

MACIERZE I WYZNACZNIKI

Pojęcie macierzy

Macierzą liczbową prostokątną o wymiarze $m \times n$ nazywamy funkcję liczbową określona na zbiorze uporządkowanych par liczb naturalnych (i, j) , gdzie: $i = 1, \dots, m; j = 1, \dots, n$. Wartości tej funkcji nazywamy elementami macierzy i oznaczamy a_{ij} . Stosujemy zwykle następujące zapisy

$$\mathbb{A} = \mathbb{A}_{m \times n} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & a_{m3} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix} = [a_{ij}]_{m \times n}$$

Macierze stanowią zasadniczą część tzw. algebry liniowej i mają szczególne zastosowanie w matematyce (zwłaszcza w statystyce), informatyce i bioinformatyce, ekonomii oraz we wszystkich naukach technicznych. Służą m.in. do:

1. Szybkiego rozwiązywania skomplikowanych i bardzo rozbudowanych układów równań.
2. Zapisywania i przetwarzania wielkich zbiorów danych. Dla przykładu, wyszukiwarka Google wykorzystuje słynny algorytm *PageRank*, służący do indeksowania stron internetowych (i oznaczający ich jakość), który opiera się na macierzach oraz związanych z nimi wektorach własnych. Także ekran monitora, w którym stosuje się cyfrowe przetwarzanie obrazów, składa się z milionów pikseli uporządkowanych w sposób macierzowy.
3. Kodowania informacji w telekomunikacji, kryptografii oraz do programowania grafiki 3D. Mają także spektakularne zastosowania w analizie DNA, RNA i białek za pomocą narzędzi informatyki.
4. Optymalizacji zjawisk i wielkości technicznych oraz ekonomicznych (aerodynamika, elektrotechnika i elektronika, automatyka i robotyka, termodynamika, rynki kapitałowe, inflacja, wzrost gospodarczy, programowanie liniowe itp.).
5. Prognozy pogody – poprzez modelowanie ściśle powiązanych ze sobą, szybkozmiennych zjawisk i procesów fizycznych zachodzących na całej kuli ziemskiej oraz w atmosferze (temperatura, jonizacja, ciśnienie, siła wiatru, opady, prądy morskie, ruchy tektoniczne etc.).

Przykład 1.

$$\mathbb{A} = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 3 \\ 4 & 9 & 1 \end{bmatrix}$$

Jest to macierz liczbową o wymiarze 2×3 .

Położenie każdego elementu macierzy $m \times n$ oznaczone jest dwoma wskaźnikami (indeksami), z których pierwszy oznacza numer kolejny wiersza, a drugi numer kolumny. Elementami macierzy mogą być także liczby zespolone

$$\mathbb{A} = \begin{bmatrix} 1 & -3i & 5 & 7 + 2i \\ 0 & 3 & 8 & 5 \\ 4i & 9 & 1 & -6i \end{bmatrix}$$

Niektóre rodzaje macierzy:

1. **Macierz kolumnowa** – jest to macierz o wymiarze $m \times 1$, zwana inaczej wektorem kolumnowym lub pionowym. Poniżej macierz kolumnowa o wymiarze 3×1 .

$$\begin{bmatrix} 3 \\ -1 \\ 5 \end{bmatrix}$$

2. **Macierz wierszowa** – jest to macierz o wymiarze $1 \times n$, zwana inaczej wektorem wierszowym lub poziomym. Poniżej macierz wierszowa o wymiarze 1×4 .

$$[-7 \quad 0 \quad 6 \quad 9]$$

3. **Macierz zerowa** – jest to macierz, której wszystkie elementy są zerami. Poniżej macierz zerowa o wymiarze 3×2 .

$$\mathbb{O} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

4. **Macierz rzadka** – jest to taka macierz, w której większość elementów ma wartość równą zeru. Wykorzystywana w teorii grafów oraz w naukach inżynierskich, gdzie przy okazji rozwiązywania tzw. równań różniczkowych pojawiają się olbrzymie macierze, ale zawierające niewiele elementów niezerowych.
5. **Macierz kwadratowa** – jest to macierz posiadająca tyle samo wierszy, co kolumn, o wymiarze $n \times n$ (liczbę n nazywamy stopniem macierzy kwadratowej). Poniżej macierz stopnia n ($n \in N$).

$$\mathbb{A}_{n \times n} = \mathbb{A}_n = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}$$

O elementach $a_{11}, a_{22}, a_{33}, \dots, a_{nn}$ mówimy, że tworzą główną przekątną (inaczej diagonalę) macierzy \mathbb{A}_n . Natomiast elementy $a_{1n}, a_{2n-1}, a_{3n-2}, \dots, a_{n1}$ tworzą drugą przekątną macierzy \mathbb{A}_n .

- a) przykład macierzy kwadratowej stopnia 3-go

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 3 \\ -5 & 4 & 7 \\ 3 & 6 & 9 \end{bmatrix}$$

główna przekątna: 1, 4, 9.

druga przekątna: 3, 4, 3.

- b) przykład macierzy kwadratowej stopnia 1-go

$$[-2]$$

6. **Macierz diagonalna** (inaczej macierz przekątna) – jest to taka macierz kwadratowa, której elementy na przekątnej głównej są różne od zera, a pozostałe są równe zeru.

$$\mathbb{A} = \begin{bmatrix} a_{11} & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & a_{22} & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}$$

7. **Macierz jednostkowa** – jest to taka macierz diagonalna, której wszystkie elementy na przekątnej głównej równe są jedności. Macierz taką zapisujemy zwykle jako \mathbb{I} lub \mathbb{E} .

$$\mathbb{E} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \end{bmatrix}$$

8. **Macierz transponowana** (inaczej przestawiona) względem danej macierzy \mathbb{A} – jest to macierz, która powstaje z macierzy \mathbb{A} przez przestawienie wierszy na miejsce kolumn (i odwrotnie) z zachowaniem ich kolejności. Macierz transponowaną względem macierzy \mathbb{A} oznaczamy symbolem \mathbb{A}^T .

Przykłady

$$\mathbb{A} = \begin{bmatrix} 3 & 5 & 7 & 9 \\ -1 & 2 & 0 & 6 \end{bmatrix} \Rightarrow \mathbb{A}^T = \begin{bmatrix} 3 & -1 \\ 5 & 2 \\ 7 & 0 \\ 9 & 6 \end{bmatrix}$$

$$[1 \quad 3 \quad 7]^T = \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ 7 \end{bmatrix}$$

Uwagi:

- a) jeżeli macierz $\mathbb{A} = [a_{ij}]_{m \times n}$, to $\mathbb{A}^T = [a_{ji}]_{n \times m}$
- b) $(\mathbb{A}^T)^T = \mathbb{A}$

PODSTAWOWE DZIAŁANIA NA MACIERZACH

Dodawanie i odejmowanie macierzy

Niech będą dane macierze $\mathbb{A} = [a_{ij}]_{m \times n}$ i $\mathbb{B} = [b_{ij}]_{m \times n}$. Macierze \mathbb{A} i \mathbb{B} nazywają się równymi

$$\mathbb{A} = \mathbb{B} \Leftrightarrow \forall_{\substack{i=1 \dots m \\ j=1 \dots n}} a_{ij} = b_{ij}$$

Sumę macierzy \mathbb{A} i \mathbb{B} definiuje się następująco

$$\mathbb{A} + \mathbb{B} \stackrel{\text{def}}{=} [a_{ij} + b_{ij}]_{m \times n}$$

Iloczyn macierzy \mathbb{A} i liczby λ oblicza się wg wzoru

$$\lambda \mathbb{A} = [\lambda a_{ij}]_{m \times n}$$

Natomiast wzór na różnicę obu macierzy \mathbb{A} i \mathbb{B} ma postać

$$\mathbb{A} - \mathbb{B} \stackrel{\text{def}}{=} \mathbb{A} + (-1)\mathbb{B} = [a_{ij} - b_{ij}]_{m \times n}$$

Uwaga:

Iloczyn $(-1)\mathbb{B} = -\mathbb{B}$ nazywamy macierzą przeciwną do macierzy \mathbb{B} .

Przykład 1.

$$\begin{bmatrix} -1 & 5 \\ 7 & 0 \end{bmatrix} \neq \begin{bmatrix} -1 & 5 & 0 \\ 7 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \neq \begin{bmatrix} 5 & -1 \\ 7 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} -1 & 5 \\ 7 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \Leftrightarrow (a = -1 \wedge b = 5 \wedge c = 7 \wedge d = 0)$$

$$\lambda \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \\ 5 & 6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda & 2\lambda \\ 3\lambda & 4\lambda \\ 5\lambda & 6\lambda \end{bmatrix}$$

Przykład 2.

Dane są macierze $\mathbb{A} = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 0 & -1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$ oraz $\mathbb{B} = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$. Oblicz $2\mathbb{A} - 3\mathbb{B}$.

$$2\mathbb{A} - 3\mathbb{B} = 2\mathbb{A} + (-3)\mathbb{B} = \begin{bmatrix} 4 & 2 \\ 0 & -2 \\ 2 & 4 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 0 & -3 \\ -3 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4+3 & 2+0 \\ 0+0 & -2-3 \\ 2-3 & 4+0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7 & 2 \\ 0 & -5 \\ -1 & 4 \end{bmatrix}$$

Prawdziwa jest równość

$$\mathbb{A} - \mathbb{A} = \mathbb{O}$$

Prawdziwe są również równości

$$\mathbb{A}_{mxn} + \mathbb{B}_{mxn} = \mathbb{B}_{mxn} + \mathbb{A}_{mxn}$$

$$(\mathbb{A}_{mxn} + \mathbb{B}_{mxn}) + \mathbb{C}_{mxn} = \mathbb{A}_{mxn} + (\mathbb{B}_{mxn} + \mathbb{C}_{mxn})$$

$$\mathbb{A}_{mxn} + \mathbb{O}_{mxn} = \mathbb{A}_{mxn}$$

$$\mathbb{A} + (-\mathbb{A}) = \mathbb{O}$$

$$(\alpha \mathbb{A})^T = \alpha \mathbb{A}^T$$

$$(\mathbb{A}_{mxn} + \mathbb{B}_{mxn})^T = \mathbb{A}_{mxn}^T + \mathbb{B}_{mxn}^T$$