Równania macierzowe

Przy założeniu wykonalności mnożenia macierzy, równaniem macierzowym jest równanie postaci

$$\mathbb{A}\cdot\mathbb{X}=\mathbb{B}$$

W celu rozwiązania równania macierzowego najpierw mnożymy lewostronnie obie strony przez macierz odwrotną $\mathbb{A}^{-1}$ (przy założeniu, że $\det\mathbb{A}\neq 0$).

$$\mathbb{A}\cdot\mathbb{X}=\mathbb{B}\quad /\cdot\mathbb{A}^{-1}$$

$$\mathbb{A}^{-1}\cdot(\mathbb{A}\cdot\mathbb{X})=\mathbb{A}^{-1}\cdot\mathbb{B}$$

$$(\mathbb{A}^{-1}\cdot\mathbb{A})\cdot\mathbb{X}=\mathbb{A}^{-1}\cdot\mathbb{B}$$

$$\mathbb{A}^{-1}\cdot\mathbb{A}=\mathbb{E}$$

$$\mathbb{E}\cdot\mathbb{X}=\mathbb{A}^{-1}\cdot\mathbb{B}$$

$$\mathbb{E}\cdot\mathbb{X}=\mathbb{X}$$

$$\mathbb{X}=\mathbb{A}^{-1}\cdot\mathbb{B}$$

Przykład 1.

Rozwiąż równanie macierzowe $\mathbb{A}\cdot\mathbb{X}=\mathbb{B}$, gdzie $\mathbb{A}=\begin{bmatrix}2&3&1\\4&-1&1\\5&1&1\end{bmatrix}$ oraz $\mathbb{B}=\begin{bmatrix}1&-3&2\\5&-1&5\\1&-1&3\end{bmatrix}$.

$$\mathbb{A}^{-1}=\frac{1}{8}\begin{bmatrix}-2&-2&4\\1&-3&2\\9&13&-14\end{bmatrix}$$

$$\mathbb{X}=\frac{1}{8}\begin{bmatrix}-2&-2&4\\1&-3&2\\9&13&-14\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&-3&2\\5&-1&5\\1&-1&3\end{bmatrix}=\frac{1}{8}\begin{bmatrix}-8&4&-2\\-12&-2&-7\\60&-26&41\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-1&\frac{1}{2}&-\frac{1}{4}\\-\frac{3}{2}&-\frac{1}{4}&-\frac{7}{8}\\\frac{15}{2}&-\frac{13}{4}&\frac{41}{8}\end{bmatrix}$$

Przykład 2.

Rozwiąż równanie macierzowe: $\begin{bmatrix}1&-1&2\\1&2&1\\3&1&0\end{bmatrix}\mathbb{X}+2\begin{bmatrix}6\\1\\2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-2\\1\\-3\end{bmatrix}$.

$$\begin{bmatrix}1&-1&2\\1&2&1\\3&1&0\end{bmatrix}\mathbb{X}=\begin{bmatrix}-2\\1\\-3\end{bmatrix}-2\begin{bmatrix}6\\1\\2\end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix}1&-1&2\\1&2&1\\3&1&0\end{bmatrix}\mathbb{X}=\begin{bmatrix}-2\\1\\-3\end{bmatrix}-\begin{bmatrix}12\\2\\4\end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \\ 3 & 1 & 0 \end{bmatrix} \mathbb{X} = \begin{bmatrix} -14 \\ -1 \\ -7 \end{bmatrix}$$

Przyjmijmy, że $\mathbb{A} = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \\ 3 & 1 & 0 \end{bmatrix}$ oraz $\mathbb{B} = \begin{bmatrix} -14 \\ -1 \\ -7 \end{bmatrix}$.

$$\det \mathbb{A} = -3 + 2 - 12 - 1 = -14 \neq 0$$

$$M_{11} = (-1)^{1+1} \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = -1$$

$$M_{12} = (-1)^{1+2} \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 3 & 0 \end{vmatrix} = 3$$

$$M_{13} = (-1)^{1+3} \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} = -5$$

$$M_{21} = (-1)^{2+1} \begin{vmatrix} -1 & 2 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = 2$$

$$M_{22} = (-1)^{2+2} \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 0 \end{vmatrix} = -6$$

$$M_{23} = (-1)^{2+3} \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} = -4$$

$$M_{31} = (-1)^{3+1} \begin{vmatrix} -1 & 2 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = -5$$

$$M_{32} = (-1)^{3+2} \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 1$$

$$M_{33} = (-1)^{3+3} \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 3$$

$$\mathbb{D} = \begin{bmatrix} -1 & 3 & -5 \\ 2 & -6 & -4 \\ -5 & 1 & 3 \end{bmatrix}$$

$$\mathbb{A}^D = \begin{bmatrix} -1 & 2 & -5 \\ 3 & -6 & 1 \\ -5 & -4 & 3 \end{bmatrix}$$

$$\mathbb{A}^{-1} = \frac{1}{\det \mathbb{A}} \mathbb{A}^D$$

$$\mathbb{A}^{-1} = -\frac{1}{14} \begin{bmatrix} -1 & 2 & -5 \\ 3 & -6 & 1 \\ -5 & -4 & 3 \end{bmatrix}$$

$$\mathbb{X} = \mathbb{A}^{-1} \cdot \mathbb{B} = -\frac{1}{14} \begin{bmatrix} -1 & 2 & -5 \\ 3 & -6 & 1 \\ -5 & -4 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -14 \\ -1 \\ -7 \end{bmatrix} = -\frac{1}{14} \begin{bmatrix} 47 \\ -43 \\ 53 \end{bmatrix}$$

Przykład 3.

Rozwiąż równanie macierzowe postaci $\mathbb{A}\cdot\mathbb{X}\cdot\mathbb{B}=\mathbb{C}$, jeśli $\mathbb{A}=\begin{bmatrix}3 & -1\\ 5 & -2\end{bmatrix}$, $\mathbb{B}=\begin{bmatrix}5 & 6\\ 7 & 8\end{bmatrix}$, $\mathbb{C}=\begin{bmatrix}14 & 16\\ 9 & 10\end{bmatrix}$.

W tym wypadku mnożymy lewostronnie obie strony równania przez $\mathbb{A}^{-1}$ oraz prawostronnie przez $\mathbb{B}^{-1}$.

$$(\mathbb{A}^{-1}\mathbb{A})\mathbb{X}(\mathbb{B}\mathbb{B}^{-1})=\mathbb{A}^{-1}\mathbb{C}\mathbb{B}^{-1}$$

$$\mathbb{X}=\mathbb{A}^{-1}\mathbb{C}\mathbb{B}^{-1}$$

$$\det\mathbb{A}=-6+5=-1\neq 0$$

$$\det\mathbb{B}=40-42=-2\neq 0$$

$$\mathbb{D}_A=\begin{bmatrix}-2 & -5\\ 1 & 3\end{bmatrix}$$

$$\mathbb{A}^D=\begin{bmatrix}-2 & 1\\ -5 & 3\end{bmatrix}$$

$$\mathbb{A}^{-1}=-1\begin{bmatrix}-2 & 1\\ -5 & 3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-2 & 1\\ -5 & 3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}2 & -1\\ 5 & -3\end{bmatrix}$$

$$\mathbb{D}_B=\begin{bmatrix}8 & -7\\ -6 & 5\end{bmatrix}$$

$$\mathbb{B}^D=\begin{bmatrix}8 & -6\\ -7 & 5\end{bmatrix}$$

$$\mathbb{B}^{-1}=-\frac{1}{2}\begin{bmatrix}8 & -6\\ -7 & 5\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-4 & 3\\ \frac{7}{2} & -\frac{5}{2}\end{bmatrix}$$

$$\mathbb{X}=\begin{bmatrix}2 & -1\\ 5 & -3\end{bmatrix}\begin{bmatrix}14 & 16\\ 9 & 10\end{bmatrix}\begin{bmatrix}-4 & 3\\ \frac{7}{2} & -\frac{5}{2}\end{bmatrix}=\left(\begin{bmatrix}2 & -1\\ 5 & -3\end{bmatrix}\begin{bmatrix}14 & 16\\ 9 & 10\end{bmatrix}\right)\begin{bmatrix}-4 & 3\\ \frac{7}{2} & -\frac{5}{2}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}19 & 22\\ 43 & 50\end{bmatrix}\begin{bmatrix}-4 & 3\\ \frac{7}{2} & -\frac{5}{2}\end{bmatrix}$$

$$\mathbb{X}=\begin{bmatrix}1 & 2\\ 3 & 4\end{bmatrix}$$

Przykład 4.

Rozwiąż równanie macierzowe postaci $\mathbb{A}\mathbb{X}\mathbb{B}^{-1}=\mathbb{C}^2$, jeśli $\mathbb{A}=\begin{bmatrix}0 & 0 & -1\\ 1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\end{bmatrix}$, $\mathbb{B}=\begin{bmatrix}1 & 2 & 1\\ 2 & 1 & 1\\ 1 & 3 & 1\end{bmatrix}$ oraz $\mathbb{C}=\begin{bmatrix}2 & 1 & 1\\ 3 & 1 & 0\\ 0 & 1 & 2\end{bmatrix}$.

$$\det\mathbb{A}=1\cdot(-1)^{2+1}\begin{vmatrix}0 & -1\\ 1 & 0\end{vmatrix}=-1$$

$$\det\mathbb{B}=1+2+6-1-3-4=1$$

Ponieważ $\det \mathbb{A} \neq 0$ i $\det \mathbb{B} \neq 0$, rozwiązaniem jest $\mathbb{X} = \mathbb{A}^{-1}\mathbb{C}^2\mathbb{B}$.

$$M_{11} = (-1)^{1+1}\begin{vmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = 0$$

$$M_{12} = (-1)^{1+2}\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{vmatrix} = 0$$

$$M_{13} = (-1)^{1+3}\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 1$$

$$M_{21} = (-1)^{2+1}\begin{vmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = -1$$

$$M_{22} = (-1)^{2+2}\begin{vmatrix} 0 & -1 \\ 0 & 0 \end{vmatrix} = 0$$

$$M_{23} = (-1)^{2+3}\begin{vmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

$$M_{31} = (-1)^{3+1}\begin{vmatrix} 0 & -1 \\ 0 & 0 \end{vmatrix} = 0$$

$$M_{32} = (-1)^{3+2}\begin{vmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = -1$$

$$M_{33} = (-1)^{3+3}\begin{vmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = 0$$

$$\mathbb{D} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\mathbb{A}^D = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\mathbb{A}^{-1} = -1 \cdot \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\mathbb{C}^2 = \mathbb{C}\mathbb{C} = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 3 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 3 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7 & 4 & 4 \\ 9 & 4 & 3 \\ 3 & 4 & 4 \end{bmatrix}$$

$$\mathbb{X} = \mathbb{A}^{-1}\mathbb{C}^2\mathbb{B} = \left(\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 7 & 4 & 4 \\ 9 & 4 & 3 \\ 3 & 4 & 4 \end{bmatrix}\right)\begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 20 & 31 & 16 \\ 13 & 21 & 10 \\ -19 & -30 & -15 \end{bmatrix}$$

Zadania do samodzielnego rozwiązania

Z1.
Wyznacz macierz $\mathbb{X}$ spełniającą równanie macierzowe

$$\begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 3 & 1 \end{bmatrix} \mathbb{X} = \begin{bmatrix} 4 & 2 \\ 7 & 6 \end{bmatrix}$$

Z2.
Rozwiąż równanie macierzowe postaci $(\mathbb{A}\mathbb{X})^{-1} = \mathbb{B}$, jeśli

$$\mathbb{A} = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 3 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & -1 \end{bmatrix} \quad \mathbb{B} = \begin{bmatrix} 0 & 2 & 3 \\ -1 & 4 & 1 \\ 2 & 0 & 5 \end{bmatrix}$$

Z3.
Rozwiąż równanie macierzowe

$$\mathbb{X} \begin{bmatrix} 1 & -1 & -2 \\ 2 & -1 & -1 \\ -1 & 3 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 1 & -1 \\ 3 & -1 & 2 \\ 2 & 2 & 1 \end{bmatrix}$$

Z4.
Rozwiąż równanie macierzowe

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 4 & 9 \\ 4 & 3 & 0 \end{bmatrix} \mathbb{X} = \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ -2 & 1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$$

Z5.
Rozwiąż równanie macierzowe postaci $\mathbb{A}^2 \cdot \mathbb{X} + \mathbb{B}^2 = \mathbb{C}^2$, jeśli

$$\mathbb{A} = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 5 & -2 \end{bmatrix} \quad \mathbb{B} = \begin{bmatrix} 5 & 6 \\ 4 & -3 \end{bmatrix} \quad \mathbb{C} = \begin{bmatrix} 7 & 8 \\ 9 & 5 \end{bmatrix}$$

Odpowiedzi i wskazówki do zadań:

Z1.

$$\mathbb{X} = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 3 & 1 \end{bmatrix}$$

Z2.

$$(\mathbb{A}\mathbb{X})^{-1} = \mathbb{B}$$

$$((\mathbb{A}\mathbb{X})^{-1})^{-1} = \mathbb{B}^{-1}$$

$$\mathbb{A}\mathbb{X} = \mathbb{B}^{-1}$$

$$\mathbb{X} = \begin{bmatrix} -\frac{13}{100} & \frac{1}{25} & \frac{17}{100} \\ \frac{1}{4} & 0 & -\frac{1}{4} \\ -\frac{81}{100} & \frac{12}{25} & \frac{29}{100} \end{bmatrix}$$

Z3.

$$\mathbb{X} = \begin{bmatrix} \frac{3}{2} & -1 & \frac{1}{2} \\ -\frac{8}{3} & \frac{8}{3} & -\frac{1}{3} \\ -\frac{1}{6} & \frac{5}{3} & \frac{7}{6} \end{bmatrix}$$

Z4.

$$\mathbb{X} = \begin{bmatrix} 87 & -13 \\ -116 & 18 \\ 32 & -5 \end{bmatrix}$$

Z5.

$$\mathbb{X} = \begin{bmatrix} 8 & \frac{28}{3} \\ \frac{100}{9} & \frac{64}{9} \end{bmatrix}$$