Macierz odwrotna

Macierzą odwrotną względem macierzy kwadratowej $\mathbb{A}$ nazywamy taką macierz kwadratową $\mathbb{A}^{-1}$ (tego samego stopnia co macierz $\mathbb{A}$), dla której spełniona jest równość

$$\mathbb{A}^{-1} \cdot \mathbb{A} = \mathbb{E}$$

gdzie: $\mathbb{E}$ – macierz jednostkowa tego samego stopnia, co macierz $\mathbb{A}$.

Uwaga:
Zauważmy, że dla każdej macierzy jednostkowej $\mathbb{E}$ (niezależnie od jej stopnia)

$$\det \mathbb{E} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{vmatrix} = 1$$

Z twierdzenia Cauchy’ego wynika wniosek, że

$$(\det \mathbb{A}^{-1})(\det \mathbb{A}) = 1$$

Jeśli więc $\det \mathbb{A}^{-1} \neq 0$ oraz $\det \mathbb{A} \neq 0$, to

$$\det \mathbb{A}^{-1} = \frac{1}{\det \mathbb{A}}$$

Macierz kwadratową $\mathbb{A}$ nazywamy nieosobliwą (osobliwą) wtedy i tylko wtedy, gdy $\det \mathbb{A} \neq 0$ ($\det \mathbb{A} = 0$).

Macierzą dopełnień macierzy kwadratowej $\mathbb{A} = [a_{ij}]$ nazywamy macierz $\mathbb{D} \stackrel{\text{def}}{=} [M_{ij}]$, czyli macierz utworzoną z dopełnień algebraicznych wszystkich elementów a_{ij}.

Macierzą dołączoną macierzy kwadratowej $\mathbb{A} = [a_{ij}]$ nazywamy macierz $\mathbb{A}^D \stackrel{\text{def}}{=} \mathbb{D}^T = [M_{ij}]^T$, czyli macierz transponowaną macierzy dopełnień $\mathbb{D}$.

Twierdzenie 1.
Względem każdej macierzy nieosobliwej $\mathbb{A}$ istnieje dokładnie jedna macierz odwrotna $\mathbb{A}^{-1}$, przy czym

$$\mathbb{A}^{-1} = \frac{1}{\mathbb{A}}$$

Ćwiczenia

Przykład 1.
Znajdź wartość $\mathbb{B}^T \cdot \mathbb{A}^2$ dla $\mathbb{A} = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 3 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}$ oraz $\mathbb{B} = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$.

$$\mathbb{A}^2 = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 3 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 3 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7 & 4 & 4 \\ 9 & 4 & 3 \\ 3 & 3 & 4 \end{bmatrix}$$

$$\mathbb{B}^T \cdot \mathbb{A}^2 = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 7 & 4 & 4 \\ 9 & 4 & 3 \\ 3 & 3 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 23 & 12 & 11 \end{bmatrix}$$

Przykład 2.
Sprawdź tożsamość

$$\begin{vmatrix} cos\varphi & sin\varphi & 0 \\ -rsin\varphi & rcos\varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = r$$

$$L = \begin{vmatrix} cos\varphi & sin\varphi & 0 \\ -rsin\varphi & rcos\varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 1 \cdot (-1)^{3+3} \begin{vmatrix} cos\varphi & sin\varphi \\ -rsin\varphi & rcos\varphi \end{vmatrix} = r \cdot cos^2\varphi + r \cdot sin^2\varphi =$$

$$= r(cos^2\varphi + sin^2\varphi) = r$$

$$L = P$$

Przykład 3.
Rozwiąż równanie $\begin{vmatrix} x^2 & 4 & 9 \\ x & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 0$ oraz nierówność $\begin{vmatrix} x^2 & 4 & 9 \\ x & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} > 0$

Korzystając ze schematu Sarrusa rozwiązanie równania przebiega następująco

$$2x^2 + 12 + 9x - 18 - 3x^2 - 4x = 0$$

$$-x^2 + 5x - 6 = 0 \ \ /\cdot (-1)$$

$$x^2 - 5x + 6 = 0$$

$$\Delta = 1 \Rightarrow \sqrt{\Delta} = 1$$

$$x_1 = \frac{5-1}{2} = 2$$

$$x_2 = \frac{5+1}{2} = 3$$

Natomiast nierówność przyjmie postać

$$x^2 - 5x + 6 < 0$$

Z czego wynika wniosek, że $2 < x < 3$.

Przykład 4.
Oblicz wyznacznik

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & -4 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & 3 & 0 & -3 \\ 0 & -7 & 3 & 1 \end{vmatrix} \xRightarrow{3w+(-1)\cdot 1w} 1 \cdot (-1)^{1+1} \begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & -3 & 1 \\ -7 & 3 & 1 \end{vmatrix} = -3 + 7 + 3 - 21 - 3 + 1 = -16$$

Przykład 5.

Znajdź macierz odwrotną względem macierzy $\mathbb{A} = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 4 & -1 & 1 \\ 5 & 1 & 1 \end{bmatrix}$

$$\det \mathbb{A} = -2 + 15 + 4 + 5 - 2 - 12 = 8$$

Ponieważ $\det \mathbb{A} \neq 0$, więc istnieje $\mathbb{A}^{-1}$.

$$M_{11} = (-1)^{1+1} \begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = -2$$

$$M_{12} = (-1)^{1+2} \begin{vmatrix} 4 & 1 \\ 5 & 1 \end{vmatrix} = 1$$

$$M_{13} = (-1)^{1+3} \begin{vmatrix} 4 & -1 \\ 5 & 1 \end{vmatrix} = 9$$

$$M_{21} = (-1)^{2+1} \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = -2$$

$$M_{22} = (-1)^{2+2} \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 5 & 1 \end{vmatrix} = -3$$

$$M_{23} = (-1)^{2+3} \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 5 & 1 \end{vmatrix} = 13$$

$$M_{31} = (-1)^{3+1} \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} = 4$$

$$M_{32} = (-1)^{3+2} \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 4 & 1 \end{vmatrix} = 2$$

$$M_{33} = (-1)^{3+3} \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 4 & -1 \end{vmatrix} = -14$$

$$\mathbb{D} = \begin{bmatrix} -2 & 1 & 9 \\ -2 & -3 & 13 \\ 4 & 2 & -14 \end{bmatrix}$$

$$\mathbb{D}^T = \begin{bmatrix} -2 & -2 & 4 \\ 1 & -3 & 2 \\ 9 & 13 & -14 \end{bmatrix}$$

$$\mathbb{A}^{-1} = \frac{1}{8} \begin{bmatrix} -2 & -2 & 4 \\ 1 & -3 & 2 \\ 9 & 13 & -14 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{1}{4} & -\frac{1}{4} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{8} & -\frac{3}{8} & \frac{1}{4} \\ \frac{9}{8} & \frac{13}{8} & -\frac{7}{4} \end{bmatrix}$$

Zadanie 1.

Sprawdź, czy istnieje macierz $\mathbb{D} = \mathbb{A}^T\mathbb{B} + 3\mathbb{A}\left(-\frac{1}{2}\mathbb{B}^T\right)$, jeżeli $\mathbb{A} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 \\ -1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$ oraz $\mathbb{B} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & -1 & 0 \end{bmatrix}$.

Zadanie 2.

Napisz program, który oblicza wartość wyznacznika dowolnej macierzy kwadratowej. Oblicz w tym programie wartość poniższego wyznacznika, a następnie sprawdź wynik w programie MS Excel (funkcja `WYZNACZNIK.MACIERZY`).

$$\begin{vmatrix} 2 & 1 & 1 & 2 \\ 1 & 3 & 1 & 5 \\ 1 & 1 & 5 & -7 \\ 2 & 3 & -3 & 14 \end{vmatrix}$$