Iloczyn macierzy

Iloczyn macierzy możliwy jest tylko wtedy, gdy macierze są odpowiednich rozmiarów. Wówczas iloczyn polega na pomnożeniu wierszy przez kolumny, przykładowo

$$\begin{bmatrix}1 & -2\\ 0 & 3\end{bmatrix}\begin{bmatrix}4 & -1\\ 2 & 0\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}1\cdot 4 + (-2)\cdot 2 & 1\cdot(-1) + (-2)\cdot 0\\ 0\cdot 4 + 3\cdot 2 & 0\cdot(-1) + 3\cdot 0\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}0 & -1\\ 6 & 0\end{bmatrix}$$

Definicja
Iloczynem macierzy $\mathbb{A} = \left[a_{ij}\right]_{mxn}$ przez macierz $\mathbb{B} = \left[b_{jk}\right]_{nxp}$ nazywamy macierz $\mathbb{C} = \mathbb{A}\cdot\mathbb{B}$, gdzie

$$\mathbb{A}\cdot\mathbb{B} \stackrel{\text{def}}{=} [c_{ik} = a_{i1}\cdot b_{1k} + a_{i2}\cdot b_{2k} + a_{i3}\cdot b_{3k} + \cdots + a_{in}\cdot b_{nk}] = \left[\sum_{j=1}^{n} a_{ij}\cdot b_{jk}\right]_{mxp}$$

Wynika stąd wniosek, że iloczyn macierzy istnieje tylko wtedy, gdy liczba kolumn macierzy $\mathbb{A}$ równa jest liczbie wierszy macierzy $\mathbb{B}$. Symbol mnożenia zwykle pomijamy. Element c_{ik} iloczynu $\mathbb{C} = \mathbb{A}\cdot\mathbb{B}$ otrzymujemy tworząc sumę iloczynów wszystkich kolejnych elementów $i - tego$ wiersza macierzy $\mathbb{A}$ przez odpowiednie elementy $k - tej$ kolumny macierzy $\mathbb{B}$.

Przykłady mnożenia macierzy:

$$\begin{bmatrix}2 & 1\\ 3 & -3\\ 5 & 2\\ 0 & 1\end{bmatrix}_{4x2}\cdot\begin{bmatrix}1 & -1 & 1\\ 2 & 4 & 3\end{bmatrix}_{2x3} = \begin{bmatrix}2\cdot 1 + 1\cdot 2 & 2\cdot(-1) + 1\cdot 4 & 2\cdot 1 + 1\cdot 3\\ 3\cdot 1 + (-3)\cdot 2 & 3\cdot(-1) + (-3)\cdot 4 & 3\cdot 1 + (-3)\cdot 3\\ 5\cdot 1 + 2\cdot 2 & 5\cdot(-1) + 2\cdot 4 & 5\cdot 1 + 2\cdot 3\\ 0\cdot 1 + 1\cdot 2 & 0\cdot(-1) + 1\cdot 4 & 0\cdot 1 + 1\cdot 3\end{bmatrix}_{4x3}$$

$$= \begin{bmatrix}4 & 2 & 5\\ -3 & -15 & -6\\ 9 & 3 & 11\\ 2 & 4 & 3\end{bmatrix}_{4x3}$$

$$\begin{bmatrix}3\\ 4\\ 2\end{bmatrix}_{3x1}\cdot\begin{bmatrix}1 & -1\end{bmatrix}_{1x2} = \begin{bmatrix}3 & -3\\ 4 & -4\\ 2 & -2\end{bmatrix}_{3x2}$$

$$\begin{bmatrix}1 & 2\\ 3 & 4\end{bmatrix}_{2x2}\cdot\begin{bmatrix}x\\ y\end{bmatrix}_{2x1} = \begin{bmatrix}x + 2y\\ 3x + 4y\end{bmatrix}_{2x1}$$

$$\begin{bmatrix}2\\ 3\\ 8\\ 1\end{bmatrix}_{4x1}\cdot\begin{bmatrix}1 & 4 & -1 & 5\end{bmatrix}_{1x4} = \begin{bmatrix}2 & 8 & -2 & 10\\ 3 & 12 & -3 & 15\\ 8 & 32 & -8 & 40\\ 1 & 4 & -1 & 5\end{bmatrix}_{4x4}$$

$$\begin{bmatrix}2 & 3 & 8 & 1\end{bmatrix}_{1x4}\cdot\begin{bmatrix}1\\ 4\\ -1\\ 5\end{bmatrix}_{4x1} = [2\cdot 1 + 3\cdot 4 + 8\cdot(-1) + 1\cdot 5] = [11]_{1x1}$$

$$\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}0 & 0\\ 0 & 0\end{bmatrix}$$

Uwaga:
Ostatni przykład pokazuje, że iloczyn macierzy niezerowych może być macierzą zerową.

Przykład 1.

Niech $\mathbb{A} = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}$ oraz $\mathbb{B} = \begin{bmatrix} -5 & 3 \\ 1 & 4 \end{bmatrix}$, wówczas

$$\mathbb{AB} = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} -5 & 3 \\ 1 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2\cdot(-5)+1\cdot 1 & 2\cdot 3+1\cdot 4 \\ 0\cdot(-5)+3\cdot 1 & 0\cdot 3+3\cdot 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -9 & 10 \\ 3 & 12 \end{bmatrix}$$

$$\mathbb{BA} = \begin{bmatrix} -5 & 3 \\ 1 & 4 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -5\cdot 2+3\cdot 0 & -5\cdot 1+3\cdot 3 \\ 1\cdot 2+4\cdot 0 & 1\cdot 1+4\cdot 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -10 & 4 \\ 2 & 13 \end{bmatrix}$$

Zatem tutaj $\mathbb{AB} \neq \mathbb{BA}$.

Niech teraz $\mathbb{A}_1 = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$ oraz $\mathbb{B}_1 = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$, wówczas

$$\mathbb{A}_1\mathbb{B}_1 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\mathbb{B}_1\mathbb{A}_1 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$$

W tym wypadku $\mathbb{A}_1\mathbb{B}_1 = \mathbb{B}_1\mathbb{A}_1$.

Z dwóch powyższych przykładów widać wyraźnie, że mnożenie macierzy najczęściej nie jest przemienne. Ponieważ $\underset{\mathbb{A},\mathbb{B}}{\exists}\ \mathbb{A}\ \mathbb{B} \neq \mathbb{B}\ \mathbb{A}$, na tej podstawie musimy rozróżnić dwa rodzaje mnożenia macierzy:

a) prawostronne mnożenie macierzy $\mathbb{A}$ przez macierz $\mathbb{B}$ ($\mathbb{C} = \mathbb{A}\cdot\mathbb{B}$),

b) lewostronne mnożenie macierzy $\mathbb{A}$ przez macierz $\mathbb{B}$ ($\mathbb{D} = \mathbb{B}\cdot\mathbb{A}$).

Przykład 2.
Dane są macierze $\mathbb{A} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$ oraz $\mathbb{B} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$. Sprawdź, czy prawdziwa jest zależność $(\mathbb{AB})^T = \mathbb{B}^T\mathbb{A}^T$.

$$\mathbb{AB} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 3 \end{bmatrix} \Rightarrow (\mathbb{AB})^T = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}$$

$$\mathbb{B}^T\mathbb{A}^T = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}$$

Uwagi końcowe
Przy założeniu wykonalności działania na macierzach prawdziwe są następujące zależności:

$$\mathbb{A}(\mathbb{BC}) = (\mathbb{AB})\mathbb{C}$$

$$(\mathbb{A}+\mathbb{B})\mathbb{C} = \mathbb{AC}+\mathbb{BC}$$

$$\mathbb{A}(\mathbb{B}+\mathbb{C}) = \mathbb{AB}+\mathbb{AC}$$

$$(\mathbb{AB})^T = \mathbb{B}^T\mathbb{A}^T$$

$$(\alpha\mathbb{A})(\beta\mathbb{B}) = (\alpha\beta)(\mathbb{A}\mathbb{B})$$
$$\text{gdzie: } \alpha, \beta - \text{dowolne liczby}$$

$$\mathbb{A}\mathbb{O} = \mathbb{O}\mathbb{A} = \mathbb{O}$$

$$\mathbb{A}\mathbb{E} = \mathbb{E}\mathbb{A} = \mathbb{A}$$
$$(\text{macierz jednostkowa } \mathbb{E} \text{ musi być tego samego stopnia, co macierz kwadratowa } \mathbb{A})$$

Zadanie programistyczne

Z1_m.

Napisz program, który obliczy $\mathbb{A} + \mathbb{B}$ oraz $\mathbb{A} - \mathbb{B}$, jeśli $\mathbb{A} = \begin{pmatrix} 5 & 0 & -1 & 6 \\ -2 & 0 & 3 & 1 \\ 1 & 2 & -1 & 0 \end{pmatrix}$ oraz $\mathbb{B} = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 & 5 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & -1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$.

Z2_m.

Napisz program, który obliczy $\mathbb{A} \cdot \mathbb{B} - \mathbb{B} \cdot \mathbb{A}$, jeśli $\mathbb{A} = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 2 \\ -1 & 2 & 1 \end{bmatrix}$ oraz $\mathbb{B} = \begin{bmatrix} 3 & 1 & -2 \\ 3 & -2 & 4 \\ -3 & 5 & -1 \end{bmatrix}$.