标对应的广义动量守恒方程，代入能量表达式。一般能将其化为单参数直接求解。最后若仍为多参数那么就用简正模。

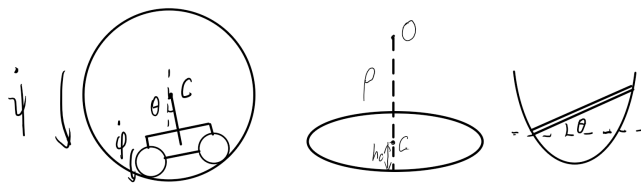


图 2.1: 几种典型示意

2.1.2 特殊形式

运动学约束示例

如图2.2 设大环角速度为 $\dot{\psi}$ ，速度为 \dot{x} ，小环角速度为 $\dot{\phi}$ ，小环质心速

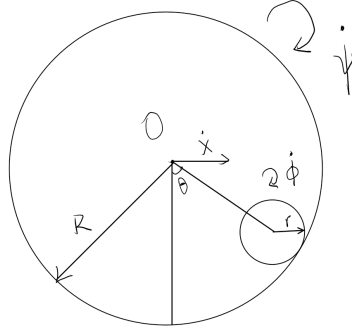


图 2.2: 约束与守恒

度为 $(R - r)\dot{\theta}$ ，设接触位置均纯滚。势能为

$$V = -mg(R - r) \cos \theta \quad (2.1)$$

动能写为

$$T = \frac{1}{2}(M\dot{x}^2 + MR^2\dot{\psi}^2 + mr^2\dot{\phi}^2 + m(R - r)^2\dot{\theta}^2) \quad (2.2)$$

纯滚约束

$$R\dot{\psi} = \dot{x}, (R - r)\dot{\theta} = r\dot{\phi} - R\dot{\psi} \quad (2.3)$$

代入约束，动能改写为

$$T = \frac{1}{2}(2M\dot{x}^2 + m(R - r)^2\dot{\theta}^2 + m(\dot{x} + (R - r)\dot{\theta})^2) \quad (2.4)$$

注意到 x 是循环坐标，有广义动量守恒

$$p_x = 2M\dot{x} + m(\dot{x} + (R - r)\dot{\theta}) \quad (2.5)$$

不妨设其为 0。将之代入动能表达式

$$T = m(R - r)^2\dot{\theta}^2 + \frac{2Mm}{2M + m}(R - r)^2\dot{\theta}^2 \quad (2.6)$$

到此我们已经可以求出小振动角频率，为

$$\omega = \sqrt{\frac{(2M + m)g}{(3M + m)(R - r)}} \quad (2.7)$$

注意到(2.6)中代入广义动量守恒后得到一个折合质量，这是一个常见结论。

最重要的是请读者区分守恒与约束的区别。有些人喜欢把广义动量守恒代入动能后使用拉格朗日方程，这是完全错误的。一个简单的理解是拉格朗日量是广义坐标和广义速度的函数，注意到约束完全是速度与坐标之间的几何关系，而守恒是动量与速度之间关系，如果代入，那么结果就会变成含有动量，坐标，速度三者的函数，不符合定义。

如果一定要消去守恒自由度来利用拉格朗日方程，得利用罗斯函数，定义为

$$R(x_1, \dot{x}_1, x_2, p_{x_2}) = L(x_1, \dot{x}_1, x_2, \dot{x}_2) - p_{x_2} \dot{x}_2 \quad (2.8)$$

磁场小振动

这里罗列出几个典型结果。

有心力场加匀强磁场中圆周运动的小振动

$$\omega = \sqrt{\frac{B^2 q^2}{m^2} + 3 \frac{V'}{mr} + \frac{V''}{m}} \quad (2.9)$$

在柱对称 z 向磁场 $B_z(r)$ 中圆周运动的 z 向和 r 向小振动

$$\omega_z = \sqrt{-\frac{r}{B_z} \frac{dB_z}{dr} \frac{B_z q}{m}} \quad (2.10)$$

$$\omega_r = \sqrt{1 + \frac{r}{B_z} \frac{dB_z}{dr} \frac{B_z q}{m}} \quad (2.11)$$

复杂几何约束

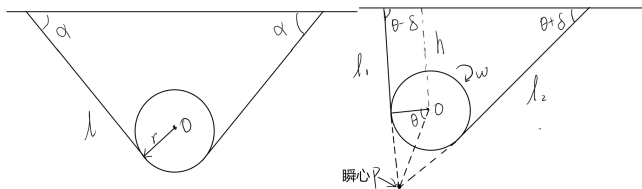


图 2.3: 经典老题

各参量如图2.3，圆盘在轻质线上纯滚，有约束

$$\omega r \tan \theta = l \dot{\delta} \quad (2.12)$$

$$l_1 \cos(\theta + \delta) + r \sin(\theta + \delta) + l_2 \cos(\theta - \delta) + r \sin(\theta - \delta) = 2l \cos \alpha + 2r \sin \alpha \quad (2.13)$$

$$l_1 + l_2 + 2r\theta = 2l + 2r\alpha \quad (2.14)$$

$$l_1 \sin(\theta + \delta) - r \cos(\theta + \delta) = l_2 \sin(\theta + \delta) - r \cos(\theta + \delta) = h \quad (2.15)$$

代入展开式 $l_1 + l_2 = 2l + a_1\delta^2$, $l_1 - l_2 = a_2\delta$, $\theta = \alpha + a_3\delta^2$ 。¹ 解得 h 关于 δ 的二阶展开式。利用如下动能与势能

$$T = \frac{1}{2} \left(I + m \frac{r^2}{\cos^2 \theta} \right) \omega^2, V = -mgh \quad (2.16)$$

最终得到角振动频率

$$\omega = \sqrt{\frac{2 \sin \alpha g}{l(2 + \cos^2 \alpha)}} \quad (2.17)$$

理论上来说这种题利用受力会不那么繁琐，因为只涉及一阶量，但我个人没想出来，留给读者思考。

杨氏模量和小振动

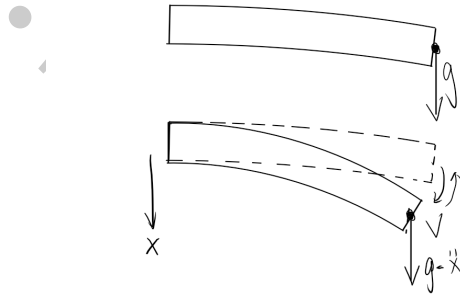


图 2.4: 杨氏模量小振动

如图2.4所示，末端绑一个受重力质点，考虑轻质弹性柱无弛豫微小形变，求小振动周期。不同于往常将 x 微小变化求得 \ddot{x} ，我们在这里代入将重力变为 $g - \ddot{x}$ 再求得 x 。则易从静态情况得到结果。

¹这里 θ 也要展开是最阴间的

2.1.3 近似方法

绝热不变量

先给出一个绝热不变量的证明。我们设哈密顿量为

$$H = H(p, q, \lambda) \quad (2.18)$$

其中 λ 是一个随时间缓慢变化的参量。此时能量不守恒，利用哈密顿方程，可以写出

$$\dot{H} = \frac{\partial H(p, q, \lambda)}{\partial \lambda} \dot{\lambda} = \dot{E} \quad (2.19)$$

我们设能量为一个参数，利用方程

$$E = H(p, q, \lambda) \quad (2.20)$$

可以反解出

$$p = p(q, E, \lambda) \quad (2.21)$$

定义作用变量为

$$I(E, \lambda) = \oint p(q, E, \lambda) dq \quad (2.22)$$

I 随时间的变化满足

$$\dot{I} = \frac{\partial I}{\partial E} \dot{E} + \frac{\partial I}{\partial \lambda} \dot{\lambda} \quad (2.23)$$

注意到对于动能形式为 $\frac{1}{2}Cp^2$ 的哈密顿量而言，我们有

$$\frac{\partial I}{\partial E} = \oint \frac{1}{\dot{q}} dq = T \quad (2.24)$$

T 为运动周期，对于另一项

$$\frac{\partial I}{\partial \lambda} = \oint \frac{\partial p(q, E, \lambda)}{\partial \lambda} dq = \oint \frac{\partial p(q, E, \lambda)}{\partial \lambda} \dot{q} dt \quad (2.25)$$

由哈密顿方程我们知道，

$$\dot{q} = \frac{\partial H(p, q, \lambda)}{\partial p} \quad (2.26)$$

因为 E 与 λ 是独立变量，由偏导关系我们亦可知

$$0 = \frac{\partial E}{\partial \lambda} = \frac{\partial H(p(q, E, \lambda), q, \lambda)}{\partial \lambda} = \frac{\partial H(p, q, \lambda)}{\partial \lambda} + \frac{\partial H(p, q, \lambda)}{\partial p} \frac{\partial p(q, E, \lambda)}{\partial \lambda} \quad (2.27)$$

从而将(2.25)改写为

$$\frac{\partial I}{\partial \lambda} = - \oint \frac{\partial H(p, q, \lambda)}{\partial \lambda} dt \quad (2.28)$$

均代入 I 的变化率

$$\dot{I} = \dot{\lambda} \left(T \frac{\partial H(p, q, \lambda)}{\partial \lambda} - \oint \frac{\partial H(p, q, \lambda)}{\partial \lambda} dt \right) \quad (2.29)$$

很显然, 如果 $\frac{\partial H(p, q, \lambda)}{\partial \lambda}$ 在周期内近似不变, 那么可近似为 $I = \text{Const}$ 。这就是要求 λ 随时间匀速缓慢变化。

应用这个东西需要两个条件, 一是上面的 λ 随时间匀速缓慢变化。另一个是(2.24)中的质量/转动惯量不发生变化。

对绝热不变量处理不了的情形, 我们可以用做功来解决, 见《思维进阶》。但是我个人分析做功经常错, 所以用了另一种暴算法, 以简谐运动为例, 设运动方程为

$$\frac{dm(t)\dot{x}}{dt} + dm(t)\omega(t)^2x = 0 \quad (2.30)$$

其中 $\omega(t), m(t)$ 不一定匀速变化, 但是在周期内其变化为小量。设周期开始时两个量的值为 ω_0, m_0 , 将运动方程改写为

$$\ddot{x} + a(t)\dot{x} + b(t)x + \omega_0^2x = 0 \quad (2.31)$$

同乘 \dot{x} , 得到

$$\frac{1}{2} \frac{d}{dt} (\dot{x}^2 + \omega_0^2 x^2) + a(t)\dot{x}^2 + b(t)x\dot{x} = 0 \quad (2.32)$$

我们希望考虑振幅随时间的变化, 所以代入一阶近似 $x = A(t) \cos \omega(t)t$, 对于微扰项我们可以代入零级近似 $x = A(0) \cos \omega_0 t$ 。将上式对一个周期的时间进行积分。一阶近似得到

$$\int_0^{2\pi/\omega_0} \frac{1}{2} d(\omega^2 A^2 \sin^2 \omega_0 t + \omega^2 A^2 \sin^2 \omega_0 t) = A(0)^2 \int_0^{2\pi/\omega_0} (a(t) \sin \omega_0 t \cos \omega_0 t - b(t) \sin^2 \omega_0 t) \quad (2.33)$$

由条件我们可以得到 a, b 的具体形式, 从而可以用卡西欧将方程右端积分出来, 设结果为 $KA(0)^2$, 最终我们有

$$\frac{1}{2} \omega_0^2 \Delta(A^2) = KA(0)^2 \quad (2.34)$$

由于变化为小量, 应用摄动结果, 近似为

$$\frac{dA^2}{dt} = \frac{\Delta A^2}{2\pi/\omega_0} = \frac{K}{\pi\omega_0} A^2 \quad (2.35)$$

这样我们就可以求出振幅时间的变化。

当时同学之间讨论时有个疑惑, 为什么代入 $x = A(t) \sin \omega(t)t$ 积分一个周期, 得到的结果会不正确, 最后的解释是如果这样积分, 我们最终得到的是 $\Delta(\omega^2 A^2)$, 而非 $\Delta(\omega_0^2 A^2)$, 也就是多了 $\Delta(\omega^2)A(0)^2$, 但是我们只关心振幅的周期变化, 所以这一项得舍去, 这在前面的积分时里写的很清楚。

微扰与非谐振动

一般我们求解含有微扰项的方程会使用所谓的正则微扰法。设微扰项为 $\epsilon f(x)$, 那么我们将会代入

$$x = x^{(0)} + \epsilon x^{(1)} + \epsilon^2 x^{(2)} \dots \quad (2.36)$$

来进行逐级求解。这在与微扰相关的各类情形中都有出现。

但是有时这并不能给出全部的解，比如考虑方程

$$x - 1 - \epsilon x^3 = 0 \quad (2.37)$$

应用正则微扰我们只能得到 $x = 1 + \epsilon + 3\epsilon^2 \dots$ ，但理论上其会有三个根，这是因为其他两个根对 ϵ 的依赖关系不同，在量级上不能视作微扰，这时候就要用所谓奇异摄动。即我们代入

$$x = \frac{\xi}{\epsilon^\mu} \quad (2.38)$$

其中 ξ 的为零阶小量。为确定 μ ，我们代入方程得到

$$\epsilon^{2\mu-1}\xi - \epsilon^{3\mu-1} - \xi^3 \quad (2.39)$$

为使 ξ 能满足条件，得取 $2\mu - 1 = 0$ ，从而得到一个 ξ 的方程

$$\xi - \epsilon^{1/2} - \xi^3 \quad (2.40)$$

接下来就可以应用正则微扰， ξ 可以逐级展开为

$$\xi = \xi^{(0)} + \epsilon^{1/2}\xi^{(1)} + \epsilon\xi^{(2)} \dots \quad (2.41)$$

至此可解。举这个例子是想让读者关注一下正则微扰的局限性，这在接下来的非谐振动中也有体现。

考虑方程

$$\ddot{x} + \omega_0^2 x + \epsilon x^3 = 0 \quad (2.42)$$

令三阶项是小量，零阶近似解为

$$x^{(0)} = A \cos(\omega_0 t + \varphi) \quad (2.43)$$

两个参量 A, φ 都由初态决定

一阶方程满足

$$\ddot{x}^{(1)} + \omega_0^2 x^{(1)} + \epsilon A^3 \cos^3(\omega_0 t + \varphi) = 0 \quad (2.44)$$

利用三角公式

$$\ddot{x}^{(1)} + \omega_0^2 x^{(1)} = -\epsilon \frac{A^3}{4} (\cos(3\omega_0 t + 3\varphi) + 3\cos(\omega_0 t + \varphi)) \quad (2.45)$$

直接解我们将得到

$$x^{(1)} = \epsilon A^3 \left(\frac{\cos(3\omega_0 t + 3\varphi)}{32\omega_0^2} - \frac{3}{8\omega_0} t \sin(\omega_0 t + \varphi) \right) + K \cos(\omega_0 t + \varphi') \quad (2.46)$$

最后一项是为了初始条件引入的。注意下第二项，他是一个会随时间线性增长的结果，这对于小振动来说是不合适的，正则微扰又出现了问题。理论上它会随着迭代的进行而变成某一个泰勒级数而收敛，但是这又太过麻烦。为了消除这一项，我们将目光转向修改频率。

这里给出一个简单的做法，对三角函数进行泰勒展开

$$\cos((\omega + \eta)t) = \cos \omega t - \eta t \sin \omega t \quad (2.47)$$

从而

$$A \cos(\omega_0 t + \varphi) - \frac{3\epsilon A^3}{8\omega_0} t \sin(\omega_0 t + \varphi) \rightarrow A \cos((\omega_0 + \frac{3\epsilon A^2}{8\omega_0})t + \varphi) \quad (2.48)$$

虽然逻辑上不严谨，但结果是对的。

再考虑一个微扰的阻尼

$$\ddot{x} + \omega_0^2 x + \epsilon \dot{x} = 0 \quad (2.49)$$

代入零阶解，不妨设 $x^{(0)} = A \cos \omega_0 t$ ，对一阶方程

$$\ddot{x}^{(1)} + \omega_0^2 x^{(1)} = \epsilon \omega_0 A \cos \omega_0 t \quad (2.50)$$

直接解得

$$x^{(1)} = -\frac{\epsilon A}{2} t \cos \omega_0 t + K \cos(\omega_0 t + \varphi') \quad (2.51)$$

这又是一个发散项，但是理论上我们应该得到一个阻尼振动解，所以很自然的有修正

$$A \cos \omega_0 t - \frac{\epsilon A}{2} t \cos \omega_0 t \rightarrow A e^{-\frac{\epsilon}{2} t} \cos \omega_0 t \quad (2.52)$$

我们总结一下，就是对于零阶解 $A \cos x$ 来说， $\epsilon x \cos x$ 对应着一个指数修正， $\epsilon x \sin x$ 对应着一个频率修正。

高频振动场

考虑一个质量为 m 的质点受两个力一维运动，满足

$$m\ddot{x} = -\frac{dU(x)}{dx} + f(x) \cos(\omega t + \varphi) \quad (2.53)$$

我们将运动分为两个部分

$$x = X + \xi \quad (2.54)$$

其中第一项对时间平均不为零，第二项时间平均为零，并认为第二项相对第一项为小量。一阶展开后对应相等，有

$$m\ddot{X} = -\frac{dU(X)}{dx} + \frac{f(X)}{dx} \xi \cos(\omega t + \varphi) \quad (2.55)$$

$$m\ddot{\xi} = -\frac{d^2U(X)}{dx^2}\xi + f(X)\cos(\omega t + \varphi) \quad (2.56)$$

设 $\frac{d^2U(X)}{mdx^2} = \omega_0^2$, 解得

$$\xi = -\frac{1}{m(\omega^2 - \omega_0^2)}\frac{df}{dx}\cos(\omega t + \varphi) \quad (2.57)$$

代入上式, 对 X 的方程取时间平均, 可得

$$m\ddot{X} = -\frac{d}{dx}\left(U(X) + \frac{f^2(X)}{4m(\omega^2 - \omega_0^2)}\right) \quad (2.58)$$

也就是对高频振动场, 我们能定义一个如上的有效势能。

这里注意一下高频的意义, 是让 ξ 相比 X 是小量, 以及 ξ 变化的速度比 X 快很多, 分别使小量展开和取平均能成立。

天体近似

对圆轨道的天体进动使用运动方程的微扰就已经足够了。但是对于椭圆得使用其他方法。

首先是直接从公式出发, 对有心力场来说, 设能量为 E , 势能为 U_0 , 角动量为 L , 转过的角度可以写为

$$\theta = \int \frac{L/r^2}{\sqrt{2m(E - U_0) - L^2/r^2}}dr = -\frac{\partial}{\partial L} \int \sqrt{2m(E - U_0) - L^2/r^2}dr \quad (2.59)$$

我们设外加一个小量势能变化 δU 。那么一圈的进动角为

$$\delta\theta = 2\pi - \frac{\partial}{\partial L} \oint \sqrt{2m(E - U_0 - \delta U) - L^2/r^2}dr \quad (2.60)$$

展开可得

$$\delta\theta = \frac{\partial}{\partial L} \oint \frac{m\delta U}{\sqrt{2m(E - U_0 - \delta U) - L^2/r^2}}dr \quad (2.61)$$

这个方法经常要用到留数定理。

还有龙格楞次矢量法, 设有心势为 $-\frac{k}{r}$, 则龙格楞次矢量定义为

$$\vec{A} = \vec{p} \times \vec{L} - mk\hat{r} \quad (2.62)$$

矢量大小为 $|\vec{A}| = mke$, e 为离心率。

引入一个小的势能变化 δU , 则龙格楞次矢量变化率为

$$\frac{d\vec{A}}{dt} = -\nabla\delta U \times \vec{L} \quad (2.63)$$

可将零级近似代入 $dt = \frac{mr^2 d\theta}{L}$ 。积分得到龙格楞次矢量一个周期的改变量, 方向的改变对应进动, 大小的改变对应离心率变化。这里的难点也在积分。

这章本来有一节参数共振，感觉只是抄书没什么好写的，读者可自行参考朗道《力学》或者梁昆淼《力学 (下册)》，这方面更高级的内容 Arnold 《Mathematical Methods of Classical Mechanics》上会有，只不过肯定用不到就是了。

冲浪的时候发现一篇好文章，[物理竞赛专栏 03: 轨道微扰](#)，可以作为这节补充，这个专栏都挺有意思的。他的另一个回答[这种情况下应该放弃物理竞赛吗？](#)我觉得写的很好，大家可以关注一下这个公众号。就是他们群的名字有点那啥，叫“CPhOnlyfans”……

ixq2024

2.2 光学方法

2.2.1 光线传递矩阵

对共光轴傍轴成像，设光轴上每一个位置对应的光线用其与光轴的距离 y ，光轴方向的夹角与此处折射率的乘积 $n\theta$ ，这两个参量描述。我们将会看到，普通光学器件的效果就是对这两个参量进行线性变换。则我们就可以通过矩阵描述这样的光具组。首先我们写成列矢量

$$\begin{bmatrix} y \\ n\theta \end{bmatrix} \quad (2.64)$$

我们希望变换能写成矩阵乘初态矢量的形式，即

$$\begin{bmatrix} y_f \\ n_f\theta_f \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_i \\ n_i\theta_i \end{bmatrix} \quad (2.65)$$

这个矩阵称为光线传递矩阵。我们接下来先看几种简单原件。

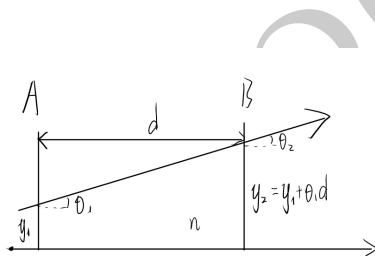


图 2.5: 均匀空间

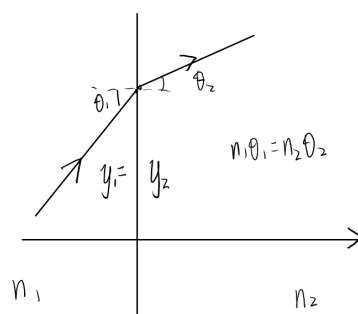


图 2.6: 介质分界面

如图2.5，考虑光线穿过一个长度为 d 折射率为 n 的空间，那么由直线传播，可知 θ 不变， $\Delta y = \theta d$ 。对应矩阵为

$$\begin{bmatrix} 1 & d/n \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (2.66)$$

对垂直光轴的平面介质分界面，由折射定律 $n_1\theta_1 = n_2\theta_2$ ，如图2.6，则就是单位矩阵

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (2.67)$$

接下来考虑球面介质分界面，如图2.7，由折射定律

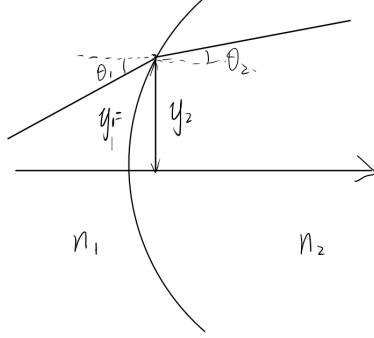


图 2.7: 球面成像

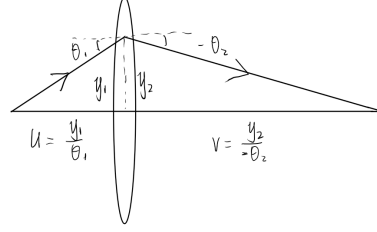


图 2.8: 薄透镜

$$\frac{n_1}{s_1} + \frac{n_2}{s_2} = \frac{n_2 - n_1}{R} \quad (2.68)$$

并利用几何关系

$$s_1 \theta_1 = -s_2 \theta_2 = y_1 = y_2 \quad (2.69)$$

从而矩阵写为

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ \frac{n_1 - n_2}{R} & 1 \end{bmatrix} \quad (2.70)$$

对于一个在折射率为 n 介质中的薄透镜，如图2.8，矩阵写为

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -\frac{n}{f} & 1 \end{bmatrix} \quad (2.71)$$

矩阵相乘的顺序是光线先经过的先乘，遇到反射镜光线反向的时候注意一下。另一个重点是我们看到以上所有矩阵的行列式均为 1，这说明所有由这些元素构成的光学器件对应的矩阵行列式仍为 1。然而像劈尖这样的器件对应的是角度里的平移，不能用矩阵描述。作为一个更深入的理解，读者可能想到傅里叶光学中横向位置与角度是共轭的傅里叶变量，这和这里的光线矩阵行列式为 1 有什么关系？

光线矩阵在分析一些特殊位置时也比较清晰，简单介绍一下。

共轭面

首先是共轭面，即互为成像的两个面，满足一个面上的所有点都会成像到另一个面上。如图2.9

那么对一个特定的 y_1 ，无论 θ_1 为多少，它都会成像到一个特定的 y_2 ，

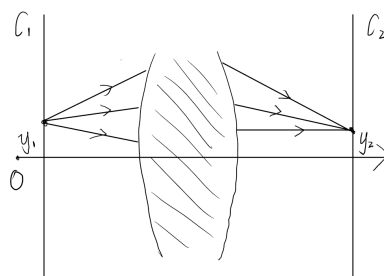


图 2.9: 共轭面

这说明两个面之间的光线矩阵的 $B = 0$ ，从而我们将矩阵写为

$$\begin{bmatrix} m_1 & 0 \\ C & m_2 \end{bmatrix} \quad (2.72)$$

这两像分别为物方和像方的横向放大率。由行列式我们容易有 $m_1 m_2 = 1$ 。

焦面

然后是焦面，沿光轴自物方入射的平行光在像方的汇聚点即为像方焦点，对应的垂直光轴的平面就是像方焦面，同理我们有物方焦面，如图2.10。我们想一下平行光和焦点出射的光之间的关系，不同 y 的平行光变为了焦

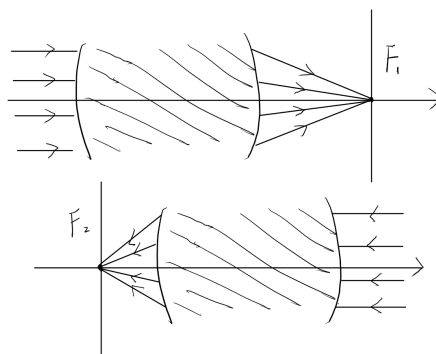


图 2.10: 焦面

点出射的不同角度的光线，所以焦面之间的光线矩阵应该写为

$$\begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{\phi} \\ -\phi & 0 \end{bmatrix} \quad (2.73)$$

$\phi = \frac{n_1}{f_1} = \frac{n_2}{f_2}$ 为光焦度。这两像是光焦度的事实可以从定义导出。

主面

像方主面的定义是对于任何一条沿光轴自物方入射的光线的延长线与其出射光线的延长线的交点构成的平面，如图2.11。用矩阵的语言表达，这

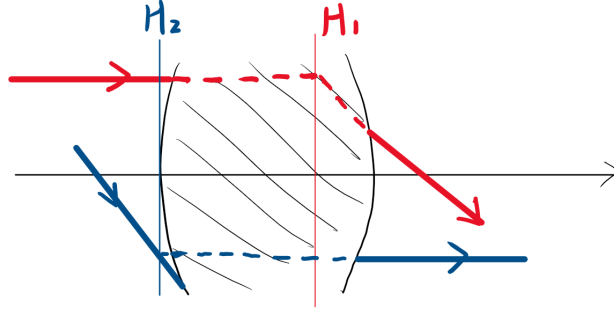


图 2.11: 主面

使 y 在变换中不变，即两个主面之间对应着 $B = 0$ 的光线矩阵，可以用光焦度写为

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -\phi & 1 \end{bmatrix} \quad (2.74)$$

接下来我们以主面为例演示一下如何寻找已知光具组的主面，设已知光具组的在其两个端面的光线传播矩阵是

$$\begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix} \quad (2.75)$$

设前后主面与光具组两个端面距离分别为 l_1, l_2 ，由定义我们有

$$\begin{bmatrix} 1 & l_1/n_1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -\phi & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & l_2/n_2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix} \quad (2.76)$$

从而有 $C = -\phi, l_1 = \frac{n_1(1-A)}{\phi}, l_2 = \frac{n_2(1-D)}{\phi}$ 。

用这个方法可以比较方便地求出厚透镜的各种参数，比如双透镜间距为 d ，设像方参数带'，物方不带，令

$$\Delta = d - f'_1 - f_2 \quad (2.77)$$

那么两个焦距可写为

$$f = -\frac{f_1 f_2}{\Delta}, f' = -\frac{f'_1 f'_2}{\Delta} \quad (2.78)$$

两个主点距离两个透镜的距离

$$l_1 = \frac{d}{\Delta} f_1, l_2 = \frac{d}{\Delta} f'_2 \quad (2.79)$$

2.2.2 特性矩阵

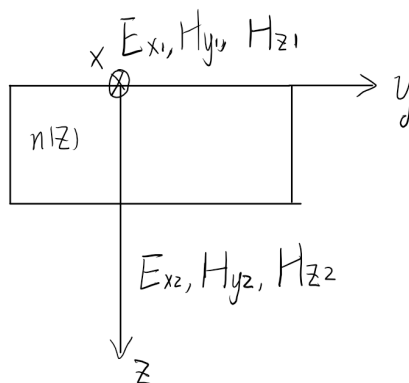


图 2.12: 介质示意

如图2.12, 我们希望考虑一个波在折射率为 $n(z)$ 的介质堆中传播的问题。为了实用与简洁考虑, 我们只考虑多层均匀介质的透射反射率问题。多光束干涉只能处理单层, 而用难集上那个方法又感觉不够一般化, 所以介绍一个特性矩阵法。这个内容更详细的讨论请参考《光学原理》。

在这里我们先只考虑横电波 (TE 波), 即电矢量方向垂直纸面。当然在这里做的讨论可以同样的移植到 TM 波中。

首先不加证明地指出, 若将介质表面的总电场写为 $E_x = Ue^{ik_y y - i\omega t}$, 表面 y 方向的总磁场强度 $H_y = Ve^{ik_y y - i\omega t}$, 将 U, V 合成一个列矢量 $\begin{pmatrix} U \\ V \end{pmatrix}$, 那么穿过整个介质的效果相当于对这个列矢量进行一个线性变换, 也就是等效为一个行列式为 1 的矩阵作用。这里行列式为 1 与能量守恒有关。

这里利用一个直观的方法来导出均匀介质层的特性矩阵, 如图2.13, 设介质折射率为 n , 厚度为 h 电磁波有关系 $\eta E_x = \pm H_y$, 其中 $\eta = n\sqrt{\frac{\epsilon_0}{\mu_0}} \cos \theta$ 。而正负号由波的传播方向决定, 从而我们可以将表面的波分解成向下与向上的两类波叠加

$$U_d = \frac{1}{2}\left(U + \frac{V}{\eta}\right), V_d = \eta U_d \quad (2.80)$$

$$U_u = \frac{1}{2}\left(U - \frac{V}{\eta}\right), V_u = -\eta U_u \quad (2.81)$$

设 $\delta = \frac{2\pi}{\lambda} nh \cos \theta$, 对前后两个表面的电磁场, 有相位关联

$$U_{2d} = e^{i\delta} U_{1d}, U_{1u} = e^{i\delta} U_{2u} \quad (2.82)$$

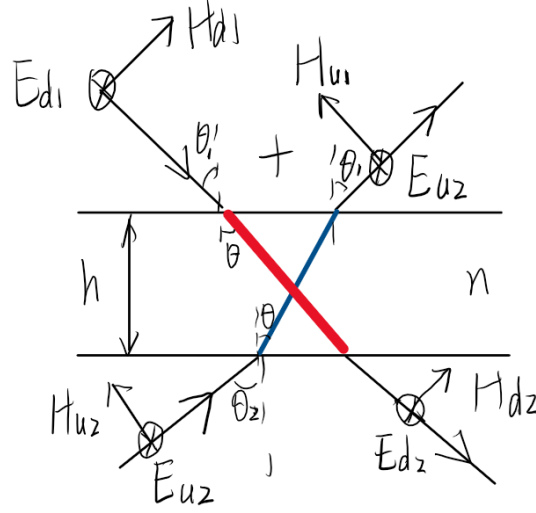


图 2.13: 波的分解

从而我们可以反解出特性矩阵

$$\begin{pmatrix} \cos \delta & -\frac{i}{\eta} \sin \delta \\ -i\eta \sin \delta & \cos \delta \end{pmatrix} \quad (2.83)$$

对 TM 波, 我们只需代入 $\eta' = \frac{1}{n} \sqrt{\frac{\epsilon_0}{\mu_0}} \cos \theta$ 。这里可能有个疑问, 我们知道多光束干涉时相位差为 $\frac{2\pi}{\lambda} \frac{nh}{\cos \theta}$, 与这里不同。但要注意到, 根据前面 U, V 的定义式, 我们将 y 方向的相位变化丢到了后面那一项, 也就是 U, V 中只包含了 z 的变化。

对于多层叠加, 只需矩阵相乘即可。

也可以将均匀介质层的结论微元化

$$\begin{pmatrix} 1 & -\frac{i}{\eta} \frac{2\pi}{\lambda} n \cos \theta dh \\ -i\eta \frac{2\pi}{\lambda} n \cos \theta dh & 1 \end{pmatrix} \quad (2.84)$$

从而积分得到最一般的结果。

最常考的情形是 $\theta = 0, \delta = \frac{\pi}{2}$ 。

当我们得到特性矩阵时, 我们可以容易求出反射与透射强度, 注意到出射方向只有一个方向的光, 设入射波为 A , 振幅透射率与反射率记为 r, t , 从而得到两端矢量

$$\begin{pmatrix} U_1 \\ V_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A(1+r) \\ \eta_1 A(1-r) \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} U_2 \\ V_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} At \\ \eta_2 At \end{pmatrix} \quad (2.85)$$

设特性矩阵为 \mathbf{M} ，取其逆

$$\mathbf{M}^{-1} = \begin{pmatrix} m'_{11} & m'_{12} \\ m'_{21} & m'_{22} \end{pmatrix} \quad (2.86)$$

从而

$$r = \frac{(m'_{11} + m'_{12}\eta_2)\eta_1 - (m'_{21} + m'_{22}\eta_2)}{(m'_{11} + m'_{12}\eta_2)\eta_1 + (m'_{21} + m'_{22}\eta_2)} \quad (2.87)$$

$$t = \frac{2\eta_1}{(m'_{11} + m'_{12}\eta_2)\eta_1 + (m'_{21} + m'_{22}\eta_2)} \quad (2.88)$$

2.2.3 琼斯矩阵

为了描述一个具有偏振方向的光，我们引入一个矢量称为偏振矢量，定义为

$$\begin{pmatrix} U_X \\ U_Y \end{pmatrix} \quad (2.89)$$

这两项分别为两个方向的复振幅，为了方便，常取归一化矢量。接下来举几个特殊偏振的例子，

$$\text{x 偏振: } \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad (2.90)$$

$$\text{y 偏振: } \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad (2.91)$$

$$45^\circ \text{ 度偏振: } \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \quad (2.92)$$

$$\text{右旋圆偏振: } \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ -i \end{pmatrix} \quad (2.93)$$

$$\text{左旋圆偏振: } \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ i \end{pmatrix} \quad (2.94)$$

各种偏振器件对光的作用可以写为矩阵形式，称为琼斯矩阵，接下来给出几个常见的矩阵

$$\text{转偏器 (旋光): } \begin{pmatrix} \cos \theta & \sin \theta \\ -\sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix} \quad (2.95)$$

$$\text{波晶片: } \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & e^{-i\Delta} \end{pmatrix} \quad (2.96)$$

$$\text{偏振片: } \begin{pmatrix} \cos^2 \alpha & \sin \alpha \cos \alpha \\ \sin \alpha \cos \alpha & \cos^2 \alpha \end{pmatrix} \quad (2.97)$$

这些矩阵的行列式不都为 1。最后考虑一下反射的情形，设传播方向为 z ，空间反射使其反向由于我们在空间中始终取右手系，所以必须再旋转一个坐标轴，取为 x ，可将矩阵写为

$$\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (2.98)$$

逆向传播时，元件的作用是其原本矩阵的转置。

然而，偏振矢量只能表达纯态的光，表达不了像自然光或部分偏振光这样的各种不同态混合的光。为此，我们引入一个厄密矩阵，称为相干矩阵，定义为

$$\mathbf{J} = \begin{pmatrix} \langle U_x U_x^* \rangle & \langle U_x U_y^* \rangle \\ \langle U_x^* U_y \rangle & \langle U_y U_y^* \rangle \end{pmatrix} \quad (2.99)$$

其中 $\langle \dots \rangle$ 是取统计平均操作，容易看到矩阵的迹 $\text{Tr} \mathbf{J}$ 即为光强，自然光的光强归一化相干矩阵是

$$\frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (2.100)$$

一个辨别一束光是否是纯态的方法是先归一化 \mathbf{J} ，再计算 $\text{Tr} \mathbf{J}^2$ ，若其为 1 则为纯态，若小于 1 则为混合态。

现在琼斯矩阵 \mathbf{L} 对相干矩阵的作用写为

$$\mathbf{J}' = \mathbf{L} \mathbf{J} \mathbf{L}^\dagger \quad (2.101)$$

其中 \dagger 为对矩阵取转置和共轭。

这里构造相干矩阵来处理不同矢量统计混合的问题在量子力学中也有体现，即所谓的密度矩阵或密度泛函，令 p_i 为某一态矢量出现的概率

$$\rho = \sum_i p_i |\psi\rangle \langle \psi| \quad (2.102)$$

这在量子统计力学中占重要地位。

然而相干矩阵不能线性叠加，这意味着它在那种自然光双缝干涉中并不实用，事实上我个人喜欢用一个不太严格的偏振矢量来处理，对 x, y 方向光强比为 η^2 的部分偏振光，设一个矢量

$$\begin{pmatrix} A \\ B \end{pmatrix} \quad (2.103)$$

令 $\frac{|B|}{|A|} = \eta$ ，接下来的步骤与普通的偏振矢量相同，但是在最后一步求光强时，将 AB^*, A^*B 的交叉项消去，即可得到正确答案。

以一个例子说明之，用上面的光对一个双缝干涉，我们在双缝处分别贴上两个 $\pm\alpha$ 的偏振片。那么末态两个矢量为

$$P_1 = \begin{pmatrix} \cos^2 \alpha A + \sin \alpha \cos \alpha B \\ \sin \alpha \cos \alpha A + \sin^2 \alpha B \end{pmatrix}, P_2 = \begin{pmatrix} \cos^2 \alpha A - \sin \alpha \cos \alpha B \\ -\sin \alpha \cos \alpha A + \sin^2 \alpha B \end{pmatrix} \quad (2.104)$$

设双缝之间相位差为 δ ，则末态矢量写为

$$\begin{aligned} P &= P_1 e^{i\frac{\delta}{2}} + P_2 e^{-i\frac{\delta}{2}} \\ &= \begin{pmatrix} 2 \cos^2 \alpha \cos \delta A + 2i \sin \alpha \cos \alpha \sin \delta B \\ 2i \sin \alpha \cos \alpha \sin \delta A + 2 \sin^2 \alpha \cos \delta B \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (2.105)$$

则光强

$$\begin{aligned} I &= 4 \cos^4 \alpha \cos^2 \delta |A|^2 + 4 \sin^4 \alpha \cos^2 \delta |B|^2 \\ &\quad + 4 \sin^2 \alpha \cos^2 \alpha \sin^2 \delta (|A|^2 + |B|^2) \\ &\quad + \underbrace{8i \sin \alpha \cos \alpha \sin \delta \cos \delta (AB^* - A^* B)}_{=0} \end{aligned} \quad (2.106)$$

最终求出衬比度为

$$\gamma = \frac{|(\cos^2 \alpha - \eta^2 \sin^2 \alpha) \cos 2\alpha|}{\cos^2 \alpha + \eta^2 \sin^2 \alpha} \quad (2.107)$$

2.2.4 双折射

双折射效应是由介质折射率各向不同性导致的，我们接下来考虑 $\mu = \mu_0$ 的非磁性介质，我们设对角化后的介质介电常数张量为

$$\vec{\varepsilon} = \varepsilon_0 \begin{pmatrix} n_x^2 & 0 & 0 \\ 0 & n_y^2 & 0 \\ 0 & 0 & n_z^2 \end{pmatrix} \quad (2.108)$$

介质中的无源麦克斯韦方程

$$\begin{cases} \nabla \cdot \vec{D} = 0 \\ \nabla \cdot \vec{B} = 0 \\ \nabla \times \vec{H} = \partial_t \vec{D} \\ \nabla \times \vec{E} = -\partial_t \vec{B} \end{cases} \quad (2.109)$$

对于平面波, 我们将 ∇ 用 $i\vec{k}$ 代换, 将 ∂_t 用 $-i\omega$ 代换有

$$\begin{cases} \vec{k} \cdot \vec{D} = 0 \\ \vec{k} \cdot \vec{B} = 0 \\ \vec{k} \times \vec{H} = -\omega \vec{D} \\ \vec{k} \times \vec{E} = \omega \vec{B} \end{cases} \quad (2.110)$$

注意到光线方向就是能流方向, 即

$$\vec{S} = \vec{E} \times \vec{H} \quad (2.111)$$

从上述式子与条件我们可以发现, \vec{B} 与 \vec{H} 同向, 且 $\vec{B}, \vec{E}, \vec{S}$ 与 $\vec{H}, \vec{D}, \vec{k}$ 这两组矢量内部均两两垂直。可知 $\vec{E}, \vec{D}, \vec{S}, \vec{k}$ 在同一平面内。 \vec{E}, \vec{D} 的夹角与 \vec{S}, \vec{k} 的夹角相同, 设为 θ 我们接下来定义波法线折射率

$$n_k = \frac{c}{v_k} = \frac{c|\vec{k}|}{\omega} = \sqrt{\frac{|\vec{D}|}{\varepsilon_0 |\vec{E}| \cos \theta}} \quad (2.112)$$

光线速度为

$$v_s = \frac{|\vec{E} \times \vec{H}|}{\vec{E} \cdot \vec{D}} \quad (2.113)$$

光线折射率定义为

$$n_s = \frac{c}{v_s} = n_k \cos \theta = \sqrt{\frac{|\vec{D}| \cos \theta}{\varepsilon_0 |\vec{E}|}} \quad (2.114)$$

这和我们作图法的结论相符。

设 \vec{S} 方向的单位矢量 \hat{s} , \vec{k} 方向单位矢量 \hat{k} , 由几何关系, 有

$$\vec{D} = \frac{|\vec{D}|}{|\vec{E} \cos \theta|} [\vec{E} - \hat{k}(\hat{k} \cdot \vec{E})] \quad (2.115)$$

$$\vec{E} = \frac{|\vec{E}|}{|\vec{D} \cos \theta|} [\vec{D} - \hat{s}(\hat{s} \cdot \vec{D})] \quad (2.116)$$

另有本构关系

$$\vec{D} = \vec{\varepsilon} \cdot \vec{E} \quad (2.117)$$

$$\vec{E} = \vec{\varepsilon}^{-1} \cdot \vec{D} \quad (2.118)$$

原则上通过(2.115)和(2.117)我们就可以解出波法线折射率的取值, 即解方程

$$\det\left[\frac{\vec{\varepsilon}}{\varepsilon_0} - n_k^2(1 - \hat{k}\hat{k})\right] = 0 \quad (2.119)$$

其中 $\hat{k}\hat{k}$ 是并矢，光线折射率也可同理解出。

事实上我认为单轴晶体折射率直接解这个方程更方便，设折射率 $\frac{\vec{\epsilon}}{\epsilon_0} = \text{diag}(n_1^2, n_1^2, n_2^2)$ 。这时候我们可以直接代入 $\vec{k} = (k \sin \phi, 0, k \cos \phi)$ 。从而

$$\begin{vmatrix} n_1^2 - n_k^2 \cos^2 \phi & 0 & n_k^2 \sin \phi \cos \phi \\ 0 & n_1^2 - n_k^2 & 0 \\ n_k^2 \sin \phi \cos \phi & 0 & n_2^2 - n_k^2 \sin^2 \phi \end{vmatrix} = 0 \quad (2.120)$$

即解得 $n_k = n_1$ 或 $n_k = \frac{n_1^2 n_2^2}{n_1^2 \sin^2 \phi + n_2^2 \cos^2 \phi}$ 。对应的电场矢量分别是 $(0, 1, 0)$ 和 $(n_2^2 \cos \phi, 0, -n_1^2 \sin \phi)$ ，分别对应 o 光与 e 光。同时也容易计算出 $\cos \theta = \frac{n_2^2 \cos^2 \phi + n_1^2 \sin^2 \phi}{\sqrt{n_2^4 \cos^2 \phi + n_1^4 \sin^2 \phi}}$ ，从而可以得到光线折射率。对于记不住公式的同学 (比如我)，这样做也是一种选择。

但是在一般情况下，直接解这个方程太过麻烦了，所以我们再进行一步操作，将(2.115)和(2.117)联立，可得到方程的分量形式

$$E_i = \frac{n_k^2 \hat{k}_i (\hat{k} \cdot \vec{E})}{n_k^2 - n_i^2} \quad (2.121)$$

两边同乘 k_i 再求和，可消去 $\hat{k} \cdot \vec{E}$ ，可得

$$\frac{\hat{k}_x^2}{n_k^2 - n_x^2} + \frac{\hat{k}_y^2}{n_k^2 - n_y^2} + \frac{\hat{k}_z^2}{n_k^2 - n_z^2} = \frac{1}{n_k^2} \quad (2.122)$$

定义主传播速度 $v_i = \frac{c}{n_i}$ ，还可改写为

$$\frac{\hat{k}_x^2}{v_k^2 - v_x^2} + \frac{\hat{k}_y^2}{v_k^2 - v_y^2} + \frac{\hat{k}_z^2}{v_k^2 - v_z^2} = 0 \quad (2.123)$$

如法炮制一下，可以得到光线折射率椭球满足

$$\frac{\hat{s}_x^2}{\frac{1}{v_k^2} - \frac{1}{v_x^2}} + \frac{\hat{s}_y^2}{\frac{1}{v_k^2} - \frac{1}{v_y^2}} + \frac{\hat{s}_z^2}{\frac{1}{v_k^2} - \frac{1}{v_z^2}} = 0 \quad (2.124)$$

整个过程中我们可以看到两个折射率的方程具有相似性，事实上两组方程中的各量存在这如下的代换关系

$$\begin{aligned} \vec{D} &\leftrightarrow \vec{E}, \hat{k} \leftrightarrow -\hat{s} \\ n_k &\leftrightarrow \frac{1}{n_s}, v_k \leftrightarrow \frac{1}{v_s} \\ n_i &\leftrightarrow \frac{1}{n_i}, v_i \leftrightarrow \frac{1}{v_i} \end{aligned} \quad (2.125)$$

求界面上的折射问题需要用到惠更斯作图法，即利用光线速度分布画出波阵面，从而求解折射方向。另外这里略去了折射率椭球与光线椭球这样的工具，因为感觉不太实用 (还有懒)，感兴趣同学可以看《光学原理》。

2.2.5 其它

对一个观测太阳的模型，考虑横向与纵向的视角之比，如图2.14。

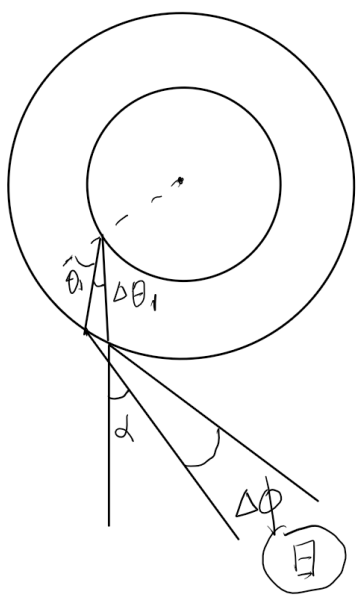
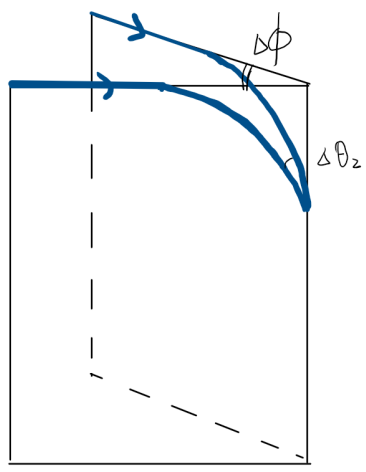


图 2.14: 看太阳



光线偏折导致的张角变化

图 2.15: 张角变化

太阳可视为球形，张角为 $\Delta\phi$ ，设空间中一个固定的标尺，光遇到大气层前直线传播，与标尺夹角为 α ，光到达地面时与地面夹角为 θ 。则对地面上的观测者，平行纸面方向张角为 $\frac{d\theta}{d\alpha}\Delta\phi$ 。但垂直纸面方向张角也会发生变化，如图2.15，考虑时需要结合这两项。

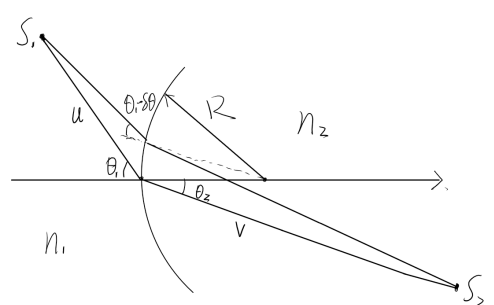


图 2.16: 不傍轴光线

若一个不傍轴光线入射球面，光线在光心处小范围入射。如图2.16，考

考虑相邻两条光线并应用小量形式的折射定律，我们可以得到

$$\frac{n_1 \cos^2 \theta_1}{u} + \frac{n_2 \cos^2 \theta_2}{v} = \frac{n_2 \cos \theta_2 - n_1 \cos \theta_1}{R} \quad (2.126)$$

折射率的微观起因是晶格的散射，事实上介质只是不同真空电磁波的叠加。一个半定量的解释如下，如图2.17，晶格之间的是真空中电磁波，满足

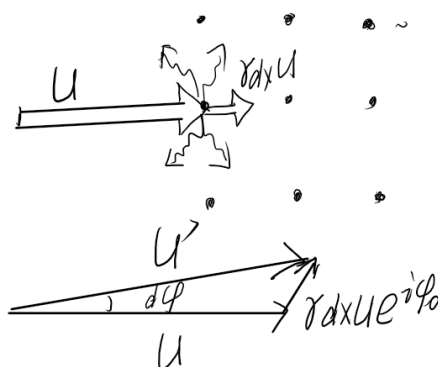


图 2.17: 折射率的解释

$k = \frac{\omega}{c}$ 。由于晶格之间的相位差，所以只有满足布拉格公式的散射光才能相干增强，再考虑到一些无规则的涨落，最终我们只考虑和入射光同向的散射的影响，我们设经过 dx 有比例为 γdx 的光被散射，设散射光具有相位突变 φ 。近似的写出传播 dx 后的复振幅

$$U' = U e^{ikdx - i\omega dt} + e^{i\varphi} \gamma dx U \quad (2.127)$$

只考虑虚部变化，最终写出

$$U' = U e^{i(k + \gamma \sin \varphi) dx - i\omega dt} \quad (2.128)$$

可得折射率

$$n = \frac{k + \gamma \sin \varphi}{k} \quad (2.129)$$

这种想法有点像散射的玻恩近似。CPHOS 的 T5 也有用这种次波相加的想法解释折射率。

关于傅里叶光学感觉讲不出新东西，还要铺垫傅里叶变换和波前相关的内容，本作的目的并不是成为一本教材式的百科全书，所以就不讲了。这部分内容初步的可以参考《现代光学基础》的 2、6、7 章，了解到这里对竞赛应用就够了。感兴趣的可以看 Goodman《傅里叶光学导论》。

对于一些愚蠢的各向不同性折射率分布，干脆直接用最小作用量原理。仿照导出能动量守恒的方法导出折射中的不变量。这里对应时间的积分变量的选取可有一定任意性，如 $s = \int n \sqrt{1 + r^2 \varphi'^2} dr = \int n \sqrt{r^2 + r'^2} d\varphi$ ，根据 n 的形式而定，有时一个给出动量另一个能量，读者可自己尝试。

ixq2024

2.3 运动学随记

2.3.1 几种约束

杆与绳的约束

两点间距不变

$$(\vec{r}_A - \vec{r}_B)^2 = \text{Const} \quad (2.130)$$

对时间求导两次得到速度关联和加速度关联

$$\Rightarrow (\vec{r}_A - \vec{r}_B) \cdot (\vec{v}_A - \vec{v}_B) = 0 \quad (2.131)$$

$$\Rightarrow (\vec{r}_A - \vec{r}_B) \cdot (\vec{a}_A - \vec{a}_B) + (\vec{v}_A - \vec{v}_B)^2 = 0 \quad (2.132)$$

将其微分化我们可以得到绳的运动约束

$$\frac{\partial v_\tau}{\partial s} = \frac{v_n}{\rho} \quad (2.133)$$

$$\frac{\partial a_\tau}{\partial s} - \frac{a_n}{\rho} + \frac{\partial v^2}{\partial s} = 0 \quad (2.134)$$

s 为线段长度, ρ 为该处曲率半径 (更详细的建议同学们去看看金树雨的《关于重软细不可伸长绳的研究》)。

顺便给出绳的动力学方程, 设质量线密度 λ , 内部张力 T , 外力线密度为 f_n, f_τ , 利用自然坐标系

$$\lambda a_\tau = \frac{\partial T}{\partial s} + f_\tau, \lambda v^2 = T \frac{\partial \theta}{\partial s} + F_n \quad (2.135)$$

纯滚动

纯滚动接触的两个点有速度关联与加速度关联

$$v_{1\tau} = v_{2\tau}, v_{1n} = v_{2n} \quad (2.136)$$

$$a_{1\tau} = a_{2\tau}, a_{1n} \neq a_{2n} \quad (2.137)$$

法向相对加速度之差是

$$a_{1n} - a_{2n} = \omega_1^2 \rho_1 + \omega_2^2 \rho_2 + \frac{u^2}{\rho_1 + \rho_2} \quad (2.138)$$

u 为两者曲率中心的相对速度。这里要注意一下法向的定义, 可能会相差正负号。

有个简单理解, 就是前两项是接触点对曲率中心的相对加速度, 最后一项是曲率中心相互绕转的加速度。前两种约束如图2.18所示

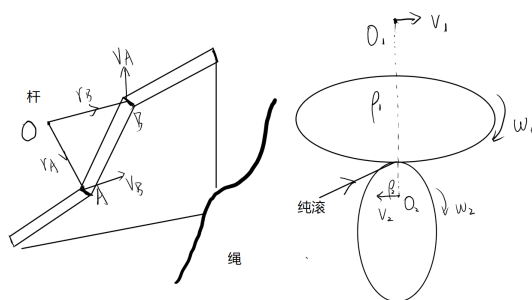


图 2.18: 两个约束

点在线上，点在面上

二维中，约束在方程为 $f(x, y, t) = 0$ 的线上的点的速度约束

$$\frac{\partial f}{\partial x} \dot{x} + \frac{\partial f}{\partial y} \dot{y} + \frac{\partial f}{\partial t} = 0 \quad (2.139)$$

三维中，约束在方程为 $g(\vec{r}, t)$ 的面上的点的速度约束

$$\nabla g \cdot \vec{v} + \frac{\partial g}{\partial t} = 0 \quad (2.140)$$

2.3.2 杆环体系

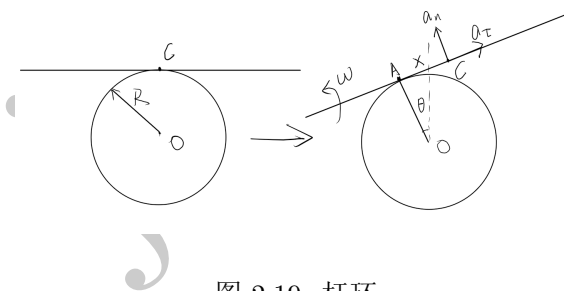


图 2.19: 杆环

如图2.19，固定的半径为 R 环上始终与其相切的杆，设原先杆的中心与环相切，设接触点转过 θ 角。此时接触点与中心距离为 x 。则杆的角速度和速度可以写为

$$\omega = \dot{\theta}, v_{c\tau} = \dot{x} - R\dot{\theta}, v_{cn} = x\dot{\theta} \quad (2.141)$$

纯滚条件对应

$$\dot{x} = \dot{\theta} R \quad (2.142)$$

加速度则是

$$a_{c\tau} = \ddot{x} - \dot{\theta}^2 x - \ddot{\theta} R \quad (2.143)$$

$$a_{cn} = -\dot{\theta}^2 R + \ddot{\theta} x + \ddot{\theta} x \quad (2.144)$$

对于杆与环都有运动的情形，求其中的加速度关联。若是杆在环外，取杆的参考系，那么我们知道环的中心的加速度一定平行于杆。

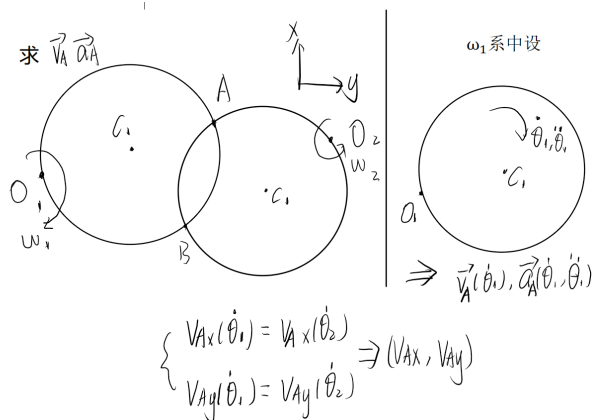


图 2.20: 双环

对于平面内两个相交的双环，双环均绕某定点转动，如图2.20。求某个交点的速度与加速度，建议在 ω_1 的旋转系中设出环 1 的角速度和角加速度。2 同理。再利用换系得到同一点地面系下速度加速度的两种表示，让两个结果对应相等，就可以消去设出的角速度，得到地面系下的各量。对于求交点的参量的问题可以用这种方法，更好地利用了几何约束。

2.3.3 一个证明

刚体在平面上纯滚，我们在这里试图证明接触点的切向加速度为零，法向加速度为 $\omega^2 \rho$ 。其中 ρ 是接触点对应曲率半径。

先取刚体上一个固连点 O，设接触点为 D，设 O 的速度为 \vec{v}_O ，D 对 O 的位矢 \vec{r}_D ，首先我们注意的是接触点是时刻在变化，我们将求的是此刻是接触点的那个点的加速度。

有纯滚约束

$$\vec{v}_O + \vec{\omega} \times \vec{r}_D = 0 \quad (2.145)$$

对之微分

$$\dot{\vec{v}}_O + \dot{\vec{\omega}} \times \vec{r}_D + \vec{\omega} \times \dot{\vec{r}}_D = 0 \quad (2.146)$$

我们接下来考察 $\dot{\vec{r}}_D$ ，注意这个位矢是在地面系下写出的，它的变换由两部分贡献，其一是刚体的旋转，其二是接触点在刚体固连系的变化。由几

何关系，固连点的变化是 $d\vec{r}_{D1} = d\theta \times \vec{\rho}$ 。于是

$$\dot{\vec{r}}_D = \vec{\omega} \times \vec{r}'_D + \vec{\omega} \times \vec{\rho} \quad (2.147)$$

这里我们引入 \vec{r}'_D 是想表达这是在刚体固联系中的量，对应的是现在是接触点的那个固连点与 D 之间的位矢，此刻有 $\vec{r}_D = \vec{r}'_D$ 。

加速度表达式

$$\vec{a} = \dot{\vec{v}}_O + \dot{\vec{\omega}} \times \vec{r}'_D + \vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r}'_D) \quad (2.148)$$

全部代入可得

$$\vec{a} = -\omega^2 \vec{\rho} \quad (2.149)$$

得证

如果并不是在平面上运动，请读者自己证明一下，理应导出(2.146)的结果。

2.4 热学拾遗

2.4.1 相变潜热

重点是要注意相变潜热是等温等压情况下的热量变化 (这里取吸热为正), 在可逆过程中对应焓变。

我们以下主要关心理想气体与不可压缩忽略体积的流体之间的汽化热 L 。克拉伯龙用 $d\mu_A = d\mu_B$ 容易导出, 也可以用 $L = H_A - H_B = T(S_A - S_B)$ 导出, 移项会发现两种方法是一样的

相变中的热量概念

首先我们考虑绝热等体环境下相变导致的温度变化。以化学反应为例。设初末态均为理想气体物质的量分别为 n_i, n_f 。设相变潜热为 λ 。

先在等温等压环境下考量, 我们这么理解这个过程, 首先体系从外界吸收了热量 λ , 再加上发生化学反应放出的热量 Q , 使得原物质变成等温的末态物质, 且对外做了一些功。于是我们写出

$$\lambda + Q = \Delta U + (n_f - n_i)RT_0 \quad (2.150)$$

其中 ΔU 是变为等温末态物质的内能变化。

然后考虑绝热等体, 由于绝热, 没有吸热。由于等体, 没有做功。这两者的差会使末态温度变化。列出末态的热一

$$Q = \Delta U + n_f C_{V,f}(T - T_0) \quad (2.151)$$

于是有

$$T = T_0 + \frac{(n_f - n_i)RT_0 - \lambda}{n_f C_{V,f}} \quad (2.152)$$

绝热饱和蒸汽

设水蒸汽摩尔内能为 u_v , 液态水摩尔内能为 u_w , 由于汽化热是焓变, 有

$$u_w = u_v + RT - L \quad (2.153)$$

设总摩尔量为 ν_0 , 水蒸气摩尔量为 ν , 液态水摩尔热容为 c_w , 水蒸气等压摩尔热容 c_p 考虑 ν 随温度变化, 在这个过程中 L 与热容可视为不变。

状态方程

$$pV = \nu RT \quad (2.154)$$

¹拾遗有个历史笑话, 宋代俞琰《席上腐谈》卷上记载“温州有土地杜拾姨无夫, 五撮须相公无妇。州人迎杜拾姨以配五撮须, 合为一庙。杜十姨为谁? 乃杜拾遗(杜甫)也。五撮须为谁? 乃伍子胥也。”

克拉玻龙方程

$$\frac{dp}{dT} = \frac{pL}{RT^2} \quad (2.155)$$

绝热方程

$$\nu du_v + d\nu u_v + (\nu_0 - \nu) du_w - d\nu u_w + p dV = 0 \quad (2.156)$$

联立得 ($p dV = d(pV) - \frac{pV}{RT^2} dT$)

$$\frac{d\nu}{dT} + \left(\frac{C_p - C_w}{L} - \frac{1}{T} \right) \nu = \frac{\nu_0 C_w}{L} \quad (2.157)$$

由一阶常微分方程，立刻解得。

原题认为 L 不变，从而认为 $dL = (C_p - C_w)dT = 0$ ，个人认为是的不合理的。因为 dL 是 RdT 的同阶小量，只忽略 dL 会导致错误。 L 不变应当只是在温度范围内 $\frac{\Delta L}{L} \ll 1$ 。忽略同阶小量在很多物理竞赛题标答中都有出现，希望复决赛不会有。

2.4.2 非平衡两个小结论

耗散与扩散

定义一个分布 f 表示粒子数密度，有扩散流

$$J_1 = -D \nabla f \quad (2.158)$$

再定义一个由耗散导致的流，如电流，速度与单个粒子受力成正比， $v = \mu F$ ，则

$$J_2 = f v = \mu f F = -\mu f \nabla E \quad (2.159)$$

$$J_1 + J_2 = 0 \Rightarrow f \propto e^{-\frac{\mu E}{D}} \quad (2.160)$$

与玻尔兹曼分布比较得 $\frac{\mu}{D} = \frac{1}{kT}$ 。

1/6 的导出

大家都知道泄流的系数是 $1/4$ ，但看过刘玉鑫老师热学书的同学可能记得各类输运现象的系数是 $1/6 \times 2 = 1/3$ 。以下阐释之。设空间内某物理量有一维浓度分布 $n(x)$ (或者想成沿局域浓度梯度取 x 方向)，设速率分布为 $f(v)$ ，平均自由程分布为 $g(\lambda)$ 。粒子一旦发生碰撞就与周围同化。

让我们来考虑 dt 时间内，撞到 $x = x_0$ 处 dS 面积的某半边上，速度大小为 v 与法线夹角为 θ ，自由飞行距离为 λ 的粒子所携带的该物理量。

$$dN = n(x_0 + \lambda \cos \theta) v dt \cos \theta dS f(v) g(\lambda) \frac{\sin \theta}{2} dv d\lambda d\theta \quad (2.161)$$

展开 n 并积分, 得到单方向流密度

$$J' = \int_0^\infty dv \int_0^\infty d\lambda \int_0^{\pi/2} d\theta (n(x_0) + \frac{dn}{dx} \lambda \cos \theta) v \cos \theta f(v) g(\lambda) \frac{\sin \theta}{2} \quad (2.162)$$

积分得

$$J' = \frac{1}{4} n(x_0) \bar{v} + \frac{1}{6} \frac{dn}{dx} \bar{\lambda} \bar{v} \quad (2.163)$$

考虑另一边

$$J'' = \frac{1}{4} n(x_0) \bar{v} - \frac{1}{6} \frac{dn}{dx} \bar{\lambda} \bar{v} \quad (2.164)$$

最终得到净流密度

$$J = -\frac{1}{3} \nabla n \bar{\lambda} \bar{v} \quad (2.165)$$

但如果是一面真空一面有气体的话保留一阶即可。

2.4.3 余弦辐射

首先余弦辐射可以由光子泄流导出, 请读者自己考虑。

其次有个很有用的性质, 温度相同时, 由于热平衡, 入射能流与出射能流相等, 所以可以使用 1 对 2 的能流来反推出 2 对 1 的能流。这点在某些时候比较有用, 如你知道内圆柱对外圆柱的能流为 $2\pi r^2 L T_1^4$, 则立刻知道外圆柱对内圆柱的能流是 $2\pi r^2 L T_2^4$, 从而不用考虑什么积分范围之类的。利用热平衡还能算出物体的吸收, 热导等性质。

接下来给出一下余弦辐射的归一化系数, 如图 2.21 三维能流

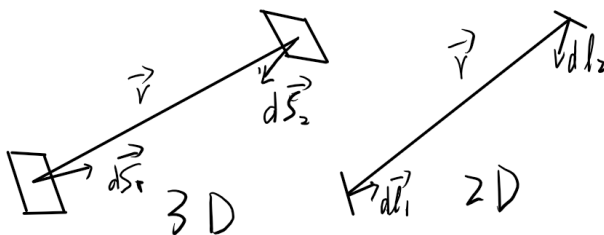


图 2.21: 余弦辐射

$$J = \frac{1}{\pi} \sigma T^4 \frac{\vec{S}_1 \cdot \hat{r} \vec{S}_2 \cdot \hat{r}}{r^2} \quad (2.166)$$

二维能流, 相当于无限长黑体棍

$$J = \frac{1}{2} \sigma T^4 \frac{\vec{l}_1 \cdot \hat{r} \vec{l}_2 \cdot \hat{r}}{r} \quad (2.167)$$

2.5 相对论变换

2.5.1 魏格纳转动

这小节主要参考了知乎文章《相对论：多次换系的 Wigner Rotation》

这个东西说的实际上是连续的两相对论变换不满足叠加原理。首先推出一个普通的洛伦兹变换形式，取自然单位制，设速度矢量为 \vec{v} 。首先取原点在变换下不变，将一个矢量沿速度方向和垂直速度方向投影

$$\vec{x}_{\parallel} = \frac{\vec{v}\vec{v}}{v^2} \cdot \vec{x} \quad (2.168)$$

$$\vec{x}_{\perp} = (1 - \frac{\vec{v}\vec{v}}{v^2}) \cdot \vec{x} \quad (2.169)$$

利用熟知的结果

$$\vec{x}'_{\perp} = \vec{x}_{\perp} \quad (2.170)$$

$$t' = \gamma(t + \vec{v} \cdot \vec{x}_{\parallel}) \quad (2.171)$$

$$\vec{x}'_{\parallel} = \gamma(\vec{x}_{\parallel} + \vec{v}t) \quad (2.172)$$

可以将变换写为对四矢量 (t, \vec{x}) 作用的矩阵

$$\begin{bmatrix} \gamma & \gamma v_x & \gamma v_y & \gamma v_z \\ \gamma v_x & 1 + \frac{(\gamma-1)v_x^2}{v^2} & \frac{(\gamma-1)v_x v_y}{v^2} & \frac{(\gamma-1)v_x v_z}{v^2} \\ \gamma v_y & \frac{(\gamma-1)v_y v_x}{v^2} & 1 + \frac{(\gamma-1)v_y^2}{v^2} & \frac{(\gamma-1)v_y v_z}{v^2} \\ \gamma v_z & \frac{(\gamma-1)v_z v_x}{v^2} & \frac{(\gamma-1)v_z v_y}{v^2} & 1 + \frac{(\gamma-1)v_z^2}{v^2} \end{bmatrix} \quad (2.173)$$

我们接下来证明连续的两个正交方向相对论变换与相同速度的直接变换差一个转动矩阵，设先后进行 $v_x \hat{x}, v_y \hat{y}$ 的变换，它们的和速度为 $v_x \hat{x} + \sqrt{1 - v_x^2} v_y \hat{y}$ ，以下矩阵省略 z 分量这个转动矩阵满足

$$\begin{aligned} & \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \theta & \sin \theta \\ 0 & -\sin \theta & \cos \theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \gamma_y & 0 & \gamma_y v_y \\ 0 & 1 & 0 \\ \gamma_y v_y & 0 & \gamma_y \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \gamma_x & \gamma_x v_x & 0 \\ \gamma_x v_x & \gamma_x & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} \gamma_x \gamma_y & \gamma_x \gamma_y v_x & \gamma_y v_y \\ \gamma_x \gamma_y v_x & 1 + \frac{(\gamma_x \gamma_y - 1) \gamma_x^2 v_x^2}{\gamma_x^2 v_x^2 + v_y^2} & \frac{(\gamma_x \gamma_y - 1) \gamma_x v_x v_y}{\gamma_x^2 v_x^2 + v_y^2} \\ \gamma_y v_y & \frac{(\gamma_x \gamma_y - 1) \gamma_x v_x v_y}{\gamma_x^2 v_x^2 + v_y^2} & 1 + \frac{(\gamma_x \gamma_y - 1) v_y^2}{\gamma_x^2 v_x^2 + v_y^2} \end{bmatrix} \quad (2.174) \end{aligned}$$

可以解得

$$\sin \theta = \frac{\gamma_x}{\gamma_y} \frac{\gamma_x \gamma_y - 1}{\gamma_x^2 v_x^2 + v_y^2} v_x v_y \quad (2.175)$$

这个转动可以看成是两个系中速度矢量与各自 x 轴夹角的差值，有些解法就是从这里入手的，另外托马斯进动是将这里的 y 方向速度代换为 $a dt$ 。

2.5.2 斐索流水实验

这个经典老题相信大家都会做，标准做法是用相对论速度变换。但是波没有质点那样确定的位置和速度，为什么能对波进行速度变换？而且我们知道，在相对论变换下，波矢变换满足一般的四矢量变换，为什么不用这个代入相速度 $\frac{\omega}{k}$ 代入变换公式？

事实上速度变换的对象是群速度，其在三维空间下可写为 $\nabla_k \omega$ ， ∇_k 表示 k 空间内求梯度，即速度 i 分量为 $\frac{\partial \omega}{\partial k_i}$ 。下面证明群速度变换满足一个正常的速度矢量变换，以 x 方向 boost 为例，取 $c = 1$ ，有

$$\omega = \omega(k_x, k_y, k_z), \quad (2.176)$$

$$k'_y = k_y, k'_z = k_z \quad (2.177)$$

$$\omega' = \gamma(\omega + vk_x), k'_x = \gamma(k_x + v\omega) \quad (2.178)$$

$$\begin{aligned} v'_{gx} &= \frac{\partial \omega'}{\partial k'_x} = \frac{\partial \omega'}{\partial k_x} \frac{\partial k_x}{\partial k'_x} \\ &= \frac{\frac{\partial \omega}{\partial k_x} + v}{1 + v \frac{\partial \omega}{\partial k_x}} = \frac{v_{gx} + v}{1 + vv_{gx}} \end{aligned} \quad (2.179)$$

对 k'_x 以 k'_y 作偏导

$$0 = \gamma \left(\frac{\partial k_x}{\partial k_y} + v \frac{\partial \omega}{\partial k_x} \frac{\partial k_x}{\partial k_y} + v \frac{\partial \omega}{\partial k_y} \right) \quad (2.180)$$

$$\Rightarrow \frac{\partial k_x}{\partial k_y} = - \frac{vv_{gy}}{1 + vv_{gx}} \quad (2.181)$$

$$v'_{gy} = \gamma \left(\frac{\partial \omega}{\partial k_y} + \frac{\partial \omega}{\partial k_x} \frac{\partial k_x}{\partial k_y} + v \frac{\partial k_x}{\partial k_y} \right) \quad (2.182)$$

$$\Rightarrow v'_{gy} = \frac{v_{gy}}{\gamma(1 + vv_{gx})} \quad (2.183)$$

z 方向同理，得证。读者自己证明的时候注意下偏导关系在谁不变时作用。

我们取介质静止系下折射率为 n ，那么恢复量纲，若介质速度与光线速度同向，那么地面系下相速度与群速度均为

$$u = \frac{c + nv}{nc + v} \approx \frac{c}{n} + \left(1 - \frac{1}{n^2}\right)v \quad (2.184)$$

$1 - \frac{1}{n^2}$ 称为斐索曳引系数。若介质有色散，满足 $n(\omega)$ ，设地面系下角频率 ω ，则介质静止系下角频率 ω' 满足 $\omega = \omega' + \frac{nv}{c}\omega'$ 。那么速度为

$$u = \frac{c + n(\omega')v}{n(\omega')c + v} \approx \frac{c}{n(\omega)} + \left(1 - \frac{1}{n(\omega)^2} + \frac{\omega}{n(\omega)} \frac{dn}{d\omega}\right)v \quad (2.185)$$

此时曳引系数为 $1 - \frac{1}{n(\omega)^2} + \frac{\omega}{n(\omega)} \frac{dn}{d\omega}$ 。

2.5.3 分布变换

由于观测者总是在地面系下观测物体，如何将另一个系中的空间分布变换到地面系下就成了一个重要的问题。在相对论中，这个问题会有点麻烦，因为空间坐标的变换和时间坐标扯在了一起，而我们真正观测到的是地面系下某个时刻对应的空间分布。

考虑某系中的一根杆，到地面系后的变化，在四维空间中，它有两个自由度比如 $x - y$ 平面中一根杆，满足

$$t' = a_0, x' = a_1, y' = kx' + b, z' = 0 \quad (2.186)$$

经过一系列变换后到达地面系，地面系中坐标满足

$$\begin{aligned} t &= f_t(x', y', z', t'), x = f_x(x', y', z', t') \\ y &= f_y(x', y', z', t'), z = f_z(x', y', z', t') \end{aligned} \quad (2.187)$$

我们对特定时刻 $t = A_0$ ，反解出 $a_0 = g(A_0, a_1)$ ，再代入剩下的方程得到

$$x = f_x(a_1, A_0), y = f_y(a_1, A_0), z = f_z(a_1, A_0) \quad (2.188)$$

这是个双自由度方程，代表了一个运动的曲线。由于经过的变换都是线性变换，最终得到的仍是四维空间中匀速运动的一根杆。

对于相空间中的分布变换，我们知道粒子约束在 $E^2 - p^2 = m^2$ 的动量空间超曲面上运动，且洛伦兹变换满足四维体积元换系不变，从而

$$\delta(E^2 - p^2 - m^2) dE d^3p = \text{Const} \quad (2.189)$$

积分一次可知 $\frac{d^3p}{E}$ 换系不变。

2.5.4 波动的变换方法

这里讲两个经典波动效应的变换方法，并推广到相对论情况，以下考虑的都是匀速直线运动。

多普勒效应

首先考虑多普勒效应，一个经典的解释如图2.22。考虑波源速度为 \vec{v}' ，角频率为 ω_0 ，波速为 u ，在 t' 时刻沿 \hat{n} 发出的波，在 t 时刻被速度为 \vec{v} 的接收者接收。之后 $t + dt'$ 时刻波源发出的波在 $t + dt$ 时刻被接收，接收者感受到的角频率为

$$\omega = \frac{d\varphi}{dt} = \omega_0 \frac{dt'}{dt} \quad (2.190)$$

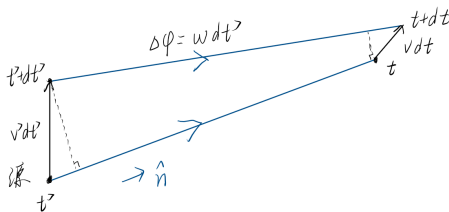


图 2.22: 多普勒效应

由几何关系, 考虑到前后多走的路程

$$dL = u(dt - dt') = \vec{v} \cdot \hat{n} dt - \vec{v}' \cdot \hat{n} dt' \quad (2.191)$$

从而得到

$$\omega = \omega_0 \frac{1 - \vec{v} \cdot \hat{n}/u}{1 - \vec{v}' \cdot \hat{n}/u} \quad (2.192)$$

这个方法固然直观, 但是它推导较为繁琐, 且同时涉及了 t, t' 两个时刻的物理量, 对于一些推广并不方便, 所以介绍一下变换相位的方法。

这里最基本的事实是相位 φ 是一个换系不变量, 那么我们只需要用到坐标变换就可以知道相位在地面系中的表达式。同时, 接收者感受到的频率满足

$$\omega = \frac{d\varphi(\vec{r}, t)}{dt} = \frac{\partial \varphi}{\partial t} + \vec{v} \cdot \nabla \varphi \quad (2.193)$$

因此我们只要在任意系中写出 φ , 再换至地面系, 就可以求出对任意一个接收者的角频率了。我们试着重新写出上面的结果, 在波源时空的相位分布为

$$\varphi = \omega_0(t_1 - \frac{|\vec{r}_1|}{u}) \quad (2.194)$$

坐标变换满足

$$\vec{r} = \vec{r}_1 + \vec{v}'t \quad (2.195)$$

然后试着代入式(2.193), 会发现与答案不一致, 读者可能会认为这是因为这里用的全是 t 时刻的参数, 但就算代换之后还是不一致, 这是为什么?

不知道读者有没有想过为什么式(2.192)不是换系不变的, 实际上前面一直没有提及一个很重要的条件, 就是波传播介质的运动情况。在(2.192)中我们默认了在考虑的系中介质没有速度, 然而在(2.194)中却认为波源静止系中介质静止。这两个并不是一样的情形。事实上对(2.192)的情况来说, 相位满足一个参数方程

$$\varphi(\vec{r}, t) = \omega_0 t', t' \text{ 满足 } t = t' + \frac{|\vec{r} - \vec{v}'t'|}{u} \quad (2.196)$$

再代入(2.193)，可得正确结果。

到这里为止可能并没有显示出相位变换的优点，甚至更为繁琐了。但是请注意在狭义相对论中，光波传播并没有所谓的介质，换言之每个系都可以当做介质静止系考虑，这时候相位变换就有显著的优点。

但是要注意，在相对论中感受到的频率是在本征系中定义的，这里还涉及了一项时间的钟慢效应，于是

$$\frac{d\varphi}{d\tau} = \gamma \left(\frac{\partial \varphi}{\partial t} + \vec{v} \cdot \nabla \varphi \right) \quad (2.197)$$

比如说一个以速度 $v'\hat{x}$ 运动的光源，相位就可以直接写为

$$\varphi = \omega_0(\gamma(t - v'x) + \sqrt{\gamma^2(x - v't)^2 + y^2 + z^2}) \quad (2.198)$$

可以立刻得到多普勒效应。

如果你用波矢变换的结果本质上还是算了两个不同时间的量。

运动介质折射

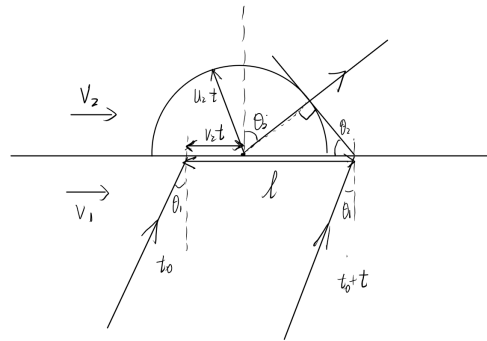


图 2.23: 运动介质折射

如图2.23，一个分界面上，两边有不同介质，波速分别为 u_1, u_2 ，各自以速度 v_1, v_2 沿界面运动。设一束入射波在界面上发生折射，设折射前后在介质静止系中波与界面法线的夹角分别为 θ_1, θ_2 ，我们先利用惠更斯原理来求出折射角之间的关系。考虑相隔 t 时刻入射的两列波，几何关系如图所示，有

$$\sin \theta_2 = \frac{u_2 t}{l - v_2 t} \quad (2.199)$$

同时有

$$l - u_1 t = \frac{v_1 t}{\sin \theta_1} v_1 t \quad (2.200)$$

联立得

$$\frac{\sin \theta_1}{u_1 + v_1 \sin \theta_1} = \frac{\sin \theta_2}{u_2 + v_2 \sin \theta_2} \quad (2.201)$$

接下来我们希望利用波矢变换来重新导出这一结论, 对于 $\varphi = \omega t - \vec{k} \cdot \vec{x}$, 代入伽利略变换 $\vec{x}' = \vec{x} - \vec{v}t$, 我们立刻得到非相对论情况下波矢变换

$$\omega' = \omega + \vec{k} \cdot \vec{v}, \vec{k}' = \vec{k} \quad (2.202)$$

注意到介质静止系最重要的性质是满足 $\omega = u|\vec{k}|$, 沿用上面的 θ 参量, 则可设介质内波矢为 $(\omega'_i, \frac{\omega'_i}{u_i} \sin \theta_i, \frac{\omega'_i}{u_i} \cos \theta_i)$, $i = 1, 2$, x 方向为平行界面方向。而折射定律可以简单的表示成

$$k_{1x} = k_{2x} \quad (2.203)$$

$$\omega_1 = \omega_2 \quad (2.204)$$

分别对应时间与空间的平移不变性。

将波矢均换至地面系

$$\omega_1 = \omega'_1(1 + \frac{v_1}{u_1} \sin \theta_1) = \omega_2 = \omega'_2(2 + \frac{v_2}{u_2} \sin \theta_2) \quad (2.205)$$

再代入

$$\frac{\omega'_1}{u_1} \sin \theta_1 = \frac{\omega'_2}{u_2} \sin \theta_2 \quad (2.206)$$

同样得到

$$\frac{\sin \theta_1}{u_1 + v_1 \sin \theta_1} = \frac{\sin \theta_2}{u_2 + v_2 \sin \theta_2} \quad (2.207)$$

这相对会简单一些。

●而且这很容易拓展到相对论情形, 同理可证相对论下波矢就满足一个正常的四矢量变换, 即

$$k'_y = k_y, k'_z = k_z \quad (2.208)$$

$$\omega' = \gamma(\omega + vk_x) \quad (2.209)$$

$$k'_x = \gamma(k_x + v\omega) \quad (2.210)$$

将其应用上面的情形, 可得到相对论下的折射定律

$$\frac{\sin \theta_1 + v_1 u_1}{u_1 + v_1 \sin \theta_1} = \frac{\sin \theta_2 + v_2 u_2}{u_2 + v_2 \sin \theta_2} \quad (2.211)$$

但是这里有一个问题, 我们自始至终算的都是介质静止系下的角度关系。若要换到地面系下, 就得考虑两种可能, 若是希望求出光线在地面的方向, 就利用普通速度变换, 若是地面中波矢, 就将波矢变换代入。事实上运动的介质可以看成一种很特殊的各项不同性介质, 出现相位和能流的分离是当然的。

2.5.5 光强变换

这里处理一下平面波所对应的

首先介绍一个唯象方法，认为光强是光子流，设光子垂直接收面的速度为 v_{\perp} ，普朗克常量为 h ，频率为 ν ，数密度为 n ，则光强写为

$$I = nh\nu v_{\perp} \quad (2.212)$$

ν, v_{\perp} 的变换可以由波矢变换和速度变换得到，而唯象的一步，是认为数密度的变换和频率的变换一致。从而知道地面系中光强和方向，就可知道接收面感受到的光强。

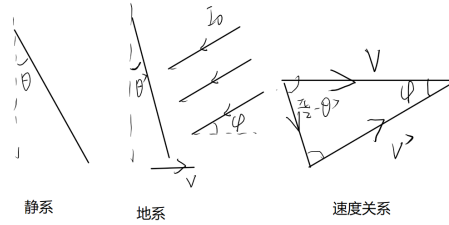


图 2.24: 光强变换示意

一个基于光子的严格证明如下，设一个板以速度 βc 沿 x 轴运动，设板的静止系中板形状如图??，与 y 轴夹角为 θ ，面积为 S 。设地面系中有光强为 I_0 ，频率为 ν ，与速度方向夹角 φ 的光束入射。在地面系下有尺缩效应，与竖直方向夹角变为 θ' ，面积变为 $S \frac{\cos \theta}{\cos \theta'}$ 。有

$$\tan \theta' = \sqrt{1 - \beta^2} \tan \theta \quad (2.213)$$

接下来考虑板单位时间接收的光子数，在地面系中考虑，很显然我们知道若板的速度与光的速度正时的情况，满足

$$dN = \frac{I_0}{h\nu} dt S_{\text{正对}} (1 + \beta) \quad (2.214)$$

再注意到一个事实，平行与板的速度分量不影响接收的光子数，所以将板的速度分解为平行于板的分量以及平行于光的分量，由余弦定理

$$\beta_{\parallel \text{light}} = \beta \frac{\cos \theta'}{\cos(\theta' - \varphi)} \quad (2.215)$$

地面系下正对光强的面积为 $S \frac{\cos \theta}{\cos \theta'} \cos(\theta' - \varphi)$ ，所以单位时间光子数为

$$dN = \frac{I_0}{h\nu} dt S \frac{\cos \theta}{\cos \theta'} \cos(\theta' - \varphi) (1 + \beta \frac{\cos \theta'}{\cos(\theta' - \varphi)}) \quad (2.216)$$

由于光子数换系不变，感受到的光强为

$$I = \frac{dN h \nu'}{dt'} \quad (2.217)$$

钟慢使 $\frac{dt}{dt'} = \gamma$ ，直接变换得 $\nu' = \gamma \nu (1 + \beta \cos \varphi)$ 。代入，展开光强表达式可得

$$I = \gamma^2 (1 + \beta \cos \varphi) [(\cos \varphi + \beta) \cos \theta + \sqrt{1 - \beta^2} \sin \varphi \sin \theta] I_0 \quad (2.218)$$

利用这个可以证明唯象公式的正确性，速度变换

$$\vec{\beta}' = \left(\frac{\beta + \cos \varphi}{1 + \beta \cos \varphi}, \frac{\sqrt{1 - \beta^2} \beta \sin \varphi}{1 + \beta \cos \varphi} \right) \quad (2.219)$$

可得

$$\beta_{\perp} = \vec{\beta}' \cdot (\cos \theta, \sin \theta) = \frac{(\cos \varphi + \beta) \cos \theta + \sqrt{1 - \beta^2} \sin \varphi \sin \theta}{1 + \beta \cos \varphi} \quad (2.220)$$

再乘以两个频率变化因子 $\gamma(1 + \beta \cos \varphi)$ 就得到了一样的变换式。

原则上，利用电磁场的相对论变换或者能动张量的变换也能得到结果，只不过这些都涉及了张量变换，比较麻烦。

第三章 易错与感想

写在前面

物竞生涯到了末期，错误基本上不是计算错误就是一些小的概念错误。虽然看起来并不重要，但动辄会就扣很多分，让人不爽。建议在积累模型的同时也整理下自己的这种小问题，提醒自己不要傻错。

这里主要是一些专题化不强的碎片知识，一些想法和习惯，还有个人的一些易错点。编排顺序主要是时间顺序，大体从易到难，但也相当意识流，部分内容相比原笔记有较大拓展。一些推导是为了完整起见，不感兴趣不必深究，掌握结论即可。

对一些个人色彩比较浓的方法，希望读者是有批判的吸收。重要的是形成一套自己的稳定的解题方法，没必要总是见色起意，追求奇技淫巧。

3.1 罗列一

1. 量子化条件, 直线段要求半波长整数倍, 圆周要求波长整数倍, 驻波条件可直观得。这实际上都是索末菲量子化条件 $\oint p dq = nh$, 不过直线段的周期包括来回, 故有两倍。
2. 里德堡常量定义 $\frac{1}{\lambda} = R(\frac{1}{n^2} - \frac{1}{m^2})$, 注意左边不是频率, 类似的无聊常量定义要记清楚。
3. 换系用快度很方便, 有时候还可以化简超越方程。同时相对论积分时用快度结合倍角公式也很方便。
4. 仅受一个匀角速度旋转的恒力作用, 初态静止平面内的质点做滚轮线运动。当然, 对一般的周期性力的作用可用傅里叶方法解, 这里不再赘述。
5. 在球坐标下压力平衡为 $\frac{\partial}{\partial r} p \cdot 4\pi r^2 = 4\pi r^2 dr f$, 其中 f 为力密度。一个常见的错误是把左端写为 $\frac{\partial}{\partial r} (p \cdot 4\pi r^2)$ 。在物理图像上这是忽略了图3.1侧面部分受力。

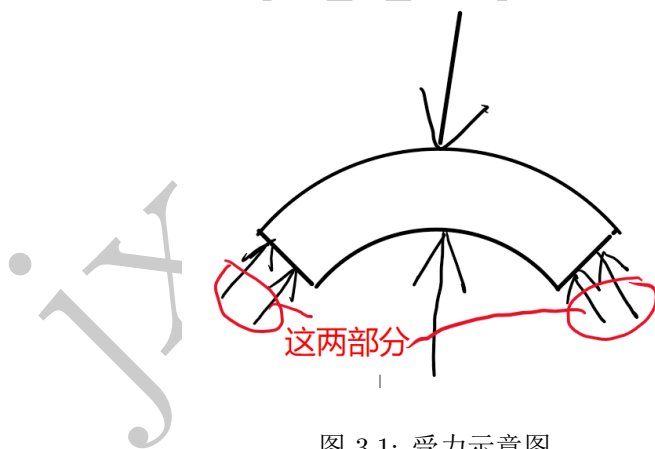


图 3.1: 受力示意图

数学上错误的原因大概是认为压强是矢量, 对其求散度得到上式。事实上压强, 或所谓应力张量, 是二阶张量而非矢量, 故应当对张量求散。在各向同性前提下张量散度约化为标量梯度, 得到上式。这样也保证了两端都是矢量点乘面积。

6. 单位长度的任意形状同轴电缆, 只要电荷与电流的分布情况相同, 电容电感间有 $l_0 c_0 = \mu_0 \epsilon_0$ 。这里讲一个简单的讨论。由于边界相同, 边界条件正交, 且由源分布相同, 得二维中电场磁场正交, 故能得到电容电感中与位形相关的部分互为倒数, 由量纲得上式。

7. 磁矩在缓变情况下是守恒量，不论是随时变的磁场中还是空间中的磁镜体系。实际上磁矩就是一个绝热不变量。
8. 物体间脱离条件的核心是支持力 $N = 0$ ，若支持力方向无其他外力，则可由该方向无加速度，导出脱离条件。
9. 转动系中，离心力对转动点无力矩，若考虑有心力场中的转动小振动，如航天器对地球的小振动，可忽略离心势。
10. 无源电磁场中，已知一个分量求其他分量，若知 $B_x(x)$ 用高斯定理。若知 $B_x(y)$ 用环路定理。极坐标下同理。
11. 小球从底部为圆弧的光滑斜劈上滚下时，如图3.2, 会有一个有限大冲量改变速度方向，不要忘记。

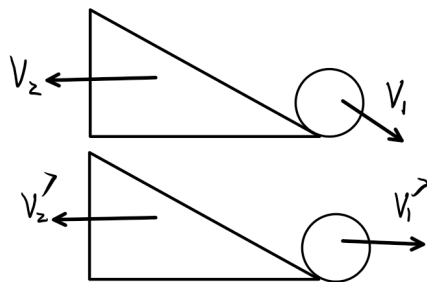


图 3.2: 示意图

12. 多个支撑点，也可以是线状支撑，加一个等效压力，稳定的条件是压力落在支持力构成的多边形之中。一个特例是三条腿的凳子压力要在三角形之中。
13. 自相似电阻题，用注入电流法，先由对称性设支路电流，再用节点电流守恒得到几条方程，一般此时只剩两个独立变量，构造两点间两条不同的路径即可得。
14. 若算卡诺热机的功率，一般会 and 热传导有关，工质温度不等于热库温度，算最大功率（而非效率）就要解不等式了。
15. 进动题和磁场动力学题涉及大量叉乘，建议好好建系。
16. 交流电功与其 $\frac{1}{2}|I||U|\cos\varphi$ ，不如 $\frac{1}{2}|I|^2\text{Re}(Z)$ 或 $\frac{1}{2}|U|^2\text{Re}(\frac{1}{Z})$
17. 磁场的一些题，比如磁透镜，运动范围是无穷远，一般会用到环路定理。

18. 天体运动基础结论:

$$E = -\frac{GMm}{2a} \quad L = m\sqrt{\frac{GMb^2}{a}} \quad |A| = GMm^2e$$

$$v_{\text{近日}} = \sqrt{\frac{GM}{a} \frac{a+c}{a-c}} \quad v_{\text{远日}} = \sqrt{\frac{GM}{a} \frac{a-c}{a+c}}$$

其中 E, L 为能量角动量, A 为龙格楞次矢量, a, b, c, e 为椭圆参数。

19. 刚体动能用瞬心转动惯量写出, 刚体动力学关注质心, 刚体运动学关注几何性质, 以求出加速度关联, 如曲率中心, 杆与地面的接触点。

20. 不规则物体的重力极值点不要想当然转过 90 度, 如图 3.3

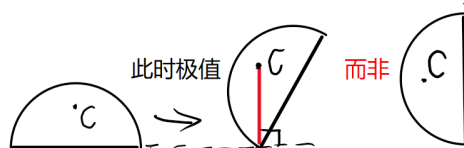


图 3.3: 例子

21. 可以取随刚体质心某一个方向平动的非惯性系以使用能量守恒, 如图 3.4, 但注意此时重力势能是 $mg'h_c$, 其中 $g' = g \cos \theta$, 不要无脑 mgh_c 。

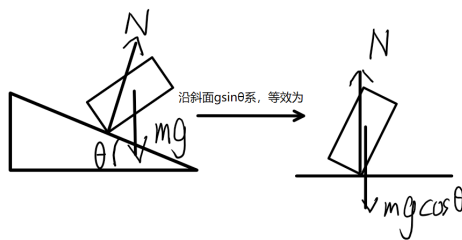


图 3.4: 例子

22. 刚体碰撞点角动量守恒, 由于是瞬时的冲量作用。对于铰链或是碰撞, 这可以少设几个冲量。

23. 相对论性碰撞, 非弹性亦有能量守恒, 但此时无静质量守恒, 由于热能转化为静质量。

24. 洛伦兹力始终不做功，载电流的杆在磁场中运动时，其能量来源是维持电流的电动势的功，而非磁场能。
25. 空间力系先建系，但对于摩擦力，最好直接沿其平面内两条特征的法线分解，先随便设再代入约束可能麻烦。
空间力系的一个通法可见《物理思维进阶指南》。
26. 对一种光子火箭，其放出的光子是由物质湮灭产生的，此时火箭速度为 v ，物质在飞船内相对静止，湮灭的物质静质量为 Δm ， Δm 为小量以致速度瞬时无变化。
此时列能量守恒，则放出光子的能量并不一定是 $\frac{\Delta mc^2}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}$ ，更多情况下可能是 $\sqrt{\frac{1-\frac{v}{c}}{1+\frac{v}{c}}} \Delta mc^2$ 。可能会有个疑问，从物质到光子，能量为何不守恒？
在瞬时静止系中看，这是由于出射的光子并不一定各向同性，前式给出的是各向同性情形，后式则是光子与飞船反方向运动情形，如图3.5。而此时光子运动反向产生的力在地面系下会输出一个功，从而解释了能量不一样，这个功也是飞船加速的能量来源。
一般来说，此种相对论动力学问题，特别是有光子的问题，在地面系下处理时会有许多麻烦，推荐一律在瞬时静止系下写。

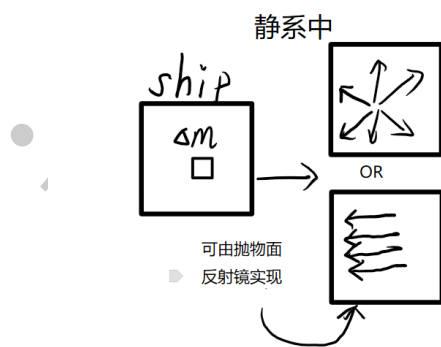


图 3.5: 示意图

27. 二阶张量转动要两个转动矩阵，如 $M' = AMA^T$ ， A 为正交矩阵，一般的张量变换可参考流体力学或广义相对论的数学基础部分。
28. 先不考虑偏振，黑体驻波态密度为 $dn = \frac{4\pi\nu^2 d\nu}{c^3}$ ，最方便且通用的导法是利用 $p = \hbar k$ 和 $dN = \frac{V \cdot 4\pi p^2 dp}{h^3}$ ，也可以用长方体盒子的边界条件，详见统计物理。态密度乘以偏振数 2，再乘不同的能量 ϵ 即得不

同的黑体公式, $\varepsilon = kT$ 则瑞利金斯公式, $\varepsilon = h\nu e^{-\frac{h\nu}{kT}}$ 则维恩公式, $\varepsilon = h\nu \frac{1}{e^{\frac{h\nu}{kT}} - 1}$ 则普朗克公式。

29. 很多情况下已知约束求极值不用化为单变量暴导, 可将约束与待求的极值式均取微分, 极值时两式均为 0, 联立消去微分项, 则得新约束, 两条方程即可解。当然更多变量可采用拉氏乘子的一般方法。
30. 对人眼瑞利判据取眼球介质内波长。
31. 非稳恒电流可添加电流使其稳恒, 而满足环路, 再将此段电流磁场去掉即可。
32. 电源的 Δ -Y 变换如图3.6, 其与内阻的变换独立, 如3.7。

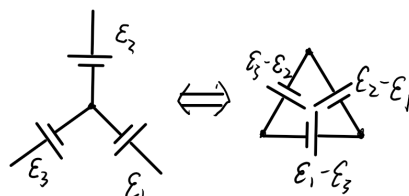


图 3.6: 电源变换

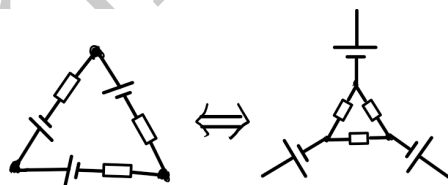


图 3.7: 独立的含义

33. 弹性要么表示能量守恒, 要么表示力与形变成正比。对于一张桌子, 其桌腿弹性, 桌面为刚性的正多边形。其上任意位置放一物体, 则桌面倾斜方向与中心-物体连线方向一致。
34. 光波自身有不确定性关系 $\Delta\omega\Delta t \geq \frac{1}{2}$, 这只是傅里叶变换的数学性质, 和量子理论也相容。
35. 对于固定导热活塞连接的两个气室, 只有右气室端面能动, 可定义一个等效的等体热容 $C_{Veff} = \frac{n_L C_{VL} + n_R C_{VR}}{n_R}$, 如此可以直接套用绝热方程, 但注意方程中体积为右气室体积。

36. 带电圆柱旋转激发的磁场与电场有同构性，但它们的源形式不同，所以这个结论并非来自于由推出6的讨论得到的。另外电场磁场对圆柱自身的受力之比为 $\frac{\omega R^2}{c^2}$ 量级，有些题考虑磁场受力不考虑相对论修正，个人觉得有误。
37. 求摩擦临界的题，先设出末态各个冲量，再代入 $v_{\text{相对}} = 0$ 或 $f = \mu N$ ，从而解出临界条件。
38. 只受 $f = \mu N$ 的摩擦力与恒力作用的质点，可在自然坐标系下求解，便有 $\frac{dv}{d\varphi}$ 的关系，只要掌握形如 $\int \frac{1}{\sin x} dx$ 的积分即可。
39. 可用等效电源处理无穷电阻网络电磁感应，借对称性得到递推关系，从而解得。
40. 对称无穷网络用三、四端等效往往可以大为简化。
41. 玻尔兹曼分布只适用于平衡态，温度得处处相等。至于近平衡玻尔兹曼方程之类的，没提示不可能考。
42. 傍轴条件关注几何性质，满足小角近似。远场条件使接受面上相位差为小量。都满足的话近似平面波前。
43. 取旋转基矢，不一定非得换至旋转系下写受力。可在地面系下写好受力再代换基矢。这样可以避免将电磁场换到旋转系的麻烦，特别是核磁共振。
44. 所谓极化，欧姆定律，都只是内部电子在介质静止系下对外场的响应，不一定非得电场提供。只要给定单位电荷上的力，即“有效电场”，则可套用，这可以是惯性力，洛伦兹力等。
一种更变态的形式是等离子体行星中的电子受引力作用极化，将引力源视为“等效电荷”，这时候会产生等效电像。
45. 对满足 $d(\gamma m v c) = -d(\gamma m c^2)$ 的质点，初始质量为 m_0 ，则 $m = m_0 \sqrt{\frac{1-\beta}{1+\beta}}$ 。用双曲函数易得。
46. 电磁波能量密度为 $\epsilon_0 E^2$ ， E 为有效值，这包含了电场与磁场的贡献。光压可由此乘 c 得到，或直接 $\mathbf{E} \times \mathbf{H}$ 。
47. 可用电磁感应算出磁通量，即利用 $\frac{d\phi}{dt}$
48. 一个静止粒子衰变成三个粒子，使其中一个有质量粒子速度最大。若三者都有质量，则目标粒子与其他两个粒子反向即可。其中一个是光子，则在不产生光子，另一粒子反向运动时取得。

3.2 罗列二

1. 对于定点转动刚体之类，可能设定点质心连线与竖直的夹角会好些。如图3.8。

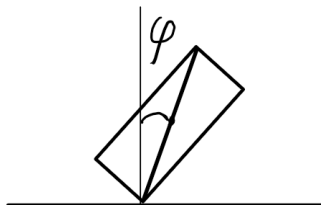


图 3.8: 示例

2. 一个玻璃球可视为光心在中心的薄透镜，其 $f = \frac{nR}{2(n-1)}$ 。
3. 用极限思想寻求临界点，比如肥皂膜的断裂条件。
4. 角动量定理的几种：有约束力的，对约束点列。对冲量，随便列。对地面系下定点，随便列。对质心系，随便列。
5. 考虑自由程模型，一个粒子两次碰撞间所用时为 t ，有归一化时间分布 $f(t)$ 。计碰撞间时间为 t' ，速度随 t' 的变化表达为 $v(t')$ ，则观测到的平均速度为 $\bar{v} = \frac{\int_0^\infty \int_0^t v(t') dt' f(t) dt}{\int_0^\infty t f(t) dt}$ 。注意 $\int_0^\infty v(t) f(t) dt$ 没有物理含义。
- 在此类变量易混淆的情况下，一定要想清物理含义。
6. 两次转动系换系角加速度不能直接相加，设前后两次换系参数为 $\beta_1, \omega_1, \beta_2, \omega_2$ 。则角加速度为 $\beta'' = \beta_1 + \beta_2 + \omega_2 \times \omega_1$ 。玄学的说这涉及什么李代数，生成元不可对易之类破事，我也不懂。矢量具体计算如下，不妨取换系中心在同一点。

$$v' = v + \omega_1 \times r$$

$$a' = a + \omega_1 \times (\omega_1 \times r) + \beta_1 \times r + 2\omega_1 \times v$$

$$a'' = a' + \omega_2 \times (\omega_2 \times r) + \beta_2 \times r + 2\omega_2 \times v'$$

$$= a + \omega_1 \times (\omega_1 \times r) + \beta_1 \times r + 2\omega_1 \times v$$

$$+ \omega_2 \times (\omega_2 \times r) + \beta_2 \times r + 2\omega_2 \times (v + \omega_1 \times r)$$

$$= a + (\omega_1 + \omega_2) \times ((\omega_1 + \omega_2) \times r) + (\beta_1 + \beta_2) \times r$$

$$+ 2(\omega_1 + \omega_2) \times v + \omega_2 \times (\omega_1 \times r) - \omega_1 \times (\omega_2 \times r)$$

由于 $\omega_2 \times (\omega_1 \times r) - \omega_1 \times (\omega_2 \times r) = (\omega_2 \times \omega_1) \times r$, 得证。另外数学上, 魏格纳转动也出自这样的不可叠加性。

7. 要看清弹簧原长是多少, 特别不要轻易认为是零。

8. 对一个微分方程组如下,

$$\begin{cases} \dot{x} = A_{11}x + A_{12}y \\ \dot{y} = A_{21}x + A_{22}y \end{cases}$$

若某个特征根等于 0, 这并不意味着常数解, 而是形如 $x = C_1t + C_2$ 的多项式解, 再加上 $e^{\lambda t}$ 。若解出多个 0 根, 则关于 t 的多项式次数相应升高。

9. 有些题会有干涉条纹刚好占满全域的条件, 这表示条纹数为整数, 得到一个多的条件。

10. 泡利说可以构造热力学作用量 $S = \int T - F dt$, 从而导出热力学量相对论变换, 见泡利《相对论》。

11. 考虑光学和辐射的时候要注意几何限制, 如透镜, 反射镜的边界。

12. 宏观物体反射干涉要注意时间相干性限制。此时只有经过玻璃相同次数的光才能互相干涉, 如均为一透一反。见图 3.9。

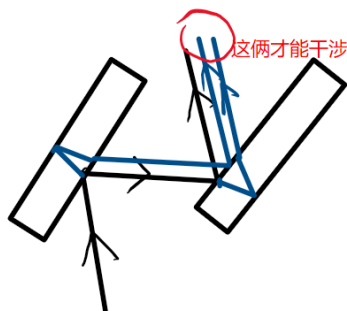


图 3.9: 示例

13. 极化强度变化时有电流密度 $j = \frac{\partial P}{\partial t}$ 。

14. 波的能量是由力面密度 p 与位移变化率 $\dot{\xi}$ 取平均得到, $I = \overline{p\dot{\xi}}$ 。列举几个常见的能量, 此处各量均取振幅: 电磁波 $\frac{1}{2}\mathbf{E} \times \mathbf{H}$ 。压缩波 $\frac{1}{2}\alpha v \delta p^2$, 其中 $\alpha, v, \delta p$ 分别为体压缩系数, 波速, 压强振幅。弹性波 $\frac{1}{2}\sqrt{E\rho}(\omega A)^2$, 其中 E, ρ, A 分别为杨氏模量, 密度, 振幅。这实际上是前式的特例。

15. 超声衍射的屏函数为 $t = \varepsilon \cos \omega t \sin kx$ ，这使得出射光不只分裂，还有频移。
16. 相对论换系光子数不变，否则不物理。
17. 一类天体进动题，比如地球为椭球导致的引力进动，就是写出力矩再求平均，利用角动量定理得到进动角速度。圆轨道时有个方法，就是可以将天体视为弥散在轨道上的均匀质量分布来代替对时间平均，这样直接对势能求角度的导即得平均力矩。原理是时间平均和对位置求导可交换。
18. 利用不确定关系估算什么都干得出来，包括但不限于 $\frac{1}{r} = \frac{1}{\bar{r}}, \overline{r^2} = \bar{r}^2, \Delta r = r$ 。

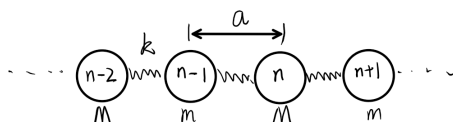


图 3.10: 图示

19. 对一维双粒子链，如图3.10。代入行波解 $e^{inqa-i\omega t}$ 可求解，解得声学支和光学支两频率通带。光学支以上对应 $e^{-n\beta a-i\omega t}$ 的衰减解，声学支光学支间对应 $(-1)^n \cdot e^{-n\alpha a-i\omega t}$ 的锯齿衰减解。这实际上可以由 \cos^{-1} 的解析延拓得到，如下。

$$\cos^{-1} x = \begin{cases} i \cosh^{-1} x (x > 1) \\ i\pi + i \cosh^{-1}(-x) (x < -1) \end{cases}$$

20. 不光滑的 pV 曲线不一定与绝热线有切点，吸放热转变有可能发生在突变处，如图3.11
21. 求相对论性粒子碰撞后极限出射角，个人觉得老老实实换到零动量系中解就好，不要 YY。
22. 结合能对核反应是 Δmc^2 ，对电子是电离能，都用一个名字是真无聊。
23. 极端相对论情况下， $\beta \rightarrow 1$ ，对速度的依赖可视为在 γ 之中。
24. 好玩的离谱模型，若玻尔模型中的电子是极端相对论的，则可以和核相互绕转

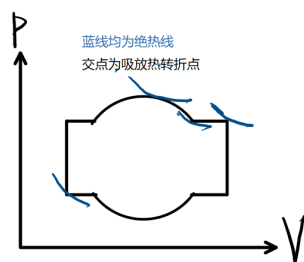


图 3.11: 图

25. 辐射经过反射可视为辐射源的像进行辐射，满足相同的辐射定律。
26. 有外场或外源的情况下，用电磁场能量密度不足以完全描述总能量，能量法常会差个负号，用受力法不会错。
27. 导热，扩散定律在稳态时，都可以做与无源电场的对比，都满足泊松方程。还可以跟电路类比。
28. 磁路等效 $\sum_i N_i I_i = \oint \frac{B}{\mu} dl$ $\sum_i B_i S_i = 0$ ，则 $N_i I_i$ 对应电动势 E_i ， B 对应电流密度， μ 对应电导率，求某一条支路的自感互感时，用叠加原理即可。
29. 由泊肃叶公式可导出流量 $Q \propto \frac{1}{n}$ ， n 是单位面积孔数，则多孔塞可以做到绝热准静态。
30. 经典难集老题，点源光强立体角分布相对论变换，因子为 $\frac{(1-\beta^2)^2}{(1+\beta \cos \theta)^4}$ 。可以做如下理解，一个钟慢，一个数密度变换，一个能量变换，一个接受多普勒。
31. 视觉形象，注重的是同时性，若原来的图形随时间演变是 $f(x, y, t)$ 。在定点观察，设 x, y 处传播到定点用时 $T(x, y)$ 。则观察到的视觉形象为 $g(x, y) = f(x, y, t + T(x, y) = t_{\text{观测}})$ 。
32. 若水形成环流，即速度分布是 $v_\varphi = \omega r$ 。有力密度 $f = \rho \Omega^2 r$ ，从而有相应压强梯度。那么物体放入水中会有额外的受力。
33. 肥皂膜有两层分界面，不要丢 2。
34. 洛伦兹极化模型实际上就是平均场近似，将个个偶极矩近似为极化强度，事实上铁磁体的外斯分子场也是出自这里。
35. 电磁场有时候会有一个边界形状的问题，这实际上是个对称性问题。如匀强磁场的感生电场方向，还有均匀极化体的电场方向。

36. 化学势是 $\frac{G}{N}$ 的一个说明, $dG = -SdT + Vdp$, T, p 均为强度量, 消去了与 N 的耦合, 故 T, p 不变, 增加 N 时 $dG = d\mu$ 。
37. 斯托克斯定理, 外微分下 $\int_{\partial D} \omega = \int_D d\omega$, 常用的可以写为 $\int L(\nabla) dV = \int L(\mathbf{n}) dS$ 。
38. 在量子力学中只有能量的概念, 力由定态能量对长度求偏导得来。有时候有什么绝热条件, 就是不跃迁。
39. 双能级热机卡诺循环, 设能级能量为 E_i , 能级上概率为 P_i , 其中 $i = 1, 2$ 。
 $P_1 + P_2 = 1, \frac{P_1}{P_2} = e^{\frac{E_2 - E_1}{kT}} \Rightarrow T = \frac{E_2 - E_1}{k \ln \frac{P_1}{1 - P_1}}$ 。绝热过程 $P_i = (Const)$ 。
 等温过程 $dQ = \sum_i E_i dP_i = kT \ln \frac{P_1}{1 - P_1} dP_1$ 。 $Q_i \propto T_i$, 这可证卡诺定理。
40. 做磁场的时候要考虑其中的力矩效应。
41. 对一个匀角速度旋转的磁场, $\frac{\partial B}{\partial t} = \omega \times B$, 若磁场有标量势 $-\nabla \varphi_m = B, \nabla \times E = -\frac{\partial B}{\partial t} = \nabla(\omega \varphi_m)$, 定义恰当会有 $E = \omega \varphi_m$, 可算旋转球的感生电动势。
42. 恒定磁场中的刚体棒两端带正负电荷, 有几个守恒量: $E = \frac{1}{2} M v_c^2 + \frac{1}{2} I \omega^2, P = M v_c - p \times B, J = (r_c \times P + I \omega) \cdot B$ 。
43. 曲率半径的定义可以视为相邻法线交点与面元间距, 如图3.12, 对于二维曲面来说可以取两条不同正交路径的相邻法线, 从而得到不同的曲率半径, 但平均曲率与路径无关。一些旋转题表面张力题可以通过曲线的曲率和旋转的半径来得到, 如图标记的两条线。

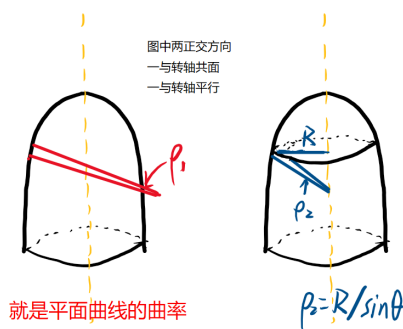


图 3.12: 示例

44. 高速流体摩擦的一个 YY，行进 dh ，相遇的质量为 $dm = \rho S dh$ ，消耗能量 $cdmc^2$ ， c 为常数，受力 $F = \frac{dW}{dh} = c\rho S v^2$ 。低速情况下流体分子并不能认为撞上就损失大部分能量，利用普通输运理论或玻尔兹曼方程可知其与速度一次成正比。
45. 所谓特征时间无非就是凑量纲，可能稍微巧妙点。
46. 建模题一定要老实用上所有信息。
47. 用卡西欧解方程，如果一边是分式，用牛顿法解时可能会报错，把分母乘到另一边可能会解决。
48. 已知轨道方程 $r(\theta)$ 求场，若仅有一个有心力，那么若已知角动量 L ，能量 E ，可得 $U = E - [(\frac{dr}{d\theta})^2 + r^2] \frac{L^2}{2mr^2}$ 。若仅有一个垂直纸面的磁场，初速度为 v_0 ，那么求出每个点的曲率半径 ρ ， $B = \frac{mv_0}{q\rho}$ 。
49. 考虑旋转刚体的小振动，设整体旋转角速度为 ω ，设还有一个自由度 α 。
- 对那些匀角速度旋转的刚体，我们就在转动系里列 α 小量展开的能量就可以了。但对于角动量守恒的体系来说，有时联立能量守恒与角动量守恒会十分困难。所以建议先在地面系下进行一个微扰 $\delta\alpha$ ，利用角动量守恒求出微扰与角加速度的关系 $\dot{\omega} = f(\delta, \dot{\delta}, \ddot{\delta})$ 。接下来就可以换到转动系里写受力方程了，注意一下在转动系里顺时针和逆时针是不对称的。一个例子是这种题：多根杆铰接，初态伸直并共角速度旋转，然后求小振动。
50. 考虑一个固定的波源和一个运动的反射面，设波源发出频率为 ν_0 ，接收频率为 ν ，那么反射面感受到的频率为 $\frac{\nu_0\nu}{\nu+\nu_0}$

3.3 罗列三

1. 折射率球对称分布的体系，算其中的光线偏转角。用球坐标，固然可以由初始条件直接积分，但一般取 $dr = 0$ 时的参量 r_0 会好一些。
2. 相对论正交电磁场题，可以通过换系得到纯电磁场。则运动易求解，但要注意初速度的变换。在此系中解与本征时有关的量比在原系中用守恒定律求解要方便很多。
求只含匀强电磁场的运动有个通法，设四速度 u ，固有时 τ 。矩阵形式下可得四速度矢量满足 $u(\tau) = (\exp)(\frac{e\tau}{mc}[\mathbf{E} \cdot \mathbf{K} - \mathbf{B} \cdot \mathbf{S}]) \cdot u(0)$ ， \mathbf{K}, \mathbf{S} 为洛伦兹变换六个生成元，这对物理竞赛完全没用。
3. 解线性方程有时可用格林函数法简化。如一根一维的梁，有杨氏模量 E ，其上有一个质量负载分布 $\lambda(x)$ 。此时先解出一个质点在 x 处造成的弯曲再积分，会比先积分再拟合边界条件要快一些。
4. 有些题小量近似的方法是先将高阶导舍去，再逐级加入求解，可能需要随参量缓变的条件。（但事实上我在那道题里没发现这种提示）。
5. 相对论比耐方程的方便推法，采用自然单位制，利用 $d\tau^2 = dt^2 - dr^2 - r^2 d\varphi^2$ 。两守恒量可表示为 $E = m \frac{dt}{d\tau} + V, L = mr^2 \frac{\varphi}{\tau}$ 。将 r 用 u 代换，再对 φ 求偏导可得比耐方程。在史瓦西度规中，能量仍有上述形式，只需将前式加上度规即可，由此可解水星进动。
6. 一个有用的极限式 $\lim_{N \rightarrow \infty} (1 + \frac{x}{N})^N = e^x$ 。但实际上取对数再直接泰勒展开也可得。
7. 光波经过汇聚点会有个 π 的相位突变。
8. 有些问题中只有特殊情况下的波才能被观测到。如彩虹要求偏折角极值，光强极大；船的两条尾线要求相干相长，其与运动方向夹角为 $\theta = \sin^{-1} \frac{v}{u}$ ， v, u 分别为船速和波速。还有 CD 干涉，某些位置发光是因为相邻反射位置光程差满足 $\Delta L = n\lambda$
9. 只有轻杆受力一定沿杆。
10. 在 $f = av^{n-1}\vec{v} + v^{n-1}\vec{b} \times \vec{v}$ 的单位质量力下，其中 a, \vec{b} 为定值。有守恒量 $\vec{M} = v^{1-n}\vec{v} + (n-2)a\vec{r} + \vec{r} \times \vec{b}$ 。
11. 气缸中等体绝热排出物质的量为 dn 的气体，损失总能量为 $dnC_p T$ ，其中除气体自身能量外还包含了对气体所做的功。对半透膜的题可以用这样的微元分析，也可以直接用物质的量代替体积应用绝热方程。

12. Drude 模型直接引入了散射力, 考虑平均速度为 v 的一堆分子, 经过时间 dt 有比例为 $\frac{dt}{\tau}$ 的粒子失去速度, 则微分满足 $\vec{v}(t + dt) = (1 - \frac{dt}{\tau})(\vec{v}(t) + \frac{\vec{F}}{m}dt)$ 。总的效果相当于 $\dot{\vec{v}} = -\frac{\vec{v}}{\tau} + \frac{\vec{F}}{m}$ 。这与将 τ 视为两次碰撞时间会有系数差别。
13. 相变曲线有关的题建议用克拉伯龙方程。
14. 非弹性碰撞一般可以直接设末态求解, 弹性碰撞要一次次下来直到不再碰撞。
15. 多体弹性碰撞要关注先后顺序, 如图3.13。先 1、3 碰撞, 再 1、2 碰撞, 碰撞次数与初始条件相关。

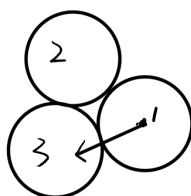


图 3.13: 示例

16. 水汽上升的问题, 利用水汽分压始终为饱和蒸气压代入。
17. 刚体的不脱离条件不止支持力大于零, 还要让力的分布使力矩可能平衡。
18. 相对论运动学没必要换本征系时尽量不换, 特别是那种信号传来传去的题, 换系会增加很多复杂度。可以用些小结论, 如本征系下两点同时, 则在地面系下时间差 $\Delta t = \gamma\beta\Delta x'$, $\Delta x'$ 为本征系下两点坐标差。
19. 对玻尔兹曼分布我们仅对能量与数目引入了拉氏乘子, 但事实上动量与角动量也为守恒量, 应对它们引入拉氏乘子。事实上玻尔兹曼分布只是在质心系下成立 (不然惯性系就不平权了)。引入动量分布的拉氏乘子可以应用在液氦 II 的元激发, 此时用 $\frac{\vec{p}}{v}$ 定义质量。有个愚蠢的临界速度就是波速。
20. 原子发射时一般认为本征系下各向同性。吸收发射不对称是激光制冷的原理。
21. 框架体系一般用冲量功最快。
22. 电路递推时要关注边界。

23. 肥皂泡黏一起求形状，联立状态方程与边界处线元受力平衡。若边界有三个分界面，如图3.14，则总是给出三面夹角为 120° 度。

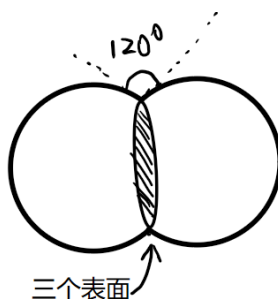


图 3.14: 图示

24. 磁场线方程可由矢势 $\vec{A} = \text{Const}$ 表示。点电荷电场线我认为用立体角最快，也方便拓展到高维。
25. 阻尼较大的情况下磁矩近似沿磁感线运动，由于受力沿磁感线方向，且认为阻尼与受力平衡，故速度沿磁感线方向。如极光的运动。
26. 波前变换后，不同方向的光会在打到接收屏上时，传播方向波矢不同会产生一个相位差。即如图3.15两个屏上波前分布是不同的。如果相同的话就是所谓光栅自成像。

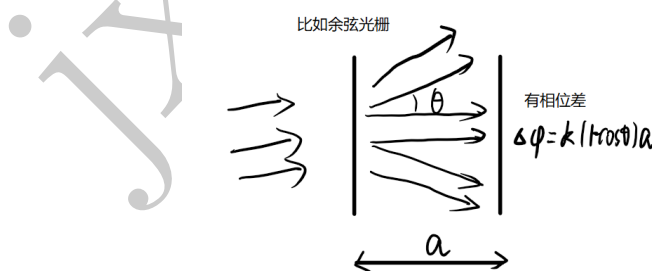


图 3.15: 图示

27. 斜密绕螺线管可分解为正密绕螺线管与其他电流分布的叠加。如椭圆密绕可分解出一个正弦型电流分布，内部则为两个正交磁场。但这仍不是真实的螺线管，因为电流仍在循环不在流动，外部磁场为零。一个真实螺线管在外部远处应当表现为一条电流线。

28. 注意到对有速度的反射镜，平行于镜平面的速度分量对反射无影响。则对匀速度运动的两块反射镜，总可以找到一个系，使两平面法向速度均为 0，则光在之间的反射易解。
29. 跟介质有关的问题尽量化到介质静系中去，如折射，极化等。这样一些结论才能用，如 $\omega = uk$ ，极化定律等。另外一定要区分是源在动还是介质在动。
30. 有电像的导体和均匀极化球受力和力矩可以直接用电像和电偶极子来代替，由于力的相互作用。
31. 若一层灰体没有吸收和辐射，只有反射和透射，那么其可与其他灰体视为一层介质，热平衡时温度相同。
32. 格林互易法可以容易的算出孤立状态下已完全求解的导体被外部电荷分布激发的电势（孤立），或感应电荷（接地）。比如接地旋转椭球壳被一个点电荷感应的电荷，如图3.16。

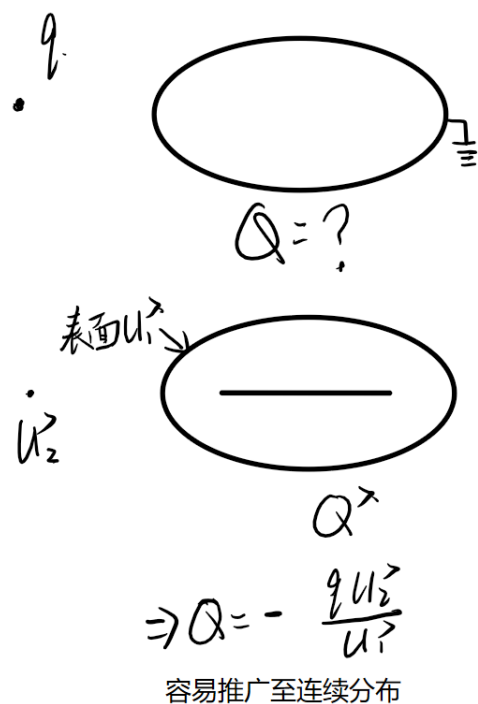


图 3.16: 例子

33. 分子相互作用能是 $\frac{1}{2}$ 键能，因为相互。

34. 椭圆的参量计算个人喜欢用 $a \cos \theta, b \sin \theta$ 代换, 方便算动能。表面积 $S = \int_0^\pi 2\pi b \sin \theta \sqrt{a^2 \sin^2 \theta + b^2 \cos^2 \theta} d\theta$, 动能 $T = \int_0^\pi \frac{1}{2} \rho a b^2 (\dot{a}^2 \cos^2 \theta + \dot{b}^2 \sin^2 \theta) 2\pi \sin \theta d\theta \int_0^1 \xi^2 d\xi$ 。小量近似一般对离心率展开。
35. 算潮汐的题一定要看是潮汐锁定还是无自转, 这决定了换转动系还是换转动着的平动系, 前者引入离心力后者引入一个恒力。
36. 角动量的一些补充: 绕 \hat{n} 转动 Φ 。 $\vec{r}' = (\vec{r} \cdot \hat{n})\hat{n} + [r - (\vec{r} \cdot \hat{n})\hat{n} \cos \Phi] + (\hat{n} \times \vec{r}) \sin \Phi$ 。欧拉角与主轴角速度 $\omega_1 = \dot{\theta} \cos \psi + \dot{\varphi} \sin \theta \sin \psi, \omega_2 = -\dot{\theta} \sin \psi + \dot{\varphi} \sin \theta \cos \psi, \omega_3 = \dot{\psi} + \dot{\varphi} \cos \theta$ 。对称刚体动能 $T = \frac{1}{2}[I_1(\dot{\theta}^2 + \dot{\varphi}^2 \sin^2 \theta) + I_3(\dot{\psi} + \dot{\varphi} \cos \theta)^2]$ 。主轴下欧拉动力学方程: $I_1 \dot{\omega}_1 = M_1 + (I_2 - I_3)\omega_2 \omega_3$ 的轮换。一些常见结论不要记错喵。
37. 光的余弦辐射定律可以从泄流分布导出, 总动量与总能量满足 $P = \frac{2}{3c} \sigma T^4 A dt, E = \sigma T^4 A dt$, 可视为 $\frac{2}{3}c$ 的整体做能动量变换。说起来我记得 CPHO-S 的那道长方体辐射题好像错了, 去问陈浩楠他也说不上来, 大家可以自己看一看。
38. 能量恒定时天体运动包络线, 半长轴 $a = -\frac{GM}{2E}$, 出发点与天体距离 H 。如图3.17。包络线形状为椭圆, 参数 $2A = 4a - H, 2C = H$ 。

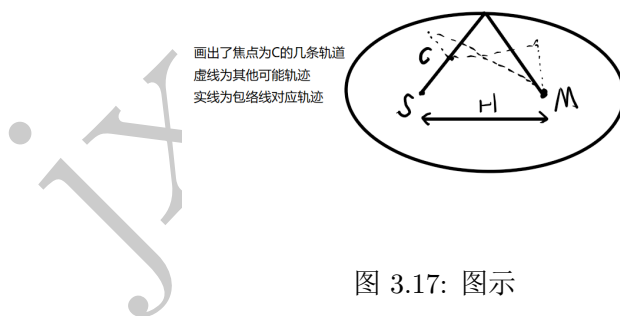


图 3.17: 图示

39. 利用互感算磁偶极子对外部回路的磁通, 设回路电流为 I 时磁偶极子处的磁场为 B 。磁通 $\Phi = \frac{m \cdot B}{I}$ 。这也可以通过能量守恒理解 $\frac{dm \cdot B}{dt} = \frac{dE}{dt} = -\varepsilon I = \frac{d\Phi}{dt} I$ 。积分亦得。若是偶极子运动导致的磁通变化, 那么 $\frac{dm \cdot B}{dt} = F \cdot v$, 可算出受力来。
40. 绳的速度关联为 $\frac{dv_\tau}{d\theta} + v_n = 0$, 这里取 θ 增大方向与 v_τ 一致。本质上仍是切向连续, 但是切向的方向在变化。
41. 给定条件算能量极小的天体运动问题本质上是个几何问题, 即让半长轴最短。很多可以利用几何与对称巧妙地做。如过定点的能量最小轨

道是让目的点，出发点，焦点三点共线。实在不行就用包络线。

42. 包络线与某一处相切并不意味对应的真实轨道与其相切，前者才意味着参数取极值，但有显著对称性的情况下二者同时相切。
43. 自转角速度是由欧拉角定义的，不是总角速度。
44. 对一个受挤压的气球，应当对受压的平面和整体都受力平衡。如图3.18。

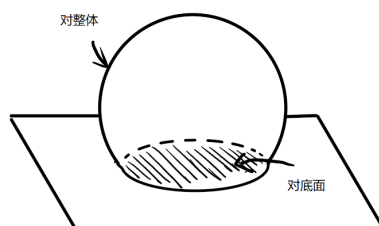


图 3.18: 图示

45. 临界的标度律无非就是在临界点处对物态方程做小量展开。不同量的最低阶小量不同就是所谓标度律。
46. 刚体能平稳纯滚上坡要满足几个条件， $E_k > mg\Delta h, N > 0, \mu N > f$ 。后两临界常在刚碰上时取得。
47. 三维空间中二维周期结构反射或透射取极大时，如光栅，入射反射波矢要满足 $(\vec{k} - \vec{k}') \cdot \hat{\tau} = 0$ 。 $\hat{\tau}$ 为平行刻痕方向。如图3.19。这是为了使刻痕方向的波相干相长，或可说是平移对称性的结果。和晶格衍射是一样的。

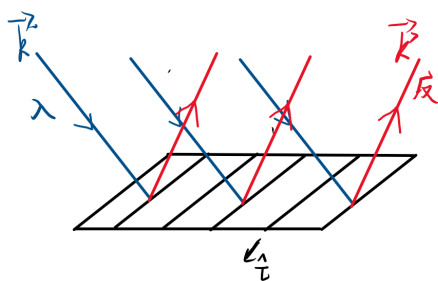


图 3.19: 以反射光栅为例

3.4 罗列四

1. 一个罪恶的公式，小量展开 $\frac{1}{e}(1-e^2)^{3/2} \ln \frac{1+e}{1-e} = 2 - \frac{2}{45}e^4$ 。椭球自能时出现。
2. 如图3.20的折叠物体，沿图示轴转动。运动学上可等效为在竖直平面上的投影图形运动，从而方便利用曲率半径等几何结论。

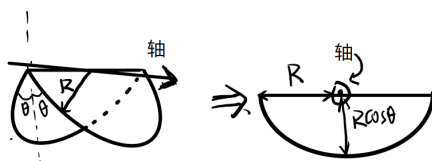


图 3.20: 特例

3. 射进介质里的波要注意介质的边界，相位分布是个分段函数。特别要注意的是如图3.21的两种情况。其一端面动另一不动，在换至静系下时可以看出两者区别。

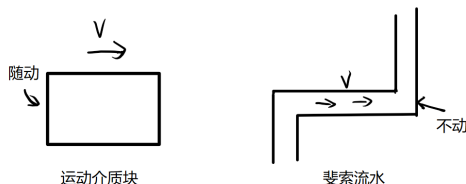


图 3.21: 图示

4. 遇到吸放热的题还是要严格从热力学第一定律出发，只用热容会暴毙。
5. 均匀磁化柱，足够细长时可以等效两端磁荷，也就是许多磁偶极子首尾相连。
6. 经典换元，球坐标下 $\nabla^2 \varphi = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} (r^2 \frac{\partial \varphi}{\partial r})$ ，代入 $\varphi = \frac{f}{r}$ ，得 $\nabla^2 \varphi = \frac{1}{r} \frac{\partial^2 f}{\partial r^2}$ 。这可以视为将渐进解 $\frac{1}{r}$ 与其他函数相乘代入，以简化方程。
7. 个人对立着的硬币一类的刚体进动题倾向于列质心角动量定理，而不是对纯滚点列，这样不容易分析错。外力用质心运动定理写出。

8. 在复杂力学体系中，有时用做功得力与力矩会较为方便。如量子的滚筒， ω 匀速转动、足够粗糙的桶在炒米(?)，米粒在某点会甩飞，飞行时间 t_f ，余下的可视为与桶共速。参数如图3.22所示，现在考虑摩擦力的合力矩，摩擦力单位时间做功 $dW = dmgh = Md\theta$ ，分布稳定时 $\frac{dm}{dt} = \frac{m_{tot}}{t_f + \frac{2\pi - 4\theta}{\omega}}$ 。得 $M = \frac{m_{tot}gh}{\omega t_f + 2\pi - 4\theta}$ 。

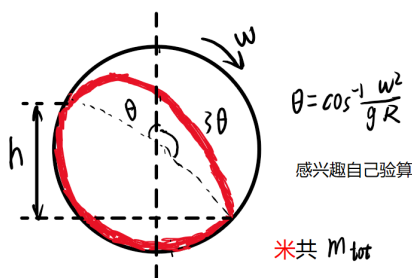


图 3.22: 图示

9. 相对论下，一个粒子衰变成两个相同粒子，求两粒子出射的最小夹角。设原粒子速度为 β_c ，设零动量系下衰变粒子速度为 β ，粒子与初始方向夹角为 θ_c 。由速度变换，夹角 $\delta = \arctan \frac{\sqrt{1-\beta_c^2}\beta \sin \theta_c}{\beta \cos \theta_c + \beta_c} + \arctan \frac{\sqrt{1-\beta_c^2}\beta \sin \theta_c}{-\beta \cos \theta_c + \beta_c} = \arctan \frac{2\sqrt{1-\beta_c^2}\beta \sin \theta_c}{\frac{\beta_c^2 - \beta^2}{\sin \theta_c} + \beta_c^2 \sin \theta_c}$ 。则易分析。
10. 无限大曲面不能看做包裹全空间，点电荷对其的通量是全部电通量的一半。
11. 匀质正四面体参数，边长为 a ，高 $h = \frac{\sqrt{6}}{3}a$ ，质心高度 $h_c = \frac{3}{4}h$ ，质心转动惯量 $I_c = \frac{1}{20}ma^2$ 。请各位算一下匀质正四面体板和匀质正四面体框的这些参数。
12. 考虑距离的一次反比切向力， $F = \frac{A}{r}\hat{\tau}$ ，则对质点的力矩是定值。虽然不能定义一个全域的势能（旋度不为零）。但是局域地可定义 $V = -A\theta$ ， θ 为对力心的角。这在感生电场或磁荷在无限长导线磁场中运动，特别是静力学分析会有用。
13. 对于折射率为负数的介质，可以将折射角成为复数，从而应用折射定律。但这还不如代入 $k_x = \text{Const}$ 与 $k^2 = \tilde{n}^2 k_0^2$
14. 设地面系 S，有以相对论性速度 v 相对其 x 轴运动的系 S'。有一粒子，在 S' 系中动量为 p_c ，能量为 E_c ，运动方向与 x 轴夹角 θ_c 。设其在地面系下

夹角为 θ 。求 $\frac{d \cos \theta}{d \cos \theta_c}$, 这个微分在分布变换中很常用。采用自然单位制, 分别微分 $p_c \cos \theta_c = \gamma(p \cos \theta - \beta E)$, $E_c = \gamma(E - \beta p \cos \theta)$, $E^2 = p^2 + m^2$ 。联立, 消却 dE, dp 。得 $\frac{d \cos \theta}{d \cos \theta_c} = \frac{\gamma p_c (p - \beta E \cos \theta)}{p^2}$ 。可以逃避复杂的求导, 且若将 E, p 用 θ 表示, 最终将得到 θ 的函数, 这正是期望的。

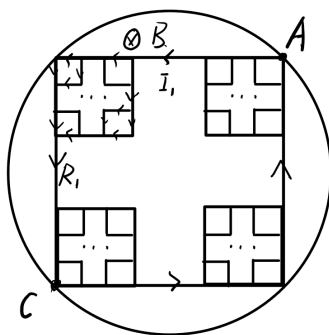


图 3.23: 示例

15. 一个计算分形电阻网络电流的方法, 以图3.23为例。令 $\frac{\partial B}{\partial t} = k$, 干路电流为 I_1 。考虑 A 到 C 的电势差满足 $U = \sum IR$, 经过的干路电阻为 $2R_1$ 。考虑次级小正方形, 由叠加原理, 其内部电流可拆为纯感生的部分与纯电阻的部分之和, 如图3.24。感生项满足 $\sum I'R' = \lambda^2 U$, 阻性项可写为 $R_x I_1$ 。这有 $U = \sum IR = 2\lambda^2 U + 2R_x I_1 + 2R_1 I_1$, 又 $2U = kS$ 。 R_x 只是一个纯粹的分形电阻问题, 从而易解干路电流。这里想请读者注意电势差的定义, $U = \sum IR$, 其只与电流关联, 我们在前面只关注电流的行为。最后才用了电势差等于电动势。不注意区分可能会有概念问题。这题还可以等效电源。

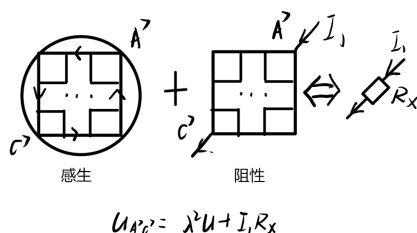


图 3.24: 两种分布

16. 麦克斯韦鱼眼中光线轨迹是圆, 用曲率不变导出较为方便。也可以积

分, 将 $x - \frac{1}{x}$ 视为整体。

17. 相对论碰撞最大散射角 $\theta = \arcsin \frac{m_2}{m_1}, m_1 > m_2$ 。
18. 刚体在曲线上纯滚且随遇平衡可知接触点与质心连线始终竖直, 利用这点再联立质心高度不变和运动关联则可解出曲线方程。
19. 如图3.25, 透过均匀介质堆与直接反射的光光程差为 $2 \sum n_i h_i \cos \theta_i - 2 \sum h_i \cos \theta$, 考虑叠加原理可得, 当然直接解法向波动方程也行。

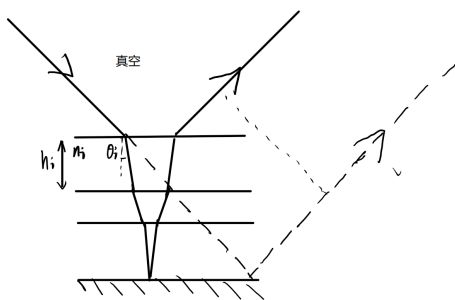


图 3.25: 图示

20. 交流阻抗匹配, $R_{in} = R_{out}^*$ 。
21. 可以先对轴上一点写出三个方向力矩, 再点乘轴方向, 这可以避免将力与距离做分解。
22. 灰体发射率 $\varepsilon = 1 - r - t$, r 为反射率, t 为透射率。
23. 用麦克斯韦应力张量算受力要将积分覆盖整个平面, 不能只覆盖带电部分, 这是定义。
24. 在 x_0 处释放的阻尼震荡, 振幅并不为 x_0 , 若用 $x = A \cos(\omega t + \varphi)$ 定义振幅。对 $\ddot{x} + 2\gamma\dot{x} + \omega_0^2 x = 0$, $A = e^{-\gamma t} \sqrt{\frac{\omega_0^2 + 2\gamma^2}{\omega_0^2 + \gamma^2}} x_0$ 。
25. 在空间内有感生电场的情况下, 电表的示数与电表连接回路有关, 要算该回路内电动势。
26. 质量 m 的粒子, 其包含静能的能量 E , 角动量 L , 在有心势 $-\frac{k}{r}$ 下相对论性运动。比耐方程解为 $u = \frac{kE}{L^2 c^2 - k^2} + \frac{\sqrt{L^2 c^2 E^2 - m^2 c^4 (L^2 c^2 - k^2)}}{L^2 c^2 - k^2} \cos \sqrt{1 - \frac{k^2}{L^2 c^2}} \theta$ 。振幅的导出可以利用罗列三的5。索末菲条件 $L = n_\theta \hbar, \oint p_r dr = \oint L \left(\frac{du}{d\theta} \right)^2 \frac{1}{u^2} d\theta = n_r \hbar$ 。可得 $n_r \hbar = \sqrt{1 - \frac{k^2}{L^2 c^2}} \left(\frac{1}{\sqrt{1 - e^2}} - 1 \right) n_\theta \hbar$ 。e 为离心率。令常数 $\alpha = \frac{k}{\hbar c}$ 则 $E = mc^2 \left[1 + \left(\frac{\alpha}{n_r + \sqrt{n_\theta^2 - \alpha^2}} \right)^2 \right]^{-\frac{1}{2}}$ 。每次都算太麻烦了, 建议留个印象。

27. 灰体发射率 $\varepsilon = 1 - r - t$, r 反射率, t 透射率。
28. 正确处理一些外场中响应的问题, 一定要区分外场与总场, 作用的是总场。如一系列算介电常数的模型, 还有带电体在变化磁场中旋转。
29. 极坐标中, $u = \omega r \hat{\theta}$ 的场, 有 $\nabla u \cdot \hat{\theta} = r \frac{d\omega}{dr} \hat{\theta}$ 。这在算粘滞力的时候可能会有问题, 具体的导出有关矢量在极坐标中的梯度表示。

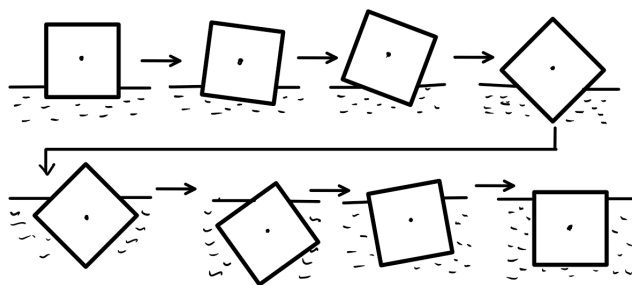


图 3.26: 状态随密度变化

30. 不同密度正方形在水中的平衡模式变化如图3.26, 可视为对称性破缺。对于这类浮力平衡具体计算我个人喜欢在正方形标架中算出浮心, 再用浮心重心连线与重力方向平行算得状态, 如图3.27。

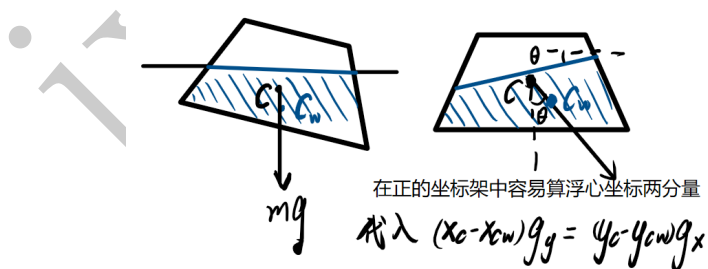


图 3.27: 示例

31. 由于传热导致的气缸小振动缓变衰减可以利用熵算。振动的势能与动能转化为热, 熵可写为 $S = -\frac{\Delta E}{T_0}$ 。 T_0 可近似用环境温度表示, 设振幅为 A , $E \propto A^2$ 。单位时间传热 $\frac{dQ}{dt} = a\Delta T$, 导致熵变 $\frac{dS}{dt} = \frac{dQ}{dt} \left(\frac{1}{T_{in}} - \frac{1}{T_0} \right) = \frac{a\Delta T^2}{T_0^2}$, 取平均, $-\frac{1}{T_0} \frac{d\Delta E}{dt} = \frac{1}{2} \frac{a\Delta T_a^2}{T_0^2}$, 温度振幅 $T_a \propto A$, 即可解出指数衰减解。

32. 小车的脱离极限不在质心最高时取得, 要考虑最前端接触点的极限, 如图3.28。

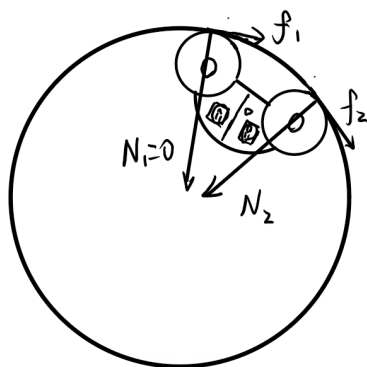


图 3.28: 示例

33. 粒子在电磁波中受力, 要考虑电磁场随空间的变化。
34. 匀强磁场中环路不受力, 复杂电路在磁场中受力只需要考虑边界的电流。
35. 压强换系不变。
36. 莫尔条纹, 是用几何条纹来模拟相位分布, 进而“干涉”。
37. 外场下的有电导, 有介电常数的介质。感应出的电场完全由 σ 决定, ϵ 只是决定了电荷中自由和极化的占比。
38. 无外场的 ϵ, σ 介质, 各量为 $e^{-\frac{\sigma}{\epsilon}t}$ 的衰减解。
39. 写总力矩平衡时记得区分内力矩与外力矩……
40. 注意相对论力的变换, 对应的功的计算中的速度, 不是作用对象的速度而是作用点的速度。
41. 气体绝热上升时, 有守恒量 $H + mgz = \text{Const}$, H 为焓。
42. 热平衡中有质量的光滑隔板, 如图3.29, 其动能在经典下为 $\frac{1}{2}kT$, 满足单自由度能均分定理, 可用弹性碰撞下, 平均能量变化不变得到。
43. 将导体球壳压扁, 即将球壳上电荷投影到截面圆上, 如图3.30。这样的电荷分布可使圆盘等势, 由平面内电场为零易证。

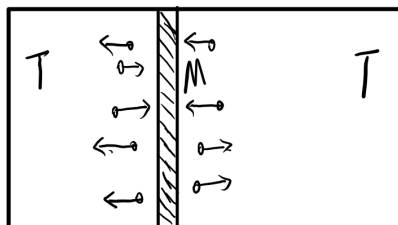


图 3.29: 图示

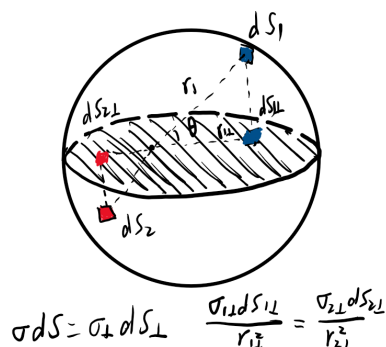


图 3.30: 如图圆盘

44. 设二维中有粒子 T 运动轨迹为 $x_T(t), y_T(t)$, 另有粒子追及它, 满足 $\frac{y_T - y}{x_T - x} = \frac{dy}{dx}$. 有 $y' \dot{x}_T(t) + (x_T - x)y'' \dot{x} = \dot{y}_T$. 若 T 做直线运动, 可旋转坐标架使 $\dot{x}_T(t) = 0 \Rightarrow (C - x)y'' = \frac{dy_T}{dx}$. 若二者速度比例为定值, 化为纯几何关系, 可解。
45. 无源电场及其导数与等势面高斯曲率有关, 令法向为 z 向。 $\frac{1}{|E|} \frac{\partial E}{\partial z} = -\frac{2}{R}$, 由 $R_x = -\frac{\partial \varphi}{\partial z} / \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2}, R_y = -\frac{\partial \varphi}{\partial z} / \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2}$ 可得。
46. 这里讲三个等效, 对表面张力, 将液面高度 z , 视为液面坐标 (x, y) 的函数。如图3.31 考虑四条边的贡献, z 方向的微元受力我们可以写为

$$\begin{aligned} dF &= dx\sigma \frac{dz}{dy} \Big|_{y+dy} - dx\sigma \frac{dz}{dy} \Big|_y \\ &\quad + dy\sigma \frac{dz}{dx} \Big|_{x+dx} - dy\sigma \frac{dz}{dx} \Big|_x \\ &= dx dy \sigma \nabla^2 z \end{aligned}$$

静态时是一个泊松方程。同理, 对一个扩散情形, 考虑数密度 $f(x, y)$,

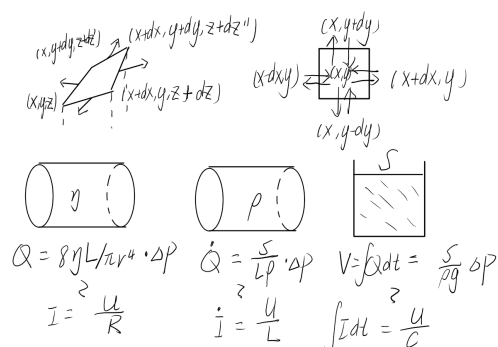


图 3.31: 几个等效

设向外扩散的速率正比于密度，那么 (x, y) 处的变化率满足

$$k \propto (f(x-dx, y) + f(x+dx, y) + f(x, y+dy) + f(x, y-dy)) \propto \nabla^2 f(x, y) \quad (3.1)$$

静态也可以化为泊松方程。

然后是一个电路等效，我认为只要同时满足正比关系和流量守恒，就可以满足电路等效。也就是一个强度量和流密度满足 $\vec{J} = k\vec{f}$ ，且 $\nabla \cdot \vec{J} = 0$ 。比如水流，认为压强差相当于电势差，那么泊肃叶公式 $Q \propto \Delta p$ 就相当于欧姆定律，光滑流体应该会对应电感，电容稍微麻烦一点，需要定义一个体积和压强差成正比的容器。一个重力作用下的罐子可以满足这一条件，但是这相当于一端压强是固定的。

47. 有重力时，希望在曲面 A 上构建一个轨道，使物体质心以恒定的轨迹运动，求轨道形式。先得到物体以该轨迹运动时划过的最低曲面 B，让 A, B 相交即的轨迹曲线。图3.32给出的是让质心水平运动的轨道。

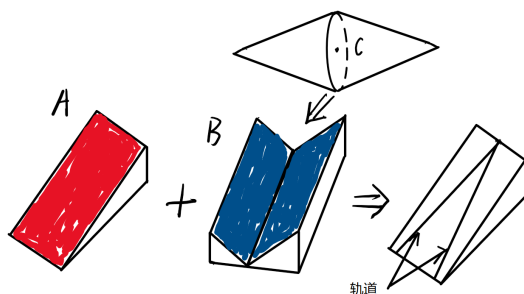


图 3.32: 质心水平

48. 最后讲一个我个人最喜欢的小技巧，二体修正，对于两个物体 1,2，1 为质点，质量为 m_1 ，2 为平面刚体，质量为 m_2 ，转动惯量为 I_2 。我们设只有二者之间相互作用。动能写为 $\frac{1}{2}(m_1\dot{\vec{x}}_1^2 + m_2\dot{\vec{x}}_2^2 + I_2\omega^2)$ 。若总动量为零，即 $m_1\dot{\vec{x}}_1 + m_2\dot{\vec{x}}_2 = 0$ 。那么可以用一个折合质量 $\mu = \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2}$ 来代替，此时动能写为 $\frac{1}{2}(\mu(\dot{\vec{x}}_1 - \dot{\vec{x}}_2)^2 + I_2\omega^2)$ 。将相对运动用极坐标表示，再改写动能 $\frac{1}{2}(\mu(r^2\dot{\theta}^2 + \dot{r}^2) + I_2\omega^2)$ 。此时质心平动的角动量不依赖于参考点，为 $\mu r^2\dot{\theta}$ 。若总角动量为零，即 $I\omega + \mu r^2\dot{\theta} = 0$ ，可将动能进一步写成 $\frac{1}{2}(\mu\dot{r}^2 + \frac{\mu I r^2}{\mu r^2 + I}(\omega - \dot{\theta})^2)$ 。这个方法很简单且很有用，比如小球从光滑的不固定轨道上滑落的问题可以一步到位。

后记与日志

后记部分是我 24 年寒假到暑假的日记摘录，很难说现在的日子比当初又更美好，远在远方的风比远方更远。

卓越：似梦非梦，如雪如山。

春联：青山吞吐着浮云的落寞。

停课：落日熔金，眩散满地的光瓦。四月的风，五月的酒，晕开猖狂的背影，沉封的梦。

学考：它不被今晚的灯火照亮，亦不为他日的阴云蒙尘。

量子营：祛魅的世界寥廓清静，孤独的心摇摆不定。不为摘星宏愿，只为这山河浩荡。

夏令营：天地颠簸，明镜肆水。

复赛前：淡淡的日常无甚波澜，及想到它的终焉也未免怅然。

复赛：东苍晓破驰游龙，紫华曙绽惊帝弓。

省队：桂华流瓦，斜斟着半盈的月。秋阴晓漠逐流水，浮生长念寄枝头。

兰阶 & 学而思：弹指光阴轻一笑，丝雨润愁锁清秋。

决赛：消弭残夏旧风流，孤光自照冰肺胸。九天阊阖开宫殿，青云器业我全疏。

国集：日泄长湖，白光万亩。

日志

初稿完稿于 2024.2.2

第一次修订于 2024.3.24

第二次修订于 2024.5.30

第三次修订于 2024.9.6

公开版修订并发布于 2025.3.14