WYZNACZNIK MACIERZY

Wyznacznikiem macierzy kwadratowej jest dokładnie jedna liczba, zależna od elementów macierzy. Wyznacznik macierzy oznaczamy jednym z następujących symboli: $\det \mathbb{A}_n$, $|\mathbb{A}_n|$, $\mathrm{A_n}$, $\det \mathbb{A}$, $|\mathbb{A}|$ lub A.

Wyznacznik macierzy jednoelementowej $\mathbb{A}_n = [a_{11}]$ obliczamy za pomocą wzoru

$$\det[a_{11}] = a_{11}$$

Wyznacznik macierzy kwadratowej stopnia $2 \leq n \in N$

$$\mathbb{A}_n = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}$$

obliczamy za pomocą wzoru (1)

$$\det \mathbb{A}_n = (-1)^{1+1} a_{11} A_{11} + (-1)^{1+2} a_{12} A_{12} + \cdots + (-1)^{1+n} a_{1n} A_{1n} = \sum_{j=1}^{n} (-1)^{1+j} a_{1j} A_{1j}$$

gdzie: A_{1j} przy $j = 1, 2, \cdots, n$ oznacza wyznacznik macierzy $(n-1)$ stopnia otrzymanej z macierzy $\mathbb{A}_n$ przez skreślenie pierwszego wiersza oraz $j - tej$ kolumny

Przykład

$$\det \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} = (-1)^{1+1} a_{11} \cdot \det[a_{22}] + (-1)^{1+2} a_{12} \cdot \det[a_{21}] = a_{11} \cdot a_{22} - a_{12} \cdot a_{21}$$

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = (-1)^{1+1} a_{11} \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} + (-1)^{1+2} a_{12} \begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + (-1)^{1+3} a_{13} \begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}$$

$$= a_{11}(a_{22}a_{33} - a_{32}a_{23}) - a_{12}(a_{21}a_{33} - a_{31}a_{23}) + a_{13}(a_{21}a_{32} - a_{22}a_{31})$$

$$= a_{11}a_{22}a_{33} - a_{11}a_{32}a_{23} - a_{12}a_{21}a_{33} + a_{12}a_{31}a_{23} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{13}a_{22}a_{31}$$

Uwaga:
Wyznacznik stopnia trzeciego obliczamy zwykle według tzw. schematu Sarrusa, dopisując pod spodem dwa pierwsze wiersze (lub z prawej strony dwie pierwsze kolumny).

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \\ a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{vmatrix}$$

Obliczamy sumę iloczynów głównej przekątnej oraz przekątnych przebiegających pod nią i odejmujemy od niej sumę iloczynów drugiej przekątnej oraz przekątnych przebiegających pod nią

$$(a_{11}a_{22}a_{33} + a_{21}a_{32}a_{13} + a_{31}a_{12}a_{23}) - (a_{13}a_{22}a_{31} + a_{23}a_{32}a_{11} + a_{33}a_{12}a_{21})$$

Ogólnie

$$\det \mathbb{A}_n = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

Podobnie, jak w macierzy, także i tutaj wyróżniamy wiersze, kolumny oraz elementy a_{ij}.

Przykład

$$\begin{vmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 2 & 4 & -1 \\ 5 & -2 & 1 \end{vmatrix} = 12 - 5 - 6 - 2 = -1$$

Minorem macierzy kwadratowej $\mathbb{A}_n$ odpowiadającym (przynależnym) elementowi a_{ij} nazywamy wyznacznik A_{ij} macierzy stopnia $(n-1)$ otrzymany z macierzy $\mathbb{A}_n$ przez wykreślenie $i - tego$ wiersza oraz $j - tej$ kolumny (nazywamy go również minorem wyznacznika A_n).

Iloczyn $M_{ij} = (-1)^{i+j} A_{ij}$ nazywamy **dopełnieniem algebraicznym** elementu a_{ij} macierzy $\mathbb{A}_n$ (lub inaczej dopełnieniem algebraicznym a_{ij} wyznacznika A_n).

Przykład

$$\begin{vmatrix} -7 & 2 & 8 \\ 4 & 0 & -9 \\ 1 & 3 & 5 \end{vmatrix} \qquad a_{23} = -9$$

$$A_{23} = \begin{vmatrix} -7 & 2 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} = -23$$

$A_{23} = -23\ -$ minor przynależny elementowi a_{23}

$M_{23} = (-1)^{2+3} A_{23} = 23 -$ dopełnienie algebraiczne elementu a_{23}

Uwaga:
Wcześniej przedstawiony wzór (1) można teraz zapisać w postaci

$$\det \mathbb{A}_n = a_{11} M_{11} + a_{12} M_{12} + \cdots + a_{1n} M_{1n} = \sum_{j=1}^{n} a_{1j} M_{1j}$$

Jest to tzw. rozwinięcie wyznacznika macierzy $\mathbb{A}_n$ według pierwszego wiersza.

Przykład
Oblicz wyznacznik

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & -2 \\ 2 & -1 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \end{vmatrix} = 1 \cdot (-1)^{1+1} \cdot \begin{vmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 2 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{vmatrix} + (-2) \cdot (-1)^{1+4} \cdot \begin{vmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & -1 \end{vmatrix} = -11$$

Własności wyznaczników

Niech będzie dana macierz kwadratowa stopnia n

$$\mathbb{A}_n = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}$$

Dla tej macierzy słuszne są wzory:

$$\det \mathbb{A}_n = a_{i1}M_{i1} + a_{i2}M_{i2} + \cdots + a_{ij}M_{ij} + \cdots + a_{in}M_{in} = \sum_{j=1}^{n} a_{ij}M_{ij}$$

$$\det \mathbb{A}_n = a_{1j}M_{1j} + a_{2j}M_{2j} + \cdots + a_{ij}M_{ij} + \cdots + a_{nj}M_{nj} = \sum_{i=1}^{n} a_{ij}M_{ij}$$

Twierdzenie 1 (Laplace'a)
Wyznacznik macierzy $\det \mathbb{A}_n$ równy jest swojemu rozwinięciu wg elementów $i - tego$ wiersza lub j$-tej$ kolumny – dla każdego $i, j = 1,2, \cdots, n$.

Przykład
Oblicz poniższy wyznacznik dokonując rozwinięcia wg elementu leżącego w czwartym wierszu i trzeciej kolumnie, który najwygodniej jest wybrać z uwagi na to, że pozostałe elementy trzeciej kolumny są zerami. Dzięki temu musimy zbudować tylko jedną macierz stopnia $(n-1)$, zwaną inaczej podmacierzą, i obliczyć jej wyznacznik, który stanowi podstawę obliczenia wyznacznika całej macierzy.

$$\begin{vmatrix} 2 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & -1 \\ 1 & 2 & 0 & 0 \\ 3 & 1 & 2 & 4 \end{vmatrix} = 2 \cdot (-1)^{4+3} \cdot \begin{vmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & 0 \end{vmatrix} = -2 \cdot 5 = -10$$

Twierdzenie 2.
Jeżeli wszystkie elementy pewnego wiersza lub pewnej kolumny wyznacznika są zerami, to wyznacznik ma wartość równą zeru.

Twierdzenie 3.
Wyznacznik macierzy równy jest wyznacznikowi macierzy transponowanej $\det \mathbb{A} = \det \mathbb{A}^T$.

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{21} & a_{31} \\ a_{12} & a_{22} & a_{32} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{vmatrix}$$

Twierdzenie 4.
Jeżeli w wyznaczniku zamienimy miejscami dwa wiersze (lub dwie kolumny), to wartość wyznacznika zmieni się na przeciwną.

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} & a_{12} \\ a_{21} & a_{23} & a_{22} \\ a_{31} & a_{33} & a_{32} \end{vmatrix}$$

Twierdzenie 5.
Wyznacznik o dwóch identycznych wierszach lub kolumnach ma wartość równą zeru.

Twierdzenie 6.
Wyznacznik mnożymy przez liczbę mnożąc wszystkie elementy jednego z jego wierszy lub jednej z jego kolumn przez tę liczbę.

$$\beta \cdot \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & \beta \cdot a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & \beta \cdot a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & \beta \cdot a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

Z powyższego wynika, że słuszna jest równość, na mocy której można wyłączyć liczbę przed wyznacznik.

Przykład
Wyznacz wartość poniższego wyznacznika korzystając z tw. 5 i 6.

$$\begin{vmatrix} 2 & 4 & 5 \\ 3 & 6 & -7 \\ 4 & 8 & 9 \end{vmatrix} = 2\begin{vmatrix} 2 & 2 & 5 \\ 3 & 3 & -7 \\ 4 & 4 & 9 \end{vmatrix} = 0$$

Twierdzenie 7.
Jeżeli elementy pewnego wiersza (lub kolumny) wyznacznika $\det \mathbb{A}_n$ są proporcjonalne od odpowiednich elementów jego innego wiersza (lub kolumny), to $\det \mathbb{A}_n = 0$.

Przykład

$$\det\begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 5 \end{bmatrix} = 10 - 12 = -2$$

$$\det\begin{bmatrix} 2\alpha & 3\alpha \\ 4 & 5 \end{bmatrix} = 10\alpha - 12\alpha = -2\alpha$$

$$\det\begin{bmatrix} 2\alpha & 3\alpha \\ 4\alpha & 5\alpha \end{bmatrix} = 10\alpha^2 - 12\alpha^2 = -2\alpha^2$$

Wiadomo, że aby pomnożyć macierz przez liczbę, należy pomnożyć każdy jej element przez tę liczbę. Prawdziwa jest zatem równość

$$\det(\alpha \cdot \mathbb{A}_n) = \alpha^n \cdot \det \mathbb{A}_n$$

Twierdzenie 8.
Słuszna jest równość

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a'_{i1} + a''_{i1} & a'_{i2} + a''_{i2} & \cdots & a'_{in} + a''_{in} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a'_{i1} & a'_{i2} & \cdots & a'_{in} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a''_{i1} & a''_{i2} & \cdots & a''_{in} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

W podobny sposób jako sumę dwóch wyznaczników można również przedstawić wyznacznik tego samego stopnia, jeśli posiada on kolumnę, której elementy są dwuskładnikowymi sumami.

Twierdzenie 9.
Wartość wyznacznika nie ulegnie zmianie, jeśli do elementów pewnego wiersza dodamy elementy innego wiersza pomnożone przez tę samą liczbę (dotyczy to również kolumn).

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & -2 & 3 \\ 1 & 0 & -1 & 2 \\ 3 & -1 & 2 & 4 \\ 4 & 1 & 3 & -1 \end{vmatrix} \xrightarrow{3k+1k} \begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 & 3 \\ 1 & 0 & 0 & 2 \\ 3 & -1 & 5 & 4 \\ 4 & 1 & 7 & -1 \end{vmatrix} \xrightarrow{4k+(-2)\cdot 1k} \begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & -1 & 5 & -2 \\ 4 & 1 & 7 & -9 \end{vmatrix}$$

$$= 1 \cdot (-1)^{2+1} \cdot \begin{vmatrix} 2 & -1 & 1 \\ -1 & 5 & -2 \\ 1 & 7 & -9 \end{vmatrix} \xrightarrow{2w+3w} - \begin{vmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 0 & 12 & -11 \\ 1 & 7 & -9 \end{vmatrix} \xrightarrow{1w+(-2)\cdot 3w} - \begin{vmatrix} 0 & -15 & 19 \\ 0 & 12 & -11 \\ 1 & 7 & -9 \end{vmatrix}$$

$$= -1 \cdot (-1)^{3+1} \cdot \begin{vmatrix} -15 & 19 \\ 12 & -11 \end{vmatrix} = -3 \cdot \begin{vmatrix} -5 & 19 \\ 4 & -11 \end{vmatrix} = -3(55 - 76) = 63$$

Twierdzenie 10. (Cauchy'ego)
Jeżeli $\mathbb{A}$ i $\mathbb{B}$ są macierzami kwadratowymi tego samego stopnia, to $\det(\mathbb{A} \cdot \mathbb{B}) = (\det \mathbb{A}) \cdot (\det \mathbb{B})$.